

# MODELE DE RECONSTRUCȚIE A MĂINII UMANE ȘI A FUNCȚIILOR SALE

Teză destinată obținerii  
titlului științific de doctor inginer  
la  
Universitatea "Politehnica" din Timișoara  
în domeniul INGINERIE MECANICĂ  
de către

**Diana-Mihaela UNGUREANU**

Conducători științifici:

Prof.univ.dr.ing. Doina DRĂGULESCU

Prof.univ.dr.ing. Nicolae ROBU

Prof.univ.dr.ing. Nicolae FAUR

Referenți științifici:

Prof.univ.em.dr.ing. Jean UEBERSFELD

Prof.univ.dr.med. Horia VERMEȘAN

Prof.univ.dr.ing. Mirela TOȚH-TASCĂU

Ziua susținerii tezei: 17 decembrie 2007

UNIV. "POLITEHNICA"	
TIMIȘOARA	
BIBLIOTECA	
nr. volum	655 406
Dulap	Lit.

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. Automatică          | 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații |
| 2. Chimie              | 8. Inginerie Industrială                    |
| 3. Energetică          | 9. Inginerie Mecanică                       |
| 4. Ingineria Chimică   | 10. Știința Calculatoarelor                 |
| 5. Inginerie Civilă    | 11. Știința și Ingineria Materialelor       |
| 6. Inginerie Electrică |   |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2007

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,  
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221  
e-mail: editura@edipol.upt.ro

# Cuvânt înainte

Pentru orice ființă umană, pierderea unei mâini atrage după sine o scădere drastică a performanțelor și un dezavantaj cosmetic evident. Înlocuirea mâinii pierdute cu o proteză care să ofere aceleași servicii reprezintă una dintre cele mai provocatoare probleme de reabilitare și inginerie medicală, știut fiind faptul că mâna umană este „cea mai performantă unealtă” sau „instrumentul instrumentelor”, cum îi spunea Aristotel.

Dezvoltarea unor sisteme artificiale care să imite corpul uman ridică probleme fascinante legate de capabilitatea acestuia de a manipula obiecte și, deși această problemă a fost investigată pe larg și multe rezultate sunt disponibile, ea este departe de a fi rezolvată. Un număr impresionant de mâini artificiale au fost dezvoltate până în prezent, popularitatea subiectului fiind demonstrată de numărul mare de universități și de centre de cercetare care l-au abordat.

Teza de față se alătură acestui efort de cercetare în încercarea de a realiza un model de proteză pentru mâna umană în cadrul Universității „Politehnica” din Timișoara. Ea prezintă toate etapele absolut necesare pentru obținerea unei proteze funcționale: modelarea cinematică și dinamică, designul protezei și principii de funcționare, analiza numerică a modelului pentru a demonstra oportunitatea realizării sale și manufacturarea propriu-zisă. Proteza rezultată este acționată hidraulic într-un mod original și este capabilă să prindă obiecte de diverse forme și mărimi.

Modelul de proteză este funcțional, fiind capabil să îndeplinească una dintre cele mai importante funcții ale mâinii umane, prehensiunea. Teza satisface imperativul interdisciplinarității tratând un subiect care necesită cunoștințe din medicină, calculatoare și mecanică.

Timișoara,  
decembrie 2007

Ing. Loredana-Mihaela UNGUREANU

Această teză de doctorat a fost elaborată pe parcursul a șase ani de cercetări asidue, cu implicarea unui număr semnificativ de persoane și de instituții, cărora le datorez vie și adâncă recunoștință. Aș dori să mulțumesc explicit și călduros doamnei prof.univ.dr.ing. Doina DRĂGULESCU, care mi-a condus cercetările și mi-a înlesnit contactul cu persoanele și cu instituțiile necesare studiului. Din nefericire, doamna profesoară ne-a părăsit atât de devreme, cu foarte puțin timp înainte de susținerea publică a acestei lucrări, lăsând un gol imens în urma sa, dar va rămâne pentru totdeauna în amintirea și în sufletul meu ca femeia deosebită și dascălul minunat care a fost.

De asemenea, doresc să mulțumesc celor doi conducători științifici, domnul prof.univ.dr.ing. Nicolae ROBU și domnul prof.univ.dr.ing. Nicolae FAUR, care mi-au oferit tot sprijinul în finalizarea prezentei teze. Nu pot să-mi uit nici familia, al cărei suport moral și material m-a ajutat să depășesc obstacole inerente unui astfel de demers. Aduc mulțumiri instituției din care fac parte, precum și colegilor din Departamentul de Automatică și Informatică Aplicată și din cadrul Bazei de Cercetare cu Utilizatori Multipli – Centrul de Modelare a Protezării și a Intervențiilor Chirurgicale asupra Scheletului Uman din cadrul Universității „Politehnica” din Timișoara. Nu în ultimul rând, datorez profunde mulțumiri prietenilor pentru înțelegerea și soliditatea de care au dat dovadă.

UNGUREANU, Loredana-Mihaela

**Modele de reconstrucție a mâinii umane și a funcțiilor sale**

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9 Nr. 15, Editura Politehnica, 2007, 283 pagini, 181 figuri, 20 tabele, 5 anexe.

ISSN: 1842-4937

ISBN: 978-973-625-571-7

Cuvinte cheie:

Model cinematic, model dinamic, model diferențial, proteze pentru mână, prehensiune, constrângeri ale mișcării mâinii, acționare hidraulică, achiziție de date, analiză FEM.

Rezumat

Această teză prezintă modul de realizare a unui model de proteză pentru mâna umană. Sunt evidențiați pașii necesari unui astfel de demers, care să conducă la un model funcțional și fiabil: modelarea cinematică și dinamică, designul protezei și principii de funcționare, analiza numerică a modelului pentru a demonstra oportunitatea realizării sale și manufacturarea propriu-zisă. Proteza rezultată este acționată hidraulic într-un mod original și este capabilă să prindă obiecte de diverse forme și mărimi. Teza este interdisciplinară, tratând un subiect care necesită cunoștințe din medicină, calculatoare și mecanică.

*Spre cinstirea memoriei distinsei doamne,  
Prof.univ.dr.ing. Doina-Maria DRĂGULESCU*

1

# CUPRINS

INTRODUCERE .....	9
1 STADIUL ACTUAL ÎN DEZVOLTAREA DE PROTEZE PENTRU MÂNA UMANĂ .....	14
1.1 Proteze sub formă de cârlig .....	15
1.2 Proteze care imită forma mâinii .....	16
1.2.1 Proteze acționate pneumatic sau hidraulic .....	20
1.2.1.1 Proteza Ultralight Hand .....	21
1.2.1.2 Proteza Shadow Hand .....	23
1.2.1.3 Mâna artificială Utah/MIT .....	25
1.2.2 Proteze acționate electric .....	25
1.2.2.1 Proteze acționate cu ajutorul tendoanelor .....	25
1.2.2.1.1 LMS Hand .....	25
1.2.2.1.2 DIST Hand .....	27
1.2.2.1.3 CyberHand .....	27
1.2.2.1.4 Proteza Stanford .....	28
1.2.2.1.5 Proteza IOWA .....	30
1.2.2.1.6 Mâna artificială Robonaut .....	32
1.2.2.2 Proteze acționate prin servomotoare integrate .....	33
1.2.2.2.1 Mâna artificială Barrett .....	33
1.2.2.2.2 Protezele DLR I și DLR II .....	34
1.2.2.2.3 Modelul SNAVE .....	36
1.3 Interfața dintre proteză și pacient .....	37
1.3.1 Electromiografia .....	37
1.3.2 Interfața creier-mașină .....	40
2 MODELUL CINEMATIC AL MÂINII UMANE .....	42
2.1 Suport teoretic .....	42
2.2 Studiul mâinii umane .....	51
2.2.1 Constrângeri ale mișcării mâinii umane .....	57
2.2.1.1 Constrângeri de tipul I .....	58
2.2.1.2 Constrângeri de tipul al II-lea .....	59
2.2.1.3 Constrângeri de tipul al III-lea .....	60
2.3 Modele ale mâinii umane .....	61
2.4 Realizarea modelului cinematic .....	64
2.4.1 Degetul opozabil .....	68
2.4.1.1 Modelul cinematic direct .....	68
2.4.1.2 Modelul cinematic invers .....	70
2.4.1.3 Modelul cinematic direct .....	72
2.4.1.4 Modelul cinematic invers .....	75
2.5 Modelarea mâinii în MATLAB .....	77
2.6 Modelarea mâinii în SimMechanics .....	83
2.7 Studiul modelului folosind realitatea virtuală .....	91
3 MODELUL DINAMIC AL MÂINII UMANE .....	95
3.1 Suport teoretic .....	95
3.1.1 Deplasări elementare .....	95
3.1.1.1 Operatorul ${}^0dG$ . Determinarea variației elementare ${}^0dG$ .....	96
3.1.1.2 Operatorul ${}^GdG$ . Determinarea variației elementare ${}^GdG$ .....	98
3.1.1.3 Relația dintre ${}^GdG$ și ${}^0dG$ .....	100
3.1.2 Variația elementară a situației unui corp dintr-un sistem de corpuri .....	100
3.1.3 Modelul diferențial al unui robot .....	101
3.1.4 Jacobianul unui robot .....	103

3.1.5	Ecuatiile lui Lagrange .....	106
3.1.1	Studiul roboților încărcăți cu forțe oarecare .....	110
3.1.1	Reducerea forțelor .....	118
3.1.1.1	Variația elementelor tursorului .....	118
3.1.1.2	Torsori echivalenți în cuple .....	120
3.2	Modelul diferențial al mâinii .....	121
3.2.1	Modelul diferențial al degetului opozabil .....	121
3.2.2	Modelul diferențial al degetului mijlociu .....	122
3.3	Determinarea modelului dinamic al mâinii umane .....	123
3.4	Studiul dinamic utilizând MATLAB .....	158
3.5	Studiul dinamic folosind SimMechanics .....	161
3.6	Studii pe baza modelului virtual al mâinii .....	163
<b>4</b>	<b>PROIECTAREA UNUI MODEL DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ .....</b>	<b>169</b>
4.1	Structura protezei. Principii de funcționare.....	169
<b>5</b>	<b>ANALIZA NUMERICĂ A STĂRII DE TENSIUNE ȘI DE DEFORMAȚIE A MODELULUI DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ .....</b>	<b>177</b>
5.1	Considerații generale privind metodele numerice de calcul al stărilor de tensiune și deformație .....	177
5.2	Prezentare generală a metodei elementelor finite .....	180
5.2.1	Algoritmul metodelor elementului finit în problemele de analiză a stării de tensiune și deformație .....	183
5.2.2	Tipuri de elemente finite și funcții de interpolare .....	187
5.2.3	Analiza stării de tensiune folosind elemente finite tridimensionale .....	190
5.2.3.1	Funcții de deplasare .....	191
5.2.3.2	Vectorul deformație specifică și vectorul tensiune.....	192
5.3	Analiza cu elemente finite a stării de tensiune și deformare a modelului de proteză pentru mâna umană .....	194
<b>6</b>	<b>REALIZAREA MODELULUI DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ.....</b>	<b>200</b>
6.1	Realizarea structurii protezei.....	200
6.2	Acționarea cu motoare pas cu pas .....	203
6.2.1	Moduri de comandă.....	204
6.2.2	Moduri de excitație .....	205
6.2.3	Unipolar vs. bipolar .....	206
6.2.4	Comanda în curent constant.....	207
6.2.5	Selecția motorului pas cu pas pentru acționarea protezei .....	209
6.3	Interfața dintre motoarele pas cu pas și dispozitivul digital de comandă .....	210
6.3.1	Placa de comandă SAMOTRONIC101 .....	211
6.3.1.1	Modulul de tensiune constantă .....	212
6.3.1.2	Modurile de lucru în pas întreg și în jumătate de pas .....	214
6.3.1.3	Terminale și elemente de control .....	214
6.4	Comunicația dintre sistemul de calcul și proteză.....	216
6.5	Aplicația software pentru comanda protezei.....	220
6.5.1	Descrierea mediului de programare LabView .....	220
6.5.2	Realizarea aplicației de comandă.....	221
6.6	Simulări ale protezei.....	228
<b>7</b>	<b>CONCLUZII. CONTRIBUȚII ORIGINALE ȘI DIRECȚII DE CERCETARE .....</b>	<b>230</b>
	<b>BIBLIOGRAFIE.....</b>	<b>236</b>
	<b>ANEXA 1.....</b>	<b>246</b>
	<b>ANEXA 2.....</b>	<b>254</b>
	<b>ANEXA 3.....</b>	<b>262</b>
	<b>ANEXA 4.....</b>	<b>265</b>
	<b>ANEXA 5.....</b>	<b>271</b>



# INTRODUCERE

Într-un sens foarte larg, cercetările asupra corpului uman pot fi văzute drept eforturi în încercarea de a copia ființa umană în totalitatea ei sau măcar câteva dintre componentele sale principale. Astfel, dezvoltarea unor proteze care să copieze cât mai mult capacitățile senzitive și motorii ale mâinii umane se detașează ca un scop important în acest domeniu. Mâna umană este un exemplu foarte bun despre cum poate fi implementat un mecanism complex, capabil să îndeplinească sarcini elaborate și folositoare, utilizând o combinație de mecanisme, simțuri, senzori și funcții de control. Ea nu este doar o unealtă extrem de utilă, ci și un instrument ideal de achiziție a informațiilor din mediul înconjurător. De fapt, imitarea capacităților sistemului uman de manipulare a fost visul de secole al cercetătorilor și al inginerilor.

Dezvoltarea unor sisteme artificiale care să imite corpul uman ridică probleme fascinante legate de capacitatea acestuia de a manipula obiecte și, deși această problemă a fost investigată pe larg și multe rezultate sunt disponibile, ea este departe de a fi rezolvată. Un număr impresionant de mâini artificiale au fost dezvoltate până în prezent, popularitatea subiectului fiind demonstrată de numărul mare de universități și de centre de cercetare care l-au abordat.

Protezele active folosite pentru a înlocui mâna sau brațul pe care o persoană le-a pierdut, au foarte multe lucruri în comun cu manipuloarele roboților utilizați în medii industriale. Cu toate acestea, designul unei proteze pentru mână prezintă un set de constrângeri care poate să difere față de cel corespunzător unei aplicații robotizate. Robotul poate fi utilizat în diferite situații, în vreme ce proteza pentru mână este puternic individualizată. O proteză funcțională trebuie să ofere utilizatorului avantaje serioase pentru ca acesta să o folosească.

Teza de față reprezintă un prim pas în realizarea unei proteze pentru mâna umană, la Timișoara. Ea se întinde pe 283 de pagini și este structurată pe șapte capitole, dintre care ultimul de concluzii și de contribuții originale, capitolele fiind precedate de prezenta introducere. Teza mai cuprinde o bibliografie de 147 de titluri, în marea lor majoritate de dată recentă, precum și cinci anexe.

Capitolul 1, intitulat „Stadiul actual în dezvoltarea de proteze pentru mâna umană”, pe de o parte motivează alegerea acestui subiect, arătându-i actualitatea la nivel mondial, iar pe de altă parte prezintă comparativ diverse moduri de protezare a unui pacient care și-a pierdut mâna. Astfel, în subcapitolul 1.1, „Proteze sub formă de cârlig”, se arată faptul că, cel puțin în SUA, majoritatea pacienților preferă protezele de acest tip, în ciuda funcționalității scăzute, deoarece sunt ușor de utilizat și mult mai ieftine în raport cu o proteză care arată ca o mână umană. Dat fiind faptul că forța cu care se realizează strângerea este greu de controlat, aceste proteze pot fi folosite doar într-o măsură destul de restrânsă pentru prinderea și manipularea

obiectelor. Din punct de vedere al aspectului lasă foarte mult de dorit și, probabil, acesta este unul dintre motivele pentru care, în Europa, spre exemplu, cunosc o foarte mică răspândire.

Subcapitolul 1.2, „Proteze care imită forma mâinii”, expune câteva caracteristici generale ale acestor proteze și prezintă (clasificate pe câteva categorii, în funcție de modul de acționare) cele mai recente și mai reprezentative realizări din domeniu. Acest material a fost sintetizat în urma unui intens studiu bibliografic, lucru marcat prin numeroasele citări. Se remarcă tendința generală de creștere a dexterității protezelor, dar și necesitatea (nu întotdeauna materializată la modelele expuse) de a crea proteze cât mai simple și practice, în condițiile în care să fie capabile să imite cât mai mult funcționarea și aspectul mâinii umane. Modelele de proteze prezentate (unele chiar comerciale) reprezintă soluții acceptabile pentru pacienți, dar majoritatea sunt foarte complexe, cu un preț care depășește cu mult posibilitățile multor pacienți (în special ale pacienților din țări precum România) și destul de greu de controlat. Pe de altă parte, niciun model nu realizează toate funcțiile pe care mâna umană le deține.

Subcapitolul 1.3, „Interfața dintre proteză și pacient” atinge problema deosebit de delicată (dar care nu face subiectul acestei teze) a interfațării cu corpul pacientului. Soluția curentă, electromiografia, presupune captarea, prin intermediul unor electrozi, a curenților generați prin contracția mușchilor brațului și interpretarea acestor curenți pentru a decide acțiunea care trebuie executată de către proteză. Procesul este greoi și pacientul trebuie să lucreze intens pentru a învăța să comande proteza. O soluție pentru viitor, destul de recentă, încearcă să capteze semnalele pentru comanda protezei direct de la sursa lor, adică din creier. Metoda presupune introducerea unui implant neuroprotetic în creier pentru a capta grade de libertate spațiale și se află în studiu la Carnegie Mellon University, USA, unde se încearcă mișcarea unui cursor pe ecran cu ajutorul gândurilor.

Capitolul 2, intitulat „Modelul cinematic al mâinii umane”, prezintă, în detaliu, modul în care a fost realizat studiul cinematic al mâinii umane, deosebit de necesar pentru proiectarea unei proteze care să imite cât mai mult posibil modelul natural. Astfel, în subcapitolul 2.1, „Suport teoretic”, sunt expuse noțiunile necesare pentru modelarea cinematică directă (convenția Denavit-Hartenberg, care se pretează cel mai bine pentru modelarea lanțurilor cinematice deschise, aplicabilă și în cazul de față) și pentru modelare cinematică inversă. Subcapitolul 2.2, „Studiul mâinii umane”, prezintă un studiu al modelului natural, abordat din trei direcții: osteologic (studiul scheletului), ortologic (studiul articulațiilor și al ligamentelor) și miofuncțional (studiul tendoanelor, al mușchilor și al tuturor funcționalităților). Foarte importantă pentru studiul cinematic este prezentarea constrângerilor la care este supusă mâna umană, cu clasificarea lor în trei categorii (primele două putând fi chiar formalizate, lucru foarte util pentru reducerea numărului de grade de libertate fără a fi afectată dexteritatea modelului).

Subcapitolul 2.3, „Modele ale mâinii umane”, prezintă, pentru comparație, câteva modele existente în literatură ale mâinii umane. Se scot în evidență avantajele și dezavantajele acestora, concluziile fiind fructificate în modelul realizat. Subcapitolul 2.4, „Realizarea modelului cinematic” prezintă, explicit, modul în care, aplicând convenția Denavit-Hartenberg, a fost obținut modelul cinematic al mâinii umane. Sunt descriși pașii prin care s-a ajuns la matricea generală de transfer (care exprimă poziția vârfului degetului față de sistemul de referință plasat pe încheietură)

pentru degetul opozabil și pentru degetul mijlociu (pentru celelalte degete, procedura este identică cu cea expusă la degetul mijlociu, iar matricile generale de transfer aferente sunt prezentate în Anexa 2). Modelul cinematic invers este prezentat atât pentru degetul opozabil, cât și pentru degetul mijlociu, într-un caz simplificat (din necesitatea de a reduce complexitatea calculelor): mișcarea degetului în raport cu palma.

Subcapitolul 2.5, „Modelarea mâinii în MATLAB”, indică modul în care au fost obținute, pe baza ecuațiilor cinematice translatate în cod MATLAB (prezentat în Anexa 1), curbele de mișcare ale vârfurilor celor cinci degete în două situații de interes: închiderea și deschiderea pumnului. Pentru verificarea corectitudinii rezultatelor obținute, a fost construit un model al mâinii umane în SimMechanics (un pachet software care face parte din MATLAB). Simulând acest model pentru aceleași două situații, deja prezentate, s-au obținut exact aceleași curbe de mișcare ca și în MATLAB, ceea ce a dus la concluzia că modelul este corect și poate fi folosit pentru proiectarea protezei. Toate acestea sunt prezentate în subcapitolul 2.6, „Modelarea mâinii în SimMechanics”. Subcapitolul 2.7, „Studiul modelului folosind realitatea virtuală”, indică o modalitate foarte utilă de vizualizare a mișcării modelului realizat în SimMechanics, prin atașarea de acesta a unui model virtual al mâinii. Se poate vedea foarte ușor cum că modelul are o mișcare foarte naturală și corectă.

Capitolul 3, intitulat „Modelul dinamic al mâinii umane” indică necesitatea studiului dinamic al mâinii (deoarece realizarea mișcărilor sale fiziologice normale este, în esență, dinamică) și modul în care au fost obținute ecuațiile dinamice. Și în acest caz, în debutul capitolului (subcapitolul 3.1, „Suport teoretic”) sunt prezentate noțiunile teoretice pentru determinarea ecuațiilor dinamice, concretizate prin ecuațiile lui Lagrange de speța a doua. Sunt calculate matricile Jacobiene pentru lanțurile cinematice deget opozabil și deget mijlociu, necesare pentru studiul dinamic al mâinii. Subcapitolul 3.2, „Determinarea modelului dinamic al mâinii umane”, prezintă întregul proces (detaliat pentru degetul mijlociu) la capătul căruia au rezultat cele 22 de ecuații dinamice ale sistemului mână. Toate noțiunile necesare, obținute pe același principiu, expus pentru degetul mijlociu, sunt prezentate în Anexe, după cum urmează: distanțele de la centrele de greutate ale falangelor degetelor față de diverse cuple ale lanțului cinematic din care fac parte (Anexa 3), derivatele acestora în raport cu timpul (Anexa 4) și în raport cu variabilele unghiulare (Anexa 5). Deoarece ecuațiile obținute au o formă foarte complexă, integrarea lor impune folosirea unei aplicații speciale, precum MATLAB (subcapitolul 3.3, „Studiul dinamic utilizând MATLAB”). După translatarea ecuațiilor în cod MATLAB, au fost determinate valorile variabilelor unghiulare pentru un caz concret: prinderea unui obiect cu masa cunoscută. Din nou, pentru confirmarea corectitudinii rezultatelor, a fost realizat un model în SimMechanics care să se preteze la studiul dinamic (subcapitolul 3.4, „Studiul dinamic folosind SimMechanics”). Au rezultat curbe aproape identice, micile diferențe apărând, probabil, din modul în care a fost conceput modelul în SimMechanics. Subcapitolul 3.5, „Studii pe baza modelului virtual al mâinii”, prezintă vizualizarea modelului mâinii în două cazuri concrete: prinderea unui obiect cu masa dată și sub acțiunea propriei greutate. De asemenea, se studiază prinderea unor obiecte de diverse forme, prezentându-se valorile unghiulare necesare pentru fiecare caz în parte.

Capitolul 4, intitulat „Proiectarea unui model de proteză pentru mâna umană”, prezintă modelul propus de autoare pentru o proteză a mâinii și principiul de funcționare al acestuia. Capitolul argumentează folosirea unei acționări hidraulice și

designul care rezultă din necesitatea de a asigura o proporționalitate liniară între presiunea din circuitul hidraulic și forța aplicată de o falangă, indiferent care ar fi unghiul dintre falange. Modelul a fost realizat într-un software specializat, SolidEdge, cu ajutorul căruia s-au studiat diverse prinderi de obiecte, demonstrându-se, astfel, capabilitatea modelului propus de a asigura funcția de prehenșiune.

Capitolul 5, intitulat „Analiza numerică a stării de tensiune și de deformare a modelului de proteză pentru mâna umană” demonstrează faptul că, realizat din titan, modelul de proteză propus în capitolul 4 este capabil să asigure cu ușurință prinderi care implică forțe de prindere de până la 10 N. Capitolul debutează cu o scurtă prezentare a noțiunilor teoretice necesare studiului (subcapitolele 5.1, „Considerații generale privind metodele numerice de calcul al stărilor de tensiune și deformare” și 5.2, „Prezentare generală a metodei elementelor finite”) și se încheie cu prezentarea studiului realizat cu software-ul specializat CosmosWorks (subcapitolul 5.3, „Analiza cu elemente finite a stării de tensiune și deformare a modelului de proteză pentru mâna umană”).

Capitolul 6, intitulat „Realizarea modelului de proteză pentru mâna umană”, sunt prezentate detalii despre realizarea propriu-zisă a modelului și despre acționarea acestuia. Pe baza proiectului realizat în SolidEdge, au fost tăiate cu laser (din plexiglas, respectiv, titan) elementele necesare pentru asamblarea a două modele de mână. Subcapitolul 6.1, „Realizarea structurii protezei”, prezintă modul în care a fost realizată partea mecanică a mâinii artificiale. Subcapitolul 6.2, „Acționarea cu motoare pas cu pas” expune argumentele care au dus la folosirea acestui tip de motoare pentru acționare, prezintă câteva noțiuni teoretice privind modurile de comandă și de excitație a acestor motoare și indică motorul concret folosit. Deoarece este necesar un etaj final de putere pentru comanda motoarelor pas cu pas, subcapitolul 6.3, „Interfața dintre motoarele pas cu pas și dispozitivul digital de comandă” prezintă placa de comandă SAMOTRONIC101, special proiectată pentru comanda motoarelor pas cu pas liniare, tip UBL23, folosite.

Pentru a asigura transmiterea semnalelor de comandă de la un calculator la plăcile de comandă ale motoarelor, este nevoie de o interfață asigurată de placa de achiziție NI-PCI-6509, produsă de National Instruments. Subcapitolul 6.4, „Comunicația dintre sistemul de calcul și proteză”, oferă o descriere a modului de funcționare a acestei plăci și prezintă modul în care ea a fost conectată în sistem. Subcapitolul 6.5, „Aplicația software pentru comanda protezei”, descrie aplicația software gândită special pentru a governa funcționarea protezei. Subcapitolul 6.6, „Simulări ale protezei”, prezintă câteva aspecte legate de modul de funcționare a protezei și exemple de prindere.

Capitolul 7, intitulat „Concluzii. Contribuții originale și direcții viitoare de cercetare”, analizează, pe scurt, capitolele de consistență, reliefând contribuțiile originale ale autoarei. De asemenea, cu ajutorul rezultatelor obținute, se justifică încă o dată tema acestei teze. Pentru a puncta mai bine locul acesteia într-un efort de cercetare, capitolul de concluzii conturează și direcțiile de dezvoltare pentru viitorul apropiat.

Această teză de doctorat a fost elaborată pe parcursul a șase ani de cercetări asidue, multidisciplinare, cu implicarea unui număr semnificativ de persoane și de instituții, cărora le datorez vie și adâncă recunoștință. Inevitabil, pe unii îi voi nedreptăți prin omisiune, dacă voi încerca să îi amintesc pe toți cei al căror ajutor

---

m-a condus către finalizarea acestei lucrări. Aș dori, totuși, să mulțumesc explicit și călduros doamnei prof.univ.dr.ing. Doina DRĂGULESCU, care mi-a condus cercetările și mi-a înlesnit contactul cu persoanele și cu instituțiile necesare studiului. Din nefericire, doamna profesoară ne-a părăsit atât de devreme, cu foarte puțin timp înainte de susținerea publică a acestei lucrări, lăsând un gol imens în urma sa, dar va rămâne pentru totdeauna în amintirea și în sufletul meu ca femeia deosebită și dascălul minunat care a fost.

De asemenea, doresc să mulțumesc celor doi conducători științifici, domnul prof.univ.dr.ing. Nicolae ROBU și domnul prof.univ.dr.ing. Nicolae FAUR, care mi-au oferit tot sprijinul în finalizarea prezentei teze. Nu pot să-mi uit nici familia, al cărei suport moral și material m-a ajutat să depășesc obstacole inerente unui astfel de demers. Aduc mulțumiri instituției din care fac parte, pentru excelentul cadru de cercetare creat în ultimii ani, precum și colegilor din Departamentul de Automatică și Informatică Aplicată și din cadrul Bazei de Cercetare cu Utilizatori Multipli – Centrul de Modelare a Protezării și a Intervențiilor Chirurgicale asupra Scheletului Uman din cadrul Universității „Politehnica” din Timișoara. Nu în ultimul rând, datorez profunde mulțumiri prietenilor pentru înțelegerea și sollicitudinea de care au dat dovadă.

# 1 STADIUL ACTUAL ÎN DEZVOLTAREA DE PROTEZE PENTRU MÂNA UMANĂ

Pentru orice ființă umană, pierderea unei mâini atrage după sine o scădere drastică a performanțelor și un dezavantaj cosmetic evident. Înlocuirea mâinii pierdute cu o proteză care să ofere aceleași servicii reprezintă una dintre cele mai provocatoare probleme de reabilitare și inginerie medicală, știut fiind faptul că mâna umană este „cea mai performantă unealtă” sau „instrumentul instrumentelor”, cum îi spunea Aristotel. Comparând performanțele mâinii cu cele ale protezelor existente, rezultatele sunt destul de descurajatoare pentru a-i demoraliza pe majoritatea celor care activează în acest domeniu. În ciuda acestui fapt, complexitatea mâinii i-a determinat, de-a lungul timpului, pe ingineri și pe cercetători să încerce neconștient să-i restaureze funcționalitatea atunci când este rănită sau amputată. Faptul că încă nu s-a reușit, până în prezent, să se obțină o proteză care să copieze în totalitate mâna umană se datorează, cu siguranță, complexității problemei și nu lipsei de talent sau de efort, iar progresele din ultimii ani o demonstrează cu prisosință.

Principalii factori care provoacă pierderea unei mâini sunt accidentele, urmate de anumite boli și de războaie. În Statele Unite, spre exemplu, sunt înregistrate 41.000 de persoane cu amputare a mâinii sau cu amputare totală a brațului, adică unul din 6.100 de locuitori. Păstrând această frecvență, ar rezulta că în întreaga lume sunt un milion de astfel de persoane care ar avea nevoie de o proteză pentru mână sau pentru braț, în funcție de nivelul de la care s-a făcut amputarea [3].

Mâinile interacționează cu obiectele cu care ajung în contact cu o dexteritate care implică, din partea utilizatorului, un control nu numai asupra locației finale a degetelor, ci și asupra unghiurilor articulațiilor, forțelor și, poate cel mai important, asupra rigidității degetelor. Pentru a copia toate aceste caracteristici umane într-o mână robotică, cea mai directă (și, probabil, optimă) abordare ar consta în duplicarea structurii musculo-scheletale anatomice a mâinii umane [75]. În literatura de specialitate, există mai multe metode de abordare a realizării unei proteze pentru mâna umană. Acestea variază de la o proteză cosmetică și care oferă o funcționalitate extrem de redusă sau nicio funcționalitate la o proteză care imită cu mare succes o mână reală. Protezele cosmetice pentru persoane cu amputare parțială a mâinii constau în mănuși cosmetice la care, în general, degetele sunt umplute cu spumă uretanică și sunt rigidizate cu ajutorul unor fire de întărire care le străbat [115].

În categoria protezelor cu funcționalitate scăzută se încadrează cârligele, care pot fi folosite pentru prindere sau pentru manipulare. Deși ele au numeroase utilizări, prezintă și numeroase limitări, precum prinderea unor obiecte cu o formă neregulată. Este, de asemenea, foarte greu de controlat puterea cu care se realizează strângerea, ceea ce face aproape imposibilă ridicarea unor obiecte extrem de delicate.

Cu toate acestea, în Statele Unite, majoritatea persoanelor care și-au pierdut o mână preferă să poarte un cârlig (aproximativ 70%), spre deosebire de cei din Europa, care preferă protezele de forma mâinii umane [119]. Comparativ cu cârligele, protezele pentru mână oferă o funcționalitate și o durabilitate scăzute, precum și o greutate mai mare și un cost mai ridicat. Deși există aceste probleme, mulți pacienți cu astfel de deficiențe preferă protezele, de cele mai multe ori din motive cosmetice. Dezvoltarea unei proteze pentru mână umană care să fie simțită de către purtător ca o parte a corpului este departe de a deveni o realitate. Protezele comerciale curente sunt incapabile să asigure o prindere suficientă, iar una dintre cele mai mari probleme constă în lipsa de grade de libertate [112], [119].

### 1.1 Proteze sub formă de cârlig

Firma Hosmer Dorrance Corporation oferă o varietate de cârlige, cele mai populare fiind modelele 5XA, 5X și 7 (Fig. 1.1) [9].



**Fig. 1.1** Cele mai populare modele de cârlige ale firmei Hosmer



**Fig. 1.2** Modelele GRIP 3 și GRIP 2S de la TRS Inc.

Undeva între cârlig și mână artificială se situează dispozitivul numit *prehensor*, precum modelul GRIP produs de firma TRS Inc. (Fig. 1.2) [9] și *Electric Greifer*, produs de Otto Bock. Aceste dispozitive prezintă o componentă asemănătoare cu

degetul mare și o componentă deget [25]. Dispozitivul *Electric Greifer* permite deschidere și închidere voluntare și asigură o deschidere foarte mare, dar are o greutate destul de semnificativă și nu oferă nici un *feedback* (Fig. 1.3) [9].

Pentru a veni în întâmpinarea clienților care preferă o mână artificială, firma TRS Inc a creat modelul *Little-Touch Biomechanical Hand*, fiind primul model care nu a necesitat o mânășă protectoare (Fig. 1.4) [9].



Fig. 1.3 Utilizarea lui *Electric Greifer*



Fig. 1.4 *Little-Touch Biomechanical Hand*

Firma Otto Bock oferă modelul *Trancarpal Hand*, potrivit persoanelor care au mână amputată din zona încheieturii sau care mai prezintă o parte din mână (Fig. 1.5) [9].

## **1.2 Proteze care imită forma mâinii**

În termeni ingineresti, protezele s-au dezvoltat foarte mult în ultimii ani. Motoarele și reductoarele au devenit tot mai mici, bateriile sunt tot mai mici și de o capacitate energetică în creștere cu fiecare model, au apărut materiale, precum fibra de carbon, rezistente și ușoare, iar cosmetica protezei a fost îmbunătățită cu mănuși din silicon, cu un aspect foarte apropiat de cel real. Problema cea mai mare, însă, constă în controlul protezei. Majoritatea protezelor sunt controlate folosind semnale EMG, generate în urma contractării mușchilor. Este, însă, dificil de a găsi o strategie de control care să funcționeze corespunzător, pe măsură ce numărul de grade de libertate care trebuie controlat devine mai mare decât numărul de semnale independente pe care utilizatorul le poate genera [85].

Introducerea microprocesoarelor în designul protezelor pentru mână le-a crescut foarte mult potențialul și le-a simplificat reglarea și mentenanța. Numeroși producători de proteze au recurs la folosirea controlerelor, care pot fi adaptate să realizeze diferite cerințe prin intermediul unui program. Cu toate acestea, nu s-a găsit o soluție satisfăcătoare, iar câțiva producători au apelat la un melanj al diferitelor metode de comandă [85].





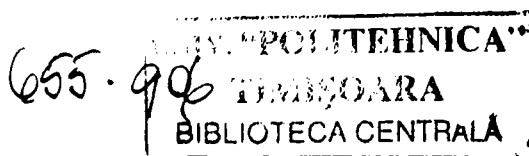
**Fig. 1.5** *Transcarpal Hand* de la Otto Bock

Deoarece o proteză pentru mâna umană nu va putea niciodată (sau, mai corect spus, nu în viitorul apropiat) să înlocuiască în totalitate mâna umană, proiectantul va trebui să decidă care vor fi funcționalitățile echipamentului, cum va arăta acesta etc. Pe lângă selecția unor motoare ale căror caracteristici să corespundă cerințelor (performanță și fiabilitate ridicate și eficiență din punct de vedere electric), proiectantul va trebui să țină cont și de următoarele criterii [13], [112]:

- **Aspect:** majoritatea persoanelor care necesită o proteză au doar o mână amputată și doresc ca proteza să atragă cât mai puțin atenția asupra ei. Dacă proteza nu are un aspect asemănător cu cel al mâinii pierdute, majoritatea pacienților nu sunt dispuși nici măcar să o încerce, indiferent cât de bine funcționează.
- **Confort:** proteza trebuie să fie confortabilă pentru utilizator (cât mai ușoară cu putință pentru a minimiza presiunea exercitată asupra pielii). Interesant de remarcat este faptul că, deși protezele comerciale au aproximativ aceeași masă ca și mâna umană, ele par pacientului cu mult mai grele, deoarece masa este transmisă printr-un suport metalic prins de restul de braț al pacientului [94].
- **Control:** proteza trebuie să fie ușor de manevrat, cu un control logic și intuitiv.
- **Silențiozitate:** proteza trebuie să fie cât mai silențioasă pentru a nu atrage atenția asupra ei.
- **Consum redus de energie:** problema alimentării cu energie a protezei rămâne, încă, una foarte delicată, sursa de energie contribuind și ea la greutatea totală a protezei.

Neluarea în considerație a acestor criterii va fi drastic sancționată de către cei care ar trebui să beneficieze de ajutorul protezei. Acest lucru este indicat de către numeroase studii făcute asupra satisfacției utilizatorului privind folosirea protezei, studii care relevă faptul că între 30 și 50% dintre pacienți nu își folosesc proteza cu regularitate [23].

Pentru a avea o proteză funcțională, este foarte important ca aceasta să fie proiectată, în primul rând, pentru prindere și abia apoi pentru manipulare, cu atât mai mult cu cât aceasta din urmă presupune dexteritate ridicată, senzori avansați, tehnologii complexe de control. Proiectarea unor asemenea proteze care să poată realiza atât prinderea, cât și manipularea, va fi posibilă peste ani, când dezvoltarea



unor componente cu o tehnologie ridicată va permite realizarea unor structuri mecanice complexe și foarte compacte. [15]

O rezolvare a dificultății de a controla puterea cu care se realizează strângerea, manifestată cu precădere la cârlige, o reprezintă prinderea adaptivă pasivă. Acest sistem controlează mecanic puterea cu care se prinde obiectul, dependent de forma și dimensiunea acestuia. Deși fiecare deget este comandat de același element de execuție, o serie de arcuri permit degetelor să se miște diferit unul față de celălalt astfel încât să se muleze cât mai bine pe formele neregulate ale obiectelor. Pe lângă aceasta, arcurile se pot comprima, absorbind o parte din forță, protejând astfel, obiectele fragile. De regulă, elementul de execuție pentru o astfel de proteză este motorul de curent continuu care, cu ajutorul unui șurub conducător, poate deschide sau închide seria de elemente mecanice care realizează fiecare deget (Fig. 1.6) [24].

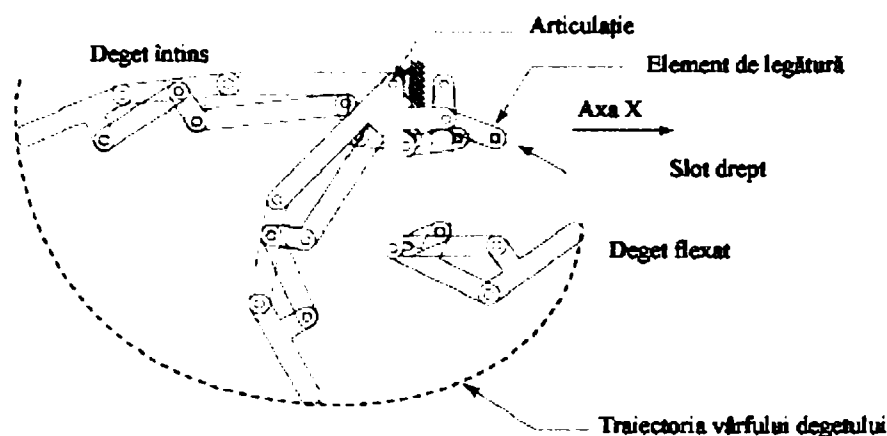


Fig. 1.6 Modelul unui deget al protezei

Continuând trendul de îmbunătățire a calității protezelor pentru mâna umană, a fost dezvoltat sistemul de prindere adaptivă activă. Pentru a asigura o prindere „inteligentă”, această abordare presupune folosirea senzorilor și a microprocesoarelor în locul sistemelor mecanice. În vârful degetelor au fost introduși senzori de presiune, iar în elementele de execuție s-au integrat senzori de poziție. Mișcarea este asigurată de către microprocesor pe baza reacției oferite de senzori. În acest caz, fiecare deget poate fi controlat individual, ceea ce asigură o controlabilitate și mai mare și o prindere care să fie adaptabilă la obiectul manipulat. Pentru mișcarea degetelor și a încheieturii mâinii pot fi folosite diferite elemente de acționare, însă cel mai utilizat rămâne motorul de curent continuu. Pe lângă acesta au mai fost utilizate mușchiul artificial McKibben (*Artificial Muscle Actuator*), care se expandează creând mișcare, formele din aliaje cu memorie (*Shape Memory Alloy*), care pot fi folosite pentru imitarea tendoanelor în degete, sau elementele de execuție piezo-electrice sau pneumatice. Elementele de execuție nu sunt folosite doar pentru a pune în mișcare părțile componente ale unei proteze, ci și pentru a asigura rigiditatea articulațiilor.

Aceste proteze pot fi comandate de către corpul utilizatorului, dacă persoana prezintă o amputare parțială a mâinii. În acest caz, ele se încadrează în două categorii: cele care sunt comandate de către mușchiul bispapular prin abducție sau mușchiul glenohumeral prin flexare și cele care sunt comandate prin flexarea sau extensia încheieturii. Pe lângă aceste proteze, au apărut pe piață și proteze comandate prin

metode externe, reprezentând alternative viabile pentru persoanele care au țeșutul distrus în zona cicatricei [115].

Există două mari categorii în care se pot încadra protezele comandate de către corp:

- deschidere voluntară;
- închidere voluntară.

În cazul unei proteze cu deschidere voluntară, mâna este închisă cu ajutorul unui arc, acesta asigurând și forța de prindere. Când sistemul de acționare aplică o forță de operare ascendentă, forța de prindere scade în intensitate, iar, în final, mâna va fi deschisă. Pe măsură ce sistemul de acționare se relaxează, mâna se închide și prinde obiectul. Protezele cu închidere voluntară sunt deschise total atunci când sistemul de acționare este relaxat și se închid atunci când sistemul de acționare aplică o forță. În acest caz, forța de prindere crește pe măsură ce crește și forța de operare.

Din punct de vedere al poziționării elementelor de execuție, protezele pentru mâna umană pot fi clasificate astfel [118]:

- cu actuatore integrate;
- cu actuatore externe.

În primul caz, mișcarea degetelor este generată folosind motoare instalate în degete sau în palmă. Avantajul acestui mod constă în faptul că proteza poate fi prinsă cu ușurință de brațul pacientului deoarece are o structură independentă. Pe de altă parte, însă, cel mai mare dezavantaj îl constituie spațiul redus de care dispune modelul, motiv pentru care cea mai mare parte a protezelor de acest tip au patru sau mai puține degete. Cele care au cinci degete au mai puține articulații sau grade de libertate decât mâna, ceea ce conduce la o stabilitate scăzută a prinderii și o reducere a modurilor de manipulare a obiectelor. În plus, acest mod de plasare a actuatorilor implică degete grele și jocuri în articulații din cauza motoarelor cu reductoarele în zona degetelor, ceea ce scade considerabil controlabilitatea.

În cazul celui de-al doilea tip de proteze, acționarea externă determină o structură simplă și ușoară pentru degete, prin folosirea unor mecanisme bazate pe cabluri sau benzi. Un prim merit al acestui tip de proteză constă în posibilitatea folosirii unor actuatori de putere ridicată (actuatori pneumatici, de exemplu), când forța care se obține este foarte mare. De asemenea, structura protezei nu mai este încărcată cu greutatea actuatorilor (ei putând fi așezați pe antebraț), ceea ce conduce la obținerea unei proteze ușoare și, posibil, cu multe grade de libertate. Cu toate acestea, din cauza plasării actuatorilor în zona antebrațului, prinderea protezei de corpul pacientului nu mai este chiar simplă.

După cum se poate observa, niciuna dintre metodele de poziționare a actuatorilor nu este perfectă, ambele având avantaje și dezavantaje. Rămâne în grija proiectantului să decidă cum vor fi poziționați actuatorii și să încerce, pe cât posibil, să folosească o combinație a celor două metode, astfel încât să dispună doar de avantaje. În continuare, sunt prezentate cele mai relevante modele de proteze pentru mâna umană create până în prezent, clasificate după modul de acționare.

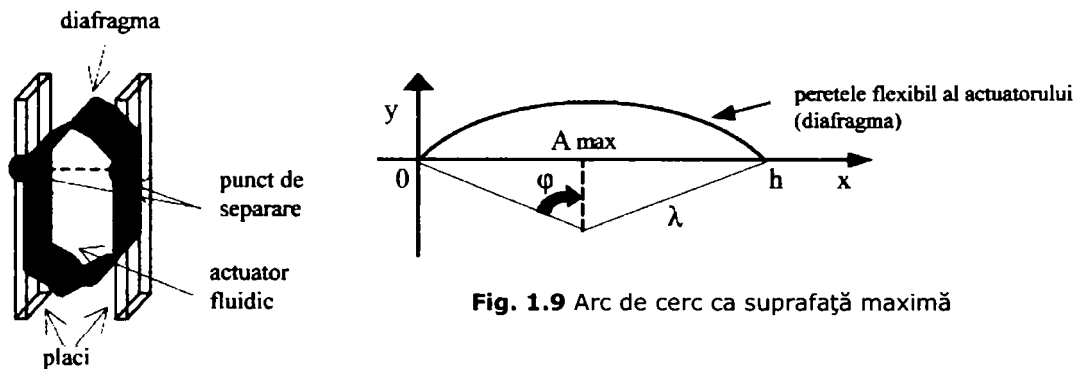
### 1.2.1 Proteze acționate pneumatic sau hidraulic

Elementele de execuție pneumatice și hidraulice sunt de o mare importanță practică în controlul proceselor industriale, fiind folosite într-o plajă mare de aplicații precum industria grea, ingineria mecanică, sistemele de transport și ingineria medicală. Avantajele acestor elemente de execuție constau în construcție robustă, putere și fiabilitate ridicate și eficiență rezonabilă [57].

Pentru domeniul ingineriei medicale a fost dezvoltat un element de execuție numit actuator flexibil fluidic (*flexible fluidic actuator*) [94], care constă într-un canal de alimentare cu aer presurizat sau cu lichid și o „cameră” conectată la două părți mobile ale unei articulații. În timpul alimentării elementului de execuție cu aer sau cu lichid, volumul acestuia se mărește, crescând distanța dintre pereții flexibili ai camerei (Fig. 1.7). Folosind astfel de elemente de execuție pot fi realizate diferite structuri de articulații, caz în care, însă, este necesară realizarea modelului matematic al comportamentului de expansiune.



**Fig. 1.7** Articulație simplă bazată pe principiul expansiunii



**Fig. 1.8** Element de execuție liniar

**Fig. 1.9** Arc de cerc ca suprafață maximă

Pentru a putea calcula efectul forței unui astfel de element de execuție în dependență cu presiunea internă este necesară descrierea matematică a geometriei peretelui flexibil al elementului în timpul deformării. Un astfel de element de execuție, care separă două plăci paralele în timpul expansiunii, este un exemplu de actuator liniar simplu (Fig. 1.8).

O parte a materialului presează plăcile, iar cealaltă parte întinde o diafragmă între plăci (între punctele de separare). Pentru a obține forma elementului de execuție,

valorile necesare au fost considerate pentru situația volumului maxim. Astfel, pereții flexibili ai actuatorului vor lua forma unui arc de cerc, precum în Fig. 1.9 (mai multe detalii în [94]).

### 1.2.1.1 Proteza Ultralight Hand

Acest model a fost dezvoltat la *Forschungszentrum Karlsruhe (Research Center of Karlsruhe)* și folosește elemente de execuție flexibile fluidice (Fig. 1.10) [94]. Autorii consideră că modelul poate fi împărțit în două secțiuni (plus una opțională):

- degetele: conțin elemente de execuție flexibile fluidice care permit flexarea, senzori de flexare și senzori de atingere;
- zona metacarpiană: asigură destul spațiu pentru a adăposti un microcontroler, microvalve, sursa de energie și micropompa;
- încheietura (opțional): conține, de asemenea, elemente de execuție flexibile care permit mișcarea încheieturii.

Extensia articulațiilor este realizată folosind arcuri de rapel. Fig. 1.11 prezintă detaliul unui deget, cu specificarea elementelor componente. Degetele flexibile ale acestei proteze au capacitatea de a se încolăci în jurul unor obiecte de diferite forme și mărimi. Datorită proprietăților elastice ale elementelor de execuție, forța de contact este disipată pe o suprafață de contact mare. Pe lângă aceasta, suprafața degetelor este moale, iar coeficientul de frecare este crescut prin mănuașă din cauciuc-silicon care acoperă mâna artificială. În aceste condiții este necesară o forță de prindere mică pentru a ține obiectul.



Fig. 1.10 Ultralight Hand

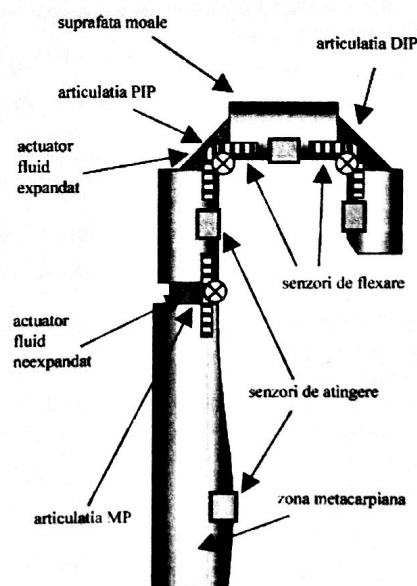
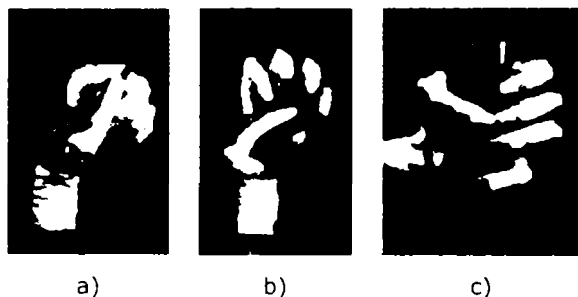


Fig. 1.11 Detaliu constructiv al unui deget

Pentru construcția degetelor și a încheieturii au fost folosite doar materiale ușoare, astfel încât fiecare deget cântărește mai puțin de 20 g. Timpul necesar pentru o

flexare și o extensie completă a degetului este sub 100 ms, de unde rezultă o frecvență de închidere și deschidere a mâinii de aproximativ 5 Hz. Forța exercitată de un singur deget este proporțională cu presiunea la care este umplut elementul de execuție. Proteza este capabilă atât de prinderi de precizie, cât și de prinderi de putere, ilustrate în Fig. 1.12 și Fig. 1.13.



**Fig. 1.12** Prinderi de putere: a) laterală, b) sferică, c) cilindrică

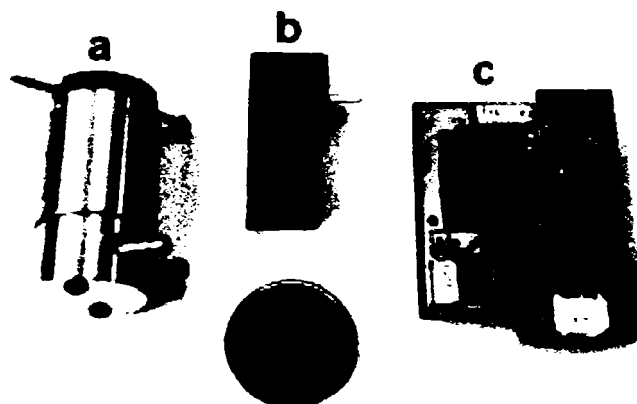


**Fig. 1.13** Prinderi de precizie: a) cu trei degete, b) mișcarea unui singur deget

Folosind același principiu de funcționare, dar cu o structură îmbunătățită, cercetătorii de la *Research Center of Karlsruhe* au realizat un nou model de mână [65], [80] (Fig. 1.14), pe care au atașat-o unui robot umanoid proiectat să lucreze autonom sau interactiv, în colaborare cu oamenii. Acționarea este realizată de un sistem electrohidraulic compact, plasat în zona metacarpiană, alcătuit dintr-o micropompă, două până la opt microvalve, un rezervor fluidic și o unitate electronică special proiectată (Fig. 1.15).



**Fig. 1.14** Noul model de proteză



**Fig. 1.15** Partea de acționare: a - micropompa hidraulică, b - microvalvă, c - unitate electronică

### 1.2.1.2 Proteza Shadow Hand

Acest model este dezvoltat de către *Shadow Robot Company* și reproduce destul de bine cele 23 de grade de libertate ale mâinii umane (Fig. 1.16) [125]. Proteza are aproximativ dimensiunile unei mâini de bărbat și este atașată la un antebraț care conține mușchii și valvele manifold. Ea cântărește 3,5 kg și are o viteză de mișcare egală cu jumătate din viteza modelului natural. Spre exemplu, timpul necesar pentru deschiderea pumnului este de aproximativ 1.2 s.

Proteza este construită dintr-o combinație de metale și plastic, fiind capabilă să dezvolte un cuplu suficient pentru a-și menține propria greutate. Deoarece este acționată pneumatic, ea necesită atât o sursă de curent, cât și o sursă de aer comprimat. Proteza este acționată de 36 de mușchi pe bază de aer, montați pe antebraț. La fel ca și în modelul natural, mușchii sunt legați de articulații prin tendoane. Electronica integrată la baza protezei comandă valvele pneumatice pentru fiecare mușchi și, totodată, controlează și senzorii de presiune. Există trei moduri de acționare:

- o pereche de mușchi opozabili permit controlul total al mișcărilor pentru majoritatea articulațiilor;
- un singur mușchi, împreună cu un arc de rapel este suficient pentru aducția/abducția degetelor;
- pentru falangele mediane și distale este folosită o comandă separată pentru a asigura o mișcare naturală.

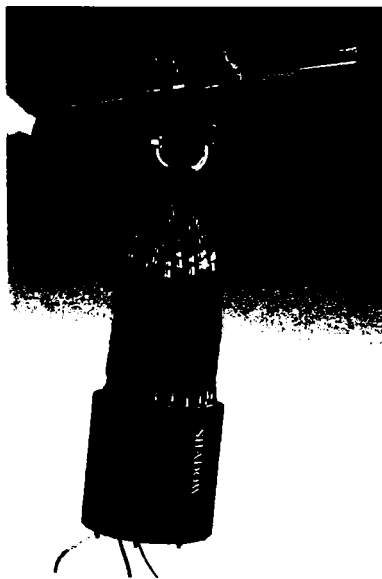


Fig. 1.16 *Shadow Hand*

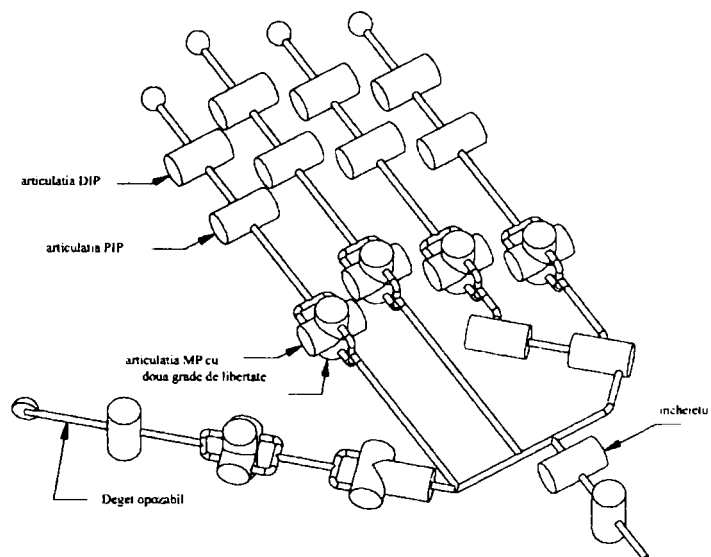


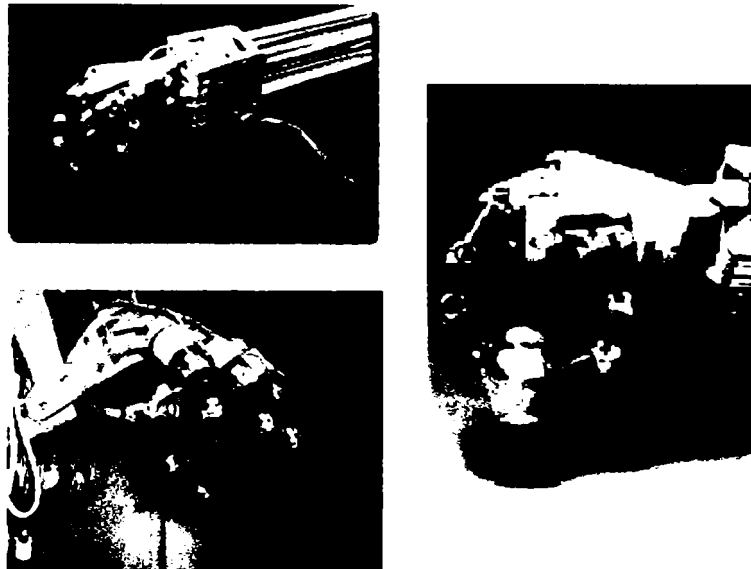
Fig. 1.17 Structura cinematică a protezei

Rotația fiecărei articulații este captată de către un senzor cu efect Hall patentat de către *Shadow Robot Company*. În vârful degetelor și de-a lungul acestora sunt integrați senzori tactili (datorită unui compozit special au reușit să integreze 34 de senzori în vârful degetelor, obținând o capacitate senzorială apropiată de cea umană). Presiunea din fiecare mușchi este citită cu un senzor de presiune montat direct în valva manifold. Toate datele captate de către senzori sunt transmise printr-o magistrală de date în exteriorul protezei pentru a fi prelucrate.

În ceea ce privește structura cinematică (Fig. 1.17), degetul opozabil are cinci grade de libertate și trei articulații, fiecare deget are patru grade de libertate și trei articulații. Pe lângă acestea, degetul mic mai are o articulație în palmă. Încheietura mâinii are două grade de libertate, flexare sau extensie și aducție sau abducție. Mișcarea fiecărei articulații este permisă în limitele modelului natural, respectând constrângerile la care este supus acesta. Fig. 1.18 prezintă câteva instantanee ale mișcării protezei.



**Fig. 1.18** Proteza *Shadow Hand* în câteva impostaze



**Fig. 1.19** Mâna artificială Utah/MIT



### 1.2.1.3 Mâna artificială Utah/MIT

Mâna artificială Utah/MIT a fost realizată de către *Center for Engineering Design* al *University of Utah* în colaborare cu *Artificial Intelligence Laboratory* al MIT (Fig. 1.19). Proteza are trei degete și deget opozabil, fiecare cu câte patru grade de libertate [69].

Deși geometria degetelor este asemănătoare cu modelul natural, degetul opozabil se află tot timpul în opoziție cu celelalte degete, iar lungimea falangelor și poziția articulațiilor au fost alterate pentru a facilita traseele tendoanelor. Mâna artificială cu cele 16 grade de libertate este acționată folosind o abordare pe bază de tendoane antagoniste. Din acest motiv, este necesar un sistem cu 32 de tendoane polimerice independente și cu elemente de execuție pneumatice. Aceste elemente de execuție sunt rapide, au un coeficient de frecare scăzut și pot genera forțe relativ mari.

Proteza conține câte un controler analogic pentru fiecare dintre cele 16 grade de libertate cu rolul de a asigura controlul poziției și managementul tendoanelor. Nivelurile superioare de control sunt mapate într-o arhitectură distribuită VME constând în procesoare din familia 68000 care rulează sub VxWorks de pe o stație de lucru Sun. Din păcate, însă, proteza este relativ imprecisă și dificil de controlat. Datorită modului în care se face comanda, poziționarea este dificil de realizat deoarece apar efecte de histereză și frecări. Pe lângă acestea, mai ales în timpul secvențelor lungi de manipulare, apar și alunecări în punctele de prindere a obiectelor [63].

## 1.2.2 Proteze acționate electric

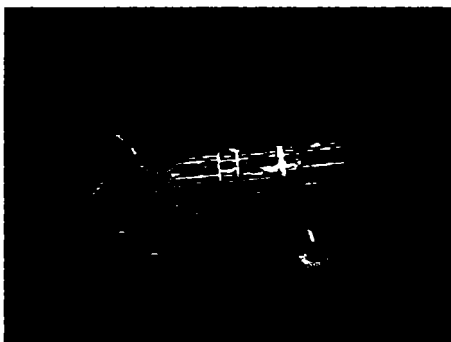
### 1.2.2.1 Proteze acționate cu ajutorul tendoanelor

Această variantă de acționare poate reprezenta o soluție viabilă datorită faptului că nu impune localizarea elementelor de acționare în interiorul falangelor. Cu toate acestea, în cazurile cele mai uzuale de utilizare, când patul cablului este fix, viteza de rotație și cuplul pot fi controlate numai prin intermediul actuatorilor, ceea ce implică rezolvarea problemei reprezentată de compromisul dintre cuplu și viteză pe parcursul procedurii de proiectare a protezei [62].

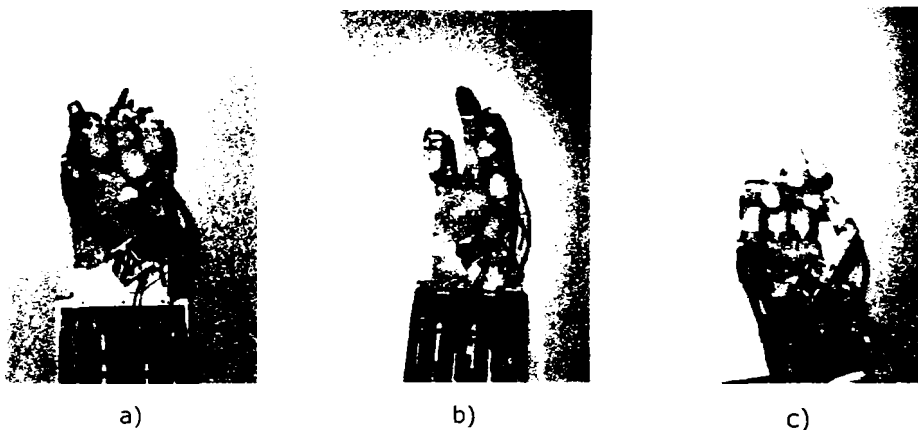
#### 1.2.2.1.1 LMS Hand

Această mână mecanică (Fig. 1.20) a fost realizată în cadrul *Laboratoire de Mecanique des Solides* a Universității Poitiers, Franța [47], [126]. Ea are patru degete articulate și 16 grade de libertate, pentru fiecare deget câte patru grade de libertate (trei pentru mișcările de flexare sau extensie și unul pentru mișcarea de aducție sau abducție).

Structura mecanică este realizată dintr-un aliaj ușor de aluminiu. Cele 16 articulații sunt comandate independent prin intermediul a 16 motoare de curent continuu situate pe antebraț, iar transmisia este realizată cu ajutorul unor cabluri din polietilenă. În ceea ce privește instrumentarea, mâna mecanică este dotată, pe de o parte, cu codoare incrementale situate pe axele motoarelor, iar pe de altă parte, cu potențiometre integrate în articulații. Sensorii tactili integrați în falange permit localizarea punctelor de contact între obiectul prins și mână.



**Fig. 1.20** Mâna mecanică a Universității Poitiers



**Fig. 1.21** a) Mișcare totală a degetului opozabil b) Prindere între degetul opozabil și arătător c) Prinderea unei țigări (pe care constructorii protezei o consideră nocivă, fapt la care aderă și autoarea acestei teze)

Structura mecanică și softul de control al mâinii se bazează pe utilizarea cartelelor de interfață pe magistrală VME și pe sistemul de operare multitasking în timp real OS/9. Pentru a evalua eforturile de contact între obiect și mână, se exploatează în timp real elasticitatea cablurilor prin intermediul unui model de comportament obținut cu o metodă bazată pe învățare (cu rețea neuronală). Pentru a elimina neliniaritățile rezultate în urma utilizării transmisiei prin cabluri este folosit un controler care permite, în timp real, calcularea cuplajului articular rezultat din comportamentul transmisiei.

Pentru a putea manipula obiecte cu vârful degetelor sunt utilizate două tipuri de control a poziției:

- punct la punct care permite configurarea mâinii în timpul fazei de prindere a obiectului;
- urmărire a traiectoriei care permite descrierea unei traiectorii specificate cu fiecare vârf al degetelor;

Fig. 1.21 prezintă câteva instantanee cu mâna mecanică LMS realizând diverse activități.

#### 1.2.2.1.2 *DIST Hand*

Această mână mecanică (Fig. 1.22) este realizată de *DIST-Università di Genova* și este compusă din patru degete cu 16 grade de libertate. Dimensiunea sa este ușor mai mare decât a unei mâini umane [7], [16].



**Fig. 1.22** *DIST Hand*



**Fig. 1.23** Exemplu de prindere

Acționarea este realizată cu motoare de curent continuu situate într-o cutie de comandă, care transmit mișcarea către degete prin intermediul unor tendoane. În fiecare articulație se găsește câte un senzor cu efect Hall, iar în vârful degetelor se află senzori pe trei axe pentru surprinderea poziției.

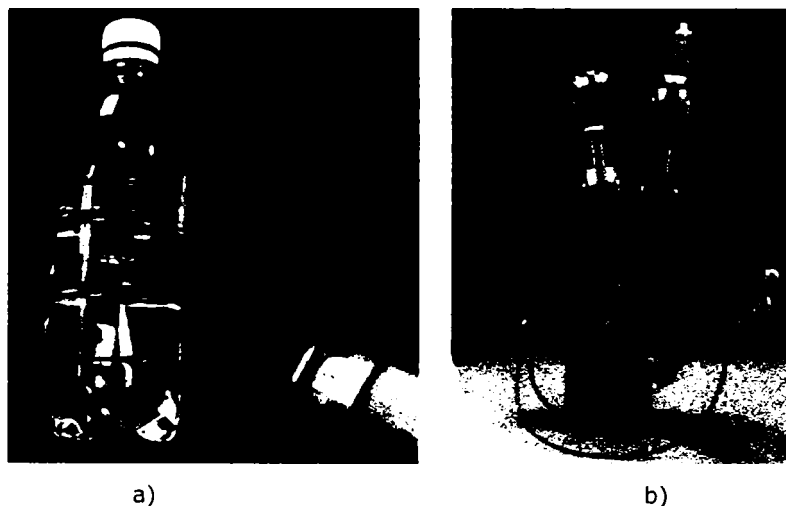
Având aceste dotări, mâna este capabilă să realizeze atât prinderi de putere, cât și de precizie. Pentru exemplificare, Fig. 1.23 prezintă modul în care se realizează prinderea unei mâini umane.

#### 1.2.2.1.3 *CyberHand*

Cercetătorii de la INAIL RTR Center, Italia, au dezvoltat, în cadrul programului Cyberhand, o mână cu trei degete [14], [122]. Această mână încorporează senzori tactili și de îmbinare unghiulară dezvoltați la *Scuola Superiore Sant'Anna*, Italia. Pentru manipularea mâinii sunt folosite patru motoare: unul pentru închiderea și deschiderea degetului opozant, iar celelalte pentru mișcarea celor trei degete. Dezvoltarea acestui model se bazează pe modelul RTR II (Fig. 1.24), care are trei

degete (mijlociul, arătătorul și degetul mare), nouă grade de libertate și doar două motoare: unul pentru flexarea și extensia degetelor (prindere puternică) și celălalt pentru mișcări de apropiere și depărtare a degetului mare (prindere de precizie). Arătătorul și mijlociul sunt identice, ambele având trei falange, pe când degetul mare are două falange, ca și modelul natural. [14]

Tensiunea din tendoane generează un cuplu de flexare în jurul fiecărei încheieturi și permite mișcarea de flexare. Mișcarea de extensie este obținută prin arcuri de extensie. Fig. 1.24 b) prezintă sistemul de transmisie și de execuție. Pentru ca proteza să realizeze o prindere adaptivă între degete, a fost proiectat un sistem adaptiv de prindere, care se bazează pe arcuri de compresie. Sistemul senzorial artificial este inima sistemului de control al mâinii și are două funcții principale: asigură semnalele de intrare pentru bucla de control la nivel de bază al fazei de prindere, permițând, astfel, un control local și autonom al prinderii, fără să necesite atenția utilizatorului și generează semnale senzoriale care să fie transmise către utilizator printr-o interfață neurală corespunzătoare.



**Fig. 1.24** a) Proteza RTR II; b) Sistemul de transmisie și de acționare al protezei

#### 1.2.2.1.4 Proteza Stanford

Cercetătorii de la *Rehabilitation Research and Development Center, Stanford University School of Medicine*, au realizat o proteză care mimează caracteristicile de mișcare și aparență ale mâinii umane. Proteza constă din patru degete active, capabile să se îndoie din articulațiile metacarpofalangeală, proximal interfalangeală și distal interfalangeală. Degetul mare este pasiv și poate fi poziționat de către utilizator pentru a asigura prinderi diferite, de putere și precizie. Funcționarea protezei se bazează pe închidere voluntară. Degetele rămân întinse până la acționarea cablului de comandă. Folosirea unui astfel de cablu determină flexarea tuturor celor patru degete active spre degetul mare staționar. După eliberarea cablului, degetele se întind. Acest mecanism de închidere voluntară oferă beneficiul unei strângeri gradate, permițând utilizatorului să modifice forța de strângere

dependent de forța din cablu. Această caracteristică permite prinderea obiectelor fragile.

Fiecare deget constă din falange de plastic articulate (Fig. 1.25) [27]. Cele zece articulații adiționale, pe lângă cele ale degetelor, permit o mișcare autentică a mâinii.



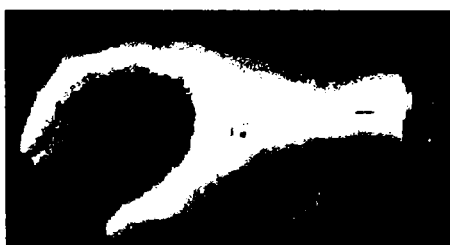
**Fig. 1.25** Deget din plastic cu trei articulații

Fiecare deget este acționat de către un cablu, trasat de-a lungul suprafeței palmare și atașat falangei distale. Această configurație este similară cu cea a tendoanelor de flexare în cazul mâinii umane. Cele patru cabluri de la degete converg într-un singur nod din palmă. Nodul este atașat printr-un dispozitiv la un cablu de comandă. Acționarea acestuia generează o tensiune în cele patru cabluri ale degetelor, determinând flexarea acestora (Fig. 1.26) [27].



**Fig. 1.26** Flexarea degetelor protezei

Prin manipularea distanței dintre cablu și fiecare dintre articulațiile unui deget, poate fi controlată mărimea brațului de pârghie pentru fiecare articulație. Designul acestei proteze permite degetelor să realizeze în deschidere cel mai mare arc posibil, maximizând abilitățile de prindere. Degetele revin la poziția întinse datorită elasticității materialului protector (Fig. 1.27) [27].



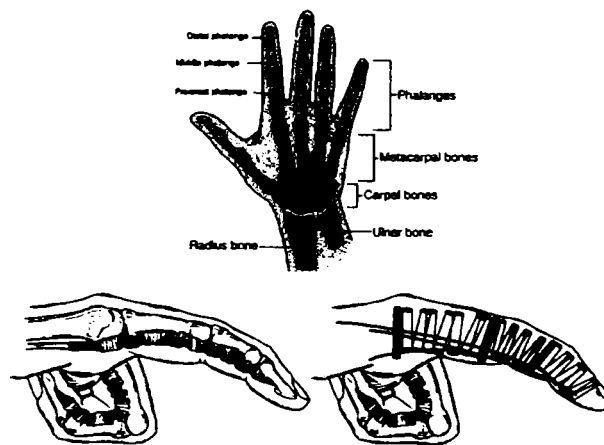
**Fig. 1.27** Revenirea degetelor la starea întinse

Degetul mare pasiv constă într-o armătură subțire de cupru înconjurată de trei tuburi de plastic rigide care simulează cele trei falange ale degetului uman. Aceste

tuburi rigide restricționează îndoirea din articulații, asigurând faptul că degetul mare menține o formă corespunzătoare. El poate fi poziționat dependent de tipul de prindere.

#### 1.2.2.1.5 Proteza IOWA

Proteza pentru mână IOWA a fost proiectată la *University of Iowa* și folosește o metodă nouă de abordare a designului articulațiilor multisegment, având drept scop comanda fiecărui deget folosind un sistem cu cablu de conducere [119]. Fiecare segment al unui deget este comandat printr-un astfel de sistem, unde cablul este trasat prin interiorul a două sau trei arcuri mecanice, care acționează atât ca elemente de structură, cât și ca elemente de mișcare (articulații) ale mâinii. Fiecare element flexibil va transla și se va roti în timp ce este acționat de un singur mecanism cu cablu de conducere, care transferă forța liniară în deflexie laterală și axială. Această configurație este similară tendoanelor flexoare din corpul uman.

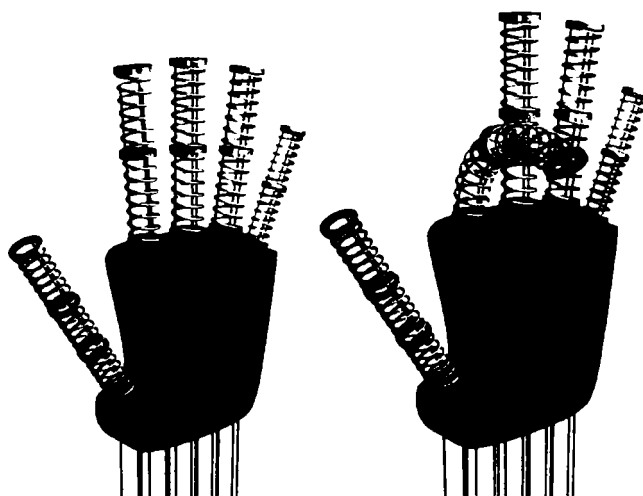


**Fig. 1.28** Prezentare schematică a principiului care guvernează proteza IOWA

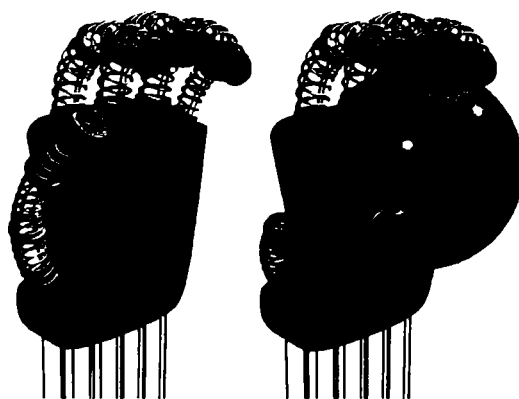


**Fig. 1.29** Proteza IOWA: fără mănușă a) și cu mănușă cosmetică b)

Proteza IOWA este compusă din cinci degete active, fiecare capabil să se îndoie din cele trei articulații (metacarpofalangeală, proximal interfalangeală și distal interfalangeală). Aceste articulații asigură îndoiri cu frecări foarte reduse, opunându-se la deflexiile laterale (Fig. 1.28).



**Fig. 1.30** Structură și mod de funcționare



**Fig. 1.31** Prinderea unui obiect

Fiecare deget este alcătuit dintr-un număr de arcuri, inele de compresie, cabluri și tuburi protectoare. Fiecare arc acționează ca o articulație. Aplicând o forță de tensiune unui cablu, se obține o deformare a arcului. Inelele de compresie acționează ca suporturi de legătură pentru cabluri și ca delimitatoare pentru tuburile protectoare atunci când arcul este comprimat. Proteza IOWA (Fig. 1.29 și Fig. 1.30) este foarte ușoară. În urma unei selecții corecte a materialelor, ea cântărește 90 g.

Designul simplist al protezei aduce câteva beneficii utilizatorului: elementele de execuție pot fi montate oriunde pe corp, nu numai pe mână, similar cu sistemul de frâne de la bicicletă, prinderea este ajustabilă și dexteritatea ridicată, mișcările degetelor sunt realiste (Fig. 1.31), rata de transmitere a forței este ridicată, ceea ce permite o forță de apăsare mică în vârful degetelor.

## 1.2.2.1.6 Mâna artificială Robonaut

Robonaut este un robot umanoid (Fig. 1.32) dezvoltat de *Robot Systems Technology Branch* la *Johnson Space Center* al NASA, în colaborare cu DARPA (*The Defense Advanced Research Projects Agency*). Scopul acestui proiect este de a dezvolta un sistem robotizat care să fie echivalentul unui astronaut [127].



Fig. 1.32 Robonaut



Fig. 1.33 Prinderea unui cârlig

Proiectul presupune și realizarea unei mâini mecanice pentru acest robot, capabilă să ajungă în toate locurile cerute în cazul expedițiilor spațiale și să opereze echipamente EVA (*Extravehicular Activity*), precum cârligul din Fig. 1.33. Mâna și încheietura sunt dimensionate astfel încât să producă puterea necesară pentru operarea în spațiul cosmic. Spre deosebire de orice alt model de proteză pentru mâna umană, mâna Robonaut are posibilitatea de prevenire a contaminărilor care pot să apară în alte sisteme spațiale.

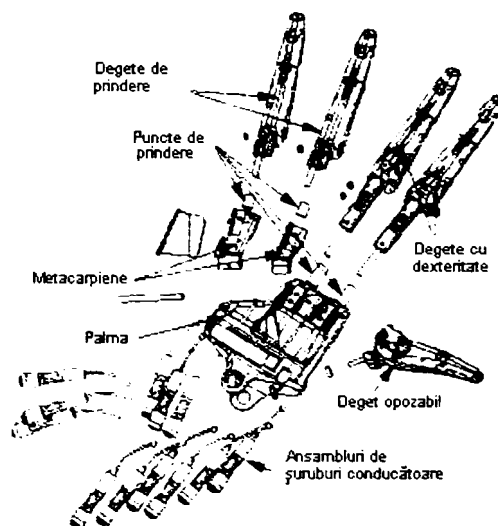


Fig. 1.34 Elemente componente ale mâinii Robonaut



Elementele componente ale mâinii artificiale sunt realizate din diverse materiale prelucrate astfel încât să se comporte acceptabil în condiții de variații extreme ale temperaturii. Are toate cele cinci degete ale modelului natural, cu un total de 14 grade de libertate, dintre care două grade de libertate sunt ale încheieturii. Fiecare încheietură este comandată de către un motor de curent continuu adăpostit în zona antebrațului (cu un diametru de 4 inch la bază și o lungime de 8 inch), unde se mai găsesc 12 plăci de comandă și toate cablurile necesare pentru funcționarea mâinii.

Proteza poate fi împărțită în două secțiuni (Fig. 1.34):

- un set de dexteritate folosit pentru manipulare, care cuprinde degetele arătător și mijlociu, fiecare cu câte 3 grade de libertate și degetul opozabil, tot cu 3 grade de libertate;
- un set pentru prindere care permite mâinii să mențină o prindere stabilă în timp ce manipulează obiectul (proprietate esențială pentru folosirea uneltelor) și care conține degetele inelar și mic cu câte un grad de libertate și palma cu un grad de libertate.

### 1.2.2.2 Proteze acționate prin servomotoare integrate

Acest tip de proteze se caracterizează prin faptul că toate elementele de acționare sunt incluse în zona palmei și a degetelor. Avantajul evident constă în faptul că proteza poate fi prinsă cu ușurință de brațul pacientului. Din păcate, însă, datorită spațiului restrâns disponibil, numărul elementelor de execuție care pot fi folosite este limitat, ceea ce implică o reducere a gradelor de libertate acționate. Pe de altă parte, proteza de acest tip va fi și destul de grea, ceea ce poate să implice respingerea din partea pacientului.

#### 1.2.2.2.1 Mâna artificială Barrett

Mâna artificială Barrett (Fig. 1.35) este realizată de Barrett Technology Inc. și este, mai degrabă, un prehensor cu capacitatea de a securiza prinderea obiectelor vizate, care pot să aibă diferite forme, dimensiuni sau orientări [128]. Acest prehensor are o greutate scăzută (1,18 kg) și o formă compactă, dar, cel mai important, încorporează întregul sistem de acționare. Cu exteriorul comunică prin standardul industrial de comunicare serială și poate fi integrat ușor și simplu cu orice braț.

*Barrett Hand* include un procesor, softul de comandă, partea electronică pentru comunicare, servocontrolerele și toate cele patru motoare de curent continuu. Prehensorul are trei degete multiarticulate, dintre care două prezintă un grad de libertate suplimentar, constând într-o mobilitate laterală sincronă de 180°, care permite o mare varietate de tipuri de prindere. Deși este capabil de prindere de putere, prehensorul nu poate realiza prindere de precizie. Forța disponibilă în vârful degetelor este de 20 N.

În ceea ce privește sensibilitatea prehensorului, acesta conține codoare optice pe motoare, senzori de cuplu în fiecare articulație și un mecanism de debreiaj, care dă

forțele implicite pentru fiecare motor. Fig. 1.36 prezintă câteva ipostaze ale funcționării protezei.

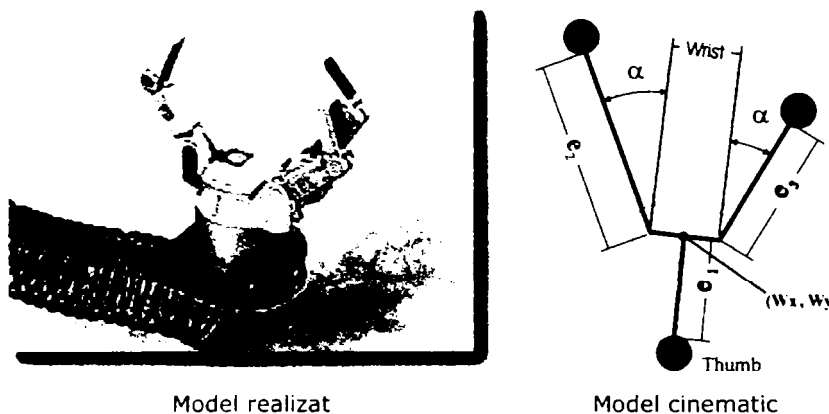


Fig. 1.35 Barrett Hand

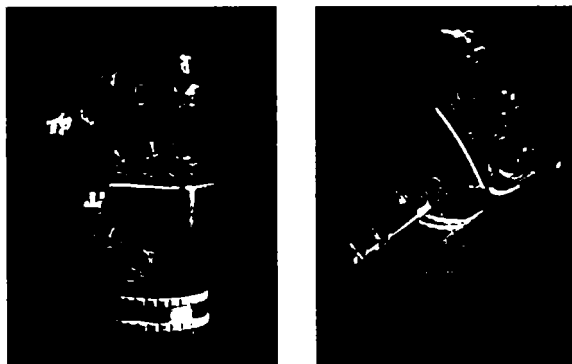


Fig. 1.36 Barrett Hand în acțiune

#### 1.2.2.2.2 Protezele DLR I și DLR II

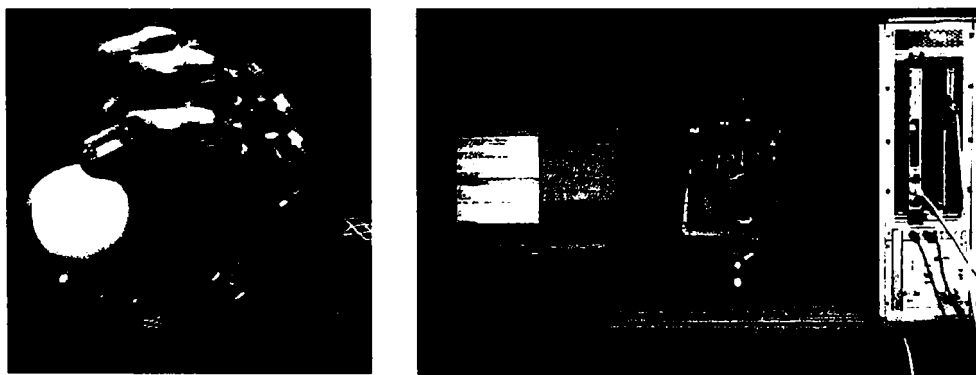
Proteza DLR I (Fig. 1.37) a fost realizată de către *Institute of Robotics and Mechatronics* al DLR (*German Aerospace Center*) [129]. Fiecare deget prezintă, la baza sa, o articulație cu două grade de libertate, realizată cu elemente de execuție liniare, special proiectate (mușchi artificiali). Articulația dintre falangele proximală și mediană este acționată de către un singur element de execuție integrat în falangă, care, prin intermediul unui arc, acționează pasiv articulația dintre falangele mediană și distală. Vârfurile degetelor au formă antropomorfică, lucru deosebit de important pentru prinderea și manipularea obiectelor.

Fiecare articulație este echipată cu un senzor unghiular și un senzor de cuplu. Patru foițe pentru detecția locului și a dimensiunii forței externe acoperă toate articulațiile. Vârfurile degetelor conțin o diodă laser pentru a simplifica procesarea imaginilor de către sistemul cu cameră integrat în palma mâinii. Echipamentul senzorial este completat cu senzori de limitare, senzori de temperatură și câte un senzor de poziție pe fiecare motor. Mâna artificială este comandată de către un controler hardware special proiectat. Greutatea totală a mâinii este de 1,8 kg.



**Fig. 1.37** Modelul DLR I

DLR II (Fig. 1.38) este un sistem antropomorfic pentru prinderea și manipularea obiectelor alcătuit din patru degete identice, cu patru articulații și cu trei grade de libertate fiecare [10], [129]. Un grad de libertate suplimentar al palmei îi permite mâinii să se adapteze perfect fie pentru prindere de putere, fie pentru prindere de precizie.



**Fig. 1.38** Proteza DLR II

Fiecare deget conține 16 senzori: 3 senzori de poziție în articulații, 3 senzori pentru cuplu în articulații, 3 senzori pentru poziție și viteză pe motoare, un senzor 6-dimensional forță/cuplu pe vârful degetului, 3 senzori de temperatură pe motoare și 3 senzori pentru compensarea temperaturii. Acționarea protezei este realizată cu motoare de curent continuu și este capabilă să asigure o forță de prindere de 10 N. Greutatea protezei este de 1,8 Kg.

Având drept scop flexibilitate maximă și performanță pentru proteză, proiectanții au urmărit miniaturizarea, integrarea completă a tuturor componentelor mâinii și reducerea masivă a numărului de cabluri. Pentru a preîntâmpina problemele de mentenanță avute cu modelul DLR I și pentru a reduce greutatea și costul de producție, proteza DLR II a fost realizată ca o structură schelet deschisă (Fig. 1.39). Acest lucru permite testarea influenței pe care o au obiectele de forme diferite asupra suprafețelor exterioare în timpul operațiilor de prindere.



**Fig. 1.39** Proteza DLR II



**Fig. 1.40** Structura cinematică

Designul acestei proteze a pornit de la modelul antropomorfic, iar forma obiectelor care se doreau a fi manipulate și restricțiile tehnologice au impus lungimea degetelor și modul de conectare al acestora. În pasul următor s-a determinat structura cinematică a mâinii artificiale (Fig. 1.40) pe baza unor teste de performanță realizate cu modele virtuale scalabile. Astfel, DLR II are un grad de libertate suplimentar față de modelul anatomic, care îi permite îmbunătățirea celor două tipuri de prindere. Pozițiile degetelor realizabile cu proteza contruită, pentru ambele tipuri de prindere, au fost proiectate virtual și optimizate succesiv până a rezultat forma existentă [10].

#### 1.2.2.2.3 Modelul SNAVE

Modelul SNAVE (numit astfel după Mervyn Evans, proiectantul său) de proteză pentru mâna umană (Fig. 1.41) are multiple grade de libertate și poate fi controlat într-o manieră ierarhică, cu scopul de a mima mecanismul de control aparent al mâinii umane [46], [114].

Proteza conține senzori de forță și de alunecare în degete și palmă și folosește un microcontroler pentru a coordona operațiile. Senzorii de flexare din articulații permit adaptarea la obiect a tipului de prindere și modificarea forței aplicată asupra obiectului. Astfel, microcontrolerul poate asigura faptul că este realizată cea mai ușoară prindere posibilă pentru un anumit obiect. Dacă microcontrolerul detectează că obiectul alunecă, tensiunea poate fi modificată automat pentru a preveni scăparea obiectului. În aceste condiții, mâna poate fi controlată pe principiul deschidere voluntară, închidere involuntară, deoarece utilizatorul trebuie doar să-i spună mâinii să se relaxeze pentru a putea prinde un obiect în maniera cea mai potrivită.



**Fig. 1.41** Proteza SNAVE

Proteza poate fi controlată și prin principiul clasic, deschidere involuntară, închidere voluntară prin dezactivarea sistemului de control a forței la atingere. În prezent, această proteză este folosită în Oxfordshire.

### **1.3 Interfața dintre proteză și pacient**

#### 1.3.1 Electromiografia

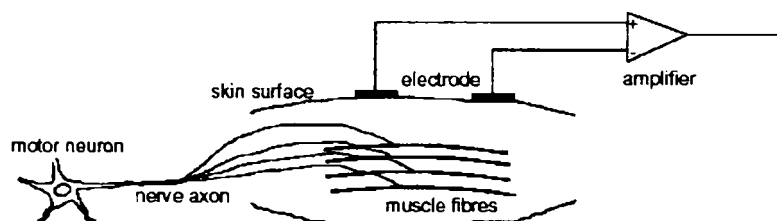
Protezele pentru mână dau speranțe persoanelor cu mâna amputată că își vor recăpăta abilitatea de a realiza mișcări complexe. Electromiografia (EMG) este una dintre cele mai bune metode, cel puțin în prezent, de a restaura parțial funcționalitatea unei mâini amputate, asigurând interfața om-mașină necesară pentru controlul protezei [62]. Prima mână artificială controlată prin această metodă a fost dezvoltată în Rusia de către A.E. Kobrinski, în 1961, iar Otto Bock Orthopedic Industries a dezvoltat o mână cu degete în anul 1965, folosind pentru control aceeași metodă [39].



**Fig. 1.42** OttoBock SUVA Hand

Din păcate, însă, protezele comerciale pentru mâini, care folosesc interfață EMG, au unul sau două grade de libertate, permițând mișcări ale degetelor și opoziția degetului mare (simple prehensoare) [13]. Datorită lipsei de grade de libertate, aceste echipamente se caracterizează printr-o funcționalitate scăzută în ceea ce privește prinderea. De fapt, ele nu permit înconjurarea adecvată a obiectelor, în comparație cu adaptabilitatea mâinii umane. Mecanismele cu puține elemente de execuție permit obținerea unor capabilități de prindere autoadaptive, datorită unui număr mare de grade de libertate, controlat cu un număr limitat de elemente de execuție. Această abordare permite reproducerea majorității comportamentelor de prindere ale mâinii umane, fără a crește complexitatea sistemelor mecanice și de control, lucru foarte important în cazul protezelor pentru mâini, unde doar câteva semnale de control sunt disponibile interfeței de control EMG, persoanele cu mâna amputată neputând controla în mod natural mai mult de două elemente de execuție. Cea mai avansată proteză comercială mioelectrică în prezent este modelul OttoBock SUVA Hand (Fig. 1.42).

Electromiografia este semnalul măsurat prin plasarea elementelor conductive sau a electrozilor pe suprafața pielii sau în mușchi. Mușchii scheletici implementează mișcările corpului nostru. Ei sunt atașați de oasele adiacente prin tendoane și induc mișcare în articulațiile care se formează acolo unde două oase se întâlnesc. Fibrele din care este compus un mușchi sunt grupate în unități funcționale numite unități motoare. O astfel de unitate motoare este formată din neuronul motor, axonul acestuia și din toate fibrele musculare care sunt atașate de acesta pentru a primi semnalul de contractare. Un singur mușchi poate avea mai multe unități motoare.



**Fig. 1.43** Detectarea potențialului unității motoare în acțiune

Pe măsură ce semnalul primit de la creier pentru contractare crește, se recrutează noi unități motoare și, totodată, se crește frecvența de contractare la cele deja recrutate. Toate celulele musculare dintr-o unitate motoare devin active în același timp. Variind numărul unităților motoare active, corpul poate controla forța contractării musculare. Când un anumit motor se contractă, acesta emite repetitiv câte un scurt impuls de activitate electrică, denumit potențial al unității motoare în acțiune (*motor unit action potential* – *MUAP*). Acesta este detectat prin intermediul electrozilor poziționați pe suprafața pielii, în apropierea motorului. Detectia este ilustrată în Fig. 1.43 [39].

Folosind această metodă, Dr. Marko Vuskovic, de la *San Diego State University* a realizat un sistem pentru controlul unei mâini artificiale (Fig. 1.44) [39]. Au fost plasate patru seturi de electrozi pe grupele de mușchi care acționează asupra degetului mare, arătător, mijlociu și mic. Datele EMG sunt colectate *off-line* de către electrozi și depozitate într-o bază de date. De regulă, mâna umană ia o formă de bază, în funcție de forma obiectului, înainte de prinderea acestuia. Informațiile colectate de la mușchii rămași în urma amputării mâinii sunt folosite pentru a

determina această formă de bază, iar mai departe, mâna artificială este comandată în mod corespunzător pentru prinderea obiectului.

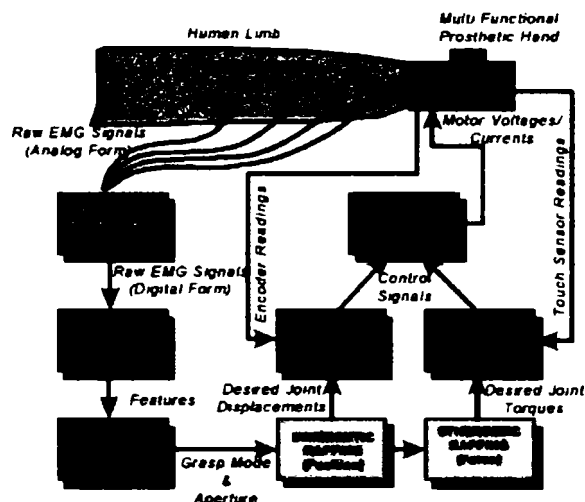


Fig. 1.44 Controlul unei proteze folosind semnale EMG

Metodele convenționale de control a unei proteze pentru mâna umană prin EMG pot fi împărțite în două clase [78]:

- folosirea unui mecanism de învățare pentru adaptarea la caracteristicile pacientului;
- metode care nu se bazează pe învățare.

