LA HAUTEUR OPTIMA DES BARRES DANS LES RAINURES DES MACHINES À COURANT ALTERNATIF

PAR

REMUS BASILIU RĂDULEŢ
DOCTEUR INGÉNIEUR

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"
TOME 4. FASC. 3—4.

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1932

Biblioteca S.P.T
Ing Rădulet

LA HAUTEUR OPTIMA DES BARRES DANS LES RAINURES DES MACHINES À COURANT ALTERNATIF

PAR

REMUS BASILIU RĂDULET
DOCTEUR INGÉNIEUR

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"
TOME 4. FASC. 3—4.

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1932

LA HAUTEUR OPTIMA DES BARRES DANS LES RAINURES DES MACHINES À COURANT ALTERNATIF

PAR

REMUS BASILIU RĂDULEȚ
DOCTEUR INGÉNIEUR

La densité du courant de conduction ne se répartit pas uniformément sur la section des conducteurs massifs si la tension aux bornes est alternative; elle est très grande dans des parties périphériques et à peu près nulle dans le reste de la section. Les phénomènes se passent à peu près comme si le courant traversait seulement une pellicule à la surface du conducteur si, à section et courant donnés, la fréquence est suffisamment haute: on dit que l'on a de *l'effet pelliculaire.*

Dans le cas d'un conducteur rectiligne à section circulaire, les phénomènes se passent à peu près comme si le courant alternatif total était répartisé seulement sur la conduite hachurée (fig. 1). La section „fictive" hachurée est donc plus petite que la section totale du cylindre et le conducteur dégage en courant alternatif par unité de temps, à une valeur efficace du courant total donnée, plus de chaleur qu'en courant continu. Comme l'épaisseur de la pellicule décroît avec le croissement de la fréquence, la chaleur dégagée par unité de temps croît avec la fréquence si la valeur efficace du courant reste la même. Si l'on apelle „résistance effective" le rapport de la chaleur dégagée par unité de temps, au carré de l'intensité du courant qui traverse le conducteur, on en déduit que la résistance effective croît avec la fréquence.

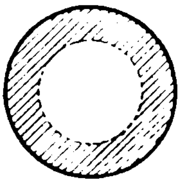
Fig. 1.

La dépendance de la résistance effective des dimensions du conducteur n'est pas la même que celle de la résistance en courant continu et il arrive parfois qu'en augmentant la section afin de dimineur la résistance effective, c'est à dire les pertes par effet Joule, ces pertes croissent. Il arrive donc que l'on ait une grandeur optima de la section, au delà de laquelle croissent les pertes. Tel est le cas des barres des rainures des machines à courant alternatif, que nos allons examiner dans l'article présent.

On obtient la solution exacte du problème, en intégrant une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, obtenue par l'élimination d'une grandeur d'un système de deux équations différentielles linéaires et du premier ordre. Mais beaucoup d'ingénieurs ne trouveut point le temps nécessaire à saisir le sens physique de cette opération d'élimination et, comme la déduction de la hauteur optima des barres n'est conditionnée que de l'expression, pour petit argument, de la solution, je m'e suis proposé de résoudre le problème sans faire appel à des solutions d'équations différentielles. Je crois, de la sorte, approcher la solution des méthodes habituelles de l'électrotechnique.

1. Les équations du problème

On résout les problèmes tels que le présent à l'aide des lois fondamentales de l'éctrotechnique, écrites sous leur forme différentielle.

La loi du champ magnétique des courants écrit qu'un courant électrique est accompagné d'un champ magnétique, (on dit parfois qu'il le produit) dont la circulation (l'intégrale de ligne) autour d'une courbe quelquonque est égale, dans le système électrotechnique, au produit de $\frac{4\pi}{10}$ par le flux de la densité de courant à travers une des surfaces contournées par la courbe considerée.

