

UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE HIDROTEHNICĂ

# TEZĂ DE DOCTORAT

MODELAREA PROPAGĂRII POLUANȚILOR ÎN ACVIFERE, ÎN  
CONDIȚIILE MIȘCĂRII GENERATE DE CAPTĂRI ȘI DRENAJE  
SUBTERANE

BIBLIOTECA UNIVERSITĂȚII  
TITOLIUM  
Ducio 369 Lit. E

**Conducător științific:**  
**Prof.dr.ing. David Ioan**

**Doctorand:**  
**Ing. Beilicci Robert Florin**

**2005**



## CUPRINS

Foaie de capăt	Pag.	1
Cuprins	Pag.	2
<b>1 CONCEPTUL DE MANAGEMENT AL APEI SUBTERANE</b>	Pag.	5
1.1 Introducere	Pag.	5
1.1.1 Resursele de apă subterană	Pag.	5
1.1.2 Managementul resurselor de apă subterană	Pag.	6
1.1.3 Organizarea lucrării de doctorat	Pag.	7
1.2 Abordarea optimizării managementului apei subterane	Pag.	7
1.2.1 Caracteristicile optimizării	Pag.	8
1.2.2 Formularea generală cu variabile continue	Pag.	10
1.3 Aplicarea optimizării	Pag.	11
1.3.1 Controlul poluării	Pag.	12
1.3.2 Evacuarea apei din mine și amplasamente de construcții (epuizmente)	Pag.	13
1.3.3 Controlul subsidenței	Pag.	14
1.3.4 Intruziunea apei sărate	Pag.	15
1.3.5 Protecția zonelor umede împotriva secării	Pag.	16
<b>2 SIMULAREA MIȘCĂRI APELOR SUBTERANE</b>	Pag.	18
2.1 Ecuatiile guvernante ale mișcării apei subterane	Pag.	18
2.2 Legea lui Darcy	Pag.	19
2.3 Metode numerice pentru modelarea dinamicii apei subterane	Pag.	20
2.3.1 Metoda diferențelor finite	Pag.	20
2.3.2 Serii Taylor	Pag.	24
2.3.3 Acuratețea metodelor numerice	Pag.	25
2.3.4 Răspunsul liniar al nivelului piezometric la solicitare	Pag.	26
2.3.5 Consistență, stabilitate, convergență	Pag.	26
<b>3 CONSTRUCȚIA MODELULUI DE OPTIMIZARE</b>	Pag.	29
3.1 Definierea enunțului formulării	Pag.	29
3.2 Variabile de decizie, funcții de restricție și obiective	Pag.	30
3.2.1 Restricții asupra acțiunilor	Pag.	30
3.2.2 Restricții asupra nivelelor piezometrice	Pag.	31
3.2.3 Funcția obiectiv	Pag.	33
3.2.4 Formularea modelului de management general liniar	Pag.	34
3.2.5 Construcția modelelor reușite	Pag.	35
3.3 Parametrii	Pag.	40
3.3.1 Variabile de decizie – solicitarea aplicată acviferului	Pag.	40
3.3.2 Valorile și locațiile restricțiilor	Pag.	45
3.3.3 Relațiile dintre solicitări și locațiile restricțiilor	Pag.	52
3.3.4 Parametrii funcției obiectiv	Pag.	53
3.4 Calibrarea modelului de management	Pag.	53
3.5 Verificarea modelului de management	Pag.	55
3.6 Validarea modelului de management	Pag.	55
3.7 Exemplul alimentării cu apă subterană	Pag.	56
<b>4 REZOLVAREA MODELULUI DE OPTIMIZARE</b>	Pag.	60
4.1 Problema de optimizare ca un program liniar	Pag.	60
4.2 Estimarea coeficienților răspunsului acviferului la stres	Pag.	62

4.3	Metoda simplex	Pag. 64
4.3.1	Interpretarea geometrică	Pag. 64
4.3.2	Prezentarea matematică a metodei simplex	Pag. 66
4.4	Rezolvarea problemei alimentării cu apă din secțiunea 3.7	Pag. 72
4.4.1	Calculul coeficienților de răspuns	Pag. 72
4.4.2	Aplicarea metodei simplex	Pag. 73
4.5	Efortul de calcul estimat	Pag. 75
5	UTILIZAREA MODELULUI DE OPTIMIZARE	Pag. 77
5.1	Analiza de sensibilitate	Pag. 78
5.1.1	Numărul sau locațiile de aplicare a solicitărilor și restricțiilor	Pag. 78
5.1.2	Valorile restricțiilor	Pag. 80
5.1.3	Obiective multiple și frontiera eficientă	Pag. 83
5.2	Analiza domeniului de variație a soluțiilor problemei	Pag. 85
5.2.1	Domeniul de variație a coeficienților funcției obiectiv	Pag. 86
5.2.2	Domeniul de variație a termenilor liberi din membrul drept al restricțiilor	Pag. 88
5.3	Problema duală	Pag. 90
5.3.1	Deducerea problemei duale	Pag. 90
5.3.2	Interpretarea problemei duale	Pag. 92
6	FORMULAREA LINIARĂ AVANSATĂ A MODELULUI DE OPTIMIZARE	Pag. 93
6.1	Managementul curgerii tranzitorii	Pag. 93
6.1.1	Formularea modelului de optimizare pentru regim tranzitoriu	Pag. 94
6.1.2	Debitul și volumele de apă	Pag. 96
6.1.3	Valoarea temporală a costurilor	Pag. 96
6.2	Debit cu direcție nedeterminată	Pag. 97
6.3	Debit aplicat distribuit (prin celule multiple)	Pag. 98
6.3.1	Debit distribuit orizontal	Pag. 98
6.3.2	Debit distribuit vertical	Pag. 99
6.4	Restricții asupra vitezei apei subterane	Pag. 100
6.5	Condiții de frontieră (margine) neliniare	Pag. 105
6.6	Evaluarea incertitudinii parametrilor	Pag. 107
7	FORMULAREA CU VARIABLE BINARE	Pag. 111
7.1	Formularea liniară cu variabile binare	Pag. 111
7.2	Exemple de probleme cu formulare binară	Pag. 111
7.2.1	Includerea cheltuielilor fixe în formularea problemei	Pag. 112
7.2.2	Limite inferioare nenule ale stresului	Pag. 113
7.2.3	Contorizarea numărului de locații active	Pag. 114
7.2.4	Problema alegerii locațiilor pentru problemele cu stres distribuit	Pag. 114
7.2.5	Funcții obiectiv liniare pe porțiuni	Pag. 116
7.3	Rezolvarea formulării cu variabile binare	Pag. 119
7.3.1	Algoritmul „ramifică și mărginește”	Pag. 119
7.3.2	Interpretarea soluțiilor obținute	Pag. 121
7.3.3	Exemplul alimentării cu apă	Pag. 122
8	FORMULĂRI CU FUNCȚII NELINIARE	Pag. 126
8.1	Caracteristicile problemelor neliniare de optimizare	Pag. 126

8.2	Exemple de formulări neliniare	Pag. 127
8.2.1	Costurile de aplicare ale solicitărilor	Pag. 127
8.2.2	Acvifere cu nivel liber	Pag. 129
8.2.3	Costurile de construcție ca funcții neliniare	Pag. 132
8.2.4	Fluxul dintre un acvifer și un curent de apă	Pag. 133
8.2.5	Determinarea lungimii amenajărilor cu mai multe celule de aplicare a stresului	Pag. 135
8.3	Rezolvarea formulărilor neliniare	Pag. 136
8.3.1	Liniazarea secvențială pentru problemele cu acvifere nemărginite	Pag. 136
8.3.2	Metoda gradientului	Pag. 139
8.3.3	Alte metode de rezolvare	Pag. 143
8.3.4	Rezolvarea problemelor binare neliniare	Pag. 145
8.4	Interpretarea soluțiilor	Pag. 146
9	MODELAREA TRANSPORTULUI POLUANȚILOR ÎN ACVIFERE	Pag. 147
9.1	Descrierea fenomenului	Pag. 148
9.1.1	Procese fizico-chimice de transport	Pag. 149
9.1.2	Alte procese de transport	Pag. 153
9.2	Ecuatiile de transport	Pag. 155
9.2.1	Ecuatii caracteristice	Pag. 155
9.2.2	Metode de rezolvare a ecuației de transport	Pag. 157
9.3	Interconectarea modelului de mișcare cu modelul de transport	Pag. 161
10	STUDIUL DE CAZ, CONCLUZII	Pag. 162
10.1	Descrierea programului de optimizare MODOFC	Pag. 162
1	Introducere	Pag. 162
2	Posibilitățile programului MODOFC	Pag. 163
3	Teorie și metodologie	Pag. 164
10.2	Studiul de caz	Pag. 175
1	Geologia, Geomorfologia și Hidrogeologia	Pag. 176
2	Sursa de poluare	Pag. 177
3	Modelarea mișcării și a transportului poluanților	Pag. 179
4	Modelarea problemei de optimizare	Pag. 180
10.3	Concluzii	Pag. 181
11	ANEXE	Pag. 183
1	Lista programelor specializate în modelarea acviferelor, la nivelul anului 2005	Pag. 183
2	Lista programelor de calcule tehnice, la nivelul anului 2005	Pag. 191
3	Rezultatele obținute pentru studiul de caz	Pag. 208
12	BIBLIOGRAFIE	Pag. 219

## Cap. 1 CONCEPTUL DE MANAGEMENT AL APEI SUBTERANE

### 1.1. Introducere

#### 1.1.1. Resursele de apă subterană

Cerința de apă dulce va crește în viitor, în condițiile în care populația lumii crește continuu. Deși Terra dispune de o cantitate mare de apă, apa dulce reprezintă doar 2,5 % din rezervele globale de apă. Din aceasta aproximativ 30 % este înmagazinată în subteran și 0,3 % în râuri și lacuri, iar restul este apa inaccesibilă din ghețari, apa capilară din sol și vaporii de apă din atmosferă. Consumul global de apă a fost estimat pe parcursul anului 1996 cu puțin peste 50 % din resursele disponibile. Pentru anul 2025 s-a prognozat că acest consum va ajunge la peste 70 % din resursele de apă dulce disponibile, iar aproximativ 35 % din populația lumii va suferi de lipsa de apă [65,52,121].

În unele regiuni, unde cerința pentru apă subterană este mare, utilizarea continuă a ei este limitată. Extragerea continuă a apei subterane este împiedecată și de alte efecte adverse ale pompării excesive. În multe zone pomparea excesivă a apei subterane a determinat apariția fenomenului de subsidență. Alte efecte ale pompării excesive a apei subterane sunt asupra zonelor umede (mlaștini) și a altor sisteme ecologice acvatice care interferează în ciclul hidrologic natural.

O altă problemă a utilizării apei subterane este degradarea calității ei. O degradare la scară largă a calității apei subterane s-a produs ca urmare a folosirii excesive a îngrășămintelor chimice în agricultură. De asemenea, pomparea excesivă a apei subterane în zonele de coastă a dus la infiltrarea în subteran a apei sărate, având ca rezultat diminuarea procentului de utilizare a acviferelor pentru apa potabilă [124].

În viitor se prevede o creștere a cerinței de apă subterană. Utilizarea în continuare a acestei importante resurse de apă necesită luarea în considerare a factorilor fizici, ecologici și umani. Analiza și managementul resurselor de apă subterane necesită eforturi coordonate ale hidrogeologilor, hidraulicienilor, gospodarilor de apă și managerilor. Aceste categorii de profesioniști trebuie să beneficieze de metode sofisticate pentru analiza acestor sisteme complexe.

#### 1.1.2. Managementul resurselor de apă subterană

Modelele de simulare a apei subterane se folosesc acum în mod curent pentru analiza și luarea deciziilor în multe probleme legate de apa subterană. Aceste modele sunt capabile a simula mișcarea apei subterane, nivelele piezometrice și transportul poluanților, ele se folosesc și pentru rezolvarea problemelor legate de alimentarea cu apă, controlul poluării și protecția ecosistemelor. În multe cazuri

aceste modele sunt utilizate pentru prognozarea răspunsului sistemului apei subterane la modificările induse de om.

Relațiile dintre modelele de simulare și datele de intrare și ieșire sunt arătate în figura 1.1, unde datele de intrare se divid în parametrii care descriu procesele fizice și caracteristici numerice, ambele categorii descriind controlul managementului. Datele de ieșire din modelele de simulare descriu starea sistemului care rezultă din datele de intrare. Problema de management constă în determinarea acțiunilor care să conducă la datele de ieșire dorite de utilizator.

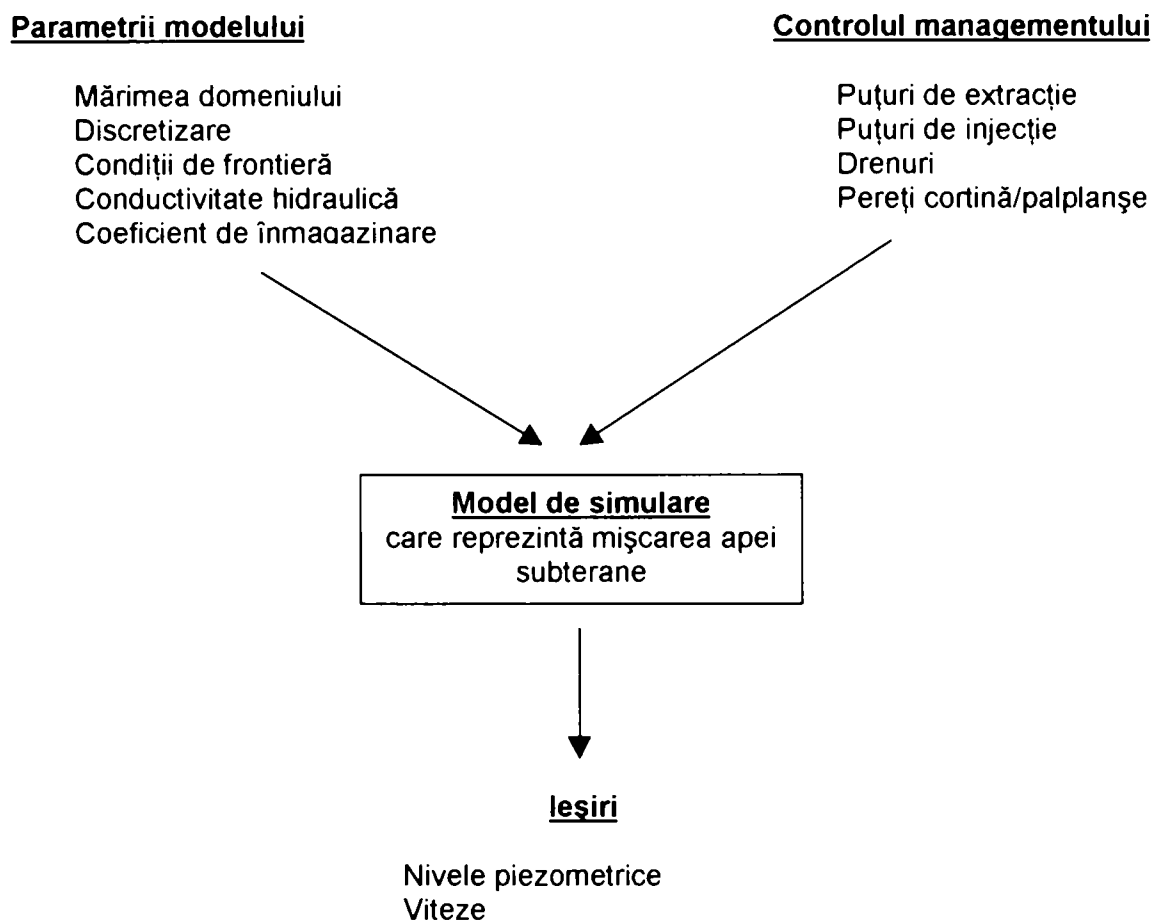


Fig. 1.1 Relațiile dintre intrările și ieșirile modelului de simulare

Dacă complexitatea problemei crește, abilitatea celui care ia deciziile este determinantă pentru alegerea celor mai bune decizii pentru obținerea rezultatelor dorite. Această lucrare prezintă un set adițional de instrumente analitice pentru asistarea proiectantului în rezolvarea problemelor complexe de management. Aceste instrumente se bazează pe cuplarea modelului de simulare a apei subterane cu metode de optimizare. Deși este posibilă cuplarea oricărui model de simulare a apei subterane cu metode de optimizare, această lucrare se concentrează pe modelele de simulare care dau nivelele piezometrice și vitezele de curgere într-un sistem general al apei subterane. Problema de management trebuie formulată astfel încât problema de optimizare să poată fi rezolvată matematic [38,75,78].

### **1.1.3. Organizarea lucrării de doctorat**

Această lucrare presupune familiarizarea auditorului cu modelele de simulare a apei subterane și cu principiile fundamentale ale mișcării și transportului apei și poluanților în subteran. Lucrarea conține prezentarea modelelor de mișcare și transport al apei subterane și a metodelor numerice care stau la baza tehnicilor de rezolvare a problemelor de optimizare. Metodele de optimizare sunt introduse în măsura în care sunt necesare pentru rezolvarea cazurilor specifice de formulări. Primul capitol descrie problemele managementului apei subterane în termeni generali și aduce câteva exemple a problemelor posibile de control și formulare. Modelele de simulare a apei subterane și metodele numerice sunt prezentate în Capitolul 2. Capitolul 3 conține detalii de construire a formulării liniare a problemei de management pentru probleme staționare limitate ale apei subterane cu variabile de decizie continue. Capitolul 4 descrie metoda de rezolvare a problemei managementului mișcării apei subterane cu algoritmul simplex. Capitolul 5 descrie multitudinea de informații disponibile rezultate din soluția formulării liniare. Capitolele 6, 7 și 8 conțin forme adiționale care pot fi încorporate în formularea de bază și descriu, incluzând perioade de timp multiple, întregi și neliniare. Capitolul 9 cuprinde modelul de simulare al transportului poluanților.

Capitolul 10 cuprinde studii de caz pentru diverse optimizări ale utilizării și exploatării apelor subterane.

În cadrul lucrării se vor utiliza pentru simplificarea exprimării denumiri uneori neuzuale preluate din matematică sau din literatura de specialitate. Acestea vor fi semnalate la momentele în care vor fi utilizate.

## **1.2. Abordarea optimizării managementului apei subterane**

Metodele de optimizare sunt folosite în luarea deciziilor de mai mulți ani. Tehnicile de optimizare sunt aplicate în economie, inginerie, științele naturii și în științele sociale. Pentru rezolvarea problemelor folosind metode de optimizare este nevoie ca componentele problemei să fie asamblate într-o structură matematică. O problemă de optimizare are trei elemente cheie: funcția obiectiv, restricțiile și variabilele de decizie. Cu aceste trei elemente se pot construi două tipuri de probleme de optimizare: probleme fără restricții, care includ funcția obiectiv și variabilele de decizie, și probleme cu restricții, care includ toate trei elementele. Problemele de optimizare sunt modele ale procesului de realizare și aplicare a deciziilor și se referă la modelul de management.

Primul element al unei probleme de optimizare este setul de variabile de decizie. Pentru problemele de proiectare variabilele de decizie descriu controlul obiectivului de proiectat. Valorile primite de aceste variabile definesc soluția problemei.

A doua componentă a problemei de optimizare este setul de restricții, care impun restricțiile asupra valorilor care pot fi luate de variabilele de decizie. De



exemplu, variabilele de decizie trebuie să fie continui sau întregi. Adicional, se impun și limitele inferioare și superioare a valorilor pe care le pot lua variabilele de decizie. Funcțiile de restricție care implică mai multe variabile de decizie trebuie de asemenea definite. Valorile acestor funcții de restricții trebuie impuse în mod obligatoriu.

În general problemele de optimizare dau soluții multiple care satisfac restricțiile. Problema optimizării constă în alegerea soluției optime. Această alegere depinde de forma funcției obiectiv, care este definită prin variabilele de decizie. Această funcție obiectiv poate să fie minimizată sau maximizată, depinzând de aplicația ce dorește a se fi rezolvată.

Optimizarea necesită definirea formală a variabilelor de decizie, a restricțiilor impuse modelului de management și obiectivul de optimizat. Obiectivul și restricțiile sunt transpuse în ecuații matematice cu variabilele de decizie pentru a formula problema de optimizare. Această problemă este apoi rezolvată prin diferiți algoritmi de optimizare. Soluția problemei de optimizare constă în valorile variabilelor de decizie care satisfac toate restricțiile problemei (restricțiile deciziei) și optimizează funcția obiectiv.

### **1.2.1. Caracteristicile optimizării**

Caracteristica principală a optimizării managementului apelor subterane este cuplarea dintre modelul de simulare și modelul de management. Această legătură dintre modele este îndeplinită de formularea restricțiilor și obiectivelor, ca funcții directe ale intrărilor modelului de management și ieșirilor modelului de simulare. În majoritatea problemelor descrise de această lucrare, variabilele de decizie sau controlul managementului sunt localizările și magnitudinea solicitări impuse sistemului de apă subterană. Stresul (solicitarea) trebuie înțeles ca curgerea medie impusă acviferului într-o locație specifică, pe o durată specifică și cu o rată specifică. Solicitarea rezultă din extragerea apei sau introducerea apei în acvifer. Aceste solicitări sunt aplicate acviferelor prin intermediul facilităților ca pompe, drenuri, bazine de infiltrație sau alte structuri de interceptare. Ieșirile modelului de simulare trebuie să fie nivelele piezometrice și alți parametri ai sistemului, ca vitezele.

Optimizarea vine în contrast cu metodele convenționale iterative ale procesului decizional, care sunt arătate în figura 1.2. În aceste metode iterative construirea modelului de simulare constă în prognoza dinamicii apei subterane, care rezultă din aplicarea unui set alternativ de măsuri decizionale. Este ales un set specific de decizii, a căror aplicare acviferului sunt simulate. Ieșirile modelului sunt comparate pe baza unor criterii specifice. Procesul se repetă până când se obțin rezultate satisfăcătoare sau se termină resursele destinate analizei (timpul sau bugetul).

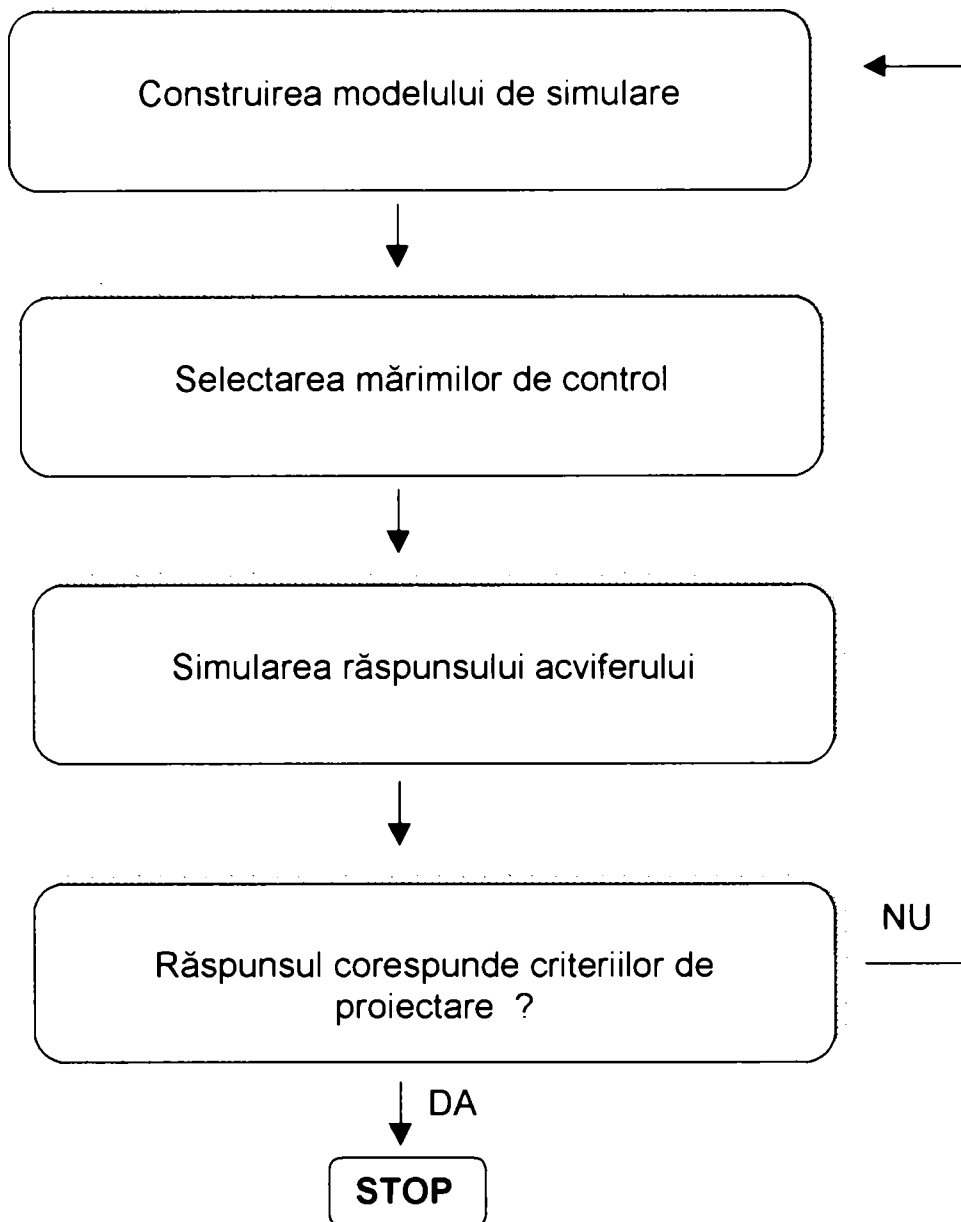
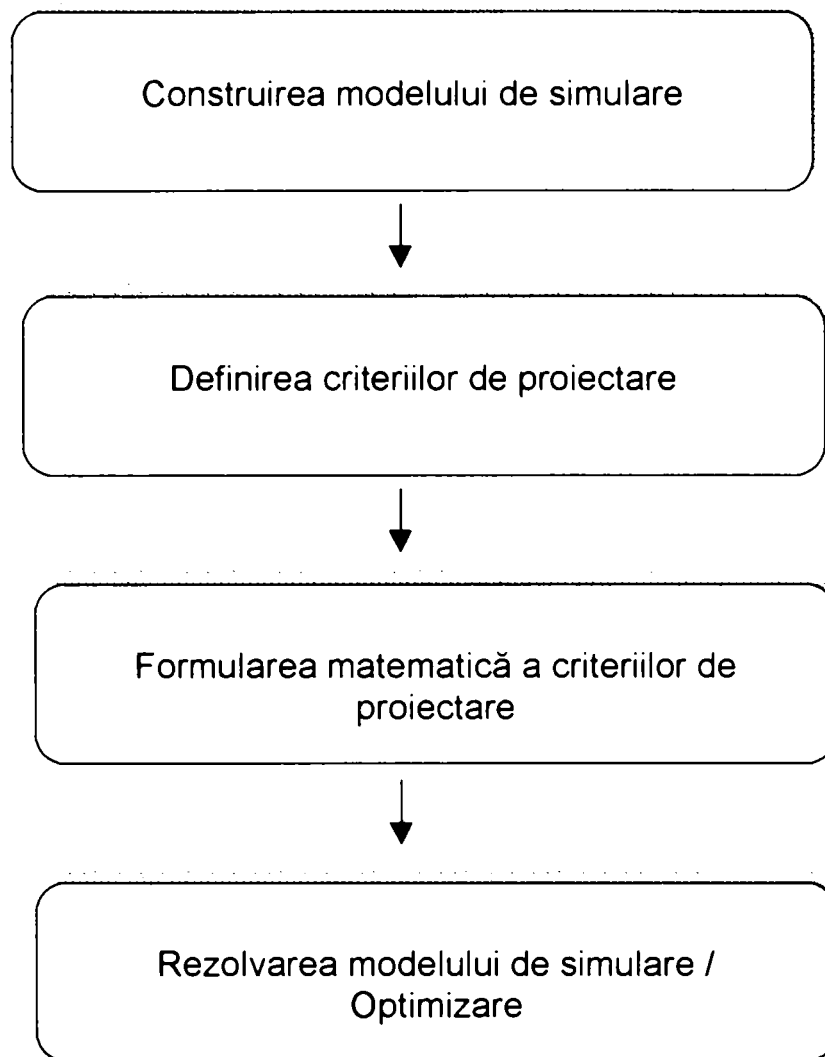


Fig.1.2 Metoda iterativă pentru procesul decizional

Optimizarea este descrisă în figura 1.3. Din nou, se necesită un model de simulare. Aici criteriile specifice se utilizează pentru definirea problemei. Modelul de simulare provine din feedback-ul necesar pentru evaluarea în fiecare caz specific a opțiunilor de control în concordanță cu criteriile specifice. Rezultatele problemei se obțin direct prin determinarea soluțiilor optime de management.

Optimizarea are numeroase beneficii. Este eficientă în căutarea tuturor soluțiilor posibile ale problemelor particulare, de asemenea pot fi vizualizate la diferite nivele, procesele de verificare a soluțiilor, precum și soluțiile care dau erori. În multe cazuri, pentru un set particular de restricții, nu există soluții realizabile. Aceste cazuri sunt automat identificate de algoritmul de optimizare. Din perspectiva analizei, optimizarea este un ajutor neprețuit pentru proiectant pentru că acesta necesită aflarea acelor decizii și acțiuni principale care cuantifică obiectivele și țintele managementului. Din punct de vedere practic, optimizarea furnizează modelele pentru obținerea rezultatelor dorite. Parametrii problemei de optimizare pot fi supuse unor analize de sensibilitate pentru determinarea relațiilor dintre restricțiile impuse problemei și obiectivele de optimizat.



*Fig. 1.3 Optimizarea procesului decizional*

Pentru început, vom renunța la folosirea termenului de optimizare. În această lucrare sunt tratate metodele formale de optimizare pentru rezolvarea problemei pe cale analitică. Algoritmii care identifică soluția optimă a problemei este dat de funcția obiectiv și de setul de restricții. Oricum, folosirea optimizării matematice nu garantează soluția cea mai bună. Rezultatele optimizării depind de corectitudinea modelului de simulare și de forma funcției obiectiv și a restricțiilor. Optimizarea este cel mai bun mijloc care ajută proiectantul la înțelegerea comportării sistemului studiat.

### **1.2.2 Formularea generală cu variabile continue**

Începem cu definirea relației dintre intrările și ieșirile modelului de simulare.

$$h_i = h_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.1)$$

unde  $h_i$  este nivelul piezometric în punctul  $i$ , iar  $q_i$  este unul din cele  $n$  acțiuni impuse asupra acviferului. Aceste acțiuni sunt debitele, care se dimensionează ca volum de apă pe perioada de acțiune în punctele  $i$ , ce circulă prin puțuri, drenuri, bazine de infiltrație sau structuri de interceptare. Valorile pozitive reprezintă extrageri din acvifer, iar cele negative injectii în acvifer. Relația (1.1) este determinată de modelul de simulare al sistemului de apă subterană.

Restricțiile asupra variabilelor continue se pot pune sub forma cerută ca funcții de nivelele piezometrice și acțiuni:

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l) \leq 0 \quad (2.2)$$

unde  $l$  este numărul de puncte în care se cere nivelul piezometric.

Formele tipice ale restricțiilor referitoare la nivelul piezometric sunt cele care dau limitele inferioare și superioare ale nivelului piezometric.

$$h_i^l \leq h_i \leq h_i^u \quad (3.3)$$

și cele care dau diferențele dintre două puncte apropiate

$$h_i - h_k = h_{ik}^d \quad (4.4)$$

unde  $h_{ik}^d$  este diferența specificată dintre nivelele piezometrice între punctele  $i$  și  $k$ .

Formele tipice ale restricțiilor referitoare la acțiuni sunt cele care dau limitele inferioare și superioare ale acțiunilor:

$$q_j^l \leq q_j \leq q_j^u \quad (5.5)$$

și necesită mărimea debitului total:

$$\sum_{j=1}^n q_j \geq Q \quad (6.6)$$

Funcția obiectiv este o funcție generală dată de totalitatea acțiunilor și ieșirilor modelului, sub forma:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l) \quad (7.7)$$

Funcția obiectiv tipică caută să optimizeze solicitarea impusă acviferului, adică să minimizeze sau maximizeze debitul total

$$f = \sum_{j=1}^n q_j \quad (8.8)$$

Forma generală a problemei este

$$\text{minimizeaza } f(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l) \quad (9.9)$$

astfel încât

$$g_k(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l) \leq 0 \quad k = 1, \dots, m \quad (1.10)$$

Deoarece nivelul piezometric depinde de acțiuni, această formă generală poate fi definită numai în funcție de acțiuni. Oricum, pentru claritatea prezentării, reținem prezența explicită a nivelului piezometric [34]. Această formulare va fi revăzută pentru cazul special al variabilelor întregi în Capitolul 7. De reținut, că această formulare cuprinde atât minimizarea, cât și maximizarea funcției obiectiv, deoarece maximizarea funcției negative este de fapt minimizarea funcției originale.

Optimizarea constă în determinarea setului specific de obiective și restricții care se adresează problemei studiate, formularea acestora printr-un set de funcții, care se pun sub forma prezentată mai sus, apoi rezolvarea problemei propriu-zise.

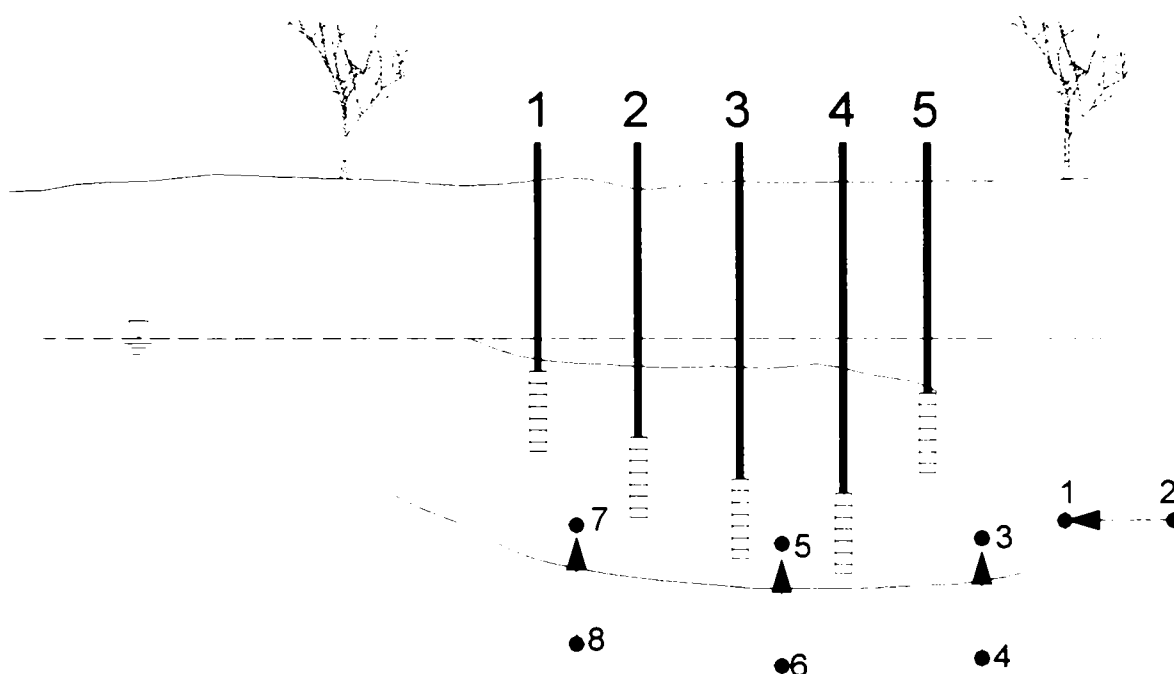
### 1.3. Aplicarea optimizării

Optimizarea poate fi aplicată unor tipuri diverse de probleme. În această secțiune este demonstrată utilizarea optimizării pentru diferite aplicații tipice. Aceste

exemple simple intenționează să arate genul de probleme care pot fi rezolvate prin metoda optimizării. Formulările prezentate sunt numai câteva din posibilitățile în care pot pune problemele respective [56,7,129,86,85,136,59,127,5,58,28,60,91,130,119].

### 1.3.1. Controlul poluării

Considerăm o porțiune a unui acvifer care trebuie izolat de restul acviferului. Această necesitate rezultă din existența unei zone de apă subterană degradată calitativ datorită apariției unei surse de poluare. Problema constă în crearea a unui regim hidraulic specific care să izoleze porțiunea degradată de restul acviferului. În figura 1.4 pana de apă poluată creată de o singură sursă de poluare este descrisă într-o secțiune verticală exagerată. Criteriul urmărit este de a schimba direcția de curgere a apei subterane de-a lungul perimetrului penei astfel încât expansiunea penei să fie oprită.



*Figura 1.4 Exemplu de control al poluării: Intensitatea acțiunilor de la cinci puțuri trebuie determinate astfel încât diferențele impuse dintre nivelele piezometrice în patru puncte să fie cunoscute.*

Criteriul urmărit pentru realizarea direcției de curgere a apei dorite poate fi formulat ca restricții asupra diferențelor dintre nivelele piezometrice în punctele selectate. Nivelele piezometrice care satisfac aceste restricții vor determina viteze care au componenta pozitivă în direcția sugerată de locațiile punctelor selectate. În figură au fost identificate patru perechi de astfel de puncte. Obiectivul problemei poate fi minimizarea costului total al acțiunilor asupra acviferului, care să determine o curgere spre interiorul penei de apă poluată. În figură, cele cinci puțuri, amplasate în puncte diferite și la adâncimi diferite, reprezintă zonele în care algoritmul de optimizare va selecta intensitatea acțiunilor.

Problema poate fi formulată astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^5 \alpha_j q_j \quad (1.11)$$

astfel încât

$$h_2 - h_1 \geq h_1^d \quad (1.12)$$

$$h_4 - h_3 \geq h_2^d \quad (1.13)$$

$$h_6 - h_5 \geq h_3^d \quad (1.14)$$

$$h_8 - h_7 \geq h_4^d \quad (1.15)$$

Unde  $\alpha_j$  este costul unei acțiuni unitare în puțul  $j$  și  $h_i^d$  este diferența dintre nivelele piezometrice necesare pentru perechea  $i$  de puncte.

### 1.3.2. Evacuarea apei din mine și amplasamente de construcții (epuisment)

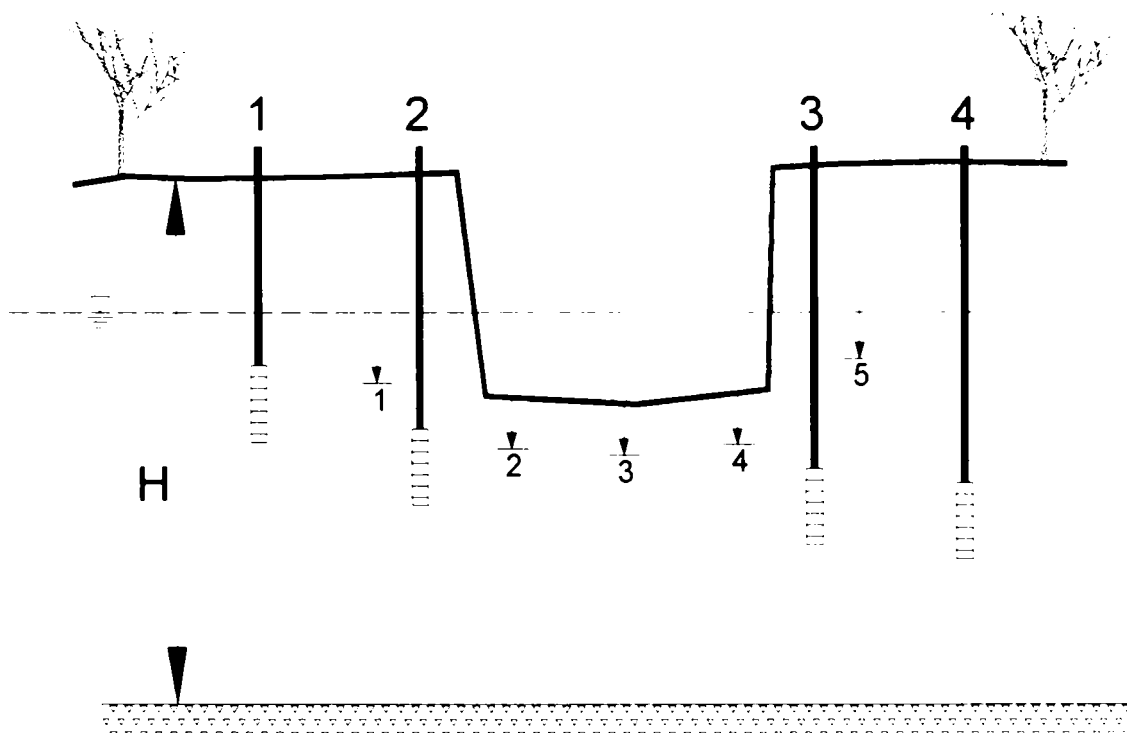


Figura 1.5 Exemplu de epuisment: solicitarea dată de cele patru puțuri trebuie să fie determinat astfel încât nivelul piezometric din cele cinci puncte să fie sub nivelul specificat

Construcțiile sub nivelul terenului implică deseori excavarea de sub nivelul apei freactice. Asemenea activități sunt excavarea pentru fundații, mine, construcții de tuneluri. Este foarte importantă eliminarea apei din zonele excavate și reducerea presiunii porilor terenului pentru asigurarea stabilității și evitarea alunecărilor de teren, a taluzurilor gropilor excavate. În aceste cazuri criteriul urmărit poate fi necesitatea de a menține nivelul piezometric al apei freactice sub cota bazei gropii excavate și găsirea schemei care minimizează numărul puțurilor sau minimizează cantitatea acțiunilor necesare pentru a îndeplini acest criteriu.

Un exemplu de astfel de problemă este descris în figura 1.5, unde nivelul piezometric inițial este marcat cu linie întreruptă.

Nivelele piezometrice necesare a fi realizate în cele cinci puncte sunt indicate de săgeți. Această coborâre a nivelului apei freatice este realizată prin pomparea combinată din cele patru puțuri. Obiectivul este de a minimiza cantitățile totale pompate. Problema poate fi formulată astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^4 q_j \quad (1.16)$$

astfel încât

$$h_1 \leq h_1^u \quad (1.17)$$

$$h_2 \leq h_2^u \quad (1.18)$$

$$h_3 \leq h_3^u \quad (1.19)$$

$$h_4 \leq h_4^u \quad (1.20)$$

$$h_5 \leq h_5^u \quad (1.21)$$

unde  $h_i^u$  este nivelul maxim al presiunii hidrostatice în punctul  $i$ .

Pentru epuismențele pe termen scurt costul realizării sistemului de epuismenț poate depăși bugetul disponibil pentru astfel de operații. Formularea de mai sus ia în considerare numai costul operațional. Introducerea în problemă a costului construcției va fi discutată în Capitolul 7.

### 1.3.4. Controlul subsidenței

În multe acvifere, scăderea excesivă a nivelului apei determină subsidența straturilor geologice superioare. Specialiștii în alimentările cu apă trebuie să distribuie extragerea apei prin pompare în timp și spațiu pentru prevenirea scăderii excesive a nivelului apei subterane în zonele critice ale acviferelor. Un exemplu de astfel de situație este reprezentat în figura 1.6, unde sunt folosite pentru pompare patru puțuri. Nivelul piezometric inițial, adică fără pompare, este reprezentată cu linie întreruptă. În timpul pompării, nivelul coboară sub nivelul indicat de săgeți în cele trei puncte, situate sub turnul înclinat.

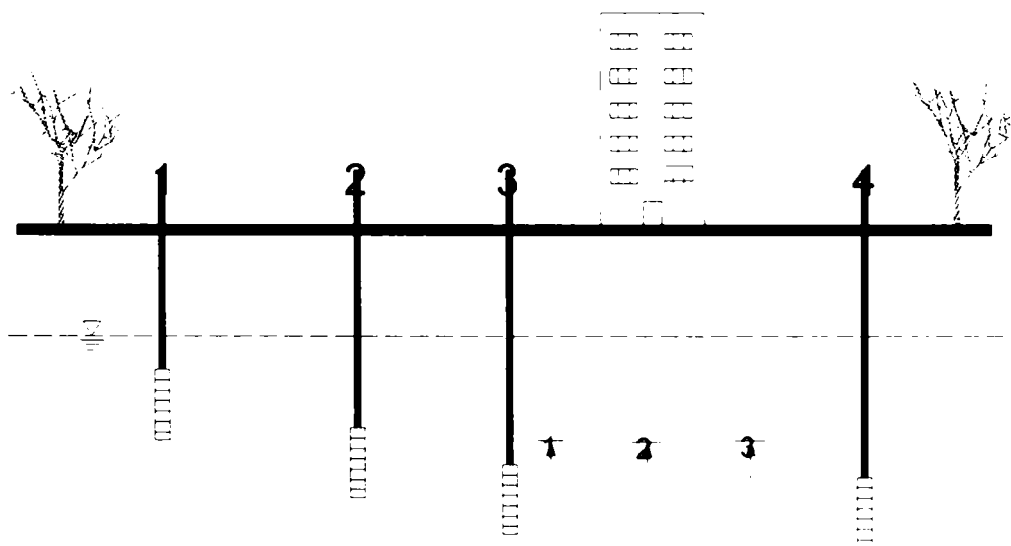


Figura 1.6 Controlul subsidenței: Extragerea apei prin pompare din cele patru puțuri nu trebuie să coboare nivelul hidrostatic sub nivelul indicat

Presupunând că solicitarea poate fi variat în timp, formularea problemei poate conține maximizarea cantităților total extrase, astfel încât nivelul piezometric în punctele indicate să nu scadă sub valoarea critică. Astfel problema poate fi pusă sub forma:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^T q_{j,t} \quad (1.22)$$

astfel încât

$$h_{1,t} \geq h', \quad t = 1, \dots, T \quad (1.23)$$

$$h_{2,t} \geq h', \quad t = 1, \dots, T \quad (1.24)$$

$$h_{3,t} \geq h', \quad t = 1, \dots, T \quad (1.25)$$

unde  $q_{j,t}$  este debitul în punctul  $j$  în perioada de timp  $t$ ,  $T$  este numărul total al perioadelor de timp  $t$  și  $h'$  restricțiile impuse nivelului piezometric la fiecare perioadă de timp.

O formulare alternativă a problemei se poate baza pe necesitatea satisfacerii cerinței de apă în fiecare perioadă de timp și producerea unei subsidențe minime. Aceasta se poate realiza prin maximizarea nivelelor piezometrice, astfel încât suma debitelor extrase să fie mai mare sau egal cu cerința de apă în perioada  $t$ ,  $Q_t$ .

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^T h_{i,t} \quad (1.26)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^4 q_{j,t} \geq Q_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.27)$$

#### 1.3.4. Intruziunea apei sărate

În multe regiuni de coastă ale lumii, pomparea excesivă a apei subterane determină intruziunea apei sărate în straturile de apă dulce. Specialiștii trebuie să exploateze în așa fel sistemul de pompare încât să oprească sau să inverseze direcția intruziunii apei sărate pentru a putea satisface în continuare cerințele de apă dulce. Această problemă este similară problemei de control a poluării și se formulează în același fel. În acest caz există o formulare mai complexă care presupune atât extragerea apei subterane, cât și injectarea de apă pentru controlul intruziunii apei sărate. Un exemplu este descris în figura 1.7, unde o pană de apă sărată intră în acvifer. Controlul intruziunii se asigură prin menținerea nivelelor piezometrice destul de ridicate față de nivelul mării în cele trei puncte indicate cu săgeți, în zonele în care e prezentă intruziunea. Extragerea apei dulci se realizează prin folosirea combinată a celor trei puțuri 1, 2, 3, iar injectia de apă dulce se realizează prin puțurile 4 și 5.



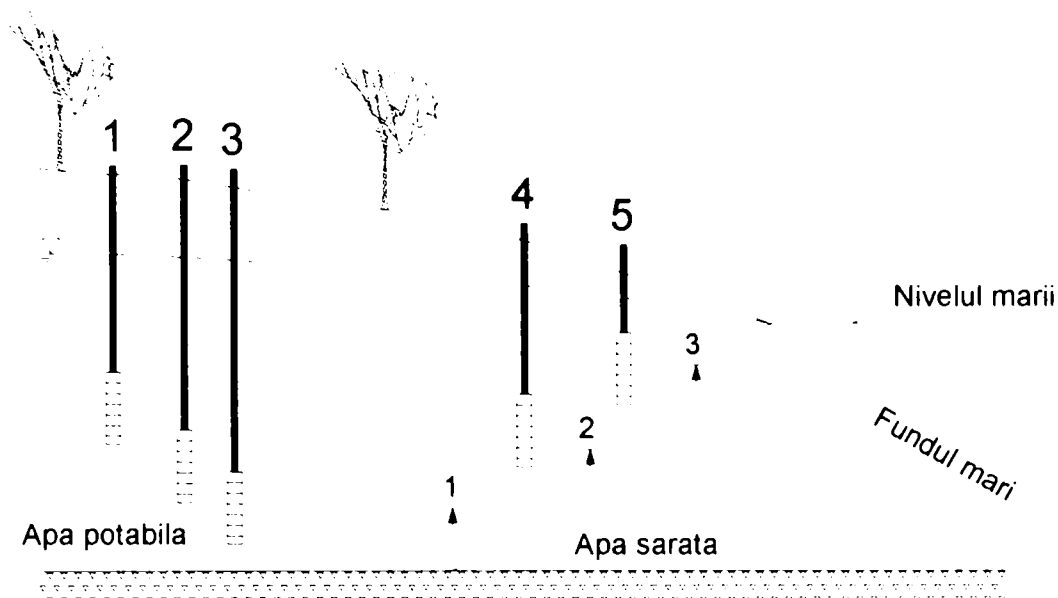


Figura 1.7 Controlul intruziunii apei sărate: trei puțuri de extracție, două de injectare și presiunile hidrostatice impuse în trei puncte sunt folosite pentru a satisface cerințele de apă dulce și pentru a controla intruziunea apei sărate.

O posibilă formulare a problemei se bazează pe maximizarea debitelor extrase în condițiile stopării intruziunii apei sărate. Se presupune că toată apa injectată provine din cantitatea suplimentară extrasă. Restricțiile sunt de asemenea impuse de nivelul maxim deci o solicitare acceptabilă în fiecare punct. Formularea rezultată este:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{j=1}^5 q_j \quad (1.28)$$

astfel încât

$$h_1 \geq h_1' \quad (1.29)$$

$$h_2 \geq h_2' \quad (1.30)$$

$$h_3 \geq h_3' \quad (1.31)$$

$$0 \leq q_j \leq q_j^u, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (1.32)$$

$$q_j \leq 0, \quad j = 4, 5 \quad (1.33)$$

unde  $h_i'$  este nivelul minim al nivelului piezometric din punctul  $i$ . De notat că debitele din puțurile 1, 2 și 3 trebuie să fie pozitive (extracție), iar debitele din puțurile 4 și 5 trebuie să fie negative (injectare).

### 1.3.5. Protecția zonelor umede împotriva secării

Zonele umede joacă un rol important în menținerea sistemelor ecologice regionale. În cazurile în care aceste zone umede sunt conectate hidraulic la apele subterane, implementarea extracției la scară largă a apei subterane poate să interfera hidrologia zonei umede prin interceptarea apelor de descărcare sau de drenare a apelor din zona umedă. Un astfel de caz este descris în figura 1.8, unde

extractia apei subterane este realizată prin folosirea combinată a trei puțuri de pompare. Obiectivul este maximizarea cantității de apă extrasă, în timp ce se controlează impactul asupra hidrologiei zonei umede.

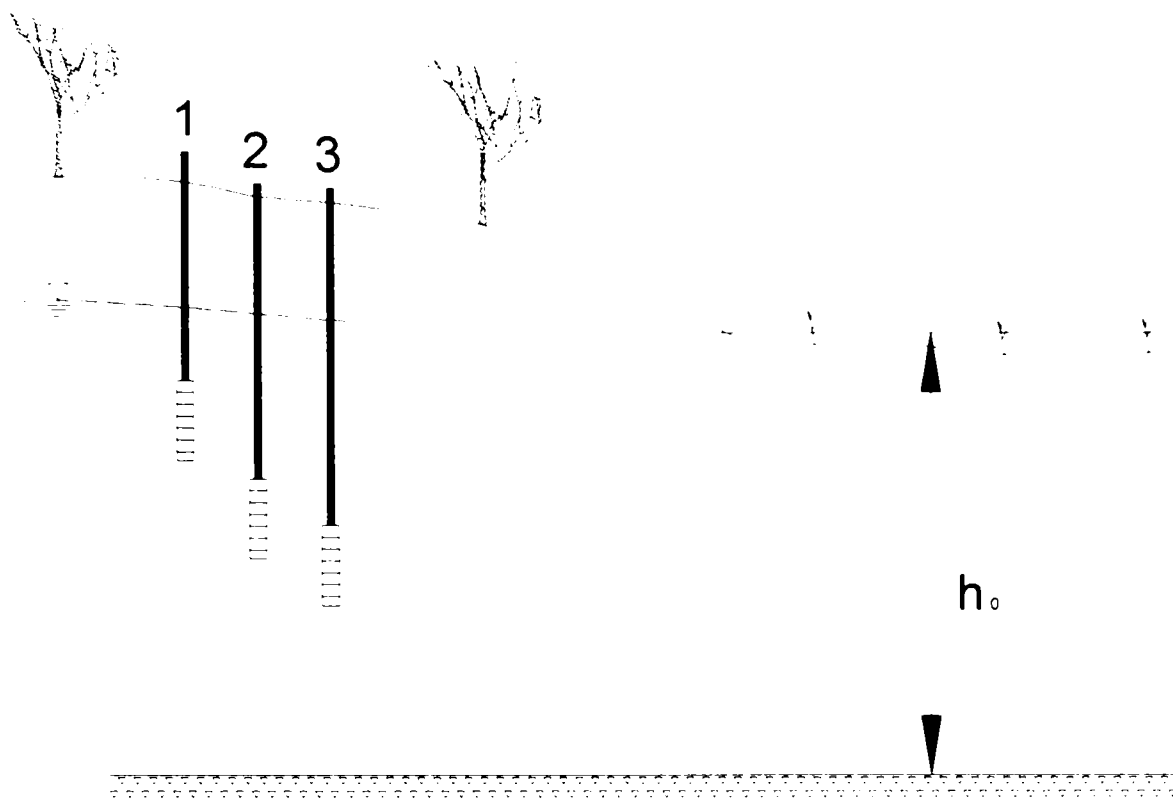


Figura 1.8 Protecția zonelor umede: Pomparea apei din trei puțuri nu trebuie să aibă efecte adverse asupra zonei umede

Această problemă poate fi formulată în manieră similară cu problema precedentă, a intruziunii apei sărate, aici nivelul piezometric în vecinătatea zonei umede trebuie să rămână peste un nivel specificat. O formulare alternativă poate să conste din menținerea constantă a afluxului de apă subterană spre zona umedă.

Se presupune cunoscut debitul  $Q_0$  al afluxului total de apă subterană spre zona umedă. Acceptând că pomparea apei subterane interceptează o parte din acest aflux, este necesar ca afluxul total în perioada pompării să se mențină peste o fracțiune  $\beta$  din  $Q_0$ . Formularea problemei este:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{j=1}^3 q_j \quad (1.34)$$

astfel încât

$$\sum_{i=1}^m C_i (h_i - h_0) \geq \beta Q_0 \quad (1.35)$$

unde un set de  $m$  puncte, notate cu  $i$ , sunt selectate în vecinătatea interfeței acvifer-zonă umedă,  $h_i$  este nivelul piezometric în punctele  $i$ ,  $h_0$  este nivelul piezometric în zona umedă,  $C_i$  este conductivitatea hidraulică între punctul  $i$  și zona umedă.

Această formulare presupune că  $h_0$  este constant, nu suferă variații sezoniere. O formulare mai complicată este aceea în care se ține seama de aceste variații sezoniere, fiind nevoie și de restricții privind pomparea apei în sezoanele secetoase.

## Cap. 2 SIMULAREA MIȘCĂRI APELOR SUBTERANE

Acest capitol este o prezentare scurtă a unor metode numerice și a notațiilor asociate lor, care vor fi folosite pe parcursul lucrării. Sunt prezentate metodele numerice asociate problemelor dinamicii apei subterane.

Modelele de optimizare ale utilizării apelor subterane necesită un model de simulare cu un grad mare de acuratețe și încredere.

### 2.1 Ecuațiile guvernante ale mișcării apei subterane

Ecuația guvernantă a mișcării apei subterane, în formă tridimensională, are expresia [15,16,46,39,33,34]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

unde  $K$  este conductivitatea hidraulică în fiecare direcție,  $q$  debitul unitar,  $S_s$  acumularea specifică. Această formă a ecuației presupune că coordonatele sunt aliniate după direcțiile principale ale anizotropiei. În cele mai aplicații practice această ecuație este scrisă pentru un domeniu limitat, având condițiile de margine (frontieră) de următoarea formă:

$$\Phi_1 h + \Phi_2 \frac{\partial h}{\partial n} = \Phi_3 \quad (2.2)$$

unde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  și  $\Phi_3$  sunt funcții specificate de timp și spațiu. Pentru un punct și un moment dat, ecuația 2.2 poate să genereze trei tipuri de condiții de margine:

1. Tip Dirichlet:  $\Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 \neq 0$ , real,  $\Phi_3$  număr real oarecare. Pentru problemele legate de apa subterană, această condiție înseamnă un nivel piezometric constant pe marginea domeniului

2. Tip Neumann:  $\Phi_1 = 0$ ,  $\Phi_2 \neq 0$ ,  $\Phi_3$  număr real oarecare, condiție echivalentă cu existența unui flux constant prin frontieră

3. Tip Robbins (Cauchy) sau alte condiții mixte:  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  și  $\Phi_3$  diferiți de 0.

Aceste trei tipuri de condiții sunt condiții liniare de margine. Condiții neliniare pot apărea atunci când, de exemplu, coeficienții  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  și  $\Phi_3$  depind de  $h$ .

Ecuația 2.1 este deseori integrată în direcția  $z$  (adâncimea), rezultând ecuația bidimensională:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.3)$$

unde  $T$  transmisivitatea hidraulică în direcțiile  $x$ ,  $y$ ,  $Q$  debitul mediu pe verticală,  $S$  coeficientul de acumulare. Ecuația 2.3 presupune că acviferul este mărginit.

Dacă acviferul este cu nivel liber și sistemul de axe este cel din figura 2.1 ( $z$  după direcția accelerației gravitaționale), atunci forma bidimensională a ecuației 2.1 devine:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x (h - \sigma) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y (h - \sigma) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = \eta_d \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.4)$$

unde  $\sigma$  este cota bazei acviferului față de un plan de referință,  $h - \sigma$  este grosimea acviferului,  $\eta_d$  este porozitatea acviferului. De notat că această ecuație este neliniară în raport cu variabila  $h$ .

Soluția ecuației generale tridimensionale în cazul în care acviferul este cu nivel liber este complicată, deoarece cota suprafeței libere a domeniului este necunoscută. Această problemă necesită o condiție neliniară complexă de margine pentru suprafața liberă. O alternativă este scrierea ecuației generale sub o formă cvasi – tridimensională, prin fragmentarea pe verticală a acviferului în straturi. Curgerea în fiecare strat este modelată prin ecuații bidimensionale (curgere orizontală bidimensională), straturile fiind legate între ele prin termenul de conductivitate hidraulică, care exprimă schimburile dintre straturi pentru a afla diferența dintre nivelele piezometrice din două straturi adiacente.

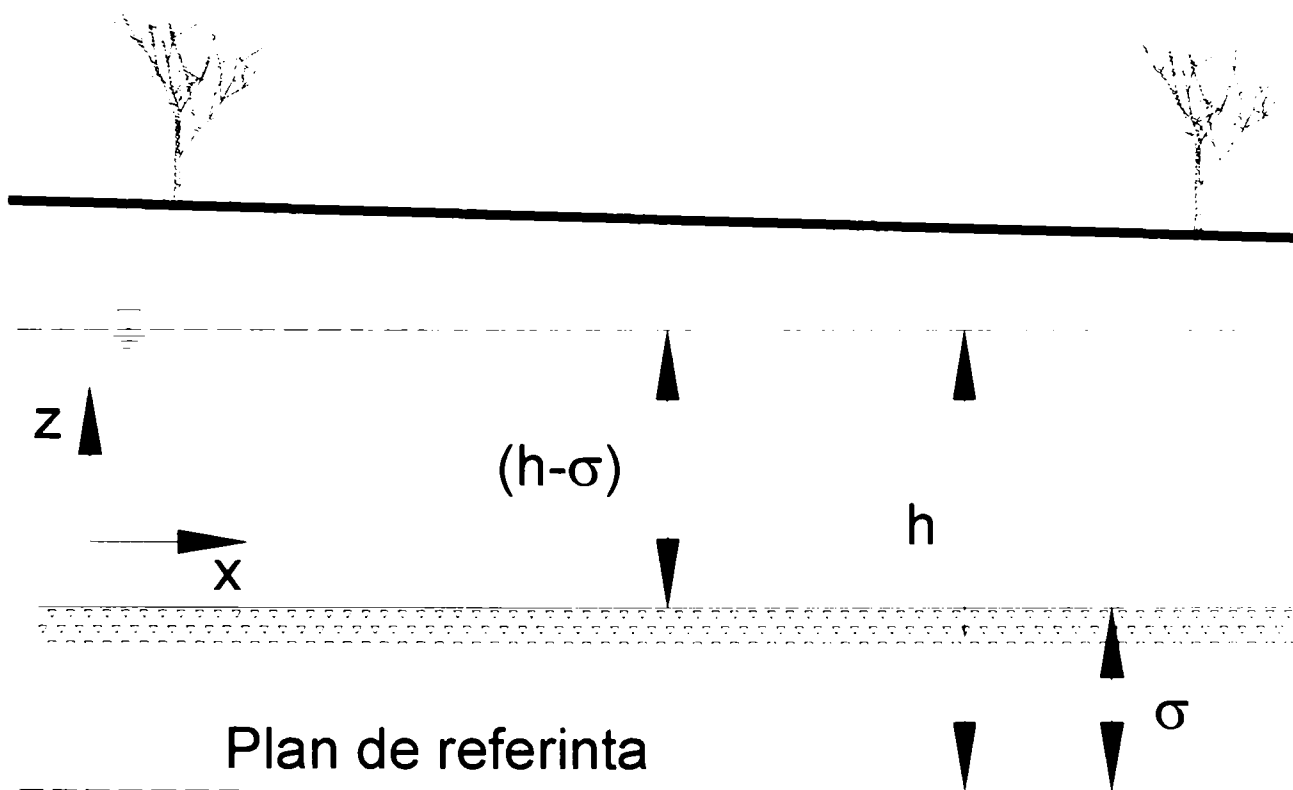


Figura 2.1 Variabilele folosite în ecuația 2.4

## 2.2 Legea lui Darcy

Legea lui Darcy este legea fundamentală care descrie relația dintre gradientul hidraulic și curgere. Legea este o funcție liniară, în care termenul de proporționalitate este conductivitatea hidraulică. Dacă se cunoaște nivelul piezometric, legea lui Darcy se poate utiliza pentru calculul vitezei de curgere [33,34]:

$$v_D = -K \Delta h \quad (2.5)$$

unde  $v_D$  este vectorul de viteză,  $K$  tensorul conductivității hidraulice,  $\nabla h$  gradientul hidraulic.

Vectorul  $v_D$  se referă la viteza Darcy, adică debitul ce trece prin mediul poros raportat la suprafața unitară a acviferului (suprafața secțiunii verticale). Valoarea reală a vitezei curentului subteran este dată de viteza apei prin pori. Viteza apei prin pori se poate determina prin împărțirea vitezei Darcy la porozitatea efectivă a mediului poros  $\eta_e$

$$v_p = \frac{1}{\eta_e} v_D \quad (2.6)$$

### 2.3 Metode numerice pentru modelarea dinamicii apei subterane

Multe aplicații practice necesită utilizarea metodelor numerice pentru determinarea soluțiilor ecuațiilor ce descriu fenomenele, deoarece rezolvarea analitică a acestor ecuații întâmpină greutăți datorită neomogenității și neregularității domeniului, condițiilor de frontieră neliniare. Dacă problema este suficient de simplă pentru a putea fi rezolvată analitic, atunci analiza ei nu necesită utilizarea optimizării. În consecință vom prezenta numai problemele rezolvate prin metode numerice [21,11,67,35,36].

Utilizarea la scară largă a calculatoarelor electronice de practicieni a făcut posibilă dezvoltarea unei diversități de metode numerice pentru rezolvarea problemelor dinamicii apei subterane. Aceste metode sunt: metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite, metode analitice, metode integrate a diferențelor finite și metoda integrării pe frontieră.

Este important să se înțeleagă câteva concepte de bază ale acestor metode, pentru că multe probleme tratate în această lucrare se bazează pe aceste concepte. Fără a nu neglija oricare altă metodă numerică, trebuie să prezentăm metoda diferențelor finite aplicate ecuațiilor dinamicii apei subterane. Această metodă are avantajul că este destul de simplu de utilizat în multe modele de simulare, cum ar fi în programul MODFLOW [62], ASMWIN sau o serie de programe prezentate în Anexa 1.

#### 2.3.1 Metoda diferențelor finite

Principiul de bază pentru aflarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale, în cele mai multe metode numerice, este transformarea ecuațiilor diferențiale în sisteme de ecuații algebrice, prin definirea variabilelor de stare în diferite puncte, numite noduri. Pasul cheie în construcția ecuațiilor în diferențe finite este discretizarea domeniului. Componentele primare ale acestei discretizări sunt nodurile și celulele, care reprezintă o locație specifică în timp și spațiu. Soluțiile ecuațiilor cu diferențe finite sunt valorile variabilelor de stare din fiecare nod. Pentru ușurarea calculelor, nodurile se identifică printr-o schemă cu indici. Un exemplu de discretizare este indicat în figurile 2.2, 2.3, 2.4, 2.5. Există patru nivele posibile de discretizare, trei pentru dimensiuni spațiale și una pentru timp. De aceea, ordinea indicilor pentru un nod este  $i, j, k, t$ , unde  $i, j, k$  sunt indicii spațiali iar  $t$  este indicele temporal. Găsirea soluțiilor

problemei implică determinarea valorilor variabilelor de stare pe domeniul complet. Metodele numerice determină aceste valori în fiecare nod, iar variabila de stare într-un nod este notat cu  $h_i$ , care reprezintă, în problemele legate de dinamica apei subterane, valoarea nivelului piezometric al nodul respectiv.

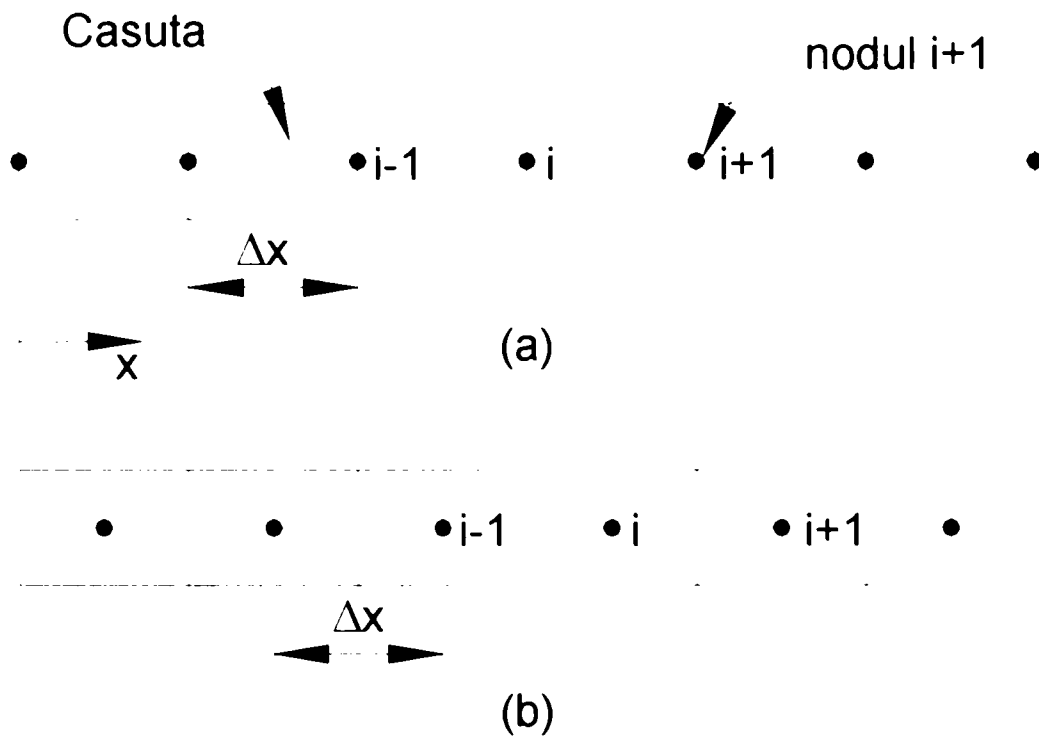


Figura 2.2 Discretizare unidimensională. În figura (a) nodurile se află pe latura fiecărei celule, iar în figura (b) nodurile se află în centrul celulelor

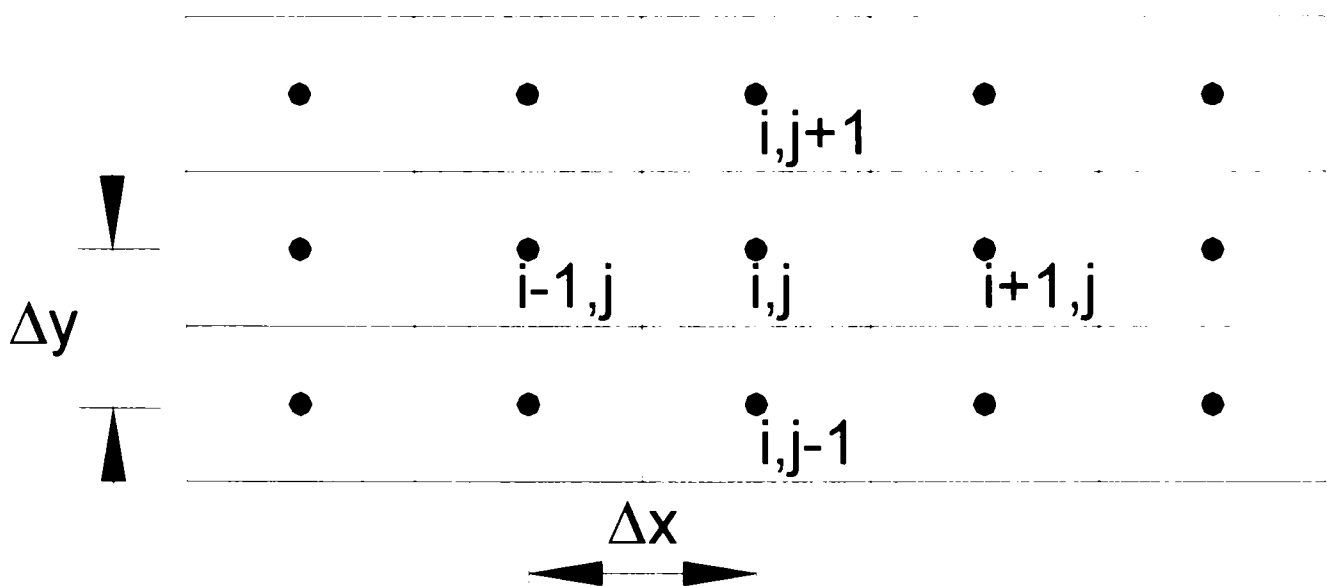


Figura 2.3 Discretizare bidimensională cu noduri în centrul celulelor

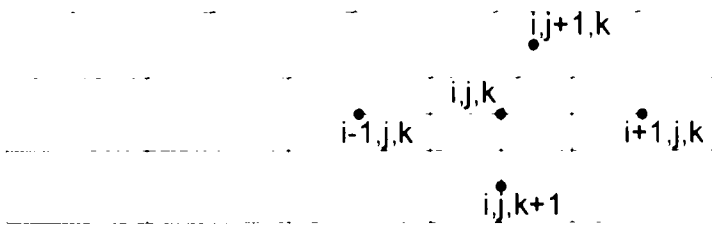
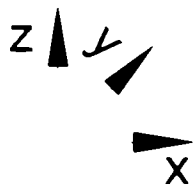


Figura 2.4 Discretizare tridimensională cu noduri în centrul celulelor

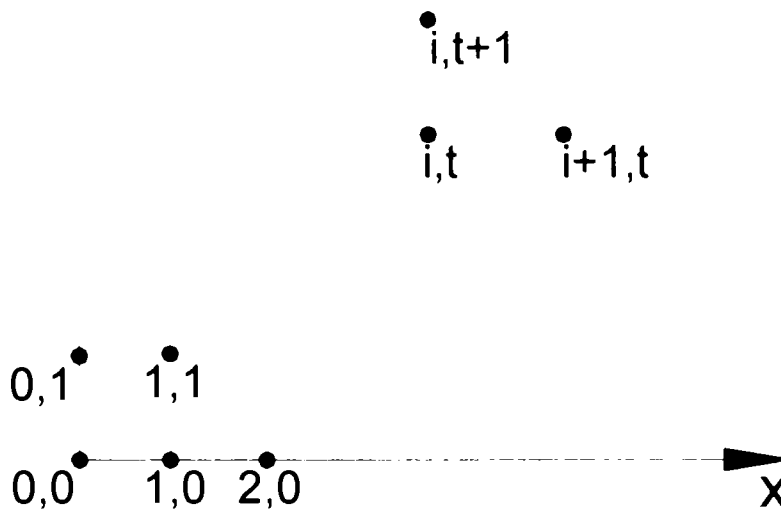


Figura 2.5 Discretizare spațială și temporală

Conceptul de bază în metoda diferențelor finite este aproximarea derivatelor prin diferențele valorilor dintre două noduri adiacente.

Prima derivată poate fi aproximată prin relațiile 2.7 (nodul următor) și 2.8 (nodul anterior):

$$\frac{dh_i}{dx} = \frac{(h_{i+1} - h_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{(h_{i+1} - h_i)}{\Delta x} \quad (2.7)$$

$$\frac{dh_i}{dx} = \frac{(h_i - h_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = \frac{(h_i - h_{i-1})}{\Delta x} \quad (2.8)$$

A doua derivată se poate aproxima cu relația 2.9

$$\frac{d^2 h_i}{d^2 x} = \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.9)$$

**Exemplu de discretizare unidimensională**

Modul în care aceste aproximări ale derivatelor transformă ecuația diferențială în ecuație algebrică este demonstrat în exemplul simplu de mai jos.

Se consideră o curgere unidimensională într-un mediu omogen fără surse de alimentare sau extracții prin pompare. Ecuația care descrie fenomenul este următoarea:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Deoarece conductivitatea hidraulică nu depinde de x, acesta se poate extrage din derivată și eliminată, rezultând:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (2.11)$$

Substituind această derivată în ecuația (2.9) rezultă:

$$\frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (2.12)$$

Se consideră un domeniu format din 4 noduri (figura 2.6). Se cunosc valorile nivelelor piezometrice în nodurile 1 și 4 (nodurile exterioare). Aplicând relația 2.12 în nodurile 2 și 3, distanța dintre noduri fiind constantă, rezultă următoarele două ecuații:

$$\begin{aligned} h_3 - 2h_2 + h_1 &= 0 \\ h_4 - 2h_3 + h_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

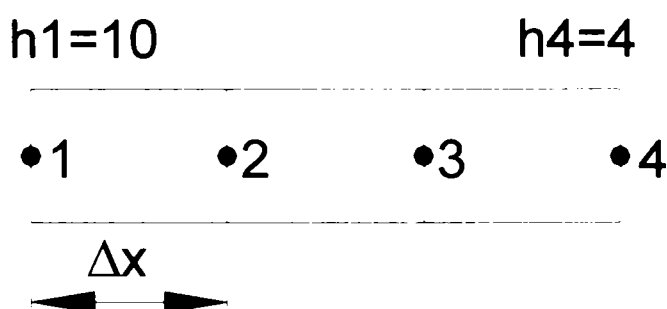


Figura 2.6 Exemplu de discretizare unidimensională

Aceste două ecuații se scriu sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 \\ -h_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Prin rezolvare rezultă valorile nivelelor piezometrice în nodurile interioare 2 și 3.

Din  $h_1 = 10$  și  $h_4 = 4 \Rightarrow h_2 = 8, h_3 = 6$ .



De notat că aceste valori variază liniar, așa cum ne-am așteptat, deoarece ecuația 2.10 și condițiile de margine sunt funcții liniare și conductivitatea hidraulică este constantă.

Pentru o ecuație diferențială cu mai mulți termeni se aplică aproximarea derivatelor cu diferențele finite pentru fiecare termen. De exemplu, pentru o curgere bidimensională într-un mediu cu transmisivitate omogenă, ecuația guvernantă este:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.15)$$

O posibilă aproximare în diferențe finite este:

$$\frac{h_{i-1,j,t} - 2h_{i,j,t} + h_{i+1,j,t}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j,t-1} - 2h_{i,j,t} + h_{i,j,t+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,t} - h_{i,j,t-1}}{\Delta t} \quad (2.16)$$

unde valorile nivelului piezometric în noduri este acum afectat de indici pentru ambele direcții și timp (pas de timp anterior). Spre deosebire de primul exemplu, această problemă necesită pe lângă condiții de margine și condiții inițiale. Sistemul de ecuații se construiește pentru momentul  $t$  cu informațiile rezultate din sistemul pentru momentul  $t - 1$ . Pentru momente de timp succesive, soluțiile rezultate la momentul  $t - 1$  se folosesc ca și condiții inițiale pentru momentul  $t$ . La fel ca în exemplul precedent, ecuația 2.16 se poate scrie pentru fiecare nod  $i, j$  și momentul de timp  $t$ . Rezultă un număr suficient de ecuații pentru o soluție unică a sistemului la fiecare moment de timp.

Este posibilă adăugarea altor forme adiționale de reprezentare a sistemului dinamicii apei subterane: condiții de margine de tipul 2 și 3, debite de ieșire sau intrare în acvifer, discretizare cu rețea neuniformă de puncte, variabilitatea spațială și temporală a caracteristicilor acviferului. Toate aceste metode au în comun transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații algebrice. Soluția problemelor constă în determinarea valorilor nivelului piezometric în nodurile discretizării.

### 2.3.2 Serii Taylor

Seria Taylor constituie metoda de bază de evaluare a erorilor în aproximările numerice din metodele din paragraful precedent. O funcție continuă și indefinit derivabilă pe un domeniu, se poate reprezenta printr-o serie infinită. Forma generală a acestei serii se numește serie Taylor, în care valoarea funcției într-un punct  $x$  al domeniului se determina cu ajutorul valorii funcției într-un punct vecin  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{2!} + \dots \right] \quad (2.17)$$

Pentru o funcție unidimensională, forma generală se reduce la:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \dots \quad (2.18)$$

Seria Taylor este folosită în multe aspecte ale analizei numerice. De exemplu, pentru ecuația 2.7, utilizând seria Taylor, se pot deduce ecuațiile care vor urma.

Prima ecuație rezultă rearanjând ecuația 2.18, pentru a izola într-un membru expresia primei derivate:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (x - x_0) - \dots \quad (2.19)$$

Notând  $x - x_0 = \Delta x$ , rezultă:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \Delta x - \dots \quad (2.20)$$

prin eliminarea tuturor derivatelor de ordin mai mare sau egal cu 2, rezultă forma următoare, echivalentă cu 2.7:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \cong \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.21)$$

Eroarea în această aproximare este suma tuturor termenilor eliminați din seria infinită. Această eroare este dominată de primul termen eliminat, adică derivata a doua, care este o funcție de  $\Delta x$ , acesta se notează cu  $O(\Delta x)$ .

### 2.3.3 Acuratețea metodelor numerice

Un aspect important al problemelor rezolvate numeric prin introducerea aproximărilor derivatelor cu diferențe finite este eroarea comisă. În general, cu cât rețeaua de discretizare este mai rară, cu atât eroarea este mai mare. Modul de alegere a rețelei de discretizare prezintă o importanță mare în problemele de optimizare. Cum vom vedea în capitolul 4, pentru rezolvarea problemelor dinamicii apei subterane e nevoie de calculul derivatelor nivelului piezometric sub acțiunea solicitări sub care se află acviferul. Alegerea punctelor în care se calculează aceste derivate afectează precizia calculului acestora. În paragraful precedent s-a arătat că eroarea efectuată prin înlocuirea derivatelor parțiale cu diferențe finite depinde în mare măsură de primul termen eliminat din seria Taylor, care este:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x \quad (2.22)$$

Se poate vedea că dimensiunea acestui termen depinde de pasul ales  $\Delta x$ . Prin alegerea unui pas  $\Delta x$  cât mai mic, se minimizează și eroarea. Deoarece rezolvarea sistemului de ecuații algebrice se realizează prin aplicarea mai multor operații aritmetice, în calcule apar oricum rotunjiri, care dau erori.

Eroarea prin rotunjire se produce atunci când valoarea reală a unui număr este degradată prin aplicarea mai multor operații aritmetice. Un exemplu de apariție a erorii de rotunjire este acela în care se face diferența dintre două numere apropiate ca valoare, cu precizii limitate.

Eroarea de trunchiere și de rotunjire influențează în mod opus calculele numerice. Acuratețea maximă se realizează atunci când cele două tipuri de erori sunt apropiate ca valoare. Procedurile de estimare a celor două tipuri de erori și determinarea rețelei de puncte optime pentru discretizare sunt prezentate în bibliografie [51].

Trebuie avut grijă, de asemenea la alegerea pasului de timp, deoarece de corectitudinea acestuia depinde stabilitatea soluției.

Schema în sens invers cu diferențe finite ( $t_i - t_{i-1}$ ) aplicat domeniului este stabil fără condiții (necondiționat). Acest lucru implică faptul că soluția se va comporta într-un mod fizic realist, indiferent de pasul de timp ales. Desigur, eroarea de aproximare este proporțională cu mărimea pasului de timp, pentru o acuratețe mai mare trebuie ales un pas de timp cât mai mic.

Schema în sens direct cu diferențe finite ( $t_{i+1} - t_i$ ) este stabil cu condiții, înțelegând prin acesta că dacă pasul de timp este mai mare decât o anumită valoare, atunci eroarea soluției crește nelimitat și poate fi lipsită de înțeles. De aceea este important de știut care din schemele numerice pot fi utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor care guvernează mișcarea apei subterane și care sunt limitările acestor metode.

### **2.3.4 Răspunsul liniar al nivelului piezometric la solicitare**

Metodele descrise în această lucrare pentru determinarea soluțiilor problemelor de optimizare ale utilizării apelor subterane se bazează pe principiul suprapoziției. Acest principiu consideră că suma soluțiilor particulare ale ecuațiilor diferențiale parțiale, liniare și omogene cu condiții de margine liniare sub forma (2.2), sunt de asemenea soluțiile ecuației diferențiale generale. Ecuația (2.1) a mișcării apei subterane cu condiții de margine este liniară dar nu este omogenă. Ecuația poate fi adusă la o formă omogenă dacă termenul  $q$  este eliminat, iar influența acestuia este introdusă prin condițiile de margine. Soluția particulară a ecuației diferențiale este soluția care corespunde unui set particular de condiții de margine impuse domeniului. Principiul suprapoziției permite ca impactul combinațiilor de modalități de solicitări asupra nivelului piezometric să poată fi prognozată fără simularea repetată a fiecărui set nou de condiții de margine (frontieră).

Principiul suprapoziției este baza metodelor aplicate în mod obișnuit în hidraulica subterană pentru aflarea influenței puțurilor multiple de extracție sau reîncărcare. Principiul suprapoziției se poate aplica în dinamica mișcării apei subterane în regim tranzitoriu atâta timp cât ecuația guvernantă este liniară, iar condițiile de margine (inclusiv solicitarea) depind de timp. Principiul suprapoziției nu este aplicabil pentru ecuații guvernante neliniare, ca în cazul simulării curgerii fără condiții de margine, sau în cazurile în care condițiile de margine nu sunt liniare [15,87,88].

### **2.3.5 Consistență, stabilitate, convergență**

Principalele metode rezolvare asociate diferitelor formulări matematice sunt prezentate în figura 2.7 [35].

*Metodele analitice exacte sau aproximative* furnizează soluția sub forma unor funcții definite în domeniul în care se desfășoară fenomenul precum și în timp.

Avantajele soluțiilor analitice constau îndeosebi în ușurința efectuării unei analize privind influența diferiților parametri în desfășurare mișcării. Dezavantajele sunt că soluțiile analitice se pot găsi numai în cazurile particulare ale unor mișcări sau domenii relativ simple.

Metodele numerice oferă posibilitatea rezolvării tuturor problemelor la limită sau cu condiții inițiale corect formulate. Principalele metode numerice sunt cele prezentate în figura 2.7 și anume:

- metoda diferențelor finite (MEDIF),
- metoda volumelor finite (MEVFIN),
- metoda elementelor finite (MEFIN),
- metoda elementelor de frontieră (MEFRO),
- metoda caracteristicilor (MECAR),
- metoda drumului aleator (MEDA) Random - Walk.

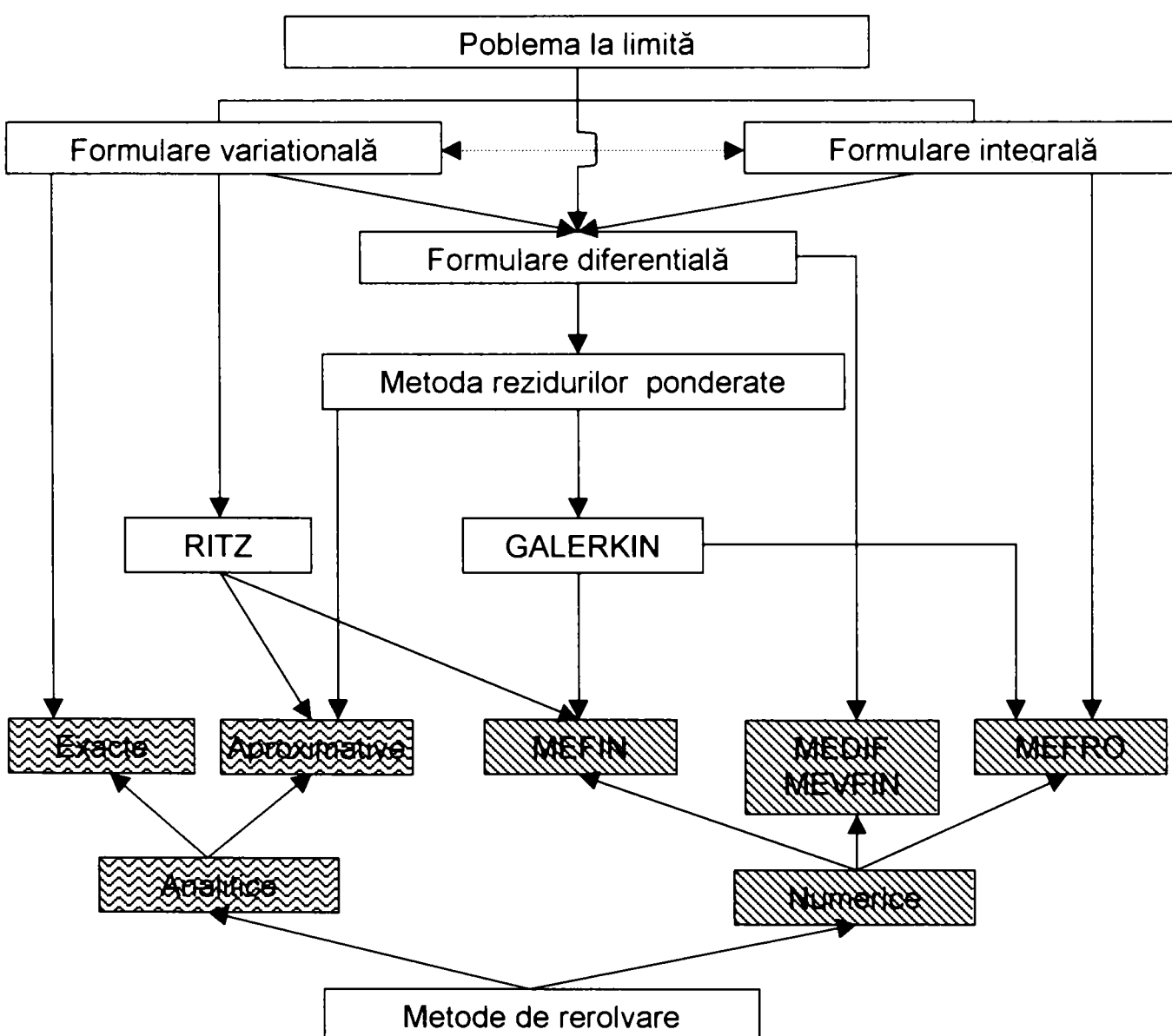


Figura 2.7 Formulări ale problemelor la limită și metode de rezolvare

Metodele cu diferențe finite (MEDIF, MEVFIN) și cele cu elemente finite (MEFIN) presupun **discretizarea** domeniului de definiție (spațio-temporal) și

substituirea operatorului diferențial cu un operator algebric pentru valorile funcției în nodurile (elementele) discretizării.

**Consistența** se referă la operatorul algebric al schemei cu diferențe și constă în faptul că prin trecerea la limită soluția ecuației cu diferențe trebuie să convergă la soluția exactă a ecuației cu operatorul diferențial.

În cazul problemelor cu evoluție când este prezentă și variabila timp **convergența** nu mai este asigurată numai prin simpla consistență a ecuațiilor diferențe în raport cu discretizarea spațială și temporală. În acest caz trebuie analizată suplimentar problema **stabilității** soluției.

**Stabilitatea** schemei numerice presupune în esență că eroarea (diferența față de soluția exactă) să nu crească în timp.

Astfel se ajunge la o exprimare mai complexă a condiției de convergență (Teorema de echivalență Lax) schematizată în figura 2.8.

