UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ŞI TELECOMUNICAŢII

Ing. ROBERT PAZSITKA

CONTRIBUŢII LA EŞANTIONAREA ŞI ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR

TEZĂ DE DOCTORAT

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:
Prof. Dr. Ing. ALIMPIE IGNEA

TIMIŞOARA

2004

Doresc să aduc mulțumiri domnului prof. dr. ing. Eugen Pop, sub îndrumarea căruia am început lucrul pentru realizarea prezentei teze de doctorat, care a știut să-mi dea sfaturi utile și posibile rezolvări ale unor probleme apărute.

Faptul că am ajuns la finalizarea tezei sub prezenta formă o datorez în primul rând conducătorului științific, prof. dr. ing. Alimpie Ignea, care a avut răbdarea de a parcurge capitolele din teză, de a-mi face observații și de a-mi da sfaturi pentru rezolvarea anumitor probleme aparute, atât de ordin tehnic cât și din punct de vedere al redactării tezei.

Doresc de asemenea să aduc mulțumiri domnului prof. dr. ing. Liviu Toma pentru ajutorul acordat în lămurirea unor probleme de ordin tehnic.

Un cuvânt de mulțumire doresc să adresez și domnilor prof. dr. ing. Dan Stoiciu, prof. dr. ing. Traian Jurca și dr. ing. Peter Kiss care, atunci când am avut nevoie de ajutor pentru redactarea articolelor în engleză, pentru accesul la un sistem de calcul performant sau pentru obținerea bibliografiei, mi-au oferit sprijinul lor.

De asemenea doresc să aduc mulțumiri familiei și celorlalți colegi de lucru, pentru înțelegerea de care au dat dovadă pe parcursul elaborării tezei de doctorat.

Autorul

CUPRINS

LISTA FIGURILOR

LISTA TABELELOR

EŞANTIONAREA

1.1. Introducere

Procesul de eşantionare se poate defini astfel: eşantionarea este operaţia de prelevare a unor informaţii la momente discrete de timp (sau spaţiu), în scopul memorării, transmiterii şi prelucrării semnalelor într-un mod mai avantajos, în formă numerică [Po3].

Informaţia numerică obţinută în urma eşantionării, prelucrată sau nu, se poate folosi pentru obţinerea unui semnal continual (folosind un CNA şi un FTJ). Dacă, prin eşantionare, nu se pierde informaţie din semnalul iniţial şi dacă el poate fi reconstituit exact, sau cu erori acceptabile din eşantioanele sale, se poate spune că numărul de eşantioane extrase este suficient. În general, datorită posibilităţilor limitate de memorare şi datorită necesităţii unor calcule rapide, se caută ca numărul de eşantioane prelevate dintr-un semnal să fie minim, dar destul de mare astfel încât distorsiunile introduse la reconstrucţie să fie cât mai mici. Deci se poate spune că eşantionarea reprezintă o aproximare a funcţiilor. Acest lucru se poate face prin mai multe metode de aproximare: polinomială, prin funcţii în scară, prin funcţii poligonale, prin serii cardinale etc. În următorul paragraf se prezintă aproximarea funcţiilor prin serii cardinale. În paragraful 3 se prezintă cazul eşantionării semnalelor periodice urmând ca, în continuare, să se trateze pe scurt erorile ce pot să apară din cauza eşantionării.

1.2. Teorema WKS (sau teorema eşantionării)

Seriile cardinale au fost studiate de către Whittaker [Je1] care a definit funcţia cardinală sub forma

$$f_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_c(a+nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-a-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-a-nT)}. \tag{1.1}$$

unde $f_c(t)$ reprezintă funcţia studiată, T perioada de eşantionare, a momentul corespunzător eşantionului zero ($n=0$).

După cum se vede expresia depinde de valori ale funcţiei corespunzătoare punctelor echidistante a, $a+T$, ... , $a+nT$, ... ale argumentului.

Aceste serii au fost introduse în telecomunicaţii de către Kotelnikov şi Shannon. Din acest motiv teorema eşantionării se mai numeşte şi teorema WKS.

Teorema eşantionării enunţată şi publicată de Shannon în 1949 are următorul enunţ [Sh1]: Dacă o funcţie $f(t)$ nu conţine frecvenţe mai mari decât W, ea este complet determinată prin valorile sale într-o serie de puncte echidistante, la intervale egale cu $1/(2W)$ secunde.

Pentru a putea demonstra acest lucru, Papoulis porneşte de la transformata Fourier a funcţiei $f(t)$, notată $F_f(\omega)$, pentru a putea introduce limitarea spectrului la W [Po3]. O conditie suplimentară impusă este ca semnalul să fie de energie finită ($\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f_c(nT)|^2 < \infty$) [Je1].

Contrar părerii generale că relaţia (1.1) este valabilă doar pentru semnale de energie finită, ea se aplică şi la semnale periodice [Po1].

Transformata Fourier inversă va avea intervalul de integrare dat de domeniul de existenţă a semnalului în domeniul frecvenţe. Transformata Fourier (funcţia corespunzătoare), $F_f(\omega)$, este de bandă limitată (are valori diferite de zero în domeniul $[-W,+W]$), prin urmare se poate dezvolta în serie Fourier, notată $F_{fp}(\omega)$, care va reprezenta, în tot spectrul, funcţia obţinută prin periodicizarea lui $F_f(\omega)$. Aceasta se dezvoltă în serie exponenţială, coeficienţii Fourier fiind proporţionali cu valorile funcţiei în momentele de eşantionare. Deoarece $F_{fp}(\omega)$ şi $F_f(\omega)$ sunt identice în intervalul $[-W,+W]$, rezultă relaţia de reconstrucţie sub forma [Po3, Hi1]

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2W}\right)\frac{\sin \pi(2Wt-k)}{\pi(2Wt-k)}. \tag{1.2}$$

Rezultă ceea ce afirmă teorema eşantionării: cunoscând valorile funcţiei în punctele echidistante $k/(2W)$ atunci funcţia este cunoscută în orice punct t.
Mărimea $1/(2W) = T_e$ reprezintă perioada de eşantionare, iar $2W = f_e$ frecvenţa de eşantionare.

Din formula de reconstrucţie dată de relaţia (1.2), se pot trage următoarele concluzii:
- în punctele de eşantionare suma coincide cu valoarea funcţiei. Adică, valoarea funcţiei în momentul $t = iT_e$ este egală cu valoarea eşantionului i, celelalte eşantioane neintervenind în calcul;
- pentru momentele de timp $t \neq iT_e$, toate eşantioanele participă la determinarea valorii funcţiei. Asta înseamnă că un eşantion participă la determinarea valorii funcţiei şi în momente anterioare apariţiei lui, cu toate că valoarea unui semnal la un moment dat nu se schimbă dacă semnalul evoluează sub o formă sau alta. Astfel comportarea seriei din formula de reconstrucţie nu este cauzală, aceasta fiind o proprietate a tuturor formulelor de intrepolare [Po3].

1.3. Eşantionarea funcţiilor (semnalelor) periodice

În tratarea teoremei eşantionării s-au luat în considerare semnale aperiodice. Studiul eşantionării semnalelor periodice nu se face tot pe baza teoremei eşantionării, prezentată în paragraful anterior, deoarece ele nu au transformată Fourier. În schimb putem considera seria Fourier ataşată lor, dacă îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet, şi anume [An1, Bu1]:

1) Funcţia dată, $f(x)$, de perioadă 2π, este mărginită în toate punctele intervalului închis $[a,b]$, unde $b-a=2\pi$;
2) În intervalul închis $[a,b]$, funcţia $f(x)$ variază monoton sau are un număr finit de maxime şi minime;
3) Funcţia $f(x)$ este continuă în toate punctele intervalului închis $[a,b]$, cu excepţia unui număr finit de puncte.

Semnalele (funcţiile) de durată finită, cu spectrul infinit, pot fi considerate ca fiind o perioadă a unui semnal periodic obţinut din funcţia iniţială prin repetarea sa.

Considerăm un semnal periodic $f(t)$ cu perioada T_0 (fundamentala f_0). El poate fi descompus în serie Fourier trigonometrică

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t)\right], \tag{1.3}$$

cu condiţia ca această serie ataşată funcţiei (semnalului) să fie convergentă.

Relaţiile de calcul a coeficienţilor ce intervin în dezvoltarea în serie Fourier trigonometrică sunt

$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)dt$, coeficient corespunzător componentei continue,

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)dt \\ b_k&=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)dt. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Folosind formulele lui Euler, relaţia (1.3) poate fi transformată în seria Fourier exponenţială

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{1.5}$$

unde

$$\begin{aligned} c_0&=a_0 \\ c_{\pm k}&=\frac{a_k\mp jb_k}{2}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{\mp jk\omega_0 t}dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Coeficienţii c_k, respectiv a_k şi b_k, se calculează folosind funcţia continuală $f(t)$. În urma eşantionării se dispune de un număr limitat de valori corespunzătoare funcţiei analizate. Se doreşte calcularea coeficienţilor Fourier în funcţie de eşantioanele funcţiei $f(t)$ la momentele de timp iT_e, unde $i = 0,1,2,\ldots$, iar T_e reprezintă perioada (pasul) de eşantionare.

Presupunem că cea mai mare frecvenţă din semnalul considerat corespunde armonicei de ordinul K. Studiind formula de dezvoltare în serie Fourier dată de relaţia (1.5), observăm că avem un coefficient, c_0, corespunzător valorii medii a semnalului şi câte doi coeficienţi, c_k şi c_{-k}, pentru fiecare componentă armonică k, unde $k = 1,2,\ldots,K$. Prin urmare, deoarece avem nevoie de un sistem de relaţii independente pentru determinarea tuturor coeficienţilor seriei şi, având de calculat $N = 2K+1$ coeficienţi, rezultă că avem nevoie de $2K+1$ relaţii liniar independente. Înlocuind în relaţia (1.5) pe t cu iT_e (înseamnă că eşantionarea începe la momentul $t = 0$), şi ţinând cont de presupunerea făcută mai sus, şi anume că avem maxim K componente armonice, vom obţine

$$f(iT_e) = \sum_{k=-K}^{+K} c_k e^{jk\omega_0 iT_e}. \tag{1.7}$$

Numărul i reprezintă indicele (numărul) eşantionului.

Din relaţia (1.7) rezultă că în fiecare eşantion intervin toţi cei N coeficienţi. Pentru a obţine cele N relaţii liniar independente ce formează un sistem de ecuaţii compatibil determinat, trebuiesc prelevate un număr de N eşantioane.

Vom considera cazul general, când eşantionarea începe la un moment $t = t_0$ (în literatura de specialitate se utilizează cazul particular $t_0 = 0$). În acest caz, eşantioanele se prelevează la momentele $t_i = t_0 + iT_e$. În relaţia (1.7) facem notaţia $y_i = f(t_0 + iT_e)$ şi scriem sistemul format din $N = 2K+1$ relaţii

$$\begin{cases} y_0 = c_{-K}e^{-jK\omega_0 t_0} + \ldots + c_{-1}e^{-j\omega_0 t_0} + c_0 + c_1 e^{j\omega_0 t_0} + \ldots + c_K e^{jK\omega_0 t_0} \\ \vdots \\ y_i = c_{-K}e^{-jK\omega_0(t_0+iT_e)} + \ldots + c_0 + c_1 e^{j\omega_0(t_0+iT_e)} + \ldots + c_K e^{jK\omega_0(t_0+iT_e)} \\ \vdots \\ y_{N-1} = c_{-K}e^{-jK\omega_0(t_0+(N-1)T_e)} + \ldots + c_0 + \ldots + c_K e^{jK\omega_0(t_0+(N-1)T_e)} \end{cases} \tag{1.8}$$

Calculul coeficientilor c_k folosind eşantioane prelevate începând de la un moment $t_0 \neq 0$, ale unor semnale periodice pare sau impare, utilizând o frecvenţă de eşantionare mai mică decât frecvenţa Nyquist, va fi tratat ulterior în capitolul 3.

Notăm cu **Y** vectorul corespunzător eşantioanelor de intrare, adică

$$\mathbf{Y} = (y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots), \tag{1.9}$$

cu **C** vectorul coeficienţilor

$$\mathbf{C} = (c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \ldots) \tag{1.10}$$

şi cu **E** matricea dată de exponenţialele

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} e^{-jK\omega_0 t_0} & \cdots & e^{-j\omega_0 t_0} & 1 & \cdots & e^{jK\omega_0 t_0} \\ e^{-jK\omega_0 (t_0+T_e)} & \cdots & e^{-j\omega_0 (t_0+T_e)} & 1 & \cdots & e^{jK\omega_0 (t_0+T_e)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-jK\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)} & \cdots & e^{-j\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)} & 1 & \cdots & e^{jK\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Astfel, sistemul (1.8) poate fi scris matriceal ca mai jos

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}. \tag{1.12}$$

Pentru ca sistemul (1.8) să fie compatibil determinat trebuie ca determinantul matricei (1.11) să fie diferit de zero.

Folosind proprietatea determinanţilor care spune că [Bu1]: dacă toate elementele unei linii (coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un număr α, se obţine o matrice al cărui determinant este egal cu α înmulţit cu determinantul matricei iniţiale, vom înmulţi fiecare dintre liniile matricei (1.11) cu $e^{jK\omega_0 t_0} e^{j(m-1)K\omega_0 T_e}$, $m=1,2,\ldots,N$, unde m reprezintă numărul liniei. În urma acestor operaţii va rezulta matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{j\omega_0 t_0} & \left(e^{j\omega_0 t_0}\right)^2 & \left(e^{j\omega_0 t_0}\right)^{2K} \\ 1 & e^{j\omega_0 (t_0+T_e)} & \left(e^{j\omega_0 (t_0+T_e)}\right)^2 & \left(e^{j\omega_0 (t_0+T_e)}\right)^{2K} \\ 1 & e^{j\omega_0 (t_0+2T_e)} & \left(e^{j\omega_0 (t_0+2T_e)}\right)^2 & \left(e^{j\omega_0 (t_0+2T_e)}\right)^{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)} & \left(e^{j\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)}\right)^2 & \left(e^{j\omega_0 (t_0+(N-1)T_e)}\right)^{2K} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Determinantul acestei matrice este un determinant Vandermond care se calculează relativ simplu [Ma1, Bu1]. Dacă folosim notaţiile $x_m = e^{j\omega_0 (t_0+(m-1)T_e)}$, $m=1,2,\ldots,N$, atunci determinantul matricei (1.13) se va calcula cu relaţia

$$Det = \prod_{\substack{l,k=1 \\ l>k}}^{N} \left(x_l - x_k\right). \tag{1.14}$$

Acest determinant împărţit cu

$$\left(e^{jK\omega_0 t_0}\right)^N e^{jK\omega_0 T_e \frac{N(N-1)}{2}}, \tag{1.15}$$

care reprezintă rezultatul produsului între cele N elemente cu care s-au înmulţit cele N linii ale matricei **E**, este egal cu determinantul matricei iniţiale (din relaţia (1.11)).

Pentru a avea un sistem de ecuaţii determinat, de tipul (1.8), rezultă că avem nevoie de N eşantioane diferite. Teorema eşantionării spune că frecvenţa de eşantionare trebuie să fie mai mare sau egală cu o limită numită frecvenţă Nyquist

[Na1]. Prin urmare, rezultă că eşantioanele trebuiesc prelevate dintr-o perioadă a semnalului considerat. Astfel, pasul la eşantionarea uniformă este

$$T_e = \frac{T_0}{N} = \frac{T_0}{2K+1}, \tag{1.16}$$

iar frecvenţa de eşantionare va fi

$$f_e = 2Kf_0 + f_0 = 2f_{\max} + f_0. \tag{1.17}$$

Concluzia ce rezultă din relaţia (1.17) este că frecvenţa minimă de eşantionare a semnalelor periodice este ceva mai mare decât frecvenţa minimă de eşantionare în cazul eşantionării semnalelor aperiodice, $2f_{\max}$. După cum se ştie, în cazul semnalelor periodice, un anumit eşantion se regăseşte în toate perioadele la aceeaşi distanţă în timp faţă de începutul perioadei; astfel, eşantioanele necesare pot fi prelevate de pe parcursul mai multor perioade. În capitolul următor se va prezenta modalitatea de obţinere a acestor eşantioane şi modul de calcul al coeficienţilor Fourier.

Deoarece $\omega_0 = 2\pi/T_0$ şi $T_e = T_0/N$, exponenţiala a doua din (1.15) poate fi rescrisă sub forma

$$e^{jK\omega_0 T_e \frac{N(N-1)}{2}} = e^{jK(N-1)\pi}.$$

Pentru N impar, termenul $e^{jK(N-1)\pi}$ are valoarea 1. În cazul în care se alege N par (avem supraeşantionare), dacă K este par, acest termen va lua valoarea 1, iar pentru K impar va lua valoarea -1. Prin urmare, determinantul calculat cu relaţia (1.14) va fi împărţit cu $\pm\left(e^{jK\omega_0 t_0}\right)^N$. Dacă $t_0 = 0$, atunci termenul $\left(e^{jK\omega_0 t_0}\right)^N$ devine 1.

Până acum s-au obţinut numărul (minim) de eşantioane necesare şi perioada (pasul) de eşantionare. În continuare, pentru simplificarea relaţiilor folosite în scopul obţinerii coeficienţilor din eşantioanele semnalului, considerăm $t_0 = 0$.

Relaţia (1.7) o înmulţim cu $e^{-jn\omega_0 iT_e}$, unde n este un număr întreg cuprins în intervalul $[-K,+K]$, după care se face însumarea celor N relaţii corespunzătoare eşantioanelor prelevate, obţinând

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(iT_e)e^{-jn\omega_0 iT_e} = \sum_{k=-K}^{+K} c_k \sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\omega_0 iT_e}. \tag{1.18}$$

Pentru $n = k$ din relaţia (1.18) obţinem formula de calcul a coeficienţilor seriei Fourier a funcţiei $f(t)$, din valorile eşantioanelor

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(iT_e)e^{-jk\omega_0 iT_e}, \tag{1.19}$$

deoarece

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\omega_0 i T_e} = \begin{cases} N & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k \neq n \end{cases}. \tag{1.20}$$

Pentru $k = 0$ avem

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(iT_e), \tag{1.21}$$

adică coeficientul corespunzător componentei continue (valoarea medie) a funcției, este dat de media eșantioanelor.

Dacă frecvența de eșantionare este aleasă mai mică decât frecvența minimă de eșantionare dată de relația (1.17), este posibil ca prin punctele de eșantionare să treacă nu doar sinusoida de frecvență f_0 ci și alte sinusoide din banda semnalului, cu frecvențe $f_0 + nf_e$ sau $nf_e - f_0$, unde n este un număr întreg. Acest lucru înseamnă că în procesul de eșantionare a intervenit o eroare, în cazul nostru fiind vorba de eroare de aliere. Pentru a demonstra faptul că prin punctele de eșantionare pot trece semnale de frecvențe diferite astfel rezultând erori de aliere, considerăm că avem un semnal sinusoidal de frecvență f_0 cu amplitudinea unu și faza zero. Eșantionul i, unde $i = 0,1,2,\ldots$, al acestui semnal are valoarea $f(iT_e) = \sin(\omega_0 iT_e)$. Deoarece funcțiile trigonometrice sunt periodice, putem scrie

$$f(iT_e) = \sin(\omega_0 iT_e) = \sin(\omega_0 iT_e \pm 2ni\pi) = \sin 2\pi i T_e (f_0 \pm nf_e), \tag{1.22}$$

ceea ce înseamnă că un semnal sinusoidal, de amplitudine unu, fază zero și frecvență $f_0 + nf_e$ va da aceleași valori ale eșantioanelor, în cazul eșantionării cu pasul T_e, ca și semnalul ales mai înainte.

Ca o concluzie se poate scrie, o nouă formulare a teoremei eșantionării: Dacă o funcție periodică are frecvența fundamentală f_0 și ordinul componentei armonice maxime egal cu K, ea este complet determinată prin valorile sale într-o serie de puncte echidistante, aflate la intervale egale cu $1/(2K+1)f_0$ secunde.

Observație: Pe baza unei demonstrații similare cu cea din relația (1.22) se va demonstra în capitolul 2 că, în anumite condiții, frecvența de eșantionare a unui semnal periodic poate fi redusă sub valoarea limită precizată prin enunțul anterior.

1.4. Erori de eșantionare

Dintre erorile ce intervin în procesul de eșantionare se consideră, în general, următoarele tipuri [Po3]:

- erori de aliere, ce apar datorită nerespectării condiției de limitare a benzii de frecvențe în concordanță cu frecvența de eșantionare a semnalului ce se eșantionează;
- erori de trunchiere, ce apar datorită utilizării în serie a unui număr finit de eșantioane în locul seriei complete (infinite);
- erori de jitter, ce apar datorită faptului că eșantionarea are loc la momente diferite față de cele teoretice de eșantionare;
- erori de amplitudine, ce apar datorită incertitudinii de măsurare a valorii eșantioanelor.

Ultimele două erori se tratează împreună deoarece au acelaşi effect; în cazul erorii de jitter rezultă, de fapt, o eroare în măsurarea amplitudinii semnalului în punctul de eşantionare (teoretic).

În continuare vom prezenta pe larg cazul erorii de aliere.

1.4.1. Erori de aliere

Dacă semnalul $f(t)$ considerat nu este de bandă limitată, sau dacă procesul de eşantionare nu se realizează cu frecvenţa de eşantionare dată de teorema WKS, ci cu o frecvenţă mai mică, atunci apare o eroare numită eroare de aliere, dată de relaţia

$$\varepsilon_A(t) = f(t) - f_r(t), \qquad (1.23)$$

unde $\varepsilon_A(t)$ reprezintă eroarea de aliere, iar $f_r(t)$ reprezintă semnalul reconstituit cu ajutorul relaţiei (1.1) fără să fie îndeplinite condiţiile teoremei WKS.

După cum se ştie procesul de eşantionare duce la lărgirea spectrului prin periodicizarea lui. În cazul în care condiţiile teoremei eşantionării nu sunt satisfăcute, spectrele alăturate corespunzătoare transformatei Fourier se suprapun mai mult sau mai puţin.

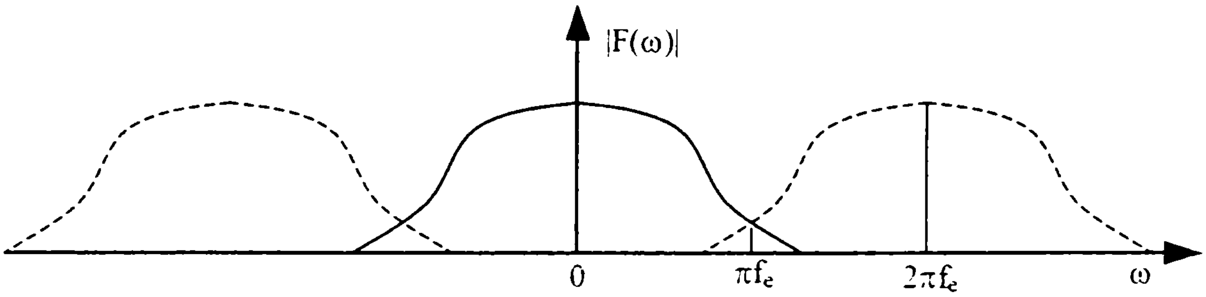


Fig. 1.1. Suprapunerea spectrelor în cazul subeşantionării

Rezultă că prin filtrare, lobul central rezultat va fi diferit faţă de cel care ar fi fost obţinut în cazul respectării teoremei eşantionării.

S-a demonstrat [Na1, Po3] că o margine (valoare limită) pentru eroarea de aliere este dată de relaţia

$$|\varepsilon_A(t)| = |f(t) - f_r(t)| \le \frac{2}{\pi} \int_{\pi f_e}^{\infty} |F_f(\omega)| d\omega, \qquad (1.24)$$

adică tocmai de partea din spectru care ar trebui să fie nulă, în cazul aplicării corecte a teoremei eşantionării. Cu $F_f(\omega)$ s-a notat transformata Fourier a funcţiei $f(t)$, iar cu $F(\omega)$ funcţia obţinută prin periodicizarea lui $F_f(\omega)$.

În cazul semnalelor periodice, spectrul nu mai este continuu ci discret. Dacă este îndeplinită condiţia $f_e \ge 2Kf_0 + f_0$, spectrul semnalului eşantionat este prezentat în figura de mai jos (figura 1.2). S-a considerat că semnalul nu conţine componentă continuă, componenta armonică maximă conţinută în spectrul semnalului are ordinul $K = 5$, iar eşantionarea se face cu frecvenţa $f_e = f_{e\,\min} = (2K+1)f_0$.

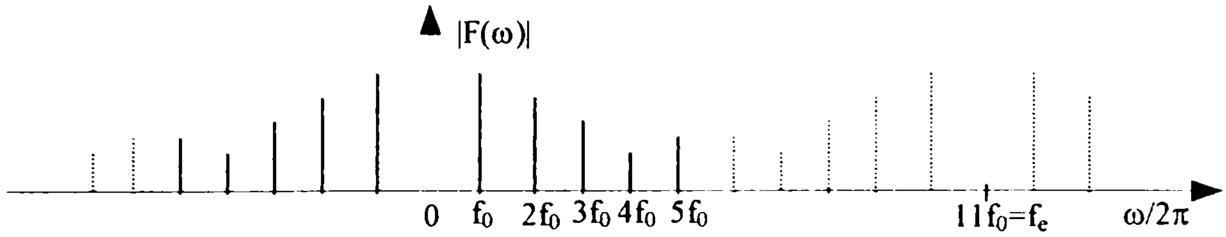


Fig. 1.2. Spectrul unui semnal periodic fără componentă continuă, cu fundamentala f_0 şi $K = 5$, eşantionat cu frecvenţa f_{emin}

Cu linie continuă am reprezentat spectrul semnalului periodic considerat, iar cu linie întreruptă periodicizarea sa în urma eşantionării. Dacă avem şi componentă continuă atunci la $0, \pm f_e, \pm 2f_e, \ldots$ vom avea câte o linie spectrală proporţională cu valoarea acelei componente. După cum se observă avem linii spectrale corespunzătoare fundamentalei şi armonicelor. În cazul în care eşantionarea se face folosind o frecvenţă $f_{e1} < f_{e\min}$, în anumite condiţii, şi anume $f_{e\min} - f_{e1} \neq nf_0$, cu $n = 1, 2, \ldots$, spectrul semnalului eşantionat va fi de forma prezentată în figura următoare.

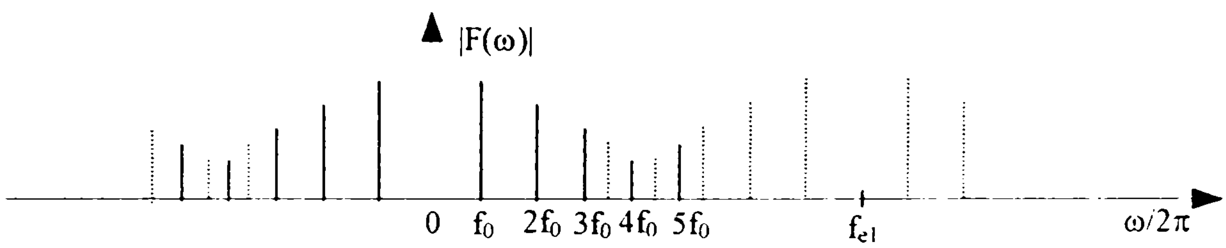


Fig. 1.3. Spectrul unui semnal periodic fără componentă continuă, cu fundamentala f_0 şi $K = 5$, eşantionat cu frecvenţa $f_{e1} = f_{emin} - 2.5f_0$

În acest caz, chiar dacă apare procesul de întrepătrundere a spectrelor, semnalul iniţial poate fi reconstituit dacă se iau în considerare doar liniile spectrale utile, corespunzătoare componentei continue (dacă există), fundamentalei şi componentelor armonice. Semnalul va putea fi corect reconstituit deoarece, după cum se observă din figura 1.3, aceste linii spectrale nu sunt corupte în urma procesului de întrepătrundere (aliere).

Acest avantaj va fi utilizat în capitolul următor, "Eşantionarea semnalelor periodice pe mai multe perioade".

1.5. Erori la eşantionarea funcţiilor periodice

După cum s-a demonstrat, în cazul unui semnal periodic, pentru alegerea frecvenţei de eşantionare trebuie să cunoaştem frecvenţa f_0 a fundamentalei şi ordinul K corespunzător componentei armonice maxime. Descompunerea în serie Fourier a semnalului este dată de relaţia (1.5) unde limitele de însumare sunt $-K$ şi $+K$, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e \geq (2K+1)f_0$. Dacă semnalul are mai multe armonice, de exemplu K_1 armonice, cu $K_1 > K$, atunci seria Fourier corectă este

$$f(t) = \sum_{k=-K_1}^{+K_1} c_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{1.25}$$

Dacă prelevăm doar $N = 2K + 1$ eşantioane, corespunzătoare numărului de armonice considerate (şi anume K), folosind relaţia (1.19) putem calcula doar N coeficienţi ai seriei. La o primă analiză, putem spune că neglijăm armonicele superioare lui K. La o analiză mai amănunţită vom vedea că de fapt coeficienţii c_k, cu $k \le K$, pe care îi calculăm sunt şi ei afectaţi de erori, toţi sau numai o parte [Po3], după cum se va arăta mai jos.

Dacă semnalul are K_1 componente armonice, dezvoltarea în serie Fourier exponenţială este dată de relaţia (1.25). Valorile eşantioanelor, indiferent de frecvenţa de eşantionare folosită, sunt date de relaţia

$$f(iT_e) = \sum_{k=-K_1}^{+K_1} c_k e^{jk\omega_0 iT_e} = \sum_{k=-K_1}^{+K_1} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}i}, \tag{1.26}$$

unde $T_e = T_0/N$.

Deoarece considerăm că semnalul are doar K componente armonice, se vor preleva un număr de $N = 2K + 1$ eşantioane în loc de valoarea corectă, $2K_1 + 1$. În acest caz avem un proces de subeşantionare.

Pentru calculul coeficienţilor Fourier vom utiliza aceeaşi procedură prezentată în paragraful 1.3. Relaţia (1.26) o vom înmulţi cu $e^{-jn2\pi i/N}$, $n \in \{-K,...,+K\}$, şi facem însumarea celor N relaţii corespunzătoare celor N eşantioane prelevate, obţinând

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(iT_e) e^{-jn\frac{2\pi}{N}i} = \sum_{k=-K_1}^{+K_1} c_k \sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\frac{2\pi}{N}i} \tag{1.27}$$

În cazul în care $|k-n| < N$, pentru orice k, $|k| \le K_1$, şi orice n, $|n| < K$, este valabilă relaţia

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\frac{2\pi}{N}i} = \begin{cases} N & pt. \quad k = n \\ 0 & pt. \quad k \ne n \end{cases} \tag{1.28}$$

şi coeficienţii corespunzători ai seriei Fourier se calculează corect cu relaţia (1.19).

Dacă $|k-n| = N$, sau în general $|k-n| = rN$ cu $r = 1,2,...$, atunci suma exponenţialelor

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\frac{2\pi}{N}i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi i} = N \ne 0 \text{ pentru } k \ne n. \tag{1.29}$$

În cazul eşantionării corecte, situaţia $|k-n| = N$ nu poate să apară, deoarece semnalul având doar K componente armonice, valoarea maximă a modulului $|k-n|$ se obţine pentru $|k| = \max(k) = K$ şi n de semn contrar lui k, cu $|n| = \max(n) = K$. Astfel $\max(|k-n|) = K + K = 2K < N = 2K + 1$.

Situația $|k-n| = N$ (sau $|k-n| = rN$) intervine doar dacă subeşantionăm şi anume $\max(k) = K_1 > K$ şi $\max(n) = K$.

Pentru fiecare n ales, cu relația (1.19) se va calcula un coeficient c_k al seriei Fourier, cu $k = n$, datorită valabilității relației (1.28). Dacă pentru un n ales, $|k-n| < N$ pentru orice $|k| \le K_1$, atunci coeficientul c_k, $k = n$, este determinat corect cu ajutorul relației (1.19) chiar dacă avem subeşantionare, pentru că relația (1.28) este adevărată. Dacă avem un k', sau mai mulți, cu $|k'| \le K_1$ astfel încât pentru un anumit n dat să avem $|k'-n| = rN$, atunci relația (1.19) devine

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(iT_e) e^{-jn\frac{2\pi}{N}i} = c_n N + c_{k'} N + \dots \tag{1.30}$$

şi prin urmare $c_k = c_n$ nu se mai poate determina corect. Aceasta deoarece relația (1.20) nu mai este valabilă, suma de exponențiale fiind egală cu N şi pentru anumite valori $k' \ne n$. Dacă $r = 1$ atunci în partea dreaptă a relației (1.30) avem $(c_n + c_{k'})N$.

În continuare vom considera $r = 1$, adică cazul în care $K < K_1 \le 2K$, unde, precizăm încă o dată, K_1 este numărul real de componente armonice, iar K numărul presupus de componente armonice a semnalului analizat. Numărul N de eşantioane va fi egal cu $2K+1$, identic cu numărul de coeficienți ai seriei Fourier care vor fi determinați. Prin urmare n poate lua valori în domeniul $-K$ la $+K$, iar k poate lua valori între $-K_1$ şi $+K_1$. Dacă $K_1 \le 2K = N-1$, atunci k maxim va avea valoarea $N-1$. Astfel, pentru a avea situația $|k-n| = N$ rezultă că k şi n trebuie să fie de semn contrar. Pentru simplificare, vom considera cazul k pozitiv şi n negativ.

Coeficienții c_k sunt calculați eronat pentru $|k-n| = N$ sau, altfel spus, $k + |n| = N$. Condiția ca să nu avem coeficienți eronați este

$$k_{\max} + |n| = K_1 + |n| \le N - 1 = 2K. \tag{1.31}$$

Deci toți coeficienții c_n, $k = n$, pentru care

$$|n| \le 2K - K_1, \tag{1.32}$$

se determină fără erori cu ajutorul relației (1.19) şi în cazul subeşantionării semnalului. În cazul k - numere negative, se ajunge la o condiție similară.

Astfel putem spune că acei coeficienți c_n pentru care indicele n îndeplineşte una din condițiile

$$K \ge n > 2K - K_1 \tag{1.33}$$

$$-K \le n < -(2K - K_1) \tag{1.34}$$

sunt afectați de erori.

În cazul $K_1 \le 2K$ (sau $r = 1$), vom avea ca rezultat al sumei din relația (1.19)

$$(c_n + c_{N+n})N \tag{1.35}$$

pentru $n < 0$, $k > 0$, respectiv

$$(c_n + c_{-(N-n)})N \tag{1.36}$$

pentru $n > 0$, $k < 0$.

Dacă $K_1 > 2K$, toți coeficienții seriei Fourier calculați cu relația (1.19) vor fi eronați.

Ca exemplu numeric, considerăm un semnal periodic $x(t)$ obținut ca sumă a două semnale, unul ce are doar componente cosinusoidale (par) și unul ce are doar componente sinusoidale (impar). La această sumă se adaugă și o componentă continuă. Semnalele sunt:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \cos(\omega t) - 0{,}5\cos(2\omega t) + 0{,}5\cos(3\omega t) + 0{,}25\cos(4\omega t) - 0{,}25\cos(5\omega t) \\ x_s(t) &= \sin(\omega t) - 0{,}5\sin(2\omega t) + 0{,}5\sin(3\omega t) - 0{,}25\sin(4\omega t) + 0{,}25\sin(5\omega t) \end{aligned} \tag{1.37}$$

și

$$x(t) = 1 + x_c(t) + x_s(t). \tag{1.38}$$

Ordinul componentei armonice maxime este $K_1 = 5$, prin urmare numărul minim de eşantioane ce trebuiesc prelevate este $N_1 = 11$. Dacă se consideră $K = 4$, numărul minim de eşantioane prelevate este $N = 9$, în acest caz se pot calcula 9 coeficienți c_n, cu $|n| \le 4$. Dintre aceştia, cei pentru care indicele are valoarea $|n| \le 2K - K_1 = 8 - 5 = 3$, se calculează corect. Astfel, în acest caz, c_4 şi c_{-4} se calculează eronat.

Dacă $K = 3$, aplicând aceeasi regulă (relația (1.32)), doar c_0, c_1 şi c_{-1} se calculează corect. Pe pagina următoare, în tabelul 1.1, sunt prezentate valorile coeficienților seriei Fourier calculați pentru cazurile $K = 5$, $K = 4$, $K = 3$, $K = 2$. Dupa cum se poate observa, dacă $K = 2$, $K_1 = 5 > 4 = 2K$, toți coeficienții seriei Fourier sunt eronați.

