

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA NELINIARĂ A UNOR SISTEME MECANICE CU DISCONTINUITĂȚI DATORATE CIOCNIRII

Teză destinată obținerii
titlului științific de doctor inginer
la
Universitatea "Politehnica" din Timișoara
în domeniul INGINERIE MECANICĂ
de către

Ing. Nagy Ramona

Conducători științifici:

prof.univ.dr.ing. BRINDEU Liviu

prof.univ.dr.ing. DRĂGULESCU Doina

Referenți științifici:

prof.univ.dr.ing. FAUR Nicolae

prof.univ.dr.ing. BRATU Polidor

prof.univ.dr.ing. URSU-FISCHER Nicolae

prof.univ.dr.ing. BERETEU Nicolae

Ziua susținerii tezei: 09.12.2008

UNIV. "POLITEHNICA" TIMIȘOARA BIBLIOTECA CENTRALĂ Nr. volum _____ Dulap _____ Lit. _____
--

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Automatică | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie | 8. Inginerie Industrială |
| 3. Energetică | 9. Inginerie Mecanică |
| 4. Ingineria Chimică | 10. Știința Calculatoarelor |
| 5. Inginerie Civilă | 11. Știința și Ingineria Materialelor |
| 6. Inginerie Electrică | |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2008

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221
e-mail: editura@edipol.upt.ro

Cuvânt înainte

Teza de doctorat a fost elaborată pe parcursul activității mele în cadrul catedrei de Mecanică și Vibrații a Facultății de Mecanică din Universitatea „Politehnica” din Timișoara.

Mulțumiri deosebite se cuvin conducătorilor de doctorat prof.dr.ing. Liviu BRINDEU, prof.dr.ing. Doina DRĂGULESCU și prof.dr.ing. Nicolae FAUR. De asemenea aduc pe această cale mulțumiri tuturor colegilor din catedră care m-au sprijinit în tot acest interval de timp, precum și familiei mele.

Timișoara, Decembrie, 2008

Ramona NAGY

Nagy, Ramona

Cercetări privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 49, Editura Politehnica, 2008, 118 pagini, 74 figuri

ISSN:1842-4937

ISBN: 978-973-625-786-5

Cuvinte cheie: vibropercuții, sistem vibropercutant, ciocniri suplimentare.

Rezumat:

Această teză prezintă analiza teoretică și experimentală a modelelor fizice specifice echipamentelor cu vibropercuții generate pentru satisfacerea unor procese tehnologice. În acest scop s-au studiat mișcările periodice ale unui sistem vibropercutant cu limitator, cu ciocniri în domeniul plastic și elastic. S-au determinat condițiile de apariție a ciocnirilor suplimentare într-o perioadă și s-a trasat legea de mișcare a vibratorului pe limitator. Pentru validarea rezultatelor s-a proiectat un vibrator mecanic de tip bielă-manivelă care s-a realizat practic și s-a suspus încercărilor, rezultatele obținute validând metoda.

CUPRINS

Importanța cercetărilor privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii..... 7

1. STADIUL ACTUAL PRIVIND STUDIUL COMPORTĂRII NELINIARE A UNOR SISTEME MECANICE CU DISCONTINUITĂȚI DATORATE CIOCNIRII..... 9

1.1. Sisteme vibropercutante reprezentative 9

1.1.1. Mașini și mecanisme vibropercutante propriu-zise..... 9

1.1.2. Mașini și mecanisme la care mișcările vibropercutante apar ca efecte secundare ale funcționării16

1.2. Modele folosite în studiul sistemelor vibropercutante.....18

1.2.1. Cuple vibropercutante18

1.2.2. Modele dinamice.....19

1.2.3. Ipoteze simplificatoare în realizarea modelelor mecanice19

1.2.4. Caracterizarea sistemelor vibropercutante20

1.3. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemelor vibropercutante între ciocniri22

1.4. Modelarea matematică a ciocnirilor24

1.4.1. Modelarea matematică a ciocnirilor instantanee.....24

1.4.2. Modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee27

1.5. Stabilirea condițiilor de existență ale mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante28

1.6. Optimizarea sistemelor vibropercutante32

1.7. Concluzii34

2. CONTRIBUȚII TEORETICE PRIVIND COMPORTAREA NELINIARĂ A UNOR SISTEME MECANICE CU DISCONTINUITĂȚI DATORATE CIOCNIRII 35

2.1. Domeniile de cuprindere a regimurilor vibropercutante periodice în raport cu mișcările posibile.35

2.1.1. Introducere.....35

2.1.2. Principalele regimuri vibropercutante periodice.....35

2.1.3. Sistemul vibropercutant.....	36
2.1.4. Regimuri periodice simple	37
2.1.5. Delimitarea regimurilor periodice	39
2.2. Regimuri de mișcare vibropercutante cu ciocniri suplimentare	44
2.2.1. Introducere.....	44
2.2.2. Regimuri vibropercutante periodice	45
2.2.3. Sisteme vibropercutante	45
2.3. Cazul ciocnirilor plastice	47
2.3.1. Determinarea regimurilor de mișcare	49
2.3.2. Stabilitatea mișcărilor vibropercutante	51
2.4. Cazul ciocnirilor reale	64
2.4.1. Determinarea regimurilor de mișcare	68
2.4.2. Stabilitatea mișcărilor vibropercutante	71
2.5. Concluzii	83
3. SIMULĂRI ȘI EXPERIMENTE	85
3.1. Modelul cinematic al mecanismului bielă manivelă	85
3.2. Simularea mișcării mecanismului bielă manivelă	88
3.2.1. Rezultatele simulării mecanismului	96
3.3. Încercări experimentale.....	101
4. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII	109
4.1. Concluzii	109
4.2. Contribuții originale.....	110
Bibliografie	111

Importanța cercetărilor privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii

Vibrațiile și vibropercuțiile reprezintă fenomene frecvent întâlnite în toate domeniile tehnice și a căror investigare cunoaște o amplificare deosebită în zilele noastre, mai ales datorită introducerii pe scară largă în industrie a unor utilaje complexe și de mare eficiență.

Studiul ciocnirii dintre două corpuri presupune o dificultate ridicată în modelarea fenomenelor fizice care apar. Aceasta este un fenomen foarte studiat de inginerii și oamenii de știință din diferite domenii, scopul comun fiind dezvoltarea unor teorii care pot prevedea comportarea obiectelor care se ciocnesc. Interesul inginerilor mecanici în problemele de ciocnire este motivat de dorința de a dezvolta modele valide pentru sistemele mecanice în care ciocnirea este inerentă procesului de funcționare (concasoare, prese, întrerupătoare, ciocane vibropercutante, etc.). În studiul ciocnirii o importanță deosebită îi revine înțelegerii jocurilor din lagăre sau a defectelor care apar datorită unei ciocniri accidentale sau funcționale.

În funcție de caracteristicile ciocnirii (viteză, material), ipotezele inițiale acceptate și rezultatele obținute există patru aspecte distincte care tratează ciocnirea, din diferite puncte de vedere [1]:

- Mecanica clasică
- Propagarea undei tensiunii elastice
- Mecanica contactului
- Deformarea plastică.

Mecanica clasică

Această abordare presupune aplicarea legilor fundamentale ale mecanicii pentru a cunoaște vitezele corpurilor după ciocnire. Teoremele impulsului constituie esența acestei abordări [2], [3]. Natura algebrică a acestei metode face ca dezvoltările matematice să fie ușoare și accesibile inginerilor. Pierderea de energie, inerentă oricărui proces de ciocnire real, este luată în considerare prin intermediul coeficientului de restituire. Această abordare nu are posibilitatea de a calcula forțele de contact dintre cele două corpuri sau tensiunile din ele.

Propagarea undelor elastice

Această abordare presupune că ciocnirea este însoțită de o undă de tensiune care se propagă în corpurile ciocnite, la o distanță față de regiunea de contact. Dacă energia transformată astfel în vibrație devine o parte importantă a energiei totale, abordarea clasică devine insuficientă pentru tratarea problemei ciocnirii. Această abordare se poate utiliza la rezolvarea problemelor legate de ciocnirea longitudinală a două bare, ciocnirea între o masă și o bară, ruperea unei bare și efectul vâsco-elasticității în timpul ciocnirii.

Mecanica contactului

Inginerii mecanici sunt interesați și de tensiunile de contact rezultate prin ciocnirea a două corpuri, astfel s-a dezvoltat această abordare. Convențional, contactul mecanic studiază de obicei contactul static, însă s-au dezvoltat și soluții aproximative în cazul ciocnirii. Pentru suprafețe sferice este folosită teoria lui Hertz pentru a obține forța, folosită în calcularea duratei ciocnirii și a deformării maxime. Această abordare a fost extinsă la cazurile în care apar deformații plastice, cu presupunerea că materialele prezintă fenomenul de curgere. Modelele numerice ale zonei de contact sunt folosite când teoria lui Hertz nu este aplicabilă. Relația forță-deformație este completată cu un termen de amortizare care reflectă disipația energiei din suprafața de contact și care permite modelarea efectivă a suprafeței de contact ca un sistem arc-amortizor.

Deformarea plastică

Când deformația plastică devine mai mare decât deformația maximă admisă, modelul propagării undei elastice nu mai poate fi aplicat în analiza ciocnirii. Acesta este domeniul ciocnirilor cu viteză mare, în general asociate cu proiectilele și explozibilii. Se pot utiliza două abordări [2]: teoria hidrodinamică a comportării corpurilor solide și teoria propagării undelor plastice. În teoria hidrodinamică se consideră că deformația permanentă este rezultatul unei modificări a densității corpului. Împreună cu legile de conservare a impulsului, energiei și masei este folosită o ecuație de stare pentru material, care leagă presiunea de modificarea densității și temperatură sau entropie. În teoria propagării deformației plastice materialul este considerat ca fiind incompresibil în domeniul plastic. De asemenea relația între tensiune, deformație și elongație este presupusă ca fiind dependentă de temperatură. În cazul folosirii materialelor ductile [4], [5], când sarcina este aplicată un timp îndelungat, apar temperaturi înalte sau deformații mari, nu poate fi ignorată dependența coeficienților în descrierea comportării plastice a materialelor.

Pe parcursul acestei lucrări autoarea își propune să abordeze teoria ciocnirilor pe baza unor modele matematice care descriu comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii.

1. STADIUL ACTUAL PRIVIND STUDIUL COMPORTĂRII NELINIARE A UNOR SISTEME MECANICE CU DISCONTINUITĂȚI DATORATE CIOCNIRII

1.1. Sisteme vibropercutante reprezentative

Aplicațiile sistemelor cu mișcări vibropercutante se întâlnesc în aproape toate domeniile tehnicii, numărul acestora crescând foarte repede în ultimul timp [6]. În industrie există mașini și mecanisme în care interacțiunile percutante stau la baza funcționării lor [7]. În același timp, există și mașini la care interacțiunile percutante apar ca efecte secundare ale funcționării acestora.

1.1.1. Mașini și mecanisme vibropercutante propriu-zise

Toate mașinile și mecanismele vibropercutante cuprinse în această categorie au la baza procesului de funcționare interacțiuni percutante. Această categorie de mașini vibropercutante au o largă răspândire:

a) pe șantierele de construcții pentru înfigerea piloților și palplanselor pentru compactori de suprafață;

Înfigerea piloților și palplanselor cu ajutorul vibrațiilor prezintă avantaje mari mai ales în cazul solurilor cu grad de îndesare mai mică sau în cazul solurilor nisipoase. În general, mecanismul vibropercutant se mișcă sub acțiunea unei forțe perturbatoare produsă de un generator de vibrații electromecanic cu două mase excentrice în mișcare de rotație, antrenat de un motor electric [8]. Între masa vibropercutantă și capătul pilotului apar ciocniri care măresc eficiența înfîngerii acestuia în pământ.

S-au studiat teoretic și experimental mai multe scheme constructive care diferă prin poziția maselor și a legăturilor dintre ele [9] (fig. 1.1.1.1) unde s-au folosit notațiile:

- 1 – pilot;
- 2 – generator electromagnetic de vibrații;
- 3 – capătul pilotului;
- 4, 6 – arcuri elicoidale;
- 5 – greutate suplimentare.

În figura 1.1.1.1.a. este prezentat cazul mecanismului vibropercutant la care generatorul de vibrații este așezat liber pe capul pilotului. Sub acțiunea celor două mase excentrice montate în opoziție de fază [8] care produc o forță rezultantă armonică pe direcția verticală, generatorul de vibrații execută salturi de pe capătul pilotului urmate de ciocniri, astfel încât pilotul pătrunde în pământ. Masa percutantă

10 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii - 1

este formată din generatorul de vibrații (cu motor cu tot). Din cauza condițiilor de funcționare anormale a motoarelor acestea se defectează relativ ușor și mecanismul are durata limitată de funcționare.

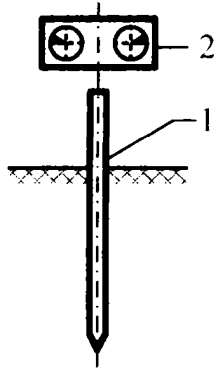


Fig. 1.1.1.1.a

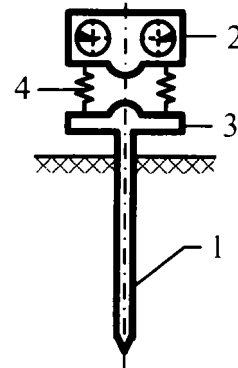


Fig. 1.1.1.1.b

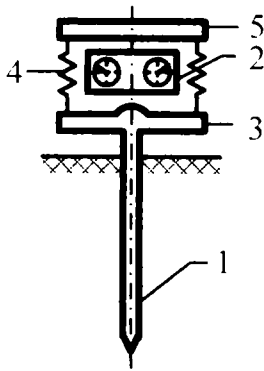


Fig. 1.1.1.1.c

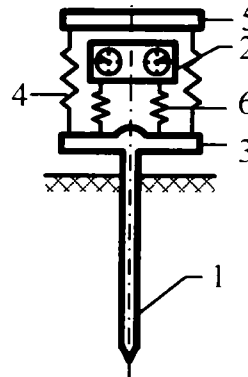


Fig. 1.1.1.1.d

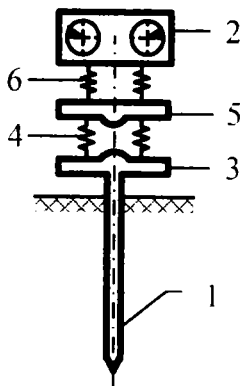


Fig. 1.1.1.1.e

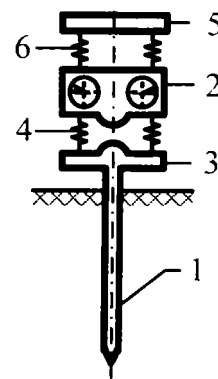


Fig. 1.1.1.1.f

Fig. 1.1.1.1 Mecanisme percutante

Pentru a elimina acest dezavantaj, între masa percutantă și capătul pilotului se introduc arcuri elicoidale (fig. 1.1.1.1.b). Se micșorează astfel greutatea masei percutante ceea ce este avantajos în cazul unor rezistențe mari la înaintare [10].

În fig. 1.1.1.1.c., d., sunt prezentate două scheme constructive, care, spre deosebire de 1.1.1.1.a., b., prezintă o greutate suplimentară legată de capătul pilotului prin elemente elastice. În acest caz, nu se modifică intensitatea acțiunii masei percutante asupra pilotului, acesta având aceeași structură, ceea ce constituie un dezavantaj [11].

În fig. 1.1.1.1.e., generatorul de vibrații (cu motorul electric) este separat elastic de masa percutantă (greutatea suplimentară în acest caz) ceea ce duce la o protejare a funcționării motorului electric. Datorită însă legăturilor elastice în serie, efectul vibropercuțiilor asupra procesului de înfigere scade.

Este recomandabil deci ca generatorul de vibrații să joace rol de masă percutantă (fig. 1.1.1.1.f) iar motorul electric să fie plasat pe o placă metalică cu rol de greutate suplimentară, prin intermediul unor elemente elastice, astfel încât să nu preia vibropercuțiile. Transmiterea mișcării de la motor la generatorul de vibrații se realizează printr-o curea elastică. Se asigură în acest caz atât sporirea eficienței înfingării pilotului cât și protejarea funcționării motorului electric [12].

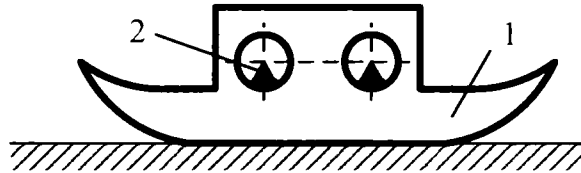


Fig. 1.1.1.2. Compactor

Compactarea suprafețelor în construcții se realizează cu ajutorul mașinilor vibratoare montate pe plăci compactoare (fig. 1.1.1.2). Aceste mașini vibratoare sunt formate dintr-un generator de vibrații cu două mase excentrice în mișcare de rotație, antrenat de un motor cu ardere internă. Mișcarea compactorului se realizează cu salturi urmate de ciocniri cu terenul. Se realizează astfel tasarea pământului după același principiu ca și în cazul înfingării piloților [10], [13].

Prin folosirea vibropercuțiilor se mai pot rezolva și alte probleme precum dislocarea terenurilor înghețate, forările geotehnice, etc. [14], [15].

b) in turnătorile moderne pentru dezbaterea formelor de turnare;

În acest caz se folosesc grătare mecanice cu excentric. Formele de turnare supuse dezbaterei sunt aruncate deasupra grătarului, căderea și ciocnirea ulterioară cu grătarul asigurând procesul tehnologic dorit [16] datorită forțelor de inerție care apar în acest moment. Grătarele mecanice cu excentric cu acționare inerțială sunt antrenate prin intermediul unui generator de vibrații electromecanic cu o masă excentrică în mișcare de rotație [8] (fig. 1.1.1.3.).

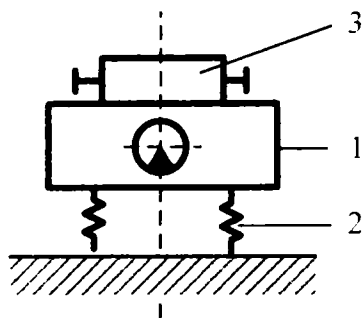


Fig. 1.1.1.3.a

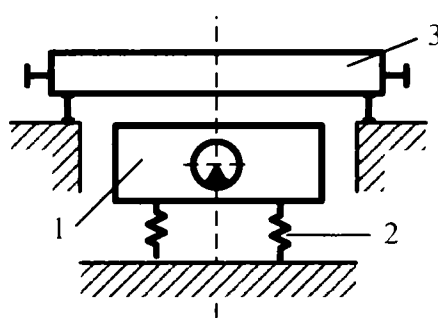


Fig. 1.1.1.3.b

Fig. 1.1.1.3. Grătar cu excentric

În timpul funcționării grătarului din fig. 1.1.1.3.a, rama de formare 3 execută o mișcare oscilatorie pe verticală, de desprindere de grătarul 1 care cuprinde și generatorul de vibrații și apoi se ciocnește periodic de acesta. În fig. 1.1.1.3.b este prezentată o altă construcție de grătar inerțial, la care rama de formare este rezemată pe suporturi rigizi, iar grătarul, așezat sub acesta, execută oscilații pe verticală aplicând acesteia percuții periodice. Elementele elastice 2 preiau șocurile care sunt transmise atenuat fundației.

În unele cazuri, în turnătorii, pentru îndesarea amestecului de formare, se folosesc generatoare de vibrații pneumatice [8] care creează forțe percutante mai mici asigurând o îndesare uniformă a acestuia.

c) la anumite mașini de forjat și ștanțat;

În cazul acestor mașini (ciocane cu arc, cu fricțiune, pneumatice, etc.) principiul funcționării lor este cel vibropercutant.

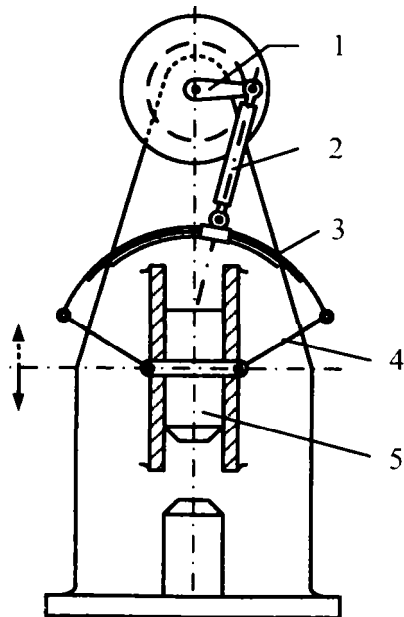


Fig. 1.1.1.4. Ciocan cu arc

La ciocanul cu arc (fig. 1.1.1.4.) mișcarea se transmite, de la motorul de acționare electric, prin manivela 1, biela 2, arcul 3, barele articulate 4, la ciocanul 5 care acționează asupra piesei de forjat. Se pot regla dimensiunile elementelor care formează lanțul cinematic precum și turația motorului de acționare, astfel încât, în funcție de caracteristicile materialului piesei forjate, mișcarea ciocanului să fie aproape periodică [17].

d) la prelucrarea materialelor pietroase dure si casante, în cazul forării rocilor dure sau în abatajele minelor;

În acest caz se folosesc ciocane vibropercutante cu acțiune manuală [18], [19], [20]. În fig. 1.1.1.5. este prezentat un model de ciocan vibropercutant cu mecanism bielă – manivelă [21]. Mișcarea de rotație a manivelei 1 se transmite prin biela 2 la culisa 3, iar de la aceasta, prin arcurile 4 la masa percutantă 7, legată elastic, prin arcurile 6 de corpul 5.

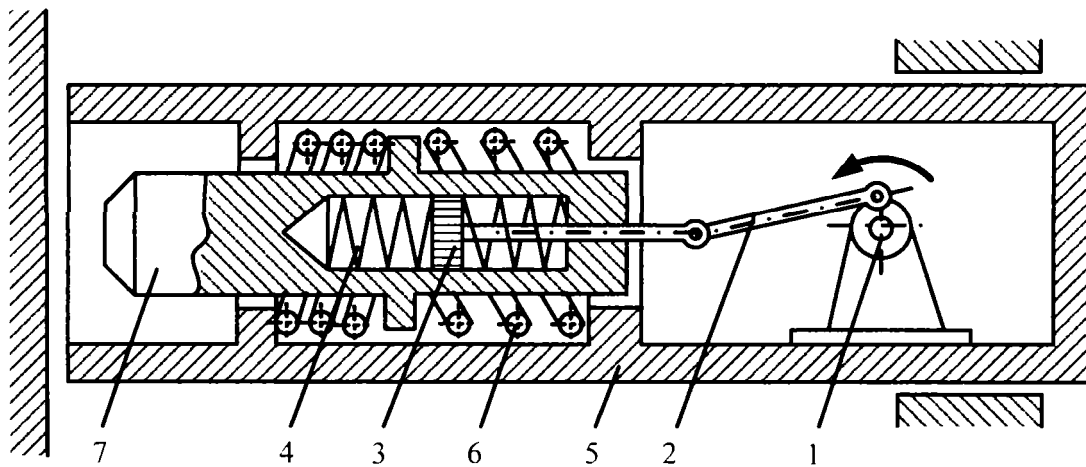


Fig. 1.1.1.5. Ciocan vibropercutant

În fig. 1.1.1.6. este prezentată schema de funcționare a unui ciocan vibropercutant electromagnetic. Prin alimentarea cu curent electric a bobinei 1, miezul percutor 4 este atras în interior, ajunge în poziția limită unde acționează întrerupătorul 2 ce oprește alimentarea bobinei. Arcul 5 readuce percutorul în poziția inițială realizându-se astfel mișcarea oscilatorie [18].

În cazul multor ciocane vibropercutante acționare este pneumatică astfel încât să poată fi utilizate și în zone în care nu există sursă de curent electric [22].

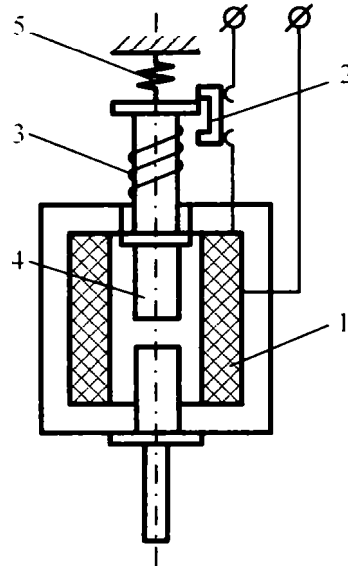


Fig. 1.1.1.6. Ciocan electromagnetic

e) la cernerea și transportarea anumitor materiale la cariere;

În fig. 1.1.1.7 este prezentat un transportor vibrant la care direcția vibrațiilor generate de electromagnetul 2 formează unghiul β cu jgheabul 1 care este fixat prin elementele elastice 3 de suportul mecanismului. Datorită vibrațiilor produse, particulele de material se deplasează în jgheab cu viteze care depind de forma și dimensiunile lor asigurându-se atât deplasarea cât și sortarea acestora, mai ales în cazul mișcării cu desprindere. Această deplasare are astfel un caracter vibropercutant, mecanismul folosindu-se atât la deplasarea cât și la cernerea materialului [23], [24], [25].

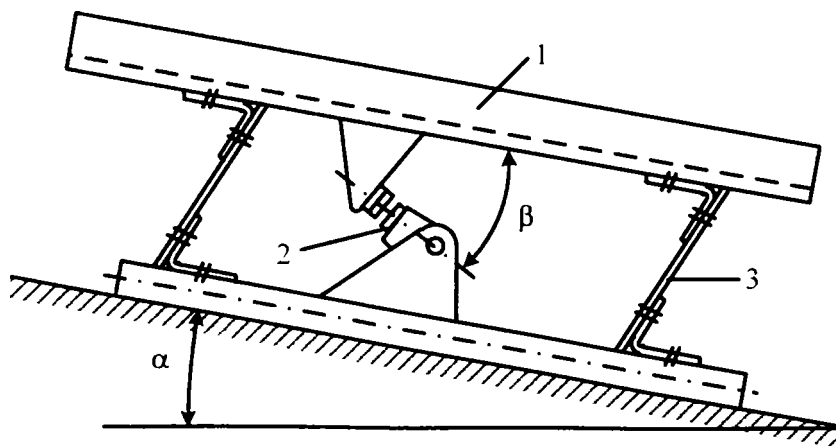


Fig. 1.1.1.7. Vibrator pentru separarea semințelor

Pentru antrenarea transportoarelor vibrante tubulare se mai folosesc mașini electromecanice cu excentric (bielă manivelă) cu antrenare rigidă, semirigidă sau cu arcuri [26], [27], [28].

f) la încercări și verificări ale aparatelor și utilajelor de vibropercuții;

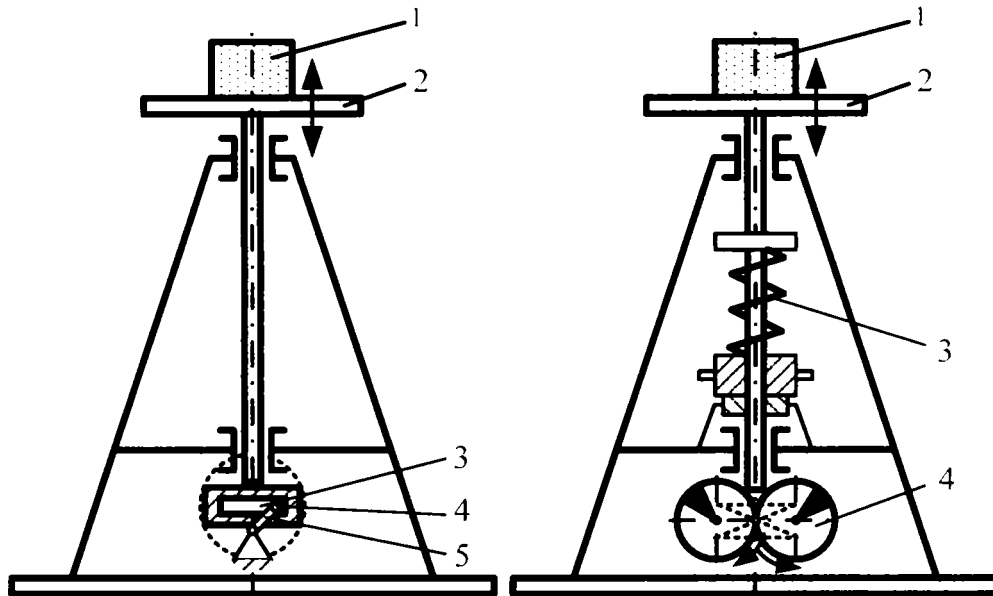


Fig. 1.1.1.8

Fig. 1.1.1.9

Stand pentru încercări și verificări de aparate de vibropercuții

În fig. 1.1.1.8 și 1.1.1.9 sunt prezentate schemele unor standuri folosite la încercarea și verificarea aparatelor și utilajelor la solicitări vibropercutante [17]. În cazul prezentat în fig. 1.1.1.8 antrenarea este cinematică, mișcarea transmițându-se de la manivela 5 prin cursorul 4, culisa 3, masa 2 la piesa 1. Masa 2 execută în acest caz o mișcare armonică, transmisă, cu ciocniri (dacă au loc desprinderi) piesei 1. La dispozitivul din fig. 1.1.1.9, acționarea se face dinamic, cu ajutorul generatorului de vibrații electromecanic cu două mase excentrice în mișcare de rotație 4, mișcarea transmițându-se la masa 2 prin arcurile 3.

În ambele situații piesa de încercat 1 execută salturi periodice, cu ciocniri, pe masa 2.

g) la realizarea unor mori cu bile sau ciocane;

În cazul morilor cu bile, în carcasa cilindrică mobilă se introduce încărcătura împreună cu bilele metalice ale morii. La viteze mici de rotație, încărcătura se deplasează odată cu carcasa. Dacă se ajunge la o anumită viteză de rotație, încărcătura se deplasează independent de carcasă realizându-se măcinarea.

Morile cu ciocane se folosesc în special la măcinarea nutrețurilor [29]. Mărunțirea se produce datorită ciocnirii (lovirii) particulelor de nutreț 1 cu ciocane metalice 2 montate articulat sau rigid pe un disc 3 ce se rotește cu viteza unghiulară constantă în interiorul unei carcase (fig. 1.1.1.10). Viteza periferică a ciocanelor poate atinge valori de 60-150 m/s. Mărunțirea este influențată de viteza periferică a

16 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii - 1

ciocanelor, momentul de inerție al discului cu ciocane, percuțiile aplicate particulelor de nutreț de către ciocane, etc. [30].

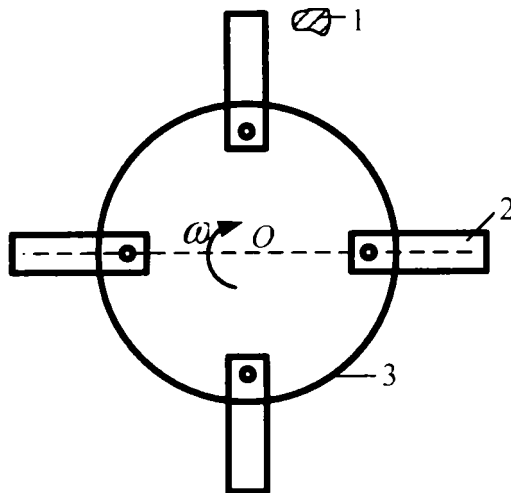


Fig. 1.1.1.10. Moară cu ciocane

h) la domeniul construcțiilor de aparate, unde principiul vibropercuțiilor este folosit la multe dispozitive mecanice și electromagnetice.

Pentru măsurarea amplitudinilor unei membrane telefonice se folosește aparatul din fig. 1.1.1.11. Membrana 1 execută mișcări vibratorii de amplitudini puse în evidență prin intermediul microfonului 3. Când amplitudinile vibrațiilor membranei ajung la o anumită valoare, ciocănașul 2 execută salturi periodice, lovind membrana, deci apar mișcări vibropercutante.

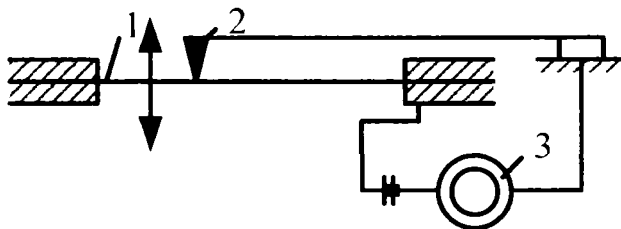


Fig. 1.1.1.11. Dispozitiv pentru măsurarea amplitudinii unei membrane telefonice

Alte aparate care au ca principiu de funcționare vibropercuțiile sunt: soneria electrică, întrerupătoarele electromagnetice, relele, contactoarele, etc. [31]

1.1.2. Mașini și mecanisme la care mișcările vibropercutante apar ca efecte secundare ale funcționării

Efectul vibrociocnirilor care apar în aceste situații este dăunător dar inevitabil în timpul funcționării. Cauza principală a ciocnirilor o constituie existența jocurilor din cuplurile cinematice, jocuri prevăzute prin însăși proiectarea acestor mecanisme sau jocuri care apar datorită condițiilor de exploatare, datorită erorilor de execuție [32].

În lipsa unor percuții aplicate din exterior, ciocnirile sunt produse de jocurile existente între elementele cuplelor cinematice. Aceste interacțiuni percutante se manifestă mai pregnant în cazul mecanismelor cu cuple interioare [33]. Mișcările vibropercutante mai des întâlnite ce apar ca efecte secundare ale funcționării mecanismelor se întâlnesc la:

a. Mecanisme cu roți dințate. Angrenarea dinților se face de obicei cu ciocniri [34], fapt sesizat și datorită zgomotului care se manifestă la funcționarea acestor angrenaje. În contact se află una sau două perechi de dinți, iar ciocnirea are loc în momentul intrării primei perechi în angrenare.

b. Arbori montați pe rulmenți. Apariția vibrațiilor unor arbori orizontali montați în lagăre cu rulmenți pot apărea în cazul existenței unor mase excentrice, dar și în cazul lipsei acestora [35]. Dacă arborele se rotește în rulment, în cazul în care apare un joc între inelul interior 1 și bilele 3 (fig. 1.1.2.1.), în timpul mișcării se poate desprinde de pe bile, având loc ciocniri mai mult sau mai puțin periodice între acesta și bilele inferioare respectiv superioare. Mișcări asemănătoare apar și în cazul lagărelor de alunecare când există joc radial (fig. 1.1.2.2.).

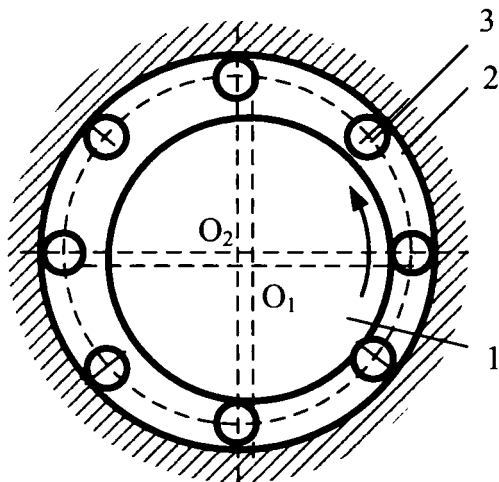


Fig. 1.1.2.1. Arboare orizontal așezat pe rulmenți

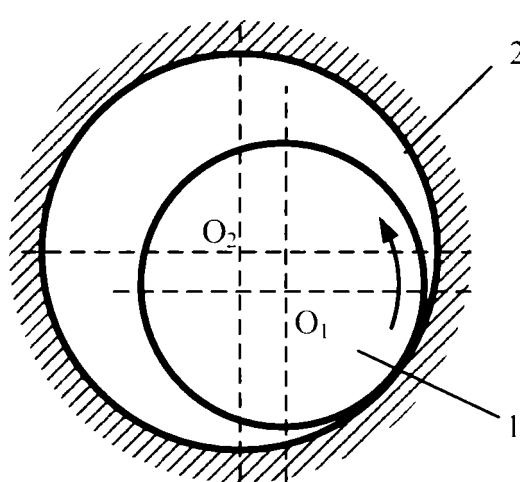


Fig. 1.1.2.2. Arboare orizontal așezat pe lagăr de alunecare

c. Mecanisme cu came. În cazul mecanismelor cu came cu mișcare rapidă, funcționarea se realizează cu desprinderi ale camei de pe tachet [36]. În fig. 1.1.2.3 este prezentată schema de acționare a supapei unui motor cu ardere internă printr-un mecanism cu camă. Dacă asupra tijei 2 acționează porțiunea camei cu rază mai mare, culbutorul 3 comandă coborârea supapei 4 și comprimarea arcului 5. Când cama acționează asupra capătului tijei 2 cu raza mai mică, arcu 5 readuce sistemul în poziția inițială, supapa așezându-se în scaunul ei. În prezența unor jocuri care apar și se compensează periodic, elementele mecanismului sunt supuse unor interacțiuni percutante.

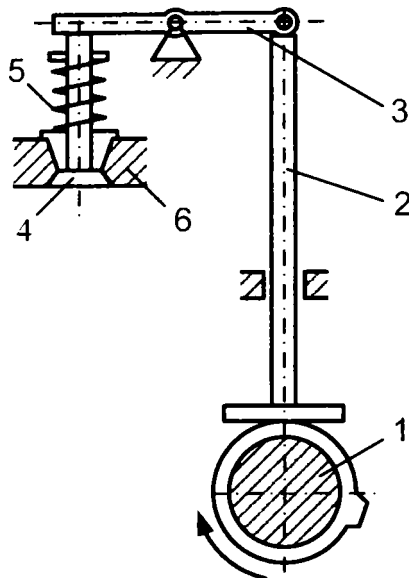


Fig. 1.1.2.3 Schema de acționare a supapei unui motor cu ardere internă

d. Ambreiaje cu discuri. Acestea se folosesc pentru transmiterea mișcării între doi arbori coaxiali. Și în acest caz transmiterea mișcării realizată prin discuri de fricțiune este însoțită de ciocniri. Mișcări vibropercutante care apar ca efecte secundare ale funcționării unor mașini și instalații se mai întâlnesc la: unele sisteme mecanice de comandă automată [37] [38], sisteme mecanice de amortizare a vibrațiilor paletelor de turbină [39], [40], precum și a vibrațiilor aripilor avioanelor [17] sau a cuțitelor de strung, etc.

Reducerea vibrațiilor este posibilă prin utilizarea amortizoarelor sau a izolatorilor de vibrații [41], [42], [43]. Acestea sunt utilizate în special în izolarea vibrațiilor echipamentelor prin construirea unor dispozitive care să reducă nivelul de vibrații prin mijloace pasive, semi-active [44], [45] sau chiar active sau prin proiectarea adecvată a fundației echipamentului.

1.2. Modele folosite în studiul sistemelor vibropercutante

1.2.1. Cuple vibropercutante

În cadrul mișcării sistemelor vibropercutante, un rol deosebit revine maselor care se ciocnesc, acestea reprezentând o componentă de bază pentru aceste sisteme. Prin cuplă percutantă se definește ansamblul format din două elemente ale unui sistem vibropercutant care se ciocnesc între ele în timpul mișcării [46]. În construcția modelului unui sistem vibropercutant trebuie să se identifice toate cuplele percutante componente.

Se poate întâmpla ca unele mase să intre în componența mai multor cuple percutante. De asemenea, se poate întâmpla ca în anumite cuple percutante, în funcție de modul de funcționare a sistemului vibropercutant, să nu aibă loc ciocniri. Acestea reprezintă așa zisele cuple percutante fictive. Dacă se identifică în

configurația sistemului aceste cuple percutante fictive, studiul acestuia se simplifică, analizându-se un număr mai mic de cuple percutante.

În anumite cuple percutante pot să nu apară ciocniri, chiar dacă, din condițiile geometrice, acestea ar fi posibile. Aceste cuple percutante nu sunt considerate fictive de la început, fiind necesară efectuarea unui studiu dinamic.

1.2.2. Modele dinamice

Pentru a se studia mișcarea sistemelor vibropercutante este necesar să se precizeze, de la început, modelul dinamic al acestuia [47]. Este de remarcat faptul că, în multe situații, pentru sisteme vibropercutante diferite ca structură și funcționare, se pot concepe modele dinamice identice, astfel încât rezultatele teoretice obținute se pot folosi în toate cazurile ce corespund aceluiași model.

În construcția modelului dinamic corespunzător unui anumit sistem real, trebuie evidențiate caracteristicile mai importante ale sistemului și neglijate elementele care influențează în mică măsură comportarea dinamică a sistemului simplificat astfel încât modelul și sistemul simplificat să fie cât mai apropiate.

Pentru studiul experimental al comportării dinamice a sistemelor mecanice pot fi luate în considerare următoarele tipuri de modele experimentale [48]:

- Modele mecanice construite la scară geometrică exactă, cele construite la scară geometrică unitară constituind prototipuri pentru sistemele mecanice;
- Modele mecanice construite în condiții speciale de modelare, fără a presupune o scară geometrică exactă, numite modele mecanice distorsionate;
- Modele experimentale de altă natură fizică, dintre care cele mai răspândite sunt modelele electrice, construite pe baza analogiilor dinamice;
- Modele experimentale realizate pe sisteme tip calculator [49], [50];
- Diferite combinații ale tipurilor precedente

Toate aceste tipuri de modele experimentale se realizează în două faze:

1. Modelarea calitativă, în care se stabilesc conexiunile dintre elementele componente ale modelului;
2. Modelarea cantitativă, în care se stabilesc valorile numerice ale parametrilor modelului în funcție de factorii de scară aleși cât mai convenabili, pentru o bună funcționare a modelului.

