EXTRAS DIN „GAZETA MATEMATICĂ“

STUDIUL UNOR FUNCȚIUNI PERIODICE

Care admit o formulă de adițiune rațională

IN RAPORT CU ELE INSAȘI

(Comunicare făcută la Societatea de Științe din București, secțiunea matematică în ziua de 16 Ianuarie 1912).

DE

V. ALACI
LICENȚIAT IN MATEMATICI

BUCUREȘTI
TIPOGRAFIA COOPERATIVĂ, STRADA BELVEDERE 6.
1912

Studiul unor funcţiuni periodice care admit o formulă de adiţiune raţională în raport cu ele însăşi

In paginile ce urmează voesc a studià două funcţiuni periodice, care de şi se aseamănă prin definiţia lor geometrică, cu funcţiunile trigonometrice, sinus şi cosinus, se deosebesc prin proprietăţile lor, se deosebesc prin aceia că pe când sinusul şi consinusul sunt funcţiuni continue împreună cu derivatele lor, funcţiunile ce le studiez sunt numai ele continue, derivatele lor fiind segmentar continue. Curba lor representativă prezintă din această cauză puncte unghiuloase şi puncte de inflexiune artificiale.

Aceste funcţiuni admit o formulă de adiţiune raţională în raport cu ele însăşi.

Mă ocup şi de funcţiunile inverse celor ce le consider la început, presintând şi ele destul interes pentru a fi studiate.

Sinusul şi consinusul patratic.

1. Fie patratul A B A′B′, a cărui semidiagonală o luăm egală cu unitatea ($OA = 1$).

Vom numi sinusul patratic al unghiului A O C sau al arcului α de pe cercul de rază $OA = 1$ corespunzător, perpendiculara din C pe O A şi vom scri:

$$sp\,\alpha = CD \text{ *)},$$

iar consinusul patratic al arcului α, vom numi distanţa de la centru până la piciorul sinusului, şi vom scri:

$$cp.\,\alpha = OD.$$

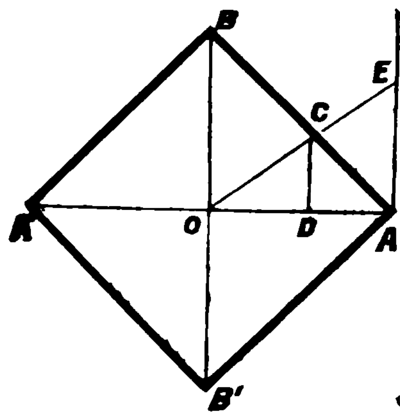

Fig. 1.

Sinusul şi consinusul patratic, vor fi măsurate respectiv pe diagonalele B B′ şi A A′, păstrându-se convenţiunea ca la sinusul şi cosinusul obicinuit.

Aceste două funcţiuni sunt continue după cum se vede pe figură şi periodice, admiţând perioada 2π.

Variaţia acestor două funcţiuni e uşor de urmărit, ea e rezumată în tabloul următor.

*) $sp\alpha$ şi $cp\alpha$ se citesc: sinusul patratic de α şi cosinul patratic de α.

α	0^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sp\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$cp\,\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Se pot stabilì pentru sinusul şi consinusul patratic a arcelor egale şi de semne contrare, a arcelor suplimentare sau care diferă cu π, aceleaşi teoreme care se stabilesc pentru sinusul şi cosinusul obicinuit. Se pot apoi reduce arcele la primul cadran Dar, nu mă opresc asupra acestora.

Formule fundamentale.

2. Triunghiul ACD fiind isoscel avem $AD = CD$ şi deci de pe figură putem scri imediat:

$$sp.\alpha + cp.\alpha = 1. \tag{1}$$

Această formulă e valabilă atât cât $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Pentru celelalte cadrane, ea trebue înlocuită cu:

$$sp\,\alpha - cp\,\alpha = 1 \qquad \text{pentru} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

$$sp\,\alpha + cp\,\alpha = -1 \qquad « \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$sp\,\alpha - cp\,\alpha = -1 \qquad « \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Toate aceste formule pot fi cuprinse în una singură:

$$|sp\,\alpha| + |cp\,\alpha| = 1, \tag{1'}$$

sau în formula:

$$sp\,\alpha + (-1)^{n+1} cp\,\alpha = (-1)^{2+\frac{n}{3}},$$

unde n înseamnă cadranul în care e cuprins arcul α, iar $2 + \frac{n}{3}$ trebue înţeles numărul întreg cel mai mare cuprins.

In ceiace urmează şi într'un prim studiu, vom utilizà mai mult formula (1), adică vom presupune $\alpha < \frac{\pi}{2}$, rămânând a modificà formulele ce le vom stabili mai departe şi pentru cazul când α trece în diferite cadrane.

Observăm apoi că dacă ducem perpendiculara A E pe O A, triunghiurile A O E și C O D sunt asemenea, putem deci scri:

$$\frac{EA}{CD}=\frac{OA}{OD}.$$

Dar E A este tangenta trigonometrică a arcului α:

$$CD = sp.\alpha, \quad OD = cp.\alpha, \quad OA = 1.$$

Inlocuind în relația de mai sus aceste valori, găsim:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{sp\,\alpha}{cp\,\alpha}. \tag{2}$$

Formulele (1) și (2) le vom numì formule fundamentale și le vom utilizà în cele ce urmează.

Formule de adițiune.

3. Să luăm formula bine cunoscută din trigonometrie:

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\beta}.$$

Să înlocuim în această formulă, tangenta trigonometrică, prin funcțiunile noastre periodice.