Deși din literatura de specialitate reiese că prima categorie permite controlul unui număr mai mare de grade de libertate, metodele din cea de-a doua categorie sunt mult mai utilizate în practică. În toate situațiile, însă, semnalul mioelectric este preluat de către electrozi de pe suprafața pielii și procesat de către circuite electronice, după care se face o estimare a nivelului semnalului [39], [40]. Această estimare este folosită fie pentru a selecta o funcție, fie pentru a controla viteza unei funcții. Decizia dacă o funcție trebuie activată sau care funcție să fie activată depinde de nivelul semnalului. Semnalul mioelectric procesat care corespunde unei contracții constante nu este el însuși constant, ci fluctuează în jurul unui valori medii corespunzătoare aceluși nivel de contracție. Pentru a obține o estimare a unui nivel al semnalului, acesta trebuie observat pe durata unei perioade de timp (cu cât mai lungă perioada, cu atât mai bună estimarea). Din păcate, însă, durata procesului de estimare nu trebuie să depășească mai mult de o zecime de secundă deoarece vor apărea întârzieri foarte mari între momentul contracției și acționarea protezei. Sarcina pe care trebuie să o realizeze pacientul este foarte dificilă. Trebuie să învețe să genereze niveluri de semnale mioelectrice corespunzătoare fiecărei acțiuni în parte. Diferența dintre semnalul generat și cel intenționat se numește „eroare de operare”.

Astfel, funcționarea protezei mioelectrice rezultă din intenția pacientului modificată de două surse de erori: erorile de sistem și erorile de operare. Din păcate, nici unele dintre aceste erori nu pot fi eliminate. Ce se poate face constă în selectarea unor acțiuni asociate semnalelor mioelectrice, care să minimizeze probabilitatea unui

răspuns incorect. Aceasta presupune determinarea unui domeniu de niveluri de semnale pe care pacientul le poate genera confortabil, urmată de încadrarea în acest domeniu a activităților cele mai potrivite. Procedura presupune estimarea a două niveluri pentru semnal: maxim și minim. Specialistul care supraveghează pacientul trebuie să măsoare valoarea minimă a nivelului de semnal în condiții cât mai apropiate de cele în care proteza va fi folosită. Pentru a preveni activările accidentale ale protezei, este necesar și un maxim al nivelului. Aceste niveluri ale semnalelor pot fi, apoi, ajustate pentru a obține valori optime, minimizând, astfel, riscul unui control impropriu și făcând, de fapt, proteza mai ușor de controlat.

### 1.3.2 Interfața creier-mașină

Interfața creier-mașină (*Brain-machine interface BMI*) este cea mai recentă soluție pentru controlul protezelor pentru mână [75]. Algoritmii BMI existenți le permit pacienților să își folosească gândurile pentru a comunica direct cu un computer. Spre exemplu, încercările clinice prezente ale BMI cu utilizare pentru oameni se concentrează pe încercarea de a pune pacientii, care au funcții motoare extrem de reduse sau chiar deloc, să folosească BMI pentru a muta un cursor pe un ecran de calculator ca modalitate de a comunica cu cei din jur. Acest tip de BMI folosește un implant neuroprotetic în creier pentru a extrage grade de libertate spațiale (spre exemplu sus/jos, stânga/dreapta) dintr-un număr de neuroni. În pasul următor se dorește folosirea unor tehnici similare pentru a controla protezele pentru mână. Definitivarea relațiilor dintre semnalele neuronale și poziția și mișcarea mâinii ar permite dezvoltarea unei interfețe BMI naturale (care să folosească semnalele neuronale la fel ca în sistemul nervos) prin care să se controleze neuronal proteza. Această idee se bazează pe presupunerea că activitatea neuronală poate fi tradusă în mișcări naturale și că aceste mișcări pot fi folosite pentru a comanda mișcarea unui echipament protetic. Sunt pe cale de a fi definitive studii pe animale, care să permită corelarea semnalelor neuronale cu punctul final al traiectoriei brațului unui animal, în două sau trei dimensiuni spațiale [48], [54].

Complexitatea mâinii umane este unul dintre aspectele care separă oamenii de alte specii [75]. Probabil că acesta este și motivul pentru care o mare parte a creierului uman este folosită pentru a controla mișcările mâinii. O mână artificială, care să fie parte a unui sistem complet BMI, trebuie să fie cât mai anatomică cu putință. Dacă algoritmul BMI de control al protezei nu păstrează relația dintre semnalele corticale și mișcările originale ale mâinii, va fi foarte dificil (dacă nu imposibil) pentru utilizator să învețe să controleze o astfel de proteză.

Pentru a controla un echipament BMI, aflat în prezent în teste clinice [75], utilizatorul este instruit, spre exemplu, să își imagineze un balon plutind în sus, care mută în sus cursorul de pe ecranul calculatorului. În timp ce utilizatorul se gândește la balonul plutind în sus, semnalele neuronale sunt înregistrate și distinse de semnalele neuronale transmise când utilizatorul nu se gândea la balon. Mișcările mâinii sunt comandate electric de către creier și realizate prin acționarea unor mușchi și mișcarea unor articulații (spre exemplu, mișcările umărului) care nu sunt legate de zona mâinii. Acest mod de antrenare dă rezultate dacă numărul de grade de libertate care trebuie controlate este menținut relativ scăzut. Astfel, un număr mare de strategii de control sunt necesare pentru a asigura un control ușor al unei



proteze pentru mâini și pentru a antrena proteza să se adapteze la semnalele neuronale ale utilizatorului.

O modalitate de a exprima mișcările mâinii umane constă în folosirea unui set principal de posturi ale mâinii, cunoscute sub denumirea de primitive sau sinergii [74]. S-a arătat [92] că majoritatea mișcărilor de prindere pot fi realizate dintr-o combinație de câteva primitive. Pe de altă parte, s-a arătat și faptul că, stimulând un anumit set de neuroni motori în cortexul motor primar, se obține un set de posturi folosite pentru prindere [43]. Aceste primitive pot fi folosite pentru realizarea unor mișcări simple precum prinderea unei cești de cafea sau a unui pix, dar nu pot fi utilizate în mișcări de dexteritate care implică un control al forțelor și al rigidității degetelor.

Pentru a obține o proteză cu dexteritate totală și ușor de controlat, cea mai bună metodă ar consta în folosirea structurii de control cortical care a interacționat cu mâna pierdută. Creierul este, probabil, destul de plastic pentru a învăța câteva modificări la maparea originală între semnalele corticale și mișcarea degetelor [74]. Cu cât mai mult din această relaționare este captată în sistemul BMI, cu atât va fi mai ușor pentru utilizator să învețe să își utilizeze proteza, ceea ce înseamnă nu numai folosirea unor metode statistice avansate, dar și modelarea acestor neliniarități anatomice în proteză.

## 2 MODELUL CINEMATIC AL MÂINII UMANE

### 2.1 Suport teoretic

Pentru a genera o anumită postură a mâinii, pot fi folosite atât modelul cinematic direct, cât și modelul cinematic invers cu scopul de a controla toate articulațiile mâinii. În cazul modelului cinematic direct, se cunosc valorile articulațiilor, iar problema constă în determinarea poziției carteziene a capătului lanțului articulat (efectorul final). Folosind acest model, o anumită articulație poate fi rotită un număr de grade, iar rotația rezultată este transmisă automat articulațiilor care i se succed în cadrul lanțului. În cazul modelului cinematic invers, problema constă în determinarea valorilor articulațiilor, care vor permite modificarea efectorului final al lanțului articulat (ce corespunde, în acest caz, cu vârful degetelor) la o poziție și o orientare dorite. Problema constă în rezolvarea ecuației

$$X = F(Y) \quad (2.1)$$

unde  $X$  este poziția efectorului final la un anumit moment de timp, iar  $Y$  reprezintă vectorul care descrie configurația unghiulară curentă a articulațiilor [91].

Folosind modelul cinematic invers poate fi selectat orice deget și orientat în poziția dorită. Această caracteristică este folositoare în mod special atunci când se dorește contact între vârfulurile mai multor degete. În cazul degetelor (mic, inelar, mijlociu și index) trebuie impuse anumite constrângeri articulațiilor pentru a asigura o închidere realistă a mâinii, prezentate în detaliu în paragraful 2.2.1. Constrângerile din modelul cinematic direct sunt realizate prin modificarea valorilor articulațiilor. În modelul cinematic invers, influențele celorlalte articulații sunt introduse în coloanele corespunzătoare ale matricei Jacobiene.

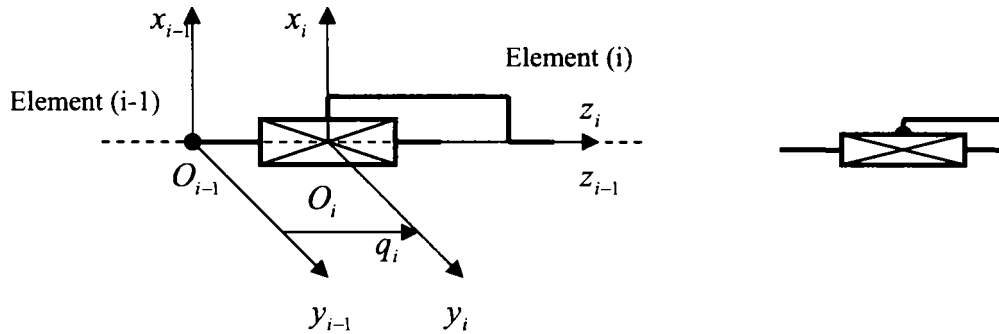
Pornind de la faptul că proteza pentru mână prezintă un sistem de conducere (format dintr-un sistem de comandă, un sistem de acționare și un sistem de percepție), precum și un sistem mecanic (ce asigură legătura fizică între baza acesteia și efectorul final — vârful degetelor) se poate spune că ea reprezintă un minirobot. Pentru a se asigura conceperea și comandarea funcționării unui robot, este necesară modelarea sa matematică, concepută, în general, pentru cazul în care structura acestuia posedă doar corpuri perfect rigide, legate prin cuple ideale, fie de rotație, fie de translație (Fig. 2.1 și Fig. 2.2) [19], [97].

Fiecărei cuple  $i$  se asociază o singură variabilă articulară  $q_i$ , care este [28]:

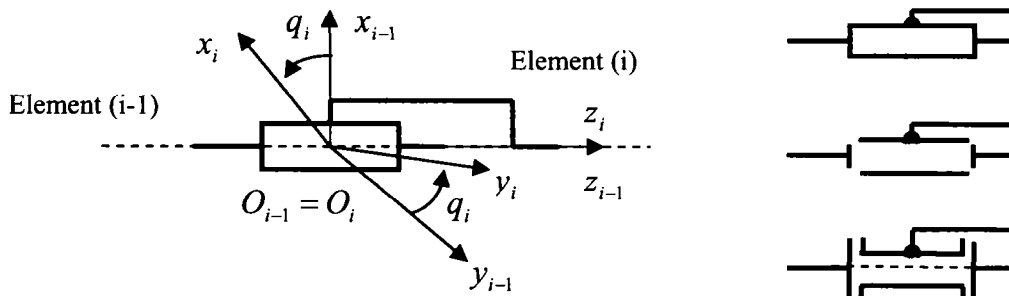
- un unghi  $\theta$  de rotație în jurul axei cuplei, când cupla respectivă este de rotație;

— o deplasare  $d$  de-a lungul axei cuplei, când aceasta este de translație.

Legătura între spațiul operațional, cuprinzând variabilele care exprimă poziția și orientarea efectorului final, și spațiul articular, care cuprinde variabilele cuplelor, este realizată prin intermediul modelului cinematic (geometric) al robotului. Când această legătură este realizată în sensul indicat, se obține modelul geometric direct, al cărui rezultat este alcătuit din cele 12 ecuații cinematice ale robotului. Expriamarea variabilelor articulare ale robotului în funcție de cele operaționale este rezultatul abordării modelului geometric invers.



**Fig. 2.1** Reprezentarea unei cuple cinematice de translație



**Fig. 2.2** Reprezentarea unei cuple cinematice de rotație

Pentru exprimarea situației relative sau absolute, respectiv pentru studiul cinematicii și dinamicii robotului, fiecărui element al robotului  $i$  se atașează unul sau mai multe sisteme de referință. Aceste sisteme sunt definite astfel încât originile și axele corespund unor puncte și direcții care au un rol funcțional în execuția sarcinii. De obicei, aceste sisteme de referință se aleg cu originea în centrul cuplelor cinematice care conectează două elemente, sau în centrul de masă al elementului căruia îi este atașat respectivul sistem de referință. Axele sistemelor de referință se aleg pe direcțiile axelor cuplelor cinematice. [97]

Sistemele de referință permit:

— exprimarea situațiilor și deplasărilor relative ale elementelor robotului;

- specificarea pozițiilor succesive pe care trebuie să le ocupe sistemul de referință atașat efectorului final al robotului pentru realizarea sarcinii programate;
- descrierea și controlul vitezelor și accelerațiilor efectorului final;
- descrierea și controlul forțelor generalizate care acționează asupra robotului în timpul îndeplinirii sarcinii, respectiv în timpul interacțiunii cu mediul;
- evitarea coliziunii cu obstacolele din mediul de lucru;
- integrarea informațiilor furnizate de sistemul senzorial pentru comanda robotului.

### 2.1.1 Modelarea cinematică directă

Modelarea roboților într-o manieră sistematică și care să se preteze unui calcul automat necesită o metodă adecvată pentru descrierea arhitecturii structurii mecanice a acestora (exprimarea situației relative a elementelor unui robot). În robotică există mai multe convenții de modelare a elementelor și sistemelor de referință atașate acestora: Denavit-Hartenberg, Ehet, Renaud, Khalil, Borrel [97]. Convenția Denavit-Hartenberg este cea mai utilizată. Această metodă conduce la rezultate bune în cazul roboților seriali (lanț cinematic deschis), dar prezintă anumite neclarități în cazul roboților a căror structură mecanică este bazată pe lanț cinematic închis și în cazul roboților cu structură arborescentă. Metoda Khalil permite o descriere omogenă, cu un număr minim de parametri, atât a arhitecturilor simple, cât și a celor complexe.

Metodele de modelare geometrică sunt bazate pe anumite ipoteze [97]:

- variabila cuplei cinematice ( $j$ ) este  $q_j$ ;
- corpul ( $j$ ) este notat cu  $C_j$ ;
- corpurile sunt considerate perfect rigide;
- cuplele cinematice sunt cuple de rotație sau de translație;
- cuplele cinematice care conectează elementele structurii mecanice sunt considerate ideale (se neglijează jocurile mecanice, frecările, deformațiile);
- fiecărui corp  $C_j$  i se atașează un sistem de referință  $\mathcal{R}_j$ ;
- parametrii geometrici care permit definirea situației sistemului de referință  $\mathcal{R}_j$  în raport cu precedentul au indicele ( $j$ ).

A exprima poziția și orientarea efectorului final al robotului în raport cu un sistem de referință înseamnă a exprima poziția și orientarea sistemului de referință atașat efectorului în raport cu sistemul de referință considerat. Structura mecanică a robotului este reprezentată de un lanț cinematic, închis sau deschis, format din elemente, considerate solide rigide, legate între ele prin cuple cinematice de trans-

lație sau de rotație. Pentru a exprima situarea (relativă sau absolută) a elementelor robotului, fiecărui element  $i$  se atașează un sistem de referință. Situarea relativă a unui sistem în raport cu altul este exprimată printr-o matrice de transformare generală  $G$ .

Fie un robot cu  $n$  grade de libertate, realizat din  $n$  elemente rigide succesive legate prin  $n$  cuple simple. Problema principală a modelării geometrice directe este exprimarea matricei generale  $G_n$  ce precizează efectorul final față de reperul fix, prin intermediul unei succesiuni de matrice care poziționează fiecare element al robotului față de precedentul. Astfel, între reperele atașate elementelor  $i-1$  și  $i$ , legătura este asigurată printr-o matrice de transfer  ${}^{i-1}T_i$ , care are întotdeauna forma unei matrice generale, indiferent care este natura cuplei ce leagă între ele cele două elemente. [28]

Poziția elementului  $i$  față de baza robotului, considerat elementul 0 al acestuia, se va exprima prin produsul matricelor de transfer corespunzătoare tuturor sistemelor de referință atașate elementelor, de la bază până la  $i$  [32]:

$$G_i = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdots {}^{i-1}T_i \quad (2.2)$$

Efectorul final va fi exprimat față de bază prin matricea [28], [32]:

$$G_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad (2.3)$$

Pe parcursul determinării matricei  $G_n$ , se calculează produsele matricelor de transfer de la dreapta spre stânga, astfel că poziția efectorului final va fi cunoscută, pe rând, față de toate elementele de la stânga sa până la bază. Astfel [28]:

$$\begin{aligned} {}^{n-1}G_n &= {}^{n-1}T_n \\ {}^{n-2}G_n &= {}^{n-2}T_{n-1} \cdot {}^{n-1}T_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

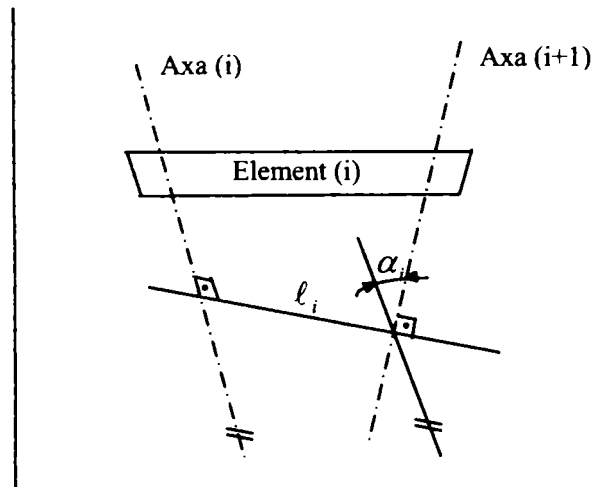
$$G_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n$$

Elaborarea modelului geometric pe baza convenției Denavit-Hartenberg, pornește de la următoarele considerații [28]:

- Numerotarea elementelor robotului începe de la bază spre efectorul final al acestuia (de la stânga la dreapta). Baza este considerată elementul 0 și nu aparține structurii mecanice propriu-zise a robotului.
- Fiecare element are același număr ca și cupla plasată la stânga sa, care îi imprimă și mișcarea. Elementul  $i$  al robotului are în stânga cupla  $i$  și la dreapta cupla  $i+1$ . Ultimul element este efectorul final. La stânga

efectorului este situată cupla  $n$ , iar la dreapta nu mai există cuplă cinematică.

- Fiecare element  $i$  al robotului, care are rolul strict de a asigura legătura dintre cuplele de la capetele sale, este caracterizat prin două mărimi geometrice (Fig. 2.3)



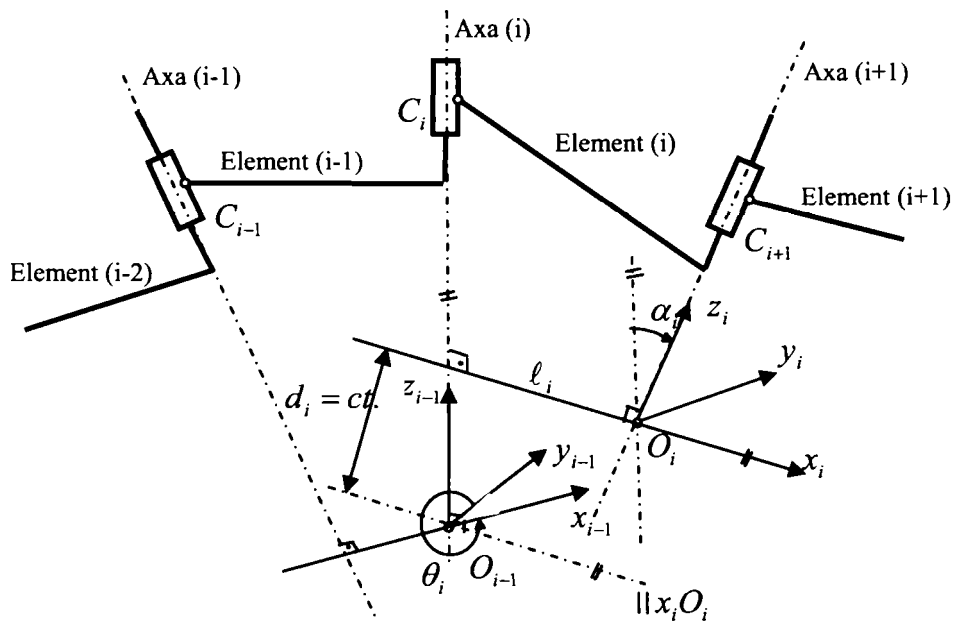
**Fig. 2.3** Mărimile ce caracterizează elementele unui robot

- lungimea  $l_i$ , reprezentată de distanța între axele cuplelor respective și măsurată pe perpendiculara comună pe axele cuplelor  $i$  și  $i+1$
- unghiul de răsucire  $\alpha_i$ , reprezentat de unghiul dintre axele cuplelor de la capete
- Pe axa cuplei oarecare  $i$  se află picioarele a două perpendiculare:
  - perpendiculara comună axelor  $i-1$  și  $i$
  - perpendiculara comună axelor  $i$  și  $i+1$
- Poziția relativă a corpurilor  $i-1$  și  $i$  este precizată prin:
  - distanța  $d_i$  măsurată pe axa cuplei  $i$  între picioarele perpendicula-  
relor comune axelor  $i-1$ ,  $i$  și, respectiv,  $i$ ,  $i+1$
  - unghiul  $\theta_i$  dintre cele două perpendiculare, măsurat în plan perpendi-  
cular pe axa cuplei  $i$
- Sistemul de referință atașat elementului  $i$ , trebuind să reflecte poziția acestuia la orice moment, se plasează pe axa cuplei  $i+1$ . Modul de plasare diferă în funcție de natura cuplei  $i$ , adică de caracterul mișcării imprimare de aceasta elementului considerat.
- Sistemul de referință  $S_0$ , atașat bazei robotului, se plasează pe axa cuplei 1 și reprezintă reperul fix. Dacă din anumite motive este necesară

considerarea unui alt sistem de referință fix, atunci  $S_0$  se exprimă față de acesta printr-o matrice generală cu elemente constante.

- De regulă, sistemul de referință  $S_n$ , atașat efectorului final, este plasat pe axa cuplei  $n$  împreună cu sistemul atașat elementului  $n - 1$ .
- Dacă de efectorul final este fixată o sculă prelucrătoare, poziția sa se reprezintă față de reperul atașat efectorului final printr-o matrice generală cu elemente constante.

În cazul elementului  $i$  legat prin cupla de rotație  $i$ , variabila articulară aferentă este unghiul  $\theta_i$ , distanța  $d_i$  fiind constantă (Fig. 2.4) [28].



**Fig. 2.4** Element legat prin cuplă de rotație

Sistemul de referință  $S_i$ , atașat elementului, se alege astfel:

- Originea  $O_i$  a reperului este punctul de intersecție dintre axa cuplei  $i + 1$  și perpendiculara comună pe axele cuplelor  $i$  și  $i + 1$ . Dacă aceste axe sunt concurente, originea  $O_i$  se poate alege în punctul de concurență. Când axele sunt paralele sau coliniare, originea reperului se alege astfel ca  $d_i = 0$ .
- Direcțiile axelor sunt:
  - Axă  $O_i z_i$  se suprapune peste axa cuplei  $i + 1$ , având sensul pozitiv dat de rotația trigonometrică în jurul acestei axe.
  - Axă  $O_i x_i$  are direcția perpendicularei comune pe axele cuplelor  $i$  și  $i + 1$  (care sunt axele  $O_{i-1} z_{i-1}$ , respectiv  $O_j z_j$ ). Sensul său

pozitiv este sensul produsului vectorial al versorilor celor două axe. Aceeași observație este valabilă dacă axele  $O_{i-1}z_{i-1}$  și  $O_i z_i$  sunt concurente. Dacă axele cuplelor  $i$  și  $i+1$  sunt paralele sau coliniare, axa  $O_i x_i$  se alege perpendiculară pe planul determinat de cele două direcții paralele, respectiv pe direcția lor comună, cu sensul astfel precizat ca trecerea de la un reper la altul să se facă în cel mai simplu mod posibil.

- Axa  $O_i y_i$  are direcția și sensul necesare pentru ca triedrul  $S_i$  să fie drept.

Cu alte cuvinte, sistemul de referință atașat elementului  $i$  se obține din sistemul atașat elementului  $i-1$ , de care este legat prin cupla de rotație  $i$ , prin următoarea succesiune de transformări:

- o rotație de unghi  $\theta_i$  în jurul axei  $O_{i-1}z_{i-1}$
- o translație de mărime  $d_i$  de-a lungul axei  $O_{i-1}z_{i-1}$
- o translație de mărime  $\ell_i$  de-a lungul axei  $O_i x_i$
- o rotație de unghi  $\alpha_i$  în jurul axei  $O_i x_i$

Matricea de transfer care precizează reperul  $S_i$  se obține prin produsul matricelor care reprezintă transformările omogene menționate [28], [32]:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & \ell_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \ell_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

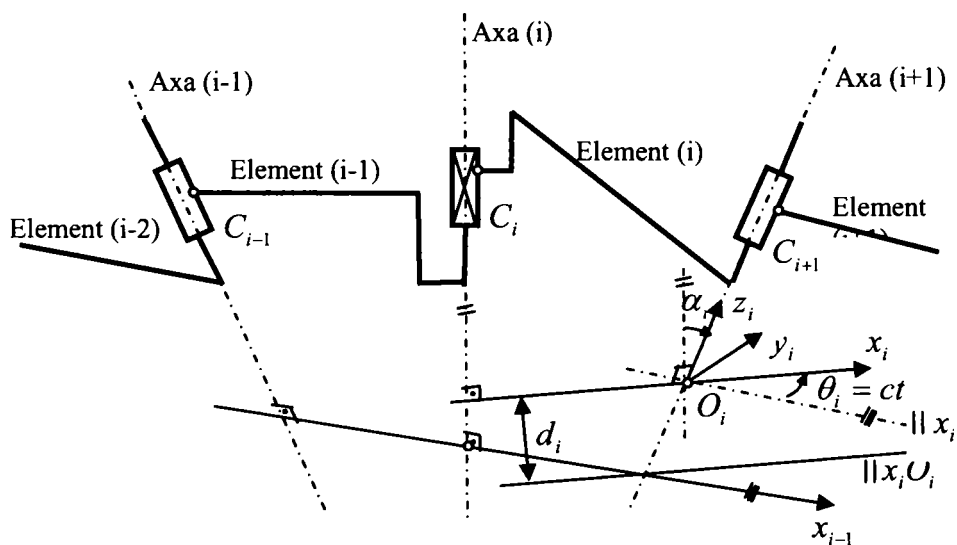
În cazul elementului  $i$  legat prin cupla de translație  $i$ , variabila articulară aferentă este deplasarea  $d_i$ , unghiul  $\theta_i$  fiind constant (Fig. 2.5) [28].

Conform proprietăților mișcării de translație, la fiecare moment, toate punctele corpului au aceeași lege de mișcare, aceeași viteză și aceeași accelerație. Din acest motiv, lungimea elementului  $i$  nu are nicio importanță pentru mișcare, astfel încât se consideră  $\ell_i = 0$ .

Sistemul de referință  $S_i$  atașat elementului se alege astfel:



- Originea  $O_i$  a reperului se alege fie suprapusă peste originea reperului  $S_{i-1}$  pentru poziția  $d_i = 0$  a elementului, fie la intersecția axei cuplei  $i + 1$  cu prelungirea perpendiculară comună pe axele cuplelor  $i - 1$  și  $i$ .
- Direcțiile axelor sunt:
  - Axa  $O_i z_i$  se suprapune peste axa cuplei  $i + 1$
  - Axa  $O_i x_i$  are direcția perpendiculară comună pe axele cuplelor  $i$  și  $i + 1$ ; relativ la sensurile celor două axe sunt valabile considerațiile prezentate în cadrul elementului legat prin cuplă de rotație.
  - Axa  $O_i y_i$  are direcția și sensul necesare pentru ca triedrul  $S_i$  să fie drept.



**Fig. 2.5** Element legat prin cuplă de translație

Matricea de transfer care precizează reperul  $S_i$  se obține în același mod ca și pentru elementul legat prin cuplă de rotație, considerând lungimea elementului nulă [28], [32]:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

După ce se exprimă toate matricele de transfer aferente elementelor robotului, se calculează matricea  $G_n$  ale cărei elemente identificate cu cele din forma sa generală, reprezintă ecuațiile cinematice ale robotului. Acestea se prezintă sub forma

unui sistem de 12 ecuații care exprimă coordonatele operaționale ca funcții de coordonate articulare și materializează modelul geometric direct al unui robot [28], [32]:

$$\begin{aligned}
 n_x &= n_x(q_1, \dots, q_n) \\
 n_y &= n_y(q_1, \dots, q_n) \\
 n_z &= n_z(q_1, \dots, q_n) \\
 o_x &= o_x(q_1, \dots, q_n) \\
 o_y &= o_y(q_1, \dots, q_n) \\
 o_z &= o_z(q_1, \dots, q_n) \\
 a_x &= a_x(q_1, \dots, q_n) \\
 a_y &= a_y(q_1, \dots, q_n) \\
 a_z &= a_z(q_1, \dots, q_n) \\
 p_x &= p_x(q_1, \dots, q_n) \\
 p_y &= p_y(q_1, \dots, q_n) \\
 p_z &= p_z(q_1, \dots, q_n)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

### 2.1.2 Modelarea cinematică inversă

Problema inversă a roboților constă în determinarea variabilelor articulare în funcție de poziția și de orientarea efectorului final, adică în a rezolva ecuațiile cinematice. Soluțiile ecuațiilor cinematice prezentate sub formă explicită reprezintă modelul geometric invers al unui robot [28]:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_1(n_x, \dots, p_z) \\
 q_2 &= q_2(n_x, \dots, p_z) \\
 &\vdots \\
 q_n &= q_n(n_x, \dots, p_z)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Principiul de rezolvare a ecuațiilor cinematice constă în a identifica ecuațiile cinematice din care se pot determina direct anumite variabile articulare. Expresiile complexe nu mai pot fi utilizate ca atare datorită rezolvării dificile. Astfel că, matricea  $G_n$  în forma sa generală se înmulțește la stânga, pe rând, cu inversele matricelor de transfer, încorporând cu  ${}^0T_1^{-1}$  și se obțin ecuațiile [28]:

$$\begin{aligned}
 & {}^0T_1^{-1} \cdot G_n = {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n \\
 & {}^1T_2^{-1} \cdot {}^0T_1^{-1} \cdot G_n = {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \dots {}^{n-1}T_n
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$${}^{n-2}T_{n-1}^{-1} \dots {}^0T_1^{-1} \cdot G_n = {}^{n-1}T_n$$

Din ecuațiile (2.10) se identifică elementele cu expresiile cele mai simple, iar din egalitățile astfel create se determină variabilele articulare  $q_i$ . Rezolvarea problemei geometrice inverse poate conduce la diferite situații [32]:

- absența soluției, dacă poziția impusă a efectorului final se află în afara spațiului de lucru;
- o infinitate de soluții, atunci când robotul fie este redundant în raport cu sarcina pe care este pus să o efectueze, fie se află într-o configurație singulară când nu poate executa anumite mișcări;
- un număr finit de soluții, dacă toate variabilele articulare se pot calcula fără ambiguitate.

## 2.2 Studiul mâinii umane

Primul pas în realizarea unei proteze pentru mâna umană constă în buna înțelegerea a structurii și a funcționării mâinii umane ca sistem. Acest studiu trebuie abordat din trei direcții:

- osteologic (studiul scheletului);
- ortologic (studiul articulațiilor și al ligamentelor);
- miofuncțional (studiul tendoanelor, al mușchilor și al tuturor funcționalităților).

Mâna umană este compusă din 27 de oase care sunt împărțite în trei grupe: carpiene (oasele încheieturii), metacarpiene (oasele palmei) și falange (oasele degetelor) (Fig. 2.6 și Fig. 2.7) [45], [91].

Primele falange sunt conectate de oasele metacarpiene. Toate degetele au același număr de falange (trei), exceptând degetul mare care are doar două. Oasele metacarpiene constituie palma și sunt atașate oaselor carpiene. Mișcarea acestora din urmă permite rotația mâinii în raport cu brațul. Oasele metacarpiene prezintă o asimetrie: o suprafață semisferică la contactul cu oasele carpiene și o suprafață sferică pentru conectarea la primele falange.

*Articulațiile* mâinii se numesc: articulația distal interfalangeală (DIP), articulația proximal interfalangeală (PIP) și articulația metacarpofalangeală (MCP). Fiecare

dintre ele este caracterizată de o anumită geometrie a suprafețelor de contact și de un unghi maxim. Mișcările mâinii sunt de diferite tipuri: fiecare deget se poate deplasa spre palmă (aducție) și dinspre palmă (abducție), se poate flexa sau extinde. Degetul mare este capabil și să se miște în opoziție cu celelalte degete.

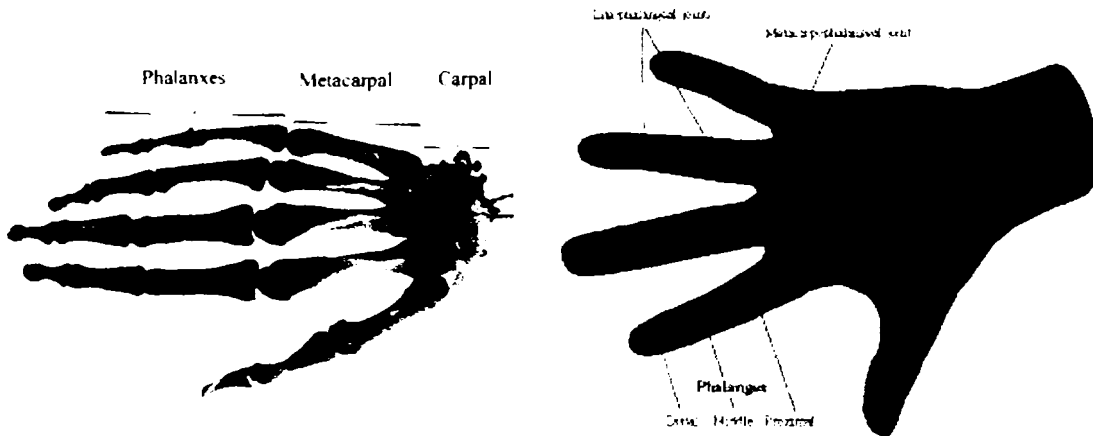


Fig. 2.6 Mâna umană



Fig. 2.7 Modelul scheletului. Segmentele reprezintă legături, iar cercurile — articulații

*Ligamentele* din palmă conectează oasele metacarpiene la cele carpiene. Ele pot bloca anumite mișcări ale oaselor metacarpiene pentru a oferi o structură mai rigidă palmei. Falangele sunt conectate prin ligamente reduse.

*Tendoanele* conectează mușchii și oasele, fiind atașate în mod diferit de acestea (Fig. 2.8, Fig. 2.10, [130]). Intern, ele sunt făcute din colagen și sunt elastice, astfel încât sunt capabile să readucă degetele în poziția originală după flexare. Ele sunt atașate diferit de oase și de mușchi. Tendoanele superficiale flexoare pornesc de la mușchii antebrațului (Fig. 2.12, [130]): de la primul nivel pornesc tendoanele către degetele inelar și mijlociu, de la nivelul al doilea, tendoanele către degetele mic și

index. După conectarea la falangele proximale, tendoanele se divid în două și se conectează de o parte și de alta a falangelor medii (Fig. 2.9, [130]). Ele mișcă, în secvență, falanga mediană și apoi falanga distală.

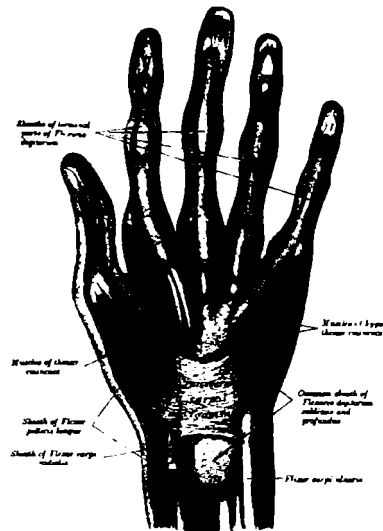


Fig. 2.8 Tendoanele flexoare ale mâinii și tecile lor

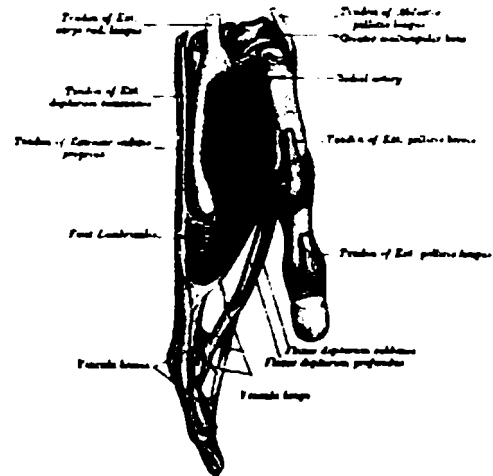


Fig. 2.9 Tendoanele degetului inelar

Tendoanele de adâncime pornesc tot de la antebrăț, se divid în patru și sunt atașate falagelor distale (Fig. 2.12). Ele flexează falangele distale după ce tendoanele superficiale au închis primele două falange. Degetul mare are doar un tendon flexor. Tendoanele extensoare pornesc de la un mușchi din partea superioară a antebrățului și se divid în trei pentru a merge la degetele index, mijlociu și inelar. Degetul mic este conectat la degetul inelar (Fig. 2.10, [130]).



Fig. 2.10 Mușchi și tendoane ale palmei

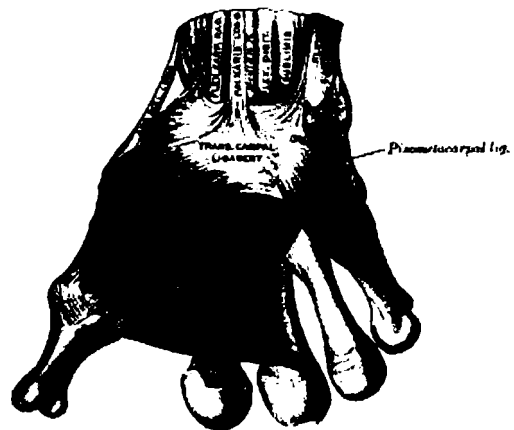


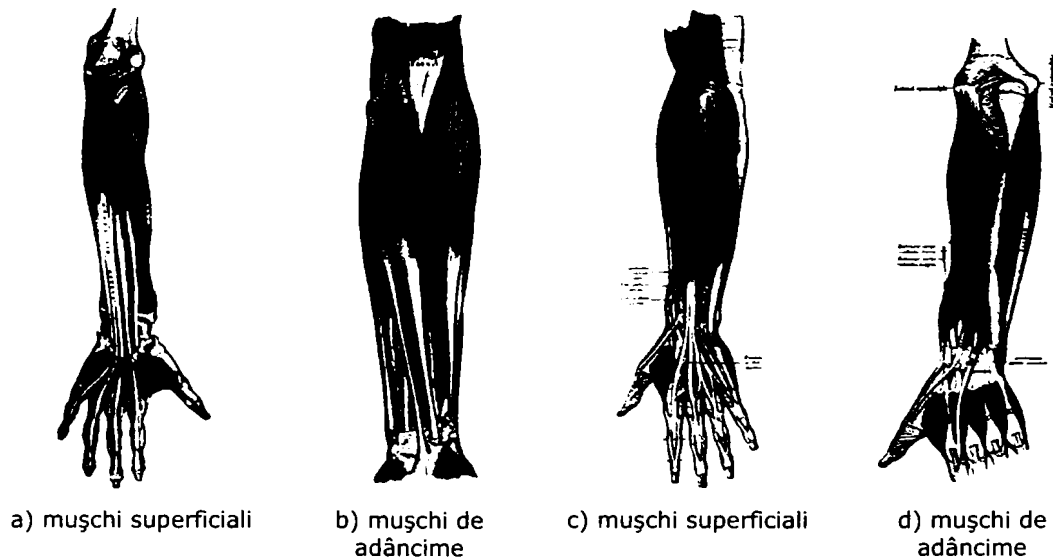
Fig. 2.11 "ușc" i care acționează asupra degetului opozabil

*Mușchii* umani pot aplica forțe prin contractare. Mușchii mâinii sunt împărțiți în trei grupe [130]:

- mușchii degetului opozabil (Fig. 2.11 [130]), care ocupă partea dinspre radius și produc eminența tenară;
- mușchii degetului mic, care ocupă partea dinspre ulna și produc eminența hipotenară (Fig. 2.10);
- mușchii care ocupă zona centrală a palmei (Fig. 2.10).

În mână activează două seturi de mușchi: extrinsec, localizat în braț și intrinsec, localizat în mână. Mușchii intrinseci sunt responsabili de dexteritatea și de flexibilitatea mâinii. Tendoanele sunt menținute aproape de oase prin intermediul unor teci (Fig. 2.8), care mențin poziția tendoanelor relativ la falange, pe linia de acțiune a degetelor. Acestor teci se datorează, de fapt, acțiunea fină a tendoanelor. [45]

Tendoanele flexoare au rolul de a închide degetele, cu scopul de a prinde obiectele, iar tendoanele extensoare au rolul de a deschide mâna. Un tendon flexor acționează prin intermediul tecilor, de-a lungul articulațiilor, pentru a mișca cele trei falange ale unui deget. Un mușchi intrinsec atașat la falangele proximale activează ca flexor al articulației metacarpofalangeală și ca extensor pentru articulația interfalangeală. Degetul opozabil este mișcat prin intermediul a opt mușchi care acționează de-a lungul articulației de la baza sa (Fig. 2.11). Patru sunt extrinseci și acționează individual asupra articulației prin intermediul unor tendoane lungi care traversează încheietura înainte de a ajunge la degetul opozabil, iar ceilalți patru sunt intrinseci. Dintre cei opt mușchi, șase acționează articulația distală. Un tendon de flexare conectează falanga distală la un mușchi și transmite falangei forța produsă de acesta.



**Fig. 2.12** Mușchi ai antebrațului: a), b) partea interioară (cu podul palmei); c), d) partea exterioră

Suprafața articulațiilor și a tecilor (Fig. 2.8 [130]) care protejează tendoanele prezintă un coeficient de frecare foarte mic. În fiecare punct în care tendonul traversează spațiul unei articulații acționează ca un cuplu care are tendința de a flexa acea articulație. La fiecare articulație traversată de către un tendon, schimbările de poziție ale articulației utilizează o parte din potențialul excursiei mușchiului. Dacă un mușchi activează de-a lungul mai multor articulații, el trebuie să dispună de o capacitate foarte mare de mișcări. Mușchii umani sunt optimi pentru strângere la flexare, nu pentru extensie. Astfel, există mai mulți mușchi flexori decât extensori, iar extensorii împreună cu tendoanele lor sunt mai compacți și mai puțin puternici decât flexorii. [45]

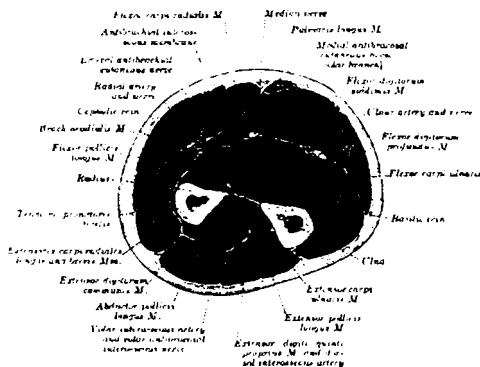


Fig. 2.13 Secțiune transversală prin mușchi în zona antebrațului

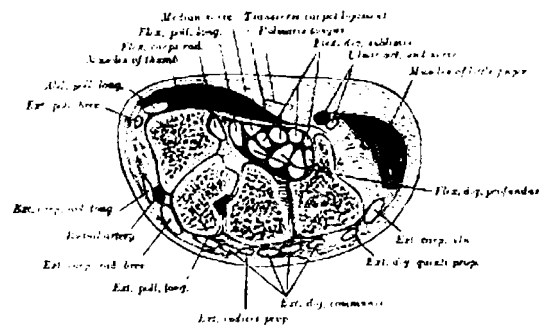


Fig. 2.14 Secțiune transversală prin palmă

Mușchii sunt elementele de execuție ale mâinii umane. Structura lor este destul de complexă, fiind alcătuiți din numeroase fibre (Fig. 2.13 [130]). Ei sunt atașați de oasele adiacente prin tendoane și induc mișcare în articulațiile care se formează acolo unde două oase se întâlnesc. Fibrele din care este compus un mușchi sunt grupate în unități funcționale numite unități motoare. O astfel de unitate motoare este formată din neuronul motor, axonul acestuia și din toate fibrele musculare care sunt atașate de acesta pentru a primi semnalul de contractare. Un singur mușchi poate avea mai multe unități motoare.

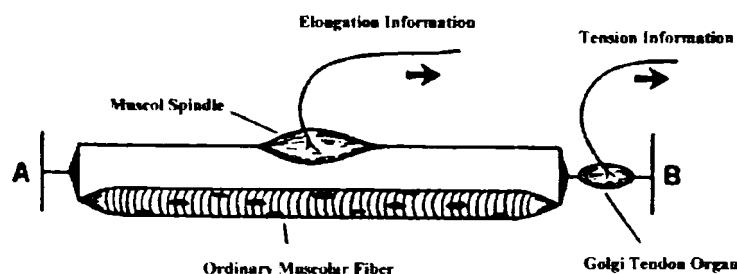
Pe măsură ce semnalul primit de la creier pentru contractare crește, se recrutează noi unități motoare și, totodată, se crește frecvența de contractare la cele deja recrutate. Toate celulele musculare dintr-o unitate motoare devin active în același timp. Variind numărul unităților motoare active, corpul poate controla forța contractării musculare. Când un anumit motor se contractă, acesta emite repetitiv câte un scurt impuls de activitate electrică, denumit potențial al unității motoare în acțiune (*motor unit action potential – MUAP*). Acesta poate fi detectat prin intermediul unor electrozi poziționați pe suprafața pielii, în apropierea motorului. [39]

Funcționarea mușchiului poate fi modelată folosind două componente de bază care acționează în paralel: o componentă elastică și o componentă formată dintr-o serie de elemente, unul elastic, unul contractil. Prima componentă elastică se datorează țesuturilor de conectare din jurul fibrelor, iar elementele elastice din componenta a doua se datorează tendoanelor. În funcție de sarcină, mușchiul arată o creștere exponențială în lungime. Când sistemul nervos trimite semnal de contractare, elementele contractile încep să se scurteze. Părțile elastice din componenta a doua

se lungesc încet, astfel încât în tendoane se înregistrează o creștere ușoară de tensiune. Când elementele contractile revin la poziția inițială, sunt urmate, după o scurtă perioadă, de elementele elastice. Viteza acestui fenomen depinde de forțele exercitate. Ea este ridicată când forța este nulă (fără sarcină) și este foarte scăzută când forța este maximă. În cazul mâinii, mușchii au nevoie de 80–200 ms pentru a finaliza o contracție la viteză maximă. Sarcina maximă pentru un mușchi variază între 2–5 kg/cm<sup>2</sup>. [45]

Sistemul senzorial al mâinii este de diferite tipuri, fiind prezenți esteroceptori și proprioceptori. Elementele de conversie sunt mecanice, electrice, fotoelectrice și termoelectrice. Un număr mare de receptori trimit informații continue despre deformarea mușchilor și a tendoanelor sub acțiunea forțelor aplicate. Multe dintre semnale nu sunt conștientizate, dar oferă informații despre poziția degetelor. Receptorii sunt organizați în serii și în paralel cu fibrele musculare (Fig. 2.15) [45].

Spre exemplu, organele Golgi sunt în serii cu fibrele musculare și sunt capabile să măsoare deformarea tendoanelor sub acțiunea forțelor. Terminațiile Ruffini din țesuturile de conectare ale articulațiilor sunt sensibile la flexare și la extensie (în mână există foarte multe astfel de terminații). Semnalele de atingere, căldură, durere sunt generate de numeroși receptori din piele.



**Fig. 2.15** Sistemul senzorial pentru mușchi și tendoane

Sistemul biologic uman este condus de către sistemul nervos, alcătuit din creier și măduva spinării. La fel ca în cazul tuturor vertebratelor, controlul mișcării este distribuit în numeroase centre. Mușchiul primește impulsuri nervoase de la fibrele nervoase ale neuronilor motori. Aceste impulsuri sunt reglate de către semnalele de la receptorii periferici, pe de o parte, și de către centrele motoare din creier, pe de altă parte. Acțiunile reflexe depind doar de măduva spinării. Cel mai simplu sistem biologic de control este arcul reflex, care nu include activitatea encefalului și care prezintă anumite caracteristici precum [45]:

- timpul reflexului: timpul dintre apariția stimulului la receptor și apariția răspunsului. Pentru reflexe simple, acest timp este cuprins între 0,5 și 1,5 ms;
- zona reflexului: zona în care sunt localizați receptorii responsabili de activarea reflexului;
- pragul reflexului: valoarea minimă a stimulului pentru a activa reflexul;
- însumarea reflexului: însumarea mai multor stimuli din punct de vedere al intensității și al zonei;



- inhibarea reflexului: anumiți neuroni sunt capabili să inhibe un reflex (spre exemplu, la realizarea unei flexări a unui deget, mușchii extensori sunt inhibați).

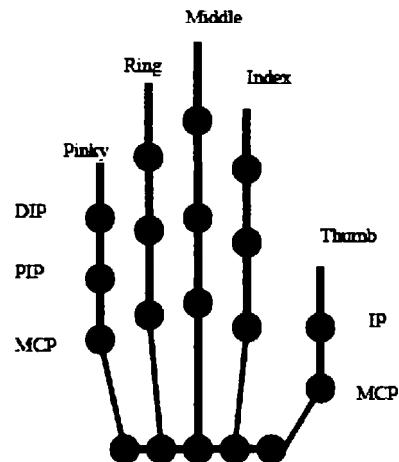
În funcție de receptorii implicați, reflexele pot fi esteroceptive sau propioceptive. Reflexul propioceptiv cel mai important este reflexul miotatic, care pornește din fibrele neuromusculare. Acest reflex presupune două faze: o contracție rapidă, urmată de o contracție lentă și lungă, care stabilizează mușchii la o anumită lungime. Reflexul miotatic invers pornește de la organele Gorgi, ajunge la centrii spinali unde inhibă neuronii motori ai mușchiiului corespunzător care este relaxat.

### 2.2.1 Constrângeri ale mișcării mâinii umane

Mâna umană (Fig. 2.16 [87]) este un sistem foarte articulat, prezentând 26 de grade de libertate. Sistemul mână umană este supus, însă, și la un număr mare de constrângeri, existând dependențe între degete și articulații. Pentru a modela articulația degetelor este necesară descrierea structurii cinematice a mâinii umane. Din acest motiv, scheletul mâinii poate fi abstractizat precum în Fig. 2.17, în care fiecare deget este considerat un lanț cinematic cu baza în palmă și cu fiecare vârf de deget drept efector final [71].



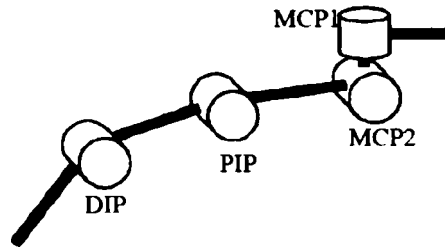
**Fig. 2.16** Structura mâinii umane: 1) falanga distală, 2) falanga medie, 3) falanga proximală, 4) os metacarpian, 5) ulna, 6) radius



**Fig. 2.17** Abstractizarea scheletului mâinii umane

Fiecare dintre cele patru degete are câte patru grade de libertate. Articulațiile distal interfalangeală (DIP, marcată cu A în Fig. 2.16) și proximal interfalangeală (PIP, marcată cu B în Fig. 2.16) oferă fiecare câte un grad de libertate, iar articulația metacarpofalangeală (MCP, marcată cu C în Fig. 2.16) asigură două grade de libertate prin flexare și abducție (Fig. 2.18 [118]). Structura degetului opozabil este diferită de a celorlalte degete, el putându-se mișca în opoziție cu acestea. Articulațiile interfalangeală (IP, marcată cu D în Fig. 2.16) și MCP asigură câte un grad de libertate, iar articulația carpometacarpiană (CMC, marcată cu E în Fig. 2.16) asigură două grade de libertate prin flexare și abducție. Cele cinci degete ale mâinii au

împreună 20 de grade de libertate. Cele 6 grade de libertate rămase se datorează mișcărilor de rotație și translație ale palmei, cu câte trei grade fiecare.



**Fig. 2.18** Articulațiile unui deget

Mișcarea unui deget poate fi reprezentată printr-un set de variabile articulare. Ea este supusă unor anumite constrângeri astfel încât, în final, mâna nu poate realiza gesturi arbitrare. Spre exemplu, un deget nu se poate îndoi foarte mult spre exteriorul mâinii, iar degetul mic nu poate fi îndoit fără a îndoi și degetul inelar. Mișcarea naturală a mâinii umane este, implicit, determinată de aceste constrângeri de mișcare [71]. Anumite constrângeri ale mișcării mâinii umane au o reprezentare foarte clară, fiind foarte des folosite în cercetările curente legate de animarea sistemului mână. Cu toate acestea, majoritatea constrângerilor de mișcare sunt foarte greu de exprimat printr-o formulare matematică.

Constrângerile la care este supusă mâna umană pot fi divizate în trei mari categorii [71]:

- Constrângerile de tipul I sunt reprezentate de limitările mișcării unui deget datorate anatomiei mâinii (constrângeri statice).
- Constrângerile de tipul al II-lea sunt limitările impuse în articulații în timpul mișcării (constrângeri dinamice).
- Constrângerile de tipul al III-lea includ acele limitări necesare pentru a realiza o mișcare naturală, care, însă, nu sunt acoperite de stadiul actual al cercetării.

### 2.2.1.1 Constrângeri de tipul I

Aceste constrângeri se referă la limitările domeniului de mișcări ale degetelor determinate de anatomia mâinii. Se consideră doar domeniul de mișcări care pot fi realizate fără aplicarea unor forțe externe, precum îndoirea degetelor spre partea exterioară a mâinii folosind cealaltă mână. Acest tip de constrângeri se reprezintă cu ajutorul următoarelor inegalități [71]:

$$\begin{aligned}
 0^\circ &\leq \theta_{MCP-F} \leq 90^\circ \\
 0^\circ &\leq \theta_{PIP} \leq 110^\circ \\
 0^\circ &\leq \theta_{DIP} \leq 90^\circ \\
 -15^\circ &\leq \theta_{MCP-AA} \leq 15^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

unde:

- $\theta_{MCP-F}$  reprezintă variabila articulară a articulație metacarpofalangeale pentru flexare;
- $\theta_{MCP-AA}$  reprezintă variabila articulară a articulație metacarpofalangeale pentru abducție sau aducție;
- $\theta_{PIP}$  reprezintă variabila articulară a articulației proximal interfalangeale;
- $\theta_{DIP}$  reprezintă variabila articulară a articulației distal interfalangeale.

O altă constrângere susține că degetul mic oferă o mișcare de abducție sau aducție redusă, motiv pentru care, pentru acest deget, se folosește următoarea aproximare [71]:

$$\theta_{MCP-AA} = 0 \quad (2.12)$$

Această aproximare poate determina reducerea unui grad de libertate din cele 20 ale degetelor. De asemenea, și articulația CMC a degetului opozabil asigură o mișcare de abducție limitată, motiv pentru care, de regulă, ea se aproximează astfel [71]:

$$\theta_{CMC-AA} = 0 \quad (2.13)$$

Drept rezultat, mișcarea degetului mare poate fi caracterizată de trei parametri în loc de patru. Pe lângă acestea, degetele index, mijlociu, inelar și mic sunt manipolatoare planare deoarece articulațiile DIP, PIP și MCP ale fiecărui deget se mișcă într-un singur plan (articulațiile DIP și PIP oferă un singur grad de libertate, pentru flexare).

### 2.2.1.2 Constrângeri de tipul al II-lea

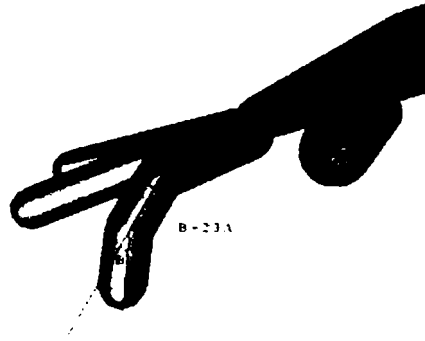
Acest tip de constrângeri se referă la limitările impuse în articulații în timpul mișcării degetelor. Ele sunt denumite constrângeri dinamice și pot fi clasificate în:

- constrângeri intra-deget (între articulațiile aceluiași deget);
- inter-deget (între articulațiile dintre degete).

Constrângerea intra-deget cea mai utilizată se bazează pe anatomia mâinii și stipulează că, pentru a îndoi articulația DIP trebuie îndoită și articulația PIP, pentru cazul degetelor index, mijlociu, inelar și mic (Fig. 2.19 [91]). Din punct de vedere formal, afirmația anterioară se exprimă astfel [71]:

$$\theta_{DIP} = 2/3 \theta_{PIP} \quad (2.14)$$

Datorită acestei aproximări, modelul care inițial avea 20 de grade de libertate se reduce la un model cu 16 grade de libertate. Literatura de specialitate a demonstrat faptul că degradarea de performanță este nesemnificativă în cazul exprimării poziției mâinii folosind constrângerile din relațiile (2.12)–(2.14).

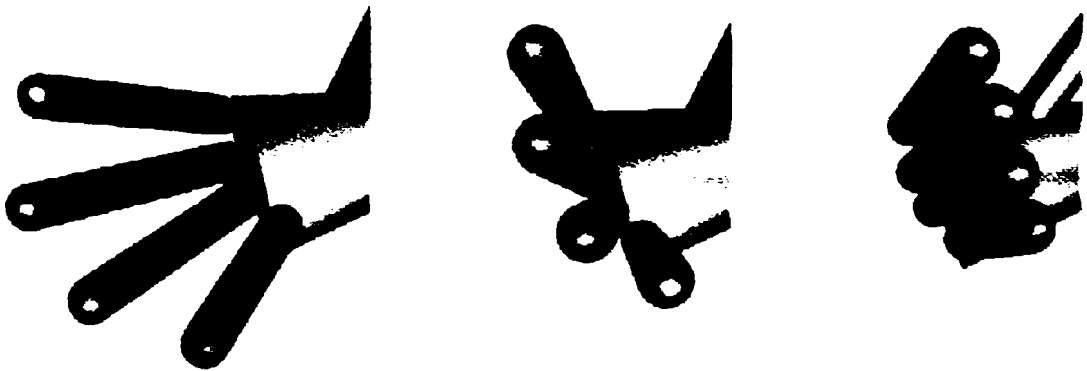


**Fig. 2.19** Relația dintre articulațiile DIP și PIP

Un exemplu de constrângere inter-deget este următorul: îndoirea degetului mic din articulația MCP determină, în mod natural, și îndoirea degetului îndelar din aceeași articulație [51]. Până în prezent, însă, acest tip de constrângeri nu au fost cuantificate sub forma unor ecuații.

### 2.2.1.3 Constrângeri de tipul al III-lea

Aceste constrângeri sunt impuse de modul natural în care se mișcă mâna și sunt destul de dificil de detectat. Constrângerile de tipul al III-lea diferă de cele de tipul al II-lea prin faptul că ele nu au nicio legătură cu limitările impuse de anatomia mâinii ci, mai degrabă, ele reprezintă un rezultat al mișcărilor naturale și comune. Deși natura leșea mișcării mâinii diferă de la persoană la persoană, ea este similară la toată lumea. Spre exemplu, modul cel mai natural pentru orice persoană de a închide pumnul constă în îndoirea degetelor în același timp și nu câte unul pe rând. De asemenea, la flexarea din articulația metacarpiană atunci când degetele sunt flexate împreună, trebuie redusă aducția pentru a evita forțarea degetelor (Fig. 2.20) [91]. Din păcate, până în prezent, nici acest tip de constrângeri nu a fost cuantificat sub forma unor ecuații.



**Fig. 2.20** Constrângerea flexării în cazul articulației metacarpofalangeale

### 2.3 Modele ale mâinii umane

Modelarea mâinii umane reprezintă o sarcină deosebit de grea deoarece ea presupune surprinderea comportării a 44 unități separate de mușchi, 24 oase principale, cel puțin 16 articulații care permit 26 sau mai multe grade de libertate. Cel care face modelarea trebuie să surprindă și comportamentul țesuturilor care înconjoară mușchii, oasele și structura de ligamente. Se știe foarte multe lucruri despre mâna umană, dar se cunosc foarte puține despre felul în care mecanismele ce alcătuiesc mâna conlucrează pentru a-i asigura funcționalitatea [99]. Din acest motiv, pentru a obține un model al mâinii umane, cercetătorii au recurs întotdeauna la aproximări, în funcție de scopul urmărit.

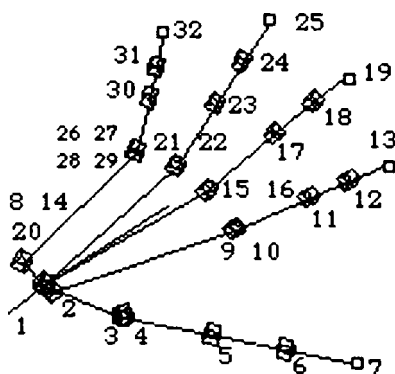


Fig. 2.21 Modelul cinematic



Fig. 2.22 Modelul 3D al mâinii

În [60] este prezentat un model de mână care face parte dintr-o structură de date numită HUMANOID, al cărei scop este să asigure o structură de schelet uman completă, alcătuită din părți rigide conectate între ele prin articulații cu unul sau mai multe grade de libertate. Modelării mâinii s-a acordat o atenție deosebită, datorită complexității ridicate a regiunii încheietură-palmă, unde se articulează degetele. Astfel, la nivelul zonei metacarpiene a fost asigurată o ușoară mobilitate de flexare pentru a modela deformația palmei. Pentru cele patru degete s-a folosit structura standard, organizată astfel:

- un grad de libertate pentru flexarea articulației MCP și încă unul pentru aducție;
- două grade de libertate pentru flexarea articulațiilor PIP și DIP.

Degetul opozabil are o organizare diferită, datorită mobilității sale speciale:

- o mișcare de pivotare în jurul unei axe orientate ca și vectorul degetului arător;
- o rotație de răsucire de-a lungul axei degetului opozabil, cuplată cu cea anterioară pentru a putea controla orientarea degetului opozabil;
- o mișcare de aducție, perpendiculară pe axa de flexare;

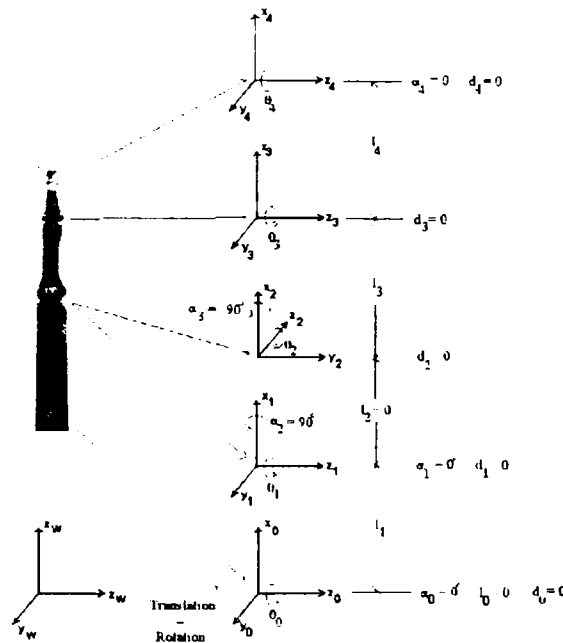
- trei flexări succesive pentru închiderea degetului.

Fig. 2.21 prezintă modelul cinematic obținut, iar Fig. 2.22 prezintă modelul 3D al mâinii rezultat [60]. În modelul cinematic, s-au marcat cu numere gradele de libertate obținute în urma aplicării convențiilor de modelare specificate.

În [109] este propus un model de mână creat pe baza convenției Denavit-Hartenberg, pornind de la modelul natural. Astfel, toate degetele au aceeași structură încât convenția se aplică în aceeași manieră la toate, conform Fig. 2.23. Degetul opozabil este gândit ca având o structură mai complexă, după cum urmează:

- articulația CMC cu trei grade de libertate: flexie sau extensie, aducție sau abducție și rotație în jurul axei metacarpului;
- articulația MCP cu două grade de libertate: flexare sau extensie și aducție sau abducție;
- articulația IP cu un grad de libertate datorat flexării.

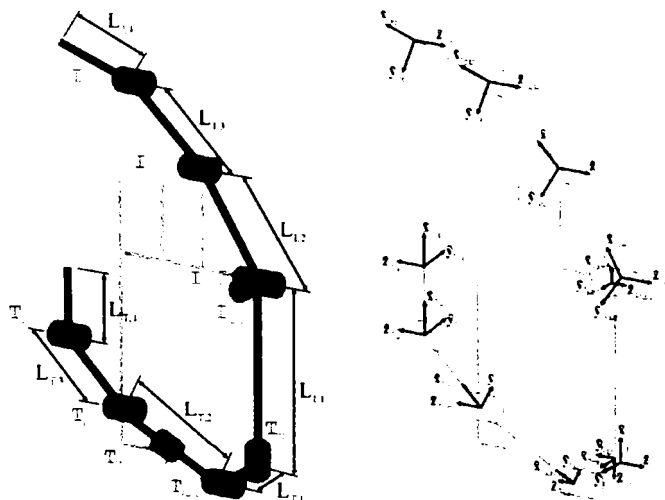
În total, modelul astfel determinat are 26 grade de libertate, care pot fi reduse prin aplicarea constrângerilor de diferite tipuri care acționează asupra mâinii. Sistemul de referință global este plasat pe articulația încheieturii, mișcarea degetelor fiind analizată în raport cu acesta.



**Fig. 2.23** Aplicarea convenției Denavit-Hartenberg pentru modelarea mâinii

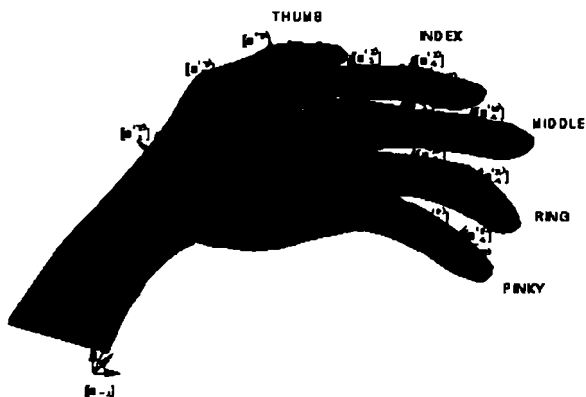
În [50], [101] este prezentat un model cinematic suficient de corect și intenționat pentru studiul manipulațiilor de precizie (Fig. 2.24). Sistemul de referință general este plasat pe mână, în punctul unde se întâlnesc degetul opozabil și osul metacarpian al degetului arătător. Articulația MCP a degetului arătător are două grade de libertate (aducție și flexare), iar celelalte două articulații prezintă câte un grad de libertate fiecare (flexare). Degetul opozabil este plasat astfel încât flexarea să se facă în același plan cu osul metacarpian al degetului arătător. Articulația

carpometacarpiană are un singur grad de libertate. La o anumită distanță este plasat cel de-al doilea grad de libertate, datorat aducției. Degetul opozabil mai prezintă cele două grade de libertate rămase, conform cu modelul natural.

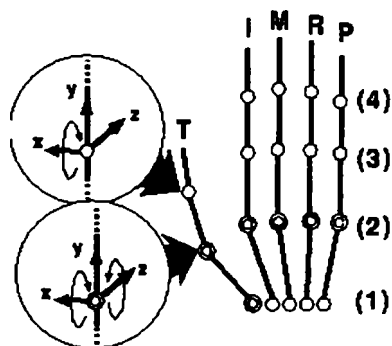


**Fig. 2.24** Model cinematic al mâinii umane: lungimea falangelor și sisteme de referință

În [120] este prezentată o nouă abordare pentru modelarea mâinii umane, cu luarea în considerație a constrângerilor naturale la care este supusă mișcarea mâinii. Modelul mâinii este compus dintr-un model al scheletului și un model al pielii (Fig. 2.25). Modelul scheletului este folosit pentru descrierea posturii mâinii, descrisă prin coordonatele 3D ale încheieturii raportate la un sistem de referință general (Fig. 2.26). În continuare, poziția fiecărui lanț cinematic, care are unu capăt conectat la încheietură, este descrisă printr-un vector, reprezentat într-un sistem de referință local, fixat pe încheietură.



**Fig. 2.25** Modelul mâinii folosit pentru animații



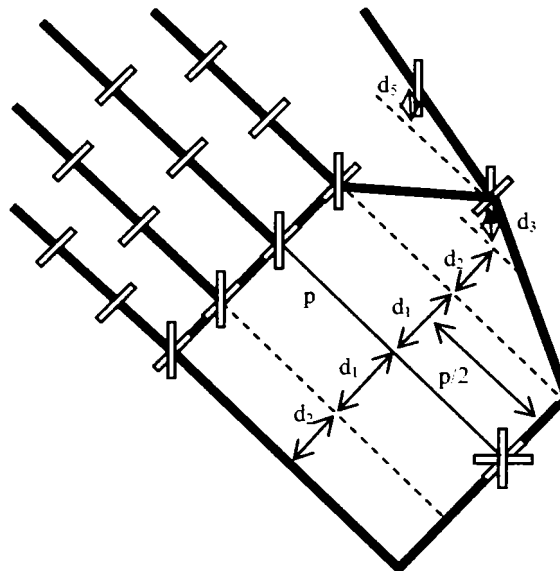
**Fig. 2.26** Determinarea posturii mâinii

Modelul pielii asigură forma suprafeței mâinii, impunând asupra scheletului o postură generată de modelul dinamic asociat. Forma inițială a suprafeței este construită pe baza digitizării unei forme 3D a mâinii umane. Punctele de control din modelul scheletului (articulațiile) imprimă deformări ale modelului pielii. Acest model

a fost gândit pentru a fi utilizat în animații ale mâinii. Posturile și formele naturale ale mâinii pot fi generate chiar și în condițiile în care sunt disponibili doar câțiva parametri ai mâinii. Reducând numărul de parametri necesari pentru modelul grafic, modelul propus în [120] permite nu numai reducerea muncii dificile necesară pentru a genera posturile și secvențele de mișcare ale mâinii, dar și crearea cu ușurință a unor posturi reale și a mișcărilor.

## 2.4 Realizarea modelului cinematic

După cum s-a arătat în paragrafele anterioare, modelarea corpului uman, în general, și a mâinii umane, în particular, este un lucru dificil, care implică întotdeauna anumite concesii. Astfel, modelul propus de către autoarea tezei (Fig. 2.27) prezintă câteva diferențe față de modelul natural, rezultate din necesitatea simplificării procesului de modelare. Palma a fost abstractizată sub forma unui dreptunghi cu lungimea  $p$  și lățimea  $2d_1 + d_2$ . Degetele centrale respectă gradele de libertate și structura degetelor naturale, sunt paralele între ele și plasate la distanțele marcate pe Fig. 2.27. Degetul opozabil, în schimb, diferă de modelul natural prin faptul că are doar două falange și trei grade de libertate. Baza degetului opozabil este plasată la distanța  $d_2$  față de palmă, în planul palmei și distanța  $d_3$ , pe o axă perpendiculară pe planul palmei. Baza celei de-a doua falange este plasată față de baza degetului opozabil la distanța  $d_5$ , măsurată pe o axă perpendiculară pe planul palmei.



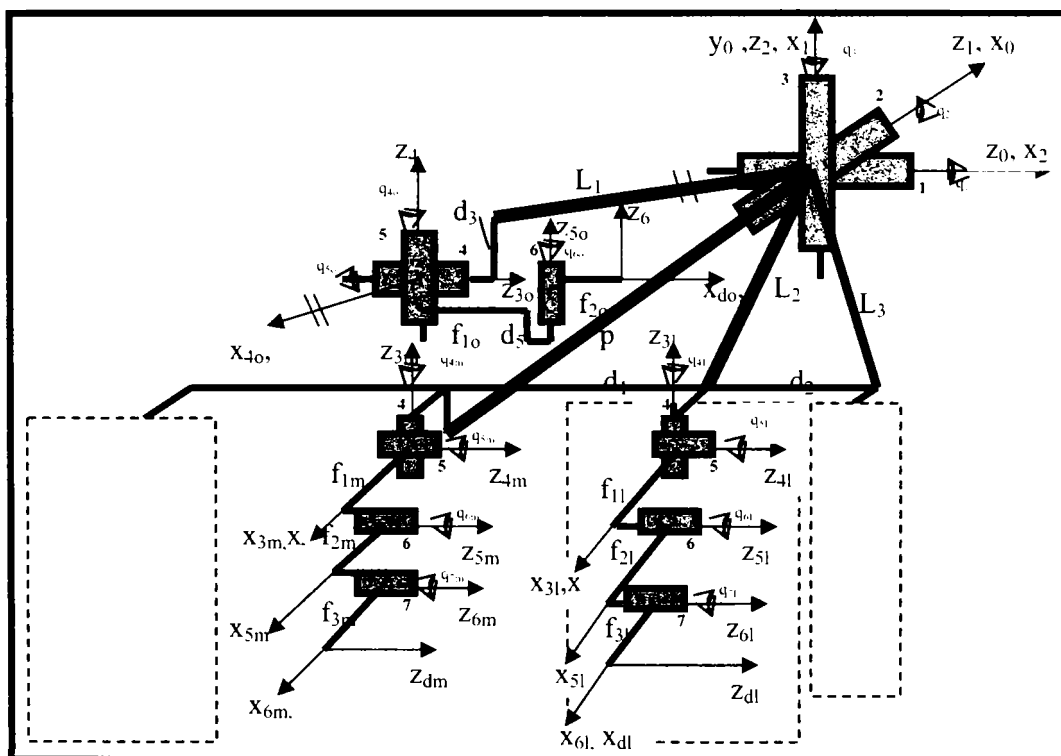
**Fig. 2.27** Modelul propus pentru mâna umană

Pe baza modelului din Fig. 2.27 și folosind convenția Denavit-Hartenberg pentru modelarea elementelor componente și a sistemelor de referință atașate acestora, a fost realizat modelul cinematic al mâinii umane (Fig. 2.28) [31], [34], [36]. Încheietura mâinii prezintă trei grade de libertate, concretizate prin cele trei cuple de



rotație (cuplele 1, 2 3). Conform teoriei generale, pe axa cuplei 1 se plasează originea sistemului fix  $x_0O_0y_0z_0$ , având axa  $O_0z_0$  de-a lungul axei cuplei respective. Pentru ușurarea calculelor, axa  $O_0x_0$  se alege de-a lungul axei cuplei 2, iar axa  $O_0y_0$  — de-a lungul axei cuplei 3.

Sistemul de referință atașat elementului 1 se plasează pe axa cuplei 2, având originea la intersecția axelor cuplelor 1 și 2. Axa  $O_1z_1$  este suprapusă peste axa cuplei 2, iar axa  $O_1x_1$  este perpendiculară pe planul determinat de  $O_0z_0$  și  $O_1z_1$ . Sistemul de referință atașat elementului 2 se plasează pe axa cuplei 3, având originea la intersecția axelor cuplelor 2 și 3. Axa  $O_2z_2$  este suprapusă peste axa cuplei 3, iar axa  $O_2x_2$  este perpendiculară pe planul determinat de  $O_1z_1$  și  $O_2z_2$ .



**Fig. 2.28** Modelul mâinii umane conform convenției Denavit-Hartenberg

Considerând degetul opozabil, originea sistemului de referință atașat elementului 3 se plasează pe axa cuplei 4, la intersecția dintre această axă și perpendiculara comună pe axele cuplelor 3 și 4. Axa  $O_3z_3$  este aliniată la axa cuplei 4, iar axa  $O_3x_3$  este perpendiculară pe planul format de axele  $O_2z_2$  și  $O_3z_3$ . Distanța măsurată pe direcția axei  $O_3x_3$  între axele  $O_2z_2$  și  $O_3z_3$  este lungimea  $L_1$  a elementului 3 al degetului opozabil al mâinii.

Sistemul de referință atașat elementului 4 se plasează pe axa cuplei 5, având originea la intersecția axelor cup'elor 4 și 5. Axa  $O_4z_4$  este suprapusă peste axa cuplei 5, iar axa  $O_4x_4$  este perpendiculară pe planul determinat de  $O_3z_3$  și  $O_4z_4$ , suprapunându-se peste axa  $O_3x_3$ . Originea sistemului de referință atașat elementului 5 se plasează pe axa cuplei 6, la intersecția dintre această axă și perpendiculara comună pe axele cuplelor 5 și 6.

Axa  $O_5z_5$  este aliniată la axa cuplei 6, iar axa  $O_5x_5$  este perpendiculară pe planul format de axele  $O_4z_4$  și  $O_5z_5$ . Distanța măsurată pe direcția axei  $O_5x_5$  între axele  $O_4z_4$  și  $O_5z_5$  este lungimea  $f_{10}$  a elementului 5 al degetului opozabil al mâinii.

Sistemul de referință atașat efectorului final (vârfului degetului opozabil) are axa  $O_6z_6$  paralelă cu axa  $O_5z_5$ , iar axa  $O_6x_6$  astfel aleasă încât distanța dintre axele  $O_5z_5$  și  $O_6z_6$  măsurată de-a lungul axei  $O_6x_6$  să fie  $f_{20}$ , adică lungimea falangei finale a degetului opozabil.

Dat fiind faptul că cele patru degete centrale sunt alcătuite din trei falange, cu aceeași succesiune și aceeași natură a articulațiilor, singura diferență constând în distanțe diferite între articulații, sistemele de referință atașate elementelor componente ale acestor degete se determină în aceeași manieră, prezentată în detaliu pentru degetul opozabil. Pe baza modelului din Fig. 2.28 se determină parametrii geometrici pentru fiecare deget în parte. Se poate observa că, în cazul mâinii umane, toate cuplele sunt de rotație, neexistând cuple de translație.

— degetul opozabil:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$\frac{\rho}{2}$	$-d_3$	-90	-1	0
4	$q_{40}$	0	$-d_1 - d_2$	90	1	0
5	$q_{50}$	$f_{10}$	$-d_5$	0	0	1
6	$q_{60}$	$f_{20}$	0	0	0	1

– degetul mijlociu:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$p$	0	0	0	1
4	$q_{4m}$	0	0	-90	1	0
5	$q_{5m}$	$f_{1m}$	0	0	0	1
6	$q_{6m}$	$f_{2m}$	0	0	0	1
7	$q_{7m}$	$f_{3m}$	0	0	0	1

**Observație:** În Anexa 2 sunt prezentați parametrii geometrici, matricele de transfer și matricele generale pentru fiecare deget în parte.

Pe baza parametrilor geometrici obținuți se determină matricele de transfer. Pentru fiecare deget, primele trei repere sunt comune, motiv pentru care și matricele de transfer între aceste repere sunt comune.

Recurgând la convenția:

$$\begin{aligned} \cos q_i &= c_i & \sin q_i &= s_i \\ \cos(q_i + q_j) &= c_{ij} & \sin(q_i + q_j) &= s_{ij} \end{aligned} \quad (2.15)$$

și conform relației (2.6), acestea sunt:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.4.1 Degetul opozabil

Matricele de transfer corespunzătoare degetului opozabil sunt:

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c3 & 0 & -s3 & \frac{p}{2}c3 \\ s3 & 0 & c3 & \frac{p}{2}s3 \\ 0 & -1 & 0 & -d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & s4 & 0 \\ s4 & 0 & -c4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d1-d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{10}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{10}s5 \\ 0 & 0 & 1 & -d5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{20}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{20}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2.4.1.1 Modelul cinematic direct

Modelul cinematic direct se obține din matricea generală, care exprimă poziția și orientarea efectorului final (în acest caz, vârful degetului) în raport cu sistemul de referință fix. Matricea generală  ${}^0G_6$  se obține prin înmulțirea de la dreapta la stânga a matricelor de transfer:

$${}^0G_6 = G^1 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \quad (2.18)$$

Notăția  $G^1$  arată că această matrice va fi folosită pentru a calcula prima coloană a matricei jacobiene, în cadrul modelului diferențial.

$$G^6 = {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{20}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{20}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$G^5 = {}^4T_5 \cdot G^6 = \begin{bmatrix} c56 & -s56 & 0 & f_{20}c56 + f_{10}c5 \\ s56 & c56 & 0 & f_{20}s56 + f_{10}s5 \\ 0 & 0 & 1 & -d5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$G^4 = {}^3T_4 \cdot G^5 = \begin{bmatrix} c4c56 & -c4s56 & s4 & c4(f_{20}c56 + f_{10}c5) - d_5s4 \\ s4c56 & -s4s56 & -c4 & s4(f_{20}c56 + f_{10}c5) + d_5c4 \\ s56 & c56 & 0 & f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$G^3 = {}^2T_3 \cdot G^4 = \begin{bmatrix} c3c4c56 - s3s56 & -c3c4s56 - s3c56 & & \\ s3c4c56 + c3s56 & -s3c4s56 + c3c56 & & \\ -s4c56 & s4s56 & & \\ 0 & 0 & & \\ c3s4 & c3c4(f_{20}c56 + f_{10}c5) - d_5c3s4 - s3[f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)] + \frac{\rho}{2}c3 & & \\ s3s4 & s3c4(f_{20}c56 + f_{10}c5) - d_5s3s4 + c3[f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)] + \frac{\rho}{2}s3 & & \\ c4 & -s4(f_{20}c56 + f_{10}c5) - d_5c4 - d_3 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$G^2 = {}^1T_2 \cdot G^3 = \begin{bmatrix} c2c3c4c56 - c2s3s56 - s2s4c56 & -c2c3c4s56 - c2s3c56 + s2s4s56 & & \\ s2c3c4c56 - s2s3s56 + c2s4c56 & -s2c3c4s56 - s2s3c56 - c2s4s56 & & \\ s3c4c56 + c3s56 & -s3c4s56 + c3c56 & & \\ 0 & 0 & & \\ c2c3s4 + s2c4 & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(c2c3c4 - s2s4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)c2c3 - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)]c2s3 - (d_5c4 + d_3)s2 & & \\ s2c3s4 - c2c4 & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(s2c3c4 + c2s4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)s2c3 - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)]s2s3 + (d_5c4 + d_3)c2 & & \\ s3s4 & (f_{20}c56 + f_{10}c5)s3c4 + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)s3 + [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)]c3 & & \\ 0 & 1 & & \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
G^1 = {}^0T_1 \cdot G^2 = & \begin{bmatrix} c56(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + & -s56(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + \\ & + s56(-c1c2s3 + s1c3) & + c56(-c1c2s3 + s1c3) \\ \\ c56(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + & -s56(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + \\ & + s56(-s1c2s3 - c1c3) & + c56(-s1c2s3 - c1c3) \\ \\ c56(s2c3c4 + c2s4) - s56s2s3 & & -s56(s2c3c4 + c2s4) - c56s2s3 \\ \\ 0 & & 0 \\ \\ c4c1s2 + s4(c1c2c3 + s1s3) & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + \\ & + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)(c1c2c3 + s1s3) - (d_5c4 + d_3)c1s2 + \\ & + [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)](-c1c2s3 + s1c3) \\ \\ c4s1s2 + s4(s1c2c3 - c1s3) & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + \\ & + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)(s1c2c3 - c1s3) - (d_5c4 + d_3)s1s2 - \\ & - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)](s1c2s3 + c1c3) \\ \\ -c2c4 + s2c3s4 & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(s2c3c4 + c2s4) + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)s2c3 + \\ & + (d_5c4 + d_3)c2 - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)]s2s3 \\ \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Matricea (2.24) exprimă ecuațiile cinematice ale degetului opozabil în raport cu sistemul fix  $x_0O_0y_0z_0$ . A patra coloană reprezintă vectorul de poziție al originii sistemului de referință atașat vârfului degetului, iar celelalte trei coloane reprezintă cosinuzii directori ai axelor acestui reper.

#### 2.4.1.2 Modelul cinematic invers

Pentru simplificarea calculelor se consideră doar mișcarea degetului opozabil în raport cu palma, adică se vor folosi în calcule doar matricele (2.19), (2.20) și (2.21). Se vor identifica elementele matricei (2.21) cu o matrice generală, presupunând cunoscută mișcarea vârfului degetului. Astfel, rezultă ecuația:

$$\begin{aligned}
G^4 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 = & \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c4c56 & -c4s56 & s4 & c4(f_{20}c56 + f_{10}c5) - d_5s4 \\ s4c56 & -s4s56 & -c4 & s4(f_{20}c56 + f_{10}c5) + d_5c4 \\ s56 & c56 & 0 & f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Din relația (2.25) trebuie determinate variabilele articulare, considerate necunoscute, în funcție de elementele considerate cunoscute,  $n_x, \dots, p_z$ , ce caracterizează mișcare vârfului degetului.

Astfel, se identifică:

$$\begin{aligned} a_x &= s_4 \\ a_y &= -c_4 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_4 = t_4 = -\frac{a_x}{a_y} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} n_z &= s_5 \\ o_z &= c_5 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta_5 + \theta_6) = t_5 = \frac{n_z}{o_z} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} p_z &= f_{20}s_5 + f_{10}s_5 = f_{20}n_z + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2) \\ \Rightarrow \sin \theta_5 &= s_5 = \frac{p_z + (d_1 + d_2) - f_{20}n_z}{f_{10}} \\ p_x &= c_4(f_{20}c_5 + f_{10}c_5) - d_5s_4 = -a_y(f_{20}o_z + f_{10}c_5) - d_5a_x \\ \Rightarrow \cos \theta_5 &= c_5 = -\frac{p_x + d_5a_x + f_{20}o_z a_y}{f_{10}a_y} \end{aligned}$$

de unde :

$$\operatorname{tg} \theta_5 = t_5 = \frac{[p_z + (d_1 + d_2) - f_{20}n_z] a_y}{-d_5a_x - p_x - f_{20}o_z a_y} \quad (2.28)$$

Cum:

$$\begin{aligned} t_5 &= \frac{t_5 + t_6}{1 - t_5 t_6} \\ \Rightarrow t_6 &= \frac{t_5 - t_5}{1 + t_5 t_5} = \frac{\frac{n_z}{o_z} - \frac{(p_z - f_{20}n_z) a_y}{d_5a_x - p_x - f_{20}o_z a_y}}{\frac{n_z}{o_z} \cdot \frac{(p_z - f_{20}n_z) a_y}{d_5a_x - p_x - f_{20}o_z a_y} + 1} = \\ &= \frac{d_5 n_z a_x - p_x n_z - p_z o_z a_y}{p_z n_z a_y - p_x o_z + d_5 o_z a_x - f_{20} a_y (n_z^2 + o_z^2)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Astfel, modelul geometric invers al degetului opozabil în raport cu palma este:

$$t4 = -\frac{a_x}{a_y}$$

$$t5 = \frac{[p_z + (d_1 + d_2) - f_{20}n_z]a_y}{-d_5a_x - p_x - f_{20}o_za_y}$$

$$t6 = \frac{d_5n_za_x + p_xn_z + p_zo_za_y + o_za_y(d_1 + d_2)}{p_zn_za_y + p_xo_z + d_5o_za_x + f_{20}a_y(o_z^2 - n_z^2) + n_za_y(d_1 + d_2)}$$

### 2.1.3 Degetul mijlociu

Matricele de transfer ale degetului mijlociu sunt cele din relația (2.30). La acestea se adaugă matricele comune tuturor degetelor, relația (2.16).

$$\begin{aligned}
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & pc3 \\ s3 & c3 & 0 & ps3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{1m}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{2m}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{2m}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^6T_7 &= \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3m}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3m}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

#### 2.4.1.3 Modelul cinematic direct

Modelul cinematic direct se obține din matricea generală, care exprimă poziția și orientarea vârfului degetului în raport cu sistemul de referință fix. Matricea generală  ${}^0G_7$  se obține prin înmulțirea de la dreapta la stânga a matricelor de transfer:

$${}^0G_7 = G^1 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_7 \tag{2.31}$$

Notăția  $G^1$  arată că această matrice va fi folosită pentru a calcula prima coloană a matricei jacobiene, în cadrul modelului diferențial. Acest model este valabil pentru toate celelalte degete, dacă se respectă distanțele geometrice corespunzătoare.



$$G^7 = {}^6T_7 = \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3m}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3m}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$G^6 = {}^5T_6 \cdot G^7 = \begin{bmatrix} c67 & -s67 & 0 & f_{3m}c67 + f_{2m}c6 \\ s67 & c67 & 0 & f_{3m}s67 + f_{2m}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$G^5 = {}^4T_5 \cdot G^6 = \begin{bmatrix} c567 & -s567 & 0 & f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \\ s567 & c567 & 0 & f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$G^4 = {}^3T_4 \cdot G^5 = \begin{bmatrix} c4c567 & -c4s567 & -s4 & c4(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) \\ s4c567 & -s4s567 & c4 & s4(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) \\ -s567 & -c567 & 0 & -f_{3m}s567 - f_{2m}s56 - f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$G^3 = {}^2T_3 \cdot G^4 = \begin{bmatrix} c34c567 & -c34s567 & -s34 & c34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + pc3 \\ s34c567 & -s34s567 & c34 & s34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + ps3 \\ -s567 & -c567 & 0 & -f_{3m}s567 - f_{2m}s56 - f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$G^2 = {}^1T_2 \cdot G^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} c2c34c567 - s2s567 & -c2c34s567 - s2c567 & -c2s34 & c2[c34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + pc3] + \\ & & & -s2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 & s2[c34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + pc3] - \\ & & & + c2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ s34c567 & -s34s567 & c34 & s34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + ps3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Matricea (2.38) exprimă ecuațiile cinematice ale degetului mijlociu în raport cu sistemul fix  $x_0O_0y_0z_0$ . A patra coloană reprezintă vectorul de poziție al originii sistemului de referință atașat vârfului degetului, iar celelalte trei coloane reprezintă cosinuzii directori ai axelor acestui reper.

$$G^1 = {}^0T_1 \cdot G^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} c1(c2c34c567 - s2s567) + s1s34c567 & c1(-c2c34s567 - s2c567) - s1s34s567 & -c1c2s34 + s1c34 \\ s1(c2c34c567 - s2s567) - c1s34c567 & s1(-c2c34s567 - s2c567) + c1s34s567 & -s1c2s34 - c1c34 \\ s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 \\ 0 & 0 & 0 \\ (c1c2c34 + s1s34)(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + \\ + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ (s1c2c34 - c1s34)(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + \\ + p(s1c2c3 - c1s3) - s1s2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ s2[c34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + pc3] + \\ + c2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

### 2.4.1.4 Modelul cinematic invers

Pentru simplificarea calculelor se consideră, și în acest caz, doar mișcarea degetului mijlociu în raport cu palma, adică se vor folosi în calcule doar matricele (2.32), (2.33), (2.34) și (2.35). Se vor identifica elementele matricei (2.35) cu o matrice generală, presupunând cunoscută mișcarea vârfului degetului. Astfel, rezultă ecuația:

$$G^4 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c4c567 & -c4s567 & -s4 & c4(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) \\ s4c567 & -s4s567 & c4 & s4(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) \\ -s567 & -c567 & 0 & -f_{3m}s567 - f_{2m}s56 - f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Se poate observa că:

$$a_x = s4$$

$$a_y = -c4 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_4 = t4 = -\frac{a_x}{a_y} \quad (2.40)$$

$$n_z = -s567$$

$$o_z = -c567 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) = t567 = \frac{n_z}{o_z} \quad (2.41)$$

Pentru a pune în evidență variabilele articulare din relația (2.41), se recurge la metoda lui Paul, multiplicând cu matricele de transfer inversate. Prima matrice astfel multiplicată va fi egală cu matricea (2.34):

$$G^5 = {}^3T_4^{-1} \cdot G^4 = \begin{bmatrix} c4n_x + s4n_z & c4o_x + s4o_z & c4a_x + s4a_z & c4p_x + s4p_z \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p_z \\ -s4n_x + c4n_y & -s4o_x + c4o_y & -s4a_x + c4a_y & -s4p_x + c4p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

iar produsul următor va fi egal cu matricea (2.33):

$$G^6 = {}^4T_5^{-1} \cdot G^5 =$$

$$= \begin{bmatrix} c5(c4n_x + s4n_z) - s5n_z & c5(c4o_x + s4o_z) - s5o_z & c5(c4a_x + s4a_z) - s5a_z & c5(c4p_x + s4p_z) - s5p_z \\ -s5(c4n_x + s4n_z) - c5n_z & -s5(c4o_x + s4o_z) - c5o_z & -s5(c4a_x + s4a_z) - c5a_z & -s5(c4p_x + s4p_z) - c5p_z \\ -s4n_x + c4n_y & -s4o_x + c4o_y & -s4a_x + c4a_y & -s4p_x + c4p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Din relația (2.43), prin identificare, se obțin:

$$\begin{cases} s67 = -s5(c4n_x + s4n_z) - c5n_z \\ c67 = c5(c4n_x + s4n_z) - s5n_z \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta_6 + \theta_7) = t67 = \frac{t5(a_y n_x - a_x n_z) + n_z}{t5n_z - (a_y n_x - a_x n_z)} \quad (2.44)$$

și:

$$c5(c4a_x + s4a_z) - s5a_z = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_5 = t5 = \frac{c4a_x + s4a_z}{a_z} = \frac{a_y a_x - a_x a_z}{a_z} \quad (2.45)$$

Astfel:

$$t67 = \frac{n_z a_z + (a_y a_x - a_z a_x)(a_y n_x - n_z a_x)}{a_y(n_z a_x - n_x a_z)} \quad (2.46)$$

Din:

$$G^7 = {}^5T_6^{-1} \cdot G^6 =$$

$$= \begin{bmatrix} c56(c4n_x + s4n_z) - s56n_z & c56(c4o_x + s4o_z) - s56o_z & c56(c4a_x + s4a_z) - s56a_z & c56(c4p_x + s4p_z) - s56p_z \\ -s56(c4n_x + s4n_z) - c56n_z & -s56(c4o_x + s4o_z) - c56o_z & -s56(c4a_x + s4a_z) - c56a_z & -s56(c4p_x + s4p_z) - c56p_z \\ -s4n_x + c4n_y & -s4o_x + c4o_y & -s4a_x + c4a_y & -s4p_x + c4p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

prin identificare, rezultă:

$$\operatorname{tg}\theta_7 = t7 = \frac{-s56(c4n_x + s4n_z) - c56n_z}{c56(c4n_x + s4n_z) - s56n_z} =$$

$$= \frac{p_z a_y (a_y n_x - a_x n_z) - p_x n_z + f_{1m} a_y (a_y n_x s5 - a_x n_z s5 + n_z c5) - f_{3m} a_y (a_y n_x n_z + o_z a_y n_z + n_z^2 a_x)}{p_z a_y n_z + p_x (a_y n_x - a_x n_z) + f_{1m} a_y (-a_y n_x c5 + a_x n_z c5 + n_z s5) + f_{3m} a_y (o_z - n_z^2 a_y)} \quad (2.48)$$

Din:

$$t_{67} = \frac{t_6 + t_7}{1 - t_6 t_7} \Rightarrow t_6 = \frac{t_{67} - t_7}{1 + t_{67} t_7} \quad (2.49)$$

Modelul geometric al degetului mijlociu în raport cu palma este:

$$t_4 = -\frac{a_x}{a_y} \quad t_5 = \frac{a_y a_x - a_z a_x}{a_z} \quad t_6 = \frac{t_{67} - t_7}{1 + t_{67} t_7}$$

$$t_{67} = \frac{n_z a_z + (a_y a_x - a_z a_x)(a_y n_x - n_z a_x)}{a_y (n_z a_x - n_x a_z)}$$

Înlocuind în expresiile variabilelor articulare obținute, lungimile corespunzătoare fiecărui deget în parte, se determină soluțiile modelului invers pentru fiecare dintre ele.