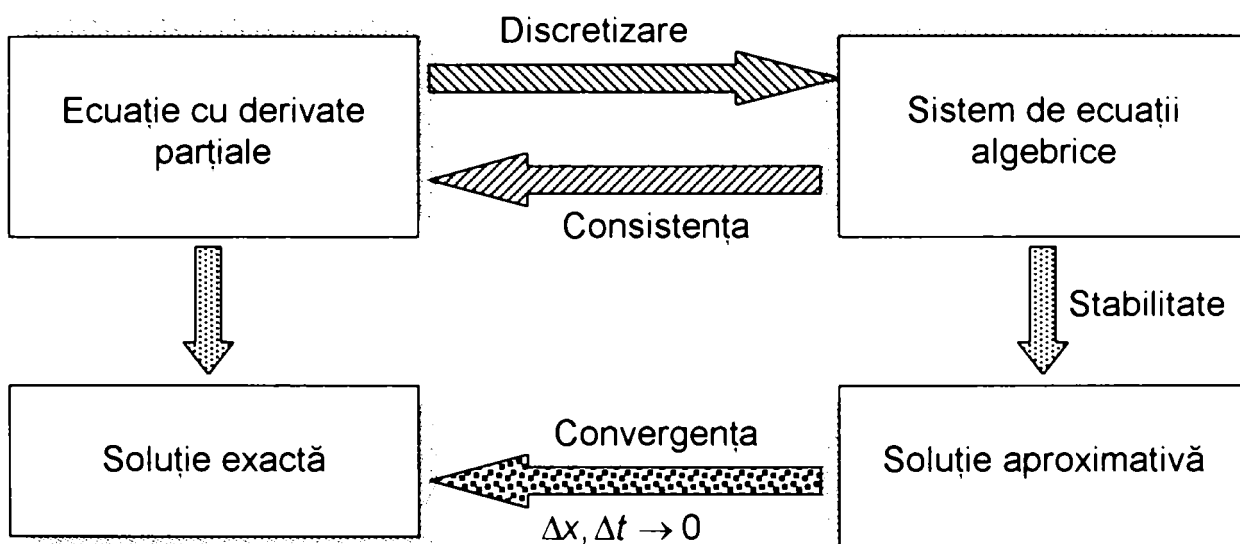


Figura 2.8 Relația conceptuală între consistență, stabilitate și convergență.

## Cap. 3 CONSTRUCȚIA MODELULUI DE OPTIMIZARE

În acest capitol sunt prezentați pașii necesari construcției modelului de optimizare al dinamicii apei subterane. Construcția modelului de management al apei subterane este în mare parte similară cu construcția unui model de simulare. În primul rând este definit enunțul formulării, care joacă rolul modelului conceptual. Apoi, este definit un model de management al dinamicii apei subterane, care este caracterizat de tipuri de obiective și funcții de restricție utilizate pentru definirea modelului. Trebuie identificați parametrii modelului de management, inclusiv funcția obiectiv și coeficienții din funcțiile de restricție. În final, modelul este calibrat și folosit pentru proiectare. Construcția modelului implică un număr de decizii subiective. Acest capitol conține discuții și exemple de diferite tipuri de decizii care trebuie luate. Pentru simplificarea prezentării, modelul este limitat la un acvifer sub presiune cu curgere staționară și cu condiții de margine liniare. Metoda descrisă aici este extinsă la alte cazuri mai complexe în capitolele următoare.

### 3.1 Definirea enunțului formulării

Primul pas în dezvoltarea modelului de management al dinamicii apei subterane este definirea enunțului modelului. Acest enunț trebuie să răspundă la câteva întrebări:

- ce trebuie să se realizeze prin managementul apei subterane,
- care sunt obiectivele acestui management,
- care sunt restricțiile impuse modelului.

Acest enunț poate include mai multe obiective: minimizarea costurilor, maximizarea cantității producției de apă sau minimizarea impactului asupra mediului. Restricțiile trebuie să includă cerințele ca costurile să rămână în limitele bugetului specificat, să fie satisfăcute condițiile de protecție a mediului, solicitările (acțiunile, tensiunile) să fie limitate de considerațiile tehnice sau ca tensiunile totale să ducă la satisfacerea cerințelor producției. Enunțul modelului trebuie să definească complet și în mod clar obiectivele și restricțiile problemelor particulare. La crearea enunțului modelului trebuie să colaboreze proiectantul cu cel ce ia deciziile. Această colaborare este deseori critică pentru succesul proiectului. Procesul definirii restricțiilor și obiectivelor poate influența definirea clară a problemei și poate elimina obiectivele contradictorii sau suplimentare. Optimizarea furnizează cadrul în care această colaborare poate avea loc. Pentru problemele complexe nu pot fi direct integrate în cadrul optimizării alte considerații cum ar fi cele politice, legale sau sociale. Totuși, definirea problemei ca o problemă de optimizare poate fi benefică pentru orice tip de proiect.

### 3.2 Variabile de decizie, funcții de restricție și obiective

Enunțul problemei definită manual trebuie transformată într-o reprezentare matematică. Exemplul prezentat în secțiunea 1.3 transformă un model general conceptual într-o formă matematică corespunzătoare.

Enunțul problemei sugerează caracteristicile problemei care necesită definirea variabilelor de decizie. În acest capitol, variabilele de decizie se vor limita la nivelele piezometrice și la tensiunile din locații specifice. Când acest enunț se referă la un acvifer modelat printr-o schemă numerică (discretizat printr-o rețea de puncte) aceste locații specifice sunt nodurile rețelei. Acțiunile (solicitările, tensiunile) aplicate acviferului se reduc la aceste noduri. Nodurile rețelei (discretizării) se aleg în așa fel încât locațiile unde se aplică solicitările (extracție / injecție) și se cer nivelurile piezometrice să coincidă cu poziția geografică a acestor puncte.

Numărul obiectivelor posibile și a funcțiilor de restricție este foarte mare și sunt limitate doar de imaginația proiectantului. Aici vom prezenta câteva forme generale liniare de obiective și restricții care se pot utiliza pentru formularea diverselor funcții specifice. De asemenea, vom oferi exemple de restricții și obiective cel mai des utilizate. Aceste formulări generale vor fi folosite pentru studierea metodelor necesare rezolvării modelului de management. Alte obiective și restricții mai complexe sunt prezentate în capitolele următoare.

Funcțiile de restricție pot avea orice formă, variabilele acestor funcții sunt nivelele piezometrice și tensiunile aplicate acviferului. Forma generală a funcțiilor de restricție este indicată de ecuația 1.2, o ecuație generală care conține nivelele piezometrice și tensiunile asupra acviferului din toate punctele [38,1,79,2,93].

Practica arată că în cele mai multe cazuri restricțiile sunt ecuații liniare de nivele piezometrice și tensiuni aplicate acviferului. În acest capitol ne vom limita numai la aceste forme liniare.

#### 3.2.1 Restricții asupra acțiunilor

În construcția modelului de optimizare considerăm  $n$  locații (puncte de amplasare a forajelor) de aplicare a solicitărilor (debite de injecție / extracție) asupra acviferului. Forma generală a restricției asupra acestor acțiuni este o inecuație (3.1) scrisă ca o combinație liniară a lor în aceste  $n$  locații.

$$\alpha_{1,k}^q q_1 + \alpha_{2,k}^q q_2 + \dots + \alpha_{j,k}^q q_j + \dots + \alpha_{n,k}^q q_n + \beta_k^q \geq 0 \quad (3.1)$$

unde  $\alpha_{j,k}^q$  și  $\beta_k^q$  sunt coeficienți specifici pentru restricția  $k$ , iar indicii reprezintă locația din domeniu în care sunt aplicate acțiunile. Variabilele  $q_j$  reprezintă extracțiile sau injecțiile de apă în acvifer. Restricția generală (3.1) se repetă ori de câte ori este nevoie, cu valori diferite ale coeficienților, pentru descrierea tuturor restricțiilor asupra acțiunilor. În cele ce urmează se prezintă câteva exemple de restricții specifice și interpretarea lor fizică, care derivă din forma generală (3.1).

### Tensiuni limită

Restricțiile se referă în mod obișnuit la limitarea ratei de extragere sau reîncărcare a acviferului sau pentru determinarea tipului de apă care poate fi injectată acviferului. Restricția tensiunilor limită se obține din forma generală (3.1) prin reținerea unui singur termen:

$$\alpha_{j,k}^q q_j + \beta_k^q \geq 0 \quad (3.2)$$

Valoarea maximă și minimă a tensiunilor în locația j se exprimă astfel:

$$q_j \leq q_j^u \quad (3.3)$$

$$q_j \geq q_j^l \quad (3.4)$$

unde  $q_j^u$  și  $q_j^l$  sunt valorile maximă și minimă a debitului de extracție sau reîncărcare a acviferului în locația j. Restricția se poate repeta pentru toate cele n locații considerate. În general, valoarea maximă a tensiunilor este aleasă astfel încât zonele din vecinătatea acviferului să se acomodeze cu solicitarea aplicată acviferului, iar valoarea minimă este dictată de considerente practice.

### Limitele solicitării totale

Este deseori util limitarea debitului total aplicat acviferului sau unei părți din el, pentru a satisface cerințele de apă sau pentru a limita extragerea apei. Aceasta se poate realiza prin însumarea tensiunilor totale. Aceste restricții au forma:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_n \geq Q_k^l \quad (3.5)$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_n \leq Q_k^u \quad (3.6)$$

unde  $Q_k^l$  și  $Q_k^u$  sunt limitele minimă și maximă a debitului total. Deoarece în unele locații solicitarea se referă doar la reîncărcarea acviferului, restricțiile sub forma (3.1) cu coeficienți adecvați, servesc la controlul ratei de reîncărcare a acviferului.

#### 3.2.2 Restricții asupra nivelelor piezometrice

În construcția modelului de optimizare se consideră l locații specifice de observare a răspunsului nivelului piezometric la solicitare. Forma generală a restricțiilor asupra nivelelor piezometrice este o combinație liniară a acestor l nivele sub forma:

$$\alpha_{1,k}^h h_1 + \alpha_{2,k}^h h_2 + \dots + \alpha_{i,k}^h h_i + \dots + \alpha_{l,k}^h h_l + \beta_k^h \geq 0 \quad (3.7)$$

unde  $\alpha_{j,k}^h$  și  $\beta_k^h$  sunt coeficienți specifici pentru restricția k, iar indicii reprezintă locația din domeniu în care sunt observate nivelele piezometrice. Nivelul piezometric în punctul j rezultă din solicitarea aplicată în toate cele n puncte. În cele ce urmează se prezintă câteva exemple de restricții specifice și interpretarea lor fizică, care derivă din forma generală (3.7).



### Restricții asupra nivelului piezometric

Cea mai simplă formă a restricției este o funcție liniară care depinde de un singur nivel piezometric:

$$\alpha_{i,k}^h h_i + \beta_k^h \geq 0 \quad (3.8)$$

Prin rearanjarea și definirea coeficienților, limita maximă și minimă a nivelului piezometric preia forma:

$$h_i \leq h_i^u \quad (3.9)$$

$$h_i \geq h_i^l \quad (3.10)$$

unde  $h_i^u$  și  $h_i^l$  sunt valorile maximă și minimă a presiunii piezometrice. Aceste restricții se folosesc pentru a controla subsidența sau pentru a se asigura că nivelul piezometric rămâne în interiorul unei unități geologice date.

### Restricții privind diferența dintre nivelurile piezometrice

Prin reținerea a doi termeni și definirea adecvată a coeficienților, relația (3.7) dă restricția supra diferenței nivelului piezometric:

$$h_{k_1} - h_{k_2} \geq h_k^d \quad (3.11)$$

unde  $h_k^d$  este limita specificată a diferenței de nivel piezometric din restricția  $k$ , iar  $h_{k_1}$  și  $h_{k_2}$  sunt nivelele piezometrice în punctele  $k_1$  și  $k_2$ . Restricțiile de această formă sunt utilizate pentru a limita gradientul hidraulic, vertical sau orizontal.

Dacă ambii membri ai inecuației (3.11) se împart cu  $\Delta x$ , distanța dintre punctele  $k_1$  și  $k_2$ , atunci restricția poate fi interpretată ca o restricție asupra gradientului hidraulic pe o anumită direcție sub forma:

$$\frac{h_{k_1} - h_{k_2}}{\Delta x} \geq \frac{h_k^d}{\Delta x} \quad (3.12)$$

Scrisă sub această formă, este clar că această restricție limitează inferior componenta vectorului gradient hidraulic pe direcția pe care s-a măsurat distanța dintre punctele  $k_1$  și  $k_2$ . În final, relația (3.12) poate fi multiplicată cu  $K$  – conductivitatea hidraulică – dintre punctele  $k_1$  și  $k_2$ , rezultând:

$$K \left( \frac{h_{k_1} - h_{k_2}}{\Delta x} \right) \geq K \frac{h_k^d}{\Delta x} \quad (3.13)$$

care este acum de fapt reprezentată în termeni de viteză sau flux. Această relație dintre nivelul piezometric și viteză pentru mai multe dimensiuni este prezentată în capitolul 6.

### Restricții asupra fluxului pe marginea domeniului

Această restricție se referă la controlul schimburilor dintre acvifer și alte corpuri de apă vecine. Fluxul printr-un singur punct poate fi descris prin:

$$C_i(h_i - H_i) \quad (3.14)$$

unde  $h_i$  este nivelul piezometric într-un punct  $i$  situat lângă marginea domeniului,  $H_i$  este nivelul piezometric în corpul de apă adiacent,  $C_i$  este conductanța dintre cele două puncte. Dacă de exemplu,  $F_i$  este fluxul specificat care trebuie realizat, restricția are forma:

$$C_i(h_i - H_i) \geq F_i \quad (3.15)$$

Această restricție este diferită de (3.13) pentru că se presupune cunoscută valoarea  $H_i$ . Ecuația (3.15) poate fi rescrisă astfel:

$$h_i \geq \frac{F_i}{C_i} + H_i \quad (3.16)$$

care de fapt este o formă a restricției simple impuse nivelului piezometric.

Poate fi necesar și limitarea fluxului pe frontieră într-o regiune a acviferului. În acest caz restricția se poate scrie ca suma fluxurilor individuale astfel:

$$\sum_{i=1}^l C_i(h_i - H_i) \geq F \quad (3.17)$$

care se poate rearanja sub forma liniară (3.7).

### 3.2.3 Funcția obiectiv

Forma generală liniară a funcției obiectiv este:

$$f = \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i \quad (3.18)$$

unde  $\alpha_j$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_i$  sunt constante specificate. Termenul constant,  $\beta$  este inclus aici pentru a lua în considerare oportunitatea sporirii înțelegerii fizice a valorii funcției obiectiv. Oricum, când se optimizează funcția obiectiv, termenul constant este irelevant și poate fi ignorat, deoarece schimbările valorilor variabilelor de decizie nu afectează acest termen.

### Optimizarea curgerii

Cea mai comună (simplă) formă a funcției obiectiv este suma tensiunilor aplicate acviferului:

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j \quad (3.19)$$

Când obiectivul este maximizarea cantității de apă extrasă, coeficienții se aleg egali cu 1, iar  $f$  este maxim. Dacă obiectivul este de a minimiza costurile operaționale, atunci  $f$  trebuie minimizat, iar coeficienții reprezintă costul unitar al solicitării (debitului extras / injectat) în fiecare locație  $j$ .

### Optimizarea nivelului apei

Cea mai comună (simplă) formă a funcției obiectiv este suma ponderată a nivelelor apei:

$$f = \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i \quad (3.20)$$

Maximizarea ecuației (3.20) pentru locațiile  $i$  care coincid cu punctele de extracție a apei poate fi folosită pentru minimizarea costurilor de extracție prin minimizarea înălțimilor de pompare necesare. O alternativă pentru reprezentarea costurilor pentru realizarea înălțimilor de pompare este prezentată în capitolul 8. Minimizarea ecuației (3.20) atunci când coeficienții sunt pozitivi duc la aflarea valorilor maxime a scăderilor nivelului apei.

O funcție obiectiv similară poate fi folosită pentru problema controlului subsidenței, unde coeficienții  $\gamma_i$  reprezintă subsidența unitară raportată la scăderea nivelului piezometric sau la măsurarea impactului economic cauzat de subsidență. Funcția obiectiv a acestor tipuri de probleme poate fi scrisă sub forma:

$$f = \sum_{i=1}^l \gamma_i (h_i^0 - h_i) \quad (3.21)$$

unde  $h_i^0$  este nivelul piezometric inițial în acvifer, iar  $(h_i^0 - h_i)$  reprezintă scăderea nivelului piezometric în punctul  $i$ . Ecuația (3.21) poate fi rearanjată pentru a fi pusă sub forma ecuației (3.18), unde:

$$f = \beta + \sum_{i=1}^l (-\gamma_i) h_i \quad (3.22)$$

iar termenul constant  $\beta = \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i^0$ . Prin minimizarea ecuației (3.22) se obține valoarea maximă a nivelului piezometric, care minimizează impactul total al subsidenței.

### 3.2.4 Formularea modelului de management general liniar

Combinând obiectivele și restricțiile introduse mai înainte, modelul general liniar este:

$$\text{minimizeaza } f = \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i \quad (3.23)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k}^q q_1 + \alpha_{2,k}^q q_2 + \dots + \alpha_{j,k}^q q_j + \dots + \alpha_{n,k}^q q_n + \beta_k^q + \\ \alpha_{1,k}^h h_1 + \alpha_{2,k}^h h_2 + \dots + \alpha_{i,k}^h h_i + \dots + \alpha_{l,k}^h h_l + \beta_k^h \geq 0 \end{aligned}$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

unde sunt specificate  $m$  restricții. Restricțiile asupra tensiunilor și nivelelor piezometrice pot fi scrise prin selecția adecvată a coeficienților  $\alpha_{j,k}^q$  și  $\alpha_{i,k}^h$ , care trebuie să fie nenuli.

Cum am arătat în capitolul 1, nivelul piezometric depinde de solicitare, ceea ce implică rescrierea formulării liniare strict în termeni de solicitări (tensiuni). Această reprezentare a modelului numai în termeni de solicitare este dezvoltată în capitolul 4. În acest capitol restricțiile vor conține și termeni referitori la nivelele piezometrice.

### 3.2.5 Construcția modelelor reușite

O construcție reușită a modelului de optimizare necesită înțelegerea interpretării fizice a obiectivelor și restricțiilor, precum și abilitatea de a anticipa impactul matematic a obiectivelor și restricțiilor asupra formei soluțiilor. O construcție nereușită a modelului poate duce la incompatibilitatea problemei sau la obținerea unor rezultate eronate, fără înțeles fizic. Trebuie acordată o atenție mare relației dintre obiective și restricții și modului în care algoritmul de optimizare răspunde formulării.

Este important de înțeles că modelul de optimizare conține o logică neesențială despre realitatea fizică pe care vrem să o reprezentăm. Obiectivele și funcțiile de restricție, de-a lungul relației dintre solicitare și nivele piezometrice provenite din modelul de simulare, reprezintă singurele căi prin care cel care optimizează poate determina utilitatea practică a soluțiilor specifice obținute. Lipsa acestor considerații în construcția modelului poate duce la rezultate irelevante. Abilitatea anticipării formei soluțiilor se vede cel mai bine din exemple. În această secțiune vom sunt prezentate numeroase aspecte care conduc la reușita modelului de management.

Primul exemplu se referă la exemplul prezentat în secțiunea 1.3.3 despre modelul pentru controlul subsidenței. Este un exemplu în care comportarea soluțiilor ne ghidează în alegerea restricțiilor. Lipsa limitării tensiunilor a făcut posibilă reîncărcarea acviferului în locații neintenționate.

#### Exemplu de restricții incomplete

În exemplul 1.3.3. de control al subsidenței, obiectivul este minimizarea subsidenței (prin maximizarea nivelelor piezometrice) în condițiile satisfacerii cerințelor de apă. Formularea este:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{i=1}^3 h_i \quad (3.24)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^4 q_j \geq Q \quad (3.25)$$

Intuiția ne sugerează să nu pompăm mai mult decât este necesar pentru satisfacerea nevoilor de apă, deoarece acest fapt produce o scădere adițională a nivelului de apă. Atunci de ce nu este necesară utilizarea egalității restricției pentru satisfacerea nevoilor de apă ? Intuiția noastră este reflectată în acel model de simulare în care, atunci când solicitarea crește, scade nivelul apei și se reduce nivelul piezometric. Deci, putem fi siguri că soluția acestei probleme trebuie să fie una în care solicitarea nu este mai mare decât cel absolut necesar iar restricția (3.25) trebuie să fie o egalitate. O examinare mai atentă a modelului arată că acesta este incomplet și poate da rezultate eronate. Considerăm că, pentru maximizarea

nivelelor piezometrice, soluția rezultată poate fi reîncărcarea acviferului în anumite puncte (extracție negativă), și se pot extrage cantități suplimentare de apă din alte locații și se ajunge la diferența necesită de restricția (3.25). Soluția poate fi matematic posibilă dar eronată. Pentru evitarea obținerii acestor soluții e necesară introducerea de restricții suplimentare sub forma:

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.26)$$

pentru eliminarea reîncărcării sau prin adăugarea de restricții sub forma

$$h_i \leq h_i^u, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.27)$$

pentru limitarea explicită a nivelului piezometric.

Un alt exemplu când soluțiile sugerează restricțiile poate fi exemplul intruziunii apei sărate în apa subterană, prezentată în secțiunea 1.3.4. În acest exemplu reîncărcarea nu va fi niciodată selectată fără limitarea inferioară a nivelului piezometric. O construcție a unui model complet poate restricționa variabilele de decizie și funcția obiectiv direct și indirect.

### Exemplu de restricții complete

Modelul intruziunii apei sărate este reformulată astfel:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{j=1}^5 q_j \quad (3.28)$$

astfel încât

$$h_1 \leq h_1^l \quad (3.29)$$

$$h_2 \leq h_2^l \quad (3.30)$$

$$h_3 \leq h_3^l \quad (3.31)$$

$$0 \leq q_j \leq q_j^u, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (3.32)$$

$$q_j \leq 0, \quad j = 4, 5 \quad (3.33)$$

La prima vedere, maximizarea solicitării totale pare să sugereze că solicitarea poate crește la infinit. Oricum, solicitarea este limitată prin diferite moduri. În primul rând este restricționat de caracteristicile pompelor. Dacă aceste ar fi unica restricție, atunci soluția ar fi pomparea din toate puțurile la capacitatea maximă, fără a se realiza reîncărcarea acviferului. Oricum, prezența limitării nivelului piezometric după cum se pare previne creșterea solicitării (depinde de valorile specifice de restricție). Creșterea solicitării duce la micșorarea nivelului piezometric sub nivelul minim acceptat. Deși, s-a anticipat că una sau mai multe restricții impuse nivelului piezometric vor fi satisfăcute la limită.

Din cele două exemple de mai sus se vede că restricțiile și funcția obiectiv conduc algoritmul de optimizare spre soluții specifice. Anticiparea formei probabile a soluțiilor modelului de management ajută la recunoașterea celor patru forme posibile ale soluțiilor problemei sub forma (3.23). Forma liniară a modelului de management

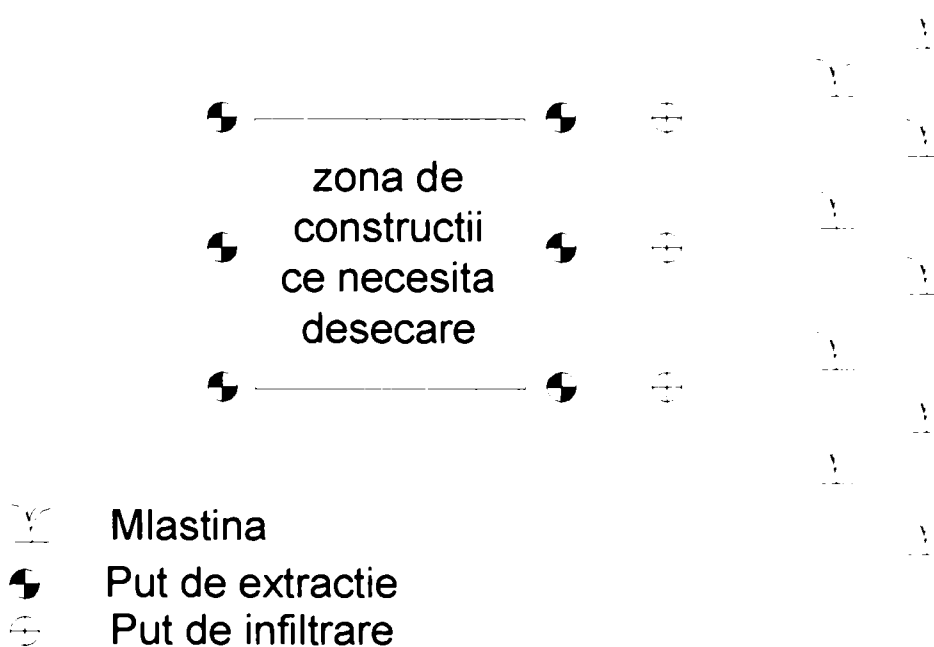
poate avea o singură soluție optimă incompatibilă, nelimitată, sau mai multe soluții optime. Un exemplu de formulare a problemei care nu are o singură soluție optimă este prezentat în cele ce urmează, sunt sugerate mijloacele prin care se pot identifica problemele în această formulare.

### Problemă incompatibilă

O problemă este incompatibilă dacă conține restricții care nu pot fi satisfăcute în același timp. O formulare neatență a problemelor de management al dinamicii apei subterane poate produce o problemă incompatibilă. Incompatibilitatea poate rezulta de asemenea din problemele corect formulate în care restricțiile sunt incompatibile cu limitările fizice ale sistemului.

#### Exemplu de problemă incompatibilă

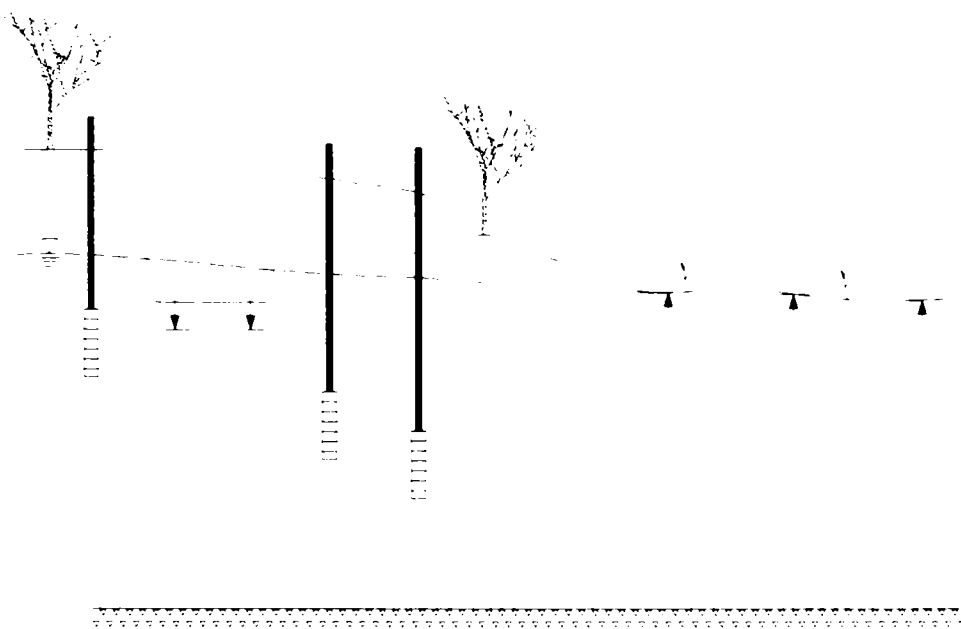
Considerăm problema prezentată în figura 3.1, de zonă de construcție care necesită epuismențe și o zonă umedă care trebuie protejată. Ipoteza problemei constă în faptul că trebuie coborât nivelul piezometric în zona de construcție, în timp ce trebuie menținut nivelul în zona umedă. O soluție posibilă este așezarea puțurilor de extracție și de injecție în aria construcției ca în figura 3.1. Dacă puțurile de injecție și extracție sunt amplasate prea aproape unele de altele, problema este incompatibilă. Acesta pentru că, restricțiile asupra nivelului piezometric în zona umedă nu pot fi îndeplinite, deoarece apa injectată prin puțurile de injecție este în mare parte captată de puțurile de extracție. O soluție mai realistă este amplasarea puțurilor de injecție adiacente zonei umede, astfel încât apa injectată să nu mai fie captată aproape în totalitate de puțurile de extracție [29].



*Fig. 3.1 Plasarea puțurilor de injecție lângă cele de extracție dau o problemă incompatibilă.*

Nivelul piezometric în zona umedă nu poate fi menținut pentru că puțurile de extracție captează apa injectată.

Problemă incompatibilă poate rezulta și în cazul unei formulări complete din cauza criteriilor de proiectare incompatibile. De exemplu figura 3.2 prezintă o secțiune transversală printr-o altă zonă de construcție ce necesită epuizmente, aflată lângă o zonă umedă. Presupunând că este interzisă injecția lângă zona umedă, poate fi luat în calcul doar realizarea puțurilor de extracție. Dacă acviferul are o transmisivitate suficient de mare, este fizic imposibil scăderea nivelului piezometric în zona construcției fără afectarea nivelului în zona umedă. Această problemă este corect formulată din punct de vedere al optimizării. Oricum, criteriile de proiectare impuse sunt incompatibile cu caracteristicile fizice ale acviferului.



*Figura 3.2 Proprietățile hidraulice ale acviferului fac fizic imposibilă satisfacerea restricțiilor atât pentru zona de construcție, cât și pentru zona umedă.*

Identificarea faptului că nu există soluții fezabile ale problemei sunt importante pentru proiectant și pentru cel care ia deciziile. Formulările care nu au soluții fezabile dovedesc în mod hotărât incompatibilitatea criteriilor de proiectare atunci când restricțiile care sunt puse reflectă aceste criterii.

### **Probleme nemărginite**

O problemă este nemărginită atunci când valoarea optimă a funcției obiectiv este nemărginită, adică  $\pm \infty$ . Aceste soluții în mod obișnuit nu au semnificație fizică, dar existența lor indică faptul că problema nu este formulată corect.

### **Exemplu de problemă nemărginită**

Considerăm problema în care se cere maximizarea cantității de apă extrasă, în condițiile limitării superioare a nivelurilor piezometrice:

$$\text{maximizeaza } f = \sum_{j=1}^n q_j \quad (3.34)$$

astfel încât

$$h_i \leq h_i^u \quad i = 1, \dots, l \quad (3.35)$$

Soluția acestei probleme este  $\pm \infty$ , deoarece solicitarea impusă acviferului nu este limitat superior. Depinzând de modelul numeric de simulare folosit și de modul în care lucrează cel care realizează optimizarea, cel care simulează are posibilitatea de a se opri înainte ca optimizatorul să ajungă la infinit.

Pentru a evita problemele nemărginite, trebuie să ne asigurăm că fiecare variabilă este mărginită. Pe lângă limitările inferioare și superioare ale variabilelor, alte limitări pot fi impuse indirect prin restricțiile fizice ale altor variabile. De exemplu, limita inferioară a nivelului piezometric provine indirect din limita superioară a solicitării (extracției), deoarece o solicitare mai mare produce o scădere mai mare a nivelului.

### Probleme cu soluții optime multiple

În cazuri rare, formularea generală liniară (3.23) poate avea mai multe soluții optime. Valorile variabilelor de decizie pot fi diferite, dar funcția obiectiv poate avea aceeași valoare. În consecință, toate soluțiile sunt bune (optime). Optimul multiplu apare în cazul în care restricțiile sunt satisfăcute la egalitate și soluțiile funcției obiectiv sunt coliniare.

### Exemplu de problemă cu soluții optime multiple

Considerăm o problemă de alimentare cu apă, în care solicitarea maximă dată de două pompe (două puțuri de extracție) este limitat de necesarul de apă, de capacitatea stației de tratare și de scăderea nivelului apei în acvifer. Problema se formulează matematic astfel:

$$\text{maximizeaza } f = q_1 + q_2 \quad (3.36)$$

astfel încât

$$q_1 + q_2 \leq Q^u \quad (3.37)$$

$$q_1 + q_2 \geq Q^l \quad (3.38)$$

$$h_1 \geq h_1^l \quad (3.39)$$

$$h_2 \geq h_2^l \quad (3.40)$$

unde  $Q^u$  este capacitatea stației de tratare,  $Q^l$  este cerința minimă de apă, iar  $h_1$  și  $h_2$  sunt nivelurile piezometrice în cele două puțuri de extracție. De notat este faptul că funcția obiectiv și primele două restricții descriu linii paralele. Când funcția obiectiv



este egal cu  $Q^u$ , funcția obiectiv și prima restricție sunt coliniare. Presupunând că capacitatea stației de tratare limitează soluția, atunci soluțiile optime multiple sunt un set de acțiuni fezabile care satisfac prima restricție la egalitate.

---

Oricare din soluțiile optime multiple pot fi adoptate ca soluție optimă. Din punct de vedere practic, alegerea celei mai bune soluții poate fi arbitrară sau se poate baza pe considerații care nu sunt încorporate în problemă.

### 3.3 Parametrii

Parametrii modelului de management al dinamicii apei subterane sunt:

- acțiunile asupra acviferului într-un număr de  $n$  locații,
- nivelele piezometrice măsurate în  $l$  locații,
- un număr  $m$  de restricții și toți coeficienții  $\beta$ ,  $\alpha_j$ ,  $\gamma_i$ ,  $\alpha_{j,k}^q$ ,  $\beta_k^q$ ,  $\alpha_{i,k}^h$  și  $\beta_k^h$ .

Specificarea tuturor parametrilor este necesară pentru definirea completă a problemei [7,122,8,]. Cum am arătat în secțiunea precedentă, obiectivele sau restricțiile angajate sunt determinate de selecția corectă a valorilor coeficienților pentru funcția obiectiv și restricții. Totuși, considerații adiționale se iau în calcul prin selectarea unor valori specifice pentru coeficienți și prin valorile parametrilor  $l$ ,  $m$  și  $n$ .

Mărimea debitului,  $q_j$ , este variabila primară de decizie. Parametrii folosiți pentru definirea lui  $q_j$  coincid ca număr cu numărul de locații considerate pentru aplicarea solicitării,  $n$ .

Nivelul piezometric,  $h_i$ , este variabila primară dependentă Parametrii necesari definirii  $h_i$  coincid ca număr cu numărul de locații de observație,  $l$ , și cu numărul de locații specifice de observare în acvifer. Definirea fiecărei restricții necesită două elemente: specificarea locației solicitării sau nivelului piezometric care este restricționat și selectarea valorilor coeficienților asociate cu aceste restricții. În această secțiune, problemele care apar în selectarea parametrilor sunt discutate și exemplificate.

#### 3.3.1 Variabile de decizie – solicitarea aplicată acviferului

Problema de optimizare este construită cu  $n$  locații pentru aplicarea solicitării acviferului cu scopul de a obține starea sistemului definită de funcțiile de restricții. Aceste  $n$  locații se referă la locațiile candidate care să sublinieze faptul că soluțiile optimizării pot face din aceste locații puncte active de aplicare a solicitării. Sunt dese cazurile în care sunt definite suficiente locații de aplicare ale solicitării, dar soluția unei probleme date pot da valori zero solicitării aplicate în unele locații.

---

#### Exemplu

Tendința soluțiilor care dau valoarea zero unor locații ale solicitării aplicate acviferului este exemplificat în cele ce urmează. Considerăm un acvifer mărginit cu transmisivitatea  $T$  constantă, un nivel piezometric constant pe o suprafață situată la

distanța  $R$ ,  $n$  puțuri, fiecare exercitând asupra acviferului aceeași solicitare. Folosind ecuația lui Theim și principiul suprapoziției, presupunând că fiecare puț se află în interiorul volumului delimitat de suprafața cu nivelul piezometric constant, scăderea nivelului apei într-un punct ca răspuns la solicitări aplicate prin mai multe puțuri este:

$$s(r) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi T} \ln\left(\frac{R}{r_j}\right) \quad (3.41)$$

unde  $s$  este scăderea nivelului apei și  $r_j$  este distanța dintre puțul  $j$  și punctul unde se cere scăderea nivelului apei.

Se consideră acest model aplicat unei probleme în care scăderea nivelului apei subterane este obligată a fi mai mare decât o valoare specificată (epuizamente) și se dorește minimizarea solicitării. Când am ales problema, ne-am asigurat că este suficientă o singură restricție. Deci, problema rezultată se poate scrie:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n q_j \quad (3.42)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{\ln\left(\frac{R}{r_j}\right)}{2\pi T} \right] q_j = s \quad (3.43)$$

Coeficienții depind numai de distanțele până la puțuri. Cel mai apropiat puț va avea coeficientul cel mai mare. Deci, soluția problemei este pomparea din puțul cel mai apropiat pentru a se atinge nivelul piezometric cerut. Dacă este limitat superior debitul, atunci soluția poate fi pomparea la capacitatea fiecărei pompe mai apropiate de punctul în care se dorește scăderea nivelului piezometric. Dacă alte restricții complică problema, atunci soluția este pomparea dintr-un set de puțuri care satisfac restricțiile, iar celelalte puțuri nu se vor folosi.

Este posibilă asocierea selecției locațiilor cu debit nenul cu alte locații noi optime de aplicare a solicitării. Deci, optimizarea poate furniza simultan două tipuri de soluții: să identifice locațiile optime de aplicare a solicitării din locațiile definite inițial și poate să definească alte locații optime.

Trebuie subliniat faptul că rezolvarea problemei cu locații optime este numai aproximativă. Locațiile candidate sunt fixate în nodurile rețelei de discretizare. Locațiile optime reale pot fi situate în puncte care nu se află printre nodurile rețelei și locațiile candidate inadecvate pot fi prevăzute pentru identificarea locațiilor optime reale. Diferența dintre soluțiile problemei de aflare a locațiilor optime aproximative și reale depinde în mare parte de mărimea numărului de locații candidate. Dacă numărul acestora este mare, oportunitatea de rezolvare a problemei crește. Deși, numeroase puncte (de exemplu, fiecare nod al rețelei de discretizare) poate fi considerat o locație candidată.

În cazul în care se folosește un număr mare de locații candidate pot apărea și probleme în rezolvare. Prima problemă este volumul mare de calcule ce trebuie efectuat. Efortul de rezolvare a problemelor este cu atât mai mare cu cât numărul de locații candidate este mai mare. O a doua problemă este stabilitatea soluțiilor obținute la perturbații, când problema este de a afla locațiile optime de aplicare al solicitării, dorința este ca atunci când se schimbă restricțiile să nu se producă schimbări dramatice ale setului de locații optime. Această proprietate poate lipsi atunci când dispunem de un număr mare de locații candidate.

### Exemplu de problemă de stabilitate a soluțiilor

Pentru ilustrarea conceptului de stabilitate a soluțiilor, se consideră un acvifer sub presiune cu o transmisivitate de  $140 \text{ m}^2/\text{zi}$  și un gradient inițial uniform de 0.0207. Modelul de simulare folosește o rețea pătratică, cu latura de 10 m. Sunt impuse restricții asupra diferenței de nivel piezometric pe orizontală și pe verticală, pentru a forma o zonă de captare pentru extragerea apei subterane contaminate. Figura 3.3 prezintă locațiile unde sunt impuse restricțiile și locațiile în care sunt puțurile candidate.

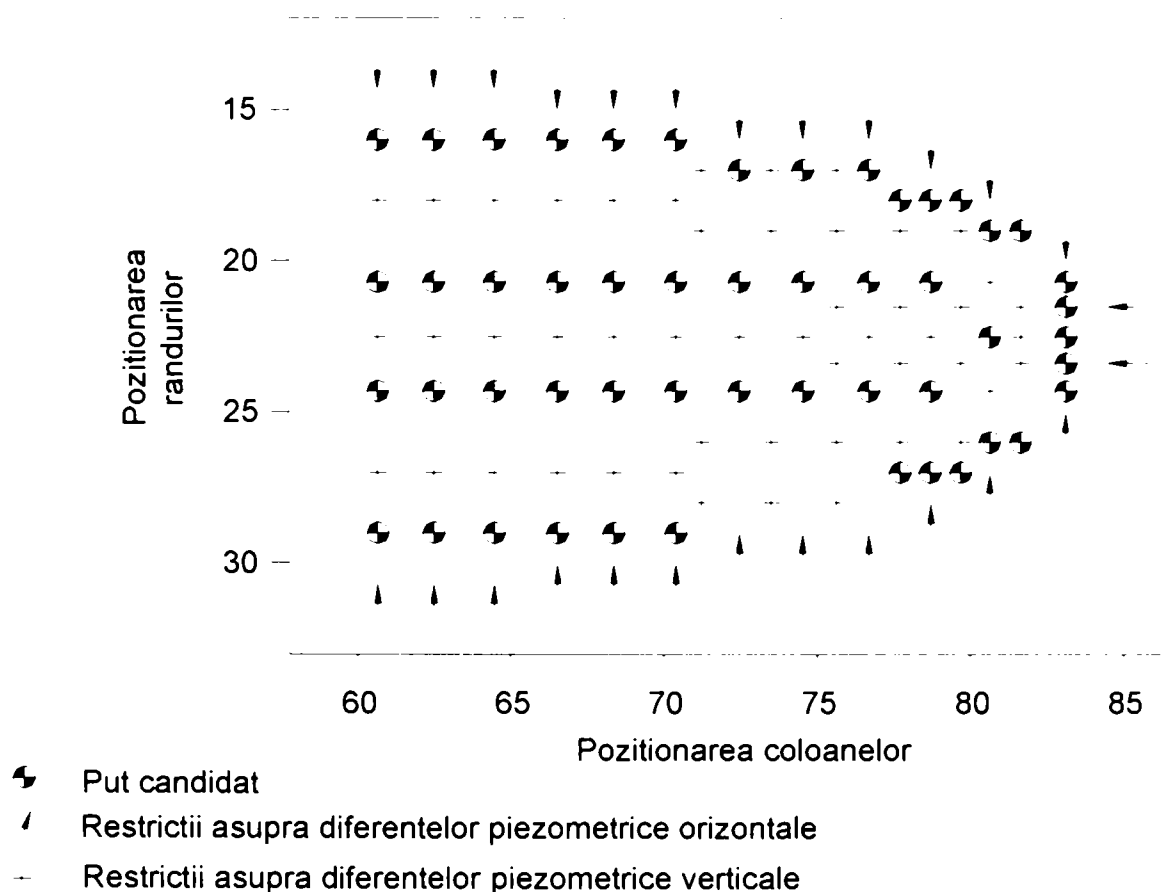


Figura 3.3 Locațiile unde sunt impuse restricțiile și locațiile în care sunt puțurile candidate (locații ale puțurilor posibile).

Soluția problemei este arătată în figura 3.4, adică locațiile active de solicitare.

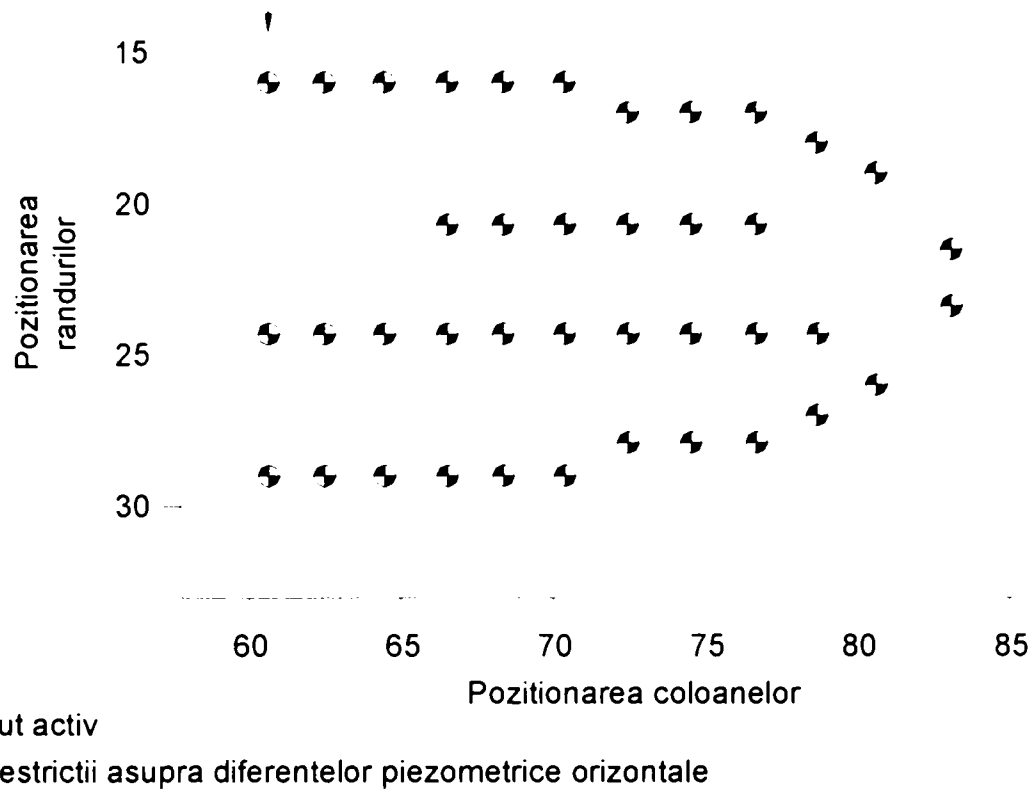


Figura 3.4 Locațiile optime a puțurilor rezultate din problema din figura 3.3.

Reducerea cu 50 % a diferenței nivelului piezometric impus inițial în locația indicată în colțul stânga – sus din figura 3.4 produce o perturbare. Rezultatul acesteia se poate vedea în figura 3.5.

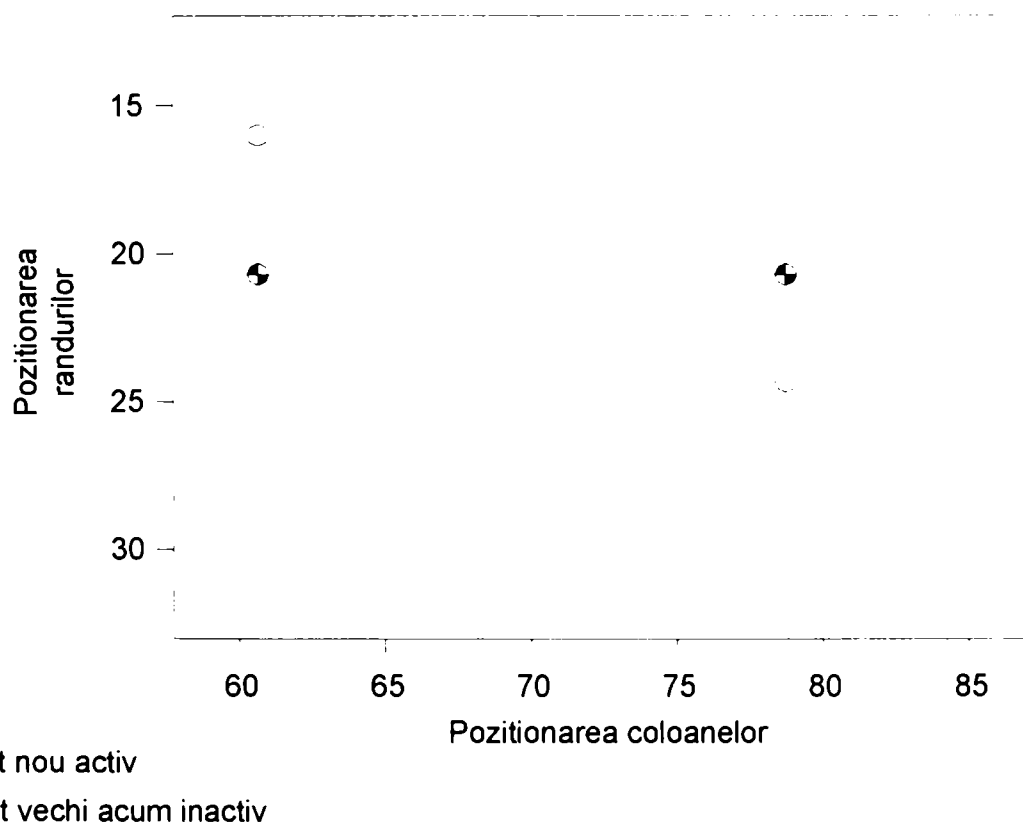


Figura 3.5 Locațiile puțurilor noi active rezultate în urma perturbării

Două puțuri active au fost eliminate și au fost activate două noi locații. De notat că aceste două schimbări se produc la o distanță oarecare de locația schimbării restricțiilor. Soluția se consideră nestabilă. Stabilitatea poate fi realizată în această problemă prin micșorarea numărului de locații candidate. Prin eliminarea a 60 % din locațiile candidate și prin re-rezolvarea problemei cu restricțiile inițiale rezultă soluțiile din figura 3.6. Prin aplicarea aceleiași perturbări se observă că locațiile optime rămân aceleași.

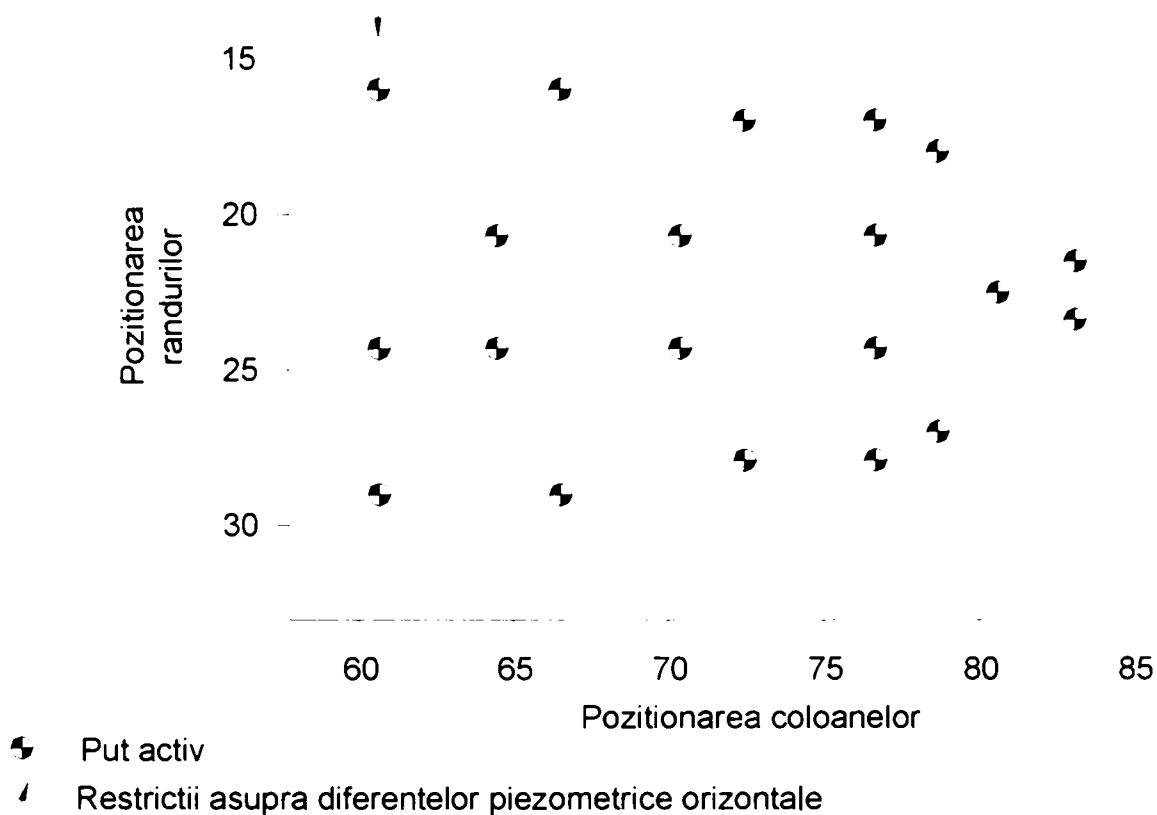


Figura 3.6 Locațiile optime ale puțurilor prin reducerea cu 60 % a numărului de locații candidate. Aplicarea perturbării nu schimbă aceste locații.

Perspiciacitatea generală de înțelegere a acestei comportări a soluțiilor problemelor prezentate poate fi dezvoltată prin studierea algoritmului soluțiilor și prin analize de senzitivitate descrise în capitolele 4 și 5. În orice caz, identificarea specifică a instabilității este împiedecată de dependența acesteia de restricțiile impuse, de locațiile candidate folosite și de condiții specifice hidrogeologice. Exemplele precedente sugerează că este greșită utilizarea unui număr mare de locații candidate. Totuși, utilizarea numai a câtorva locații candidate presupune selecția anterioară a locațiilor și eliminarea variabilelor din algoritmul de optimizare care dau locațiile optime. O aproximare euristică a acestei probleme este de a furniza un număr mare de locații candidate pentru a rezolva mai întâi problema alegerii locațiilor optime. Apoi, în rezolvarea problemei în cazul apariției perturbațiilor se va limita numărul locațiilor candidate la cele rezultate din soluția problemei propriu – zise inițiale [126].

Utilizarea unui număr mare de locații candidate în metodele de selectare a locațiilor optime pentru aplicarea solicitării implică și alegerea marginilor inferioare ale

solicitări. Când se utilizează locații multiple candidate limita inferioară pentru solicitarea dată de extracție și limita superioară pentru solicitarea dată de reîncărcare trebuie alese zero. Dacă aceste limite sunt alese nenule atunci toate locațiile candidate sunt obligate a opera la nivelul nominal, eliminând prin acesta posibilitatea alegerii locațiilor în care solicitarea este nenulă. Dezavantajul utilizării limitei zero este că soluțiile pot conține unele locații în care solicitarea rezultă foarte mic, ireal. Metodele pentru impunerea cerinței ca debitul să fie zero sau să fie cuprins între două valori nenule necesită utilizarea variabilelor integrale și vor fi prezentate în capitolul 7.

### **3.3.2 Valorile și locațiile restricțiilor**

Specificarea locațiilor restricțiilor implică identificarea locațiilor unde vor fi impuse restricțiile. Restricțiile provin adesea din satisfacerea criteriilor de proiectare actuale. Criteriile sunt adesea definite în termeni de control hidraulic asupra unei arii sau unui volum a acviferului. Dacă aria ce trebuie controlată este suficient de mare, atunci sunt necesare restricții multiple pentru a satisface criteriile cerute. Deci apare problema determinării numărului de restricții utilizate. Un număr mic de restricții poate să ducă la nesatisfacerea criteriilor cerute, iar un număr mare de restricții mărește costurile de operare. Criteriile de alegere a numărului de restricții utilizate trebuie să fie următoarele:

- satisfacerea cerințelor practice (fizice),
- limitarea efortului operațional,
- asigurarea stabilității soluției.

Primul criteriu implică folosirea unui număr mare de restricții, pe când al doilea și al treilea implică folosirea unui număr mai mic de restricții.

---

### **Exemplu de alegere a numărului de restricții**

Pentru a ilustra influența numărului de restricții pentru satisfacerea criteriilor dorite prin problemă, se consideră un exemplu similar de realizare a epuimentelor ca în secțiunea 1.3.2. În aria delimitată de linia groasă neagră din figura 3.7 trebuie micșorat nivelul piezometric în vederea realizării unei construcții. Acviferul este sub presiune și are o transmisivitate de  $50 \text{ m}^2/\text{zi}$  și un gradient uniform de 0.007, curgere de la stânga spre dreapta. Domeniul este discretizat în 600 de celule pătratice cu latura de 300 m. Criteriul cerut este de a menține nivelul apei în interiorul domeniului delimitat sub valoarea de 15 m. Puțurile trebuie plasate în jurul ariei delimitate. Criteriul cerut în acest caz este de a menține nivelul piezometric în centrul fiecărei celule din interiorul ariei delimitate sub un anumit nivel impus. Presupunând că nodurile sunt suficient de dense, schema care satisface aceste restricții satisface de asemenea obiectivul practic (fizic) [44,61,43].

Soluția optimă a problemei este arătată în figura 3.8, liniile hidroizohipse rezultate din această schemă de pompare este reprezentată în figura 3.9, care

confirmă că restricțiile sunt satisfăcute în centrul tuturor celulelor din interiorul ariei delimitate.

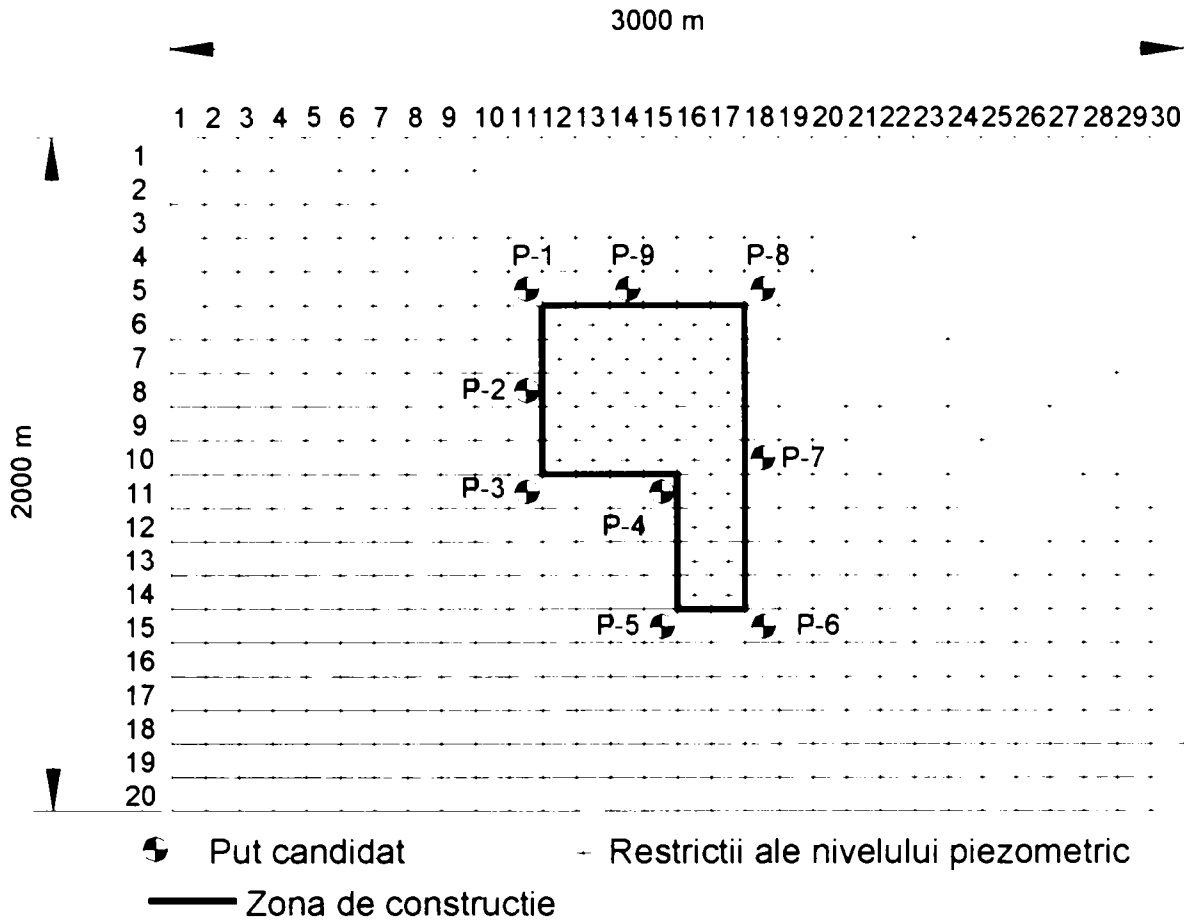


Figura 3.7 Exemplu de alegere a numărului de restricții

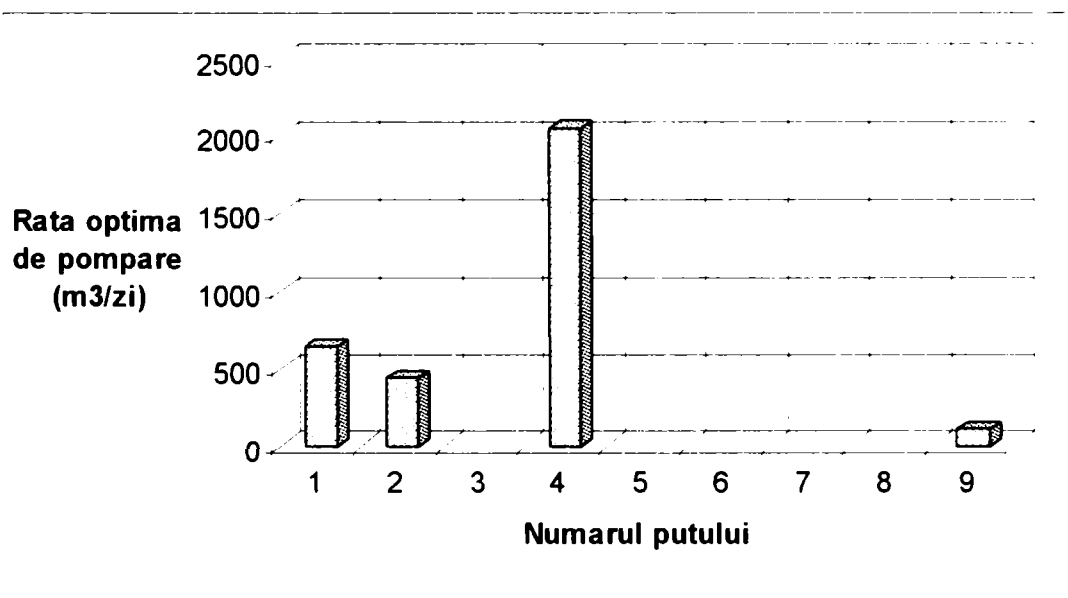


Figura 3.8 Soluția optimă a problemei

Deși soluția obținută este adecvată, ne întrebăm dacă acest număr de restricții este într-adevăr necesar. Din teoria de bază a hidraulicii subterane putem prognoza că dacă rata pomparei apei din puțuri este suficient de mare pentru a satisface restricțiile asupra limitei superioare a nivelului piezometric de pe conturul și centrul suprafeței date, atunci vor fi satisfăcute și restricțiile din celelalte celule ale

suprafeței. Pe baza acestor considerații teoretice, putem reduce numărul restricțiilor la cele care se referă numai la perimetrul și centrul ariei delimitate. În fapt, setul de restricții redus, arătat în figura 3.10, este suficient pentru obținerea aceleiași soluții optime ca inițial, prin urmare se reduce efortul de operare.

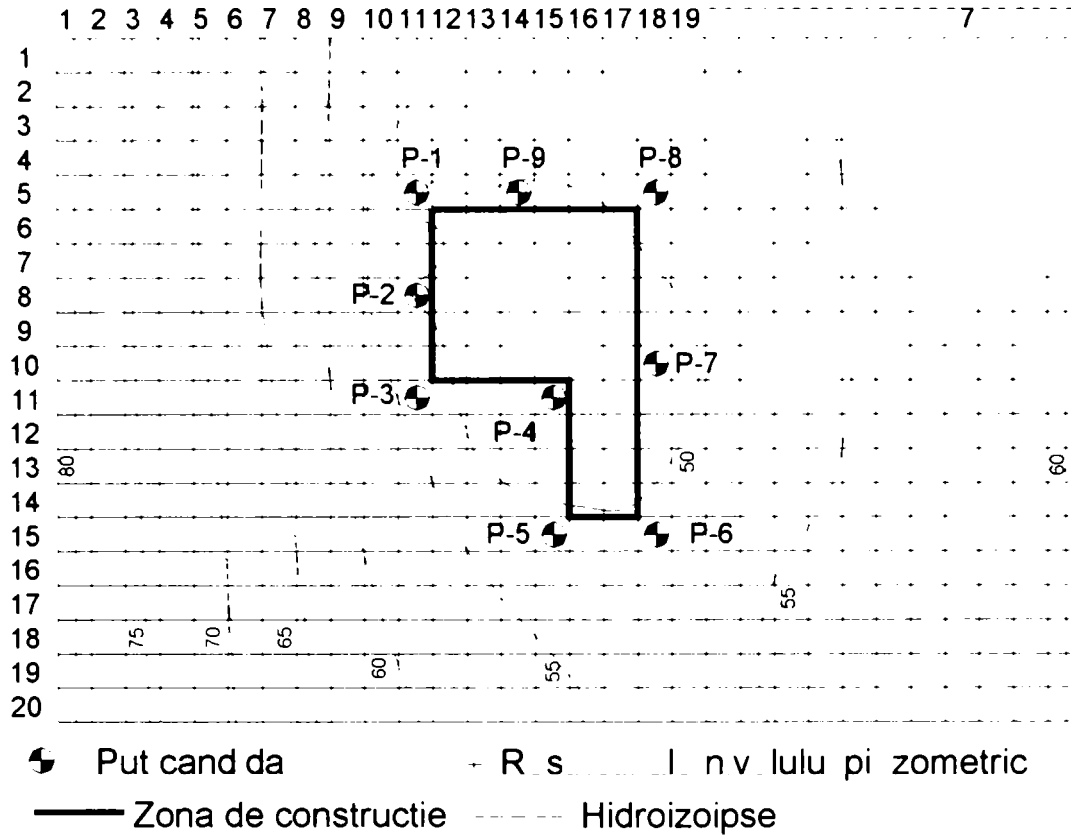


Figura 3.9 Hidroizoipse

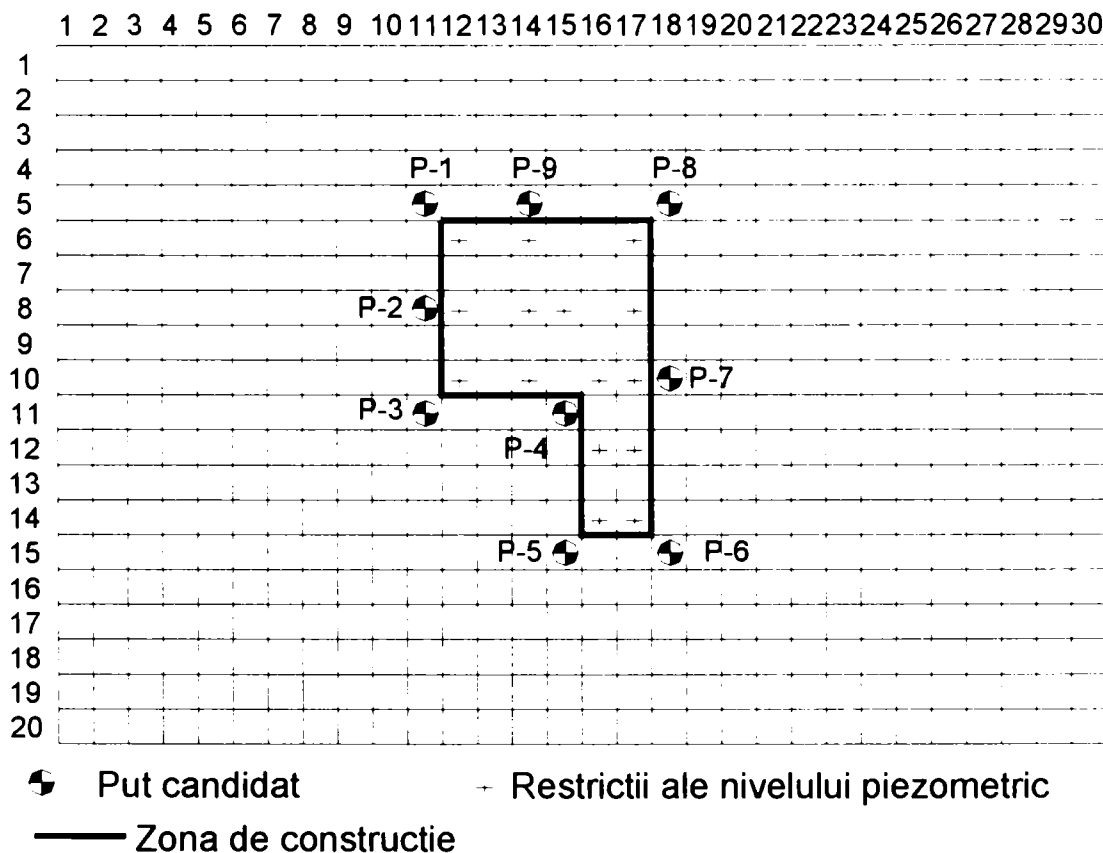


Figura 3.10 Setul de restricții redus conduc la aceeași soluție optimă



O altă problemă a specificării restricțiilor este alegerea valorilor specifice utilizate în restricții. Aceste valori depind de tipul de restricții, de modul în care este utilizată fiecare restricție și de locația punctului în care se impune restricția. În multe aplicații aici există un echilibru între numărul restricțiilor și valorile restricțiilor utilizate. Dacă numărul de restricții este mare, valorile alese pot reprezenta direct restricția dorită. Dacă numărul este mic atunci valorile sunt considerate surogate care reprezintă indirect criteriile dorite.

---

### Exemplu de amplitudine a restricțiilor

Pentru ilustrarea relației dintre valoarea restricției, solicitarea și locația restricției considerăm un exemplu care implică utilizarea unei restricții asupra diferenței de nivel piezometric cauzată de inversiunea direcției de curgere. Puțul este plasat într-un acvifer în care restricția impusă asupra gradientului orizontal se referă la un punct situat la o distanță oarecare de puț [122,8].

În figura 3.11 a) valoarea restricției este destul de mare, indicată de panta săgeții. Asupra acviferului se exercită un debit dat de pomparea a  $1500 \text{ m}^3/\text{zi}$ .

În figura 3.11 b) o valoare mai mică impusă a gradientului are ca rezultat o scădere mai mică a nivelului apei și o mai mică extindere a zonei de captare. În general o valoare mai mare a restricției implică un debit mai mare pentru a satisface restricțiile. Când puțurile candidate sunt plasate mai departe de punctele în care se impun restricțiile, o valoare mare a restricțiilor dau o problemă incompatibilă.

În final, în figura 3.11 c) gradientul în punctul specificat este zero. În acest caz este necesar definirea marginii zonei de captare supusă restricțiilor și definirea valorii solicitări.

Aproximarea realizată prin utilizarea restricției de gradient zero pentru controlul zonei de captare nu este suficientă în cazul mai multor puțuri și mai multor restricții, deoarece acesta nu garantează faptul că captarea va fi realizată în zona propusă sau va satisface celelalte restricții.

Această idee este demonstrată prin exemplul din figura 3.12, de captare a unei pene de apă subterană bidimensională. Aici, două puțuri candidate sunt plasate în regiunea cu gradient scăzut din pana contaminată. Restricțiile asupra diferenței de nivel piezometric sunt impuse în aceste zone pentru a inversa direcția de curgere către cele două puțuri de extracție. Întrebarea este de câte restricții avem nevoie și valorile lor.

Figura 3.13 prezintă zona de captare rezultată din soluția optimă când sunt utilizate doar două restricții și valorile lor nu sunt suficiente pentru a capta toată pana.

Când este adăugată și a treia restricție, este captată toată pana, dar zona totală de captare este mai mare decât pana, așa cum este reprezentată în figura 3.14.

De fapt, solicitarea necesară satisfacerii restricțiilor se schimbă substanțial în funcție de valorile restricției și de locațiile restricțiilor, așa cum este reprezentată în figura 3.15.

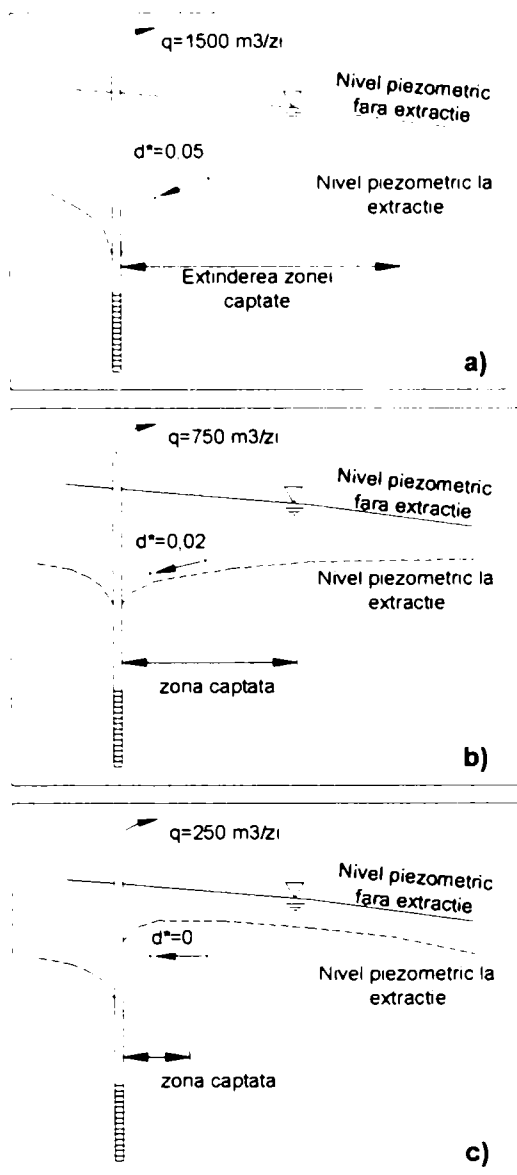


Figura 3.11 Valoarea restricțiilor impuse diferenței de nivel piezometric afectează rata optimă de pompare și mărimea zonei de captare.

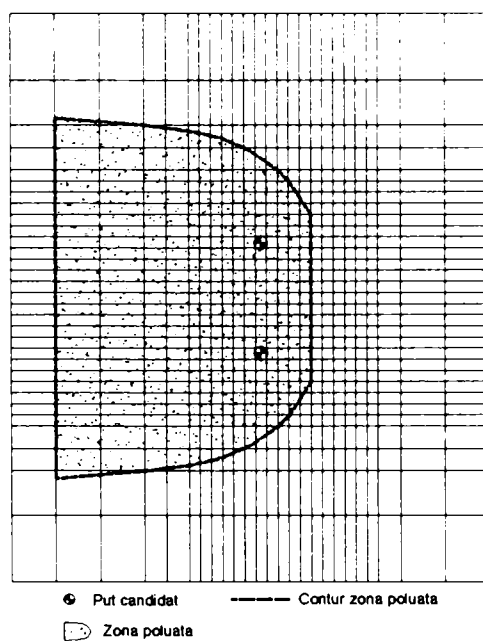
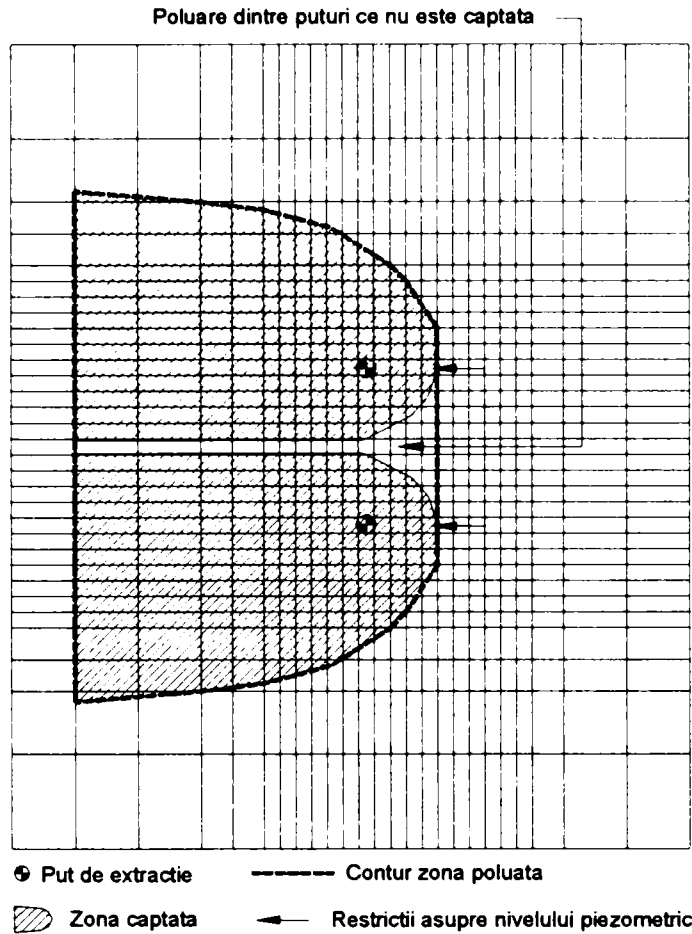
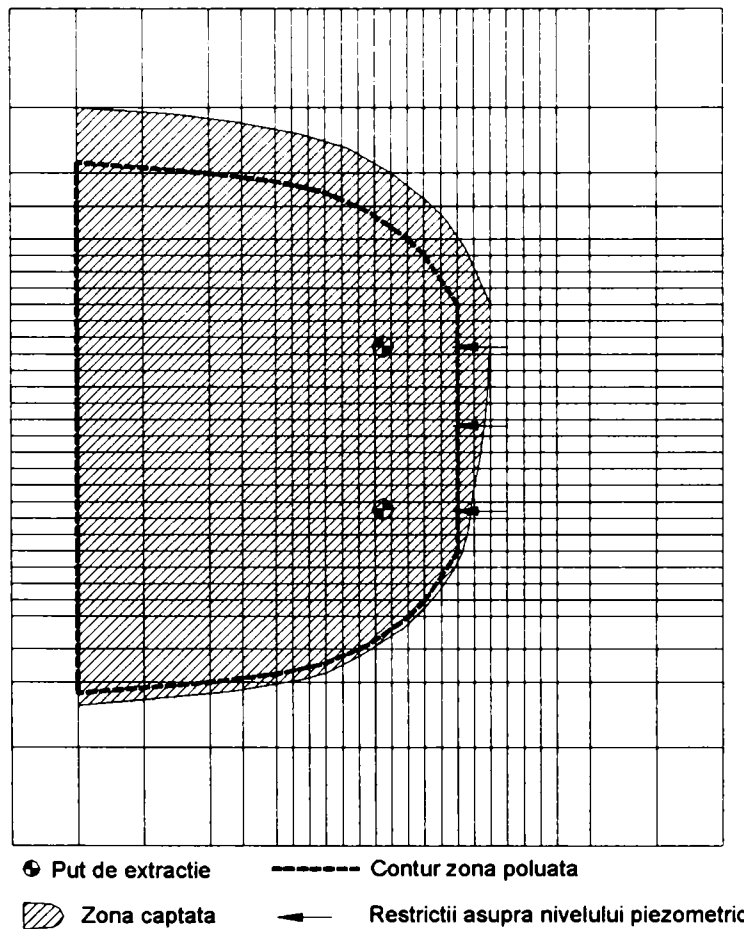


Figura 3.12 Problemă de captare a unei pene de apă poluată prin două puțuri candidate. Se utilizează restricții asupra diferenței de nivel piezometric pentru a capta întreaga cantitate de apă poluată.



*Figura 3.13 Două restricții de gradient zero nu sunt suficiente pentru captarea întregii pene poluate.*



*Figura 3.14 Trei restricții de gradient zero sunt necesare pentru a capta întreaga pană de apă subterană poluată.*

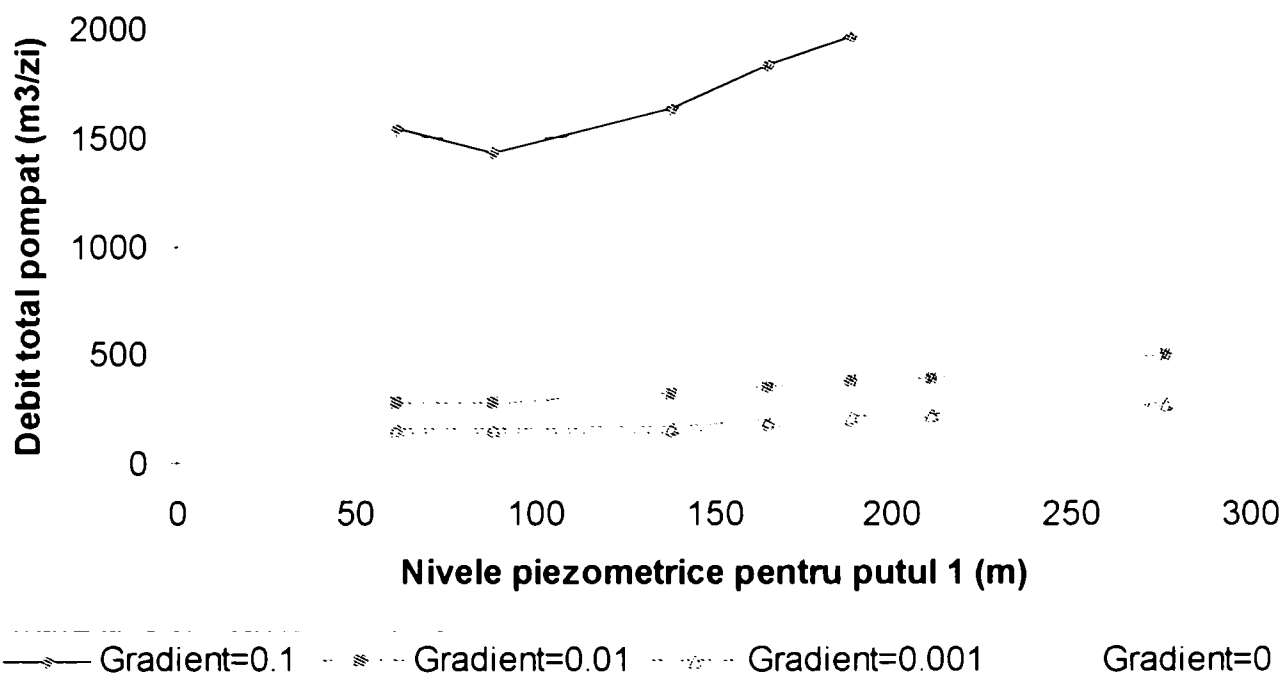


Figura 3.15 Debitul pompat total optim pentru diferite valori ale gradientului, în cazul utilizării celor trei restricții.

Exemplele precedente oferă câteva indicii despre natura echilibrului dintre restricții și criteriile cerute. Natura exactă a acestui echilibru depinde de problemă și va fi investigată prin calibrarea modelului, prezentată în secțiunea 3.4.

### 3.3.3 Relațiile dintre solicitare și locațiile restricțiilor

Punctele de aplicare al solicitării relativ la punctele în care se impun restricții este de asemenea un aspect important al problemelor de optimizare a managementului apei subterane. O implementare obișnuită a locațiilor de solicitare și de restricții impune multe restricții pe lângă multe locații candidate de solicitare. Rezultatul dorit este ca să fie alese un număr cât mai mic de locații pentru solicitări care satisfac restricțiile. Totuși, această intenție poate duce la plasarea locațiilor candidate de foraje prea aproape de locațiile restricțiilor. Acest lucru poate avea ca rezultat obținerea unui debit de valoare prea mică, pentru a putea satisface restricțiile din imediata vecinătate fapt ce nu este o soluție dorită.

#### Exemplu de plasare a locațiilor de solicitări și restricții

Pentru ilustrarea relației dintre amplasarea locațiilor de solicitări și de restricții, considerăm o problemă de plasare a patru puțuri arătată în figura 3.16 a.)

Se cere scăderea nivelului piezometric din zonă cu 1,5 m. Dacă punem patru restricții asupra nivelului piezometric în cele patru colțuri ale pătratului, atunci un singur puț amplasat în centrul zonei dă rezultate mai bune decât amplasarea unui puț în fiecare colț al pătratului. Liniile izopieze rezultate în cele două situații sunt prezentate în figurile 3.16 b și c. De notat că rezultatul prezentat în figura 3.16b este

o soluția trivială. Pomparea din fiecare puț în parte satisface restricțiile din punctul respectiv. Nivelul piezometric rezultat în regiunile rămase nu îndeplinește criteriile cerute prin enunț.

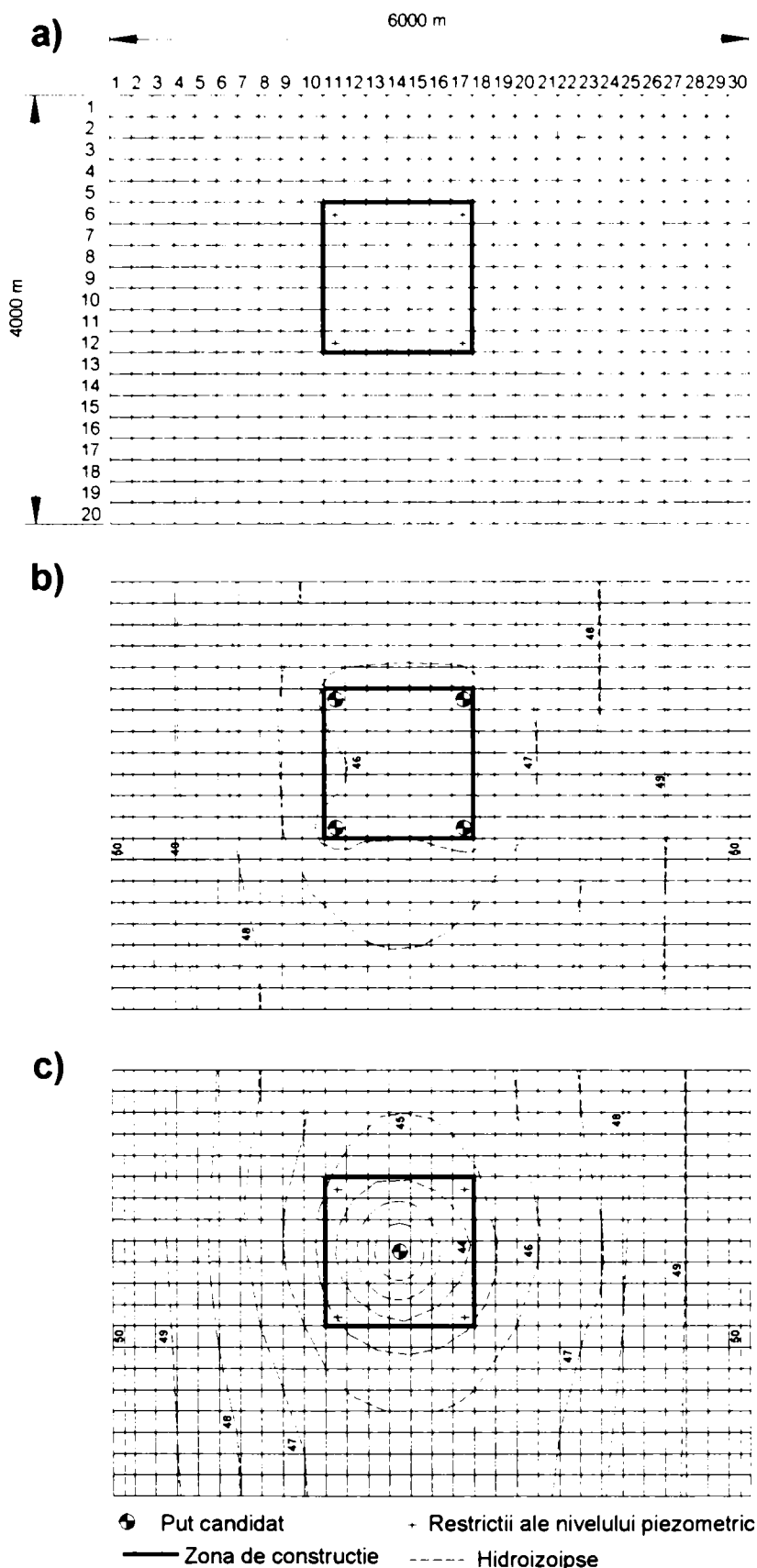


Figura 3.16 (a) Dacă sunt utilizate doar patru restricții asupra scăderii nivelului apei pentru eliminarea apei din zonă pătratică încadrată, care este cel mai eficient mod de amplasare a puțurilor? (b) Un puț amplasat în fiecare punct de restricție nu conduce la scăderea nivelului apei în toată zona necesară. (c) Un singur puț amplasat în centrul zonei dă rezultate mai bune.

La construcția modelului de management, cel care modelează și cel care optimizează trebuie să fie foarte atenți la condițiile hidrogeologice pentru a anticipa posibila interacțiune dintre locațiile de solicitare și de restricții.

### 3.3.4 Parametrii funcției obiectiv

Funcția obiectiv poate fi utilizată pentru reprezentarea diverselor aspecte ale problemelor, cum ar fi: costuri de operare a sistemului, valoarea utilizării resurselor, impactul solicitării asupra acviferului etc. Parametrii funcției obiectiv, pe lângă că dau o formă funcțională obiectivului, transformă valorile variabilelor de decizie în cantități de interes. Definirea parametrilor funcției obiectiv poate fi simplificată prin recunoașterea câtorva principii ale minimizării funcției.

Soluția problemei de minimizare a funcției  $f(q)$  va fi identică cu soluția problemei de minimizare a funcției  $f(q) + \varphi$ , unde  $\varphi$  este o constantă specificată. Acest lucru arată că termenii din funcția obiectiv care nu depind de variabilele de decizie pot fi eliminați în calculul de optimizare. Acești termeni se vor reîntoarce în funcția obiectiv abia la final, pentru calculul valorii optime, când deja soluțiile sunt stabilite.

Similar, soluția problemei de minimizare a funcției  $f(q)$  va fi identică cu soluția problemei de minimizare a funcției  $\varphi f(q)$ , unde  $\varphi$  este o constantă specificată. De exemplu, un obiectiv obișnuit este cel de minimizare a costului aplicării solicitării pusă sub forma:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n c_j q_j \quad (3.44)$$

unde coeficienții  $c_j$  din funcția obiectiv reprezintă costul specific pe unitatea de solicitare, iar dimensiunea funcției obiectiv este una monetară. Dacă toți coeficienții au aceeași valoare, atunci ei pot fi eliminați, fără ca să afecteze rezultatul final, iar funcția se poate scrie astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n q_j \quad (3.45)$$

De asemenea, dacă coeficienții diferă, ei pot fi multiplicați cu aceeași valoare fără ca acest lucru să afecteze soluția obținută. Atunci nu este necesară determinarea costului unitar al solicitării, este necesar determinarea doar a costului relativ.

## 3.4 Calibrarea modelului de management

Calibrarea este un instrument fundamental în construcția modelelor și se definește ca procesul de modificare a caracteristicilor și parametrilor modelului pentru producerea celei mai bune corespondențe între rezultatele dorite și rezultatele date de model. Calibrarea este un pas important în construcția modelelor de simulare a apei subterane unde rezultatele obținute sunt comparate cu datele măsurate în teren. În contextul modelelor de management al apei subterane, calibrarea poate fi aplicată

la selecția restricțiilor și a funcțiilor obiectiv și la alegerea parametrilor modelului. Calibrarea intenționează selectarea parametrilor modelului de management care produc rezultatele care corespund cel mai bine cu criteriile de proiectare intenționate. Este important ca parametrii modelului să servească la reprezentarea indirectă a criteriilor cerute. De exemplu, în cazul creării unei zone de captare, restricțiile asupra diferenței nivelurilor piezometrice sunt folosite pentru captarea unei pene de apă. Aici calibrarea necesită ajustarea parametrilor astfel încât să fie obținută captarea penei de apă. Pentru a confirma captarea penei de apă se poate folosi metoda urmării traiectoriei particulelor sau altă formă a verificărilor soluțiilor rezultate din optimizare.