In adevăr (2) se poate scri ținând seamă de (1).

$$\text{tg}\,a = \frac{sp\,a}{1-sp\,a}, \qquad 0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Servindu-ne de această formulă, relația de mai sus devine:

$$\frac{sp.(\alpha+\beta)}{1-sp.(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{sp\,\alpha}{1-sp\,\alpha}+\frac{sp.\beta}{1-sp\,\beta}}{1-\frac{sp.\alpha.sp.\beta}{(1-sp\,\alpha)(1-sp\,\beta)}},$$

$$\therefore \quad \frac{sp\,(\alpha+\beta)}{1-sp.(\alpha+\beta)} = \frac{sp.\alpha+sp.\beta-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-sp\,\alpha-sp\,\beta},$$

$$\therefore \quad \frac{1-sp\,(\alpha+\beta)}{sp\,(\alpha+\beta)} = \frac{1-sp\,\alpha-sp\,\beta}{sp\,\alpha+sp\,\beta-2\,sp\,\alpha.sp\,\beta},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{sp.(\alpha+\beta)} = \frac{1-2\,sp\,\alpha.sp\,\beta}{sp\,\alpha+sp\,\beta-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta},$$

$$\therefore \qquad (3) \qquad sp.(\alpha+\beta)=\frac{sp\,\alpha+sp\,\beta-2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{1-2\,sp\,\alpha.sp\,\beta}.$$

Dacă în (3) înlocuim $sp\,\alpha=1-cp\,\alpha$, şi facem reducerile, avem :

$$(4) \qquad cp\,(\alpha+\beta)=\frac{cp\,\alpha+cp\,\beta-1}{2\,cp\,\alpha+2\,cp\,\beta-2\,cp\,\alpha.cp\,\beta-1}.$$

Dacă am porni de la formula :

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta},$$

şi am face calcule analoage cu cele de mai sus, găsim :

$$(5) \qquad sp\,(\alpha-\beta)=\frac{sp\,\alpha-sp\,\beta}{1-2\,sp\,\beta+2\,sp\,\alpha.sp\,\beta},$$

$$(6) \qquad cp\,(\alpha-\beta)=\frac{1-cp\,\alpha-cp\,\beta+2\,cp\,\alpha\,.\,cp\,\beta}{1-2\,cp\,\alpha+2\,cp\,\alpha\,.\,cp\,\beta}$$

Relaţiunile (3), (4), (5) şi (6) sunt formulele de adiţiune a sinusului şi cosinusului patratic; se observă că ele sunt exprimate raţional în raport cu ele însăşi.

Dacă facem în formulele (3) şi (4) $\beta=\alpha$, obţinem formulele de multiplicare.

$$(3') \qquad sp\,.\,2\,\alpha=\frac{2\,sp\,\alpha\,(1-sp\,\alpha)}{1-2\,sp^2\alpha},$$

$$(4') \qquad cp\,2\,\alpha=\frac{2\,cp\,\alpha-1}{4\,cp\,\alpha-2\,cp^2\alpha-1}.$$

Putem merge şi mai departe, adică putem găsi formule pentru sinusul şi cosinusul a 3, 4 etc. arce, ast-fel :

$$sp(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{sp\alpha+sp\beta+sp\gamma-2sp\alpha.sp\beta-2sp\beta.sp\gamma-2sp\alpha.sp\gamma+2sp\alpha.sp\beta sp\gamma}{1-2sp\alpha.sp\beta-2sp\beta sp\gamma-2sp\alpha.sp\gamma+4sp\alpha sp\beta sp\gamma}$$

. . . .

Dacă facem $\beta=\gamma=\alpha$, avem formula :

$$sp\,3\,\alpha=\frac{3\,sp\,\alpha-6\,sp^2\alpha+2\,sp^3\alpha}{1-6\,sp^2\alpha+4\,sp^3\alpha}, \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{6}.$$

. . . .

Dacă pornim dela formula cunoscută :

$$\operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1 \operatorname{tg}\alpha - C_m^3 \operatorname{tg}^3\alpha + C_m^5 \operatorname{tg}^5\alpha - \dots}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\alpha + C_m^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \dots},$$

şi ne servim de relaţiunea, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{sp\,\alpha}{cp\,\alpha}$, avem :

$$\frac{sp.m\alpha}{1 - sp.m\alpha} = \frac{C_m^1.cp^{m-1}\alpha.sp\alpha - C_m^3 cp^{m-3}\alpha.sp^3\alpha + C_m^5 cp^{m-5}\alpha.sp^5\alpha - \dots}{cp^m.\alpha - C_m^2 cp^{m-2}\alpha.sp^2\alpha + C_m^4 cp^{m-4}\alpha sp^4\alpha - \dots},$$

$$\therefore\ sp.m\alpha = \frac{C_m^1 cp^{m-1}\alpha.sp\alpha - C_m^3 cp^{m-3}\alpha.sp^3\alpha + C_m^5 cp^{m-5}\alpha.sp^5\alpha - \dots}{cp^m\alpha + C_m^1 cp^{m-1}\alpha.sp\alpha - C_m^2 cp^{m-2}\alpha.sp^2\alpha - C_m^3 cp^{m-3}\alpha.sp^3\alpha + \dots},$$

$$\therefore cp.m\alpha = \frac{cp^m\alpha - C_m^2 cp^{m-2}\alpha.sp^2\alpha + C_m^4 cp^{m-4}\alpha.sp^4.\alpha - \dots}{cp^m.\alpha + C_m^1 cp^{m-1}\alpha.sp\alpha - C_m^2 cp^{m-2}\alpha.sp^2\alpha - C_m^3 cp^{m-3}\alpha.sp^3\alpha + \dots}.$$

Aceste formule sunt valabile, atât cât $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ele se modifică în în celelalte cadrane, dar se stabilesc în mod analog.