1.2.3. Ipoteze simplificatoare în realizarea modelelor mecanice

Pentru stabilirea modelelor mecanice pentru sistemele vibropercutante se folosesc ipoteze simplificatoare care se verifică prin încercări experimentale. Pentru studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante prezintă o importanță deosebită caracterul ciocnirii. În general, intervalul de timp în care au loc ciocnirile este mult mai mic decât intervalul de timp dintre două ciocniri consecutive, respectiv decât perioada mișcării. Dacă acest interval de timp în care au loc ciocnirile poate fi neglijat, ciocnirile pot fi considerate ca fiind instantanee, în caz contrar ciocnirile sunt neinstantanee.

20 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 1

Pentru studiul ciocnirilor este necesar să se țină seama de caracterul ciocnirilor și, implicit, de caracteristicile geometrice, dinamice și vâsco-elasto-plastice ale corpurilor care participă la o ciocnire, corespunzătoare unei cuple percutante. În cazul unei cuple percutante, corpurile care participă la ciocnire sunt cele două corpuri care ajung în contact nemijlocit și corpurile legate prin legături rigide de acestea.

Pentru studiul ciocnirilor se vor lua în considerare următoarele ipoteze simplificatoare:

1. Toate ciocnirile se consideră centrice.
2. Toate ciocnirile instantanee se consideră ca fenomene locale, adică în timpul acestor ciocniri nu se schimbă poziția sistemului vibrant.
3. Singura forță percutantă în timpul ciocnirilor instantanee se consideră forța de interacțiune dintre cele două corpuri aflate în contact nemijlocit, numită forță locală de contact.

Pentru intervalul de timp dintre două ciocniri consecutive, ca și pentru studiul ciocnirilor neinstantanee se mai consideră următoarele ipoteze de calcul:

4. Se neglijează acțiunea unor forțe rezistente, care au valori mici în comparație cu valorile forțelor conservative ce acționează asupra sistemului vibropercutant. Astfel, se pot neglija forțele de frecare uscată și, pentru studiul într-o primă aproximație a sistemelor vibropercutante, chiar și forțele de amortizare vâscoasă.
5. Caracteristicile elastice și de amortizare, care sunt neliniare pentru vibrațiile mari ale sistemelor vibropercutante, se consideră liniare sau se liniarizează pe porțiuni.

1.2.4. Caracterizarea sistemelor vibropercutante

Clasificarea sistemelor vibropercutante trebuie să țină seama de numărul gradelor de libertate, numărul cuplelor percutante active, precum și de modul cum intră masele sistemului în diferite cuple percutante [9]. Pe baza acestor caracteristici se poate construi modelul corespunzător care, pe lângă principalele componente: mase, arcuri, amortizoare, întâlnește în mod obișnuit, mai conține și cuple percutante. În fig. 1.2.4.1 sunt prezentate câteva modele de sisteme vibropercutante.

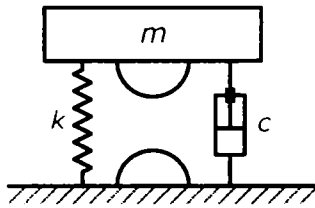


Fig. 1.2.4.1.a

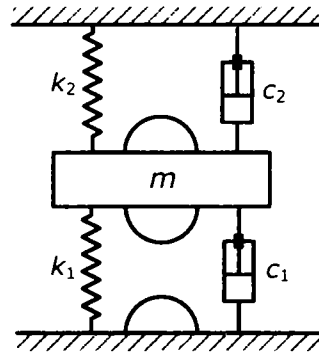


Fig. 1.2.4.1.b

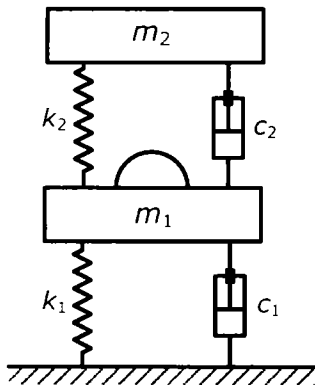


Fig. 1.2.4.1.c

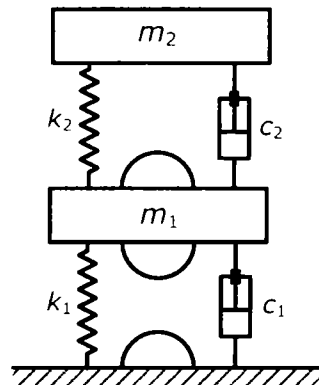


Fig. 1.2.4.1.d

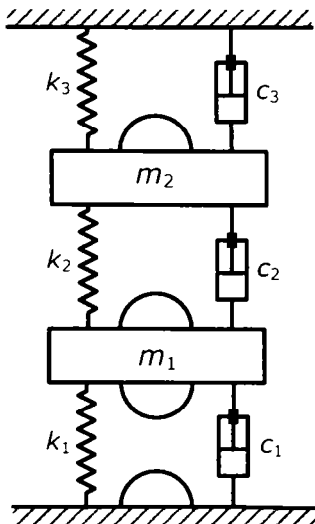


Fig. 1.2.4.1.e

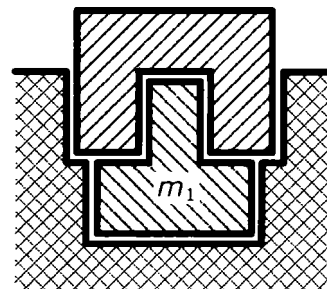


Fig. 1.2.4.1.f

Fig. 1.2.4.1 Modele de sisteme vibropercutante

Modelele din fig. 1.2.4.1.a și b au un singur grad de libertate, cu una, respectiv două cuple percutante, iar cele din figura 1.2.4.1.c, d și e au două grade de libertate cu una, două respectiv trei cuple percutante. În aceste modele, una dintre mase poate face parte din maximum două cuple percutante. Aceste modele se numesc *deschise* deoarece pot apărea ciocniri în toate cuplele percutante. În fig. 1.2.4.1.f este prezentat un model cu două grade de libertate și șase cuple percutante, fiecare masă fiind cuprinsă în patru cuple percutante. Există posibilitatea ca unele cuple să fie fictive, modelul fiind închis. Natura cuplelor percutante se poate stabili în funcție de dimensiunile geometrice ale jocurilor din cuple [46].

Dacă masa unei cuple percutante devine nulă, aceasta degenerază (fig. 1.2.4.2 – modelul este format dintr-o masă ce cade pe un limitator elastic)

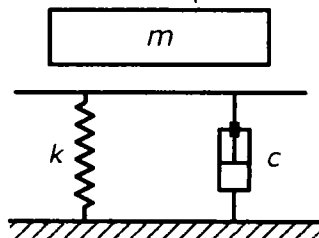


Fig. 1.2.4.2

Această cuplă degenerată se mai numește și *semicuplă percutantă*. Pentru studiul mișcării se folosesc aceleași metode ca în cazul cuplelor percutante normale, ținându-se seama de faptul că, în cazul semicuplelor percutante, contactul dintre cele două elemente nu este instantaneu. Mișcări de acest fel sunt posibile numai în anumite condiții particulare și în cazul cuplelor percutante. Modelul acesta poate fi tratat ca un sistem vibropercutant cu două grade de libertate și o singură semicuplă percutantă.

1.3. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemelor vibropercutante între ciocniri

Se consideră cazul general al unui sistem vibropercutant cu mai multe grade de libertate, a cărui poziție este determinată cu ajutorul a n parametrii de poziție independenți q_j ($j=1,2,\dots,n$) și care este supus la ℓ ($\ell < n$) legături neolonome scleronome. Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive, se aplică ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatori, pentru care se utilizează un operator matriceal de derivare parțială a unei funcții scalare F , de n variabile, definit prin:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\|^T \quad (1.3.1)$$

Ecuațiile legăturilor neolonome se exprimă matriceal prin:

$$\underline{a} \cdot \dot{\bar{q}} + \bar{a}_0 = 0 \quad (1.3.2)$$

unde $\bar{q} = \|q_j\|$, $\underline{a} = \|a_{ij}\|$ este o matrice dreptunghiulară cu dimensiunile $\ell \times n$, $\bar{a}_0 = \|a_{i0}\|$, iar elementele a_{ij} și a_{i0} depind de coordonatele generalizate q_j .

Ecuțiile lui Lagrange cu multiplicatori se pot exprima matriceal sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial \bar{q}} \right) = - \left(\frac{\partial E_a}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \left(\frac{\partial E_p}{\partial \bar{q}} \right) + \bar{Q}^* + \underline{a}^T \cdot \bar{\lambda} \quad (1.3.3)$$

în care $E_c = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \underline{b} \cdot \dot{\bar{q}}$ este energia cinetică a sistemului;

$E_a = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \underline{c} \cdot \dot{\bar{q}}$ este funcția de disipare a energiei;

$E_p = \frac{1}{2} \bar{q}^T \cdot \underline{d} \cdot \bar{q}$ este energia potențială;

$\bar{Q}^* = \|\|Q_j^*\|\|$ este matricea coloană a forțelor generalizate;

$\bar{\lambda} = \|\|\lambda_j\|\|$ este matricea coloană cuprinzând multiplicatorii lui Lagrange, proporționali cu valorile momentane ale reacțiunilor legăturilor neolonome.

Pentru sistemul considerat, matricea de inerție \underline{b} este simetrică, având elementele constante sau funcție de coordonatele generalizate, matricea de amortizare \underline{c} este simetrică, cu elementele constante sau depinzând de coordonatele generalizate și de vitezele generalizate, matricea de rigiditate \underline{d} este simetrică și are elementele constante sau funcții de coordonatele generalizate, iar forțele generalizate perturbatoare Q_j^* depind explicit de timp, fiind funcții periodice de timp, cu aceeași perioadă.

Se folosesc notațiile:

$$\underline{c} = \underline{c} + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \left\{ \frac{\partial \underline{b}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{b}_j^T}{\partial \bar{q}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{c}_j^T}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right\}$$

$$\underline{d} = \underline{d} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial \bar{d}_j^T}{\partial \bar{q}}$$

unde \bar{b}_j , \bar{c}_j și \bar{d}_j reprezintă coloanele cu indicele j ale matricelor \underline{b} , \underline{c} respectiv \underline{d} .

Rezultă:

$$\underline{b} \ddot{\bar{q}} + \underline{c} \dot{\bar{q}} + \underline{d} \bar{q} = \bar{Q}^* + \underline{a}^T \cdot \bar{\lambda} \quad (1.3.4)$$

Neglijând frecările dintre sistem și legăturile neolonome, multiplicatorii lui Lagrange se pot elimina între ecuațiile diferențiale (1.3.4).

Dacă se folosesc notațiile:

$$\underline{b} = \|\| \begin{matrix} \underline{b}_\ell \\ \underline{b}_m \end{matrix} \|\|; \underline{c} = \|\| \begin{matrix} \underline{c}_\ell \\ \underline{c}_m \end{matrix} \|\|; \underline{d} = \|\| \begin{matrix} \underline{d}_\ell \\ \underline{d}_m \end{matrix} \|\|; \bar{Q}^* = \|\| \begin{matrix} \bar{Q}_\ell^* \\ \bar{Q}_m^* \end{matrix} \|\|; \underline{a} = \|\| \underline{a}_\ell \quad \underline{a}_m \|\|, m = n - \ell,$$

matricea \underline{a}_ℓ fiind pătrată și nesingulară, din primele ℓ ecuații (1.3.4) se determină elementele matricei $\bar{\lambda}$, astfel încât, după înlocuirea lor în următoarele m ecuații (1.3.4), rezultă:

$$\{\underline{b}_m - \underline{A} \cdot \underline{b}_\ell\} \ddot{\bar{q}} + \{\underline{c}_m - \underline{A} \cdot \underline{c}_\ell\} \dot{\bar{q}} + \{\underline{d}_m - \underline{A} \cdot \underline{d}_\ell\} \bar{q} = \bar{Q}_m^* - \underline{A} \cdot \bar{Q}_\ell^* \quad (1.3.5)$$

unde $\underline{A} = \underline{a}_m^T \cdot (\underline{a}_\ell^T)^{-1}$ are dimensiunile $m \times \ell$.

Ecuțiile (1.3.5) împreună cu ecuațiile (1.3.2) ale legăturilor neolonome formează un sistem de n ecuații diferențiale neliniare, cu care se studiază mișcarea sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive.

24 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 1

Dacă sistemul vibropercutant nu este supus la legături neolonome, ecuațiile diferențiale ale mișcării între ciocniri sunt tot neliniare, dată de relația:

$$\underline{b}\ddot{\underline{q}} + \underline{c}\dot{\underline{q}} + \underline{D}\underline{q} = \underline{Q}^* \quad (1.3.6)$$

Dacă sistemul vibropercutant nu este supus la legături neolonome și toate elementele matricelor \underline{b} , \underline{c} și \underline{d} sunt constante, ecuațiile diferențiale ale mișcărilor între ciocniri sunt liniare. Un astfel de sistem vibropercutant liniar între ciocniri poate fi asimilat unui model mecanic de sistem supus la legături olonome scleronome ideale, cu caracteristici elastice și de amortizare liniare. Sunt frecvente cazurile în care un astfel de sistem se poate reduce la un model de translație, constituit din mase concentrate aflate în mișcare de translație rectilinie după aceeași direcție, legate între ele prin elemente elastice și de amortizare cu caracteristici liniare. În asemenea cazuri, considerând pentru fiecare masă m_i ca parametru de poziție coordonata x_i măsurată după direcția comună de translație din poziția de echilibru static a sistemului, ecuațiile diferențiale ale mișcării între ciocniri se exprimă sub forma:

$$\underline{m}\ddot{\underline{x}} + \underline{c}\dot{\underline{x}} + \underline{k}\underline{x} = \underline{F}(t) \quad (1.3.7)$$

Dacă se pot neglija și forțele de amortizare vâscoasă, ecuațiile diferențiale ale mișcării între ciocniri devin:

$$\underline{m}\ddot{\underline{x}} + \underline{k}\underline{x} = \underline{F}(t) \quad (1.3.8)$$

1.4. Modelarea matematică a ciocnirilor

1.4.1. Modelarea matematică a ciocnirilor instantanee

Se consideră cupla percutantă dintre corpurile cu masele m_i și m_j dintr-un model mecanic de translație al unui sistem vibropercutant (fig. 1.4.1.1).

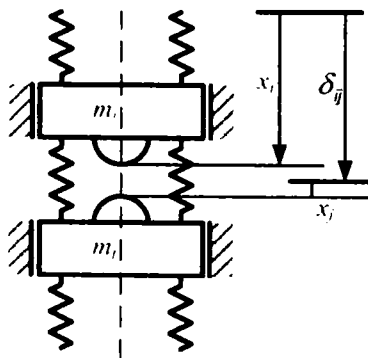


Fig. 1.4.1.1

În cazul ciocnirilor instantanee corpurile se consideră rigide și se ține seama de deformațiile din zona locală de contact în timpul ciocnirii prin coeficientul de restituire la ciocnire R . Pentru orice cuplă sau semicuplă percutantă se poate stabili o relație între parametrii de poziție ai corpurilor ce participă la ciocnire pe baza unei

funcții corespunzătoare unei legături unilaterale. Pentru cupla percutantă din fig. 1.4.1.1 această relație se exprimă astfel:

$$x_j + \delta_{ij} - x_i \geq 0 \quad (1.4.1.1)$$

în care este verificată inegalitatea în timpul mișcării sistemului între ciocniri și egalitatea în momentul ciocniri.

În cazul cel mai general, legătura unilaterală corespunzătoare unei cuple percutante se exprimă printr-o relație de forma:

$$f(\bar{q})^T = f(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0 \quad (1.4.1.2)$$

Pentru a avea loc ciocnirea de ordin k , în momentul t_k^0 la începutul ciocnirii trebuie verificată relația:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k < 0 \quad (1.4.1.3)$$

unde indicele „0” se referă la începutul ciocnirii iar $(\dot{\bar{q}})_k$ reprezintă matricea coloană cu vitezele generalizate de la începutul ciocnirii. La sfârșitul ciocnirii, în momentul t_k trebuie verificată relația:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k' > 0 \quad (1.4.1.4)$$

unde matricea $(\dot{\bar{q}})_k'$ conține vitezele generalizate de la sfârșitul ciocnirii.

La momentul intermediar t_k'' , care separă cele două faze ale ciocnirii, trebuie să fie îndeplinită condiția:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2 = \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k'' = 0 \quad (1.4.1.5)$$

unde matricea coloană $(\dot{\bar{q}})_k''$ are ca elemente vitezele generalizate corespunzătoare momentului t_k'' .

Pentru studiul ciocnirii, în interiorul neglijabil de timp în care are loc ciocnirea, se neglijează forțele nepercutante și se aplică ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatorul λ al legăturii:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{\bar{q}}}\right)\right]_0 - \left(\frac{\partial Ec}{\partial \bar{q}}\right)_0 = \lambda \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0 \quad (1.4.1.6)$$

care se mai poate scrie:

$$\underline{b}_0 \frac{d}{dt} (\dot{\bar{q}}) + \left\{ \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \left[\left(\frac{\partial b}{\partial q_j}\right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{b}_j^T}{\partial \bar{q}}\right)_0 \right] \right\} \frac{d\bar{q}}{dt} = \lambda \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0 \quad (1.4.1.7)$$

Înmulțind ecuația matriceală (1.4.1.7) cu dt și integrând de la momentul t_k^0 la un moment t din intervalul de timp al ciocnirii, deoarece $d\bar{q} = 0$, rezultă:

$$\underline{b}_0 \{\dot{\bar{q}} - (\dot{\bar{q}})_k\} = \left\{ \int_{t_k^0}^{t_k} \lambda \cdot dt \right\} \left(\frac{df}{d\bar{q}}\right)_0 \quad (1.4.1.8)$$

26 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 1

Notând multiplicatorii de impuls

$$\int_{t_k^0}^{t_k'} \lambda \cdot dt = \mu_{02}, \int_{t_k''}^{t_k'} \lambda \cdot dt = \mu_{21} \quad (1.4.1.9)$$

și aplicând (1.4.1.8) pentru cele două faze ale ciocnirii, deoarece matricea \underline{b}_0 este nesingulară, se obține:

$$(\ddot{q})_k'' - (\ddot{q})_k = \mu_{02} \underline{b}_0^{-1} \left(\frac{df}{dq} \right)_0 \quad (1.4.1.10)$$

$$(\ddot{q})_k' - (\ddot{q})_k'' = \mu_{21} \underline{b}_0^{-1} \left(\frac{df}{dq} \right)_0$$

Din relațiile (1.4.1.10), ținând seama de (1.4.1.3), (1.4.1.4), (1.4.1.5) există expresia coeficientului de restituire la ciocnire:

$$R = \frac{\mu_{21}}{\mu_{02}} = - \frac{\left(\frac{df}{dt} \right)_1}{\left(\frac{df}{dt} \right)_0} = - \frac{\left(\frac{df}{dq} \right)_0^T (\dot{q})_k'}{\left(\frac{df}{dq} \right)_0^T (\dot{q})_k} \quad (1.4.1.11)$$

care se determină experimental și, cu acesta, se obțin vitezele generalizate de la sfârșitul ciocnirii în funcție de vitezele generalizate de la începutul ciocnirii:

$$(\dot{q})_k' = (\dot{q})_k - (1 + R) \left[\left(\frac{df}{dq} \right)_0^T (\dot{q})_k \right] \bar{A}_0 \quad (1.4.1.12)$$

$$\bar{A}_0 = \frac{\underline{b}_0^{-1} \left(\frac{df}{dq} \right)_0}{\left(\frac{df}{dq} \right)_0^T \underline{b}_0^{-1} \left(\frac{df}{dq} \right)_0}$$

Se constată că, pentru modelarea matematică a ciocnirilor instantanee, pe lângă matricea de inerție \underline{b} , este necesar să se cunoască funcția legăturilor unilaterale f și coeficientul restituire la ciocnire R .

Pentru sistemele vibropercutante liniare între ciocniri, care se pot reduce la un model în translație, pentru care funcția legăturii unilaterale este dată de (1.4.1.1), matricele coloană \bar{A} și $\frac{df}{dx}$ nu depind de coordonatele generalizate, fiind constante, astfel încât nu mai este necesar să se pună indicele „0”.

1.4.2. Modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee

Pentru modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee este necesar ca în ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului între ciocniri, corespunzător celor două corpuri care ajung în contact nemijlocit în timpul ciocnirii să fie introduse forțele percutante suplimentare, care se datoresc interacțiunilor din zona locală de contact din timpul ciocnirii. Ca urmare, pentru a putea integra ecuațiile diferențiale ale ciocnirii sistemului în intervalul de timp al unei ciocniri, este necesar să se delimiteze momentele în care începe, respectiv se termină ciocnirea și să se cunoască expresia forței locale de contact ca funcție de timp, de coordonatele și de vitezele generalizate corespunzătoare corpurilor care participă la ciocnire. Rezolvarea acestei probleme prin metode matematice exacte este imposibilă, datorită complexității fenomenului real de ciocnire și datorită dependenței forței locale de contact de forțe multi-parametri. Astfel, fenomenul real de ciocnire are un caracter profund neliniar și depinde de forma și dimensiunile geometrice ale corpurilor care participă la ciocnire, de proprietățile vâsco-elasto-plastice ale materialelor din care sunt confecționate, de anumite caracteristici cinematice și dinamice, etc. De asemenea fenomenul real de ciocnire este însoțit de procesul de propagare, în volumele corpurilor care participă la ciocnire, a undelor generate de ciocnire, care modifică starea de tensiune și de deformații în volumele acestor corpuri.

Datorită oscilațiilor păturilor exterioare ale suprafețelor de contact și datorită proprietăților plastice ale materialelor, care conduc la deformații remanente după fiecare ciocnire, funcția legăturii unilaterale se poate modifica de la o ciocnire la alta. Rezultă că, pentru a putea studia ciocnirile neinstantanee, este necesar să se considere unele ipoteze simplificatoare, care să fie verificate experimental. Astfel, ținând seama că în cele mai frecvente cazuri corpurile care se ciocnesc au dimensiuni longitudinale mici, se pot neglija procesele oscilatorii, care se amortizează de la o ciocnire la alta. De asemenea, având în vedere că în marea majoritate corpurile care se ciocnesc sunt confecționate din oțel, se pot neglija deformațiile remanente în urma ciocnirilor, care pentru corpurile din oțel sunt foarte mici. În aceste condiții, momentele de început, respectiv de sfârșit ale ciocnirilor se delimitează din condiția de a fi verificată egalitatea în relația (1.4.1.2), corespunzătoare legăturii unilaterale, iar forța locală de contact are o expresie generală de forma:

$$F_p = \Psi(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad (1.4.2.1)$$

care se determină experimental.

Pentru un sistem vibropercutant liniar între ciocniri, care se reduce la un model de translație, se consideră cupla percutantă din fig. 1.4.1.1. Notând cu $x_{ij} = x_i - (x_j + \delta_{ij})$ apropierea relativă a centrelor de greutate a celor două corpuri aflate în contact în timpul ciocnirii, egală cu suma deformațiilor acestora în zona de contact, din numeroasele încercări experimentale consemnate în literatura de specialitate [9] rezultă că o bună aproximare a fenomenului complex de ciocnire este reflectată de o expresie a forței locale de contact de forma:

$$F_p = d_1 x_{ij}^{\frac{2m+1}{2m}} \pm b_1 \dot{x}_{ij}^2 \quad (1.4.2.2)$$

în care semnul „+” corespunde fazei de comprimare, până la apropierea maximă a centrelor de greutate (când $\dot{x}_{ij} = 0$), iar semnul „-” corespunde fazei de relaxare. În (1.4.2.2) $m = 1, 2, \dots$ este un număr ce depinde de densitatea păturilor

28 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii - 1

exterioare ale suprafețelor corpurilor din zona de contact astfel încât m crește cu densitatea, iar coeficienții d_1 și b_1 depind de caracteristicile geometrice și mecanice ale corpurilor.

Primul termen din (1.4.2.2) exprimă influența deformațiilor elastice, în timp ce al doilea termen se datorește deformațiilor plastice, dublul semn imprimând forței locale de contact un caracter histerezic.

În cazul particular în care deformațiile plastice pot fi neglijate, pentru $m=1$ se obține formula lui Hertz:

$$F_p = \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} x_{ij}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (1.4.2.3)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal [N/m^2];

ν este coeficientul lui Poisson;

r_1 și r_2 sunt razele de curbură ale suprafețelor de contact în punctul teoretic de contact la începutul ciocnirii [m].

1.5. Stabilirea condițiilor de existență ale mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante

Se consideră, în primul rând, un sistem vibropercutant liniar între ciocniri [51], care se poate reduce la un model de translație, având o cuplă percutantă și la care forțele de amortizare vâscoasă pot fi neglijate. Ecuația diferențială matriceală a mișcării sistemului între ciocniri este:

$$\underline{m}\ddot{\underline{x}} + \underline{k} \cdot \underline{x} = \bar{F}(t) \quad (1.5.1)$$

Se presupun cunoscute pulsațiile proprii $p_1, p_2 \dots p_n$ din ecuația pulsațiilor proprii:

$$\Delta(p^2) = |\underline{k} - p^2 \cdot \underline{m}| = 0 \quad (1.5.2)$$

și vectorii proprii normați din ecuațiile matriceale:

$$\{\underline{k} - p_s^2 \cdot \underline{m}\} \bar{\underline{\mu}}_s = \bar{0}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (1.5.3)$$

care verifică relațiile de ortogonalitate:

$$\bar{\underline{\mu}}_r^T \cdot \underline{k} \cdot \bar{\underline{\mu}}_s = \bar{\underline{\mu}}_r^T \cdot \underline{m} \cdot \bar{\underline{\mu}}_s = 0, \quad r \neq s \quad (1.5.4)$$

și relațiile

$$\bar{\underline{\mu}}_s^T \cdot \underline{k} \cdot \bar{\underline{\mu}}_s = p_s^2; \quad \bar{\underline{\mu}}_s^T \cdot \underline{m} \cdot \bar{\underline{\mu}}_s = 1 \quad (1.5.5)$$

Efectuând transformările de variabile

$$\underline{x} = \underline{\mu} \cdot \bar{\underline{\xi}} \quad (1.5.6)$$

$$\underline{\mu} = \|\bar{\underline{\mu}}_1, \bar{\underline{\mu}}_2, \dots, \bar{\underline{\mu}}_n\|$$

ecuațiile diferențiale din (1.5.1) se decuplează, obținându-se ecuația diferențială matriceală în coordonate normale:

$$\ddot{\underline{\xi}} + \underline{p}^2 \underline{\xi} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{\mu}^T \cdot \underline{F}(t) \quad (1.5.7)$$

unde matricele:

$$\underline{M} = \underline{\mu}^T \cdot \underline{m} \cdot \underline{\mu}$$

$$\underline{p}^2 = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{\mu}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\mu}$$

sunt diagonale.

Înlocuind operatorii matriceali:

$$\underline{\cos}(\underline{p}t) = \begin{vmatrix} \cos(p_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(p_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(p_n t) \end{vmatrix} \quad (1.5.8)$$

$$\underline{\sin}(\underline{p}t) = \begin{vmatrix} \sin(p_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin(p_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin(p_n t) \end{vmatrix}$$

care au proprietăți asemănătoare cu funcțiile trigonometrice obișnuite, $\cos pt$, $\sin pt$, ținând seama de transformarea (1.5.7), soluția generală a ecuației diferențiale (1.5.1) se poate exprima sub formă matriceală:

$$\underline{x} = \underline{\mu} \{ \underline{\cos}[\underline{p}(t - t_k)] \cdot \underline{C}_1 + \underline{\sin}[\underline{p}(t - t_k)] \cdot \underline{C}_2 \} + \underline{\mu} \cdot \underline{p}^{-1} \cdot \underline{M}^{-1} \int_0^t \underline{\sin}[\underline{p}(t - \tau)] \cdot \underline{\mu}^T \cdot \underline{F}(\tau) \cdot d\tau \quad (1.5.9)$$

unde matricele coloană \underline{C}_1 și \underline{C}_2 conțin constantele arbitrare, care se determină din condițiile inițiale corespunzând sfârșitului ciocnirii de ordinul k :

$$t = t_k$$

$$\underline{x} = \underline{x}_k \quad (1.5.10)$$

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}}_k$$

Condițiile ca mișcarea sistemului vibropercutant să fie periodică, având o singură ciocnire într-o perioadă a mișcării, cu perioada egală cu un multiplu întreg r al perioadei T a forțelor perturbatoare, sunt:

$$t_{k+1} = t_k + rT$$

$$(\underline{x})_{k+1} = (\underline{x})_k = \underline{x}_c \quad (1.5.11)$$

$$(\dot{\underline{x}})_{k+1} = (\dot{\underline{x}})_k = \dot{\underline{x}}_c$$

Determinând constantele de integrare din (1.5.9) cu condițiile (1.5.10),

30 Stadiul actual privind studiul comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii - 1

exprimând parametrii ciocnirii următoare $(\bar{x})_{k+1}$, $(\dot{\bar{x}})_{k+1}$ la momentul t_{k+1} în funcție de parametrii ciocnirii de ordinul k și impunând condițiile de periodicitate (1.5.11), rezultă:

$$2\dot{\bar{x}}_c - (1 + R) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^T \cdot \dot{\bar{x}}_c \right] \cdot \bar{A} = \underline{\mu} \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{\sin}^{-1} \left(\frac{\bar{p}rT}{2} \right) \cdot \bar{S}_1 \quad (1.5.12)$$

$$2\underline{p} \underline{\sin}^2 \left(\frac{\bar{p}rT}{2} \right) \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \bar{x}_c = \underline{M}^{-1} \cdot \bar{S}_2 - \underline{\sin}(\bar{p}rT) \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \dot{\bar{x}}_c \quad (1.5.13)$$

în care s-au exprimat vitezele de la sfârșitul ciocnirii de ordinul k în funcție de cele la începutul ciocnirii pe baza relației matriceale (1.4.1.12) și s-au notat:

$$\bar{S}_1 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{\sin} \left[\bar{p} \left(\tau - t_k - \frac{1}{2} rT \right) \right] \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(\tau) \cdot d\tau$$

$$\bar{S}_2 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{\sin}[\bar{p}(\tau - t_k)] \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(\tau) \cdot d\tau$$

Deoarece \bar{S}_1 și \bar{S}_2 depind de t_k , din (1.5.12) se determină $\dot{\bar{x}}_c$ în funcție de t_k , iar din (1.5.13), după înlocuirea matricii $\dot{\bar{x}}_c$, rezultă \bar{x}_c în funcție de t_k . Momentele t_k în care au loc ciocnirile se determină din condiția ca elementele matricii \bar{x}_c să verifice egalitatea din relația (1.4.1.3), corespunzătoare legăturii unilaterale (1.4.1.2) are expresia:

$$\dot{x}_{jc} - \dot{x}_{1c} < 0 \quad (1.5.14)$$

Considerând, în al doilea rând, un sistem vibropercutant linear între ciocniri, cu amortizare vâscoasă uniformă, care se poate reduce la un model de translație și având o cuplă percutantă, ecuația diferențială matriceală a mișcării între ciocniri este (1.3.7) în care:

$$\underline{c} = 2\alpha\underline{k} + 2\beta\underline{m} \quad (1.5.15)$$

La fel ca și în cazul precedent, cu transformarea (1.5.6), ecuațiile diferențiale din (1.3.7) se decuplează:

$$\ddot{\bar{\xi}} + 2\underline{E} \cdot \dot{\bar{\xi}} + \underline{p}^2 \cdot \bar{\xi} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(t) \quad (1.5.16)$$

unde $\underline{E} = \alpha \underline{p}^2 + \beta \cdot \underline{1}$ este matricea diagonală cu elementele $\varepsilon_s = \alpha p_s^2 + \beta$.

Dacă se introduce operatorul matriceal:

$$\exp(\bar{\varepsilon}t) = \left\| \begin{array}{cccc} e^{\varepsilon_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\varepsilon_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\varepsilon_n t} \end{array} \right\| \quad (1.5.17)$$

care are proprietățile asemănătoare cu funcția exponențială $e^{\varepsilon t}$ și se mai efectuează o transformare de coordonate:

$$\bar{\xi} = \exp(-\bar{\varepsilon}t) \cdot \underline{\mu} \quad (1.5.18)$$

astfel încât ecuația (1.5.16) devine:

$$\ddot{\underline{u}} + \underline{H}^2 \cdot \underline{u} = \exp(\bar{\varepsilon}t) \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(t) \quad (1.5.19)$$

unde $\underline{H}^2 = \underline{p}^2 - \underline{E}^2$ este matricea diagonală, iar \underline{H} are elementele $h_s = \sqrt{p_s^2 - \varepsilon_s^2}$ în general reale.

Ținând seama de transformările (1.5.6) și (1.5.19), soluția generală a ecuației diferențiale (1.3.7) între ciocnirile de ordinul k și $k+1$ se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \underline{\mu} \cdot \exp[-\bar{\varepsilon}(t - t_k)] \{ \underline{\cos}[\bar{h}(t - t_k)] \cdot \bar{C}_1 + \underline{\sin}[\bar{h}(t - t_k)] \cdot \bar{C}_2 \} + \\ & + \underline{\mu} \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \int_0^t \exp[-\bar{\varepsilon}(t - \tau)] \cdot \underline{\sin}[\bar{h}(t - \tau)] \cdot \underline{\mu} \cdot \bar{F}(\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

unde

$$\underline{\cos}[\bar{h}(t - t_k)] = \begin{vmatrix} \cos[h_1(t - t_k)] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos[h_2(t - t_k)] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos[h_n(t - t_k)] \end{vmatrix}$$

$$\underline{\sin}[\bar{h}(t - t_k)] = \begin{vmatrix} \sin[h_1(t - t_k)] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin[h_2(t - t_k)] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin[h_n(t - t_k)] \end{vmatrix}$$

Determinând constantele de integrare din (1.5.20), cu condițiile (1.5.10), exprimând parametrii ciocnirii următoare $(\bar{x})_{k+1}$, $(\dot{\bar{x}})_{k+1}$ la momentul t_{k+1} în funcție de parametrii ciocnirii de ordinul k și impunând condițiile de periodicitate (1.5.11), rezultă:

$$\begin{aligned} 2\underline{H} \cdot \{ \underline{ch}(\bar{\varepsilon}rt) - \underline{\cos}(\bar{h}rt) \} \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \dot{\bar{x}}_c + (1 + R) \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^T \cdot \dot{\bar{x}}_c \right] \cdot \underline{L}_1 \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \bar{A} = \\ = \underline{L}_1 \cdot \bar{S}_3 + \underline{L}_2 \cdot \bar{S}_4 \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

$$\underline{L}_1 \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \bar{x}_c = \underline{\sin}(\bar{h}rt) \cdot \underline{\mu}^{-1} \cdot \dot{\bar{x}}_c - \exp(-\bar{\varepsilon}rt) \cdot \bar{S}_4 \quad (1.5.22)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\begin{aligned} \underline{ch}(\bar{\varepsilon}rt) &= \frac{1}{2} [\exp(\bar{\varepsilon}rt) + \exp(-\bar{\varepsilon}rt)] \\ \underline{L}_1 &= \underline{H} \cdot [\underline{\cos}(\bar{h}rt) - \exp(-\bar{\varepsilon}rt)] - \underline{E} \cdot \underline{\sin}(\bar{h}rt) \\ \underline{L}_2 &= \underline{H} \cdot \underline{\sin}(\bar{h}rt) + \underline{E} \cdot [\underline{\cos}(\bar{h}rt) - \exp(-\bar{\varepsilon}rt)] \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

$$\bar{S}_3 = \underline{M}^{-1} \cdot \int_{t_k}^{t_k+\tau t} \exp[\tilde{\epsilon}(\tau - t_k)] \cdot \underline{\cos}[\tilde{h}(\tau - t_k)] \cdot \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(\tau) \cdot d\tau$$

$$\bar{S}_4 = \underline{M}^{-1} \cdot \int_{t_k}^{t_k+\tau t} \exp[\tilde{\epsilon}(\tau - t_k)] \cdot \underline{\sin}[\tilde{h}(\tau - t_k)] \cdot \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}(\tau) \cdot d\tau$$

Determinarea parametrilor ciocnirilor pentru mișcările vibropercutante periodice de tipul considerat, din ecuațiile (1.5.21), (1.5.22) și din egalitatea din relația (1.4.1.1), ca și exprimarea condițiilor de existență ale mișcărilor vibropercutante periodice, se efectuează ca și în cazul precedent.

1.6. Optimizarea sistemelor vibropercutante

Pentru sinteza sistemelor mecanice cu acțiune vibropercutantă, criteriul de optimizare cel mai frecvent utilizat este eficiența maximă, pentru care pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirilor trebuie să fie maximă [52]. După cum mecanismele de acționare ale sistemelor vibropercutante pot fi schimbate sau nu, se pot formula două probleme pentru optimizarea acestora:

- Fiind cunoscute forțele perturbatoare periodice, să se determine valorile optime ale parametrilor dinamici reglabili pentru care pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor sunt maxime.
- Să se determine forțele perturbatoare periodice optime, pentru care pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor sunt maxime. Desigur, și în acest caz, parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant vor avea anumite valori optime, care trebuie să fie determinate.

Pentru rezolvarea primei probleme, după determinarea parametrilor ciocnirilor corespunzători mișcărilor vibropercutante periodice stabile ce prezintă interes pentru sinteza sistemului vibropercutant considerat, se calculează pierderea de energie cinetică în timpul unei ciocniri, care va depinde de parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant. Rezolvarea problemei considerate se reduce la o problemă de maxim a pierderii de energie cinetică în raport cu acești parametrii dinamici reglabili.

În cazul unui sistem vibropercutant oarecare, cu ciocniri instantanee, având funcția legăturii unilaterale corespunzătoare cuplei percutante de forma generală, pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii de ordinul k se exprimă prin:

$$(\Delta E_c)_k = \frac{1}{2} (\dot{\bar{q}})_k^T \cdot \underline{b}_0 \cdot (\dot{\bar{q}})_k - \frac{1}{2} [(\dot{\bar{q}})_k]^T \cdot \underline{b}_0 \cdot (\dot{\bar{q}})_k = \frac{1}{2} (1 - R^2) \frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \right)_0^T \cdot (\dot{\bar{q}})_k \right]^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \right)_0^T \cdot \underline{b}_0^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \right)_0} \quad (1.6.1)$$

Se arată că pierderea de energie cinetică în timpul unei ciocniri depinde de expresia:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \right)_0^T \cdot (\dot{\bar{q}})_k = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_0 \quad (1.6.2)$$

care conform relației (1.4.1.3), trebuie să fie negativă. Ca urmare, problema optimizării sistemului vibropercutant se reduce la o problemă de minim a expresiei date în raport cu parametrii dinamici reglabili. Pentru cupla percutantă din fig. 1.4.1.1 având funcția legăturii unilaterale dată de (1.4.1.1), expresia considerată este de forma (1.5.4).

Pentru rezolvarea celei de-a doua probleme de optimizare, se aplică teorema energiei cinetice sub formă diferențială într-un moment dintre două ciocniri consecutive și se integrează de la momentul t_k' corespunzător sfârșitului ciocnirii de ordinul k până la momentul t_{k+1}^0 de la începutul ciocnirii următoare. Pentru un sistem vibropercutant liniar între ciocniri, care se reduce la un model de translație, cu ciocniri instantanee și având mișcări periodice, pierderea de energie cinetică în timpul unei ciocniri devine:

$$(\Delta E_c)_k = \int_{t_k}^{t_k+\tau t} \bar{F}^T(t) \cdot \dot{\bar{x}} \cdot dt - 2 \int_{t_k}^{t_k+\tau t} E_d \cdot dt \quad (1.6.3)$$

unde primul termen din membrul drept reprezintă lucrul mecanic pozitiv, efectuat de forțele perturbatoare într-o perioadă a mișcării, iar cel de-al doilea termen este lucrul mecanic negativ efectuat de forțele de amortizare vâscoasă. Pentru a avea pierderi de energie cinetică maxime în timpul ciocnirii, lucrul mecanic efectuat de forțele perturbatoare într-o perioadă a mișcării trebuie să aibă valori maxime. Dintre toate forțele perturbatoare periodice, având aceeași perioadă T și cu valori extreme date de \bar{F}_0 și $-\bar{F}_0$, cele care dau lucru mecanic maxim într-o perioadă τT a mișcării sunt forțele perturbatoare optime, având o variație dreptunghiulară în timp, de forma:

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_0 \cdot \text{sign}(\sin \omega t) \quad (1.6.4)$$

unde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

În cazul unui sistem vibropercutant fără amortizare vâscoasă, la care se caută mișcări vibropercutante periodice cu perioada egală cu perioada forțelor perturbatoare optime și la care ciocnirile au loc în prima semiperioadă de variație a acestora, pe baza soluției (1.5.12) se determină expresia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \cdot \dot{\bar{x}}_c$$

de care depinde pierderea de energie cinetică (1.6.1) sub forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \cdot \dot{\bar{x}}_c = -\frac{2}{1-R} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{p}^{-1} \cdot \underline{\cos}^{-1}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{p}}{\omega}\right) \cdot \underline{\sin}\left[\bar{p} \cdot \left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau\right)\right] \cdot \underline{\mu}^T \cdot \bar{F}_0 \quad (1.6.5)$$

unde $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ determină momentul ciocnirii.

1.7. Concluzii

În urma studiului bibliografic s-a observat că nu este încă studiat îndeajuns domeniul apariției ciocnirilor suplimentare într-o perioadă, precum și condițiile care conduc la funcționarea defectuoasă a vibratoarelor. Din acest motiv această lucrare se dorește să fie o cercetare amănunțită a posibilității apariției ciocnirilor suplimentare, determinarea parametrilor care influențează apariția acestora precum și determinarea parametrilor cinematici ai vibratorului.

2. CONTRIBUȚII TEORETICE PRIVIND COMPORTAREA NELINIARĂ A UNOR SISTEME MECANICE CU DISCONTINUITĂȚI DATORATE CIOCNIRII

2.1. Domeniile de cuprindere a regimurilor vibropercutante periodice în raport cu mișcările posibile.

2.1.1. Introducere.

Regimurile periodice ale sistemelor vibropercutante sunt bine cunoscute mai ales în anumite cazuri particulare. Nu se poate considera suficientă doar precizarea condițiilor de realizare, fiind necesar să se analizeze și gradul de cuprindere a regimurilor periodice în raport cu alte mișcări posibile [53], [54].

