

**MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII ȘI TINERETULUI
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA
Facultatea de Mecanică**

Ing. Dumitru BĂLĂ

**METODE GEOMETRICE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR
SISTEMELOR VIBRANTE ȘI VIBROPERCUTANTE**

TEZĂ DE DOCTORAT

Conducători științifici:

Prof. dr. docent ing. Gheorghe SILAȘ
Membru corespondent al Academiei Române
Universitatea "Politehnica" Timișoara

Prof. dr. ing. Liviu BRÂNDEU
Membru al Academiei de Științe Tehnice
Director al Centrului de Cercetare Vibropercuții și Vibrații Mecanice din Timișoara
Universitatea "Politehnica" Timișoara

în cotutelă

Prof. univ. dr. Constantin UDRIȘTE
Membru corespondent al Academiei Peloritane din Messina
Director al Departamentului de Matematică din Universitatea "Politehnica" București
Universitatea "Politehnica" București

2004

TEZĂ
BIBLIOTECĂ UNIVERSITĂȚII
nr. volum: 644.702
nr. 369 Lit. E

CUPRINS

Introducere	1
1. Geometria sistemelor dinamice	5
1.1. Teorie Lagrange	5
1.2. Lagrangian asociat sistemelor dinamice de ordinul întâi.....	17
1.3. Lagrangian asociat sistemelor dinamice cu un grad de libertate.....	22
1.4. Lagrangieni asociați sistemelor dinamice cu două grade de libertate.....	27
1.5. Cazul sistemelor dinamice neautonome.....	31
1.6. Grupul de semiolonomie	34
2. Dinamică geometrică	37
2.1. Stabilitatea sistemelor dinamice pe exemple concrete.....	37
2.2. Dinamica geometrică a mașinilor de frezat	41
2.3. Densitate de energie a unui câmp vectorial.....	44
3. Mișcări vibrante cu întârziere	47
3.1. Sisteme mecanice cu forță excitatoare cu argument întârziat.....	47
3.2. Modelul mașinii unelte vibrante regenerative.....	51
3.3. Dinamica mașinilor unelte vibrante cu forță externă cu argument întârziat	55
3.4. Modelul neliniar al mașinii unelte vibrante	63
3.5. Mașina unealtă vibrantă regenerativă cu două argumente de întârziere	75
4. Vibrațiile la mașinile de frezat	90
4.1. Vibrațiile la mașini unelte	90
4.2. Studiul vibrațiilor libere și forțate ale lanțului cinematic de rulare la mașina de frezat roți dințate FD-320A	104
4.3. Sistemul dinamic al mașinii unelte. Caracteristicile statice și dinamice ale sistemului dinamic și elementele sale	107
4.4. Diagrama de stabilitate ridicată pornind de la schema bloc simplificată a sistemului dinamic mașină-unealtă-piesă-dispozitiv-sculă în procesul de așchiere	114

5. Sisteme vibropercutante și aplicații	123
5.1. Stadiul dezvoltării cercetărilor în domeniul vibropercuțiilor	123
5.2. Modele dinamice în dinamica ciocanelor vibropercutante	127
5.3. Vibropercutor pe reper rigid	127
5.4. Considerarea reperului deformabil	130
6. Considerații generale și contribuții personale	135
Bibliografie	139

Introducere

Investigarea fenomenelor de vibrație și vibropercuții, prin prisma modelărilor dinamice ale mișcărilor și optimizării funcționării multor sisteme mecanice, reprezintă o preocupare permanentă a cercetătorilor și în general a tuturor persoanelor aflate în sfera producției tehnice. Amploarea acestor preocupări constituie premise pentru noi rezultate robuste și continue.

În modelarea dinamică a fenomenelor de vibrații și vibropercuții principalul sprijin îl constituie utilizarea metodelor matematice care dau posibilitatea precizării exacte a tuturor aspectelor teoretice care ne interesează în elucidarea comportării utilajelor în procesele de producție.

Printre aspectele matematice care intervin în studiul evoluției vibrațiilor și vibropercuțiilor trebuie luate în considerare și posibilitățile de geometrizare a diferitelor sisteme dinamice concrete. Este motivul pentru care în teza de doctorat s-a optat pe dezvoltarea, în mod special, a aspectelor geometrice ce pot fi alinate cercetărilor analitice și care permit o mai bună interpretare a rezultatelor. În realizarea lucrării s-a avut în vedere depistarea unor metode geometrice adecvate studiului mișcărilor vibratorii și subsumarea lor în aplicațiile posibile din domeniul vibrațiilor și vibropercuțiilor.

Primul capitol intitulat „Geometria sistemelor dinamice” se referă la formulări geometrice în studiul sistemelor dinamice. Se precizează astfel noțiuni ca: varietate neolonomă, varietate oonomă, sisteme autoadjuncte, funcții Lagrange și spații Lagrange. Se arată apoi că unui sistem dat de (1.42), semiolonom, i se asociază o funcție L dată prin relația (1.46). În continuare se cercetează trecerea sistemelor dinamice cu un grad de libertate, de ordinul întâi, implicite în sisteme dinamice de ordinul doi de tip Euler-Lagrange. Cu această ocazie se discută posibilitatea de autoadjuncție, de scriere sub formă principală și se găsesc exemple de funcții Lagrange. După același model se analizează sistemele dinamice cu două grade de libertate, de ordinul întâi, implicite construind prelungiri de ordinul doi și punând condiții de autoadjuncție. De asemenea la sistemele de ordinul al doilea se găsesc funcții Lagrange. Preluând modelul matematic, rezultatele sunt prezentate sub formă de propoziții și teoreme dintre care majoritatea sunt și demonstrate.

Urmează cazul sistemelor neautonome, unde variabila timp se consideră ca un nou grad de libertate. Astfel se obține un nou sistem special, cu un grad de libertate în plus, care însă, este autonom. Și pentru aceste sisteme dinamice se găsesc funcții Lagrange.

În ultimul paragraf al capitolului „Geometria sistemelor dinamice” este prezentat grupul de semionomie.

Dinamica geometrică, dirijată spre studiul funcționării optime a mașinilor de frezat face obiectul Cap. 2. Se începe acest capitol cu analiza stabilității unor sisteme dinamice concrete de ordinul întâi a căror comportare în timp ne ajută să înțelegem problemele ce pot apărea la mașinile de frezat.

Studiul stabilității se face prin funcții Leapunov construite cu ajutorul integralelor prime (noțiunea de integrală primă este strâns legată de lagrangieni). În continuare se analizează dinamica sistemului elastic la mașina de frezat roți dințate FD-320, într-o manieră modernă, găsind funcția lui Lagrange și funcția lui Hamilton. În acest context se demonstrează că traiectoriile sunt geodezice orizontale într-o structură geometrică Riemann-Lagrange-Hamilton.

În Cap. 3 intitulat „Mișcări vibrante cu întârziere” se începe prin a prezenta sisteme fizice descrise matematic prin ecuații diferențiale cu argument întârziat. Urmează apoi o aplicare a acestor sisteme cu întârziere în procesul de așchiere. La analiza modelului neliniar al mașinii unelte vibrante se urmăresc următoarele etape: 1) analiza părții liniare a sistemului (3.27); 2) analiza rădăcinilor ecuației caracteristice și bifurcația Hopf; 3) determinarea subspațiilor proprii generalizate asociate sistemului (3.27) în punctul de bifurcație Hopf; 4) determinarea varietății centrale în punctul de bifurcație și ciclul limită asociat; 5) studiul orbitei sistemului (3.27) cu precizarea invariantilor ciclului limită.

În paragraful „Mașina unealtă vibrantă regenerativă cu două argumente de întârziere” se asociază sistemului fizic ecuația diferențială cu două argumente de întârziere și se urmăresc etape similare cu cele de mai sus.

Dintre aplicațiile întâlnite și studiate prin metode geometrice s-a ales să se cerceteze dinamica mașinilor de frezat pentru care există date cunoscute măsurate experimental. Acest lucru se face în Cap. 4 care începe cu studiul vibrațiilor la mașinile unelte, analizând natura vibrațiilor care apar la mașinile unelte în procesul de așchiere. Studiul vibrațiilor libere și forțate ale lanțului cinematic de rulare la mașina de frezat roți dințate FD-320 se face pornind de la ecuațiile mișcării pentru sistemul elastic al mașinii de frezat. Se determină pulsațiile proprii ale lanțului cinematic și amplitudinea la sculă și piesă. Apoi se analizează caracteristicile statice și dinamice ale sistemului dinamic și elementele sale.

În continuare, pornind de la schema bloc simplificată a sistemului dinamic mașină – unealtă – piesă – dispozitiv - sculă în procesul de așchiere se studiază stabilitatea funcționării mașinilor de frezat. De fapt, se urmărește ridicarea diagramelor de stabilitate care sunt reprezentări grafice ce au pe abscisă turația n a frezei iar pe ordonată valoarea w a adâncimii de așchiere. Pentru calculul turației frezei și a adâncimii de așchiere s-a prezentat și un algoritm de calcul. Toate mărimile ce intervin sunt corect și riguros precizate și determinate.

Cap. 5 se referă la sisteme vibropercutante și aplicații. Acestea se bazează pe cercetările dezvoltate cu precădere în cadrul Universității Politehnice Timișoara la Centrul de Cercetare Vibropercuții și Vibrații Mecanice condus de prof. univ. dr. ing. Liviu Brîndeu. După precizarea unor aspecte legate de caracteristicile și aplicațiile vibropercuțiilor se evidențiază stadiul dezvoltării cercetărilor în domeniu. Dintre cazurile posibile se consideră sistemul

vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă pentru care este dezvoltată cu precădere partea geometrică legată de existența mișcărilor periodice și stabilitatea lor. Un studiu amănunțit este realizat și pentru un sistem particular cu două grade de libertate și o cuplă percutantă scoțând în evidență faptul că dificultățile pot fi rezolvate și pentru cazuri mai complicate fără a fi nevoie de eforturi suplimentare. Aceasta arată posibilitatea de a investiga și lucruri mai complexe, care prin aplicarea metodelor geometrice inițiate în prezentarea anterioară conduc la interpretări importante legate de particularități specifice mișcărilor vibropercutante.

Tema tezei de doctorat a fost inițial fixată de regretatul prof. dr. docent ing. Gheorghe Silaș Membru Corespondent al Academiei Române care mi-a condus primii pași în dezvoltarea cercetărilor. Finalizarea tezei s-a făcut sub conducerea prof. dr. ing. Liviu Brîndeu membru titular al Academiei de Științe Tehnice, director al Centrului de Cercetare Vibropercuții și Vibrații Mecanice. Partea aplicativă cuprinsă în teză a fost axată pe preocupările și realizările colectivului din cadrul Centrului de Cercetare Vibropercuții și Vibrații Mecanice, colectiv în care prin preocupările mele am reușit să mă integrez.

Partea teoretică este axată pe tematica dezvoltată de prof. dr. Virgil Obădeanu, prof.dr. Dumitru Opiș de la Universitatea de Vest din Timișoara și prof. dr. Constantin Udriște de la Universitatea Politehnica din București.

Cele două direcții de cercetare, una aplicativă și una teoretică, au permis obținerea rezultatelor importante din prezenta teză.

Datorită aspectelor matematice moderne implicate în dezvoltarea cercetării sistemelor dinamice s-a considerat necesară implicarea în calitate de Conducător Științific în cotutelă a prof. univ. dr. Constantin Udriște, Directorul Departamentului de Matematică din Universitatea Politehnica București și Vicepreședinte al Balkan Society of Geometers. În felul acesta a fost posibilă realizarea obiectivului tezei într-un domeniu interdisciplinar încât să corespundă atât cerințelor științifice caracteristice matematicilor moderne dar și aplicațiilor în domeniul mecanicii tehnice.

Mulțumirile mele sincere sunt adresate conducătorului științific, distinsului prof. univ. dr. ing. Liviu Brîndeu, membru titular al Academiei de Științe Tehnice din România. Competența deosebită a domniei sale, răbdarea cu care m-a susținut din punct de vedere tehnic și moral, precum și sugestiile făcute, toate au dus la finalizarea lucrării.

De asemenea aduc mulțumirile mele distinsului prof. univ. dr. Constantin Udriște, Membru Corespondent al Academiei Peloritane din Messina și Vicepreședinte al Balkan Society of Geometers, care prin sugestii obiective m-a ajutat în clarificarea unor probleme de mare finețe matematică.

În același timp, mulțumirile mele se îndreaptă către prof. univ. dr. Virgil Obădeanu sub îndrumarea căruia am studiat sistemele dinamice implicite având publicate articole împreună și către prof. univ. dr. Dumitru Opiș care m-a

îndrumat în studiul sistemelor dinamice descrise prin ecuații diferențiale cu argument întârziat.

În final, amintesc familia mea și mulțumesc pentru înțelegerea pe care am avut-o în perioada realizării și redactării tezei de doctorat.

1. GEOMETRIA SISTEMELOR DINAMICE

Capitolul 1 a fost realizat sub îndrumarea prof.univ.dr. Virgil Obădeanu iar rezultatele au fost publicate în [84] și [85]. Pe tot parcursul Capitolului 1 considerăm că M este o mulțime deschisă și stelată în raport cu $a \in M$ (unde dacă h este primitivabilă pe M , \int_h nu depinde de drum). Din $G = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ deducem $L = \int G d\dot{x}$ înțelegând prin aceasta mulțimea tuturor primitivelor în raport cu \dot{x} . Dacă $F = \int f dx$, atunci prin $\iint f dx dy$ înțelegem mulțimea tuturor primitivelor în raport cu y ale lui F adică $\iint f dx dy = \int F dy$.

1.1. Teorie Lagrange

1. După cum este bine cunoscut [79], condiția necesară și suficientă ca un sistem dinamic, de ordinul doi sau întâi, să fie lagrangian, respectiv hamiltonian, în sens clasic (să admită principiul minimei acțiuni) este ca el să fie autoadjunct. O condiție necesară ca un sistem de ordinul doi [47], respectiv de ordinul întâi [65], să fie autoadjunct, este ca el să fie scris sub formă principală.

Un sistem dinamic admite principiul variațional dacă există o funcție a lui Lagrange astfel încât ecuațiile sistemului să fie ecuații Euler-Lagrange sau să fie echivalente cu acestea. În general un sistem de ordinul doi, scris în formă principală, nu este autoadjunct și nici nu este echivalent cu unul autoadjunct, în sensul clasic că nu există o funcție Lagrange pentru el: $L: J^1M \rightarrow \mathbf{R}$. Există însă întotdeauna funcții lagrange $L: J^2M \rightarrow \mathbf{R}$, liniare în accelerații $L=L(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = A_i(t,x,\dot{x})\ddot{x}^i + B(t,x,\dot{x})$, astfel încât ecuațiile lui Euler-Lagrange corespunzătoare (de ordinul trei) să fie combinații de ecuațiile sistemului dat și de cele ale sistemului său derivat.

2. Un sistem de ordinul întâi admite funcții Lagrange $L(t,x,\dot{x}) = A_i(t,x)\dot{x}^i + B(t,x)$, care să îl descrie, dacă și numai dacă numărul gradelor sale de libertate este par. Dacă sistemul are un număr impar de grade de libertate, atunci este necesară extinderea prin adăugarea a încă unei ecuații cu un nou grad de libertate (grad de libertate catalizator) și astfel problema se reduce la un număr par de grade de libertate.

3. Dacă se consideră un sistem de ordinul întâi (în formă principală sau cinematică) și i se asociază acestuia sistemul său derivat, atunci soluțiile primului sunt și soluții pentru al doilea (se găsesc printre soluțiile celui din urmă), ca și pentru orice combinație liniară (echivalentă) a lor. Astfel studiul unui sistem de ordinul întâi conduce la studiul unui sistem de ordinul doi care se poate aranja ca o prelungire Lagrange

S-a arătat, local în [80] și global în [79], [117], [119] că pot fi găsite funcții Lagrange pentru combinații de astfel de sisteme mai sus precizate, dependente numai de viteze, patratice în componentele vitezelor, indiferent care

ar fi paritatea numărului gradelor de libertate. La demonstrarea acestor rezultate s-a făcut însă ipoteza că varietatea de configurație este dotată cu o structură riemanniană, capabilă să producă densități de energie și operatori de derivare tensorială. Funcția lui Lagrange ce rezultă este dependentă, evident, de sistemul dat, dar și de structura riemanniană aleasă.

4. În cele ce urmează, vom arăta că sistemelor de ordinul întâi scrise în formă implicită (care nu sunt și nici nu pot fi făcute autoadjuncte, sau echivalente cu unele autoadjuncte) li se pot asocia funcții Lagrange, cu proprietatea că ecuațiile Euler-Lagrange, corespunzătoare acestora, sunt combinații liniare de ecuațiile sistemului dat și de cele ale sistemului său derivat. Aceste ecuații sunt, evident, de ordinul doi scrise în formă principală. Funcțiile Lagrange determină funcții Hamilton care în cazul autonom exprimă legi de conservare. Evident există și legi de conservare care nu sunt funcții Hamilton.

1.1.1. ECUAȚII DIFERENȚIALE IMPLICITE

1.1.1.1. **Notații.** Fie dată o varietate diferențiabilă M , de clasă C^∞ , de dimensiune finită m , definită prin atlasul $A = \{(U, \varphi)\}$ și spațiile fibrante: TM , T^*M , $J^0M = \mathbf{R} \times M$, $J^1M = \mathbf{R} \times TM$, J^2M , $\delta_n^1 M = (E_n^1, p_\delta, J^nM)$, ($n \in \mathbf{N}$). Ultimele au ca baze spațiile de jeturi J^nM , iar ca spații totale $E_n^1 = J^nM \times_M \Omega^1M$, (unde s-a notat cu Ω^1M spațiul 1-formelor) și dotate cu atlasele vectoriale corespunzătoare.

1.1.2 Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul n implicite.

$$\text{Fie } F^n : (t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in J^nM \rightarrow F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in T_x^*M, \quad (1.1)$$

o secțiune a lui $\delta_n^1 M$. Ea pune în evidență mulțimea:

$$\text{Ker } F^n = \{(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in J^nM \mid F^n(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0\}.$$

În continuare facem precizările: $x^{(1)} = \dot{x}$, $x^{(2)} = \ddot{x}$

Vom spune că $\text{Ker } F^n$ definește o *ecuație diferențială de ordinul n , implicită*.

În coordonate locale (în harta (\bar{U}, Φ)) funcția F^n se reprezintă prin forma Pfaff:

$$F^n = F_i^n(t, x^h, \dot{x}^h, \dots, x^{(n)h}) dx^i, \quad \forall t \in I, (t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in J^nM, \quad (1.2)$$

iar condiția $F^n = 0$ se exprimă prin *sistemul de ecuații diferențiale de ordinul n implicite, ordinare*:

$$F_i^n(t, x^h, \dot{x}^h, \dots, x^{(n)h}) = 0, \quad (i, h = \overline{1, m}), \quad (1.3)$$

Sistemul se numește nedegenerat dacă $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^{(n)j}}\right)_x \neq 0$, pentru orice $x \in U$ și *singular* în caz contrar.

Mulțimea $\text{Ker } F^n$ (subvarietate diferențiabilă a lui J^nM , de codimensiune m) conduce la spațiul total $\text{Ker } F^n \times_M J^0M$ al spațiului fibrat $F = (\text{Ker } F \times_M J^nM, \pi_n, J^nM)$, subfibrat al lui $\tau_n M = (J^nM \times_M T^*M, p_\tau, J^nM)$.

La o schimbare de hartă locală pe M , prin care $x' = x'(x^h)$, funcțiile $F_i^n(t, x^h, \dot{x}^h, \dots, x^{(n)h})$, componentele locale ale lui F^n , se schimbă după formula:

$$F_i^n = \frac{\partial x^h}{\partial x^i} F_h^n, \quad (1.4)$$

și deci constituie componentele unui covector distins pe varietatea M .

1.1.1.3 Soluții ale ecuațiilor diferențiale de ordinul n .

Fie $c: t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow x = c(t) \in U \subset M$, o curbă diferențiabilă. Aceasta se liftează la $J^n M$ prin

$$\bar{c}: t \in I \rightarrow (t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n c(t)}{dt^n}) \in J^n M.$$

Vom considera imaginea reciprocă a lui F prin \bar{c} , ca fiind funcția

$$\bar{c}^* F^n = F^n \bar{c} = F^n [t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n c(t)}{dt^n}].$$

Definiția 1.1 Se numește soluție locală a sistemului de ecuații diferențiale (1.3), o funcție $c: t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow x = c(t) \in U \subset M$, care se bucură de proprietatea:

$$F_i^n [t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n c(t)}{dt^n}] \equiv 0, \quad \forall t \in I.$$

In cazul ecuațiilor diferențiale ordinare, sistemul de ecuații diferențiale implicite (1.1.3) este echivalent (are aceleași soluții) cu sistemul scris sub forma cinematică

$$x^{(n)i} = f^i(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}), \quad (i = \overline{1, m}), \quad (1.5)$$

obținut prin explicitarea variabilelor $x^{(n)i}$.

Sistemul (1.5) definește o secțiune f în fibratul vectorial $(J^n M, \pi_{n-1}^n, J^{n-1} M)$, unde $\pi_{n-1}^n: (t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \rightarrow (t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$.

1.1.2 VARIETĂȚI NEOLONOME PE SPAȚIUL $J^1 M$.

1.1.2.1. Să considerăm pe $J^1 M$ o formă Pfaff ω ($\omega \in \Lambda^1(J^1 M)$), pe care o scriem local prin

$$\omega = F_i dx^i + \Phi_i dx^i + f dt, \quad (1.6)$$

unde F_i, Φ_i, f sunt funcții de $(t, x(t), \dot{x}(t))$.

În general, ecuația Pfaff $\omega=0$ nu este integrabilă, nu admite, ca soluții, subvarietăți de dimensiune maximă $2m$ (hipervarietăți). Admite însă întotdeauna, ca soluții, curbe de forma $(x=c(t), \dot{x}=\gamma(t))$. Mulțimea acestor curbe (împreună cu toate subvarietățile soluții ale lui $\omega=0$) poartă numele de *varietate neolonomă* (pe $J^1 M$).

Formei Pfaff ω i se asociază în mod canonic ecuația diferențială de ordinul al doilea

$$F_i \ddot{x}^i + \Phi_i \dot{x}^i + f = 0. \quad (1.7)$$

O curbă pe M : $x=c(t)$, ($t \in I$), pentru care liftul său c la J^1M : $t \rightarrow (t, c(t), \frac{dc(t)}{dt})$ este soluție pentru $\omega = 0$, este, evident, soluție și pentru (1.7):

$$F_i \left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt} \right] \frac{d^2c(t)}{dt^2} + \Phi_i \left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt} \right] \frac{dc(t)}{dt} + f \left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt} \right] \equiv 0, \forall t \in I$$

și reciproc.

1.1.2.2 Să considerăm o schimbare de hartă locală pe M : $x^i = x^i(x^h)$ și corespunzător schimbarea de hartă vectorială pe TM : $x^i = x^i(x^h)$, $\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \dot{x}^h$.

Expresia locală a formei ω , în raport cu cele două hărți, conduce la relația:

$$\bar{F}_i d\dot{x}^i + \bar{\Phi}_i dx^i + \bar{f} dt = F_i d\dot{x}^i + \Phi_i dx^i + f dt.$$

Ținând seama de schimbarea funcțiilor de coordonate, rezultă pentru coeficienții formei ω , formulele de schimbare:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= \frac{\partial x^h}{\partial \dot{x}^i} F_h, \\ \bar{\Phi}_i &= \frac{\partial x^h}{\partial \dot{x}^i} F_h + \frac{\partial \dot{x}^h}{\partial \dot{x}^i} \Phi_h, \\ \bar{f} &= f. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Din aceste formule de schimbare rezultă că ansamblul funcțiilor (F_i, Φ_i) constituie componentele unui covector pe TM (neautonom).

Primele formule de schimbare, din (1.8), ne permit să interpretăm funcțiile F_i ca fiind componentele unui covector distins pe M , adică

$$F : (t, x, \dot{x}) \in J^1M \rightarrow F(t, x, \dot{x}) := F_i(t, x, \dot{x}) dx^i \in T_x^* M,$$

și, prin urmare, nucleul său $\text{Ker} F$ definește o subvarietate în J^1M și, în același timp, un sistem de ecuații diferențiale implicite

$$F_i(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (1.9)$$

Aplicația $\omega \rightarrow F_i$ nu este injectivă.

1.1.2.3 Fie $\varphi: J^0M \rightarrow J^1M$ o secțiune în fibratul vectorial $J_0^1 = (J^1M, \pi_0^1, J^0M)$, unde $\pi_0^1: (t, x, \dot{x}) \rightarrow (t, x)$. Expresia locală a secțiunii φ este dată prin formulele

$$\dot{x}^i = \varphi^i(t, x) \quad (1.10)$$

și definește un sistem de ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, scris sub formă cinematică.

1.1.3.VARIETĂȚI OLONOME.

1.1.3.1. Să considerăm o funcție $F:J^1M \rightarrow \mathbb{R}$, neconstantă, care definește pe J^1M o familie de hipersuprafețe,

$$F(t, x, \dot{x}) = \lambda \text{ (const.)}, \quad (1.11)$$

familie care poartă numele de *varietate olonomă* V . Dacă, în particular, forma ω , considerată în 1.1.2, este integrabilă ($\omega=dF$), atunci varietatea, soluție a ecuației $\omega=0$, este olonomă și se exprimă prin (1.11).

Fie o curbă diferentiabilă $c:t \in I \rightarrow x=c(t) \in M$ și liftul său la J^1M , $\bar{c}:t \in I \rightarrow (t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}) \in J^1M$. Curba \bar{c} este situată pe varietatea olonomă V dacă

$$F[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}] \equiv \lambda, \quad \forall t \in I. \quad (1.12)$$

Funcției F i se asociază, în mod canonic, ecuația (de forma (1.7)):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (1.13)$$

unde

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}, \quad \Phi_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} \quad \text{și} \quad f = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.14)$$

ecuație pentru care o curbă $x = c(t)$, cu proprietatea că liftul său \bar{c} este situat pe V , este o soluție și reciproc, orice soluție a ecuației (1.12) este liftul unei curbe $x=c(t)$.

1.1.3.2 Restricția funcției F la fiecare fibră a lui J^1_0 se exprimă prin

$$F(t, x, \dot{x}) = F_{(t,x)}(\dot{x}) \quad (1.15)$$

Presupunem că în punctele critice ale lui $F_{(t,x)}$, adică acelea în care

$$\frac{\partial F_{(t,x)}(\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad (1.16)$$

hessiana lui $F_{(t,x)}$ are valorile proprii numere strict pozitive. Aceste ipoteze constituie o condiție suficientă ca soluțiile sistemului (1.16) să definească un punct de minim pentru funcția (1.15). Vom spune că o astfel de funcție este optimală.

Folosind formulele (1.14) și $F_i(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial F_{(t,x)}(\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}$, se ajunge la sistemul implicit de ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi

$$F_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1.14)$$

cu proprietățile

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^h} \right), \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \right) \neq 0. \quad (1.14')$$

Să notăm $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}$; proprietățile (1.14') se retranscriu sub forma

$$\det (A_{ij}) \neq 0, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{x}^h} = \frac{\partial A_{ih}}{\partial \dot{x}^j}, \quad A_{ij} = A_{ij}(t, x, \dot{x}). \quad (1.14'')$$

Observație. Dacă există o funcție F care generează sistemul (1.14), atunci există o întreagă familie de astfel de funcții, ce implică același sistem.

1.1.3.3 Față de o schimbare de hartă locală pe M , funcțiile $F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$, se schimbă, conform cu (1.8₁), după formula

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial x^h}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^h} \quad (1.15)$$

și constituie componentele unui covector distins $\alpha = F_i dx^i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^h} dx^i$, pe M .

Acesta definește o funcție (secțiune în $(J^1M \times_M T^*M, p, J^1M)$):

$$\psi : J^1M \rightarrow J^1M \times_M T^*M$$

al cărei nucleu este exprimat prin ecuațiile (1.14).

Din explicitarea sistemului (1.14), se ajunge la sistemul (1.10), care are proprietatea de a defini o secțiune φ . O astfel de explicitare nu poate fi însă realizată practic întotdeauna, motiv pentru care se impune studierea sistemelor de ordinul întâi implicate, de forma (1.14), pentru care au loc proprietățile (1.14').

1.1.3.4 Fiind dată o funcție $F: J^1M \rightarrow \mathbf{R}$, acesteia, în condițiile precizate mai sus, i se asociază un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi implicate, de forma (1.14), care verifică relațiile (1.14'). Reciproc, are loc:

Propoziția 1.1. *Dacă un sistem de forma (1.14) verifică relațiile (1.14'), atunci există o funcție F , astfel încât $F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$.*

În adevăr, sistemul $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = F_i$, fiind complet integrabil, admite soluție; dacă $\alpha_{(t,x)}(\dot{x}) = \alpha = F_i d\dot{x}^i$ este o 1-formă (parametrizată prin t și x), condiția de închidere se exprimă prin relația (1.14'), iar în baza lemei lui Poincaré, pe o mulțime deschisă și conexă avem funcția

$$F = \dot{x}^h \int_0^t F_h(t, x, \tau \dot{x}) d\tau, \quad (1.16)$$

care demonstrează propoziția. Funcția F este una dintre funcțiile care determină sistemul (1.14).

1.1.3.5 Să privim funcția $F = F(t, x, \dot{x})$ ca o funcție Lagrange și să îi asociem ecuațiile lui Euler–Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$.

$$(1.17)$$

Să considerăm cazul special, în care soluțiile sistemului (1.14) sunt și soluții ale sistemului (1.17). În acest caz ele sunt și soluții ale sistemului:

$$\Phi_i(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad (1.18)$$

de unde rezultă, în baza lui (1.3.3), că, în lungul lor, are loc, ca o consecință, și relația:

$$f = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{sol} = 0. \quad (1.19)$$

Din integrabilitatea formei $dF = F_i d\dot{x}^i + \Phi_i dx^i + f dt$, se deduc relațiile:

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \\
\text{(II)} \quad & \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \\
\text{(III)} \quad & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^i} = 0, \\
\text{(IV)} \quad & \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \\
\text{(V)} \quad & \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0,
\end{aligned}$$

Definiția 1.2. Un sistem dinamic implicit, dat prin ecuații de forma (1.3.7), se numește **olonom**, dacă există o varietate olonomă V , în J^1M (definită printr-o funcție F și astfel ca $F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$, cu proprietatea că lifturile la J^1M , ale soluțiilor sistemului, și anume curbele $t \in I \rightarrow \bar{c}(t) = (t, c(t), \frac{dc(t)}{dt})$, se găsesc pe foile varietății V , ($\forall t \in I$).

Funcția F , care definește varietatea olonomă V , este o *lege de conservare* pentru sistemul dat (1.14).

Sistemul (1.14), în general, nu este autoadjunct.

1.1.4. SISTEME AUTOADJUNCTE.

1.1.4.1 Fie dat un sistem neautoadjunct, de forma (1.14), cu verificarea proprietății (1.14'). Aceștia îi vom asocia sistemul său derivat
$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \quad (1.20)$$

care nu este nici el, în general, autoadjunct. Acest sistem (1.20), de ecuații diferențiale de ordinul doi, scris în formă principală, se bucură, după cum am mai spus, de proprietatea că orice soluție a lui (1.14) este și soluție pentru (1.20). Aceeași proprietate are loc, evident, și pentru orice combinație liniară a lor, ca de exemplu de forma:

$$\frac{dF_i}{dt} + C_i^j F_j = 0, \quad (1.20')$$

cu $C_i^j = C_i^j(t, x, \dot{x})$ și pentru care matricea $C = (C_i^j)$ este o matrice arbitrară.

Să determinăm acum componentele C_i^j ale matricei C , astfel încât sistemul (1.20') să fie autoadjunct. El este de forma principală: $A_{ij}(t, x, \dot{x}) \ddot{x}^j + B_i(t, x, \dot{x}) = 0$, unde:

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}, \quad B_i = \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial t} + C_i^j F_j. \quad (1.21)$$

Cerând ca sistemul să fie autoadjunct, rezultă că coeficienții A_{ij} se bucură de proprietățile (1.14''), ca și de legea de schimbare a lor, la o schimbare de hartă locală, care este

$$A_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} A_{hk}.$$

Din aceste proprietăți rezultă că funcțiile A_{ij} constituie componentele unui tensor de două ori covariant, distins, simetric și nedegenerat.

Următorul grup de relații de autoadjuncție, pentru sistemul (1.20'):

$$\frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) A_{ij}, \quad (1.22)$$

ne conduce, cu folosirea relațiilor (1.21), la sistemul

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} (C_j^h F_h) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (C_i^h F_h) + \frac{\partial F_i}{\partial x^j} + \frac{\partial F_j}{\partial x^i} = 0.$$

Din relațiile (1.14') rezultă că există o funcție F , astfel încât $F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$ și deci sistemul precedent se mai poate scrie, cu folosirea formulelor (1.14₁), sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} + C_j^h F_h \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + C_i^h F_h \right) = 0. \quad (1.23)$$

O soluție a acestui sistem este constituită din funcțiile C_i^j , care verifică relațiile

$$C_i^h F_h + \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad (C_i^h \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^h} + \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0). \quad (1.24)$$

Evident acesta este un sistem liniar de n ecuații cu n^2 funcții necunoscute.

În baza relațiilor (1.24), ultimul grup de condiții de autoadjuncție

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i} \right), \quad (1.25)$$

este identic satisfăcut.

Ecuațiile (1.20), cu condițiile (1.24), primesc acum forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad (1.26)$$

care sunt ecuațiile lui Euler-Lagrange corespunzătoare lagrangianului F și are loc:

Propoziția 1.2. *Sistemele dinamice implicite, semiolonome, sunt lagrangiene (admit principiul variațional).*

1.1.4.2 O soluție mai generală a ecuației (1.23) se obține considerând:

$$C_i^h F_h + \frac{\partial F}{\partial x^i} + \varphi_i(t, x) = 0. \quad (1.24')$$

Condiția (1.25) conduce la relația: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} = 0$, ceea ce spune că, local,

$\varphi_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, unde φ este arbitrar, deci (1.20') devine:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0,$$

care, cu schimbarea de funcție $F_\varphi = F + \varphi$, conduce la :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial x^i} = 0,$$

și astfel se obține o familie de funcții Lagrange F_φ .

1.1.4.3 Să ne situăm acum în ipoteza existenței unui sistem (1.14), pentru care nu este îndeplinită condiția (1.14') și să considerăm, odată cu el, mulțimea sistemelor echivalente:

$$G_i = D_i^j F_j = 0, \quad \det(D_i^j) \neq 0. \quad (1.27)$$

Are loc:

Propoziția 1.3. *Dacă există o lege de conservare G , pentru sistemul (1.25), atunci în mulțimea sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul întâi implicite echivalente (1.27), care caracterizează un sistem dinamic, există unul cu proprietatea: $\frac{\partial G_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}^i} = 0$, (cu $G_i = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^i}$).*

Demonstrație. Fie sistemul (1.14), pentru care nu este satisfăcută condiția (1.14'). Să presupunem o matrice (D_i^j) , pe care dorim să o determinăm și o lege de conservare neconstantă: $G = \lambda$ (o funcție G pe J^1M , cu proprietatea că $\frac{dG}{dt} / \text{traiect} = 0$). Notăm cu $G_i = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^i}$ și căutăm funcțiile D_i^j astfel ca $D_i^j F_j = G_i$. Pentru i fixat, dintre cele n funcții D_i^j se aleg $n-1$ arbitrare $D_i^1, \dots, \hat{D}_i^p, \dots, D_i^n$, și se determină a n -a prin relația:

$$D_i^p = \frac{1}{F_p} [G_i - (D_i^1 F_1, \dots, \hat{D}_i^p F_p, \dots, D_i^n F_n)].$$

Sistemul de funcții D_i^j , astfel determinat, verifică condițiile (1.14'_1) cerute. Dacă $\det(D_i^j) = 0$, se aleg două astfel de soluții D_i^1, D_i^2 și apoi se consideră combinația liniară $\lambda^1 D_i^1 + \lambda^2 D_i^2$ cu proprietatea: $(\lambda^1 D_i^1 + \lambda^2 D_i^2) F_j = (\lambda^1 + \lambda^2) G_i$, funcții care, evident, verifică condițiile (3.7'), dacă constantele λ^1, λ^2 nu se anulează simultan și se aleg în așa fel încât $\det(\lambda^1 D_i^1 + \lambda^2 D_i^2) \neq 0$.

1.1.4.4 După cum a fost precizat în 1.1.4.1, în general un sistem dinamic de forma (1.14) este lagrangian dacă există o combinație liniară,

$$D_i^j \frac{dF_j}{dt} + E_i^j F_j = 0, \quad (1.28)$$

autoadjunctă.

Propoziția 1.4 *Condiția (1.28) este echivalentă cu condiția existenței unei matrice (D_i^j) , cu proprietatea $\det(D_i^j) \neq 0$, astfel încât sistemul $G_i = D_i^j F_j = 0$, echivalent cu sistemul dat $F_j = 0$, să verifice relația:*

$$\frac{\partial G_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}^i} = 0.$$

În adevăr, sistemul (1.28) se scrie:

$$\frac{d(D_i^j F_j)}{dt} + (E_i^h - \frac{dD_i^h}{dt}) \bar{D}_h^j (D_j^k F_k) = 0, \quad (1.29)$$

care este de forma (1.20'), în funcțiile G_i .

Condițiile de autoadjunție ale lui (1.29) cer ca

$$\frac{\partial(D_i^p F_p)}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial(D_j^p F_p)}{\partial \dot{x}^i} = 0.$$

Aceste relații, scrise dezvoltat, conduc la

$$\left(\frac{\partial D_i^p}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial D_j^p}{\partial \dot{x}^i}\right)F_p + D_i^p \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^j} - D_j^p \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^i} = 0 \quad (1.30)$$

și constituie un sistem de $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuații cu n^2 funcții necunoscute D_i^j , pentru care o soluție a fost precizată în punctul 1.1.4.3.

Propoziția 1.5. *O condiție necesară și suficientă ca un sistem de ecuații, de forma (1.14) să fie echivalent cu un sistem semiolonom, este ca sistemul (1.30) să admită o soluție (D_i^j) , cu proprietatea $\det(D_i^j) \neq 0$.*

1.1.5. FUNCȚII LAGRANGE.

1.1.5.1 Din raționamentele de mai sus, a rezultat că orice sistem dinamic, de ordinul întâi, semiolonom, de forma (1.14), cu semnificația (1.14₁), verifică proprietățile (1.14'). Să arătăm acum că proprietatea (1.14') este caracteristică.

Propoziția 1.6. *Orice sistem dinamic, de ordinul întâi, implicit, de forma*

$$F_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1.31)$$

care verifică condițiile

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\right) \neq 0. \quad (1.32)$$

este local lagrangian.

Să arătăm că există o funcție $L(t, x, \dot{x})$, în așa fel încât pe varietatea olonomă V , de ecuație $L = \lambda$, se găsesc toate soluțiile, liftate, ale sistemului dat (1.14). În rolul lagrangianului sistemului (1.27) este primitiva L a formei Pfaff

$$\omega = F_i dx^i + \Phi_i dx^i + f dt, \quad (1.33)$$

în care funcțiile F_i sunt părțile stângi ale sistemului (1.31), cu verificarea relațiilor (1.32), iar funcțiile Φ_i și f sunt, pentru moment, nedeterminate.

Să determinăm acum coeficienții Φ_i și f , în așa fel încât forma ω să fie închisă ($d\omega=0$). Această condiție cere să fie satisfăcută relațiile I-V, de la punctul 1.1.3.5.

Au loc următoarele proprietăți:

1° Relațiile (I) sunt satisfăcute prin ipoteza (1.32),

2° Sistemul de n^2 ecuații cu derivate parțiale (II) se descompune în n sisteme parțiale (prin fixarea indicelui i), fiecare din ele fiind complet integrabil.

În adevăr, în baza lui (I), avem

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^h} - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \dot{x}^h \partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^h} - \frac{\partial F_h}{\partial \dot{x}^j} \right) = 0.$$

3° Sunt satisfăcute și relațiile (III), după cum vom vedea mai jos.

4° Sistemul format de ecuațiile IV și V este complet integrabil. În adevăr,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0.$$

În concluzie, forma ω (1.33), (în care funcțiile F_i sun date prin (1.31), iar funcțiile Φ_i și f sunt soluții respectiv ale sistemelor II-III și IV-V), fiind închisă, este local exactă (exactă pe orice domeniu contractibil) și deci există o funcție F , cu $\omega = dF$, care satisface toate condițiile din punctul precedent, ceea ce demonstrează propoziția.

1.1.5.2 Pentru integrarea sistemului II-V, vom face următoarele raționamente:

1° Sistemul II, cu i fixat, fiind integrabil, se pot considera 1-formele închise

$$\alpha_i = \frac{\partial F_h}{\partial \dot{x}^i} d\dot{x}^h = d_{(t,x)} \Phi_i, \quad (1.34)$$

în care t și x sunt considerați ca parametrii.

Aplicând lema lui Poincaré, se determină funcțiile

$$\Phi_i = \dot{x}^h \int_0^1 \frac{\partial F_h}{\partial \dot{x}^i}(t, x, \tau \dot{x}) d\tau. \quad (1.35)$$

Aceste funcții, soluții ale sistemului II, verifică și relațiile III, ceea ce atestă afirmația făcută mai sus la 1.1.5.2.

Un raționament analog, făcut cu referire la sistemul complet integrabil IV-V, ne conduce la 1-forma închisă (și parametrizată prin t)

$$\alpha = \frac{\partial F_i}{\partial t} dx^i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} dx^i = d_{(t)} f. \quad (1.36)$$

În baza lemei lui Poincaré, avem:

$$f = \dot{x}^h \int_0^1 \frac{\partial F_h}{\partial t}(t, \tau x, \tau \dot{x}) dt + x^h \int_0^1 \frac{\partial \Phi_h}{\partial t}(t, \tau x, \tau \dot{x}) dt, \quad (1.37)$$

Cu funcțiile Φ_i și f , date respectiv prin (1.35) și (1.37), forma ω , dată de (1.33), este închisă și deci local este diferențiala unei funcții L definite, în baza lemei lui Poincaré, prin

$$L = \dot{x}^h \int_0^1 \frac{\partial F_h}{\partial t}(\tau t, \tau x, \tau \dot{x}) dt + x^h \int_0^1 \frac{\partial \Phi_h}{\partial t}(\tau t, \tau x, \tau \dot{x}) dt + t \int_0^1 f(\tau t, \tau x, \tau \dot{x}) dt. \quad (1.38)$$

Formula (1.38) permite o construcție efectivă, prin cuadraturi, a funcției lui Lagrange L .

Funcția lui Lagrange L , astfel determinată, este o lege de conservare pentru sistemul (1.14).

Teorema 1.1. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem dinamic de ordinul întâi, implicit, de forma (1.31), să fie olonom-lagrangian (să admită o*

funcție $L(t, x, \dot{x})$, care să fie simultan lege de conservare și funcție Lagrange), este ca să fie satisfăcute relațiile (1.32).

1.1.6. SPAȚII LAGRANGE.

Fie dată o funcție a lui Lagrange autonomă $L: TM \rightarrow R$, nedegenerată ($\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}) \neq 0$). Funcțiile $A_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$ constituie componentele covariante ale unui tensor distins, de două ori covariant și nedegenerat, care verifică proprietățile (1.14'')

$$\det(A_{ij}) \neq 0, A_{ij} = A_{ji}, \frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{x}^h} = \frac{\partial A_{ih}}{\partial \dot{x}^j}, \quad (1.39)$$

Perechea (M, A) se numește *spațiu Lagrange* indus de lagrangianul L . Mai general, se numește *spațiu Lagrange generalizat*, o pereche (M, A) , unde $A = (A_{ij})$ este un tensor distins, de două ori covariant, simetric și nedegenerat.

Tensorul A_{ij} poartă numele de *tensorul fundamental al spațiului*.

Teorema 1.2. *O condiție necesară și suficientă ca un spațiu Lagrange generalizat să fie un spațiu Lagrange, este ca tensorul său fundamental să verifice relațiile (1.39₃).*

Demonstrație. În baza observației de mai sus, necesitatea condiției este evidentă, rămâne de demonstrat suficiența și anume că orice spațiu Lagrange generalizat, pentru care tensorul său fundamental verifică relația (1.39₃), este un spațiu Lagrange.

Sistemul de ecuații

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} = A_{ij}, \quad (1.40)$$

în necunoscutele F_i este un sistem complet integrabil (în baza condiției (1.39₃)) și admite soluția

$$F_i = \dot{x}^h \int A_{ih}(t, x, \dot{x}) d\tau \quad (1.41)$$

Funcțiile F_i , astfel construite, verifică relațiile (1.32) și deci definesc, în conformitate cu 1.1.3, o varietate olonomă-lagrangiană și, prin urmare, o funcție L a lui Lagrange, cu proprietatea $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = A_{ij}(t, x, \dot{x})$, c.c.t.d.

Interpretare. Funcțiile F_i , care derivă din L prin $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$, joacă rol de impulsuri generalizate, și descriu evoluția unui sistem dinamic. Anularea lor definește evoluția.

În structura geometrică asociată sistemului, sistemul evoluează cu proprietatea că impulsurile sale sunt nule, în consecință, evoluția poate fi considerată ca inerțială.

Funcția $-\varphi = V$ are rol de energie potențială, iar L poate fi considerată ca energie generalizată.

1.2. LAGRANGIAN ASOCIAT SISTEMELOR DINAMICE DE ORDINUL ÎNTÂI

Printr-o metodă generală se pot determina funcții Lagrange, pentru sisteme de ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, implicite și s-a arătat că oricărui sistem autonom, de forma (1.42), i se poate asocia o *funcție Lagrange*, care să fie în același timp și o *lege de conservare*, motiv pentru care un astfel de sistem a fost numit *olonom-lagrangian*.

În cele ce urmează, vom prezenta o altă modalitate de obținere de astfel de funcții Lagrange, pentru sisteme implicite în general și pentru sisteme autonome în special. Sistemul dat de

$$F_i(t, x^h, \dot{x}^h) = 0, \quad (i, h = \overline{1, m}), \quad (1.42)$$

se numește *sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi implicite, ordinare* (nedegenerate) dacă satisfac relația $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\right)_x \neq 0$, pentru orice $x \in U$, oricare ar fi U și *singulare* în caz contrar. În cele ce urmează, nu vom considera decât sisteme ordinare. Din definiție rezultă că la o schimbare de hartă locală pe M , funcțiile F_i se schimbă după formulele:

$$\bar{F}_i = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} F_h. \quad (1.43)$$

Fie dată pe J^1M o formă Pfaff ω , care se scrie local sub forma:

$$\omega = F_i d\dot{x}^i + \Phi_i dx^i + f dt.$$

Totalitatea soluțiilor ecuației Pfaff $\omega=0$ poartă numele de *varietate neolonomă*.