Soit $\overline{H}$ le champ magnétique, $\overline{g}$ la densité de courant, $d\overline{s}$ l'élément linéaire de la courbe et $d\overline{S}$ l'élément de surface d'une des surfaces contournées par la courbe considerée. On a :

$$\text{(I.)} \qquad \oint_C \overline{H}\, d\overline{s} = \frac{4\pi}{10} \iint_S \overline{g}\, d\overline{S}$$

En divisant les deux termes de cette équation par l'aire de la surface S, en passant à la limite pour une aire infiniment petite et en variant la position de l'aire jusqu' à ce que l'on obtient la valeur maxima du quotient, on obtient à gauche une grandeur vectorielle, le rotationnel de $\overline{H}$ et à droite $\frac{4\pi}{10}\overline{g}$. On a donc :

$$\text{(I. a.)} \qquad \operatorname{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{10} \overline{g}$$

Si l'on se réfère à un système dextrogyre de coordonnées cartésiennes, o peut écrire :

$$\text{(I. b.)} \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{10} \overline{g}_x$$

et deux équations analogues pour les axes y et z.

Si $H_z = 0$, on en déduit :

$$\text{(I. c.)} \qquad H_y = \frac{4\pi}{10} \int g_x\, dz + C.$$

où C est une constante d'intégration, qu'on détermine des conditions à la limite. La relation (I. c.) est l'une des équations du problème.

Comme nons nous bornerons au régime quasistationnaire, nous identifions la densité de courant avec la densité du courant de conduction.

La loi de l'induction écrit qu'un champ magnétique variable produit un champ électrique $\overline{E}$, dont la circulation autour d'une courbe est égale et de signe contraire à la dérivée, par rapport au temps, du flux magnétique qui traverse une surface quelconque, contourné par la courbe considérée. Dans le système électrotechnique, on doit introduire un facteur de proportionnalité et l'on obtient:

(II) $$\oint_C \overline{E}\, d\overline{s} = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} = -10^{-8} \frac{d}{dt} \iint_S \overline{B}\, d\overline{S}$$

On en déduit la forme différentielle par la méthode appliquée à la loi précédente:

(II. a.) $$\operatorname{rot} \overline{E} = -10^{-8} \frac{d\overline{B}}{dt}$$

ou, dans un système de coordonnées cartésiennes, pour la coordonée y:

(II b.) $$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -10^{-8} \frac{dB_y}{dt}$$

et, si $E_z = 0$, dans les corps immobiles:

(II. c.) $$E_x = -10^{-8} \int \frac{\partial B_y}{\partial t}\, dz + C$$

C'est la deuxième équation du problème.

La troisième équation dont nous avons besoin est l'expression différentielle de la loi d'Ohm: La densité du courant de conduction est proportionnelle au champ électrique $\overline{E}$, le facteur de proportionnalité étant la valeur réciproque de la résistivité ϱ:

(III.) $$\overline{g} = \frac{1}{\varrho} \overline{E} \qquad \text{ou} \qquad \overline{E} = \varrho \overline{g}$$

L'équation qui donne la chaleur dégagée par l'unité de volume dans l'unité de temps est l'expression différentielle de la loi de Joule: la chaleur dégagée dans l'unité de temps par l'unité de volume de conducteur est égale au produit de la résistivité par le carré de la densité du courant de conduction:

(IV.) $$w = \varrho\, \overline{g}^2$$

2. La solution du problème

Nons allons étudier, à l'aide des quatre relations: (I. c.), (II. c.), (III) et (IV) l'effet pelliculaire non prononcé, dans les barres rectangulaires d'une rainure également rectangulaire, ouverte à la périphérie, d'une machine à courant alternatif, disposées en m couches à n barres (fig. 2). Les barres à la section dh cm² sont connectées en série ou en parallèle et chacune d'elles est parcourue par le courant:

(1) $$i' = \mathrm{I}' \sin \omega t$$

Nous étudions les phénomènes dans l'hypothèse que la tension électromotrice imprimée moyenne est la même sur chaque barre et choisissons le systéme de coordonées comme on le voit sur la figure 2.