O analiză concretă amănunțită permite precizarea condițiilor în care se obțin regimuri simple periodice fără ciocniri suplimentare într-o perioadă a mișcării. O astfel de analiză va permite evaluarea situațiilor în care apar regimuri periodice cu precizarea concretă a legilor de mișcare și încadrarea printre mulțimea regimurilor posibile. Trebuie subliniat că există și altfel de mișcări periodice mult mai complexe pentru care determinarea regimurilor periodice vibropercutante este mai dificilă.

2.1.2. Principalele regimuri vibropercutante periodice.

În general regimurile periodice de mișcare ale sistemelor vibropercutante se realizează pentru anumiți parametri caracteristici. Neîndeplinirea acestor condiții, care sunt suficient de restrictive, conduce la necesitatea studiului unor regimuri complexe, chiar dacă sunt tot periodice [55].

Acesta este motivul pentru care s-a considerat necesară abordarea concretă și amănunțită a domeniilor restrânse ale parametrilor pentru care apar mișcări periodice simple.

În continuare se vor nota momentele în care apar ciocnirile care delimitează un ciclu al mișcării prin $t = t_k$, ($k=1, 2 \dots$), ceea ce înseamnă că în intervalul $[t_k, t_{k+1}]$ mișcarea se presupune că nu mai are ciocniri suplimentare, și deci este o mișcare liberă.

Ținând seama că ecuația diferențială a mișcării cuprinde funcții periodice date,

36 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

regimurile periodice de mișcare vor apare numai în situația în care intervalul dintre cele 2 ciocniri este un multiplu al perioadei forței perturbatoare [56], [57] adică

$$t_{k+1} - t_k = rT, \quad (r=1, 2, \dots) \text{ și } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Alte situații apar în cazurile în care intervin ciocniri suplimentare în fiecare perioadă (t_k, t_{k+1}) . Existența acestora completează gama regimurilor periodice pentru care determinările și calculele efective sunt mai dificile. Drept exemplificare este tratat cazul apariției unei singure ciocniri suplimentare în fiecare perioadă a mișcării cu particularizare la cazul ciocnirilor plastice.

2.1.3. Sistemul vibropercutant

Studiul se referă la totalitatea regimurilor periodice vibropercutante. Datorită dificultăților de calcul se va lua în considerare cazul simplificat al vibratorului simplu rezemat pe un plan rigid, ce execută mișcări cu desprindere de plan [58]. Astfel, în timpul mișcării vibratorul saltă de pe plan și apoi în cădere se ciocnește și ricoșează în conformitate cu legile cunoscute ale ciocnirilor (fig. 2.1.3.1).

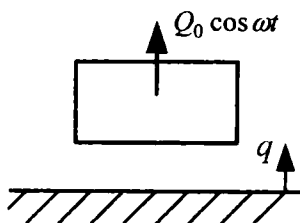


Fig. 2.1.3.1

Vibratorul se presupune de masă m , forța perturbatoare datorită generatorului de vibrații va fi de forma $Q_0 \cos \omega t$ [59], [60]. Asupra masei m mai acționează greutatea proprie mg , astfel încât rezultanta forțelor va fi $-mg + Q_0 \cos \omega t$, iar ecuația diferențială a mișcării va fi

$$\ddot{q} = P(t) \quad (2.1.3.1)$$

unde $P(t) = g(\delta \cos \omega t - 1)$,

$$\delta = \frac{Q_0}{mg}$$

adică

$$\ddot{q} = g(\delta \cos \omega t - 1) \quad (2.1.3.2)$$

Dacă se consideră ciocnirea masei cu planul rigid de natură elasto-plastică cu coeficientul de restituire R ($0 < R < 1$), atunci viteza la sfârșitul unei ciocniri, adică începutul mișcării următoare, este $\dot{q}'_c = -R\dot{q}_c$, unde \dot{q}_c este viteza de cădere a masei, deci de la începutul ciocnirii.

Drept urmare, studiul mișcării se va efectua pe un ciclu al mișcării cuprins între

ciocnirile de la momentele $t = t_k$ și $t = t_{k+1}$ care trebuie să satisfacă condiția de periodicitate $t_{k+1} - t_k = rT$ ($r=1,2,\dots$). Presupunând legea de mișcare de forma $q = q(t)$, condițiile inițiale vor fi

$$q(t_k + 0) = 0, \quad \dot{q}(t_k + 0) = \dot{q}_c \quad (2.1.3.3)$$

iar condițiile finale

$$q(t_{k+1} - 0) = 0, \quad \dot{q}(t_{k+1} - 0) = -R\dot{q}_c \quad (2.1.3.4)$$

Legile de mișcare obținute pentru condițiile inițiale (2.1.3.3) introduse în condițiile finale (2.1.3.4) conduc la determinarea parametrilor regimurilor periodice.

Datorită unor perturbații mici ce apar în momentul ciocnirilor, regimul de mișcare poate reveni la mișcarea de bază periodică, care este stabilă, spre deosebire de situația contrară când devine instabilă. Studiul stabilității revine la a considera perturbații mici ale parametrilor mișcării [61]. Astfel se vor presupune principalii parametri ai mișcării momentele ciocnirilor $t_k + \Delta t_k$ și vitezele $\dot{q}_c + \Delta \dot{q}_k$ ($k=1,2,\dots$) cu perturbațiile Δt_k și $\Delta \dot{q}_k$ care în virtutea condițiilor de realizare a ciocnirilor trebuie verificat dacă tind către zero pentru a fi stabil regimul.

2.1.4. Regimuri periodice simple

Regimurile periodice vibropercutante care nu prezintă ciocniri suplimentare într-un ciclu de mișcare se consideră simple [62]. Pentru a putea analiza gradul de acoperire cu regimuri simple vibropercutante a mulțimii mișcărilor periodice posibile, în continuare se prezintă un studiu amănunțit al acestora.

Legea mișcării și a vitezei obținute prin integrarea ecuației diferențiale a mișcării (2.1.3.2) în condițiile inițiale (2.1.3.3) sunt:

$$q(t) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t - t_k)^2 \right] - R\dot{q}_c (t - t_k) \quad (2.1.4.1)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t - \sin \omega t_k) - \omega (t - t_k) \right] - R\dot{q}_c$$

Dacă în legea (2.1.4.1) se introduc condițiile finale (2.1.3.4) se obțin pentru determinarea parametrilor regimurilor ecuațiile:

$$q(t_{k+1} - 0) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t_{k+1} - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \right] - R\dot{q}_c (t_{k+1} - t_k) = 0 \quad (2.1.4.2)$$

$$\dot{q}(t_{k+1} - 0) = \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t_k) - \omega (t_{k+1} - t_k) \right] - R\dot{q}_c = \dot{q}_c$$

Datorită faptului că totul se întâmplă într-o perioadă, există relațiile:

38 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

$$\cos \omega t_{k+1} = \cos \omega(t_k + rT) = \cos(\omega t_k + 2nr) = \cos \omega t_k \quad (2.1.4.3)$$

$$\sin \omega t_{k+1} = \sin \omega(t_k + rT) = \sin(\omega t_k + 2nr) = \sin \omega t_k$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta \omega r T \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (rT)^2 \right] - R \dot{q}_c r T &= 0 \\ -\frac{g}{\omega} \omega r T - R \dot{q}_c &= \dot{q}_c \end{aligned} \quad (2.1.4.4)$$

de unde se pot deduce parametrii

$$\dot{q}_c = -\frac{grT}{1+R} = -\frac{g2nr}{\omega(1+R)} \quad (2.1.4.5)$$

și

$$\sin \omega t_k = -\frac{nr(1-R)}{(1+R)\delta} \quad (2.1.4.6)$$

Notând $\omega(t - t_k) = \tau$, rezultă:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \cos(\tau + \omega t_k) = \cos \tau \cos \omega t_k - \sin \tau \sin \omega t_k \\ \sin \omega t &= \sin(\tau + \omega t_k) = \sin \tau \cos \omega t_k + \cos \tau \sin \omega t_k \end{aligned} \quad (2.1.4.7)$$

Notând $\frac{\omega^2}{g} q\left(t_k + \frac{\tau}{\omega}\right) = \tilde{q}(\tau)$, $\frac{\omega}{g} \dot{q}\left(t_k + \frac{\tau}{\omega}\right) = \dot{\tilde{q}}(\tau)$ și ținând seama de ecuațiile (2.1.4.5) și (2.1.4.6), legile mișcării și vitezei (2.1.4.1) devin:

$$\tilde{q}(\tau) = -\delta(\cos \tau \cos \omega t_k - \sin \tau \sin \omega t_k - \cos \omega t_k) - \delta \tau \sin \omega t_k - \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{2nrR}{1+R} \tau \quad (2.1.4.8)$$

$$\dot{\tilde{q}}(\tau) = \delta(\sin \tau \cos \omega t_k + \cos \tau \sin \omega t_k - \sin \omega t_k) - \tau + \frac{2nr}{1+R}$$

Și dacă înlocuim relațiile (2.1.4.6) în (2.1.4.8), rezultă:

$$\tilde{q}(\tau) = -\frac{1}{2} \tau^2 + nr\tau + 2\sqrt{\delta^2 - \left(\frac{nr(1-R)}{(1+R)}\right)^2} \sin^2 \frac{\tau}{2} - \frac{nr(1-R)}{(1+R)} \sin \tau \quad (2.1.4.9)$$

$$\dot{\tilde{q}}(\tau) = 2\frac{nr(1-R)}{(1+R)} \sin^2 \frac{\tau}{2} + \sqrt{\delta^2 - \left(\frac{nr(1-R)}{(1+R)}\right)^2} \sin \tau - \tau + \frac{2nrR}{1+R}$$

Sunt ușor de verificat identitățile evidente $\ddot{q}(0) = \frac{\omega^2}{g} q(t_k) = 0$ și

$$\ddot{q}(2nr) = \frac{\omega^2}{g} q(t_k + rT) = 0$$

Stabilitatea regimurilor determinate poate fi studiată cu ajutorul metodei perturbației parametrilor [47]. Astfel, condițiile inițiale vor fi:

$$q(t_k + \Delta t_k + 0) = 0, \quad \dot{q}(t_k + \Delta t_k + 0) = -R(\dot{q}_c + \Delta \dot{q}_k) \quad (2.1.4.10)$$

iar cele finale:

$$q(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} + 0) = 0 \quad (2.1.4.11)$$

$$\dot{q}(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} + 0) = \dot{q}_c + \Delta \dot{q}_{k+1}$$

Folosind metoda liniarizării perturbațiilor rezultă un sistem liniar și condiția de stabilitate:

$$0 < \cos \omega t_k < \frac{2(1+R^2)}{(1+R)^2 \delta} \quad (2.1.4.12)$$

Considerând relația (2.1.4.5) și condiția de stabilitate (2.1.4.11) rezultă următoarea inegalitate

$$\frac{nr(1-R)}{1+R} < \delta < \frac{\sqrt{n^2 r^2 (1-R^2)^2 + 4(1+R^2)^2}}{(1+R)^2} \quad (2.1.4.13)$$

care este esențială în caracterizarea posibilelor regimuri periodice ale mișcării.

2.1.5. Delimitarea regimurilor periodice

În general regimurile vibropercutante sunt limitate la inegalitatea (2.1.4.13), fără a se studia legea de mișcare [63]. De aceea este reprezentată legea de mișcare (2.1.4.9) presupunând că parametrul δ satisface inegalitatea (2.1.4.13).

În figura 2.1.5.1 sunt reprezentate legile de mișcare (2.1.4.9) pentru diferite valori ale lui r și a coeficientului de restituire R . Se observă că pentru ciocnirea perfect elastică curba pe care o descrie este o parabolă cu maximum la πr .

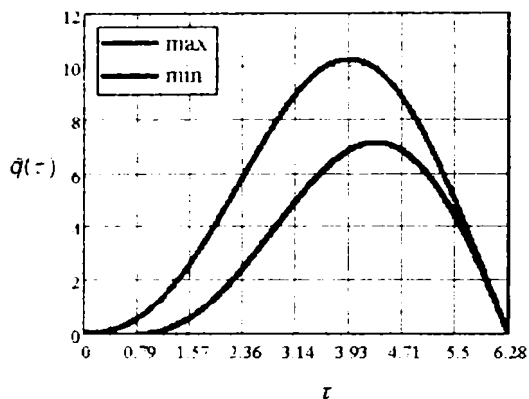


Fig. 2.1.5.1.a. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$ și $R=0$

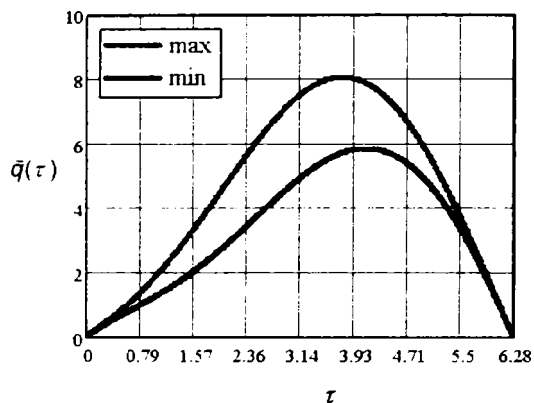


Fig. 2.1.5.1.b. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$ și $R=0,3$

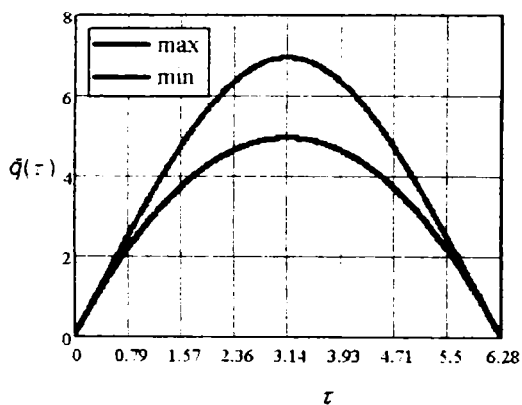


Fig. 2.1.5.1.c. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$ și $R=1$

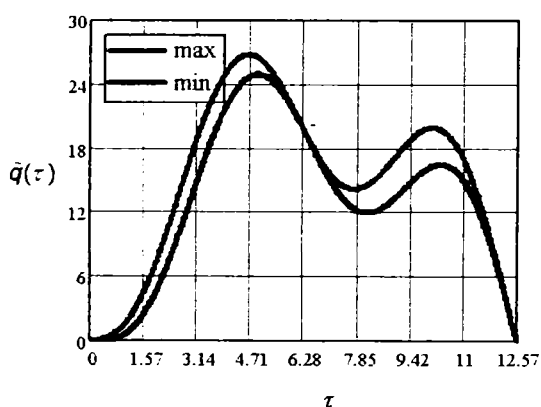


Fig. 2.1.5.1.d. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=2$ și $R=0$

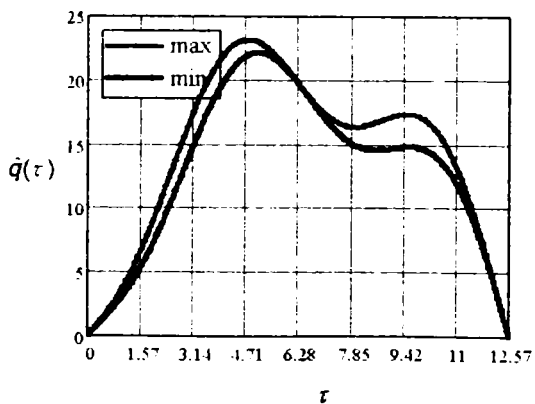


Fig. 2.1.5.1.e. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=2$ și $R=0,3$

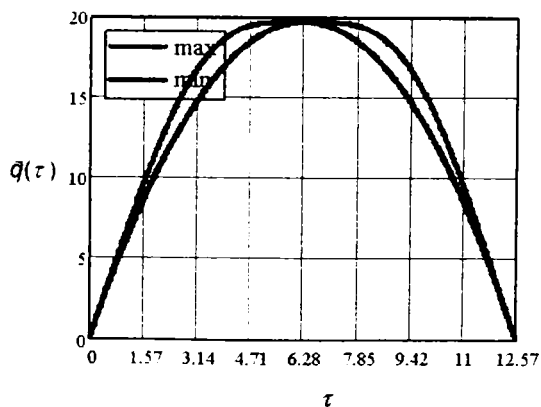


Fig. 2.1.5.1.f. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=2$ și $R=1$

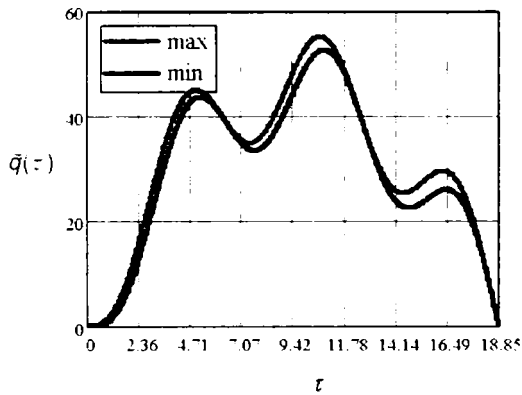


Fig. 2.1.5.1.g. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=3$ și $R=0$

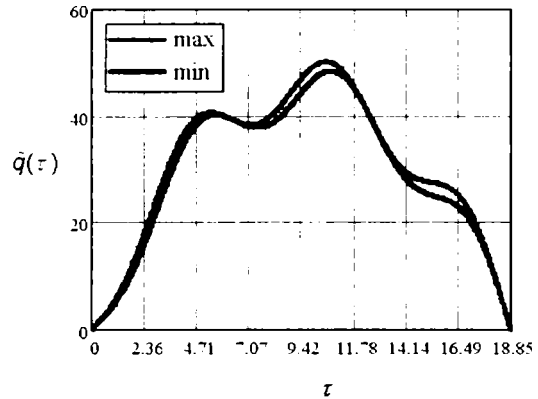


Fig. 2.1.5.1.h. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=3$ și $R=0,3$

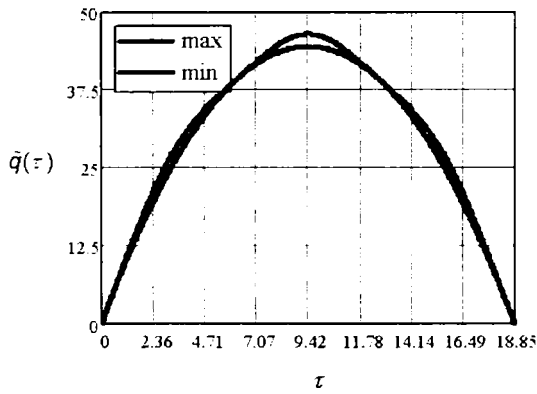


Fig. 2.1.5.1.i. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=3$ și $R=1$

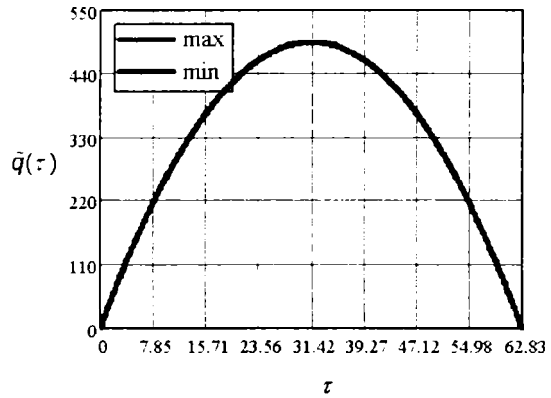


Fig. 2.1.5.1.j. Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=10$ și $R=1$

Fig. 2.1.5.1.a-j Legile de mișcare pentru diferite perioade și coeficienți de restituire

Pentru o ciocnire plastică legea de mișcare este o curbă la care maximul este situat după πr , adică vibratorul se "lipește" de limitator (pământ, nisip sau alt material care urmează a fi compactat) mișcarea vibratorului fiind astfel îngreunată, coborârea fiind mult mai rapidă și datorită acțiunii greutateii acestuia. Între cele două curbe mișcarea este stabilă.

Variația vitezei în timpul mișcării într-o perioadă este reprezentată în figura 2.1.5.2, fiind negativă în sensul că masa își schimbă direcția de deplasare.

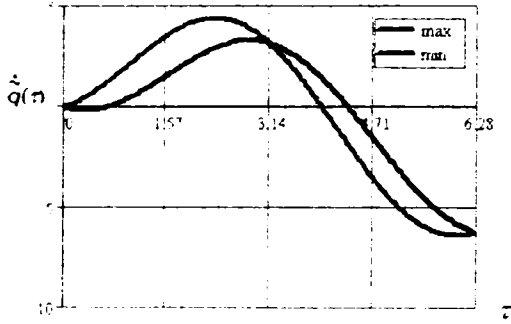


Fig. 2.1.5.2.a. Viteza vibratorului pentru $r=1$ și $R=0$

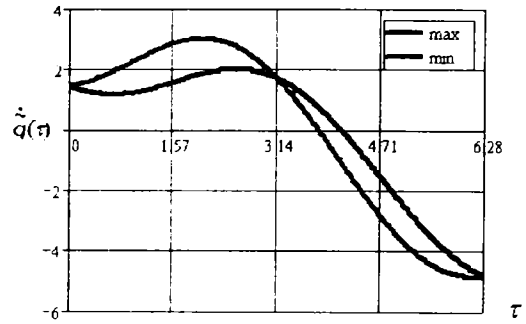


Fig. 2.1.5.2.b. Viteza vibratorului pentru $r=1$ și $R=0,3$

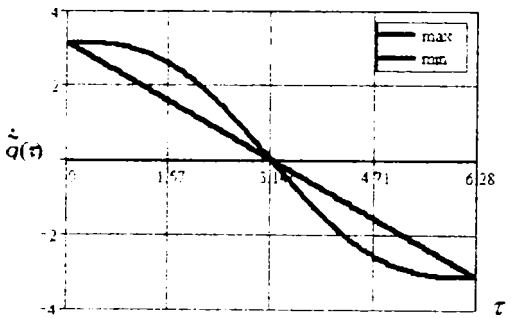


Fig. 2.1.5.2.c. Viteza vibratorului pentru $r=1$ și $R=1$

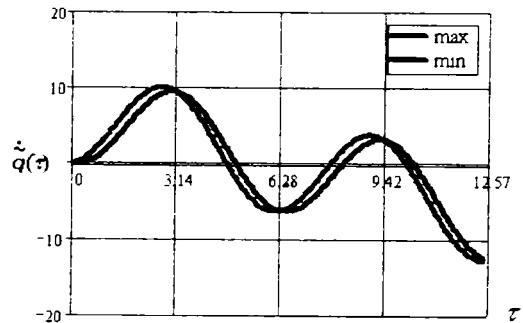


Fig. 2.1.5.2.d. Viteza vibratorului pentru $r=2$ și $R=0$

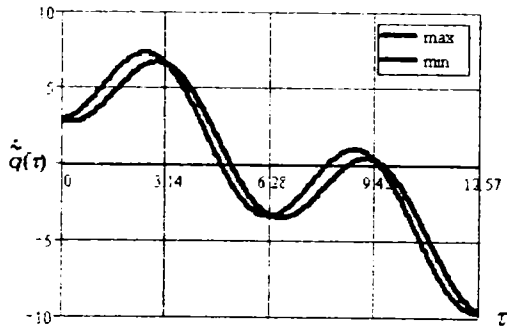


Fig. 2.1.5.2.e. Viteza vibratorului pentru $r=2$ și $R=0,3$

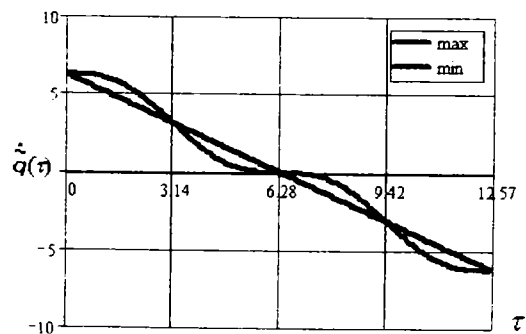


Fig. 2.1.5.2.f. Viteza vibratorului pentru $r=2$ și $R=1$

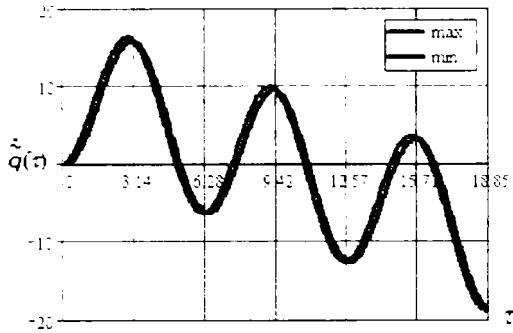


Fig. 2.1.5.2.g. Viteza vibratorului pentru $r=3$ și $R=0$

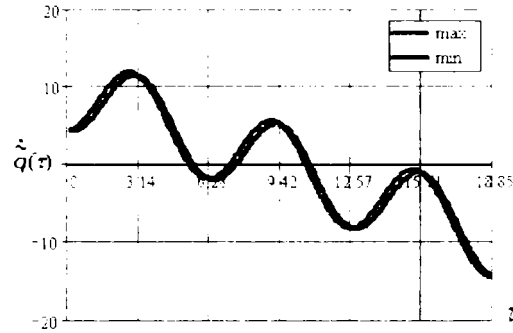


Fig. 2.1.5.2.h. Viteza vibratorului pentru $r=3$ și $R=0,3$

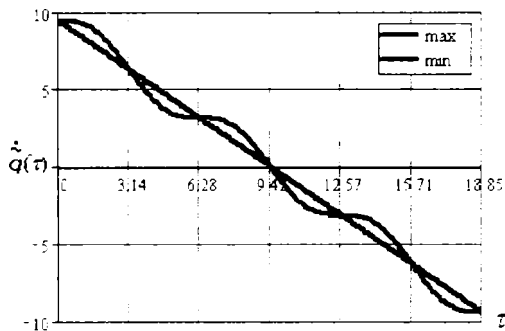


Fig. 2.1.5.2.i. Viteza vibratorului pentru $r=3$ și $R=1$

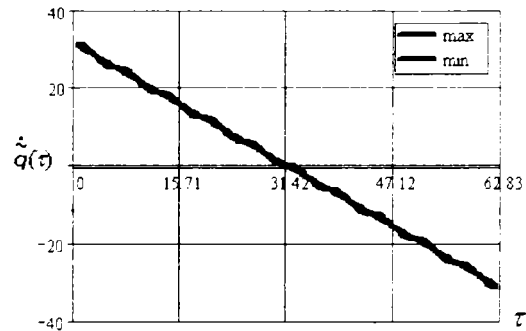


Fig. 2.1.5.2.j. Viteza vibratorului pentru $r=10$ și $R=1$

Fig. 2.1.5.2.a-j Vitezele pentru diferite perioade și coeficienți de restituire

Se observă din figura 2.1.5.2 că pentru ciocnirile perfect elastice viteza pornește de la valoarea ei dinainte de ciocnire, ajunge nulă la jumătatea perioadei ca apoi să-și schimbe semnul (își schimbă vibratorul sensul de deplasare), ajungând să aibă la sfârșit aceeași valoare absolută ca și la început. Aceasta se întâmplă deoarece s-au neglijat rezistența la înaintare datorită frecării cu aerul și amortizarea. Viteza înainte de ciocnire crește o dată cu creșterea coeficientului de restituire, pentru $R=0$ aceasta fiind nulă.

Funcția delta, raportul dintre amplitudinea forței perturbatoare și greutatea vibratorului, este stabilă în domeniul delimitat de cele două curbe din figura 2.1.5.3. Altfel spus, pentru ca mișcarea să fie stabilă și să aibă repetabilitate este necesar ca delta să se afle, pentru un coeficient de restituire la ciocnire cunoscut, între o valoare minimă și una maximă, după cum se arată în figură.

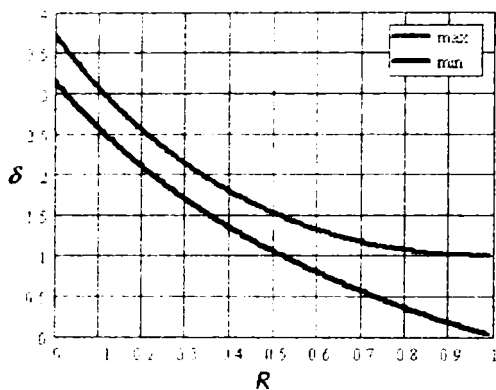


Fig. 2.1.5.3.a. Cazul $r=1$

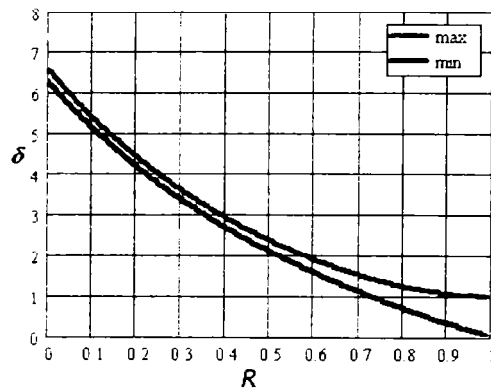


Fig. 2.1.5.3.b. Cazul $r=2$

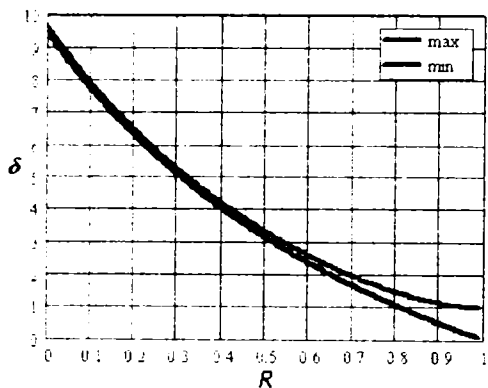


Fig. 2.1.5.3.c. Cazul $r=3$

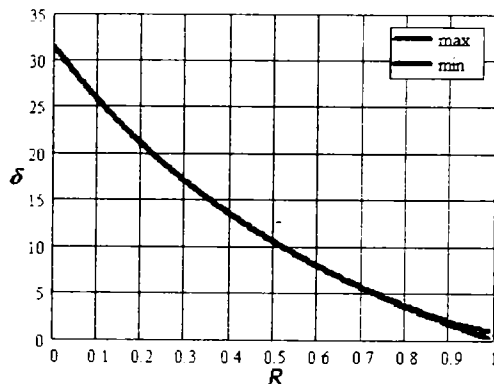


Fig. 2.1.5.3.d. Cazul $r=10$

Fig. 2.1.5.3.a-d Stabilitatea funcției δ în funcție de coeficientul de restituire

În conformitate cu reprezentarea grafică din figura 2.1.5.3 se observă că în cazul ciocnirii perfect elastice $\delta_{max} = 1$, ceea ce presupune să fie satisfăcută relația: $Q_0 = mg$, adică amplitudinea forței percutante să fie cel mult egală cu greutatea vibratorului. Pentru ciocnirea plastică această amplitudine trebuie să fie minim de nr ori mai mare.

2.2. Regimuri de mișcare vibropercutante cu ciocniri suplimentare

2.2.1. Introducere

În mod obișnuit regimurile de mișcare periodice ale sistemelor vibropercutante sunt tratate numai pentru situații particulare care conduc la ecuații simple și ușor de interpretat. Astfel este fundamentată metodologia de tratare a mișcărilor vibropercutante ce este aplicabilă și sistemelor ce prezintă anumite particularități speciale.

Drept exemplificare, metodologia va fi concretizată și pentru situațiile în care apar ciocniri suplimentare în fiecare ciclu de mișcare. Prezentarea unui sistem simplu vibropercutant conduce la evidențierea unor particularități specifice și la diferențierea dificultăților ce apar în asemenea cazuri. Deși schema de tratare este valabilă pentru sisteme mai complexe în continuare se va delimita studiul numai la cazul simplu al mișcării cu desprinderi a unui vibrator așezat pe un reper fix.

2.2.2. Regimuri vibropercutante periodice

Regimurile periodice de mișcare ale sistemelor vibropercutante se realizează numai pentru anumiți parametrii caracteristici care trebuie să fie satisfăcuți. Nerealizarea acestor parametrii, care au valori suficient de restrictive, conduce la necesitatea studiului unor fenomene complexe. Acesta este motivul pentru care s-a considerat necesară abordarea completă și amănunțită a sistemului vibropercutant cu mișcări periodice simple, însă având ciocniri suplimentare în fiecare ciclu de mișcare. În continuare se notează momentele în care apar ciocnirile de bază care delimitează un ciclu al mișcării prin $t = t_k$ ($k=1, 2, \dots$) ceea ce înseamnă că în intervalul $[t_k, t_{k+1}]$ mișcare se presupune că este liberă dar apare și o ciocnire suplimentară.

Ținând seama că în ecuația diferențială a mișcării apare forța perturbatoare periodică, regimurile periodice de mișcare sunt posibile numai în situația în care intervalul dintre cele două ciocniri de bază este un multiplu al perioadei forței perturbatoare, adică $t_{k+1} - t_k = rT$ ($r=1, 2, \dots$). Alte situații apar în cazurile în care intervin mai multe ciocniri suplimentare în fiecare perioadă a mișcării, ceea ce completează gama regimurilor periodice posibile, însă pentru care determinările și calculele efective sunt mult mai dificile.

Pentru exemplificare în lucrare este luat în considerare cazul apariției unei singure ciocniri suplimentare în fiecare ciclu de mișcare, cu particularizare la cazul ciocnirii plastice.

2.2.3. Sisteme vibropercutante

Studiul prezentat are ca obiectiv precizarea modului de tratare a tuturor situațiilor în care apar regimuri periodice vibropercutante. Datorită dificultăților întâlnite s-a luat în considerare cazul simplificat al vibratorului rezemat pe un plan rigid, ce execută mișcări cu desprindere de plan. Astfel, în timpul mișcării vibratorul saltă de pe plan și apoi în cădere se ciocnește și ricoșează în conformitate cu legile cunoscute ale ciocnirilor (fig. 2.2.3.1).

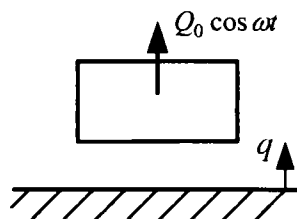


Fig. 2.2.3.1

46 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

Vibratorul este de masă m iar forța perturbatoare datorită generatorului de vibrații va fi de forma $Q_0 \cos \omega t$. Asupra masei m mai acționează greutatea proprie mg , astfel încât rezultanta forțelor va fi $-mg + Q_0 \cos \omega t$, iar ecuația diferențială a mișcării este de forma:

$$\ddot{q} = P(t) \quad (2.2.3.1)$$

unde

$$P(t) = g(\delta \cos \omega t - 1), \quad (2.2.3.2)$$

$$\delta = \frac{Q_0}{mg}$$

Dacă se consideră ciocnirea masei cu planul rigid de natură elasto-plastică cu coeficientul de restituire R ($R \in [0, 1]$) atunci viteza la sfârșitul unei ciocniri, adică la începutul ciocnirii următoare [64], [65] este:

$$\dot{q}'_c = -R\dot{q}_c \quad (2.2.3.3)$$

unde \dot{q}_c este viteza de cădere a masei, deci de la începutul mișcării, \dot{q}'_c este viteza la sfârșitul ciocnirii.

Ținând seama că în intervalul dintre ciocnirile de bază considerate $t \in [t_k, t_{k+1}]$ mai apare o ciocnire suplimentară în momentul $t = t' \in [t_k, t_{k+1}]$ rezultă că fiecare ciclu de mișcare va cuprinde două faze:

- faza 1 anterioară ciocnirii suplimentare
- faza 2 posterioară ciocnirii suplimentare

În prima fază legile mișcării și vitezei obținute prin integrarea ecuației (2.2.3.1) sunt:

$$q_1(t) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta (\cos \omega t - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t - t_k)^2 \right] - R\dot{q}_c(t - t_k) \quad (2.2.3.4)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{g}{\omega} \left[\delta (\sin \omega t - \sin \omega t_k) - \omega (t - t_k) \right] - R\dot{q}_c$$

Analog în cea de a doua fază a ciclului legile mișcării și vitezei sunt:

$$q_2(t) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta (\cos \omega t - \cos \omega t') + \delta \omega (t - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t - t')^2 \right] - R_1 \dot{q}_{10}(t - t') \quad (2.2.3.5)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{g}{\omega} \left[\delta (\sin \omega t - \sin \omega t') - \omega (t - t') \right] - R_1 \dot{q}_{10}$$

Deoarece condițiile inițiale de mișcare pe cele două faze au fost luate în considerare la stabilirea legilor (2.2.3.4) și (2.2.3.5) mai trebuie precizate condițiile limită de la finalul fiecărei faze. Astfel la finalul primei faze, adică pentru $t = t'$ trebuie să fie satisfăcute condițiile limită:

$$q_1(t') = 0 \quad (2.2.3.6)$$

$$\dot{q}_1(t') = \dot{q}_{10}$$

unde \dot{q}_{10} este viteza de la începutul ciocnirii suplimentare.

În mod asemănător la sfârșitul celei de-a doua faze a ciclului se pot scrie condițiile:

$$q_2(t_{k+1}) = 0 \quad (2.2.3.7)$$

$$\dot{q}_2(t_{k+1}) = \dot{q}_c$$

Introducând legile mișcării și vitezei (2.2.3.4) în condițiile limită (2.2.3.6) rezultă:

$$q_1(t') = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2 \right] - R \dot{q}_c (t' - t_k) = 0 \quad (2.2.3.8)$$

$$\dot{q}_1(t') = \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - \omega (t' - t_k) \right] - R \dot{q}_c = \dot{q}_{10}$$

În același mod se introduc legile de mișcare (2.2.3.5) în condițiile limită (2.2.3.7) și rezultă:

$$q_2(t_{k+1}) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega (t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2 \right] - R_1 \dot{q}_{10} (t_{k+1} - t') = 0 \quad (2.2.3.9)$$

$$\dot{q}_2(t_{k+1}) = \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t') - \omega (t_{k+1} - t') \right] - R_1 \dot{q}_{10} = \dot{q}_c$$

2.3. Cazul ciocnirilor plastice

În aplicațiile tehnice obișnuit apar cazuri în care ciocnirile sunt de natură plastică. De altfel într-o astfel de situație și posibilitățile de tratare completă a problemei sunt mai la îndemână. Deci se vor considera coeficienții de restituire $R = R_1 = 0$. Astfel ecuațiile (2.2.3.4) și (2.2.3.5) devin:

$$\begin{aligned} q_1(t') &= -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega(t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2 \right] \\ \dot{q}_1(t') &= \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - \omega(t' - t_k) \right] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} q_2(t_{k+1}) &= -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega(t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2 \right] \\ \dot{q}_2(t_{k+1}) &= \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t') - \omega(t_{k+1} - t') \right] \end{aligned}$$

În vederea ușurării calculelor se va introduce notația:

$$\omega(t' - t_k) = u \quad (2.3.2)$$

astfel încât se mai poate scrie:

$$\omega(t_{k+1} - t') = \omega(t_{k+1} - t_k) - \omega(t' - t_k) = 2nr - u \quad (2.3.2')$$

Primele din condițiile limită (2.2.3.6) și (2.2.3.7), cu notațiile introduse se pot pune sub forma:

$$\begin{cases} \delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta u \sin \omega t_k + \frac{1}{2} u^2 = 0 \\ \delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta(2nr - u) \sin \omega t' + \frac{1}{2} (2nr - u)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{cases} \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - u \right] = \dot{q}_{10} \\ \frac{g}{\omega} \left[\delta(\sin \omega t_k - \sin \omega t') - (2nr - u) \right] = \dot{q}_c \end{cases}$$

Pentru eliminarea momentului necunoscut $t = t'$ din ecuațiile (2.3.3) se folosesc identitățile evidente:

$$\begin{cases} \cos \omega t' = \cos(u + \omega t_k) = \cos u \cos \omega t_k - \sin u \sin \omega t_k \\ \sin \omega t' = \sin(u + \omega t_k) = \sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Relația (2.3.3) devine:

$$\begin{cases} \delta(\cos u \cos \omega t_k - \sin u \sin \omega t_k - \cos \omega t_k) + \delta u \sin \omega t_k + \frac{1}{2} u^2 = 0 \\ \delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos u \cos \omega t_k + \sin u \sin \omega t_k) + \\ + \delta(2nr - u)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) + \frac{1}{2} (2nr - u)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$\dot{q}_{10} - \dot{q}_c = -2nrg$$

După transformări simple ecuațiile (2.3.5) se pot aduce la forma:

$$\begin{cases} \delta(\cos u - 1)\cos\omega t_k + \delta(u - \sin u)\sin\omega t_k + \frac{1}{2}u^2 = 0 \\ \delta[1 - \cos u + (2nr - u)\sin u]\cos\omega t_k + \delta[\sin u + (2nr - u)\cos u]\sin\omega t_k + \\ + \frac{1}{2}(2nr - u)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Pentru simplificarea calculelor in locul celei de-a doua ecuații (2.3.6) se va considera suma lor, adică:

$$\delta(2nr - u)\sin u \cos\omega t_k + \delta[u + (2nr - u)\cos u]\sin\omega t_k + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(2nr - u)^2 = 0 \quad (2.3.7)$$

astfel sistemul de ecuații (2.3.6) devine:

$$\begin{cases} \delta(u - \sin u)\sin\omega t_k - \delta(1 - \cos u)\cos\omega t_k + \frac{1}{2}u^2 = 0 \\ \delta[u + (2nr - u)\cos u]\sin\omega t_k + \delta(2nr - u)\sin u \cos\omega t_k + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(2nr - u)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Acest sistem de ecuații algebrice se va scrie sub forma:

$$\begin{cases} A\delta \sin\omega t_k + B\delta \cos\omega t_k + E = 0 \\ C\delta \sin\omega t_k + D\delta \cos\omega t_k + F = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

unde s-au folosit următoarele notații:

$$A = u - \sin u, \quad B = -1 + \cos u, \quad C = u + (2nr - u)\cos u, \quad (2.3.10)$$

$$D = (2nr - u)\sin u, \quad E = \frac{1}{2}u^2, \quad F = u^2 - 2nru + 2n^2r^2$$

2.3.1. Determinarea regimurilor de mișcare

O dată stabilite ecuațiile (2.3.9) care reprezintă legile de bază pentru delimitarea ciclului de mișcare se pot obține condițiile de existență ale regimurilor vibropercutante cu o singură ciocnire suplimentară într-un ciclu. În acest sens sistemul (2.3.9) se presupune cu necunoscutele $\sin\omega t_k$ și $\cos\omega t_k$ care introduse în ecuația fundamentală trigonometrică conduce la stabilirea parametrului de realizare a regimului considerat. Astfel din sistemul (2.3.9) se obține:

$$\begin{aligned} \sin\omega t_k &= \frac{BF - DE}{\delta(AD - BC)} \\ \cos\omega t_k &= \frac{CE - AF}{\delta(AD - BC)} \end{aligned} \quad (2.3.1.1)$$

Conform celor precizate rezultă ecuația

$$(BF - DE)^2 + (CE - AF)^2 = \delta^2(AD - BC)^2,$$

din care se obține

$$\delta = \frac{\sqrt{(BF - DE)^2 + (CE - AF)^2}}{AD - BC} \quad (2.3.1.2)$$

O dată determinată relația (2.3.1.2) este posibilă discutarea diverselor situații posibile de realizare a regimurilor vibropercutante cu o ciocnire suplimentară. Pe această linie se trasează în figura 2.3.1.1. diagrama de variație a lui δ în funcție de parametrul u ce definește momentul ciocnirii suplimentare, pentru diferite valori ale multiplului perioadei forței perturbatoare r . Se verifică ușor că pentru $u = 0$, δ este nedeterminat deoarece $A=0, B=0, C=2\pi, D=0, E=0, F=2\pi^2 r^2$.