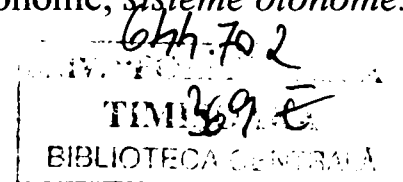
Coefficienții formei ω se schimbă, la o schimbare de coordonate pe M , prin formulele:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} F_h, \\ \bar{\Phi}_i &= \bar{F}_i = \frac{\partial \dot{x}^h}{\partial \bar{x}^i} F_h + \frac{\partial \dot{x}^h}{\partial \bar{x}^i} \Phi_h, \\ \bar{f} &= f. \end{aligned} \quad (1.44)$$

În cazul sistemelor dinamice de forma (1.42), pentru care $F_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$, are loc proprietatea specială:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\right) \neq 0. \quad (1.45_1)$$

Vom numi sistemele de forma (1.42), pentru care au loc proprietățile (1.45₁), *sisteme semiolonome*, iar acelea pentru care soluțiile lor ridicate la spațiul jeturilor, se situează pe foile unei varietăți olonome, *sisteme olonome*.



Fie dat sistemul (1.42). În general un astfel de sistem nu este autoadjunct (și deci lagrangian). Să presupunem că sistemul (1.42) verifică condiția (1.45₁) (este un sistem semiolonom). Are loc următoarea:

Propoziția 1.7. Sistemului (1.42), semiolonom (cu verificarea condiției (1.45₁)), i se asociază o funcție $L: J^1M = \mathbf{R} \times TM \rightarrow \mathbf{R}$, cu proprietatea: $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$, funcția L fiind dată prin formula

$$L = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \underbrace{\iint \dots \int}_p \frac{\partial^{p-1} F_{i_1}}{\partial \dot{x}^{i_2} \dots \partial \dot{x}^{i_p}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_p}. \quad (1.46)$$

Demonstrație. 1° În baza condiției (1.45₁), sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = F_i,$$

parametrizat prin t și x^h , este complet integrabil și admite soluție.

2° În cazurile $m=1$ și $m=2$ s-a arătat, prin calcul, în [76] că formule de forma (1.46) au loc.

Să presupunem că, în cazul unui sistem cu m ecuații cu m grade de libertate, are loc formula (1.46).

Fie acum un sistem cu $m+1$ ecuații cu tot atâtea grade de libertate. Integrând primele m din aceste ecuații, se obține familia de soluții:

$$L = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \underbrace{\iint \dots \int}_p \frac{\partial^{p-1} F_{i_1}}{\partial \dot{x}^{i_2} \dots \partial \dot{x}^{i_p}} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_p} + \Phi(t, x^h, \dot{x}^{m+1}). \quad (1.47)$$

Cerând acum ca din aceste funcții să o alegem pe cea care verifică și a $(m+1)$ -a ecuație, se obține

$$F_{m+1} = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \underbrace{\iint \dots \int}_p \frac{\partial^p F_{i_1}}{\partial \dot{x}^{i_2} \dots \partial \dot{x}^{i_p} \partial x^{m+1}} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{m+1}},$$

cu

$$\Phi = \int F_{m+1} dx^{m+1} - \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < \dots < i_p < m+1} \underbrace{\iint \dots \int}_{p+1 \text{ ori}} \frac{\partial^p F_{i_1}}{\partial \dot{x}^{i_2} \dots \partial \dot{x}^{i_p} \partial x^{m+1}} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dx^{m+1},$$

funcție care, introdusă în (1.47), conduce la soluția (1.46), scrisă pentru sisteme de $m+1$ ecuații.

1.2.6. Să asociem sistemului (1.42) și sistemul său derivat

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \quad (1.48)$$

care se bucură de proprietatea că orice soluție a sistemului (1.42) este și soluție a acestuia din urmă, care, în general, nu este nici el autoadjunct. Are loc:

Propoziția 1.8. Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.48) să fie autoadjunct este ca funcțiile F_i să verifice relațiile

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \frac{\partial F_i}{\partial x^j} = 0.$$

În adevăr, din condițiile de autoadjuncție, rezultă că este necesar și suficient să fie îndeplinite relațiile

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} + \frac{\partial F_j}{\partial x^i} = 0 \text{ și } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} + \frac{\partial F_j}{\partial x^i} \right),$$

din care rezultă propoziția.

Fie dat un sistem dinamic (1.42), semiolonom; acestuia i se asociază o funcție Lagrange, dată de formula (1.46), cu proprietatea: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = F_i$ și 1-forma dL definește varietatea olonomă $L = \lambda$. Are loc următoarea:

Propoziția 1.9. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.42), cu îndeplinirea condițiilor (1.45₁), să fie olonom-lagrangian, este ca el să fie autonom.*

În adevăr, să presupunem că sistemul (1.42) este autonom, atuni soluțiile sale anulează funcțiile F_i . Din ecuațiile Euler-Lagrange, scrise pentru sistemul de ordinul doi autoadjunct asociat, rezultă că ele anulează și funcțiile $\frac{\partial L}{\partial x^i}$, iar din ipoteza de autonomie și din definiția funcției L , prin (1.46), rezultă că și $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, ceea ce ne spune că ele se situează pe varietatea olonomă $L = \lambda$.

Reciproc, dacă soluțiile lui $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$ și $\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$ sunt situate pe varietatea $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^i + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, rezultă că $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, în timpul evoluției sistemului, iar formula (1.46) ne spune că această ultimă condiție are loc dacă și numai dacă $\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$, adică dacă sistemul este autonom.

Condiția (1.45₁) impusă unor sisteme de forma (1.42) nu este restrictivă pentru studiul soluțiilor acestor sisteme. Are loc următoarea:

Teorema 1.3. *Fie dat un sistem implicit: $F_i = 0$, de forma (1.42), pentru care nu este îndeplinită condiția de semiolonomie (1.45₁), există un sistem $G_i = 0$, echivalent cu (1.42) (admite aceleași soluții), care are proprietatea că este semiolonom.*

Demonstrație. Fie sistemul $F_i = 0$ și un sistem echivalent cu el $G_i = F_j D_j^i = 0$, cu $\det(D_j^i) \neq 0$ în orice punct al domeniului de existență al sistemului. Impunând acestuia din urmă condițiile:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad (1.49)$$

acestea se scriu dezvoltat sub forma:

$$\left(\frac{\partial D_i^h}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial D_j^h}{\partial \dot{x}^i} \right) F_h + D_i^h \frac{\partial F_h}{\partial \dot{x}^j} - D_j^h \frac{\partial F_h}{\partial \dot{x}^i} = 0. \quad (1.49')$$

acesta este un sistem construit din $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuații cu n^2 funcții necunoscute.

Pentru rezolvarea lui vom presupune date $\frac{n(n+1)}{2}$ funcții arbitrare și vom căuta să determinăm celelalte $\frac{n(n-1)}{2}$, astfel încât sistemul (1.49') să fie verificat.

În mod practic, vom căuta o matrice (D_i^j) de forma $D_i^j = \delta_i^j$, dacă $i \geq j$. Cu ajutorul acesteia sistemul echivalent căutat se obține din

$$(G_1, G_2, \dots, G_m) = (F_1, F_2, \dots, F_m) \begin{pmatrix} 1 & D_2^1 & D_m^1 \\ 0 & 1 & D_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă: $G_1 = F_1$, $G_p = \sum_{i=1}^{p-1} F_i D_p^i + F_p$. Vom folosi notațiile: $A_1 = 0$, $A_p = \sum_{i=1}^{p-1} F_i D_p^i$ ($p = 2, m$),

cu care $G_p = A_p + F_p$, precum și $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i}$ ($i < j$).

Condițiile (1.49), ($i < j$) devin

$$\frac{\partial A_h}{\partial \dot{x}^i} = F_{ih} + \frac{\partial A_i}{\partial \dot{x}^h}, \quad (i < h = \overline{2, m}). \quad (1.50)$$

Sistemul (1.50) este un sistem cu $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuații cu tot atâtea funcții necunoscute.

Are loc următoarea:

Propoziția 1.10. *Sistemul (1.49) este complet integrabil.*

Se verifică prin calcul.

1.2.10. Pentru integrarea efectivă a acestui sistem, se consideră descompunerea sa în $m-1$ subsisteme, prin fixarea lui $h = \overline{2, m}$.

Pentru $h=2$, se obține singura ecuație $\frac{\partial A_2}{\partial \dot{x}^1} = F_{12}$, cu soluția

$$A_2 = \int \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}^1} \right) d\dot{x}^1 = \int F_{12} d\dot{x}^1.$$

Pentru $h = 3$ avem sistemul $\frac{\partial A_3}{\partial \dot{x}^1} = F_{13}$, $\frac{\partial A_3}{\partial \dot{x}^2} = F_{23} + \frac{\partial A_2}{\partial \dot{x}^3}$, cu soluția dată prin formula de recurență

$$A_3 = \sum_{h=1}^2 \int F_{h3} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial F_{13}}{\partial \dot{x}^2} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 + \int \frac{\partial A_2}{\partial \dot{x}^3} d\dot{x}^2,$$

sau prin formula directă

$$A_3 = \sum_{h=1}^2 \int F_{h3} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial F_{23}}{\partial \dot{x}^1} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2.$$

Pentru $h=4$, se obține formula de recurență

$$A_4 = \sum_{h=1}^3 \int F_{h4} d\dot{x}^h - \sum_{h < k=2}^3 \iint \frac{\partial F_{h4}}{\partial \dot{x}^k} d\dot{x}^h d\dot{x}^k + \iiint \frac{\partial^2 F_{14}}{\partial \dot{x}^2 \partial \dot{x}^3} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 d\dot{x}^3 +$$

$$\sum_{i=2}^3 \int \frac{\partial A_i}{\partial \dot{x}^4} d\dot{x}^i - \iiint \frac{\partial^2 A_2}{\partial \dot{x}^3 \partial \dot{x}^4} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 d\dot{x}^3,$$

sau formula directă

$$A_4 = \sum_{h=1}^3 \int F_{h4} d\dot{x}^h - \sum_{h < k=2}^3 \iint \frac{\partial F_{h4}}{\partial \dot{x}^k} d\dot{x}^h d\dot{x}^k + \iiint \frac{\partial^2 F_{34}}{\partial \dot{x}^1 \partial \dot{x}^2} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 d\dot{x}^3.$$

Aceste cazuri particulare ne conduc la formula generală a cărei demonstrație se face prin inducție:

$$\begin{aligned}
A_p = & \sum_{h=1}^{p-1} \int F_{hp} d\dot{x}^h - \sum_{k=h=2}^{p-1} \iint \frac{\partial F_{hp}}{\partial \dot{x}^k} d\dot{x}^k d\dot{x}^h + \dots \\
& + (-1)^{s-1} \sum_{h_1 < \dots < h_s = s}^{p-1} \underbrace{\iint \dots \int}_{s \text{ ori}} \frac{\partial^{s-1} F_{h_s, p}}{\partial \dot{x}^{h_1} \dots \partial \dot{x}^{h_{s-1}}} d\dot{x}^{h_1} \dots d\dot{x}^{h_s} + \dots \\
& + (-1)^{p-2} \underbrace{\iint \dots \int}_{p-1 \text{ ori}} \frac{\partial^{p-2} F_{(p-1)p}}{\partial \dot{x}^1 \dots \partial \dot{x}^{p-2}} d\dot{x}^1 \dots d\dot{x}^{p-1}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Formula (1.51) poate fi scrisă, condensat, sub forma:

$$A_p = \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^{s-1} \sum_{h_1 < \dots < h_{s-1} = s}^{p-1} \underbrace{\iint \dots \int}_{s \text{ ori}} \frac{\partial^{s-1} F_{h_s, p}}{\partial \dot{x}^{h_1} \dots \partial \dot{x}^{h_{s-1}}} d\dot{x}^{h_1} \dots d\dot{x}^{h_s}.$$

Odată cunoscute funcțiile A_p , date prin formulele (1.51), în baza notațiilor $A_p = \sum_{i=1}^{p-1} F_i D_p^i$, pot fi luate ca un sistem de funcții:

$$F_s D_p^s = (-1)^{s-1} \sum_{h_1 < \dots < h_s = s}^{p-1} \underbrace{\iint \dots \int}_{s \text{ ori}} \frac{\partial^{s-1} F_{h_s, p}}{\partial \dot{x}^{h_1} \dots \partial \dot{x}^{h_{s-1}}} d\dot{x}^{h_1} \dots d\dot{x}^{h_s}$$

pentru $s = \overline{1, p-1}$, formule din care factorul integrand (D_p^q) rezultă imediat.

1.3. LAGRANGIAN ASOCIAT SISTEMELOR DINAMICE CU UN GRAD DE LIBERTATE

1.3.1. Fie dat un sistem dinamic de ordinul întâi, cu un grad de libertate, implicit

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \neq 0 \quad (1.52)$$

care, prin ipoteză, nu este autoadjunct (nu este și nici nu poate fi pus sub formă principală) într-un domeniu D al varietății diferențiabile J^1M , unde M este o varietate diferențiabilă de dimensiune 1.

O curbă $c: t \in I \rightarrow x = c(t) \in M$ este soluție a ecuației (1.52), dacă

$$F[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}] \equiv 0, \quad \forall t \in I.$$

1.3.2. Să asociem sistemului definit prin ecuația (1.52) și sistemul său derivat

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (1.53)$$

care este scris în forma principală $A(t, x, \dot{x}) \ddot{x} + B(t, x, \dot{x}) = 0$, în care $A = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$,

$$B = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dacă sistemul (1.53) este autoadjunct, atunci el este lagrangian și deci se poate spune că și sistemul (1.52) provine din principiul variațional, în baza faptului că soluțiile sale verifică ecuațiile lui Euler-Lagrange.

Cerând acum ca sistemul (1.53) să fie autoadjunct, condiție care se reduce la singura relație

$$\frac{\partial B}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) A, \quad (1.54)$$

se ajunge la următoarea:

Propoziția 1.11. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.53) să fie variațional este ca să aibă loc relația $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0$.*

1.3.3. Sistemul (1.53) fiind un sistem de ordinul doi, scris în formă principală, cu un singur grad de libertate, admite întotdeauna, în baza teoremei lui Darboux, un factor integrant, astfel încât înmulțind sistemul cu acest factor, el să se transforme într-unul echivalent cu el, autoadjunct;

$$C(A \ddot{x} + B) = 0, \quad (C \neq 0). \quad (1.55)$$

Pentru acest sistem, unica condiție de autoadjuncție este

$$\left(\dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{\partial C}{\partial \dot{x}} - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} C = 0, \quad (1.56)$$

care este o ecuație cvasiliniară, cu derivate parțiale. Acestei ecuații i se asociază sistemul adjunct:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{dx}{- \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}} = \frac{dt}{-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}} = \frac{dC}{-\frac{\partial F}{\partial x} C};$$

una din ecuațiile de mai sus este $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, alta este însăși ecuația (1.53) și, prin urmare, dacă s-ar cunoaște soluția generală a ecuației (1.53), atunci factorul integrant ar putea fi calculat prin formula

$$C = \left[e^{\int \left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{x=x(t,c), \dot{x}=\dot{x}(t,c)} dt} \right]_{C=C(t,x,\dot{x})}$$

În mod practic însă această cale nu poate fi urmată, întrucât nu se dispune de soluția generală a ecuației (1.53).

1.3.4. O altă cale posibilă de rezolvare este aceea în care, în locul ecuației (1.53), să se ia ecuația obținută prin combinație liniară

$$\frac{dF}{dt} + CF = 0. \quad (1.56)$$

Explicit, această ecuație este

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} + CF = 0. \quad (1.56')$$

Ea este tot de forma principală $A\ddot{x} + B = 0$, unde $A = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$, și $B = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} + CF$. Și această ecuație admite, printre soluțiile sale, soluțiile ecuației (1.52). Condiția de autoadjuncție (1.54) devine acum

$$\frac{\partial(CF)}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (1.54')$$

Rezultă soluția particulară

$$CF = - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx. \quad (1.54'')$$

Cu această expresie ecuația (3.6') se scrie sub forma

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0, \quad (1.56'')$$

care este o ecuație de tip Euler-Lagrange.

În adevăr, reconsiderând funcția F , acesteia i se poate asocia o primitivă a sa, în raport cu variabila \dot{x} , adică o funcție L cu proprietatea

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = F. \quad (1.57)$$

Cu ajutorul acestei funcții, ecuația (1.56'') se scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.58)$$

ceea ce nu este altceva decât ecuația lui Euler-Lagrange corespunzătoare funcției L , de unde rezultă următoarea:

Teorema 1.4. Fiind dat un sistem dinamic de ordinul întâi, cu un grad de libertate, scris sub formă implicită, prin ecuația $F = 0$, orice primitivă în raport

cu \dot{x} a funcției F este o funcție Lagrange, generatoare a unei ecuații Euler-Lagrange, de forma (1.56) care admite printre soluțiile sale și soluțiile ecuației $F = 0$.

1.3.5. Să considerăm acum pentru ecuația (1.54') soluția sa generală

$$CF = - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx - \varphi(t, x),$$

prin care se obține mulțimea tuturor factorilor integranzi C și, prin urmare, ecuațiile de autoadjuncție de forma (1.56)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx - \varphi(t, x) = 0. \quad (1.56''')$$

Dacă C_1 și C_2 sunt doi factori integranzi, atunci $C_2 = C_1 + \frac{\varphi(t, x)}{F}$.

Transformarea $C_1 \rightarrow C_2$ este cunoscută sub numele de *transformare izotopă*.

1.3.6. Odată cu funcția F , să considerăm și mulțimea tuturor primitivelor sale (în raport cu \dot{x})

$$L = \int F dx + \psi(t, x),$$

astfel încât ecuația (1.56''') devine

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} - \varphi = 0,$$

Din această relație, cu substituțiile $\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ și $\psi = \int \varphi dx + \xi(t)$, $L_\psi = L + \psi$, se obține ecuația lui Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\psi}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_\psi}{\partial x} = 0,$$

astfel încât rezultă următoarea:

Propoziția 1.12. *Între mulțimea factorilor integranzi C (identificată cu mulțimea funcțiilor φ) și cea a primitivelor lui F , factorizată prin spațiul funcțiilor $\xi(t)$, există o corespondență biunivocă bine precizată.*

Sistemului dat i se asociază o clasă de funcții Lagrange $\{L_{[\psi]} = L_\varphi = L_C\}$.

1.3.7. *Ecuației autoadjuncte și bine determinate (1.56'') îi corespund mai mulți lagrangieni, ale căror ecuații Euler – Lagrange coincid cu (1.56'').*

În adevăr, din identificarea coeficienților lui \dot{x} și a termenilor liberi, dintre ecuațiile (1.56'') și (1.58), se obține:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx.$$

Prima ecuație conduce, prin integrare, la funcția $\frac{\partial L}{\partial x} = F + \alpha(t, x)$ și, în final, la Lagrangianul

$$L = \int F dx + \alpha(t, x) \dot{x} + \beta(t, x). \quad (1.60)$$

Această funcție, supusă să verifice a doua ecuație, impune ca

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (1.61)$$

și, prin urmare, se obține următoarea:

Propoziția 1.13. *Toate funcțiile Lagrange L , ale căror ecuații Euler-Lagrange coincid cu ecuațiile (1.56''), constituie o clasă de echivalență a lagrangienilor determinați prin mulțimea derivatelor totale exacte ale funcțiilor $f(t,x)$ ($\frac{df}{dt} = \alpha(t,x)\dot{x} + \beta(t,x)$).*

1.3.8. *Cu fiecare factor integrant C se asociază sistemului (1.52) o mulțime de funcții Lagrange, familia funcțiilor echivalente, modulo spațiul derivatelor totale exacte $\frac{df(t,x)}{dt}$.*

În adevăr, fie ecuația (1.56'''), pe care o identificăm cu ecuația (1.58). Rezultă ecuațiile

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad (1.59')$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \int \frac{\partial F}{\partial x} dx - \varphi(t,x).$$

Integrarea primei ecuații dă ca soluții funcții de forma (1.60), pe care le punem sub forma

$$L = \int F dx + \alpha(t,x)\dot{x} + \beta(t,x) + \psi(t,x), \text{ cu } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi. \quad (1.60')$$

Întroducând funcția dată de (1.60') în partea stângă a celei de-a doua relații (1.59'), rezultă că egalitatea este satisfăcută dacă și numai dacă are loc relația (1.61). Avem astfel următoarea:

Teorema 1. 5. *Mulțimea lagrangienilor ecuației (1.52) este "indexată" prin produsul cartezian al mulțimii factorilor integranzi cu mulțimea 1-formelor închise pe D , unde D este domeniul din $\mathbf{R} \times TM$, în care $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \neq 0$.*

Funcția L , dată prin formula (1.57), definește familia de suprafețe $L = \lambda(\text{const.})$, prin formula

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Soluțiile ecuației (1.52) anulează funcția F , iar din ecuația lui Euler-Lagrange (1.58), pe care L o verifică, rezultă că în timpul evoluției are loc și relația: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$.

Se obține astfel următoarea:

Teorema 1. 6. *Condiția necesară și suficientă ca soluțiile ecuației (1.52) să se situeze pe suprafețele $F = \lambda$, este ca sistemul dinamic (definit prin (1.52)) să fie autonom ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$).*

1.3.9. Exemplul 3. 1. Fie ecuația $F = e^x - x\dot{x} = 0$. O funcție a lui Lagrange, corespunzătoare acestei ecuații, este $L = e^x - \frac{x\dot{x}^2}{2}$. Ecuația lui Euler- Lagrange

este: $(e^x - x)\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2} = 0$ și corespunde factorului integrant $C = \frac{x}{2[e^x - x\dot{x}]}$.

1.4. LAGRANGIENI ASOCIAȚI SISTEMELOR DINAMICE CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Unui sistem de forma (1.62), care verifică condiția (1.65₁), i se poate asocia o funcție L , definită pe spațiul de jeturi de ordinul întâi, care să fie simultan, în cazul sistemelor autonome, o *funcție a lui Lagrange* și o *lege de conservare* ($L = \text{const.}$) pentru acest sistem, motiv pentru care un astfel de sistem este numit *olonom-lagrangian*.

În cele ce urmează, vom relua această problemă generală de studiu al sistemelor implicite, în cazul că acestea au două grade de libertate; vom prezenta însă o altă cale de calcul al funcției lui Lagrange, pretabilă acestui caz special. Așa cum s-a precizat în 1.1. condiția $F = 0$ se exprimă prin relațiile:

$$F_i(t, x^h, \dot{x}^h) = 0, \quad (i, h=1, 2), \quad (1.62)$$

care poartă numele de *sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi, implicite, ordinare, cu două grade de libertate* dacă satisfac relația: $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\right)_x \neq 0$, pentru orice $x \in U$, oricare ar fi U și *singulare* în caz contrar.

La o schimbare de hartă locală pe M , funcțiile F_i se schimbă după formulele:

$$\bar{F}_i = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} F_h. \quad (1.63)$$

O formă Pfaff ω , definită pe J^1M , se scrie local sub forma:

$$\omega = F_i d\dot{x}^i + \Phi_i dx^i + f dt. \quad (1.64)$$

Coeficienții formei ω se schimbă, la o schimbare de coordonate pe M , prin formulele:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} F_h, \\ \bar{\Phi}_i &= \frac{\partial \dot{x}^h}{\partial \bar{x}^i} F_h + \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} \Phi_h, \\ \bar{f} &= f. \end{aligned} \quad (1.64')$$

Are loc proprietatea specială:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\right) \neq 0. \quad (1.65_1)$$

Fie dat sistemul (1.62). În general un astfel de sistem nu este autoadjunct (și deci lagrangian). Să presupunem că sistemul (1.62) verifică condiția (1.65₁). Are loc următoarea:

Propoziția 1.14 Sistemului (1.62), cu verificarea condiției (1.65₁), i se asociază o funcție $L : J^1 M = \mathbf{R} \times TM \rightarrow \mathbf{R}$, cu proprietatea că $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$.

În adevăr, în baza condiției (1.65₁), sistemul:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = F_i \quad (1.66)$$

este complet integrabil și admite soluția:

$$L = \int F_h dx^h - \iint \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}^2} dx^1 dx^2 \quad (1.67)$$

Să asociem sistemului (1.62) și sistemul său derivat

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \quad (1.68)$$

Are loc următoarea proprietate:

Propoziția 1.15. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.68) să fie autoadjunct este ca funcțiile F_i să verifice relațiile*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \frac{\partial F_i}{\partial x^j} = 0.$$

În adevăr, din condițiile de autoadjuncție rezultă că este necesar și suficient să fie îndeplinite relațiile

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} + \frac{\partial F_j}{\partial x^i} = 0 \text{ și } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \frac{\partial F_j}{\partial x^i} \right) = 0,$$

din care rezultă propoziția.

Să considerăm acum combinațiile liniare ale ecuațiilor (1.68) și (1.62):

$$\frac{dF_i}{dt} + C_i^j F_j = 0. \quad (1.69)$$

și să cerem ca acest nou sistem să fie autoadjunct.

Sistemul (1.69) are următoarele proprietăți: soluțiile lui (1.62) sunt și soluții ale sale, ecuațiile (1.69) sunt ecuații Euler-Lagrange ale unei anumite funcții L ;

O condiție ca sistemul (1.62) să fie oloonom-lagrangian este ca forma Pfaff

$$\omega = F_i dx^i + \phi_i dx^i + f dt, \quad (1.70)$$

să fie local exactă. Această proprietate impune existența locală a relațiilor:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}^1}; \quad (1.65_1)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{x}^1} = \frac{\partial F_1}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x^1} \quad (1.65_2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{x}^1} = \frac{\partial F_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x^2} \quad (1.65_3)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x^1}; \quad (1.65_4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^1} = \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial F_2}{\partial t}; \quad (1.65_5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}. \quad (1.65_6)$$

Trecând la primitive obținem că soluția ecuațiilor (1.65₁) a furnizat funcția (1.67), iar integrarea ecuațiilor (1.65₂) și (1.65₃) conduce la soluția

$$\phi_i = \int \frac{\partial F_h}{\partial x^i} dx^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^i \partial \dot{x}^{3-i}} dx^1 dx^2 \quad (i=1, 2), \quad (1.71)$$

soluție care verifică și ecuația (1.65₄).

Trecând la primitive obținem că sistemul (1.65₅) furnizează funcția

$$f = \int \frac{\partial F_h}{\partial t} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \dot{x}^{3-i}} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2, \quad (1.72)$$

funcție care verifică și condițiile (1.65₆).

Au loc relațiile: $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$, $\phi_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}$, $f = \frac{\partial L}{\partial t}$.

În consecință, forma închisă ω , dată de (1.70), este

$$\begin{aligned} \omega = F_i d\dot{x}^i + \left\{ \int \frac{\partial F_h}{\partial x^i} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^i \partial \dot{x}^{3-i}} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 \right\} dx^i + \\ + \left\{ \int \frac{\partial F_h}{\partial t} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \dot{x}^{3-i}} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (1.73)$$

și, prin urmare, există local o funcție L ($dL = \omega$) care este soluție a sistemului complet integrabil:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = F_i \\ \frac{\partial L}{\partial x^i} = \int \frac{\partial F_h}{\partial x^i} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^i \partial \dot{x}^{3-i}} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \int \frac{\partial F_h}{\partial t} d\dot{x}^h - \iint \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial \dot{x}^{3-i}} d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 \end{cases} \quad (1.74)$$

Prin integrarea acestui sistem se ajunge la funcția (1.67), ca soluție a sa.

Cunoscând funcția lui Lagrange L , ecuațiile Euler–Lagrange, corespunzătoare, funcției L , sunt combinații liniare de forma (1.69) ale ecuațiilor date $F_i = 0$ și ale ecuațiilor derivate $\frac{dF_i}{dt} = 0$.

Coeficienții C_i^j (dintre care doi pot fi aleși arbitrari iar ceilalți doi rezultă prin calcul) sunt bine determinați, în afara varietăților $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$. Pe aceste varietăți ei sunt nedeterminați, ca fiind combinații de expresii de forma: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} / \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{0}{0}$ (întrucât din $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$ și din ecuațiile Euler-Lagrange, rezultă și $\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$).

Întrucât derivatele lui L sunt și ele funcții derivabile, se poate elimina nedeterminarea, fie prin procedeul de trecere la limită fie prin derivări.

Are loc următoarea:

Propoziția 1.16. *Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.62), cu verificarea relațiilor (1.65₁), să fie oonom-lagrangian este ca el să fie autonom.*

În adevăr, să presupunem că sistemul (1.62) este autonom, atunci soluțiile sale anulează, prin definiție, funcțiile $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = F_i$. În baza ecuațiilor lui Euler-

Lagrange, corespunzătoare sistemului (1.69), ele anulează și funcțiile $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \phi_i$, iar din structura lui (1.67) rezultă că avem și $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, de unde rezultă că ele se situează pe varietatea olonomă $L = \lambda$ (constant).

Un raționament în ordine inversă demonstrează și formularea reciprocă, ceea ce demonstrează propoziția.

1.5. CAZUL SISTEMELOR DINAMICE NEAUTONOME

În lucrările [47], [58], [65], s-a arătat că sistemelor dinamice implicite, cu unul, două sau mai multe grade de libertate, li se pot asocia funcții Lagrange, care să descrie evoluția acestuia și că în cazul autonom astfel de funcții sunt și legi de conservare.

În cele ce urmează, vom da o generalizare a rezultatului sus menționat, în cazul sistemelor cu un grad de libertate, neautonome.

În acest scop, vom considera și variabila timp ca grad de libertate, astfel încât să se obțină un nou sistem, special, cu un grad de libertate în plus, care însă să fie autonom și căruia să i se poată aplica metoda prezentată în lucrările citate.

1.5.1. Fie dată o varietate diferențiabilă M , cu o dimensiune și pe spațiul jeturilor de ordinul întâi $J^1M = \mathbf{R} \times TM$, o funcție F_1 cu valori în T^*M , cu ajutorul căreia se definește ecuația diferențială

$$F_1(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (1.75)$$

La schimbarea de hartă locală pe M , funcția F_1 se schimbă după formula

$$\bar{F}_1 = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} F_1.$$

„Sistemului” (1.75) îi asociem ecuația

$$F_2 = \dot{t} - 1 = 0. \quad (1.76)$$

Cu schimbarea de notație $x = y^1$ și $t = y^2$, ecuațiile (1.75) și (1.76) se reunesc în sistemul

$$F_1(y^1, y^2, \dot{y}^1) = 0, \quad (1.77)$$

$$F_2(\dot{y}^2) = 0.$$

Funcțiile F_i pot fi considerate ca componentele unei funcții $F: J^1_0(\mathbf{R} \times M) = T(\mathbf{R} \times M) \rightarrow T^*M$, definită pe spațiul jeturilor de ordinul doi centrate în "0".

Acest nou sistem (1.78) este un sistem (cu două grade de libertate) autonom și semiolonom ($\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}^2} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}^1} = 0$). Notând cu $F = F(y^1, y^2, \dot{y}^1, \dot{y}^2) = F(t, x, \dot{x}, \dot{t})$, o funcție, pentru care

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^1} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^2} = F_2, \quad (1.79)$$

se obține, prin integrarea sistemului (1.79), funcția

$$F = \int F_1 dx + \frac{\dot{t}^2}{2} - \dot{t}. \quad (1.80)$$

1.5.2. Să considerăm acum sistemul de ordinul doi, asociat cu (1.77) și având printre soluțiile sale toate soluțiile lui (1.77) și implicit pe cele ale lui (1.75), de forma

$$\frac{dF_1}{dt} + C_i^j F_j = 0. \quad (1.81)$$

Condiția ca sistemul (1.81) să fie lagrangian este ca el să fie autoadjunct. Condițiile de autoadjuncție sunt satisfăcute dacă

$$\frac{\partial F}{\partial y^i} + C_i^j \frac{\partial F}{\partial y^j} = 0, \quad (1.82)$$

unde F este funcția definită în (1.80). Coeficienții C_i^j se determină din sistemul algebric (1.82).

Ecuatiile (1.81), cu semnificația (1.82), pot fi transcrise sub forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y^i} = 0, \quad (1.83)$$

care ne spune că funcția F , dată de (1.80), este un lagrangian al sistemului autoadjunct (1.81).

1.5.3. Să dăm acum următoarea propoziție:

Propoziția 1.17. *Soluțiile $x = c(t)$ ale sistemului (1.75) (verificând relația $F_1[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}] \equiv 0, \forall t \in I$), luate la varietatea de jeturi: $(x = c(t), \dot{x} = \frac{dc(t)}{dt})$ sunt situate pe varietatea oonomă a lui $J_o M$, definită prin $F = \lambda$.*

În adevăr, să construim 1-forma (pe varietatea jeturilor centrate în 0)

$$\omega = F_i dy^i + \Phi_i dy^i. \quad (1.84)$$

Această formă este închisă și egală, local, cu dF . Cum soluțiile lui $F_i=0$ anulează și ecuațiile $\frac{dF_i}{dt} = 0$, anulează și ecuațiile lui Euler-Lagrange (1.83) (anulând funcțiile $C_i^j F_j = -\frac{\partial F}{\partial y^i} = -\Phi_i$), ele se găsesc pe varietatea oonomă $F = \lambda$.

În consecință, sistemul dat este oonom-lagrangian, altfel spus, lagrangianul F este și lege de conservare pentru sistem.

1.5.4. Alte funcții Lagrange-legi de conservare, pentru sistemul (1.77), pot fi construite în felul următor. Să considerăm un nou sistem de ecuații $G_i(t, x, \dot{x})=0, (i=1,2)$, echivalent cu sistemul (1.77), care să constituie, la rândul lor, tot un sistem semiolonom. Un astfel de sistem este dat prin combinațiile liniare

$$G_i = F_j D_i^j = 0, \text{ cu } \det(D_i^j) \neq 0. \quad (1.85)$$

Impunând acestuia condiția de semiolonomie

$$\frac{\partial G_i}{\partial y^j} - \frac{\partial G_j}{\partial y^i} = 0, (i,j=1,2), \left(\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial G_2}{\partial \dot{x}} = 0 \right), \quad (1.86)$$

poate fi determinată o clasă de sisteme, cărora le corespund, respectiv, funcțiile lui Lagrange

$$G = \int G_i dy^i - \iint \frac{\partial G_1}{\partial y^2} dy^1 dy^2.$$

Condiția (1.86), scrisă explicit, este:

$$\left(\frac{\partial D_i^h}{\partial y^j} - \frac{\partial D_j^h}{\partial y^i} \right) F_h + D_i^h \frac{\partial F_h}{\partial y^j} - D_j^h \frac{\partial F_h}{\partial y^i} = 0. \quad (1.86')$$

În relațiile (1.85) intră patru funcții neprecizate D_i^j , supuse condiției $\det(D_i^j) \neq 0$ și legate între ele prin restricția (1.86). Astfel fiind, trei pot fi luate arbitrar. Alegând arbitrare funcțiile D_1^2 , D_2^1 și D_2^2 , funcția D_1^1 se definește prin relația

$$D_1^1 = \frac{1-t}{F_1} D_1^2 + \frac{1}{F_1} \int \frac{\partial(F_1 D_2^1)}{\partial \dot{x}} dt.$$

Cu funcțiile D_i^j astfel precizate, se definește funcția lui Lagrange G , prin integrarea sistemului:

$$\frac{\partial G}{\partial y^i} = G_i. \quad (1.87)$$

Ea este:

$$G = \int [F_1 D_1^1 + (i-1) D_1^2] dx + \int [F_1 D_2^1 + (i-1) D_2^2] dt - \iint [F_1 \frac{\partial D_1^1}{\partial t} + D_1^2 + (i-1) \frac{\partial D_1^2}{\partial t}] dx dt. \quad (1.88)$$

După ce, în prealabil, se efectuează operațiile de derivare și primitivare indicate, se ține seama că $i=1$ și se obține clasa de legi de conservare menționată mai sus.

Observații. 1° Dacă, în particular, $D_i^j = \delta_i^j$, se obține funcția (1.80);

2° Dacă se aleg funcțiile $D_1^1 = D_2^2 = 1$, $D_1^2 = 0$, iar funcția $D_2^1 = D$, pentru început nedeterminată, funcțiile (1.85) devin:

$$G_1 = F_1, \quad G_2 = DF_1 + F_2 = DF_1 + i - 1. \quad (1.85')$$

Condiția (1.86) cere ca $\frac{\partial(DF_1)}{\partial \dot{x}} = 0 \Leftrightarrow DF_1 = \Delta(t, x, i)$.

Sistemul (1.85'), fiind semiolonom, conduce, în baza unicei relații (1.86), la funcția:

$$G = \int F_1 dx + \frac{i^2}{2} - i + \int (DF_1) dt = L + \int (DF_1) dt, \quad (1.88')$$

în care funcția L este dată de (1.80), funcție pentru care ecuațiile lui Euler-Lagrange corespunzătoare sunt

$$\frac{dF_1}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int F_1 dx + \int (DF_1) dt \right] = 0, \\ \left(1 - \frac{\partial(DF_1)}{\partial t} \right) \dot{i} + \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) (DF_1) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int F_1 dx + \int (DF_1) dt \right) = 0.$$

3° Funcția (1.88') ne spune că lagrangianul G este de forma $L + \Gamma(t, x, i)$. Pe traiectoriile sistemului (1.77) avem

$$\frac{G}{\text{traiect}} = L + \gamma(t, x),$$

unde L este dat de (1.80) iar $\gamma(t, x) = \Gamma(t, x, i=1)$.

4° Funcția $L_\gamma = L + \gamma$ conduce la ecuația lui Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\gamma}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_\gamma}{\partial x} = 0.$$

1.6. GRUPUL DE SEMIOLONOMIE

1.6.1. Sisteme de ordinul întâi, implicite.

Fie dată o varietate diferențiabilă M și varietatea jeturilor de ordinul întâi J^1M . Vom nota cu D, E, H, \dots funcții definite și interpretate ca secțiuni în fibratul principal $(J^1M \times_M T^*M, p, J^1M)$. De exemplu,

$$D: (t, x, \dot{x}) \in J^1M \rightarrow (D_i^j(t, x, \dot{x})) \in Gl(n, \mathbf{R}),$$

este un câmp de d-tensori pe M .

Pe mulțimea $M = \{D, E, H, \dots\}$ este definită canonic o lege de compoziție internă,

$$D \circ E: (t, x, \dot{x}) \in J^1M \rightarrow D_h^j(t, x, \dot{x}) E_i^h(t, x, \dot{x}).$$

În raport cu această lege de compoziție, mulțimea M este organizată ca grup.

Ținând seama de formulele de schimbare a funcțiilor ce definesc un sistem de ecuații implicite, $\bar{F}_i = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} F_h$, $\bar{G}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} G_k$, ca și de relațiile $G_i = F_h D_i^h$, $\bar{G}_j = \bar{F}_k \bar{D}_j^k$, se găsește formula

$$\bar{D}_j^k = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} D_h^i,$$

care ne spune că funcțiile (D_i^j) sunt componentele unui d-tensor mixt.

1.6.2. Grupul M acționează la dreapta pe mulțimea sistemelor de ecuații diferențiale de forma $F_i(t, x, \dot{x}) = 0$, prin relația $D: (F_i) \rightarrow (G_i = F_h D_i^h)$, netranzitiv și induce pe aceasta o relație de echivalență. Mulțimea claselor de echivalență (de tranzitivitate), adică cântul mulțimii sistemelor de ecuații de forma $F_i = 0$, prin grupul M , are proprietatea că toate elementele unei clase admit aceleași soluții. Vom identifica și numi aceste clase *sisteme dinamice* de ordinul întâi, implicite.

Noțiunile și proprietățile referitoare la un sistem de ecuații implicite, de forma $F_i = 0$, le vom numi, respectiv, noțiuni și proprietăți *geometrice*. Ele depind, implicit, de sistemul de ecuații căruia i se asociază. Noțiunile și proprietățile referitoare la clasele de ecuații echivalente, numite sisteme dinamice, le vom numi *dinamice*.

De exemplu, matricea $(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j})$ este o noțiune geometrică, în timp ce proprietatea ei de a avea $\det(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}) \neq 0$ este o proprietate dinamică (noțiunea de nedegenerare a unui sistem este dinamică). De asemenea soluțiile unui sistem de ecuații sunt de natură dinamică. Suprafața, de ecuații $F_i = 0$ (în J^1M) fiind invariantă la grupul M este dinamică. Conexiunea neliniară, asociată sistemului, este o noțiune dinamică.

1.6.3. Fie dat un sistem dinamic, printr-un reprezentant al său, adică prin ecuațiile $F_i = 0$. Conform celor precizate mai sus, orice element al mulțimii

(grupului) M duce sistemul de ecuații $F_i = 0$ în sistemul de ecuații $G_i = F_h D_i^h = 0$, echivalent cu el.

1.6.4. Un sistem de ecuații $F_i = 0$ se numește *semiionom* dacă funcțiile F_i verifică relațiile

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}^i} = 0.$$

Vom spune că transformarea $D \in M$ este *F-semiionomă*, și o vom nota D_F , dacă $G = D_F(F)$ este un sistem semiionom.

Au loc proprietățile:

Propoziția 1.18. O transformare D este *semiionomă* dacă și numai dacă elementele sale D_i^j sunt soluții ale sistemului de ecuații

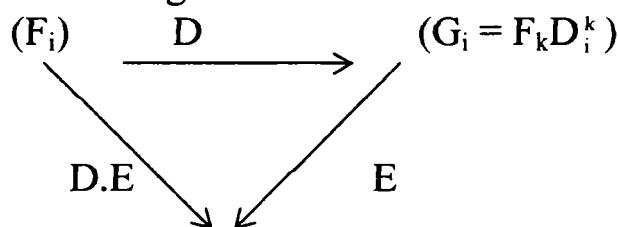
$$F_p \left(\frac{\partial D_i^p}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial D_j^p}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^j} D_i^p - \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^i} D_j^p = 0.$$

Formula rezultă din condiția : $\frac{\partial G_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}^i} = 0$, dacă $G_i = F_h D_i^h$.

Propoziția 1.19. Fie date elementele $D, E \in M$ și F un sistem dinamic. Dacă elementul E este *semiionom* în raport cu $G = D(F)$, atunci produsul lor $D \circ E$ este *semiionom* în raport cu F , oricare ar fi D , adică

$$D \circ E_{D(F)} = (D \circ E)_F.$$

Demonstrație. Compunerea aplicațiilor D și E se reprezintă prin comutativitatea diagramei triunghiulare:



$$(H_i = G_h E_i^h = F_k (D_h^k E_i^h) = F_k M_i^k).$$

Prin ipoteză, aplicația E fiind G -semiionomă, condiția de semiionomie: $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial H_j}{\partial \dot{x}^i} = 0$ se scrie dezvoltat

$$G_h \left(\frac{\partial E_i^h}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j^h}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{\partial G_h}{\partial \dot{x}^j} E_i^h - \frac{\partial G_h}{\partial \dot{x}^i} E_j^h = 0.$$

Pe de altă parte, are loc relația

$$\begin{aligned} & F_p \left(\frac{\partial M_i^p}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial M_j^p}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^j} M_i^p - \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^i} M_j^p = \\ & F_p \left[\frac{\partial (D_h^p E_i^h)}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial (D_h^p E_j^h)}{\partial \dot{x}^i} \right] + \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^j} M_i^p - \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^i} M_j^p = \end{aligned}$$

$$F_p D_h^p \left[\frac{\partial E_i^h}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j^h}{\partial \dot{x}^i} \right] + F_p \left(\frac{\partial D_h^p}{\partial \dot{x}^j} E_i^h - \frac{\partial D_h^p}{\partial \dot{x}^i} E_j^h \right) + \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^j} D_h^p E_i^h - \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}^i} D_h^p E_j^h =$$

$$G_p \left(\frac{\partial E_i^p}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j^p}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{\partial G_p}{\partial \dot{x}^j} E_i^p - \frac{\partial G_p}{\partial \dot{x}^i} E_j^p = 0,$$

ceea ce arată că produsul $D \circ E$ este F-semiionom.

În particular, dacă și aplicația D este F-semiionomă, are loc relația:

$$D_{F \circ} E_{D(F)} = (D \circ)_F.$$

1.6. 5. Să considerăm acum o submulțime N_F a grupului M și anume mulțimea transformărilor F-semiionome în raport cu un sistem F semiionom. Are loc:

Propoziția 1.20. *Mulțimea N_F nu depinde de sistemul $F_i=0$ ci numai de clasa acestuia (ea este o noțiune dinamică)*

În adevăr, fie F și H două sisteme echivalente și U aplicația care îl duce pe primul în cel de-al doilea. Dacă $G \in N_F$ ($G = D_F(F)$), atunci, în baza propoziției 2, $U \circ D_F$ este o transformare semiionomă ($U \circ D_F \in N_H$), deci $G \in N_H$ adică $N_F \subset N_H$ și reciproc, de unde $N_F \equiv N_H = N$, c.c.t.d.

Propoziția 1.21. *Aplicația identică id ($D_i^j = \delta_i^j$) aparține mulțimii N .*

Rezultă din relația de semiionomie.

Propoziția 1.22. *Dacă $F \xrightarrow{D_F} G \xrightarrow{E_G} H \xrightarrow{M_H} K$, atunci are loc relația de asociativitate: $D_F(E_G \circ M_H) = (D_F \circ E_G) M_H$.*

În adevăr:

$$D_F(E_G \circ M_H) = D_F(E \circ M)_G = [D \circ (EM)]_F,$$

$$(D_F \circ E_G) M_H = (D \circ E)_{F \circ} M_{(DE)F} = [(DE) \circ M]_F,$$

de unde rezultă propoziția.

Propoziția 1.23. *Mulțimea sistemelor de ecuații $F_i=0$, semiionome, împreună cu mulțimea transformărilor semiionome, constituie o categorie, în care sistemele sunt obiecte iar transformările morfisme.*

2. DINAMICĂ GEOMETRICĂ

2.1. Stabilitatea sistemelor dinamice pe exemple concrete

Să considerăm un sistem fizic a cărui comportare în timp este descrisă de sistemul autonom (nu conține explicit variabila independentă):

$$\frac{dx}{dt} = X(x); \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ fiind un câmp vectorial de clasă convenabilă pe o mulțime deschisă și conexă D . Câmpul vectorial X descrie local evoluția sistemului ($X(x)$ dă viteza de variație). Se urmărește în acest subcapitol studiul stabilității unor sisteme dinamice date prin exemple concrete. Se studiază stabilitatea sistemelor dinamice folosind metoda funcției Leapunov. Nu există metode generale de determinare a funcțiilor Leapunov. Se propune în acest subcapitol determinarea funcției Leapunov folosind integrale prime. Se știe că dacă avem un lagrangian pentru sistemul dinamic, folosind teorema lui Noether se poate determina o integrală primă.

