

# SIMULĂRI NUMERICE PENTRU MIȘCĂRI CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI

Teză destinată obținerii  
titlului științific de doctor inginer  
la  
Universitatea "Politehnica" din Timișoara  
în domeniul INGINERIE MECANICĂ  
de către

**Ing. Cristina Basarabă-Oprițescu**

Conducător științific:

Prof.dr.ing. Liviu Brîndeu

Prof.dr.ing. Titus Cioară

Referenți științifici:

Prof.univ.dr.ing.Polidor Bratu

Prof.univ.dr.ing. Nicolae Ursu-Fischer

Prof.dr.ing. Mircea Radeș

Ziua susținerii tezei: 12.11.2007

UNIV. "POLITEHNICA"	
TIMIȘOARA	
BIBLIOTECA CENTRALĂ	
Nr. volum	655.379
Dulap	Lit.

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. Automatică          | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie              | 8. Inginerie Industrială                    |
| 3. Energetică          | 9. Inginerie Mecanică                       |
| 4. Ingineria Chimică   | 10. Știința Calculatoarelor                 |
| 5. Inginerie Civilă    | 11. Știința și Ingineria Materialelor       |
| 6. Inginerie Electrică |   |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2006

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,  
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221  
e-mail: editura@edipol.upt.ro

# Cuvânt înainte

Teza de doctorat cu tema „SIMULĂRI NUMERICE PENTRU MIȘCĂRI CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI”, a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul Facultății de Mecanică, catedra de Mecanică și Vibrații, a Universității „Politehnica” din Timișoara.

Lucrarea constituie o metodă completă de investigare și analiză a mișcărilor corpurilor elastice începând din momentul proiectării acestora, continuând cu simularea folosind calculatorul electronic și terminând cu încercările experimentale.

Fenomenele dinamice ultrarapide, cum ar fi cele legate de impact sau penetrare, precum și cele de natură tehnologică (cum sunt cele ce acompaniază procesele de ambutisare, forjare) pun inginerii față în față cu probleme dintre cele mai dificile. În întâmpinarea acestora vine programul ANSYS LS-DYNA, rezultat prin fuziunea tehnologiei încorporate de solverul specializat în analiza dinamică explicită, produs al LSTC, și pre/post procesorul suitei de programe ANSYS. Programul ANSYS LS-DYNA folosește un solver explicit ce oferă soluții la problemele legate de fenomenele de dinamică rapidă ce presupun deformații mari, la problemele quasi-statice cu neliniarități multiple precum și la problemele complexe de contact/impact.