## 2.5 Modelarea mâinii în MATLAB

Pentru a putea modela mișcarea degetelor mâinii se folosește modelul cinematic direct, care exprimă mișcarea vârfului fiecărui deget în raport cu sistemul de referință fix, atașat primei cuple cinematice a încheieturii. Pentru variabilele articulare comune tuturor degetelor,  $q_1, q_2, q_3$ , s-au stabilit constrângerile (2.50), impuse de limitările domeniului de mișcări ale degetelor, determinate de anatomia mâinii:

$$\begin{aligned} -90^\circ \leq q_1 \leq 90^\circ & \quad -\pi/2 \leq q_1 \leq \pi/2 \\ -15^\circ \leq q_2 \leq 15^\circ & \quad \text{adică} \quad -\pi/12 \leq q_2 \leq \pi/12 \\ -15^\circ \leq q_3 \leq 15^\circ & \quad -\pi/12 \leq q_3 \leq \pi/12 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Variabilele articulare specifice degetelor centrale,  $q_4, q_5, q_6, q_7$ , dat fiind faptul că ele au aceeași structură au valorile stabilite prin relațiile (2.54):

$$\begin{aligned} -15^\circ \leq q_4 \leq 15^\circ & \quad -\pi/12 \leq q_4 \leq \pi/12 \\ 0^\circ \leq q_5 \leq 90^\circ & \quad \text{adică} \quad 0 \leq q_5 \leq \pi/2 \\ 0^\circ \leq q_6 \leq 110^\circ & \quad 0 \leq q_6 \leq 11\pi/18 \\ 0^\circ \leq q_7 \leq 90^\circ & \quad 0 \leq q_7 \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

În ceea ce privește domeniile specifice variabilelor articulare ale degetului opozabil, acestea sunt exprimate de relația (2.55).

$$\begin{array}{lll}
 -15^\circ \leq q_{40} \leq 15^\circ & & -\pi/12 \leq q_{40} \leq \pi/12 \\
 0^\circ \leq q_{50} \leq 90^\circ & \text{adică} & 0 \leq q_{50} \leq \pi/2 \\
 0^\circ \leq q_{60} \leq 90^\circ & & 0 \leq q_{60} \leq \pi/2
 \end{array} \quad (2.52)$$

Pentru a putea realiza studiul cinematic, este necesar să se atribuie valori tuturor mărimilor care apar în sistemul cinematic determinat. Pentru aceasta, s-au considerat mărimile specifice unei mâini de adult, mărimi exprimate de relațiile (2.53), (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) și (2.58).

— mărimi generale: (2.53)

$$p = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$d_1 = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$$

$$d_2 = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$d_3 = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$d_5 = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$$

— degetul opozabil: (2.54)

$$f_{1o} = 3,5 \text{ cm} = 0,035 \text{ m}$$

$$f_{2o} = 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m}$$

— degetul arătător: (2.55)

$$f_{1a} = 4,5 \text{ cm} = 0,045 \text{ m}$$

$$f_{2a} = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$$

$$f_{3a} = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

— degetul mijlociu: (2.56)

$$f_{1m} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$f_{2m} = 3,5 \text{ cm} = 0,035 \text{ m}$$

$$f_{3m} = 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m}$$

— degetul inelar: (2.57)

$$f_{1i} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

$$f_{2i} = 3,5 \text{ cm} = 0,035 \text{ m}$$

$$f_{3i} = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

— degetul mic: (2.58)

$$f_{1c} = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$$

$$f_{2c} = 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m}$$

$$f_{3c} = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

Datorită faptului că s-a avut în vedere mai ales studiul funcției de prehensiune a mâinii, dintre mișcările posibile pe care le poate realiza mâna s-au studiat închiderea și deschiderea pumnului. Dat fiind faptul că în cazul acestor acțiuni mișcarea încheieturi nu are nici o relevanță, aceasta a fost rigidizată. De asemenea, ținând cont de faptul că mișcare de aducție sau abducție a degetelor centrale nu prezintă nici ea importanță pentru aceste cazuri, a fost și ea exclusă. Altfel spus, variabilele articulare implicate în aceste mișcări au fost anulate (adică  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$ ). În ceea ce privește degetul opozabil, s-a considerat că este suficientă doar mișcarea produsă de variabilele articulare  $q_4$  și  $q_6$ . Matricea generală a fiecărui deget în parte exprimă orientarea și poziția vârfului degetului, iar prin baleierea domeniului de valori pentru variabilele articulare ale articulațiilor nerigidizate, se obține traiectoria vârfului degetului în raport cu sistemul de referință fix.

Relativ la poziționarea degetelor față de sistemul de referință, se poate spune că:

- degetul mijlociu este plasat de-a lungul axei  $Ox$ , la distanța  $p$  de origine și se rotește în jurul axei  $Oz$  spre axa  $Oy$ ;
- degetul inelar este paralel cu cel mijlociu, plasat la distanța  $d_1$  pe axa  $Oz$  față de acesta și are aceeași mișcare;
- degetul mic este paralel cu cel inelar, plasat la distanța  $d_2$  pe axa  $Oz$  față de acesta și are aceeași mișcare;
- degetul arătător este paralel cu cel mijlociu, plasat la distanța  $-d_1$  pe axa  $Oz$  față de acesta și are aceeași mișcare;
- degetul opozabil este, plasat față de origine, la distanța  $p/2$  pe axa  $Ox$ , la distanța  $-d_1 - d_2$  pe axa  $Oz$  și la distanța  $-d_3$  pe axa  $Oy$  și se rotește în jurul acestei axe spre axa  $Oy$ .

Pe baza matricelor generale au fost generate în MATLAB funcțiile `ecuatii_deget_opozabil`, `ecuatii_deget_aratator`, `ecuatii_deget_mijlociu`, `ecuatii_deget_inelar` și `ecuatii_deget_mic` (în detaliu în Anexa 1). Spre exemplificare, se prezintă funcția `ecuatii_degetului_mijlociu`, care conține descrierea în MATLAB a ecuațiilor cinematice ale degetului mijlociu:

```
function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py,
pz]=ecuatii_deget_mijlociu(q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7)
```

```
p=0.1;
```

```

f1m=0.05;
f2m=0.035;
f3m=0.025;

nx = cos(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) -
sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) + sin(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
ny = sin(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) -
sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) - cos(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
nz = sin(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) + cos(q2)*sin(q5+q6+q7);

ox = cos(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) -
sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) - sin(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oy = sin(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) -
sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) + cos(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oz = -sin(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) + cos(q2)*cos(q5+q6+q7);

ax = -cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + sin(q1)*cos(q3+q4);
ay = -sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - cos(q1)*cos(q3+q4);
az = -sin(q2)*sin(q3+q4);

px = (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) + sin(q1)*sin(q3+q4)) *
(f3m*cos(q5+q6+q7) + f2m*cos(q5+q6) + f1m*cos(q5)) +
p*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) + sin(q1)*sin(q3)) + cos(q1)*sin(q2)*(-
f3m*sin(q5+q6+q7) - f2m*sin(q5+q6) - f1m*sin(q5));
py = (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) - cos(q1)*sin(q3+q4)) *
(f3m*cos(q5+q6+q7) + f2m*cos(q5+q6) + f1m*cos(q5)) +
p*(sin(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q3)) + sin(q1)*sin(q2)*(-
f3m*sin(q5+q6+q7) - f2m*sin(q5+q6) - f1m*sin(q5));
pz = sin(q2) * (cos(q3+q4) * (f3m*cos(q5+q6+q7) + f2m*cos(q5+q6) +
f1m*cos(q5)) + p*cos(q3)) - cos(q2) * (-f3m*sin(q5+q6+q7) -
f2m*sin(q5+q6) - f1m*sin(q5));

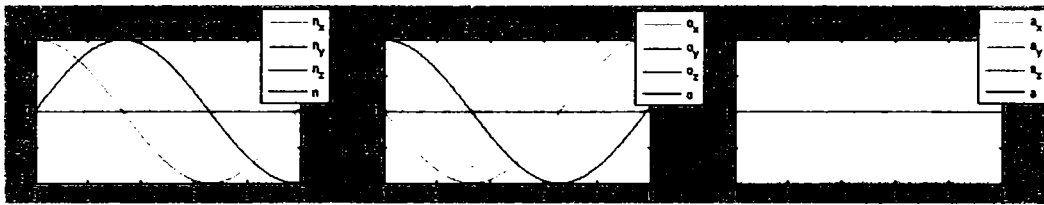
```

Pentru a studia mișcările degetelor, s-a considerat un interval de timp de 5 s. La momentul inițial  $t = 0$ , toate variabilele articulare au valoarea cea mai mică a domeniului de mișcare permis. Intervalul de timp a fost divizat cu un pas  $p = 0,1$ , ceea ce înseamnă că vor exista  $n = 51$  de momente de timp succesive în care se va calcula poziția vârfurilor degetelor. În consecință, domeniile de mișcare pentru fiecare variabilă articulară au fost divizate și ele în  $n$  valori succesive, cu un pas calculat pe baza lui  $n$  [29], [31].

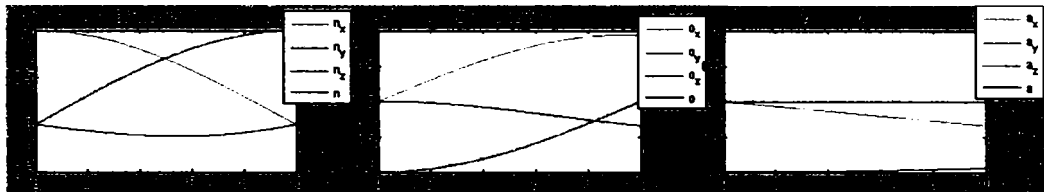
Funcția închidere\_pumn (Anexa 1) apelează funcțiile în care sunt descrise ecuațiile cinematice ale degetelor, calculează traiectoriile vârfurilor degetelor și le tipărește. Degetele centrale, fiind paralele între ele, au aceeași orientare a vârfului față de sistemul de referință general (Fig. 2.29), dat fiind faptul că nu există aducție. Spre



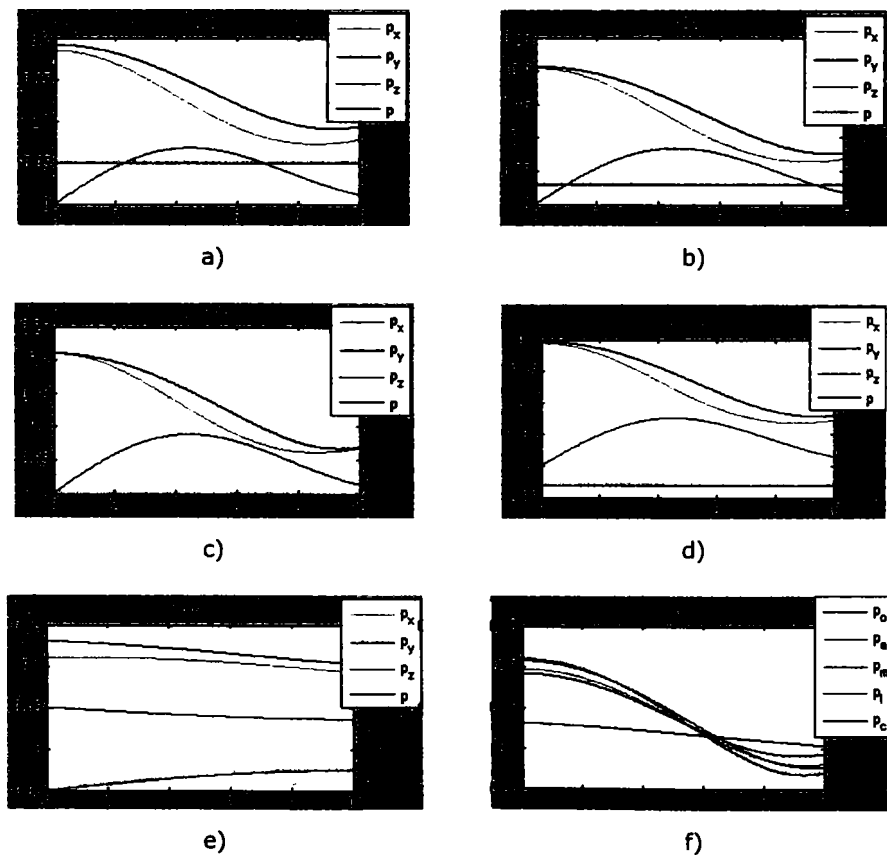
deosebire de acestea, degetul opozabil prezintă o orientare proprie, descrisă de Fig. 2.30. [103]



**Fig. 2.29** Orientarea sistemelor de referință atașate vârfurile degetelor centrale în raport cu sistemul de referință fix la flexarea mâinii



**Fig. 2.30** Orientarea sistemului de referință atașat vârfului degetului opozabil în raport cu sistemul de referință fix flexarea mâinii



**Fig. 2.31** Traiectoriile vârfurilor degetelor în cazul flexării mâinii

Fig. 2.31 prezintă traiectoriile vârfurilor degetelor față de sistemul de referință fix în cazul flexării mâinii, după cum urmează: a) curbele specifice degetului mic, b) curbele specifice degetului inelar, c) curbele specifice degetului mijlociu, d) curbele specifice degetului arătător, e) curbele specifice degetul opozabil și f) traiectoriile generale ale vârfurilor celor cinci degete față de sistemul de referință fix. Se poate observa că forma curbilor de mișcare ale degetelor centrale este aceeași, amplitudinile diferite fiind induse de lungimile falangelor.

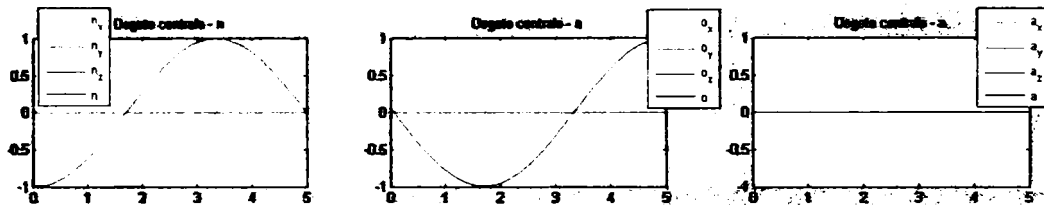


Fig. 2.32 Orientarea sistemelor de referință ale degetelor centrale la extensia mâinii

În ceea ce privește mișcarea de deschidere a pumnului, aceasta se realizează în următoarele condiții: încheietura mâinii este rigidizată, degetele centrale nu au mișcare de aducție sau abducție, iar degetul opozabil poate mișca doar ultima falangă. Variabilele articulare caracteristice articulațiilor rămase mobile vor avea, inițial, valoarea maximă și se vor deplasa spre valoarea minimă.

Toate considerentele legate de mărimi prezentate în cazul închiderii pumnului sunt valabile și în acest caz. Astfel, funcția care realizează simularea mișcării poartă numele de deschidere\_pumn și apelează aceleași funcții de descriere a lanțurilor cinemactice, reprezentate de degete, ca și la închiderea pumnului. Fig. 2.32 prezintă orientarea sistemelor de referință atașate vârfurilor degetelor centrale față de sistemul de referință fix, iar Fig. 2.33 prezintă orientarea sistemului de referință atașat degetului opozabil față de același sistem de referință fix, situat pe încheietura mâinii.

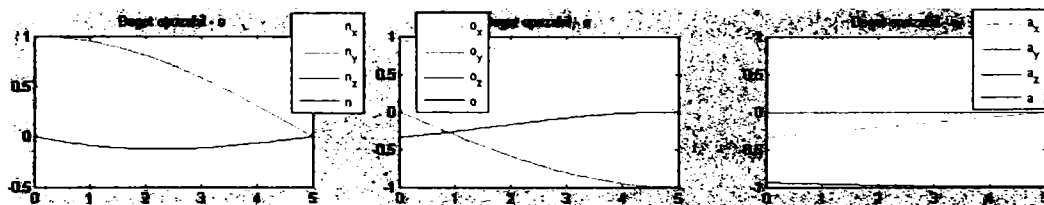


Fig. 2.33 Orientarea sistemului de referință atașat degetului opozabil la extensia mâinii

Trajectoriile vârfurilor degetelor față de sistemul de referință fix, în cazul mișcării de deschidere a pumnului sunt prezentate în Fig. 2.34: a) curbele specifice degetul mic, b) curbele specifice degetul inelar, c) curbele specifice degetul mijlociu, d) curbele specifice degetul arătător, e) curbele specifice degetul opozabil și f) traiectoriile generale ale celor cinci degete. Se poate observa faptul că mișcarea de închidere a pumnului este inversa mișcării de deschidere (așa cum, de altfel, este și normal). Mai mult, ambele mișcări sunt identice cu cele naturale, ceea ce demonstrează faptul că modelul poate fi folosit cu succes la implementarea unei proteze pentru mâna umană.

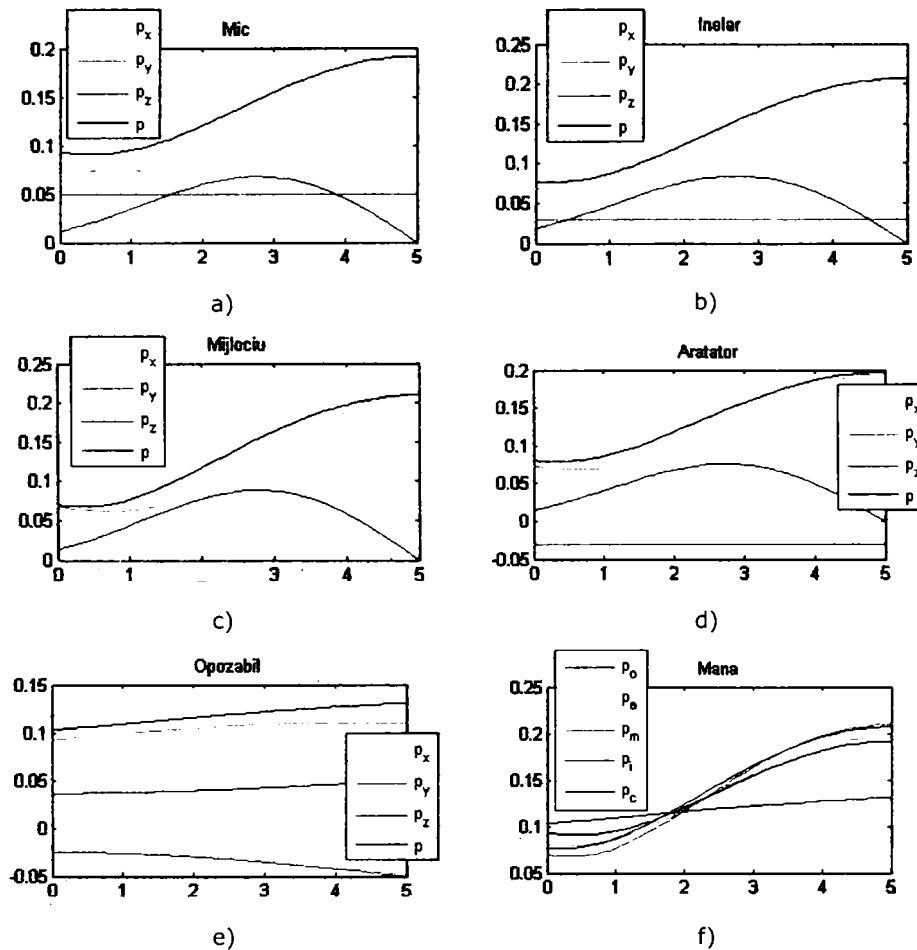


Fig. 2.34 Mișcările vârfurilor degetelor față de sistemul de referință fix la extensia mâinii

## 2.6 Modelarea mâinii în SimMechanics

Simulink face parte din suita MATLAB și este un pachet software pentru modelarea, simularea și analiza dinamică a sistemelor. El suportă realizarea unor sisteme liniare sau neliniare, modelate în timp continuu, timp discret sau un hibrid între acestea două. Simularea se realizează în doi pași: se creează modelul grafic al sistemului care se dorește a fi simulat (folosind editorul specializat), model care descrie relațiile matematice dependente de timp ale intrărilor, ieșirilor și stărilor sistemului, după care se simulează acest model pe o perioadă de timp specificată.

Pentru modelarea sistemelor mecanice, a fost creată special o secțiune a Simulink, denumită SimMechanics, care oferă un set de instrumente pentru implementarea virtuală a unor astfel de sisteme. De fapt, SimMechanics este un mediu de modelare folosind diagrame bloc a proiectelor ingineresti și de simulare a mișcării sistemelor compuse din corpuri rigide, care prezintă diferite grade de libertate, au anumite poziții, orientări și mase. El permite modelarea și simularea sistemelor mecanice

folosind o serie de unelte pentru specificarea corpurilor și a proprietăților lor, a mișcărilor posibile ale acestora, a constrângerilor cinematice și a sistemelor de referință atașate, precum și inițializarea și măsurarea mișcării corpurilor. Uneltele de vizualizare ale SimMechanics animează reprezentări simplificate ale sistemelor 3D, înainte și în timpul simulării, folosind sistemul grafic al MATLAB.

Folosind SimMechanics trebuie parcurse patru etape principale pentru construirea și rularea modelului unui sistem:

- specificarea proprietăților inerțiale ale corpurilor, a gradele de libertate, a constrângerile și a sistemelor de referință atașate corpurilor necesare pentru măsurarea pozițiilor și a vitezelor;
- stabilirea senzorilor și a elementelor de execuție pentru a înregistra și a iniția mișcările corpurilor și pentru a aplica forțe sau cupluri;
- pornirea simulării prin apelarea elementelor specifice Simulink de rezolvare pentru a calcula mișcările sistemului, ținând cont de toate constrângerile impuse;
- vizualizarea și animarea simulării folosind fereastra de vizualizarea SimMechanics.

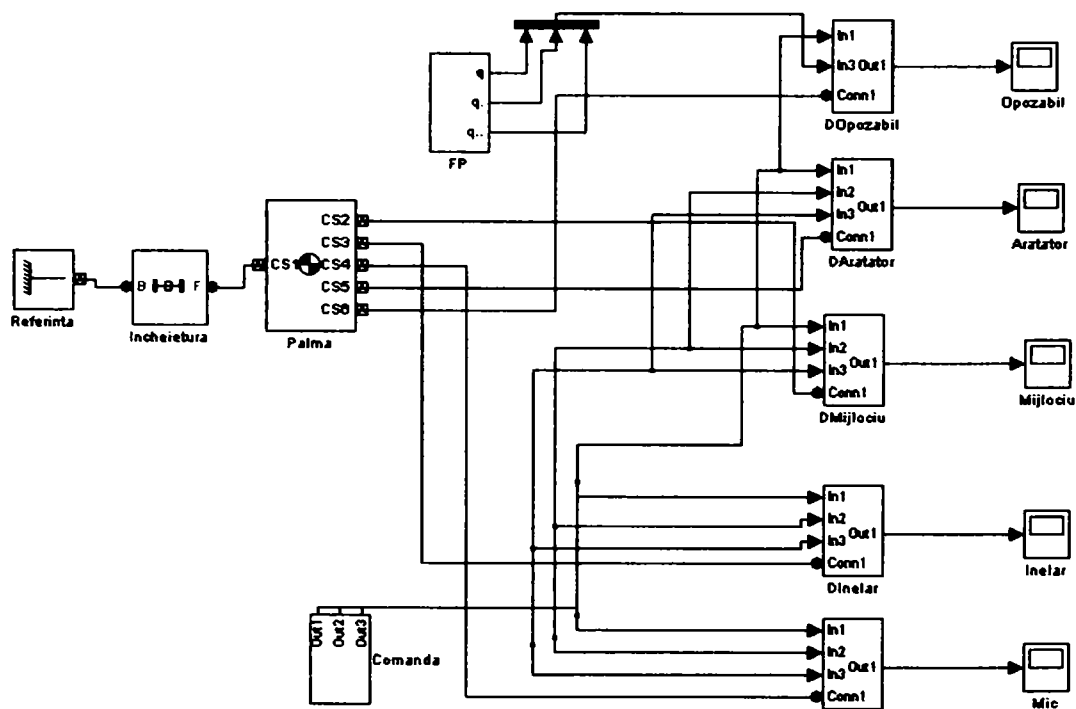


Fig. 2.35 Modelul SimMechanics al mâinii umane

Acestea fiind spuse, s-a trecut la realizarea modelului mâinii umane (compus din palmă și cele cinci degete) în SimMechanics [30], [102], pentru a verifica modelul matematic descris în MATLAB și corectitudinea rezultatelor obținute în urma simulării acestuia. Schema rezultată (Fig. 2.35) a fost implementată ținându-se cont de următoarele considerații:

- deoarece se studiază doar mișcările de deschidere și de închidere ale pumnului, încheietura este rigidizată. Din acest motiv, în schemă, ea este reprezentată printr-o articulație rigidă, de tip *Weld*;
- sistemul de referință fix se situează pe încheietura mâinii, având axele orientate astfel: axa  $O_x$  de-a lungul palmei, pe direcția degetului mijlociu, axa  $O_y$  perpendiculară pe palmă și axa  $O_z$  perpendiculară pe celelalte două și orientată astfel încât degetele mic și inelar să fie situate în zona pozitivă;
- palma este modelată folosind un bloc de tip *Body*, configurat conform cu Fig. 2.36. Sistemul de referință al palmei (CS1) este același cu sistemul de referință fix. Față de acesta, sistemele de referință ale degetelor sunt orientate astfel, pentru a respecta anatomia mâinii umane:
  - sistemul de referință al degetului mijlociu (CS2) se află la distanța de 10 cm pe axa  $O_x$  față de sistemul fix (lungimea palmei), fără deplasări pe celelalte axe;
  - sistemul de referință al degetului inelar (CS3) se află la distanța de 10 cm pe axa  $O_x$  și de 3 cm pe  $O_z$  ;
  - sistemul de referință al degetului mic (CS4) se află la distanța de 10 cm pe axa  $O_x$  și de 5 cm pe  $O_z$  ;
  - sistemul de referință al degetului arătător (CS5) se află la distanța de 10 cm pe axa  $O_x$  și de -3 cm pe  $O_z$  ;
  - sistemul de referință al degetului opozabil (CS6) se află la distanța de 5 cm pe axa  $O_x$  , de 3 cm pe axa  $O_y$  și de -5 cm pe  $O_z$  .

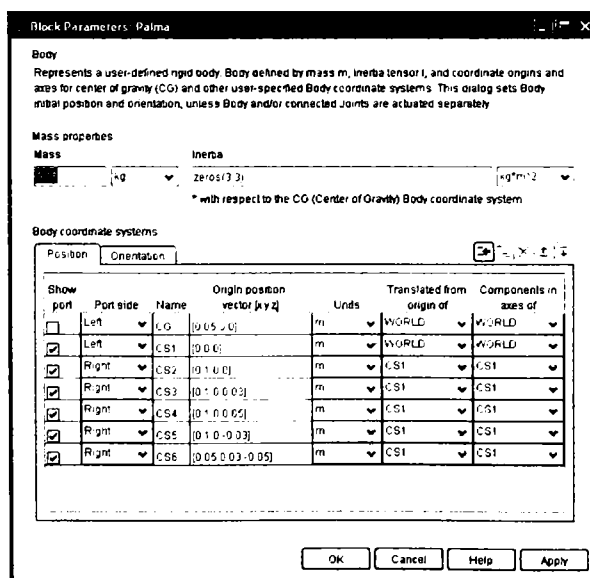


Fig. 2.36 Configurarea blocului palmă

- mișcarea degetelor centrale are loc în jurul axei  $Oz$ , spre axa  $Oy$ , iar mișcarea degetului opozabil se realizează în jurul axei  $Oy$ , spre axa  $Ox$ . Valorile pentru unghiurile de rotație sunt generate de către blocul denumit *Comanda*. În cazul degetului opozabil, s-a considerat că falanga proximală realizează doar mișcare de aducție iar falanga distală acoperă tot domeniul disponibil pentru flexare;
- curbele mișcării sunt captate, pentru fiecare deget în parte, de către un bloc de tip *Scope*.

Toate degetele centrale au aceeași structură, ceea ce diferă este lungimea falangelor (Fig. 2.37). Fiecare deget central este format din trei corpuri, legate între ele prin articulații și reprezentate de blocurile de tip *Body*, denumite Falanga3, Falanga2 și Falanga1. Mișcarea fiecărui corp este permisă de câte o articulație cu unul sau mai multe grade de libertate. Deoarece această schemă urmărește simularea mișcărilor de închidere și deschidere a pumnului, mișcarea de aducție a fost exclusă, astfel că articulația *Articulație3* asigură falangei proximale doar un singur grad de libertate (rotație) față de palmă. Celelalte falange sunt legate prin același tip de articulații. Mișcarea are loc în jurul axei  $Oz$ .

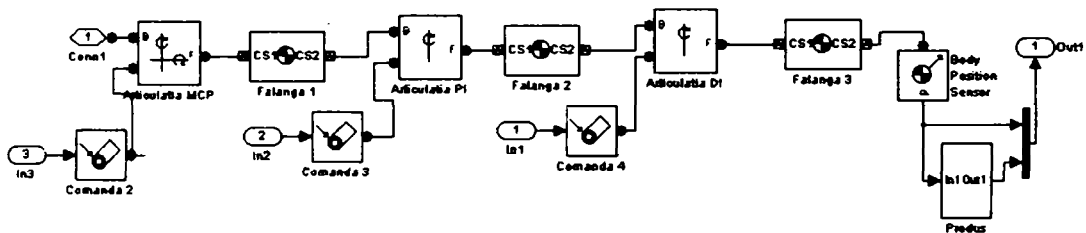


Fig. 2.37 Structura degetelor centrale

Fiecare articulație mobilă trebuie comandată de către un bloc cu denumirea *Joint Actuator*. În cazul de față, având trei articulații mobile, sunt necesare trei blocuri de comandă: *Comanda2*, *Comanda3* și *Comanda4*. Fiecare bloc de comandă trimite articulației corespunzătoare un unghi de rotație, valoare asigurată de blocul denumit *Comanda* în Fig. 2.35.

Mișcarea vârfului degetului față de sistemul de referință fix, este captată de blocul de tip *Body Position Sensor*, sub forma proiecțiilor pe cele trei axe ale sistemului. Blocul *Produs* generează rezultanta mișcării. Curbele de mișcare obținute sunt afișate de către blocul de tip *Scope*, denumit *Rezultate*.

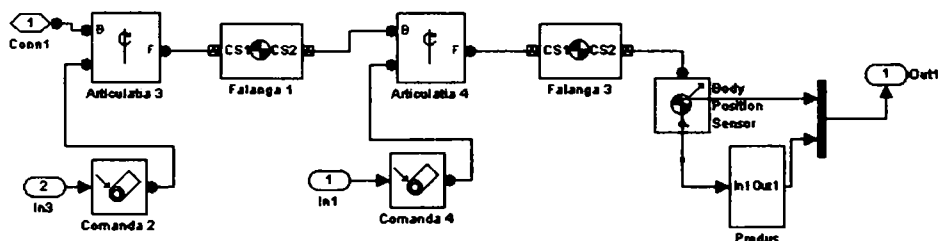
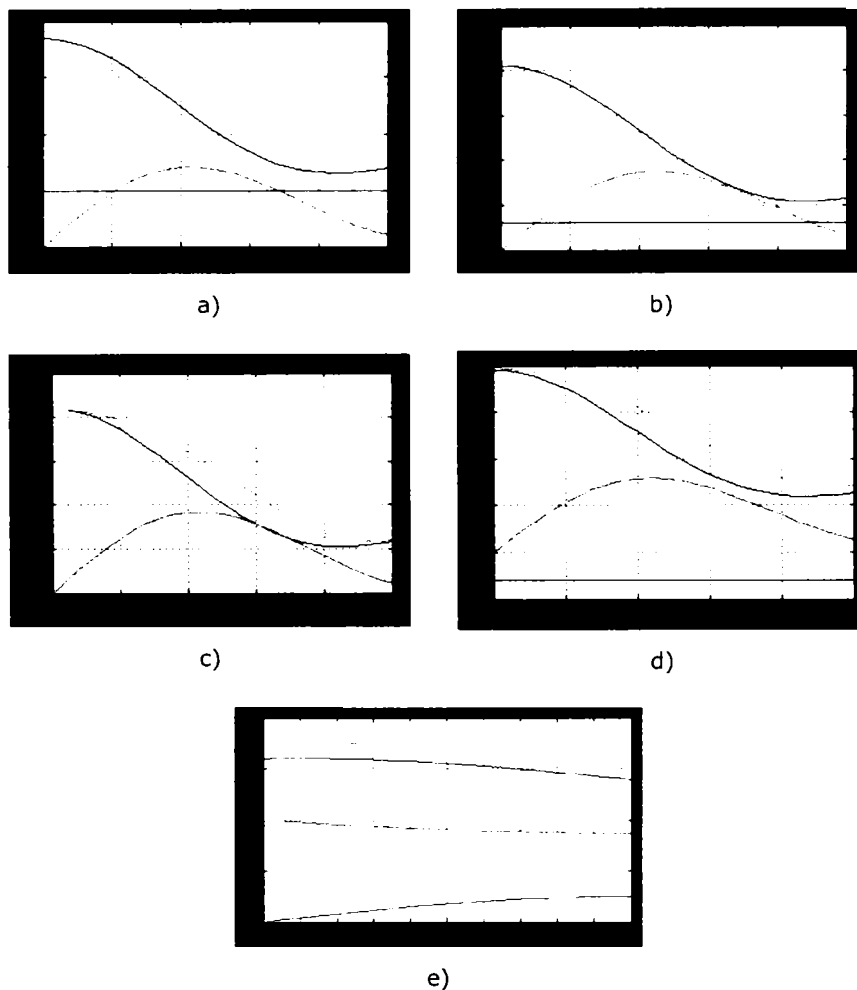


Fig. 2.38 Structura degetului opozabil

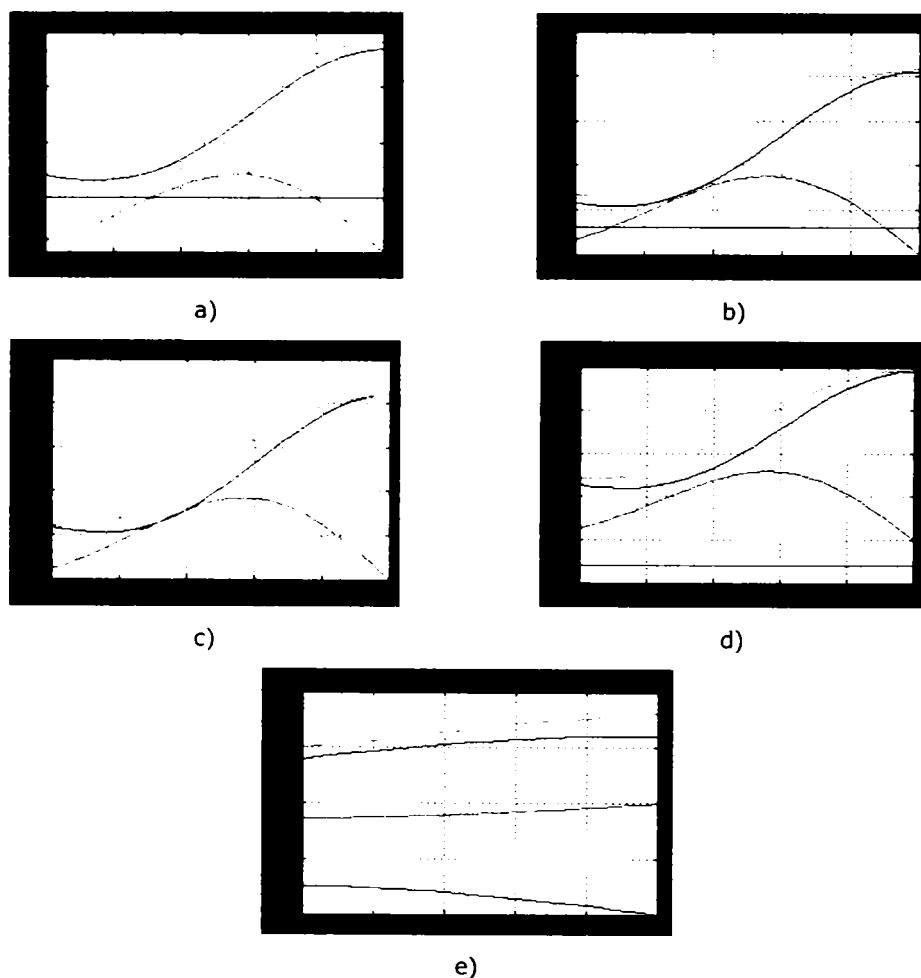


**Fig. 2.39** Curbele obținute la închiderea pumnului

Spre deosebire de degetele centrale, degetul opozabil are o structură diferită (Fig. 2.38) prezentând doar două falange. Și în acest caz articulația de la bază are doar un grad de libertate (renunțându-se la mișcarea de flexare).

Fiecare corp introdus în schemă trebuie configurat corespunzător pentru ca modelul final să funcționeze corect. Astfel, în Fig. 2.36 este prezentată fereastra de configurare a corpului Palma. Este permisă specificarea masei corpului, a sistemului inerțial, a poziției sistemului de referință asociat corpului, a poziției centrului de greutate și a poziției altor sisteme atașate corpurilor cu care acesta se învecinează, toate față de sistemul de referință fix (denumit *World*). De asemenea, se poate specifica și orientarea sistemelor deja menționate față de sistemul de referință fix. În cazul de față, centrul de greutate este situat la mijlocul palmei (la 5 cm față de origine, pe axa  $Ox$ ), sistemul de referință al palmei este identic cu cel fix, iar celelalte corpuri cu care este conectată palma se află la distanțele stabilite prin specificațiile de proiectare. În aceeași manieră se configurează toate corpurile din model.

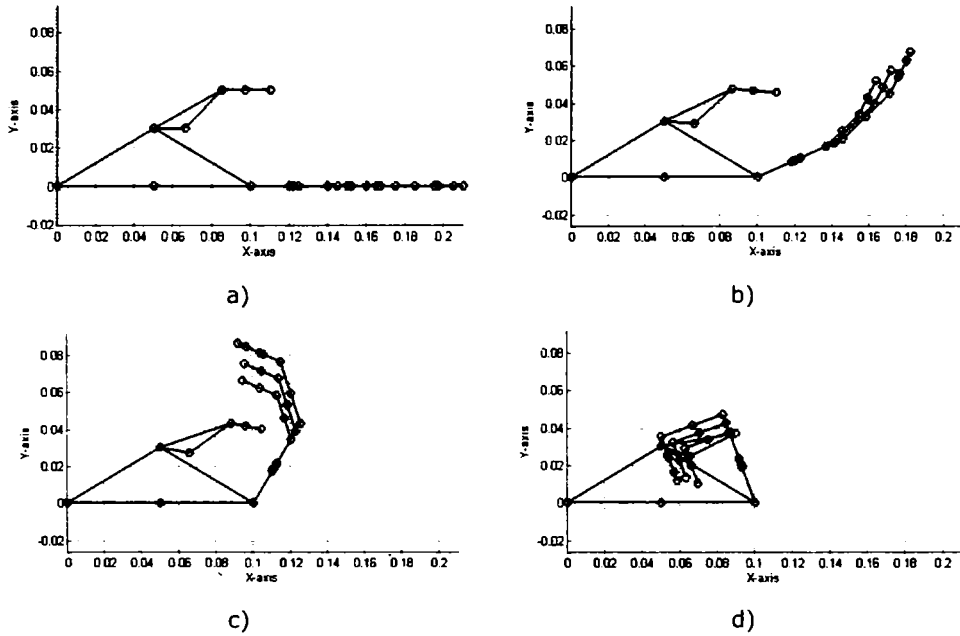
Simulând sistemul care descrie mâna umană, conform cu considerațiile menționate (prezentat în Fig. 2.35), se obțin curbele de mișcare pentru cele două situații avute în vedere: închiderea și deschiderea pumnului. Pentru închiderea pumnului, se alimentează blocurile de acționare a articulațiilor cu valorile corespunzătoare: crescătoare, de la valoarea cea mai mică până la valoarea cea mai mare a domeniului specific. Traiectoriile de mișcare ale vârfurilor degetelor sunt raportate la sistemul de referință fix și sunt prezentate în Fig. 2.39, unde imaginile corespund: a) degetului mic, b) degetului inelar, c) degetului mijlociu, d) degetului arătător și e) degetului opozabil. După cum se poate observa, s-au obținut rezultate identice cu cele determinate prin simularea modelului în MATLAB.



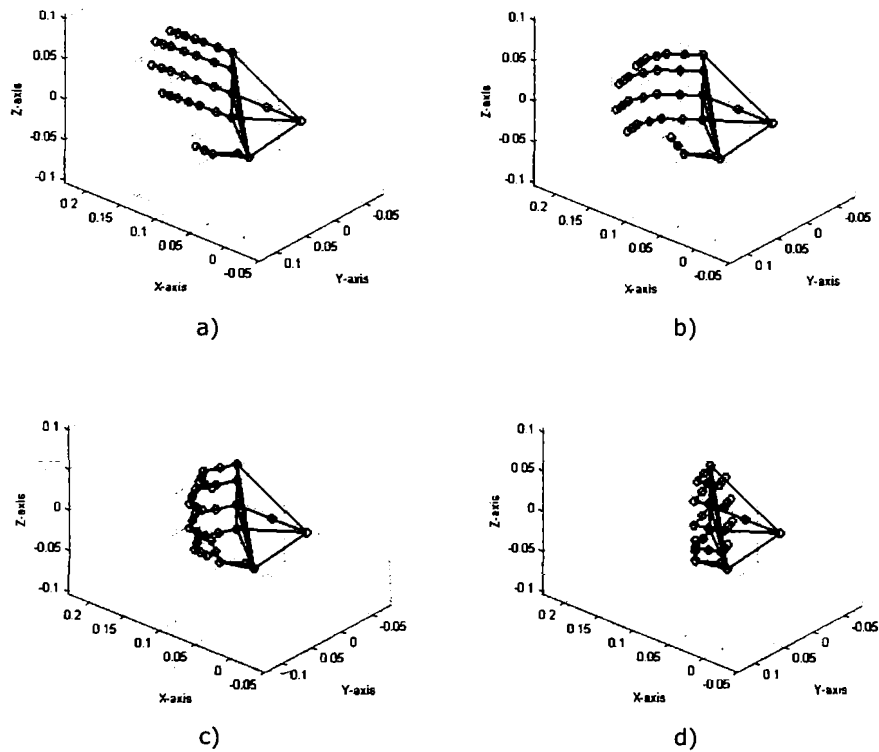
**Fig. 2.40** Curbele obținute la deschiderea pumnului

În ceea ce privește simularea mișcării de deschidere a pumnului, rămân valabile considerentele menționate pentru mișcarea de închidere a pumnului, singura deosebire constând în valorile unghiurilor de rotație a articulațiilor rămase mobile. Traiectoriile vârfurilor degetelor sunt prezentate în Fig. 2.40, unde imaginile corespund: a) degetului mic, b) degetului inelar, c) degetului mijlociu, d) degetului arătător și e) degetului opozabil. După cum se poate observa, și în acest caz s-au obținut rezultate identice cu cele determinate prin simularea modelului în MATLAB.





**Fig. 2.41** Închiderea pumnului – vedere din planul  $xOy$



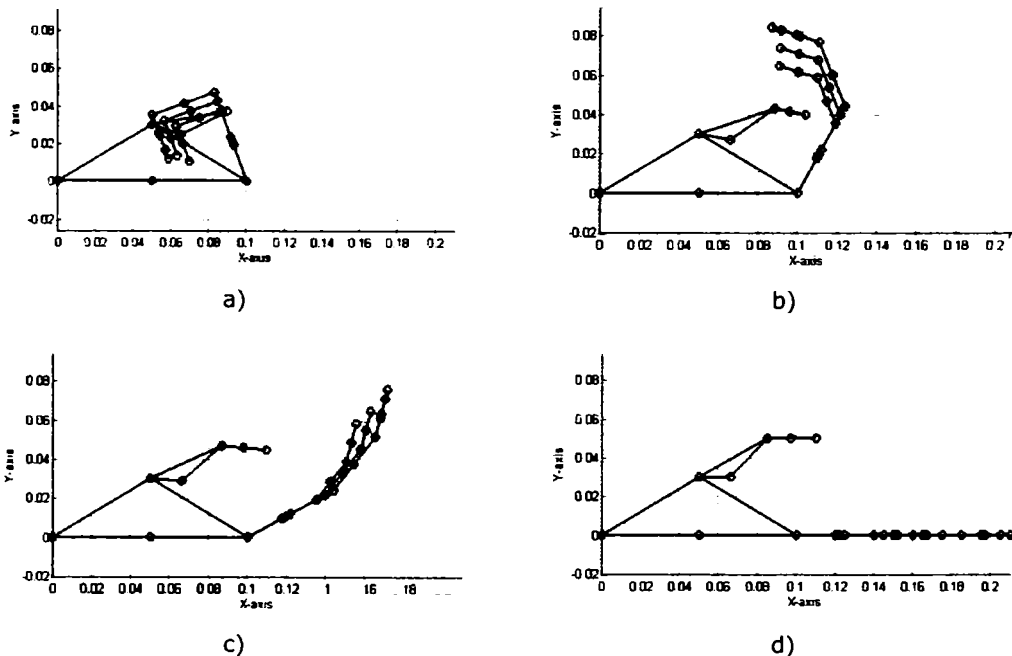
**Fig. 2.42** Închiderea pumnului – imagine 3D

Simulink pune la dispoziția utilizatorului și un mediu grafic de vizualizare a modelelor simulate. Astfel, Fig. 2.41 prezintă câteva ipostaze din mișcarea de închidere a pumnului, mișcare văzută din perspectiva planului  $xOy$ , iar Fig. 2.42 prezintă aceeași mișcare, dar tridimensional:

- mâna în poziția inițială, deschisă (imaginea a));
- poziții intermediare ale mișcării (imaginile b) și c));
- mâna în poziția finală, cu pumnul închis (imaginea d)).

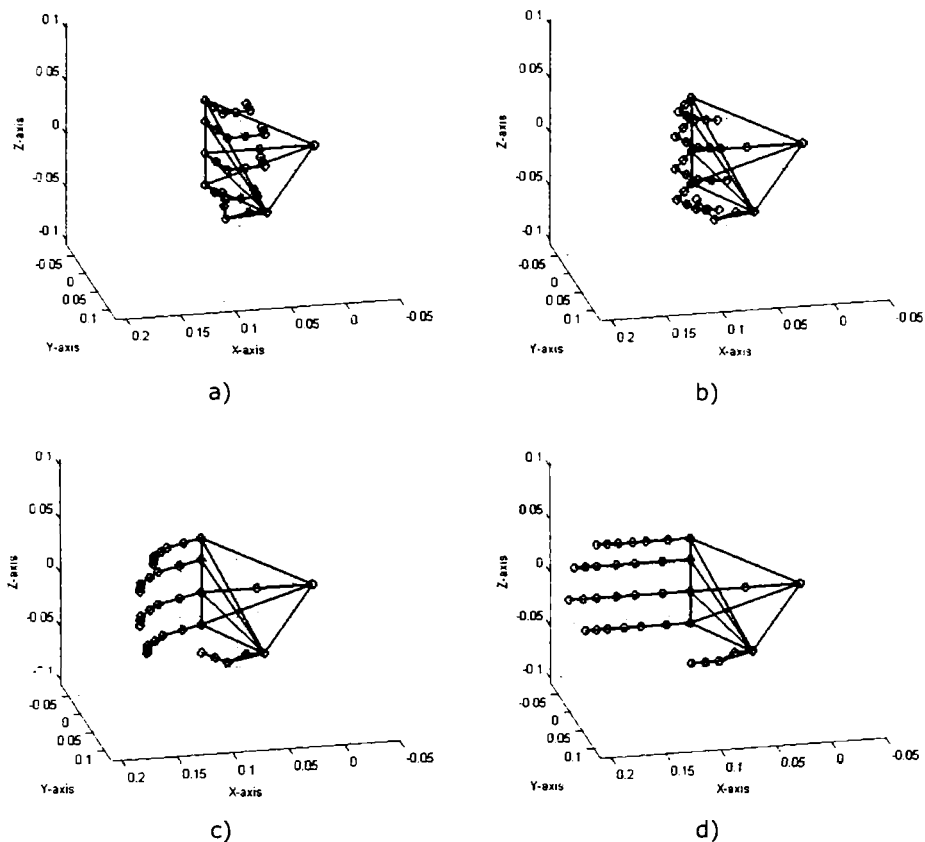
Folosind aceeași facilitate de vizualizare din mediul Simulink, a fost surprinsă și mișcarea de deschidere a pumnului. Astfel, Fig. 2.43 prezintă mișcarea văzută din perspectiva planului  $xOy$ , iar Fig. 2.44 prezintă aceeași mișcare, dar văzută tridimensional:

- mâna în poziția inițială, cu pumnul închis (imaginea a));
- poziții intermediare ale mișcării (imaginile b) și c));
- mâna în poziția finală, deschisă (imaginea d)).



**Fig. 2.43** Deschiderea pumnului — vedere din planul  $xOy$

Demn de remarcat este faptul că, atât din rezultatele obținute în urma simulării modelului în Matlab, cât și din rezultatele obținute prin simularea modelului folosind Simulink (în special din vizualizarea grafică a modelului), se poate observa că mișcarea generată este una naturală. Astfel, se poate spune că modelul dezvoltat pentru mâna umană este unul corect, nu însă și identic cu cel natural, fiindu-i impuse anumite constrângeri, menționate pe parcursul acestui capitol. Pe viitor se va urmări eliminarea acestor constrângeri impuse prin proiectare și determinarea unui model identic cu cel natural.



**Fig. 2.44** Deschiderea pumnului — imagine 3D

## **2.7 Studiul modelului folosind realitatea virtuală**

Suita MATLAB oferă posibilitatea conectării unei lumi virtuale, definită în VRML, la o schemă Simulink, prin *Virtual Reality Toolbox*. Această aplicație este o soluție pentru interacționarea în timp cu modele virtuale ale sistemelor dinamice. Sunt puse la dispoziția utilizatorului blocuri care să conecteze direct semnalele Simulink la modelele virtuale, permițând, astfel, vizualizarea modelului ca o animație tridimensională.

Pentru a asigura un mediu de lucru complet, *Virtual Reality Toolbox* include și două componente adiționale:

- o aplicație pentru vizualizarea lumilor virtuale
- o aplicație pentru implementarea lumilor virtuale, V-Realm Builder realizat de firma Ligos Corporation.

V-Realm Builder este o aplicație foarte puternică și intuitivă, fiind ușor de utilizat chiar și de către nespecialiști, pentru a crea obiecte 3D și „lumi” în care acestea să fie văzute. Astfel, folosind facilitățile puse la dispoziție de acesta a fost realizat un model al mâinii umane (Fig. 2.45), respectând considerentele enunțate la realizarea modelului cinematic: degetele centrale au aceeași structură, fiind diferite doar lungimile falangelor componente, iar degetul central este compus doar din două falange, având o poziționare prestabilită față de palmă.



Fig. 2.45 Modelul mâinii umane realizat cu Virtual Reality Builder

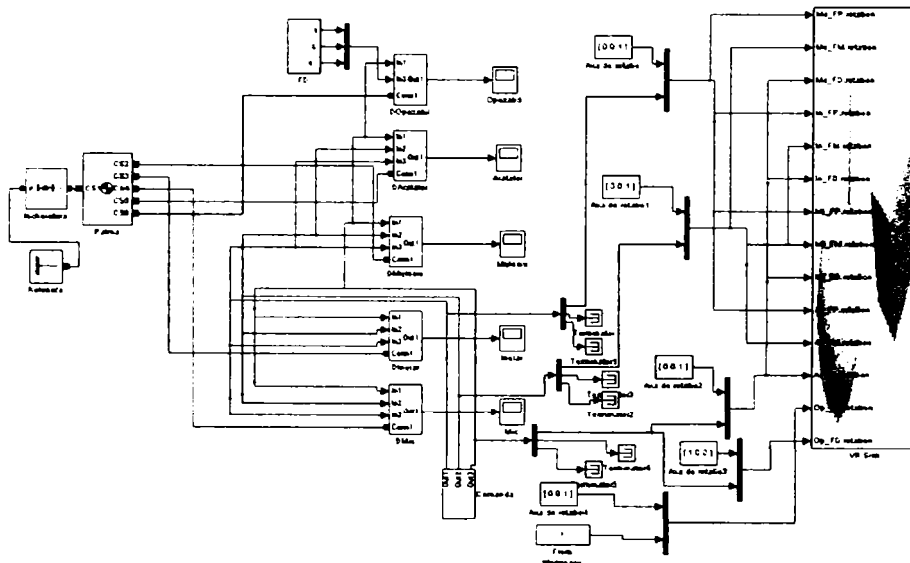


Fig. 2.46 Modelul Simulink al mâinii conectat la un model virtual

Acest model poate fi conectat la modelul realizat în Simulink (Fig. 2.35), pentru a obține datele necesare în scopul controlării și animării lumii virtuale. Conexiunea se realizează prin intermediul unui bloc *VR Sink* adăugat la schema Simulink (Fig. 2.46), bloc care preia datele din Simulink și le transmite lumii virtuale. Pentru a realiza efectiv conexiunea, trebuie specificat fișierul care conține modelul virtual în fereastra *Parameters* a blocului *VR Sink* (Fig. 2.47). Acest lucru are ca efect apariția

În caseta din partea dreaptă a ferestrei a unei ierarhii VRML care prezintă structura modelului virtual. Cum din Simulink se vor transmite unghiurile de rotație, se vor bifa toate căsuțele corespunzătoare rotațiilor falangelor, ceea ce va determina marcarea acestora pe caseta externă a *VR Sink* drept ieșiri (Fig. 2.46).

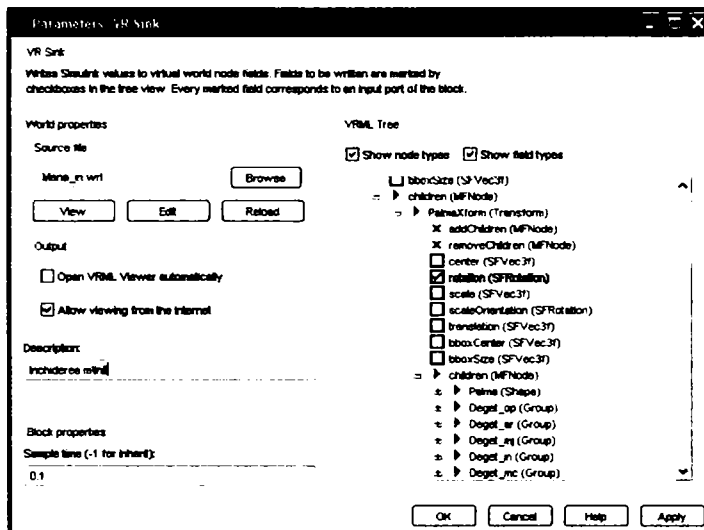
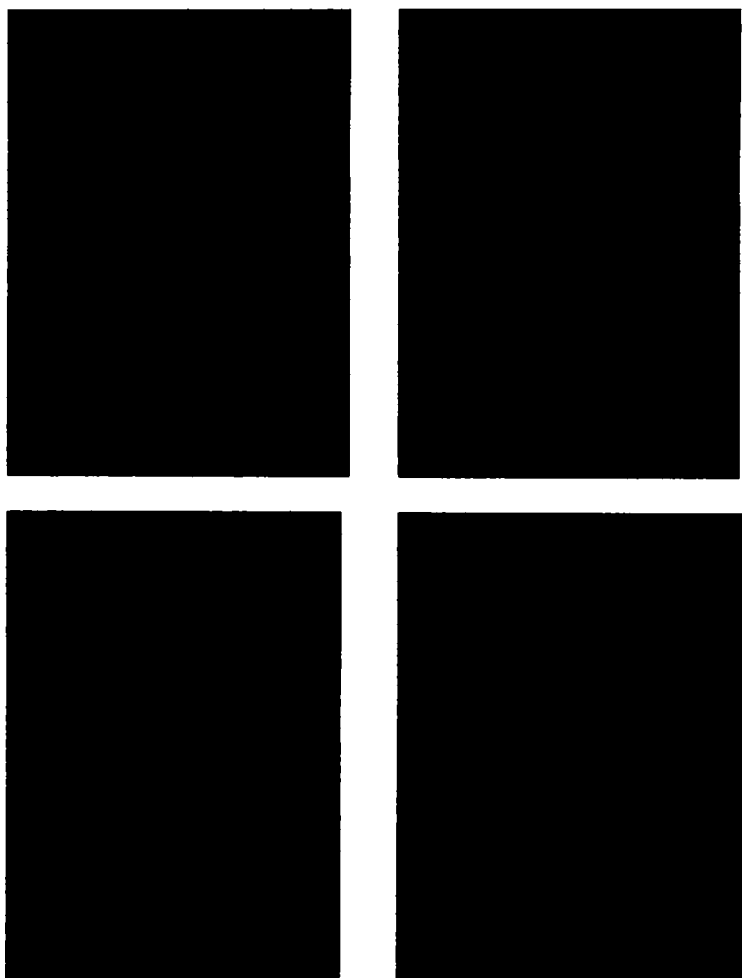


Fig. 2.47 Stabilirea modelului virtual cu care se lucrează și a conexiunilor necesare



Fig. 2.48 Flexarea mâinii folosind realitatea virtuală

În lumea virtuală, rotația este definită ca un vector cu patru elemente. Primele trei precizează axa de rotație (spre exemplu, dacă rotația se face în jurul axei  $Oz$ , atunci vor fi de forma  $[0 \ 0 \ 1]$ ), iar ultimul reprezintă valoarea unghiului de rotație. Pentru transmiterea unei poziții (translație) este necesar un vector cu trei elemente, de forma  $[x, y, z]$ . După realizarea conexiunilor care se impun, se pornește simularea modelului și mediul de vizualizare permite urmărirea animării modelului virtual.



**Fig. 2.49** Extensia mâinii

Fig. 2.48 prezintă patru ipostaze din flexarea mâinii, iar Fig. 2.49 prezintă, tot patru ipostaze, dar din mișcarea de extensie a mâinii.

# 3 MODELUL DINAMIC AL MĂINII UMANE

## 3.1 Suport teoretic

### 3.1.1 Deplasări elementare

Situarea efectorului final al unui robotului (în cazul de față a vârfurilor degetelor) se exprimă prin matricea de transformare generală  $\mathbf{G}$ . Variația diferențială a poziției și orientării efectorului final se notează cu  $d\mathbf{G}$  și reprezintă suprapunerea unei translații și a unei rotații elementare. Situarea rezultată se poate exprima prin [98]:

$$\mathbf{G}^r = \mathbf{G} + d\mathbf{G} \quad (3.1)$$

Sistemul de referință atașat efectorului final este supus unei translații elementare  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  și unei rotații generale de unghi elementar  $d\theta$  în jurul unei axe oarecare de versor  $\mathbf{u}$ . Situarea modificată a efectorului [32], [98]:

$$\mathbf{G} + d\mathbf{G} = \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{u}, d\theta) \cdot \mathbf{G} \quad (3.2)$$

permite exprimarea variației diferențiale a poziției și orientării efectorului final:

$$d\mathbf{G} = [\mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{u}, d\theta) - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{G} \quad (3.3)$$

unde  $\mathbf{I}$  este matricea unitate.

Paranteza din relația (3.3) reprezintă *operatorul  $\Delta$*  (sau matricea de transformare [32]), prin intermediul căruia se exprimă variația elementară (diferențială) a situației efectorului final. Cele două transformări care intervin în expresia operatorului  $\Delta$  se numesc *transformări diferențiale de coordonate*. Variația elementară a situației efectorului final se poate, astfel, determina prin aplicarea operatorului  $\Delta$  situației impuse de sistemul de comandă.

Variația diferențială a poziției și orientării efectorului final se calculează în funcție de operatorul  ${}^0\Delta$  sau  ${}^G\Delta$ , după cum se exprimă în sistemul de referință fix sau în sistemul de referință atașat efectorului final, descris de matricea  $\mathbf{G}$ , astfel [98]:

$$dG = {}^0\Delta \cdot G \quad (3.4)$$

$$dG = G \cdot {}^G\Delta \quad (3.5)$$

### 3.1.1.1 Operatorul ${}^0\Delta$ . Determinarea variației elementare ${}^0dG$

Operatorul  ${}^0\Delta$  se obține conform relației (3.3), exprimând matricele transformărilor diferențiale de coordonate. Matricea de translație elementară este de forma (3.6), unde ultima coloană conține deplasările elementare [32], [98]:

$$T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Matricea de rotație elementară se poate scrie considerând rotația elementară ca fiind rezultatul unei suprapuneri de rotații elementare  $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$  în jurul axelor sistemului de referință [32], [98]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u}, d\theta) &= \mathbf{R}(x, \delta_x) \cdot \mathbf{R}(y, \delta_y) \cdot \mathbf{R}(z, \delta_z) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & 0 & 0 \\ \delta_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Efectuând calculele în relația (3.7), ținând cont de faptul că pentru unghiuri mici  $\cos \delta \approx 1$ ,  $\sin \delta \approx \delta$  și neglijând toate produsele a două sau trei mărimi elementare, se determină matricea de rotație elementară de forma [32], [98]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Astfel, operatorul  ${}^0\Delta$  se obține prin scăderea matricei unitate  $\mathbf{I}$  din produsul expresiilor (3.6) și (3.8) [32], [98]:



$${}^0\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^0\delta_z & {}^0\delta_y & {}^0dx \\ {}^0\delta_z & 0 & -{}^0\delta_x & {}^0dy \\ -{}^0\delta_y & {}^0\delta_x & 0 & {}^0dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Structura operatorului  ${}^0\Delta$  reflectă modificarea diferențială a poziției și orientării sistemului de referință atașat efectorului. Cei doi vectori care descriu modificările elementare reprezintă *vectorul de translație elementară*  ${}^0\bar{d}$  și *vectorul de rotație elementară*  ${}^0\bar{\delta}$  [98]:

$${}^0\bar{d} = {}^0dx \bar{i} + {}^0dy \bar{j} + {}^0dz \bar{k} \quad \text{sau} \quad {}^0\mathbf{d} = \begin{bmatrix} {}^0dx & {}^0dy & {}^0dz & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

$${}^0\bar{\delta} = {}^0\delta_x \bar{i} + {}^0\delta_y \bar{j} + {}^0\delta_z \bar{k} \quad \text{sau} \quad {}^0\bar{\delta} = \begin{bmatrix} {}^0\delta_x & {}^0\delta_y & {}^0\delta_z & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

Cei doi vectori  ${}^0\bar{d}$  și  ${}^0\bar{\delta}$  determină *vectorul (elementar) diferențial al mișcării*  ${}^0\mathbf{D}$ , exprimat, de asemenea, în sistemul de referință fix.

$${}^0\mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}^0dx & {}^0dy & {}^0dz & {}^0\delta_x & {}^0\delta_y & {}^0\delta_z \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

Aplicând operatorul  ${}^0\Delta$  situații exprimate prin matricea  $\mathbf{G}$  rezultă variația diferențială  ${}^0d\mathbf{G}$  în sistemul de referință fix [32], [98]:

$${}^0d\mathbf{G} = \begin{bmatrix} n_z \cdot {}^0\delta_y - n_y \cdot {}^0\delta_z & o_z \cdot {}^0\delta_y - o_y \cdot {}^0\delta_z & a_z \cdot {}^0\delta_y - a_y \cdot {}^0\delta_z & p_z \cdot {}^0\delta_y - p_y \cdot {}^0\delta_z + {}^0dx \\ n_x \cdot {}^0\delta_z - n_z \cdot {}^0\delta_x & o_x \cdot {}^0\delta_z - o_z \cdot {}^0\delta_x & a_x \cdot {}^0\delta_z - a_z \cdot {}^0\delta_x & p_x \cdot {}^0\delta_z - p_z \cdot {}^0\delta_x + {}^0dy \\ n_y \cdot {}^0\delta_x - n_x \cdot {}^0\delta_y & o_y \cdot {}^0\delta_x - o_x \cdot {}^0\delta_y & a_y \cdot {}^0\delta_x - a_x \cdot {}^0\delta_y & p_y \cdot {}^0\delta_x - p_x \cdot {}^0\delta_y + {}^0dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Elementele primelor trei coloane ale matricei (3.13) sunt proiecțiile pe axele sistemului de referință fix ale produselor vectoriale dintre vectorul de rotație elementară  ${}^0\bar{\delta}$  și versorii  $\bar{n}$ ,  $\bar{o}$ ,  $\bar{a}$  ai axelor sistemului atașat corpului. A patra coloană reprezintă proiecțiile sumei vectoriale formată prin adăugarea vectorului de translație elementară la produsul vectorial dintre vectorul de rotație elementară și vectorului de poziție  $\bar{p}$ . Astfel, relația (3.13) se poate rescrie [32], [98]:

$${}^0_d\mathbf{G} = \begin{bmatrix} pr_x({}^0\bar{\delta} \times \bar{n}) & pr_x({}^0\bar{\delta} \times \bar{o}) & pr_x({}^0\bar{\delta} \times \bar{a}) & pr_x({}^0\bar{\delta} \times \bar{p} + {}^0\bar{d}) \\ pr_y({}^0\bar{\delta} \times \bar{n}) & pr_y({}^0\bar{\delta} \times \bar{o}) & pr_y({}^0\bar{\delta} \times \bar{a}) & pr_y({}^0\bar{\delta} \times \bar{p} + {}^0\bar{d}) \\ pr_z({}^0\bar{\delta} \times \bar{n}) & pr_z({}^0\bar{\delta} \times \bar{o}) & pr_z({}^0\bar{\delta} \times \bar{a}) & pr_z({}^0\bar{\delta} \times \bar{p} + {}^0\bar{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.1.1.2 Operatorul $G_{\Delta}$ . Determinarea variației elementare ${}^G_d\mathbf{G}$

De multe ori este important să se calculeze corecția evectorului final în propriul sistem de referință, ceea ce conduce la simplificarea reprezentării și la evitarea permanentei raportări la sistemul fix. Situația sistemului de referință atașat este exprimată în raport cu sistemul de referință fix printr-o matrice de transformare generală  $\mathbf{G}$ . În acest caz, variația elementară a situației se notează cu  ${}^G_d\mathbf{G}$ , iar operatorul cu ajutorul căruia se determină se notează cu  ${}^G_{\Delta}$ .

Deoarece reprezintă tot un operator cu aceeași semnificație,  ${}^G_{\Delta}$  se determină de aceeași formă cu operatorul  ${}^0_{\Delta}$  [98]:

$$G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -G_{\delta z} & G_{\delta y} & G_{dx} \\ G_{\delta z} & 0 & -G_{\delta x} & G_{dy} \\ -G_{\delta y} & G_{\delta x} & 0 & G_{dz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Având în vedere că variația elementară a situației evectorului final este aceeași, indiferent de sistemul de referință în care este exprimată [98]:

$${}^G_d\mathbf{G} = {}^0_d\mathbf{G} = d\mathbf{G} \quad (3.16)$$

rezultă:

$$d\mathbf{G} = {}^0_{\Delta} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot G_{\Delta} \quad (3.17)$$

de unde:

$$G_{\Delta} = \mathbf{G}^{-1} \cdot {}^0_{\Delta} \cdot \mathbf{G} \quad (3.18)$$

Considerând de forma (3.14) a produsului  ${}^0\Delta \cdot \mathbf{G}$ , relația (3.18) devine:

$$G_{\Delta} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{p} \cdot \vec{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{p} \cdot \vec{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{p} \cdot \vec{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{r_x}({}^0\vec{\delta}x\vec{n}) & p_{r_x}({}^0\vec{\delta}x\vec{o}) & p_{r_x}({}^0\vec{\delta}x\vec{a}) & p_{r_x}({}^0\vec{\delta}x\vec{p}+{}^0\vec{d}) \\ p_{r_y}({}^0\vec{\delta}x\vec{n}) & p_{r_y}({}^0\vec{\delta}x\vec{o}) & p_{r_y}({}^0\vec{\delta}x\vec{a}) & p_{r_y}({}^0\vec{\delta}x\vec{p}+{}^0\vec{d}) \\ p_{r_z}({}^0\vec{\delta}x\vec{n}) & p_{r_z}({}^0\vec{\delta}x\vec{o}) & p_{r_z}({}^0\vec{\delta}x\vec{a}) & p_{r_z}({}^0\vec{\delta}x\vec{p}+{}^0\vec{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ținând seama de proprietățile produsului mixt și de relația satisfăcută de versorii unui sistem de referință triortogonal drept, operatorul  ${}^G\Delta$  devine [32], [98]:

$$G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^0\vec{\delta} \cdot \vec{a} & {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{o} & \vec{n} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{a} & 0 & -{}^0\vec{\delta} \cdot \vec{n} & \vec{o} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ -{}^0\vec{\delta} \cdot \vec{o} & {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{n} & 0 & \vec{a} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} G_{dx} &= \vec{n} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ G_{dy} &= \vec{o} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ G_{dz} &= \vec{a} \cdot ({}^0\vec{\delta}x\vec{p} + {}^0\vec{d}) \\ G_{\delta_x} &= {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{n} \\ G_{\delta_y} &= {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{o} \\ G_{\delta_z} &= {}^0\vec{\delta} \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Identificând elementele matricelor (3.15) și (3.20) se determină vectorii care descriu modificările elementare exprimate în sistemul de referință atașat, descris de matricea  $\mathbf{G}$ : *vectorul de translație elementară*  ${}^G\vec{d}$  și *vectorul de rotație elementară*  ${}^G\vec{\delta}$  (relația (3.21)).

Cei doi vectori  ${}^G\vec{d}$  și  ${}^G\vec{\delta}$  determină *vectorul (elementar) diferențial al mișcării*  ${}^G\mathbf{D}$ , exprimat în sistemul de referință atașat efectorului final conform relației (3.22).

$${}^G\mathbf{D} = [ G_{dx} \quad G_{dy} \quad G_{dz} \quad G_{\delta_x} \quad G_{\delta_y} \quad G_{\delta_z} ]^T \quad (3.22)$$

### 3.1.1.3 Relația dintre ${}^G dG$ și ${}^0 dG$

Între cei doi vectori diferențiali ai mișcării  ${}^0 D$  și  ${}^G D$  se poate scrie relația [98]:

$${}^G D = [ {}^G dx \quad {}^G dy \quad {}^G dz \quad {}^G \delta_x \quad {}^G \delta_y \quad {}^G \delta_z ]^T \quad (3.23)$$

unde  $J_G$  este *Jacobianul sistemului de referință* descris de matricea  $G$  și se calculează cu relația (3.24):

$$J_G = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & pr_x(\bar{p}x\bar{n}) & pr_y(\bar{p}x\bar{n}) & pr_z(\bar{p}x\bar{n}) \\ o_x & o_y & o_z & pr_x(\bar{p}x\bar{o}) & pr_y(\bar{p}x\bar{o}) & pr_z(\bar{p}x\bar{o}) \\ a_x & a_y & a_z & pr_x(\bar{p}x\bar{a}) & pr_y(\bar{p}x\bar{a}) & pr_z(\bar{p}x\bar{a}) \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Relația (3.24) arată cum se poate calcula vectorul elementar al mișcării pentru corectarea posturii efectorului final, în propriul sistem de referință atașat, atunci când sunt cunoscute atât sistemul respectiv, cât și vectorul elementar al mișcării efectorului în raport cu sistemul fix.

### 3.1.2 Variația elementară a situației unui corp dintr-un sistem de corpuri

Variații diferențiale pot interveni în poziția și orientarea oricărui corp dintr-un sistem de corpuri. Deplasările elementare care intervin în situarea unui corp dintr-un sistem de corpuri influențează situațiile corpurilor din sistem. Vor rezulta, astfel, deplasări elementare de la situațiile impuse celorlalte corpuri din sistem.

Dacă se consideră ecuația de transformare, care exprimă situarea efectorului final într-un mediu populat cu mai multe obiecte necesare îndeplinirii sarcinii robotului, în raport cu sistemul de referință fix, variațiile diferențiale care apar în poziția și orientarea unui element se pot reflecta prin variații diferențiale în poziția și orientarea oricărui alt element din cealaltă succesiune de transformări a ecuației [98]:

$${}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1} A_i \cdot \dots \cdot {}^{n-1} A_n = {}^0 B_1 \cdot {}^1 B_2 \cdot \dots \cdot {}^{j-1} B_j \cdot \dots \cdot {}^{p-1} B_p \quad (3.25)$$

Deplasările elementare care apar pot fi exprimate sub forma matricei  $d\mathbf{G}$  sau sub forma vectorilor diferențiali ai mișcării. Elementele celor două matrice pot fi exprimate atât în sistemul de referință fix, cât și în sistemul de referință atașat unui element oarecare din sistem. Relația dintre cei doi vectori diferențiali ai mișcării este dată de ecuația (3.23). Pentru determinarea Jacobianului sistemului descris de matricea  $\mathbf{G}$ , trebuie precizată matricea de transformare  $\mathbf{G}$ .

Pentru determinarea variațiilor diferențiale care apar ca efect al deplasărilor elementare în situarea unui corp din sistem, se determină variațiile diferențiale ale situațiilor celorlalte corpuri din sistem. Astfel, se consideră că variațiile diferențiale ale situației unui corp din sistem (din membrul 1 al ecuației de transformare) produc variații diferențiale ale situației unui singur corp (din membrul 2 al ecuației de transformare).

Matricea de transformare  $\mathbf{G}$ , necesară determinării vectorilor diferențiali ai mișcării  ${}^0\mathbf{D}$ , respectiv  ${}^G\mathbf{D}$ , în condițiile în care variația diferențială cauză afectează situația corpului  $B_j$  relativ la corpul  $B_{j-1}$  (matricea  ${}^{j-1}\mathbf{B}_j$ ), iar variația diferențială efect se sesizează la situația corpului  $A_i$  relativ la corpul  $A_{i-1}$  (matricea  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ ), se determină în două moduri [98]:

- 1) parcurgând în sens direct (spre dreapta) succesiunea de transformări rămase în membrul respectiv, iar apoi, de la semnul egal, parcurgând în sens contrar (spre stânga) succesiunea de transformări din celălalt membru, până la matricea de transformare considerată:

$$\mathbf{G} = {}^j\mathbf{B}_{j+1} \cdots {}^{p-1}\mathbf{B}_p \cdot ({}^{n-1}\mathbf{A}_n)^{-1} \cdots ({}^i\mathbf{A}_{i+1})^{-1} \quad (3.26)$$

- 2) parcurgând în sens contrar (spre stânga) succesiunea de transformări rămase în membrul respectiv, până la semnul egal, iar apoi, parcurgând în sens direct (spre dreapta) succesiunea de transformări din celălalt membru, până la matricea de transformare considerată:

$$\mathbf{G} = ({}^{j-1}\mathbf{B}_j)^{-1} \cdots ({}^0\mathbf{B}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{A}_1 \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i \quad (3.27)$$

Cele două variante rezultă din faptul că, prin definiție, o ecuație de transformare permite exprimarea, pe două căi, a situației unui corp în raport cu un anumit sistem de referință.

### 3.1.3 Modelul diferențial al unui robot

Modelul geometric al unui robot descrie relația dintre situația efectorului final în spațiul operațional și coordonatele cuplelor cinematice. Datorită erorilor de diferite tipuri, situația reală a efectorului diferă de situația impusă de sistemul de comandă. Parcurgerea unei anumite traiectorii de către un robot este influențată de precizia de poziționare și de orientare a efectorului final. Valorile instantanee ale erorilor de poziționare  $\mathbf{e}_p$ , respectiv de orientare  $\mathbf{e}_o$ , depind de mărimi ce

caracterizează geometria și construcția robotului, de condițiile de lucru, de valorile vitezelor instantanee corespunzătoare, dar și de "istoria" evoluției situațiilor impuse de sarcina robotului.

De asemenea, erorile de situație a efectorului unui robot depind de erorile înregistrate de coordonatele cuplelor cinematice. Astfel, pentru corecția erorilor de poziționare și orientare a efectorului este necesară aplicarea unor deplasări elementare la nivelul cuplelor cinematice.

*Modelul diferențial al unui robot* descrie, deci, relația dintre variațiile elementare ale coordonatelor operaționale și variațiile elementare ale coordonatelor cuplelor cinematice [98]:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \\ d\mathbf{G} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.28)$$

unde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}}$  (sau  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}}$ ) reprezintă matricea Jacobiană, de dimensiune  $(m \times n)$  a lanțului cinematic al robotului.

*Modelul diferențial direct* exprimă variațiile elementare ale coordonatelor operaționale în funcție de variațiile elementare ale coordonatelor cuplelor cinematice. *Modelul diferențial invers* permite calculul variațiilor elementare ale coordonatelor cuplelor cinematice în funcție de variațiile elementare ale coordonatelor operaționale, și deci, într-o manieră iterativă, calculul coordonatelor cuplelor, în funcție de coordonatele operaționale. Soluția obținută în acest caz este locală și depinde de situația inițială a efectorului robotului.

Dacă se înlocuiește calculul diferențial cu calculul derivatelor coordonatelor operaționale și ale cuplelor cinematice în raport cu timpul  $(\dot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{q}})$  se obține *modelul cinematic*, care exprimă relația dintre vitezele operaționale și vitezele cuplelor cinematice.

### 3.1.4 Jacobianul unui robot

Modificările diferențiale ale poziției și orientării efectorului final al unui robot sunt determinate, într-o bună măsură, de modificările diferențiale ale variabilelor cuplelor cinematice conducătoare. Relația dintre deplasările elementare ale efectorului final al robotului și deplasările elementare înregistrate de variabilele cuplelor cinematice este dată de modelul diferențial al robotului. Explicarea acestui model diferențial presupune determinarea Jacobianului robotului  $\mathbf{J}_r$ .

Se dorește determinarea unei metode directe pentru calculul Jacobianului robotului, considerat ca relație între  ${}^G\mathbf{D}$ , vectorul diferențial al mișcării exprimat în sistemul descris de matricea  $\mathbf{G}$ , și variațiile diferențiale ale coordonatelor cuplelor cinematice  $d\mathbf{q}$ . Expresia Jacobianului este aceeași și în cazul în care se consideră vectorul vitezelor operaționale și vectorul vitezelor cuplelor cinematice.

Se consideră că deplasările elementare ale situației efectorului final al robotului sunt datorate doar câte unei deplasări elementare la nivelul cuplelor cinematice, urmând apoi să se cumuleze efectele acestor deplasări. Astfel, se consideră cazul când deplasările elementare ale situației efectorului final al robotului sunt datorate variației diferențiale  $dq_i$  a coordonatei cuplei (i). În cazul unei cuple de translație, variația diferențială  $dq_i$  reprezintă o deplasare infinitezimală de-a lungul axei  $O_{i-1}Z_{i-1}$ , iar în cazul unei cuple de rotație,  $dq_i$  reprezintă o rotație infinitezimală în jurul axei  $O_{i-1}Z_{i-1}$ , conform convenției Denavit-Hartenberg [98].

Pentru determinarea vectorului diferențial al mișcării efectorului final, în raport cu sistemul atașat acestuia, rezultat datorită variației diferențiale  $dq_i$  a variabilei cuplei (i) ( $i=1, \dots, n$ ), se consideră matricea care exprimă poziția și orientarea efectorului final față de sistemul de referință fix [32], [98]:

$${}^0G_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}T_i \cdot {}^i T_{i+1} \cdot \dots \cdot {}^{n-1}T_n \quad (3.29)$$

Ecuția (3.29) poate fi interpretată ca o ecuație de transformare. Deoarece deplasarea elementară apare la coordonata cuplei (i),  $dq_i$ , vor apare variații diferențiale în expresia matricei de transfer  ${}^{i-2}T_{i-1}$ . Aceasta este datorată faptului că pe direcția axei cuplei (i) este situată axa  $O_{i-1}Z_{i-1}$  a sistemului de referință atașat elementului (i-1). Matricea  $G$  necesară determinării vectorului diferențial al mișcării  ${}^G D$  se calculează cu una dintre relațiile [98]:

$$G_{(i)} = {}^{i-1}T_i \cdot \dots \cdot {}^{n-1}T_n \quad \text{sau} \quad G_{(i)} = \left( {}^{i-2}T_{i-1} \right)^{-1} \cdot \dots \cdot \left( {}^0T_1 \right)^{-1} \cdot {}^0G_n \quad (3.30)$$

Vectorul diferențial al mișcării efectorului final al robotului, datorat variației diferențiale înregistrate la cupla cinematică (i) se poate scrie astfel [32], [98]:

$${}^G D_{(i)} = [ {}^G_n dx_{(i)} \quad {}^G_n dy_{(i)} \quad {}^G_n dz_{(i)} \quad {}^G_n \delta x_{(i)} \quad {}^G_n \delta y_{(i)} \quad {}^G_n \delta z_{(i)} ]^T \quad (3.31)$$

Ținând seama de faptul că astfel de variații elementare apar, în general, în toate cuplele sistemului, la efectorul final se vor cumula efectele tuturor într-un vector de deplasare elementară exprimat în sistemul de referință al efectorului [32]:

$${}^G_n D = [ {}^G_n dx \quad {}^G_n dy \quad {}^G_n dz \quad {}^G_n \delta x \quad {}^G_n \delta y \quad {}^G_n \delta z ]^T \quad (3.32)$$

Cum în sistemul cu  $n$  grade de libertate există  $n$  cuple simple, toate deplasările elementare din cuple se pot considera împreună într-o matrice coloană cu  $n$  linii [32]:

$$D_q = [ dq_1 \quad dq_2 \quad \dots \quad dq_n ]^T \quad (3.33)$$

numită *vector elementar al cuplelor*.

Legătura dintre vectorii (3.32) și (3.33) se realizează prin intermediul unei matrice  $6 \times n$ , denumită Jacobianul sistemului [32]:

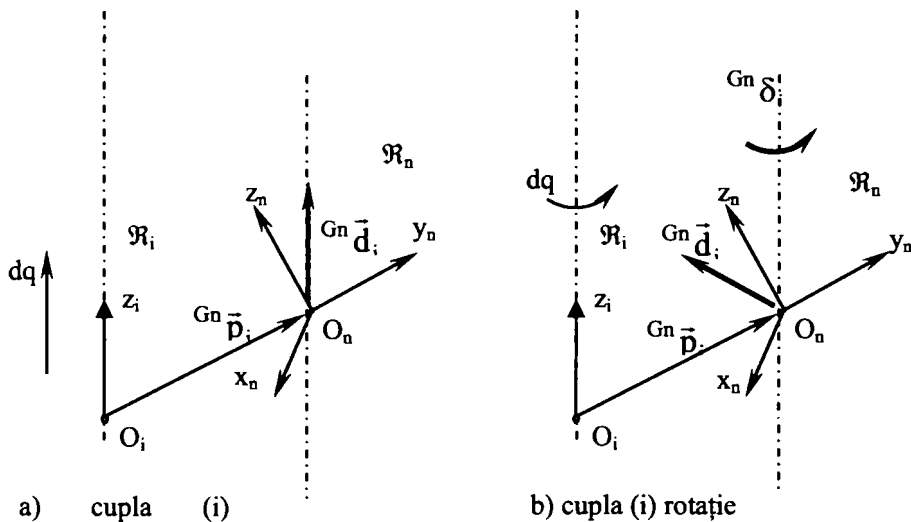
$$\begin{bmatrix} G^n dx \\ G^n dy \\ G^n dz \\ G^n \delta_x \\ G^n \delta_y \\ G^n \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^n dx_1 & \dots & G^n dx_n \\ G^n dy_1 & \dots & G^n dy_n \\ G^n dz_1 & \dots & G^n dz_n \\ G^n \delta_{x1} & \dots & G^n \delta_{x_n} \\ G^n \delta_{y1} & \dots & G^n \delta_{y_n} \\ G^n \delta_{z1} & \dots & G^n \delta_{z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

având coloanele reprezentate de cei  $n$  vectori elementari (3.31). Fiecare coloană se determină în mod diferit, după cum cupla cinematică ce înregistrează variații diferențiale este o cuplă cinematică de rotație sau de translație.

Ecuția (3.34) se mai poate scrie sub forma:

$$G^n \mathbf{D} = \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{D}_q \quad (3.35)$$

Se consideră cupla cinematică (i). O variație elementară  $dq_i$  a variabilei  $q_i$  produce în sistemul de referință atașat efectorului final al robotului variații elementare ale poziției  $G^n \mathbf{d}_i$  și orientării  $G^n \delta_i$  (Fig. 3.1) [98].



**Fig. 3.1** O variație elementară  $dq_i$  a variabilei  $q_i$  produce în sistemul de referință atașat efectorului final variații elementare ale poziției  $G^n \mathbf{d}_i$  și orientării  $G^n \delta_i$

Se consideră, pentru simplificare, că  $dq_i=1$ . Astfel, pentru o cuplă cinematică de rotație, singura variație diferențială a variabilei  $q_i$  poate fi exprimată printr-un vector de rotație diferențială  $|\delta_i|=1$  ( $\delta_i = \bar{k}_{i-1}$ ), a cărui direcție coincide cu direcția axei cuplei (i), deci după direcția axei  $O_{i-1}z_{i-1}$ . În cazul cuplelor de translație, vectorul de translație diferențială este nul  $\bar{d}_i = \bar{0}$ . În cazul în care cupla cinematică (i) este



de translație, vectorul de translație are modulul unitar  $|\vec{d}_i| = 1$  ( $\vec{d}_i = \vec{k}_{i-1}$ ), iar vectorul de rotație diferențială este nul  $\vec{\delta}_i = \vec{0}$ .

În sistemul atașat descris de matricea  $\mathbf{G}_n$ , rezultă [98]:

$$\text{— pentru cupla (i) de rotație: } \begin{cases} G^n d_i = (\vec{k}_{i-1} \times G^n \vec{p}_i) dq_i \\ G^n \delta_i = \vec{k}_{i-1} dq_i \end{cases}$$

$$\text{— pentru cupla (i) de translație: } \begin{cases} G^n d_i = \vec{k}_{i-1} dq_i \\ G^n \delta_i = \vec{0} \end{cases}$$

Din relațiile (3.21), proiecțiile vectorului diferențial al mișcării efectorului final, pentru cupla (i) de rotație, sunt [32], [98]:

$$\begin{cases} G^n dx_i = -n_{x_i} p_{y_i} + n_{y_i} p_{x_i} \\ G^n dy_i = -o_{x_i} p_{y_i} + o_{y_i} p_{x_i} \\ G^n dz_i = -a_{x_i} p_{y_i} + a_{y_i} p_{x_i} \\ G^n \delta_{x_i} = n_{z_i} \\ G^n \delta_{y_i} = o_{z_i} \\ G^n \delta_{z_i} = a_{z_i} \end{cases} \quad (3.36)$$

Proiecțiile vectorului diferențial al mișcării efectorului final, pentru cupla (i) de translație sunt [32], [98]:

$$\begin{cases} G^n dx_i = n_{z_i} \\ G^n dy_i = o_{z_i} \\ G^n dz_i = a_{z_i} \\ G^n \delta_{x_i} = G^n \delta_{y_i} = G^n \delta_{z_i} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Elementele coloanei  ${}^n j_i$  a Jacobianului sunt funcții de elementele matricei  $\mathbf{G}_{(i)} = {}^{j-1}\mathbf{T}_j \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n$ .

După calculul Jacobianului și înregistrarea vectorului diferențial al cuplelor se poate determina vectorul diferențial al mișcării efectorului final, în propriul sistem de referință  ${}^n \mathbf{D}$ , și apoi variația diferențială a poziției și orientării efectorului final în sistemul de referință fix, rezultând în final, poziția și orientarea efectorului final, în condițiile în care s-au înregistrat abaterile de la situarea impusă robotului.

Dacă se consideră că relația  ${}^{G_n}\mathbf{D} = \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{D}_q$  reprezintă modelul diferențial al robotului, atunci [98]:

- ${}^{G_n}\mathbf{D} = \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{D}_q$  ( $\mathbf{D}_q \Rightarrow {}^{G_n}\mathbf{D}$ ) reprezintă **modelul diferențial direct**;
- $\mathbf{D}_q = (\mathbf{J}_r)^{-1} \cdot {}^{G_n}\mathbf{D}$  ( ${}^{G_n}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{D}_q$ ) reprezintă **modelul diferențial invers**.

Este dificil de determinat  $(\mathbf{J}_r)^{-1}$  în formă explicită. Rezolvarea modelului diferențial invers depinde deci de calculul matricei  $(\mathbf{J}_r)^{-1}$ . Determinarea inversei matricei jacobiene se poate rezolva relativ simplu, în cazul roboților cu șase grade de libertate, dar necesită tehnici speciale (numerice) în cazul roboților cu alt număr de grade de libertate.

### 3.1.5 Ecuațiile lui Lagrange

Se studiază mișcarea unui sistem material cu  $n$  grade de libertate precizate de cei  $n$  parametri scalari  $q_i$ , în care vectorul de poziție al unui punct oarecare are forma

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \quad (3.38)$$

iar deplasarea virtuală este

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3.39)$$

Se știe că într-un sistem material în mișcare, supus la legături ideale, lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare și de inerție este nul (a patra formulare a principiului lucrului mecanic virtual) [28]:

$$\sum_{j=1}^p (\vec{F}_j - m_j \vec{a}_j) \cdot \delta\vec{r}_j = 0 \quad (3.40)$$

Considerând deplasarea virtuală (3.39) în relația (3.40), se obține:

$$\sum_{j=1}^p (\vec{F}_j - m_j \vec{a}_j) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (3.41)$$

Schimbând ordinea de însumare, pentru a pune în evidență deplasările virtuale  $\delta q_i$ , se obține:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^p (\bar{F}_j - m_j \bar{a}_j) \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \quad (3.42)$$

Deoarece legătura este olonomă, deplasările virtuale  $\delta q_i$  sunt independente și se poate considera pe rând câte una nenulă. Procedând în acest mod, se determină un sistem de  $n$  ecuații diferențiale de tip [28]:

$$\sum_{j=1}^p (\bar{F}_j - m_j \bar{a}_j) \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = 0 \quad (3.43)$$

denumite *ecuațiile lui Lagrange de speța I-a*. Ele rezolvă, în principiu, problema scrierii directe a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării unui sistem material, în absența forțelor de legătură. Pentru că sunt destul de dificil de utilizat, se urmărește punerea ecuațiilor (3.43) într-o formă cât mai accesibilă. Astfel, separând cei doi termeni din membrul stâng, rezultă:

$$\sum_{j=1}^p \bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p m_j \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (3.44)$$

Se cunoaște faptul că forțele generalizate au expresia:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \bar{F}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (3.45)$$

adică membrul stâng al expresiei (3.44), iar membrul drept al expresiei se modifică ținând seama de definiția accelerației unui punct oarecare [28]:

$$\sum_{j=1}^p m_j \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p m_j \frac{d\bar{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (3.46)$$

Ținând seama de regula de derivare a unui produs, expresia din membrul drept al relației (3.46) devine:

$$\sum_{j=1}^p m_j \frac{d\bar{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p m_j \frac{d}{dt} \left( \bar{v}_j \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right) - \sum_{j=1}^p m_j \bar{v}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right) \quad (3.47)$$

Vectorul viteză din relațiile (3.46) și (3.47) se determină derivând vectorul de poziție (3.38):

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \quad (3.48)$$

Expresia vitezei depinde de coordonatele generalizate  $q_i$ , de vitezele generalizate  $\dot{q}_i$  și de timp. Considerând coordonatele generalizate independente de vitezele generalizate, viteza  $\vec{v}_j$  apare ca o funcție de  $(2n + 1)$  variabile independente, ceea ce simplifică mult calculele. Pe baza acestei considerații se poate scrie [28]:

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.49)$$

Cu aceasta, primul termen din relația (3.47) devine:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p m_j \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) &= \sum_{j=1}^p m_j \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^p m_j \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v_j^2}{2} \right) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{m_j v_j^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{j=1}^p \frac{m_j v_j^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ținând seama de definiția energiei cinetice pentru un sistem material, primul termen din membrul drept al relației (3.47) va avea forma:

$$\sum_{j=1}^p m_j \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (3.51)$$

Termenul al doilea din membrul drept al relației (3.47) își modifică expresia prin schimbarea ordinii de derivare:

$$\sum_{j=1}^p m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^p m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{d\vec{r}_j}{dq_i} \right) = \sum_{j=1}^p m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p m_j \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v_j^2}{2} \right) \quad (3.52)$$

Ținând seama de definiția energiei cinetice pentru un sistem material, al doilea termen din membrul drept al relației (3.47) va avea forma:

$$\sum_{j=1}^p m_j \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v_j^2}{2} \right) = \frac{\partial E_C}{\partial q_i} \quad (3.53)$$

Înlocuind expresiile obținute în relația (3.44) rezultă:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.54)$$

Cele  $n$  ecuații diferențiale (3.54) care se pot scrie pentru un sistem material cu  $n$  grade de libertate poartă numele de *ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a*.