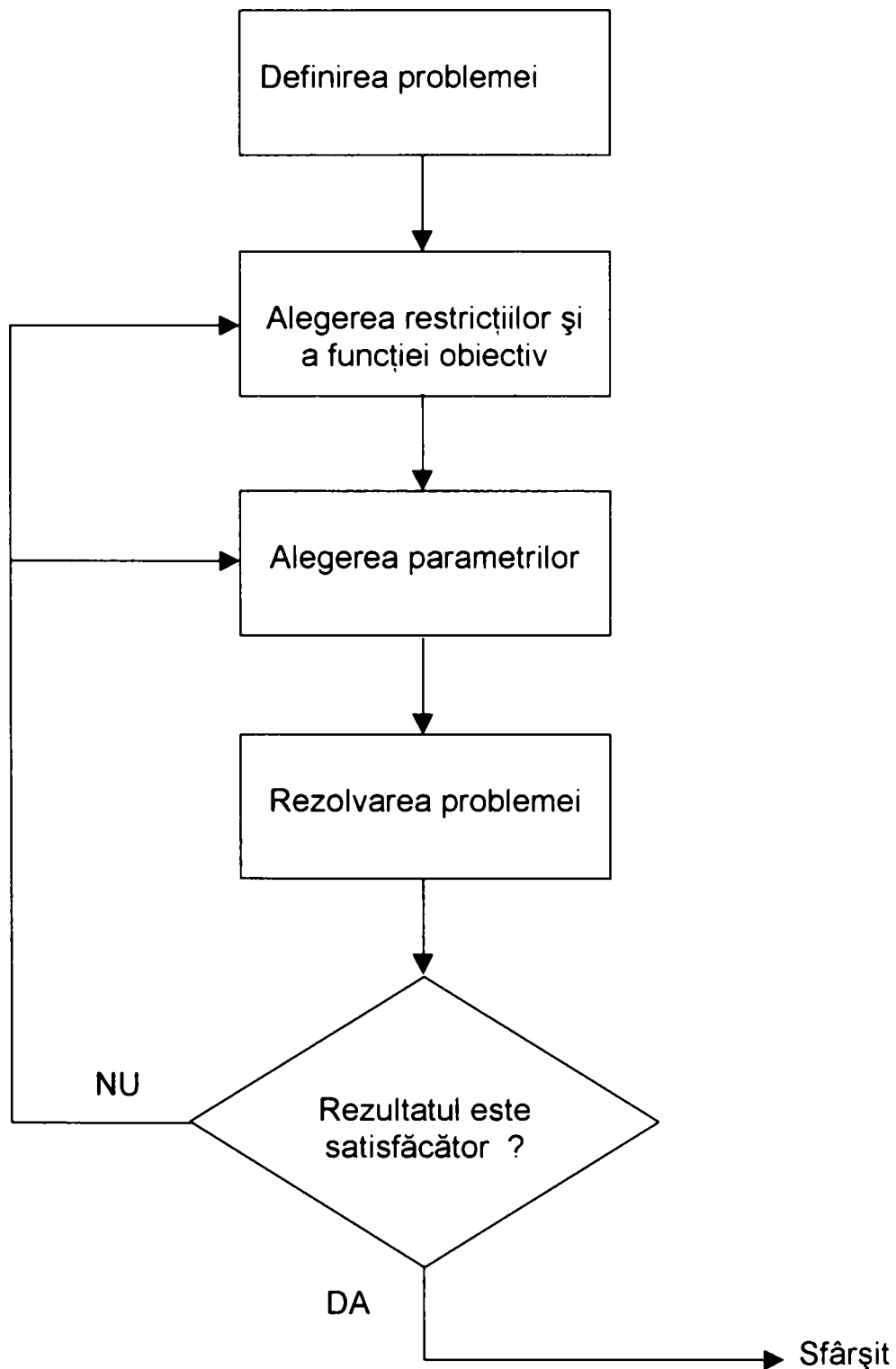


Figura 3.17 Procesul de construire a modelului hidraulic de control

Construcția modelului de management al dinamicii apei subterane este un proces iterativ, așa cum este prezentat în figura 3.17. Aici este definită problema, sunt selectate restricțiile și obiectivele, parametrii și în final problema este rezolvată. Apoi este analizat dacă rezultatele corespund criteriilor cerute. Acest pas este deseori simularea postoptimizare a comportării acviferului, adică aflarea răspunsului acviferului la soluția generată. Dacă criteriile cerute nu sunt satisfăcute, este necesară modificarea modelului. Acesta se poate realiza prin adăugarea sau reducerea locațiilor candidate la aplicarea solicitării, prin creșterea sau scăderea numărului de restricții sau modificând valorile restricțiilor.

### **3.5 Verificarea modelului de management**

În analiza modelării, verificarea intenționează confirmarea faptului că soluțiile obținute din modelul matematic sunt de fapt soluțiile corecte ale ecuațiilor originale care guvernează procesele. Acest pas are o importanță aparte pentru modelele matematice care sunt rezolvate prin metode numerice, deoarece se obțin soluții cu o anumită aproximare (eroare). Procesul de verificare este în general independent de valorile particulare utilizate ale parametrilor.

Verificarea poate fi de asemenea aplicată modelului de management. Se verifică că modelul de simulare, pe care se bazează modelul de management, rezolvă independent în mod corect ecuațiile guvernante ale proceselor. Analog, se verifică dacă soluțiile rezultate prin algoritmul de optimizare, rezolvă independent problema formulată general. Mai rămâne de verificat corectitudinea restricțiilor și a funcției obiectiv.

Verificarea modelului de management al dinamicii apei subterane implică confirmarea faptului că soluțiile obținute din acest model sunt optime și fezabile. Această verificare poate conduce la simularea răspunsului acviferului la un set de acțiuni optime. Datele de intrare ale modelului de simulare poate fi utilizată pentru confirmarea satisfacerii restricțiilor. Optimalitatea poate fi confirmată prin repetarea simulării cu un alt set de acțiuni. Simularea este condusă prin creșterea sau scăderea solicitării în fiecare punct. Optimalitatea este confirmată dacă orice altă valoare a solicitării duce de exemplu la degradarea valorii funcției obiectiv sau produce incompatibilitate cu respectarea restricțiilor. Mulți algoritmi de optimizare conțin implicit acești pași de verificare, verificarea manuală nefiind necesară.

### **3.6 Validarea modelului de management**

În analiza modelelor de simulare, pasul de validare implică folosirea modelului pentru simularea răspunsului sistemului la un set de date de intrare diferite de cele care s-au folosit la construcția și calibrarea modelului. Rezultatele acestei simulări sunt comparate cu datele măsurate, pentru a testa capacitatea modelului de simulare a răspunsului sistemului fără modificarea parametrilor. Pasul de validare este deseori utilizat pentru a arăta că modelul testat este capabil de simularea sistemului studiat.



Validarea modelului de management al dinamicii apei subterane este complicată, deoarece multe modele au trei componente: modelul de simulare, algoritmul de optimizare și formularea optimizării.

Utilizarea modelului de simulare de către modelul de management este condiționată de ipoteza ca modelul de simulare este un model de încredere pentru prognoza răspunsului sistemului. Construcția, calibrarea și validarea modelului de simulare este necesară, dar nu suficientă pentru validarea modelului de management.

Algoritmul de optimizare pentru rezolvarea problemelor va fi dezvoltată în capitolul 4. În cele mai multe cazuri există metode matematice de verificare a faptului că algoritmul converge către soluția optimă (dacă ea există) pentru orice problemă formulată. Validarea independentă a algoritmului în contextul modelelor de management nu este necesară.

Ultima componentă a modelului de management este setul particular de restricții și funcții obiectiv formulate pentru diferite probleme specifice. Validarea acestor formulări poate avea loc sub diferite forme, depinzând de natura formulării. În general, validarea implică confirmarea faptului că caracteristicile dorite ale formulării sunt păstrate atunci când o componentă a formulării rămâne fixă sau o alta se modifică.

De exemplu, un număr limitat de restricții pot fi impuse cu condiția ca satisfacerea unor restricții implică satisfacerea altora care nu sunt date explicit. În acest context, validarea este verificarea restricțiilor neformulate și confirmarea faptului că acestea sunt într-adevăr satisfăcute când locațiile restricțiilor și valorile parametrilor restricțiilor rămân fixate, în timp ce locațiile sau limitele solicitări se modifică.

În concluzie, se poate spune că: dacă 1) modelul de simulare prevede exact răspunsul sistemului, 2) formularea modelului de management reprezintă perfect criteriile de proiectare 3) algoritmul de optimizare poate să găsească soluțiile optime, atunci strategia de management este optimă.

Ultima condiție este ușor de îndeplinit, la fel a doua condiție este deseori confirmată prin măsuri de calibrare și validare. Totuși, experiența practică sugerează că prima condiție este rar satisfăcută. Proiectantul poate face ca strategia să fie optimă, cu respectarea modelului de simulare utilizat și cu o formulare corectă a problemei.

### **3.7 Exemplul alimentării cu apă subterană**

Un exemplu simplu este utilizat pentru ilustrarea construcției modelului. Acest exemplu va fi utilizat pentru demonstrarea procedurilor obținerii soluțiilor și metodelor pentru analizarea rezultatelor din capitolele următoare. Exemplul constă dintr-un acvifer care descarcă într-un râu în condiții de curgere staționare. Două pompe de alimentare cu apă din cele două foraje sunt operative și se cere maximizarea debitului total de apă pompat în condiții staționare. Mai mult, trebuie minimizată

cantitatea de apă ce curge dinspre râu ca urmare a pompării. Locațiile pompelor relativ la râu sunt arătate în figura 3.18 a). Sistemul fizic exclude simularea cu metode analitice, astfel încât simularea se va realiza prin metode numerice.

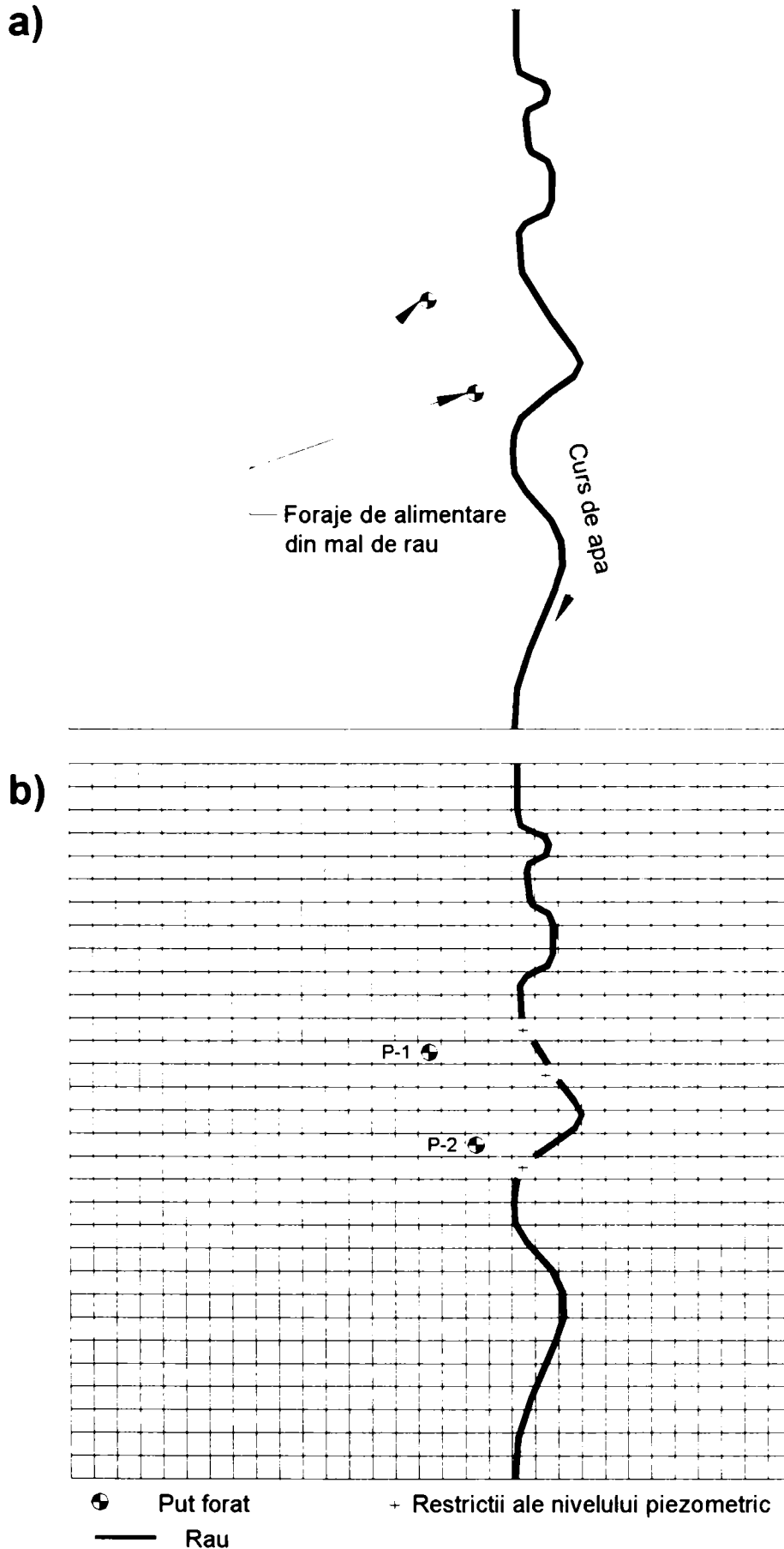


Figura 3.18 Exemplul alimentării cu apă. (a) Maximizarea debitului pompat din cele două puțuri și minimizarea cantității de apă care curge dinspre râu în acvifer, ca rezultat al pompării. (b) Schema de discretizare și locațiile restricțiilor

Pentru această problemă de alimentare cu apă, formularea care conține numai maximizarea debitului extras este incompletă, deoarece nu este luat în considerare extragerea apei provenită din râu. Analog, formularea care conține numai minimizarea extragerii apei provenite din râu, fără a lua în considerare cerințele impuse solicitării, are ca soluție pompare foarte reduse sau zero, adică fără extracție [73,50,104,14,100].

Formularea care conține maximizarea extracției simultan cu minimizarea fluxului apei din râu spre acvifer este ambiguă. Formularea problemei care dă soluții depinde de importanța relativă dată ratei de pompare și nivelurilor piezometrice.

Bazată pe descrierea problemei, sunt posibile două formulări ale problemei. O formulare este de a maximiza debitul extras din acvifer prin cele două puțuri fără extragerea apei provenită din râu.

Fluxul dintre apa de suprafață și cea subterană este deseori modelată ca și o funcție de diferența nivelului piezometric între cele două surse de apă. De aceea, putem restricționa extracția din râu prin menținerea nivelului piezometric din acvifer peste nivelul piezometric din râu. Putem impune această restricție în toate celulele care conțin râul, dar o formulare mult mai eficientă este impunerea acestei restricții numai în locațiile critice.

Din cauza direcției curgerii neperturbate a apei subterane către râu, ne putem aștepta ca nivelul piezometric mai scăzut al râului se va apropia în fiecare puț de limita soluției. Mai mult, ne putem aștepta ca pe porțiunea de râu dintre cele două puțuri să se producă o scădere critică a nivelului piezometric pe principiul superpoziției. Locația celei de a doua restricții din figura 3.18 b), a fost ales pentru că este mai apropiat de ambele puțuri decât alte celule ce conțin râul și nu este adiacent cu alte restricții. Din cele de mai sus, restricțiile sunt definite prin impunerea cerințelor asupra scăderii nivelului apei în cele trei locații din domeniul discretizat de-a lungul râului, prezentat în figura 3.18 b). Restricțiile impun ca nivelul piezometric al acviferului să nu scadă sub nivelele piezometrice din cele trei locații din râu. Formularea rezultată este:

$$\text{maximizează } f = q_1 + q_2 \quad (3.46)$$

astfel încât

$$h_i \geq h'_i \quad i = 1,2,3 \quad (3.47)$$

Cele trei restricții sunt utilizate pentru întreaga lungime a râului din domeniu, acolo unde se așteaptă scăderea cea mai mare a nivelului piezometric din râu, iar locațiile lor au fost alese celulele cele mai apropiate de puțuri (1 și 3) iar locația 2 este situată între ele.

O altă formulare a problemei este de a maximiza nivelele piezometrice lângă râu (pentru minimizarea extracției din râu), iar restricțiile se referă la satisfacerea cerințelor de apă. Formularea obținută este:

$$\text{maximizează } f = \sum_{i=1}^3 h_i \quad (3.48)$$

astfel încât

$$q_1 + q_2 \geq Q_{necesar} \quad (3.49)$$

În această formulare cerința de apă va fi determinată fără a fi necesară extracția apei provenite din râu.

## Cap. 4 REZOLVAREA MODELULUI DE OPTIMIZARE

În capitolul anterior forma generală liniară a problemei de optimizare a fost stabilită astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i \quad (4.1)$$

astfel încât

$$\alpha_{1,k}^q q_1 + \alpha_{2,k}^q q_2 + \dots + \alpha_{j,k}^q q_j + \dots + \alpha_{n,k}^q q_n + \beta_k^q + \alpha_{1,k}^h h_1 + \alpha_{2,k}^h h_2 + \dots + \alpha_{i,k}^h h_i + \dots + \alpha_{l,k}^h h_l + \beta_k^h \geq 0$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

În acest capitol este prezentată metoda simplex, o metodă foarte eficientă de rezolvare a problemelor liniare de optimizare. Utilizarea acestui algoritm necesită formularea problemei sub forma unei probleme de programare liniară. O problemă de programare liniară este o formulare a problemei de optimizare în care funcția obiectiv și toate restricțiile sunt funcții liniare de variabilele de decizie. Problema de management a dinamicii apei subterane (4.1) poate fi pusă sub forma:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n c_j q_j \quad (4.2)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j \geq b_k \quad k = 1, \dots, m$$

Această transformare necesită definirea explicită a nivelului piezometric ca funcție de solicitarea aplicată acviferului.

### 4.1 Problema de optimizare ca o problemă de programare liniară

În această secțiune vom arăta metodele de transformare a multor tipuri de restricții și funcții obiectiv în probleme de programare liniară sub forma (4.2) [38,78,1,103]. Prima relație funcțională din această formulare este cea dintre nivelul piezometric și solicitare. Răspunsul nivelului piezometric în locația  $i$  la modificarea parametrilor de pompare poate fi descrisă utilizând seria Taylor, în modul următor:

$$h_i(q) = h_i^0(q_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q_0)(q_j - q_j^0) + \sum_{j=1}^n \sum_{n=1}^n \left[ \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_j \partial q_k}(q_0) \frac{(q_j - q_j^0)(q_k - q_k^0)}{2!} \right] + \dots \quad (4.3)$$

unde  $\mathbf{q}$  este noul vector de solicitare (debit extracție / injecție) cu componentele  $q_j$ , iar  $\mathbf{q}_0$  este vectorul inițial de solicitare cu componentele  $q_j^0$ .

Presupunând că nivelul piezometric este o funcție liniară de solicitare, în cazul acviferului mărginit (vezi secțiunea 2.3.4) derivatele parțiale ale lui  $h$  în raport cu  $q$  de ordin egal sau mai mare de 2 sunt nule, iar prima derivată este constantă. Aceasta implică faptul că prima derivată a nivelului piezometric este independentă de valoarea solicitării în raport cu care este evaluat. Este convenabil să selectăm toate componentele lui  $q_0$  nule. Utilizând aceste simplificări, seria Taylor se reduce la:

$$h_i(q) = h_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} q_j \quad (4.4)$$

Forma generală a restricțiilor impuse nivelelor piezometrice este o combinație liniară a acestor nivele:

$$\alpha_1^n h_1 + \alpha_2^n h_2 + \dots + \alpha_i^n h_i + \dots + \alpha_i^n h_i + \beta^n \geq 0 \quad (4.5)$$

Înlocuind în fiecare termen al relației (4.5) nivelul piezometric sub forma (4.4) obținem:

$$\begin{aligned} & \alpha_1^n \left( h_1^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_1}{\partial q_j} q_j \right) + \alpha_2^n \left( h_2^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_2}{\partial q_j} q_j \right) + \dots \\ & + \alpha_i^n \left( h_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} q_j \right) + \dots + \alpha_i^n \left( h_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} q_j \right) + \beta^n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i^n \left( h_i^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} q_j \right) + \beta^n \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^l \alpha_i^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right) q_j + \sum_{i=1}^l \alpha_i^n h_i^0 + \beta^n \geq 0 \quad (4.8)$$

Restricția în termeni de nivele piezometrice, ecuația (4.5), a fost convertită în restricție în termeni de solicitare, (4.8). Prin utilizarea relației (4.8) în locul unei părți din forma generală (4.1), se obține formularea problemei numai cu variabile de decizie de solicitare.

Un exemplu specific de determinare a formei coeficienților  $a_{kj}$  și  $b_k$  din relația (4.2) este determinarea acestora din restricțiile referitoare la limita inferioară a nivelului piezometric și la diferența dintre nivelurile piezometrice. Pentru limita inferioară a nivelului piezometric toți coeficienții  $\alpha_i^n$  se aleg zero, cu excepția coeficientului  $\alpha_i$ , care se alege 1. Termenul constant  $\beta^n$  se alege negativ pentru limita inferioară a nivelului. Astfel rezultă restricțiile:

$$h_i \geq h_i' \quad (4.9)$$

care în combinație cu (4.4) rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} q_j \geq h_i' - h_i^0 \quad (4.10)$$

Coeficienții din (4.2) pot fi imediat identificați, ca fiind:

$$a_{kj} = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}, \quad b_k = h_i' - h_i^0 \quad (4.11)$$

Pentru restricția asupra diferenței nivelurilor piezometrice toți coeficienții  $\alpha^h$ , se aleg nule, cu excepția coeficientului primului termen din diferența de nivele piezometrice, care se alege 1, și cu coeficientului celui de al doilea termen din diferența de nivele, care se alege -1. Termenul constant  $\beta^h$  se alege negativ pentru restricția impusă diferenței de nivel piezometric. Astfel rezultă restricțiile sub forma:

$$h_{k_1} - h_{k_2} \geq h_k^d \quad (4.12)$$

care în combinație cu (4.4) rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{k_1}}{\partial q_j} q_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{k_2}}{\partial q_j} q_j \geq h_k^d - (h_{k_1}^0 - h_{k_2}^0) \quad (4.13)$$

care poate fi rearanjată sub forma:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial h_{k_1}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{k_2}}{\partial q_j} \right) q_j \geq h_k^d - (h_{k_1}^0 - h_{k_2}^0) \quad (4.14)$$

Coeficienții din (4.2) pot fi imediat identificați, ca fiind:

$$a_{kj} = \frac{\partial h_{k_1}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{k_2}}{\partial q_j} = \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_2})}{\partial q_j}, \quad b_k = h_k^d - (h_{k_1}^0 - h_{k_2}^0) \quad (4.15)$$

În mod similar, orice termen din funcția obiectiv care implică nivele piezometrice poate fi reformulată pentru a putea fi scrisă sub forma unei combinații liniare a componentelor solicitărilor.

## 4.2 Estimarea coeficienților răspunsului acviferului la solicitare

Coeficienții din restricția sub formă generală (4.2),  $a_{kj}$ , care conțin derivatele nivelului piezometric pot da indicii despre răspunsul acviferului la schimbarea parametrilor solicitării. Aceste indicii se referă la coeficienții răspunsului. Legătura dintre modelul de simulare și formularea optimizării este dată de acești coeficienți [110,120].

Cea mai obișnuită metodă de calculare a coeficienților răspunsului este aplicarea unei perturbări. Această metodă aproximează derivata nivelului piezometric în raport cu solicitarea pe baza metodei diferențelor finite. Aproximarea acestei derivate cu metoda diferențelor finite este descrisă în secțiunea 2.3.1:

$$\frac{\partial h_i}{\partial q_j} \approx \frac{\Delta h_i}{\Delta q_j} = \frac{h_i(q_{\Delta_j}) - h_i(q_0)}{q_{\Delta_j} - q_0} \quad (4.16)$$

unde  $q_{\Delta_j}$  este perturbarea solicitării în puțul  $j$ ,  $\mathbf{q}_{\Delta_j}$  este vectorul de solicitare ce diferă de  $\mathbf{q}_0$  numai pentru componenta  $j$  cu valoarea:  $(q_{\Delta_j} - q_0^j)$ .

Ca în toate aplicațiile cu diferențe finite, trebuie luată în considerare influența mărimii perturbației asupra preciziei aproximării derivatei. Teoria diferențelor finite arată că eroarea este proporțională cu mărimea perturbației. În cazul în care acviferul este modelat ca fiind liniar, primul termen eliminat din seria Taylor (derivata secundă a nivelului piezometric în raport cu solicitarea) este zero și prima derivată este

constantă. Calcularea acestei prime derivate cu diferențe finite va fi independentă de mărimea perturbației, cu precizia dată numai de numărul de zecimale luate în calcul. Cazul în care răspunsul acviferului la solicitare este neliniar, cazul acviferului cu nivel liber, va fi discutat în detaliu în capitolul 8.

Relația dintre mărimea perturbației și precizia derivatei este dată de eroarea de rotunjire rezultată prin efectuarea diferențelor de la numărător. În cazul în care cele două nivele piezometrice calculate din relația (4.16) sunt apropiate ca valoare, are loc o diminuare a preciziei calculului. Acest lucru devine mai acut în cazul calculării coeficienților de răspuns în cazul restricțiilor impuse diferențelor de nivel piezometric. Acești coeficienți pot fi aproximați prin:

$$\frac{\partial(h_{k_1} - h_{k_2})}{\partial q_j} \approx \frac{\Delta(h_{k_1} - h_{k_2})}{\Delta q_j} = \frac{(h_{k_1}(q_{\Delta_j}) - h_{k_2}(q_{\Delta_j})) - (h_{k_1}(q_0) - h_{k_2}(q_0))}{q_{\Delta_j} - q_0} \quad (4.17)$$

Acest calcul implică efectuarea unor diferențe dintre diferențe la numărător. În primul rând, diferența dintre valorile nivelului piezometric din cele două locații vecine  $k_1$  și  $k_2$  poate fi mică, prin acesta pierzându-se precizia calculului prin efectuarea mai multor operații algebrice. În al doilea rând, diferența dintre diferențele de mai sus poate fi și ea mică. Deci, posibilitatea apariției unei erori de rotunjire semnificativă poate constitui o problemă.

### Exemplu de scădere a preciziei

Considerăm exemplul unui acvifer ipotetic cu secțiune pătratică, cu o transmisivitate de  $5000 \text{ m}^2/\text{zi}$  și presupunem că o valoare a perturbației de  $200 \text{ m}^3/\text{zi}$  este folosită pentru determinarea primei derivate a nivelului piezometric în raport cu solicitarea rezultată din pomparea apei. Au fost obținute următoarele valori:

$$\begin{aligned} h_{k_1,0} &= 35.11888 \\ h_{k_2,0} &= 34.83335 \\ h_{k_1,\Delta_j} &= 35.10323 \\ h_{k_2,\Delta_j} &= 34.82014 \end{aligned}$$

calcul în care s-au luat în considerare 5 zecimale. Calculând cu relația (4.17) valorile coeficienților de răspuns a rezultat  $0,0000122$ . Deși au fost luate în considerare 5 zecimale pentru calculul nivelului piezometric, pentru o cât mai mare precizie, acestea s-au redus la 3 zecimale nenule la calcul coeficienților de răspuns. Dacă se folosește o valoare mică a perturbației sau se iau în considerare numai câteva zecimale, atunci este posibil ca coeficienții de răspuns rezultați să nu aibă zecimale semnificative.

Valoarea perturbației trebuie să fie suficient de mare pentru a evita o eroare de rotunjire prea mare în efectuarea diferențelor, dar nu o valoare foarte mare, pentru că atunci răspunsul acviferului modelat va fi neliniar.

Metoda matricilor iterative utilizate pentru rezolvarea ecuației curgerii apei subterane presupune introducerea unor linii adiționale în aceste matrici pentru



precizia calculului. Nivelele piezometrice rezultate au o precizie impusă de criteriile de convergență definite de utilizator. Acesta trebuie să se asigure că dispune de un număr suficient de zecimale pentru a realiza o precizie adecvată în calculul coeficienților de răspuns.

### 4.3 Metoda simplex

Ne vom îndrepta atenția asupra rezolvării problemelor liniare optimizare al apei subterane. Pentru început vom prezenta câteva caracteristici geometrice ale problemelor de programare liniară, apoi se va prezenta metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară [32, 19, 118, 64, 95, 97, 98, 68, 101, 128, 140].

Forma generală liniară a problemelor de optimizare al apei subterane a fost prezentată în relația (4.2) în notații scalare. Pentru prezentarea tehnicii de rezolvare a acestei probleme este utilă exprimarea ei sub formă matriceală:

$$\text{maximizează } f = c'q \quad (4.18)$$

astfel încât

$$Aq \geq b$$

$$q^i \leq q \leq q''$$

unde variabilele îngroșate mici,  $c$ ,  $q$ ,  $b$  reprezintă matrici coloană, variabilele îngroșate mari,  $A$ , reprezintă matrici cu linii și coloane,  $t$  reprezintă transpusa matricilor. De reținut că restricțiile impuse solicitări sunt separate de alte restricții.

#### 4.3.1 Interpretarea geometrică

Vom prezenta mai întâi cazul simplu al unei probleme de programare liniară cu două variabile de decizie. Această problemă este problema alimentării cu apă din secțiunea (3.7), unde s-a cerut maximizarea cantității de apă extrasă prin pompare din două puțuri situate lângă un râu, cu trei restricții, impuse pentru a împiedica intruziunea apei râului în acvifer. Această problemă este formulată matriceal astfel:

$$\text{maximizează } f = c'q \quad (4.19)$$

astfel încât

$$Aq \geq b$$

$$q \geq 0$$

Existând numai două puțuri de pompare (două variabile de decizie) problema poate fi rezolvată grafic (figura 4.1), pe fiecare axă aflându-se o variabilă de decizie. Restricțiile sunt inecuații, ele pot fi reprezentate grafic prin dreptele care realizează egalitatea în inecuație. Aceste drepte delimitează domeniul în care se găsesc soluțiile care satisfac restricțiile și corespund criteriilor dorite prin proiectare. Cele trei restricții sunt reprezentate prin liniile continue, iar condiția de nenegativitate a soluțiilor limitează domeniul la primul cadran. Coeficienții din restricții folosite aici vor fi calculate în secțiunea 4.4.1. Setul de puncte care satisfac toate restricțiile sunt colorate și formează domeniul soluțiilor realizabile. Punctele în care se intersectează dreptele care reprezintă restricțiile sunt vârfurile domeniului, A, B, C și D. Deoarece

funcția obiectiv și restricțiile sunt liniare, soluția optimă este dată de unul din aceste vârfuri sau de segmentul care unește două vârfuri adiacente. În cele mai multe cazuri soluția optimă va fi un punct, totuși, în unele cazuri e posibil ca toate punctele unui segment de dreaptă să fie soluții optime. Acest caz este un exemplu de optim multiplu, ce a fost discutat în secțiunea 3.2.5.

Valoarea funcției obiectiv este suma ratelor de pompare din cele două puțuri (suma debitelor pompate),  $q_1$  și  $q_2$ . Două valori ale funcției  $f(\mathbf{q})$  sunt reprezentate cu linii întrerupte. Aceste linii se pot muta în sus sau în jos. Dacă linia e mutată în sensul creșterii ratei de pompare, crește și valoarea funcției obiectiv. Funcția obiectiv poate crește până la atingerea limitei domeniului soluțiilor realizabile, unde este găsită soluția optimă. Prin creșterea mai departe a ratelor de pompare, cel puțin una din restricții nu va fi satisfăcută, în cazul acestei probleme intruziunea apei râului în acvifer. Soluția optimă poate fi determinată din figura 4.1:  $q_1 = 2.393 \text{ m}^3/\text{zi}$  și  $q_2 = 8.435 \text{ m}^3/\text{zi}$  pentru o cantitate totală de apă de  $10.838 \text{ m}^3/\text{zi}$ . De notat că două restricții, 1 și 3, sunt satisfăcute la egalitate. Aceste două restricții sunt satisfăcute la egalitate deoarece ele previn pomparea adițională și ele dau soluția optimă. Restricția 2 rămâne o inegalitate pentru soluția optimă.

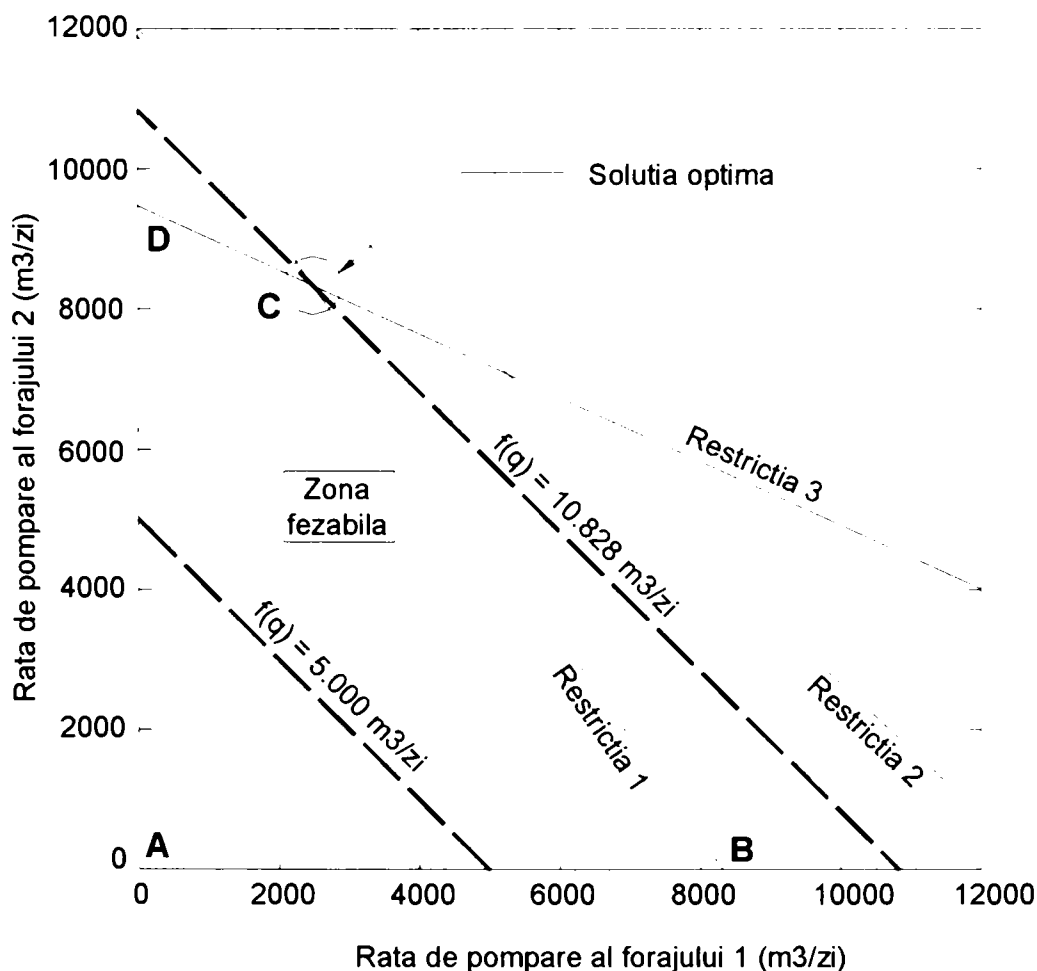


Figura 4.1 Reprezentarea grafică a problemei de alimentare cu apă

Din cele discutate mai sus, se pot desprinde câteva caracteristici ale problemelor de programare liniară. Deși nu sunt demonstrate aici, următoarele proprietăți ale problemelor de programare liniară sunt în general adevărate:

1. Intersecția soluțiilor realizabile a tuturor restricțiilor definesc domeniul soluțiilor realizabile. Dacă acest domeniu este un spațiu nul, problema nu are soluții. Dacă acest domeniu este nemărginit atunci problema nu poate fi rezolvată,

este incompatibilă. Exemple de probleme care nu au soluții sau sunt incompatibile au fost date în capitolul 3.

2. Dacă problema de programare liniară are soluție optimă, aceasta este dată de unul din vârfurile domeniului soluțiilor realizabile, dacă există mai multe soluții optime, atunci ele sunt date de toate punctele care se găsesc pe un segment de dreaptă care unește două vârfuri adiacente ale domeniului soluțiilor realizabile. Pentru problemele cu mai multe de două variabile de decizie, soluția este dată de una din vârfurile domeniului multidimensional, în caz de mai multe soluții optime, acestea sunt date de punctele suprafeței care trece prin vârfurile multiple adiacente.
3. Dacă există un număr finit de vârfuri, orice submulțime a lor reprezintă soluții realizabile.
4. Dacă valoarea funcției obiectiv într-un vârf al domeniului este mai bună decât în toate vârfurile adiacente, atunci nu mai există alte puncte care dau o valoare mai bună funcției obiectiv, iar soluția optimă a fost găsită.

Din proprietățile 2 și 3 rezultă că procesul de căutare al soluțiilor poate fi restricționată la un număr finit de vârfuri ale domeniului soluțiilor realizabile. Deci soluția poate fi găsită dintr-un număr finit de pași. Aceste caracteristici ale problemelor de programare liniară sugerează algoritmul prin care să găsim vârfurile în care valoarea funcției obiectiv se îmbunătățește. Dacă această îmbunătățire nu mai este posibilă, atunci proprietatea 4 indică faptul că soluția optimă a fost găsită.

#### **4.3.2 Prezentarea matematică a metodei simplex**

Deși rezolvarea problemelor bidimensionale este posibilă prin metode grafice, pentru rezolvarea problemelor cu mai multe variabile de decizie necesită dezvoltarea unui algoritm algebric. Pentru a defini regulile acestui algoritm e necesară adoptarea unei convenții asupra tipurilor de formulări rezolvate. În această prezentare presupunem că funcția obiectiv trebuie maximizată. Reamintim că problema de minimizare poate fi transformată în problemă de maximizare prin multiplicarea funcției obiectiv cu -1. Așadar, procedurile prezentate mai departe pot fi aplicate atât pentru probleme de maxim, cât și de minim. O altă ipoteză este că valorile variabilelor de decizie trebuie să fie pozitive sau limita lor superioară trebuie să fie definită de un set de restricții, pe lângă alte restricții care se impun. Există reguli și pentru includerea limitelor superioare ale variabilelor de decizie, similare cu condițiile de nenegativitate, dar pentru simplificarea prezentării, aceste reguli nu sunt prezentate aici [32, 19, 118, 64, 95, 97, 98, 68, 101, 128, 140].

Cum am indicat înainte, trebuie să definim reguli matematice pentru determinarea secvențială vârfurile adiacente realizabile  $q^1, q^2, \dots, q^*$  pentru care  $f(q^1) < f(q^2) < \dots < f(q^*)$ , unde  $q$  este matricea variabilelor de decizie, iar  $q^*$  este soluția optimă. Înainte de a prezenta metoda simplex, definim variabilele problemei.

Problema de programare liniară este:

$$\text{maximizează } f = c'q \quad (4.20)$$

astfel încât

$$Aq \geq b$$

$$q \geq 0$$

în care avem  $n$  variabile de decizie și  $m$  restricții,  $c$  este matricea de dimensiuni  $(n \times 1)$  a costurilor unitare,  $q$  este matricea  $(n \times 1)$  a variabilelor de decizie,  $A$  este matricea  $(m \times n)$  a coeficienților restricțiilor, iar  $b$  este matricea  $(m \times 1)$  a valorilor restricțiilor.

### Prezentarea metodei simplex

Metoda simplex este o metodă iterativă pentru găsirea soluțiilor realizabile ale problemelor de programare liniară (care se află în vârfurile domeniului soluțiilor realizabile). Este calculată valoarea funcției obiectiv, pornind dintr-un vârf oarecare, parcurgând pe rând vârfurile adiacente, până la valoarea maximă a ei, care se realizează în vârful  $i$ . Dacă valoarea funcției obiectiv în vârful următor  $i + 1$ , adiacent, este mai mică, înseamnă că am găsit soluția optimă, adică în vârful  $i$ . În exemplul alimentării cu apă din figura 4.1, acest proces a pornit din punctul A, apoi a continuat în B și în final în C. O altă variantă este A, D, C.

Funcția obiectiv și restricțiile care formează un sistem de ecuații liniare se pot rezolva folosind regulile algebrei matriceale. Este dificil de executat operații matriceale cu inecuații, de aceea în metoda simplex se adaugă o variabilă la fiecare restricție care este scrisă sub forma unei inegalități, pentru a o transforma în egalitate. Formularea extinsă conține acum  $m$  ecuații și  $m + n$  necunoscute. Deși sistemul este nedeterminat, dacă cele  $n$  variabile sunt fixate, atunci cele  $m$  variabile rămase pot fi determinate în mod unic. În metoda simplex, cele  $n$  variabile care sunt adăugate se numesc variabile auxiliare, ele având precizate limitele superioare sau inferioare. În exemplul din figura 4.1, ratele de pompare sunt limitate doar inferior, iar variabilele auxiliare ( $n = 2$ ) sunt nule. Metoda simplex procedează la calculul sistematic variabilelor auxiliare: atunci când o variabilă auxiliară devine nenulă, o variabilă de bază devine nulă. Cum va fi arătat în secțiunea ce urmează, acești pași sunt echivalenți cu găsirea soluțiilor din vârfurile succesive adiacente.

Odată ce variabilele auxiliare sunt determinate, sistemul rămas de  $m$  ecuații cu  $m$  necunoscute este rezolvat prin metoda eliminării al lui Gauss. Senzitivitatea funcției obiectiv la schimbarea unitară a fiecărei variabile auxiliare este calculată prin soluția curentă. În metoda simplex, variabilele auxiliare care au ca rezultat creșterea valorii funcției obiectiv sunt alese a crește în valoare la iterația următoare. Restricțiile limitează creșterea valorii funcției obiectiv și determină variabilele de bază care vor deveni nule.

Procesul de alegere a celor  $n$  variabile auxiliare și aflarea soluțiilor celor  $m$  variabile de bază este iterativ și continuă până când îmbunătățirea valorii funcției obiectiv este posibilă.

Dacă toate valorile care duc la creșterea funcției obiectiv prin schimbarea în sens negativ a valorilor variabilelor auxiliare, atunci creșterea valorii oricărei din aceste variabile peste zero duce la deteriorarea valorii funcției obiectiv. Când apare această situație, nu mai este posibilă îmbunătățirea valorii funcției obiectiv și soluția optimă a fost găsită.

În multe probleme, găsirea unei soluții de bază inițiale pentru începerea calculului nu este o problemă simplă. Pentru simplificare, vom considera această soluție cunoscută. Metodele de găsire a acestor soluții inițiale sunt redată în literatura de specialitate.

### Extinderea problemei originale

Înainte ca programul liniar să poată fi rezolvat algebric, trebuie ca inegalitățile sub care sunt scrise restricțiile să se transforme în egalități. Această transformare se realizează prin adăugarea fiecărei restricții a unei variabile; adunarea unei variabile pozitive pentru inegalitățile de tipul „ $\leq$ ” și scăderea unei variabile pozitive pentru „ $\geq$ ” (ca în exemplul cu alimentarea cu apă). Aceste variabile se numesc variabile adiționale. Problema extinsă este:

$$\text{maximizează } f = c'q + O'x_s \quad (4.21)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} Aq - Ix_s &= b \\ q \geq 0, \quad x_s &\geq 0 \end{aligned}$$

unde  $x_s$  este matricea variabilelor adiționale, de dimensiuni  $(m \times 1)$ , iar  $O$  este matricea nulă. De notat, că fiecare restricție conține numai o variabilă adițională.

Formularea precedentă se poate scrie compact sub forma:

$$\text{maximizează } f = \underline{c}' \underline{x} \quad (4.22)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{x} &= b \\ \underline{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

unde matricea  $\underline{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$  și  $\underline{x} = \begin{bmatrix} q \\ x_s \end{bmatrix}$ , iar matricea  $\underline{A} = [A \mid -I]$ .

Dacă restricția trebuie să fie satisfăcută la egalitate (la limită) de soluții, atunci variabila adițională este zero. Dacă variabila adițională are o valoare pozitivă atunci restricția respectivă nu trebuie satisfăcută la egalitate de soluții. În exemplul din figura 4.1 am arătat că restricțiile 1 și 3 sunt satisfăcute la egalitate de soluția optimă. Deci variabilele adiționale din acestea trebuie să fie nule. Restricția 2 rămâne o inegalitate prin înlocuirea soluției optime, deci variabila ei adițională trebuie să fie menținută nenulă. După cum se vede din figura 4.1, această problemă are patru soluții realizabile, punctele fiind notate cu A, B, C și D. Valorile variabilelor  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$  și  $x_{s3}$  din problema extinsă sunt:

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.42 & 0.51 & 0.68 \end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix} 8317 & 0 & 0 & 0.18 & 0.41 \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix} 2393 & 8435 & 0 & 0.056 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D: \begin{pmatrix} 0 & 9532 & 0.082 & 0.010 & 0 \end{pmatrix}$$

De notat că pentru fiecare vârf două variabile sunt zero și trei sunt pozitive. De asemenea, pentru două vârfuri adiacente (exemplu A și B) două dintre variabilele pozitive sunt aceleași ( $x_{s2}$  și  $x_{s3}$ ). Această proprietate a valorilor variabilelor din vârfurile adiacente, de a diferi doar printr-o valoare nenulă, este o caracteristică generală a problemelor de programare liniară și este exploatată de metoda simplex.

### Variabile de bază și variabilele auxiliare

Adăugarea variabilelor adiționale crește numărul variabilelor problemei la  $(n + m)$  unde  $n$  sunt variabile originale, iar  $m$  sunt variabile adiționale. Acum problema constă din  $m$  ecuații și  $(n + m)$  necunoscute. Pentru problema precedentă vor rezulta 3 ecuații cu 5 necunoscute. Pentru rezolvarea sistemului trebuie fixate  $n$  variabile pentru a determina apoi cele  $m$  necunoscute rămase. Prin alegerea celor  $n$  variabile fixate nule, condiția de nenegativitate este automat îndeplinită. Aceste  $n$  variabile se numesc variabile auxiliare, iar celelalte se numesc variabile de bază.

Este utilă reorganizarea matricilor din (4.21) în termenii cu variabile de bază și variabile auxiliare,  $x_B$  și  $x_N$ , componentele lor fiind:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_B \\ c_N \end{Bmatrix} \\ x &= \begin{Bmatrix} q \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_B \\ x_N \end{Bmatrix} \\ \tilde{A} &= [A|-I] = [B|N] \end{aligned} \tag{4.23}$$

unde  $c_B$  și  $c_N$  sunt costurile unitare, iar  $B$  și  $N$  sunt matricile corespunzătoare coeficienților variabilelor de bază respectiv auxiliare ale restricțiilor.

Problema formulată de (4.21) poate fi acum reformulată în termeni de variabile de bază și variabile auxiliare:

$$\text{maximizeaza } f = c_B^t x_B + c_N^t x_N \tag{4.24}$$

astfel încât

$$\begin{aligned} Bx_B + Nx_N &= b \\ x_N &= 0 \end{aligned}$$

unde  $B$  este matricea coeficienților variabilelor de bază ale restricțiilor de dimensiuni  $(m \times m)$ , iar  $N$  este matricea coeficienților variabilelor auxiliare ale restricțiilor de dimensiuni  $(m \times n)$ . De reținut este faptul că deoarece metoda simplex setează variabilele auxiliare egale cu valori fixate, valorile variabilelor de bază pot fi determinate ușor:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (4.25)$$

Substituind ecuația (4.25) în funcția obiectiv, rezultă:

$$f = c'_B [B^{-1}(b - Nx_N)] + c'_N x_N \quad (4.26)$$

$$f = c'_B B^{-1} b + (c'_N - c'_B B^{-1} N) x_N \quad (4.27)$$

Ecuația (4.27) poate fi generalizată mai departe prin adăugarea unui termen egal cu zero în membrul drept:

$$f = c'_B B^{-1} b + (c'_N - c'_B B^{-1} N) x_N + (c'_B - c'_B B^{-1} B) x_B \quad (4.28)$$

și prin rearanjare, folosind relația identificată în (4.22) și (4.23) rezultă:

$$f = c'_B B^{-1} b + (c' - c'_B B^{-1} A) x \quad (4.29)$$

Coeficienții din matricea  $x$  din (4.29) se numesc costuri reduse și dau îmbunătățirea lui  $f$  pentru o mică schimbare în fiecare variabilă. Observăm că termenul secund din (4.29) este nul deoarece variabilele auxiliare ele însele sunt nule și coeficienții lor din bază sunt nuli. Ambii termeni din membrul drept din (4.29) sunt reținuți, deoarece primul termen este valoarea funcției obiectiv pentru soluția curentă, iar cel de-al doilea termen furnizează informații despre cum se va îmbunătăți soluția curentă.

Așa cum am arătat mai înainte, scopul metodei simplex este de a trece de la un vârf al domeniului soluțiilor realizabile la vârful adiacent (următor) pentru a obține o valoare mai bună pentru funcția obiectiv. Vârful adiacent diferă de cel precedent doar printr-o singură variabilă de bază, așadar prin mutare o variabilă de bază trebuie să părăsească baza, devenind variabilă auxiliară; iar o variabilă auxiliară trebuie să intre în bază, devenind variabilă de bază. Următoarele două secțiuni descriu metodele și logica folosită pentru a găsi soluția realizabilă din vârful adiacent și în final, a soluției optime.

### Găsirea variabilei auxiliare care intră în bază

În secțiunea precedentă am arătat că valoarea funcției obiectiv pentru orice set de variabile de bază și auxiliare poate fi determinată cu (4.29). Costurile reduse reprezintă sensibilitatea locală a lui  $f$  pentru o mică schimbare a fiecărei variabile.

Dacă costul redus al unei variabile auxiliare este pozitiv, atunci creșterea valorii acestei variabile va determina o creștere a valorii funcției obiectiv. Reamintim că problema este de maximizare a valorii funcției obiectiv, deci orice cost redus pozitiv pentru variabila auxiliară implică creșterea valorii funcției obiectiv.

Ce se întâmplă dacă mai mulți coeficienți sunt pozitivi? Deși atunci nu există o metodă de a determina care variabilă auxiliară va intra în bază, metoda simplex alege variabila cu valoarea cea mai mare pozitivă a costului redus. Această variabilă va determina o creștere a valorii funcției obiectiv.

Dacă toate valorile costurilor reduse sunt negative, atât pentru variabilele de bază, cât și pentru cele auxiliare, atunci nu mai este posibilă îmbunătățirea valorii funcției obiectiv și soluția optimă a fost găsită.

### Găsirea variabilei de bază care părăsește baza

Când am arătat cum se determină variabila care intră în bază, am recunoscut de asemenea, că această variabilă nu poate crește la infinit. În câteva puncte soluția poate deveni nerealizabilă și restricțiile sunt utilizate pentru controlul mărimii creșterii variabilei care intră în bază. O metodă pentru determinarea limitei superioare până la care poate crește această variabilă este metoda eliminării al lui Gauss. Dacă din fiecare restricție se elimină o variabilă, atunci poate fi obținută o relație simplă dintre fiecare variabilă de bază și toate variabilele auxiliare. Acesta poate fi realizată prin multiplicarea ambilor membri a restricției din (4.24) cu  $\mathbf{B}^{-1}$ :

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.30)$$

prin rearanjare rezultă:

$$\mathbf{I}\mathbf{x}_B + (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.31)$$

De reținut aici, că fiecare variabilă de bază a avut coeficientul 1 într-o singură restricție, iar în celelalte zero. De asemenea, toți coeficienții curenți au fost obținuți folosind informațiile din definiția problemei originale.

Pentru determinarea relației dintre variabila care intră în bază și celelalte variabile de bază, fie  $x_j$  variabila care intră în bază și să analizăm restricția pentru variabila  $x_i$ :

$$x_i + (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{ij}x_j = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i \quad (4.32)$$

unde  $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{ij}$  este elementul în matricea  $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$  corespunzând variabilei  $x_j$  în linia  $i$ , iar  $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i$  este valoarea curentă a variabilei de bază  $x_i$ . Prin schimbarea valorii unei alte variabile, cunoaștem  $x_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i$ , deoarece toate variabilele auxiliare sunt nule. Dacă variabila  $x_j$  va fi eliminată din bază, atunci ea se va reduce la zero, iar  $x_i$  va crește la  $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{ij}$ . Dacă (4.32) va fi aplicată pentru fiecare restricție, cea mai mică valoare rezultată este limita creșterii realizabile în  $x_j$ . Variabila  $x_j$  asociată cu valoarea minimă a fracției va deveni zero și va părăsi baza. Variabilele de bază care rămân în bază pot fi testate cu:

$$\min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{ij}} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{ij} > 0 \right\} \quad (4.33)$$

În concluzie, metoda simplex alege  $n$  variabile cu valori fixate, apoi determină celelalte  $m$  variabile rămase prin aplicarea metodei eliminării lui Gauss la fiecare iterație. Costul redus este folosit pentru determinarea variabilei  $x_j$  care intră în bază, iar restricțiile sunt folosite pentru determinarea variabilei care iese din bază,  $x_i$ . Matricea bazei  $\mathbf{B}$  recalculată după fiecare iterație, prin simpla înlocuire a coloanei asociate lui  $x_i$  cu coeficienții originali asociate cu  $x_j$ . Costurile reduse sunt apoi recalculare cu relația (4.29), pasul anterior fiind repetat până când toate costurile reduse sunt negative și nu mai este posibilă îmbunătățirea valorii funcției obiectiv. Apoi sunt rezolvate ecuațiile (4.25) și (4.29) pentru determinarea soluției optime.



#### 4.4 Rezolvarea problemei alimentării cu apă din secțiunea 3.7

În această secțiune vom relua exemplul alimentării cu apă introdus în capitolul 3 și o vom folosi pentru demonstrarea metodelor descrise în acest capitol. Vor fi determinate valorile coeficienților de răspuns, problema va fi rezolvată prin metoda simplex. Cu notații scalare, problema este următoarea:

$$\text{maximizeaza } q_1 + q_2 \quad (4.34)$$

astfel încât

$$h_A \geq h_{raul\ A}$$

$$h_B \geq h_{raul\ B}$$

$$h_C \geq h_{raul\ C}$$

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0$$

##### 4.4.1 Calculul coeficienților de răspuns

Prin calcularea nivelurilor piezometrice cu seria Taylor, rezultă.

$$\text{maximizeaza } q_1 + q_2 \quad (4.35)$$

astfel încât

$$h_A \geq h_{raul\ A}$$

$$\frac{\partial h_A}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial h_A}{\partial q_2} q_2 \geq h_{raul\ A} - h_A^0$$

$$\frac{\partial h_B}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial h_B}{\partial q_2} q_2 \geq h_{raul\ B} - h_B^0$$

$$\frac{\partial h_C}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial h_C}{\partial q_2} q_2 \geq h_{raul\ C} - h_C^0$$

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0$$

Pentru a rezolva această problemă trebuie determinați valorile coeficienților de răspuns și valoarea membrului drept al fiecărei restricții. A fost dezvoltat un model numeric pentru determinarea acestor valori relevante. Valorile membrului drept al fiecărei restricții sunt determinate cu informațiile calculate prin simularea inițială:

Locatia $j$	$h_{raul\ j}$	$h_j^0$	$h_{raul\ j} - h_j^0$
A	504,9	505,319177	-0,41918
B	504,7	505,205849	-0,50585
C	504,3	504,977716	-0,67772

Coeficienții restricțiilor trebuie determinate prin aplicarea unei perturbări, cum am prezentat în secțiunea 4.2. Aplicând o perturbare de  $\Delta q = 200 \text{ m}^3/\text{zi}$ , valorile relevante sunt:

Perechea nivel piezometric – put	Valoarea de baza a nivelului	Valoarea perturbată a nivelului	Coeficientul de raspuns
A,1	505,319177	505,314138	$-5,04 \times 10^{-5}$
A,2		505,315633	$-3,54 \times 10^{-5}$
B,1	505,205849	505,201907	$-3,94 \times 10^{-5}$
B,2		505,201631	$-4,22 \times 10^{-5}$
C,1	504,977716	504,974459	$-3,26 \times 10^{-5}$
C,2		504,970603	$-7,11 \times 10^{-5}$

#### 4.4.2 Aplicarea metodei simplex

Prin calcularea celor de mai înainte, problema alimentării cu apă poate fi rezolvată cu metoda simplex. Cu notațiile matriceale, problema extinsă este:

$$\text{maximizeaza } f = \underline{c}^t x \quad (4.36)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \underline{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

unde prin  $\underline{c}$ ,  $x$  și  $A$  se înțelege că includ variabilele adiționale și coeficienții lor. Prin înlocuirea valorilor numerice determinate rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{c}^t &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ x^t &= [q_1 \quad q_2 \quad x_{s1} \quad x_{s2} \quad x_{s3}] \\ A &= \begin{bmatrix} -0,0000504 & -0,0000354 & -1 & 0 & 0 \\ -0,0000394 & -0,0000422 & 0 & -1 & 0 \\ -0,0000326 & -0,0000711 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$b^t = [-0,41918 \quad -0,50585 \quad -0,67772]$$

În acest exemplu simplu, cunoaștem că restricțiile sunt satisfăcute când nu avem pompare (vârful A din figura 4.1). Utilizând ratele de pompare din cele două puturi ca variabile auxiliare, prima iterație are următoarele variabile de bază și auxiliare:

$$\begin{aligned} x_B^t &= [x_{s1} \quad x_{s2} \quad x_{s3}] \\ x_N^t &= [q_1 \quad q_2] = [0 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Reamintim că matricea bazei  $B$  și matricea  $N$  provin din coloanele matricei coeficienților originali  $A$ , corespunzătoare variabilelor de bază și auxiliare. Pentru prima iterație:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -0,0000504 & -0,0000354 \\ -0,0000394 & -0,0000422 \\ -0,0000326 & -0,0000711 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Din (4.25) și (4.29) valorile variabilelor de bază și costurile reduse din prima iterație sunt determinate ca:

$$x_B^t = [B^{-1}(b - Nx_N)]^t = [0,4192 \quad 0,5059 \quad 0,6777] \quad (4.40)$$

$$(c^t - c_B^t B^{-1} A) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.41)$$

Deși (4.40) dă valorile variabilelor de bază rezultate din prima iterație, această informație nu este utilizată pentru a decide pasul următor. În schimb, din (4.41) știm valorile care vor fi utilizate pentru determinarea modului în care se va schimba baza în procesul de mutare într-un alt vârf adiacent. Cele două variabile auxiliare,  $q_1$  și  $q_2$ , ambele au costuri reduse pozitive în (4.41). Aceasta înseamnă că funcția obiectiv poate crește dacă una dintre aceste variabile devine pozitivă. Deoarece coeficienții sunt egali, îmbunătățirea valorii funcției obiectiv are loc indiferent de care din variabilele auxiliare este aleasă pentru a intra în bază, deci alegerea ei este întâmplătoare. Considerăm că va intra în bază variabila  $q_1$ .

Pentru a determina care din variabilele de bază va ieși din bază, trebuie să analizăm restricțiile deoarece ele limitează creșterea realizabilă a lui  $q_1$ . Variabila care părăsește baza va fi determinată folosind relația (4.33) astfel:

$$\frac{1}{(B^{-1}N)_{i1}} (B^{-1}b)_i = \begin{bmatrix} 8317 \\ 12839 \\ 20789 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

de aici rezultă că cea care dă limita creșterii variabilei  $q_1$  (adică minimumul).

$q_1$  poate crește la valoarea 8.317 m<sup>3</sup>/zi, valoare la care prima restricție este satisfăcută la egalitate (vârful B în figura 4.1). Variabila adițională pentru această restricție trebuie să fie nulă. Deoarece variabila adițională  $x_{s1}$  devine zero, ea va părăsi baza, devenind variabilă auxiliară.

A doua iterație va începe prin înlocuirea lui  $x_{s1}$  cu  $q_1$  în bază. Matricile pentru a doua iterație sunt:

$$x_B^t = [q_1 \quad x_{s2} \quad x_{s3}] \quad (4.43)$$

$$x_N^t = [x_{s1} \quad q_2] = [0 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,0000504 & 0 & 0 \\ -0,0000394 & -1 & 0 \\ -0,0000326 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 & -0,0000354 \\ 0 & -0,0000422 \\ 0 & -0,0000711 \end{bmatrix}$$

Ca și mai înainte, trebuie să determinăm valorile variabilelor de bază și să calculăm noile costuri reduse.

$$x_B^t = [B^{-1}(b - Nx_N)]^t = [8317 \quad 0,1782 \quad 0,4066] \quad (4.44)$$

$$(c^t - c_B^t B^{-1} A) = [0 \quad 0,2976 \quad -19841 \quad 0 \quad 0] \quad (4.45)$$

Din a doua iterație a rezultat doar un cost redus pozitiv care, corespunde variabilei auxiliare  $q_2$ , care va intra în bază. Variabila care va părăsi baza se determină din nou cu relația (4.33):

$$\frac{1}{(B^{-1}N)_{i,1}} (B^{-1}b)_i = \begin{bmatrix} 11841 \\ 12264 \\ 8435 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

De aici rezultă că variabila care va părăsi baza, devenind variabilă auxiliară este  $x_{s3}$ . Pentru iterația a treia vom înlocui  $x_{s3}$  din bază cu  $q_2$ . Matricile vor fi:

$$x_B^t = [q_1 \quad x_{s2} \quad q_2] \quad (4.47)$$

$$x_N^t = [x_{s1} \quad x_{s3}] = [0 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,0000504 & 0 & -0,0000354 \\ -0,0000394 & -1 & -0,0000422 \\ -0,0000326 & 0 & -0,000071 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

din nou, vom determina valorile variabilelor de bază și vom calcula noile costuri reduse:

$$x_B^t = [B^{-1}(b - Nx_N)]^t = [2393 \quad 0,0556 \quad 8435] \quad (4.48)$$

$$(c^t - c_B^t B^{-1} A) = [0 \quad 0 \quad -15847 \quad 0 \quad -6174] \quad (4.49)$$

Deoarece toate costurile reduse sunt acum nule sau negative, funcția obiectiv nu se mai poate îmbunătăți. Deci, am găsit soluția optimă:  $q_1 = 2.393 \text{ m}^3/\text{zi}$ ,  $q_2 = 8.435 \text{ m}^3/\text{zi}$ ,  $x_{s1} = 0$ ,  $x_{s2} = 0,0556$  și  $x_{s3} = 0$ .

#### 4.5 Efortul de calcul estimat

Pentru problema liniară de management al apei subterane aici sunt considerate două aspecte: calcularea coeficienților problemei și rezolvarea problemei de programare liniară. Efortul necesar pentru determinarea coeficienților de răspuns este dat de numărul de puțuri candidate, iar efortul de rezolvare al problemei este dat de numărul de restricții. Este necesară dezvoltarea unei formulări corecte care să nu includă un număr excesiv de mare de puțuri candidate și de restricții.

Așa cum am prezentat în secțiunea 4.2, coeficienții restricțiilor sunt determinați prin estimarea coeficienților de răspuns. Aceste necesită o schemă cu diferențe finite, unde modelul de simulare este definit pentru fiecare perturbare la fiecare puț. Efortul de calculare a modelului de simulare depinde de densitatea discretizării și de tehnicile folosite pentru determinarea distribuției nivelelor piezometrice. Dacă discretizarea este prea densă, numărul de calcule ce trebuie efectuat este foarte mare. Pentru fiecare celulă trebuie determinat nivelul piezometric inițial și analizat locația puțului candidat.

Prima greutate întâmpinată în rezolvarea problemei de programare liniară prin metoda simplex este calcularea inversei matricei bazei. Această inversă se folosește pentru determinarea variabilelor care intră și ies din bază. Din fericire, matricea bazei rezultate din fiecare iterație diferă de matricea din iterația anterioară doar printr-o singură coloană astfel s-a putut dezvolta o metodă eficientă de calcul al acesteia.

Totuși, calculul inversei matricei bazei este necesar periodic pe parcursul rezolvării problemei. Efortul de calcul depinde de metoda folosită și de numărul liniilor matricei. Efortul de calcul necesar pentru rezolvarea problemei de programare liniară este puternic influențat de numărul restricțiilor, care depind de numărul variabilelor de decizie. Numărul inversiunilor matricei de bază este controlat de numărul iterațiilor din metoda simplex, limitate la rândul lor de numărul vârfurilor domeniului soluțiilor realizabile.

Pentru un sistem cu  $n$  variabile de decizie (inclusiv cele adiționale) și cu  $m$  restricții, numărul vârfurilor domeniului (soluțiilor) este  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ , din care numai o parte dau soluții realizabile. Deși numărul vârfurilor poate fi foarte mare, experiența sugerează că numărul de iterații necesare obținerii soluției optime este aproximativ dublul numărului restricțiilor.

## Cap. 5 UTILIZAREA MODELULUI DE OPTIMIZARE

Acest capitol prezintă câteva tehnici pentru investigarea relației dintre formularea problemei și soluțiile optime. Variabilele de decizie, restricțiile și valorile parametrilor, contribuie la definirea domeniului soluțiilor realizabile și a soluției optime. Modelele de management sunt deseori dezvoltate fără cunoașterea completă a informațiilor despre sistemul apei subterane, criteriile dorite a se satisface sau despre restricții. De aceea este importantă investigarea efectelor modificărilor variabilelor de decizie, restricțiilor și a valorilor parametrilor asupra soluției optime. Informațiile despre acest impact pot fi obținute prin procesele de analiză a sensibilității și a domeniului de definiție a problemei, și de examinarea problemei duale. Aceste tehnici contribuie la cunoașterea naturii problemei de management și furnizează proiectantului și celui care ia deciziile instrumente adiționale pentru evaluarea alternativelor [102,8,109,100].

### 5.1. Analiza de sensibilitate

La utilizarea modelelor de management de regulă este obișnuit să se examineze incertitudinile soluțiilor modelului prin perturbarea anumitor date de intrare, procedură numită analiză de sensibilitate. Parametrii se modifică în limite acceptabile iar rezultatele modelului sunt analizate în consecință. Acest concept poate fi utilizat pentru examinarea influenței modificărilor parametrilor asupra modelului de optimizare al apei subterane.

Calibrarea și analiza sensibilității sunt două procedee asemănătoare, deoarece ambele examinează rezultatele modelului în funcție de modificările parametrilor modelului. În general, parametrii modelului sunt locațiile restricțiilor și puțurilor candidate, a căror valori se pot modifica în procesul de analiză a sensibilității. Alegerea parametrilor a căror valoare se va modifica depinde în general de considerente de ordin financiar sau de restricțiile ce trebuie impuse.

Când se face analiza sensibilității, pentru evaluarea impactului schimbărilor valorilor parametrilor modelului asupra soluțiilor se pot utiliza mai multe metode. Aceste metode includ schimbări ale valorii solicitării totale, a numărului locațiilor de aplicare ale solicitării sau al importanței locațiilor de aplicare ale solicitării. Este necesară analiza sensibilității în cazul aplicării uneia sau a mai multor dintre aceste măsuri.

Un scenariu obișnuit pentru analiza sensibilității este determinarea unei soluții particulare, apoi testarea sensibilității la modificarea valorii solicitărilor în locațiile active. Dacă setul original de locații candidate de aplicare a solicitărilor sunt reținute pe parcursul efectuării analizei, este posibilă selectarea de noi locații active. Rezultatul analizei în acest caz este nesemnificativ, deoarece se dorește testarea sensibilității în locațiile active originale. Un mod de elimina selectarea unor noi locații active este eliminarea acestora din setul de locații candidate, păstrându-se numai

locațiile determinate prin problema inițială de optimizare. Acest lucru implică faptul că analiza de sensibilitate nu se va mai referi la problema inițială de optimizare, cu toate locațiile candidate, ci numai la locațiile rezultate din problemă, ca fiind cele optime.

**5.1.1. Numărul sau locațiile de aplicare a solicitărilor și restricțiilor**

**Locațiile candidate de solicitare**

Toate problemele de optimizare prezentate în această lucrare necesită stabilirea inițială a locațiilor de aplicare a solicitării. Este important de investigat cum se schimbă rata optimă de solicitare și locațiile unde se aplică pentru diferite seturi de locații candidate. Pentru realizarea acestui tip de analiză de sensibilitate trebuie determinată soluția optimă pentru fiecare set de locații candidate. Această analiză poate da indicii despre procesul de echilibrare – optimizare între numărul locațiilor solicitărilor și debitul total sau poate indica importanța locațiilor de aplicare a solicitării relativ la satisfacerea restricțiilor. Factorii externi ai modelului de management pot favoriza alegerea unor criterii de proiectare care sunt sub-optime relativ la valoarea funcției obiectiv. Analiza de sensibilitate furnizează informații prețioase celui care ia deciziile și îl ajută la înțelegerea procesului de echilibrare – optimizare dintre diferitele variabile ale problemelor.

**Exemplu de schimbare a valorii și locațiilor de aplicare a solicitării**

Reluăm exemplul din secțiunea 3.3.2 de realizare a unui epuismenț, unde se cere realizarea unui control hidraulic asupra unui amplasament al unei viitoare construcții, în care au fost alese 4 locații de aplicare a solicitării (locațiile puțurilor prin care va fi extrasă apa) din 9 locații posibile (candidate). Presupunem că criteriul determinant pe baza căruia se alege numărul de puțuri care vor fi realizate este criteriul economic (financiar).

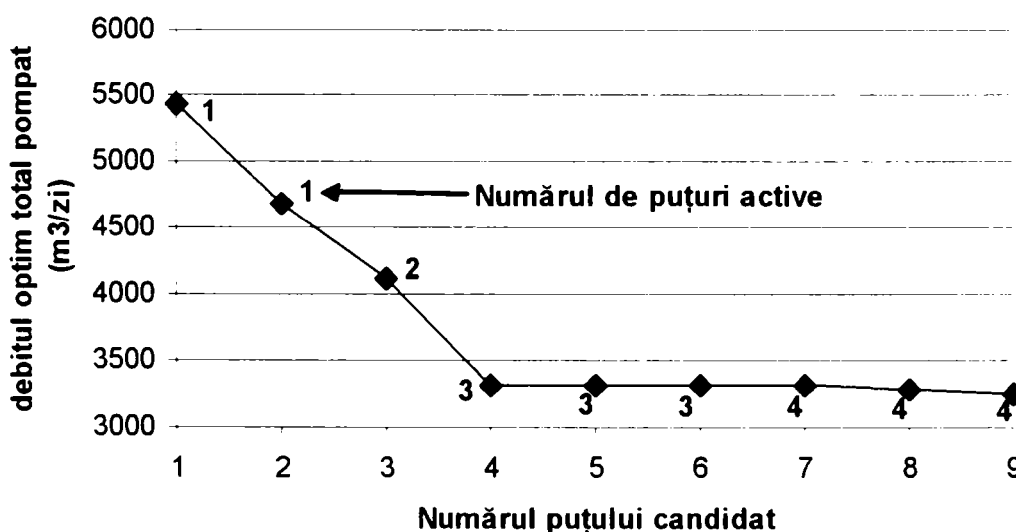


Figura 5.1 Numărul puțurilor candidate poate avea un efect semnificativ asupra schemei optime de pompare. Aceste date provin din exemplul descris în figura 3.7.

De asemenea, presupunem că nu pot fi alese alte locații posibile decât cele nouă menționate anterior. Prin efectuarea calculelor de optimizare pentru mai multe seturi de locații posibile au fost găsite mai multe soluții de pompare a apei din puțuri diferite. Enumerarea completă a acestor soluții este nepractică, deoarece există 511 de subseturi ale celor nouă locații posibile. În schimb, ne putem face o idee despre comportarea soluțiilor prin verificarea numai a câtorva din aceste subseturi. Rezultatele arătate în figura 5.1 sunt obținute prin eliminarea succesivă a unei locații candidate și prin re-rezolvarea problemei rezultate. Locațiile candidate au fost eliminate în acord cu numărul lor de identificare din figura 3.7, de exemplu setul cu șapte locații candidate corespund puțurilor cu numerele de identificare de la 1 la 7.

Din figura 5.1 se poate vedea că dacă numărul puțurilor descrește, crește costul total de pompare. Aceasta rezultă din faptul că prin eliminarea succesivă a puțurilor de pompare, cantitatea de apă ce trebuie pompată din puțurile rămase trebuie să fie mai mare pentru a menține nivelul piezometric dorit. Deși, în final soluția optimă a rezultat ca fiind alegerea a patru puțuri cu o cantitate totală pompată de 3271 m<sup>3</sup>/zi, din figura 5.1 se poate vedea că o altă soluție acceptabilă este alegerea a numai 3 puțuri cu creșterea cu numai 1 % a cantității totale de apă pompată. Factorii externi ai modelului de management, ca și costurile construcției sau preferințele clientului, pot determina alegerea uneia din cele două soluții acceptabile. Tot din figura 5.1 se poate observa că două soluții necesită doar pomparea apei dintr-un singur puț, dar crește foarte mult cantitatea de apă ce trebuie extrasă. Mai precizăm încă o dată că factorii externi pot determina alegerea unei soluții neoptime.

### Restricțiile și variabilele adiționale

În cele mai multe cazuri, numai o parte din restricțiile problemei vor fi satisfăcute la egalitate de soluțiile optime ale problemei. Aceste restricții limitează valorile variabilelor de decizie și atunci spunem că ele obligă soluția. Celelalte restricții nu au nici o influență asupra valorilor optime ale variabilelor de decizie și ele pot fi eliminate din formularea problemei, fără a afecta soluția.

Informațiile despre restricțiile care obligă soluția se pot obține prin examinarea soluțiilor. Acest lucru este simplu pentru problemele de programare liniară rezolvate prin metoda simplex. Reamintim că înainte de a rezolva problema de programare liniară variabilele adiționale se adaugă la restricțiile care sunt inegalități de tipul „ ≤ ” și se scad pentru „ ≥ ”, rezultând problema extinsă. Presupunând că restricțiile sunt inegalități de tipul „ ≤ ”, restricția extinsă este:

$$Aq + Ix_s = b \quad (5.1)$$

Rearanjând relația , rezultă:

$$x_s = b - Aq \quad (5.2)$$

Se poate vedea acum că valorile acestor variabile se obțin prin diferența dintre valoarea restricției și restricția. Pentru restricțiile care obligă soluția, valoarea variabilelor adiționale este zero pentru soluția optimă. Când aceste variabile sunt



nenule pentru soluția optimă, valorile lor indică resursele care nu sunt utilizate în soluția optimă sau faptul că numărul restricțiilor este mai mare decât e nevoie.

Revenim la problema alimentării cu apă prezentată în figura 4.1. Cum am arătat mai înainte, restricția 2 nu este satisfăcută la egalitate pentru soluția optimă, deci ea nu obligă soluția. Dacă această restricție este eliminată din problemă fără modificarea altor parametrii, soluția optimă nu se schimbă. Dacă se elimină din problemă restricția 1 sau 3, care obligă soluția, în soluția optimă rezultă o creștere semnificativă a ratei de pompare.

### 5.1.2 Valorile restricțiilor

Forma liniară a restricției generale din ecuația (3.23) conține doi termeni constanți,  $\beta^q_k$  și  $\beta^h_k$ . Atunci când sunt definite restricțiile specifice, ca restricția asupra diferenței de nivel piezometric (3.11) sau restricția asupra limitelor nivelului piezometric (3.9) și (3.10), termenii constanți sunt mutați în membrul drept în fiecare dintre restricții. Restricțiile specifice pot fi notate matriceal astfel [115,111,134]:

$$\underline{A}x = b \quad (5.3)$$

unde termenii constanți sunt cuprinși în matricea  $b$ .

În multe probleme, restricțiile sunt date de combinațiile mai multor obiective de realizat. de aceea, valorile restricțiilor nu sunt bine definite și multe sunt incerte. În unele probleme de management, restricțiile pot reprezenta ținte tactice, care se pot schimba în funcție de situație. În aceste cazuri este important de studiat efectele modificării valorilor restricțiilor asupra soluțiilor optime. De exemplu, să studiem aceste efecte în cazul în care valoarea restricției  $i$  se modifică cu  $\Delta b_i$ . Noua restricție poate fi scrisă ca:

$$\underline{A}_i x = b_i + \Delta b_i \quad (5.4)$$

unde  $\underline{A}_i$  este linia  $i$  din matricea  $\underline{A}$ . Informațiile referitoare la efectul modificării valorii restricției cu o unitate asupra funcției obiectiv sunt date de „costul din umbră”.

Determinarea efectelor unei modificări importante a valorilor restricțiilor asupra soluției optime implică re-rezolvarea problemei pentru fiecare modificare în parte. Prin acest proces se poate determina o corelație între modificările valorilor restricției și soluțiile optime.

### Senzitivitatea locală și „costul din umbră”

Valorile sensibilității locale, numite „costurile din umbră”, reprezintă schimbările în valoarea funcției obiectiv determinate de o schimbare unitară a valorilor restricțiilor. De exemplu, în problema alimentării cu apă, „costul din umbră” reprezintă cum se schimbă cantitatea totală de apă pompată la modificarea cu o unitate a valorilor restricțiilor în fiecare puț (adică modificarea cu o unitate a valorilor nivelului piezometric impus). Această informație este importantă pentru restricțiile tactice, deoarece creșterea beneficiilor poate fi suficientă pentru relaxarea restricției.

În cazul restricțiilor care au valori cu un grad oarecare de incertitudine,

„costurile din umbră” se pot folosi pentru determinarea resurselor adiționale care trebuie folosite pentru a reduce gradul de incertitudine [19,64].

În formă matematică, „costul din umbră” pentru restricția  $i$  poate fi determinată din soluția optimă și din funcția obiectiv reactualizată dată de (4.29), astfel:

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = \frac{\partial f}{\partial b_i} \left[ c'_B B^{-1} b + (c' - c'_B B^{-1} A) x \right] = c'_B B_i^{-1} \quad (5.5)$$

unde  $B_i^{-1}$  este coloana  $i$  din matricea  $B^{-1}$ . De notat că, „costul din umbră” este independent de valorile optime ale variabilelor de decizie și rămâne constantă atâta timp cât baza optimă este aceeași.

Pentru a analiza „costul din umbră”, trebuie să studiem prima dată restricțiile care nu obligă soluția, adică acele restricții care nu sunt satisfăcute la egalitate de soluția optimă. Deoarece la aceste restricții s-au adăugat variabile adiționale, o schimbare a valorii membrului drept al restricțiilor produce o schimbare în valoarea variabilei adiționale, dar care nu afectează valoarea funcției obiectiv. Deci, „costul din umbră” din aceste restricții este zero. Restricțiile care obligă soluția restricționează valorile variabilelor de decizie și valoarea funcției obiectiv. Creșterea cu o unitate a valorii membrului drept al restricțiilor care obligă soluția determină o modificare a valorii funcției obiectiv cu o cantitate ce depinde de „costul din umbră” atâta timp cât baza optimă nu se schimbă. Acesta arată că soluția optimă este foarte sensibilă la restricțiile care determină valori mari ale „costurilor din umbră”.

### Exemplu de determinare a „costului din umbră”

Pentru exemplul de alimentare cu apă, restricțiile 1 și 3 au „costurile din umbră” de -15847, respectiv, -6174 m<sup>3</sup>/zi/m. Aceste valori au fost calculate cu relația (5.5) și cu informațiile din secțiunea 4.4. Aceste „costuri din umbră” pot fi determinate direct din costurile reduse optime din (4.49), prin observarea că variabilele adiționale au coeficientul zero în funcția obiectiv și coeficientul 1 în restricțiile originale. Valoarea negativă arată că funcția obiectiv crește, în timp ce valoarea membrului drept al restricțiilor scade. Deci, cantitatea de apă extrasă poate crește semnificativ dacă restricțiile impuse nivelului apei din râu sunt mai relaxate, în particular pentru locația 1. În acest caz, poate fi relevant pentru manager studierea implicațiilor intruziunii apei de râu în acvifer.

Considerăm relaxarea restricției asupra nivelului piezometric cu 0.05m în locația 1, deci limita minimă a nivelului piezometric lângă râu este 504.85 m față de 504.9 m inițial. „costul din umbră” indică creșterea cantității totale de apă extrasă cu  $(-15847 \text{ m}^3/\text{zi}/\text{m}) \times (-0.05 \text{ m}) = 792 \text{ m}^3/\text{zi}$ . Interpretarea geometrică a acestei relaxări a restricției este arătată în figura 5.2 unde dreapta restricției 1 a fost mutată mai la dreapta, reflectând noua limită minimă a nivelului piezometric. Noua soluție optimă este  $q_1 = 3880 \text{ m}^3/\text{zi}$  și  $q_2 = 7740 \text{ m}^3/\text{zi}$ , cu o creștere totală de 792 m<sup>3</sup>/zi.

Pentru a analiza local natura „costului din umbră”, considerăm relaxarea în continuare a restricției 1. În figura 5.2 aceasta este echivalentă cu translatarea dreptei restricției 1 spre dreapta. În momentul în care prin această translatare se

trece dincolo de dreptele restricțiilor 2 și 3, această restricție nu mai obligă soluția și „costul din umbră” determinat de ea devine zero. Când se întâmplă acest lucru „costul din umbră” dat de formularea inițială a problemei nu mai este valabilă. Analiza domeniului valorilor, prezentată în secțiunea 5.2, determină valorile restricțiilor peste care „costul din umbră” este valabil.

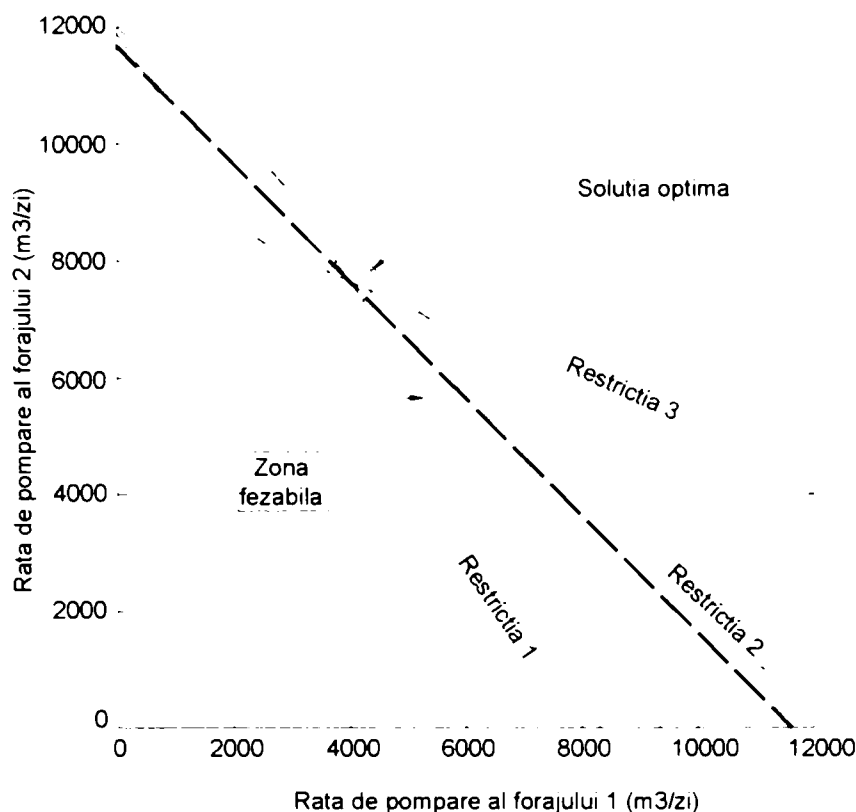


Figura 5.2 „costul din umbră” indică schimbarea valorii funcției obiectiv la schimbarea cu o unitate a valorilor restricțiilor. Aici, restricția 1 a fost relaxată și a crescut cantitatea totală de apă pompată.

### Curbe de corelație

Cum „costul din umbră” măsoară sensibilitatea, este de asemenea utilă investigarea schimbărilor majore ale valorilor restricțiilor asupra soluției optime și a funcției obiectiv. Importanța valorii unei restricții particulare a problemei de optimizare se poate studia prin schimbarea valorii restricției în limite largi și observarea soluțiilor rezultate.

### Exemplu de curbă de corelație

Continuăm cu exemplul alimentării cu apă, considerând că restricția 2, care nu obligă soluția problemei, poate fi relaxată până la infinit, fără afectarea soluției optime. În schimb, orice schimbare a valorilor restricțiilor 1 și 3 are un impact imediat asupra pompării totale. Figura 5.3 prezintă efectele modificării valorilor membrului drept al restricției 1 asupra ratei totale de pompare. Puțurile active rezultate în fiecare caz sunt de asemenea marcate pe figură. De notat că restricția asupra nivelului piezometric din acvifer e relaxată dacă e permisă creșterea ratei de pompare și valoarea funcției obiectiv crește. Această curbă arată evoluția ratei totale de pompare prin relaxarea succesivă a restricției 1. Prin scăderea nivelului piezometric impus de

la 504,9 m la 504,8 m are loc o creștere a ratei totale de pompare cu 14 %, iar scăderea nivelului cu încă 0,1 m duce la creșterea cu numai 3 % a ratei totale de pompare. De asemenea, când limita nivelului coboară sub 504,6 m, restricția 1 nu mai obligă soluția și ea nu mai influențează soluțiile problemei. Invers, prin creșterea nivelului piezometric impus de restricția 1, rezultă o scădere a ratei de pompare și folosirea numai a puțului 2.

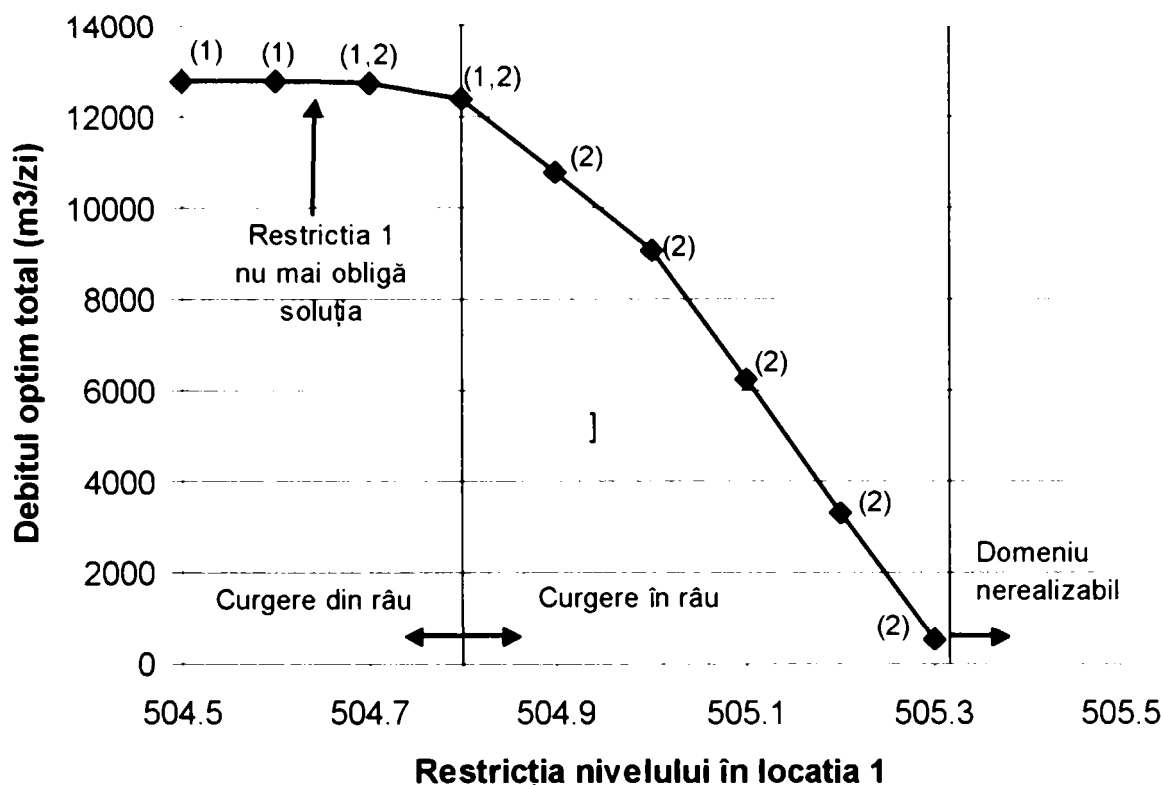


Figura 5.3 Efectele schimbării valorii restricției 1 asupra soluției optime.

### 5.1.3 Obiective multiple și frontiera eficientă

O componentă critică a formulării modelului de management este definirea obiectivului proiectului și a restricțiilor. În multe, dar nu în toate cazurile, modelul de management poate fi exprimat prin diferite moduri. Unele probleme pot fi formulate mai bine ca având mai multe obiective, decât una singură. De exemplu, problema alimentării cu apă care necesită maximizarea cantității de apă extrasă și minimizarea riscului ecologic și sanitar asupra zonei umede adiacente. Dacă cantitatea de apă extrasă crește, fluxul spre zona umedă descrește și e amenințată echilibrul ecologic al ei. În acest caz trebuie găsit un echilibru între cele două obiective. Dacă un obiectiv de îmbunătățește (crește cantitatea de apă pompată), celălalt de deteriorează (crește riscul). Problemei constă din găsirea unui echilibru între obiectivele multiple și ea nu are o soluție optimă. Aici există un set de soluții care nu este nici una inferioară celeilalte, fiecare element al acestui set reprezintă soluția optimă pentru un nivel al echilibrului fixat.

Acest set de soluții echivalente poate fi generat prin reprezentarea numerică a problemei la diferite nivele de echilibru. Aceste se poate realiza prin multiplicarea

fiecărui obiectiv cu un coeficient de importanță. Prin modificarea acestui coeficient poate fi modificată importanța fiecărui obiectiv și soluția optimă va depinde importanța fiecărui obiectiv [116,42,41]. Deci, funcția obiectiv rezultată se poate scrie ca:

$$\text{maximizeaza } f(q) = w[f_1(q)] - (1 - w)[f_2(q)] \quad (5.6)$$

unde  $w$  este coeficientul de importanță. pentru fiecare valoare a lui  $w$  se obține o soluție optimă și se poate construi o curbă de corelație între cele două obiective. Această curbă se numește frontiera eficientă sau soluția optimă Pareto. Nici o soluție de pe această curbă nu este mai bună decât altă soluție care satisface ambele obiective. În problemele de programare cu mai multe obiective, pe lângă problema de optimizare mai trebuie folosite și alte metode externe pentru identificarea soluției care satisface cel mai eficient obiectivele problemei.

---

### Exemplu de problemă de alimentare cu apă cu mai multe obiective

Considerăm din nou problema de alimentare cu apă. În secțiunea 3.7 s-au propus două formulări ale problemei: una care maximizează cantitatea de apă extrasă și restricționează nivelele piezometrice din acvifer, care trebuie să fie mai mari decât cele din râu; cealaltă formulare minimizează cantitatea de apă de râu care pătrunde în acvifer, în condițiile satisfacerii cerințelor de apă.

O a treia formulare poate fi dezvoltată prin combinarea celor două obiective: maximizarea apei extrase și minimizare pierderii de apă din râu. Această formulare va fi nemărginită dacă nu impunem restricții asupra nivelurilor piezometrice, cu toate că echilibrul dintre cantitatea de apă de râu care pătrunde în acvifer și cantitatea totală de apă extrasă din acvifer este deja definită prin funcția obiectiv. Acest model poate fi exprimat matematic astfel:

$$\text{maximizeaza } f(q) = w \sum_{i=1}^2 q_i - (1 - w) + \sum_{j=1}^3 s_j \quad (5.7)$$

astfel încât

$$h_k \geq h'_k \quad k = 1,2,3 \quad (5.8)$$

$$q \geq 0 \quad (5.9)$$

unde  $s_j$  este scăderea nivelului apei din râu.