Pentru $u = 2\pi r$ de asemenea δ este nedeterminat deoarece $A=2\pi, B=0, C=2\pi, D=0, E=2\pi^2 r^2, F=2\pi^2 r^2$.

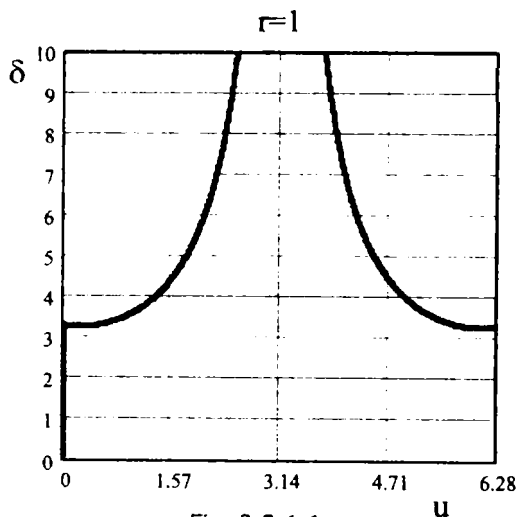


Fig. 2.3.1.1.a

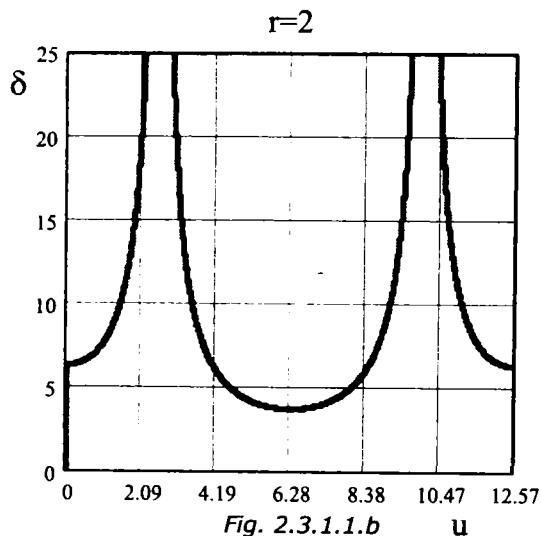


Fig. 2.3.1.1.b

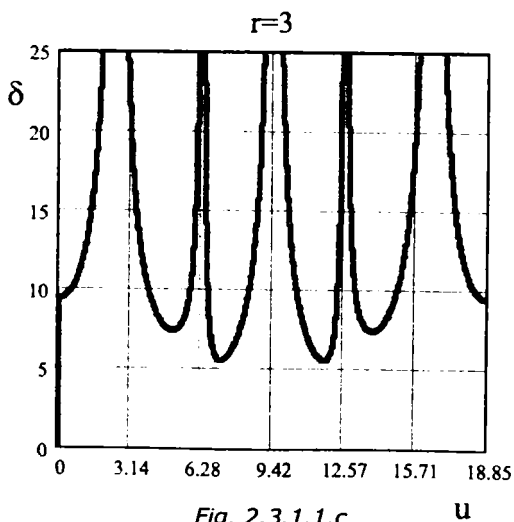


Fig. 2.3.1.1.c

Fig. 2.3.1.1.a-c Diagrama de variație a lui δ în funcție de parametrul u ce definește momentul ciocnirii suplimentare

Din figura 2.3.1.1.a-c se determină valoarea minimă a lui δ astfel încât mișcarea să fie stabilă și ca funcțiile $\sin \omega t_k$ și $\cos \omega t_k$ să fie subunitare. Adică să existe un timp real t_k care să corespundă începutului ciocnirii.

2.3.2. Stabilitatea mișcărilor vibropercutante

Se pornește de la ecuațiile de mișcare anterior găsite:

$$q_1(t') = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta (\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2 \right] \quad (2.3.2.1)$$

$$q_2(t_{k+1}) = -\frac{g}{\omega^2} \left[\delta (\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega (t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2 \right]$$

La momentul inițial se poate scrie că:

$$\begin{aligned} \delta (\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2 &= 0 \\ \delta (\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega (t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2.2)$$

Se consideră micile perturbații $t' + \Delta t'$, $t_k + \Delta t_k$ și $t_{k+1} + \Delta t_{k+1}$, astfel încât sistemul de mai sus devine:

$$\begin{aligned} \delta [\cos \omega (t' + \Delta t') - \cos \omega (t_k + \Delta t_k)] + \delta \omega (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) \sin \omega (t_k + \Delta t_k) + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \delta [\cos \omega (t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - \cos \omega (t' + \Delta t')] + \delta \omega (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') \sin \omega (t' + \Delta t') + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2 = 0 \end{aligned}$$

care se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} \delta (\cos \omega t' \cos \omega \Delta t' - \sin \omega t' \sin \omega \Delta t' - \cos \omega t_k \cos \omega \Delta t_k + \sin \omega t_k \sin \omega \Delta t_k) + \\ + \delta \omega (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) (\sin \omega t_k \cos \omega \Delta t_k + \cos \omega t_k \sin \omega \Delta t_k) + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2.4)$$

52 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

$$\begin{aligned} & \delta(\cos \omega t_{k+1} \cos \omega \Delta t_{k+1} - \sin \omega t_{k+1} \sin \omega \Delta t_{k+1} - \cos \omega t' \cos \omega \Delta t' + \sin \omega t' \sin \omega \Delta t') + \\ & + \delta\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')(\sin \omega t' \cos \omega \Delta t' + \cos \omega t' \sin \omega \Delta t') + \\ & + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2 = 0 \end{aligned}$$

Datorită faptului că perturbațiile sunt mici, adică tind spre zero, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \cos \omega \Delta t' &= \cos \omega \Delta t_k = 1, \\ \sin \omega \Delta t' &= \omega \Delta t', \end{aligned} \tag{2.3.2.5}$$

$$\sin \omega \Delta t_k = \omega \Delta t_k,$$

$$\sin \omega \Delta t_{k+1} = \omega \Delta t_{k+1}$$

Înlocuind aceste expresii în sistemul de mai sus avem:

$$\begin{aligned} & \delta(\cos \omega t' - \omega \Delta t' \sin \omega t' - \cos \omega t_k + \omega \Delta t_k \sin \omega t_k) + \\ & + \delta\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) + \frac{1}{2} \omega^2 (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.3.2.6}$$

$$\begin{aligned} & \delta(\cos \omega t_{k+1} - \omega \Delta t_{k+1} \sin \omega t_{k+1} - \cos \omega t' + \omega \Delta t' \sin \omega t') + \\ & + \delta\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t') + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2 = 0 \end{aligned}$$

Dacă se elimină ecuația inițială, pentru a putea studia stabilitatea mișcării se poate scrie:

$$\begin{aligned} & \delta(-\omega \Delta t' \sin \omega t' + \omega \Delta t_k \sin \omega t_k) + \delta\omega(\Delta t' - \Delta t_k) \sin \omega t_k + \delta\omega(t' - t_k) \omega \Delta t_k \cos \omega t_k + \\ & + \omega^2 (t' - t_k)(\Delta t' - \Delta t_k) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.2.7}$$

$$\begin{aligned} & \delta(-\omega \Delta t_{k+1} \sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t' \sin \omega t') + \delta\omega(\Delta t_{k+1} - \Delta t') \sin \omega t' + \delta\omega(t_{k+1} - t') \omega \Delta t' \cos \omega t' + \\ & + \omega^2 (t_{k+1} - t')(\Delta t_{k+1} - \Delta t') = 0 \end{aligned}$$

Trecând la variabila u pentru a ușura calculele rezultă:

$$\begin{aligned} & \delta(-\omega \Delta t' \sin \omega t' + \omega \Delta t_k \sin \omega t_k) + \delta\omega(\Delta t' - \Delta t_k) \sin \omega t_k + \delta u \omega \Delta t_k \cos \omega t_k + \\ & + \omega u (\Delta t' - \Delta t_k) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.2.8}$$

$$\delta(-\omega\Delta t_{k+1} \sin \omega t_k + \omega\Delta t' \sin \omega t') + \delta\omega(\Delta t_{k+1} - \Delta t') \sin \omega t' + \delta(2nr - u)\omega\Delta t' \cos \omega t' + \omega(2nr - u)(\Delta t_{k+1} - \Delta t') = 0$$

Prin desfacerea parantezelor se poate scrie:

$$-\delta\omega\Delta t' \sin \omega t' + \delta\omega\Delta t_k \sin \omega t_k + \delta\omega\Delta t' \sin \omega t_k - \delta\omega\Delta t_k \sin \omega t_k + \delta u\omega\Delta t_k \cos \omega t_k + \omega u\Delta t' - \omega u\Delta t_k = 0 \quad (2.3.2.9)$$

$$-\delta\omega\Delta t_{k+1} \sin \omega t_k + \delta\omega\Delta t' \sin \omega t' + \delta\omega\Delta t_{k+1} \sin \omega t' - \delta\omega\Delta t' \sin \omega t' + \delta(2nr - u)\omega\Delta t' \cos \omega t' + \omega(2nr - u)\Delta t_{k+1} - \omega(2nr - u)\Delta t' = 0$$

Relațiile (2.3.2.9) se pot scrie sub forma:

$$\Delta t_k(\delta u \cos \omega t_k - u) = \Delta t'(\delta \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - u) \quad (2.3.2.10)$$

$$\Delta t_{k+1}[-\delta \sin \omega t_k + \delta \sin \omega t' + (2nr - u)] = \Delta t'[(2nr - u) - \delta(2nr - u) \cos \omega t']$$

Rezultă:

$$\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} = \frac{(\delta u \cos \omega t_k - u)[(2nr - u) - \delta(2nr - u) \cos \omega t']}{(\delta \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - u)[- \delta \sin \omega t_k + \delta \sin \omega t' + (2nr - u)]} \quad (2.3.2.11)$$

relație ce se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} = \frac{u(\delta \cos \omega t_k - 1)[(2nr - u) - \delta(2nr - u)(\cos u \cos \omega t_k - \sin u \sin \omega t_k)]}{(\delta \sin u \cos \omega t_k + \delta(\cos u - 1) \sin \omega t_k - u) \cdot \frac{1}{[\delta(\cos u - 1) \sin \omega t_k + \delta \sin u \cos \omega t_k + (2nr - u)]}} \quad (2.3.2.12)$$

Se observă din relația (2.3.1.1) și (2.3.2.12) că stabilitatea acestei mișcări nu depinde de parametrul δ . Această funcție se compară cu valoarea 1 pentru a se determina stabilitatea mișcării:

- dacă $0 < \frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} < 1$ mișcarea este stabilă,
- dacă $\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} \geq 1$, nu se poate decide dacă mișcarea este stabilă sau nu.

În figura 2.3.2.1 s-a reprezentat $\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k}$ ca funcție de u pentru diferiți multiplii ai perioadei forței perturbatoare.

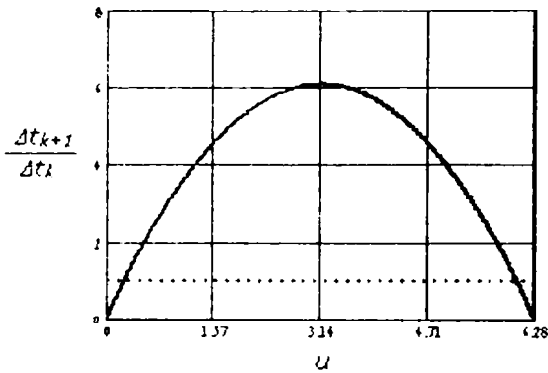


Fig. 2.3.2.1.a. Stabilitatea mișcării pentru $r=1$

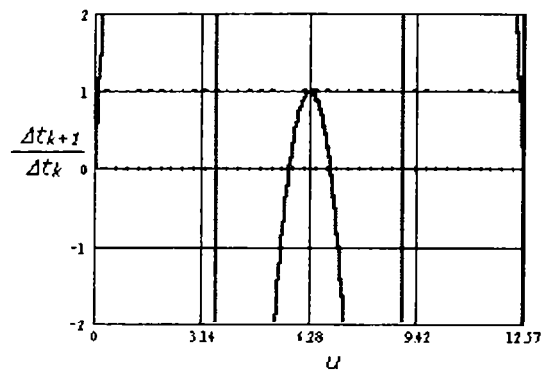


Fig. 2.3.2.1.b. Stabilitatea mișcării pentru $r=2$

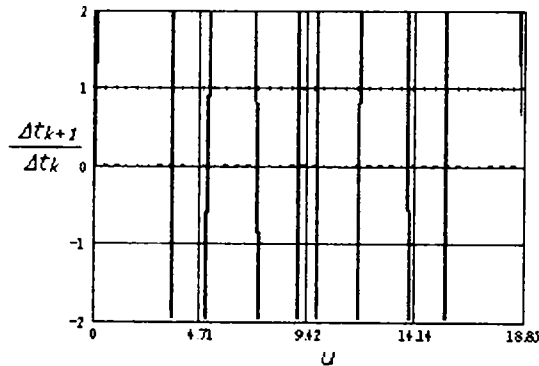


Fig. 2.3.2.1.c. Stabilitatea mișcării pentru $r=3$

Fig. 2.3.2.1.a-c Stabilitatea mișcării

Se observă din fig. 2.3.2.1.a-c că, o dată cu mărirea perioadei, domeniul de stabilitate al ecuației este mult mai mic.

Pentru a se putea reprezenta grafic mișcarea vibratorului este necesar să se găsească o valoare a parametrului u pentru care mișcarea este stabilă, adică $\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} < 1$. Pentru acest u se determină δ_{min} din diagrama stabilită. Se reprezintă

grafic ecuațiile de mișcare pentru o perioadă cu notațiile $\frac{\omega^2}{g} q\left(t_k + \frac{T}{\omega}\right) = \tilde{q}(\tau)$,

$\frac{\omega}{g} \dot{q}\left(t_k + \frac{T}{\omega}\right) = \dot{\tilde{q}}(\tau)$ și rezultă pentru $r=1$ domeniul de variație a lui u :

$$u_I \in [0; 0.25133]$$

$$u_I \in [6.0281; 6.282727]$$

În figura 2.3.2.2.a este prezentată legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă pentru $r=1$ și $u=0.1$, iar în figura 2.3.2.2.b viteza pentru această mișcare. În prima perioadă de timp se observă că vibratorul nu se dezlipsește de limitator,

prin urmare nu există decât o mișcare în timpul unei perioade, care însă nu acoperă toată perioada.

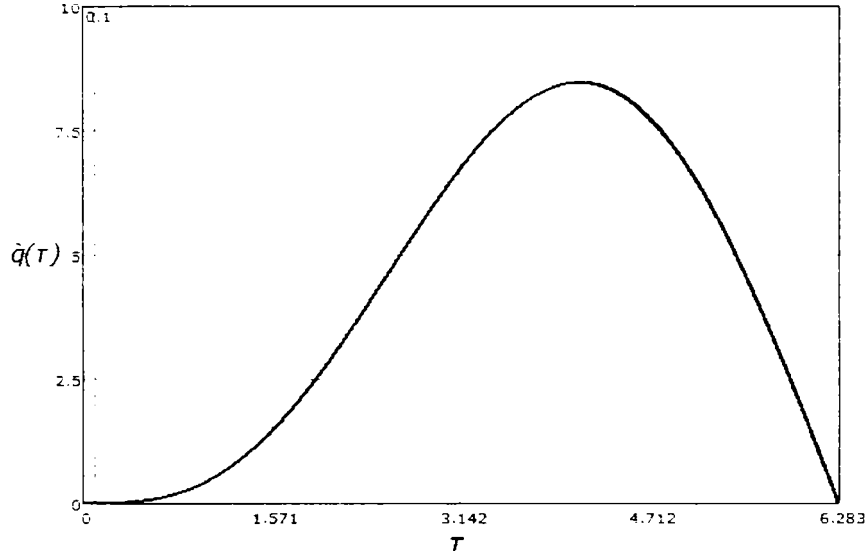


Fig. 2.3.2.2.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă pentru $r=1$ și $u=0.1$

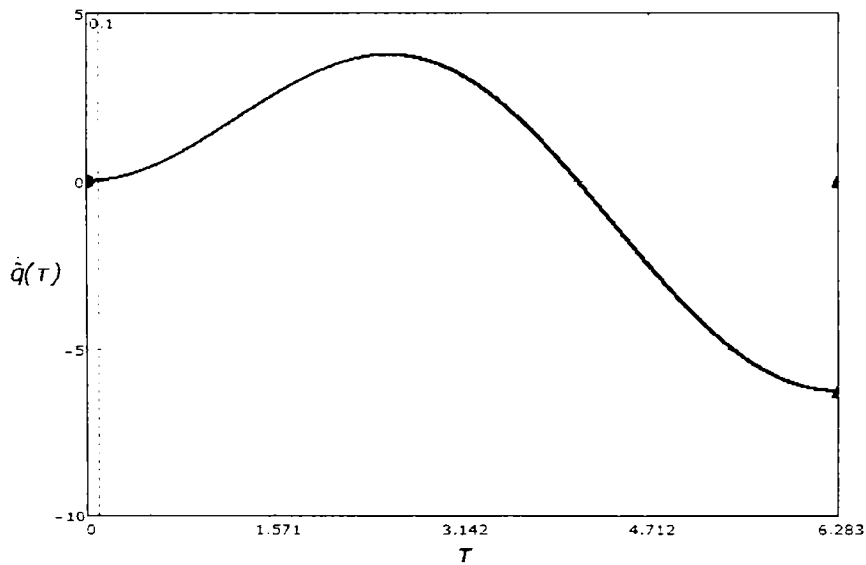


Fig. 2.3.2.2.b Viteza vibratorului într-o perioadă pentru $r=1$ și $u=0.1$

În figura 2.3.2.3 sunt reprezentate legea de mișcare (fig. 2.3.2.3.a) respectiv viteza (fig. 2.3.2.3.b) pentru prima ciocnire.

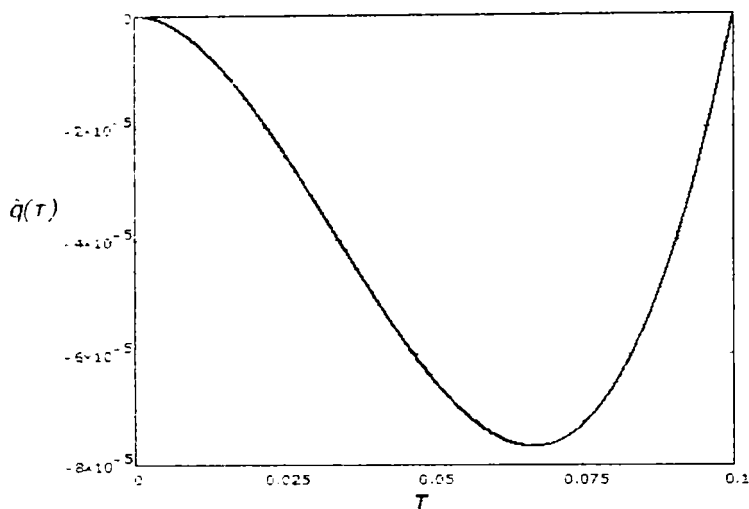


Fig. 2.3.2.3.a Legea de mișcare

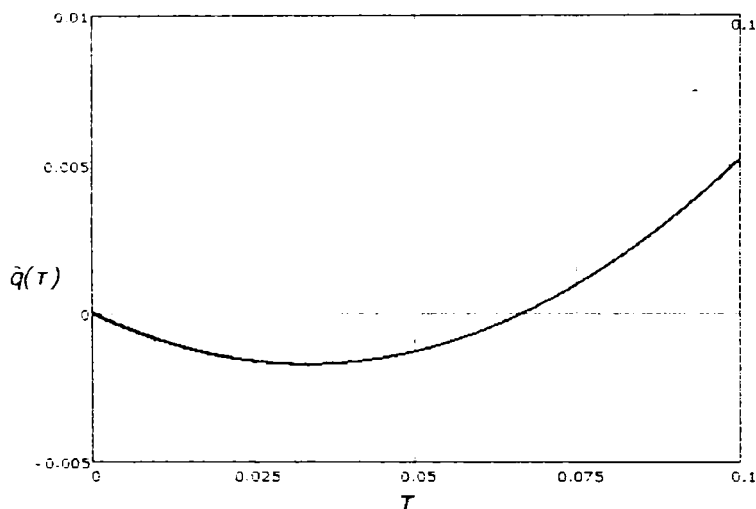


Fig. 2.3.2.3.b Viteza

Fig. 2.3.2.3 Legea de mișcare și legea de variație a vitezei vibratorului în cazul primei ciocniri

Din figura 2.3.2.3.a se observă că mișcarea vibratorului pe limitator este negativă. De asemenea deplasările sunt foarte mici în comparație cu cele de la ciocnirea suplimentară, de 10^6 ori mai mici. Acest fenomen apare doar dacă se deplasează și limitatorul, acesta fiind cazul funcționării compactoarelor. În realitate însă vibratorul se reazemă pe limitator tot acest timp deoarece forța perturbatoare (cu greutatea vibratorului luată în calcul) are sensul opus deplasării vibratorului.

Din figura 2.3.2.3.b se observă că viteza vibratorului la începutul mișcării este nulă, explicabilă prin ciocnirea plastică anterioară, iar la sfârșitul mișcării aceasta devine $q_{10} = 0.005$, urmând ciocnirea suplimentară. La sfârșitul ciocnirii suplimentare vibratorul are viteza $q_c = -6.288$. Pentru ca această mișcare să se

producă în acest mod este necesar ca $\delta = 3.272$.

Pentru același parametru $\delta = 3.272$ se poate întâmpla să mai apară o mișcare stabilă într-o perioadă, a cărei lege de mișcare este reprezentată în figura 2.3.2.4. Acesta este cazul în care ciocnirea suplimentară apare cu puțin înainte de a se termina perioada.

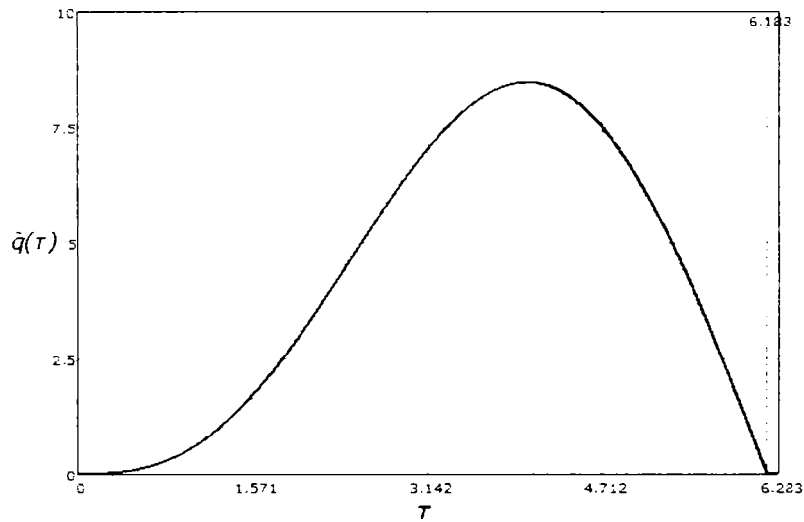


Fig. 2.3.2.4.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă pentru $r=1$ și $u=6.183$

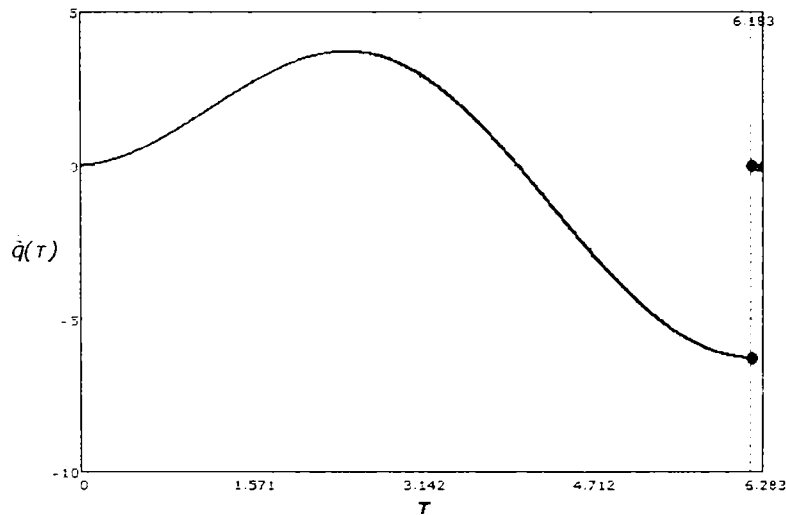


Fig. 2.3.2.4.b Viteza vibratorului într-o perioadă pentru $r=1$ și $u=6.183$

Așa cum era de așteptat, se observă din figurile 2.3.2.4.a și 2.3.2.2.a următorul fenomen: cele două mișcări pentru același δ sunt defazate cu intervalul ciocnirii suplimentare, mișcarea generală fiind aceeași.

În figura 2.3.2.4.b se reprezintă viteza vibratorului în timpul celor două perioade ale mișcării: prima ciocnire și cea suplimentară.

În figura 2.3.2.5 sunt reprezentate deplasarea (fig. 2.3.2.5.a) respectiv viteza (fig. 2.3.2.5.b) pentru ciocnirea suplimentară a vibratorului cu limitatorul.

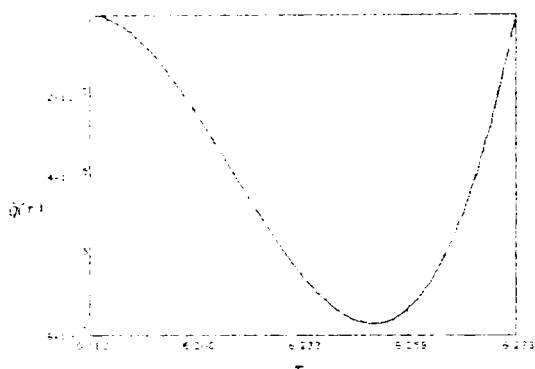


Fig. 2.3.2.5.a Legea de mișcare

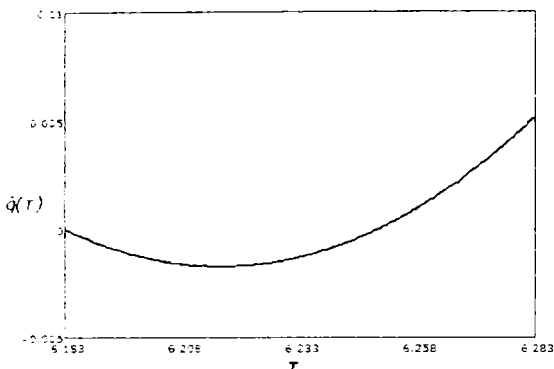


Fig. 2.3.2.5.b Viteza

Fig. 2.3.2.5 Ciocnirea suplimentară a vibratorului cu limitatorul

Din figurile 2.3.2.5 și 2.3.2.3 se observă că atât legea de mișcare cât și viteza pentru ciocnirea suplimentară pentru același δ sunt defazate cu intervalul unei ciocniri, timpul în care vibratorul se reazemă pe limitator fiind același.

Pentru $r=2$ se schimbă domeniile de stabilitate și legea de mișcare a vibratorului. Domeniile în care pot apărea ciocniri suplimentare cu mișcare stabilă sunt:

$$u_1 \in [0.000001; 0.1210001]$$

$$u_2 \in [5.679771; 6.276728]$$

$$u_3 \in [6.278728; 6.279727]$$

$$u_4 \in [6.283727; 6.886683]$$

$$u_5 \in [12.4454; 12.56545]$$

Legea de mișcare respectiv viteza vibratorului pentru multiplicatorul perioadei forței perturbatoare $r=2$, pentru $u=6.2$ se trasează în figura 2.3.2.6. Pentru ca ciocnire suplimentară să apară în acest moment $u=6.2$ trebuiesc îndeplinite următoarele condiții:

$$\delta=3.727$$

viteza de la sfârșitul primei ciocniri este $q_{10}=-6.366$, iar viteza de la sfârșitul ciocnirii suplimentare este $q_c=-6.2$.

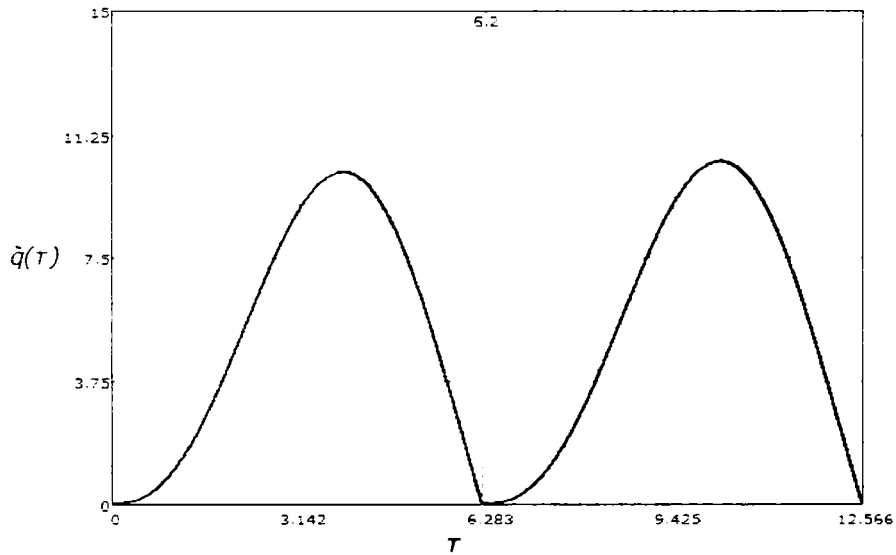


Fig. 2.3.2.6.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă pentru $r=2$ și $u=6.2$

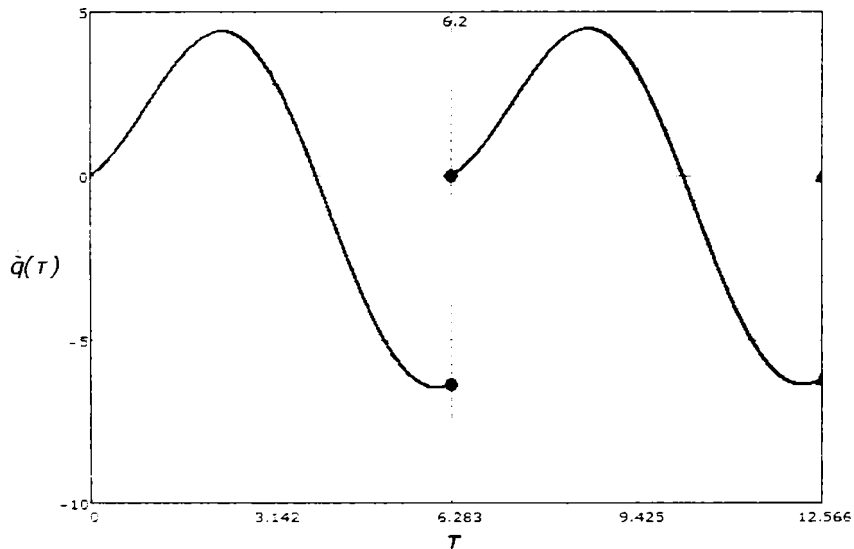


Fig. 2.3.2.6.b Viteza vibratorului într-o perioadă pentru $r=2$ și $u=6.2$

După cum se observă din figurile 2.3.2.6.a și b, mișcarea vibratorului pe limitator în acest caz în care intervalul între două ciocniri de bază este 4π este format din două mișcări de perioade aproximativ egale cu cea a forței perturbatoare egală cu 2π .

Se reprezintă legea de mișcare a vibratorului pe limitator (fig. 2.3.2.7.a) respectiv viteza acestuia (fig. 2.3.2.7.b) pentru $r=2$, $u=0.1$. Pentru această mișcare este necesar $\delta=6.343$, iar vitezele sunt: $q_{10}=0.01$, $q_c=-12.577$

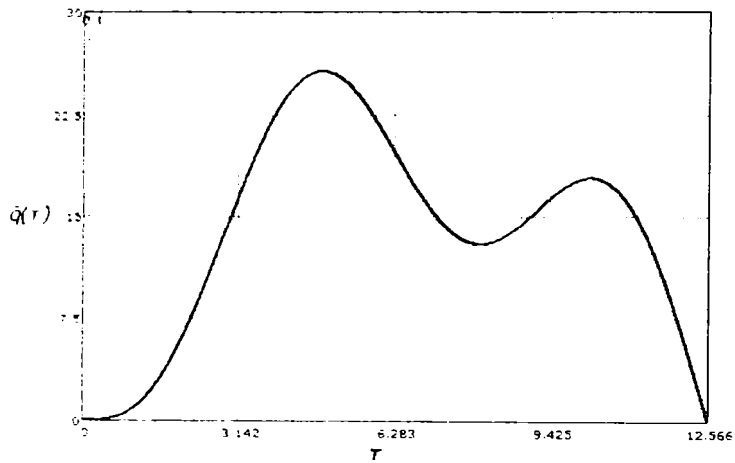


Fig. 2.3.2.7.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă pentru $r=2$ și $u=0.1$

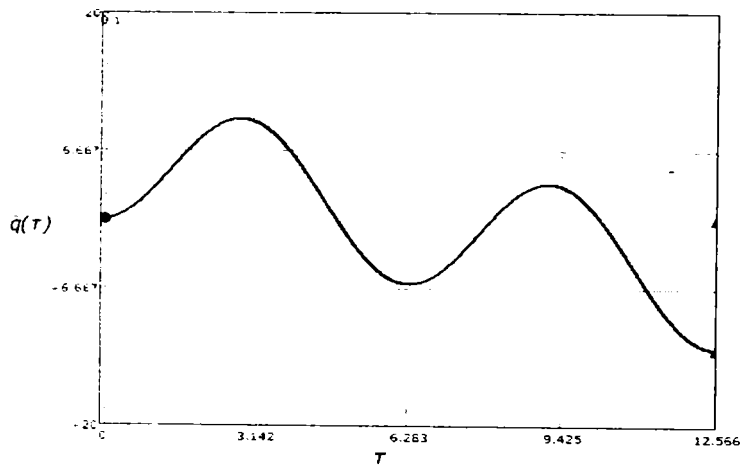


Fig. 2.3.2.7.b Viteza vibratorului într-o perioadă pentru $r=2$ și $u=0.1$

Datorită faptului că intervalul este mult prea mic, este necesară trasarea legii de mișcare respectiv a vitezei vibratorului pe intervalul $[0, u]$ în figura 2.3.2.8

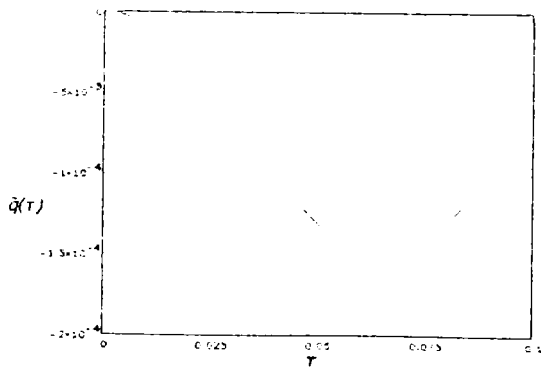


Fig. 2.3.2.8.a. Legea de mișcare

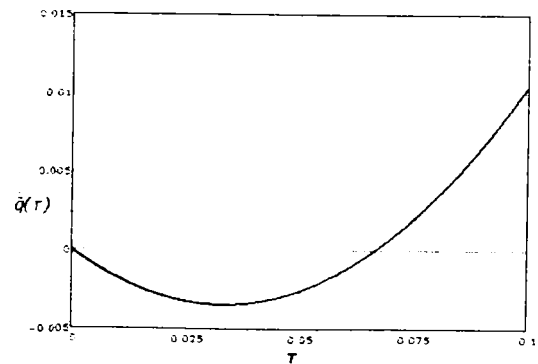


Fig. 2.3.2.8.b. Viteza

Fig. 2.3.2.8 Mișcarea în prima ciocnire a vibratorului

Așa cum se vede și în figura 2.3.2.5, în figura 2.3.2.8 apare o deplasare negativă, de ordinul 10^5 ori mai mică în prima ciocnire față de ciocnirea suplimentară, care de fapt este o staționare a vibratorului pe limitator. Astfel se poate concluziona că, dacă ciocnirea suplimentară apare imediat în vecinătatea lui t_k sau a lui t_{k+1} apare o staționare a vibratorului pe limitator. Pentru a verifica validitatea acestei concluzii este suficient să se traseze legea de mișcare pentru $r=3$ (figura 2.3.2.9).

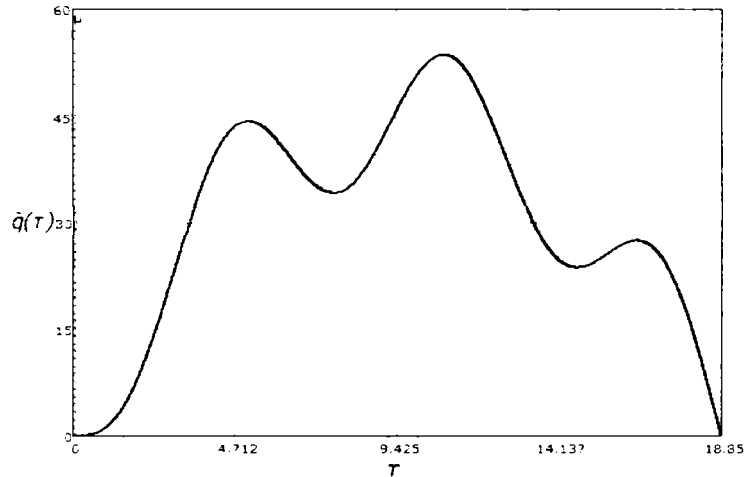


Fig. 2.3.2.9.a. Legea de mișcare pentru $r=3$ și $u=0.08$

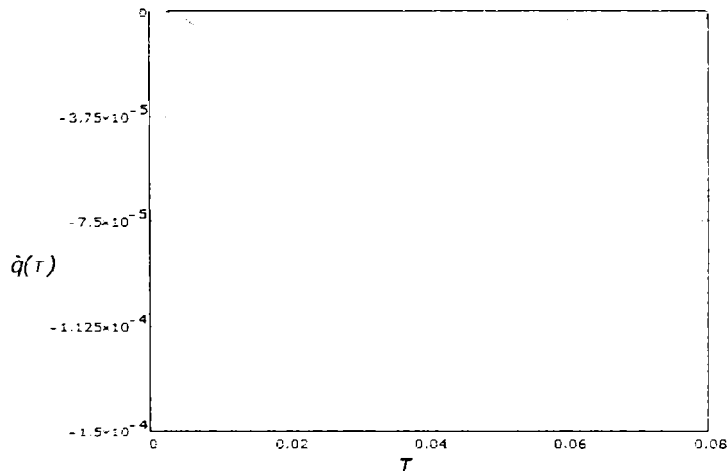


Fig. 2.3.2.9.b. Legea de mișcare pentru prima ciocnire și $r=3$, $u=0.08$

Pentru a se vedea cât mai exact legea de mișcare a vibratorului pe limitator, aceasta se determină în funcție de viteza unghiulară ω și multiplicatorul perioadei forței perturbatoare r .

În continuare se va studia apariția ciocnirii suplimentare într-o perioadă pentru mișcarea unui vibrator pe un limitator care acționează cu o forță perturbatoare de pulsație 100 rad/s, pentru diferiți multiplicatori ai perioadei. Se vor trasa diagramele deplasării, a vitezei vibratorului precum și cea a forței care acționează asupra vibratorului (forța totală care acționează asupra vibratorului, incluzând efectul

62 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

greutății, considerând vibratorul de masă=1kg).

Astfel se reprezintă legea de mișcare (fig. 2.3.2.10.a) respectiv viteza (fig. 2.3.2.10.b) pentru o ciocnire plastică, cu viteza unghiulară de 100 rad/s. Pentru o mai bună înțelegere a fenomenului și pentru a se arăta periodicitatea mișcării s-a reprezentat legea de mișcare și viteza vibratorului pe parcursul a două perioade.