Aceste avantaje au făcut-o pe autoare să recurgă la folosirea codului Ansys pentru simulările făcute pentru ducerea la bun sfârșit a acestei teze.

~~~

***În încheiere aș dori și pe această cale să aduc cele mai calde mulțumiri conducătorului științific PROF.DR.ING.TITUS CIOARĂ pentru sprijinul substanțial, de un înalt profesionalism, pentru încurajări și interesul constant manifestat în timpul pregătirii mele. Totodată aș vrea să îl amintesc și pe regretatul PROF.DR.ING. LIVIU BRÎNDEU primul meu conducător științific.***

***De asemenea, mulțumesc distinșilor profesori, colegilor și personalului auxiliar din catedra de „Mecanică și Vibrații” a facultății de Mecanică-Timișoara, care într-o forma sau alta, m-au ajutat și susținut pe parcursul activității mele.***

***Mulțumesc sincer tuturor prietenilor, în special familiei Neag și nu în ultimul rând părinților mei pentru încrederea și sprijinul moral acordat, pentru orele și zilele oferite ducerii la bun sfârșit a acestei lucrări.***

***Dedic această lucrare celor dragi.***

Timișoara octombrie 2007

Basarabă-Oprișescu Cristina

Basarabă-Opritescu, Cristina

**Simulări numerice pentru mișcări cu constrângeri mecanice și ciocniri**

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 14, Editura Politehnica, 2007, 126 pagini, 53 figuri, 2 tabele.

ISSN: 1842-4937

ISBN: 978-973-625-526-7

Cuvinte cheie: contact/impact, simulare, vibrații, pulsații proprii.

Rezumat,

Lucrarea constituie o metodă completă de investigare și analiză a corpurilor elastice prin simulare folosind calculatorul și terminând cu încercările experimentale.

Rezultatele experimentale obținute au fost în concordanță cu cele teoretice simulate numeric pe baza unor programe și clar expuse și scoase în evidență în capitolul dedicat contribuțiilor personale

S-a folosit ca program de prelucrare a datelor programul MATCHAD și pentru simulare s-a folosit codul ANSYS WORKBENCH și ANSYS LS-DYNA

## CUPRINS

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CUVÂNT ÎNAINTE.....                                                                                           | 3   |
| CUPRINS.....                                                                                                  | 5   |
| Capitolul 1                                                                                                   |     |
| INTRODUCERE.....                                                                                              | 6   |
| 1.1.Introducere în problematica tezei.....                                                                    | 6   |
| 1.2.Scopul și obiectivele tezei.....                                                                          | 8   |
| 1.3.Organizarea tezei.....                                                                                    | 8   |
| Capitolul 2                                                                                                   |     |
| MODELE DE STUDIU ALE SISTEMELOR CU CONSTRÂNGERI<br>MECANICE ȘI CIOCNIRI.....                                  | 10  |
| 2.1.Efecte locale în cazul ciocnirii a două<br>corpuri.....                                                   | 10  |
| 2.2.Efecte energetice în cazul sistemelor de corpuri<br>elastice.....                                         | 21  |
| 2.3.Ecuțiile fundamentale ale ciocnirii corpurilor<br>deformabile.....                                        | 29  |
| 2.4.Contribuții originale.....                                                                                | 35  |
| Capitolul 3                                                                                                   |     |
| METODE NUMERICE PENTRU SIMULAREA DINAMICII SISTEMELOR<br>ELASTICE CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI.....   | 37  |
| 3.1.Metode hibride analitico-numerice.....                                                                    | 37  |
| 3.2.Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.<br>Particularizare la sisteme dinamice cu<br>ciocniri..... | 43  |
| 3.3.Metoda elementelor finite la sisteme mecanice în<br>contact.....                                          | 62  |
| 3.4.Contribuții originale.....                                                                                | 69  |
| Capitolul 4                                                                                                   |     |
| SIMULĂRI ȘI VERIFICĂRI EXPERIMENTALE.....                                                                     | 70  |
| 4.1.Simularea vibrațiilor unor structuri cu discontinuități<br>geometrice.....                                | 70  |
| 4.2.Cercetări experimentale.....                                                                              | 83  |
| 4.3.Rezultate experimentale.....                                                                              | 89  |
| 4.4.Contribuții originale.....                                                                                | 90  |
| Capitolul 5                                                                                                   |     |
| CONCLUZII.CONTRIBUȚII ORIGINALE.....                                                                          | 92  |
| BIBLIOGRAFIE.....                                                                                             | 94  |
| ANEXE.....                                                                                                    | 104 |

# Capitolul 1

## INTRODUCERE

### 1.1. Introducere în problematica tezei

Modelele matematice care descriu diverse fenomene fizice se prezintă, în general, sub forma unor ecuații sau sisteme de ecuații diferențiale, cel mai adesea, cu derivate parțiale, ecuații integrale sau integro-diferențiale. Problemele concrete conduc la necesitatea determinării unei soluții particulare care să verifice anumite condiții inițiale și la limită, date astfel încât să asigure existența și unicitatea soluției căutate. Integrarea problemelor la limită prin metode analitice este aplicabilă unor probleme simple; ca urmare, la probleme complexe, se impune cu necesitate alternativa modelării numerice. În esență, modelul matematic care descrie fenomenul studiat este discretizat și, în locul soluției exacte, se determină parametrii modelului în anumite puncte prestabilite. Problema contactului este un domeniu de cercetare foarte important. Ca urmare, teza își propune să realizeze o sinteză privind conceptele teoretice, tehnicile și metodele utilizate în rezolvarea problemelor contactului și să aducă noi contribuții în acest domeniu.

În introducerea acestei tezei, cu tema „SIMULĂRI NUMERICE PENTRU MIȘCĂRI CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI”, autoarea consideră că este necesar să fie prezentate câteva noțiuni fundamentale, indispensabile parcurgerii tezei și obținerii rezultatelor. Aceste noțiuni fiind prezentate în continuare.

Modelarea desemnează reprezentarea unui sistem sau proces printr-un alt sistem, denumit model, mai ușor de studiat, dar care păstrează în mod obligatoriu caracteristicile relevante ale originalului. Studiarea modelului poate fi realizat pe două căi: analitic și experimental. Studiarea experimentală a unui model mai este denumită și **simulare** și este preferată în situațiile în care studiarea pe cale analitică este imposibilă sau prea laborioasă. Modelul studiat este denumit model de simulare și este, în cel mai fericit caz, un model matematic. Deci simularea oferă întotdeauna posibilitatea studierii unui model, atunci când studiarea sa analitică nu este aplicabilă.

Utilizarea calculatorului în cele mai diverse domenii de activitate a încetat de mult să mai fie o modă, devenind practic o necesitate. Încă din primele faze ale concepției și până la execuția finală a unui anumit produs, calculatorul a înlocuit uneltele clasice, punând la dispoziție metode eficiente și elegante de lucru. Se poate afirma fără teama de a greși că pașii uriași pe care omenirea i-a parcurs în ultimele decenii se datorează în cea mai mare parte asistării de către calculator a întregii activități economice – sociale.

În domeniul proiectării și simulării sistemelor mecanice, o multitudine de programe, începând cu „popularele” limbaje de programe (FORTRAN, BASIC, PASCAL, C ș.a.), continuând cu programele de proiectare asistată (AUTOCAD, CATIA, EUCLID, PROENGINEER, SOLID WORKS ș.a.) și ajungând la softurile performante de analiză și simulare (ADAMS, PLEXUS, DYMES, SDEXACT ș.a.), respectiv de analiză cu element finit (NASTRAN, PATRAN, COSMOS, ANSYS, NISA ș.a.), sunt utilizate în prezent pe scară largă. Adevărate prototipuri virtuale sunt create cu ajutorul calculatorului, având în vedere obținerea unor produse care să

corespundă funcțional cerințelor. Aceasta înseamnă că simularea sistemelor mecanice merge până la modelarea fidelă atât a componentelor sistemului cât și a condițiilor de funcționare ale acestuia, ceea ce permite testarea rapidă a numeroase variante geometrico-constructive, în vederea optimizării sistemului mecanic.

Metoda elementului finit a devenit un instrument de lucru de largă utilizare în toate domeniile. Principalul avantaj al acestei metode este acela de a fi înlăturat bariera legată de nivelul de complexitate al problemei studiate. Matematicienii din Grecia Antică au fost deschizători de drumuri. Totuși, prima referință concretă la metoda elementului finit este doar din anii '60. Din acest moment, dezvoltarea metodei elementelor finite a fost în pas cu acest sfârșit de mileniu, un ritm debordant, direcționat către utilizatorul primar - proiectantul. La baza dezvoltării metodei elementelor finite stau pe de-o parte posibilitățile de abordare a unei game largi de probleme din domeniul mecanicii mediului deformabil, al fizicii mediilor continue și a teoriei câmpurilor, a chimiei cuantice etc., iar pe de altă parte, nivelul tot mai ridicat al performanțelor tehnicii de calcul, care dă posibilitatea dezvoltării calculului până la nivelul de precizie dorit.

Analiza cu elemente finite este o tehnică numerică bazată pe computer. Calculatorul este necesar deoarece este nevoie de un număr astronomic de calcule necesare pentru a analiza o structură relativ mare.

Metoda elementului finit este o metodă aproximativă și, în general, acuratețea soluției crește cu numărul de elemente utilizate. Numărul de elemente necesare pentru un model corect depinde de problemă și de rezultatele specifice pe care le dorim de la acesta. Astfel, în scopul de a analiza acuratețea rezultatelor pentru o singură rulare a metodei elementului finit, este necesar să se crească numărul de elemente dintr-un obiect sau zonă a obiectului și să se vadă modificarea de rezultate. Este o metodă foarte versatilă și totodată puternică și poate fi utilă proiectanților pentru a obține informații privind comportarea structurilor complicate cu cele mai arbitrare solicitări. În scopul obținerii unor avantaje semnificative, care au fost făcute posibile prin dezvoltarea metodei, rezultatele trebuie examinate cu mare atenție înainte de a fi utilizate. Pentru a putea generaliza o astfel de metodă, pe lângă modelatorul cu elemente finite, în programele de analiză structurală au apărut modelatoarele geometrice, oarecum asemănătoare cu cele de CAD. Aceste facilități, împreună cu dezvoltarea PC-urilor au creat o nouă clasă de utilizatori, mult mai largă, din zona industrială. Lărgirea acestei clase de utilizatori a fost realizată și prin abordarea unei problematice deosebit de complexe:

- *Analiza statică;*
- *Analiza dinamică;*
- *Analiza neliniară* oferă posibilitatea de a determina starea de tensiuni și deformații în următoarele situații:
  - probleme cu materiale neliniare,
  - probleme cu deplasări mari,
  - probleme de contact;
- *Analiza termică;*
- *Analiza la oboseală a structurilor;*
- *Analiza curgerilor de fluide;*
- *Analiza electromagnetică*

Aceste avantaje au făcut-o pe autoare să recurgă la folosirea metodei elementului finit, metodă implementată și în codul Ansys, pentru simulările făcute pentru ducerea la bun sfârșit a acestei teze.

## 1.2.Scopul și obiectivele tezei

Lucrarea constituie o metodă completă de investigare și analiză a corpurilor elastice prin simulare folosind calculatorul și terminând cu încercările experimentale.

Actualitatea și importanța temei tratate se regăsesc pe parcursul tezei. Astfel trebuie evidențiate următoarele aspecte care sunt tratate:

- folosirea metodelor moderne de calcul și utilizarea calculatoarelor;
- utilizarea Metodei Elementelor Finite în problemele de contact/impact;
- prezentarea și implementarea mijloacelor moderne de experimentare, achiziție și prelucrare a datelor;

În această teză sunt vizate următoarele direcții de cercetare:

- Prezentarea cadrului teoretic general în care au sens și pot fi rezolvate, pe cale analitică sau/și numerică, probleme de contact;
- Rezolvarea problemelor de contact elastic tridimensional cu punerea în evidență a „cod-ului calculator” de implementare-aplicarea codului Ansys, în studii vibrațiilor prin șoc;
- Validarea modelării numerice pe baza datelor experimentale.

Motive pentru care s-au folosit simulări pe calculator:

- Simulările pe calculator au avantajul că au costuri reduse;
- Obținerea rezultatelor practice sunt mai dezavantajoase decât cele simulate, deoarece necesita aparatură scumpă;
- Simulările pe calculator sunt în general o modalitate relativ simplă de cercetare primară a unor fenomene fizice. În multe situații modelările numerice permit o studiere mai profundă a fenomenelor.

## 1.3.Organizarea tezei

Lucrarea este structurată pe 5 capitole și cuprinde elementele teoretice, problematica atât a simulării numerice și validări experimentale a rezultatelor cât și a prelucrării și interpretării datelor.

**Capitolul 1** realizează introducerea în problematica temei tratate. Pe parcursul acestui capitol este justificată importanța și mai ales actualitatea acestei teme. Totodată sunt stabilite obiectivele urmărite de autoare de-a lungul tezei și este prezentată organizarea tezei.

În **capitolul 2** sunt prezentate câteva modele de studiu ale sistemelor cu constrângeri mecanice și ciocniri. Sunt analizate efectele locale în cazul contactului hertzian dintre un corp elasto-plastic și un element percutant, punându-se în evidență coeficientul de ciocnire prin interpretarea sa. Sunt de asemenea prezentate efectele energetice în cazul sistemelor de corpuri elastice și ecuațiile generale ale ciocnirii corpurilor deformabile.

**Capitolul 3** conține metode numerice pentru simularea dinamicii sistemelor elastice cu constrângeri mecanice și ciocniri. S-au studiat metode numerice hibride analitico-numerice și integrarea ecuațiilor diferențiale particularizându-se la sisteme dinamice cu ciocniri. De asemenea este prezentată metoda elementelor finite la sisteme mecanice în contact, realizându-se o simulare în codul ANSYS LS-DYNA a unei aplicații numerice.

În **capitolul 4** sunt prezentate simularea vibrațiilor unor structuri cu discontinuități geometrice cu aplicații pe un inel, secționat și neseționat, de asemenea s-au realizat și cercetări experimentale.



În **capitolul 5** se face o evaluare globală asupra subiectului dezvoltat pe parcursul tezei, subliniindu-se utilitatea și noutatea abordării, indicându-se posibilitățile de dezvoltare ulterioară. Autoarea se oprește asupra contribuțiilor proprii în ceea ce privește abordarea subiectului și implementării unor noi aspecte, direcțiile de dezvoltare ulterioară rămânând deschise.

**Anexele** prezente în finalul tezei, conțin programele de calcul.

Lucrarea se extinde pe 121 pagini și conține:

- 191 ecuații matematice;
- 53 figuri ilustrative și grafice;
- 3 tabele;
- 5 anexe;
- 113 titluri bibliografice.

# Capitolul 2

## MODELE DE STUDIU ALE SISTEMELOR CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI

Majoritatea soluțiilor tehnice pentru mașini, utilaje, construcții industriale implică, pentru realizarea unor operații tehnologice, cuple cinematice între piesele mașinii. Cuplele cinematice pot fi de translație, de rotație plană sau sferică, de tip camă culegător, transmisii prin angrenaje, cuplaje, rulmenți și multe altele. Toate acestea ridică o problemă esențială cea a contactului între piesele în mișcare relativă impuse de cupla cinematică. Fiind vorba de mișcare, contactul între piesele cuplei cinematice se face prin forțe de legătură ce au atât componente statice cât și dinamice, componentele dinamice fiind de natură impulsivă.

Caracterizarea forței de contact ca impulsivă depinde de raportul dintre timpul de contact a celor două corpuri elastice în contact și perioada modului natural de vibrații având frecvența proprie cea mai înaltă în domeniul de frecvență ce prezintă interes. Dacă perioada acestui mod este mult mai mare decât durata contactului atunci forța de contact poate fi considerată de tip impulsiv sau percutantă.

### 2.1.Efecte locale în cazul ciocnirii a două corpuri

Astfel, pentru un sistem vibrant clasic cu un singur grad de libertate (Fig.2-1) compus dintr-un corp rigid de masă  $m$ , suspendată de un resort de constantă elastică  $k$ , la sistem adăugându-i-se un amortizor, cu frecare vâscoasă de constantă  $c$ , îi va corespunde o pulsație proprie

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

iar mișcarea armonică rezultată, în urma unei perturbații a sistemului considerat neamortizat ( $c=0$ ), în cazul de față printr-o lansare, la momentul  $t=0$ , dintr-o poziție comprimată a arcului cu  $x(t=0)=A$ , are forma

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) \quad (2.2)$$

vibrograma acestei legi fiind reprezentată prin curba 3 (Fig.2-1 b și c).

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.3)$$

Dacă la cota  $x=\delta$ , oarecare, în domeniul de oscilație al masei  $\pm A$  (în cazul de față  $\delta=0$ ) se plasează o structură plană rigidă  $S_2$ , între aceasta și o structură  $S_1$  fixată de masa  $m$ , ia naștere un contact și se dezvoltă o forță  $F_p(t)$ , de tip impulsiv, care durează atât cât există contact între cele două structuri.

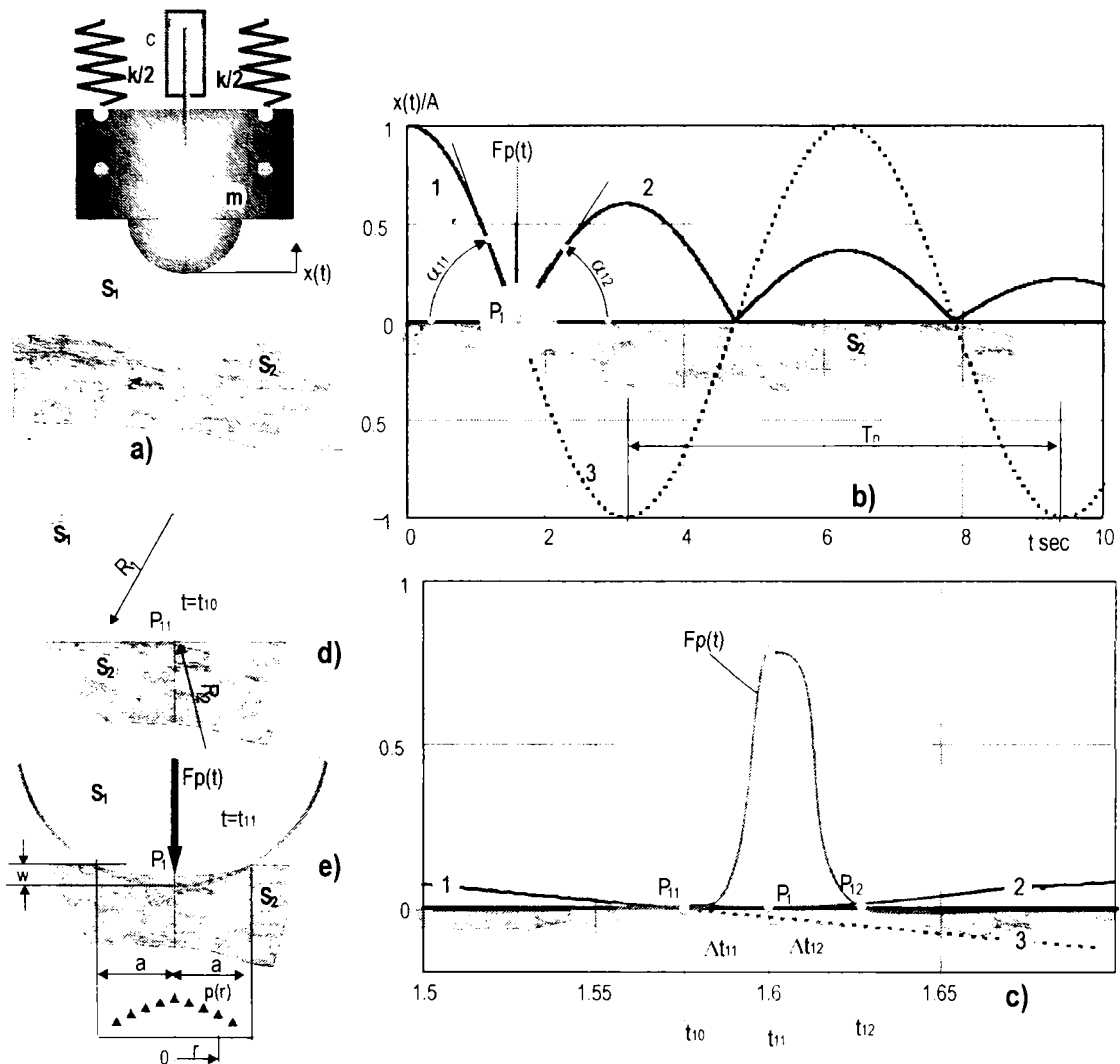


Fig.2-1 Ilustrarea contactului

Această forță numită percutantă, de legătură unilaterală între cele două suprafețe, este echilibrată în timpul contactului de:

- forțele de inerție  $-m\ddot{x}(t)$ ,
- forțele elastice  $-kx$ ,
- forțele de disipație  $-c\dot{x}$ .

Ultimele două forțe, elastică și de disipație cumulate, sunt neglijabile în comparație cu cea percutantă, astfel că

$$m\ddot{x}(t) = F_p(t), \tag{2.4}$$

$$t_{i0} < t < t_{i2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Prin integrare în intervalul ciocnirii se obține

$$m(v_{i0} - v_{i2}) = \int_{t_{i0}}^{t_{i2}} F_p(t) dt \quad (2.5)$$

unde integrala

$$P_i = \int_{t_{i0}}^{t_{i2}} F_p(t) dt = F_{pm}(t_{i2} - t_{i0}) \quad (2.6)$$

este numită percuție,  $v_{i0}$  și  $v_{i2}$  fiind vitezele la începutul și sfârșitul intervalului de contact. Raportul celor două viteze exprimă coeficientul de restituire

$$C_{Ri} = -\frac{v_{i2}}{v_{i0}} = \frac{tg\alpha_{i2}}{tg\alpha_{i1}} \quad (2.7)$$

Coeficientul de restituire poate fi considerat ca un indice global privind efectul percutant definind:

- pentru  $C_{Ri}=1$ , o ciocnire elastică,
  - pentru  $C_{Ri}=0$ , o ciocnire plastică,
  - o ciocnire naturală când  $0 < C_{Ri} < 1$ , caz des întâlnit în practică.
- Energia cedată în timpul unei percuții este dată de relația

$$\Delta E_c = \frac{m}{2}(v_{i0}^2 - v_{i2}^2) = \frac{m}{2}v_{i0}^2(1 - C_{Ri}^2) \quad (2.8)$$

Această energie este disipată prin deformări locale ale celor două structuri care, la rândul lor, o pot radia prin unde elastice mediului înconjurător sau prin transfer termic. La un contact perfect elastic, pentru care  $C_R=1$ , rezultă, normal,  $\Delta E_c=0$ , energia fiind restituită complet sistemului vibrant.

Contactul dintre cele două structuri elastice se face prin penetrare, sunt multe astfel de motive care fac ca rezolvarea problemelor de contact să preocupe încă un număr mare de cercetători. Prima teorie dezvoltată de Hertz (1881) consideră contactul elastic între două sfere de raze  $R_1$  și  $R_2$  comprimate la forța de contact  $F_p$ , acesta având o pată circulară de rază

$$a = \left[ \frac{3\pi F_p (k_1 + k_2)}{4 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.9)$$

unde

$$k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

$\nu_1$  și  $\nu_2$  fiind coeficienții lui Poisson corespunzători materialelor celor două structuri în contact. Pentru o structură  $S_2$  plană  $R_2 \rightarrow \infty$ , distribuția presiunii  $p(r)$  pe suprafața petei de contact, de-a lungul unei raze vectoriale  $r$  (Fig.2-1e) se presupune a fi după o lege eliptică

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (2.11)$$

$$0 < r < a$$

unde pentru  $r=0$ , atinge valoarea maximă  $p_0$  având expresia

$$p_0 = \frac{3F_p}{2\pi a^2} \quad (2.12)$$

Pentru un contact între doi cilindrii pe o linie de contact de lungime  $b$  legea de distribuție rămâne de forma (2.11) presiunea maximă având forma

$$p_0 = \frac{2F_p}{\pi ab} \quad (2.12)$$

și lățimea petei de contact

$$a = \left[ \frac{4F_p (k_1 + k_2)}{b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

În procesul de dezvoltare a contactului o mărime importantă este întrepătrunderea  $w$ , care exprimă apropierea celor două corpuri pe direcția normală la contact, forța de contact fiind exprimată prin relația

$$F_p = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rw^3} \quad (2.14)$$

unde  $E^*$  este modulul de elasticitate echivalent

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2.15)$$

și

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.16)$$

Întrepătrunderea  $w$  se poate exprima prin relația

$$w = \left( \frac{\pi p_0}{2E^*} \right)^2 R \quad (2.17)$$

care are o valoare critică,  $w_c$  la intrarea în zona plastică, pentru care îndepărtând sarcina se formează amprente pe cele două suprafețe în contact.

Forța de contact în domeniul plastic poate fi aproximată prin relația

$$F_{p\_c} \approx A_p H \quad (2.18)$$

unde  $A_p$  este aria suprafeței petei de contact plastic, iar  $H$  este duritatea materialelor

$$A_p = 2\pi R w \quad (2.19)$$

Chang W.R., Estion I. și Bogz D. B în lucrarea, An Elastic- Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces, ASME J Tribology 109, pp.257-263, consideră întrepătrunderea critică de forma

$$w_c = \left( \frac{\pi K H}{2E^*} \right)^2 R \quad (2.20)$$

unde  $K$  este un factor de duritate dat de relația  $K=0.454+0.41\nu$ ,  $H=2.8\sigma_{ms}$  și  $\sigma_{ms}$  fiind tensiunea von Mises

$$\sigma_{ms} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.21)$$

La fel, trecerea de la deformația elastică la cea plastică se face prin sarcina critică

$$F_{p-c} = \frac{4}{3} \left( \frac{R}{E^*} \right)^2 \left( \frac{C}{2} n \sigma_{ms} \right)^3 \quad (2.22)$$

unde  $C = 1.295 e^{0.736 v}$

În mod similar se definește o arie critică a contactului

$$A_{p-c} = n^3 \left( \frac{C \sigma_{ms}}{2 E^*} \right)^2 \quad (2.23)$$

Durata contactului este extrem de greu de aproximat, chiar și pentru structuri cu suprafețe simple de contact, cum ar fi la contactul dintre o placă circulară pe o suprafață plană [83].

În multe lucrări se presupune că forța percutantă de contact poate fi aproximată printr-un sfert de sinusoidă având perioada

$$T_p = 4 \Delta t \quad (2.24)$$

unde  $\Delta t$  e durata contactului (Fig.2-2).

Se consideră că pe acest interval de timp legea de pătrundere  $\delta(t)$  a percutorului de masă  $m$  se face respectând ecuația

$$m \ddot{\delta}(t) + K_C \delta(t) = 0 \quad (2.25)$$

unde  $K_C$  este constanta elastică echivalentă de deformare elastică a zonei de contact. Ecuația diferențială (2.25) admite soluția

$$\delta(t) = v_{i0} \sqrt{\frac{m}{K_C}} \sin \left( \sqrt{\frac{K_C}{m}} t \right) \quad (2.26)$$

$$0 \leq t \leq \Delta t$$

rezultând pentru începutul impactului, la  $t=0$ ,  $\delta(0)=0$  și  $\dot{\delta}(0) = v_{i0}$ , iar la sfârșitul intervalului, la  $t = \Delta t = \frac{T_p}{4}$ , unde

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_C}} \quad (2.27)$$

rezultând  $\delta(\Delta t)=0$  și  $\dot{\delta}(\Delta t) = v_{i2} = -v_{i0}$  cea ce impune un coeficient de restituire  $C_r=1$ , deci, corespunzător la o ciocnire perfect elastică, energia pierdută prin ciocnire  $\Delta E_c$ , conform relației (2.8), fiind nulă.

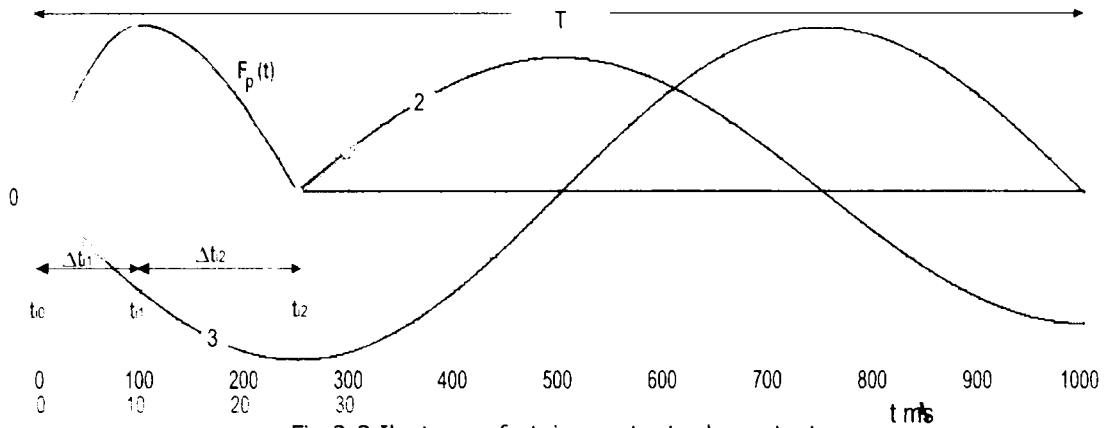


Fig.2-2 Ilustrarea forței percutante de contact

Pentru ciocnirea naturală  $0 < C_r < 1$ , se impune o modelare aparte pe perioada de timp  $t_{i0} \leq t \leq t_{i1}$ , considerată de comprimare, forța de contact se desfășoară după o pătrime a perioadei  $T_{p1}$  a unei legi de pătrundere

$$\delta_1(t) = |v_{i0}| \sqrt{\frac{m}{K_{c1}}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_{c1}}{m}} t\right) \quad (2.26)$$

$$0 \leq t \leq t_{i1} \quad \Delta t_1 = t_{i1} - t_{i0}$$

unde  $K_{c1}$  este constanta elastică echivalentă de deformare elastică a zonei de contact în faza de comprimare și legea

$$\delta_2(t) = |v_{i2}| \sqrt{\frac{m}{K_{c2}}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_{c2}}{m}} (t - t_{i1}) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.27)$$

$$t_{i1} \leq t \leq t_{i2}; \quad \Delta t_2 = t_{i2} - t_{i1}$$

în faza de decompresare.

Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească cele două funcții sunt

$$\delta_1(0) = 0; \quad \delta_2(t_{i2}) = 0; \quad \delta_1(t_{i1}) = \delta_2(t_{i1}) \quad (2.28)$$

la care se adaugă condițiile de periodicitate

$$T_{p1} = 4 \Delta t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{c1}}} \quad (2.29)$$

$$T_{p2} = 4 \Delta t_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{c2}}}$$

rezultând din (2.26)...(2.29)

$$\frac{|v_{i2}|}{|v_{i1}|} = \sqrt{\frac{K_{c2}}{K_{c1}}} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = C_R \quad (2.30)$$

Determinarea coeficientului de restituire se poate face cel mai bine pe cale experimentală. Astfel în cadrul Laboratorului pentru testări și cercetări pentru vibrații mecanice al catedrei de Mecanică și Vibrații s-a conceput și realizat un dispozitiv de excitare prin impact a structurilor mecanice în vederea determinării modurilor naturale de vibrații, deviațiile valorilor, în timp, ale frecvențelor proprii ale structurii unui pod fiind corelate cu degradările structurale, cum ar fi fisurările grinzilor de susținere [36].

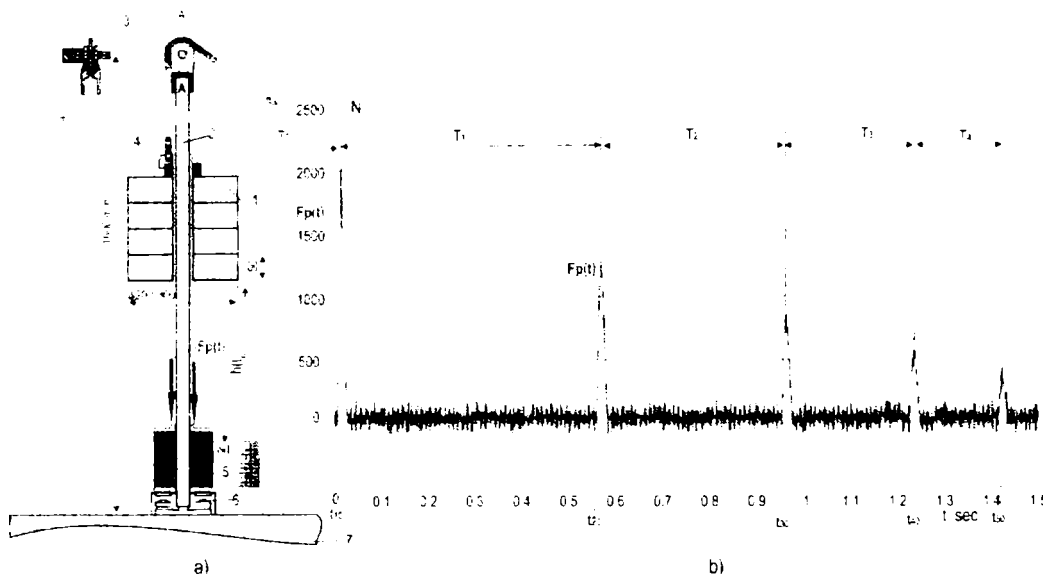


Fig.2-3 a) Dispozitiv de excitare prin impact a structurilor mecanice în vederea determinării modurilor naturale de vibrații; b) Diagrama forței percutante  $F_p(t)$

Dispozitivul se compune dintr-un grup de greutateți 1, de formă inelară, fixate între ele printr-o bucsă, care permite grupului o alunecare liberă pe verticală, ghidată pe un ax vertical 2. Cu ajutorul unui dispozitiv de ridicare 3, acționat manual, grupul de greutateți de masă totală  $m$  este ridicat la o înălțime inițială  $H_0$  poziția grupului la această înălțime fiind blocată prin dispozitivul, 4 care permite și declanșarea grupului masic 1. Acesta cade, liber, de la înălțimea  $H_0$  după legea uniform accelerată

$$h(t) = H_0 - g \frac{t^2}{2} \quad (2.31)$$

La  $h(t_{10}) = 0$ , pentru care

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \quad (2.32)$$

grupul întâlnește un limitator deformabil 5, din cauciuc sau plută. Acesta se deformează după legea de pătrundere  $\delta(t)$ , corespunzătoare celor două faze ale contactului. Viteza în prima fază a ciocnirii va fi

$$v_{10} = -\sqrt{2gH_0} \quad (2.33)$$

iar după ciocnire

$$v_{12} = C_r \sqrt{2gH_0} \quad (2.34)$$

mișcarea ascendentă continuând după legea

$$h(t) = v_{12}t - g \frac{t^2}{2} \quad (2.35)$$

devenind maximă pentru

$$t_1 = \frac{v_{12}}{g} \quad (2.36)$$

Considerând că revenirea grupului masic în cădere liberă se face cu forțe de legătură prin frecare neglijabile, durata căderii până la următorul contact va fi tot  $t_1$ , iar durata dintre primele două ciocniri fiind  $T_1 = 2t_1$ . Ea poate fi determinată cu



precizie bună din diagrama forței percutante  $F_p(t)$ , (Fig.2-3b), înregistrată în timp prin intermediul senzorului de forță 6.

Astfel din (2.36) și (2.35) se obțin două relații importante

$$v_{i2} = g \frac{T_i}{2} \quad (2.37)$$

cu care se poate determina viteza după prima ciocnire și

$$h(t_1) = H_1 = g \frac{T_1^2}{8} \quad (2.38)$$

Pentru percuția  $i$  vor rezulta

$$v_{i2} = g \frac{T_i}{2} \quad (2.39)$$

și

$$h(t_i) = H_i = g \frac{T_i^2}{8} \quad (2.40)$$

iar, în final, coeficientul de restituire

$$C_{Ri} = \frac{v_{i+1,2}}{v_{i2}} = \frac{T_{i+1}}{T_i} \quad (2.41)$$

Cu datele din diagrama forței percutante se obține valorile din tabelul 2-1. La prima vedere se observă că pentru coeficientul de restituire valorile obținute sunt foarte apropiate cu tendința de ușoară scădere funcție de viteza de ciocnire, valoarea medie fiind  $C_R=0.696$

Tabel 2-1

| Nr. șoc                      | 1      | 2      | 3     | 4     | 5     | Obs.                                     |
|------------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|------------------------------------------|
| $T_i$ [s]                    | 0.556  | 0.393  | 0.272 | 0.187 |       |                                          |
| $C_{Ri}$                     | -      | 0.707  | 0.692 | 0.688 | -     | medie 0.696                              |
| $H_i$ [m]                    | 0.782  | 0.379  | 0.189 | 0.091 | 0.043 |                                          |
| $v_{i0}$ [m/s]               | 3.859  | 2.728  | 1.928 | 1.334 | 0.917 |                                          |
| $v_{i2}$ [m/s]               | 2.728  | 1.928  | 1.334 | 0.917 | 0.631 |                                          |
| $m(v_{i0} - v_{i2})$<br>[Ns] | 22.612 | 16.01  | 11.87 | 8.339 | 5.375 | $m(v_{i0} - v_{i2}) =$                   |
| $P$ [Ns]                     | 23.219 | 16.558 | 11.2  | 7.858 | 4.709 | $= \int_{t_{i0}}^{t_{i2}} F_p(t) dt = P$ |

O analiză mai detaliată a forței percutante se poate face examinând formele impulsive corespunzătoare celor cinci șocuri înregistrate, forme suprapuse și extinse pe un interval de 25 milisecunde (Fig.2-4).

O primă constatare este aceea că, în acest caz, durata contactului este aproximativ egală pentru toate cele cinci șocuri de magnitudine diferită, având valoarea  $\Delta t=22$  ms, sumă a perioadei, de compresie,  $\Delta t_1=9$  ms și a celei de destindere  $\Delta t_2=13$  ms cea ce duce la o valoare a coeficientului de restituire, după relația (2.30), de  $C_R=0.692$ , valoric foarte apropiat de cea medie calculată cu relația (2.39).



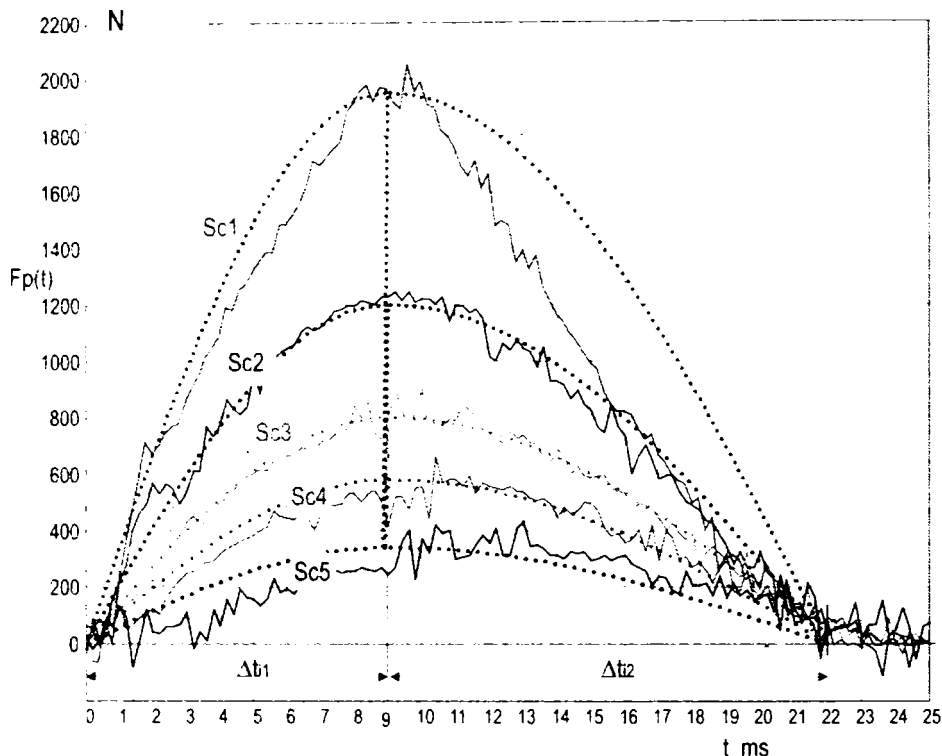


Fig. 2-4 Ilustrarea formei impulsive a forței percutante  $F_p(t)$  pentru cele 5 șocuri înregistrate

În ceea ce privește aproximarea formei impulsive a forței percutante  $F_p(t)$  prin două sferturi de sinusoidă, de perioade diferite racordate la vârful, se constată că aproximarea este mai clară pentru șocurile  $Sc_2$ ,  $Sc_3$ , și  $Sc_4$  dar slabă pentru primul șoc,  $Sc_1$ . Aceasta se explică prin relația neliniară dintre forța percutantă și deplasarea relativă sau penetrarea  $\delta$  pentru care o serie de lucrări dau forma

$$F_p = k\delta^n \quad (2.42)$$

unde  $k$  și  $n$  depind de o serie de factori de material și geometrici. Astfel, pentru ciocnirea sferelor Simon, [97] propune o formă hibridă

$$F_p = -k|\delta|^{1/2}(\delta + c|\delta|\dot{\delta}) \quad (2.43)$$

unde rigiditatea este

$$k = \frac{4}{3}E^*R^{*1/2} \quad (2.44)$$

Altă forma interesantă a fost introdusă de Hunt and Crossley [100], luând în considerare modelul neliniar cu disipare

$$m\ddot{\delta} + (\lambda\delta^n)\dot{\delta} + k\delta^n = 0 \quad (2.45)$$

cu o formă particulară pentru contact cu bilă

$$m\ddot{\delta} + k\delta^{3/2}\left(\frac{3}{2}\lambda\dot{\delta} + 1\right) = 0 \quad (2.46)$$

În cazul de față al ciocnirii plane am introdus următoarea ecuație diferențială neliniară

$$\ddot{\delta} + \lambda\frac{k}{m}\delta^n = 0 \quad (2.47)$$

unde parametrii:  $k$ , constanta elastică echivalentă și coeficienții  $\lambda$  și  $n$  s-au determinat prin identificarea lor după diagrama forței percutante,  $F_p(t)$  determinată experimental, impusă de forma

$$F_p(t) = \lambda k \delta^n \quad (2.48)$$

Pentru identificare s-a luat primul șoc a cărui diagramă a forței percutante  $F_p(t)$  este reprezentată în Fig.2-5a. Rezolvarea ecuației diferențiale s-a făcut pe cale numerică utilizând metoda Runge Kutta de ordinul 4 implementată ca subrutină în programul Mathcad. Pentru intervalul de timp  $\Delta t_1 = 9.2 \text{ms}$ , al fazei de compresie se apelează la subrutina

$$S1 := \text{rkfixed}\left(\text{ic1}, 0, \frac{\Delta t_1}{1000}, 500, F1\right)$$

unde

$$\text{ic1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2.88 \end{pmatrix}$$

este vectorul condițiilor inițiale conținând, pentru  $t=0$   $\delta(0)=0$  și viteza inițială  $\dot{\delta}(0) = 2.88 \text{ m/s}$

Funcția de intrare în subrutină  $F_1$ , este o matrice funcțională

$$F1(\Delta t_1, X1) := \begin{bmatrix} X1_1 \\ -1 \cdot (X1_0)^{n1} \cdot \frac{k1 \cdot \lambda 1}{m} \end{bmatrix}$$

iar funcția de ieșire  $S1$  este matricea șirului de valori

|      | i   | t                      | $\delta(t)$ | $d\delta(t)/dt$ |
|------|-----|------------------------|-------------|-----------------|
| S1 = | 279 | $5.1336 \cdot 10^{-3}$ | 0.01388     | 2.1949          |
|      | 280 | $5.152 \cdot 10^{-3}$  | 0.01392     | 2.18795         |
|      | 081 | $5.1704 \cdot 10^{-3}$ | 0.01396     | 2.18095         |

ale timpului  $t$ , pătrunderii  $\delta(t)$  și ale vitezei de pătrundere  $\dot{\delta}(t)$

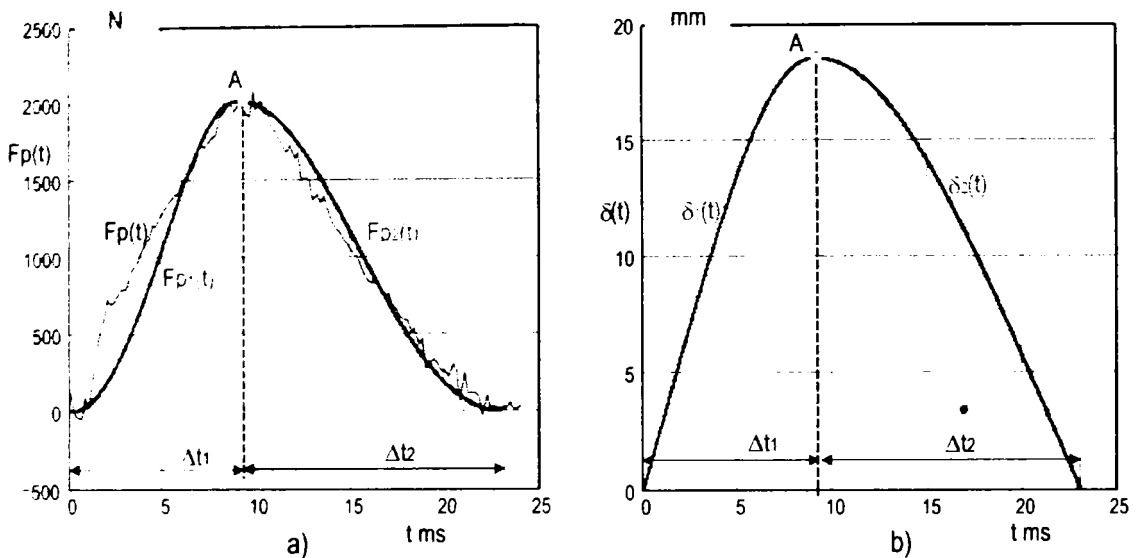