De notat că aceste obiective contrare pot fi exprimate matematic prin aceeași relație pentru că maximizarea funcției negative este de fapt minimizarea funcției originale.

Frontiera eficientă pentru această problemă este arătată în figura 5.4. Punctele prin care trece curba din figură sunt punctele A, B și C din figura 4.1. Când este importantă minimizarea scăderii nivelului apei în râu, figura 5.4 indică că toată cantitatea de apă necesară trebuie să fie pompată din puțul 1. Schimbarea pantei se produce atunci când limita inferioară a nivelului piezometric dată de restricția 1 este atinsă și începe extracția din puțul 2. Limita superioară a acestei curbe identifică cantitatea maximă de apă extrasă, în condițiile în care se pompează din ambele puțuri fără depășirea restricțiilor impuse nivelului piezometric. Orice creștere a

cantității de apă extrasă peste această valoare duce la scăderea nivelului apei în râu, adică la pătrunderea apei de râu în acvifer.

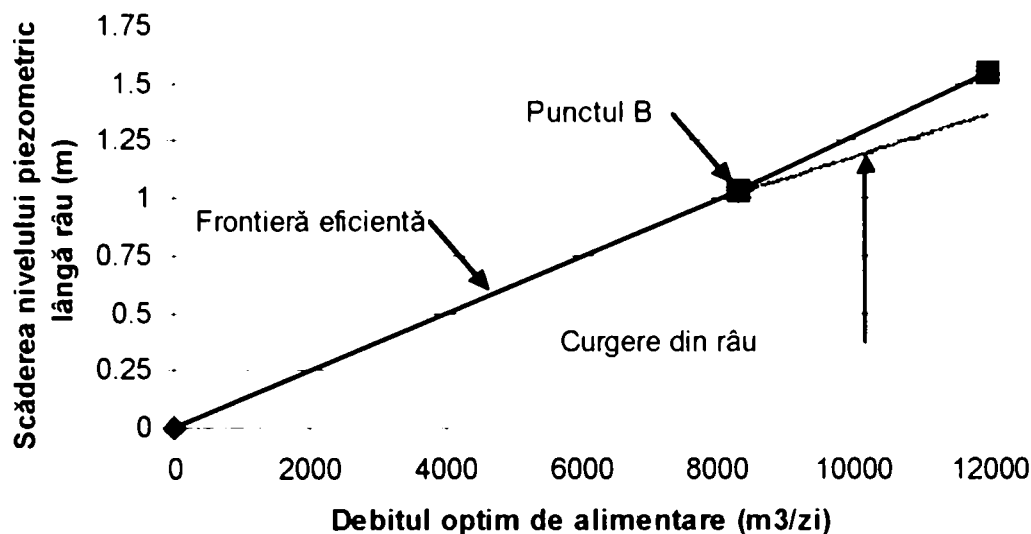


Figura 5.4 Scăderea nivelului piezometric lângă râu odată cu creșterea cantității de apă extrasă.

Punctele de schimbare a pantei corespund punctelor A, B, C din figura 4.1

## 5.2 Analiza domeniului de variație a soluțiilor problemei

Analiza domeniului de variație a soluțiilor optime ale problemelor oferă informații despre comportarea locală a soluțiilor optime și despre sensibilitatea lor la schimbările valorilor parametrilor. Analiza determină domeniul în care pot varia coeficienții funcției obiectiv și valorile restricțiilor fără schimbarea bazei optime. Acest domeniu rămâne valid până când nu apar schimbări ale valorilor altor parametrii.

Deși acest domeniu este determinat prin utilizarea relațiilor care urmează, se poate determina și prin procesul de modificare a valorii unui parametru de la valoarea sa inițială până la o valoare care duce la schimbarea bazei optime [19,97].

Informații suplimentare se pot obține și prin procesul de analiză a variabilelor care intră și părăsesc baza optimă atunci când se modifică parametrii de interes în domeniul de variație dat. Variabilele care intră și ies din baza optimă reprezintă fiecare o schimbare în utilizarea resurselor (dacă ambele sunt variabile adiționale) sau o schimbare în variabilele de decizie și în solicitarea punctual asociată. Aceste informații pot fi utilizate pentru a studia gradul de încredere al soluțiilor.

Pentru problemele de optimizare ale apei subterane în care coeficienții restricțiilor sunt funcție de modelul de simulare nu se pot supune analizei domeniului de variație (vezi secțiunea 6.6 pentru modelele de simulare care conțin elemente incerte). Această secțiune prezintă metodele matematice de realizare și interpretare a rezultatelor analizei domeniului de variație a valorilor funcției obiectiv și valorilor restricțiilor. Relațiile prezentate în capitolul 4 vor fi folosite pentru determinarea informațiilor necesare analizei domeniului de variație. Reamintim că relațiile din capitolul 4 au fost dezvoltate admitând ipoteza că variabilele de decizie sunt limitate inferior de zero și că nu au limite superioare. Deoarece ecuațiile din acest capitol se bazează pe cele din capitolul 4, această ipoteză va fi aplicată și aici.

### 5.2.1 Domeniul de variație a coeficienților funcției obiectiv

Analiza domeniului de variație a coeficienților funcției obiectiv determină domeniul în care pot lua valori acești coeficienți astfel încât baza optimă să nu se schimbe. Ecuația (4.25) arată că valorile optime ale variabilelor de decizie depind numai de matricea bazei. Prin analiza domeniului de variație se determină domeniul în care pot lua valori acești coeficienți astfel încât soluția optimă determinată să nu se modifice și restricțiile care obligă soluția să rămână aceleași. În același timp, modificările valorilor coeficienților funcției obiectiv vor altera valoarea funcției și „costurile din umbră”.

Considerăm o modificare a valorii coeficientului variabilei  $j$  din funcția obiectiv. Noua funcție obiectiv va fi:

$$\text{maximizeaza } f = (c + \Delta c_j e_j) x \quad (5.10)$$

unde  $\Delta c_j$  este modificarea coeficientului variabilei  $j$ , iar  $e_j$  este matricea cu toate elementele nule, cu excepția elementelor liniei  $j$ , care sunt 1. În analiza domeniului, scopul este de a găsi valoarea lui  $\Delta c_j$  pentru care soluția optimă  $x^*$  a problemei originale să rămână aceeași.

Din secțiunea 4.3.2 rezultă că soluția optimă este calculată cu:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \quad (5.11)$$

iar valoarea funcției obiectiv este calculată cu:

$$f = c'_B B^{-1} b + (c' - c'_B B^{-1} A) x \quad (5.12)$$

De notat că costul redus  $(c' - c'_B B^{-1} A) x$  este funcție de coeficienții funcției obiectiv și trebuie să fie negativ pentru optim. Această condiție optimă furnizează relațiile pentru determinarea domeniului de variație a coeficienților.

Relațiile pentru determinarea domeniului valorilor coeficienților variabilelor de bază și auxiliare diferă, ne vom ocupa mai întâi de determinarea acestui domeniu pentru variabila auxiliară  $j$ . Deoarece costul redus trebuie să rămână negativ, baza trebuie să nu se schimbe, poate fi stabilită următoarea relație:

$$-\infty \leq \left[ (c_j + \Delta c_j) - (c'_B B^{-1} A_j) \right] \leq 0 \quad (5.13)$$

unde  $A_j$  este coloana  $j$  matricei coeficienților originală  $A$ . Rearanjând relația (5.13) pentru a scoate valoarea lui  $\Delta c_j$  rezultă:

$$-\infty \leq \Delta c_j \leq (c_j - c'_B B^{-1} A_j) \quad (5.14)$$

De notat că limita superioară a lui  $\Delta c_j$  este negativă, ea reprezintă costul redus pentru variabila auxiliară  $j$ . Când coeficientul variabilei  $j$  din funcția obiectiv ia o valoare situată între limitele date de (5.14), ea intră în bază. Variabila care părăsește baza se determină cum am arătat în secțiunea 4.3.2.

În exemplul alimentării cu apă, ambele locații sunt active în soluția optimă, deci ambele sunt variabile de bază. Dacă una din variabile ar fi variabilă auxiliară,

atunci ecuația anterioară indică sensibilitatea soluției optime relativ la costul unitar de pompare al puțului respectiv. Dacă  $\Delta c$  este mic, atunci este importantă reducerea incertitudinii coeficientului variabilei  $j$ . Dacă  $\Delta c$  este mare, atunci soluția optimă nu se va schimba la o modificare ușoară a valorii inițiale a coeficientului variabilei  $j$ .

O asemenea analiză poate fi realizată și pentru variabilele care intră sau ies din bază. Dacă variabila care iese sau cea care intră în bază sunt ambele variabile adiționale, atunci nici o variabilă de solicitare nu va intra sau ieși din bază. Dacă ambele variabile sunt variabile de solicitare, atunci sistemul locațiilor de aplicare a solicitării nu este suficient de puternic pentru a produce schimbări ale coeficienților funcției obiectiv.

Determinarea domeniilor de variație a coeficienților variabilelor de bază ale funcției obiectiv necesită multe calcule deoarece costurile reduse ale variabilelor auxiliare, care trebuie să rămână negative, depind toate de coeficienții variabilelor de bază din funcția obiectiv. Costurile reduse ale variabilelor auxiliare trebuie verificate pe parcursul calculului domeniului de variație ale fiecărei variabile de bază. Pentru determinarea domeniului de variație a variabilei de bază  $i$ , considerăm costul redus al variabilei auxiliare  $j$ :

$$-\infty \leq \left[ c_j - (c_B + \Delta c_i e_i)' B^{-1} A_j \right] \leq 0 \quad (5.15)$$

unde  $e_i$  este matricea cu toate elementele nule, cu excepția elementelor liniei  $i$ , care sunt 1, de dimensiuni  $(m \times 1)$ . Prin rearanjare rezultă:

$$-\infty \leq c_B' B^{-1} A_j - \Delta c_i B_i^{-1} A_j \leq -c_j \quad (5.16)$$

unde  $B_i^{-1}$  este linia  $i$  din matricea  $B^{-1}$ . Prin rearanjare:

$$\infty \geq \Delta c_i B_i^{-1} A_j \geq \left( c_j - c_B' B^{-1} A_j \right) \quad (5.17)$$

Observând că elementul  $(B_i^{-1} A_j)$  poate fi pozitiv sau negativ și că termenul din partea dreaptă este costul redus negativ, se pot determina limitele lui  $\Delta c_i$ . Relația (5.17) trebuie să fie satisfăcută pentru toate variabilele auxiliare, relația pentru calculul limitelor lui  $\Delta c_i$  este:

$$\max_j \left\{ \frac{\left( c_j - c_B' B^{-1} A_j \right)}{\left( B_i^{-1} A_j \right)} \mid \left( B_i^{-1} A_j \right) > 0 \right\} \leq \Delta c_i \leq \min_j \left\{ \frac{\left( c_j - c_B' B^{-1} A_j \right)}{\left( B_i^{-1} A_j \right)} \mid \left( B_i^{-1} A_j \right) < 0 \right\} \quad (5.18)$$

Variabila  $j$  care satisface relația de mai sus este o variabilă auxiliară care trebuie să intre în bază. Variabila care părăsește baza se determină cum am arătat în secțiunea 4.3.2.



### Exemplu de analiză a domeniului de variație a costurilor

Pentru exemplul alimentării cu apă, s-a cerut maximizarea cantității de apă pompată, fiecare puț având coeficientul 1 în funcția obiectiv. Presupunând că acest coeficient reprezintă profitul, atunci noi vrem să maximizăm profitul realizat prin distribuția apei. Analiza domeniului de variație poate fi făcută utilizând soluția optimă determinată în secțiunea 4.4.2 și a ecuațiilor (4.47), (4.48) și (4.49). Cu toate că modul de calcul a domeniului nu este prezentat aici, această analiză pentru puțul 2 indică că dacă profitul unitar este de 0.70 USD/m<sup>3</sup>/zi, atunci nu este eficientă pompare din acest puț. Deci, apa trebuie pompată numai din puțul 1, iar restricția 1 rămâne singura care obligă soluția. Variabilele de bază vor  $q_1$ ,  $x_{s2}$  și  $x_{s3}$ , iar soluția optimă este cea dată de vârful B din figura 4.1.

### 5.2.2 Domeniul de variație a termenilor liberi din membrul drept al restricțiilor

Așa cum am arătat în secțiunea precedentă, scopul analizei domeniului de variație a acestor termeni este găsirea domeniului în care acestea pot să varieze, fără a determina schimbarea bazei optime. Pentru determinarea domeniului de variație al coeficienților variabilelor funcției obiectiv au fost folosite relațiile pentru costurile reduse. Aceste costuri reduse nu depind de termenii liberi din membrul drept al restricțiilor, deci e necesară o altă metodă de calcul a limitelor acestui domeniu. Pentru această analiză, restricțiile de nenegativitate sunt invocate pentru a observa că baza optimă nu se schimbă atâta timp cât variabilele de bază rămân pozitive. Deoarece toate variabilele de bază depind de termenii liberi din membrul drept al restricțiilor, se poate scrie următoarea relație:

$$\{x_B = B^{-1}[(b + \Delta b_k e_k) - N x_N]\} \geq 0 \quad (5.19)$$

unde  $e_k$  este matricea cu toate elementele nule, cu excepția elementelor liniei k (care reprezintă restricția k), care sunt 1, de dimensiuni ( $m \times 1$ ).

Revenind la ipoteza că toate variabilele de decizie trebuie să aibă limita inferioară zero, care rezultă prin setarea variabilelor auxiliare ca fiind zero. Deci elementele care conțin variabile auxiliare sunt eliminate din relația (5.19). Considerăm variabila de bază din rândul i:

$$\{x_i = [(B^{-1}b)_i + \Delta b_k B_{ik}^{-1}]\} \geq 0 \quad (5.20)$$

Această relație poate fi utilizată pentru limitarea valorii membrului drept al restricției k. Dacă toate variabilele de bază rămân nenegative, atunci baza rămâne neschimbată. Deci, relația (5.20) trebuie aplicată fiecărei restricții, rezultând limitele pentru  $\Delta b_k$ :

$$\begin{aligned} \max_i \left\{ -\frac{((B^{-1}b)_i)}{(B_{ik}^{-1})} \mid (B_{ik}^{-1}) > 0 \right\} &\leq \Delta b_k \leq \\ &\leq \min_i \left\{ -\frac{((B^{-1}b)_i)}{(B_{ik}^{-1})} \mid (B_{ik}^{-1}) < 0 \right\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Variabila de bază  $x_i$  care satisface relația pentru limitele inferioară și superioară trebuie să părăsească baza.

Pentru determinarea variabilei care va intra în bază, considerăm restricția care corespunde variabilei care părăsește baza:

$$x_{i,B} + (B^{-1}N)_i^t x_N = (B^{-1}b)_i \quad (5.22)$$

și funcția obiectiv curentă care conține costul redus:

$$f(x) = c_B B^{-1}b + (c^t - c_B^t B^{-1}A)x \quad (5.23)$$

Reamintim faptul că costurile reduse ale variabilelor de bază sunt nule, iar a celor auxiliare sunt negative în soluția optimă. Dacă variabila  $i$  părăsește baza, atunci trebuie să determinăm variabila  $j$  care va intra în bază. Această operație matriceală se va face între restricția care corespunde variabilei care părăsește baza și funcția obiectiv, pentru a determina care din costurile reduse va lua valoarea zero primul. Acest calcul presupune multiplicarea restricției  $i$  cu o valoare  $\gamma$  și scăderea ei din funcția obiectiv. Pentru fiecare variabilă  $j$ , din acest calcul trebuie să rezulte o valoare negativă, pentru păstrarea optimalității:

$$(c^t - c_B^t B^{-1}A)_j - \gamma (B^{-1}N)_{ij} \leq 0 \quad (5.24)$$

Rearanjând relația (5.24) se pot determina limitele lui  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma &\geq \left\{ \frac{(c^t - c_B^t B^{-1}A)_j}{(B^{-1}N)_{ij}} \mid (B^{-1}N)_{ij} > 0 \right\} \\ \gamma &\leq \left\{ \frac{(c^t - c_B^t B^{-1}A)_j}{(B^{-1}N)_{ij}} \mid (B^{-1}N)_{ij} < 0 \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Deoarece costul redus de la numărător este negativ, prima inegalitate indică că  $\gamma$  trebuie să fie mai mare ca zero. A doua inegalitate trebuie testată pentru fiecare variabilă auxiliară, pentru a determina variabila auxiliară a cărei cost redus va deveni primul zero. Aceasta este variabila care va intra în bază. Deoarece variabila care iese din bază a fost identificată mai înainte, variabila care va intra în bază este dată de relația:

$$\min_j \left[ \frac{(c^t - c_B^t B^{-1}A)_j}{(B^{-1}N)_{ij}} \mid (B^{-1}N)_{ij} < 0 \right] \quad (5.26)$$

### Exemplu de analiză a domeniului de variație a termenilor liberi din membrul drept al restricțiilor

Pentru exemplul alimentării cu apă analiza poate fi efectuată folosind relațiile de mai înainte și valorile din secțiunea 4.4.2. Pentru restricția 1, valoarea nivelului piezometric poate varia între 504.81 m și 504.98 m, fără a se schimba baza.

Pentru o valoare sub limita minimă, restricția 2 va deveni o restricție care va obliga soluția și variabila adițională din restricția 3 va intra în bază. Pentru o valoare mai mare de limita superioară, puțul 1 nu va mai funcționa, iar variabila adițională din restricția 3 va intra în bază. Limitele nivelului piezometric pot fi extinse din datele prezentate în figura 5.3, care au fost determinate prin analiza sensibilității.

Orice schimbare de pantă din figură implică schimbarea bazei. Prin analiza domeniului de variație s-au găsit primele schimbări de bază determinate de schimbarea valorilor fiecărei restricții, care pot fi văzute în figură (schimbările de pantă între valorile nivelului piezometric de 504.8 și 505.0 m). Așa cum indica curba de corelație, când se schimbă baza, analiza domeniului determină variabilele care ies și intră în bază.

### 5.3 Problema duală

Fiecărei probleme de programare liniară corespunde o problemă duală, care utilizează aceiași coeficienți ca problema originală. Soluțiile ambelor formulări sunt aceleași, dar interpretarea problemelor este diferită și sunt câștigate alte informații prin investigarea ambelor probleme [55,57,6]. Pentru problema de alimentare cu apă, problema originală (primală) este:

$$\text{maximizeaza } f(q) = c'q \quad (5.27)$$

astfel încât

$$Aq \geq b$$

$$q \geq 0$$

iar duala este:

$$\text{minimizeaza } f(\lambda) = b'\lambda \quad (5.28)$$

astfel încât

$$A'\lambda \geq c$$

$$\lambda \leq 0$$

unde  $\lambda$  este variabila duală.

Sensul inegalităților din problema duală depinde de forma lor în problema primală, dar nu toate problemele duale au restricții de forma prezentată aici. Forma problemei duale este dedusă din problema primală și din condițiile de optim, acest lucru este prezentat în secțiunea ce urmează.

#### 5.3.1 Deducerea problemei duale

Problema duală poate fi dedusă din problema primală utilizând condițiile de optim prezentate în secțiunea 4.3.2 și a definiției „urmei prețului” dată în secțiunea

5.2.1. "costul din umbră" a fost definită ca sensibilitatea locală a funcției obiectiv la modificarea valorii membrului drept al restricțiilor sau ca:

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = c'_B B_i^{-1} \quad (5.29)$$

Deși "costul din umbră" este independent de valorile variabilelor de decizie, ele depind de baza optimă. Din această perspectivă, procesul de determinare a soluțiilor problemelor de programare liniară poate fi utilizat pentru găsirea bazei optime și a „costurilor din umbră” optime. În acest context „costurile din umbră” pot fi vizualizate ca variabile duale care necesită a fi optimizate, odată cu variabilele originale, primale. Conform relației (5.29) avem  $m$  „costuri din umbră”, care se pot reprezenta matriceal astfel:

$$\lambda = c'_B B^{-1} \quad (5.30)$$

În secțiunea 4.3.2 funcția obiectiv corespunzătoare fiecărei iterații poate fi scrisă astfel:

$$f(x) = c'_B B^{-1} b + (c' - c'_B B^{-1} A)x \quad (5.31)$$

Prin înlocuirea lui (5.30) în (5.31) rezultă:

$$f(\lambda) = \lambda' b + (c' - \lambda' A)x \quad (5.32)$$

Termenul secund din membrul drept al lui (5.32) este tot timpul zero, iar funcția obiectiv cu variabila duală poate fi scrisă ca:

$$f(\lambda) = b' \lambda \quad (5.33)$$

Reamintim că condiția de optimalitate a problemei primale este ca toate costurile reduse să fie negative. Restricțiile asupra variabilelor duale sunt impuse de condiția de optimalitate a problemei primale. Prin separarea, în primul rând, a ecuației costurilor reduse în variabilele originale de decizie și variabilele adiționale (reamintim că variabilele adiționale sunt cele adăugate la restricții) rezultă:

$$(c' - c'_B B^{-1} A)x = (c' - \lambda' A)x + (0' - \lambda' (-I))x_s \quad (5.34)$$

Aplicând condiția de optimalitate rezultă:

$$(c' - \lambda' A) \leq 0 \quad \text{și} \quad (0' - \lambda' (-I)) \leq 0 \quad (5.35)$$

și prin rearanjare:

$$A' \lambda \geq c \quad (5.36)$$

$$\lambda \leq 0$$

Ecuația (5.36) furnizează un set de restricții asupra variabilelor duale.

Întrebarea care a mai rămas de rezolvat este dacă problema duală trebuie maximizată sau minimizată. Pentru răspuns, reamintim că orice soluție neoptimă, dar realizabilă este un vârf al domeniului soluțiilor realizabile, pentru care este încă costul redus este pozitiv. Acesta implică faptul că restricțiile problemei duale date de (5.36) nu vor fi satisfăcute care implică mai departe că numai soluțiile realizabile ale problemei primale sunt soluții realizabile și pentru problema duală. Deci, soluția optimă a problemei primale este soluția minimă realizabilă a problemei duale, deci problema duală trebuie minimizată.

### 5.3.2 Interpretarea problemei duale

Pentru a înțelege formularea duală, trebuie să analizăm mai atent variabilele și coeficienții din problemele primală și duală. Reluăm problema primală și duală pentru exemplul alimentării cu apă:

$$\text{maximizeaza } f(q) = c^t q \quad (5.37)$$

astfel încât

$$Aq \geq b$$

$$q \geq 0$$

$$\text{minimizeaza } f(\lambda) = b^t \lambda \quad (5.38)$$

astfel încât

$$A^t \lambda \geq c$$

$$\lambda \leq 0$$

Deși nu am prezentat problema de programare liniară de management ca o problemă pentru managementul resurselor limitate, duala poate fi interpretată în acest sens. În contextul exemplului alimentării cu apă, restricțiile primale fixează limitele inferioare ale nivelului piezometric în locații specifice din interiorul domeniului. Aceste restricții sunt echivalente cu limitarea scăderii nivelului piezometric a apei subterane de lângă râu.

Aceste limite pot fi interpretate ca limitând cantitatea maximă de apă care poate fi pompată. Problema primală poate fi reformulată economic astfel: realizarea beneficiului maxim prin pompare fără a depăși resursele disponibile de apă. Din această perspectivă, coeficientul  $c_j$  este beneficiul obținut prin aplicarea unei solicitări unitare în locația  $j$ , iar  $q_j$  este debitul aplicat puțului  $j$ . Coeficienții restricțiilor  $a_{ij}$  reprezintă modificarea nivelului piezometric în locația  $i$  datorită solicitării unitare din locația  $j$  și furnizează o măsură a scăderii nivelului piezometric de lângă râu. Fiecare restricție stabilește că scăderea nivelului piezometric al apei de lângă râu în locația  $i$ , care rezultă din soicitarea din toate locațiile  $j$ , nu trebuie să depășească scăderea maximă admisă în locația  $i$ , dată de  $b_i$ .

„Costurile din umbră” sau variabilele duale au fost deja definite ca senzitivitatea funcției obiectiv originală la modificările restricțiilor originale. Folosind definiția din paragraful precedent, variabilele duale pot reprezenta de asemenea valorile marginale ale scăderii nivelului piezometric al apei subterane lângă râu în locația  $i$ , având ca unități de măsură valoarea sau costul scăderii nivelului piezometric raportat la scăderea unitară a nivelului în locația  $i$ . Problema duală cere minimizarea costului total al scăderii nivelului piezometric în toate locațiile  $i$ .

Revenind la problema primală, costul redus în fiecare iterație este:

$$\text{reduce costul} = (c^t - \lambda^t A) \quad (5.39)$$

Folosind interpretarea dualei, o soluție a problemei primale poate deveni suboptimală dacă beneficiul realizat prin pomparea apei din puțul  $j$ ,  $c_j$ , este mai mare decât costul scăderii nivelului piezometric în puțul  $j$ ,  $\lambda^t A_j$ .

## Cap. 6 FORMULAREA LINIARĂ AVANSATĂ A MODELULUI DE OPTIMIZARE

Formularea liniară a modelului de optimizare prezentată în capitolul 3 este limitat la cazul unui acvifer sub presiune, cu curgere staționară, restricțiile și funcția obiectiv fiind liniare în raport cu nivelele piezometrice și cu solicitarea aplicată acviferului. În acest capitol sunt introduse alte considerații ale dinamicii apei subterane care pot fi incuse în modelul de management. Aceste considerații urmăresc aceleași forme liniare ca cele introduse în (4.1) și includ acomodarea variabilelor de decizie la caracteristici specifice ale solicitării, managementul și formularea problemei pentru curgerea apei subterane în regim tranzitoriu, restricții de tip special.

Procedeul de construcție al acestui model avansat de management rămâne neschimbat, sunt modificate doar câteva aspecte specifice ale procesului de aflare a soluțiilor, ele fiind descrise pe măsură ce apar.

### 6.1 Managementul curgerii tranzitorii

Formulările prezentate în capitolele anterioare conțin niveluri piezometrice generate de o solicitare staționară (constantă) aplicat acviferului. Introducerea unei solicitări cu o durată fixată sau cu o intensitate variabilă în timp în funcție de nevoile sistemului necesită reformularea problemei de optimizare. Curgerea în regim tranzitoriu a apei subterane implică de asemenea reformularea modelului. În această secțiune e analizat efectul introducerii componentelor temporale asupra formulării [3,10,13].

Distingem trei nivele de discretizare a timpului. Prima dintre ele este alegerea unui pas de timp. Așa cum am arătat în capitolul 2, acesta trebuie selectat astfel încât să se asigure stabilitatea schemei numerice și o acuratețe adecvată în simularea răspunsului nivelului piezometric la variațiile solicitărilor și a condițiilor de frontieră.



Figura 6.1 Cele trei nivele diferite de discretizare a timpului pentru controlul nivelului piezometric în curgerea în regim tranzitoriu

Un al doilea nivel al discretizării este intervalul de variație a solicitării. Strategia de optimizare este independentă de aceste tipuri de solicitări, ele sunt date de variația sezonieră a precipitațiilor de care depinde reîncărcarea acviferelor alimentate în principal din precipitații. Aceste tipuri de solicitări extern nu sunt parte a modelului de management, ele trebuie luate în considerare prin condițiile de frontieră a modelului de simulare. Este posibil ca aceste condiții de frontieră să se schimbe la fiecare pas de timp. De obicei, aceste schimbări se produc periodic, de exemplu lunar, iar pasul de timp trebuie ales mult mai mic. Se poate presupune că modificările condițiilor de frontieră apar la începutul intervalului de timp și se mențin constante până la sfârșitul intervalului. Al treilea nivel de discretizare a timpului este perioada de optimizare, care este intervalul în care strategia de aplicare al solicitării, dată de variabilele de decizie, acționează asupra acviferului. Perioada de management poate coincide cu perioada dintre două schimbări succesive ale condițiilor de frontieră, dar nu e obligatoriu. Relația dintre cele trei nivele de discretizare al timpului este arătată în figura 6.1.

Pe baza celor trei nivele de discretizare a timpului, sunt posibile mai multe combinații ale solicitărilor și ale modificărilor condițiilor de frontieră. Pe parcursul unei perioade de management pot apărea mai multe modificări ale condițiilor de frontieră.

De asemenea, condițiile de frontieră pot rămâne nemodificate pentru mai multe perioade de solicitare sau de management sau, de-a lungul unei perioade de management se pot modifica atât condițiile de frontieră cât și solicitarea aplicată acviferului. Orice variație a solicitării sau a condițiilor de frontieră necesită o simulare a curgerii în regim tranzitoriu și alegerea unui pas de timp adecvat.

### 6.1.1 Formularea modelului de optimizare pentru regim tranzitoriu

Atunci când în formularea problemei e inclusă simularea curgerii în regim tranzitoriu sau există perioade multiple de management, atunci forma liniară generală a problemei trebuie reconsiderată. În general restricțiile impuse nivelului piezometric trebuie să fie respectate în orice moment. Practic, acest lucru implică observarea nivelului piezometric la sfârșitul fiecărui pas de timp, care nu e necesar să corespundă cu sfârșitul perioadei de management sau cu schimbările în condițiile de frontieră.

În această formulare, nivelurile piezometrice trebuie observate la diferite perioade  $T_h$ , indexate cu  $\tau$ . Observațiile nivelurilor pe perioada totală de management  $T_m$  se indexează cu  $t$ . De asemenea, toți coeficienții se indexează corespunzător cu modificarea variabilelor de decizie, termenilor liberi și a restricțiilor. Formularea modelului pentru regim tranzitoriu este:

$$\text{minimizeaza } f = \beta + \sum_{t=1}^{T_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{j,t} q_{j,t} + \sum_{\tau=1}^{T_h} \sum_{i=1}^l \gamma_{i,\tau} h_{i,\tau} \quad (6.1)$$

astfel încât

$$\sum_{t=1}^{T_m} (\alpha_{1,t,k}^q q_{1,t} + \alpha_{2,t,k}^q q_{2,t} + \dots + \alpha_{i,t,k}^q q_{i,t} + \dots + \alpha_{n,t,k}^q q_{n,t} + \beta_{t,k}^q) + \sum_{\tau=1}^{T_h} (\gamma_{1,\tau,k}^h h_{1,\tau} + \gamma_{2,\tau,k}^h h_{2,\tau} + \dots + \gamma_{i,\tau,k}^h h_{i,\tau} + \dots + \gamma_{l,\tau,k}^h h_{l,\tau} + \beta_{\tau,k}^h) \geq 0$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

Restricțiile sunt funcții generale liniare de toate variabilele de decizie și nivelurile piezometrice observate. În această formă restricțiile se pot folosi pentru reprezentarea cantităților parțiale și cumulative de apă extrasă sau pentru schimbările temporale ale nivelului piezometric. Dacă este considerat un singur interval de timp și nivelul piezometric este observat numai la sfârșitul perioadei de optimizare, atunci formularea de mai sus se reduce la forma liniară originală.

Formularea de mai sus poate fi de asemenea utilizată dacă e necesară observarea nivelului piezometric în timpul simulării în regim tranzitoriu pentru o singură perioadă de management ( $T_m = 1, T_h > 1$ ) sau dacă sunt considerate mai multe perioade de management cu o singură observare a nivelului piezometric ( $T_m > 1, T_h = 1$ ).

Seria Taylor, care a fost folosită pentru determinarea nivelurilor și solicitărilor, se poate extinde și la cazul perioadelor multiple de management. Matricea debitelor,  $q$  și  $q_0$ , includ în acest caz debitul pentru fiecare locație candidată și pentru fiecare perioadă de management,  $q_{j,t}$  și  $q_{j,t}^0$ . De notat că, derivatele necesare în seria Taylor țin cont de impactul solicitărilor asupra nivelului piezometric din perioada de management anterioară. Cu toate că derivatele din seria lui Taylor se referă la toată durata perioadei de management, derivatele nivelului piezometric în raport cu solicitarea trebuie să fie nule când timpul reprezentat prin  $t$  este mai mare decât cel reprezentat prin  $\tau$ . Aceasta rezultă din faptul că nivelul piezometric în acvifer la timpul  $\tau$  depinde de condițiile trecute și prezente, nu de solicitarea aplicată ulterior. Seria lui Taylor extinsă este:

$$h_{i,\tau}(q) = h_{i,\tau}^0(q_0) + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{T_m} \frac{\partial h_{i,\tau}}{\partial q_{j,t}}(q_0) (q_{j,t} - q_{j,t}^0) + \dots \quad (6.2)$$

Așa cum am arătat în capitolul 2, în cazul unui acvifer sub presiune și cu condiții de frontieră liniare, răspunsul nivelului piezometric la solicitare este liniară chiar dacă curgerea este cu regim tranzitoriu și solicitarea externă variază în timp. Deci, aproximarea prin derivatele de gradul întâi din seria Taylor poate fi folosită, în aceeași manieră ca cea din secțiunea 4.1, pentru a transforma (6.1) într-o problemă de programare liniară sub forma:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{t=1}^{T_m} \sum_{j=1}^n c_{j,t} q_{j,t} \quad (6.3)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{T_m} a_{kj,t} q_{j,t} \geq b_k$$

pentru  $k = 1, \dots, m$



În final, coeficienții de răspuns pot fi determinați în mod similar ca și în secțiunea 4.2 astfel:

$$\frac{\hat{c}h_{i,t}}{\hat{c}q_{j,t}} \approx \frac{h_{i,t}(q_{j,t}) - h_{i,t}(q_0)}{q_{j,t} - q_{j,t}^0} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 Debitul și volumele de apă

Variabilele de decizie  $q_{j,t}$  reprezintă debitul aplicat în locațiile specifice și se măsoară în unități de volum raportat la timp ( $m^3/s$ ). Pentru problemele cu durate limitate este importantă optimizarea volumului pompat în fiecare perioadă de optimizare. Această cantitate poate fi determinată prin multiplicarea debitului cu lungimea perioadei de management,  $\Delta m_t$ . Funcția obiectiv va avea următoarea formă:

$$f = \sum_{t=1}^{T_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{j,t} \Delta m_t q_{j,t} \quad (6.5)$$

unde  $\alpha_{j,t}$  are dimensiunea de valoare monetară per volum ( $lei / m^3$ ).

### 6.1.3 Valoarea temporală a costurilor

Un alt aspect al problemei în cazul perioadelor multiple de optimizare este valoarea temporală a costurilor. Costurile de aplicare a solicitării pot să se modifice în timp, deci pot fi diferite pentru una sau mai multe perioade. Valoarea actuală a costului aplicării solicitării pe perioada  $T_m$  cu o rată a dobânzii  $i$  pe durata perioadei de management poate fi scrisă ca:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{t=1}^{T_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{j,t} \Delta m_t q_{j,t} \quad (6.6)$$

unde  $c_{j,t}$  reprezintă costul unitar al solicitărilor în locația  $j$  pe perioada  $t$ , iar termenul din paranteză exprimă coeficientul de actualizare, rezultat dintr-o analiză economică.

Această formă presupune că perioadele de optimizare au aceeași durată și costurile sunt cele de la sfârșitul perioadei de management. În cazul special în care este aplicat o singură solicitare pentru perioade multiple de timp, (6.6) poate fi rescrisă astfel:

$$\text{minimizeaza } \sum_{j=1}^n \left( \sum_{t=1}^{T_m} c_{j,t} [(1+i)^{-t}] \right) q_j \quad (6.7)$$

De notat este căci toți termenii din paranteza mare sunt independenți de solicitări și ei pot fi înlocuiți cu un singur coeficient în funcția obiectiv, sub forma:

$$\text{minimizeaza } \sum_{j=1}^n c_j q_j \quad (6.8)$$

Dacă costurile sunt aceleași pentru fiecare locație în fiecare perioadă de timp, atunci coeficientul  $C_j$  poate fi eliminat din funcția obiectiv.

## 6.2 Debit cu direcție nedeterminată

În unele cazuri poate fi necesar a prevedea locațiile candidate pentru aplicarea solicitării în care direcția solicitării (extracție sau injecție) nu este specificată și trebuie determinate prin rezolvarea problemei. În cele mai multe modele de simulare direcția debitului este indicată de semnul valorii debitului. Vom considera că o valoare pozitivă a solicitării înseamnă extracție din acvifer, iar o valoare negativă injecție în acvifer.

Dacă direcția solicitării nu este specificată, atunci variabilele care reprezintă debitul în locațiile candidate trebuie limitate astfel [19]:

$$q_j^{nu} \leq q_j \leq q_j^{eu} \quad (6.9)$$

unde  $q_j^{nu}$  este limita superioară a injecției (număr negativ) iar  $q_j^{eu}$  este limita superioară a extracției (număr pozitiv). Considerăm cazul în care obiectivul este de a minimiza rata totală a solicitării, indiferent de direcție, când este dată o limită inferioară negativă. O parte a formulării este:

$$\text{minimizeaza } \sum_{j=1}^n q_j \quad (6.10)$$

astfel încât

$$q_j^{nu} \leq q_j \leq q_j^{eu}$$

unde algoritmul de găsimă a soluțiilor tinde să selecteze injecția maximă în acvifer pentru a minimiza funcția obiectiv.

Acest rezultat nedorit poate fi corectat prin reformularea obiectivului pentru a minimiza valorile absolute ale debitului:

$$\text{minimizeaza } \sum_{j=1}^n |q_j| \quad (6.11)$$

Această formă are tendința de a muta solicitarea totală către zero, așa cum cere formularea. Utilizarea lui (6.11) introduce o nouă problemă în care funcția obiectiv nu mai este liniară și conține derivate care nu sunt continue când solicitarea are o valoare apropiată de zero, adică derivata la stânga lui zero are o valoare diferită de valoarea derivatei la dreapta lui zero. Din această cauză această problemă necesită un algoritm specializat pentru rezolvare.

O altă modalitate de a reformula problema este de a înlocui solicitarea cu suma a două variabile noi, una reprezentând extracția, iar cealaltă injecția (reîncărcarea). Noua problemă se poate formula sub forma:

$$\text{minimizeaza } \sum_{j=1}^n (q_j^e + q_j^r) \quad (6.12)$$

astfel încât

$$q_j = q_j^e - q_j^r$$

$$0 \leq q_j^e \leq q_j^{eu}$$

$$0 \leq q_j^r \leq -q_j^{nu}$$

unde  $q_j^e$  este rata extracției și  $q_j^r$  este rata de reîncărcare (alimentare) a acviferului în locația  $j$ . Ambele variabile trebuie să fie pozitive.

Debitul în locația  $j$  se definește ca diferența valorilor celor două variabile și este negativă dacă  $q_j^r$  este mai mare decât  $q_j^e$ . O dată ce solicitarea netă este definită, toate restricțiile care conțin variabile de decizie solicitare pot fi evaluate (definite). Prin minimizarea sumei acestor două variabile pozitive se obține minimizarea debitului total.

De reținut este faptul că nu este posibil ca într-o locație dată să se producă simultan și extracție și reîncărcare. Dacă ambele variabile sunt nenule, atunci  $q_j$  va avea o valoare absolută mai mică decât oricare din cele două variabile (extracție și reîncărcare). Rezultă că dacă se obține o valoare dată pentru  $q_j$ , suma dintre rata de extracție și reîncărcare este minimă dacă una din cele două rate este zero.

Obiectivele și restricțiile care implică nivele piezometrice sunt funcții liniare de solicitare, indiferent de direcția solicitării, în ipoteza unui acvifer sub presiune. Acest lucru se poate demonstra prin analiza soluțiilor analitice ale ecuației mișcării apei subterane. O creștere a solicitării pozitive (extracție) de la zero la o valoare dată produce aceeași modificare a nivelului piezometric (cu semn contrar) ca o creștere de aceeași valoare a solicitării negative (reîncărcare). Deci, derivata nivelului piezometric în raport cu solicitarea are aceeași valoare constantă, indiferent de valoarea (pozitivă sau negativă) a solicitării. (Discontinuitățile în răspunsul nivelului piezometric la acțiunea solicitării pot apărea din cauza altor caracteristici ale modelului de simulare, așa cum vom arăta în secțiunea 6.5).

### 6.3 Debit aplicat distribuit (prin celule multiple)

Solicitarea exercitată asupra acviferului este deseori aplicat distribuit printr-un sistem de puncte (celule), cum ar fi prin drenuri orizontale, drenuri verticale, puțuri radiale. Caracteristica comună a acestora este că apa este pompată sau reîncărcată în mod distribuit (uniform sau neuniform). Solicitarea totală aplicată se distribuie pentru fiecare unitate (celulă). În această secțiune, vom prezenta câteva aspecte ale acestor probleme. În cele ce urmează presupunem că locațiile celulelor sunt cunoscute. Metodele de rezolvare a acestor tipuri de probleme sunt prezentate în capitolul 7.

#### 6.3.1 Debit distribuit orizontal

În acest caz solicitarea se aplică prin drenuri, puțuri verticale, galerii de infiltrație, bazin de alimentare sau grupuri de puțuri. Dacă există un număr de  $n_H$  celule de aplicare a debitului, debitul total aplicat este definit de următoarea restricție:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_{n_H} = Q_H \quad (6.13)$$

În acest caz solicitarea totală devine variabilă de decizie pentru problemă și poate fi utilizat în restricțiile adiționale sau în funcția obiectiv.

Dacă sistemul de aplicare a debitului constă dintr-o singur element, de exemplu un dren, trebuie impuse fiecărei celule condiții adiționale. Aceste condiții trebuie să asigure că solicitarea este aplicată fiecărei celule astfel încât modificările nivelului piezometric date de fiecare celulă să reflecte impactul întregului sistem asupra acviferului. Aceasta implică impunerea unei relații între nivelurile piezometrice în acvifer adiacente sistemului de aplicare a solicitării.

Considerăm, de exemplu, un sistem alcătuit dintr-o conductă perforată. Putem presupune că nivelul piezometric de-a lungul conductei este aproape același în fiecare punct, de-a lungul conductei. Acesta rezultă din observația că orice gradient hidraulic, necesar pentru curgerea apei de-a lungul conductei, a fost mult mai mic decât gradientul hidraulic din acvifer în imediata vecinătate a conductei. Presupunând mai departe că, dacă nivelul piezometric din conductă controlează nivelul piezometric în acvifer în imediata vecinătate a conductei (nu există o scădere apreciabilă a nivelului piezometric prin curgerea prin pereții conductei sau că scăderea nivelului piezometric este uniformă), atunci se poate considera că nivelul piezometric în acvifer de-a lungul conductei este uniform.

Din cele de mai sus, formularea problemei necesită impunerea restricției ca nivelul piezometric să fie același de-a lungul conductei, exprimat ca:

$$h_i = h_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n_H - 1 \quad (6.14)$$

Deoarece este dificilă satisfacerea exactă a egalității dintre două valori numerice, este necesară înlocuirea fiecărei egalități de mai sus cu o pereche de inegalități sub forma:

$$\begin{aligned} h_i - h_{i-1} &\leq \delta \\ h_{i-1} - h_i &\leq \delta \end{aligned} \quad (6.15)$$

unde  $\delta$  este o valoare mică care reprezintă nivelul de precizie cerut.

Dacă schimbările nivelului piezometric de-a lungul conductei sunt semnificative, atunci (6.14) poate fi înlocuit cu:

$$h_i = \alpha_i h_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n_H - 1 \quad (6.16)$$

unde  $\alpha_i$  reprezintă coeficientul de modificare al nivelului piezometric la curgerea între punctele  $i$  și  $i+1$ .

Din teoria curgerii prin conducte, scăderea nivelului piezometric în conductă depinde numai de debitul din conductă. Dacă se ia în considerare acest aspect, atunci (6.16) devine o funcție neliniară de solicitare. O ipoteză rezonabilă ar fi ca coeficienții  $\alpha_i$  să fie definiți independent de solicitare.

### 6.3.2 Debit distribuit vertical

Debitul distribuit vertical se poate aplica cel mai des prin drenuri verticale. Multe metode numerice consideră, pentru astfel de probleme, acviferul alcătuit din mai multe straturi suprapuse sau format dintr-un număr de subunități egale. În mod similar cu debitul distribuit orizontal, debitul total aplicat acviferului printr-un sistem de  $n_w$  celule este definit de restricția următoare:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_j + \dots + q_{n_w} = Q_w \quad (6.17)$$

Legătura dintre debitul aplicat prin intermediul fiecărei celule poate fi definit prin relația dintre nivelele piezometrice învecinate într-un mod similar ca la debitul distribuit pe orizontală.

O altă modalitate de definire a legăturii dintre solicitarea din fiecare celulă este considerarea fiecărei solicitări ca fiind o fracțiune din solicitarea totală, funcție de transmisivitatea hidraulică relativă a fiecărui strat orizontal. Relația care definește  $Q_w$ , (6.17), implică că solicitarea individuală din fiecare strat poate fi definit ca:

$$q_j = \alpha_j Q_w, \quad j = 1, \dots, n_w \quad (6.18)$$

unde  $\alpha_j$  sunt coeficienți pozitivi, care îndeplinesc condiția  $\sum_{j=1}^{n_w} \alpha_j = 1$ . Coeficienții  $\alpha_j$  se definesc ținând cont de faptul că curgerea din fiecare strat este proporțional cu transmisivitatea stratului.

$$\alpha_j = \frac{b_j K_j}{\sum_{j=1}^{n_w} b_j K_j} \quad (6.19)$$

unde  $b_j$  este grosimea stratului  $j$ , iar  $K_j$  este conductivitatea hidraulică orizontală a stratului  $j$ .

Această relație consideră că gradientul hidraulic în vecinătatea drenului este același pentru fiecare strat. Această ipoteză este acceptabilă dacă nivelul piezometric în drenul vertical este aproape uniform în timp, independent de regimul solicitări, și dacă nivelele piezometrice în acvifer variază uniform pe verticală.

#### 6.4 Restricții asupra vitezei apei subterane

Restricțiile asupra diferenței de presiune introduse în secțiunea 3.2.2 sunt deseori utilizate pentru producerea curgerii într-o direcție dorită. Printr-o examinare mai atentă aceste restricții pot fi văzute ca cerințe impuse asupra direcției și mărimii vitezei în locații specificate. Simpla restricție impusă asupra diferenței de nivel piezometric între două puncte de a fi mai mare decât o valoare dată, garantează numai că direcția de curgere a apei subterane va fi cea dorită [27,63,76,9,107].

Considerăm figura 6.2 a), unde este necesară o diferență pozitivă dintre nivelele piezometrice între punctul 1 și 2, în direcția  $x$ . Vectorii de viteză, indicate de săgeți în figura 6.2 a), pot fi caracterizate prin componentele lor în direcția  $x$  și  $y$ , și prin unghiul vectorului cu axa  $x$ , așa cum este reprezentat în figura 6.2 b).

Componenta vitezei în direcția  $x$ ,  $V_x$ , este pozitivă pentru toți vectorii din figura 6.2 a), ceea ce indică că acești vectori satisfac restricția impusă diferenței de nivel piezometric. De fapt, toți vectorii conținuți în semiplanul definit de normala la linia care unește punctele 1 și 2, satisfac această restricție.

O singură restricție impusă diferenței nivelului piezometric nu ajută la specificarea mărimii vitezei. Relația dintre componenta vitezei  $V_x$  și vectorul rezultat  $V$  este dată de  $V = V_x / \cos \theta$ , unde  $\theta$  este unghiul dintre  $V$  și  $V_x$ . Dacă se dorește

realizarea unei viteze date  $V_x$ , atunci dacă unghiul  $\theta$  crește, pentru satisfacerea restricției impuse lui  $V_x$ , trebuie ca și  $V$  să crească. Dacă nu se cunoaște direcția vitezei, atunci nu pot fi impuse restricții asupra mărimii ei printr-o singură restricție asupra diferenței de nivel piezometric. Numai dacă este precizată direcția vitezei se pot impune limite asupra ei. Deci, o singură restricție a diferenței de nivel piezometric impune numai direcția de curgere și o cerință indirectă a legăturii dintre mărimea vitezei și direcția ei.

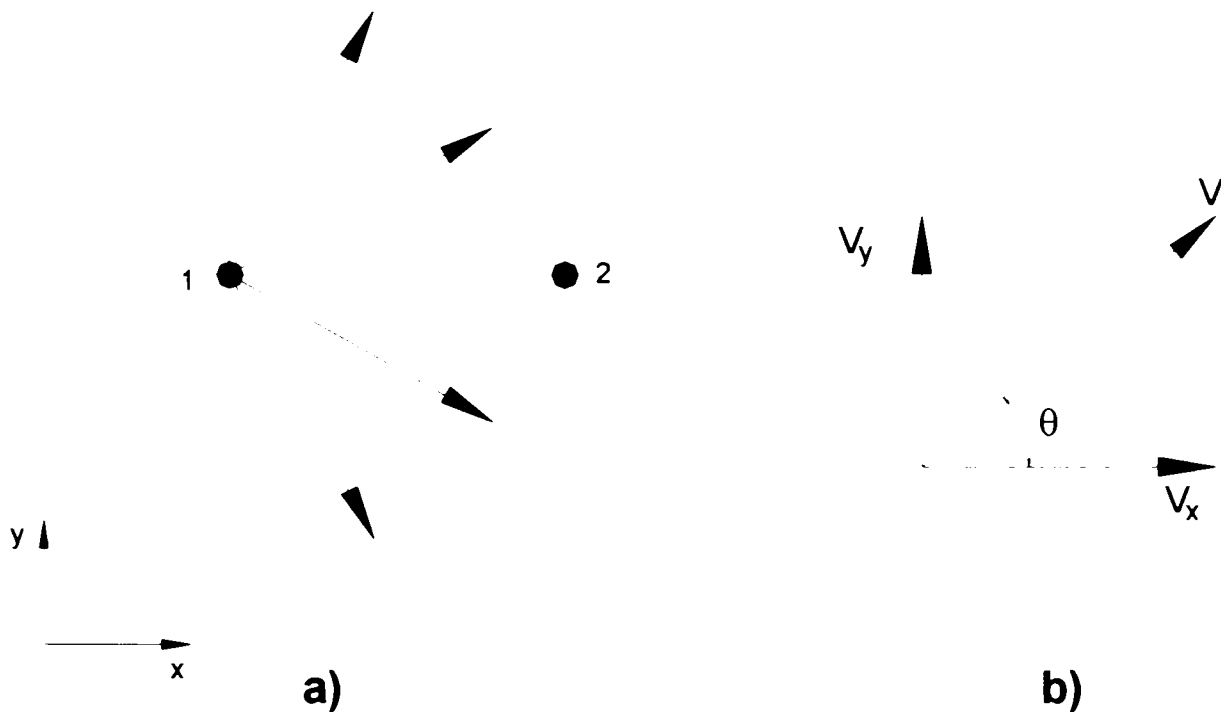


Figura 6.2 Necesitatea ca nivelul piezometric din punctul 1 să fie mai mare ca în 2 impune vitezei de curgere în semiplanul din dreapta liniei punctate în (a). Vectorul viteză definit bidimensional (b)

Cerințe mai rafinate asupra vitezei se pot determina prin utilizarea mai multor restricții asupra diferenței de nivel piezometric, adiacente unei alteia. Intersecția semiplanelor definite de aceste restricții determină domeniul direcțiilor posibile ale vitezelor.

De exemplu, în figura 6.3 este prezentat acest domeniu în cazul a două restricții asupra diferenței nivelurilor piezometrice, una impusă între punctele 1 și 2, iar cealaltă între punctele 1 și 3. În cazul (a) unghiul format de semiplane este  $90^\circ$ , iar în cazul (b)  $135^\circ$ .

Utilizarea mai multor restricții pentru controlul direcției vitezei de curgere a apei subterane poate fi generalizată prin definirea a doi vectori, A și B, fiecare din ei definind un semiplan. Prin specificarea direcției acestor doi vectori, poate fi definit domeniul direcțiilor posibile ale vitezei.

Figura 6.4 prezintă un astfel de caz. Orientarea vectorilor A și B nu este limitată. Orientările diferite ale vectorilor A și B pot defini un domeniu de variație a vitezelor, unghiul dintre cele două semiplane determinate de ele poate varia de la  $0$  la  $180^\circ$ .

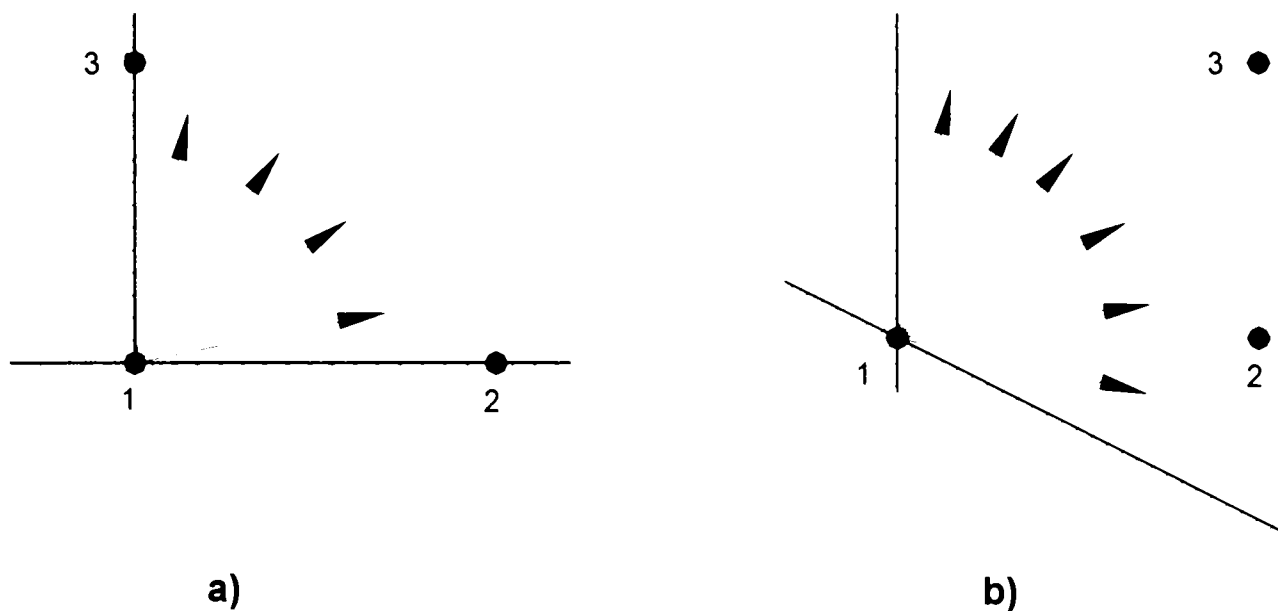


Figura 6.3 Domeniul posibil al direcției vitezelor în cazul existenței a două restricții asupra diferențelor dintre niveluri piezometrice

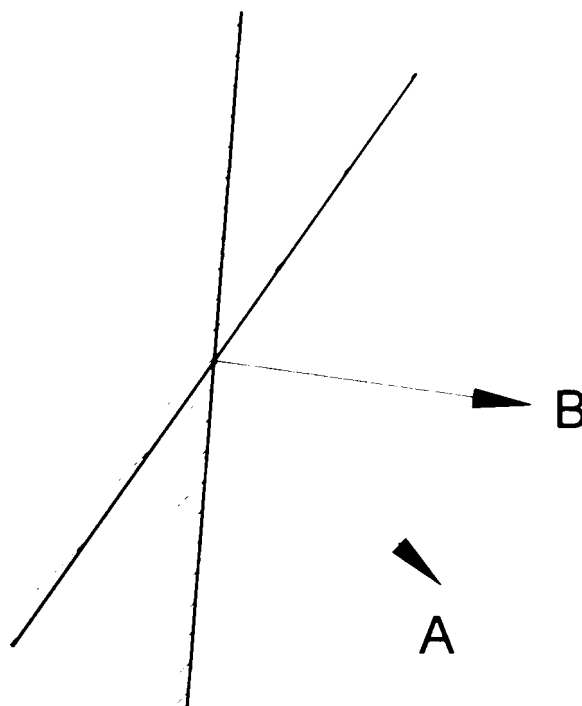


Figura 6.4 Vectorii A și B determină domeniul posibil al direcției vitezelor ca fiind intersecția semiplanelor determinate de ei.

Restricțiile asupra vitezelor  $V$ , determinate prin optimizări, sunt definite prin impunerea unor cerințe produsului scalar dintre ele și vectorii  $A$  și  $B$ . Din algebra liniară elementară se știe că dacă produsul scalar dintre doi vectori este pozitiv, atunci unul se află în semiplanul definit de celălalt. Restricțiile impuse asupra produsului scalar sunt următoarele:

$$\begin{aligned} V \cdot A &= V_x \cdot A_x + V_y \cdot A_y \geq 0 \\ V \cdot B &= V_x \cdot B_x + V_y \cdot B_y \geq 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Vectorul  $V$  care satisface restricțiile de mai sus are direcția situată în interiorul domeniului definit de intersecția semiplanelor determinate de vectorii  $A$  și  $B$ .

De asemenea, vectorul viteză care satisface (6.20) are o valoare mai mare sau egală cu zero. Totuși, impunerea unei limite inferioare pozitive nenule asupra valorii vitezei, prezintă o provocare. Considerând relația dintre valoarea lui  $V$  și componentele sale:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (6.21)$$

impunerea unei restricții asupra acestei valori introduce o funcție neliniară.

Pentru a păstra liniaritatea, se pot impune restricții asupra componentelor vitezei:

$$V_x \geq V'_x, \quad V_y \geq V'_y \quad (6.22)$$

$$V \geq \sqrt{(V'_x)^2 + (V'_y)^2} \quad (6.23)$$

Prezența limitelor din (6.22) limitează valoarea vitezei sub forma:

$$V_x \geq V'_x, \quad V_y \geq V'_y \quad (6.22)$$

$$V \geq \sqrt{(V'_x)^2 + (V'_y)^2} \quad (6.23)$$

Dacă ambele componente ale vitezei sunt limitate inferior, atunci direcția vitezei poate fi definită precis.

Dacă una din componente nu este limitată inferior, atunci direcția vitezei poate varia într-un interval. Prezența limitelor componentelor reduce setul de direcții posibile ale vitezei și mărimea ei.

Figura 6.5 prezintă domeniul direcțiilor posibile și mărimea vitezei când acesta este limitat inferior. Originea sistemului de axe este punctul în care e restricționată viteza, iar direcțiile coordonatelor sunt date de componentele vitezei de-a lungul axelor  $x$  și  $y$ . Intersecția semiplanului definit de vectorii  $A$  și  $B$  restricționează direcția vitezei. Introducerea limitelor inferioare pentru componentele vitezei limitează în continuare domeniul posibil al direcțiilor. Vectorul viteză rezultat trebuie să rămână în interiorul porțiunii nehașurate.

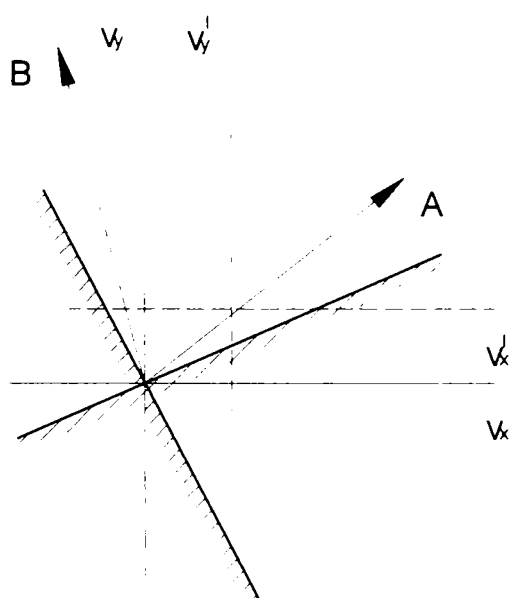


Figura 6.5 Introducerea limitelor inferioare pentru componentele vitezei limitează în continuare domeniul posibil al direcțiilor vitezei de curgere a apei subterane



Vom prezenta acum restricțiile asupra vitezei în cazul modelului general liniar al managementului apei subterane: Componentele vitezei  $V$ ,  $V_x$  și  $V_y$ , depind de nivelul piezometric, care la rândul lui depinde de solicitarea aplicată acviferului. Această relație poate fi dezvoltată pentru o rețea numerică de puncte rectangulară care este aliniată cu direcțiile coordonatelor vitezei.

Folosind notațiile pentru diferența dintre două nivele piezometrice din secțiunea 3.2.2 și prin indicarea a trei locații specifice,  $k_1$ ,  $k_2$  și  $k_3$ , componentele vitezelor pot fi calculate astfel:

$$V_x = K \left( \frac{h_{k_1} - h_{k_2}}{\Delta x} \right) \quad (6.24)$$

$$V_y = K \left( \frac{h_{k_1} - h_{k_3}}{\Delta y} \right)$$

Ecuția (6.24) arată că componentele vitezei sunt funcții liniare de nivelele piezometrice. Dacă presupunem că nivelele piezometrice răspund liniar la solicitare atunci componentele vitezei se pot calcula folosind seria lui Taylor cu derivatele de ordinul 1:

$$V_x = V_x^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_x}{\partial q_j} q_j \quad (6.25)$$

$$V_y = V_y^0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_y}{\partial q_j} q_j$$

unde:

$$\frac{\partial V_x}{\partial q_j} = \left( \frac{K}{\Delta x} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_2})}{\partial q_j} \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial q_j} = \left( \frac{K}{\Delta y} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_3})}{\partial q_j}$$

Prin înlocuirea lui (6.25) în (6.20) și prin rearanjare, rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial V_x}{\partial q_j} A_x + \frac{\partial V_y}{\partial q_j} A_y \right) q_j \geq -V_x^0 A_x - V_y^0 A_y \quad (6.27)$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial V_x}{\partial q_j} B_x + \frac{\partial V_y}{\partial q_j} B_y \right) q_j \geq -V_x^0 B_x - V_y^0 B_y$$

Prin înlocuirea lui (6.26) în (6.27) și prin rearanjare, rezultă.

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{KA_x}{\Delta x} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_2})}{\partial q_j} + \left( \frac{KA_y}{\Delta y} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_3})}{\partial q_j} \right] q_j \quad (6.28)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{KB_x}{\Delta x} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_2})}{\partial q_j} + \left( \frac{KB_y}{\Delta y} \right) \frac{\partial (h_{k_1} - h_{k_3})}{\partial q_j} \right] q_j$$

Relația (6.28) arată că restricția impusă vitezei este o combinație de două diferențe de nivele piezometrice. Acesta se poate pune sub forma liniară generală

(3.7) și se poate sub formă de inegalități liniare între variabilele de decizie de solicitare.

### 6.5 Condiții de frontieră (margine) neliniare

Formulările și procedurile de rezolvare prezentate în capitolele 3, 4 și 5 presupun un răspuns liniar al nivelului piezometric la solicitare. Cum am arătat în capitolul 2, acest tip de răspuns este garantat în cazul unui acvifer sub presiune și cu condiții de frontieră liniare. Multe modele de simulare sunt capabile de a cupla comportarea sistemului apei subterane cu alte elemente hidrologice care pot fi conectate la acvifer. Aceste elemente pot fi: corpuri de apă de suprafață, ca râuri sau lacuri, sau interacțiunea dintre zona nesaturată și atmosferă, care depinde de nivelul piezometric. Aceste interacțiuni sunt introduse prin condiții de frontieră neliniare impuse domeniului acviferului. Aceste condiții de frontieră pot fi neliniare din cauza formei lor quasi – liniare și pot conține derivate discontinue. În această secțiune vom analiza problemele care pot apărea în cazul existenței acestor condiții de frontieră neliniare.

În unele circumstanțe, aceste condiții de frontieră pot determina un răspuns neliniar a nivelului piezometric la solicitare, chiar în cazul unui acvifer sub presiune. De exemplu, considerăm interacțiunea dintre un acvifer și un curent de apă. Dacă acviferul și curentul de apă sunt conectați hidraulic, atunci se impune o condiție de frontieră asupra fluxului dintre ele, dependent de nivelul piezometric.

În acest caz, fluxul,  $q_{curent}$ , dintre acvifer și curentul de apă, este proporțional cu diferența dintre nivelul piezometric din acvifer în zona de lângă curent și nivelul piezometric al curentului. Relația poate fi scrisă ca:

$$q_{curent} = C(h_i - h_{curent}) \quad (6.29)$$

unde  $C$  este o constantă.

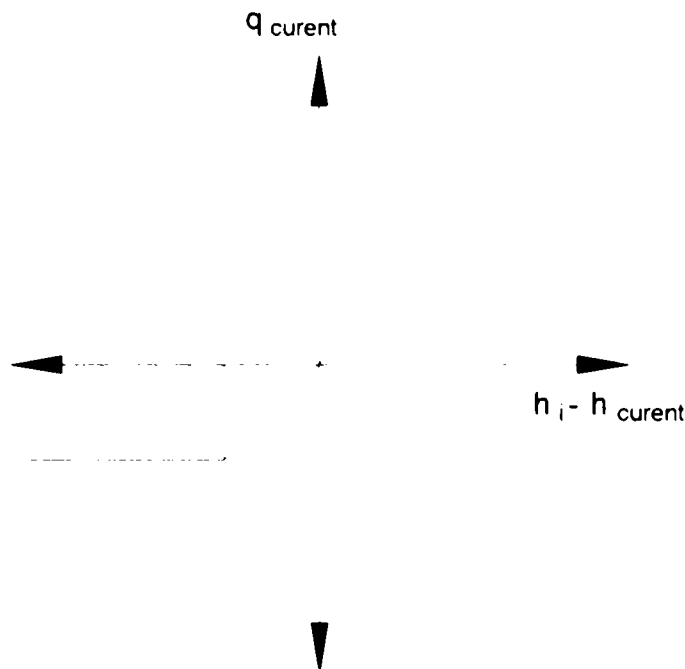
Atunci când acviferul și curentul de apă nu sunt conectate printr-o zonă continuă saturată, atunci fluxul specificat mai sus este folosit pentru reprezentarea infiltrației din curent în acvifer. O deconectare hidraulică poate apărea în cazul pompării apei din acvifer. Dacă nivelul piezometric în acvifer scade sub o anumită limită, atunci conectarea hidraulică printr-o zonă saturată este ruptă. Acesta se poate întâmpla în cazul în care nivelul piezometric din acvifer scade sub nivelul fundului curentului de apă,  $b_{curent}$ . Relația rezultată dintre nivelul piezometric din acvifer și fluxul dintre acvifer și curentul de apă poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned} q_{curent} &= C(h_i - h_{curent}) \quad \text{daca } h_i \geq b_{curent} \\ q_{curent} &= C(b_{curent} - h_{curent}) \quad \text{daca } h_i < b_{curent} \end{aligned} \quad (6.30)$$

și este arătată în figura 6.6, valoarea pozitivă a lui  $q_{curent}$  indică pierdere de apă din acvifer.

Condiția de frontieră neliniară prezentată în figura 6.6 rezultă din două condiții de frontieră liniare și conțin derivate ale fluxului în raport cu nivelul piezometric din acvifer discontinue. Condiția de frontieră este neliniară deoarece regimul fluxului și

forma finală a condiției de frontieră depind de nivelul piezometric din acvifer, care la rândul lui depinde de solicitarea aplicată acviferului.



*Figura 6.6 Exemplu de condiție neliniară de frontieră. Când nivelul piezometric din acvifer scade sub o anumită limită, din acel moment acviferul și curentul de apă nu mai sunt conectați hidraulic și condițiile de margine se schimbă brusc.*

Soluțiile oricărui model de optimizare sunt complicate dacă modelul de simulare, care este cuplat cu optimizarea, conține condiții de frontieră neliniare. Dacă condiția de frontieră este liniară pe porțiuni și curgerea este de așa natură încât ea se referă tot timpul la un singur segment liniar (de exemplu: dacă acviferul și curentul de apă rămân conectate hidraulic la orice scenariu de aplicare a solicitării), atunci condiția neliniară de frontieră se poate utiliza ca una liniară și problema se poate rezolva ca o problemă liniară.

În unele cazuri se poate presupune că condițiile de frontieră au un impact redus asupra relației dintre nivele piezometrice și solicitare, cum ar fi: neliniaritatea este slabă sau dacă condițiile de frontieră sunt impuse în puncte situate la o distanță semnificativă de punctele de urmărire a nivelului piezometric și de locațiile candidate.

Dacă aceste ipoteze asupra condițiilor de frontieră nu sunt îndeplinite, atunci este nevoie de alte metode de rezolvare a problemelor.

Pentru o singură locație și un singur punct de urmărire a nivelului piezometric este posibilă determinarea valorii solicitări pentru care are loc modificarea regimului condițiilor de frontieră, sugerând că un algoritm poate fi construit dacă se pot anticipa schimbările în zona frontierei. Dacă există mai multe locații de aplicare a solicitării, nivelul piezometric în acvifer este afectat de solicitarea din toate locațiile, făcând practic imposibilă identificarea combinațiilor posibile ale solicitării pentru care are loc schimbarea formei condițiilor de frontieră (de la neliniar la liniar).

Dacă curentul de apă este reprezentat printr-o serie de celule în care nivelele piezometrice din acvifer determină fluxul de apă, atunci modificarea nivelului piezometric în oricare punct în raport cu solicitarea din toate celelalte puncte,

depinde de regimul condițiilor de frontieră din fiecare celulă. Funcția de răspuns în acest caz poate lua forma unei funcții liniare pe porțiuni, unde fiecare porțiune corespunde unei combinații particulare a regimurilor condițiilor de frontieră pentru diferite celule. În cazul cel mai simplu, valoarea nivelului piezometric din acvifer pentru care condiția de frontieră face tranziția de la un segment liniar la următorul, depinde de solicitarea din toate locațiile candidate.

### 6.6 Evaluarea incertitudinii parametrilor

În capitolul 5 au fost prezentate diferite metode de investigare a impactului incertitudinii parametrilor asupra coeficienților funcției obiectiv și a valorilor restricțiilor. În această secțiune vom introduce metode pentru evaluarea incertitudinilor parametrilor modelului de simulare [122,130,25,22,23,94,138,126,123,134,113].

Optimizarea se bazează pe determinarea strategiei care împinge capacitățile fizice ale acviferului la limita lor. Din această cauză, soluția optimă va satisface la egalitate una sau mai multe restricții care reflectă limitele fizice ale acviferului simulat. De aici rezultă că orice eroare în comportarea acviferului simulat poate produce o soluție neoptimă sau una nerealizabilă atunci când strategia este implementată. O strategie care este suboptimă relativ la modelul de management, este superioară unei strategii care devine nerealizabilă la aplicarea practică.

Un mod de abordare corect al evaluării incertitudinii parametrilor modelului de simulare este utilizarea unor coeficienți de siguranță în restricții. De exemplu, dacă se cere menținerea nivelului piezometric sub o valoare dată, atunci restricția impune un nivel piezometric mai scăzut decât cel dorit. Această abordare are rolul de a ne asigura că restricția respectivă este satisfăcută și la aplicarea practică a modelului. O provocare a acestui mod de abordare este determinarea valorilor coeficienților de siguranță.

O tehnică uzuală pentru introducerea coeficientului de siguranță este metoda restricțiilor aleatoare, care determină factorii de siguranță în relație cu incertitudinile parametrilor acviferului. Parametrul incert cel mai semnificativ este conductivitatea hidraulică.

O abordare obișnuită pentru caracterizarea incertitudinii valorii conductivității hidraulice este reprezentarea ei ca un câmp aleatoriu staționar. Acesta implică că conductivitatea hidraulică este o variabilă aleatoare care este reprezentată ca o distribuție de probabilitate.

Cu caracterizarea incertitudinii conductivității hidraulice, se poate construi o nouă formulare, folosind metoda restricțiilor aleatoare. Această formulare presupune că incertitudinea constă în evaluarea restricțiilor și impune ca restricțiile să fie satisfăcute cu o anumită probabilitate. Pentru exemplificare, vom scrie forma compactă a modelului de optimizare al apelor subterane, în care fiecare restricție este reprezentată cu simbolul  $A_k$ :

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j \quad (6.31)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j = \Lambda_k \geq b_k$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

Pentru acest caz, unde coeficienții funcției obiectiv sunt cunoscuți cu certitudine, dar coeficienții restricțiilor sunt incerti, din cauza dependenței lor de nivelul piezometric, care la rândul ei depinde de conductivitatea hidraulică incertă. Din aceasta rezultă că restricțiile  $A_k$  pot fi considerate variabile aleatoare.

Formularea problemei prin metoda restricțiilor aleatoare se scrie precizând probabilitatea limită cu care sunt satisfăcute restricțiile:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j \quad (6.32)$$

astfel încât

$$\Pr[\Lambda_k \geq b_k] \geq p_k$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

unde  $\Pr [ ]$  reprezintă probabilitatea, iar  $p_k$  este probabilitatea limită sau măsura siguranței.

Cu presupuneri adecvate asupra caracteristicilor restricțiilor, formularea probabilistică din (6.32) se poate transforma într-o formulare deterministică cu un nivel de siguranță a parametrilor definiți de utilizator. O abordare este ipoteză că restricțiile  $A_k$  au o distribuție normală, cu media  $\mu_k$  și deviația standard  $\sigma_k$ , distribuția fiecărei restricții fiind independentă de solicitare. Restricțiile probabilistice pot fi transformate într-o distribuție standard normală prin:

$$\Pr\left[\frac{\Lambda_k - \mu_k}{\sigma_k} \geq \frac{b_k - \mu_k}{\sigma_k}\right] \geq p_k \quad (6.33)$$

Prin această transformare, fiecare restricție devine o variabilă aleatoare normală standard, cu media zero și dispersie unitară. Termenul care reprezintă probabilitatea poate fi acum înlocuit cu un termen care conține funcția normală standard a probabilităților cumulate,  $F$ :

$$1 - F\left[\frac{b_k - \mu_k}{\sigma_k}\right] \geq p_k \quad (6.34)$$

Inecuația (6.34) poate fi rearanjată prin folosirea inversei funcției  $F$ :

$$F^{-1}[1 - p_k] \geq \frac{b_k - \mu_k}{\sigma_k} \quad (6.35)$$

Folosirea identității  $F^{-1}[1 - p_k] = -F^{-1}[p_k]$  și prin rearanjare rezultă:

$$\mu_k \geq b_k + \sigma_k F^{-1}[p_k] \quad (6.36)$$

O modalitate de determinare a distribuțiilor,  $\mu_k$  și  $\sigma_k$ , parametrilor restricțiilor este folosirea seriei lui Taylor cu derivatele de ordinul 1, aplicate valorilor restricțiilor cu respectarea conductivității hidraulice aleatoare:

$$\Lambda(K) = \Lambda(K_0) + J_A(K - K_0) \quad (6.37)$$

unde  $K_0$  este vectorul valorilor probabile ale conductivității hidraulice, iar  $J_A$  este matricea jacobiană a derivatelor fiecărei restricții în raport cu fiecare element al vectorului conductivității hidraulice.

Deși nu este arătat în mod explicit în (6.37), matricea jacobiană este o funcție de rata solicitării. Din (6.37) putem deduce:

$$\mu_k = E(\Lambda_k) = \Lambda_k(K_0) \quad (6.38)$$

și

$$\text{Cov}[\Lambda] = J_A \text{Cov}[K] J_A \quad (6.39)$$

unde  $E[\Lambda_k]$  este valoarea probabilă a restricției  $k$ , iar  $\text{Cov}[A]$  este matricea de covarianță a restricției  $k$ .

Ecuția (6.38) arată că valoarea probabilă a restricției este simplu de calculat dacă cunoaștem valorile probabile ale conductivității hidraulice. Presupunând că  $K_0$  este folosită în evaluarea deterministică a restricțiilor, atunci  $\mu_k$  este valoarea deterministică a restricțiilor. Deviația standard a restricțiilor,  $\sigma_k$ , poate fi extrasă din relația (6.39).

Formularea completă a problemei prin metoda restricțiilor aleatoare poate fi acum scrisă prin combinarea (6.36) și (6.38) astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j \quad (6.40)$$

astfel încât

$$\Lambda_k(K_0) \geq b_k + \sigma_k F^{-1}(p_k)$$

Restricția aleatoare (6.36) poate fi acum interpretată ca simpla adăugare a factorului de siguranță,  $\sigma_k F^{-1}(p_k)$ , la restricția deterministică. Deviația standard,  $\sigma_k$ , este o funcție neliniară de solicitare, pentru a liniariza restricția trebuie să acceptăm ipoteză că  $\sigma_k$  este constant. Fără această ipoteză, nu este posibilă determinarea parametrilor statistici, fără a cunoaște solicitarea.

Deși restricția aleatoare, descrisă aici, furnizează interpretări utile ale factorului de siguranță, depinde de mai multe ipoteze, care pot fi invalide. Prima ipoteză este că restricțiile au o distribuție normală. Aceasta implică faptul că, dacă restricția este calculată pentru un set particular de solicitare cu toate valorile posibile ale parametrilor, atunci valorile obținute au o distribuție normală. Această ipoteză implică de asemenea faptul că deviația standard a distribuției valorilor restricțiilor are aceeași valoare pentru diferite seturi de solicitări.

O a doua ipoteză este că derivatele de ordinul 1 folosite pentru aproximarea restricțiilor în relația (6.37) sunt calculate cu o precizie satisfăcătoare. Se știe că precizia derivatelor de ordinul 1 scade pe măsură ce coeficientul de variație a conductivității hidraulice crește. Cercetări inadecvate pot conduce la confirmarea validității fiecărei din aceste două ipoteze pentru un domeniu al condițiilor, deși este ușor de observat că validitatea lor depinde de sursele incertitudinilor și de natura restricțiilor.

Când se utilizează orice formă a factorului de siguranță, independent de metoda de determinare a acestuia, o problemă potențială este introducerea restricțiilor conflictuale (incompatibile) prin supra-restricționare (mai multe restricții decât e nevoie). Așa cum am arătat în capitolul 3, numărul restricțiilor și tendința lor de a induce o supra-restricționare trebuie luată în considerare. De asemenea, este nevoie de o analiză atentă a interacțiunilor dintre locațiile restricțiilor și modificarea valorilor restricțiilor.

## Cap. 7 FORMULAREA CU VARIABILE BINARE

Pentru multe aplicații poate fi dificilă impunerea restricțiilor asupra soluțiilor cu variabile continue. Aceste restricții pot include limitarea numărului de locații active de stres sau limitarea valorilor stresului în fiecare locație candidată. Poate fi necesară, de asemenea, includerea unor variabile discontinue în funcția obiectiv, cum ar fi costurile de construcție.

Pentru a încorpora elementele de acest tip în problema de optimizare este necesară introducerea unui nou tip de variabilă de decizie: variabila cu valori întregi. Acest tip de variabilă este variabila de decizie care poate lua numai valori întregi. Folosirea variabilei întregi este limitată în această lucrare la variabila întreagă binară, care poate lua doar valoarea 0 sau 1.

### 7.1 Formularea liniară cu variabile binare

Formularea liniară binară introdusă în secțiunea 3.2.4 este extinsă prin includerea unui număr de  $n_b$  variabile binare, notate  $X_b$ . Variabilele binare se vor utiliza în exemplul următor pentru a indica activitatea stresului. Variabilele binare apar în funcția obiectiv, afectați de coeficienții  $k_b$ , și în restricții [2,74,40,47,111,114,92]. Formularea este:

$$\text{minimizeaza } f = \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i + \sum_{b=1}^{n_b} k_b X_b \quad (7.1)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,k}^q q_1 + \alpha_{2,k}^q q_2 + \dots + \alpha_{i,k}^q q_i + \dots + \alpha_{n,k}^q q_n + \beta_k^q + \\ & + \gamma_{1,k}^h h_1 + \gamma_{2,k}^h h_2 + \dots + \gamma_{i,k}^h h_i + \dots + \gamma_{l,k}^h h_l + \beta_k^h + \\ & + k_{1,k}^x X_1 + k_{2,k}^x X_2 + \dots + k_{i,k}^x X_i + \dots + k_{l,k}^x X_l + \beta_k^x \geq 0 \end{aligned}$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} 0 \leq X_b \leq 1 & & b = 1, \dots, n_b \\ X_b \text{ este întreg} & & b = 1, \dots, n_b \end{aligned}$$

Se observă că au fost introduse două restricții adiționale care limitează valorile variabilelor binare între 0 și 1 și se necesită ca variabilele să ia valori întregi (ultima restricție).

În secțiunea următoare sunt introduse căile de asociere a variabilelor binare cu variabilele de stres și alte noi formulări posibile ale problemei cu elemente care fac utilizabilă variabilele binare. După aceea sunt descriși pe scurt algoritmi utilizați pentru rezolvarea problemelor liniare cu variabile binare.

### 7.2 Exemple de probleme cu formulare binară

În toate exemplele date în această secțiune, variabilele binare sunt utilizate pentru a indica prezența sau absența stresului într-o locație specificată sau pentru



indicarea domeniului de variație a stresului într-o locație dată. În orice caz, este convenabilă definirea variabilei binare  $X_b$  ca egală cu 1, când stresul aferent are o valoare diferită de zero, și egală cu 0, când stresul aferent este nul. Definite în acest mod, variabilele binare pot fi utilizate pentru indicarea necesității realizării amenajării, de exemplu realizarea unui puț prin care se aplică stresul acviferului. Dacă stresul pentru locația specificată este nenul, atunci valoarea unitară asociată variabilei binare indică faptul că trebuie realizată amenajarea, iar dacă stresul în locația respectivă este zero, atunci nu este nevoie de această amenajare.

Cheia folosirii variabilelor binare este modul de asociere a valorii lor cu valoarea stresului. În cazul în care variabila binară indică prezența stresului aplicat acviferului prin extracția apei într-o locație dată, această relație de asociere poate fi definită utilizând restricții sub forma:

$$q_j \leq MX_j \quad (7.2)$$

unde  $M$  este o constantă pozitivă cu valoare mare. Indicele variabilei binare este același cu indicele stresului asociat.

Prin impunerea acestei restricții,  $X_j$  este forțată să ia valoarea 1 dacă  $q_j$  este mai mare de zero. Această restricție, însă, nu obligă pe  $X_j$  să ia valoarea zero dacă  $q_j$  este zero. Trebuie găsite alte modalități de a obliga variabila binară  $X_j$  să ia valoarea zero, când  $q_j$  este zero. Aceste modalități vor fi descrise mai jos.

Restricția (7.2) poate fi eficace dacă  $M$  are o valoare pozitivă. Atunci când  $X_j$  este egal cu 1, această restricție servește implicit la limitarea superioară a lui  $q_j$ . Din acest motiv o valoare utilă pentru  $M$  este limita superioară a stresului din locația respectivă, deși orice valoare mai mare decât aceasta este acceptată.

### 7.2.1 Includerea cheltuielilor fixe în formularea problemei

Funcția obiectiv extinsă din (7.1) conține un termen nou care se referă la suma ponderată a variabilelor binare. Acest termen poate fi utilizat pentru reprezentarea cheltuielilor fixe asociate cu prezența fiecărei amenajări prin care se aplică stresul acviferului (exemplu puțurile), unde  $k_b$  reprezintă cheltuielile fixe asociate fiecărei amenajări  $b$ . Costurile de realizare a acestor amenajări reprezintă un exemplu de cheltuieli fixe care trebuie incluse. Poate fi importantă includerea acestor costuri în formulările în care ele sunt semnificative relativ la costurile de operare pe termen lung.

Considerăm funcția obiectiv al unei probleme cu o singură locație de aplicare a stresului, în care costurile depind numai de rata stresului și de cheltuielile fixe. Această funcție are forma [48,99,64]:

$$f = \alpha q + kX \quad (7.3)$$

și este reprezentată în figura 7.1. Când  $q$  este zero, atunci și  $X$  este zero, ambii termeni ai funcției fiind nuli. Când  $q$  ia o valoare nenulă, atunci  $X$  devine 1 (amenajarea trebuie realizată) și funcția obiectiv sare la o nouă valoare, de la care costurile cresc liniar dacă stresul continuă să crească. Funcția obiectiv obținută este

discontinuuă. Când  $k$  este nul, atunci funcția obiectiv devine liniară și continuă, ca și în capitolul 3.

Este important de observat că atunci când funcția obiectiv include variabile binare afectate de coeficienți  $k$  pozitivi, algoritmul de optimizare tinde să forțeze variabilele binare să ia valoarea 0, când se cere minimizarea funcției obiectiv. Funcția obiectiv sub această formă, în combinație cu restricțiile sub forma (7.2) garantează că variabilele binare vor fi nenule numai dacă stresul aferent este nenul.

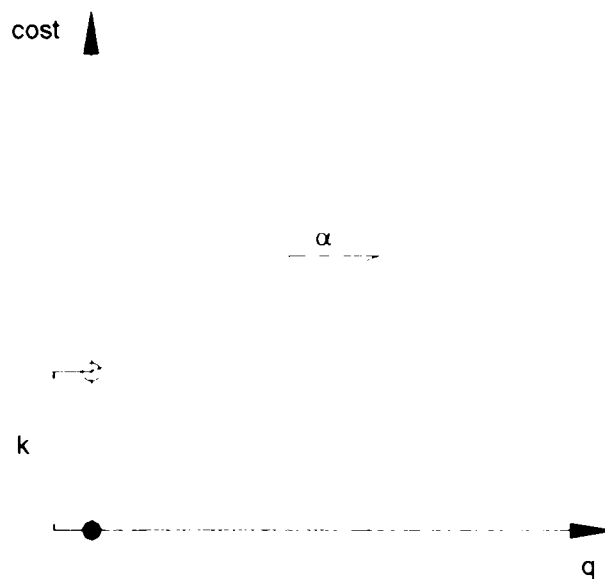


Figura 7.1 Graficul de variație al costurilor pe unitatea de stres (debit). Funcția este discontinuuă în origine.

### 7.2.2 Limite inferioare nenule ale stresului

Așa cum am prezentat în secțiunea 3.2.1, stresul din fiecare locație poate fi limitat inferior și superior. În formulările folosite pentru determinarea locațiilor stresului este necesar ca algoritmul să furnizeze setul de locații candidate în care stresul este zero, această valoare indicând faptul că locațiile respective nu vor deveni active. Un aspect al rezolvării unor astfel de probleme este alegerea limitei inferioare a stresului zero. Cum s-a arătat în secțiunea 3.3.1, dacă este definită o valoare inferioară nenulă pentru stres, formularea forțază de fapt funcționarea tuturor locațiilor de aplicare a stresului la un nivel nominal. Alegând limita inferioară pentru stres zero, algoritmul de optimizare poate selecta locațiile în care stresul este prea mic, pentru a fi practic de aplicat.

Folosirea variabilelor binare furnizează un mod de abordare alternativă pentru problemele de alegere a locațiilor de stres active. Prin folosirea variabilelor binare este posibilă formularea unor restricții echivalente cu necesitatea ca stresul să fie zero sau mai mare decât o limită nenulă dată,  $q_j^l$ . Aceste restricții pot avea forma:

$$q_j \geq q_j^l > 0 \quad (7.4 a)$$

sau

$$q_j = 0 \quad (7.4 b)$$

Condiția dată de (7.4) poate exprimată folosind (7.2) și restricția adițională :

$$q_j \geq q'_j X_j \quad (7.5)$$

Restricția binară (7.2) forțează  $X_j$  să ia valoarea 1, când  $q_j$  este nenul. Când  $X_j$  este 1, atunci (7.5) ia forma unei restricții asupra stresului prin impunerea unei limite inferioare nenule. Când  $q_j$  este zero, atunci variabila binară corespunzătoare  $X_j$  este de asemenea zero și (7.5) ia forma unei restricții asupra stresului prin impunerea unei limite inferioare nule.

### 7.2.3 Contorizarea numărului de locații active

O dată ce variabilele binare sunt definite, suma lor reprezintă numărul de locații în care stresul are o valoare nenulă:

$$\sum_{b=1}^{n_b} X_b = \text{numarul locatiilor active} \quad (7.6)$$

Acest lucru poate fi folosit pentru a defini un număr oarecare de restricții. Două exemple simple sunt limitarea inferioară și superioară a numărului de locații active:

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{n_b} X_b &\leq N^u \\ \sum_{b=1}^{n_b} X_b &\geq N^l \end{aligned} \quad (7.7)$$

unde  $N^l$  și  $N^u$  sunt limitele inferioară și superioară a numărului de locații active.

### 7.2.4 Problema alegerii locațiilor pentru problemele cu stres distribuit

Amenajările prin care stresul aplicat este uniform sau neuniform distribuit sunt: puțurile orizontale, drenurile orizontale și verticale, care sunt reprezentate numeric ca și straturi multiple de acvifer. Aceste amenajări au fost descrise în secțiunea 6.3, unde s-au presupus cunoscute locația, orientarea și lungimea fiecărei amenajări și singura necunoscută este stresul total aplicat (implicit stresul din fiecare celulă). Variabilele binare pot fi încorporate în astfel de probleme prin mai multe căi, prezentate în cele ce urmează, pentru determinarea locației, orientării și lungimii fiecărei amenajări.

O abordare simplă a acestor probleme este de a repeta metodologia pentru locația unei singure celule, anume pentru a determina numărul amenajărilor candidate și a permite algoritmului de optimizare să aleagă dintre ele. Considerăm un număr de  $n_f$  amenajări candidate, în care locația primei celule, orientarea și lungimea sunt cunoscute. Fiecărei amenajări  $i$  se atribuie o variabilă indicatoare  $X_i$ . Mai întâi trebuie să ne asigurăm că variabila indicatoare este activă când amenajarea este activă. Acesta se poate realiza prin impunerea unei restricții de forma:

$$Q_f \leq M X_f \quad f = 1, \dots, n_f \quad (7.8)$$

unde  $Q_f$  este stresul total pentru amenajare, definită de (6.13) sau de (6.17) în secțiunea 6.3.

Dacă amenajările candidate se suprapun, atunci variabila indicatoare trebuie să indice stresul din locațiile celulelor care nu se suprapun. ca și variabila binară

pentru o amenajare cu o singură celulă, această restricție trebuie combinată cu alte caracteristici ale formulării pentru a conduce  $X_r$  la valoarea zero, când se cere minimizarea costurilor de realizare a amenajărilor.

Restricții similare cu (7.7) pot fi adăugate pentru limitarea numărului total de amenajări. Poate fi de asemenea necesară prognozarea amenajărilor candidate care se exclud reciproc. De exemplu, două amenajări candidate au aceeași locație, dar una este mai lungă decât cealaltă sau cele două locații se intersectează. În acest caz, trebuie aleasă cel mult una din amenajările care se suprapun. Această alegere se poate asigura prin impunerea unei restricții de forma:

$$\sum_{r \in f_i} X_r \leq 1 \quad (7.9)$$

unde  $f_i$  este setul amenajărilor care se suprapun.

Când sunt utilizate variabile binare pentru determinarea locațiilor amenajărilor cu stres distribuit, trebuie să ne asigurăm că restricțiile asupra nivelului piezometric asociate unei amenajări sunt impuse numai dacă amenajarea respectivă este selectată. Acest lucru se poate realiza prin modificarea restricțiilor astfel încât ele să fie satisfăcute automat dacă amenajarea respectivă nu este activă.