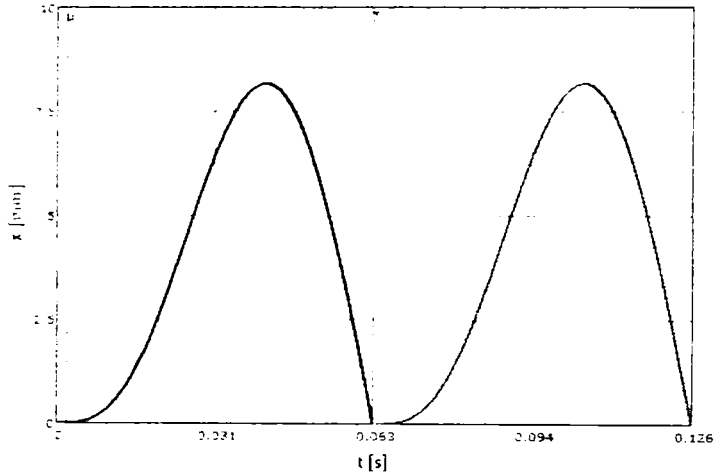


Fig. 2.3.2.10.a Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$, $u=0,002$ și $\omega=100$ rad/s

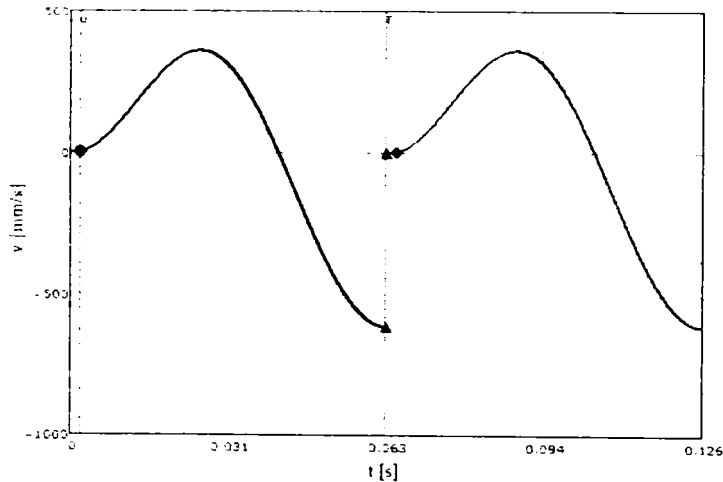


Fig. 2.3.2.10.b Viteza vibratorului pentru $r=1$, $u=0,002$ și $\omega=100$ rad/s

Pentru ca această mișcare să aibă loc trebuie îndeplinită următoarea condiție:

$$\delta = \frac{Q_0}{mg} = 3.259$$

Astfel, viteza înaintea ciocnirii suplimentare va fi $q_{10} = 2.003 \frac{mm}{s}$ iar viteza de la sfârșitul mișcării este $q_c = -681.384 \frac{mm}{s}$.

Aceste viteze devin nule la începutul mișcării următoare datorită ciocnirilor

plastice. Deplasarea pe ce-a de a doua curbă este datorită doar forței perturbatoare care acționează asupra vibratorului.

După cum se observă din figura 2.3.2.10.a în prima parte a mișcării vibratorul se reazemă pe limitator, ceea ce la prima vedere nu se poate explica, deoarece se știe din condițiile inițiale că are loc o ciocnire suplimentară. Pentru a înțelege fenomenul este necesar să se reprezinte grafic variația forței care acționează asupra vibratorului pe parcursul mișcării acesteia, precum se vede în figura 2.3.2.11.

Din figura 2.3.2.10.b se observă atât periodicitatea mișcării cât și faptul că se păstrează valorile vitezelor atât înainte de ciocnire cât și după ciocnire.

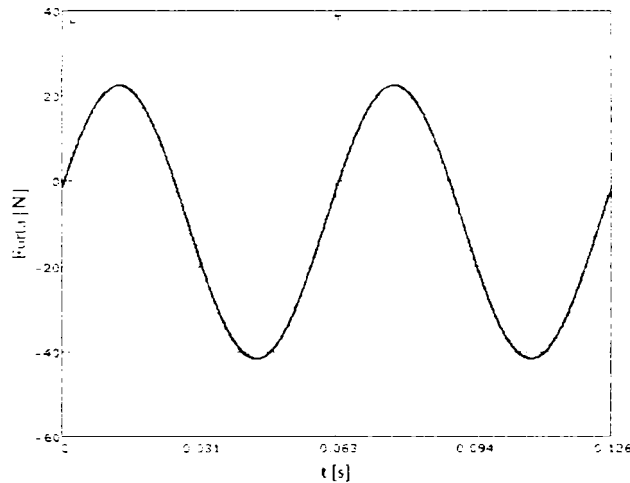


Fig. 2.3.2.11 Forța care acționează asupra vibratorului considerat de masă 1 kg.

Din figura 2.3.2.11 se observă că la prima ciocnire, care apare foarte aproape de începutul perioadei are loc o variație foarte mică a forței perturbatoare. Aceasta este inițial negativă -2.038 N și crește la 3.969 N; aceasta crește și prin mărirea masei vibratorului. În faza de desprindere de pe limitator forța este negativă, prin urmare în urma ciocnirii plastice vibratorul nu se poate desprinde de limitator.

Pentru o mai bună înțelegere a fenomenului este necesar să se reprezinte grafic (fig. 2.3.2.12) legea de mișcare, viteza respectiv forța care acționează asupra vibratorului în intervalul de timp $[0, u]$.

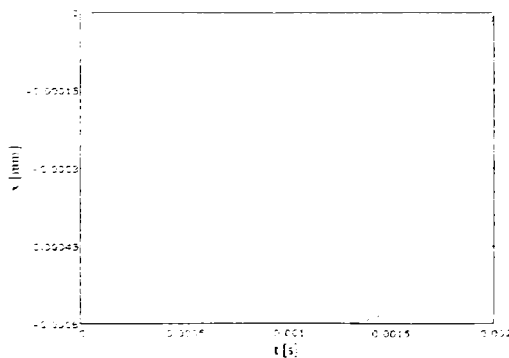


Fig. 2.3.2.12.a. Deplasarea

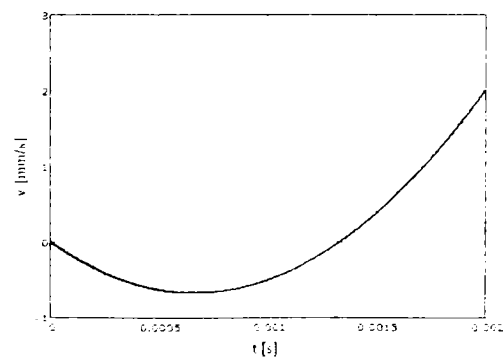


Fig. 2.3.2.12.b Viteza

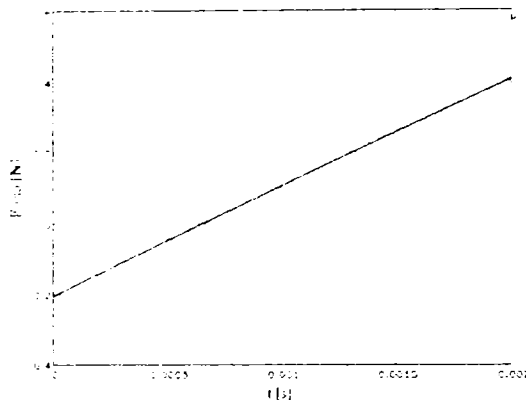


Fig. 2.3.2.12.c Forța

Fig. 2.3.2.12 Detalii ale mișcării pe intervalul $[0, u]$

După cum se observă din figura 2.3.2.12 legea de mișcare este negativă, ceea ce fizic s-ar explica prin deplasarea limitatorului, care însă din modelul inițial nu este posibil. Aceasta se explică și prin faptul că forța este la început negativă, în faza de ridicare a vibratorului ea tinde să-l coboare, ceea ce face ca vibratorul să fie în contact cu limitatorul. Când vibratorul s-a ciocnit plastic la capătul perioadei forța era în creștere, însă pe direcția și sensul greutății.

2.4. Cazul ciocnirilor reale

În aplicațiile tehnice obișnuit apar cazuri în care ciocnirile sunt de natură reală. Deci se vor considera coeficienții de restituire $R = R_1 \in (0, 1)$. Astfel din ecuațiile (2.2.3.4) și (2.2.3.5) cu condițiile inițiale (2.2.3.6) și (2.2.3.7) se pot determina vitezele inițiale și respectiv legile de mișcare:

$$\begin{cases} q_1(t') = -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega (t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2] - \\ - R \dot{q}_c (t' - t_k) = 0 \\ \dot{q}_1(t') = \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - \omega (t' - t_k)] - R \dot{q}_c = \dot{q}_{10} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$\begin{cases} q_2(t_{k+1}) = -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega (t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2] - \\ - R_1 \dot{q}_{10} (t_{k+1} - t') = 0 \\ \dot{q}_2(t_{k+1}) = \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t') - \omega (t_{k+1} - t')] - R_1 \dot{q}_{10} = \dot{q}_c \end{cases}$$

Din a doua ecuație din sistemele (2.4.1) se pot determina \dot{q}_c , adică viteza de cădere a masei, deci de la începutul mișcării și \dot{q}_{10} , viteza de la începutul ciocnirii

suplimentare vor fi:

$$\dot{q}_{10} = \frac{g}{\omega} \frac{[\delta(1+R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R\delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R\omega(t_{k+1} - t')]}{1 - RR_1} \quad (2.4.2)$$

$$\dot{q}_c = \frac{g}{\omega} \frac{[\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1+R_1) \sin \omega t' + R_1\delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + R_1\omega(t' - t_k)]}{1 - RR_1}$$

Legile de mișcare și vitezele se mai pot scrie:

$$\left\{ \begin{aligned} q_1(t') &= -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta\omega(t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2] - \\ &-\frac{g}{\omega^2} \frac{R}{1 - RR_1} [\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1+R_1) \sin \omega t' + R_1\delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + \\ &+ R_1\omega(t' - t_k)] \omega(t' - t_k) = 0 \\ \dot{q}_1(t') &= \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - \omega(t' - t_k)] - \\ &-\frac{g}{\omega} \frac{R}{1 - RR_1} [\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1+R_1) \sin \omega t' - R_1\delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + R_1\omega(t' - t_k)] = \dot{q}_{10} \end{aligned} \right. \quad (2.4.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_2(t_{k+1}) &= -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta\omega(t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2] - \\ &-\frac{g}{\omega^2} \frac{R_1}{1 - RR_1} [\delta(1+R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R\delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R\omega(t_{k+1} - t')] \cdot \\ &\cdot \omega(t_{k+1} - t') = 0 \\ \dot{q}_2(t_{k+1}) &= \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t') - \omega(t_{k+1} - t')] - \\ &-\frac{g}{\omega} \frac{R_1}{1 - RR_1} [\delta(1+R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R\delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R\omega(t_{k+1} - t')] = \dot{q}_c \end{aligned} \right.$$

În vederea simplificării calculelor se va introduce notația:

$$\omega(t' - t_k) = u \quad (2.4.4)$$

66 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii - 2

astfel încât se mai poate scrie:

$$\omega(t_{k+1} - t') = \omega(t_{k+1} - t_k) - \omega(t' - t_k) = 2nr - u \quad (2.4.5)$$

Primele din condițiile limită (2.4.3), cu notațiile introduse se pot pune sub forma:

$$\left\{ \begin{aligned} & \delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta u \sin \omega t_k + \frac{1}{2} u^2 + \\ & + \frac{R u}{1 - RR_1} [\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1 + R_1) \sin \omega t' + R_1 \delta \sin \omega t_k - (2nr - u) + R_1 u] = 0 \\ & \delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta(2nr - u) \sin \omega t' + \frac{1}{2} (2nr - u)^2 + \\ & + \frac{R_1}{1 - RR_1} [\delta(1 + R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_{k+1} - u + R(2nr - u)](2nr - u) = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.4.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t' - \sin \omega t_k) - u] - \\ & - \frac{g}{\omega} \frac{R}{1 - RR_1} [\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1 + R_1) \sin \omega t' + R_1 \delta \sin \omega t_k - (2nr - u) + R_1 u] = \dot{q}_{10} \\ & \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t_{k+1} - \sin \omega t') - (2nr - u)] - \\ & - \frac{g}{\omega} \frac{R_1}{1 - RR_1} [\delta(1 + R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_{k+1} - u + R(2nr - u)] = \dot{q}_c \end{aligned} \right.$$

Pentru eliminarea momentului necunoscut $t = t'$ din ecuațiile (2.4.6) se folosesc identitățile:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \omega t' &= \cos(u + \omega t_k) = \cos u \cos \omega t_k - \sin u \sin \omega t_k \\ \sin \omega t' &= \sin(u + \omega t_k) = \sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k \end{aligned} \right. \quad (2.4.7)$$

Relațiile (2.4.6) devin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(\cos u \cos \omega t_k - \sin u \sin \omega t_k - \cos \omega t_k) + \delta u \sin \omega t_k + \frac{1}{2} u^2 + \\ + [\delta \sin \omega t_k - \delta(1 + R_1)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) + R_1 \delta \sin \omega t_k - (2nr - u) + R_1 u] \cdot \\ \cdot \frac{Ru}{1 - RR_1} = 0 \\ \delta(\cos \omega t_k - \cos u \cos \omega t_k + \sin u \sin \omega t_k) + \delta(2nr - u)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) + \\ + [\delta(1 + R)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_k - u + R(2nr - u)] \cdot \\ \cdot \frac{R_1(2nr - u)}{1 - RR_1} + \frac{1}{2} (2nr - u)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{\omega} [\delta(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k - \sin \omega t_k) - u] - \\ - [\delta \sin \omega t_k - \delta(1 + R_1)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) + R_1 \delta \sin \omega t_k - (2nr - u) + R_1 u] \cdot \\ \cdot \frac{g}{\omega} \frac{R}{1 - RR_1} = \dot{q}_{10} \\ \frac{g}{\omega} [\delta(\sin \omega t_k - \sin u \cos \omega t_k - \cos u \sin \omega t_k) - (2nr - u)] - \\ - [\delta(1 + R)(\sin u \cos \omega t_k + \cos u \sin \omega t_k) - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_k - u + R(2nr - u)] \cdot \\ \cdot \frac{g}{\omega} \frac{R_1}{1 - RR_1} = \dot{q}_c \end{array} \right.$$

După transformări simple ecuațiile se pot aduce la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \left\{ u - \sin u + \frac{Ru}{1 - RR_1} [1 + R_1 - (1 + R_1) \cos u] \right\} \sin \omega t_k + \\ + \delta \left[\cos u - 1 - \frac{Ru(1 + R_1)}{1 - RR_1} \sin u \right] \cos \omega t_k + \\ + \frac{1}{2} u^2 + \frac{Ru}{1 - RR_1} (R_1 u - 2nr + u) = 0 \\ \delta \left\{ \sin u + (2nr - u) \cos u + \frac{R_1(2nr - u)(1 + R)}{1 - RR_1} (\cos u - 1) \right\} \sin \omega t_k + \\ + \delta \left\{ \left[1 - \cos u + \left[\left(2nr - u + \frac{R_1(2nr - u)(1 + R)}{1 - RR_1} \right) \sin u \right] \right] \right\} \cos \omega t_k + \\ + \frac{1}{2} (2nr - u)^2 + \frac{R_1(2nr - u)}{1 - RR_1} [R(2nr - u) - u] = 0 \end{array} \right. \quad (2.4.9)$$

Pentru simplificarea sistemului de ecuații algebrice (2.4.9) se va scrie sub forma:

$$\begin{cases} A\delta \sin \omega t_k + B\delta \cos \omega t_k + E = 0 \\ C\delta \sin \omega t_k + D\delta \cos \omega t_k + F = 0 \end{cases} \quad (2.4.10)$$

unde s-au folosit următoarele notații:

$$A = u - \sin u + \frac{Ru}{1 - RR_1} [R_1 - (1 + R_1) \cos u]$$

$$B = \cos u - 1 + \frac{Ru(1 + R_1)}{1 - RR_1} \sin u$$

$$E = \frac{1}{2}u^2 + \frac{Ru}{1 - RR_1} (R_1 u - 2nr + u)$$

$$C = \sin u + (2nr - u) \cos u + \frac{R_1(2nr - u)(1 + R)}{1 - RR_1} (\cos u - 1) \quad (2.4.11)$$

$$D = 1 - \cos u + \left[\left(2nr - u + \frac{R_1(2nr - u)(1 + R)}{1 - RR_1} \right) \right] \sin u$$

$$F = \frac{1}{2}(2nr - u)^2 + \frac{R_1(2nr - u)}{1 - RR_1} [R(2nr - u) - u]$$

2.4.1. Determinarea regimurilor de mișcare

Și în acest caz, pentru δ se obține o relație identică cu (2.3.1.2), dar cu expresiile lui A, B, C, D, E, F date de relațiile 2.4.11.

În figura 2.4.1.1 se trasează variația lui δ în funcție de parametrul u pentru cazul ciocnirilor cu coeficient de restituire $R=R_1=0.9999$ pentru diferite valori ale lui r .

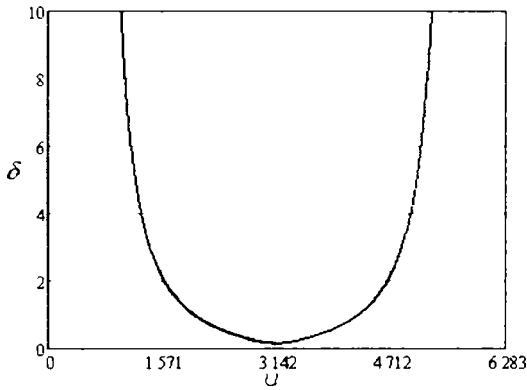


Fig. 2.4.1.1.a δ în funcție de u pentru $R=R_1=0.9999$ și $r=1$

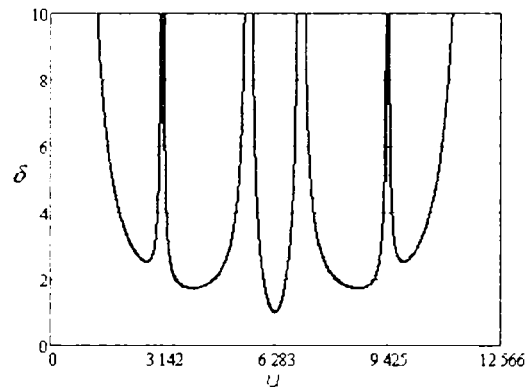


Fig. 2.4.1.1.b δ în funcție de u pentru $R=R_1=0.9999$ și $r=2$

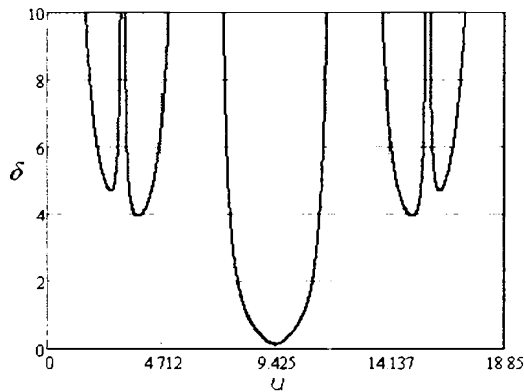


Fig. 2.4.1.1.c δ în funcție de u pentru $R=R_1=0.9999$ și $r=3$

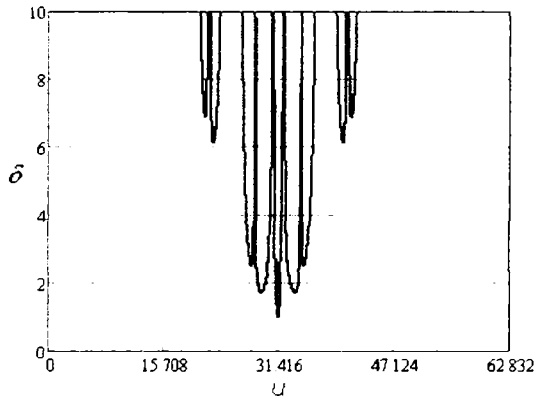


Fig. 2.4.1.1.d δ în funcție de u pentru $R=R_1=0.9999$ și $r=4$

Conform figurii 2.4.1.1. se observă că funcția δ este simetrică, linia de simetrie fiind la jumătatea perioadei. Din ecuațiile (2.4.11) și (2.3.1.2) se poate determina δ pentru $u=\pi r$, la jumătatea intervalului prin determinarea coeficienților din sistemul de ecuații (2.4.10):

$$\begin{aligned}
 A &= nr + \frac{Rnr}{1-RR_1} \left[R_1 - (1+R_1)(-1)^r \right] \\
 B &= (-1)^r - 1 \\
 E &= \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R\pi^2 r^2}{1-RR_1} (R_1 - 1) \\
 C &= nr(-1)^r + \frac{R_1 nr(1+R)}{1-RR_1} \left((-1)^r - 1 \right) \\
 D &= 1 - (-1)^r
 \end{aligned} \tag{2.4.1.1}$$

$$F = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R_1 \pi^2 r^2}{1 - RR_1} [R - 1]$$

În cazul în care r este par ($r=2k$), δ pentru $u=\pi$ se poate scrie:

$$A = \pi r \left(1 - \frac{R}{1 - RR_1} \right)$$

$$B = 0$$

$$E = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R \pi^2 r^2}{1 - RR_1} (R_1 - 1)$$

$$C = \pi r$$

(2.4.1.2)

$$D = 0$$

$$F = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R_1 \pi^2 r^2}{1 - RR_1} [R - 1]$$

În acest caz, din ecuațiile (2.3.1.2) și (2.4.1.2) rezultă că $\delta \rightarrow \infty$, ceea ce nu se poate întâmpla în practică. În acest mod s-a demonstrat că pentru un multiplu par pentru perioada forței percutante nu pot apărea ciocniri suplimentare la mijlocul perioadei.

În cazul în care $r=2k+1$ coeficienții din sistemul (2.4.10) devin:

$$A = \pi r \left[1 + \frac{R}{1 - RR_1} (1 + 2R_1) \right]$$

$$B = -2$$

$$E = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R \pi^2 r^2}{1 - RR_1} (R_1 - 1)$$

$$C = -\pi r \left(1 + 2 \frac{R_1 (1 + R)}{1 - RR_1} \right)$$

(2.4.1.3)

$$D = 2$$

$$F = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 + \frac{R_1 \pi^2 r^2}{1 - RR_1} [R - 1]$$

Din ecuațiile (2.3.1.2) și (2.4.1.3) se trasează graficul din fig. 2.4.1.2, reprezentând raportul dintre amplitudinea forței percutante și greutatea vibratorului în funcție de coeficientul de restituire, atunci când $R_1=R$:

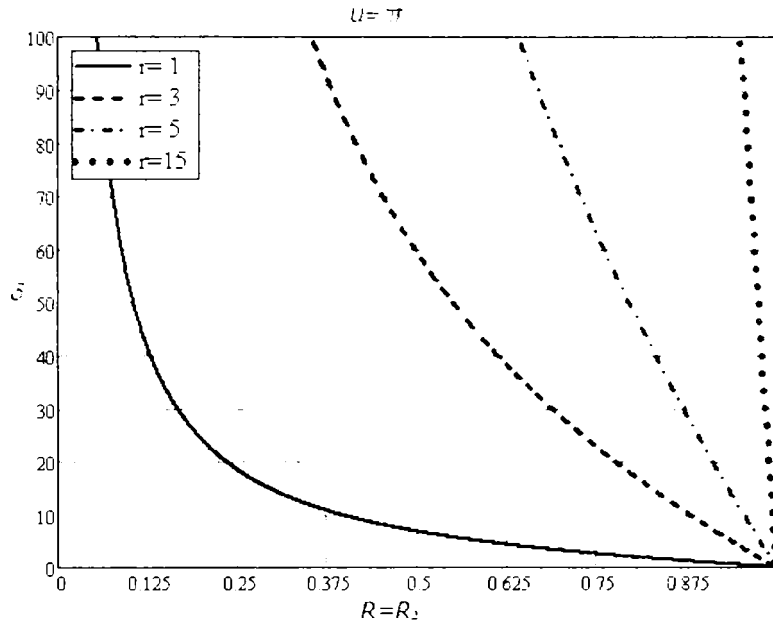


Fig. 2.4.1.2 Variația lui δ în funcție coeficientul de restituire pentru r impar

În figura 2.4.1.2 se observă că nu poate apărea o ciocnire suplimentară la mijlocul perioadei pentru o ciocnire elastică deoarece $Q_0/mg < 1$, ceea ce nu este posibil datorită faptului că amplitudinea forței perturbatoare trebuie să fie mai mare decât greutatea vibratorului, pentru a putea să-l ridice.

2.4.2. Stabilitatea mișcărilor vibropercutante

Se pornește de la primele ecuații din sistemul de ecuații (2.4.3):

$$\begin{aligned}
 q_1(t') = & -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega(t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2] - \\
 & -[\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1 + R_1) \sin \omega t' + R_1 \delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + R_1 \omega(t' - t_k)] \cdot \\
 & \cdot \frac{g}{\omega^2} \frac{R}{1 - RR_1} \omega(t' - t_k) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4.2.1}$$

$$\begin{aligned}
 q_2(t_{k+1}) = & -\frac{g}{\omega^2} [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega(t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2] - \\
 & -[\delta(1 + R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R \omega(t_{k+1} - t')] \cdot \\
 & \frac{g}{\omega^2} \frac{R_1}{1 - RR_1} \omega(t_{k+1} - t') = 0
 \end{aligned}$$

care după simplificări se mai poate scrie:

72 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

$$\begin{aligned}
 & [\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta \omega(t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2} \omega^2 (t' - t_k)^2] + \\
 & + [\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1 + R_1) \sin \omega t' + R_1 \delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + R_1 \omega(t' - t_k)] \cdot \\
 & \cdot \frac{R}{1 - RR_1} \omega(t' - t_k) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4.2.2}$$

$$\begin{aligned}
 & [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega(t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2] + \\
 & + [\delta(1 + R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R \delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R \omega(t_{k+1} - t')] \cdot \\
 & \cdot \frac{R_1}{1 - RR_1} \omega(t_{k+1} - t') = 0
 \end{aligned}$$

Se consideră micile perturbații $t' + \Delta t'$, $t_k + \Delta t_k$ și $t_{k+1} + \Delta t_{k+1}$, astfel încât sistemul de mai sus devine

$$\begin{aligned}
 & [\delta(\cos \omega(t' + \Delta t') - \cos \omega(t_k + \Delta t_k)) + \delta \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) \sin \omega(t_k + \Delta t_k) + \\
 & + \frac{1}{2} \omega^2 (t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2] + \frac{R}{1 - RR_1} [\delta \sin \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - \\
 & - \delta(1 + R_1) \sin \omega(t' + \Delta t') + R_1 \delta \sin \omega(t_k + \Delta t_k) - \\
 & - \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') + R_1 \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)] \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
 & [\delta(\cos \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - \cos \omega(t' + \Delta t')) + \delta \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') \sin \omega(t' + \Delta t') + \\
 & + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2] + \frac{R_1}{1 - RR_1} [\delta(1 + R) \sin \omega(t' + \Delta t') - \delta \sin \omega(t_k + \Delta t_k) - \\
 & - R \delta \sin \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) + \\
 & + R \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')] \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') = 0
 \end{aligned}$$

Datorită faptului că perturbațiile sunt mici, adică tind spre zero, se poate scrie

$$\cos \omega \Delta t' = \cos \omega \Delta t_k = \cos \omega \Delta t_{k+1} = 1,$$

$$\sin \omega \Delta t' = \omega \Delta t',$$

(2.4.2.4)

$$\sin \omega \Delta t_k = \omega \Delta t_k,$$

$$\sin \omega \Delta t_{k+1} = \omega \Delta t_{k+1}$$

Datorită faptului că perturbațiile sunt mici se poate scrie:

$$\cos \omega(t' + \Delta t') = \cos \omega t' \cos \omega \Delta t' - \sin \omega t' \sin \omega \Delta t' = \cos \omega t' - \omega \Delta t' \sin \omega t'$$

$$\cos \omega(t_k + \Delta t_k) = \cos \omega t_k \cos \omega \Delta t_k - \sin \omega t_k \sin \omega \Delta t_k = \cos \omega t_k - \omega \Delta t_k \sin \omega t_k$$

$$\begin{aligned}\cos \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) &= \cos \omega t_{k+1} \cos \omega \Delta t_{k+1} - \sin \omega t_{k+1} \sin \omega \Delta t_{k+1} = \\ &= \cos \omega t_{k+1} - \omega \Delta t_{k+1} \sin \omega t_{k+1}\end{aligned}\tag{2.4.2.5}$$

$$\sin \omega(t' + \Delta t') = \sin \omega t' \cos \omega \Delta t' + \cos \omega t' \sin \omega \Delta t' = \sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t'$$

$$\sin \omega(t_k + \Delta t_k) = \sin \omega t_k \cos \omega \Delta t_k + \cos \omega t_k \sin \omega \Delta t_k = \sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k$$

$$\begin{aligned}\sin \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) &= \sin \omega t_{k+1} \cos \omega \Delta t_{k+1} + \cos \omega t_{k+1} \sin \omega \Delta t_{k+1} = \\ &= \sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t_{k+1} \cos \omega t_{k+1}\end{aligned}$$

Înlocuind relația (2.4.2.5) în (2.4.2.3) rezultă:

$$\begin{aligned}&[\delta(\cos \omega t' - \omega \Delta t' \sin \omega t' - \cos \omega t_k + \omega \Delta t_k \sin \omega t_k) + \\ &+\delta\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) + \\ &+\frac{1}{2}\omega^2(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2] + \\ &+[\delta(\sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t_{k+1} \cos \omega t_{k+1}) - \delta(1 + R_1)(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t') + \\ &+R_1\delta(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) - \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') + R_1\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)] \cdot \\ &\frac{R}{1 - RR_1} \cdot \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) = 0\end{aligned}\tag{2.4.2.6}$$

$$\begin{aligned}&[\delta(\cos \omega t_{k+1} - \omega \Delta t_{k+1} \sin \omega t_{k+1} - \cos \omega t' + \omega \Delta t' \sin \omega t') + \frac{1}{2}\omega^2(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2 + \\ &+\delta\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t')] + \\ &+\frac{R_1}{1 - RR_1}[\delta(1 + R)(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t') - \delta(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) - \\ &-R\delta(\sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t_{k+1} \cos \omega t_{k+1}) - \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) + \\ &+R\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')]\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') = 0\end{aligned}$$

Pentru a putea studia stabilitatea mișcării se elimină ecuațiile inițiale și rezultă:

$$\begin{aligned}&[\delta(\cos \omega t' - \omega \Delta t' \sin \omega t' - \cos \omega t_k + \omega \Delta t_k \sin \omega t_k) + \frac{1}{2}\omega^2(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)^2 + \\ &\delta\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k)] + \\ &+[\delta(\sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t_{k+1} \cos \omega t_{k+1}) - \delta(1 + R_1)(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t') + \\ &+R_1\delta(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) - \omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') + R_1\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)] \cdot \\ &\frac{R\omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k)}{1 - RR_1} - [\delta(\cos \omega t' - \cos \omega t_k) + \delta\omega(t' - t_k) \sin \omega t_k + \frac{1}{2}\omega^2(t' - t_k)^2] - \\ &-\frac{R\omega(t' - t_k)}{1 - RR_1}[\delta \sin \omega t_{k+1} - \delta(1 + R_1) \sin \omega t' + R_1\delta \sin \omega t_k - \omega(t_{k+1} - t') + R_1\omega(t' - t_k)] = 0\end{aligned}\tag{2.4.2.7}$$

74 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

$$\begin{aligned}
 & [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \omega \Delta t_{k+1} \sin \omega t_{k+1} - \cos \omega t' + \omega \Delta t' \sin \omega t') + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')^2 + \\
 & + \delta \omega (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t') (\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t')] + \\
 & + \frac{R_1 \omega (t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')}{1 - RR_1} [\delta(1 + R)(\sin \omega t' + \omega \Delta t' \cos \omega t') - \delta(\sin \omega t_k + \omega \Delta t_k \cos \omega t_k) - \\
 & - R\delta(\sin \omega t_{k+1} + \omega \Delta t_{k+1} \cos \omega t_{k+1}) - \omega(t' + \Delta t' - t_k - \Delta t_k) + R\omega(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t' - \Delta t')] - \\
 & - [\delta(\cos \omega t_{k+1} - \cos \omega t') + \delta \omega (t_{k+1} - t') \sin \omega t' + \frac{1}{2} \omega^2 (t_{k+1} - t')^2] - \\
 & - \frac{R_1 \omega (t_{k+1} - t')}{1 - RR_1} [\delta(1 + R) \sin \omega t' - \delta \sin \omega t_k - R\delta \sin \omega t_{k+1} - \omega(t' - t_k) + R\omega(t_{k+1} - t')] = 0
 \end{aligned}$$

Dând factori comuni micile perturbații din relațiile (2.4.2.7) și neglijând puterile acestora, se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & [(1 + R)(\cos u - 1) - (1 + R_1)Ru \sin u] \delta \sin \omega t_k + \\ & + [(1 + R) \sin u + (1 + R_1)Ru \cos u] \delta \cos \omega t_k + 2nrR - [(2 + R_1)R + 1]u \end{aligned} \right\} \Delta t' + \\
 & \left\{ \begin{aligned} & R(1 + R_1)(1 - \cos u) \delta \sin \omega t_k - [u + R(1 + R_1) \sin u] \delta \cos \omega t_k - \\ & - 2nrR + [(1 + R_1)R + 1]u \end{aligned} \right\} \Delta t_k + \\
 & Ru(1 - \delta \cos \omega t_k) \Delta t_{k+1} = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.2.8}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & [(1 + R_1)(2nr - u) \sin u + R_1(1 + R)(\cos u - 1)] \delta \sin \omega t_k + 2nr[(R + 1)R_1 + 1] \\ & + [(1 + R_1)(u - 2nr) \cos u + R_1(1 + R) \sin u] \delta \cos \omega t_k - [(2 + R)R_1 + 1]u \end{aligned} \right\} \Delta t' + \\
 & R_1(2nr - u)(\delta \cos \omega t_k - 1) \Delta t_k + \\
 & \left\{ \begin{aligned} & (1 + R_1)(1 - \cos u) \delta \sin \omega t_k + [RR_1(2nr - u) - (1 + R_1) \sin u] \delta \cos \omega t_k + \\ & + [(1 + R)R_1 + 1]u - 2nr(1 + RR_1) \end{aligned} \right\} \Delta t_{k+1} = 0
 \end{aligned}$$

Sistemul (2.4.2.8) se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} A \Delta t' + B \Delta t_k + C \Delta t_{k+1} = 0 \\ A_1 \Delta t' + B_1 \Delta t_k + C_1 \Delta t_{k+1} = 0 \end{cases} \tag{2.4.2.9}$$

unde:

$$\begin{aligned}
 A & = [(1 + R)(\cos u - 1) - (1 + R_1)Ru \sin u] \delta \sin \omega t_k + \\
 & + [(1 + R) \sin u + (1 + R_1)Ru \cos u] \delta \cos \omega t_k + 2nrR - [(2 + R_1)R + 1]u
 \end{aligned}$$

$$B = R(1 + R_1)(1 - \cos u) \delta \sin \omega t_k - [u + R(1 + R_1) \sin u] \delta \cos \omega t_k - 2nrR + [(1 + R_1)R + 1]u$$

$$C = Ru(1 - \delta \cos \omega t_k)$$

(2.4.2.10)

$$A_1 = [(1 + R_1)(2nr - u) \sin u + R_1(1 + R)(\cos u - 1)] \delta \sin \omega t_k + \\ + [(1 + R_1)(u - 2nr) \cos u + R_1(1 + R) \sin u] \delta \cos \omega t_k + 2nr [(R + 1)R_1 + 1] - [(2 + R)R_1 + 1]u$$

$$B_1 = R_1(2nr - u)(\delta \cos \omega t_k - 1)$$

$$C_1 = (1 + R_1)(1 - \cos u) \delta \sin \omega t_k + [RR_1(2nr - u) - (1 + R_1) \sin u] \delta \cos \omega t_k - 2nr(1 + RR_1) + \\ + [(1 + R)R_1 + 1]u$$

Sistemul de ecuații (2.4.2.9) se poate scrie:

$$\begin{cases} \Delta t' = -\frac{B}{A} \Delta t_k - \frac{C}{A} \Delta t_{k+1} \\ \Delta t' = -\frac{B_1}{A_1} \Delta t_k - \frac{C_1}{A_1} \Delta t_{k+1} \end{cases} \quad (2.4.2.11)$$

Prin egalarea celor două relații din sistemul (2.4.2.11) rezultă:

$$\left(\frac{C}{A} - \frac{C_1}{A_1} \right) \Delta t_{k+1} = \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B}{A} \right) \Delta t_k \quad (2.4.2.12)$$

Mișcarea vibratorului pe limitator este stabilă atâta timp cât:

$$\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k} = \frac{\left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B}{A} \right)}{\left(\frac{C}{A} - \frac{C_1}{A_1} \right)} = \frac{B_1 \cdot A - B \cdot A_1}{A_1 \cdot C - A \cdot C_1} < 1 \quad (2.4.2.13)$$

Din relația (2.4.1.1) se observă că stabilitatea mișcării nu depinde de δ .

În figura 2.4.2.1 se reprezintă $\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_k}$ în funcție de u pentru diferiți coeficienți de restituire R , R_1 respectiv pentru diferiți coeficienți de multiplicare r .