Fig.2-5 a) Ilustrarea forței percutante  $F_p(t)$ , b) Ilustrarea funcției de pătrundere  $\delta(t)$  (pentru cele două faze de pătrundere și respectiv de destindere)

Forța percutantă se determină cu relația

$$F_{p1i1} := \left( S_{1i1,1} \right)^{n1} \cdot \frac{k1}{m} \cdot \lambda 1$$

Printr-o succesiune de iterații s-au identificat parametrii  $n1=2.01$  și  $\lambda 1 = 70$  cu ajutorul cărora s-au trasat ramurile funcțiilor  $\delta(t)$  și  $F_p(t)$ , identificate pe baza diagramei experimentale a forței percutante. Pentru faza de destindere parametrii identificați au valorile  $n2=2.02$  și  $\lambda 1 = 70$

Ca o concluzie importantă a celor demonstrate mai sus este aceea că diagrama forței percutante fiind cunoscută permite determinarea tuturor parametrilor legați de efectul percutant local.

Efectul percuției este mult mai complex când axa vitezei relative  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  (Fig.2-6a) nu este normală comună la cele două suprafețe în contact, apărând ciocnirea oblică, între cele două corpuri intervenind atât forțe de legătură normale  $F_{ni}$  cât și tangențiale  $F_{ti}$ , în zone de contact  $P_{ai}$  distribuite aleatoriu în zona de interfață a celor două corpuri.

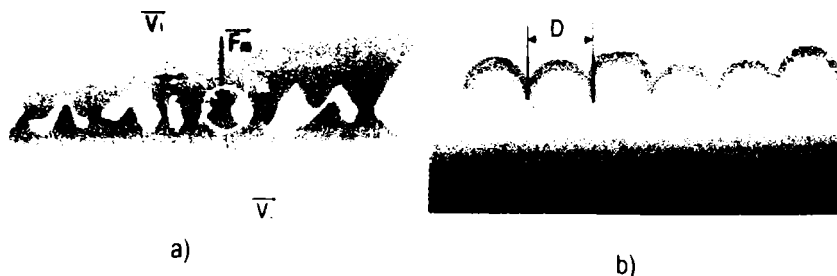


Fig. 2-6 Contact cu microasperități

Modelarea microasperităților suprafețelor în contact prezintă mare interes pentru mecanica contactului cu frecării și în studiul uzurii. Pentru aceasta sunt aplicate metode statistice, luându-se în considerare atât distribuția în înălțime a asperităților cât și spectrul asperităților de-a lungul petei de contact, utilizând transformata bidimensională Fourier[100]. Suprafețele de contact sunt considerate formate din sfere (Fig.2-6), de același diametru  $d$ , distribuite Gaussian, atât în înălțime cât și în amplasament de-a lungul zonei de contact. Pe acest model se aplică metoda elementului finit. Metoda de calcul e mult mai puțin costisitoare decât aplicarea modelului deterministic real, după profilograma asperităților. Metoda este aplicată pentru studiul elementelor de contact electric. Alte metode folosesc metode fractale de modelare a rugozităților suprafețelor în contact.

### 2.2.Efecte energetice în cazul sistemelor de corpuri elastice

Efectul percutant local produce un transfer de energie care, în cazul sistemelor de corpuri în coliziune, supuse la legături ideale, rezultă, conform teoremei lui Carnot

$$\Delta E_c = \sum_i \frac{m_i}{2} (v_{i0} - v_{i2})^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} v_{i0}^2 (1 - C_{Ri})^2 \quad (2.49)$$

energie care este preluată de sistemul de corpuri și trecută într-o formă de energie de deformare a celor două corpuri.

Astfel dacă o sferă  $S_f$  de masă  $m$ , considerată rigidă, (Fig.2-7) percutează un corp elastic  $C_e$ , într-un punct  $P_i$  al corpului elastic, de masă  $m_c$ , mult mai mare decât  $m$  atunci energia cinetică transferată corpului elastic va fi de forma (2.8)

$$\Delta E_c = \frac{m}{2} (v_{i0}^2 - v_{i2}^2) = \frac{m}{2} v_{i0}^2 (1 - C_{Ri}^2)$$

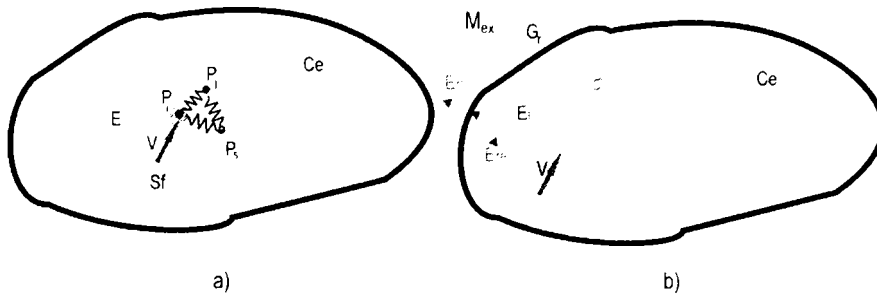


Fig. 2-7 Ilustrarea transferului energetic

Prin forța percutantă ce acționează într-un interval scurt de timp  $\Delta t$ , în punctul  $P_i$  de contact și în cele învecinate  $P_j$  și  $P_s$  iau naștere deformări locale ale structurii, creându-se deplasări relative  $\delta(\overline{P_i P_j(t)})$ ,  $\delta(\overline{P_i P_s(t)})$ ,  $\delta(\overline{P_j P_s(t)})$ .....

Datorită legăturilor elastice între aceste puncte materiale se înmagazinează, în zonă de contact, pe durata contactului, o energie de deformare

$$E_d(t) = \frac{1}{2} k_{ij} (\delta(\overline{P_i P_j(t)}))^2 + \frac{1}{2} k_{is} (\delta(\overline{P_i P_s(t)}))^2 + \frac{1}{2} k_{js} (\delta(\overline{P_j P_s(t)}))^2 + \dots + \quad (2.50)$$

egală cu energia cinetică cedată  $\Delta E_c$ ,  $k_{ij}$  fiind constanta elastică a legăturii elastice dintre punctul  $P_i$  și  $P_j$ .

Transferul energetic este asociat undelor elastice ce sunt inițiate în zona de contact, ele propagându-se de-a lungul corpului. La interfața corpului cu mediul înconjurător  $M_{ex}$ , considerat tot elastic, o parte din energie  $E_{re}$  se întoarce, prin reflexia unei elastice în interiorul corpului creându-se mișcări oscilatorii ale acestuia, mișcări oscilatorii după modurile naturale de vibrații ale structuri, iar diferența de energie este cedată ( $\Delta E_c - E_{re} = E_{rf}$ ) acestui mediu prin refracție, energia  $E_{rf}$  fiind radiată de suprafața corpului în mediul elastic, prin unde elastice, după legile de propagare în acest mediu.

Undele acustice refractate în mediu elastic gazos conțin componente ce au aceleași frecvențe ca și modurile naturale ale corpului radiant, păstrând spectrul inițial de șoc al undei de presiune care ajunge la un observator plasat la o distanță oarecare în mediu respectiv cu spectru modificat doar în magnitudine, datorită procesului de atenuare.

Astfel, la ciocnirea unei sfere cu un corp elastic plasat în aer, suprafața acestuia radiază unde de presiune care sunt înregistrate de urechea unui observator s-au pot fi captate de un microfon plasat în apropierea obiectului ciocnit.

Dacă corpul elastic este plasat în vid efectul de refracție nu se produce, iar dacă corpul percutat este perfect elastic energia  $\Delta E_c$  rămâne în interiorul corpului și la orice moment  $t$  echilibrul energetic este exprimat prin relația

$$\Delta E_c = \sum_{ij} E_{c_{ij}}(t) + \sum_{ij} E_{p_{ij}}(t) = ct. \quad (2.51)$$

din care rezultă că, variația uneia sau a mai multora dintre componentele energetice este compensată energetic prin variațiile în sens invers ale celorlalte componente, dezvoltându-se unde elastice, ce se propagă de-a lungul corpului rezultând prin reflexia undelor mișcări oscilatorii periodice după modurile naturale de vibrații ale corpului.

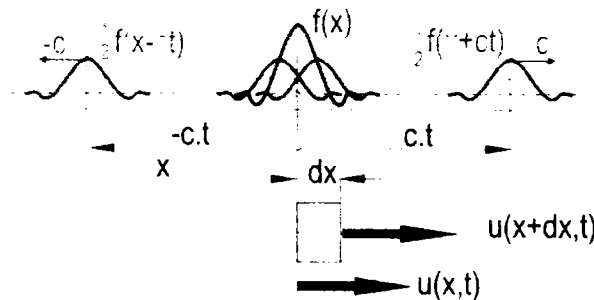


Fig.2-8 Ilustrarea undelor elastice longitudinale la o bară de lungime infinită

Astfel, mișcările longitudinale elastice ale unei bare (Fig.2-8) se realizează respectând ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.52)$$

unde  $u(x,t)$  este deplasarea axială în secțiunea  $x$  la timpul  $t$ , iar

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.53)$$

este viteza de propagare a undei elastice longitudinale,  $E$  modulul de elasticitate și  $\rho$  masa pe unitatea de lungime.

Din punct de vedere matematic, ecuația diferențială (2.52) admite o largă familie de soluții  $u(x,t)$  reprezentând legea de mișcarea longitudinală a punctelor din secțiunea de la cota  $x$  la momentul  $t$ . Soluțiile depind de condițiile inițiale la momentul  $t=0$ , impuse deplasărilor și vitezelor

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \dot{u}(x,0) &= g(x) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Soluția generală are forma explicită pentru bara de secțiune constantă

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^*(a) \left( e^{-j(x+ct)a} + e^{-j(x-ct)a} \right) da \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^*(a)}{jca} \left( e^{-j(x+ct)a} - e^{-j(x-ct)a} \right) da \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

unde

$$\begin{aligned} f^*(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jax} dx \\ g^*(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{jax} dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

sunt două funcții imagine, care, pentru bara de lungime infinită, sunt de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(a) e^{-j(x \pm ct)a} da = f(x \pm ct) \quad (2.55)$$

și considerând, în primă instanță, condiții inițiale de viteze nule,  $g(x) = \dot{u}(x,0) = 0$  se va obține soluția generală a ecuației diferențiale care este de forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \quad (2.56)$$

Astfel, dacă într-o regiune mărginită de cotele  $x_{01}$  și  $x_{02}$  se creează o stare constrânsă care produce deplasări statice, după legea de repartiție  $f(x)$ , (Fig.2-8) atunci la eliberarea constrângerii iau naștere două unde având legile

$$\begin{aligned} u_+(x,t) &= \frac{1}{2} f(x-ct) \\ u_-(x,t) &= \frac{1}{2} f(x+ct) \end{aligned} \quad (2.57)$$

și care se mișcă în sens contrar păstrându-și nemodificată forma.

În cazul real al barei limitată la o lungime  $L$  (Fig.2-9) legea de mișcare  $u(x,t)$  poate fi formulată ca o sumă modală

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) U_i(x) \quad (2.58)$$

unde  $q_i$  este o funcție armonică de timp

$$q_i(t) = q_{0i} \cos(\omega_i t) \quad (2.59)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

unde  $\omega_i$  este pulsația celui de al  $i$ -lea mod natural de vibrații ale barei.

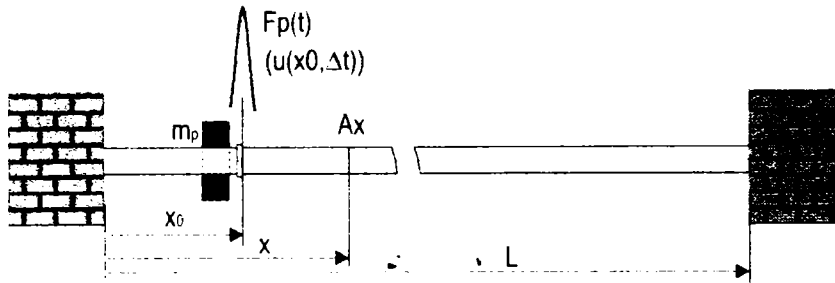


Fig.2-9 Ilustrarea inițierii unei unde elastice longitudinale la o bară de lungime finită

Amplitudinea  $q_{0i}$  și funcția de formă  $U_i(x)$  ale modului  $i$  sunt determinate din condițiile inițiale și de margine. Astfel, în cazul barei blocată la ambele capete la orice moment

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ \dot{u}(0, t) &= \dot{u}(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Condiții suplimentare pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile de formă se obțin din condiții energetice.

Astfel considerând bara ca un sistem conservativ, energia  $\Delta E_c$  introdusă la momentul  $t=0$  printr-o percuție aplicată axial la un moment dat într-o secțiune de-a lungul barei aceasta rămâne tot timpul în interiorul sistemului astfel că

$$E_c + E_p = \Delta E_c = ct \quad (2.61)$$

unde în cazul barei energia cinetică  $E_c$  și energia potențială (de deformație)  $E_p$  au formele

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 A_x dx \quad (2.62)$$

și

$$E_p = \frac{1}{2} E \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 A_x dx \quad (2.63)$$

care, ținând cont de (2.58) și (2.59), devin

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j}^N (q_{0i} q_{0j} \omega_i \omega_j \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t)) \int_0^L U_i(x) U_j(x) A_x dx \quad (2.64)$$

$$E_p = \frac{1}{2} E \sum_{i,j}^N q_{0i} q_{0j} \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) \int_0^L \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} A_x dx \quad (2.65)$$

unde

$$\begin{aligned} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_i - \omega_j)t - \cos(\omega_i + \omega_j)t] \\ \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_i - \omega_j)t + \cos(\omega_i + \omega_j)t] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Condiția (2.61) ca energia introdusă într-un sistem conservativ să rămână în sistem impune ca toți factorii termenilor variabili  $\cos(\omega_i - \omega_j)$  și  $\cos(\omega_i + \omega_j)$  să fie zero la orice moment  $t$ , rezultând, pentru  $i \neq j$ , cunoscutele relații de ortogonalitate ale modurilor naturale de vibrații



$$\int_0^L U_i(x)U_j(x)A_x dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} \frac{\partial U_j(x)}{\partial x} A_x dx = 0 \quad (2.67)$$

și pentru  $i=j$

$$\omega_i^2 = \frac{E \int_0^L \left( \frac{\partial U_i(x)}{\partial x} \right)^2 A_x dx}{\rho \int_0^L (U_i(x))^2 A_x dx} \quad (2.68)$$

relația lui Rayleigh.

Condițiile de margine pentru bara de secțiune constantă  $A_x=A_0$  fixată la ambele capete conduc la ecuația

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)] \sin \frac{inx}{L} \quad (2.69)$$

Îndeplinind condițiile de margine

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2.70)$$

la  $t=0$  rezultă din (2.69)

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sin \frac{inx}{L} \quad (2.71)$$

$$\dot{u}(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i C_i \sin \frac{inx}{L}$$

Înmulțind cele două relații cu  $\sin \frac{inx}{L}$  și aplicare operatorului de integrare  $\int_0^L (\ ) dx$  se obțin constantele

$$C_i = \frac{2}{L\omega_i} \int_0^L \dot{u}(x, 0) \sin \frac{inx}{L} dx$$

$$D_i = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin \frac{inx}{L} dx \quad (2.72)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, \infty$

Funcția formei modale a modului  $i$  este

$$U_i(x) = \sin \frac{inx}{L} \quad (2.73)$$

cu ajutorul căreia se poate determina, din (2.68), pulsația proprie a modului  $i$

$$\omega_i = \frac{in}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{in}{L} c \quad (2.74)$$

unde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.75)$$

este viteza de propagare a unei unde elastice de-a lungul barei.

Inițierea unei unde elastice, poate fi realizată prin, aplicarea unei forțe impulsive aplicată printr-un inel de masă  $m_p$ , (Fig.2-9), care percutază, la

momentul  $t=0$ , cu viteza  $v_0$  un guler al barei, forța percutantă  $F_p(t)$  având o durată scurtă de timp,  $\Delta t$ , în care se produce o deformare locală  $\Delta u(x,0)$ , inițiatorul undei.

Astfel, dacă în imediata apropiere a capătului barei (Fig.2-10), la cota 0.2 m, se aplică un șoc, se va produce o deformare locală pe o porțiune de 0.6 m de unde se inițiază unda elastică.

Pentru a ilustra modul de propagare a undei au fost alese cinci secțiuni  $S_1, \dots, S_5$ , având cotele 0.2, 10, 20, 30, 39.8 m, pentru care s-au calculat, conform relației (2.69), legile de mișcare

$$u(x_s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos(\omega_i t) \sin \frac{i\pi x_s}{L} \quad (2.69')$$

$s = 1, 2, 3, 4, 5$

coeficienții  $D_i$ , ( $i=1, 2, 3, \dots, 50$ ) pentru primele 50 de moduri naturale fiind calculate cu ajutorul integralei (2.72)

$$D_i = \frac{2}{L} \int_0^L \Delta u(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{L} dx \quad (2.72')$$

$i = 1, 2, 3, \dots, 50$

Reprezentarea grafică (Fig.2-10) pune în evidență, cu claritate, propagarea cu viteză constantă a undei elastice inițiată în secțiunea  $S_1$  la cota 0.2 m (pentru oțel -  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^{11}}{7850}} = 5.172 \frac{m}{s}$ ). Astfel, pornind de la această cotă în imediată vecinătate a capătului de sus, fix, al barei, punctul 1, ea ajunge în punctul 2 la capătul celălalt al barei, secțiunea  $S_5$  după  $T_b = 7.734$  ms, corespunzătoare unei viteze de propagare constantă  $c = L/T_b = 5.173$  m/s.

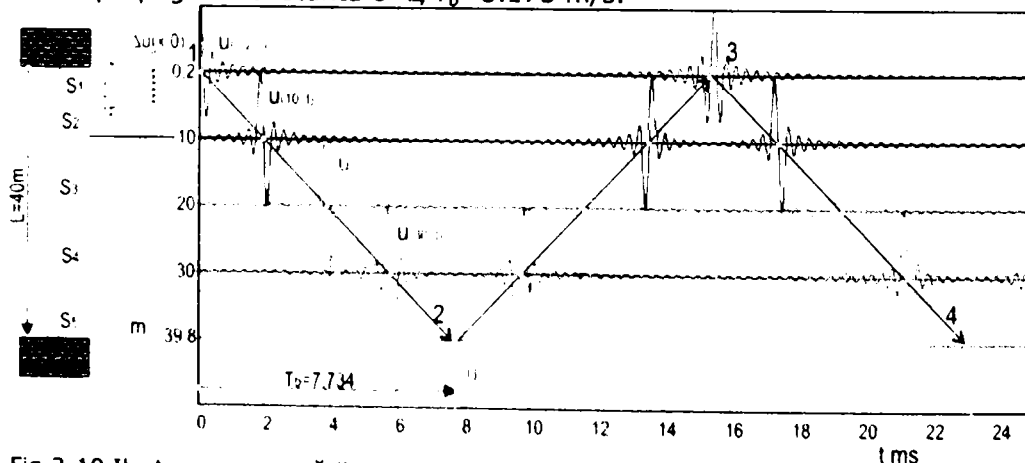


Fig.2-10 Ilustrarea propagării undei elastice de-a lungul barei de lungime finită, excitată impulsiv la un capăt

Din secțiunea de capăt  $S_5$  (punctul 2) unda se reîntoarce, prin reflexie, la capătul din care a pornit, (punct 3), cu aceeași viteză constantă  $c$ , urmând același ciclu la infinit, energia inițială introdusă în sistemul elastic, considerat conservativ, fiind nedisipată.

Analizând unda incipientă  $u(0.2, t)$  (Fig.2-11a), formată la momentul  $t=0$ , se constată că aceasta corespunde unei forme amortizate, justificată prin transferul energetic ce însoțește unda. Spectrul în frecvență (Fig.2-11b) relevă o componentă

spectrală dominantă la frecvența de 3233 Hz, egală cu frecvența celui de al 50-lea mod natural de vibrații al barei.

Unda  $u(10,t)$ , (Fig.2-11c) care trece prin secțiunea de la cota 10m acumulează energie care este maximă la momentul  $t=1.933\text{ms}$ , corespunzătoare duratei de propagare a undei dintre secțiunile  $S_1$  și  $S_2$ .

În secțiunea de capăt,  $S_5$ , la cota 39.8 m, unda  $u(39.8,t)$  relevă prin forma ei (cu două vârfuri pozitive) efectul de reflexie (Fig.2-11d).

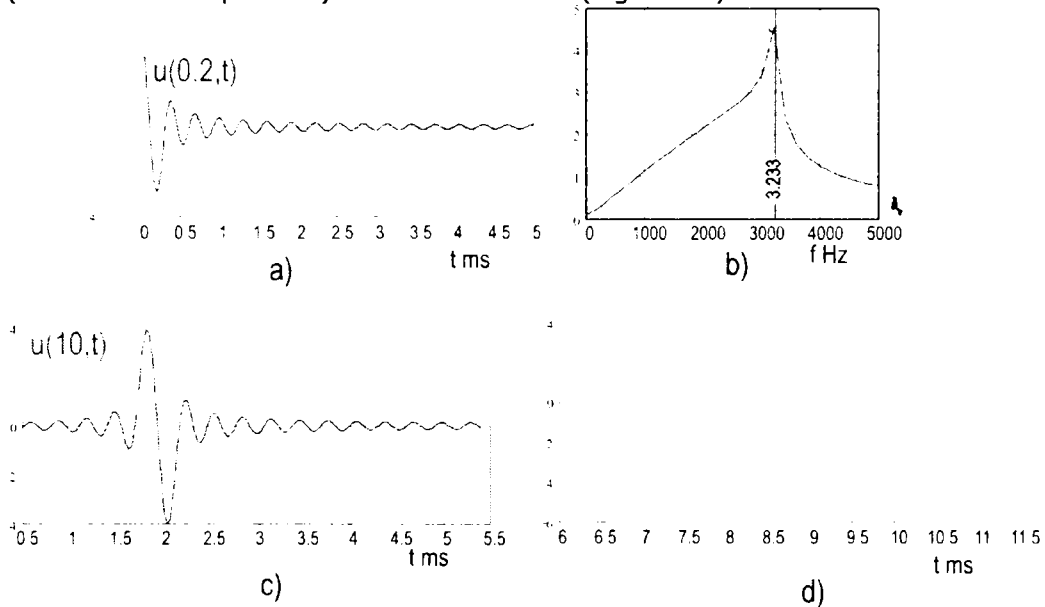


Fig.2-11 Detalii ale propagării undei prin trei secțiuni ale barei

La cotele: a) 0.2 m; b) spectrul semnalului de la a); c) 10 m; d) 39.8 m

Dacă excitația se aplică în zona de mijloc (Fig.2-12) a barei atunci unda incipientă formată în secțiunea  $S_3$ , se desparte și aici în două componente simetrice care se propagă în sens contrar, cu aceeași viteză  $c$ , ajungând în același timp (punctele 2 și 3) la extremitățile fixe ale barei, de unde se reflectă simultan, ajungând în secțiunea  $S_3$  (punctul 4) unde se recombina pentru un moment, și se desprind continuându-și deplasarea spre capetele barei, urmând un nou ciclu, ce se repetă la infinit.

Excitarea primelor moduri naturale de vibrații se face dacă funcția inițială este extinsă pe întreaga lungime a barei. Astfel, pentru o funcție inițială sinusoidală

$$\Delta u(x,0) = \sin \frac{in\pi x}{L} \quad (2.76)$$

se obțin mișcări armonice vibratorii longitudinale, (Fig.2-13) amplitudinile mișcărilor vibratorii fiind modulate în magnitudine de această funcție.

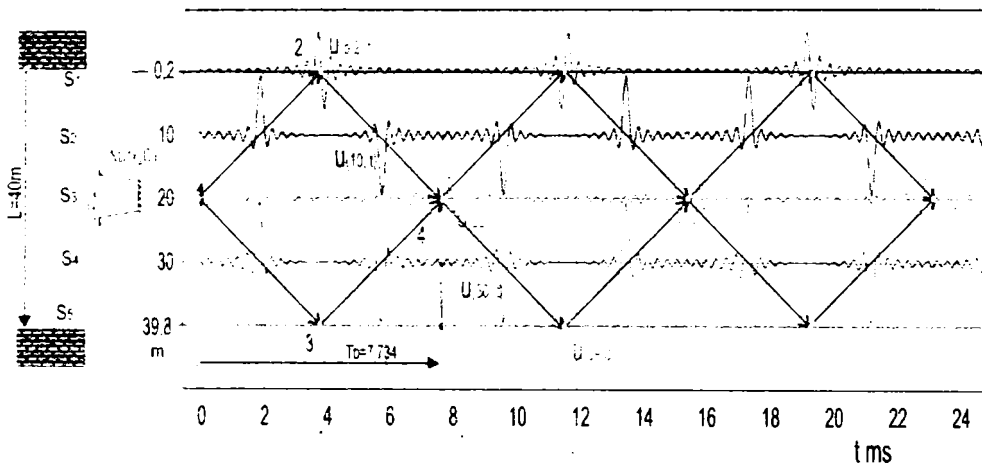


Fig.2-12 Ilustrarea propagării unei elastice de-a lungul barei de lungime finită, excitată impulsiv la mijlocul barei

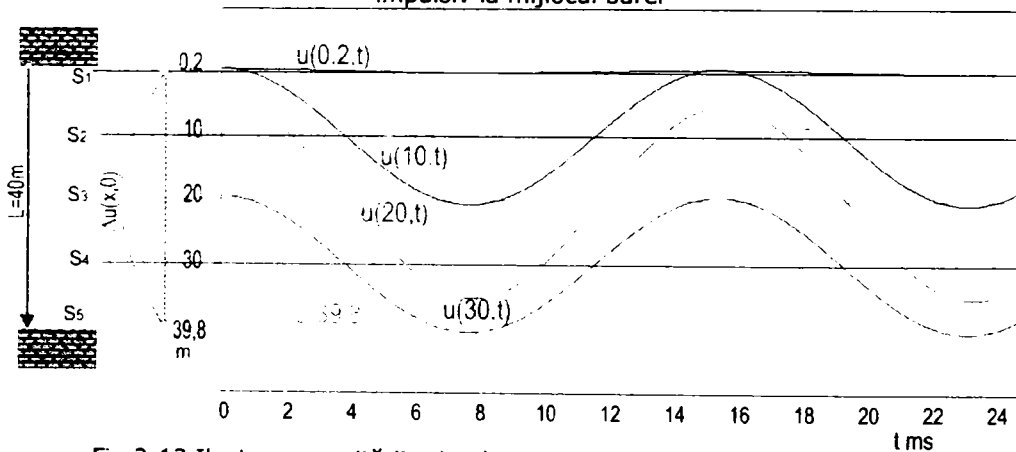


Fig.2-13 Ilustrarea excitării primului mod de vibrații longitudinale al barei

În mod practic, excitarea modurilor joase la o structură se poate face prin aplicarea unei forțe treaptă. Astfel dacă la mijlocul barei în secțiunea  $S_3$  se aplică o forță statică  $F_0$ , prin intermediul unui guler plasat în această secțiune, și la momentul  $t=0$  se eliberează brusc atunci stare inițială de deformare este de forma

$$\epsilon = s \frac{F_0}{2EA}$$

$$s = 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq L/2 \tag{2.77}$$

$$s = -1 \Rightarrow L/2 \leq x \leq L$$

fiind constantă în modul, dar pozitivă (întindere) pe porțiunea  $0 \rightarrow L/2$  și negativă (de compresiune) pe porțiunea  $L/2 \rightarrow L$ .

Deplasarea axială a unei secțiuni situată la cota  $x$  pe prima porțiune va fi

$$\Delta u(x,0) = \frac{F_0}{2EA} \int_0^x dx = \frac{F_0}{2EA} x \tag{2.78}$$

$$0 \leq x \leq L/2$$

și

$$\Delta u(x, 0) = \frac{F_0}{2EA} \left( \frac{L}{2} - \int_{L/2}^x dx \right) = \frac{F_0}{2EA} (L - x) \quad (2.79)$$

$L/2 \leq x \leq L$

pentru a două porțiuni, rezultând o funcție triunghiulară (Fig.2-14).

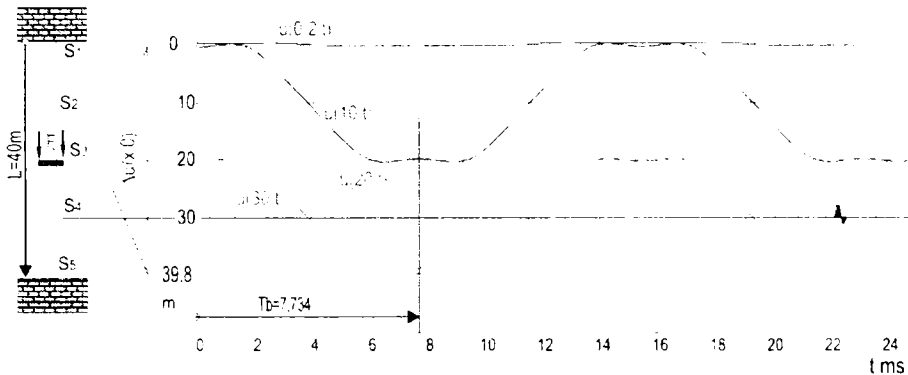


Fig.2-14 Ilustrarea excitării primelor moduri naturale de vibrații longitudinale ale unei bare prin excitare de tip treaptă

Forța treaptă  $F_0$  se realizează prin ruperea unei legături aplicată în secțiunea  $S_3$  care în mod practic nu se poate realiza brusc, deoarece legătura e tot elastică. Astfel pentru determinarea frecvențelor proprii ale unei structuri uriașe, așa cum este o platformă marină, se leagă un cablu de un vas care introduce o forță de tracțiune în cablu care se eliberează brusc prin detonarea unui exploziv amplasat pe cablu.

## 2.3.Ecuatiile fundamentale ale ciocnirii corpurilor deformabile

Ciocnirile corpurilor solide reprezintă un fenomen complex, studiat de mulți autori, începând cu Galileo Galilei. La dezvoltarea teoriei ciocnirii corpurilor, contribuții importante sunt, așa cum s-a arătat, datorate lui H. Hertz, care a studiat deformațiile de contact ale corpurilor elastice. Apoi, I.I.Staerman rezolvă problema statică generalizată a contactului strâns dintre corpuri. Pe de altă parte Saint-Venant și Boussinescq au soluționat problema ciocnirii longitudinale a grinzii, ceea ce a permis examinarea propagării undelor de deformație de-a lungul ei. În plus Saint-Venant a dezvoltat și teoria ciocnirii la încovoiere, ținând seama numai de deformațiile generale ale grinzii.

Majoritatea acestor studii s-au mărginit la studiul deformațiilor de contact, care constituie condițiile de inițiere a undelor elastice ce se transmit în masa corpului elastic. Deci, există două faze în studiul ciocnirii corpurilor deformabile. Prima fază este cea a contactului dintre corpuri, de exemplu al ciocnirii dintre corpul C (Fig.2-15) percutat de corpul  $C_p$ , în timpul contactului luând naștere o zonă de contact  $Z_p$  în care se înmagazinează energia cedată prin ciocnire.

Studiul ciocniri corpurilor rigide se bazează pe ipotezele simplificatoare privind existența forțelor percutante de intensitate foarte mare însă numai pe durata scurtă a ciocnirii. Astfel se pot calcula salturile de viteză necesare determinării mișcării ulterioare, poziția corpului fiind considerată nemodificată pe durata ciocnirii.

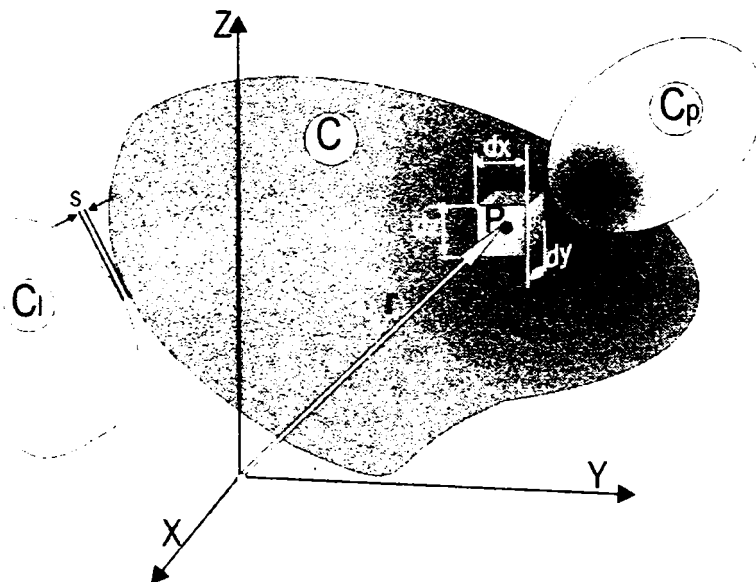


Fig.2-15 Ilustrarea ciocnirii corpurilor deformabile

În timpul ciocniri se fac aceleași ipoteze simplificatorii ca la ciocnirea corpurilor rigide la care se adaugă ipoteza propagării instantanee a impulsurilor de ciocnire[90].

Sistemul complet de ecuații al elastodinamicii care se utilizează la studiul corpului deformabil supus ciocnirilor conține 15 funcții necunoscute (6 tensiuni, 6 deformații specifice și 3 deplasări) și este alcătuit din:

- > 3 ecuații de mișcare,
- > 6 relații între deformații specifice și deplasări (ecuațiile lui Cauchy),
- > 6 relații ale lui Hooke,

la care trebuie adăugate condițiile la limită (condițiile pe contur și condițiile inițiale).

Într-un punct P al corpului C deformabil vitezele sale  $v_x$ ,  $v_y$  și  $v_z$ , față de un sistem de axe fixe OXYZ se supun cunoscutului sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z\end{aligned}\quad (2.80)$$

unde  $\rho$  este masa specifică pe unitatea de volum,  $F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$  sunt componentele forțelor masice, iar  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , și  $\sigma_{zz}$ , sunt tensiunile normale,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , și  $\tau_{yz}$ , fiind tensiunile tangențial (tăietoare), tensiuni ce se dezvoltă pe suprafețele paralelipipedului elementar, cu laturile  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$ , și centrul în punctul P.

În intervalul foarte scurt al ciocnirii  $[t_0, t_1]$ , apare variația bruscă a vitezei  $v$  a punctului P, de componente  $(V_x, V_y, V_z)$ , de forma

$$\Delta v = \bar{v}_1 - \bar{v}_0 \quad (2.81)$$

în care  $\bar{v}_0$  și  $\bar{v}_1$  sunt vitezele punctului la începutul, respectiv, la sfârșitul ciocnirii. Formele impulsive ale tensiunilor impune calculul impulsurilor acestora

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx}(t) dt & p_{xy} &= \int_{t_0}^{t_1} \tau_{zy}(t) dt \\
p_{yy} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy}(t) dt & p_{yz} &= \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xz}(t) dt \\
p_{zz} &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{zz}(t) dt & p_{zx} &= \int_{t_0}^{t_1} \tau_{yx}(t) dt
\end{aligned} \tag{2.82}$$

care sub o formă compactă li se asociază tensorul

$$T_p = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

Deoarece modificarea poziției fiecărui punct în timpul ciocnirii se presupune neglijabilă, impulsurile tensiunilor satisfac egalitățile

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{xx}(t)}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{xx}(t) dt = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \\
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{yy}(t)}{\partial y} dt &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{yy}(t) dt = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.84a}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \sigma_{zz}(t)}{\partial z} dt &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_{zz}(t) dt = \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \\
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tau_{zy}(t)}{\partial y} dt &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^{t_1} \tau_{zy}(t) dt = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \\
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tau_{xz}(t)}{\partial z} dt &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_0}^{t_1} \tau_{xz}(t) dt = \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\
\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \tau_{yx}(t)}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^{t_1} \tau_{yx}(t) dt = \frac{\partial p_{xz}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.84b}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} X(t) dt = P_x$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt = P_y \quad (2.84c)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt = P_z$$

în care  $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$  este o percuție introdusă de forța elementară masică în punctul P.

Cu aceste notații, prin integrarea ecuațiilor diferențiale (2.80) pe durata  $[t_0, t_1]$ , a fenomenului de ciocnire, se deduce

$$\rho \Delta v_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + P_x$$

$$\rho \Delta v_y = \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + P_y \quad (2.85)$$

$$\rho \Delta v_z = \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + P_z$$

în care se poate neglija, percuția  $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$  forțele masice neavând caracter de forțe percutante.

Ecuațiile (2.85) sunt fundamentale pentru studiul ciocnirii corpului deformabil ce poate fi considerat sub acțiunea unui câmp de impulsuri presupuse transmise instantaneu în întregul corp.

Efectul ciocnirii influențează și starea de deformare a corpului astfel că vitezele acestora

$$e_{xx} = \frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du_x}{dt} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.86)$$

și mai departe, în aceeași manieră

$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

restul vitezelor de deformare fiind

$$e_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (2.87)$$

$$e_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Variația vitezei specifice de deformare



$$\begin{aligned}\Delta e_{xx} &= e_{xx}^1 - e_{xx}^0 = \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} = \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial x} = \frac{\partial(\Delta v_x)}{\partial x} \\ \Delta e_{yy} &= e_{yy}^1 - e_{yy}^0 = \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} = \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial y} = \frac{\partial(\Delta v_y)}{\partial y} \\ \Delta e_{zz} &= e_{zz}^1 - e_{zz}^0 = \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial z} = \frac{\partial(\Delta v_z)}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.88a)$$

$$\begin{aligned}\Delta e_{xy} &= e_{xy}^1 - e_{xy}^0 = \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial y} + \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial x} = \Delta e_{yx} \\ \Delta e_{yz} &= e_{yz}^1 - e_{yz}^0 = \left( \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial(v_{1y} - v_{0y})}{\partial z} + \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial y} = \Delta e_{zy}\end{aligned}\quad (2.88b)$$

$$\begin{aligned}\Delta e_{zx} &= e_{zx}^1 - e_{zx}^0 = \left( \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial(v_{1z} - v_{0z})}{\partial x} + \frac{\partial(v_{1x} - v_{0x})}{\partial z} = \Delta e_{xz}\end{aligned}$$

Ecuțiile constitutive sunt modele matematice ale corpurilor reale, definind relațiile între tensorul tensiune și tensorul deformație [85].

După ce sunt precizate principalele considerații privind echilibrul dinamic al corpului, trebuie să fie analizate și proprietățile fizice specifice fenomenului de ciocnire.

Pe lângă aspecte geometrice și mecanice în formularea modelului, pentru corpul deformabil supus ciocnirii, mai trebuie adăugate considerații de natură fizică. Se impune introducerea caracteristicilor fizice prin legi constitutive simple dar în concordanță cu proprietățile fizice și în limitele ipotezelor admise asupra corpului deformabil.

În teoria elasticității se admit ca valabile legile lui Hooke exprimate prin relații liniare între tensiuni și deformații, este însă evident că există deosebiri fundamentale privind compararea materialului în cazul ciocnirii. Drept urmare, la ciocniri trebuie considerate alte legi constitutive care se vor adopta în continuare tot liniare, dar

$$\begin{aligned}\Delta e_{xx} &= \frac{1}{E} [p_{xx} - \mu_0(p_{yy} + p_{zz})] \\ \Delta e_{yy} &= \frac{1}{E} [p_{yy} - \mu_0(p_{zz} + p_{xx})] \\ \Delta e_{zz} &= \frac{1}{E} [p_{zz} - \mu_0(p_{xx} + p_{yy})] \\ \Delta e_{xy} &= \frac{1}{G} p_{xy}; \quad \Delta e_{yz} = \frac{1}{G} p_{yz} \\ \Delta e_{zx} &= \frac{1}{G} p_{zx}\end{aligned}\quad (2.89)$$

Pentru cazul unidimensional (corp bară) ecuația (2.85) se simplifică la forma

$$\rho \Delta v_x = \frac{dp_{xx}}{dx} \quad (2.90)$$

iar din (2.88) și (2.89) rezultă relațiile

$$\Delta e_{xx} = \frac{1}{E} p_{xx} \quad (2.91)$$

$$\Delta e_{xx} = \frac{\partial(\Delta v_x)}{\partial x} \quad (2.92)$$

iar mai departe, ținând cont și de expresia (2.75) a vitezei  $c$  de propagare a undei elastice, se obține ecuația diferențială

$$\frac{d^2}{dx^2} (\Delta v_x) - \frac{1}{c^2} \Delta v_x = 0 \quad (2.93)$$

care admite soluția

$$\Delta v_x = v_0 e^{\lambda x} \quad (2.94)$$

obținând-se ecuația algebrică

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{c} \quad (2.95)$$

astfel încât soluția generală are forma

$$\Delta v_x = C_1 \cdot e^{\frac{x}{c}} + C_2 \cdot e^{-\frac{x}{c}} \quad (2.96)$$

unde  $C_1, C_2$  sunt constante de integrare ce depind de condițiile concrete de realizare a ciocnirii.

Pentru o bară de lungime  $L$  liberă la capătul  $x=0$ , iar la  $x=L$  fixată cu o percuție aplicată barei (Fig.2-16) condițiile la limită vor fi date de percuția care s-a presupus aplicată la extremitatea A a barei, deci la  $x=0$ . În această situație pentru extremitatea se poate scrie condiția

$$P + A_x \cdot p_{xx}|_{x=0} = 0 \quad (2.95)$$

Ținând cont de relațiile (2.91), (2.92) și (2.93) se obține

$$\left. \frac{d(\Delta v_x)}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{P}{EA_x} \quad (2.96)$$

iar din (2.96), prin derivare în raport cu  $x$

$$\frac{d(\Delta v_x)}{dx} = \frac{1}{c} \left( C_1 \cdot e^{\frac{x}{c}} - C_2 \cdot e^{-\frac{x}{c}} \right) \quad (2.97)$$

care pentru  $x=0$  dă relația

$$\left. \frac{d(\Delta v_x)}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{P}{EA_x} = \frac{1}{c} (C_1 - C_2) \quad (2.98)$$

La capătul celălalt nu este aplicată percuția, la  $x=L$ , percuția e considerată nulă, rezultând

$$\Delta v_x|_{x=L} = 0 \quad (2.99)$$

Cu aceste condiții legea de distribuție a salturilor de viteze de-a lungul barei devine

$$\Delta v_x = V_0 \frac{e^{\frac{2L-x}{c}} - e^{\frac{x}{c}}}{(e^{\frac{2L}{c}} + 1)} \quad (2.100)$$

unde s-a notat

$$V_0 = \frac{cP}{EA_x} \quad (2.101)$$

Reprezentarea grafică a raportului  $\Delta v_x / V_0$ , (Fig.2-16), relevă o distribuție practic, lineară de-a lungul barei de lungime  $L=40$  m, a acestui raport

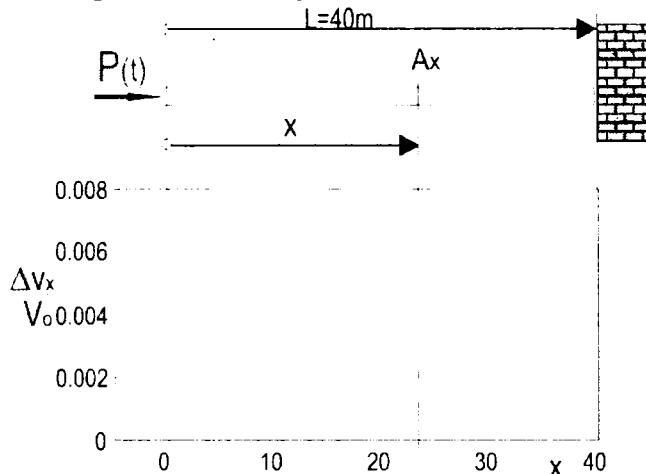


Fig.2-16 Distribuția salturilor de viteze  $\Delta v_x$  de-a lungul barei după aplicarea unei percuții  
Cunoscând legea forței percutante  $F_p(t)$ , înregistrată experimental, se poate determina percuția

$$P = \int_0^{\Delta t} F_p(t) dt = F_{pm} \cdot \Delta t = mV_{x=0} \quad (2.102)$$

Masa barei de masă fiind calculabilă,  $m=A_x L \rho$ , și admițând o tensiune  $\sigma$  va rezulta din (2.101) și (2.102)

$$V_0 = \frac{cP}{EA_x} = \frac{\sigma \Delta t E}{\rho^2} \quad (2.103)$$

$$V_{x=0} = \frac{P}{m} = \frac{\sigma \cdot \Delta t}{L \cdot \rho} \quad (2.104)$$

relații cu ajutorul cărora se poate determina parametrii undei incipiente.

Cele prezentate în acest capitol demonstrează marile dificultăți pe care le întâmpină exprimarea analitică a efectelor de contact și în special cele de contact dinamic, care implică și modelarea undelor elastice care urmează aplicării șocului asupra unui corp elastic.

#### 2.4. Contribuții originale

- Prezentarea unui model al contactului Hertz dintre un corp elastoplastic și un element percutant
- Evidențierea coeficientului de ciocnire prin interpretarea sa ca amortizare la vibroimpact

- Studiul forței vibropercutante în funcție de pătrundere pentru cele două faze ale ciocnirii
- Studiul transferului energetic în zona de contact și pe durata contactului
- Punerea în evidență a metodei undelor progresive în cazul unei bare de lungime finită
- Studiul propagării undei elastice în lungul barei de lungime finită excitată impulsiv la un capăt
- Punerea în evidență privind excitarea primului mod de vibrații longitudinale a barei de lungime finită
- Aplicarea metodei Saint-Venant pentru cazul barei de lungime finită căreia i s-a aplicat o percuție la un capăt
- Distribuția salturilor de viteze în lungimea barei după aplicarea percuției

# Capitolul 3

## METODE NUMERICE PENTRU SIMULAREA DINAMICII SISTEMELOR ELASTICE CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI

Metodele numerice se bazează pe rezolvarea ecuațiilor diferențiale constitutive ale sistemelor dinamice, ecuații ale căror soluții analitice sunt greu sau chiar imposibil de realizat. Apariția sistemelor de calcul puternice a permis dezvoltarea a numeroși algoritmi numerici de aproximare a soluțiilor ecuațiilor diferențiale. Un astfel de algoritm transpune ecuația diferențială într-un sistem de ecuații algebrice care pot fi lineare sau neliniare.

Acestea din urmă ridică probleme de convergență, deoarece un pas de integrare necorespunzător ales de analist poate să cauzeze trecerea aleatorie de la o soluție la alta, obținându-se rezultate false, cu interpretări eronate chiar utilizând coduri profesionale de calcul, cum sunt multe dedicate rezolvării problemelor prin elemente finite, de exemplu, codul Ansys, folosit în cadrul prezentei lucrări. Codul te avertizează asupra erorilor ce intervin pe parcursul procesării, dar numai cele de natură strict matematică, cele de natură fenomenologică nu pot fi sesizate și ele rămân în sarcina analistului, care dacă nu are o bună pregătire profesională în domeniul fenomenului simulat, nu e capabil să sesizeze greșeala pe care o poate comite, uneori cu rezultate nefaste.

Este bine ca analistul, în paralel cu rezolvarea în detaliu a unei probleme utilizând un cod profesional, cu posibilități multiple de setare a problemei, să aplice și o metodă mult mai aproximativă, care să-i dea o informație suplimentară asupra domeniului în care să se regăsească rezultatele procesate de cod, dar mult mai bine localizate valoric.