Observații [28]:

- 1) — Ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a sunt ecuații scalare care se scriu relativ simplu chiar și pentru sisteme cu multe grade de libertate. Prima operație necesară pentru scrierea acestor ecuații este de a identifica parametrii independenți  $q_i$  și de a exprima coordonatele punctelor care interesează în funcție de aceștia. Apoi, se calculează energia cinetică a sistemului și lucrul mecanic virtual. Prima, folosește la calculul celor doi termeni ai membrului drept din ecuația (3.54), iar a doua la calculul forței generalizate prin aplicarea relației:

$$Q_i = \frac{\delta L_{qi=var}}{\delta q_i} \quad (3.55)$$

Integrând sistemul de ecuații diferențiale se obțin cele  $n$  necunoscute  $q_i$  în funcție de timp și de  $2n$  constante de integrare care se determină prin aplicarea condițiilor inițiale pentru vitezele generalizate  $\dot{q}_i$  și pentru coordonatele generalizate  $q_i$ .

- 2) — Un caz particular des întâlnit este cel al sistemelor în care acționează forțe conservative, pentru care se poate defini o funcție de forță generalizată:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n) \quad (3.56)$$

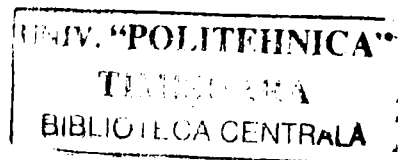
astfel încât forțele generalizate sunt:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.57)$$

În aceste condiții, ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a devin:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.58)$$

Deoarece funcția de forță depinde de poziție și, eventual, de timp (în cazul legăturilor reonome), dar în nici un caz de viteze, se poate scrie:



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(E_C + U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(E_C + U)}{\partial q_i} = 0 \quad (3.59)$$

Funcția  $L = E_C + U$  care apare în relația (3.59) se numește **potențial cinetic** sau **funcția lui Lagrange**, cu care cele  $n$  ecuații devin:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.60)$$

Ținând seama de definiția energiei potențiale:

$$E_{pA} = -U_A \quad (3.61)$$

funcția lui Lagrange devine:

$$L = E_C - E_P \quad (3.62)$$

formă cel mai frecvent utilizată în sistemele materiale supuse acțiunii forțelor conservative.

### 3.1.6 Studiul roboților încărcăți cu forțe oarecare

Se consideră robotul cu  $n$  grade de libertate acționat de forțe și momente exterioare oarecare, altele decât cele gravitaționale, pentru care ecuațiile diferențiale ale mișcării se vor putea determina utilizând ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a. Membrul stâng al ecuațiilor diferențiale se va obține derivând expresia energiei cinetice [28]:

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{ai} \dot{q}_i^2 \quad (3.63)$$

unde  $J_{ai}$  este momentul de inerție echivalent al ansamblului de acționare al cuplei dacă aceasta este de rotație sau masa echivalentă a ansamblului în cazul în care cupla este de translație.

Membrul drept al ecuațiilor diferențiale va conține forțele generalizate determinate cu relația (3.55), care impune calcularea lucrului mecanic virtual al tuturor forțelor și momentelor exterioare, inclusiv cele gravitaționale. Derivând energia cinetică în raport cu vitezele generalizate, se obține:

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_j + J_{ap} \dot{q}_p \quad (3.64)$$

Ținând cont de faptul că orice matrice  $G_i$  conține doar coordonatele generalizate  $q_p$  al căror indice  $p \leq i$ , rezultă că [28]:

$$\frac{\partial G_i}{\partial q_p} \Big|_{p > i} = 0 \quad (3.65)$$

Astfel, relația (3.64) devine:

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_j + J_{ap} \dot{q}_p \quad (3.66)$$

Derivata relației (3.66) în raport cu timpul (ținând seama de relația (3.65)) este:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_p} \right) &= \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \ddot{q}_j + J_{ap} \ddot{q}_p + \\ &+ 2 \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_i}{\partial q_j \partial q_m} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_m \end{aligned} \quad (3.67)$$

Relația (3.67) reprezintă primul termen al membrului stâng al ecuațiilor diferențiale Lagrange de speța a II-a pentru un robot acționat de forțe și momente oarecare. Al doilea termen din același membru reprezintă derivata energiei cinetice în raport cu coordonatele generalizate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_C}{\partial q_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_i}{\partial q_j \partial q_p} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_i}{\partial q_k \partial q_p} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (3.68)$$

Deoarece, pentru urma unui produs de matrice, este valabilă ecuația:

$$\text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right)^T \right] = \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right)^T \right]^T = \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_k} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right)^T \right] \quad (3.69)$$

și ținând cont de relația (3.65), expresia (3.68) devine:

$$\frac{\partial E_C}{\partial q_p} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_i}{\partial q_j \partial q_p} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.70)$$

Cu expresiile (3.67) și (3.70), în care s-au schimbat indicii de însumare astfel încât termenul din dreapta al relației (3.70) să devină identic cu cel de-al doilea termen din relația (3.67), membrul stâng din cele  $n$  ecuații ale lui Lagrange de speța a II-a rezultă de forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_p} &= \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial q_j} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \ddot{q}_j + J_{ap} \ddot{q}_p + \\ &+ \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_i}{\partial q_j \partial q_m} J_i \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_p} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_m \end{aligned} \quad (3.71)$$

Schimbând indicii de însumare din  $p$  în  $i$  și din  $i$  în  $k$ , rezultă forma finală a expresiei (3.71):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_p} &= \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k \text{Tr} \left[ \frac{\partial G_k}{\partial q_j} J_k \left( \frac{\partial G_k}{\partial q_i} \right)^T \right] \ddot{q}_j + J_{ai} \ddot{q}_i + \\ &+ \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 G_k}{\partial q_j \partial q_m} J_k \left( \frac{\partial G_k}{\partial q_i} \right)^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_m \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pentru exprimarea membrului drept al ecuațiilor lui Lagrange se calculează lucrul mecanic virtual din sistem cu relația (3.55). În general, acest calcul va lua în considerare [28]:

- torsorul  $Q$  produs în cuplele robotului de torsorul care acționează la efectorul final,  ${}^G n T_{On}$ , și care se transmite la cuple prin intermediul transpusei matricei jacobian a robotului;
- torsorul activ  $T_{act}$  din cuple, produs de motoarele de acționare în cuplele unde acestea sunt prezente;
- forțele de greutate ale elementelor robotului și ale motoarelor de acționare
- forțele și momentele exterioare de orice natură care acționează în puncte oarecare ale robotului.

Dacă este posibil, se consideră forțele de greutate aplicate în originile sistemelor atașate elementelor robotului, adică pe axele cuplelor acestuia. Altfel, se calculează centrele de greutate ale ansamblurilor element-cuplă și, apoi, lucrul mecanic virtual al forțelor de greutate aplicate în aceste puncte. Pentru o abordare cu caracter



general a lucrului mecanic virtual al forțelor și momentelor exterioare, este necesar să se precizeze, în raport cu sistemul de referință fix [28]:

- expresiile acestor forțe și momente;
- expresiile vectorilor de poziție ai punctelor de aplicare ale forțelor, care sunt folosite la calculul deplasărilor virtuale în mișcare de translație și la calculul momentelor forțelor respective în raport cu diferitele axe de rotație ale robotului;
- expresiile deplasărilor virtuale în mișcare de rotație.

Metoda cea mai simplă de determinare a expresiilor analitice ale forțelor, momentelor și vectorilor de poziție constă în utilizarea matricelor de transfer și a produselor acestora, calculate pentru fiecare robot în modelul geometric direct. Pozițiile și orientările sistemelor de referință atașate elementelor robotului sunt exprimate față de precedentele prin matricile de transfer  ${}^{i-1}T_i$ . Prin înmulțirea acestora se obțin matricile generale  $G_i$ , care exprimă pozițiile elementelor față de reperul fix. Ultima coloană a unei matrice  $G_i$  conține coordonatele originii  $O_i$  a sistemului atașat, punct situat pe axa cuplei  $i + 1$ , iar primele trei coloane au ca elemente cosinusurile directe ale axelor sistemului atașat.

De regulă, forțele sau momentele aplicate asupra robotului sunt cunoscute față de sistemul de referință atașat elementului respectiv. Stabilirea expresiilor analitice față de reperul fix constă în trecerea de la un reper la altul. Astfel, se consideră o forță oarecare  $\vec{F}_j$  care acționează în punctul oarecare  $A_j$  al elementului  $i$  al robotului. Vectorul forță se exprimă față de sistemul de referință în care acționează de forma:

$${}^i\vec{F}_j = {}^iF_{xj}\vec{n}_i + {}^iF_{yj}\vec{o}_i + {}^iF_{zj}\vec{a}_i \quad (3.73)$$

Proiecțiile versorilor sunt cunoscute față de reperul fix  $x_0O_0y_0z_0$  (sunt elementele primelor trei coloane ale matricei  $G_i$ ). Expresia forței devine:

$$\begin{aligned} {}^i\vec{F}_j = & {}^iF_{xj}(n_{xi}\vec{i}_0 + n_{yi}\vec{j}_0 + n_{zi}\vec{k}_0) \\ & + {}^iF_{yj}(o_{xi}\vec{i}_0 + o_{yi}\vec{j}_0 + o_{zi}\vec{k}_0) \\ & + {}^iF_{zj}(a_{xi}\vec{i}_0 + a_{yi}\vec{j}_0 + a_{zi}\vec{k}_0) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Grupând termenii după versori, se obțin proiecțiile forței pe axele sistemului de referință fix:

$$\begin{aligned} {}^0F_{xj} = & {}^iF_{xj}n_{xi} + {}^iF_{yj}o_{xi} + {}^iF_{zj}a_{xi} \\ {}^0F_{yj} = & {}^iF_{xj}n_{yi} + {}^iF_{yj}o_{yi} + {}^iF_{zj}a_{yi} \\ {}^0F_{zj} = & {}^iF_{xj}n_{zi} + {}^iF_{yj}o_{zi} + {}^iF_{zj}a_{zi} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Proiecțiile forței oarecare  $\vec{F}_j$ , care acționează în punctul oarecare  $A_j$  al elementului  $i$  al robotului depind de toate variabilele articulare  $q_p|_{p=1,\dots,i}$ .

Considerând matricele care reprezintă forța dată în reperul inițial, cosinusurile directe ale axelor acestui reper și forța exprimată față de reperul fix:

$${}^i F_j = \begin{bmatrix} {}^i F_{xj} \\ {}^i F_{yj} \\ {}^i F_{zj} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} n_{xi} & o_{xi} & a_{xi} \\ n_{yi} & o_{yi} & a_{yi} \\ n_{zi} & o_{zi} & a_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$${}^0 F_j = \begin{bmatrix} {}^0 F_{xj} \\ {}^0 F_{yj} \\ {}^0 F_{zj} \end{bmatrix}$$

relația (3.74) se poate scrie [28]:

$$A_i \cdot {}^i F_j = {}^0 F_j \quad (3.77)$$

Pentru scrierea expresiei analitice a unui moment  ${}^i \vec{M}_j$ , cunoscut în raport cu reperul atașat al elementului  $i$ , se procedează în aceeași manieră.

Pentru a calcula lucru mecanic virtual al forței oarecare  ${}^0 \vec{F}_j$  se impune determinarea deplasării virtuale a punctului său de aplicație  $A_j$ . Dacă  $A_j = O_i$ , vectorul de poziție  ${}^0 \vec{r}_j^i$  are drept proiecții în raport cu sistemul fix, elementele din coloana a patra a matricei  $G_i$ :

$${}^0 \vec{r}_j^i = \vec{r}_{O_i} = \vec{p}_i = p_{xi} \vec{i}_0 + p_{yi} \vec{j}_0 + p_{zi} \vec{k}_0 \quad (3.78)$$

Cu alte cuvinte, și vectorii de poziție ai forțelor sunt dependenți de toate variabilele articulare, de la  $q_1$  până la  $q_i$ . Dacă  $A_j \neq O_i$ , atunci vectorul său de poziție este legat de cel al originii sistemului atașat printr-un vector de modul constant  $\vec{r}_j$ :

$${}^0 \vec{r}_j = \vec{r}_{O_i} + \vec{r}_j \quad (3.79)$$

Vectorul:

$$\vec{r}_j = r_{xj}\vec{n}_i + r_{yj}\vec{o}_i + r_{zj}\vec{a}_i \quad (3.80)$$

are proiecții constante pe axele de versori variabili ale sistemului atașat elementului  $i$ .

Când se calculează deplasarea virtuală de translație  $\delta^0\vec{r}_j$  a punctului de aplicație al forței  $\vec{F}_j$ , care acționează asupra elementului  $i$ , expresia sa va conține variațiile virtuale ale tuturor variabilelor articulare care influențează poziția punctului  $O_i$  și orientările axelor sistemului atașat elementului respectiv. Presupunând că acest vector este funcție de toate variabilele  $q_p|_{p=1,\dots,i}$ , deplasarea virtuală de translație va avea expresia:

$$\delta^0\vec{r}_j = \sum_{p=1}^i \vec{E}_{tip} \delta q_p \quad (3.81)$$

În relația (3.81),  $\vec{E}_{tip}$  reprezintă expresii în care apar versorii sistemului de referință fix, având drept coeficienți funcții scalare de dimensiunile robotului și de variabilele articulare.

Dacă se introduc matricele:

$$\delta^0 r_j^i = \begin{bmatrix} 0 \delta r_{xj} \\ 0 \delta r_{yj} \\ 0 \delta r_{zj} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ti} = \begin{bmatrix} E_{t1x} & E_{t2x} & \dots & E_{tix} \\ E_{t1y} & E_{t2y} & \dots & E_{tiy} \\ E_{t1z} & E_{t2z} & \dots & E_{tiz} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\delta q_i = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_i \end{bmatrix}$$

relația (3.81) devine [28]:

$$\delta^0 r_j^i = \varepsilon_{ti} \cdot \delta q_i \quad (3.83)$$

Pentru calcularea lucrului mecanic virtual al momentelor care acționează asupra elementelor robotului, este necesară determinarea deplasărilor virtuale de rotație. Dacă se dorește determinarea deplasării virtuale de rotație în jurul axei cuplei oarecare  $i$  produsă de un moment  ${}^i\bar{M}_j$ , se va exprima un vector de rotație a cărei mărime este variabila cuplei respective  $q_i = \theta_i$  și a cărei direcție este cea a axei  $O_{i-1}z_{i-1}$ . Față de reperul fix, acest vector este:

$${}^0\bar{\theta}_i = q_i \bar{a}_{i-1} \quad (3.84)$$

Versorul  $\bar{a}_{i-1}$  depinde de toate coordonatele cuplelor de rotație între baza robotului și cupla  $i - 1$  inclusiv.

Deplasarea virtuală de rotație se va exprima printr-un vector de forma:

$$\delta\bar{\theta}_i = \sum_{p=1}^i \bar{E}_{rip} \delta q_p \quad (3.85)$$

Coeficienții  $\bar{E}_{rip}$  sunt expresii vectoriale în care apar versorii sistemului de referință fix, având drept coeficienți funcții scalare numai de variabilele cuplelor de rotație  $q_p |_{p=1, \dots, i}$ .

Matriceal, relația (3.85) devine:

$$\delta{}^0\theta_i = \varepsilon_{ri} \cdot \delta q_i \quad (3.86)$$

unde:

$$\delta{}^0\theta_i = \begin{bmatrix} 0 \delta\theta_{xj} \\ 0 \delta\theta_{yj} \\ 0 \delta\theta_{zj} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ri} = \begin{bmatrix} E_{r1x} & E_{r2x} & \dots & E_{rix} \\ E_{r1y} & E_{r2y} & \dots & E_{riy} \\ E_{r1z} & E_{r2z} & \dots & E_{riz} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\delta q_i = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_i \end{bmatrix}$$

Dacă asupra elementului  $i$  al robotului acționează mai multe forțe și momente oarecare, se poate calcula torsorul lor de reducere în originea  $O_i$  a reperului atașat elementului (prezentată în paragraful 3.1.7). În această situație, elementele torsorului respectiv se vor transcrie cu relații de tip (3.77) față de sistemul de referință fix, obținându-se  ${}^0T_{O_i} = ({}^0\bar{R}_i, {}^0\bar{M}_{O_i})$ . Deplasările virtuale folosite la calculul lucrului mecanic virtual pentru elementul  $i$  al robotului sunt date de relațiile (3.81) și (3.85) cu care se vor înmulți scalar cele două elemente ale torsorului de reducere. Dacă asupra elementului  $i$  acționează  $k$  forțe  $\bar{F}_j$  și  $h$  momente  $\bar{M}_j$ , lucrul mecanic virtual pentru întregul robot cu  $n$  elemente și cu  $n$  grade de libertate este:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k {}^0\bar{F}_j \cdot \delta {}^0\bar{F}_j^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h {}^0\bar{M}_j \cdot \delta \bar{\theta}_i \quad (3.88)$$

Înlocuind expresiile (3.81) și (3.85) în relația (3.88), lucrul mecanic virtual al unui sistem de forțe și momente oarecare, ce acționează asupra unui robot cu  $n$  grade de libertate este:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^k {}^0\bar{F}_j \cdot \sum_{p=1}^i \bar{E}_{tp} \delta q_p + \sum_{j=1}^h {}^0\bar{M}_j \cdot \sum_{p=1}^i \bar{E}_{rp} \delta q_p \right) \quad (3.89)$$

adică:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \left( \sum_{j=1}^k {}^0\bar{F}_j \cdot \bar{E}_{tp} + \sum_{j=1}^h {}^0\bar{M}_j \cdot \bar{E}_{rp} \right) \delta q_p \quad (3.90)$$

Matriceal, relația (3.90) devine:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n A_i \delta q_i ({}^0F_j \cdot \epsilon_{ti} + {}^iM_j \cdot \epsilon_{ri}) \quad (3.91)$$

Având expresia lucrului mecanic virtual produs de ansamblul forțelor și al momentelor exterioare care acționează asupra robotului, forțele generalizate sunt fie [28]:

$$Q_i = \frac{\delta \mathcal{L}_{qi=var}}{\delta q_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{j=1}^k {}^0\bar{F}_j \cdot \bar{E}_{tp}}{\delta q_i} \quad (3.92)$$

când cupla  $i$  este de translație, fie:

$$Q_i = \frac{\delta_{qi} = \text{var}}{\delta q_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{j=1}^k {}^0\bar{M}_j \cdot \bar{E}_{rp}}{\delta q_i} \quad (3.93)$$

când cupla  $i$  este de rotație.

### 3.1.7 Reducerea forțelor

Studiul comportării dinamice a unui robot nu se poate face fără cunoașterea sistemelor de forțe care acționează asupra sa. Torsorii care se calculează (în diferite puncte, dar mai ales în cuplele robotului) sunt ai forțelor exterioare date și cei introduși prin aplicarea axiomei legăturilor (torsorii dependenți de viteză, ce caracterizează frecările, se neglijează la viteze mici ale robotului, iar la viteze mari se consideră aplicați în cuplele acestuia).

Este foarte important de remarcat că, dacă nu pot fi neglijați, torsorii care exprimă frecările în cuple vor apare întotdeauna în ecuațiile de mișcare ale roboților și, în mod special, vor apare și în cadrul ecuațiilor lui Lagrange (unde, de regulă, torsorii forțelor de legătură nu apar), deoarece, în calculul lucrului mecanic virtual impus de necesitatea determinării forțelor generalizate, forțele și momentele de frecare sunt considerate exterioare [28].

#### 3.1.7.1 Variația elementelor torsorului

Fie un torsor  $T_O$  exprimat într-un sistem de referință oarecare  $S$ . Se dorește determinarea unui torsor echivalent cu cel dat, dar în sistemul de referință  $S_1$ , obținut din primul prin transformarea generală  $G$ . Echivalența dintre doi torsori constă în producerea de efecte mecanice identice, astfel că se exprimă lucrul mecanic produs de fiecare torsor în propriul sistem de referință.

Dacă torsorul:

$$T_O = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

produce în sistemul de referință  $S$  o deplasare elementară:

$$D = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

lucrul mecanic elementar al torsorului va fi:

$$dL = T_O^T \cdot D \quad (3.96)$$

În sistemul de referință  $S_1$ , torsorul echivalent  ${}^G T_{O1}$  va produce același lucru mecanic, vectorul elementar al mișcării în acest sistem fiind  ${}^G D$ :

$$({}^G T_{O1})^T \cdot {}^G D = (T_O)^T \cdot D \quad (3.97)$$

Trecerea între cele două sisteme de referință fiind asigurată de matricea  $G$ , vectorii elementari ai mișcării sunt legați prin relația

$${}^G D = J_S \cdot D \quad (3.98)$$

în care  $J_S$  este jacobianul sistemului de referință. Înlocuind relația (3.61) în egalitatea lucrurilor mecanice, rezultă:

$${}^G T_{O1} = (J_S^{-1})^T \cdot T_O \quad (3.99)$$

Inversând și transpunând matricea  $J_S$ , torsorul echivalent devine:

$${}^G T_{O1} = \begin{bmatrix} G_{R_x} \\ G_{R_y} \\ G_{R_z} \\ G_{M_{O1x}} \\ G_{M_{O1y}} \\ G_{M_{O1z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 & 0 & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\vec{p} \times \vec{n})_x & (\vec{p} \times \vec{n})_y & (\vec{p} \times \vec{n})_z & n_x & n_y & n_z \\ (\vec{p} \times \vec{o})_x & (\vec{p} \times \vec{o})_y & (\vec{p} \times \vec{o})_z & o_x & o_y & o_z \\ (\vec{p} \times \vec{a})_x & (\vec{p} \times \vec{a})_y & (\vec{p} \times \vec{a})_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Rezultă următoarele relații de transformare pentru proiecțiile elementelor de reducere [28]:

$$\begin{aligned}
G_{R_x} &= \bar{n} \cdot \bar{R} \\
G_{R_y} &= \bar{o} \cdot \bar{R} \\
G_{R_z} &= \bar{a} \cdot \bar{R} \\
G_{M_{O1x}} &= \bar{n} \cdot (\bar{R} \times \bar{p} + \bar{M}_O) \\
G_{M_{O1y}} &= \bar{o} \cdot (\bar{R} \times \bar{p} + \bar{M}_O) \\
G_{M_{O1z}} &= \bar{a} \cdot (\bar{R} \times \bar{p} + \bar{M}_O)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

### 3.1.7.2 Torsori echivalenți în cuple

Una dintre cele mai importante probleme în studiul roboților este determinarea forțelor și momentelor care apar în cuple datorită torsorului cu care este încărcat efectorul final. Se consideră că toate cuplele unui robot sunt simple, adică într-o cuplă de translație poate apărea doar o forță, pe direcția axei cuplei, iar într-o cuplă de rotație doar un moment având direcția axei cuplei respective. Astfel, dacă la capătul activ al robotului acționează torsorul  ${}^G_n T_{On}$ , acesta va produce torsorul din cuple  $Q$ , prezentat ca o matrice coloană cu atâtea elemente câte cuple are robotul, elemente care sunt forțe pentru cuplele de translație și momente pentru cuplele de rotație.

Mișcarea efectorului final este caracterizată de vectorul elementar al mișcării sale  ${}^G_n T_{On}$ , iar mișcarea corespunzătoare din cuple are drept vector caracteristic  $D_q$ , legate între ele prin matricea jacobiană a robotului

$${}^G_n D = J_r \cdot D_q \tag{3.102}$$

Egalând lucrurile mecanice ale celor doi torsori:

$${}^G_n T_{On}^T \cdot {}^G_n D = Q^T \cdot D_q \tag{3.103}$$

și ținând cont de relația:

$${}^G_n D = J_r \cdot D_q \tag{3.104}$$

rezultă:

$${}^G_n T_{On}^T \cdot J_r \cdot D_q = Q^T \cdot D_q \tag{3.105}$$

de unde torsorul din cuple este [28]:



$$Q = J_r^T \cdot G \quad (3.106)$$

Relațiile de transformare ale elementelor tursorului de reducere sunt deosebit de importante pentru luarea în considerație a tuturor solicitărilor posibile în cuplele unui robot. Indiferent de punctul, aparținând unui element  $i$  al robotului, în care sunt aplicate forțe sau momente exterioare, acestea se pot transcrie (utilizând relațiile (3.101)) în sistemul de referință atașat elementului respectiv. Se utilizează pentru această operație o matrice de transformare  $G$  cu elemente constante.

Dacă originea sistemului respectiv de referință coincide cu centrul cuplei  $i+1$ , atunci s-a obținut direct un tursor care se va adăuga la cel deja existent în cupla respectivă. Dacă originea sistemului respectiv de referință se află undeva pe axa cuplei  $i+1$ , atunci prin intermediul matricelor de transfer  ${}^{i+1}T_i \dots {}^{n-1}T_n$  se va determina matricea  $G$  cu care se calculează tursorul echivalent la efectorul final. Dacă se fac aceleași operații pentru toate forțele sau momentele exterioare aplicate pe toate elementele robotului, se obține un tursor rezultat  ${}^G T_{O_n}$  la efectorul final. Cu relația (3.106) se calculează tursorul din cuplele robotului determinat de toate acțiunile exterioare.

## **3.2 Modelul diferențial al mâinii**

### **3.2.1 Modelul diferențial al degetului opozabil**

Modelul diferențial, concretizat prin matricea jacobiană, este necesar pentru reducerea în articulațiile sistemului a tursorului care apare în vârful degetului la prinderea unui obiect, în scopul determinării membrului drept al ecuațiilor lui Lagrange de speța a II-a, utilizate pentru obținerea modelului dinamic. Deoarece toate articulațiile degetului sunt rotoide, relațiile folosite pentru coloanele matricei jacobiene sunt cele din expresia (3.36).

Elementele acestei relații corespund matricei  $G^i$ , conform relațiilor (2.19)–(2.24), determinate în Capitolul 2, „Modelul cinematic al mâinii umane”. Pentru lanțul cinematic deschis, format din articulațiile 1, 2 și 3 – palmă – articulațiile 4 și 5 – falanga  $f_{10}$  – articulația 6 – falanga  $f_{20}$  (conform cu Fig. 2.28) se obține matricea jacobiană:

$$\begin{aligned}
 J_{do} = & \left[ \begin{array}{l}
 [f_{10}s_6 + (d_1 + d_2)c_5]s_2c_3s_4 - c_2c_4 - \\
 - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)(s_2s_3s_4c_5 + c_2s_5) - \\
 - (d_5c_4 + d_3)(s_2s_3c_4c_5 + s_2c_3s_5) \\
 [f_{20} + f_{10}c_6 - (d_1 + d_2)s_5]s_2c_3s_4 - c_2s_4 + \\
 + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)(s_2s_3s_4s_5 - c_2c_5) + \\
 + (d_5c_4 + d_3)(s_2s_3c_4s_5 - s_2c_3c_5) \\
 (f_{20}c_5 + f_{10}c_5)s_2s_3 + \\
 + [f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2)](s_2c_3c_4 + c_2s_4) + \\
 + \left(\frac{p}{2} - d_5c_4\right)s_2s_3c_4 - (d_5c_4 + d_3)s_2s_3s_4 \\
 c_5(s_2c_3c_4 + c_2s_4) - s_5s_2s_3 \\
 - s_5(s_2c_3c_4 + c_2s_4) - c_5s_2s_3 \\
 - c_2c_4 + s_4c_2c_3 \\
 [f_{10}s_6 - (d_1 + d_2)c_5]s_3s_4 + \\
 + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_3s_4c_5 - \\
 - (d_5c_4 + d_3)(c_3c_4c_5 - s_3s_5) \\
 [f_{20} + f_{10}c_6 - (d_1 + d_2)s_5]s_3s_4 + \\
 - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_3s_4s_5 + \\
 + (d_5c_4 + d_3)(c_3c_4s_5 + s_3c_5) \\
 - (f_{20}c_5 + f_{10}c_5)c_3 + \\
 + [f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2)]s_3c_4 + \\
 - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_3c_4 - (d_5c_4 + d_3)c_3s_4 \\
 s_3c_4c_5 + c_3s_5 \\
 - s_3c_4s_5 + c_3c_5 \\
 s_3s_4 \\
 c_4[f_{10}s_6 + (d_1 + d_2)c_5] + \\
 + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)s_5 \\
 [f_{20} + f_{10}c_6 - (d_1 + d_2)s_5]c_4 + \\
 + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_5 \\
 - [f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2)]s_4 \\
 - s_4c_5 \\
 s_4s_5 \\
 c_4 \\
 - d_5c_5 & f_{10}s_6 & 0 \\
 d_5s_5 & f_{20} + f_{10}c_6 & f_{20} \\
 f_{20}c_5 + f_{10}c_5 & 0 & 0 \\
 s_5 & 0 & 0 \\
 c_5 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(3.107)

### 3.2.2 Modelul diferențial al degetului mijlociu

Pentru lanțul cinematic deschis, format din articulațiile 1, 2 și 3 – palmă – articulațiile 4 și 5 – falanga  $f_{1m}$  – articulația 6 – falanga  $f_{2m}$  – articulația 7 –

falanga  $f_{3m}$  (conform cu Fig. 2.28) se obține matricea jacobiană cu expresia (3.108).

$$J_{dm} = \begin{bmatrix} -(f_{2m}s7 + f_{1m}s67)s2s34 + & (f_{2m}s7 + f_{1m}s67)c34 + & ps4c567 \\ + p(c2s3c34c567 - c2c3s34c567 - & + pc3s567 & \\ - s2s3s567) & & \\ -(f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67)s2s34 + & (f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67)c34 + & - ps4s567 \\ + p(-c2s3c34s567 + c2c3s34s567 - & + pc3c567 & \\ - s2s3c567) & & \\ -(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5)c2 + & (f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5)s34 & f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + \\ + (f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5)s2c34 + & & + f_{1m}c5 + pc4 \\ + p(-c2s3s34 - c2c3c34) & & \\ s2c34c567 + c2s56 & s34c567 & - s567 \\ - s2c34s567 + c2c567 & - s34s567 & - c567 \\ - s2s34 & c34 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & f_{2m}s7 + f_{1m}s67 & f_{2m}s7 & 0 \\ 0 & f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67 & f_{3m} + f_{2m}c7 & f_{3m} \\ f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 & 0 & 0 & 0 \\ -s567 & 0 & 0 & 0 \\ -c567 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

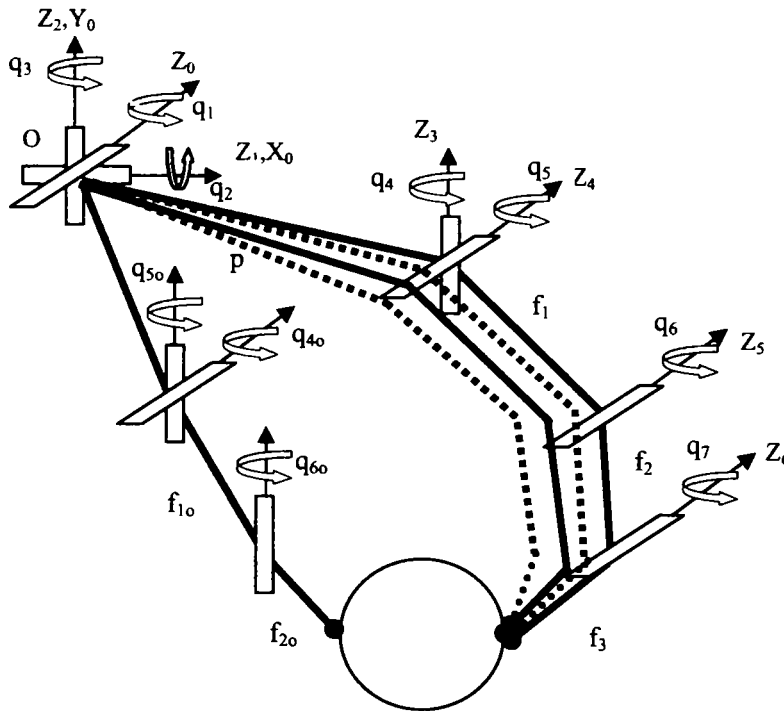
### 3.3 Determinarea modelului dinamic al mâinii umane

Modelarea dinamică a mâinii umane este necesară deoarece realizarea unor mișcări fiziologic normale este, în esență, dinamică. Sistemul de ecuații diferențiale care se obține în urma modelării unui mecanism cu număr mare de grade de libertate, precum este mâna umană, este foarte complex și presupune integrare numerică. De cele mai multe ori modelul rezultat este unul simplificat deoarece, mai ales în cadrul modelării corpului uman, fenomenele care se produc sunt atât de complexe încât o reproducere matematică exactă este, practic, imposibilă. Pentru obținerea unor rezultate corecte în urma integrării ecuațiilor diferențiale, este necesar un studiu al

proprietăților materialelor biologice care alcătuiesc sistemul supus atenției, precum și determinarea tuturor mărimilor necesare.

Pentru a studia comportamentul mâinii la prinderea unui obiect (Fig. 3.2 ), se vor folosi ecuațiile lui Lagrange de speța a doua în forma lor generală, exprimată de relația (3.54). Primul pas necesar pentru scrierea acestor ecuații constă în calcularea energiei cinetice a sistemului, egală cu suma energiilor cinetice ale elementelor componente.

$$E_c = E_{c\_p} + E_{c\_do} + E_{c\_da} + E_{c\_dm} + E_{c\_di} + E_{c\_dc} \quad (3.109)$$



**Fig. 3.2** Prinderea unui obiect

Deoarece toate elementele execută mișcare de rotație cu axă fixă, energiile cinetice respective se determină folosind relația (3.110):

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{q}_i^2 \quad (3.110)$$

Unde:  $J_z$  este momentul de inerție față de axa de rotație

$q_i$  este unghiul de rotație

În aceste condiții, energia cinetică aferentă articulațiilor comune tuturor degetelor devine:

$$E_{c\_p} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(1p)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(1p)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(1p)} \cdot \dot{q}_3^2 \right) \quad (3.111)$$

Energia cinetică a degetului opozabil

$$E_{c\_do} = E_{c1\_do} + E_{c2\_do}$$

$$E_{c1\_do} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(2o)} \cdot \dot{q}_1^2 - J_{z1}^{(2o)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(2o)} \cdot \dot{q}_3^2 - J_{z3}^{(2o)} \cdot \dot{q}_{4o}^2 - J_{z4}^{(2o)} \cdot \dot{q}_{5o}^2 \right) \quad (3.112)$$

$$E_{c2\_do} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(3o)} \cdot \dot{q}_1^2 - J_{z1}^{(3o)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(3o)} \cdot \dot{q}_3^2 - J_{z3}^{(3o)} \cdot \dot{q}_{4o}^2 - J_{z4}^{(3o)} \cdot \dot{q}_{5o}^2 - J_{z5}^{(3o)} \cdot \dot{q}_{6o}^2 \right)$$

Energia cinetică a degetului arătător

$$E_{c\_da} = E_{c1\_da} + E_{c2\_da} + E_{c3\_da}$$

$$E_{c1\_da} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(2a)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(2a)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(2a)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(2a)} \cdot \dot{q}_{4a}^2 + J_{z4}^{(2a)} \cdot \dot{q}_{5a}^2 \right) \quad (3.113)$$

$$E_{c2\_da} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(3a)} \cdot \dot{q}_1^2 - J_{z1}^{(3a)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(3a)} \cdot \dot{q}_3^2 - J_{z3}^{(3a)} \cdot \dot{q}_{4a}^2 - J_{z4}^{(3a)} \cdot \dot{q}_{5a}^2 - J_{z5}^{(3a)} \cdot \dot{q}_{6a}^2 \right)$$

$$E_{c3\_da} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(4a)} \cdot \dot{q}_1^2 - J_{z1}^{(4a)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(4a)} \cdot \dot{q}_3^2 - J_{z3}^{(4a)} \cdot \dot{q}_{4a}^2 + J_{z4}^{(4a)} \cdot \dot{q}_{5a}^2 - J_{z5}^{(4a)} \cdot \dot{q}_{6a}^2 + J_{z6}^{(4a)} \cdot \dot{q}_{7a}^2 \right)$$

Energia cinetică a degetului mijlociu

$$E_{c\_dm} = E_{c1\_dm} + E_{c2\_dm} + E_{c3\_dm}$$

$$E_{c1\_dm} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(2m)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(2m)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(2m)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(2m)} \cdot \dot{q}_{4m}^2 + J_{z4}^{(2m)} \cdot \dot{q}_{5m}^2 \right) \quad (3.114)$$

$$E_{c2\_dm} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(3m)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(3m)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(3m)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(3m)} \cdot \dot{q}_{4m}^2 - J_{z4}^{(3m)} \cdot \dot{q}_{5m}^2 + J_{z5}^{(3m)} \cdot \dot{q}_{6m}^2 \right)$$

$$E_{c3\_dm} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(4m)} \cdot \dot{q}_1^2 - J_{z1}^{(4m)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(4m)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(4m)} \cdot \dot{q}_{4m}^2 - J_{z4}^{(4m)} \cdot \dot{q}_{5m}^2 - J_{z5}^{(4m)} \cdot \dot{q}_{6m}^2 + J_{z6}^{(4m)} \cdot \dot{q}_{7m}^2 \right)$$

Energia cinetică a degetului inelar

$$E_{c\_di} = E_{c1\_di} + E_{c2\_di} + E_{c3\_di}$$

$$E_{c1\_di} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(2i)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(2i)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(2i)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(2i)} \cdot \dot{q}_{4i}^2 + J_{z4}^{(2i)} \cdot \dot{q}_{5i}^2 \right) \quad (3.115)$$

$$E_{c2\_di} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(3i)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(3i)} \cdot \dot{q}_2^2 - J_{z2}^{(3i)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(3i)} \cdot \dot{q}_{4i}^2 + J_{z4}^{(3i)} \cdot \dot{q}_{5i}^2 + J_{z5}^{(3i)} \cdot \dot{q}_{6i}^2 \right)$$

$$E_{c3\_di} = \frac{1}{2} \left( J_{z0}^{(4i)} \cdot \dot{q}_1^2 + J_{z1}^{(4i)} \cdot \dot{q}_2^2 + J_{z2}^{(4i)} \cdot \dot{q}_3^2 + J_{z3}^{(4i)} \cdot \dot{q}_{4i}^2 + J_{z4}^{(4i)} \cdot \dot{q}_{5i}^2 + J_{z5}^{(4i)} \cdot \dot{q}_{6i}^2 + J_{z6}^{(4i)} \cdot \dot{q}_{7i}^2 \right)$$

Energia cinetică a degetului mic

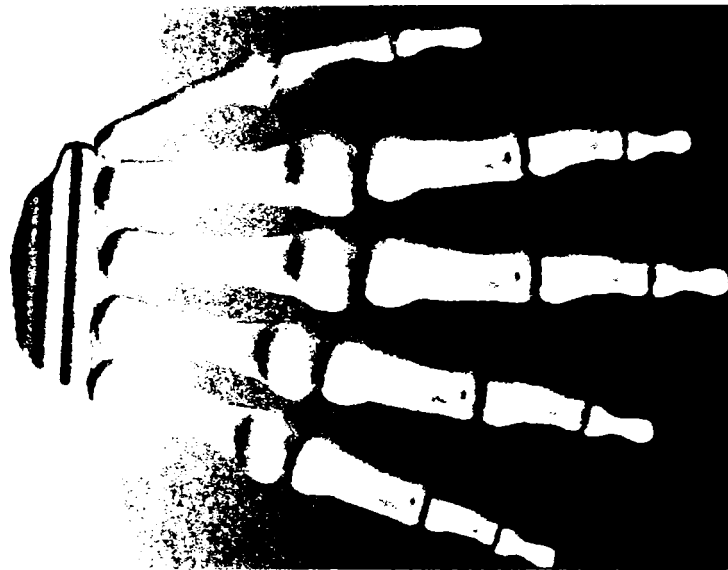


Fig. 3.3 Modelul sistemului mână, realizat în Solid Works

Folosind programul Solid Works, specializat în realizarea de modele 3D, se pot determina, pentru modelul sistemului propus spre studiu (Fig. 3.3), momentele de inerție axiale ale elementelor față de sistemul de referință propriu și față de centrele de greutate proprii. Astfel, momentele de inerție față de axele necesare se calculează folosind formula lui Steiner. În cele ce urmează, se ilustrează în detaliu determinarea energiei cinetice pentru degetul mijlociu (pentru celelalte degete energia cinetică se calculează în aceeași manieră). Pentru ușurarea scrierii ecuațiilor necesare se renunță la particula  $m$  și se consideră variabilele unghiulare specifice degetului mijlociu ca fiind  $q_4$ ,  $q_5$ ,  $q_6$  și  $q_7$ .

Astfel, momentele de inerție față de axele sistemelor de referință, altele decât cele proprii sunt:

— pentru falanga proximală

$$\begin{aligned} J_{z0}^{(2)} &= J_{|z0C2}^{(2)} + d_{21}^2 \cdot m_{f1} \\ J_{z1}^{(2)} &= J_{|z1C2}^{(2)} + d_{22}^2 \cdot m_{f1} \\ J_{z2}^{(2)} &= J_{|z2C2}^{(2)} + d_{23}^2 \cdot m_{f1} \end{aligned} \quad (3.116)$$

— pentru falanga medie

$$\begin{aligned} J_{z0}^{(3)} &= J_{|z0C3}^{(3)} + d_{31}^2 \cdot m_{f2} \\ J_{z1}^{(3)} &= J_{|z1C3}^{(3)} + d_{32}^2 \cdot m_{f2} \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$J_{z2}^{(3)} = J_{||z2C3}^{(3)} + d_{33}^2 \cdot m_{f2}$$

$$J_{z3}^{(3)} = J_{||z3C3}^{(3)} + d_{34}^2 \cdot m_{f2}$$

$$J_{z4}^{(3)} = J_{||z4C3}^{(3)} + d_{35}^2 \cdot m_{f2}$$

— pentru falanga distală

$$J_{z0}^{(4)} = J_{||z0C4}^{(4)} + d_{41}^2 \cdot m_{f3}$$

$$J_{z1}^{(4)} = J_{||z1C4}^{(4)} + d_{42}^2 \cdot m_{f3}$$

$$J_{z2}^{(4)} = J_{||z2C4}^{(4)} + d_{43}^2 \cdot m_{f3}$$

(3.118)

$$J_{z3}^{(4)} = J_{||z3C4}^{(4)} + d_{44}^2 \cdot m_{f3}$$

$$J_{z4}^{(4)} = J_{||z4C4}^{(4)} + d_{45}^2 \cdot m_{f3}$$

$$J_{z5}^{(4)} = J_{||z5C4}^{(4)} + d_{46}^2 \cdot m_{f3}$$

Distanțele care apar în expresiile (3.117)–(3.119) descriu, prin componența lor, modul în care variabilele articulare anterioare articulației curente marchează această ultimă articulație. Ele exprimă distanța dintre centrul de greutate în care se cunoaște momentul de inerție și cupla față de care se dorește calcularea momentului de inerție. Aceste mărimi se determină din ultimă coloană a matricei generale, care exprimă trecerea de la centrul de greutate la cupla respectivă, respectând legea de variație a momentelor de inerție axiale (3.120).

$$J_{z1} = J_z + (x_{1C}^2 + y_{1C}^2) \cdot M \quad (3.119)$$

În continuare, se trece la calculul proiecțiilor necesare pentru determinarea distanțelor din relațiile (3.117)–(3.119). Pentru determinarea distanțelor  $d_{21}$ ,  $d_{22}$  și  $d_{23}$  se va exprima centrul de greutate al falangei proximale față de prima cuplă de rotație.

$${}^0G_5 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \quad (3.120)$$

Vor rezulta proiecțiile:

$$p_{x2} = c1c2 \left( \frac{f_1}{2} c34c5 + pc3 \right) - \frac{f_1}{2} c1s2s5 + s1 \left( \frac{f_1}{2} s34c5 + ps3 \right) \quad (3.121)$$

$$p_{y2} = s1c2\left(\frac{f_1}{2}c34c5 + pc3\right) - \frac{f_1}{2}s1s2s5 - c1\left(\frac{f_1}{2}s34c5 + ps3\right)$$

$$p_{z2} = s2\left(\frac{f_1}{2}c34c5 + pc3\right) + \frac{f_1}{2}c2s5$$

Pentru determinarea distanțelor  $d_{31}$ ,  $d_{32}$ ,  $d_{33}$ ,  $d_{34}$  și  $d_{35}$  se va exprima centrul de greutate al falangei medii față de prima cuplă de rotație (primele trei), și față de cupla a patra (ultimele două).

$${}^0G_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \quad (3.122)$$

$$p_{x3} = c1c2\left[c34\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) + pc3\right] - c1s2\left(\frac{f_2}{2}s56 + f_1s5\right) + s1s34\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) + ps1s3$$

$$p_{y3} = s1c2\left[c34\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) + pc3\right] - s1s2\left(\frac{f_2}{2}s56 + f_1s5\right) - c1s34\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) - pc1s3 \quad (3.123)$$

$$p_{z3} = s2\left[c34\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) + pc3\right] + c2\left(\frac{f_2}{2}s56 + f_1s5\right)$$

$${}^3G_6 = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \quad (3.124)$$

$$p_{x4} = c4\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right)$$

$$p_{y4} = s4\left(\frac{f_2}{2}c56 + f_1c5\right) \quad (3.125)$$

$$p_{z4} = -\frac{f_2}{2}s56 - f_1s5$$

Pentru determinarea distanțelor  $d_{41}$ ,  $d_{42}$ ,  $d_{43}$ ,  $d_{44}$ ,  $d_{45}$  și  $d_{46}$  se va exprima centrul de greutate al falangei distale față de prima cuplă de rotație (primele trei), față de cupla a patra (următoarele două) și față de cupla a șasea (ultima).

$$G_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_7 \quad (3.126)$$



$$\begin{aligned}
p_{x5} &= (c1c2c34 + s1s34) \left( \frac{f_3}{2} c567 + f_2c56 + f_1c5 \right) + p(c1c2c3 + s1s3) - \\
&\quad - c1s2 \left( \frac{f_3}{2} s567 + f_2s56 + f_1s5 \right) \\
p_{y5} &= (s1c2c34 - c1s34) \left( \frac{f_3}{2} c567 + f_2c56 + f_1c5 \right) + p(s1c2c3 - c1s3) - \\
&\quad - s1s2 \left( \frac{f_3}{2} s567 + f_2s56 + f_1s5 \right) \\
p_{z5} &= s2 \left[ c34 \left( \frac{f_3}{2} c567 + f_2c56 + f_1c5 \right) + pc3 \right] + c2 \left( \frac{f_3}{2} s567 + f_2s56 + f_1s5 \right)
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$G_{61} = {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_7 \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
p_{x6} &= c4 \left( \frac{f_3}{2} c567 + f_2c56 + f_1c5 \right) \\
p_{y6} &= s4 \left( \frac{f_3}{2} c567 + f_2c56 + f_1c5 \right) \\
p_{z6} &= -\frac{f_3}{2} s567 - f_2s56 - f_1s5
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$${}^5G_7 = {}^5T_6 \cdot {}^6T_7 \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}
p_{x7} &= \frac{f_3}{2} c67 + f_2c6 \\
p_{y7} &= \frac{f_3}{2} s67 + f_2s6
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Anexa 3 conține proiecțiile pentru celelalte degetele ale sistemului mână. După determinarea proiecțiilor necesare, se trece la calcularea distanțelor, prezentate în Tabelul 3.1 (cu excepția degetului opozabil, caz în care se folosesc doar primele două coloane, pentru toate celelalte degetele distanțele se calculează în aceeași manieră). În acest moment poate fi exprimată energia cinetică a degetului mijlociu, folosind momente de inerție și proiecții cunoscute.

$d_{21}^2 = p_{x2}^2 + p_{y2}^2$	$d_{31}^2 = p_{x3}^2 + p_{y3}^2$	$d_{41}^2 = p_{x5}^2 + p_{y5}^2$
$d_{22}^2 = p_{y2}^2 + p_{z2}^2$	$d_{32}^2 = p_{y3}^2 + p_{z3}^2$	$d_{42}^2 = p_{y5}^2 + p_{z5}^2$
$d_{23}^2 = p_{x2}^2 + p_{z2}^2$	$d_{33}^2 = p_{x3}^2 + p_{z3}^2$	$d_{43}^2 = p_{x5}^2 + p_{z5}^2$
	$d_{34}^2 = p_{x4}^2 + p_{y4}^2$	$d_{44}^2 = p_{x6}^2 + p_{y6}^2$
	$d_{35}^2 = p_{x4}^2 + p_{z4}^2$	$d_{45}^2 = p_{x6}^2 + p_{z6}^2$
		$d_{46}^2 = p_{x7}^2 + p_{y7}^2$

**Tabelul 3.1** Determinarea distanțelor pe baza proiecțiilor centrelor de greutate pe axe

$$\begin{aligned}
 E_{c\_dm} = & \frac{1}{2} \left[ \dot{q}_1^2 \cdot \left( J_{||z0C2}^{(2)} + m_{f1} \cdot (p_{x2}^2 + p_{y2}^2) + J_{||z0C3}^{(3)} + m_{f2} \cdot (p_{x3}^2 + p_{y3}^2) + J_{||z0C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{x5}^2 + p_{y5}^2) \right) + \right. \\
 & + \dot{q}_2^2 \cdot \left( J_{||z1C2}^{(2)} + m_{f1} \cdot (p_{y2}^2 + p_{z2}^2) + J_{||z1C3}^{(3)} + m_{f2} \cdot (p_{y3}^2 + p_{z3}^2) + J_{||z1C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{y5}^2 + p_{z5}^2) \right) + \\
 & + \dot{q}_3^2 \cdot \left( J_{||z2C2}^{(2)} + m_{f1} \cdot (p_{x2}^2 + p_{z2}^2) + J_{||z2C3}^{(3)} + m_{f2} \cdot (p_{x3}^2 + p_{z3}^2) + J_{||z2C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{x5}^2 + p_{z5}^2) \right) + \\
 & + \dot{q}_4^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2)} + J_{||z3C3}^{(3)} + m_{f2} \cdot (p_{x4}^2 + p_{y4}^2) + J_{||z3C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{x6}^2 + p_{y6}^2) \right) + \\
 & + \dot{q}_5^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2)} + J_{||z4C3}^{(3)} + m_{f2} \cdot (p_{x4}^2 + p_{z4}^2) + J_{||z4C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{x6}^2 + p_{z6}^2) \right) + \\
 & + \dot{q}_6^2 \cdot \left( J_5^{(3)} + J_{||z5C4}^{(4)} + m_{f3} \cdot (p_{x7}^2 + p_{y7}^2) \right) + \\
 & \left. + \dot{q}_7^2 \cdot J_{z6}^{(4)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.132}$$

Pentru a determina forma generală a ecuațiilor lui Lagrange trebuie calculate derivatele parțiale ale funcției lui Lagrange în raport cu  $\dot{q}_i$  și  $q_i$ , precum și derivata în raport cu timpul a primei dintre cele două derivate parțiale. Pentru a realiza acest lucru, însă, trebuie determinate derivatele în raport cu timpul și derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale proiecțiilor necesare calculării distanțelor. Anexa 4 prezintă derivatele în raport cu timpul ale proiecțiilor pentru toate celelalte degete, iar Anexa 5 prezintă derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale aceluiași proiecții.

Derivatele în raport cu timpul ale proiecțiilor pentru degetul mijlociu sunt:

$$\begin{aligned}
 p_{x2\_m}' &= -(\dot{q}_1 s1c2 + \dot{q}_2 c1s2) \left( \frac{f_{1m}}{2} c34c5 + pc3 \right) + \frac{f_{1m}}{2} c5(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(-c1c2s34 + s1c34) - \\
 &\quad - \frac{f_{1m}}{2} [\dot{q}_5(c1c2c34s5 + s1s34s5 + c1s2c5) + \dot{q}_2 c1c2s5] + \dot{q}_3 p(-c1c2s3 + s1c3) + \\
 &\quad + \dot{q}_1 \left[ \frac{f_{1m}}{2} s1s2s5 + c1 \left( \frac{f_{1m}}{2} s34c5 + ps3 \right) \right] \\
 p_{y2\_m}' &= (\dot{q}_1 c1c2 - \dot{q}_2 s1s2) \left( \frac{f_{1m}}{2} c34c5 + pc3 \right) - \frac{f_{1m}}{2} c5(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s1c2s34 + c1c34) - \\
 &\quad - \frac{f_{1m}}{2} [\dot{q}_5(s1c2c34s5 + c1s34s5 + s1s2c5) + \dot{q}_2 s1c2s5] - \dot{q}_3 p(s1c2s3 + c1c3) + \\
 &\quad + \dot{q}_1 \left[ -\frac{f_{1m}}{2} c1s2s5 + s1 \left( \frac{f_{1m}}{2} s34c5 + ps3 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned}
 p_{z2\_m}' &= \dot{q}_2 \left[ c2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c34c5 + pc3 \right) - \frac{f_{1m}}{2} s2s5 \right] - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \frac{f_{1m}}{2} s2s34c5 - \dot{q}_3 ps2s3 + \\
 &\quad + \frac{f_{1m}}{2} \dot{q}_5(-s2c34s5 + c2c5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{x3\_m}' &= -[c34(\dot{q}_1 s1c2 + \dot{q}_2 c1s2) + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)c1c2s34] \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) - c1c2c34 [(\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} s56 + \dot{q}_5 f_{1m}s5] + \\
 &\quad - \dot{q}_1 \left[ ps1c2c3 - s1s2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) - c1s34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) - pc1s3 \right] + \\
 &\quad - \dot{q}_2 \left[ pc1s2c3 + c1c2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) \right] + \dot{q}_3 (-pc1c2s3 + ps1c3) - \\
 &\quad - (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} (c1s2c56 + s1s34s56) - \dot{q}_5 f_{1m}(c1s2c5 + s1s34s5) + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s1c34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{y3\_m}' &= [c34(\dot{q}_1 c1c2 - \dot{q}_2 s1s2) - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s1c2s34] \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) - s1c2c34 [(\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} s56 - \dot{q}_5 f_{1m}s5] + \\
 &\quad + \dot{q}_1 \left[ pc1c2c3 - c1s2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) + s1s34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + ps1s3 \right] - \\
 &\quad - \dot{q}_2 \left[ ps1s2c3 + s1c2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) \right] - \dot{q}_3 p(s1c2s3 + c1c3) - \dot{q}_5 f_{1m}(s1s2c5 - c1s34s5) - \\
 &\quad - (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} (s1s2c56 - c1s34s56) - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \left( \frac{f_{2m}}{2} c1c34c56 + f_{1m}c1c34c5 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{z3\_m}' &= (\dot{q}_2 c2c34 - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s2s34 + \dot{q}_5 c2) \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) - s2c34 [(\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} s56 + \dot{q}_5 f_{1m}s5] + \\
 &\quad + \dot{q}_2 \left[ pc2c3 - s2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) \right] - \dot{q}_3 ps2s3 + \dot{q}_6 \frac{f_{2m}}{2} c2c56
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

$$p_{x4\_m}' = -\dot{q}_4 s4 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) - \dot{q}_5 c4 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) - \dot{q}_6 \frac{f_{2m}}{2} c4s56 \tag{3.135}$$

$$p_{y4\_m}' = \dot{q}_4 c_4 \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - \dot{q}_5 s_4 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) - \dot{q}_6 \frac{f_{2m}}{2} s_4 s_{56}$$

$$p_{z4\_m}' = -(\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2m}}{2} c_{56} - \dot{q}_5 f_{1m} c_5$$

$$\begin{aligned} p_{x5\_m}' = & [\dot{q}_1(-s_{1c2c34} + c_{1s34}) - \dot{q}_2 c_{1s2c34} + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s_{1c34} - c_{1c2s34})] \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + \\ & - (c_{1c2c34} + s_{1s34}) \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} s_5 \right] + \\ & + p[\dot{q}_1(c_{1s3} - s_{1c2c3}) + \dot{q}_3(s_{1c3} - c_{1c2s3}) - \dot{q}_2 c_{1s2c3}] + (\dot{q}_1 s_{1s2} - \dot{q}_2 c_{1c2}) \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) - \\ & - c_{1s2} \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} c_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} c_5 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{y5\_m}' = & [\dot{q}_1(c_{1c2c34} + s_{1s34}) - \dot{q}_2 s_{1s2c34} - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s_{1c2s34} + c_{1c34})] \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - \\ & - (s_{1c2c34} - c_{1s34}) \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} s_5 \right] + \\ & + p[\dot{q}_1(s_{1s3} + c_{1c2c3}) - \dot{q}_3(c_{1c3} + s_{1c2s3}) - \dot{q}_2 s_{1s2c3}] - (\dot{q}_1 c_{1s2} + \dot{q}_2 s_{1c2}) \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) - \\ & - s_{1s2} \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} c_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} c_5 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{z5\_m}' = & \dot{q}_2 \left[ c_{2c34} \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p c_{2c3} - s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) \right] + \\ & + s_2 \left[ -(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s_{34} \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - c_{34} \left( (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} s_5 \right) \right. \\ & \left. - \dot{q}_3 p s_3 \right] + c_2 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} c_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} c_5 \right] \end{aligned}$$

(3.136)

$$p_{x6\_m}' = -\dot{q}_4 s_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - c_4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} s_5 \right]$$

$$p_{y6\_m}' = \dot{q}_4 c_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - s_4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} s_5 \right]$$

$$p_{z6\_m}' = - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2m} c_{56} + \dot{q}_5 f_{1m} c_5 \right]$$

(3.137)

$$p_{x7\_m}' = -(\dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} s_{67} - \dot{q}_6 f_{2m} s_6$$

(3.138)

$$p_{y7\_m}' = (\dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3m}}{2} c_{67} + \dot{q}_6 f_{2m} c_6$$

Derivatele în raport cu  $q_1$  au forma:

(3.139)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_1} = -s_1 c_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 \right) + \frac{f_{1m}}{2} s_1 s_2 s_5 + c_1 \left( \frac{f_{1m}}{2} s_{34} c_5 + p s_3 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_1} = c_1 c_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 \right) - \frac{f_{1m}}{2} c_1 s_2 s_5 + s_1 \left( \frac{f_{1m}}{2} s_{34} c_5 + p s_3 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_1} = -s_1 c_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p c_3 \right] + s_1 s_2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) + c_1 \left[ s_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p s_3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_1} = c_1 c_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p c_3 \right] + c_1 s_2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right) + s_1 \left[ s_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p s_3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_1} = (-s_1 c_2 c_{34} + c_1 s_{34}) \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p (-s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) + s_1 s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_1} = (c_1 c_2 c_{34} + s_1 s_{34}) \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) - c_1 s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_1} = 0$$

Derivatele în raport cu  $q_2$  au forma:

(3.140)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_2} = -c_1 \left[ s_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 \right) + \frac{f_{1m}}{2} c_2 s_5 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_2} = -s_1 \left[ s_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 \right) + \frac{f_{1m}}{2} c_2 s_5 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_2} = c_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p_{c3} \right) - \frac{f_{1m}}{2} s_2 s_5$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_2} = -c_1 s_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p_{c3} \right] - c_1 c_2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_2} = -s_1 s_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p_{c3} \right] - s_1 c_2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_2} = c_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p_{c3} \right] - s_2 \left( \frac{f_{2m}}{2} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_2} = -c_1 s_2 c_{34} \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - p_{c1} s_2 c_3 - c_1 c_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_2} = -s_1 s_2 c_{34} \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) - p_{s1} s_2 c_3 - s_1 c_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_2} = c_2 \left[ c_{34} \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right) + p_{c3} \right] - s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + f_{2m} s_{56} + f_{1m} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_2} = 0$$

Derivatele în raport cu  $q_3$  au forma:

(3.141)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_3} = -c_1 c_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} s_{34} c_5 + p_{s3} \right) + s_1 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p_{c3} \right)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_3} = -s_1 c_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} s_{34} c_5 + p_{s3} \right) - c_1 \left( \frac{f_{1m}}{2} c_{34} c_5 + p_{c3} \right)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_3} = -s_2 \left( \frac{f_{1m}}{2} s_{34} c_5 + p_{s3} \right)$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_3} = -c1c2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + ps3 \right] + s1 \left[ c34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + pc3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y3m}}{\partial q_3} = -s1c2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + ps3 \right] - c1 \left[ c34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + pc3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_3} = -s2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) + ps3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_3} = (-c1c2s34 + s1c34) \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right) + p(-c1c2s3 + s1c3)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_3} = (-s1c2s34 - c1c34) \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right) - p(s1c2s3 + c1c3)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_3} = -s2 \left[ s34 \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right) + ps3 \right]$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_3} = 0$$

Derivatele în raport cu  $q_4$  au forma: (3.142)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_4} = \frac{f_{1m}}{2} c5(-c1c2s34 + s1c34)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_4} = -\frac{f_{1m}}{2} c5(s1c2s34 + c1c34)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_4} = -\frac{f_{1m}}{2} s2s34c5$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_4} = (-c1c2s34 + s1c34) \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_4} = -(s1c2s34 + c1s34) \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_4} = -s_2 s_3 4 \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_4} = -s_4 \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_4} = c_4 \left( \frac{f_{2m}}{2} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_4} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_4} = (-c_1 c_2 s_3 4 + s_1 c_3 4) \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_4} = -(s_1 c_2 s_3 4 + c_1 c_3 4) \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_4} = -s_2 s_3 4 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_4} = -s_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_4} = c_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_{567} + f_{2m} c_{56} + f_{1m} c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_4} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_4} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_4} = 0$$

Derivatele în raport cu  $q_5$  au forma:

(3.143)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_5} = -\frac{f_{1m}}{2} (c_1(c_2 c_3 4 s_5 + s_2 c_5) + s_1 s_3 4 s_5)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_5} = -\frac{f_{1m}}{2} (s_1(c_2 c_3 4 s_5 + s_2 c_5) - c_1 s_3 4 s_5)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_5} = \frac{f_{1m}}{2} (-s_2 c_3 5 s_5 + c_2 c_5)$$



$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_5} = -\left( (c1c2c34 + s1s34) \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) + c1s2 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) \right)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_5} = -\left( (s1c2c34 - c1s34) \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) + s1s2 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right) \right)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_5} = -s2c34 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right) + c2 \left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_5} = -c4 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_5} = -s4 \left( \frac{f_{2m}}{2} s56 + f_{1m}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_5} = -\left( \frac{f_{2m}}{2} c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_5} = -(c1c2c34 + s1s34) \left( \frac{f_{3m}}{2} s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \right) - c1s2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_5} = -(s1c2c34 - c1s34) \left( \frac{f_{3m}}{2} s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \right) - s1s2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_5} = -s2c34 \left( \frac{f_{3m}}{2} s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \right) + c2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_5} = -c4 \left( \frac{f_{3m}}{2} s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_5} = -s4 \left( \frac{f_{3m}}{2} s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_5} = -\left( \frac{f_{3m}}{2} c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_5} = 0 \quad \frac{\partial p_{z7\_m}}{\partial q_5} = 0$$

Derivatele în raport cu  $q_6$  au forma:

(3.144)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_6} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2m}}{2} (c_1(c_2c_34s_56 + s_2c_56) + s_1s_34s_56)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2m}}{2} (s_1(c_2c_34s_56 + s_2c_56) - c_1s_34s_56)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_6} = \frac{f_{2m}}{2} (-s_2c_34s_56 + c_2c_56)$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2m}}{2} c_4s_56$$

$$\frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2m}}{2} s_4s_56$$

$$\frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2m}}{2} c_56$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_6} = -(c_1c_2c_34 + s_1s_34) \left( \frac{f_{3m}}{2} s_567 + f_{2m}s_56 \right) - c_1s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_567 + f_{2m}c_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_6} = -(s_1c_2c_34 - c_1s_34) \left( \frac{f_{3m}}{2} s_567 + f_{2m}s_56 \right) - s_1s_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_567 + f_{2m}c_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_6} = -s_2c_34 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_567 + f_{2m}s_56 \right) + c_2 \left( \frac{f_{3m}}{2} c_567 + f_{2m}c_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_6} = -c_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_567 + f_{2m}s_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_6} = -s_4 \left( \frac{f_{3m}}{2} s_567 + f_{2m}s_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_6} = - \left( \frac{f_{3m}}{2} c_567 + f_{2m}c_56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_6} = -\frac{f_{3m}}{2} s_67 - f_{2m}s_6$$

$$\frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_6} = \frac{f_{3m}}{2} c_{67} + f_{2m} c_6$$

Derivatele în raport cu  $q_7$  au forma:

(3.145)

$$\frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_7} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_7} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_7} = 0$$

$$\frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_7} = -(c_1 c_2 c_{34} + s_1 s_{34}) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} - c_1 s_2 \frac{f_{3m}}{2} c_{567}$$

$$\frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_7} = -(s_1 c_2 c_{34} - c_1 s_{34}) \frac{f_{3m}}{2} s_{567} - s_1 s_2 \frac{f_{3m}}{2} c_{567}$$

$$\frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_7} = -s_2 c_{34} \frac{f_{3m}}{2} s_{567} + c_2 \frac{f_{3m}}{2} c_{567}$$

$$\frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3m}}{2} c_{4s567}$$

$$\frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3m}}{2} s_{4s567}$$

$$\frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3m}}{2} c_{567}$$

$$\frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3m}}{2} s_{67}$$

$$\frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_7} = \frac{f_{3m}}{2} c_{67}$$

În aceste condiții, se poate determina energia cinetică a sistemului mână, a cărei expresie este:

$$\begin{aligned}
E_c = & \frac{1}{2} \left[ \dot{q}_1^2 \cdot \left( J_{z0}^{(1p)} + J_{||z0C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (\rho_{x2\_o}^2 + \rho_{y2\_o}^2) + J_{||z0C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (\rho_{x3\_o}^2 + \rho_{y3\_o}^2) + J_{||z0C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (\rho_{x2\_a}^2 + \rho_{y2\_a}^2) \right) + \right. \\
& + J_{||z0C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (\rho_{x3\_a}^2 + \rho_{y3\_a}^2) + J_{||z0C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (\rho_{x5\_a}^2 + \rho_{y5\_a}^2) + J_{||z0C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (\rho_{x2\_m}^2 + \rho_{y2\_m}^2) + \\
& + J_{||z0C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (\rho_{x3\_m}^2 + \rho_{y3\_m}^2) + J_{||z0C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{x5\_m}^2 + \rho_{y5\_m}^2) + J_{||z0C2}^{(2l)} + m_{f1l} \cdot (\rho_{x2\_l}^2 + \rho_{y2\_l}^2) + \\
& + J_{||z0C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (\rho_{x3\_l}^2 + \rho_{y3\_l}^2) + J_{||z0C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{x5\_l}^2 + \rho_{y5\_l}^2) + J_{||z0C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (\rho_{x2\_c}^2 + \rho_{y2\_c}^2) + \\
& \left. + J_{||z0C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (\rho_{x3\_c}^2 + \rho_{y3\_c}^2) + J_{||z0C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{x5\_c}^2 + \rho_{y5\_c}^2) \right] + \\
& + \dot{q}_2^2 \cdot \left[ J_{z1}^{(1p)} + J_{||z1C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (\rho_{y2\_o}^2 + \rho_{z2\_o}^2) + J_{||z1C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (\rho_{y3\_o}^2 + \rho_{z3\_o}^2) + J_{||z1C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (\rho_{y2\_a}^2 + \rho_{z2\_a}^2) + \right. \\
& + J_{||z1C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (\rho_{y3\_a}^2 + \rho_{z3\_a}^2) + J_{||z1C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (\rho_{y5\_a}^2 + \rho_{z5\_a}^2) + J_{||z1C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (\rho_{y2\_m}^2 + \rho_{z2\_m}^2) + \\
& + J_{||z1C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (\rho_{y3\_m}^2 + \rho_{z3\_m}^2) + J_{||z1C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{y5\_m}^2 + \rho_{z5\_m}^2) + J_{||z1C2}^{(2l)} + m_{f1l} \cdot (\rho_{y2\_l}^2 + \rho_{z2\_l}^2) + \\
& + J_{||z1C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (\rho_{y3\_l}^2 + \rho_{z3\_l}^2) + J_{||z1C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{y5\_l}^2 + \rho_{z5\_l}^2) + J_{||z1C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (\rho_{y2\_c}^2 + \rho_{z2\_c}^2) + \\
& \left. + J_{||z1C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (\rho_{y3\_c}^2 + \rho_{z3\_c}^2) + J_{||z1C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{y5\_c}^2 + \rho_{z5\_c}^2) \right] + \\
& + \dot{q}_3^2 \cdot \left[ J_{z2}^{(1p)} + J_{||z2C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (\rho_{x2\_o}^2 + \rho_{z2\_o}^2) + J_{||z2C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (\rho_{x3\_o}^2 + \rho_{z3\_o}^2) + J_{||z2C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (\rho_{x2\_a}^2 + \rho_{z2\_a}^2) + \right. \\
& + J_{||z2C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (\rho_{x3\_a}^2 + \rho_{z3\_a}^2) + J_{||z2C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (\rho_{x5\_a}^2 + \rho_{z5\_a}^2) + J_{||z2C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (\rho_{x2\_m}^2 + \rho_{z2\_m}^2) + \\
& + J_{||z2C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (\rho_{x3\_m}^2 + \rho_{z3\_m}^2) + J_{||z2C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{x5\_m}^2 + \rho_{z5\_m}^2) + J_{||z2C2}^{(2l)} + m_{f1l} \cdot (\rho_{x2\_l}^2 + \rho_{z2\_l}^2) + \\
& + J_{||z2C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (\rho_{x3\_l}^2 + \rho_{z3\_l}^2) + J_{||z2C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{x5\_l}^2 + \rho_{z5\_l}^2) + J_{||z2C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (\rho_{x2\_c}^2 + \rho_{z2\_c}^2) + \\
& \left. + J_{||z2C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (\rho_{x3\_c}^2 + \rho_{z3\_c}^2) + J_{||z2C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{x5\_c}^2 + \rho_{z5\_c}^2) \right] + \\
& + \dot{q}_{4o}^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2o)} + J_{||z3C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (\rho_{x4\_o}^2 + \rho_{y4\_o}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{5o}^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2o)} + J_{||z4C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (\rho_{x4\_o}^2 + \rho_{z4\_o}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{6o}^2 \cdot J_{z5}^{(3o)} + \\
& + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2a)} + J_{||z3C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (\rho_{x4\_a}^2 + \rho_{y4\_a}^2) + J_{||z3C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (\rho_{x6\_a}^2 + \rho_{y6\_a}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{5a}^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2a)} + J_{||z4C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (\rho_{x4\_a}^2 + \rho_{z4\_a}^2) + J_{||z4C4}^{(4a)} + m_{f3} \cdot (\rho_{x6\_a}^2 + \rho_{z6\_a}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{6a}^2 \cdot \left( J_{z5}^{(3a)} + J_{||z5C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (\rho_{x7\_a}^2 + \rho_{y7\_a}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{7a}^2 \cdot J_{z6}^{(4a)} + \\
& + \dot{q}_{4m}^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2m)} + J_{||z3C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (\rho_{x4\_m}^2 + \rho_{y4\_m}^2) + J_{||z3C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{x6\_m}^2 + \rho_{y6\_m}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{5m}^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2m)} + J_{||z4C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (\rho_{x4\_m}^2 + \rho_{z4\_m}^2) + J_{||z4C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{x6\_m}^2 + \rho_{z6\_m}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{6m}^2 \cdot \left( J_{z5}^{(3m)} + J_{||z5C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (\rho_{x7\_m}^2 + \rho_{y7\_m}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{7m}^2 \cdot J_{z6}^{(4m)} + \\
& + \dot{q}_{4l}^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2l)} + J_{||z3C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (\rho_{x4\_l}^2 + \rho_{y4\_l}^2) + J_{||z3C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{x6\_l}^2 + \rho_{y6\_l}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{5l}^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2l)} + J_{||z4C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (\rho_{x4\_l}^2 + \rho_{z4\_l}^2) + J_{||z4C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{x6\_l}^2 + \rho_{z6\_l}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{6l}^2 \cdot \left( J_{z5}^{(3l)} + J_{||z5C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (\rho_{x7\_l}^2 + \rho_{y7\_l}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{7l}^2 \cdot J_{z6}^{(4l)} + \\
& + \dot{q}_{4c}^2 \cdot \left( J_{z3}^{(2c)} + J_{||z3C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (\rho_{x4\_c}^2 + \rho_{y4\_c}^2) + J_{||z3C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{x6\_c}^2 + \rho_{y6\_c}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{5c}^2 \cdot \left( J_{z4}^{(2c)} + J_{||z4C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (\rho_{x4\_c}^2 + \rho_{z4\_c}^2) + J_{||z4C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{x6\_c}^2 + \rho_{z6\_c}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{6c}^2 \cdot \left( J_{z5}^{(3c)} + J_{||z5C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (\rho_{x7\_c}^2 + \rho_{y7\_c}^2) \right) + \\
& + \dot{q}_{7c}^2 \cdot J_{z6}^{(4c)} \left. \right]
\end{aligned}$$

(3.146)

Având forma generală a energiei cinetice, se poate trece la calcularea membrului stâng al ecuațiilor lui Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} = & \dot{q}_1 \cdot \left[ J_{\parallel z0}^{(1p)} + J_{\parallel z0C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{x2_o}^2 + p_{y2_o}^2) + J_{\parallel z0C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o}^2 + p_{y3_o}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a}^2 + p_{y2_a}^2) + \right. \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a}^2 + p_{y3_a}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a}^2 + p_{y5_a}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m}^2 + p_{y2_m}^2) + \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3m)} + m_{f2_m} \cdot (p_{x3_m}^2 + p_{y3_m}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4m)} + m_{f3_m} \cdot (p_{x5_m}^2 + p_{y5_m}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{x2_i}^2 + p_{y2_i}^2) + \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i}^2 + p_{y3_i}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i}^2 + p_{y5_i}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c}^2 + p_{y2_c}^2) + \\ & \left. + J_{\parallel z0C3}^{(3c)} + m_{f2_c} \cdot (p_{x3_c}^2 + p_{y3_c}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c}^2 + p_{y5_c}^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \right) = & \ddot{q}_1 \cdot \left[ J_{x0}^{(1p)} + J_{\parallel z0C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{x2_o}^2 + p_{y2_o}^2) + J_{\parallel z0C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o}^2 + p_{y3_o}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a}^2 + p_{y2_a}^2) + \right. \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a}^2 + p_{y3_a}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a}^2 + p_{y5_a}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m}^2 + p_{y2_m}^2) + \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3m)} + m_{f2_m} \cdot (p_{x3_m}^2 + p_{y3_m}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4m)} + m_{f3_m} \cdot (p_{x5_m}^2 + p_{y5_m}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{x2_i}^2 + p_{y2_i}^2) + \\ & + J_{\parallel z0C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i}^2 + p_{y3_i}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i}^2 + p_{y5_i}^2) + J_{\parallel z0C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c}^2 + p_{y2_c}^2) + \\ & \left. + J_{\parallel z0C3}^{(3c)} + m_{f2_c} \cdot (p_{x3_c}^2 + p_{y3_c}^2) + J_{\parallel z0C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c}^2 + p_{y5_c}^2) \right] + \\ & + 2 \cdot \dot{q}_1 \cdot \left[ m_{f1o} \cdot (p_{x2_o} \cdot p'_{x2_o} + p_{y2_o} \cdot p'_{y2_o}) + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o} \cdot p'_{x3_o} + p_{y3_o} \cdot p'_{y3_o}) + \right. \\ & + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a} \cdot p'_{x2_a} + p_{y2_a} \cdot p'_{y2_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a} \cdot p'_{x3_a} + p_{y3_a} \cdot p'_{y3_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a} \cdot p'_{x5_a} + p_{y5_a} \cdot p'_{y5_a}) + \\ & + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m} \cdot p'_{x2_m} + p_{y2_m} \cdot p'_{y2_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m} \cdot p'_{x3_m} + p_{y3_m} \cdot p'_{y3_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m} \cdot p'_{x5_m} + p_{y5_m} \cdot p'_{y5_m}) + \\ & + m_{f1i} \cdot (p_{x2_i} \cdot p'_{x2_i} + p_{y2_i} \cdot p'_{y2_i}) + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i} \cdot p'_{x3_i} + p_{y3_i} \cdot p'_{y3_i}) + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i} \cdot p'_{x5_i} + p_{y5_i} \cdot p'_{y5_i}) + \\ & \left. + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c} \cdot p'_{x2_c} + p_{y2_c} \cdot p'_{y2_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c} \cdot p'_{x3_c} + p_{y3_c} \cdot p'_{y3_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c} \cdot p'_{x5_c} + p_{y5_c} \cdot p'_{y5_c}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_1} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_1} m_{f1o} + p_{x3_o} \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_1} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_1} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_1} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_1} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_1} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_1} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_1} m_{f3m} + p_{x2_i} \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_1} m_{f1i} + p_{x3_i} \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_1} m_{f2i} + \\ & \left. + p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_1} m_{f3i} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_1} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_1} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_1} m_{f3c} \right) + \\ & + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_o} \frac{\partial p_{y2_o}}{\partial q_1} m_{f1o} + p_{y3_o} \frac{\partial p_{y3_o}}{\partial q_1} m_{f2o} + p_{y2_a} \frac{\partial p_{y2_a}}{\partial q_1} m_{f1a} + p_{y3_a} \frac{\partial p_{y3_a}}{\partial q_1} m_{f2a} + p_{y5_a} \frac{\partial p_{y5_a}}{\partial q_1} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{y2_m} \frac{\partial p_{y2_m}}{\partial q_1} m_{f1m} + p_{y3_m} \frac{\partial p_{y3_m}}{\partial q_1} m_{f2m} + p_{y5_m} \frac{\partial p_{y5_m}}{\partial q_1} m_{f3m} + p_{y2_i} \frac{\partial p_{y2_i}}{\partial q_1} m_{f1i} + p_{y3_i} \frac{\partial p_{y3_i}}{\partial q_1} m_{f2i} + \\ & \left. + p_{y5_i} \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_1} m_{f3i} + p_{y2_c} \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_1} m_{f1c} + p_{y3_c} \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_1} m_{f2c} + p_{y5_c} \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_1} m_{f3c} \right) \end{aligned}$$

Prima ecuație dinamică devine:

(3.147)

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 & \cdot \left[ J_{x0}^{(1p)} + J_{x0C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{x2_o}^2 + p_{y2_o}^2) + J_{x0C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o}^2 + p_{y3_o}^2) + J_{x0C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a}^2 + p_{y2_a}^2) + \right. \\
& + J_{x0C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a}^2 + p_{y3_a}^2) + J_{x0C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a}^2 + p_{y5_a}^2) + J_{x0C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m}^2 + p_{y2_m}^2) + \\
& + J_{x0C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m}^2 + p_{y3_m}^2) + J_{x0C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m}^2 + p_{y5_m}^2) + J_{x0C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{x2_i}^2 + p_{y2_i}^2) + \\
& + J_{x0C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i}^2 + p_{y3_i}^2) + J_{x0C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i}^2 + p_{y5_i}^2) + J_{x0C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c}^2 + p_{y2_c}^2) + \\
& + J_{x0C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c}^2 + p_{y3_c}^2) + J_{x0C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c}^2 + p_{y5_c}^2) \left. \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_1 \cdot \left[ m_{f1o} \cdot (p_{x2_o} \cdot p'_{x2_o} + p_{y2_o} \cdot p'_{y2_o}) + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o} \cdot p'_{x3_o} + p_{y3_o} \cdot p'_{y3_o}) + \right. \\
& + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a} \cdot p'_{x2_a} + p_{y2_a} \cdot p'_{y2_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a} \cdot p'_{x3_a} + p_{y3_a} \cdot p'_{y3_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a} \cdot p'_{x5_a} + p_{y5_a} \cdot p'_{y5_a}) + \\
& + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m} \cdot p'_{x2_m} + p_{y2_m} \cdot p'_{y2_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m} \cdot p'_{x3_m} + p_{y3_m} \cdot p'_{y3_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m} \cdot p'_{x5_m} + p_{y5_m} \cdot p'_{y5_m}) + \\
& + m_{f1i} \cdot (p_{x2_i} \cdot p'_{x2_i} + p_{y2_i} \cdot p'_{y2_i}) + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i} \cdot p'_{x3_i} + p_{y3_i} \cdot p'_{y3_i}) + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i} \cdot p'_{x5_i} + p_{y5_i} \cdot p'_{y5_i}) + \\
& + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c} \cdot p'_{x2_c} + p_{y2_c} \cdot p'_{y2_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c} \cdot p'_{x3_c} + p_{y3_c} \cdot p'_{y3_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c} \cdot p'_{x5_c} + p_{y5_c} \cdot p'_{y5_c}) \left. \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_1} m_{f1o} + p_{x3_o} \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_1} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_1} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_1} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_1} m_{f3a} + \right. \right. \\
& + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_1} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_1} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_1} m_{f3m} + p_{x2_i} \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_1} m_{f1i} + p_{x3_i} \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_1} m_{f2i} + \\
& \left. \left. + p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_1} m_{f3i} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_1} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_1} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_1} m_{f3c} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_o} \frac{\partial p_{y2_o}}{\partial q_1} m_{f1o} + p_{y3_o} \frac{\partial p_{y3_o}}{\partial q_1} m_{f2o} + p_{y2_a} \frac{\partial p_{y2_a}}{\partial q_1} m_{f1a} + p_{y3_a} \frac{\partial p_{y3_a}}{\partial q_1} m_{f2a} + p_{y5_a} \frac{\partial p_{y5_a}}{\partial q_1} m_{f3a} + \right. \\
& + p_{y2_m} \frac{\partial p_{y2_m}}{\partial q_1} m_{f1m} + p_{y3_m} \frac{\partial p_{y3_m}}{\partial q_1} m_{f2m} + p_{y5_m} \frac{\partial p_{y5_m}}{\partial q_1} m_{f3m} + p_{y2_i} \frac{\partial p_{y2_i}}{\partial q_1} m_{f1i} + p_{y3_i} \frac{\partial p_{y3_i}}{\partial q_1} m_{f2i} + \\
& \left. \left. + p_{y5_i} \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_1} m_{f3i} + p_{y2_c} \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_1} m_{f1c} + p_{y3_c} \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_1} m_{f2c} + p_{y5_c} \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_1} m_{f3c} \right) \right] = M_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} & = \dot{q}_2 \cdot \left[ J_{x1}^{(1p)} + J_{x1C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{y2_o}^2 + p_{x2_o}^2) + J_{x1C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{y3_o}^2 + p_{x3_o}^2) + J_{x1C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{y2_a}^2 + p_{x2_a}^2) + \right. \\
& + J_{x1C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{y3_a}^2 + p_{x3_a}^2) + J_{x1C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{y5_a}^2 + p_{x5_a}^2) + J_{x1C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{y2_m}^2 + p_{x2_m}^2) + \\
& + J_{x1C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{y3_m}^2 + p_{x3_m}^2) + J_{x1C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{y5_m}^2 + p_{x5_m}^2) + J_{x1C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{y2_i}^2 + p_{x2_i}^2) + \\
& + J_{x1C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{y3_i}^2 + p_{x3_i}^2) + J_{x1C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{y5_i}^2 + p_{x5_i}^2) + J_{x1C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{y2_c}^2 + p_{x2_c}^2) + \\
& \left. + J_{x1C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{y3_c}^2 + p_{x3_c}^2) + J_{x1C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{y5_c}^2 + p_{x5_c}^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} \right) = & \ddot{q}_2 \cdot \left[ J_{z1}^{(1p)} + J_{|z1C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{y2_o}^2 + p_{z2_o}^2) + J_{|z1C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{y3_o}^2 + p_{z3_o}^2) + J_{|z1C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{y2_a}^2 + p_{z2_a}^2) + \right. \\ & + J_{|z1C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{y3_a}^2 + p_{z3_a}^2) + J_{|z1C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{y5_a}^2 + p_{z5_a}^2) + J_{|z1C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{y2_m}^2 + p_{z2_m}^2) + \\ & + J_{|z1C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{y3_m}^2 + p_{z3_m}^2) + J_{|z1C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{y5_m}^2 + p_{z5_m}^2) + J_{|z1C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{y2_i}^2 + p_{z2_i}^2) + \\ & + J_{|z1C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{y3_i}^2 + p_{z3_i}^2) + J_{|z1C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{y5_i}^2 + p_{z5_i}^2) + J_{|z1C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{y2_c}^2 + p_{z2_c}^2) + \\ & + J_{|z1C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{y3_c}^2 + p_{z3_c}^2) + J_{|z1C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{y5_c}^2 + p_{z5_c}^2) \left. \right] + \\ & + 2 \cdot \dot{q}_2 \left[ m_{f1o} \cdot (p_{y2_o} \cdot p'_{y2_o} + p_{z2_o} \cdot p'_{z2_o}) + m_{f2o} \cdot (p_{y3_o} \cdot p'_{y3_o} + p_{z3_o} \cdot p'_{z3_o}) + \right. \\ & + m_{f1a} \cdot (p_{y2_a} \cdot p'_{y2_a} + p_{z2_a} \cdot p'_{z2_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{y3_a} \cdot p'_{y3_a} + p_{z3_a} \cdot p'_{z3_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{y5_a} \cdot p'_{y5_a} + p_{z5_a} \cdot p'_{z5_a}) + \\ & + m_{f1m} \cdot (p_{y2_m} \cdot p'_{y2_m} + p_{z2_m} \cdot p'_{z2_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{y3_m} \cdot p'_{y3_m} + p_{z3_m} \cdot p'_{z3_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{y5_m} \cdot p'_{y5_m} + p_{z5_m} \cdot p'_{z5_m}) + \\ & + m_{f1i} \cdot (p_{y2_i} \cdot p'_{y2_i} + p_{z2_i} \cdot p'_{z2_i}) + m_{f2i} \cdot (p_{y3_i} \cdot p'_{y3_i} + p_{z3_i} \cdot p'_{z3_i}) + m_{f3i} \cdot (p_{y5_i} \cdot p'_{y5_i} + p_{z5_i} \cdot p'_{z5_i}) + \\ & \left. + m_{f1c} \cdot (p_{y2_c} \cdot p'_{y2_c} + p_{z2_c} \cdot p'_{z2_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{y3_c} \cdot p'_{y3_c} + p_{z3_c} \cdot p'_{z3_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{y5_c} \cdot p'_{y5_c} + p_{z5_c} \cdot p'_{z5_c}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_2} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{x3_o} \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{x2_i} \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{x3_i} \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\ & \left. + p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) + \\ & + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_o} \frac{\partial p_{y2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{y3_o} \frac{\partial p_{y3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{y2_a} \frac{\partial p_{y2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{y3_a} \frac{\partial p_{y3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{y5_a} \frac{\partial p_{y5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{y2_m} \frac{\partial p_{y2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{y3_m} \frac{\partial p_{y3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{y5_m} \frac{\partial p_{y5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{y2_i} \frac{\partial p_{y2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{y3_i} \frac{\partial p_{y3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\ & \left. + p_{y5_i} \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{y2_c} \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{y3_c} \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{y5_c} \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{x3_o} \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{x2_i} \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{x3_i} \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\ & \left. + p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) \end{aligned}$$

A doua ecuație dinamică devine:

(3.148)

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_2 \cdot & \left[ J_{\|z1C2}^{(1p)} + J_{\|z1C2}^{(2o)} + m_{f1o} \cdot (p_{y2_o}^2 + p_{z2_o}^2) + J_{\|z1C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{y3_o}^2 + p_{z3_o}^2) + J_{\|z1C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{y2_a}^2 + p_{z2_a}^2) + \right. \\
& + J_{\|z1C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{y3_a}^2 + p_{z3_a}^2) + J_{\|z1C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{y5_a}^2 + p_{z5_a}^2) + J_{\|z1C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{y2_m}^2 + p_{z2_m}^2) + \\
& + J_{\|z1C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{y3_m}^2 + p_{z3_m}^2) + J_{\|z1C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{y5_m}^2 + p_{z5_m}^2) + J_{\|z1C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{y2_i}^2 + p_{z2_i}^2) + \\
& + J_{\|z1C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{y3_i}^2 + p_{z3_i}^2) + J_{\|z1C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{y5_i}^2 + p_{z5_i}^2) + J_{\|z1C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{y2_c}^2 + p_{z2_c}^2) + \\
& \left. + J_{\|z1C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{y3_c}^2 + p_{z3_c}^2) + J_{\|z1C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{y5_c}^2 + p_{z5_c}^2) \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_2 \left[ m_{f1o} \cdot (p_{y2_o} \cdot p'_{y2_o} + p_{z2_o} \cdot p'_{z2_o}) + m_{f2o} \cdot (p_{y3_o} \cdot p'_{y3_o} + p_{z3_o} \cdot p'_{z3_o}) + \right. \\
& + m_{f1a} \cdot (p_{y2_a} \cdot p'_{y2_a} + p_{z2_a} \cdot p'_{z2_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{y3_a} \cdot p'_{y3_a} + p_{z3_a} \cdot p'_{z3_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{y5_a} \cdot p'_{y5_a} + p_{z5_a} \cdot p'_{z5_a}) + \\
& + m_{f1m} \cdot (p_{y2_m} \cdot p'_{y2_m} + p_{z2_m} \cdot p'_{z2_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{y3_m} \cdot p'_{y3_m} + p_{z3_m} \cdot p'_{z3_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{y5_m} \cdot p'_{y5_m} + p_{z5_m} \cdot p'_{z5_m}) + \\
& + m_{f1i} \cdot (p_{y2_i} \cdot p'_{y2_i} + p_{z2_i} \cdot p'_{z2_i}) + m_{f2i} \cdot (p_{y3_i} \cdot p'_{y3_i} + p_{z3_i} \cdot p'_{z3_i}) + m_{f3i} \cdot (p_{y5_i} \cdot p'_{y5_i} + p_{z5_i} \cdot p'_{z5_i}) + \\
& \left. + m_{f1c} \cdot (p_{y2_c} \cdot p'_{y2_c} + p_{z2_c} \cdot p'_{z2_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{y3_c} \cdot p'_{y3_c} + p_{z3_c} \cdot p'_{z3_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{y5_c} \cdot p'_{y5_c} + p_{z5_c} \cdot p'_{z5_c}) \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \cdot \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{x3_o} \cdot \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{x2_a} \cdot \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{x3_a} \cdot \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{x5_a} \cdot \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \right. \\
& + p_{x2_m} \cdot \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{x3_m} \cdot \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{x5_m} \cdot \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{x2_i} \cdot \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{x3_i} \cdot \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{x5_i} \cdot \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{x2_c} \cdot \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{x3_c} \cdot \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{x5_c} \cdot \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_o} \cdot \frac{\partial p_{y2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{y3_o} \cdot \frac{\partial p_{y3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{y2_a} \cdot \frac{\partial p_{y2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{y3_a} \cdot \frac{\partial p_{y3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{y5_a} \cdot \frac{\partial p_{y5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \\
& + p_{y2_m} \cdot \frac{\partial p_{y2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{y3_m} \cdot \frac{\partial p_{y3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{y5_m} \cdot \frac{\partial p_{y5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{y2_i} \cdot \frac{\partial p_{y2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{y3_i} \cdot \frac{\partial p_{y3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{y5_i} \cdot \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{y2_c} \cdot \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{y3_c} \cdot \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{y5_c} \cdot \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \cdot \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_2} m_{f1o} + p_{x3_o} \cdot \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_2} m_{f2o} + p_{x2_a} \cdot \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_2} m_{f1a} + p_{x3_a} \cdot \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_2} m_{f2a} + p_{x5_a} \cdot \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_2} m_{f3a} + \right. \\
& + p_{x2_m} \cdot \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_2} m_{f1m} + p_{x3_m} \cdot \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_2} m_{f2m} + p_{x5_m} \cdot \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_2} m_{f3m} + p_{x2_i} \cdot \frac{\partial p_{x2_i}}{\partial q_2} m_{f1i} + p_{x3_i} \cdot \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_2} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{x5_i} \cdot \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_2} m_{f3i} + p_{x2_c} \cdot \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_2} m_{f1c} + p_{x3_c} \cdot \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_2} m_{f2c} + p_{x5_c} \cdot \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_2} m_{f3c} \right) \left. \right] = M_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_3 \cdot & \left[ J_{z2}^{(1p)} + J_{\|z2C2}^{(2o)} + m_{f1o} (p_{x2_o}^2 + p_{z2_o}^2) + J_{\|z2C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o}^2 + p_{z3_o}^2) + J_{\|z2C2}^{(2a)} + m_{f1a} (p_{x2_a}^2 + p_{z2_a}^2) + \right. \\
& + J_{\|z2C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a}^2 + p_{z3_a}^2) + J_{\|z2C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a}^2 + p_{z5_a}^2) + J_{\|z2C2}^{(2m)} + m_{f1m} (p_{x2_m}^2 + p_{z2_m}^2) + \\
& + J_{\|z2C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m}^2 + p_{z3_m}^2) + J_{\|z2C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m}^2 + p_{z5_m}^2) + J_{\|z2C2}^{(2i)} + m_{f1i} (p_{x2_i}^2 + p_{z2_i}^2) + \\
& + J_{\|z2C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x3_i}^2 + p_{z3_i}^2) + J_{\|z2C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x5_i}^2 + p_{z5_i}^2) + J_{\|z2C2}^{(2c)} + m_{f1c} (p_{x2_c}^2 + p_{z2_c}^2) + \\
& \left. + J_{\|z2C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c}^2 + p_{z3_c}^2) + J_{\|z2C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c}^2 + p_{z5_c}^2) \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_3} \right) = & \ddot{q}_3 \cdot \left[ J_{|z2}^{(1p)} + J_{|z2C2}^{(2o)} + m_{f1o} (p_{x2_o}^2 + p_{z2_o}^2) + J_{|z2C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o}^2 + p_{z3_o}^2) + J_{|z2C2}^{(2a)} + m_{f1a} (p_{x2_a}^2 + p_{z2_a}^2) + \right. \\ & + J_{|z2C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a}^2 + p_{z3_a}^2) + J_{|z2C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a}^2 + p_{z5_a}^2) + J_{|z2C2}^{(2m)} + m_{f1m} (p_{x2_m}^2 + p_{z2_m}^2) + \\ & + J_{|z2C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m}^2 + p_{z3_m}^2) + J_{|z2C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m}^2 + p_{z5_m}^2) + J_{|z2C2}^{(2l)} + m_{f1l} (p_{x2_l}^2 + p_{z2_l}^2) + \\ & + J_{|z2C3}^{(3l)} + m_{f2l} \cdot (p_{x3_l}^2 + p_{z3_l}^2) + J_{|z2C4}^{(4l)} + m_{f3l} \cdot (p_{x5_l}^2 + p_{z5_l}^2) + J_{|z2C2}^{(2c)} + m_{f1c} (p_{x2_c}^2 + p_{z2_c}^2) + \\ & \left. + J_{|z2C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c}^2 + p_{z3_c}^2) + J_{|z2C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c}^2 + p_{z5_c}^2) \right] + \\ & + 2 \cdot \dot{q}_3 \cdot \left[ m_{f1o} \cdot (p_{x2_o} \cdot p'_{x2_o} + p_{z2_o} \cdot p'_{z2_o}) + m_{f2o} \cdot (p_{x3_o} \cdot p'_{x3_o} + p_{z3_o} \cdot p'_{z3_o}) + \right. \\ & + m_{f1a} \cdot (p_{x2_a} \cdot p'_{x2_a} + p_{z2_a} \cdot p'_{z2_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{x3_a} \cdot p'_{x3_a} + p_{z3_a} \cdot p'_{z3_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x5_a} \cdot p'_{x5_a} + p_{z5_a} \cdot p'_{z5_a}) + \\ & + m_{f1m} \cdot (p_{x2_m} \cdot p'_{x2_m} + p_{z2_m} \cdot p'_{z2_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{x3_m} \cdot p'_{x3_m} + p_{z3_m} \cdot p'_{z3_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x5_m} \cdot p'_{x5_m} + p_{z5_m} \cdot p'_{z5_m}) + \\ & + m_{f1l} \cdot (p_{x2_l} \cdot p'_{x2_l} + p_{z2_l} \cdot p'_{z2_l}) + m_{f2l} \cdot (p_{x3_l} \cdot p'_{x3_l} + p_{z3_l} \cdot p'_{z3_l}) + m_{f3l} \cdot (p_{x5_l} \cdot p'_{x5_l} + p_{z5_l} \cdot p'_{z5_l}) + \\ & \left. + m_{f1c} \cdot (p_{x2_c} \cdot p'_{x2_c} + p_{z2_c} \cdot p'_{z2_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{x3_c} \cdot p'_{x3_c} + p_{z3_c} \cdot p'_{z3_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x5_c} \cdot p'_{x5_c} + p_{z5_c} \cdot p'_{z5_c}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_3} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_3} m_{f1o} + p_{z3_o} \frac{\partial p_{z3_o}}{\partial q_3} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{x2_l} \frac{\partial p_{x2_l}}{\partial q_3} m_{f1l} + p_{x3_l} \frac{\partial p_{x3_l}}{\partial q_3} m_{f2l} + \\ & \left. + p_{x5_l} \frac{\partial p_{x5_l}}{\partial q_3} m_{f3l} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) + \\ & + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_o} \frac{\partial p_{y2_o}}{\partial q_3} m_{f1o} + p_{y3_o} \frac{\partial p_{y3_o}}{\partial q_3} m_{f2o} + p_{y2_a} \frac{\partial p_{y2_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{y3_a} \frac{\partial p_{y3_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{y5_a} \frac{\partial p_{y5_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{y2_m} \frac{\partial p_{y2_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{y3_m} \frac{\partial p_{y3_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{y5_m} \frac{\partial p_{y5_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{y2_l} \frac{\partial p_{y2_l}}{\partial q_3} m_{f1l} + p_{y3_l} \frac{\partial p_{y3_l}}{\partial q_3} m_{f2l} + \\ & \left. + p_{y5_l} \frac{\partial p_{y5_l}}{\partial q_3} m_{f3l} + p_{y2_c} \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{y3_c} \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{y5_c} \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_o} \frac{\partial p_{x2_o}}{\partial q_3} m_{f1o} + p_{x3_o} \frac{\partial p_{x3_o}}{\partial q_3} m_{f2o} + p_{x2_a} \frac{\partial p_{x2_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{x3_a} \frac{\partial p_{x3_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x5_a} \frac{\partial p_{x5_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \\ & + p_{x2_m} \frac{\partial p_{x2_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{x3_m} \frac{\partial p_{x3_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{x5_m} \frac{\partial p_{x5_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{x2_l} \frac{\partial p_{x2_l}}{\partial q_3} m_{f1l} + p_{x3_l} \frac{\partial p_{x3_l}}{\partial q_3} m_{f2l} + \\ & \left. + p_{x5_l} \frac{\partial p_{x5_l}}{\partial q_3} m_{f3l} + p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) \end{aligned}$$