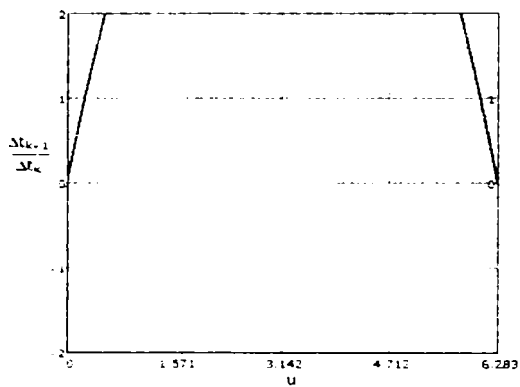


Fig. 2.4.2.1.a. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0$ și $r=1$

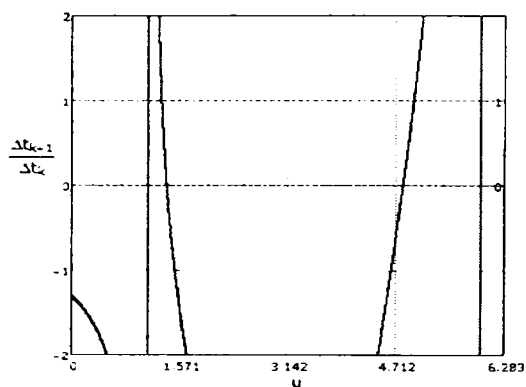


Fig. 2.4.2.1.a. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,33$ și $r=1$

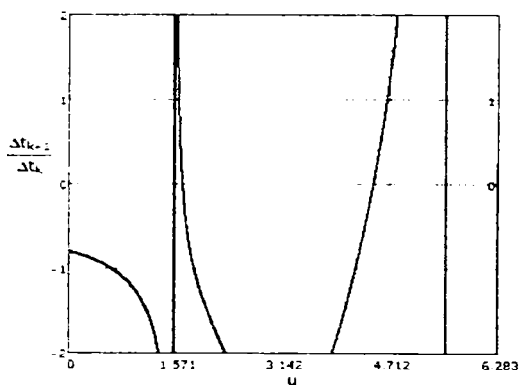


Fig. 2.4.2.1.c. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,5$ și $r=1$

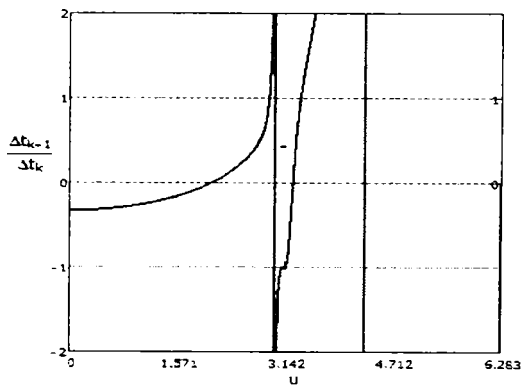


Fig. 2.4.2.1.d. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,99$ și $r=1$

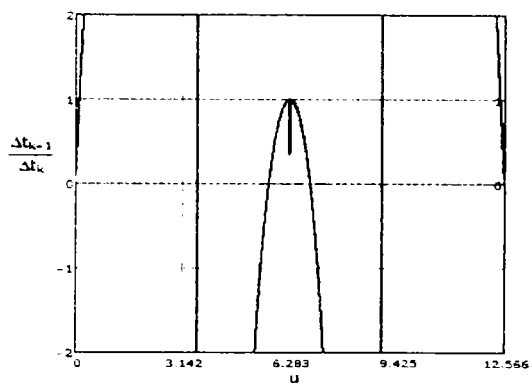


Fig. 2.4.2.1.e. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0$ și $r=2$

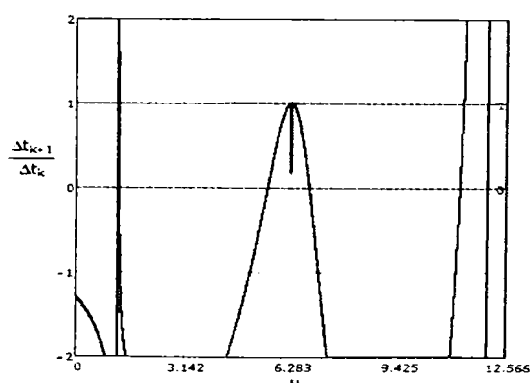


Fig. 2.4.2.1.f. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,33$ și $r=2$

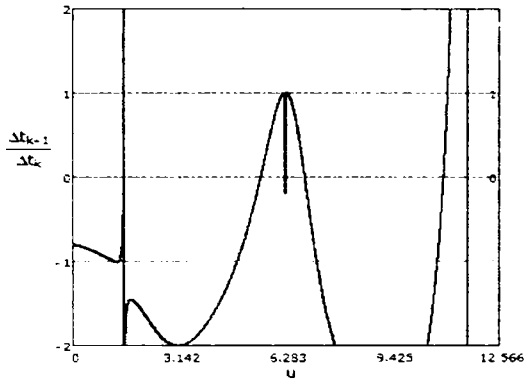


Fig. 2.4.2.1.g. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,5$ și $r=2$

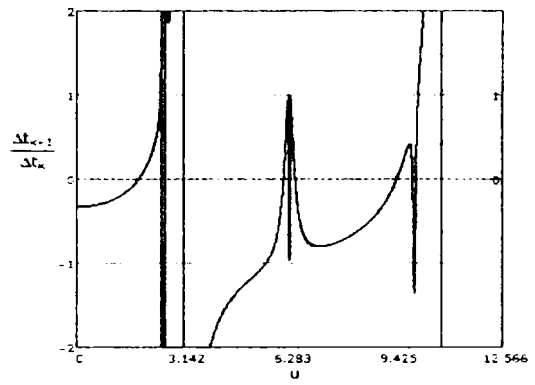


Fig. 2.4.2.1.h. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,99$ și $r=2$

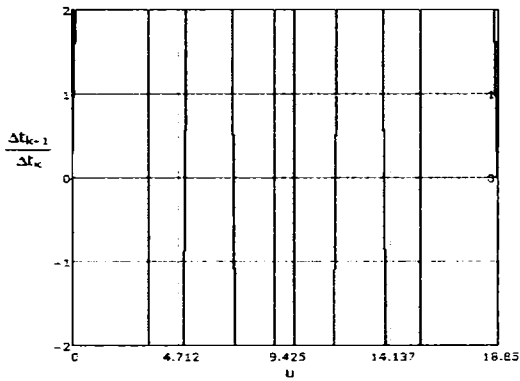


Fig. 2.4.2.1.i. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0$ și $r=3$

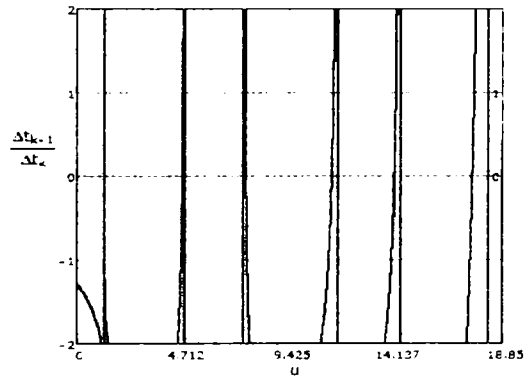


Fig. 2.4.2.1.j. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,33$ și $r=3$

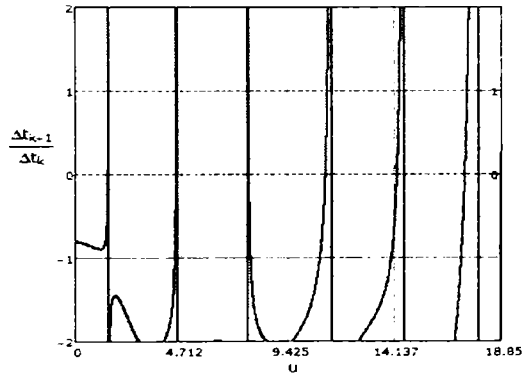


Fig. 2.4.2.1.k. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,5$ și $r=3$

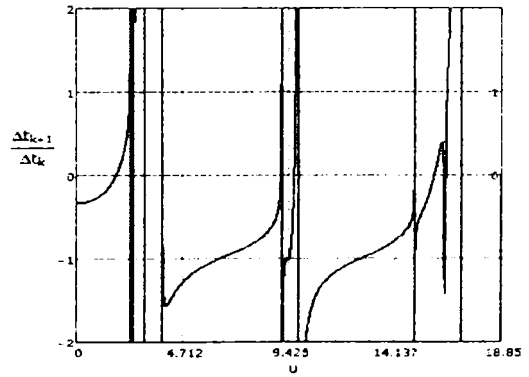


Fig. 2.4.2.1.l. Stabilitatea mișcării pentru $R_1=R=0,99$ și $r=3$

Fig. 2.4.2.1.a-l Stabilitatea mișcării

78 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

Din figurile 2.4.2.1.a, e, i și 2.3.2.1.a, b, c se observă că în cazul ciocnirilor reale, pentru coeficienți de restituire nuli, graficele sunt identice cu cele realizate în cazul ciocnirilor plastice, ceea ce constituie o verificare a acestui caz.

Astfel, legea de mișcare și viteza vibratorului pot fi cunoscute în fiecare moment al mișcării. Pentru $r=1$ și coeficient de restituire 0.3 se trasează legea de mișcare în figura 2.4.2.2.a iar viteza în figura 2.4.2.2.b:

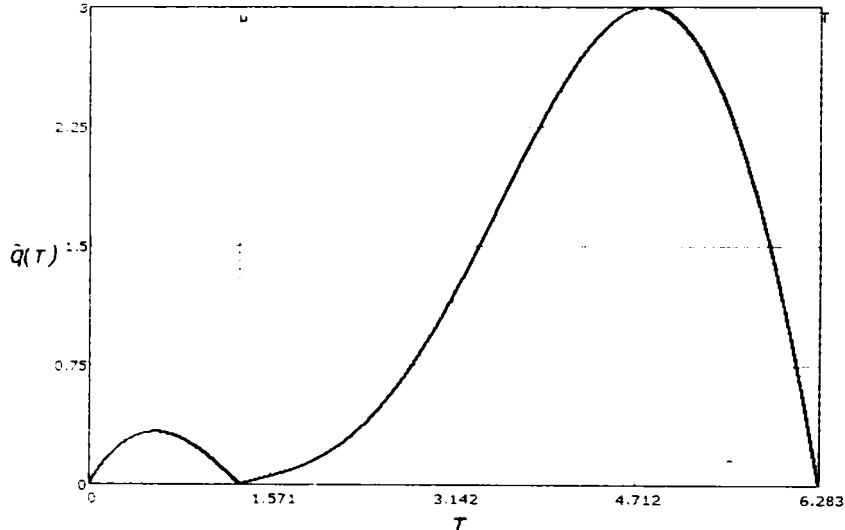


Fig. 2.4.2.2.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă cu $r=1$, $R=0,3$ și $u=1,3$

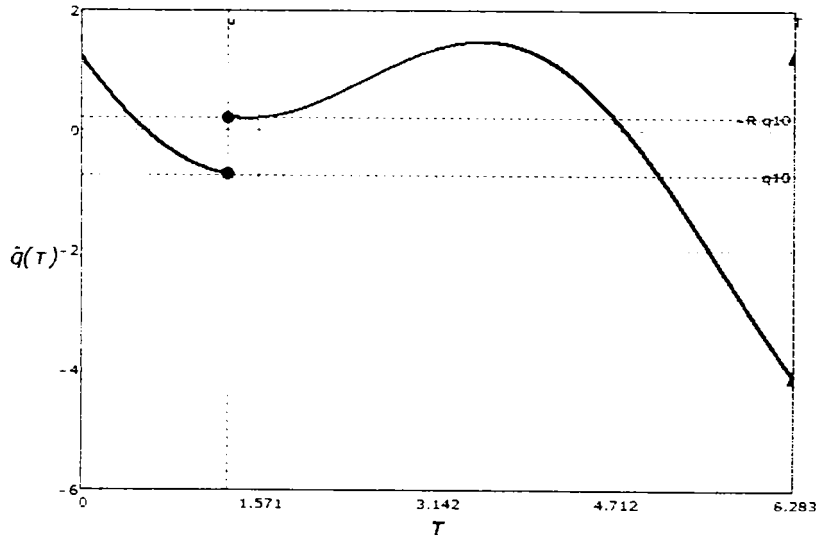


Fig. 2.4.2.2.b.Viteza vibratorului într-o perioadă cu $r=1$, $R=0.3$ și $u=1.3$

Pentru $r=2$ și coeficient de restituire 0.3 se trasează legea de mișcare în figura 2.4.2.3.a în care detaliile primei ciocniri sunt în fig. 2.4.2.3.b respectiv ciocnirea suplimentară în fig. 2.4.2.3.c.

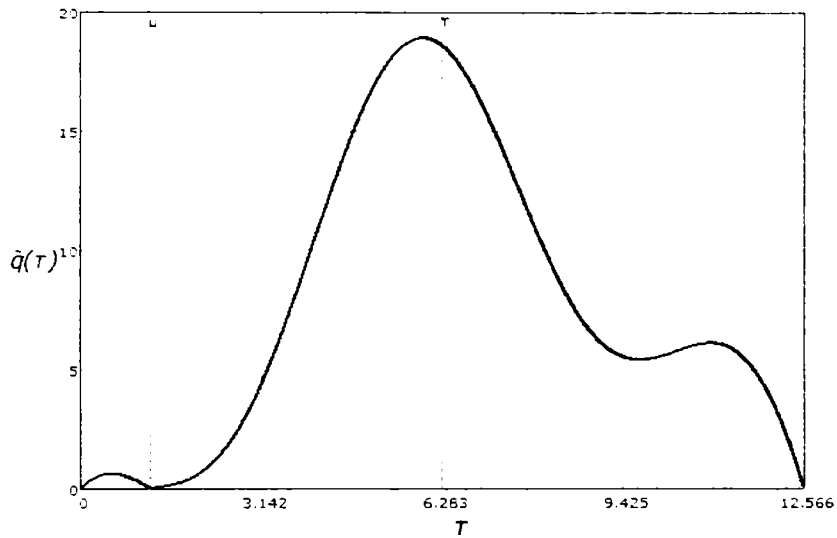


Fig. 2.4.2.3.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă cu $r=2$, $R=0,3$ și $u=1,22$

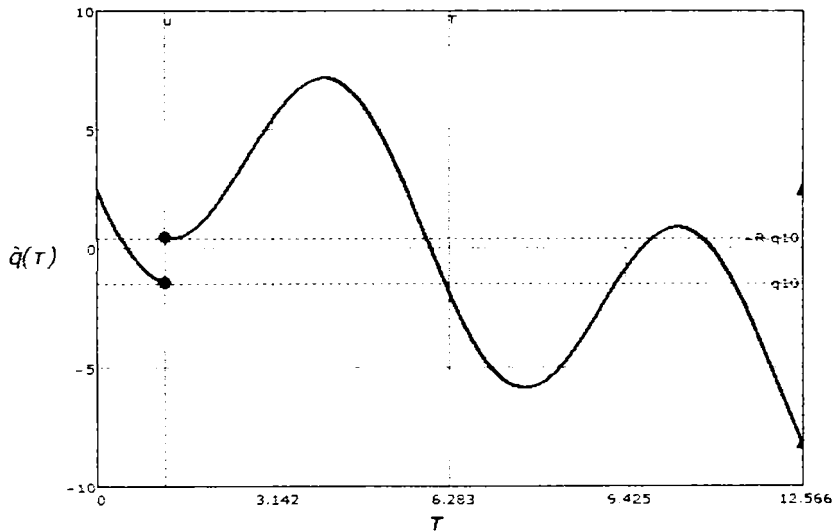


Fig. 2.4.2.3.b Viteza vibratorului într-o perioadă cu $r=2$, $R=0,3$ și $u=1,22$

Pentru $r=3$ și coeficient de restituire 0.3 se trasează legea de mișcare în figura 2.4.2.4.a în care detaliile primei ciocniri sunt în fig. 2.4.2.4.b respectiv ciocnirea suplimentară în fig. 2.4.2.4.c:

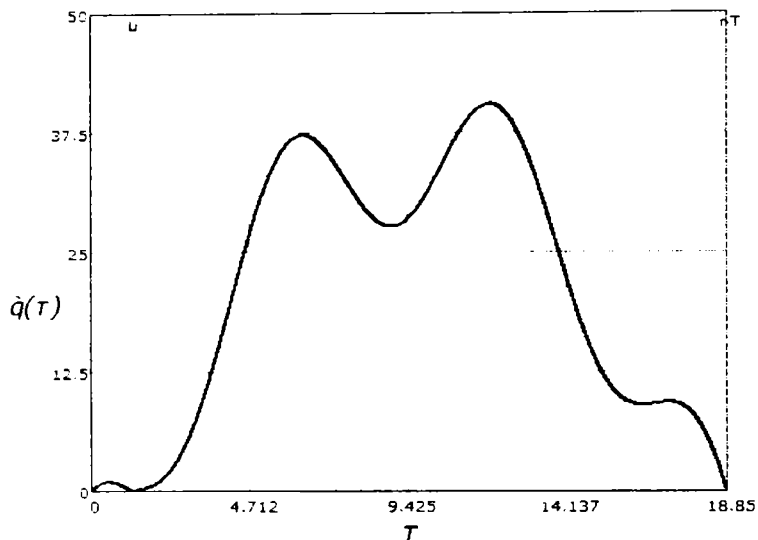


Fig. 2.4.2.4.a Legea de mișcare a vibratorului într-o perioadă cu $r=3$, $R=0,3$ și $u=1,1945$

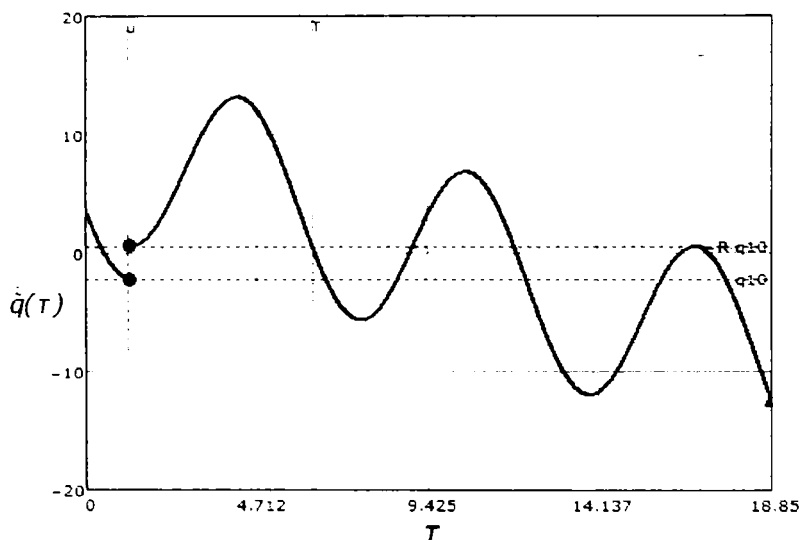


Fig. 2.4.2.4.b Viteza vibratorului într-o perioadă cu $r=10$, $R=0,3$ și $u=1,1945$

Pentru a se vedea legea de mișcare a vibratorului pe limitator cât mai exact, aceasta se determină în funcție de viteza unghiulară ω și multiplicatorul perioadei forței perturbatoare r respectiv de coeficienții de restituire R și R_1 . Astfel în figura 2.4.2.5.a și fig. 2.4.2.5.b se reprezintă legea de mișcare respectiv viteza pentru o ciocnire plastică, cu viteza unghiulară de 100 rad/s. S-au arătat legea de mișcare și viteza vibratorului pe parcursul a două perioade pentru o mai bună înțelegere a fenomenului și pentru a se arăta periodicitatea funcționării vibratorului.

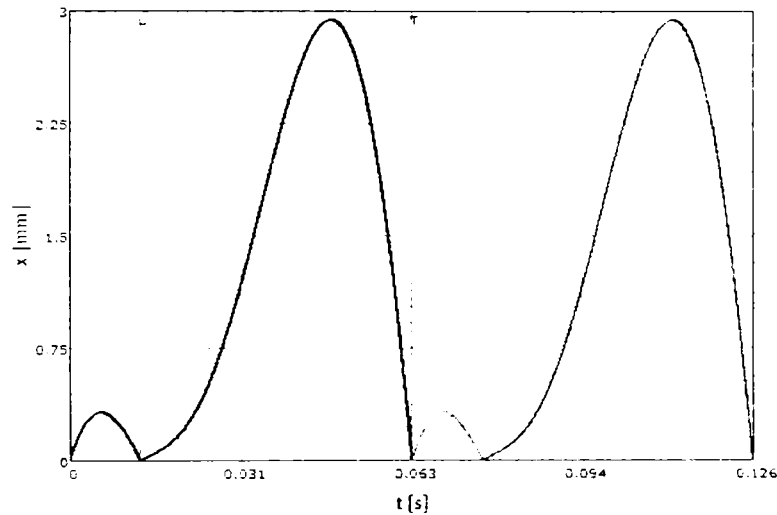


Fig. 2.4.2.5.a Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$, $R=R_1=0,3$, $u=0,013$, $\omega=100$ rad/s

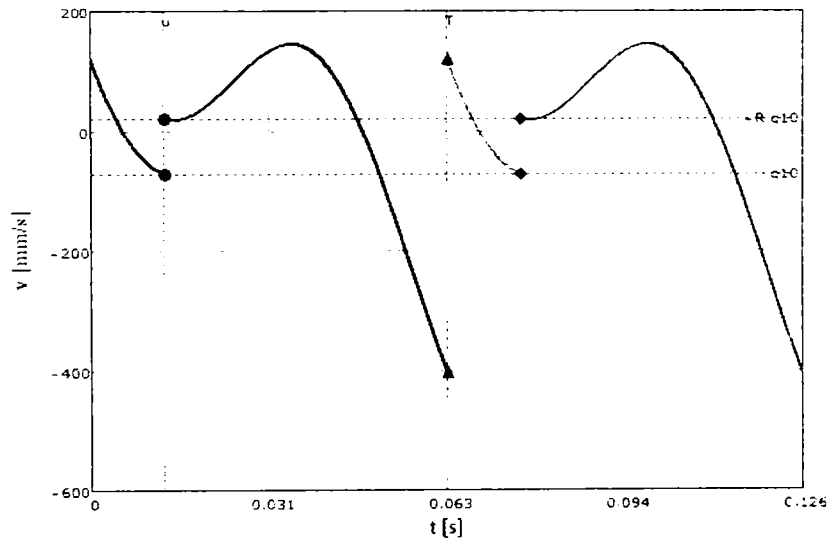


Fig. 2.4.2.5.b Viteza vibratorului pentru $r=1$, $R=R_1=0,3$, $u=0,013$, $\omega=100$ rad/s

Pentru apariția acestui caz este necesar ca $\delta = 1,949$, viteza de la începutul mișcării să fie $q_c = -402,841 \frac{mm}{s}$, viteza la începutul ciocnirii suplimentare $q_{10} = -71,298 \frac{mm}{s}$, viteza de la sfârșitul mișcării $q_c' = -R \cdot q_c = 120,852 \frac{mm}{s}$ iar viteza de la sfârșitul ciocnirii suplimentare să fie $q_{10}' = -R \cdot q_{10} = 21,389 \frac{mm}{s}$.

Pentru același $\delta = 1,949$, nu apare o ciocnire suplimentară stabilă într-o perioadă pentru un alt coeficient de restituire. Pentru un coeficient de restituire $R=R_1=0,5$ se trasează legea de mișcare (fig. 2.4.2.6.a) respectiv viteza (fig.

2.4.2.6.b), pentru $\delta = 1,485$.

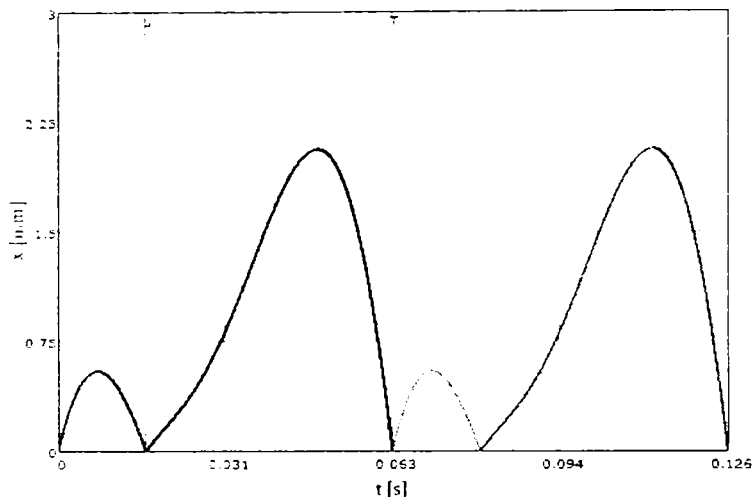


Fig. 2.4.2.6.a Legea de mișcare a vibratorului pentru $r=1$, $R=R_1=0,5$, $u=0,01655$, $\omega=100$ rad/s

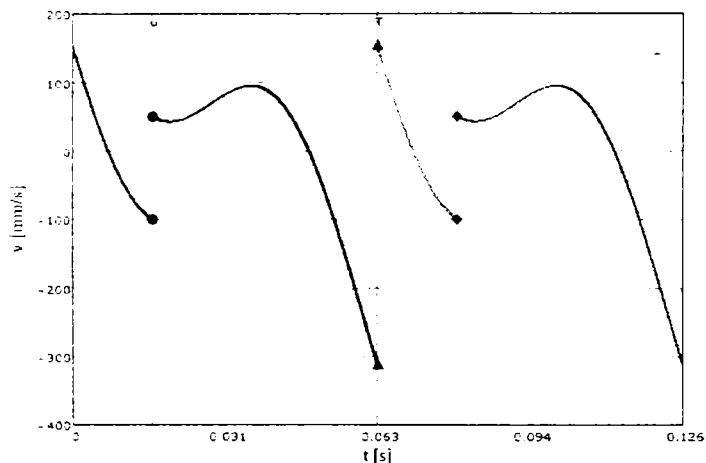


Fig. 2.4.2.6.b Viteza vibratorului pentru $r=1$, $R=R_1=0,5$, $u=0,01655$, $\omega=100$ rad/s

Pentru $u=0,040917$ mișcarea este defazată cu prima ciocnire a vibratorului cu limitatorul.

Pentru un coeficient de restituire $R=R_1=0,99$ mișcarea este stabilă doar atunci când $\delta < 1$, ceea ce nu convine deoarece forța perturbatoare nu este suficient de mare pentru a ridica vibratorul (nu este suficientă pentru a înfrânge greutatea vibratorului), adică nu poate apărea o ciocnire suplimentară în cazul ciocnirii elastice între vibrator și limitator.

2.5. Concluzii

Din analiza comportării neliniare a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii rezultă:

- Realizarea metodologiei de calcul pentru determinarea parametrilor ce influențează funcționarea unui vibrator simplu rezemat pe un plan rigid care execută mișcări cu desprinderi de plan și s-au reprezentat grafic legea de mișcare și viteza acestuia.
- S-a realizat un program de calcul care reprezintă grafic mișcarea stabilă a unui vibrator față de limitator în cazul în care apare o ciocnire reală suplimentară în timpul unei perioade.

Parametrii de intrare ai programului sunt:

- multiplicatorul perioadei forței perturbatoare r
- coeficientul de restituire pentru ciocnire R
- coeficientul de restituire pentru ciocnirea suplimentară R_1
- pulsația forței perturbatoare ω

Parametrii de ieșire a programului:

- domeniile de apariție a ciocnirilor suplimentare stabile
- raportul între amplitudinea forței perturbatoare și greutatea vibratorului δ
- legea de mișcare a vibratorului pentru prima ciocnire
- legea de mișcare a vibratorului pentru ciocnirea suplimentară
- legea de mișcare a vibratorului în timpul unei perioade
- viteza vibratorului în timpul unei perioade

Programul calculează inițial raportul între amplitudinea forței perturbatoare și greutatea proprie a vibratorului în funcție de posibilitatea de apariție a ciocnirii suplimentare în intervalul unei perioade, $\delta(u)$. Următoarea etapă este verificarea stabilității mișcării vibratorului pe limitator în funcție de momentul apariției ciocnirii suplimentare, condiția de stabilitate fiind ca raportul între perturbația la sfârșitul perioadei și cea de la începutul perioadei să fie subunitar. După ce s-a stabilit domeniul de stabilitate a mișcării se alege momentul în care se dorește să apară ciocnirea suplimentară și se determină δ necesar, apoi se trasează legea de mișcare și viteza pe cele două curbe:

- prima ciocnire
 - ciocnirea suplimentară.
- S-a analizat fenomenul ciocnirii în două ipostaze:

1) *Nu se doresc ciocniri suplimentare într-o perioadă:*

Dacă nu se doresc ciocniri suplimentare într-o perioadă se realizează următoarele etape în proiectarea vibratorului:

- a) Se alege multiplicatorul perioadei forței perturbatoare r

84 Contribuții teoretice privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii – 2

- b) Se stabilesc coeficienții de restituire R și R_1 ai ciocnirilor (în cazul general, fiind același limitator pentru ambele ciocniri se poate considera $R=R_1$)
- c) Se calculează greutatea vibratorului prin determinarea maselor părților componente ale acestuia
- d) Se determină forța perturbatoare în regim optim de lucru, în funcție de soluția constructivă aleasă
- e) Se calculează δ , raportul între amplitudinea forței perturbatoare și greutatea proprie a vibratorului
- f) Se verifică dacă δ se află în intervalul de stabilitate a mișcării (2.1.4.13)

În cazul în care δ nu se găsește în domeniul de stabilitate se reia calculul prin optimizarea unor parametri funcționali (de exemplu se modifică amplitudinea forței perturbatoare)

2) Se doresc ciocniri suplimentare într-un anumit moment bine definit al perioadei:

Dacă se dorește proiectarea unui vibrator care să funcționeze cu o ciocnire suplimentară în timpul unei perioade, care să apară într-un anumit moment al mișcării se au în vedere următorii pași:

- a) Se alege multiplicatorul perioadei forței perturbatoare r
- b) Se stabilesc coeficienții de restituire R și R_1 ai ciocnirilor
- c) Se determină greutatea vibratorului
- d) Se determină intervalul în care poate fi δ pentru momentul respectiv
 $u \delta \in (\delta_{min}, \delta_{max})$
- e) În cazul stabilității mișcării se determină amplitudinea forței percutante necesare $Q_0 \in (\delta_{min} \cdot mg, \delta_{max} \cdot mg)$

3. SIMULĂRI ȘI EXPERIMENTE

3.1. Modelul cinematic al mecanismului bielă manivelă

Pentru a verifica experimental modelul matematic al ciocnirii unui vibrator cu un limitator s-a considerat un vibrator mecanic de tip bielă manivelă, la care se pot determina parametrii cinematici atât din punct de vedere teoretic cât și prin simulare [66], [67]. O dată determinată mișcarea vibratorului se poate determina forța perturbatoare pentru următorul element legat de vibrator.

Se consideră un vibrator de tip bielă manivelă, la care se studiază vibrațiile pe direcția verticală. Modelul mecanic simplificat al vibratorului este prezentat în figura 3.1.1.a , iar cel echivalent din punct de vedere cinematic este arătat în figura 3.1.1.b.

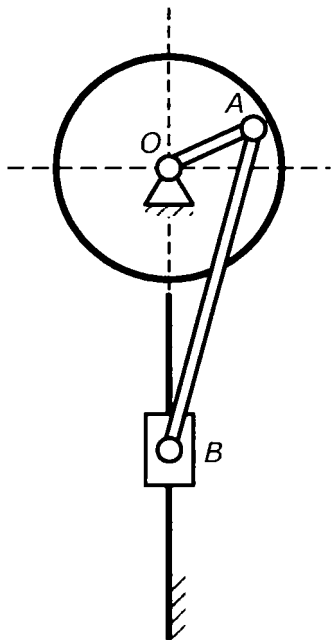


Fig. 3.1.1.a Modelul mecanic al vibratorului tip bielă manivelă

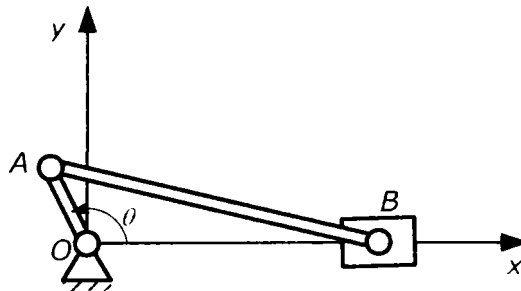


Fig. 3.1.1.b Modelul cinematic echivalent

Modelul cinematic este compus din următoarele componente:

- Manivela OA care are lungimea $r=25\text{ mm}$

- Biela AB de lungime $l=85 \text{ mm}$

Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ în jurul unei axe perpendiculare în O pe planul mecanismului, iar culisa B a bielei AB se deplasează tot timpul mișcării pe axa Ox.

Pentru determinarea parametrilor cinematici se impune o condiție geometrică: proiecția punctului A pe axa Oy este aceeași pentru cele două bare. În acest caz rezultă relația:

$$r \cdot \sin \omega t = l \cdot \sin(\widehat{ABO}) \quad (3.1.1)$$

Astfel se poate scrie legea de mișcare a punctului B față de sistemul de referință:

$$x = r \cdot \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t} \quad (3.1.2)$$

Pentru o frecvență de 10 Hz se reprezintă în fig. 3.1.2 legea de mișcare a punctului B. Se observă că aceasta este aproape periodică, plecând de la punctul cel mai îndepărtat de sistemul de axe ajunge la distanța minimă de 60 mm.

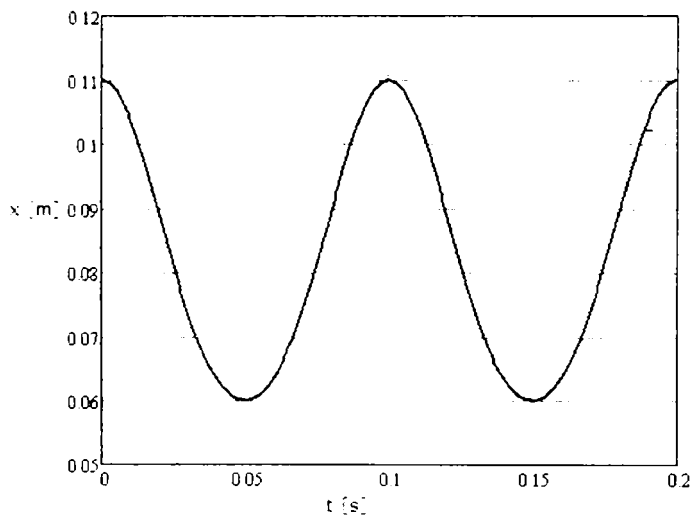


Fig. 3.0.2 Legea de mișcare pentru o frecvență de 10 Hz

Deoarece punctul B execută mișcare de translație pe axa Ox, viteza acestui punct, considerând viteza unghiulară constantă $\omega = \text{const}$, devine prin derivarea relației (3.1.2):

$$v = -\omega \cdot r \cdot \sin \omega t - \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \sin 2\omega t}{2 \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}} \quad (3.1.3)$$

Care se mai poate scrie:

$$v = -\omega \cdot r \cdot \sin \omega t \cdot \frac{(\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t} + r \cdot \cos \omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}} \quad (3.1.3')$$

Din ecuația (3.1.3') se poate determina momentul în care viteza este nulă, adică momentul în care punctul B își schimbă direcția de deplasare, ajungând la extremități. Aceasta se întâmplă atunci când $\sin \omega t = 0$, adică $\omega t = k \cdot \pi$, unde $k = 0, 1 \dots n$. În figura 3.1.3 se trasează diagrama vitezei punctului B pentru o frecvență constantă de 10 Hz.

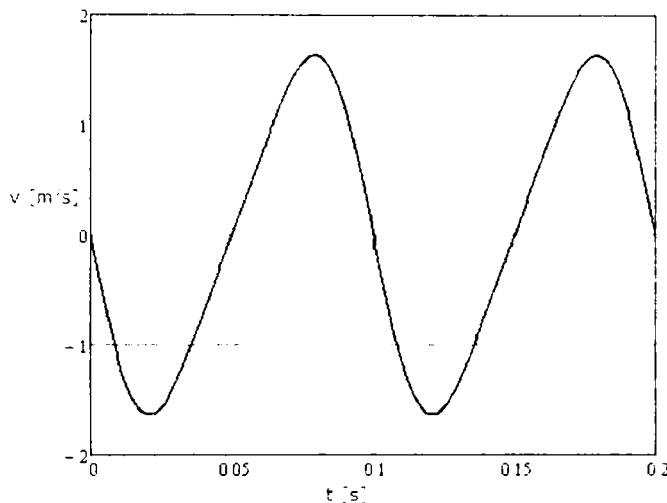


Fig. 3.0.3 Viteza pentru o frecvență de 10 Hz

Accelerația punctului B se obține prin derivarea relației (3.1.3) și are forma:

$$a = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos\omega t - \frac{4 \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos 2\omega t \cdot (l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t) + \omega^2 \cdot r^4 \cdot \sin^2 2\omega t}{4 \cdot (\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t})^3} \quad (3.1.4)$$

Care mai poate fi scrisă:

$$a = -\omega^2 \cdot r \cdot \frac{4 \cdot (r \cdot \cos 2\omega t + \cos \omega t \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}) \cdot (l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t) + r^3 \cdot \sin^2 2\omega t}{4 \cdot (\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t})^3} \quad (3.1.4')$$

În figura 3.1.4 se reprezintă grafic accelerația punctului B pentru o frecvență de 10 Hz.

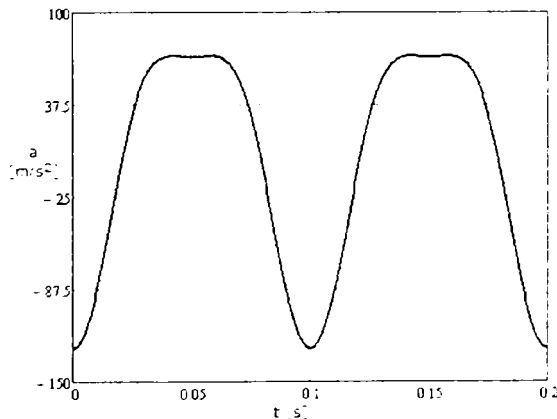


Fig. 3.0.4 Accelerația pentru o frecvență de 10 Hz

Se observă că atunci când punctul B se apropie de originea sistemului O accelerația rămâne aproximativ constantă, fiind mai mică la valoare decât atunci când punctul B se găsește la cealaltă extremitate.

3.2. Simularea mișcării mecanismului bielă manivelă

Pentru simularea mișcării mecanismului de tip bielă manivelă s-a realizat în SolidWORKS [68] un model constituit din următoarele componente în mișcare realizate din polimetilmetacrilat:

1. manivelă (fig. 3.2.1) echivalentă barei OA, A fiind locul în care se introduce un știft care trece și prin manivelă.
2. bielă (fig. 3.2.2) corespunzătoare barei AB
3. bară de ghidaj (fig. 3.2.3), cu scopul de a menține capătul B al manivelei în mișcare rectilinie pe axa Oz (corespunzătoare axei Ox din modelul cinematic)

Pe lângă elementele mobile mecanismul mai conține și elemente fixe, rigide, care asigură funcționarea mecanismului:

- ghidaj care permite pentru bara de ghidaj doar mișcare de translație
- suportul pentru susținerea motorului
- limitatorul care nu este folosit decât în cazul modelului fizic, simularea fiind făcută fără ciocnire în scopul de a determina dacă forța perturbatoare este armonică, sau se poate aproxima ca o armonică.

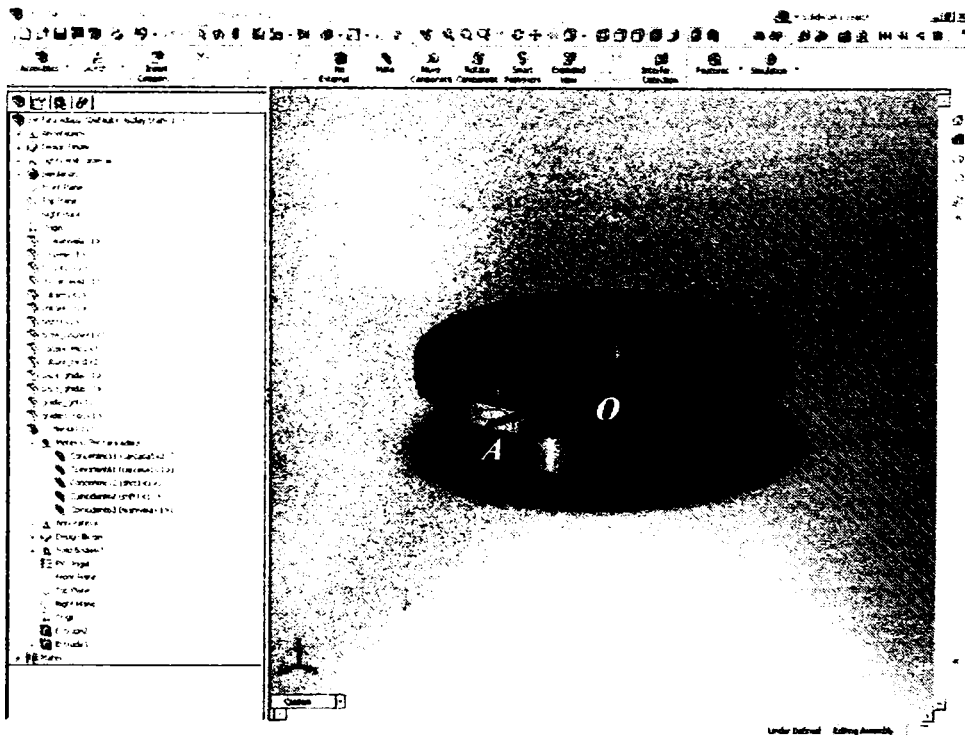


Fig. 3.2.1 Manivelă

Elementul motor al mecanismului, biela, are următoarele caracteristici fizice:
Masa = 25 g

$$\text{Volum} = 18805,57 \text{ mm}^3$$

$$\text{Suprafața} = 7877,15 \text{ mm}^2$$

Axele de inerție respectiv momentele de inerție în raport cu centrul de greutate sunt:

$$I_x = (1,00, 0,00, -0,01) \quad J_x = 4379,38 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_y = (-0,01, 0,00, -1,00) \quad J_y = 4443,44 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_z = (0,00, 1,00, 0,00) \quad J_z = 7781,69 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Astfel momentul de inerție față de centrul de greutate al manivelei va fi [69]:

$$J_0 = \frac{J_x + J_y + J_z}{2} = 8302,255 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Pentru ca mecanismul realizat în SolidWorks să funcționeze la fel ca și cel studiat teoretic s-a considerat un capăt al bielei cu o suprafață cilindrică, astfel încât tot timpul mișcării un punct al ei să fie în contact cu bara de ghidaj, care execută mișcare de translație, care în punctele de contact are de asemenea o suprafață cilindrică. Astfel, tot timpul mișcării se pot determina parametrii cinematici ai mișcării punctului B care rezultă din simulare. Punctul B va fi considerat situat pe axa Oz a mecanismului tot timpul mișcării. În mișcare segmentul AB se va modifica foarte puțin, prin mutarea punctului B pe axa Oz, pe curba de contact a bielei cu bara de ghidaj.