Tabelul 1.1. Valorile coeficienților Fourier obținuți folosindu-se diferite frecvențe de eșantionare (funcție de K)

	$K=5$	$K=4$	$K=3$	$K=2$
c_{-5}	-0.125+0.125i			
c_{-4}	0.125-0.125i	-0.25i		
c_{-3}	0.25+0.25i	0.25+0.25i	0.375+0.375i	
c_{-2}	-0.25-0.25i	-0.25-0.25i	-0.375-0.375i	-0.5i
c_{-1}	0.5+0.5i	0.5+0.5i	0.5+0.5i	0.625+0.625i
c_0	1	1	1	0.75
c_1	0.5-0.5i	0.5-0.5i	0.5-0.5i	0.625-0.625i
c_2	-0.25+0.25i	-0.25+0.25i	-0.375+0.375i	0.5i
c_3	0.25-0.25i	0.25-0.25i	0.375-0.375i	
c_4	0.125+0.125i	0.25i		
c_5	-0.125-0.125i			

Dacă notăm coeficienții sub forma c_n^K, din tabelul 1.1 putem scrie

$$\begin{aligned} c_{-4}^4 &= c_{-4}^5 + c_5^5 \\ c_4^4 &= c_4^5 + c_{-5}^5 \end{aligned} \tag{1.39}$$

astfel fiind verificate relațiile (1.35) și (1.36).

De asemenea sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} c_{-3}^3 &= c_{-3}^5 + c_4^5 \\ c_3^3 &= c_3^5 + c_{-4}^5 \\ c_{-2}^3 &= c_{-2}^5 + c_5^5 \\ c_2^3 &= c_2^5 + c_{-5}^5 \end{aligned} \tag{1.40}$$

respectiv

$$\begin{aligned} c_{-2}^2 &= c_{-2}^5 + c_3^5 \\ c_2^2 &= c_2^5 + c_{-3}^5 \\ c_{-1}^2 &= c_{-1}^5 + c_4^5 \\ c_1^2 &= c_1^5 + c_{-4}^5 \\ c_0^2 &= c_0^5 + c_5^5 + c_{-5}^5 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Din (1.39) se poate observa faptul că nu se pot calcula coeficienții c_{-4}^5, c_4^5, c_{-5}^5, c_5^5 pe baza coeficienților c_{-4}^4 și c_4^4 deoarece avem două ecuații și patru necunoscute.

Se ştie faptul că transformata Fourier (discretă) este periodică. Daca nu se cunosc numărul de componente armonice K_1 în semnalul periodic considerat, se va alege un număr K şi se vor calcula cu ajutorul relaţiei (1.19) mai mulţi coeficienţi (de exemplu $2K$). Dacă coeficienţii c_K şi c_{K+1} ($c_{-K} = c_{K+1}$) sunt diferiţi de zero, avem cazul $K \leq K_1$ ceea ce înseamnă că numărul K trebuie ales mai mare, prin urmare şi frecvenţa de eşantionare se va mări. Dacă se ajunge în situaţia $K = K_1 + 1$ atunci vom avea

$$c_K = c_{K+1} = 0, \tag{1.42}$$

şi astfel se va şti care este ordinul componentei armonice maxime, reconstrucţia semnalului fiind posibilă. Acest lucru este valabil pentru semnalele care au componente armonice până la K_1 diferite de zero. Dacă în intervalul $k = 2,..., K_1$ lipsesc mai multe componente armonice succesive (sunt egale cu zero) algoritmul prezentat mai sus nu mai poate fi aplicat. Pentru exemplificare se consideră semnalul $x(t)$ dat de relaţia (1.38) unde $x_c(t)$ şi $x_s(t)$ sunt

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \cos(\omega t) - 0{,}5\cos(2\omega t) + 0{,}5\cos(3\omega t) + 0{,}25\cos(4\omega t) - 0{,}25\cos(10\omega t) \\ x_s(t) &= \sin(\omega t) - 0{,}5\sin(2\omega t) + 0{,}5\sin(3\omega t) - 0{,}25\sin(4\omega t) + 0{,}25\sin(10\omega t) \end{aligned} \tag{1.43}$$

Prin urmare, $K_1 = 10$ şi componentele armonice de la ordinul 5 la ordinul 9 lipsesc. În tabelul 1.2 sunt prezentate valorile coeficienţilor seriei Fourier (cu indici pozitivi) pentru cazurile $K = 6$ la $K = 10$.

Tabelul 1.2 Valorile coeficienţilor Fourier pentru un semnal periodic cu componente armonice lipsă

	$K=6$	$K=7$	$K=8$	$K=9$	$K=10$
c_0	1	1	1	1	1
c_1	0,5-0,5i	0,5-0,5i	0,5-0,5i	0,5-0,5i	0,5-0,5i
c_2	-0,25+0,25i	-0,25+0,25i	-0,25+0,25i	-0,25+0,25i	-0,25+0,25i
c_3	0,125-0,125i	0,25-0,25i	0,25-0,25i	0,25-0,25i	0,25-0,25i
c_4	0,125+0,125i	0,125+0,125i	0,125+0,125i	0,125+0,125i	0,125+0,125i
c_5	0	-0,125+0,125i	0	0	0
c_6	0	0	0	0	0
c_7	0	0	-0,125+0,125i	0	0
c_8	0	0	0	0	0
c_9	0,125-0,125i	0	0	-0,125+0,125i	0
c_{10}	0,125+0,125i	-0,125-0,125i	-0,125-0,125i	-0,125-0,125i	-0,125-0,125i

Dacă un coeficient c_k, unde $k = 0$ la K, sau mai mulţi îşi schimbă valoarea la incrementarea lui K atunci ordinul componentei armonice corespunzător frecvenţei maxime din semnal nu este corect ales chiar dacă, $c_K = c_{K+1} = 0$. Pentru obţinerea valorii corecte a ordinului componentei armonice maxime din semnalul analizat se va proceda în modul următor:

1. pe baza unor informaţii apriori despre semnal ce se analizează, se va alege o valoare pentru ordinul K corespunzător componentei armonice maxime considerate;
2. se prelevează două seturi de N' şi N'' eşantioane de pe parcursul unei perioade a semnalului $x(t)$ unde $N'=2K+1$ şi $N''=2(K+1)+1$;

3. se calculează două seturi de coeficenți Fourier, $c_k^{\cdot}$ și $c_k^{\cdot\cdot}$, pe baza eşantioanelor prelevate;

4. dacă $c_k^{\cdot} = c_k^{\cdot\cdot}$ pentru $k = 0 \div K$ și $c_K^{\cdot} \neq 0$ iar $c_{K+1}^{\cdot\cdot} = 0$, ordinul componentei armonice maxime din semnalul analizat este K;

5. dacă $c_k^{\cdot} = c_k^{\cdot\cdot}$ pentru $k = 0 \div K$ și ultimii m coeficienți $c_k^{\cdot}$ sunt egali cu zero atunci, $K = K - m$;

6. dacă există un k pentru care $c_k^{\cdot} \neq c_k^{\cdot\cdot}$ atunci $K = K + 1$ și se reia calculul de la pasul 2.

S-au făcut simulări și pentru alte valori ale amplitudinilor componentelor armonice pentru a se verifica relațiile (1.39), (1.40), (1.41), rezultând aceleași relații între coeficienții Fourier calculați.

EŞANTIONAREA SEMNALELOR PERIODICE PE MAI MULTE PERIOADE

2.1. Introducere

Scopul urmărit, în acest capitol, este de a reduce cât mai mult frecvenţa de eşantionare şi în acelaşi timp, de a preleva un număr cât mai mic de eşantioane cu ajutorul cărora să se poată reconstitui în bune condiţiuni semnalul supus eşantionării.

În capitolul I s-a prezentat eşantionarea semnalelor periodice cu obţinerea eşantioanelor în intervalul corespunzător unei perioade, frecvenţa de eşantionare fiind dată de relaţia (1.16) pe care o rescriem sub forma

$$f_e \geq (2K+1) f_0, \tag{2.1}$$

unde f_0 reprezintă frecvenţa fundamentalei şi K numărul maxim de componente armonice prezente în semnal.

Eşantionarea semnalelor periodice pe mai multe perioade a mai fost tratată în literatura de specialitate de mai mulţi autori.

În [Ti1] se prezintă o teoremă cu privire la eşantionarea unui semnal periodic pe mai multe perioade. Teorema prezentată este următoarea:

Un semnal periodic $s_p(t)$, care nu conţine armonice de rang mai mare decât K, poate fi reconstituit fără erori pe baza a N eşantioane, culese uniform pe durata a P perioade, dacă frecvenţa de eşantionare este suficient de ridicată, încât să rezulte $N \geq 2KP+1$.

După cum se poate observa din enunţul teoremei, numărul de eşantioane prelevate este destul de mare, fiind direct proporţional cu numărul P de perioade considerate.

Din demonstraţia teoremei expuse mai sus (pe care nu o mai prezentăm), rezultă că perioada de eşantionare este [Ti1]

$$T_e \leq \frac{T_0}{2K+\frac{1}{P}}. \tag{2.2}$$

Perioada de eşantionare în cazul teoremei negeneralizate, când eşantionarea se face pe o perioadă T_0 a semnalului este

$$T_e \leq \frac{T_0}{2K+1}. \tag{2.3}$$

Se poate observa că frecvența de eşantionare scade în cazul în care se face eşantionarea pe mai multe perioade dar creşte foarte mult numărul de eşantioane prelevate.

De asemenea se poate observa că dacă P tinde către infinit, perioada de eşantionare va fi

$$T_e \leq \lim_{P \to \infty} \left\{ \frac{T_0}{2K + \frac{1}{P}} \right\} = \frac{T_0}{2K}, \tag{2.4}$$

de unde rezultă că se impune extragerea a cel puțin două eşantioane pe durata unei perioade corespunzătoare componentei armonice maxime din semnal (T_0/K fiind perioada componentei armonice maxime din semnal), condiție care apare şi în cazul teoremei WKS, de unde rezultă că teorema lui Shannon este un caz particular, limită, al teoremei generalizate a eşantionării funcțiilor periodice.

Acest mod de eşantionare pe mai multe perioade nu mulțumeşte deoarece numărul de eşantioane prelevate poate ajunge inacceptabil de mare.

Dacă considerăm eşantioanele prelevate într-o perioadă, conform eşantionării semnalelor periodice prezentate în capitolul 1, vom obține $N_1 \geq 2K + 1$ eşantioane. În cazul în care prelevarea se face conform teoremei mai sus prezentate (eşantionarea pe durata a P perioade) vom obține $N \geq 2KP + 1$ eşantioane. Rezultă că vor fi obținute un număr de $N_x = N - N_1 = 2KP + 1 - 2K - 1 = 2K(P-1)$ eşantioane în plus. Dacă P este mare, deci eşantionarea se face pe mai multe perioade, numărul eşantioanelor prelevate va fi foarte mare.

De asemenea, se poate observa că perioada de eşantionare, în cazul în care eşantionarea se execută pe durata a P perioade, nu creşte prea mult, față de cazul eşantionării pe o perioadă. Conform relației (2.4) dacă P tinde la infinit perioada de eşantionare va fi

$$T_{ep} = \frac{T_0}{2K},$$

unde cu T_{ep} am notat pasul de eşantionare corespunzător eşantionării pe P perioade. Notăm cu

$$T_e = \frac{T_0}{2K+1},$$

pasul de eşantionare corespunzător eşantionării pe o perioadă. Când P tinde spre infinit creşterea perioadei de eşantionare va fi egală cu valoarea

$$\Delta T = T_{ep} - T_e = \frac{T_0}{2K} - \frac{T_0}{2K+1} = \frac{T_0}{2K(2K+1)} = \frac{T_e}{2K},$$

adică o creştere foarte mică a pasului de eşantionare, deci o scădere foarte mică a frecvenței de eşantionare. Dacă facem notațiile $f_{ep} = 1/T_{ep}$, $f_e = 1/T_e$, pentru $P \to \infty$ avem

$$f_{ep} = \frac{f_e}{1+\frac{1}{2K}}.$$

După cum se poate observa frecvenţa de eşantionare scade foarte puţin (nesemnificativ în cazul în care avem mai multe componente armonice).

De asemenea, în literatura de specialitate, se prezintă cazul în care dorind să achiziţionăm N eşantioane, în loc să le prelevăm cu cadenţa T_0/N, obţinerea lor durând astfel o perioadă a semnalului, se prelevează eşantioanele adiacente din perioade succesive [Na1], vezi figura 2.1..

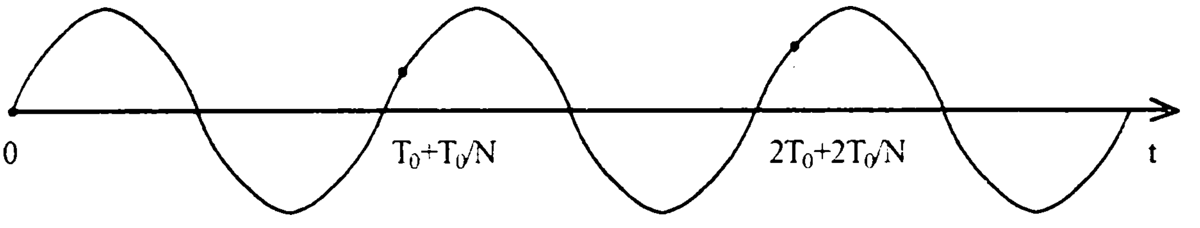


Fig. 2.1. Prelevarea de eşantioane adiacente din perioade succesive.

Perioada de eşantionare va fi în acest caz

$$T_e = T_0 + \frac{T_0}{N}. \tag{2.5}$$

Conform [Na1] prelevarea celor N eşantioane durează N perioade T_0, dar în acest caz se poate spune că eşantionarea este neuniformă, în sensul că perioada de timp între ultimul eşantion prelevat dintr-un set de eşantioane şi primul eşantion din următorul set de eşantioane nu este egală cu pasul de eşantionare ci este mai mică, acest lucru nefiind menţionat.

Cele N eşantioane dintr-un set de eşantioane sunt egal distanţate între ele, diferenţa dintre eşantionul $N-1$ şi eşantionul 0 din următorul set de eşantioane prelevate nefiind $T_0 + T_0/N$ ci T_0/N. Dacă dorim ca eşantionarea să fie uniformă atunci calculând perioada de timp T pe care se face eşantionarea ajungem la

$$T = NT_e = N\left(T_0 + \frac{T_0}{N}\right) = (N+1)T_0. \tag{2.6}$$

Deci pentru o eşantionare uniformă prelevarea celor N eşantioane durează $N+1$ perioade T_0.

Se poate executa şi o eşantionare mai rară, prelevarea de eşantioane adiacente făcându-se la un interval de M perioade T_0 plus incrementul T_0/N, în acest caz prelevarea celor N eşantioane va dura $MN+1$ perioade T_0.

Semnalul rezultat prin eşantionare va avea componente spectrale foarte apropiate de zero, cu atât mai apropiate cu cât M este mai mare. Acest principiu este folosit în osciloscoapele cu eşantionare reducând frecvenţa semnalului de vizualizat la valori la care se poate utiliza tubul catodic.

Observaţie: în cazul prezentat mai sus se modifică doar frecvenţa rezultată în urma prelucrării eşantioanelor obţinute. Eşantioanele se obţin în ordinea lor firească (0, 1, 2,..., $N-2$, $N-1$).

În continuare tratăm cazul în care dorim să reducem frecvenţa de eşantionare, eşantionând semnalul pe mai multe perioade, nu neaparat numai un eşantion pe perioadă ca în cazul prezentat mai sus. Se va menţine constant numărul de eşantioane, fiind acelaşi ca în cazul eşantionării pe o perioadă. După cum se va observa eşantioanele nu vor mai fi obţinute în ordinea lor firească, pentru reconstrucţie trebuind să se ţină seama de acest lucru. În paragraful următor se va face o demonstrare matematică a faptului că, în anumite condiţii, prin reducerea frecvenţei de eşantionare nu vom avea erori de aliere. În paragraful 2.3 se vor prezenta condiţiile ce trebuiesc îndeplinite, în ceea ce priveşte numărul de eşantioane prelevate şi numărul de perioade de pe care sunt acestea prelevate, pentru ca informaţia obţinută să permită reconstrucţia semnalului iniţial.

2.2. Reducerea frecvenţei de eşantionare a semnalelor periodice

În paragraful 1.4, s-a prezentat grafic faptul că, datorită spectrului discret al semnalelor periodice, prin întrepătrunderea spectrelor datorată eşantionării cu o frecvenţă mai mică decât minimul dat de teorema eşantionării, există posibilitatea ca liniile spectrale să nu se suprapună (ci să se întrepătrundă). Dacă frecvenţa de eşantionare este aleasă astfel încât să se respecte teorema eşantionării, reconstrucţia se face simplu pe baza spectrului semnalului extras prin filtrare trece jos, din spectrul periodic rezultat după eşantionare. Se poate utiliza în acest scop relaţia (1.1). Dacă frecvenţa de eşantionare este mai mică astfel încât liniile spectrale ajung să se întrepătrundă, spectrul semnalului se va putea obţine, din spectrul periodic, cu ajutorul unui filtru pieptene care să permită extragerea componentelor dorite. Pentru reconstrucţie se va utiliza relaţia (1.7) unde timpul discret iT_e se înlocuieşte cu timpul continuu t.

Dacă liniile spectrale se suprapun înseamnă că semnalul periodic $x(t)$ are în reprezentarea sa componente sinusoidale de frecvenţe diferite dar care, în urma eşantionării, rezultă cu aceeaşi frecvenţă.

În [To2] se obţine o relaţie pentru alegerea pasului de eşantionare al unei sinusoide cu frecventa f, $0 < f < f_{max}$, pornind de la condiţia ca, eşantionând cu acelaşi pas o altă sinusoidă, cu aceeaşi amplitudine, având frecvenţa situată în acelaşi interval, să nu se obţină aceleaşi eşantioane, în final rezultând teorema eşantionării. În continuare, se prezintă condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească frecvenţa de eşantionare pentru ca două sinusoide de frecvenţe diferite cuprinse în domeniul $(0, f_{max})$ să aibă aceleaşi eşantioane în punctele de eşantionare (se consideră că sinusoidele au aceeaşi amplitudine). Pe baza acestor condiţii se va demonstra că se pot obţine frecvenţe de eşantionare ale unui semnal periodic, mai mici decât cea dată de teorema eşantionării şi, cu toate acestea, să nu rezulte erori de aliere.

Mulţimea frecvenţelor sinusoidelor, ce fac parte dintr-un semnal periodic $x(t)$, care au aceleaşi eşantioane, în cazul utilizării unei anumite frecvenţe de eşantionare, se poate obţine din identităţile [To2]

$$\sin\left(2\pi f\frac{n}{f_e}+\varphi\right)=\sin\left[2\pi\left(f+k_1 f_e\right)\frac{n}{f_e}+\varphi\right], \tag{2.7}$$

$$\sin\left(2\pi f\frac{n}{f_e}+\varphi\right)=\sin\left[2\pi(k_2f_e-f)\frac{n}{f_e}-\varphi+\pi\right], \tag{2.8}$$

unde k_1 şi k_2 sunt numere întregi. Aceste numere întregi trebuie să fie alese astfel încât

$$0\le f+k_1f_e\le f_{\max} \tag{2.9}$$

şi respectiv

$$0\le k_2f_e-f\le f_{\max} \tag{2.10}$$

unde $f_{\max}$ reprezintă frecvenţa maximă corespunzătoare semnalului $x(t)$ iar, $f_e=1/T_e$ reprezintă frecvenţa de eşantionare.

Din relaţiile (2.9) şi (2.10) rezultă că se iau în considerare doar acele frecvenţe ce fac parte din domeniul de frecvenţe $(0,f_{\max})$ adică, domeniul în care spectrul semnalului analizat este diferit de zero. Pe baza relaţiilor (2.7) şi (2.8) se notează mulţimea frecvenţelor sinusoidelor din domeniul de frecvenţe $(0,f_{\max})$ care au aceleaşi eşantioane, sub forma

$$f_{k_1}=f+k_1f_e, \tag{2.11}$$

$$f_{k_2}=k_2f_e-f. \tag{2.12}$$

Dacă avem un semnal periodic $x(t)$, acesta va fi format din componente de anumite frecvenţe, de exemplu, fundamentala plus un număr de componente armonice, cu alte cuvinte, domeniul de frecvenţe $(0,f_{\max})$ este unul discret. În cazul în care, pentru o anumită frecvenţă de eşantionare f_e, relaţiile (2.11) şi (2.12) au ca rezultat frecvenţele f_{k_1} şi f_{k_2} din care, doar una să facă parte din domeniul discret $(0,f_{\max})$, putem spune că f_e este corect aleasă.

Considerăm că semnalul periodic $x(t)$ este format din componentele armonice de frecvenţe mf_0, $m=1,2,3,\ldots,K$, unde $f_0=1/T_0$ reprezintă frecvenţa fundamentalei. Conform teoremei eşantionării, frecvenţa de eşantionare trebuie să fie mai mare decât $2Kf_0$. În cele ce urmează se va demonstra că eşantionarea semnalului periodic $x(t)$ cu frecvenţa

$$f_e=\frac{2K+1}{2^P}f_0, \tag{2.13}$$

unde $P=1,2,\ldots$, nu conduce la erori de aliere. Pentru $P\ge 1$, teorema clasică a eşantionării nu este respectată. Demonstrarea faptului că erorile de aliere sunt eliminate se face prin verificarea condiţiei de neexistenţă a două componente armonice ale semnalului $x(t)$ care să aibă aceleaşi eşantioane în punctele de eşantionare.

Pentru semnalul $x(t)$ şi pentru frecvenţe de eşantionare alese pe baza relaţiei (2.13), relaţiile (2.9) şi (2.10) devin:

$$0 \le mf_0 + k_1 \frac{2K+1}{2^P} f_0 \le Kf_0, \tag{2.14}$$

$$0 \le k_2 \frac{2K+1}{2^P} f_0 - mf_0 \le Kf_0, \tag{2.15}$$

unde $m = 1,2,...,K$.

Mulţimea frecvenţelor sinusoidelor cu aceleaşi eşantioane în intervalul de frecvenţe $0,...,Kf_0$ este

$$f_{k_1 m} = \left(m + k_1 \frac{2K+1}{2^P} \right) f_0, \tag{2.16}$$

$$f_{k_2 m} = \left(k_2 \frac{2K+1}{2^P} - m \right) f_0, \tag{2.17}$$

unde termenii k_1 şi k_2 au valori întregi, $k_1 \ge 0$ şi $k_2 > 0$, astfel încât să fie satisfăcute relaţiile (2.14) şi (2.15).

Din relaţiile (2.16) şi (2.17) rezultă că mulţimea frecvenţelor sinusoidelor cu aceleaşi eşantioane în intervalul $0,...,Kf_0$ se poate obţine cu ajutorul relaţiei

$$f_{km} = \left| m + k \frac{2K+1}{2^P} \right| f_0, \tag{2.18}$$

unde variabila k are valori (pozitive sau negative) întregi, astfel încât

$$0 \le f_{km} \le Kf_0. \tag{2.19}$$

Folosind relaţiile (2.18) şi (2.19) putem scrie

$$-Kf_0 \le \left(m + k \frac{2K+1}{2^P} \right) f_0 \le Kf_0,$$

de unde, eliminând pe f_0 vom avea pentru k relaţia

$$-(K+m)\frac{2^P}{2K+1} \le k \le (K-m)\frac{2^P}{2K+1}. \tag{2.20}$$

Rezultă succesiv limitele maxime de variaţie pentru variabila k

$$-\frac{2K}{2K+1} 2^P \le k \le \frac{K}{2K+1} 2^P,$$

$$-2^P < k < 2^{P-1}, \tag{2.21}$$

$$-2^P + 1 \le k \le 2^{P-1} - 1. \tag{2.22}$$

Astfel obţinem

$$\left|k^{'} \pm k^{''}\right|_{\max} = \left|-2^{P}+1\right| + \left|-2^{P}+2\right| = 2\cdot 2^{P} - 3 < 2^{P+1}, \qquad (2.23)$$

unde $k^{'}$ şi $k^{''}$ au acelaşi domeniu de variaţie ca şi k (relaţia (2.22)), condiţie ce va fi utilizată mai jos.

În cazul apariţiei erorilor de aliere următoarea relaţie ar fi adevarată

$$f_{k_1 m_1} = f_{k_2 m_2}, \qquad (2.24)$$

unde $f_{k_1 m_1}$ şi $f_{k_2 m_2}$ sunt două componente ce fac parte din mulţimea frecvenţelor sinusoidelor, mulţime obţinută cu ajutorul relaţiei (2.18). Din relaţia (2.24) şi (2.18) se obţine

$$\left|m_1 \pm m_2\right| = \left|k_1 + k_2\right| \frac{2K+1}{2^{P}}, \qquad (2.25)$$

deoarece $k_1, k_2 > 0$.

Prin urmare $\left|k_1 + k_2\right|$ trebuie să fie divizibil cu 2^{P}. Din relaţia (2.23) rezultă singura valoare posibilă şi anume

$$\left|k_1 + k_2\right| = 2^{P}, \qquad p > 1$$

pentru care condiţia de divizibilitate este satisfacută. În acest caz vom obţine

$$\left|m_1 \pm m_2\right| = 2K + 1. \qquad (2.26)$$

Deoarece m_1 şi m_2 au valori în domeniul $0,\ldots,K$ putem scrie

$$\left|m_1 + m_2\right| \le 2K - 1 \quad (\le 2K \text{ dacă } m_1 = m_2),$$

astfel, relaţia (2.26) nu poate fi îndeplinită. Prin urmare singura soluţie a ecuaţiei (2.24) este $m_1 = m_2$ şi $k_1 = k_2$, în caz contrar $f_{k_1 m_1} \ne f_{k_2 m_2}$, ceea ce demonstrează absenţa erorilor de aliere.

Din relaţia (2.13) se poate observa că, pentru $P = 0$ se prelevează un număr de $2K + 1$ eşantioane dintr-o perioadă a semnalului periodic $x(t)$, pentru $P \ge 1$ aceste eşantioane prelevându-se de pe 2 sau mai multe perioade dar totdeauna un număr par de perioade. În continuare se va studia posibilitatea prelevării unui număr par sau impar de eşantioane de pe un număr par sau impar de perioade ale semnalului $x(t)$ analizat.

2.3 Eşantionarea semnalelor periodice pe *M* perioade

Considerăm că pentru calculul coeficienților Fourier ai unui semnal periodic avem nevoie de un anumit număr de eşantioane (număr dat de frecvența maximă din spectrul semnalului), pe care îl notăm cu N. În acest caz vom avea perioada de eşantionare $T_e = T_0/N$ dată de teorema eşantionării, unde cu T_0 s-a notat perioada fundamentalei (perioada semnalului). Notăm cu M numărul de perioade din semnal pe care dorim să facem eşantionarea. Perioada (de timp) pe care se face eşantionarea va fi în acest caz $T = MT_0$, rezultând perioada de eşantionare notată T_{em} cu valoarea

$$T_{em} = \frac{T}{N} = \frac{MT_0}{N} = MT_e. \tag{2.27}$$

Eşantionând pe mai multe perioade este posibil însă, să prelevăm acelaşi eşantion din perioade diferite. Acelaşi eşantion se referă la faptul că prelevarea se face în momente de timp astfel încât eşantioanele sunt egal depărtate față de începutul unei perioade. Pentru ca să nu se întâmple acest lucru vom căuta condițiile ce trebuiesc îndeplinite referitor la numărul de perioade M pe care se face eşantionarea în funcție de numărul N de eşantioane dorite, considerând cazurile N *par* şi N *impar*.

2.3.1 Cazul - *N* număr *par*

Din relația (2.27) avem $NT_{em} = MT_0$, adică numărul de eşantioane înmulțit cu perioada de eşantionare este egal cu un multiplu al perioadei semnalului de eşantionat.

- Considerăm M *par*. Rezultă că se pot face simplificări în relația (2.27) şi vom avea

$$T_{em} = \frac{M}{N}T_0 = \frac{M'}{N'}T_0. \tag{2.28}$$

Altfel scris $N'T_{em} = M'T_0$, adică un anumit număr de eşantioane (diferit de N), înmulțit cu perioada de eşantionare, este egal cu un multiplu al perioadei semnalului de eşantionat. Deci eşantionul zero va fi prelevat de mai multe ori, acest lucru însemnând că şi alte eşantioane vor fi prelevate de mai multe ori, în detrimentul unora care nu vor ajunge să fie luate în considerare. Prin urmare eşantionarea nu este corectă neputând obține un sistem (de tipul (1.8)) determinat.

<u>Concluzie</u>: dacă N este un număr par, M nu poate fi un număr par deoarece nu am eşantiona corect semnalul.

- Considerăm M *impar*. Dacă raportul N/M are ca rezultat un număr întreg, sau se poate simplifica rezultând

$$\frac{M}{N} = \frac{M^*}{N^*},$$

avem situația prezentată mai sus (relația (2.28)) adică un anumit număr de eşantioane înmulțit cu perioada de eşantionare este un multiplu al perioadei semnalului de eşantionat, deci anumite eşantioane se prelevează de mai multe ori în timp ce alte eşantioane se pierd.

Un mod de calcul al numerelor impare ce nu pot fi acceptate ca fiind număr de perioade pe care se face eşantionarea este prezentat mai jos.

Numărul de eşantioane N se divide cu 2 până când rezultatul x va fi un număr impar. Numărul impar x obţinut nu poate fi folosit ca număr de perioade pe care se face eşantionarea. De asemenea nici numerele $n \cdot x$ cu $n = 1, 2, \ldots$ nu pot fi folosite ca număr de perioade pe care să se facă eşantionarea.

Exemplu: $N = 6$; $6/2 = 3$, rezultă că 3 nu poate fi numărul de perioade pe care se doreşte să se facă eşantionarea şi de asemenea nici un multiplu de 3, care este şi impar deoarece numerele pare sunt eliminate din start.

2.3.2 Cazul - *N* număr *impar*

Din relaţia (2.27) avem $T_{em} = MT_0/N$. Condiţia ce se pune pentru a avea eşantionare corectă este $M \neq nN$, unde $n = 1, 2, \ldots$, în caz contrar $T_{em} = nT_0$, deci se va eşantiona tot timpul numai eşantionul zero. În rest M poate lua orice valoare - număr par sau impar.

Concluzie

În cazul în care dorim să obţinem un număr N de eşantioane dintr-un semnal periodic folosind o frecvenţă mai mică decât cea corespunzătoare teoremei eşantionării, prelevarea eşantioanelor trebuie să fie făcută în decursul a M perioade complete ale semnalului periodic supus eşantionării.

Notând cu T_{em} perioada de eşantionare şi cu T_0 perioada semnalului, vom avea relaţia (2.27) pentru calculul T_{em} funcţie de T_0. Pentru a găsi condiţia ce trebuie îndeplinită pentru ca să nu prelevăm acelaşi eşantion de mai multe ori din perioade diferite, ne vom folosi de notaţia kT_{em} pentru a indica momentul în care se prelevează eşantionul cu indicele k. Considerăm că avem două eşantioane ce au indicii k_1 respectiv k_2. Distanţa în domeniul timp dintre cele două eşantioane este $k_2T_{em} - k_1T_{em} = (k_2 - k_1)T_{em}$. În cazul în care această valoare este egală cu perioada T_0 a semnalului sau un multiplu al ei, eşantioanele vor fi identice. Prin urmare condiţia de a nu preleva acelaşi eşantion de două (sau mai multe) ori (din perioade diferite) este

$$(k_2 - k_1)T_{em} \neq nT_0, \tag{2.29}$$

unde $k_2 - k_1 \leq N$, iar n este un număr întreg (mai mic decât M).

Teoremă

Reducerea frecvenţei de eşantionare, în cazul semnalelor periodice, prin prelevarea eşantioanelor de pe mai multe perioade trebuie astfel realizată încât distanţa dintre oricare două eşantioane să fie diferită de multiplul perioadei semnalului.

Înlocuind în relaţia (2.29) pe T_{em} în funcţie de T_0 vom obţine

$$(k_2 - k_1)\frac{MT_0}{N} \neq nT_0 \Rightarrow \frac{M}{N} \neq \frac{n}{k_2 - k_1}. \tag{2.30}$$

Din partea dreaptă a relaţiei (2.30) putem trage concluzia că numărul de eşantioane N şi numărul de perioade M nu au voie să aibă nici un divizor comun pentru ca prin procesul de eşantionare să nu prelevăm de două ori (sau de mai multe ori) acelaşi eşantion.

Exemplu - eşantionarea pe două perioade în cazul $N = 2K + 1$.

Pentru simplificare, considerăm un caz particular şi anume, $K = 3$, şi semnalul periodic de forma $x(t) = \sin(2\pi f_0) + 0{,}5\sin(2\pi 3 f_0)$. În acest caz numărul minim necesar de eşantioane este 7, conform teoremei eşantionării, pentru a reconstitui semnalul iniţial.

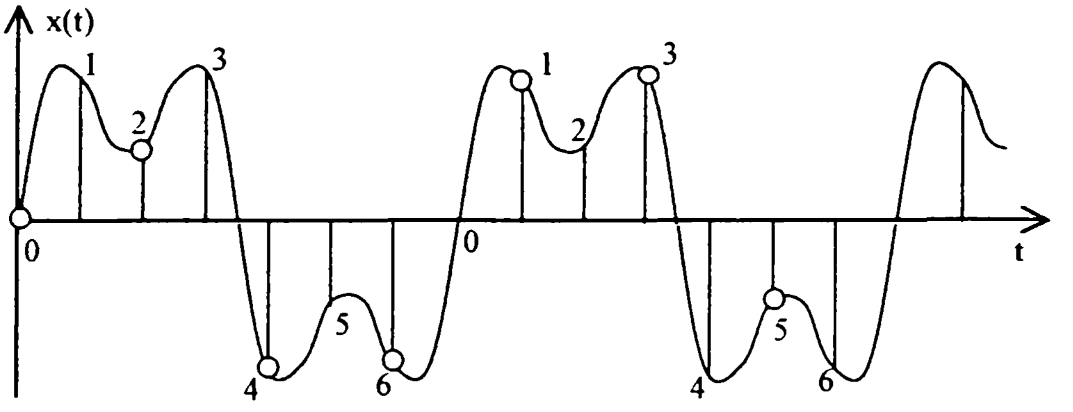


Fig. 2.2. Eşantionarea unui semnal periodic cu K=3, pe două perioade.

Eşantionarea făcându-se pe două perioade cu pasul de eşantionare $T_{e2} = 2T_{e1}$, faţă de cazul eşantionării pe o perioadă, T_{e1}, va fi prelevat tot al doilea eşantion. Deci, după cum se poate observa şi din desen (fig. 2.2) vor fi prelevate în ordine eşantioanele: 0,2,4,6,1,3,5.

Formula de calcul a coeficienţilor seriei Fourier (vezi relaţia 1.19) pentru semnalul $x(t)$ este

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)e^{-jk\omega_0 iT_e} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)e^{-jk\frac{2\pi}{N}i}, \tag{2.31}$$

unde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ şi $T_e = T_0/N$.

În cazul în care frecvenţa de eşantionare este

$$f_{e1} = \frac{1}{T_{e1}} = \frac{N}{T_0},$$

adică prelevăm cele N eşantioane dintr-o singură perioadă a semnalului, calculul coeficienţilor seriei Fourier se face cu relaţia (2.31) unde în loc de k se utilizează $k1$

$$c_{k1} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_{e1})e^{-j\cdot k1\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot i} \tag{2.32}$$

În cazul în care frecvenţa de eşantionare este

$$f_{e2}=\frac{1}{T_{e2}}=\frac{1}{2T_{e1}}=\frac{f_{e1}}{2},$$

adică prelevăm cele N eşantioane în decursul a două perioade ale semnalului, calculul coeficienţilor seriei Fourier se face cu relaţia

$$c_{k2}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(iT_{e2})e^{-jk2\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot i}. \tag{2.33}$$

Calculând coeficienţii cu relaţiile (2.32) respectiv (2.33) vom vedea că $c_{k1}=c_{k2}$ pentru $k_1=k_2$, unde $k_1,k_2=0,1,\ldots,N-1$.

Formula de reconstrucţie rămâne aceeaşi

$$g(t)=\sum_{k=-K}^{K}c_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{2.34}$$

Urmărind ordinea de prelevare a eşantioanelor în acest caz, $K=3$ şi $M=2$ şi în alte cazuri (eşantionare pe mai multe perioade, respectiv prelevarea unui număr diferit de eşantioane), se poate deduce relaţia după care se obţin eşantioanele faţă de cazul eşantionării pe o perioadă. În acest scop se vor utiliza notaţiile:

i pentru indicele eşantionului în cazul eşantionării pe o perioadă,

j pentru indicele eşantionului în cazul eşantionării pe M perioade,

P pentru perioada în care se află eşantionul j, $P=0,1,\ldots,M-1$,

2π perioada semnalului,

$2\pi/N$ perioada de eşantionare în cazul eşantionării pe o perioadă.