A treia ecuație dinamică este:

(3.149)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_3 \cdot \left[ J_{|z2C2}^{(1p)} + J_{|z2C2}^{(2a)} + m_{f10} \cdot (p_{x2\_o}^2 + p_{y2\_o}^2) + J_{|z2C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3\_o}^2 + p_{y3\_o}^2) + J_{|z2C2}^{(2a)} + m_{f1a} \cdot (p_{x2\_a}^2 + p_{y2\_a}^2) + \right. \\
& + J_{|z2C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x3\_a}^2 + p_{y3\_a}^2) + J_{|z2C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x5\_a}^2 + p_{y5\_a}^2) + J_{|z2C2}^{(2m)} + m_{f1m} \cdot (p_{x2\_m}^2 + p_{y2\_m}^2) + \\
& + J_{|z2C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x3\_m}^2 + p_{y3\_m}^2) + J_{|z2C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x5\_m}^2 + p_{y5\_m}^2) + J_{|z2C2}^{(2i)} + m_{f1i} \cdot (p_{x2\_i}^2 + p_{y2\_i}^2) + \\
& + J_{|z2C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x3\_i}^2 + p_{y3\_i}^2) + J_{|z2C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x5\_i}^2 + p_{y5\_i}^2) + J_{|z2C2}^{(2c)} + m_{f1c} \cdot (p_{x2\_c}^2 + p_{y2\_c}^2) + \\
& + J_{|z2C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x3\_c}^2 + p_{y3\_c}^2) + J_{|z2C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x5\_c}^2 + p_{y5\_c}^2) \left. \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_3 \cdot \left[ m_{f10} \cdot (p_{x2\_o} \cdot p'_{y2\_o} + p_{y2\_o} \cdot p'_{x2\_o}) + m_{f2a} \cdot (p_{x3\_o} \cdot p'_{y3\_o} + p_{y3\_o} \cdot p'_{x3\_o}) + \right. \\
& + m_{f1a} \cdot (p_{x2\_a} \cdot p'_{y2\_a} + p_{y2\_a} \cdot p'_{x2\_a}) + m_{f2a} \cdot (p_{x3\_a} \cdot p'_{y3\_a} + p_{y3\_a} \cdot p'_{x3\_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x5\_a} \cdot p'_{y5\_a} + p_{y5\_a} \cdot p'_{x5\_a}) + \\
& + m_{f1m} \cdot (p_{x2\_m} \cdot p'_{y2\_m} + p_{y2\_m} \cdot p'_{x2\_m}) + m_{f2m} \cdot (p_{x3\_m} \cdot p'_{y3\_m} + p_{y3\_m} \cdot p'_{x3\_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x5\_m} \cdot p'_{y5\_m} + p_{y5\_m} \cdot p'_{x5\_m}) + \\
& + m_{f1i} \cdot (p_{x2\_i} \cdot p'_{y2\_i} + p_{y2\_i} \cdot p'_{x2\_i}) + m_{f2i} \cdot (p_{x3\_i} \cdot p'_{y3\_i} + p_{y3\_i} \cdot p'_{x3\_i}) + m_{f3i} \cdot (p_{x5\_i} \cdot p'_{y5\_i} + p_{y5\_i} \cdot p'_{x5\_i}) + \\
& + m_{f1c} \cdot (p_{x2\_c} \cdot p'_{y2\_c} + p_{y2\_c} \cdot p'_{x2\_c}) + m_{f2c} \cdot (p_{x3\_c} \cdot p'_{y3\_c} + p_{y3\_c} \cdot p'_{x3\_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x5\_c} \cdot p'_{y5\_c} + p_{y5\_c} \cdot p'_{x5\_c}) \left. \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \cdot \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_3} m_{f10} + p_{x3\_o} \cdot \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x2\_a} \cdot \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{x3\_a} \cdot \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x5\_a} \cdot \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \right. \\
& + p_{x2\_m} \cdot \frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{x3\_m} \cdot \frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{x5\_m} \cdot \frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{x2\_i} \cdot \frac{\partial p_{x2\_i}}{\partial q_3} m_{f1i} + p_{x3\_i} \cdot \frac{\partial p_{x3\_i}}{\partial q_3} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{x5\_i} \cdot \frac{\partial p_{x5\_i}}{\partial q_3} m_{f3i} + p_{x2\_c} \cdot \frac{\partial p_{x2\_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{x3\_c} \cdot \frac{\partial p_{x3\_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{x5\_c} \cdot \frac{\partial p_{x5\_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_o} \cdot \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_3} m_{f10} + p_{y3\_o} \cdot \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{y2\_a} \cdot \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{y3\_a} \cdot \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{y5\_a} \cdot \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \\
& + p_{y2\_m} \cdot \frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{y3\_m} \cdot \frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{y5\_m} \cdot \frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{y2\_i} \cdot \frac{\partial p_{y2\_i}}{\partial q_3} m_{f1i} + p_{y3\_i} \cdot \frac{\partial p_{y3\_i}}{\partial q_3} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{y5\_i} \cdot \frac{\partial p_{y5\_i}}{\partial q_3} m_{f3i} + p_{y2\_c} \cdot \frac{\partial p_{y2\_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{y3\_c} \cdot \frac{\partial p_{y3\_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{y5\_c} \cdot \frac{\partial p_{y5\_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \cdot \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_3} m_{f10} + p_{x3\_o} \cdot \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x2\_a} \cdot \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_3} m_{f1a} + p_{x3\_a} \cdot \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_3} m_{f2a} + p_{x5\_a} \cdot \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_3} m_{f3a} + \right. \\
& + p_{x2\_m} \cdot \frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_3} m_{f1m} + p_{x3\_m} \cdot \frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_3} m_{f2m} + p_{x5\_m} \cdot \frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_3} m_{f3m} + p_{x2\_i} \cdot \frac{\partial p_{x2\_i}}{\partial q_3} m_{f1i} + p_{x3\_i} \cdot \frac{\partial p_{x3\_i}}{\partial q_3} m_{f2i} + \\
& \left. + p_{x5\_i} \cdot \frac{\partial p_{x5\_i}}{\partial q_3} m_{f3i} + p_{x2\_c} \cdot \frac{\partial p_{x2\_c}}{\partial q_3} m_{f1c} + p_{x3\_c} \cdot \frac{\partial p_{x3\_c}}{\partial q_3} m_{f2c} + p_{x5\_c} \cdot \frac{\partial p_{x5\_c}}{\partial q_3} m_{f3c} \right) \left. \right] = M_3
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{4o}} = \dot{q}_{4o} \cdot \left[ J_{z3}^{(2o)} + J_{|z3C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{y4\_o}^2) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{4o}} \right) = \ddot{q}_{4o} \cdot \left[ J_{z3}^{(2o)} + J_{|z3C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{y4\_o}^2) \right] + 2 \cdot \dot{q}_{4o} \cdot m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o} \cdot p'_{x4\_o} + p_{y4\_o} \cdot p'_{y4\_o})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{4o}} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{x3\_o} \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_o} \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{y3\_o} \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_o} \frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{z3\_o} \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + \dot{q}_{4o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{4o}} + p_{y4\_o} \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{4o}} \right) + \\ & + \dot{q}_{5o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{4o}} + p_{z4\_o} \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{4o}} \right) \end{aligned}$$

A patra ecuație dinamică este: (3.150)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{4o} \cdot [J_{z3}^{(2o)} + J_{\parallel z3C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{y4\_o}^2)] + 2 \cdot \dot{q}_{4o} \cdot m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o} \cdot p'_{x4\_o} + p_{y4\_o} \cdot p'_{y4\_o}) - \\ - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{x3\_o} \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_o} \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{y3\_o} \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + \right. \\ \left. + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_o} \frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f1o} + p_{z3\_o} \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{4o}} m_{f2o} \right) + \dot{q}_{4o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{4o}} + p_{y4\_o} \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{4o}} \right) + \right. \\ \left. + \dot{q}_{5o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{4o}} + p_{z4\_o} \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{4o}} \right) \right] = M_4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{5o}} = \dot{q}_{5o} \cdot [J_{z4}^{(2o)} + J_{\parallel z4C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{z4\_o}^2)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{5o}} \right) = \ddot{q}_{5o} \cdot [J_{z4}^{(2o)} + J_{\parallel z4C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{z4\_o}^2)] + 2 \cdot \dot{q}_{5o} \cdot m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o} \cdot p'_{x4\_o} + p_{z4\_o} \cdot p'_{z4\_o})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{5o}} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{x3\_o} \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_o} \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{y3\_o} \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_o} \frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{z3\_o} \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + \dot{q}_{4o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{5o}} + p_{y4\_o} \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{5o}} \right) + \\ & + \dot{q}_{5o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{5o}} + p_{z4\_o} \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{5o}} \right) \end{aligned}$$

A cincia ecuație dinamică este: (3.151)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{5o} \cdot [J_{z4}^{(2o)} + J_{\parallel z4C3}^{(3o)} + m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o}^2 + p_{z4\_o}^2)] + 2 \cdot \dot{q}_{5o} \cdot m_{f2o} \cdot (p_{x4\_o} \cdot p'_{x4\_o} + p_{z4\_o} \cdot p'_{z4\_o}) - \\ - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_o} \frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{x3\_o} \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_o} \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{y3\_o} \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + \right. \\ \left. + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_o} \frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f1o} + p_{z3\_o} \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{5o}} m_{f2o} \right) + \dot{q}_{4o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{5o}} + p_{y4\_o} \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{5o}} \right) + \right. \\ \left. + \dot{q}_{5o}^2 m_{f2o} \cdot \left( p_{x4\_o} \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{5o}} + p_{z4\_o} \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{5o}} \right) \right] = M_5 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{6o}} = \dot{q}_{6o} \cdot J_{z5}^{(3o)}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{60}} \right) = \ddot{q}_{60} \cdot J_{z5}^{(3a)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{60}} = m_{\mu} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x3\_o} \cdot \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y3\_o} \cdot \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{z3\_o} \cdot \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_{40}^2 + \dot{q}_{50}^2) \cdot p_{x4\_o} \cdot \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{60}} + \right. \\ \left. + \dot{q}_{40}^2 \cdot p_{y4\_o} \cdot \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{60}} + \dot{q}_{50}^2 \cdot p_{z4\_o} \cdot \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{60}} \right] \end{aligned}$$

A șasea ecuație dinamică este: (3.152)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{60} \cdot J_{z5}^{(3a)} - m_{f2a} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x3\_o} \cdot \frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y3\_o} \cdot \frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{z3\_o} \cdot \frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_{60}} + (\dot{q}_{40}^2 + \dot{q}_{50}^2) \cdot p_{x4\_o} \cdot \frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_{60}} + \right. \\ \left. + \dot{q}_{40}^2 \cdot p_{y4\_o} \cdot \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_{60}} + \dot{q}_{50}^2 \cdot p_{z4\_o} \cdot \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_{60}} \right] = M_6 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_{4a}} = \dot{q}_{4a} \cdot \left[ J_{z3}^{(2a)} + J_{\parallel z3C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{y4\_a}^2) + J_{\parallel z3C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{y6\_a}^2) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{4a}} \right) = \ddot{q}_{4a} \cdot \left[ J_{z3}^{(2a)} + J_{\parallel z3C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{y4\_a}^2) + J_{\parallel z3C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{y6\_a}^2) \right] + \\ + 2 \cdot \dot{q}_{4a} \cdot \left[ m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a} \cdot p'_{x4\_a} + p_{y4\_a} \cdot p'_{y4\_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a} \cdot p'_{x6\_a} + p_{y6\_a} \cdot p'_{y6\_a}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{4a}} = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_a} \cdot \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{x3\_a} \cdot \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \cdot \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \\ + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_a} \cdot \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{y3\_a} \cdot \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \cdot \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \\ + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_a} \cdot \frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{z3\_a} \cdot \frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{z5\_a} \cdot \frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \\ + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \cdot \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \cdot \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \cdot \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \cdot \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) \end{aligned}$$

A șaptea ecuație dinamică este: (3.153)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{4a} \cdot \left[ J_{z3}^{(2a)} + J_{\parallel z3C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{y4\_a}^2) + J_{\parallel z3C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{y6\_a}^2) \right] + \\ + 2 \cdot \dot{q}_{4a} \cdot \left[ m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a} \cdot p'_{x4\_a} + p_{y4\_a} \cdot p'_{y4\_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a} \cdot p'_{x6\_a} + p_{y6\_a} \cdot p'_{y6\_a}) \right] - \\ - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_a} \cdot \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{x3\_a} \cdot \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \cdot \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_a} \cdot \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{y3\_a} \cdot \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \cdot \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \\ \left. + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_a} \cdot \frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f1a} + p_{z3\_a} \cdot \frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{z5\_a} \cdot \frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ \left. + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \cdot \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \cdot \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \cdot \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \cdot \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{4a}} m_{f3a} \right) \right] = M_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{5a}} &= \dot{q}_{5a} \cdot \left[ J_{z4}^{(2a)} + J_{\parallel z4C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{z4\_a}^2) + J_{\parallel z4C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{z6\_a}^2) \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{5a}} \right) &= \ddot{q}_{5a} \cdot \left[ J_{z4}^{(2a)} + J_{\parallel z4C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{z4\_a}^2) + J_{\parallel z4C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{z6\_a}^2) \right] + \\ &\quad + 2 \cdot \dot{q}_{5a} \cdot \left[ m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a} \cdot p'_{x4\_a} + p_{z4\_a} \cdot p'_{z4\_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a} \cdot p'_{x6\_a} + p_{z6\_a} \cdot p'_{z6\_a}) \right] \\ \frac{\partial E_c}{\partial q_{5a}} &= (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_a} \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ &\quad + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_a} \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{y3\_a} \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ &\quad + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_a} \frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{z3\_a} \frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{z5\_a} \frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ &\quad + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ &\quad + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{5a}^2 \cdot \left( p_{z4\_a} \frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{z6\_a} \frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) \end{aligned}$$

A opta ecuație dinamică este:

(3.154)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{5a} \cdot \left[ J_{z4}^{(2a)} + J_{\parallel z4C3}^{(3a)} + m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a}^2 + p_{z4\_a}^2) + J_{\parallel z4C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a}^2 + p_{z6\_a}^2) \right] + \\ + 2 \cdot \dot{q}_{5a} \cdot \left[ m_{f2a} \cdot (p_{x4\_a} \cdot p'_{x4\_a} + p_{z4\_a} \cdot p'_{z4\_a}) + m_{f3a} \cdot (p_{x6\_a} \cdot p'_{x6\_a} + p_{z6\_a} \cdot p'_{z6\_a}) \right] - \\ - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_a} \frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_a} \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{y3\_a} \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_a} \frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f1a} + p_{z3\_a} \frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{z5\_a} \frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \\ \left. + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{5a}^2 \cdot \left( p_{z4\_a} \frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f2a} + p_{z6\_a} \frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_{5a}} m_{f3a} \right) \right] = M_8 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{6a}} = \dot{q}_{6a} \cdot \left[ J_5^{(3a)} + J_{\parallel z5C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x7\_a}^2 + p_{y7\_a}^2) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{6a}} \right) = \ddot{q}_{6a} \cdot \left[ J_5^{(3a)} + J_{\parallel z5C4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x7\_a}^2 + p_{y7\_a}^2) \right] + 2 \cdot \dot{q}_{6a} \cdot m_{f3a} \cdot (p_{x7\_a} \cdot p'_{x7\_a} + p_{y7\_a} \cdot p'_{y7\_a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{6a}} = & (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_6} m_{f3a} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y3\_a} \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_6} m_{f3a} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_6} m_{f3a} \right) + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \\ & + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{5a}^2 \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \\ & + \dot{q}_{6a}^2 \cdot m_{f3a} \cdot \left( p_{x7\_a} \frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_{6a}} + p_{y7\_a} \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_{6a}} \right) \end{aligned}$$

A noua ecuație dinamică este: (3.155)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{6a} \cdot [J_{5a}^{(3a)} + J_{4a5c4}^{(4a)} + m_{f3a} \cdot (p_{x7\_a} + p_{y7\_a})] + 2 \cdot \dot{q}_{6a} \cdot m_{f3a} \cdot (p_{x7\_a} \cdot p'_{x7\_a} + p_{y7\_a} \cdot p'_{y7\_a}) - \\ - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y3\_a} \frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ \left. + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3\_a} \frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ \left. + \dot{q}_{4a}^2 \cdot \left( p_{y4\_a} \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \dot{q}_{5a}^2 \cdot \left( p_{x4\_a} \frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f2a} + p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{6a}} m_{f3a} \right) + \right. \\ \left. + \dot{q}_{6a}^2 \cdot m_{f3a} \cdot \left( p_{x7\_a} \frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_{6a}} + p_{y7\_a} \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_{6a}} \right) \right] = M_9 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{7a}} = \dot{q}_{7a} \cdot J_{z6}^{(4a)}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_{7a}} \right) = \ddot{q}_{7a} \cdot J_{z6}^{(4a)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial q_{7a}} = m_{f3a} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{7a}} + \right. \\ \left. + \dot{q}_{4a}^2 \cdot p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{7a}} + \dot{q}_{5a}^2 \cdot p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{7a}} + \dot{q}_{6a}^2 \cdot \left( p_{x7\_a} \frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_{7a}} + p_{y7\_a} \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_{7a}} \right) \right] \end{aligned}$$

A zecea ecuație diferențială este: (3.156)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{7a} \cdot J_{z6}^{(4a)} - m_{f3a} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y5\_a} \frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5\_a} \frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_{7a}} + (\dot{q}_{4a}^2 + \dot{q}_{5a}^2) \cdot p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{7a}} + \right. \\ \left. + \dot{q}_{4a}^2 \cdot p_{y6\_a} \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_{7a}} + \dot{q}_{5a}^2 \cdot p_{x6\_a} \frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_{7a}} + \dot{q}_{6a}^2 \cdot \left( p_{x7\_a} \frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_{7a}} + p_{y7\_a} \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_{7a}} \right) \right] = M_{10} \end{aligned}$$

A unsprezecea ecuație dinamică este: (3.157)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{4m} \cdot \left[ J_{z3}^{(2m)} + J_{\parallel z3C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x4\_m}^2 + p_{y4\_m}^2) + J_{\parallel z3C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x6\_m}^2 + p_{y6\_m}^2) \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_{4m} \cdot \left[ m_{f2m} \cdot (p_{x4\_m} \cdot p'_{x4\_m} + p_{y4\_m} \cdot p'_{y4\_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x6\_m} \cdot p'_{x6\_m} + p_{y6\_m} \cdot p'_{y6\_m}) \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_m} \frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f1m} + p_{x3\_m} \frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f2m} + p_{x5\_m} \frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f3m} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_m} \frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f1m} + p_{y3\_m} \frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f2m} + p_{y5\_m} \frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f3m} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_m} \frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f1m} + p_{z3\_m} \frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f2m} + p_{z5\_m} \frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f3m} \right) + \\
& \left. + (\dot{q}_{4m}^2 + \dot{q}_{5m}^2) \cdot \left( p_{x4\_m} \frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f2m} + p_{x6\_m} \frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f3m} \right) + \dot{q}_{4m}^2 \cdot \left( p_{y4\_m} \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f2m} + p_{y6\_m} \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_{4m}} m_{f3m} \right) \right] = M_{11}
\end{aligned}$$

A douașprezecea ecuație dinamică este: (3.158)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{5m} \cdot \left[ J_{z4}^{(2m)} + J_{\parallel z4C3}^{(3m)} + m_{f2m} \cdot (p_{x4\_m}^2 + p_{z4\_m}^2) + J_{\parallel z4C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x6\_m}^2 + p_{z6\_m}^2) \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_{5m} \cdot \left[ m_{f2m} \cdot (p_{x4\_m} \cdot p'_{x4\_m} + p_{z4\_m} \cdot p'_{z4\_m}) + m_{f3m} \cdot (p_{x6\_m} \cdot p'_{x6\_m} + p_{z6\_m} \cdot p'_{z6\_m}) \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2\_m} \frac{\partial p_{x2\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f1m} + p_{x3\_m} \frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{x5\_m} \frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2\_m} \frac{\partial p_{y2\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f1m} + p_{y3\_m} \frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{y5\_m} \frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2\_m} \frac{\partial p_{z2\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f1m} + p_{z3\_m} \frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{z5\_m} \frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) + \\
& + (\dot{q}_{4m}^2 + \dot{q}_{5m}^2) \cdot \left( p_{x4\_m} \frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{x6\_m} \frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) + \\
& \left. + \dot{q}_{4m}^2 \cdot \left( p_{y4\_m} \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{y6\_m} \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) + \dot{q}_{5m}^2 \cdot \left( p_{z4\_m} \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f2m} + p_{z6\_m} \frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_{5m}} m_{f3m} \right) \right] = M_{12}
\end{aligned}$$

A treisprezecea ecuație dinamică este: (3.159)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{6m} \cdot \left[ J_5^{(3m)} + J_{\parallel z5C4}^{(4m)} + m_{f3m} \cdot (p_{x7\_m}^2 + p_{y7\_m}^2) \right] + 2 \cdot \dot{q}_{6m} \cdot m_{f3m} \cdot (p_{x7\_m} \cdot p'_{x7\_m} + p_{y7\_m} \cdot p'_{y7\_m}) - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3\_m} \frac{\partial p_{x3\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{x5\_m} \frac{\partial p_{x5\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y3\_m} \frac{\partial p_{y3\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{y5\_m} \frac{\partial p_{y5\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z3\_m} \frac{\partial p_{z3\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{z5\_m} \frac{\partial p_{z5\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + (\dot{q}_{4m}^2 + \dot{q}_{5m}^2) \cdot \left( p_{x4\_m} \frac{\partial p_{x4\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{x6\_m} \frac{\partial p_{x6\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + \\
& + \dot{q}_{4m}^2 \cdot \left( p_{y4\_m} \frac{\partial p_{y4\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{y6\_m} \frac{\partial p_{y6\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + \dot{q}_{5m}^2 \cdot \left( p_{z4\_m} \frac{\partial p_{z4\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f2m} + p_{z6\_m} \frac{\partial p_{z6\_m}}{\partial q_{6m}} m_{f3m} \right) + \\
& \left. + \dot{q}_{6m}^2 \cdot m_{f3m} \cdot \left( p_{x7\_m} \frac{\partial p_{x7\_m}}{\partial q_{6m}} + p_{y7\_m} \frac{\partial p_{y7\_m}}{\partial q_{6m}} \right) \right] = M_{13}
\end{aligned}$$

A paisprezecea ecuație diferențială este: (3.160)

$$\ddot{q}_{7a} \cdot J_{z6}^{(4m)} - m_{f7m} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5-m} \frac{\partial p_{x5-m}}{\partial q_{7m}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y5-m} \frac{\partial p_{y5-m}}{\partial q_{7m}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{z5-m} \frac{\partial p_{z5-m}}{\partial q_{7m}} + (\dot{q}_{4m}^2 + \dot{q}_{5m}^2) \cdot p_{x6-m} \frac{\partial p_{x6-m}}{\partial q_{7m}} + \dot{q}_{4m}^2 \cdot p_{y6-m} \frac{\partial p_{y6-m}}{\partial q_{7m}} + \dot{q}_{5m}^2 \cdot p_{z6-m} \frac{\partial p_{z6-m}}{\partial q_{7m}} + \dot{q}_{6m}^2 \cdot \left( p_{x7-m} \frac{\partial p_{x7-m}}{\partial q_{7m}} + p_{y7-m} \frac{\partial p_{y7-m}}{\partial q_{7m}} \right) \right] = M_{14}$$

A cincisprezecea ecuație dinamică este: (3.161)

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_{4i} \cdot \left[ J_{z3}^{(2i)} + J_{|z3C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x4-i}^2 + p_{y4-i}^2) + J_{|z3C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x6-i}^2 + p_{y6-i}^2) \right] + \\ & + 2 \cdot \dot{q}_{4i} \cdot \left[ m_{f2i} \cdot (p_{x4-i} \cdot p'_{x4-i} + p_{y4-i} \cdot p'_{y4-i}) + m_{f3i} \cdot (p_{x6-i} \cdot p'_{x6-i} + p_{y6-i} \cdot p'_{y6-i}) \right] - \\ & - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2-i} \frac{\partial p_{x2-i}}{\partial q_{4i}} m_{f1i} + p_{x3-i} \frac{\partial p_{x3-i}}{\partial q_{4i}} m_{f2i} + p_{x5-i} \frac{\partial p_{x5-i}}{\partial q_{4i}} m_{f3i} \right) + \right. \\ & + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2-i} \frac{\partial p_{y2-i}}{\partial q_{4i}} m_{f1i} + p_{y3-i} \frac{\partial p_{y3-i}}{\partial q_{4i}} m_{f2i} + p_{y5-i} \frac{\partial p_{y5-i}}{\partial q_{4i}} m_{f3i} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2-i} \frac{\partial p_{z2-i}}{\partial q_{4i}} m_{f1i} + p_{z3-i} \frac{\partial p_{z3-i}}{\partial q_{4i}} m_{f2i} + p_{z5-i} \frac{\partial p_{z5-i}}{\partial q_{4i}} m_{f3i} \right) + \\ & \left. + (\dot{q}_{4i}^2 + \dot{q}_{5i}^2) \cdot \left( p_{x4-i} \frac{\partial p_{x4-i}}{\partial q_{4i}} m_{f2i} + p_{x6-i} \frac{\partial p_{x6-i}}{\partial q_{4i}} m_{f3i} \right) + \dot{q}_{4i}^2 \cdot \left( p_{y4-i} \frac{\partial p_{y4-i}}{\partial q_{4i}} m_{f2i} + p_{y6-i} \frac{\partial p_{y6-i}}{\partial q_{4i}} m_{f3i} \right) \right] = M_{15} \end{aligned}$$

A șaisprezecea ecuație dinamică este: (3.162)

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_{5i} \cdot \left[ J_{z4}^{(2i)} + J_{|z4C3}^{(3i)} + m_{f2i} \cdot (p_{x4-i}^2 + p_{z4-i}^2) + J_{|z4C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x6-i}^2 + p_{z6-i}^2) \right] + \\ & + 2 \cdot \dot{q}_{5i} \cdot \left[ m_{f2i} \cdot (p_{x4-i} \cdot p'_{x4-i} + p_{z4-i} \cdot p'_{z4-i}) + m_{f3i} \cdot (p_{x6-i} \cdot p'_{x6-i} + p_{z6-i} \cdot p'_{z6-i}) \right] - \\ & - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2-i} \frac{\partial p_{x2-i}}{\partial q_{5i}} m_{f1i} + p_{x3-i} \frac{\partial p_{x3-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{x5-i} \frac{\partial p_{x5-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) + \right. \\ & + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2-i} \frac{\partial p_{y2-i}}{\partial q_{5i}} m_{f1i} + p_{y3-i} \frac{\partial p_{y3-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{y5-i} \frac{\partial p_{y5-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) + \\ & + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2-i} \frac{\partial p_{z2-i}}{\partial q_{5i}} m_{f1i} + p_{z3-i} \frac{\partial p_{z3-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{z5-i} \frac{\partial p_{z5-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) + \\ & + (\dot{q}_{4i}^2 + \dot{q}_{5i}^2) \cdot \left( p_{x4-i} \frac{\partial p_{x4-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{x6-i} \frac{\partial p_{x6-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) + \\ & \left. + \dot{q}_{4i}^2 \cdot \left( p_{y4-i} \frac{\partial p_{y4-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{y6-i} \frac{\partial p_{y6-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) + \dot{q}_{5i}^2 \cdot \left( p_{z4-i} \frac{\partial p_{z4-i}}{\partial q_{5i}} m_{f2i} + p_{z6-i} \frac{\partial p_{z6-i}}{\partial q_{5i}} m_{f3i} \right) \right] = M_{16} \end{aligned}$$

A șaptesprezecea ecuație dinamică este: (3.163)



$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{6i} \cdot \left[ J_{S5}^{(3i)} + J_{\parallel z5C4}^{(4i)} + m_{f3i} \cdot (p_{x7_i}^2 + p_{y7_i}^2) \right] + 2 \cdot \dot{q}_{6i} \cdot m_{f3i} \cdot (p_{x7_i} \cdot p'_{x7_i} + p_{y7_i} \cdot p'_{y7_i}) - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3_i} \frac{\partial p_{x3_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y3_i} \frac{\partial p_{y3_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{y5_i} \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z3_i} \frac{\partial p_{z3_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{z5_i} \frac{\partial p_{z5_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + (\dot{q}_{4i}^2 + \dot{q}_{5i}^2) \cdot \left( p_{x4_i} \frac{\partial p_{x4_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{x6_i} \frac{\partial p_{x6_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + \\
& + \dot{q}_{4i}^2 \cdot \left( p_{y4_i} \frac{\partial p_{y4_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{y6_i} \frac{\partial p_{y6_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + \dot{q}_{5i}^2 \cdot \left( p_{z4_i} \frac{\partial p_{z4_i}}{\partial q_{6i}} m_{f2i} + p_{z6_i} \frac{\partial p_{z6_i}}{\partial q_{6i}} m_{f3i} \right) + \\
& \left. + \dot{q}_{6i}^2 \cdot m_{f3i} \cdot \left( p_{x7_i} \frac{\partial p_{x7_i}}{\partial q_{6i}} + p_{y7_i} \frac{\partial p_{y7_i}}{\partial q_{6i}} \right) \right] = M_{17}
\end{aligned}$$

A optsprezecea ecuație diferențială este: (3.164)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{7i} \cdot J_{z6}^{(4i)} - m_{f3i} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5_i} \frac{\partial p_{x5_i}}{\partial q_{7i}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y5_i} \frac{\partial p_{y5_i}}{\partial q_{7i}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{z5_i} \frac{\partial p_{z5_i}}{\partial q_{7i}} + (\dot{q}_{4i}^2 + \dot{q}_{5i}^2) \cdot p_{x6_i} \frac{\partial p_{x6_i}}{\partial q_{7i}} + \right. \\
& \left. + \dot{q}_{4i}^2 \cdot p_{y6_i} \frac{\partial p_{y6_i}}{\partial q_{7i}} + \dot{q}_{5i}^2 \cdot p_{z6_i} \frac{\partial p_{z6_i}}{\partial q_{7i}} + \dot{q}_{6i}^2 \cdot \left( p_{x7_i} \frac{\partial p_{x7_i}}{\partial q_{7i}} + p_{y7_i} \frac{\partial p_{y7_i}}{\partial q_{7i}} \right) \right] = M_{18}
\end{aligned}$$

A nouăsprezecea ecuație dinamică este: (3.165)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{4c} \cdot \left[ J_{z3}^{(2c)} + J_{\parallel z3C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x4_c}^2 + p_{y4_c}^2) + J_{\parallel z3C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x6_c}^2 + p_{y6_c}^2) \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_{4c} \cdot \left[ m_{f2c} \cdot (p_{x4_c} \cdot p'_{x4_c} + p_{y4_c} \cdot p'_{y4_c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x6_c} \cdot p'_{x6_c} + p_{y6_c} \cdot p'_{y6_c}) \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2_c} \frac{\partial p_{x2_c}}{\partial q_{4c}} m_{f1c} + p_{x3_c} \frac{\partial p_{x3_c}}{\partial q_{4c}} m_{f2c} + p_{x5_c} \frac{\partial p_{x5_c}}{\partial q_{4c}} m_{f3c} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2_c} \frac{\partial p_{y2_c}}{\partial q_{4c}} m_{f1c} + p_{y3_c} \frac{\partial p_{y3_c}}{\partial q_{4c}} m_{f2c} + p_{y5_c} \frac{\partial p_{y5_c}}{\partial q_{4c}} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2_c} \frac{\partial p_{z2_c}}{\partial q_{4c}} m_{f1c} + p_{z3_c} \frac{\partial p_{z3_c}}{\partial q_{4c}} m_{f2c} + p_{z5_c} \frac{\partial p_{z5_c}}{\partial q_{4c}} m_{f3c} \right) + \\
& \left. + (\dot{q}_{4c}^2 + \dot{q}_{5c}^2) \cdot \left( p_{x4_c} \frac{\partial p_{x4_c}}{\partial q_{4c}} m_{f2c} + p_{x6_c} \frac{\partial p_{x6_c}}{\partial q_{4c}} m_{f3c} \right) + \dot{q}_{4c}^2 \cdot \left( p_{y4_c} \frac{\partial p_{y4_c}}{\partial q_{4c}} m_{f2c} + p_{y6_c} \frac{\partial p_{y6_c}}{\partial q_{4c}} m_{f3c} \right) \right] = M_{19}
\end{aligned}$$

A douăzeciua ecuație dinamică este: (3.166)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{5c} \cdot \left[ J_{z4}^{(2c)} + J_{\text{lx}4C3}^{(3c)} + m_{f2c} \cdot (p_{x4,c}^2 + p_{z4,c}^2) + J_{\text{lx}4C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x6,c}^2 + p_{z6,c}^2) \right] + \\
& + 2 \cdot \dot{q}_{5c} \cdot \left[ m_{f2c} \cdot (p_{x4,c} \cdot p'_{x4,c} + p_{z4,c} \cdot p'_{z4,c}) + m_{f3c} \cdot (p_{x6,c} \cdot p'_{x6,c} + p_{z6,c} \cdot p'_{z6,c}) \right] - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x2,c} \frac{\partial p_{x2,c}}{\partial q_{5c}} m_{f1c} + p_{x3,c} \frac{\partial p_{x3,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{x5,c} \frac{\partial p_{x5,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y2,c} \frac{\partial p_{y2,c}}{\partial q_{5c}} m_{f1c} + p_{y3,c} \frac{\partial p_{y3,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{y5,c} \frac{\partial p_{y5,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z2,c} \frac{\partial p_{z2,c}}{\partial q_{5c}} m_{f1c} + p_{z3,c} \frac{\partial p_{z3,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{z5,c} \frac{\partial p_{z5,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) + \\
& + (\dot{q}_{4c}^2 + \dot{q}_{5c}^2) \cdot \left( p_{x4,c} \frac{\partial p_{x4,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{x6,c} \frac{\partial p_{x6,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) + \\
& \left. + \dot{q}_{4c}^2 \cdot \left( p_{y4,c} \frac{\partial p_{y4,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{y6,c} \frac{\partial p_{y6,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) + \dot{q}_{5c}^2 \cdot \left( p_{z4,c} \frac{\partial p_{z4,c}}{\partial q_{5c}} m_{f2c} + p_{z6,c} \frac{\partial p_{z6,c}}{\partial q_{5c}} m_{f3c} \right) \right] = M_{20}
\end{aligned}$$

A douăzeci și una ecuație dinamică este: (3.167)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{6c} \cdot \left[ J_5^{(3c)} + J_{\text{lx}5C4}^{(4c)} + m_{f3c} \cdot (p_{x7,c}^2 + p_{y7,c}^2) \right] + 2 \cdot \dot{q}_{6c} \cdot m_{f3c} \cdot (p_{x7,c} \cdot p'_{x7,c} + p_{y7,c} \cdot p'_{y7,c}) - \\
& - \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{x3,c} \frac{\partial p_{x3,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{x5,c} \frac{\partial p_{x5,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot \left( p_{y3,c} \frac{\partial p_{y3,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{y5,c} \frac{\partial p_{y5,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + \right. \\
& + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot \left( p_{z3,c} \frac{\partial p_{z3,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{z5,c} \frac{\partial p_{z5,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + (\dot{q}_{4c}^2 + \dot{q}_{5c}^2) \cdot \left( p_{x4,c} \frac{\partial p_{x4,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{x6,c} \frac{\partial p_{x6,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + \\
& + \dot{q}_{4c}^2 \cdot \left( p_{y4,c} \frac{\partial p_{y4,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{y6,c} \frac{\partial p_{y6,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + \dot{q}_{5c}^2 \cdot \left( p_{z4,c} \frac{\partial p_{z4,c}}{\partial q_{6c}} m_{f2c} + p_{z6,c} \frac{\partial p_{z6,c}}{\partial q_{6c}} m_{f3c} \right) + \\
& \left. + \dot{q}_{6c}^2 \cdot m_{f3c} \cdot \left( p_{x7,c} \frac{\partial p_{x7,c}}{\partial q_{6c}} + p_{y7,c} \frac{\partial p_{y7,c}}{\partial q_{6c}} \right) \right] = M_{21}
\end{aligned}$$

A douăzeci și doua ecuație dinamică este: (3.168)

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_{7c} \cdot J_{z6}^{(4c)} - m_{f3c} \cdot \left[ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{x5,c} \frac{\partial p_{x5,c}}{\partial q_{7c}} + (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \cdot p_{y5,c} \frac{\partial p_{y5,c}}{\partial q_{7c}} + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cdot p_{z5,c} \frac{\partial p_{z5,c}}{\partial q_{7c}} + (\dot{q}_{4c}^2 + \dot{q}_{5c}^2) \cdot p_{x6,c} \frac{\partial p_{x6,c}}{\partial q_{7c}} + \right. \\
& \left. + \dot{q}_{4c}^2 \cdot p_{y6,c} \frac{\partial p_{y6,c}}{\partial q_{7c}} + \dot{q}_{5c}^2 \cdot p_{z6,c} \frac{\partial p_{z6,c}}{\partial q_{7c}} + \dot{q}_{6c}^2 \cdot \left( p_{x7,c} \frac{\partial p_{x7,c}}{\partial q_{7c}} + p_{y7,c} \frac{\partial p_{y7,c}}{\partial q_{7c}} \right) \right] = M_{20}
\end{aligned}$$

Trebuie făcută observația că membrul drept al ecuațiilor (3.148)–(3.169) reprezintă forțele generalizate, care vor fi calculate în cele ce urmează. Pentru aceasta, trebuie determinat torsorul din articulații, care are forma (3.170) pentru degetul opozabil și forma (3.171) pentru celelalte degete:

$$Q_{do} = [M_{10} \ M_{20} \ M_{30} \ M_{40} \ M_{50} \ M_{60}]^T \quad (3.169)$$

$$Q_{dj} = [M_{1j} \ M_{2j} \ M_{3j} \ M_{4j} \ M_{5j} \ M_{6j} \ M_{7j}]^T \quad (3.170)$$

unde  $j=a, m, i, c$ , conform cu cele patru degete.

Torsorul din articulații se obține prin reducerea torsorului care apare în vârful degetelor datorită prinderii unui obiect de o anumită greutate (se consideră cazul concret al unui obiect de 1g) și care are forma (3.172) pentru degetul opozabil și forma (3.173) pentru celelalte degete:

$${}^{G_6}\mathcal{T}_{O_6} = \begin{bmatrix} 0 & -10^{-2} & -9 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.171)$$

$${}^{G_7}\mathcal{T}_{O_7} = \begin{bmatrix} -9 \cdot 10^{-3} & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.172)$$

unde: 0,009 N este forța de frecare ca apare la manevrarea obiectului;

0.01 N este forța necesară pentru susținerea obiectului.

Torsorul care apare în vârful degetelor va fi redus în articulațiile sistemului prin intermediul relației [Dra98]:

$$Q = J^T G_7 \mathcal{T}_{O_7} \quad (3.173)$$

unde  $J$  reprezintă matricea jacobiană corespunzătoare fiecărui lanț cinematic al sistemului mână.

În aceste condiții, torsorul din articulații devine:

— degetul opozabil: (3.174)

$$M_{10} = 10^{-2} \left[ (f_{20} + f_{10}c_6 - s_5(d_1 + d_2))(s_2c_3s_4 - c_2s_4) + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)(s_2s_3s_4s_5 - c_2c_5s_6) + \right. \\ \left. + (d_5c_4 + d_3)(s_2s_3c_4s_5 - s_2c_3c_5s_6) \right] - 9 \cdot 10^{-3} \left[ (f_{20}c_5 + f_{10}c_5)s_2s_3 + \right. \\ \left. + (f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2)(s_2c_3c_4 + c_2s_4) + \left(\frac{p}{2} - d_5c_4\right)s_2s_3c_4 - (d_5c_4 + d_3)s_2s_3s_4 \right]$$

$$M_{20} = 10^{-2} \left[ (f_{20} + f_{10}c_6 - (d_1 + d_2)s_5)s_3s_4 - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_3s_4s_5 + \right. \\ \left. + (d_5c_4 + d_3)(c_3c_4s_5 + s_3c_5s_6) \right] - 9 \cdot 10^{-3} \left[ - (f_{20}c_5 + f_{10}c_5)c_3 + \right. \\ \left. + (f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2))s_3c_4 - (d_5c_4 + d_3)c_3s_4 - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_3c_4 \right]$$

$$M_{30} = -10^{-2} \left[ (f_{20} + f_{10}c_6 - (d_1 + d_2)s_5)c_4 + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_5s_6 \right] - \\ - 9 \cdot 10^{-3} \left[ - (f_{20}s_5 + f_{10}s_5 - (d_1 + d_2))s_4 \right]$$

$$M_{40} = -10^{-2}d_5s_5 - 9 \cdot 10^{-3}(f_{20}c_5 + f_{10}c_5)$$

$$M_{50} = -10^{-2}(f_{20} + f_{10}c_6)$$

$$M_{60} = -10^{-2}f_{20}$$

— degetul arătător: (3.175)

$$M_{1a} = -9 \cdot 10^{-3} [-(f_{2a}s7 + f_{1a}s67)s2s34 + p(c2s3c34c567 - c2c3s34c567 - s2s3s567) + d_1(s2c34s567 - c2c567)] + 10^{-2} [-(f_{3a} + f_{2a}c7 + f_{1a}c67)s2s34 + p(-c2s3c34s567 + c2c3s34s567 - s2s3c567) + d_1(s2c34c567 + c2s567)]$$

$$M_{2a} = -9 \cdot 10^{-3} [(f_{2a}s7 + f_{1a}s67)c34 + pc3s567 + d_1s34s567] + 10^2 [(f_{3a} + f_{2a}c7 + f_{1a}c67)c34 + pc3c567 + d_1s34c567]$$

$$M_{3a} = -9 \cdot 10^{-3} (ps4 + d_1)c567 - 10^2 (ps4 + d_1)s567$$

$$M_{4a} = -9 \cdot 10^{-3} d_1c567 - 10^2 d_1s567$$

$$M_{5a} = -9 \cdot 10^{-3} (f_{2a}s7 + f_{1a}s67) + 10^2 (f_{3a} + f_{2a}c7 + f_{1a}c67)$$

$$M_{6a} = -9 \cdot 10^{-3} f_{2a}s7 + 10^2 (f_{3a} + f_{2a}c7)$$

$$M_{7a} = 10^2 f_{3a}$$

— degetul mijlociu: (3.176)

$$M_{1m} = -9 \cdot 10^{-3} [-(f_{2m}s7 + f_{1m}s67)s2s34 + p(c2s3c34c567 - c2c3s34c567 - s2s3s567) + d_1(s2c34s567 - c2c567)] + 10^{-2} [-(f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67)s2s34 + p(-c2s3c34s567 + c2c3s34s567 - s2s3c567)]$$

$$M_{2m} = -9 \cdot 10^{-3} [(f_{2m}s7 + f_{1m}s67)c34 + pc3s567] + 10^2 [(f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67)c34 + pc3c567]$$

$$M_{3m} = -9 \cdot 10^{-3} ps4c567 - 10^2 ps4s567$$

$$M_{4m} = 0$$

$$M_{5m} = -9 \cdot 10^{-3} (f_{2m}s7 + f_{1m}s67) + 10^2 (f_{3m} + f_{2m}c7 + f_{1m}c67)$$

$$M_{6m} = -9 \cdot 10^{-3} f_{2m}s7 + 10^2 (f_{3m} + f_{2m}c7)$$

$$M_7 = 10^2 \cdot f_{3m}$$

— degetul inelar: (3.177)

$$M_{1i} = -9 \cdot 10^{-3} [-(f_{2i}s7 + f_{1i}s67)s2s34 + p(c2s3c34c567 - c2c3s34c567 - s2s3s567) - d_1(s2c34s567 - c2c567)] + 10^{-2} [-(f_{3i} + f_{2i}c7 + f_{1i}c67)s2s34 + p(-c2s3c34s567 + c2c3s34s567 - s2s3c567) - d_1(s2c34c567 + c2s567)]$$

$$M_{2i} = -9 \cdot 10^{-3} [(f_{2i}s7 + f_{1i}s67)c34 + pc3s567 - d_1s34s567] + 10^2 [(f_{3i} + f_{2i}c7 + f_{1i}c67)c34 + pc3c567 - d_1s34c567]$$

$$M_{3i} = -9 \cdot 10^{-3} (ps4 - d_1)c567 - 10^2 (ps4 - d_1)s567$$

$$M_{4i} = 9 \cdot 10^{-3} d_{1c} s_{67} + 10^2 d_{1s} s_{67}$$

$$M_{5i} = -9 \cdot 10^{-3} (f_{2i} s_7 + f_{1i} s_{67}) + 10^2 (f_{3i} + f_{2i} c_7 + f_{1i} c_{67})$$

$$M_{6i} = -9 \cdot 10^{-3} f_{2i} s_7 + 10^2 (f_{3i} + f_{2i} c_7)$$

$$M_{7a} = 10^2 f_{3i}$$

— degetul mic: (3.178)

$$M_{1c} = -9 \cdot 10^{-3} [-(f_{2c} s_7 + f_{1c} s_{67}) s_2 s_{34} + p(c_2 s_3 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 - c_2 c_3 s_3 c_4 c_5 c_6 c_7 - s_2 s_3 s_5 s_6 c_7) - (d_1 + d_2) (s_2 c_3 c_4 s_5 s_6 c_7 - c_2 c_5 s_6 c_7)] + 10^{-2} [-(f_{3c} + f_{2c} c_7 + f_{1c} c_{67}) s_2 s_{34} + p(-c_2 s_3 c_3 c_4 s_5 c_6 c_7 + c_2 c_3 s_3 c_4 s_5 s_6 c_7 - s_2 s_3 c_5 c_6 c_7) - (d_1 + d_2) (s_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 + c_2 s_5 s_6 c_7)]$$

$$M_{2c} = -9 \cdot 10^{-3} [(f_{2c} s_7 + f_{1c} s_{67}) c_3 c_4 + p c_3 s_5 s_6 c_7 - (d_1 + d_2) s_3 c_4 s_5 s_6 c_7] + 10^2 [(f_{3c} + f_{2c} c_7 + f_{1c} c_{67}) c_3 c_4 + p c_3 c_5 s_6 c_7 - (d_1 + d_2) s_3 c_4 c_5 s_6 c_7]$$

$$M_{3c} = -9 \cdot 10^{-3} [p s_4 - (d_1 + d_2)] c_5 c_6 c_7 - 10^2 [p s_4 - (d_1 + d_2)] s_5 s_6 c_7$$

$$M_{4c} = 9 \cdot 10^{-3} (d_1 + d_2) c_5 c_6 c_7 + 10^2 (d_1 + d_2) s_5 s_6 c_7$$

$$M_{5c} = -9 \cdot 10^{-3} (f_{2c} s_7 + f_{1c} s_{67}) + 10^2 (f_{3c} + f_{2c} c_7 + f_{1c} c_{67})$$

$$M_{6c} = -9 \cdot 10^{-3} f_{2c} s_7 + 10^2 (f_{3c} + f_{2c} c_7)$$

$$M_{7c} = 10^2 f_{3c}$$

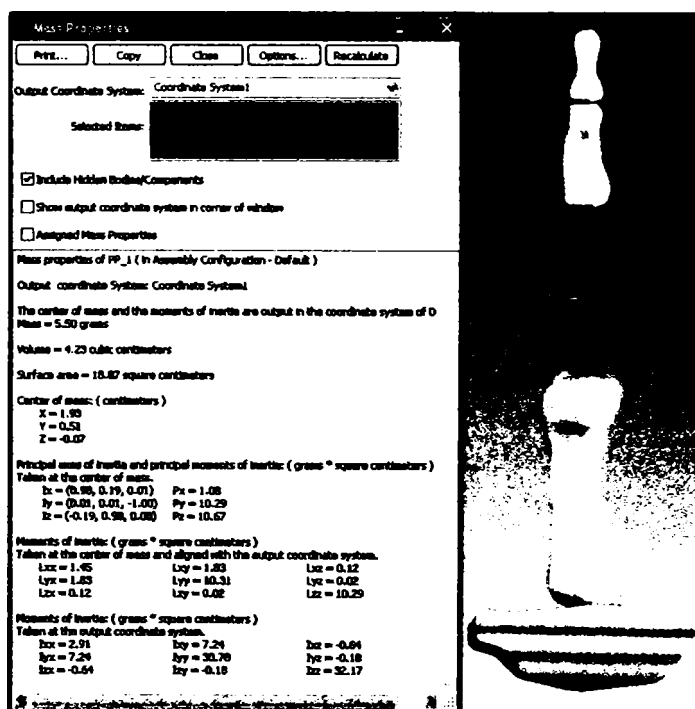
În aceste condiții, membrul drept al ecuațiilor lui Lagrange devine:

$M_1 = M_{10} + M_{1a} + M_{1m} + M_{1i} + M_{1c}$ $M_2 = M_{20} + M_{2a} + M_{21m} + M_{2i} + M_{2c}$ $M_3 = M_{30} + M_{3a} + M_{3m} + M_{3i} + M_{3c}$				
$M_4 = M_{40}$	$M_7 = M_{4a}$	$M_{11} = M_{4m}$	$M_{15} = M_{4i}$	$M_{19} = M_{4c}$
$M_5 = M_{50}$	$M_8 = M_{5a}$	$M_{12} = M_{5m}$	$M_{16} = M_{5i}$	$M_{20} = M_{5c}$
$M_6 = M_{60}$	$M_9 = M_{6a}$	$M_{13} = M_{6m}$	$M_{17} = M_{6i}$	$M_{21} = M_{6c}$
	$M_{10} = M_{7a}$	$M_{14} = M_{7m}$	$M_{18} = M_{7i}$	$M_{22} = M_{7c}$

**Tabelul 3.2** Membrul drept al ecuațiilor dinamice

### 3.4 Studiul dinamic utilizând MATLAB

Pentru determinarea momentelor de inerție ale componentelor sistemului supus studiului poate fi folosită opțiunea Mass Property a aplicației Solid Works (Fig. 3.4). Deși oasele nu prezintă o structură omogenă, valoarea masei este calculată cu densitatea medie  $\rho = 1,3 \text{ g/cm}^3$ . Pentru determinarea momentelor de inerție s-a poziționat sistemul de referință în centrul cuplei de rotație. Astfel, s-au obținut valorile (Tabelul 3.3) pentru momentele de inerție de interes.



**Fig. 3.4** Determinarea momentelor de inerție (față de centrul de masă și față de cupla de rotație) pentru falanga medie a degetului mijlociu

De asemenea, masele tuturor elementelor care intră în componența sistemului mână și necesare pentru soluționarea sistemului de ecuații dinamice sunt centralizate în Tabelul 3.4.

Având toate valorile necesare, se poate obține forma numerică a ecuațiilor diferențiale. Dată fiind complexitatea acestor ecuații, integrarea lor poate fi realizată cu unelte speciale precum MATLAB. Toate ecuațiile obținute până acum (distanțe, derivate parțiale în raport cu  $\dot{q}_i$  și  $q_i$ , derivate în raport cu timpul ale derivatelor parțiale în raport cu  $\dot{q}_i$ , ecuații dinamice) au fost translatate în cod Matlab. Integrarea a avut loc pe un interval de 15 s. [104]

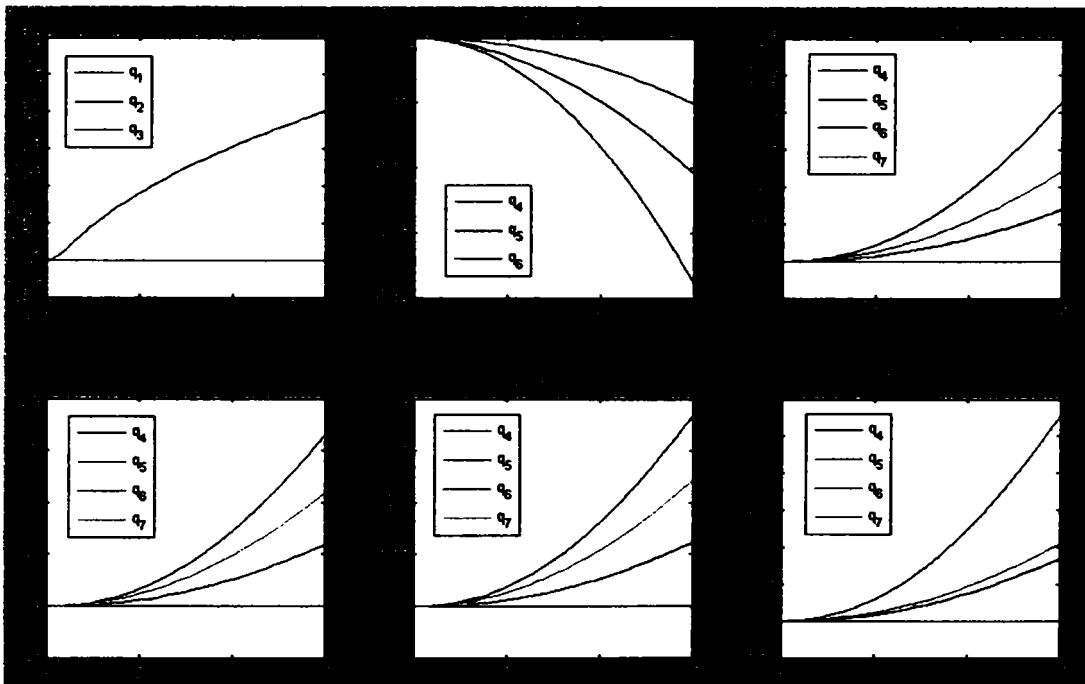
Palmă: [g·cm <sup>2</sup> ]				
$J_{z_0}^{(1p)} = 595,29$				
$J_{z_1}^{(1p)} = 9,66$				
$J_{z_2}^{(1p)} = 597,03$				
Deget opozabil [g·cm <sup>2</sup> ]	Deget arătător [g·cm <sup>2</sup> ]	Deget mijlociu [g·cm <sup>2</sup> ]	Deget inelar [g·cm <sup>2</sup> ]	Deget mic [g·cm <sup>2</sup> ]
$J_{  z_0C_2}^{(2o)} = 6,46$	$J_{  z_0C_2}^{(2a)} = 8,31$	$J_{  z_0C_2}^{(2m)} = 10,26$	$J_{  z_0C_2}^{(2i)} = 8,31$	$J_{  z_0C_2}^{(2c)} = 6,46$
$J_{  z_0C_3}^{(3o)} = 0,18$	$J_{  z_0C_3}^{(3a)} = 1,79$	$J_{  z_0C_3}^{(3m)} = 1,91$	$J_{  z_0C_3}^{(3i)} = 1,79$	$J_{  z_0C_3}^{(3c)} = 1,55$
$J_{  z_1C_2}^{(2o)} = 0,71$	$J_{  z_0C_4}^{(4a)} = 0,19$	$J_{  z_0C_4}^{(4m)} = 0,22$	$J_{  z_0C_4}^{(4i)} = 0,19$	$J_{  z_0C_4}^{(4c)} = 0,18$
$J_{  z_1C_3}^{(3o)} = 0,03$	$J_{  z_1C_2}^{(2a)} = 0,91$	$J_{  z_1C_2}^{(2m)} = 1,13$	$J_{  z_1C_2}^{(2i)} = 0,91$	$J_{  z_1C_2}^{(2c)} = 0,71$
$J_{  z_2C_2}^{(2o)} = 6,71$	$J_{  z_1C_3}^{(3a)} = 0,27$	$J_{  z_1C_3}^{(3m)} = 0,29$	$J_{  z_1C_3}^{(3i)} = 0,27$	$J_{  z_1C_3}^{(3c)} = 0,23$
$J_{  z_2C_3}^{(3o)} = 0,23$	$J_{  z_1C_4}^{(4a)} = 0,026$	$J_{  z_1C_4}^{(4m)} = 0,03$	$J_{  z_1C_4}^{(4i)} = 0,026$	$J_{  z_1C_4}^{(4c)} = 0,024$
$J_{z_3}^{(2o)} = 22,78$	$J_{  z_2C_2}^{(2a)} = 8,63$	$J_{  z_2C_2}^{(2m)} = 10,66$	$J_{  z_2C_2}^{(2i)} = 8,63$	$J_{  z_2C_2}^{(2c)} = 6,71$
$J_{  z_3C_3}^{(3o)} = 0,18$	$J_{  z_2C_3}^{(3a)} = 1,85$	$J_{  z_2C_3}^{(3m)} = 1,97$	$J_{  z_2C_3}^{(3i)} = 1,85$	$J_{  z_2C_3}^{(3c)} = 1,6$
$J_{z_4}^{(2o)} = 22,52$	$J_{  z_2C_4}^{(4a)} = 0,2$	$J_{  z_2C_4}^{(4m)} = 0,23$	$J_{  z_2C_4}^{(4i)} = 0,2$	$J_{  z_2C_4}^{(4c)} = 0,18$
$J_{  z_4C_3}^{(3o)} = 0,22$	$J_{z_3}^{(2a)} = 29,3$	$J_{z_3}^{(2m)} = 32,55$	$J_{z_3}^{(2i)} = 32,55$	$J_{z_3}^{(2c)} = 26,04$
$J_{z_5}^{(3o)} = 4,62$	$J_{  z_3C_3}^{(3a)} = 1,85$	$J_{  z_3C_3}^{(3m)} = 1,97$	$J_{  z_3C_3}^{(3i)} = 1,85$	$J_{  z_3C_3}^{(3c)} = 1,6$
	$J_{  z_3C_4}^{(4a)} = 0,2$	$J_{  z_3C_4}^{(4m)} = 0,23$	$J_{  z_3C_4}^{(4i)} = 0,2$	$J_{  z_3C_4}^{(4c)} = 0,18$
	$J_{z_4}^{(2a)} = 28,95$	$J_{z_4}^{(2m)} = 32,17$	$J_{z_4}^{(2i)} = 32,17$	$J_{z_4}^{(2c)} = 25,74$
	$J_{  z_4C_3}^{(3a)} = 1,79$	$J_{  z_4C_3}^{(3m)} = 1,91$	$J_{  z_4C_3}^{(3i)} = 1,79$	$J_{  z_4C_3}^{(3c)} = 1,55$
	$J_{  z_4C_4}^{(4a)} = 0,19$	$J_{  z_4C_4}^{(4m)} = 0,22$	$J_{  z_4C_4}^{(4i)} = 0,19$	$J_{  z_4C_4}^{(4c)} = 0,18$
	$J_{z_5}^{(3a)} = 5,55$	$J_{z_5}^{(3m)} = 6,47$	$J_{z_5}^{(3i)} = 6,47$	$J_{z_5}^{(3c)} = 4,62$
	$J_{  z_5C_4}^{(4a)} = 0,19$	$J_{  z_5C_4}^{(4m)} = 0,22$	$J_{  z_5C_4}^{(4i)} = 0,19$	$J_{  z_5C_4}^{(4c)} = 0,18$
	$J_{z_6}^{(4a)} = 0,53$	$J_{z_6}^{(4m)} = 0,66$	$J_{z_6}^{(4i)} = 0,53$	$J_{z_6}^{(4c)} = 0,53$

**Tablul 3.3** Momentele de inerție necesare pentru integrarea ecuațiilor dinamice

Palmă $m_p = 50g$				
Deget opozabil $m_{f1\_o} = 3,5g$ $m_{f2\_o} = 3g$	Deget arătător $m_{f1\_a} = 4,5g$ $m_{f2\_a} = 3,25g$ $m_{f2\_a} = 2,3g$	Deget mijlociu $m_{f1\_m} = 5,5g$ $m_{f2\_m} = 3,45g$ $m_{f2\_m} = 2,5g$	Deget inelar $m_{f1\_i} = 4,5g$ $m_{f2\_i} = 3,25g$ $m_{f2\_i} = 2,3g$	Deget mic $m_{f1\_c} = 3,5g$ $m_{f2\_c} = 3g$ $m_{f2\_c} = 2g$

**Tabelul 3.4** Masele elementelor componente ale sistemului mână

În urma simulării au fost obținute curbele din Fig. 3.5, care reprezintă variația variabilelor unghiulare ale sistemului mână la prinderea unui obiect cu masa de 1g [33], [35]. Se poate observa că încheietura are mișcarea cea mai amplă. Degetele inelar și mijlociu au valori foarte apropiate, având aproximativ aceeași mișcare. Remarca este valabilă și pentru degetele arătător și mic.



**Fig. 3.5** Valorile variabilelor unghiulare la prinderea unui obiect



### 3.5 Studiul dinamic folosind SimMechanics

Pentru a verifica modelul matematic descris în Matlab și pentru a obține o vizualizare a mișcării modelului, s-a recurs la simularea folosind SimMechanics. Astfel, a fost creată schema din Fig. 3.6 care, cu excepția degetului opozabil care are doar două falange, respectă fidel structura mâinii umane. Mișcarea corpurilor din care este compus modelul SimMechanics este permisă de articulații cu același număr de grade de libertate ca și în modelul natural: încheietura cu trei grade de libertate (implementată printr-un bloc Gimbal, Fig. 3.6), articulația metacarpofalangeală cu două grade de libertate (implementată printr-un bloc, Fig. 3.6) și articulațiile proximal interfalangeală și distal interfalangeală cu câte un grad de libertate (implementate prin blocuri de tip Universal, Fig. 3.6).

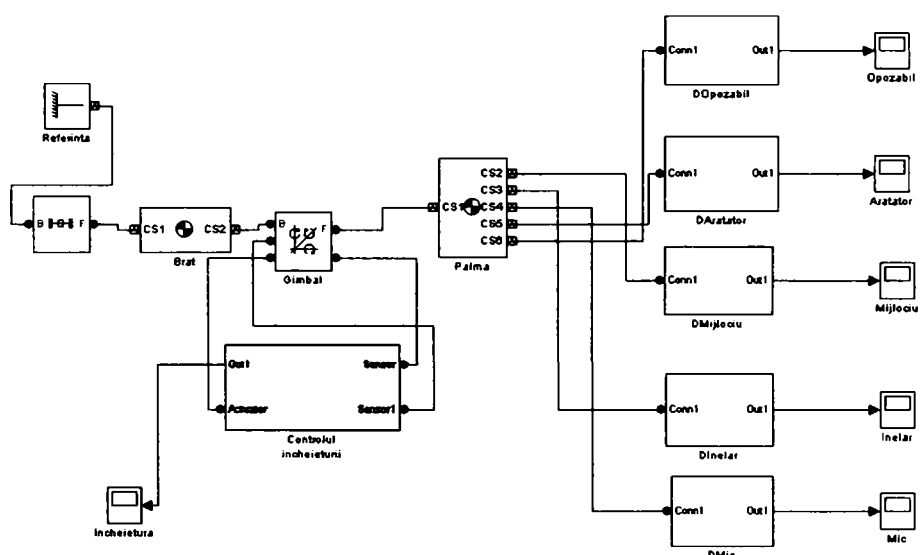


Fig. 3.6 Schema SimMechanics pentru modelul dinamic

Blocul Controlul incheieturii asigură controlul unghiurilor pentru a se mișca în domeniile de valori impuse de constrângerile naturale și de a calcula momentul care apare în articulații la prinderea unui obiect. De asemenea, tot el captează și mișcarea unghiurilor pentru a o trimite la blocul Scope spre afișare.

Toate degetele au aceeași structură, cu excepția degetului opozabil care are doar două falange. Și aici, mișcarea corectă a unghiurilor este asigurată de blocurile Constrangere, blocurile Comanda calculează momentele din articulații iar blocurile Joint Sensor captează mișcarea articulațiilor și o trimit spre afișare la un bloc Scope (Fig. 3.7).

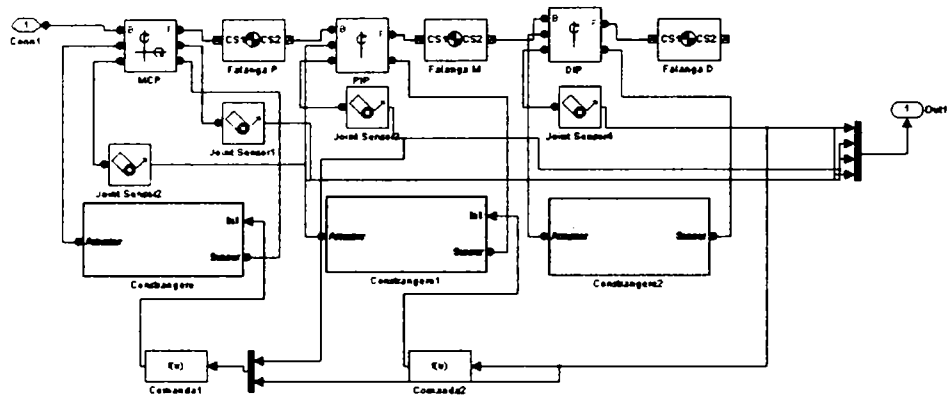


Fig. 3.7 Structura unui deget

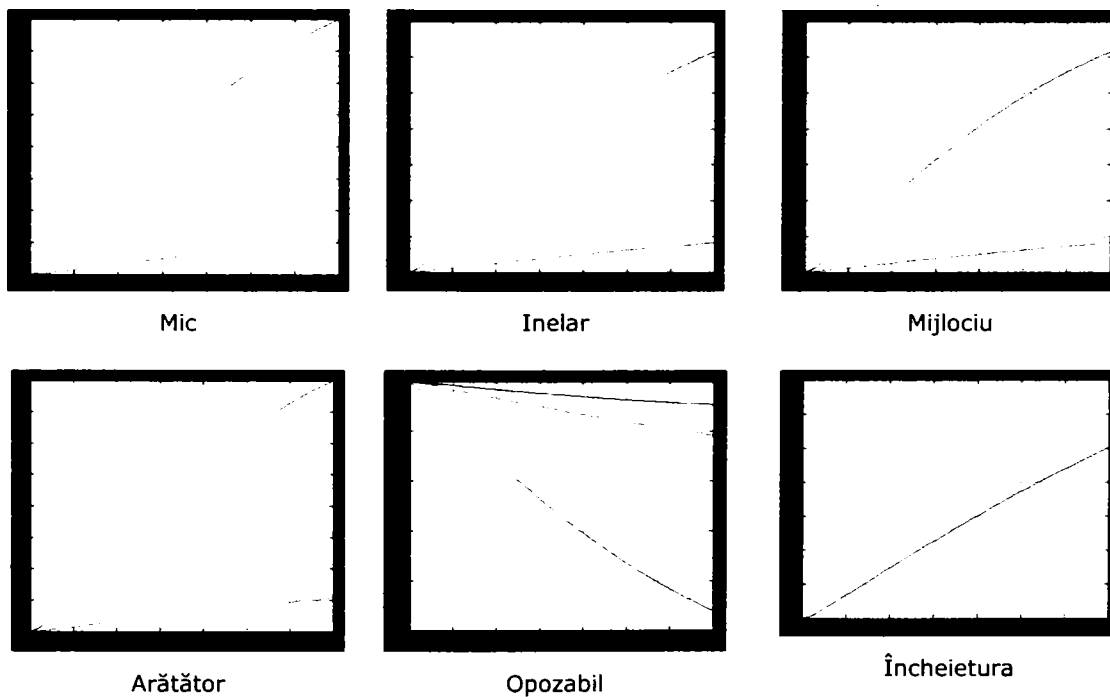
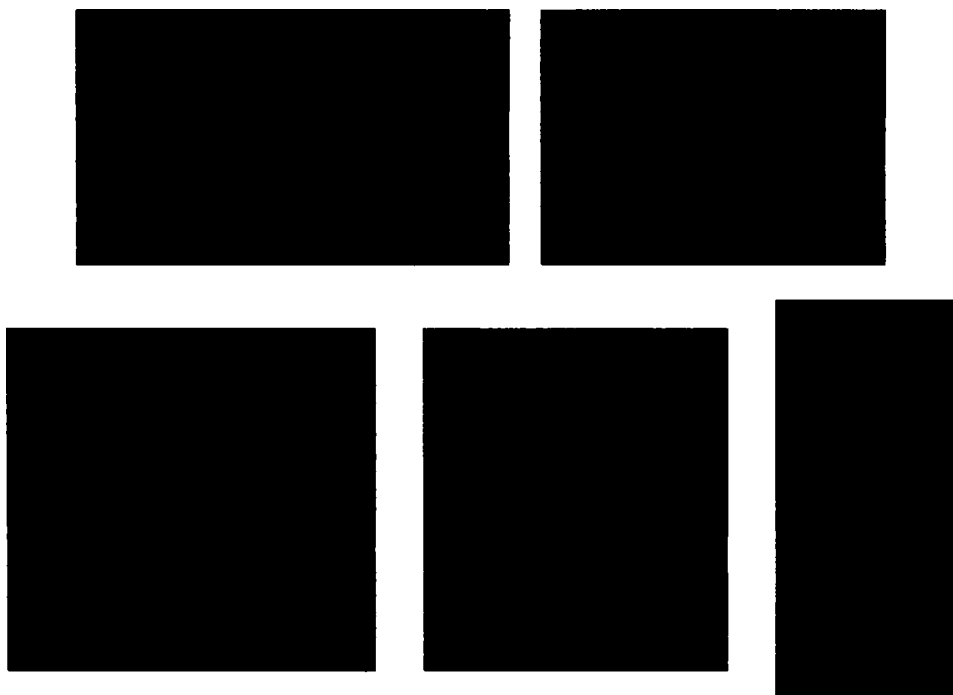


Fig. 3.8 Valorile variabilelor unghiulare la prinderea unui obiect de 1g

Pentru ca schema să fie completă, trebuie specificate lungimile masele și momentele de inerție în raport cu centrul de masă pentru toate elementele componente. Lungimile sunt specificate în subcapitolul 2.5, iar masele și momentele de inerție în subcapitolul 3.3. Folosind această schemă, s-a simulat prinderea unui obiect de 1g. Fig. 3.8 prezintă valorile variabilelor articulare pentru acest caz concret. În această figură, curbele au următoarea semnificație: albastru închis este  $q_4$ , verde —  $q_5$ , roșu —  $q_6$  și albastru deschis —  $q_7$ . În imaginea corespunzătoare încheieturii, curba

albastru închis corespunde lui  $q_1$ . Se poate observa că formele de undă sunt foarte apropiate de cele obținute în MATLAB, diferențele fiind generate, probabil, de designul schemei Simulink.

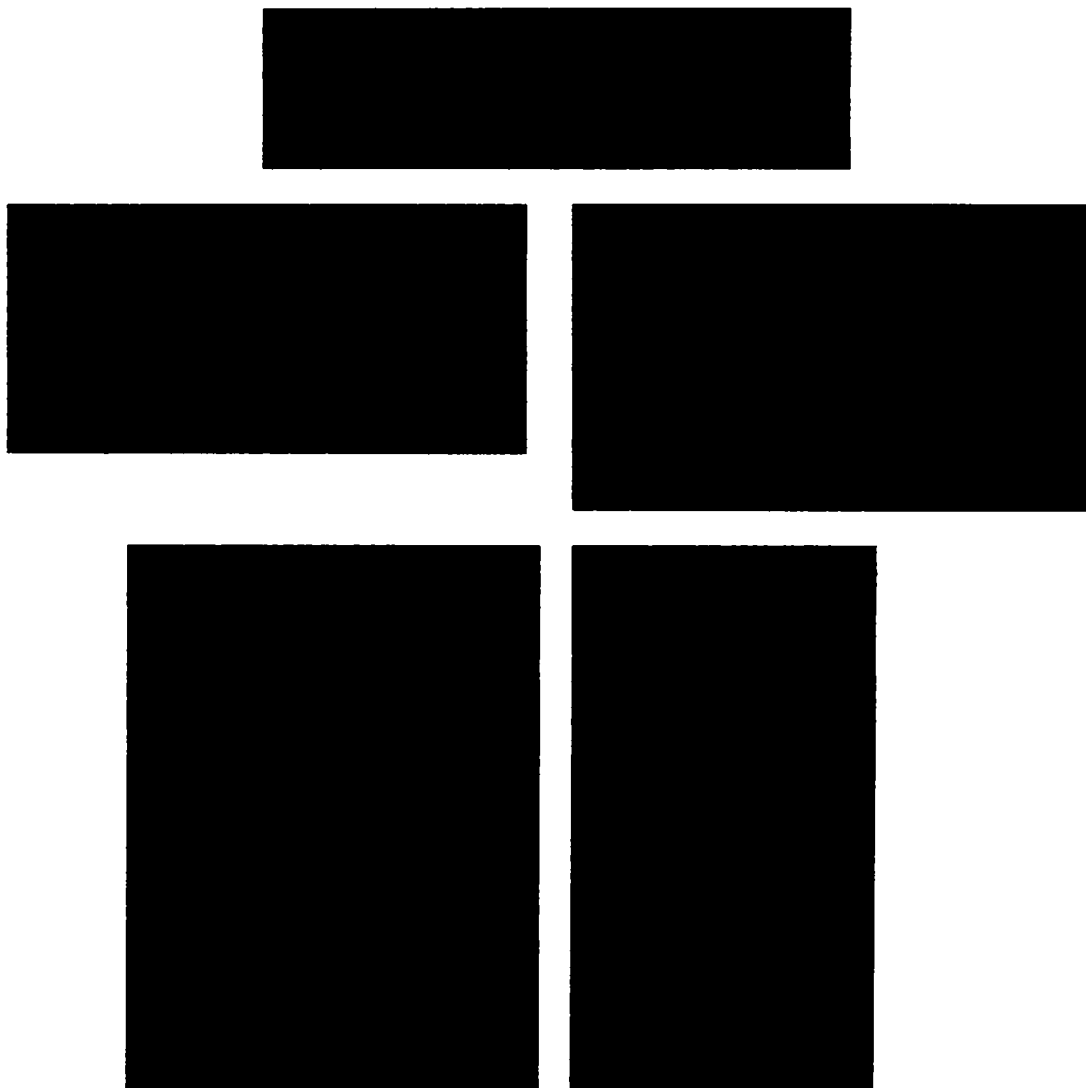


**Fig. 3.9** Mișcarea mâinii la prinderea unui obiect de 1g

### **3.6 Studii pe baza modelului virtual al mâinii**

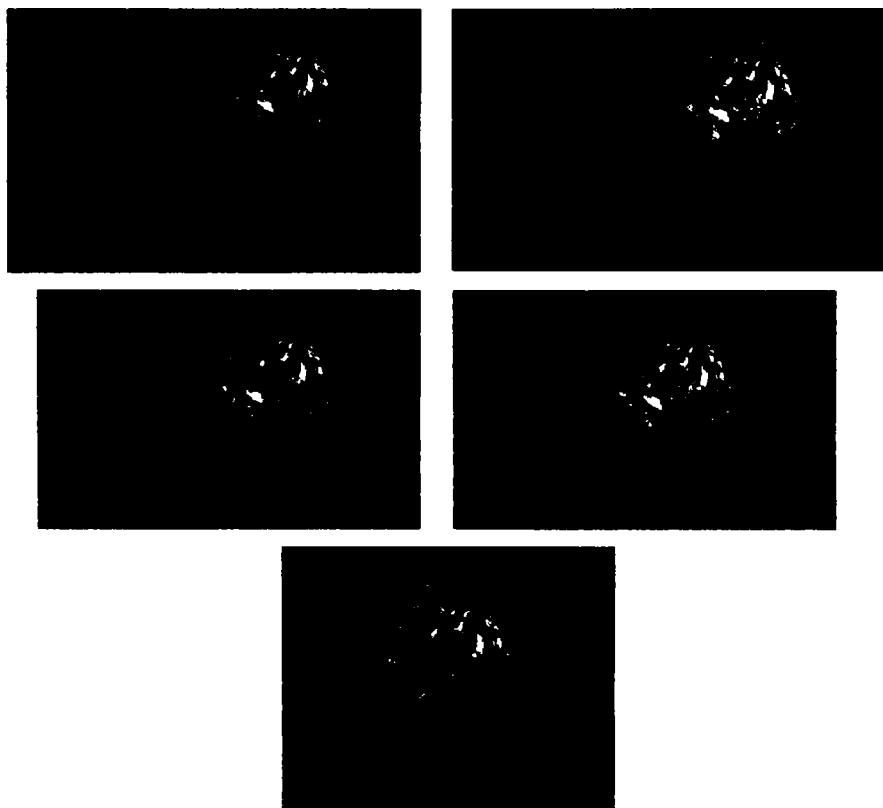
Pentru vizualizarea mișcării modelului s-a recurs, din nou, la modelul mâinii realizat în Virtual Reality Builder (prezentat detaliat în subcapitolul 2.7). Acesta a fost atașat la schema din Fig. 3.6 și, pe perioada simulării, a fost captată mișcarea sistemului (Fig. 3.9).

Un caz particular de studiu îl reprezintă comportarea sistemului mână sub acțiunea exclusivă a forțelor de greutate, care sunt forțe conservative. Fig. 3.10 surprinde câteva ipostaze din această mișcare și se poate observa că poziția mâinii este una naturală și asemănătoare cu cea a modelului natural.

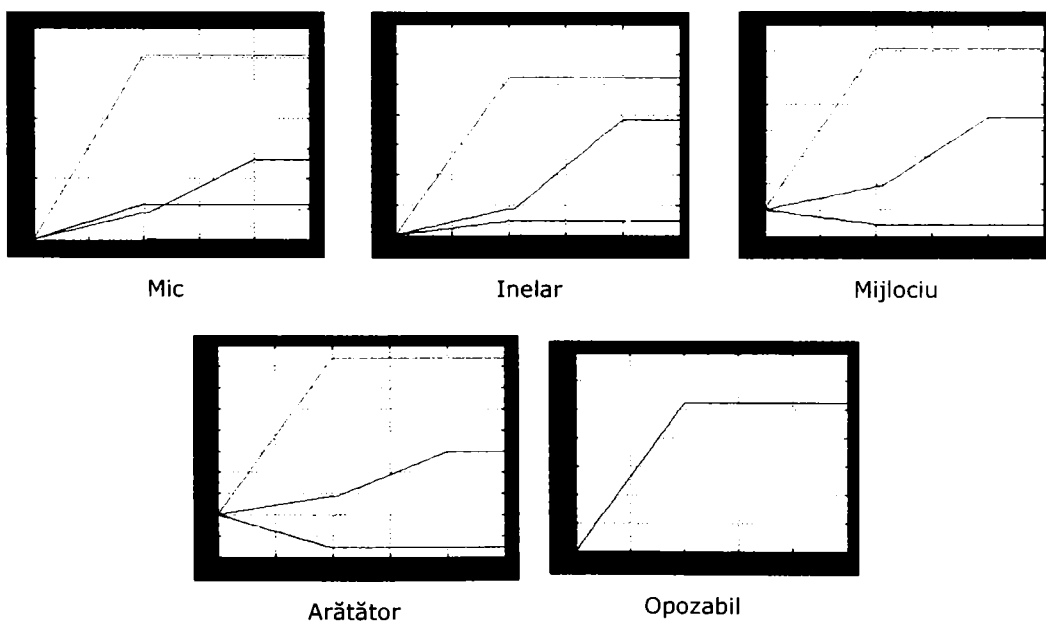


**Fig. 3.10** Modelul mâinii sub acțiunea propriei greutate

Folosind modelul virtual, au fost realizate câteva simulări pentru a scoate în evidență felul în care se realizează diverse prinderi și ce valori unghiulare sunt necesare pentru a atinge o anumite poziție. Literatura de specialitate a scos în evidență faptul că mișcarea mâinii realizată la prinderea unui obiect diferă de cea necesară pentru închiderea sau deschiderea pumnului. Astfel, la prinderea unui obiect, falangele se mișcă pe rând, primele cele proximale, urmează cele medii și, în finale cele distale. De asemenea, s-a mai observat că există câteva tipuri primitive de prindere (sferă, cilindru, cub) și că, în toate cazurile, mâna tinde să adopte forma obiectului înainte de a-l prinde, la apropierea de el. Fig. 3.11 modul în care modelul prinde o sferă, iar Fig. 3.12 valorile variabilelor articulare ale mâinii necesare pentru a realiza mișcarea.



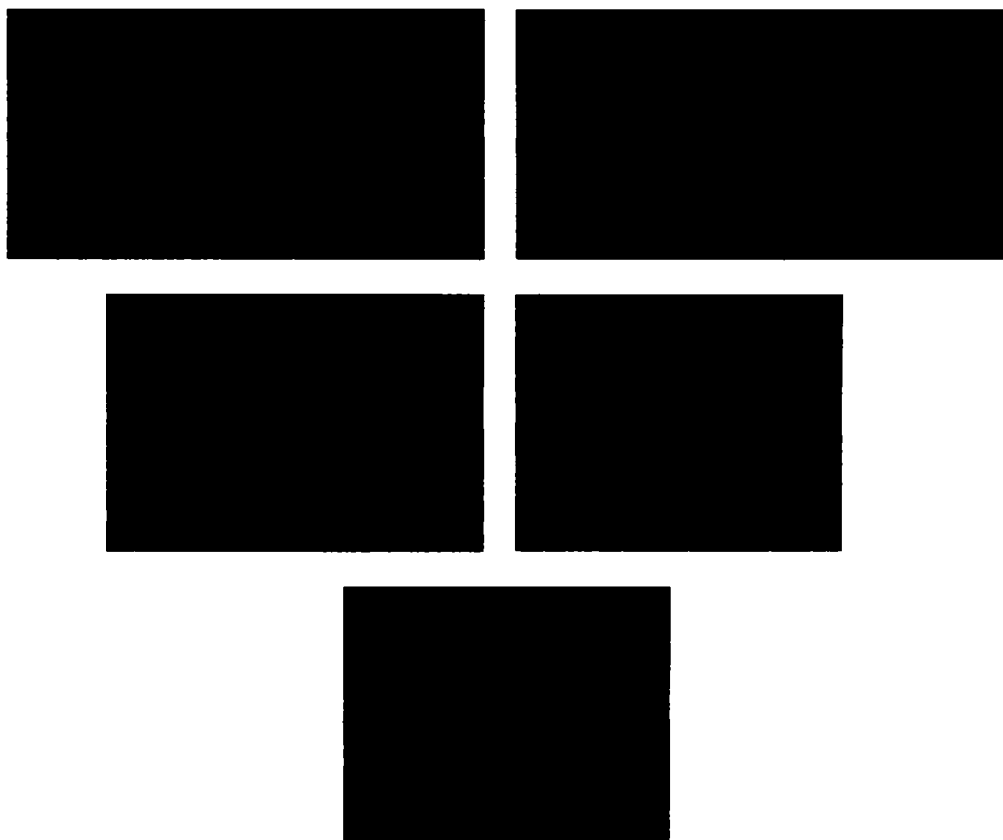
**Fig. 3.11** Prinderea unei mingi



**Fig. 3.12** Valorile unghiulare ale sistemului mână în cazul prinderii unei mingi

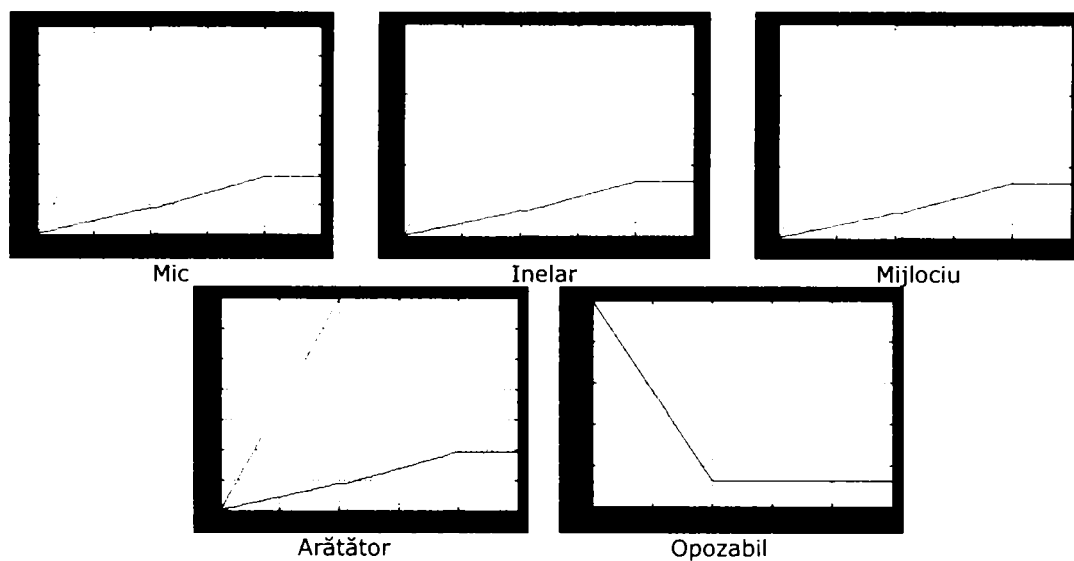
Din Fig. 3.11 și Fig. 3.12 se poate observa că mișcarea se realizează în conformitate cu cea a modelului natural. Degetele se răsfirează pentru ca mâna să ia o formă circulară, în conformitate cu obiectul care se dorește prins. Falangele proximale sunt cele care își termină primele cursa, urmate de falangele medii și, în final, de falangele distale. La sfârșitul mișcării, obiectul este prins astfel încât să nu existe posibilitatea scăpării lui. În Fig. 3.12 curbele au următoarea semnificație (valabilă pentru toate figurile în care se prezintă valori ale variabilelor unghiulare pentru diverse situații): albastru închis este  $q_4$ , verde —  $q_5$ , roșu —  $q_6$  și albastru deschis —  $q_7$ .

Fig. 3.13 prezintă un alt exemplu de prindere a unui obiect regulat, și anume prinderea unui paralelipiped. Modul în care variază variabilele unghiulare în acest caz se poate vedea în Fig. 3.14. Degetele se mișcă în paralel, fără aducție sau abducție, având valori apropiate pentru variabilele articulare corespunzătoare. Degetul opozabil se mișcă astfel încât să asigure prinderea și susținerea obiectului vizat.

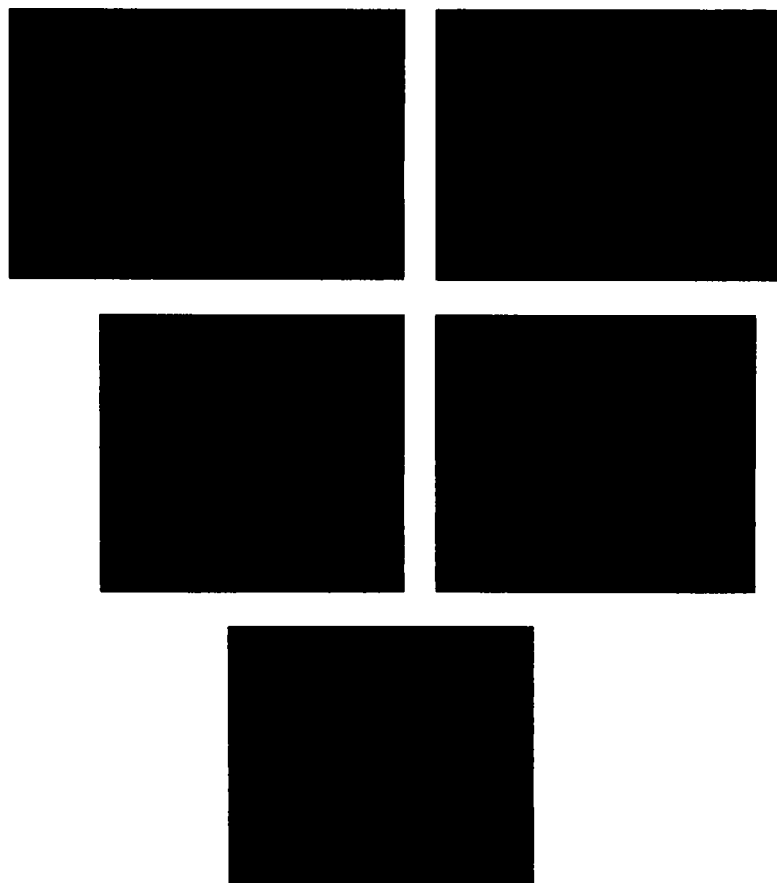


**Fig. 3.13** Prinderea unui paralelipiped

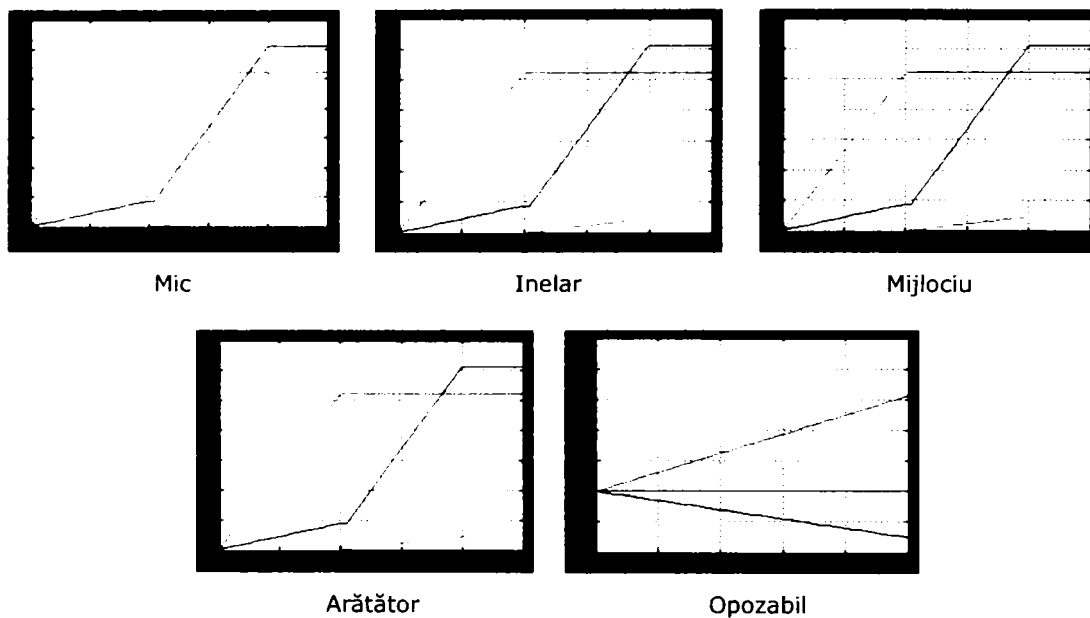
Fig. 3.15 prezintă o prindere realizată cu vârful degetelor. Și de această dată degetele se mișcă în paralel, fără aducție sau abducție, astfel încât, în final, vârful degetelor prind obiectul. Degetul opozabil este cel care securizează prinderea pentru ca obiectul să fie stabil. În Fig. 3.16 se pot observa valorile variabilelor unghiulare rezultate în acest caz, aproape identice pentru degetele centrale.



**Fig. 3.14** Valorile unghiulare ale sistemului mână în cazul prinderii unei paralelipiped



**Fig. 3.15** Prinderea unui pix



**Fig. 3.16** Valorile unghiulare ale sistemului mână în cazul prinderii cu vârful degetelor

În același mod poate fi simulată prinderea oricărui tip de obiect, indiferent de formă și cu o dimensiune destul de mică pentru a putea fi cuprins cu mâna. Rezultatele prezentate demonstrează faptul că modelul obținut este unul viabil, care poate fi folosit cu succes pentru proiectarea unui model de proteză.