4. Ca aplicaţie a formulelor de mai sus, să ne propunem a calculà sp şi cp a arcelor de 15°, 30°, 60° şi 75°.

Dacă în formula :

$$sp.3\alpha = \frac{3\,sp\,\alpha - 6\,sp^2\alpha + 2\,sp^3\alpha}{1 - 6\,sp^2\alpha + 4\,sp^3\alpha},$$

luam $\alpha = 15^0$, atunci $sp\,3\alpha = sp\,45^0 = \frac{1}{2}$, şi vom obţine aducând la formă întreagă şi reducând termenii asemenea :

$$6\,sp^2 15^0 - 6\,sp\,15^0 + 1 = 0,$$

$$\therefore \qquad sp\,15^0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6},$$

soluţia cu plus înaintea radicalului, nu convine.

Dacă în formula :

$$sp.2\alpha = \frac{2\,sp\,\alpha(1 - sp\,\alpha)}{1 - 2\,sp^2\alpha},$$

luam $\alpha = 15^0$ şi ţinem seamă că $sp\,15^0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$, vom aveà făcând calculele :

$$sp\,30^0 = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Dacă în formula (3), luăm $\alpha = 45^{\circ}$, $\beta = 15^{\circ}$, ţinând seamă de valorile:

$$sp\,45^{\circ} = \frac{1}{2},\ sp\,15^{\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{6},$$

vom aveà:

$$sp\,60^{\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Dacă în formula (3) luăm $\alpha = 45^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$ şi ţinem seamă de valorile lui $sp\,45^{\circ}$ şi $sp\,30^{\circ}$, avem:

$$sp.75^{\circ} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Servindu-ne de formula $cp\,\alpha = 1 - sp.\alpha$, obţinem:

$$cp\,15^{\circ} = \frac{3+\sqrt{3}}{6},\ cp\,30^{\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

$$cp\,60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ cp\,75^{\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Derivata sinusului şi cosinusului patratic.

5. Inainte de a trece la aflarea derivatei, să demonstrăm că: raportul dintre sinusul patratic şi arcul corespunzător, când arcul tinde către zero, este egal cu unu.

De pe figură putem scri imediat:

$$sp.\alpha < \text{arc}\ \alpha < \text{tg}\ \alpha.$$

Divizând cu $sp.\alpha$, avem:

$$1 < \frac{\text{arc}\ \alpha}{sp.\alpha} < \frac{1}{cp.\alpha}.$$

La limită când arcul α tinde spre zero, $\frac{1}{cp\,\alpha}$, tinde la unu, deci putem scri:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{sp\,\alpha}{\alpha} = 1. \tag{7}$$

Aceasta demonstrat, să aflăm acum derivata funcţiunii:

$$y = sp.x. \tag{8}$$

Dăm arcului x o creştere h şi fie k creşterea corespunzătoare pentru y, vom aveà:

$$k = sp\,(x+h) - sp\,x.$$

Dezvoltând $sp\,(x+h)$, după formula (3), avem:

$$k = \frac{sp\,x + sp\,h - 2\,sp\,x . sp\,h}{1 - 2\,sp\,x . sp\,h} - sp . x,$$

$$\therefore \qquad \frac{k}{h} = \frac{sp\,h}{h} \cdot \frac{1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 . x}{1 - 2\,sp . x . sp\,h} .$$

Trecând la limită pentru $h=0$ şi ţinând seamă de relaţia (7), vom avea:

$$y' = 1 - 2\,sp . x + 2\,sp^2 x = 1 - 2\,sp\,x . cp . x = sp^2 x + cp^2 x. \tag{9}$$

Această formulă e valabilă numai pentru $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, sau:

$$2\,n\,\pi < x \leqslant 2\,n\,\pi + \frac{\pi}{2} \cdot$$

Derivata funcţiunei (8), când arcul trece în alte cadrane, trebue calculată aparte, căci dezvoltarea lui $sp\,(x+h)$, care intră în expresiunea derivatei este alta în fiecare cadran. Ast-fel avem:

$$sp\,(x+h) = \frac{sp\,x - sp\,h}{1 - 2\,sp\,h + 2 sp\,x\,sp\,h} \qquad \frac{\pi}{2} < x+h < \pi, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi,$$

$$sp\,(x+h) = \frac{sp\,x - sp\,h - 2\,sp\,x . sp\,h}{1 + 2\,sp . x . sp\,h} \qquad \pi < x+h < \frac{3\pi}{2}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2} .$$

$$sp\,(x+h) = \frac{sp\,x + sp\,h}{1 - 2\,sp\,h - 2\,sp . x . sp\,h} \qquad \frac{3\pi}{2} < x+h < 2\,\pi, \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\,\pi.$$

Dacă ţinem seamă de aceste dezvoltări, derivata funcţiunii (8) in diferite cadrane este.

$$(10) \qquad \begin{aligned} y' &= \quad (1 - 2\,sp . x + 2\,sp^2 x) && \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ y' &= -(1 + 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x) && \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ y' &= 1 + 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x && \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\,\pi, \end{aligned}$$

Derivata funcţiunii, $y = cp\,x$, uşor de scris, dacă ţinem seamă de relaţia liniară (1) sau (1'), dintre $sp\,x$, şi $cp\,x$, avem:

$$y' = -(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x) \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$y' = -(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x) \qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi,$$

$$y' = 1 + 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x \qquad \pi < x < \frac{3\pi}{2},$$

$$y' = 1 + 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x \qquad \frac{3\pi}{2} < x < 2\,\pi.$$

Din cele de mai sus, vedem că funcțiunea continuă și periodică (8), are derivata sa segmentar continuă, căci expresiunea sa se schimbă în diferite cadrane, în punctele $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ea are două valori diferite.