Semnalul fiind periodic, următoarea relaţie este adevărată

$$x\left(jM\frac{2\pi}{N}\right)=x\left(i\frac{2\pi}{N}+2\pi P\right), \tag{2.35}$$

de unde rezultă succesiv

$$jM\frac{2\pi}{N}=i\frac{2\pi}{N}+2\pi P,$$

$$jM=i+NP,$$

$$i=jM-NP. \tag{2.36}$$

Această relaţie se poate scrie mai simplu sub forma

$$x(iT_{em})=x(u(i)T_{e1}), \tag{2.37}$$

unde

$$u(i)=(M\cdot i)_{\text{modulo}(N)}, \tag{2.38}$$

relație valabilă în cazul în care se consideră că primul eşantion este eşantionul zero.

Exemple de alte cazuri:
$N = 6$, $M = 5$ se prelevează eşantioanele în ordinea: 0,5,4,3,2,1;
$N = 8$, $M = 3$ se prelevează eşantioanele în ordinea: 0,3,6,1,4,7,2,5;
$N = 9$, $M = 4$ se prelevează eşantioanele în ordinea: 0,4,8,3,7,2,6,1,5;
$N = 6$, $M = 7$ se prelevează eşantioanele în ordinea: 0,1,2,3,4,5;
$N = 6$, $M = 11$ se prelevează eşantioanele în ordinea: 0,5,4,3,2,1.

Relațiile (2.37) şi (2.38) au fost verificate pe cale experimentală, prin simulare în Mathcad. Aceste relații sunt valabile şi în cazul în care N este par, după cum se poate observa şi din exemplele amintite, în acest caz, însă, trebuie ținut cont de faptul că numărul de perioade de pe care se face prelevarea eşantioanelor trebuie să satisfacă mai multe condiții.

Exemplu: considerăm că avem un semnal periodic descris de ecuația $x(t) = \sin(2\pi f_0) + 0{,}5\sin(2\pi 2 f_0)$, $K = 2$, şi îl eşantionăm astfel încât să obținem $N = 2K + 2$ eşantioane pe perioadă. În cazul în care prelevăm aceste eşantioane în decurs de două perioade, deci pe un număr par de perioade, vom obține în ordine eşantioanele 0,2,4,0,2,4, corespunzătoare eşantionării pe o perioadă. Eşantioanele 1,3,5, lipsesc din achiziție în timp ce eşantioanele 0,2,4, au fost prelevate de două ori. Acest lucru este prezentat grafic în figura 2.3.

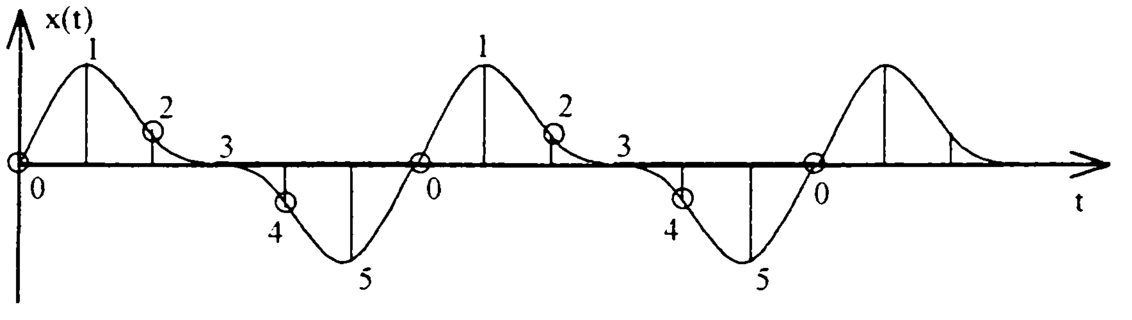


Fig. 2.3. Prelevarea unui număr par de eşantioane de pe două perioade ale unui semnal periodic.

Numărul N fiind par, eşantionarea se poate face pe mai multe perioade, dar aceste perioade trebuie să fie un număr impar şi în acelasi timp să nu fie un divizor al lui N (sau să aibă divizori comuni, în cazul nostru $N = 6$, M nu poate fi 3, 9, 15, ...).

Pentru reconstrucția semnalului trebuie ținut cont de ordinea în care au fost obținute eşantioanele, relația (2.37) cu (2.38), şi scoaterea eşantioanelor la ieşire în ordinea normală de apariție a lor, indiferent de ordinea în care au fost prelevate. Folosind pentru achiziție, prelucrare şi redare un procesor numeric de semnal, eşantioanele de ieşire pot fi obținute relativ simplu deoarece procedeul de alegere a eşantioanelor folosind operația *modulo* este folosit şi pentru calculul transformatei Fourier rapide (TFR).

În general, dacă se prelucrează un semnal cu ajutorul unui procesor numeric de semnal, eşantioanele prelevate sunt memorate într-un spațiu de memorie. Memorarea lor se poate face la adrese succesive sau la adrese alese după o anumită regulă, spre exemplu *modulo*(N). Astfel, pentru prelucrarea şi refacerea semnalului se poate considera că prelevarea eşantioanelor a fost făcută în ordinea firească.

Deoarece sunt realizate subrutine de calcul a FFT ce țin seama de faptul că eşantioanele sunt stocate în memorie în ordinea lor firească, este indicat, în cazul în care se doreşte calculul FFT, memorarea lor să se facă după regula *modulo*(N).

FUNCTII PARE, FUNCTII IMPARE

3.1. Introducere

În acest capitol se tratează cazul particular al funcțiilor pare respectiv impare, modul de definire al lor [Un4], descompunerea lor în serii de cosinusuri și serii de sinusuri. Se vor calculula coeficienții seriei Fourier în aceste cazuri particulare folosind un număr redus de eșantioane, prelevate începând cu momentul $t_0 = 0$ și respectiv, $t_0 \neq 0$. Funcția inițială va fi reconstituită pe baza coeficienților calculați. Relațiile de calcul al coeficienților vor fi utilizate (testate) și în cazul unor eșantionări urmate de cuantizări mai apropiate de cazul real. Deoarece convertoarele analog numerice au un număr limitat de biți, simularea în cazul cuantizării se va face utilizând eșantioane ce au un număr limitat de cifre mai mic decât cel corespunzător rezoluției maxime a programului de calcul.

3.2. Funcții pare și impare

Considerăm o funcție $f(x)$ definită pe axa Ox. Spunem că $f(x)$ este o funcție *pară* dacă este valabilă relația

$$f(-x) = f(x), \tag{3.1}$$

oricare ar fi x.

Conform relației (3.1) graficul unei funcții pare este simetric față de axa Oy.

Un exemplu de funcție pară este ilustrat în figura 4.1.

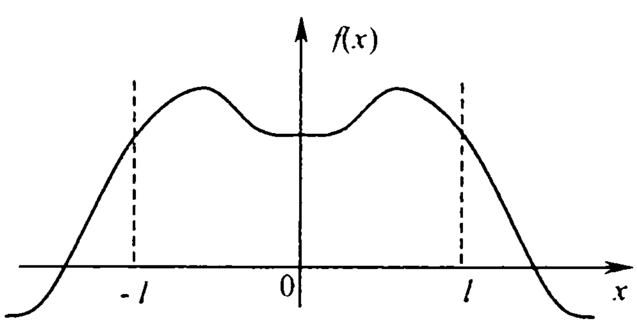


Figura 3.1. Funcție pară.

Calculând aria pe un segment $[-l,+l]$, pentru funcțiile pare avem relația

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx, \qquad (3.2)$$

pentru orice l, cu condiția ca $f(x)$ să fie definită și integrabilă pe segmentul $[-l,+l]$.

Spunem că $f(x)$ este o funcție *impară* dacă este valabilă relația

$$f(-x) = -f(x), \qquad (3.3)$$

oricare ar fi x. Pentru o funcție impară $f(0) = 0$ (vezi relația (3.3)). Graficul unei funcții impare este simetric față de punctul zero (originea axelor). Un exemplu de funcție impară este dat în figura 3.2.

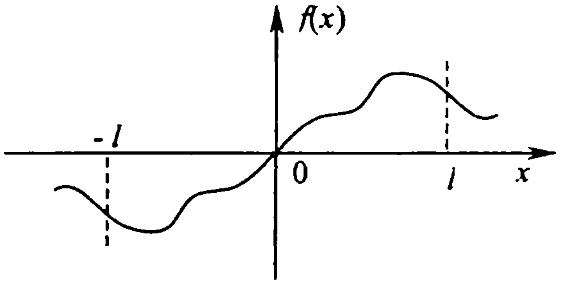


Figura 3.2. Functie impară.

Calculând aria pe un segment $[-l,+l]$, pentru funcțiile impare vom avea relația

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0, \qquad (3.4)$$

pentru orice l, cu condiția ca $f(x)$ să fie definită și integrabilă pe segmentul $[-l,+l]$.

Din definiția funcțiilor pare și impare putem deduce proprietățile:
a) produsul a două funcții pare sau a două funcții impare este o funcție pară;
b) produsul dintre o funcție pară și o funcție impară este o funcție impară.
Demonstrație: fie $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ două funcții pare și $\gamma(x)$ și $\rho(x)$ două funcții impare.

Pentru $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ avem egalitatea

$$f(-x) = \varphi(-x) \cdot \psi(-x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) = f(x).$$

Pentru $f(x) = \gamma(x) \cdot \rho(x)$ avem egalitatea

$$f(-x) = \gamma(-x) \cdot \rho(-x) = [-\gamma(x)] \cdot [-\rho(x)] = \gamma(x) \cdot \rho(x) = f(x).$$

Pentru $f(x) = \varphi(x) \cdot \gamma(x)$ avem egalitatea

$$f(-x) = \varphi(-x) \cdot \gamma(-x) = \varphi(x) \cdot [-\gamma(x)] = -\varphi(x) \cdot \gamma(x) = -f(x).$$

Astfel, au fost demonstrate cele două proprietăți prezentate mai sus.

Deoarece se vor face produse de semnale vom demonstra, în continuare, că produsul a două semnale periodice cu frecvențe aflate în relație armonică este tot un semnal periodic. Pentru aceasta se prezintă întâi că suma a două semnale periodice, cu frecvențe aflate în relație armonică este tot un semnal periodic. Un astfel de caz este semnalul periodic ce conține atât fundamentala cât şi un anumit număr de componente armonice, în acest caz perioada semnalului fiind egală cu perioada fundamentalei.
Exemplu: notăm cu T_1 perioada fundamentalei şi cu $T_2 = T_1/2$ perioada celei de-a doua componente armonice. Astfel, perioada semnalului este

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2, \tag{3.5}$$

unde $k_1 = 1$ şi $k_2 = 2$ deci, $T = T_1$.

Un alt caz este acela în care fundamentala lipseşte adică, semnalele însumate au perioadele notate T_i cu valori diferite de un submultiplu întreg corespunzător celei mai mari perioade dintre T_i. În acest caz, factorii de multiplicare k_i vor fi toți mai mari decât unu şi prin urmare perioada semnalului rezultat va fi mai mare decât oricare perioadă T_i corespunzătoare semnalelor periodice însumate.
Exemplu: fie $T_2 = T_1/1{,}5$. Rezultă că $T = 2T_1 = 3T_2$.

Astfel, *perioada semnalului rezultat ca sumă de semnale periodice este un număr egal cu cel mai mic multiplu comun tuturor perioadelor semnalelor componente.*

În continuare vom demonstra că această regulă, dată de relația 3.5, este valabilă şi în cazul în care avem produs de semnale periodice, semnalul rezultat fiind şi el periodic. Pentru aceasta, considerăm că avem un semnal periodic, de tip trece jos, $p(t)$, cu perioada T_1 ce este înmulțit cu un semnal periodic, $\cos(\omega_0 t)$, cu perioada T_0 unde $T_0 < T_1$. Prin semnal de tip trece jos se înțelege un semnal ce are componente cu frecvențe în domeniul 0 la f_{max}. Presupunem că semnalul

$$x(t) = p(t)\cos(\omega_0 t), \tag{3.6}$$

este periodic cu perioada T. Se pun întrebările: există o perioadă T şi, dacă da, care este valoarea sa dacă se cunosc T_1 şi T_0?

Dacă $x(t)$ este periodic cu perioada T atunci este valabilă relația

$$p(t)\cos(\omega_0 t) = x(t) = x(t+T) = p(t+T)\cos[\omega_0(t+T)]. \tag{3.7}$$

Pentru $p(t)$ avem egalitățile

$$p(t) = p(t+T_1) = p(t+2T_1) = \ldots = p(t+m_1 T_1) = \ldots, \tag{3.8}$$

dar, din (3.7) rezultă $p(t) = p(t+T)$ deci, există un m_1 astfel încât

$$p(t) = p(t+m_1 T_1) = p(t+T). \tag{3.9}$$

Pentru $\cos(\omega_0 t)$ avem egalitățile

$$\cos(\omega_0 t) = \cos[\omega_0(t+T_0)] = \ldots = \cos[\omega_0(t+m_0 T_0)] = \ldots, \tag{3.10}$$

dar, din (3.7) rezultă $\cos(\omega_0 t) = \cos[\omega_0 (t + T)]$ deci, există un m_0 astfel încât

$$\cos(\omega_0 t) = \cos[\omega_0 (t + m_0 T_0)] = \cos[\omega_0 (t + T)]. \tag{3.11}$$

Astfel rezultă că este valabilă relația

$$T = m_1 T_1 = m_0 T_0, \quad m_0 > m_1, \tag{3.12}$$

unde m_0 și m_1 sunt numere întregi.

Pe baza relației (3.12) se poate scrie un enunț similar cu cel prezentat la suma de semnale periodice și anume: *perioada semnalului rezultat ca produs de semnale periodice este un număr egal cu cel mai mic multiplu comun tuturor perioadelor semnalelor componente.*

Cu cât raportul T_1/T_0 (perioada mai mare / perioada mai mică) are ca rezultat o parte fracționară reprezentată pe mai multe cifre, numerele m_0 și m_1 vor fi mai mari, perioada semnalului rezultat fiind mai mare.

Semnalul $x(t)$ obținut cu relația (3.6) este un semnal periodic de tip trece bandă (obținut prin modulare în amplitudine). Prin semnal de tip trece bandă se înțelege un semnal ce are componente în domeniul f_{min} la f_{max} unde, f_{min}>>0. Eșantionarea acestui tip de semnale periodice va fi studiată în capitolul 5.

3.3. Serii de cosinusuri și serii de sinusuri

Considerăm că $f(x)$ este o funcție (periodică) pară definită pe segmentul $[-\pi, \pi]$.

Funcția $\cos(nx)$, $n = 0,1,2,...$, este o funcție pară iar funcția $\sin(nx)$ este o funcție impară. Conform proprietăților a) și b) enunțate în paragraful 3.2, avem $f(x)\cos(nx)$ funcție pară și $f(x)\sin(nx)$ funcție impară.

Pe baza relațiilor (1.4), (3.2) și (3.4) vom obține pentru coeficienții Fourier ai unei funcții pare $f(x)$ relațiile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad (n = 0,1,2,...). \tag{3.13}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0, \quad (n = 1,2,...). \tag{3.14}$$

Conform relațiilor (3.13) și (3.14) seria Fourier a unei funcții pare conține numai componente cosinusoidale, deci putem scrie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx). \tag{3.15}$$

Considerăm că $f(x)$ este o funcţie (periodică) impară definită pe segmentul $[-\pi, \pi]$. Conform proprietăţilor a) şi b) enunţate în subcapitolul 3.2, avem $f(x)\cos(nx)$ funcţie impară şi $f(x)\sin(nx)$ funcţie pară.

Pe baza relaţiilor (1.4), (3.2) şi (3.4) vom obţine pentru coeficienţii Fourier ai funcţiei impare $f(x)$ relaţiile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0, \qquad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{3.16}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \qquad (n = 1,2,\ldots). \tag{3.17}$$

Conform relaţiilor (3.16) şi (3.17) seria Fourier a unei funcţii impare conţine numai componente sinusoidale prin urmare putem scrie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \tag{3.18}$$

Deoarece seria Fourier a unei funcţii impare conţine numai sinusuri, ea va converge către valoarea zero pentru $x \to k\pi$, cu $k = 0,1,2,\ldots$.

În cazul dezvoltării unei funcţii oarecare periodice $f(x)$ în serie Fourier exponenţială (complexă) pentru coeficienţi se foloseşte notaţia c_k, calculul lor făcându-se cu relaţia (1.6). Între coeficienţii c_k şi c_{-k} avem relaţia

$$c_k = c_{-k}^{*}, \tag{3.19}$$

unde cu indice superior * s-a notat termenul complex conjugat.

Daca funcţia este *pară*, notată $f_p(x)$, atunci din (1.6), (3.13) şi (3.14), relaţia (3.19) devine

$$c_k = c_{-k}, \tag{3.20}$$

în acest caz coeficienţii Fourier fiind reali.

Dacă funcţia este *impară*, notată $f_I(x)$, atunci din (1.6), (3.16) şi (3.17), relaţia (3.19) devine

$$c_k = -c_{-k}, \tag{3.21}$$

în acest caz coeficienţii Fourier fiind imaginari.

Se poate considera că o funcţie oarecare (periodică) $f(x)$ este formată dintr-o funcţie pară $f_p(x)$ însumată cu o funcţie impară $f_I(x)$

$$f(x) = f_p(x) + f_I(x). \tag{3.22}$$

Funcțiile pară respectiv impară pot fi obținute din funcția $f(x)$ cu ajutorul relațiilor

$$f_p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ;\ f_I(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{3.23}$$

În prelucrarea numerică a semnalelor, coeficienții Fourier se calculează folosindu-se eșantioane din semnalul analizat. Pentru aceasta sunt necesari cel puțin un număr de eșantioane egal cu numărul de coeficienți calculați. Din (3.23) și

$$c_k=\frac{a_k-jb_k}{2} \text{ respectiv } c_{-k}=\frac{a_k+jb_k}{2}$$

se observă că pentru calculul coeficienților Fourier, în cazul unei funcții oarecare avem nevoie de un număr dublu de eșantioane față de cazul unei funcții pare sau impare.

3.4. Functii pare

Considerăm o funcție periodică pară $y=f_p(x)$ pe care o descompunem într-o sumă de cosinusuri

$$y=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_K\cos Kx, \tag{3.24}$$

unde K reprezintă indicele componentei armonice maxime din semnal.

Notăm cu α pasul de eșantionare. Perioada semnalului fiind 2π atunci α va avea valoarea $\alpha=2\pi/N$, unde N reprezintă numărul de eșantioane prelevate în decursul unei perioade. Din relația (3.24) rezultă că avem un număr de $K+1$ necunoscute care pot fi calculate pe baza a $N=K+1$ eșantioane diferite din semnalul $f_p(x)$. Vom avea sistemul

$$\begin{cases} y_0=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_K \\ y_1=a_0+a_1\cos\alpha+a_2\cos 2\alpha+\ldots+a_K\cos K\alpha \\ \vdots \\ y_p=a_0+a_1\cos p\alpha+a_2\cos 2p\alpha+a_K\cos Kp\alpha \\ \vdots \\ y_{N-1}=a_0+a_1\cos((N-1)\alpha)+\ldots+a_K\cos((N-1)K\alpha) \end{cases} \tag{3.25}$$

unde y_p este eșantionul funcției (semnalului) y la momentul $p\alpha$.

Sistemul (3.25) poate fi scris matriceal sub forma

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos K\alpha \\ 1 & \cos 2\alpha & \cos 4\alpha & \cos 2K\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(N-1)\alpha & \cos(N-1)2\alpha & \cos(N-1)K\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

sau, folosind notaţii mai simple

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}, \tag{3.27}$$

unde **Y** este vectorul eşantioanelor semnalului, **C** este matricea formată din termenii cos şi **A** este vectorul coeficienţilor Fourier.

Utilizând proprietatea de periodicitate a funcţiei cosinus putem scrie

$$\cos(N-q)k\alpha = \cos\left(Nk\frac{2\pi}{N} - qk\frac{2\pi}{N}\right) = \cos qk\frac{2\pi}{N} = \cos qk\alpha\,. \tag{3.28}$$

Folosind relaţia (3.28) şi sistemul (3.25) vom avea identităţile

$$y_{N-1} = a_0 + a_1\cos((N-1)\alpha) + a_2\cos((N-1)2\alpha) + \ldots + a_K\cos((N-1)K\alpha)$$

$$= a_0 + a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha + \ldots + a_K\cos K\alpha = y_1,$$

$$y_{N-2} = a_0 + a_1\cos((N-2)\alpha) + a_2\cos((N-2)2\alpha) + \ldots + a_K\cos((N-2)K\alpha)$$

$$= a_0 + a_1\cos 2\alpha + a_2\cos 4\alpha + \ldots + a_K\cos K2\alpha = y_2,$$

...

Rezultă că între eşantioane, în cazul eşantionării uniforme începând din momentul $t_0 = 0$, vom avea o relaţie de egalitate şi anume

$$y_{N-p} = y_p, \quad \text{unde} \quad p = 0,1,2,\ldots,N-1. \tag{3.29}$$

Din (3.28) şi (3.29) rezultă că două câte două linii ale matricei **C** sunt egale între ele. Altfel spus, determinantul matricei **C** este zero, astfel că nu pot fi calculati toţi cei $K+1$ coeficienţi, deşi avem $K+1$ relaţii dar care nu sunt liniar independente. Prin urmare, eşantionând semnalul începând din momentul $t_0 = 0$, nu se poate reduce frecvenţa de eşantionare în raportul

$$\frac{K+1}{2K+1},$$

relaţia (3.29) fiind valabilă oricare ar fi N. Rezultă că trebuie obţinute astfel de eşantioane încât relaţia (3.29) să nu mai fie valabilă.

În continuare, folosim notaţiile T pentru perioada semnalului şi T_e pentru perioada de eşantionare minimă obţinută în conformitate cu teorema eşantionării.

Considerăm N număr *impar*, şi anume $N = 2K+1$, unde K reprezintă numărul de componente armonice din semnalul periodic $f_p(t)$. În acest caz, $p = 0\ldots(N-1)/2$. Din relaţia (3.29) rezultă că eşantionul cu indice zero este independent, celelalte eşantioane vor fi două câte două egale. Deoarece avem nevoie de $K+1$ relaţii independente pentru a calcula tot atâtea necunoscute, eşantioanele necesare se pot preleva dintr-o perioadă T a semnalului $f_p(t)$ folosind o perioadă de eşantionare dublă faţă de cazul limită dat de teorema eşantionării şi anume $T_{e2} = 2T_e = 2T/N$. Prin reducerea frecvenţei de eşantionare la jumatate se poate observa că pe parcursul unei perioade eşantionarea nu este "total uniformă", în sensul că pasul de eşantionare este constant mai puţin ultima perioadă de eşantionare care este doar jumătate din T_{e2}. Astfel, în următoarea perioadă eşantionarea nu va începe din momentul zero (al noii perioade) ci de la momentul $t_0 = 2\pi/N$.

Dacă eşantionarea o facem cu pasul $T_e = 2\pi/N$ (perioada semnalului se consideră că este $T = 2\pi$), avem pentru eşantionare uniformă

$$NT_e = N\frac{2\pi}{N} = 2\pi. \tag{3.30}$$

Folosind pasul de eşantionare $T_{e2} = 2T_e$ vom preleva, de pe parcursul unei perioade T a semnalului periodic par, un număr de $(N+1)/2$ eşantioane ($K+1$ eşantioane pentru calculul celor $K+1$ coeficienţi notaţi de la a_0 la a_K). Dacă eşantionarea ar fi uniformă, ar trebui ca

$$\frac{N+1}{2}T_{e2} = 2\pi,$$

dar de fapt

$$\frac{N+1}{2}T_{e2} = \frac{N+1}{2}2T_e = (N+1)\frac{2\pi}{N} = 2\pi + \frac{2\pi}{N}. \tag{3.31}$$

În figura 3.3 se prezintă grafic cazul $K = 4$, $N = 2K+1 = 9$.

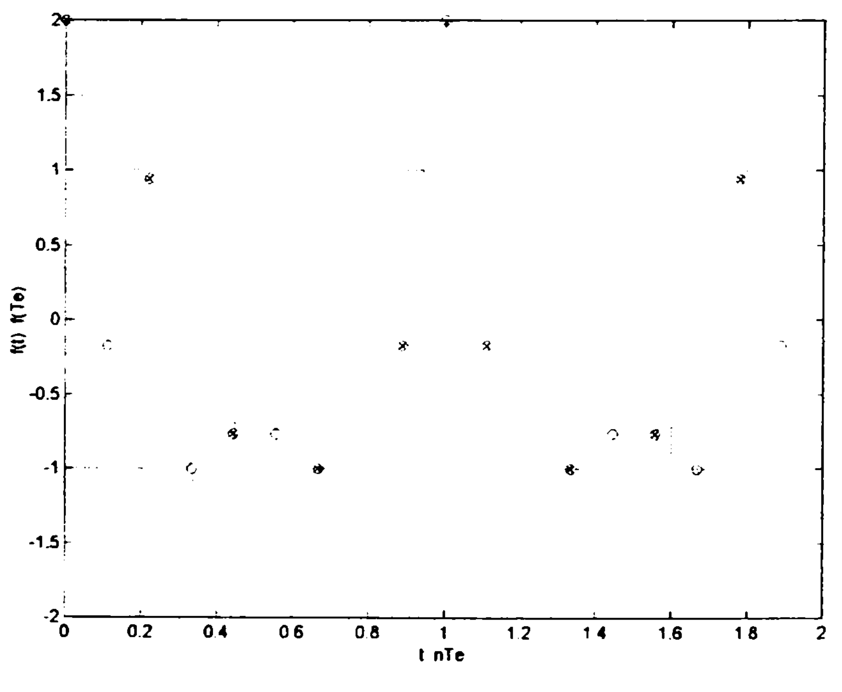


Figura 3.3. Semnal periodic par format din fundamentală şi armonica K=4, N=2K+1=9.

Deoarece avem 4 coeficienţi pentru suma de cosinus ($K = 4$) şi coeficientul a_0, rezultă că avem nevoie de 5 eşantioane diferite pentru calculul coeficienţilor. Prin alegerea pasului de eşantionare ca mai sus (T_{e2}), rezultă că toate cele 5 eşantioane sunt diferite. În figură ele sunt simbolizate cu un x încercuit ($\otimes$). Se observă că cele 5 eşantioane necesare pot fi prelevate de pe parcursul unei (primei) perioade a semnalului periodic par. Aceste eşantioane pot fi prelevate şi din mai multe perioade ale semnalului supus analizei, astfel rezultând o nouă reducere a frecvenţei de eşantionare.

Considerăm N număr *par*, $N = 2K + 2$. Şi în acest caz sistemul (3.25) şi relaţia (3.29) dintre eşantioane sunt valabile dar, acum $p = 0 \ldots N/2$. Pentru $p = N/2$ avem $N - p = N - N/2 = N/2 = p$, deci eşantionul y_{N-p} este acelaşi cu eşantionul y_p şi nu sunt două eşantioane diferite de aceeaşi valoare. Prin urmare, avem un număr de $K + 2$ eşantioane diferite care trebuiesc prelevate şi anume eşantionul cu indice zero (unic), K eşantioane cu indice în domeniul 1 la $N/2 - 1$ (egale cu cele care au indicele între $N/2 + 1$ şi $N - 1$) şi eşantionul cu indice $N/2 = K + 1$ (unic). În acest caz, N număr par, frecvenţa de eşantionare nu mai poate fi redusă la jumătate la fel ca în cazul N număr impar, ci în alt raport. În capitolul 2, eşantionarea semnalelor periodice pe mai multe perioade, s-a prezentat faptul că numărul N de eşantioane şi numărul M de perioade de pe care se face prelevarea lor, nu trebuie să aibe divizori comuni.

Folosind acelaşi exemplu, si anume semnalul periodic par ce conţine fundamentala şi componenta armonică $K = 4$, vom avea $N = 2K + 2 = 10$. Prelevarea celor $K + 2$ eşantioane din semnal, folosind o frecvenţă de eşantionare redusă, se poate face folosind perioada de eşantionare $T_{e3} = 3T_e = 3T/N$, unde cu T am notat perioada semnalului considerat. În acest caz cele N eşantioane ar fi prelevate de pe parcursul a trei perioade T. Acest exemplu este ilustrat grafic în figura 3.4.

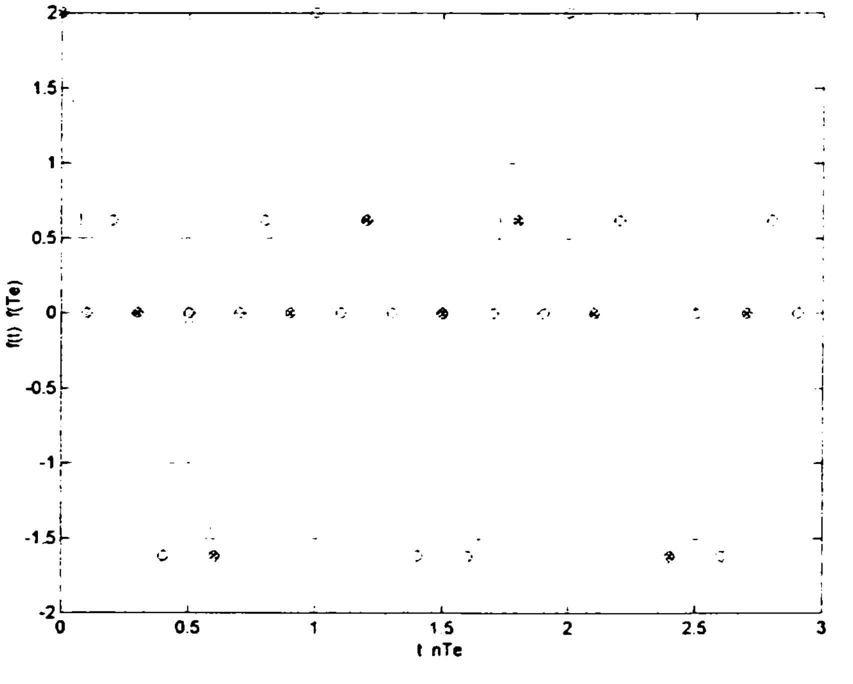


Figura 3.4. Semnal periodic par format din fundamentală şi armonica K=4, N=2K+2=10.

Şi în acest caz cu simbolul cerc sunt indicate eşantioanele ce se prelevează folosind pasul de eşantionare T_e, iar cu un x încercuit ($\otimes$) sunt indicate eşantioanele prelevate folosind pasul de eşantionare T_{e3}. Din figură, se observă că cele 6 eşantioane necesare (primele notate cu ⊗), se prelevează din mai multe perioade (în acest caz două) ale semnalului analizat.

Pentru obţinerea unei relaţii de calcul a coeficienţilor a_k în funcţie de valorile eşantioanelor $f_p(iT_e)$, plecăm de la relaţia (3.15) scrisă sub forma

$$f_p(iT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(k\omega_0 iT_e), \tag{3.32}$$

unde coeficientul a_0 a fost inclus în sumă (astfel pentru coeficientul a_0 va rezulta o relatie diferită de calcul faţă de cea utilizată pentru calculul coeficienţilor a_k, $k = 1,2,\ldots$) şi, timpul continuu t a fost înlocuit cu timpul discret iT_e.

În anexa A se demonstrează că relaţiile de calcul a coeficienţilor a_k sunt:

- pentru coeficientul a_0 corespunzător componentei continue

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_p(iT_e), \tag{3.33}$$

în suma din relaţia (3.32) având coeficientul a_0 şi nu $a_0/2$,

- iar pentru coeficienţii a_k, $k = 1,2,3,\ldots,K$

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_p(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e). \tag{3.34}$$

A. Cazul N număr *impar*

Deoarece relaţiile ce formează sistemul (3.25) nu sunt independente, putem reduce numărul lor utilizând un număr mai mic de eşantioane, egal cu numărul coeficienţilor ce trebuiesc calculati. Eşantionând semnalul cu perioada $T_{e2} = 2T_e$ şi utilizând doar eşantioanele prelevate din prima perioadă, relaţia (3.34) devine

$$a_k = \frac{2}{N}\left(f_p(0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{K} f_p(iT_{e2})\cos(k\omega_0 iT_{e2})\right) \tag{3.35}$$

(vezi relaţia A.12 din anexa A).

Dacă în relaţia (3.33) înmulţim cu 2 membrul drept, rezultă un coeficient a_0 pe care îl putem include în relaţia (3.35) şi în acest caz indicele k va putea lua valori în domeniul $0 \ldots K$ (la reconstrucţie trebuie ţinut cont de acest lucru).

B. Cazul N număr *par*

Dacă numărul N de eşantioane este par, reducerea frecvenţei de eşantionare o putem face utilizând perioada de eşantionare $T_{eM} = MT_e$, unde numărul M de perioade de pe care se prelevează eşantioanele este ales în conformitate cu cerinţele expuse în capitolul 2. Relația de calcul a coeficienților a_k, folosind doar $K+2$ eșantioane, va fi în acest caz

$$a_k = \frac{2}{N}(f_p(0) + f_p((K+1)T_{eM})\cos(k(K+1)\omega_0 T_{eM}) + \\ + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K} f_p(iT_{eM})\cos(k\omega_0 iT_{eM}) \quad (3.36)$$

deoarece eșantionul cu indice zero și eșantionul cu indice $N/2 = K+1$ sunt unici, restul fiind egali doi câte doi. Numărul de eșantioane prelevate este $K+2$. Și în acest caz coeficientul a_0 poate fi introdus în relația (3.36), la fel ca în cazul N număr impar.

Formula de reconstrucție a semnalului inițial pe baza coeficienților a_k este

$$g_P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(k\omega_0 t), \quad (3.37)$$

pentru a_0 calculat conform relației (3.35) sau (3.36).

Concluzie

Dacă semnalul pe care îl eșantionăm este unul periodic par putem utiliza o frecvență de eșantionare mai mică decât limita impusă de teorema eșantionării și, în același timp vom avea nevoie de un număr mai mic de eșantioane decât în cazul prelucrării unui semnal periodic oarecare. Coeficienții seriei Fourier sunt numere reale iar ei se calculează cu ajutorul unor relații în care intervin doar numere reale și nu complexe prin urmare se reduce volumul de calcule necesare pentru obținerea lor.

3.5. Funcții impare

Considerăm o funcție periodică impară $y = f_I(x)$ pe care o descompunem într-o sumă de sinusuri

$$y = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_K \sin Kx, \quad (3.38)$$

unde K reprezintă indicele componentei armonice maxime din semnal. Folosim notația α pentru pasul de eșantionare, aceeași notație ca în paragraful 3.4, $\alpha = 2\pi/N$, unde 2π reprezintă perioada semnalului, iar N numărul de eșantioane prelevate de pe parcursul unei perioade. Pentru fiecare eșantion poate fi scrisă o relație de tipul (3.38) rezultând sistemul

$$\begin{cases} y_0 = b_1 \sin 0 + b_2 \sin 0 + \ldots + b_K \sin 0 = 0 \\ y_1 = b_1 \sin\alpha + b_2 \sin 2\alpha + \ldots + b_K \sin K\alpha \\ \vdots \\ y_i = b_1 \sin i\alpha + b_2 \sin 2i\alpha + \ldots + b_K \sin Ki\alpha \\ \vdots \\ y_{N-1} = b_1 \sin(N-1)\alpha + b_2 \sin 2(N-1)\alpha + \ldots + b_K \sin K(N-1)\alpha \end{cases} \quad (3.39)$$

unde y_i reprezintă eşantionul i, din semnalul periodic impar considerat, obţinut la momentul $i\alpha$.

Din relaţia (3.38) se observă că avem doar K coeficienţi prin urmare am avea nevoie de K eşantioane din semnalul analizat pentru a obţine tot atâtea relaţii de tipul celei notate (3.38). Daca eşantionarea începe în momentul $t_0 = 0$, din sistemul (3.39) se observă ca primul eşantion nu poate fi folosit deoarece toţi coeficienţii sunt înmulţiţi cu zero. Prin urmare vor trebui prelevate cel puţin $K+1$ eşantioane, la fel ca în cazul semnalelor periodice pare, prezentat anterior.

Sistemul (3.39) poate fi scris matriceal sub forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin 2\alpha & \cdots & \sin K\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin 4\alpha & \cdots & \sin 2K\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(N-1)\alpha & \sin(N-1)2\alpha & \cdots & \sin(N-1)K\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

sau, folosind notaţii mai simple

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}, \tag{3.41}$$

unde **Y** reprezintă vectorul esantioanelor prelevate, **S** matricea formată din termeni sin şi **B** vectorul coeficienţilor Fourier.