# 4 PROIECTAREA UNUI MODEL DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ

## 4.1 Structura protezei. Principii de funcționare

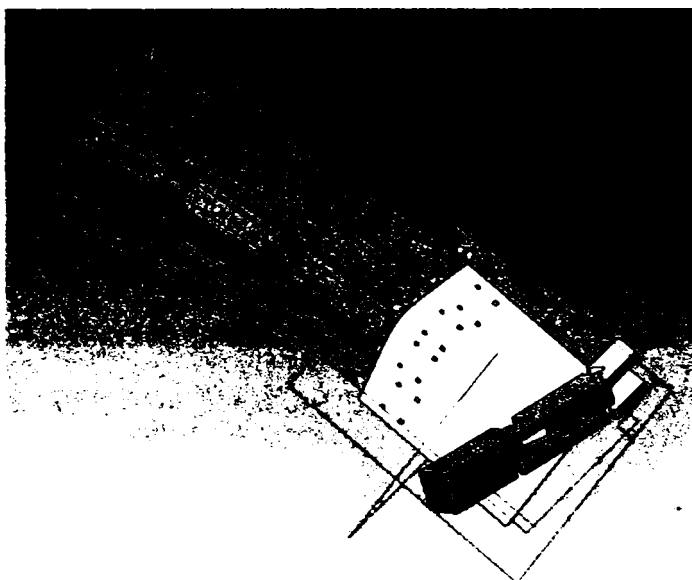
După studierea modelelor existente, s-a desprins concluzia că acestea urmează o tendință comună de creștere a complexității, nu doar constructive, ci și funcționale. Raportând această tendință la necesitățile potențialilor pacienți și la condițiile terapeutice ale țării noastre, s-a tras concluzia că înscrierea în acest curent de proiectare nu ar fi dus la rezultate valorificabile într-un viitor previzibil. Paradigma de proiectare are în vedere următoarele noțiuni. În primul rând, se limitează „abilitățile” funcționale ale protezei la implementarea funcției de prehensiune. Raționamentul din spatele acestei alegeri are în vedere simplificările considerabile ale modelului, astfel încât să fie create premisele unei eficiențe economice acceptabile, precum și observația că majoritatea pacienților potențiali beneficiari ai unei astfel de proteze au o mână funcțională naturală cu care să execute sarcini delicate, funcția de prehensiune a membrului superior protezat, fiind, astfel, suficientă.

O a doua noțiune urmărită prin paradigma de proiectare se referă la liniarizarea mecanică a raportului dintre forța de acționare și forța de prindere. După cum se va vedea în continuare, această direcție a prins contur într-un sistem simplu și original, foarte eficient, care economisește enorm din puterea de calcul necesară formării și aplicării impulsurilor de acționare, lăsând-o la dispoziția unor dezvoltări ulterioare.

Cea de a treia și ultima noțiune a paradigmei de proiectare se referă la problematica spinoasă a actuatorului constrictor (așa numitul „mușchi” artificial), necesar acționării falangelor protezei de mână. Este evident că forța necesară închiderii mâinii este mult mai mare decât cea necesară relaxării ei. Din acest motiv, abordarea directă a acționării cu elemente de împingere va genera rezultate opuse modelului natural (forță mare la deschidere, forță redusă la închidere). Această ultimă noțiune a fost amendată pe parcursul proiectării, datorită observațiilor legate de gabarit și de îndeplinirea primei noțiuni a paradigmei de proiectare.

Proteza proiectată și realizată respectă, destul de fidel, structura modelului natural, după cum se poate observa din Fig. 4.1. Astfel, ea are patru degete centrale, fiecare a câte trei falange și un deget opozabil, cu două falange. Pentru a respecta prima noțiune a paradigmei de proiectare, s-a renunțat la unul dintre gradele de libertate oferit de articulația metacarpofalangeală, cel datorat aducției. Pentru a ameliora această pierdere, cele patru degete centrale nu sunt dispuse în paralel, astfel încât să asigure constructiv răsfirarea degetelor. Cu această constrângere, modelul va

avea 14 grade de libertate, la care se adaugă cele 3 grade de libertate ale încheieturii. [37]



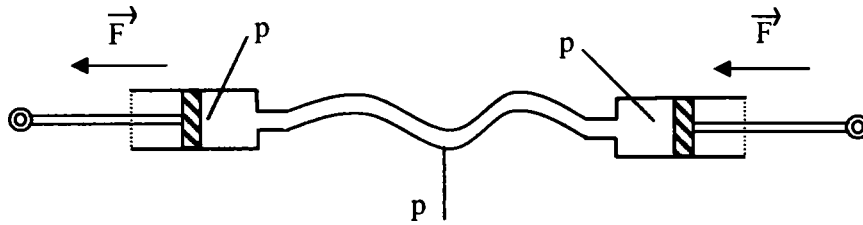
**Fig. 4.1** Structura protezei

Studiind modul în care mâna umană prinde obiectele, s-a observat că falangele se strâng în jurul obiectului în încercarea de a urma conturul acestuia. De asemenea, în timpul procesului de prindere, percepția umană nu se concentrează pe sesizarea poziției fiecărei falange, ci acordă o importanță deosebită senzațiilor tactile. În acest fel, este evitată prinderea obiectelor periculoase și, totodată, niciun obiect nu este strâns dincolo de limita de distrugere. Pe baza acestor observații, a fost conceput sistemul de acționare al protezei, care impune prezența unor senzori de presiune, dată fiind varietatea mare de forme și dimensiuni pe care le pot avea obiectele care se doresc a fi manipulate.

Din păcate, senzori de presiune care să fie adecvați în acționarea unei proteze, având o dimensiune foarte mică și o formă care să le permită inserarea în falange, sunt foarte greu de găsit și, de asemenea, vor influența caracteristicile de prindere. Explicația rezidă din faptul că astfel de senzori sunt, de regulă, realizați pe bază de compuși siliconici compresibili, care ar putea să nu reziste la aceleași temperaturi și rugozități ca și materialul din care este confecționată falanga (și se are în vedere titanul).

Bineînțeles că nu se poate renunța la senzorii de presiune fără a se restricționa drastic domeniul de obiecte care pot fi manipulate, dar ar fi foarte utilă plasarea lor în altă parte și nu la contactul cu obiectele. Această necesitate a indus alegerea unui sistem de acționare hidraulic. Pe de altă parte, un astfel de sistem de acționare permite poziționarea motoarelor și a plăcilor de comandă a acestora pe antebraț, asigurând, în acest fel, o greutate scăzută pentru proteza în sine. Astfel, forțele exercitate de către falange vor fi proporționale cu presiunea lichidului hidraulic, presiune care va fi constantă (datorită cantităților mici de lichid și a mișcării infime a acestora) în orice punct al circuitului hidraulic. Cu alte cuvinte, orice forță aplicată de către o falangă asupra unui obiect va determina o presiune proporțională în

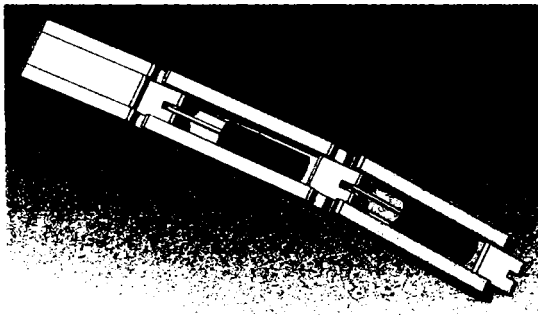
circuitul hidraulic propriu, care va putea fi măsurată oriunde pe circuit, chiar și la capătul unde se află poziționată acționarea (Fig. 4.2). Acest lucru permite înlocuirea senzorilor de presiune tactili cu senzori fluidici de presiune, aspect foarte important din două puncte de vedere: pe de o parte, există riscul ca integrarea senzorilor tactili pe falange să nu fie posibilă, iar, pe de altă parte, s-ar putea ca senzorii tactili să nu poată acoperi întreaga suprafață a falangei, astfel încât anumite obiecte cu forme neregulate să realizeze un punct de contact cu proteza în afara zonei senzorului. [96]



**Fig. 4.2** Circuitul hidraulic

După cum se poate observa din Fig. 4.2, presiunea fiind constantă în circuitul hidraulic, rezultă că proporționalitatea dintre forța aplicată de motor și forța aplicată de falangă depinde în mod direct de suprafețele celor două pistoane, conform cu relația (4.1). În aceste condiții, dacă motorul asigură cursa necesară pentru închiderea falangei, cei doi cilindri pot fi identici, rezultând egalitate între cele două forțe.

$$F_f = \frac{S_f}{S_m} \cdot F_m \quad (4.1)$$



**Fig. 4.3** Un deget cu trei falange



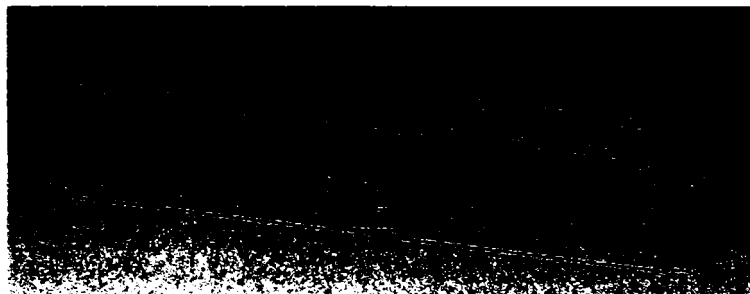
**Fig. 4.4** Articulația dintre falange

Când proteza va trebui să prindă un obiect, circuitul de control va genera către pompe comanda de creștere a presiunii. În funcție de natura fiecărui obiect care va trebui prins, se vor stabili experimental limite de presiune, astfel încât să se asigure o prindere sigură și nedistructivă. Fiecare falangă va începe să se miște înspre obiect, iar mișcarea se va opri atunci când presiunea limită va fi atinsă (adică în momentul în care falanga va apăsa pe obiect suficient de tare pentru a-l susține, dar

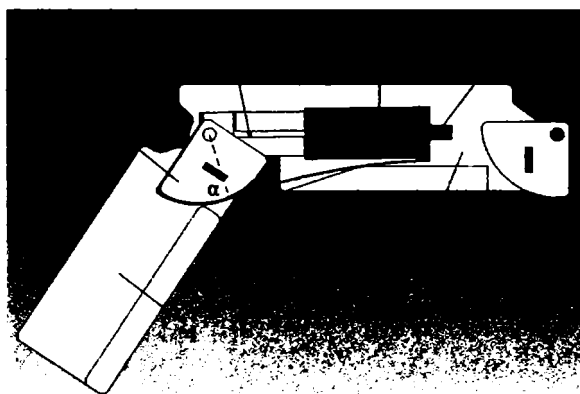
nu suficient de tare pentru a-l distruge). Când toate falangele s-au oprit, obiectul este considerat prins și poate fi mutat.

Studiind modelul natural, s-a observat că mișcarea mâinii umane este constrânsă, aceasta neputând realiza mișcări arbitrare. În acest sens, prin construcția pereților falangelor, s-a stabilit care este domeniul de valori posibile pentru fiecare articulație în parte. În primă fază, s-a decis ca toate unghiurile să poată avea maxim  $90^\circ$ , deși articulația proximal interfalangeală a modelului natural permite o mișcare mai largă (subcapitolul 2.2.1, „Constrângeri ale mișcării mâinii umane”).

Acționarea fiecărei articulații este realizată de către un motor pas cu pas care, prin intermediul unui șurub conducător va împinge un piston. Acesta va transmite mișcarea, prin intermediul sistemului hidraulic (Fig. 4.2), unui alt piston prins de articulație (Fig. 4.3), determinând, în cazul Fig. 4.4, mișcarea falangei distale față de falanga medie. După cum se poate observa, mișcarea se va opri cu siguranță atunci când unghiul dintre cele două falange este  $90^\circ$ . Totodată, tot constructiv, este limitată mișcarea falangelor către valori negative ale unghiului articulațiilor. Altfel spus, este împiedicată mișcarea „peste cap” a degetelor mâinii (Fig. 4.5).



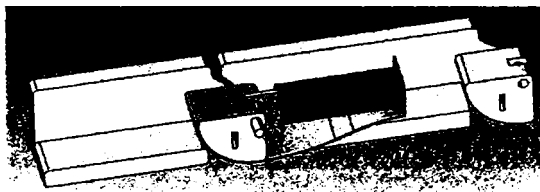
**Fig. 4.5** Articulația dintre două falange



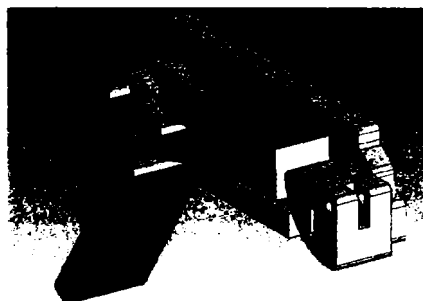
**Fig. 4.6** Principiul de funcționare

Pentru atingerea acestui scop a fost proiectat un mecanism simplu și eficient, prin folosirea unui sector cilindric (elementul 1, Fig. 4.6), cu raza de 11 mm și grosimea de 10 mm, concentric cu articulația falangei și solidar cu ea. Când lichidul hidraulic este împins în elementul de execuție (elementul 3, Fig. 4.6) prin ajutor (elementul 7, Fig. 4.6), presiunea în creștere va împinge pistonul (elementul 2, Fig. 4.6) al cărui capăt este prins de axul de conectare dintre cele două falange. Acest lucru va împiedica mișcarea pistonului, dar va induce mișcarea cilindrului exterior

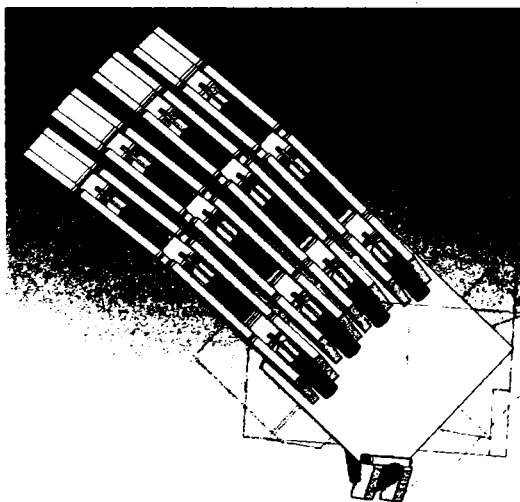
elementului de execuție în interiorul falangei (Fig. 4.3). Banda metalică (elementul 5, Fig. 4.6) atașată elementului de execuție și înfășurată în jurul sectorului cilindric va fi trasă de către cilindrul exterior și va determina rotirea sectorului cilindric și, implicit, închiderea falangei atașată de acesta. Banda metalică este, în orice moment, tangentă la sectorul cilindric. Astfel, folosind acest mecanism simplu, presiunea din elementul de execuție va fi proporțională liniar cu forța aplicată de către falangă, indiferent de poziția acesteia raportată la falanga de care este atașată și care conține elementul de execuție. [96], [106]



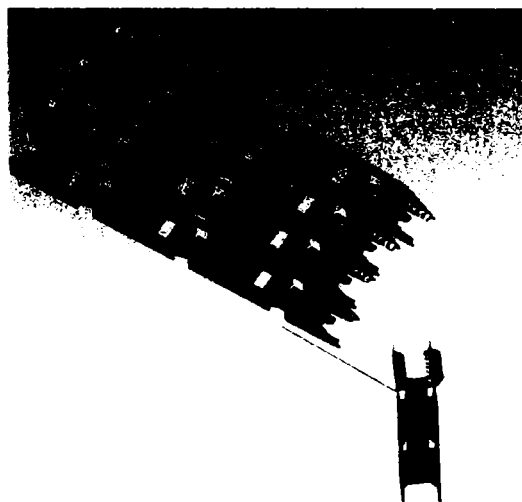
**Fig. 4.7** Articulația când degetul este întins



**Fig. 4.8** Articulația când degetul este flexat



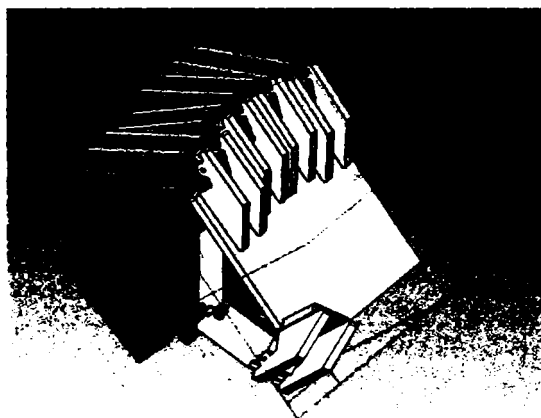
**Fig. 4.9** Mâna cu sistemul de acționare a articulațiilor



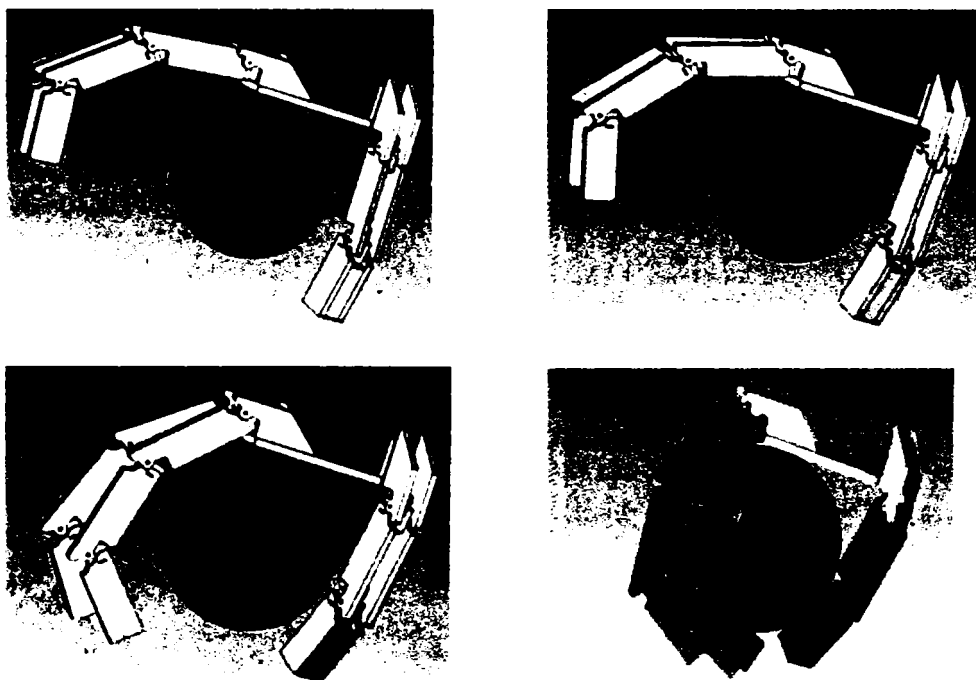
**Fig. 4.10** Proiectul pentru realizarea modelului din titan

Ideea de a imita funcția tactilă a modelului natural se bazează pe măsurarea presiunii lichidului hidraulic. Din păcate, folosirea unui sistem uzual (cum ar fi sistemul bielă-manivelă) pentru conectarea elementului de acționare la falangă nu va păstra proporționalitatea liniară dintre variația presiunii lichidului hidraulic și variația forței aplicată de falangă. Această proporționalitate va fi afectată de către sinusul unghiului pe care elementul de conectarea al actuatoarei și falangă îl fac în

timpul mișcării. Pentru a menține o variație liniară și independentă de poziția relativă a unei falange față de cealaltă, este nevoie ca acest unghi să fie menținut la  $90^\circ$  (unghiul marcat cu  $\alpha$  în Fig. 4.6). [105]



**Fig. 4.11** Închiderea mâinii

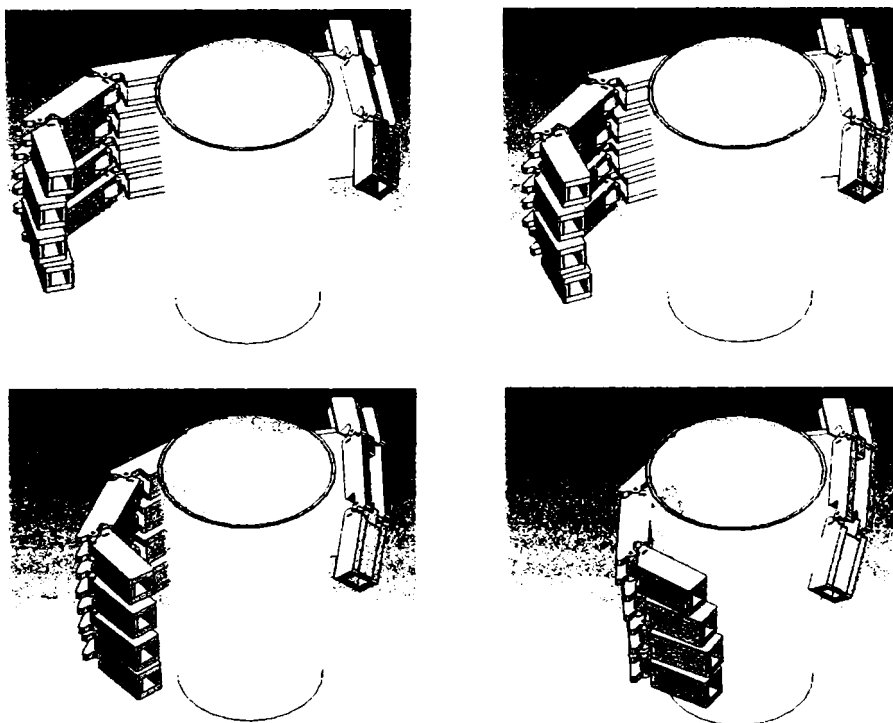


**Fig. 4.12** Prinderea unei mingi de tenis

Prin intermediul unui senzor fluidic de presiune se va citi presiunea din sistemul hidraulic pentru a se ști când s-a ajuns la capăt de cursă (care poate să însemne fie închiderea totală a articulației, fie aplicarea forței dorite asupra obiectului care trebuie prins). Această informație se va trimite la softwareul de comandă pentru a

opri motorul la poziția curentă. Fig. 4.9 prezintă modelul de proteză și elementele de acționare pentru falange, iar Fig. 4.10 prezintă proiectul realizat pentru confecționarea din titan a modelului.

S-a recurs la această folosire „inversată” a forței elementului de execuție din necesitatea de a avea, la fel ca și în cazul modelului natural, forțe mai mari la flexare și nu la extensie. În acest caz, era obligatorie folosirea presiunilor pozitive pentru flexare, deoarece presiunile negative sunt limitate de către presiunea atmosferică. Extensia falangelor nu poate fi realizată, de către modelul prezentat, doar pe baza presiunilor negative din circuitul hidraulic, deoarece banda nu este capabilă să împingă sectorul cilindric. Din acest motiv, deschiderea articulației se va face printr-un arc de rapel, pe măsură ce motorul retrage pistonul.



**Fig. 4.13** Prinderea unui pahar

În aceste condiții, conform cu literatura de specialitate [24], [115], această proteză se încadrează în categoria protezelor cu închidere voluntară. Astfel, acestea sunt deschise total atunci când sistemul de acționare este relaxat și se închid atunci când sistemul de acționare este activ. În acest caz, forța de prindere crește pe măsură ce crește și forța de operare (în cazul de față, presiunea din sistemul hidraulic).

Spre exemplu, scenariul de prindere a unui obiect de către această proteză este următorul: acționate de către motoare, falangele se pun în mișcare și mâna se închide (Fig. 4.11). În momentul în care o falangă ajunge în contact cu obiectul care trebuie prins, nu se mai poate deplasa, dar va aplica o forță asupra obiectului, care crește proporțional cu presiunea din sistemul hidraulic, colectată de către senzorul corespunzător. În momentul când presiunea ajunge la valoarea limită setată, motorul aferent articulației, care pune în mișcare falanga în cauză, se oprește,

menținând falanga în poziția curentă și susținând, astfel, obiectul. Celelalte falange își vor continua mișcarea după același principiu. Aceste valori ale presiunii din sistemul hidraulic vor trebui determinate experimental pentru fiecare obiect care se dorește a fi manipulat. În aceste condiții, modelul este capabil de a realiza prinderea a diverse obiecte, după cum se poate vedea din Fig. 4.12 și Fig. 4.13 [107].



# 5 ANALIZA NUMERICĂ A STĂRII DE TENSIUNE ȘI DE DEFORMAȚIE A MODELULUI DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ

## **5.1 Considerații generale privind metodele numerice de calcul al stărilor de tensiune și deformație**

Metodele elementelor finite, sau analiza cu elemente finite, se bazează pe conceptul construirii obiectelor complicate din obiecte mai simple, sau divizarea obiectelor complicate în obiecte mai simple pentru care se pot aplica scheme de calcul cunoscute. În multe situații, pentru rezolvarea unei probleme practice, matematica nu oferă procedee suficient de puternice pentru găsirea soluției exacte, iar, de multe ori, nici măcar a unei soluții aproximative. De aici ideea de bază a metodei elementului finit de a găsi soluția unei probleme complicate, prin divizarea acesteia în componente individuale sau *elemente* al căror comportament este pe deplin cunoscut.

În numeroase situații, un model adecvat este obținut folosind un număr finit de componente foarte bine definite, categorie în care se încadrează problemele *discrete*. În alte situații, subdivizarea este continuată la infinit iar problema poate fi definită folosind exprimarea matematică infinitezimală. Aceasta conduce la sisteme de ecuații diferențiale, care implică un număr infinit de elemente. Astfel de sisteme se numesc *continue*. [124]

O dată cu dezvoltarea calculatoarelor, care au devenit tot mai performante, problemele discrete au devenit destul de ușor rezolvabile, chiar dacă numărul de elemente este foarte mare. Capacitatea finită a calculatoarelor face, însă, ca problemele continue să fie rezolvabile numai prin manipulare matematică. Tehnicile matematice existente pentru obținerea unor soluții exacte, de cele mai multe ori, limitează posibilitățile la soluții super simplificate. Pentru a preîntâmpina dificultatea de rezolvare a problemelor reale continue, numeroși oameni de știință au propus, de-a lungul timpului, diverse metode de discretizare. Toate aceste metode presupun aproximare, dar, din fericire, ele se apropie de limita soluției continue pe măsură ce numărul de variabile discrete crește.

Discretizarea problemelor continue a fost abordată în mod diferit de către matematicieni și ingineri. Matematicienii au dezvoltat tehnici generale aplicabile direct asupra sistemelor de ecuații diferențiale care guvernează problema, precum aproximarea diferențelor finite [2], [88] sau diverse proceduri cu reziduuri ponderate [20], [44]. Inginerii, pe de altă parte, de cele mai multe ori au abordat problema intuitiv, prin crearea unei analogii între elemente discrete reale și porțiuni

finite ale unui domeniu continuu [55], [58], [100]. Tocmai din această „analogie directă” a inginerilor s-a născut termenul de *element finit*. Primul care se pare că a folosit acest termen este R.W. Clough [18], care îl introduce într-o metodologie standard aplicabilă sistemelor discrete. Atât din punct de vedere conceptual, cât și din punct de vedere computațional, această abordare este de o importanță majoră. Conceptual acesta asigură obținerea unui nivel de înțelegere îmbunătățit, computațional oferă o metodă unică pentru varietatea mare de probleme și dezvoltarea unor proceduri computaționale standard.

În analiza problemelor de natură discretă a fost dezvoltată, de-a lungul anilor, o metodologie standard. Inginerul constructor care ridică o casă, în primă instanță, calculează relațiile forță-deplasare pentru fiecare element al structurii, apoi assemblează întregul pe baza unei proceduri foarte bine definite de stabilire a echilibrului local la nivelul fiecărui „nod” sau punct de conectare al structurii. Ecuațiile care se obțin pot fi rezolvate pentru determinarea deplasărilor necunoscute. În mod similar, inginerul în electronică sau hidraulică, lucrând cu o rețea de componente electronice (rezistoare, condensatoare etc.) sau de conducte hidraulice, stabilesc, în prima fază, o relație între curenții (fluxurile) și nivelurile de potențial ale elementelor individuale, apoi trec la asamblarea sistemului, asigurând continuitatea circulației.

Toate analizele de acest gen urmează un șablon general, care este universal adaptabil sistemelor discrete, fiind, astfel, posibilă definirea unui *sistem discret standard*. Existența acestui șablon pentru rezolvarea sistemelor discrete standard conduce la prima definire a procesului cu elemente finite ca o metodă de aproximare pentru problemele continue astfel încât [124]:

- continuitatea este divizată într-un număr finit de elemente, al căror comportament este specificat printr-un număr finit de parametri;
- soluția sistemului complet, ca ansamblu al elementelor sale, urmărește cu precizie aceleași reguli precum cele aplicate problemelor discrete standard.

*Metodele analitice de calcul* sunt aplicabile la un număr restrâns de clase de probleme particulare. Limitarea este impusă de geometria structurii care se studiază și de configurația sistemului de sarcini. *Metodele aproximative de calcul* sunt utilizate pentru soluționarea unor probleme mai complicate, caz în care soluția exactă este imposibil de găsit. Din păcate, din această categorie fac parte marea majoritate a problemelor practice de calcul a structurilor de rezistență. Pentru ca metoda aproximativă de calcul să fie acceptabilă, trebuie să permită determinarea soluției problemei cu o precizie suficientă, satisfăcătoare pentru problema concretă care se rezolvă, ținând cont de scopul practic căreia îi este determinată.

Pentru metodele aproximative de calcul s-au dezvoltat două direcții principale [41], [42]:

- se scriu ecuațiile care descriu problema dată iar rezolvarea acestora se face aproximativ prin următoarele metode:
  - se neglijează unii termeni cu pondere secundară, obținându-se, în acest mod, ecuații simplificate care se pot rezolva analitic;

- se aplică metode numerice pentru integrarea ecuațiilor diferențiale, sau se aplică metode speciale, precum metoda diferențelor finite, metoda relaxării, utilizarea unor serii de funcții etc.
- se caută o rezolvare exactă a ecuațiilor obținute pentru un model aproximativ de calcul, elaborat pe baza unor ipoteze simplificatoare, privind o anumită configurație considerată cea mai probabilă pentru problema dată și care satisface condițiile pe contur. Ipotezele privind cea mai probabilă configurație a deplasărilor sunt de două categorii:
- ipoteze globale, care se referă la modul în care se comportă o anume entitate geometrică (dreaptă sau plan) din corpul sau structura studiată: ipoteza secțiunilor plane și normale a lui Bernoulli, ipoteza dreptei normale a lui Kirchoff, ipoteza nedeformabilității conturului secțiunii sau ipoteza privind deformația suprafeței neutre a barelor sau a plăcilor;
  - ipoteze locale, care constau în admiterea unei configurații a deplasărilor pentru elemente de formă convenabil alese și de dimensiuni mici, dar finite, în care s-a descompus corpul sau structura care se studiază. Pe acest fundament s-a dezvoltat metoda elementelor finite, care a căpătat în ultima vreme un înalt grad de generalitate, aplicându-se cu succes în toate domeniile ingineriei.

Metoda elementului finit a apărut ca o consecință a necesității de a calcula structuri de rezistență complexe pentru care metodele de calcul analitice nu sunt operabile. Ideea de bază este aceea că, dacă structura se împarte în mai multe părți numite *elemente finite*, pentru fiecare dintre acestea se pot aplica teorii de calcul corespunzătoare schematizării adoptate (teoria de bară, placă sau masiv). Împărțirea întregului în părți de dimensiuni mai mici, operație denumită *discretizare*, va avea drept efect obținerea de forme simple pentru elementele finite componente ale structurii. Modelul de calcul utilizat în analiza cu elemente finite este un model aproximativ, obținut prin asamblarea elementelor finite componente, ținând cont de geometria structurii. Conectarea elementelor finite se realizează numai în anumite puncte, numite puncte nodale sau noduri. Nodurile reprezintă punctele de intersecție ale liniilor de contur, rectilinii sau curbe, ale elementelor finite. Elementele finite pot fi unidimensionale, bidimensionale sau tridimensionale, în funcție de geometria structurii pe care o modelează.

Nodurile sunt plasate, de obicei, pe contururile elementului, în locurile în care elementele adiacente sunt conectate între ele. Deoarece variația reală a variabilei de câmp (precum deplasarea, tensiunea, temperatura, presiunea sau viteza) nu este cunoscută în interiorul structurii, se admite că variația variabilei de câmp pe domeniu unui element finit poate fi aproximată printr-o funcție simplă. Aceste funcții de aproximare, numite modele de interpolare, sunt definite în funcție de valorile variabilelor de câmp în noduri [42].

Caracterul aproximativ al metodei elementului finit rezultă ca urmare a faptului că geometria reală este întotdeauna înlocuită cu o rețea de elemente finite care urmărește forma reală, dar nu o poate reda cu exactitate (redarea totală este posibilă numai pentru anumite geometrii particulare) datorită numărului finit de elemente. De asemenea, mărimile necunoscute ale problemei sunt calculate numai în nodurile structurii. Drept consecință, precizia de calcul crește o dată cu creșterea numărului de elemente finite. Continuitatea rezultatelor obținute depinde de

caracterul de continuitate pe care funcțiile de aproximare trebuie să îl asigure la nivelul zonelor interelemente.

Formularea metodei elementului finit se bazează pe exprimarea condițiilor de extrem pe care unele mărimi, care intervin în fenomenul studiat, trebuie să le satisfacă. Metoda elementelor finite este o metodă cu un vast domeniu de aplicabilitate. Caracterul de generalitate al metodei îi conferă avantajul de a se adapta, cu modificări simple, celor mai complexe și variate probleme precum: probleme liniare și neliniare, solicitări statice și dinamice, structuri de bare, plăci plane sau curbe și masive, solicitări de contact, probleme de mecanica ruperii. Toate acestea sunt grupate în trei tipuri de probleme cu soluții pe contur [42]:

- Probleme de echilibru (sau staționare) sau probleme independente de timp. În astfel de probleme trebuie determinată deplasarea în starea de echilibru sau distribuția tensiunii (probleme de mecanica solidului), distribuția temperaturii sau a fluxului de căldură (probleme de transfer a căldurii) și distribuția presiunii sau a vitezei (probleme de mecanica fluidului);
- Probleme de valori proprii. În cadrul acestor probleme, timpul nu apare în mod explicit și pot fi considerate extensii ale problemelor de echilibru. În plus, în problemele de valori proprii trebuie determinate valori critice ale unor anumiți parametri care intervin în formulările acestora. Astfel, trebuie găsite frecvențele naturale (probleme de mecanica solidului), caracteristicile de rezonanță (probleme de circuit electric), trebuie realizat studiul regimurilor curgerii laminare (probleme de mecanica fluidului)

Probleme de propagare sau de tranziție. Aceste probleme sunt dependente de timp și apar, spre exemplu, ori de câte ori este necesară găsirea răspunsului corpului care este supus la sarcini variabile în timp în mecanica solidului deformabil, sau în cazul încălzirii sau răcirii bruște în transferul de căldură.

## **5.2 Prezentare generală a metodei elementelor finite**

Deși metoda elementelor finite a fost utilizată pe scară largă în domeniu mecanicii structurale, ea a fost aplicată cu succes și pentru rezolvarea altor tipuri de probleme de inginerie, în domenii precum conductibilitatea termică, dinamica fluidelor, curgerile de infiltrație și câmpurile electromagnetice. Aplicabilitatea generală a metodei a făcut ca ea să fie folosită pentru soluția unor valori de contur complicate și pentru alte tipuri de probleme. Acest lucru poate fi observat din similitudinile puternice existente între diferitele tipuri de probleme tehnice. Pentru a folosi metoda elementului finit în rezolvarea unor probleme, trebuie parcurse câteva etape [42], prezentate în cele ce urmează.

### **A) Studiul structurii**

Acesta trebuie realizat pentru corecta determinare a modelului de calcul și a elementelor finite adecvate (în concordanță cu precizia și calitatea rezultatelor urmărite), care să modeleze cât mai fidel starea reală de tensiune și deformăție.

## B) Discretizarea structurii

Aceasta trebuie realizată astfel încât, în zonele de interes în care se dorește un calcul cât mai exact, dimensiunea elementelor finite să fie cât mai mici. Structura discretizată poate să conțină atât zone cu elemente finite mici, cât și zone cu elemente finite mari ca dimensiune. Trecerea dintre cele două tipuri de zone trebuie, întotdeauna, să se facă prin intermediul unor elemente de trecere progresive, pentru a fi eliminate distorsiunile care pot să apară la treceri bruște (Fig. 5.1 [42]).

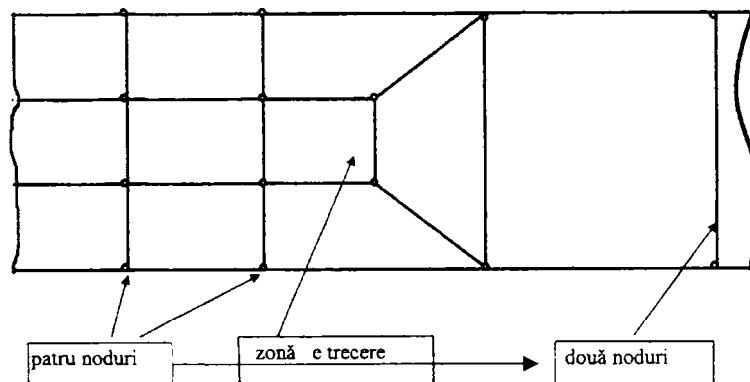


Fig. 5.1 Discretizarea unei structuri

Un pas foarte important în cadrul alegerii modului de discretizare constă în verificarea elementelor finite pentru a nu fi distorsionate. În acest sens, specialiștii [42], [61], [86] recomandă ca raportul dintre lungimile laturilor să fie apropiat de unu, iar în cazul elementelor finite de tip patrulater sau hexaedru unghiurile dintre laturi să aibă o valoare cât mai apropiată de  $90^\circ$ . Distorsiunile care, dintr-un anumit motiv, au apărut în geometria elementelor finite pot induce distorsiuni severe ale rezultatelor obținute.

## C) Studiul elementelor finite

Acesta este necesar pentru stabilirea ecuațiilor elementelor finite (denumite *ecuații elementale*), care descriu comportarea mediului în cuprinsul unui element. În aceste ecuații, necunoscuta este reprezentată de gradele de libertate impuse tipului de element utilizat și sunt determinate dependent de categoria din care face parte problema.

*Metoda directă* este simplă, intuitivă și ușor de aplicat, dar poate fi utilizată doar la calculul structurilor alcătuite din bare. În analiza cu elemente finite a problemelor mecanice și termice sunt utilizate *metodele variaționale*, precum principiul lucrului mecanic virtual și teorema minimului energiei interne de deformație. În cazurile în care metodele variaționale nu pot fi aplicate, se folosește *metoda reziduurilor*. Aceasta permite o abordare unitară a problemelor liniare și neliniare, de propagare și de valori proprii. Problemele specifice mecanicii mediilor continue în domeniul liniar și neliniar, ale câmpurilor electromagnetice, ale câmpurilor termice sunt rezolvate cu *formularea pe baza bilanțului energetic* [56].

## D) Transformarea matricelor de rigiditate

Această transformare este necesară pentru transferul elementelor din sistemul de coordonate local în sistemul de coordonate global al structurii (Fig. 5.2 [124]).

### E) Asamblarea ecuațiilor elementale

Această etapă presupune asamblarea ecuațiilor elementare în sistemul de ecuații atașat structurii (asamblarea elementelor finite). Se impune condiția ca funcțiile necunoscute ale problemei să aibă aceleași valori în nodurile comune. Se realizează, de fapt, pe de o parte, asamblarea matricelor de rigiditate  $[K_e]$  ale elementelor finite în matricea de rigiditate  $[K_g]$  a structurii și, pe de altă parte, asamblarea vectorilor forțelor nodale generalizate  $\{P_e\}$  în vectorul forțelor nodale generalizate  $\{P_g\}$  pentru întreaga structură, obținându-se un sistem de ecuații de forma [42]:

$$\{P_g\} = [K_g] \cdot \{U_g\} \quad (5.1)$$

unde  $U$  reprezintă vectorul funcțiilor necunoscute pentru întreaga structură.

Pentru a rezolva problema, se consideră condițiile de contur. Cum anumite elemente sunt cunoscute (deplasări, forțe din noduri etc.) numărul necunoscutelor problemei se va reduce semnificativ, rezultând sistemul redus [38]:

$$\{P_r\} = [K_r] \cdot \{U_r\} \quad (5.2)$$

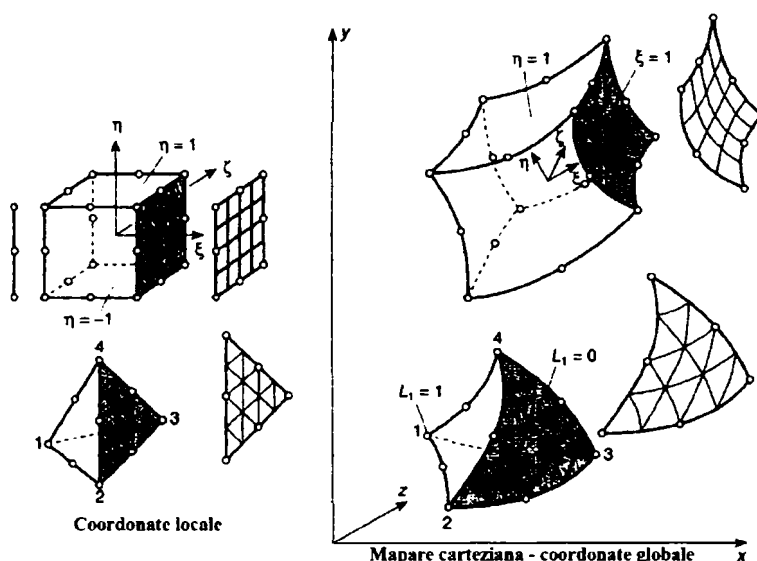


Fig. 5.2 Transformarea matricelor de rigiditate

### F) Rezolvarea sistemului de ecuații

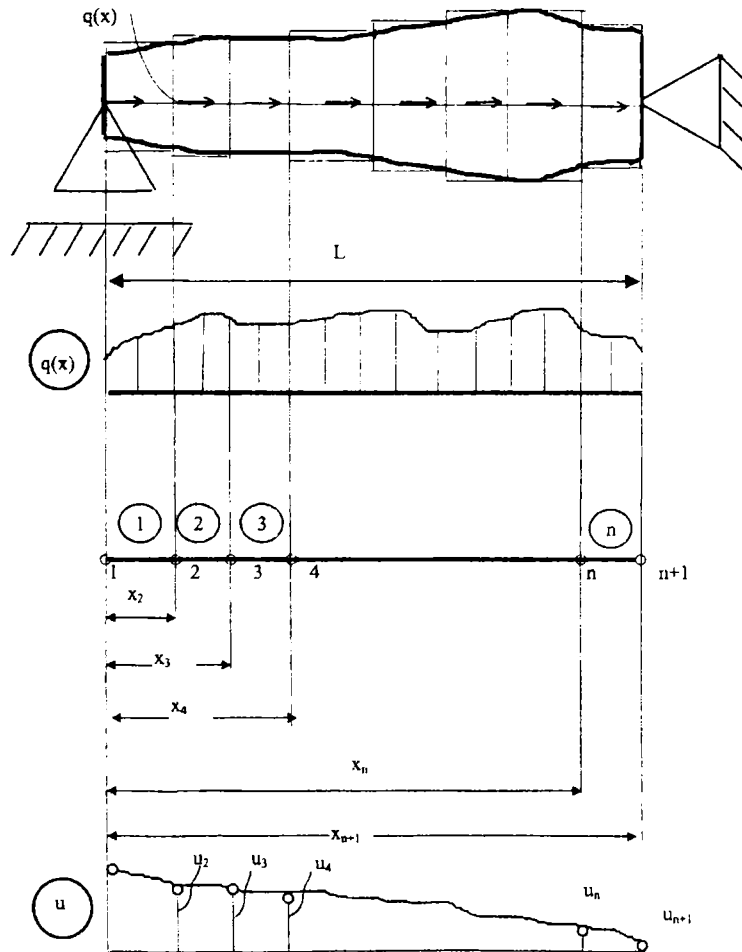
După obținerea sistemului de ecuații redus, acesta se rezolvă prin procedee numerice cunoscute (metoda Gauss, metoda iterativă Jacobi, metoda Gauss-Siedel și metoda relaxării [42]). Se determină, astfel, valorile gradelor de libertate din noduri, reprezentând necunoscutele principale ale sistemului.

### G) Calculul necunoscutelor secundare

După determinarea necunoscutelor principale se trece la aflarea necunoscutelor secundare, acestea fiind, pentru structura de rezistență, deformările specifice  $\epsilon, \gamma$  și componentele  $\sigma, \tau$  ale tensorului de tensiune.

### 5.2.1 Algoritm metodelor elementului finit în problemele de analiză a stării de tensiune și deformație

Formularea problemelor de analiză a stării de tensiune și deformație se poate face în deplasări (cea mai utilizată), în eforturi sau mixtură. Pentru exemplificare, se consideră o bară dreaptă, de secțiune variabilă, încărcată cu sarcini axiale  $q(x)$ , repartizate de-a lungul axei geometrice, conform Fig. 5.3 [42]. De asemenea, se admite ipoteza că singurele deplasări diferite de zero sunt deplasările  $u(x)$  de-a lungul axei  $x$  a barei. Pentru aplicarea metodei elementului finit, bara trebuie împărțită în  $n$  elemente finite de tip bară sau monoaxiale unite prin  $n+1$  noduri. Drept necunoscute ale problemei se consideră deplasările  $u$  și derivatele sale din nodurile  $1, 2, 3, \dots, n+1$ , de abscise  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .



**Fig. 5.3** Bară dreaptă încărcată cu sarcini axiale

În primă fază se consideră că se cunosc atât deplasările  $u$  din noduri, cât și derivatele acestora și se dorește calcularea aceluiași mărimi în oricare punct aparținând domeniului fiecărui element finit în parte,  $x \in (x_i, x_{i+1})$  unde  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . În acest scop, se utilizează interpolarea cu polinoame de gradul unu.

Se consideră ecuația dreptei de interpolare I (Fig. 5.4 [42]):

$$u_I(x) = c_1 + c_2 x \quad (5.3)$$

Unde  $c_1$  și  $c_2$  se determină din condițiile:

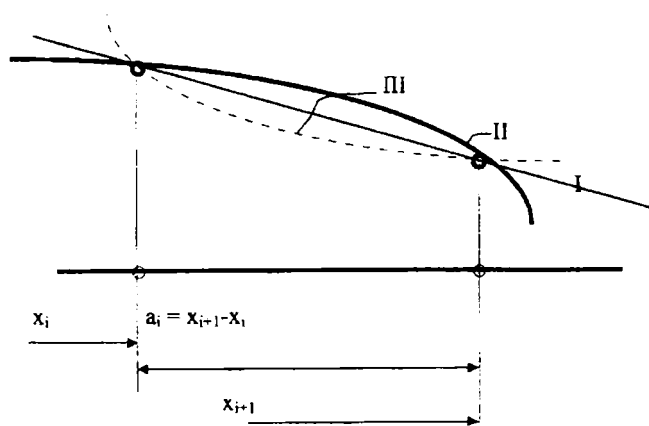
$$x = x_i \Rightarrow u_I(x_i) = u_i \quad (5.4)$$

$$x = x_{i+1} \Rightarrow u_I(x_{i+1}) = u_{i+1}$$

Se obține sistemul de ecuații [38]:

$$u_i = c_1 + c_2 x_i \quad (5.5)$$

$$u_{i+1} = c_1 + c_2 x_{i+1}$$



**Fig. 5.4** Dreaptă de interpolare

Din rezolvarea acestui sistem și notând  $x_{i+1} - x_i = a_i$  se obțin cei doi parametri:

$$c_1 = u_i \frac{x_{i+1}}{a_i} - u_{i+1} \frac{x_i}{a_i} \quad (5.6)$$

$$c_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{a_i}$$

Înlocuind cele două constante în ecuația (5.3) rezultă:

$$u_I(x) = u_i \frac{x_{i+1} - x}{a} + u_{i+1} \frac{x - x_i}{a} \quad (5.7)$$



Curba din relația (5.7) are pante diferite de curba reală la capetele intervalului. Totodată sunt diferite și pantele dreptelor de interpolare la dreapta și la stânga nodurilor considerate. O aproximare mai bună se poate obține folosind un polinom de interpolare de grad superior:

$$u_{II}(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \quad (5.8)$$

În acest caz, determinarea coeficienților se va face din condițiile:

$$x = x_j \Rightarrow u_{II}(x_j) = u_j \quad (5.9)$$

$$x = x_{j+1} \Rightarrow u_{II}(x_{j+1}) = u_{j+1}$$

și din condițiile care exprimă continuitatea pantelor la extremitățile intervalului:

$$x = x_j \Rightarrow \left( \frac{du_{II}}{dx} \right)_{x=x_j} = u'_j \quad (5.10)$$

$$x = x_{j+1} \Rightarrow \left( \frac{du_{II}}{dx} \right)_{x=x_{j+1}} = u'_{j+1}$$

Pe măsură ce se mărește gradul polinomului de interpolare, se îmbunătățește și procesul de aproximare prin impunerea mai multor condiții de continuitate în noduri [81].

După alegerea formei funcției de interpolare, deplasarea  $u(x)$  a unui punct poate fi exprimată prin intermediul valorilor funcției în noduri și al derivatelor sale, acestea fiind interpretate drept grade de libertate care definesc în întregime funcția pe domeniul considerat. Într-un sens generalizat, aceste grade de libertate reprezintă nu numai parametri care definesc poziția punctului într-un sistem de referință dat, ci și parametri care definesc vecinătățile lui diferențiale. Astfel,  $u_j$ ,  $u'_j$ ,  $u''_j$ , ..., reprezintă deplasările nodale (necunoscutele problemei), iar parametrii  $c_1$ ,  $c_2, \dots, c_n$  reprezintă deplasările generalizate, fiind combinații ale deplasărilor nodale.

Pentru calculul deplasărilor nodale se constituie un sistem de ecuații algebrice în care se impun condițiile pe contur, date de modul de rezemare și de modul de încărcare a structurii studiate. Sistemul de ecuații se determină prin aplicarea teoremei de minim a energiei potențiale totale de deformație sau prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual. Aplicând cea de-a doua metodă, deplasarea și deformația virtuală într-un punct curent al unui element finit sunt date de relațiile [42]:

$$\begin{aligned} \delta u(x) &= \delta u_j \frac{x_{j+1} - x}{a_j} + \delta u_{j+1} \frac{x - x_j}{a_j} \\ \delta \varepsilon(x) &= \frac{\delta u_{j+1} - \delta u_j}{a_j} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare  $q(x)$  care acționează asupra elementului finit  $i$  este [42]:

$$2\delta\mathcal{L} = \int_{(i)} q(x)\delta u(x)dx = \delta u_i \int_{(i)} \frac{x_{i+1}-x}{a_i} q(x)dx + \delta u_{i+1} \int_{(i)} \frac{x-x_i}{a_i} q(x)dx \quad (5.12)$$

Variația energiei potențiale de deformăție a elementului finit  $i$  atunci când se impun deplasările specifice virtuale  $\delta\varepsilon(x)$  [42]:

$$\begin{aligned} 2\delta W &= \iiint_{(i)} \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x \cdot dV = \iiint_{(i)} E_i \cdot \frac{u_{i+1}-u_i}{a_i} \cdot \frac{\delta u_{i+1}-\delta u_i}{a_i} \cdot dV = \\ &= \frac{E_i}{a_i^2} \cdot (u_{i+1}-u_i) \cdot (\delta u_{i+1}-\delta u_i) \cdot \iiint_{(i)} dA \cdot dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Energia potențială de deformăție și lucrul mecanic virtual pentru întreaga bară se obțin însumând relațiile de forma (5.12) și (5.13) pentru toate cele  $n$  elemente ale structurii. Cum, conform principiului lucrului mecanic virtual,  $\delta\mathcal{L} = \delta W$ , rezultă:

$$\sum_{i=1}^n \frac{E_i A_i}{a_i} \cdot (u_{i+1}-u_i) \cdot (\delta u_{i+1}-\delta u_i) = \sum_{i=1}^n \left( \delta u_i \cdot \int_{(i)} \frac{x_{i+1}-x}{a_i} \cdot q(x) \cdot dx + \delta u_{i+1} \cdot \int_{(i)} \frac{x-x_i}{a_i} \cdot q(x) \cdot dx \right) \quad (5.14)$$

Cum deplasările  $\delta u_i$  sunt arbitrare, se consideră două elemente finite învecinate  $j-1$  și  $j$  (Fig. 5.5 [42]) pentru care se impun următoarele deplasări virtuale:

$$\begin{aligned} \text{— pentru elementul } j-1: & \quad \delta u_{j-1} = 0 \rightarrow \delta u_j = 1 \\ \text{— pentru elementul } j: & \quad \delta u_j = 1 \rightarrow \delta u_{j+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

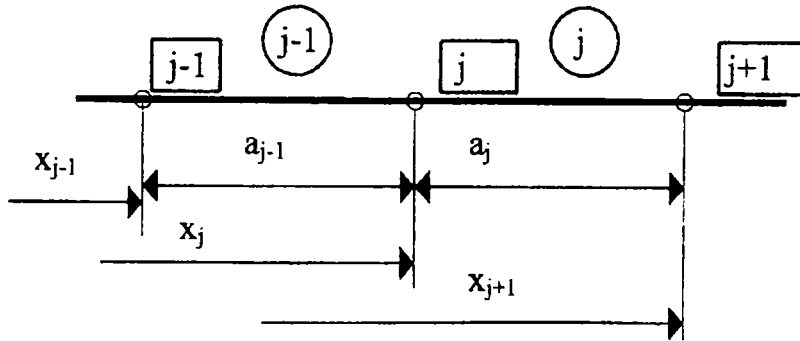


Fig. 5.5 Elemente finite învecinate

Se aplică relația (5.14) pentru cele două elemente finite învecinate și se obține:

$$\frac{E_{j-1}A_{j-1}}{a_{j-1}} \cdot (u_j - u_{j-1}) - \frac{E_{j-1}A_j}{a_j} \cdot (u_{j+1} - u_j) = \int_{(j-1)} \frac{x - x_{j-1}}{a_{j-1}} \cdot q(x) \cdot dx + \int_{(i)} \frac{x_{j+1} - x_j}{a_j} \cdot q(x) \cdot dx \quad (5.16)$$

Pentru toate perechile de elemente învecinate se vor scrie ecuații de forma (5.16) și se obține un sistem algebric de ecuații în care necunoscutele sunt deplasările  $u_j$  din nodurile structurii. Acestea li se adaugă condițiile de rezemare, conform cărora se impun anumite deplasări. Rezolvând sistemul de ecuații se determină deplasările din nodurile structurii, iar apoi, pe baza funcției de aproximare folosite, se pot calcula deplasările în orice punct situat între noduri.

În continuare, se poate rezolva problema de calcul a stării de tensiune, ținând cont de relațiile fizice care fac legătura între deformațiile specifice și tensiuni [42]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_j \frac{-1}{a_j} + u_{j+1} \frac{1}{a_j} = \frac{1}{a_j} (u_{j+1} - u_j) \quad (5.17)$$

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{E}{a_j} (u_{j+1} - u_j) \quad (5.18)$$

În concluzie, precizia de calcul va crește:

- cu cât discretizarea este mai fină;
- dacă numărul de noduri este mai mare;
- dacă se utilizează funcții de interpolare de grad superior.

### 5.2.2 Tipuri de elemente finite și funcții de interpolare

Pentru ca analiza cu elemente finite să ofere rezultate cât mai apropiate de fenomenul real, trebuie alese cu mare grijă discretizarea și tipul de elemente finite. Acestea din urmă se deosebesc între ele prin forma geometrică, numărul și tipul nodurilor sale, tipul variabilelor de nod (deplasări generalizate) și tipul funcțiilor de interpolare folosite. Funcțiile de interpolare nu se aleg arbitrar, ci ele trebuie să îndeplinească *condițiile de continuitate* și *condițiile de convergență* a soluției approximate [42].

În anumite condiții, continuitatea poate fi asigurată alegând funcția de interpolare un polinom algebric. Condițiile de compatibilitate între elemente impun ca funcția care descrie comportamentul necunoscutelor problemei pe domeniul elementului finit, precum și o parte dintre derivatele ei, să fie continue. Spre exemplu, pentru barele solicitate numai de sarcini axiale este suficientă satisfacerea continuității funcției de deplasare  $u(x)$ . În cazul barelor solicitate la încovoiere, pe lângă funcția de deplasare  $v(x)$ , trebuie asigurată și continuitate derivatei  $dv/dx$  [113].

În cazul elementelor finite cu două sau trei dimensiuni (cazul stărilor plane de tensiune și deformație, problemele de elasticitate tridimensionale, cazul plăcilor)

asigurarea continuității are un caracter diferit. Pentru exemplificare, se consideră elementul finit triunghiular  $m$ , (Fig. 5.6 [42]), a cărui grosime  $g$  este reprezentată cu linii întrerupte, fiind o constantă pe întreg domeniul.

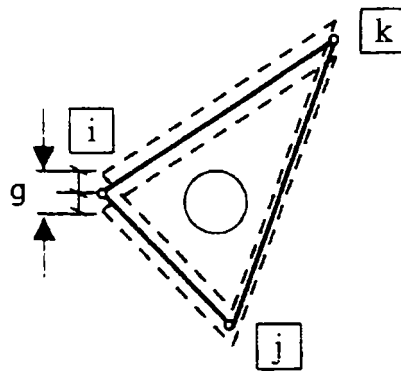


Fig. 5.6 Element finit triunghiular

În Fig. 5.7 a) [42] este reprezentată variația funcției de deplasare  $u(x,y)$  pentru două elemente finite  $m$  și  $n$ , în cazul folosirii unor polinoame de interpolare liniare. În acest caz, continuitatea interelemente este satisfăcută implicit prin impunerea continuității funcției în noduri. Dacă se utilizează polinoame de interpolare de ordin superior, apare posibilitatea ca, la nivelul zonelor interelemente, condiția de continuitate să nu fie satisfăcută Fig. 5.7 b).

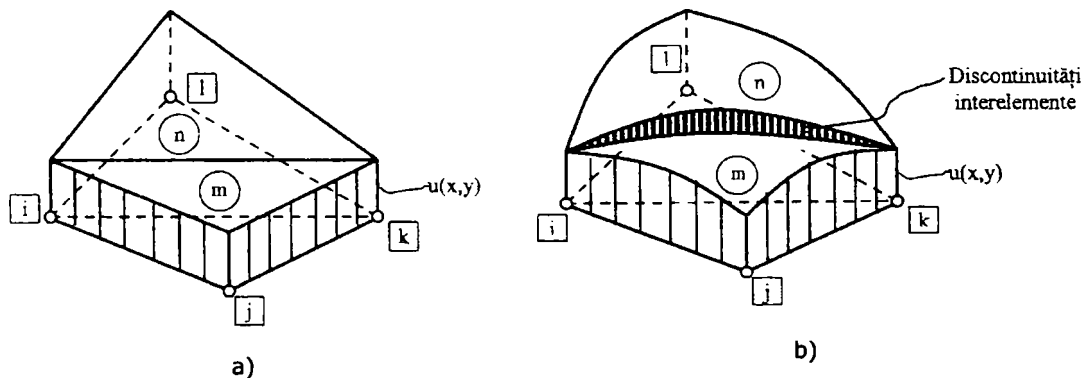


Fig. 5.7 Variația funcției de interpolare pentru două elemente finite

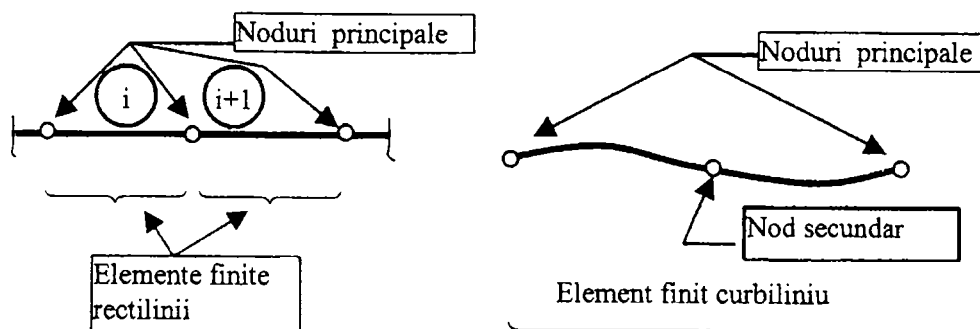
Condiția de convergență este satisfăcută dacă funcțiile de interpolare sunt alese astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții [42]:

- să poată reprezenta corect deplasările de corp rigid;
- să conțină termeni care să conducă la expresii ale tensiunilor capabile să reprezinte starea de tensiune omogenă pe element.

Condițiile de continuitate și convergență pot fi satisfăcute integral dacă polinoamele de interpolare au gradul cel puțin egal cu cel mai mare ordin de derivare care apare în relațiile diferențiale dintre deformații și deplasări.

Din punct de vedere al principiilor care stau la baza formulării continuității lor, elementele finite se împart în:

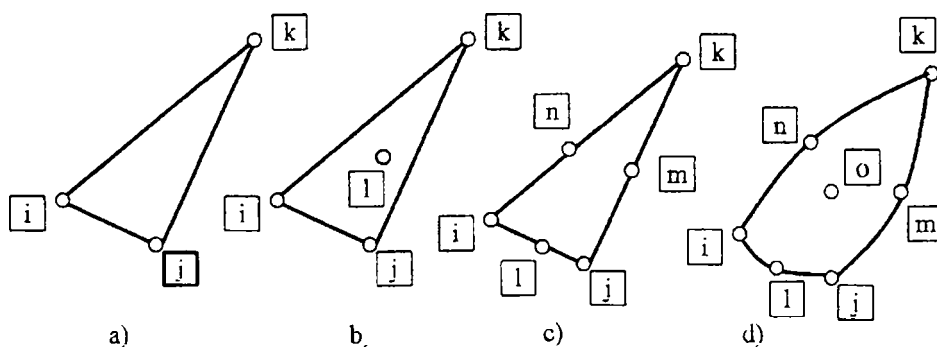
- structurale (elemente finite de tip bară și de tip înveliș);
- continue (elemente finite de stare plană și de tip masiv).



**Fig. 5.8** Elemente finite unidimensionale

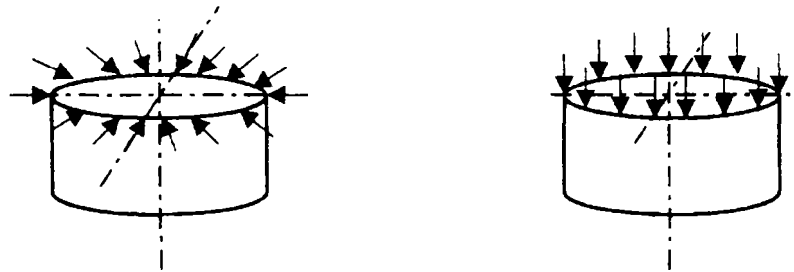
După configurația geometrică, elementele finite se împart în:

- unidimensionale: sunt simple și au o configurație rectilinie sau curbilinie, cu noduri principale plasate la capete pentru conectarea cu elementele finite învecinate (Fig. 5.8 [42]). Pot exista și unul sau două noduri secundare, plasate echidistant față de extremități. Aceste elemente finite pot aparține unor structuri plane sau tridimensionale.
- bidimensionale: sunt elemente la care configurația geometrică și parametrii asociați se definesc în funcție de două coordonate independente. Cel mai simplu este elementul de tip triunghiular (Fig. 5.9 [42]), cu următoarele situații:
  - a) cu trei noduri pe element;
  - b) cu un secundar interior;
  - c) cu noduri secundare externe, plasate pe laturile elementului finit;
  - d) curbiliniu, cu noduri secundare externe și un nod secundar intern.



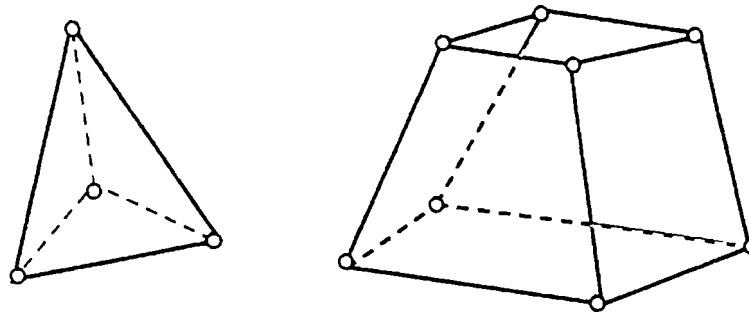
**Fig. 5.9** Elemente finite bidimensionale

- axial simetrice: prezintă un interes practic deosebit deoarece, atunci când pot fi folosite, se reduce considerabil volumul calculului. Structurile tridimensionale axial simetrice se reduc la studiul unor probleme unidimensionale sau bidimensionale. Simetria axială trebuie satisfăcută din punct de vedere geometric, al rigidității și al condițiilor pe contur (Fig. 5.10 [42]).



**Fig. 5.10** Elemente finite axial simetrice

- tridimensionale: sunt utilizate pentru studiul structurilor de tip masiv sau al altor structuri cu pereți groși care nu pot fi modelate cu elementele finite enumerate anterior. Acestea pot fi tetraedrale sau hexaedrale (Fig. 5.11 [42]).



**Fig. 5.11** Elemente finite tridimensionale

Dacă se folosesc elemente finite pătratice sau cubice, pe laturile acestora pot să mai apară unul sau două noduri suplimentare, plasate la mijloc sau la o treime de capetele muchiilor.

### 5.2.3 Analiza stării de tensiune folosind elemente finite tridimensionale

Toate probleme practice necesită folosirea unor elemente finite tridimensionale pentru realizarea discretizării. Dacă cel mai simplu element bidimensional este triunghiul, echivalentul tridimensional al acestuia este tetraedrul, un element cu patru colțuri nodale. Din păcate, numărul de elemente tetraedrale simple, care trebuie utilizate pentru obținerea acurateții dorite, trebuie să fie foarte mare, generând un număr la fel de mare de ecuații simultane în problemele practice, inducând limitări severe ale utilizării metodei.

### 5.2.3.1 Funcții de deplasare

Fig. 5.12 [123] prezintă un element tetraedral. Starea de deplasare a unui punct este definită de trei componente ale deplasării ( $u$ ,  $v$  și  $w$ ) pe direcțiile celor trei coordonate ale sistemului de referință ( $x$ ,  $y$  și  $z$ ), astfel:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Variația liniară a elementului este definită de cele patru valori nodale:

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (5.20)$$

unde  $\alpha_i$  pot să fie evaluate.

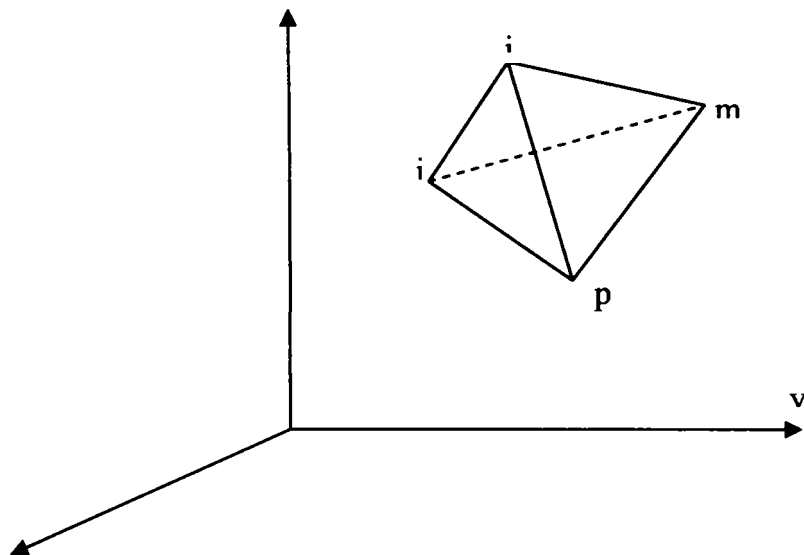
Soluția poate fi scrisă sub următoarea formă [42], [124]:

$$u = \frac{1}{6V} \left[ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \right]$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (5.21)$$

unde  $V$  este volumul tetraedrului. În acest mod, se pot determina cei patru coeficienți ca având următoarea formă:

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} & b_i &= - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \\ c_i &= - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} & d_i &= - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.22)$$



**Fig. 5.12** Un exemplu de element tetraedric

Deplasarea elementului este definită de cele 12 componente de deplasare ale nodurilor:

$$a^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \\ a_p \end{Bmatrix} \quad \text{unde } a_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}, \dots \quad (5.23)$$

Deplasarea unui punct elementar poate fi exprimată de relația [123]:

$$u = [\mathbf{I}N_i, \mathbf{I}N_j, \mathbf{I}N_m, \mathbf{I}N_p] a^e = N a^e \quad (5.24)$$

unde  $N_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V}, \dots$

iar  $\mathbf{I}$  este matricea unitate.

### 5.2.3.2 Vectorul deformație specifică și vectorul tensiune

Pentru problemele de elasticitate spațială, vectorul deformație specifică are următoarea formă [42], [123]:



$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = Su \quad (5.25)$$

Se poate verifica ușor că:

$$\varepsilon = SNa^e = Ba^e = [B_j, B_j, B_m, B_p]a^e \quad (5.26)$$

unde

$$B_j = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{Bmatrix} b_j & 0 & 0 \\ 0 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & d_j \\ c_j & b_j & 0 \\ 0 & d_j & c_j \\ d_j & 0 & b_j \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

și reprezintă matricea de interpolare a deformațiilor specifice pe element.

Pentru problemele de elasticitate, vectorul tensiune este de forma [42]:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

Matricea  $K$  de rigiditate a elementului se calculează cu relația:

$$K = \int_V B^T \cdot D \cdot B \cdot dV \quad (5.29)$$

În aceste condiții, tensiunile vor fi:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = D \cdot B \cdot a^e \quad (5.30)$$

Matricea  $D$  care apare în expresiile (5.29) și (5.30) reprezintă matricea de elasticitate a materialului pentru starea de tensiune triaxială, dată de relația [42]:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

### **5.3 Analiza cu elemente finite a stării de tensiune și deformare a modelului de proteză pentru mâna umană**

Pentru analiza cu elemente finite a stării de tensiune și deformare s-a folosit un software specializat, CosmosWorks. Acesta formulează ecuațiile care guvernează comportamentul fiecărui element luând în considerație conectivitatea acestuia cu alte elemente. Ecuațiile vor genera răspunsul pe baza unor informații cunoscute, precum proprietăți de material, restricții și sarcini. În continuare, programul organizează ecuațiile într-un set extins de ecuații algebrice simultane pe care le rezolvă pentru a afla necunoscutele. În analiza tensiunii, de exemplu, se determină deplasările în fiecare nod și apoi se calculează deformările specifice și tensiunile.

Pentru studiu, s-a considerat că materialul din care este realizat modelul mâinii este titan TI-6Al-2Sn-2Zr-2Mo-2Gr-0,25Si (SS). Modelul de calcul pentru analiză a fost discretizat foarte fin (Fig. 5.13 și Fig. 5.18), folosind elemente finite tridimensionale tetraedrice, pentru a se obține rezultate cât mai apropiate de cele reale.

De asemenea, s-au considerat două poziții ale protezei pentru mână: cea când este total deschisă (Fig. 5.13) și o poziție intermediară (Fig. 5.18). În fiecare caz, palma este rigidizată și asupra degetului arătător se aplică o forță de 10 N, rezultată în urma prinderii unui obiect. Dat fiind faptul că degetele modelului de proteză au aceeași structură, s-a considerat edificatoare analiza realizată pentru un singur deget, rezultatele fiind similare și în celelalte cazuri.

În situația prinderii cu mâna deschisă, degetul nu generează o reacțiune, opunându-se forței de acțiune prin însăși structura sa, deoarece, constructiv acesta nu se poate mișca spre valori negative ale variabilelor unghiulare. Pentru prinderea cu mâna deschisă, degetul asigură o forță de reacțiune necesară păstrării poziției.



**Fig. 5.13** Modelul de calcul utilizat în analiza cu elemente finite a protezei în poziție deschisă

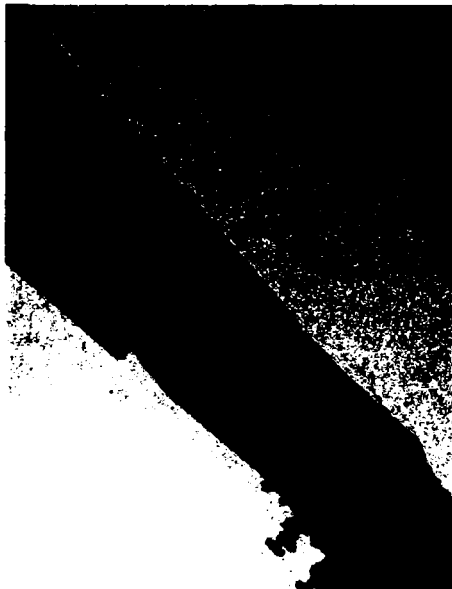


**Fig. 5.14** Distribuția deplasărilor rezultate pentru proteză în cazul prinderii în poziție deschisă

Fig. 5.14 prezintă distribuția deplasărilor rezultate pentru proteză, în cazul prinderii în poziție deschisă, doar cu vârful degetului. Se poate observa că deplasările sunt destul de mici, cuprinse între 0,032 mm la baza falangei proximale și 0,391 mm la vârful falangei distale.



**Fig. 5.15** Distribuția stării de tensiune echivalentă, calculată după teoria energiei specifice modificatoare de formă (von Mises) pentru modelul în poziție deschisă

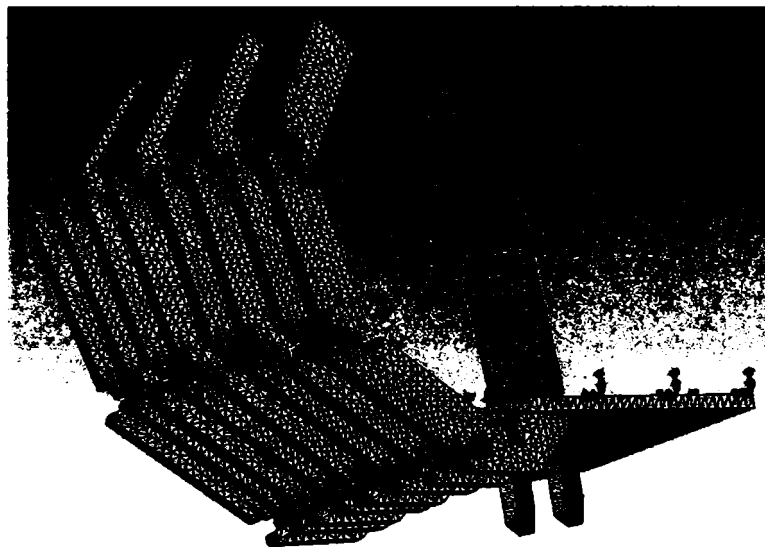


**Fig. 5.16** Detaliu



**Fig. 5.17** Detaliu

În Fig. 5.15 este prezentată distribuția stării de tensiune echivalentă, calculată după teoria energiei specifice modificatoare de formă (von Mises) pentru modelul în poziție deschisă. Valoarea maximă este de 68 MPa în zona de prindere a falangei proximale de palmă. Zonele cele mai afectate pot fi observate în detaliile din Fig. 5.16 și Fig. 5.17.



**Fig. 5.18** Modelul de calcul utilizat în analiza cu elemente finite a protezei în poziție intermediară



**Fig. 5.19** Distribuția deplasărilor rezultate pentru model în cazul prinderii în poziție intermediară



**Fig. 5.20** Distribuția stării de tensiune echivalentă (calculată cu metoda von Mises) pentru modelul în poziție intermediară



**Fig. 5.21** Distribuția stării de tensiune echivalentă (calculată cu metoda von Mises) pentru modelul în poziție intermediară — detaliu

Fig. 5.18 ilustrează modelul protezei pentru mâna umană în poziție de prindere intermediară. Se pot observa zonele de aplicare a restricțiilor de mișcare (în palmă și în articulația falangei proximale), precum și zona de aplicare a forței de prindere (partea interioară a falangei distale).

Fig. 5.19 prezintă distribuția deplasărilor rezultate pentru model în cazul prinderii în poziție intermediară. Și de această dată prinderea se realizează tot cu vârful degetului, dar la nivelul articulației falangei distale se aplică o forță de menținere a

poziției. În această situație, deplasările sunt chiar mai mici, în valoare maximă de 0,006 mm la nivelul vârfului falangei distale.

În Fig. 5.20 sunt prezentate rezultate obținute referitoare la distribuția stării de tensiune echivalentă (calculată cu metoda von Mises) pentru modelul în poziție intermediară. Valoarea maximă în acest caz este de 7,8 MPa, întâlnită la nivelul articulației dintre falanga distală și falanga medie, mult mai mică decât pentru prinderea cu mâna deschisă. Fig. 5.21 detaliază zona de prindere dintre cele două falange.

Analizând distribuția stării de tensiune pentru cele două poziții considerate, se constată că valorile maxime ale tensiunilor echivalente calculate după teoria energiei specifice modificatoare de formă (von Mises) apar în zona articulației falangei proximale. Cu o valoare de 68 MPa, tensiunile echivalente sunt inferioare rezistențelor admisibile. Pe baza acestui rezultat se poate spune că proteza corespunde din punct de vedere constructiv și funcțional scopului impus, fără să existe pericol de distrugere, în condiția în care forța maximă de strângere nu depășește 10 N.

De asemenea, se constată că deplasările rezultante au valori foarte mici. Pentru cazul cel mai defavorabil, valoarea deplasării maxime (Fig. 5.14) este de 0.391 mm la nivelul extremităților falangei distale pentru prinderea în poziție deschisă. Din aceste considerente se poate afirma că, și din punct de vedere al rigidității, proteza corespunde constructiv și funcțional.

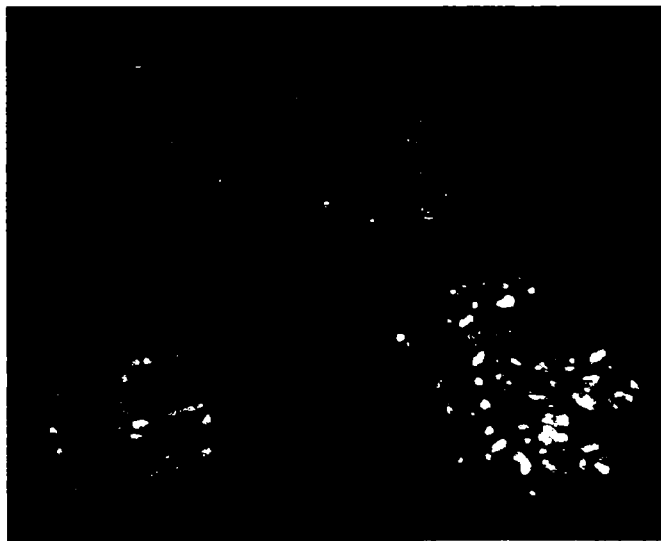
## 6 REALIZAREA MODELULUI DE PROTEZĂ PENTRU MÂNA UMANĂ

### 6.1 Realizarea structurii protezei

În cursul unui stagiu SOCRATES/ERASMUS efectuat la IUT Bethune, Franța, au fost confecționate, pe baza proiectului expus în capitolul 4, două modele de proteze: unul din PolyMethyl MethAcrylate (PMMA), cunoscut sub denumirea de plexiglas, iar celălalt din titan. Toate elementele necesare au fost realizate prin tăiere cu laser, parametrii de tăiere pentru modelul din plexiglas fiind prezentați în Tabelul 6.1.

Proces	Mediu de protecție	Viteză [mm/min]	Distanța față de piesă [mm]	Putere [W]
Tăiere	Nitrogen	3000	1	500

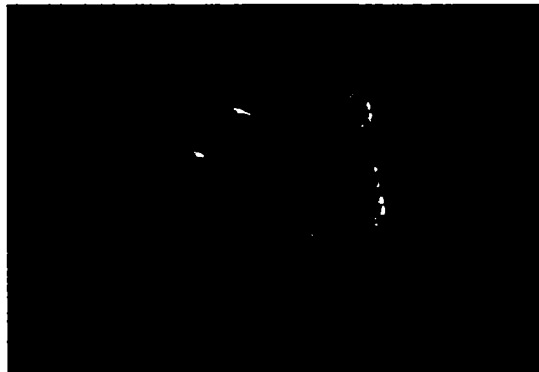
**Tabelul 6.1** Parametrii de tăiere pentru placa de plexiglas de 3 mm



**Fig. 6.1** Elemente componente ale sectoarelor cilindrice

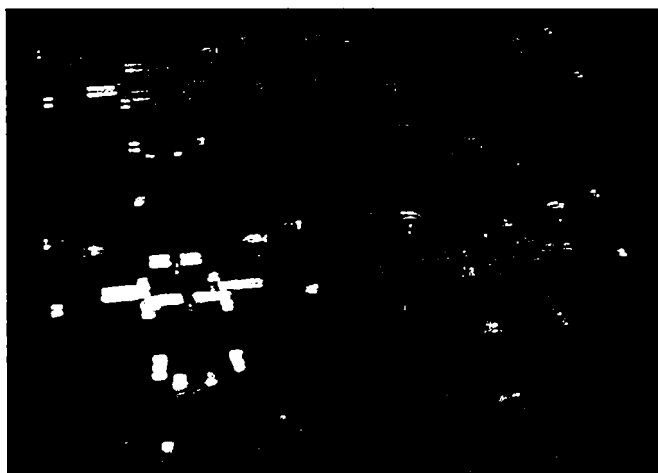


După tăiere, componentele obținute au fost lipite pentru a se realiza elementele constitutive ale protezei. Lipirea s-a realizat cu o soluție de trichlorometan (cunoscut sub denumirea de cloroform) în care s-au dizolvat bucăți de plexiglas. Fig. 6.1 prezintă componentele inițiale necesare pentru realizarea sectoarelor cilindrice. Tot aici se poate remarca și siringa cu care s-a injectat fluidul de lipire. În Fig. 6.2 se poate vedea un sector cilindric rezultat.



**Fig. 6.2** Sector cilindric

De asemenea, fiecare falangă este realizată din patru elemente componente (Fig. 6.3) care, după lipire, au generat forma falangei (Fig. 6.4). Tăierea tuturor componentelor a fost realizată cu o mașină cu comandă numerică. Aceasta accepta desenul tehnic al componentei de tăiat realizat în Autocad, transformându-l în cod mașină specific. Desenul tehnic format Autocad a fost obținut pe baza modelului realizat în SolidEdge pentru fiecare componentă în parte.



**Fig. 6.3** Elementele componente ale unui falange

Pentru realizarea întregii mâini a mai fost necesară decuparea unei componente pentru palmă și a unui suport pentru întregul ansamblu. Produsul final poate fi văzut în Fig. 6.5, incluzând și partea de acționare, privit din zona palmei a) și din spate b).

În ceea ce privește modelul realizat din titan, acesta conține aceleași componente ca și modelul din plexiglas. Mai mult, nedispunând decât de tablă de titan de 0,85 mm grosime, nu am putut realiza și sectoarele cilindrice din acest material, acestea fiind

tot din plexiglass. După tăierea componentelor din titan pentru falange, acestea au fost sudate pentru îmbinare. Atât tăierea, cât și sudarea au fost realizate prin tehnologie cu laser. În Tabelul 6.2 sunt indicați parametrii celor două procese menționate, tăiere, respectiv, sudare.



**Fig. 6.4** Falange



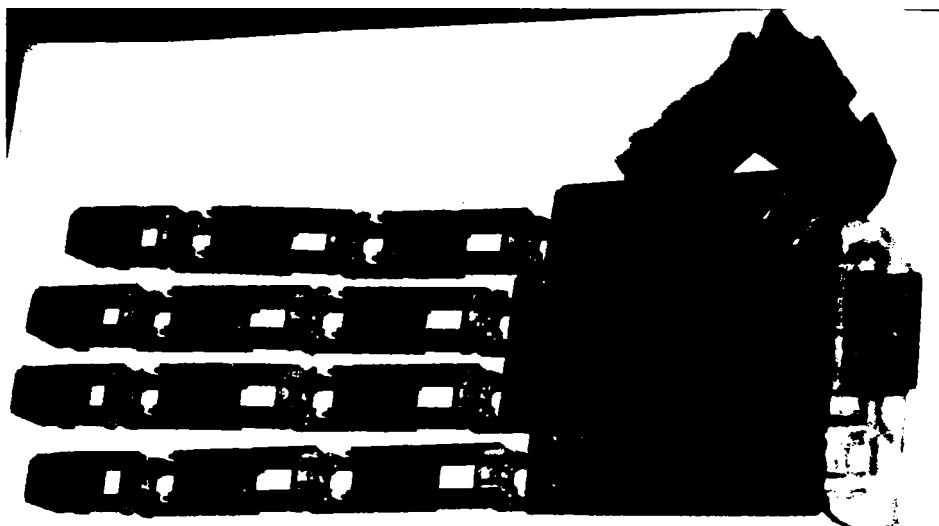
a)

b)

**Fig. 6.5** Modelul de mână realizat

Proces	Mediu de protecție	Viteză [mm/min]	Distanță față de piesă [mm]	Putere [W]
Tăiere	Argon	3000	-	600
Sudare	Argon	1500	5	1720 (puls)

**Tabelul 6.2** Parametrii de prelucrare pentru tabla de titan de 0,85 mm grosime



**Fig. 6.6** Modelul de mână realizat din titan

În Fig. 6.6 se poate vedea modelul de mână realizat din titan. Se pot remarca punctele de prindere ale degetelor de palmă, modul de prindere al elementelor componente ale unei falange, precum și sectoarele cilindrice. Și pentru acest model a fost realizat un suport vertical din plexiglas.

Pentru ca modelul de mână artificială să fie funcțional, trebuie realizată partea de acționare. Proiectarea și implementarea propriu-zisă a acestuia este prezentată în paragrafele care urmează.

## **6.2 Acționarea cu motoare pas cu pas**

Din mai multe puncte de vedere, motoarele pas cu pas par să fie cea mai bună soluție pentru acționarea modelului. Ele asigură un cuplu ridicat chiar și la viteze de rotație foarte scăzute, fapt care permite mișcări de precizie ale falangelor, fără să fie afectată prinderea obiectului. Când nu se mișcă, motorul pas cu pas asigură un

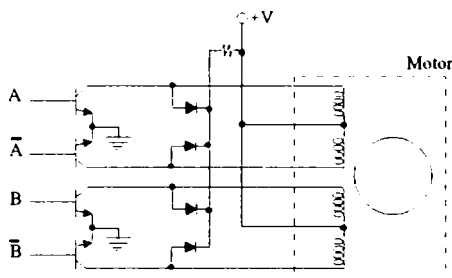
cuplu de frânare chiar mai mare, ceea ce permite menținerea obiectului prins. În acest fel, nu există pericolul scăpării obiectului în momentul în care mișcarea falangelor se oprește. Un dezavantaj important constă în consumul mare de energie, care este maxim atunci când nu se realizează nicio mișcare. Este adevărat că motoarele de curent continuu sunt mult mai eficiente din punct de vedere al consumului energetic (din moment ce nu se aplică tensiune asupra lor atunci când nu se mișcă) și, de regulă, au dimensiuni mai mici decât cele pas cu pas, dar oferă un cuplu acceptabil doar la viteze de rotații mari și nu au cuplu de frânare atunci când sunt oprite. În cazul motoarelor pas cu pas, complexitatea electronicii de comandă este mult redusă față de cea a motoarelor de curent continuu.

Motoarele pas cu pas, avute în vedere la proiectarea prezentei aplicații, cunosc o ofertă industrială deosebit de bogată și de diversă, fapt datorat, în principal, numărului uriaș de domenii de utilizare. Se cunosc multiple moduri de cablare, de comandă și de excitare a motoarelor pas cu pas, uneori chiar pentru același tip de motor. Din acest motiv s-a considerat oportună o scurtă prezentare teoretică a tipurilor de motoare pas cu pas și a modurilor lor de funcționare și comandă.

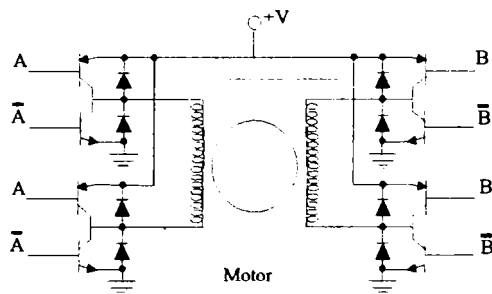
### 6.2.1 Moduri de comandă

Modurile de comandă ale motoarelor pas cu pas sunt [131], [133]:

- Comandă unipolară: în acest caz, motorul are șase fire, schema de principiu fiind reprezentată în Fig. 6.7. Acest tip de motor pas cu pas este foarte răspândit datorită simplității cu care i se proiectează comanda.
- Comandă bipolară: în acest caz, motorul are patru fire, schema de principiu fiind reprezentată în Fig. 6.8. La acest tip de motor pas cu pas, bobinele sunt utilizate mult mai eficient și se obține un cuplu mare relativ la dimensiunea motorului. După apariția circuitelor de comandă monolitice integrate, acest tip de motor a început să fie tot mai răspândit în aplicațiile industriale.



**Fig. 6.7** Schema de principiu pentru comanda unipolară



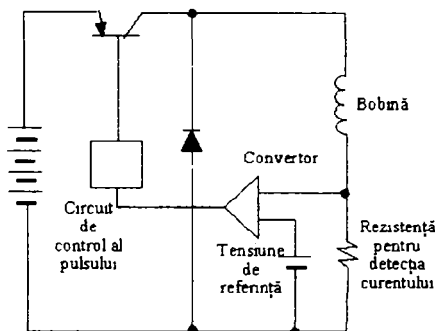
**Fig. 6.8** Schema de principiu pentru comanda bipolară

- Comandă în comutație: Fig. 6.9 prezintă schema de principiu a acestui tip de comandă a motoarelor pas cu pas. Comanda în comutație permite

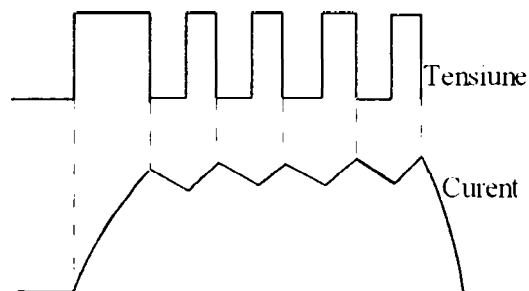
aplicarea unor tensiuni ridicate pe bobină, un curent mare de start și o pierdere mică de putere [132]. Perioada de comutare a curentului este determinată de următoarele moduri de excitație:

- auto-excitație: frecvența de pornire/oprire este dependentă de constanta de timp a bobinei;
- excitație separată: poate varia timpul de pornire pe parcursul perioadei de comutare a unui oscilator de referință cu frecvență ridicată.

Un exemplu de formă de undă tensiuni/curent este prezentat în Fig. 6.10.



**Fig. 6.9** Schema de principiu pentru comanda în comutație

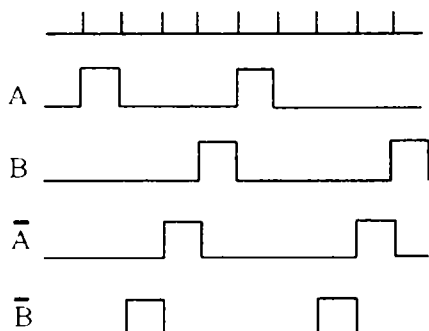


**Fig. 6.10** Exemplu de forme de undă

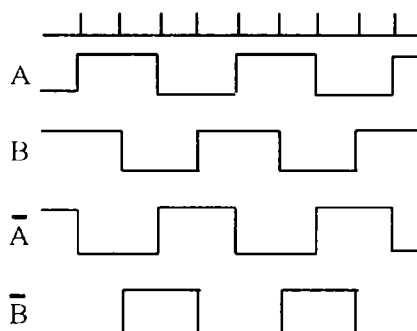
## 6.2.2 Moduri de excitație

Motoarele pas cu pas prezintă următoarele moduri de excitație [131], [133]:

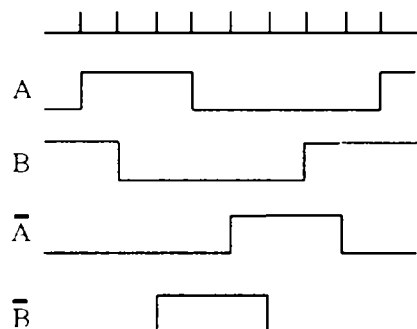
- Excitație într-o singură fază: o singură fază este excitată la un moment dat, iar consumul de putere este mic. În Fig. 6.11 este descrisă secvența de excitație caracteristică acestui mod.
- Excitație în două faze: la un moment dat sunt excitate două faze, deci se consumă de două ori mai multă putere decât în cazul metodei anterioare. Cuplul de ieșire este mare, iar oscilațiile de amortizare sunt mici. Acest mod de excitație este cel mai răspândit. Fig. 6.12 prezintă secvența de excitație caracteristică acestui mod.
- Excitație în jumătate de pas: alternează cele două moduri de excitație prezentate anterior. Metoda consumă de 1,5 ori mai multă putere decât în cazul excitării într-o singură fază. Unghiul pasului este egal cu jumătate din valoarea pe care o are în cazul excitării într-o singură fază. În Fig. 6.13 este descrisă secvența de excitație folosită în acest mod.



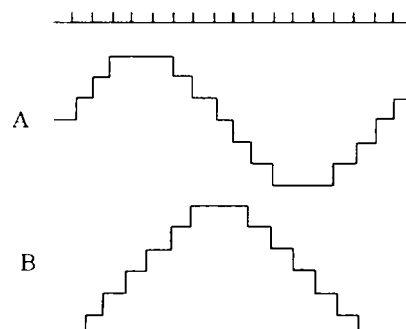
**Fig. 6.11** Excitare într-o singură fază



**Fig. 6.12** Excitare în două faze



**Fig. 6.13** Excitare în jumătate de pas



**Fig. 6.14** Excitare în micropas

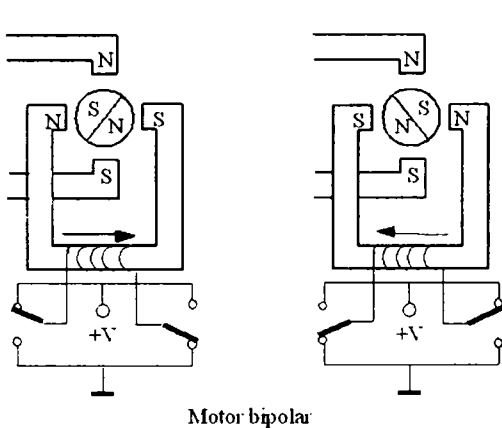
- Excitare în micropas: facilitează obținerea unor unghiuri foarte fine folosind controlul curentului. Valoarea unghiului pasului este egală cu jumătate din valoarea de la metoda precedentă și cu o pătrime față de metoda de excitare în două faze. Acest mod de excitare este folosit pentru obținerea unor pași cât mai fini sau a unei rotații cât mai line. Fig. 6.14 prezintă secvența de excitare pentru acest caz.