Din acest motiv, primul paragraf al acestui capitol va fi dedicat unor metode hibride, analitico-numerice.

### 3.1. Metode hibride analitico-numerice

Cel mai simplu model utilizat în studiul dinamicii sistemelor dinamice cu legături mecanice și ciocniri este modelul cu un singur grad de libertate (Fig.3-1), compus dintr-o masă  $m$  un arc de constantă elastică  $k$  și un amortizor cu frecare vâscoasă, de constantă  $c$ .

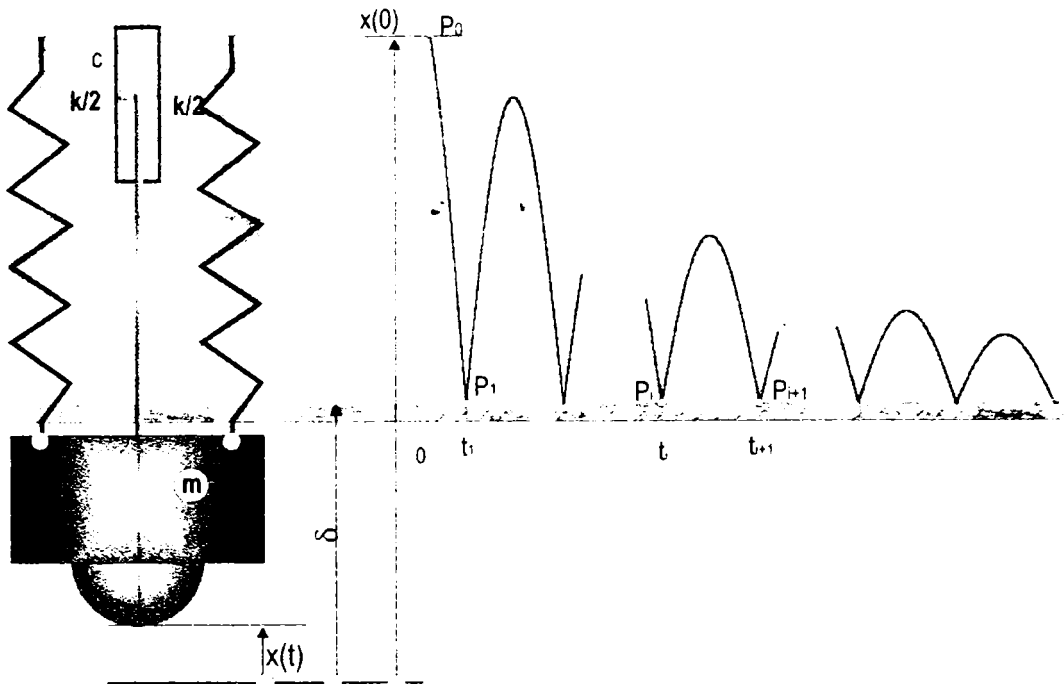


Fig.3-1 Modelul vibropercutant cu un grad de libertate

Dându-i-se condiții inițiale (perturbație), de viteze  $v_0$  și de deplasare  $x_0$ , masa  $m$  se mișcă după legea  $x(t)$ , fiind o soluție a ecuației diferențiale

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.1)$$

$x(t)$  având forma

$$x(t) = e^{-\eta(t-t_0)} \left[ C_1 \cos(\rho(t-t_0)) + C_2 \sin(\rho(t-t_0)) \right] \quad (3.2)$$

unde

$$\rho = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \eta = \frac{c}{2m} \quad (3.3)$$

iar  $C_1$  și  $C_2$  constante de integrare,  $t_0$  fiind timpul la care se consideră începută mișcarea, rezultând legea de mișcare

$$x(t) = e^{-\eta(t-t_0)} \left[ x_0 \cos(\rho(t-t_0)) + \frac{v_0}{\rho} \sin(\rho(t-t_0)) \right] \quad (3.4)$$

Prin derivare în raport cu timpul a legii de mișcare se obține legea vitezei

$$\dot{x}(t) = -\eta e^{-\eta(t-t_0)} \left[ x_0 \cos(\rho(t-t_0)) + \frac{v_0}{\rho} \sin(\rho(t-t_0)) \right] + e^{-\eta(t-t_0)} \left[ -x_0 \rho \sin(\rho(t-t_0)) + v_0 \cos(\rho(t-t_0)) \right] \quad (3.5)$$

Dacă la cota  $x=\delta$  se introduce o legătură rigidă, percutorul solidar de masa  $m$  ciocnește legătura, la  $t_1^{(-)}$  determinat prin ecuația

$$\delta = e^{-\eta(t_1^{(-)}-t_0)} \left[ x_0 \cos(\rho(t_1^{(-)}-t_0)) + \frac{v_0}{\rho} \sin(\rho(t_1^{(-)}-t_0)) \right] \quad (3.6)$$

În acest moment  $t_1^{(-)}$ , conform legilor ciocnirii, viteza masei de început a ciocnirii este

$$v_1^{(-)} = \dot{x}(t_1^{(-)}) = -\eta e^{-\eta(t_1^{(-)} - t_0)} \left[ x_0 \cos(p(t_1^{(-)} - t_0)) + \frac{v_0}{p} \sin(p(t_1^{(-)} - t_0)) \right] + e^{-\eta(t_1^{(-)} - t_0)} \left[ -x_0 p \sin(p(t_1^{(-)} - t_0)) + v_0 \cos(p(t_1^{(-)} - t_0)) \right] \quad (3.7)$$

se schimbă brusc, după intervalul scurt al ciocnirii  $\Delta t_1 = t_1^{(+)} - t_1^{(-)}$  devenind

$$v_{01} = v_1^{(+)} = -C_R v_1^{(-)} \quad (3.8)$$

$C_R$  fiind coeficientul de restituire.

În continuare, mișcarea masei se va face după legea

$$x(t) = e^{-\eta(t - t_1^{(+)})} \left[ \delta \cos(p(t - t_1^{(+)}) + \frac{v_{01}}{p} \sin(p(t - t_1^{(+)}) \right] \quad (3.9)$$

care se desfășoară până la următoarea ciocnire unde

$$x(t_2^{(-)}) = \delta = e^{-\eta(t_2^{(-)} - t_1^{(+)})} \left[ \delta \cos(p(t_2^{(-)} - t_1^{(+)}) + \frac{v_{01}}{p} \sin(p(t_2^{(-)} - t_1^{(+)}) \right] \quad (3.10)$$

În mod similar, între ciocnirile  $i$  și  $i+1$ , marcate în diagrama în timp a legii de mișcare prin punctele  $P_i$  și  $P_{i+1}$ , va fi valabilă legea

$$x(t) = e^{-\eta(t - t_i^{(+)})} \left[ \delta \cos(p(t - t_i^{(+)}) + \frac{v_{0i}}{p} \sin(p(t - t_i^{(+)}) \right] \quad (3.11)$$

care este valabilă până la timpul  $t_{i+1}^{(-)}$ , unde începe următoarea ciocnire (punctul  $P_{i+1}$ ), timp care se determină din ecuația

$$x(t_{i+1}^{(-)}) = \delta = e^{-\eta(t_{i+1}^{(-)} - t_i^{(+)})} \left[ \delta \cos(p(t_{i+1}^{(-)} - t_i^{(+)}) + \frac{v_{0i}}{p} \sin(p(t_{i+1}^{(-)} - t_i^{(+)}) \right] \quad (3.12)$$

Rezolvarea ecuației (3.12) în  $t_{i+1}^{(-)}$ , este greu de realizat pe cale analitică și de aceea se aplică metode numerice, subrutine implementate în coduri ingineresti.

O metodă simplă pentru găsirea valorii  $t_{i+1}^{(-)}$  pe cale numerică este următoarea. Se calculează șirul de valori numerice

$$x_j^i = e^{-j\eta\Delta t} \left[ \delta \cos(jp\Delta t) + \frac{v_{0i}}{p} \sin(jp\Delta t) \right] \quad (3.13)$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

unde  $x_j^i$  reprezintă valoarea numerică a legii de mișcare la momentul

$$t_j - t_i^{(+)} = j\Delta t; \quad n \geq \frac{t_{i+1}^{(-)} - t_i^{(+)}}{\Delta t} \quad (3.14)$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Se compară, pe urmă, valorile șirului cu valoarea lui  $\delta$  astfel ca se va găsi un număr  $q$  pentru care sunt îndeplinite condițiile

$$j = q; \quad x_q \geq \delta; \quad x_{q+1} \leq \delta; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.15)$$

astfel încât rezultă, prin aproximare, că la indicele  $j=q$  urmează percuția în punctul  $P_{i+1}$ , după care se reia ciclul percutant spre percuția din  $P_{i+2}$  etc.

Algoritmul de mai sus poate fi pusă într-o linie de programare, care în Mathcad are forma

$$q := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n \\ \quad q \leftarrow j \text{ if } x_j \geq \delta \wedge x_{j+1} < \delta \\ q \end{cases}$$

Ca exemplu numeric s-a considerat sistemul format din:  $m=1\text{kg}$ ,  $k=4\text{N/m}$  și  $c=0.1\text{Ns/m}$  rezultând, conform relațiilor (3.3)  $p=1.9994\text{s}^{-1}$  și  $\eta=0.05\text{s}^{-1}$ . Masa este lansată de la poziția inițială  $x(0)=1\text{m}$ , față de poziția de echilibru la  $x=0$ , (Fig.3-2), și se ciocnește de limitator. S-au luat în considerare patru poziții ale limitatorului rigid:  $\delta=0$ ; 0.2; 0.4; 0.6m; considerându-se pentru toate ciocnirile un coeficient de restituire  $C_R=0.8$

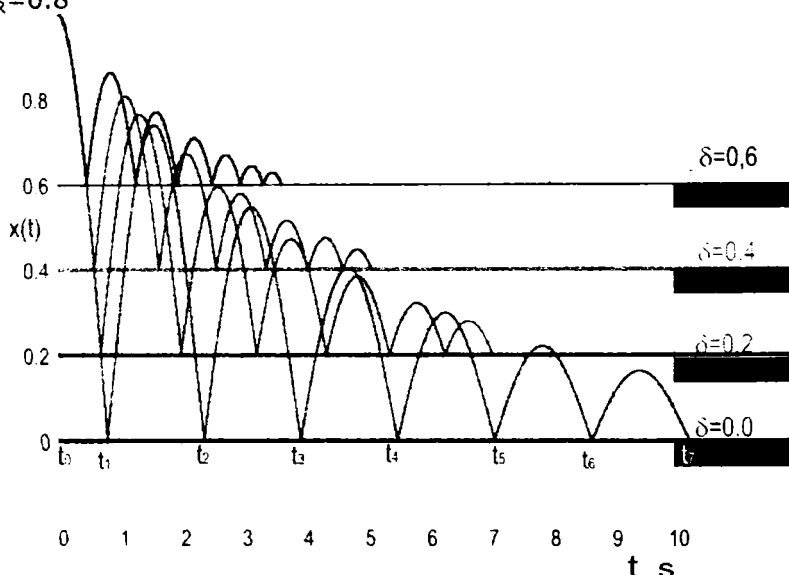


Fig.3-2 Legea de mișcare a sistemului vibropercussiv, pentru patru poziții ale limitatorului rigid:  $\delta=0$ ; 0.2; 0.4; 0.6 m

Pentru poziția limitatorului la  $\delta=0$ , primul contact are loc la  $t_1=0.798\text{s}$  după lansare după care următoarele contacte se fac la intervale egale la  $\Delta t_i=1.571\text{s}$  ( $i=2,3,\dots,6,7$ ), (Tabel 3-1). Această valoare se corelează cu pseudoperioda vibrațiilor libere  $T=2\pi/p=3.161\text{s}$  fiind de 4 ori mai mare decât durata între lansare  $t_0=0$ , și prima ciocnire la  $t_1=0.798\text{s}$ . Este firesc, deoarece, pe această porțiune, mișcarea este vibratorie liber amortizată având pseudoperioda  $T$ .

Tabel 3-1

| $\delta$<br>[m] | Intervalele de timp între două ciocniri consecutive $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ |              |              |              |              |              |              |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                 | $\Delta t_1$                                                                 | $\Delta t_2$ | $\Delta t_3$ | $\Delta t_4$ | $\Delta t_5$ | $\Delta t_6$ | $\Delta t_7$ |
| 0.0             | 0.798                                                                        | 1.571        | 1.571        | 1.571        | 1.571        | 1.571        | 1.571        |
| 0.2             | 0.693                                                                        | 1.305        | 1.227        | 1.132        | 1.022        | 0.901        | 0.775        |
| 0.4             | 0.585                                                                        | 1.051        | 0.933        | 0.808        | 0.683        | 0.567        | 0.465        |
| 0.6             | 0.467                                                                        | 0.801        | 0.677        | 0.562        | 0.46         | 0.372        | 0.3          |



După prima ciocnire viteza va deveni  $v_1^{(+)} = -C_R v_1^{(-)}$ , unde viteza imediat înainte de prima ciocnire, conform ecuației din (3.7), este

$$v_1^{(-)} = -\eta e^{-\eta(t_1^{(-)})} \left[ x_0 \cdot \cos(pt_1^{(-)}) \right] + e^{-\eta(t_1^{(-)})} \left[ -x_0 p \cdot \sin(p(t_1^{(-)})) \right] = -1.920 \text{ m/s}$$

iar pierderea de energie corespunzătoare ciocniri fiind

$$\Delta E_c = \frac{m}{2} (v_1^{(-)})^2 (1 - C_{Ri}^2) = 0.664 \text{ J}$$

care se scade din energia inițială introdusă în sistem

$$E = \frac{1}{2} kx_0^2 = 2 \text{ J}$$

Rezerva de energie rămasă în sistem permite ridicarea masei de pe limitatorul rigid și realizarea următoarei ciocniri la  $t_2$ , rezultând un interval de timp între cele două ciocniri  $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 1.571 \text{ s}$ . Rezerva de energie se micșorează și datorită amortizării în sistem, și în continuare la următoarele ciocniri. Când energia s-a terminat, masa rămâne în poziție statică pe limitator.

Toate celelalte ciocniri se realizează la intervale de timp  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = 1.571$  egal cu jumătatea pseudoperioadei  $T$ . Aceasta se explică prin faptul că axa  $\delta=0$  este axa de echilibru static, în sensul pozitiv al mișcării masa nefiind blocată. Când limitatorul e plasată în sensul pozitiv al mișcării la cotele  $\delta=0$ ;  $0.2$ ;  $0.4$ ;  $0.6 \text{ m}$ ; intervalele de timp  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  se micșorează așa cum se vede în Fig.3-3, cu datele din Tabelul 3-1.

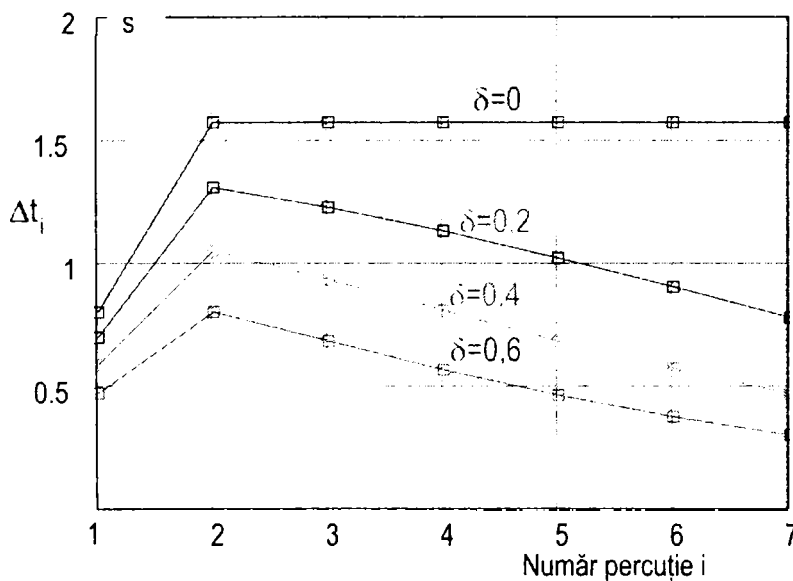


Fig.3-3 Intervalele de timp  $\Delta t_i$  între două ciocniri, pentru patru poziții ale limitatorului rigid:  $\delta=0$ ;  $0.2$ ;  $0.4$ ;  $0.6 \text{ m}$

Aceasta se explică prin faptul că sistemul rămâne încărcat energetic, după terminarea ultimei percuzii acesta rămâne cu o energie potențială

$$E_p = \frac{1}{2} k\delta^2$$

În concluzie, metodele hibride sunt foarte utile prin faptul că permit analistului să rezolve o anumită parte a soluției care ar necesita complicate dezvoltări analitice. Singura necesitate este cea a găsirii formei analitice a soluției.

În majoritatea cazurilor soluții analitice nu pot fi găsite, chiar și pentru modele dinamice discrete, dar cu legături elastice neliniare, fiind necesare metode numerice de integrare a soluțiilor.

**Metode numerice**

Metodele numerice se aplică direct sistemului de ecuații diferențiale ale modelului dinamic discret, sau ecuației diferențiale constitutive, valabilă pe întregul sistem continuu. Ambele sunt metode de aproximare și necesită, din partea analistului, atenție în alegerea parametrilor modelului.

În multe cazuri rezultatele simulării necesită verificări experimentale pe modelul fizic care permite corectarea parametrilor modelului, procedeu întâlnit în literatura de specialitate ca „updating”.

**Modele discrete**

Modelul discret permite aproximarea sistemului fizic prin intermediul unor mase concentrate sau corpuri geometrice simple cărora li se atribuie masă sau/și moment de inerție, între acestea introducându-se legături elastice și de frecare.

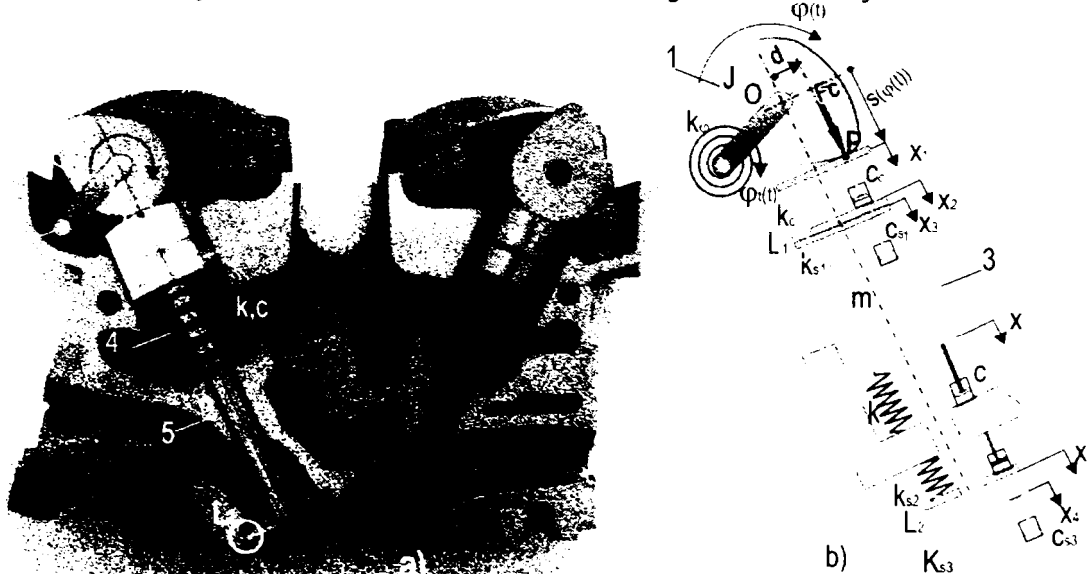


Fig.3-4. Ilustrarea modelului dinamic discret echivalent pentru o supapă

Un exemplu edificator este cel din (Fig.3-4a), în care se prezintă o secțiune printr-un bloc motor conținând mecanismul de distribuție, constituit din cama 1 solidară cu axa sa 2, cama transmitând mișcarea la culegătorul tachtet 3 al supapei, menținerea contactului dintre acestea făcându-se prin intermediul forței de prestrângere din arcul 4. Corpul supapei considerat ca o masă 2 ce se deplasează de-a lungul axei supapei după legea  $x(t)$ . Contactul dintre camă și tachtetul valvei este un contact elastic cu deformarea ambelor suprafețe în contact astfel că legea de mișcare ar trebui să aibă forma

$$x_1(t) = s(\varphi(t)) + x_{st0} \tag{3.16}$$

unde  $s(\varphi)$  legea camei, iar  $x_{st0}$  este o constantă care exprimă cursa de comprimare a arcului 4, de constantă  $k$ ; comprimarea arcului 4 asigură o componentă statică  $F_{cst} = kx_{st0}$ , de menținere a contactului.

Dacă sunt luate în considerare și deformațiile de contact, cu introducerea constantelor elastice,  $k_{c1}$  a camei și  $k_{s1}$  a suprafeței de contact a supapei, constanta echivalentă fiind de forma

$$\frac{1}{k_{ec1}} = \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{s1}} \quad (3.17)$$

forța de contact ce se transmite camei și tchetului fiind  $\pm k_{ec}(x_1 - x)$ , ecuația de echilibru dinamic a supapei fiind

$$m\ddot{x}(t) + (c + c_{ec1})\dot{x}(t) + (k + k_{ec1})x(t) = k_{ec1}x_1(t) + c_{ec1}\dot{x}_1(t) \quad (3.18)$$

căruia i se cuplează ecuația de echilibru dinamic al camei

$$J'' + k\varphi + c_{ec1}d(\varphi)(\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)) + k_{ec1}d(\varphi)(x_1(t) - x(t)) = 0 \quad (3.19)$$

unde  $d(\varphi)$  este brațul variabil al forței de contact în raport cu axa de rotație al camei iar  $k_\varphi$ , constanta elastică la torsiune a axului cu came.

În faza de închidere, ciuperca supapei luând contact cu scaunul creează un al doilea contact elastic unilateral ( $L_2$ ), echivalat în model, prin introducerea cuplajului vâscoelastic, de parametrii  $k_{s2}$ ,  $k_{s3}$  și  $c_{s2}$  și  $c_{s3}$ , ecuația (3.18) devenind

$$m\ddot{x}(t) + (c + c_{ec1} + \delta \times c_{ec2})\dot{x}(t) + (k + k_{ec1} + \delta \times k_{ec2})x(t) = k_{ec1}x_1(t) + c_{ec1}\dot{x}_1(t) \quad (3.18')$$

$\delta=0$  în afara contactului,  $\delta=1$  pe faza de contact și

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{ec2}} &= \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{s3}} \\ \frac{1}{c_{ec2}} &= \frac{1}{c_{s2}} + \frac{1}{c_{s3}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sistemul de ecuații (3.18'), (3.19), este un sistem de ecuații diferențiale neliniare ale căror soluții nu pot fi formulate analitic, cu multe condiții impuse pe parcursul procesării soluțiilor, și de aceea rezolvarea lor se poate face numai pe cale numerică. Constantele elastice echivalente de contact se pot aproxima prin modelele statice, prin formele aproximative existente s-au prin modelarea cu elemente finite a suprafețelor în contact.

### 3.2. Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale. Particularizare la sisteme dinamice cu ciocniri

Forma generală a unui sistem de ecuații diferențiale ce guvernează mișcările unui sistem dinamic discretizat este de forma

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + \{f(t, \{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\})\} = \{F(t)\} \quad (3.21)$$

unde  $\{x(t)\}_{n \times 1}$  este vectorul coloană al celor  $n$  legi de mișcare ce definesc la momentul  $t$  mișcarea sistemului,  $[M]_{n \times n}$  fiind matricea de inerție, iar  $\{F(t)\}_{n \times 1}$  vectorul de excitație, conținând forțele și momentele acțiunilor externe sistemului.

Pentru un sistem linear cu amortizare vâscoasă funcția vectorială  $\{f(\{\dot{x}(t)\}, \{x(t)\}, t)\}$  are forma particulară

$$\{f(t, \{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\})\} = [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} \quad (3.22)$$

unde  $[K]_{n \times n}$  și  $[C]_{n \times n}$  sunt matricele de rigiditate, respectiv de amortizare.

Metodele numerice se bazează pe faptul că sistemul de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul doi (3.22) poate fi transformat într-un sistem de  $2n$  ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \{g(\{t, x(t)\}, \{y(t)\})\} \\ y(t) = \{\dot{x}(t)\} \end{cases} \quad (3.23)$$

unde

$$\{g(t, \{x(t)\}, \{y(t)\})\} = [M]^{-1}(\{F(t)\} - \{f(t, \{x(t)\}, \{y(t)\})\}) \quad (3.24)$$

Integrarea sistemului (3.23) se face pornind de la condițiile inițiale, la momentul  $t=0$ ,  $\{y(0)\} = \{v_0\}$ , de viteze și  $\{x(0)\} = \{x_0\}$ , de deplasări.

Integrarea numerică a sistemului impune alegerea unui pas de timp  $h=\Delta t$ , pentru care la timpul  $t_{i+1}=(i+1)h$  se poate aproxima o soluție

$$\begin{cases} \{x(t_{i+1})\} = \{x_{i+1}\} \\ \{y(t_{i+1})\} = \{y_{i+1}\} \end{cases} \quad (3.25)$$

cuoscând valorile determinate la pasul anterior

$$\begin{cases} \{x(t_i)\} = \{x_i\} \\ \{y(t_i)\} = \{y_i\} \end{cases} \quad (3.26)$$

S-au dezvoltat mai multe metode, printre cele mai utilizate fiind metoda Euler, Runge Kutta și Adams.

Metoda Euler da următoarele relații de recurență

$$\begin{cases} \{y_{i+1}\} = \{y_i\} + h\{g(t_i, x_i, y_i)\} \\ \{x_{i+1}\} = \{x_i\} + h\{y_i\} \end{cases} \quad (3.27)$$

Metoda Runge Kutta este cea mai populară, având relațiile de recurență

$$\begin{cases} \{y_{i+1}\} = \{y_i\} + \frac{1}{6}(\{k_1\} + 2\{k_2\} + 2\{k_3\} + \{k_4\}) \\ \{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \frac{1}{6}(\{L_1\} + 2\{L_2\} + 2\{L_3\} + \{L_4\}) \end{cases} \quad (3.28)$$

unde vectorii coloană  $\{k_j\}$  și  $\{L_j\}$  ( $j=1,2,3,4$ ) au formele

$$\begin{cases} \{k_1\} = h\{g(t_i, \{x_i\}, \{y_i\})\} \\ \{L_1\} = h\{y_i\} \\ \{k_2\} = h\left\{g\left(t_i + \frac{h}{2}, \{y_i\} + \frac{1}{2}\{k_1\}, \{x_i\} + \frac{1}{2}\{L_1\}\right)\right\} \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$\begin{cases} \{L_2\} = h\left(\{y_i\} + \frac{1}{2}\{k_1\}\right) \\ \{k_3\} = h\left\{g\left(t_i + \frac{h}{2}, \{y_i\} + \frac{1}{2}\{k_2\}, \{x_i\} + \frac{1}{2}\{L_2\}\right)\right\} \\ \{L_3\} = h\left(\{y_i\} + \frac{1}{2}\{k_2\}\right) \end{cases} \quad (3.29b)$$

$$\begin{cases} \{k_4\} = h\{g(t_i + h, \{y_i\} + \{k_3\}, \{x_i\} + \{L_3\})\} \\ \{L_4\} = h(\{y_i\} + \{k_3\}) \end{cases}$$

Acești algoritmi se găsesc implementați în subrutinele tuturor codurilor ingineresti de calcul numeric (Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad, etc), și pot fi accesați ușor prin comenzi funcționale atribuite operației.

## Sistem vibropercutant cu un grad de libertate

Astfel pentru sistemul cu un singur grad de libertate, analizat mai sus, cu parametrii,  $m=1\text{kg}$ ,  $k=4\text{N/m}$  și  $c=0.1\text{Ns/m}$ , sistemul echivalent (3.23) are forma

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{c}{m}y(t) - \frac{k}{m}x(t)$$

Cu ajutorul acestuia se formează în Mathcad vectorul coloană

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -c \cdot y_1 - k \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

care împreună cu vectorul condițiilor inițiale

$$y\_init := \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

în cazul de față  $x_0=1\text{m}$  și  $v_0=0$ , cu numărul de valori procesate  $np=200$  și timpii de start,  $t_i=0$  și final  $t_f=20\text{s}$ , se introduc în funcționala subrutinei

$$u := \text{rkfixed}(y\_init, t_i, t_f, np, D)$$

obținându-se matricea de valorilor de ieșire  $u$ , ale cărei coloane conțin valorile: prima  $u_{i,0}$ , timpul,  $u_{i,1}$ , deplasarea și  $u_{i,2}$  viteza

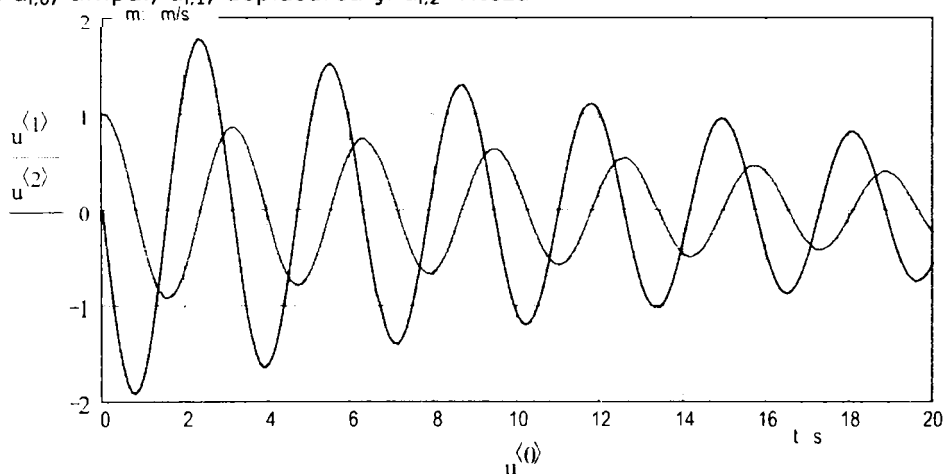


Fig.3-5. Vibrograma vibrațiilor libere la sistemul cu un singur grad de libertate( $m=1\text{ kg}$ ,  $k=4\text{N/m}$ ,  $c=0.1\text{ Ns/m}$ ; condiții inițiale  $x_0=1\text{m}$ ,  $v_0=0$ )

Subrutina

$$u := \text{rkfixed}(y\_init, t_i, t_f, np, D)$$

nu poate fi utilizată în cazul percuției cu un limitator plasat în câmpul de mișcare al masei, deoarece subrutina este una executabilă neputându-se interveni cu o condiție de ciocnire de tipul:

$$\text{dacă } x_{i+1} < \delta \text{ atunci } v_{i+1} = -C_R \cdot v_i$$

în timpul procesării.

Pentru a putea efectua această intervenție am conceput în BASIC o  
subrutină a algoritmului Runge Kutta în care după fiecare ciclu

se pot schimba parametrii în funcție de condiția impusă

$x1 = X(1)$ ;  $y1 = y(1)$

IF  $x1 < \text{delta}$  THEN  $y(1) = -C_R * y1$

CALL kutta(d(), c1(), k1(), X(), y(), fpt(), n, h)

$x2 = X(1)$

LINE (i - 1,  $x1$ )-(i,  $x2$ ), 14

$w1 = X(1)$

PRINT #1,  $w1$

SUB kutta (d(), a(), b(), X(), y(), ft(), n, h)

DIM k1(n), k2(n), k3(n), k4(n), l1(n), l2(n), l3(n), l4(n)

FOR i = 1 TO n

k1(i) = 0

FOR j = 1 TO n

$k1(i) = k1(i) - h * (a(i, j) * y(j) + b(i, j) * X(j))$

$k1(i) = k1(i) + h * d(i, j) * ft(j, 1)$

NEXT j

$l1(i) = h * y(i)$

NEXT i

FOR i = 1 TO n

k2(i) = 0

FOR j = 1 TO n

$k2(i) = k2(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k1(j) / 2) + b(i, j) * (X(j) + l1(j) / 2))$

$k2(i) = k2(i) + h * d(i, j) * ft(j, 2)$

NEXT j

$l2(i) = h * (y(i) + k1(i) / 2)$

NEXT i

FOR i = 1 TO n

k3(i) = 0

FOR j = 1 TO n

$k3(i) = k3(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k2(j) / 2) + b(i, j) * (X(j) + l2(j) / 2))$

$k3(i) = k3(i) + h * d(i, j) * ft(j, 2)$

NEXT j

$l3(i) = h * (y(i) + k2(i) / 2)$

NEXT i

FOR i = 1 TO n

k4(i) = 0

FOR j = 1 TO n

$k4(i) = k4(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k3(j)) + b(i, j) * (X(j) + l3(j)))$

$k4(i) = k4(i) + h * d(i, j) * ft(j, 3)$

NEXT j

$l4(i) = h * (y(i) + k3(i))$

NEXT i

FOR i = 1 TO n

$y(i) = y(i) + (k1(i) + 2 * k2(i) + 2 * k3(i) + k4(i)) / 6$

$X(i) = X(i) + (l1(i) + 2 * l2(i) + 2 * l3(i) + l4(i)) / 6$

NEXT i

END SUB

După cum se poate observa subrutina poate fi aplicată și la sisteme cu  $n$  grade de libertate, la care se pot impune condiții de ciocnire.

Utilizând această subrutină și punând condiția de ciocnire pentru același sistem, la un număr de 6 poziții ale limitatorului rigid în Fig.3-6 sunt prezentate vibrogramele corespunzătoare.

Față de metoda hibridă analitico numerică utilizată mai sus, unde după fiecare percuție se impunea schimbarea condițiilor inițiale, aici totul merge automat sub controlul condiției din program:

**IF  $x_1 < \delta$  THEN  $y(1) = -C_R \cdot y_1$**

De asemenea, acestei condiții i se poate alătura o condiție suplimentară, de schimbare a pasului  $h$  de integrare care în apropierea punctului de contact să fie micșorat în vederea localizării mai exacte a punctului de contact.

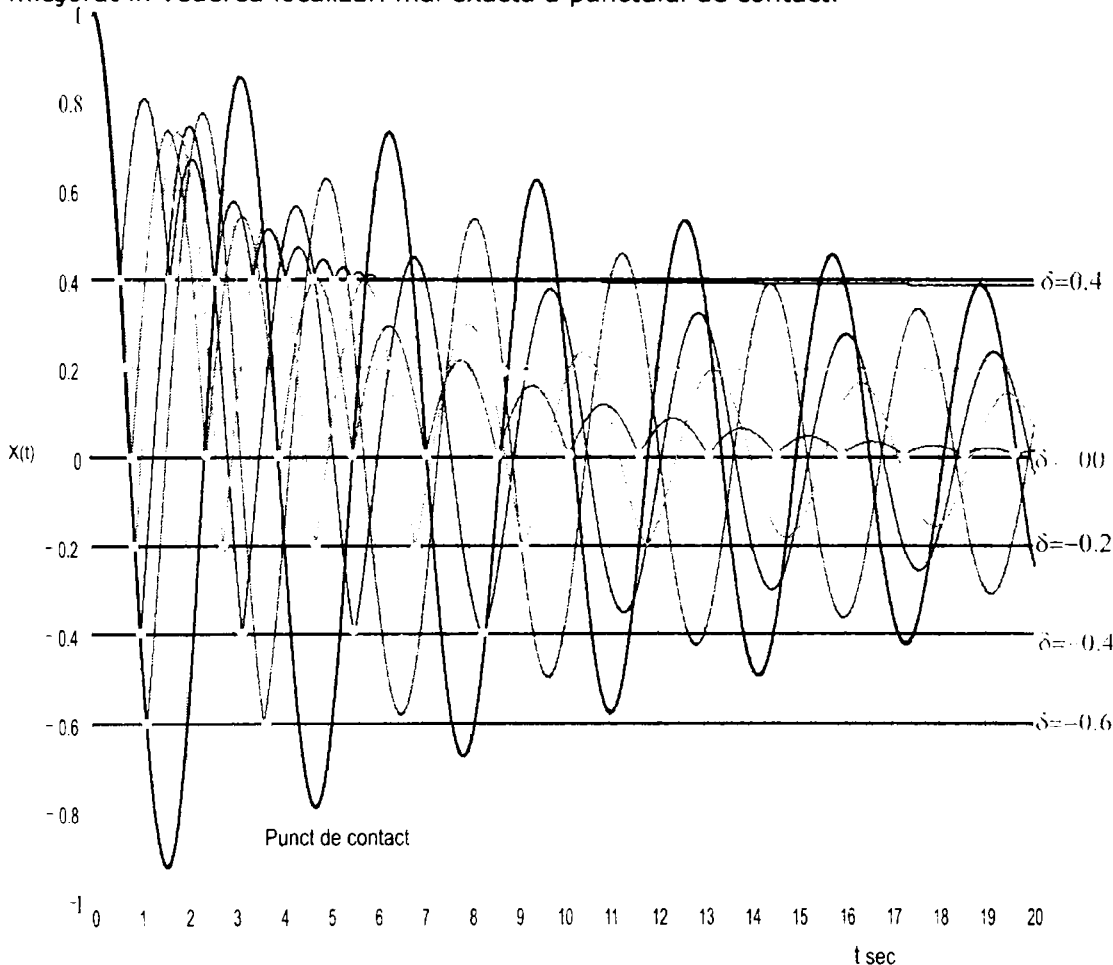


Fig.3-6 Vibrogramele vibrațiilor la diverse poziții ale limitatorului rigid:

$\delta = -0.6; -0.4; -0.2; 0.0; 0.2; 0.4; 0.6$  m

În plus, subrutina poate fi utilizată, fără restricții la sisteme cu legături având caracteristici neliniare. Ea este concepută sub o formă generală care permite integrarea sistemelor cu  $n$  de grade de libertate.

## Sistem vibropercutant cu n grade de libertate a) contact exterior sistemului

Pentru exemplificare se va studia un sistem vibropercutant având 4 grade de libertate (Fig.3-7), compus din patru mase  $m_1=0.3$ ,  $m_2=0.5$ ,  $m_3=1$  și  $m_4=1\text{kg}$ , înălțuite cu patru arcuri având constantele elastice  $k_1=k_2=k_3=k_4=10\text{N/m}$ . Amortizarea sistemului este asigurată de patru amortizoare având constantele  $c_1=0.01$ ,  $c_2=0.01$ ,  $c_3=0.02$  și  $c_4=0.02\text{Ns/m}$ .

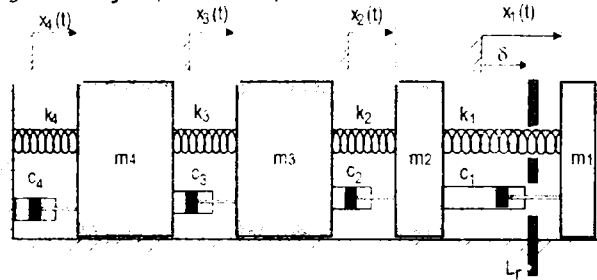


Fig.3-7 Model vibropercutant cu patru grade de libertate cu limitator percutant la prima masă  
Vibrațiile libere amortizate sunt guvernate de sistemul de ecuații diferențiale  
lineare

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (3.30)$$

unde

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.03 & -0.02 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

Pentru determinarea valorilor proprii complexe se transformă sistemul de ordinul doi în unul de ordinul 1 (ANEXA 3-1)

$$[m]\{\dot{z}\} + [k]\{z\} = \{0\}$$

unde

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \quad [m] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix}$$

iar cu subrutina

$\lambda := -\text{genvals}(k, m)$

se obține vectorul coloană al valorilor proprii complex conjugate

$$\{\lambda\} = -\{\sigma\} \pm \{\rho\}$$



$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.033 - 8.088i \\ -0.033 + 8.088i \\ -0.026 - 5.519i \\ -0.026 + 5.519i \\ -2.083 \cdot 10^{-3} - 1.48i \\ -2.083 \cdot 10^{-3} + 1.48i \\ -0.011 - 3.908i \\ -0.011 + 3.908i \end{pmatrix} .$$

$i := 1 \dots 8$

$p_i := |\text{Im}(\lambda_i)|$  pseudopulsatiile modale

$\sigma_i := \text{Re}(\lambda_i)$  coeficienții de amortizare modal

$f_i := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{(p_i)^2 + (\sigma_i)^2}$  frecvențele proprii ale modurilor naturale de vibrații

În final vor rezulta șirul valorilor frecvențelor proprii

$$f_1=0.236; f_2=0.622; f_3=0.878; f_4=1.287 \text{ Hz}$$

Vibrațiile libere amortizate sunt determinate prin suma modală

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^4 e^{-\sigma_i t} \left( \{X_i\} e^{j p_i t} + \{\bar{X}_i\} e^{-j p_i t} \right); \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (3.31)$$

$\{X_i\}_i$  și  $\{\bar{X}_i\}$  fiind vectorii proprii modali, complex conjugați

$$\begin{aligned} \{X_i\} &= \{X^{(r)}_i\} + j \{X^{(i)}_i\} \\ \{\bar{X}_i\} &= \{X^{(r)}_i\} - j \{X^{(i)}_i\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Suma modală devenind

$$\{x(t)\} = 2 \sum_{i=1}^4 e^{-\sigma_i t} \left( \{X^{(r)}_i\} \cos p_i t - \{X^{(i)}_i\} \sin p_i t \right) \quad (3.33)$$

Componentele, reală  $\{X^{(r)}_i\}$  și imaginară  $\{X^{(i)}_i\}$ , se determină ținând cont de condițiile inițiale

$$\begin{aligned} \{x(0)\} &= 2 \sum_{i=1}^4 \{X^{(r)}_i\} \\ \{\dot{x}(0)\} &= \sum_{i=1}^4 \left( (-\sigma_i + p_i) \{X^{(r)}_i\} - (\sigma_i + p_i) \{X^{(i)}_i\} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

care reprezintă un sistem de 8 ecuații cu 8 necunoscute elementele vectorilor  $\{X^{(r)}_i\}$  și  $\{X^{(i)}_i\}$ . Considerând condiții inițiale

$$\begin{aligned} \{x(0)\} &= \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \\ \{\dot{x}(0)\} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \end{aligned} \quad (3.35)$$

deci, o deplasare a masei  $m_1$ , din poziție de echilibru static, în direcție pozitivă cu un metru, celelalte mase rămânând în poziție de echilibru static, la momentul  $t=0$  este eliberată legătura care reține masa  $m_1$ , urmând, în conformitate cu legile (3.33) mișcările tuturor celorlalte mase.

În Fig.3-8 sunt reprezentate vibrogramele mișcărilor maselor sistemului.

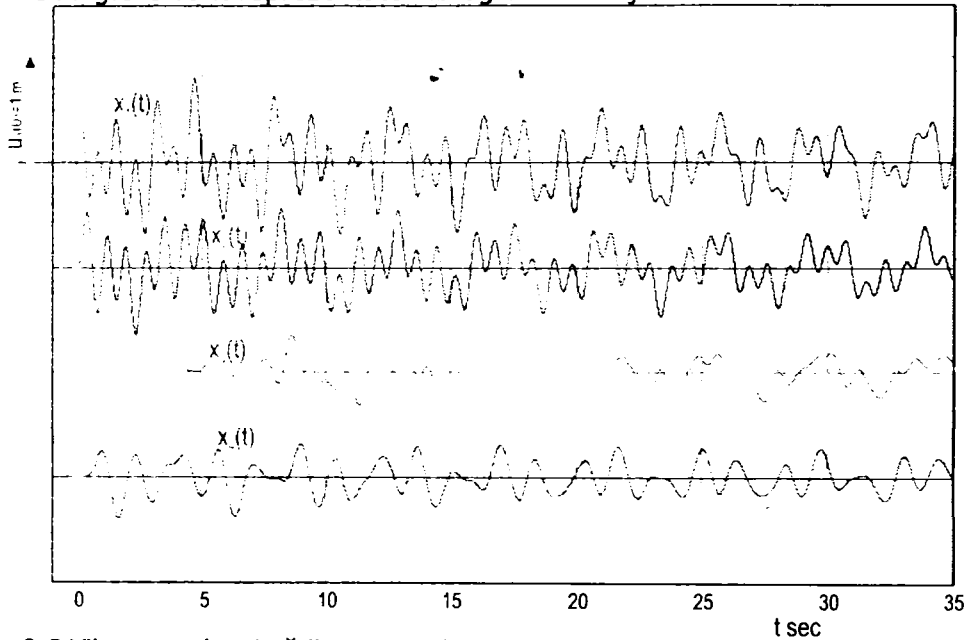


Fig.3-8 Vibrogramele mișcărilor sistemului cu patru grade de libertate; Condiții inițiale:

$$\{x(0)\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T; \quad \{\dot{x}(0)\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

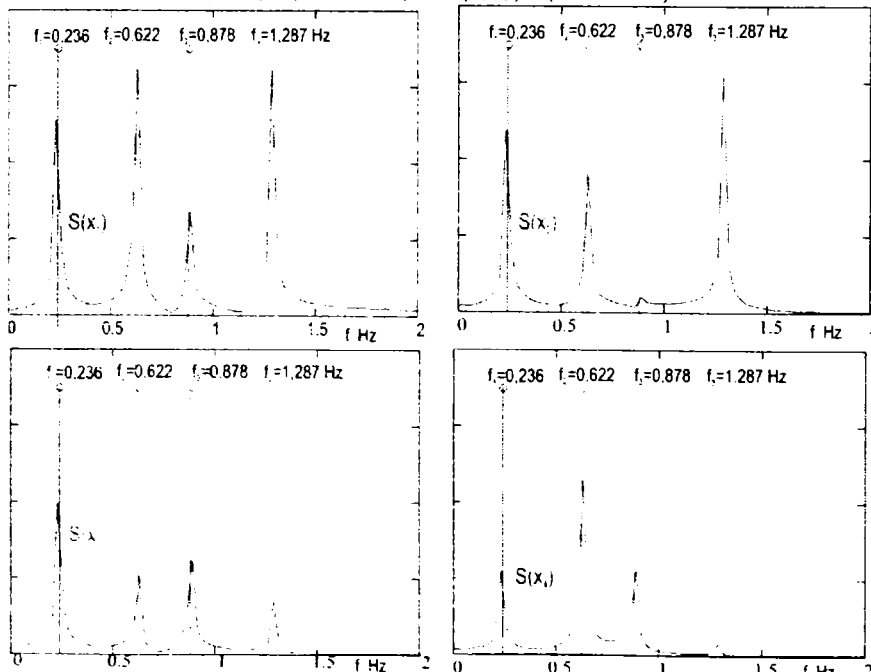


Fig.3-9 Spectrele în frecvență ale mișcărilor vibratorii  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$

Făcând o analiză armonică a celor patru mișcări vibratorii  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$  prin folosirea transformatei Fourier s-au obținut spectrele din Fig.3-9, pe care sunt marcate prin bare verticale valorile frecvențelor modurilor naturale de vibrații:  $f_1=0.236$ ;  $f_2=0.622$ ;  $f_3=0.878$ ;  $f_4=1.287$ Hz. Cum e și normal, vârfurile din spectre sunt axate după aceste bare, denotând comportamentul linear al sistemului.

În cazul unui sistem real, spectrele semnalelor înregistrate pe sistem (structură) sunt utilizate pentru obținerea unui model dinamic cât mai aproape de realitate. Procedeeul se numește identificarea sistemului. De multe ori sistemului mecanic printr-un model linear nu e satisfăcător astfel că este necesar un model neliniar. Când sistemul mecanic prezintă jocuri între piesele care compun ansamblul structurii sau apar fisuri ale unor piese solicitate intens, se introduc legături locale unilaterale, care produc efecte neliniare și ciocniri. În aceste situații modelarea devine extrem de dificilă deoarece soluțiile analitice sunt imposibil de formulat și de aceea se apelează la metode numerice. O dificultate la fel de dificilă este și identificarea parametrilor modelului dinamic, deoarece răspunsul sistemului real cu comportament neliniar este deosebit de complex.

Pentru exemplificare am introdus la cota  $\delta$ , (Fig.3-7) de la poziția statică  $x_{1s}$  a masei  $m_1$  un limitator rigid  $L_r$ , în câmpul de mișcare al masei. Se consideră că între masă și limitatorul rigid contactul este impulsiv, cu un coeficient de restituire  $C_R=0.8$ .

În Fig.3-10\_1a...3-10\_7a sunt prezentate vibrogramele mișcărilor libere amortizate  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$  ale celor patru mase, pentru 7 poziții ale limitatorului rigid  $\delta=-0.6, -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4, 0.7$  m.

Pentru prima poziție a limitatorului rigid  $L_r$ ,  $\delta=-0.6$ , reprezentat în vibrogramă (Fig.3-10\_1a) prin linia groasă întreruptă, contactul, cu percuție însoțit de cedare de energie, se produce doar la șase momente, punctate pe vibrograme.

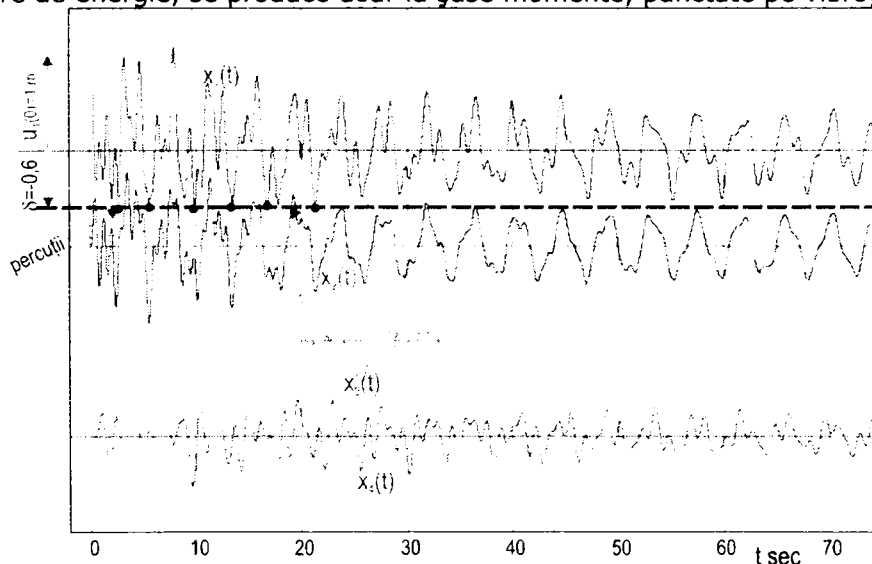


Fig.3-10\_1a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=-0.6$  m

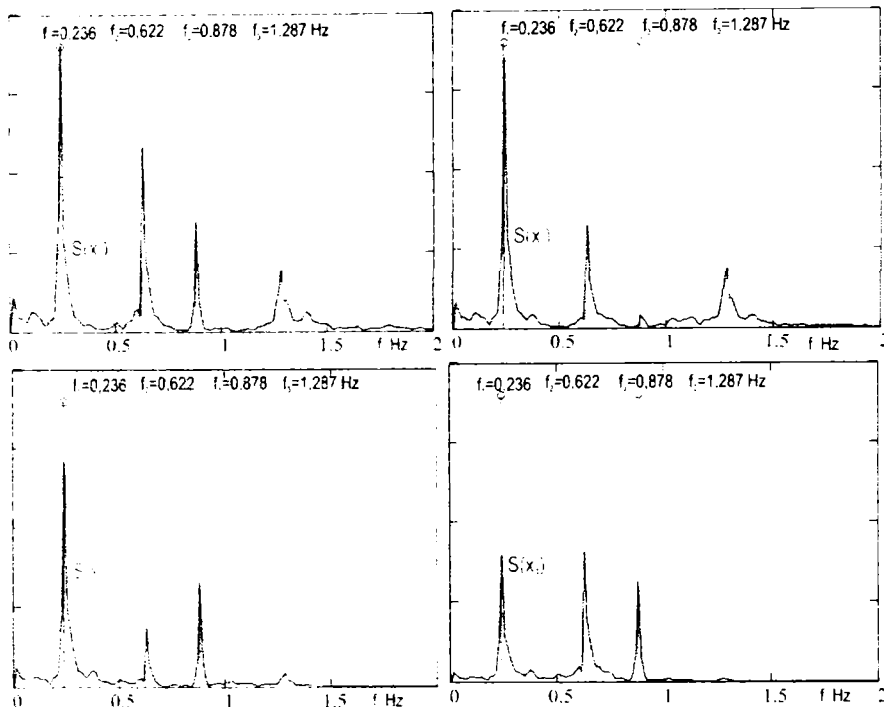


Fig.3-10\_1b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=-0.6$  m

Pentru acest caz, spectrele în frecvență,  $S(x_1)$ ,  $S(x_2)$ ,  $S(x_3)$ , și  $S(x_4)$ , (Fig.3-10\_1b) corespundătoare mișcărilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ , relevă patru vârfuri distincte, axate după frecvențele modurilor  $f_1=0.236$ ;  $f_2=0.622$ ;  $f_3=0.878$ ;  $f_4=1.287$  Hz, cea ce denotă o influență discretă a efectului nelinear introdus de contactul cu limitatorul rigid. Totuși, față de spectrele, curate, corespundătoare vibrațiilor libere amortizate a sistemului fără limitator, (Fig.3-9), se constată ușoare perturbații ale vârfurilor modale, prin apariția unor perceptibili lobi laterali. Efectul de distorsiune în spectre crește o dată cu mărirea valorii  $\delta$ , explicabil prin sporirea numărului de contacte.

La poziția  $\delta=-0.4$  m, pentru care în vibrogramă au loc multiple contacte pe durată a 75 secunde procesate, (Fig.3-10\_2a), spectrele, (Fig.3-10\_2b), sunt evident mai afectate de distorsiuni. Încep să apară și deplasări față de liniile modale, (corespundătoare frecvențelor  $f_1=0.236$ ;  $f_2=0.622$ ;  $f_3=0.878$ ;  $f_4=1.287$ Hz), de exemplu, la poziția  $\delta=-0.2$  m, unde aceste deplasări sunt mai evidente la primul vârf (Fig. 3-10\_2b), cu o ușoară creștere a frecvenței primului vârf față de frecvența primului mod ( $f_1=0.236$  Hz).

De la  $\delta=0.2$  la 0.6 m distorsiunile în spectre sunt din ce în ce mai puternice, vârfurile se lătesc sau chiar dispar în forme neregulate ale spectrului. Pentru aceste valori pozitive ale poziției  $\delta$  se constată și deplasări statice ale pozițiilor celor 4 mase. Efectul este normal, deoarece când masa  $m_1$  se oprește la un moment dat pe limitator, sistemul rămâne încărcat cu o forță  $F_{st}=k_{ech}\delta$ , unde constanta elastică echivalentă este

$$\frac{1}{k_{ech}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}$$

rezultând pentru cazul studiat ( $k_1=k_2=k_3=k_4=1 \text{ N/m}$ )  $k=0.025 \text{ m}$  și forța statică  $F_{st}=0.25\delta \text{ N}$ , egală cu forța de legătură din fiecare secțiune a arcului, astfel că deplasarea statică a masei  $m_4$  va fi  $x_{4-st}=F_{st}/k_4=0.25\delta \text{ m}$ .

Următoarea masă  $m_3$  va avea deplasare statică  $x_{3-st}=0.5\delta \text{ m}$ , iar pentru  $m_2$  și  $m_1$  rezultând  $x_{2-st}=0.75\delta \text{ m}$  și  $x_{1-st}=1.0\delta \text{ m}$ , valori ce se regăsesc în vibrograme.

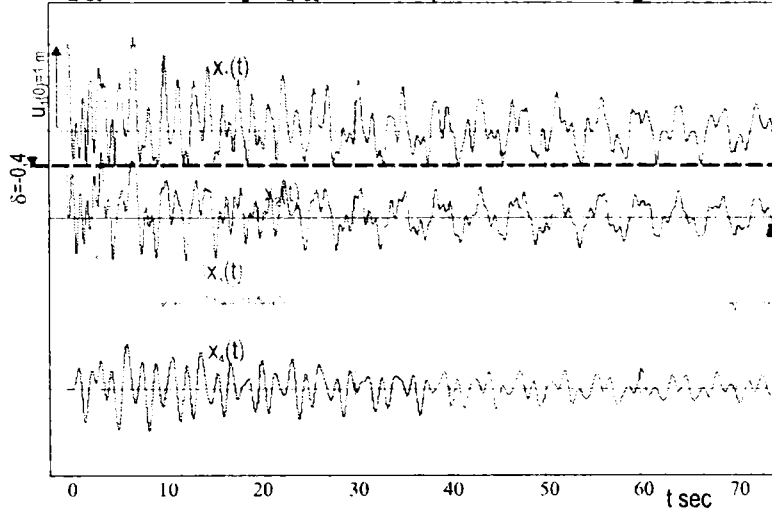


Fig.3-10\_2a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=-0.4 \text{ m}$

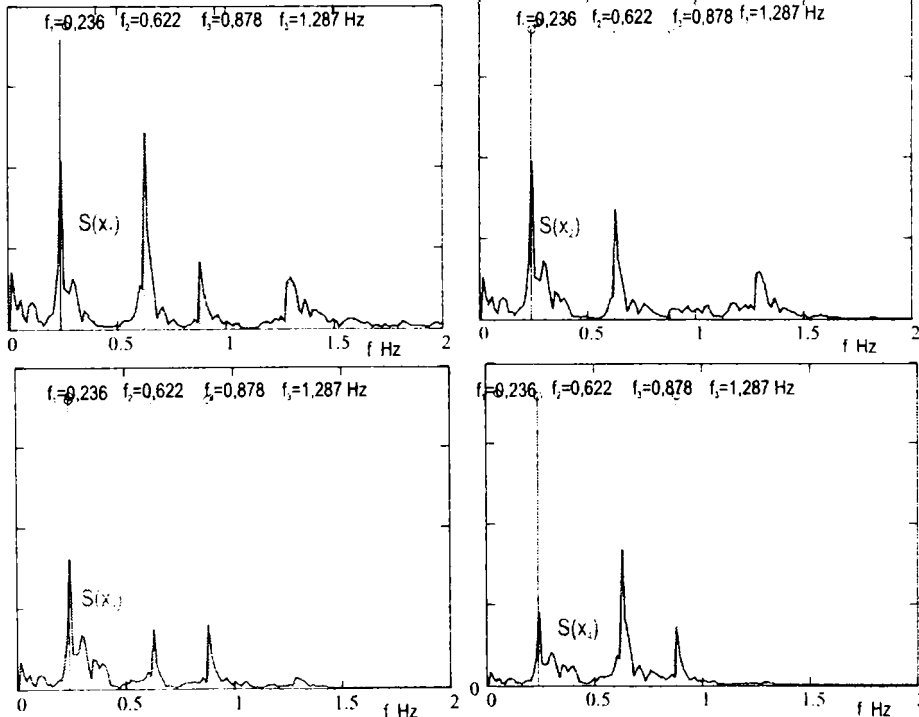


Fig.3-10\_2b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=-0.4 \text{ m}$

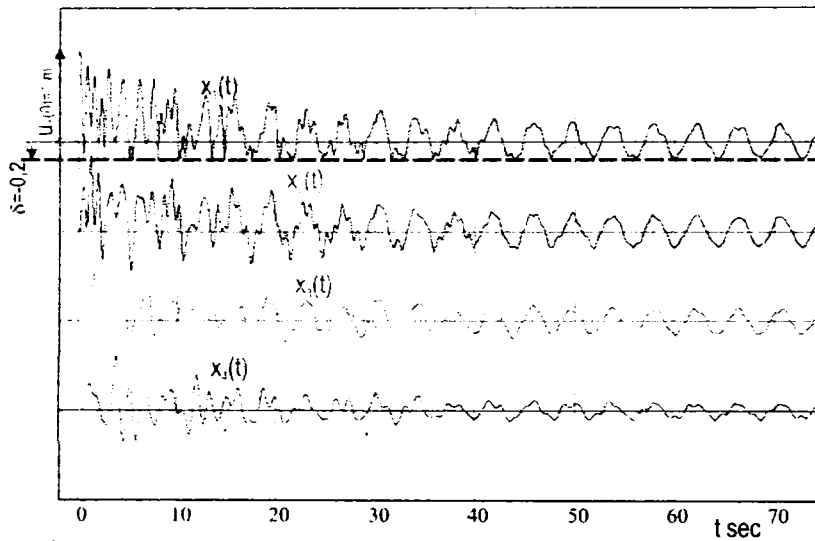


Fig.3-10\_3a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta = -0.2$  m

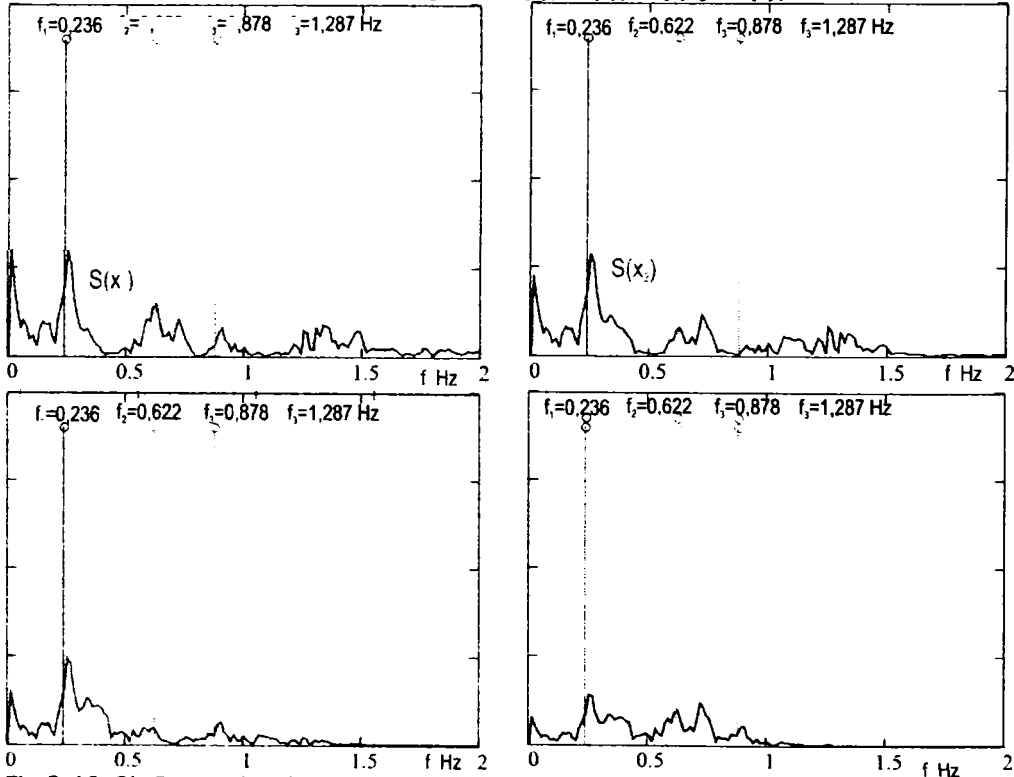


Fig.3-10\_3b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta = -0.2$  m

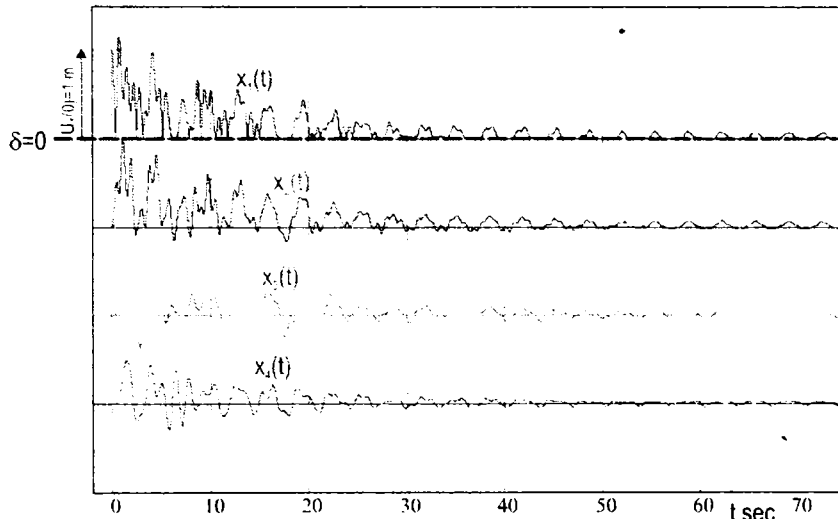


Fig.3-10\_4a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=0$  m

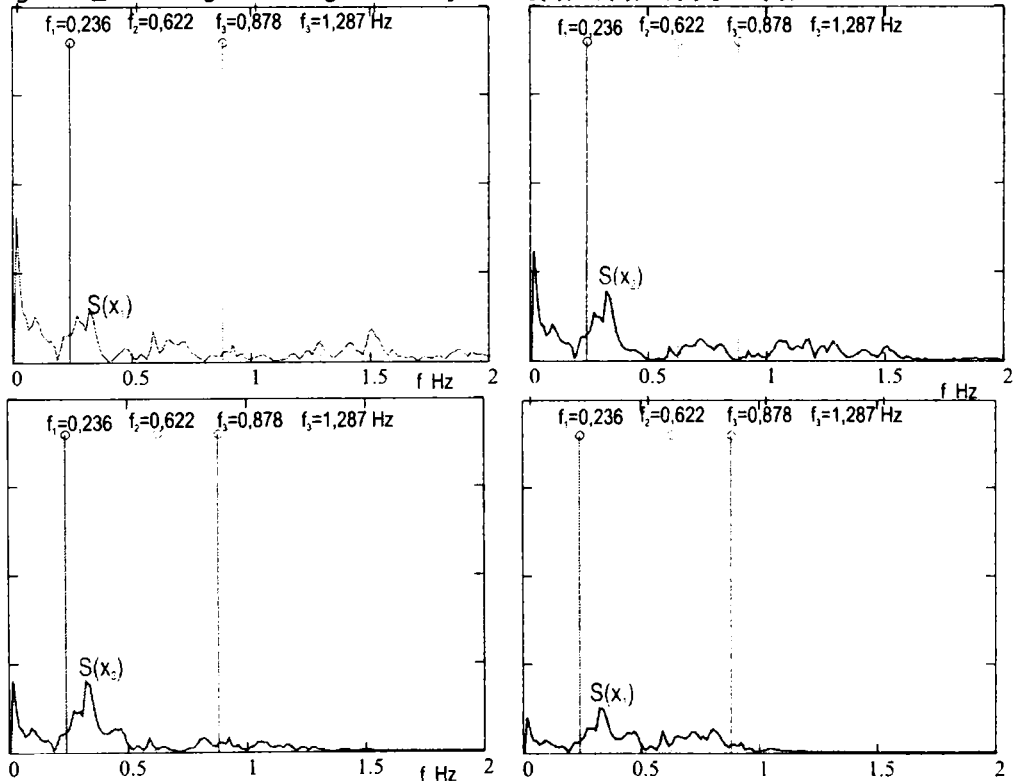


Fig.3-10\_4b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=0$  m

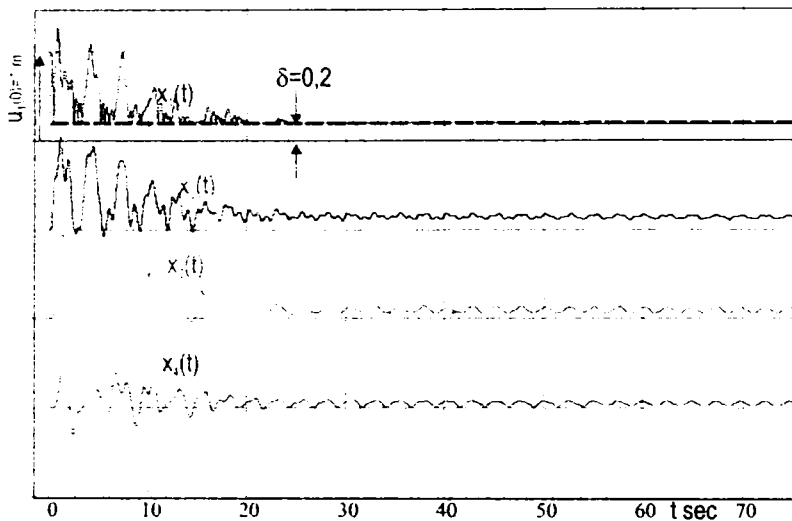


Fig.3-10\_5a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=0.2$  m

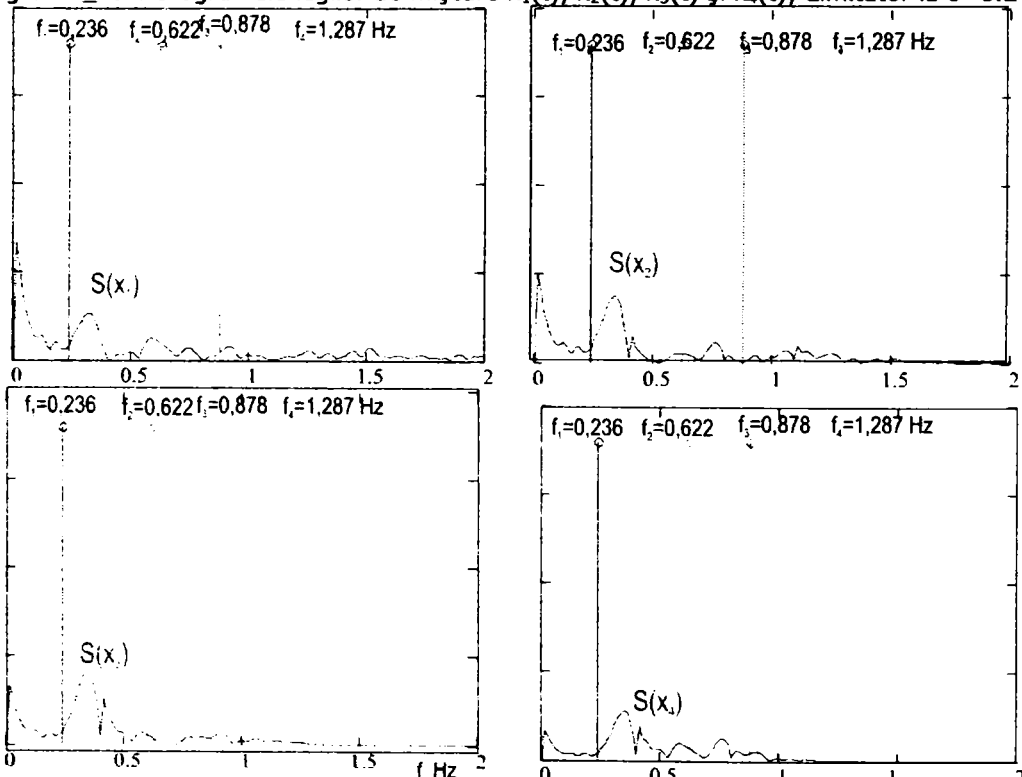


Fig.3-10\_5b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=0.2$  m



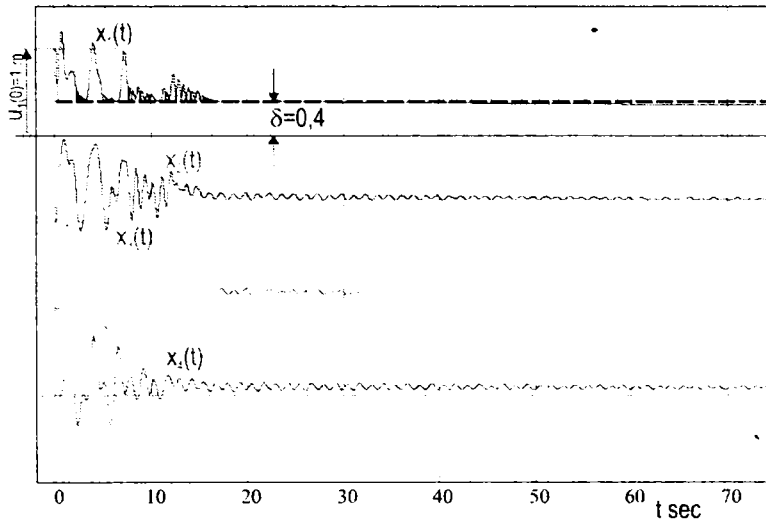


Fig.3-10\_6a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=0.4$  m

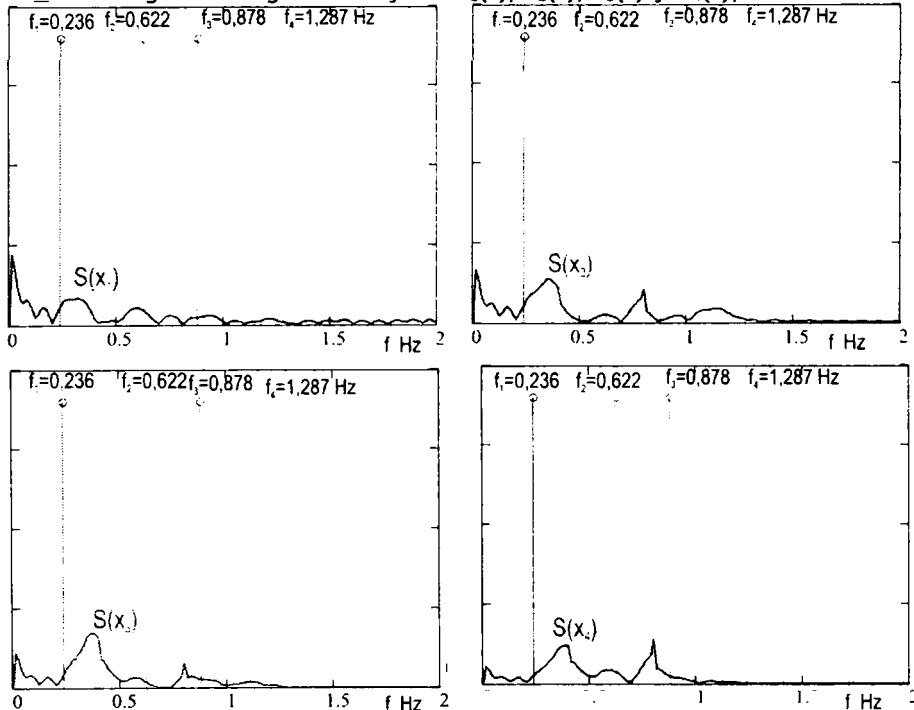


Fig.3-10\_6b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=0.4$  m

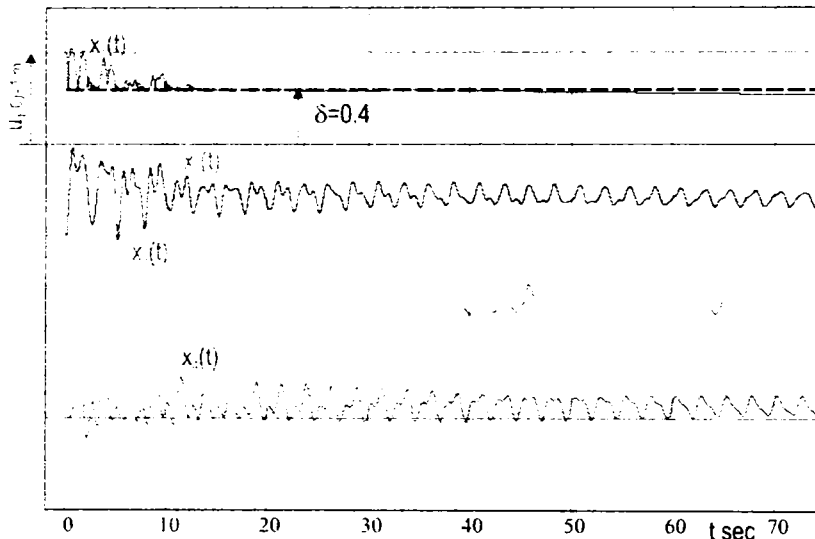


Fig.3-10\_7a Vibrogramele legilor de mișcare  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitator la  $\delta=0.6$

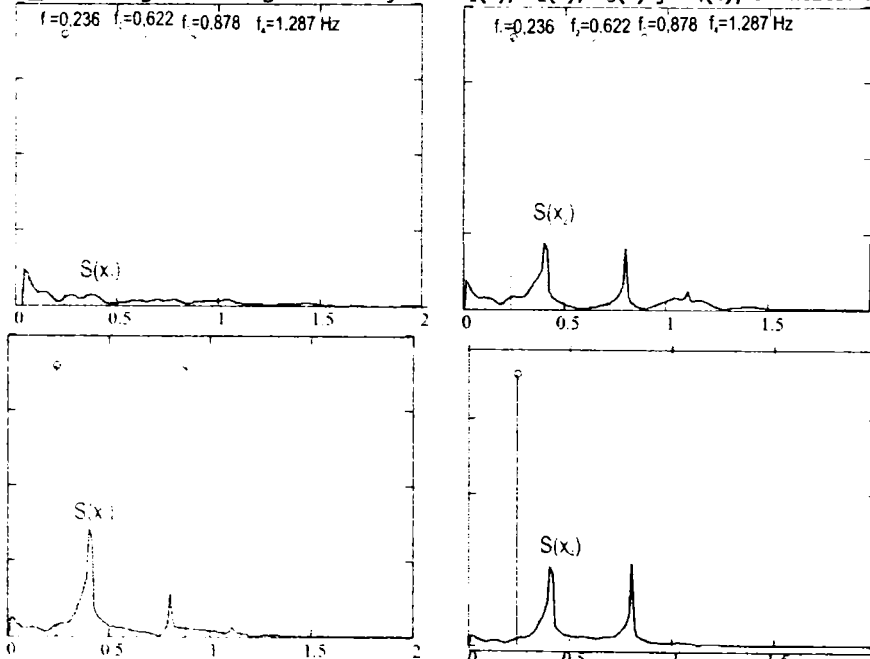


Fig.3-10\_7b Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$ ; Limitatorul rigid la  $\delta=0.6$  m

### b) contact interior sistemului

În foarte multe situații, ca la ansambluri mecanice cu jocuri, contactul între componentele sistemului sunt interioare acestuia. Astfel, la modelul din Fig.3-11 condiția de limitare a mișcărilor poate fi impusă mișcărilor maselor  $m_1$  și  $m_2$  definindu-se o funcție de deplasare relativă

$$\delta(t) = x_1(t) - x_2(t) + \delta_0 \quad (3.36)$$

unde la  $\delta(t)=0$  este impus contactul între cele două mase  $m_1$  și  $m_2$ .

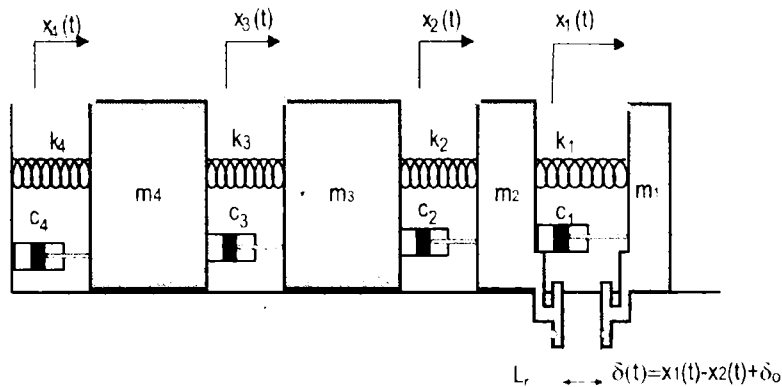


Fig.3-11 Model vibropercutant cu 4 grade de libertate;  
Limitator percutant între masele  $m_1$  și  $m_2$

Deci, la

$$x_1(t) = x_2(t) - \delta_0 \quad (3.37)$$

are loc ciocnirea,  $\delta_0$  fiind distanța dintre cele două limitatoare  $L_r$  rigidizate de masele  $m_1$  și  $m_2$  la momentul intial. Cunoscând vitezele  $v_{11} = \dot{x}_1(t^{(-)})$  și  $v_{21} = \dot{x}_2(t^{(-)})$  ale celor două mase în momentul  $t^{(-)}$ , de prim contact și aplicând legea ciocnirii se obțin expresiile vitezelor după desprindere la momentul  $t^{(+)}$ ,  $v_{12} = \dot{x}_1(t^{(+)})$  și  $v_{22} = \dot{x}_2(t^{(+)})$  rezultând

$$v_{12} = v_{11} - \frac{(v_{11} - v_{21})(1 + C_R)}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad ; \quad v_{22} = v_{21} + \frac{(v_{11} - v_{21})(1 + C_R)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (3.38)$$

Fiind vorba de integrarea numerică condiția (3.37) impusă de existența contactului se impune a fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} |x_1(i) - x_2(i)| &\leq \delta_0 + \varepsilon \\ |x_1(i) - x_2(i)| &\leq \delta_0 - \varepsilon \end{aligned} \quad (3.39)$$

unde  $\varepsilon$  este un parametru mic cu o valoare

$$\varepsilon < \min(|x_1(i) - x_1(i-1)|, |x_2(i) - x_2(i-1)|); \quad (i = 1, 2, 3, \dots, np) \quad (3.40)$$

Acestei condiție i se asociază următoarele linii de programare Anexa 3-2