Utilizând propietatea de periodicitate a funcţiei sinus putem scrie

$$\sin i(N-q)\alpha = \sin\left(iN\frac{2\pi}{N} - iq\alpha\right) = -\sin iq\alpha\ ,\ i,q = 1,\ldots,N-1\ . \tag{3.42}$$

Din sistemul (3.39) şi relaţia (3.42) se observă că

$$y_{N-1} = b_1 \sin(N-1)\alpha + b_2 \sin 2(N-1)\alpha + \ldots + b_K \sin K(N-1)\alpha =$$

$$= -b_1 \sin\alpha - b_2 \sin 2\alpha - \ldots - b_K \sin K\alpha = -y_1,$$

$$y_{N-2} = b_1 \sin(N-2)\alpha + b_2 \sin 2(N-2)\alpha + \ldots + b_K \sin K(N-2)\alpha =$$

$$= -b_1 \sin 2\alpha - b_2 \sin 2\cdot 2\alpha - \ldots - b_K \sin K\cdot 2\alpha = -y_2,$$

Rezultă că între eşantioane, în cazul eşantionării uniforme şi $t_0 = 0$, vom avea o relaţie de forma

$$y_{N-i} = -y_i\ ,\quad i = 0,1,2,\ldots,N-1 \tag{3.43}$$

Din relaţiile (3.42) şi (3.43) rezultă că două câte două linii ale matricei S sunt proportionale, prin urmare determinantul acestei matrice este zero. Altfel spus sistemul (3.39) este nedeterminat si prin urmare nu pot fi calculate necunoscutele b_k,

$k = 1,2,\ldots,K$. Relația (3.43) este valabilă oricare ar fi numărul N. Pentru ca să putem calcula coeficienții b_k trebuie ca eșantioanele să fie astfel prelevate încât relația (3.43) să nu mai fie valabilă.

A. Cazul N număr *impar*

Considerăm N număr *impar*, și anume $N = 2K+1$, în acest caz $i = 0,1,2,\ldots,(N-1)/2$. Deoarece avem doar K coeficienți, ei ar putea fi calculați folosind un număr mai mic de eșantioane (față de $2K+1$). Dacă reducem frecvența de eșantionare la jumătate se poate observa că avem și în acest caz, la fel ca în cazul semnalelor periodice pare, eșantionare "neuniformă" deoarece ultimul interval de timp, de la $y_{(N+1)/2}$ - ultimul eșantion din prima perioadă, la y_0 - primul eșantion din perioada următoare, nu este egal cu pasul de eșantionare, ci cu jumătate din acest pas. Considerăm perioada semnalului egală cu 2π, perioada de eșantionare fiind $T_e = 2\pi/N$. In cazul eșantionării uniforme, pentru N eșantioane prelevate, avem relația

$$NT_e = N\frac{2\pi}{N} = 2\pi. \tag{3.44}$$

Dacă reducem frecvența de eșantionare la jumătate, înseamnă că noul pas de eșantionare va fi $T_{e2} = 2T_e$ și pe parcursul unei perioade se vor preleva $(N+1)/2$ eșantioane. Pentru ca eșantionarea să fie uniformă ar trebui ca $T_{e2}(N+1)/2 = 2\pi$ dar, în acest caz

$$\frac{N+1}{2}T_{e2} = (N+1)\frac{2\pi}{N} = 2\pi + \frac{2\pi}{N}.$$

În figura următoare se prezintă cazul unui semnal periodic impar format din fundamentală și componenta armonică de ordin 4 ($K = 4$), ambele având aceeași amplitudine. Prin urmare $N = 2K+1 = 9$. Dacă folosim perioada de eșantionare T_{e2} atunci vor fi prelevate de pe parcursul unei perioade a semnalului un număr de $(N+1)/2 = 5$ eșantioane (eșantionul cu indice zero care, dacă eșantionarea începe la momentul $t_0 = 0$, are valoarea zero și încă 4 eșantioane diferite).

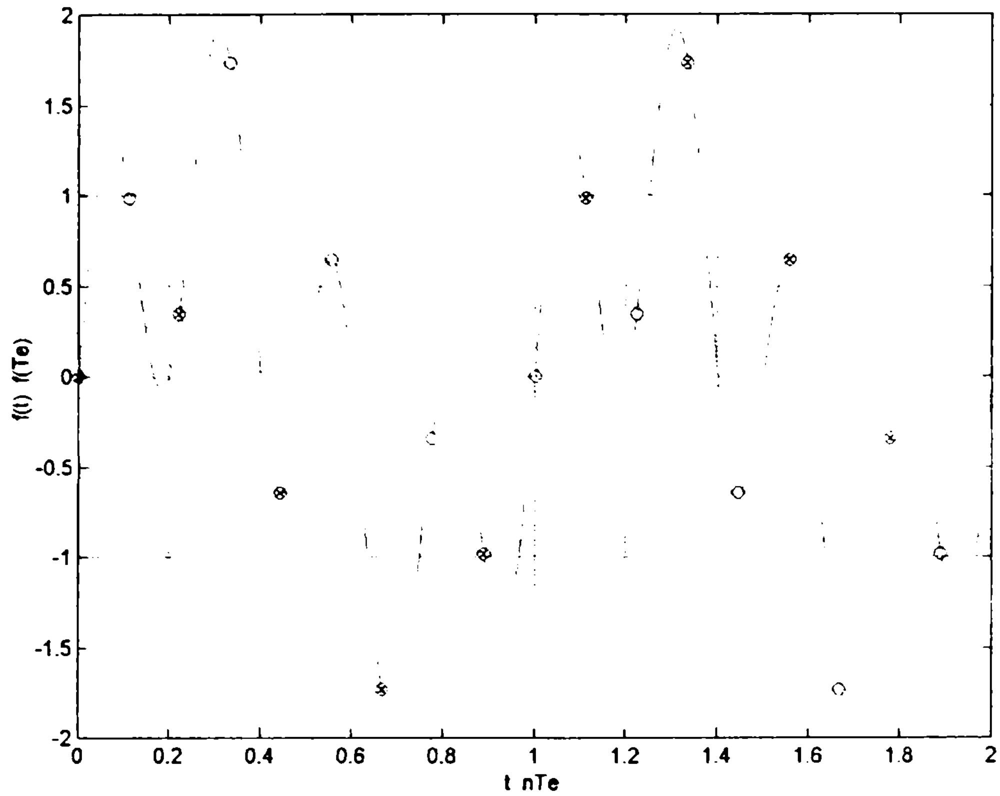


Figura 3.5. Semnal periodic impar format din fundamentală şi armonica K=4, N=2K+1=9.

În figură au fost evidenţiate valorile semnalului în punctele de eşantionare. Eşantioanele prelevate cu perioada T_{e2} sunt simbolizate cu un x încercuit ($\otimes$).

B. Cazul *N* număr *par*

Considerăm N număr *par*, adică $N = 2K + 2$. În acest caz $i = 1,2,...,N/2$. Dacă $i = N/2$ atunci $N - i = N - N/2 = N/2 = i$, deci eşantionul $y_{N-N/2}$ este acelaşi cu eşantionul $y_{N/2}$ şi nu sunt două eşantioane diferite cu valori egale în modul. În plus, acest esantion are valoarea zero deoarece se află la mijlocul perioadei semnalului şi din relaţia (3.43) rezultă ca avem o simetrie faţă de acest punct. Prin urmare avem un număr de $K + 2$ eşantioane diferite din care K sunt egale în modul cu restul eşantioanelor până la $2K + 2$.

La fel ca în cazul semnalelor pare, şi în acest caz (N număr par) frecvenţa de eşantionare poate fi redusă de M ori (obţinerea eşantioanelor de pe M perioade ale semnalului) faţă de frecvenţa de eşantionare minimă impusă la eşantionarea semnalelor periodice. Numărul M trebuie ales astfel încât să satisfacă condiţia impusă în capitolul 2 şi anume, numărul N de eşantioane şi numărul M de perioade de pe care se prelevează acestea, nu trebuie să aibă divizori comuni.

Pentru calculul coeficienţilor Fourier vor fi prelevate $K + 2$ eşantioane – eşantionul cu indice zero (unic), K eşantioane ce satisfac relaţia (3.43) şi eşantionul cu indice $N/2$ (unic).

Pentru exemplificare grafică vom folosi acelaşi semnal şi anume un semnal periodic impar format din fundamentală şi componenta armonică $K = 4$, ambele având aceeaşi amplitudine. Numărul N de eşantioane va avea valoarea $N = 2K + 2 = 10$. Prelevarea celor $K + 2 = 6$ eşantioane din semnal folosind o frecvenţă redusă de eşantionare se poate face folosind pasul $T_{e3} = 3T_e$. În acest caz cele N eşantioane sunt dispuse pe 3 perioade ale semnalului în timp ce cele 6 eşantioane necesare se prelevează de pe două perioade.

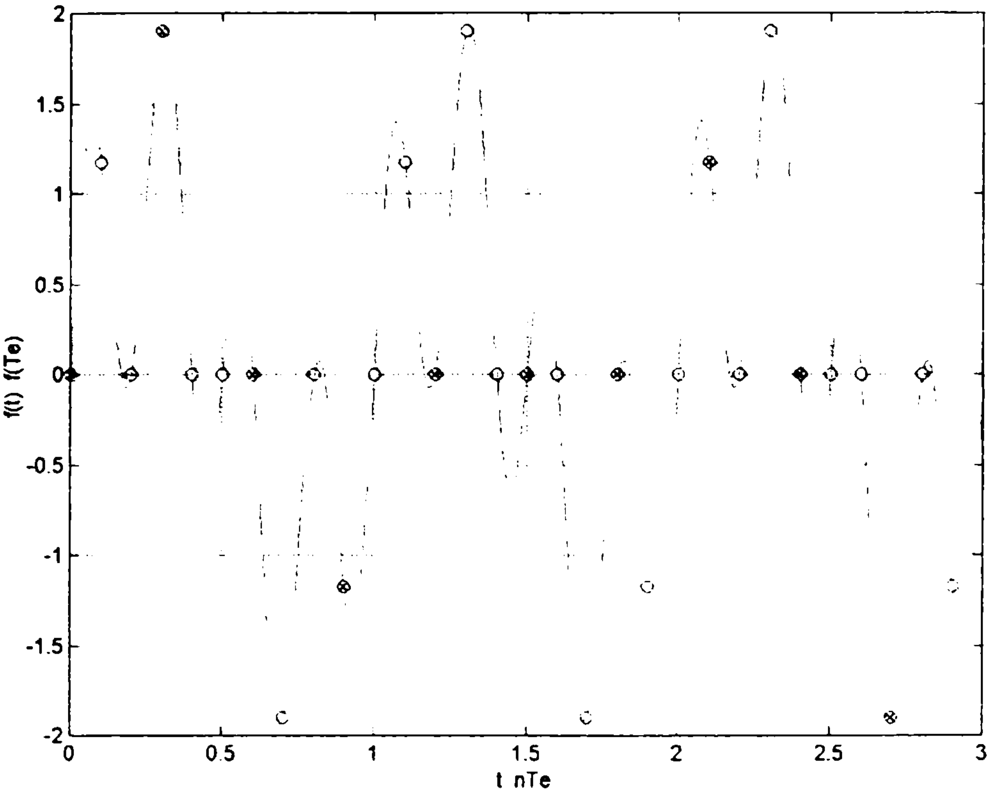


Figura 3.6. Semnal periodic impar format din fundamentala şi armonica K=4, N=2K-2=10.

Cu simbolul cerc au fost simbolizate eşantioanele în momentele iT_e, $i = 0,1,2,...$, iar cu ⊗ au fost simbolizate eşantioanele în momentele iT_{e3}.

Pentru obţinerea unei relaţii de calcul a coeficienţilor b_k în funcţie de valorile eşantioanelor $f_I(iT_e)$, plecăm de la relaţia (3.18) scrisă sub forma

$$f_I(iT_e) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega_0 iT_e), \tag{3.45}$$

unde timpul continuu t a fost înlocuit cu timpul discret iT_e iar însumarea nu se mai face pentru un număr infinit de coeficienţi. În anexa B se demonstrează că relaţia de calcul a coeficienţilor b_k este

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_I(iT_e) \sin(k\omega_0 iT_e). \tag{3.46}$$

Eşantionarea semnalului începe la momentul $t_0 = 0$ astfel, primul eşantion are valoarea zero şi este înmulţit cu zero (sinus de zero) prin urmare, poate fi eliminat din relaţia (3.46), suma începând de la unu şi nu de la zero.

Deoarece între eşantioane avem o relaţie de egalitate (în modul), relaţia (3.43) rezultă că putem folosi mai puţine eşantioane pentru calculul coeficienţilor Fourier.

Dacă N este număr impar relaţia (3.46) devine

$$b_k = \frac{4}{N}\sum_{i=1}^{K} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e), \tag{3.47}$$

iar pentru N număr par se utilizează aceeaşi relaţie şi acelaşi număr de eşantioane (vezi anexa B).

Modul de prelevare a eşantioanelor necesare în relaţia (3.47) pentru calculul coeficienţilor Fourier va fi prezentat ulterior în cadrul acestui capitol.

Formula de reconstrucţie a semnalului iniţial, pe baza coeficienţilor b_k este

$$g_I(t) = \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(k\omega_0 t). \tag{3.48}$$

Concluzie. Deoarece în cazul unui semnal periodic impar avem mai putini coeficienţi corespunzători seriei Fourier (coeficienţii a_k sunt zero) rezultă că avem nevoie de mai puţine eşantioane pentru calculul acestora. Prin urmare frecvenţa de eşantionare utilizată pentru obţinerea acestora poate fi mai mică decât frecvenţa de eşantionare necesară în cazul eşantionării semnalelor periodice oarecare. În plus, coeficienţii seriei Fourier sunt numere reale şi ei se calculează folosind relaţii în care intervin doar numere reale şi nu complexe, prin urmare, volumul de calcul necesar este mai mic.

3.6. Cazul general – functie periodică oarecare

Considerăm că avem o funcţie periodică oarecare $f(t)$ ce are componente sinusoidale şi cosinusoidale. Ordinul componentei armonice maxime din semnal o notăm ca şi până acum cu K. Pentru a calcula toţi coeficienţii seriei Fourier avem nevoie de $N = 2K + 1$ eşantioane din semnal pentru a forma un sistem cu acelaşi număr de ecuaţii. Formula de calcul a coeficienţilor seriei Fourier exponenţiale este dată în capitolul 1, relaţia (1.19). Reconstrucţia semnalului poate fi făcută cu relaţia (1.7). Toate aceste calcule se fac în complex. Pentru a putea face calcule folosind numere reale funcţia periodică oarecare se descompune în partea sa pară şi respectiv impară - vezi relaţiile notate (3.23), în continuare, aplicându-se relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier a_k şi b_k prezentate în paragrafele anterioare.

Chiar dacă pentru calculul coeficienţilor a_k, în număr de $K + 1$, şi b_k în număr de K, se folosesc $K + 1$ eşantioane ale semnalului par respectiv K eşantioane ale semnalului impar, pentru obţinerea acestor eşantioane este nevoie de $2K + 1$ eşantioane ale semnalului periodic oarecare $f(t)$. Aceasta deoarece $f(-iT_e) = f((N - i)T_e)$.

Reconstituirea semnalului iniţial se va face prin adunarea părţii pare cu partea impară reconstituite pe baza coeficienţilor a_k respectiv b_k.

Ca o concluzie se poate spune că prin utilizarea acestei tehnici de descompunere a semnalului periodic oarecare în parte pară şi impară, avem nevoie de $N = 2K + 1$ eşantioane pentru obţinerea celor $K + 1$ respectiv K eşantioane ale părţii pare respectiv impare. Reducerea frecvenţei de eşantionare se poate face nu prin reducerea numărului de eşantioane prelevat, ci prin obţinerea lor de pe mai multe perioade ale semnalului analizat. Un câştig apare la calcul deoarece relaţiile care intervin utilizează doar numere reale şi nu complexe.

3.7. Obţinerea eşantioanelor necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier în cazul semnalelor pare, respectiv impare

În paragrafele anterioare, 3.4 şi 3.5, s-a prezentat faptul că, în cazul eşantionării uniforme, începând din momentul $t_0 = 0$, sunt valabile relaţiile de egalitate dintre eşantioane, scrise mai jos

$$y_p = y_{N-p}, \tag{3.49}$$

pentru semnalele periodice pare şi respectiv

$$y_i = -y_{N-i}, \tag{3.50}$$

pentru semnalele periodice impare, unde cu y_p, respectiv y_i, s-au notat eşantioanele semnalelor periodice pare, respectiv impare. Cu N am notat numărul de eşantioane prelevate pe parcursul unei perioade în cazul în care este satisfacută teorema eşantionării. De asemenea, în aceleaşi subcapitole, s-a prezentat faptul că nu avem nevoie de $N = 2K + 1$ eşantioane, K fiind ordinul componentei armonice maxime din semnalul periodic par sau impar, ci de un număr mult mai mic de eşantioane, pentru a putea calcula coeficienţii seriei Fourier pentru un semnal par sau impar.

Pentru prelevarea, în decursul unei perioade, a unui număr de $K + 1$ eşantioane necesare calculului coeficienţilor Fourier, frecvenţa de eşantionare necesară este mai mică decât în cazul prelevării unui număr aproape dublu de eşantioane ($2K + 1$). Numai că nu este suficient doar să reducem frecvenţa de eşantionare. Problema care apare este că relaţiile (3.49) şi (3.50) sunt valabile oricare ar fi numărul N. În acest caz nu putem calcula coeficienţii seriei Fourier deoarece nu putem forma un sistem liniar independent. Acest lucru ne conduce spre concluzia că eşantioanele trebuiesc obţinute în alt mod.

În continuare, vor fi prezentate 3 metode de obţinere a eşantioanelor necesare şi relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului analizat.

3.7.1. Prelevarea a 2*K*+1 eşantioane dintr-o perioadă şi utilizarea doar a primelor *K*+1 eşantioane

O soluţie ce poate fi folosită pentru obţinerea unui număr de $K + 1$ eşantioane cu valori diferite este eşantionarea semnalului cu o frecvenţă minimă care să respecte teorema eşantionării, adică prelevarea a $N = 2K + 1$ eşantioane dintr-o perioadă şi, luarea în calcul doar a eşantioanelor corespunzătoare primei jumătăţi de perioadă.

Considerăm semnalul periodic par notat $f_P(t)$. S-a demonstrat că relaţia de calcul a coeficienţilor a_k, din eşantioanele semnalului, este cea notată (3.34). Dacă se prelevează un număr de $N = 2K + 1$ eşantioane de pe parcursul unei perioade de la momentul $t_0 = 0$, atunci primul eşantion este unic, restul, sunt egali doi câte doi – vezi relaţia (3.49). Din suma din relaţia (3.34) scoatem primul termen, $f_P(0)\cos(0)$, restul produselor fiind separate în două părţi egale, ca mai jos

$$a_k = \frac{2}{N}\left[f_P(0) + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} f_P(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e) + \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N-1} f_P(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e) \right]. \tag{3.51}$$

Între valorile funcţiei cosinus avem acelaşi tip de egalitate ca cea din relaţia (3.49), prin urmare, cele două sume din relaţia (3.51) sunt egale. Dacă pe una o eliminăm şi pe cealaltă o dublăm, coeficienţii a_k vor fi calculaţi folosind doar $K+1$ eşantioane în loc de $2K+1$. Rezultă relaţia notată (3.35) unde T_{e2} se înlocuieşte cu T_e

$$a_k = \frac{2}{N}\left[f_p(0) + 2\cdot \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} f_p(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e) \right], \tag{3.52}$$

unde $(N-1)/2 = K$.

Pentru cazul N număr par, $N = 2K+2$, s-a demonstrat că relaţia de calcul a coeficienţilor a_k este cea notată (3.36), în acest caz utilizându-se un număr de $K+2$ eşantioane.

Considerăm semnalul periodic impar notat $f_I(t)$. S-a demonstrat că relaţia de calcul a coeficienţilor b_k, din eşantioanele semnalului, este cea notată (3.46), suma fiind de la 1 la N-1 (eşantionul zero este zero iar $\sin(0)=0$). Între eşantioane avem o relaţie de egalitate (în modul) – vezi relaţia (3.50). Se poate demonstra că acelaşi tip de egalitate avem şi pentru funcţia sinus. Prin urmare, dacă suma din relaţia (3.46) este desfăcută în două sume cu număr egal de termeni

$$b_k = \frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e) + \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N-1} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e) \right], \tag{3.53}$$

cele două sume vor avea valori egale deci, şi în acest caz se poate elimina o sumă în timp ce cealaltă se dublează rezultând utilizarea unui număr mai mic de eşantioane (K eşantioane). Relaţia de calcul a coeficienţilor b_k va fi cea notată (3.47) deoarece $(N-1)/2 = K$.

Pentru cazul N număr par, $N = 2K+2$, s-a demonstrat (vezi anexa B) că relaţia de calcul a coeficienţilor b_k este tot cea notată (3.47).

3.7.2. Prelevarea eşantioanelor necesare utilizând un pas de eşantionare mărit

O altă modalitate pentru obţinerea numărului necesar de eşantioane este prezentată în paragrafele 3.4 şi 3.5 cu ajutorul figurilor 3.3 şi 3.5. În aceste cazuri s-a considrerat că semnalul periodic par, respectiv impar, a fost eşantionat în concordanţă cu teorema eşantionării, preluându-se un număr de $N = 2K+1$ eşantioane dintr-o perioadă. În paragraful 3.7.1 s-au luat în considerare în calcule doar primul eşantion – indice zero (fiind independent) şi următoarele de la indicele 1 la K. Aceasta deoarece avem o relaţie de egalitate între eşantioane, vezi relaţia (3.49) sau (3.50), şi anume un eşantion cu indice impar este egal cu un eşantion cu indice par. Putem preleva K eşantioane diferite, din cele ce au indexul de la 1 la $2K$ şi în alt mod şi anume prelevând tot al doilea eşantion – vezi fig. 3.3 sau 3.5, adică se vor preleva doar eşantioanele cu indice par. Acest mod de obţinere a eşantioanelor necesare poate fi vazut la fel ca cel prezentat în paragraful 3.7.1 doar că, în acest caz, perioada de eşantionare este dublă. Astfel se reduce şi frecvenţa de eşantionare. Cu eşantioanele astfel obţinute se poate forma un sistem de tipul celui notat cu (3.25) respectiv (3.39) iar, determinantul matricei **C**, respectiv **S**, ar fi diferit de zero, adică se pot calcula coeficienţii a_k, respectiv b_k. Folosind doar eşantioane cu indici pari, obţinuţi datorită pasului de eşantionare $T_{e2} = 2T_e$, relaţia de calcul a coeficienţilor a_k este cea notată (3.35) respectiv, pentru coeficienţii b_k, vom avea relaţia notată (3.47), unde T_e se înlocuieşte cu T_{e2}. Pentru eşantionare pe mai multe perioade (frecvenţă de eşantionare şi mai mică), notăm cu M numărul de perioade de pe care vor fi prelevate cele N eşantioane şi cu T_{eM} perioada de eşantionare corespunzătoare. Din relaţia

$$T_{eM} = \frac{MT_0}{N}, \tag{3.54}$$

unde T_0 reprezintă perioada semnalului periodic par sau impar, rezultă condiţia pentru a avea eşantionare corectă şi anume, $M \neq nN$, unde $n = 1,2,...$, în caz contrar $T_{eM} = nT_0$ adică, se va eşantiona numai eşantionul cu indice zero (corespunzător primei perioade). În rest M poate lua orice valoare.

Dacă N este un număr par (de exemplu $N = 2K + 2$) atunci M nu poate fi număr par. În paragraful 2.3 s-a demonstrat faptul că numărul de eşantioane N şi numărul de perioade M de pe care se prelevează acestea nu au voie să aibă nici un divizor comun (diferit de 1) deoarece, în caz contrar, unele eşantioane vor fi prelevate de mai multe ori (din perioade diferite) în timp ce altele vor fi omise.

Pentru calculul coeficienţilor a_k se va utiliza relaţia (3.36), iar pentru calculul coeficienţilor b_k, se va utiliza relaţia (3.47), în acestea făcându-se înlocuirea perioadei T_e cu T_{eM}.

3.7.3. Începerea procesului de eşantionare de la un moment diferit de momentul zero

În paragrafele 3.7.1 şi 3.7.2 procesul de eşantionare a început la momentul zero astfel, între eşantioanele funcţiei periodice pare, respectiv impare, existând câte o relaţie de egalitate, indiferent de numărul de eşantioane prelevate de pe parcursul unei perioade. Pentru a se putea obţine un sistem determinat de $K+1$, respectiv K ecuaţii, eşantioanele necesare trebuie prelevate în unul din cele două moduri expuse mai sus. O altă posibilitate de a obţine numărul de eşantioane dorit este eşantionarea începând dintr-un moment diferit de zero, adică $t_0 \neq 0$. În acest caz, relaţiile de egalitate (3.49), respectiv (3.50), dintre eşantioane, nu mai sunt valabile dacă, asa cum se va demonstra, $t_0 \neq nT_e/2$, unde $n = 1,2,...$ şi T_e - perioada de eşantionare utilizată.

În continuare vom considera descompunerea semnalului periodic par $f_P(t)$, de perioadă T_0, în serie Fourier exponențială. Coeficienții c_k sunt numere reale și $c_k = c_{-k}$, prin urmare relația de descompunere poate fi scrisă sub forma

$$f_P(t_0 + iT_e) = c_0 + \sum_{k=1}^{K} c_k \left(e^{jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 iT_e} + e^{-jk\omega_0 t_0} e^{-jk\omega_0 iT_e} \right). \tag{3.55}$$

Perioada de eșantionare are valoarea $T_e = T_0/(K+1)$. În relația (3.55) facem însumarea după i, unde $i = 0,1,2,...K$. Este simplu de demonstrat că

$$c_0 = \frac{1}{K+1}\sum_{i=0}^{K} f_p(t_0 + iT_e) \qquad \left(\sum_{i=0}^{K} e^{jki\frac{2\pi}{K+1}} = 0 \right) \tag{3.56}$$

Pentru a calcula și ceilalți coeficienți, pe lângă însumarea după i, facem și o înmulțire a relației (3.55) cu $e^{-jni2\pi/(K+1)}$, unde $n = 0,1,...,K$, rezultând

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{K} f_P(t_0 + iT_e) e^{-jni\frac{2\pi}{K+1}} &= \sum_{i=0}^{K} c_0 e^{-jni\frac{2\pi}{K+1}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{K}\sum_{k=1}^{K} c_k \left(e^{jk\omega_0 t_0} e^{j(k-n)i\frac{2\pi}{K+1}} + e^{-jk\omega_0 t_0} e^{-j(k+n)i\frac{2\pi}{K+1}} \right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

Suma după i în care apare coeficientul c_0 este egală cu zero oricare ar fi valoarea lui n. De asemenea, se poate scrie

$$\sum_{i=0}^{K} e^{j(k-n)i\frac{2\pi}{K+1}} = \begin{cases} K+1 & pentru \quad k-n=0 \\ 0 & pentru \quad k-n \neq 0 \end{cases}, \tag{3.58}$$

$$\sum_{i=0}^{K} e^{j(k+n)i\frac{2\pi}{K+1}} = \begin{cases} K+1 & pentru \quad k+n=K+1 \\ 0 & pentru \quad k+n \neq K+1 \end{cases}. \tag{3.59}$$

Deoarece valoarea maximă pe care o poate lua k, respectiv n, este K, suma lor, $k+n$, poate avea cel mult valoarea $2K < 2(K+1)$, astfel putem avea doar cele patru situații descrise de relațiile (3.58) și (3.59). Prin urmare, pentru un anumit k, avem un $n = m$ astfel încât $k + m = K + 1$, altfel spus, în partea dreaptă a egalității din relația (3.57) vom avea tot timpul doi coeficienți, și anume c_k și c_m. Ținând cont de cele de mai sus, pentru un anumit k, relația (3.57) devine

$$\sum_{i=0}^{K} f_P(t_0 + iT_e) e^{-jki\frac{2\pi}{K+1}} = (K+1)\cdot\left(c_k e^{jk\omega_0 t_0} + c_m e^{-jm\omega_0 t_0} \right), \tag{3.60}$$

dar și

$$\sum_{i=0}^{K} f_P(t_0 + iT_e)e^{-jmi\frac{2\pi}{K+1}} = (K+1)\cdot\left(c_m e^{jm\omega_0 t_0} + c_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right). \tag{3.61}$$

Pentru a găsi o relație de calcul a coeficienților c_k, înmulțim relația (3.60) cu $-e^{jm\omega_0 t_0}$, relația (3.61) cu $e^{-jm\omega_0 t_0}$, le însumăm și ținem cont de faptul că $k + m = K + 1$ rezultând

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{K} f_P(t_0 + iT_e)\sin\left[(K+1-k)\omega_0 t_0 - ki\frac{2\pi}{K+1}\right]}{(K+1)\sin\left[(K+1)\omega_0 t_0\right]}. \tag{3.62}$$

Reconstrucția semnalului se face cu relația

$$f_{\mathrm{Pr}}(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{K} c_k \cos(k\omega_0 t). \tag{3.63}$$

Din relația (3.62) rezultă valorile lui t_0 pentru care c_k nu poate fi calculat. Din $\sin\left[(K+1)\omega_0 t_0\right] = 0$ vom avea pentru t_0 valorile

$$(K+1)\omega_0 t_0 = p\pi \Rightarrow t_0 = p\frac{T_e}{2}, \quad p = 0,1,2,\ldots. \tag{3.64}$$

Altfel spus, pentru a putea calcula coeficienții c_k din $K+1$ eşantioane, t_0 trebuie să fie diferit de 0, $T_e/2$ sau multiplii de $T_e/2$.

Sistemul format din relația (3.63) scrisă pentru fiecare eşantion, notat y_i cu $i = 0,1,2,\ldots$, al semnalului $f_P(t)$, pentru $\alpha_0 = \omega_0 t_0 \neq 0$ şi $\alpha = \omega_0 T_e = 2\pi/N$, este scris mai jos

$$\begin{cases} y_0 = c_0 + 2c_1\cos\alpha_0 + 2c_2\cos 2\alpha_0 + \ldots + 2c_k\cos K\alpha_0 \\ y_1 = c_0 + 2c_1\cos(\alpha+\alpha_0) + 2c_2\cos 2(\alpha+\alpha_0) + \ldots + 2c_K\cos K(\alpha+\alpha_0) \\ y_2 = c_0 + 2c_1\cos(2\alpha+\alpha_0) + \ldots + 2c_K\cos K(2\alpha+\alpha_0) \\ \vdots \\ y_{N-1} = c_0 + 2c_1\cos\left[(N-1)\alpha+\alpha_0\right] + \ldots + 2c_K\cos K\left[(N-1)\alpha+\alpha_0\right] \end{cases} \tag{3.65}$$

Considerăm "unghiul de eşantionare" $\alpha = 2\pi/N$, unde $N = K+1$, iar K reprezintă, ca şi până acum, numărul maxim de componente armonice din semnal (ordinul componentei armonice maxime). Dacă $K = 1$, atunci

$$\alpha = \frac{2\pi}{2} = \pi, \tag{3.66}$$

şi vor fi prelevate două eşantioane, y_0 şi y_1. Sistemul rezultat, scris sub formă matriceală, este

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha_0 \\ 1 & \cos(\alpha+\alpha_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ 2c_1 \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

al cărui determinant îl notăm $Det1$ şi are valoarea

$$Det1 = -2\cos\alpha_0 . \tag{3.68}$$

Pentru ca determinantul să fie diferit de zero, deci sistemul să fie determinat, trebuie să fie îndeplinită relaţia

$$\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} . \tag{3.69}$$

S-au făcut calcule ale determinanţilor pentru valori ale lui K până la 6. Rezultatele sunt prezentate mai jos pe coloane şi anume, valoarea lui K, valoarea pasului de eşantionare, valoarea determinantului, valoarea pe care nu trebuie să o aibă α_0 pentru ca determinantul să fie diferit de zero.

Tabelul 3.1 Determinantul matricei **C** *şi condiţia ca acesta să fie diferit de zero, pentru K cu valori diferite*

$K=2$	$\alpha=\frac{2\pi}{3}$	$Det2 = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(3\alpha_0)$	$\alpha_0 \neq k\frac{\pi}{3} = k\frac{\alpha}{2}$
$K=3$	$\alpha=\frac{2\pi}{4}$	$Det3 = 8\cos(2\alpha_0)\sin(4\alpha_0)$	$\alpha_0 \neq k\frac{\pi}{4} = k\frac{\alpha}{2}$
$K=4$	$\alpha=\frac{2\pi}{5}$	$Det4 = \frac{25\sqrt{5}}{4}\sin^2(5\alpha_0)$	$\alpha_0 \neq k\frac{\pi}{5} = k\frac{\alpha}{2}$
$K=5$	$\alpha=\frac{2\pi}{6}$	$Det5 = -216\cos^3(3\alpha_0)\sin^2(3\alpha_0)$	$\alpha_0 \neq k\frac{\pi}{6} = k\frac{\alpha}{2}$
$K=6$	$\alpha=\frac{2\pi}{7}$	$Det6 = 13{,}36\sin^2(7\alpha_0)$	$\alpha_0 \neq k\frac{\pi}{7} = k\frac{\alpha}{2}$

După cum se observă, am ajuns la aceeaşi condiţie notată (3.64), adică t_0 trebuie să fie diferit de multiplu de $T_e/2$ pentru a putea calcula coeficienţii dezvoltării în serie Fourier folosind doar $K+1$ eşantioane.

În continuare, vom căuta să obţinem relaţia de calcul a coeficienţilor dezvoltării în serie Fourier pentru un semnal periodic impar $f_I(t)$ cu armonica maximă notată K. În acest caz coeficienţii c_k sunt numere imaginare şi între ei avem relaţia de egalitate $c_k = -c_{-k}$, prin urmare, relaţia de descompunere poate fi scrisă sub forma

$$f_I(t_0 + iT_e) = \sum_{k=1}^{K} c_k \left(e^{jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 iT_e} - e^{-jk\omega_0 t_0} e^{-jk\omega_0 iT_e} \right). \tag{3.70}$$

Coeficientul c_0 nu mai apare în sumă deoarece el apare doar în cazul semnalelor pare. Folosim aceleaşi notaţii ca în cazul tratării semnalelor periodice pare.

Relația (3.70) o înmulțim cu $e^{-jni2\pi/N}$, unde termenul n are același domeniu de variație ca și k, urmând însumarea celor N relații rezultate, corespunzătoare celor N eșantioane prelevate din semnal. Vom obține

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_I(t_0 + iT_e)e^{-jni\frac{2\pi}{N}} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_k \left(e^{jk\omega_0 t_0} e^{j(k-n)i\frac{2\pi}{N}} - e^{-jk\omega_0 t_0} e^{-j(k+n)i\frac{2\pi}{N}} \right). \tag{3.71}$$

Numărul N de eșantioane are de asemenea valoarea $K+1$ ca în cazul tratat anterior. Astfel, relațiile (3.58) și (3.59), corespunzătoare sumelor $\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k\pm n)i\frac{2\pi}{N}}$, sunt valabile și în acest caz.

Dacă numărul N de eșantioane ar fi ales egal cu K (adică egal cu numărul de coeficienți ce sunt calculați), atunci, sumele din relațiile (3.58) și (3.59) ar fi fost diferite de zero în două cazuri și nu doar într-un caz. Valoarea maximă pe care o poate lua suma $k+n$ este $2K$, adică $2N$. Prin urmare există valori pentru k și n astfel încât $k+n=N$ sau $2N$ deci, în partea dreaptă a egalității din relația (3.71), am avea mai mult de 2 coeficienți.

Preluând un număr de $N=K+1$ eșantioane dintr-o perioadă a semnalului periodic impar, la fel ca în cazul semnalului periodic par, va exista un $n=m$ astfel încât $k+m=K+1=N$ dar nu vom avea și cazul $k+n=2N$. Astfel în partea dreaptă a egalitații din relația (3.71) vom avea doar doi coeficienți c_k și c_m. Pentru un anumit k vom avea

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_I(t_0 + iT_e)e^{-jki\frac{2\pi}{N}} = c_k e^{jk\omega_0 t_0} - c_m e^{-jm\omega_0 t_0}. \tag{3.72}$$

și, în același timp

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_I(t_0 + iT_e)e^{-jmi\frac{2\pi}{N}} = c_m e^{jm\omega_0 t_0} - c_k e^{-jk\omega_0 t_0}. \tag{3.73}$$

Pentru calculul coeficienților c_k înmulțim relația (3.72) cu $-e^{jm\omega_0 t_0}$ și relația (3.73) cu $e^{-jm\omega_0 t_0}$, le însumăm rezultând

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{K} f_I(t_0 + iT_e)\cos\left[ki\frac{2\pi}{N} - (N-k)\omega_0 t_0\right]}{N\sin(N\omega_0 t_0)}. \tag{3.74}$$

Reconstrucția semnalului se face cu relația

$$f_{Ir}(t) = 2\sum_{k=1}^{K} c_k \sin(k\omega_0 t). \tag{3.75}$$

Din relația (3.74) rezultă valorile lui t_0 pentru care c_k nu pot fi calculați, valori care sunt date de relația (3.64) deoarece în relațiile (3.62) și (3.74) avem același numitor.