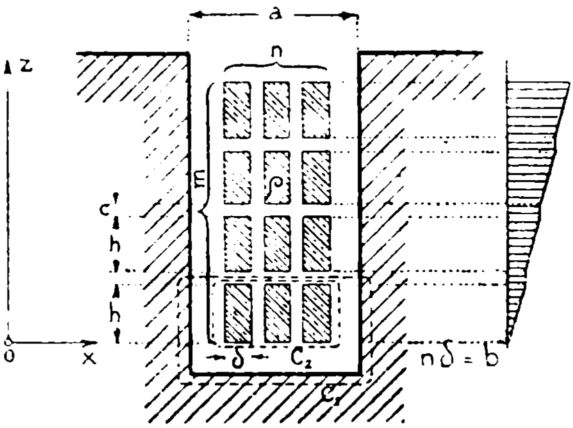

Fig. 2.

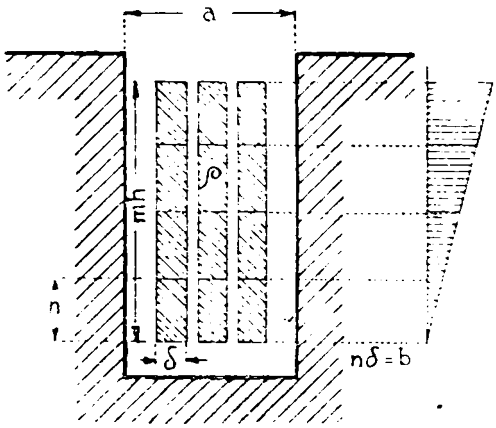

Fig. 3.

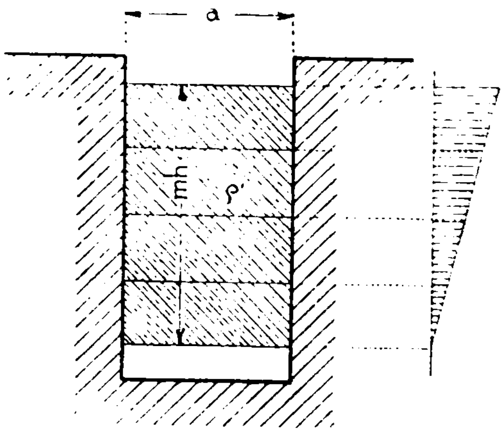

Fig. 4.

On peut démontrer facilement que le champ magnétique est constant sur les portions c, occupées par l'isolement — si l'on admet que $\overline{\mathrm{H}}$ ne dépend pas de la coordonée y et si l'on néglige la chute de tension magnét que dans le fer. Nous ne faisons donc pas d'erreur en substituant la figure 3 à la figure 2. Pour résoudre le problème, admettons provisoirement que le courant total de la rainure:

(2) $$\mathrm{I} = m n \mathrm{I}'$$

soit uniformément réparti sur la section des barres, comme en courant continu. Observons également qu'il est impossible que $\overline{\mathrm{H}}$ soit indépendant de y, pour la disposition de la figure 2 ou 3 des barres. En effet, la loi (I) nous donne la même circulation de $\overline{H}$ pour les deux courbes C_1 et C_2, ce qui prouve que $\overline{H}$ a aussi une composante z sur les faces latérales des conducteurs. Comme cette composante est zéro sur la ligne verticale de symmétrie de la rainure, il en resulte que $\overline{H}$ dépend de y. Nous élargissons les barres dans le rapport $\frac{a}{b}$ et augmentons leur résistivé dans la même mesure, pour compenser la diminution de résistance produite par l'agrandissement de la section; de la sorte, nous éliminions le desavantage du calcul avec un $\overline{H}$ dépendant de y.