Exemplul 2.1. Fie $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $X(x_1, x_2, x_3) = (-4x_2 + x_2x_3, x_1 - x_1x_3, x_1x_2)$. (2.2)

Câmpul X definește sistemul diferențial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Pentru acest sistem, nu se poate aplica metoda matricei Hurwitz pentru că avem rădăcini cu partea reală nulă [11]. Pe de altă parte găsim integrala primă

$$G(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 + \frac{3x_3^2}{2}. \quad (2.4)$$

Modul cum se construiește aceasta se poate consulta în [11]. Pentru (2.3) luăm ca funcție Leapunov,

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 + \frac{3x_3^2}{2}. \quad (2.5)$$

$V(0,0,0)=0$ și $V(x_1, x_2, x_3) > 0$, $\forall (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$

Aplicând teorema lui Leapunov pentru sisteme autonome, rezultă că sistemul (2.3) este stabil în $x_0 = (0,0,0)$.

Exemplul 2.2. Fie $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $X(x, y) = (-y + x^3 + xy^2, x + y^3 + x^2y)$. (2.6)

Câmpul X definește sistemul diferențial

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = x + y^3 + x^2y \end{cases} \quad (2.7)$$

Pentru acest sistem diferențial metoda matricei Hurwitz nu se poate aplica pentru că avem rădăcini cu partea reală nulă [11]. Pentru sistemul primei aproximații

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = +x \end{cases} \quad (2.7')$$

găsim integrala primă

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad (2.8)$$

Modul cum se construiește aceasta se poate consulta în [11]. Luăm pe

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad (2.9)$$

ca funcție Leapunov pentru (2.7).

$V(0,0)=0$ și $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Aplicând teorema lui Leapunov privind instabilitatea sistemelor diferențiale autonome, rezultă că sistemul (2.7) este instabil în $x_0 = (0,0)$.

Exemplul 2.3. Să se studieze stabilitatea sistemului diferențial de ordinul al doilea

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - b\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Sistemul dat de (2.10) este cunoscut în literatura de specialitate sub numele de sistemul Morse-Feshbach. În [79] pentru acest sistem sunt dați doi lagrangieni și pseudogrupul generator infinitezimal $X(\tau=1, \chi^i=0)$. Acesta este pseudogrup de simetrie pentru primul lagrangian dar nu mai este pseudogrup de simetrie pentru al doilea. Făcând substituțiile

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = \dot{x}_1, y_4 = \dot{x}_2 \quad (2.11)$$

obținem sistemul diferențial de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = by_3 - ky_1 \\ \dot{y}_4 = -by_4 - ky_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Câmpul care definește sistemul (2.12) este $X: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$X(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, y_4, by_3 - ky_1, -by_4 - ky_2) \quad (2.13)$$

Funcția

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_3 y_4 + ky_1 y_2 \quad (2.14)$$

este integrală primă pentru (2.12). Luăm ca funcție Leapunov pe

$$V(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3 y_4 + ky_1 y_2)^2 \quad (2.15)$$

$V(0,0,0,0)=0$. Mulțimea pe care V este pozitiv definită este $R^4 \setminus M$ unde

$$M = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) | (y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \neq (0,0,0,0), y_3 y_4 + k y_1 y_2 = 0\}$$

Studiem stabilitatea pe mulțimea $R^4 \setminus M$. Aplicând teorema lui Leapunov pentru sisteme autonome, rezultă că sistemul (2.12) este stabil în $x_0=(0,0,0,0)$.

Exemplul 2.4. Să se studieze stabilitatea sistemului diferențial de ordinul al doilea

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega\dot{x}_1 = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Nu toate sistemele dinamice admit principiul variațional, dat de Hamilton. Este cunoscut ca exemplu deosebit (contraexemplu) sistemul lui E. T. Whittaker, al lui S. Hojman și L. F.Urrutia. Sistemele amintite mai sus sunt sisteme dinamice cu două grade de libertate care nu admit un factor integrant, deci nu admit principiul variațional. Așa cum este precizat în [48] sistemul dat prin (2.16) este un sistem dinamic oscilatoriu și foarte disipativ, care generalizează sistemul lui Hojman – Urrutia. După cum se știe acest sistem nu admite o funcție a lui Lagrange de forma $L(t, x, \dot{x})$. În [48] se determină un set de integrale prime, fără cunoașterea soluției generale a sistemului. Făcând substituțiile

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = \dot{x}_1, y_4 = \dot{x}_2 \quad (2.17)$$

obținem sistemul de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = -c y_3 - \omega^2 y_1 \\ \dot{y}_4 = -\omega y_3 \end{cases} \quad (2.18)$$

Câmpul care definește sistemul (2.18) este

$$X: R^4 \rightarrow R^4, X(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, y_4, -c y_3 - \omega^2 y_1, -\omega y_3) \quad (2.19)$$

Din [48] luăm integrala primă

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_4 + \omega y_1 \quad (2.20)$$

pentru (2.18). Pentru sistemul (2.18) luăm $V(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_4 + \omega y_1)^2$ ca funcției Leapunov.

$V(0,0,0,0)=0$. Mulțimea pe care V este pozitiv definită este $R^4 \setminus M$ unde

$$M = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) | (y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \neq (0,0,0,0), y_4 + \omega y_1 = 0\}$$

Studiem stabilitatea pe mulțimea $R^4 \setminus M$. Aplicând teorema lui Leapunov pentru sisteme autonome, rezultă că sistemul (2.18) este stabil în $x_0=(0,0,0,0)$.

Exemplul 2.5. Să se studieze stabilitatea sistemului dinamic

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

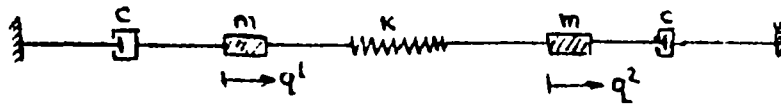


fig. 2.1

care descrie comportarea sistemului mecanic din fig. 2.1. Cu substituțiile

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = \dot{x}_1, y_4 = \dot{x}_2 \quad (2.22)$$

sistemul (2.21) devine un sistem dinamic de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = -\frac{c}{m}y_3 - \frac{k}{m}(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_4 = -\frac{c}{m}y_4 - \frac{k}{m}(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (2.23)$$

Câmpul care definește sistemul (2.23) este:

$$X: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, X(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, y_4, -\frac{c}{m}y_3 - \frac{k}{m}(y_1 - y_2), -\frac{c}{m}y_4 - \frac{k}{m}(y_2 - y_1)) \quad (2.24)$$

Aici găsim integrala primă

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) = [m(y_3 + y_4) + c(y_1 + y_2)] \quad (2.25)$$

și funcția Leapunov

$$V(y_1, y_2, y_3, y_4) = [m(y_3 + y_4) + c(y_1 + y_2)]^2 \quad (2.26)$$

$V(0,0,0,0)=0$. Mulțimea pe care V este pozitiv definită este $\mathbb{R}^4 \setminus M$ unde $M = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) | (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4, (y_1, y_2, y_3, y_4) \neq (0,0,0,0), m(y_3 + y_4) + c(y_1 + y_2) = 0\}$

Studiem stabilitatea pe mulțimea $\mathbb{R}^4 \setminus M$. Aplicând teorema lui Leapunov pentru sisteme autonome, rezultă că sistemul (2.23) este stabil în $x_0 = (0,0,0,0)$.

2.2. Dinamica geometrică a mașinilor de frezat

În acest paragraf aplicăm teoria prof. dr. Constantin Udriște, [119], pentru a obține informații suplimentare privind descrierea comportării mașinilor de frezat în timpul așchierii. Una din măsurile ce trebuie îndeplinite pentru a crește capacitatea de așchiere la mașinile de frezat roți dințate FD-320 este diminuarea pe cât posibil a vibrațiilor ce apar în procesul de așchiere. Creșterea capacității de așchiere dar și a calității suprafețelor prelucrate duce la creșterea capacității de producție. Folosind varietatea Riemann (R^6, δ_j) studiem mișcarea vibratorie din sistemul elastic prezentat în figura 4.4d din [71]. Vibrațiile sistemului elastic sunt descrise de soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (2.27) unde J_{me}, C_S, C_P sunt constante reprezentând momentul de inerție iar ultimele două constante de elasticitate. Alegerea indicilor s-a făcut ținând cont de motorul electric, sculă și piesă.

Pornim cu sistemul cinematic

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{C_{me} C_S (x_3 - x_1) + C_P (x_5 - x_1)}{J_{me} C_{me} + C_S + C_P} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{C_S C_{me} (x_1 - x_3) + C_P (x_5 - x_3)}{J_S C_{me} + C_S + C_P} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{C_P C_{me} (x_1 - x_5) + C_S (x_3 - x_5)}{J_P C_{me} + C_S + C_P} \end{cases} \quad (2.27)$$

Construim prelungirea Lagrange după metoda prof.dr. Constantin Udriște. Pentru aceasta introducem câmpul vectorial “mașină de frezat” care are șase componente

$$\begin{cases} X_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_2 \\ X_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{C_{me} C_S (x_3 - x_1) + C_P (x_5 - x_1)}{J_{me} C_{me} + C_S + C_P} \\ X_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_4 \\ X_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{C_S C_{me} (x_1 - x_3) + C_P (x_5 - x_3)}{J_S C_{me} + C_S + C_P} \\ X_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_6 \\ X_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{C_P C_{me} (x_1 - x_5) + C_S (x_3 - x_5)}{J_P C_{me} + C_S + C_P}, \end{cases} \quad (2.28)$$

unde

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \text{ și } x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

Sistemul (2.27) este un sistem autonom de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad i = \overline{1,6}. \quad (2.29)$$

Punctele de echilibru ale sistemului (2.27) sunt de forma $x = (a, 0, a, 0, a, 0)$ unde a este o constantă. Funcția f dată de

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 X_i^2 \quad (2.30)$$

reprezintă densitatea de energie asociată câmpului vectorial “mașină de frezat” și structurii euclidiene δ_{ij} . Dinamica geometrică asociată sistemului elastic este descrisă prin sistemul diferențial de ordinul al doilea

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{dx_j}{dt}, \quad i, j = \overline{1,6}, \quad (2.31)$$

care se dovedește a fi o prelungire Euler-Lagrange. Cu alte cuvinte lagrangianul

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{dx_i}{dt} - X_i \right)^2 \quad (2.32)$$

sau

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - \sum_{i=1}^6 X_i \frac{dx_i}{dt} + f \quad (2.32')$$

determină acest sistem de ordinul al doilea cu 6 grade de libertate, ale cărui traiectorii conțin și soluțiile sistemului (2.27). Acest sistem descrie o mișcare geodezică într-un câmp giroscopic de forțe. Pentru precizare, termenul $\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{dt}$ este forța giroscopică, iar termenul $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ reprezintă o forță conservativă. Pentru a pune în evidență că traiectoriile sunt geodezice construim Hamiltonianul asociat

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - f, \quad (2.33)$$

și structura geometrică formată din metrica Riemanniană

$$g_{ij} = (H + f) \delta_{ij}, \quad (2.34)$$

și din conexiunea neliniară

$$N'_j = \Gamma'_{jk} - F'_j, \quad (2.35)$$

unde Γ'_{jk} este conexiunea Riemanniană indusă de metrica g_{ij} .

Matricea antisimetrică de elemente F_{ij}

$$F'_j = \delta^{jh} F_{jh}, \quad (2.36)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad (2.37)$$

înlocuiește rotorul din cazul spațiului cu trei dimensiuni.

Soluțiile sistemului (2.31) (unde s-au făcut calcule folosind (2.27), (2.28), (2.30)) sunt geodezice orizontale pe varietatea Riemann-Jacobi-Lagrange $(R^6 \setminus \Omega, g_{ij}, N'_j)$ unde Ω este mulțimea punctelor de echilibru, iar N'_j reprezintă o conexiune neliniară.

Teorema 2.1. *Orice traiectorie neconstantă a sistemului dinamic (2.31) care are energia totală H (constant) este o geodezică orizontală reparametrizată a varietății Riemann-Jacobi-Lagrange*

$$(R^6 \setminus \Omega, g_{ij} = (H + f) \delta_{ij}, N'_j = \Gamma'_{jk} + F'_j, i, j = \overline{1,6}).$$

Problemă deschisă Soluțiile sistemului (2.31) se împart în trei categorii:

- 1) Soluțiile sistemului (2.27) pe care $H = \text{const} = 0$;
- 2) Soluții pentru care $H = \text{const} > 0$;
- 3) Soluții pentru care $H = \text{const} < 0$.

Ce reprezintă curbele din familiile 2) și 3) din punct de vedere mecanic?

2.3. Densitate de energie a unui câmp vectorial

Un câmp vectorial împreună cu o structură Riemanniană determină o densitate de energie. Această idee a fost dezvoltată în lucrările [116]-[119].

Datorită importanței acestei noțiuni în problemele de mecanică și electromagnetism, preluăm ideea pe forma simplificată a spațiului Euclidian R^n , punctând doar elementele ce ne interesează. Trebuie amintit că densitatea de energie a lui X poate fi folosită în probleme de completitudine, probleme de stabilitate ca funcție Leapunov și în probleme de generări de mișcări geodezice în câmpuri giroscopice de forțe. Energia unui câmp vectorial X este câmpul

scalar definit prin $f = \frac{\|X\|^2}{2}$. Fie D o mulțime deschisă și conexă din R^n și X un

câmp vectorial de clasă C^2 pe D . Câmpului vectorial X i se poate atașa funcția

reală $f: D \rightarrow R$, $f = \frac{\|X\|^2}{2}$. Așa cum se precizează în [116] un câmp vectorial X

reprezintă local viteza de variație a unui proces fizic, jumătatea pătratului lungimii câmpului vectorial, adică f , va reprezenta densitatea de energie cinetică a mediului în mișcare. Funcția f se va numi energia câmpului vectorial X . Dacă există, zerourile lui f coincid cu zerourile lui X . Trebuie precizat că pozițiile de echilibru ale procesului, sunt puncte de minim global și deci puncte critice ale energiei f . Reciproca nu este adevărată fără alte condiții suplimentare.

Relațiile $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ arată că dacă $\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ pe D , atunci

punctele critice ale energiei f sunt pozițiile de echilibru și deci puncte de minim global. În caz contrar există puncte critice ale lui f care nu sunt zerouri ale lui X .

Fie $X = (X_1, \dots, X_n)$ un câmp vectorial de clasă C^2 irotațional pe

$D \subset R^n$, adică $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$, $\forall x \in D$ $i, j = 1, \dots, n$.

Se observă că pentru fiecare $x \in D$ matricea $\left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) \right]$ este simetrică.

Propoziția 2.1. X este un câmp vectorial irotațional pe D dacă și numai dacă el este local potențial.

Câmpurile vectoriale irotaționale sunt local potențiale, adică pentru fiecare $x_0 \in D$ există o mulțime deschisă $U \subset D$ care conține pe x_0 și $\varphi: U \rightarrow R$ astfel încât $X = \text{grad} \varphi$ pe U . Din acest motiv $f|_U = \|\text{grad} \varphi\|^2 / 2$.

Definiția 2.1. Fie c un număr real. Mulțimea

$$M_c = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in R^n, f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se numește mulțime de nivel constant c .

Trebuie remarcat că hipersuprafețele $\varphi(x) = c$ sunt ortogonale liniilor de câmp ale lui X , iar mulțimile de nivel constant atașate lui $f_{,w}$ coincid cu mulțimile de nivel constant atașate lui $\text{grad}\varphi^2/2$.

Considerăm hamiltonianul $H: R^{2n} \rightarrow R, (x,y) \rightarrow H(x,y)$ de clasă C^3 și câmpul vectorial hamiltonian $X = (X_i, X_{n+i}), X_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, X_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, i=1, \dots, n$.

Notând $Y = \text{grad}H = (\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial y_i})$ se observă că $X=JY$, unde $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ este matricea structurii complexe canonice a lui R^{2n} .

Energia $f = \frac{X^2}{2}$ a câmpului vectorial hamiltonian X satisface

$$f = \frac{1}{2} X^2 = \frac{1}{2} \text{grad}H^2.$$

Acest rezultat este o consecință a faptului că X se obține din $\text{grad}H$ prin rotația dată de matricea J și arată că zerourile lui f sunt puncte critice ale lui H .

Așa cum este precizat în [116] pot fi enunțate următoarele propoziții.

Propoziția 2.2. *JX este un câmp vectorial solenoidal dacă și numai dacă H este un câmp scalar armonic.*

Propoziția 2.3. *Dacă H este un câmp scalar armonic, atunci f este un câmp scalar subarmonic.*

Teorema 2.2.[116] *Fie X un câmp vectorial hamiltonian pe R^{2n} . Dacă fiecare vector nenul $X(x)$ satisface $D_{jx}(\text{div}JX) > 0$ și energia f atinge un maxim local într-un punct x_0 , atunci X se anulează identic pe o vecinătate a lui x_0 .*

Exemplul 2.6. Fie sistemul diferențial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = V'(x) \end{cases} \quad (2.38)$$

care descrie liniile de câmp ale câmpului vectorial $(-y, V'(x))$.

Hamiltonianul este $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, unde V este funcție de clasă C^3 . Să presupunem că $(x_0, 0)$ este un punct de echilibru. Se ajunge la următoarele concluzii:

- 1) dacă $V''(x_0) \geq 0$, atunci punctul de echilibru $(x_0, 0)$ este stabil
- 2) dacă $V''(x_0) < 0$, atunci punctul de echilibru $(x_0, 0)$ este instabil.

Nu există metode generale pentru găsirea funcțiilor Leapunov. Este natural ca începutul căutării să fie sau energia lui X sau integrale prime ale sistemului. Dacă f este o integrală primă a sistemului $\frac{dx}{dt} = X(x)$ într-o vecinătate a originii, atunci, fără a micșora generalitatea, putem presupune $f(0)=0$ și deci f

este o funcție Leapunov. Folosind definiția integralelor prime se poate arăta ușor că funcția Leapunov $D_x f$ se anulează identic și deci este semidefinită (pozitiv sau negativ după cum convine problemei). Dacă f este definită (pozitiv sau negativ), atunci soluția $x(t)=0, \forall t \in R$ este stabilă.

Sistemele hamiltoniene

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (2.39)$$

sunt exemple la care precizările făcute funcționează perfect. În acest caz $H : R^{2n} \rightarrow R$ este o integrală primă globală.

Din punct de vedere geometric trebuie remarcat că o linie de câmp care începe în interiorul hipersuprafeței închise $M_c : f(x) = c$ nu mai poate ieși de acolo.

3. MIȘCĂRI VIBRANTE CU ÎNTÂRZIERE

În acest capitol se aplică metodele de studiu aplicate sistemelor dinamice descrise prin ecuații diferențiale cu argument întârziat folosite de prof. univ.dr. Dumitru Opreș [80] la sisteme mecanice, știindu-se că întârzierea este ideea centrală a efectului regenerativ.

3.1. Sisteme mecanice cu forță excitatoare cu argument întârziat

Un sistem elastic cu un grad de libertate cu forță excitatoare cu argument întârziat este descris prin ecuația diferențială cu argument întârziat

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

unde F este funcție diferențiabilă cu $F(0)=0, F'_x(0) \neq 0$, iar $\tau \geq 0$ este argumentul de întârziere, m masa echivalentă a sistemului, c coeficientul de proporționalitate al forței de frecare cu viteza de deplasare a masei m , numit coeficient de amortizare, k constanta elastică a sistemului. Ecuația (3.1) poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\alpha\dot{x}(t) + \alpha^2 x(t) = f(x(t - \tau)) \quad (3.2)$$

unde $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mck}}, \alpha^2 = \frac{k}{m}, f(x(t - \tau)) = \frac{F(x(t - \tau))}{m}$.

Coeficientul $\alpha > 0$ reprezintă pulsația proprie a sistemului (frecvența naturală), $\xi > 0$ reprezintă rația coeficientului de amortizare. Liniarizata (în variații) a ecuației (3.2) în starea de echilibru $x(t)=0, \forall t$, este

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\alpha\dot{y}(t) + \alpha^2 y(t) = k_p y(t - \tau), \quad (3.3)$$

unde $k_p = f'_x(0)$.

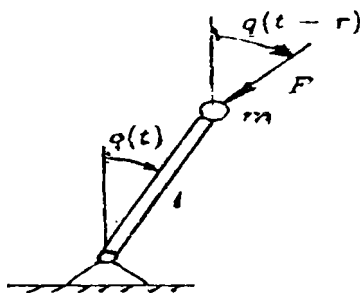


Fig. 3.1

Pentru sistemul mecanic cu un grad de libertate dat în fig. 3.1 ecuația (3.1) este

$$ml^2\ddot{q}(t) + (s - Fl)q(t) = -Flq(t - \tau), \quad (3.4)$$

unde s este rigiditatea în punctul de sprijin, m masa la capătul barei, l lungimea barei și F amplitudinea forței ce acționează cu întârziere presupusă constantă. Liniarizata lui (3.4) este

$$y(t) + \alpha^2 y(t) = k_p y(t - \tau), \quad (3.5)$$

unde $\alpha^2 = \frac{s - Fl}{ml^2}$, $k_p = -\frac{F}{ml}$.

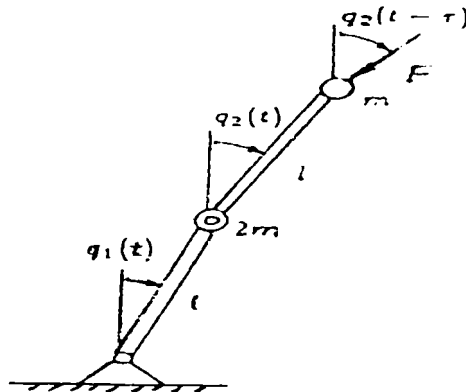


Fig. 3.2

Pentru sistemul mecanic cu două grade de libertate dat în fig. 3.2 sistemul de ecuații diferențiale cu argument întârziat ce descrie dinamica sistemului este dat de

$$\begin{pmatrix} 3ml^2 & ml^2 \\ ml & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s - Fl - s & 0 \\ -s & s - Fl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Fl \\ 0 & Fl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

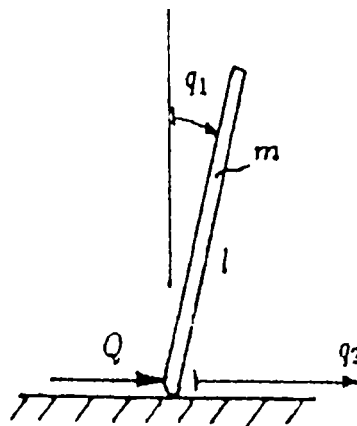


Fig. 3.3

Modelul mecanic din fig. 3.3 este un model simplu ce descrie „mașina manuală”. Forța de control $Q(t)$ este dată de

$$Q(t) = b_1 \dot{q}_1(t - \tau) + b_0 q_1(t - \tau), \quad (3.7)$$

unde τ este întârzierea reflexului uman. Modelul matematic al acestui sistem este

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} ml^2 & \frac{1}{2} ml \cos q_1(t) \\ \frac{1}{2} ml \cos q_1(t) & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} mlg \sin q_1(t) \\ \frac{1}{2} ml \dot{q}_1(t) \sin q_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \dot{q}_1(t - \tau) + b_0 q_1(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

unde m este masa barei omogene, l este lungimea, g accelerația gravitațională. Eliminând pe q_2 rezultă

$$(4 - 3 \cos^2 q_1(t)) \ddot{q}_1(t) + 3 \sin q_1(t) \cos q_1(t) - \frac{6g}{l} \sin q_1(t) + \frac{6}{ml} (b_1 \dot{q}_1(t - \tau) + b_0 q_1(t - \tau) \cos q_1(t)) = 0. \quad (3.9)$$

Liniarizata (în variații) a ecuației (3.9) în origine este

$$\ddot{x}(t) - \frac{6}{gl} x(t) + \frac{6}{ml} b_1 \dot{x}(t - \tau) + \frac{6}{ml} b_0 x(t - \tau) = 0. \quad (3.10)$$

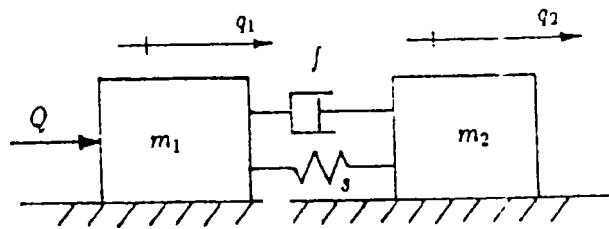


Fig. 3.4

Modelul mecanic din fig. 3.4, descrie un robot elastic cu un grad de libertate. Punând $v = \dot{q}_2$, modelul matematic este dat prin

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & -\alpha^2 & -2k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2Kk\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$k = \frac{f}{2m_2\alpha}, \alpha = \sqrt{s/m_2}, \dot{q}_1(t) = -Kq_2(t-\tau).$$

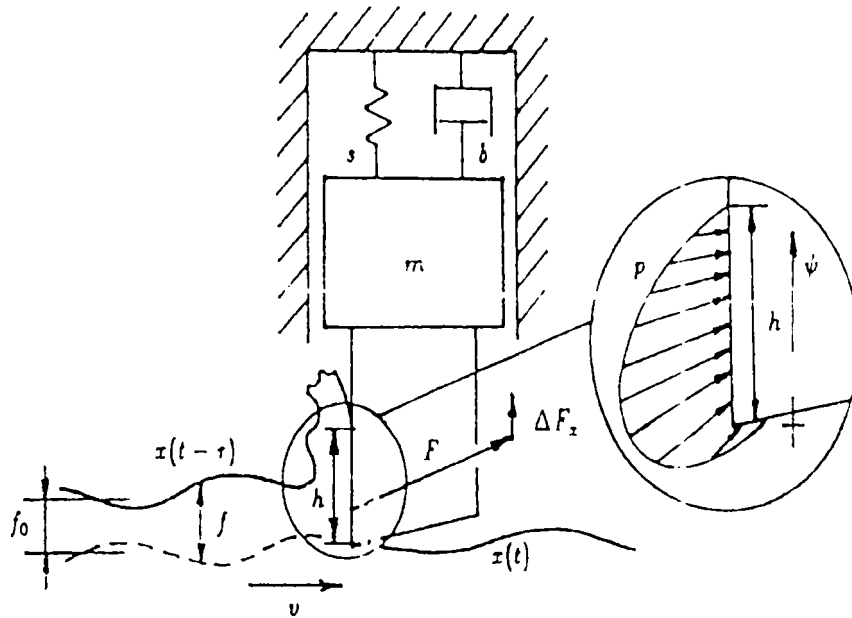


Fig. 3.5

Modelul mecanic din fig. 3.5 reprezintă o mașină unealtă. Acest model se supune ecuației diferențiale

$$\ddot{x}(t) + 2k\alpha\dot{x}(t) + \alpha^2x(t) = \frac{1}{m}(F_x(f(t)) - F_x(f_0)), \quad (3.12)$$

unde frecvența naturală este $\omega = \frac{\alpha}{2\pi}$, $\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}}$, $k = \frac{b}{2m\alpha}$ și F_x este componenta de-a lungul lui x a forței de tăiere. În acest model mecanic se încadrează și mașina unealtă vibrantă regenerativă pe care o analizăm în paragraful următor.

3.2. Modelul mașinii unelte vibrante regenerative

3.2.1. Structura sistemului dinamic al mașinilor – unelte

Interacțiunea dintre sistemul elastic și procesele de lucru care însoțesc funcționarea mașinilor – unelte determină ceea ce în literatura de specialitate se numesc fenomene dinamice. Sistemul elastic este alcătuit din mașina – unealtă propriu – zisă, dispozitiv, piesă și sculă.

Procesele de lucru reprezintă ansamblul de fenomene fizico – chimice care se desfășoară în zonele de contact ale elementelor sistemului elastic.

Procesul de așchiere se desfășoară în zonele de contact dintre piesă și sculă.

Procesul de frecare se desfășoară între elementele cuplurilor cinematice și îmbinărilor.

Procesele din motoarele de acționare se desfășoară în interstițiul dintre rotor și stator, piston și cilindru.

Sistemul dinamic al mașinii unelte este format din sistemul elastic și procesele de lucru în interacțiunea lor. Sistemul dinamic al mașinii - unelte poate fi reprezentat ca în fig. 3.6.

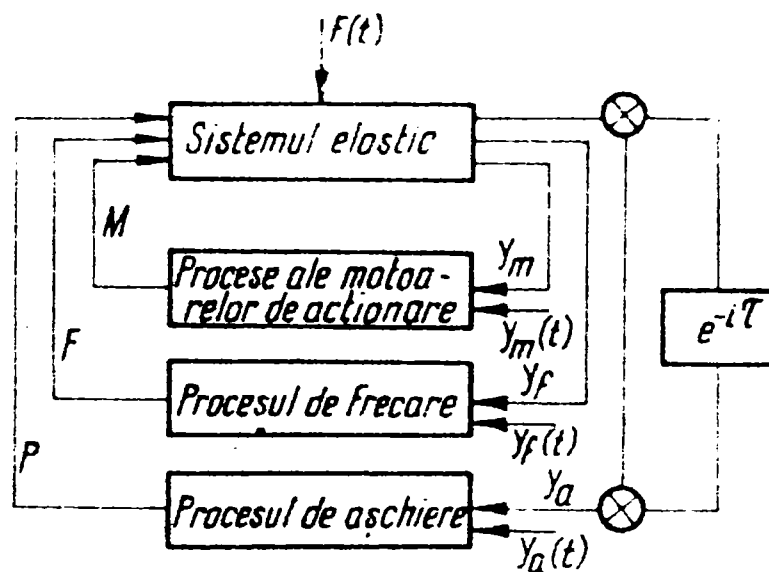


Fig. 3.6

În figură, cu P am reprezentat acțiunile proceselor de așchiere, cu F acțiunile procesului de frecare și cu M procesele din motoarele de acționare. Cu $F(t)$ am notat acțiunea factorilor externi. Cu Y_e , Y_f , Y_m am notat reacțiunile proceselor de așchiere, de frecare și din motoarele de acționare. $Y_e(t)$, $Y_f(t)$, $Y_m(t)$ reprezintă variația reglării parametrilor proceselor de lucru și provoacă

aparitia în sistemul elastic a vibrațiilor forțate. În figură, am introdus între sistemul elastic și procesul de aşchiere, circuitul ce cuprinde elementul de întârziere datorat undulațiilor de pe piesă, provocate de vibrații pe durata ciclului tehnologic anterior.

Definim timpul de întârziere τ ca fiind egal cu durata în care se efectuează o rotație a piesei sau cu intervalul de timp dintre trecerile a două muchii aşchietoare consecutive.

La strunguri, mașini de rabotat, frezat, găurit, timpul de întârziere este mai mare în comparație cu perioada de vibrație.

Pentru mașinile de rectificat, circuitul de întârziere prezintă o importanță deosebită, de cele mai multe ori fiind cauza instabilității dinamice [71].

La mașinile de rectificat, circuitul de întârziere este datorat apariției undulațiilor pe periferia pietrei de rectificat și timpul τ este egal cu durata unei rotații a sculei.

La valori determinate ale înălțimii acestor undulații apare starea de instabilitate dinamică. Când apare starea de instabilitate procesul de aşchiere trebuie întrerupt, reluarea sa fiind posibilă numai după îndreptarea pietrei de rectificat. Este evident faptul că la mașinile de rectificat luarea în considerare a circuitului de întârziere este obligatorie.

Pentru o mai bună analiză a caracteristicilor elementelor sistemului dinamic al mașinii – unelte și a legăturilor dintre acestea trebuie să ținem cont de următoarele particularități:

- sistemul dinamic al mașinii – unelte este închis, cu mai multe circuite, cuprinzând și sursa de energie;
- interacțiunea dintre procesele de lucru se produce numai prin intermediul sistemului elastic;
- acțiunile dintre elementele de bază ale sistemului pot fi considerate unice, ca sens și natură.

Prima particularitate rezultă din modul de interacțiune al sistemului elastic cu procesele de lucru.

A doua particularitate a sistemului dinamic al mașinii – unelte este determinată de faptul că în zonele în care se desfășoară diferitele procese de lucru sunt separate între ele prin elementele sistemului elastic.

A treia particularitate arată faptul că acțiunea unui element asupra altuia nu este însoțită de o altă reacțiune în afara celei luate în considerare deci se permite deschiderea sistemului făcând mai comodă analiza sa.

Așa cum este indicat în [86] deschiderea sistemului se realizează prin întreruperea uneia din legături, ceea ce face ca un sistem închis cu un singur circuit să se transforme într-un sistem deschis.

3.2.2. Analiza stabilității liniarizatei ecuației (3.1)

Liniarizata (în variații) a ecuației diferențiale cu argument întârziat

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

este dată de ecuația

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\alpha\dot{x}(t) + \alpha^2 x(t) = f(x(t - \tau)) \quad (3.2)$$

Analiza stabilității poziției de echilibru constă în a găsi condiții necesare și suficiente ca rădăcinile ecuației caracteristice să aibă rădăcini cu partea reală negativă. Criteriile de stabilitate se clasifică în două categorii: criterii de stabilitate ce depind de întârzierea τ și criterii de stabilitate independente de întârzierea τ .

Analizăm stabilitatea poziției de echilibru a ecuației (3.2) folosind metoda diagramei duale. Regiunea de stabilitate a ecuației (3.2) se descompune într-o regiune dependentă de τ și o regiune independentă de τ , regiuni din planul cu coordonatele $(\frac{k_p}{\alpha^2})$. Metoda diagramei duale este o variantă a diagramei lui Nyquist și este eficientă dacă parametrul de întârziere τ apare numai într-unul din termeni. Pentru descrierea metodei se utilizează următoarea lemă:

Lema 3.1. (Lema argumentului principal Cauchy) *Fie o funcție meromorfă într-un domeniu simplu conex D . Fie C o curbă Jordan din D , orientată în direcția pozitivă (contrar arcelor ceasornicului) și presupunem că f nu are poli sau zerouri pe C . Dacă notăm cu Z numărul de zerouri și cu P numărul de poli ai lui f în interiorul lui C , atunci variația argumentului lui $f(s)$ de-a lungul curbei Jordan C este $Var(argf(s), C) = 2\pi(Z - P)$.*

Ecuația caracteristică a ecuației (3.2) este

$$\lambda^2 + 2\xi\alpha\lambda + \alpha^2 - k_p e^{-\lambda\tau} = 0, \lambda \in C. \quad (3.13)$$

Utilizând transformata Laplace, ecuația (3.13), se înlocuiește cu ecuația

$$e^{-s\tau} = \frac{s^2 + 2\xi\alpha s + \alpha^2}{k_p}. \quad \text{Utilizând lema 3.1, se obțin următoarele teoreme:}$$

Teorema 3.1. [92]. *Dacă $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $2\xi\sqrt{1 - \xi^2} \leq \frac{k_p}{\alpha^2} < 1$ stabilitatea soluției $y(t) = 0, \forall t$, depinde de τ . Domeniul de stabilitate pentru τ este dat de*

$$\frac{1}{\omega_A} \left(-\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\alpha^2 - \omega_A^2}{2\xi\alpha\omega_A} + 2\pi m \right) < \tau < \frac{1}{\omega_B} \left(-\frac{3\pi}{2} + \arctan \frac{\alpha^2 - \omega_B^2}{2\xi\alpha\omega_B} + 2\pi m \right), \quad n \in N$$

unde

$$\omega_A = \alpha \sqrt{1 - 2\xi^2 - \sqrt{\frac{k_p}{\alpha^4} - 4\xi^2 + 4\xi^4}},$$

$$\omega_B = \alpha \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{\frac{k_p}{\alpha^4} - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

Teorema 3.2. [92]. *Dacă una din condițiile următoare are loc*

i) $0 < k_p < \alpha^2, \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}};$

ii) $0 < k_p < 2\xi\alpha^2\sqrt{1-\xi^2}, 0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}},$

atunci soluția $y(t)=0 \forall t$, este stabilă independent de τ . Regiunile de stabilitate și instabilitate se pot reprezentate în planul $(\xi, \eta = \frac{k_p}{\alpha^2})$ ca în fig. 3.7.

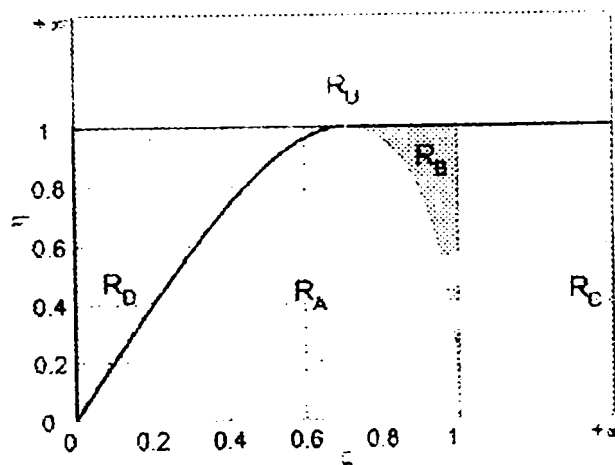


Fig. 3.7

3.3. Dinamica mașinilor unelte vibrante cu forță externă cu argument întârziat

3.3.1. Prezentare generală

Mașina unealtă este un proces dinamic complex. Deoarece precizia mașini unealtă este afectată de vibrațiile ce apar datorită procesului de tăiere, multe modele ce sunt analizate în literatura de specialitate au ca scop explicarea și predicția acestor vibrații. Din punct de vedere al sistemelor dinamice modelele cele mai complicate sunt acelea care descriu așa numitele autovibrații ale mașinilor unelte. Complexitatea modelului crește cu numărul gradelor de libertate, adică cu dimensiunea spațiului fazelor pe care se descriu orbitele variabilelor modelului.

Cauza esențială a vibrațiilor, în procesul de tăiere, este efectul regenerativ. Modelul mecanic poate fi cu un singur grad de libertate, dar modelul matematic asociat este infinit dimensional. Prezența argumentului de întârziere ce apare în procesul regenerativ, conduce la ecuații diferențiale cu întârziere (DDE) și traiectoriile variabilei de stare sunt descrise în spațiul fazelor infinit dimensional.

În cele ce urmează vom prezenta exemple de sisteme de ecuații diferențiale cu argument întârziat (DDE) ce sunt folosite în descrierea modelului matematic al mașinii unelte regenerative, precum și condiții de stabilitate a soluției staționare.

De mai bine de un secol, vibrațiile mașinilor unelte sunt o problemă serioasă pentru ingineri. Problema este, din unele puncte de vedere, similară cu problema turbulenței în mecanica fluidelor. Vibrațiile nedorite, dintre mașina unealtă și piesa, aflată în lucru, duc la scăderea calității suprafeței prelucrate în cazul tăierii. De aceea, se caută să se proiecteze mașinile unelte astfel, încât instabilitatea tăierii să fie evitată. Una din cele mai importante cauze ale instabilității, în procesul de tăiere, este efectul regenerativ. Datorită perturbațiilor externe apar vibrații și suprafața piesei de lucru devine ondulată. Forța de tăiere depinde, în acest caz, de valorile actuale și de cele de întârziere. Durata întârzierii este egală cu perioada de timp τ a revoluției piesei de lucru (sau uneltei). Întârzierea este ideea centrală a efectului regenerativ.

Există diverse mecanisme fizice care duc la vibrații relative între mașină și piesa de lucru.

Unul din acestea ar fi legat de comportamentul termoplastic al materialului de tăiat așa cum este prezentat în [50].

Un altul apare în prezența fricțiunii dintre mașină și suprafața de contact așa cum este prezentat în [57] și [124].

Unificarea diferitelor modele și clasificarea posibilelor similitudini sunt și astăzi probleme deschise.

Chiar după o analiză modală și o estimare a forței de tăiere serioasă, anticiparea vibrațiilor regenerative este dificilă.

Cu toate că analiza stabilității liniare a tăierii staționare, în condiții regenerative, poate fi considerată o problemă rezolvată la nivelul de cercetare, rezultatele sunt puțin aplicate în practică.

Chiar dacă parametrii sunt bine estimați, rezultatele analizei stabilității liniare sunt limitate.

Așa cum se arată în [96], experiențele dovedesc că domeniul atractivității unei tăieri stabile poate fi foarte mic și întregul proces de așchiere poate fi sensibil la perturbații. De aici, rezultă o limitare practică serioasă a aplicabilității industriale a modelelor liniare.

Așa cum reiese din [107], [74], [3] se vede că în dinamica non – liniară, se folosesc frecvent atât modele analitice cât și simularea pe calculator.

În [108] o înțelegere mai aprofundată a fenomenului se face pe un studiu de caz industrial privind tăierea în bucăți. Se construiește mecanismul topologic al dezvoltării vibrației regenerative într-un spațiu patru-dimensional, inclus în faza de spațiu infinit dimensional al zgometului regenerativ. În cazul procesului de tăiere, numărul de dinți activi, în funcție de timp, cauzează dependențe în timp în ecuație diferențială cu întârziere corespunzătoare. Rezultate privind studiul stabilității sistemelor periodice cu întârziere sunt date în [108] și sunt valabile pentru tăiere la viteză foarte mare.

3.3.2. Stabilitate și vibrații în procesul de întoarcere

În fig. 3.8 este prezentat un model desenat al mașinii de lucru ce poate fi folosit când avem o frecvență naturală scăzută și un mod (corespondent) propriu de vibrație al mașinii de lucru așa cum este el dat în [113], [115], [106].

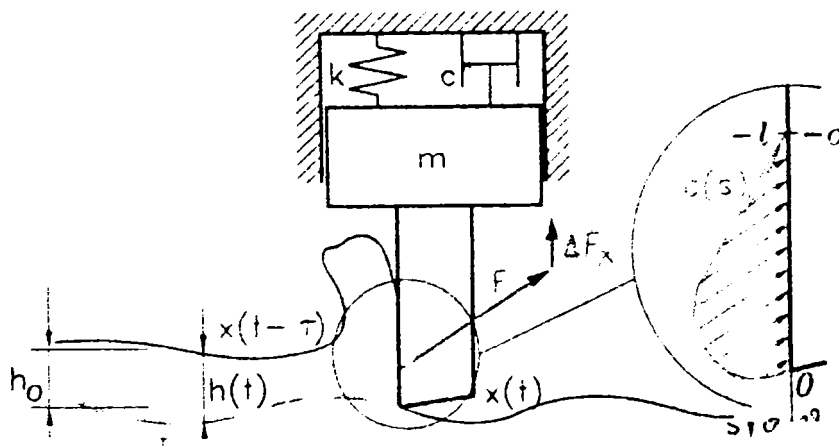


Fig. 3.8

Modelul reprezintă un sistem cu un grad de libertate, având ca parametrii caracteristici frecvența naturală (unghiulară) ω_n și factorul relativ de amortizare ξ . De fapt modelul din fig. 3.8 ne arată cazul așa-numitei tăieri ortogonale.

În ciuda faptului că sistemul are un grad de libertate, modelul matematic corespunzător este „dimensiunea infinită”. Din acest punct de vedere complexitatea vibrațiilor regenerative, exprimate în procesul de tăiere, poate fi comparată cu cea a fenomenului de turbulență din mecanica fluidelor, ambele având loc în spații infinit dimensionale (datorită prezenței întârzierii de timp τ , care este invers proporțională cu viteza de tăiere). Modelul mecanic din fig.3.8 este descris de o ecuație de întârziere (DDE).

Teoria ecuațiilor diferențiale de întârziere a apărut prin anii '50 și aici își are rădăcina începutul și modelul matematic al zgomotului regenerativ. În teoria matematică a controlului, există o binecunoscută „regulă a degetului mare”, care spune că o întârziere crescândă tinde să destabilizeze orice sistem dinamic. Altfel spus, „o memorie bună poate aduce necazuri”.

Și aici zgomotul regenerativ al mașinilor de lucru este o excepție deoarece în sistemele mecanice cu zgomot scăzut (cazul mașinilor de lucru) întârzierea poate avea de asemenea un efect stabilizator.

În fig. 3.9 este prezentată dependența forței de tăiere de grosimea materialului de tăiat h .

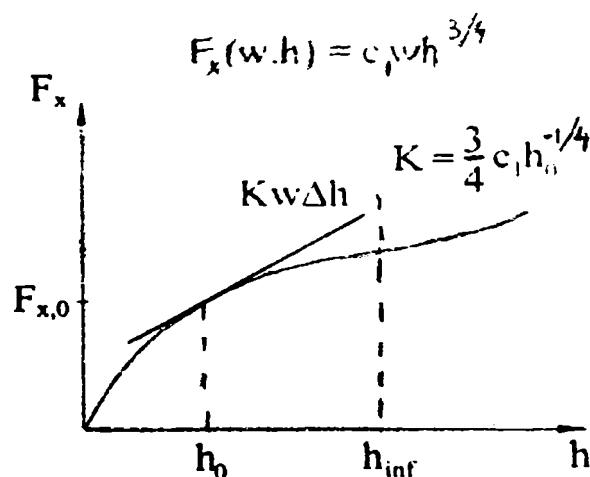


Fig. 3.9

Partea liniară a forței de tăiere este descrisă de produsul $KW\Delta h$. S-a notat cu W lungimea materialului de tăiat iar cu K_1 coeficientul de tăiere.

$K_1 = KW$ (K este și el un coeficient).

Fie C timpul de care e nevoie pentru ca o particulă a materialului să alunece de-a lungul feței active a lungimii l .

$C \in [-\tau, 0]$, iar $P(C)$ descrie forma sistemului staționar de-a lungul feței acțiune a uneltei.

Așa cum este indicat în [109] efectul întârzierii mici de timp poate fi integrat în expresia forței de tăiere.

Modelul matematic al mișcării mașinii este dat prin următoarea ecuație integro-diferențială:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \frac{KW}{m} \int_{-\sigma}^0 p(\theta)x(t+\theta)d\theta - \\ - KW \int_{-\tau-\sigma}^{-\sigma} p(\tau+\theta)x(t+\theta)d\theta = 0$$

K este un coeficient ce depinde de: geometria prescrisă a materialului de tăiat, proprietățile (constante) de material al piesei de lucru.

Conform [120], o bună aproximare a distribuției poate fi dată de o funcție exponențială de forma:

$$p(C) = \frac{1}{\sigma_0} e^{C/\sigma_0}, C \in [-\infty, 0], \text{ unde } \sigma_0 v = l_0.$$

l_0 poate lua rolul unei lungimi de contact aproximativ finite deși $\sigma \rightarrow \infty$ în acest caz. Avantajul matematic al acestei funcții este acela că integralele din ecuația de mișcare pot fi calculate prin părți.

Ecuația integro-diferențială se prelungește la o ecuație de ordinul trei prin derivare în raport cu t.

Se știe că soluția $x(t) \equiv 0$ este stabilă dacă toate rădăcinile ecuației caracteristici au partea reală negativă.

În [106] este dată o metodă puternică de verificare a condiției de mai sus (partea reală negativă). Graficele de stabilitate sunt construite în planul parametrilor W și Ω (viteza de tăiere și raza piesei de lucru).

Parametrii folosiți sunt:

$$m = 50 \text{ Kg}, \omega_n = 775 [1/s], K = 1000 [N/mm^2], \sigma_0 = 0,001 \tau$$

La limitele stabilității apare bifurcația Hopf. Oscilațiile care apar pot duce la pierderea stabilității.

3.3.3. Observații experimentale

O mașină de tăiere C.N.C. (cu comandă numerică de conturare) a fost folosită pentru tăierea în bucăți, folosind o piesă cu 7 margini așa cum este indicat în fig. 3.10 Acest experiment dar și modelarea lui este prezentată în [108].