3.8. Exemplu de calcul, funcții pare și impare

Ca exemplu de calcul al coeficienților Fourier folosindu-se relațiile prezentate in paragrafele anterioare, s-a luat un semnal periodic cu componente sinusoidale și cosinusoidale, ordinul componentei armonice maxime fiind ales $K=5$. Perioada semnalului se consideră egală cu unitatea, $T=1$. Pentru calculul coeficienților Fourier corespunzători componentelor pare, respectiv impare, ale acestui semnal, este nevoie de câte $K+1$ eșantioane, respectiv K eșantioane pentru fiecare set de coeficienți. Din acest motiv se folosesc un număr de N eșantioane egal cu $2K+1$.

În simulările făcute în Mathcad, dacă se utilizează valori pentru eșantioanele prelevate folosindu-se reprezentarea maximă posibilă în acest program, erorile de calcul ale coeficienților și respectiv, a reconstrucției semnalului sunt neglijabile. În practică, numărul de biți ai unui convertor analog numeric este limitat (rezoluție limitată). Astfel, se face o trunchiere a valorilor eșantioanelor, ele fiind reprezentate pe un număr redus de cifre. Această reducere se face prin rotunjire a valorilor eșantioanelor calculate pentru a se simula cazul real. În funcție de numărul de cifre fracționare n pe care se exprimă eșantioanele din semnalul considerat, eroarea absolută a valorii aproximative este egală cu cel mult $0{,}5\cdot 10^{-n}$. Coeficienții Fourier sunt calculați cu erori mai mari sau mai mici în funcție de numărul de cifre pe care se exprimă eșantioanele. Prin urmare, și eroarea făcută la reconstrucția semnalului inițial pe baza coeficienților Fourier, va depinde de numărul de cifre pe care se exprimă eșantioanele.

Semnalul utilizat în simulări are componentă continuă, componente sinusoidale și cosinusoidale, fiind descris de ecuația

$$\begin{aligned} x(t) &= 0{,}5 + \cos(2\pi ft) + 0{,}5\cos(2\pi 2ft) + 0{,}5\cos(2\pi 4ft) + 0{,}5\cos(2\pi 5ft) + \\ &+ \sin(2\pi ft) + 0{,}5\sin(2\pi 2ft) + 0{,}5\sin(2\pi 5ft) \end{aligned} \tag{3.76}$$

Componentele pară, $x_p(t)$, și impară, $x_i(t)$, au fost calculate cu relațiile (3.23). În funcție de modul de obținere a eșantioanelor necesare pentru calculul coeficienților Fourier, frecvențele de eșantionare sunt

$$f_e = Nf \tag{3.77}$$

respectiv

$$f_{e1} = N_1 f , \tag{3.78}$$

unde f este frecvența fundamentalei semnalului $x(t)$, $N=2K+1$, $N_1=K+1$. Perioadele de eșantionare vor fi $T_e = 1/f_e$ respectiv $T_{e1} = 1/f_{e1}$.

În continuare, se notează cu $x(iT_e)$, $x_p(iT_e)$, $x_i(iT_e)$ valorile netrunchiate ale eșantioanelor prelevate din semnalul $x(t)$, respectiv, cele calculate cu relatiile (3.23) corespunzătoare componentelor pară și impară ale acestui semnal. Cu $x_t(iT_e)$ se notează valorile trunchiate (prin rotunjire) ale eșantioanelor semnalului considerat. Cu

$x_{pt}(iT_e)$, $x_{it}(iT_e)$ se notează valorile eşantioanelor părţilor pară şi impară calculate pe baza eşantioanelor $x_t(iT_e)$. În tabelul următor se prezintă erorile absolute cu care sunt obţinute eşantioanele din semnalul considerat, respectiv eşantioanele corespunzătoare părţilor pară şi impară, scrise pe un număr mai mic de cifre (biţi).

Tabelul 3.2. Erorile absolute cu care sunt obţinute eşantioanele trunchiate

	ideal	trunchiat				
număr cifre fracţionare	>10	1	2	3	4	5
eroare calcul $x_t(iT_e)$	$4{,}8\cdot10^{-11}$	$4{,}5\cdot10^{-2}$	$4{,}6\cdot10^{-3}$	$4{,}6\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-5}$	$4{,}9\cdot10^{-6}$
eroare calcul $x_{pt}(iT_e)$	$1{,}5\cdot10^{-11}$	$2{,}1\cdot10^{-2}$	$3{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}8\cdot10^{-4}$	$1{,}6\cdot10^{-5}$	$4{,}9\cdot10^{-6}$
eroare calcul $x_{it}(iT_e)$	$3{,}6\cdot10^{-11}$	$3{,}8\cdot10^{-2}$	$3{,}1\cdot10^{-3}$	$3{,}1\cdot10^{-4}$	$3{,}6\cdot10^{-5}$	$2{,}1\cdot10^{-6}$

Pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului $x(t)$ a fost utilizată relaţia (1.19). Coeficienţii au fost notaţi $c(k)$ atunci când s-au folosit eşantioane cu valori netrunchiate şi $c_t(k)$ atunci când s-au folosit eşantioane cu valori trunchiate.

Pentru calculul coeficienţilor $a(k)$ şi $b(k)$, corespunzători părţilor pare şi impare ale semnalului $x(t)$, s-au folosit relaţiile (3.35) şi (3.47). Dacă s-au utilizat eşantioane cu valori trunchiate, coeficienţii Fourier au fost notaţi $a_t(k)$ şi $b_t(k)$. Reconstrucţia componentelor pară şi impară corespunzătoare semnalului iniţial se face cu ajutorul relaţiilor (3.37) şi (3.48). Relaţiile de calcul ale coeficienţilor Fourier s-au obţinut considerându-se că eşantionarea începe în momentul $t_0 = 0$. În cazul în care acest moment este diferit de zero, coeficienţii vor avea alte valori dacă se utilizează aceleaşi relaţii pentru calculul lor. Reconstrucţia semnalului va fi însă corectă (valoarea modulului $a(k) \pm jb(k)$ rămâne constantă).

Reducerea frecvenţei de eşantionare se poate face prelevând eşantioanele de pe mai multe perioade cu respectarea condiţiei prezentate în capitolul 2.

Dacă eşantionarea începe la un moment $t_0 \neq 0$, calculul coeficienţilor Fourier corespunzători părţilor pară, notaţi $c_p(k)$, respectiv impară, notaţi $c_i(k)$, ale semnalului $x(t)$, se face cu ajutorul relaţiilor (3.62) şi (3.74). În acest caz valorile obţinute pentru coeficienţi vor fi cele reale. Reconstrucţia componentelor pară şi impară pe baza coeficienţilor Fourier se face cu ajutorul relaţiilor (3.63) şi (3.75).

Eşantioanele din semnalul analizat utilizate în calcule au fost trunchiate (prin rotunjire), menţinându-se între o cifră dupa virgulă şi 5 cifre după virgulă.

În tabelul 3.3 se prezintă erorile de calcul ale coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului $x(t)$ şi erorile absolute la reconstrucţia semnalului iniţial pe baza coeficienţilor calculaţi. În cazul ideal, eroarea la reconstrucţie rezultată este dată de programul de calcul, limitarea fiind la 16 cifre zecimale eroarea făcută fiind de ordinul 10^{-15}.

Tabelul 3.3. Erorile de calcul ale coeficienților Fourier calculați folosindu-se valori trunchiate ale eșantioanelor și erorile la reconstrucția semnalului inițial

$c(k)$, $c_t(k)$	ideal	trunchiat				
număr cifre fracționare	>10	1	2	3	4	5
erori în calculul coeficienților	$<10^{-12}$	$9{,}7\cdot10^{-3}$	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$	$1{,}2\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^{-7}$
erori la reconstrucția semnalului	$<10^{-12}$	$4{,}5\cdot10^{-2}$	$5{,}6\cdot10^{-3}$	$4{,}7\cdot10^{-4}$	$6{,}1\cdot10^{-5}$	$5{,}7\cdot10^{-6}$

Din tabelul 3.3 se observă că erorile de calcul scad aproape liniar cu creșterea numărului de cifre pe care sunt reprezentate eșantioanele.

În tabelul 3.4 se prezintă erorile de calcul ale coeficienților Fourier corespunzători componentelor pară, $x_p(t)$, și impară, $x_i(t)$, a semnalului analizat $x(t)$, în funcție de numărul de cifre pe care sunt exprimate valorile eșantioanelor. De asemenea, pentru fiecare caz în parte, sunt calculate și erorile absolute la reconstrucția componentelor pară și impară. Prelevarea eșantioanelor a început la momentul $t_0 = 0$.

Tabelul 3.4. Erorile de calcul ale coeficienților Fourier corespunzători componentelor pară și impară și erorile la reconstucția acestor componente

	ideal	trunchiat				
număr cifre fracționare	>10	1	2	3	4	5
eroare calcul coeficienți $a(k)$	$<10^{-12}$	$9{,}1\cdot10^{-3}$	$2{,}4\cdot10^{-3}$	$1{,}8\cdot10^{-4}$	$1{,}8\cdot10^{-5}$	$3{,}6\cdot10^{-6}$
eroare la reconstrucție $x_p(t)$	$<10^{-12}$	$2{,}2\cdot10^{-2}$	$4\cdot10^{-3}$	$3{,}6\cdot10^{-4}$	$2{,}5\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-6}$
eroare calcul coeficienți $b(k)$	$<10^{-12}$	$1{,}9\cdot10^{-2}$	$1{,}8\cdot10^{-3}$	$2{,}1\cdot10^{-4}$	$2{,}5\cdot10^{-5}$	$1{,}8\cdot10^{-6}$
eroare la reconstrucție $x_i(t)$	$<10^{-12}$	$3{,}4\cdot10^{-2}$	$3{,}3\cdot10^{-3}$	$3{,}3\cdot10^{-4}$	$4{,}3\cdot10^{-5}$	$2{,}8\cdot10^{-6}$
eroare la reconstrucție $x_p(t)+x_i(t)$	$<10^{-12}$	$4{,}5\cdot10^{-2}$	$5{,}6\cdot10^{-3}$	$4{,}7\cdot10^{-4}$	$6{,}1\cdot10^{-5}$	$5{,}7\cdot10^{-6}$

În cazul în care eșantionarea începe la un moment t_0 diferit de zero și se prelevează doar $K+1$ eșantioane de pe parcursul unei perioade a semnalului par sau impar, coeficienții Fourier $c_p(k)$ și $c_i(k)$ vor avea valori egale cu partea reală, respectiv imaginară, a coeficienților $c(k)$. În tabelul 3.5 se prezintă erorile de calcul a acestor coeficienți și erorile absolute la reconstrucția semnalelor par, respectiv impar, dacă eșantioanele se exprimă pe un număr limitat de cifre. S-a considerat că $t_0 = T_{e1}/0{,}21$, unde $T_{e1} = T/(K+1)$, T fiind perioada semnalului $x(t)$.

Tabelul 3.5. Erorile de calcul ale coeficienților Fourier corespunzători componentelor pară și impară și erorile la reconstucția acestor componente, $t_0 \neq 0$

	ideal	trunchiat				
număr cifre fracționare	>10	1	2	3	4	5
eroare calcul coeficienți $c_p(k)$	$<10^{-12}$	$1{,}2\cdot10^{-2}$	$8{,}3\cdot10^{-4}$	$1{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}6\cdot10^{-5}$	$9{,}9\cdot10^{-7}$
eroare la reconstrucție $x_p(t)$	$<10^{-12}$	$4{,}3\cdot10^{-2}$	$2{,}3\cdot10^{-3}$	$4{,}6\cdot10^{-4}$	$5{,}5\cdot10^{-5}$	$3{,}2\cdot10^{-6}$
eroare calcul coeficienți $c_i(k)$	$<10^{-12}$	$8{,}2\cdot10^{-3}$	$9{,}3\cdot10^{-4}$	$4{,}9\cdot10^{-5}$	$1{,}2\cdot10^{-5}$	$6{,}1\cdot10^{-7}$
eroare la reconstrucție $x_i(t)$	$<10^{-12}$	$2{,}8\cdot10^{-2}$	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$4{,}6\cdot10^{-4}$	$4{,}1\cdot10^{-5}$	$3\cdot10^{-6}$

Din tabele 3.3, 3.4 și 3.5 se poate observa că erorile de calcul ale coeficienților Fourier ($c(k)$, $a(k)$, $b(k)$), respectiv erorile absolute la reconstrucția semnalului analizat ($x(t)$, $x_p(t)$, $x_i(t)$), sunt de același ordin, în funcție de numărul de cifre fracționare pe care sunt reprezentate eșantioanele.

Dacă se utilizează o cifră după virgulă – zecimea – deci în total, în acest caz, eșantioanele sunt exprimate pe 2 cifre, eroarea de cuantizare cu care se obține valoarea eșantioanelor este de ordinul 10^{-2} deoarece zecimea este influențată de sutime (eroarea este maxim $0{,}5\cdot10^{-1}$). Dacă eșantioanele se exprimă pe 3 cifre, 2 cifre dupa virgulă, sutimea este influențată de miime, valorile eșantioanelor se obțin cu o eroare de ordinul 10^{-3}. Aceeași situație apare dacă rezoluția convertorului analog-numeric este mai mare. Prin urmare, se poate scrie că valorile eșantioanelor se obțin cu o eroare de ordinul 10^{-n}, unde n reprezintă numărul de cifre zecimale pe care se reprezintă eșantioanele. Eroarea de reconstrucție a semnalului inițial, folosindu-se coeficienții Fourier calculați pe baza eșantioanelor trunchiate, este de același ordin cu eroarea cu care au fost obținute valorile eșantioanelor (eroare de cuantizare).

În funcție de rezolutia cu care se exprima valorile eșantioanelor se poate stabili și numărul minim de biți necesari pentru codarea acestora. În tabelul 3.6 se prezintă corespondența dintre numărul de cifre zecimale pe care este exprimată valoarea unui eșantion și numărul minim de biți necesari la ieșirea convertorului analog numeric. De asemenea, se prezintă și domeniul acoperit de cuvintele binare, dacă se utilizează codul complementul lui doi.

Tabelul 3.6. Numărul minim de biți necesari pentru codarea eșantioanelor scrise pe un anumit număr de cifre zecimale

Nr. cifre	Domeniu	Nr. biți	D_{CCD}
2	±100	8	-128 ÷ +127
3	±1.000	11	-1.024 ÷ +1.023
4	±10.000	15	-16.384 ÷ +16.383
5	±100.000	18	-131.072 ÷ +131.071
6	±1.000.000	21	-1.048.576 ÷ +1.048.575

Amplitudinea maximă a semnalului analizat este 3; în acest caz, dacă se utilizează un convertor analog numeric pe 16 biţi, este echivalent cu a avea 4 cifre fracţionare. Daca se foloseşte codul bipolar CCD (cod complementul lui doi), pe 16 biţi, domeniul de variaţie este de la −32768 la +32767. Dacă se utilizează codarea fracţionară Q_{13} pe 16 biţi (un bit de semn, doi biti pentru codarea părţii întregi şi 13 biţi pentru codarea părţii fracţionare), domeniul de variaţie este de la −4 la +3,9998 astfel, acesta acoperă domeniul semnalului analizat. În acest caz, chiar dacă eşantioanele sunt exprimate pe 5 cifre zecimale, deoarece amplitudinea semnalului este mai mică, eşantioanele pot fi exprimate doar pe 16 biţi in loc de 18 biţi.

STUDIUL SEMNALELOR NEPERIODICE. PERIODICIZAREA UNUI SET DE EŞANTIOANE

4.1. Introducere

În cazul în care se doreşte studiul unui semnal neperiodic folosind dezvoltarea în serie Fourier, trebuie ca semnalul să fie analizat pe porţiuni care sunt considerate ca fiind o perioadă (sau o jumătate de perioadă) a unui semnal periodic. Dacă se consideră că eşantioanele utilizate în calcule sunt prelevate de pe o perioadă, atunci este vorba de periodicizare prin repetare. În cazul în care se consideră că aceste eşantioane au fost prelevate de pe o jumătate de perioadă, periodicizarea se face prin oglindire şi repetare. Astfel, semnalul ce rezultă este periodic şi par. Oglindirea propriu zisă nu se mai face deoarece, în calcule, oricum se utilizează doar eşantioanele prelevate dintr-o jumătate de perioadă (vezi şi paragraful 3.7.1). Periodicizarea prin oglindire şi repetare se face pentru eliminarea discontinuităţilor care pot apărea la capetele intervalului în cazul periodicizării prin repetare.

4.2. Periodicizare prin repetare

Considerăm un semnal oarecare $x(t)$ din care prelevăm eşantioane pe parcursul unei perioade T. Dacă aceasta porţiune, notată $x_T(t)$ unde

$$x_T(t) = x(t) \text{ pentru } t = 0 \div T, \tag{4.1}$$

o considerăm o perioadă a unui semnal periodic $xp(t)$ atunci vom putea analiza semnalul dezvoltându-l în serie Fourier. Apare totuşi o problemă. Conform relaţiei (4.1) pentru partiţionarea semnalului s-a folosit o fereastră dreptunghiulară. Astfel, este puţin probabil ca eşantionul de început cu cel de sfârşit din această "perioadă" să aibe valori apropiate încât prin repetare să rezulte un semnal fără discontinuităţi. În cazul utilizării acestui tip de periodicizare vor apare în plus componente spectrale în domeniul frecvenţelor înalte, datorate discontinuităţii apărute. Acest lucru înseamnă că, dacă se doreşte o reconstrucţie cât mai exactă, vor trebui prelevate multe eşantioane de pe parcursul unei perioade T deci, mărită frecvenţa de eşantinare. Deoarece pentru reconstrucţie se utilizează un număr redus de componente spectrale, funcţie de frecvenţa de eşantionare aleasă, semnalul reconstituit va fi afectat de erori mai mari sau mai mici.

Spre exemplificare, un prim semnal studiat este semnalul rampă, $x(t) = t$, în acest caz în mod sigur va exista o diferenţă mare între eşantioanele de la capetele intervalului de observaţie. Acest interval se alege în domeniul $[-\pi, \pi]$ şi se face periodicizarea sa prin repetare. Calculul teoretic al coeficienţilor seriei Fourier va da ca rezultat [Sp1 , Ca1]

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \tag{4.2}$$

Semnalul periodicizat s-a notat $xra(t)$ şi este prezentat în figura de mai jos.

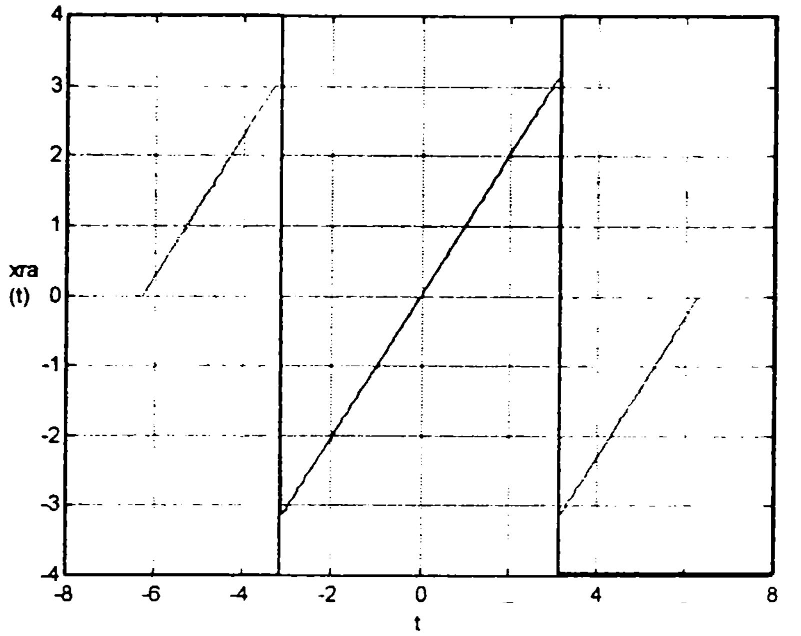


Fig. 4.1. Semnal rampă în domeniu [-π, π].

Deoarece în practică se prelevează un număr finit de eşantioane, calculul coeficienţilor s-a făcut folosind suma şi nu integrarea. În funcţie de numărul K de componente armonice considerate prezente în semnalul analizat, rezultă un număr de $N = 2K + 1$ eşantioane prelevate de pe parcursul unei perioade. S-au calculat coeficienţii Fourier cu relaţia (1.19), rezultatele pentru primii 5 coeficienţi b_n, $n = 1, ..., 5$ fiind trecuţi în tabelul de mai jos.

Tabelul 4.1 Coeficienţii Fourier pentru semnalul rampă în domeniul [-π, π]

K (N)	5 (11)	10 (21)	50 (101)	100 (201)	1000 (2001)	ideal
b_1	1,94	1,98	2	2	2	2
b_2	-0,88	-0,97	-0,99	-1	-1	-1
b_3	0,49	0,62	0,66	0,66	0,66	0,5
b_4	-0,26	-0,43	-0,49	-0,5	-0,5	-0,25
b_5	0,08	0,32	0,39	0,4	0.4	0,125

Conform relatiei (4.2) coeficienţii a_n trebuie să fie egali cu zero. De pe perioada 2π se prelevează un număr de N eşantioane de la $t = -\pi$ la $t = \pi - T_e = (N-1)T_e$. Din acest motiv, în urma eşantionării rezultă că semnalul are o componentă continuă a_0, egală cu $x(NT_e) - x((N-1)T_e)$ unde, $x(NT_e) = x(\pi)$ iar $x((N-1)T_e)$ este ultimul eşantion prelevat de pe perioada 2π. Din acelaşi motiv apar şi componente cosinusoidale cu amplitudinea $a_n = a_0/2$, n=1, 2, ... Deoarece aceşti coeficienţi depind de diferenţa dintre valoarea semnalului de la capătul intervalului şi valoarea ultimului eşantion prelevat, ei vor fi cu atât mai mici cu cât semnalul are o variaţie mai mică (bandă de frecvenţe mai mică) respectiv, cu cât frecvenţa de eşantionare este mai mare.

De asemenea, după cum se observă din tabelul 4.1, coeficienţii b_n sunt diferiţi de valoarea ideală, doar primul şi al doilea ajung să aibe valoarea corespunzătoare obţinută cu relaţia (4.2), pentru valori mai mari ale numărului de eşantioane prelevate de pe o perioadă. Astfel, reconstrucţia este afectată de erori, acestea conţinând o componentă sinusoidală suprapusă (sinus integral [Ca1]). Apare aşa numitul fenomen Gibbs, care rămâne prezent şi pentru $N \to \infty$. Rezultă concluzia că oricât de mare este frecvenţa de eşantionare, semnalul reconstituit nu va fi identic cu cel ce este eşantionat (datorită faptului că banda de frecvenţe este infinită).

În continuare perioada pe care se face eşantionarea semnalului rampă $x(t) = t$ este luată egală cu $T = 1$. Numărul de eşantioane prelevate pe parcursul acestei perioade de timp este $N = 2K + 1$, unde K reprezintă numărul de componente armonice considerate a fi prezente în semnal. Calculul coeficienţilor Fourier se face cu relaţia cunoscută

$$c(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)e^{-jk\omega iT_e}\ , \tag{4.3}$$

unde pulsaţia semnalului este $\omega = 2\pi/T$ şi perioada de eşantionare $T_e = T/N$.

Reconstrucţia semnalului se face pe baza coeficienţilor calculaţi cu relaţia (4.3), şi anume

$$xr(t) = \sum_{k=-K}^{K} c(k)e^{jk\omega t}\ . \tag{4.4}$$

Reconstrucţia semnalului folosind relaţia (4.4) a fost făcută pentru o perioadă de timp mai mare decât cea corespunzătoare prelevării eşantioanelor. Semnalul reconstituit, după cum se vede în figura 4.2, este periodic cu o discontinuitate la sfârşitul/începutul perioadei. Numărul maxim de componente armonice considerate este iniţial ales $K = 5$. Aplicând relaţiile (4.3) şi (4.4) semnalului rampă, în urma reconstrucţiei avem graficele de mai jos

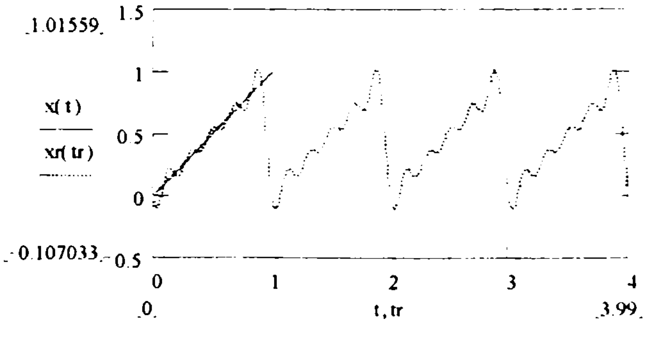


Fig. 4.2. Semnalul iniţial (linie continuă) pe perioada T si respectiv reconstituit (linie întreruptă) în intervalul 0÷4T.

Intersecţiile dintre semnalul reconstituit şi semnalul iniţial corespund punctelor de eşantionare.

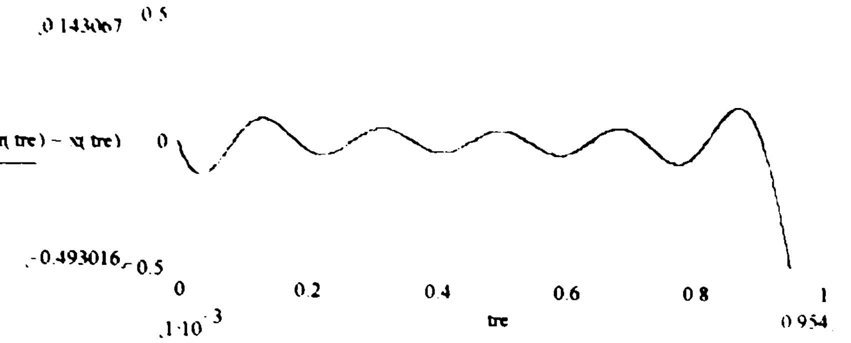


Fig. 4.3. Eroarea absolută făcută la reconstrucția semnalului rampă în intervalul 0÷T-T_e/2.

Au fost făcute simulări pentru mai multe cazuri în ceea ce priveste panta semnalului rampă ($x(t) = t$, $x(t) = t/2$, ...), respectiv numărul de componente armonice considerate a fi prezente în semnal şi s-a observat că eroarea la capatul intervalului, la momentul $(N-1)T_e + t_0 + T_e/2$, este tot timpul egală cu

$$\frac{x(t_0 + T) - x(t_0)}{2}$$

unde, cu t_0 s-a notat momentul inițial (începutul procesului de eşantionare). Momentul de timp ales, pentru calculul acestei erori, este cel ce se află la mijlocul intervalului dintre ultimul eşantion prelevat din prima perioadă si primul eşantion prelevat din a doua perioadă. Prin urmare în punctul de discontinuitate, valoarea semnalului este egală cu media aritmetică a valorilor limită la dreapta şi la stânga. În restul intervalului eroarea absolută la reconstrucție scade relativ lent la creşterea numărului K. Eroarea în punctele de eşantionare este zero. În figura 4.3 punctele de eşantionare coincid cu intersecțiile dintre grafic şi axa 0x.

Datorită intervalului de observație finit şi a discontinuităților, apar componente spectrale superioare. Această mărire (împrăştiere) a spectrului poate fi redusă cu ajutorul unei ferestre (diferită de fereastra dreptunghiulară) care este o funcție pondere aplicată semnalului (porțiunii de semnal) analizat. Prin aplicarea unei ferestre se reduce (elimină) discontinuitatea ce (poate) apare la capătul perioadei de observere datorită periodicizării prin repetare. Acest lucru înseamnă că la capătul intervalului (ferestrei) se pot face oricâte derivate (rezultă continuitatea semnalului). Cel mai simplu mod de realizare a acestui lucru este ca valorile derivatelor să fie zero sau aproape zero la capetele intervalului. Ferestruirea face ca la capete, semnalul să tindă către zero. În paragraful următor se prezintă modul de eliminare (reducere) a discontinuităților prin oglindire.

4.3. Periodicizare prin oglindire şi repetare

Eliminarea (reducerea) discontinuităţilor ce apar, datorită analizei semnalului pe o durată limitată de timp, se poate face folosindu-se oglindirea. Semnalul rezultat prin oglindire este mai apoi repetat astfel, obţinându-se un semnal periodic. La reconstrucţie trebuie să se ţină seama de oglindirea făcută. Dacă se consideră o durată T din semnalul rampă analizat $x(t)$, se construieşte semnalul

$$xpar(t) = \begin{cases} x(t) & pentru \quad 0 \le t \le T \\ x(2T - t) & pentru \quad T < t \le 2T \end{cases}. \tag{4.5}$$

În figura 4.4 se prezintă un exemplu de construcţie a unui semnal periodic $xpar(t)$ prin utilizarea unei durate T din semnalul rampă $x(t)$.

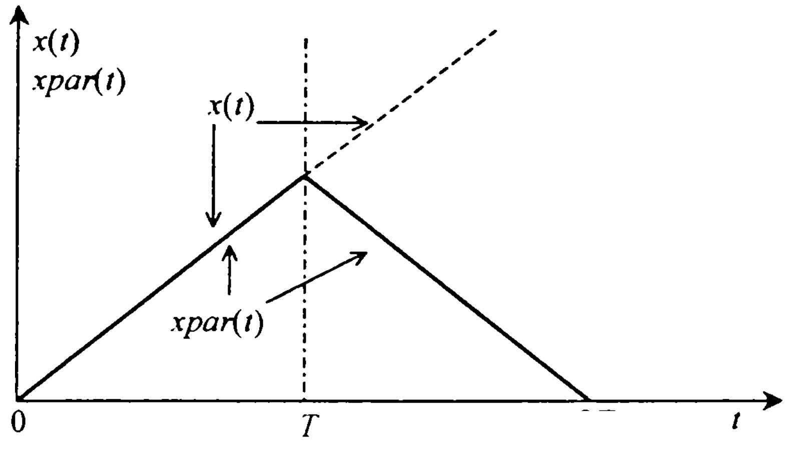


Fig. 4.4. Semnalul rampă x(t) şi semnalul xpar(t) rezultat prin oglindire.

În paragraful anterior, semnalul periodicizat prin repetare avea perioada T. În acest caz, semnalul $xpar(t)$ va avea perioada $T_2 = 2T$ iar pulsaţia semnalului va fi $\omega_p = 2\pi/T_2$. Pentru acelaşi număr de eşantioane prelevate de pe parcursul noii perioade, frecvenţa de eşantionare se înjumătăţeşte. Calculul coeficienţilor Fourier se face cu relaţia cunoscută

$$c_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} xpar(iT_{e2})e^{-j\omega_p k i T_{e2}}, \tag{4.6}$$

unde $T_{e2} = T_2/N$. Din relaţia (4.5) de definire a semnalului $xpar(t)$ se observă că există o simetrie faţă de momentul $t = T$. Perioada de eşantionare T_{e2} este dublă faţă de perioada de eşantionare T_e utilizată în cazul periodicizării prin repetare astfel, între eşantioanele semnalului $xpar(t)$, datorită simetriei, există relaţia

$$xpar(T - iT_{e2}) = xpar(T + iT_{e2}),$$

sau

$$xpar(iT_{e2}) = xpar(2T - iT_{e2}),$$

care poate fi rescrisă sub forma

$$\begin{cases} xpar(iT_{e2}) = x(iT_{e2}) \quad pentru \quad i = 0 \quad \frac{N-1}{2} \\ xpar(iT_{e2}) = x((N-i)T_{e2}) \quad pentru \quad i = \frac{N+1}{2} \quad N-1 \end{cases}. \tag{4.7}$$

Prin urmare, datorită simetriei, vor fi prelevate eşantioane din semnalul $x(t)$, la momentele iT_{e2}, doar de pe perioada de timp T fără a mai face efectiv oglindirea. Eşantioanele corespunzătoare celei de-a doua jumătăţi de perioadă se obţin simplu cu relaţia (4.7). Relaţia (4.6) se rescrie sub forma

$$c_p(k) = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} x(iT_{e2})e^{-j\omega_p k i T_{e2}} + \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N-1} x((N-i)T_{e2})e^{-j\omega_p k i T_{e2}}\right]. \tag{4.8}$$

Pentru reconstrucţia semnalului, în relaţia (4.4) se înlocuieşte $c(k)$ cu $c_p(k)$ şi ω cu ω_p obţinând

$$xrp(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_p(k)e^{jk\omega_p t}. \tag{4.9}$$

Din semnalul reconstituit $xrp(t)$ se ia în considerare doar porţiunea de semnal corespunzător timpului $t \in [0, T)$, $(t \in [t_0, T + t_0))$ care reprezintă reconstrucţia semnalului iniţial $x(t)$ corespunzător acestui interval.

Folosind relaţiile (4.8) şi (4.9) avem semnalul reconstituit şi eroarea de reconstrucţie prezentate în cele două figuri de mai jos.

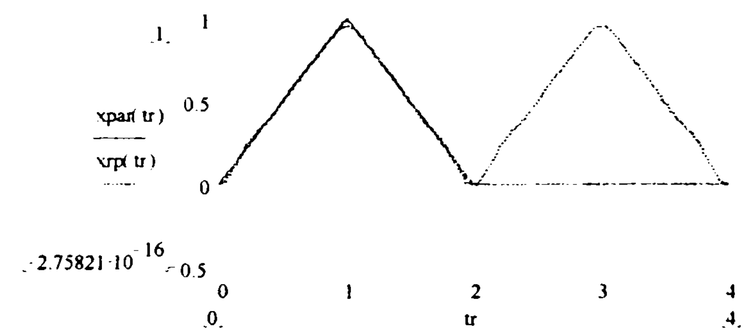


Fig. 4.5. O perioadă din semnalul xpar(t) (linie continuă de la 0 la 2) şi reconstrucţia sa (linie întreruptă de la 0 la 4), K=5.

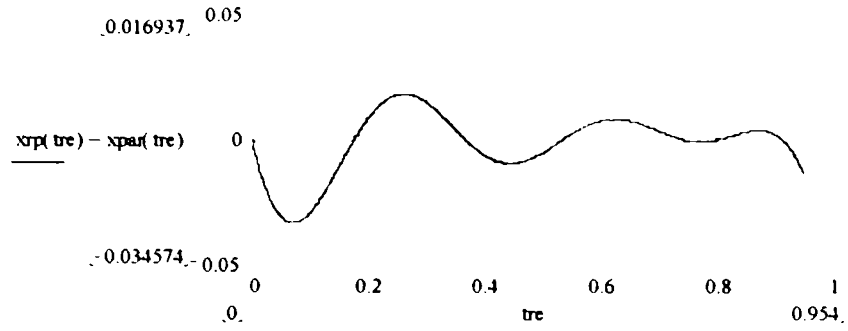


Fig. 4.6. Eroarea absolută la reconstrucția secvenței din semnalul analizat.

Din figurile 4.3 şi 4.6 se poate observa că erorile de reconstrucție a semnalului inițial sunt mult mai mici în cazul în care se face oglindirea. În plus, deoarece la sfârşitul intervalului considerat ($T = 1$) nu mai există discontinuite, erorile sunt mai mici decât la începutul acestui interval.

În tabelul 4.2 se prezintă eroarea absolută maximă la reconstrucția semnalului inițial pe baza coeficienților Fourier. Calculele se fac pentru diferite valori ale mărimii K corespunzătoare armonicei maxime considerată prezentă în semnal. În calcule făcute, valoarea maximă a lui K este 80. În acest caz, perioada de eşantionare $T_e = T/N$, unde $T = 1$ şi $N = 2K + 1$, are valoarea 0,0062. Calculele nu se fac în timp continuu ci în timp discret astfel încât pentru reconstrucție se foloseşte un *pas*, în domeniu timp, ales egal cu 0,001, mai mic decât perioada de eşantionare minimă. Cu Δ s-au notat erorile absolute maxime pozitive, respectiv negative, la reconstrucția semnalului inițial în domeniul 0 la $T - T_e/2$ şi, cu $E_{r\%}$ erorile relative procentuale maxime (pozitive, respectiv negative) în acelaşi domeniu. Cu cât semnalul are o valoare mai mică la un anumit moment, cu atât eroarea relativă în acel punct este mai mare. Din acest motiv în tabelul 4.2 (şi în următoarele până la 4.6) pe coloanele corespunzătoare erorii relative sunt valori mari. Coloanele care au în capul de tabel pe $c(k)$ se referă la erorile de reconstrucție în cazul în care aceasta se face pe baza coeficienților Fourier calculați folosind relația (4.3) (este vorba de periodicizarea prin repetare). Coloanele de sub $c_p(k)$ se referă la erorile de reconstrucție în cazul în care se consideră periodicizarea prin oglindire şi repetare. În acest caz reconstrucția semnalului se face pe baza coeficienților Fourier calculați folosind relația (4.6) sau (4.8).