Nous calculons avec la résistité:

$$\varrho' = \frac{a}{b}\varrho \tag{3}$$

La densité constante du courant de conduction est:

$$g_{1x} = \frac{m\, n\, I' \sin\omega t}{a\, m\, h} = \frac{n I'}{a h}\sin\omega t \tag{4}$$

Le champ produit par cette densité de courant peut être calculé de (I. c.):

$$H_{1y} = \frac{4\pi}{10}\int g_{1x}\, dz + C = \frac{4\pi\, n I'}{10\, a h} z \sin\omega t = \frac{4\pi \mathcal{J}}{10\, a}\frac{z}{m h}\sin\omega t \tag{5}$$

parce que $H_{1y} = 0$ pour $z = 0$ si l'on admet que $H_z = 0$.

Le champ électrique E_{2x} et la densité correspondante de courant g_{2x} produite par H_{1y} peuvent être calculées à l'aide des relations (II c) et (III). Si $\mu = 1$, on a $B_{1y} = H_{1y}$ et:

$$g_{2x} = \frac{E_{2x}}{\varrho'} = -\frac{10^{-8}}{\varrho'}\int \frac{\partial H_{1y}}{\partial t}\, dz + C = \tag{6}$$

$$= -\frac{10^{-8}}{\varrho'}\frac{4\pi \mathcal{J}}{10}\frac{\omega}{a\, m h}\cos\omega t \int_0^z z\, dz + C = -\frac{10^{-8}}{\varrho'}\frac{4\pi \mathcal{J}}{10\, a}\frac{\omega}{m h}\cos\omega t\,\frac{z^2}{2} + C$$

On détermine la constante C de la condition que la valeur du courant correspondant à la densité supplémentaire de courant: g_{2x} soit zéro pour chaque barre (On peut s'imaginer que chaque barre se continue à extérieur de la rainure par un conducteur filiforme, dans lequel il n'y pas de l'effet pélliculaire) Nous calculons la valeur de C pour la couche s de barres, de la condition que le flux de g_{2x} soit zéro entre $z = (s-1)h$ et $z = sh$:

$$n d \int_{(s-1)h}^{sh} g_{2x}\, dz = n d \left[-\frac{10^{-8}}{\varrho'}\frac{4\pi \mathcal{J}}{10\, a}\frac{\omega}{m h}\cos\omega t\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{s^3 h^3 - (s-1)^3 h^3}{3}\right) + C\left(s h - (s-1) h\right)\right] = 0$$

d'où résulte:

$$C = \frac{10^{-8}}{\varrho'} \frac{4\pi \mathcal{J}}{10} \frac{\omega}{a\, m\, h} \cos \omega t \cdot \frac{h^2}{2} \left(\frac{3 s^2 - 3 s + 1}{3} \right)$$

Introduisons la valeur éfficace du courant par rainure:

$$I = \frac{\mathcal{J}}{\sqrt{2}}$$

Nous obtenons:

(6′) $$g_{2x} = \frac{10^{-8}}{\varrho'} \frac{4\pi}{10} \frac{I\sqrt{2}}{2a} \frac{\omega}{m\, h} \cos \omega t \,.\, (\lambda^2 h^2 - z^2)$$

où:

(7) $$\lambda = \frac{3 s^2 - 3 s + 1}{3}$$

La densité résultante du courant est la somme:

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = \frac{I\sqrt{2}}{a\, m\, h} \sin \omega t + \left(\frac{10^{-8}}{\varrho'} \frac{4\pi}{10} \frac{I\sqrt{2}}{m\, h} \frac{\omega}{2a} \right) (\lambda^2 h^2 - z^2) \cos \omega t$$

Les densités g_{1x} et g_{2x} sont en quadrature et le carré de la valeur éfficace de g_x est égal à la somme des carrés des valeurs éfficaces de g_{1x} et g_{2x}:

(8) $$g_x^2 = g_{1x}^2 + g_{2x}^2 = \left(\frac{I}{m\, a\, h} \right)^2 + \left(\frac{10^{-8}}{\varrho'} \frac{4\pi}{10} \frac{I}{m\, h} \frac{\omega}{2a} \right)^2 (\lambda^2 h^2 - z^2)^2$$

Si l'on n'avait pas de l'effet pelliculaire, on aurait, à un courant total I, la densité (4) du courant et la chaleur dégagée par la chouche s de conduites serait, par unité de temps:

$$Q_{cs} = l\, a \int_{(s-1)h}^{s h} \varrho' g_{1xe}^2 \, dz = l\, a\, \varrho' \int_{(s-1)h}^{s h} \left(\frac{I}{m\, a\, h} \right)^2 dz = \frac{l\, \varrho\, I^2}{m^2\, b\, h}$$

Comme on a de l'effet pelliculaire, la densité du courant ne se répartit pas uniformément sur la section, mais d'après la loi (8) et la chaleur dégagée par l'unité de temp par la s-ième couche de barres est:

(9′) $$Q_{sa} = l\, a \int_{(s-1)h}^{s h} \varrho' (g_{1xe}^2 + g_{2xe}^2)\, dz = Q_{cs} +$$

$$+ l\, b\, \varrho \left(\frac{10^{-8}}{\varrho} \frac{4\pi}{10} \frac{I}{m\, h} \frac{\omega}{2a} \right)^2 \int_{(s-1)h}^{s h} (\lambda^2 h^2 - z^2)^2 \, dz$$

Posons

$$k_1 = \varrho\, l\, b \left(\frac{10^{-8}}{\varrho} \frac{4\pi}{10} \frac{I}{m\, h} \frac{\omega}{2a} \right)^2,$$

intégrons et introduisons la valeur (7) de λ. Nous obtenons :

$$(9'') \qquad Q_{as} = Q_{cs} + k_1 \int_{(s-1)h}^{sh} (\lambda^4 h^4 - 2\lambda^2 h^2 z^2 + z^4)\, dz = Q_{cs} +$$

$$+ k_1 h^5 [\lambda^4 - 2\lambda^2 + s^5 - (s-1)^5] = Q_{cs} + k_1 h^5 \left(\frac{s^2 - s}{3} + \frac{4}{5.9}\right)$$

Le rapport des pertes par effet Joule de la s-ièmme couche de barres, en courant alternatif et en courant continu est, à un même courant efficace :

$$(10) \qquad k_s = 1 + \left(\frac{s^2 - s}{3} + \frac{4}{45}\right)\left(\frac{10^{-8}}{\varrho}\frac{4\pi}{10}\frac{b}{a}\frac{\omega}{2}\right)^2 h^4 = 1 + \left(\frac{s^2 - s}{3} + \frac{4}{45}\right)\alpha^4 h^4$$

où nous avons posé :

$$(10') \qquad \alpha = \sqrt{\frac{10^{-8}}{\varrho}\frac{4\pi}{10}\frac{\omega}{2}\frac{b}{a}}$$

Calculons maintenant le rapport k des pertes par effet Joule dans toutes les couches de barres de la rainure, en courant alternatif et en courant continu. Nous avons évidemment :

$$k = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{1} k_s$$

Mais :

$$\sum_{s=1}^{m} s = \frac{m(m+1)}{2}.$$

$$\sum_{s=1}^{m} s^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{4}{45} = m\,\frac{4}{45}$$

et, par conséquent :

$$\sum_{s=1}^{m} (s^2 - s) = m\,\frac{m^2 - 1}{3}$$

et nous obtenons :

$$(11) \qquad k = 1 + \left(\frac{m^2 - 1}{9} + \frac{4}{45}\right)\alpha^4 h^4$$