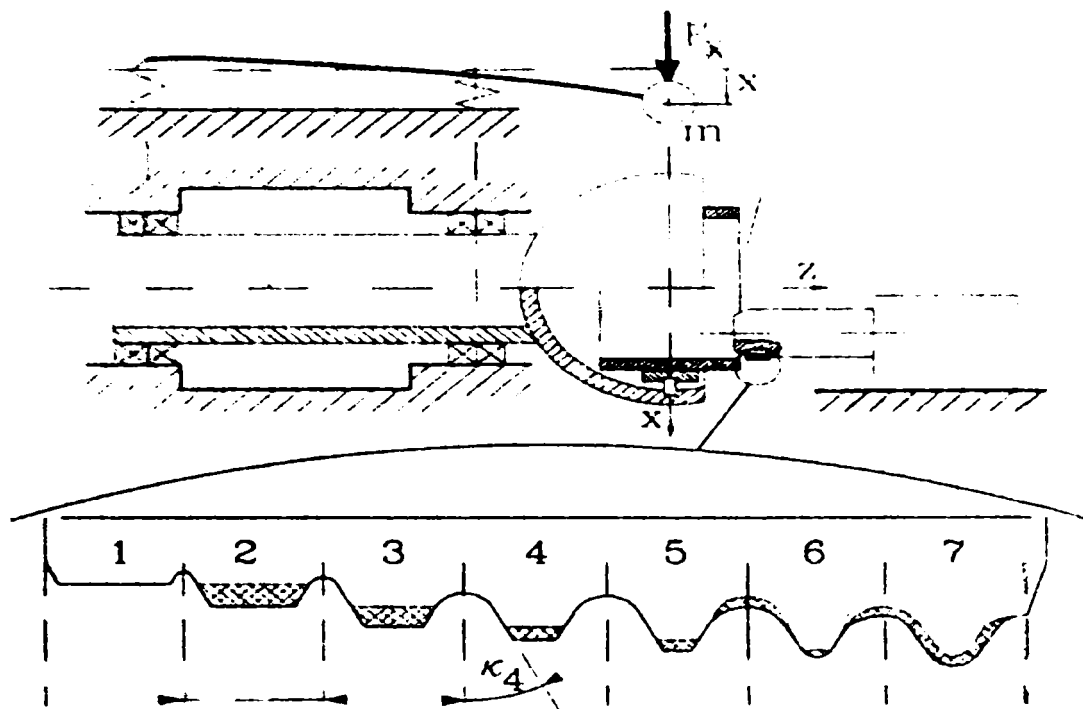


Fig. 3.10

Regiunile înnegrite în figură explică formarea materialului în timpul tăierii. Tăietura trebuie făcută pe suprafața internă a unei piese cilindrice. Lungimea piesei de lucru este de 220 mm, în timp ce diametrul intern are 176 mm. De asemenea trebuie precizat că piesa a fost analizată în acest experiment și apoi modelată cu o formă puțin conică, având un diametru mai mic cu 3 mm la mijlocul piesei decât la cele două capete. Această conicitate nu a avut nici un efect asupra dinamicii tăierii.

Tăierea trebuia făcută începând de la unul din capete până la jumătate și continuând de la celălalt capăt. Pentru a crește eficiența și a scădea costul s-a folosit o piesă specială atașată mașinii.

S-a măsurat frecvența primului mod de vibrație și s-au făcut experimente simple de impact. Piesa a fost lovită cu un ciocan de cauciuc și vibrațiile au fost înregistrate de un accelerometru de cristal.

Aceste vibrații pot cauza deviații de 1 Hz între rezultatele de măsurare ale aceleiași mașini când nu se află în lucru și când se află în lucru.

Această valoare mică ajută la explicarea zgomotului regenerativ. Rezultatele teoretice și experimentale ar trebui să coincidă într-un interval de frecvență mic de aproximativ 6 Hz.

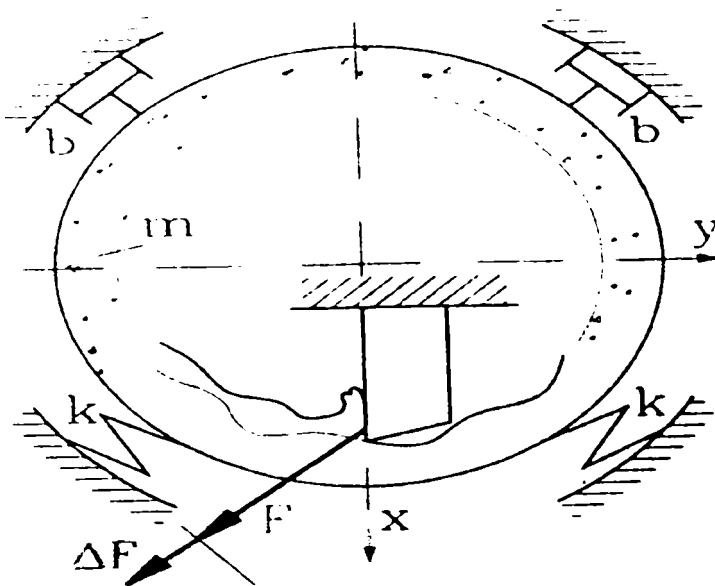


Fig. 3.11

Modelul analizat poate fi simplificat ca în fig. 3.11. Impactul indus semnalului de vibrație a fost folosit pentru a identifica factorul de amortizare din modelul dat în fig. 3.11. Calculul decrementului logaritmic și conversia sa ne conduce la rezultatul $\xi = 0,025$. Rezultatele au confirmat că nu există alte moduri de vibrație cu frecvențe naturale scăzute, apropiate de cea menționată anterior.

De fapt, din punct de vedere mecanic, mașina este identică cu modelele folosite în laborator, când un element elastic este potrivit tipic între mașină și susținătorul mașinii. Modelul din fig. 3.11 are totuși două grade de libertate datorită simetriei cilindrice.

Conform studiului propus de Tobias în [96], variația forței de tăiere ΔF se consideră a avea aceeași direcție ca însăși forța de tăiere. Sistemul are două grade de libertate. Coordonata determină variația materialului de tăiat în secțiunea geometrică. Vibrația va avea loc în direcția Y. Această direcție Y nu are efect asupra geometriei piesei de lucru. Din acest motiv nu o includem în modelul vibrației regenerative. Pentru modelul regenerativ luăm în considerare doar variația forței de tăiere în direcția X așa cum se observă din fig. 3.10 piesa are 7 margini iar prima nu operează așa cum a fost proiectată. Întârzierea de timp dintre cele două margini este egală cu perioada de timp a unei rotații a piesei în lucru. Efectul excitației parametrică, ce apare în mod obișnuit în procesul de tăiere nu apare nici aici.

Deoarece la a doua margine se taie chiar și suprafețele neprelucrate și acestea nefiind tăiate înainte nu există efect regenerativ. Forța de tăiere este suma forțelor celor 7 dinți. În acest caz efectul regenerativ este neglijabil, $\Omega \in [100, 400]$, forța concentrată de tăiere poate fi folosită când $\sigma = 0$ și funcția Dirac delta pentru sistemul de forțe distribuite a feței de acțiune $P(\Theta) = \delta(\Theta)$. Așa cum este dată și în [108] ecuația de mișcare este de forma:

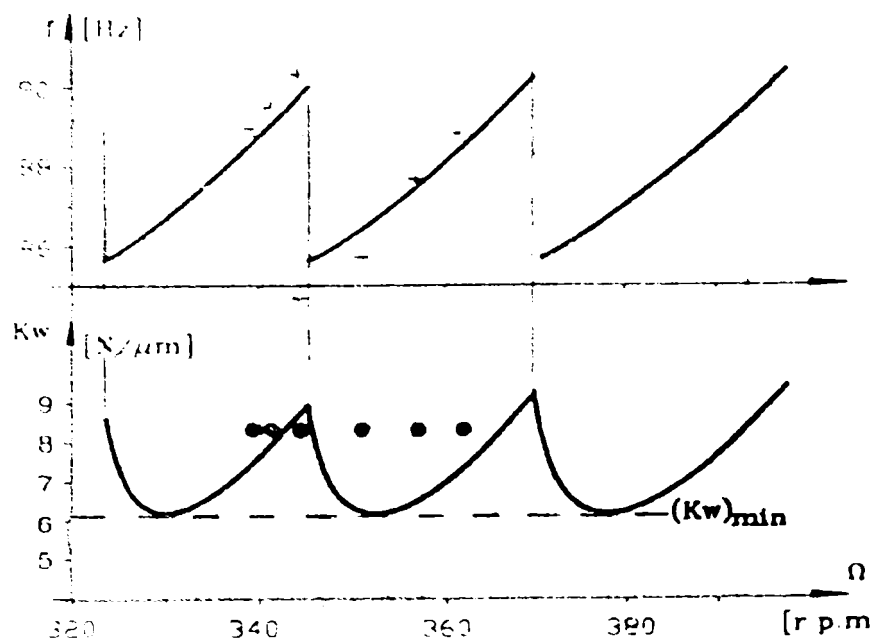


Fig. 3.12

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \left(\omega_n^2 + \frac{KW}{m}\right)x(t) - \frac{KW}{m}qx(t - \tau) = 0$$

Graficul stabilității acestui model liniar este prezentat în fig. 3.12 și este oarecum, afectat de fenomenul de suprapunere. În grafic este prezentată stabilitatea, calculată teoretic. Cercurile se referă la parametrii punctelor de măsurare. Practic, parametrii tuturor punctelor de lucru cad într-un domeniu instabil, excepție făcând al treilea. De remarcat este faptul că vibrații cu frecvențe diferite au loc în toate cazurile, chiar și în al treilea, care se presupune că se încadrează în limitele stabilității liniare. Așa cum reiese din [135] frecvențele măsurate și calculate se potrivesc destul de bine. Se poate spune că domenii de stabilitate mai mari pot fi găsite la viteze mai mari de tăiere, cu aceeași valoare a coeficientului de tăiere.

Așa cum este indicat în [108], puterea mașinii date dă o limită pentru a crește viteza în jur de 371 [r p m], aceasta fiind cea mai sigură zonă pentru tăiere stabilă. Imaginea piesei de lucru dată în [108] reprezintă așa numitele „spirale floarea – soarelui”, care sunt tipice pentru efectul regenerativ. În [108] această suprafață este analizată pentru o piesă prelucrată la viteza de tăiere $\Omega=344$ [r p m].

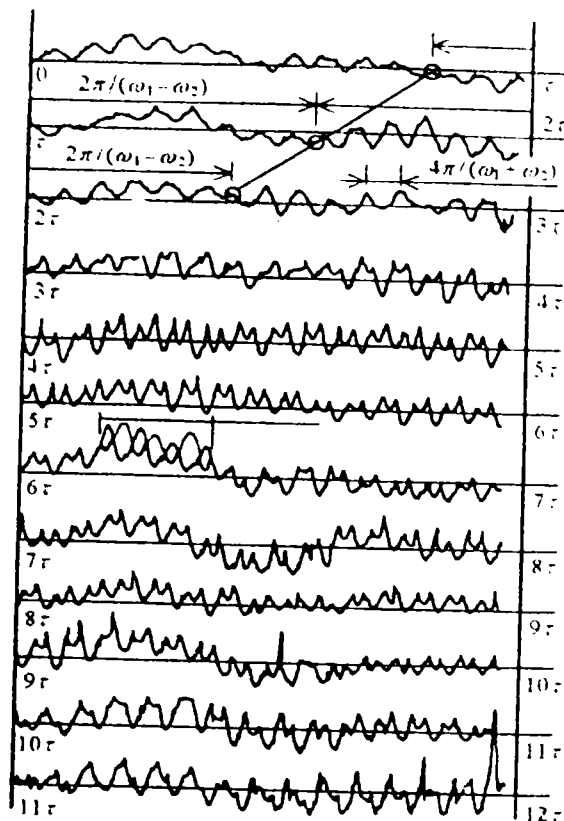


Fig. 3.13

În fig. 3.13, preluată din [108], este prezentat semnalul unui detector inductiv și unde fiecare linie a semnalului reprezintă o rotație a piesei de lucru. Putem deduce de aici că fiecare rotație a piesei are o lungime a timpului egală cu întârzierea de timp

$$T = 60/\Omega = 0,175 \text{ [s]}.$$

Chiar dacă parametrii tehnologici folosiți în experiment cad în domeniul stabilității piesa de lucru începe să oscileze datorită unei oscilații instabile apărută în bifurcarea Hopf. Trebuie remarcat și efectul de bătaie în fig. 3.13 și putem spune că în jur de 15,3 perioade de oscilații pot fi numărate într-o perioadă de timp τ iar efectul de bătaie însumat durează de două ori câte 12,5 oscilații.

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{15,3}{\tau} = 88,0 \text{ [Hz]}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{15,3}{2 \times 12,5\tau} = 3,5 \text{ [Hz]},$$

unde $\omega_1 = 91$, și $\omega_2 = 84,5$ [Hz].

Acestea sunt doar frecvențele care au fost înregistrate în graficul stabilității din figura 3.12 la viteza de 344 [r p m].

3.4. Modelul neliniar al mașinii unelte vibrante

Rezultatele experimentale [96], [64] arată că există amplitudini finite instabile, care sunt mișcări periodice instabile ale mașinii unelte în vecinătatea stărilor asimptotic stabile. Vom investiga prezența bifurcațiilor Hopf în modelul mașinii unelte vibratoare regenerativă folosind teoria și metoda din Teorema bifurcației și a varietății centrale.

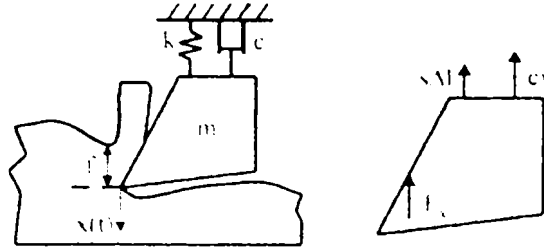


Fig. 3.14

În fig. 3.14 [64] este prezentat modelul mecanic al mașinii unelte cu vibrații generative, în secțiunea ortogonală iar f reprezintă grosimea așchii. Fie

$$\Delta l = l - l_0 + x(t) \quad (3.14)$$

unde l este lungimea tăieturii inițiale, l_0 lungimea tăieturii în stare de echilibru. Valoarea zero a coordonatei $x(t)$ ce caracterizează poziția cuțitului depinde de componenta F_x a forței de tăiere. Ecuația de mișcare a mașinii este

$$m \ddot{x}(t) = -s\Delta l - F_x - C\dot{x}(t) \quad (3.15)$$

Dacă se pune

$$F_x = F_x(f_0) + \Delta F_x \quad (3.16)$$

ecuația (1) se scrie

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -\frac{1}{m}\Delta F_x, \quad (3.17)$$

unde $\omega_n = \sqrt{\frac{s}{m}}$, este frecvența naturală a sistemului oscilator fără amortizare și

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$, factorul relativ al amortizării. Ecuația (3.17) este ecuația (3.2) cu

$\alpha = \omega_n$. Forța de tăiere a fost obținută empiric, utilizând teste de tăiere. În [96] se utilizează, ca funcție de tăiere, o funcție polinomială de gradul trei fig. 3.15. Forța de tăiere este funcție de grosimea așchii și este dată de :

$$F_x(f) = KWf^{3/4}, \quad (3.18)$$

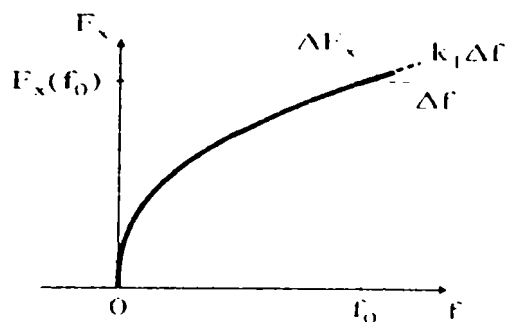


Fig. 3.15

unde K este un parametru ce depinde de parametrii tehnologici, considerat constant. Dezvoltând în serie Taylor în raport cu f în f_0 și reținând termenii până la ordinul trei rezultă:

$$F_x(f) \cong KW(f_0^{3/4} + \frac{3}{4}(f-f_0)f_0^{-1/4} - \frac{3}{32}(f-f_0)^2 f_0^{-5/4} + \frac{5}{128}(f-f_0)^3 f_0^{-9/4}). \quad (3.19)$$

Notând $\Delta F_x = F_x(f) - F_x(f_0)$ și $\Delta f = f - f_0$, găsim

$$\Delta F_x(\Delta f) \cong kW(\frac{3}{4}f_0^{-1/4}\Delta f - \frac{3}{32}f_0^{-5/4}\Delta f^2 + \frac{5}{128}f_0^{-9/4}\Delta f^3) \quad (3.20)$$

Coeficientul lui Δf din (3.20) se numește coeficientul forței de tăiere și este

$$k_1 = \frac{3}{4}kWf_0^{-1/4}, \quad (3.21)$$

iar relația (3.20) devine

$$\Delta F_x(\Delta f) \cong k_1\Delta f - \frac{1}{8}\frac{k_1}{f_0}\Delta f^2 + \frac{5}{96}\frac{k_1}{f_0^2}\Delta f^3. \quad (3.22)$$

Variația grosimii așchii Δf se poate exprima ca diferența dintre poziția cuțitului maxim $x(t)$ și devierea sa $x(t-\tau)$ sub forma

$$\Delta f = x(t) - x(t-\tau), \quad (3.23)$$

unde întârzierea $\tau = \frac{2\pi}{\Omega}$ este perioada de timp a unei rotații, iar Ω este viteza unghiulară a mișcării de rotație a piesei.

Ecuția (3.17) se scrie :

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + (\omega_n^2 + \frac{k_1}{m})x(t) - \frac{k_1}{m}x(t-\tau) = \\ = \frac{k_1}{8f_0m}((x(t) - x(t-\tau))^2 - \frac{5}{12f_0m}(x(t) - x(t-\tau))^3). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Introducem notațiile $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}$ și p prin

$$\tilde{t} = \omega_n t, \quad \tilde{x} = \frac{5}{12f_0}x, \quad \tilde{\tau} = \omega_n \tau, \quad p = \frac{k_1}{m\omega_n^2}. \quad (3.25)$$

Înlocuind în (3.24) și folosind t, x, τ în loc de $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}$, se obține ecuația DDE

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x} + (1+p)x(t) - px(t-\tau) = \frac{3p}{10} ((x(t) - x(t-\tau))^2 - (x(t) - x(t-\tau))^3) \quad (3.26)$$

Ecuția (3.26) se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale DDE punând $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$ și $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. Rezultă sistemul de ecuații diferențiale DDE

$$\dot{X}(t) = L(p)X(t) + R(p)X(t-\tau) + F(X(t), X(t-\tau), p), \quad (3.27)$$

unde

$$L(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+p) & -2\zeta \end{pmatrix}, \quad R(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(X(t), X(t-\tau), p) = \frac{3p}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ (x_1(t) - x_1(t-\tau))^2 - (x_1(t) - x_1(t-\tau))^3 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Investigarea sistemului (3.27), se face considerând parametrul p drept parametru de bifurcație și se utilizează etapele de analiză a sistemelor de ecuații DDE din [80]:

Etapa 1^o Analiza părții liniare a sistemului (3.27).

Sistemul (3.27) are punctul de echilibru $0 = (0,0)^T$. Liniarizatul lui (3.27) în $0 = (0,0)^T$ este

$$\dot{X}(t) = L(p)X(t) + R(p)X(t-\tau), \quad (3.29)$$

unde $L(p)$, $R(p)$ sunt dați de (3.28). Ecuția caracteristică a lui (3.29) se obține considerând o soluție de forma $X(t) = e^{\lambda t}C$, unde $C = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2, C \neq 0$. Se obține funcția caracteristică

$$D(\lambda, p) = \det(\lambda I - L(p) - e^{-\lambda\tau} R(p)) = \lambda^2 + 2\zeta\tau + (1+p) - pe^{-\lambda\tau}$$

și condiția $C \neq 0$, conduce la ecuația caracteristică $D(\lambda, p) = 0$. (3.30)

Pentru a stabili frontiera mulțimii de stabilitate a soluției $0 = (0,0)^T$ studiem rădăcinile ecuației caracteristice. Pentru a stabili D-curba, înlocuim $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ în ecuația caracteristică și obținem

$$D(i\omega, p) = 1 + p - \omega^2 - p \cos \omega\tau + i(2\zeta\omega + p \sin \omega\tau) = 0.$$

Această ecuație este echivalentă cu ecuațiile:

$$1 - \omega^2 + p(1 - \cos \omega\tau) = 0, \quad 2\zeta\omega + p \sin \omega\tau = 0 \quad (3.31)$$

Eliminând funcțiile trigonometrice din (3.31), găsim

$$p = \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{2(\omega^2 - 1)} \quad (3.32)$$

Deoarece $p > 0$, rezultă $\omega > 1$. Din (3.31), obținem

$$\tau = \frac{2}{\omega} (j\pi - \arctan \frac{\omega^2 - 1}{2\zeta\omega}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Deoarece $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$, din (3.33) rezultă că viteza unghiulară este

$$\Omega = \frac{\omega\pi}{j\pi - \arctan \frac{\omega^2 - 1}{2\zeta\omega}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

D-curba ce caracterizează frontiera care desparte regiunea stabilă de cea instabilă este dată de

$$p(\omega) = \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{2(\omega^2 - 1)}, \quad \Omega(\omega) = \frac{\omega\pi}{j\pi - \arctan \frac{\omega^2 - 1}{2\zeta\omega}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

cu $\omega > 1$. Curba (3.35) pentru $j = 1$ are forma din fig. 3.16.

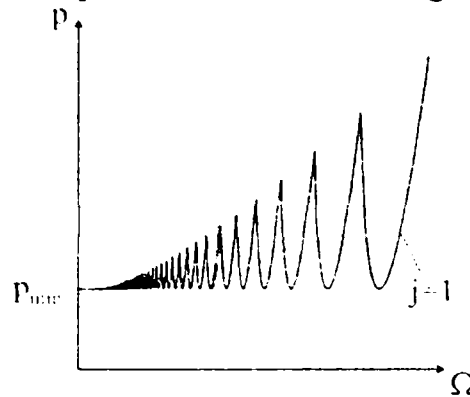


Fig. 3.16

Între grosimea inițială f_0 a așchii și coeficientul p are loc relația $p = \frac{3}{4} \frac{kW}{m\omega_n^2} f_0^{-1/4}$. Din (3.35) rezultă $f_0(\omega) = \left(\frac{3kW}{4m\omega_n^2}\right)^4 \frac{1}{p^4(\omega)}$. Valoarea lui ω pentru care $f_0(\omega)$ are valoare maximă este dată de valoarea ω pentru care $p(\omega)$ are valoare minimă și este soluția ecuației $\frac{dp(\omega)}{d\omega} = 0$. Folosind (3.35), deducem

$$\omega_0 = \sqrt{1 + 2\zeta} \text{ și } p_0 = p(\omega_0) = 2\zeta(\zeta + 1) .$$

Pentru $\omega = \omega_0$, din (3.33) și (3.34), obținem

$$\tau_0 = \frac{2(j\pi - \arctan \frac{1}{\sqrt{1+2\zeta}})}{\sqrt{1+2\zeta}}, \quad \Omega_0 = \frac{\sqrt{1+2\zeta}\pi}{j\pi - \arctan \frac{1}{\sqrt{1+2\zeta}}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

Din cele de mai sus, rezultă că există o valoare ω_0 astfel ca $(p_0 = p(\omega_0), \Omega_0 = \Omega(\omega_0))$ se află pe D-curbele ce separă regiunile stabile de cele instabile și pentru care grosimea inițială $f_0 = f(\omega_0)$ a așchii are valoarea maximă dată de

$$f_0 = f(\omega_0) = \left(\frac{4kW}{4m\omega_n^2}\right)^4 \frac{1}{16\zeta^4(\zeta + 1)^4} . \quad (3.37)$$

Etapa2⁰ Analiza rădăcinilor ecuației caracteristice $D(\lambda, p) = 0$; bifurcația Hopf

Rădăcinile ecuației caracteristice (3.30) sunt funcții de parametrul p . Fie $\lambda = \lambda(p)$ o astfel de rădăcină. Se numește punct de bifurcație Hopf valoarea $p = p_{cr}$ pentru care $\operatorname{Re} \lambda(p_{cr}) = 0$ și $\operatorname{Re} \frac{d\lambda(p_{cr})}{dp} \neq 0$. Din etapa 1^o, pentru $p_{cr} = p_0$ găsim $\operatorname{Re} \lambda(p_0) = 0$. Derivând în $D(\lambda(p), p) = 0$ în raport cu p , rezultă

$$\frac{d\lambda(p)}{dp} = \frac{e^{-\lambda(p)\tau} - 1}{2\lambda(p) + 2\zeta + pe^{-\lambda(p)\tau}}.$$

Pentru $p = p_0$ și $\lambda = \pm i\omega_0$, deducem

$$M = \frac{d\lambda(p_0)}{dp} = \frac{e^{-i\omega_0\tau_0} - 1}{2i\omega_0 + 2\zeta + p_0 e^{-i\omega_0\tau_0}}. \quad (3.38)$$

Din (3.38) și (3.36), rezultă

$$\gamma = \operatorname{Re} \frac{d\lambda(p_0)}{dp} > 0. \quad (3.39)$$

Relația (3.39), arată că p_0 este punct de bifurcație Hopf. Pentru $p \in (0, p_0)$ rădăcinile ecuației caracteristice au partea reală negativă. Din teorema de stabilitate, a sistemelor de ecuații DDE, rezultă că punctul de echilibru $0 = (0,0)^T$ al sistemului (3.27) deci și al ecuației (3.26) este asimptotic stabil.

Analizăm în continuare soluția sistemului (3.27) în vecinătatea punctului

$$0 = (0,0)^T, \quad \text{pentru} \quad p = p_0 = 2\zeta(\zeta + 1), \quad \tau = \tau_0 = \frac{2(\pi j - a \arctan \frac{1}{\sqrt{1+2\zeta}})}{\sqrt{1+2\zeta}},$$

$\omega = \omega_0 = \sqrt{1+2\zeta}$ cu $j \in \{1, 2, \dots\}$ fixat.

Etapa 3^o Subspațiile proprii generalizate asociate sistemului (3.27) în punctul de bifurcație Hopf, $p = p_0$. Sistemul de ecuații DDE (3.27) în $p = p_0$, este

$$\dot{X}(t) = L(p_0)X(t) + R(p_0)X(t - \tau_0), \quad t \geq 0 \quad (3.40)$$

Operatorii liniari A și operatorul adjunct A^* asociați lui (3.40) sunt

$$A\Phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}, \theta \in [-\tau_0, 0) \\ L(p_0)\Phi(0) + R(p_0)\Phi(-\tau_0), \theta = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$A^*\Phi^*(s) = \begin{cases} -\frac{d\Phi^*(s)}{ds}, s \in (0, \tau_0] \\ L(p_0)^T\Phi^*(0) + R(p_0)^T\Phi^*(\tau_0), s = 0 \end{cases}, \quad (3.42)$$

unde $\Phi: [-\tau_0, 0] \rightarrow C^2$, $\Phi^*: [0, \tau_0] \rightarrow R^2$.

Subspațiile proprii generalizate ale lui (3.41), respectiv (3.42), sunt date de

$$A\Phi(\theta) = \pm i\omega_0\Phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau_0, 0] \quad (3.43)$$

$$A^* \Phi^*(s) = \pm i\omega_0 \Phi^*(s), \quad s \in [0, \tau_0] \quad (3.44)$$

Din (3.41), (3.42) și (3.43), (3.44) rezultă că $\Phi(\theta)$, respectiv $\Phi^*(s)$ sunt date de $\Phi(\theta) = e^{i\omega_0\theta} C$, $\Phi^*(s) = e^{i\omega_0 s} C^*$, unde $C, C^* \in C^2$, sunt soluțiile sistemelor de ecuații liniare

$$A_1 C = 0, \quad A_2 C^* = 0, \quad (3.45)$$

$$\text{unde } A_1 = \begin{pmatrix} i\omega_0 & -1 \\ 1 + p_0 - p_0 e^{-i\omega_0 \tau_0} & i\omega_0 + 2\zeta \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} i\omega_0 & 1 + p_0 - p_0 e^{-i\omega_0 \tau_0} \\ -1 & i\omega_0 + 2\zeta \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Din (3.45) și (3.46), rezultă că subspațiile proprii generalizate ale lui A respectiv A^* corespunzătoare valorilor proprii $\pm i\omega_0$ sunt

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \theta}, \quad \bar{\Phi}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 \theta}, \quad \theta \in [-\tau_0, 0] \quad (3.47)$$

$$\Phi^*(s) = \begin{pmatrix} i\omega_0 + 2\zeta \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 s}, \quad \bar{\Phi}^*(s) = \begin{pmatrix} -i\omega_0 + 2\zeta \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 s}, \quad s \in [0, \tau_0]. \quad (3.48)$$

Fie $\mathcal{H} = \{\varphi : [-\tau_0, 0] \rightarrow C^2\}$ respectiv $\mathcal{H}^* = \{\varphi : [0, \tau_0] \rightarrow C^2\}$ spațiul funcțiilor derivabile definite pe $[-\tau_0, 0]$, respectiv $[0, \tau_0]$ cu valori în C^2 înzestrate cu topologia convergenței uniforme. Definim forma biliniară $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H}^* \times \mathcal{H} \rightarrow C$,

$$(\Phi^*(s), \Phi(\theta)) = \bar{\Phi}^{*T}(0) \Phi(0) - \int_{-\tau_0}^0 \left(\int_0^s \bar{\Phi}^*(\xi - \theta) R(p_0) \Phi(\xi) d\xi \right) d\theta \quad (3.49)$$

$$s \in [0, \tau_0], \quad \theta \in [-\tau_0, 0].$$

În raport cu forma biliniară (3.49), pentru $(\Phi(\theta), \bar{\Phi}(\theta))$ și $(\Phi^*(s), \bar{\Phi}^*(s))$ dați de (3.47) și (3.48) rezultă :

$$\begin{aligned} (\Phi^*(s), \Phi(\theta)) &= (2\zeta - i\omega_0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} - \int_{-\tau_0}^0 \left(\int_0^s e^{-i\omega_0(\xi-\theta)} (2\zeta - i\omega_0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \xi} d\xi \right) d\theta = \\ &= 2\zeta + \tau_0 e^{-i\omega_0 \tau_0} p_0 = e_{11} \\ (\bar{\Phi}^*(s), \Phi(\theta)) &= (2\zeta + i\omega_0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} - \int_{-\tau_0}^0 \left(\int_0^s e^{i\omega_0(\xi-\theta)} (2\zeta + i\omega_0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \xi} d\xi \right) d\theta = \\ &= 2\zeta + 2i\omega_0 - \frac{p_0}{2i\omega_0} (e^{-i\omega_0 \tau_0} - e^{i\omega_0 \tau_0}) = e_{12}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$(\Phi^*(s), \bar{\Phi}(\theta)) = \bar{e}_{12}, \quad (\bar{\Phi}^*(s), \bar{\Phi}(\theta)) = \bar{e}_{11}.$$

Fie $E = (e_{ij})$, $i, j = 1, 2$, matricea formată cu coeficienții dați de (3.50) și $F = (f_{ij})$ matricea inversă a lui E . Vectorii

$$\psi^*(s) = f_{11} \Phi^*(s) + f_{12} \bar{\psi}^*(s), \quad \bar{\psi}^*(s) = \bar{f}_{12} \Phi^*(s) + \bar{f}_{11} \bar{\psi}^*(s), \quad s \in [0, \tau_0] \quad (3.51)$$

sunt vectorii proprii ai operatorului A^* și în raport cu forma biliniară (3.49) sunt satisfăcute relațiile

$$(\psi^*(s), \Phi(\theta)) = 1, \quad (\psi^*(s), \bar{\Phi}(\theta)) = 0, \quad (\bar{\psi}^*(s), \Phi(\theta)) = 0, \quad (\bar{\psi}^*(s), \bar{\Phi}(\theta)) = 1, \quad s \in [0, \tau_0], \\ \theta \in [-\tau_0, 0] \quad (3.52)$$

Etapa 4⁰ Varietatea centrală în punctul de bifurcație $p = p_0$, ciclul limită asociat.

Orbita sistemului diferențial DDE (3.27) se descrie utilizând forma normală Poincare asociată sistemului (3.27) pe varietate centrală în punctul $p = p_0$. Varietatea centrală în $p = p_0$, este o subvarietate în spațiul $\mathcal{H} = \{u: [-\tau_0, 0] \rightarrow \mathbb{C}^2\}$, tangentă la subspațiul propriu generat de $\{\Phi(\theta), \bar{\Phi}(\theta)\}$ dați de (3.47). Varietatea centrală are forma analitică

$$W^c(p_0) = \left\{ z\Phi(\theta) + \bar{z}\bar{\Phi}(\theta) + W(\theta, z, \bar{z}), \quad z = x+iy, \quad (x, y) \in V(o), \quad \theta \in [-\tau_0, 0] \right\} \quad (3.53)$$

unde $V(o) \subset \mathbb{R}^2$ este o vecinătate a originii în \mathbb{R}^2 și

$$W(\theta, z, \bar{z}) = \frac{1}{2} w_{20}(\theta) z^2 + w_{11}(\theta) z \bar{z} + \frac{1}{2} w_{02}(\theta) \bar{z}^2$$

$w_{20}, w_{11}, w_{02}: [-\tau_0, 0] \rightarrow \mathbb{C}^2$, cu $w_{02}(\theta) = \bar{w}_{20}(\theta)$, $w_{11}(\theta) \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-\tau_0, 0]$.

Orbita sistemului diferențial DDE (3.27) este dată de aplicația $X_t: [-\tau_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită de $X_t(\theta) = X(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau_0, 0]$ și definește un pseudogrup de operatori $T(t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, definit prin $X_t(\theta) = T(t)X(\theta)$. Varietatea centrală $W^c(p_0)$ asociată sistemului diferențial DDE (3.27) are proprietatea că este invariantă în raport cu pseudogrupul de operatori $T(t)$. Din proprietatea de invariantă rezultă că $w_{20}(\theta), w_{11}(\theta), w_{02}(\theta)$ satisfac un sistem de ecuații diferențiale. Descrierea completă a varietății centrale $W^c(p_0)$ se face utilizând metoda din [68]. Pentru obținerea formulelor ce se utilizează în descrierea orbitei sistemului diferențial (3.27) se utilizează partea neliniară $\mathcal{F}(X(t), X(t-\tau), p_0)$ dată de (3.28) a sistemului (3.27), în care se înlocuiește

$$x_1(t) \text{ cu } z(t) + \bar{z}(t) + \frac{1}{2} w_{20}^1(0) z^2(t) + w_{11}^1(0) z \bar{z} + \frac{1}{2} w_{02}^1(0) \bar{z}^2$$

și $x_1(t-\tau)$ cu

$$z(t)e^{-i\omega_0\tau_0} + \bar{z}(t)e^{i\omega_0\tau_0} + \frac{1}{2} w_{20}^1(-\tau_0) z^2(t) + w_{11}^1(-\tau_0) z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} w_{02}^1(-\tau_0) \bar{z}^2(t).$$

Se obține

$$\mathcal{F}(z(t), \bar{z}(t), p_0) = \frac{1}{2} F_{20} z(t)^2 + F_{11} z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} F_{02} \bar{z}(t)^2 + \frac{1}{2} F_{21} z(t)^2 \bar{z}(t) + o(|z(t)|^3) \quad (3.54)$$

unde

$$F_{20} = (0, F_{20}^2)^T, \quad F_{11} = (0, F_{11}^2)^T, \quad F_{02} = (0, F_{02}^2)^T, \quad F_{21} = (0, F_{21}^2)^T \quad (3.55)$$

$$F_{20}^2 = \frac{3p_0}{5} (1 - e^{-i\omega_0\tau_0})^2, \quad F_{11}^2 = \frac{3p_0}{5} (1 - e^{-i\omega_0\tau_0})(1 - e^{i\omega_0\tau_0}), \quad F_{02}^2 = \frac{3p_0}{5} (1 - e^{i\omega_0\tau_0})^2$$

și

$$F_{21}^2 = \frac{3p_0}{5} [(1 - e^{i\omega_0\tau_0})(w_{20}^1(0) - w_{20}^1(-\tau_0) + 2(1 - e^{-i\omega_0\tau_0})(w_{11}^1(0) - w_{11}^1(-\tau_0) - 3(1 - e^{-i\omega_0\tau_0})^2(1 - e^{i\omega_0\tau_0}))] \quad (3.56)$$

$$w_{20}^1(\theta) = -\frac{\bar{g}_{20}}{i\omega_0} e^{i\omega_0\theta} - \frac{\bar{g}_{02}}{3i\omega_0} e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{i\omega_0\theta}, \quad \theta \in [-\tau_0, 0] \quad (3.57)$$

$$w_{11}^1(\theta) = \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0} e^{i\omega_0\theta} - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0} e^{-i\omega_0\theta} + E_2,$$

$$E_1 = -(L(p_0) + e^{-i\omega_0\tau_0} R(p_0) - 2i\omega_0 I)^{-1} F_{20}, \quad (3.58)$$

$$E_2 = -(L(p_0) + R(p_0))^{-1} F_{11},$$

$$\text{și } g_{20} = \bar{\psi}(0)F_{20}, \quad g_{11} = \bar{\psi}(0)F_{11}, \quad g_{02} = \bar{\psi}(0)F_{02}, \quad g_{21} = \bar{\psi}(0)F_{21} \quad (3.59)$$

Ciclul limită este orbita pe varietatea centrală $W^c(p_0)$ a soluției ecuației diferențiale ordinare

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z(t) + \frac{1}{2} g_{20} z(t)^2 + g_{11} z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} g_{02} \bar{z}(t)^2 + \frac{1}{2} g_{21} z(t)^2 \bar{z}(t)$$

cu condiția inițială

$$z(0) = (\psi^*(s), \varphi(\theta)) \quad s \in [0, \tau_0], \quad \theta \in [-\tau_0, 0]$$

unde $\psi^*(s)$ este dat de (3.51) și $\varphi(\theta)$ este condiția inițială a sistemului (3.27).

Etapa 5⁰ Orbita sistemului (3.27).

Orbita $(t, \tilde{x}(t))$ a ecuației (3.26) dată de

$$\tilde{x}(t) = 2x_1(t) + r_{111}(x_1^2(t) + y_1(t)^2) + r_{120}(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) - 2i_{120}x_1(t)y_1(t) \quad (3.60)$$

unde $r_{120} = \text{Re}(w_{20}^1)$, $r_{111} = \text{Re}(w_{11}^1)$, $i_{120} = \text{Im}(w_{20}^1)$ și $(x_1(t), y_1(t))$

este soluția sistemului de ecuații diferențiale ordinare :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & -\omega_0 y_1(t) + \frac{1}{2}(R_{20} + 2R_{11} + R_{02})x_1(t)^2 - \frac{1}{2}(R_{20} - 2R_{11} + R_{02})y_1(t)^2 + (I_{02} - I_{20})x_1(t)y_1(t) + \\ & + \frac{1}{2}R_{21}x_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \frac{1}{2}I_{21}y_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) = & \omega_0 x_1(t) + \frac{1}{2}(I_{20} + 2I_{11} + I_{02})y_1(t)^2 - \frac{1}{2}(I_{20} - 2I_{11} + I_{02})x_1(t)^2 + (R_{02} - R_{20})x_1(t)y_1(t) + \\ & + \frac{1}{2}R_{21}y_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \frac{1}{2}I_{21}x_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) \end{aligned}$$

cu condiția inițială

$$x_1(0) = \text{Re}(\psi, \varphi), \quad y_1(0) = \text{Im}(\psi, \varphi) \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \text{\textit{\textbf{și}}} \quad R_{20} &= \text{Re}(g_{20}), \quad R_{11} = \text{Re}(g_{11}), \quad R_{02} = \text{Re}(g_{02}), \quad R_{21} = \text{Re}(g_{21}) \\ I_{20} &= \text{Im}(g_{20}), \quad I_{11} = \text{Im}(g_{11}), \quad I_{02} = \text{Im}(g_{02}), \quad I_{21} = \text{Im}(g_{21}) \end{aligned}$$

\text{\textit{\textbf{și}}} $\varphi: [-\tau_0, 0] \rightarrow \mathbf{R}$ este condiția inițială a sistemului (3.26) dată de

$$\dot{\varphi}(\theta) = \frac{5}{12f_0} \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) \text{ este condiția inițială a sistemului (3.7) cu}$$

$$f_0 = \left(\frac{3kW}{4m\omega_n^2}\right)^4 \frac{1}{p_0^4}, \text{ unde } p_0 = 2\zeta(\zeta + 1).$$

Orbita $(t, x(t))$ a ecuației (3.24) este dată de

$$x(t) = \frac{12}{5} \left(\frac{4m\omega_n^2}{3KW}\right)^4 p_0^4 \tilde{x}(t) \quad (3.63)$$

Invarianții ciclului limită dat de (3.61) sunt:

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re} C_1}{\text{Re} M}, \quad T_2 = -\frac{\text{Im} C_1 + \mu_2 \text{Im} M}{\omega_0}, \quad \beta_2 = 2 \text{Re} C_1$$

unde M este dat de (3.38) și

$$C_1 = \frac{i}{\omega_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}.$$

Utilizând programul realizat cu softul Maple 9 s-au obținut graficele de mai jos.

```
> #Bala2 cazul neliniar masini unelte regenerative; Stepan G;
>
m:=1.; s:=2.; c:=0.02; a:=sqrt(s/m); zeta:=c/(2*m*a); j:=5.; omega:=
sqrt(1+2*zeta); p:=2*zeta*(1+zeta); tau:=2*(j*evalf(Pi) -
arctan(1/omega))/omega; M:=(exp(-I*omega*tau) -
1)/(2*omega*I+2*zeta+p*exp(-
omega*tau*I)); A:=Re(M); Omega:=omega*evalf(Pi)/(j*evalf(Pi) -
arctan(1/omega)); K:=0.2; W:=0.5; f0:=(4*m*a^2/(3*K*W))^4*p^4;
> e11:=2*zeta+tau*exp(-omega*tau*I)*p; e12:=2*zeta+2*omega*I-
p*(exp(-omega*tau*I) -
exp(omega*tau*I))/(2*omega*I); e21:=conjugate(e12); e22:=conjugate
(e11);
> with(LinearAlgebra):
E:=
<<e11, e21|<e12, e22>>: F:=MatrixInverse(E); d11:=<1|0>.F.<1, 0>; d
12:=<1|0>.F.<0, 1>;
> d:=<omega*I*(conjugate(d12) -
conjugate(d11))+2*zeta*(conjugate(d12)+conjugate(d11))|conjugate
(d12)+conjugate(d11)>; F20:=<0, 3*p*(1-exp(-
omega*tau*I))^2/5>; F11:=<0, 3*p*(1-exp(-I*omega*tau))*(1-
exp(I*omega*tau))/5>; F02:=<0, 3*p*(1-
exp(omega*tau*I))^2/5>; g20:=d.F20; g11:=d.F11; g02:=d.F02;
> L:=<<0, -1-p>|<1, -
2*zeta>>; R:=<<0, p>|<0, 0>>; G:=<<1, 0>|<0, 1>>; E1:=MatrixInverse(-
(L+exp(-I*omega*tau)*R-2*omega*I*G)).F20; E2:=MatrixInverse(-
(L+R)).F11; E11:=<1|0>.E1; E12:=<1|0>.E2;
> w120:=-g20*exp(-I*omega*tau)/(I*omega) -
conjugate(g02)*exp(I*omega*tau)/(3*I*omega)+E11*exp(-
```

```

2*omega*tau*I):w11:=g11*exp(-I*omega*tau)/(I*omega)-
conjugate(g11)*exp(I*omega*tau)/(I*omega)+E12:v120:=-
g20/(I*omega)-
conjugate(g02)/(3*I*omega)+E11:v11:=g11/(I*omega)-
conjugate(g11)/(I*omega)+E12:F21:=<0,3*p*(1-
exp(omega*tau*I))*(v120-w120)+2*(1-exp(-omega*tau*I))*(v111-
w111)-3*(1-exp(-omega*tau*I))^2*(1-
exp(omega*tau*I))/5>;g21:=d.F21:
> C1:=(g20*g11-2*abs(g11)^2-
abs(g02)^2/3)*I/(2*omega)+g21/2;mu2:=-Re(C1)/Re(M);T2:=-
(Im(C1)+mu2*Im(M))/omega;beta2:=2*Re(C1);
>
>
r20:=Re(w120):i20:=Im(w120):r11:=Re(w111):i11:=Im(w111):r220:=
Re(v120):i220:=Im(v120):r211:=Re(v111):i211:=Im(v111):
>
R20:=Re(g20):R11:=Re(g11):R02:=Re(g02):I20:=Im(g20):I11:=Im(g1
1):I02:=Im(g02):R21:=Re(g21):I21:=Im(g21):
> F1(x(t),y(t)):= -omega*y(t)+(R20/2+R11+R02/2)*x(t)^2-(I20-
I02)*x(t)*y(t)-(R20/2-
R11+R02/2)*y(t)^2+R21*x(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2-
I21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2:
F2(x(t),y(t)):=omega*x(t)+(I20/2+I11+I02/2)*x(t)^2-(I20/2-
I11+I02/2)*y(t)^2+(R20-
R02)*x(t)*y(t)+R21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2+I21*x(t)*(x(t)^2+y(t
)^2)/2:F3(x(t),y(t)):=2*x(t)+r220*(x(t)^2-y(t)^2)-
2*i220*x(t)*y(t)+r211*(x(t)^2+y(t)^2)+0.1:
F4(x(t),y(t)):=2*x(t)*cos(omega*tau)+2*y(t)*sin(omega*tau)+r20
*(x(t)^2-y(t)^2)-
2*i20*x(t)*y(t)+r11*(x(t)^2+y(t)^2):F5(x(t),y(t)):=
12*(4*m*a/(3*K*W))^4*(p^4/5)*F3(x(t),y(t))+0.1:
with(DEtools):
> dsys :=
{diff(x(t),t)=F1(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=F2(x(t),y(t)),x(0)=-
0.001,y(0)=0.002}:
> dsol := dsolve(dsys,numeric):
> plots[odeplot](dsol,[
[t,F3(x(t),y(t)),color=red]],0..5*tau,title="Fig.3.Orbita
(t,x(t))");
plots[odeplot](dsol,[
[F3(x(t),y(t)),F4(x(t),y(t))
,color=red]],0..tau,title="Fig.3.Orbita (x(t),x(t-tau))");
plots[odeplot](dsol,[
[t,F5(x(t),y(t)),color=red]],0..5*tau,title="Fig.3.Orbita
(t,x(t)) a sist init");

> MUGqns := [
diff(x(t),t)=-omega*y(t)+(R20/2+R11+R02/2)*x(t)^2-(I20-
I02)*x(t)*y(t)-(R20/2-
R11+R02/2)*y(t)^2+R21*x(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2-

```

```

I21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2, diff(y(t),t) =
omega*x(t)+(I20/2+I11+I02/2)*x(t)^2-(I20/2-
I11+I02/2)*y(t)^2+(R20-
R02)*x(t)*y(t)+R21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2+I21*x(t)*(x(t)^2+y(t)
)^2)/2
]:
> DEplot3d(MUGqns, {x(t),y(t)}, t=0..5*tau,
[[ x(0)=-0.05, y(0)=0.05]],
x=-0.1..0.1,y=-0.1..0.1,scene=[x(t),y(t),t],
stepsize=0.05, linecolour=t,
title="Figura3.dinamica Sistemului pe Wc(0)XR"):
>
DEs:=(diff(x(t),t)=F1(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=F2(x(t),y(t)))
:
DEplot3d(DEs,[x(t),y(t)],t=0..tau,[[x(0)=-0.05,y(0)=0.05]],x=-
0.1..0.1,y=-
0.1..0.1,scene=[x(t),y(t),t],linestyle=1,linecolor=blue,title=
"Fig.6.Dinamica pe Varietatea Centrala in origine" );
>
#n:=50;m:=1.;s:=2.;c:=0.02;a:=sqrt(s/m);zeta:=c/(2*m*a);j:=5.;
omega:=sqrt(1+2*zeta);p:=2*zeta*(1+zeta);tau:=2*(k*evalf(Pi)-
arctan(1/omega))/omega;Omega:=omega*evalf(Pi)/(k*evalf(Pi)-
arctan(1/omega));
>
>
#plot([seq([k,Omega],k=1..n)]),style=point,symbol=CIRCLE,axes
=FRAME,color=green);
>
>
>
>
>

```

Fig 3.Orbita (t,x(t))

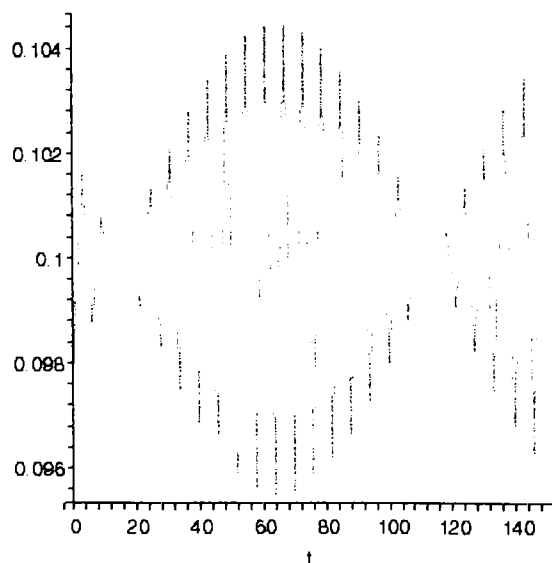
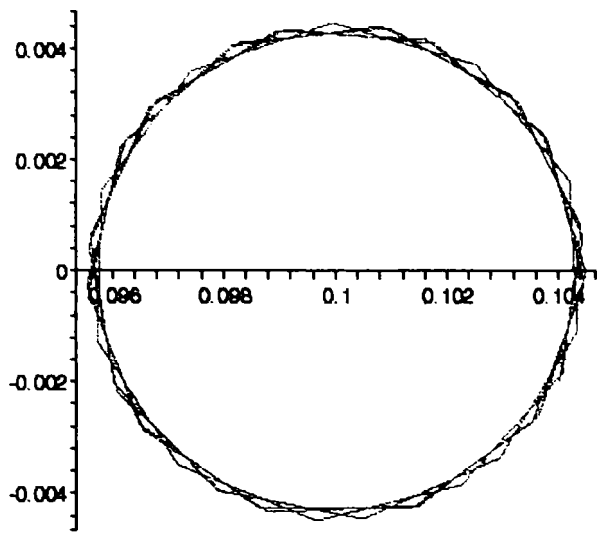


Fig.3. Orbita $(x(t), x(t-1au))$



3.5. Mașina unealtă vibrantă regenerativă cu două argumente de întârziere

3.5.1. Modelul mașinii unelte vibrante regenerative

Mașinile unelte vibrante produc instabilitate în timpul prelucrării care este rezultatul prelucrării piesei și fluctuației dinamicii forței de așchiere. Dacă mașina taie o suprafață $x(t)$ din piesă în momentul t , suprafața în momentul $t - \tau$ este $x(t - \tau)$ unde τ este timpul de întârziere între așchieri succesive. Experiențele practice și modelele teoretice, care au apărut în literatura de specialitate, descriu cuplarea intrinsecă a dinamicii procesului de așchiere și a influenței structurii mașinii unelte.