```
FOR i = 1 TO np
x11 = x(1): x21 = x(2): y1 = y(1): y2 = y(2)
IF ABS(x11 - x21) <= delta + e AND ABS(x11 - x21) >= delta - e THEN 1
GOTO 10
1 y(1) = y1 - (y1 - y2) * (1 + R) / (1 + m1 / m2):
y(2) = y2 + (y1 - y2) * (1 + R) / (1 + m2 / m1)
10 CALL kutta(d(), c1(), k1(), x(), y(), fpt(), n, h)
NEXT
```

Se prezintă în continuare spectrele în frecvență,  $S(x_1)$ ,  $S(x_2)$ ,  $S(x_3)$  și  $S(x_4)$ , corespunzătoare mișcărilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$  pentru patru distanțe;  $\delta_0=0.2$  (Fig.3-12\_1); 0.4 (Fig.3-12\_2); 0.6 (Fig. 12\_3) și 0.8 (Fig.3-12\_4). Condițiile inițiale impuse sunt

$$x_1(0) = -0,5; \quad x_2(0) = -0,5; \quad x_3(0) = 0; \quad x_4(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = 0; \quad \dot{x}_3(0) = 0; \quad \dot{x}_4(0) = 0$$

Pe fiecare spectru sunt marcate, ca și pe precedentele spectre, cu linii verticale frecvențele proprii ale sistemului linear fără limitator percutant

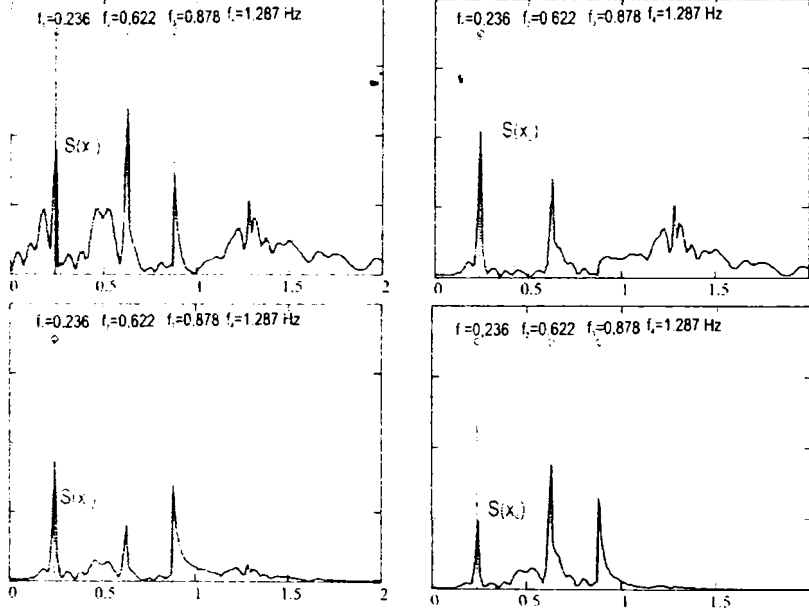


Fig.3-12\_1 Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$  Limitatorul rigid la  $\delta=0.2$  m, între masele  $m_1$  și  $m_2$  (Fig.3-11)

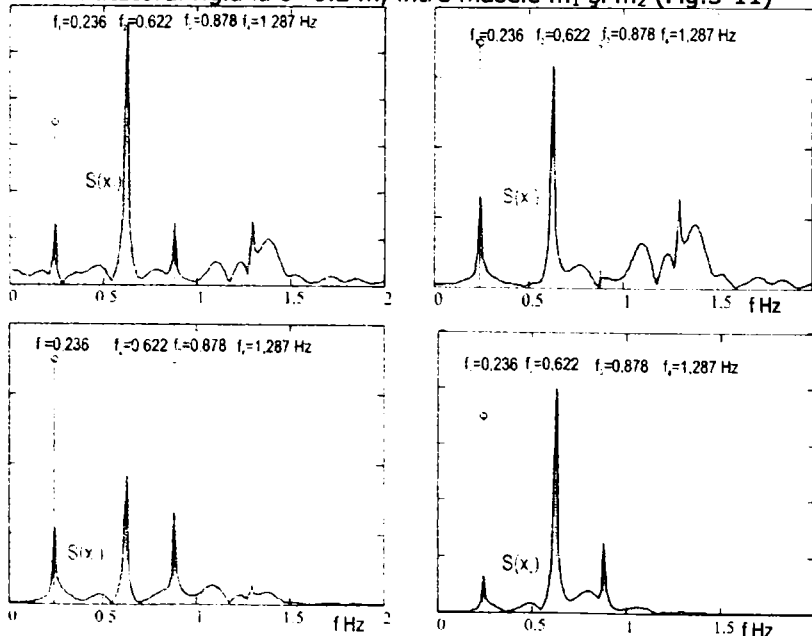


Fig.3-12\_2 Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$  Limitatorul rigid la  $\delta=0.4$  m, între masele  $m_1$  și  $m_2$  (Fig.3-11)

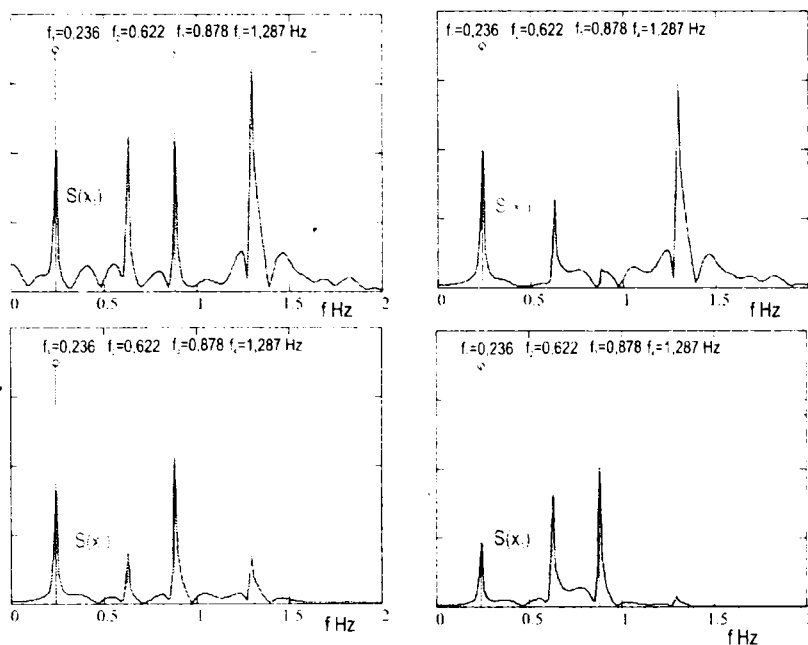


Fig.3-12\_3 Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$   
 Limitatorul rigid la  $\delta=0.6$  m, între masele  $m_1$  și  $m_2$  (Fig.3-11)

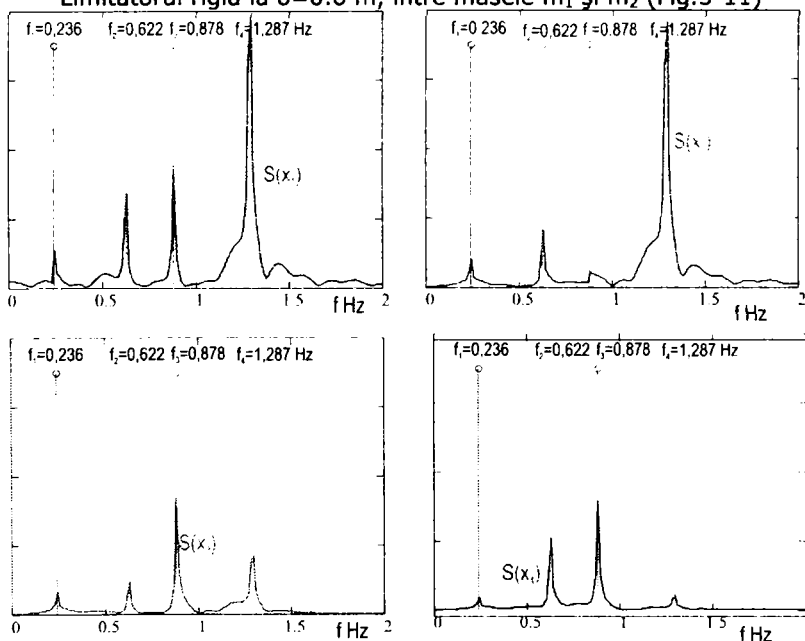


Fig.3-12\_4 Spectrele vibrațiilor  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  și  $x_4(t)$   
 Limitatorul rigid la  $\delta=0.8$  m, între masele  $m_1$  și  $m_2$  (Fig.3-11)

Din spectrograme reiese faptul că pentru valori cât mai mici ale lui  $\delta$  efectul de nelinearitate a sistemului este tot mai pregnant apărând lobi laterali vârfurilor modale. Deci neliniaritățile locale la o structură sau la un sistem cu jocuri sau crăpături pot fi puse în evidență prin analiza vibrațiilor libere amortizate excitate prin ciocnirea structurii.

### 3.3. Metoda elementelor finite la sisteme mecanice în contact

Structurile reale sunt medii elastice continue, cu diferite forme geometrice ce sunt supuse unor legături cu alte structuri într-un ansamblu de mașină sau utilaj. Dacă unele permit mișcări cinematice relative între ele, ce impun jocuri, atunci apar iminente forțe de contact impulsive.

Deoarece, în aceste cazuri, integrarea analitică a ecuațiilor constitutive, pe întregul ansamblu al sistemului este imposibil de a fi realizată s-au dezvoltat metode numerice bazate pe o echivalență energetică între model și sistemul (structura) real continuu.

Astfel, la ciocnirea a două corpuri, Fig.3-13a, în afara timpului de contact ecuațiile constitutive care guvernează mișcarea unui punct,  $P_C$  de pe corpul contactor și  $P_T$  de pe corpul țintă, sunt

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{d^2 x_s}{dt^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx-s}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy-s}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz-s}}{\partial z} + F_{x-s} \\ \rho_s \frac{d^2 y_s}{dt^2} &= \frac{\partial \tau_{yx-s}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy-s}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz-s}}{\partial z} + F_{y-s} \quad (s = C, T) \quad (3.41) \\ \rho_s \frac{d^2 z_s}{dt^2} &= \frac{\partial \tau_{zx-s}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy-s}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz-s}}{\partial z} + F_{z-s} \end{aligned}$$

în care intervin tensiuni normale  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ; tensiuni tangențiale  $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ , componentele forței masice  $F$ , densitatea materialului  $\rho$  și componentele vectorului accelerației.

Pe durata contactului cele două interfețe se unesc întrepătrundându-se, jocul  $\bar{d}$  devenind negativ  $|\bar{d}| < 0$ . O primă aproximare în modelarea contactului se poate face prin introducerea unui arc neliniar a cărui caracteristică se poate determina pe baza teoriei lui Hertz, analiza contactului fiind statică, pe baza elementelor finite cu o discretizare fină, în cele două zone  $I_C$  și  $I_T$ , de interfațare între cele două corpuri C și T. Aceasta permite și determinarea, distribuției presiunii  $p(\delta)$  de-a lungul petei de contact și a distribuției tensiunilor  $\sigma(\delta)$  din zonele de influență (Fig.3-13c)

Pe baza unor echivalări energetice se poate trece la un sistem discret de ecuații diferențiale, considerând că, în domeniul de frecvență unde cele două corpuri sunt excitate, pozițiile deformate ale structurilor lor pot fi determinate prin  $n_C$  și  $n_T$  puncte independente cărora li se atașează vectorii  $\{u_j\}$  ( $j=1,2,3,\dots,n_C/n_T$ ),

$$\{u_j(t)\} = \{u_{jx} \ u_{jy} \ u_{jz} \ \varphi_{jx} \ \varphi_{jy} \ \varphi_{jz}\}^T \quad (3.42)$$

ale căror elemente  $u_{jx}$ ,  $u_{jy}$  și  $u_{jz}$  fiind translații, iar  $\varphi_{jx}$ ,  $\varphi_{jy}$  și  $\varphi_{jz}$  rotații, raportate la un sistem de axe fixe Oxyz, sau la axe locale ale elementului.

Cu aceste aproximări, la momentul  $t$ , poziția unui punct P de coordonate geometrice  $x$ ,  $y$  și  $z$ , punct curent de pe elementul  $E_{j,j+1,j+2,j+3,\dots,j+n_e}$ , delimitat de volumul ce unește punctele  $j$ ,  $j+1$ ,  $j+2$ ,  $j+3$ , ...,  $n_e$  poate fi aproximată prin vectorul de poziție

$$\{r(t)\} = \sum_{i=1}^{n_e} [A_i(x, y, z)] \{u_i(t)\} \quad (3.43)$$

unde  $n$  este numărul de noduri ale elementului ales. Elementele matricelor  $[A_j(x, y, z)]$  sunt funcții analitice de coordonatele geometrice  $x, y, z$  ale punctului curent al elementului delimitat de respectivele noduri.

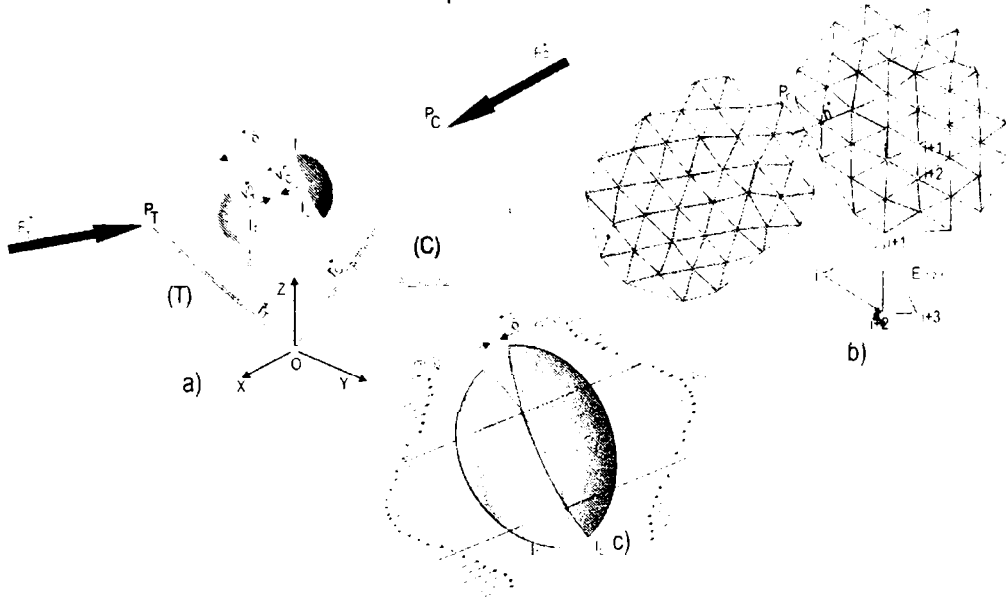


Fig.3-13 Ilustrarea ciocnirii a două corpuri: C contactor și T țintă;

a) modelul continuu b) modelul discret c) distribuția presiunii de-a lungul petei de contact și distribuția tensiunilor din zonele de influență

Domeniile de existență ale funcționalelor  $[A_k(x, y, z)]$  pot fi extinse pe întregul volum al corpului (metodele Razleigh-Ritz și Galerkin), sau numai pe anumite zone, delimitate geometric de elemente finite, prin așa numita operație de mesh-uire (Fig.3-13b).

Energia cinetică a elementului are forma integrală

$$\begin{aligned}
 E_{cE} &= \frac{1}{2} \int_{VE} \{\dot{r}(t)\}^T \{\dot{r}(t)\} dm = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{ne} \left( \{\dot{u}_i\}^T \left( \int_{VE} [A_i(x, y, z)]^T [A_j(x, y, z)] dm \right) \{\dot{u}_j(t)\} \right) \quad (3.44) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{ne} \left( \{\dot{u}_i\}^T [M_{i, j}] \{\dot{u}_j(t)\} \right)
 \end{aligned}$$

unde matricele

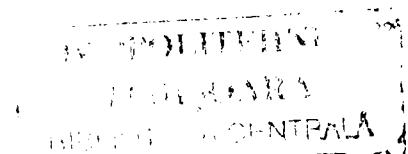
$$[M_{i, j}]_{6 \times 6} = \int [A_i(x, y, z)]^T [A_j(x, y, z)] dm \quad (3.45)$$

conțin elemente de masă și momente de inerție.

Energia de deformație pe un element al corpului are forma

$$E_{dE} = \frac{1}{2} \int_{VE} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (3.46)$$

unde, între vectorii de deformație



$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (3.47)$$

și tensiune

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (3.48)$$

există relația de legătură, sub forma integralei de convoluție

$$\{\sigma\} = \int_0^t [A(t-\tau)]\{\varepsilon\}d\tau \quad (3.47)$$

$[A(t-\tau)]_{(6 \times 6)}$  fiind o matrice ale cărei elemente sunt funcții de relaxare ce depind de modelul reologic ales.

Pentru modelul reologic vâscoelastic, care are aplicabilitatea cea mai uzuală, energia de deformație e constituită din două componente:  
una

$$E_{deE} = \frac{1}{2} \int_{VE} \{\varepsilon\}^T [B]\{\varepsilon\}dV \quad (3.48)$$

de elasticitate și alta

$$E_{ddE} = \frac{1}{2} \int_{VE} \{\dot{\varepsilon}\}^T [D]\{\dot{\varepsilon}\}dV \quad (3.49)$$

de disipație, [B] și [D] fiind matrice (6x6).

Vectorul matrice coloană al deformațiilor

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz}\}^T \quad (3.50)$$

se exprimă prin aplicarea operatorului diferențial

$$[\partial_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

asupra vectorului deplasări,  $\{r\} = \{u\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T$

$$\{\varepsilon\} = [\partial_0]\{u\} \quad (3.52)$$

care ținând cont de aproximarea(3.43) devine

$$\{\varepsilon\} = [\partial_0] \left( \sum_{i=1}^{ne} [A_i(x, y, z)] \right) \{u_i(t)\} \quad (3.53)$$

iar din (3.48) rezultă expresiile energiei de deformație elastică



$$E_{deE} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{ne} \left( \{u_i(t)\}^T [K_{i,j}] \{u_j(t)\} \right) \quad (3.54)$$

și a energiei de disipație

$$E_{ddD} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{ne} \left( \{\dot{u}_i\}^T [C_{i,j}] \{\dot{u}_j(t)\} \right) \quad (3.55)$$

Prin însumarea energiilor pe întregul volum al corpului se obțin energiile

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M] \{\dot{u}\}; \quad E_{dd} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C] \{\dot{u}\}; \quad E_{de} = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (3.56)$$

kinetică, de disipație și respectiv de deformație elastică, ale întregului corp.

Vectorul  $\{u\}$  cumulează legile de mișcare ale tuturor nodurilor prin care a fost discretizat corpul elastic

$$\{u\} = \left\{ \{u_1\}^T \{u_2\}^T \{u_3\}^T \dots \{u_{np-2}\}^T \{u_{np-1}\}^T \{u_{np}\}^T \right\}^T \quad (3.57)$$

Considerând cele două corpuri, contactor C și țintă T ca un sistem, atunci formele energetice (3.56) se scriu

$$E_{cs} = \frac{1}{2} \{\dot{u}_s\}^T [M_s] \{\dot{u}_s\}; \quad E_{dds} = \frac{1}{2} \{\dot{u}_s\}^T [C_s] \{\dot{u}_s\}; \quad E_{des} = \frac{1}{2} \{u_s\}^T [K_s] \{u_s\} \quad (3.58)$$

unde

$$\{u_s\} = \begin{Bmatrix} \{u_C\} \\ \{u_T\} \end{Bmatrix}; \quad [M_s] = \begin{bmatrix} [M_C] & [0] \\ [0] & [M_T] \end{bmatrix}; \quad [C_s] = \begin{bmatrix} [C_C] & [0] \\ [0] & [C_T] \end{bmatrix}; \quad [K_s] = \begin{bmatrix} [K_C] & [0] \\ [0] & [K_T] \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

indicii C și T corespund corpurilor contactor și respectiv corpul țintă.

Aplicând metoda ecuațiilor lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cs}}{\partial \{\dot{u}_s\}^T} \right) - \frac{\partial E_{cs}}{\partial \{u_s\}^T} + \frac{\partial E_{dds}}{\partial \{\dot{u}_s\}^T} + \frac{\partial E_{des}}{\partial \{u_s\}^T} = \{0\} \quad (3.60)$$

rezultând sistemul de ecuații diferențiale lineare

$$[M_s] \{\dot{u}_s\} + [C_s] \{\dot{u}_s\} + [K_s] \{u_s\} = \{0\} \quad (3.61)$$

ce se decuplează, în cazul lipsei contactului în două sisteme independente.

În momentul contactului cele două sisteme se cuplează datorită legăturii unilaterale ce se creează prin contact, energia de deformație elastică sporind cu un termen  $\{g\}^T \{\lambda\}$ , corespunzător zonei de contact

$$E_{des} = \frac{1}{2} \{u_s\}^T [K_s] \{u_s\} + \{g\}^T \{\lambda\} \quad (3.62)$$

$\{g\}$  fiind un vector al jocului dintre cele două corpuri, elementele lui fiind funcție de vectorul deplasărilor  $\{u_{sc}\}$  punctelor din zona de contact de pe ambele corpuri și  $\{\lambda\}$  fiind vectorul multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă asupra celor două corpuri acționează forțe exterioare și se consideră vectorul  $\{g_0\}$  corespunzător începutului contactului și dezvoltând vectorul  $\{g\}$  în serie Taylor, și oprind primii doi termeni vom avea

$$\{g\} = \{g_0\} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0 \{u_s\} \quad (3.63)$$

de unde

$$E_{des} = \frac{1}{2} \{u_s\}^T [K_S] \{u_s\} + \left( \{g_0\} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0 \{u_s\} \right)^T \{\lambda\} \quad (3.64)$$

Variația energiei în raport cu deplasarea  $\{u_s\}$  este

$$\delta E_{des} = \delta \{u_s\}^T [K_S] \{u_s\} + \delta \{u_s\}^T \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]^T \{\lambda\} + \left( \{g_0\} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0 \{u_s\} \right)^T \delta \{\lambda\} \quad (3.65)$$

pentru echilibru  $\delta E_{des} = 0$ , ceea ce impune

$$\begin{aligned} [K_S] \{u_s\} + \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]^T \{\lambda\} &= \{0\} \\ \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0 \{u_s\} &= -\{g_0\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

de unde

$$\{\lambda\} = - \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0^{-T} [K_S] \{u_s\} \quad (3.67)$$

expresia energiei de deformație (3.62), în faza de contact, devine

$$E_{des} = \frac{1}{2} \{u_s\}^T [K_S] \{u_s\} - \{g\}^T \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0^{-T} [K_S] \{u_s\} \quad (3.68)$$

sistemul de ecuații diferențiale (3.61) trecând sub forma

$$[M_S] \{\ddot{u}_s\} + [C_S] \{\dot{u}_s\} + \left( [K_S] - \{g\}^T \left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0^{-T} [K_S] \right) \{u_s\} = \{0\} \quad (3.69)$$

căruia i se adaugă sistemul ecuații de legătură

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial \{u_s\}} \right]_0 \{u_s\} = -\{g_0\} \quad (3.70)$$

Algoritmul de rezolvare a celor două sisteme este implementate în coduri avansate de element finite cum este codul Ansys LS Dyna utilizat pentru modelare în cadrul acestei lucrări.

## Aplicație

Se consideră un paralelipiped (Fig.3-14) de masă  $m_1$ , care este lăsat să cadă liber, de la înălțimea  $h$ , sub acțiunea forței gravitaționale  $m_1g$  pe o platformă de masă  $m_2$ , care e silită de un ghidaj să execute numai mișcări de-a lungul axei verticale  $Ox$ . De platformă este prins, la un capăt, un arc de constantă elastică  $k$ , celălalt capăt al arcului fiind fix.

Cele două corpuri fiind deformabile s-a realizat programul *Impact 2C* (Anexa 3-3) ca date de intrare fiind luate în considerare:  $m_1=30\text{kg}$ ;  $m_2=10\text{kg}$ ;  $h=0.1\text{m}$ .

Ambele corpuri fiind elastice s-a realizat o mesh-uire cu elemente tip shell 163-deoarece este un element folosit în analiza explicit dinamică; sunt permise mai multe tipuri de formulări pentru elementul de tip „shell 163”, dintre acestea s-a folosit componenta „co-rotation” a formulării Huges-Liu pentru a evita complicațiile

mecanicii neliniare prin includerea unui sistem de coordonate în element; și s-a definit un contact tip nod pe suprafață, tip folosit pentru contactul general între două suprafețe, fiind eficient când o suprafață mica vine în contact cu o suprafață mai mare.

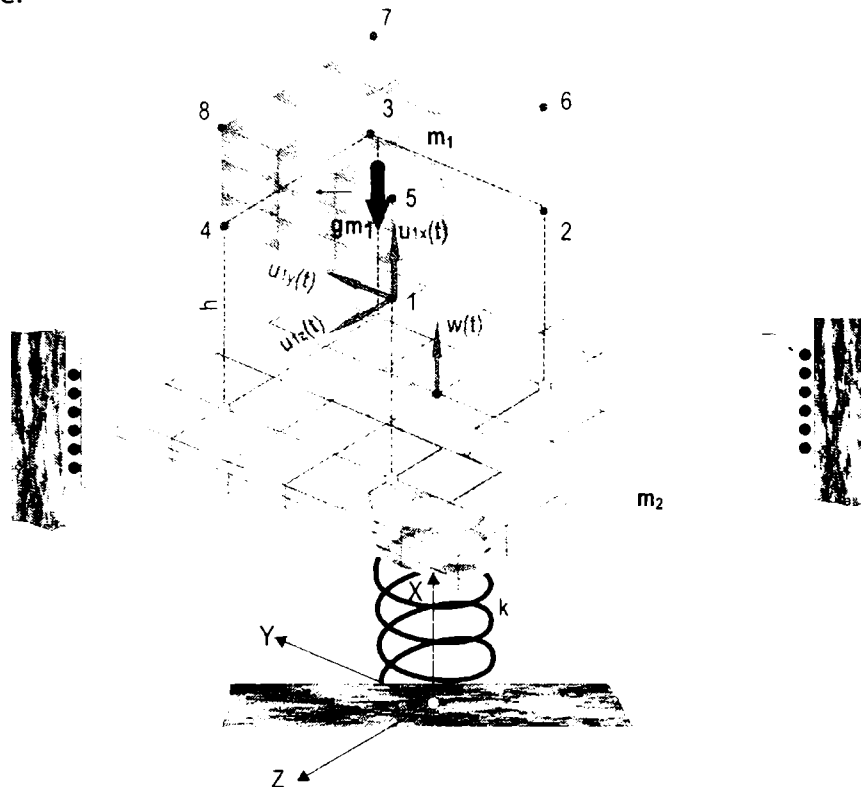


Fig.3-14 Ilustrarea ciocnirii elastice dintre un paralelipiped elastic de masă  $m_1$  și o platformă de masă  $m_2$

În Fig.3-15 sunt prezentate digramele mișcărilor în timp:  $w(t)$  ale platformei și  $u_{1x}(t)$ ,  $u_{2x}(t)$ ,  $u_{3x}(t)$ ,.....  $u_{8x}(t)$  ale mișcărilor pe verticală ale celor opt colțuri ale paralelipipedului.

Lansarea paralelipipedului se face de la înălțimea  $h=0.1$  m (punct  $C_0$  Fig.3-15) la  $t=0$ , la timpul

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{9,81}} = 0,143 \text{ s}$$

având loc primul contact (punct  $C_1$  Fig.3-15) și imediat desprinderea, cele două corpuri executând mișcări independente, cu multiple contacte pe durata de timp  $0,143 \div 0,9$  s (punct  $C_{11}$ ) când paralelipipedul se așează pe platforma executând împreună o mișcare armonică cu frecvența

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{40}{20000}} = 3,559 \text{ Hz}$$

regăsită prin analiza uneia din legile de deplasare începând de la secunda 1 până la secunda 6 (Fig.3-16). Fig.3-16a) reprezintă legea de mișcare a platformei  $w(t)$ , comună celorlalte opt puncte al paralelipipedului, iar Fig.3-16b) reprezintă spectrul acestei mișcări, unde se observă o suprapunere perfectă a liniei spectrale de frecvență  $f=3,559$ Hz, peste vârful din spectru.

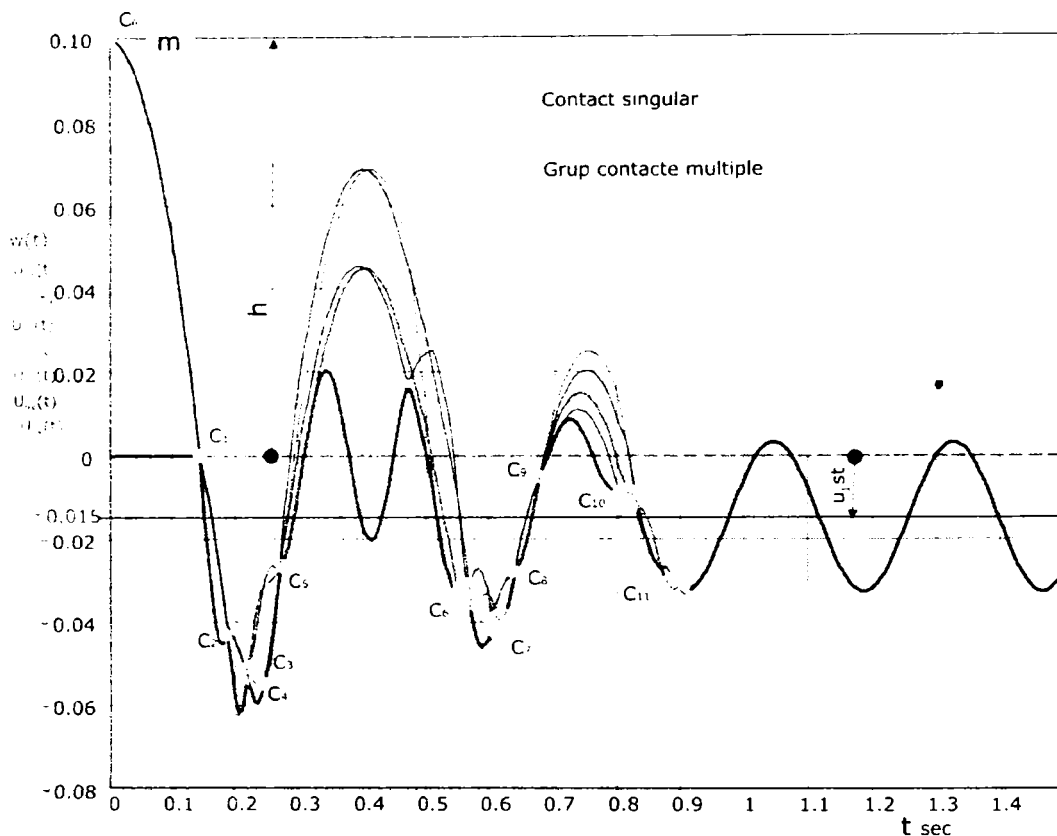


Fig.3-15 Ilustrarea ciocnirii elastice dintre un paralelipiped elastic de masă  $m_1$  și o platformă de masă  $m_2$

Energia pe care o are inițial sistemul, înainte de lansare este

$$E_{S1} = m_1 g (h + u_{1st}) = 45.0 \text{ J}$$

unde  $u_{1st} = 0.0147 \text{ m}$  este deplasarea statică comună după așezarea masei paralelipipedice pe platformă.

Energia rămasă în sistem după  $t = 1 \text{ s}$ , când cele două corpuri sunt unite și execută o mișcare armonică de amplitudine  $A$ , este

$$E_2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot u_{1st} + \frac{1}{2} k A^2 = 8.966 \text{ J}$$

cea ce înseamnă că restul de 36.048 J s-au pierdut prin multiplele contacte dinamice petrecute pe durata unei secunde.

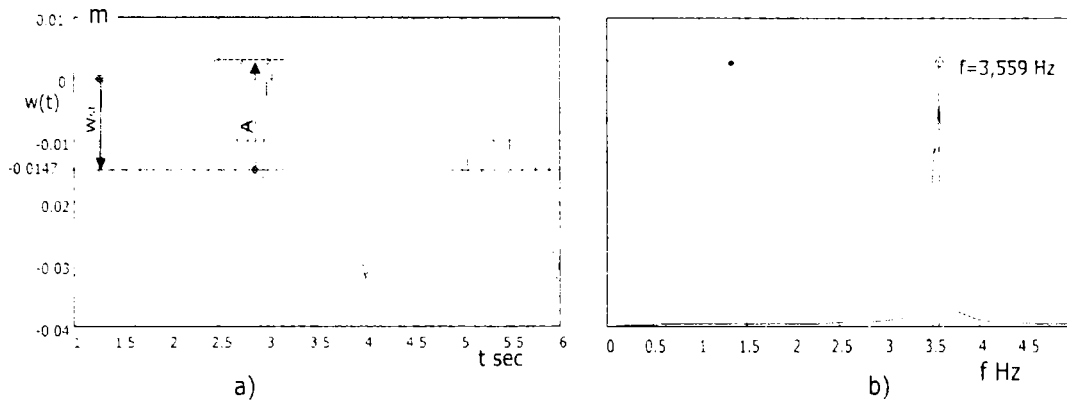


Fig.3-16 Analiza mișcărilor armonice după așezarea masei  $m_1$  pe platforma de masă  $m_2$ ; a) legea de mișcare a platformei  $w(t)$ , comună celorlalte opt puncte al paralelipipedului b) spectrul acestei mișcări

### 3.4. Contribuții originale

- Studiul prin metode numerice Hibrade privind simularea prin metoda elementului finit folosind codul Ansys
- Introducerea algoritmului Matchad pentru determinarea timpului și legii de mișcare în cazul ciocnirii
- Evidențierea modelelor discrete pentru contactul corpurilor unei mașini cu aprindere prin scânteie
- Aplicarea metodei Runge-Kutta pentru integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale ce guvernează mișcările unui sistem dinamic discretizat
- Studiul metodei pentru un sistem vibropercutant cu un grad și două grade de libertate
- Generalizarea metodelor de mai sus pentru sisteme cu  $n$  grade de libertate
- Evidențierea spectrelor în frecvență ale mișcărilor vibratorii analizate prin metode numerice
- Studiul unor modele vibropercutante cu patru grade de libertate cu limitatoare rigide
- Studiul spectrelor de vibrațiilor în cazul limitatoarelor rigide
- Aplicarea metodei elementelor finite în cazul sistemelor mecanice neliniare cu contact Hertzian
- Aplicarea metodei elementului finit pentru modelul reologic vâscoelastic

# Capitolul 4

## SIMULĂRI ȘI VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

### 4.1. Simularea vibrațiilor unor structuri cu discontinuități geometrice

Majoritatea structurilor mecanice prin construcția și utilitatea lor prezintă forme cu discontinuități geometrice. Montate într-un ansamblu de mașină sau utilaj ce efectuează operații tehnologice acestea sunt supuse unor solicitări dinamice ce trebuie să fie evaluate în vederea calculului de rezistență. Modelul de calcul al unei asemenea structuri poate fi numai unul discret. Chiar și structuri cu geometrii simple, cu forme simetrice pot ridica probleme, cum sunt cele ce prezintă fisuri, unde apar probleme de contact între suprafețele adiacente ale fisurii.

În fig. 4-1 este ilustrat efectul local pe care îl introduce o fisură  $C_r$  pe o structură  $S$  în timpul solicitării dinamice.

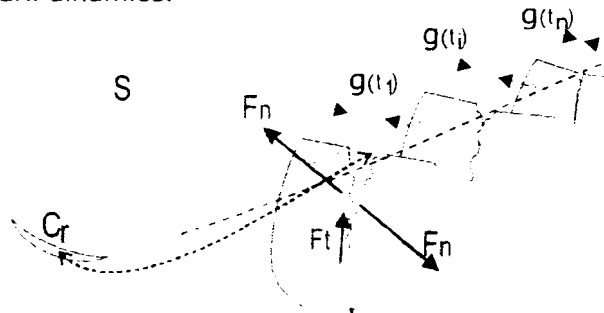


Fig. 4-1 Ilustrarea contactului la o fisură pe o structură elastică

În timpul deformării structurii, sub acțiunea forțelor externe, a celor de legătură prin contact cu alte structuri adiacente și a forțelor de inerție, iau naștere forțe interne de contact între cele două suprafețe ale fisurii,  $F_n$  normale și tangențiale  $F_t$ ,

Aceste forțe, de natură elastică și de disipație sunt funcții neliniare ce depind de deschiderea rostului  $g$  al fisurii, având caracteristicile ca cea din Fig.4-2, asimetrică datorită contactului unilateral, a cărei deschidere  $g$  este funcție de deformarea dinamică a structurii [36].

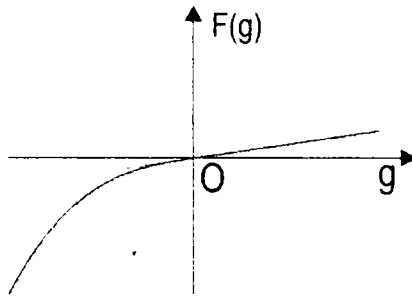


Fig.4-2 Ilustrarea caracteristicii elastice a forței de contact la o fisură în funcție de deschiderea  $g$

Pe partea pozitivă a deschiderii  $g$  caracteristica poate fi liniară dar pe partea negativă caracteristica este tare neliniară.

Un model dinamic aproximativ al celui de al  $r$ -lea mod natural de vibrații al structurii poate fi pus sub forma

$$m_r \ddot{q}_r + c_r (\dot{q}_r + f_d(\dot{q}_r)) + k_r (q_r + f_k(q_r)) = 0 \quad (4.1)$$

unde caracteristica elastică are forma neliniară de tip Duffing

$$q \geq 0 \rightarrow f_k(q) = 0 \quad q < 0 \rightarrow f_k(q) = \alpha_r q^3 \quad (4.2)$$

iar cea de disipație

$$q \geq 0 \rightarrow f_d(\dot{q}) = 0 \quad q < 0 \rightarrow f_d(\dot{q}) = \beta_r \dot{q}^3 \quad (4.3)$$

coeficienții  $\alpha_r$  și  $\beta_r$  dând caracterul neliniar al modului  $r$  afectat de fisură.

Prin simulare numerică, utilizând subrutina Mathcad

$q := \text{Odesolve}(t, T)$

pentru datele  $m_r = 0.1 \text{ kg}$ ;  $k_r = 569400 \text{ N/m}$ ;  $c_r = 0 \text{ N.s.m}^{-1}$ ;  $\alpha_r = 0.3$ ;  $\beta_r = 0.5$ , cu datele inițiale  $q(0) = 2$  și  $\dot{q}(0) = 0$ , s-au obținut vibrațiile libere amortizate pe o perioadă de timp 2.5 s.

Vibrograma, (Fig.4-3), reprezentată pe o perioadă de timp  $T = 2.5 \text{ s}$ , are și ea o alură asimetrică, anelopa (înfășurătoarea) superioară  $A_s$  a legii de mișcare  $q_r(t)$  fiind diferită de cea inferioară  $A_i$ ,  $A_s(t) > |A_i(t)|$  (Fig.4-4), această nesimetrie fiind caracteristică efectului neliniar.

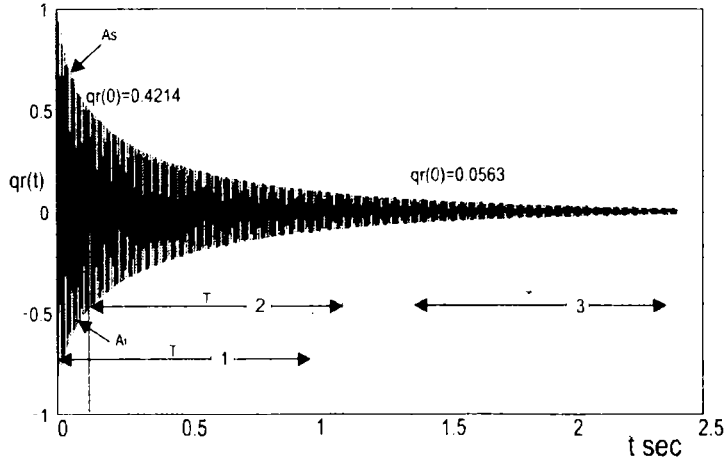


Fig.4-3 Vibrograma vibrațiilor libere amortizate

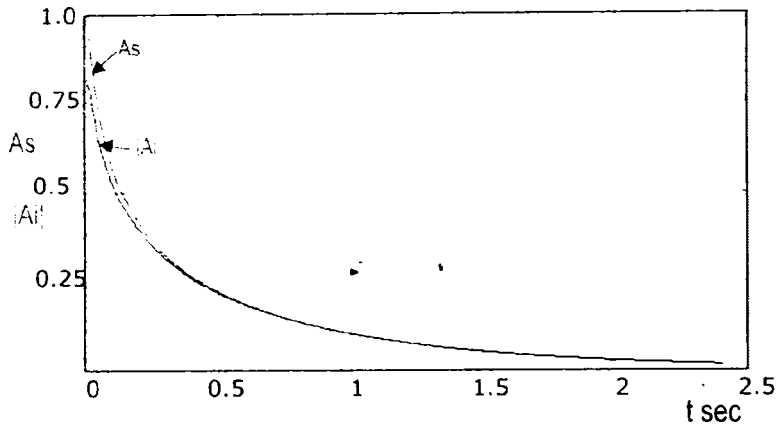


Fig.4-4 Anvelopele vibrațiilor libere amortizate ale sistemului neliniar

O altă trăsătură a caracterului neliniar al sistemului (4.1) se obține aplicând transformata Fourier (FT) aplicată pe un interval  $T$  finit de timp

$$S(f) = \frac{1}{T} \int_0^T q_r(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.4)$$

Forma spectrului este influențată de nivelul elongației mișcării vibratorii. Astfel, dacă de-a lungul secvenței de timp de 2.5s se iau trei intervale de lungime  $T=0.983$  s, (1), (2) și (3), deplasate între ele se obțin trei spectre (Fig. 4-5) notate cu aceleași numere, evident, mult diferite între ele.

Dacă pentru ultima secvență analizată, (3) are forma spectrului unei vibrații libere amortizate ale unui sistem liniar cu un singur grad de libertate, prezentând un singur vârf de rezonanță  $P_{31}$ , celelalte două spectre (2) și mai ales (1) prezintă evidente distorsiuni.

Astfel la spectrul (1) vârful de rezonanță se dublează prezentând două vârfuri distincte  $P_{11}$  și  $P_{12}$  și de asemenea, o serie de loburi laterale cu vârfurile în punctele  $P_{1i}$ .

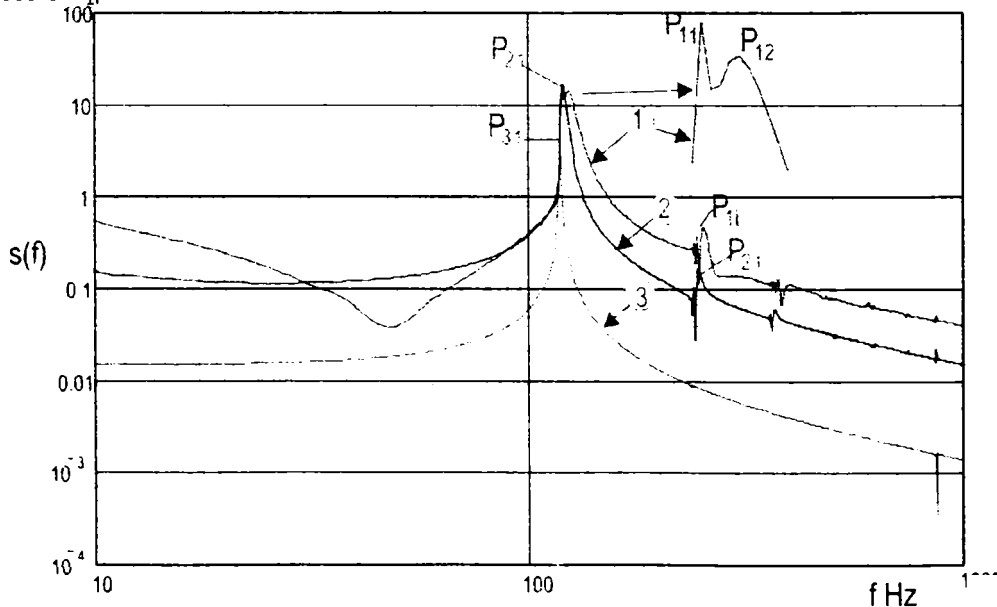


Fig.4-5 Ilustrarea efectului de neliniaritate în spectrul Fourier



Evident, efectul de neliniaritate, introdus de fisură, va perturba și răspunsul modal al modelului discret al structurii reale, cu abateri de la suma modală

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \left( \{X_r\} e^{\lambda_r t} + \{\bar{X}_r\} e^{\bar{\lambda}_r t} \right) \quad (4.5)$$

unde  $\{q(t)\}$  fiind vectorul coordonatelor nodale ale structurii discretizată,  $\lambda_r, \bar{\lambda}_r$  valorile proprii complex conjugate iar  $\{X_r\}, \{\bar{X}_r\}$  vectorii proprii complex conjugate.

Valorile proprii și vectorii proprii au formele

$$\lambda_r = -\sigma_r + j\rho_r; \quad \bar{\lambda}_r = -\sigma_r - j\rho_r \quad (4.6)$$

$$\{X_r\} = \{X_{rR}\} + j\{X_{rI}\}; \quad \{\bar{X}_r\} = \{X_{rR}\} - j\{X_{rI}\} \quad (j = \sqrt{-1})$$

unde  $\sigma_r$  și  $\rho_r$  sunt factorul de amortizare și respectiv pseudofrecvența modului natural de vibrații  $r$  al structurii. Cu aceste notații vectorul legilor de mișcare devine

$$\{q_r(t)\} = 2 \sum_{r=1}^n e^{-\sigma_r t} A_r \cos(\rho_r t + \varphi_r) \quad (4.7)$$

fazele  $\varphi_r$  și amplitudinile  $A_r$  având formele

$$\varphi_r = \tan^{-1} \frac{X_{rI}}{X_{rR}}, \quad A_r = \sqrt{X_{rR}^2 + X_{rI}^2} \quad (4.8)$$

Aplicând transformate Fourier asupra formei (4.7) se obține expresia spectrului

$$\{S(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{q(t)\} e^{-j\omega t} dt = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\{X_r\}}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\{\bar{X}_r\}}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right) \quad (4.9)$$

formă din punct de vedere matematic similară cu răspunsul modal la o excitație armonică staționară de pulsație  $\omega$ .

În general, așa cum se va vedea în cadrul experiențelor efectuate în cadrul acestei lucrări modurile naturale pot fi separate, astfel că răspunsul la o excitație armonică staționară de pulsație  $\omega \approx \rho_r$ , într-un nod oarecare al structurii, după o anumită direcție, poate fi aproximat prin forma

$$q_r(\omega) \approx \frac{X_{rR} + jX_{rI}}{\sigma_r + j(\omega - \rho_r)} + A_r + jB_r \quad (4.10)$$

unde  $A_r + jB_r$  este o constantă complexă care înglobează influența modurilor învecinate.

În planul complex  $OR_e I_m$  (Fig.4-6) reprezentarea funcției  $q_r(\omega)$  este un cerc  $C_r$ . Pe baza algoritmului prezentat în lucrarea [4], pot fi estimați parametrii modali  $\rho_r$  și  $\sigma_r$  folosind sistemul de ecuații lineare

$$\rho_r(\omega_s - \omega_i) + \sigma_r[(\omega_s - \omega_k)T_{ks} - (\omega_k - \omega_i)T_{ik}] = \omega_k(\omega_s - \omega_i) \quad (4.11)$$

$$\rho_r(\omega_s - \omega_k) + \sigma_r[(\omega_s - \omega_i)T_{is} - (\omega_k - \omega_i)T_{ik}] = \omega_i(\omega_s - \omega_k)$$

unde  $\omega_i, \omega_k$  și  $\omega_s$  sunt valorile pentru trei frecvențe corespunzătoare a trei puncte reprezentative  $P(\omega_i), P(\omega_k)$  și  $P(\omega_s)$  situate pe curba  $C_r$ , (Fig.4-6) și

$$T_{ik} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_{ik} / 2)} \quad (4.12)$$

$\beta_{ik}$  fiind unghiul la centru al arcului între punctele reprezentative  $P(\omega_i)$  și  $P(\omega_k)$

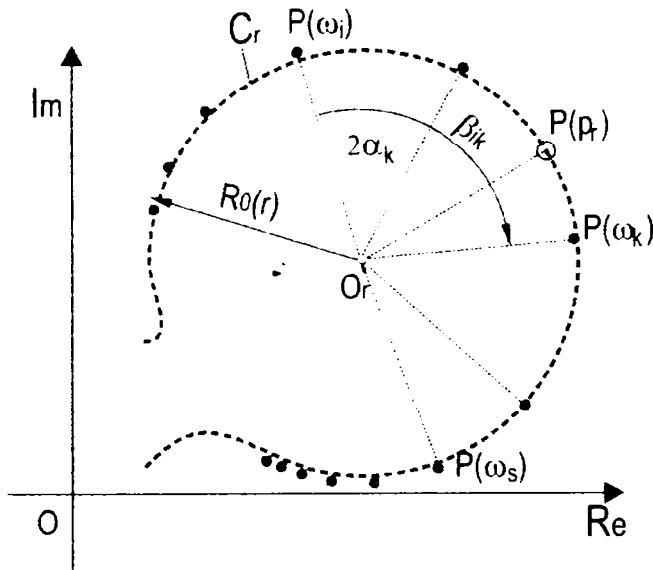


Fig. 4-6 Diagrama polară a modului r

Sistemul (4.11) este un sistem supraabundent având mai multe ecuații decât necunoscute, parametrii  $\sigma_r$  și  $\rho_r$ , deoarece pe diagrama polară se pot lua mai mult de trei puncte cu ajutorul cărora se poate construi cercul de aproximare. În consecință sistemul se determină cu metoda celor mai mici pătrate.

În final, se determină frecvențele proprii și factorii de amortizare modali

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\rho_r^2 + \sigma_r^2}; \quad \rho_r = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\rho_r^2 + \sigma_r^2}} \quad (4.13)$$

Prelucrând acum datele simulate pentru sistemul neliniar prin algoritmul de estimare a parametrilor modali se obțin, prin diagramele polare (Fig.4-6), valorile din tabelul 4.1

Pentru prima secvență procesată, corespunzătoare deplasării temporare 0, rezultă pentru vârfurile  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ , rezultate din spectru corespunzător diagramei 1 Fig.4-5 și curbei  $C_{11}$  din Fig.4-7, valorile frecvențelor proprii, 120.4206, 121.5847 și 248.6648Hz, mai mari decât valoarea frecvenței proprii de 119.8833 Hz, corespunzătoare secvenței deplasate temporar cu 1.3799s, secvență pentru care efectul neliniar este mult redus, ceea ce se poate vedea din alura diagramei (3), Fig.4-5, apărând un singur vârf  $P_{31}$

O altă caracteristică a efectului neliniar este aceea că aplicând algoritmul de mai sus pot să apară matematic amortizări negative ceea ce din punct de vedere fizic nu poate exista. Ca exemplu prelucrând datele din jurul lobului lateral cu vârful în  $P_{31}$  se obține din sistemul de ecuații (4.11) și formele (4.13) raportul de amortizare modal  $\rho_r = -3.6777\%$

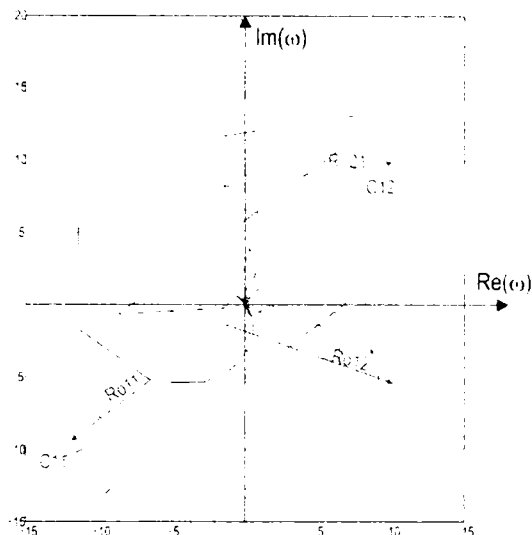


Fig.4-7 Diagramele polare corespunzătoare celor trei spectre din Fig.4-5

Tabel 4-1 Valori ale parametrilor modali

| Deplasare temporară | Vârful | $f_r$ Hz | $\eta_r$ % | $R_{or}$ |
|---------------------|--------|----------|------------|----------|
| 0                   | P11    | 120.4206 | 1.2596     | 11.5688  |
|                     | P12    | 121.5847 | 6.6032     | 11.9873  |
|                     | P13    | 246.6810 | -3.6777    | 0.11600  |
|                     | P14    | 248.6648 | 8.7119     | 0.19940  |
| 0.1199              | P21    | 120.9121 | 3.0131     | 11.5767  |
| 1.3799              | P31    | 119.8833 | 0.1751     | 2.53360  |

În consecință, determinarea existenței unei fisuri pe o structură se poate face prin analiza măsurătorilor experimentale privind răspunsul structurii la forțe impulsive. Abaterile, prin analiza modală secvențială cu deplasarea ferestrei (T) de analiză în timp, pot să indice existența efectului nelinier, și deci, o presupusă fisură în structură dacă parametrii modali își modifică valorile funcție de deplasarea temporară.

Coroborare acestor date cu efectul nelinier introdus de fisură și dimensiunile ei se poate face numai pe baza unor încercări experimentale de durată. Încercările experimentale sunt costisitoare datorită realizării unui număr mare de eșantioane și de aceea o aplicație importantă a studiilor dezvoltate în cadrul prezentei teze este simularea structurii cu diverse forme și mărimi de fisuri, structurii aplicându-i-se forțe impulsive. Răspunsul dinamic procesat al structurii, prin vibrațiile libere rezultate, se analizează prin diverse metode de prelucrare.

Un prim caz de analiză este o structură simplă, constituită dintr-un inel.

### • Simularea vibrațiilor unui inel

Se consideră o bară curbă circulară de secțiune constantă  $A$ , care are raza cercului, ce unește centrele de greutate ale secțiunilor transversale, notată cu  $R$ . Se alege un sistem de axe intrinsec (Fig.4-8a) și se notează deplasările corespunzătoare astfel

- $u(\theta, t)$  după tangenta cu versorul  $\vec{r}$
- $v(\theta, t)$  după normala principală cu versorul  $\vec{u}$

➤  $w(\theta, t)$  după binormala cu versorul  $\bar{\beta}$

În cazul vibrațiilor în planul inelului este evident ca  $w(\theta, t) = 0$ .

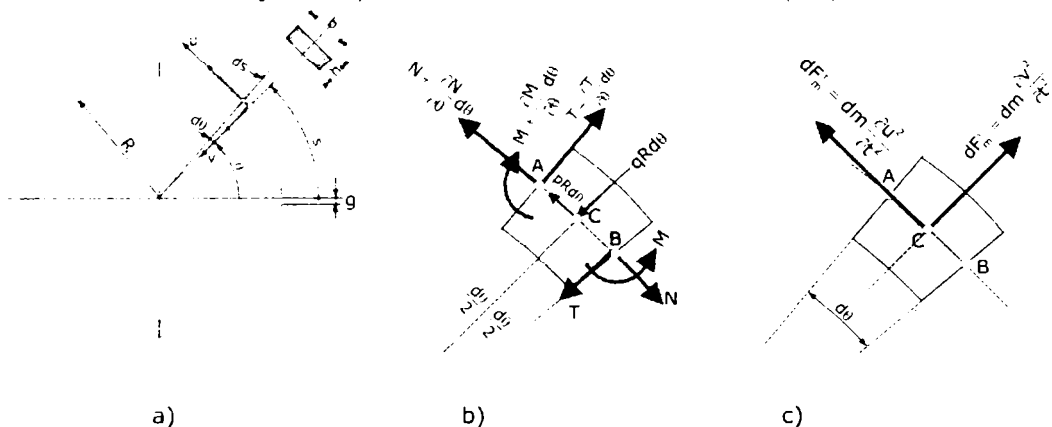


Fig.4-8 Modelul barei curbe circulare de secțiune constantă

Se consideră un element infinitesimal de inel de lungime  $AB = ds = R d\theta$ , forțele ce acționează asupra inelului fiind prezentate în Fig.4-8b. S-a considerat că asupra inelului acționează și forțe distribuite pe direcția razei, rezultanta lor pentru elementul AB fiind  $qR d\theta$  și forțe distribuite pe direcția tangențială, rezultanta lor pentru AB fiind  $pR d\theta$ .

Ecuatiile de proiecție pe tangenta în C la cerc, pe direcția razei ce trece prin punctul C și ecuația de moment conduc la următoarele relații

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \theta} + T + R &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} - N - qR &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} + TR &= 0\end{aligned}\quad (4.14)$$

La ecuațiile (4.14) se adaugă relațiile

➤ expresia momentului încovoietor într-o secțiune

$$M = -\frac{EI}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (4.15)$$

unde  $\varphi$  este unghiul de rotație al secțiunii considerate  
➤ unghiul de rotație al secțiunii considerate

$$\varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \quad (4.16)$$

➤ condiția ca axa inelului (barei curbe) să se alungească

$$\begin{aligned}\varepsilon_R \cong \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) &= 0 \\ \Rightarrow v &= \frac{\partial u}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Din ecuațiile (4.14), (4.15), (4.16) și (4.17) se pot elimina mărimile necunoscute  $N$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $\varphi$ ,  $v$  și se obține o ecuație diferențială în care rămâne numai deplasarea tangențială  $u$ . Într-adevăr din relația (4.15), ținând seama de relațiile (4.16) și (4.17) rezultă

$$M = -\frac{EI}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{EI}{R^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{EI}{R^2} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (4.18)$$

Din ultima relație a sistemului de ecuații (4.14) se determină

$$T = -\frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{EI}{R^3} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.19)$$

din a doua relație se determină

$$N = \frac{\partial T}{\partial \theta} - qR = \frac{EI}{R^3} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial \theta^5} + \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right) - qR \quad (4.20)$$

și înlocuindu-le în prima ecuație vom obține

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{R^4}{EI} \left( \frac{\partial q}{\partial \theta} - p \right) \quad (4.21)$$

În cazul vibrațiilor libere forțele distribuite sunt componentele normală și tangențială ale forțelor de inerție. Rezultantele acestor forțe pentru elementul AB sunt (Fig.4-8c)

$$\begin{aligned} dF_{in}^V &= dm \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho AR d\theta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ dF_{in}^T &= dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho AR d\theta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

unde  $\rho$ - densitatea materialului, A-aria secțiunii inelului.

Rezultă, ținând seama și de sensul forțelor de inerție față de sensurile pozitive considerate pentru  $q$  și  $p$

$$\begin{aligned} q &= -\frac{dF_{in}^V}{R d\theta} = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ p &= -\frac{dF_{in}^T}{R d\theta} = -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Înlocuind în ecuația (4.21) se obține

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\rho AR^4}{EI} \left( u - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

sau, ținând cont de relația (4.16)

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\rho AR^4}{EI} \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = 0 \quad (4.24)$$

Pentru ecuația (4.24) se caută soluții de forma

$$u(\theta, t) = u_1(\theta) \cos \omega t \quad (4.25)$$

După ce se înlocuiește soluția în ecuația (4.24), se efectuează calcule și se simplifică cu  $\cos \omega t$  se va obține

$$\frac{\partial^6 u_1}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - \omega^2 \frac{\rho AR^4}{EI} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - u_1 \right) = 0 \quad (4.26)$$

Ecuația diferențială (4.26) are ca necunoscute funcția  $u_1(\theta)$  care trebuie să satisfacă condițiile la limită și pulsația  $\omega$  a vibrațiilor libere considerate. Funcția  $u_1(\theta)$

trebuie să fie o funcție periodică deoarece într-o secțiune a inelului deplasările, forțele etc. trebuie să aibă aceeași valoare. Acesta este motivul pentru care se va căuta soluția pentru  $u_1(\theta)$  de forma

$$u_1(\theta) = \cos n\theta \quad (4.27)$$

Înlocuind soluția (4.27) în ecuația (4.26) se obține

$$-n^6 + 2n^4 - n^2 + \omega^2 \frac{\rho A R^4}{EI} (n^2 - 1) = 0$$

de unde va rezulta

$$\omega_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho A R^4}} \quad (4.28)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

care reprezintă pulsațiile proprii ale vibrațiilor inelului în planul său.

Pentru un inel din oțel având dimensiunile:  $R=54$ ;  $h=3.4$   $b=15.2$ mm, cu modulul de elasticitate  $E=2.0 \times 10^{11}$ Pa și densitatea  $\rho=7850$ kg/m<sup>3</sup> rezultă din această formulă, pentru primele 7 moduri naturale de vibrații, valorile frecvențele proprii ( $f_n = \omega_n / 2\pi$ ) care sunt date în rândul 1 al tabelului 4.2

În rândul (2) sunt date valorile frecvențele proprii ale inelului calculate pe baza unui model cu elemente finite apelând la codul Modal Analysis din Workbench Ansys.

Tabel 4.2 Valori ale frecvențelor proprii ale inelului neseționat

| Nr. mod                                        | 1                | 2                | 3                | 4               | 5                | 6                | 7              |
|------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|----------------|
| $f_n$ calculate cu forma analitică (4.28) [Hz] | 792              |                  | 2242             | 4298            |                  | 6951             | 10200          |
| $f_n$ determinate prin MEF [Hz]                | 797.89<br>797.95 | 1727.5<br>1727.6 | 2251.1<br>2252.1 | 4301.1<br>4303. | 5530.2<br>5530.3 | 6922.4<br>6926.3 | 10090<br>10103 |

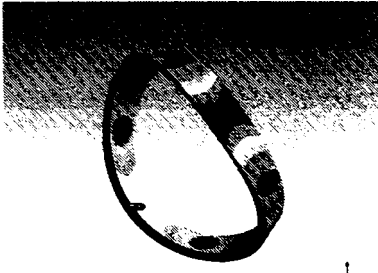
Formele modurilor naturale determinate prin metoda elementului finit sunt prezentate în Fig.4-9.



Modul nr.1 la 797.89 Hz



Modul nr.1 la 797.89 Hz



Modul nr.2 la 1727.5 Hz



Modul nr.2 la 1727.6 Hz



Modul nr.3 la 2251.1 Hz



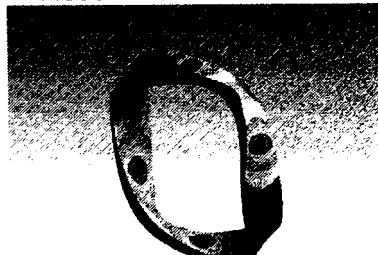
Modul nr.3 la 2252.1 Hz



Modul nr.4 la 4301.1 Hz



Modul nr.4 la 4303. Hz



Modul nr.5 la 5530.2 Hz



Modul nr.5 la 5530.3 Hz

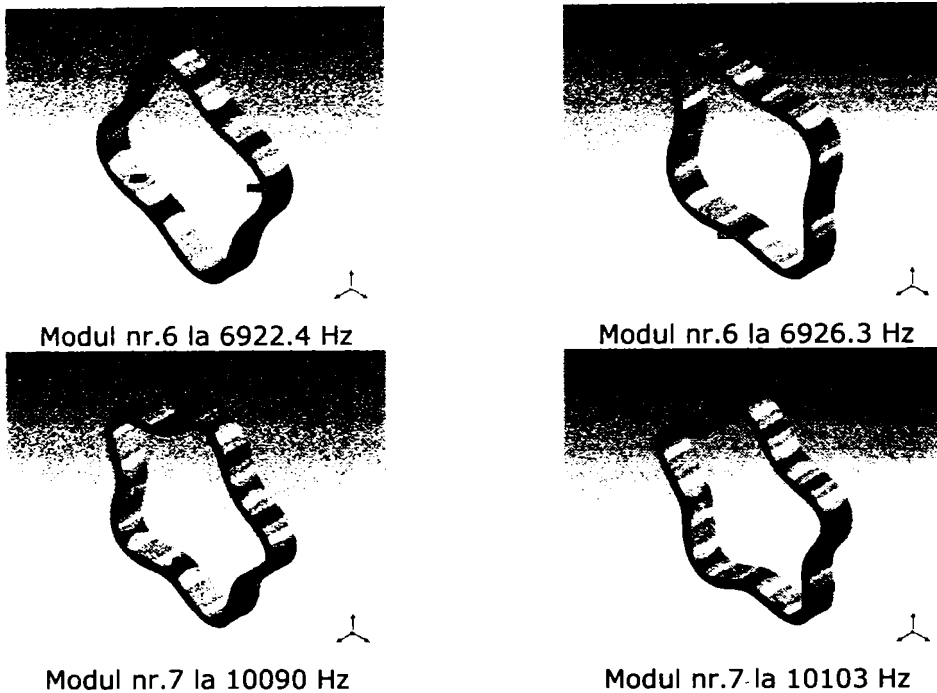


Fig.4-9 Ilustrarea formelor modale pentru inelul neseționat

Se poate constata că modelarea prin MEF permite determinarea tuturor modurilor naturale, pe când prin forma analitică (4.28) se obțin numai modurile ale căror forme se desfășoară numai în planul inelului. Astfel, modurile 2 și 5 sunt moduri ale căror forme sunt spațiale, frecvențele lor, de valori 1727 și 4302 nefiind calculabile prin formula (4.28). Frecvențele duble ale modurilor de vibrații apar normal, fiind caracteristice structurilor simetrice, ușoarele diferențe datorându-se efectului de mesh, care produce mici desimetrizări.

În cazul inelului secționat forma analitică a frecvențelor proprii nu mai poate fi obținută ușor ca în cazul inelului neseționat și de aceea metoda elementului finit este mai comodă, mai ales că se pot obține și formele modale. Pentru un inel secționat cu un rost al tăieturii  $g=0.24\text{mm}$  (Fig.4-8) valorile frecvențelor modurilor naturale de vibrații, rezultate prin MEF fiind date în tabelul 4.3 iar formele modurilor naturale fiind reprezentate în Fig.4-10.

Tabel 4.3 Valori ale frecvențelor proprii pentru inelul secționat

| Număr mod                                                | 1-2    | 3-4    | 5-6    | 7-8    | 9-10   | 11-12  | 13-14  |
|----------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Valori ale frecvențelor proprii Hz, determinate prin MEF | 131.88 | 288.8  | 800.6  | 1881.4 | 2802.9 | 3835.6 | 5156.  |
|                                                          | 231.99 | 648.39 | 1200.9 | 1922.5 | 3390.8 | 5018   | 6343.1 |





Modul nr.1 la 131.88 Hz



Modul nr.1 la 231.99 Hz



Modul nr.3 la 288.8 Hz



Modul nr.4 la 648.39 Hz



Modul nr.5 la 800.6 Hz



Modul nr.6 la 1200.9 Hz



Modul nr.7 la 1881.4 Hz



Modul nr.8 la 1922.5 Hz



Modul nr.9 la 3835.6 Hz



Modul nr.10 la 3390.8 Hz



Modul nr.11 la 3835.6 Hz



Modul nr.12 la 5018 Hz



Modul nr.13 la 5156. Hz



Modul nr.14 la 6343.1 Hz

Fig.4-10 Ilustrarea formelor modale pentru inelul secționat

Se poate observa, din valorile frecvențelor proprii și din formele modale, că secționarea inelului desimetrizează atât geometric cât și ca forme modale. De asemenea, densitatea modurilor în același domeniu de frecvență, 0 la 10000 Hz, s-a mărit, iar frecvențele proprii modale au coborât mult valoric. Astfel frecvența primului mod natural a coborât de la 797 la 131.88 Hz. Este și normal deoarece s-a trecut de la o structură închisă a inelului neseționat la una deschisă a inelului secționat. De aici a venit și ideea corelării modificărilor structurale, fisurarea fiind o asemenea modificare, cu variații ale parametrilor modali. Pentru asemenea modificări succesive s-a apelat la experiment.

## 4.2.Cercetări experimentale

În scopul determinării frecvențelor proprii ale modurilor naturale ale inelului s-a conceput montajul din Fig.4-11. Inelul, 1, este suspendat de un stativ prin intermediul unui fir 3, prin aceasta structura inelului fiind izolată din punct de vedere dinamic de stativ.

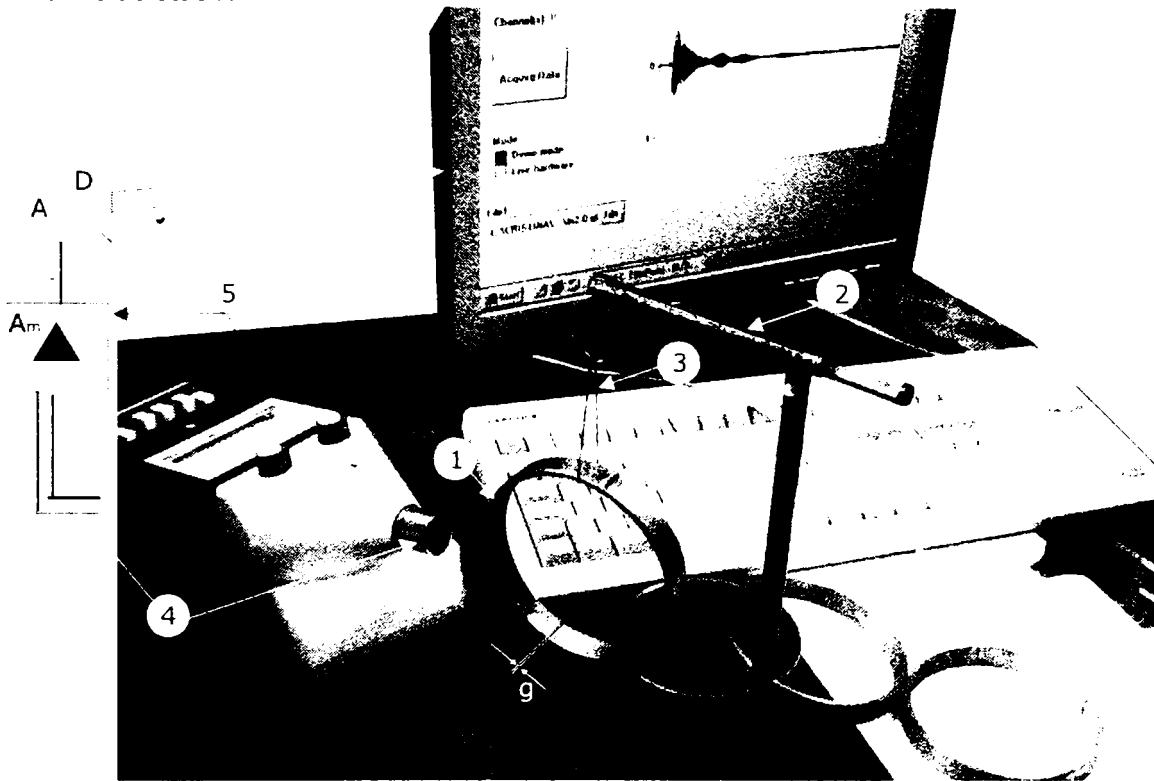


Fig.4-11 Montajul experimental

Excitarea modurilor naturale se face prin aplicarea unui șoc mecanic radial pe suprafața exterioară a inelului, utilizând un ciocan de 100 gr. Modurile de vibrații ale inelului având frecvențele cuprinse în domeniul audio, s-a ales ca semnal de prelucrare semnalul acustic radiat în mediul înconjurător de suprafața în mișcare vibratorie a inelului. Un punct al suprafeței va avea o lege de mișcare de forma sumei modale (4.7). Prin radiația suprafeței inelului se propagă în mediul înconjurător unde sonore. Presiunea acustică înregistrată de un microfon condensator 4 va avea o formă asemănătoare cu (4.7)

$$p(t) = 2 \sum_{r=1}^n e^{-\sigma_r t} A p_r \cos(p_r t + \varphi_r) \quad (4.29)$$

conținând nemodificați parametrii modali ai inelului  $\sigma_r$  și  $p_r$ . Se modifică numai coeficienții  $A p_r$  care, în acest caz depind de distanța față de sursă.

Microfonul condensator este conectat la un amplificator de măsură 5, și de aici semnalul de ieșire, proporțional cu presiunea acustică este digitalizat prin convertorul analog digital A/D și trecut sub forma unui fișier în memoria calculatorului.

Urmează analiza modală a semnalului fișier după algoritmul prezentat mai sus, și alte metode. De menționat că semnalul presiunii sonore captat de microfonul condensator conține și componente ale distorsiunilor create de efecte neliniare, efecte ce pot fi scoase în evidență prin analize speciale, ca analiza modală.

- **Analiza răspunsului simulat la impact al inelului cu o bilă rigidă**

În Fig.4-12 este prezentat modelul discretizat al inelului susținut de două arcuri moi (de constantă elastică 100 N/m) în așa fel încât frecvențele proprii ale celor 6 moduri naturale de corp rigid ale sistemului inel-arcuri este sub 15 Hz. În acest caz inelul pentru modurile de corp elastic, care au valori începând de la 1000Hz în sus, poate fi considerat ca un corp fără legături astfel că o parte din energia transmisă de bila care percută radial inelul în punctul  $P_c$ , cu viteza inițială  $v_i$ , se disipează numai în procesul de percuție și prin frecare internă de deformare a inelului prin unde elastice ce iau naștere după realizarea percuției.

Ca modul de calcul dinamic s-a folosit ANSYS LS-DYNA cu un mesh automat, pentru ambele structuri inel și bilă considerate ambele din oțel carbon.

### 1. Inel neseționat

Se consideră mai întâi inelul neseționat având diametrul exterior  $D=108\text{mm}$ , grosimea  $h=3.4\text{mm}$  și lățimea  $b=15.2\text{mm}$  și o bilă cu diametrul de 20mm. Considerând inelul țintă și bila contactor și punând condiția de contact suprafață pe suprafață s-a realizat programul din Anexa 4.1. Pentru analiza rezultatelor s-a luat în considerare patru puncte (Fig.4-12) 0,1,2,3, de-a lungul inelului, punctul 0 fiind punctul de contact dintre bilă și inel.

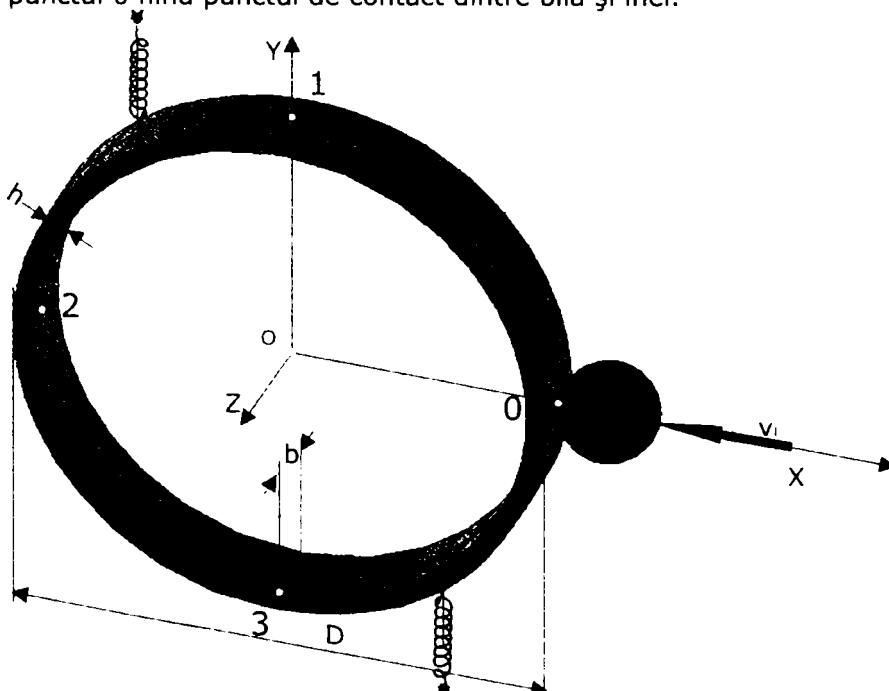


Fig.4-12 Ilustrarea ciocnirii unui inel elastic cu o bilă rigidă

Pentru început sa analizat perioada de contact prin diagramele vitezelor (Fig.4-13.a) și ale accelerațiilor (Fig.4-13.b). Viteza inițială a bilei, la deplasarea în sens invers pe axa OX, este de  $v_{b0}=1\text{m/s}$ . La momentul  $t_0=0.25\text{ms}$  se produce contactul, inelul deplasându-se în sensul aplicării percuției. Diagramele vitezelor celor patru puncte după axa OX, se suprapun și sunt mult mai mici decât valorile de pe diagrama vitezei bilei, astfel că scala vitezelor a fost amplificată de 10 ori. La fel s-a procedat și pentru diagrama accelerației punctelor inelului.

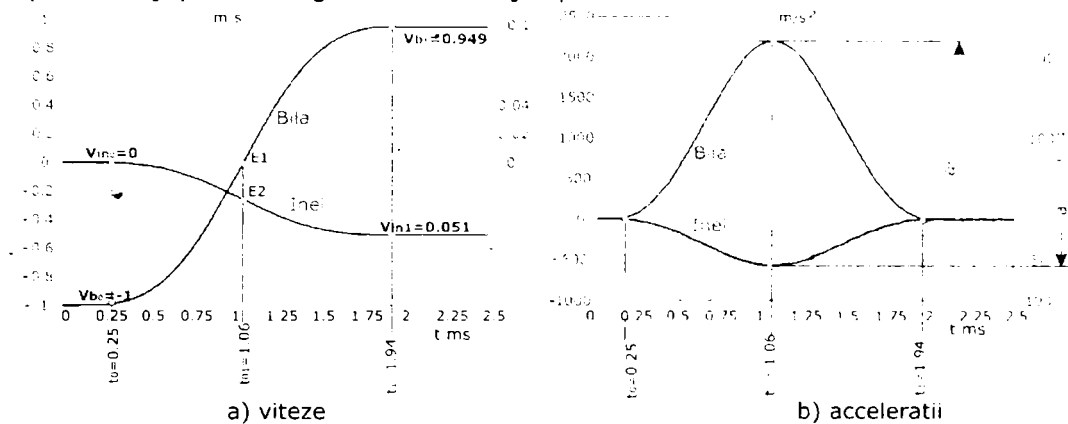


Fig.4-13 Diagramele vitezelor și accelerațiilor bilei și inelului pe perioada contactului

Contactul se termină la  $t_1=1.94\text{ms}$  unde vitezele bilei și inelului au valori constante,  $v_{b1}=0.949\text{m/s}$  bila și  $v_{in1}=0.051\text{m/s}$  inelul. Sfârșitul contactului la  $t_1=1.94\text{ms}$  este indicat mai clar din diagramele accelerațiilor, la desprindere forțele de legătură de contact devenind zero și în consecință accelerațiile lor se anulează. Forțele de contact devin maxime la valorile maxime ale accelerațiilor, care, din diagrama accelerațiilor, se petrece la  $t_{01}=1.06\text{ms}$ , unde cele două corpuri au vitezele egale de  $-0.022\text{m/s}$  (în realitate punctele  $E_1$  și  $E_2$  trebuie să se suprapună, pe diagrama vitezelor ele fiind distanțate datorită scalelor diferite de reprezentare).