Les pertes par rainure étant en courant continu $Q_c = m\,Q_{cs}$, on a les pertes en courant alternatif sinusoidal :

$$(12) \qquad Q_a = k\,Q_c = \frac{\varrho\, l\, I^2}{m\, n\, d\, h}\left[1 + \left(\frac{m^2 - 1}{9} + \frac{4}{45}\right)\left(\frac{10^{-8}}{\varrho}\frac{4\pi}{10}\frac{\omega}{2}\frac{n\,d}{a}\right)^2 h^4\right]$$

Les pertes en courant alternatif sont données par cette formule en fonction des dimensions de la rainure et des barres, en fonction du conducteur des barres, de la fréquence et du courant.

Le problème pratique diffère un peu du problème résolu. On détermine, en géneral, le courant par barre, le nombre de barres, la largeur a de la rainure et l'on établit le nombre n de barres par couche et le nombre m de chouches. Puis, on determine la dimension d des barres, en tenant compte de l'épaisseur de l'isolement — et l'on cherche la hauteur h des barres, à laquelle les pertes par bobine sont minimes.

On ne peut pas obtenir toujors ce résultat par une augmentation de la hauteur h des barres. La formule (12) nous enseigne que Q_a est la somme de deux termes, dont l'un décroît à h croissant et dont le deuxième croît avec h. Si la croissance du second surpasse la décroissance du premier, Q_a croît avec h. La décroissance du premier terme de (12) surpasse la croissance du second terme pour de petites valeurs de h. Il y a donc un h qui correspond à des pertes minimes.

Mais nous devons tenir compte aussi des pertes dans les têtes des bobines. Leur champ magnétique étant plus faible que celui des rainures, à cause des distances plus longues sur lesquelles est répartie la tension magnétique du courant total des têtes, égal à celui des rainures, on peut calculer, au moins pour les machines pas trop grandes, avec leur résistance en courant, continu. Si Q_{c1} est la chaleur dégagée par l'unité de temps par l'unité de longueur des têtes de bobine moyennes et des rainures, on a pour les pertes d'une bobine en courant alternatif l'expression :

$$Q_{ab} = 2\,Q_{c1}\,(k\,l_r + l_t) = \frac{2\,\rho\,I^2}{m\,n\,d\,h}\left[l_t + l_r\left(\frac{m^2-1}{9} + \frac{4}{45}\right)a^4 h^4\right]$$

Si l'on varie h, les autres grandeurs restant constantes, Q_{ab} passe par un minimum, que l'on obtient en annulant la dérivée de Q_{ab} par rapport à h :

$$\frac{\partial Q_{ab}}{\partial h} = \frac{2\,\rho\,I^2}{m\,n\,d}\left[-\frac{l_r + l_t}{h^2} + l_r\left(\frac{m^2-1}{9} + \frac{4}{45}\right)a^4\,3\,h^2\right] = 0$$

d'où :

$$(13) \qquad h_{opt} = \frac{1{,}3}{a\,\sqrt[4]{m^2-0{,}2}}\sqrt[4]{1+\frac{l_t}{l_r}} = \frac{1{,}3\sqrt[4]{1+\frac{l_t}{l_r}}}{\sqrt{\frac{10^{-8}}{\rho}\,\frac{4\pi\,b}{10\,a}\,\frac{\omega}{2}}\;\sqrt[4]{m^2-0{,}2}}$$

Si $m \geqq 3$; on peut négliger 0,2 par rapport à m^2 et la formule devient :

$$(13') \qquad h_{opt} = \frac{1{,}3\sqrt[4]{1+\frac{l_t}{l_r}}}{\sqrt{m\,\frac{10^{-8}}{\rho}\,\frac{4\pi\,b}{10\,a}\,\frac{\omega}{2}}}$$

C'est la formule que l'on emploie dans le calcul de la hauteur optima des barres dans les rainures des machines à courant alternatif. Il convient de l'employer même si $m = 1$.