In adevăr, dacă în (9) facem ca arcul x să crească până la $\frac{\pi}{2}$, găsim în acest punct ca valoare $+1$, iar dacă în expresiunea derivatei din cadranul al doilea (10), facem ca arcul x să descrească tinzând la $\frac{\pi}{2}$, găsim în acest punct ca valoare -1. Punctul corespunzător lui $x = \frac{\pi}{2}$, a curbei ce reprezintă funcțiuuea (8) este un punct angulos, căci în acest punct avem două tangente diferite.

Asemenea toate punctele corespunzătoare absciselor:

$$x = (2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2} \quad (k = 1,\ 2 \ldots),$$

sunt puncte anguloase pentru funcțiunea (8).

Același lucru putem spune și despre funcțiunea $y = cp\,x$.

Studiul funcțiunii $y = sp\,x$.

6. Această funcțiune fiind periodică, având perioada $2\,\pi$, va fi suficient a construi numai porțiunea coprinsă în intervalul $(0, 2\,\pi)$ pentru a o aveà toată. Ea este definită în toate cadranele, derivata sa este segmentar continuă după cum am văzut. Va trebui deci să construim funcțiunea separat când arcul variază succesiv în cele patru cadrane, ansanmblul lor dându-ne funcțiunea noastră în intervalul $(0, 2\,\pi)$.

Pentru aceasta vom scri mai întâi expresiunea primelor două derivate a funcţiunii date respectiv în cele patru cadrane şi vom întocmi în urmă tabloul de variaţie.

cadranul	y'	y''
I	$1-2\,sp\,x+2\,sp^2x$	$8\,sp^3x-12\,sp^2x+8\,sp\,x-2$
II	$-1+2\,sp\,x-2\,sp^2x$	$8\,sp^3x-12\,sp^2x+8\,sp\,x-2$
III	$-1-2\,sp\,x-2\,sp^2x$	$8\,sp^3x+12\,sp^2x+8\,sp\,x+2$
IV	$1+2\,sp\,x+2\,sp^2x$	$8\,sp^3x+12\,sp^2x+8\,sp\,x+2$

Variaţiunile lui y sunt rezumate în tabloul alăturat, pentru fie-care cadran în parte.

cadranul	I			II			III			IV		
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y''	$-$	0	$+$	$+$	0	2	$+2$	0	$-$	$-$	0	$+$
y'	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1
y	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	0

Rezultă din acest tablou că curba care reprezintă mersul funcţiunii, porneşte din O tangentă la prima bisectoare, se ridică având concavitatea către Oy', în punctul E ea are un punct de inflexiune, coeficientul unghiular al tangentei în acest punct fiind $\frac{1}{2}$, îşi întoarce mai departe concavitatea către Oy şi ajunge în punctul A tangentă la o dreaptă paralelă cu prima bisectoare, acest punct A fiind un punct angulos pentru funcţiune, curba se coboară tangentă în punctul A la o paralelă cu a doua bisectoare, trece prin F unde are al doilea punct de inflexiune, trece prin C unde are iarăşi un punct de inflexiune, tangenta în acest punct e paralelă cu a doua bisectoare, ajunge în G unde are un alt punct de inflexiune, se coboară în fine până în B care este un al doilea punct angulos; de aici se ridică având în H un punct de inflexiune, până în punctul D unde e tangentă la o dreaptă paralelă cu prima bisectoare.

Punctul C corespunzător abscizei $x = \pi$, este un punct de in-

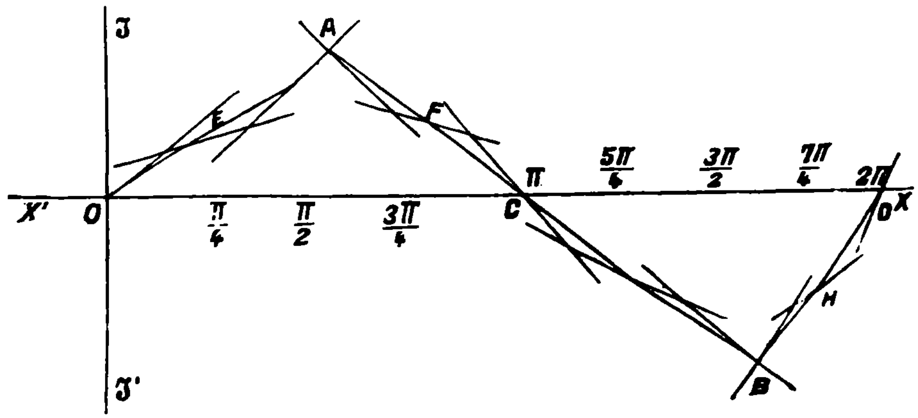

Fig. 2.

flexiune artificial, căci raza de curbură în acest punct are două valori egale, finite. In adevăr dacă în expresiunea razei de curbură:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},$$

introducem valorile lui y' şi y'' corespunzătoare în tablou punctului $x = \pi$, avem:

$$R_1 = R_2 = 2^{3/2}.$$

Toate punctele corespunzătoare abscisелor $x = k\pi$ sunt puncte de inflexiune artificiale.

Dezvoltarea în serie a sinusului şi cosinusului patratic.

7. Să luăm întâi funcţiunea cpx.

Am putea să ne servim de dezvoltarea în seria lui Mac-Laurin, aflând derivatele succesive, dar voi întrebuinţa o metodă mai simplă.