Rezultă că pe intervalul  $\Delta t_1=t_{10}-t_0=1.06-0.25=0.81\text{ms}$ , are loc întrepătrunderea iar pe perioada  $\Delta t_2=t_1-t_{10}=1.94-1.06=0.88\text{ms}$  are loc destindere, cea ce corespunde unui coeficient de restituire echivalent  $C_R=\Delta t_2/\Delta t_1=0.932$  valoare ce se regăsește aproximativ și dacă se calculează coeficientul de restituire prin raportul dintre viteza bilei după desprindere  $V_{b1}=0.949\text{m/s}$  și viteza bilei în momentul primului contact  $V_{b0}=1\text{m/s}$ . Diferența se datorează neglijării vitezelor inelului, de valori mult mai mici. Energia transmisă, prin percuție, inelului este disipată în structura inelului prin frecare internă care este programată prin datele inițiale, în modulul de preprocesare.

## 2. Inel secționat

Se consideră o tăietură a inelului de-a lungul generatoarei și s-au luat în considerare două mărimi ale rostului  $g=2.4$  și  $0.3\text{mm}$  ca date inițiale pentru simulare (Fig.4-14). Aceleași dimensiuni ale rostului s-au realizat și practic, pe inelul pe care s-au efectuat verificările experimentale

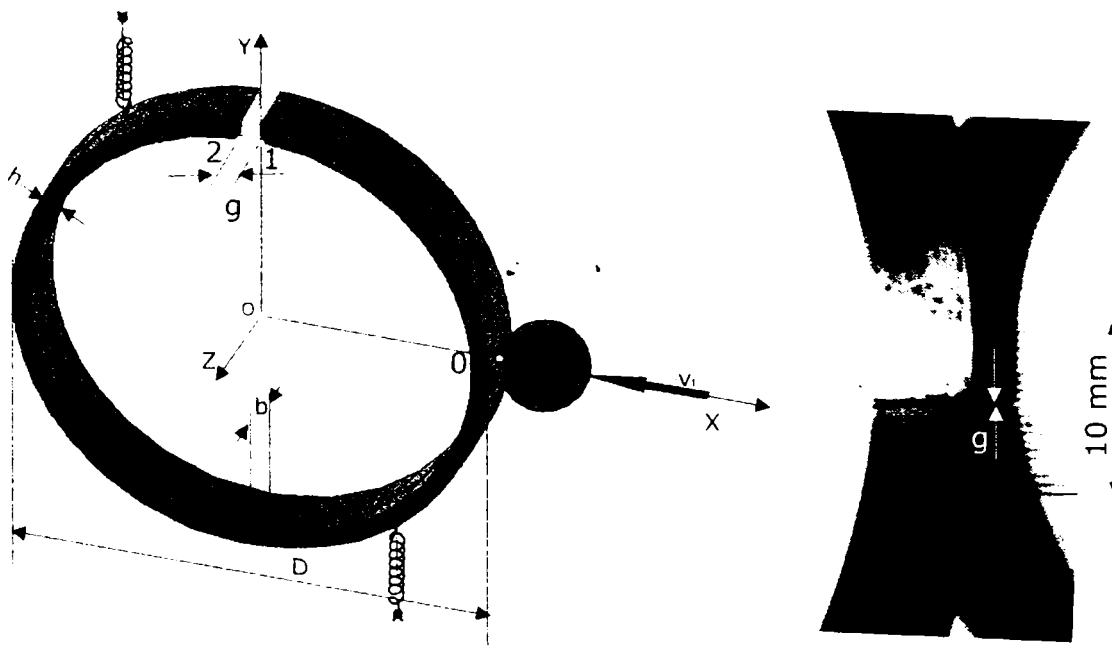


Fig.4-14 Ilustrarea ciocnirii unui inel elastic cu o bilă rigidă  
Inel secționat cu rostul  $g=2.4$  și  $0.3$  mm

După simulare sau analizat mișcările a două puncte 1 și 2 situate pe marginile celor două suprafețe transversale ale tăieturii. În Fig.4-15 sunt reprezentate vitezele mișcărilor absolute  $v_1(t)$  și  $v_2(t)$  care cumulează atât mișcările de corp rigid  $v_{1r}(t)$  și  $v_{2r}(t)$  cât și cele de corp elastic,  $v_{1e}(t)$  și  $v_{2e}(t)$ .

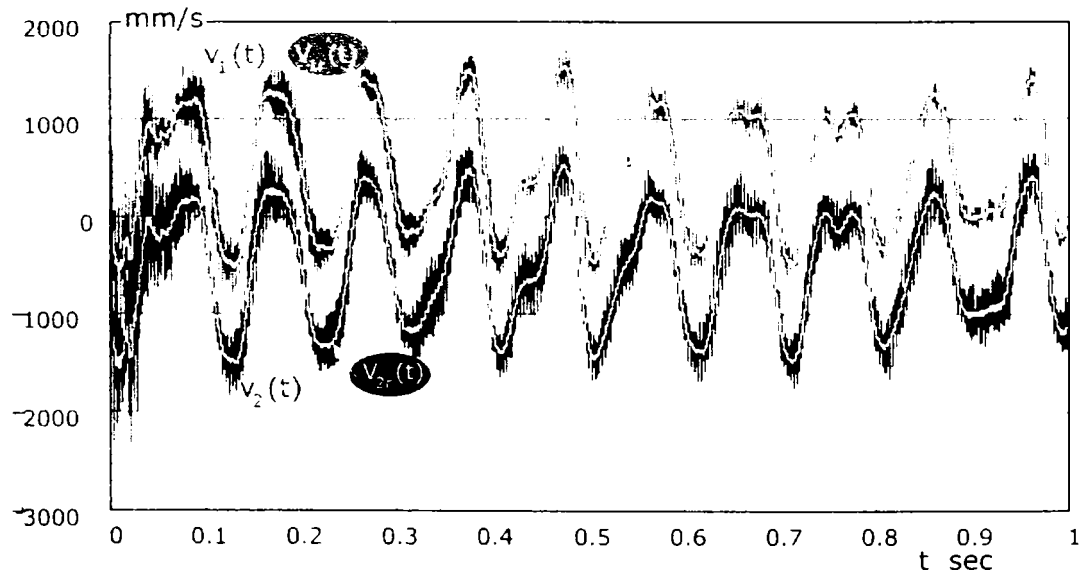


Fig.4-15 Vibrogramele mișcărilor absolute după axa  $Ox$  ale nodurilor 1 și 2;  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  vitezele mișcărilor absolute,  $v_{1r}(t)$ ,  $v_{2r}(t)$  componente ale vitezelor mișcărilor de corp rigid

Separarea componentelor de corp rigid și din arcurile de legătură, se poate face printr-o filtrare de mediere

$$v_{1,2r}(j) = \frac{1}{2m} \sum_k^{2m} v_{1,2}(j+m+k) \quad j = 0,1,2,\dots,n-m \quad (4.30)$$

$m$  fiind lățimea benzii de filtrare (numărul de eșantioane din stânga și dreapta eșantionului  $j$ , vizat). Pentru o lățime a benzii  $m=50$  eșantioane se obține o bună filtrare a acestor componente (Fig.4-15).

Componentele de corp elastic vor rezulta prin scădere

$$v_{1,2e}(j) = v_{1,2}(j) - v_{1,2r}(j) = 0,1,2,\dots,n-m \quad (4.31)$$

ale căror vibrograme sunt date în Fig.4-16, iar în Fig.4-17 se prezintă vibrogramele vitezelor de corp rigid  $V_{1r}(t)$  și  $V_{2r}(t)$  (Fig.4-17a) și spectrele acestora  $S_{1r}(f)$  și  $S_{2r}(f)$  (Fig.4-17b), din care reiese că frecvența componentei de corp rigid este de 10 Hz, componentă ce nu poate influența modurile de corp elastic, ale căror frecvențe au valori peste 100 Hz.

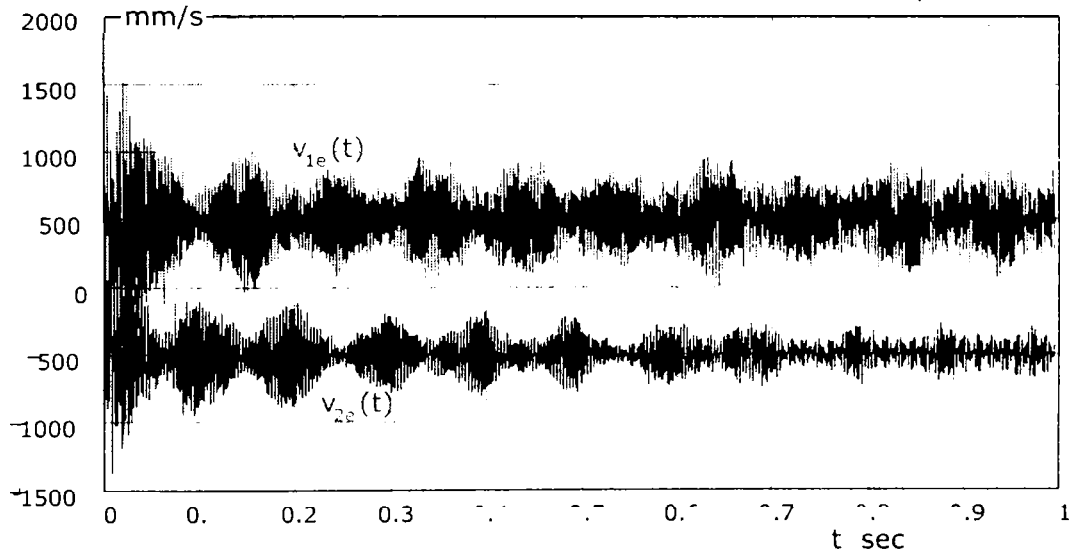


Fig.4-16 Vibrogramele mișcărilor de  $V_{1e}(t)$ ,  $V_{2e}(t)$ , de corp elastic după axa  $Ox$ , ale nodurilor 1 și 2

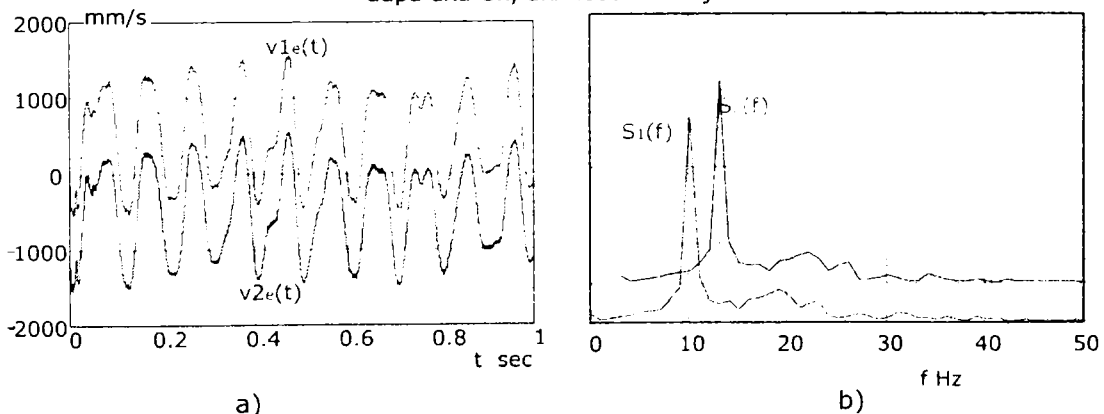


Fig.4-17 Vibrogramele mișcărilor de  $V_{1e}(t)$ ,  $V_{2e}(t)$ , de corp elastic după axa  $Ox$ , ale nodurilor 1 și 2

Revenind la modurile de corp rigid să reprezentăm vibrograma mișcării relative, de-a lungul axei  $Ox$ , dintre nodurile 1 și 2

$$\Delta v_{1\_2}(t) = v_{1e}(t) - v_{2e}(t) \quad (4.32)$$

a cărei vibrogramă este trasată grafic în Fig.4-18.

Spectrul acestei mișcări este reprezentat în Fig.4-19 împreună cu liniile spectrale ale frecvențelor proprii ale modurilor naturale de vibrații ale inelului secționat, frecvențe proprii determinate cu modulul de analiză modală.

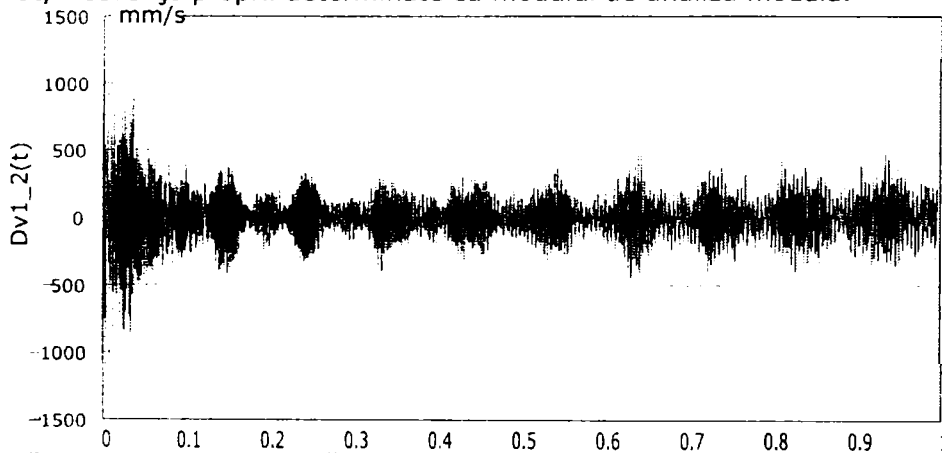
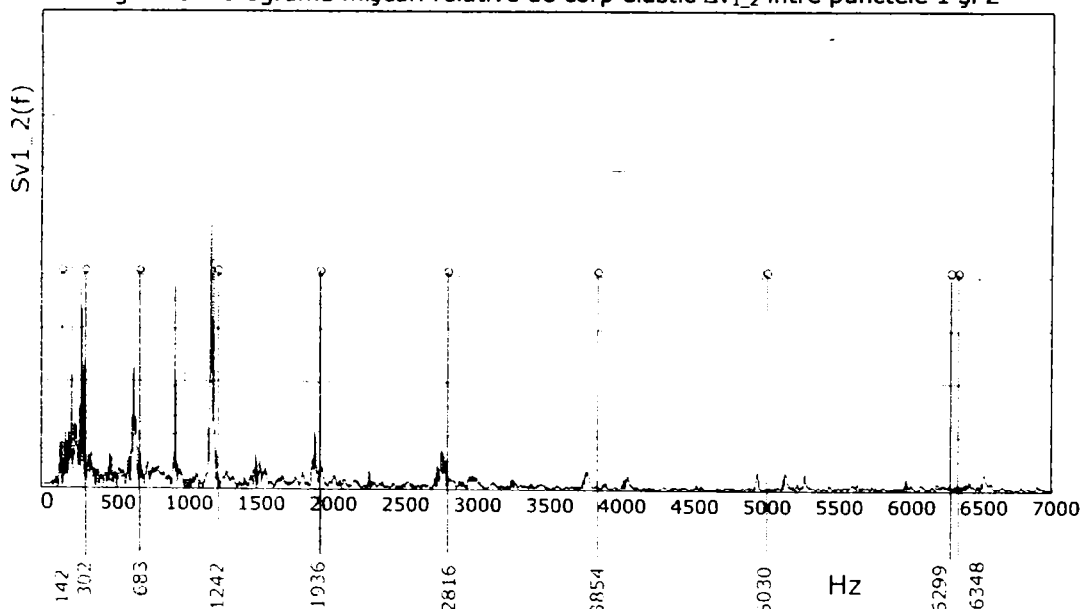


Fig.4-18 Vibrograma mișcării relative de corp elastic  $\Delta v_{1\_2}$  între punctele 1 și 2



Fi.4-19 Spectrul mișcării relative de corp elastic  $\Delta v_{1\_2}$  între punctele 1 și 2, comparativ cu liniile spectrale ale modurilor naturale de vibrații

Spectrul mișcării relative, excitată de forța impulsivă creată de impactul cu bila este perturbat de efectul nelinier creat de contactul ce ia naștere între cele două suprafețe ale tăieturii. Apar vârfuri spectrale ale căror frecvențe nu coincid cu liniile spectrale modale. Contactul în timpul mișcării simulate este ilustrată de clipurile avi atașate tezei.



### 4.3.Rezultate experimentale

Pentru a corela influența modificării structurale asupra variației frecvențelor proprii ale unei structuri s-a secționat inelul progresiv la diverse lățimi  $c$  (Fig. 4-20) și s-a înregistrat după schema din Fig.4-11, presiunea unei unde acustice emisă de suprafața inelului la șocului produs prin lovire.

Așa cum s-a mai arătat mai sus, presiunea unei unde acustice conține componente de frecvențe egale cu ale modurilor naturale de vibrații ale structurii inelului.

Prin analiza modală a semnalului măsurat al presiunii unei unde acustice la diverse secțiuni  $c$  ale inelului s-a întocmit tabelul 4.4 în care pentru variațiile procentuale ale frecvențelor proprii ale structurii s-a reprezentat și grafic prin deviația procentuală a frecvenței definită prin relația

$$df_i\% = \frac{f_i(d) - f_i(c)}{f_i(d)} \times 100; \quad i = 1,2,3,\dots,n_m \quad (4.33)$$

$f_i(d)$  fiind frecvența modului  $i$  pentru inelul neseționat, la  $c=d$ , iar  $f_i(c)$  fiind frecvența aceluia  $i$  mod când secțiunea inelului tăiat este  $c$ .

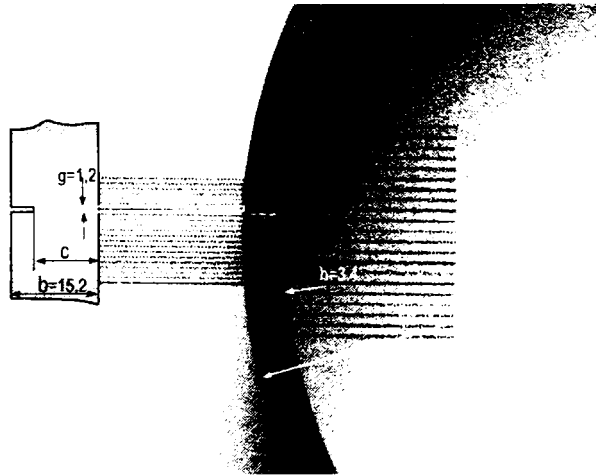


Fig.4-20 Secționarea parțială a inelului

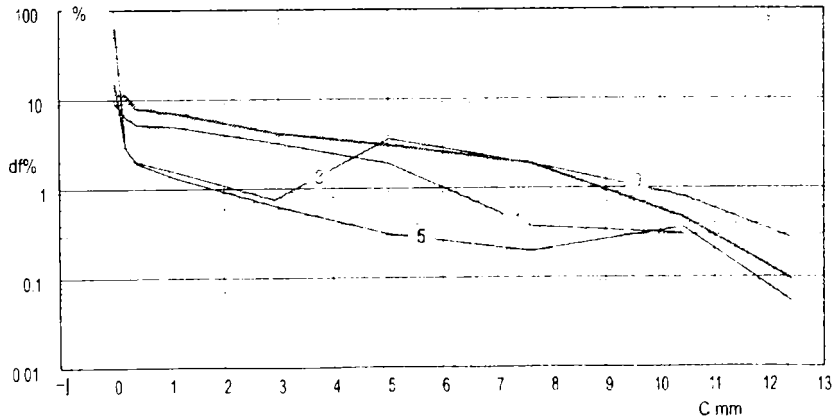


Fig.4-21 Variații procentuale ale frecvențelor proprii ale inelului în funcție de secțiunea  $c$  netăiată a inelului pentru modurile 1,3,5 și 9.

Tabel 4.4

| Nr. Mod | 1    | 2                              | 3                | 4            | 5      | 6                            | 7    | 8                | 9    | 10                         |
|---------|------|--------------------------------|------------------|--------------|--------|------------------------------|------|------------------|------|----------------------------|
| 0       | C mm | Valoarea frecvenței modului Hz |                  |              |        |                              |      |                  |      |                            |
| 1       | 15.2 | 800.0                          |                  | 2275         |        | 4340                         | 4363 | 5647             |      | 7011<br>7014               |
| 2       | 12.4 | 799.59                         |                  | 2269<br>2279 |        | 4336                         | 4352 | 5606             | 5632 | 6990                       |
| 3       | 104  | 797.2                          |                  | 2257<br>2278 |        | 4320                         | 4342 | 5565             | 5602 | 6985                       |
| 4       | 7.6  | 798.48                         |                  | 2232<br>2275 |        | 4258                         | 4327 | 5406             | 5526 | 6881<br>6954               |
| 5       | 5.0  | 797.6                          | 1696             | 2194<br>2268 |        | 4211                         | 4296 | 5402             | 5404 | 6785<br>6895               |
| 6       | 2.9  | 795                            | 2149             | 2258.3       |        | 4157.7<br>4243.9             |      | 5248<br>5249.6   |      | 6673.7<br>6808.4           |
| 7       | 1.1  | 789.5                          | 2083             | 2240         | 3105   | 4041<br>4051<br>4069<br>4071 | 4092 | 5008             |      | 6643.1<br>6645             |
| 8       | 0.4  | 784.5                          | 2051.8<br>2053.2 | 2230.3       | 2996.4 | 3994.5<br>4000.5<br>4009.    |      | 4919.8<br>4921.8 |      | 6563<br>6567.1<br>6571.8   |
| 9       | 0.2  | 777.4                          | 1969.7           | 2211.5       | 2895.4 | 3852.4<br>3905.7             |      |                  |      | 6385.2<br>6398.2<br>6409.7 |
| 10      | 0.0  | 303                            | 1223             | 1937         | 2812   | 3854                         | 5017 | 5030             | 6308 | 6344<br>6352               |

Din graficele prezentate în Fig.4-21 se poate observa că variațiile procentuale de scădere a frecvențelor proprii au valori semnificative numai în apropierea limitei de tăiere completă a inelului când  $c \rightarrow 0$ , deci la tăiere completă când inelul trece de la o structură închisă la una deschisă cea ce duce la o schimbare bruscă a rigidităților.

Rămâne ca problema depistării unei fisuri să fie focalizată pe studiul distorsiunilor modurilor naturale provocate de efectele neliniare locale provocate de fisură, care pot fi excitate cu forțe impulsive.

Pentru evitarea unor costuri importante studiile se pot face prin simulare, așa cum s-a demonstrat în prezenta teză, pe inelul secționat. Pentru structuri mai complexe este necesar o putere de calcul mai puternică față de cea pe care am avut-o la dispoziție.

#### 4.4. Contribuții originale

- Simularea prin metode numerice a vibrațiilor unor structuri cu discontinuități
- Studiul contactului pentru o structura elastică cu evidențierea discontinuității într-o fisura
- Modelarea caracteristicii elastice a forței de contact în funcție de deschiderea fisurii
- Înregistrarea vibrogramei vibrațiilor libere amortizate ale unui inel cu caracteristici cunoscute după aplicarea șocului
- Studiul efectului de neliniarități introdus de fisură atât în spectrul Fourier cât și la răspunsul modal
- Aplicarea algoritmului numeric prezentat în [33] pentru estimarea parametrilor modali ai modelului discretizat a unui inel
- Studiul diagramelor polare corespunzătoare spectrelor modelului dinamic

- discretizat a inelului.
- Studiul experimental al formelor proprii de vibrații în cazul structurilor cu discontinuități, aplicații în cazul modelului discretizat al unui inel
  - Simularea vibrațiilor modelului dinamic a unui inel secționat.
  - Aplicarea codului Ansys, în studiul vibrațiilor prin șoc a inelului cu discontinuitate controlată

# Capitolul 5

## CONCLUZII. CONTRIBUȚII ORIGINALE

Acest capitol conține contribuțiile autoarei tezei care sunt trecute în cadrul fiecărui capitol.

Teza de doctorat cu titlul „*SIMULĂRI NUMERICE PENTRU MIȘCĂRI CU CONSTRÂNGERI MECANICE ȘI CIOCNIRI*” constituie un studiu atât teoretic dar mai ales experimental ce se va continua pentru evidențierea fenomenelor de contact/impact și pentru alte structuri mecanice cu alte caracteristici vâscoelastice.

Metodele cu ajutorul cărora s-a studiat acest proces de contact/impact pentru modelul particular al unui inel cu caracteristici geometrice diferite pot fi extinse și în cazul materialelor compozite ce se întâlnesc la lagărele de alunecare ale giroscopelor folosite în construcția de mașini fine.

În continuare listez contribuțiile originale ale tezei:

- Prezentarea unui model al contactului Hertz dintre un corp elasto-plastic și un element percutant
- Evidențierea coeficientului de ciocnire prin interpretarea sa ca amortizare la vibroimpact
- Studiul forței vibropercutante în funcție de pătrundere pentru cele două faze ale ciocnirii
- Studiul transferului energetic în zona de contact și pe durata contactului
- Punerea în evidență a metodei undelor progresive în cazul unei bare de lungime finită
- Studiul propagării unde elastice în lungul barei de lungime finită excitată impulsiv la un capăt
- Punerea în evidență privind excitarea primului mod de vibrații longitudinale a barei de lungime finită
- Aplicarea metodei Saint-Venant pentru cazul barei de lungime finită careia i s-a aplicat o percuție la un capăt
- Distribuția salturilor de viteze în lungimea barei după aplicarea percuției
- Studiul prin metode numerice Hibrade privind simularea prin metoda elementului finit folosind codul Ansys
- Introducerea algoritmului Matchad pentru determinarea timpului și legii de mișcare în cazul ciocnirii
- Evidențierea modelelor discrete pentru contactul corpurilor unei mașini cu aprindere prin scânteie
- Aplicarea metodei Runge-Kutta pentru integrarea numerică a sistemelor de ecuații diferențiale ce guvernează mișcările unui sistem dinamic discretizat
- Studiul metodei pentru un sistem vibropercutant cu un grad și două grade de libertate
- Generalizarea metodelor de mai sus pentru sisteme cu  $n$  grade de libertate
- Evidențierea spectrelor în frecvență ale mișcărilor vibratorii analizate prin metode numerice
- Studiul unor modele vibropercutante cu patru grade de libertate cu limitatoare rigide
- Studiul spectrelor de vibrațiilor în cazul limitatoarelor rigide

- Aplicarea metodei elementelor finite în cazul sistemelor mecanice neliniare cu contact Hertzian
- Aplicarea metodei elementului finit pentru modelul reologic vâscoelastic
- Simularea prin metode numerice a vibrațiilor unor structuri cu discontinuități
- Studiul contactului pentru o structura elastică cu evidențierea discontinuității într-o fisura
- Modelarea caracteristicii elastice a forței de contact în funcție de deschiderea fisurii
- Înregistrarea vibrogramei vibrațiilor libere amortizate ale unui inel cu caracteristici cunoscute după aplicarea șocului
- Studiul efectului de neliniarități introdus de fisură atât în spectrul Fourier cât și la răspunsul modal
- Aplicarea algoritmului numeric prezentat în [33] pentru estimarea parametrilor modali ai modelului discretizat a unui inel
- Studiul diagramelor polare corespunzătoare spectrelor modelului dinamic discretizat a inelului.
- Studiul experimental al formelor proprii de vibrații în cazul structurilor cu discontinuități, aplicații în cazul modelului discretizat al unui inel
- Simularea vibrațiilor modelului dinamic a unui inel secționat
- Aplicarea codului Ansys, în studiul vibrațiilor prin șoc a modelului unui inel cu discontinuitate controlată

Majoritatea soluțiilor tehnice pentru mașini, utilaje, construcții industriale implică, pentru realizarea unor operații tehnologice, cuple cinematice între piesele mașinii unde apar jocuri care dezvoltă forțe de legătură de tip percutant generatoare de unde elastice ce se propagă de-a lungul piesele în contact. Toate acestea ridică o problemă esențială cea a contactului între piesele în mișcarea relativă impuse de cupla cinematică. Din acest motiv tematica abordată în teză este foarte importantă din punct de vedere al aplicațiilor.

Rezultatele experimentale obținute au fost în concordanță cu cele teoretice simulate numeric pe baza unor programe prezentate în anexa tezei și clar expuse și scoase în evidență în acest capitol dedicat contribuțiilor personale, pe care acestea le aduc în domeniu tratat.

Sper că în cercetările științifice ulterioare să aplic și să generalizez aceste cercetări pentru o serie de structuri mecanice legate de dezvoltarea tehnică și tehnologica ce va urma.

# BIBLIOGRAFIE

1. **AGOSTON K.:** *SISTEM PENTRU DETECTAREA VIBRAȚIILOR*, CONFERINȚA NAȚIONALĂ DE INSTRUMENTAȚIE VIRTUALĂ, EDIȚIA A II-A, BUCUREȘTI, 27 Iunie 2005
2. **ALAMPALLI S.** *SIGNIFICANCE OF OPERATING ENVIRONMENTAL IN CONDITION MONITORING OF LARGE CIVIL STRUCTURES. SHOCK AND VIBRATION* 6(1999)
3. **ALECSANDROV E. V., SOKOLINSKI V. B.** *TEORIE APLICATĂ ȘI CALCULUL SISTEMELOR PERCUTANTE*, EDITURA NAUKA, MOSCOVA, 1969
4. **ALECSANDROV E. V., SOKOLINSKI V. B.:** *TEORIE APLICATĂ ȘI CALCULUL SISTEMELOR PERCUTANTE*, EDITURA NAUKA, MOSCOVA, 1969
5. **ANDERSON S. P.** *HIGHER-ORDER ROD APPROXIMATIONS FOR THE PROPAGATION OF LONGITUDINAL STRESS WAVES IN ELASTIC BARS*, JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION VOLUME 290, ISSUES 1-2 , 21 FEBRUARY 2006, PAGES 290-308
6. **ANDERSON S. P., HIGHER:** *ORDER ROD APPROXIMATIONS FOR THE PROPAGATION OF LONGITUDINAL STRESS WAVES IN ELASTIC BARS*, JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION VOLUME 290, ISSUES 1-2 , 21 FEBRUARY 2006, PAGES 290-308
7. **BACRIA V., TOADER M., HERIȘANU N., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA, CIUPA V., FIAT C.:** *CONSIDERATION CONCERNING NOISE ATTENUATION IN URBAN ENVIRONMENT*, PROCEEDINGS OF THE IX-TH SYMPOSIUM-ACOUSTICS AND VIBRATION OF MECHANICAL STRUCTURES AVMS-2007, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 24-25 MAI 2007, PG.7-12, ISSN: 1843-0902
8. **BACRIA V., TOADER M., HERIȘANU N., POPA RADOVAN SMARANDA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *NOISE INVESTIGATION IN THE PENETRATION ZONES OF AN URBAN AREA*, THE XXX<sup>TH</sup> NATIONAL CONFERENCE OF SOLID MECHANICS MECSOL 2006, CONSTANȚA MARITIME UNIVERSITY MECSOL 2006, YEAR VII, VOL9, ISSN 1582 - 3601, CD
9. **BACRIA V., TOADER M., HERIȘANU N., POPA RADOVAN SMARANDA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *NOISE INVESTIGATION AND REDUCTION IN URBAN AREA*, FIRST NATIONAL SYMPOSIUM "MECHANICAL ENGINEERING AND ENVIRONMENT", CRAIOVA, 6-7 OCTOMBRIE 2006, CD
10. **BACRIA V., TOADER M., HERIȘANU N., POPA RADOVAN SMARANDA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *INVESTIGATION OF PHONIC POLLUTION IN AN URBAN AREA*, XX CONFERENCE WITH INTERNATIONAL PARTICIPATION "NOISE AND VIBRATION", TARA, 11-13 OCTOMBRIE 2006, SERBIA AND MUNTENEGRO, CD
11. **BACRIA V., TOADER M., HERIȘANU N., POPA RADOVAN SMARANDA, NAGY RAMONA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *POLUAREA FONICĂ GENERATĂ DE TRAFICUL FERVIAR ÎN MUNICIPIUL TIMIȘOARA*, PROCEEDINGS C.D.M. 2005, A IV-A CONFERINȚĂ DE DINAMICA MAȘINILOR CU PARTICIPARE INTERNAȚIONALĂ, VOL I, BRAȘOV 27-28 MAI 2005, PG.17-20, ISBN: 973-635-512-8

12. **BAI Y. P., LEI Y. J.:** *THE MODEL OF IMPACT WAVES IN A CIRCULAR ELASTIC BAR AND APPLICATION IN MEASURING DYNAMIC CHARACTERISTIC OF MICROSTRUCTURE*, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION VOLUME 173, ISSUE 2, 15 FEBRUARY 2006, PAGES 1350-1356
13. **BALTA ADRIANA ELENA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *A COMPARATIVE STUDY BETWEEN THE FORCES FROM THE CINEMATIK ATTACK NEEDLE-CAM LACE, MADE ON THE LINIARY KNITTING MACHINE SUPERBA*, PROCEEDINGS OF THE IX-TH SYMPOSIUM-ACOUSTICS AND VIBRATION OF MECHANICAL STRUCTURES AVMS-2007, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 24-25 MAI 2007, PG.126-131, ISSN: 1843-0902
14. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA, M. TOADER** *SIMULATION METHODS IN THE CONTACT WITH IMPACT OF RIGID BODIES*, ANALELE UNIVERSITĂȚII "EFTIMIE MURGU" REȘIȚA 2007
15. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA, M. TOADER** *SIMULATION METHODS IN THE CONTACT WITH ELASTIC ELEMENTS MULTI BODY*, THE 2<sup>ND</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE "COMPUTATIONAL MECHANICS AND VIRTUAL ENGINEERING" COMEC 2007, 11 – 23 OCTOBER 2007, BRASOV, ROMANIA (sub tipar)
16. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA, TOADER M.:** *CONSIDERATIONS ON THE PROCESSING OF EXPERIMENTAL SIGNAL AND OBTAINED BY SIMULATION SIGNAL*, CONCERNING THE IMPACT OF RIGID BODIES, ANNALS OF THE ORADEA UNIVERSITY. FASCICLE OF MANAGEMENT AND TECHNOLOGICAL ENGINEERING CD-ROM EDITION VOLUME V (XV), 2006, ISSN 1583- 0691, CNCSIS "CLASA B", ANNUAL SESSION OF SCIENTIFIC PAPERS "IMT ORADEA - 2007" ORADEA, FELIX SPA MAY 31 ST - JUNE 1 ST, 2007
17. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA, TOADER M.:** *CONSIDERAȚII PRIVIND APLICAREA ANALIZEI MODALE FOLOSIND PROGRAMUL ANSYS*, SESIUNE DE COMUNICĂRI ȘTIINȚIFICE SIMEC 2007 EDIȚIA A VI-A, BUCUREȘTI 30 MARTIE 2007, PG17-22, ISSN 1842-8045
18. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *APPRECIATIONS ABOUT EXPERIMENTAL AND OF SIMULATION METHODS FOR THE CONTACT THE IMPACT OF RIGID BODIES*, PROCEEDINGS OF THE IX-TH SYMPOSIUM-ACOUSTICS AND VIBRATION OF MECHANICAL STRUCTURES AVMS-2007, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 24-25 MAI 2007, PG.161-166, ISSN: 1843-0902
19. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *REFERAT 1- STADIUL ACTUAL ȘI TENDIȚE ÎN APLICAREA METODEI ELEMENTULUI FINIT ÎN STUDIUL CIOCNIRILOR*, PROCES VERBAL 3729 DIN 23.03.05
20. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *REFERAT 2- SOLUTII NUMERICE ÎN STUDIUL ȘOCURILOR MECANICE*, PROCES VERBAL 8587 DIN 17.07.2005
21. **BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *REFERAT 3-APLICAȚI PRIVIND SIMULAREA MISCĂRILOR VIBROPERCUTANTE*, PROCES VERBAL 13248 DIN 31.10.2005
22. **BOSTAN, V. DULGHERU, R. CIUPERCĂ, O. CIUOBANU:** *SIMULAREA INTERACȚIUNII FLUIDULUI CU PALETELE ORGANELOR DE LUCRU ALE SISTEMELOR DE CONVERSIUNE A ENERGIIILOR REGENERABILE,UTILIZÂND MEDIUL ANSYS CFX-5.7*, SEMINARUL NAȚIONAL DE ORGANE DE MAȘINI, BRAȘOV, 2005-INTERNET

23. **BRINDEU L., HULE V., PETCOVICI O.:** *DYNAMIC MODEL OF IMPACT, CONSIDERING THE PROPAGATION OF THE STRESS WAVES IN THE DEFORMABLE BODY*, BULETINUL ȘTIINȚIFIC AL UNIVERSITĂȚII POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA, SERIA MECANICA, TOM 48, FASCICOLA 1, 2003
24. **BRINDEU L., HULE V., PETCOVICI O.:** *MODEL DINAMIC AL CIOCNIRII CONSIDERÂND PROPAGAREA UNDELOR DE TENSIUNE ÎN CORPUL DEFORMABIL*, ANALELE UNIVERSITĂȚII DIN ORADEA, SECȚIUNEA MECANICĂ, 2003, ISSN 1583-0691, (CD), PAG. 29
25. **BRINDEU L., HULE V., TĂTARU B., HORA H.:** *VIBRAȚIILE LONGITUDINALE ALE BARELOR VÂSCO-ELASTICE CU MASE CONCENTRATE LA EXTREMITĂȚI*, ANALELE UNIV. ORADEA 2004, FASCICOLA INGINERIE MANAGERIALĂ ȘI TEHNOLOGICĂ, SECȚIUNEA: MECANICĂ, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)
26. **BRÎNDEU L.:** *MECANICA DINAMICĂ*, INSTIT. POLIT. TRAIAN VUIA, TIMIȘOARA, 1975
27. **BRÎNDEU L.:** *VIBRAȚII. MECANICA ANALITICĂ. VIBRAȚII MECANICE*, INSTIT. POLIT. TRAIAN VUIA, TIMIȘOARA, 1979
28. **BUZDUGAN GH., FETCU L., RADES M.:** *VIBRAȚII MECANICE*, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1982
29. **BUZDUGAN GH., FETCU L., RADES M.:** *VIBRAȚIILE SISTEMELOR MECANICE*, EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA, BUCUREȘTI, 1975
30. **CĂTĂLIN ALEXANDRU:** *SIMULAREA ȘI OPTIMIZAREA SISTEMELOR MECANICE UTILIZÂND PLATFORMĂ DE PROTOTIPARE VIRTUALĂ*, UNIV. TRANSILVANIA DIN BRAȘOV, CATEDRA DESIGN DE PRODUS ȘI ROBOTICĂ, SIMPOZIONUL NAȚIONAL CU PARTICIPARE INTERNAȚIONALĂ PROIECTAREA ASISTATĂ DE CALCULATOR "PRASIC' 02", VOL. III -DESIGN DE PRODUS, BRAȘOV, ROMÂNIA, ISBN 973-635-076-2
31. **CHANG W.R., ESTION I. ȘI BOGZ D. B** ÎN LUCRAREA, *AN ELASTIC-PLASTIC MODEL FOR THE CONTACT OF ROUGH SURFACES*, ASME J TRIBOLOGY 109, PP.257-263
32. **CIOARA T. GH.** *ON METHODS AND SOLUTIONS FOR DIMINISHING PIPELINE VIBRATION LEVELS*. PROCEEDINGS OF 17<sup>TH</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 8-11 FEBRUARY 1999 ORLANDO, PP 489-495
33. **CIOARA T. GH.** *ON THE CURVE -FITTING ALGORITHM FOR MODAL PARAMETER ESTIMATION-* PROCEEDINGS OF THE 8<sup>TH</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE ORLANDO 1988 PP. 717-723
34. **CIOARA T. GH.** *EXPERIMENTAL METHODS FOR PIPELINE DYNAMIC STRESS ESTIMATION BY VIBRATION MEASUREMENT*. PROCEEDINGS OF 16<sup>TH</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE FEBRUARY 3-5 1998-SANTA BARBARA PP.457-463
35. **CIOARA T. GH.,** *A METHOD FOR MASS BALANCING OF WIND TURBINE.*, CONFERINȚA "MASINI HIDRAULICE SI HDRODINAMICE " 18-20 OCTOBER 1985 TIMISOARA PP. 147-154, (IN RUMANIAN)
36. **CIOARA T. GH., ALAMPALLI S.** *CONSIDERATION ON HEALTH MONITORING OF LARGE STRUCTURES BY VIBRATION SIGNALS*. THE PRESENT AND FUTURE IN HEALTH MONITORING WORKSHOP, 3 -6 SEPTEMBER 2000 WEIMAR.



37. **CIOARA T. GH.**, *MODAL TESTING FOR THE BLADES OF ONE HORIZONTAL AXIS WIND TURBINE- PROCEEDINGS OF 17<sup>TH</sup> INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS- KU LEUVEN 1992*, PP 1331-1342
38. **CIOARA T. GH., S. ALAMPALLI** *CONSIDERATION ON DAMAGE DDETECTION OF A STRUCTURE USING VIBRATION TEST DATA, PRCEEDINGS OF INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONF.HYATT - DEARBORN MICHIGAN 2004 JANUARY. 26-29 CD PAPER NO. 146, ISBN: 0-912053-86-0*
39. **CIOARA T. GH.:** „*ON A CURVE-FITTING ALGORITHM FOR MODAL PARAMETER ESTIMATION*”, PROCEEDINGS OF THE 6TH INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, KISSIMMEE, FLORIDA, FEBRUARY 1988
40. **CIOARA T. GH.:** *ENERGETICAL CONSIDERATIONS ON ORTHOGONALITY RELATIONS, INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS MODELLING TEST, ANALYSIS, CORRELATION AND VALIDATION MADEIRA ISLAND, PORTUGAL3 - 5 JUNE 2002PP 435-441*
41. **CIOARA T.GH.** *HARMONIC COMPONENTS DETECTION FROM FFT SPECTRUM OF ONE COMPLEX SIGNAL. EUROPEAN SYMPOSIUM, FASE-BUCURESTI 1993 PP 125-128*
42. **CIOARA T.GH.** *HIGH ACCURACY MODAL PARAMETER ESTIMATION. APPLICATION FOR FAULT DETECTION AS STRUCTURAL MODIFICATION EFFECT. PROCEEDINGS OF NATO -ADVANCED STUDY INSTITUTE MODAL ANALYSIS & TESTING SEMINAR, MAY 3-15 1998, SESIMBRA, PORTUGAL PP.709-715*
43. **CIOARA T.GH.** *THEORETICAL STUDIES AND EXPERIMENT RESEARCH ON PETROLEUM AND GAS EQUIPMENT. VTRL RESEARCH REPORTS 1996-1997 FOR SC. PETROSTAR SA. PETROLEUM DESIGN & RESEARCH INSTITUTE, PLOIESTI , ROMANIA (IN ROMANIAN, UNPUBLISHED)*
44. **CIOARA T.GH., BERETEU L.** *AN ANALYTICAL GRADIENT ALGORITHM FOR OPTIMAL STRUCTURAL MODIFICATION,THE 14<sup>TH</sup> INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 12-15 FEBRUARY 1996, DEARBORN, MICHIGAN, PP.1173-1177.*
45. **CIOARA T.GH., BERETEU L., DAESCU D.D., GEORGESCU F.** *BALL AND ROLLER BEARING MANUFACTURING CONTROL BY VIBRATION DIAGNOSIS, 10<sup>TH</sup> EUROPEAN SYMPOSIUM FASE BUCURESTI1993 PP.57-62*
46. **CIOARA T.GH., BERETEU L.:** *DETERMINAREA SOLICITĂRILOR DINAMICE INDUSE DE VÂNT ÎN STRUCTURA UNEI ANTENE PARABOLICE, PROCEEDINGS OF THE X-TH CONFERENCE ON MECHANICAL VIBRATION, JOURNAL OF POLITEHNICA UNIVERSITY TIMIȘOARA ROMANIA, TOM 47(61), SUPPLEMENT, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 23-24 MAI 2002, ISSN: 1224-6077*
47. **CIOARA T.GH., GLIGOR TR., BERETEU L., DAESCU D.D.** *EXPERIMENTAL METHOD FOR MULTYCILINDER COMPRESSOR MASSIVE FOUNDATION VIBRATION ANALYSIS. 6<sup>TH</sup> INTERNATIONAL CONF. SOIL DYNAMICS, SOUTHAMPTON, UK 1993 PP.655-672*
48. **CIOARA T.GH.:** *ON A CURVE FITTING ALGORITHM FOR MODAL PARAMETER ESTIMATION, PROC.6TH INT. MODAL ANALYSIS CONFERENCE, ORLANDO, USA P.717-723, 1988 ISI PROCEEDINGS*
49. **CIOARA, T.:** *TEHNICI EXPERIMENTALE IN INGINERIE. TRADUCTOARE SI SENZORI*, EDITURA POLITEHNICA TIMISOARA, 1999, ISBN 9739389-33-3

50. **CIOARĂ, T.:** *VIBRATION MONITORING OF MECHANICAL SYSTEM. FAULT DIAGNOSIS AND VIBRATION LEVEL REDUCTION*, ED. UNIVERSITY OF SOUTH CAROLINA COLUMBIA U. S. A, 1999, ISBN 973-9485-09-X
51. **CIOARĂ, T.:** *VIBRAȚII ȘI ZGOMOTE. NOTE DE CURS*, EDIȚIE ELECTRONICĂ, UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
52. **CIUCĂ A.:** *POLUAREA FONICA SI SANATATEA OMULUI*, SIMPOZION TEHNICO-ȘTIINȚIFIC, ORADEA, 18-20 OCTOMBRIE 2005 INTERNET
53. **CRISTEA S.:** *ASUPRA UNOR ABORDARI A PROBLEMATICII MODELARII SI SIMULARII IN DOMENIUL MECANIC*, INTERNET [HTTP://WWW.ARMYACADEMY.RO/REVISTE/2\\_3\\_2003/A24.PDF](http://www.armyacademy.ro/reviste/2_3_2003/A24.pdf)
54. **DARABONT A., VĂITEANU D., Ș. A.** *ȘOCURI ȘI VIBRAȚII. APLICAȚII ÎN TEHNICĂ*, EDITURA TEHNICĂ, BUCUREȘTI, 1988
55. **DARABONT, A., VĂITEANU, D., Ș. A.:** *ȘOCURI ȘI VIBRAȚII. APLICAȚII ÎN TEHNICĂ*, EDITURA TEHNICĂ, BUCUREȘTI, 1988
56. **DOBRE D.:** *FEA ANALIZA CU ELEMENTE FINITE*, INTERNET [HTTP://WWW.CADREPORT.RO/CADREP97.04/051.HTM](http://www.cadreport.ro/cadrep97.04/051.htm)
57. **DUMITRAȘCU M. L.:** *CONTRIBUȚII PRIVIND ANALIZA COMPORTĂRII STRUCTURILOR DE REZISTENȚĂ LA DEZASTRE NATURALE ȘI PROVOCATE-TEZA DOCTORAT CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: COL.(R) PROF. UNIV. DR. ING. NICOLAE STOICA, BUCUREȘTI - 2006*
58. **ESCALONA J. L., MAYO J. AND DOMÍNGUEZ J.** *A NEW NUMERICAL METHOD FOR THE DYNAMIC ANALYSIS OF IMPACT LOADS IN FLEXIBLE BEAMS*, MECHANISM AND MACHINE THEORY, VOLUME 34, ISSUE 5, JULY 1999, PAGES 765-780
59. **FARAHANI K., MOFID M., VAFAI A.:** *UNTID ELEMENTS METHOD FOR GENERAL CONTACT-IMPACT PROBLEMS*, COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, USA, VOL.191, ISSUE: 8-10, PP 843-860, (2001)
60. **FAUR N.:** *"ELEMENTE FINITE"*, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA, 2002
61. **FIELD J.E., PROUD W.G., WALLEY S.M., GOLDREIN, H.T.** *"REVIEW OF EXPERIMENTAL TECHNIQUES FOR HIGH RATE DEFORMATION AND SHOCK STUDIES" IN "NEW EXPERIMENTAL METHODS IN MATERIAL DYNAMICS AND IMPACT"*, ED. W.K. NOWACKI AND J.R. KLEPACZKO, PUBL. WARSAW, POLAND, INSTITUTE OF FUNDAMENTAL TECHNOLOGICAL RESEARCH: PP. 109-177, 2001
62. **FIRON H.:** *INTERDEPENDENȚA DINTRE ZGOMOT ȘI VIBRAȚII*, SIMPOZION TEHNICO-ȘTIINȚIFIC, ORADEA, 18-20 OCTOMBRIE 2005 INTERNET
63. **FRANTIŠEK P.** *UVOD DO KMITANI MECHANICKYCH SOUSTAV SVINTRNIMI RAZY*, ACADEMIA PRAHA 1981
64. **GHEORGHE I, OLEKSIK V.:** *"ANALIZA COMPARATIVĂ, CLASIC-ANSY, ÎN STUDIUL UNEI MESE DINAMOMETRICE DUPĂ TREI DIRECTII"*, BULETINUL CELEI DE A X-A CONFERINȚĂ DE VIBRAȚII MECANICE CU PARTICIPARE INTERNAȚIONALĂ, BULETINUL ȘTIINȚIFIC AL UNIVERITĂȚII „POLITEHNICA” TIMIȘOARA ROMÂNIA, SERIA MECANICA, TOM 47(61), TIMIȘOARA 23-24 MAI 2002
65. **GHINEA M., FIREȚEANU V.:** *"MATLAB-CALCUL NUMERIC~ GRAFICĂ~ APLICAȚII"*, EDITURA TEORA, BUCUREȘTI
66. **GRĂDINARU D.:** *MODELĂRI NUMERICE ÎN TEORIA CONTACTULUI ELASTIC-REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT, CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC PROF. DR. ING. EMANUEL DIACONESCU, SUCEAVA, 2006*

67. **HARAGOȘ G.:** *STUD IMPACTUL POLUĂRII SONORE ÎN INSTALAȚIILE ENERGETICE DIN CADRUL UNEI UZINE DIN JUDEȚUL BIHOR, SIMPOZION TEHNICO-ȘTIINȚIFIC, ORADEA, 18-20 OCTOMBRIE 2005 INTERNET*
68. **HARRIS C. M ED.** *SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK, FOURTH EDITION, MCGRAW-HILL 1995*
69. **HARRIS C. M., PIERSOL A.G.:** *SHOCK AND VIBRATIONS HANDBOOK, 5<sup>TH</sup> EDITION, MCGRAW-HILL, NEW YORK, 2002*
70. **HARRIS, C. M., CREDE C. E.:** *ȘOCURI ȘI VIBRAȚII, VOL. I, II, III, EDITURA TEHNICĂ, BUCUREȘTI, 1968 - 1969*
71. **HORA (HULE) V., BODEA R.:** *DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE RESTITUIRE PE BAZA TEORIEI GENERALIZATE A DEFORMAȚIILOR LOCALE DE CONTACT, ANALELE UNIVERSITĂȚII DIN ORADEA, FASCICULA MECANICĂ, 1996, PAG. 57-60*
72. [HTTP://WWW.DIMITRIELEONIDA.GO.RO/AUTOCAD1.HTM](http://www.dimitrieleonida.go.ro/AUTOCAD1.HTM)
73. [HTTP://WWW.ME.UNLV.EDU/~MBT/IMPACT\\_CHARACTERISTICS/EXAMPLE1H\\_EX\\_PRE.HTM](http://www.me.unlv.edu/~mbt/IMPACT_CHARACTERISTICS/EXAMPLE1H_EX_PRE.HTM)
74. **HU B., EBERHARD P.:** *SYMBOLIC COMPUTATION OF LONGITUDINAL IMPACT WAVES , COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, VOLUME 190, ISSUES 37-38 , 22 JUNE 2001, PAGES 4805-4815*
75. **HULE V.:** *SISTEME DINAMICE CU INTERAȚIUNI PERCUTANTE. APLICAȚII ÎN CAZUL BARELOR DE LUNGIMI MARI-TEZĂ DE DOCTORAT, CONDUCĂTORI ȘTIINȚIFICI: PROF. DR. ING. CIOARĂ TITUS, +PROF. DR. ING. BRINDEU LIVIU, TIMIȘOARA, 2006*
76. **HULE V., BRINDEU L., BLAGA F., BODEA R.:** *CIOCNIREA CORPURILOR BAZATĂ PE PROPAGAREA UNDELOR LONGITUDINALE. CONSTRUIREA DIAGRAMELOR ONDULATORII, ANALELE UNIV. ORADEA 2004, FASCICOLA INGINERIE MANAGERIALĂ ȘI TEHNOLOGICĂ, SECȚIUNEA: MECANICĂ, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)*
77. **HULE V., BRINDEU L., BLAGA F., BODEA R.:** *REZOLVAREA ELEMENTARĂ A ECUAȚIILOR DE UNDĂ CORESPUNZĂTOARE CIOCNIȚII PLANE, ANALELE UNIV. ORADEA 2004, FASCICOLA INGINERIE MANAGERIALĂ ȘI TEHNOLOGICĂ, SECȚIUNEA: MECANICĂ, 2004, ISSN 1583-0691, (CD)*
78. **HULE V., TRIP D., ABRUDAN G.:** *STUDIUL EXPERIMENTAL AL PROPAGĂRII UNDELOR PRIN BARE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ, ANALELE UNIV. ORADEA 2006, FASCICOLA INGINERIE MANAGERIALĂ ȘI TEHNOLOGICĂ, SECȚIUNEA: MECANICĂ, 2006, ISSN 1583-0691, (CD)*
79. **HULE V.:** *STUDIUL CIOCNIȚII CORPURILOR PE BAZA DEFORMAȚIILOR LOCALE DE CONTACT, REFERAT NR. 2, UNIVERSITATEA TEHNICĂ TIMIȘOARA, 2000*
80. **HUNT K. H., CROSSLEY F. R. E.:** *COEFICIENT OF RESTITUTION INTERPRETED AS DAMPING IN VIBROIMPACT, TRANS. ASME, J.APPLIED MECHANICS, JUNE 1975, P.440-445*
81. **IONESCU C-TIN:** *STABILITATE ȘI DINAMICA CONSTRUCȚIILOR, IAȘI, 2004*
82. **KENT L. LAWRENCE:** *„ANSYS TUTORIAL-RELEASE 8.0 AND RELEASE7.1”, S.D.C. PUBLICATIONS (SCHROFF DEVELOPMENT CORPORATION)*
83. **LU Z., AND ALL:** *THEORETICAL INVESTIGATION ON CONTACT DURATION IN ELASTIC AND INELASTIC COLOSION OF A CIRCULAR PLATE TO A PLANAR SURFACE, JSME INTERNATIONAL JOURNAL, SERIA A, VOLUM 49, NO. 2, 2006)*

84. **MANOLESCU GH. P., SOCENEANȚU D., BIZEREA OTILIA, SOCENEANȚU M P, HAUPTMANN D.:** ZGOMOTUL ȘI OMUL, SIMPOZION TEHNICO-ȘTIINȚIFIC, ORADEA, 18-20 OCTOMBRIE 2005 INTERNET
85. **MARINA VIORICA:** ANALIZA COMPORTĂRII NELINEARE ȘI ANIZOTROPE A MATERIALELOR CU MICROSTRUCTURĂ - MECANICA CORPULUI SOLID DEFORMABIL-TEZĂ DE DOCTOR ÎN ȘTIINȚE FIZICO-MATEMATICE, CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC: PROF.UNIV.MARINA VASILE, CHIȘINĂU, 2006
86. **OLTEANU M., GEORGESCU I. B.:** ZGOMOTUL ÎN MEDIUL DE MUNCĂ DIN INDUSTRIA LEMNULUI, SIMPOZION TEHNICO-ȘTIINȚIFIC, ORADEA, 18-20 OCTOMBRIE 2005 INTERNET
87. **OPRITESCU CRISTINA, CIOARA T.GH.:** CRACK DETECTION OF A STRUCTURE BY IMPULSIVE RESPONSE. TEST SIMULATION AND EXPERIMENT, LUCRARE 175, IMAC XXVI A CONFERENCE AND EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS,ROSEN SHINGLE CREEK RESORT AND GOLF CLUB ORLANDO, FLORIDA USA CONFERENCE: 4-7 FEBRUARY 2008 [HTTP://WWW.SEM.ORG/APP-CONF-LIST1.ASP](http://www.sem.org/app-conf-list1.asp)
88. **PANTELE C.:** DYNAMIC RESPONSE OF AN ORTHOTROPIC ELASTIC CIRCULAR PLATE IMPACTED BY A MOVING RIGID BODY, PROCEEDINGS OF THE VII-TH SYMPOSIUM- ACUSTICA ȘI VIBRAȚIILE STRUCTURILOR MECANICE, BIOMECANICA; EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 2003, ISBN 973-625-065-2
89. **PASCU A.:** CURS-METODA ELEMENTULUI FINIT, INTERNET [HTTP://WWW.OMTR.PUB.RO/DIDACTIC/MEF\\_FIM.HTM](http://www.omtr.pub.ro/didactic/mef_fim.htm)
90. **POPA RADOVAN SMARANDA:** CERCETĂRI PRIVIND VIVRAȚIILE SOLIDULUI DEFORMABIL SUPUS ACȚIUNILOR DINAMICE PERCUTANTE - TEZĂ DE DOCTORAT, CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC +PROF. DR. ING. L. BRÎNDEU, TIMIȘOARA, 2000
91. **PRODAN D.:** CERCETARI PRIVIND CONTACTUL CIRCULAR CONCENTRAT AL SUPRAFEȚELOR RUGOASE ÎN DOMENIUL ELASTOPLASTIC-TEZA DE DOCTORAT (REZUMAT), CONDUCATOR ȘTIINȚIFIC: PROF. DR. ING. EMANUEL DIACONESCU, SUCEAVA 2005
92. **ROMAN R.** -TEZA DOCTORAT- CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC COL. (R) PROF. UNIV. DR. ING. NĂSTĂSESCU VASILE BUCUREȘTI, 2005-INTERNET
93. **SEIFRIED R., SCHIEHLEN W., EBERHARD P.** NUMERICAL AND EXPERIMENTAL EVALUATION OF THE COEFFICIENT OF RESTITUTION FOR REPEATED IMPACTS, INTERNATIONAL JOURNAL OF IMPACT ENGINEERING VOLUME 32, ISSUES 1-4, DECEMBER 2005, PAGES 508-524, FIFTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON IMPACT ENGINEERING
94. **SILAȘ GH., BRÎNDEU L.:** "SISTEME VIBROPERCUTANTE", EDITURA TEHNICĂ, BUCUREȘTI, 1986
95. **SILAȘ GH., CIOARA T. GH.:** ON THE DYNAMIC ANALYSIS OF THE COMPLEX STRUCTURES BY VIBRATION TESTIN,G REV.ROM. SCI.TECH. TOM 30 NR 5PP.231-238, 1985
96. **SIMA M.:** CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL ȘI SIMULAREA RUPERII MATERIALELOR CU APLICAȚII LA UNELE STRUCTURI DIN PLACI- TEZĂ DE DOCTORAT- CONDUCĂTOR DE DOCTORAT: COLONEL (R) PROF. UNIV. DR. ING. VASILE NĂSTĂSESCU, BUCUREȘTI, 2007
97. **SIMON R.:** DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL TOOL FOR EVALUATING GOLF CLUB PERFORMANCE. ASME DESIGN ENGINEERING CONGRESS, NEW YORK, 1967

98. **SMICALĂ I.:** *CONTRIBUTION PRIVIND STUDIUL SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE PRIN MODELARE ELECTICĂ-TEZĂ DE DOCTORAT, CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC PROF.EM.DR.ING.GH. SILAȘI, 1987*
99. **STAIKU ȘT.:** „*MECANICĂ TEORETICĂ*”, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1998
100. **STEPHAN S, KINDERSBERGER H.** *JOINT RESISTANCE OF BUSBAR-JOINTS WITH RANDOMLY ROUGH SURFACES, PROCEEDINGS OF THE 21TH CONFERENCE ON ELECTRICAL CONTACTS 2002, ZURICH, PP. 230 - 237*
101. **STROESCU AL., SILAȘ GH.:** „*MECANICĂ TEORETICĂ*”, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1963
102. **STRONGE W. J.:** *CONTACT PROBLEMS FOR ELASTO-PLASTIC IMPACT IN MULTI-BODY SYSTEMS, IMPACTS IN MECHANICAL SYSTEMS. ANALYSIS AND MODELLING, EDITED BY B. BROGLIATO, LECTURE NOTES IN PHYSICS, VOL. 551, P.189, 2000*
103. **STRONGE W.J.** *CONTACT PROBLEMS FOR ELASTO-PLASTIC IMPACT IN MULTI-BODY SYSTEMS, IMPACTS IN MECHANICAL SYSTEMS. ANALYSIS AND MODELLING, EDITED BY B. BROGLIATO, LECTURE NOTES IN PHYSICS, VOL. 551, P.189, 2000*
104. **TEODORESCU P. P.** *DINAMICA CORPURILOR LINIAR - ELASTICE, EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE, BUCUREȘTI, 1972*
105. **TOADER M. I., BACRIA V., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *THE EXPERIMENTAL STUDY OF SOUND TRANSMISION THROUGH AN INDUSTRIEL HALL, ROMANIEN JOURNAL OF ACOUSTICS AND VIBRATION, 2006*
106. **TOADER M. I., BACRIA V., HERIȘANU N., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *CONSIDERAȚII PRIVIND BIFURCAȚIILE SISTEMELOR MECANICE DISCRETE, PROCEEDINGS C.D.M. 2005, AIV-A CONFERINȚĂ DE DINAMICA MAȘINILOR CU PARTICIPARE INTERNAȚIONALĂ, VOL II, BRAȘOV 27-28 MAI 2005, PG.412-420, ISBN: 973-635-512-X*
107. **TOADER M. I., BACRIA V., HERIȘANU N., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *CONDIȚION OF BIFURCAȚION FOR DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS, SIMPOZIONUL CU TEMA DISIPAREA ENERGIEI - PROCESE ACUSTICE, VIBRATORII ȘI SEISMICE, ORGANIZAT DE ICECON BUCUREȘTI, 14 NOIEMBRIE 2005, PG52-57, CD*
108. **TOADER M. I., BACRIA V., HERIȘANU N., POPA RADOVAN SMARANDA, BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *CONSIDERATION CONCERNING THE REPARTITION OF THE NOISE LEVEL GENERATED BY THE ROAD TRAFFIC IN TIMIȘOARA CITY, PROCEEDINGS OF THE VIII-TH SYMPOSIUM-ACUSTICA ȘI VIBRAȚIILE STRUCTURILOR MECANICE, EDITURA POLITEHNICA, TIMIȘOARA 26-27 MAI 2005, PG.7-16, ISBN: 973-625-238-8*
109. **TOADER M., BACRIA V., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA:** *NOISE INVESTIGATION AND REDUCTION IN AN INDUSTRIAL HALL, SIMPOZIONUL INTERNAȚIONAT „PROBLEME ACTUALE PRIVIND ANALIZA COMPORTĂRII MATERIALELOR ȘI STRUCTURILOR - PROCESE DINAMICE, ACUSTICE ȘI TERMOMECHANICE”, BUCUREȘTI 15 DECEMBRIE 2006*
110. **TOADER M., BACRIA V., HERIȘANU N., BASARABĂ-OPRITESCU CRISTINA,** *ABOUT SOME CONDITIONS OF BIFURCATION FOR DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS, BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI, PUBLICAT DE UNIVERSITATEA TEHNICA “GH. ASACHI”, IASI, TOMUL LI (LIV), SECȚIA CONSTRUCȚII DE MAȘINI, SUPLIMENT 2005 MECANICA TEORETICA,SIMPOZION INTERNAȚIONAL DE MECANICĂ TEORETICĂ ȘI APLICATĂ “DIMITRIE MANGERON”, 28-30 OCTOMBRIE 2005, PG.107-114*



111. **UROȘU D.:** *STATICA CINEMATICA DINAMICA VIBRAȚII MECANICE*, EDITURA MIRTON, TIMIȘOARA, 2004
112. **VOINEA R., VOICULESCU D., SIMION FL. P.:** *"INTRODUCERE ÎN MECANICA SOLIDULUI CU APLICAȚII ÎN INGINERIE"*, EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA, BUCUREȘTI, 1989
113. **ZACIU R.** *PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR*, EDITURA ALBASTRĂ, CLUJ NAPOCA, 2003

## **CONTRACTE DE CERCETARE**

1. DINAMICA ȘI OPTIMIZAREA FUNCȚIONĂRII UTILAJELOR PERFORATOARE PERCUTANTE ȘI ROTOPERCUTANTE, GRANT CNC SIS NR, 32940/2004 TEMA 5. COD CNC SIS 149: **DIRECTOR DE PROIECT ADRIAN CHIRIAC**
2. CERCETARI SI APLICATII ALE DINAMICII SISTEMELOR LINIARE SI NELINIARE SUPUSE ACTIUNILOR VIBRANTE SI VIBROPERCUTANTE, GRANT CNC SIS 32940/2004-2005, COD CNC SIS 172, TEMA 11/2004, TEMA 13/2005 **DIRECTOR DE PROIECT NICOLAE HERIȘANU**
3. CERCETARI TEORETICE SI EXPERIMENTALE PRIVIND SISTEMELE MECANICE CU ACTIUNE VIBRANTA SI VIBROPERCUTANTA. OPTIMIZAREA PARAMETRIILOR STRUCTURALI, CNC SIS 640/2005 **DIRECTOR DE PROIECT MIHAI TOADER**
4. DINAMICA ȘI OPTIMIZAREA FUNCȚIONĂRII UTILAJELOR PERFORATOARE PERCUTANTE ȘI ROTOPERCUTANTE. GRANT CNC SIS NR, 32940/2005 TEMA 8. COD CNC SIS 149: **DIRECTOR DE PROIECT ADRIAN CHIRIAC**
5. STUDII ȘI CERCETĂRI ASUPRA VIBRAȚIILOR ȘI ȘOCURILOR PRODUSE MODELELOR STRUCTURILOR MECANICE FLEXIBILE ACADEMIA ROMÂNĂ GAR 141/2005, **DIRECTOR DE PROIECT MIHAI TOADER**
6. DINAMICA ȘI OPTIMIZAREA FUNCȚIONĂRII UTILAJELOR PERFORATOARE PERCUTANTE ȘI ROTOPERCUTANTE. GRANT CNC SIS NR. 2739/19.05.2006 TEMA 6. COD CNC SIS 149: **DIRECTOR DE PROIECT ADRIAN CHIRIAC**
7. DEZVOLTAREA CAPACITĂȚII LABORATORULUI DE ACUSTICĂ ȘI VIBRAȚII ÎN VEDEREA IMPLEMENTĂRII DIRECTIVELOR EUROPENE ÎN DOMENIU, CEEX/2006/M4/1908 (ANCS) **DIRECTOR DE PROIECT NICOLAE HERIȘANU**
8. IDENTIFICAREA PRIN MODELAREA ȘI ANALIZĂ EXPERIMENTALĂ A PROPRIETĂȚILOR NANOCOMPOZITE UTILIZATE ÎN CONSTRUCȚIA LAGĂRELOR ANTIFRICȚIUNE. ALICAȚIE LA SISTEMELE GIROSCOPICE DIRECȚIONALE CEEX (IMAGID) CONTRACT NR. 4926/2006 **DIRECTOR DE PROIECT MIHAI TOADER**
9. CERCETARI TEORETICE SI EXPERIMENTALE PRIVIND SISTEMELE MECANICE CU ACTIUNE VIBRANTA SI VIBROPERCUTANTA. OPTIMIZAREA PARAMETRIILOR STRUCTURALI, CNC SIS 2738/2006 TEMA 36 **DIRECTOR DE PROIECT MIHAI TOADER**
10. ANALIZA VIRTUALĂ NELINIARĂ EXPERIMENTALĂ ȘI CONTROLUL OPTIMAL AL SISTEMELOR MECANICE MULTICORP CU ELEMENTE ELASTICE CU APLICAȚII ÎN CONSTRUCȚIA DE MAȘINI ȘI ROBOTICĂ, CEEX (ADEL) CONTRACT NR. 3973/2006, **DIRECTOR DE PROIECT MIHAI TOADER**
11. INVESTIGAREA SI REDUCEREA ZGOMOTULUI DIN MEDIUL URBAN CU APLICATIE LA MUNICIPIUL TIMISOARA, CNC SIS 2739/19.05.2006 **DIRECTOR DE PROIECT BACRIA VASILE**

**CONTRACTE DIRECTE CU TERȚI**

1. EXECUTAREA MĂSURĂTORILOR NIVELULUI DE ZGOMOT PRODUS DE TRAFICUL RUTIER ÎN 14 INTERSECȚII ALE ARTERELOR DE CIRCULAȚIE DIN MUNICIPIULUI TIMIȘOARA, CONTRACT 147/21.09.2004, PRIMĂRIA TIMIȘOARA, DIRECTOR DE PROIECT **BACRIA VASILE**
2. EXECUTAREA MĂSURĂTORILOR NIVELULUI DE ZGOMOT ÎN PRINCIPALELE ZONE DE PENETRAȚIE ÎN MUNICIPIUL TIMIȘOARA ȘI ÎNTOCMIREA BAZEI DE DATE PENTRU HARTA ACUSTICĂ A MUNICIPIULUI TIMIȘOARA, CONTRACT 340/19.10.2005, PRIMĂRIA TIMIȘOARA, DIRECTOR DE PROIECT **BACRIA VASILE**

# ANEXA 3-1

## DETERMINAREA FRECVENȚELOR PROPRII SI A COEFICIENȚILOR DE AMORTIZARE MODALI ALE UNUI SISTEM CU 4 GRADE DE LIBERTATE

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\}$$

### PROGRAM MATCHAD

ORIGIN ≡ 1

$$m0 := \begin{pmatrix} .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c0 := \begin{pmatrix} .01 & -.01 & 0 & 0 \\ -.01 & .02 & -.01 & 0 \\ 0 & -.01 & .03 & -.02 \\ 0 & 0 & -.02 & .04 \end{pmatrix}$$

$$k0 := \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix} \quad zer := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m1 := stack(m0, zer)

m2 := stack(zer, -k0)

k1 := stack(c0 · 1, k0)

k2 := stack(k0, zer)

$$m1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad m2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$



$$k1 = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.03 & -0.02 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.04 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix} \quad k2 = \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m := \text{augmen}(m1, m2)$

$k := \text{augmen}(k1, k2)$

$$m = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.01 & 0 & 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.03 & -0.02 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.04 & 0 & 0 & -10 & 20 \\ 10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda := -\text{genvals}(k, m)$

$i := 1..8$

$$p_i := |\operatorname{Im}(\lambda_i)|$$

$$\sigma_i := \operatorname{Re}(\lambda_i)$$

$$f_i := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{(p_i)^2 + (\sigma_i)^2}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0.033 - 8.088i \\ -0.033 + 8.088i \\ -0.026 - 5.519i \\ -0.026 + 5.519i \\ -2.083 \times 10^{-3} - 1.48i \\ -2.083 \times 10^{-3} + 1.48i \\ -0.011 - 3.908i \\ -0.011 + 3.908i \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 8.088 \\ 8.088 \\ 5.519 \\ 5.519 \\ 1.48 \\ 1.48 \\ 3.908 \\ 3.908 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -0.033 \\ -0.033 \\ -0.026 \\ -0.026 \\ -2.083 \times 10^{-3} \\ -2.083 \times 10^{-3} \\ -0.011 \\ -0.011 \end{pmatrix}$$

$$f^T = (1.287 \quad 1.287 \quad 0.878 \quad 0.878 \quad 0.236 \quad 0.236 \quad 0.622 \quad 0.622)$$

**Rezultă șirul valorilor frecvențelor proprii:**

$f_1=0.236$ ;  $f_2=0.622$ ;  $f_3=0.878$ ;  $f_4=1.287$  Hz

## ANEXA 3-2

### PROGRAM DE INTEGRARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE PRIN METODA RUNGE -KUTTA