Modelul matematic, investigat în [125], al mașinii unelte vibrante este dat de ecuația diferențială de ordinul doi cu argument întârziat

$$x(t) + 2\zeta_0 \dot{x}(t) + \zeta_1 x(t - \tau) + \zeta_3 x^3(t - \tau) + \eta_0 \cos \nu t = 0 \quad (3.64)$$

unde $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_3$ sunt parametrii reali, η_0 și ν sunt amplitudinea și respectiv frecvența forței de așchiere. Având în vedere [53], [59], [125] vom investiga un model al mașinii unelte vibrante regenerative cu două argumente de întârziere, cu forță de așchiere și efect regenerativ neliniar. Variabilele ce caracterizează suprafața profilului tăiat la momentul t , este $x(t)$ și rezultatul prelucrării la momentul $t - \tau$, este $x(t - \tau)$. Modelul mașinii unelte vibrante regenerative, cu două argumente de întârziere, este dat de ecuația diferențială de ordinul doi

$$\ddot{x}(t) + 2\delta_0 \dot{x}(t) + \zeta_1 x(t - \tau_1) + \mu(x(t) - (x - \tau_2) - \varepsilon\sigma_2(x(t) - x(t - \tau_2))^2 - \varepsilon\sigma_3(x(t) - x(t - \tau_2))^3) = 0 \quad (3.64')$$

unde $\delta_0, \sigma_2, \sigma_3$ sunt parametrii reali (δ_0 caracterizează amortizarea mașinii unelte), $0 \leq \varepsilon \ll 1$, μ este un parametru, și τ_1, τ_2 sunt argumentele de întârziere cu $\tau_1 < \tau_2$.

Modelul poate fi completat considerând un proces stochastic $\xi(t)$ de tipul „zgomotului alb Gaussian” cu magnitudinea ζ_0 , funcția densitate este $\xi(t)$ cu funcția de corelație $R(\nu) = E(\xi(t)\xi(t + \tau)) = \delta(\nu)$, unde $\delta(\nu)$ este funcția delta a lui Dirac și $E(\cdot)$ este operatorul valorii medii. În acest caz modelul este dat de:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta_0 \dot{x}(t) + (\zeta_1 + a(t))x(t - \tau_1) + \mu(x(t) - (x - \tau_2) - \varepsilon\sigma_2(x(t) - x(t - \tau_2))^2 - \varepsilon\sigma_3(x(t) - x(t - \tau_2))^3) = 0 \quad (3.65)$$

unde $a(t) = \varepsilon\eta_0 \cos \nu t + \varepsilon^{1/2}\zeta_0\xi(t)$.

Investigarea ecuației (3.64') constă în :

Determinarea hărții (domeniile) de stabilitate a soluției staționare $x(t)=0, \forall t$, descrisă de valorile parametrilor (ζ_1, μ) dacă τ_1, τ_2 sunt fixați. Pentru o valoare a parametrilor (ζ_1, μ) , ce aparțin frontierei domeniului de stabilitate. Analiza soluției ecuației (3.64'), se face utilizând drept parametru de bifurcație parametrul μ și considerarea formei normale *Poincare'* pe varietatea centrală $W^c(\mu)$ a ecuației (3.64'). În urma acestei investigații rezultă informații privind valorile parametrilor modelului pentru care variația profilului suprafeței de tăiere $x(t)$ este stabilă, sau pentru care acest profil are o variație ciclică. Investigarea ecuației (3.64') se face investigând sistemul de ecuații diferențiale cu două argumente de întârziere, dat de

$$x_1(t) = x_2(t) \quad (3.66)$$

$$x_2 = -2\delta_0 x_2(t) - \zeta_1 x_1(t - \tau_1) - \mu(x_1(t) - x_1(t - \tau)) + \varepsilon \sigma_2 (x_1(t) - x_1(t - \tau_2))^2 + \varepsilon \sigma_3 (x_1(t) - x_1(t - \tau_2))^3$$

echivalent cu ecuația (3.64').

Fie $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ și matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2\delta_0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\zeta_1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

$$F(x_1(t), x_1(t - \tau_2)) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 (x_1(t) - x_1(t - \tau_2))^2 + \sigma_3 (x_1(t) - x_1(t - \tau_2))^3 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Din (3.66), (3.67), (3.68) rezultă sistemul matricial

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B_1 X(t - \tau_1) + B_2 X(t - \tau_2) + F(x_1(t), x(t - \tau_2)) \quad (3.69)$$

care este un sistem de ecuații diferențiale cu două argumente de întârziere τ_1, τ_2 neliniar. Din faptul că pentru sistemul (3.69) membrul drept descris de funcții continue ce satisfac condiția Lipschitz, sistemul (3.69) are soluție unică pentru o condiție inițială dată $X(\theta) = \bar{\Phi}(\theta), \theta \in [-\tau_2, 0]$. Din (3.69) rezultă că punctul originea $0 = (0, 0)^T$ este punct de echilibru. Acest punct de echilibru reprezintă soluția staționară a sistemului (3.69). Investigarea sistemului (3.69) se face în vecinătatea acestui punct de echilibru, utilizând etapele de analiză a sistemelor de ecuații cu argument întârziat din [68].

3.5.2. Analiza liniarizatului sistemului (3.69). Operatori infinițezimali.

Liniarizatul (în variație) a sistemului (3.69) în punctul de echilibru $O = (0,0)^T$ este

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + B_1X(t - \tau_1) + B_2Y(t - \tau_2). \quad (3.70)$$

Ecuția caracteristică a lui (3.70) este dată de

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau_1} B_1 - e^{-\lambda\tau_2} B_2), \quad (3.71)$$

unde I este matricea unitate de timpul (2,2). Din (3.71) rezultă ecuația transcendentă

$$D(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta_0\lambda + \xi_1 e^{-\lambda\tau_1} + \mu(1 - e^{-\lambda\tau_2}) = 0. \quad (3.72)$$

Folosind Teorema 3.22 [106], rezultă:

Propoziția 3.1. Dacă

$$\delta_0 > \frac{\xi_1 + \mu}{2\xi_2},$$

atunci rădăcinile ecuației (3.72) au partea reală negativă, pentru orice $\tau_1, \tau_2 \in [0, \infty)$.

Din propoziția 3.1. și varianta teoremei lui Hartman – Coarbman pentru sisteme de ecuații cu argument întârziat, rezultă

Propoziția 3.2. Dacă

$$\delta_0 > \frac{\xi_1 + \mu}{2\xi_2},$$

atunci soluția staționară $X(t)=0, \forall t$ a sistemului (3.69), deci și a ecuației (3.64') este asimptotic stabilă pentru orice $\tau_1, \tau_2 \in [0, \infty)$.

Determinăm D – curbele ce descriu frontiera regiunilor de stabilitate în raport cu parametrii ξ_1, μ pentru un δ_0 fixat. Aceste curbe se obțin punând condiția ca ecuația (3.72) să admită rădăcini pur imaginare, care depind de parametri ξ_1, μ . Fie $\lambda = \pm i\omega$, unde, $\omega = \omega(\xi_1, \mu) > 0$ rădăcina a lui (3.72). Înlocuind în (3.72) și anulând partea reală și partea imaginară a relației obținute rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \xi_1 \cos \omega \tau_1 + \mu(1 - \cos \omega \tau_2) - \omega^2 &= 0, \\ \xi_1 \sin \omega \tau_1 - \mu \sin \omega \tau_2 - 2\delta_0 \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Din (3.73) rezultă:

$$\xi_1 = \frac{2\delta_0\omega(1 - \cos\omega\tau_2) + \omega^2 \sin\omega\tau_2}{\cos\omega\tau_1 \sin\omega\tau_2 + (1 - \cos\omega\tau_2) \sin\omega\tau_1},$$

$$\mu = \frac{\omega^2 \sin\omega\tau_1 - 2\delta_0\omega \cos\omega\tau_1}{\cos\omega\tau_1 \sin\omega\tau_2 + (1 - \cos\omega\tau_2) \sin\omega\tau_1}.$$
(3.74)

Pentru τ_1, τ_2 fixate, și ω variabil, relația (3.74), sunt coordonatele unui punct în planul (ξ_1, μ) care descriu D – curbele ecuației (3.72). Pentru valoarea $\delta_0 = 0,085$, $0,1035 \leq \tau_1 \leq 0,1045$, și $\tau_2 = 1,03\tau_1$, domeniul de stabilitate este dat de regiunea hașurată în fig. 3.17.

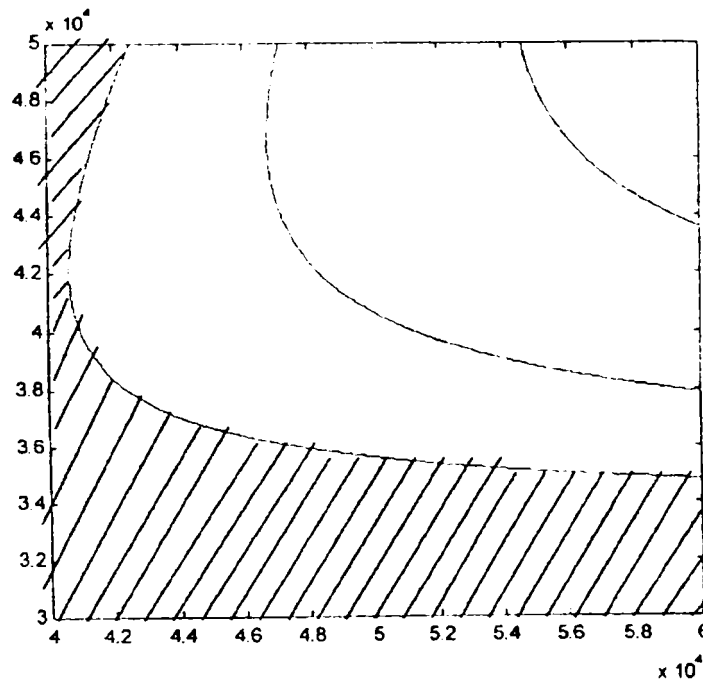


Fig. 3.17

Coordonatele de pe D – curbele din fig. 3.17, reprezintă valori ale lui μ pentru care ecuația (3.72) are rădăcinile $i\omega$. În continuare vom considera o valoare $\omega = \omega_0$ fixată pentru care din (3.74), rezultă valoarea $\xi_1 = \xi_1^0$, respectiv $\mu = \mu_0$.

Analizăm sistemul (3.70), pentru $\delta_0, \xi_1 = \xi_1^0, \tau_1, \tau_2$ fixate și $\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu$ unde μ este un parametru $|\mu| < 1$. Coeficientul μ este parametru în raport ce care se va analiza soluția staționară a sistemului neliniar (3.69).

Se numește bifurcație Hopf în raport cu parametru μ , o valoare a parametrului μ_0 , pentru care:

$$\operatorname{Re} \lambda(\mu_c) = 0, \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_c} \neq 0. \quad (3.75)$$

Propoziția 3.3. Fie ω_0 și

$$\mu_0 = \frac{\omega_0^2 \sin \omega_0 \tau_1 - 2\delta_0 \omega_0 \cos \omega_0 \tau_1}{\cos \omega_0 \tau_1 \sin \omega_0 \tau_2 + (1 - \cos \omega_0 \tau_2) \sin \omega_0 \tau_1}.$$

Valoarea μ_0 este punct de bifurcație Hopf.

Într-adevăr din modul de definiție a lui μ_0 rezultă că $\lambda = i\omega_0$ este soluție a lui (3.72). punând $\lambda = \lambda(\mu)$ în (3.72) și derivând în raport cu μ , rezultă

$$\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{e^{-\lambda\tau_2} - 1}{2\lambda + 2\delta_0 - \mu\tau_2 e^{-\lambda\tau_2} + \xi_1\tau_1 e^{-\lambda\tau_1}}. \quad (3.76)$$

Din (3.76), prin calcul algebric rezultă

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_c} = \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_c, \lambda=i\omega_0} \neq 0.$$

Pentru $\mu = \mu_0$, se determină subspațiile proprii asociate generatorilor infinitezimali A' și A^* , ai sistemului (3.70) definiți de

$A: C'([- \tau_2, 0], C^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectiv

$A^*: C'([0, \tau_2], C^{2*}) \rightarrow \mathbb{R}^{2*}$, prin

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, \theta \in [-\tau_2, 0) \\ A\phi(0) + B_1\phi(-\tau_1) + B_2\phi(-\tau_2) & \theta = 0 \end{cases} \quad \theta \in C^1([- \tau_2, 0], C^2) \quad (3.77)$$

$$A^*\phi^*(s) = \begin{cases} -\frac{d\phi^*(s)}{ds}, s \in (0, \tau_2] \\ \phi^*(0)A + \phi^*(-\tau_1)B_1 + \phi^*(-\tau_2)B_2, s = 0, \phi^* \in C^1([0, \tau_2], C^{2*}), \end{cases} \quad (3.78)$$

unde $C^1([- \tau_2, 0], \mathbb{C})$ este spațiul funcțiilor derivabile definite pe $[- \tau_2, 0]$ cu valori în \mathbb{C}^2 . Folosind metoda din [80] rezultă

Propoziția 3.4. i) Vectorii proprii generalizați ai lui A corespunzători valorilor proprii $\pm i\omega_0$ sunt

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0\theta}, \quad \bar{\phi}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0\theta}, \quad \theta \in [-\tau_2, 0]. \quad (3.79)$$

ii) Vectorii proprii generalizați ai lui A^* corespunzător valorilor proprii $\pm i\omega_0$, sunt

$$\phi^*(s) = \begin{pmatrix} i\omega_0 + 2\delta_0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 s}, \quad \bar{\phi}^*(s) = \begin{pmatrix} -i\omega_0 + 2\delta_0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 s}, \quad s \in [0, \tau_2]. \quad (3.80)$$

iii) Coeficienții formei (.,.) asociată sistemului (3.70) dată în [80] în raport cu vectorii $(\Phi(\theta), \bar{\Phi}(\theta)), (\Phi^*(s), \bar{\Phi}^*(s))$ sunt

$$\begin{aligned} e_{11} &= 2\delta_0 + \xi_1 \tau_1 e^{-i\omega_0 \tau_1} + \mu_0 \tau_2 e^{-i\omega_0 \tau_2} \\ e_{12} &= 2\delta_0 - 2i\omega_0 - \frac{\xi}{2i\omega_0} (e^{i\omega_0 \tau_1} - e^{-i\omega_0 \tau_1}) + \frac{\mu_0}{2i\omega_0} (e^{i\omega_0 \tau_2} - e^{-i\omega_0 \tau_2}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

iv) Vectorii

$$\psi^*(s) = f_{11}\phi^*(s) + f_{12}\bar{\phi}^*(s), \quad \bar{\psi}^*(s) = f_{21}\phi^*(s) + f_{22}\bar{\phi}^*(s), \quad s \in [0, \tau_2] \quad (3.82)$$

sunt vectori proprii ai generatorului infinitezimal A^* și satisfac relațiile

$$\begin{aligned} (\psi^*(s), \phi(\theta)) &= 1, \quad (\bar{\psi}^*(s), \phi(\theta)) = (\psi^*(s), \bar{\phi}(\theta)) = 0, \\ (\bar{\phi}^*(s), \bar{\phi}(\theta)) &= 1, \quad s \in [0, \tau_2), \quad \theta \in [-\tau_2, 0], \end{aligned} \quad (3.83)$$

unde f_{ij} , $i, j=1, 2$, sunt coeficienții matricei inverse a lui (l_{ij}) , $i, j=1, 2$.

Demonstrația propoziției 3.4, se face utilizând metoda din [68] pentru determinarea vectorilor proprii ai generatorilor infinitezimali A și A^* .

3.5.3. Varietatea centrală $W^c(\mu_0)$, forma normală Poincaré asociate sistemului (3.69)

Varietatea centrală $W^c(\mu_0)$ [68] este definită submulțimii

$$\begin{aligned} W^c(\mu_0) &= \{z\phi(\theta) + \bar{z}\bar{\phi}(\theta) + \frac{1}{2}W_{20}(\theta)z^2 + W_{11}(\theta)z\bar{z} + \frac{1}{2}W_{02}(\theta)\bar{z}^2 + \dots, z = x + iy, \\ & \quad (x, z) \in V_0 \subset \mathbf{R}^2, \theta \in [-\tau_2, 0]\}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

unde V_0 este o vecinătate a originii din \mathbb{R}^2 și $W_{20}: [-\tau_2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $W_{11}: [-\tau_{21}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $W_{02} = W_{20}$, $W_{11} = W_{11}$, invariantă în raport cu pseudogrupul $T(t)$ generat de soluția sistemului (3.69). Din condiția de nevarianță în raport cu $T(t)$, rezultă că funcțiile W_{20} , W_{11} , satisfac relațiile

$$\begin{aligned} W_{02}(\theta) &= -\frac{g_{20}}{i\omega_0} \phi(0)e^{i\omega_0\theta} - \frac{\bar{g}_{02}}{3i\omega_0} \bar{\phi}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\theta}, \quad \theta \in [-\tau_{21}, 0] \\ W_{11}(\theta) &= \frac{g_{11}}{i\omega_0} \phi(0)e^{i\omega_0\theta} - \frac{\bar{g}_{11}}{3i\omega_0} \bar{\phi}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_2, \quad \theta \in [-\tau_{21}, 0], \end{aligned} \quad (3.85)$$

unde

$$\begin{aligned} E_1 &= -(A + e^{-2i\omega_0\tau_1} B_1 + e^{-2i\omega_0\tau_{21}} B_2 - 2i\omega_0 I)^{-1} F_{20} \\ E_2 &= -(A + B_1 + B_2)^{-1} F_{11} \end{aligned} \quad (3.86)$$

și

$$g_{20} = \bar{\psi}^*(0)F_{20}, \quad g_{11} = \bar{\psi}^*(0)F_{11}, \quad g_{02} = \bar{\psi}^*(0)F_{02}, \quad g_{21} = \bar{\psi}^*(0)F_{21}. \quad (3.87)$$

Vectorii F_{20} , F_{11} , F_{02} , F_{21} , se obțin înlocuind în partea neliniară a sistemului (3.70),

$$\begin{aligned} x_1(t - \bar{x}_1) \text{ cu } z e^{-i\omega_0\tau_1} + \bar{z}(t) e^{i\omega_0\tau_1} + \frac{1}{2} W_{20}^1(-\tau_1) z^2(t) + W_{11}^1(-\tau_1) z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} W_{02}^1(-\tau_1) \bar{z}^2(t), \\ x_1(t) \text{ cu } z(t) + \bar{z}(t) + \frac{1}{2} W_{20}^1(0) z^2(t) + W_{11}^1(0) z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} W_{02}^1(0) \bar{z}^2(t)^2 \text{ și} \\ x_1(t - \tau_2) \text{ cu } z(t) e^{-i\omega_0\tau_2} + \bar{z}(t) e^{i\omega_0\tau_2} + \frac{1}{2} W_{20}^1(-\tau_1) z^2(t)^2 + W_{11}^1(-\tau_2) z(t) \bar{z}(t) + \frac{1}{2} W_{02}^1(-\tau_2) \bar{z}(t)^2. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} F_{20} = (0, F_{20}^2)^T, \quad F_{11} = (0, F_{11}^2)^T, \quad F_{02} = (0, F_{02}^2)^T, \quad F_{21} = (0, F_{21}^2)^T \quad \text{unde} \\ F_{20}^2 = 2\sigma_2 \varepsilon (1 - e^{-i\omega_0\tau_2})^2, \quad F_{11}^2 = 2\varepsilon \sigma_2 (1 - e^{-i\omega_0\tau_2})(1 - e^{i\omega_0\tau_2}), \quad F_{02}^2 = 2\sigma_2 \varepsilon (1 - e^{i\omega_0\tau_2})^2 \\ F_{21}^2 = 2\varepsilon [\sigma_2 (1 - e^{i\omega_0\tau_2})(W_{20}^1(0) - W_{20}^1(-\tau_2)) + 2\sigma_2 (1 - e^{i\omega_0\tau_2})(W_{11}^1(0) - W_{11}^1(-\tau_2)) + \\ + 3\sigma_3 (1 - e^{-i\omega_0\tau_2})(1 - e^{i\omega_0\tau_2})]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Din (3.88) și (3.87) rezultă:

$$\begin{aligned}
g_{20} &= 2(f_{21} + f_{22})\sigma_2\varepsilon(1 - e^{-2i\omega_0\tau_2})^2, \\
g_{11} &= 2\varepsilon\sigma_2(f_{21} + f_{22})(1 - e^{-i\omega_0\tau_2})(1 - e^{i\omega_0\tau_2}), \\
g_{02} &= 2\varepsilon\sigma_2(f_{21} + f_{22})(1 - e^{i\omega_0\tau_2})^2, \\
g_{21} &= 2\varepsilon(f_{21} + f_{22}) \\
&(\sigma_2(1 - e^{i\omega_0\tau_2})(W_{20}^1(0) - W_{20}^1(-\tau_2)) + 2\sigma_2(1 - e^{i\omega_0\tau_2})(W_{11}^1(0) - W_{11}^1(-\tau_2)) + \\
&+ 3\sigma_2(1 - e^{-i\omega_0\tau_2})^2(1 - e^{i\omega_0\tau_2})).
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Din (3.86) și (3.67), rezultă

$$\begin{aligned}
E_1 &= (E_1^1, E_1^2), \quad E_1^1 = 0, \quad E_1^2 = \frac{F_{20}^2}{2\delta_0 + i\omega_0} \\
E_2 &= (E_2^1, E_2^2), \quad E_2^1 = \frac{F_{11}^2}{\xi_1}, \quad E_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Folosind (3.83), (3.85), (3.87), (3.88) și (3.89) rezultă că forma normală Poincaré a sistemului (3.70) pe varietatea centrală $W^C(\mu_0)$ este dată de sistemul de ecuații diferențiale ordinare:

$$z(t) = i\omega_0 z(t) + \frac{1}{2}g_{20}z(t)^2 + g_{11}z(t)\bar{z}(t) + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}(t) + \frac{1}{2}g_{21}z(t)^2\bar{z}(t), \tag{3.91}$$

unde $z(t) = x_1(t) + iy_1(t)$.

Ecuația (3.91) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= -\omega_0 y_1(t) + \frac{1}{2}(R_{20} + 2R_{11} + R_{02})x_1(t)^2 - \frac{1}{2}(R_{20} - 2R_{11} + R_{02})y_1(t)^2 + (I_{02} - I_{20})x_1(t)y_1(t) + \\
&+ \frac{1}{2}R_{21}x_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \frac{1}{2}I_{21}y_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= -\omega_0 x_1(t) + \frac{1}{2}(I_{20} + 2I_{11} + I_{02})y_1(t)^2 - \frac{1}{2}(I_{20} - 2I_{11} + I_{02})x_1(t)^2 + (R_{20} - R_{02})x_1(t)y_1(t) + \\
&+ \frac{1}{2}R_{21}y_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \frac{1}{2}I_{21}x_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2),
\end{aligned}$$

unde $R_{ij} = R_e(g_{ij})$, $I_{ij} = I_m(g_{ij})$.

Orbita $(t, x(t))$ a ecuației diferențiale (3.64') în vecinătatea soluției staționare $x(t) = 0 \forall t$ este

$$x(t) = 2x_1(t) + r_{20}^{(0)}(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) + r_{11}^{(0)}(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) + 2i_{20}^0 x_1(t)y_1(t), \tag{3.93}$$

unde $(x_1(t), y_1(t))$ este o soluție a sistemului diferențial cu condiția inițială

$$x_1(0) = \operatorname{Re}(\bar{\psi}^*(s), \varphi(\theta)),$$

$$y_1(0) = I_m(\psi^*(s), \varphi(\theta)),$$

unde $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau_2, 0]$ este condiția inițială a ecuației (3.64'), și $r_y = \operatorname{Re}(W_y(0))$, $y(o) I_m(W_{ij}, o)$.

Orbita $(t, x(t-\tau_1))$ a ecuației diferențiale (3.64') în vecinătatea soluției staționare $x(t) = 0$, $\forall t$ este:

$$\begin{aligned} x(t - \tau_1) = & 2x_1(t) \cos \omega_0 \tau_1 + 2y_1'(t) \sin \omega_0 \tau_1 + r_{20}(-\tau_1)(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) + \\ & + r_{11}(-\tau_1)(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) - 2i_{20}(-\tau_1)x_1(t) - y_1(t), \end{aligned} \quad (3.94)$$

unde $r_{ij}(-\tau) = \operatorname{Re}(W_{ij}(-\tau_1))$, $i_{ij}(-\tau) = I_m(W_{ij}(-\tau_1))$ și $(x_1(t), y_1(t))$ este o soluție a sistemului diferențial (3.92).

Orbita $(t, x(t, t-\tau_2))$ a ecuației diferențiale (3.64') în vecinătatea soluției staționare $x(t) = 0$, $\forall t$ este:

$$\begin{aligned} x(t - \tau_2) = & 2x_1(t) \cos \omega_0 \tau_2 + 2y_1(t) \sin \omega_0 \tau_2 + r_{20}(-\tau_2)(x_1(t)^2 - y_1(t)^2) + \\ & + r_{11}(-\tau_2)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - 2i_{20}(-\tau_2)x_1(t)y_1(t), \end{aligned} \quad (3.95)$$

unde $xr_{xy}(-\tau) = \operatorname{Re}(W_{ij}(-\tau_2))$, $i_{ij}(-\tau) = I_m(W_{ij}(-\tau_2))$ și $(x_1(t), y_1(t))$ este o soluție a sistemului diferențial (3.92).

3.5.4. Invarianți asociați orbitei $(t, x(t_1))$

Bifurcația Hopf dată de $\mu = \mu_0$ se numește supercritică (subcritică) dacă pentru $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$) ecuația (3.64') are soluții periodice. Bifurcația Hopf dată de $\mu = \mu_0$ se numește orbital stabilă (instabilă) dacă orbita $(t, x(t))$ a ecuației (3.64') este stabilă (instabilă). Folosind teoria formelor normale, caracterizarea bifurcației Hopf se face cu ajutorul coeficienților μ_2 , β_2 , T_2 dați de

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}(C_1)}{\operatorname{Re}(M)}, \quad T_2 = \frac{\operatorname{Im}(C_1) + \mu_2 \operatorname{Im}(M)}{\omega_0}, \quad \beta_2 = \operatorname{Re}(C_1), \quad (3.96)$$

unde

$$C_1 = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2g_{11}^2 - \frac{1}{3}g_{02}^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}$$

$$M = \frac{e^{-i\omega_0\tau_2} - 1}{2i\omega_0 + 2\delta_0 - \mu_0\tau_2 e^{-i\omega_0\tau_2} + \xi\tau_2 e^{-i\omega_0\tau_1}}$$

Propoziția 3.5. [68] *Următoarele afirmații sunt adevărate*

- i) *Dacă $\mu_2 > 0$ (< 0), bifurcația Hopf este supercritică (subcritică) și soluțiile periodice ale bifurcației există pentru $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$)*
- ii) *Dacă $\beta_2 < 0$ (> 0) orbitele bifurcației sunt orbital stabile (instabile)*
- iii) *Dacă $T_2 > 0$ (< 0) perioadele orbitei bifurcației este crescătoare (descrescătoare)*

Pentru $\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu$, ecuația (3.64') se scrie:

$$x(t) + 2\delta_0 x(t) + \xi_1 x(t - \tau_1) + \mu_0 (x(t) - x(t - \tau_2)) - \varepsilon\sigma_2 (x(t) - x(t - \tau_2))^2 - \varepsilon\sigma_3 (x(t) - x(t - \tau_2))^3 + \varepsilon\tilde{\mu} (x(t) - x(t - \tau_2)) = 0 \quad (3.97)$$

Sistemul asociat ecuației (3.97) este dat de

$$X(t) = AX(t) + B_1 X(t - \tau_1) + B_2 X(t - \tau_2) + \tilde{F}(x_1(t), x_1(t - \tau_2)) \quad (3.98)$$

Unde A, B_1, B_2 , sunt date de (3.67) și F este

$$\tilde{F}(x_1(t), x_1(t - \tau_2)) = F(x_1(t), x_1(t - \tau_2)) - \varepsilon\tilde{\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(t) - x_1(t - \tau_2) \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

Înlocuind în

$$\tilde{F}(x_1(t), x_1(t - \tau_2)), x_1(t) \text{ cu } z(t) + \bar{z}(t) + W_{20}^1(0)z^2(t) + W_{11}^1(0)z(t)\bar{z}(t) + \frac{1}{2}W_{02}^1(0)z^2(t),$$

$$x_1(t - \tau_1) \text{ cu } z(t)e^{-i\omega_0\tau_1} + \bar{z}(t)e^{i\omega_0\tau_1} + \frac{1}{2}W_{20}^1(-\tau_1)z(t)^2 + W_{11}^1(-\tau_1)z(t)\bar{z}(t) + \frac{1}{2}W_{02}^1(-\tau_1)\bar{z}(t)^2$$

rezulta

$$\tilde{F}(x_1(t), x_1(t - \tau_2)) = \frac{1}{2}\tilde{F}_{20}z^2(t) + \tilde{F}_{11}z(t)\bar{z}(t) + \frac{1}{2}\tilde{F}_{02}z(t)^2 + \tilde{F}_1z(t) + \tilde{F}_2z(t) + \frac{1}{2}\tilde{F}_{21}z(t)^2z(t)$$

unde

$$\tilde{F}_{20} = (0, \tilde{F}_{20}^2)^T, \quad \tilde{F}_{11} = (0, \tilde{F}_{11}^2)^T, \quad \tilde{F}_{02} = (0, \tilde{F}_{02}^2)^T, \quad \tilde{F}_1 = (0, \tilde{F}_1^2)^T, \quad \tilde{F}_2 = (0, \tilde{F}_2^2)^T, \quad \tilde{F}_{21} = (0, \tilde{F}_{21}^2)^T$$

cu

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{20}^2 &= F_{20}^2 - \varepsilon \tilde{\mu}(W_{20}^1(0) - W_{20}^1(-\tau_1)), \\
 \tilde{F}_{11}^2 &= F_{11}^2 - \varepsilon \tilde{\mu}(W_{11}^1(0) - W_{11}^1(-\tau_1)), \\
 \tilde{F}_{02}^2 &= F_{02}^2 - \varepsilon \tilde{\mu}(W_{02}^1(0) - W_{02}^1(-\tau_1)), \\
 \tilde{F}_1^2 &= -\varepsilon \tilde{\mu}(1 - e^{-i\omega_0 \tau_2}), \\
 \tilde{F}_2^2 &= -\varepsilon \tilde{\mu}(1 - e^{i\omega_0 \tau_2}),
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

unde $F_{20}^2, F_{11}^2, F_{02}^2, F_{21}^2$, sunt date de (3.88)

Fie $\tilde{g}_{20} = \bar{\psi}^*(o)\tilde{F}_{20}$, $\tilde{g}_{11} = \bar{\psi}^*(o)\tilde{F}_{11}$, $\tilde{g}_{02} = \bar{\psi}^*(o)\tilde{F}_{02}$, $\tilde{g}_{21} = \bar{\psi}^*(o)\tilde{F}_{21}$.

Din (3.100) și (3.87), rezultă

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{20} &= g_{20} - \varepsilon \tilde{\mu}(f_{21} + f_{22})(W_{20}^1(0) - W_{20}^1(-\tau_1)) \\
 \tilde{g}_{11} &= g_{11} - \varepsilon \tilde{\mu}(f_{21} + f_{22})(W_{11}^1(0) - W_{11}^1(-\tau_1)) \\
 \tilde{g}_{02} &= g_{02} - \varepsilon \tilde{\mu}(f_{21} + f_{22})(W_{02}^1(0) - W_{02}^1(-\tau_1)) \\
 \tilde{g}_{21} &= g_{21}
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Unde W_{20}, W_{11}, W_{02} sunt dați de (3.95).

Forma normală a sistemului (3.98) pe varietatea centrală $W^C(\mu_0)$ este

$$z'(t) = (i\omega_0 - \varepsilon \tilde{\mu}(1 - e^{-i\omega_0 \tau_2}))z(t) + \frac{1}{2} \tilde{g}_{20} z(t)^2 + \tilde{g}_{11} z(t) \bar{z}(t)^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_{02} \bar{z}(t)^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_{11} z(t)^2 \bar{z}(t) \tag{3.102}$$

Unde $z(t) = x_1(t) + iy_1(t)$.

Ecuția (3.102) se scrie sub forma

$$\begin{aligned}
 x_1'(t) &= -\varepsilon \tilde{\mu}(1 - \cos \omega_0 \tau_2) x_1(t) - (\omega_0 - \varepsilon \tilde{\mu} \sin \omega_0 \tau_2) y_1(t) + \frac{1}{2} (\tilde{R}_{20} + 2\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{02}) x_1(t)^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (\tilde{R}_{20} + 2\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{02}) y_1(t)^2 + (\tilde{I}_{02} - \tilde{I}_{20}) x_2(t) y_1(t) + \frac{1}{2} \tilde{R}_{21} x_1(t) (x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \tilde{I}_{21} y_1(t) (x_1(t)^2 + y_1(t)^2)
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
y_1'(t) = & (\omega_0 - \varepsilon\tilde{\mu} \sin\omega_0\tau_2)x_1(t) - \varepsilon\tilde{\mu}(1 - \cos\omega_0\tau_2)y_1(t) + \frac{1}{2}(\tilde{I}_{20} + 2\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{02})y_1(t)^2 \\
& - \frac{1}{2}(\tilde{I}_{20} - 2\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{02})x_1(t)^2 + (\tilde{R}_{20} - \tilde{R}_{02})x_1(t)y_1(t) + \frac{1}{2}\tilde{R}_{21}y_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2) - \\
& - \frac{1}{2}\tilde{I}_{21}x_1(t)(x_1(t)^2 + y_1(t)^2).
\end{aligned}$$

unde

$$R_{ij} = \operatorname{Re}(\tilde{g}_{ij}), \quad I_{ij} = I_m(\tilde{g}_{ij})$$

Orbita $(t, x(t))$ a ecuației diferențiale (3.97) este dată de (3.93) cu $x_1(t), y_1(t)$ este o soluție a sistemului diferențial ordinar (3.103).

Orbita $(t, x(t-\tau_1)), (t, x(t-\tau_2))$ a ecuației diferențiale (3.97) în variantele soluției staționare $x(t) = 0, \forall t$, este dată de (3.94), respectiv (3.95), cu $(x_1(t), y_1(t))$ o soluție a lui (3.103).

Utilizând programul realizat cu softul Maple 9 s-au obținut graficele prezentate mai jos.

```

> #Bala4 cazul nelinier masini unelte regenerative cu doua
intarzieri, Fofana; mu0=mu(bifurcatia Hopf); mu~ = mu
>
delta0:=0.085; tau1:=0.1045; tau2:=1.03*tau1; omega:=5.3; epsilon:=0.
03; sigma2:=0.02; sigma3:=0.003; mu0:=0.; zeta:=(2*delta0*omega*(1-
cos(omega*tau2))+omega^2*sin(omega*tau2))/(cos(omega*tau1)*sin(om
ega*tau2)+(1-cos(omega*tau2))*sin(omega*tau1));
mu:=(omega^2*sin(omega*tau1)-
2*delta0*omega*cos(omega*tau1))/(cos(omega*tau1)*sin(omega*tau2)+
(1-cos(omega*tau2))*sin(omega*tau1));
> e11:=2*delta0+zeta*tau1*exp(-omega*tau1*I)+mu*tau2*exp(-
omega*tau2*I): e12:=2*delta0-2*omega*I-zeta*(exp(omega*tau1*I)-
exp(-omega*tau1*I))/(2*omega*I)+mu*(exp(omega*tau1*I)-exp(-
omega*tau1*I))/(2*omega*I):
e21:=conjugate(e12): e22:=conjugate(e11):
> with(LinearAlgebra):
E:=
<<e11, e21>|<e12, e22>>: F:=MatrixInverse(E): d11:=<1|0>.F.<1, 0>: d12:
=<1|0>.F.<0, 1>:
> d:=conjugate(d12)+conjugate(d11): F20:=2*epsilon*sigma2*(1-
exp(-omega*tau2*I))^2: F11:=2*epsilon*sigma2*(1-exp(-
omega*tau2*I))*(1-exp(omega*tau2*I)): F02:=2*epsilon*sigma2*(1-
exp(omega*tau2*I))^2: g20:=d.F20: g11:=d.F11: g02:=d.F02:
> w120:=-g20*exp(-I*omega*tau1)/(I*omega)-
conjugate(g02)*exp(I*omega*tau1)/(3*I*omega): w11:=g11*exp(-
I*omega*tau1)/(I*omega)-
conjugate(g11)*exp(I*omega*tau1)/(I*omega)+F11/zeta: w102:=conjugate

```



```

te(w120): w220:=-g20*exp(-I*omega*tau2)/(I*omega)-
conjugate(g02)*exp(I*omega*tau2)/(3*I*omega): w211:=g11*exp(-
I*omega*tau2)/(I*omega)-
conjugate(g11)*exp(I*omega*tau1)/(I*omega)+F11/zeta:w202:=conjugate
te(w220): v20:=-g20/(I*omega)-conjugate(g02)/(3*I*omega):
v02:=conjugate(v20): v11:=g11/(I*omega)-
conjugate(g11)/(I*omega)+F11/zeta: F21:=epsilon*(sigma2*(1-
exp(omega*tau2*I))*(v20-w220)+4*sigma2*(1-exp(-
omega*tau2*I))*(v11-w211)+6*sigma3*(1-exp(-omega*tau2*I))^2*(1-
exp(omega*tau2*I))):g21:=d.F21:
> C1:=(g20*g11-2*abs(g11)^2-abs(g02)^2/3)*I/(2*omega)+g21/2:
M:=(exp(-omega*tau2*I)-1)/(omega*I+2*delta0-zeta*tau1*exp(-
omega*tau1*I)+mu*tau2*exp(-omega*tau2*I)); mu2:=-
Re(C1)/Re(M);T2:=- (Im(C1)+mu2*Im(M))/omega;
beta2:=2*Re(C1);
> G20:=g20-epsilon*mu0*(v20-w220): G11:=g11-epsilon*mu0*(v11-
w211): G02:=g02-epsilon*mu0*(v02-w202):G21:=g21:
> A1:=Re(omega*I-epsilon*mu0*d*(1-exp(-tau2*omega*I))):
A2:=Im(omega*I+epsilon*mu0*d*(1-exp(-tau2*omega*I))):
B1:=Re(epsilon*mu0*d*(1-exp(tau2*omega*I))):
B2:=Im(epsilon*mu0*d*(1-exp(tau2*omega*I))):
>
r220:=Re(w220):i220:=Im(w220):r211:=Re(w211):i211:=Im(w211):r020:
=Re(v20):i020:=Im(v20): r011:=Re(v11): i011:=Im(v11):
r120:=Re(w120):i120:=Im(w120):r111:=Re(w111):i111:=Im(w111):
>
R20:=Re(G20):R11:=Re(G11):R02:=Re(G02):I20:=Im(G20):I11:=Im(G11):
I02:=Im(G02):R21:=Re(G21):I21:=Im(G21):
> F1(x(t),y(t)):= (B2-
A2)*y(t)+(A1+B1)*x(t)+(R20/2+R11+R02/2)*x(t)^2-(I20-
I02)*x(t)*y(t)-(R20/2-
R11+R02/2)*y(t)^2+R21*x(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2-
I21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2: F2(x(t),y(t)):= (A2+B2)*x(t)+(A1-
B1)*y(t)+(I20/2+I11+I02/2)*x(t)^2-(I20/2-I11+I02/2)*y(t)^2+(R20-
R02)*x(t)*y(t)+R21*y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)/2+I21*x(t)*(x(t)^2+y(t)^2
)/2: F3(x(t),y(t)):=2*x(t)+r020*(x(t)^2-y(t)^2)-
2*i020*x(t)*y(t)+r011*(x(t)^2+y(t)^2):
F5(x(t),y(t)):=2*x(t)*cos(omega*tau2)+2*y(t)*sin(omega*tau2)+r220
*(x(t)^2-y(t)^2)-2*i220*x(t)*y(t)+r211*(x(t)^2+y(t)^2):
F4(x(t),y(t)):=2*x(t)*cos(omega*tau1)+2*y(t)*sin(omega*tau1)+r120
*(x(t)^2-y(t)^2)-2*i120*x(t)*y(t)+r111*(x(t)^2+y(t)^2):
with(DEtools):
> dsys :=
{diff(x(t),t)=F1(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=F2(x(t),y(t)),x(0)=-
0.001,y(0)=0.002}:
> dsol := dsolve(dsys,numeric):
> plots[odeplot](dsol,[

```

```
[t,F3(x(t),y(t)),color=red]],0..455*tau2,title="Fig.3.Orbita
(t,x(t)) ");
plots[odeplot](dsol,[
[t,F4(x(t),y(t)),color=red]],0..455*tau2,title="Fig.3.Orbita
(t,x(t-tau2)) ");plots[odeplot](dsol,[
[t,F5(x(t),y(t)),color=red]],0..455*tau2,title="Fig.3.Orbita
(t,x(t-tau1)) ");
```

```
plots[odeplot](dsol,[
[F3(x(t),y(t)),F4(x(t),y(t))
,color=red]],0..455*tau2,title="Fig.3.Orbita (x(t),x(t-tau1))
");
```

```
plots[odeplot](dsol,[
[F3(x(t),y(t)),F5(x(t),y(t)),color=red]],0..455*tau2,title="Fig.3
.Orbita (x(t),x(t-tau2)) a sist init ");
```

Fig.3.Orbita (t,x(t))

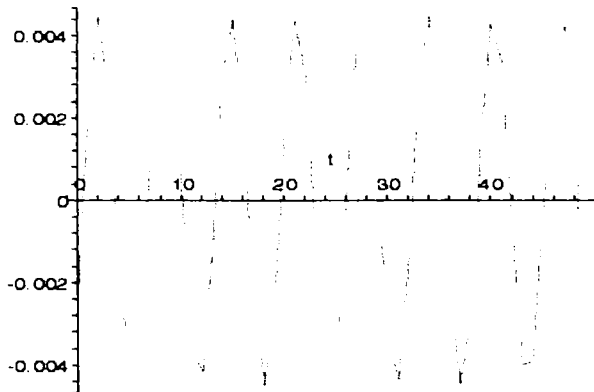


Fig.3.Orbita (t,x(t-tau1))

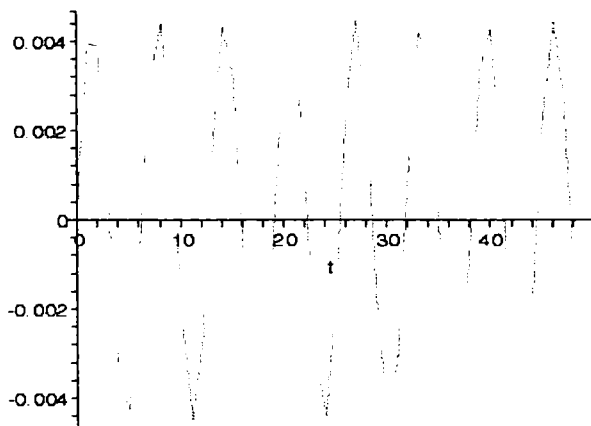


Fig. 3. Orbita $(x(t), x(t-\tau_1))$

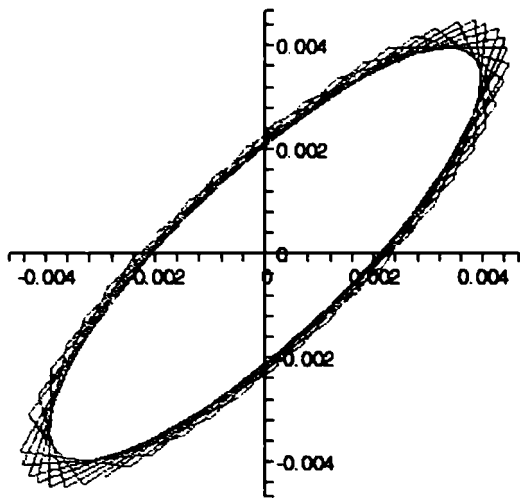


Fig. 3. Orbita $(x(t), x(t-\tau_2))$ a sist init

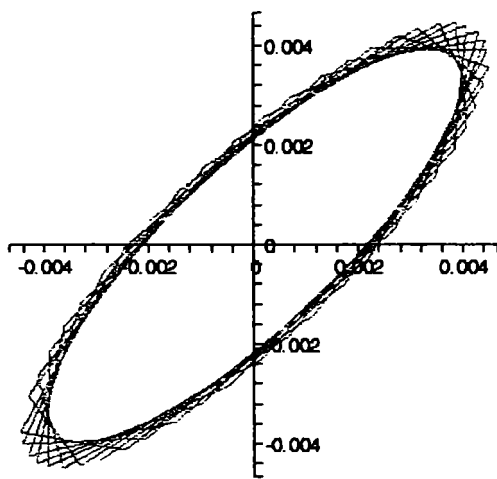
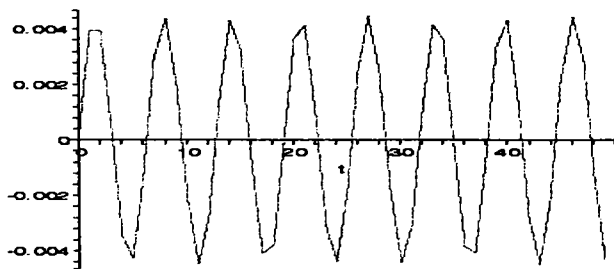


Fig. 3. Orbita $(t, x(t-\tau_2))$



4. VIBRAȚIILE LA MAȘINILE DE FREZAT

4.1. Vibrațiile la mașinile unelte

Destul de frecvent în practică apare starea de instabilitate dinamică a sistemului tehnologic mașină unealtă–piesă–dispozitiv–sculă, care se manifestă prin apariția unor vibrații în timpul așchierii. Datorită acestui fenomen apare: suprasolicitarea și uzura prematură a mașinii unelte; deteriorarea și apoi uzura prematură a tăișului sculei; rugozitatea necorespunzătoare a suprafeței prelucrate; influențarea negativă a preciziei de prelucrare; suprasolicitarea acustică a personalului de deservire, etc.