In adevăr relaţia (2) se poate scrie:

$$\frac{1 - cp\,x}{cpx} = \operatorname{tg} x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \qquad cpx = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Servindu-ne de dezvoltarea cunoscută a lui $\operatorname{tg} x$,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.9} + \ldots$$

valabilă în intervalul $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, vom aveà:

$$cp\, x = 1 - x + x^2 - \frac{4x^3}{1.3} + \frac{5x^4}{1.3} - \frac{32x^5}{1.3.5}.$$

Utilizând formula (1), putem scri şi dezvoltarea funcţiunii $sp.x$.

$$sp.x = x - x^2 + \frac{4x^3}{1.3} - \frac{5x^4}{1.3} + \frac{32x^5}{1.3.5} - \ldots$$

Aceste dezvoltări sunt segmentar valabile, pentru intervalele:

$$2n\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Funcţiunile arc spx şi arc . cpx. Derivatele lor.

8. Voi considerà aici funcţiunile inverse celor studiate până, acum, adică funcţiunile arc $sp\,x$, şi arc.$cp\,x$, care sunt şi ele continue după cum se constată pe figură.

Să considerăm funcţiunea:

(11) $$y = \operatorname{arc}.sp\,x,$$

şi să-i calculăm derivata.

Din (11) deducem:

$$x = sp\,y,$$

şi derivând în raport cu x ambii membri, avem:

$$1 = (1 - 2\,sp\,y + 2\,sp^2 y)\,y',$$

deci:

(12) $$y' = \frac{1}{1 - 2x + 2x^2},$$

arcul y fiind în primul cadran.

Când înţelegem prin (11) arcul din celel'alte cadrane, derivata ia respectiv următoarele forme:

$$y' = \frac{-1}{1 - 2x + 2x^2} \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi,$$

$$y' = \frac{-1}{1+2x+2x^2} \qquad \pi < y < \frac{3\pi}{2},$$

$$y' = \frac{1}{1+2x+2x^2} \qquad \frac{3\pi}{2} < y < 2\pi.$$

Să considerăm şi funcţiunea:

$$y = \text{arc}\, cp\, x.$$

Intre funcţiunile arc $sp\,x$, şi arc $cp\,x$, se observă pe figură că există relaţia:

$$\text{arc}\, sp\, x + \text{arc}\,.\, cp\,.\, x = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Derivând ambii membrii, găsim derivata lui arc. $cp\,x$:

$$y' = \frac{-1}{1-2x+2x^2} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{2},$$

$$y' = \frac{1}{1-2x+2x^2}, \quad y' = \frac{1}{1+2x+2x^2} \quad \frac{1}{1+2x+2x^2},$$

$$\frac{\pi}{2} < y < \pi \qquad \pi < y < \frac{3\pi}{2} \qquad \frac{3\pi}{2} < y < 2\pi.$$

Se observă că şi derivatele acestor funcţiuni sunt segmentar continue, căci expresiunea lor se schimbă în diferite cadrane şi nu se racordează în punctele $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ... unde au ca valoare ± 1.

Dezvoltarea în serie a funcţiilor arc sp x şi arc.cp x.

9. Am găsit că dezvoltarea funcţiunei $y = \text{arc}\, sp\, x$ este:

$$y' = \frac{1}{1-2x+2x^2} = \frac{2}{1+(2x-1)^2} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Multiplicând ambii membri cu dx, şi integrând de la o la x, avem:

$$\text{arc}\, sp\, x = \text{arc tg}\,(2x-1) - \text{arc tg}\,(-1),$$

$$\therefore \qquad \text{arc}\, sp\, x = \frac{\pi}{4} + \frac{2x-1}{1} + \frac{(2x-1)^3}{1.3} + \frac{2(2x-1)^5}{1.3.5} + \ldots$$

şi:

$$\text{arc.}cp x = \frac{\pi}{4} - \frac{2x-1}{1} - \frac{(2x-1)^3}{1.3} - \frac{2(2x-1)^5}{1.3.5} - \ldots$$

Aceste serii sunt valabile atât cât:

$$2x - 1 < 1, \qquad \therefore \qquad x < 1,$$

condiţie îndeplinită în cazul nostru.

Câte-va integrale definite.

10. Am găsit că derivata funcţiunei $y = sp\,x$ este:

$$y' = 1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x = 1 - 2\,sp\,x.cp\,x \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

şi:

$$y' = -1 + 2\,sp\,x - 2\,sp^2x = -1 - 2\,sp\,x.cp\,x \qquad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi.$$

Multiplicând cu dx şi integrând prima de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ şi a doua dela $\frac{\pi}{2}$ la π, vom aveà:

$$\Big[sp\,x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x.cp\,x\,dx,$$

$$\Big[sp\,x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \Big[-x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x.cp\,x\,dx.$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} spx.cpx\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} spx.cpx\,dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Adunând aceste două integrale avem:

$$\int_0^{\pi} spx.cpx\,dx = 0,$$

11. Să calculăm: $\int_0^{\pi} sp.mx\,dx.$

Să facem schimbarea de variabilă.

$$sp.mx = t,$$

$$dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{dt}{1 - 2t + 2t^2} \qquad 0 \leqq mx \leqq \frac{\pi}{2},$$

sau:

$$dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{-dt}{1-2t+2t^2} \qquad \frac{\pi}{2} \leq mx \leq \pi.$$

Vom scri întâi integrala dată ast-fel:

$$\int_0^{\pi} sp\, mx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\, mx\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp.mx\, dx,$$

şi introducând noua variabilă vom aveà:

$$\int_0^{\pi} sp.mx\, dx = \frac{1}{m}\int_0^1 \frac{tdt}{1-2t+2t^2} + \frac{1}{m}\int_1^0 \frac{-tdt}{1-2t+2t^2},$$

$$\therefore \int_0^{\pi} sp\, mx\, dx = \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{tdt}{1-2t+2t^2} = \frac{1}{2m}\int_0^1 \frac{(4t-2)dt}{1-2t+2t^2} + \frac{1}{m}\int_0^1 \frac{dt}{1-2t+2t^2}$$

$$= \frac{1}{2m}\Big[L(1-2t+2t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{m}\Big[\text{arc tg}\,(2t-1)\Big]_0^1,$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\pi} sp\, m.x\, dx = \frac{\pi}{2\,m}.$$