Tabelul 4.2 Erorile de reconstrucție a semnalului rampă $x(t) = t$ în funcție de numărul K de componente armonice considerate ($t_0 = 0$)

K	$c(k)$		$c_p(k)$	
	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
5	0,143	62,3	0,016	6,6
	-0,493	-756,2	-0,034	-99,2
10	0,141	114,7	$8{,}9\cdot10^{-3}$	6,6
	-0,495	$-1{,}4\cdot10^{3}$	-0,018	-98,5
20	0,141	221,5	$4{,}5\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,461	$-2{,}7\cdot10^{3}$	$-9{,}2\cdot10^{-3}$	-97,1
40	0,140	436	$2{,}2\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,422	$-5\cdot10^{3}$	$-4{,}6\cdot10^{-3}$	-94,3
80	0,140	849	$1{,}1\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,334	$-8{,}9\cdot10^{3}$	$-2{,}3\cdot10^{-3}$	-88,8

Se observă că prin dublarea respectiv triplarea numărului de eşantioane prelevate, eroarea absolută la reconstrucţie se modifică nesemnificativ în cazul periodicizării prin repetare. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare, erorile sunt cu cel puţin un ordin mai mic decât în cazul periodicizării prin repetare simplă. De asemenea, eroarea absolută scade cu creşterea numărului de eşantioane utilizate (calcularea mai multor coeficienţi), adică creşterea frecvenţei de eşantionare.

În tabelul 4.2 (şi în următoarele) eroarea relativă maximă prezentă într-o anumită linie nu corespunde erorii absolute maxime de pe aceeaşi linie. Valorile mari ce se obţin pentru erorile relative se datorează faptului că la momentul iniţial t_0=0, semnalul are valoarea 0. Calculul, în acest caz, se face de la momentul $t_0 + pas$ (al doilea punct în care se face calculul semnalului reconstituit). Eroarea relativă, în cazul periodicizării prin repetare creşte deoarece, prin micşorarea perioadei de eşantionare, aceeaşi (aproape aceeaşi) eroare absolută se obţine mai rapid când semnalul are valori mai mici. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare, erorile relative rămân cu acelaşi ordin de mărime la creşterea frecvenţei de eşantionare, chiar dacă calculele se fac pentru valori mai mici ale semnalului analizat, deoarece eroarea absolută scade

Aceleaşi calcule, pentru semnalul rampă $x(t) = t$, începând din momentul $t_0 = T_e/4$ sunt prezentate în tabelul următor.

Tabelul 4.3 Erorile de reconstrucţie a semnalului rampă $x(t) = t$ în funcţie de numărul de componente armonice considerate ($t_0 = T_e/4$)

K	$c(k)$		$c_p(k)$	
	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
5	0,143	52,8	0,016	6,0
	-0,493	-266,4	-0,034	-44,7
10	0,141	97,1	$8{,}9\cdot10^{-3}$	6,1
	-0,495	-504,7	-0,018	-44,7
20	0,141	187,8	$4{,}5\cdot10^{-3}$	6,0
	-0,461	-981,8	$-9{,}2\cdot10^{-3}$	-44,7
40	0,140	369,5	$2{,}2\cdot10^{-3}$	6,0
	-0,422	$-1{,}9\cdot10^{3}$	$-4{,}6\cdot10^{-3}$	-44,7
80	0,140	724	$1{,}1\cdot10^{-3}$	6,0
	-0,334	$-3{,}7\cdot10^{3}$	$-2{,}3\cdot10^{-3}$	-44,27

După cum se poate observa din tabelele 4.2 şi 4.3, erorile absolute maxime de reconstrucţie sunt identice pentru acelaşi număr de componente armonice considerate. Erorile relative maxime sunt mai mici datorită faptului ca semnalul are valori mai mari pe perioada de timp considerată.

Tot pentru semnalul rampă, dar având componentă continuă sau pantă diferită, au fost făcute aceleaşi calcule. În tabelul 4.4 se prezintă erorile de reconstrucţie pentru semnalul rampă $x(t)$ dar care are în plus şi o componentă continuă egală cu 0,5; astfel, forma analitică a semnalului este $x1(t) = t + 0{,}5$.

Tabelul 4.4 Erorile de reconstrucție a semnalului rampă $x1(t) = t + 0,5$ în funcție de numărul de componente armonice considerate ($t_0 = 0$)

K	$c(k)$		$c_p(k)$	
	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
5	0,143	12,7	0,016	2,2
	-0,493	-33,9	-0,034	-6,05
10	0,141	13,6	$8,9 \cdot 10^{-3}$	1,4
	-0,495	-33,5	-0,018	-3,3
20	0,141	14,3	$4,5 \cdot 10^{-3}$	0,7
	-0,461	-31,0	$-9,2 \cdot 10^{-3}$	-1,7
40	0,140	14,7	$2,2 \cdot 10^{-3}$	0,4
	-0,422	-28,2	$-4,6 \cdot 10^{-3}$	-0,9
80	0,140	15	$1,1 \cdot 10^{-3}$	0,2
	-0,334	-27,4	$-2,3 \cdot 10^{-3}$	-0,4

Şi în acest caz, la fel ca în cazul $t_0 \neq 0$, deoarece semnalul are valori mai mari datorită componentei continue, erorile relative la reconstrucție sunt mai mici decât cele corespunzătoare semnalului $x(t) = t$ pentru acelaşi interval de timp (0 la T). Erorile absolute au aceleaşi valori.

În tabelul 4.5 se prezintă erorile de reconstrucție maxime în cazul în care semnalul analizat are o pantă mai mică $x2(t) = 0,5t$.

Tabelul 4.5 Erorile de reconstrucție a semnalului rampă $x2(t) = 0,5t$ în funcție de numărul de componente armonice considerate ($t_0 = 0$)

K	$c(k)$		$c_p(k)$	
	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
5	0,071	62,3	$8,4 \cdot 10^{-3}$	6,6
	-0,246	-756,2	-0,017	-99,2
10	0,070	114,7	$4,4 \cdot 10^{-3}$	6.6
	-0,247	$-1,4 \cdot 10^{3}$	$-9,0 \cdot 10^{-3}$	-98.5
20	0,070	221,5	$2,2 \cdot 10^{-3}$	6.5
	-0,230	$-2,7 \cdot 10^{3}$	$-4,6 \cdot 10^{-3}$	-97,1
40	0,070	436.6	$1,1 \cdot 10^{-3}$	6,5
	-0,211	$-5,0 \cdot 10^{3}$	$-2,3 \cdot 10^{-3}$	-94,3
80	0,070	849	$5,7 \cdot 10^{-3}$	6,5
	-0,167	$-8,9 \cdot 10^{3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	-88,8

Dacă semnalul analizat este $x2(t) = 0,5t$, erorile absolute la reconstrucție au valori egale cu jumătate din valorile erorilor absolute la reconstrucție corespunzătoare semnalului $x(t)$. Valorile erorilor relative rămân neschimbate deoarece şi semnalul analizat are în momentele de timp în care se fac calculele, valori egale cu jumătate din valorile corespunzătoare semnalului $x(t)$. Acest lucru se poate observa din tabelele 4.2 şi 4.5.

Aceleaşi calcule pentru un semnal cu pantă mai mare, $x3(t) = 2t$, sunt prezentate în tabelul 4.6.

Tabelul 4.6 Erorile de reconstrucție a semnalului rampă $x3(t) = 2t$ în funcție de numărul de componente armonice considerate ($t_0 = 0$)

K	$c(k)$		$c_p(k)$	
	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
5	0,286	62,3	0,033	6,6
	-0,986	-756,2	-0,069	-99,2
10	0,283	114,7	0,017	6,6
	-0,990	$-1{,}4\cdot10^3$	-0,036	-98,5
20	0,282	221,5	$9{,}0\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,923	$-2{,}7\cdot10^3$	-0,018	-97,1
40	0,280	436,6	$4{,}5\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,844	$-5{,}0\cdot10^3$	$-9{,}3\cdot10^{-3}$	-94,3
80	0,280	849	$2{,}3\cdot10^{-3}$	6,5
	-0,668	$-8{,}9\cdot10^3$	$-4{,}7\cdot10^{-3}$	-88,8

Dacă semnalul rampă are o pantă mai mare şi erorile absolute de reconstrucție sunt mai mari. Erorile absolute de reconstrucție în cazul semnalului $x3(t) = 2t$ sunt de două ori mai mari decât în cazul semnalului $x(t) = t$. Cele relative, în schimb, au aceleaşi valori, similar cu cazul în care semnalul analizat a fost $x2(t)$ sau $x(t)$, vezi tabelele 4.2, 4.5 şi 4.6. Prin urmare valoarea erorii de reconstrucție depinde de viteza de variație a semnalului (mărimea benzii de frecvențe).

În literatura de specialitate [Ifl] se prezintă transformata cosinus, utilizată în mai multe domenii ca, de exemplu, compresie de date pentru transmisie, înregistrarea semnalelor biomedicale etc. Această transformată se defineşte ca fiind partea reală a transformatei Fourier discrete şi se calculează cu relația

$$X_C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} xpar(nT_{e2})\cos(\frac{k2\pi nT_e}{N}). \tag{4.10}$$

Dacă funcția analizată este reală pară, ea conține doar termeni în cosinus. Dacă o anumită secvență dintr-un semnal real se oglindeşte față de unul din capetele sale rezultă o nouă secvență formată din cea inițială împreună cu cea oglindită, secvență care prin repetare va da un semnal periodic par. Calculele necesare pentru obținerea coeficienților Fourier se reduc deoarece se fac cu operanzi numere reale şi nu complexe. În acest paragraf se utilizează oglindirea nu doar pentru simplificarea calculelor (calcule folosind numere reale şi nu complexe), ci şi pentru eliminarea (sau reducerea) discontinuităților ce pot apare în cazul periodicizării prin repetare a secvenței inițiale.

Semnalul rezultat prin oglindire şi repetare fiind periodic par, se pot calcula coeficienții Fourier $a(k)$ folosind doar jumătate din numărul de eşantioane necesare pentru calculul transformatei Fourier discrete (coeficienții $b(k)$ sunt zero). Se va folosi relația pentru cazul semnalelor pare, N impar, rescrisă mai jos

$$a(k) = \frac{2}{N}\left[xpar(0) + 2\sum_{i=1}^{K} xpar(iT_{e2})\cos(k\omega_p iT_{e2})\right]. \tag{4.11}$$

Deoarece prelevarea eşantioanelor se face doar de pe perioada T (şi nu $2T$), relația (4.11) poate fi rescrisă sub forma

$$a(k) = \frac{2}{N}\left[x(0) + 2\sum_{i=1}^{K} x(iT_{e2})\cos(k\omega_p iT_{e2})\right]. \tag{4.12}$$

Din relaţia (4.12) rezultă că fizic, oglindirea nu mai trebuie făcută ci, doar se consideră că porţiunea de semnal analizat reprezintă jumătate din perioada unui semnal periodic par.

Dacă eşantionarea începe dintr-un moment diferit de zero ($t_0 \neq 0$) atunci, în relaţia (4.11) sau (4.12), momentele de prelevare a eşantioanelor vor fi $t_0 + iT_{e2}$. Argumentul pentru funcţia cosinus nu se modifică.

Reconstrucţia semnalului se face cu relaţia

$$xpr(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{K} a(k)\cos(k\omega_p t). \tag{4.13}$$

În acest caz, considerarea semnalului $xpar(t)$ ca fiind unul par, la reconstrucţie, în relaţia (4.13) timpul t începe de la zero şi nu de la momentul t_0 în care a început eşantionarea semnalului $x(t)$. Semnalul (porţiunea din semnal) reconstituit va trebui poziţionat în timp la locul corespunzător.

Pentru acelaşi semnal rampă $x(t) = t$ (K s-a ales tot 5), în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare avem rezultate prezentate sub formă grafică mai jos.

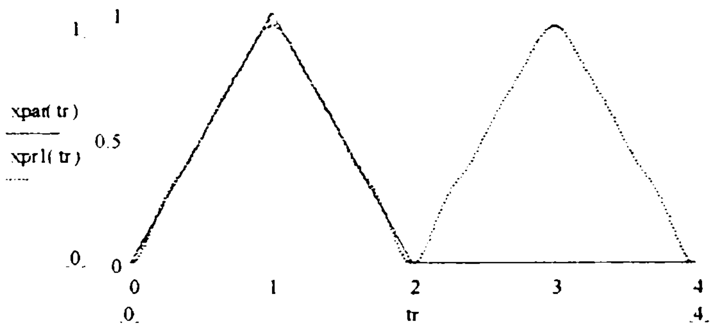


Fig. 4.7. Semnalul xpar(t) (linie continuă de la 0 la 2) şi reconstrucţia sa (linie întreruptă de la 0 la 4), K=5.

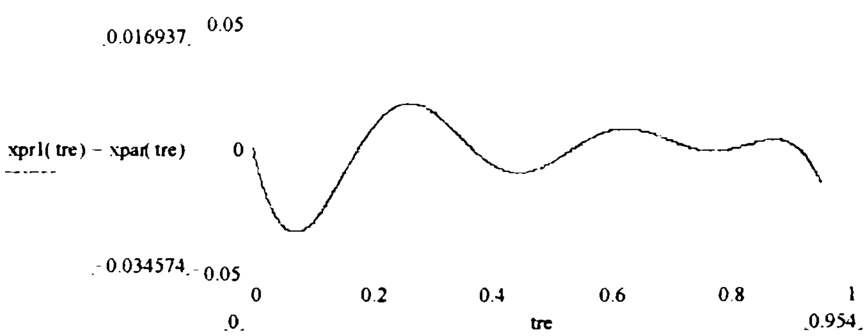


Fig. 4.8. Eroarea absolută la reconstrucţia secvenţei din semnalul analizat.

Din figurile 4.6 şi 4.8 se observă că graficele erorii absolute de reconstrucţie sunt aceleaşi în cele două cazuri – calculul coeficienţilor Fourier efectuându-se cu relaţia (4.8), respectiv (4.12). Pentru capătul intervalului, eroarea de reconstrucţie este mult mai mică decât în cazul periodicizării prin repetare.

Dacă semnalul este considerat periodic par atunci se vor preleva doar un număr de $K+1$ eşantioane de pe intervalul T analizat (în loc de $2K+1$ - cazul periodicizării prin repetare). Calculul coeficienţilor Fourier este mult mai uşor de efectuat datorită utilizării unui număr redus de eşantioane.

În cazul în care rezultatul oglindirii şi repetării se consideră a fi o perioadă dintr-un semnal periodic par (se utilizează relaţiile (4.12) şi (4.13)), erorile care apar la reconstrucţie sunt identice cu cele prezentate mai sus pentru $c_p(k)$ (tabelele 4.2 la 4.6). Din acest motiv acestea nu au mai fost introduse într-un tabel.

În tabelul 4.7 se prezintă valorile coeficienţilor Fourier calculaţi cu relaţia (4.3) (coeficienţii $c(k)$) respectiv (4.12) (coeficienţii $a(k)$) pentru un semnal rampă $x(t)=t$ şi $K=10$. În tabel au fost trecuţi doar coeficienţii $c(k)$ cu indici pozitivi.

Tabelul 4.7 Valorile coeficienţilor Fourier $c(k)$ şi $a(k)$ pentru un semnal rampă $x(t)=t$ şi $K=10$

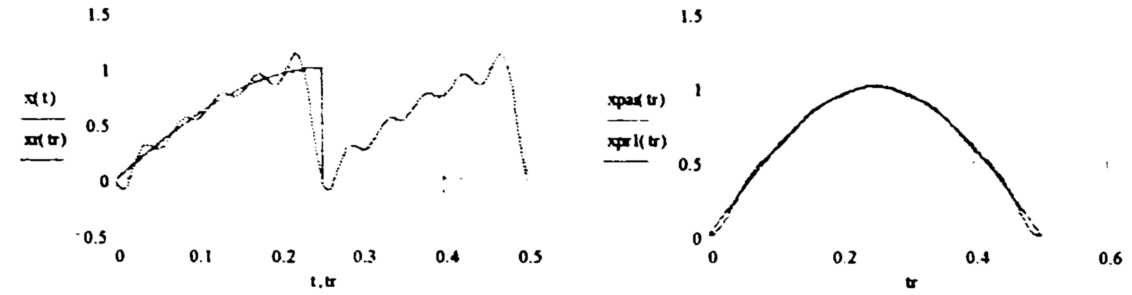
k	$c(k)$	$A(k)=\lvert c(k)\rvert$	% din $A(1)$	$a(k)$	% din $a(1)$
0	0,476	0,476	-	0,998	-
1	-0,024+0,158i	0,160	100	-0,406	100
2	-0,024+0,077i	0,081	50,56	$-2{,}31\cdot10^{-3}$	0,57
3	-0,024+0,049i	0,055	34,35	-0,046	11,27
4	-0,024+0,035i	0,042	26,45	$-2{,}48\cdot10^{-3}$	0,61
5	-0,024+0,026i	0,035	21,91	-0,017	4,18
6	-0,024+0,019i	0,030	19,06	$-2{,}79\cdot10^{-3}$	0,68
7	-0,024+0,014i	0,027	17,21	$-9{,}07\cdot10^{-3}$	2,23
8	$-0{,}024+9{,}34\cdot10^{-3}$	0,026	16,01	$-3{,}32\cdot10^{-3}$	0,81
9	$-0{,}024+5{,}43\cdot10^{-3}$	0,024	15,28	$-5{,}83\cdot10^{-3}$	1,43
10	$-0{,}024+1{,}78\cdot10^{-3}$	0,024	14,94	$-4{,}22\cdot10^{-3}$	1,03

Partea reală a coeficienţilor $c(k)$, $k=1, 2, \ldots$, rămâne constantă, partea imaginară scade lent, de la coeficientul $c(8)$ ajunge să aibe valori de ordinul 10^{-3} ($A(8)$ este egal cu 16% din $A(1)$). Coeficienţii $a(k)$ sunt numere reale şi ajung să aibe valori de ordinul 10^{-3} de la indicele $k=6$ ($a(6)$ este egal cu 0,68% din $a(1)$). Aceleaşi calcule s-au făcut pentru $K=20$, în acest caz partea imaginară a coeficienţilor $c(k)$ a ajuns să aibe valori de ordinul 10^{-3} de la indicele $k=12$ ($A(12)$ este egal cu 5,9% din $A(1)$), în timp ce pentru coeficienţii $a(k)$ acest lucru se întâmplă începând de la ordinul $k=6$ ($a(6)$ este egal cu 1,5% din $a(1)$).

Prin urmare, în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare (periodicitate prin paritate) semnalul devine par şi valoarea coeficienţilor Fourier scade mult mai rapid. Acest lucru înseamnă că se pot neglija coeficienţi de la un indice mai mic pentru $a(k)$ faţă de $c(k)$ şi se obţin erori de reconstruţie comparabile. Rezultă un calcul mai rapid şi o frecvenţă de eşantionare mai mică.

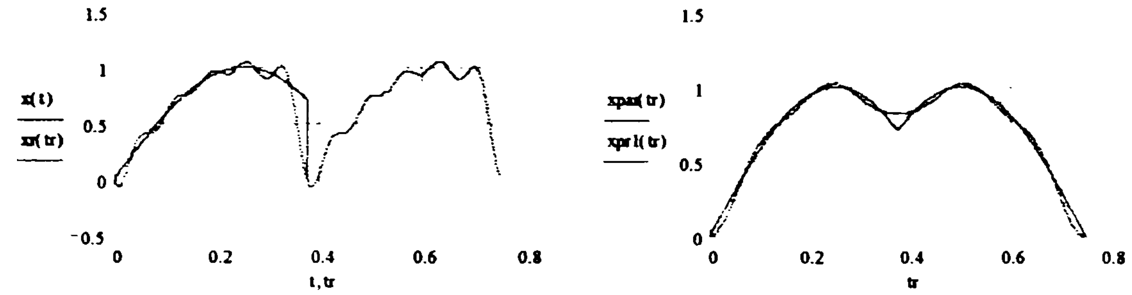
Pentru cel de-al doilea semnal analizat, şi anume semnalul sinusoidal $xs(t)=\sin(2\pi ft)$, de perioadă $T=1$, s-au luat în calcul mai multe perioade de timp T_c, considerate a fi o perioadă, şi anume $T_c = 0{,}25T$, $0{,}375T$, $0{,}75T$, $0{,}95T$ şi T.

Mai jos sunt prezentate semnalul (linie continuă) şi reconstrucţia sa (linie întreruptă), în cazul celor două tipuri de periodicizări, pentru ordinul armonicei maxime K=5 şi diferite perioade de observare T_c.



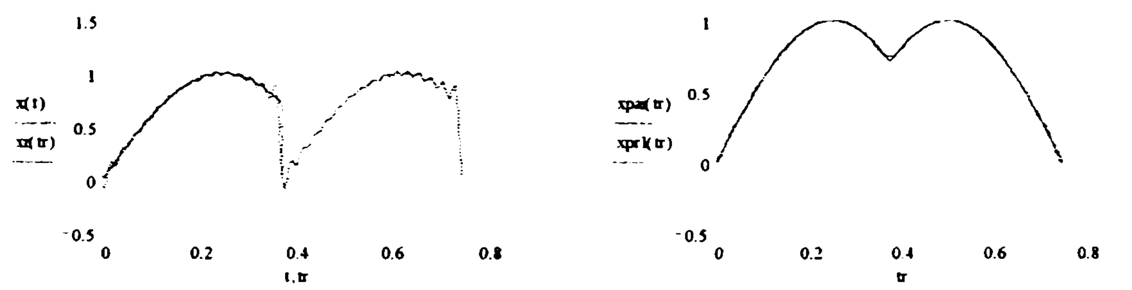
a) b)

Fig. 4.9. Semnal sinusoidal, T_c=0,25, K=5, a) periodicizare prin repetare, b) periodicizare prin oglindire şi repetare.



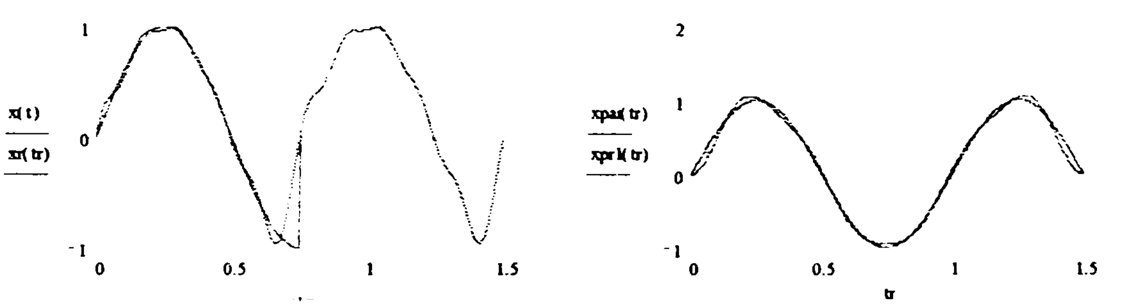
a) b)

Fig. 4.10. Semnal sinusoidal, T_c=0,375, K=5, a) periodicizare prin repetare, b) periodicizare prin oglindire şi repetare.



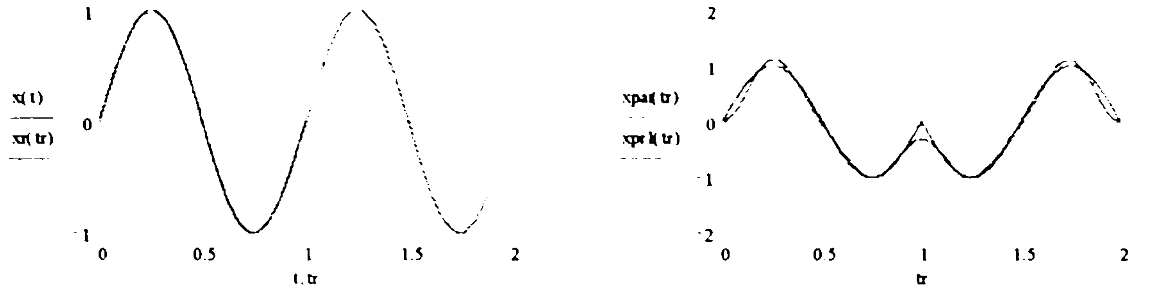
a) b)

Fig. 4.11. Semnal sinusoidal, T_c=0,375, K=15, a) periodicizare prin repetare, b) periodicizare prin oglindire şi repetare.



a) b)

Fig. 4.12. Semnal sinusoidal, T_c=0,75, K=5, a) periodicizare prin repetare, b) periodicizare prin oglindire şi repetare.



a) b)

Fig. 4.13. Semnal sinusoidal. $T_c=1$, $K=5$. a) periodicizare prin repetare. b) periodicizare prin oglindire şi repetare.

După cum se poate observa din figurile 4.9 la 4.13, semnalul reconstituit (linie întreruptă) diferă mai mult sau mai puţin faţă de semnalul analizat (linie continuă). În cazul în care semnalului analizat variază rapid la sfârşitul perioadei de observare, pentru o reconstrucţie cu erori mai mici, trebuie prelevate mai multe eşantioane, altfel spus – mărită frecvenţa de eşantionare (vezi figurile 4.9 şi 4.10). Dacă prelevarea eşantioanelor se face de pe o perioadă a semnalului analizat, reconstrucţia, folosind periodicizarea prin repetare, se face cu erori neglijabile. În schimb, dacă se foloseşte periodicizarea prin oglindire şi repetare, la mijlocul noii perioade obţinute (fig. 4.12b) semnalul are o pantă mare care îşi schimbă semnul. Avem un punct de discontinuitate de ordinul 1 [Ca1]. Aceeaşi situaţie apare si la începutul/sfârşitul noii perioade. Prin urmare, reconstrucţia se face cu o eroare mai mare.

În urma calculelor coeficienţilor Fourier şi a reconstrucţiei semnalului iniţial pe baza acestor coeficienţi s-au obţinut erorile maxime de reconstrucţie prezentate în tabelul 4.8 în funcţie de perioada de observare T_c şi de numărul K de componente armonice considerate. Cu Δ au fost notate erorile absolute maxime iar cu $E_{r\%}$ erorile relative procentuale maxime. Coloanele de sub $c(k)$ se referă la erorile de reconstrucţie în cazul în care se consideră periodicizarea prin repetare şi calculul coeficienţilor Fourier se face cu relaţia (4.3). coloanele de sub $c_p(k)$, respectiv $a(k)$, se referă la erorile de reconstrucţie în cazul în care se consideră periodicizarea prin oglindire şi repetare, calculul coeficienţilor Fourier se face cu relaţia (4.8), respectiv (4.12).

Analiza semnalului începe în momentul $t_0 = 0$ când şi semnalul sinusoidal are valoarea zero. Acest lucru duce la obţinerea unor erori relative de valori mari, după cum se poate vedea din tabelul 4.8.

Tabelul 4.8 Erorile de reconstrucție a semnalului sinusoidal în funcție de numărul de componente armonice considerate ($t_0 = 0$)

T_c	K	$c(k)$		$c_p(k)$		$a(k)$	
		Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$	Δ	$E_{r\%}$
0,25	5	0,15	43	0,027	6,9	0,027	6,9
		-1	-533	-0,054	-99.6	-0.054	-99.6
	10	0,145	76	0,014	6.6	0.014	6.6
		-1	-967	-0,028	-99.4	-0,028	-99,4
	15	0,143	110	$9{,}4\cdot10^{-3}$	6,6	$9{,}4\cdot10^{-3}$	6,6
		-1	-1000	-0,019	-99.1	-0.19	-99,1
0,375	5	0,118	24	0,116	16.4	0,116	16.4
		-0,707	-312	-0,082	-99.8	-0,082	-99.8
	10	0,109	40	0,045	6,7	0,045	6,7
		-0,707	-518	-0,042	-99.6	-0,042	-99.6
	15	0,106	56	0,036	6,6	0,036	6,6
		-0,707	-722	-0,028	-99,4	-0,028	-99.4
0,75	5	1	78,7	0,085	46,3	0.085	46,3
		-0,123	-100	-0,166	-84.6	-0,166	-84.6
	10	1	118	0,042	7,1	0,042	7,1
		-0,131	-100	-0,085	-69.8	-0,085	-69.8
	15	1	95,1	0,028	6,8	0.028	6.8
		-0,134	-100	-0,057	-56	-0,057	-56
0,95	5	0,309	27,5	0,108	94,2	0.108	94.2
		-0,043	-100	-0,291	-88,1	-0.291	-88.1
	10	0,309	40,9	0,054	60,8	0.054	60.8
		-0,043	-100	-0,188	-76.2	-0.188	-76.2
	15	0,309	40.3	0,036	35.9	0.036	35.9
		-0,043	-100	-0,110	-64.9	-0,110	-64.9
1	5	$1{,}1\cdot10^{-15}$	$1\cdot10^{-13}$	0,114	232.9	0,114	232,9
		$-5{,}5\cdot10^{-16}$	$-5{,}5\cdot10^{-14}$	-0,326	-88,8	-0,326	-88.8
	10	$1{,}9\cdot10^{-15}$	0	0,057	117,1	0.057	117.1
		$-1{,}3\cdot10^{-15}$	$-1{,}9\cdot10^{-13}$	-0,207	-77.4	-0.207	-77.4
	15	$1{,}1\cdot10^{-3-15}$	$1{,}1\cdot10^{-13}$	0,038	42.9	0,038	42.9
		$-6{,}6\cdot10^{-16}$	0	-0,123	-66.6	-0,123	-66.6

După cum se poate observa din tabelul de mai sus, erorile de reconstrucție sunt mai mici dacă se utilizează şi oglindirea. În cazul în care eşantioanele se prelevează dintr-o perioadă a semnalului sinusoidal, se poate neglija eroarea de reconstrucție dacă se utilizează doar repetarea (erorile ce apar sunt erori de calcul ale programului). Cum periodicizarea se face pentru semnale oarecare, neperiodice, şi nu pentru cele periodice, rezultă concluzia că dacă se periodicizează semnalul ce în prealabil a fost oglindit, reconstrucția sa se face cu erori mai mici decât în cazul periodicizării fără oglindire. Cele mai mari erori la reconstrucție apar atunci când cel puțin la unul din capete semnalul variază rapid (are pantă mare). Prin oglindire panta îşi schimbă semnul şi astfel banda de frecvențe a semnalului rezultat este mult mai mare decât cea a semnalului din care face parte secvența de date. În acest caz, prin trunchiere, se pierde o cantitate importantă de informație. O soluție pentru eliminarea/reducerea pierderii de informație, este mărirea frecvenței de eşantionare ceea ce duce la prelevarea unui număr mai mare de eşantioane şi calculul unui număr mai mare de coeficienți Fourier. O altă soluție, ce nu presupune mărirea excesivă a frecvenței de eşantionare, este ca secvențele cu eşantioane prelevate din semnalul analizat să nu fie una în continuarea celeilalte ci să fie parțial suprapuse. Acest caz este prezentat în paragraful următor.

4.4 Prelucrarea semnalului pe segmente partial suprapuse

Reconstrucția semnalului analizat cu erori cât mai mici folosind o frecvență mai mică de eşantionare, deci şi un număr mai mic de eşantioane, se poate face prin suprapunerea parțială a intervalelor de observație. Astfel, intervalele de observație, notate *IO*, vor fi mai mari şi parțial suprapuse, iar intervalele de reconstrucție, notate *IR*, vor fi mai mici si succesive. Acest lucru este prezentat grafic în figura de mai jos.

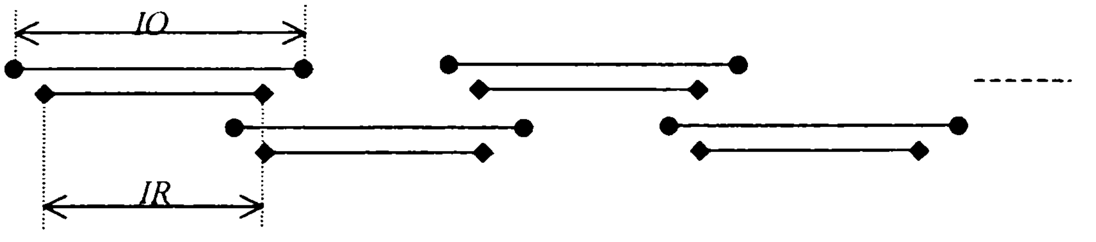


Fig. 4.14. Prezentarea grafică a intervalelor de observație IO şi a intervalelor de reconstrucție IR.

Calculele făcute pentru reconstrucția semnalului folosesc toate informațiile obținute din eşantionarea semnalului pe perioada *IO*. Cu cât diferența dintre *IO* şi *IR* este mai mare, cu atât eroarea de reconstrucție a semnalului inițial este mai mică.

Primul semnal analizat este rampa definită de ecuația $x(t)=t$. Prelevarea eşantioanelor se face pe o perioadă de timp $T=1$ care este considerată perioada semnalului analizat. Se consideră cazul periodicizării prin repetare. Se alege ordinul K corespunzător armonicei maxime, presupusă a exista în semnalul $x(t)$. Numărul de eşantioane prelevate de pe perioada T este $N=2K+1$, frecvența de eşantionare $f_e=1/NT$. Coeficienții Fourier se calculează cu relația (4.3). Reconstrucția semnalului inițial pe baza coeficienților Fourier se face cu o anumită eroare care este mai mare la capetele intervalului de observație şi mai mică la mijloc. În cazul în care frecvența de eşantionare creşte (K ales este mai mare), erorile de reconstrucție scad relativ puțin la capetele intervalului de observație. În tabelul 4.9 se prezintă erorile absolute maxime de reconstrucție între punctele de eşantionare. S-au calculat aceste valori pe trei perioade de eşantionare de la începutul intervalului de observație, trei perioade de la sfârşitul acestui intreval şi 5 perioade de la mijlocul său.

De pe perioada de timp *T*, corespunzătoare unui *IO*, se prelevează N eşantioane cu indicii de la 0 la $N-1$. Prin urmare ultimul eşantion prelevat se află la o distanță egală cu T_e față de capătul intervalului. Reconstrucția semnalului s-a realizat pe întregul *IO*, până în momentul $NT_e=T$.

Tabelul 4.9 Eroarea de reconstrucție la începutul, mijlocul și sfârșitul perioadei de observație în cazul semnalului rampă $x(t) = t$, $t_o=0$, periodicizare prin repetare

	esant\K	5	10	20	50	100	200	1000
	$0 \div 1$	-0,143	-0,142	-0,141	-0,141	-0,141	-0,141	-0,141
	$1 \div 2$	0,081	0,078	0,077	0,076	0,076	0,076	0,076
	$2 \div 3$	-0,059	-0,054	-0,053	-0,052	-0,052	-0,052	-0,052
	$K-2 \div K-1$	0,049	-0,024	-0,012	-0,005	$-2{,}5\cdot10^{-3}$	$-1{,}2\cdot10^{-3}$	$-2{,}5\cdot10^{-4}$
Δ	$K-1 \div K$	-0,046	0,024	0,012	0,005	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$
	$K \div K+1$	0,046	-0,024	-0,012	-0,005	$-2{,}5\cdot10^{-3}$	$-1{,}2\cdot10^{-3}$	$-2{,}5\cdot10^{-4}$
$c(k)$	$K+1 \div K+2$	-0,049	0,024	0,012	0,005	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$
	$K+2 \div K+3$	0,059	-0,026	-0,012	-0,005	$-2{,}5\cdot10^{-3}$	$-1{,}2\cdot10^{-3}$	$-2{,}5\cdot10^{-4}$
	$N-3 \div N-2$	-0,081	-0,078	-0,077	-0,076	-0,076	-0,0076	-0,076
	$N-2 \div N-1$	0,143	0,142	0,141	0,141	0,141	0,141	0,141
	$N-1 \div N$	-0,993	-0,993	-0,993	-0,993	-0,993	-0,993	-0,993

După cum se vede din tabelul 4.9 eroarea de reconstrucție la începutul și sfârșitul perioadei de observație ajunge la o valoare sub care nu mai scade la creșterea frecvenței de eșantionare. La mijlocul perioadei, erorea de reconstrucție scade la jumatate cu dublarea frecvenței de eșantionare. Pentru a reduce eroarea maximă de reconstrucție cu un ordin sau mai mult, mai puțin la capetele perioadei de observație, nu este suficient să se mărească frecvența de eșantionare. În plus acest lucru ar însemna prelevarea unui număr mai mare de eșantioane de pe intervalul de observație considerat deci, calcule mai multe. În figura următoare se prezintă grafic semnalul rampă și reconstrucția sa pe baza coeficienților Fourier în cazul K=5.