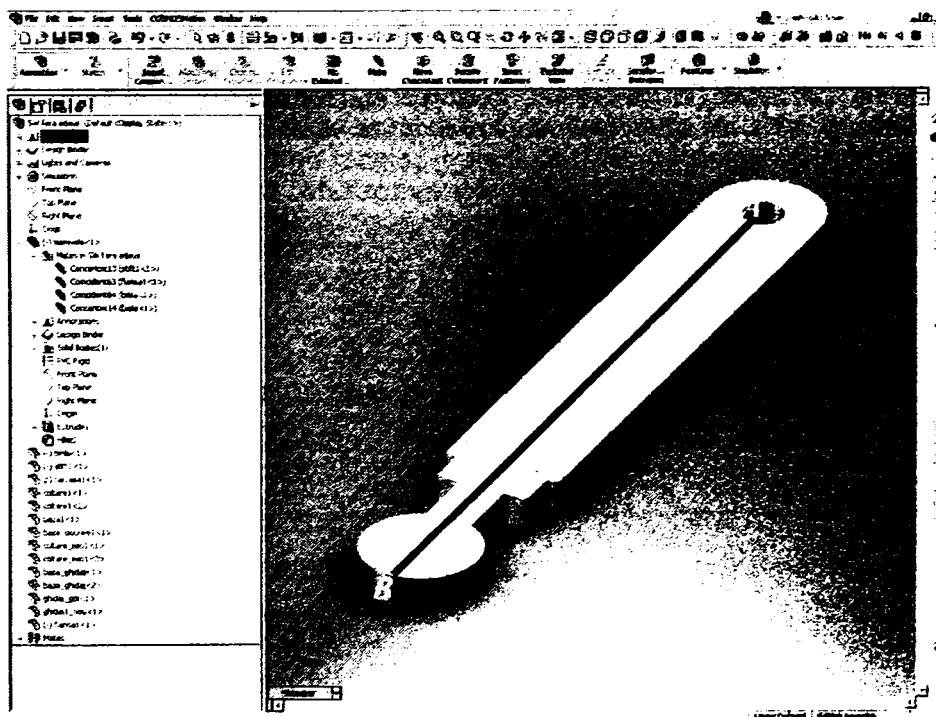


Fig. 3.2.2 Bielă

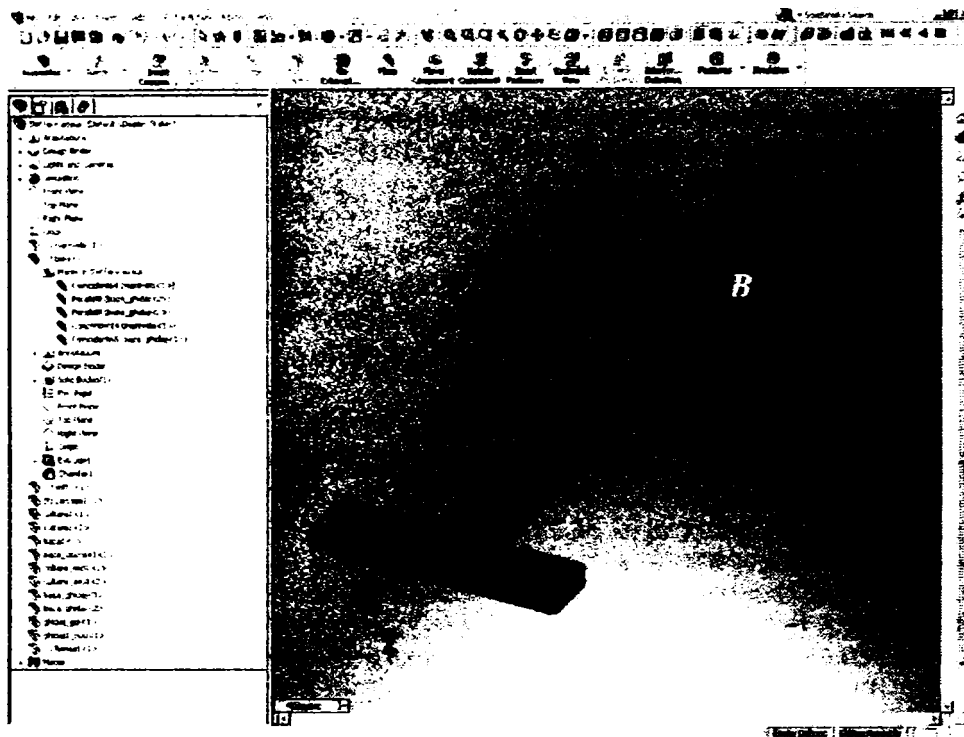


Fig. 3.2.3 Bară de ghidaj

Mecanismul din fig. 3.2.4 s-a realizat cu constrângeri geometrice pentru a se putea efectua simularea lui în diferite regimuri de funcționare. Astfel tot timpul mișcării biela și bara de ghidaj rămân în contact, bara de ghidaj execută doar mișcare de translație, biela și manivela sunt în contact printr-un știft care are un joc mic. S-au impus condiții de paralelism, concentricitate, tangență sau coincidență pentru fiecare parte componentă a mecanismului. Aceștia i s-au calculat următoarele caracteristici:

$$\text{masa} = 383,83 \text{ g}$$

$$\text{Suprafața} = 162939,07 \text{ mm}^2$$

$$\text{Volum} = 294529,95 \text{ mm}^3$$

Axele principale de inerție și momentele de inerție mecanice față de centru de greutate:

$$I_x = (-0,00, 0,20, 0,98) \quad J_x = 946783,21 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$$

$$I_y = (-0,01, -0,98, 0,20) \quad J_y = 3532176,32 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$$

$$I_z = (1,00, -0,01, 0,00) \quad J_z = 3540494,85 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$$

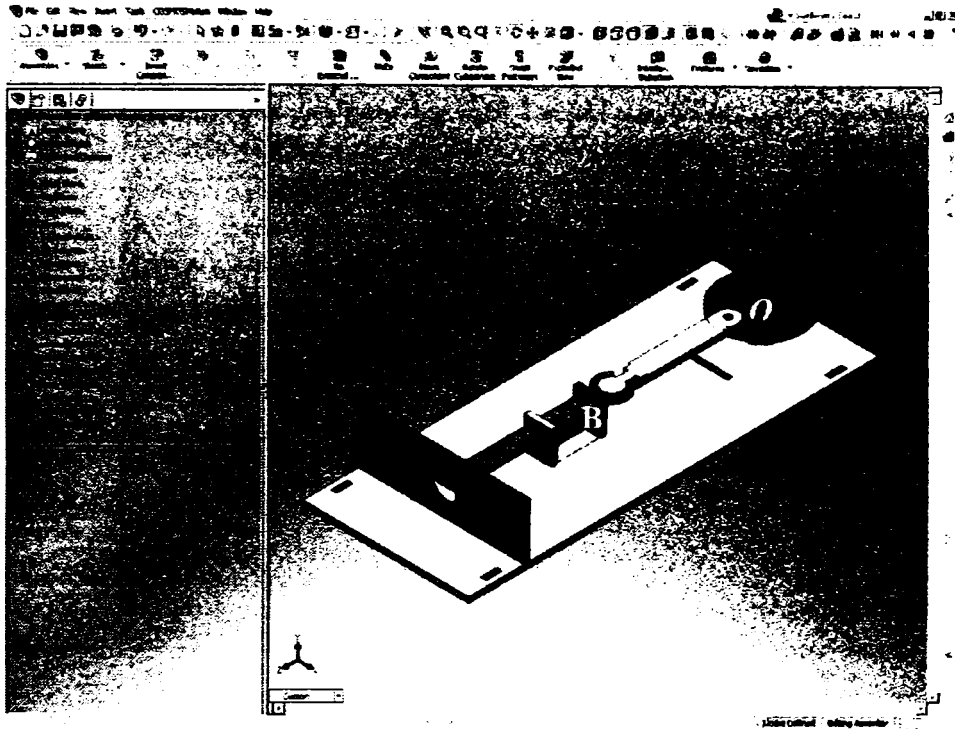


Fig. 3.2.4 Mecanismul realizat în SolidWORKS

Simularea în CosmosMotion s-a realizat considerând sistemul internațional pentru unitățile de măsură (fig. 3.2.5.a) și s-a ținut cont de greutatea proprie a mecanismului prin introducerea accelerației gravitaționale pe direcția verticală (fig. 3.2.5.b)

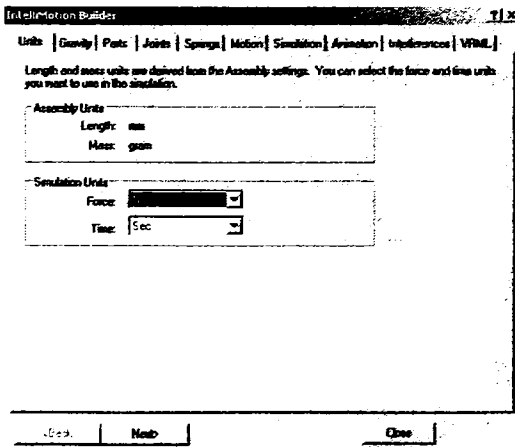


Fig. 3.2.5.a

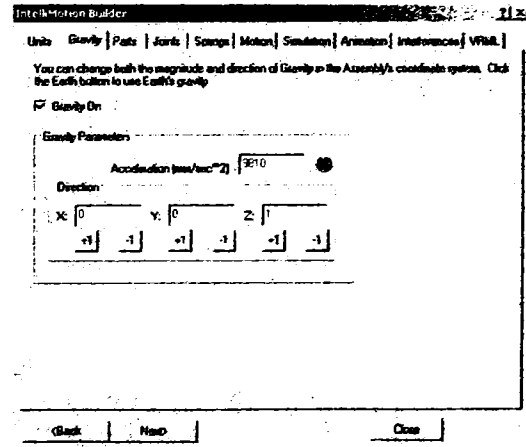


Fig. 3.2.5.b

Următoarea etapă în simularea mișcării a constat în definirea părților în mișcare și a celor care nu execută mișcare. Aceasta s-a realizat conform datelor din fig. 3.2.6.

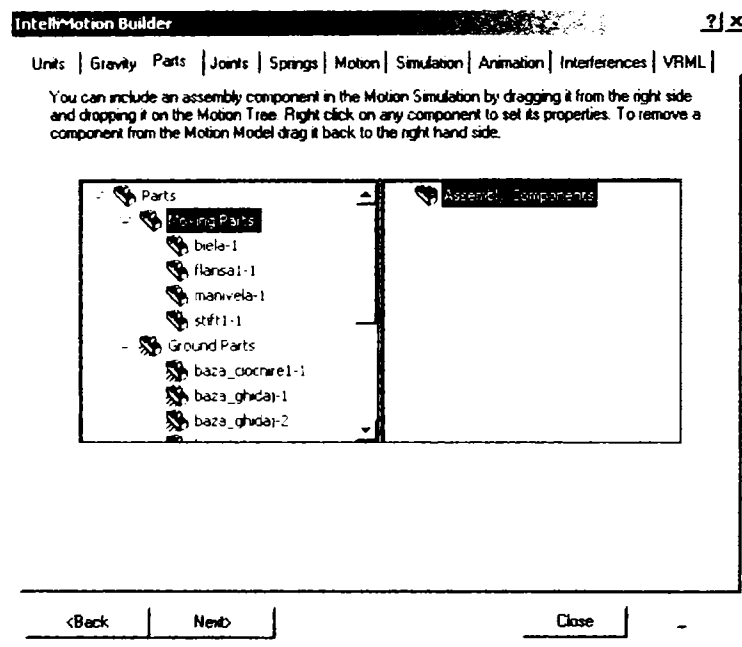


Fig. 3.2.6. Componentele mecanismului care sunt în mișcare

Datorită constrângerilor date mecanismului în SolidWorks nu a fost necesar să se adauge alte constrângeri sau arcuri, următoarea etapă fiind definirea mișcării (fig. 3.2.7). Aceasta este o rotație după o axă dată bielei (denumită flanșă în simulare), cu viteză unghiulară constantă, celelalte elemente ale mecanismului urmând mișcarea în funcție de legături.

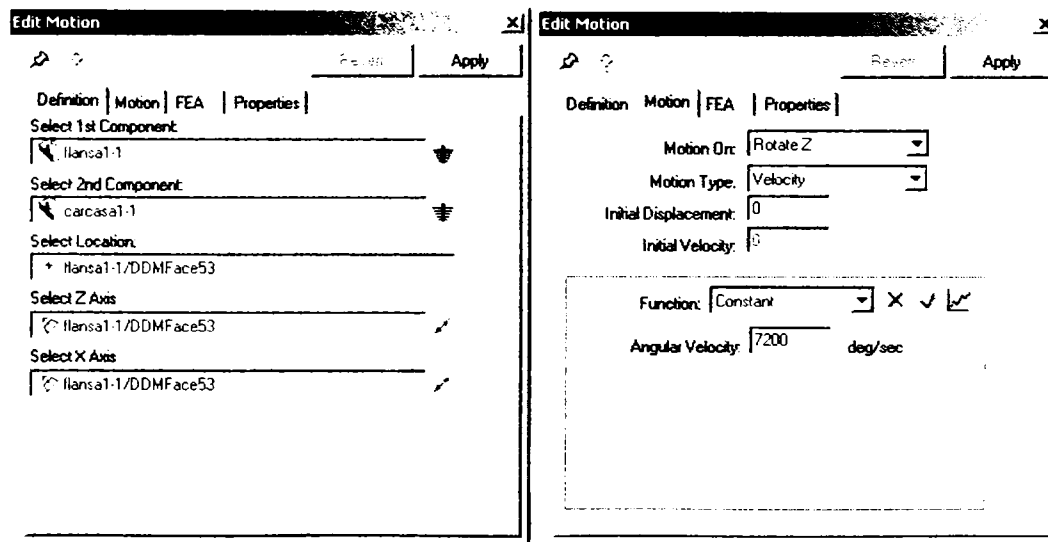


Fig. 3.2.7. Definirea mișcării elementului motor

Pentru determinarea parametrilor cinematici ai capătului bielei s-au declarat următoarele:

- pentru determinarea deplasării (fig. 3.2.8.a) s-a ales sistemul de referință („baza de ciocnire” printr-o muchie față de care se execută mișcarea) respectiv elementul motor (o muchie a barei de ghidaj denumită în program „bielă”);
- pentru determinarea vitezei s-a considerat fața barei de ghidaj care este situată în planul xOy (fig. 3.2.8.b)
- pentru determinarea accelerația s-a ales fața barei de ghidaj situată în planul xOy (fig. 3.2.8.c).

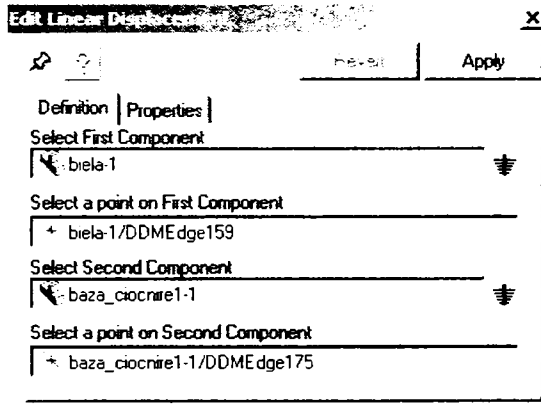


Fig. 3.2.8.a

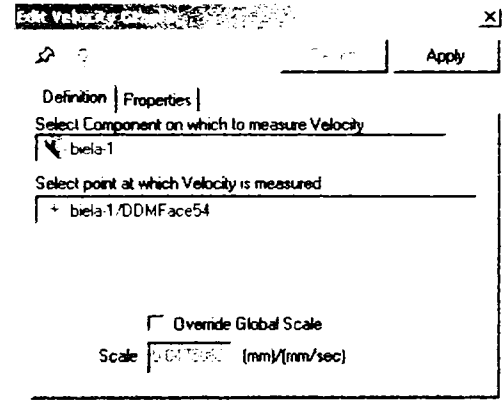


Fig. 3.2.8.b

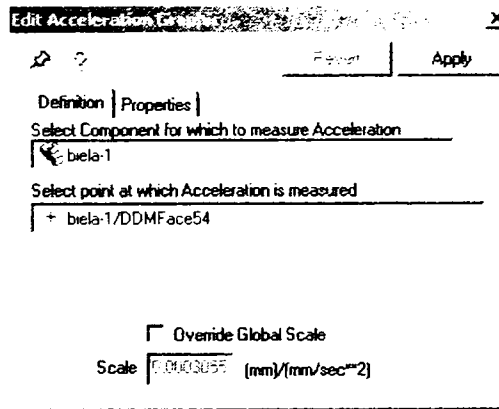


Fig. 3.2.8.c

Fig. 3.2.8. Declararea componentelor sistemului de mișcare

În fig. 3.2.9. se arată modelul simulat în CosmosMotion, care conține atât legăturile cât și contactele respectiv mișcările fiecărui element component al mecanismului. Astfel bielă execută mișcare de rotație, manivela are o mișcare plan paralelă cu un capăt al ei executând translație datorită legăturii cu bara de ghidaj.

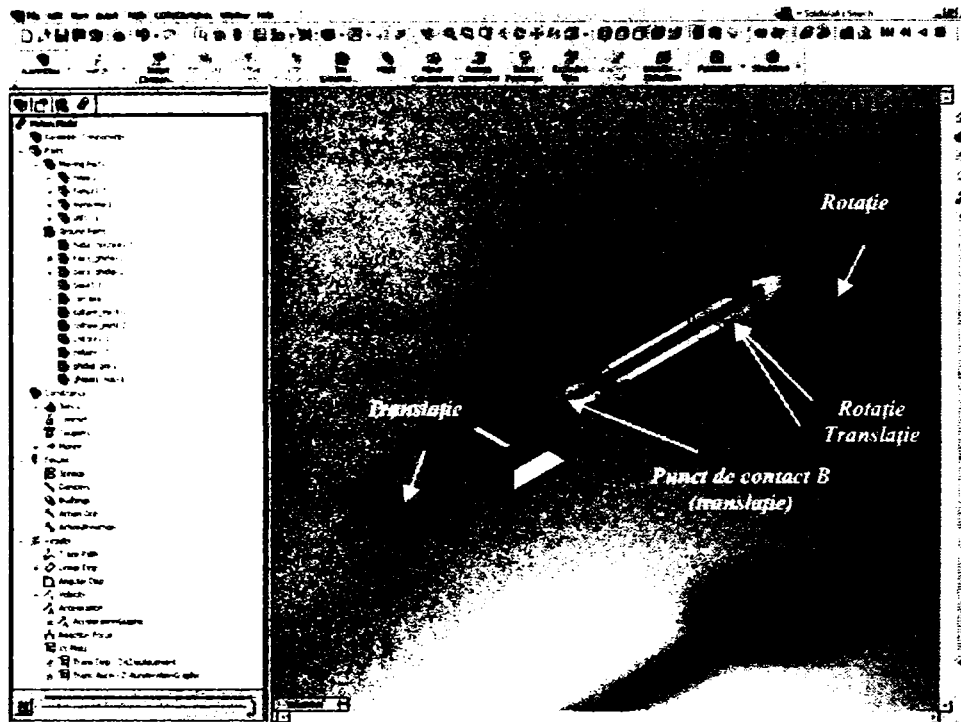


Fig. 3.2.9. Simularea mecanismului în CosmosMotion

În figura 3.2.10 se arată rezultatele care apar în urma simulării. S-a considerat necesar să se reprezinte doar deplasarea, viteza și accelerația unei suprafețe de pe bara de ghidaj pe direcția verticală (axa Oz), mișcarea pe celelalte direcții fiind o mișcare parazită datorită legăturilor, respectiv inerției.

S-a simulat în SolidWorks, modulul CosmosMotion mișcarea sistemului bielă manivelă în două cazuri:

- fără adaosuri de greutate care să influențeze mișcarea mecanismului;
- față de mecanismul inițial s-a adăugat o masă de 300g pentru a se observa dacă apar modificări în legile de mișcare respectiv viteză și accelerație.

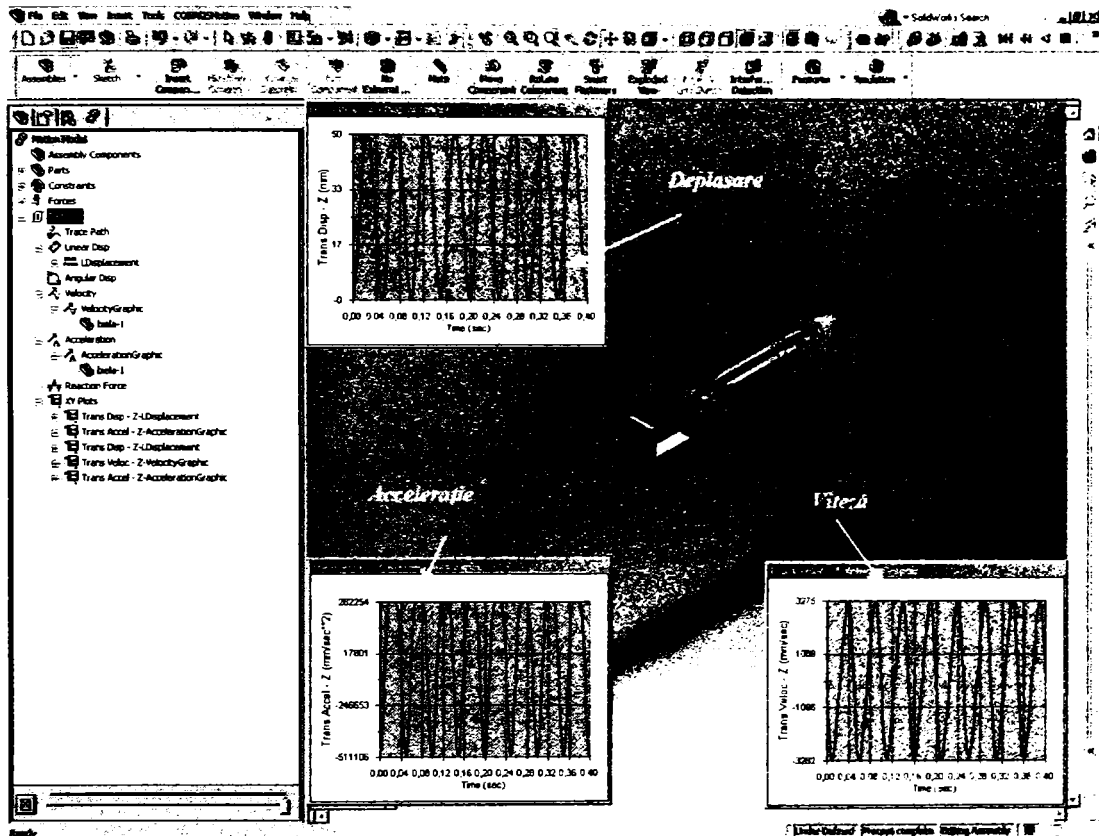


Fig. 3.2.10. Rezultatele simulării

Pentru determinarea cât mai exactă a influenței greutății asupra parametrilor cinematici ai mecanismului s-a considerat o masă suplimentară de 300 g atașată barei de ghidare. Astfel s-au putut compara rezultatele simulării cu cele calculate teoretic. În fig. 3.2.11 se arată mecanismul cu masa suplimentară, care are următoarele caracteristici:

$$\text{masa} = 683,83 \text{ g}$$

$$\text{Suprafața} = 166491,07 \text{ mm}^2$$

$$\text{Volum} = 306049,95 \text{ mm}^3$$

Centrul de greutate:

$$x = -37,94 \text{ mm}$$

$$y = -343,20 \text{ mm}$$

$$z = -593,95 \text{ mm}$$

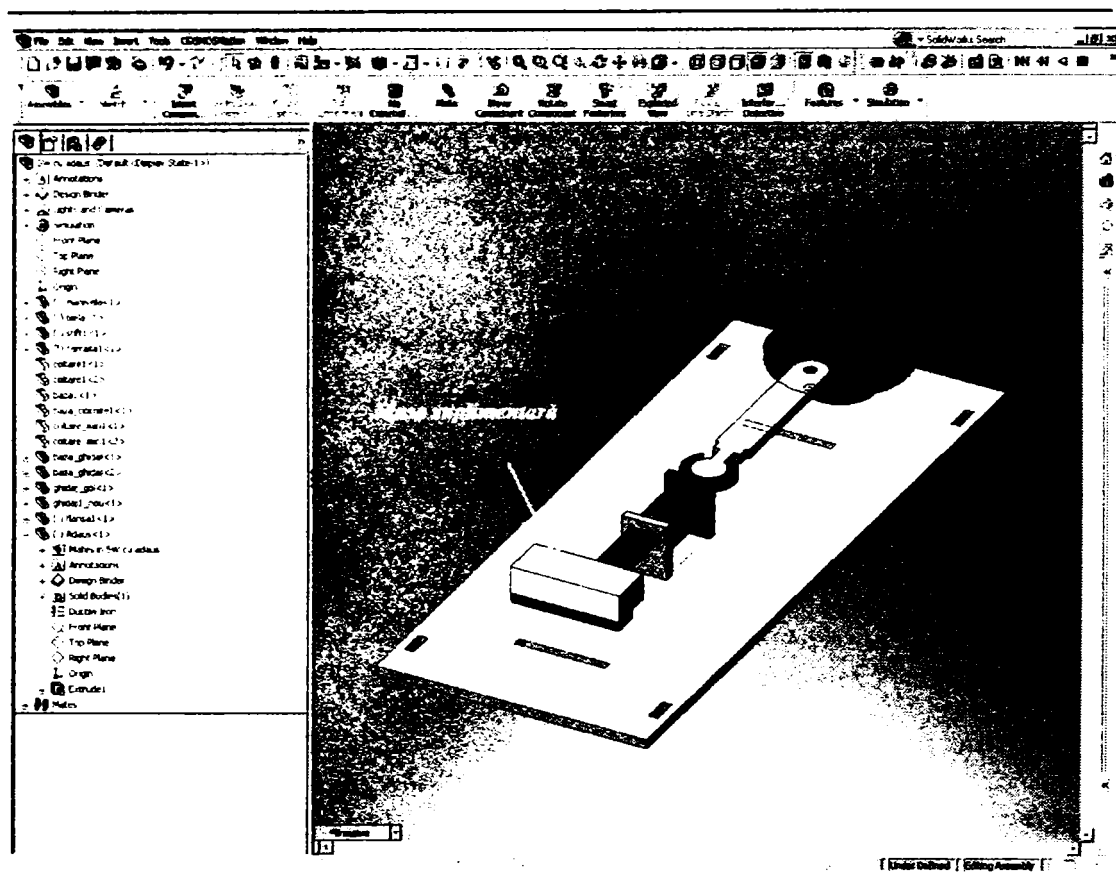


Fig. 3.2.11. Mecanismul simulat cu o masă suplimentară de 300 g

3.2.1. Rezultatele simulării mecanismului

În urma simulării mecanismului în CosmosMotion s-au obținut grafice a căror date s-au exportat în fișiere *.csv, compatibile cu Microsoft Office Excel. Acestea au fost apoi prelucrate pentru a se determina deplasarea, viteza respectiv accelerația punctului de contact față de sistemul de referință ales, asemănător celui din modelul teoretic.

Pentru o cât mai mare acuratețe a rezultatelor s-a realizat studiul pentru diferite frecvențe ale motorului care angrenează mecanismul. Aceste frecvențe au fost de 5 Hz, 10 Hz respectiv 20 Hz. Studiul s-a realizat pentru a determina efectul greutateii asupra mișcării mecanismului prin diferențele între parametrii cinematici ai celor două mișcări: simulată și determinată din punct de vedere cinematic.

În figura 3.2.1 se reprezintă grafic deplasarea punctului de contact B al bielei. Se observă că deplasarea determinată teoretic are aceeași alură cu cea rezultată prin simulare de aceea s-a considerat necesar să se determine diferența între cele două mișcări, reprezentate în fig. 3.2.2.

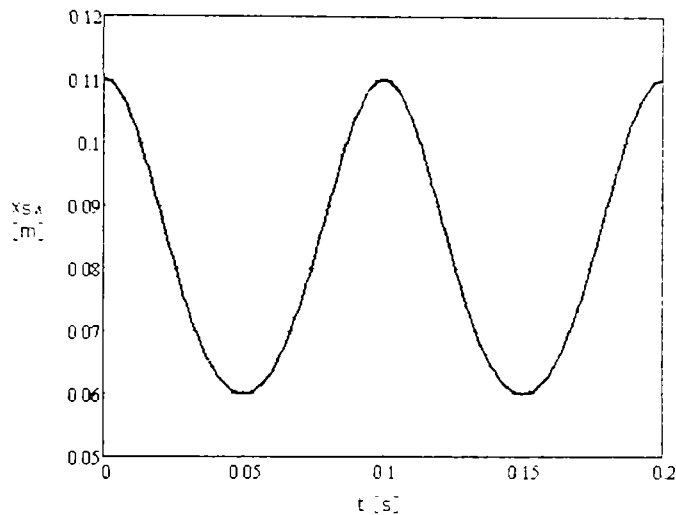


Fig. 3.2.1 Legea de mișcare a mecanismului simulat la frecvență de 10 Hz

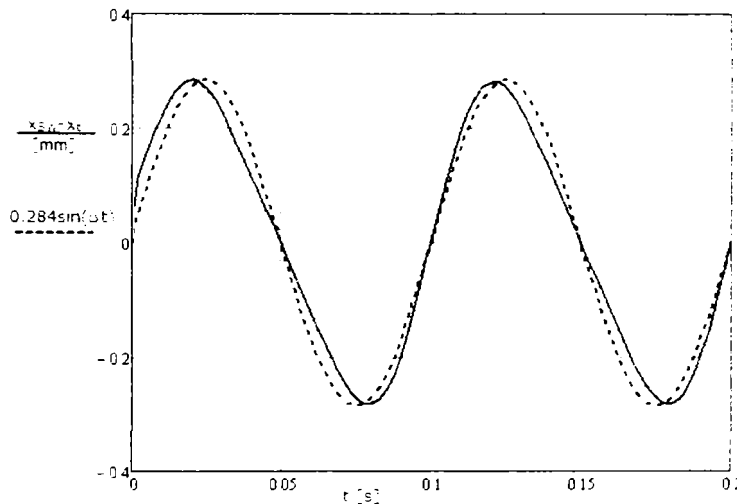


Fig. 3.2.2 Diferența între legea de mișcare a mecanismului simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

După cum se observă din fig. 3.2.2 diferențele între simulare și calculul teoretic sunt foarte mici, de nivelul zecimilor de milimetri, ceea ce nu este esențial pentru ingineri. De asemenea se observă că diferența este periodică, perioada fiind egală cu cea a motorului. În simulare s-a considerat că în moment inițial biela și manivela sunt pe aceeași axă. Se observă că în ambele cazuri ajunge în pozițiile extreme în același interval timp. De asemenea se observă că se poate aproxima foarte bine diferența cu o armonică de amplitudine 0,284 mm.

În figura 3.2.3 se trasează viteza simulată a punctului B față de sistemul de axe considerat. Se observă că, la fel ca și în cazul deplasării, este aproape suprapusă peste cea calculată teoretic. Astfel, în figura 3.2.4 se arată diferențele între viteza simulată și cea calculată teoretic.

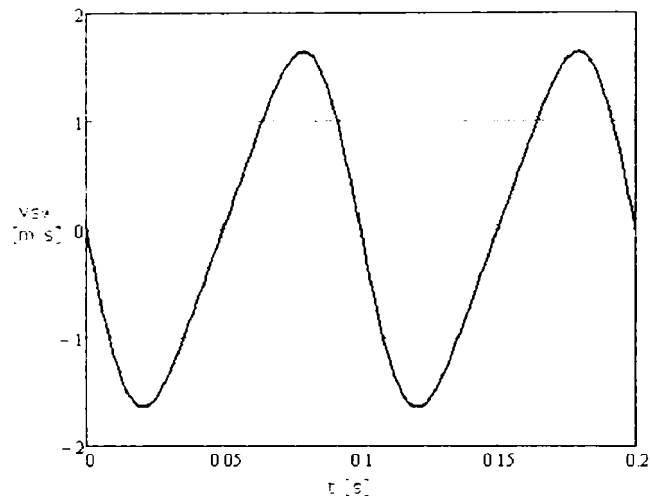


Fig. 3.2.3 Viteza mecanismului simulat la frecvență de 10 Hz

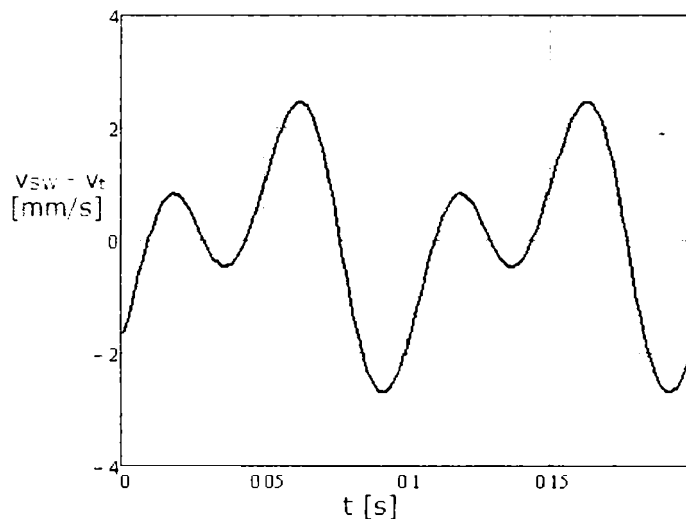


Fig. 3.2.4 Diferența între viteza mecanismului simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

Din fig. 3.2.4 se observă că diferența de viteză este sub 3 mm/s, ceea ce se poate neglija. De asemenea se poate vedea faptul că în urcare viteza mecanismului obținută prin simulare este mai mică, explicabilă prin faptul că mecanismul tinde să-și păstreze starea de repaus, începând să se miște mai încet decât în modelul teoretic, apoi ajunge la o viteză maximă în coborâre, atunci când pe lângă mișcarea motorului mai este angrenat și de greutatea proprie.

În figura 3.2.5 este reprezentată accelerația mecanismului simulat pentru o frecvență de 10 Hz. Se observă că atât pentru simulare cât și pentru calculul teoretic este o armonică turtită în partea de sus. Această turtire a graficului apare în momentul în care biela ajunge la un unghi $\pm \Delta t$. În acele puncte se poate scrie:

$$\cos(2\pi \pm \Delta t) = 0, \sin(2\pi \pm \Delta t) = \Delta t, \cos(\pi \pm \Delta t) = 0, \sin(\pi \pm \Delta t) = \Delta t$$

Astfel relația (3.1.4) în acest domeniu devine

$$a = -\omega^2 \cdot r \frac{r^3 \cdot \Delta t^2}{4 \cdot (\sqrt{l^2 - r^2} \cdot \Delta t^2)^3}$$

Neglijând infimizezimalii de ordin superior se ajunge la valoarea accelerației în zona respectivă:

$$a = \frac{\omega r(l+r)}{l}$$

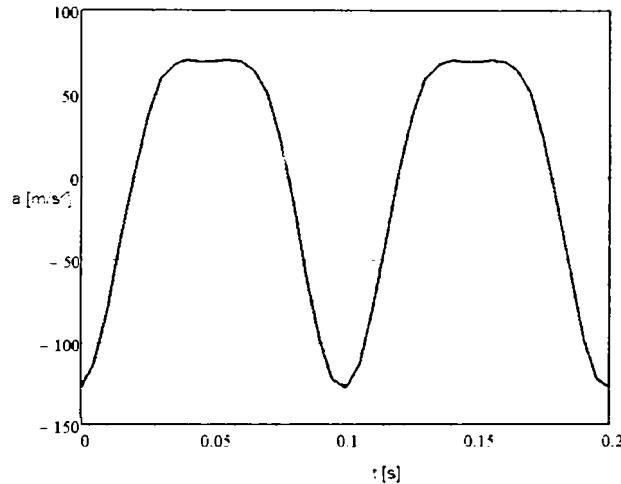


Fig. 3.2.5 Accelerația mecanismului simulat la frecvență de 10 Hz

Datorită faptului că sunt foarte apropiate ca valoare graficele accelerațiilor pentru modelul simulat și cel teoretic s-a considerat necesară reprezentarea diferențelor de accelerație în figura 3.2.6. Așa cum se observă, aceasta este foarte mică, sub 0.3 m/s², față de valorile corespunzătoare aceluiași punct acestea fiind sub 7%, din care se poate concluziona că modelul simulat, în care s-a considerat și influența greutatei proprii a mecanismului, se apropie foarte mult de cel teoretic, calculat din punct de vedere cinematic.

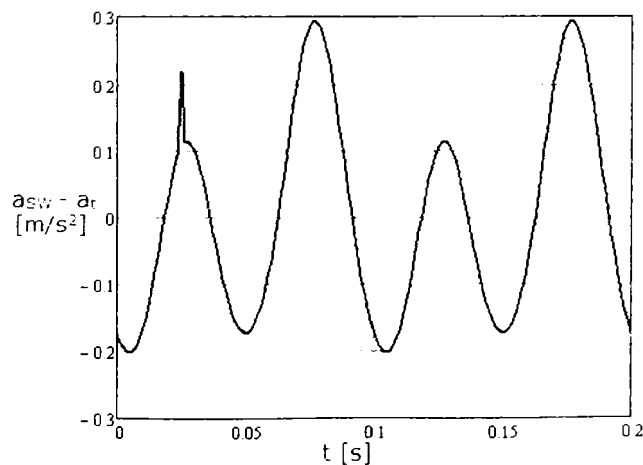


Fig. 3.2.6 Diferența între accelerația mecanismului simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

Pentru o aproximare cât mai bună a mișcării s-a determinat prin simulare legea de mișcare, viteza respectiv accelerația pentru mecanism, cu masa suplimentară de 300g. Graficele parametrilor cinematici pentru cazul teoretic, respectiv simularea cu sau fără masă suplimentară sunt suprapuse datorită scalei respectiv diferențelor foarte mici între ele. De aceea se reprezintă diferența între parametrii simulați cu masa suplimentară și cei calculați din punct de vedere cinematic.

În figura 3.2.7 se reprezintă diferența între deplasarea capătului B al bielei obținută prin simularea mecanismului cu masa suplimentară și cea teoretic calculată pentru o frecvență de 10 Hz.

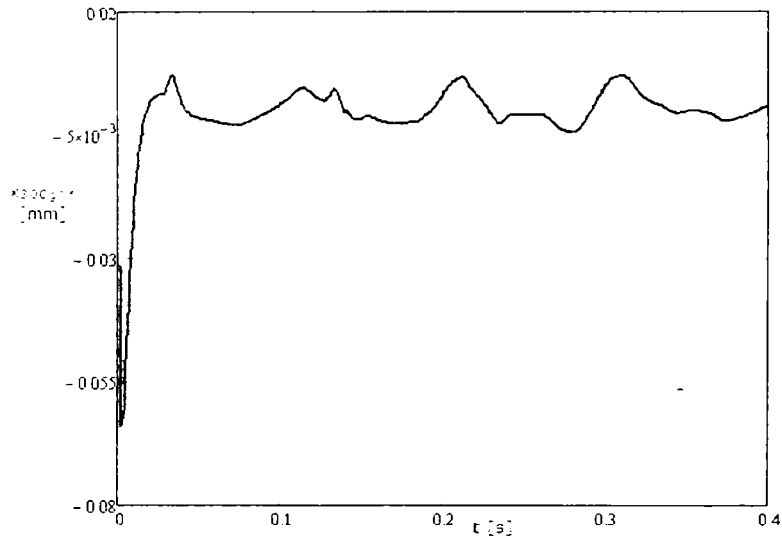


Fig. 3.2.7 Diferența între deplasarea mecanismului cu masă suplimentară simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

După cum se observă din figura 3.2.7 la începutul urcării mecanismului acesta urca mai încet în cazul simulării datorită faptului că forța de ridicare trebuie să învingă și greutatea mecanismului, acesta încearcă să-și păstreze starea de repaus. În acest caz, când greutatea suplimentară este poziționată excentric se observă că diferențele nu mai sunt periodice.

În figura 3.2.8 se reprezintă diferența între viteza mecanismului cu greutate suplimentară și cea obținută din punct de vedere teoretic. Ca și în cazul deplasării se observă că această diferență nu este periodică, prin urmare nu poate fi prevăzută comportarea exactă a mecanismului în această situație.

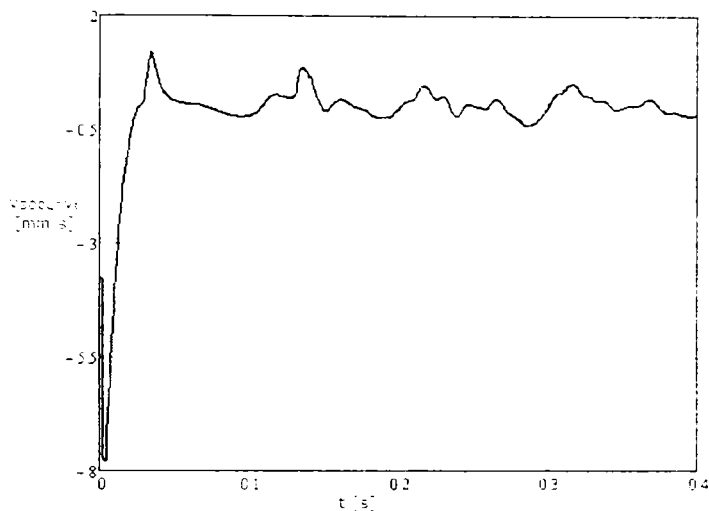


Fig. 3.2.8 Diferența între viteza mecanismului cu masă suplimentară simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

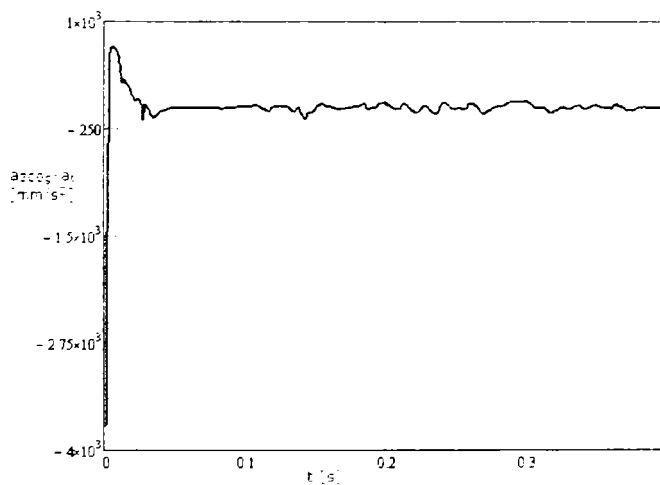


Fig. 3.2.9. Diferența între accelerația mecanismului cu masă suplimentară simulat și cea teoretică la o frecvență de 10 Hz

Din figurile 3.2.7, 3.2.8 și 3.2.9 se observă clar că diferențele majore sunt la pornirea mecanismului, deoarece forțele de inerție respectiv momentele forțelor de inerție cresc brusc de la zero în momentul inițial.

3.3. Încercări experimentale

Standul experimental este realizat conform dispozitivului realizat în SolidWORKS și simulat în CosmosMotion și conține următoarele componente:

- motor de curent continuu pentru angrenarea mecanismului

- flanșă (manivelă), acționată de axul motorului,
- știft situat excentric față de flanșă, la distanța de 25 mm care antrenează biela
- bielă, care se leagă de bara de ghidaj printr-o legătură cu joc pentru a elimina atât uzura mecanismului cât și pentru a permite ciocnirea vibratorului cu limitatorul
- bara de ghidaj, care trece printr-o cuplă cinematică de translație,
- ghidaj, care constituie cupla cinematică de translație
- limitator, parte a carcasei care prezintă o gaură pentru a se putea măsura deplasarea, viteza sau accelerația manivelei cu orice tip de instrumentație.

Simularea mecanismului precum și calculul cinematic al acestuia s-a efectuat în scopul de a verifica dacă forța percutantă se poate considera armonică. Din graficele trasate rezultă că se poate considera de formă armonică $F_0 \cos \omega t$, cu amplitudinea

$$F_0 = m_{tg} \cdot a_{max}$$

unde m_{tg} este masa tijei de ghidare,

$$\omega \text{ este viteza unghiulară de rotație a axului motorului, } \omega = \frac{\pi n}{30},$$

n este turația motorului

a_{max} este accelerația maximă obținută prin calcul teoretic și simulare.

Masa vibratorului rămâne constantă, fiind modificată doar prin adăugarea unor mase suplimentare, singurul parametru care se poate modifica fiind turația

motorului. O dată cu ea se modifică forța percutantă respectiv $\delta = \frac{F_0}{mg}$, care poate

duce la apariția unei ciocniri suplimentare, m fiind masa vibratorului. În proiectare, fără a ține seama de jocurile sau de frecările care apar datorită prelucrărilor sau la montaj, se va determina prin cunoașterea parametrului δ valoarea $u = \omega t' - \omega t_k$, adică momentul în care apare ciocnirea suplimentară, și se verifică stabilitatea

acesteia. Este evidentă condiția $\delta = \frac{F_0}{mg} > 1$ deoarece în caz contrar nu se va ridica

vibratorul de pe limitator. În calculul teoretic nu s-a ținut cont de amortizarea care apare în realitate.