Revenirea la o așchiere fără vibrații, în majoritatea cazurilor se poate realiza prin schimbarea regimului de așchiere sau reglării mașinii unelte, care actualmente duce, de obicei, la scăderea productivității de așchiere. Acest efect are însemnătate deosebită la mașinile unelte mari precum și la cele cu comandă numerică.

Extinzând prin una sau mai multe metode domeniul stabil al sistemului mașină unealtă-piesă-dispozitiv-sculă, se creează condiții favorabile eliminării influențelor nefavorabile.

Obținerea unui prag de stabilitate dinamică mai ridicat se realizează prin creșterea grosimii așchiei, posibil de detașat în regim stabil, deci fără vibrații, ceea ce duce, în mod direct, la creșterea capacității de producție la mașinile de frezat.

Instabilitatea mașinii-unelte se manifestă prin apariția în timpul procesului de așchiere a unor mișcări relative între piesă și sculă care se suprapun mișcărilor tehnologice reglate (mișcarea de avans, mișcarea de generare a așchiei). Natura excitației acestor vibrații este diversă. Astfel se pot deosebi:

1. Vibrații forțate, cauzate de :

- forțe exterioare mașinii-unelte
- forțe interioare mașinii-unelte

2. Vibrații autoexcitate, cauzate de :

- Caracteristica negativă a forței de așchiere în funcție de viteză
- depunerile pe tăiș
- mișcarea sacadată (stick – slip)
- efectul regenerativ
- cuplarea poziției

Asupra vibrațiilor forțate și a celor autoexcitate precum și a cauzelor ce le produc vom reveni în următoarele paragrafe.

4.1.1. Vibrații forțate date de forțe exterioare mașinii – unelte

Șocuri sau vibrații periodice pot fi generate de utilaje învecinate mașinilor unelte și în particular la cele de frezat (prese, mașini de rabotat și de mortezat, pompe hidraulice, etc.). Aceste perturbații se pot transmite mașinilor de frezat prin fundație sau prin mediul hidraulic. Efectul acestora se poate diminua prin realizarea unor fundații amortizante la mașina generatoare sau la mașina receptoare. În circuitul hidraulic se recomandă legarea în paralel a unui acumulator cu pernă de gaz în vederea aplanării amplitudinilor pulsațiilor pompei [66].

4.1.2. Vibrații forțate date de forțe interioare mașinii - unelte

Aceste forțe sunt generate de ansamble sau organe rotative imprecis executate sau montate, precum și de șocurile care se produc la angrenarea roților dințate. Aceste surse perturbatoare se pot localiza relativ simplu, pornind de obicei de la frecvența vibrației pe care o generează.

Importanță deosebită la mașinile de frezat au forțele periodice care apar datorită șocurilor de intrare a dinților frezei în piesă (pentru raportul B/D subunitar, precum și datorită variației numărului de dinți ai frezei care se află în contact cu piesa), B fiind lățimea semifabricatului și se măsoară în [mm] iar D diametrul frezei [mm].

După cum se știe variația amplitudinii rezultantei forței de așchiere este maximă atunci când numărul de dinți ai frezei în contact cu piesa este un multiplu impar de 0,5 și neglijabilă când este un multiplu par de 0,5.

Dacă aceste forțe sunt suficient de mari iar frecvența lor se suprapune peste una din frecvențele proprii ale structurii, sistemul intră în rezonanță. Se poate evita acest neajuns prin asigurarea unui număr întreg de dinți ai frezei în contact cu piesa, sau alegerea unei alte turații de lucru a frezei.

La vibrațiile forțate datorate unor forțe interioare trebuie să ținem cont de faptul că:

- sistemul mașină uneală – piesă – dispozitiv – sculă vibrează cu frecvența forței de excitație.
- frecvența vibrațiilor este relativ joasă (sub 50 Hz).
- amplitudinea vibrației poate crește mult dacă frecvența forței de excitație periodică este în apropierea unei frecvențe proprii a mașinii (rezonanță).

4.1.3. Vibrații autoexcitate cauzate de panta negativă a forței de așchiere în funcție de viteză

În cazul vibrațiilor autoexcitate sistemul mașină unealtă – piesă – dispozitiv – sculă vibrează cu una sau mai multe frecvențe proprii, fără ca asupra sistemului să acționeze forțe perturbatoare din afară.

Una din cauzele care pot provoca vibrații autoexcitate o constituie caracteristica negativă a curbei de variație a forței de așchiere tangențiale în funcție de viteză.

Descreșterea forței de așchiere odată cu creșterea vitezei de așchiere creează o forță de amortizare negativă, care poate cauza instabilitatea sistemului și, deci, apariția autovibrațiilor.

4.1.4. Vibrații autoexcitate cauzate de formarea și ruperea periodică a adaosului pe tăiș

În anumite condiții care depind de materialul semifabricatului, geometria sculei, regimul de așchiere etc., procesul de așchiere devine instabil datorită formării și ruperii depunerilor pe tăiș. Acest fenomen cauzează o variație periodică a grosimii așchiei, deci, și a forței de așchiere care va excita sistemul mașină unealtă – piesă – dispozitiv – sculă. Așadar trebuie studiat fenomenul de rezonanță.

Fenomenul vibrațiilor autoexcitate cauzate de formarea și ruperea periodică a adaosului pe tăiș se poate evita sau diminua prin:

- Schimbarea geometriei sculei (a unghiului a de degajare al cuțitului)
- Variația regimului de așchiere (grosimea așchiei și viteza de așchiere)
- Utilizarea lichidelor de răcire și ungere
- Încălzirea artificială a sculei.

4.1.5. Vibrații autoexcitate cauzate de mișcarea sacadată

La viteze mici de alunecare, în condițiile frecării uscate, mixte sau limită, mișcarea poate fi însoțită de anumite intermitențe sau sacadări. Fenomenul, denumit și stick-slip, influențează negativ uniformitatea avansului, starea suprafeței ghidajelor, calitatea suprafețelor prelucrate, precizia de lucru etc.

Neuniformitatea avansului cauzează variația grosimii așchiei, deci și a forței de așchiere care va excita structura mașinii-unelte cu frecvența mișcării sacadate. Dacă această frecvență este apropiată de una din frecvențele proprii ale sistemului mașină unealtă-dispozitiv-piesă-sculă, aceasta va intra în rezonanță.

Raportul între coeficientul de frecare static μ_{as} și coeficientul de frecare cinetic μ_{ak} se numește coeficientul de STICK-SLIP.

Dacă $\frac{\mu_{as}}{\mu_{ak}} \geq 1$ se consideră că alunecarea va fi însoțită de intermitență.

Dacă $\frac{\mu_{as}}{\mu_{ak}} < 1$ stick-slipul se consideră practic amortizat.

Cercetările experimentale au stabilit că, dacă se depășește viteza relativă de alunecare la care se produce stick-slipul, urmează o zonă cu viteze de alunecare fără sacadări, iar apoi cu viteza de alunecare crescândă, alunecarea devine iarăși intermitentă, fenomenul fiind denumit alunecare cu autovibrații. Domeniul vitezelor de alunecare fără mișcare sacadată se poate extinde prin modificarea calității lubrefiantului rigidității și rugozității.

Așa cum este indicat în [66] efectul negativ produs prin apariția mișcării sacadate se mai poate evita prin unele măsuri tehnologice, cum ar fi: tipul și direcția prelucrării ghidajelor, utilizarea unor lubrefianți cu bisulfură de molibden, placarea cu plăci de politetrafluoretilen a suprafeței de ghidare a saniei.

4.1.6. Vibrații autoexcitate cauzate de efectul regenerativ

Dacă forța de așchiere variază, poate apare o mișcare vibratorie, care are ca efect o suprafață așchiată cu denivelări (cu rugozități). La următoarele treceri (în procesul de așchiere se iau mai multe straturi după caz) variațiile forței de așchiere ce rezultă excită din nou mașina la frecvența proprie, care va avea iarăși, ca urmare, suprafețe așchiate cu denivelări (rugoase).

În cazul că amortizarea sistemului este suficientă, fenomenul se stinge – procesul de așchiere va fi stabil. Dacă amortizarea sistemului este insuficientă și nu poate stinge acest proces, oscilațiile cresc – procesul de așchiere va fi instabil.

Deoarece detașarea nouă de așchie, de pe suprafața anterior produsă, menține procesul de vibrație, fenomenul se numește vibrație regenerativă.

4.1.7. Vibrații libere la mașini-unelte

În majoritatea lucrărilor de specialitate vibrațiile libere se consideră ca fiind nesemnificative pentru mașinile – unelte deoarece vibrațiile libere caracterizează procese tranzitorii, care datorită amortizărilor mari în îmbinările mașinilor – unelte au o durată foarte scurtă.

La prelucrarea pe mașini – unelte, prezintă interes practic:

- a) intrarea și ieșirea sculei din așchie;
- b) accelerarea și frânarea elementelor mobile;
- c) inversarea sensului de mișcare.

a) Intrarea și ieșirea sculei din așchie sunt însoțite de variația deformațiilor elementelor sistemului elastic al mașinilor – unelte de unde rezultă scăderea preciziei de prelucrare și înrăutățirea calității suprafeței. În cazul trecerilor necesare diminuării consecințelor fenomenelor dinamice la prelucrarea pe mașini – unelte stabilirea corectă a duratei procesului tranzitoriu devine deosebit de importantă.

Dacă durata de menținere a sculei fără avans este prea mare, atunci scula se freacă de suprafața prelucrată ducând la distrugerea superficială a piesei, provocând o uzură mai intensă a sculei și, uneori, la apariția vibrațiilor de înaltă frecvență ale sculei.

b) În condițiile frecării mixte și lichide din cuplurile cinematice sanie – ghidaj, variația vitezei de deplasare a elementelor mobile ale mașinilor – unelte, provoacă variația forțelor de frecare și ridicarea pe stratul de lubrifiant al saniei. Datorită acestei ridicări apar erori de poziție relativă dintre diferitele ansambluri ale mașinilor – unelte ducând la scăderea preciziei de prelucrare.

c) Inversarea sensului de mișcare este un proces inevitabil în funcționarea laturilor cinematice, de avans, generatoare complexe și auxiliare ale mașinilor – unelte. Acest proces cuprinde trei etape:

- 1) frânarea mișcării pentru trecerea de la o anumită viteză la viteza nulă;
- 2) oprirea;
- 3) pornirea la viteza necesară deplasării elementului mobil în noul sens.

Inversarea este însoțită de următoarele fenomene: schimbarea sensului de acționare a forțelor de frecare, variația bruscă a temperaturii în anumite zone ale cuplului cinematic, șocuri datorate inerției maselor aflate în mișcare de rotație sau translație, modificarea repartiției presiunilor pe ghidaje etc.

Cu cât frecvența inversărilor și maselor organelor în mișcare sunt mai mari, precizia de prelucrare impusă este mai ridicată, productivitatea și fiabilitatea sunt mai mici.

O deosebită importanță metodologică o are studiul vibrațiilor libere deoarece:

- 1) Frecvențele vibrațiilor libere sunt frecvențe proprii ale sistemului elastic;
- 2) Frecvența proprie și decrementul logaritmic se determină pe oscilogramele vibrațiilor libere;
- 3) Teoretic, frecvențele proprii ale sistemelor elastice se determină cu ajutorul ecuațiilor diferențiale liniare omogene care descriu vibrațiile libere ale sistemelor respective.

4.1.8. Vibrații forțate la mașinile-unelte

La prelucrarea pe mașini – unelte vibrațiile forțate pot fi:

- a) Vibrații forțate care nu depind de procesul de așchiere și apar datorită: fixării defectuoase a mașinilor unelte pe fundație, imperfecțiunilor tehnologiilor de prelucrare și asamblare ale organelor mașinilor – unelte, montării roților pe arbori cu ajutorul penelor, prezenței camelor, prezenței excentricelor etc.
- b) Vibrații forțate care depind de procesul de așchiere și apar datorită: variației periodice a secțiunii așchiei, variației adaosului de prelucrare, variației durtății materialului prelucrat etc.

Orice funcție periodică poate fi aproximată ca fiind suma unui număr finit de funcții sinusoidale $F(t)$ este membrul drept al ecuației diferențiale neomogene) și de aici apar ceea ce în literatura de specialitate se numesc „armonici”. Din punct de vedere practic s-a constatat că au importanță numai vibrațiile provocate de primele armonici.

Întotdeauna există posibilitatea rezonanței cu o armonică superioară în cazul în care una din frecvențele proprii ale sistemului elastic cu mai multe grade de libertate este multiplu al frecvenței de bază a forței excitatoare. În majoritatea lucrărilor de specialitate se ia în considerare doar efectul armonicii de bază al forței excitatoare $F(t)$.

De regulă deplasările relative dintre sculă și semifabricat, care influențează direct parametrii calitativi ai prelucrării pe mașini – unelte se produc de regulă la frecvențe proprii superioare.

Transmiterea vibrațiilor de la fundație până în zona de contact dintre sculă și piesă se face prin batiul mașinii – unelte.

Vibrațiile forțate care depind de procesul de așchiere sunt datorate:

- a) variației de așchiere sau a direcției de avans la mașinile – unelte de copiat sau cu comandă după program;
- b) variației secțiunii așchiei de frezare și broșare;
- c) variației vitezei de așchiere sau a unghiurilor de așchiere la prelucrarea prin strunjire a suprafețelor frontale sau a pieselor de formă necirculară;
- d) variației periodice a secțiunii așchiei la strunjirea semifabricatelor excentrice, la prelucrarea cu freză excentrică și cu piatră de rectificat excentrică.

La mașinile – unelte pentru a stabili sursa excitatoare a vibrațiilor forțate se folosesc metodele enunțate mai jos:

- a) Întreruperea, înlăturarea sau înlocuirea diferitelor surse excitatoare posibile, urmată de analiza rezultatelor acestor măsurători.
- b) Analiza armonică a vibrațiilor sistemului și compararea frecvențelor acestor vibrații cu frecvențele posibile ale diferitelor surse de excitație.

4.1.9. Autovibrații

Autovibrațiile sunt vibrații întreținute, datorate unor factori excitatori, generați de însăși mișcarea vibratorie. Autovibrațiile ce apar în sistemele elastice ale mașinilor – unelte în funcție de natura factorilor excitatori pot fi clasificate astfel:

- autovibrații datorate defazajului dintre variația forței și a deplasării relative dintre sculă și semifabricat, sanie și ghidaj, fus și lagăr;
- autovibrațiile care apar în procesul de așchiere ca urmare a interdependenței dintre mărimea forței de așchiere și deplasarea relativă dintre sculă și semifabricat;
- autovibrații datorate procesului de frecare prin caracterul dependenței dintre forța de frecare și viteza de alunecare din cuplurile cinematice.

Forța de așchiere variază cu frecvența autovibrațiilor așa cum este indicat în [71] iar celălalt parametru important al autovibrațiilor și anume amplitudinea depinde de mărimea energiei introduse în sistem.

Amplitudinea autovibrațiilor este funcție de parametrii procesului de așchiere (viteză de așchiere, avans și adâncime de așchiere) cât și de parametrii sistemului elastic.

Adâncimea de așchiere este parametrul tehnologic care influențează foarte puternic amplitudinea autovibrațiilor. Odată cu mărirea adâncimii de așchiere crește și amplitudinea vibrațiilor. Atunci când se atinge limita de stabilitate, amplitudinea autovibrațiilor crește brusc și continuarea procesului de așchiere devine imposibilă. Adâncimea de așchiere, la care stabilitatea la vibrații a sistemului elastic este depășită, a fost denumită în literatura de specialitate adâncime critică de așchiere. Ușurința cu care poate fi determinată adâncimea critică de așchiere arată faptul că ea este parametrul de evaluare a stabilității la vibrații a sistemului elastic al mașinii – unelte.

Viteza critică reprezintă viteza minimă a mișcării continue a elementului mobil al mașinii – unelte. În literatura de specialitate autovibrațiile rezultate în urma deplasării cu viteză sub cea critică nu sunt armonici și se numesc de relaxare. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de “stick - slip”.

Autovibrațiile de relaxare se caracterizează prin următorii parametri:

- 1)viteza maximă realizată în timpul saltului;
- 2)perioada care reprezintă suma dintre durata saltului și durata imobilității elementelor cuplului cinematic;
- 3)valoarea saltului cu repercusiune directă asupra preciziei deplasărilor la cotă fixă și asupra preciziei de prelucrare la frezare și rectificare.

Autovibrațiile datorate defazajului dintre variația forței și a deplasării se pot pune în evidență în lanțurile cinematice mecanice, de copiere hidraulice și

hidromecanice și sunt favorizate de prezența în sistemul elastic a neliniarităților de tipul histerezisului, de tipul jocurilor și al insensibilităților.

Evitarea autovibrațiilor și măsurile de atenuare a consecințelor lor duc la îmbunătățirea substanțială a performanțelor mașinilor – unelte.

4.1.10. Structura elastică la mașina-unealtă

Prin structură elastică se înțelege mașina-unealtă împreună cu piesa de prelucrat, cu scula așchietoare, cu dispozitivul port piesă și portsculă. Având în vedere că deplasările unghiulare ale structurii elastice au o influență neglijabilă asupra mărimii de care depinde în cea mai mare măsură componenta dinamică a forței de așchiere-variația grosimii de așchiere- și pentru a simplifica expunerea, în cele ce urmează vom considera că toate cele n_p , moduri proprii de mișcare sunt de translație. În raport cu fiecare din aceste moduri proprii de mișcare structura poate fi înlocuită printr-un model Kelvin-Voigt așa cum se recomandă în [43] și unde m_q, c_q, k_q reprezintă masa, constanta de amortizare respectiv constanta elastică a modului ($q = 1, 2, \dots, n_p$). Dacă prin v_q se notează deplasarea masei aflată sub acțiunea forței \bar{F}_q , atunci în raport cu centrul de oscilație, poate fi scrisă ecuația:

$$m_q \ddot{v}_q + c_q \dot{v}_q + k_q v_q = \bar{F}_q(t) \quad (4.1)$$

Cercetările făcute de Hanna și Tobias arată că numai forțele de natură elastică determină comportarea neliniară a structurii. Așa cum se precizează în [43] structura elastică poate fi privită ca un sistem dinamic în care parametrii m_q, c_q, k_q sunt constanți, sau funcții de timp, caz în care modelul este

$$m_q(t) \ddot{v} + c_q(t) \dot{v} + k_q(t) v = \bar{F}(t) \quad (4.2)$$

care sunt parametrii aleatori. Cazul aleator se justifică prin faptul că structura elastică este supusă unui număr mare de solicitări și își modifică configurația spațială. Multitudinea stărilor în care se poate afla structura nu permite a da o descriere deterministă încărcării și configurației sale spațiale, fapt ce a impus ca cel puțin în unele cazuri sistemul elastic să fie conceput ca un sistem cu intrare cu parametrii aleatori.

Datorită dificultăților ridicate de abordarea matematică a sistemelor aleatoare multivariabile, analiza comportării sistemului dinamic de prelucrare cu luarea în considerație a caracterului aleatoriu al sistemului elastic se face deocamdată la modele echivalente cu cel mult două grade de libertate. În particular, când pe baza cercetărilor experimentale a subansamblului arborelui principal se dovedește că variația rigidității nu are caracter determinist, coeficientul de rigiditate $k(t)$ trebuie înlocuit cu

$$k(t) = k_0 [1 + k_1(t)] \quad (4.3)$$

unde k_0 este speranța matematică a lui $k(t)$, iar $k_1(t)$ este o funcție aleatoare centrată de tipul zgomotului alb, având funcția de corelație dată de

$$R_k(\tau) = R_k^{(0)} \delta(t - \delta) \quad (4.4)$$

în care $R_k^{(0)}$ este o constantă ce caracterizează intensitatea zgomotului alb iar $\delta(t - \tau)$ funcția impuls unitar (funcția Dirac).

Ca urmare a rigidității torsionale mari a sistemului dinamic al arborelui principal, în ipoteza unor burghie fără asimetrii ale tăișurilor principale (presupuse cu o geometrie perfect identică) într-o serie de lucrări, se consideră că autovibrațiile se manifestă numai pe direcția vitezei de avans. Ecuația sistemului dinamic de prelucrare la care sistemul elastic are un singur mod propriu de mișcare semnificativ se scrie

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 + \Delta F \quad (4.5)$$

unde

$$\Delta F = -2k_3^{(a)}(x(t) - x(t - T)) - 2c_3^{(a)} \frac{\pi}{\Omega} \dot{x}(t) \quad (4.6)$$

În cazul strunjirii pieselor zvelte (la care raportul dintre lungimea și diametru este mare) pe mașini-unelte rigide, structura elastică poate fi considerată ca având un singur mod propriu de mișcare semnificativ, ecuația care descrie comportarea sistemului dinamic de prelucrare fiind de forma

$$m_1(t)\ddot{x} + c_1(t)\dot{x} + k_1(t)x = \bar{F}_1(t) \quad (4.7)$$

În absența efectului regenerativ ($\mu = 0$), componenta dinamică a forței de așchiere este o funcție liniară sau liniarizată armonic, de x . Cu notațiile

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt} = px), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1(t)}{m_1(t)} & \frac{-c_1(t)}{m_1(t)} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ecuația (4.7) conduce la sistemul

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B_1\bar{F}_1(t) \quad (4.9)$$

care poate fi analizat cu metode specifice sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul întâi. În cazul sistemelor dinamice de prelucrare cu întârziere $\mu \neq 0$ modelul matematic este dat de

$$m_1(t)\ddot{x} + c_1(t)\dot{x} + k_1(t)x - \mu \bar{k}^{(e)} x(t - \tau) = \bar{F}_1(t) \quad (4.10)$$

Cu notațiile

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1(t)}{m_1} & \frac{-c_1(t)}{m_1} \end{pmatrix}, \quad B(t) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu \frac{\bar{k}^{(e)}}{m_1(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

obținem ecuația matriceală

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - T) + B_1\bar{F}_1(t) \quad (4.12)$$

Analiza modelului matematic al unui sistem dinamic de prelucrare se face analizând sisteme de ecuații diferențiale ordinare în absența efectului

regenerativ, sisteme de ecuații diferențiale ordinare cu argument întârziat în prezența efectului regenerativ sau sisteme de ecuații diferențiale stochastice în cazul că unul din parametri este descris de o variabilă aleatoare.

Întotdeauna când se analizează o mașină-unealtă se lucrează cu modele care scot în evidență aspectele pe care noi dorim să le cercetăm. Alegerea modelului adecvat este o chestiune de finețe. Așa cum este indicat în [71] sistemul elastic al mașinii de frezat verticale poate admite un model echivalent plan și un model echivalent spațial.

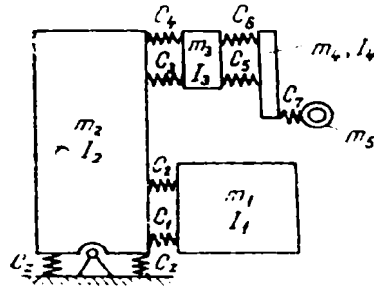


Fig. 4.1

Modelul echivalent plan reprezentat în fig. 4.1 este valabil pentru un număr restrâns de operații executate pe mașina de frezat și anume: prelucrarea cu așchii de dimensiuni mici, prelucrarea suprafețelor plane verticale cu avans transversal sau a unor suprafețe plane cu avans longitudinal, având lungime mică, etc.

Modelul echivalent plan din fig. 4.1 este dispus în planul de simetrie al mașinii. La acest model sistemele elastice parțiale ale piesei și sculei sunt plasate pe batiul vertical al mașinii, considerat corp nedeformabil.

Sistemul elastic parțial al sculei are în componența sa corpul sculei m_5 , arborele principal m_4 cu lagăre elastice (deformabile) și capul de frezare cu masa m_3 .

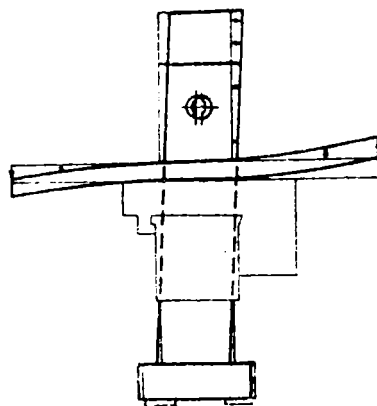


Fig. 4.2

În cazul cel mai general la prelucrării cu freze de diametru mare, ca și în cazul prelucrării cu freze frontale, sistemul elastic al mașinii de frezat trebuie considerat spațial. Am reprezentat acest model echivalent spațial în fig. 4.2.

4.1.11. Noțiuni privind prelucrarea roților dințate prin rulare

În timpul funcționării, o roată dințată se găsește în angrenare cu roata conjugată, în așa fel încât cercurile de rostogolire, care sunt în acest caz și suprafețe primitive, să se rostogolească (să ruleze) fără alunecare unul pe altul. Prin această mișcare, dinții roții conducătoare vor fi în fiecare moment în contact cu cel puțin un dinte al roții conduse, linia de contact deplasându-se de la cap spre fundul dintelui roții conduse.

Dacă roata conducătoare este înlocuită cu o sculă, iar roata condusă cu un semifabricat nedanturat, în urma angrenării (însoțită evident de o mișcare de așchiere) va rezulta o roată prelucrată. Pentru realizarea roții este, deci, nevoie de o sculă care să aibă profilul roții conjugate.

Pentru asigurarea rulării, între sculă și semifabricat trebuie să existe o mișcare identică cu mișcarea de angrenare dintre roata prelucrată și roata dințată sau cremaliera reprezentată de sculă. Această mișcare este deosebită de mișcarea principală care este paralelă cu linia dintelui.

O situație particulară se întâlnește în cazul în care profilul sculei – cremalieră se obține cu ajutorul unui melc (șurub) care are pasul egal cu pasul cremalierii și axa paralelă cu axa cremalierii.

Prin rotirea melcului, profilul se deplasează cu un pas la o rotație (dacă melcul are mai multe începuturi deplasarea este de atâtea ori mai mare).

Mișcarea de rulare între sculă și piesă este asigurată de existența unui lanț cinematic special, numit lanț cinematic de rulare, care trebuie să se găsească în structura mașinilor-unelte de prelucrat roți dințate prin metoda rulării.

Rularea poate fi utilizată pentru prelucrarea oricărui tip de dantură, cu deosebire că, în afara danturii evolventice, este necesară câte o sculă pentru fiecare modul precum și pentru fiecare număr de dinți.

Frezarea danturilor cilindrice prin metoda rulării se face utilizând freza melc. Acesta este cel mai răspândit procedeu de danturare. Pentru realizarea prelucrării sunt necesare următoarele mișcări:

- mișcarea principală, realizată prin rotirea frezei melc;
- mișcarea de rulare, realizată de roată, corelată cu mișcarea principală prin relația $n_p \cdot z_p = n_s \cdot i$ unde n_p , n_s sunt turația piesei, respectiv a sculei, z_p este numărul de dinți ai piesei, i este numărul de începuturi ale melcului;
- mișcarea de avans axial, paralelă cu axa roții dințate;
- mișcarea de avans radial;
- mișcarea de avans tangențial.

Mișcarea de avans axial este necesară realizării profilului dintelui pe toată lățimea roții. Mișcările de avans radial și tangențial sunt utilizate la începutul prelucrării pentru pătrunderea frezei în material. Mișcarea radială servește și la reglarea inițială a distanței dintre sculă și axa piesei, în funcție de diametrul acesteia.

4.1.12. Legătura dintre forța de așchiere și adâncimea de așchiere

Așa cum este precizat în [43] un anumit cuplu sculă –piesă în prelucrare este însoțit de o serie de mărimi-cauză cum ar fi: grosimea de așchiere (grosimea așchii nedetașate), lățimea de așchiere (lățimea așchii nedetașate), viteza principală de așchiere, unghiul principal de degajare, unghiul principal de așezare și printr-o serie de mărimi-efect de genul: forța de așchiere F , grosimea efectivă a așchii, temperature din zona de așchiere. În dinamica proceselor de prelucrare pe mașini-unelte, forța de așchiere este considerată ca fiind funcție de timp.

Nu toate mărimile de care depinde forța de așchiere afectează valoarea sa în aceeași măsură, unele dintre ele având o influență neglijabilă. În particular, în dinamica proceselor de prelucrare pe mașini-unelte așchietoare, se consideră că variația în timp a forței de așchiere este determinată numai de secțiunea așchii nedetașate $a(t)$ și de viteza principală de așchiere $v(t)$. Se poate scrie relația :

$$F(t) = F[a(t), b(t), v(t), C_p],$$

unde C_p este o constantă care ține seama de condițiile de prelucrare iar $b(t)$ este lățimea așchii nedetașate. În condițiile existenței autovibrațiilor, drept consecință a deplasării $x(t)$ valorile mărimilor a, b, v se modifică relativ repede în timp căpătând variațiile $\Delta a(t)$, $\Delta b(t)$, $\Delta v(t)$ în raport cu valorile nominale a_0, b_0, v_0 . De aceea se consideră forța instantanee de așchiere de forma:

$$F(t) = F_0 + \Delta F(t)$$

în care $\Delta F(t)$ este variația dinamică a forței de așchiere în raport cu valoarea sa staționară (nominală) F_0 . Această valoare F_0 este presupusă constantă sau cel mult lent variabilă în timp. Convențional, drept sens pozitiv al deplasării $x(t)$ se va alege acela care conduce la mărirea distanței dintre sculă și piesă. De aceea în [43] componenta dinamică ΔF a forței de așchiere va apărea ca fiind de sens opus deplasării x .

4.1.13. Sistemul dinamic de așchiere liniarizat armonic

În prezența autovibrațiilor, poziția relativă dintre sculă și piesa care se prelucrează variază armonic, fapt ce justifică studiul sistemelor unui proces de așchiere la care mărirea de intrare este o funcție armonică de timp.

Das și Tobias plecând de la modelul lui Merchand și Püspanen au inițiat o teorie care permite a da o justificare de natură fizică a variației forțelor instantanee de așchiere $F^{(i)}$ corespunzătoare modulației interne și $F^{(e)}$ corespunzătoare modulației externe. Modelul lui Merchand și Püspanen se referă la așchiera ortogonală și este caracterizată prin existența unui singur plan de

forfecare care face un unghi Φ în raport cu direcția vectorului viteză de aşchiere. Sunt acceptate următoarele ipoteze:

- Forța F_f din planul de forfecare și componenta principală F_t (tangențială) sunt date de

$$F_f = bk_f l_f \quad (4.13)$$

$$F_t = bk_t l_f \quad (4.14)$$

unde l_f este lungimea benzii din planul de forfecare, k_f, k_t sunt constante ce depind de condițiile de prelucrare.

- Planul de forfecare are o poziție invariabilă, adică unghiul instantaneu de forfecare Φ este egal cu valoarea Φ_0 corespunzător aşchierii staționare.

- Tăișul sculei este perfect ascuțit și nu există un contact între suprafața aşchiată și fața de așezare a sculei.

Presupunând că deplasarea relativă dintre sculă și piesă se face pe direcția pe care se măsoară grosimea de aşchiere modulată intern după legea

$$a^{(i)} = a_0 + \Delta a^{(i)} = a_0 - x = a_0 - x_0 \sin \omega t \quad (4.15)$$

valorile instantanee ale lui Φ și l_f sunt

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi \quad (4.16)$$

$$l_f = \frac{a^{(i)}}{\sin \Phi} \quad (4.17)$$

unde

$$\Delta\Phi = \arctg\left(\frac{\Delta\dot{a}^{(i)}}{v_0}\right) \cong -\frac{p}{v_0} x = -\frac{\omega_0}{v_0} x_0 \cos \omega t \quad (4.18)$$

Notând cu $D = \frac{F_t}{F_f} = \frac{k_t}{k_f}$ indicele universal de prelucrabilitate și admițând

că $\Delta\Phi \cong 0$ în conformitate cu [43] se obține

$$F_t = \frac{bk_t(a_0 - x)}{\sin \Phi_0} \quad (4.19)$$

$$F_n = \frac{F_t(D \cos \Phi_0 - 1)}{D \sin \Phi_0} \quad (4.20)$$

Pentru $\Delta\Phi$ suficient de mic componentele forței de aşchiere interne sunt

$$F_1^{(i)} = F_t \cos \Delta\Phi - F_n \sin \Delta\Phi \cong F_t - F_n \Delta\Phi \quad (4.21)$$

$$F_2^{(i)} = F_t \sin \Delta\Phi + F_n \cos \Delta\Phi \cong F_t \Delta\Phi + F_n \quad (4.22)$$

din (4.21) și (4.22) rezultă

$$\Delta F_l^{(i)} = F_l^{(i)} - F_{0l}^{(i)} = b(A_l^{(i)} - \frac{B_l^{(i)}}{v} p)x \quad (l = 1, 2), \quad (4.23)$$

unde

$$A_1^{(i)} = k_t \operatorname{cosec} \Phi_0, \quad (4.24)$$

$$A_2^{(i)} = \frac{k_t(D \cos \Phi_0 - 1)}{D \sin^2 \Phi_0} \quad (4.25)$$

$$B_1^{(i)} = a_0 A_2^{(i)} , \quad (4.26)$$

$$B_2^{(i)} = a_0 A_1^{(i)} . \quad (4.27)$$

În condițiile în care grosimea de aşchiere prezintă numai modulația externă

$$a^{(e)} = a_0 + \Delta a^{(e)} = a_0 + x_0 \sin(\omega t + \varepsilon_2) \quad (4.28)$$

Das și Tobias demonstrează că

$$\Delta F_1^{(e)} = b \cdot \frac{k}{\sin \Phi_0} x_0 \sin(\omega t + \varepsilon_2) \quad (4.29)$$

$$\Delta F_2^{(e)} = b \frac{k_t (D \cos \Phi_0 - 1)}{D \sin^2 \Phi_0} x_0 \sin(\omega t + \varepsilon_2) \quad (4.30)$$

$$\text{unde } \varepsilon_2 = \omega T_2 \cong a_0 (\omega / v_0) \operatorname{ctg} \Phi_0 \quad (4.31)$$

Plecând de la constatarea că reprezentările grafice ale mărimilor $\Delta F_1^{(i)}, \Delta F_2^{(i)}$, determinate experimental în funcție de variația dinamică a poziției relative dintre sculă și piesă, au, aproximativ aspectul unor elipse, prof. dr. ing. Sergiu Chiriacescu a propus și a sugerat o metodă simplă pentru identificarea parametrilor sistemului unui proces de aşchiere liniarizat armonic.

Experimental este dificil să se separe modulația externă a grosimii de aşchiere de cea internă, fapt ce conduce la efectuarea de două serii de încercări similare: una în absența efectului regenerativ prin care se precizează parametrii $\Delta F_l^{(i)}$ și $\varphi_l^{(i)}$, unde

$$\varphi_l^{(i)} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{v_0} \frac{B_l^{(i)}}{A_l^{(i)}} \right), \quad l = 1, 2 \quad (4.32)$$

și $A_l^{(i)}, B_l^{(i)}, l = 1, 2$ dați de (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), iar cealaltă în condițiile modulației totale a grosimii de aşchiere. La fiecare dintre aceste încercări se menține constantă amplitudinea deplasării armonice dintre sculă și piesă.

Dacă $x = x_0 \sin \omega t$, forța $\Delta F_l^{(i)}$ este dată aproximativ de

$$\Delta F_l^{(i)} \approx \Delta F_{0l}^{(i)} \sin(\omega t - \varphi_l^{(i)}) \quad l = 1, 2 \quad (4.33)$$

care se mai scrie

$$\Delta F_l^{(i)} \approx \frac{\Delta F_{0l}^{(i)}}{x_0} \left(\cos \varphi_l^{(i)} - \frac{\sin \varphi_l^{(i)}}{\omega} p \right) x \quad l = 1, 2 \quad (4.34)$$

Eliminând ωt se obține ecuația elipsei :

$$\left[\frac{\Delta F_l^{(i)}}{\Delta F_{0l}^{(i)} \sin \varphi_l^{(i)}} \right]^2 + \left[\frac{x}{x_0 \sin \varphi_l^{(i)}} \right]^2 - 2 \frac{\Delta F_l^{(i)} x \cos \varphi_l^{(i)}}{\Delta F_{0l}^{(i)} x_0 \sin \varphi_l^{(i)}} = 1 \quad (4.35)$$

Pentru forța ΔF_l se obține

$$\Delta F_l \approx \Delta F_{0l} \sin(\omega t - \varphi_l) = \frac{\Delta F_{0l}}{x_0} \left(\cos \varphi_l - \frac{\sin \varphi_l}{\omega} p \right) \quad (4.36)$$

Abstracție făcând de imprecizia intrinsecă a metodei de determinare a variației forței de aşchiere, valorile parametrilor din expresiile lui ΔF_l au valabilitate numai pentru condițiile în care au fost efectuate testele de aşchiere.

În fig. 4.4a este reprezentat sistemul elastic de ordinul zero (nu a fost înlocuită nici o masă). După cum este știut, mecanismele melc – roată melcată se autofrânează și, ca urmare, transmiterea mișcării nu este posibilă decât într-un sens, de la melc la roata melcată.

Această particularitate cinematică a mecanismelor melc-roată melcată face ca schema cinematică să fie modificată pe durata unei perioade a vibrației torsionale deoarece, în timpul torsionării elementelor finale ale lanțului cinematic de rulare, mișcarea poate fi transmisă de la melc la roata melcată iar în timpul detorsionării axului roții melcate, mișcarea nu mai poate fi transmisă melcului.

Deci, în prima semiperioadă ecuația mișcării trebuie să țină seama de masa roții melcate, pe când în cea de-a doua semiperioadă nu, deoarece oscilațiile torsionale nu pot fi transmise în sens invers prin acest mecanism.

Urmare a acestui fenomen, în sistemul elastic, capătul ramurii piesei din lanțul cinematic de rulare se va considera în prima semiperioadă încastrat (fig. 4.4c), iar în cea de-a doua semiperioadă liber (fig. 4.4d).

Cele de mai sus își au pe deplin valabilitatea în cazul în care la elementele finale ale lanțului cinematic de rulare acționează momente de așchiere armonice.

În scopul determinării pulsațiilor proprii ale lanțului cinematic, se scriu ecuațiile mișcării pentru sistemul elastic din fig. 4.4d,

$$\begin{aligned} J_{me} \ddot{\varphi}_{me} + C_{me}(\varphi_{me} - \varphi_A) &= 0 \\ - C_{me}(\varphi_{me} - \varphi_A) + C_S(\varphi_A - \varphi_S) + C_p(\varphi_A - \varphi_P) &= 0 \\ J_S \ddot{\varphi}_S - C_S(\varphi_A - \varphi_S) &= 0 \\ J_p \ddot{\varphi}_p - C_p(\varphi_A - \varphi_P) &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

unde s-au folosit notațiile din fig. 4.4

Deoarece cele trei ramuri ale lanțului cinematic se întâlnesc în punctul A, s-a considerat că există o masă nulă în punctul comun așa cum este indicat în [71]. Dacă presupunem că soluțiile sistemului (4.37) sunt de forma:

$$\varphi_{me} = A_{me} \sin pt, \varphi_S = A_S \sin pt, \varphi_P = A_P \sin pt, \varphi_A = A_A \sin pt, \quad (4.38)$$

obținem sistemul algebric omogen cu necunoscutele A_{me}, A_S, A_P, A_A . Soluția nenulă cere ca determinantul

$$D(p^2) = \begin{vmatrix} C_{me} - J_{me} p^2 & - C_{me} & 0 & 0 \\ - C_{me} & C_{me} + C_S + C_p & - C_S & - C_p \\ 0 & - C_S & C_S - J_S p^2 & 0 \\ 0 & - C_p & 0 & C_p - J_p p^2 \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

Să fie nul, adică

$$D(p^2) = Ap^6 - Bp^4 + Cp^2 - D = 0, \quad (4.40)$$

unde A, B, C, D sunt coeficienți constanți depinzând de J_i și C_i .

Soluțiile reale ale ecuației (4.40) reprezintă pulsațiile proprii ale lanțului cinematic de rulare pentru care acesta poate vibra liber.

Folosind (4.38) relațiile (4.37) devin

$$\begin{aligned}
& J_{me} \ddot{\varphi}_{me} + C_{me}(\varphi_{me} - \varphi_A) = M_{me} \sin \beta t \\
& -C_{me}(\varphi_{me} - \varphi_A) + C_S(\varphi_A - \varphi_S) + C_p(\varphi_A - \varphi_P) = 0 \\
& -J_S \ddot{\varphi}_S - C_S(\varphi_A - \varphi_S) = M_S \sin \beta t \\
& (J_P \ddot{\varphi}_P - C_p(\varphi_A - \varphi_P)) = M_P \sin \beta t,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

unde β este frecvența momentului perturbator, deci și a vibrației.

Soluția generală a sistemului (4.41) este formată din soluția sistemului omogen la care se adaugă soluția particulară de forma

$$\varphi_i = A_i \sin \beta t \tag{4.42}$$

Se fac notațiile:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{vmatrix} C_{me} - J_{me} \beta^2 & -C_{me} & M_{me} & 0 \\ -C_{me} & C_{me} + C_S + C_p & 0 & -C_p \\ 0 & -C_S & M_S & 0 \\ 0 & -C_p & M_P & C_p - J_p \beta^2 \end{vmatrix} \\
R &= \begin{vmatrix} C_{me} - J_{me} \beta^2 & -C_{me} & 0 & 0 \\ -C_{me} & C_{me} + C_S + C_p & -C_S & -C_p \\ 0 & -C_S & C_S - J_S \beta^2 & 0 \\ 0 & -C_p & 0 & C_p - J_p \beta^2 \end{vmatrix} \\
S &= \begin{vmatrix} C_{me} - J_{me} \beta^2 & -C_{me} & 0 & M_{me} \\ -C_{me} & C_{me} + C_S + C_p & -C_S & 0 \\ 0 & -C_S & C_S - J_S \beta^2 & M_S \\ 0 & -C_p & 0 & M_P \end{vmatrix} \\
T &= \begin{vmatrix} C_{me} - J_{me} b^2 & -C_{me} & 0 & 0 \\ -C_{me} & C_{me} + C_S + C_p & -C_S & -C_p \\ 0 & -C_S & C_S - J_S b^2 & 0 \\ 0 & -C_p & 0 & C_p - J_p b^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Deci, pentru cazul de față, amplitudinea la sculă va fi:

$$A_S = \frac{P}{R} \tag{4.43}$$

iar amplitudinea la piesă va fi:

$$A_P = \frac{S}{T} \tag{4.44}$$

Vibrația rezultantă se va obține prin compunerea celor două vibrații (a piesei și a sculei).

4.3. Sistemul dinamic al mașinii unelte. Caracteristicile statice și dinamice ale sistemului dinamic și elementelor sale

Caracteristica elementului sau a sistemului reprezintă raportul dintre mărimea de ieșire și mărimea de intrare ale elementului sau sistemului. Dacă mărimea de intrare este constantă în timp, atunci se obține caracteristica statică.

Caracteristica dinamică, spre deosebire de cea statică, se obține în condițiile unei mărimi de intrare variabilă în timp. Dimensiunea caracteristicii este determinată de raportul dimensiunilor mărimii de ieșire și celei de intrare. Caracteristicile statice și dinamice ale elementelor și sistemelor mașinilor-unelte sunt, în general, neliniare. Spre exemplu, caracteristica statică a sistemului elastic al mașinii-unelte, adică dependența deformației sistemului elastic de forța care acționează asupra sa, este o histerezis.