### 6.2.3 Unipolar vs. bipolar

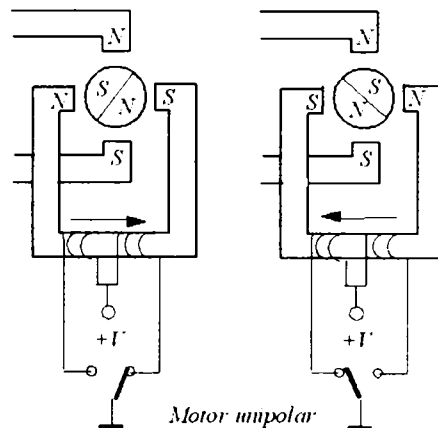
Un motor pas cu pas se mișcă cu câte un pas atunci când direcția curentului care curge prin bobine se schimbă, inversând câmpul magnetic al polilor statorului. Diferența dintre motoarele unipolare și cele bipolare constă în modul în care se realizează această inversare. Motoarele bipolare au o singură bobină de câmp și două comutatoare de încărcare, ce comută în direcții diferite (Fig. 6.15) [93]. Motoarele unipolare au două bobine de câmp separate și un singur comutator de încărcare (Fig. 6.16) [93].

Avantajul circuitului bipolar constă în faptul că există o singură înfășurare cu un factor de compresie bun (rezistivitate mică), însă cele două comutatoare impun folosirea a mai multor semiconductoare. Spre deosebire, circuitul unipolar necesită doar un comutator, însă marele dezavantaj îl reprezintă cele două înfășurări care

semnifică o rezistivitate mult mai mare. Cuplul motorului pas cu pas este proporțional cu intensitatea câmpului magnetic dezvoltat de spirele de pe stator și poate fi crescut prin adăugarea de noi spire sau prin mărirea curentului.



**Fig. 6.15** Inversarea câmpului magnetic al polilor statorului în cazul motoarelor bipolare



**Fig. 6.16** Inversarea câmpului magnetic al polilor statorului în cazul motoarelor unipolare

Limita naturală care se opune creșterii curentului constă în pericolul saturării miezului de fier [93]. O problemă și mai mare este încălzirea motorului datorită pierderii de putere în spirele statorului. Curentul prin spire poate fi crescut cu factorul  $\sqrt{2}$ , iar această creștere are un efect direct proporțional asupra cuplului. La limita de pierdere în putere, motoarele bipolare generează un cuplu cu 40% mai mare decât motoarele unipolare construite din același cadru.

#### 6.2.4 Comanda în curent constant

Pentru a menține pierderea de putere a motorului pas cu pas între limite rezonabile, trebuie controlată intensitatea curentului prin spire. O soluție simplă și populară constă în a oferi atâta tensiune cât este necesară, utilizând rezistența  $R_L$  a înfășurării pentru limitarea curentului (Fig. 6.17a) [93].

O soluție mult mai complicată, dar mult mai eficientă și mai precisă, presupune includerea unui generator de curent (Fig. 6.17b) [93] pentru a obține independență față de rezistența înfășurării. Sursa de tensiune din Fig. 6.17b) trebuie să fie mai mare decât cea din Fig. 6.17a).

Pentru a obține un cuplu mare la viteze ridicate este necesar un generator de curent, așa ca în Fig. 6.17b). Acesta limitează doar faza curentului și devine activ doar în momentul în care curentul prin bobină își atinge valoarea nominală. Peste această valoare generatorul de curent este în saturație, iar sursa de tensiune este aplicată direct la înfășurare. Fig. 6.18 [93] prezintă relația, tipică pentru un motor pas cu pas, dintre cuplu și viteză. Este evident că puterea crește pe măsură ce crește cuplul.

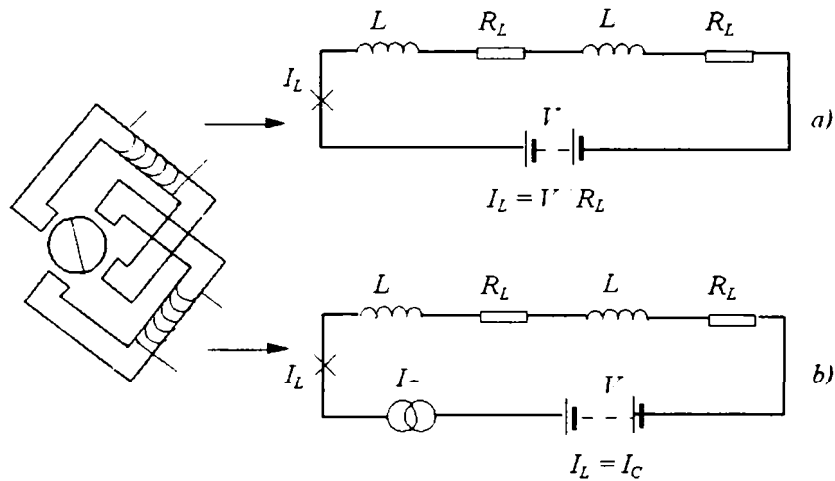


Fig. 6.17 Metode de limitare a curentului

Generatorul de curent, combinat cu sursa de tensiune ridicată, garantează că rata de schimbare a sensului curentului prin înfășurări este suficient de mare. În stare staționară sau la număr mic de rotații, pierderea de putere în generatorul de curent crește foarte mult, deși motorul nu generează mai multă energie. Se spune că factorul eficiență este foarte slab în acest caz. Pentru îmbunătățirea acestui factor se folosește un comutator pentru reglarea curentului.

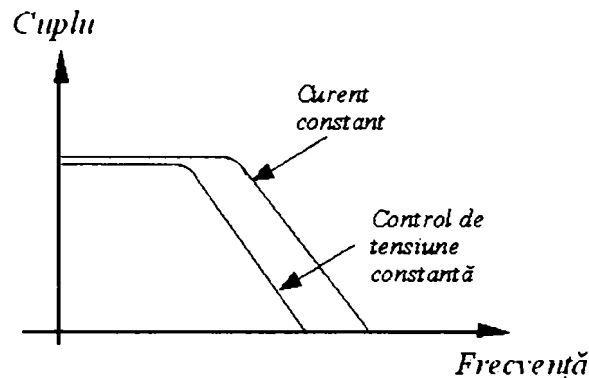


Fig. 6.18 Relația cuplu/frecvență tipică pentru motoarele pas cu pas

Înfășurarea unei faze este comutată la sursa de tensiune înainte ca valoarea curentului, măsurat pe rezistența  $R_S$ , să atingă valoarea nominală. În acel moment, comutatorul, care a fost conectat la +V, își schimbă poziția și scurtcircuitează bobina. În acest fel, curentul este înmagazinat, dar va scădea datorită pierderilor interne ale bobinei. Pe parcursul acestei faze, timpul de descărcare a curentului este determinat de către un monostabil sau de un oscilator în puls. După acest timp, unul dintre poli se va schimba, determinând trecerea comutatoarelor înapoi la +V, iar ciclul va porni din nou. Deoarece, folosind această tehnică, singurele pierderi sunt cele în saturatie ale comutatorului și ale rezistenței bobinei, eficiența totală este foarte mare [93].



### 6.2.5 Selecția motorului pas cu pas pentru acționarea protezei

Motorul pas cu pas trebuie ales astfel încât să poată asigura un cuplu acoperitor pentru înfrângerea tuturor cuplurilor și forțelor rezistente (inerții și frecări), în situațiile cele mai defavorabile. Pentru motor, luat în sine, fabricanții oferă, de cele mai multe ori, valorile acestor cupluri și forțe rezistente, în cataloage. Motoarele, însă, nu vor funcționa niciodată fără sarcină, așa că aceste date prezentate de furnizori trebuie completate cu valorile cuplurilor și forțelor rezistente ale mecanismelor acționate. Pentru determinarea motorului s-a considerat că pe falanga acționată de acesta va exista o sarcină maximă de 10 N.



**Fig. 6.19** Motorul pas cu pas UBL23

Caracteristici	Valori nominale
Interval de temperatură de funcționare	-5°C ... 50°C
Interval de temperatură de păstrare	-20°C ... 70°C
Interval de tensiune de alimentare	10 Vcc ... 26,4 Vcc
Frecvență maximă de pas	2 kHz (necesită sursă externă de tact)
Pași pe rotație	24
Pași pe mm	30
Curentul de fază maxim	0,35 A
Deplasare liniară	8 mm
Forța axială la 200Hz $F_A$	10 N
Forță dinamică	20 N
Forță statică	100 N

**Tabelul 6.3** Detalii tehnice specifice motorului UBL23

Pentru a diminua complexitatea calculului de reducere a forțelor și momentelor implicate în acționare la momentul redus la arborele motorului, a fost preferată folosirea unui actuator cu motor pas cu pas. În acest fel s-a evitat proiectarea angrenajului de transformare a momentului motor în forță liniară, acesta fiind proiectat și testat profesional de către producătorul actuatorului. A fost eliminată, astfel, o potențială sursă de erori și a fost restrâns numărul testelor funcționale din faza de realizarea a prototipului.

Considerând că, în cadrul acționării hidraulice folosite, suprafețele celor două pistoane (cel din cilindrul receptor și cel din pompă) sunt identice, prinderea se realizează cu întreaga suprafață a falangei, în condițiile în care frecările în sistemul hidraulic sunt aproape neglijabile, rezultă că forța care trebuie asigurată de motor este de 10 N. Studiind cataloagele a câtorva producători, a fost selecționat motorul pas cu pas unipolar liniar UBL23, produs de firma SAIA-Burgess Electronics (Fig. 6.19), ale cărui specificații tehnice sunt prezentate în Tabelul 6.3.

### 6.3 Interfața dintre motoarele pas cu pas și dispozitivul digital de comandă

Pentru a executa pași într-o anumită direcție, motoarele pășitoare, pe lângă adoptarea unui mod de cablare și, respectiv, de excitație, au nevoie de o anumită secvență de aplicare a excitațiilor. Deoarece la interfața dintre echipamentul logic (calculator pe care rulează un program dedicat) și cel de putere (care să comande motorul pas cu pas) apar doar două semnale (de direcție și, respectiv, de pas), este evidentă necesitatea proiectării unui circuit care să genereze, pe baza semnalelor logice amintite, secvența necesară de excitație a înfășurărilor motoarelor pas cu pas.

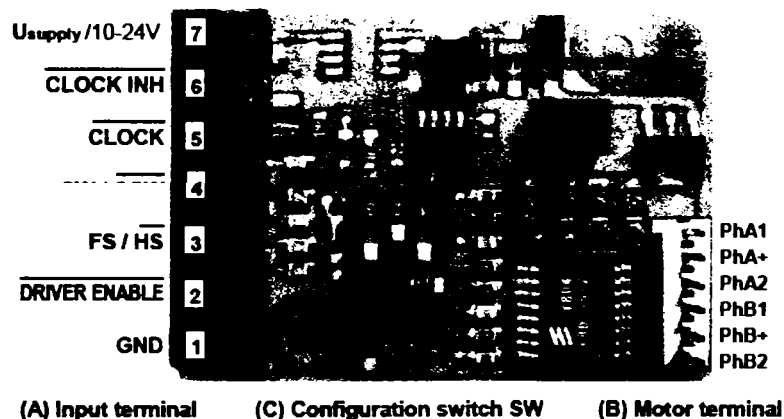


Fig. 6.20 Placa de comandă SAMOTRONIC101

La acest nivel, al interfațării dintre dispozitivul digital și motoarele pas cu pas, semnalele logice de comandă trebuie să fie deja obținute de la calculatorul de

comandă, la momentele corespunzătoare de timp. Energia acestora este insuficientă pentru a alimenta înfășurările motoarelor de acționare. Din acest motiv, este necesară proiectarea unei interfețe electronice de putere, care să asigure adaptarea dintre semnalele de comandă și modul de aplicare a tensiunilor de alimentare a motoarelor.

### 6.3.1 Placa de comandă SAMOTRONIC101

SAMOTRONIC101 este un driver folosit pentru a controla motoare pas cu pas unipolare cu 4 faze în tensiune constantă (Fig. 6.20 [134]). Motoarele pas cu pas au nevoie de un astfel de circuit, care dă energie înfășurărilor, în ordinea corectă. Schimbarea fazelor constă într-o rotație a câmpului magnetic al statorului. Rotorul cu magnet permanent urmărește și mută arborele motorului. Frecvența între punctele de interschimbare se numește frecvență de pas, notată  $f_S$ . Viteza  $n$  în rotații pe minut poate fi calculată pe baza acestei frecvențe de pas și a unui unghi de pas specific al motorului  $\alpha_S$ , folosind relația:

$$n = \frac{(f_S \cdot \alpha_S \cdot 60 \cdot s)}{360^\circ} \quad (6.1)$$

Folosind semnale externe precum direcția, pas întreg sau jumătate de pas ori proceduri de start sau stop, poate fi controlat comportamentul driverului SAMOTRONIC101. Un generator extern de ceas inițiază un pas cu fiecare front descrescător la intrarea de ceas \CLOCK. Opțional, un generator intern de ceas poate fi folosit prin selectarea unui comutator de pe placă. În acest mod de funcționare frecvența de pas poate fi reglată de un potențiomtru de pe placă, poziționat în partea dreaptă sus (Fig. 6.20 [134]).

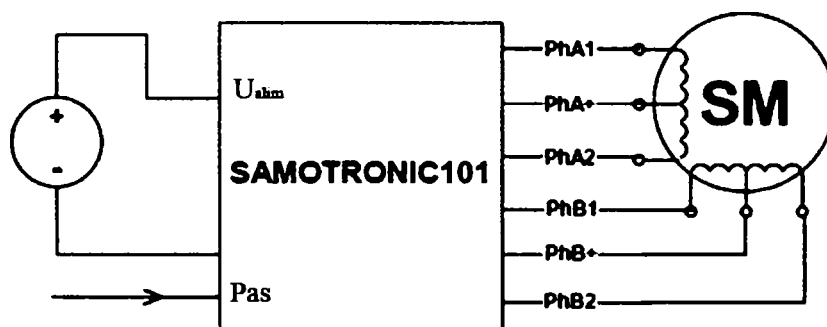


Fig. 6.21 Structura plăcii de comandă

O sursă de tensiune constantă ( $U_{alim}$ ) alimentează partea logică a părții electronice și pinul comun al fazelor motorului  $PhA+/PhB+$  (Fig. 6.21 [134]). Sunt suficiente patru elemente de comutare cu tensiune marginală scăzută pentru a conecta fazele motorului  $PhA1/PhA2/PhB1/PhB2$  la masă ( $GND$ ). Pentru aplicarea fazelor în ordinea corectă, circuitul integrat NJM 3517 (JRC) include o mașină cu număr finit de stări,

pentru a genera semnalele corespunzătoare modurilor pas întreg și, respectiv, jumătate de pas.

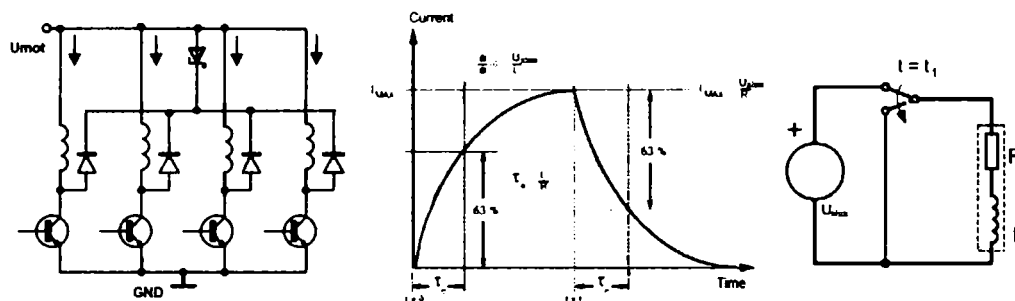


Fig. 6.22 Comanda în tensiune constantă

### 6.3.1.1 Modul de tensiune constantă

Funcționarea în tensiune constantă a unui motor unipolar necesită doar patru tranzistori, iar aceștia alcătuiesc cel mai simplu circuit driver pentru motoare pas cu pas. Tensiunea de alimentare  $U_{alim}$  este aplicată direct polului comun al fiecărei înfășurări a statorului. Direcția fluxului e inversată prin schimbarea curentului dintr-o jumătate a înfășurării statorului către cealaltă. Pentru o modelare ușoară se presupune un tranzistor cu rol de comutator ideal, câteva rezistențe inseriate și o inductanță. La aplicarea de către un tranzistor a unui impuls de tensiune constantă pe o înfășurare, curentul crește exponențial până la timpul  $t_1$ . Pentru un impuls suficient de lung, curentul atinge o valoare  $I_{MAX}$  (Fig. 6.22 [134]) Acest maxim este limitat doar de curentul de fază al curentului motorului.

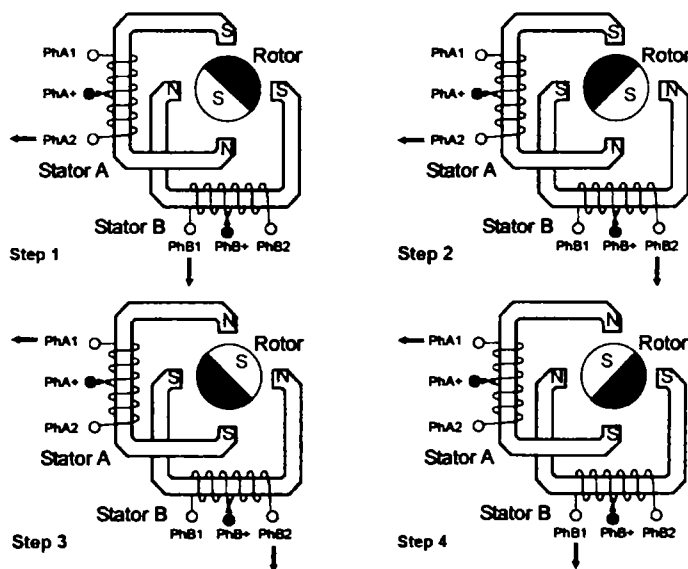


Fig. 6.23 Exemplu de funcționare în pas întreg

Nr. pin	Nume	Funcție	Nivel	Descriere
7	Usupply	Tensiune de alimentare	10..24,6 Vcc	Linie comună de alimentare pentru logica de funcționare și pentru motor
6	$\overline{\text{CLOCK INH}}$	Oprește generatorul de ceas intern	Semnal activ pe 0	Motorul se oprește, dar înfășurarea rămâne alimentată
5	$\overline{\text{CLOCK}}$	Intrare externă de frecvență de pas	LS-TTL (0..5V), activ pe 0 logic	La fiecare front descrescător al semnalului de ceas motorul face câte un pas
4	$\overline{\text{CW / CCW}}$	Sensul de deplasare	LS-TTL (0..5V), activ pe 0 logic	Intrare în aer este interpretată ca 1 logic, motorul se va mișca CW. Pentru semnal 0 logic, motorul se va mișca CCW
3	$\overline{\text{FS / HS}}$	Mod de funcționare	LS-TTL (0..5V), activ pe 0 logic	Intrare în aer este interpretată ca 1 logic, motorul se va mișca cu pas întreg. Pentru intrare pe 0 logic, motorul va funcționa cu jumătate de pas
2	$\overline{\text{DRIVER ENABLE}}$			Lăsată în aer, intrarea este interpretată pe 1 logic. Ca urmare, nici o înfășurare nu va fi alimentată, iar motorul opune doar cuplul de detentă. Tras la masă, pinul permite alimentarea înfășurărilor cu secvența de comandă selectată.  Pentru a activa funcția acestui terminal, comutatorul SW3 trebuie să fie în poziția OFF.
1	GND	Masă	GND	Potențial negativ pentru tensiunea de alimentare a motorului, a semnalelor logice și de intrare.

**Tabelul 6.4** Descrierea intrărilor plăcii SAMOTRONIC101

### 6.3.1.2 Modurile de lucru în pas întreg și în jumătate de pas

SAMOTRONIC101 suportă două moduri de comandă: funcționare în pas întreg, cu patru pași pe ciclu, și funcționare în jumătate de pas, cu 8 pași pe ciclu. În Fig. 6.23[134] este prezentată funcționarea în pas întreg cu ajutorul unui model de motor pas cu pas, cu doar doi poli. Acest model are un unghi mecanic de pas de  $90^\circ$  și are nevoie doar de patru pași pentru o rotație completă. Motoarele clasice, cu formă de cutie de conserve, au mult mai mulți poli și acționează cu unghiuri de pas de  $7.5^\circ$ ,  $11.25^\circ$ ,  $15^\circ$  sau  $18^\circ$ . În acest fel, un motor cu unghiul pasului de  $15^\circ$  face 24 de pași pe rotație.

Modelul din Fig. 6.23 arată că ambii pini comuni ai motorului  $PhA+$  /  $PhB+$  sunt alimentați continuu de către tensiunea de alimentare a motorului. În pasul 1, doi tranzistori comută capetele înfășurărilor  $PhA2$  și  $PhB1$  la masă. Înfășurarea alimentată electric generează un câmp magnetic și rotorul se aliniaza între doi poli magnetici ai statorului.

În modul de funcționare în pas întreg, în orice moment sunt stimulate electric două faze. În pasul 2 se schimbă direcția câmpului magnetic în statorul B prin stimularea lui  $PhB2$ . Vectorul magnetic este deplasat cu  $90^\circ$  înainte. Rotorul îl urmează cu o mișcare în sens trigonometric. În pasul 3, statorul A se schimbă, în timp ce statorul B își păstrează polaritatea. O dată cu pasul 4 se completează o rotație în acest model. Dacă se efectuează secvența invers, motorul se va mișca în sensul acelor ceasornicului.

Funcționarea în jumătate de pas înseamnă că la fiecare al doilea pas doar o jumătate a unui stator este stimulat și este nevoie de opt pași pentru a se repeta tiparul. Între pasul 1 și pasul 2 statorul B este inactiv. Polul Nord al rotorului este aliniat cu polul Sud al statorului și polul Sud al statorului cu polul Nord al rotorului. Cu aceste poziții suplimentare motorul se mișcă cu doar jumătate din unghiul de la modul de funcționare cu pas întreg. Mai mult, cuplul motorului este mai mic, pentru că statorul stimulat nu contribuie la forță. Avantajele acestui mod de funcționare sunt mișcările mai line, emisiile de zgomot mai reduse și vibrații mai mici ale motorului.

### 6.3.1.3 Terminale și elemente de control

Tabelul 6.4 [134] descrie intrările plăcii de comandă SAMOTRONIC101, așa cum sunt ele prezentate în Fig. 6.20. Etajul de ieșire al plăcii constă în patru tranzistori cu colector în gol. Fiecare tranzistor poate conduce un curent maxim de 350 mA. O cădere de tensiune, (tensiunea de saturație), apare între colectorul și emitorul fiecărui tranzistor care conduce. Aceasta cădere de tensiune depinde de curentul de fază.

Circuitul independent include și o diodă Zener cu  $U_z = 10$  V. Această componentă este responsabilă de descărcarea energiei inductive acumulate de înfășurare, în momentul întreruperii alimentării. Astfel, pot fi atinse frecvențe de operare mai mari

și cupluri mai mari la ieșire. Un dezavantaj este energia disipată pe dioda Zener, care duce la probleme de răcire. Detaliile tehnice ale ieșirilor sunt prezentate în Tabelul 6.5 [134].

Nume	PhB2	PhB+	PhB1	PhA2	PhA+	PhA1
<b>Rolul</b>	Ieșire cu colector în gol	Tensiunea de alimentare a motorului	Ieșire cu colector în gol	Ieșire cu colector în gol	Tensiune de alimentare	Ieșire cu colector în gol
<b>Curentul de fază <math>I_{max}</math></b>	350 mA	-	350 mA	350 mA	-	350 mA
<b><math>U_{sat} (I=200mA)</math></b>	0.3 V	-	0.3 V	0.3 V	-	0.3 V
<b><math>U_{sat} (I=350mA)</math></b>	0.6 V	-	0.6 V	0.6 V	-	0.6 V

**Tabelul 6.5** Semnificația ieșirilor plăcii de comandă

De asemenea, placa SAMOTRONIC101 poate fi configurată cu ajutorul comutatoarelor duale în plan, corespunzător modurilor suportate (Tabelul 6.6 [134]). Trebuie avut în vedere că există o interdependență între starea acestora și funcționalitatea terminalelor de comandă. Pentru a face uz de funcționalitatea acestora din urmă, starea tuturor comutatoarelor trebuie să fie OFF.

Nr. comutator	„ON”	„OFF”	Descriere
1	Ceas intern activ	Se folosește semnal de ceas extern	Se folosește pinul 5 pentru a aplica un semnal extern de ceas sau pentru a se măsura semnalul intern de ceas
2	Mod de funcționare în jumătate de pas	Mod de funcționare în pas întreg	În urma funcționării în jumătate de pas se reduc la jumătate viteza motorului și cuplul
3	Driver activ	Driver inhibat	Cu driverul activ, prin înfășurare trece curent

**Tabelul 6.6** Semnificația comutatoarelor duale în plan

Cuplul de încărcare la care un motor pas cu pas este capabil să pornească fără să piardă sincronizarea depinde de inerția cuplului și de frecvența de pas. Curba de inițiere definește suprafața referitoare la regiunea de start-stop. Aceasta este frecvența maximă la care motorul se poate porni sau opri, la un anumit cuplu de încărcare, fără a pierde pași. Pentru a atinge frecvențe de operare mai mari este nevoie de o pantă. Aceasta înseamnă o accelerare sau încetinire a motorului utilizând diferite frecvențe de pas. Pentru a porni motorul, se crește frecvența de pas de la o valoare joasă (frecvența de start) la o valoare mai ridicată.

SAMOTRONIC101 nu suportă generare automată de pantă. Cu generatorul intern de ceas se poate lucra doar în modul start-stop. Dacă sunt solicitate frecvențe mai înalte de operare sau aplicația la care este folosită placa are o inerție mare, se recomandă folosirea unei surse externe de ceas și creșterea vitezei unghiulare foarte încet.

## 6.4 Comunicația dintre sistemul de calcul și proteză

Pentru comanda motoarelor pas cu pas, care acționează proteza, printr-un sistem comandat de un calculator personal, este necesară transmiterea unor semnale de la PC către proteză. Formatul acestor semnale (comenzi) pe care le acceptă circuitul de comandă a motorului pas cu pas este *direcție:pas*, unde direcția se dă, pentru fiecare motor, sub forma unui bit (de exemplu, 0 pentru stânga și 1 pentru dreapta), iar pasul este un semnal treaptă (motorul sesizează nivelul ridicat al unui semnal treaptă, pentru care acționează cu un pas).

O dată cunoscută o secvență logică de comenzi, se dorește ca aceasta să fie transmisă, spre execuție, motorului. Cea mai simplă modalitate de a face acest lucru constă în folosirea portului paralel al calculatorului, a cărei schemă generală este prezentată în Fig. 6.24. Prin intermediul unui simplu program scris în limbaj C se poate accesa portul, trimițându-se cele două semnale asociate fiecărui motor. Din păcate, însă, în acest mod se pot comanda maxim 4 motoare, or proteza, în primă fază, are 14 motoare.

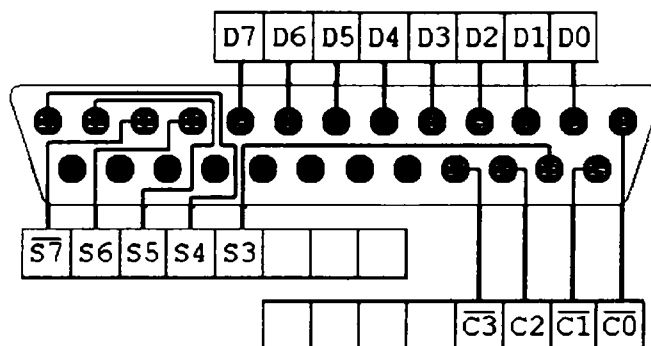


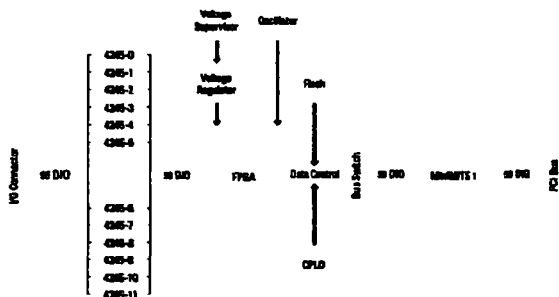
Fig. 6.24 Schema generală a portului paralel

Soluția aleasă constă într-o placă de achiziții de date de la National Instruments, specialiști în acest domeniu (Fig. 6.25 [135]). NI-PCI-2509 este o interfață industrială cu 96 de canale digitale pentru sisteme PCI, compatibilă cu tehnologii TTL, CMOS și cu niveluri logice digitale de 5 V. Placa are 96 de linii digitale bidirecționale capabile să comande curenți ridicați (24 mA), niveluri logice de 5V sau direct echipamente digitale externe precum senzori sau elemente de acționare. Fiecare canal poate fi configurat individual ca ieșire sau intrare și nu este necesară o sursă suplimentară de energie pentru susținerea ieșirilor. Această placă este ideală pentru aplicații de achiziții de date de uz general, dar și pentru aplicații de control industrial și de testare automatizată a producției.





**Fig. 6.25** Placa de achiziții de date NI-PCI-6509



**Fig. 6.26** Diagrama de funcționare a NI-PCI-6509

Echipamentul NI-PCI-6509 oferă un set de caracteristici cu fiabilitate ridicată proiectat să satisfacă până și cele mai pretențioase aplicații [135]:

- stări programabile de pornire care oferă o operare sigură când sunt conectate la pompe, valve, motoare sau rele;
- *watchdogs* digitali de I/O care detectează erori de calculator sau de aplicație și asigură restaurarea în condiții de siguranță;
- detectarea unei schimbări în sistem determină activarea aplicației și returnarea unor date de I/O după un eveniment digital cu consum minim de procesor;
- filtre de intrare programabile care elimină zgomotele.

Folosind stări programabile de pornire pot fi programate, prin software, stările inițiale ale ieșirilor pentru a asigura operarea fără căderi în momentul conectării la elemente de acționare industriale precum pompe, valve, motoare sau rele. După alimentare, placa menține stările ieșirilor la valorile programate până când computerul încarcă sistemul de operare și aplicația software intră în rulare, asigurând faptul că ieșirile nu vor ajunge într-o stare nedorită pe toată această perioadă.

Fiecare linie poate fi configurată individual în intrare, ieșire de putere ridicată și ieșire de putere scăzută. Modulele I/O digitale memorează aceste setări într-o memorie nevolatilă aflată pe placă și implementează în mod automat stările de pornire după alimentarea plăcii.

Facilitatea de *watchdog* reprezintă o tehnologie inovativă a National Instruments care asigură protecție împotriva unei palete largi de condiții de eroare [135]:

- căderi ale calculatorului de comandă: căderi totale ale sistemului de operare
- căderi ale aplicației: aplicația software încetează să mai răspundă
- căderi ale driverului
- defecțiuni ale magistralei PCI: partea de comunicare încetează să mai răspundă

Utilizând această facilitate, ieșirile digitale sunt aduse la o stare de siguranță, stabilită de către utilizator, atunci când apar situații eronate și contorul de timp al *watchdog*-ului expiră. Astfel pot fi monitorizate atât canalele de intrare, cât și cele de ieșire. Modulul rămâne în starea *watchdog* până când contorul de timp al acestuia este dezactivat de către aplicație și sunt stabilite noi valori pentru canalele I/O, până când placa este resetată sau calculatorul este resetat.

Folosind facilitatea de detectare a unei schimbări, aplicația software poate fi lansată în mod automat să realizeze o operație de citire a unei stări digitale care tocmai s-a modificat. Modificarea unei stări digitale este definită ca fiind frontul crescător (tranziția din 0 în 1) sau frontul descrescător (tranziția din 1 în 0) de pe una sau mai multe linii digitale. Această facilitate poate fi folosită pentru a monitoriza evenimentele digitale cu un consum minim de procesor, aplicația fiind anunțată prin intermediul unei întreruperi.

Blocul 1				Blocul 2			
Pozitii de la 1 la 50				Pozitii de la 51 la 100			
P2.7	1	2	P5.7	P8.7	1	2	P11.7
P2.6	3	4	P5.6	P8.6	3	4	P11.6
P2.5	5	6	P5.5	P8.5	5	6	P11.5
P2.4	7	8	P5.4	P8.4	7	8	P11.4
P2.3	9	10	P5.3	P8.3	9	10	P11.3
P2.2	11	12	P5.2	P8.2	11	12	P11.2
P2.1	13	14	P5.1	P8.1	13	14	P11.1
P2.0	15	16	P5.0	P8.0	15	16	P11.0
P1.7	17	18	P4.7	P7.7	17	18	P10.7
P1.6	19	20	P4.6	P7.6	19	20	P10.6
P1.5	21	22	P4.5	P7.5	21	22	P10.5
P1.4	23	24	P4.4	P7.4	23	24	P10.4
P1.3	25	26	P4.3	P7.3	25	26	P10.3
P1.2	27	28	P4.2	P7.2	27	28	P10.2
P1.1	29	30	P4.1	P7.1	29	30	P10.1
P1.0	31	32	P4.0	P7.0	31	32	P10.0
P0.7	33	34	P3.7	P6.7	33	34	P9.7
P0.6	35	36	P3.6	P6.6	35	36	P9.6
P0.5	37	38	P3.5	P6.5	37	38	P9.5
P0.4	39	40	P3.4	P6.4	39	40	P9.4
P0.3	41	42	P3.3	P6.3	41	42	P9.3
P0.2	43	44	P3.2	P6.2	43	44	P9.2
P0.1	45	46	P3.1	P6.1	45	46	P9.1
P0.0	47	48	P3.0	P6.0	47	48	P9.0
+5 V	49	50	GND	+5 V	49	50	GND

Fig. 6.27 Alocarea pinilor pentru cablul R1005050

Pentru buna sa funcționare, placa NI-PCI-6509 are nevoie de tehnologia software a National Instruments NI-DAQmx versiunea 7.1 sau mai recentă, care se livrează gratuit cu produsul, putând fi descărcată de pe situl producătorului. Prin intermediul acestui driver, placa anunță aplicația de comandă de detecția unui eveniment și generează citirea automată. Pentru a minimiza efectele zgomotelor pe liniile de intrare pot fi folosite filtre de intrare programabile pentru a elimina interpretarea greșită a unui zgomot ca fiind semnal de intrare. Driverul plăcii poate fi utilizat împreună cu aplicații scrise în limbaje precum ANSI C, Microsoft Visual C++, Visual Basic.NET, C#. Tehnologia NI-DAQmx permite accelerarea dezvoltării software-ului de comandă prin intermediul a câtorva facilități precum generarea automată de cod pentru a ușura configurarea și programarea plăcii.

Pin	Semnal	Descriere	MSB	LSB
1,3,5,7,9,11,13,15	P2,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 2	P2,7	P2,0
2,4,6,8,10,12,14,16	P5,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 5	P5,7	P5,0
17,19,21,23,25,27,29,31	P1,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 1	P1,7	P1,0
18,20,22,24,26,28,30,32	P4,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 4	P4,7	P4,0
33,35,37,39,41,43,45,47	P0,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 0	P0,7	P0,0
34,36,38,40,42,44,46,48	P3,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 3	P3,7	P3,0
49,99	+5 V	Alimentare	-	-
50,100	GND	Masă	-	-
51,53,55,57,59,61,63,65	P8,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 8	P8,7	P8,0
52,54,56,58,60,62,64,66	P11,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 11	P11,7	P11,0
67,69,71,73,75,77,79,81	P7,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 7	P7,7	P7,0
68,70,72,74,76,78,80,82	P10,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 10	P10,7	P10,0
83,85,87,89,91,93,95,97	P6,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 6	P6,7	P6,0
84,86,88,90,92,94,96,98	P9,<7..0>	Linii bidirectionale de date pentru portul 9	P9,7	P9,0

**Tabelul 6.7** Semnificația pinilor plăcii NI-PCI-6509

Conectorul SCSI cu 100 de pini al plăcii se conectează la un cablu panglică de tip R1005050, cu 100 de fire, atașat la două blocuri de conectare. Fiecare port de 8 biți al plăcii poate fi programat individual ca intrare sau ca ieșire. Valoarea maximă pentru tensiunea de intrare sau de ieșire este de 5 V (cu un domeniu maxim absolut pentru tensiune între -0.5 V și +5.5 V raportat la masă). Fig. 6.27 [135] prezintă alocarea pinilor pentru cablul R1005050 conectat la placa NI-PCI-6509, pe cele două

blocuri de conectare. Convenția de nume pentru fiecare pin este  $P_{x,y}$  (unde  $x$  este numărul portului  $P$  și  $y$  este numărul liniei).

Pentru a putea lucra și programa în mod corect placa de achiziție NI-PCI-6509, utilizatorul trebuie să cunoască semnificația celor 100 de pini, sintetizată în Tabelul 6.7. Accesarea acestor canale dintr-o aplicație software este posibilă doar prin intermediul unei interfețe specializate, denumită *Measurement and Automation Explorer (MAX)*. Interfața MAX poate fi folosită pentru a configura și testa componentele hardware de la National Instruments, oferind și alte funcționalități, precum diagrame de conexiune pentru multe accesorii NI, pentru a conecta corect senzori sau diverse semnalele.

Cele două secțiuni disponibile în MAX sunt *My Systems* și *Remote Systems*. Facilitățile oferite de My Systems sunt:

- *Data Neighborhood* : permite crearea de noi taskuri și canale și vizualizează canalele virtuale și taskurile deja configurate. De asemenea, permite testarea și reconfigurarea taskurilor și a canalelor.
- *Devices and Interfaces*: afișează toate componentele hardware ale plăcii NI instalate și detectate. Include facilitățile *Self-Test*, *Test Panels*, *Reset*, *Properties* și *Self-Calibration* pentru configurarea și testarea plăcilor. În această categorie se pot adăuga manual componente hardware NI sau se pot crea simulări pentru mai multe plăci NI.
- *Scales*: afișează toate scalele configurate și oferă posibilități de testare sau reconfigurare a scalelor actuale.
- *Software*: afișează toate softurile NI instalate la un moment dat. Categoria include și un Software Update Agent, care verifică dacă versiunea softului NI este ultima, altfel deschide pagina [www.ni.com](http://www.ni.com) pentru a descărca ultima versiune.
- *IVI Drivers*: oferă acces la toate driverele Instrumentelor Virtuale Interschimbabile (IVI) care există pe calculator.

## **6.5 Aplicația software pentru comanda protezei**

### 6.5.1 Descrierea mediului de programare LabView

Întreaga operare a protezei este guvernată de către un program care rulează pe o stație de lucru, realizat în LabView. Acesta reprezintă un puternic mediu grafic de programare, utilizat extensiv pentru achiziția semnalelor, analiza măsurărilor și prezentarea datelor, oferind flexibilitatea limbajelor de programare tradiționale și, în același timp, o interfață utilizator prietenoasă.

Caracteristica principală a programului LabView este aceea că utilizează, pentru dezvoltarea aplicațiilor, simboluri intuitive plasate pe panouri frontale și scheme bloc. Utilizatorul dezvoltă aplicația soft prin construcția ierarhizată de Instrumente

Virtuale (VI-uri). Un instrument virtual este un pachet de programe grafice care arată și acționează ca un instrument. Panoul frontal (conținând butoane, comutatoare, întrerupătoare, cadrane de instrumente) înfățișează intrările, ieșirile și constituie interfața uzuală pentru operații interactive. În spatele panoului este o diagramă-bloc, care reprezintă programul executabil. LabView este un sistem ierarhizat, datorită faptului că un instrument virtual poate fi reprezentat sub formă de simbol grafic și utilizat în schema bloc la construcția unui alt instrument virtual.

LabView permite achiziția semnalelor de la o varietate de echipamente. Drivele de comunicație simplifică controlul instrumentelor și timpul de dezvoltare a noi aplicații, eliminând necesitatea de a învăța protocoale de programare pentru fiecare instrument în parte. Multe drivere folosesc *Visual Instrument Software Architecture (VISA)* pentru a comunica pe busuri diferite, cum ar fi GPIB sau serial, folosind același cod LabView. Indiferent pe ce tip de bus este instrumentul, driverele VISA preiau controlul protocoalelor de comunicare respective.

Controlul instrumentelor fizice cu LabView este proiectat cu simboluri grafice de blocuri, care pot fi combinate pe ecran, pentru a construi softul unui instrument virtual (VI). Acesta are în componență module reutilizabile, ale căror panouri frontale pot fi intuitiv utilizate, pentru a efectua măsurări. În plus, fiecare VI poate fi introdus într-o formă grafică simplă care, combinată cu altă formă grafică simplă, va construi un VI de nivel superior.

LabView oferă o multitudine de funcții integrate și module adiționale dedicate special analizei măsurărilor și procesării semnalelor. Cu aceste unelte, se pot analiza măsurările pe măsură ce acestea se efectuează, se pot extrage și procesa date, iar aplicațiile pot fi înzestrate cu capacitatea de a lua decizii bazate pe rezultatele măsurărilor. Folosind aceste funcții, utilizatorul nu mai este obligat să scrie propriul algoritm pentru transformarea datelor brute în informație utilizabilă.



**Fig. 6.28** Deget cu trei falange și cilindri receptori

LabView combină toate datele de intrare și ieșire pe panoul intuitiv de pe ecran. VI-urile operează direct pe panourile lor frontale. Pot fi executate în paralel VI-uri multiple, mutând mouse-ul între panourile lor frontale. Panoul frontal de control și datele pot fi tipărite, la fel cum pot fi trecute sau scoase din panourile frontale ale altor programe de aplicații.

### 6.5.2 Realizarea aplicației de comandă

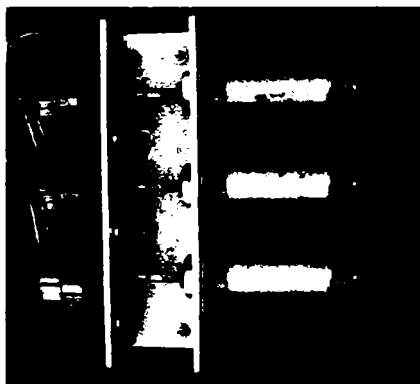
Modelul de mână artificială realizat și care trebuie acționat este compus din cinci degete, patru cu aceeași structură (câte trei falange) și al cincilea, degetul opozabil, cu structură diferită (doar două falange). Mișcarea fiecărei falange este datorată

articulației plasate la baza acesteia. Rezultă, astfel, că sistemul are 14 articulații, fiecare fiind acționată de către un cilindru receptor (Fig. 6.28), conectat printr-un tub hidraulic la o pompă acționată de un motor UBL23 (Fig. 6.29). Fiecare astfel de motor este comandat de o placă SAMOTRONIC101, care trebuie să primească cele două semnale de comandă, prin intermediul plăcii de achiziție, de la aplicația de control.

Deget (cod)	Falangă (cod)	Pin	Funcție
Mic (E)	Proximală (E1)	35	Pas pentru motorul falangei proximale
	Medie (E2)	37	Pas pentru motorul falangei medii
	Distală (E3)	39	Pas pentru motorul falangei distale
	Toate	33	Sens pentru toate falangele degetului mic
Inelar (D)	Proximală (D1)	19	Pas pentru motorul falangei proximale
	Medie (D2)	21	Pas pentru motorul falangei medii
	Distală (D3)	23	Pas pentru motorul falangei distale
	Toate	17	Sens pentru toate falangele degetului inelar
Mijlociu (C)	Proximală (C1)	3	Pas pentru motorul falangei proximale
	Medie (C2)	5	Pas pentru motorul falangei medii
	Distală (C3)	7	Pas pentru motorul falangei distale
	Toate	1	Sens pentru toate falangele degetului mijlociu
Index (B)	Proximală (B1)	36	Pas pentru motorul falangei proximale
	Medie (B2)	38	Pas pentru motorul falangei medii
	Distală (B3)	40	Pas pentru motorul falangei distale
	Toate	34	Sens pentru toate falangele degetului index
Opozabil (A)	Proximală (A1)	20	Pas pentru motorul falangei proximale
	Distală (A2)	22	Pas pentru motorul falangei distale
	Toate	18	Sens pentru toate falangele degetului opozabil

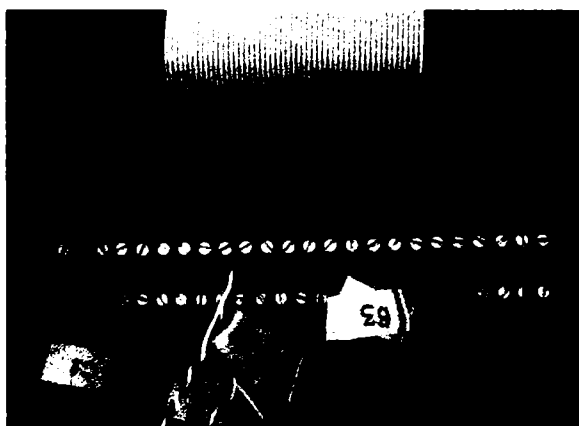
**Tabelul 6.8** Conectarea plăcilor SAMOTRONIC101 la blocul CB-100 I/O

În consecință, aplicația trebuie să genereze, pentru fiecare deget (cu excepția degetului opozabil), trei semnale pentru pas și trei pentru sensul de mișcare. Deoarece acest model se concentrează asupra funcției de prehensiune, când toate falangele unui deget se deplasează în aceeași direcție, s-a convenit ca pentru un deget să se trimită un singur semnal pentru specificarea sensului.



**Fig. 6.29** Motoare conectate la pompe

Fiecare placă SAMOTRONIC101 trebuie legată la conectorul CB-100 I/O al cablului R1005050. Tabelul 6.8 prezintă pinii la care sunt conectate plăcile de comandă pentru motoare pentru toate falangele componente ale mâinii artificiale, iar Fig. 6.30 ilustrează modul fizic de conectare a firelor la blocul CB-100 I/O. Pentru ușurința urmăririi conexiunilor, degetele și falangele au fost codate, după cum se poate observa în Tabelul 6.8.



**Fig. 6.30** Blocul de conectare cu firele de legătură

Aplicația este alcătuită dintr-un singur panou (Fig. 6.31) pe care se află toate elementele necesare pentru realizarea comenzii motoarelor pas cu pas. Se poate observa că toate semnalele aferente unui deget au fost grupate, pentru ca interfața să fie cât mai intuitivă. Pentru fiecare deget în parte aplicația generează trei semnale de pas, cu o anumită frecvență (stabilită de către utilizator prin manevrarea unui potențiomtru) și un semnal de sens. S-a considerat că, în cazul prehensiunii, toate falangele unui deget se deplasează cu aceeași viteză, de aici existența unui singur potențiomtru. Sensul poate fi stabilit prin acționarea unui comutator plasat pe panou. Fiecare instrument virtual de pe interfață este însoțit de

o etichetă sugestivă, care oferă o scurtă descriere a acțiunii blocului. După pornirea aplicației, motoarele vor primi semnalele necesare mișcării. Oprirea lor se poate face individual, acționând butonul *Stop* aflat în dreapta instrumentului virtual care generează semnalul de pas, sau colectiv, pentru toate motoarele.

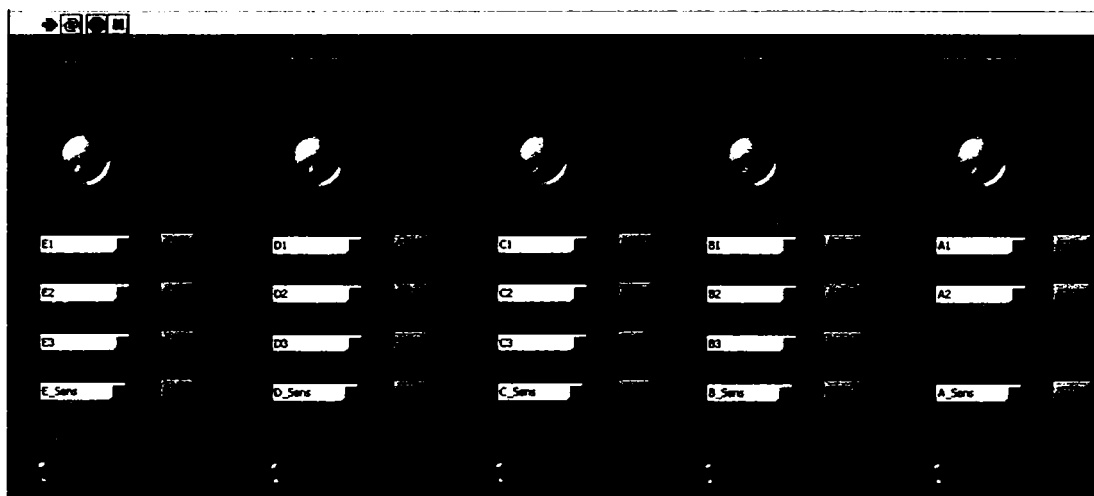


Fig. 6.31 Panoul frontal al aplicației

După cum se poate observa, aplicația nu primește informații din sistemul pe care îl comandă. S-a recurs la acest mod de implementare din cauza greutăților întâlnite la realizarea părții mecanice a mâinii artificiale, care reduce foarte mult din cuplul motoarelor, rezultând o forță aplicată de falange suficientă pentru a susține obiecte ușoare fără a le distruge. Ca urmare, motoarele vor primi comanda de pas și după ce falangele au prins obiectul, dar vor merge în gol, pierzând pași. Oricum, ajungând la capăt de cursă, motorul nu mai poate înainta chiar dacă primește semnal de pas spre înainte. Va rămâne ca direcție de cercetare viitoare îmbunătățirea părții mecanice astfel încât să poată fi introduși senzori de presiune în sistem, care să ofere o reacție aplicației de comandă.

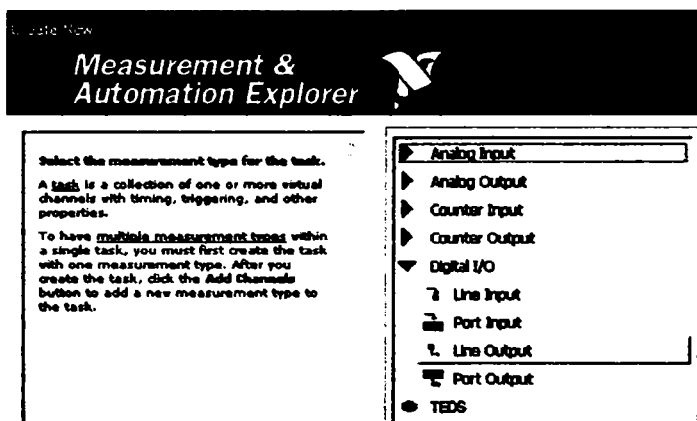


Fig. 6.32 Selectarea tipului de canal dorit

Elementele de pe interfață sunt conectate la instrumente virtuale. La crearea unui instrument virtual (văzut ca un task), trebuie să se specifice canalul virtual pe care, în cazul de față, se vor trimite datele. Acest lucru se realizează folosind interfața



specializată, denumită *Measurement and Automation Explorer*. Datorită faptului că, prin aplicație, se transmit doar niveluri logice, se folosesc doar canale digitale, de ieșire (Fig. 6.32). După stabilirea tipului de canal, trebuie specificată linia logică și portul de care aceasta aparține (Fig. 6.33). În continuare, se va da un nume instrumentului virtual creat și se va salva pentru a putea fi folosit în aplicații. Astfel, Tabelul 6.1 prezintă canalele logice create pentru a se realiza comanda sistemului mână.

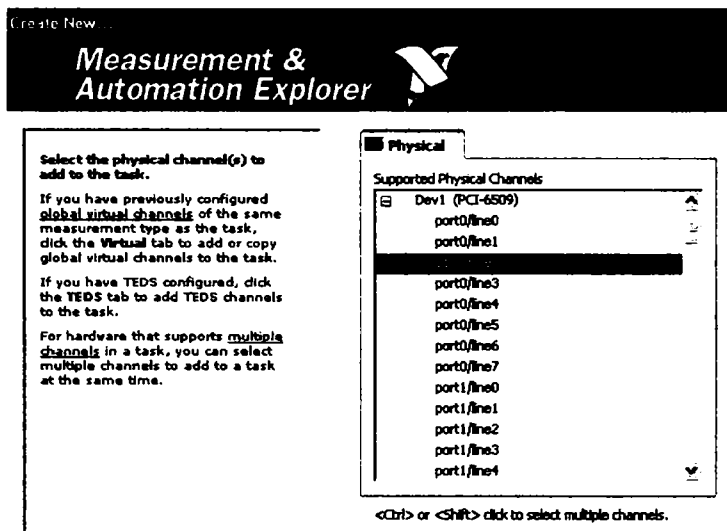


Fig. 6.33 Selectarea liniei logice care va fi conectată la canalul fizic

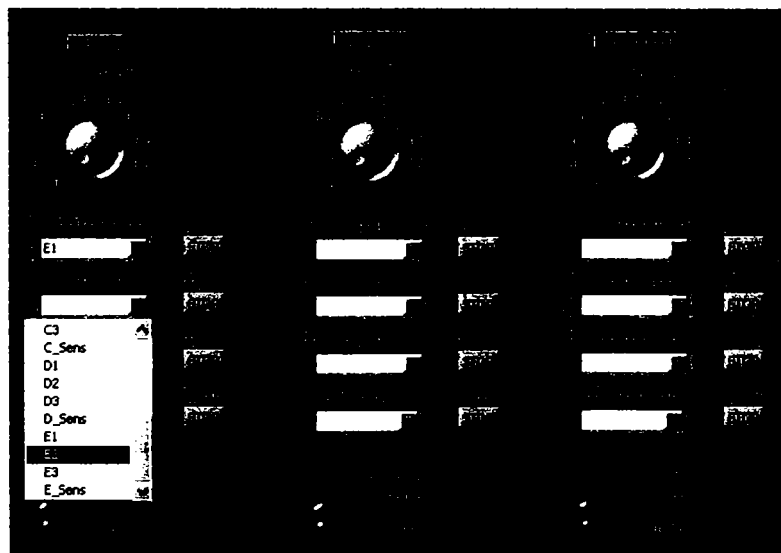


Fig. 6.34 Selectarea din aplicație a canalelor

La pornirea aplicației trebuie stabilite canalele virtuale care se activează. Astfel (Fig. 6.34), listele de pe panoul aplicației permit selecția, în ordinea dorită de utilizator. Selecțiile rămân valabile atât timp cât fereastra aplicației nu este închisă.

Schema bloc a aplicației este formată din patru algoritmi care funcționează în paralel: trei dintre ei sunt identici, generând semnale de pas, iar al patrulea este diferit, generând semnalul de sens.

Deget (cod)	Falangă (cod)	Port/linie	Nume instrument virtual
Mic (E)	Proximală (E1)	0/6	E1
	Medie (E2)	0/5	E2
	Distală (E3)	0/4	E3
	Toate	0/7	E_sens
Inelar (D)	Proximală (D1)	1/6	D1
	Medie (D2)	1/5	D2
	Distală (D3)	1/4	D3
	Toate	1/7	D_sens
Mijlociu (C)	Proximală (C1)	2/6	C1
	Medie (C2)	2/5	C2
	Distală (C3)	2/4	C3
	Toate	2/7	C_sens
Index (B)	Proximală (B1)	3/6	B1
	Medie (B2)	3/5	B2
	Distală (B3)	3/4	B3
	Toate	3/7	B_sens
Opozabil (A)	Proximală (A1)	4/6	A1
	Distală (A2)	4/5	A2
	Toate	5/7	A_sens

**Tabelul 6.9** Canalele logice aferente instrumentelor virtuale din aplicație

În ceea ce privește algoritmul de generare a pasului (Fig. 6.35), se alocă memorie pentru task, se creează un task de măsurare (blocul *DAQmx Create Channel*) și se alocă memorie pentru el (blocul *DAQmx Start Task*). După ce se intră în bucla *while*,

blocul *DAQmx Write* transmite spre canalul logic eșantioane preluate de la blocul *Generate Signal* cu o frecvență reglată de potențiometrul. Algoritmul va funcționa atât timp cât la porțile logice SAU ajung valori logice de tip *fals*. Valori de tip *adevărat* pot să apară când se apasă butonul de stop sau când apare o eroare la citirea sau scrierea datelor.

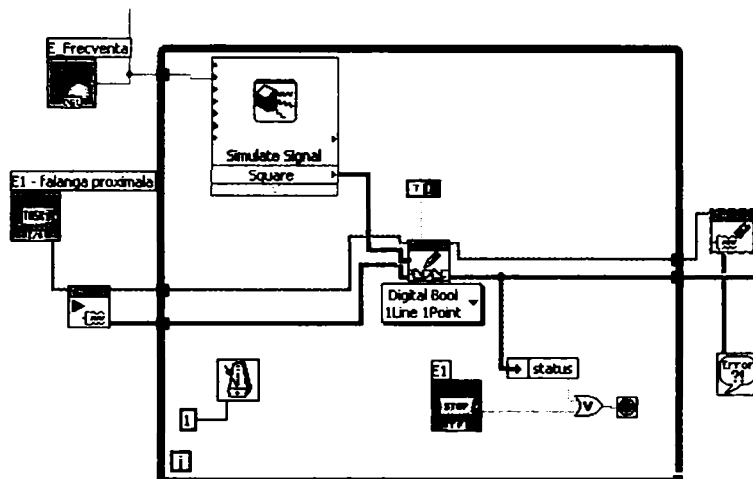


Fig. 6.35 Algoritmul de generare a pasului pentru un motor

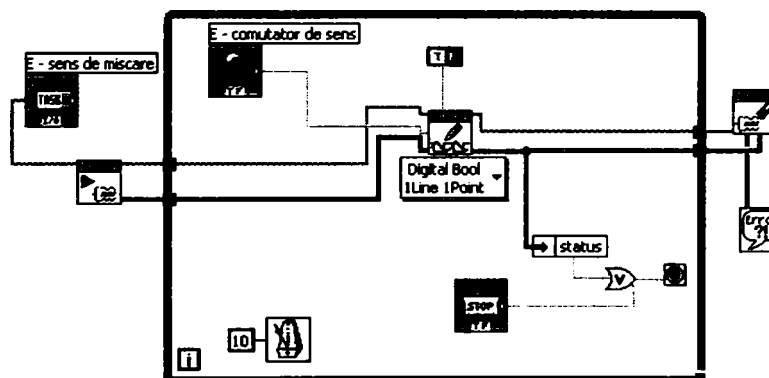


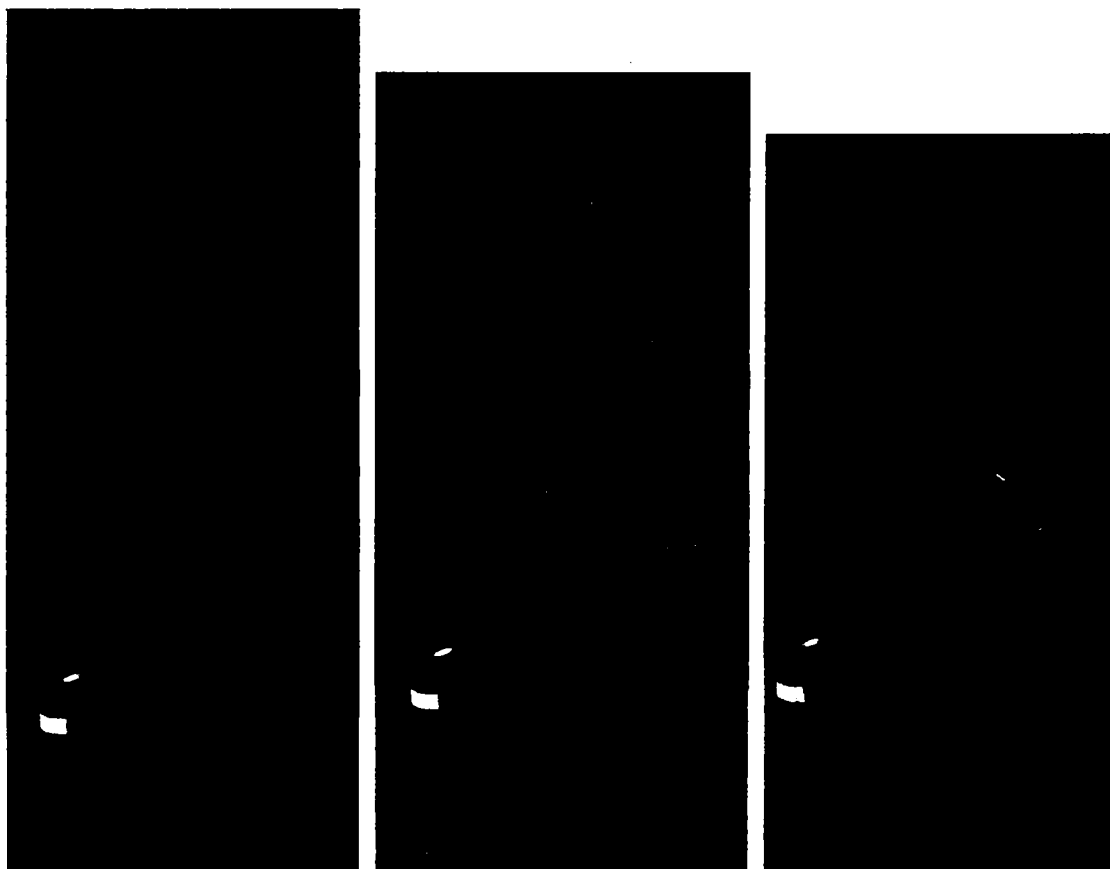
Fig. 6.36 Algoritmul de generare a semnalului de sens

Algoritmul pentru generarea semnalului de sens (Fig. 6.36) este foarte similar cu cel pentru generarea pasului. Din nou se alocă memorie pentru task, apoi se intră într-o buclă *while*. După intrarea în buclă se vor repeta următorii pași, până când, la blocul de stop (colțul din dreapta jos), va ajunge valoarea *adevărat*: se scrie un eșantion la canalul virtual; dacă nu s-a apăsă butonul de stop se trimite valoarea *fals* la una dintre intrările porții SAU, la cealaltă intrare se trimite o valoare de către blocul *status* (bloc de tip *unbundle by name*); această valoare va fi preluată de la ieșirea *error out* a blocului *DAQmx Write*, valoare care va fi *adevărat* dacă a apărut o eroare și *fals* dacă nu a apărut. Dacă la ieșirea porții SAU va fi valoarea *fals*, atunci se vor aștepta 100 de milisekunde, adică valoarea scrisă în dreptul blocului *wait until milliseconds* și se va relua ciclul până când la ieșirea porții SAU va fi valoarea *adevărat*. În acest moment se va ieși din buclă, se va șterge taskul din

memorie de către blocul *DAQmx Clear* și se vor afișa eventualele erori apărute pe parcurs cu ajutorul blocului *Simple Error Handler*.

## 6.6 Simulări ale protezei

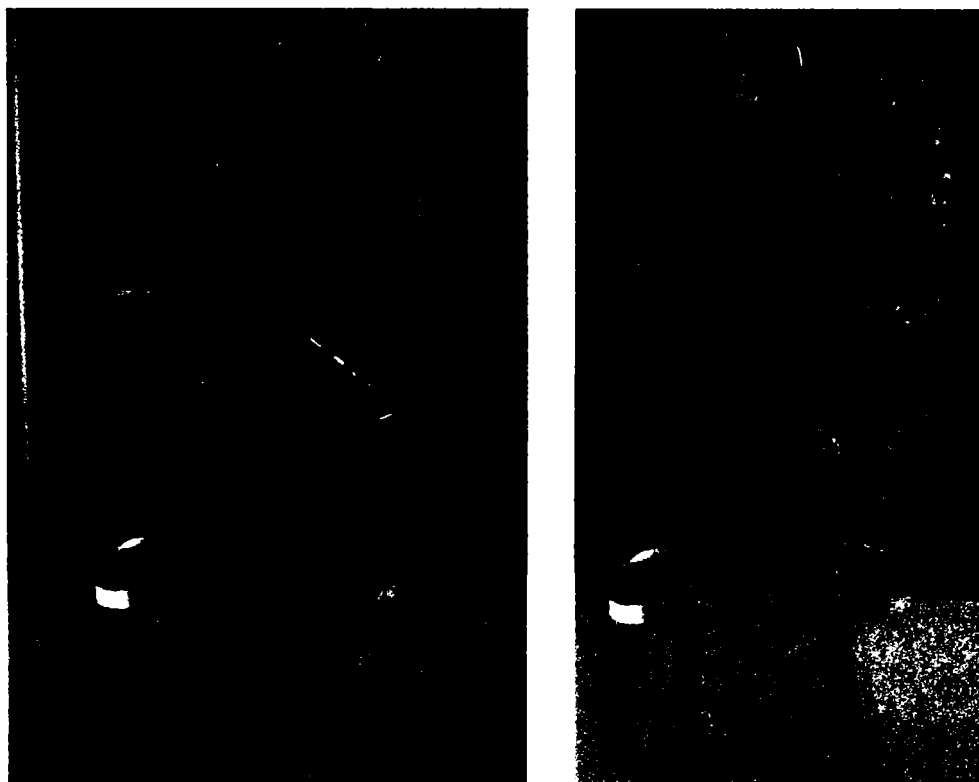
Conform cu principiul de funcționare prezentat în detaliu în capitolul 4, modelul de mână realizat funcționează în felul următor. După alimentarea motoarelor pas cu pas, se pornește aplicația LabView, care trimite către plăcile SAMOTRONIC101 semnale de pas și de sens, conform cu configurația stabilită de către utilizator. Axul motorului se deplasează liniar, având o cursă de 8mm. Dat fiind faptul că, cursa pistonului în cilindrul receptor al oricărei falange trebuie să fie de 18 mm pentru a asigura o variație unghiulară între  $0^\circ$  și  $90^\circ$ , diametrul pompei (13 mm) a fost ales mai mare decât diametrul cilindrului receptor (9 mm). Fiecare pompă este conectată la un cilindru receptor prin intermediul unui tub hidraulic.



**Fig. 6. 37** Închiderea pumnului

În momentul în care axul motorului se deplasează spre înainte, acesta va împinge pistonul pompei, care va determina apariția unei presiuni în sistemul hidraulic. Acest lucru va induce retragerea cilindrului receptor față de pistonul fixat pe axul articulație și, prin intermediul bandei prinsă de cilindru, se va închide falanga până la atingerea capătului de cursă.

Schimbarea sensului spre înapoi a motorului va determina retragerea pistonului din pompă și, implicit, revenirea cilindrului din falangă către poziția inițială. Deoarece banda care închide falanga nu are capacitatea de a împinge, ci doar de a trage, între fiecare două falange vecine, precum și între falangele proximale și palmă, au fost incluse arcuri de rapel. În acest fel, mâna artificială este capabilă să realizeze mișcările studiate în capitolul 2, respectiv de închidere (Fig. 6.37) și deschidere.



**Fig. 6.38** Exemple de prindere

Totodată, principiul pe baza căruia a fost realizat modelul din capitolul 4 presupune că prinderea unui obiect se realizează prin înconjurarea acestuia de către degete. Mâna artificială realizată este capabilă de prindere a diverse obiecte (Fig. 6.38 prinderea unui obiect paralelipipedic și a unui obiect sferic), cu precizarea că nu poate să controleze puterea de prindere. În aceste condiții, dacă obiectul este foarte fragil, acesta poate fi distrus.

## 7 CONCLUZII. CONTRIBUȚII ORIGINALE ȘI DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE

După cum este precizat prin titlul său, lucrarea de față și-a propus să realizeze modele ale mâinii umane, oprindu-se cu prisosință asupra principalei sale funcții, prehensiunea. Ea este structurată pe șapte capitole, precedate de o introducere, dintre care șase de consistență și prezentul capitol conclusiv. În cele ce urmează vor fi prezentate, pe de o parte obiectivele propuse pentru fiecare capitol, iar pe de altă parte realizările, concluziile conturate și direcțiile ulterioare de cercetare.

Introducerea, care precedă capitolele de consistență ale tezei, justifică alegerea temei de cercetare pentru studiile doctorale și oferă, în același timp, structura lucrării. Parcurgând această structură capitol cu capitol, introducerea reliefează un scurt rezumat al acestora, punând accent pe obiectivele conturate la începutul elaborării fiecăruia dintre ele. Ultima parte a tezei, cea de concluzii, reia fiecare capitol, scoțând în evidență contribuțiile originale ale autoarei.

Capitolul 1, „Stadiul actual în dezvoltarea de proteze pentru mâna umană”, prezintă succint ceea ce se petrece actualmente, la nivel mondial, în domeniu. Autoarea aduce în cadrul acestui capitol următoarele contribuții originale:

- o sinteză originală, bazată pe o bibliografie extinsă, a tipurilor existente de proteze pentru mână. Astfel, acestea pot să fie sub formă de cârlig (numeroase utilizări, dar controlează foarte greu forța cu care se realizează strângerea, ceea ce face aproape imposibilă ridicarea unor obiecte extrem de delicate) sau care imită mâna umană (pot fi comandate extern sau de către corpul uman, cu deschidere voluntară sau cu închidere voluntară, cu actuatoare integrate sau cu actuatoare externe);
- o clasificare originală, pe baza bibliografiei parcurse, cu numeroase exemplificări, a modelelor de proteze care imită forma mâinii umane. Astfel, acestea pot fi: acționate pneumatic sau hidraulic (*Ultralight Hand, Shadow Hand* etc.) acționate electric cu ajutorul tendoanelor (*LMS Hand, DIST Hand, Cyber Hand* etc.) sau prin servomotoare integrate (*Barret Hand, modelele DLR I și DLR II* etc.) Toate modelele prezentate au avantaje și dezavantaje, impunându-se concluzia că o metodă de acționare bazată pe principii simple va reduce din greutatea protezei și va ușura procesul de control;
- o sinteză bibliografică originală a modurilor de interfațare dintre pacient și protezele existente. Cea mai utilizată metodă este electromiografia, care se bazează pe măsurarea curenților electrici generați de către mușchi atunci când se contractă. Din păcate, metoda nu poate controla decât un număr redus de grade de libertate, iar pacientul trebuie să

începe să folosească proteza printr-un proces dificil și greoi. O metodă incipientă, dar care pare de viitor, constă în folosirea unei așa-numite interfețe creier-mașină. Aceasta încearcă să folosească structura de control cortical care a interacționat cu mâna pierdută, dar s-a ajuns doar la nivelul de a controla un cursor pe ecran prin captarea undelor cerebrale, într-un proiect aflat în derulare la Carnegie Mellon University, USA.

Concluzia marcantă a acestui capitol constă în faptul că, pentru a obține un model de proteză viabil, trebuie să se studieze modelul natural și, în faza de design, să se țină cont de câteva criterii importante, precum:

- Aspectul. Majoritatea persoanelor care necesită o proteză au doar o mână amputată și doresc ca proteza să atragă cât mai puțin atenția asupra ei. Dacă proteza nu are un aspect asemănător cu cel al mâinii pierdute, majoritatea pacienților nu sunt dispuși nici măcar să o încerce, indiferent cât de bine funcționează.
- Confortul. Proteza trebuie să fie confortabilă pentru utilizator (cât mai ușoară cu puțință pentru a minimiza presiunea exercitată asupra pielii). Interesant de remarcat este faptul că, deși protezele comerciale au aproximativ aceeași masă ca și mâna umană, ele par pacientului cu mult mai grele, deoarece masa este transmisă printr-un suport metalic prins de restul de braț al pacientului.
- Controlul. Proteza trebuie să fie ușor de manevrat, cu un control logic și intuitiv.
- Silențiozitatea. Proteza trebuie să fie cât mai silențioasă pentru a nu atrage atenția asupra ei.
- Consumul redus de energie. Problema alimentării cu energie a protezei rămâne, încă, una foarte delicată, sursa de energie contribuind și ea la greutatea totală a protezei.

Capitolul 2, intitulat „Modelul cinematic al mâinii umane”, prezintă în detaliu modul în care a fost realizat studiul cinematic al mâinii umane, deosebit de necesar pentru proiectarea unei proteze care să imite cât mai mult posibil modelul natural. În acest capitol, autoarea aduce următoarele contribuții:

- o sinteză bibliografică originală a modelării cinematice directe și inverse a sistemelor robotice complexe folosind convenția Denavit-Hartenberg. S-a recurs la utilizarea acestei convenții pentru modelarea cinematică a mâinii umane deoarece conduce la rezultate bune în cadrul lanțurilor cinematice deschise, așa cum sunt lanțurile cinematice ale degetelor;
- un studiu bibliografic original al anatomiei mâinii umane. Acest studiu a fost abordat din trei direcții: osteologic (studiul scheletului), ortologic (studiul articulațiilor și al ligamentelor) și miofuncțional (studiul tendoanelor, al mușchilor și al tuturor funcționalităților). Acest studiu a cântărit foarte greu în dezvoltarea modelelor mâinii umane realizate în cadrul prezentei teze, deoarece ele se bazează pe structura și pe modul de funcționare a mâinii. Deosebit de importante din punct de vedere cinematic sunt și restricțiile de mișcare pe care mâna umană le cunoaște: constrângeri statice (reprezentate de limitările mișcării unui

deget datorate anatomiei mâinii), constrângeri dinamice (limitările impuse în articulații în timpul mișcării) și constrângeri reprezentate de acele limitări necesare pentru a realiza o mișcare naturală;

- o prezentare bibliografică originală a câtorva modele, considerate semnificative, ale mâinii umane. Astfel, sunt prezentate principiile de realizare ale acestora, numărul de elemente componente și de grade de libertate, avantajele și dezavantajele.
- un model cinematic al mâinii umane, complet original, realizat de către autoare pe baza convenției Denavit-Hartenberg. Modelul respectă aproape în întregime structura mâinii umane, având patru degete a câte trei falange fiecare și un deget opozabil cu doar două falange și plasat pe palmă, astfel încât să fie în opoziție cu celelalte degete. Sistemul general de referință, față de care se exprimă mișcarea întregului ansamblu, este plasat pe încheietură. Fiecare deget este considerat un lanț cinematic separat, alcătuit din palmă, falangă proximală, falangă medie și falangă distală. Toate cele cinci degete au comune cele trei grade de libertate ale încheieturii, la care se mai adaugă încă patru grade de libertate pentru fiecare deget, cu excepția degetului opozabil care are doar trei. Astfel, sistemul-mână rezultat are 22 de grade de libertate. Pe baza modelului mâinii, obținut conform convenției Denavit-Hartenberg, au fost determinați parametrii geometrici pentru fiecare deget în parte și matricele de transfer care au condus la obținerea ecuațiilor cinematice pentru fiecare deget în parte. De asemenea, autoarea a determinat și modelul cinematic invers al sistemului-mână, considerând, pentru simplificarea calculelor, doar mișcarea degetelor în raport cu palma.
- realizarea unei modelări originale a mâinii în MATLAB, prin transcrierea în limbajul specific acestuia a ecuațiilor cinematice obținute. Autoarea a folosit acest model pentru a studia mișcările de închidere și deschidere ale mâinii, acțiuni care fac parte din funcția de prehensiune. În acest sens, a fost necesară specificarea dimensiunilor mâinii umane (măsurate pe o mână de adult) și a constrângerilor de mișcare (concretizate prin intervalele variabilelor unghiulare pentru fiecare articulație). În urma simulării modelului, autoarea a obținut curbele de mișcare pentru cele două situații considerate, similare celor ale mâinii umane;
- realizarea unei modelări originale a mâinii în SimMechanics, software specializat pentru simularea sistemelor mecanice. Folosind blocuri specifice a fost realizat un model al mâinii umane identic ca structură cu modelul cinematic al mâinii. Simulând funcționarea acestui model cu aceleași valori pentru variabilele unghiulare, au fost obținute curbe de mișcare identice cu cele obținute în MATLAB. De asemenea, sunt prezentate și imagini captate din mediul grafic de vizualizare a modelelor realizate în SimMechanics, astfel încât se poate certifica fără dubiu că mișcarea modelului este similară mișcării mâinii umane, iar curbele de mișcare sunt corecte;
- realizarea unui model virtual al mâinii umane în V-Realm Builder și atașarea lui la schema SimMechanics pentru vizualizarea mișcării modelului.

Pe baza rezultatelor obținute prin simulările în MATLAB, SimMechanics și V-Realm Builder se poate concluziona că modelul cinematic obținut este unul corect, similar



modelului natural, putând fi utilizat pentru designul și comanda unei proteze pentru mâna umană.

Capitolul 3, „Modelul dinamic al mâinii umane” prezintă suportul teoretic și modul de realizare a modelului dinamic pentru modelul de mână propus în capitolul precedent. Principalele contribuții originale ale autoarei în acest capitol sunt:

- o sinteză bibliografică a modelării dinamice (folosind ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a) și a determinării torsorului din cuple (pe baza Jacobianului sistemului);
- realizarea unui model diferențial al mâinii (concretizat prin matricele jacobiane necesare pentru reducerea în articulațiile sistemului a torsorului care apare în vârful degetelor la prinderea unui obiect), în scopul determinării membrului drept al ecuațiilor lui Lagrange de speța a II-a (utilizate pentru obținerea modelului dinamic);
- un model dinamic al mâinii umane, realizat pe baza ecuațiilor lui Lagrange de speța a II-a, care presupune calcularea energiei cinetice a sistemului suspus atenției. S-a obținut un sistem complex de 22 de ecuații care, pentru rezolvare, trebuie integrat folosind un software specializat.
- un studiu al modelului dinamic în MATLAB realizat pe baza ecuațiilor dinamice obținute. Pentru integrarea lor au fost necesare valori pentru momentele de inerție față de centrul de masă și față de cupla de rotație (determinate cu ajutorul modelului mâinii realizat în SolidWorks) și valori pentru masele elementelor componente (palmă și falange, preluate din documentația de specialitate). În urma integrării a fost determinat modul de variație a variabilelor unghiulare pentru un caz concret de prindere a unui corp de 1 g.
- un studiu dinamic folosind SimMechanics, pentru confirmarea rezultatelor obținute în urma integrării ecuațiilor dinamice în MATLAB. A fost refăcut modelul mâinii pentru a introduce constrângeri de mișcare și, în urma simulării prinderii unui obiect de 1 g, au fost obținute curbe de mișcare similare celor din MATLAB. Totodată, îmbunătățind studiul prin introducerea modelului virtual al mâinii, se poate observa și vizual asemănarea mișcării cu cea a modelului natural și corectitudinea rezultatelor obținute.
- studii pe baza modelului virtual al mâinii, unde a fost prezentat un caz particular (comportarea sistemului mână sub acțiunea exclusivă a forțelor de greutate, care sunt forțe conservative), precum și diverse prinderi de obiecte, însoțite de curbele de mișcare necesare.

În concluzie, modelul dinamic este deosebit de necesar pentru a studia comportamentul mâinii sub acțiunea forțelor impuse de greutatea obiectelor care trebuie prinse. Studiile în MATLAB, SimMechanics și pe baza modelului virtual au demonstrat că ecuațiile dinamice obținute sunt corecte, iar comportamentul modelului în aceste condiții este similar mâinii umane.

Capitolul 4, „Proiectarea unui model de proteză pentru mâna umană”, este în totalitate original și prezintă modelul propus de autoare pentru o mână artificială. Astfel, acest model este similar celui cinematic, având patru degete a câte trei falange și un deget cu doar două falange, plasat pe palmă astfel încât să fie în

opozitie cu celelalte și să poată realiza prinderea de obiecte. Modelul presupune o acționare hidraulică, pentru a scădea greutatea protezei prin amplasarea pe antebrațul pacientului a motoarelor și a pompelor hidraulice. De asemenea, pentru a păstra proporționalitatea dintre forța de acționare și forța aplicată de falangă pe obiect, autoarea propune un mod original de acționare, prin folosirea în articulație a unui sector cilindric conectat printr-o bandă de actuatorul hidraulic. Designul modelului a fost realizat în aplicația SolidEdge, capabilă și de simulări ale modelor descrise. Astfel, s-a verificat faptul că modelul este capabil să prindă diverse obiecte.

Capitolul 5, „Analiza numerică a stării de tensiune și de deformare a modelului de proteză pentru mâna umană” prezintă un studiu care demonstrează că, realizat din titan, modelul propus de autoare în capitolul 4 este capabil să execute fără probleme prinderi a căror forțe exercitate asupra obiectului nu depășesc 10 N. Contribuțiile aduse de autoare în acest capitol sunt următoarele:

- realizarea unui studiu bibliografic privind metodele numerice de calcul al stărilor de tensiune și de deformare, precum și metoda elementelor finite, noțiuni necesare pentru a putea folosi și interpreta rezultatele obținute în CosmosWorks, software special de analiză numerică;
- o analiză cu elemente finite a stării de tensiune și deformare a modelului propus, considerat ca fiind realizat din titan. Pentru studiu s-au considerat două poziții de prindere, una cu degetele deschise și o alta intermediară. În ambele cazuri palma este rigidizată, prinderea se realizează doar cu vârful degetelor, iar forța de prindere este de 10 N. Rezultatele studiului au scos în evidență faptul că atât distribuția stării de tensiune, cât și deplasările pentru cele două situații, se situează sub limitele maxim admisibile. Concluzia este că proteza corespunde din punct de vedere constructiv și funcțional scopului impus, fără să existe pericol de distrugere, dacă forța de prindere nu depășește 10 N.

Capitolul 6, „Realizarea modelului de proteză pentru mâna umană”, prezintă detalii privind realizarea modelului de proteză conform designului din capitolul 4. Contribuțiile originale ale autoarei la acest capitol sunt:

- realizarea structurii mecanice a protezei, pe parcursul unui stagiu SOCRATES/ERASMUS în laboratorul de tehnologie laser al IUT Bethune, Franța. Autoarea a realizat două modele, unul din plexiglas (funcțional) și unul din titan;
- un studiu bibliografic privind acționarea cu motoare pas cu pas, considerată cea mai bună soluție pentru modelul studiat, deoarece asigură un cuplu ridicat la viteze reduse, iar complexitatea logicii de comandă este mult simplificată față de cea a motoarelor de curent continuu. Totodată, este argumentată selecționarea tipului de motor pas cu pas, folosit pentru acționare;
- realizarea interfeței dintre motoarele pas cu pas și dispozitivul digital de comandă prin placa SAMOTRONIC101 și realizarea unui studiu de documentare privind programarea și conectarea ieșirilor și intrărilor;
- realizarea comunicației dintre sistemul de calcul și interfața motoarelor prin intermediul plăcii de achiziție de date NI-PCI-6509;

- realizarea unei aplicații de guvernare a funcționării protezei folosind mediul LabView și prezentarea modului în care sunt create instrumentele virtuale necesare, cum sunt conectate plăcile SAMOTRONIC101 la placa de achiziție de date și a pompelor la actuatorile electromecanice cu motoare pas cu pas liniare.
- testarea protezei pentru a demonstra posibilitatea acesteia de a se mișca și de a prinde obiecte de forme variate.

Conclusiv, se poate spune că scopul stabilit la începutul acestei teze a fost pe deplin îndeplinit, mai precis modelarea și realizarea unui model de proteză pentru mâna umană. Modelul este funcțional, dar are limitări impuse de lipsa senzorilor de presiune care să asigure controlul prinderii. Astfel, se conturează continuarea cercetărilor către realizarea un model mecanic mai fiabil, care să includă senzori de presiune, prin citirea cărora aplicația de guvernare să poată controla prinderea, spre a nu distruge obiectele fragile. Următorul pas logic va consta în miniaturizarea părții de acționare pentru a putea fi integrate pe antebrațul unui pacient. De asemenea, o altă direcție de cercetare, ce-i drept, mai îndepărtată, se conturează prin studiul și realizarea interfeței dintre corpul uman și proteză.

# BIBLIOGRAFIE

- [1] M.S. Abramowitz. *Developing a Computational Model of Human Hand Kinetics Using AVS*, [http://www.npac.syr.edu/REU/reu95/home/mabramo/sers\\_paper/paper.ps](http://www.npac.syr.edu/REU/reu95/home/mabramo/sers_paper/paper.ps).
- [2] D.N. de G. Allen. *Relaxation Methods*. McGraw-Hill, London, 1955.
- [3] D.J. Atkins, D.C. Heard, W.H. Donovan. *Epidemiologic Overview of Individuals with Upper Limb Loss and Their Reported Research Priorities*, *J. of Prosthetics and Orthotics*, vol. 8, no. 1, pp. 2–11, 1996.
- [4] P. Baerlocher. *Inverse Kinematics Techniques for the Interactive Posture Control of Articulated Figures*, PhD Thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2001.
- [5] R. Banerjee. *Human Gesture Animation Using Virtual Sensors And An Automata Hierarchy*, [www.cse.iitk.ac.in/report-repository/2005/rahul-banerjee.pdf](http://www.cse.iitk.ac.in/report-repository/2005/rahul-banerjee.pdf)
- [6] J.L. Banks. *Design and Control of a Anthropomorphic Robot Finger with Multi-point Tactile Sensation*, M.D. Thesis, MIT – Artificial Intelligence Laboratory, 2001.
- [7] S. Bernieri, A. Caffaz, G. Cannata, G. Casalino; *The DIST-Hand Robot*, IROS '97 Conference Video Proceedings, Grenoble, France, September 1997.
- [8] L. Birglen, C.M. Gosselin. *Kinetostatic Analysis of Under Actuated Fingers*, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 20, no. 2, April 2004.
- [9] R. Bowers. *The State of the Art in Artificial Hands, Hooks and Prehensors*, *Motion*, vol. 12, Nov/Dec. 2002.
- [10] J. Butterfass, M. Grebenstein, H. Liu, G. Hirzinger, *DLR-Hand II: Next Generation of a Dextrous Robot Hand*, Proc. of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Seoul, Korea, May, 2001, pp. 109–114.
- [11] E.J. Camus, F. Millot, J. Lariviere, S. Raoult, M. Raimate. *Kinematics of the Wrist Using 2D and 3D Analysis: Biomechanical and Clinical Deductions*, *Surg. Radiological Anatomy*, no. 26, pp. 399–410, 2004.
- [12] G. Cannata, M. Maggiali. *An Embedded Tactile and Force Sensor for Robotic Manipulation and Grasping*, IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots Humanoids2005, Tsukuba, Japan, 2005.
- [13] M.C. Carrozza, P. Dario, R. Lazzarini, B. Massa, M. Zecca, S. Roccella, R. Sacchetti. *An Actuator System for a Novel Biomechatronic Prosthetic Hand*, in

- Proceedings of Actuator 2000, Bremen, Germany, June 19–20, pp. 276–280, 2000.
- [14] M.C. Carrozza, P. Dario, M. Zecca. *The CyberHand: on the Design of a Cybernetic Prosthetic Hand Intended to be Interfaced to the Peripheral Nervous System*, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003), Las Vegas, USA, Oct. 27–31, 2003.
- [15] M.C. Carrozza et al. *The SPRING Hand: Development of a Self-Adaptive Prosthesis for Restoring Natural Grasping*, Autonomous Robots, no. 16, pp: 125–141, 2004.
- [16] A. Caffaz, G. Casalino., G. Cannata, G. Panin, E. Massucco. *The DIST-Hand, an Anthropomorphic, Fully Sensorized Dexterous Gripper*, IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoids Robots, Humanoids 2000, Boston, MA. Sept 2000.
- [17] J.H. Coert, G.A. Hoek, S.E.R. Hovius, C.J. Sniijders, M.F. Meek. *Quantifying Thumb Rotation During Circumduction Utilizing a Video Technique*, Journal of Orthopaedic Research, vol. 21, pp. 1151–1155, 2003.
- [18] R.W. Clough. *The finite element method in plane stress analysis*. In Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- [19] J.J. Craig. *Introduction to Robotics. Mechanics and Control. Third Edition*, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [20] S. Crandall. *Engineering Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [21] P. Dario, M.C. Carrozza, S. Micera, B. Masa, M. Zecca. *Design and Experiments on a Novel Biomechatronic Hand*, Session M-III: Assembly and Manipulation, ISER 2000, Hawaii, December 10–13, 2000.
- [22] P. Dario et al. *An Integrated Approach for the Design and Development of a Grasping and Manipulation System in Humanoid Robotics*, IROS 2000, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Takamatsu, Japan, October 31 - November 5, 2000.
- [23] P. Dario et al. *On the Development of a Cybernetic Hand Prosthesis*, Third IARP International Workshop on Humanoid and Human Friendly Robotics, IARP2002, Tsukuba, Japan, Dec 11–12, 2002.
- [24] N. Dechev, W.L. Cleghorn, S. Naumann. *Multi-Segmented Finger Design of an Experimental Prosthetic Hand*, Proc. of the 6<sup>th</sup> National Applied Mechanisms & Robotics Conference, December, 1999
- [25] N. Dechev, W.L. Cleghorn. *Thumb Design of an Experimental Prosthetic Hand*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium On Robotics and Automation, ISRA'2000 Monterrey, N.L. Mexico, Nov. 2000.
- [26] R. Degeorges et al. *Rotations of Three-joint Fingers: a Radiological Study*, Surgical Radiological Anatomy, vol. 26, pp. 392–398, September 2004.
- [27] R. Doshi, C. Yeh, M. LeBlanc. *The Design and Development of a Gloveless Endoskeletal Prosthetic Hand*, Journal of Rehabilitation Research and Development, vol. 35, no. 4, pp. 388–395, Oct. 1998.
- [28] D. Drăgulescu. *Dinamica roboților*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.

- [29] D. Drăgulescu, I. Ungureanu, A. Stanciu. *Modeling the Motion of the Human Middle Finger*, 2<sup>nd</sup> Romanian-Hungarian Joint Symposium on Applied Computational Intelligence, Timisoara, May 12–14, pp: 99–107, 2005.
- [30] D. Drăgulescu, L. Ungureanu. *Modeling the Human Hand as Automatic System*, The 11th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, September, 27–30, pp: 23–28, 2005.
- [31] D. Drăgulescu, L. Ungureanu. *Human Hand Modeling*, Al II-lea Simpozion Internațional de Mecanică Teoretică și Aplicată „Dimitrie Mageron”, Iasi, 28–30 Octombrie, tomul LI (LIV), pp: 365–372, 2005.
- [32] D. Drăgulescu. *Modelarea în Biomecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, 2005.
- [33] D. Drăgulescu, L. Ungureanu. *Dynamics of the palm-middle finger system being under the exclusive action of the gravity forces*, Proceeding of RoMedInf, April 6–8, pp. 203–206, 2006.
- [34] D. Drăgulescu, V. Perdereau, M. Drouin, L. Ungureanu, K. Menyhardt. *3D Active Workspace of Human Hand Anatomical Model*, BioMedical Engineering Online, 6:15 (2 May 2007), **revistă cotată ISI**.
- [35] D. Drăgulescu, L. Ungureanu, K. Menyhardt, A. Stanciu. *About a Dynamical Model of Human Hand*, Russian Journal of Biomechanics, vol. 11, no. 1, pp: 68–73, 2007.
- [36] D. Drăgulescu, L. Ungureanu, K. Menyhardt, A. Stanciu. *3D Active Workspace of the Human Hand Shaped End Effector*, 13<sup>th</sup> IASTED International Conference on Robotics and Applications, August 29–31, Wuryburg, Germany, pp: 76–81, 2007.
- [37] D. Drăgulescu, L. Ungureanu. *The Modeling Process of a Human Hand Prosthesis*, 4<sup>th</sup> International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, Timișoara, May 17–18, pp. 263–268, 2007.
- [38] I. Dumitru, N. Faur. *Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor*, Timișoara, Editura Politehnica, 1999.
- [39] S. Du. *Feature Extraction for Classification of Prehensile Electromiography Patterns*, M.S. Theses, Department of Computer Science, San Diego State University, Dec. 2003.
- [40] S. Du, M. Vuskovic. *Temporal vs. Spectral Approach to Feature Extraction for Prehensile EMG Signal*, The IEEE Int. Conf. on Information Reuse and Integration (IEEE IRI-2004), Las Vegas, Nevada, 2004.
- [41] N. Faur, I. Dumitru. *Diferențe finite și elemente finite în rezistența materialelor*, Editura Mirton, Timișoara, 1997.
- [42] N. Faur. *Elemente finite. Fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara, 2007.
- [43] E.E. Fetz, S.I. Perlmutter, Y. Prut, K. Seki, S. Votaw. *Roles of primate spinal interneurons in preparation and execution of voluntary hand movement*, Brain Resources Review vol. 40, pp. 53–65, 2002.
- [44] B.A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York, 1972.

- [45] M. Folgheraiter, G. Gini. *Blackfingers: an Artificial Hand that Copies Human Hand in Structure, Size, and Functions*, Proc. IEEE Humanoids 2000, MIT, Cambridge, Mass, sept. 2000
- [46] M. Gasson, B. Hutt, I. Goodhew, P. Kyberd, K. Warwick. *Invasive Neural Prosthesis for Neural Signal Detection and Nerve Stimulation*, Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 19, pp. 365–375, 2005.
- [47] J.P. Gazeau, M. Arsicault, J.P. Lallemand, *The L.M.S. Mechanical Hand: Design and Control*, RoManSy 98 — Robors Manipulator Systems, Paris, 1998.
- [48] A.P. Georgopoulos, J.F. Kalaska, R. Caminiti, J.T. Massey. *On the relations between the direction of two-dimensional arm movements and cell discharge in primate motor cortex*. Journal of Neuroscience vol. 2, pp. 1527–1537, 1982.
- [49] M. Ghinea, V. Fireșteanu. *MATLAB. Calcul numeric, grafică, aplicații*, Editura Teora, București, 1998.
- [50] W.B. Griffin, R.P. Findley, M.L. Turner, M.R. Cutkosky. *Calibration and Mapping of a Human Hand for Dexterous Telemanipulation*, ASME IMECE 2000 Conference, Haptic Interfaces for Virtual Environments and Teleoperator Systems Symposium, 2000.
- [51] C. Hager-Ross, M.H. Schieber. *Quantifying the Independence of Human Finger Movements: Comparisons of Digits, Hands, and Movement Frequencies*, The Journal of Neuroscience, no. 20, pp. 8542–8550, 2000.
- [52] D. Harvey, B. Longstaff. *The Development of a Prosthetic Arm*, [www.mecheng.adelaide.edu.au/courses/undergrad/projects/level4papers2001/harvey\\_longstaff.pdf](http://www.mecheng.adelaide.edu.au/courses/undergrad/projects/level4papers2001/harvey_longstaff.pdf)
- [53] C.J. Hasser, M.R. Cutkosky. *System Identification of the Human Hand Grasping a Haptic Knob*, HAPTICS2002, part of IEEE Virtual Reality Orlando, Florida, 24–25 March, 2002.
- [54] S.I. Helms Tillery, D.M. Taylor, A.B. Schwartz. *Training in cortical control of neuroprosthetic devices improves signal extraction from small neuronal ensembles*. Rev Neuroscience, vol. 14, pp. 107–119, 2003.
- [55] D. McHenry. *A lattice analogy for the solution of plane stress problems*. J. Inst. Civ. Eng., vol. 21, pp: 59-82, 1943.
- [56] K.H. Heubner. *The Finite Element Methode for Engineers*, Tohn Wiley and Sons, Toronto, 1975.
- [57] J. Hollerbach, I. Hunter, J. Ballantyne. *A Comparative Analysis of Actuators Technologies for Robotics*, The Robotics Review 2, MIT Press, Cambridge, pp. 299–342, 1992.
- [58] A. Hrenikoff. *Solution of problems in elasticity by the framework method*, J. Appl. Mech., ASME, pp: 169-175, 1941.
- [59] Z.Huang. *Motion Control for Human Animation*, PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne (EPFL), 1996.