La formule fut établie en 1904 par *R. Rüdenberg* et communiquée à la société Siemens-Schuckert. Elle ne fut pas publiée à cause de raisons économiques jusqu'à ce que Field et Rogowski la retrouvèrent en 1911 et 1913. Les travaux de ces trois auteurs emploient les solutions exactes du problème, dont l'approximation pour de petites valeurs de l'argument est employée à la déduction de la formule (13') pour $l_t = 0$ et puis, par une considération analogue a celle employée ci dessus, pour $l_t \neq 0$.

Si l'on introduit la valeur optima de h dans l'expression (11), on obtient les valeurs suivantes de k, pour des valeurs différentes de m, si $l_t = 0$:

$m =$	1	2	3	4
k_{opt}	1,13	1,31	1,33	1,33

La résistance en courant alternatif des barres des rainures d'une machine à courant alternatif bien dimensionée ne peut surpasser leur résistance en courant continu de plus de 33°/₀.

On peut résoudre, par un artifice très simple, le même problème pour les rainures non ouvertes à la périphérie du stator ou du rotor de la machine si le nombre M des couches de barres est pair. On s'imagine la rainure découpée transversalement par le milieu, en sorte qu'elle soit divisée en deux rainures ouvertes, dont chacune se comporte de la même manière que la rainure étudiée, parce que les lignes du champ magnétique de chaque moitié de rainure a la forme des lignes du champ de la rainure ouverte. La formule de la hauteur optima est donnée donc aussi par la formule (13) ou (13'), mais on doit calculer avec $m = \frac{M}{2}$.

On ne peut plus employer cette considération si le nombre de couches de barres d'une rainure est impair, car, en découpant la rainure, on coupe la couche moyenne ce qui ne donne pas dans les rainures ouvertes des chouches de barres de même hauteur. La méthode à employer à ce cas peut être lue dans l'article de Rogowski (A F E 1913).

Exemple: Considérons une rainure: $a = 1,5$ cm à 8 barres en euivre ($\varrho = 17,86 . 10^{-7}$ ohms cm.): $m = 2, n = 4$, d'épaisseur de $\delta = 0,25$ cm. et de hauteur $h = 1,7$ cm. et calculons le facteur k des pertes par effet Joule en courant alternativ à $f = 25$ p/s. en négligeant le rapport $\frac{l_t}{l_r}$.

Nos obtenons: $b = n\delta = 4 \times 0,25 = 1$ cm. et de la formule (10'):

$$\alpha = \sqrt{\frac{10^{-8}}{\varrho} \cdot \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{10^{-8}}{17,86 . 10^{-7}} \cdot \frac{4.3,14}{10} \cdot \frac{2.3,14.25}{2} \cdot \frac{1}{1,5}} = \sqrt{0,373} = 0,61$$

$$k = 1 + \left(\frac{m^2 - 1}{9} + \frac{4}{45}\right)(\alpha\, h)^4 = 1 + \left(\frac{2^2 - 1}{9} + \frac{4}{45}\right)(0{,}61 . 1{,}7)^4 = 1{,}476$$

Le facteur k étant plus grand que 1,33, la hauteur des barres ne coïncide pas avec la hauteur optima, que l'on obtient de la formule (13'), dans notre cas, en négligeant le rapport l_t / l_r ;

$$h_{opt} = \frac{1{,}3}{\alpha \sqrt{m}} = \frac{1{,}3}{0{,}61 \sqrt{2}} = 1{,}51 \text{ cm.}$$

Si l'on avait fait une économie de

$$\frac{1{,}7 - 1{,}51}{1{,}7} = \frac{0{,}19}{1{,}7} = 0{,}11$$

c'est à dire de 11% de cuivre, on avait eu une diminution de

$$\frac{1{,}476 - 1{,}33}{1{,}476} = \frac{0{,}146}{1{,}176} = 0{,}1\,,$$

c'est à dire de 10% des pertes par effet Joule.