Caracteristicile sistemelor dinamice închise ale mașinilor-unelte se exprimă prin ecuații diferențiale care, în cazul cel mai general al acțiunii factorilor externi $f(t)$ și al acțiunii variației reglării $y(t)$, în raport cu o mărime de ieșire y_e (spre exemplu, deplasarea relativă dintre sculă și semifabricat, pot fi scrise sub forma:

$$X\left(x_e, \frac{dx_e}{dt}, \frac{d^2x_e}{dt^2}, \dots\right) = Z\left(f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \dots, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots\right) \quad (4.45)$$

Rezolvarea unei asemenea ecuații este de cele mai multe ori deosebit de greoaie, uneori imposibilă și chiar inutilă din punct de vedere practic. Pentru studierea calitativă și parțial cantitativă a problemelor dinamicii mașinilor-unelte, aceste sisteme dinamice se reduc la o formă mai simplă prin înlocuirea lor cu modelele practic echivalente, ale căror ecuații sunt liniare și cu coeficienți constanți. La stabilirea parametrilor modelelor echivalente, proprietățile neliniare ale diferitelor elemente ale sistemului se reprezintă sub forma unor dependențe liniare, valabile, în general, în cazul unor variații mici ale mărimii de intrare a elementelor considerate. Gradul de influență al proprietăților neliniare ale unor elemente din componența sistemului dinamic, asupra caracteristicilor statice și dinamice ale mașinii-unelte, depinde de caracterul neliniarităților, de regimul de exploatare al mașinii și de intensitatea fenomenelor vibratorii ale elementelor neliniare. De aceea, calculele efectuate pe un model liniarizat constituie o etapă necesară studiului sistemului dinamic al mașinii-unelte, ale cărei rezultate servesc între altele la aprecierea necesității de a lua în considerație neliniaritățile din sistem.

Sistemele dinamice se studiază mai comod pe modele liniarizate, în primul rând pentru că acestea admit principiul suprapunerii. Datorită acestui fapt ecuația (4.45) poate fi scrisă astfel:

$$X\left(x_e, \frac{dx_e}{dt}, \dots, \frac{d^m x_e}{dt^m}\right) = F\left(f, \frac{df}{dt}, \dots, \frac{d^n f}{dt^n}\right) + Y\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^k y}{dt^k}\right) \quad (4.46)$$

Studiul unei asemenea ecuații este mai comod cu ajutorul calculului operațional, utilizându-se transformarea Laplace. Aplicând transformata Laplace ecuației (4.46), comportarea sistemului va fi descrisă de expresia:

$$\begin{aligned} (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_e(s) = & (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) F(s) + \\ & + (c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_1 s + c_0) Y(s) \end{aligned} \quad (4.47)$$

în care coeficienții sunt determinați de proprietățile sistemului elastic și ale proceselor de lucru, precum și de interdependența dintre ele.

Formarea și rezolvarea ecuațiilor indicate mai sus reprezintă punctul de plecare în studiul și analiza teoretică a sistemului dinamic al mașinii-unelte, al elementelor sale și al interdependențelor dintre ele.

Astfel, caracteristica elementului sau sistemului scrisă sub forma transformatei Laplace se numește funcție de transfer $F(s)$ a elementului respectiv a sistemului dinamic.

Pentru un element a cărui mărime de intrare se simbolizează cu $X_i(s)$ mărimea de ieșire fiind $X_e(s)$, funcția de transfer se scrie sub forma:

$$G(s) = \frac{X_e(s)}{X_i(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (4.48)$$

în care $M(s)$ și $N(s)$ sunt polinoamele transformate ale mărimilor de ieșire respectiv de intrare.

Funcția de transfer a sistemului dinamic deschis $G_d(s)$ se va scrie în același fel, dar va fi o mărime adimensională deoarece mărimea de intrare și cea de ieșire au aceeași dimensiune. Pentru sistemele dinamice deschise ale mașinilor-unelte, de regulă, gradul polinomului $M(s)$ este mai mic decât al polinomului $N(s)$.

Sistemul dinamic închis, având un singur circuit, este caracterizat prin funcțiile de transfer determinate la acțiunea factorilor externi $G_f(s)$ și ca rezultat al variației reglării $G_y(s)$.

Astfel, funcția de transfer $G_y(s)$, stabilită ca urmare a variației reglării, are forma dată de relația (4.49) [71].

$$G_v(s) = \frac{X_e(s)}{Y(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)} \quad (4.49)$$

iar la acțiunea factorilor externi, funcția de transfer $G_f(s)$ are expresia:

$$G_f(s) = \frac{X_e(s)}{F(s)} = \frac{G_{f,d}(s)}{1 + G_d(s)} \quad (4.50)$$

unde: $G_{f,d}$ reprezintă funcția de transfer a sistemului dinamic deschis, stabilită la variația factorilor excitați externi, considerând $x_i = \text{constant}$;

G_d reprezintă funcția de transfer a sistemului deschis, determinată în condițiile $f(t) = \text{constant}$ și $y(t) = \text{constant}$.

Propoziția 4.1. *La legarea în serie a elementelor, funcția de transfer a sistemului va fi egală cu produsul funcțiilor de transfer ale elementelor.*

Propoziția 4.2. *La legarea în paralel a elementelor, funcția de transfer va fi egală cu suma funcțiilor de transfer ale elementelor.*

Analiza sistemelor dinamice se efectuează foarte comod cu ajutorul metodelor frecvențiale. Pentru aceasta se va urmări răspunsul sistemului (mărime de ieșire) când mărimea de intrare variază armonic în timp cu pulsația ω .

Pulsația ω poate lua valori, teoretic, între 0 și ∞ dar, din punct de vedere practic, este necesară variația numai între limitele domeniului de pulsații al procesului luat în studiu.

Dependența raportului dintre amplitudinile oscilațiilor mărimilor de ieșire și de intrare de frecvență reprezintă caracteristica amplitudine – frecvență.

Pe această caracteristică se pun în evidență parametrii de rezonanță ai sistemului. Dependența fazelor aceluiași oscilații este descrisă de caracteristica fază – frecvență. Caracteristica fază – frecvență exprimă variația defazajului dintre mărimile de intrare și ieșire în raport cu frecvența. Dar cele mai prețioase indicații asupra proprietăților sistemului dinamic sau ale elementelor sale sunt date de diagrama polară a funcției de transfer. Dependențele stabilite de această diagramă polară sunt echivalente celor determinate de caracteristicile amplitudine – frecvență și fază – frecvență luate împreună.

Diagrama polară se construiește în plan complex și se obține din funcția de transfer $G(s)$ prin înlocuirea simbolului diferențial s cu $i\omega$, unde i este unitatea imaginară iar ω este pulsația.

Corolarul 4.1. *Funcțiile de transfer se calculează pe baza expresiilor:*

- pentru un element sau pentru un sistem deschis:

$$G(i\omega) = \frac{X_e(\omega)}{X_i(\omega)} = \frac{M(i\omega)}{N(i\omega)} \quad (4.51)$$

- pentru un sistem închis, la variația reglării:

$$G_y(i\omega) = \frac{X_e(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{X(i\omega)}{Y(i\omega)} = \frac{G_d(i\omega)}{1 + G_d(i\omega)} \quad (4.52)$$

- pentru un sistem închis, dar la acțiunea factorului exterior:

$$G_f(i\omega) = \frac{X_e(i\omega)}{F(i\omega)} = \frac{G_{f,d}(i\omega)}{1 + G_d(i\omega)} \quad (4.53)$$

Pentru trasarea diagramelor polare ale funcțiilor de transfer este necesar ca expresiile (4.51), (4.52) și (4.53) să se prezinte sub forma generală a mărimilor complexe, adică:

$$G(i\omega) = R_e(\omega) + i I_m(\omega) \quad (4.54)$$

unde $R_e(\omega)$ este partea reală, iar $I_m(\omega)$ partea imaginară a funcției de transfer.

Graficele variației funcțiilor $A(\omega)$ și $f(\omega)$ reprezintă caracteristicile amplitudine – frecvență și respectiv fază – frecvență ale sistemului elastic pe care îl studiem. Diagrama polară a funcției de transfer se trasează în sistemul de axe de coordonate $R_e - i I_m$ al planului complex, folosind valorile $A(\omega)$ și $f(\omega)$, calculate pentru diverse valori ale pulsației ω .

Diagrama polară a funcției de transfer definește complet proprietățile și comportarea sistemelor sau elementelor liniare, dar trebuie subliniat că reprezentarea sa nu poate fi interpretată la prima vedere, ci numai după ce s-a căpătat o oarecare experiență în acest sens.

Dacă diagrama polară, trasată pe cale experimentală, poate fi aproximată cu un cerc, se poate considera că amortizarea este liniară conform [71]. Trasând câteva diagrame polare pentru diferite valori ale amplitudinii forței excitatoare, există posibilitatea aprecierii liniarității caracteristicii elastice a sistemului. Pentru aceasta se unesc punctele de aceeași frecvență de pe diagrame diferite. Dacă se obțin drepte concurente în origine, ipoteza liniarității caracteristicii elastice poate fi adoptată. În caz contrar, curbura liniilor de aceeași frecvență indică felul neliniarității – caracteristică tare sau moale, urmând a se stabili modalitatea cea mai potrivită de liniarizare.

Metodele frecvențiale de analiză, precum și caracteristicile frecvențiale pot fi aplicate numai sistemelor liniare. Sistemele dinamice ale mașinilor-unelte prezintă neliniarități evidente de tipul discontinuității, saturației, curburii caracteristicii, histerezisului, etc. Caracteristicile statice și dinamice ale sistemelor și elementelor mașinilor-unelte pot fi reprezentate grafic sau analitic, putând fi obținute teoretic sau experimental. Pentru determinarea pe cale experimentală a caracteristicilor se variază mărimile de intrare cu ajutorul unor dispozitive speciale și se înregistrează variația corespunzătoare a mărimilor de ieșire.

Spre exemplu, pentru determinarea uneia din caracteristicile frecvențiale (amplitudine – frecvență, fază – frecvență sau diagrama polară a

funcției de transfer) ale sistemului elastic al mașinii-unelte, se creează o forță periodică corespunzătoare mărimii de intrare (spre exemplu, forței de așchiere) cu ajutorul unui vibrator. Deplasarea punctelor sistemului elastic, care reprezintă mărimea de ieșire (de exemplu, deplasarea relativă dintre sculă și piesă), se sesizează cu ajutorul traductoarelor.

Caracteristicile statice și dinamice obținute teoretic sau experimental servesc la descrierea proprietăților unor elemente separate sau ale sistemelor în întregimea lor. Dar una din problemele importante, ce trebuie rezolvate în cadrul studiului sistemelor dinamice și al elementelor lor, constă în determinarea condițiilor de stabilitate. Unul din criteriile de stabilitate cel mai des utilizat în dinamica mașinilor-unelte este criteriul Nyquist.

Criteriul Nyquist permite ca, pe baza diagramei polare a funcției de transfer a sistemului dinamic deschis, să se aprecieze stabilitatea sistemului închis. Acest criteriu este comod de a fi aplicat în cazul în care sistemul deschis este stabil sau se află la limita de stabilitate, iar funcția de transfer a sa are polinomul numărătorului cu un grad mai mic decât al numitorului.

Teorema 4.1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem dinamic închis să fie stabil este ca diagrama polară a funcției de transfer G_d a sistemului deschis corespunzător să nu cuprindă în interior punctul de abscisă - 1 de pe axa reală.*

În paragraful următor vom exemplifica cele arătate.

Trasarea diagramei polare a funcției de transfer în cazul mașinii de frezat verticale

Considerând că asupra sistemului elastic parțial al piesei de la mașina de frezat acționează forța de așchiere $P = P_0 \sin \omega t$, înclinată față de orizontală la un anumit moment, cu un unghi α , ecuațiile diferențiale concrete de mișcare sunt cele date de formulele (4.55) așa cum este indicat în [71].

$$\begin{aligned}
 0,3 \ddot{z}_1 + 3,75 \ddot{\phi}_1 + 134 \dot{z}_1 + 635 \cdot 10^3 z_1 - 653 \cdot 10^3 z_2 &= P_0 \cos \alpha \sin \omega t \\
 0,15 \ddot{z}_2 + 0,945 \ddot{\phi}_2 + 82 \dot{z}_2 + 1063 \cdot 10^3 z_2 - 653 \cdot 10^3 z_1 &= 0 \\
 0,3 \ddot{y}_1 + 6,08 \ddot{\phi}_1 + 31,8 \dot{y}_1 + 154 \cdot 10^3 y_1 - 154 \cdot 10^3 y_2 &= P_0 \sin \alpha \sin \omega t \\
 0,15 \ddot{y}_2 + 0,346 \ddot{\phi}_2 + 20,5 \dot{y}_2 + 536 \cdot 10^3 y_2 - 154 \cdot 10^3 y_1 &= 0 \\
 340 \ddot{\phi}_1 + 3,75 \ddot{z}_1 + 6,08 \ddot{y}_1 + 15150 \dot{\phi}_1 + 849 \cdot 10^5 \phi_1 - 849 \cdot 10^5 \phi_2 &= P_0 R \sin \omega t \\
 3,75 \ddot{\phi}_2 + 0,945 \ddot{z}_2 + 0,346 \ddot{y}_2 + 11580 \dot{\phi}_2 + 1419 \cdot 10^5 \phi_2 - 849 \cdot 10^5 \phi_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Sistemul elastic parțial al piesei de la mașina de frezat verticală este dat în fig. 4.5.

ω	$R_e \cdot 10^{-6}$ mm/N	$i \text{Im} \cdot 10^{-6}$ mm/N
100	5,71	-0,242
200	11,86	-2,22
220	13,90	-2,92
240	20,05	-8,29
260	26,50	-18,70
280	19,30	-46,20
300	-21,60	-44,60
320	-26,10	-20,20
340	-22,20	-9,94
360	-17,90	-5,66
380	-15,30	-3,65
400	-13,50	-2,440
500	-9,92	-0,320
600	-10,10	0,482
700	-13,40	0,313
800	-20,10	-3,340
840	7,58	-22,600
860	9,45	-14,100
880	8,32	-9,040
900	7,37	-6,180
1000	3,28	-1,610

tabelul 4.1

ω	$R_e \cdot 10^{-6}$ mm/N	$i \text{Im} \cdot 10^{-6}$ mm/N
100	4,1	-2,88
200	74,4	-15,3
220	81,3	-18,3
240	102,8	-46,2
260	134,5	-94,5
280	91,5	-216,5
300	-91,5	193,5
320	-93,1	54,2
340	-79,4	-38,6
360	-58,1	-21,5
380	-45,4	-13,65
400	-36,2	-9,33
500	-14,5	-3,24
600	-5,84	-2,88
700	0,904	-2,06
800	12,3	-0,163
840	-4,71	-18,3
860	-7,89	12,38
880	-8,12	8,73
900	-7,25	4,61
1000	-5,36	2,08

tabelul 4.2

4.4 Diagrama de stabilitate ridicată pornind de la schema bloc simplificată a sistemului dinamic mașină-unealtă - piesă - dispozitiv – sculă în procesul de așchiere

În [66] este prezentată schema bloc simplificată a sistemului dinamic mașină-unealtă - piesă - dispozitiv - sculă în procesul de așchiere, schemă pe care o redau mai jos în fig. 4.8, pe care am să o folosesc pentru a studia stabilitatea mașinilor de frezat.

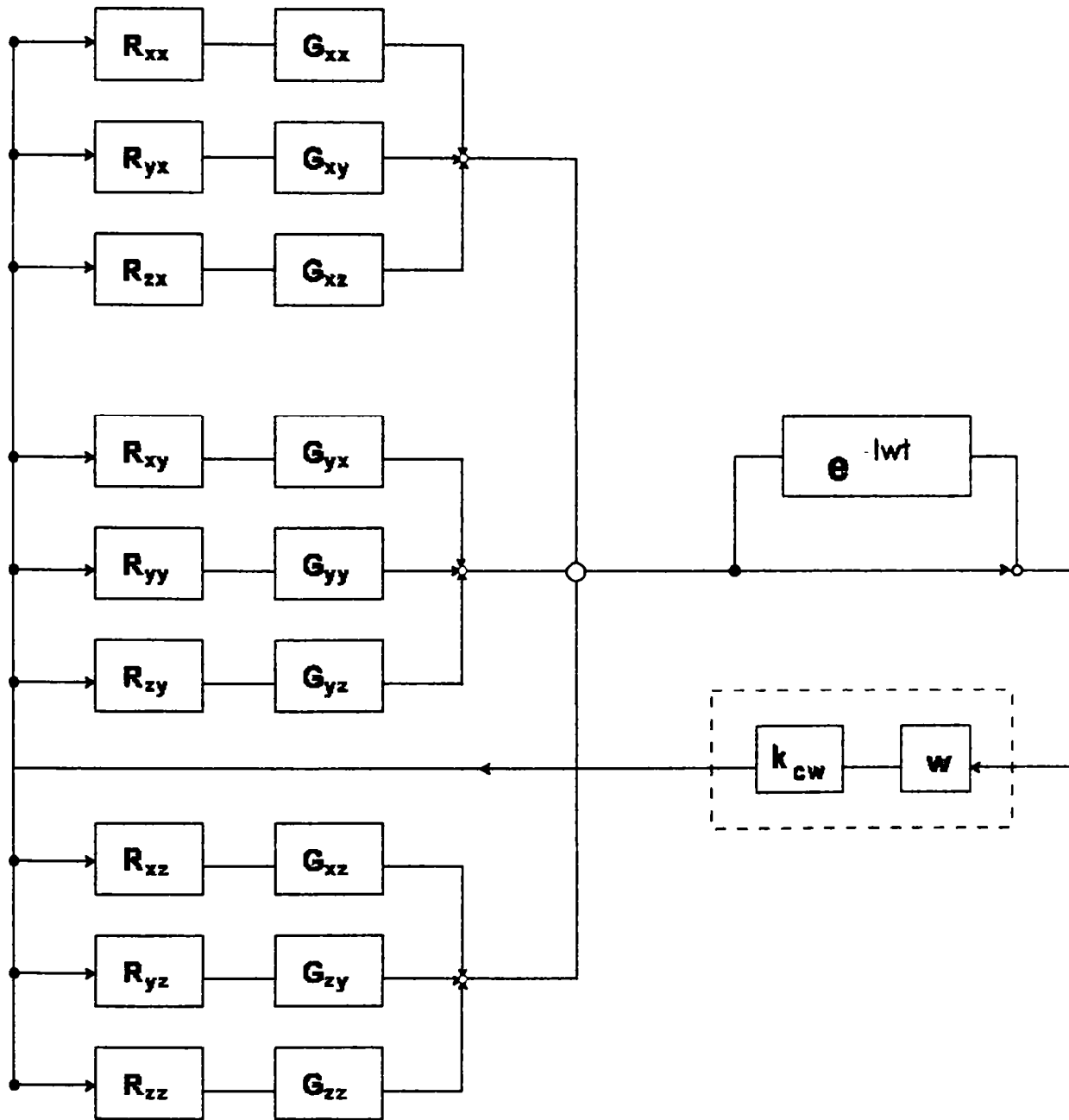


fig48

În fig. 4.9 este redată schema bloc compactă a unui proces de aşchiere la o structură cu oricâte grade de libertate așa cum este ea prezentată în [66].

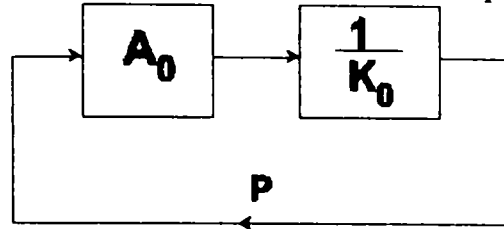


Fig. 4.9

Pentru analiza stabilității este interesant de aflat doar limita sau pragul de stabilitate, unde se trece din domeniul stabil în cel instabil. Aici mărimea de intrare Z_i este egală ca mărime și defazaj cu mărimea de ieșire Z_e , deci:

$$\frac{Z_e}{Z_i} = 1 \quad (4.56)$$

Teorema 4.2. *Condiția necesară ca un sistem mecanic să fie stabil este ca*

$$\frac{Z_e}{Z_i} < 1$$

Dacă $\left(\frac{Z_e}{Z_i}\right) > 1$ amplitudinile sunt în creștere și deci avem instabilitate.

Dacă $\left(\frac{Z_e}{Z_i}\right) < 1$ amplitudinile sunt în descreștere și deci avem stabilitate.

În cazul de față mărimea de intrare este A_0 iar mărimea de ieșire este K_0 .
Din (4.21) rezultă că pragul de stabilitate este atins dacă

$$A_0 = K_0 \quad (4.57)$$

unde

$$A_0 = R_{XX} G_{XX} + R_{YX} G_{XY} + R_{ZX} G_{XZ} + R_{XY} G_{YX} + R_{YY} G_{YY} + R_{ZY} G_{YZ} + R_{XZ} G_{ZX} + R_{YZ} G_{ZY} + R_{ZZ} G_{ZZ} \quad (4.58)$$

și

$$K_0 = \frac{not \quad 1}{w \cdot k_{cw} \cdot (e^{-i\omega\tau} - 1)} \quad (4.59)$$

Mărimile folosite sunt:

$R_{XX}, R_{YX}, R_{ZX}, R_{XY}, R_{YY}, R_{ZY}, R_{XZ}, R_{YZ}, R_{ZZ}$ sunt coeficienții direcționali

$G_{XX}, G_{YX}, G_{XZ}, G_{YX}, G_{YY}, G_{YZ}, G_{ZX}, G_{ZY}, G_{ZZ}$ sunt funcțiile de transfer ale cedării dinamice a structurii $[\mu\text{m/N}]$

w = adâncimea de aşchiere $[\text{mm}]$

k_{cw} = coeficientul dinamic al forței de așchiere raportat la adâncimea de așchiere
[N/mm]

ω = pulsație (frecvență circulară) [1/s]

τ = timp de decalaj între 2 muchii de tăiere [s]

P = forța [N]

Atât A_0 cât și K_0 sunt mărimi complexe. Din acest motiv ele se pot scrie:

$$A_0 = A_{0r} + iA_{0i} \quad (4.60)$$

$$K_0 = K_{0r} + iK_{0i} \quad (4.61)$$

Din (4.59) și (4.61) rezultă

$$\begin{aligned} K_0 &= K_{0r} + iK_{0i} = \frac{1}{w \cdot k_{cw}} \left(e^{-i\omega\tau} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \frac{1}{\cos(-\omega\tau) + i\sin(-\omega\tau) - 1} = \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \frac{1}{(\cos\omega\tau - 1) - i\sin\omega\tau} = \\ &= \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \frac{(\cos\omega\tau - 1) + i\sin\omega\tau}{(\cos\omega\tau - 1)^2 - i^2\sin^2\omega\tau} = \\ &= \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \left[\frac{\cos\omega\tau - 1}{\cos^2\omega\tau - 2\cos\omega\tau + 1 + \sin^2\omega\tau} + i \cdot \frac{\sin\omega\tau}{2 - 2\cos\omega\tau} \right] = \\ &= \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \frac{\cos\omega\tau - 1}{2(1 - \cos\omega\tau)} + i \cdot \frac{1}{wk_{cw}} \cdot \frac{\sin\omega\tau}{2(1 - \cos\omega\tau)} = -\frac{1}{2wk_{cw}} + \\ &+ i \cdot \frac{1}{2wk_{cw}} \cdot \frac{\sin\omega\tau}{1 - \cos\omega\tau} \end{aligned}$$

Prin identificare rezultă

$$K_{0r} = -\frac{1}{2wk_{cw}} \quad (4.62)$$

$$K_{0i} = \frac{1}{2wk_{cw}} \cdot \frac{\sin\omega\tau}{1 - \cos\omega\tau} \quad (4.63)$$

K_{0i} se mai scrie :

$$\frac{\sin\omega\tau}{1 - \cos\omega\tau} = \frac{2\sin\frac{\omega\tau}{2} \cos\frac{\omega\tau}{2}}{1 - \left(\cos^2\frac{\omega\tau}{2} - \sin^2\frac{\omega\tau}{2} \right)} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2}}{2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}} = \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{\sin \frac{\omega\tau}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2}$$

Așadar am demonstrat formula:

$$\frac{\sin \omega\tau}{1 - \cos \omega\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2} \quad (4.64)$$

Înlocuind (4.64) în (4.63) rezultă :

$$K_{oi} = \frac{1}{2\omega k_{cw}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2} \quad (4.65)$$

Din (4.62) și (4.65) se obține

$$\frac{K_{oi}}{K_{or}} = -\operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau}{2} = -\frac{K_{oi}}{K_{or}} \quad (4.66)$$

Din (4.66) se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{\omega\tau}{2} &= \operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right) + h\pi \\ \omega\tau &= 2\operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right) + 2h\pi \end{aligned} \quad (4.67)$$

$h = 0, 1, 2, 3, \dots$

Având în vedere relația fundamentală

$$n = \frac{60}{\tau \cdot z_1} \quad (4.68)$$

unde:

n = turația frezei [rot/min], z_1 = nr. de dinți al frezei, τ = timp de decalaj între 2 muchii de tăiere [s]

$$\omega = 2\pi f \quad (4.69)$$

ω = pulsație (frecvență circulară) [1/s], f = frecvență [Hz]

obținem:

$$\begin{aligned} nz &= \frac{60}{\tau} \stackrel{(4.67)}{=} \frac{60}{\frac{2\operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right) + 2h\pi}{\omega}} = \\ &= \frac{60\omega}{2\operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right) + 2h\pi} = \frac{60 \cdot 2\pi f}{2\operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right) + 2h\pi} = \frac{60f}{\frac{\operatorname{arcctg} \left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}} \right)}{\pi} + h} \end{aligned}$$

În concluzie:

$$nz = \frac{60f}{\frac{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{K_{oi}}{K_{or}}\right)}{\pi} + h} \quad (4.70)$$

$h = 0, 1, 2, 3, \dots$

Din (4.62) rezultă $w = \frac{-1}{2k_{cw} \cdot K_{or}}$ sau

$$w \cdot z = \frac{1}{-2k_{cw} \left(\frac{K_{or}}{z}\right)} \quad (4.71)$$

Pragul de stabilitate este atins dacă $A_0 = K_0$ și folosind (4.60) și (4.61) se deduce că pragul de stabilitate este atins când:

$$A_{or} = K_{or} \quad (4.72)$$

$$A_{oi} = K_{oi} \quad (4.73)$$

Înlocuind (4.72) și (4.73) în (4.70) și (4.71) se obțin:

$$nz = \frac{60f}{\frac{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{A_{oi}}{A_{or}}\right)}{\pi} + h} \quad (4.74)$$

$h = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$wz = \frac{-1}{2k_{cw} \cdot \left(\frac{A_{or}}{z}\right)} \quad (4.75)$$

Funcțiile de transfer ale cedării dinamice a structurii se calculează folosind formulele :

$$G_{xx}(i\omega) = \frac{x(i\omega)}{P_x(i\omega)}; G_{xy}(i\omega) = \frac{x(i\omega)}{P_y(i\omega)}; G_{xz}(i\omega) = \frac{x(i\omega)}{P_z(i\omega)};$$

$$G_{yx}(i\omega) = \frac{y(i\omega)}{P_x(i\omega)}; G_{yy}(i\omega) = \frac{y(i\omega)}{P_y(i\omega)}; G_{yz}(i\omega) = \frac{y(i\omega)}{P_z(i\omega)}; \quad (4.76)$$

$$G_{zx}(i\omega) = \frac{z(i\omega)}{P_x(i\omega)}; G_{zy}(i\omega) = \frac{z(i\omega)}{P_y(i\omega)}; G_{zz}(i\omega) = \frac{z(i\omega)}{P_z(i\omega)};$$

La mașina de frezat verticală rezultanta forțelor care acționează între sculă și piesă este un vector în spațiu, care poate fi determinat prin proiecțiile sale: P_x , P_y , P_z , pe cele trei axe de coordonate trirectangulare ale sistemului cartezian în care se înscrie mașina-unealtă. În mod similar, deplasarea relativă între sculă și piesă este un vector dirijat tot în spațiu, care poate fi determinată prin proiecțiile ei: x , y , z , pe același sistem de coordonate.

Pentru a determina cele 9 funcții de transfer ale cedării dinamice a structurii, date de formulele (4.76) se excită structura în mod succesiv în direcția celor 3 axe de coordonate, simulând astfel cele trei componente P_x , P_y , P_z ale forței de așchiere, măsurându-se în fiecare caz răspunsul structurii (amplitudinea de deplasare) în direcția aceluiași trei axe de coordonate x , y , z , totodată și unghiul de defazaj Φ între forță și deplasare.

Pentru a clarifica cele expuse mai sus cred că este utilă precizarea:

$$a(i\omega) = ae^{i\Psi(\omega)} = a[\cos\Psi(\omega) + i\sin\Psi(\omega)] \quad (4.77)$$

Așadar P_x , P_y , P_z , x , y , z le determinăm experimental. Folosind formulele (4.76) se determină cele 9 funcții de transfer ale cedării dinamice a structurii.

Calculul coeficienților direcționali se face folosind formule de tipul 0.

$$R_{xx} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos\alpha \sin\chi \cos\varepsilon \cos(\varepsilon - \beta) \quad (4.78)$$

unde:

z este numărul de dinți a frezei

Φ_I este unghiul sub care freza intră în piesă [grade]

Φ_E este unghiul sub care freza părăsește piesa [grade]

α este unghiul dintre rezultanta forței de așchiere și planul x,y [grade]

β este unghiul dintre rezultanta forței de așchiere și normala pe suprafața așchiată [grade]

χ este unghiul de atac al cuțitului [grade]

ε reprezintă pasul unghiular al normalei pe suprafața așchiată [grade]. ε este unul din parametrii principali folosit în analiza comportării dinamice a mașinii de frezat.

Asupra calculului coeficienților direcționali se va reveni într-un alt paragraf al acestei teze.

Cu ajutorul formulelor de tipul (4.78) determinăm coeficienții direcționali. Mărimile ce intervin în formulele de tipul (4.78) se măsoară în timpul experiențelor (încercărilor pe standul de cercetări).

Cu formula (4.56) determinăm A_o și deci pot să determinăm A_{or} și A_{oi} . Cu A_{or} și A_{oi} , folosind formulele (4.74) și (4.75), pot ridica diagramele de stabilitate.

Diagramele de stabilitate sunt reprezentări grafice ce au pe abscisă valoarea "n" a rotației frezei, iar pe ordonată valoarea "w" a adâncimii de așchiere, aceste mărimi calculându-se cu formulele (4.74), respectiv (4.75).

Pentru a putea fi folosite la scule cu număr diferit de dinți pe abscisă se consideră valoarea lui "nz" iar pe ordonată valoarea lui "wz".

Ținând cont de formulele întâlnite în [66] se deduc formulele de calcul ale coeficienților direcționali:

$$R_{XX} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \sin \chi \cos \varepsilon \cos(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{XY} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \sin \chi \sin \varepsilon \cos(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{XZ} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \cos \chi \cos(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{YX} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \sin \chi \cos \varepsilon \sin(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{YY} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \sin \chi \sin \varepsilon \sin(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{YZ} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \cos \alpha \cos \chi \sin(\varepsilon - \beta)$$

$$R_{ZX} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \sin \alpha \sin \chi \cos \varepsilon$$

$$R_{ZY} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \sin \alpha \sin \chi \sin \varepsilon$$

$$R_{ZZ} = -z \cdot \frac{\varphi_I - \varphi_E}{2} \sin \alpha \cos \chi$$

unde

$R_{XX}, R_{XY}, R_{XZ}, R_{YX}, R_{YY}, R_{YZ}, R_{ZX}, R_{ZY}, R_{ZZ}$ sunt coeficienții direcționali
 z = numărul de dinți al frezei

- φ_k = unghiul sub care freza părăsește piesa
- φ_l = unghiul sub care freza intră în piesă
- α = unghiul dintre rezultanta forței de așchiere și planul xy [grade]
- β = unghiul dintre rezultanta forței de așchiere și normala pe suprafața așchiată [grade]
- χ = unghiul de atac al cuțitului [grade]
- ε = pasul unghiului al normalei pe suprafața așchiată [grade].

Observații asupra analizării stabilității mașinilor de frezat

În general, mișcarea unui punct material sau a unui sistem de puncte materiale poate fi descrisă cu ajutorul ecuațiilor diferențiale. Problema integrării ecuațiilor diferențiale sau a sistemelor de ecuații diferențiale nu este întotdeauna ușor de rezolvat. De aceea, în acest caz are o mare importanță analiza calitativă a acestor probleme.

Analiza calitativă este un capitol al teoriei ecuațiilor diferențiale care studiază comportarea soluțiilor unei probleme de datele problemei, fără a se cunoaște acele soluții. Nu întotdeauna simpla introducere în calculator a unei ecuații poate duce la rezultate favorabile. Uneori sunt mai importante teoremele de neexistență decât cele de existență. Pe de altă parte, existența mai multor soluții poate conduce la blocarea calculului numeric, ca în cazul apariției unei bifurcații.

Studiul complet al unor probleme pentru ecuații diferențiale constă din: analiza cantitativă (metode de deducere a unor soluții), analiza calitativă și rezolvarea numerică pe calculator. Trebuie remarcat faptul că rezolvarea numerică trebuie să fie ulterioară analizei calitative. Analiza calitativă este cea care arată, în ultimă instanță, care este mulțimea tuturor soluțiilor unei probleme, la ce comportamente ale soluțiilor ne putem aștepta, în funcție de toate valorile posibile ale tuturor datelor. O singură soluție corespunzătoare unei mulțimi fixate de date va corespunde unui singur aspect al acelei evoluții.

Productivitatea muncii la mașinile de frezat depinde în mod hotărâtor de capacitatea de așchiere care, în multe cazuri, este limitată prematur de stabilitatea dinamică insuficientă. Pierderea stabilității dinamice la un regim de așchiere, uneori mult sub cel limitat de puterea motorului de antrenare a sculei, se datorează faptului că atât la proiectarea mașinilor unelte cât și la proiectarea procesului tehnologic, comportarea dinamică a sistemului mașină unealtă – piesă – dispozitiv – sculă, și mai ales a mașinii-unelte, este luat în considerare în mod simplificat. Cartea mașinii, livrată beneficiarului împreună cu mașina-unealtă, trebuie să cuprindă:

a) Diagrama de stabilitate necondiționată ridicată prin așchiere.

- b)Diagramele reprezentând variația coeficienților direcționali, precum și diagramele părții reale a caracteristicii frecvențiale amplitudine – fază ai mașinii.
- c)Recomandări în vederea evitării eventualelor domenii de instabilitate dinamică.

Cerințele pe plan mondial de a asigura mașinii-unelte un comportament dinamic stabil au devenit o preocupare cotidiană și deci competitivitatea industriei constructoare de mașini-unelte nu poate fi concepută fără studiul stabilității.

5. SISTEME VIBROPERCUTANTE ȘI APLICAȚII

5.1. Stadiul dezvoltării cercetărilor în domeniul vibropercuțiilor

Sistemele dinamice care execută mișcări vibratorii, ciocniri repetate și în care influența ciocnirilor este evidențiată și nu poate fi neglijată se numesc sisteme vibropercutante.

Pentru generarea mișcărilor vibropercutante nu este necesar ca mișcarea sistemului să fie vibratorie și deci mișcările vibropercutante se realizează în esență datorită ciocnirilor.

Datorită interacțiunilor percutante, sistemele mecanice fără alte excitații exterioare execută mișcări vibropercutante libere. Întrucât energia este disipată prin ciocniri și prin frecări, mișcările ce rezultă au caracter temporal și nu sunt importante în aplicații. În ipoteza ciocnirilor perfect elastice și în lipsa amortizării se pot imagina sisteme vibropercutante cu mișcări staționare. Pentru ca mișcările vibropercutante să fie staționare este necesar ca sistemul să fie supus unor excitații perturbatoare. De regulă aceste excitații sunt periodice sau chiar armonice.

Sub acțiunea unei excitații periodice se poate arăta că există regimuri de mișcare periodice, având numai perioada multiplă celei cunoscute pentru excitație.

La analiza mișcarea unui sistem vibropercutant este necesar să se precizeze și condițiile de stabilitate împreună cu cele de existență delimitând astfel mișcările periodice care se și realizează efectiv.

Clasificarea sistemelor vibropercutante nu ține seama de elementele constructive ci de modelele dinamice corespunzătoare.

Mișcări vibropercutante se întâlnesc foarte des în tehnică. Pentru a putea clasifica sistemele vibropercutante acestea se pot grupa în funcție de destinația lor funcțională.

În primul rând se vor considera mașinile și mecanismele pentru care interacțiunile percutante constituie baza procesului de funcționare.

În construcții, mecanismele vibropercutante se folosesc pentru înfigerea piloților și palplanșelor în pământ și de aceea s-au studiat teoretic și experimental mai multe scheme constructive care diferă prin poziția maselor și a legăturilor dintre ele. De regulă mecanismul vibropercutant se mișcă sub acțiunea unei forțe perturbatoare produsă de generatorul de vibrații cu mase excentrice în rotație, antrenat de un motor electric. Ciocnirile care au loc între

masa percutantă și capul pilotului măresc eficiența înfîngerii prin vibrații a piloților în pământ.

De asemenea pentru compactările de suprafață se folosesc mașini vibratoare montate pe plăcile compactoare. Aceste mașini vibratoare de compactat conțin un motor obișnuit cu explozie, de unde printr-o transmisie este antrenat generatorul de vibrații cu excentrice. Mișcarea compactorului se poate face cu salturi urmate de ciocniri cu terenul.

Mașina interacționează cu terenul pentru a produce îndesarea pământului și funcționează pe același principiu ca și în cazul înfîngerii prin vibropercuții.

Pentru dezbaterea formelor de turnare, în turnătorii se folosesc deseori grătare mecanice cu excentrice și cu inserție.

În cazul dezbaterii pe grătarul mecanic acționat cu excentric procesul tehnologic constă în aruncarea formei supuse dezbaterii deasupra grătarului urmată de căderea și ciocnirea ei cu grătarul. Forțele de inerție ale masei bătătorite, în momentul ciocnirii, vor contribui la dezbaterea ei din rama de formare.

Grătarele inerțiale sunt antrenate cu ajutorul unui generator de vibrații cu masă excentrică în rotație și există cel puțin două tipuri constructive [102].

De asemenea și mașinile de forjat și ștanțat, cum ar fi ciocanele cu arc, cu fricțiune sau pneumatice pot fi considerate cu acțiune vibropercutantă. Chiar dacă dimensiunile și proprietățile semifabricatului variază în procesul forjării, mișcarea ciocanului se poate considera aproape periodică. Prin realizarea unor regimuri periodice, funcționarea ciocanului este mai eficace și mai economică.

Trebuie arătat de asemenea că există diverse construcții de ciocane vibropercutante la care acționarea se poate face cu mecanism bielă – manivelă, electromagnetic și pneumatic.

Și în domeniul transportului sau a cernerii anumitor materiale folosirea vibrațiilor este avantajoasă.

Principiul vibropercuțiilor este folosit și la construirea unor dispozitive mecanice și electromagnetice cum ar fi: dispozitiv pentru măsurarea amplitudinii unei membrane telefonice, soneria electrică, relee, întrerupătoarele electromagnetice precum și unele aparate de reglare automată.

Mișcări vibropercutante apar și la mori cu vibrații, la unele, la o anumită viteză de rotație încărcătura se deplasează independent. Măcinarea se realizează datorită mișcărilor vibropercutante ale materialului introdus împreună cu bilele morii.

Interacțiuni percutante pot să apară în funcționarea unor mecanisme sau mașini și au un efect dăunător. Aceste interacțiuni percutante apar datorită unor jocuri în cuplele cinematice. De asemenea existența unor erori de execuție a elementelor mecanismului pot produce abateri cinematice și dinamice.

În orice cuplă cinematică, datorită jocurilor, legile mișcării au discontinuități ce influențează funcționarea mecanismului.

La mecanismul cu roți dințate angrenarea dinților se face de obicei cu ciocniri, în contact aflându-se una sau două perechi de dinți. Ciocnirile au loc în momentul intrării primei perechi de dinți în angrenaj.

Apariția vibrațiilor unui arbore orizontal așezat pe rulmenți este posibilă și fără mase excentrice. Datorită jocurilor, arborele poate ajunge să se ciocnească atât cu bilele inferioare cât și cu cele superioare. La fel stau lucrurile și în cazul arborelui așezat pe lagăre de alunecare în prezența unui joc radial.

La funcționarea unor mecanisme rapide cu came, mecanismul de acționare este supus unor interacțiuni percutante.

Sistemele vibropercutante se pot folosi și în scopul amortizării vibrațiilor. Un sistem de amortizare a vibrațiilor de la paletele de turbină, cu acțiune percutantă a fost inventat din anul 1931 de către inginerul A. Paget [88].

Vibrațiile de înaltă frecvență ale cuțitelor de strung se pot amortiza cu ajutorul unui amortizor. Aici interacțiunile percutante se datoresc prezenței unui joc în îmbinarea dintre bulon și cuțit. Prin modificarea lungimii de înșurubare se reglează jocul care influențează în cea mai mare măsură asupra eficacității amortizorului.

Sunt multe situații când sisteme vibropercutante cu destinație diferită coincid ca modele dinamice. Așadar, în acest caz concluziile stabilite se pot folosi în toate aplicațiile ce corespund unui anumit model. Alegerea modelului ce corespunde unui anumit sistem real necesită evidențierea caracteristicilor mai importante ale sistemului și neglijarea altora care influențează într-o măsură mai mică. Modelul rezultat este o idealizare a modelului real. Comportarea dinamică a modelului idealizat trebuie să fie cât mai apropiate de cea a modelului real.

Când stabilim modelul, alegem corpurile cu mase discrete și le presupunem rigide. Modelul va conține un anumit număr de mase concentrate rezultând astfel un număr finit de grade de libertate. Numărul gradelor de libertate este o caracteristică esențială pentru model.

La sistemele vibropercutante, esențiale sunt masele care se ciocnesc în timpul mișcării.

Prin cuplă percutantă se definește ansamblul format din două elemente ale unui sistem vibropercutant care se ciocnesc între ele în timpul mișcării. La orice model trebuie identificate toate cuplele percutante posibile.

Este posibil ca în unele cuple percutante, datorită configurației geometrice a sistemului, să nu poată avea loc ciocniri și din acest motiv aceste cuple se numesc fictive și ele trebuie întotdeauna identificate.

Există modele în care una dintre mase face parte din două cuple percutante (maximum două).

Deoarece ciocnirile pot avea loc în toate cuplele percutante aceste modele se numesc deschise. Există și posibilitatea ca unele cuple să fie fictive, în acest caz modelul se numește închis.

Natura cuplelor percutante din unele modele se poate ușor stabili în funcție de dimensiunile geometrice ale jocurilor din cuple.

Atunci când una din masele unei cuple percutante devine nulă se va folosi termenul de semicuplă percutantă.

Metodele de studiu din teoria vibrațiilor nu se pot aplica întocmai la sistemele vibropercutante întrucât aici apar discontinuități ale vitezelor datorită ciocnirilor.

O schemă generală și unitară de tratare a oricărei probleme de vibropercuții a fost dată cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange și a funcției legăturii unilaterale [99] care s-a aplicat consecvent în studiul sistemelor vibropercutante [25].

Este important ca pentru sisteme supuse la legături să se studieze și reacțiunile datorate ciocnirilor, un rol important în aceste studii revenind centrului și axelor de percuție.

Dacă ciocnirea este neinstantanee, așa cum este ea în realitate rezultă caracterul neliniar al sistemelor vibropercutante.

Indiferent de metodele care se folosesc, studiul mișcărilor periodice trebuie să pornească de la stabilirea precisă a ecuațiilor și condițiilor analitice caracteristice mișcării sistemului. Pentru o sistematizare a sistemelor vibropercutante, Gh. Silaș și L. Brîndeu [99] [27], introduc o clasificare a mișcărilor posibile într-o cuplă percutantă și determină condițiile de realizare ale acestora. Folosind ecuațiile lui Lagrange se obține o metodă generală de studiu a mișcărilor periodice posibile ale sistemului vibropercutant.

Dinamica sistemelor vibropercutante este încă la început, existând încă multe probleme pentru care trebuie perfecționate metodele existente, studiul dezvoltării cercetărilor în domeniul vibropercuțiilor fiind mai pe larg prezentat în [102].

În funcție de forma ecuațiilor diferențiale ce descriu mișcările sistemelor vibropercutante între ciocniri, sistemele vibropercutante se pot clasifica astfel:

- a) sisteme vibropercutante liniare, când ecuația diferențială între două ciocniri succesive este liniară;
- b) sisteme vibropercutante neliniare când ecuația are caracteristică neliniară.

Această împărțire ține seama doar de proprietățile mișcării în ansamblu.

Întrucât proprietățile de neliniaritate se manifestă nu numai la sistemele vibropercutante neliniare, ci și la cele liniare, sistemele vibropercutante trebuie considerate ca fiind sisteme neliniare.

Pentru studiul stabilității sistemelor vibropercutante s-a elaborat o metodă exactă de scriere a condițiilor de stabilitate, de către L. Brîndeu, fără să fie necesară cunoașterea legilor mișcării.

Se folosesc pentru studiul stabilității ecuațiile în variații deduse direct din ecuațiile diferențiale ale mișcării și condițiile la limită deduse pentru momentele ciocnirilor. De remarcat că această metodă este aplicabilă tuturor sistemelor vibropercutante indiferent de caracteristică.

5.2. Modele dinamice în dinamica ciocanelor vibropercutante

În prezent industria construcțiilor de mașini este orientată esențial spre realizarea unor produse de înalt nivel tehnic și de mare complexitate. Un rol important pentru realizarea unor astfel de produse printre care trebuie încadrate și ciocanele vibropercutante, revine cercetării proceselor de funcționare încât să conducă la optimizarea proiectării.

Activitatea de cercetare și proiectare rațională în construcția și exploatarea ciocanelor vibropercutante nu se poate efectua fără o tratare riguros științifică a fenomenelor dinamice vibropercutante care au loc în timpul funcționării. Apare astfel necesitatea de a pune la dispoziția specialiștilor din construcția de mașini a unor cercetări care să trateze probleme actuale de dinamica mașinilor și utilajelor supuse la ciocniri.

Pondere mare în construcția multor mașini au acelea a căror funcționare este caracterizată prin apariția de discontinuități ale vitezelor și accelerațiilor ce conduc la apariția unor solicitări dinamice periculoase.

În continuare s-a abordat dinamica ciocanelor vibropercutante, fiind luate în considerare modele cu una sau mai multe cuple percutante.

Studiile privind modelarea dinamică a mecanismelor vibropercutante în care se cuprind și cele ce se referă la ciocanele vibropercutante, prezintă deosebită importanță practică în construcția și alegerea regimurilor optime de funcționare. Astfel s-a conturat deja o direcție de cercetare complet nouă cu multe dezvoltări consacrate în literatura de specialitate, dar și în activitatea de producție.

Pornind de la rezultatele existente în continuare se insistă numai asupra aspectelor geometrice legate de interpretarea tuturor condițiilor de existență și stabilitate a mișcărilor vibropercutante. Astfel se ajunge la evidențierea domeniilor în care regimurile studiate se realizează efectiv.