In cazul particular $m = 1$, vom aveà:

$$\int_0^{\pi} sp\,.\,x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Avem asemenea:

$$\int_0^{\pi} cp\, mx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sp\, mx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (sp\, m.x - 1)\, dx,$$

$$\int_0^{\pi} cp.mx\, dx = 0,$$

12. Să calculăm: $\displaystyle\int_0^{\pi} sp^2 x\, dx.$

Am găsit că derivata funcţiunii $y = sp\, x$ este:

$$y' = 1 - 2\, sp\, x + 2\, sp^2 x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$y' = -1 + 2\, sp\, x - 2\, sp^2 x \qquad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

Multiplificând cu dx, integrând în domeniu de existență a formulelor și adunând cele două integrale, vom avea:

$$\int_0^{\pi} sp^2x\,dx = \frac{1}{2}\Big[sp\,x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx - \frac{1}{2}\Big[sp\,x + x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} spx\,dx,$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\pi} sp^2x\,dx = 1\,.$$

Dacă voim să calculăm $\int_0^{\pi} sp^3x\,dx$, atunci derivăm funcțiunea $y = sp^2x$ vom aveà:

$$y' = 2\,sp\,x\,(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x) \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$y' = 2\,sp\,x\,(-1 + 2\,sp\,x - 2\,sp^2x) \qquad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi.$$

Multiplicând cu dx, integrând în domeniu de existeață a formulelor și adunând cele două integrale, vom avea:

$$\int_0^{\pi} sp^3x\,dx = \frac{1}{4}\Big[sp^2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^2x\,dx.$$

$$\frac{1}{4}\Big[sp^2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp^2x\,dx,$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\pi} sp^3x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sp\,x\,dx + \int_0^{\pi} sp^2x\,dx.$$

Introducând valorile cunoscute a integralelor din membrul al doilea avem:

$$\int_0^{\pi} sp^3x\,dx = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\,.$$

Putem calcula apoi $\int_0^{\pi} sp^m\,x\,dx$, dacă plecăm de la funcțiunea $y = sp^{m-1}\,x$ și o derivăm, vom aveà:

$$y' = (m-1)\,sp^{m-2}\,x\,(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x) \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$y' = (m-1)\,sp^{m-2}\,x\,(-1 + 2\,sp\,x - 2\,sp^2x) \qquad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi.$$

Multiplicând cu dx. integrând în domeniu de existență a formulelor și adunând, cele două integrale, vom aveà:

$$\int_0^\pi sp^m x\,dx = \frac{1}{2(m-1)}\left[sp^{m-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^{m-2}x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^{m-1}x\,dx$$

$$-\frac{1}{2(m-1)}\left[sp^{m-1}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp^{m-2}x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp^{m-1}x\,dx,$$

$$\therefore \qquad \int_0^\pi sp^m x\,dx = \frac{1}{m-1} - \int_0^\pi sp^{m-2}x\,dx + \int_0^\pi sp^{m-1}x\,dx.$$

Dacà notăm $I_m = \int_0^\pi sp^m x\,dx$, atunci avem următoarea formulă de recurență.

$$I_m = \frac{1}{m-1} + I_{m-1} - \frac{1}{2} I_{m-2}.$$

Schimbând pe m succesiv cu $m-1$ și $m-2$ și adunând relațiile obținute după ce am multiplicat ultima cu $\frac{1}{2}$, găsim următoarea formulă de recurență.

$$I_m = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{2(m-3)} - \frac{1}{4} I_{m-4}.$$

Schimbând și aici m cu $m-4$ și înlocuind valoarea lui I_{m-4}, vom obține încă:

$$I_m = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{2(m-3)} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m-5} + \frac{1}{m-6} + \frac{1}{2(m-7)}\right] + \frac{1}{4} I_{m-8}$$

Aceste formule ne conduc din aproape în aproape ca să găsim în membrul al doilea, una din integralele cunoscute:

$$I_0 = \pi,\ I_1 = \frac{\pi}{2},\ I_2 = 1,\ I_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Ast-fel avem încă:

$$I_4 = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4},\ I_5 = \frac{5}{6}\ \ \frac{\pi}{8},\ I_6 = \frac{11}{30},\dots$$

Dacă am avea de calculat o integrală de formă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^m x . cp^n x\, dx,$$

făcând schimbarea de variabilă:

$$spx = t, \; dx = \frac{dt}{1 - 2t + 2t^2},$$

o reducem la următoarea integrală algebrică, raţională:

$$\int_0^1 \frac{t^m (1-t)^n dt}{1 - 2t + 2t^2},$$

13. Să calculăm: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sp.x}$.

Facem schimbarea de variabilă:

$$spx = t, \qquad dx = \frac{dt}{1 - 2t + 1t^2},$$

şi vom aveà:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{spx} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{(1 - 2t + 2t^2)t} = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-t)dt}{1 - 2t + 2t^2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t},$$

$$\therefore \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{spx} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(4t-2)dt}{1 - 2t + 2t^2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{1 - 2t + 2t^2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[L(1 - 2t + 2t^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} + \Big[\operatorname{arc\,tg}(2t-1)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} + \Big[Lt\Big]_{\frac{1}{2}}^{1},$$

$$\therefore \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{spx} = \frac{\pi}{4} + L\sqrt{2}.$$