```
DECLARE SUB inv (a#(), b#(), n!)
DECLARE SUB prod (a#(), b#(), dc#(), n1!, n!)
DECLARE SUB kutta (d#(), a#(), b#(), X#(), y#(), fpt#(), n!, h)
CLS
OPTION BASE 1
DEFDBL A-I, K-M, O-Z
DEFSNG H-J, N, Q, W
delta = 0! 'pozitie limitator
R = .8 'coeficient de restituire
np = 1500
KILL "4d_00.txt"
OPEN "a", #1, "4d_00.txt"
n = 4' ordin sistem
pi = 4 * ATN(1)
h = .005'pasul de integrare in secunde
DIM m(n, n), k(n, n), c(n, n), d(n, n), c1(n, n), k1(n, n), st(3, 1), fg(3, 1)
DIM X(n), y(n), fpt(n, 3), w(np)
GOSUB mat.mck
CALL inv(m(), d(), n)
  FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO n: PRINT d(i, j), : NEXT: PRINT : NEXT
  CALL prod(d(), c(), c1(), n, n)
  CALL prod(d(), k(), k1(), n, n)
SCREEN 12
COLOR 14
sc = 2
WINDOW (0, -sc)-(np, sc)
LINE (0, delta)-(np, delta), 14
' FOR i = 1 TO np / 10: j = 10 * i: LINE (j, 0)-(j, -.03 * sc): NEXT
X(1) = 1
FOR i = 1 TO np
  x1 = X(1): y1 = y(1)
  IF x1 <= delta AND y1 < 0 THEN y(1) = -R * y1
  CALL kutta(d(), c1(), k1(), X(), y(), fpt(), n, h)
  x2 = X(1)
  LINE (i - 1, x1)-(i, x2), 14
  w1 = X(1): w2 = X(2): w3 = X(3): w4 = X(4)
  PRINT #1, w1, w2, w3, w4
NEXT
END
mat.mck: FOR i = 1 TO 4: FOR j = 1 TO 4 'formare matrice M,C și K
```