- [60] Z. Huang, R. Boulic, N.M. Thalmann, D. Thalmann. *A Multi-sensor Approach for Grasping and 3D Interaction*, MIRALab, 1998, [www.miralab.unige.ch/papers/39.pdf](http://www.miralab.unige.ch/papers/39.pdf).
- [61] T.J. Hughes. *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [62] Y. Ishikawa, W. Yu, H. Yokoi, Y. Kakazu. *Development of Robot Hands with an Adjustable Power Transmitting Mechanism*, Intelligent Engineering Systems Through Neural Networks, vol. 10, pp. 631–636, ASME Press, 2000.
- [63] M. Jagersand. *On-line Estimation of Visual-Motor Models for Robot Control and Visual Simulation*, <http://www.cs.rochester.edu/u/jag/PercAct/thesis/thesis.html>
- [64] D.G. Kamper, E.G. Cruz, M.P. Siegel. *Stereotypical Fingertip Trajectories During Grasp*, Journal of Neurophysiology, vol. 90, pp. 3602–3710, 2003.
- [65] A. Kargov, et al. *Development of an Anthropomorphic Hand for a Mobile Assistive Robot*, IEEE 9th International Conference on Rehabilitation Robotics, Chicago, Illinois, June 28 – July 1, 2005.
- [66] O. Kerpa, D. Oswald, S. Yigit, C. Burghart, H. Woern. *Arm-Hand-Control by Tactile Sensing for Human Robot Co-operation*, Proceedings of Humanoids 2003, Karlsruhe, Germany, 2003.
- [67] G. El Koura, K. Singh. *Handrix: Animating the Human Hand*, Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, 2003.
- [68] L.C. Kuo et al. *A Quantitative Method to Measure Maximal Workspace of the Trapeziometacarpal Joint – Normal Model Development*, Journal of Orthopaedic, no. 22, pp: 600–606, 2004.
- [69] C. Laschi & all. *Grasping and Manipulation in Humanoid Robotics*, Proceedings of IEEE RAS Workshop on Humanoids, Boston, MA, 2000.
- [70] Z.M. Li. *Functional Degrees of Freedom*, Motor Control, vol. 10, pp: 301–310, 2006.
- [71] J. Lin, Z. Wu, T.S. Huang. *Modeling the Constraints of Human Hand Motion*, Proc. of 5th Annual Federated Laboratory Symposium, Maryland, 2001.
- [72] F. Lotti et al. *UBH3: an Anthropomorphic Hand With Simplified Endo-skeletal Structure and Soft Continuous Fingerpads*, IEEE ICRA'04, New Orleans, April 2004.
- [73] Y. Lu. *A Perceptually Accurate Model of the Hand*, M.D. Thesis, Simon Fraser University, Ottawa, Canada, 1995.
- [74] C.J. Mason, J.E. Gomez, T.J. Ebner. *Hand synergies during reach-to-grasp*, Journal of Neurophysiology, vol. 86, pp. 2896–2910, 2001.
- [75] Y. Matsuoka, P. Afshar, M. Oh. *On the Design of Robotic Hands for Brain-machine Interface*, Neurosurgery Focus, vol. 20, nr. 5, May 2006.
- [76] A. Miller, P. Allen, V. Santos, F. Valero-Cuevas. *From Robotic Hands to Human Hands: A Visualization and Simulation Engine for Grasping Research*, Industrial Robot, vol. 32, no. 1, pp. 55–63, 2005.



- [77] S. Montambault, C.M. Gosselin. *Analysis of Underactuated Mechanical Grippers*, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 123, No. 3, pp. 367–374, 2001.
- [78] D. Nishikawa et al. *On-line Learning Based EMG Prosthetic Hand*, Journal of Electrophysiology and Kinesiology, pp. 575–580, 2000.
- [79] D.E. Orin. *Application of Robotics to Prosthetic Control*, Annals of Biomedical Engineering, vol. 8, pp. 305–307, 1980.
- [80] D. Osswald et al. *Integrating a Flexible Anthropomorphic Robot Hand into the Control System of a Humanoid Robot*, Proceedings of Humanoids 2003, Karlsruhe, Germany, 2003.
- [81] I. Pascariu. *Elemente finite (Conceptii – Aplicatii)*, București, Editura Militară, 1985.
- [82] J.L. Pearlman, S.S. Roach, F.J. Valero-Cuevas. *The Fundamental Thumb-tip Force Vectors Produced by the Muscles of the Thumb*, Journal of Orthopaedic Research, 2003.
- [83] N.S. Pollard, R.C. Gilbert. *Tendon Arrangement and Muscle Force Requirements for Humanlike Force Capabilities in a Robotic Finger*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Washington, D.C., May 2002.
- [84] J.L. Pons et al. *The MANUS-HAND Dextrous Robotics Upper Limb Prosthesis: Mechanical and Manipulation Aspects*, Autonomous Robots, vol. 16, pp: 143–163, 2004.
- [85] A.S. Pulton, P.J. Kyberd, D. Gow. *Progress of a Modular Prosthetic Arm*, 1st Cambridge Workshop on Universal Access and Assistive Technology, 25th–27th March, 2002.
- [86] I.N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993.
- [87] T. Rhee, U. Neumann, J.P. Lewis. *Human Hand Modeling from Surface Anatomy*, Acm SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games, 2006.
- [88] L.E. Richardson. *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems*, Trans. Roy. Soc. (London), pp: 307–357, 1910.
- [89] H. Rijkema, M. Girard. *Computer Animation of Knowledge-based Grasping*, Computer Graphics, vol. 25, no. 4, pp: 339–348, 1991.
- [90] J.L. Sancho-Bru, A. Perez-Gonzalez, M. Vergara-Monedero, D. Giurintano. *A 3-D Dynamic Model of Human Finger for Studying Free Movements*, Journal of Biomechanics, no. 34, pp. 1491–1500, 2001.
- [91] R.M. Sanso, D. Thalmann. *A Hand Control and Automatic Grasping System for Synthetic Actors*, Proc. Eurographics '94, Oslo, September 1994.
- [92] M. Santello, M. Flanders, J. Soechting. *Patterns of hand motion during grasping and the influence of sensory guidance*, Journal of Neuroscience, vol. 22, pp. 1426–1436, 2002.
- [93] H. Sax. *Stepper Motor Driving. Application Note*, SGS-THOMSON Microelectronics.

- [94] S. Schulz, C. Pylatiuk, G. Bretthauer. *A New Ultralight Anthropomorphic Hand*, Proc. of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Seul, Corea, May 2001.
- [95] H.M. Seifert, A.J. Fuglevand. *Restoration of Movement Using Functional Electrical Stimulation and Bayes' Theorem*, Journal of Neuroscience, vol. 22, pp. 9465–9474, November 2002.
- [96] A. Stanciu, D. Drăgulescu, L. Ungureanu. *A Hydraulic Solution for Implementing Human's Hand Prehension Function*, SIITME 2006, International Symposium for Design and Technology of Electronic Packaging, 12th Edition, Iași, Romania, September 21–24, pp. 207–210, 2006.
- [97] M. Toth-Tașcău. *Robotică*, Note de curs, Facultatea de Automatică și Calculatoare, UPT
- [98] M. Toth-Tașcău. *Cinemática și dinamica roboților inteligenți*, Editura Politehnica Timișoara, 2001.
- [99] D.E. Thompson, W.L. Buford Jr., L.M. Myers, D.J. Giurintano, J.A. Brewer. *A Hand Biomechanics Workstation*, Computer Graphics, vol. 22, no. 4, 1988.
- [100] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci., vol. 23, pp: 805–823, 1956.
- [101] M.L. Turner. *Programming Dexterous Manipulation by Demonstration*, PhD Thesis, Stanford University, June 2001.
- [102] L. Ungureanu, D. Drăgulescu. *Modeling the Human Finger as an Automatic System*, 2<sup>nd</sup> Romanian-Hungarian Joint Symposium on Applied Computational Intelligence, Timisoara, May 12–14, pp: 69–77, 2005.
- [103] L. Ungureanu, A. Stanciu. *Modeling the Motion of the Human Hand*, The 11th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, September, 27–30, pp: 111–116, 2005.
- [104] L. Ungureanu, D. Drăgulescu, A. Stanciu, M. Șodincă. *The Dynamic Study of the Palm-Middle Finger System*, 3<sup>rd</sup> Romanian-Hungarian Joint Symposium on Applied Com-putational Intelligence, Timisoara, May 25–26, pp: 453–459, 2006.
- [105] L. Ungureanu, A. Stanciu, K. Menyhardt. *Actuating a Human Hand Prosthesis: Model Study*, WSEAS Conference on Dynamical Systems and Controls, Bucharest, October 16–18, 2006.
- [106] L. Ungureanu, A. Stanciu, K. Menyhardt. *A Hydraulic Solution for Actuating a Human Hand Prosthesis*, WSEAS Transactions on Systems, Issue 1, Volume 6, pp. 40–46, January 2007.
- [107] L. Ungureanu, A. Stanciu, K. Menyhardt. *A Hydraulic Solution for Actuating a Human Hand Prosthesis*, WSEAS Transactions on Systems, Issue 1, Volume 6, pp. 40–46, January 2007.
- [108] F.J. Valero-Cuevas, M.E. Johanson, J.D. Towles. *Towards a Realistic Biomechanical Model of the Thumb: the Choice of Kinematic Description May be More Critical Than The Solution Method or the Variability/Uncertainty of*

- Musculoskeletal Parameters*, Journal of Biomechanics, vol. 36, pp: 1119–1030, 2003.
- [109] A. Vardy. *Articulated Human Hand Model with Inter-Joint Dependency Constraints*, Computer Science 6755, 1998.
- [110] S.C. Venema. *Experiments in Surface Perception using a Finger Haptic Display*, PhD Thesis, University of Washington, 1999.
- [111] R. Vinet, Y. Lozac'h, n. Beaudry, G. Drouin. *Design Methodology for a Multifunctional Hand Prosthesis*, Journal of Rehabilitation Research and Development, vol. 32, no. 4, pp. 316–324, 1995.
- [112] H. deVisser, J.L. Herder. *Force Directed-design of a Voluntary Closing Hand Prosthesis*, Journal of Rehabilitation Research and Development, vol. 37, no. 3, May/June 2000.
- [113] R. Wait, A.R. Mitchell. *Finite Element Analysis and Applications*, John Wiley, NY 1985.
- [114] K. Warwick, M. Gasson, B. Hutt, I. Goodhew. *The Application of Implant Technology for Cybernetic Systems*, Archives of Neurology, vol. 60, no. 10, pp. 1369–1373, 2003.
- [115] R.F. Weir, E.C. Grahn, S.J. Duff. *A New Externally Powered, Myoelectrically Controlled Prosthesis for Persons with Partial-Hand Amputations at the Metacarpals*, Journal of Prosthetics & Orthotics, vol. 13, no. 2, pp. 26–31, 2001.
- [116] C.R. Wren, A.P. Pentland. *Dynamic Models of Human Motion*, Proceedings of FG'98, Nara, Japan, April 14–16, 1998.
- [117] Y. Wu, T.S. Huang. *Human Hand Modeling, Analysis and animation in the Context of HCI*, Proceedings of International Conference on Image Processing, Japan, 1999.
- [118] I. Yamano, K. Takemura, T. Maeno. *Development of a Robot Finger for Five-Fingered Hand using Ultrasonic Motors*, Proceedings of IEEE Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, Las Vegas, Nevada, October 2003.
- [119] J. Yang, E.P. Pitarch, K. Abdel-Malek. *A Multi-fingered Hand Prosthesis*, Mechanism and Machine Theory, vol. 39, pp. 555–581, 2004.
- [120] Y. Yasumoro, Q. Chen, K. Chihara. *3D Modeling of Human Hand with Motion Constraints*, Proceedings of the International Conference on Recent Advances in 3-D Digital Imaging and Modeling, pp. 275-280, 1997
- [121] M.H. Yun, H.J. Eoh, J. Cho. *A Two-dimensional Dynamic Finger Modeling for the Analysis of Repetitive Finger Flexion and Extension*, International Journal of Industrial Ergonomics, no. 29, pp. 231–248, 2002.
- [122] M. Zecca, G. Cappiello, F. Sebastiani, S. Roccella. *Experimental Analysis of the Proprioceptive and Exteroceptive Sensors of an Underactuated Prosthetic Hand*, 8<sup>th</sup> International Conference on Rehabilitation Robotics ICORR 2003, KAIST Auditorium, Daejeon, Republic of Korea, April 23-25, 2003.

- [123] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Butterworth Heinemann, 1999.
- [124] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method Set*, Butterworth Heinemann, 2005.
- [125] \*\*\* *Shadow Dexterous Hand. Technical Specifications*, <http://www.shadow.org.uk/products/newhand.shtml>.
- [126] \*\*\* *Main mécanique articulée à 4 doigts*, <http://www-lms.univ-poitiers.fr/robot/Main.html#Caracteristiques>.
- [127] \*\*\* *Robonaut*, <http://robonaut.jsc.nasa.gov/robonaut.html>.
- [128] \*\*\* *Barrett Hand*, <http://sbir.gsfc.nasa.gov/SBIR/successes/ss/9-056text.html>.
- [129] \*\*\* *Dextrous Robot Hands*, Institute of Robotics and Mechatronics, <http://www.dlr.de/rm/en/Desktopdefault.aspx/tabid-216/>
- [130] \*\*\* *Gray's Anatomy of the Human Body*, The Bartebly.com Edition, <http://education.yahoo.com/reference/gray/>
- [131] *Stepper motors. Driving*, [http://www.fdk.co.jp/cyber-e/se10-e/driving\\_e.html](http://www.fdk.co.jp/cyber-e/se10-e/driving_e.html)
- [132] *Stepper Motor and Driver Selection*, <http://www.njr.co.jp/pdf/ee/ee05003.pdf>
- [133] *Drive Circuit Basics*, <http://www.njr.co.jp/pdf/ee/ee05002.pdf>
- [134] Samotronic101. Manual — Motor driver unit for unipolar stepper, [http://johnson.manowar.e-pro.de/media/Saia\\_motors/Spezial/manual\\_samotronic101\\_r9\\_en.pdf](http://johnson.manowar.e-pro.de/media/Saia_motors/Spezial/manual_samotronic101_r9_en.pdf)
- [135] National Instruments Data Sheets, [http://www.ni.com/pdf/products/us/ni\\_6509datasheet\\_with\\_rt.pdf](http://www.ni.com/pdf/products/us/ni_6509datasheet_with_rt.pdf)
- [136] \*\*\* Contractul 33501/17.07.2002 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 14, cod CNCSIS 68, *Studierea dinamicii mandibulei și modelarea de implantate pentru corectarea prin intervenții chirurgicale a ruperilor sale accidentale*, colaborator
- [137] \*\*\* Contractul 33550/01.07.2003 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 10, cod CNCSIS 11, *Studierea dinamicii mandibulei și modelarea de implantate pentru corectarea prin intervenții chirurgicale a ruperilor sale accidentale*, colaborator
- [138] \*\*\* Contractul 32940/22.06.2004 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 7, cod CNCSIS 11, *Studierea dinamicii mandibulei și modelarea de implantate pentru corectarea prin intervenții chirurgicale a ruperilor sale accidentale*, colaborator
- [139] \*\*\* Contractul 33501/17.07.2002 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 15, cod CNCSIS 69, *Modelarea, proiectarea și realizarea practică a unui sistem de implanturi medicale destinat chirurgiei maxilo-faciale și ortopedic*, colaborator
- [140] \*\*\* Contractul 33550/01.07.2003 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 11, cod CNCSIS 12, *Modelarea, proiectarea și realizarea practică a*

*unui sistem de implanturi medicale destinat chirurgiei maxilo-faciale și ortopedic, colaborator*

- [141] \*\*\* Contractul 32940/22.06.2004 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 8, cod CNCSIS 12, *Modelarea, proiectarea și realizarea practică a unui sistem de implanturi medicale destinat chirurgiei maxilo-faciale și ortopedic, colaborator*
- [142] \*\*\* Contractul 27688/14.03.2005 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema 11, cod CNCSIS 65, *Sistem autonom de prehensiune pentru asistarea persoanelor cu handicap sau acces în zone periculoase, colaborator*
- [143] \*\*\* Contractul 2739/19.05.2006 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema 14, cod CNCSIS 65, *Sistem autonom de prehensiune pentru asistarea persoanelor cu handicap sau acces în zone periculoase, colaborator*
- [144] \*\*\* Contractul 2739/19.05.2006 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 13, cod CNCSIS 100, *Conceperea și realizarea unei proteze antropomorfe necesară reconstrucției mâinii umane și a principalelor sale funcții, director de proiect*
- [145] \*\*\* Contractul 5/15.09.2006 finanțat de MEC, *Platformă de implantologie, protezare inteligentă și recuperare biomecanică, colaborator*
- [146] \*\*\* Contractul GR76/23.05.2006 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema 14, cod CNCSIS 655, *Sistem autonom de prehensiune pentru asistarea persoanelor cu handicap sau acces în zone periculoase, colaborator*
- [147] \*\*\* Contractul GR76/23.05.2007 finanțat de MEC și derulat prin CNCSIS, tema nr. 8, cod CNCSIS 100, *Conceperea și realizarea unei proteze antropomorfe necesară reconstrucției mâinii umane și a principalelor sale funcții, director de proiect*

# ANEXA 1

## Funcțiile MATLAB folosite pentru simularea mișcărilor mâinii în cadrul modelului cinematic

### 1 Descrierea ecuațiilor pentru degetul mic

```
function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py, pz]=ecuatii_deget_mic(q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7)
```

```
%Descrierea ecuațiilor cinematice ale degetului mic
```

```
p=0.1;
```

```
d1=-0.03;
```

```
d2=-0.02;
```

```
f1=0.04;
```

```
f2=0.025;
```

```
f3=0.02;
```

```
nx = cos(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) +  
sin(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
```

```
ny = sin(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) -  
cos(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
```

```
nz = sin(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) + cos(q2)*sin(q5+q6+q7);
```

```
ox = cos(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) -  
sin(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
```

```
oy = sin(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) +  
cos(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
```

```
oz = -sin(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) + cos(q2)*cos(q5+q6+q7);
```

```
ax = -cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + sin(q1)*cos(q3+q4);
```

```
ay = -sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - cos(q1)*cos(q3+q4);
```

```
az = -sin(q2)*sin(q3+q4);
```

```
px = (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) + sin(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) +  
f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - (d1+d2)*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) -  
sin(q1)*cos(q3+q4)) + p*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) + sin(q1)*sin(q3)) +  
cos(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
```

```
py = (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) - cos(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) +  
f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - (d1+d2)*(sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) +  
cos(q1)*cos(q3+q4)) + p*(sin(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q3)) +  
sin(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
```

$$pz = \sin(q_2) * (\cos(q_3+q_4) * (f_3*\cos(q_5+q_6+q_7) + f_2*\cos(q_5+q_6) + f_1*\cos(q_5))) - (d_1+d_2)*\sin(q_3+q_4) + p*\cos(q_3)) - \cos(q_2) * (-f_3*\sin(q_5+q_6+q_7) - f_2*\sin(q_5+q_6) - f_1*\sin(q_5));$$

## 2 Descrierea ecuațiilor pentru degetul inelar

```
function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py, pz]=ecuatii_deget_inelar(q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7)
```

```
%Descrierea ecuațiilor cinematice ale degetului inelar
```

```
p=0.1;
d1=-0.03;
f1=0.05;
f2=0.035;
f3=0.02;
nx = cos(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) + sin(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
ny = sin(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) - cos(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
nz = sin(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) + cos(q2)*sin(q5+q6+q7);

ox = cos(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) - sin(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oy = sin(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) + cos(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oz = -sin(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) + cos(q2)*cos(q5+q6+q7);

ax = -cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + sin(q1)*cos(q3+q4);
ay = -sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - cos(q1)*cos(q3+q4);
az = -sin(q2)*sin(q3+q4);
```

```
px = (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) + sin(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) + f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - d1*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - sin(q1)*cos(q3+q4)) + p*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) + sin(q1)*sin(q3)) + cos(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
py = (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) - cos(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) + f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - d1*(sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + cos(q1)*cos(q3+q4)) + p*(sin(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q3)) + sin(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
pz = sin(q2) * (cos(q3+q4) * (f3*cos(q5+q6+q7) + f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5))) - d1*sin(q3+q4) + p*cos(q3)) - cos(q2) * (-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
```

## 3 Descrierea ecuațiilor cinematice ale degetului mijlociu

```
function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py, pz]=ecuatii_deget_mijlociu(q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7)
```

```
%Descrierea ecuațiilor cinematice ale degetului mijlociu
```

```
Lm=0.1;
f1m=0.05;
f2m=0.035;
```

```

f3m=0.025;
nx = cos(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) +
sin(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
ny = sin(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) -
cos(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
nz = sin(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) + cos(q2)*sin(q5+q6+q7);

ox = cos(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) -
sin(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oy = sin(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) +
cos(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oz = -sin(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) + cos(q2)*cos(q5+q6+q7);

ax = -cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + sin(q1)*cos(q3+q4);
ay = -sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - cos(q1)*cos(q3+q4);
az = -sin(q2)*sin(q3+q4);

px = (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) + sin(q1)*sin(q3+q4)) * (f3m*cos(q5+q6+q7)
+ f2m*cos(q5+q6) + f1m*cos(q5)) + Lm*(cos(q1)*cos(q3) + sin(q1)*sin(q3)) +
cos(q1)*sin(q2)*(-f3m*sin(q5+q6+q7) - f2m*sin(q5+q6) - f1m*sin(q5));
py = (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) - cos(q1)*sin(q3+q4)) * (f3m*cos(q5+q6+q7)
+ f2m*cos(q5+q6) + f1m*cos(q5)) + Lm*(sin(q1)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q3)) +
sin(q1)*sin(q2)*(-f3m*sin(q5+q6+q7) - f2m*sin(q5+q6) - f1m*sin(q5));
pz = sin(q2) * (cos(q3+q4) * (f3m*cos(q5+q6+q7) + f2m*cos(q5+q6) +
f1m*cos(q5)) + Lm*cos(q3)) - cos(q2) * (-f3m*sin(q5+q6+q7) - f2m*sin(q5+q6) -
f1m*sin(q5));

```

#### 4 Descrierea ecuațiilor pentru degetul arătător

```

function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py, pz]=ecuatii_deget_inelar(q1, q2,
q3, q4, q5, q6, q7)

```

```

%Descrierea ecuatiiilor cinematice ale degetului inelar

```

```

p=0.1;
d1=-0.03;
f1=0.05;
f2=0.035;
f3=0.02;
nx = cos(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) +
sin(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
ny = sin(q1) * (cos(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) - sin(q2)*sin(q5+q6+q7)) -
cos(q1)*sin(q3+q4)*cos(q5+q6+q7);
nz = sin(q2)*cos(q3+q4)*cos(q5+q6+q7) + cos(q2)*sin(q5+q6+q7);

ox = cos(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) -
sin(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oy = sin(q1) * (-cos(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) - sin(q2)*cos(q5+q6+q7)) +
cos(q1)*sin(q3+q4)*sin(q5+q6+q7);
oz = -sin(q2)*cos(q3+q4)*sin(q5+q6+q7) + cos(q2)*cos(q5+q6+q7);

ax = -cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) + sin(q1)*cos(q3+q4);

```



```
ay = -sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) - cos(q1)*cos(q3+q4);
az = -sin(q2)*sin(q3+q4);
```

```
px = (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) + sin(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) +
f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - d1*(cos(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) -
sin(q1)*cos(q3+q4)) + p*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) + sin(q1)*sin(q3)) +
cos(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
py = (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3+q4) - cos(q1)*sin(q3+q4)) * (f3*cos(q5+q6+q7) +
f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) - d1*(sin(q1)*cos(q2)*sin(q3+q4) +
cos(q1)*cos(q3+q4)) + p*(sin(q1)*cos(q2)*cos(q3) - cos(q1)*sin(q3)) +
sin(q1)*sin(q2)*(-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) - f1*sin(q5));
pz = sin(q2) * (cos(q3+q4) * (f3*cos(q5+q6+q7) + f2*cos(q5+q6) + f1*cos(q5)) -
d1*sin(q3+q4) + p*cos(q3)) - cos(q2) * (-f3*sin(q5+q6+q7) - f2*sin(q5+q6) -
f1*sin(q5));
```

### 5 Descrierea ecuațiilor pentru degetul opozabil

```
function [nx, ny, nz, ox, oy, oz, ax, ay, az, px, py, pz]=ecuatii_deget_opozabil(q1,
q2, q3, q4, q5, q6)
```

```
%Descrierea ecuațiilor cinematice ale degetului opozabil
```

```
p=0.1;
d1=-0.03;
d2=-0.02;
d3=0.02;
d5=0.03;
f1o=0.035;
f2o=0.025;
```

```
nx = cos(q5+q6) * (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3)*cos(q4) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q4) +
sin(q1)*sin(q3)*cos(q4)) + sin(q5+q6)*(-cos(q1)*cos(q2)*sin(q3) +
sin(q1)*cos(q3));
ny = cos(q5+q6) * (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3)*cos(q4) - sin(q1)*sin(q2)*sin(q4) -
cos(q1)*sin(q3)*cos(q4)) + sin(q5+q6)*(-sin(q1)*cos(q2)*sin(q3) -
cos(q1)*cos(q3));
nz = cos(q5+q6) * (sin(q2)*cos(q3)*cos(q4) + cos(q2)*sin(q4)) -
sin(q5+q6)*sin(q2)*sin(q3);
```

```
ox = -sin(q5+q6) * (cos(q1)*cos(q2)*cos(q3)*cos(q4) - cos(q1)*sin(q2)*sin(q4) +
sin(q1)*sin(q3)*cos(q4)) + cos(q5+q6)*(-cos(q1)*cos(q2)*sin(q3) +
sin(q1)*cos(q3));
oy = -sin(q5+q6) * (sin(q1)*cos(q2)*cos(q3)*cos(q4) - sin(q1)*sin(q2)*sin(q4) -
cos(q1)*sin(q3)*cos(q4)) + cos(q5+q6)*(-sin(q1)*cos(q2)*sin(q3) -
cos(q1)*cos(q3));
oz = -sin(q5+q6) * (sin(q2)*cos(q3)*cos(q4) + cos(q2)*sin(q4)) -
cos(q5+q6)*sin(q2)*sin(q3);
```

```
ax = cos(q4)*cos(q1)*sin(q2) + sin(q4)*(cos(q1)*cos(q2)*cos(q3) +
sin(q1)*sin(q3));
ay = cos(q4)*sin(q1)*sin(q2) + sin(q4)*(sin(q1)*cos(q2)*cos(q3) -
cos(q1)*sin(q3));
```

$$az = -\cos(q_2)\cos(q_4) + \sin(q_2)\cos(q_3)\sin(q_4);$$

$$px = (f_{20}\cos(q_5+q_6) + f_{10}\cos(q_5)) * (\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3)\cos(q_4) - \cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_4) + \sin(q_1)\sin(q_3)\cos(q_4)) + (p/2 - d_5\sin(q_4)) * (\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) + \sin(q_1)\sin(q_3)) - (d_5\cos(q_4) + d_3) * \cos(q_1)\sin(q_2) + (f_{20}\sin(q_5+q_6) + f_{10}\sin(q_5) - d_1 - d_2) * (-\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) + \sin(q_1)\cos(q_3));$$

$$py = (f_{20}\cos(q_5+q_6) + f_{10}\cos(q_5)) * (\sin(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3)\cos(q_4) - \sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_4) - \cos(q_1)\sin(q_3)\cos(q_4)) + (p/2 - d_5\sin(q_4)) * (\sin(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) - \cos(q_1)\sin(q_3)) - (d_5\cos(q_4) + d_3) * \sin(q_1)\sin(q_2) - (f_{20}\sin(q_5+q_6) + f_{10}\sin(q_5) - d_1 - d_2) * (\sin(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) + \cos(q_1)\cos(q_3));$$

$$pz = (f_{20}\cos(q_5+q_6) + f_{10}\cos(q_5)) * (\sin(q_2)\cos(q_3)\cos(q_4) + \cos(q_2)\sin(q_4)) + (p/2 - d_5\sin(q_4)) * \sin(q_2)\cos(q_3) + (d_5\cos(q_4) + d_3) * \cos(q_2) - (f_{20}\sin(q_5+q_6) + f_{10}\sin(q_5) - d_1 - d_2) * \sin(q_2)\sin(q_3);$$

## 6 Mișcarea de închidere a pumnului

function [n, vpc] = inchidere\_pumn

%Flexarea degetului

%Incheietura mainii este rigidizata

%Articulationile mobile se misca, cu o valoare corespunzatoare, in functie de

%domeniul pe care pot lua valori

%Constrangere:  $q_7 = 2/3q_6$

p=0.05;

t=0:p:10;

n=length(t);

% Secventa de inițializari

vnx=zeros(5,n);

vny=zeros(5,n);

vnz=zeros(5,n);

vnc=zeros(5,n);

vox=zeros(5,n);

voy=zeros(5,n);

voz=zeros(5,n);

voc=zeros(5,n);

vax=zeros(5,n);

vay=zeros(5,n);

vaz=zeros(5,n);

vac=zeros(5,n);

vpx=zeros(5,n);

vpy=zeros(5,n);

vpz=zeros(5,n);

vpc=zeros(5,n);

vq1=zeros(5,n);

vq2=zeros(5,n);

```

vq3=zeros(5,n);
vq4=zeros(5,n);
vq5=0:pi/(2*(n-1)):pi/2;
vq6=0:(11*pi)/(18*(n-1)):(11*pi)/18;
vq7=zeros(1,n);

%degetul opozabil
vq5_o=zeros(5,n);
vq6_o=0:pi/(2*(n-1)):pi/2;
%vq7=0:pi/(2*(n-1)):pi/2;

for i=1:n,
    vq7(i)=(2/3)*vq6(i);
    [vnx(1,i), vny(1,i), vnz(1,i), vox(1,i), voy(1,i), voz(1,i), vax(1,i), vay(1,i),
vaz(1,i), vpx(1,i), vpy(1,i), vpz(1,i)] = ecuatii_deget_index(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(2,i), vny(2,i), vnz(2,i), vox(2,i), voy(2,i), voz(2,i), vax(2,i), vay(2,i),
vaz(2,i), vpx(2,i), vpy(2,i), vpz(2,i)] = ecuatii_deget_mijlociu(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(3,i), vny(3,i), vnz(3,i), vox(3,i), voy(3,i), voz(3,i), vax(3,i), vay(3,i),
vaz(3,i), vpx(3,i), vpy(3,i), vpz(3,i)] = ecuatii_deget_inelar(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(4,i), vny(4,i), vnz(4,i), vox(4,i), voy(4,i), voz(4,i), vax(4,i), vay(4,i),
vaz(4,i), vpx(4,i), vpy(4,i), vpz(4,i)] = ecuatii_deget_mic(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(5,i), vny(5,i), vnz(5,i), vox(5,i), voy(5,i), voz(5,i), vax(5,i), vay(5,i),
vaz(5,i), vpx(5,i), vpy(5,i), vpz(5,i)] = ecuatii_deget_opozabil(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5_o(i), -vq6_o(i));
    for j=1:5
        vnc(j,i)=sqrt(vnx(j,i)*vnx(j,i) + vny(j,i)*vny(j,i) + vnz(j,i)*vnz(j,i));
        voc(j,i)=sqrt(vox(j,i)*vox(j,i) + voy(j,i)*voy(j,i) + voz(j,i)*voz(j,i));
        vac(j,i)=sqrt(vax(j,i)*vax(j,i) + vay(j,i)*vay(j,i) + vaz(j,i)*vaz(j,i));
        vpc(j,i)=sqrt(vpx(j,i)*vpx(j,i) + vpy(j,i)*vpy(j,i) + vpz(j,i)*vpz(j,i));
    end
end

subplot(431)
plot(t,vnx(1,1:end),'c',t, vny(1,1:end), 'g', t, vnz(1,1:end), 'r', t, vnc(1,1:end), 'k')
title('Degete centrale - n')
legend('n_x', 'n_y', 'n_z', 'n')

subplot(432)
plot(t,vox(1,1:end),'c',t, voy(1,1:end), 'g', t, voz(1,1:end), 'r', t, voc(1,1:end), 'k')
title('Degete centrale - o')
legend('o_x', 'o_y', 'o_z', 'o')

subplot(433)
plot(t,vax(1,1:end),'c',t, vay(1,1:end), 'g', t, vaz(1,1:end), 'r', t, vac(1,1:end), 'k')
title('Degete centrale - a')
legend('a_x', 'a_y', 'a_z', 'a')

```

```
subplot(434)
plot(t,vpx(4,1:end),'c',t, vpy(4,1:end), 'g', t, vpz(4,1:end), 'r', t, vpc(4,1:end), 'k')
title('Mic')
legend('p_x', 'p_y', 'p_z', 'p')
```

```
subplot(435)
plot(t,vpx(3,1:end),'c',t, vpy(3,1:end), 'g', t, vpz(3,1:end), 'r', t, vpc(3,1:end), 'k')
title('Inelar')
legend('p_x', 'p_y', 'p_z', 'p')
```

```
subplot(436)
plot(t,vpx(2,1:end),'c',t, vpy(2,1:end), 'g', t, vpz(2,1:end), 'r', t, vpc(2,1:end), 'k')
title('Mijlociu')
legend('p_x', 'p_y', 'p_z', 'p')
```

```
subplot(437)
plot(t,vpx(1,1:end),'c',t, vpy(1,1:end), 'g', t, vpz(1,1:end), 'r', t, vpc(1,1:end), 'k')
title('Aratator')
legend('p_x', 'p_y', 'p_z', 'p')
```

```
subplot(438)
plot(t,vpx(5,1:end),'c',t, vpy(5,1:end), 'g', t, vpz(5,1:end), 'r', t, vpc(5,1:end), 'k')
title('Opozabil')
legend('p_x', 'p_y', 'p_z', 'p')
```

```
subplot(439)
plot(t,vpc(5,1:end),'b', t,vpc(1,1:end),'c',t, vpc(2,1:end), 'g', t, vpc(3,1:end), 'r', t,
vpc(4,1:end), 'k')
title('Mana')
legend('p_o','p_a', 'p_m', 'p_i', 'p_c')
```

```
subplot(4,3,10)
plot(t,vnx(5,1:end),'c',t, vny(5,1:end), 'g', t, vnz(5,1:end), 'r', t, vnc(5,1:end), 'k')
title('Deget opozabil - o')
legend('n_x', 'n_y', 'n_z', 'n')
```

```
subplot(4,3,11)
plot(t,vox(5,1:end),'c',t, voy(5,1:end), 'g', t, voz(5,1:end), 'r', t, voc(5,1:end), 'k')
title('Deget opozabil - o')
legend('o_x', 'o_y', 'o_z', 'o')
```

```
subplot(4,3,12)
plot(t,vax(5,1:end),'c',t, vay(5,1:end), 'g', t, vaz(5,1:end), 'r', t, vac(5,1:end), 'k')
title('Deget opozabil - a')
legend('a_x', 'a_y', 'a_z', 'a')
```

## **7 Mișcarea de deschidere a pumnului**

```
function [n, vpc] = deschidere_pumn
%Deschiderea pumnului
%Incheietura mainii este rigidizata
```

```

%Articulațiile mobile se misca, cu o valoare corespunzătoare, în funcție de
%domeniul pe care pot lua valori
%Constrangere:  $q_7 = 2/3q_6$ 
pas=0.1;
t=0:pas:5;
n=length(t);

% Secvența de inițializări

vq1=zeros(5,n);
vq2=zeros(5,n);
vq3=zeros(5,n);
vq4=zeros(5,n);
vq5=pi/2:-pi/(2*(n-1)):0;
vq6=(11*pi)/18:-pi/(18*(n-1)):0;
vq7=zeros(1,n);

%degetul opozabil
vq5_o=zeros(5,n);
vq6_o=pi/2:-pi/(2*(n-1)):0;;
%vq7=0:pi/(2*(n-1)):pi/2;

for i=1:n,
    vq7(i)=(2/3)*vq6(i);
    [vnx(1,i), vny(1,i), vnz(1,i), vox(1,i), voy(1,i), voz(1,i), vax(1,i), vay(1,i),
vaz(1,i), vpx(1,i), vpy(1,i), vpz(1,i)] = ecuatii_deget_index(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(2,i), vny(2,i), vnz(2,i), vox(2,i), voy(2,i), voz(2,i), vax(2,i), vay(2,i),
vaz(2,i), vpx(2,i), vpy(2,i), vpz(2,i)] = ecuatii_deget_mijlociu(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(3,i), vny(3,i), vnz(3,i), vox(3,i), voy(3,i), voz(3,i), vax(3,i), vay(3,i),
vaz(3,i), vpx(3,i), vpy(3,i), vpz(3,i)] = ecuatii_deget_inelar(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(4,i), vny(4,i), vnz(4,i), vox(4,i), voy(4,i), voz(4,i), vax(4,i), vay(4,i),
vaz(4,i), vpx(4,i), vpy(4,i), vpz(4,i)] = ecuatii_deget_mic(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5(i), vq6(i), vq7(i));
    [vnx(5,i), vny(5,i), vnz(5,i), vox(5,i), voy(5,i), voz(5,i), vax(5,i), vay(5,i),
vaz(5,i), vpx(5,i), vpy(5,i), vpz(5,i)] = ecuatii_deget_opozabil(vq1(i), vq2(i), vq3(i),
vq4(i), vq5_o(i), -vq6_o(i));
    for j=1:5
        vnc(j,i)=sqrt(vnx(j,i)*vnx(j,i) + vny(j,i)*vny(j,i) + vnz(j,i)*vnz(j,i));
        voc(j,i)=sqrt(vox(j,i)*vox(j,i) + voy(j,i)*voy(j,i) + voz(j,i)*voz(j,i));
        vac(j,i)=sqrt(vax(j,i)*vax(j,i) + vay(j,i)*vay(j,i) + vaz(j,i)*vaz(j,i));
        vpc(j,i)=sqrt(vpx(j,i)*vpx(j,i) + vpy(j,i)*vpy(j,i) + vpz(j,i)*vpz(j,i));
    end
end

% Secvența de tipărirea rezultatelor

```

## ANEXA 2

### Parametrii articulari, matricele de transfer și matricele generale pentru sistemul mână

— degetul opozabil:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$\frac{p}{2}$	$-d_3$	-90	-1	0
4	$q_{4o}$	0	$-d_1 - d_2$	90	1	0
5	$q_{5o}$	$f_{1o}$	$-d_5$	0	0	1
6	$q_{6o}$	$f_{2o}$	0	0	0	1

— degetul arătător:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$p$	0	0	0	1
4	$q_{4a}$	0	0	-90	1	0
5	$q_{5a}$	$f_{1a}$	$-d_1$	0	0	1
6	$q_{6a}$	$f_{2a}$	0	0	0	1
7	$q_{7a}$	$f_{3a}$	0	0	0	1

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & 0 \\ s1 & 0 & -c1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 & 0 \\ s2 & 0 & -c2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— degetul mijlociu:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$p$	0	0	0	1
4	$q_{4m}$	0	0	-90	1	0
5	$q_{5m}$	$f_{1m}$	0	0	0	1
6	$q_{6m}$	$f_{2m}$	0	0	0	1
7	$q_{7m}$	$f_{3m}$	0	0	0	1

— degetul inelar:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$p$	0	0	0	1
4	$q_{4l}$	0	0	90	1	0
5	$q_{5l}$	$f_{1l}$	$d_1$	0	0	1
6	$q_{6l}$	$f_{2l}$	0	0	0	1
7	$q_{7l}$	$f_{3l}$	0	0	0	1

– degetul mic:

Nr.	$\theta_j$	$L_j$	$d_j$	$\alpha_j$	$\sin \alpha_j$	$\cos \alpha_j$
1	$q_1$	0	0	90	1	0
2	$q_2$	0	0	90	1	0
3	$q_3$	$p$	0	0	0	1
4	$q_{4c}$	0	0	90	1	0
5	$q_{5c}$	$f_{1c}$	$d_1 + d_2$	0	0	1
6	$q_{6c}$	$f_{2c}$	0	0	0	1
7	$q_{7c}$	$f_{3c}$	0	0	0	1

### Degetul opozabil

Matricele de transfer corespunzătoare degetului opozabil sunt:

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & \frac{p}{2}c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & \frac{p}{2}s_3 \\ 0 & -1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_1 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & f_{10}c_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & f_{10}s_5 \\ 0 & 0 & 1 & -d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & f_{20}c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & f_{20}s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea generală  ${}^0G_6$  se obține prin înmulțirea de la dreapta la stânga a matricelor de transfer:



$$G^1 = {}^0G_6 = \begin{bmatrix} c56(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + & -s56(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + \\ + s56(-c1c2s3 + s1c3) & + c56(-c1c2s3 + s1c3) \\ \\ c56(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + & -s56(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + \\ + s56(-s1c2s3 - c1c3) & + c56(-s1c2s3 - c1c3) \\ \\ c56(s2c3c4 + c2s4) - s56s2s3 & -s56(s2c3c4 + c2s4) - c56s2s3 \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c4c1s2 + s4(c1c2c3 + s1s3) & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + \\ & + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)(c1c2c3 + s1s3) - (d_5c4 + d_3)c1s2 + \\ & + [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)](-c1c2s3 + s1c3) \\ \\ c4s1s2 + s4(s1c2c3 - c1s3) & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + \\ & + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)(s1c2c3 - c1s3) - (d_5c4 + d_3)s1s2 - \\ & - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)](s1c2s3 + c1c3) \\ \\ -c2c4 + s2c3s4 & (f_{20}c56 + f_{10}c5)(s2c3c4 + c2s4) + \left(\frac{p}{2} - d_5s4\right)s2c3 + \\ & + (d_5c4 + d_3)c2 - [f_{20}s56 + f_{10}s5 - (d_1 + d_2)]s2s3 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Degetul arătător

Matricele de transfer ale degetului arătător sunt:

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & pc3 \\ s3 & c3 & 0 & ps3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{1a}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{1a}s5 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{2a}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{2a}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^6T_7 = \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3a}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3a}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0G_7 =$$

$$\begin{bmatrix} c1(c2c34c567 - s2s567) + s1s34c567 & c1(-c2c34s567 - s2c567) - s1s34s567 & -c1c2s34 + s1c34 \\ s1(c2c34c567 - s2s567) - c1s34c567 & s1(-c2c34s567 - s2c567) + c1s34s567 & -s1c2s34 - c1c34 \\ s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (c1c2c34 + s1s34)(f_{3a}c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5) + d_1(c1c2s34 - s1c34) + \\ & + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2(f_{3a}s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5) \\ & (s1c2c34 - c1s34)(f_{3a}c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5) + d_1(s1c2s34 + c1c34) \\ & + p(s1c2c3 - c1s3) - s1s2(f_{3a}s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5) \\ & s2[c34(f_{3a}c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5) + d_1s34 + pc3] + \\ & + c2(f_{3a}s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5) \\ & 1 \end{aligned}$$

### Degetul mijlociu

Matricele de transfer ale degetului mijlociu sunt:

$$\begin{aligned} {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & pc3 \\ s3 & c3 & 0 & ps3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{1m}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{1m}s5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{2m}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{2m}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^6T_7 &= \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3m}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3m}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matricea generală este:

$${}^0G_7 =$$

$$\begin{bmatrix} c1(c2c34c567 - s2s567) + c1(-c2c34s567 - s2c567) - & -c1c2s34 + s1c34 & \\ + s1s34c567 & -s1s34s567 & \\ s1(c2c34c567 - s2s567) - & s1(-c2c34s567 - s2c567) + & -s1c2s34 - c1c34 \\ -c1s34c567 & +c1s34s567 & \\ s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (c1c2c34 + s1s34)(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + \\ + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ (s1c2c34 - c1s34)(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + \\ + p(s1c2c3 - c1s3) - s1s2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ s2[c34(f_{3m}c567 + f_{2m}c56 + f_{1m}c5) + pc3] + \\ + c2(f_{3m}s567 + f_{2m}s56 + f_{1m}s5) \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Degetul inelar

Matricele de transfer ale degetului inelar sunt:

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & pc3 \\ s3 & c3 & 0 & ps3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{1j}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{1j}s5 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{2j}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{2j}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^6T_7 = \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3j}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3j}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0G_7 = & \\
 & \left[ \begin{array}{ccc}
 c1(c2c34c567 - s2s567) + c1(-c2c34s567 - s2c567) - & -c1c2s34 + s1c34 & \\
 + s1s34c567 & -s1s34s567 & \\
 s1(c2c34c567 - s2s567) - & s1(-c2c34s567 - s2c567) + & -s1c2s34 - c1c34 \\
 -c1s34c567 & +c1s34s567 & \\
 s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 & \left[ \begin{array}{l}
 (c1c2c34 + s1s34)(f_{3j}c567 + f_{2j}c56 + f_{1j}c5) - d_1(c1c2s34 - s1c34) + \\
 + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2(f_{3j}s567 + f_{2j}s56 + f_{1j}s5) \\
 (s1c2c34 - c1s34)(f_{3j}c567 + f_{2j}c56 + f_{1j}c5) - d_1(s1c2s34 + c1c34) \\
 + p(s1c2c3 - c1s3) - s1s2(f_{3j}s567 + f_{2j}s56 + f_{1j}s5) \\
 s2[c34(f_{3j}c567 + f_{2j}c56 + f_{1j}c5) - d_1s34 + pc3] + \\
 + c2(f_{3j}s567 + f_{2j}s56 + f_{1j}s5) \\
 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

### Degetul mic

Matricele de transfer ale degetului mic sunt:

$$\begin{aligned}
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & pc3 \\ s3 & c3 & 0 & ps3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & f_{1c}c5 \\ s5 & c5 & 0 & f_{1c}s5 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & f_{2c}c6 \\ s6 & c6 & 0 & f_{2c}s6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^6T_7 &= \begin{bmatrix} c7 & -s7 & 0 & f_{3c}c7 \\ s7 & c7 & 0 & f_{3c}s7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$${}^0G_7 =$$

$$\begin{bmatrix} c1(c2c34c567 - s2s567) + c1(-c2c34s567 - s2c567) - & -c1c2s34 + s1c34 & \\ + s1s34c567 & -s1s34s567 & \\ s1(c2c34c567 - s2s567) - & s1(-c2c34s567 - s2c567) + & -s1c2s34 - c1c34 \\ -c1s34c567 & +c1s34s567 & \\ s2c34c567 + c2s567 & -s2c34s567 + c2c567 & -s2s34 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (c1c2c34 + s1s34)(f_{3c}c567 + f_{2c}c56 + f_{1c}c5) - (d_1 + d_2)(c1c2s34 - s1c34) + \\ + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2(f_{3c}s567 + f_{2c}s56 + f_{1c}s5) \\ (s1c2c34 - c1s34)(f_{3c}c567 + f_{2c}c56 + f_{1c}c5) - (d_1 + d_2)(s1c2s34 + c1c34) \\ + p(s1c2c3 - c1s3) - s1s2(f_{3c}s567 + f_{2c}s56 + f_{1c}s5) \\ s2[c34(f_{3c}c567 + f_{2c}c56 + f_{1c}c5) - (d_1 + d_2)s34 + pc3] + \\ + c2(f_{3c}s567 + f_{2c}s56 + f_{1c}s5) \\ 1 \end{bmatrix}$$

# ANEXA 3

## Distanțele centrelor de masă ale elementelor componente ale sistemului mână față de articulațiile acestuia

### Degetul opozabil

Distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$p_{x2\_o} = \frac{f_{10}}{2} [c1c2(c3c4c5 - s3s5) - c1s2s4s5 + s1s3c4c5 + s1c3s5] - d_5 [c1(c2c3s4 + s2c4) + s1s3s4] + (d_1 + d_2)(c1c2s3 - s1c3) - d_3c1s2 + \frac{p}{2}(c1c2c3 + s1s3)$$

$$p_{y2\_o} = \frac{f_{10}}{2} [s1c2(c3c4c5 - s3s5) - s1s2s4s5 - c1s3c4c5 - c1c3s5] - d_5 [s1(c2c3s4 + s2c4) - c1s3s4] + (d_1 + d_2)(s1c2s3 + c1c3) - d_3s1s2 + \frac{p}{2}(s1c2c3 - c1s3)$$

$$p_{z2\_o} = \frac{f_{10}}{2} [s2(c3c4c5 - s3s5) + c2s4s5] - d_5 (s2c3s4 - c2c4) + (d_1 + d_2)s2s3 + d_3c2 + \frac{p}{2}s2c3$$

Distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$p_{x3\_o} = \left( \frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5 \right) (c1c2c3c4 - c1s2s4 + s1s3c4) + \left( \frac{p}{2} - d_5s4 \right) (c1c2c3 + s1s3) - (d_5c4 + d_3)c1s2 + \left( \frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2 \right) (-c1c2s3 + s1c3)$$

$$p_{y3\_o} = \left( \frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5 \right) (s1c2c3c4 - s1s2s4 - c1s3c4) + \left( \frac{p}{2} - d_5s4 \right) (s1c2c3 - c1s3) - (d_5c4 + d_3)s1s2 - \left( \frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2 \right) (s1c2s3 + c1c3)$$

$$p_{z3\_o} = \left( \frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5 \right) (s2c3c4 + c2s4) + \left( \frac{p}{2} - d_5s4 \right) s2c3 + (d_5c4 + d_3)c2 - \left( \frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2 \right) s2s3$$

Distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$p_{x4\_o} = c4 \left( \frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5 \right) - d_5s4$$

$$p_{y4\_o} = s4 \left( \frac{f_{2o}}{2} c56 + f_{1o}c5 \right) + d_5c4$$

$$p_{z4\_o} = f_{2o}s56 + f_{1o}s5 - (d_1 + d_2)$$

### Degetul arătător

Distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$p_{x2\_a} = c1c2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) - \frac{f_{1a}}{2} c1s2s5 + s1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s34c5 + ps3 - d_1c34 \right)$$

$$p_{y2\_a} = s1c2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) - \frac{f_{1a}}{2} s1s2s5 - c1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s34c5 + ps3 - d_1c34 \right)$$

$$p_{z2\_a} = s2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) + \frac{f_{1a}}{2} c2s5$$

Distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$p_{x3\_a} = c1c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - c1s2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right) + s1 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d_1c34 \right]$$

$$p_{y3\_a} = s1c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - s1s2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right) - c1 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d_1c34 \right]$$

$$p_{z3\_a} = s2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] + c2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right)$$

Distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$p_{x4\_a} = c4 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + d_1s4$$

$$p_{y4\_a} = s4 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) - d_1c4$$

$$p_{z4\_a} = -\frac{f_{2a}}{2} s56 - f_{1a}s5$$

Distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$p_{x5\_a} = (c1c2c34 + s1s34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + p(c1c2c3 + s1s3) - \\ - c1s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) + d_1(c1c2s34 - s1c34)$$

$$p_{y5\_a} = (s1c2c34 - c1s34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + p(s1c2c3 - c1s3) - \\ - s1s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) + d_1(s1c2s34 + c1c34)$$

$$p_{z5\_a} = s2 \left[ c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] + c2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right)$$

Distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$p_{x6\_a} = c4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + d_1s4$$

$$p_{y6\_a} = s4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - d_1c4$$

$$p_{z6\_a} = -\frac{f_{3a}}{2} s567 - f_{2a}s56 - f_{1a}s5$$

Distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$p_{x7\_a} = \frac{f_{3a}}{2} c67 + f_{2a}c6$$

$$p_{y7\_a} = \frac{f_{3a}}{2} s67 + f_{2a}s6$$

### Degetul mijlociu

Distanțele sunt prezentate în capitolul 3 al tezei, „Modelul dinamic al mâinii umane”.

### Degetul inelar

Distanțele au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului inelar în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-d_1$ .

### Degetul mic

Distanțele au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului mic în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-(d_1+d_2)$ .



## ANEXA 4

### Derivatele în raport cu timpul ale distanțelor centrelor de masă ale elementelor componente ale sistemului mână față de articulațiile acestuia

#### Degetul opozabil

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\begin{aligned} p_{x2\_o}' = & -\frac{f_{10}}{2}(c3c4c5 - s3s5)(\dot{q}_1s1c2 + \dot{q}_2c1s2) + \dot{q}_1\left[\frac{f_{10}}{2}(s1s2s4s5 + c1s3c4c5 + c1c3s5) + \right. \\ & + d_5[s1(c2c3s4 + s2c4) - c1s3s4] - (d_1 + d_2)(s1c2s3 + c1c3) + d_3s1s2 - \frac{p}{2}(s1c2c3 - c1s3)\left. \right] - \\ & - \dot{q}_2\left[\frac{f_{10}}{2}c1c2s4s5 - d_5c1(s2c3s4 - c2c4) + (d_1 + d_2)c1s2s3 + d_3c1c2 + \frac{p}{2}c1s2c3\right] + \\ & - \dot{q}_3\left[\frac{f_{10}}{2}[c1c2(s3c4c5 + c3s5) - s1c3c4c5 + s1s3s5] - d_5(c1c2s3s4 - s1c3s4) - \right. \\ & - (d_1 + d_2)(c1c2c3 + s1s3) + \frac{p}{2}(c1c2s3 - s1c3)\left. \right] - \\ & - \dot{q}_4\left[\frac{f_{10}}{2}(c1c2c3s4c5 + c1s2c4s5 + s1s3s4c5) + d_5[c1(c2c3c4 - s2s4) + s1s3c4]\right] - \\ & - \dot{q}_5\left[\frac{f_{10}}{2}[c1c2(c3c4s5 + s3c5)] + c1s2s4c5 + s1s3c4s5 - s1c3c5\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{y2\_o}' = & \frac{f_{10}}{2}(c3c4c5 - s3s5)(\dot{q}_1c1c2 - \dot{q}_2s1s2) - \dot{q}_1\left[\frac{f_{10}}{2}(c1s2s4s5 - s1s3c4c5 - s1c3s5) + \right. \\ & + d_5[c1(c2c3s4 + s2c4) + s1s3s4] - (d_1 + d_2)(c1c2s3 - s1c3) + d_3c1s2 - \frac{p}{2}(c1c2c3 + s1s3)\left. \right] - \\ & - \dot{q}_2\left[\frac{f_{10}}{2}s1c2s4s5 - d_5s1(s2c3s4 - c2c4) + (d_1 + d_2)s1s2s3 + d_3s1c2 + \frac{p}{2}s1s2c3\right] + \\ & - \dot{q}_3\left[\frac{f_{10}}{2}[s1c2(s3c4c5 + c3s5) + c1c3c4c5 - c1s3s5] - d_5(s1c2s3s4 + c1c3s4) - \right. \\ & - (d_1 + d_2)(s1c2c3 - c1s3) + \frac{p}{2}(s1c2s3 + c1c3)\left. \right] - \\ & - \dot{q}_4\left[\frac{f_{10}}{2}(s1c2c3s4c5 + s1s2c4s5 - c1s3s4c5) + d_5[s1(c2c3c4 - s2s4) - c1s3c4]\right] - \\ & - \dot{q}_5\left[\frac{f_{10}}{2}[s1c2(c3c4s5 + s3c5)] + s1s2s4c5 - c1s3c4s5 + c1c3c5\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{z2\_o}' = & \dot{q}_2 \left[ \frac{f_{10}}{2} [c_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) - s_2s_4s_5] - d_5(c_2c_3s_4 + s_2c_4) + (d_1 + d_2)c_2s_3 - d_3s_2 + \frac{p}{2}c_2c_3 \right] + \\
& + \dot{q}_3 \left[ -\frac{f_{10}}{2} s_2(s_3c_4c_5 + c_3s_5) + d_5s_2s_3s_4 + (d_1 + d_2)s_2c_3 - \frac{p}{2}s_2s_3 \right] + \\
& + \dot{q}_4 \left[ \frac{f_{10}}{2} (-s_2c_3s_4c_5 + c_2c_4s_5) - d_5(s_2c_3c_4 + c_2s_4) \right] - \dot{q}_5 \frac{f_{10}}{2} [s_2(c_3c_4s_5 + s_3c_5) - c_2s_4c_5]
\end{aligned}$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\begin{aligned}
p_{x3\_o}' = & - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10} s_5 \right] (c_1c_2c_3c_4 - c_1s_2s_4 + s_1s_3c_4) - \\
& - \left( \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + f_{10}c_5 \right) \left[ \dot{q}_1 (s_1c_2c_3c_4 - s_1s_2s_4 - c_1s_3c_4) + \dot{q}_2 (c_1s_2c_3c_4 + c_1c_2s_4) + \right. \\
& + \dot{q}_3 (c_1c_2s_3c_4 - s_1c_3c_4) - \dot{q}_4 (c_1c_2c_3s_4 + c_1s_2c_4 + s_1s_3s_4) \left. \right] - \dot{q}_4 d_5c_4 (c_1c_2c_3 + s_1s_3) - \\
& - \left( \frac{p}{2} - d_5s_4 \right) \left[ \dot{q}_1 (s_1c_2c_3 - c_1s_3) + \dot{q}_2 c_1s_2c_3 + \dot{q}_3 (c_1c_2s_3 - s_1c_3) \right] + \dot{q}_4 d_5s_4c_1s_2 + \\
& + (d_5c_4 + d_3) (\dot{q}_1 s_1s_2 - \dot{q}_2 c_1c_2) + \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10}c_5 \right] (-c_1c_2s_3 + s_1c_3) + \\
& + \left( \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2 \right) \left[ \dot{q}_1 (s_1c_2s_3 + c_1c_3) + \dot{q}_2 c_1s_2s_3 - \dot{q}_3 (c_1c_2c_3 + s_1s_3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{y3\_o}' = & - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10} s_5 \right] (s_1c_2c_3c_4 - s_1s_2s_4 - c_1s_3c_4) + \\
& + \left( \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + f_{10}c_5 \right) \left[ \dot{q}_1 (c_1c_2c_3c_4 - c_1s_2s_4 + s_1s_3c_4) - \dot{q}_2 (s_1s_2c_3c_4 + s_1c_2s_4) - \right. \\
& - \dot{q}_3 (s_1c_2s_3c_4 + c_1c_3c_4) - \dot{q}_4 (s_1c_2c_3s_4 + s_1s_2c_4 - c_1s_3s_4) \left. \right] - \dot{q}_4 d_5c_4 (s_1c_2c_3 - c_1s_3) + \\
& + \left( \frac{p}{2} - d_5s_4 \right) \left[ \dot{q}_1 (c_1c_2c_3 + s_1s_3) - \dot{q}_2 s_1s_2c_3 - \dot{q}_3 (s_1c_2s_3 + c_1c_3) \right] + \dot{q}_4 d_5s_4s_1s_2 - \\
& - (d_5c_4 + d_3) (\dot{q}_1 c_1s_2 + \dot{q}_2 s_1c_2) - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10}c_5 \right] (s_1c_2s_3 + c_1c_3) - \\
& - \left( \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2 \right) \left[ \dot{q}_1 (c_1c_2s_3 - s_1c_3) - \dot{q}_2 s_1s_2s_3 + \dot{q}_3 (s_1c_2c_3 - c_1s_3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{z3\_o}' = & - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10} s_5 \right] (s_2c_3c_4 + c_2s_4) + \\
& + \left( \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + f_{10}c_5 \right) \left[ \dot{q}_2 (c_2c_3c_4 - s_2s_4) - \dot{q}_3 s_2s_3c_4 - \dot{q}_4 (s_2c_3s_4 - c_2c_4) \right] - \dot{q}_4 d_5s_2c_3c_4 + \\
& + \left( \frac{p}{2} - d_5s_4 \right) (\dot{q}_2 c_2c_3 - \dot{q}_3 s_2s_3) - \dot{q}_4 d_5s_4c_2 - \dot{q}_2 (d_5c_4 + d_3) s_2 - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{20}}{2} c_5s_6 + \dot{q}_5 f_{10}c_5 \right] s_2s_3 - \\
& - \left( \frac{f_{20}}{2} s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2 \right) (\dot{q}_2 c_2s_3 + \dot{q}_3 s_2c_3)
\end{aligned}$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$p_{x4\_o'} = -\dot{q}_4 \left[ s_4 \left( \frac{f_2}{2} c_{56} + f_1 c_5 \right) + d_5 c_4 \right] - c_4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2o}}{2} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1o} s_5 \right]$$

$$p_{y4\_o'} = \dot{q}_4 \left[ c_4 \left( \frac{f_2}{2} c_{56} + f_1 c_5 \right) - d_5 s_4 \right] - s_4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) \frac{f_{2o}}{2} s_{56} + \dot{q}_5 f_{1o} s_5 \right]$$

$$p_{z4\_o'} = (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2o} c_{56} + \dot{q}_5 f_{1o} c_5$$

### Degetul arătător

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$p_{x2\_a'} = -(\dot{q}_1 s_1 c_2 + \dot{q}_2 c_1 s_2) \left( \frac{f_{1a}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 + d_1 s_{34} \right) + \frac{f_{1a}}{2} c_5 (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (-c_1 c_2 s_{34} + s_1 c_3) -$$

$$- \frac{f_{1a}}{2} [\dot{q}_5 (c_1 c_2 c_3 s_4 s_5 + s_1 s_3 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5) + \dot{q}_2 c_1 c_2 s_5] + \dot{q}_3 p (-c_1 c_2 s_3 + s_1 c_3) +$$

$$+ \dot{q}_1 \left[ \frac{f_{1a}}{2} s_1 s_2 s_5 + c_1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 + p s_3 - d_1 c_3 \right) \right] + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) d_1 (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3)$$

$$p_{y2\_a'} = (\dot{q}_1 c_1 c_2 - \dot{q}_2 s_1 s_2) \left( \frac{f_{1a}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 + d_1 s_{34} \right) - \frac{f_{1a}}{2} c_5 (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (s_1 c_2 s_{34} + c_1 c_3) -$$

$$- \frac{f_{1a}}{2} [\dot{q}_5 (s_1 c_2 c_3 s_4 s_5 + c_1 s_3 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5) + \dot{q}_2 s_1 c_2 s_5] - \dot{q}_3 p (s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) +$$

$$+ \dot{q}_1 \left[ -\frac{f_{1a}}{2} c_1 s_2 s_5 + s_1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 + p s_3 - d_1 c_3 \right) \right] + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) d_1 (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3)$$

$$p_{z2\_a'} = \dot{q}_2 \left[ c_2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c_{34} c_5 + p c_3 + d_1 s_{34} \right) - \frac{f_{1a}}{2} s_2 s_5 \right] - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s_2 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 - d_1 c_3 \right) - \dot{q}_3 p s_2 s_3 +$$

$$+ \frac{f_{1a}}{2} \dot{q}_5 (-s_2 c_3 s_4 s_5 + c_2 c_5)$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\begin{aligned}
p_{x3\_a}' = & -[c34(\dot{q}_1s1c2 + \dot{q}_2c1s2) + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)c1c2s34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - c1c2c34\left[(\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}s56 + \dot{q}_5f_{1a}s5\right] + \\
& - \dot{q}_1\left[s1c2(\rho c3 + d_1s34) - s1s2\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right) - c1s34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - c1(\rho s3 - d_1c34)\right] + \\
& - \dot{q}_2\left[c1s2(\rho c3 + d_1s34) + c1c2\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right)\right] + \dot{q}_3\rho(-c1c2s3 + s1c3) - \\
& - (\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}(c1s2c56 + s1s34s56) - \dot{q}_5f_{1a}(c1s2c5 + s1s34s5) + \\
& + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)\left[s1c34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) + d_1(c1c2c34 + s1s34)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{y3\_a}' = & [c34(\dot{q}_1c1c2 - \dot{q}_2s1s2) - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)s1c2s34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - s1c2c34\left[(\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}s56 + \dot{q}_5f_{1a}s5\right] + \\
& + \dot{q}_1\left[c1c2(\rho c3 + d_1s34) - c1s2\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right) + s1s34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) + s1(\rho s3 - d_1c34)\right] - \\
& - \dot{q}_2\left[s1s2(\rho c3 + d_1s34) + s1c2\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right)\right] - \dot{q}_3\rho(s1c2s3 + c1c3) - \\
& - (\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}(s1s2c56 - c1s34s56) - \dot{q}_5f_{1a}(s1s2c5 - c1s34s5) - \\
& - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)\left[c1c34\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) + d_1(s1c2c34 - c1s34)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{z3\_a}' = & (\dot{q}_2c2c34 - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)s2s34 + \dot{q}_5c2\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - s2c34\left[(\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}s56 + \dot{q}_5f_{1a}s5\right] + \\
& + \dot{q}_2\left[c2(\rho c3 + d_1s4) - s2\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right)\right] - s2(\dot{q}_3\rho s3 - \dot{q}_4d_1c4) + \dot{q}_6\frac{f_{2a}}{2}c2c56
\end{aligned}$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$p_{x4\_a}' = -\dot{q}_4s4\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - \dot{q}_5c4\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right) - \dot{q}_6\frac{f_{2a}}{2}c4s56 + \dot{q}_4d_1c4$$

$$p_{y4\_a}' = \dot{q}_4c4\left(\frac{f_{2a}}{2}c56 + f_{1a}c5\right) - \dot{q}_5s4\left(\frac{f_{2a}}{2}s56 + f_{1a}s5\right) - \dot{q}_6\frac{f_{2a}}{2}s4s56 + \dot{q}_4d_1s4$$

$$p_{z4\_a}' = -(\dot{q}_5 + \dot{q}_6)\frac{f_{2a}}{2}c56 - \dot{q}_5f_{1a}c5$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\begin{aligned}
p_{x5\_a}' = & \left[ \dot{q}_1(-s1c2c34 + c1s34) - \dot{q}_2c1s2c34 + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s1c34 - c1c2s34) \right] \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + \\
& - (c1c2c34 + s1s34) \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}s56 + \dot{q}_5 f_{1a}s5 \right] + \\
& + p \left[ \dot{q}_1(c1s3 - s1c2c3) + \dot{q}_3(s1c3 - c1c2s3) - \dot{q}_2c1s2c3 \right] + (\dot{q}_1s1s2 - \dot{q}_2c1c2) \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) - \\
& - c1s2 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} c567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}c56 + \dot{q}_5 f_{1a}c5 \right] + \\
& + d_1 \left[ -\dot{q}_1(c1c34 + s1c2s34) + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(c1c2c34 - s1s34) - \dot{q}_2c1s2s34 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{y5\_a}' = & \left[ \dot{q}_1(c1c2c34 + s1s34) - \dot{q}_2s1s2c34 - (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s1c2s34 + c1c34) \right] \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - \\
& - (s1c2c34 - c1s34) \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}s56 + \dot{q}_5 f_{1a}s5 \right] + \\
& + p \left[ \dot{q}_1(s1s3 + c1c2c3) - \dot{q}_3(c1c3 + s1c2s3) - \dot{q}_2s1s2c3 \right] - (\dot{q}_1c1s2 + \dot{q}_2s1c2) \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) - \\
& - s1s2 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} c567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}c56 + \dot{q}_5 f_{1a}c5 \right] + \\
& + d_1 \left[ \dot{q}_1(-s1c34 + c1c2s34) + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(s1c2c34 - c1s34) - \dot{q}_2s1s2s34 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{z5\_a}' = & \dot{q}_2 \left[ c2c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + c2(p c3 + d_1s34) - s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) \right] + \\
& + s2 \left[ -(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) s34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - c34 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}s56 + \dot{q}_5 f_{1a}s5 \right] - \right. \\
& \left. - \dot{q}_3 p s3 + (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) d_1 c34 \right] + c2 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} c567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}c56 + \dot{q}_5 f_{1a}c5 \right]
\end{aligned}$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$p_{x6\_a}' = -\dot{q}_4 s4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - c4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}s56 + \dot{q}_5 f_{1a}s5 \right] + \dot{q}_4 d_1 c4$$

$$p_{y6\_a}' = \dot{q}_4 c4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - s4 \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}s56 + \dot{q}_5 f_{1a}s5 \right] + \dot{q}_4 d_1 s4$$

$$p_{z6\_a}' = - \left[ (\dot{q}_5 + \dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} c567 + (\dot{q}_5 + \dot{q}_6) f_{2a}c56 + \dot{q}_5 f_{1a}c5 \right]$$

Derivatele distanțelor centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$p_{x7\_a}' = -(\dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} s67 - \dot{q}_6 f_{2a} s6$$

$$p_{y7\_a}' = (\dot{q}_6 + \dot{q}_7) \frac{f_{3a}}{2} c67 + \dot{q}_6 f_{2a} c6$$

### **Degetul mijlociu**

Derivatele în raport cu timpul ale distanțelor sunt prezentate în capitolul 3 al tezei, „Modelul dinamic al mâinii umane”.

### **Degetul inelar**

Derivatele în raport cu timpul ale distanțelor au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului inelar în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-d_1$ .

### **Degetul mic**

Derivatele în raport cu timpul ale distanțelor au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului mic în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-(d_1+d_2)$ .

## ANEXA 5

**Derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale distanțelor centrelor de masă ale elementelor componente ale sistemului mână față de articulațiile acestuia**

### Degetul opozabil

1) Derivatele parțiale în raport cu  $q_1$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2-o}}{\partial q_1} = \frac{f_{10}}{2} [-s_1c_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) + s_1s_2s_4s_5 + c_1s_3c_4c_5 + c_1c_3s_5] - d_5[-s_1(c_2c_3s_4 + s_2c_4) + c_1s_3s_4] + (d_1 + d_2)(s_1c_2s_3 + c_1c_3) + d_3s_1s_2 + \frac{\rho}{2}(-s_1c_2c_3 + c_1s_3)$$

$$\frac{\partial p_{y2-o}}{\partial q_1} = \frac{f_{10}}{2} [c_1c_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) - c_1s_2s_4s_5 + s_1s_3c_4c_5 + s_1c_3s_5] - d_5[c_1(c_2c_3s_4 + s_2c_4) + s_1s_3s_4] + (d_1 + d_2)(c_1c_2s_3 - s_1c_3) - d_3c_1s_2 + \frac{\rho}{2}(c_1c_2c_3 + s_1s_3)$$

$$\frac{\partial p_{z2-o}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3-o}}{\partial q_1} = \left(\frac{f_{20}}{2}c_5s_6 + f_{10}c_5\right)(-s_1c_2c_3c_4 + s_1s_2s_4 + c_1s_3c_4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s_4\right)(-s_1c_2c_3 + c_1s_3) + (d_5c_4 + d_3)s_1s_2 + \left(\frac{f_{20}}{2}s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2\right)(s_1c_2s_3 + c_1c_3)$$

$$\frac{\partial p_{y3-o}}{\partial q_1} = \left(\frac{f_{20}}{2}c_5s_6 + f_{10}c_5\right)(c_1c_2c_3c_4 - c_1s_2s_4 + s_1s_3c_4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s_4\right)(c_1c_2c_3 + s_1s_3) - (d_5c_4 + d_3)c_1s_2 - \left(\frac{f_{20}}{2}s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2\right)(c_1c_2s_3 - s_1c_3)$$

$$\frac{\partial p_{z3-o}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4-o}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4-o}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4-o}}{\partial q_1} = 0$$

2) Derivatele parțiale în raport cu  $q_2$ 

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2-o}}{\partial q_2} = \frac{f_{10}}{2} [-c_1s_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) - c_1c_2s_4s_5] - d_5c_1(-s_2c_3s_4 + c_2c_4) - (d_1 + d_2)c_1s_2s_3 - d_3c_1c_2 - \frac{p}{2}c_1s_2c_3$$

$$\frac{\partial p_{y2-o}}{\partial q_2} = \frac{f_{10}}{2} [-s_1s_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) - s_1c_2s_4s_5] - d_5s_1(-s_2c_3s_4 + c_2c_4) - (d_1 + d_2)s_1s_2s_3 - d_3s_1c_2 - \frac{p}{2}s_1s_2c_3$$

$$\frac{\partial p_{z2-o}}{\partial q_2} = \frac{f_{10}}{2} [c_2(c_3c_4c_5 - s_3s_5) - s_2s_4s_5] - d_5(c_2c_3s_4 + s_2c_4) + (d_1 + d_2)c_2s_3 - d_3s_2 + \frac{p}{2}c_2c_3$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3-o}}{\partial q_2} = -\left(\frac{f_{20}}{2}c_5s_6 + f_{10}c_5\right)(c_1s_2c_3c_4 + c_1c_2s_4) - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_1s_2c_3 - (d_5c_4 + d_3)c_1c_2 + \left(\frac{f_{20}}{2}s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2\right)c_1s_2s_3$$

$$\frac{\partial p_{y3-o}}{\partial q_2} = -\left(\frac{f_{20}}{2}c_5s_6 + f_{10}c_5\right)(s_1s_2c_3c_4 + s_1c_2s_4) - \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)s_1s_2c_3 - (d_5c_4 + d_3)s_1c_2 + \left(\frac{f_{20}}{2}s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2\right)s_1s_2s_3$$

$$\frac{\partial p_{z3-o}}{\partial q_2} = \left(\frac{f_{20}}{2}c_5s_6 + f_{10}c_5\right)(c_2c_3c_4 - s_2s_4) + \left(\frac{p}{2} - d_5s_4\right)c_2c_3 - (d_5c_4 + d_3)s_2 - \left(\frac{f_{20}}{2}s_5s_6 + f_{10}s_5 - d_1 - d_2\right)c_2s_3$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4-o}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4-o}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4-o}}{\partial q_2} = 0$$

3) Derivatele parțiale în raport cu  $q_3$ 

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2-o}}{\partial q_3} = \frac{f_{10}}{2} [-c_1c_2(s_3c_4c_5 + c_3s_5) + s_1c_3c_4c_5 - s_1s_3s_5] + d_5[c_1c_2s_3s_4 - s_1c_3s_4] + (d_1 + d_2)(c_1c_2c_3 + s_1s_3) - \frac{p}{2}(c_1c_2s_3 - s_1c_3)$$



$$\frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_3} = \frac{f_{10}}{2} [-s1c2(s3c4c5 + c3s5) - c1c3c4c5 + c1s3s5] + d_5[s1c2s3s4 + c1c3s4] + (d_1 + d_2)(s1c2c3 - c1s3) - \frac{\rho}{2}(s1c2s3 + c1c3)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_3} = -\frac{f_{10}}{2} s2(s3c4c5 + c3s5) + d_5s2s3s4 + (d_1 + d_2)s2c3 - \frac{\rho}{2} s2s3$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_3} = \left(\frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5\right)(-c1c2s3c4 + s1c3c4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)(-c1c2s3 + s1c3) - \left(\frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2\right)(c1c2c3 + s1s3)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_3} = -\left(\frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5\right)(s1c2s3c4 + c1c3c4) - \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)(s1c2s3 + c1c3) - \left(\frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2\right)(s1c2c3 - c1s3)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_3} = -\left(\frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5\right)s2s3c4 - \left(\frac{\rho}{2} - d_5s4\right)s2s3 - \left(\frac{f_{20}}{2} s56 + f_{10}s5 - d_1 - d_2\right)s2c3$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_3} = 0$$

#### 4) Derivatele parțiale în raport cu $q_4$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_4} = -\frac{f_{10}}{2} (c1c2c3s4c5 + c1s2c4s5 + s1s3s4c5) - d_5[c1(c2c3c4 - s2s4) + s1s3c4]$$

$$\frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_4} = -\frac{f_{10}}{2} (s1c2c3s4c5 + s1s2c4s5 - c1s3s4c5) - d_5[s1(c2c3c4 - s2s4) - c1s3c4]$$

$$\frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_4} = \frac{f_{10}}{2} (-s2c3s4c5 + c2c4s5) - d_5(s2c3c4 + c2s4)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_4} = -\left(\frac{f_{20}}{2} c56 + f_{10}c5\right)(c1c2c3s4 + c1s2c4 + s1s3s4) + \left(\frac{\rho}{2} - d_5c4\right)(c1c2c3 + s1s3) - (-d_5s4 + d_3)c1s2$$

$$\frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_4} = -\left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) (s_1 c_2 c_3 s_4 + s_1 s_2 c_4 - c_1 s_3 s_4) + \left(\frac{p}{2} - d_5 c_4\right) (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3) - (-d_5 s_4 + d_3) s_1 s_2$$

$$\frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_4} = \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) (-s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4) + \left(\frac{p}{2} - d_5 c_4\right) s_2 c_3 + (-d_5 s_4 + d_3) c_2$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_4} = -s_4 \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) - d_5 c_4$$

$$\frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_4} = c_4 \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) - d_5 s_4$$

$$\frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_4} = 0$$

##### 5) Derivatele parțiale în raport cu $q_5$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_5} = -\frac{f_{10}}{2} [c_1 c_2 (c_3 c_4 s_5 + s_3 c_5) + c_1 s_2 s_4 c_5 + s_1 s_3 c_4 s_5 - s_1 c_3 c_5]$$

$$\frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_5} = -\frac{f_{10}}{2} [s_1 c_2 (c_3 c_4 s_5 + s_3 c_5) + s_1 s_2 s_4 c_5 - c_1 s_3 c_4 s_5 + c_1 c_3 c_5]$$

$$\frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_5} = -\frac{f_{10}}{2} [s_2 (c_3 c_4 s_5 + s_3 c_5) - c_2 s_4 c_5]$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_5} = -\left(\frac{f_{20}}{2} s_{56} + f_{10} s_5\right) (c_1 c_2 c_3 c_4 - c_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 c_4) + \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) (-c_1 c_2 s_3 + s_1 c_3)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_5} = -\left(\frac{f_{20}}{2} s_{56} + f_{10} s_5\right) (s_1 c_2 c_3 c_4 - s_1 s_2 s_4 - c_1 s_3 c_4) - \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) (s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_5} = -\left(\frac{f_{20}}{2} s_{56} + f_{10} s_5\right) (s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) - \left(\frac{f_{20}}{2} c_{56} + f_{10} c_5\right) s_2 s_3$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_5} = -c_4 \left(\frac{f_{20}}{2} s_{56} + f_{10} s_5\right)$$

$$\frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_5} = -s_4 \left( \frac{f_{2o}}{2} s_{56} + f_{1o} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_5} = \frac{f_{2o}}{2} c_{56} + f_{1o} c_5$$

6) Derivatele parțiale în raport cu  $q_6$ 

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_o}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{y2\_o}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{z2\_o}}{\partial q_6} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_o}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2o}}{2} s_{56} (c_1 c_2 c_3 c_4 - c_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 c_4) + \frac{f_{2o}}{2} c_{56} (-c_1 c_2 s_3 + s_1 c_3)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_o}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2o}}{2} s_{56} (s_1 c_2 c_3 c_4 - s_1 s_2 s_4 - c_1 s_3 c_4) - \frac{f_{2o}}{2} c_{56} (s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_o}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2o}}{2} s_{56} (s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) - \frac{f_{2o}}{2} c_{56} s_2 s_3$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația TMC:

$$\frac{\partial p_{x4\_o}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2o}}{2} c_4 s_{56}$$

$$\frac{\partial p_{y4\_o}}{\partial q_6} = -\frac{f_{2o}}{2} s_4 s_{56}$$

$$\frac{\partial p_{z4\_o}}{\partial q_6} = \frac{f_{2o}}{2} c_{56}$$

**Degetul arătător**1) Derivatele parțiale în raport cu  $q_1$ 

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_1} = -s_1 c_2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c_3 c_4 c_5 + p c_3 + d_1 s_3 c_4 \right) + \frac{f_{1a}}{2} s_1 s_2 s_5 + c_1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 + p s_3 - d_1 c_3 c_4 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_1} = c_1 c_2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c_3 c_4 c_5 + p c_3 + d_1 s_3 c_4 \right) - \frac{f_{1a}}{2} c_1 s_2 s_5 + s_1 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 + p s_3 - d_1 c_3 c_4 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z2-a}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3-a}}{\partial q_1} = -s1c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] + s1s2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right) + c1 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d_1c34 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y3-a}}{\partial q_1} = c1c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - c1s2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right) + s1 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d_1c34 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z3-a}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4-a}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4-a}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4-a}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5-a}}{\partial q_1} = (-s1c2c34 + c1s34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + p(-s1c2c3 + c1s3) + s1s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) - d_1(s1c2s34 + c1c34)$$

$$\frac{\partial p_{y5-a}}{\partial q_1} = (c1c2c34 + s1s34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + p(c1c2c3 + s1s3) - c1s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) + d_1(c1c2s34 - s1c34)$$

$$\frac{\partial p_{z5-a}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6-a}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6-a}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6-a}}{\partial q_1} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7-a}}{\partial q_1} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7-a}}{\partial q_1} = 0$$

2) Derivatele parțiale în raport cu  $q_2$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_2} = -c1 \left[ s2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) + \frac{f_{1a}}{2} c2s5 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_2} = -s1 \left[ s2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) + \frac{f_{1a}}{2} c2s5 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_2} = c2 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d_1s34 \right) - \frac{f_{1a}}{2} s2s5$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_2} = -c1s2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - c1c2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_2} = -s1s2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - s1c2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_2} = c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - s2 \left( \frac{f_{2a}}{2} s56 + f_{1a}s5 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_2} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_2} = -c1s2c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - pc1s2c3 - c1c2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) - d_1c1s2s34$$

$$\frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_2} = -s1s2c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - ps1s2c3 - s1c2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right) - d_1s1s2s34$$

$$\frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_2} = c2 \left[ c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d_1s34 \right] - s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 + f_{1a}s5 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_2} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_2} = 0$$

### 3) Derivatele parțiale în raport cu $q_3$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_3} = -c1c2 \left( \frac{f_{1a}}{2} s34c5 + ps3 - d1c34 \right) + s1 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d1s34 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_3} = -s1c2 \left( \frac{f_{1a}}{2} s34c5 + ps3 - d1c34 \right) - c1 \left( \frac{f_{1a}}{2} c34c5 + pc3 + d1s34 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_3} = -s2 \left( \frac{f_1}{2} s34c5 + ps3 - d1c34 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_3} = -c1c2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d1c34 \right] + s1 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d1s34 \right]$$

$$\frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_3} = -s1c2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d1c34 \right] - c1 \left[ c34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + pc3 + d1s34 \right]$$

$$\frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_3} = -s2 \left[ s34 \left( \frac{f_{2a}}{2} c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d1c34 \right]$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_3} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_3} = (-c1c2s34 + s1c34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + p(-c1c2s3 + s1c3) + d1(c1c2c34 + s1s34)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_3} = -(s1c2s34 + c1c34) \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) - p(s1c2s3 + c1c3) + d1(s1c2c34 - c1c34)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_3} = -s2 \left[ s34 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 + f_{1a}c5 \right) + ps3 - d1c34 \right]$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_3} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_3} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_3} = 0$$

#### 4) Derivatele parțiale în raport cu $q_4$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_4} = \frac{f_{1a}}{2} c5(-c1c2s34 + s1c34) + d1(c1c2c34 + s1s34)$$

$$\frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_4} = -\frac{f_{1a}}{2} c_5 (s_1 c_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4) + d_1 (s_1 c_2 c_3 c_4 - c_1 s_3 c_4)$$

$$\frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_4} = -s_2 \left( \frac{f_{1a}}{2} s_3 c_4 c_5 - d_1 c_3 c_4 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_4} = (-c_1 c_2 s_3 c_4 + s_1 c_3 c_4) \left( \frac{f_{2a}}{2} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 (c_1 c_2 c_3 c_4 + s_1 s_3 c_4)$$

$$\frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_4} = -(s_1 c_2 s_3 c_4 + c_1 s_3 c_4) \left( \frac{f_{2a}}{2} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 (s_1 c_2 c_3 c_4 - c_1 s_3 c_4)$$

$$\frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_4} = -s_2 \left[ s_3 c_4 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) - d_1 c_3 c_4 \right]$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_4} = -s_4 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 c_4$$

$$\frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_4} = c_4 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 s_4$$

$$\frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_4} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_4} = (-c_1 c_2 s_3 c_4 + s_1 c_3 c_4) \left( \frac{f_{3a}}{2} c_5 c_6 c_7 + f_{2a} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 (c_1 c_2 c_3 c_4 + s_1 s_3 c_4)$$

$$\frac{\partial p_{y5\_a}}{\partial q_4} = -(s_1 c_2 s_3 c_4 + c_1 c_3 c_4) \left( \frac{f_{3a}}{2} c_5 c_6 c_7 + f_{2a} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 (s_1 c_2 c_3 c_4 - c_1 s_3 c_4)$$

$$\frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_4} = -s_2 \left[ s_3 c_4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_5 c_6 c_7 + f_{2a} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) - d_1 c_3 c_4 \right]$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_4} = -s_4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_5 c_6 c_7 + f_{2a} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 c_4$$

$$\frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_4} = c_4 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_5 c_6 c_7 + f_{2a} c_5 c_6 + f_{1a} c_5 \right) + d_1 s_4$$

$$\frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_4} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7-a}}{\partial q_4} = 0 \quad \frac{\partial p_{y7-a}}{\partial q_4} = 0$$

5) Derivatele parțiale în raport cu  $q_5$ 

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2-a}}{\partial q_5} = -\frac{f_{1a}}{2} (c_1(c_2c_34s_5 + s_2c_5) + s_1s_34s_5)$$

$$\frac{\partial p_{y2-a}}{\partial q_5} = -\frac{f_{1a}}{2} (s_1(c_2c_34s_5 + s_2c_5) - c_1s_34s_5)$$

$$\frac{\partial p_{z2-a}}{\partial q_5} = \frac{f_{1a}}{2} (-s_2c_35s_5 + c_2c_5)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3-a}}{\partial q_5} = -\left( (c_1c_2c_34 + s_1s_34) \left( \frac{f_{2a}}{2} s_56 + f_{1a}s_5 \right) + c_1s_2 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_56 + f_{1a}c_5 \right) \right)$$

$$\frac{\partial p_{y3-a}}{\partial q_5} = -\left( (s_1c_2c_34 - c_1s_34) \left( \frac{f_{2a}}{2} s_56 + f_{1a}s_5 \right) + s_1s_2 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_56 + f_{1a}c_5 \right) \right)$$

$$\frac{\partial p_{z3-a}}{\partial q_5} = -s_2c_34 \left( \frac{f_{2a}}{2} s_56 + f_{1a}s_5 \right) + c_2 \left( \frac{f_{2a}}{2} c_56 + f_{1a}c_5 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4-a}}{\partial q_5} = -c_4 \left( \frac{f_{2a}}{2} s_56 + f_{1a}s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y4-a}}{\partial q_5} = -s_4 \left( \frac{f_{2a}}{2} s_56 + f_{1a}s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z4-a}}{\partial q_5} = -\left( \frac{f_{2a}}{2} c_56 + f_{1a}c_5 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5-a}}{\partial q_5} = -(c_1c_2c_34 + s_1s_34) \left( \frac{f_{3a}}{2} s_567 + f_{2a}s_56 + f_{1a}s_5 \right) - c_1s_2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_567 + f_{2a}c_56 + f_{1a}c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5-a}}{\partial q_5} = -(s_1c_2c_34 - c_1s_34) \left( \frac{f_{3a}}{2} s_567 + f_{2a}s_56 + f_{1a}s_5 \right) - s_1s_2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_567 + f_{2a}c_56 + f_{1a}c_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5-a}}{\partial q_5} = -s_2c_34 \left( \frac{f_{3a}}{2} s_567 + f_{2a}s_56 + f_{1a}s_5 \right) + c_2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_567 + f_{2a}c_56 + f_{1a}c_5 \right)$$



- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_5} = -c_4 \left( \frac{f_{3a}}{2} s_{567} + f_{2a} s_{56} + f_{1a} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_5} = -s_4 \left( \frac{f_{3a}}{2} s_{567} + f_{2a} s_{56} + f_{1a} s_5 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_5} = - \left( \frac{f_{3a}}{2} c_{567} + f_{2a} c_{56} + f_{1a} c_5 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_5} = 0 \quad \frac{\partial p_{z7\_a}}{\partial q_5} = 0$$

#### 6) Derivatele parțiale în raport cu $q_6$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2\_a}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{y2\_a}}{\partial q_6} = 0 \quad \frac{\partial p_{z2\_a}}{\partial q_6} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3\_a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{2a}}{2} (c_1(c_2c_3s_{456} + s_2c_56) + s_1s_3s_{456})$$

$$\frac{\partial p_{y3\_a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{2a}}{2} (s_1(c_2c_3s_{456} + s_2c_56) - c_1s_3s_{456})$$

$$\frac{\partial p_{z3\_a}}{\partial q_6} = \frac{f_{2a}}{2} (-s_2c_3s_{456} + c_2c_56)$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4\_a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{2a}}{2} c_4s_{56}$$

$$\frac{\partial p_{y4\_a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{2a}}{2} s_4s_{56}$$

$$\frac{\partial p_{z4\_a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{2a}}{2} c_56$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5\_a}}{\partial q_6} = -(c_1c_2c_3s_4 + s_1s_3s_4) \left( \frac{f_{3a}}{2} s_{567} + f_{2a} s_{56} \right) - c_1s_2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c_{567} + f_{2a} c_{56} \right)$$

$$\frac{\partial p_{y5-a}}{\partial q_6} = -(s1c2c34 - c1s34) \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 \right) - s1s2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z5-a}}{\partial q_6} = -s2c34 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 \right) + c2 \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6-a}}{\partial q_6} = -c4 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{y6-a}}{\partial q_6} = -s4 \left( \frac{f_{3a}}{2} s567 + f_{2a}s56 \right)$$

$$\frac{\partial p_{z6-a}}{\partial q_6} = - \left( \frac{f_{3a}}{2} c567 + f_{2a}c56 \right)$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7-a}}{\partial q_6} = - \frac{f_{3a}}{2} s67 - f_{2a}s6$$

$$\frac{\partial p_{y7-a}}{\partial q_6} = \frac{f_{3a}}{2} c67 + f_{2a}c6$$

## 7) Derivatele parțiale în raport cu $q_7$

- distanțele centrului de masă al falangei proximale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x2-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y2-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z2-a}}{\partial q_7} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x3-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y3-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z3-a}}{\partial q_7} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei medii față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x4-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{y4-a}}{\partial q_7} = 0 \quad \frac{\partial p_{z4-a}}{\partial q_7} = 0$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de încheietură:

$$\frac{\partial p_{x5-a}}{\partial q_7} = -(c1c2c34 + s1s34) \frac{f_{3a}}{2} s567 - c1s2 \frac{f_{3a}}{2} c567$$

$$\frac{\partial p_{y5-a}}{\partial q_7} = -(s1c2c34 - c1s34) \frac{f_{3a}}{2} s567 - s1s2 \frac{f_{3a}}{2} c567$$

$$\frac{\partial p_{z5\_a}}{\partial q_7} = -s_2 c_3 d_4 \frac{f_{3a}}{2} s_{567} + c_2 \frac{f_{3a}}{2} c_{567}$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația MCP:

$$\frac{\partial p_{x6\_a}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3a}}{2} c_4 s_{567}$$

$$\frac{\partial p_{y6\_a}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3a}}{2} s_4 s_{567}$$

$$\frac{\partial p_{z6\_a}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3a}}{2} c_{567}$$

- distanțele centrului de masă al falangei distale față de articulația PIP:

$$\frac{\partial p_{x7\_a}}{\partial q_7} = -\frac{f_{3a}}{2} s_{67}$$

$$\frac{\partial p_{y7\_a}}{\partial q_7} = \frac{f_{3a}}{2} c_{67}$$

### Degetul mijlociu

Derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale distanțelor sunt prezentate în capitolul 3 al tezei, „Modelul dinamic al mâinii umane”.

### Degetul inelar

Derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale distanțelor au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului inelar în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-d_1$ .

### Degetul mic

Derivatele parțiale în raport cu  $q_i$  ale distanțelor au aceleași expresii ca și cele ale degetului arătător cu deosebirea (dată de poziția degetului mic în cadrul sistemului mână) că în loc de  $d_1$  în expresii apare  $-(d_1 + d_2)$ .



## Titluri recent publicate în colecția „TEZE DE DOCTORAT” seria 9: Inginerie Mecanică

---

1. **Adriana Albu** – *Stabilirea de baze de date pentru diagnosticarea hepatitelor virale prin analiza imaginilor ficatului obținute prin tomografiere*, ISBN 978-973-625-400-0, (2007);
2. **Călin Gavril Dubău** – *Utilizarea microagregatelor eoliene în componența unor sisteme complexe*, ISBN 978-973-625-408-6, (2007).
3. **Lenuța Suci** – *Contribuții la modelarea și simularea proceselor de sudare cu arc electric în mediul de gaze protectoare (Ar, CO<sub>2</sub>) (Sinteză)*, ISBN 978-973-625-442-0, (2007);
4. **Cosmina Vigar** – *Studii teoretice și experimentale asupra surselor și nivelului de vibrații la unele tipuri de mașini de țesut*, ISBN 978-973-625-432-1, (2007);
5. **Virgil Stoica** – *Studii și cercetări privind mecanismele schimbului de căldură în procesele de vaporizare a hidrocarburilor*, ISBN 978-973-625-473-4, (2007);
6. **Marius-Beniamin Fazecaș** – *Contribuții teoretice și experimentale privind rezistența și durata de viață a cuplajelor*, ISBN 978-973-625-498-7, (2007);
7. **Camelia Demian** – *Cercetări privind comportarea materialelor destinate implantării osoase conform normelor europene de calitate*, ISBN 978-973-625-512-0, (2007);
8. **Remus Belu-Nica** – *Contribuții asupra producerii și îmbinării prin sudare a unor table subțiri din materiale compozite metalice cu matrice din aliaj de aluminiu*, ISBN 978-973-625-513-7, (2007);
9. **Adriana Corina Catanase** – *Identificarea dinamică a turbinelor hidraulice tangențiale de tip pelton*, ISBN 978-973-625-514-4, (2007);
10. **Cristina Basarabă-Oprîțescu** – *Simulări numerice pentru mișcări cu constrângeri mecanice și ciocniri*, ISBN 978-973-625-526-7, (2007).



EDITURA POLITEHNICA