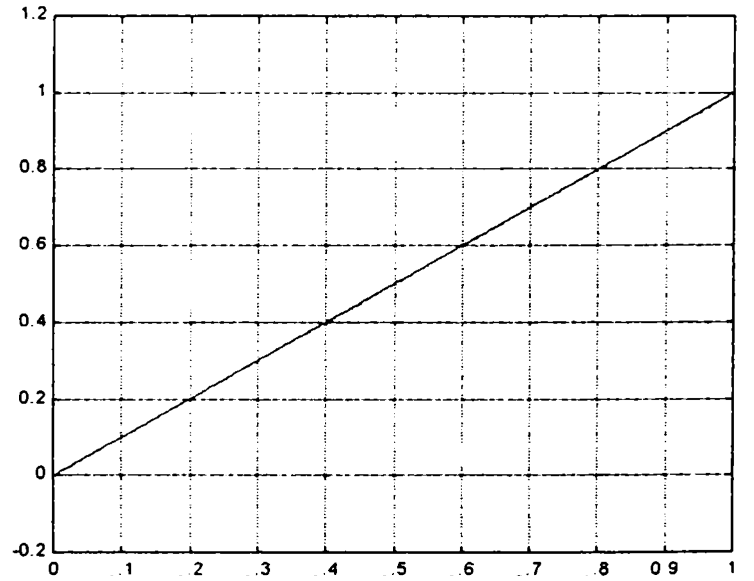


Fig. 4.15. Semnalul rampă (linie continuă) și reconstrucția sa (linie întreruptă) pe o perioadă T=1, periodicizare prin repetare.

În figura 4.16 se prezintă semnalul rampă analizat (linie continuă) și reconstrucția sa (linie întreruptă) folosind periodicizarea prin oglindire și repetare.

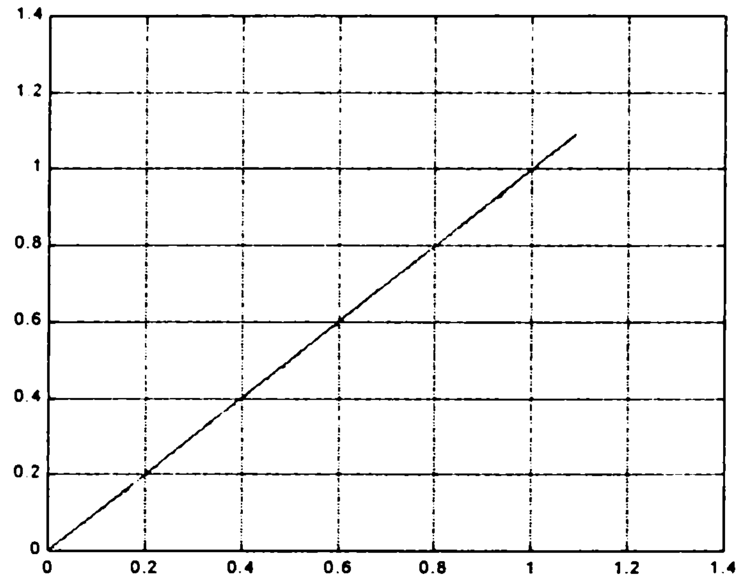


Fig. 4.16. Semnalul rampă şi reconstrucţia sa pe o perioadă T=1, periodicizare prin oglindire şi repetare.

În cazul în care se consideră periodicizarea prin oglindire şi repetare, erorile de reconstrucţie sunt mult mai mici şi, în plus, scad la jumătate, cu dublarea frecvenţei de eşantionare, la capetele intervalului de observaţie. La mijlocul acestui interval scăderea este chiar mai accentuată, după cum se vede din tabelul 4.10.

Numărul de eşantioane prelevate pe parcursul intervalului de observaţie este $K-1$ (de la 0 la K), eşantionul de la jumătatea intervalului este notat KJ. Dacă K este impar atunci $KJ=(K+1)/2$, dacă K este par atunci $KJ=K/2$.

Tabelul 4.10 Eroarea de reconstrucţie la începutul, mijlocul şi sfârşitul perioadei de observaţie în cazul semnalului rampă, t_o=0, periodicizare prin oglindire şi repetare

	esant\K	5	10	20	50	100	200	1000
$\Delta c(k)$	$0 \div 1$	-0,035	-0,018	-0,009	-0,004	-0,002	$-9{,}5\cdot10^{-4}$	$-1{,}9\cdot10^{-4}$
	$1 \div 2$	0,017	0,009	0,005	0,002	$9{,}2\cdot10^{-4}$	$4{,}6\cdot10^{-4}$	$9{,}3\cdot10^{-5}$
	$2 \div 3$	-0,011	-0,006	-0,003	-0,001	$-5{,}9\cdot10^{-4}$	$-2{,}9\cdot10^{-4}$	$-5{,}9\cdot10^{-5}$
	$KJ-2 \div KJ-1$	0,017	-0,005	$-9{,}9\cdot10^{-4}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$	$-3{,}6\cdot10^{-5}$	$-8{,}9\cdot10^{-6}$	$-3{,}5\cdot10^{-7}$
	$KJ-1 \div KJ$	-0,010	-0,004	$9{,}1\cdot10^{-4}$	$-1{,}4\cdot10^{-4}$	$3{,}6\cdot10^{-5}$	$8{,}8\cdot10^{-6}$	$3{,}5\cdot10^{-7}$
	$KJ \div KJ+1$	0,007	-0,003	$-8{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-4}$	$-3{,}5\cdot10^{-5}$	$-8{,}8\cdot10^{-6}$	$-3{,}5\cdot10^{-7}$
	$KJ+1 \div KJ+2$	0,003	-0,003	$8{,}1\cdot10^{-4}$	$-1{,}4\cdot10^{-4}$	$3{,}5\cdot10^{-5}$	$8{,}5\cdot10^{-6}$	$3{,}5\cdot10^{-7}$
	$KJ+2 \div KJ+3$	-0,179	0,003	$-7{,}8\cdot10^{-4}$	$1{,}3\cdot10^{-4}$	$-3{,}4\cdot10^{-5}$	$-8{,}7\cdot10^{-6}$	$-3{,}5\cdot10^{-7}$
	$K-2 \div K-1$	0,007	-0,004	-0,001	$-4{,}2\cdot10^{-4}$	$-1{,}9\cdot10^{-4}$	$-8{,}8\cdot10^{-5}$	$-1{,}7\cdot10^{-5}$
	$K-1 \div K$	0,003	0,007	0,003	0,001	$5{,}1\cdot10^{-4}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$	$4{,}9\cdot10^{-5}$
	$K \div K+1$	-0,179	-0,093	-0,048	-0,019	-0,009	-0,005	$-9{,}8\cdot10^{-4}$

Din tabelele 4.9 şi 4.10 se observă că erorile de reconstrucţie a semnalului analizat sunt mult mai mici în cazul în care se face şi oglindirea intervalului de observaţie. De asemenea, la începutul şi sfârşitul acestui interval, reconstrucţia se face cu erori mult mai mici care, în plus, scad la creşterea numărului de eşantioane (implicit şi a frecvenţei de eşantionare) utilizate.

După cum se vede din tabelul 4.9 (periodicizare prin repetare), la capătul intervalului, eroarea de reconstrucţie este egală cu diferenţa dintre valorile semnalului la momentele T şi 0. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare (tabelul 4.10) această eroare este mult mai mică dar, rămâne cea mai mare din intervalul de reconstrucţie.

Din tabelul 4.9 rezultă că pentru o eroare absolută la începutul reconstrucţiei semnalului cu o valoare de 0,053 (-0,077 la sfârşitul *IR*) trebuiesc prelevate de pe perioada T un număr de 41 de eşantioane ($K = 20$) iar reconstrucţia semnalului să se facă începând cu eşantionul 3. Din tabelul 4.10 rezultă că pentru o eroare mai mică la începutul reconstrucţiei semnalului, de 0,017 (0,003 la sfârşitul *IR*), se prelevează de pe aceeaşi perioadă de timp un număr de 11 eşantioane ($K = 5$) iar reconstrucţia se face de la al doilea eşantion prelevat.

Din tabelele 4.9 şi 4.10 rezultă că dacă *IR* este mai mic decât *IO* cu $2T_e$, T_e la început şi T_e la sfârşit, eroarea de recostrucţie la începutul *IR* scade în cazul periodicizării prin repetare de 1,77 pâna la 1,84 ori respectiv, de aproximativ 2 ori în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare. Dacă *IR* este mai mic decât *IO* cu $4T_e$, eroarea de reconstrucţie la începutul *IR* scade de 2,4 pâna la 2,7 ori, respectiv, 3,1 ori.

În figura 4.17 se prezintă semnalul rampă $x(t) = t$ şi semnalul reconstituit $xref(t)$ pe o perioadă de timp $2 \cdot T$ $(T = 1)$. Astfel avem două *IO* şi două *IR*, *IO* = *IR* (de la 0 la 1 şi de la 1 la 2 pe axa timpului). Graficul erorii absolute la reconstrucţie este prezentat în figura 4.18.

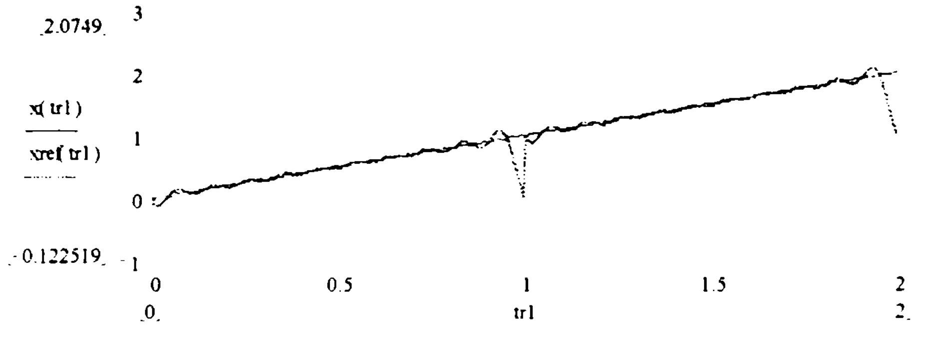


Fig. 4.17. Semnalul rampă x(t) şi reconstrucţia sa xref(t) pe două IR (IR=IO), periodicizare prin repetare, K=10.

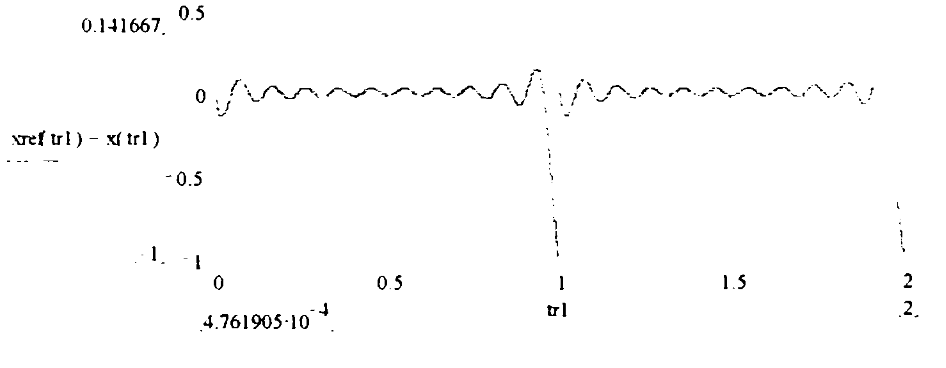


Fig. 4.18. Eroarea absolută la reconstrucţia semnalului rampă pe două IR (IR=IO), periodicizare prin repetare, K=10.

La capetele *IR* eroarea absolută la reconstrucţie este foarte mare, egală cu diferenţa dintre valoarea semnalului de la sfârşitul *IR* şi valoarea semnalului de la începutul *IR*. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare aceste erori sunt mult mai mici după cum se vede din figurile următoare.

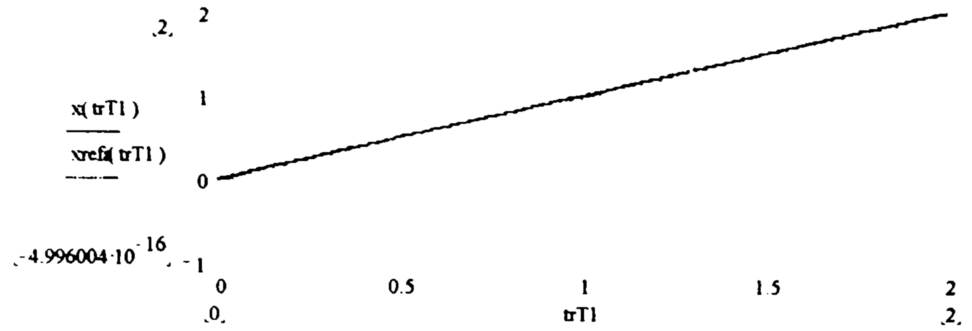


Fig. 4.19. Semnalul rampă x(t) şi reconstrucţia sa xrefa(t) pe două IR (IR=IO), periodicizare prin oglindire şi repetare, K=10.

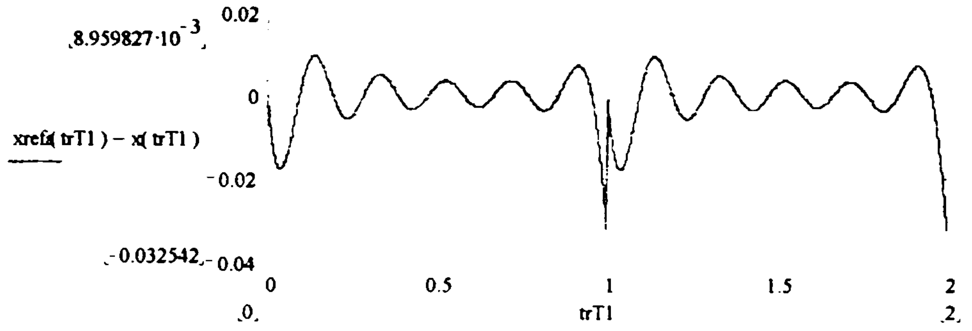


Fig. 4.20. Eroarea absolută la reconstrucţia semnalului rampă pe două IR (IR=IO), periodicizare prin oglindire şi repetare, K=10.

Eroarea maximă la reconstrucţie, la sfârşitul IR, nu depinde de diferenţa dintre valoarea semnalului de la sfârşitul IR şi de la începutul IR ci, de numărul de eşantioane prelevate din semnal sau, pentru un anumit număr de eşantioane, de panta semnalului (vezi tabelele 4.2 la 4.6 şi 4.9).

În cazul în care IR este mai mic decât IO cu $2 \cdot T_e$, o perioadă de eşantionare la început şi una la sfârşitul intervalului, eroarea absolută la reconstrucţie, la sfârşitul IR, scade cu cel puţin un ordin.

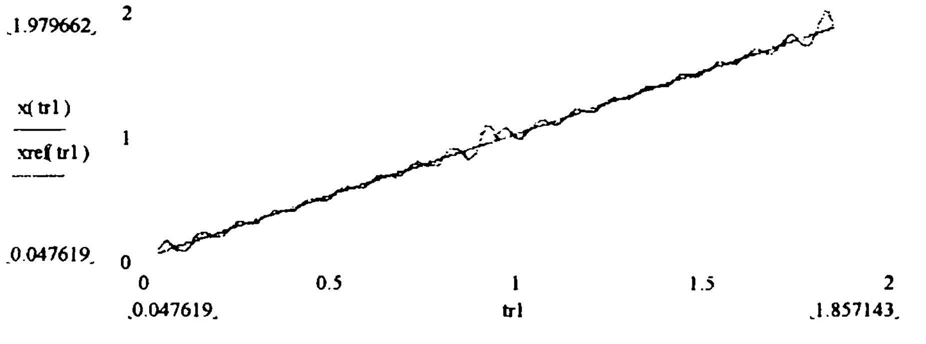


Fig. 4.21. Reconstrucţia semnalului rampă pe două IR, IR<IO cu $2 \cdot T_e$, periodicizare prin repetare, K=10.

BUPT

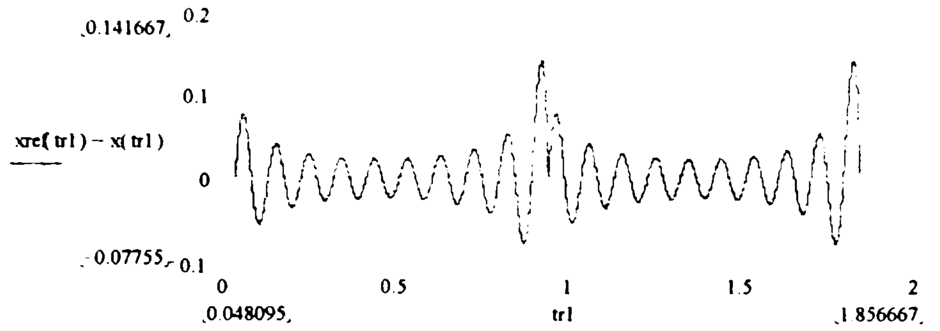


Fig. 4.22. Eroarea absolută la reconstrucția semnalului rampă pe două IR. IR<IO cu 2·T_e, periodicizare prin repetare. K=10.

În tabelul 4.11 se prezintă erorile absolute maxime la reconstrucția semnalului rampă $x(t)=t$, în funcție de numărul de eșantioane (perioade de eșantionare) din *IO* care nu mai apar în *IR*. Calculele s-au făcut pentru două valori ale ordinului armonicei maxime considerată a fi prezentă în semnalul analizat. Pe coloane alăturate au fost trecute rezultatele pentru cazul periodicizării prin repetare ($\Delta \ c(k)$) respectiv, pentru cazul periodicizării prin oglindire și repetare ($\Delta \ a(k)$). Coloana "număr eșantioane eliminate", prescurtat *nee*, se referă la numărul de eșantioane eliminate la un capăt al intervalului de reconstrucție. Deoarece același număr de eșantioane se elimină și la celălalt capăt, dacă în tabel avem 1 înseamnă că *IO* − *IR* = 2·T_e. În cazul periodicizării prin oglindire și repetare perioada de eșantionare este $T_{e2} = 2 \cdot T_e$.

Tabelul 4.11 Erorile absolute maxime la reconstrucția semnalului rampă în funcție de diferența dintre IO și IR, IO − IR = 2·nee·T_e

nr. eșantioane eliminate (*nee*)	*K*=10		*K*=20	
	$\Delta \ c(k)$	$\Delta \ a(k)$	$\Delta \ c(k)$	$\Delta \ a(k)$
0	0,1416	$8{,}95 \cdot 10^{-3}$	0,1412	$4{,}54 \cdot 10^{-3}$
	-1	-0,0325	-1	-0,0161
1	0,1416	$8{,}95 \cdot 10^{-3}$	0,1412	$4{,}54 \cdot 10^{-3}$
	-0,0775	$-5{,}92 \cdot 10^{-3}$	-0,0766	$-2{,}95 \cdot 10^{-3}$
2	0,0537	$4{,}50 \cdot 10^{-3}$	0,0524	$2{,}17 \cdot 10^{-3}$
	-0,0775	$-5{,}92 \cdot 10^{-3}$	-0,0766	$-2{,}95 \cdot 10^{-3}$
3	0,0537	$4{,}50 \cdot 10^{-3}$	0,0524	$2{,}17 \cdot 10^{-3}$
	-0,0417	$-3{,}72 \cdot 10^{-3}$	-0,0399	$-1{,}73 \cdot 10^{-3}$
4	0,0347	$3{,}30 \cdot 10^{-3}$	0,0323	$1{,}44 \cdot 10^{-3}$
	-0,0417	$-3{,}72 \cdot 10^{-3}$	-0,0399	$-1{,}73 \cdot 10^{-3}$

În tabelul 4.11 au fost trecute atât erorile absolute maxime pozitive cât și cele negative. Se observă că la eliminarea unui eșantion în plus, se regăsește în tabel eroarea absolută mai mică în modul deoarece erorile trecute în tabel sunt obținute în perioade de timp (de eșantionare) alăturate.

Dacă eșantionarea semnalului $x(t)=t$ începe într-un moment $t_0 \neq 0$, erorile absolute maxime la reconstrucție, în funcție de *K* și de diferența dintre *IO* și *IR*, sunt aceleași ca în tabelul 4.11. Dacă se modifică panta semnalului se modifică și valorile maxime ale erorilor absolute la reconstrucție, la fel ca în cazurile prezentate în tabelele 4.2 la 4.6. De exemplu, pantă pe jumătate (semnal $x(t)=0{,}5t$) conduce la erori pe jumătate.

Din figurile 4.17, 4.18 şi tabelul 4.9 se vede că cea mai mare eroare absolută la reconstrucţie apare la sfârşitul *IR*, adică între ultimul eşantion prelevat de pe parcursul unui *IO* şi sfârşitul *IO* (*IR* = *IO*). Erorile de pe parcursul celorlalte intervale (perioade de eşantionare) sunt toate mai mici şi, în plus, pe perioadele de eşantionare situate simetric faţă de mijlocul distanţei dintre primul şi ultimul eşantion prelevate de pe parcursul unui *IO*, ele sunt egale în modul. În cazul în care reducerea *IR* se face în mod egal şi la început şi la sfârşit, eroarea de la sfârşitul intervalului va fi mai mare decât cea de la începutul său, vezi figura 4.21. Pentru ca aceste erori sa fie egale în modul, la sfârşitul *IR* trebuie eliminată o perioadă în plus (cea dintre eşantionul $N-1$ şi eşantionul *N*, care de fapt este eşantionul 0 din *IO* următor). Acest lucru este prezentat în figurile următoare.

Fig. 4.23. Semnalul rampă x(t) şi reconstrucţia sa xref(t) pe două IR (IR=IO-T$_e$), periodicizare prin repetare, K=10.

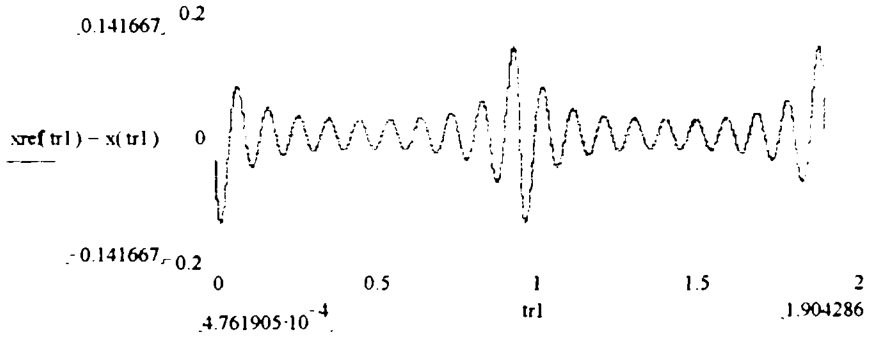


Fig. 4.24. Eroarea absolută la reconstrucţia semnalului rampă pe două IR (IR=IO-T$_e$), periodicizare prin repetare, K=10.

În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare perioada de eşantionare este notată T_{e2} şi are valoarea $T_{e2} = 2T_e = 2T/N$. Deoarece $N = 2K+1$, pe un *IO* egal cu $T = 1$ vor fi prelevate $K+1$ eşantioane. Distanţa de la eşantionul $K+1$ la sfârşitul *IO* este doar T_e şi nu T_{e2} (vezi figura 4.19, paragrafele 2.1 şi 3.4). Dacă se elimină de la sfârşitul *IO* o perioadă de timp egală cu T_{e2}, adică este valabilă egalitatea $IR = IO - T_{e2}$, reconstrucţia semnalului nu se mai face până la ultimul eşantion prelevat (momentul $(K+1)T_{e2}$), ci până la momentul $KT_{e2} + T_e$. Pentru ca reconstrucţia să fie făcută în intervalul $0 \div (K+1)T_{e2}$ trebuie ca de la sfârşitul *IO* să se elimine o perioadă de timp egală cu T_e (adică $T_{e2}/2$), astfel va fi valabilă egalitatea $IR = IO - T_e$. Graficele semnalului rampă, a semnalului reconstituit şi a erorii absolute la reconstrucţie sunt prezentate în figurile 4.25 şi 4.26.

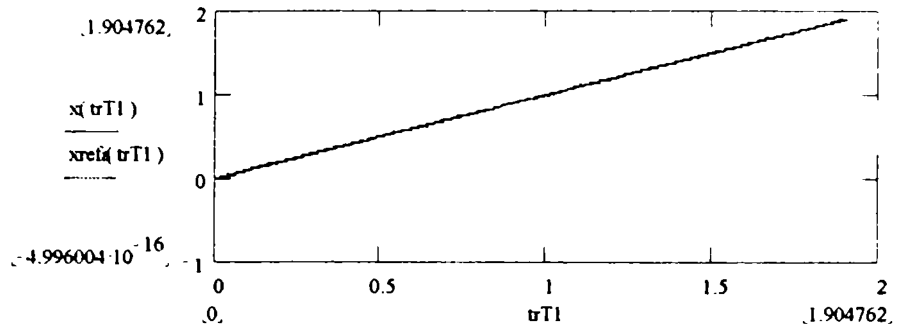


Fig. 4.25. Semnalul rampă x(t) şi reconstrucţia sa xrefa(t) pe două IR (IR=IO-T_e), periodicizare prin oglindire şi repetare. K=10.

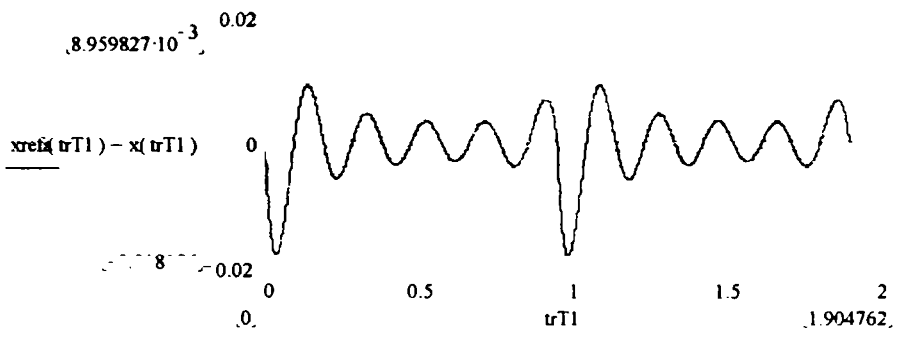


Fig. 4.26. Eroarea absolută la reconstrucţia semnalului rampă pe două IR (IR=IO-T_e), periodicizare prin oglindire şi repetare. K=10.

Rezultatele calculelor erorilor absolute maxime, pozitive şi negative, la reconstrucţia semnalului rampă în cazul $IR = IO - 2neeT_e - T_e$ sunt prezentate în tabelul următor. Dacă este vorba de periodicizare prin oglindire şi repetare, calculul IR se face cu relaţia $IR = IO - 2neeT_{e2} - T_e$.

Tabelul 4.12. Erorile absolute maxime la reconstrucţia semnalului rampă în funcţie de diferenţa dintre IO şi IR, $IR = IO - 2neeT_e - T_e$

nr. eşantioane eliminate (*nee*)	*K*=10		*K*=20	
	$\Delta\ c(k)$	$\Delta\ a(k)$	$\Delta\ c(k)$	$\Delta\ a(k)$
0	0,1416	$8{,}95\cdot10^{-3}$	0,1412	$4{,}54\cdot10^{-3}$
	-0,1416	-0,0181	-0,1412	$-9{,}27\cdot10^{-3}$
1	0,0775	$8{,}95\cdot10^{-3}$	0,0766	$4{,}54\cdot10^{-3}$
	-0,0775	$-5{,}92\cdot10^{-3}$	-0,0766	$-2{,}95\cdot10^{-3}$
2	0,0537	$4{,}50\cdot10^{-3}$	0,0524	$2{,}17\cdot10^{-3}$
	-0,0537	$-5{,}92\cdot10^{-3}$	-0,0524	$-2{,}95\cdot10^{-3}$
3	0,0417	$4{,}50\cdot10^{-3}$	0,0399	$2{,}17\cdot10^{-3}$
	-0,0417	$-3{,}72\cdot10^{-3}$	-0,0399	$-1{,}73\cdot10^{-3}$
4	0,0347	$3{,}30\cdot10^{-3}$	0,0323	$1{,}44\cdot10^{-3}$
	-0,0347	$-3{,}72\cdot10^{-3}$	-0,0323	$-1{,}73\cdot10^{-3}$

Din tabelul 4.12 se observă că erorile absolute pozitive şi negative la reconstrucţia semnalului în cazul periodicizării prin repetare ($\Delta\ c(k)$) sunt egale în modul. Aceasta deoarece dacă eroarea maximă pozitivă se obţine la sfârşitul *IR*, eroarea maximă negativă se va obţine începutul *IR* în intervale de timp (perioade de eşantionare) situate simetric faţă de mijlocul *IR*. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare ($\Delta\ a(k)$)

valorile din tabelele 4.11 şi 4.12 sunt identice, mai puţin pentru cazul *nee*=0, deoarece după cum se vede din figurile 4.20 şi 4.26 aceste erori se obţin în perioade (de eşantionare) alăturate, la începutul *IR*. Deoarece în acest caz erorile sunt ceva mai mici, în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare, doar în cazul *nee*=0 rezultă concluzia că este bine ca, pentru obţinerea *IR* din *IO*, să se elimine o perioadă de eşantionare mai mult la sfârşitul *IO* faţă de începutul său.

Aceleaşi calcule au fost făcute şi pentru semnalul sinusoidal $x(t) = \sin \omega t$ cu $\omega = 2\pi/T$. Din figurile 4.9 la 4.13 se observă că dacă T_c=0,25 erorile absolute la reconstrucţie în cazul periodicizării prin repetare sunt destul de mari. La fel, dacă T_c=0,375 aceste erori sunt destul de mari şi în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare datorită pantei şi a punctului de discontinuitate de ordinul 1 ce se formează la mijlocul perioadei. Pentru aceste două perioade (intervale) de observare T_c, sunt prezentate grafic mai jos reconstrucţia şi eroarea absolută. Calculele se fac pentru două *IO* succesive, *IR* fiind mai mic decât *IO* cu cel puţin o perioadă de eşantionare (T_e) în cazul periodicizării prin repetare respectiv, o jumătate de perioadă de eşantionare în cazul periodicizării prin oglindire şi repetare. Numărul de componente armonice prezente în semnal a fost ales *K*=10 (şi 15) pentru a putea elimina pâna la 9 (4 la început şi 5 la sfârşit) perioade de eşantionare din semnal, obţinând astfel $IR \neq 0$ dorit.

Cazul T_c=0,25, *K*=10, *nee*=0 este prezentat în figurile 4.27 şi 4.28. În figura 4.27 semnalul sinusoidal analizat este desenat cu linie continuă, semnalul reconstituit cu linie întreruptă. Deoarece fiecare *IR* este mai mic cu o perioadă de eşantionare decât *IO*, ultimul punct pe axa timpului pentru care se fac calculele nu este 0.5, ci 0,5-2·T_e=0,476.

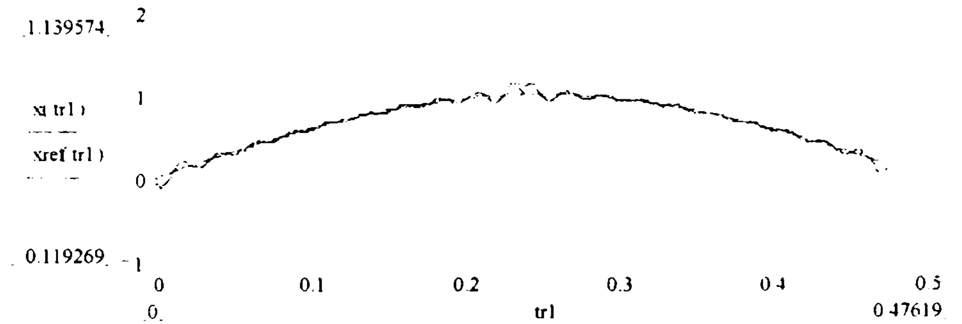


Fig. 4.27. Semnal sinusoidal(linie continuă) şi reconstrucţia sa (linie întreruptă) pe două IR. T_c=0.25. K=10. IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare.

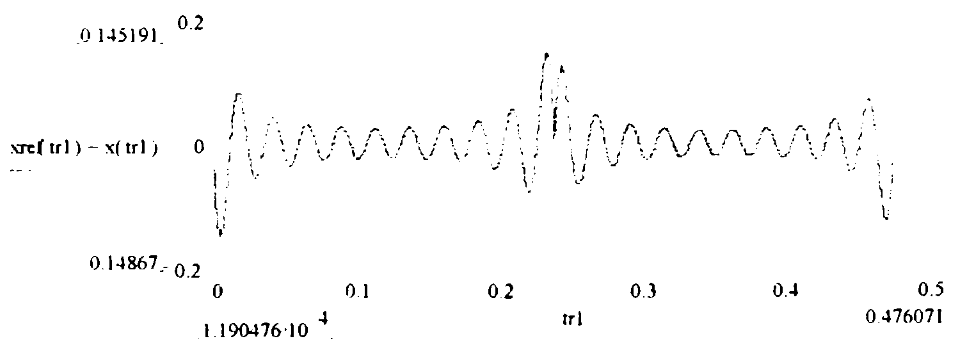


Fig 4.28. Graficul erorii absolute la reconstrucţie pe două IR, semnal sinusoidal. T_c=0,25, K=10. IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare.

Dacă *IR* este mai mic decât *IO* cu mai mult decât o perioadă de eşantionare la sfârşit, eroarea absolută maximă la reconstrucţie va fi mai mică. În figura 4.29 se prezintă acelaşi semnal sinusoidal, doar că $IR = IO - 3 \cdot T_e$, o perioadă lipsă la începutul intervalului şi două perioade lipsă la sfârşitul său.

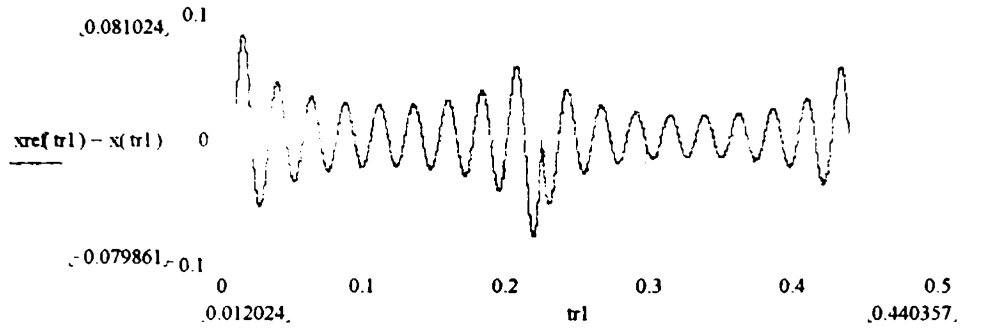


Fig 4.29. Graficul erorii absolute la reconstrucţie pe două IR, semnal sinusoidal, T_c=0,25, K=10, IR=IO-3·T_e, periodicizare prin repetare.

În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare, eroarea absolută maximă la reconstrucţie este mai mică decât dacă periodicizarea se face prin repetare simplă, chiar dacă *IR* este mai mic decât *IO* cu o perioadă de eşantionare T_e ($T_{e2}=2\cdot T_e$). Graficele cu semnalul analizat pe două *IR*, reconstrucţia sa şi eroarea absolută la reconstrucţie sunt prezentate în figurile 4.30 şi 4.31.

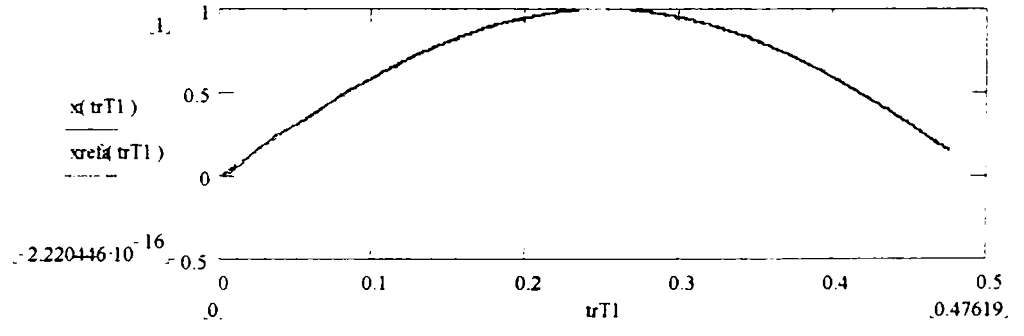


Fig. 4.30. Semnal sinusoidal(linie continuă) şi reconstrucţia sa (linie intreruptă) pe două IR, T_c=0,25, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin oglindire şi repetare.