```

m(i, j) = 0: k(i, j) = 0: c(i, j) = 0: NEXT: NEXT
m(1, 1) = .3: m(2, 2) = .5: m(3, 3) = 1: m(4, 4) = 1
k(1, 1) = 10: k(2, 2) = 20: k(3, 3) = 20: k(4, 4) = 20
c(1, 1) = .01: c(2, 2) = .02: c(3, 3) = .03: c(4, 4) = .04
k(1, 2) = -10: k(2, 1) = -10: k(2, 3) = -10: k(3, 2) = -10: k(3, 4) = -10: k(4, 3) =
-10
c(1, 2) = -.01: c(2, 1) = -.01: c(2, 3) = -.01: c(3, 2) = -.01: c(3, 4) = -.02: c(4, 3)
= -.02
RETURN
DEFSNG A-G, K-M, O-P, R-V, X-Z ` inversare matrice
SUB inv (a#(), b#(), n!)
DEFDBL A-H, L-M, O-Z
DEFSNG I-K, N
DIM a1(n, n)
FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO n: a1(i, j) = a(i, j): b(i, j) = 0: NEXT j: b(i, i) = 1:
NEXT i
det# = 1#
FOR i = 1 TO n
max = a(i, i)
FOR k = i TO n
s = 1
absol = ABS(a(k, i))
IF max < absol THEN max = absol
NEXT k
IF max = 0 THEN PRINT "matricea este singulara ": END
IF max < .000000001# THEN PRINT "matricea este rau conditionata"
IF ABS(a(i, i)) < max THEN GOTO 100
200 X = a(i, i)
IF X = 0 THEN PRINT "matricea este singulara"
det = det * X * s
FOR k = 1 TO n
a(i, k) = a(i, k) / X
b(i, k) = b(i, k) / X
NEXT k
FOR k = 1 TO n
IF k = i THEN 2
X = a(k, i)
IF X = 0# THEN 2
FOR j = 1 TO n
a(k, j) = a(k, j) - a(i, j) * X
b(k, j) = b(k, j) - b(i, j) * X
NEXT j
2 NEXT k
NEXT i
GOTO 300
100 s = -1#
FOR L = i + 1 TO n
absol = ABS(a(L, i))
IF absol = max THEN 3
NEXT L
3 FOR j = 1 TO n

```

```

SWAP b(i, j), b(L, j)
SWAP a(i, j), a(L, j)
NEXT j
IF i = n + 1 THEN 300
GOTO 200
300 FOR i = 1 TO n: FOR j = 1 TO n: a(i, j) = a1(i, j): NEXT j: NEXT i
FOR i = 1 TO n1
FOR j = 1 TO n1
a1(i, j) = 0
FOR k = 1 TO n1
a1(i, j) = a1(i, j) + a(i, k) * b(k, i)
NEXT k: NEXT j: NEXT i
END SUB
DEFSNG H, O-Q ` subrutină Runge - Kutta
DEFDBL K
SUB kutta (d(), a(), b(), X(), y(), ft(), n, h)
DIM k1(n), k2(n), k3(n), k4(n), l1(n), l2(n), l3(n), l4(n)
FOR i = 1 TO n
k1(i) = 0
FOR j = 1 TO n
k1(i) = k1(i) - h * (a(i, j) * y(j) + b(i, j) * X(j))
k1(i) = k1(i) + h * d(i, j) * ft(j, 1)
NEXT j
l1(i) = h * y(i)
NEXT i
FOR i = 1 TO n
k2(i) = 0
FOR j = 1 TO n
k2(i) = k2(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k1(j) / 2) + b(i, j) * (X(j) + l1(j) / 2))
k2(i) = k2(i) + h * d(i, j) * ft(j, 2)
NEXT j
l2(i) = h * (y(i) + k1(i) / 2)
NEXT i
FOR i = 1 TO n
k3(i) = 0
FOR j = 1 TO n
k3(i) = k3(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k2(j) / 2) + b(i, j) * (X(j) + l2(j) / 2))
k3(i) = k3(i) + h * d(i, j) * ft(j, 2)
NEXT j
l3(i) = h * (y(i) + k2(i) / 2)
NEXT i
FOR i = 1 TO n
k4(i) = 0
FOR j = 1 TO n
k4(i) = k4(i) - h * (a(i, j) * (y(j) + k3(j)) + b(i, j) * (X(j) + l3(j)))
k4(i) = k4(i) + h * d(i, j) * ft(j, 3)
NEXT j
l4(i) = h * (y(i) + k3(i))
NEXT i
FOR i = 1 TO n
y(i) = y(i) + (k1(i) + 2 * k2(i) + 2 * k3(i) + k4(i)) / 6

```

```
X(i) = X(i) + (I1(i) + 2 * I2(i) + 2 * I3(i) + I4(i)) / 6
NEXT i
END SUB
DEFSNG A-G, K-M, R-Z 'subrutina produs matrice
SUB prod (a#(), b#(), dc#(), n1!, n!)
DEFDBL A-E
DEFSNG I-K
FOR i = 1 TO n1: FOR j = 1 TO n: dc(i, j) = 0
FOR k = 1 TO n1
dc#(i, j) = dc(i, j) + a(i, k) * b(k, j)
NEXT k: NEXT j: NEXT i
END SUB
```

## ANEXA 3-3

### PROGRAM *IMPACT 2C*

```
!CONFIGURARE NUMĂRULUI DE PAȘI DE TIMP PENTRU OBTINEREA REZULTATELOR  
/CONFIG,NRES,10000
```

```
!ALEGEREA PREFERINTELOR
```

```
!*  
4
```

```
/NOPR
```

```
/PMETH,OFF,0
```

```
KEYW,PR_SET,1
```

```
KEYW,PR_STRUC,1
```

```
KEYW,PR_THERM,0
```

```
KEYW,PR_FLUID,0
```

```
KEYW,PR_MULTI,0
```

```
KEYW,LSDYNA,1
```

```
/GO
```

```
!*  
4
```

```
/COM,
```

```
/COM,PREFERENCES FOR GUI FILTERING HAVE BEEN SET TO DISPLAY:
```

```
/COM, STRUCTURAL WITH LS-DYNA EXPLICIT
```

```
!PREPROCESAREA
```

```
/PREP7
```

```
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL MASEI DE  
SUS
```

```
!*  
4
```

```
ET,1,164
```

```
R,1
```

```
MP,EX,1,207E9
```

```
MP,NUXY,1,.29
```

```
MP,DENS,1,60
```

```
!DESENAREA MASEI
```

```
BLOCK,-.5,.5,6.35,6.85,-.5,.5,
```

```
!MESH-UL
```

```
VMESH,1
```

```
!CREAREA COMPONENTEI "BLOCK"
```

```
CM,BLOCK,NODE
```

```
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL MASEI DE
JOS
    ET,2,164
    R,2
    MP,EX,2,207E9
    MP,NUXY,2,.29
    MP,DENS,2,10
    EDMP,RIGID,2,6,7
    TYPE,2
    REAL,2
    MAT,2
!DESENAREA MASEI
    BLOCK,-1,1,6,6.25,-1,1,

!MESH-UL
    VMESH,2
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL ARCLUI
    ET,3,165
    R,3
    MP,EX,3,207E9
    MP,NUXY,3,.29
    MP,DENS,3,10
    TB,DISC,3,,,0
    TBDATA,1,20000
!DESENAREA ARCLUI
    TYPE,3
    REAL,3
    MAT,3
    N,1000
    E,143,1000
    NSEL,S,NODE,,1000
!CONSTRANGEREA NODULUI
    D,ALL,ALL
    ALLS
!CREAREA COMPONENTELOR NECESARE PENTRU DEFINIREA CONTACTULUI
    NSEL,S,LOC,Y,6.25
    CM,N1,NODE
    NSEL,S,LOC,Y,6.35
    CM,N2,NODE
!DEFINIREA CONTACTULUI
    EDCGEN,NTS,N2,N1
    ALLS
!DEFINIREA PARAMETRILOR T-TIMP SI ACCELERATIA GRAVITATIONALA G=9.81M/S
    *DIM,TIME,ARRAY,2
    *DIM,ACCL,ARRAY,2
    *SET,TIME(1),0
    *SET,TIME(2),10
    *SET,ACCL(1),9.81
    *SET,ACCL(2),9.81
!APLICAREA ACCELERATIE GRAVITATIONALE MASEI DE SUS
    EDLOAD,ADD,ACLY,,BLOCK,TIME(1),ACCL(1)
```



```
FINISH
!SOLUTIONAREA
/SOLU
    EDENERGY,1,1,1,1
    TIME,6,
    EDRST,1000,
    EDHTIME,1000,
    EDDUMP,1,
    !*
    /STATUS,SOLU
    SOLVE
FINISH
```

4

# ANEXA 4-1

## PROGRAM INEL SECȚIONAT

```
!CONFIGURARE NUMĂRULUI DE PAȚI DE TIMP PENTRU OBJINEREA REZULTATELOR
/CONFIG,NRES,30000
!ALEGEREA PREFERINTELOR
!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_MULT,0
KEYW,LSDYNA,1
/GO
!*
/COM,
/COM,PREFERENCES FOR GUI FILTERING HAVE BEEN SET TO DISPLAY:
/COM, STRUCTURAL WITH LS-DYNA EXPLICIT
!PREPROCESAREA
/PREP7
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL PENTRU
INEL SECȚIONAT
!*
ET,1,SHELL163
!*
KEYOPT,1,1,7
KEYOPT,1,2,0
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,4,0,
!*
*SET,_RC_SET,1,
R,1
RMODIF,1,1, , , 0.1, , , ,
RMODIF,1,7, 0
!*
!*
MP,DENS,1,7850E-9
MP,EX,1,2E8
MP,NUXY,1,0.3
TB,BISO,1,,,,
TBDAT,1,300E3
TBDAT,2,8000E3
MP,DAMP,1,0.02
```

```

!GEOMETRIA INELULUI
    CYLIND,54,50.50,-7.6,7.6,90.12,449.88,
!MESH-UL
    MSHAPE,0,2D
    MSHKEY,1
    !*
    FLST,5,6,5,ORDE,2
    FITEM,5,1
    FITEM,5,-6
    CM,_Y,AREA
    ASEL, , , ,P51X
    CM,_Y1,AREA
    CHKMSH,'AREA'
    CMSEL,S,_Y
    !*
    AMESH,_Y1
    !*
    CMDELE,_Y
    CMDELE,_Y1
    CMDELE,_Y2
    !*
    /UI,MESH,OFF
!CREAREA CPMONENTEI "INEL"
    ESEL,S,MAT,,1
    NSLE,S
    CM,INEL,NODE
    NPLOT
    ALLSEL,ALL
    EPLOT
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL
    !*
    ET,2,SOLID164
    !*
    R,2
    !*
    EDMP,RIGI,2,0,0
    MP,DENS,2,7850E-9
    MP,EX,2,2E8
    MP,NUXY,2,0.3
!DESENAREA SFEREI
    SPH4,64.1,0,10
!MESH-UL
    TYPE, 2
    MAT, 2
    REAL, 2
    ESYS, 0
    SECNUM,
    !*
    MSHAPE,1,3D
    MSHKEY,0
    !*

```

```

CM,_Y,VOLU
VSEL,,,, 2
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
!*
VMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
/UI,MESH,OFF
!CREAREA COMPONENTEI "SFERA"
ESEL,S,MAT,,2
NSLE,S
CM,SFERA,NODE
NPLOT
ALLSEL,ALL
EPLOT
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL
ARCURILOR
!*
ET,3,COMBI165
!*
R,3,,,,,,,,
!*
!*
TB,DISC,3,,,,
TBDAT,1,100
!DESENAREA ARCURILOR
FLST,3,1,8
FITEM,3,-11.220,-55,-2.5333
N, ,P51X
FLST,3,1,8
FITEM,3,-55,16.622,-2.5333
N, ,P51X
TYPE, 3
MAT, 3
REAL, 3
ESYS, 0
SECNUM,
!*
/VIEW,1,,1
/ANG,1
/REP,FAST
FLST,2,2,1
FITEM,2,145
FITEM,2,583
E,P51X
FLST,2,2,1

```

```
FITEM,2,137
FITEM,2,584
E,P51X
!CREAREA CPMONENTEI "K"
ESEL,S,MAT,,3
NSLE,S
CM,K,NODE
NPLOT
ALLSEL,ALL
EPLOT
!CREAREA GRUPULUI "TOT" FORMAT DIN INEL SI ARCURI
CMGRP,TOT,INEL,K
!CONSTRANGERILE
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,583
FITEM,2,-584
!*
/GO
D,P51X, , , , , UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
!DEFINIREA VITEZEI INITIALE PENTRU SFERA
!*
EDVE,VELO,SFERA,-1000,0,0,0,0, , , , ,
!DEFINIREA CONTACTULUI
!*
EDCGEN,ASTS,INEL,INEL,0,0,0,0,0, , , , ,0,10000000
!*
EDCGEN,ASTS,SFERA,INEL,0,0,0,0,0, , , , ,0,10000000
FINISH
!SOLUTIONAREA

/SOL
EDENERGY,1,1,1,1
TIME,1,
EDRST,20000,
EDHTIME,20000,
EDDUMP,1,
!*
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
```

## ANEXA 4-2

### PROGRAM INEL NESECȚIONAT

```
!CONFIGURARE NUMĂRULUI DE PAȚI DE TIMP PENTRU OBJINEREA REZULTATELOR
  /CONFIG,NRES,30000
!ALEGEREA PREFERINTELOR
  !*
  /NOPR
  /PMETH,OFF,0
  KEYW,PR_SET,1
  KEYW,PR_STRUC,1
  KEYW,PR_THERM,0
  KEYW,PR_FLUID,0
  KEYW,PR_MULTI,0
  KEYW, LSDYNA,1
  /GO
  !*
  /COM,
  /COM,PREFERENCES FOR GUI FILTERING HAVE BEEN SET TO DISPLAY:
  /COM, STRUCTURAL WITH LS-DYNA EXPLICIT
!PREPROCESAREA
/PREP7
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL PENTRU
INEL NESECȚIONAT
  !*
  ET,1,SHELL163
  !*
  KEYOPT,1,1,7
  KEYOPT,1,2,0
  KEYOPT,1,3,0
  KEYOPT,1,4,0,
  !*
  *SET,_RC_SET,1,
  R,1
  RMODIF,1,1, , ,0.1, , , ,
  RMODIF,1,7, 0
  !*
  !*
  MP,DENS,1,7850E-9
  MP,EX,1,2E8
  MP,NUXY,1,0.3
  TB,BISO,1,,,,
  TBDAT,1,300E3
  TBDAT,2,80000E3
  MP,DAMP,1,0.02
```

```

!GEOMETRIA INELULUI
  CYLIND,54,50,-7.6,7.6,0,360,
!MESH-UL
  MSHAPE,1,2D
  MSHKEY,0
  !*
  FLST,5,6,5,ORDE,2
  FITEM,5,1
  FITEM,5,-6
  CM,_Y,AREA
  ASEL, , , ,P51X
  CM,_Y1,AREA
  CHKMSH,'AREA'
  CM$SEL,S,_Y
  !*
  AMESH,_Y1
  !*
  CMDELE,_Y
  CMDELE,_Y1
  CMDELE,_Y2
  !*
  /VIEW,1,1,2,3
  /ANG,1
  /REP,FAST
  /UI,MESH,OFF
!CREAREA COMPONENTEI "INEL"
  ESEL,S,MAT,,1
  NSLE,S
  CM,INEL,NODE
  NPLOT
  ALLSEL,ALL
  EPLOT
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL
  !*
  ET,2,SOLID164
  !*
  R,2
  !*
  EDMP,RIGI,2,0,0
  MP,DENS,2,7850E-9
  MP,EX,2,2E8
  MP,NUXY,2,0.3
!DESENAREA SFEREI
  SPH4,64.1,0,10
!MESH-UL
  TYPE, 2
  MAT, 2
  REAL, 2
  ESYS, 0
  SECNUM,
  !*

```

```
MSHAPE,1,3D
MSHKEY,0
!*
CM,_Y,VOLU
VSEL,,,,,2
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
!*
VMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
/UI,MESH,OFF
!CREAREA COMPONENTEI "SFERA"
ESEL,S,MAT,,2
NSLE,S
CM,SFERA,NODE
NPLOT
ALLSEL,ALL
EPLOT
!ALEGEREA TIPULUI ELEMENTULUI, CONSTANTEI REALE SI MATERIALUL
ARCURILOR
!*
ET,3,COMBI165
!*
R,3,,,,,,,,
!*
!*
TB,DISC,3,,,,
TBDAT,1,100
!DESENAREA ARCURILOR
FLST,3,1,8
FITEM,3,-30.843,50,-0.90934E-04
N,,P51X
FLST,3,1,8
FITEM,3,30.843,-50,-0.90934E-04
N,,P51X
TYPE, 3
MAT, 3
REAL, 3
ESYS, 0
SECNUM,
!*
FLST,2,2,1
FITEM,2,174
FITEM,2,633
E,P51X
FLST,2,2,1
```



```
FITEM,2,198
FITEM,2,634
E,P51X
!CREAREA CPMONTEI "K"
ESEL,S,MAT,,3
NSLE,S
CM,K,NODE
NPLOT
ALLSEL,ALL
EPLT
!CREAREA GRUPULUI "TOT" FORMAT DIN INEL SI ARCURI
CMGRP,TOT,INEL,K

!CONSTRANGERILE
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,633
FITEM,2,-634
!*
/GO
D,P51X, , , , ,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
!DEFINIREA VITEZEI INITIALE PENTRU SFERA
!*
EDVE,VELO,SFERA,-1000,0,0,0,0, , , , ,
!DEFINIREA CONTACTULUI
!*
EDCGEN,ASTS,INEL,INEL,0,0,0,0, , , , ,0,10000000
!*
EDCGEN,ASTS,SFERA,INEL,0,0,0,0, , , , ,0,10000000
FINISH
!SOLUTIONAREA
/SOL
EDENERGY,1,1,1,1
TIME,1,
EDRST,20000,
EDHTIME,20000,
EDDUMP,1,
!*
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
```

11

## Titluri recent publicate în colecția „TEZE DE DOCTORAT” seria 9: Inginerie Mecanică

---

1. **Ovidiu Brânzan** – *Studiul prelungirii durabilității conductelor de transport produse petroliere, ISBN (10) 973-625-396-1, (13) 978-973-625-396-6, (2006);*
  2. **Adriana Albu** – *Stabilirea de baze de date pentru diagnosticarea hepatitelor virale prin analiza imaginilor ficatului obținute prin tomografiere, ISBN 978-973-625-400-0, (2007);*
  3. **Călin Gavril Dubău** – *Utilizarea microagregatelor eoliene în componența unor sisteme complexe, ISBN 978-973-625-408-6, (2007).*
  4. **Lenuța Suciu** – *Contribuții la modelarea și simularea proceselor de sudare cu arc electric în mediul de gaze protectoare (Ar, CO<sub>2</sub>) (Sinteză), ISBN 978-973-625-442-0, (2007);*
  5. **Cosmina Vîgaru** – *Studii teoretice și experimentale asupra surselor și nivelului de vibrații la unele tipuri de mașini de țesut, ISBN 978-973-625-432-1, (2007);*
  6. **Virgil Stoica** – *Studii și cercetări privind mecanismele schimbului de căldură în procesele de vaporizare a hidrocarburilor, ISBN 978-973-625-473-4, (2007);*
  7. **Marius-Beniamin Fazecaș** – *Contribuții teoretice și experimentale privind rezistența și durata de viață a cuplajelor, ISBN 978-973-625-498-7, (2007);*
  8. **Camelia Demian** – *Cercetări privind comportarea materialelor destinate implantării osoase conform normelor europene de calitate, ISBN 978-973-625-512-0, (2007);*
  9. **Remus Belu-Nica** – *Contribuții asupra producerii și îmbinării prin sudare a unor table subțiri din materiale compozite metalice cu matrice din aliaj de aluminiu, ISBN 978-973-625-513-7, (2007);*
  10. **Adriana Corina Catanase** – *Identificarea dinamică a turbinelor hidraulice tangențiale de tip pelton, ISBN 978-973-625-514-4, (2007).*
- 



EDITURA POLITEHNICA