5.3. Vibropercutor pe reper rigid

Cercetări anterioare au evidențiat regimuri vibropercutante ale ciocnirii cu limitatorul rigid. Se consideră sistemul vibrant, asupra căruia acționează forța perturbatoare periodică dată de excentricul de pe arbore

$$Q(t) = mA\omega^2 \cos \omega t - mg \quad (5.1)$$

produsă de un generator de vibrații cu două excentrice ce se rotesc în sensuri opuse având aceeași viteză unghiulară de rotație ω . Dacă se notează cu m_0 masa excentricităților și cu e excentricitatea, atunci rezultă

$$A = \frac{m_0 e}{m}$$

În continuare se vor preciza mișcările periodice ale sistemului în cazul excitației armonice (a) folosind metoda generală expusă anterior [100], [102].

Parametrii mișcărilor periodice, viteza de ciocnire \dot{q}_c și momentele ciocnirilor t_k ($k=1,2,\dots$) pentru cazul acționării cu forța perturbatoare armonică (5.1) se determină din ecuația complexă stabilită [100]. Pentru a se putea urmări mai ușor variația acestor parametri se vor introduce câteva mărimi adimensionale. Astfel, se vor folosi notațiile:

$$\xi_n = \frac{\omega_n}{\omega}, \quad \xi = \frac{p}{\omega}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega}, \quad d^2 = (1 - \xi_n^2)^2 + 4\zeta^2$$

$$(\xi_n^2 = \xi^2 + \zeta^2), \quad s = \frac{q_0}{A} - \frac{g}{A\omega_n^2} \quad (5.2)$$

și

$$\rho = \frac{1 + R\xi \operatorname{sh} 2\pi\zeta - \zeta \sin 2\pi\xi}{2\xi(\operatorname{ch} 2\pi\zeta - \cos 2\pi\xi)}; \quad \delta = \frac{1 + R}{1 - R} \frac{\sin 2\pi\xi}{\xi(\operatorname{ch} 2\pi\zeta - \cos 2\pi\xi)} \quad (5.3)$$

Din studiul mișcărilor vibropercutante periodice rezultă pentru viteza \dot{q}_c expresia:

$$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1 - R} \frac{\delta s \pm \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2} \quad (5.4)$$

Din această formulă se vede că este posibil să se realizeze două regimuri de mișcare corespunzătoare celor două semne din fața radicalului..

Pentru a exista mișcarea periodică, este necesar ca viteza \dot{q}_c să fie reală, deci cantitatea de sub radical din formula (5.4) trebuie să fie pozitivă.

Propoziția 5.1. *Mișcarea sistemului vibrant asupra căruia acționează forța perturbatoare periodică dată de (5.1) este periodică dacă este îndeplinită condiția*

$$|s| \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2} \quad (5.5)$$

De asemenea, la începutul fiecărei ciocniri viteza trebuie să fie negativă ($\dot{q}_c < 0$). Presupunând îndeplinită condiția de mai sus, există multe situații în care viteza reală \dot{q}_c este negativă.

În felul acesta s-a stabilit, din punct de vedere al vitezei, condițiile de existență ale mișcării periodice. Aceste condiții sunt prezentate în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1

\dot{q}_c	δs	Condițiile de existență ale mișcărilor periodice
$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1-R} \frac{\delta s - \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2}$	-	$ s \pm \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}$
	+	$ s \leq \frac{1}{d}$
$\dot{q}_c = \frac{2A\omega}{1-R} \frac{\delta s - \sqrt{\frac{\rho^2 + \delta^2}{d^2} - \rho^2 s^2}}{\rho^2 + \delta^2}$	-	$\frac{1}{d} \leq s \leq \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}$
	+	Nu există mișcări periodice

Regimurile periodice de mișcare se pot realiza numai dacă sunt satisfăcute condițiile de existență, stabilite anterior. Discuția cazurilor posibile se va face prin reprezentarea grafică a diferitelor domenii obținute în funcție de parametrii sistemului. În reprezentările grafice pe abscisă s-a luat ξ iar pe ordonată s. Toate aceste reprezentări s-au construit pentru diferitele valori ale raportului de armonizare $\gamma = \frac{c}{c_{cr}}$, ale coeficientului de restituire R și ale ordinului de multiplicitate r a perioadei mișcării.

Pe baza condițiilor de existență stabilite s-au găsit domeniile de existență ale mișcărilor periodice. Aceste domenii sunt delimitate de următoarele curbe

$$s = \pm \frac{1}{d}, \quad s = \pm \frac{1}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2}$$

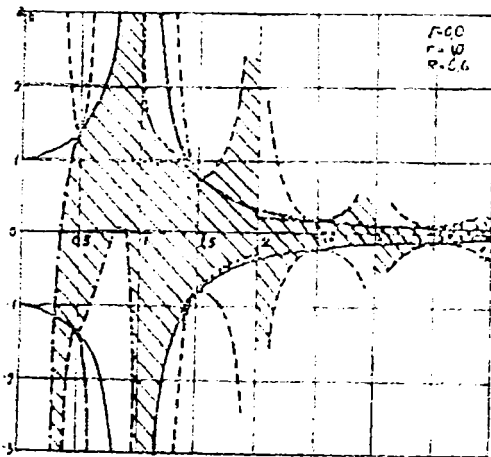


Fig. 5.1

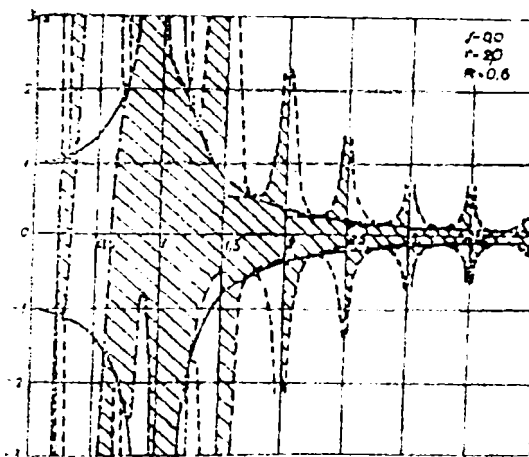


Fig. 5.2

Domeniile de existență ale mișcărilor periodice determinate cu ajutorul condițiilor precizate s-au hașurat. În toate domeniile hașurate sunt posibile

regimuri de mișcare ce corespund semnului minus în fața radicalului din formula (5.4). Acolo unde s-a hașurat dublu mai sunt posibile și regimurile ce corespund semnului plus în fața radicalului din formula (5.4).

Existența regimurilor periodice de mișcare a fost studiată teoretic și precizată prin diagrama (fig.5.3) însă numai pentru sistemul vibropercutant și aplicată aici pentru ciocanele vibropercutante.

Cercetările în domeniu sunt de date recente, motiv pentru care s-au creat condiții pentru dezvoltarea studiului vibropercuțiilor.

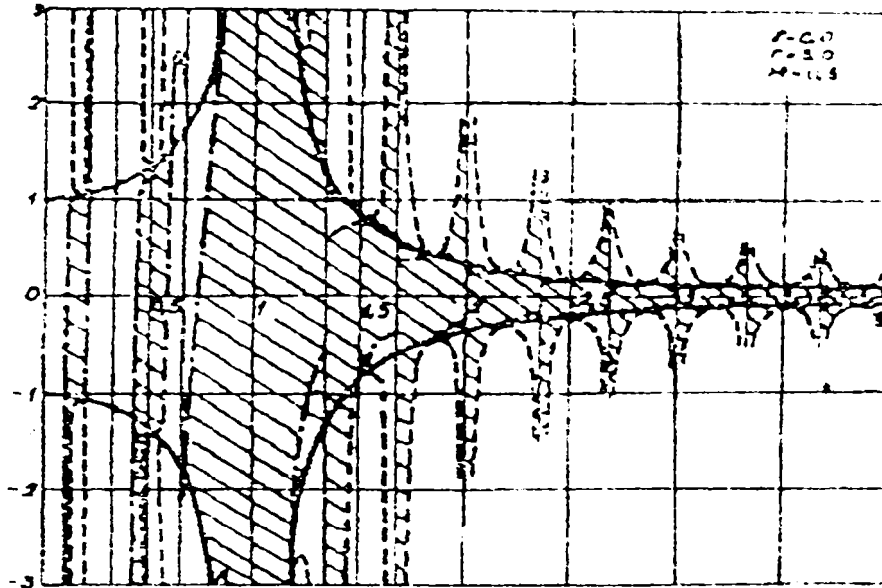


Fig. 5.3

5.4. Considerarea reperului deformabil

În continuare se studiază existența regimurilor periodice de mișcare ale unui ciocan modelat prin vibratorul liber care se ciocnește cu o masă suspendată elastic, considerând și amortizare vâscoasă. Acest sistem a fost studiat pe cale directă anterior [97].

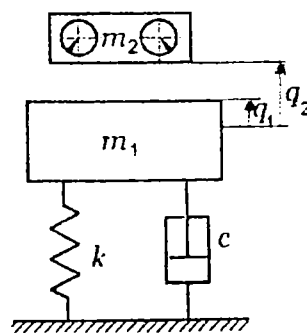


Fig. 5.4

Sistemul considerat este format din masa m_1 , arcul vertical cu constanta elastică k și amortizarea vâscoasă cu coeficientul c , precum și vibratorul de masă m_2 asupra căruia acționează forța perturbatoare $F(t)=F_0\cos\omega t$ (fig. 5.4). Se presupune că ciocnirea celor două mase se face instantaneu cu coeficientul de restituire R ($0 < R < 1$).

Notând prin q_1 și q_2 abscisele celor două mase măsurate din poziția nedeformată a arcului, ecuațiile diferențiale ale mișcării între două ciocniri succesive vor fi:

$$m_1\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + kq_1 = -m_1g \quad (5.6)$$

$$m_2\ddot{q}_2 = F_0 \cos \omega t - m_2g \quad (5.7)$$

Dacă se introduc notațiile:

$$h = \frac{c}{2m_1}, \quad p = \sqrt{\frac{k_1}{m_1} - h^2}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m_2\omega^2}$$

ecuațiile diferențiale (5.6) și (5.7) se pot pune sub forma:

$$\ddot{q}_1 + 2h\dot{q}_1 + (p^2 + h^2)q_1 = -g \quad (5.8)$$

și

$$\ddot{q}_2 = f_0 \cos \omega t - g \quad (5.9)$$

Ciocnirile au loc între masele m_1 și m_2 ce formează o cuplă percutantă pentru care corespunde legătura unilaterală:

$$F(q_1, q_2) = q_2 - q_1 \geq 0 \quad (5.10)$$

Deoarece interesează în primul rând existența mișcărilor periodice este suficient să se studieze o singură perioadă a mișcării ce este evident multiplă celei a forței perturbatoare, adică $rT = r \frac{2\pi}{\omega}$ ($r = 1, 2, \dots$). Prin urmare se poate alege pentru studiu prima perioadă ce începe în momentul $t=t_0$ și se încheie în momentul $t_1=t_0+rT$.

Se vor determina condițiile de existență și de stabilitate ale regimurilor periodice de mișcare ale utilajului care se ciocnește cu o masă suspendată elastic, considerând și amortizarea vâscoasă.

Ținând cont că ciocnirea este instantanee, între viteze se pot scrie relațiile cunoscute:

$$\begin{aligned}\dot{q}'_{10} &= \frac{m-R}{1+m} \dot{q}_{10} + \frac{m+R}{1+m} \dot{q}_{20} \\ \dot{q}'_{20} &= \frac{m(1+R)}{1+m} \dot{q}_{10} + \frac{1-mR}{1+m} \dot{q}_{20}\end{aligned}\quad (5.11)$$

în care $m = \frac{m_1}{m_2}$.

Propoziția 5.2. *Mișcarea sistemului vibrant dată de ecuațiile diferențiale (5.6), (5.7) și cupla percutantă dată de (5.10) este periodică dacă timpul dintre două ciocniri consecutive este un multiplu al perioadei de variație a forței, adică*

$$rT = r \frac{2\pi}{\omega} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

De asemenea este necesar ca ciocnirile să aibă loc în aceeași poziție și cu aceleași viteze. Deci pentru $t=rT$, trebuie să se considere $q_1=q_2=q_0$ și $\dot{q}_1 = \dot{q}'_{10}$, $\dot{q}_2 = \dot{q}'_{20}$

Mai întâi trebuie stabilite condițiile necesare pentru ca mișcarea periodică să existe. Aceste condiții de existență se pot obține simplu prin integrare directă, dar și pe cale operațională folosind formula de conversiune Mellin Fourier [100].

Introducând condițiile inițiale se determină legile mișcării care după introducerea condițiilor finale din perioada considerată se obține

$$\dot{q}_{20} = \dot{q}'_{20} - grT \quad (5.12)$$

$$\dot{q}'_{20} = f_0 \omega \sin \omega t_0 + \frac{1}{2} grT \quad (5.13)$$

precum și

$$\begin{aligned}h(q_0 + q_s) + (\dot{q}'_{10} - \dot{q}_{10}) \frac{e^{-hrT} - \cos prT}{2(ch hrT - \cos prT)} + \dot{q}_{10} &= 0 \\ p(q_0 + q_s) - (\dot{q}'_{10} - \dot{q}_{10}) \frac{\sin prT}{2(ch hrT - \cos prT)} &= 0\end{aligned}\quad (5.14)$$

unde $q_s = \frac{m_1 g}{k}$.

Caracterizarea regimurilor vibropercutante periodice de mișcare ale sistemului se face cu ajutorul ecuațiilor (5.12), (5.13) și (5.14). Astfel se

determină acele valori ale parametrilor mișcării care sunt obligatorii pentru ca efectiv să se realizeze regimuri periodice.

Eliminând expresia $q_0 + q_s$ din ecuațiile (5.14) se deduce

$$(h \sin prT + p \cos prT - pe^{hrT}) \dot{q}_{10} = (pe^{-hrT} - p \cos prT + h \sin prT) \dot{q}'_{10} \quad (5.15)$$

Din relația (5.11) și ecuația (5.12) după înlocuiri, se deduce

$$\dot{q}'_{20} = \dot{q}_{10} - \frac{1 - mR}{m(1 + R)} grT \quad (5.16)$$

De asemenea se mai găsește:

$$\dot{q}_{20} = \dot{q}_{10} - \frac{1 + m}{m(1 + R)} grT \quad (5.17)$$

și în final:

$$\dot{q}'_{10} = \dot{q}_{10} - \frac{1}{m} grT \quad (5.18)$$

Revenind la relația (5.15), prin înlocuirea vitezei \dot{q}'_{10} din ecuația (5.18), se ajunge la următoarea relație:

$$\dot{q}_{10} = -\frac{grT}{2m} (H - 1) \quad (5.19)$$

unde

$$H = \frac{\frac{h}{p} \sin prT - sh hrT}{\cos prT - ch hrT} \quad (5.20)$$

În mod analog se obțin și celelalte viteze

$$\dot{q}'_{10} = -\frac{grT}{2m} (H + 1) \quad \dot{q}_{20} = -\frac{grT}{2m} \left(H + \frac{1 + 2m - R}{1 + R} \right), \quad (5.21)$$

$$\dot{q}'_{20} = -\frac{grT}{2m} \left(H + \frac{1 - 2m - R}{1 + R} \right)$$

Pentru ca mișcarea periodică să fie complet cunoscută mai trebuie calculat momentul t_0 al primei ciocniri. Trebuie considerată ecuația (5.13) în care dacă se ține seama de expresia lui \dot{q}'_{20} din relațiile (5.21) se deduce

$$\sin \omega t_0 = -\frac{grT}{2m} \left[H + \frac{(1-R)(1+m)}{1+R} \right] \quad (5.22)$$

Propoziția 5.3. *Mișcarea sistemului vibrant dată de ecuațiile diferențiale (5.6), (5.7) și cupla percutantă dată de (5.10) este periodică dacă este îndeplinită condiția*

$$-\frac{grT}{2m} \left[H + \frac{(1-R)(1+m)}{1+R} \right] \leq 1 \quad (5.23)$$

CONSIDERAȚII GENERALE ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

Realizarea obiectivului tezei într-un domeniu interdisciplinar îmbină geometria sistemelor dinamice de ordinul întâi și al doilea cu aplicațiile în domeniul mecanicii tehnice.

Primul capitol, intitulat „Geometria sistemelor dinamice”, cuprinde 6 paragrafe iar rezultatele sunt publicate în lucrările [15], [84], [85].

În acest capitol se precizează noțiuni ca: varietate neolonomă, varietate olonomă, sisteme autoadjuncte, funcții Lagrange și spații Lagrange. Sunt cercetate în continuare sistemele dinamice cu un grad de libertate, de ordinul întâi implicite și apoi sistemele dinamice cu două grade de libertate, de ordinul întâi implicite. Pentru aceste sisteme se găsesc funcțiile Lagrange. Urmează cazul sistemelor neautonome unde variabila timp se consideră ca un nou grad de libertate, astfel încât să se obțină un nou sistem special, cu un grad de libertate în plus, care însă, să fie autonom și pentru care se pot găsi funcții Lagrange. Pentru formalizare matematică se introduc transformările semiolome și grupul de semionomie.

Dinamica geometrică cuprinde două paragrafe și face obiectul Cap. 2. Unele rezultate au fost deja publicate în lucrările [6], [7], [10], [11], [14], [16], [17], [22].

În primul paragraf se studiază stabilitatea unor sisteme dinamice concrete de ordinul întâi cu ajutorul funcțiilor Leapunov construite cu ajutorul integralelor prime. Apoi se regândește dinamica sistemului elastic de la mașina de frezat roți dințate FD-320, utilizând prelungirea Lagrange și funcția Hamilton. Cu acestea se construiește structura geometrică Riemann-Jacobi-Lagrange față de care traiectoriile sunt geodezice.

În Cap. 3 intitulat „Mișcări vibrante cu întârziere” se începe prin prezentarea sistemelor fizice descrise matematic prin ecuații diferențiale cu argument întârziat. Urmează apoi o aplicare a acestor sisteme cu întârziere în procesul de așchiere. Analiza modelului neliniar al mașinii unelte vibrante este structurată în următoarele etape: 1) analiza părții liniare a sistemului (3.27); 2) analiza rădăcinilor ecuației caracteristice și bifurcația Hopf; 3) determinarea subspațiilor proprii generalizate asociate sistemului (3.27) în punctul de bifurcație Hopf; 4) determinarea varietății centrale în punctul de bifurcație și ciclul limită asociat; 5) studiul orbitei sistemului (3.27) cu precizarea invarianților ciclului limită.

În paragraful „Mașina unealtă vibrantă regenerativă cu două argumente de întârziere” se asociază sistemului fizic ecuația diferențială cu două argumente de întârziere și se urmărește o problemă similară cu cea din paragraful precedent.

Cap. 4 se analizează vibrațiile care apar în procesul de așchiere. Pornind de la ecuațiile mișcării pentru sistemul elastic al mașinii de frezat roți dințate FD-320 se analizează vibrațiile libere și forțate ale lanțului cinematic de rulare

determinându-se pulsațiile proprii ale lanțului cinematic și amplitudinea la sculă și piesă. Având schema bloc simplificată a sistemului dinamic mașină – unealtă – piesă – dispozitiv - sculă în procesul de așchiere se stabilește un algoritm de calcul al mărimilor necesare ridicării diagramelor de stabilitate. De fapt diagramele de stabilitate sunt reprezentări grafice ce au pe abscisă numărul n de rotații ale frezei iar pe ordonată adâncimea de așchiere w rezultatele fiind publicate [8].

Cap. 5 se referă la sisteme vibropercutante și aplicații cu rezultatele publicate anterior în lucrarea [33].

În primul paragraf este prezentat stadiul dezvoltării cercetărilor din domeniu. Apoi pentru sistemul vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă este studiată geometric existența mișcărilor periodice și stabilitatea lor. Un studiu geometric amănunțit este realizat pentru sistemul particular cu două grade de libertate și o cuplă percutantă.

*
* *

Rezultatele proprii pot fi concentrate în felul următor:

Capitolul 1:

1) **Propoziția 1.11.** Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.53) să fie variațional este ca să aibă loc relația $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0$.

2) A fost obținut factorul integrant:

$$C = \left[e^{\int_{x=x(t,c), \dot{x}=x(t,c)} \left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt} \right]_{c=c(t,x,\dot{x})}$$

3) **Teorema 1.4.** Fiind dat un sistem dinamic de ordinul întâi, cu un grad de libertate, scris sub formă implicită, $F = 0$, orice primitivă a funcției F în raport cu viteza este o funcție Lagrange, generatoare a unei ecuații Euler-Lagrange, de forma (1.56) care admite printre soluțiile sale și soluțiile ecuației $F = 0$.

4) **Propoziția 1.12.** Între mulțimea factorilor integranți C (identificată cu mulțimea funcțiilor φ) și cea a primitivelor lui F , factorizată prin spațiul funcțiilor $\xi(t)$, există o corespondență biunivocă bine precizată.

5) **Propoziția 1.13.** Toate funcțiile L , ale căror ecuații Euler-Lagrange coincid cu ecuațiile (1.56"), constituie o clasă de echivalență a lagrangienilor determinați prin mulțimea derivatelor totale exacte ale funcțiilor $f(t,x)$ ($\frac{df}{dt} = \alpha(t,x)\dot{x} + \beta(t,x)$).

6) **Teorema 1. 5.** Mulțimea lagrangienilor ecuației (1.52) este "indexată" prin produsul cartezian al mulțimii factorilor integranți cu mulțimea 1-formelor închise pe D , unde D este domeniul din $\mathbf{R} \times TM$, în care $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \neq 0$.

7) **Teorema 1. 6.** Condiția necesară și suficientă ca soluțiile ecuației (1.52) să se situeze pe suprafețele $F=\lambda$, este ca sistemul dinamic (definit prin (1.52)) să fie autonom ($\frac{\partial L}{\partial t}=0$).

8) **Exemplul 3. 1.** Fie ecuația $F = e^{\dot{x}} - x\dot{x} = 0$. O funcție a lui Lagrange, corespunzătoare acestei ecuații, este $L = e^{\dot{x}} - \frac{x\dot{x}^2}{2}$. Ecuația lui Euler- Lagrange

este: $(e^{\dot{x}} - x)\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2} = 0$ și corespunde factorului integrant $C = \frac{x}{2[e^{\dot{x}} - x\dot{x}]}$.

9) **Propoziția 1.14** Sistemului (1.62), cu verificarea condiției (1.65₁), i se asociază o funcție $L : J^1 M = \mathbf{R} \times TM \rightarrow \mathbf{R}$, cu proprietatea că $F_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$.

10) **Propoziția 1.15.** Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.68) să fie autoadjunct este ca funcțiile F_i să verifice relațiile:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^h \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \frac{\partial F_i}{\partial x^j} = 0.$$

11) **Propoziția 1.16.** Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.62), cu verificarea relațiilor (1.65₁), să fie oloonom-lagrangian este ca el să fie autonom.

Capitolul 2:

12) A fost găsită o metodă de construire a funcției Leapunov folosind integrale prime. Această metodă s-a aplicat la 5 sisteme dinamice concrete.

13) Pentru sistemul mecanic al mașinii de frezat dat în fig.4.4d s-a atașat sistemul de ecuații diferențiale și s-a dezvoltat dinamica geometrică asociată acestui sistem mecanic după o metodă dată în lucrarea prof. dr. Udriște C.[119].

Capitolul 3:

14) Pentru sistemul de ecuații diferențiale cu întârziere (3.27) s-a utilizat metoda dată în monografia [68] și anume s-au parcurs etapele:

- a) analiza părții liniare a sistemului (3.27) ;
- b) analiza rădăcinilor ecuației caracteristice și bifurcația Hopf ;
- c) determinarea subspațiilor proprii generalizate asociate sistemului (3.27) în punctul de bifurcație Hopf ;
- d) determinarea varietății centrale în punctul de bifurcație și ciclul limită asociat ;
- e) studiul orbitei sistemului (3.27) cu precizarea invarianților ciclului limită.

15) Pentru sistemul de ecuații diferențiale (3.69) s-a utilizat metoda dată în monografia [68] adică s-au parcurs etapele enunțate anterior.

Capitolul 4:

16) Pornind de la schema cinematică a mașinii de frezat s-a adoptat modelul dinamic cu ajutorul căruia au putut fi precizate condițiile de funcționare în prezența vibrațiilor.

17) Este asimilat pentru schema bloc a sistemului dinamic mașină-unealtă-piesă-dispozitiv-sculă în procesul de așchiere algoritmul de calcul al mărimilor necesare ridicării diagramei de stabilitate.

Capitolul 5:

18) Utilizând metodologia consacrată studiului vibropercuțiilor au fost dezvoltate în mod special cazuri deosebite cu evidențierea aspectelor geometrice.

19) Au fost completate aspecte privind precizarea condițiilor de stabilitate prin metoda directă a prof. dr. Brîndeu L. în cazul sistemului vibropercutant cu amortizare supracritică.

20) În plus a mai fost abordat și un sistem vibropercutant particular cu două grade de libertate pentru care este posibilă determinarea regiunilor periodice stabile.

În mod special se poate arăta că în cadrul tezei au fost dezvoltate aspecte matematice-geometrice legate de mișcările vibratoare și vibropercutante care sub această formă nu mai există tratate. Abordările din punct de vedere geometric, inițiate aici, prezintă avantaje importante pentru cercetări ulterioare.

Bibliografie

- [1] Apostol L., Cătăneanu A., Considerații asupra teoriei ciocnirilor corpurilor rigide, Buletinul cele de-a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice Timișoara, vol. I, 173-178, 1996.
- [2] Arnold V., Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Edition Mir, Moscou, 1976.
- [3] Balachandran B., Nonlinear dynamics of milling process, to appear in Philosophical Transactions of the Royal Society, 2000.
- [4] Barbu Viorel, Ecuații diferențiale, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [5] Barbu Viorel, Metode matematice în optimizarea sistemelor diferențiale, Editura Academiei R.S.R., București, 1989.
- [6] Bălă D., Exemple de sisteme dinamice la care studiul stabilității se face folosind integrale prime, Conferința de Vibrații Mecanice, vol. 3, Timișoara, p. 43-46, 1996.
- [7] Bălă D., Stabilitatea sistemelor dinamice, Buletinul AGIR, Anul II, nr. 2 (4), București, p. 56-58, 1997.
- [8] Bălă D., Stabilitatea sistemelor mecanice, Tehno '98 Comunicările celei de a VIII-a Conferințe de inginerie managerială și tehnologică, vol. 2, Timișoara, p. 525-530, 1998.
- [9] Bălă D., Determinarea condițiilor de stabilitate pentru sistemul cu caracteristică liniară, supus la o legătură unilaterală, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de Vibrații Mecanice, vol. 1, Timișoara, p. 105-110, 1999.
- [10] Bălă D., Contribuții la studiul stabilității unor sisteme dinamice, Școala Mehedințiului, nr. 16, Drobeta Tr. Severin, p. 16-18, 1999.
- [11] Bălă D., Silaș Gh., Probleme privind stabilitatea dinamicii și echilibrului unor sisteme mecanice, Editura Școala Mehedințiului, Dr. Tr. Severin, 2001.
- [12] Bălă D., Soluții pentru programarea cinematicii unui robot industrial, Școala Mehedințiului, Supliment nr. 19, Dr. Tr. Severin, p. 40-41, 2001.

- [13] Bălă D., Stabilitatea sistemelor dinamice. Aplicații în economie, Analele Universității din Craiova, Seria Colegiu, Ediție dedicată aniversării a 10 ani de învățământ superior economic la Drobeta Turnu Severin, 2001.
- [14] Bălă D., Contribuții privind studiul stabilității unor sisteme dinamice, Analele Universității „Gheorghe Anghel” , Anul I, Nr. 3-4, Drobeta Turnu Severin, p.185-186, 2001.
- [15] Bălă D., Sisteme dinamice de ordinul întâi, implicite, cu un parametru de stare neautonome, Analele Universității „Gheorghe Anghel”, Anul II, Nr.5-6, Dr.Tr.Severin, p.170-172, 2002.
- [16] Bălă D., Observații privind stabilitatea sistemelor dinamice, Simpozionul „Zilele Universității <<Gheorghe Anghel>>” (Ediția I) , Dr. Tr. Severin 07-09 iunie 2002 p.174-177, 2002.
- [17] Bălă D., Studiul stabilității când sistemul dinamic este dat printr-un câmp de vectorii, Analele Universității „Gheorghe Anghel”, Anul III, Nr. 7-8, Dr.Tr.Severin, p. 56-59, 2003.
- [18] Bălă D., Aspects concerning the vibrations of some hidro aggregates, Proceedings of the VII-th Symposium „Acustica și vibrațiile structurilor mecanice. Biomecanica”, Timișoara 22-23 mai 2003, Editura Politehnica, p.165-168, 2003.
- [19] Bălă D., Sisteme dinamice implicite de ordinul întâi, cu unu și doi parametri de stare, Analele Universității „Gheorghe Anghel”, Anul III, Nr. 9, Dr.Tr.Severin, p. 57-62, 2003.
- [20] Bălă D., Sisteme dinamice implicite de ordinul întâi, Analele Universității „Gheorghe Anghel”, Anul III, Nr. 10, Dr.Tr.Severin, p. 70-73, 2003.
- [21] Bălă D., Grecu L., Sisteme autoadjuante, Simpozionul „Zilele Universității <<Gheorghe Anghel>>” (Ediția a III-a), Dr.Tr.Severin 23-25 aprilie 2004, p. 120-123, 2004.

- [22] Bălă D., Considerații privind dinamica sistemului elastic la mașina de frezat roți dințate FD-320, Simpozionul „Zilele Universității <<Gheorghe Anghel>>” (Ediția a III-a), Dr.Tr.Severin 23-25 aprilie 2004 p. 117-119, 2004.
- [23] Borangiu T., Advanced Robot Motion Control, Editura AGIR, Editura Academiei Române, București, 2003.
- [24] Botez E. Proiectarea mașinilor-unelte, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [25] Brîndeu L., Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante, Teză de doctorat, Inst. Polit. „Traian Vuia”, Timișoara, p. 204, 1970.
- [26] Brîndeu L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu limitator elastic, având un grad de libertate, Studii și cercetări de mecanică aplicată. Tom 33,Nr. 2,pp257-266,1974.
- [27] Brîndeu L., Lucrări științifice, Seria A, Inst.de Învățământ Superior, Oradea, 1976-1977, p.29-32.
- [28] Brîndeu L., Mișcări vibropercutante forțate între limitatori rigizi. Lucrările celei de a XXV- a CNMS – Supl. An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, 141,146, 2001.
- [29] Brîndeu L., Vibrații și vibropercuții, Editura „Politehnica”,Timișoara ,2001.
- [30] Brîndeu L., Ilea R.,Popa C.,Modelarea dinamică a comportării corpului uman în autovehicol. AMMA 2002, Automobile. Enviroment and Agricultural Machinery, Cluj-Napoca,123-130, 2002.
- [31] Brîndeu L., Costea G., Reprezentări complexe în studiul vibropercuțiilor. Bul. Șt.al Univ. Polit. Timișoara, Vol I,Seria Mecanică. Tom. 47(61), 237-241, 2002.
- [32] Brîndeu L., Toader M., Bacria V., Herișanu N., Ștefan C., Influența perturbațiilor produse de mașini asupra confortului din clădiri civile. Conf.Naț. cu participare internațională Instalații pentru construcții și confort ambiental. Ed. a-11-a Timișoara, 476-483, 2002.

- [33] Brîndeu L., Bălă D., Metode dinamice în dinamica ciocanelor vibropercutante, Buletinul Universității Petrol-Gaze din Ploiești, Volumul LV, Seria Tehnică Nr. 4/2003 p. 107-113, 2003.
- [34] Brîndeu L., Hule V., Petrovici O., Dynamic Model of Impact, Considering the Propagation of the Stress Waves in the Deformable Body, Bul.Șt.al Univ. Politehnica Timișoara, Tom 48(62), Fasc. 1,1-4, 2003.
- [35] Brîndeu L., Ilea R., Studiul și clasificarea mișcărilor periodice posibile ale unui sistem vibropercutant. Lucr. celei de a XXVII-a Conf. de Mecanica Solidelor. Bul. Șt. Univ. Pitești. Seria Mecanică aplicată Vol 3(9), 63-70, 2003.
- [36] Brîndeu L., Ilea R., Biro I., Dynamics of the displacements by vibrations on plane sieves, Bul. Șt.al Univ. Polit. Timișoara, Tom. 48(62), Fasc. 2, 2003.
- [37] Brîndeu L., Motions of systems with piecewise defined characteristic. Bul. Șt. al Univ. Polit. Timișoara, Tom. 48(62) Fasc. 2, 2003.
- [38] Brîndeu L., Csizmadia B., Hegedeus A., Ilea R., Dynamics of percussion hammers, A IX Magyar Mechanikai Konferencia (az eloadások összefoglalói), Miskolci Egyetem, 66, 2003.
- [39] Buculei M. și Mihnea M., Elemente de mecanică tehnică. Teorie și aplicații, Editura Universitaria Craiova, 1994.
- [40] Burns, T. J. and Davies, M. A., Nonlinear dynamics model for chip segmentation in machining, Physical Review Letters 79(3), 447-450, 1997.
- [41] Buzdugan Gh., Măsurarea vibrațiilor mecanice, Editura Tehnică, București, 1964.
- [42] Chiriac A. și Uroșu D., Studiul stabilității mișcării fonturii la mașinile automate pentru ciorapi, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 258-261, 1999.
- [43] Chiriacescu S. T., Stabilitatea în dinamica așchierii metalelor, Editura Academiei, București, 1984.
- [44] Chiriacescu S. T., Stability in the dynamics of metal cutting, Amsterdam: Elsevier; 1990.

- [45] Chiriacescu S. T., Balcu I., Roșca C.I., Considerații privind precizia dinamică a mașinilor-unelte, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 145-148, 1999.
- [46] Chiriacescu S. T., Poutya S., Creșterea domeniului de stabilitate necondiționată la burghierea cu ultrasunete, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 155-158, 1999.
- [47] Ciobanu M., Formes a variations associées a un système d'équations différentielles ordinaires de deuxième ordre et lois de conservation, S.M., nr. 64, Tip. Univ. Timișoara, 19 p, 1999.
- [48] Ciobanu M., Legi de conservare ale unor sisteme dinamice oscilatorii, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 115– 120, 1999.
- [49] Crasmareanu M., Conservation laws generated by pseudosymmetries with application to variational dynamical systems, Seminarul de mecanica nr.62, Tipografia Universității din Timișoara, 1998.
- [50] Davies M.A., Burns, T.J., The dynamics of chip formation in machining, in New Application of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics (ed:F.Moon), Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [51] Deciu E., Contribuții la analiza stabilității unui autotren în timpul deplasării, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 39-44, 1999.
- [52] Deciu E., Bugaru M., Dragomirescu C., Vibrații neliniare cu aplicații în ingineria mecanică, Editura Academiei Române, București, 2002.
- [53] Fofana M.S., Delay dynamical systems with application to machine-tool chatter, Ph.D.Thesis, University of Waterloo, Department of Civil Engineering, 1993.
- [54] Gafițanu M., Diagnosticarea vibroacustică a mașinilor și utilajelor, Editura Tehnică, București, 1989.

- [55] Georgescu A., Sinergetica. Solitoni. Fractali. Haos determinist. Turbulenta. Monografii matematice 43. Tipografia Universității din Timișoara, 1992.
- [56] Gioncu V., Ivan M., Teoria comportării critice și postcritice a structurilor elastice, Editura Academiei Române, București, 1984.
- [57] Grahec I., Chaotic dynamics of the cutting process, Int.J. Machine Tools and Manufacturing, 28, pp.19-32, 1998.
- [58] Grifone I., Structures presque - tangentes et connexions, Ann.Inst.Fourier, Grenoble vol.22, Nr.1(1972) p. 287-334, vol.22, Nr.3 (1972) p.291-338, 1972.
- [59] Hanna N.H., Tobias S.A., A theory of nonlinear regenerative chatter, ASME J Eng Indust 1974; 96:247-55.
- [60] Grecu L., Bălă D., Exploatarea simetriilor în aplicarea metodei elementelor de frontieră la rezolvarea problemelor bidimensionale, Simpozionul „Zilele Universității <<Gheorghe Anghel>>” (Ediția a III-a), Dr.Tr.Severin 23-25 aprilie 2004 p. 133-136, 2004.
- [61] Ilea R., Brîndeu L., Biro I., Toader M., Dynamical displacement by vibrations on a plane, A IX Magyar Mechanikai Konferencia (az eloadások összefoglalói), Miskolci Egyetem, 95, 2003.
- [62] Ion C. Gh., Contribuții la studiul vibrațiilor mașinilor de frezat, la frezarea frontală de finisare, Rezumatul tezei de doctorat, Conducător științific profesor dr. docent ing. Emil Botez, București, 1973.
- [63] Johnson M.A., Nonlinear differential equations with delay as models for vibrations in the machining of metals, Ph.D.Thesis, Cornell University, 1996.
- [64] Kalmar-Nagy T., Stepan G., Moon F., Subcritical Hopf Bifurcation in the Delay Equation Model for Machine Tool Vibrations, Nonlinear Dynamics 26:121-142, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [65] Lagrange J.L., Mémoires de la première classe de l' Institut pour 1808; Mécanique Analytique, Tome II (édition posthume).

- [66] Mendel T., Contribuții la mărirea capacității de producție la mașinile de frezat cu consolă, Teză de doctorat, Conducător științific profesor emerit dr. ing. Gheorghe Savii, Timișoara, 1978.
- [67] Mihoc D., Iliescu S.Șt., Ceapâru M., Borangiu T., Teoria și elementele sistemelor de reglare automată, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [68] Mircea G., Neamțu M., Opriș D., Sisteme dinamice din economie, mecanică, biologie descrise prin ecuații diferențiale cu argument întârziat, Editura Mirton, Timișoara, 2003.
- [69] Moga I., Brîndeu L., Vesseleny T., Introducerea vibrațiilor în procesul de așchiere. Bul. Șt.al Universității “Politehnica” din Timișoara, 1, 2002.
- [70] Moga I., Brîndeu L., Vesseleny T., Polojintev-Corbu N., Modelarea numerică a traiectoriei cuțitului și a rugozităților la strunjirea cu vibrații axiale. Bul. Șt. al Universității “Politehnica” din Timișoara, 6, 2002.
- [71] Moraru V., Ispas C., Rusu Șt., Vibrațiile și stabilitatea mașinilor unelte, Editura Tehnică, București, 1982.
- [72] Munteanu M. Introducere în dinamica mașinilor vibratoare, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
- [73] Nayfeh A.H. and Balachandran B., Applied Nonlinear Dynamics, Wiley, New York, 1995.
- [74] Nayfeh A.H., Chin C.-M., Pratt J., Applications of perturbation methods to tool chatter dynamics, in Nonlinear Dynamics of Material Processing and Manufacturing (Ed: Moon, F.C. Wiley, New York, pp.193-213., 1997
- [75] Nayfeh, A.H., Chin, C.-M., Pratt, J., Perturbation methods in nonlinear dynamics-applications to machining dynamics. ASME J Manufac Sci Eng 1997; 119(4A):485-93.
- [76] Neamtu M., Systemes dynamiques du premier ordre et lois de conservation, Seminarul de mecanica nr. 65, Tipografia Universității din Timișoara, 1999.

- [77] Obădeanu V., Mecanică, Tipografia Universității din Timișoara, vol. I (1987), vol. II, 1989.
- [78] Obădeanu V. și Marinca V., Problema inversă în mecanica newtoniană. Istoric și bibliografie. Seminarul de mecanică 20. Tipografia Universității din Timișoara, 1989.
- [79] Obădeanu V., Marinca V., Problema inversă în mecanica analitică, Monografii matematice 44, Tipografia Universității din Timișoara, 1992.
- [80] Obădeanu V., Sur certains systèmes biodynamiques et lois de conservation associées: An. St. Univ. "Ovidius", Constanța, Proc Second International Workshop on Differential Geometry and its Applications (1995), Vol III, f. 2 , p. 83-90, 1995.
- [81] Obădeanu V., Grosanu I., Sisteme dinamice cu aplicații în biologie și economie, Imprimeria Mirton, Timișoara, 1996.
- [82] Obădeanu V., Vernic C., Systèmes dynamiques sur des espaces de Riemann. Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol.2, Nr.1, p.73-82, 1997.
- [83] Obădeanu V. et Neamtu M., Systèmes dynamiques différentiels à contrôle optimal, formulation lagrangienne, Seminarul de mecanică 60. Tipografia Universității din Timișoara, 1998.
- [84] Obădeanu V., Bălă D., Implicit first order dynamical systems with one state parameter, S.M., nr.76, Tip. Univ. Timișoara, 2001
- [85] Obădeanu V., Bălă D., Implicit first order dynamical systems with two state parameter, S.M., nr.78, Tip. Univ. Timișoara, 2001.
- [86] Opreș D., Mircea G., The numerical Integrators for Dynamical Systems, preprint nr.61, Seminar nr.61, Seminar of Differential Dynamical Systems, Universitatea din Timișoara, Facultatea de Matematică, <http://w3.info.UVT.RO/anmath/publications.html>, 1998.

- [87] Osman M.O.M., Sankar T.S., Short-time acceptance test for machine tools based on the random nature of the cutting forces, *ASMJ Eng Indust*, 1972: 1020-4, 1972.
- [88] Paget, A.Z., Vibration of Steam Turbine Buckets and Damping by impact, *Engineering*, 3714, 19.III.1937, p.30-307.
- [89] Pandit S.M., Subramanian T.L., Wu S.M., Modeling machine tool chatter by time series, *ASMJ Eng Indust*, 1975;211:211-5.
- [90] Pandit S.M., Subramanian TL, Wu SM., Stability of random vibrations wuth special references to machine tool chatter, *ASMJ Eng Indust*, 1975:216-9.
- [91] Petrișor E., Sisteme dinamice haotice. Monografii matematice 45, Tipografia Universității din Timișoara, 1992.
- [92] Qing-Chang Zhong, Robust stability analysis of simple systems controlled over communication networks, *Automatica*, Elsevier; 39 (2003) 1309-1312.
- [93] Radeș M., Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice, Editura Academiei RSR, 1979.
- [94] Radeș M., Fetcu I., Buzdugan Gh., Vibrații mecanice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [95] Rinderu P.L., Băgnaru D. și Duică A., Asupra stabilității schemelor de integrare numerică pentru ecuații diferențiale ce modelează sisteme vibrante, *Buletinul celei de a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice*, Timișoara, vol. I, 151-156, 1996.
- [96] Shi H.M., Tobias S.A., Theory of finite amplitude machine tool instability, *Inst.J.Machine Tool Design and Research* 24, pp.45-69, 1984.
- [97] Silaș Gh., Brîndeu L., Hegedeus A., Mișcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber *Bul. Șt. Și Inst.Poli. Timișoara*, Tom 13(26) Fasc.1/1967.
- [98] Silaș Gh., *Mecanică. Vibrații mecanice*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
- [99] Silaș Gh., Brîndeu L., *VDI Berichte*, 135, *Frühjahr*, p.27-35, 1969.

- [100] Silaş Gh., Determinarea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă, *Vibrații în Construcția de mașini*, Timișoara, 1975.
- [101] Silaş Gh., Groșanu I., *Mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [102] Silaş Gh., Brândeș L., *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, 1986.
- [103] Silaş Gh., Toader M., Smicală I., Luca Gh., *Mecanică. Dinamică*, vol. III partea I și a II-a, Timișoara, 1994.
- [104] Silaş Gh., Smicală I., *Asupra efectului percuțiilor produse de forțele de frecare în cazul general de ciocnire a unui corp cu un plan aspru fix*, *Buletinul celei de a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice*, Timișoara, vol. I, 1 – 8, 1996.
- [105] Silaş Gh., Smicală I., *Asupra efectului percutant al forțelor de frecare în cazul general de ciocnire a unui corp*, *Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice*, Timișoara, vol. I, 1 – 8, 1999.
- [106] Stepan G., *Retarded dynamical systems: STABILITY AND CHARACTERISTIC FUNCTIONS*, Longman Scientific & Technical, Longman Group UK Ltd, Longman House, Burnt Mill, Harlow Essex CM20 2JE, England Copublished in the United States with, John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158, First published 1989.
- [107] Stepan G., Kalmar-Nagy T., *Nonlinear regenerative machine tool vibrations*, in *Proc.of ASME Design Engineering Technical Conferences DETC97/VIB-4021*, pp.1-11, 1997.
- [108] Stepan G., Insperger T., *Machine Tool Vibrations*, Research New 2001, nr.1, Budapest University of Tehnology and Economics, Budapest, 2001.
- [109] Stepan G., *Delay-differential equation models for machine tool chatter*, in *Nonlinear Dynamics of Material Processing and Manufacturing* (Ed: Moon, F.C.), Wiley, New York, pp. 165-192.
- [110] Stepan G., *Retarded Dynamical Systems*, Longman, London.

- [111] Theodor P., Contribuții relative la metodele de analiză și diagnoză a vibrațiilor mașinilor și agregatelor, Teză de doctorat, 1996.
- [112] Thompson J., Bishop S., Chaotic dynamics and fractals in material removal proceses, in Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics, (Ed: Moon, F.C.) Wiley, New York, pp. 25-37, 1994.
- [113] Tlustý J., Spacek L., Self-Excited Vibrations on Machine Tools (in Czech), Nakl CSAV, Prague, 1954.
- [114] Tlustý J., Ismail F., Basic nonlinearity in machining chatter, Annal CIRP; 30(1):1060-7, 1981.
- [115] Tobias S.A., Machine Tool Vibrations. Blackie, London, 1965.
- [116] Udriște C., Linii de câmp, Editura Tehnică, București, 1988.
- [117] Udriște C., Geometric Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [118] Udriște C., Postolache M., Least squares problem and magnetic dynamics, Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, BSG Proceedings 5, Ed. Grigorios Tsagas, Geometry Balkan Press, 179-228, 2001.
- [119] Udriște C., Postolache M., Atlas of Magnetic Geometric Dynamics, Geometri Balkan Press, Bucharest, Romania, 2001.
- [120] Usui E., Shirakashi T. and Kitagawag, T., Analytical prediction of three dimensional cutting process, Journal of Engineering Industry, 100, pp. 236 - 243, 1978.
- [121] Voinea R., Voiculescu D., Simion P., Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Editura Academiei R.S.R. București, 1989.
- [122] Voinea R., Stroe L., Sisteme dinamice, Editura Academiei Române, București, 2000.
- [123] Voinea R., Stroie I., Predoi M.V., Bugaru M., Modele pentru sisteme mecanice comandate, Buletinul celei de a IX-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. I, 9 – 14, 1999.

- [124] Wiercigroch M., Chaotic vibration of a simple model of the machine tool cutting process system, ASME, J. Vibration and Acoustics 119, pp. 468-475, 1997.
- [125] Yoshitake Y., Inoue J., Sueoka A., Vibrations of a forced self-excited system with time lag. Bull JSME 1983;26(221):1943-51.
- [126] Zhang GM., Kapor SG., Dynamic generation of machined surfaces, part 1: description of random excitation system, ASMJ Eng Indust, 113:137-44, 1991.