Considerăm cazul în care două amenajări candidate se suprapun. Presupunem că ambele amenajări au patru celule (orificii) prin care se poate aplica stresul acviferului, trei dintre ele fiind comune celor două amenajări, așa cum este arătat în figura 7.2. Există trei posibilități: nu este selectată nici una dintre ele, este selectată amenajarea 1, este selectată amenajarea 2. Optimizarea trebuie adaptată la aceste trei posibilități. Limitând analiza numai la celulele 1 și 2 din figura 7.2, dacă este selectată amenajarea 2, trebuie satisfăcute următoarele restricții:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &\leq \delta \\ h_2 - h_1 &\leq \delta \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dacă este selectată amenajarea 1 sau nici una, atunci aceste restricții trebuie modificate astfel încât ele să fie satisfăcute tot timpul, deci ele să nu influențeze soluția. Pentru a face această modificare, trebuie ca cele două diferențe de nivel piezometric să fie mai mici decât o valoare foarte mare, dacă amenajarea 2 nu este selectată. Dacă alegem o valoare suficient de mare, aceste restricții vor fi satisfăcute tot timpul și vom putea elimina restricția. Pentru a putea face acest lucru, vom modifica (7.10) sub forma:

$$h_1 - h_2 \leq \delta + M(1 - X_2) \quad (7.11)$$

$$h_2 - h_1 \leq \delta + M(1 - X_2) \quad (7.12)$$

unde  $M$  este foarte mare. Dacă nu este selectată nici una dintre amenajări sau este selectată amenajarea 1, atunci  $X_2 = 0$  și termenul al doilea din membrul drept are valoarea  $M$ . Dacă  $X_2 = 1$ , atunci acest termen este nul și este selectată amenajarea 2, iar restricțiile devin echivalente cu (7.10).

Calculare similare pot fi făcute pentru toate celulele care sunt comune celor două amenajări suprapuse, dar care se exclud reciproc. Pentru celulele 2 și 3 din figura 7.2 se pot impune următoarele restricții, indiferent de care dintre amenajări este selectată:

$$\begin{aligned} h_2 - h_3 &\leq \delta \\ h_3 - h_2 &\leq \delta \end{aligned} \quad (7.13)$$

Dacă nici o amenajare nu este selectată, atunci aceste restricții sunt satisfăcute tot timpul. În acest caz restricțiile se pot scrie sub forma:

$$h_2 - h_3 \leq \delta + M(1 - X_1 - X_2) \quad (7.14)$$

$$h_3 - h_2 \leq \delta + M(1 - X_1 - X_2) \quad (7.15)$$

Așa cum am arătat mai înainte, aceste restricții sunt satisfăcute dacă nu este selectată nici o amenajare.

### Discretizare

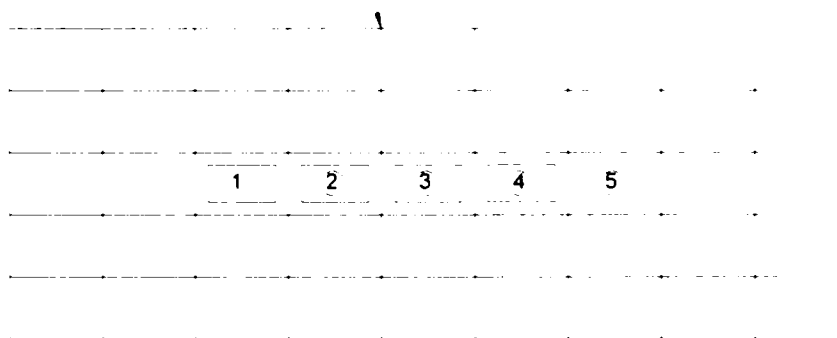


Figura 7.2 Exemplu de amenajare cu celule multiple. Celulele amenajării 1 sunt reprezentate prin cercuri, iar cele ale amenajării 2 prin dreptunghiuri. Aceste amenajări se exclud reciproc, pentru o soluție optimă trebuie aleasă cel mult o amenajare din cele două.

#### 7.2.5 Funcții obiectiv liniare pe porțiuni

Variabilele binare pot fi utilizate pentru probleme mai complexe, ca și în cazul unor funcții obiectiv liniare pe porțiuni (segmente). Considerăm situația în care cheltuielile fixe și costul unitar operațional depind de rata stresului aplicat acviferului. Fie un puț în care este instalată o pompă la costul de construcție  $k_1$ , care funcționează atunci când cantitatea de apă pompată variază de la zero la o valoare maximă  $q_1^u$ . Dacă debitul pompat trebuie să fie mai mare decât această valoare, atunci în puț trebuie instalată o pompă mai scumpă sau realizat un alt puț, la costul  $k_2$ , care funcționează atunci când debitul pompat variază între  $q_1^u$  și  $q_2^u$ .

Construcția combinată și costul operațional sunt funcție de debitul pompat din puțul respectiv, așa cum se arată în figura 7.3.  $\alpha_1$  este costul pe debitul unitar. Dacă debitul pompat trebuie să fie mai mare decât  $q_1^u$ , atunci costul este  $\alpha_2$ , care diferă de  $\alpha_1$ . Costul unitar necesar pentru mărirea debitului pompat peste  $q_1^u$  constă din costul  $k_2$  și din costurile operaționale pentru  $q_2^u$ .

Această problemă poate fi pusă sub forma unei probleme liniare cu variabile întregi prin definirea a două variabile  $q_1$  și  $q_2$ , care reprezintă debitul pompat în intervalele din figura 7.4. Aceste variabile trebuie astfel definite, încât suma lor să fie egală cu debitul total [30]:

$$q = q_1 + q_2 \quad (7.16)$$

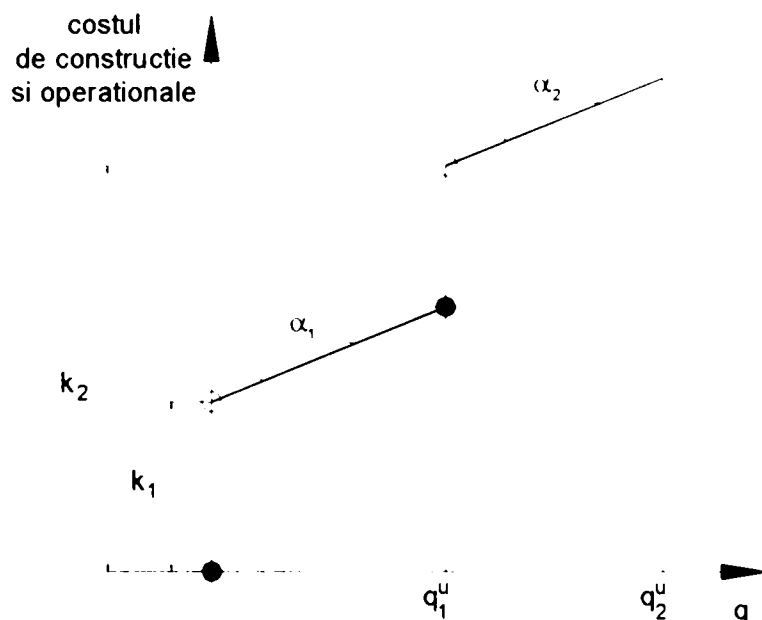


Figura 7.3 Funcția liniară pe porțiuni a costului rezultă când costurile de construcție sunt funcție de mărimea stresului (debitului pompat).

În figura 7.4  $\hat{k}_2$  reprezintă costul trecerii de pe segmentul 1 pe segmentul 2. Funcția de cost poate fi acum scrisă sub forma:

$$f = \alpha_1 q_1 + k_1 X_1 + \alpha_2 q_2 + \hat{k}_2 X_2 \quad (7.17)$$

Variabilele binare  $X_1$  și  $X_2$  indică prezența sau absența pomparei pe fiecare din cele două segmente. Ele se pot defini cu ajutorul valorilor limită maximă ale debitului pompat:

$$q_1 \geq q_1^u X_1 \quad (7.18)$$

și

$$q_2 \geq q_2^u X_2 \quad (7.19)$$

Pentru ca această formulare să se comporte așa cum dorim, trebuie ca restricțiile să impună ca  $q_2$  să fie nenul numai în cazul în care  $q_1$  depășește limita ei superioară. Considerăm mai multe situații. Dacă  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  atunci soluția minimizării funcției (7.17) este funcționarea pompei 2 la capacitatea ei minimă, iar necesarul de debit peste aceasta să fie extras cu pompa 1 până la capacitatea ei maximă. Dacă  $\alpha_2 \leq \alpha_1$  atunci această formulare nu conține nimic pentru a obliga pompa 1 să ajungă la capacitatea ei maximă, înainte ca pompa 2 să fie activată. Această problemă se poate rezolva prin adăugarea unei restricții adiționale sub forma:

$$q_1 \geq q_1^u X_2 \quad (7.20)$$

Dacă  $q_2$  este nenul, atunci (7.19) ne asigură că  $X_2 = 1$ . Dacă  $X_2 = 1$ , atunci (7.20) ne asigură că  $q_1$  trebuie să fie mai mare sau egal cu limita ei superioară.

Dacă  $q_1$  este nenul, atunci (7.18) ne asigură că  $X_1 = 1$  și  $q_1$  este mai mic sau egal cu limita ei superioară. Combinațiile dintre (7.18), (7.19) și (7.20) vor obliga  $q_1$  să fie la limita superioară, când ambele variabile binare iau valoarea 1.

Tipul de abordare descris aici se poate extinde pe trei sau mai multe segmente și poate fi utilizat pentru rezolvarea mai multor probleme asemănătoare. Dacă  $k_1$  este zero, atunci această abordare se poate folosi pentru reprezentarea

cazului în care puțul este deja realizat iar pompa poate opera și peste nivelul  $q_1^u$ , dar necesită costuri adiționale de construcție.

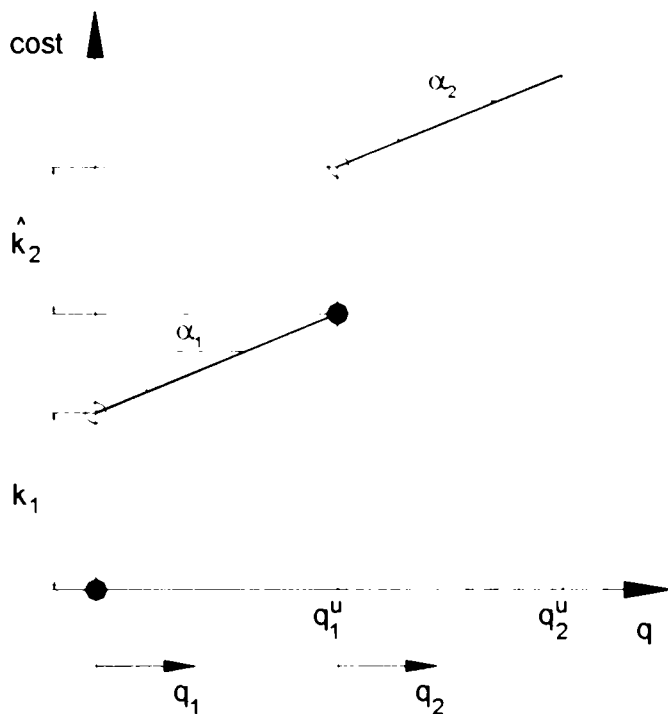


Figura 7.4 Variabilele utilizate pentru definirea funcției costului liniară pe porțiuni în problema de optimizare.

Dacă sunt eliminați ambele costuri de construcție, atunci formularea se reduce la minimizarea costurilor de operare, atunci când costurile unitare se modifică cu creșterea debitului pompat. Funcția obiectiv în acest caz este liniară pe porțiuni și este prezentată în figura 7.5. În acest caz variabilele binare sunt încă necesare pentru definirea relației dintre stresul corespunzător porțiunilor liniare ale funcției obiectiv.

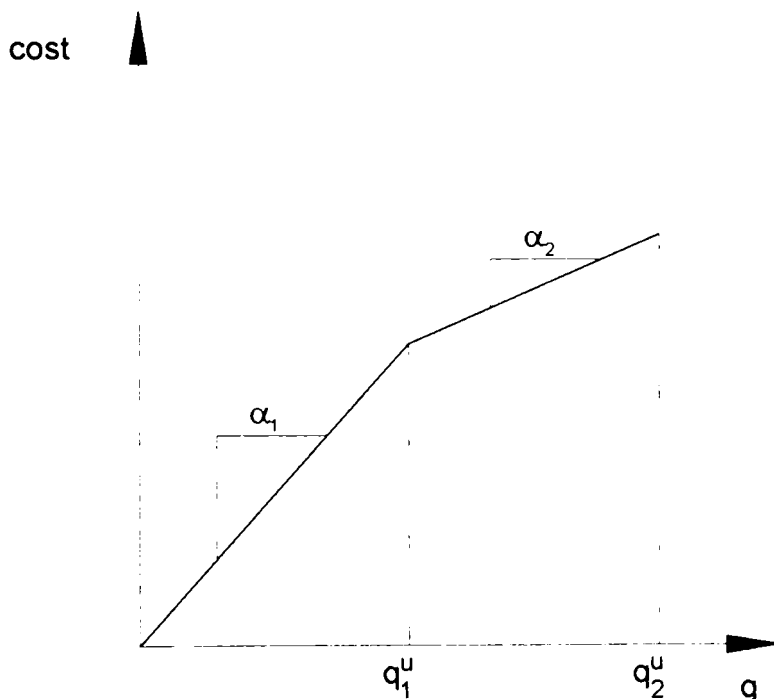


Figura 7.5 Costurile operaționale unitare depind de debitul pompat. Această dependență se poate reprezenta prin liniarizarea pe porțiuni a funcției obiectiv.

### 7.3 Rezolvarea formulării cu variabile binare

Există mai mulți algoritmi de rezolvare a problemelor liniare cu variabile binare. În toate cazurile, volumul de calcul pentru aflarea soluțiilor este mai mare decât pentru problemele care nu conțin variabile binare. Algoritmul „ramifică și mărginește” este cel mai vechi și uzual aplicat acestor variabile și este prezentat aici pentru a demonstra că poate fi utilizată cu încredere pentru rezolvarea acestor tipuri de probleme.

#### 7.3.1 Algoritmul „ramifică și mărginește”

Formularea liniară generală cu variabile binare se poate rescrie sub forma compactă:

$$\text{minimizeaza } f = \beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_i h_i + \sum_{b=1}^{n_b} k_b X_b \quad (7.21)$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} q_j + \sum_{i=1}^l \gamma_{i,k} h_i + \sum_{b=1}^{n_b} k_{b,k} X_b + \beta \geq 0 \quad (7.22)$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

$$0 \leq X_b \leq 1 \quad b = 1, \dots, n_b \quad (7.23)$$

$$X_b \text{ este întreg} \quad b = 1, \dots, n_b \quad (7.24)$$

Se observă că această formulare este o simplă problemă de programare liniară dacă se elimină restricția care impune ca  $X_b$  să ia valori întregi. Dacă această restricție este eliminată și dacă problema liniară rezultată are soluții realizabile, atunci variabilele de decizie pot avea două soluții posibile. Prima soluție posibilă apare în situația când toate variabilele binare iau valori binare (0 sau 1). A doua soluție posibilă apare atunci când unele dintre variabilele binare iau valori nebinare, între 0 și 1. Această soluție nu este realizabilă dacă se respectă restricția referitoare la valorile întregi ale variabilelor binare. În primul caz, se respectă această restricție și problema poate fi rezolvată.

Algoritmul „ramifică și mărginește” rezolvă o serie de problema în care restricția referitoare la valorile întregi ale variabilelor binare este relaxată în căutarea soluțiilor care satisfac, întâmplător sau constrânse, toate restricțiile referitoare la valorile întregi. În toate problemele rezolvate cu algoritmul „ramifică și mărginește”, câteva variabile binare sunt obligate să ia valoarea 0 sau 1.

Algoritmul „ramifică și mărginește” începe cu rezolvarea problemei de programare liniară binară cu relaxarea restricției referitoare la valorile întregi. Dacă nu există soluții realizabile ale problemei în acest caz, atunci problema inițială nu are soluții realizabile. Presupunând că problema relaxată are soluții realizabile, sunt examinate valorile variabilelor binare rezultate în această soluție. Dacă toate



variabilele binare au valori binare (0 sau 1) atunci soluția este realizabilă cu respectarea restricției referitoare la valorile întregi, iar soluția optimă a fost obținută.

Dacă cel puțin o variabilă binară nu are valoare binară, atunci algoritmul continuă. Este important de observat că valoarea funcției obiectiv obținută la acest pas este cea mai mică posibilă. Dacă toate restricțiile referitoare la valorile întregi sunt forțate a fi respectate, atunci valoarea funcției obiectiv nu poate fi mai mică decât valoarea rezultată când restricțiile sunt relaxate. Pasul următor este alegerea unei variabile binare care nu a luat o valoare binară în soluția inițială. Sunt definite și rezolvate alte două probleme. În una dintre ele variabilei binare alese  $i$  se dă valoarea 0, în cealaltă problemă  $i$  se dă valoarea 1. Această atribuire a valorilor binare variabilei binare alese constituie mărghinirea în algoritmul „ramifică și mărghinește”, iar soluțiile acestor două probleme constituie ramificarea algoritmului.

Se examinează valorile variabilelor binare rezultate din rezolvarea acestor două probleme. Dacă cel puțin una din variabilele binare nu au valoare binară, atunci e necesară o nouă ramificare, iarăși sunt rezolvate două probleme cu două variabile binare fixate. Generarea ramificării este prezentată în figura 7.6.

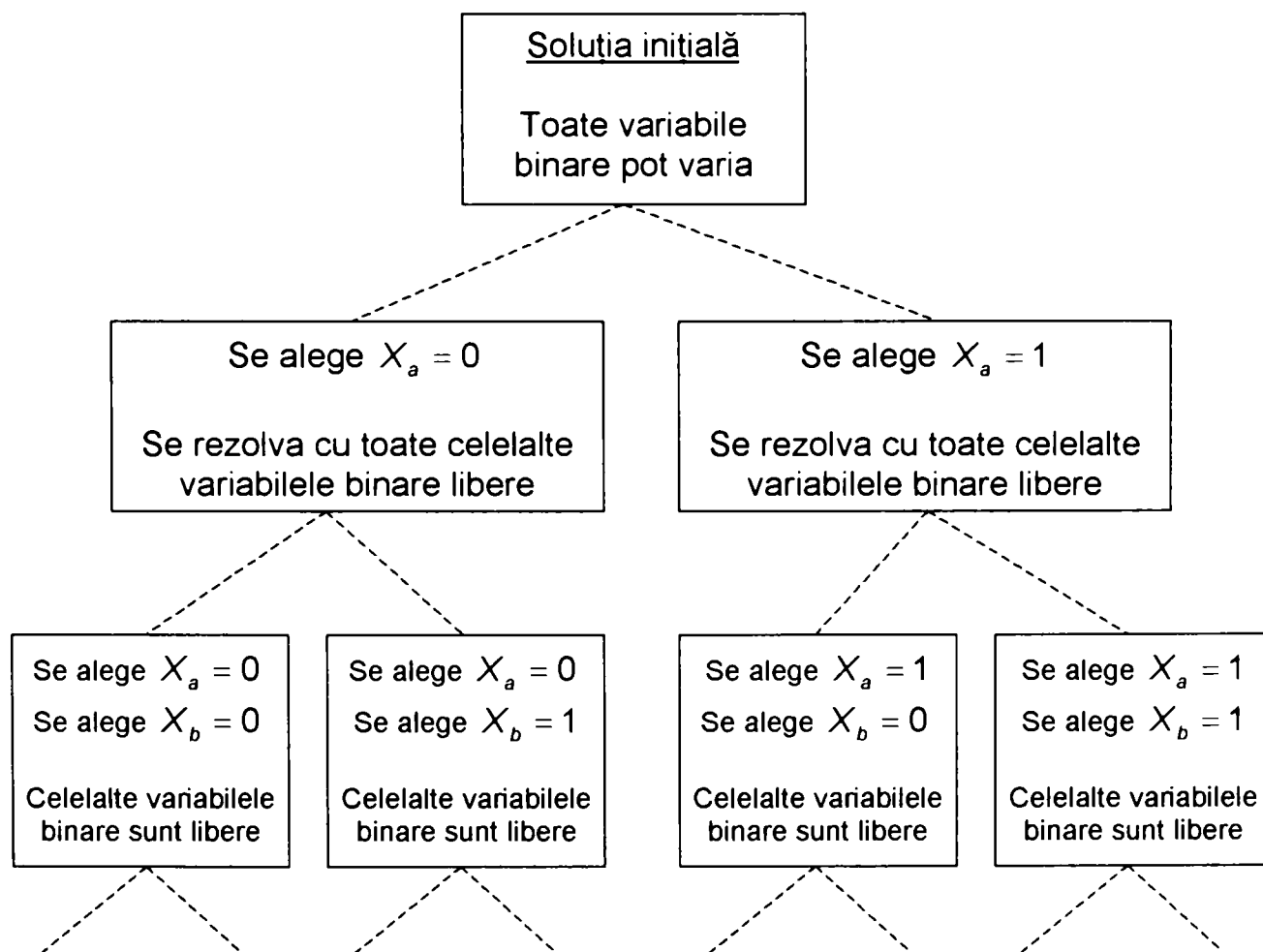


Figura 7.6 Algoritmul „ramifică și mărghinește”

Fiecare dreptunghi reprezintă soluția unei probleme de programare liniară în care numai un subset a variabilelor binare pot lua orice valoare între 0 și 1. Sunt indicate și variabilele binare care au valori fixate. Indicii  $a$ ,  $b$  și  $c$  indică câteva variabile binare care au fost alese pentru a primi valori fixate. De observat că la

nivelul secund din figură s-au ales variabile diferite în partea stângă ( $X_b$ ) și în partea dreaptă ( $X_c$ ). Acest lucru se poate întâmpla deoarece atribuind lui  $X_a$  valoarea 0 sau 1 putem produce două soluții alternative cu diferite combinații a variabilelor binare care satisfac restricția referitoare la valorile întregi.

Algoritmul „ramifică și mărginește” continuă până când apare o soluție în care toate variabilele binare iau valori binare. În general enumerarea completă a fiecărei ramificații necesită examinarea fiecărei combinații a valorilor binare ale variabilelor binare. Enumerarea completă necesită un număr foarte mare de soluții atunci când numărul variabilelor binare este mare. Algoritmul „ramifică și mărginește” evită o căutare minuțioasă prin utilizarea observației simple.

Presupunem două soluții realizabile. În prima soluție toate variabilele binare au valori binare. Aceasta se va numi soluția binară. Cealaltă soluție conține câteva variabile binare care nu au valori binare. Aceasta se va numi soluție nebinară. Să presupunem că valoarea funcției obiectiv pentru soluția nebinară este mai mare decât pentru soluția binară. Se poate trage concluzia că prin continuarea ramificării soluției nebinare nu poate rezulta o soluție pentru care valoarea funcției obiectiv este mai mică decât pentru soluția binară. Acest lucru provine din considerentele că prin restricționarea pe mai departe a soluției nebinare valoarea funcției obiectiv poate numai să crească.

Strategia algoritmului „ramifică și mărginește” pentru enumerare provine din ramificația cea mai promițătoare până la determinarea soluției binare. Această soluție poate fi comparată cu soluțiile din alte ramificații pentru eliminarea rapidă a ramificațiilor nepromițătoare. Cea mai promițătoare ramificație de pe fiecare nivel este cea din care rezultă cea mai mică valoare a funcției obiectiv.

Algoritmul „ramifică și mărginește” este convergent. Totuși el necesită un volum de calcul foarte mare. Algoritmul „ramifică și mărginește” poate necesita determinarea soluțiilor unui număr mare de probleme de programare liniară, volumul de calcul este cu atât mai mare cu cât numărul variabilelor binare este mai mare.

### **7.3.2 Interpretarea soluțiilor obținute**

Problemele de programare liniară care includ variabile continue și variabile binare în funcția obiectiv sunt analoge cu problemele cu obiective multiple, prezentate în capitolul 5. Valoarea coeficienților de importanță a variabilelor de decizie din funcția obiectiv vor influența soluția. Dacă obiectivul este minimizarea costurilor totale, care includ costurile operaționale și cheltuielile fixe, atunci valoarea costului unitar este importantă în rezolvarea problemei. Când costurile fixe sunt mai mari decât costurile operaționale, atunci obiectivul problemei este minimizarea numărului locațiilor, iar stresul este secundar. Dacă costurile fixe sunt mai mici decât costurile operaționale, atunci costurile fixe nu influențează semnificativ soluția.

Analiza de senzitivitate poate fi utilizată pentru determinarea sensibilității rezultatelor modelului relativ la raportul dintre costurile fixe și operaționale. Dacă unul din costuri este irelevant pentru soluții, atunci resursele nu necesită a fi folosite pentru minimizarea incertitudinilor inerente ale valorilor.

Analiza domeniului de variație prezentată în secțiunea 5.2 nu este aplicabilă pentru problemele cu valori întregi. Această analiză se presupune că toate variabilele de decizie sunt continue. Prezența variabilelor întregi violează această ipoteză. Totuși, alte metode de analiză a sensibilității, care implică manipularea formulării și rezolvarea problemei, pot fi folosite pentru analizarea rezultatelor întregi obținute.

### 7.3.3 Exemplul alimentării cu apă

Ne reîntoarcem la exemplul alimentării cu apă discutat în secțiunile 3.7, 4.4, 5.1.2 și 5.2.1 și introducem o formulare care include variabile întregi. Presupunem că pentru problema alimentării cu apă avem nevoie de determinarea ratei extracției din două locații candidate arătate în figura 7.7. Se prognozează că puțurile vor funcționa numai 5 ani ca surse temporare de apă.

Dacă în capitolele anterioare obiectivul a fost de a maximiza cantitatea totală de apă extrasă, de data aceasta obiectivul este de a maximiza profitul net provenit din alimentarea cu apă de-a lungul celor 5 ani. Profitul net este diferența dintre veniturile din alimentarea cu apă și costurile de realizare a amenajării constând din cele două puțuri echipate cu pompe. Formularea problemei este:

$$\text{maximizeaza } f(q, X) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j q_j + \sum_{j=1}^2 k_j X_j \quad (7.25 a)$$

astfel încât

$$h_A \geq h_{raul,A} \quad (7.25 b)$$

$$h_B \geq h_{raul,B} \quad (7.25 c)$$

$$h_C \geq h_{raul,C} \quad (7.25 d)$$

$$q_1 \leq MX_1 \quad (7.25 e)$$

$$q_2 \leq MX_2 \quad (7.25 f)$$

$$X_1 + X_2 \leq N^u \quad (7.25 g)$$

$$q_1^l \leq q_1 \leq q_1^u \quad (7.25 h)$$

$$q_2^l \leq q_2 \leq q_2^u \quad (7.25 i)$$

$$0 \leq X_1 \leq 1 \quad (7.25 j)$$

$$0 \leq X_2 \leq 1 \quad (7.25 k)$$

$$X_1, X_2 \text{ este întreg} \quad (7.25 l)$$

Formularea nu este completă până când nu se specifică valorile coeficienților  $\alpha_j$ ,  $k_j$ ,  $M$  și  $N^u$  și limitele inferioare și superioare ale stresului aplicat acviferului.

Costurile amenajării  $k_j$  au fost achitate la începutul proiectului, dar aici vom considera valoarea lor actualizată. Costurile de realizare a amenajării variază în funcție de condițiile geologice, diametrul puțurilor, adâncimea lor, materialul de construcție etc. În cazul acestui exemplu vom considera că costurile de realizare a investiției au fost de 75 000 USD.

Venitul net din alimentarea cu apă pe care se poate sconta pe parcursul existenței proiectului au fost discutate în secțiunea 6.1.3 și exprimate prin relația (6.7).

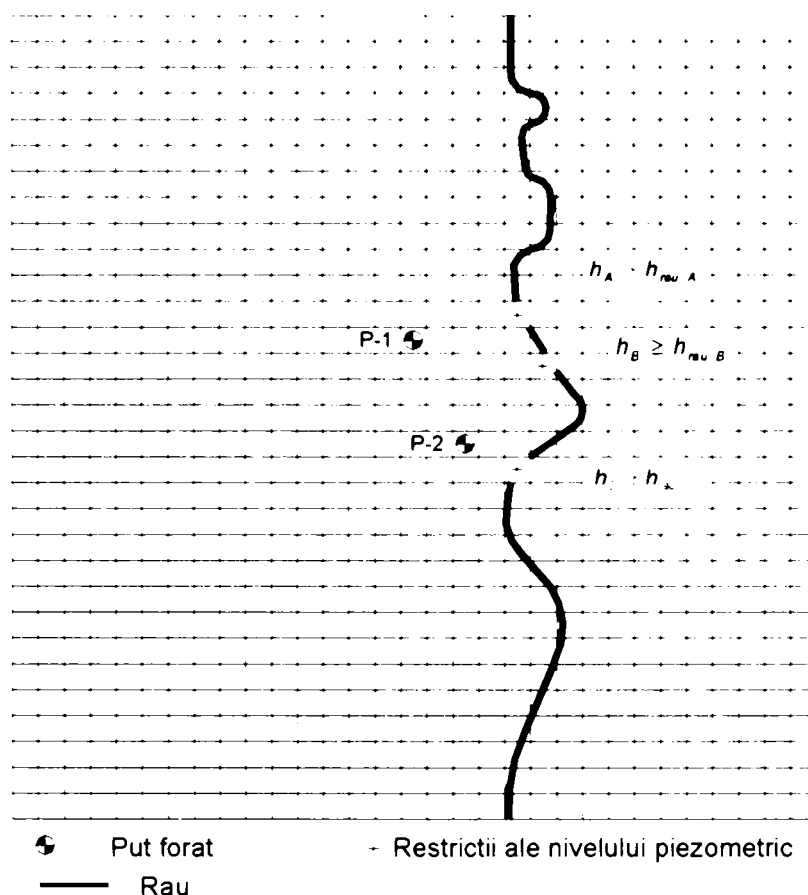


Figura 7.7 Rețeaua de discretizare pentru exemplul alimentării cu apă. Sunt marcate pozițiile puțurilor și locațiile de control a nivelului piezometric

Presupunem o rată de facturare a utilităților de apă de 0,2642 USD/ m<sup>3</sup> de apă livrată și că din acesta 15 % se întoarce ca venit net, adică 0,0396 USD/m<sup>3</sup>. Valoarea actualizată a venitului net pe mai mulți ani provenit dintr-un curent anual constant de venituri se poate determina cu relația:

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad (7.26)$$

unde P este valoarea actualizată a venitului net total, A este venitul net anual, i este rata dobânzii, n este numărul de ani.

Venitul anual net este produs de venitul marginal (care nu afectează volumul producției), (exemplu: venitul net pe unitatea de stres) și de volumul apei furnizate pe parcursul unui an. În exemplul nostru stresul este exprimat în unități de m<sup>3</sup>/zi, deci trebuie să includem și factorul de transformare :

$$A = \left( \frac{\$0,0396}{m^3} \right) \left( \frac{365 \text{ zile}}{an} \right) q = 14,46q \quad (7.27)$$

unde numărul 14,46 are unitatea de măsură USD · zi/m<sup>3</sup>·an.

Presupunând o rată a dobânzii de 8 % pe an pentru toți cei 5 ani, valoarea actualizată a venitului net este calculată astfel:

$$P_j = (14,46q_j) \frac{(1,08)^5 - 1}{(0,08)(1,08)^5} = 57,73q_j \quad (7.28)$$

Valoarea actualizată a stresului unitar pentru pomparea apei este  $\alpha_j$ , coeficientul lui  $q_j$  din ecuația (7.28).

Valoarea lui  $M$  din restricția (7.25e) și (7.25f) trebuie să fie suficient de mare pentru ca să nu limiteze valorile stresului sub o limită superioară. Rolul lui  $M$  este de a ne asigura că variabilele binare vor lua valoarea 0 sau 1, în funcție de valoarea lui  $q_j$ .  $M$  trebuie să aibă o valoare cel puțin mai mare decât limita superioară a stresului; când  $M$  are valoarea limitei superioare a stresului, limitele superioare impuse de restricțiile (7.25h) și (7.25i) sunt în plus și ele pot fi eliminate. Limita superioară a stresului poate fi stabilită din considerente hidraulice ale puțurilor.

Să presupunem că capacitatea puțurilor este de 10 000 m<sup>3</sup>/zi. deși putem alege o limită inferioară a stresului mai mare de zero, trebuie să limităm inferior stresul la zero, pentru a putea compara rezultatele problemei de programare liniară binară cu cele din problema continuă rezolvată în capitolul 4.

Numărul maxim al locațiilor de aplicare a stresului este controlată de variabila  $N^u$  în restricția (7.25g). Cu numai două locații candidate, acest parametru poate lua valorile 0, 1 sau 2. Desigur, valoarea 0 nu poate fi aleasă, deoarece atunci nici un puț nu ar fi activ;  $N^u$  trebuie să ia valoarea 1 sau 2.

Introducând valorile coeficienților discutați mai sus, formularea completă a problemei este:

$$\text{maximizeaza } f(q, X) = (\$57,73) \sum_{j=1}^2 \alpha_j q_j + (\$75.000) \sum_{j=1}^2 k_j X_j \quad (7.29 a)$$

astfel încât

$$h_A \geq h_{raul,A} \quad (7.29 b)$$

$$h_B \geq h_{raul,B} \quad (7.29 c)$$

$$h_C \geq h_{raul,C} \quad (7.29 d)$$

$$q_1 \leq (10,00)MX_1 \quad (7.29 e)$$

$$q_2 \leq (10,00)X_2 \quad (7.29 f)$$

$$X_1 + X_2 \leq 2 \quad (7.29 g)$$

$$q_1 \geq 0 \quad (7.29 h)$$

$$q_2 \geq 0 \quad (7.29 i)$$

$$0 \leq X_1 \leq 1 \quad (7.29 j)$$

$$0 \leq X_2 \leq 1 \quad (7.29 k)$$

$$X_1, X_2 \text{ este întreg} \quad (7.29 l)$$

Algoritmul „ramifică și mărginește” pentru această formulare este prezentat în figura 7.8. Se notat că la prima ramificare, primei variabile binare  $i$  se atribuie valoarea 0 și 1, cealaltă variabilă binară fiind relaxată. În ambele probleme din prima ramificație  $X_2$  reprezintă o fracțiune a soluției optime, deci ramificarea trebuie continuată pentru ambele probleme. În acest exemplu simplu, este necesară

enumerarea tuturor celor patru soluții binare posibile. Pentru o problemă mai largă, de obicei, această enumerare nu trebuie făcută.

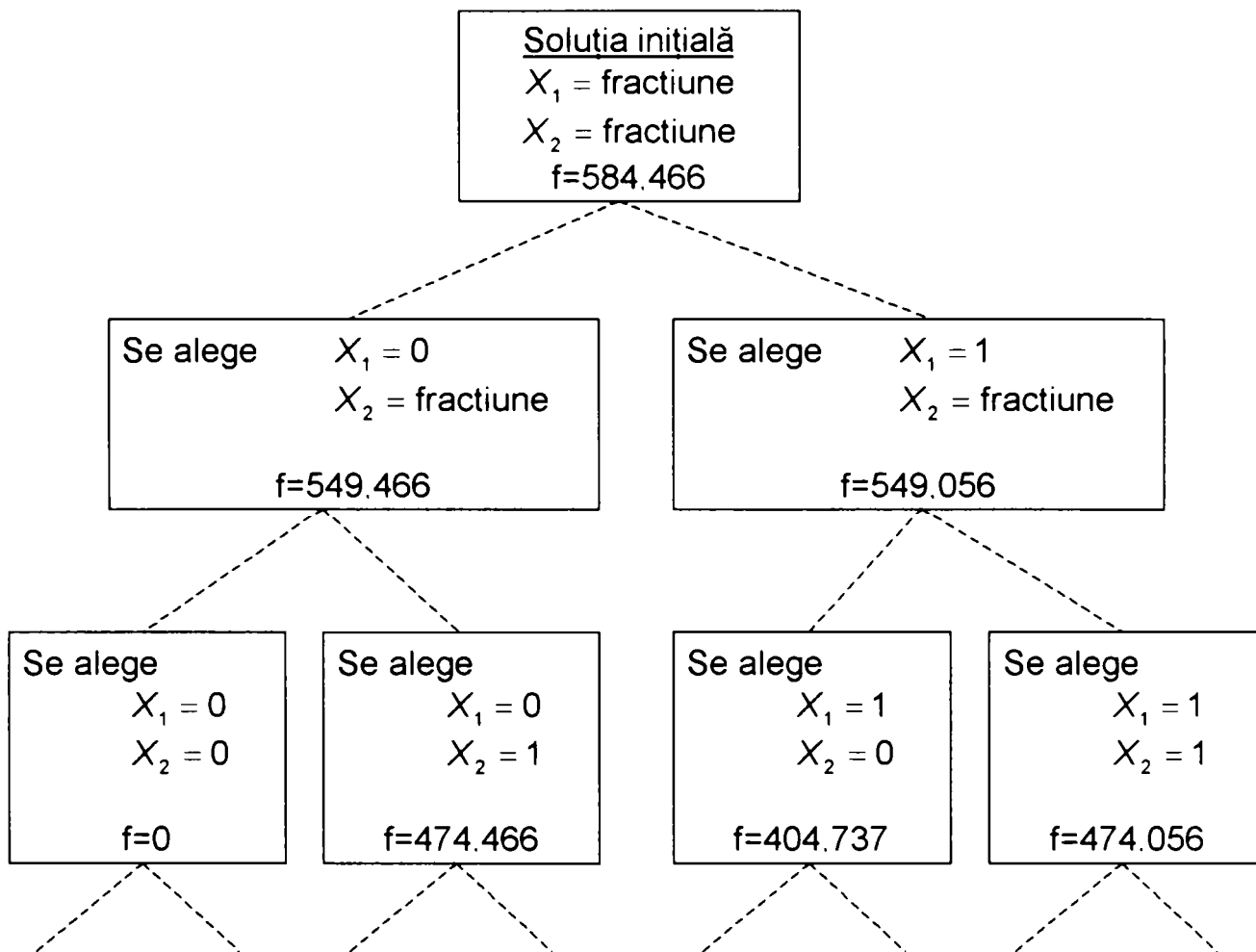


Figura 7.8 Diagrama „ramifică și mărginește” pentru formularea binară a problemei alimentării cu apă

Așa cum se poate vedea în figura 7.8, soluția optimă este realizarea puțului 2 și nerealizarea puțului 1. Rata optimă de pompare pentru puțul 2 este 9.528 m<sup>3</sup>/zi. Comparăm această soluție cu soluția problemei continue rezolvată în capitolul 4, unde soluția optimă era pomparea a 2.393 m<sup>3</sup>/zi din puțul 1 și a 8.435 m<sup>3</sup>/zi din puțul 2. Includerea costurilor de realizare a amenajării în formularea problemei cu valori întregi, a dus la eliminarea puțului 1 din soluție și a dus la o reducere cu 12 % a cantității de apă pompată.

Comparând valorile funcției obiectiv din ultima linie a figurii 7.8, putem observa că există numai o mică diferență între valoarea funcției obiectiv pentru soluția optimă și valoarea ei în cazul funcționării ambelor puțuri. Aceasta indică faptul că costurile de amenajare și cele operaționale au ambele un rol important în determinarea soluției optime și valoarea lor trebuie determinată cu atenție. De exemplu, dacă costurile de amenajare sunt de numai 500 USD, atunci soluția optimă este pomparea din ambele puțuri cu aceeași rată, ca în formularea continuă a problemei.

## Cap. 8 FORMULĂRI CU FUNCȚII NELINIARE

Pentru multe aplicații, funcția obiectiv sau restricțiile sunt funcții neliniare de variabilele de decizie. Neliniaritatea apare în problemele de management ale apei subterane din două motive:

- Primul motiv este răspunsul neliniar al sistemului apei subterane la solicitare. Un exemplu de acest fel este acviferul cu nivel liber, în care nivelul piezometric este o funcție neliniară de solicitare.

- A doua cauză a apariției neliniarității sunt funcțiile obiectiv și restricțiile care sunt funcții neliniare de variabile de decizie sau de parametrii care caracterizează starea sistemului.

Dacă oricare din aceste condiții de neliniaritate există, atunci restricțiile sau funcția obiectiv sunt neliniare și pentru rezolvarea problemei trebuie folosiți alți algoritmi. În general, acești algoritmi necesită un volum mare de calcul pentru obținerea soluției. În alt dezavantaj al lor este că în unele cazuri nu se poate garanta că soluția găsită este și cea optimă. În acest capitol vom prezenta câteva formulări ale problemelor de management în care apar funcții neliniare și vom examina posibilitatea obținerii minimului local al acestor funcții. Sunt introduși și analizați câțiva algoritmi de rezolvare [77,69,68,101].

### 8.1 Caracteristicile problemelor neliniare de optimizare

Forma generală a modelului de management al apei subterane, care include toate formele prezentate în capitolele precedente, introdusă în capitolul precedent cu variabile binare, este:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_{n_b}, h_1, h_2, \dots, h_l) \quad (8.1)$$

astfel încât

$$g_k(q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_{n_b}, h_1, h_2, \dots, h_l) \leq 0$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

unde  $f$  este funcția obiectiv și  $g_k$  este restricția cu numărul  $k$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții liniare atunci această formă se reduce la forma generală binară, dată în capitolul 7.

Această formă este de asemenea acomodată la posibilitatea ca funcția obiectiv sau restricțiile să fie funcții neliniare de variabilele de decizie.

O formulare puțin mai simplă este aceea în care toate variabilele sunt continue:

$$\text{minimizeaza } f(q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_{n_b}, h_1, h_2, \dots, h_l) \quad (8.2)$$

astfel încât

$$g_k(q_1, q_2, \dots, q_n, X_1, X_2, \dots, X_{n_b}, h_1, h_2, \dots, h_l) \leq 0$$

pentru  $k = 1, \dots, m$

Introducerea funcțiilor neliniare în probleme accentuează complexitatea atât a metodelor folosite pentru rezolvarea problemei de optimizare rezultată, cât și a interpretării rezultatelor. În această secțiune sunt amintite câteva caracteristici ale funcțiilor neliniare și a problemelor de optimizare neliniare.

## 8.2 Exemple de formulări neliniare

Problemele neliniare apar în cazul în care funcția obiectiv sau restricțiile sunt funcții neliniare de variabilele de decizie. Formele posibile ale funcțiilor neliniare sunt nelimitate. În această secțiune vom descrie o serie de elemente ale formulării neliniare care sunt folosite în mod obișnuit și care servesc la demonstrarea potențialului de implementare a funcțiilor neliniare. Pentru fiecare funcție neliniară se va analiza natura neliniarității și prezența sau absența convexității [1,80,135,70,112,82,26].

### 8.2.1 Costurile de aplicare a solicitărilor

Un termen care trebuie introdus în funcția obiectiv este costul operațional al solicitărilor aplicate acviferului. Costurile pompării și distribuției printr-o rețea de conducte a apei subterane depind de mai mulți factori, unul dintre ei este costul energiei electrice. Pentru exemplificare, considerăm costurile energiei electrice asociate cu aducerea la suprafață a apei subterane. Problema este reprezentată în figura 8.1, acviferul fiind sub presiune [78,135,106].

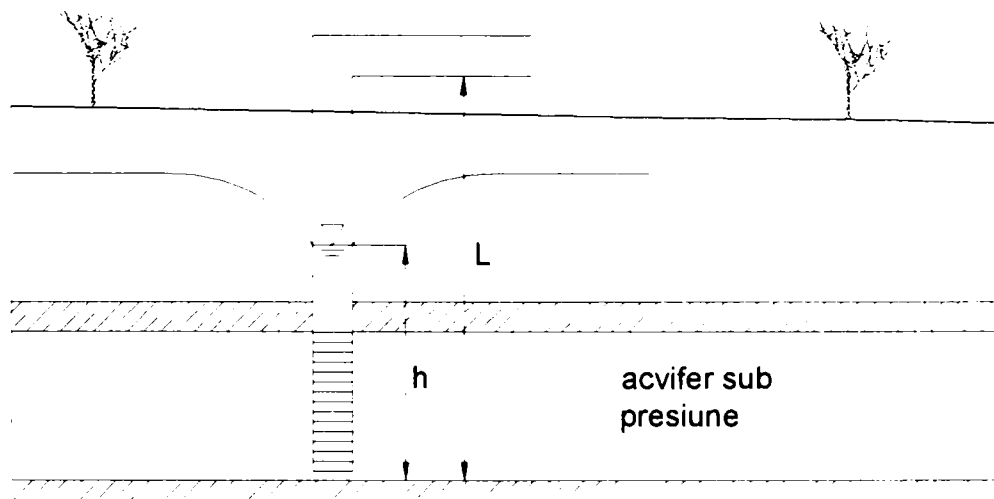


Figura 8.1 Exemplu de problemă cu includerea în funcția obiectiv a costurilor de pompare

Pentru a extrage apa prin puț avem nevoie de o cantitate de energie pentru mărirea nivelului piezometric cu  $(L - h)$ ,  $h$  depinzând de rata de pompare.

Necesarul de energie pentru a extrage apa subterană poate fi determinat prin aplicarea ecuației de conservare a energiei:

$$gL = gh + w - gh_L \quad (8.3)$$

unde  $w$  cantitatea de energie indusă fluidului pe unitatea de flux,  $h_L$  este pierderea de sarcină prin frecare, datorită mișcării apei,  $g$  este accelerația gravitațională.



Rearanjând și introducând  $\rho$ , densitatea apei, și  $q$ , debitul, necesarul de energie este:

$$W = \rho g q (L + h_L - h) \quad (8.4)$$

Notând  $H = L + h_L$  și introducând un coeficient pozitiv  $C$ , care reprezintă randamentul pompei, necesarul de energie pentru puțul  $k$  se poate scrie ca:

$$W_k = C_k q_k (H_k - h_k) \quad (8.5)$$

$H$  poate fi definit ca nivelul piezometric care trebuie impus apei astfel ca să poată ajunge prin sistemul de conducte până la un punct dat de ieșire. Dacă  $H$  include pierderea de sarcină prin pompare, este posibil ca  $H$  să depindă de  $q$ .

Cu această definiție a energiei necesare pomparei, energia totală necesară sistemului poate fi minimizată astfel:

$$\text{minimizeaza } W = \sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k=1}^n C_k q_k (H_k - h_k) \quad (8.6)$$

Aceasta este forma cea mai completă a funcției obiectiv, (8.6) este o funcție neliniară de rata de pompare, deoarece  $H$  și  $h$  depind de rata de pompare. O ipoteză simplificatoare este cea în care se consideră că  $H$  este constant. Aceasta presupune că pierderea de sarcină este mică în comparație cu  $L$  sau că pierderea de sarcină se încadrează într-un interval de variație definit de cel care optimizează. În unele circumstanțe, modificările lui  $h$  ca urmare a pomparei sunt mici în comparație cu  $(H - h)$ , caz în care se poate considera  $h$  constant. Acceptând aceste ipoteze, ecuația necesarului de energie se reduce la o funcție liniară de rata de pompare.

Dacă  $H$  este considerat constant, iar  $h$  depinde de  $q$ , atunci apare neliniaritatea în ecuația (8.6). Pentru un acvifer sub presiune  $h$  este o funcție liniară de rata de pompare, iar  $W$  este o funcție de gradul II. Această formă se poate obține prin înlocuirea relației lui  $h_k$  (4.4), dată de seria lui Taylor, în (8.6):

$$W = \sum_{k=1}^n \left[ C_k \left[ (H_k - h_k^0) q_k - \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial q_j} q_j \right) q_k \right] \right] \quad (8.7)$$

Analizând derivatele din (8.13) se poate observa că această funcție obiectiv poate fi o funcție convexă în unele cazuri. Funcția obiectiv dată de (8.7) este o funcție de gradul II și elementele matricii hessiene sunt constante, deoarece  $h$  este o funcție liniară de  $q$ . Elementele matricii hessiene au forma:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_k} = -\alpha C_k \frac{\partial h_k}{\partial q_j} \quad (8.8)$$

unde  $\alpha = 2$  dacă  $k = j$  și  $\alpha = 1$  dacă  $k \neq j$ . Reamintim că o valoare pozitivă al lui  $q$  înseamnă extracție, deci derivatele vor fi negative deoarece o creștere al lui  $q$  implică o scădere al lui  $h$ . De aici rezultă că elementele de pe diagonala principală al matricii hessiene vor fi pozitivi. Se poate de asemenea observa, că derivata secundă al lui  $W$  în raport cu rata de pompare va fi probabil mai mare când  $k = j$ . Deci, elementele de pe diagonala principală vor fi probabil mai mari decât restul derivatelor secunde.

Dacă elementele de pe diagonală sunt pozitive și mai mari ca suma valorilor absolute a elementelor de pe fiecare linie, exceptând termenii de pe diagonală, atunci funcția este convexă.

Dacă atât  $H$ , cât și  $h$  depind de  $q$ , neliniaritatea devine mai complexă. Deoarece  $H$  este funcție de pierderea de sarcină în sistemul de conducte, expresia lui va fi mai complicată și va depinde de forma reprezentării pierderii de sarcină.

Problema poate fi mai complexă dacă există o conductă de colectare a apei pompate din mai multe puțuri, expresia pierderii de sarcină fiind mai complexă. Pentru analizarea problemei, considerăm că pierderea de sarcină se poate scrie ca:

$$h_L = K_f q^2 \quad (8.9)$$

unde  $K_f$  include termenii care se referă la geometria conductei, rugozitatea conductei și alte constante.

Presupunând că  $K_f$  nu depinde de rata de pompare și că nu este inclusă pierderea de sarcină datorită curgerii combinate a apei provenite din mai multe puțuri, (8.7) poate fi scrisă ca:

$$W = \sum_{k=1}^n \left( C_k \left[ \left( (L + K_f q_k^2) - h_k^0 \right) q_k - \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial q_j} q_j \right) q_k \right] \right) \quad (8.10)$$

sau

$$W = \sum_{k=1}^n \left( C_k \left[ (L - h_k^0) q_k - \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial q_j} q_j \right) q_k + K_f q_k^3 \right] \right) \quad (8.11)$$

Acum funcția obiectiv este de gradul III. Elementele matricii hessiene sunt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_k} = -\alpha C_k \frac{\partial h_k}{\partial q_j} + \beta 6 K_f q_k \quad (8.12)$$

unde  $\beta = 1$  dacă  $k = j$  și  $\beta = 0$  dacă  $k \neq j$ . Presupunând că  $q_k$  este pozitiv, (8.11) are probabilitatea mai mare de a fi o funcție convexă decât (8.7), deoarece la elementele diagonalei principale s-au adăugat termeni pozitivi prin (8.12).

### 8.2.2 Acvifere cu nivel liber

Ecuțiile guvernante ale mișcării apei subterane în acvifere cu nivel liber au fost descrise în capitolul 2. Deoarece aceste ecuații conțin termeni rezultați din produsul dintre o variabilă independentă și derivata ei, ele sunt ecuații diferențiale neliniare. Așa cum am arătat în capitolul 2, soluțiile numerice ale acestor ecuații produc de asemenea un sistem de ecuații neliniare.

O interpretare fizică a acestei neliniarități este posibilă prin considerarea că prin rezolvarea problemei se necesită simultan determinarea nivelului piezometric și a domeniului problemei. Pentru problemele tridimensionale acesta înseamnă determinarea nivelului liber al acviferului. Pentru probleme bidimensionale acesta înseamnă determinarea grosimii acviferului.

Deoarece domeniul soluțiilor depinde de nivelul piezometric, aceste probleme sunt neliniare în raport cu solicitarea. Prin utilizarea ecuațiilor mișcării apei subterane într-un acvifer cu nivel liber pentru simularea unei formulări de optimizare care conține nivele piezometrice, se introduce o neliniaritate. Chiar dacă nivelele piezometrice apar în formularea problemei în funcții liniare, funcția obiectiv sau

restricțiile care conțin nivelele piezometrice vor fi funcții neliniare în raport cu variabilele de decizie care reprezintă solicitarea. Derivatele de ordin superior din seria lui Taylor nu vor mai fi nule, iar aproximarea cu derivatele de ordinul I nu mai este exactă.

Caracterizarea completă a prezenței sau absenței convexității în problemele cu acvifere cu nivel liber este dificilă. Totuși, intuitiv se poate aprecia prezența sau absența convexității. Considerăm ecuația Dupuit – Forchheimer pentru o curgere radială spre un puț pozat până la stratul impermeabil care limitează inferior un acvifer cu nivel liber omogen.

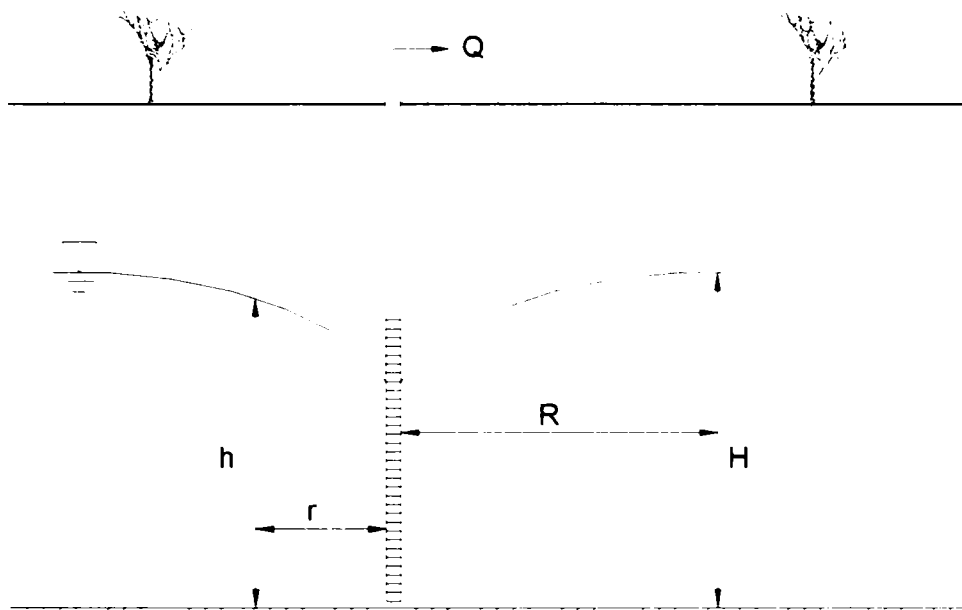


Figura 8.2 Curgere radială în jurul unui puț, într-un acvifer cu nivel liber

Figura 8.2 prezintă schematic această problemă. Nivelul piezometric  $h$  la o distanță  $r$  de puț se poate calcula cu:

$$h^2 = H^2 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} Q \quad (8.13)$$

unde  $K$  este conductivitatea hidraulică,  $Q$  debitul pompat, iar  $H$  este nivelul piezometric de referință la o distanță  $R$  față de puț.

Ecuația (8.13) se mai poate scrie astfel:

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} Q} \quad (8.14)$$

subliniind că nivelul piezometric depinde de rădăcina pătrată a ratei de pompare.

Figura 8.3 arată variația nivelului piezometric în raport cu rata de pompare pentru  $K = 30$  m/zi,  $(r/R) = 0.1$ , iar  $H = 30$  m.

Examinarea derivatei secunde a ecuației (8.14) arată că concavitățile este un rezultat general al soluției Dupuit – Forchheimer.

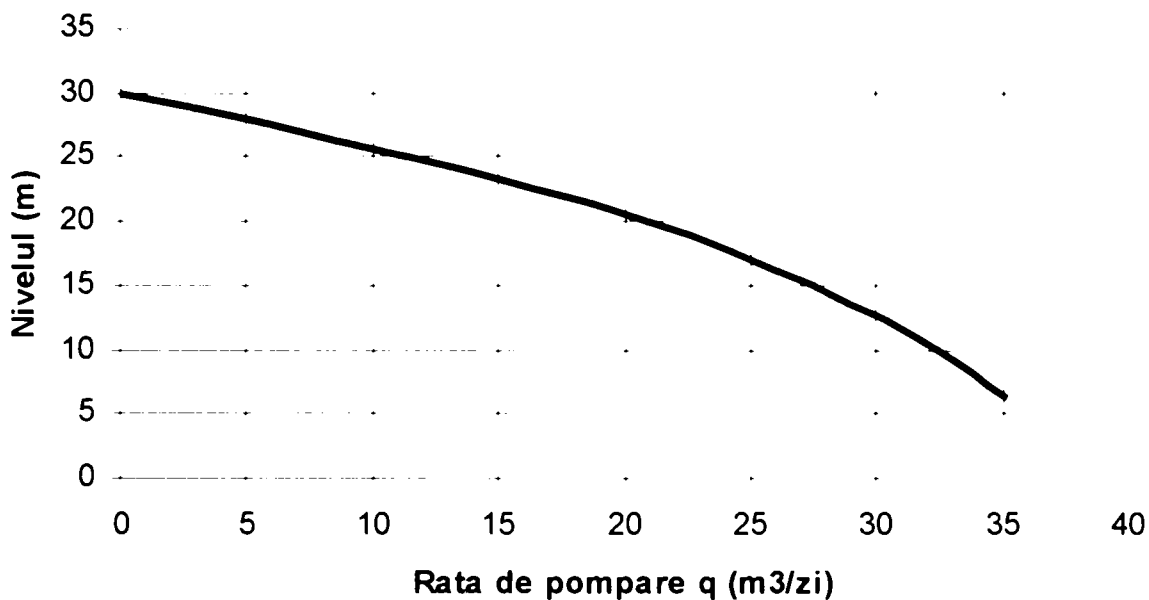


Figura 8.3 Într-un acvifer cu nivel liber, nivelul piezometric este o funcție neliniară de rata de pompare

Derivata secundă este:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial Q^2} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} \right)^2 \left[ H^2 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} Q \right]^{-3} \quad (8.15)$$

Termenul cu logaritm este totdeauna pozitiv, ultimul termen  $(h^2)^{\frac{3}{2}}$  este de asemenea pozitiv. De aici rezultă că derivata secundă va fi tot timpul negativă, deci nivelul piezometric este o funcție neconvexă (concavă) de rata de pompare (în cazul unui acvifer cu nivel liber).

O interpretare fizică a acestei concavități poate fi făcută prin considerarea că o creștere a debitului pompat produce o creștere a gradientului nivelului piezometric și o reducere a grosimii zonei saturate prin care apa poate curge. De exemplu, când rata de pompare dublează gradientul hidraulic, aria transversală prin care are loc curgerea apei se reduce la jumătate.

Extinderea concluziilor asupra concavității funcției la problemele care implică condiții complexe hidrogeologice, locații de solicitări multiple sau soluții numerice nu este posibilă în mod direct, în parte din cauză că principiul superpoziției nu este valabilă în cazul unui acvifer cu nivel liber. Totuși, se pot face câteva precizări. În cazul unui singur nivel piezometric rezultat prin aplicarea unei solicitări multiple, este probabil ca funcția de dependență să fie concavă, deoarece prezența solicitării multiple impune o creștere mai rapidă a gradientului hidraulic decât creșterea ratei de pompare.

Dacă se presupune că nivelul piezometric este tot timpul o funcție concavă de solicitare, atunci se pot face câteva observații adiționale. În general, o sumă de funcții concave este de asemenea o funcție concavă. În cazul prezenței mai multor nivele

piezometrice într-o singură funcție (obiectiv sau restricție), restricția respectivă sau funcție obiectiv va fi o funcție concavă.

Unele restricții pot da un domeniu realizabil convex. Considerăm limitarea inferioară a nivelului piezometric, care poate fi scrisă ca:

$$g(h_i) = h_i^l - h_i \leq 0 \quad (8.16)$$

unde  $h_i^l$  este limita inferioară specificată.

Dacă presupunem că  $h_i$  este o funcție concavă, atunci prin multiplicarea ei cu (-1) dă o funcție convexă și restricția este convexă. Din motive și ipoteze similare, o limitare superioară a nivelului piezometric definește probabil un domeniu realizabil concav. Considerăm restricția asupra diferenței de nivele piezometrice scrisă astfel:

$$g(h_{k_1}, h_{k_2}) = -h_{k_1} + h_{k_2} + h_k^d \leq 0 \quad (8.17)$$

găsim o funcție convexă adunată la o funcție concavă. Una din aceste funcții va fi predominantă.

### 8.2.3 Costurile de construcție ca funcții neliniare

Figura 8.4 a) se prezintă graficul unei funcții care conține costurile de operare și construcție. Această funcție este discontinuă și poate fi reprezentată folosind variabile binare, așa cum am arătat în capitolul 7. Atâta timp cât restricțiile și funcția obiectiv sunt liniare, folosirea variabilelor binare și a metodei „ramifică și mărginește” este de dorit a fi utilizată pentru că ele oferă garanția obținerii unei soluții globale și a unui algoritm de optimizare corect. Dacă oricare din elementele problemei sunt neliniare, atunci folosirea variabilelor binare produce o problemă binară neliniară, care este dificilă de rezolvat.

Când sunt prezente alte elemente neliniare poate fi de dorit exprimarea costurilor de construcție prin termeni continui neliniari în funcția obiectiv. Acest lucru implică aproximarea funcției discontinue din figura 8.4 a) cu o funcție continuă care are un grafic similar cu cel arătat în figura 8.4 b). O astfel de funcție poate fi construită cu ajutorul formei exponențiale [71]:

$$f = \alpha q + k(1 - e^{-\beta q}) \quad (8.18)$$

sau cu ajutorul formei polinomiale [89,90,133]:

$$f = \alpha q + k \left( \frac{q}{q + \beta} \right) \quad (8.19)$$

unde  $\beta$  este un număr pozitiv mare în (8.18) și un număr pozitiv mic în (8.19).

Când  $q = 0$ , ambele funcții sunt nule. Când  $q$  este mult mai mare decât 0, atunci termenul secund se poate aproxima cu  $k$ . Cum se vede din compararea figurilor 8.4 a) cu 8.4 b), eroarea apărută în aproximarea funcției costului este cu atât mai mare cu cât  $q$  se apropie mai mult de 0. Mărimea erorii poate fi controlată prin selecția lui  $\beta$ .

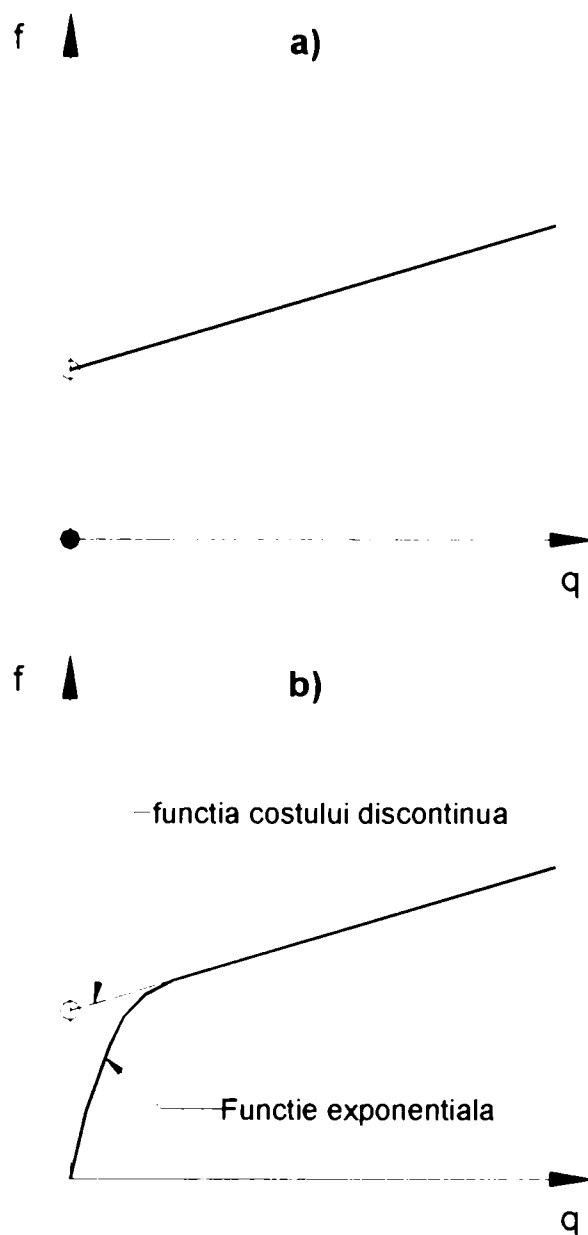


Figura 8.4 O funcție discontinuă (a) poate fi aproximată printr-o funcție continuă, concavă (b)

Prin examinarea formei funcționale arătat în figura 8.4 b), se vede că funcția (8.18) este o funcție concavă de  $q$ . Acest lucru este confirmat prin calculul derivatei secunde, care este:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = -\beta^2 k e^{-\beta q} \quad (8.20)$$

Acesta este tot timpul negativă. Analog, derivata secundă al lui (8.19):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = -\frac{2k\beta}{(q + \beta)^3} \quad (8.21)$$

este tot timpul negativă, deoarece  $\beta$  este tot timpul pozitiv.

#### 8.2.4 Fluxul dintre un acvifer și un curent de apă

Dependența fluxului dintre un acvifer și un curent de apă de nivelul piezometric din acvifer a fost descrisă în secțiunea 6.5 și o reamintim aici [108]:

$$\begin{aligned} q_{curent} &= C(h_i - h_{curent}) \quad \text{daca } h_i \geq b_{curent} \\ q_{curent} &= C(b_{curent} - h_{curent}) \quad \text{daca } h_i < b_{curent} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Pot apărea cazuri în care e nevoie de aplicarea unei restricții asupra lui  $q_{curent}$ . Acesta poate fi necesar dacă alimentarea curentului de apă este controlată în vecinătatea puțurilor de extracție a apei pentru alimentarea cu apă. Totuși este dificilă restricționarea lui  $q_{curent}$  atunci când ea depinde de regimul hidraulic.

O abordare a acestei probleme este de a stabili o serie de restricții. Primele două restricții definesc două valori posibile ale fluxului:

$$\begin{aligned} q_h &= C(h_i - h_{curent}) \\ q_b &= C_0(b_{curent} - h_{curent}) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Dacă  $h_i < b_{curent}$ , atunci  $q_h$  va deveni mai mic decât  $q_b$ . Analog,  $q_h$  va deveni mai mare decât  $q_b$  dacă nivelul piezometric din acvifer va fi mai mare decât nivelul fundului curentului. Deci,  $q_{curent}$  trebuie ales maximul dintre aceste două valori posibile.

Aceasta se poate realiza prin impunerea cerinței ca fluxul să fie mai mare sau egal decât fiecare din cele două valori posibile:

$$\begin{aligned} q_{curent} &\geq q_h \\ q_{curent} &\geq q_b \end{aligned} \quad (8.24)$$

iar produsul dintre diferențele dintre valorile posibile și cele finale ale lui  $q_{curent}$  să fie 0:

$$(q_{curent} - q_h)(q_{curent} - q_b) = 0 \quad (8.25)$$

Restricția asupra produsului din (8.31) obligă fluxul să fie egal cu unul dintre cele două valori posibile, în timp ce restricțiile (8.30) obligă fluxul să fie mai mare sau egal cu cel mai mare dintre cele două valori posibile. Restricția asupra produsului introduce o restricție neliniară.  $q_{curent}$  este necesar a fi calculat în acest fel când el este o variabilă de decizie în formularea problemei. Dacă  $q_b$  este o constantă independentă de solicitare,  $q_h$  depinde de nivelul piezometric din acvifer, care la rândul lui depinde de solicitare.

Aceeași problemă poate fi abordată prin folosirea variabilelor binare pentru transformarea funcției de flux într-o funcție continuă. În primul rând, definim o variabilă binară  $X_1$  care indică dacă curentul este sau nu conectat hidraulic la acvifer.

Se poate scrie o singură ecuație pentru a defini  $q_{curent}$ :

$$q_{curent} = C(h_{curent} - h_i)X_1 + C_0(b_{curent} - h_{curent})(1 - X_1) \quad (8.26)$$

Mai trebuie formulate două restricții adiționale care să dea valorile variabilei binare. Acestea pot fi de forma:

$$\begin{aligned} h_i + M &\geq X_1(b_{curent} + M) \\ b_{curent} + M &\geq (1 - X_1)(h_i + M) \end{aligned} \quad (8.27)$$

Prima restricția obligă pe  $X_1$  să ia valoarea 0, când  $b_{curent}$  este mai mare decât  $h_i$ . Când  $b_{curent}$  este mai mic decât  $h_i$ , a doua restricție obligă pe  $X_1$  să ia valoarea 1.  $M$  (un număr mare) ne asigură că membrul stâng al inegalității este pozitiv atunci când datele problemei sunt valori negative ale lui  $h_i$  sau  $b_{curent}$ . Setul de restricții conține neliniarități rezultate din produsul variabilei binare cu nivelul piezometric.

### 8.2.5 Determinarea lungimii amenajărilor cu mai multe celule de aplicare a solicitării

Amenajările cu mai multe celule de aplicare a solicitării au fost introduse și discutate în secțiunea 6.3. Variabilele de decizie pentru aceste amenajări sunt locația primei celule, orientarea amenajării, lungimea amenajării și solicitarea totală aplicată. Un exemplu adițional a problemei în care sunt prezente variabile binare într-o combinație neliniară cu variabilele continue, este cazul în care se consideră cunoscute locația primei celule și orientarea amenajării și trebuie determinate lungimea amenajării și solicitarea totală ce trebuie aplicată.

Ca exemplu, considerăm un puț vertical lung perforat (dren vertical) care se extinde în maxim  $n_w$  straturi de acvifer. Trebuie determinate numărul de straturi în care se extinde puțul și rata de pompare din fiecare strat. Variabilele binare  $X_j$  indică dacă puțul trece prin stratul  $j$  de acvifer, variabilele binare sunt numerotate de la 1 la  $n_w$  și  $X_1$  se referă la primul orificiu al puțului. Solicitarea din fiecare strat se notează cu  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_w$ . Relația dintre solicitare și variabila indicatoare este definită de (7.2), care cere ca variabila indicatoare să ia valoarea zero dacă solicitarea din stratul respectiv este zero. O cerință adițională trebuie să ne asigure că toate variabilele indicatoare sunt nenule din locația primei celule până la ultima celulă activă. (De exemplu, construcția celulei  $j$  este necesară dacă toate celulele dinaintea ei sunt active, de la 1 la  $j - 1$ .)

Această cerință poate fi satisfăcută prin impunerea restricției:

$$X_j \geq X_{j-1} \quad j = 1, \dots, n_w - 1 \quad (8.28)$$

Această serie de  $(n_w - 1)$  restricții ne asigură că variabilele indicatoare pentru toate celulele situate deasupra unei celule active au valoarea 1. Utilizarea acestei restricții nu intenționează să impună faptul că toate celulele cu variabile indicatoare active trebuie să aibă de asemenea aplicat o solicitare nenulă, ci doar indică necesitatea construirii unor alte celule.

Formulările care includ amenajări cu mai multe celule de aplicare a solicitării nu combină restricțiile de forma (7.5) și (7.7), deoarece aceste restricții depind de o variabilă indicatoare care ia valoarea zero dacă solicitarea corespondentă este nulă. Funcția obiectiv trebuie să includă un termen care minimizează costurile asociate cu construcția. Acest termen trebuie să conțină costurile realizării unei noi celule în lungul amenajării. Fără un asemenea termen în funcția obiectiv, nu există nici un stimulent în formularea problemei care să determine ca variabila indicatoare a unei celule să ia valoarea 1 numai dacă este nevoie de celula respectivă.

În secțiunea 7.2.4 au fost introduse câteva metode care ne asigură că celule selectate a fi active de către soluția problemei sunt legate între ele, astfel încât ele să imite comportarea actuală a acviferului în răspunsul dat de el la realizarea amenajării (la aplicarea solicitării). Utilizarea acestor metode aici este complicată de lipsa cunoașterii celulelor care vor fi active. Un mod de a realiza acest lucru este de a impune restricții de forma:



$$X_{j+1}h_j = X_{j+1}h_{j+1} \quad j = 1, \dots, n_w - 1 \quad (8.29)$$

unde  $h_j$  este nivelul piezometric în celula  $j$  a amenajării. Când celula  $j + 1$  este inactivă, atunci  $X_{j+1} = 0$  și restricția (8.29) este satisfăcută. Când celula  $j + 1$  este activă, atunci (8.29) impune aceleași restricții ca (6.14). Dezavantajul folosirii restricțiilor de forma (8.29) este că ele introduc restricții neliniare.

### 8.3 Rezolvarea problemelor cu formulări neliniare

În capitolul 4 a fost prezentat algoritmul simplex pentru rezolvarea problemelor de optimizare liniare cu variabile continue. Proprietatea problemelor de optimizare liniare este că aproape oricare din ele poate fi rezolvată cu acest algoritm. Cu toate că au fost dezvoltati și alți algoritmi, algoritmul simplex rămâne algoritmul cel mai des utilizat pentru rezolvarea problemelor de optimizare liniară.

În contrast, există un număr mare de algoritmi utilizați pentru rezolvarea problemelor de optimizare neliniare. Nu există un singur algoritm care să poată fi aplicat tuturor tipurilor de probleme neliniare. Dacă un set particular de probleme pot fi rezolvate cu un anumit algoritm, același algoritm nu se poate aplica altui set de probleme. Selecția algoritmului celui mai potrivit pentru rezolvarea problemei depinde de natura problemei. În prezent se fac cercetări pentru dezvoltarea altor algoritmi noi și pentru creșterea eficienței celor existenți.

În această secțiune se prezintă metodele de optimizare utilizați pentru rezolvarea problemelor neliniare de management al apei subterane. Aceste metode sunt: metoda liniarizării secvențiale, metoda gradientului, alte metode care nu se bazează pe gradient. Sunt de asemenea prezente câteva aspecte legate de rezolvarea problemelor mixte neliniare cu variabile binare [77, 17, 53, 125].

#### 8.3.1 Liniarizarea secvențială pentru problemele cu acvifere cu nivel liber

Metoda liniarizării secvențiale este aplicabilă soluțiilor problemelor în care nivelul piezometric este dat de o ecuație nemărginită, dar toate celelalte elemente ale formulării sunt liniare și nu există variabile binare. În acest caz există un algoritm care se poate utiliza pentru analiza neliniarității slabe a nivelului piezometric în raport cu solicitarea. Deoarece nivelul piezometric este singurul element neliniar în problemă, algoritmul respectiv rezolvă problema ca o serie de probleme de programare liniară.

Utilizarea metodei simplex pentru rezolvarea problemelor de optimizare se bazează pe ipoteza că nivelul piezometric răspunde liniar la solicitare. Această implică că derivatele nivelului piezometric în raport cu solicitarea sunt constante. Pentru cazul unui acvifer cu nivel liber neliniaritatea este slabă și derivatele sunt aproape constante. Acesta se poate demonstra prin examinarea derivatelor nivelului piezometric dat de ecuații nemărginite în raport cu solicitarea. Reluăm formula (8.13) care calculează nivelul piezometric în cazul pompării apei subterane dintr-un singur puț. Derivând relația:

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} Q} \quad (8.30)$$

în raport cu debitul  $Q$ , rezultă:

$$\frac{\partial h}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} \right) \left[ H^2 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\pi K} Q \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.31)$$

Această relație ne arată că atunci când  $H^2 \gg \left| \frac{\ln(r/R)}{\pi K} Q \right|$ , derivata este aproape constantă.

Deoarece mărimea termenului cu logaritm depinde de scăderea nivelului piezometric,  $\left( \frac{\ln(r/R)}{\pi K} Q \right) = h^2 - H^2$ , această relație arată că dacă scăderea nivelului piezometric, sub acțiunea unei solicitări reduse, este mult mai mică decât grosimea acviferului atunci gradientul este aproape constant și deci nivelul piezometric variază liniar cu solicitarea. Acest lucru este sugerat și de exemplul din figura 8.3, unde unui solicitări reduse corespunde un gradient aproape constant.

Pentru fiecare problemă de programare liniară limitele acviferului sau grosimea lui se presupune cunoscută și matricea de răspuns a nivelului piezometric la solicitare se construiește într-o manieră similară ca în cazul unui acvifer sub presiune, deci acviferul este presupus a fi sub presiune în fiecare iterație și problema este rezolvată ca o problemă de programare liniară. Apoi solicitarea este utilizată pentru simularea curgerii în cazul unui acvifer cu nivel liber. Nivelele piezometrice rezultate sunt utilizate apoi pentru re – estimarea limitelor acviferului și algoritmul se repetă, rezultând o nouă matrice de răspuns. Mai jos se prezintă algoritmul de calcul la iterația  $k$ :

---

### Algoritmul de liniarizare secvențială

- Pasul 0: Presupune limitele inițiale ale acviferului, alege  $k = 1$ , alege  $q_0 = 0$
  - Pasul 1: Pentru limitele de mai sus, calculează matricea de răspuns liniar
  - Pasul 2: Rezolvă problema de programare liniară pentru determinarea debitului optim  $q_k$
  - Pasul 3: Dacă  $\|q_k - q_0\| \leq \varepsilon$  stop; treci la pasul 4
  - Pasul 4: Simulează nivelele piezometrice date de debitul  $q_k$  pentru acviferul cu nivel liber
  - Pasul 5: Utilizează nivelele piezometrice rezultate în pasul 4 pentru reestimarea limitelor acviferului
  - Pasul 6: Alege  $k = k + 1$ , treci la pasul 1
-

Algoritmul de mai sus poate vizualiza liniarizarea secvențială a răspunsului neliniar al nivelului piezometric la solicitare. Acest concept este arătat în figura 8.5, unde este arătată variația nivelului piezometric în funcție de solicitare. Pe grafic s-au ales trei puncte diferite, în fiecare din aceste puncte derivata nivelului piezometric în raport cu solicitarea reprezintă panta tangentei la curba de variație. În fiecare iterație a algoritmului de liniarizare secvențială se consideră că aceste tangente reprezintă răspunsul nivelului piezometric la solicitare.

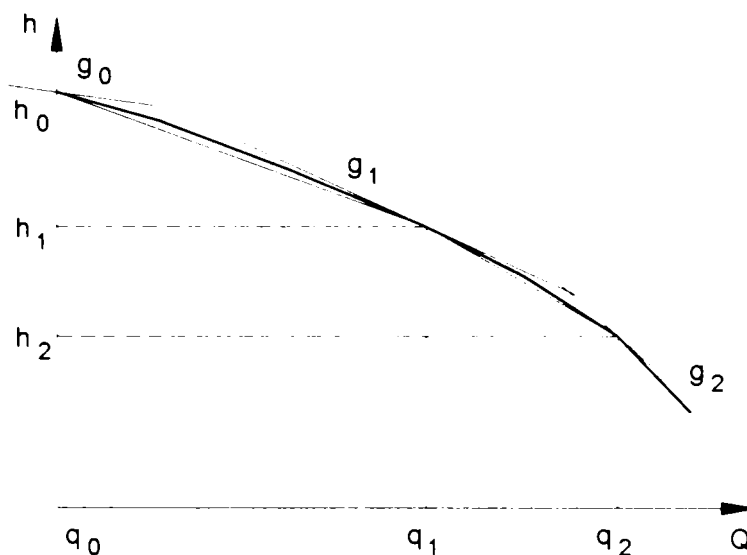


Figura 8.5 Algoritmul de liniarizare secvențială presupune că limitele acviferului sunt fixate în fiecare iterație. Coeficienții de răspuns, care reprezintă variația nivelului piezometric în raport cu solicitarea, sunt determinați la începutul fiecărei iterații și sunt menținuți constanți pentru calculele din iterația respectivă.

Calculul matricei de răspuns în fiecare iterație este complicată de neliniaritatea răspunsului. Reamintim că pentru calculul nivelului piezometric dat de o anumită solicitare, s-a utilizat seria lui Taylor. În cazul acviferului sub presiune, în care derivata nivelului piezometric în raport cu solicitarea este o constantă, seria Taylor cu prima derivată dă valoarea exactă a nivelului piezometric. Aceasta înseamnă că solicitarea de la care se pornește în calcul poate fi ales arbitrar. În mod curent se pleacă de la o solicitare nulă. În cazul acviferului cu nivel liber, solicitarea de pornire poate fi ales iar zero, dar calculul nu mai are același grad de precizie. Pentru a mări exactitatea calculului trebuie ales solicitarea de pornire cât mai apropiat de soluția probabilă a problemei. Cea mai bună estimare a acestei valori a solicitării se obține din iterația precedentă.

Revenind la forma generală a seriei Taylor (2.17), seria Taylor care conține numai derivate de ordinul 1, este construită de la o soluție cunoscută, rezultând o aproximare de forma:

$$h_i^k(q_{k+1}) = h_i^k(q_k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i^k}{\partial q_j}(q_k)(q_j^{k+1} - q_j^k) \quad (8.32)$$

unde indicele superior al nivelului piezometric indică că valoarea respectivă a fost calculată folosind limitele acviferului din iterația k.

Utilizarea acestei forme a seriei Taylor necesită modificarea membrului drept al inecuației restricției astfel încât, de exemplu, restricția asupra limitelor nivelului piezometric din locația  $i$  să se scrie astfel:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i^k}{\partial q_j} (q_k) q_j^{k+1} \leq h_i^u - h_i^k(q_k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i^k}{\partial q_j} (q_k) q_j^k \quad (8.33)$$

Neliniaritatea răspunsului nivelului piezometric la solicitare afectează și modul de calcul al coeficienților de răspuns. Reamintind analiza erorilor din metoda diferențelor finite, descrisă în secțiunea 2.3.3, o observație de bază asupra funcțiilor neliniare este că mărimea perturbației soicitării influențează acuratețea aproximării făcute prin această metodă. În cazul acviferului sub presiune, valoarea perturbației poate fi arbitrară, deoarece acviferul răspunde liniar la solicitare. În cazul acviferului cu nivel liber, alegerea valorii perturbației trebuie făcută cu atenție. O valoare prea mare a perturbației poate da o secare a acviferului modelat, soluție care nu este posibilă. În același timp, o valoare prea mică a perturbației poate duce la obținerea unor coeficienți de răspuns cu o precizie neadecvată, din cauza erorilor de rotunjire.

La folosirea algoritmului de liniarizare secvențială, trebuie acordată o atenție deosebită utilizării coeficienților de răspuns, ei fiind calculați în ipoteza acviferului sub presiune. Calculul folosind derivatele tinde să supraevalueze valoarea solicitării necesare atingerii limitelor nivelului piezometric pentru un acvifer cu nivel liber (vezi figura 8.5). Acest lucru poate conduce la secarea acviferului la începutul iterației următoare. Este necesară din când în când reducerea valorii solicitării față de iterația precedentă, pentru a preveni secarea acviferului.

### 8.3.2 Metoda gradientului

Derivata unei funcții furnizează informații importante despre locația punctului pentru care se realizează minimumul funcției respective. De exemplu, funcția, a cărei grafic este arătat în figura 8.6, ia valoarea minimă pentru  $x_a$ . Derivata funcției în acest punct este zero [69,81,12,24,28].

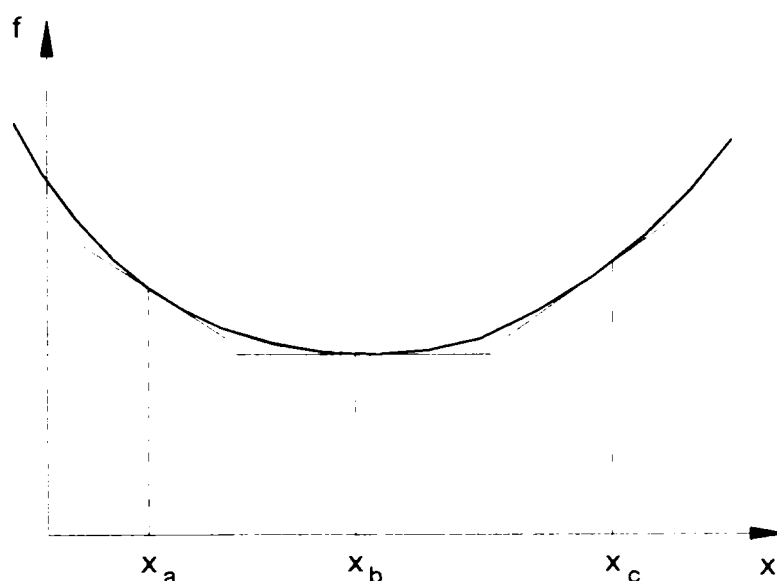


Figura 8.6 Metoda gradientului în care gradientul funcției este utilizat pentru determinarea direcției de îmbunătățire a soluției problemei

Derivata în punctul  $x_b$  nu este zero, indicând că acest punct nu este punct de minim. În plus, semnul „-”, al derivatei în punctul  $x_b$  indică faptul că punctul de minim trebuie să fie undeva la dreapta lui  $x_b$  (în direcția în care valoarea funcției descrește). Analog, derivata pozitivă din  $x_c$  indică de asemenea că acest punct nu este punct de minim și că punctul de minim se află în stânga lui. Algoritmul de optimizare neliniar prin metoda gradientului are la bază acest concept.

Problemele de optimizare neliniară se pot împărți în trei categorii. Prima categorie, include problemele fără restricții, care constă în minimizarea unei singure funcții care nu are restricții. A doua categorie include problemele neliniare în care funcția obiectiv este neliniară dar restricțiile sunt liniare. A treia categorie include problemele neliniare în care restricțiile sunt neliniare, iar funcția obiectiv poate fi liniară sau neliniară.

### Algoritm de optimizare a problemelor fără restricții

Algoritm de optimizare neliniar bazat pe metoda gradientului pornește de la o soluție inițială,  $q_0$ , îmbunătățind prin iterații succesive soluția. Pentru cei mai mulți algoritmi alegerea soluției inițiale este arbitrară. La fiecare iterație  $k$ , algoritmul actualizează soluția  $q_k$ . Pentru problemele de minimizare, fiecare pas al algoritmului determină direcția în care descrește valoarea funcției obiectiv, selectează lungimea pasului pentru minimizarea funcției obiectiv de-a lungul direcției selectate. Procedura este demonstrată în exemplul următor, se cere minimizarea unei singure funcții care depinde de mai multe variabile se solicitare.

---

#### Algoritm bazat pe metoda gradientului

Pasul 0: Inițializează contorul iterațiilor și selectează valoarea solicitării inițiale:

$$k = 0, \quad q_k = q_0 \quad (8.34)$$

Pasul 1: Determină direcția  $d_k$ , pentru mutare

$$d_k = d(q_k, \nabla_{q_k} f, \nabla_{q_k}^2 f, d_{k-1}) \quad (8.35)$$

Pasul 2: Găsește minimul, prin alegerea mărimii pasului  $\alpha_k$ , pentru calculul valorii funcției obiectiv în lungul direcției

$$\text{minimizeaza } f(q_k + \alpha_k d_k) \quad (8.36)$$

$$k = k + 1$$

Pasul 3: Mută la valoarea nouă a solicitării și mărește contorul

$$q_{k+1} = q_k + \alpha_k d_k \quad (8.37)$$

$$k = k + 1$$

Pasul 4: Test pentru convergență

Dacă criteriul de convergență este satisfăcut, atunci stop; dacă nu, du-te la pasul 1.

---

Direcția găsită în pasul 1 este deseori determinată ca o funcție de următoarele caracteristici: punctul curent, valoarea funcției obiectiv și a primei și a secunde ei derivate în punctul curent, direcția anterioară. De exemplu, direcția descendentă este definită ca direcția în care gradientul funcției obiectiv este negativ. Determinarea acestei direcții se face reprezentând grafic funcția obiectiv și căutând direcția descendentă a aproximării ei liniare. Direcția Newton se determină prin aproximarea funcției cu o funcție de gradul II și pe calculul primei și secunde derivate a acestei funcții. În general, direcția Newton converge spre soluție din câteva iterații, dar necesită un volum mare de calcule pentru determinarea ei în fiecare pas al iterației.

Determinarea direcției în care valoarea funcției obiectiv scade se mai poate face și prin multe alte metode.

Problema rezolvată la pasul 2 este o problemă de programare liniară unidimensională, cu variabila  $\alpha_k$ . În fiecare iterație este determinată o altă valoare pentru  $\alpha$ . Lungimea pasului determinată în pasul 2 constituie baza pentru trecerea la soluția următoare, care este calculată la pasul 3.

Pasul 4 necesită un test pentru determinarea convergenței soluțiilor. Pentru problemele de minimizare fără restricții derivata funcției obiectiv va fi zero în punctul de minim local. Această proprietate a derivatei sugerează alegerea criteriului de convergență, anume că algoritmul este considerat convergent dacă gradientul funcției obiectiv se apropie de zero.

### **Optimizare cu restricții**

Pașii algoritmului bazat pe metoda gradientului descriși anteriori sunt aceiași și în cazul problemelor cu restricții. Totuși, determinarea direcției în care scade valoarea funcției obiectiv și alegerea criteriului de convergență trebuie reconsiderate atunci când problema are și restricții.

Este posibil ca restricțiile să nu permită funcției obiectiv să ajungă la valoarea ei minimă, ca în cazul problemei fără restricții. Deci, soluția optimă poate fi un punct în care gradientul funcției obiectiv nu este zero. Deci, alegerea unui criteriu de convergență bazat numai pe gradientul funcției nu este adecvat. În schimb, trebuie utilizate o serie de condiții pentru confirmarea convergenței. Aceste condiții implică calcul derivatelor funcției obiectiv și a restricțiilor.

Dacă problema neliniară nu are restricții, atunci orice direcție descendentă va îmbunătăți soluția. În prezența restricțiilor direcția trebuie astfel determinată încât ea să îmbunătățească soluția și să nu se abată substanțial de la satisfacerea restricțiilor.

În cele două secțiuni următoare vor fi prezentate metodele de determinare a direcție în care valoarea funcției obiectiv scade, în prezența restricțiilor.

### **Găsirea direcției în prezența restricțiilor liniare**

Când restricțiile sunt liniare, metoda cea mai utilizată este folosirea direcțiilor fezabile. Această înseamnă că se vor alege direcții care garantează că fiecare punct

succesiv dă o soluție fezabilă. Aceasta este ușor de realizat pentru problemele cu restricții liniare. Pentru problemele cu restricții liniare, care se pot scrie folosind matricea generală  $A$  a restricțiilor și forma generală a valorilor restricțiilor  $b$ , un punct reprezintă o soluție realizabilă dacă:

$$Aq_k = b \quad (8.38)$$

Pentru a menține fezabilitatea, selectăm o direcție  $d_k$ , care să satisfacă:

$$Ad_k = 0 \quad (8.39)$$

Această ecuație garantează că dacă  $q_k$  satisface (8.38), atunci și  $q_{k+1}$  va satisface (8.38) deoarece înmulțind (8.37) cu  $A$  rezultă:

$$Aq_{k+1} = Aq_k + \alpha_k Ad_k \quad (8.40)$$

și prin înlocuirea lui (8.38) și (8.39) în (8.40) rezultă condiția de fezabilitate pentru  $q_{k+1}$ . Determinarea direcției  $d_k$  care satisface (8.39), poate fi realizată prin definirea unui spațiu vectorial care conține toți vectorii ortogonali pe vectorii definiți de liniile matricei  $A$ . O direcție fezabilă este acum orice vector din acest spațiu vectorial.