Pentru experimente s-a utilizat standul proiectat și realizat de autoare precum și următoarele echipamente aflate în dotarea catedrei de Mecanică și Vibrații din Universitatea Politehnică Timișoara:

- PULSE Bruel&Kjær cu 5 canale
- accelerometru triaxial miniaturalizat Bruel&Kjær 4506B
- vibrometru laser industrial OMETRON VQ-400-A
- tahometru Bruel&Kjær MM0024 Bruel&Kjær

S-a utilizat și softul caracteristic de achiziționare de date specific PULSE-ului care permite atât transformata Fourier cât și CPB a semnalului, PULSE LabShop.

Schema de funcționare a sistemului de achiziție considerat este reprezentată în fig. 3.3.1.

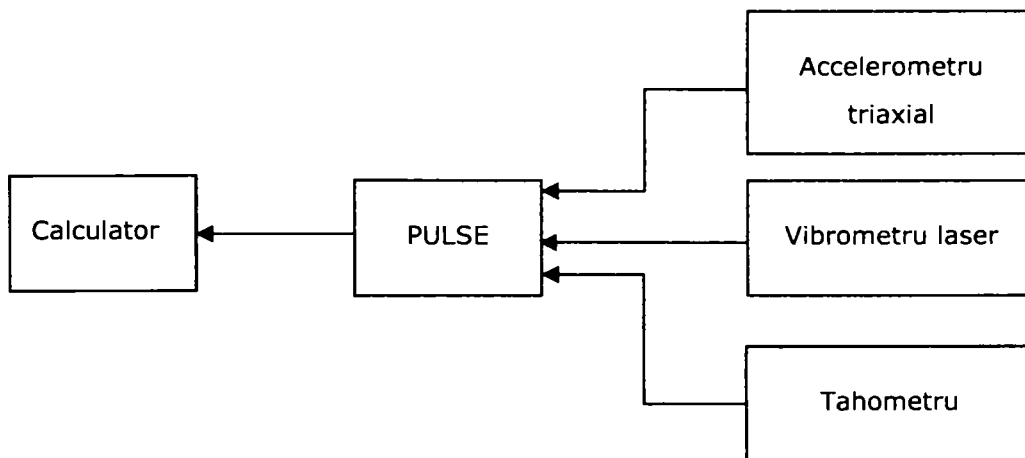


Fig. 3.3.1. Schema de achiziție a semnalelor

În figura 3.3.2 se reprezintă standul experimental în timpul măsurărilor, cu evidențierea componentelor principale.

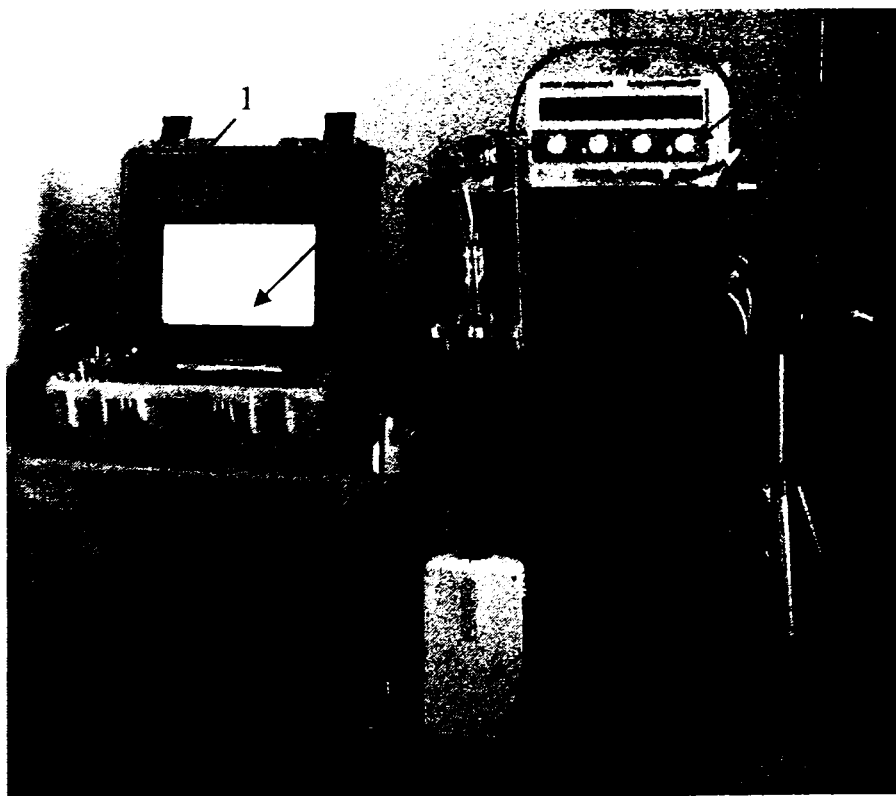


Fig. 3.3.2. Standul experimental în timpul măsurărilor

Standul din fig. 3.3.2 cuprinde următoarele elemente:

1. Sistem de achiziție PULSE cu 5 canale
2. Laptop pentru stocarea datelor și programarea sistemului de achiziție

3. Sursă de curent continuu cu posibilitate de reglare a tensiunii și a intensității
4. Standul experimental special creat pentru măsurarea vibrațiilor și a ciocnirilor care apar în funcționarea unui vibrator respectiv apariția ciocnirilor suplimentare.

5. Vibrometru Laser OMETRON VQ-400-A cu factorul de scară $\frac{5 \text{ mm}}{V}$ pentru

acceleerații mai mici decât $3200 \frac{m}{s^2}$ și factor de scară $\frac{25 \text{ mm}}{V}$ pentru acceleerații

mai mici decât $16000 \frac{m}{s^2}$. Pentru ca acesta să poată măsura parametrii

cinematici ai unei regiuni foarte mici a standului experimental s-a aplicat o bandă reflectorizantă pe locul care prezintă interes în măsurare.

6. Tahometru Photoelectric Tachometer Probe – MM0024 cu transmițător/receptor infraroșu, domeniu de operare până la 800 mm și 20000 rotații/minut, care nu are contact fizic cu elementul testat.

Pentru a observa vibrațiile care apar la motor s-a montat un accelerometru triaxial miniaturalizat Bruel&Kjæer prin intermediul unui magnet (fig. 3.3.3).

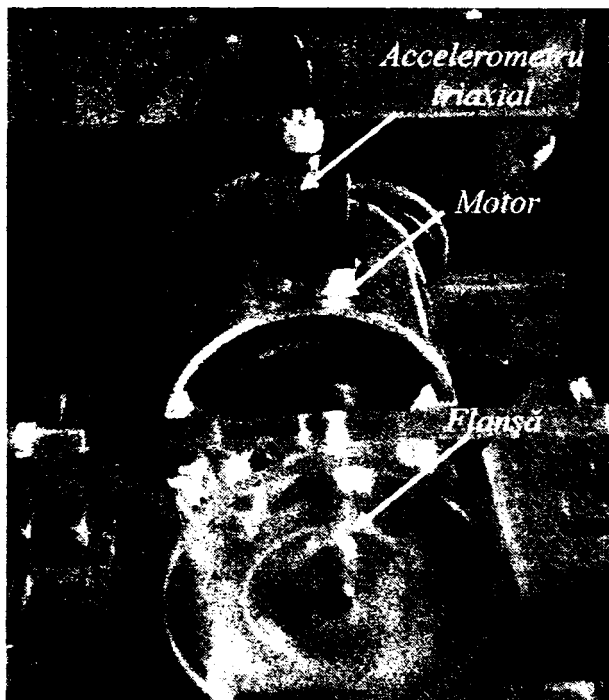


Fig. 3.3.3 Montarea accelerometrului triaxial

În momentul aplicării magnetului s-a observat modificarea turației motorului, o concluzie imediată fiind: Câmpul magnetic influențează funcționarea motorului, deci poate conduce la apariția unui regim diferit de cel optim proiectat. De asemenea forța percutantă la regimul de lucru scade în cazul dispozitivelor datorită scăderii

turației, la aceiași parametrii electrici (tensiune, intensitate). De aceea se recomandă în proiectarea vibratoarelor să se țină seama atât de forța percutantă necesară, cât și de mediul în care se lucrează, deoarece pot apărea ciocniri suplimentare aleatoare într-o perioadă, care pot conduce la instabilitatea utilajului, deci la distrugerea părților componente.

În figura 3.3.4 se arată poziționarea vibrometrului laser în timpul măsurătorilor.



Fig. 3.3.4 Poziționarea vibrometrului laser

În figurile 3.3.5.a-c se arată deplasarea, viteza respectiv accelerația unei regiuni foarte mici a standului experimental măsurate cu vibrometrul laser. Aceste măsurări s-au realizat la o turație constantă a motorului, frecvența acestuia fiind de 3,67 Hz.

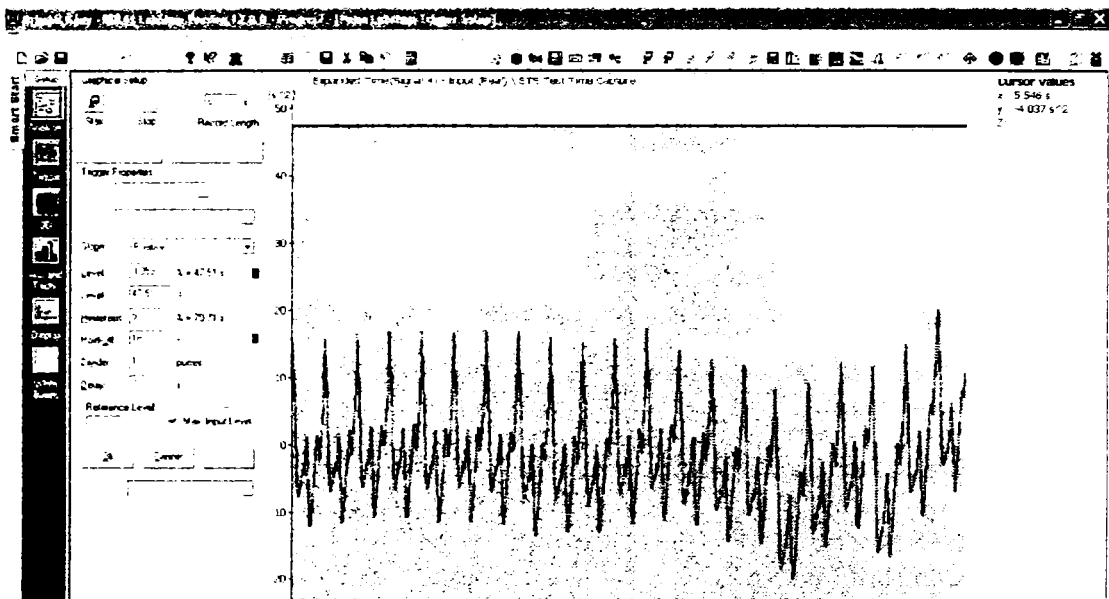


Fig. 3.3.5.a Deplasarea măsurată cu vibrometru laser

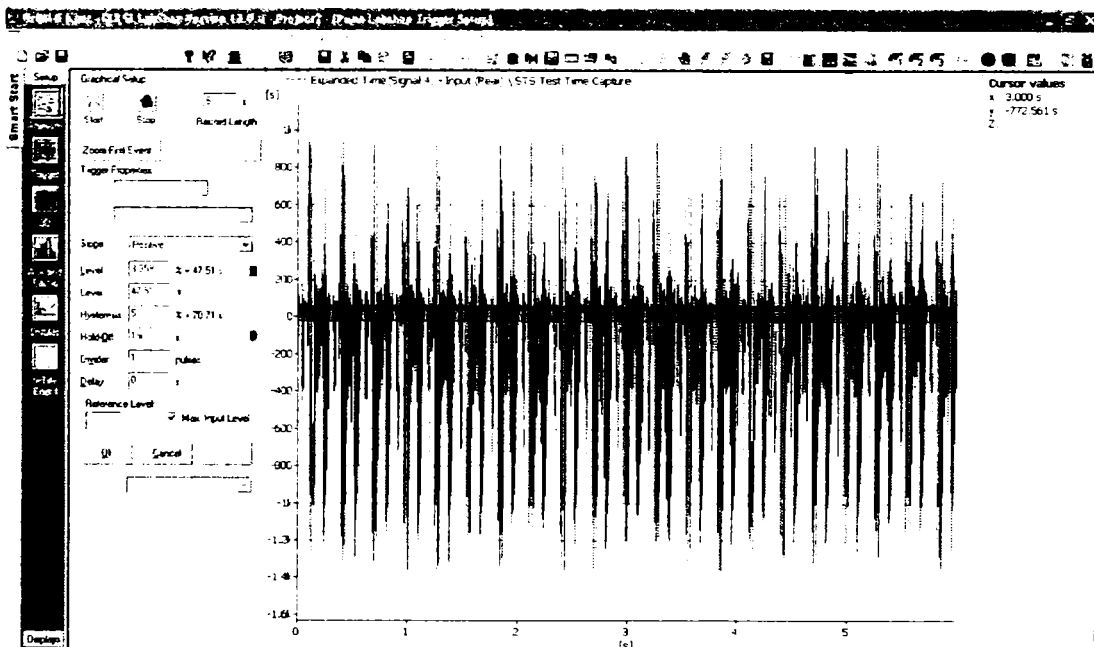


Fig. 3.3.5.b Viteza măsurată cu vibrometru laser

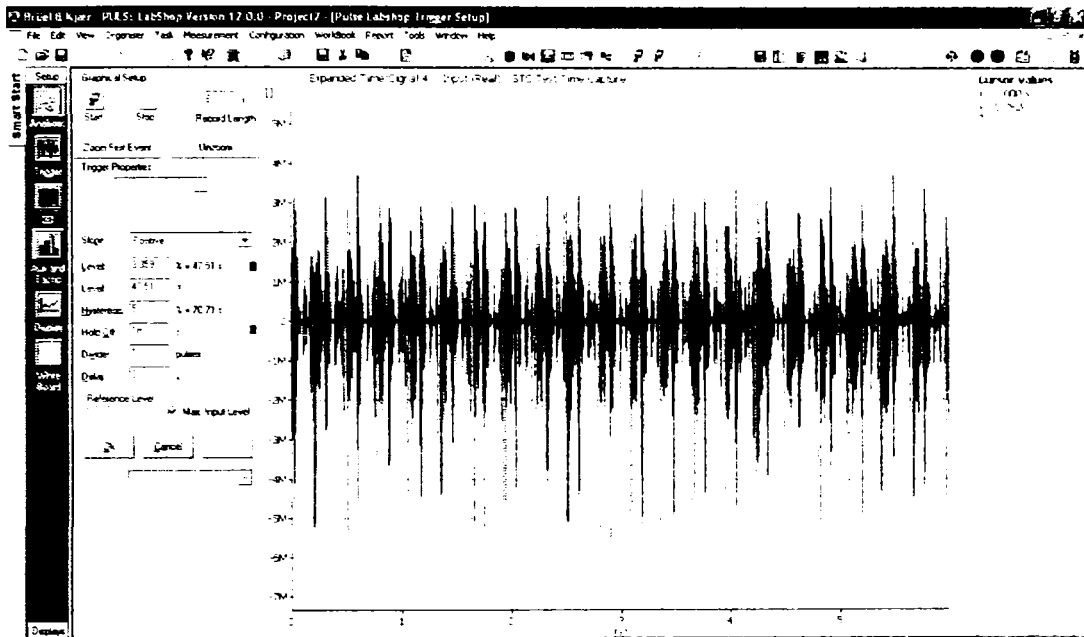


Fig. 3.3.5.c Accelația măsurată cu vibrometru laser

În figura 3.3.6 se arată datele experimentale obținute pentru măsurarea amplitudinii accelerației regiunii măsurate prin intermediul vibrometrului laser.

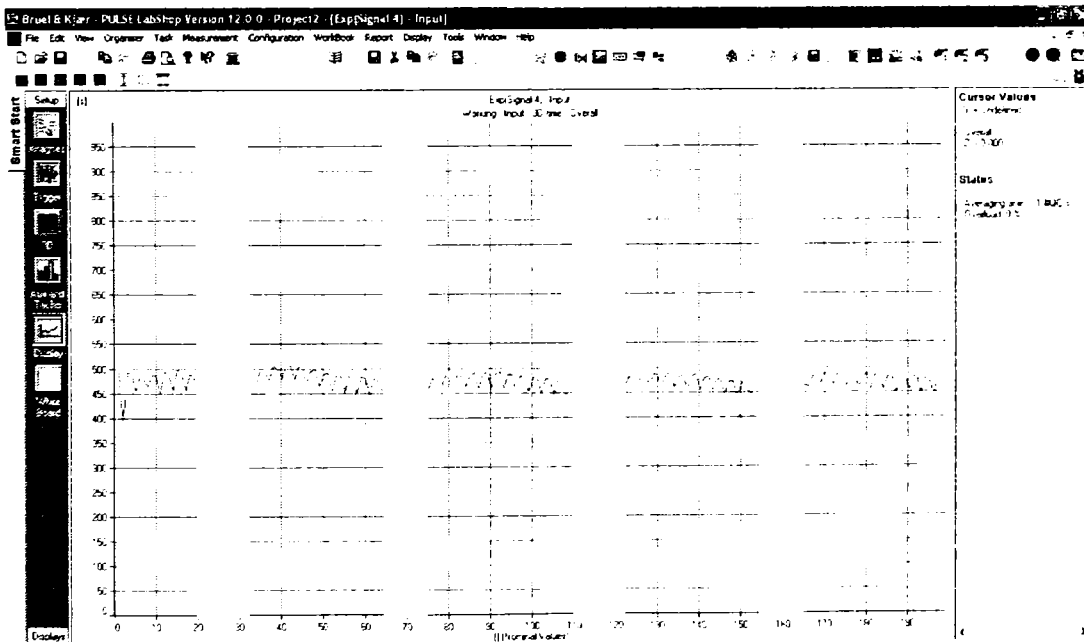


Fig. 3.3.6 Amplitudinea accelerației măsurată cu vibrometru laser

Se observă că în anumite perioade de timp apare o distorsiune a funcționării vibratorului care poate conduce la deteriorarea rapidă a unor piese din ansamblu. Aceasta a apărut atât datorită magnetului permanent care susținea accelerometrul

cât și datorită imperfecțiunilor de asamblare a mecanismului și sunt periodice. În proiectare nu se poate ține seama de influența unor factori perturbatori externi precum magnetii sau existența unui câmp magnetic puternic, sau chiar de jocurile sau strângerile care apar la asamblarea pieselor din mecanism. Fiecare piesă are toleranța ei, SolidWORKS a considerat piesele „perfecte”, fără abateri de la cotă, ceea ce nu se poate realiza în practică. Piesele prelucrate la cotele date prin tăiere laser, electroeroziune sau alte procese tehnologice controlate de calculator au și ele de asemenea unele toleranțe foarte mici.

Pentru a vedea mai bine vibrațiile motorului s-a folosit atât filtrul FFT (Fast Fourier Transform) cât și cel CPB (Constant Percentage Bandwidth) pentru analiza timp-frecvență. Astfel în figura 3.3.7 se reprezintă accelerația înregistrată pe motor pentru direcția verticală. Se poate observa în stânga partea de analiză CPB, iar în partea din dreapta semnalul FFT.

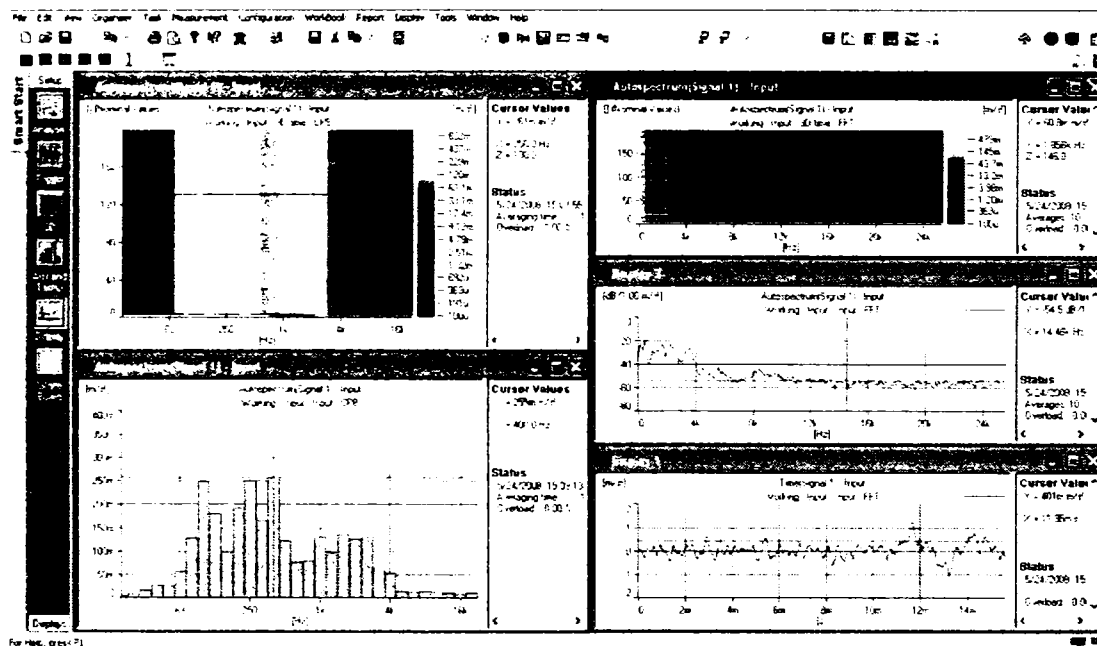


Fig. 3.3.7 Accelerațiile înregistrate pe direcția verticală

Din fig. 3.3.7 se observă că vibrațiile sunt mici, accelerațiile maxime sunt de ordinul 479 mm/s^2 și banda de frecvență pe care vibrează motorul mecanismului este de joasă frecvență, cu accelerațiile maxime în domeniul 0-500 Hz. Accelerația maximă este în jurul frecvenței de 400 Hz.

4. CONCLUZII ȘI CONTRIBUȚII

4.1. Concluzii

În urma cercetărilor efectuate se pot sintetiza următoarele concluzii:

1. S-a efectuat un studiu bibliografic amplu pe baza analizei unui număr de 69 lucrări științifice, sistematizându-se stadiul actual privind comportarea neliniară a unor sisteme mecanice cu discontinuități datorate ciocnirii.
2. S-a studiat legea de mișcare a unui vibrator care se ciocnește de un limitator în funcție de viteza unghiulară constantă a forței perturbatoare, element de noutate în domeniu, neexistând în literatura de specialitate decât trasarea intuitivă a acestora. S-a efectuat atât pentru o ciocnire plastică (cel mai ușor caz), cât și pentru o ciocnire reală.
3. Se evidențiază că nu poate exista o ciocnire perfect elastică suplimentară în timpul unei perioade deoarece mișcarea este stabilă pentru o forță perturbatoare mai mică decât greutatea vibratorului, ceea ce presupune că nu este suficientă pentru a mișca vibratorul
4. Se demonstrează că nu poate apărea o ciocnire suplimentară în timpul unei perioade exact la jumătatea perioadei.
5. S-a elaborat o metodologie pentru proiectarea vibratoarelor astfel încât să nu apară ciocniri suplimentare într-o perioadă, sau, la nevoie să apară în momentul în care este esențial, singurele modificări necesare fiind la masa vibratorului respectiv la amplitudinea forței percutante.
6. Pentru a verifica apariția unei ciocniri suplimentare într-o perioadă s-a construit un stand experimental constând dintr-un mecanism tip bielă-manivelă. Acesta a fost proiectat, executat și s-au determinat parametrii cinematici atât din punct de vedere teoretic, prin simulare și practic. Din punct de vedere cinematic și din simulare s-a urmărit accelerația mecanismului la capătul bielei pentru a se observa dacă se poate aproxima cu o funcție armonică. S-au executat încercările pe mecanism și s-a observat că apar ciocniri suplimentare în timpul unei perioade, însă acestea provin din jocurile care există între subsansamblurile standului. Ca o direcție următoare este verificarea modelului matematic prin utilizarea unui vibrator electromecanic.
7. O contribuție esențială de asemenea este realizarea unui program de calculator care reprezintă grafic legea de mișcare a vibratorului pentru orice coeficient de restituire. Acesta determină inițial raportul între forța perturbatoare și greutatea vibratorului (δ) apoi stabilitatea mișcării în funcție de momentul de apariție a ciocnirii suplimentare. În funcție de stabilitate se alege momentul în care apare ciocnirea suplimentară, astfel se determină δ care va fi folosit în trasarea legii de mișcare respectiv a vitezei vibratorului. Acest program a fost realizat doar

pentru trasarea legii de mișcare și a vitezei pentru diferite valori ale vitezei unghiulare.

8. S-a proiectat și realizat un stand experimental în vederea măsurării parametrilor cinematici. Acesta stand a fost proiectat în SolidWorks și simulat în CosmosMotion pentru a vedea dacă modelul teoretic rezolvat din punct de vedere cinematic este mult diferit față de cel simulat din punct de vedere dinamic. S-a observat că erorile sunt mici și deci, se poate folosi modelul cinematic în studiul unor mecanisme de tip bielă manivelă.
9. S-au efectuat măsurări în care am evidențiat apariția unei ciocniri suplimentare în timpul unei perioade, ciocniri care sunt datorate jocurilor între piesele standului experimentat.

4.2. Contribuții originale

Contribuțiile originale cele mai importante ale autoarei constau în:

1. Studiul teoretic al comportării sistemelor vibropercutante cu discontinuități datorate ciocnirilor periodice și al ciocnirilor suplimentare;
2. Modelarea matematică și fizică a sistemelor vibropercutante ce prezintă neliniarități de funcționare în regim dinamic staționar stabil;
3. Studiul mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu limitator, de tip bielă manivelă, cu ciocniri în domeniul elastic - plastic;
4. Utilizarea programelor de calcul automat cu softuri specializate și adaptarea acestora în vederea realizării de cercetări parametrice complete privind sistemele vibropercutante de tip bielă-manivelă;
5. Stabilirea condițiilor analitice și numerice în care se realizează parametrizarea funcționării sistemelor vibropercutante;
6. Determinarea parametrilor analitici și funcționali în vederea asigurării regimurilor staționare și stabile de mișcare a sistemelor vibropercutante cu ciocniri suplimentare;
7. Realizarea unui model de laborator pentru încercări experimentale în cazul sistemelor vibropercutante cu ciocniri periodice, validându-se astfel rezultatele obținute prin studiile teoretice și prin modelarea numerică a mișcărilor vibropercutante.

Bibliografie

1. Faik S. și Witteman H.: Modeling of Impact Dynamics: A Literature Survey. 2000 *International ADAMS User Conference*.
2. Goldsmith W.: *Impact*. London : Edward Arnold Publishers, 1960.
3. Brach R.M.: *Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions*. New York : John, Wiley & Sons, 1991.
4. Maugin G.A.: *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
5. Lubliner J.: *Plasticity Theory*. New York : Macmillan Publishing Company, 1990.
6. Nagaev R.F.: *Mechanical Processes with Repeated Attenuated Impacts*. World Scientific Publishing Company, 1998. ISBN-978-9810235048.
7. ***. *Comportări neliniare caracteristice ciocnirilor din sistemele vibropercutante*. Contract 96/2005 : Grant Academia Română, 2005. Colaborator.
8. Luca Gh.: *Generatoare de vibrații*. Timișoara: Ed. Politehnica Timișoara, 2004. ISBN 973-625-151-9.
9. Silaș Gh. și Brîndeu L.: *Sisteme vibropercutante*. București: Ed. Tehnică București, 1986.
10. Caplin A.: *Vibroudarnye mehanizmy. Avtotransizdat*. Moskva, 1953.
11. Savinov O.A. și Luskin I.A.: *Vibracionnyji metod pogruženja svay i ego primenenija v stroitelstve*. Gosstroizdat. Leningrad, 1960.
12. Silaș Gh., Păunescu M, Groșanu I., Brîndeu L. și Gligor Tr.: *Vibropercutor pentru înfigerea elementelor în pamânt. Bul. Șt. și Tehnic al Inst. Polit. Timișoara (serie noua), Tom 9(23), fasc. 2*. Timișoara, 1964, pg. 321-329.
13. Vlădeanu Al. și Vlădeanu Gabriela. *The vibration rammer modeling used in constructions*. SISOM, 2005.
14. Păunescu M.: *Folosirea vibrațiilor la executarea unor lucrări de fundații*. București : Ed. Tehnică București, 1966.
15. Massarsch K.R. și Fellenius B.H.: *Deep vibratory compaction of granular soils. Chapter 19 in Ground Improvement-Case*. [ed.] B. Indranatna și C. Jian : Elsevier publishers, 2005. pg. 633 - 658.
16. Aksenov P.N.: *Nekotorye voprosy teorii mašin litejnogo proizvodstva. Mașghiz*. Moskva, 1962.
17. Kobrinskij A.E.: *Mehanizmy s uprugimi svjazjami*. Nauka, Moskva, 1964. p. 390.
18. Moskvitin A.I.: *Électriqueskie mașiny vozvratno-postupatel'nye dviženija*. Izdatel'istvo Akademij Nauk, Moskva-Leningrad, 1950, p. 140.

19. Ballantyne C.K., Black N.M. și Finlay D.P.: Use of the Schmidt test hammer to detect enhanced boulder weathering under late-lying snowpatches. *Earth Surface Processes and Landforms* 15(5). 1990, pg. 471-474.
20. Fedulov A. I.: Breaking of the rock by dynamic load of impact pneumatic hammer. *Proceedings of the Third Congress of the International Society for Rock Mechanics. International Society for Rock Mechanics.* 1974, pg. 1395-1398.
21. ***. *Analiza dinamică și optimizarea regimurilor de funcționare ale ciocanelor vibropercutante.* Contract 111/2003, 105/2004 : Grant Academia Română, 2003-2004. Colaborator.
22. Dunaev P.A.: *Pnevmatičeskie moloty.* Moskva : Mašgiz, 1959.
23. Gončareviči I.F. și Sergeev P.A.: Vibracionnye mašiny v stroitelstve. *Gosstroizdat.* Moskva, 1963, p. 379.
24. Bratu P și Drăgan N.: Analiza traiectoriilor punctelor organului de lucru la transportoarele orizontale cu forță perturbatoare inerțială unidirecțională. *Buletinul celei de-a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice.* Timișoara, 1996, Vol. II, ISSN 1224-7529.
25. Brîndeu L., Chiriac A., Baltă Adriana și **Nagy Ramona**: *Motion Regimes on Plane Sieves Driven by Crank and Connecting Rod Assembly.* Godollo : Kutatasi es fejesztesi Tanacskozás Nr. 29, 2005. pg. 154-160. ISBN 963-611-423-4.
26. Dubrovskij A.A.: Vibracionnaja tehnika v sel'iskom hozjajstve. *Mašinostroenie.* Moskva, 1968.
27. Povidolja V.A.: Rasčet i konstruirovanie vibracionnyh pitateley. *Gosudarstvennoe Naučnotehničeskoe Izdatel'istvo Mašinostrojtel'noj Literatury.* Moskva, Kiev , 1982.
28. Spivakovskij A.O. și alții. *Transportirujuščie mašiny.* Moskva : Izdatel'stvo Mašinostroenie, 1968.
29. Dănoiu Al.: Influența percuțiilor asupra procesului tehnologic și a duratei de funcționare la morile cu ciocane. *Buletinul celei de-a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice.* Timișoara, 1996, Vol. II, ISSN 1224-7529.
30. ***. *Researches concerning the separation and sorting by vibrations of some granular materials.* România-Ungaria : Contract bilateral, 2005-2006. Colaborator.
31. Ševčenko S.M.: Dviženie i udary v élektreičeskih apparatah avtomatičeskogo upravlenija. *Énergija.* Moskva, 1979, p. 142.
32. Kecs W. și Teodorescu P.P.: *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică.* București : Ed. Acad R.S.R., 1970.
33. Kauderer H.: Über nichtlineare Schwingungen mit unestetiger Erregung. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv).* 1959, Vol. 28, pg. 154-167.
34. Abramov B.M.: Kolebanija prjamozubnyh zbačjatyh koles. *Izdovedanie Harkovskogo Universiteta.* Harkov, 1968, p. 176.
35. Bojarinov V.K. și Neimark Ju.I.: O kolebanijah vala v šarikopodšipnike. *Dinamika Mašin, Sb. Statej, Mašinostroenie, Moskva.* 1966, pg. 343-352.
36. Belolipetkaja L.V. și Korčemnij L.I.: Dinamika Mašin, Sb. Statej, *Mašinostroenie.*

Moskva, 1966, pg. 203-215.

37. Kobrinskij A.E. și Stepanenko Ju.A.: Periodičeskie dviženija v sledjaščem gidroprivode s zazorom v obratnoj svjazi. *Gidroavtomatika*, Nauka, Moskva, 1965, pg. 64-68.

38. Kobrinskij A.E. și Stepanenko Ju.A.: *K dinamike nelinejnogo elementa tipa „Vilka“*,. Moskva: Dinamika Mašin, Sb. Statei, Mašinostroenie, 1966. pg. 167-174.

39. Paget L.: *Vibration in steam turbine buckets and damping by impacts*. Engineering 143, 1937.

40. Asfar K.R. și Akour S.N. Optimization Analysis of Impact Viscous Damper for Controlling Self-Excited Vibrations. *Journal of Vibration and Control*. 2005, Vol. 11, No. 1, pg. 103-120.

41. Brîndeu L., Bereteu L., **Nagy Ramona** și Boltoși Al.: *Dynamic models of shock damper with magnetorheological fluid*. s.l. : Buletinul "Politehnica" University of Timisora, Trans of Mechanics Special Issue, 2005. pg. 191-196. ISSN 1224-6077.

42. Brîndeu L., Boltoși Al., **Nagy Ramona** și Chiriac A.: *Shock absorber with magnetorheological fluids*. 2006 : Kutatasi es fejlesztési Tanácskozás, Godollo, Nr. 30. ISBN 963-611-437-4.

43. Chiriac A., Boltoși Al și **Nagy Ramona**: *Models of control of semi-active vehicle suspensions, realized with smart fluids*. Budapesta : The 10-th Conference on "Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies" VSDIA , 2006. ISBN 963-420-817-7.

44. Bereteu L., Boltoși Al., Chiriac A. și **Nagy Ramona**: *Constructive models for semi-active dampers using smart fluids*. s.l. : Kutatasi es fejlesztési Tanácskozás, Godollo, Nr. 31, 2007. ISBN 963-611-423-4,.

45. Boltosi Al., Biro I., Chiriac A., **Nagy Ramona** și Bereteu L.: *Decreasing of vibration level at self propelled agricultural machines using semi-active devices with magneto-rheological fluid*. 2007 : Kutatasi es fejlesztési Tanácskozás, Godollo, Nr. 31. ISBN 963-611-423-4.

46. Brîndeu L. *Considerații privind studiul mișcării mecanismelor vibropercutante*. Lucrări științifice, Seria A, Inst de Inv. Sup. Oradea, 1976-1977. pg. 29-32.

47. Brîndeu L., Chiriac A. și **Nagy Ramona**: Dynamic models in the stable motion regimes of vehicle study. *The 9-th Conference on "Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies" VSDIA, Budapesta-Ungaria*. 2004.

48. Smicală I. *Contribuții privind studiul sistemelor vibropercutante prin modelare electrică*. Timișoara : teză de doctorat, 1987.

49. Lenskij A.N., Loboda V.M. și Fabrika L.P.: Issledovanie udarnyh modelijah. *Dinamika Mašin, Izdatel'stvo Nauka*. Moskva, 1974.

50. Peterka F.: Uvod do kvitoni mechanických constav s vnitřními razy. Praha: ACADEMIA, 1981.

51. ***. *Cercetări și aplicații ale dinamicii sistemelor liniare și neliniare supuse acțiunilor vibrante și vibropercutante*. Cod CNCIS 172: Grant CNCIS Nr, 32940/2005, 2005-2006. Colaborator.

52. ***. *Dinamica și optimizarea funcționării utilajelor perforatoare percutante și rotopercutante*. 32940/2004 tema 5, 32940/2005 tema 8, 2739/2006 tema 6 : CNC SIS 148, 2003-2005. Colaborator.
53. **Nagy Ramona**, Boltoși Al, Baltă Adriana: Consideration Regarding the Impulsive Forces and Distributions in the Study of Vibroimpact. *Proceeding of the VIII - th Symposium, Acustica și Vibrațiile structurilor Mecanice, 26-27 Mai Timișoara*. 2005, pg. 177-185.
54. **Nagy Ramona** și Boltoși Al.: *Some Considerations Regarding Collision Models*. Annals of the Oradea University : Fascicle of Management and Tehnological Engineering, CD-ROM Edition, Vol V (XV), 2006. ISSN 1583-0961.
55. Brîndeu L. *Vibrații și vibropercuții. Metode și dezvoltări analitice*. Timișoara : Ed. Politehnica Timișoara, 2005.
56. Budd C., Dux F. și Cliffe A.: The effect of frequency and clearance variations on single-degree-of-freedom impact oscilators. *Journal of Sound and Vibration*. 1996, Vol. 184 (3), pg. 475-502.
57. Hogan S. J.: On the dynamics of rigid block motion with harmonic forcing. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1989, Vol. A 425, pg. 441-476.
58. **Nagy Ramona** și Brîndeu L.: *Domains of including of vibroimpact periodic regimes in relation to the possible motions*. Annals of the Oradea University: Fascicle of Management and Tehnological Engineering, 2005. 51.
59. Brîndeu L. și **Nagy Ramona**: Metodă de determinare a reacțiunilor dinamice. *Bul. Univ. Petrol-Gaze Ploiești. Vol LV Seria tehnică Nr.4*. 2003, pg. 14-17.
60. Brîndeu L. și **Nagy Ramona**: Application of Van der Pol method of slowly variable parameters in the study of non-linear vibration. *Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Tehnological Engineering, CD-ROM Edition, 12*. 2004.
61. ***. *Efectele neliniarităților în studiul vibrațiilor mediilor continue*. Cod CNC SIS 709 : Grant CNC SIS Nr, 27688/14.03.2005 tema 18, 2005-2006. Colaborator.
62. Brîndeu L., **Nagy Ramona** și Costea Gabriela: *Vibroimpact regimes of motion with supplementary collisions*. Timișoara : Trans of Mechanics, Special Issue, The XI-th International Conference on Vibration Engineering, 2005.
63. Brîndeu L. și **Nagy Ramona**: *Results and methods regarding vibroimpact motion regimes*. Iasi : Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassi, Tom LI(LIV), Supplement 1, 2005. pg. 33-41.
64. Shaw S.W. și Holmes P.J.: A periodically forced linear oscillator with impacts: chaos and long period motions. *Physical Review Letters* 51. 1983, pg. 623-626.
65. **Nagy Ramona**: *Vibroimpact regimes of motion with supplementary collisions. Stability*. Annals of the Oradea University : Fascicle of Management and Tehnological Engineering, CD-ROM Edition, Vol VI (XVI), 2007. ISSN 1583-0691.
66. Nagchaudhuri A.: Mechatronic Redesign of Slider Crank Mechanism. *Proceeding od IMECE ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition, New York, Louisiana*. 2002, pg. 1-6.

-
67. Nagchaudhuri A.: Dynamic Modeling and Analysis of a Crank Slider Mechanism. *Proceedings of ASEE 2000, St. Louis, Missouri*. 2000.
68. **Nagy Ramona**, Chiriac A., Boltosi Al., Bereteu L.: Motion simulation of a vibrating device of crank and connecting-rod type. *Analele Universității de Vest din Timișoara. Seria Fizică*, 2007, Vol. XLXI.
69. Luca Gh., Vigaru Cosmina și **Nagy Ramona**: *Mecanica. Dinamica*. Timișoara: Ed. Politehnica, 2007.

Titluri recent publicate în colecția „TEZE DE DOCTORAT” seria 9: Inginerie Mecanică

1. **Radu Ioan Tărcăet** – *Cercetări privind realizarea precurățirii și preuscării semințelor de cereale prin fluidizare cu aer la temperatura ambiantă, ISBN 978-973-625-717-9, (2008);*
 2. **Ioan Marcel Indre** – *Cercetări asupra factorilor care influențează capacitatea de aspirație a ventilatorului transversal, ISBN 978-973-625-718-6, (2008);*
 3. **Dan Ioan Stoia** – *Modelarea, dezvoltarea și testarea implanturilor pentru coloana vertebrală, ISBN 978-973-625-697-4, (2008);*
 4. **Andreea Anca Șimon** – *Considerații teoretice și experimentale privind realizarea computerizată a tiparelor, cu ajutorul manechinelor virtuale pentru design vestimentar, ISBN 978-973-625-728-5, (2008);*
 5. **Amalia-Virginia Țirdea** – *Metode și echipamente de izolare autovibratorie a pieselor mecanice, ISBN 978-973-625-740-7, (2008);*
 6. **Diana Silaghi** – *Cercetări teoretice și experimentale privind posibilitățile de verificare a energiei solare ca sursă nepoluantă, ISBN 978-973-625-743-8, (2008);*
 7. **Liliana Drăgan** – *Contribuții privind acționarea pneumatică a dispozitivelor de protezare și susținere a scheletului uman, ISBN 978-973-625-506-9, (2008);*
 8. **Marius Buzera** – *Cercetări experimentale privind realizarea automată a proceselor de prelucrare primară, ISBN 978-973-625-760-5, (2008);*
 9. **Karoly Menyhardt** – *Sistem inteligent de protezare pentru membrul superior, ISBN 978-973-625-763-6, (2008);*
 10. **Nicolae Loniș** – *Cercetări teoretice și experimentale privind cogenerarea cu motor m.a.i., funcționând cu bio-combustibil, ISBN 978-973-625-766-7, (2008).*
-



EDITURA POLITEHNICA