14. Să calculăm: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} . sp^2 x\, dx$.

Pentru aceasta să derivăm funcţiunea:

$$y = e^{2x} sp\, x,$$

vom aveà:

$$y' = e^{2x} + 2\, e^{2x}\, sp^2\, x.$$

Multiplicând cu dx, integrând de la zero la $\frac{\pi}{2}$ şi scoţând integrala noastră vom aveà:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} sp^2\, x\, dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\, sp\, x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\, dx,$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\, sp^2\, x\, dx = \frac{1 + e^{\pi}}{4}.$$

15. Să calculăm: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\, sp\, x^2 .\, cp x^2\, dx.$

Derivând funcţiunea $y = spx^2$, vom aveà:

$$y' = 2\, x\, (1 - 2\, sp\, x^2 . cp\, x^2).$$

Multiplicând cu dx şi integrând de la zero la $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, avem:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\, sp\, x^2 .\, cp\, x^2\, dx = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{4}\left[sp\, x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\, sp.\, x^2 .\, cp\, x^2\, dx = \frac{\pi - 2}{8}.$$

16. Să calculăm: $\int_0^1 arc.sp\, x\, dx$, arcul variind in primul cadran. Integrând prin părţi, vom aveà:

$$\int_0^1 \mathrm{arc}.sp\, x . dx = \left[x\, \mathrm{arc}\, sp\, x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1 - 2\, x + 2\, x^2},$$

dar:

$$\int_0^1 \frac{x\, dx}{1 - 2\, x + 2\, x^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(4\, x - 2)\, dx}{1 - 2\, x + 2\, x^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1 - 2\, x + 2\, x^2},$$

$$= \frac{1}{4}\left[L(1 - 2\, x + 2\, x^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{arc\, tg}\, (2\, x - 1)\right]_0^1,$$

$$\therefore \qquad \int_0^1 \operatorname{arc} sp\, x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Se pot propune încă diferite probleme relativ la funcţiile ce le-am studiat până acum.

Iată câte-va:

17. Să se rezolve ecuaţia:

$$2\, sp\, 2\, x - sp\, x = \frac{2\, sp^2 x}{1 - 2\, sp^2 x}, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Să înlocuim $sp. 2\, x$ cu valoarea sa dată de (3′), vom aveà:

$$\frac{4\, sp\, x\,(1 - sp\, x)}{1 - 2\, sp^2 x} - sp\, x = \frac{2\, sp^2 x}{1 - 2\, sp^2 x},$$

$$\therefore \qquad sp\, x\,(2\, sp^2 x - 6\, sp\, x + 3) = 0,$$

$$\therefore \qquad sp\, x = 0 \text{ şi } 2\, sp^2 x - 6\, sp\, x + 3 = 0.$$

Prima ne dă $x = 0^0$, a doua ne dă:

$$sp\, x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Semnul $+$ nu convine, căci $sp\, x < 1$, deci avem:

$$sp = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Dar în (§ 4) am găsit că această valoare corespunde arcului de 60^0, deci:

$$x = 60^0.$$

18. Să se rezolve sistemul:

$$\left\{ \begin{aligned} & sp\, x - cp\, y = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \\ & sp\,(x + y) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \end{aligned} \right. \qquad 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sistemul dat se poate scri înlocuind $cp\, y$ în funcţie de $sp\, y$ şi dezvoltând ecuaţia doua, ast-fel:

$$\left\{ \begin{aligned} & sp\, x + sp\, y = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}, \\ & \frac{sp\, x + sp\, y - 2\, sp\, x . sp\, y}{1 - 2\, sp . x . sp\, y} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} sp\,x + sp\,y = \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{4-\sqrt{3}}{2} - 2\,sp\,x.\,sp\,y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - (\sqrt{3}+1)\,sp\,x.\,sp\,y. \end{cases}$$

Făcând calculele obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} sp\,x + sp\,y = \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}, \\ sp\,x\;sp\,y = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt rădăcinele ecuații:

$$u^2 - \frac{4-\sqrt{3}}{2}\,.\,u + \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0,$$

$$\therefore \qquad u' = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad u'' = \frac{1}{2}.$$

Avem deci:

$$sp\,x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad sp\,y = \frac{1}{2},$$

sau invers, deci:

$$x = 60^\circ \quad \text{și} \quad y = 45^\circ,$$

sau:

$$x = 45^\circ \quad \text{și} \quad y = 60^\circ.$$

19. Să se afle adevărata valoare a expresiunii:

$$\frac{sp\,x - \frac{1}{2}}{sp\,x\,(x - 45^\circ)}, \qquad \text{pentru } x = 45^\circ.$$

Pentru $x = 45^\circ$ obținem forma nederminată $\frac{0}{0}$.

Să utilizăm deci regula lui *L'Hôpital*, vom aveà:

$$\left|\frac{1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x}{1 - 2\,sp(x-45^\circ) + 2\,sp^2(x-45^\circ)}\right|_{x=45^\circ} = \frac{1}{2}.$$

20. Să se afle pentru $x = 0$ adevărata valoare a expresiunii:

$$y = sp^{spx}.x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Această expresiune reducându-se la forma nedeterminată 0^0, vom lua logaritmul:

$$\mathrm{L}\, y = \frac{\mathrm{L}\, sp\, x}{\frac{1}{sp\, x}},$$

şi observând că se reduce la forma $\frac{\infty}{\infty}$, vom aplicà regula lui *L'Hôpital*:

$$\left| \frac{\frac{1-2\, sp\, x + 2\, sp^2 x}{sp\, x}}{\frac{1-2\, sp\, x + 2\, sp^2 x}{sp\, x}} \right|_{x=0} = |\, sp\, x\, |_{x=0} = 0,$$

deci:

$$y = 1.$$

21. Să se afle maximum şi minimum expresiunii:

$$y = sp^m\, x + cp^m\, x \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Luând derivata şi anulând'o vom aveà:

$$(1-2\, sp\, x + 2\, sp^2 x)\,(sp^{m-1}\, x - cp^{m-1} x) = 0,$$

$$\therefore \qquad 1-2\, sp\, x + 2\, sp^2 x = 0 \quad \text{şi} \quad sp^{m-1}\, x - cp^{m-1}\, x = 0.$$

Prima ecuaţie are rădăcini imaginare.