### Găsirea direcției în prezența restricțiilor neliniare

Problemele de optimizare cu restricții neliniare pot fi dificil de rezolvat deoarece aici nu mai există direcții liniare care mențin fezabilitatea pe un set de restricții neliniare. Algoritmii care rezolvă această categorie de probleme trebuie să permită vectorului soluțiilor  $q_k$  să fie nefezabil în oricare iterație, în timp ce valoarea funcției obiectiv se îmbunătățește. Soluția rezultată trebuie să fie fezabilă, de aceea algoritmul trebuie să echilibreze minimizarea funcției obiectiv cu abaterea prea mare de la fezabilitate.

O metodă de a rezolva aceste probleme este rezolvarea unei secvențe de probleme intermediare de optimizare (subprobleme) care au ca restricții aproximarea liniară a restricțiilor neliniare originale. Fiecare subproblemă este o problemă cu restricții liniare, care se pot rezolva cu metodele dezvoltate anterior pentru această categorie de probleme. Soluțiile subproblemelor converg spre soluția problemei originale. Metoda liniarizării secvențiale, descrisă în secțiunea 8.3.1, se poate aplica în acest caz.

O altă metodă de rezolvare este încorporarea restricțiilor neliniare în funcția obiectiv folosind metoda penalizării. Prin această metodă, problema de optimizare (8.2) este reformulată ca o problemă fără restricții:

$$\begin{aligned} \text{minimizeaza } F(q) = & f(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l) + \\ & + M \sum_{k=1}^m \max(g_k(q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots, h_l), 0) \end{aligned} \quad (8.41)$$

unde  $M$  este parametrul de penalizare. De notat, că dacă toate restricțiile sunt satisfăcute, atunci termenul secund devine zero. Dacă  $M$  este ales suficient de mare, atunci abaterea de la restricții va produce o valoare mare a funcției obiectiv. Deci, soluția trebuie să caute să conducă termenul secund din funcția obiectiv spre zero.

Deoarece (8.41) este problemă fără restricții, ea poate fi rezolvată cu metodele prezentate anterior pentru astfel de tipuri de probleme.

### **Limitările metodei gradientului**

Algoritmii de optimizare bazate pe metoda gradientului a problemelor neliniare pentru minimizarea funcției obiectiv, cu sau fără restricții, pornesc de la un punct arbitrar și se mută, prin iterații succesive, într-un punct unde sunt satisfăcute criteriile de convergență. Metoda gradientului determină minimul local al problemei. Când se folosesc acești algoritmi pentru rezolvarea problemelor cu funcții obiectiv convexe și un domeniu al soluțiilor realizabile convexe, atunci minimul local găsit este minimul global. Dacă funcția obiectiv sau domeniul realizabil nu este convexe, atunci nu există garanția că soluția locală găsită este și soluția globală. De exemplu, din cauza neconvexității aparente a problemelor nemărginite, algoritmi bazati pe metoda gradientului vor da o soluție care poate să nu fie soluția globală. În aceste circumstanțe este dificil de determinat punctul de start al algoritmului de optimizare, deoarece nu se știe ce soluții locale vor fi găsite pentru problemele neconvexe.

Această limitare a metodei nu este semnificativă dacă există numai un număr mic de soluții locale. Un mod de a testa minimul local este aplicarea algoritmului pornind din diferite puncte de start. Dacă soluțiile găsite sunt aceleași, atunci proiectantul poate avea certitudinea, altfel nu, că a găsit punctul de optim global.

### **8.3.3 Alte metode de rezolvare**

Au fost dezvoltati o serie de algoritmi care încearcă să rezolve dificultățile care apar în rezolvarea problemelor neconvexe. Aceste metode se referă uneori la metodele de optimizare globală din cauza abilității lor de a evita convergența spre minimul local. Oricum, nu există dovezi că ele găsesc minimul global. Aceste metode necesită un volum mare de calcul, ceea ce limitează utilizarea lor la problemele de dimensiuni mici. Cercetările recente se axează pe combinarea tehnicilor de căutare pentru reducerea volumului de calcul prin folosirea avantajelor proprietăților specifice ale metodelor intensive de calcul. Aceste metode se bazează pe analogii naturale (algoritmul genetic sau simularea refacerii) care nu necesită continuitatea funcțiilor în problema de optimizare. Totuși, aceste metode necesită un volum mare de calcul și se aplică cel mai bine în cazul problemelor unde metodele tradiționale au dat greș, ca problemele cu discontinuități.

Referințe asupra aplicării acestor metode în problemele de management al apei subterane sunt date în bibliografia de specialitate [40,72,83,84,133].

### **Metoda planelor întretăiate**

Această metodă încadrează domeniul soluțiilor realizabile într-un politop, iar funcția obiectiv este minimizată sau maximizată peste domeniul relaxat. Acest politop



este o aproximare liniară a setului de restricții, cu îmbunătățirea aproximației la fiecare iterație, cu fiecare intersectare de planuri. Dacă funcția obiectiv este convexă, atunci fiecare subproblemă este de asemenea convexă și poate fi rezolvată prin metode tradiționale. Soluțiile converg dinspre domeniul nerealizabil spre domeniul realizabil și spre optimul global. Metoda necesită ca funcția obiectiv și restricțiile să fie continue și utilizează reguli spațiale speciale pentru selectarea planurilor care se intersectează pentru problemele neconvexe.

### **Simularea refacerii (revenirii)**

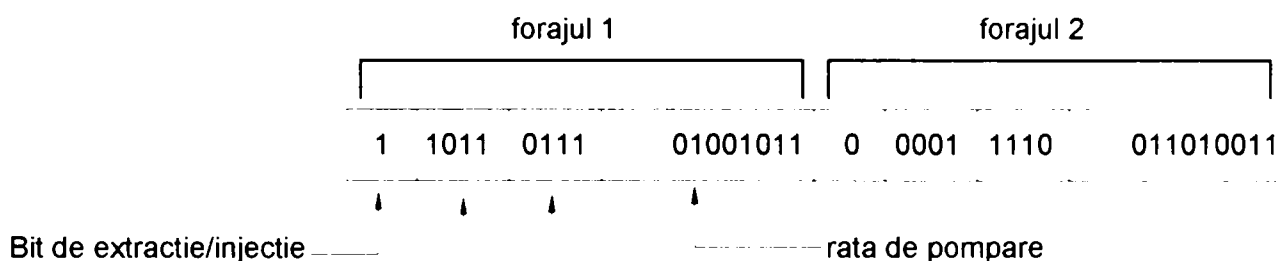
Această metodă se bazează pe analogia cu procesul termodinamic de răcire a materialelor solide. Când materialul este topit și apoi este răcit lent (refacere), structura cristalină tinde să minimizeze energia sistemului. Simularea refacerii folosește această analogie pentru a căuta energia minimă a configurației variabilelor de decizie, unde energia este reprezentată de valoarea funcției obiectiv pentru soluția dată. Regulile de tranziție de la o configurație la alta sunt aplicate în mod stohastic, deci ocazional se poate găsi o soluție inferioară pentru o configurație mai bună. Probabilitatea ca acest lucru să se întâmple este mai mare în stadiile de început decât în cele de sfârșit ale procesului, când temperatura sistemului este mai mică. Natura stohastică a procesului de căutare ne arată că algoritmul poate scăpa găsirea optimului local.

### **Algoritmul genetic**

Algoritmul genetic se bazează pe teoria evoluției al lui Darwin și pe supraviețuirea celui mai puternic. Pe când multe tehnici de optimizare fac tranziția de la o soluție la alta, algoritmul genetic reține acele soluții și reguli de tranziție care transformă un set de soluții în alt set de soluții. Analogia se bazează pe faptul că setul soluțiilor dintr-o iterație reprezintă o populație, fiecare soluție reprezentând un individ al acestei populații, iar valoarea funcției obiectiv pentru fiecare soluție reprezintă puterea fiecărui individ. O populație nouă sau o generație nouă apare din generația anterioară prin competiția bazată pe putere. regulile de tranziție sunt aplicate pe o bază stohastică, astfel încât fiecare individ are o probabilitate mare de a fi selectat pentru producerea noii generații. După procesul de selectare, operatorii genetici, ca mutațiile și încrucișarea, sunt utilizați pentru completarea tranziției de la o generație la alta. Ca și metoda precedentă, probabilitatea de a găsi optimul local nu este de 100 % [89,111,66,133].

Variabilele de decizie din modelul de management sunt similare cu genele biologice și sunt reprezentate prin coduri. Structura codurilor poate fi diferită, inclusiv reprezentarea cu numere reale sau valori binare. Un punct în domeniul de căutare este reprezentat printr-o colecție de gene. Genele codate sunt juxtapuse pentru a defini un individ sau un cromozom.

Pentru problemele de apă subterană, algoritmul genetic este suficient de flexibil pentru a reprezenta explicit problemele în care se cere determinarea locațiilor de aplicare a solicitării. Un exemplu de soluție codificată este dat în figura 8.15. În acest exemplu, direcția solicitării (încărcare sau extracție) este controlat de primul bit, coordonatele x și y ale puțului sunt date de următoarele două gene, iar ultima genă reprezintă rata solicitării. Limitele maxime și minime ale tuturor variabilelor de decizie sunt utilizate la transformarea numerelor reale în coduri binare. Formulările prezentate anterior în această lucrare necesită un set de locații candidate a căror poziții sunt fixate. Structura variabilelor de decizie arătată în figura 8.7 permite ca numărul locațiilor candidate de aplicare a solicitării să fie redus prin asocierea explicită a lor cu variabilele de decizie.



*Figura 8.7 Exemplu de variabile de decizie reprezentate codificat în algoritmul genetic. Fiecărui puț candidat i se asociază patru variabile de decizie: direcția pomparei, coordonatele x și y și rata de pompare.*

### 8.3.4 Rezolvarea problemelor binare neliniare

Probleme care conțin elemente neliniare și elemente binare apar din mai multe cauze. Dacă toate elementele neliniare descrise mai înainte, ca curgerea nemărginită sau costurile de pompare, sunt utilizate în probleme cu variabile binare, atunci rezultă o problemă binară neliniară. Formulări asemănătoare pot apărea și atunci când elementele neliniare nu sunt prezente, dar natura formulării binare produce produse neliniare între variabilele de decizie, așa cum am arătat în secțiunea 8.2.4 și 8.2.5.

Prin combinarea elementelor neliniare cu variabilele binare rezultă niște probleme greu de rezolvat. Vom analiza posibilitatea folosirii metodei „ramifică și mărginește” la rezolvarea problemelor binare neliniare. Baza acestei metode este divizarea succesivă a domeniului realizabil în subdomenii. Ipoteza metodei „ramifică și mărginește” este că optimul global poate fi găsit în fiecare subdomeniu. Acest optim global este utilizat pentru compararea ramificațiilor alternative. Dacă optimul găsit în fiecare subdomeniu nu este global, atunci comparația nu este posibilă, iar metoda nu converge către soluția optimă [139].

Dacă domeniul realizabil inițial este convex, atunci și subdomeniile vor fi convexe. Dacă presupunem că și funcția obiectiv este convexă, atunci optimul global poate fi găsit în fiecare din subdomenii, iar metoda „ramifică și mărginește” va converge. Dacă este prezentă neconvexitatea, atunci algoritmul „ramifică și mărginește” va converge la un minim neglobal.

Se pot propune și alte metode de rezolvare a problemelor neliniare binare, de exemplu, aproximarea funcțiilor discontinue cu funcții continue, așa cum s-a prezentat în ecuațiile (8.18) sau (8.19).

Tehnicile combinate care au fost prezentate anterior (algoritmul genetic și simularea refacerii) pot încorpora costuri fixe destul de ușor. Prezența discontinuităților poate necesita modificarea parametrilor de control ai algoritmului, dar fără a modifica aplicabilitatea lor la rezolvarea problemei. Deși codificarea binară a variabilelor de decizie în algoritmul genetic nu e necesară, codificarea reprezintă un mijloc natural pentru integrarea variabilelor binare în problemă. De fapt, variabila binară poate fi asociată simplu cu o genă printr-un singur bit. Acest bit va indica dacă locația asociată este activă sau nu, în același mod cu variabilele binare din formulările prezentate în capitolul 7.

### 8.4 Interpretarea soluțiilor

Deseori este dificil de determinat dacă optimul global a fost într-adevăr găsit. De asemenea, prezența neliniarităților nu face posibilă realizarea analizei domeniului de variație, cum s-a putut realiza în cazul problemelor liniare (secțiunea 5.2). Cu toate acestea, se pot obține câteva informații despre sensibilitatea soluției optime dacă funcția obiectiv și restricțiile sunt diferentiabile. Reamintim că în cazul liniar, „costul din umbră” a fost obținut prin rezolvarea problemei cu algoritmul simplex, și interpretată ca și costul marginal al resurselor. O interpretare similară a restricțiilor neliniare poate fi făcută pentru soluțiile problemelor neliniare continue. Prima condiție de optimalitate stabilește că optimul gradientului funcției obiectiv este o combinație liniară a gradientilor restricțiilor. Coeficienții liniari, care se numesc coeficienții de multiplicare Lagrange, și sunt similari cu „costurile din umbră”. Pentru problemele liniare, „costurile din umbră” se obțin din soluțiile algoritmului simplex. Coeficienții de multiplicare ai lui Lagrange se pot obține numai din rezolvarea problemei cu metoda Lagrange. Dacă funcția obiectiv și restricțiile sunt continue și diferentiabile pentru soluția optimă, atunci „costurile din umbră” pot fi determinate. Ca și în cazul liniar, analiza de sensibilitate se poate efectua numai în vecinătatea soluției optime.

Analiza locală a sensibilității se poate realiza pentru problemele neliniare folosind metoda aplicării unei perturbații, ca în capitolul 5. Problemele neliniare sunt în general dificile, consumă mult timp pentru rezolvare, iar rezolvarea unor probleme de optimizare pentru diferite valori ale parametrilor este în unele cazuri practic imposibilă.

## Cap. 9 MODELAREA TRANSPORTULUI POLUANȚILOR ÎN ACVIFERE

Pentru problemele de optimizare a modului de eliminare a eventualelor poluări accidentale sau de izolare a unei porțiuni poluate de acvifer de restul acviferului, în condițiile în care se solicită și concentrațiile de poluant din acvifer se necesită modelarea transportului poluanților.

Un exemplu de un astfel de problemă de optimizare a fost prezentat în figura 1.4. exemplu care consideră o porțiune a unui acvifer care trebuie izolat de restul acviferului. Această necesitate rezultă din existența unei zone de apă subterană degradată calitativ datorită apariției unei surse de poluare. Problema constă în crearea a unui regim hidraulic specific care să izoleze porțiunea degradată de restul acviferului. Criteriul urmărit este de a schimba direcția de curgere a apei subterane de-a lungul perimetrului penei astfel încât expansiunea penei să fie oprită.

Obiectivul problemei poate fi minimizarea costului total al acțiunilor asupra acviferului, care să determine o curgere spre interiorul penei de apă poluată.

Problema din punct de vedere al ecuațiilor de mișcare poate fi formulată astfel:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^5 \alpha_j q_j \quad (9.1)$$

astfel încât

$$h_2 - h_1 \geq h_1^d \quad (9.2)$$

$$h_4 - h_3 \geq h_2^d \quad (9.3)$$

$$h_6 - h_5 \geq h_3^d \quad (9.4)$$

$$h_8 - h_7 \geq h_4^d \quad (9.5)$$

Unde  $\alpha_j$  este costul unei acțiuni unitare în puțul  $j$  și  $h_i^d$  este diferența dintre nivelele piezometrice necesare pentru perechea  $i$  de puncte.

Pentru cazul în care restricțiile se fac din punct de vedere al concentrațiilor problema se poate formula sub forma:

$$\text{minimizeaza } f = \sum_{j=1}^5 \alpha_j q_j \quad (9.6)$$

astfel încât

$$C_2 \leq C_{\text{admisibil}} \quad (9.7)$$

$$C_4 \leq C_{\text{admisibil}} \quad (9.8)$$

$$C_6 \leq C_{\text{admisibil}} \quad (9.9)$$

$$C_8 \leq C_{\text{admisibil}} \quad (9.10)$$

Unde  $\alpha_j$  este costul unei acțiuni unitare în puțul  $j$ ,  $c_i$  este concentrația în punctul  $i$  și  $C_{admisibil}$  este concentrația admisă în acvifer.

În acest caz este necesar determinarea concentrațiilor în întreg domeniul, respectiv rezolvarea modelului de transport, fapt ce presupune o rezolvare prealabilă a modelului de curgere.

În problemele de izolare a unei porțiuni poluate de acvifer de restul acviferului concentrația admisibilă se va considera valoarea concentrației din acviferul nepoluat.

În problemele în care se dorește diminuarea poluării sau evitarea poluării unei zone concentrația admisibilă se va considera ca o valoare impusă.

Legătura între restricțiile de concentrații prezentate în ecuațiile (9.7) - (9.10) și restricțiile de nivele piezometrice (9.2) - (9.5) vor fi prezentate în continuare prin descrierea fenomenelor de transport al poluanților și definirea ecuațiilor de transport.

### 9.1 Descrierea fenomenului

Concentrația unui tip de poluant se definește ținând cont de componența fizică a acviferului ca mediu poros, pe baza celor trei faze ale acviferului solidă, lichidă, și fluidă sub forma [34]:

$$C = \frac{m_p}{V_e} \quad (9.11)$$

unde:

$C$  concentrația masică a poluantului [ $ML^{-3}$ ],

$m_p$  masa poluantului [ $M$ ],

$V_e$  - volumul golurilor interconectate [ $L^3$ ].

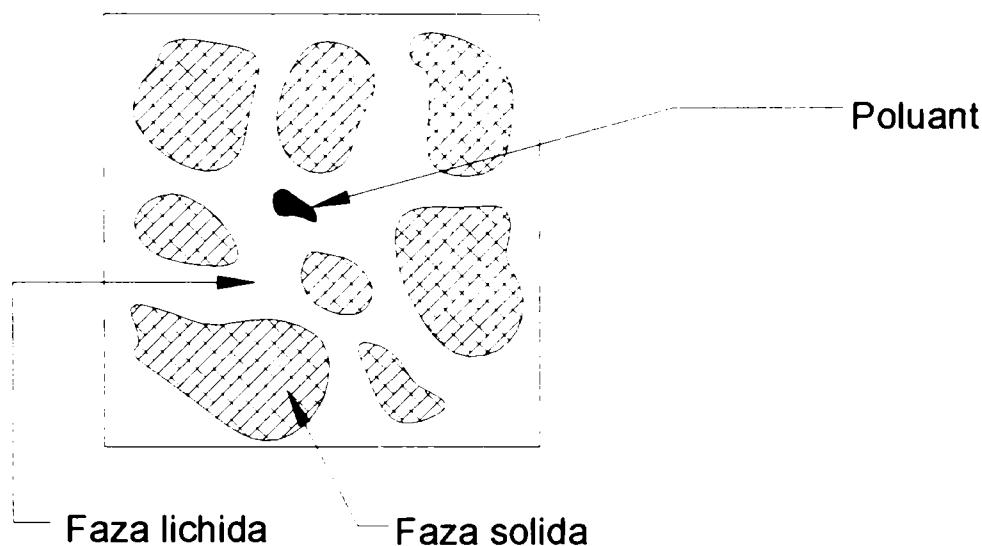


Figura 9.1. Prezentarea fazelor unui mediu poros elementar  $dV$

Masa totală de poluant de  $C$  pentru un volum elementar de mediu poros,  $dV$ , este dată de expresia

$$m_p = \int_V C m_e dv \quad (9.12)$$

unde  $m_e$ , porozitatea efectivă.

În situația în care densitatea poluantului  $\rho_s$  este diferită de a apei și cantitatea poluantului este considerabilă are loc o variație a densității soluției  $\rho_m$  de forma:

$$\rho_m = \rho + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) C \quad (9.13)$$

### 9.1.1 Procese fizico-chimice de transport

Procesele fizico-chimice de transport ale poluanților în acvifere se deosebesc prin cauzele de natură fizico-chimică pe care le generează [34, 18]

#### i) Convecția

Este cel mai important proces fizic de transport datorată vitezei de curgere a apelor subterane. Este un proces mecanic în care poluantul este antrenat cu viteza apei.

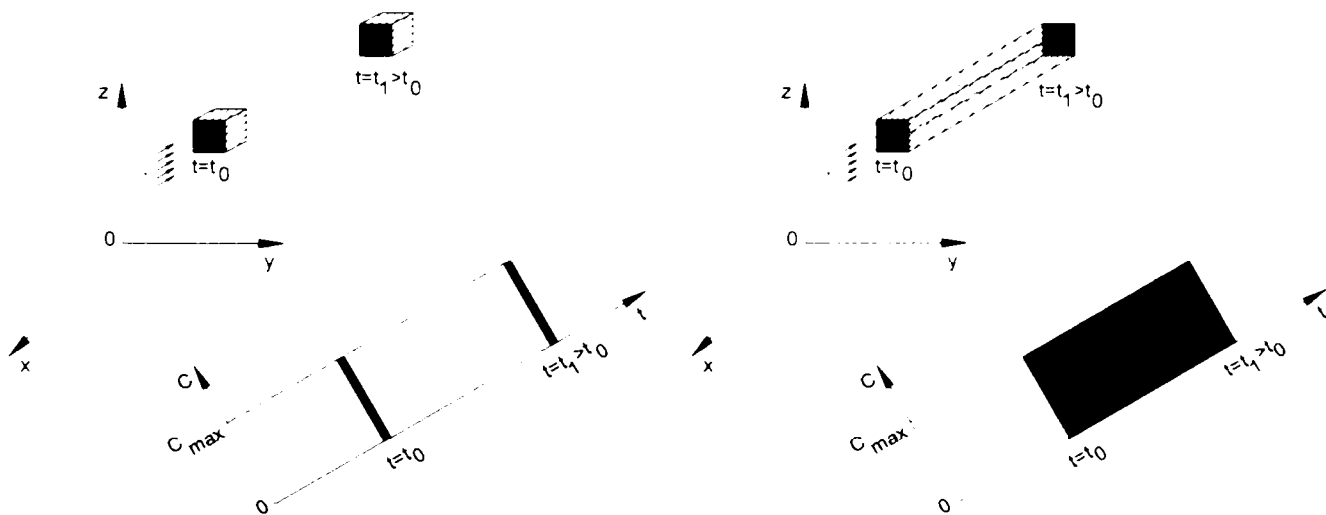


Figura 9.2 Schema convecției. a) injecție instantanee, b) injecție continuă

Fluxul convectiv de poluant este dat de expresia:

$$\vec{q}_c = m_e C \vec{V}_g = C \vec{V}_a \quad (9.14)$$

unde:

$q_c$  fluxul convectiv de poluant,  $[ML^{-2}T^{-1}]$ ,

$V_g$  volumul mediu al golurilor  $[L^3]$ ,

$V_a$  volumul golurilor interconectate  $[L^3]$ .

**ii) Dispersia**

Dispersia constă în reducerea concentrației avansarea penei de poluant în mișcarea apei și în mediul poros. Cauzele dispersiei sunt variația câmpului de viteză, a traseelor de curgere și în final de forma și mărimea variabilă a secțiunii de curgere.

Fluxul masic dispersiv este dat de expresia:

$$\vec{q}_{Ds} = -m_e \vec{D}_{Ds} \cdot \nabla C \quad (9.15)$$

unde:

$\vec{q}_{Ds}$  fluxul masic dispersiv de poluant,  $[ML^{-2}T^{-1}]$ ;

$\vec{D}_{Ds}$  tensorul coeficient de dispersie,  $[L^2T^{-1}]$

$\nabla C$  gradientul concentrației,  $[ML^{-4}]$  care explicitat are forma:

$$\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C}{\partial z} \vec{k} \quad (9.16)$$

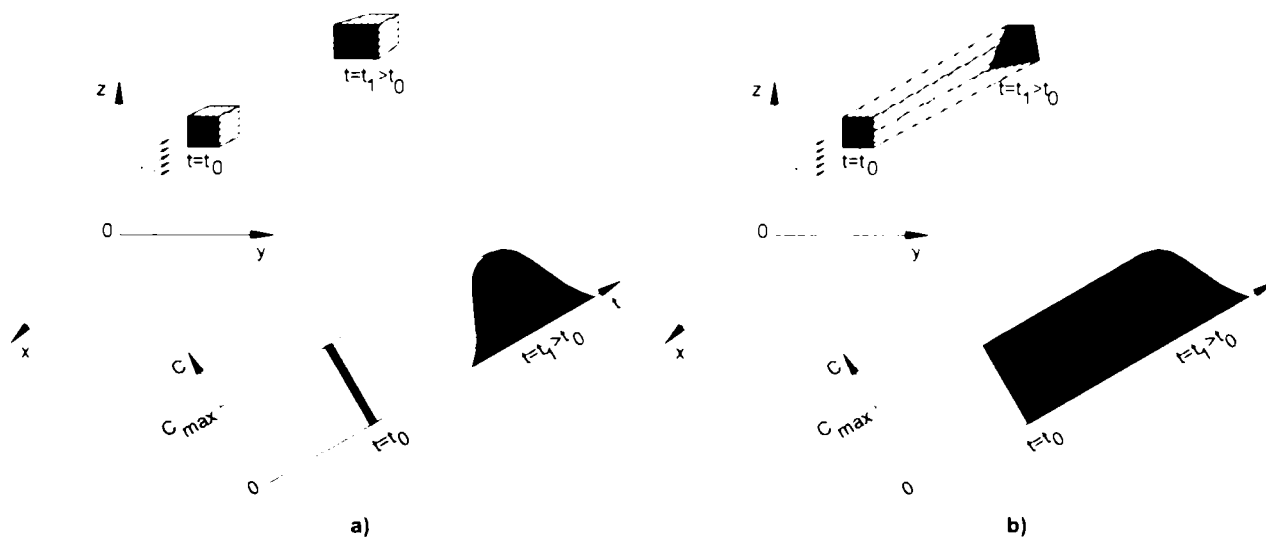


Figura 9.3 Schema dispersiei. a) injectie instantanee, b) injectie continua

Tensor coeficient de dispersie are forma:

$$D_{Ds} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix} \quad (9.17)$$

Componentele matrici tensorului coeficient de dispersie se exprimată în funcție de componentele vitezei de mișcare:

$$V_a = V_{ax}i + V_{ay}j + V_{az}k \quad (9.18)$$

sub forma:

$$D_{xx} = a_L \frac{V_{ax}^2}{V_a} + a_T \frac{V_{ay}^2 + V_{az}^2}{V_a} \quad (9.19)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (a_L - a_T) \frac{V_{ax}V_{ay}}{V_a} \quad (9.20)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = (a_L - a_T) \frac{V_{ax} V_{az}}{V_a} \quad (9.21)$$

$$D_{yy} = a_L \frac{V_{ay}^2}{V_a} + a_T \frac{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}{V_a} \quad (9.22)$$

$$D_{yz} = D_{zy} = (a_L - a_T) \frac{V_{ay} V_{az}}{V_a} \quad (9.23)$$

$$D_{zz} = a_L \frac{V_{az}^2}{V_a} + a_T \frac{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}{V_a} \quad (9.24)$$

unde  $a_L$  reprezintă dispersivitatea longitudinală [L], respectiv  $a_T$  dispersivitatea transversală, [L].

### iii) Difuzia

Difuzia reprezintă un fenomen fizico-chimic de transport constând în reducerea concentrației din apa subterană în sensul zonelor de concentrație ridicată spre cele cu concentrație scăzută. Difuzia reprezintă efectele de transfer macroscopic ale poluantului care are cauze microscopice ce reprezintă mișcarea moleculară Browniană alături de difuzia turbulentă.

Fluxul difuziv este dat de expresia:

$$\vec{q}_d = -m_e D_{mp} \nabla C \quad (9.25)$$

unde:

$\vec{q}_d$  flux difuziv de poluant [ $ML^{-2}T^{-1}$ ],

$D_{mp}$  coeficient de difuzie [ $L^2T^{-1}$ ],

$\nabla C$  gradientul concentrației [ $ML^{-4}$ ].

Efectul difuziei în procesul de transport este similar cu cel al dispersiei dar mult mai redus.

Difuzia poluanților în mediul poros este diferit față de difuzia poluantului în apă, în acest sens coeficientul de difuzie în mediul poros  $D_{mp}$  se va exprima funcție de coeficientul de difuzie în apă printr-o relație de forma de forma:

$$D_{mp} = \omega D_0 \quad (9.26)$$

unde :

$D_0$  coeficientul de difuzie în apă [ $L^2T^{-1}$ ],

$\omega$  coeficient de reducere [-].

Criteriul prin care se poate evalua care dintre cele trei procese fizico-chimice de transport (convecție, dispersie, difuzie) predominant este dat de o mărime adimensională numită numărul Peclet definit prin :

$$Pe = \frac{vd}{D_m} \quad (9.27)$$



unde

$d$  reprezintă caracteristica fazei solide a mediului poros,

$D_m$  coeficientul dispersiei moleculare,

$D$  coeficientul dispersiei mecanice,

$D_h$  coeficientul dispersiei hidrodinamice.

$$D_h = D_m + D \quad (9.28)$$

Pentru stabilirea procesului dominant s-au studiat următoarele funcții:

$$\frac{D_L}{D_m} = f_1(Pe) \quad (9.29)$$

$$\frac{D_L}{vd} = f_2(Pe)$$

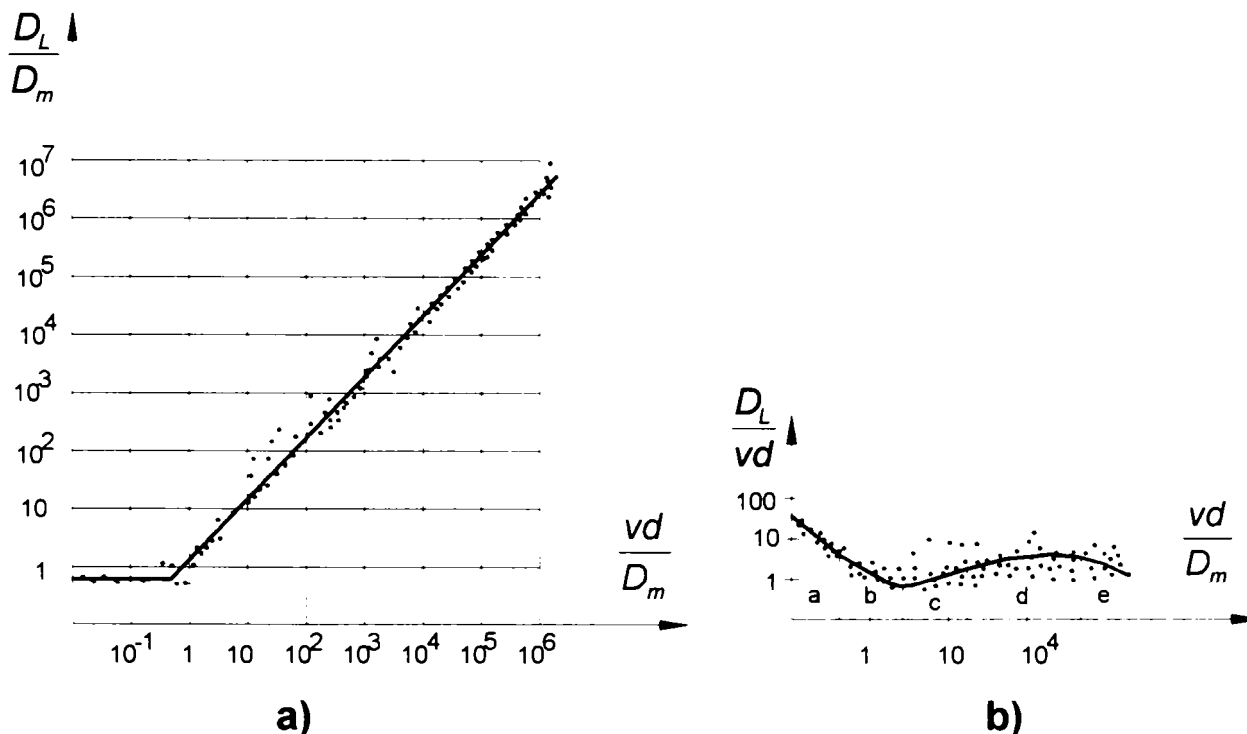


Figura 9.4 Delimitarea zonei de trecere de la difuzie moleculară la dispersie  
a)  $f_1(Pe)$  și b)  $f_2(Pe)$

Din reprezentarea funcțiilor s-au identificat următoarele situații:

- zona a: difuzie moleculară pură, viteze mici de deplasare, corespunde vitezelor mici de deplasare fiind dată de relația

$$\frac{D_L}{D_m} = 0,67$$

- zona b: suprapunerea dispersiei longitudinale peste difuzia moleculară;
- zona c: dispersie longitudinală predominantă;
- zona d: dispersie pură mecanică în care influența difuziei moleculare devine neglijabilă;
- zona e: dispersie mecanică în care mișcarea apei subterane iese din limitele de valabilitate ale legii lui Darcy ( $Re > 10$ ).

### 9.1.2 Alte procese de transport

#### i) Adsorbția

Adsorbția reprezintă un proces de reducere a concentrației poluantului prin adsorbția acesteia de către scheletul solid al mediului poros din cauze de natură fizico-chimică.

Gradul de adsorbție se poate exprima prin:

$$C_{ak}^* = \frac{m_{pol}}{m_{sch}} \quad (9.30)$$

unde:

$C_{ak}^*$  coeficientul de adsorbție microstructural,

$m_{pol}$  masa de poluant adsorbit [M],

$m_{sch}$  masa scheletului solid [M].

Notând cu  $\rho_k^*$  densitatea scheletului solid atunci masa de substanță poluantă adsorbită va fi  $m_a^*$ , dată de relația:

$$m_k^* = \rho_k^* C_{ak}^* \quad (9.31)$$

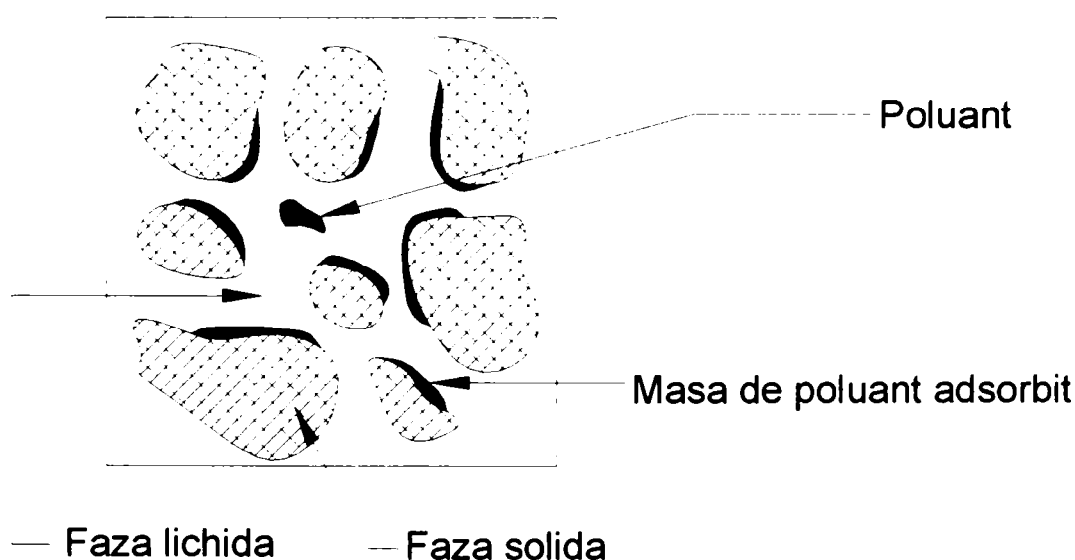


Figura 9.5 Schema adsorbției

Pentru un volum elementar unitar, și porozitatea efectivă  $m_e$ , volumul scheletului solid este reprezentat de  $(1 - m_e)$  iar masa de substanță adsorbită de scheletul solid va fi dată de expresia:

$$m_a = \frac{1}{V} \int_V \rho_k C_a (1 - m_e) dV \quad (9.32)$$

unde:

$m_a$  masa de substanță poluantă adsorbită, [M];

$\rho_k$  densitatea medie a scheletului solid, [ML<sup>-3</sup>];

$C_a$  coeficient de adsorbție mediu.

Masa totală de poluant va fi dată de expresia:

$$m_p = Cm_e + (1 - m_e)\rho_k C_a \quad (9.33)$$

sau prin notație, masa de poluant devine:

$$m_p = Cm_e R \quad (9.34)$$

unde:

$$R = 1 + \frac{1 - m_e}{m_e} \rho_k \frac{C_a}{C} \quad (9.35)$$

unde R se numește coeficient de întârziere.

În funcție de valoarea lui R se pot clasifica:

- pentru  $R = 1$  procesul este fără adsorbție.
- pentru  $R > 1$  întârzierea a penei de poluant datorită adsorbției
- pentru  $R < 1$  pana poluantă depășește frontul conectiv-dispersiv.

Concentrația de poluant adsorbit de scheletul solid  $C_a$  depinde de concentrația poluantului în apă după o relație :

$$C_a = f(C) \quad (9.36)$$

Funcția  $f(C)$  este cunoscută ca și izotermă reprezentând relația de echilibru între cantitatea de poluant dizolvat în soluție și cea reținută, la temperatură constantă. Concentrația de poluant adsorbită de scheletul solid  $C_a$  depinde de concentrația poluantului reprezentând relația de echilibru între cantitatea de poluant dizolvat în soluție și cea reținută

Ea poate fi exprimată sub două forme:

- forma liniară:

$$C_a = K_D C \quad (9.37)$$

unde  $K_D$  reprezintă un coeficient de distribuție , respectiv :

- forma neliniară descrisă de-a lungul timpului (Freundlich (1926), Langmuir (1918), van Genugten (1974) sub forma:

$$\begin{aligned} C_a &= K_1 C^{K_2} \\ C_a &= \frac{K_3 C}{1 + K_4 C} \\ C_a &= K_5 C e^{-2K_6 C} \end{aligned} \quad (9.38)$$

unde  $K_1 \dots K_6$  sunt constante.

Pentru cazul adsorbției lente, când nu există echilibru între substanța dizolvată și cea adsorbită avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= K_r C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_r \left( \frac{K_7 C}{1 + K_8 C} - C_a \right) \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_r (K_9 C^{K_{10}} - C_a) \end{aligned} \quad (9.39)$$

unde  $K_7 \dots K_{10}$  constante iar  $K_r$  coeficient ce exprimă rata cinetică a procesului de adsorbție.

### ii) Degradarea

Degradarea poate fi de natură chimică, biologică sau radioactivă.

Degradarea chimică constă în reacțiile chimice dintre poluant și diverși compuși chimici din apa subterană sau din scheletul solid

Degradarea biologică are ca și cauză interacțiunea dintre masa biologică din mediul poros și poluant.

Degradarea radioactivă se datorează activității radioactive a apelor subterane ce traversează zone radioactive.

Degradare ( $\sigma_d$ ) reprezintă cantitatea de poluant pierdută și se exprimă sub forma:

$$\sigma_d = -\lambda [Cm_e + (1 - m_e)\rho_s C_a] \quad (9.40)$$

unde:

$\sigma_d$  rata degradării,

$\lambda$  coeficient de degradare

Pentru exprimarea ratei de degradare se poate utiliza expresia coeficientului de întârziere R:

$$R = 1 + \frac{1 - m_e}{m_e} \rho_k \frac{C_a}{C} \quad (9.41)$$

unde:

R coeficient de întârziere,

$\rho_k$  densitatea medie a scheletului solid [ $ML^{-3}$ ],

$C_a$  coeficient de adsorbție mediu.

Valorile coeficientului de întârziere reprezintă o clasificare de forma:

- $R = 1$  procesul este fără adsorbție,
- $R > 1$  indică o întârziere a penei de poluant datorită adsorbției,
- $R < 1$  arată că pana poluantă depășește domeniul convectiv - dispersiv.

Prin substituție se obține:

$$\sigma_d = -\lambda C m_e R \quad (9.42)$$

## 9.2 Ecuațiile de transport.

### 9.2.1 Ecuații caracteristice.

Ecuațiile caracteristice se obțin pe baza conceptului de mediu continuu al mediu poros permițând utilizarea considerentelor matematice de derivată materială și teorema transportului. Ecuațiile se obțin prin metoda bilanțului masei de poluant într-un volum elementar de control [33,34,18].

În acest sens se vor utiliza următoarele elemente ale procesului de transport:

**i) Fluxul total al transportului poluanților:**

$$\vec{q}_t = \vec{q}_c + \vec{q}_D + \vec{q}_{Ds} \quad (9.43)$$

unde:

$\vec{q}_t$  fluxul total [ $ML^{-2}T^{-1}$ ],

$\vec{q}_c$  fluxul convectiv [ $ML^{-2}T^{-1}$ ],

$\vec{q}_D$  fluxul difuziv [ $ML^{-2}T^{-1}$ ],

$\vec{q}_{Ds}$  fluxul dispersiv [ $ML^{-2}T^{-1}$ ],

**ii) Masa de poluant din acvifer**

$$m_p = Cm_e + (1 - m_e)\rho_s C_a \quad (9.44)$$

care se poate exprima sub forma:

$$m_p = Cm_e R \quad (9.45)$$

**iii) Rata (viteza) de degradare**

$$\sigma_d = -\lambda Cm_e R \quad (9.46)$$

**iv) Modul de injecție:**

- injecție continuă de poluant printr-o suprafață A, care constituie frontiera unui volum elementar V, având normala exterioară  $\vec{n}$  :

$$\sigma_{ic} = \int_A \vec{n} \cdot \vec{q}_i C_i ds \quad (9.47)$$

unde:

$\sigma_{ic}$  rata de injecție continuă

$\vec{q}_i$  fluxul de poluant

$C_i$  concentrația de poluant

- injecție instantanee de poluant dintr-o sursă punctuală într-un volum elementar V:

$$\sigma_{ic} = \int_{V_i} m_i dV \quad (9.48)$$

unde:

$m_i$  reprezintă masa de poluant injectată.

Pentru obținerea ecuației de transport se utilizează principiul conservării masei scrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_i} m_p dV = \int_A \vec{n} \cdot \vec{q}_i C_i ds + \int_{V_i} (m_i + \sigma_d) dV \quad (9.49)$$

Primul termen al ecuației se poate explicita utilizând teorema transportului sub forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_i} m_p dV = \int_{V_i} \frac{\partial m_p}{\partial t} dV + \int_{A_i} \vec{n} \cdot \vec{q}_i dS \quad (9.50)$$

Prin înlocuire se obține:

$$\int_{V_i} \frac{\partial m_p}{\partial t} dV + \int_{A_i} \vec{n} \cdot \vec{q}_i dS = \int_{A_i} \vec{n} \cdot \vec{q}_i C_i ds + \int_{V_i} (m_i + \sigma_d) dV \quad (9.51)$$

Utilizând transformarea Gauss - Ostrogradski pentru integrale de suprafață se obține:

$$\int_{V_i} \left[ \frac{\partial m_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_i C_i) - m_i - \sigma_d \right] dV = 0 \quad (9.52)$$

Aplicând lema integralei nule se obține:

$$\frac{\partial m_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_i C_i) - m_i - \sigma_d = 0 \quad (9.53)$$

iar prin rearanjarea termenilor rezultă:

$$\frac{\partial m_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q}_i - \sigma_d = \begin{cases} m_i \\ \nabla \cdot \vec{q}_i C_i \\ 0 \end{cases} \quad (9.54)$$

Prin înlocuirea masei de poluant și a fluxului total se obține:

$$\frac{\partial}{\partial t} (Rm_e C) + \nabla \cdot (\vec{V}_a m_e C - m_e \vec{D} \cdot \nabla C) - \lambda C m_e R = \begin{cases} m_i \\ \nabla \cdot \vec{q}_i C_i \\ 0 \end{cases} \quad (9.55)$$

unde:

$\vec{D}$  este tensorul coeficient de difuzie-dispersie exprimat sub forma:

$$\vec{D} = D_{mp} \vec{I} + \vec{D}_{Ds} \quad (9.56)$$

### 9.2.1 Metode de rezolvare a ecuației de transport

Metodele de rezolvare ale ecuației de transport al poluanților sunt prezentate în Figura 9.6 [35].

#### *i) Metode analitice*

Metodele analitice de rezolvare a ecuației de transport au avantajul că oferă soluții exacte dar în același timp au marele dezavantaj că se pot aplica doar în unele situații prin considerarea unor ipoteze simplificatoare.

Oferă avantajul unui efort de calcul mic, rapiditatea soluțiilor și mod expeditiv de obținere al rezultatelor. Rezultatele obținute corespund unor tehnici de mediere și simplificare a fenomenului.

Soluțiile analitice pot servi la estimarea calitativă a transportului poluanților și reprezintă un instrument de verificare a soluțiilor obținute prin metode numerice, dacă domeniul mișcării se pretează la anumite simplificări.

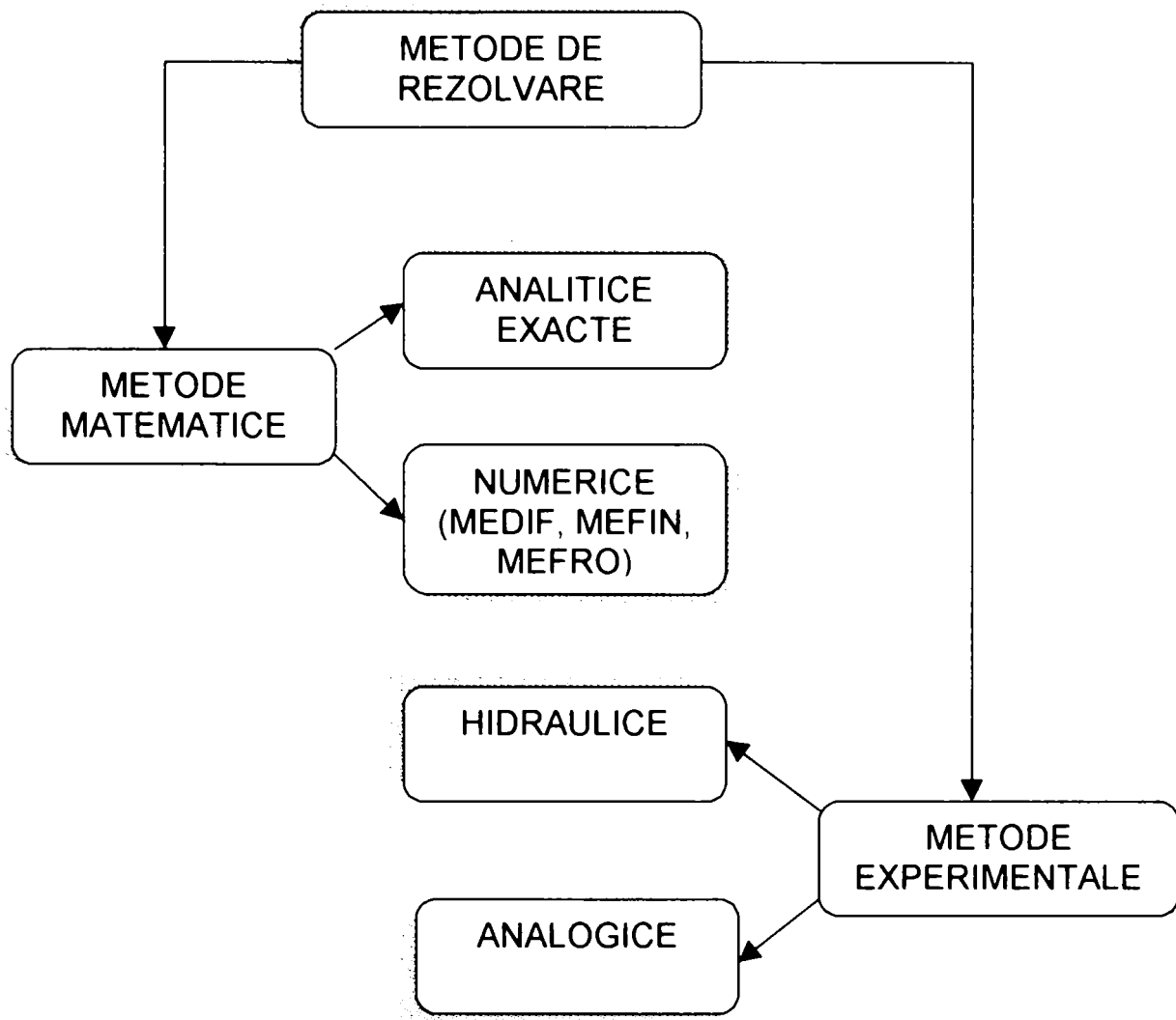


Figura. 9.6 Metode de rezolvare a ecuației de transport

Soluțiile uzuale utilizate consideră următoarele domenii de utilizare pentru cazul bidimensional:

**1. Acvifer infinit, câmp de viteze unidimensional  $V_a$ , injecție instantanee de masă  $M_0$**

$$C = C(x, y, t), \quad x, y \in (-\infty, +\infty) \quad (9.57)$$

Ecuția de transport se scrie sub forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{V_a}{R} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{R} \left( D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \lambda C = 0 \quad (9.58)$$

Condiții inițiale sunt de forma:

$$C(x, y, t = 0) = \frac{M_0}{mnR} \delta(x - 0, y - 0) \quad (9.59)$$

Condiții la limită sunt de forma:

$$C(r \rightarrow \pm\infty, t) = 0 \quad (9.60)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soluția analitică este dată de ecuația:

$$C(x, y, t) = \frac{M_0}{mnV_a t \sqrt{a_L a_T}} e^{-\frac{x^2}{4a_L a_T \frac{V_a t}{R}} - \frac{y^2}{4a_T \frac{V_a t}{R}} - \lambda t} \quad (9.61)$$

**2. Acvifer semiinfinit, câmp de viteze unidimensional  $V_a$ , injecție instantanee de masă  $M_0$**

$$C = C(x, y, t), \quad x, y \in [0, +\infty) \quad (9.62)$$

Ecuția de transport se scrie sub forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{V_a}{R} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{R} \left( D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - \lambda C = 0 \quad (9.63)$$

Condiții inițiale sunt de forma:

$$C(r, t = 0) = 0; \quad r > 0 \quad (9.64)$$

Condiții la limită sunt de forma:

$$C(x = 0, y = 0, t) = C_0$$

$$C(r \rightarrow +\infty, t) = 0, \quad t > 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9.65)$$

$$C_0 = \frac{M_0}{mnV_a}$$

Soluția analitică este dată de ecuația:

$$C(x, y, t) = \frac{M_0}{4mnV_a \sqrt{\pi a_T \gamma r^*}} e^{\frac{x - \gamma r^*}{2a_L}} \operatorname{erfc} \frac{r^* - \gamma \frac{V_a t}{R}}{2\sqrt{a_L \frac{V_a t}{R}}} \quad (9.66)$$

unde:

$$r^* = \sqrt{x^2 + \frac{a_L}{a_T} y^2} \quad (9.67)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + 4a_L \lambda \frac{R}{V_a}} \quad (9.68)$$

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (9.69)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{4\lambda R a_L}{V_a}} \quad (9.70)$$

**ii) Metode numerice de rezolvare a ecuației de transport**

Metodele numerice de rezolvare au avantajul că pot rezolva orice problemă de transport al poluanților dar au dezavantajul căci sunt metode aproximative. Utilizarea lor este strâns legată de performanțele sistemului de calcul (număr de ecuații posibile



de rezolvat), lucru care evoluează permanent prin modernizarea și perfecționarea calculatoarelor personale prin mărirea capacității și a vitezelor de calcul.

Avantajele metodelor numerice care în mod practic se concretizează prin programe de calcul destinate diverselor domenii de aplicare evidențiază următoarele:

- introducerea ușoară a datelor de intrare (parametrii, condiții inițiale și/sau la margine),
- aplicabilitate în cazul tuturor tipurilor de domenii (dimensiuni, forme, medii omogene sau neomogene) fapt imposibil în cazul metodelor analitice,
- obținerea rapidă a unor rezultate cu posibilitatea modificărilor de parametrii ulterioare în ipoteza unor noi calcule.
- obținerea unor rezultate grafice expeditiv.

Utilizarea metodelor numerice poate genera erori mari de calcul prin alegerea defectuasă a datelor de intrare în speță a condițiilor inițiale și/sau de margine.

Nr. crt.	Autor	Mediu	Conceptul ec. de transport	Număr de dimensiuni	Metoda numerică
1	2	3	4	5	6
1	Lai, Jurinak (1971)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
2	Rubin, James (1973)	Saturat	Bilanț masic	1	MEFIN
3	Valocchi (1981)	Saturat	Bilanț masic	2	MEFIN
4	Jannings (1982)	Saturat	Bilanț masic	1	MEFIN
5	Miller, Benson (1983)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
6	Kipp (1986)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
7	Grove, Stollenwerk (1984)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
8	Van Beck, Pal (1978)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
9	Grove, Wood (1979)	Saturat	Bilanț masic	1	MEDIF
10	Dance, Reardon (1983)	Saturat	Celule de amestec	1	MEDIF
11	Schultz, Reardor (1983)	Saturat	Celule de amestec - analitic	2	ANALITIC
12	Jurry (1978)	Nesaturat	Bilanț masic	1	MEDIF
13	Robbins (1980)	Nesaturat	Bilanț masic	1	MEDIF
14	Melamed (1977)	Nesaturat	Bilanț masic	1	MEDIF

*Tabelul 9.1 Tehnici numerice la modelul de transport*

Metodele analitice în funcție de tipul de formulare matematică utilizat constau în: metoda diferențelor finite (prin extindere metoda volumelor finite), metoda elementelor finite și metoda elementelor de frontieră. Acest lucru este prezentat în Figura 2.7.

Utilizarea unuia dintre cele trei metode este în strânsă legătură de programul de calcul utilizat respectiv de formularea matematică utilizată

Modul de aplicare al metodelor numerice de exemplu în cazul Metodei diferențelor finite a fost prezentat la paragraful 2.3.1, capitolul 2.

O sinteză a cuplării modelelor fizice și chimice în funcție de metodele numerice este prezentată în Tabelul 9.1.

Caracteristica actuală în dezvoltarea metodelor numerice de transport al poluanților în acvifere evidențiază combinarea metodelor numerice cu concepte teoretice cum ar fi:

- includerea unor variante analitice și statice în limita posibilităților,
- evitarea / limitarea dispersiei numerice prin utilizarea diferențelor finite în schema înainte, înapoi sau centrală în mod selectiv pentru aproximarea derivatelor de ordinul I și II,
- utilizarea aspectelor chimice (reacții chimice semnificative, concepte de echilibru chimic),
- cuplarea modelului de mișcare cu modelul de transport prin intermediul câmpului de viteze prin metoda pasului simplu sau dublu.

### 9.3 Interconectarea modelului de mișcare cu modelul de transport

Pentru rezolvarea modelului de transport sunt necesare câmpurile de viteză din domeniul modelat (respectiv nivelele piezometrice). Aceste rezultate se preiau din rezultatele modelului de mișcare a căror rezolvare s-a tratat în Capitolul 2.

Interconectarea celor două modele se efectuează conform schemei din Figura 9.7 [35].

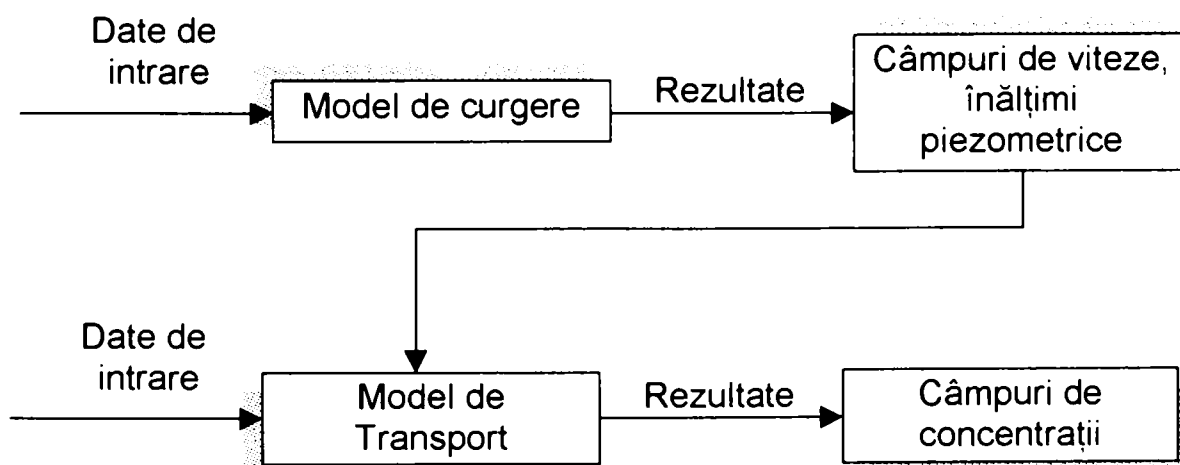


Figura 9.7 Interconectarea modelului de mișcare cu modelul de transport

## Cap. 10 STUDIU DE CAZ, CONCLUZII

Metodele de optimizare al utilizării apelor freatiche, prezentate în capitolele anterioare pot fi rezolvate prin intermediul unor programe de calcul.

Pentru rezolvarea problemelor specifice modelării acviferelor, modelării transportului poluanților precum și optimizării proceselor se pot utiliza o serie de software care la nivelul anului 2005 sunt prezentate în Anexa 1.

Problemele de optimizare sunt specifice aproape tuturor domeniilor tehnice, fapt ce face posibil ca, prin reformularea modelelor și adaptarea restricțiilor domeniului de aplicare, să se aplice și pentru alte domenii de activitate.

În acest sens în Anexa 2. sunt prezentate o listă de software tehnice la nivelul anului 2005, programe care modelează o serie de procese sau fenomene ce pot fi supuse optimizării.

### 10.1. Descrierea programului de optimizare MODOFC

În capitolele 1,2,...,9 s-au prezentat o serie de exemple de optimizare, a căror rezultate se pot obține prin intermediul programului MODOFC.

#### 1. Introducere

Programul MODOFC rezolvă problemele de proiectare pentru controlul dinamicii apei subterane. Elementele de proiectare considerate de MODOFC sunt locațiile și ratele de pompare ale puțurilor de extracție sau injecție în sistemul apei subterane. Programul folosește tehnici de optimizare pentru găsirea combinației optime a locațiilor și ratelor de pompare a puțurilor, necesare pentru satisfacerea criteriilor formulate de utilizator. Răspunsul sistemului apei subterane la control este modelat prin programul de simulare a dinamicii apei subterane MODFLOW [87,62]. Criteriile de proiectare pot fi: costurile operaționale și amplasamentul construcției, debitele și volumele pompate, nivelul apei, direcția de curgere și debitul acviferului.

MODOFC cuplează programul de simulare MODFLOW cu programe de optimizare. MODOFC utilizează fișierele datelor de intrare standard ale MODFLOW. Aproape toate elementele prezente în MODFLOW pot fi încorporate în MODOFC, inclusiv acvifere mărginite sau nemărginite, puțuri simple sau perforate (drenuri verticale), perioade de stres simple sau multiple. Un singur fișier de intrare, definit de utilizator, descrie criteriile de proiectare impuse sistemului apei subterane. După o rulare reușită, MODOFC furnizează locațiile și ratele de pompare optime, pe lângă alte informații care pot fi utilizate pentru o înțelegere mai bună a problemei.

Rezolvarea problemelor prin MODOFC se realizează în două etape. În prima etapă este rulat programul de simulare MODFLOW pentru aflarea răspunsului sistemului apei subterane la diferite strategii de pompare. În a doua etapă, se

folosesc tehnicile de optimizare pentru găsirea setului locațiilor și ratelor de pompare ale puțurilor care optimizează funcția obiectiv, care depinde de caracteristicile puțurilor și de ratele de pompare, astfel încât să fie satisfăcute criteriile de proiectare impuse sistemului de către utilizator. Acest capitol descrie pașii necesari în cea de a doua etapă. Descrierea utilizării programului MODFLOW nu este scopul acestui capitol.

Secțiunea 2 a acestui paragraf prezintă în mod concis posibilitățile programului MODOFC. Secțiunea 3 este o descriere detaliată a tipurilor de criterii de proiectare, forma funcțiilor obiectiv și a restricțiilor, care sunt disponibile în MODOFC. Această secțiune conține de asemenea detalii despre metodele de rezolvare a problemelor folosite de MODOFC.

Mai multe informații despre teoria modelelor de management ale apei subterane se pot găsi în capitolele 2-9 din lucrare.

## **2. Posibilitățile programului MODOFC**

### **Componentele posibile ale funcției obiectiv:**

- costuri de pompare (de exploatare) liniare,
- costuri de realizare a puțurilor.

### **Restricții posibile:**

- limitele superioare și inferioare ale nivelului piezometric,
- limitele superioare și inferioare ale ratei de pompare pentru fiecare puț, limitele superioare și inferioare ale pompării nete în fiecare perioadă de pompare,
- limitele diferenței de nivel piezometric între două puncte (sau gradientul),
- limitele diminuării debitului modelat de pachetul de programe STR,
- volumul total de apă injectată în acvifer ca fracțiune din volumul total extras,
- limitele numărului total de puțuri realizabile.

### **Interfete disponibile cu posibilitățile programului MODFLOW:**

- încorporarea programului MODFLOW – 96 versiunea 3.0,
- unități (acvifere) mărginite sau nemărginite,
- puțuri simple sau perforate (drenuri verticale),
- perioade simple sau multiple de stres,
- puțuri active cu o singură rată de pompare în orice combinație a perioadelor de stres,
- puțuri active cu rate diferite de pompare în orice combinație a perioadelor de stres,
- limitele nivelului piezometric, limitele diferenței de nivel piezometric sau zona de captare activă cu o singură valoare a restricției, în orice combinație a perioadelor de stres,
- limitele ratei de pompare pentru fiecare puț în parte, în fiecare perioadă de stres,
- limitele volumului total de apă pompată în fiecare perioadă de stres,
- specificarea fracțiunii de apă injectată în toate perioadele de stres.

### **Algoritmi de rezolvare utilizați:**

- algoritmul simplex pentru problemele liniare,
- programarea liniară secvențială pentru problemele neliniare,
- metoda „ramifică și mărginește” pentru problemele mixte cu variabile binare,

**Rezultate obținute:**

- locațiile puțurilor și ratele de pompare optime,
- restricțiile satisfăcute la egalitate (la limită) și „costurile din umbră”,
- analiza domeniului de variație,
- mesaje de eroare la introducerea datelor și în timpul rulării programului,

**Elemente de acuratețe și eficiență:**

- selectarea de către utilizator a nivelului de perturbare și posibilitatea alegerii acestui nivel ca variabil,
- dimensionare dinamică cuplată cu necesarul de memorie din MODFLOW,
- reținerea matricei de răspuns la soluții repetate,
- introducerea zonei de captare ca o serie de segmente liniare.

**3. Teorie și metodologie**

Pentru definirea problemei utilizatorul trebuie să specifice:

- 1) un set de locații candidate pentru puțuri și perioadele de timp posibile pentru operare;
- 2) costurile de pompare (exploatare), și opțional, costurile de realizare a fiecărui puț;
- 3) restricțiile impuse caracteristicilor hidraulice ale sistemului pe perioada operării (restricții asupra nivelelor piezometrice și ratelor de pompare).

Variabila de decizie primară în problema de optimizare rezolvată de MODOFC este rata de pompare a fiecărui puț candidat în fiecare perioadă de stres. Prin optimizare se selectează acele puțuri candidate care sunt cele mai eficiente în satisfacerea cerințelor problemei. Acelor puțuri candidate care nu sunt selectate, algoritmul de optimizare le asociază o rată de pompare zero.

Această secțiune descrie în detaliu funcțiile obiectiv și restricțiile care se pot folosi de utilizator pentru formularea problemei de optimizare. De asemenea, sunt prezentate metodele de rezolvare a formulărilor problemei rezultate.

**3.1 Simularea curgerii apei subterane**

MODOFC se ajută de programul MODFLOW pentru descrierea sistemului apei subterane. MODFLOW determină nivelul piezometric din ecuația guvernantă:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (10.1)$$

unde  $h$  este nivelul piezometric,  $K_x$  este conductivitatea hidraulică în direcția  $x$ ,  $K_y$  este conductivitatea hidraulică în direcția  $y$ ,  $K_z$  este conductivitatea hidraulică în direcția  $z$ ,  $W$  este fluxul în sau din sistem prin puțuri sau surse,  $S$  este acumularea. Un termen posibil de inclus în  $W$  este extracția sau injectia în acvifer prin puțuri.

Pentru scopurile programului MODOFC, relația (1) descrie legătura dintre nivelul piezometric în orice locație din model cu rata de pompare prin puț, sau:

$$h_{i,t} = h_{i,t}(\tilde{q}) \quad (10.2)$$

unde  $\tilde{q}$  reprezintă setul tuturor ratelor de injecție sau extracție în puțuri și perioada activă de stres, iar  $h_{i,t}$  este nivelul piezometric simulat care rezultă din stresul descris de  $\tilde{q}$ .

Indicele  $i$  reprezintă o locație particulară în domeniul modelului, iar indicele  $t$  indică sfârșitul perioadei de stres. Pentru problemele staționare indicele  $t$  poate fi ignorat. În acest caz, nivelul piezometric se obține pentru regimul staționar al apei subterane. Pentru dezvoltarea și calibrarea modelului apei subterane cu MODFLOW, utilizatorul trebuie să definească relația (2), care este utilizat de MODOFC.

### 3.2 Probleme liniare, mixte cu variabile binare, ale controlului curgerii optime

Criteriile de proiectare se pot încorpora în procedurile de optimizare prin selecția restricțiilor impuse nivelului piezometric, curenților de apă, pompării și realizării puțurilor.

#### 3.2.1 Restricții asupra nivelului piezometric

Un tip de restricții sunt cele impuse nivelului piezometric în fiecare locație pe parcursul perioadei de stres:

$$h_{i,t} \geq h_{i,t}^l \quad (10.3)$$

sau

$$h_{i,t} \leq h_{i,t}^u \quad (10.4)$$

unde  $h_{i,t}^l$  și  $h_{i,t}^u$  sunt limitele inferioară și superioară a nivelului piezometric în locația  $i$  la sfârșitul perioadei de stres  $t$ . Depinzând de direcția inegalității, acest tip de restricții pot fi utilizate pentru controlul pompării excesive (ecuația 3) sau a creșterii excesive a nivelului piezometric (ecuația 4).

Un alt tip de restricții sunt cele impuse diferenței de nivel piezometric între două puncte pe parcursul perioadei de stres:

$$h_{i_1,t} - h_{i_2,t} \geq d_{i,t} \quad (10.5)$$

unde  $d_{i,t}$  este limita specificată a diferenței de nivel piezometric între două puncte  $i_1$  și  $i_2$ , iar  $h_{i_1,t}$  și  $h_{i_2,t}$  sunt nivelele piezometrice în punctele respective la sfârșitul perioadei de stres  $t$ . Aceste restricții pot fi folosite pentru limitarea gradientului hidraulic, orizontal sau vertical.

#### 3.2.2 Restricții asupra pompării

Variabila de decizie primară în problema de optimizare rezolvată de MODOFC este rata de pompare într-o locație specificată. Această rată de pompare se poate referi fie la extracția apei, fie la injectarea apei în acvifer. În cele ce urmează, rata de pompare va fi reprezentată de  $q_{j,t}$ . Indicele  $j$  reprezintă locația specificată în domeniul MODFLOW.

Această locație poate fi a unui puț simplu sau o locație unde este amplasat un dren vertical (cu mai multe celule de aplicare a stresului). Indicele  $t$  indică perioada de stres în care rata de pompare este constantă. MODOFC permite, de asemenea,

variabilelor de decizie să includă grupuri de perioade de stres în care rata de pompare rămâne constantă.

Variabila  $q_{j,t}$  poate reprezenta fie extracție, fie reîncărcarea acviferului. Este implicit faptul că pot exista câteva perioade de stres în care puțul din locația  $j$  nu este disponibil pentru pompare. În aceste cazuri, valoarea lui  $q_{j,t}$  este zero sau restricția referitoare la locația  $j$  și stresul se consideră inactive. Când este nevoie, se definesc două variabile adiționale:  $q_{j,t}^e$ , reprezentând extracția, și  $q_{j,t}^i$ , reprezentând injecția în acvifer.

Toate variabilele de pompare se definesc ca fiind cantități pozitive, dar ambele necesită a fi convertite pentru a reprezenta direcția fluxului, așa cum cere programul MODFC.

### 1. Limitele pomării

Acest tip de restricții se aplică în mod obișnuit pentru limitarea ratei de extracție sau reîncărcare a acviferului. Forma restricției este:

$$0 \leq q_{j,t} \leq q_j^u \quad (10.6)$$

unde  $q_j^u$  este rata maximă realizabilă de injecție sau extracție în locația  $j$ . Pentru rezolvarea problemelor de locație, limita inferioară trebuie să fie zero, pentru a permite algoritmului de optimizare să specifice care locație nu a fost selectată.

### 2. Restricții asupra pomării nete

Cantitatea totală a apei pompate într-o perioadă de stres poate fi limitată. Aceste restricții au forma:

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e - \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \leq Q_t^u \quad (10.7)$$

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e - \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \geq Q_t^l \quad (10.8)$$

unde  $E$  este setul tuturor locațiilor puțurilor în care este permisă extracția,  $I$  este setul tuturor locațiilor puțurilor în care este permisă injecția,  $Q_t^u$  este cantitatea maximă de apă pompată în perioada de stres  $t$ ,  $Q_t^l$  este cantitatea minimă de apă pompată în perioada de stres  $t$ .

### 2. Restricții asupra balanței de reîncărcare a acviferului

Se poate menține un raport definit între extracție și reîncărcare. Aceste restricții au forma:

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e \geq a \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \quad (10.9)$$

$$\sum_{j \in I} q_{j,t}^i \geq b \sum_{j \in E} q_{j,t}^e \quad (10.10)$$

unde  $a$  și  $b$  reprezintă raportul de reîncărcare a acviferului. Aceste restricții necesită ca balanța reîncărcării acviferului dată de  $a$  și  $b$  să fie respectată în perioadele de stres în care se produce pomparea.

### 3.2.3 Variabile binare

Sistemului se pot impune restricții suplimentare prin folosirea variabilelor binare  $X_j$ . Acestea sunt variabile speciale care pot lua valoarea 0 sau 1. În MODOFC aceste variabile sunt utilizate pentru definirea stării fiecărui puț. Dacă  $X_j = 1$ , atunci puțul din locația candidată  $j$  este activ (deci puțul va fi realizat), Dacă  $X_j = 0$ , atunci puțul din locația candidată  $j$  nu este activ. Folosirea variabilelor binare necesită un volum de calcul mai mare pentru rezolvarea problemei (vezi secțiunea 3.2.6). Nu este recomandată folosirea variabilelor binare în problemele neliniare (vezi secțiunea 3.3).

### 1. Limită inferioară a pompării nenulă

Cu disponibilitatea folosirii variabilelor binare, pomparea poate fi limitată inferior la o valoare mai mare de zero. Un puț poate rezulta ca fiind inactiv, ori prin atribuirea unei rate de pompare zero, ori prin limitarea inferioară a pompării la o valoare pozitivă specificată. Deci, pomparea poate fi limitată inferior astfel:

$$q_{j,t} \geq q_j^l \quad (10.11a)$$

sau

$$q_{j,t} = 0 \quad (10.11b)$$

unde  $q_j^l$  este rata minimă de extracție sau injectare care poate fi obținută în locația  $j$ . Acest tip de restricții pot fi obținute prin folosirea variabilelor binare și prin înlocuirea relației (6) cu două restricții de forma:

$$q_{j,t} \leq q_j^u X_j \quad (10.12)$$

$$q_{j,t} \geq q_j^l X_j \quad (10.13)$$

Când  $X_j = 1$ , atunci aceste restricții acționează ca limite simple ale pompării, cu limita inferioară nenulă. Când  $X_j = 0$  (puțul nu este activ), atunci ambele limite devin nule, obligând rata de pompare să ia valoarea zero pentru puțul  $j$ . Aceste restricții servesc atât la limitarea pompării, cât și la definirea valorii variabilelor binare. Dacă rata de pompare este nenulă, atunci variabilele binare trebuie să ia valoarea 1.

### 2. Restricții asupra numărului puțurilor active

Variabilele binare pot fi folosite pentru limitarea numărului puțurilor active. Suma tuturor variabilelor binare asociate puțurilor active dă direct numărul de puțuri necesare:

$$\sum_{j \in E \cup I} X_j \leq N^u \quad (10.14a)$$

și

$$\sum_{j \in E \cup I} X_j \geq N^l \quad (10.14b)$$

unde  $N^u$  și  $N^l$  sunt limitele superioară și inferioară a numărului de puțuri candidate care vor fi utilizate.

### 3. Restricții asupra diminuării debitului acviferului



Când pachetul STR (Prudic, 1989) este inclus în simulare, pot fi impuse restricții asupra modificării debitului față de o situație inițială. Aceste restricții au forma:

$$F_{k,t}^0 - F_{k,t}(\tilde{q}) \leq D_{k,t}^u \quad (10.15a)$$

$$F_{k,t}^0 - F_{k,t}(\tilde{q}) \geq D_{k,t}^l \quad (10.15b)$$

unde  $F_{k,t}(\tilde{q})$  este debitul acviferului simulat rezultat sub acțiunea stresului  $\tilde{q}$ . Indicele  $k$  indică o secțiune transversală particulară a acviferului, iar  $t$  indică perioada de stres.  $F_{k,t}^0$  este debitul la sfârșitul perioadei de stres  $t$ , în situația în care nu am avea pompare. Această valoare este calculată de programul de simulare. Diferențele din membrul drept al relațiilor (15a) și (15b) reprezintă diminuarea debitului acviferului în locația  $k$  și timpul  $t$ , care rezultă datorită pomparei. membrul drept al relațiilor (15a) și (15b) reprezintă diminuarea permisă a debitului acviferului, definită de utilizator.

### 3.2.4 Funcții obiectiv

MODOFc caută să satisfacă restricțiile impuse nivelului piezometric și ratei de pompare, minimizând în același timp funcția obiectiv definită de utilizator. Sunt disponibile două forme de bază ale funcției obiectiv: o funcție liniară de volumele pompate și o funcție liniară de numărul puțurilor active. Aceste forme ale funcției obiectiv pot fi utilizate pentru reprezentarea costurilor operaționale (de exploatare) sau volumelor extrase și a costurilor de construcție (de realizare) a puțurilor.

#### 1. Costurile operaționale sau volumele extrase

Prima formă a funcției obiectiv este o sumă ponderată a ratelor de pompare, dată astfel:

$$\sum_{j \in E \cup I} \sum_{t=1}^T \beta_j q_{j,t} \Delta t_t \quad (10.16)$$

unde  $\beta_j$  este costul pomparei unui volum unitar de apă în locația  $j$ ,  $\Delta t_t$  este lungimea perioadei de stres  $t$ . Deci, relația (16) reprezintă costul total de pompare. Utilizarea acestei funcții de cost presupune că costurile de operare (exploatare) variază liniar cu volumul pompat. cantitatea  $\Delta t_t$  este introdus automat în (16) de către MODOFc folosind variabila PERLEN din MODFLOW. Întrucât volumele de apă extrase sau injectate sunt definite a fi pozitive, costurile asociate lor trebuie să fie de asemenea pozitive, deci  $\beta_j$  trebuie să fie pozitive. Pentru problemele în care obiectivul este maximizarea extracției sau injectiei, sunt folosite  $\beta_j$  negative.

2. Costuri de construcție (de realizare a puțurilor)

A doua formă a funcției obiectiv este o sumă ponderată a variabilelor binare, sub forma:

$$\sum_{j \in E \cup I} \kappa_j X_j \quad (10.17)$$

unde  $\kappa_j$  este un coeficient. Dacă  $\kappa_j$  este definit ca costul de realizare a puțului din locația candidată  $j$ , atunci (17) reprezintă costul realizării tuturor puțurilor.

Funcțiile obiectiv (16) și (17) pot fi adunate, rezultând o funcție obiectiv care include costurile de operare și construcție, așa cum se va arăta mai jos.

3.2.5 Formularea completă a problemei disponibilă în MODFC

Combinând toate relațiile de mai înainte și scriind acestea pentru fiecare locație și perioadă de stres, rezultă următoarea formulare a problemei (ecuațiile 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16 și 17):

$$\text{minimizeaza } \sum_{j \in E \cup I} \left( \sum_{t=1}^T \beta_j q_{j,t} \Delta t_t + \kappa_j X_j \right) \quad (10.18)$$

astfel încât:

$$h_{i,t} \geq h'_{i,t} \quad i \in L, t = 1, \dots, T \quad (10.19)$$

$$h_{i,t} \leq h^u_{i,t} \quad i \in U, t = 1, \dots, T \quad (10.20)$$

$$h_{i_1,t} - h_{i_2,t} \geq d_{i,t} \quad i \in D, t = 1, \dots, T \quad (10.21)$$

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e - \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \leq Q_t^u \quad t = 1, \dots, T \quad (10.22)$$

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e - \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \geq Q_t^l \quad t = 1, \dots, T \quad (10.23)$$

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^e \geq a \sum_{j \in I} q_{j,t}^i \quad t = 1, \dots, T \quad (10.24)$$

$$\sum_{j \in E} q_{j,t}^i \geq b \sum_{j \in I} q_{j,t}^e \quad t = 1, \dots, T \quad (10.25)$$

$$q_{j,t} \leq q_j^u X_j \quad j \in E \cup I, t = 1, \dots, T \quad (10.26)$$

$$q_{j,t} \geq q_j^l X_j \quad j \in E \cup I, t = 1, \dots, T \quad (10.27)$$

$$\sum_{j \in E \cup I} X_j \leq N^u \quad (10.28a)$$

$$\sum_{j \in E \cup I} X_j \geq N^l \quad (10.28b)$$

$$X_j \text{ este binar} \quad j \in E \cup I \quad (10.29)$$

$$F_{k,t}^0 - F_{k,t}(\tilde{q}) \leq D_{k,t}^u \quad k \in K, t = 1, \dots, T \quad (10.30a)$$

$$F_{k,t}^0 - F_{k,t}(\tilde{q}) \geq D_{k,t}^l \quad k \in K, t = 1, \dots, T \quad (10.30b)$$

unde U este setul locațiilor în care nivelul piezometric este limitat superior, L este setul locațiilor în care nivelul piezometric este limitat inferior, D este setul locațiilor în care sunt impuse restricții asupra diferențelor dintre nivelele piezometrice, K este

setul locațiilor în care sunt impuse restricții asupra debitului acviferului,  $T$  este numărul total al perioadelor de stres.

Multe din restricțiile descrise în secțiunile de mai înainte sunt aplicate separat în fiecare perioadă de stres una sau mai multor locații candidate. Domeniul de variație a indicilor pentru fiecare restricție sunt indicate în partea dreaptă a fiecărei restricții. Se subînțelege că restricțiile nu necesită a fi active pentru toate combinațiile posibile a perioadelor de stres și locațiilor candidate. Dacă nu sunt utilizate variabile binare, atunci termenul secund din (18) cade, restricțiile (28) și (29) sunt eliminate, variabilele binare din (26) și (27) iau valoarea 1, iar limita inferioară a pompării,  $q_{j,t}^l$ , în restricția (27) trebuie să fie zero.

### 3.2.6 Rezolvarea problemelor liniare a controlului curgerii optime

Dacă restricția (30) nu este utilizată și problema simulată este nemărginită, atunci formularea rezultată este liniară. Ea poate fi transformată într-un program liniar mixt cu variabile binare și se poate rezolva folosind algoritmul simplex în combinație cu metoda „ramifică și mărginește”. Primul pas pentru transformare este aplicarea seriei Taylor cu prima derivată pentru stabilirea relației dintre nivelul piezometric și pompare, descrisă de (2). nivelul piezometric la un moment dat,  $\hat{t}$ , depinde de ratele de pompare din toate locațiile pe toată perioada stresului  $\hat{t}$  și de toate perioadele de stres anterioare. Relația este:

$$h_{i,\hat{t}} = h_{i,\hat{t}}^0 + \sum_{t=1}^{\hat{t}} \sum_{j \in E \cup I} \frac{\partial h_{i,\hat{t}}}{\partial q_{j,t}} q_{j,t} + \text{eroarea} \quad (10.31)$$

unde  $h_{i,\hat{t}}^0$  este nivelul piezometric inițial în locația  $i$  în perioada  $\hat{t}$ , fără pompare, iar eroarea este suma tuturor termenilor eliminați din seria Taylor. Derivatele din (31) se referă la coeficienții de răspuns.

Pentru problemele apei subterane, în care grosimea stratului saturat este fixată (acvifere mărginite) sau această grosime variază foarte puțin (acvifere nemărginite cu o scădere lentă a nivelului apei), analizarea relației (1) arată că relația dintre  $h$  și  $q$  este liniară. În acest caz, eroarea din (31) este nulă, iar aproximarea cu seria Taylor cu derivate de ordinul I este exactă.

MODFC determină valoarea lui  $\frac{\partial h_{i,\hat{t}}}{\partial q_{j,t}}$  prin metode perturbării. Această metodă

implică aproximarea derivatei cu diferențe finite. MODFLOW folosește pentru simularea pompării din fiecare puț,  $j$ , un pas de calcul de la valoarea de bază specificată de utilizator. Coeficientul de răspuns este calculat prin măsurarea schimbării nivelului piezometric în fiecare locație  $i$  și perioadă de stres  $\hat{t}$ , care rezultă din majorarea ratei de pompare. Cu valorile  $\frac{\partial h_{i,\hat{t}}}{\partial q_{j,t}}$  calculate și cu ecuația (31), poate fi

calculat nivelul piezometric în orice locație și perioadă de stres, ca o funcție de rata de pompare, fără a fi nevoie de simularea curgerii. Deci, coeficienții de răspuns, odată calculați, definesc complet legătura dintre programul de simulare și optimizare.

1. Forma standard a problemei mixte cu variabile binare

Prin înlocuirea lui (31) în toate restricțiile care depind de nivelul piezometric, exclusiv în restricția asupra debitului acviferului, care va fi descrisă în secțiunea 3.3, formularea dată de relațiile (18) – (29) poate fi scrisă sub forma matriceală standard:

$$\text{minimize } \tilde{c}'\tilde{x} + \tilde{d}'\tilde{y} \quad (32)$$

$$\text{minimizează } \tilde{c}'\tilde{x} + \tilde{d}'\tilde{y} \quad (10.32)$$

astfel încât

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{Bmatrix} = \tilde{b} \quad (10.33)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \quad (10.34)$$

$$y_j \text{ este binar} \quad \forall j \quad (10.35)$$

unde A este matricea care depinde de coeficienții de răspuns determinați de ecuația (31) și de restricțiile definite de ecuațiile (22) – (28),  $\tilde{b}$  este vectorul membrilor dreپتي ai restricțiilor (19) – (28),  $\tilde{c}$  este vectorul coeficienților de cost ai pompării,  $\tilde{d}$  este vectorul costurilor de construcție,  $\tilde{x}$  este vectorul ratelor de pompare sporite de variabilele adiționale și suplimentare, care sunt folosite pentru transformarea inegalităților în egalități, iar  $\tilde{y}$  este vectorul variabilelor binare. Dacă nu sunt utilizate variabile binare, atunci vectorul  $\tilde{y}$  dispare și problema de optimizare definită de (32) – (34) este liniară și poate fi rezolvată prin algoritmul simplex.

2. Rezolvarea problemelor mixte cu variabile binare

Dacă sunt utilizate variabile binare, atunci problema de optimizare definită de (32) – (34) este un program liniar mixt binar, care se poate rezolva cu metoda „ramifică și mărginește”. Această metodă rezolvă o serie de programe liniare în cadrul căreia fiecare variabilă binară este forțată să ia o valoare binară sau să varieze între 0 și 1 (relaxată). Compararea soluțiilor fiecărui program liniar conduce la soluția problemei, fără a fi necesară verificarea tuturor combinațiilor posibile ale valorilor variabilelor binare (Hillier și Lieberman, 1995; Nemhauser și Wolsey, 1988).

3.3 Probleme neliniare de control a curgerii optime

În programul MODFC versiunea 2.3, răspunsul neliniar al restricțiilor la pompare poate apărea în cazul în care acviferul este nemărginit sau când e limitată diminuarea debitului acviferului. Pentru acviferele nemărginite, grosimea stratului saturat variază cu pomparea. Această modificare a grosimii stratului saturat duce la modificarea transmisivității fiecărui strat, care va influența scăderea nivelului apei.

Acest feedback produce o relație neliniară între pompare și nivelul piezometric în acviferele nemărginite. Pentru problemele în care e limitată diminuarea debitului acviferului, neliniaritatea dată de soluțiile pentru stadiul curgerii, infiltrație și debit în pachetul STR, conduce la răspunsul neliniar al debitului acviferului la pompare. prezența acestei neliniarități necesită utilizarea unui algoritm iterativ pentru rezolvare.

### 3.3.1 Algoritm de rezolvare pentru probleme neliniare

Observația cheie utilizată în rezolvarea problemelor liniare de control al curgerii este că termenul eroare din seria Taylor (31) este zero. Acest lucru nu mai este valabil în cazul acviferelor nemărginite. Analog, aproximarea răspunsului debitului acviferului la pompare cu derivate de ordinul I poate conține ceva erori. În aceste cazuri, MODOFc abordează problema presupunând că aproximarea cu prima derivată este precisă în vecinătatea punctului soluției curente. Seria Taylor poate fi rescrisă astfel:

$$h_{i,t}^{k+1} = h_{i,t}^k + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in E, j \neq i} \frac{\partial h_{i,t}}{\partial q_{j,t}} (q_{j,t}^{k+1} - q_{j,t}^k) + \text{eroarea} \quad (10.36)$$

unde indicele k reprezintă iterația, nivelul piezometric  $h^k$  este dat de rata de pompare  $q^k$ . Pentru valoarea lui  $q^{k+1}$ , care este apropiată de  $q^k$ , eroarea în această aproximare este mică, valoarea lui  $h^{k+1}$  dată de ecuația (36) este relativ precisă. Deoarece nivelul piezometric variază neliniar cu pomparea, derivatele (referitoare la coeficienții de răspuns) din (36) se schimbă cu modificarea ratei de pompare. Coeficienții de răspuns a debitului acviferului la pompare se calculează în mod analog.

#### 1. Algoritm de secvențializare liniară

Considerând formularea problemei neliniare de optimizare redusă la forma matriceală dată de (32) – (34), restricțiile pot fi aranjate sub forma:

$$\mathbf{A}_k \{\tilde{x}_{k-1} - \tilde{x}_k\} = \tilde{b}_k \quad (10.37)$$

unde matricea  $\mathbf{A}_k$  depinde de coeficienții de răspuns și de alte restricții. Indicele k indică rata de pompare care este utilizată pentru calcularea coeficienților de răspuns. Pentru implementarea acestei metode în MODOFc, ecuația (37) se rescrie astfel:

$$\mathbf{A}_k \{\tilde{x}_{k-1}\} = \tilde{b}_k + \mathbf{A}_k \{\tilde{x}_k\} \quad (10.38)$$

$$\mathbf{A}_k \{\tilde{x}_{k-1}\} = \tilde{b}'_k \quad (10.39)$$

unde  $\tilde{b}_k$  este membrul drept ajustat rata de pompare din iterația anterioară (Riefler și Ahlfeld, 1996). Ecuația (39) este de forma unui program liniar și poate fi rezolvată cu algoritmul simplex.

Deoarece coeficienții de răspuns (și matricea coeficienților) depind de ratele de pompare, trebuie făcute iterații pentru obținerea soluțiilor. În fiecare iterație este obținută o soluție aproximativă de pompare prin rezolvarea ecuației (39). Această soluție aproximativă este apoi folosită pentru recalcularea coeficienților de răspuns și pentru reconstrucția lui  $\mathbf{A}_k$ . Rezolvarea ecuației (39) cu noua matrice a coeficienților de răspuns se obține o nouă soluție aproximativă a ratei de pompare. Iterațiile se repetă până când diferența dintre soluțiile a două iterații consecutive nu diferă prea mult. Iterația converge, diferențele dintre soluțiile de pompare descresc, iar aproximarea din (36) devine destul de precisă.

## 2. Algoritm de control: nivelul de bază de pompare și nivelul de perturbare

În fiecare iterație a algoritmului de secvențializare liniară matricea de răspuns este recalculată utilizând aproximarea prin diferențe finite de ordinul I. Această aproximare necesită specificarea nivelului de bază a pomparei și a nivelului perturbării.

Alegerea nivelului următor a pomparei se face utilizând cea mai recentă soluție optimă care aproximează problema. Pentru cazul nemărginit, e utilizată o abordare alternativă care încearcă să explice erorile apărute în calcul scăderii nivelului apei. Această abordare este descrisă în detaliu în secțiunea 3.3.2.2.

Trebuie de asemenea specificat nivelul perturbării, valoarea lui poate influența precizia valorilor coeficienților de răspuns. În general, calculul perturbării necesită o mică majorare a ratei de pompare, pentru obținerea unei precizii satisfăcătoare. În orice caz, perturbația trebuie să fie destul de mare pentru a produce o modificare a câtorva zecimale semnificative ale valorilor coeficienților de răspuns. Dacă perturbația este prea mică, erorile de rotunjire din calculul nivelului piezometric limitează precizia valorilor coeficienților de răspuns. Numărul zecimalelor semnificative din matricea de răspuns este de asemenea controlată de criteriul de convergență ales pentru rezolvarea problemei în pachetul MODFLOW.

Riefler și Ahlfeld (1996), în urma unui calcul laborios, au arătat că dacă nivelul perturbației este foarte mare, atunci MODFLOW poate da ca rezultat secarea acviferului în perioada calculului perturbației. Dacă perturbația este prea mică, atunci aproximarea liniară obținută poate subestima scăderea nivelului apei, care poate fi obținută într-o singură iterație. În fiecare din aceste cazuri, MODFLOW poate da o problemă nerealizabilă, cu toate că poate exista soluție. MODFLOW permite utilizatorului să controleze mărimea perturbației. Problemele cu soluții nerealizabile trebuie examinate prin considerarea nivelelor diferite de perturbație. Mărimea perturbației poate afecta viteza de convergență. Impactul mărimii perturbației în cazul în care e limitată diminuarea debitului acviferului a fost examinată de Minihane și Ahlfeld (2002). MODFLOW permite utilizatorului să pornească cu o perturbare mare, care apoi poate fi redusă printr-un factor de scalare în timpul iterațiilor.

## 3. Limitările rezolvării problemelor neliniare

MODFLOW caută minimul local în domeniul de pompare. Pentru probleme cu un domeniu mare, spațiul soluțiilor poate fi neconvex. Deci, nu există garanții că minimul local găsit este și minimul global. Pentru probleme neliniare complexe, MODFLOW poate să nu fie în stare să găsească o soluție, chiar dacă există una. Chiar dacă MODFLOW nu găsește soluție pentru problema nemărginită, problema poate să aibă soluții realizabile.

Nu este recomandată rezolvarea problemelor neliniare cu variabile binare. Prezența variabilelor binare crește dificultatea căutării minimului local, poate conduce la soluții suboptimale sau la rezultate false.

Alte legături neliniare între pompare și nivel piezometric poate apărea prin rularea programului MODFLOW. Aceste includ cazurile în care nivelul piezometric

scade sub nivelul fundului albiei râului, a cotei drenului sau se schimbă caracteristicile evapotranspirației. MODOFC nu este capabil să rezolve probleme cu astfel de neliniarități.

### 3.3.2 Evitarea secării acviferului nemărginit pe durata iterațiilor

Adaptarea soluțiilor date de MODFLOW care conțin secarea acviferului este dificilă din mai multe motive. Odată ce s-a produs secarea într-o celulă, regimul scurgerii se schimbă brusc și produce o relație neliniară (posibil discontinuă) între pompare și nivel piezometric. MODFLOW poate avea dificultăți la reumezirea celulei secate. MODOFC este astfel formulat încât să evite secarea celulelor.

În cursul aplicării algoritmului este posibil ca soluția aproximativă de pompare calculată prin iterații să ducă la secarea unei porțiuni din acvifer, atunci soluția de pompare este utilizată pentru recalcularea coeficienților de răspuns. Din cauza naturii aproximative a coeficienților de răspuns, soluția aproximativă de pompare găsită în fiecare iterație să nu fie fizic semnificativă. Numai soluția obținută prin convergența iterațiilor se consideră semnificativă.

#### 1. Limitarea inferioară a pomparei în puțuri

Pentru prevenirea selectării soluțiilor false care conduc la secarea acviferului și pentru ajutarea convergenței algoritmului, MODOFC setează automat restricțiile asupra limitei inferioare a nivelului piezometric în fiecare puț de extracție în acviferul nemărginit. Acest lucru se face cu ajutorul parametrului BMIN. Dacă pomparea în puțurile candidate poate cauza secarea acviferului în orice punct, atunci utilizatorul poate seta manual limita inferioară a nivelului piezometric în zona sensibilă. În aceste circumstanțe se poate întâmpla ca MODOFC să raporteze că problema nu are soluții, adică este nerealizabilă. Când problema este nerealizabilă, este posibil ca restricțiile care determină incompatibilitatea problemei să fie cele impuse pentru a preveni secarea. În acest caz, problema are soluții, dacă secarea este permisă.

#### 2. Ajustarea ratelor de pompare

O ajustare suplimentară a ratelor de pompare date de soluția aproximativă este necesară deseori pentru prevenirea secării acviferului. Dacă o soluție aproximativă de pompare, obținută prin rezolvarea ecuației (39), face ca nivelul piezometric să coboare la limita inferioară fixată pentru a preveni secarea în acviferul considerat mărginit, atunci aceeași soluție aproximativă va face ca să se producă secarea în câteva zone ale aceluiași acvifer, considerat nemărginit. Acesta se produce din cauză că scăderea nivelului apei reduce transmisivitatea ( $hK$ ) în acviferul nemărginit, nivelul piezometric scade cu creșterea extracției. Astfel, aproximarea acviferului nemărginit ca fiind mărginit tinde să supraevalueze pomparea, rezultând o scădere excesivă a nivelului apei, ceea ce poate duce la secarea acviferului. Pentru a preveni acest lucru, este utilizat un factor de reducere a soluției aproximative de pompare:

$$\Delta q_{j,t}^{k-1} = \alpha_{j,t}^k \Delta q_{j,t}^{est} \quad (10.40)$$

unde

$$\Delta q_{j,t}^{k+1} = q_{j,t}^{k+1} - q_{j,t}^k \quad (10.41)$$

$$\Delta q_{j,t}^{est} = q_{j,t}^{est} - q_{j,t}^k \quad (10.42)$$

unde  $\alpha_{j,t}^k$  este factorul de reducere pentru puțul  $j$ ,  $t$  în iterația curentă,  $q_{j,t}^{k+1}$  este pomparea redusă pentru puțul  $j$  în iterația curentă,  $q_{j,t}^k$  este rata de pompare pentru puțul  $j, t$  în iterația precedentă, iar  $q_{j,t}^{est}$  este rata optimă de pompare calculată pentru puțul  $j, t$  cu relația (39) în iterația curentă.

Combinând acești termeni rezultă expresia pentru revizuirea soluției aproximative de pompare pentru evitarea secării acviferului:

$$q_{j,t}^{k+1} = (1 - \alpha_{j,t}^k) q_{j,t}^k + \alpha_{j,t}^k q_{j,t}^{est} \quad (10.43)$$

Pentru determinarea lui  $\alpha$  se pot folosi mai multe metode, criteriile necesare sunt: (1) prevenirea secării acviferului și (2) soluțiile iterațiilor să convergă spre soluția reală. MODOFIC calculează un  $\alpha$  pentru fiecare puț, în fiecare iterație, bazându-se pe ecuația lui Theim. Acesta presupune că rata de pompare necesară pentru obținerea unei scăderi date a nivelului piezometric este proporțională cu grosimea stratului saturat,  $b$ , a acviferului. Astfel, creșterea ratei de pompare poate să fie micșorată pentru estimarea modificării lui  $b$ :

$$\alpha_{j,t}^k = \frac{b_{j,t}^{est}}{b_{j,t}^k} = \frac{h_{j,t}^{est} - m_j}{h_{j,t}^k - m_j} \quad (10.44)$$

unde  $m_j$  este nivelul fundului stratului acvifer pentru puțul  $j, t$ . Nivelul piezometric rezultat din aplicarea soluției aproximative de pompare poate fi estimat cu matricea de răspuns astfel:

$$h_{j,t}^{est} \approx h_{j,t}^k + \tilde{a}_{j,t}^k (\tilde{q}^{est} - \tilde{q}^k) \quad (10.45)$$

unde  $\tilde{a}_{j,t}^k$  este rândul asociat cu restricția asupra limitei minime a nivelului piezometric pentru puțul  $j, t$  în matricea de răspuns pentru iterația curentă.

Această ecuație este aproximativă, deoarece ea estimează răspunsul acviferului mărginit, nu a unui acvifer nemărginit. Combinând ecuațiile (44) și (45) rezultă:

$$\alpha_{j,t}^k = \frac{h_{j,t}^k - m_j + \tilde{a}_{j,t}^k (\tilde{q}^{est} - \tilde{q}^k)}{h_{j,t}^k - m_j} \quad (10.46)$$

Ecuațiile (43) și (46) sunt folosite în combinație pentru reducerea soluției aproximative de pompare în fiecare iterație. Aceasta servește la prevederea secării false și permite algoritmului să convergă spre soluția reală a problemei.

## 10.2. Studiu de caz

Zona studiată, cu o suprafață de 17.500 ha, este situată la sud vest de municipiul Timișoara [20]. Zona se întinde în partea de nord până la limita localității Becicherecu Mic, la sud dincolo de limita localității Cenei, la vest până la limita



localității Cărpiniș iar la est până în apropierea localității Răuți așa cum este prezentat în Figura 11.1 din Anexa 3.

### *1. Geologia, Geomorfologia și Hidrogeologia*

Din punct de vedere geomorfologic zona studiată face parte din Câmpia de Vest ce face parte din Câmpia Panonică. Alitudinea terenului variază între 77 - 84 m de la sud la nord. Tipul morfogenetic căruia îi aparține zona studiată este Titu, ce se caracterizează prin văi puțin adânci, albiu părăsite și terase îngropate acoperite parțial cu depozite loessoide - deluviale.

Relieful din extremitatea sudică a Câmpiei subcolinare a Vingăi este ușor ondulat datorită microreliefului de crovuri mulat pe un relief preexistent. Constituția geologică de suprafață aparține cuaternarului fiind reprezentat prin argilă roșcată, depozite loessoide și aluviale recente luncilor, regiunea fiind acoperită complet de cuaternar.

Argila roșcată apare pe interfluviul dintre valea Beregsăului și Iercici datorită proceselor deluvial - proluviale. Argila roșcată are diseminate în masa sa elemente grosiere în special concrețiuni calcaroase, grosimea stratului variind între 3 și 10 m, strat ce aparține Pleistocenului superior.

Depozitele loessoide se prezintă pe mai multe nivele, loessul propriu zis formează nivelele inferioare Pleistocenului superior, grosimea s-a variind între limitele de 5 - 12 m. Nivelele superioare sunt formate din depozite loessoide aparținând unor tipuri diferite în funcție de compoziția granulometrică și au grosimi cuprinse între 8 și 20 m. Acestea sunt formate în general din prafuri nisipoase, gălbui macroporice cu concrețiuni calcaroase.

Holostocenului superior i s-au atribuit aluviunile actuale reprezentate prin pietrișuri, nisipuri și argile. Grosimea acestora este cuprinsă între limitele de 8 -10 m.

Principalul curs de apă din zona studiată este canalul Bega Veche. Zona studiată se caracterizează prin deficit de umiditate iar apele freactice sunt slab drenate. În urma observațiilor efectuate la forajele existente în zonă s-a stabilit că primul strat freatic este sub presiune, iar în tavanul acestuia se află cantonat stratul freatic sezonier cu nivel liber. Hidroizohipsele și hidroizofreate indică direcția de mișcare a curentului subteran de la NE la SV conform pantei reliefului cât și orientări generale a văilor din zonă. Nivelul hidostatic al stratului fratic sub presiune se află la o adâncime medie de 1,84 m la nord și 2,32 m la sud, gradientul hidraulic al acestuia fiind de 0,03 %.

În zona studiată se găsesc un număr de 4 foraje ce aparțin R.A.I.F. Timișoara în care se urmărește dinamica apei sezoniere cantonat în strtul rgilo prăfos din tavanul freatic. Forajele au adâncimea de 5 m și au parametrii prezentați în tabelul 10.1.

De asemenea în zona studiată se găsesc un număr de 8 foraje ce aparțin R.A. Apele Române Banat. Aceste foraje urmăresc dinamica apei subterane din primul orizont acvifer. Parametrii acestor foraje sunt prezentate în Tabelul 10.2.

Forajul	Diametrul (mm)	Adâncimea (m)	Cotă teren (m)	NH <sub>max</sub> (m)	NH <sub>min</sub> (m)	NH <sub>med</sub> (m)
F3	100	5	81,28	79,43	78,96	79,21
F4	100	5	80,19	78,83	78,44	78,65
F5	100	5	79,57	77,32	76,94	77,13
F6	100	5	78,75	77,10	76,69	76,91

Tabelul 10.1

Forajul	Diametrul (mm)	Cotă teren (m)	Adâncime strat acvifer (m)	Adâncime acoperiș (m)	Grosime strat acvifer (m)	H (m)
F31	200	79,05	17,7	9,8	1,9	9,73
F32	200	79,24	12,3	8,3	4,0	10,16
F33	200	78,10	16,8	8,6	8,2	13,40
F34	200	78,09	15,2	14,4	0,8	12,55
F35	200	78,83	18,2	16,5	1,7	13,60
F51	200	77,68	16,6	15,4	1,2	15,45
F61	200	79,72	8,5	6,1	2,4	6,47
F71	200	78,03	14,3	8,3	6,0	11,50

Tabelul 10.2

Climatul zonei este temperat continental, moderat, ca rezultat al suprapunerii circulației maselor de aer atlantic cu invaziile de aer mediteranian și adriatic. Direcția predominantă a vântului este de la V la SV. Media anuală a temperaturi aerului este 10,7 °C. Precipitația medie multianuală este de 517,0 mm. Annual cad precipitații în 120 -130 zile mai frecvent la sfârșitul primăverii (lunile mai, iunie) și spre începutul iernii (lunile octombrie - decembrie).

## 2. Sursa de poluare

Conform programelor de dezvoltare ale agriculturii, până în anul 1985 erau prevăzute a se executa 95 de amenajări de distribuție a apelor uzate provenite de la complexele de creștere și îngrășare a porcilor din România. Suprafața de teren amenajată pentru distribuția în câmp al apelor uzate a fost de 62.000 ha. Scopul amenajărilor a fost protejarea mediului din zona limitrofă complexelor de porci prin utilizarea solului ca sistem epurator.

Capacitatea de producție anuală ale celor 12 complexe porcine din județul Timiș a fost de 550.800 porci/an la nivelul anului 1988. Volumul de apă uzată evacuată a fost de 3.621.500 mc anual, capacitatea bazinelor de stocare fiind de 1.814.000 mc iar suprafața amenajată fiind de 5.208 ha.

În zona studiată se găsește Complexul porcine de la COMPTIM Beregsău ce avea o capacitate de 60.500 porci/an. Volumul de apă uzată evacuată a fost de

330.000 mc anual, capacitatea bazinelor de stocare fiind de 165.000 mc iar suprafața amenajată fiind de 466 ha.

Apa utilizată în complex este de bună calitate fiind captată din puțuri forate de adâncime (adâncimi de 50-100 m). Prin intermediul pompelor din foraje apa este pompată în castele de apă cu înălțimea de 20-30 m de unde se deservesc gravitațional toate folosințele de apă.

Reziduurile din complexul porcine sunt îndepărtate de pe pardoseala adăposturilor, în rețeaua de canalizare, prin jet de apă sub presiune. Debitul mediu zilnic de apă uzată evacuat de la un porc este de 18 mc.

Prin rețeaua de canalizare apa uzată este condusă gravitațional la stația de epurare. Stația de epurare este constituită dintr-o treaptă mecanică care are în componență următoarele: grătar, decantor vertical și platformă de uscare a nămolului. De la stația de epurare prin intermediul unei stații de pompare apa decantată este pompată la bazinul de stocare. Rolul acestor bazine de stocare fiind de a stoca apa uzată în lunile în care apa uzată nu este distribuită pe câmp (lunile octombrie-februarie și aprilie).

Bazinele de stocare au patru compartimente cu o capacitate totală de 165.000 mc și ocupă o suprafață de 8 ha. Impermeabilizarea bazinelor de stocare este realizată cu folie de polietilenă de grosimea de 0,3 mm lestată cu un strat de pământ de 25 cm pe radier și cu dale de beton de dimensiuni 1 x 1 x 0,05 m pe taluz.

În apropierea bazinelor de stocare se află amplasată o stație de pompare cu ajutorul căreia se realizează transportul sub presiune a apelor uzate decantate până la echipamentele de distribuție pe câmp. Distribuția pe câmp se efectuează prin aspersiune prin intermediul instalației de tip TYPHON 75 care are o lungime de udare de 285 m, 48 m lățime de udare, o normă de udare de 44-100 mc/ha și o viteză de deplasare reglabilă de 10-40 m/oră.

Bazinele de stocare de la complexul COMPTIM Beregău au fost realizate în 1985 funcționând în condițiile proiectate în perioada 1986-1994 cu o normă de udare de 750 mc/ha pe o suprafață amenajată de 466 ha. În perioada 1975-1985 complexul a funcționat prin infiltrarea apelor uzate în canalul Ier.

Infiltrarea apelor uzate în apa subterană determină schimbări calitative ale acesteia și implicații asupra mișcării apelor freatice prin îmbâcsirea porilor cu suspensii, în același timp declanșându-se fenomenele de adsorbție, retenție capilară, schimb ionic, precipitare chimică, biodegradare, etc.).

Substanțele chimice conținute de apa uzată, infiltrată în acvifer, produc o formă de poluare periculoasă cunoscută sub denumirea de poluare cu substanțe miscibile de tipul trasorilor.

Existența acestei surse de poluare prezintă pericolul contaminării acviferului cu o serie de substanțe chimice și face improprie utilizarea acesteia ca și apă potabilă pentru o serie de localități precum și dispersarea penei de poluant în timp pe o zonă îndepărtată.

Calitatea apelor uzate din bazinele de stocare este prezentată în Tabelul 10.3.

Indicator	UM	Bazin de stocare Apă nediluată		Bazin de stocare Apă diluată	
		Min.	Max.	Min.	Max.
Reziduu salin	mg/l	1980	5100	1330	2160
Cloruri	mg/l	100	227	110	227
Sulfati	mg/l	0	423	0	523
Indice SCR	mg/l	1,7	10,1	1,7	10,9
Indice SAR	mg/l	1,1	13,7	1	14,9
Conținut în Na	mg/l	41	780	49	740
PH		7,4	8,5	6,7	8,5
Calciu	mg/l	40	90	46	90
Detergenți	mg/l	0	1,7	0	2,3
Fenoli	mg/l	0,02	0,3	0,01	0,1
Fier total	mg/l	0	0	0	2
Magneziu	mg/l	33	70	52	83
Coeficient Prinklonski		1	14	1,4	13
% Na din suma cationilor		18	83	16	81
Criteriul Kelley		0,3	15	0,3	5,7

Tabelul 10.3

### 3. Modelarea mișcării și a transportului poluanților

Pentru rezolvarea numerică a modelului de mișcare și a modelului de transport am optat pentru un program de calcul ASMWIN, program ce a fost prezentat în Anexa 1 (Lista programelor specializate în modelarea acviferelor, la nivelul anului 2005) poziția 26 din 299. Rezolvarea acestor tipuri de probleme se efectuează numeric așa cum a fost prezentat în Capitolul 2 și Capitolul 9. Rezultate similare cu cele obținute se pot obține utilizând oricare din programele prezentate în Anexa 1.

Domeniul modelat a fost discretizat într-o rețea de 11.200 elemente dreptunghiulare. Domeniul studiat de dimensiunile 10.000 m X 17.500 m a fost împărțit în 80 coloane de dimensiuni 125 m și 140 rânduri cu dimensiunea de 125 m.

#### A) Modelul de mișcare.

Datele de intrare utilizate pentru rezolvarea problemei de mișcare au fost alese conform geologiei și hidrogeologiei domeniului prezentat la secțiunea 1. după cum urmează:

- introducerea cotelor acoperișului freaticului conform Figurii 11.2 din Anexa 3.
- introducerea cotelor fundului freaticului conform Figurii 11.3 din Anexa 3.
- introducerea transmisivităților acviferului conform Figurii 11.4 din Anexa 3.
- introducerea porozităților acviferului conform Figurii 11.5 din Anexa 3.

Pentru calibrarea modelului s-au utilizat condiții de margine prin înălțimi piezometrice impuse pe frontiera de sus și jos a domeniului. În urma calibrării s-au obținut hidroizohipsele conform Figurii 11.6 din Anexa 3. Acuratețea rezultatelor obținute este prezentat în curba de comparație între nivelele piezometrice calculate și măsurate în forajele de observație prezentate în Figura 11.7 din Anexa 3.

Rezultatele modelului de mișcare (nivele piezometrice, viteze de mișcare) vor fi utilizate pentru rezolvarea problemei de transport al poluanților.

## **B) Modelul de transport al poluanților.**

Datele de intrare utilizate pentru rezolvarea problemei de transport au fost alese conform sursei de poluare domeniului prezentat la secțiunea 2.

S-a considerat ca și sursă de poluare apele uzate evacuate din bazinul de stocare. Cantitatea de poluant s-a considerat injectată ca o injecție continuă pe o perioadă de 10 ani. Apoi prin determinarea concentrațiilor existente în acvifer pe zona poluată s-a considerat o poluare care are ca și sursă concentrațiile de poluant din acvifer pentru o perioadă de 10 de ani.

Pentru perioada de poluare continuă de 10 ani s-a considerat cantitatea medie de poluant evacuată din bazinul de stocare prin distribuția pe câmp conform datelor de intrare, fenoli, timp de zece ani.

În urma calculelor numerice s-au obținut:

- alura zonei poluate după zece de ani de la terminarea poluării continue timp de 10 ani conform Figurii 11.7 Anexa 3.
- variația concentrațiilor în 9 puncte caracteristice din zona poluată conform Figurii 11.8 (a,b,c) Anexa 3.

Rezultatele modelului de transport al poluaților (concentrații) vor fi utilizate pentru rezolvarea problemei de optimizare.

### *4. Modelarea problemei de optimizare*

Pentru rezolvarea numerică a modelului de optimizare am optat pentru un program de calcul MODOF, program ce a fost prezentat în Anexa 1 (Lista programelor specializate în modelarea acviferelor, la nivelul anului 2005) poziția 155 din 299. Rezolvarea acestor tipuri de probleme se efectuează numeric așa cum a fost prezentat în Capitolul 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Modul de lucru și utilizarea acestui program a fost descrisă la paragraful 10.1.

Domeniul modelat a fost discretizat într-o rețea de 10.000 elemente dreptunghiulare. Domeniul studiat de dimensiunile 4.000 m X 4.000 m a fost împărțit în 100 coloane de dimensiuni 40 m și 100 rânduri cu dimensiunea de 100 m.

Scopul modelării este de a limita propagarea penei de poluant în timp cu scopul evitării contaminării freaticului în aval de zona poluată. Problema de optimizare constă în determinarea locațiilor optime a puțurilor de captare și a debitelor extrase din acvifer.

Rezultatele modelelor de mișcare și transport au fost preluate și utilizate pentru calibrarea modelului și obținerea soluțiilor optime. Aceste rezultate au fost preluate pentru modelul de optimizare după cum urmează:

- introducerea cotelor acoperișului freaticului conform Figurii 11.10 din Anexa 3.
- introducerea cotelor fundului freaticului conform Figurii 11.11 din Anexa 3.
- introducerea transmisivităților acviferului conform Figurii 11.12 din Anexa 3.
- introducerea porozităților acviferului conform Figurii 11.13 din Anexa 3.
- introducerea concentrațiilor din zona poluată conform Figurii 11.15 din Anexa 3.

În urma rulării modelului s-au obținut hidroizohipsele conform Figurii 11.14 din Anexa 3 care sunt conform Figurii 11.6 din Anexa 3.

Pentru limitarea propagarea penei de poluant în timp cu scopul evitării contaminării freaticului în aval de zona poluată s-a optat la amplasarea a trei foraje de extracție. Problema de optimizare constă în determinarea locațiilor optime a puțurilor de captare și a debitelor extrase din acvifer. În acest sens s-au ales 13 locații posibile a forajelor în avalul zonei poluate și 6 restricții privind concentrații nule pe frontiera curbei de concentrații cu valoarea 0, așa cum este prezentat în Figura 11.16 Anexa 3.

În urma rezolvării modelului de optimizare s-au obținut locațiile optimizate pentru un număr de trei foraje cu debitele de 0.2, 0.3, 0.5 l/s, cu alura zonei poluate (curbele concentrațiilor) după o perioadă de 10 ani de punere în funcțiune a forajelor Figura 11.17 și 11.19 Anexa 3.

Pentru aceste poziționări ale forajelor s-au obținut hidroizohipsele conform Figurii 11.18 din Anexa 3.

### **10.3. Concluzii**

Lucrarea conține 227 pagini și este structurată pe 10 capitole. În cadrul acestor capitole se regăsesc un număr de 420 de relații matematice, 67 de figuri, 6 tabele, trei anexe cuprinzând 1573 programe de calcul și 19 grafice și diagrame reprezentând rezultatele simulărilor pentru studiul de caz.

Contribuția personală în această lucrare constă în:

- ◆ prezentarea detaliată, într-o formă matematică riguroasă, a ecuațiilor de generale de mișcare și transport a poluanților în acvifere, care stau la baza realizării modelelor de simulare;
- ◆ prezentarea detaliată a posibilităților de formulare a problemelor de exploatare complexă a acviferelor ca și probleme de optimizare;
- ◆ prezentarea detaliată a numeroase metode de rezolvare a problemelor de simulare și optimizare;
- ◆ formularea și rezolvarea managementului complex al acviferelor ca probleme de optimizare prin intermediul următoarelor formulări:

- ❖ formularea de probleme de programare liniară, la care se ajunge de regulă în cazul acviferelor sub presiune și regim de mișcare permanent, probleme care se rezolvă prin metoda simplex,
  - ❖ formularea de probleme de optimizare cu variabile discrete, la care se ajunge în cazul când restricțiile includ limitarea numărului locurilor de amplasament a puțurilor de extracție / infiltrație, sau limitarea valorilor debitelor în fiecare puț,
  - ❖ formularea liniară avansată a modelului de optimizare, la care se ajunge în cazul regimului tranzitoriu (nestaționar) de funcționare a sistemului prin „solicitarea” externă nestaționară a acviferului (captări, alimentare din precipitații, condiții la limită variabile în timp),
  - ❖ formularea ca probleme de optimizare neliniară (funcții obiectiv și / sau restricții exprimate cu funcții neliniare) la care se ajunge în cazul acviferelor cu nivel liber, caz în care debitul extras / infiltrat depinde neliniar de înălțimile piezometrice pentru a căror rezolvare se aplica de regulă metoda liniarizării secvențiale descrisă și exemplificată în lucrare.
- ◆ prezentarea exemplelor reprezentative din domeniul hidraulicii subterane la care se pot aplica modelele de optimizare;
  - ◆ rezolvarea unei probleme concrete de modelare a simulării - optimizării, care are ca și obiect realizarea unui sistem pentru reducerea extinderii poluării acviferului dintr-o zonă poluată reprezentativă din județul Timiș, complexul zootehnic fost - COMTIM Berecsău;
  - ◆ prezentarea interdisciplinarității domeniului tehnic cu cel matematic, rezultatele domeniului matematici din cercetarea operațională fiind intercalată în modelele prezentate;
  - ◆ pe baza formulărilor teoretice și a metodelor de rezolvare prezentate, problemele de optimizare specifice domeniului modelării mișcărilor în acvifere pot fi rezolvate cu o serie de programe de calcul prezentate în Anexa 1, iar prin extrapolare metodele pot fi extinse și în alte domenii tehnice cu programele prezentate în Anexa 2.

## ANEXA 1. LISTA PROGRAMELOR SPECIALIZATE ÎN MODELAREA ACVIFERELOR, LA NIVELUL ANULUI 2005

Nr. crt.	Program	Domeniu	Preț de cost
1	2	3	4
1	2DFATMIC	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
2	3DADE	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
3	3DFATMIC	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
4	3DFEMFAT	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 1000
5	ABCFEM	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 275
6	ADEPT	Testarea acviferului	US Dollars 325
7	AEM	Modelarea acviferelor	SLAEM US Dollars 600. MLAEM/2 US Dollars 2000. MLAEM US Dollars 5000.
8	AGU-10	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 150
9	AIR	Modelarea acviferelor	
10	AIRSLUG	Testarea acviferului	Gratuit
11	AMBER	Transportul poluanților	From UK Pounds 6000
12	ANALGWST	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
13	ANALYT	Modelarea acviferelor	US Dollars 295
14	AQTESOLV for Windows	Testarea acviferului	US Dollars 500
15	Aqua	Transportul poluanților (2D FEM)	GB Pounds 750
16	Aqua3D	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 900
17	AQUIFEM-N	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollars 1100
18	Aquifer Test Toolbox	Testarea acviferului	US Dollars 219 or GB Pounds 150
19	Aquifer Well Test	Testarea acviferului	US Dollars 395
20	AquiferTest Pro	Testarea acviferului	Standard US Dollars 590. Pro US Dollars 790
21	AquiferWin32	Testarea acviferului	US Dollars 550
22	AQUIPACK	Transportul poluanților	US Dollars
23	Argus ONE	Modelarea acviferelor	Modules US Dollars 500 to 950
24	ASEST	Modelarea acviferelor	US Dollars 630
25	ASM	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
26	ASMWIN	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
27	AT123D	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 395
28	AT123D Version 2.1	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
29	BEAVER	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuit
30	BEAVERSOFT	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 70 with book
31	BIO1D	Transportul poluanților (1D)	US Dollars 250
32	BIOF&T	Transportul poluanților (2D FD)	US Dollars 995
33	BIOMOC	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
34	BIOPLUME III	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
35	BIOSCREEN	Transportul poluanților (1D)	Gratuit



## ANEXA 1.

1	2	3	4
36	BIOSLURP	Transportul poluanților	US Dollars 2750
37	BIOTRANS	Transportul poluanților (2D FEM)	750 nodes US Dollars 595, 3000 nodes US Dollars 2,595, demonstration US Dollars 25
38	BLT	Transportul poluanților (2D FEM)	
39	CANDE-89	Drenaje	US Dollars 40
40	CANPRO	Drenaje	US Dollars 80
41	CANVAS	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 95
42	CAPZONE	Modelarea acviferelor	US Dollars 95
43	CATTI	Testarea acviferului	US Dollars 90
44	Cazenove	Modelarea acviferelor (2D)	Euros 533,57 ; French Francs 3500
45	CFITIM	Proprietăți hidraulice	Gratuit
46	CFITM	Proprietăți hidraulice	
47	CHAIN	Transportul poluanților	
48	CHAIN 2D	Transportul poluanților (2D analitic)	
49	Chemflo	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
50	CHEMFLOW	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
51	ChemFlux	Transportul poluanților (3D)	
52	CONTAM	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
53	CTAN-W	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 1995, Gratuitedevaluation version
54	Culvert	Drenaje	Gratuit
55	CVM	Transportul poluanților (1D)	GB Pounds 240
56	DAMP	Drenaje	US Dollars 50
57	DCCHEM	Transportul poluanților	Euro 1750
58	DC-Dewatering	Modelarea acviferelor	Euro 1250
59	DCPUMP	Testarea acviferului	DCPUMP Euro 600. DCPUMP-Evaluation Euro 6050
60	Drain	Drenaje	Gratuit
61	DUST-BNL	Transportul poluanților (1D)	
62	EPA-VHS	Transportul poluanților	US Dollars 50
63	ERMA Groundwater Modeler	Modelarea acviferelor	
64	ESAP-95	Transportul poluanților	
65	Espora	Testarea acviferului	Euros 762,25 ; French Francs 5000
66	Exp Modflow	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 19 to 75 (x1 copy); US Dollars 3 to 15 (x20 copies)
67	EXPRES	Transportul poluanților	
68	FEFLOW	Modelarea acviferelor (3D)	
69	FEMA	Transportul poluanților (1D)	
70	FEMWASTE	Transportul poluanților (1D)	
71	FEMWATER 2D	Modelarea acviferelor (2D)	
72	FEMWATER BLT	Transportul poluanților (2D FEM)	
73	FESEEP for Windows	Modelarea acviferelor (2D)	Australian Dollars 1,375
74	Filter drain	Drenaje	GB Pounds 330

1	2	3	4
75	FLOFIT	Proprietăți hidraulice	
76	FLONET-TRANS	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 495
77	Flownet	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 100
78	FlowNet (Hemker)	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 200
79	Flowpath II	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 590
80	Frac2D	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuit
81	FRAC3DVS	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 3000
82	FRACTRAN	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 1500
83	FTWORK	Transportul poluanților (2D FD)	US Dollars 250
84	GEOFLOW	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 800
85	GFLOW	Modelarea acviferelor (3D)	Standard US Dollars 500, Extended US Dollars 975
86	GFLOW 2000	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 450
87	GGU-CONTAM FE	Transportul poluanților (2D FEM)	EUROS 310
88	GGU-CONTAM RW	Transportul poluanților (2D FEM)	EUROS 310
89	GGU-DRAWDOWN	Modelarea acviferelor	EURO 1125
90	GGU-PUMPTEST	Testarea acviferului	EUROS 475
91	GGU-SEEP	Drenaje	EURO 475
92	GGU-SLUGTEST	Testarea acviferului	EURO 1250
93	GGU-SS FLOW2D	Modelarea acviferelor (2D)	EUROS 1875
94	GGU-SS FLOW3D	Modelarea acviferelor (3D)	EURO 2000
95	GGU-TRANSIENT	Modelarea acviferelor (2D)	EUROS 310
96	GMS	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Windows US Dollars 3500, Unix US Dollars 5500
97	Graphic Groundwater	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
98	Modelarea acviferelor CDROM	Modelarea acviferelor	US Dollars 250
99	Groundwater Vistas	Modelarea acviferelor	US Dollars 975
100	GWDivide	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuit
101	GWFE1	Modelarea acviferelor	Gratuit
102	GWFE2	Modelarea acviferelor	Gratuit
103	GWFLOW	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 50
104	GWMath	Modelarea acviferelor	Gratuit
105	HELP Model	Transportul poluanților	US Dollars 120
106	HOTWTR	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollars 120
107	HPS	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 50
108	HSSM	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
109	HSSM-WIN	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
110	HST3D	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
111	HYDROGEOCHEM	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 1500
112	HYDROGEOCHEM 2	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 5000
113	HYDROKIT 98G	Ingineria mediului	US Dollars 140

1	2	3	4
114	HYDRUS	Transportul poluanților	Gratuit
115	HYDRUS-1D	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
116	HYDRUS-2D	Transportul poluanților (2D FD)	US Dollars 1200
117	ICE-1	Transportul poluanților	US Dollars 50
118	IDRISMOD	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 100
119	IMF2D	Transportul poluanților (2D FEM)	
120	INFIL	Modelarea acviferelor	US Dollars 95
121	Infinite Extent	Testarea acviferului	US Dollars 195
122	INQUIMAP	Modelarea acviferelor	US Dollars 900
123	JDB2D-3D	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollars 50
124	KYSPILL	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 85
125	MAFIC	Modelarea acviferelor (1D)	US Dollar 2000 to 10000 depending on support level
126	MAP	Transportul poluanților	US Dollars 95
127	MARTHE	Modelarea acviferelor	French Francs 20 000
128	MDrill	Drenaje	3, 500 Euros
129	MicroFEM	Modelarea acviferelor	Single user US Dollars 750. Company licence US Dollars 1450
130	Micro-Fem	Modelarea acviferelor	US Dollars 495
131	Migrate	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 1695, US Universities US Dollars 850
132	MIKE SHE	Modelarea acviferelor	
133	MLPU	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollar 350. Gratuitdemo version
134	MLT	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
135	MLU	Testarea acviferului	US Dollars 250
136	MOC	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
137	MOC3D	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
138	MOC DENSE	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
139	MODBRNCH	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
140	ModelCad for Windows	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 500
141	MODELGIS	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 5000
142	ModelMaker	Transportul poluanților	GB Pounds 400, Educational GB Pounds 225
143	MODFE	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuit
144	MODFLOW-2000	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
145	MODFLOW-88	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
146	MODFLOW-96	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
147	MODFLOWARC	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
148	MODFLOW-GUI	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
149	MODFLOWP	Parameter estimation	Gratuit

1	2	3	4
150	MODFLOW-SURFACT	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Basic flow: US Dollars 1095 to Advanc transport US Dollars 2995
151	MODFLOWT	Transportul poluanților (3D)	Standard Version US Dollars 500, Professional Version US Dollars 1,000
152	MODFLOWwin32	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	
153	ModIME	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 350
154	MODMAN	Parameter estimation	US Dollars 750
155	MODOFC	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
156	MODPATH	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 190
157	MODPUMP	Testarea acviferului	US Dollars 250 / GB Pounds 297
158	MODRET	Modelarea acviferelor	US Dollars 450
159	ModTech	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 999
160	MOFAT	Transportul poluanților (2D FEM)	Gratuit
161	MOTRANS	Transportul poluanților (2D FEM)	Standard US Dollars 950, Pro US Dollars 2995
162	MOVER	Transportul poluanților	US Dollars 2100
163	MSeep	Modelarea acviferelor (2D)	2, 500 Euros
164	MS-VMS	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 5500
165	MT3D	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
166	Mt3d586 for Windows	Transportul poluanților (3D)	
167	MT3D96	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 700
168	MT3DMS	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
169	MULAT (Verruijt)	Modelarea acviferelor	Gratuit
170	MULTIMED	Transportul poluanților	US Dollars 330
171	MWell	Modelarea acviferelor	2, 500 Euros
172	N3DADE	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
173	NAPL Simulator	Transportul poluanților	Gratuit
174	NETFLO	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollars 150
175	NITRO	Transportul poluanților (2D analitic)	
176	OILVOL	Transportul poluanților	US Dollars 300
177	ONE-D	Transportul poluanților (1D)	US Dollars 90
178	ONESTEP	Proprietăți hidraulice	US Dollars 70
179	OPTP	Testarea acviferului	US Dollars 50
180	PAGAN	Transportul poluanților	
181	PAT	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 75
182	PATH3D	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 350
183	PESTAN	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
184	PINwin	Testarea acviferului	Gratuit
185	PLASM	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 150
186	PlaxFlow	Modelarea acviferelor (2D)	
187	PLUME	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 50
188	PLUME2D	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 50

1	2	3	4
189	PMWIN	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 995
190	Pollute	Transportul poluanților (1D)	Professional US Dollars 1495. Standard US Dollars 695
191	POLUT2D	Transportul poluanților (2D FEM)	
192	PRINCE	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 395
193	Processing Modflow PRO	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 1195
194	PRZM2	Transportul poluanților (1D)	US Dollars 110
195	PTES	Testarea acviferului	Gratuit
196	PUMPIT	Modelarea acviferelor	US Dollars 95
197	PUMPTEST	Testarea acviferului	US Dollars 125
198	RADFLOW	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 50
199	RADMOD	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit
200	RBCA Tier 2 Analyzer	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 690
201	Remediation Toolkit	Transportul poluanților	US Dollars 840
202	RETC	Proprietăți hidraulice	Gratuit
203	RITZ	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
204	ROSETTA	Proprietăți hidraulice	Gratuit
205	RWH	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 125
206	SEEP	Modelarea acviferelor (2D)	GB Pounds 1250
207	SEEP (Virginia)	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 200 Academic discount available
208	Seep3D	Modelarea acviferelor (3D)	
209	SEEPCALC	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuitby email
210	SEEPS2D	Modelarea acviferelor (2D)	
211	SEEPU2D	Modelarea acviferelor (2D)	
212	SEEP-W	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 3495, Gratuitevaluation version
213	SefCut	Modelarea acviferelor (2D)	GB Pounds 240
214	SEFTRANS	Transportul poluanților (2D FEM)	GB Pounds 2000
215	SefWeir	Modelarea acviferelor (2D)	GB Pounds 240
216	SEQUENCE	Transportul poluanților	Gratuit
217	SESOIL	Transportul poluanților	US Dollars 845, Soil database US Dollars 395, Climate database US Dollars 1995
218	SESOIL Version 2.1	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
219	SEVIEW	Transportul poluanților	US Dollars 1,065. Academic US Dollars 825
220	SHARP	Modelarea acviferelor (3D)	US Dollars 200
221	ShowFlow 2	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
222	Single Well Solutions	Testarea acviferului	US Dollars 299 (US Dollars 199 if downloaded from WWW)
223	SizePerm	Proprietăți hidraulice	US Dollars 69
224	SLUGC	Testarea acviferului	US Dollars 50
225	SLUGT	Testarea acviferului	US Dollars 50

## ANEXA 1.

1	2	3	4
226	Soakaway Design	Drenaje	GB Pounds 100
227	SOIL	Proprietăți hidraulice	US Dollars 70
228	SoilCover	Modelarea acviferelor	US Dollars 250 to 350 - depending on version
229	SOILPROP	Proprietăți hidraulice	US Dollars 195
230	SoilVision	Proprietăți hidraulice	Standard US Dollars 1250: Professional US Dollars 1695: Enterprise US Dollars 3995
231	SoilVision Demo Database	Proprietăți hidraulice	Gratuit
232	SOLUTE	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 150
233	SOLUTRANS	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 385
234	STANMOD	Transportul poluanților	Gratuit
235	STANMOD2	Transportul poluanților	Gratuit
236	Stochastic MODFLOW	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit via the WWW
237	SUMMERS	Transportul poluanților	US Dollars 75
238	Super Slug	Testarea acviferului	US Dollars 195
239	SUTRA	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
240	SV Flux 2D	Modelarea acviferelor (2D)	
241	SV Flux 3D	Modelarea acviferelor (3D)	
242	SVE-3D	Transportul poluanților	US Dollars 1700
243	SWACROP	Modelarea acviferelor (1D)	US Dollars 500
244	SWANFLOW	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 120
245	SWICHA	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 120
246	SWIFT 2000	Transportul poluanților (3D)	
247	SWIFT-486	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 800, with support US Dollars 1800
248	SWIFT-98	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 395
249	SWMS-2D	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
250	SWMS-3D	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
251	T2VOC	Transportul poluanților	
252	TARGET	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 3100
253	TBC	Transportul poluanților (3D)	Gratuit
254	TETRA	Modelarea acviferelor	US Dollars 50
255	TETRANS	Transportul poluanților (1D)	
256	TGUESS	Testarea acviferului	US Dollars 50
257	THCVFIT	Testarea acviferului	US Dollars 50
258	THEISFIT	Testarea acviferului	US Dollars 50
259	THWELLS	Modelarea acviferelor	US Dollars 90
260	TIMELAG	Testarea acviferului	US Dollars 50
261	TRAFRAP-WT	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 130
262	TSSLEAK	Testarea acviferului	US Dollars 50
263	TWODAN	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 495, academic US Dollars 255
264	UN-GW	Modelarea acviferelor	US Dollars 120
265	UNSATCHEM	Transportul poluanților (1D)	Gratuit
266	UNSODA	Proprietăți hidraulice	Gratuit
267	USGS-SOL	Transportul poluanților (3D)	US Dollars 75

1	2	3	4
268	VADOSEW	Modelarea acviferelor	US Dollars 5,995
269	VADSAT	Transportul poluanților	US Dollars 425
270	VAM2D	Transportul poluanților (2D FEM)	VAM2D US Dollars 1750, VMPLLOT US Dollars 300
271	VaMP	Modelarea acviferelor	US Dollars 200, demonstration US Dollars 20
272	VARQ	Testarea acviferului	US Dollars 50
273	VENT2D	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
274	VENT3D	Transportul poluanților (3D)	
275	VERTPAK-1	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 150
276	VIRALT	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 90
277	VIRTUS	Transportul poluanților (1D)	US Dollars 75
278	Visual BlueBird /SPLIT	Modelarea acviferelor (2D)	Gratuit
279	Visual HELP	Modelarea acviferelor (1D)	US Dollars 795
280	Visual MODFLOW	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 990
281	Visual MODFLOW Pro	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	US Dollars 2490
282	VLEACH	Transportul poluanților (1D)	US Dollars 90
283	VS2D/T	Transportul poluanților (2D FD)	US Dollars 250
284	VS2DI	Transportul poluanților (2D FD)	Gratuit
285	WALTON35	Modelarea acviferelor	
286	WELL	Testarea acviferului	US Dollars 60
287	WELL (Geo&soft)	Testarea acviferului	US Dollars 300
288	WELLTEST	Testarea acviferului	US Dollars 195
289	WhAEM	Transportul poluanților (2D analitic)	Gratuit
290	WHI UnSat Suite	Transportul poluanților (1D)	Standard version US Dollars 690. Plus version US Dollars 1090. Discounts available.
291	WHPA	Transportul poluanților (2D analitic)	US Dollars 90
292	WinFlow	Modelarea acviferelor (2D)	US Dollars 450, US Dollars 295 upgrade from Quickflow, SLAEM, TWODAN, FlowPath
293	Wintaff 98	Modelarea acviferelor	
294	WinTrace	Transportul poluanților (1D)	Swiss francs 350
295	WinTran	Transportul poluanților (2D FEM)	US Dollars 550, US Dollars 200 upgrade from WinFlow
296	WinUnsatH	Modelarea acviferelor (1D)	US Dollars 500
297	wtProfile	Modelarea acviferelor	Gratuit
298	ZBSoft	Modelarea acviferelor	US Dollars 125
299	ZONEBUDGET	Modelarea acviferelor (MODFLOW)	Gratuit

## ANEXA 2. LISTA PROGRAMELOR DE CALCULE TEHNICE, LA NIVELUL ANULUI 2005

Nr. crt.	Denumire program	Domeniu de utilizare	Nr. crt.	Denumire program	Domeniu de utilizare
1	2	3	1	2	3
1	100 Plus Hatch Patterns	Geological illustration	783	Mag2dc	Geophysics (surface)
2	12d Model	Plotting (3D visualisation)	784	MagSurvey	Geophysics (surface)
3	2DFATMIC	Contaminant transport (2D FD)	785	MakeYourMap.net	Mapping
4	2DNOTES	Educational	786	Manifold System	Geographical information systems
5	3D DEM view	Plotting (3D visualisation)	787	MAP	Contaminant modelling
6	3D GIS DEM View	Geographical information systems	788	Map Maker Pro	Geographical information systems
7	3D Master	Plotting (3D visualisation)	789	Map3D	Numerical analysis (rock)
8	3DADE	Contaminant transport (3D)	790	Map3D-PV	Numerical analysis (rock)
9	3DEC	Numerical analysis (rock)	791	MapCalc	Plotting (2.5D & contouring)
10	3DFATMIC	Contaminant transport (3D)	792	MAPCON	Pavements
11	3DFEMFAT	Contaminant transport (3D)	793	MapInfo Callbacks Manager	Geographical information systems
12	3DField	Plotting (2.5D & contouring)	794	MapInfo Professional	Geographical information systems
13	3DPILE	Piles (lateral loading and groups)	795	MapInfo ProViewer	Mapping
14	6DOFS	Dynamics (soil-structure interaction)	796	MAP-pro	Mapping
15	ABAQUS	Numerical analysis (general)	797	MapProjections	Mapping
16	ABC	Bearing capacity	798	MAPublisher	Mapping
17	ABCFEM	Contaminant transport (2D FEM)	799	MapViewer	Mapping
18	Abutment	Retaining wall design	800	MARS	Remediation
19	ABwalls 2000	Reinforced slopes and walls	801	MARTHE	Groundwater modelling
20	ACCECALC	Slope stability (rock)	802	MASH	Dynamics (behaviour and earthquake)
21	ADAP-88	Dynamics (soil-structure interaction)	803	Mat3D	Piles (lateral loading and groups)
22	ADEPT	Aquifer test analysis	804	MathPad	Plotting (2.5D & contouring)
23	ADINA	Numerical analysis (general)	805	MBBuilder	Geographical information systems
24	AEM	Groundwater modelling	806	McCon	Plotting (2.5D & contouring)
25	Aerial Imagery Corrector	Image analysis	807	MDrill	Drainage
26	AFENA	Numerical analysis (soil)	808	Measure	Image analysis
27	AGIS	Geographical information systems	809	Mebra	Settlement analysis
28	AGS File Manager	Data validation	810	MesaPro 2000	Reinforced slopes and walls
29	AGU-10	Contaminant transport (2D analytical)	811	MesaPro v 1.02	Reinforced slopes and walls
30	AHatch Pro	Geological illustration	812	MESHGEN2D	Numerical analysis utilities
31	AIR	Groundwater modelling	813	MFI	Numerical analysis utilities
32	Airfield Pavement Evaluation	Pavements	814	MFoundation	Piles (lateral loading and groups)
33	AIRFLOW-SVE	Remediation	815	MFteach	Educational
34	AIRSLUG	Aquifer test analysis	816	MFworks	Geographical information systems
35	ALF	Data validation	817	MFworks for GeoMedia	Geographical information systems
36	All-Pile	Piles (lateral loading and groups)	818	MGAP	Geostatistics
37	ALOV Map	Geographical information systems	819	MGeobase	Geological modelling
38	ALP	Piles (lateral loading and groups)	820	MicroFEM	Groundwater modelling
39	ALP99	Piles (lateral loading and groups)	821	Micro-Fem	Groundwater modelling
40	AMAN PRO 4.0	Geophysics (borehole)	822	MICROFINE	Numerical analysis (soil)
41	AMBER	Contaminant modelling	823	microLYNX+	Database systems (general)
42	ANALGWST	Contaminant transport (2D analytical)	824	microLYNX+ Exploration	Database systems (general)
43	Analyse-it	Plotting and statistics	825	MicroMODEL	Geological modelling
44	ANALYT	Groundwater modelling	826	MICROSARB	Dynamics (soil-structure interaction)
45	ANAVAR	Geostatistics	827	MidTex DLG Reader v1.0	Mapping
46	APEWAVE	Piles (single)	828	MidTex DLG Reader v2.1	Mapping



1	2	3	1	2	3
47	APILE	Piles (single)	829	Migrate	Contaminant transport (2D FEM)
48	APILE Plus for Windows	Piles (single)	830	MIKE SHE	Groundwater modelling
49	APOLLO	Dynamics (behaviour and earthquake)	831	MINDLIN	Settlement analysis
50	AppleCORE	Borehole log production	832	MINE	Settlement analysis
51	Applications of Geophysics	Educational	833	MineMapper	Field data collection
52	APRAF	Piles (lateral loading and groups)	834	MINEQL	Geochemistry
53	APSDS	Pavements	835	MINEQL+	Geochemistry
54	AQTESOLV for Windows	Aquifer test analysis	836	MINITAB	Plotting and statistics
55	Aqua	Contaminant transport (2D FEM)	837	MINLIN	Settlement analysis
56	Aqua3D	Contaminant transport (3D)	838	MINTEQA2	Geochemistry
57	AQUABASE	Geoenvironmental database systems	839	MINTEQAK	Geochemistry
58	AquaChem	Geochemistry	840	Miraslope	Reinforced slopes and walls
59	AQUIFEM-N	Groundwater flow (3D)	841	MLPU	Groundwater flow (3D)
60	Aquifer Test Toolbox	Aquifer test analysis	842	MLT	Contaminant transport (2D FD)
61	Aquifer Well Test	Aquifer test analysis	843	MLU	Aquifer test analysis
62	AquiferTest Pro	Aquifer test analysis	844	MOC	Contaminant transport (2D FD)
63	AquiferWin32	Aquifer test analysis	845	MOC3D	Contaminant transport (3D)
64	AQUIPACK	Contaminant modelling	846	MOC DENSE	Contaminant transport (2D FD)
65	ARC/INFO	Geographical information systems	847	MODBERG2	Pavements
66	ArcCAD	Geographical information systems	848	MODBRNCH	Groundwater flow (MODFLOW)
67	ArcExplorer	Geographical information systems	849	ModelCad for Windows	Groundwater flow (MODFLOW)
68	ArcView	Geographical information systems	850	MODELGIS	Groundwater flow (MODFLOW)
69	AREFS - 98	Impact assessment	851	ModelMaker	Contaminant modelling
70	Argus ONE	Groundwater modelling	852	MODFE	Groundwater flow (2D)
71	ARKaims	Geophysics (surface)	853	MODFLOW - EPA Problem Set	Educational
72	ARKFIELD	Geophysics (surface)	854	MODFLOW-2000	Groundwater flow (MODFLOW)
73	ARKimp	Geophysics (surface)	855	MODFLOW-88	Groundwater flow (MODFLOW)
74	ARMOS	Remediation	856	MODFLOW-96	Groundwater flow (MODFLOW)
75	ASEST	Groundwater modelling	857	MODFLOWARC	Groundwater flow (MODFLOW)
76	ASM	Contaminant transport (2D FD)	858	MODFLOW-GUI	Groundwater flow (MODFLOW)
77	ASMWIN	Contaminant transport (2D FD)	859	MODFLOWP	Parameter estimation
78	Asphalt Test Report System	Database systems (general)	860	MODFLOW-SURFACT	Groundwater flow (MODFLOW)
79	AT123D	Contaminant transport (3D)	861	MODFLOWT	Contaminant transport (3D)
80	AT123D Version 2.1	Contaminant transport (3D)	862	MODFLOWwin32	Groundwater flow (MODFLOW)
81	Atlas GIS	Geographical information systems	863	ModIME	Contaminant transport (3D)
82	Atterberg Limits	Laboratory testing (soil)	864	MODMAN	Parameter estimation
83	AuGeo	Ground improvement	865	MOD OFC	Groundwater flow (MODFLOW)
84	AUITOUGH2	Geothermal	866	MODPATH	Groundwater flow (MODFLOW)
85	AuRA Toolkit	Geostatistics	867	MODPUMP	Aquifer test analysis
86	AutoDidge	Data input	868	MODRET	Groundwater modelling
87	AUTOUGH2	Geothermal	869	ModTech	Groundwater flow (MODFLOW)
88	Axum	Plotting (2.5D & contouring)	870	MOFAT	Contaminant transport (2D FEM)
89	BabyFoot	Bearing capacity	871	MohrView	Laboratory testing (soil)
90	BALANCE	Geochemistry	872	Moisture Density Test	Laboratory testing (soil)
91	BASSIN	Dynamics (soil-structure interaction)	873	MonitoringPoint	Instrumentation
92	BCAF	Bearing capacity	874	Monitor-LT	Geoenvironmental database systems

1	2	3	1	2	3
93	BCAP	Bearing capacity	875	Monitor-Pro	Geoenvironmental database systems
94	BEAM	Settlement analysis	876	MOTRANS	Contaminant transport (2D FEM)
95	BEAN	Numerical analysis (soil)	877	MOVER	Contaminant modelling
96	BEAP3D	Numerical analysis (rock)	878	MSAP2D	Numerical analysis (rock)
97	BearCap	Bearing capacity	879	MSDSFinder	Site procedures
98	BEAREF	Bearing capacity	880	MSeep	Groundwater flow (2D)
99	Bearing capacity	Bearing capacity	881	MSettle	Settlement analysis
100	BEASY Corrosion and CP	Cathodic protection	882	MSEW	Reinforced slopes and walls
101	BEASY Fatigue and Crack Growth	Numerical analysis (general)	883	MSheet	Retaining wall design
102	BEASY Mechanical Design	Numerical analysis (general)	884	MStab	Slope stability (soil)
103	BEAVER	Groundwater flow (2D)	885	MS-VMS	Groundwater flow (MODFLOW)
104	BEAVERSOFT	Contaminant transport (2D analytical)	886	MT3D	Contaminant transport (3D)
105	BEFE	Numerical analysis (rock)	887	Mt3d586 for Windows	Contaminant transport (3D)
106	BEMFEM	Numerical analysis (soil)	888	MT3D96	Contaminant transport (3D)
107	BEMLAP	Numerical analysis (general)	889	MT3DMS	Contaminant transport (3D)
108	BERM	Pavements	890	MULAT (Verruijt)	Groundwater modelling
109	BETONexpress	Geotechnical software suites	891	MULTIMED	Contaminant modelling
110	BH Translator - A	Borehole log production	892	Multiple Load Footing Design	Bearing capacity
111	BH Translator - S	Borehole log production	893	MUSA	Geophysics (surface)
112	BH-Logger v1	Borehole log production	894	MUT1D	Numerical analysis (general)
113	BH-Logger v2	Borehole log production	895	MVSP	Plotting and statistics
114	BHTV	Geophysics (borehole)	896	MWell	Groundwater modelling
115	BIO1D	Contaminant transport (1D)	897	N3DADE	Contaminant transport (3D)
116	BIOF&T	Contaminant transport (2D FD)	898	Nailed slopes	Reinforced slopes and walls
117	BIOMOC	Contaminant transport (2D analytical)	899	NAPL Simulator	Contaminant modelling
118	BIOPLUME III	Contaminant transport (2D FD)	900	NEABS	Dynamics (soil-structure interaction)
119	BIOSCREEN	Contaminant transport (1D)	901	NERA	Dynamics (behaviour and earthquake)
120	BIOSLURP	Contaminant modelling	902	NETFLO	Groundwater flow (3D)
121	BIOSVE	Remediation	903	NetPath	Geochemistry
122	BIOTRANS	Contaminant transport (2D FEM)	904	NetTape Server	Geophysics (borehole)
123	BIOVENTING	Remediation	905	Newcon90	Pavements
124	BLAST!	Dynamics (behaviour and earthquake)	906	NITRO	Contaminant transport (2D analytical)
125	Blastware	Dynamics (behaviour and earthquake)	907	NoeSYS	Plotting (3D visualisation)
126	BLDM	Database systems (with log production)	908	NOLISM	Dynamics (behaviour and earthquake)
127	BLOCK	Rock mechanics	909	NPDES Inspector	Field data collection
128	BLT	Contaminant transport (2D FEM)	910	NUVIBration	Dynamics (behaviour and earthquake)
129	BMWALL	Retaining wall design	911	OASIS Montaj	Mapping
130	BOHR	Borehole log production	912	Oasys Geo	Geotechnical software suites
131	Borehole Management System	Database systems (general)	913	OEDOMINT	Laboratory testing (soil)
132	Boring Log Database	Borehole log production	914	OEDOMSIM	Educational
133	Boring Log Design File Builder	Borehole log production	915	OILVOL	Contaminant modelling
134	BorinGS	Borehole log production	916	Old Electric Log Advisor (OEA)	Geophysics (borehole)
135	BSM	Numerical analysis (rock)	917	OmniVar	Geostatistics
136	CADA	Settlement analysis	918	ONE-D	Contaminant transport (1D)
137	CADS Piled Wall Suite	Retaining wall design	919	ONESTEP	Hydraulic properties
138	CADS Re-Slope	Slope stability (soil)	920	OPR	Data input

1	2	3	1	2	3
139	California Bearing Ratio	Laboratory testing (soil)	921	opsEnvironmental	Contract Planning and Management
140	CANDE-89	Drainage	922	OPTP	Aquifer test analysis
141	CandeCAD Pro	Numerical analysis (soil)	923	Oriana	Plotting and statistics
142	CANPRO	Drainage	924	Origin	Plotting (2D x-y)
143	CANSAFE	Numerical analysis (rock)	925	ORION	Image analysis
144	CANTILEVER WALL	Retaining wall design	926	OS Digitizer	Data input
145	CANVAS	Contaminant transport (2D analytical)	927	PAGAN	Contaminant modelling
146	CAPWAP	Piles (single)	928	Pallas Combi	Geochemistry
147	CAPZONE	Groundwater modelling	929	Pallas pKalc	Geochemistry
148	Carbonate Advisor (CBA)	Geophysics (borehole)	930	Pallas PrologD	Geochemistry
149	CARIS GEMM	Mapping	931	Pallas PrologP	Geochemistry
150	CartaLinx	Geographical information systems	932	Parallax 3D	Geological illustration
151	CARTEM	Mapping	933	PARATIE 6.0	Retaining wall design
152	Cartes & Donnees MEDIUM	Mapping	934	PARM	Numerical analysis utilities
153	Cartes & Donnees PLUS	Mapping	935	PAT	Groundwater flow (2D)
154	CASTeR	Geotechnical software suites	936	PATH3D	Contaminant transport (3D)
155	CATIGE for Windows	Educational	937	Pavechek	Pavements
156	CATTI	Aquifer test analysis	938	PC ARC/INFO	Geographical information systems
157	Cauldron Stereographic	Plotting (special)	939	PCEARTH	Database systems (general)
158	Cazenove	Groundwater flow (2D)	940	PCL2	Geophysics (borehole)
159	Cbear	Bearing capacity	941	PCL-pro	Insitu testing
160	CBR	Laboratory testing (soil)	942	PC-MPILE	Piles (lateral loading and groups)
161	Cc	Laboratory testing (soil)	943	PCConcrete	Field data collection
162	CDS	Mapping	944	PC-PGROUP	Piles (lateral loading and groups)
163	CE.CA.P.	Bearing capacity	945	PCQAS	Database systems (general)
164	CellBNA	Mapping	946	PCSTABL 6	Slope stability (soil)
165	Cellublock	Retaining wall design	947	PDensity	Field data collection
166	Cemset	Piles (single)	948	PDPWAVE	Piles (single)
167	CemSolve	Piles (single)	949	PDSF	Pavements
168	Cerith Service	Contract Planning and Management	950	PenCore	Field data collection
169	CESAR-LCPC	Numerical analysis (general)	951	Penetradar GPR ColorPro	Geophysics (surface)
170	CFITIM	Hydraulic properties	952	Penetradar GPR Data Processing	Geophysics (surface)
171	CFITM	Hydraulic properties	953	Perma	Laboratory testing (soil)
172	CGM	Numerical analysis (general)	954	Permeability Test	Laboratory testing (soil)
173	CHAIN	Contaminant modelling	955	PEST Utilities	Parameter estimation
174	CHAIN 2D	Contaminant transport (2D analytical)	956	PEST2000	Parameter estimation
175	CHARSOIL	Dynamics (behaviour and earthquake)	957	PESTAN	Contaminant transport (1D)
176	CHASM	Slope stability (soil)	958	PESTLite	Parameter estimation
177	Chemflo	Contaminant transport (1D)	959	Petro Spase	Geographical information systems
178	CHEMFLOW	Contaminant transport (1D)	960	PFC	Numerical analysis (general)
179	ChemFlux	Contaminant transport (3D)	961	PHASE	Laboratory testing (soil)
180	ChemGraph	Geoenvironmental database systems	962	Phase2	Numerical analysis (rock)
181	ChemPoint	Geoenvironmental database systems	963	PHREEQC	Geochemistry
182	ChemStat	Geochemistry	964	PHREEQCI	Numerical analysis utilities
183	CIRCLE	Laboratory testing (soil)	965	PHREEQE	Geochemistry
184	CIRCLY	Pavements	966	PHRQPITZ	Geochemistry
185	CivilFEM	Numerical analysis (general)	967	PIES	Piles (single)
186	CLARA-W	Slope stability (soil)	968	Piglet	Piles (lateral loading and groups)
187	CLASROCK	Rock mechanics	969	PILE	Piles (single)
188	Classex	Rock mechanics	970	Pile Cap	Piles (lateral loading and groups)
189	CLOG	Settlement analysis	971	Pile Group Analysis	Piles (lateral loading and groups)

1	2	3	1	2	3
190	CLU_STAR	Slope stability (rock)	972	PileClash	Piles (lateral loading and groups)
191	COLANY	Ground improvement	973	PILECR	Piles (lateral loading and groups)
192	COM624P	Piles (lateral loading and groups)	974	Pile-MP	Piles (lateral loading and groups)
193	Combined3D	Piles (lateral loading and groups)	975	PilePro	Piles (lateral loading and groups)
194	ComplexMindlin	Settlement analysis	976	PILES	Piles (single)
195	ComplexTunnel	Settlement analysis	977	PILEWAVE	Piles (single)
196	COMPUTOX	Geochemistry	978	Pillar	Rock mechanics
197	CON2D90	Settlement analysis	979	PILSET	Piles (single)
198	Concrete Performance Report	Database systems (general)	980	PINwin	Aquifer test analysis
199	Concrete Test Report System	Database systems (general)	981	Pipeline Toolbox	Cathodic protection
200	CONEPLOT	Insitu testing	982	PISA	Numerical analysis (general)
201	ConFound	Educational	983	PIT-W	Piles (single)
202	ConSettle	Settlement analysis	984	PL-AID	Piles (single)
203	ConSim	Risk analysis	985	Plan	Mapping
204	CONSOL	Laboratory testing (soil)	986	Plan Plus	Mapping
205	CONSOL (SoilVision)	Settlement analysis	987	Plane Failure Analysis	Slope stability (rock)
206	CONSOL (Virginia)	Settlement analysis	988	Planimeter system	Data input
207	Consolidation Concept	Educational	989	PLASM	Groundwater flow (2D)
208	ConsolPlot	Laboratory testing (soil)	990	PLATE	Bearing capacity
209	Consulting Engineer Database	Contract Planning and Management	991	PLATTDIM	Bearing capacity
210	CONTAM	Contaminant transport (1D)	992	PlaxFlow	Groundwater flow (2D)
211	Contam Data System	Geoenvironmental database systems	993	PLAXIS	Numerical analysis (soil)
212	CONTOUR	Plotting (2.5D & contouring)	994	Plaxis 3D Foundation	Numerical analysis (soil)
213	CoPlot	Plotting (2.5D & contouring)	995	PLAXIS 3DTunnel	Numerical analysis (soil)
214	Coreview	Borehole log production	996	PLAXIS Dynamics module	Dynamics (behaviour and earthquake)
215	CoStat	Plotting and statistics	997	PLog	Field data collection
216	Counter 3.0	Data input	998	PLOTICHEM	Plotting (special)
217	Counter PC	Data input	999	PlotCPT	Insitu testing
218	COVAR	Numerical analysis utilities	1000	PLUME	Contaminant transport (3D)
219	CoVis	Plotting (2D x-y)	1001	PLUME2D	Contaminant transport (2D analytical)
220	CP ActiveX SDK	Cathodic protection	1002	PMWIN	Groundwater flow (MODFLOW)
221	CP Diagnostic	Cathodic protection	1003	Pocket EQUIS	Field data collection
222	CPDM	Cathodic protection	1004	Pocket ESA	Impact assessment
223	CPillar	Rock mechanics	1005	Pocket WinLoG	Field data collection
224	CPT7	Insitu testing	1006	PocketSI	Field data collection
225	CPTGL	Insitu testing	1007	Pollute	Contaminant transport (1D)
226	CPTINT	Insitu testing	1008	POLUT2D	Contaminant transport (2D FEM)
227	CPT-LOG	Insitu testing	1009	PolyMap	Geological modelling
228	CPT-pro	Insitu testing	1010	PowerSuite	Borehole log production
229	CQC - Cement Products	Database systems (general)	1011	PQuake	Field data collection
230	CQC-Field Density	Database systems (general)	1012	Practical Geostatistics 2000	Educational
231	Cris	Laboratory testing (soil)	1013	Practical Rock Engineering	Educational
232	CRISP-90	Numerical analysis (soil)	1014	PrecisionTree	Risk analysis
233	CrossLog	Geological modelling	1015	PRESSIOMIG	Insitu testing
234	Crystal Ball 2000	Risk analysis	1016	PRINCE	Contaminant transport (2D analytical)
235	CTL	Instrumentation	1017	Prism	Plotting (2D x-y)
236	CTAN-W	Contaminant transport (2D FEM)	1018	ProActive	Cathodic protection

1	2	3	1	2	3
237	ct-Shoring	Retaining wall design	1019	Processing Modflow PRO	Groundwater flow (MODFLOW)
238	Culvert	Drainage	1020	PROCOR	Cathodic protection
239	CUMLIQ	Dynamics (behaviour and earthquake)	1021	Proctor Density Report System	Laboratory testing (soil)
240	Curriculum Guide	Educational	1022	Productivity Tools for Geotechnical Engineers	Educational
241	CVM	Contaminant transport (1D)	1023	Profiler	Data input
242	CXTFIT	Parameter estimation	1024	PROGRS	Settlement analysis
243	CyberQuake	Dynamics (behaviour and earthquake)	1025	Prokon	Geotechnical software suites
244	CYCON	Settlement analysis	1026	Prolog	Borehole log production
245	DAMAGE	Risk analysis	1027	ProShake	Dynamics (behaviour and earthquake)
246	DAMP	Drainage	1028	PRZM2	Contaminant transport (1D)
247	DamSmart	Instrumentation	1029	PSEQGN	Dynamics (behaviour and earthquake)
248	Danfe	Numerical analysis (general)	1030	P-STAT	Plotting and statistics
249	Danmesh	Numerical analysis utilities	1031	PT Workshop	Geotechnical software suites
250	Danmung	Numerical analysis utilities	1032	PTES	Aquifer test analysis
251	Danplot	Numerical analysis utilities	1033	PULL2B	Piles (lateral loading and groups)
252	Data Automation Kit	Data input	1034	PUMPIT	Groundwater modelling
253	Data Link Pro	Cathodic protection	1035	PUMPTST	Aquifer test analysis
254	Data Verification Module (DVM)	Data validation	1036	PVDrain	Ground improvement
255	Datafield	Geoenvironmental database systems	1037	PVR	Settlement analysis
256	DataStream Enterprise	Geoenvironmental database systems	1038	PV-Wave	Plotting (3D visualisation)
257	DataStream Free	Data validation	1039	PYWALL	Retaining wall design
258	DataStream Lite	Geoenvironmental database systems	1040	QUAD4M	Dynamics (soil-structure interaction)
259	Daystar FootingMaster	Bearing capacity	1041	Quake!	Educational
260	Daystar RetainWall	Retaining wall design	1042	QUAKE/W	Dynamics (behaviour and earthquake)
261	DBGeo	Database systems (general)	1043	QuickCross-Fence	Geological modelling
262	DBSOND	Borehole log production	1044	QuickGIS	Geological modelling
263	DC-Bearing	Bearing capacity	1045	QuickLog	Borehole log production
264	DCBORE	Borehole log production	1046	QuickPlot	Plotting and statistics
265	DC-Cantilever	Retaining wall design	1047	Quickslope	Instrumentation
266	DCCHEM	Contaminant modelling	1048	QuickSoil	Plotting (2D x-y)
267	DCCONE	Insitu testing	1049	QuickSurf	Plotting (2.5D & contouring)
268	DCCONS	Laboratory testing (soil)	1050	QuickSurf Pro	Plotting (2.5D & contouring)
269	DC-Dewatering	Groundwater modelling	1051	QuikWall	Retaining wall design
270	DC-Geotex	Reinforced slopes and walls	1052	RAD	Pavements
271	DCGIS	Geographical information systems	1053	Radar Data Acquisition	Geophysics (surface)
272	DCGLOW	Laboratory testing (soil)	1054	RADFLOW	Groundwater flow (2D)
273	DC-Integra	Geotechnical software suites	1055	Radius	Geographical information systems
274	DCLIME	Laboratory testing (soil)	1056	RADMOD	Groundwater flow (MODFLOW)
275	DCLOAD	Insitu testing	1057	RAISON	Geoenvironmental database systems
276	DC-Nail	Reinforced slopes and walls	1058	RAM	Risk analysis
277	DCP Evaluation	Pavements	1059	RAMAS-age	Impact assessment
278	DC-Pile	Piles (single)	1060	RAND3D	Contaminant transport (3D)
279	DC-Pit	Retaining wall design	1061	RANDOM WALK	Contaminant transport (2D analytical)
280	DCPRESS	Laboratory testing (soil)	1062	RASSUEL	Dynamics (behaviour and earthquake)
281	DCPROBE	Insitu testing	1063	RaveGeo	Mapping
282	DCPROC	Laboratory testing (soil)	1064	RAYFRACT	Geophysics (surface)
283	DCPUMP	Aquifer test analysis	1065	RBCA Tier 2 Analyzer	Contaminant transport (2D analytical)
284	DCSECTION	Geological modelling	1066	RcPad	Bearing capacity

1	2	3	1	2	3
285	DC-Settle	Settlement analysis	1067	React!	Geochemistry
286	DCSHEAR	Laboratory testing (soil)	1068	ReActiv	Reinforced slopes and walls
287	DCSIEV	Laboratory testing (soil)	1069	REAME2004	Slope stability (soil)
288	DC-Slope	Slope stability (soil)	1070	RECALL	Database systems (general)
289	DC-Underpinning	Retaining wall design	1071	REFLEX	Geophysics (surface)
290	DC-Vibro	Ground improvement	1072	REFRA	Geophysics (surface)
291	DDRW-1	Retaining wall design	1073	Refract2K	Geophysics (surface)
292	DecisionTools Suite	Risk analysis	1074	Reinforced slopes	Reinforced slopes and walls
293	DEEP	Retaining wall design	1075	Remediation Toolkit	Contaminant modelling
294	DEFPIG	Piles (lateral loading and groups)	1076	Repute	Piles (lateral loading and groups)
295	Delta Graph	Plotting (2D x-y)	1077	RES2DINV	Geophysics (surface)
296	DEPRESSION	Settlement analysis	1078	RES2DMOD	Geophysics (surface)
297	DepthCon2000	Geophysics (surface)	1079	RES3DINV	Geophysics (surface)
298	Designing with Fortrac	Reinforced slopes and walls	1080	RES3DMOD	Geophysics (surface)
299	Devonian Shale Advisor (DSA)	Geophysics (borehole)	1081	Resistance R-Value	Laboratory testing (soil)
300	DHLogger	Field data collection	1082	Resistivity prospecting	Geophysics (surface)
301	DIADIM	Piles (single)	1083	RESIX	Geophysics (surface)
302	DIANA	Numerical analysis (general)	1084	RESIX PLUS	Geophysics (surface)
303	Digger	Data input	1085	RESIX2DI	Geophysics (surface)
304	DIG	Database systems (general)	1086	RESIXIP2DI	Geophysics (surface)
305	DigiGraph	Data input	1087	ReSlope	Reinforced slopes and walls
306	digiMatic	Data input	1088	ReSSA(2.0)	Reinforced slopes and walls
307	DigiPro for Windows	Instrumentation	1089	RETAIN	Retaining wall design
308	Digital 'X' Model Lite	Plotting (2.5D & contouring)	1090	RETC	Hydraulic properties
309	DIGITIZE Mac	Data input	1091	RetWall	Retaining wall design
310	Digitize32	Data input	1092	Retwall (Archon)	Retaining wall design
311	DigitizeIt	Data input	1093	RetWall (Napier)	Retaining wall design
312	Digitize-Pro	Data input	1094	REVS	Geophysics (surface)
313	DILLY	Insitu testing	1095	ReWaRD	Retaining wall design
314	Dimension Solution	Geosynthetics	1096	RGDIP1	Geophysics (borehole)
315	DipMeter	Plotting (special)	1097	RGDIP2	Geophysics (borehole)
316	Dips	Plotting (special)	1098	RHEO-STAU	Numerical analysis (soil)
317	DISPLAY	Geophysics (borehole)	1099	RIDO	Retaining wall design
318	DISTRIB	Settlement analysis	1100	RigidTunnel	Settlement analysis
319	Diversity calculator	Plotting and statistics	1101	RINVERT for Windows	Geophysics (surface)
320	DLISA	Slope stability (soil)	1102	RISC WorkBench	Risk analysis
321	Document Locator	Bibliographic index	1103	Risiwall	Reinforced slopes and walls
322	DotProc	Plotting (special)	1104	Risk Calc	Risk analysis
323	Downhole Explorer	Borehole log production	1105	RITZ	Contaminant transport (1D)
324	Drain	Drainage	1106	ROAM	Remediation
325	DrDTM	Plotting (3D visualisation)	1107	RocData 3.0	Laboratory testing (rock)
326	DrGeo	Geophysics (surface)	1108	RocFall	Slope stability (rock)
327	Drill&Log	Borehole log production	1109	Rock stability	Slope stability (rock)
328	Drilling and Workover suite	Site procedures	1110	ROCK3D	Slope stability (rock)
329	drillxs	Geological modelling	1111	Rocket V3.0	Piles (single)
330	DRIVE	Piles (single)	1112	RockFill	Geological illustration
331	DRIVEN	Piles (single)	1113	Rockgrout	Ground improvement
332	DS7 Geotechnical Software	Laboratory testing (soil)	1114	ROCKJR	Rock mechanics
333	DShear	Laboratory testing (soil)	1115	ROCKJRM	Rock mechanics
334	DUST-BNL	Contaminant transport (1D)	1116	Rockmate	Rock mechanics
335	DYNA5	Dynamics (soil-structure interaction)	1117	ROCKPACK	Rock mechanics
336	DYNAFLOW	Numerical analysis (general)	1118	ROCKPACK III	Slope stability (rock)
337	DynaMat	Dynamics (soil-structure interaction)	1119	ROCKPF	Slope stability (rock)
338	Dynamic penetrometer	Insitu testing	1120	RockWare AqQA	Data validation

1	2	3	1	2	3
339	Dynamic Probing	Insitu testing	1121	RockWare DigiData	Data input
340	DynaN	Dynamics (soil-structure interaction)	1122	RockWare StereoStat	Plotting (special)
341	DynaPile	Dynamics (soil-structure interaction)	1123	Rockware Visual Seismic	Geophysics (surface)
342	DYNSR	Dynamics (soil-structure interaction)	1124	RockWorks2002	Geological modelling
343	EACD-3D-96	Dynamics (soil-structure interaction)	1125	RocLab	Rock mechanics
344	EAGD-84	Dynamics (soil-structure interaction)	1126	RocPlane	Slope stability (rock)
345	EAGD-SLIDE	Dynamics (soil-structure interaction)	1127	RocSupport	Numerical analysis (rock)
346	EARTH	Contract Planning and Management	1128	ROSETTA	Hydraulic properties
347	Earth Matters	Educational	1129	ROTOMAP	Slope stability (rock)
348	EARTH PRESSURE	Retaining wall design	1130	Rozeta	Plotting (special)
349	Earth pressure (Than)	Retaining wall design	1131	RRD	Pavements
350	EarthSoft Lab Data Checker	Data validation	1132	RSS	Reinforced slopes and walls
351	EasyLog	Borehole log production	1133	rWall	Retaining wall design
352	EasyMap VCL	Geographical information systems	1134	R-WALL (Inducta)	Retaining wall design
353	EasyMod	Geophysics (surface)	1135	RWH	Contaminant transport (2D analytical)
354	EC-DESIGN	Geosynthetics	1136	S+ArcView	Geographical information systems
355	e-chain	Field data collection	1137	S+SpatialStats	Geostatistics
356	ECHANT	Site procedures	1138	SADA	Risk analysis
357	ECMDS	Geosynthetics	1139	SAF-1	Piles (single)
358	ECODISC	Bibliographic index	1140	SAFE	Numerical analysis (soil)
359	EcoSSe	Geostatistics	1141	SAF-TR	Settlement analysis
360	EDAR-EM	Field data collection	1142	Sage CRISP	Numerical analysis (soil)
361	eDICTS	Contract Planning and Management	1143	Sample Labeler	Site procedures
362	EDISON	Insitu testing	1144	Sanitas	Risk analysis
363	EERA	Dynamics (behaviour and earthquake)	1145	Sarma	Slope stability (soil)
364	eFacility	Geoenvironmental database systems	1146	SASSI2000	Dynamics (soil-structure interaction)
365	EKKO_3D	Geophysics (surface)	1147	SATURN GEIS	Geoenvironmental database systems
366	EKKO_ANALYSIS	Geophysics (surface)	1148	SCALE	Geotechnical software suites
367	EKKO_BASE	Geophysics (surface)	1149	SCARP	Piles (single)
368	EKKO_IMAGE	Geophysics (borehole)	1150	SchlumBG	Geophysics (surface)
369	EKKO_MODEL	Geophysics (surface)	1151	Schmert	Settlement analysis
370	EKKO_POINTER	Geophysics (surface)	1152	SCPT-DAA	Insitu testing
371	EKKO_RUN	Geophysics (surface)	1153	SDPS	Settlement analysis
372	EKKO_TOOLS	Geophysics (surface)	1154	SEAWAVE	Dynamics (behaviour and earthquake)
373	ELETOM	Geophysics (surface)	1155	Sections	Geological illustration
374	ELFEN	Numerical analysis (rock)	1156	SEEP	Groundwater flow (2D)
375	ELPLA	Settlement analysis	1157	SEEP (Virginia)	Groundwater flow (2D)
376	ELSYM5	Pavements	1158	Seep3D	Groundwater flow (3D)
377	EMAGIS	Database systems (general)	1159	SEEPCALC	Groundwater flow (2D)
378	EMBANK	Settlement analysis	1160	SEEPS2D	Groundwater flow (2D)
379	EMDS	Impact assessment	1161	SEEPU2D	Groundwater flow (2D)
380	EnkaRoad	Geosynthetics	1162	SEEP-W	Groundwater flow (2D)
381	Enkaslope	Reinforced slopes and walls	1163	SefCut	Groundwater flow (2D)
382	ENKONS/PC	Settlement analysis	1164	SEFTRANS	Contaminant transport (2D FEM)
383	ENVI	Image analysis	1165	SefWeir	Groundwater flow (2D)
384	Enviro Data	Geoenvironmental database systems	1166	SEISAB	Dynamics (soil-structure interaction)
385	Enviro Spase	Geoenvironmental database systems	1167	SeisOpt@2D	Geophysics (surface)
386	Enviro Stats	Geostatistics	1168	SEPAP	Dynamics (soil-structure interaction)
387	EnviroBase Pro	Geoenvironmental database systems	1169	SEQUENCE	Contaminant modelling
388	Environmental Insite	Plotting (3D visualisation)	1170	SequenceStratColumn	Borehole log production
389	Environmental WorkBench	Plotting (3D visualisation)	1171	SESOIL	Contaminant modelling

1	2	3	1	2	3
390	Envista	Contract Planning and Management	1172	SESOIL Version 2.1	Contaminant transport (1D)
391	EPA-VHS	Contaminant modelling	1173	SETOFF	Settlement analysis
392	EPI Spec Disk	Geosynthetics	1174	SET-SAND	Settlement analysis
393	EPRES	Retaining wall design	1175	SETTLE	Settlement analysis
394	EQPACK	Dynamics (behaviour and earthquake)	1176	SEVIEW	Contaminant modelling
395	EQRISK	Dynamics (behaviour and earthquake)	1177	sFooter	Bearing capacity
396	EQS4WIN	Geochemistry	1178	SHAFT	Piles (single)
397	EQiS Chem	Geoenvironmental database systems	1179	SHAFT (Ensoft) for Windows	Piles (single)
398	EQiS Explorer	Geoenvironmental database systems	1180	SHAFTUF	Piles (single)
399	EQiS Geology	Database systems (general)	1181	SHAKE2000	Dynamics (behaviour and earthquake)
400	EQWin	Geoenvironmental database systems	1182	SHAKE21	Dynamics (behaviour and earthquake)
401	EQWin Data Manager	Geoenvironmental database systems	1183	SHAKE91	Dynamics (behaviour and earthquake)
402	ER Mapper	Image analysis	1184	ShakEdit	Dynamics (behaviour and earthquake)
403	ERMA Data Manager	Geoenvironmental database systems	1185	SHALSTAB	Slope stability (soil)
404	ERMA Groundwater Modeler	Groundwater modelling	1186	Shaly Sand Advisor (SSA)	Geophysics (borehole)
405	ERMA Site Geologist	Geological modelling	1187	SHARP	Groundwater flow (3D)
406	Erosion Works	Geosynthetics	1188	ShawPlot	Geophysics (borehole)
407	ERST	Dynamics (soil-structure interaction)	1189	Shear Test	Laboratory testing (soil)
408	ESAP-95	Contaminant modelling	1190	SHEET	Retaining wall design
409	ESAU	Slope stability (soil)	1191	SHEETING DESIGN	Retaining wall design
410	Espora	Aquifer test analysis	1192	SHEETING VERIFICATION	Retaining wall design
411	EVS	Plotting (3D visualisation)	1193	SheetPile Wall	Retaining wall design
412	Examine 2D	Numerical analysis (rock)	1194	SHEETWAL	Retaining wall design
413	Examine 3D	Numerical analysis (rock)	1195	ShowFlow 2	Contaminant transport (2D analytical)
414	ExamineTAB	Numerical analysis (rock)	1196	SID	Database systems (with log production)
415	EXEPF-ECL	Site procedures	1197	Sieve Analysis Report System	Laboratory testing (soil)
416	Exp Modflow	Groundwater flow (MODFLOW)	1198	SieveGraph	Laboratory testing (soil)
417	EXPEAR	Pavements	1199	Sigma-2D	Numerical analysis (general)
418	Exploration Office	Geological modelling	1200	Sigma-3D	Numerical analysis (general)
419	EXPRES	Contaminant modelling	1201	SigmaPlot	Plotting (2D x-y)
420	EXPVD	Ground improvement	1202	SigmaScan Pro	Image analysis
421	EzASCII	Geophysics (borehole)	1203	SigmaStat	Plotting and statistics
422	EzBIT	Geophysics (borehole)	1204	SIGMA-W	Numerical analysis (soil)
423	EZDLIS	Geophysics (borehole)	1205	Signproc	Geophysics (surface)
424	EZGraph	Plotting (special)	1206	Simca	Plotting and statistics
425	EzLIS	Geophysics (borehole)	1207	SIMPLE	Piles (lateral loading and groups)
426	EzSlide	Slope stability (rock)	1208	SIMQKE	Dynamics (behaviour and earthquake)
427	EZVOL	Contract Planning and Management	1209	SIMQKE-II	Dynamics (behaviour and earthquake)
428	Fact Sheets	Pavements	1210	SIMSTAT	Plotting and statistics
429	FAD	Pavements	1211	Single Well Solutions	Aquifer test analysis
430	Fastlog	Data input	1212	Sirius	Plotting and statistics
431	FB-Deep	Piles (single)	1213	Site Investigation	Educational
432	FB-Pier	Piles (lateral loading and groups)	1214	SiteGIS	Geoenvironmental database systems
433	FE2D	Numerical analysis (general)	1215	SizePerm	Hydraulic properties
434	FE2DNL	Numerical analysis (soil)	1216	SLABS	Settlement analysis
435	FEADAM84	Numerical analysis (soil)	1217	SLAP	Piles (lateral loading and groups)
436	FEAR	Settlement analysis	1218	SlicerDicer	Plotting (3D visualisation)
437	FEECON	Numerical analysis (soil)	1219	Slide	Slope stability (soil)
438	FEFLOW	Groundwater flow (3D)	1220	SLIP	Slope stability (soil)



1	2	3	1	2	3
439	FELPA	Numerical analysis utilities	1221	SLOPBG	Slope stability (soil)
440	FEM	Numerical analysis (soil)	1222	Slope (ejeSoft)	Slope stability (soil)
441	FEMA	Contaminant transport (1D)	1223	Slope (GeoStru)	Slope stability (soil)
442	FEMGV	Numerical analysis utilities	1224	Slope (Oasys)	Slope stability (soil)
443	FEMWASTE	Contaminant transport (1D)	1225	SLOPE 12	Slope stability (soil)
444	FEMWATER 2D	Groundwater flow (2D)	1226	SLOPE 12R	Reinforced slopes and walls
445	FEMWATER BLT	Contaminant transport (2D FEM)	1227	Slope 2000	Slope stability (soil)
446	FEPG	Numerical analysis utilities	1228	SLOPE 8R	Slope stability (soil)
447	FEQDrain	Ground improvement	1229	SLOPE STABILITY (Fine)	Slope stability (soil)
448	FES	Retaining wall design	1230	SLOPE/W Basic Edition	Slope stability (soil)
449	FESEEP for Windows	Groundwater flow (2D)	1231	SLOPEPACK	Slope stability (rock)
450	FEWALLS	Retaining wall design	1232	Slope-W	Slope stability (soil)
451	FIDES-Bearing Capacity	Bearing capacity	1233	SLOPNC	Slope stability (soil)
452	FIDES-Settlement	Settlement analysis	1234	SLUGC	Aquifer test analysis
453	Field Data Recorder	Field data collection	1235	SLUGT	Aquifer test analysis
454	Field Data System (FDS)	Field data collection	1236	Slurry	Settlement analysis
455	Field Density Report System	Insitu testing	1237	SMAP 2D/3D	Numerical analysis (soil)
456	Filter drain	Drainage	1238	SNAILZ	Reinforced slopes and walls
457	FirstBreak	Database systems (general)	1239	Soakaway Design	Drainage
458	FLAC	Numerical analysis (soil)	1240	Socket	Piles (single)
459	FLAC (University of Sydney)	Settlement analysis	1241	Software for Landslide and Tunnelling Hazards	Geotechnical software suites
460	FLAC 3D	Numerical analysis (soil)	1242	SOIL	Hydraulic properties
461	FLAC/Slope	Slope stability (soil)	1243	Soil Classification	Laboratory testing (soil)
462	FLEA5	Settlement analysis	1244	Soil Project	Borehole log production
463	FlexiTrace	Data input	1245	Soilab99	Laboratory testing (soil)
464	FLOFIT	Hydraulic properties	1246	SoilCover	Groundwater modelling
465	FLONET-TRANS	Contaminant transport (2D FEM)	1247	SOILMECH	Educational
466	Florida Pier	Piles (lateral loading and groups)	1248	SOILPROP	Hydraulic properties
467	FlowBNA	Mapping	1249	SoilSeriesPro v.2	Laboratory testing (soil)
468	Flownet	Groundwater flow (2D)	1250	SOILSTAB	Ground improvement
469	FlowNet (Hemker)	Groundwater flow (2D)	1251	SOILSTRUCT	Numerical analysis (soil)
470	Flowpath II	Groundwater flow (2D)	1252	SoilVision	Hydraulic properties
471	FLUSH	Dynamics (soil-structure interaction)	1253	SoilVision Demo Database	Hydraulic properties
472	FME	Geographical information systems	1254	SOLMEX	Educational
473	FOCALs	Settlement analysis	1255	SOLUTE	Contaminant transport (3D)
474	Foot2000	Geotechnical software suites	1256	SOLUTRANS	Contaminant transport (3D)
475	Footing (Inducta)	Bearing capacity	1257	SP5	Laboratory testing (soil)
476	Footing Design	Bearing capacity	1258	SpaDis	Geological modelling
477	Footings	Bearing capacity	1259	SPANS	Geographical information systems
478	Forslope	Reinforced slopes and walls	1260	SPANS Observer	Geographical information systems
479	FOSM Calculator	Geotechnical software suites	1261	Spase	Database systems (general)
480	Foundation pad analysis	Bearing capacity	1262	SPASM	Dynamics (soil-structure interaction)
481	Foundation3D	Piles (lateral loading and groups)	1263	Spatial Explorer	Geological modelling
482	FOXTA	Numerical analysis (soil)	1264	SPECEQ-UQ	Dynamics (behaviour and earthquake)
483	Frac2D	Groundwater flow (2D)	1265	SPECMaker	Geosynthetics
484	FRAC3DVS	Contaminant transport (3D)	1266	SPECTR	Dynamics (behaviour and earthquake)
485	FracMan	Geological modelling	1267	SpectraPave	Geosynthetics
486	FracSIS	Database systems (general)	1268	SpheriStat 2.2	Plotting (special)
487	FRACTRAN	Contaminant transport (2D FEM)	1269	SpheriStat Lite	Plotting (special)
488	FRD	Pavements	1270	SPILE	Piles (single)
489	FREW	Retaining wall design	1271	SPILLCAD	Remediation

1	2	3	1	2	3
490	FRICPILE	Piles (single)	1272	SpiView	Geophysics (surface)
491	FSConsol	Settlement analysis	1273	SPLINTER	Piles (lateral loading and groups)
492	FTWORK	Contaminant transport (2D FD)	1274	Split	Groundwater flow (2D)
493	FullPixelSearch	Image analysis	1275	SPOOKS	Retaining wall design
494	GABION	Retaining wall design	1276	SPREAD FOOTING	Bearing capacity
495	GADFLEA	Dynamics (behaviour and earthquake)	1277	SPRING	Educational
496	Gaiapress	Insitu testing	1278	SPTfoundation	Bearing capacity
497	Galena	Slope stability (soil)	1279	SPUNT-A3	Retaining wall design
498	GAP for CADD	Borehole log production	1280	SPW	Retaining wall design
499	GAS	Geochemistry	1281	SPW 911	Retaining wall design
500	GASGroup	Piles (lateral loading and groups)	1282	SRWall	Reinforced slopes and walls
501	GAWAC	Retaining wall design	1283	SRWall Miragrid Datafiles	Reinforced slopes and walls
502	GCOSIM3D	Geostatistics	1284	SSI	Educational
503	GDA	Rock mechanics	1285	STABGM	Reinforced slopes and walls
504	GDM	Database systems (with log production)	1286	Stabl for Windows	Slope stability (soil)
505	GDSLAB	Laboratory testing (soil)	1287	STABLE	Slope stability (soil)
506	GDSLAB REPORTS	Laboratory testing (soil)	1288	STABLEPRO for Windows	Slope stability (soil)
507	Gemcom for Windows	Geological modelling	1289	STANMOD	Contaminant modelling
508	GEMS	Geological modelling	1290	STANMOD2	Contaminant modelling
509	GenesisII	Plotting (3D visualisation)	1291	STARES for Windows	Reinforced slopes and walls
510	Geo Analysis templates	Laboratory testing (soil)	1292	Static penetrometer	Insitu testing
511	GEO Software Suite	Borehole log production	1293	Static Pile Analysis	Piles (lateral loading and groups)
512	GEO4	Geotechnical software suites	1294	Static Probing	Insitu testing
513	GeoBASE	Database systems (with log production)	1295	STAWALL	Retaining wall design
514	GEOBASE (Elsevier)	Bibliographic index	1296	STB	Slope stability (soil)
515	Geoblock	Geological modelling	1297	STEDwin 2.6	Slope stability (soil)
516	GEOCAD	Mapping	1298	StepMaster	Aquifer test analysis
517	GEOCAL	Laboratory testing (soil)	1299	StereoNett	Plotting (special)
518	Geochemist's Workbench	Geochemistry	1300	StereoPro	Plotting (special)
519	Geocomp	Mapping	1301	STF	Geochemistry
520	GeoCoPS	Geosynthetics	1302	Stochastic MODFLOW	Groundwater flow (MODFLOW)
521	Geocrack	Numerical analysis (rock)	1303	STORM	Geostatistics
522	GEODASY	Database systems (with log production)	1304	Strand7	Numerical analysis (general)
523	Geo-DMS	Instrumentation	1305	Strataslope	Reinforced slopes and walls
524	Geo-EAS	Geostatistics	1306	Stratawall	Reinforced slopes and walls
525	GeoEnviron	Geoenvironmental database systems	1307	StratColumn	Borehole log production
526	Geo-Explorer	Insitu testing	1308	Strater	Borehole log production
527	GeoExpress	Plotting (3D visualisation)	1309	Stratigrapher	Geological illustration
528	Geofilter	Geosynthetics	1310	STRESS	Settlement analysis
529	GeoFlash	Geographical information systems	1311	StrsDist	Settlement analysis
530	Geoflex	Retaining wall design	1312	Structural Engineering Library	Geotechnical software suites
531	GEOFLOW	Groundwater flow (2D)	1313	Structures Geotechnical Prog	Piles (single)
532	GeoGIS	Geographical information systems	1314	SuLog	Borehole log production
533	Geographic Calculator	Mapping	1315	SUMMERS	Contaminant modelling
534	Geographic Explorer	Mapping	1316	Super Slug	Aquifer test analysis
535	Geographic Tracker	Mapping	1317	SuperLog	Borehole log production
536	Geographic Transformer	Mapping	1318	SupportIT	Retaining wall design
537	Geographic Translator	Mapping	1319	Surface III+	Plotting (2.5D & contouring)