A doua se poate scrie:

$$sp^{m-1}\, x - (1 - sp\, x)^{m-1} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{sp\, x} - 1\right)^{m-1} - 1 = 0.$$

Această ecuaţie binoamă are o singură rădăcină reală şi positivă, anume pe 1, deci:

$$\frac{1}{sp\, x} - 2 = 0,$$

$$\therefore \qquad sp\, x = \frac{1}{2},$$

$$x = 45^0.$$

Dacă în expresia derivatei fac $x = 0$, am ca valoare 1, iar

$$\begin{cases} sp\,x + sp\,y = \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{4-\sqrt{3}}{2} - 2\,sp\,x\,.\,sp\,y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - (\sqrt{3}+1)\,sp\,x\,.\,sp\,y. \end{cases}$$

Făcând calculele obţinem următorul sistem:

$$\begin{cases} sp\,x + sp\,y = \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}, \\ sp\,x\,sp\,y = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, \end{cases}$$

Soluţiile acestui sistem sunt rădăcinele ecuaţii:

$$u^2 - \frac{4-\sqrt{3}}{2}\,.\,u + \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0,$$

$\therefore$
$$u' = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad u'' = \frac{1}{2}.$$

Avem deci:

$$sp\,x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad sp\,y = \frac{1}{2},$$

sau invers, deci:

$$x = 60^\circ \quad \text{şi} \quad y = 45^\circ,$$

sau:
$$x = 45^\circ \quad \text{şi} \quad y = 60^\circ.$$

19. Să se afle adevărata valoare a expresiunii:

$$\frac{sp\,x - \frac{1}{2}}{sp\,x\,(x - 45^\circ)}, \qquad \text{pentru } x = 45^\circ.$$

Pentru $x = 45^\circ$ obţinem forma nederminată $\frac{0}{0}$.

Să utilizăm deci regula lui *L'Hôpital*, vom aveà:

$$\left| \frac{1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x}{1 - 2\,sp(x - 45^\circ) + 2\,sp^2(x - 45^\circ)} \right|_{x=45^\circ} = \frac{1}{2}.$$

20. Să se afle pentru $x = 0$ adevărata valoare a expresiunii:

$$y = sp\,.\,x^{sp\,x}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Această expresiune reducându-se la forma nedeterminată 0^0, vom lua logaritmul:

$$L\,y = \frac{L\,sp\,x}{\dfrac{1}{sp\,x}},$$

şi observând că se reduce la forma $\frac{\infty}{\infty}$, vom aplicà regula lui *L'Hôpital*:

$$\left|\frac{\dfrac{1-2\,sp\,x+2\,sp^2x}{sp\,x}}{\dfrac{1-2\,sp\,x+2\,sp^2x}{sp\,x}}\right|_{x=0} = |\,sp\,x\,|_{x=0} = 0,$$

deci: $$y = 1.$$

21. Să se afle maximum şi minimum expresiunii:

$$y = sp^m\,x + cp^m\,x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Luând derivata şi anulând'o vom aveà:

$$(1-2\,sp\,x+2\,sp^2x)\,(sp^{m-1}\,x - cp^{m-1}x) = 0,$$

$\therefore$ $$1-2\,sp\,x+2\,sp^2x=0 \quad \text{şi} \quad sp^{m-1}\,x - cp^{m-1}\,x = 0.$$

Prima ecuaţie are rădăcini imaginare.

A doua se poate scrie:

$$sp^{m-1}\,x - (1-sp\,x)^{m-1} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{sp\,x} - 1\right)^{m-1} - 1 = 0.$$

Această ecuaţie binoamă are o singură rădăcină reală şi positivă, anume pe 1, deci:

$$\frac{1}{sp\,x} - 2 = 0,$$

$\therefore$ $$sp\,x = \frac{1}{2},$$

$$x = 45^0.$$

Dacă în expresia derivatei fac $x = 0$, am ca valoare 1, iar dacă fac $x = \frac{\pi}{2}$ am ca valoare $+\frac{1}{2}$, deci derivata trecând de la negativ la pozitiv, vom aveà un minim pentru funcţiunea dată in punctul $x = \frac{\pi}{2}$, care este:

$$min.y = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Voi terminà aceste probleme tratând încă una cu caracter geometric, anume:

22. In ori-ce triunghiu dreptunghic, catetele sunt proporţionale cu sinusurile patratice a jumătăţilor unghiurilor opuse.

Fie a ipotenuza, b şi c catetele unui triunghiu dreptunghic ABC. Din trigonometrie cunoaştem următoarea relaţiune:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} = \frac{b}{a+c}.$$

Utilizând acum următoarea relaţiune cunoscută:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{sp\frac{B}{2}}{1 - sp\frac{B}{2}},$$

(1) devine:

$$\frac{sp\frac{B}{2}}{1 - sp\frac{B}{2}} = \frac{b}{a+c}.$$

$$\therefore \qquad (2) \qquad sp\frac{B}{2} = \frac{b}{2p}.$$

In mod analog vom deduce:

$$(3) \qquad sp\frac{C}{2} = \frac{c}{2p}, \qquad (2p = a + b + c).$$

Din relaţiile (2) şi (3), deducem:

$$\frac{b}{sp\frac{B}{2}} = \frac{c}{sp\frac{C}{2}} = 2p,$$

şi enunţul e ast-fel justificat.