1	2	3	1	2	3
538	Geographic View	Mapping	1320	Surfer	Plotting (2.5D & contouring)
539	Geokit	Geological modelling	1321	Surfit	Plotting (2.5D & contouring)
540	GEOL_DH	Geological illustration	1322	SurfLink	Geographical information systems
541	GeoLink	Geographical information systems	1323	SurGe	Plotting (2.5D & contouring)
542	Geolmark	Geological modelling	1324	SUTRA	Contaminant transport (2D FD)
543	GEOLOG	Borehole log production	1325	SUTRA-GUI	Numerical analysis utilities
544	GEO-LOG 2	Database systems (with log production)	1326	SV Flux 2D	Groundwater flow (2D)
545	GEO-LOG 3	Database systems (with log production)	1327	SV Flux 3D	Groundwater flow (3D)
546	Geological Map Maker	Mapping	1328	SV Grainsize	Laboratory testing (soil)
547	GeoMedia	Geographical information systems	1329	SVAH	Slope stability (soil)
548	GeoMedia Pro	Geographical information systems	1330	SVE-3D	Contaminant modelling
549	GeoModel	Geophysics (surface)	1331	SVHeat	Geothermal
550	geoMS	Geostatistics	1332	SVSolid	Numerical analysis (soil)
551	GEO MUR	Retaining wall design	1333	SWACROP	Groundwater flow (1D)
552	GEONac-PSI	Piles (lateral loading and groups)	1334	SWANDYNE for Windows	Numerical analysis (soil)
553	GeoPACK	Geostatistics	1335	SWANFLOW	Contaminant transport (3D)
554	Geophysical Teaching Suite	Educational	1336	SWARS	Slope stability (rock)
555	GEOPRO	Geotechnical software suites	1337	SWASE	Slope stability (soil)
556	GeoRef	Bibliographic index	1338	Swedge	Slope stability (rock)
557	Georit	Insitu testing	1339	Swell Consolidation	Laboratory testing (soil)
558	GeoRock (GeoStru)	Slope stability (rock)	1340	SWICHA	Contaminant transport (3D)
559	GEOROK	Rock mechanics	1341	SWIFD	Dynamics (behaviour and earthquake)
560	GEOSIN	Instrumentation	1342	SWIFT 2000	Contaminant transport (3D)
561	Geoslide/Proslide	Slope stability (rock)	1343	SWIFT-486	Contaminant transport (3D)
562	GEOSLOPE	Slope stability (soil)	1344	SWIFT-98	Contaminant transport (3D)
563	GeoSmart II	Borehole log production	1345	SWIPS	Database systems (general)
564	GeoSmart II Lab Tool	Laboratory testing (soil)	1346	SWM	Piles (lateral loading and groups)
565	Geosoft DAP	Geographical information systems	1347	SWMS-2D	Contaminant transport (2D FD)
566	GEOSPAR	Reinforced slopes and walls	1348	SWMS-3D	Contaminant transport (3D)
567	Geospatial Explorer	Plotting (3D visualisation)	1349	SYSTAT	Plotting and statistics
568	Geospec 2	Ground improvement	1350	T2VOC	Contaminant modelling
569	GEOSTAB	Slope stability (soil)	1351	TableCurve 2D	Plotting (2D x-y)
570	GeoStar	Slope stability (soil)	1352	TableCurve 3D	Plotting (3D visualisation)
571	Geostatistical Evaluator	Geostatistics	1353	TAILS	Settlement analysis
572	Geostokos Toolkit	Geostatistics	1354	TALREN 4	Slope stability (soil)
573	GEOSTRESS	Numerical analysis (soil)	1355	TARGET	Contaminant transport (3D)
574	GeoSymbol	Geological illustration	1356	Target (Oasis montaj)	Geological modelling
575	Geo-Tec A	Insitu testing	1357	Tasa Graphic Illustrations	Geological illustration
576	Geo-Tec B	Slope stability (soil)	1358	TatukGIS Developer Kernel	Geographical information systems
577	Geo-Tec C	Piles (single)	1359	TatukGIS Free Calculator	Geographical information systems
578	Geo-Tec D	Retaining wall design	1360	TatukGIS Free Viewer	Geographical information systems
579	Geotechnical Abstracts	Bibliographic index	1361	TatukGIS Internet Server LITE	Geographical information systems
580	GeotechniCAL Reference	Educational	1362	TBC	Contaminant transport (3D)
581	GeotechniCAL Tutorial	Educational	1363	TCON	Settlement analysis
582	GEOTHERM	Geothermal	1364	TECHBASE	Database systems (with log production)
583	GEOTIS	Geological modelling	1365	TechDig	Data input
584	GeoTools	Plotting (special)	1366	TechGraf	Plotting (2D x-y)
585	GEOVIEW	Geographical information systems	1367	Tecplot	Plotting (3D visualisation)

1	2	3	1	2	3
586	GeoViewer	Instrumentation	1368	Tecplot+3DV	Plotting (3D visualisation)
587	German Standard (DIN 4014)	Piles (single)	1369	TectoniCAD Pro	Plotting (special)
588	German Standard (DIN 4017)	Bearing capacity	1370	TELDYN	Dynamics (soil-structure interaction)
589	GFA2D	Slope stability (soil)	1371	TELSTA	Numerical analysis (soil)
590	GFLOW	Groundwater flow (3D)	1372	TEM-BZ	Geophysics (surface)
591	GFLOW 2000	Groundwater flow (2D)	1373	TEMP-W	Geothermal
592	GGU-ATTERBERG	Laboratory testing (soil)	1374	Tensar Pave	Geosynthetics
593	GGU-AXPILE	Piles (single)	1375	TensarWall	Reinforced slopes and walls
594	GGU-BORELOG	Borehole log production	1376	TENWEB	Geosynthetics
595	GGU-CAD	Geological illustration	1377	Ternary Plot	Plotting (special)
596	GGU-COMPACT	Laboratory testing (soil)	1378	TerraDigitizer	Data input
597	GGU-CONSOLIDATE	Settlement analysis	1379	TERRAIN	Geological modelling
598	GGU-CONTAM FE	Contaminant transport (2D FEM)	1380	Terrain Tools	Mapping
599	GGU-CONTAM RW	Contaminant transport (2D FEM)	1381	Terrain Tools 3D	Mapping
600	GGU-DENSITY	Laboratory testing (soil)	1382	Terramodel	Mapping
601	GGU-DIRECTSHEAR	Laboratory testing (soil)	1383	TerraStation II	Geological modelling
602	GGU-DRAWDOWN	Groundwater modelling	1384	TerraTox - TerraFit Suite	Geochemistry
603	GGU-ELASTIC	Settlement analysis	1385	TESS	Dynamics (behaviour and earthquake)
604	GGU-ENSLIN	Laboratory testing (soil)	1386	TestStar fracture toughness	Laboratory testing (rock)
605	GGU-FOOTING	Bearing capacity	1387	TestStar triaxial	Laboratory testing (rock)
606	GGU-GABION	Retaining wall design	1388	TestStar uniaxial	Laboratory testing (rock)
607	GGU-GEO GRAPH	Plotting (2.5D & contouring)	1389	TETRA	Groundwater modelling
608	GGU-LABPERM	Laboratory testing (soil)	1390	TETRANS	Contaminant transport (1D)
609	GGU-LATPILE	Piles (lateral loading and groups)	1391	Texture AutoLookup	Laboratory testing (soil)
610	GGU-LIME	Laboratory testing (soil)	1392	TextureMacro	Laboratory testing (soil)
611	GGU-LOI	Laboratory testing (soil)	1393	TGUESS	Aquifer test analysis
612	GGU-OEDOM	Laboratory testing (soil)	1394	THCVFIT	Aquifer test analysis
613	GGU-PLATELOAD	Insitu testing	1395	The Contract Tickler	Contract Planning and Management
614	GGU-PUMPTEST	Aquifer test analysis	1396	THEISFIT	Aquifer test analysis
615	GGU-RETAIN	Retaining wall design	1397	THWELLS	Groundwater modelling
616	GGU-SEEP	Drainage	1398	TIMELAG	Aquifer test analysis
617	GGU-SETTLE	Settlement analysis	1399	TimeSet	Piles (single)
618	GGU-SIEVE	Laboratory testing (soil)	1400	TINKER	Dynamics (behaviour and earthquake)
619	GGU-SLAB	Settlement analysis	1401	TMRWizard	Numerical analysis utilities
620	GGU-SLICE	Slope stability (soil)	1402	TNMN	Dynamics (soil-structure interaction)
621	GGU-SLUGTEST	Aquifer test analysis	1403	TNXSlope	Reinforced slopes and walls
622	GGU-SS FLOW2D	Groundwater flow (2D)	1404	TNXWALL	Reinforced slopes and walls
623	GGU-SS FLOW3D	Groundwater flow (3D)	1405	TOCHNOG	Numerical analysis (general)
624	GGU-STABILITY	Slope stability (soil)	1406	TOUGH2	Geothermal
625	GGU-STRATIG	Borehole log production	1407	TOWER	Dynamics (soil-structure interaction)
626	GGU-TIME GRAPH	Plotting (2.5D & contouring)	1408	TPILE	Piles (lateral loading and groups)
627	GGU-TIMESET	Laboratory testing (soil)	1409	Track	Pavements
628	GGU-TRANSIENT	Groundwater flow (2D)	1410	Track 2.0	Pavements
629	GGU-TRENCH	Retaining wall design	1411	TRAFRAP-WT	Contaminant transport (2D FEM)
630	GGU-TRIAXIAL	Laboratory testing (soil)	1412	Trench	Retaining wall design
631	GGU-UNDERPIN	Bearing capacity	1413	TRIAX	Laboratory testing (soil)
632	GGU-UNIAXIAL	Laboratory testing (soil)	1414	TRIAX (Geocomp)	Laboratory testing (soil)
633	GGU-UPLIFT	Bearing capacity	1415	TRIAXPLT	Laboratory testing (soil)
634	GGU-WATER	Laboratory testing (soil)	1416	tridicon 3D	Mapping

1	2	3	1	2	3
635	gINT AGS Checker	Data validation	1417	tridicon Architecture	Mapping
636	gINT for ArcGIS	Geographical information systems	1418	tridicon VISION	Plotting (3D visualisation)
637	gINT Logs	Borehole log production	1419	TriDraw	Plotting (special)
638	gINT Logs Plus	Database systems (with log production)	1420	Tripod	Geostatistics
639	gINT Professional	Database systems (with log production)	1421	Trispace	Plotting (2.5D & contouring)
640	GIS-Key	Geoenvironmental database systems	1422	TruFlite	Plotting (3D visualisation)
641	GIS-Key Statistics	Plotting and statistics	1423	TSD16	Geophysics (surface)
642	GIS-Key Winlogs	Database systems (with log production)	1424	tsEdit	Data input
643	GLMS	Laboratory testing (soil)	1425	TSET	Settlement analysis
644	GMM	Mapping	1426	TSLOPE	Slope stability (soil)
645	GMS	Groundwater flow (MODFLOW)	1427	TSLOPE3	Slope stability (soil)
646	GoalSmith	Contract Planning and Management	1428	TSP	Borehole log production
647	GoldNail	Reinforced slopes and walls	1429	TSSLEAK	Aquifer test analysis
648	GPAC	Field data collection	1430	TSTAB	Slope stability (soil)
649	Grab It!	Data input	1431	Tunnel Assistant	Rock mechanics
650	GRADIX	Geophysics (surface)	1432	TUNREN	Numerical analysis (soil)
651	Gradlab Gds	Laboratory testing (soil)	1433	TUNSET	Settlement analysis
652	Grain Size Distribution	Laboratory testing (soil)	1434	TVD Utility	Geophysics (borehole)
653	Graph Digitizer	Data input	1435	TWODAN	Groundwater flow (2D)
654	Grapher	Plotting (2D x-y)	1436	TZPILE for Windows	Piles (single)
655	Graphic Groundwater	Groundwater flow (MODFLOW)	1437	UBCDILLY	Insitu testing
656	Graphis	Plotting (2.5D & contouring)	1438	UC	Laboratory testing (soil)
657	GRASS	Geographical information systems	1439	UCALC	Plotting (2D x-y)
658	Grav2dc	Geophysics (surface)	1440	UCODE	Parameter estimation
659	GRAVITY WALL	Retaining wall design	1441	UDEC	Numerical analysis (rock)
660	GRAVWALL	Retaining wall design	1442	UFSHAKE	Dynamics (behaviour and earthquake)
661	GRETA	Retaining wall design	1443	UNCERT	Geostatistics
662	GRIDMAKER	Numerical analysis utilities	1444	UnGraph	Data input
663	GRIDSTAT	Geostatistics	1445	UN-GW	Groundwater modelling
664	GRLWEAP	Piles (single)	1446	UNIBEAR	Retaining wall design
665	GRONDMEC	Educational	1447	UNIPHASE	Laboratory testing (soil)
666	GRORADAR	Geophysics (surface)	1448	UNIPILE	Piles (lateral loading and groups)
667	Groundforce CAD	Retaining wall design	1449	UNIPLOT	Plotting (2D x-y)
668	GroundLoss	Settlement analysis	1450	UNISETTLE	Settlement analysis
669	Groundwater Graphics	Plotting (special)	1451	Unistat Statistical Package	Plotting and statistics
670	Groundwater Modelling CDROM	Groundwater modelling	1452	UNITEST	Piles (single)
671	Groundwater Vistas	Groundwater modelling	1453	Units Calculator	Data validation
672	GROUP 2D	Piles (lateral loading and groups)	1454	UNSATCHEM	Contaminant transport (1D)
673	GROUP 3D	Piles (lateral loading and groups)	1455	UNSATCHEM 2D	Geochemistry
674	GROUP/PSI	Piles (lateral loading and groups)	1456	UN-SCAN-IT	Data input
675	GROUPSET	Piles (lateral loading and groups)	1457	UNSODA	Hydraulic properties
676	GS+	Geostatistics	1458	Unsurfaced	Pavements
677	GSD	Laboratory testing (soil)	1459	Unsurfaced Evaluation	Pavements
678	GSLIB	Geostatistics	1460	Unwedge 3.0	Rock mechanics
679	GSlope	Slope stability (soil)	1461	Upres	Numerical analysis (soil)
680	GSTABL7 with STEDwin v.2	Slope stability (soil)	1462	USGS-SOL	Contaminant transport (3D)
681	GT Cadscript	Mapping	1463	UT3	Numerical analysis utilities
682	GTilt	Instrumentation	1464	UTEXAS3	Slope stability (soil)
683	GWALL	Retaining wall design	1465	VADOSE/W	Groundwater modelling
684	GW-Base	Geoenvironmental database systems	1466	VADSAT	Contaminant modelling
685	GWDB	Geoenvironmental database systems	1467	VAM2D	Contaminant transport (2D FEM)
686	GWDivide	Groundwater flow (2D)	1468	VaMP	Groundwater modelling
687	GWFEM1	Groundwater modelling	1469	Vane Tests	Insitu testing
688	GWFEM2	Groundwater modelling	1470	VAPEX	Risk analysis
689	GWFLOW	Groundwater flow (2D)	1471	Variowin	Geostatistics

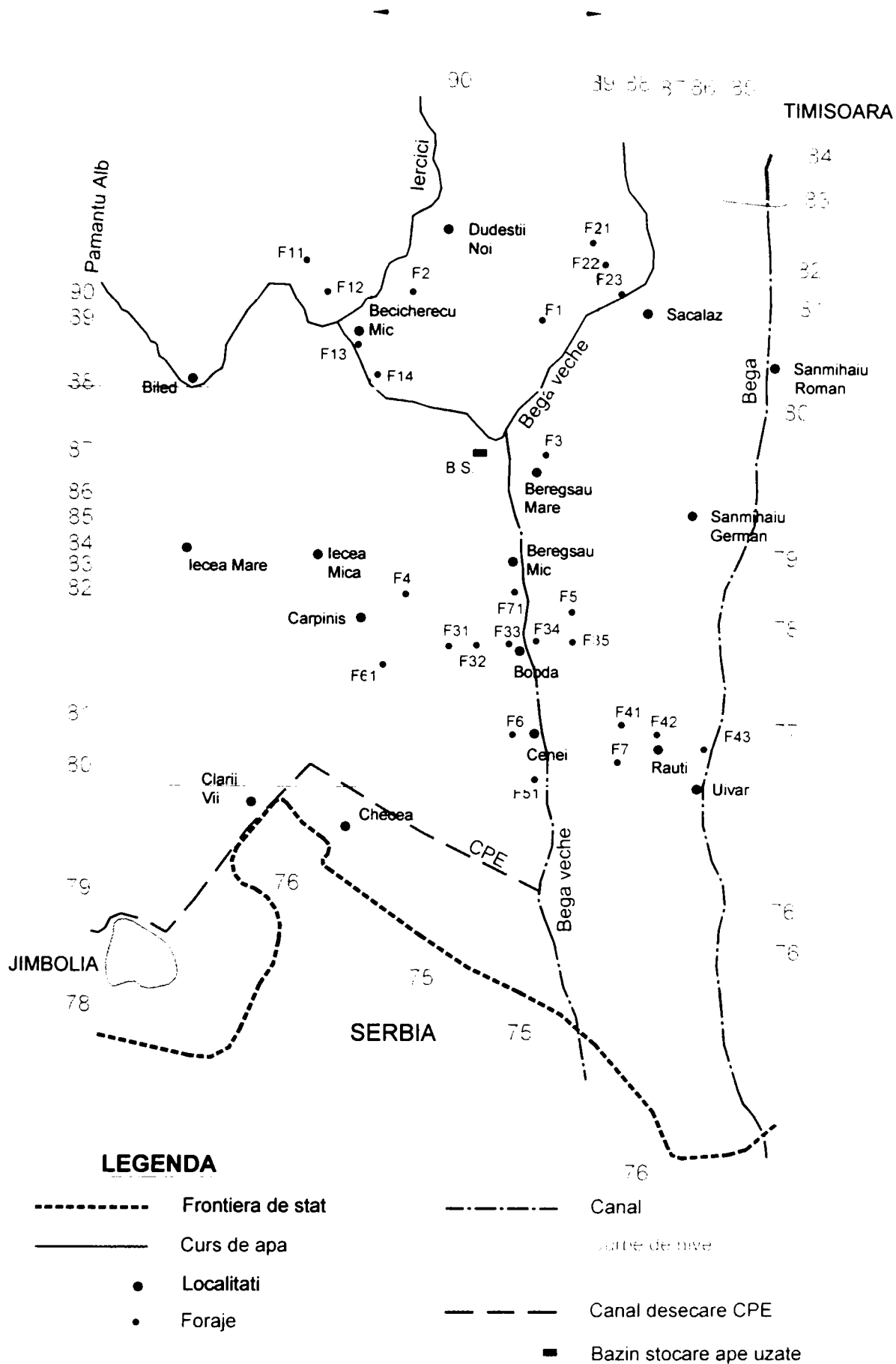
1	2	3	1	2	3
690	GWMath	Groundwater modelling	1472	VARQ	Aquifer test analysis
691	GWN-SURF	Plotting (2.5D & contouring)	1473	VDISP	Settlement analysis
692	HAPPIE	Risk analysis	1474	Vdrain	Ground improvement
693	HAZARDEXPERT	Impact assessment	1475	Vector Rose	Plotting (special)
694	HEATS2D	Numerical analysis (general)	1476	VENT2D	Contaminant transport (2D FD)
695	HEAVE	Retaining wall design	1477	VENT3D	Contaminant transport (3D)
696	HeliCAP	Piles (single)	1478	VERCAM	Retaining wall design
697	HELP Model	Contaminant modelling	1479	Versamap for Windows	Mapping
698	HELP-D	Remediation	1480	VERSAT-D2D	Dynamics (soil-structure interaction)
699	HoleBASE III	Database systems (with log production)	1481	VERSAT-P3D Group	Piles (lateral loading and groups)
700	HoleBASE Wizard	Database systems (with log production)	1482	VERSAT-P3D Single	Piles (single)
701	HorRock	Dynamics (soil-structure interaction)	1483	VERSAT-S2D	Numerical analysis (soil)
702	HOTWTR	Groundwater flow (3D)	1484	VERTPAK-1	Contaminant transport (2D analytical)
703	HPS	Contaminant transport (3D)	1485	VES	Geophysics (surface)
704	HSSM	Contaminant transport (2D analytical)	1486	Vibration consultant	Dynamics (behaviour and earthquake)
705	HSSM-WIN	Contaminant transport (2D analytical)	1487	VIEWLOG	Geophysics (borehole)
706	HST3D	Contaminant transport (3D)	1488	VIEWSEIS	Geophysics (surface)
707	HYDROGEOCHEM	Contaminant transport (2D FEM)	1489	V-image	Image analysis
708	HYDROGEOCHEM 2	Contaminant transport (2D FEM)	1490	VIRALT	Contaminant transport (2D analytical)
709	HYDROKIT 98G	Geoenvironmental software suites	1491	Virtual Consolidation Test	Educational
710	HYDROTHERM	Geothermal	1492	Virtual Triaxial Test	Educational
711	HYDRUS	Contaminant modelling	1493	VIRTUS	Contaminant transport (1D)
712	HYDRUS-1D	Contaminant transport (1D)	1494	Visage	Numerical analysis (rock)
713	HYDRUS-2D	Contaminant transport (2D FD)	1495	VISOR	Geostatistics
714	HYFRACP3D	Rock mechanics	1496	VISROCK	Numerical analysis (rock)
715	HYPERVENTILATE	Remediation	1497	VistaMetrix	Data input
716	I.L.A.	Slope stability (soil)	1498	Visual BlueBird /SPLIT	Groundwater flow (2D)
717	IBC Business Manager	Contract Planning and Management	1499	Visual Groundwater	Plotting (3D visualisation)
718	ICE-1	Contaminant modelling	1500	Visual HELP	Groundwater flow (1D)
719	IDL	Plotting (3D visualisation)	1501	Visual MINTEQ	Geochemistry
720	IDRISI for Windows	Geographical information systems	1502	Visual MODFLOW	Groundwater flow (MODFLOW)
721	IDRISI32	Geographical information systems	1503	Visual MODFLOW Pro	Groundwater flow (MODFLOW)
722	IDRISMOD	Groundwater flow (MODFLOW)	1504	Visual PEST-ASP	Parameter estimation
723	IE2DL	Geophysics (surface)	1505	VisualFEA	Numerical analysis (general)
724	ILLI-BACK	Pavements	1506	VLEACH	Contaminant transport (1D)
725	ILLI-PAVE	Pavements	1507	Voxel Analyst	Plotting (3D visualisation)
726	ILWIS for Windows	Geographical information systems	1508	Vs	Dynamics (behaviour and earthquake)
727	IMAGINE	Numerical analysis (soil)	1509	VS2D/T	Contaminant transport (2D FD)
728	IMAGINE Essentials	Mapping	1510	VS2DI	Contaminant transport (2D FD)
729	IMAGINE VirtualGIS	Geographical information systems	1511	VULCAN	Plotting (3D visualisation)
730	IMF2D	Contaminant transport (2D FEM)	1512	WALLAP	Retaining wall design
731	IMGRHL	Geographical information systems	1513	WALLS	Retaining wall design
732	IMPRO 2	Piles (single)	1514	WALLS-Dimensioning	Retaining wall design
733	Inclanalysis	Instrumentation	1515	WALLS-FEA	Retaining wall design
734	INCLI-pro	Instrumentation	1516	WALTON35	Groundwater modelling
735	INFIL	Groundwater modelling	1517	WANFE	Numerical analysis (soil)

1	2	3	1	2	3
736	Infinite Extent	Aquifer test analysis	1518	WATEQ4F	Geochemistry
737	Injectsoft	Ground improvement	1519	Watson's U-squared statistic	Plotting and statistics
738	INQUIMAP	Groundwater modelling	1520	WAVES	Dynamics (behaviour and earthquake)
739	INSITU	Insitu testing	1521	WEAP87	Piles (single)
740	InStat	Plotting and statistics	1522	WEB-PHREEQ	Geochemistry
741	INSTPILE	Piles (single)	1523	WEDGE	Slope stability (rock)
742	Interdex	Geological modelling	1524	Wedge Failure Analysis	Slope stability (rock)
743	International Civil Engineering Abstracts	Bibliographic index	1525	WELL	Aquifer test analysis
744	Introduction to Ground-Water Hydraulics	Educational	1526	WELL (Geo&soft)	Aquifer test analysis
745	intuitiveFEM/GEO	Numerical analysis (soil)	1527	Well Logger	Borehole log production
746	INVFD	Parameter estimation	1528	WellCAD	Borehole log production
747	IPI-1D	Geophysics (surface)	1529	WellPlot	Borehole log production
748	IPI-2D	Geophysics (surface)	1530	WELLTEST	Aquifer test analysis
749	IRAP RMS	Geological modelling	1531	WESHAKE	Dynamics (behaviour and earthquake)
750	IRIS Explorer	Plotting (3D visualisation)	1532	WhAEM	Contaminant transport (2D analytical)
751	ISADAB	Dynamics (soil-structure interaction)	1533	WHEAT	Mapping
752	ISATIS	Geostatistics	1534	WHI UnSat Suite	Contaminant transport (1D)
753	ISIM3D	Geostatistics	1535	WHPA	Contaminant transport (2D analytical)
754	I-Site	Instrumentation	1536	Wickdrain	Settlement analysis
755	ISMAP	Settlement analysis	1537	WinCLISP	Laboratory testing (soil)
756	ISOMAP	Plotting (2.5D & contouring)	1538	WinFence	Geological modelling
757	ISOsoft 14001	Contract Planning and Management	1539	WinFlow	Groundwater flow (2D)
758	iTOUGH2	Geothermal	1540	WinGeol	Plotting (3D visualisation)
759	iVec	Rock mechanics	1541	WinGIS	Geographical information systems
760	IX1D	Geophysics (surface)	1542	Winkler	Settlement analysis
761	JDB2D-3D	Groundwater flow (3D)	1543	WinLoG	Borehole log production
762	Jeffery	Settlement analysis	1544	WinLog Pro	Borehole log production
763	JMicroVision	Image analysis	1545	WinPost	Piles (single)
764	KAI-2001	Geological illustration	1546	WinProf	Mapping
765	KaleidaGraph	Plotting (2D x-y)	1547	WINSAF-I	Settlement analysis
766	Kbslope	Slope stability (rock)	1548	WINSAF-TR	Settlement analysis
767	Kbtunnel	Rock mechanics	1549	WinSev	Geophysics (surface)
768	KeyAGS	Data validation	1550	WINSID	Instrumentation
769	KeyGeoView	Geographical information systems	1551	WinSieve	Laboratory testing (soil)
770	KeyHOLE	Database systems (general)	1552	Winsimul 1.0	Dynamics (behaviour and earthquake)
771	KeyLAB	Laboratory testing (soil)	1553	WinStabl	Slope stability (soil)
772	Keywall	Reinforced slopes and walls	1554	WinSTAT	Plotting and statistics
773	K-REA	Retaining wall design	1555	WINSTRESS	Settlement analysis
774	Kriging Game	Educational	1556	Wintaff 98	Groundwater modelling
775	KSP	Retaining wall design	1557	Wintek	Plotting (special)
776	KYSPILL	Contaminant transport (3D)	1558	WinTrace	Contaminant transport (1D)
777	MacGeoPak	Geological utilities	1559	WinTran	Contaminant transport (2D FEM)
778	MacLOGGER	Borehole log production	1560	WinUnsath	Groundwater flow (1D)
779	MACRA 1	Geosynthetics	1561	wtProfile	Groundwater modelling
780	MacSection II	Geological modelling	1562	XatelliteShape	Mapping
781	MACSTARS	Reinforced slopes and walls	1563	Xcalcs	Settlement analysis
782	MAFIC	Groundwater flow (1D)	1564	XDAP	Laboratory testing (rock)
783	Mag2dc	Geophysics (surface)	1565	XLSTAT-Pro	Plotting and statistics
784	MagSurvey	Geophysics (surface)	1566	XSLOPE for Windows	Slope stability (soil)
785	MakeYourMap.net	Mapping	1567	XSTABL	Slope stability (soil)
786	Manifold System	Geographical information systems	1568	YARDAGE	Contract Planning and Management
787	MAP	Contaminant modelling	1569	ZBSoft	Groundwater modelling
778	MacLOGGER	Borehole log production	1570	Z-CON	Plotting (2.5D & contouring)
779	MACRA 1	Geosynthetics	1571	ZONEBUDGET	Groundwater flow (MODFLOW)
780	MacSection II	Geological modelling	1572	ZSOIL	Numerical analysis (soil)

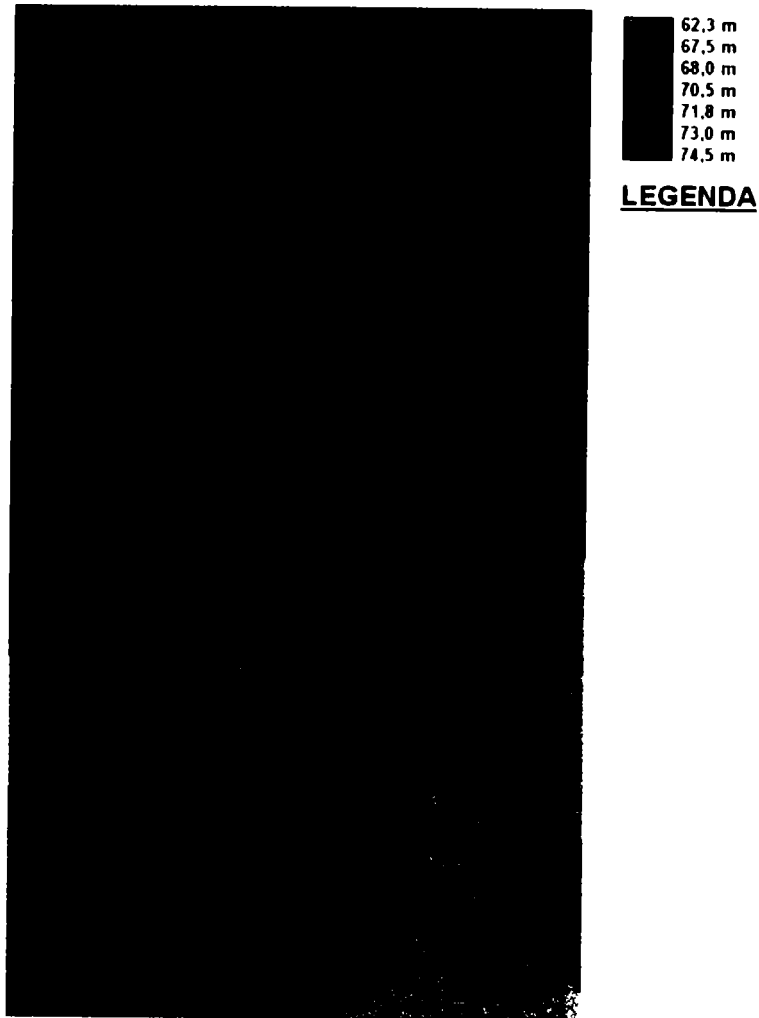
1	2	3	1	2	3
781	MACSTARS	Reinforced slopes and walls	1573	ZSTRESS	Settlement analysis
782	MAFIC	Groundwater flow (1D)			



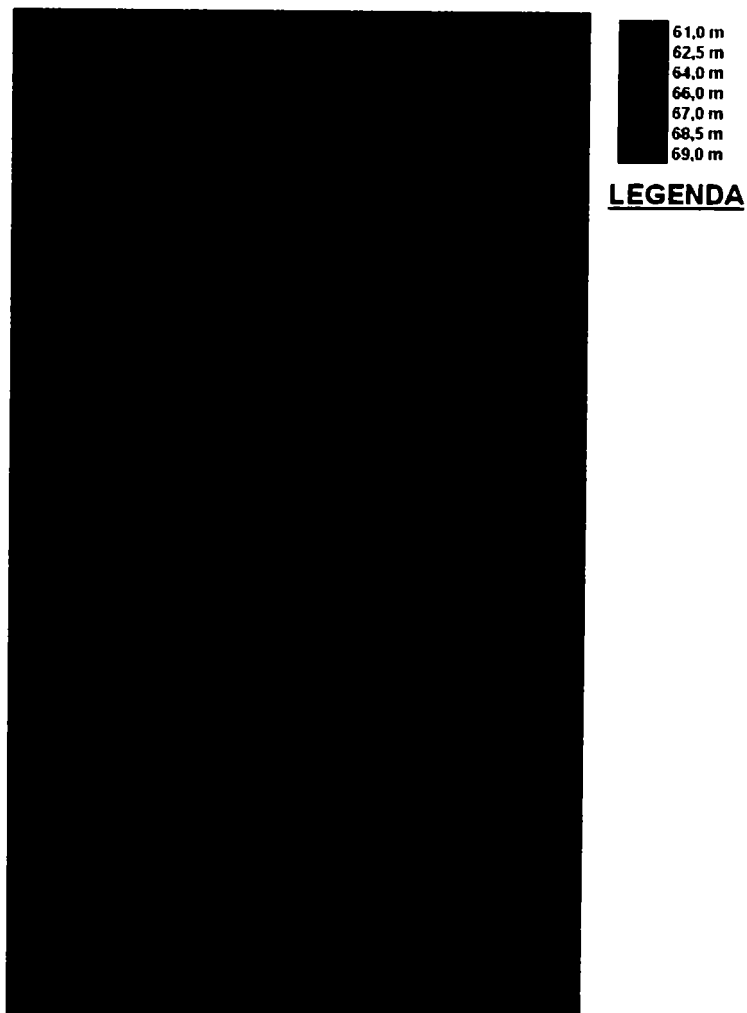
## ANEXA 3. REZULTATELE OBTINUTE PENTRU PRIMUL ORIZONT SUB PRESIUNE



*Fig. 11.1. Domeniul studiat*



*Fig. 11.2. Zonarea cotelor acoperișului stratului freatic*



*Fig. 11.3. Zonarea cotelor fundului stratului freatic*

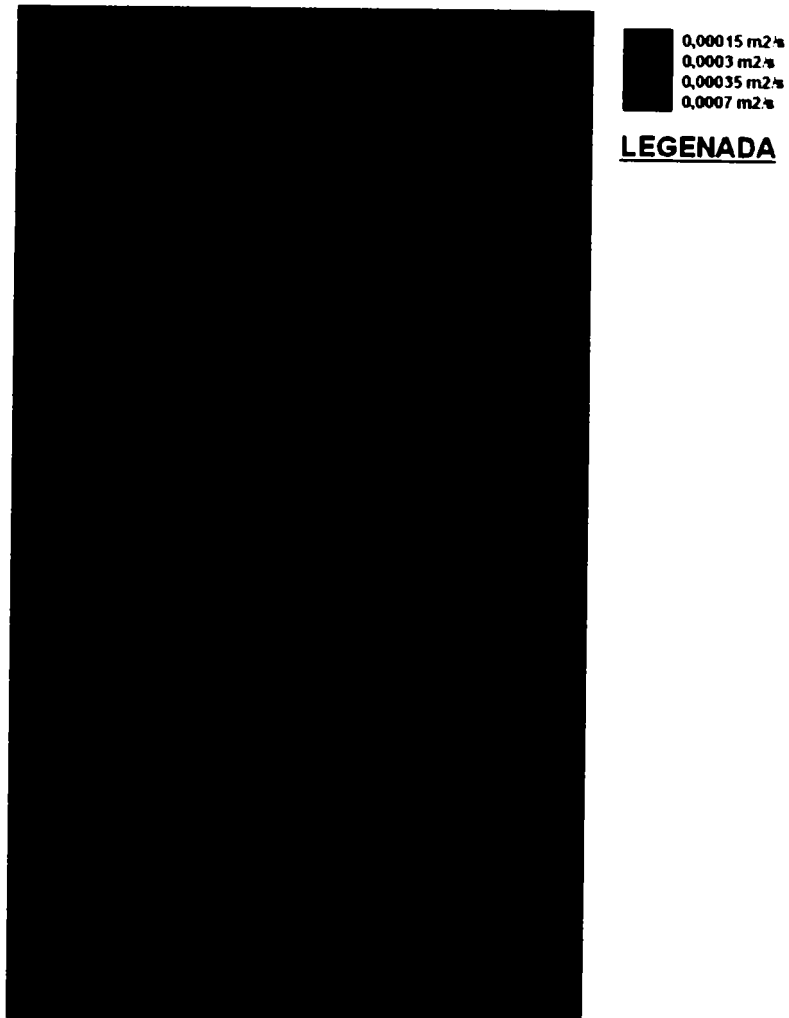


Fig. 11.4. Zonarea transmisivităților

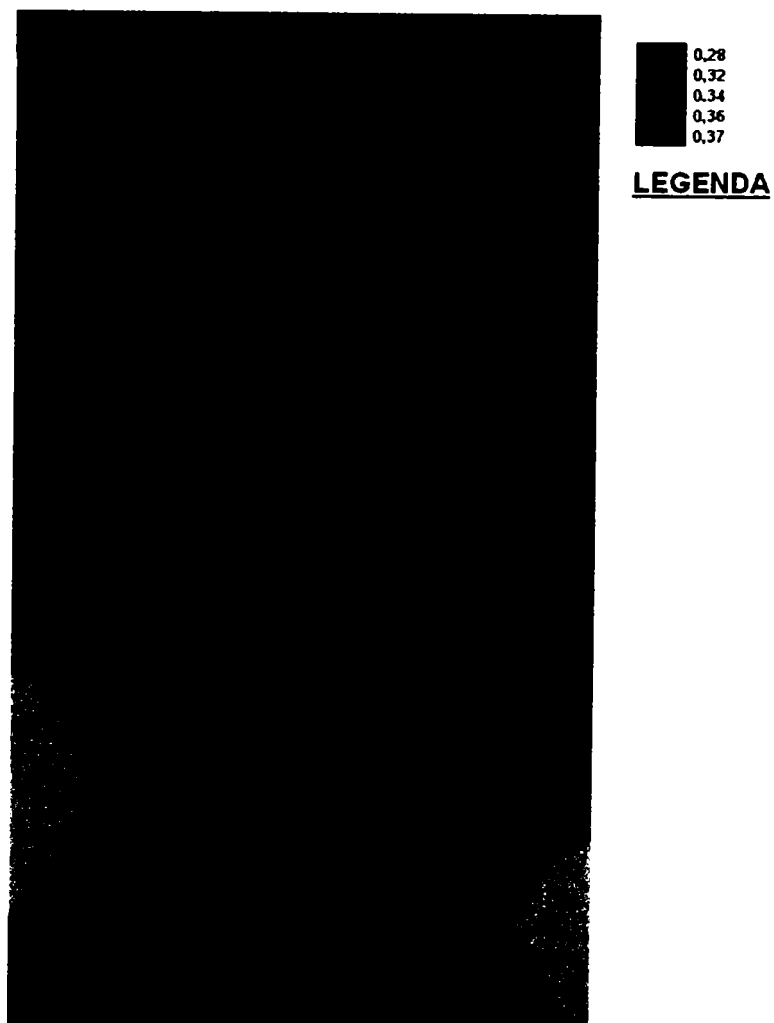


Fig. 11.5. Zonarea porozităților

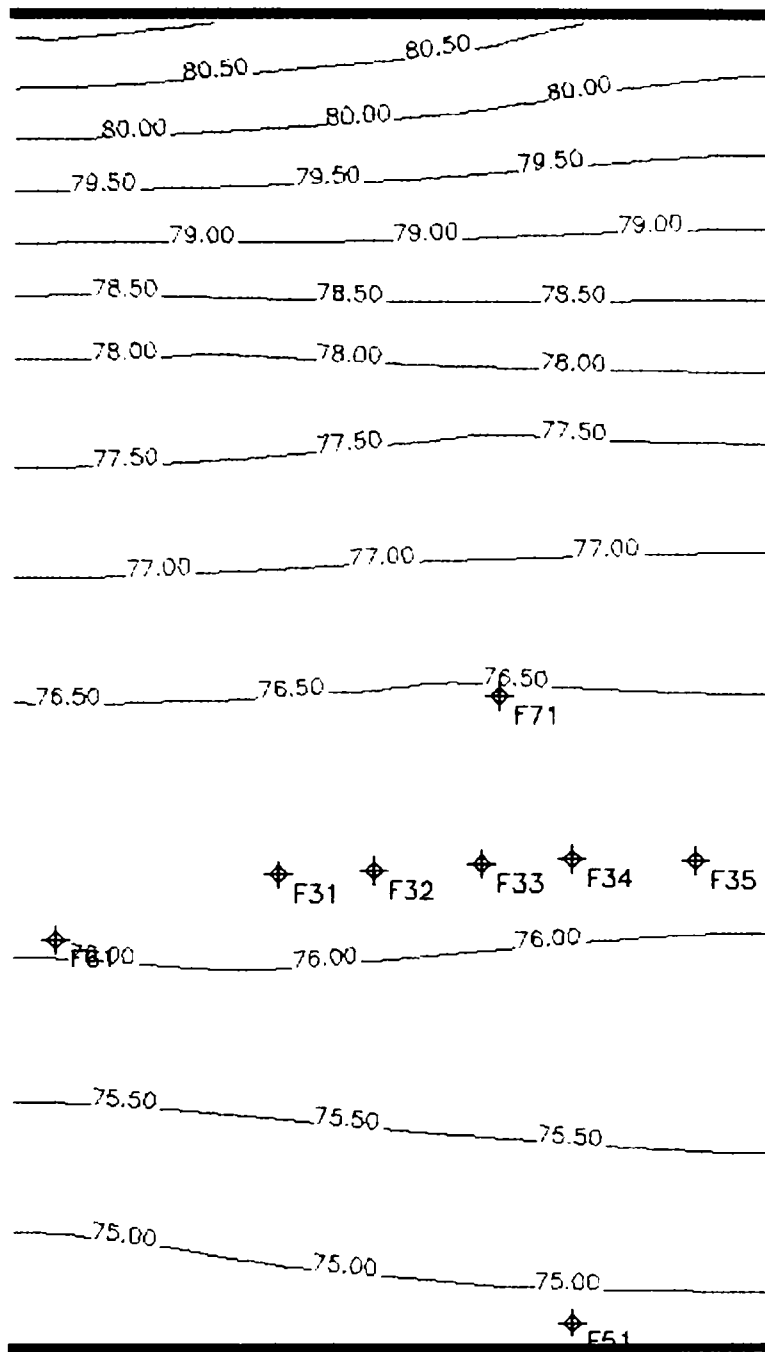


Fig. 11.6. Zonarea nivelelor hidrostatice ale primului orizont freatic (hidroizoipse)

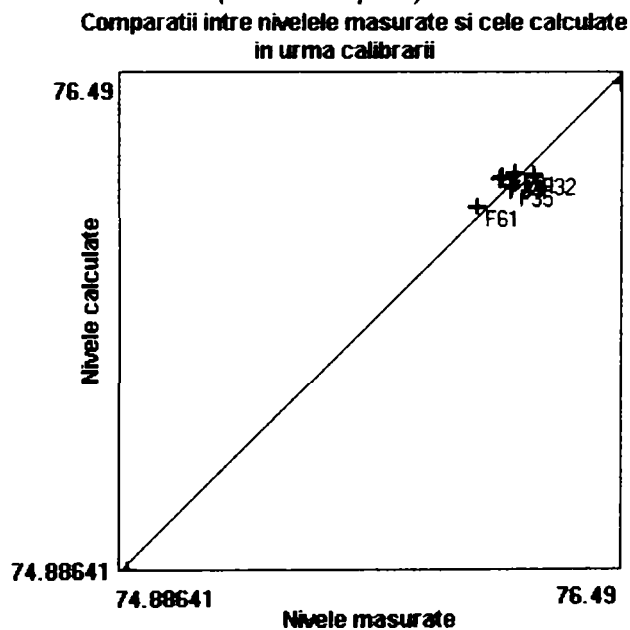


Fig. 11.7. Rezultatele calibrării

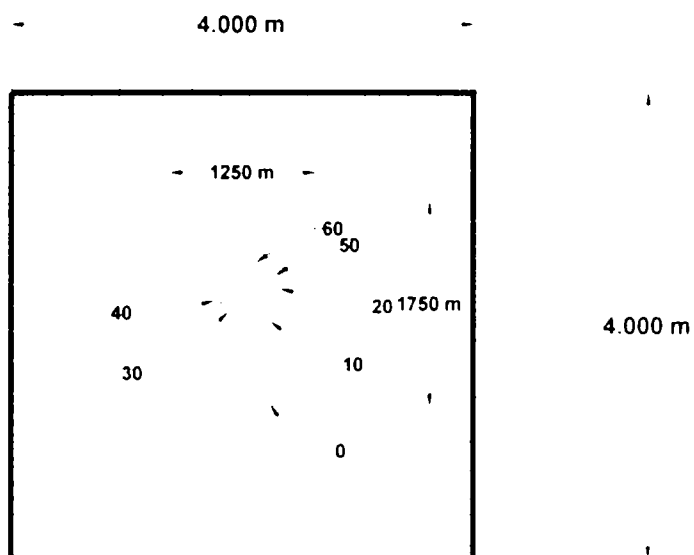
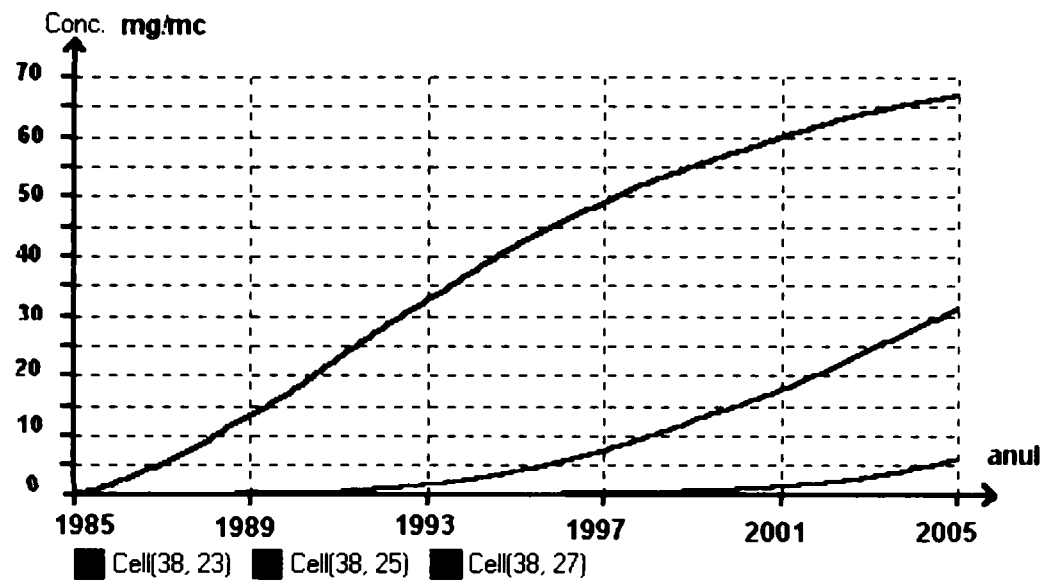
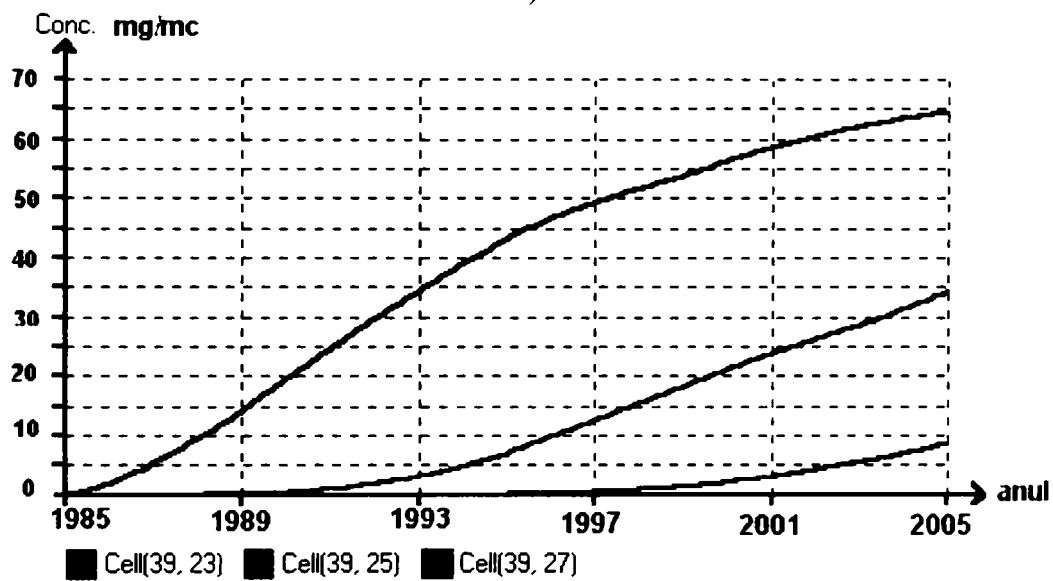


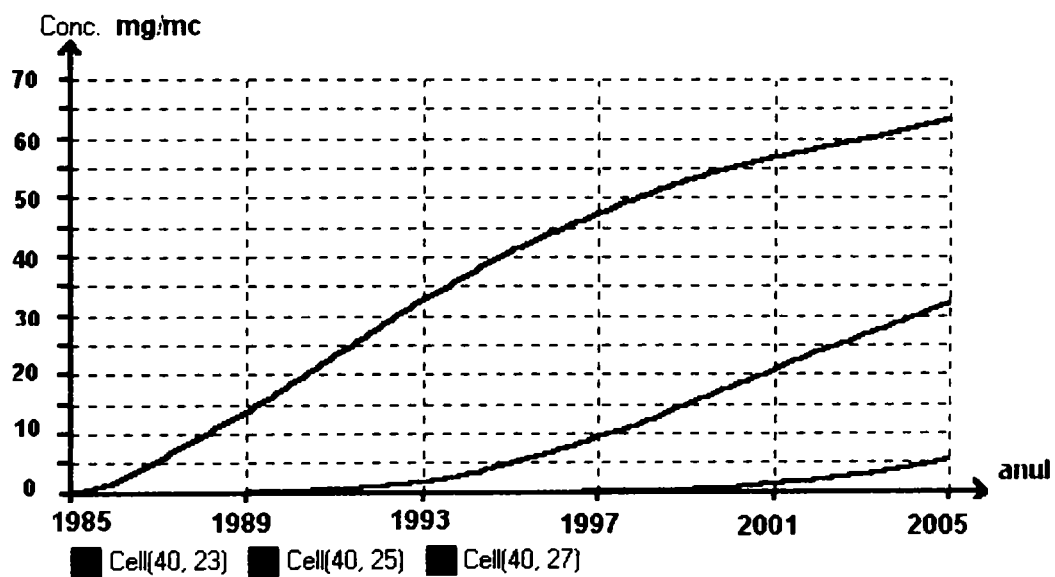
Fig. 11.8. Alura zonei poluate, curbele concentrațiilor (mg/mc), domeniul pentru modelul de optimizare



a)

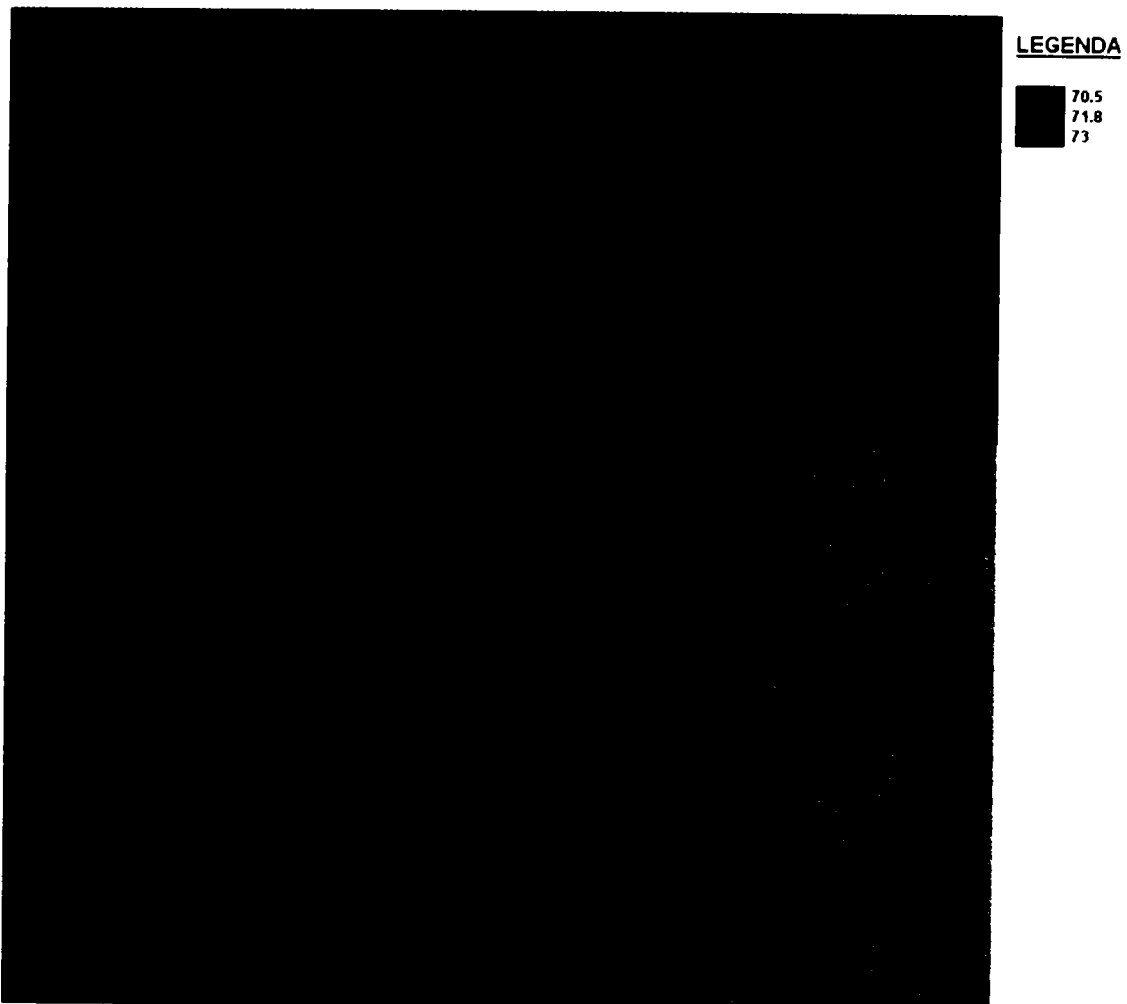


b)

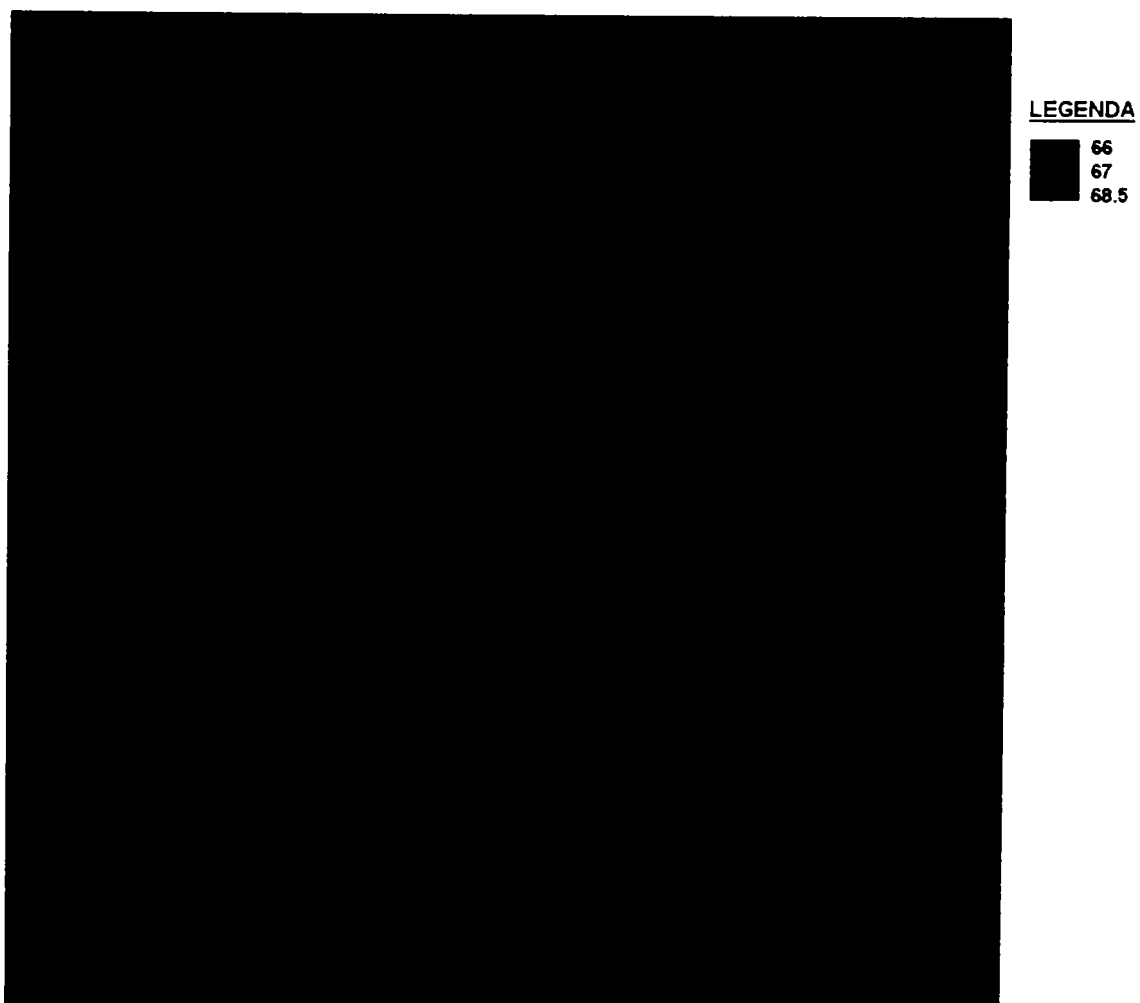


c)

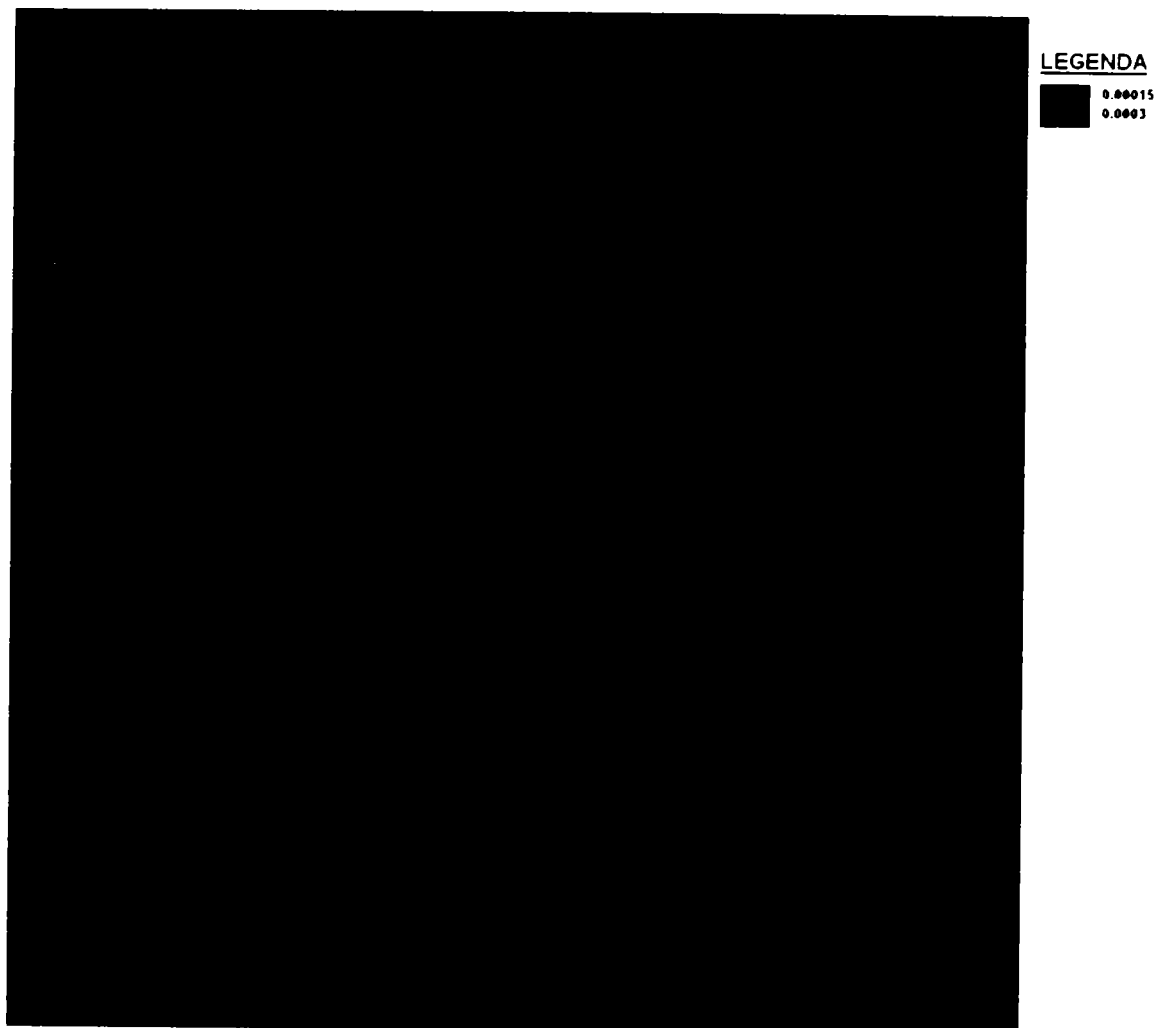
Fig. 11.9. Variația concentrațiilor în vecinătatea bazinului de stocare



*Fig. 11.10. Zonarea cotelor acoperișului stratului freatic pentru modelul de optimizare*



*Fig. 11.11. Zonarea cotelor fundului stratului freatic pentru modelul de optimizare*

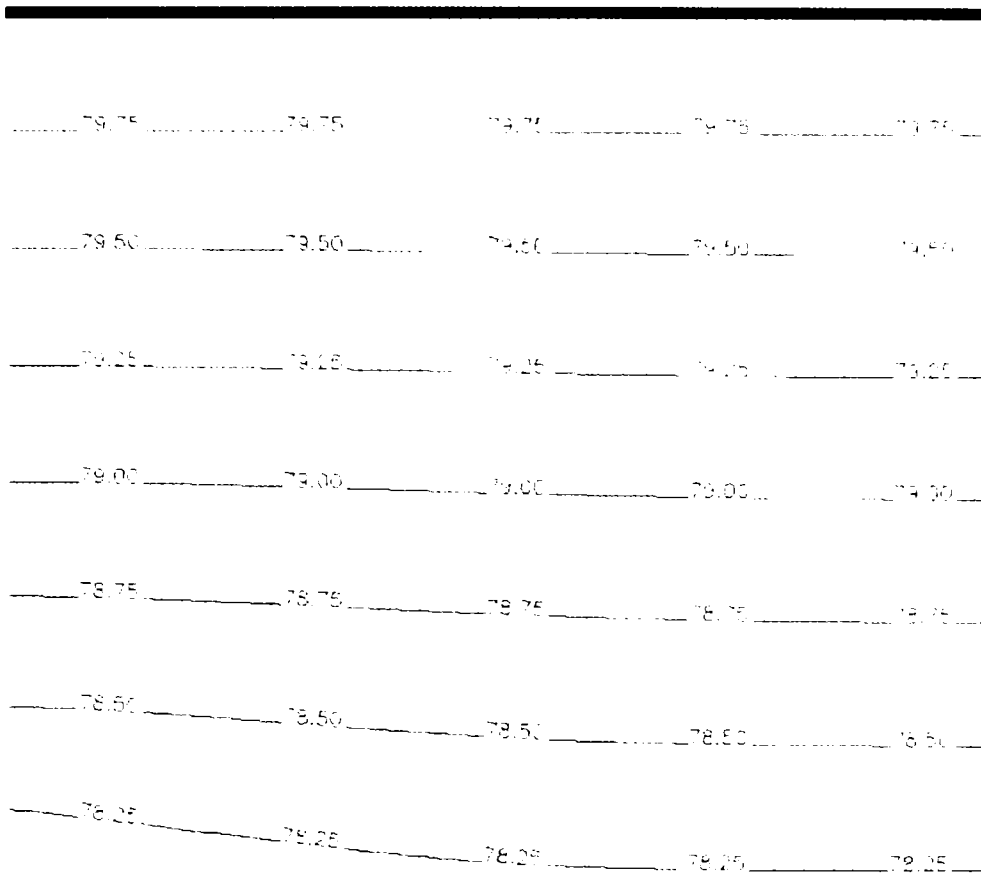


*Fig. 11.12. Zonarea transmisivităților pentru modelul de optimizare*



*Fig. 11.13. Zonarea porozităților pentru modelul de optimizare*





**Fig. 11.14. Zonarea nivelelor hidrostatice ale primului orizont freatic (hidroizoipse) pentru modelul de optimizare**

**LEGENDA**

10 mg/mc
20 mg/mc
30 mg/mc
40 mg/mc
50 mg/mc
60 mg/mc
70 mg/mc



**Fig. 11.15. Curbele concentrațiilor inițiale (mg/mc) în domeniul de optimizare**

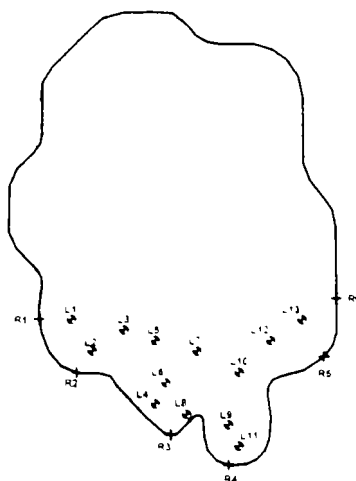


Fig. 11.16. Locațiile propuse pentru foraje de extracție care vor fi supuse rezolvării modelului de optimizare

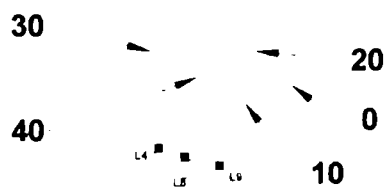


Fig. 11.17. Alura zonei poluate obținută prin extracții din cele 3 puțuri de extracție în urma optimizării (o soluție optimă posibilă mg/mc)



■ ■ ■

Fig. 11.18. Zonarea nivelelor hidrostatice obținută prin extracții din cele 3 puțuri de extracție

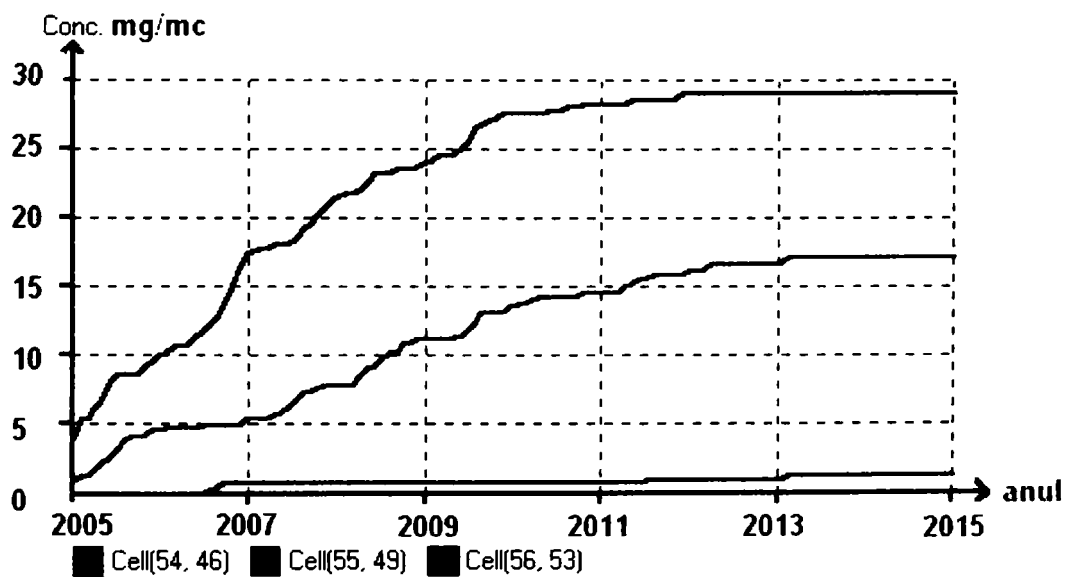


Fig. 11.19. Variația concentrațiilor în cele 3 puțuri de extracție

**BIBLIOGRAFIE**

1. Aguado, E., I. Remson 1974, Groundwater hydraulics in aquifer management, Journal of the Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, 100(HY1).
2. Aguado, E, I. Remson, 1980, Groundwater management with fixed charges, Journal of Water Resources Planning and Management Division, ASCE, 106(2).
3. Aguado, E., I. Remson, M. F. Pikul, W. A. Thomas, 1974, Optimal pumping for aquifer dewatering, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 100(7).
4. Ahlfeld, D. P., and A. E. Mulligan, 2000, "Optimal Management of Flow in Groundwater Systems", Academic Press, San Diego, CA.
5. Ahlfeld, D. P., 1990, Two - stage groundwater remediation design, Journal of Water Resources Planning and Management ASCE, 116(4),
6. Ahlfeld, D. P., 1998, Interpretation of the dual program for optimal groundwater hydraulic control, Journal of the American Water Resources Association, 34(1).
7. Ahlfeld, D. P., M. Heidari, 1994, Applications of optimal hydraulic control to grounds water systems, Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, 120(3).
8. Ahlfeld, D. P., R. H. Page, G. F Pinder 1995, Optimal groundwater remediation methods applied to a Superfund site: From formulation to implementation. Ground Water. 33( 1).
9. Ahlfeld, D. P., C. S. Sawyer, 1990, Well location in capture zone design using simulation and optimization techniques, Ground Water, 28(4).
10. Alley, W. M., E. Aguado, I. Remson, 1976, Aquifer management under transient and steady state conditions, Water Resources Bulletin, 12(5).
11. Anderson. M. P., W. W. Woessner, 1992, Applied Groundwater Modeling: Simulation of Flow and Advective Transport, Academic Press, San Diego, CA.
12. Andricevic, R., 1990, A real-time approach to management and monitoring of groundwater hydraulics, Water Resources Research 26(11).
13. Atwood, D. V., S. M. Gorelick, 1985, Hydraulic gradient control fur groundwater contaminant removal, Journal of Hydrology, 76.
14. Barlow. P. M., B. J. Wagner, K. Belintz, 1996, Pumping strategies for management of a shallow water table: The value of the simulation optimization approach. Ground Water 34(2).
15. Bear, J ., 1972, Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier Publishing Company. New York.
16. Bear. J., 1979. Hydraulics of Groundwater. McGraw-Hill, New York.
17. Bertsekas, D. P., 1995, Nonlinear Programming. Athena Scientific, Belmont, MA.
18. Bica, I., 1998, Poluarea acviferelor. Tehnici de remediere. H.G.A. București.
19. Bradley. S.P., A. C. Hax, T. L. Magnanti, 1977, Applied Mathematical Programming. Addison Wesley Publishing Company. Reading, M A.

20. Carabeț A., 1997, Contribuții la studiul fenomenelor de transport ale poluanților prin medii fluide în zonele limitrofe bezinelor de stocare a apelor uzate, Teză de doctorat, Timișoara, UPT, Fac. De Hidrotehnică.
21. Celia, M. A., W. G. Gray. 1992, Numerical Methods for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J.
22. Chan, N., 1993, Robustness of the multiple realization method for stochastic hydraulic aquifer management, *Water Resources Research*, 29(9).
23. Chan. N., 1994, Partial unfeasibility method for change-constrained aquifer management, *Journal of Water Resources Planning and Management*. 120(1).
24. Chang. L. C., C. A. Shoemaker, P. L. F. Liu, 1992. Optimal time varying pumping rates for groundwater remediation: Application of a constrained optimal control algorithm, *Water Resources Research*, 28(12).
25. Charnes, A., W. W. Cooper. 1959, Chance constrained programming, *Management Science*, 6(1).
26. Collarulo, S. J., M. Heidari, T. Maddock III, 1984, Identification of an optimal groundwater management strategy in a contaminated aquifer, *Water Resources Bulletin*, 20(5).
27. Collarulo, S. J., M. Heidari, T. Maddock III, 1985, Demonstrative model for identifying groundwater management options in a contaminated aquifer, *Groundwater Series 8*, Kansas Geological Survey, Lawrence, KS.
28. Culver T. B., C. A. Shoemaker, 1992, Dynamic optimal control for groundwater remediation with flexible management periods, *Water Resources Research*, 28(3).
29. Danskin, W. R., J. R. Freckleton, 1992, Groundwater flow modeling and optimization techniques applied to high ground-water problems in San Bernardino, California, in *Selected Papers in the Hydrologic Sciences*, S. Subitzky (ed.), U.S. Geol. Surv. Water-Supply Paper 2340.
30. Danskin, W. R., S. M. Gorelick, 1985, Policy evaluation tool: Management of a multiaquifer system using controlled stream recharge, *Water Resources Research*, 21(11).
31. Dantzig, G. B., 1963, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
32. Dantzig, G. B., 1951, *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem*, John Wiley N.Y.
33. David, I., 1990, Hidraulică, volum I,II, Editura Politehnică, Universitatea Tehnică Timișoara.
34. David, I., 1998, *Grundwasserhydraulik, Strömungs und Transportvorgänge*, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg.
35. David, I., Șumălan, I., 1998, *Metode numerice cu aplicații în Hidrotehnică*, Mirton, Timișoara.
36. David P. A., A. E. Mulligan, 2000, *Optimal management of flow in groundwater systems*, Academic Press, San Diego, CA.

37. de Marshy, G., 1986, Quantitative Hydrogeology, Academic Press, San Diego, CA.
38. Deninger, R. A., 1970, Systems analysis of water supply systems, Water Resources Bulletin, 6(4).
39. Domenico, P. A., and F. W. Schwartz, 1997, Physical and Chemical Hydrogeology, John Wiley & Sons. New York.
40. Dougherty, D. E., and R. A. Marryott, 1991, Optimal groundwater management, 1. Simulated annealing. Water Resources Research, 27(10).
41. Duckstein, L., W. Treichel, S. El Magnouni, 1994. Ranking groundwater management alternatives by multicriterion analysis, Journal of Water Resources Planning and Management. 120(4).
42. El Magnouni S., W. Treichel. 1994, A multicriterion approach to groundwater management, Water Resources Research, 30(6).
43. Emch, P. G., W. W. G. Yeh, 1998. Management model for conjunctive use of coastal surface water and groundwater. Journal of Water Resources Planning and Management, 124(3).
44. Finney B. A., Samsuhadi, R. Willis, 1992. Quasi three-dimensional optimization model of Jakarta basin. Journal of Water Resources Planning and Management, 118(1).
45. Francko, D. A., R. G. Wetzel, 1983, To Quench our Thirst: The Present and Future Status of Freshwater Resources of the United States. The University of Michigan Press, Ann Arbor MI.
46. Freeze, R. A., J. A. Cherry, 1979, Groundwater, Prentice hall, Englewood Cliffs. NJ.
47. Galeati, G., G. Gambolati, 1988, Optimal dewatering schemes in the foundation design of an electronuclear plant. Water Resources Research. 24(1).
48. Garfinkel, R. S., G. L. Nemhauser, 1972, Integer Programming. Wiley. New York.
49. Gelbaum B., 1962, Linear and Convex programming, Mc. Graw Hill.
50. Gharbi, A, R. C. Peralta, 1994, Integrated embedding optimization applied to Sail Lake valley aquifers, Water Resources Research. 30(3).
51. Gill P. E., W. Murray, and N. H. Wright. 1981, Practical Optimization. Academic Press. New York.
52. Gleick, P. H., ed., 1993. Water in Crises: A Guide to the Worlds Fresh Water Resources, Oxford University Press, New York.
53. Goldberg, D. E., 1989, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
54. Goode, D. J. and C. A. Appel. 1992. Finite-difference interblock transmissivity for unconfined aquifers and for aquifers having smoothly varying transmissivity. U.S. Geological Survey Water Resources Investigations Report 92-4124.
55. Gorelick S. M., 1982, A model for managing sources of groundwater pollution. Water Resources Research. 18(4).
56. Gorelick, S. M., 1983. A review of distributed parameter groundwater management modeling methods, Water Resources Research, 19(2).

57. Gorelick, S. M., I. Remson, 1982, Optimal location and management of waste disposal facilities affecting ground water quality, *Water Resource Bulletin*, 18(1).
58. Gorelick, S. M., C. I. Voss, P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, M. H. Wright, 1984, Aquifer reclamation design: The use of contaminant transport simulation combined with nonlinear programming, *Water Resources Research*, 20(4).
59. Gorejick, S. M., R. A. Freeze, D. Donahue, J. F. Keely, 1993, *Groundwater Contamination: Optimal Capture and Containment*, Lewis Publishers, Chelsea, MI.
60. Haggerty, R., S. M. Gorelick, 1994, Design of multiple contaminant remediation: Sensitivity to rate limited mass transfer, *Water Resources Research*, 30(2).
61. Hallaji, K., and H. Yazicigil, 1996, Optimal management of a coastal aquifer in southern Turkey, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 122(4).
62. Harbaugh, A. W., M. G. McDonald, 1996, User's documentation for MODFLOW-96, an update to the US. Geological Survey modular finite difference groundwater flow model: U.S. Geological Survey Open-File Report 96-485.
63. Heidari, M., J., Sadeghipour, O. Drici, 1987, Velocity control as a tool for optimal plume management in the Equus Beds aquifer. Kansas, *Water Resources Bulletin*. 23(2).
64. Hillier, F. S., G. J. Lieberman, 1995, *Introduction to Operations Research*, McGraw Hill, New York.
65. Hinrichsen D., B. Rohey, U. D. Upadhyay, 1997, Solutions for a Water Short World, *Population Reports, Series M. No. 14*, Johns Hopkins School of Public Health, Population Information Program. Baltimore, MD.
66. Huang, C., A. S. Mayer, 1997. Pump and treat optimization using well locations and pumping rates as decision variables, *Water Resources Research*, 33(5).
67. Huyakorn. P. S., G. F. Pinder, 1983. *Computational Methods in Subsurface Flow*. Academic Press. New York.
68. Ionescu H., Dinescu C., Săvulescu B., 1972, *Probleme ale cercetării operaționale*, Editura Didactică și Pedagogică București.
69. Johnson. L. W, R. D. Riess. 1982. *Numerical Analysis*. Second Edition, Addison Wesley Publishing Company. Reading. MA.
70. Jones. L. R. Willis, W. W. G. Yeh, 1987, Optimal control of nonlinear groundwater hydraulics using differential dynamic programming. *Water Resources Research*. 23(10 ).
71. Karatzas, G. P., G. F. Finder, 1993, Groundwater management using numerical simulation and the outer approximation method for global optimization. *Water Resources Research*, 29(10).
72. Kuo, C. H., A. N. Michel, W. G. Gray, 1992, Design of optimal pump and treat strategies for contaminated groundwater remediation using simulated annealing algorithm. *Advances in Water Resources* 15.
73. Lall, U., Y. W. H. Lin, 1991, A groundwater management model for Salt Lake County. Utah with some water rights and water quality considerations, *Journal of Hydrology*, 123.

74. Lall, U., M. D. Santini, 1989, An optimization model for unconfined stratified aquifer systems, *Journal of Hydrology*, 111.
75. Lee, A. S., J. S. Aronofsky, 1958, A linear programming model for scheduling crude oil production, *JPT Journal of Petroleum Technology*, 213.
76. Lefkoff, L. J., S. M. Gorelick, 1985, Rapid removal of a groundwater contaminant plume, in *Groundwater Contamination and Reclamation*, American Water Resources Association.
77. Luenberger, D. G., 1984, *Linear and Nonlinear Programming*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.
78. Maddock, T., III, 1972, Algebraic technological function from a simulation model, *Water Resources Research*, 8(1).
79. Maddock, T, III, 1973, Management model as a tool for studying the worth of data, *Water Resources Research*, 9(3).
80. Maddock, T, III, 1974, Nonlinear technological functions for aquifers whose transmissivities vary with drawdown, *Water Resources Research*, 10(4).
81. Makinde Odusola, B. A., M. A. Marino, 1989, Optimal control of groundwater by the feedback method of control, *Water Resources Research*, 25(6).
82. Mansfield, C. M., C. A. Shoemaker, 1999, Optimal remediation of unconfined aquifers: Numerical applications and derivative calculations, *Water Resources Research*, 35(5).
83. Marryott, R. A., 1996, Remediation design using multiple control technologies, *Ground Water*, 34(3).
84. Marryott, R. A., D. E. Dougherty, R. L. Stollar, 1993, Optimal groundwater management 2. Application of simulated annealing to a field scale contamination site, *Water Resources Research*, 29(4).
85. Mays, L W., 1997, *Optimal Control of Hydrosystems*, Marcel Dekker, New York.
86. Mays, L W., and Y. K. Tung, 1992, *Hydrosystems Engineering and Management*, McGraw Hill, New York.
87. McDonald, M. G. and A. W. Harbaugh. 1988. A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations Book 6.
88. McDonald, M. G., A. W. Harbaugh, B. R. Orr, and D. J. Ackerman. 1992. A method of converting no-flow cells to variable-head cells for the U.S. Geological Survey modular finite-difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey. Open-File Report 91-536.
89. McKinney, D. C., M. D. Lin, 1994, Genetic algorithm solution of groundwater management models, *Water Resources Research*, 30(6).
90. McKinney, D. C., M. D. Lin, 1995, Approximate mixed integer nonlinear programming methods for optimal aquifer remediation design, *Water Resources Research*, 31(3).
91. Minsker, B. S., C. A. Shoemaker, 1996, Differentiating a finite element biodegradation simulation model for optimal control, *Water Resources Research*, 32(1).



92. Misirli, F., H. Yazicigil, 1997, Optimal groundwater pollution plume containment with fixed charges, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 123(1).
93. Molz, F. J., L. C. Bell, 1977, Head gradient control in aquifers used for fluid storage. *Water Resources Research*, 13(4).
94. Morgan, D. R., J. W. Eheart, A. J. Valocchi, 1993, Aquifer remediation design under uncertainty using a new chance constrained programming technique, *Water Resources Research*, 29(3).
95. Murtagh, B. A., 1981, *Advanced Linear Programming: Computation and Practice*, McGraw Hill, New York.
96. M.R. Minihane and D.P. Ahlfeld, "Application of Management Models to Water Supply with Stream/Aquifer Interactions", Proc. 2002 Conference on Water Resources Planning and Management, American Society of Civil Engineers, Roanoke, VA, May 19-22, 2002.
97. Nazareth, J. L. 1987, *Computer Solution of Linear Programs*, Oxford University Press, New York.
98. Nădejde ș.a., 1971, *Probleme de cercetare operațională*, Editura Academiei București.
99. Nemhauser G. L., L. A. Wolsey. 1988, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley. New York.
100. Nishikawa, T., 1998, Water resources optimization model for Santa Barbara, California, *Journal of Water Resources Planning and Management*. 124(5).
101. Opreș D., Silberberg G., 1998, *Capitole de cercetări operaționale*, Editura Mirton Timișoara.
102. Peralta, R. C., P. J. Killian, 1985, Optimal regional potentiometric surface design: Least cost water supply/sustained groundwater yield. *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers*, 28(4).
103. Peralta, R. C., H. Azarmnia, S. Takahashi, 1991, Embedding and response matrix techniques for maximizing steady state groundwater extraction: Computation comparison. *Ground Water*, 29(3).
104. Peralta, R. C., R. R. A. Cantiller, J. E. Terry, 1995, Optimal large-scale conjunctive water use planning: Case study. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 121(6).
105. Prudic, D.E., 1989, "Documentation of a computer program to simulate stream-aquifer relations using a modular, finite-difference, ground-water flow model", U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 88-729.
106. Rastogi, A. K., 1989, Optimal pumping policy and groundwater balance for the Blue Lake aquifer, California, involving nonlinear groundwater hydraulic, *Journal of Hydrology*, 111(3).
107. Ratzlaff, S. A., M. M. Aral, F. Al Khayyal, 1992, Optimal design of groundwater capture systems using segmental velocity direction constraints, *Ground Water*, 30(4).
108. Reichard, E. G., 1987, Hydrologic influences on the potential benefits of basinwide grounds water management, *Water Resources Research*, 23(1).

109. Reichard, E. G., 1995, Groundwater - surface water management with stochastic surface water supplies: A simulation optimization approach, *Water Resources Research*, 31(11).
110. Riefler, R. G., D. P. Ahlfeld, 1996, The impact of numerical precision on the solution of confined and unconfined optimal hydraulic control problems, *Hazardous Waste & Hazardous Materials*, 13.
111. Ritzel, B. J., J. W. Eheart, S. Ranjithan, 1994, Using genetic algorithms to solve a multiple objective groundwater pollution containment problem, *Water Resources Research*, 30(5).
112. Rizzo, D. M., D. E. Dougherty, 1996, Design optimization for multiple management period groundwater remediation, *Water Resources Research*, 32(8).
113. Sawyer, C. S., and Y. F. Lin, 1998, Mixed-integer chance constrained models for groundwater remediation, *Journal of Water Resources planning and Management*. 124(5).
114. Sawyer, C. S., D. R Ahlfeld, and A. J. King, 1995, Groundwater remediation design using a three dimensional simulation model and mixed integer programming, *Water Resources Research*, 31(5).
115. Shafike, N. G., L. Duckstein, Maddock III, Multicriterion analysis of groundwater contamination management. *Water Resources Bulletin*, 28(1).
116. Shamir, U., J. Bear, A. Gamliel, 1984. Optimal annual operation of a coastal aquifer, *Water Resources Research*, 20(4).
117. Sima V., Varga A., 1981, Proctica optimizării asistată de calculator, București.
118. Solow, D., 1984, *Linear Programming. An Introduction to Finite Improvement Algorithms*, Elsevier Science Publishing, New York.
119. Sun, Y. H., M. W. Davert, W. W. G. Yeh, 1996, Soil vapor extraction system design by combinatorial optimization, *Water Resources Research*, 32(6).
120. Sykes, J. F., J. L. Wilson, R. W. Andrews, 1985. Sensitivity analysis for steady state groundwater flow using adjoint operators, *Water Resources Research*. 21(3).
121. Thompson, S. A., 1999, *Water Use, Management, and Planning in the United States*, Academic Press, San Diego, CA.
122. Tiedeman, C., S. M. Gorelick, 1993, Analysis of uncertainty in optimal groundwater contaminant capture design, *Water Resources Research*, 29(7).
123. Tung. Y. K., 1986, Groundwater management by chance-constrained model, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 112(1).
124. Van der Leeden, F. F. L. Troise, D. K. Tood, 1990, *The Water Encyclopedia* second edition, Lewis Publishers. Chelsea. MI.
125. van Laarhovcn, P. J. M., and F. H. L. Aarts, 1987, *Simulated Annealing: Theory and Application*, Kluwer Academic, Boston. MA.
126. Verdon, C. A., 1995, Measure of robustness for a linear groundwater optimization problem. M.S. Thesis, University of Connecticut, Storrs, CT.
127. Veselov, V. V., V. M. Midas. V. P Stepanenko. 1992, *Questions of Modeling and Optimization of Hydrogeologikal Systems*, Gylym, Alma Ata, Kazakhstan (in Russian).

128. Vrănceanu G., Mititelu Ș., 1978, Probleme de cercetare operațională, Editura Tehnică București.
129. Wagner, B. L., 1995, Recent advances in simulation optimization groundwater management modeling, *Reviews of Geophysics, Supplement*, 33.
130. Wagner, B. J., S. M. Gorelick, 1987, Optimal groundwater quality management under parameter uncertainty, *Water Resources Research*, 23(7).
131. Wagner, B. J., S. M. Gorelick, 1989, Reliable aquifer remediation in the presence of spatially variable hydraulic conductivity: From data to design, *Water Resources Research*, 25(10).
132. Wagner, J. M., U. Shamir, H. R. Nemati, 1992, Groundwater quality management under uncertainty: Stochastic programming approaches and the value of information, *Water Resources Research*, 28(5).
133. Wang, M, C. Zheng, 1998, Ground water management optimization using genetic algorithms and simulated annealing: Formulation and comparison, *Journal of the American Water Resources Association*, 34(3).
134. Watkins, D. W., D. C. McKinney, 1997, Finding robust solutions to water resources problems, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 123(1).
135. Willis, R., B. A. Finney, 1985, Optimal control of nonlinear groundwater hydraulic: Theoretical development and numerical experiments, *Water Resources Research*, 21(10).
136. Willis, R., W. W. G. Yeh, 1987, *Groundwater Systems Planning and Management*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
137. Yeh, W. W. G., 1992, Systems analysis in groundwater planning and management, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 118(3).
138. Zhen, C., J. G. Uber, 1996, Reliability of remediation designs in presence of modeling error, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 122(4).
139. Zheng, C., P. P. Wang, 1999, An integrated global and local optimization approach for remediation system design, *Water Resources Research*, 35(1).
140. Zidăroiu C., 1983, *Programarea liniară*, Editura tehnică București.