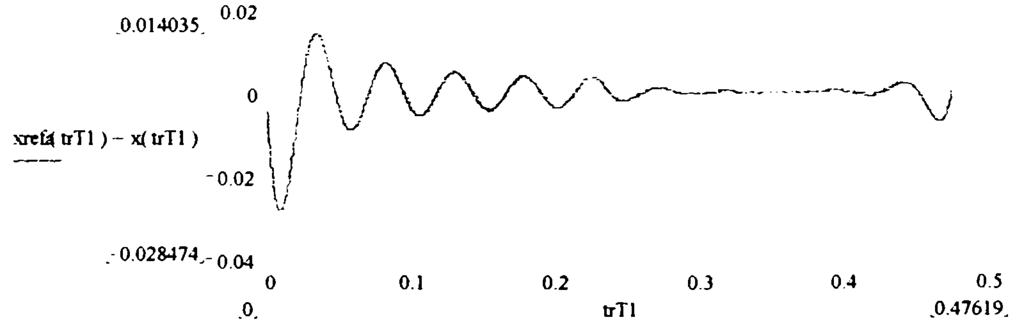


Fig 4.31. Graficul erorii absolute la reconstrucţie pe două IR, semnal sinusoidal, T_c=0,25, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin oglindire şi repetare.

Dacă T_c=0,375 eroarea de reconstrucţie, în cazul periodicizării prin repetare, în al doilea *IR* este mai mare decât în primul *IR*, după cum se poate observa din figura 4.33. Aceasta deoarece diferenta dintre sfârşitul şi începutul celui de-al doilea *IO* este mai mare decât aceeaşi diferenţă corespunzătoare primului *IO*.

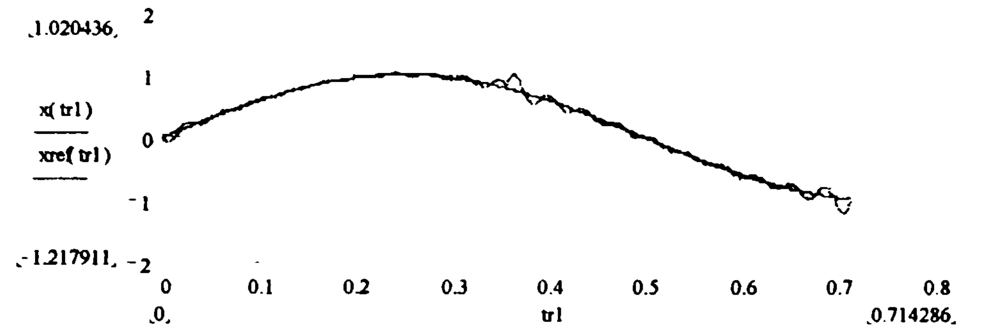


Fig. 4.32. Semnal sinusoidal(linie continuă) şi reconstrucția sa (linie intreruptă) pe două IR, T_c=0,375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare.

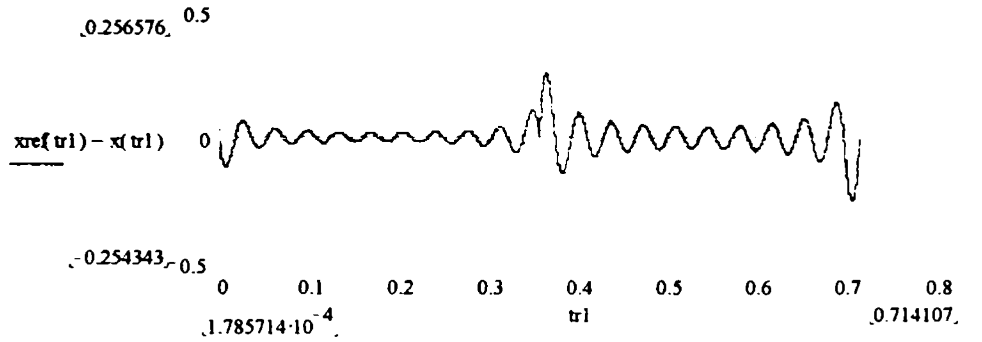


Fig 4.33. Graficul erorii absolute la reconstrucție pe două IR, semnal sinusoidal, T_c=0,375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare.

Fig. 4.34. Semnal sinusoidal(linie continuă) şi reconstrucția sa (linie intreruptă) pe două IR, T_c=0.375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare, t_0=0,15.

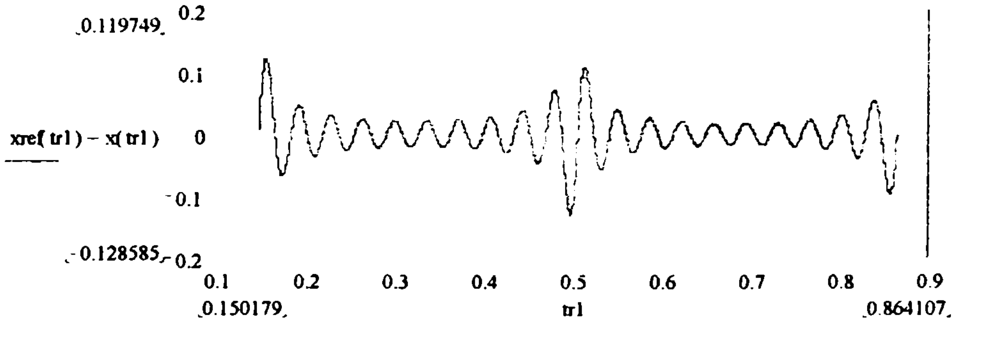


Fig 4.35. Graficul erorii absolute la reconstrucție pe două IR, semnal sinusoidal, T_c=0,375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin repetare, t_0=0,15.

În figurile 4.34 şi 4.35 se prezintă semnalul sinusoidal, reconstrucţia sa şi graficul erorii absolute la reconstrucţie pentru acelaşi (aceleaşi) *IO* respectiv, *IR* dar, momentul iniţial nu mai este 0, ci $t_0 = 0{,}15$. Din figurile 4.33 şi 4.35 se vede că eroarea absolută la reconstrucţie este mai redusă în cazul în care eşantionarea începe la $t_0 = 0{,}15$. Astfel, al doilea *IO* acoperă o porţiune din semnal la care diferenţa dintre sfârşitul şi începutul intervalului este mai mică. O simulare pe un *IO* pentru care valoarea semnalului sinusoidal de la începutul intervalului este (aproape) egală cu cea de la sfârşitul intervalului a dat ca rezultat o eroare de ordinul 10^{-3} pentru K=10, t_0=0,166, T_c=0,166. Rezultă concluzia că eroarea de reconstrucţie a unui semnal este cu atât mai mică cu cât valorile semnalului de la capetele *IO* sunt mai apropiate. Acest lucru poate fi observat dacă se prelucrează un semnal periodic pe o perioadă.

Dacă acelaşi semnal sinusoidal, de perioadă unu, este analizat pe intervale de observare T_c=0,375 folosind periodicizarea prin oglindire şi repetare, eroarea la reconstrucţie este mult mai mică. S-a ales un *IR* mai mic decât *IO* cu T_e ($T_{e2}/2$) pentru a reduce eroarea de reconstrucţie datorată punctului de discontinuitate de ordinul 1 ce se formează la mijlocul perioadei nou formate ($2T_c$), vezi figura 4.10.

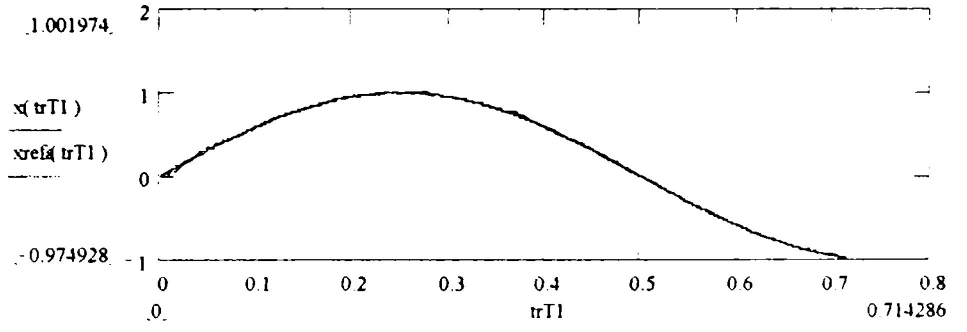


Fig. 4.36. Semnal sinusoidal(linie continuă) şi reconstrucţia sa (linie întreruptă) pe două IR. T_c=0,375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin oglindire şi repetare.

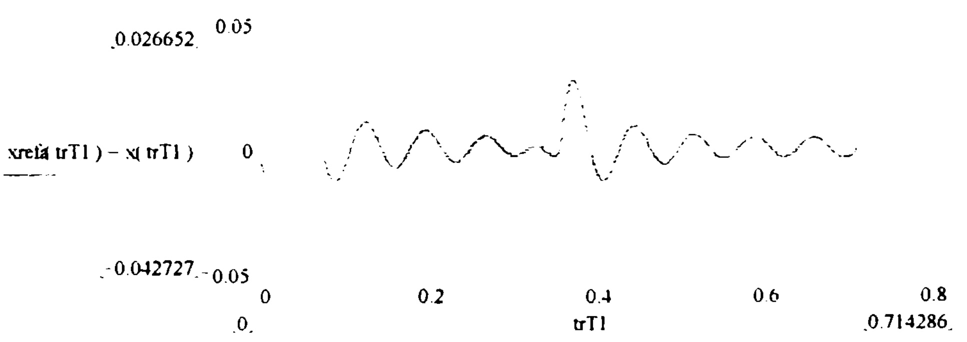


Fig 4.37. Graficul erorii absolute la reconstrucţie pe două IR, semnal sinusoidal, T_c=0,375, K=10, IR=IO-T_e, periodicizare prin oglindire şi repetare.

În tabelul 4.13 se prezintă erorile absolute maxime la reconstrucţia semnalului sinusoidal de perioadă unu (T=1), pentru anumite *IO* considerate a fi o perioadă a semnalului analizat, notată T_c. Calculul este realizat pentru două valori ale ordinului componentei armonice maxime, *K*, considerate a fi prezente în semnal şi anume 10 şi 15. Numărul de eşantioane lipsă, *nee*, este între 0 şi 4. Relaţia de calcul a *IR* în funcţie de *IO* şi de *nee* este $IR = IO - 2neeT_e - T_e$ pentru cazul periodicizării prin repetare şi $IR = IO - 2neeT_{e2} - T_e$ pentru cazul periodicizării prin oglindire şi repetare. A treia coloană notată *t.p.* se referă la tipul periodicizării – *r* pentru repetare şi *or* pentru oglindire şi repetare.

Tabelul 4.13. Erorile absolute maxime la reconstrucţia semnalului sinusoidal $x(t) = \sin 2\pi ft$*, în funcţie de IR şi K,* $IR = IO - 2neeT_e - T_e$*,* $t_0 = 0$

T_c	K	*t.p.*	număr eşantioane lipsă (*nee*)				
			0	1	2	3	4
0,25	10	*r*	-0,1486	-0,0798	-0,0560	0,0434	-0,0361
		or	-0,0284	0,0140	$-9{,}21\cdot10^{-3}$	$6{,}91\cdot10^{-3}$	$-5{,}61\cdot10^{-3}$
	15	*r*	-0,1461	0,0792	-0,0543	0,0415	-0,0338
		or	-0,0192	$9{,}45\cdot10^{-3}$	$-6{,}15\cdot10^{-3}$	$4{,}55\cdot10^{-3}$	$-3{,}64\cdot10^{-3}$
0,375	10	*r*	0,2565	0,1434	-0,0972	0,0698	-0,0504
		or	-0,0427	0,0210	-0,0137	0,0102	$-8{,}15\cdot10^{-3}$
	15	*r*	0,2522	-0,1412	0,0976	0,0736	-0,0577
		or	-0,0289	0,0142	$-9{,}26\cdot10^{-3}$	$6{,}88\cdot10^{-3}$	$-5{,}51\cdot10^{-3}$
0,75	10	*r*	-0,1845	0,1102	0,0694	0,0376	-0,0311
		or	-0,0858	0,0425	-0,0279	0,0210	-0,0170
	15	*r*	-0,1727	0,1060	0,0748	-0,0539	0,0371
		or	-0,0579	0,0284	0,0185	0,0137	-0,0109
0,95	10	*r*	-0,0432	0,0235	-0,0163	0,0126	0,0109
		or	-0,1091	0,0542	0,0361	0,0275	-0,0228
	15	*r*	-0,0433	0,0235	-0,0161	0,0123	0,0100
		or	-0,0734	0,0361	-0,0235	0,0173	-0,0138
1	10	*r*	0	0	0	0	0
		or	-0,1150	0,0572	-0,0382	0.0291	-0.0241
	15	*r*	0	0	0	0	0
		or	-0,0773	0,0381	-0,0247	0,0183	-0,0145

Din tabelul 4.13 se observă că dacă avem un semnal oarecare, cazurile T_c=0.25 şi T_c=0,375, eroarea maximă făcută la reconstrucţia sa folosind metoda periodicizării prin oglindire şi repetare (*or*) este mai mică decât în cazul utilizării periodicizării prin repetare (*r*). De asemenea, la creşterea frecvenţei de eşantionare (creşterea ordinului *K*), eroarea la reconstrucţie scade mai mult în cazul *or* decât în cazul *r* (la creşterea frecvenţei de eşantionare cu 50%, scăderea erorii este neglijabilă). Cu cât perioada T_c se apropie ca valoare de perioada semnalului sinusoidal analizat, reconstrucţia semnalului este mai bine făcută prin utilizarea periodicizării prin repetare. Dacă T_c=T cum este de asteptat, erorile la reconstrucţie sunt neglijabile (erori datorate programului de calcul) în cazul periodicizării prin repetare şi mari în cazul peridicizării prin oglindire şi repetare. Pentru reducerea erorilor, în acest caz, trebuie ca *IR* să fie ales mai mic decât *IO* cu mai mult de $8T_{e2}$.

Din calculele, tabelele şi graficele corespunzătoare prelucrării, pe porţiuni, a semnalului rampă şi a celui sinusoidal rezultă concluzia că este de preferat utilizarea periodicizării prin oglindire şi repetare. Aceasta deoarece numărul minim necesar de eşantioane ce se prelevează este jumătate plus unu din cel minim necesar în cazul periodicizării prin repetare, prin urmare şi frecvenţa de eşantionare este mult mai mică. În plus, erorile absolute maxime la reconstrucţia semnalului iniţial sunt mult mai mici. Dacă un semnal este prelucrat pe o perioadă întreagă a sa (semnal periodic), erorile făcute la reconstrucţie sunt destul de mari. Prin urmare metoda oglindirii şi repetării, gândită pentru semnale oarecare, nu poate fi aplicată cu succes prea mare în cazul semnalelor periodice decât dacă intervalul de observare a semnalului este (mult) diferit de perioada semnalului analizat.

EŞANTIONAREA SEMNALELOR PERIODICE TRECE BANDĂ

5.1. Introducere

Conform teoremei eşantionarii, pentru un semnal care are frecvenţa maximă din spectru notată $f_{\max}$, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e \geq 2f_{\max}$. Dacă semnalul este periodic atunci, $f_e \geq 2f_{\max} + f$, unde cu f s-a notat frecvenţa fundamentalei. Perioada semnalului o notăm $T = 1/f$. Numărul minim de eşantioane necesare pentru reconstrucţia semnalului iniţial este

$$N = T \cdot f_e . \tag{5.1}$$

Notăm cu K ordinul componentei armonice maxime din semnalul periodic, adică

$$f_{\max} = Kf . \tag{5.2}$$

Folosind această notaţie pentru $f_{\max}$, din relaţia (5.1), rezultă numărul minim de eşantioane necesare pentru reconstrucţia semnalului, în funcţie de ordinul componentei armonice maxime din semnalul considerat

$$N = 2K + 1 . \tag{5.3}$$

Pentru semnale trece bandă ce conţin componente cu frecvenţe cuprinse în domeniul $(f_{\min}, f_{\max})$, unde $f_{\min} > 0$, frecvenţa de eşantionare poate fi redusă, în anumite condiţii, sub valoarea $2f_{\max}$. În acest caz cele N eşantioane se prelevează de pe mai multe perioade întregi T.

Cazul semnalelor trece bandă cu spectru continuu, a fost tratat pe larg în literatură [Hs1, Br1] unde se demonstrează că frecvenţa de eşantionare, ce poate fi utilizată, depinde de frecvenţa maximă din spectru şi de lăţimea de bandă de frecvenţe a semnalului analizat. În continuare, se studiază cazul semnalelor periodice trece bandă, deci cu spectru discret, caz care nu a fost cercetat până acum.

5.2 Eşantionarea semnalelor periodice de tip trece bandă

Considerăm un semnal periodic trece bandă $x(t)$, cu frecvenţe cuprinse în domeniul $[f_m, f_M]$. Folosim notaţiile $f_m = M_1 f$ şi $f_M = M_2 f$, unde f este fundamentala semnalului trece bandă, M_1 şi M_2, cu $M_2 > M_1$ şi $M_1 > 1$, ordinele armonicelor corespunzătoare frecvenţelor f_m şi f_M. Lăţimea de bandă a semnalului va fi

$$f_B = f_M - f_m \tag{5.4}$$

Se doreşte obţinerea unei frecvenţe de eşantionare mai mică decât cea rezultată din teorema eşantionării şi, modul de calcul al ei sau al numărului de eşantioane necesare ce sunt prelevate de pe o perioadă a semnalului trece bandă.

În urma eşantionării semnalului $x(t)$ nu vom avea erori de aliere dacă semnalul nu conţine în reprezentarea spectrală componente sinusoidale de frecvenţe diferite care au aceleaşi eşantioane. Frecvenţele sinusoidelor ce au aceleaşi eşantioane se determină cu ajutorul relaţiilor [To2], [Pa5]

$$\sin\left(2\pi f\frac{n}{f_e}+\varphi\right)=\sin\left[2\pi(f+k_1f_e)\frac{n}{f_e}+\varphi\right] \tag{5.5}$$

$$\sin\left(2\pi f\frac{n}{f_e}+\varphi\right)=\sin\left[2\pi(k_2f_e-f)\frac{n}{f_e}-\varphi+\pi\right] \tag{5.6}$$

unde: $f_e = 1/T_e$ este frecvenţa de eşantionare a semnalului $\sin(2\pi ft+\varphi)$, iar k_1 şi k_2 sunt numere întregi.

Mulţimea frecvenţelor sinusoidelor ce au aceleaşi eşantioane se notează f_{k1} şi f_{k2} şi se obţin din relaţiile (5.5) şi (5.6) cu

$$f_{k_1} = f + k_1 f_e \tag{5.7}$$

şi

$$f_{k_2} = k_2 f_e - f\,. \tag{5.8}$$

În cazul eşantionării unui semnal trece bandă, pentru evitarea erorilor de aliere, este necesar ca în intervalul de frecvenţe $[f_m, f_M]$ să nu existe sinusoide cu aceleaşi eşantioane. Cu alte cuvinte, mulţimea frecvenţelor sinusoidelor $\{f_{k_1}, f_{k_2}\}$, se limitează la domeniul $[f_m, f_M]$, adică,

$$f_m \le f + k_1 f_e \le f_M\,, \tag{5.9}$$

$$f_m \le k_2 f_e - f \le f_M\,, \tag{5.10}$$

iar ca rezultat să avem o singură soluţie. Impunem ca inecuaţia (5.9) să admită doar soluţia $k_1 = 0$ şi inecuaţia (5.10) să nu admită nici o soluţie pentru k_2. Relaţiile (5.9) şi (5.10) se rescriu sub forma

$$\frac{f_m - f}{f_e} \le k_1 \le \frac{f_M - f}{f_e}\,, \tag{5.11}$$

$$\frac{f_m + f}{f_e} \le k_2 \le \frac{f_M + f}{f_e}. \tag{5.12}$$

Înlocuind f cu valoarea minimă f_m sau maximă f_M, după caz, din relațiile (5.11) şi (5.12), rezultă intervalele maxime pentru mărimile k_1 şi k_2, sub forma

$$\frac{f_m - f_M}{f_e} \le k_1 \le \frac{f_M - f_m}{f_e}, \tag{5.13}$$

$$\frac{2f_m}{f_e} \le k_2 \le \frac{2f_M}{f_e}. \tag{5.14}$$

Deoarece pentru k_1 se impune numai soluția $k_1 = 0$, limitele din relația (5.13) trebuie să aibă valori în intervalul deschis (-1, 1), adică

$$-1 < \frac{f_m - f_M}{f_e} \le k_1 \le \frac{f_M - f_m}{f_e} < 1. \tag{5.15}$$

Astfel rezultă

$$f_e > f_M - f_m = f_B. \tag{5.16}$$

Pentru k_2 nu se admite nici o soluție dacă inecuația (5.14) poate fi scrisă sub forma

$$K - 1 < \frac{2f_m}{f_e} \le k_2 \le \frac{2f_M}{f_e} < K \tag{5.17}$$

unde $K = 1, 2, \ldots$.

Dacă frecvența de eşantionare f_e satisface relațiile (5.16) şi (5.17), în principiu, ar trebui să nu apară erori de aliere.

Relațiile (5.16) şi (5.17) nu ne oferă o valoare limită minimă $f_{e\min}$ pentru frecvența de eşantionare. În continuare, se pune problema determinării acestei frecvențe minime care poate fi mai mică decât valoarea $2f_M$ ce rezultă din teorema eşantionării semnalelor de tip trece jos ce au frecvența maximă f_M.

Considerăm

$$f_e < 2f_M, \tag{5.18}$$

astfel, din relația (5.17) se obține

$$K > \frac{2f_M}{f_e} > 1. \tag{5.19}$$

Acest lucru înseamnă că termenul (constanta) K poate avea valorile $K = 2, 3, \ldots$.

Din relațiile (5.17) și (5.19) se observă că o valoare mică pentru frecvența f_e corespunde unei valori mari pentru constanta K. Astfel, dacă se obține valoarea maximă pentru K, astfel încât relația (5.17) să poată fi respectată, se va putea determina simplu frecvența de eșantionare minimă $f_{e\min}$. Din relația (5.17) se obține succesiv

$$\frac{2f_M}{K} < f_e < \frac{2f_m}{K-1},$$

$$\frac{f_M}{K} < \frac{f_m}{K-1},$$

$$K(f_M - f_m) < f_M,$$

$$K < \frac{f_M}{f_B}. \tag{5.20}$$

Astfel, valoarea maximă a lui K se obține ca parte întreagă a raportului f_M/f_B, adică

$$K_{\max} = \left[\frac{f_M}{f_B}\right], \tag{5.21}$$

unde cu $[\cdot]$ am notat partea întreagă a cantității dintre paranteze.

Din relațiile (5.17) și (5.21) se obține

$$f_e > f_{e\min} = \frac{2f_M}{K_{\max}} = \frac{2f_M}{\left[\frac{f_M}{f_B}\right]}. \tag{5.22}$$

Dacă raportul f_M/f_B este un număr întreg, atunci relația (5.22) devine

$$f_e > f_{e\min} = 2f_B. \tag{5.23}$$

Rezultatele prezentate corespund cu cele din bibliografie [Hs1, Br1, Va1], ceea ce dovedește corectitudinea metodei.

În cele ce urmează se pune problema determinării frecvenței minime de eșantionare ce corespunde unui număr N minim de eșantioane prelevate uniform pe durata unei perioade a semnalului. Se va prezenta modul de calcul al numărului minim de eșantioane necesare pentru ca semnalul să poată fi corect reconstituit.

Teoremă

În cazul unui semnal periodic trece bandă, cu frecvențe cuprinse în intervalul $\left[\frac{M_1}{T}, \frac{M_2}{T}\right]$, T fiind perioada semnalului, numărul N de eșantioane, prelevate uniform pe durata unei perioade complete, necesare pentru reconstrucția semnalului, este corect ales dacă:

a) $N > 2(M_2 - M_1 + 1)$,

b) $\left[\frac{2M_1}{N}\right] = \left[\frac{2M_2}{N}\right]$ și

c) $\frac{2M_1}{N}$ respectiv $\frac{2M_2}{N}$ nu sunt numere întregi.

Cu $[\cdot]$ s-a notat partea întreagă a cantității dintre paranteze.

Demonstrație

În continuare se va demonstra faptul că un semnal periodic trece bandă $x(t)$ poate fi reconstituit pe baza unui număr N de eșantioane echidistante, mai puține decât cele rezultate în urma aplicării teoremei eșantionării. De asemenea, se va demonstra faptul că numărul minim de eșantioane necesare este dat de relatia $N > 2(M_2 - M_1 + 1)$ și, ce condiții mai trebuie să îndeplinească acest număr N pentru ca reconstrucția semnalului să fie posibilă. Condițiile a), b) și c) vor rezulta pe parcursul demonstrației.

Dacă aplicăm teorema eșantionării, conform relației (5.3) rescrisă (se înlocuiește K cu M), rezultă că numărul minim de eșantioane necesare este $N_e = 2M_2 + 1$. Folosind aceste eșantioane, putem calcula $2M_2 + 1$ coeficienți din dezvoltarea în serie Fourier a semnalului considerat dar, deoarece nu avem componente spectrale in domeniul $[0, f_1)$, înseamnă că un număr de $2M_1 - 1$ coeficienți sunt egali cu zero, prin urmare nu are rost calculul lor. Ar rezulta că numărul minim de eșantioane necesar este

$$N = 2M_2 + 1 - (2M_1 - 1) = 2(M_2 - M_1 + 1). \tag{5.24}$$

Se va demonstra ulterior că acest număr nu poate fi utilizat fiind prea mic (rezultă o eroare de aliere).

Folosind doar coeficienții Fourier nenuli, putem scrie seria Fourier exponențială sub forma

$$x(iT_e) = \sum_{k=-M_2}^{-M_1} c_k e^{jk\omega iT_e} + \sum_{k=M_1}^{M_2} c_k e^{jk\omega iT_e}, \tag{5.25}$$

unde $\omega = 2\pi f$, $T_e = T/N$, $T = 1/f$, $i \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Pentru determinarea coeficienților seriei Fourier, la fel ca în cazul eșantionării semnalelor periodice de tip trece jos, se înmulțește rel. (5.25) cu $e^{-jn\omega iT_e}$ și se face însumarea după i. Variabila n are același domeniu de variație cu variabila k ($[-M_2, -M_1] \cup [M_1, M_2]$). Rezultatul se poate scrie ca mai jos

$$\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{-jn\omega iT_e} = \sum_{k=M_1}^{M_2} \left[c_{-k} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j(k+n)\omega iT_e} + c_k \sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\omega iT_e} \right]. \tag{5.26}$$

În cazul semnalelor periodice de tip trece jos deci, când $|k+m| < N = 2M_2 + 1$, pentru sumele de exponenţiale avem doar cazurile (vezi relaţiie (3.58) şi (3.59))

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{-j(k+n)\omega iT_e} = \begin{cases} 0 & pt. \quad k \neq -n \\ N & pt. \quad k = -n \end{cases} \tag{5.27}$$

şi

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\omega iT_e} = \begin{cases} 0 & pt. \quad k \neq n \\ N & pt. \quad k = n \end{cases}. \tag{5.28}$$

Relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier c_k şi c_{-k} sunt:
pentru $k = n$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{-jn\omega iT_e} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{-jk\omega iT_e} \tag{5.29}$$

şi pentru $k = -n$

$$c_{-k} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{-jn\omega iT_e} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{jk\omega iT_e}. \tag{5.30}$$

Folosind relaţiile (5.25), (5.29) şi (5.30) putem scrie

$$x_r(t) = \sum_{k=-M_2}^{-M_1} c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=M_1}^{M_2} c_k e^{jk\omega t} =$$

$$= \sum_{k=M_1}^{M_2}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{-jk\omega iT_e} e^{jk\omega t} + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e) e^{jk\omega iT_e} e^{-jk\omega t}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)\sum_{k=M_1}^{M_2}\left[e^{jk\omega(t-iT_e)} + e^{jk\omega(iT_e-t)}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)\sum_{k=M_1}^{M_2}\left[e^{jk\omega(t-iT_e)} + e^{-jk\omega(t-iT_e)}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)\sum_{k=M_1}^{M_2} 2\cos k\omega(t-iT_e) =$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)\sum_{k=M_1}^{M_2}\cos k\omega(t-iT_e). \tag{5.31}$$

Relaţia (5.31) se poate folosi pentru reconstrucţia semnalului din eşantioanele sale dacă relaţiile (5.27) şi (5.28) sunt valabile. În cazul semnalelor trece bandă, dacă $N < 2M_2 + 1$, sumele de exponenţiale din relaţiile (5.27) şi (5.28) pot lua valori egale cu N şi pentru alte valori ale lui k şi n. Acest lucru înseamnă că relaţiile de calcul a coeficienților c_k și c_{-k} ar fi mai complicate (vezi 3.7.3 începerea procesului de eșantionare de la un moment $t_0 \neq 0$) și/sau anumiți coeficienți nu ar putea fi corect calculați (vezi 1.5 erori la eșantionarea funcțiilor periodice); prin urmare, eșantionarea ar fi incorect efectuată.

Căutăm condițiile ce trebuie îndeplinite pentru ca relațiile (5.27) și (5.28) să fie adevărate. Rescriem aceste două relații ca mai jos

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{-j(k+n)\omega i T_e} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j(k+n)\frac{2\pi}{T} i \frac{T}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j\frac{k+n}{N} i 2\pi} = \begin{cases} 0 & pentru \quad k \neq -n \\ N & pentru \quad k = -n \end{cases} \tag{5.32}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(k-n)\omega i T_e} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{k-n}{N} i 2\pi} = \begin{cases} 0 & pentru \quad k \neq n \\ N & pentru \quad k = n \end{cases} \tag{5.33}$$

Pentru ca relațiile de mai sus să fie adevărate, trebuie ca fracțiile $(k+n)/N$ și $(k-n)/N$ să fie diferite de un număr întreg pentru orice *k* și *n*, dar $k \neq n$ și/sau $k \neq -n$. În caz contrar, rezultatul sumei (sumelor) va fi N și pentru valori ale lui k și n diferite de $k = n$ sau $k = -n$, acest lucru însemnând că relația (5.31) nu poate fi utilizată. Cele două fracții pot fi un număr întreg dacă

$$|k+n| \geq r_1 N \tag{5.34}$$

respectiv,

$$|k-n| \geq r_2 N, \tag{5.35}$$

unde r_1, r_2 sunt numere întregi. Astfel, fracția $(k \pm n)/N$ poate fi egală cu un întreg $\leq r_1$ sau r_2. Atît k cât și n pot lua valori în domeniul $[-M_2, -M_1] \cup [M_1, M_2]$. Prin urmare, sumele $k+n$ și $k-n$ pot lua valori în domeniul $[-2M_2, -2M_1] \cup [-(M_2 - M_1), (M_2 - M_1)] \cup [2M_1, 2M_2]$. Acest interval fiind simetric față de 0, pentru simplificarea demonstrației, vom lua în considerare doar partea pozitivă a acestui domeniu. Pentru ca eșantionarea să fie corectă (reconstrucție posibilă folosind relația (5.31)), trebuie ca numărul N de eșantioane prelevate să fie destul de mare pentru a putea calcula coeficienții Fourier corespunzători semnalului și, în același timp, să nu facă parte din domeniul prezentat mai sus. De asemenea, din relațiile (5.34) și (5.35) rezultă că și multiplii lui N nu pot face parte din acest domeniu. Prin urmare, trebuie ca $N > M_2 - M_1$ și orice multiplu de N să nu facă parte din domeniul $[2M_1, 2M_2]$, adică

$$rN \notin [2M_1, 2M_2], \tag{5.36}$$

unde r este un număr întreg. Ținând cont doar de capetele intervalului, rezultă condiția c) din teoremă.

Definim un număr întreg

$$m = \left[\frac{2M_1}{N}\right],$$

sau altfel scris, $mN < 2M_1$. În acest caz următoarea dublă inegalitate este adevărată

$$m < \frac{2M_1}{N} < m + 1. \tag{5.37}$$

În relaţia (5.37) nu avem si egalitate datorită relaţiei (5.36).

Definim un întreg p unde $1 \le p \le N$, astfel încît $2M_1 = mN + p$. Nici un număr din şirul $2M_1, 2M_1 + 1, \ldots, 2M_2$ nu trebuie să fie divizibil cu N. Notăm termenul general din şir cu $2M_1 + n$, unde $n = 0,1,2,\ldots$. Dacă condiţia de mai sus (relaţia (5.36)) este satisfacută, ţinând cont şi de relaţia (5.37), înseamnă că orice număr din şir trebuie să satisfacă condiţia

$$2M_1 + n < (m+1)N$$

sau, altfel scris

$$mN + p + n < (m+1)N$$

de unde rezultă inegalitatea

$$p + n < N. \tag{5.38}$$

Scriem ultimul termen din şir sub forma $2M_2 = mN + p + n'$. Dacă

$$\left[\frac{2M_2}{N}\right] = \left[m + \frac{p+n'}{N}\right] = m + \left[\frac{p+n'}{N}\right] > m,$$

rezultă

$$p + n' > N$$

şi deci există o valoare $n^* < n'$ astfel încît $p + n^* = N$, prin urmare unul din termenii din şir va fi egal cu $(m+1)N$. Pentru ca acest lucru să nu se întâmple, următoarea inegalitate trebuie să fie adevărată

$$\frac{2M_2}{N} < m + 1.$$

Pentru N corect ales rezultă că trebuie îndeplinite două condiţii generale, şi anume

$$\begin{cases} mN < 2M_1 \\ (m+1)N > 2M_2 \end{cases}. \tag{5.39}$$

Astfel se îndeplineşte condiţia $r_1 N \notin [2M_1, 2M_2]$.

În continuare vom verifica dacă numărul de eşantioane ales poate avea valoarea minimă $N_{\min} = 2(M_2 - M_1 + 1)$.

Dacă $N = N_{\min} = 2(M_2 - M_1 + 1)$, sistemul (5.39) devine

$$\begin{cases} m2(M_2 - M_1 + 1) < 2M_1 \\ (m+1)2(M_2 - M_1 + 1) > 2M_2 \end{cases}. \tag{5.40}$$

Prima inegalitate a sistemului (5.40) o transformăm în egalitate adunând la membrul stâng un număr întreg notat n_1, $n_1 \geq 1$

$$M_1 = m(M_2 - M_1 + 1) + n_1. \tag{5.41}$$

A doua inegalitate a sistemului (5.40) o rescriem sub forma

$$M_2 < m(M_2 - M_1 + 1) + (M_2 - M_1 + 1). \tag{5.42}$$

Din relaţiile (5.41) şi (5.42) avem

$$M_2 < M_1 - n_1 + M_2 - M_1 + 1,$$

de unde rezultă condiţia $n_1 < 1$.

Prin urmare N nu poate lua valoarea $N_{\min} = 2(M_2 - M_1 + 1)$. Dacă pentru N se alege valoarea minimă $N = N_{\min} = 2(M_2 - M_1 + 1) + 1$, în urma unor calcule similare cu cele efectuate mai sus rezultă condiţia $n_1 < 3$, deci ≥ 1. Astfel, numărul minim de eşantioane poate fi ales $2(M_2 - M_1 + 1) + 1$ dacă şi condiţia $r_1 N \notin [2M_1, 2M_2]$ este îndeplinită. Aceste calcule au dus la enunţarea punctului a) din teoremă.

Până acum am obţinut numărul minim de eşantioane necesare pentru a putea reconstitui semnalul. De aici nu rezultă că acest număr poate să fie folosit. Pentru a alege un anumit număr $N \geq N_{\min}$, trebuiesc efectuate câteva calcule.

Considerăm $N = 2(M_2 - M_1 + 1) + p$, unde p este un număr natural, $p \geq 1$. În acest caz, sistemul (5.39) se va rescrie sub forma

$$\begin{cases} 2M_1 > m[2(M_2 - M_1 + 1) + p] \\ 2M_2 < m[2(M_2 - M_1 + 1) + p] + 2(M_2 - M_1 + 1) + p \end{cases} \tag{5.43}$$

Prima inegalitate o transformăm în egalitate, mărind membrul drept cu un număr n' ce îndeplineşte condiţiile $n' > 0$, $n' \in \mathbf{N}$

$$2M_1 = m[2(M_2 - M_1 + 1) + p] + n'. \tag{5.44}$$

Din a doua inegalitate a sistemului (5.43) şi relaţia (5.44) obţinem

$$2M_2 < 2M_1 - n' + 2(M_2 - M_1 + 1) + p$$

adică

$$p+2>n'. \tag{5.45}$$

Relația (5.45) este o condiție necesară pentru ca numărul de eșantioane să fie corect ales. Mai trebuie aleasă valoarea lui m. Valoarea maximă pe care o ia termenul m se calculează folosind prima inegalitate din sistemul (5.40)

$$m_{max}=\left[\frac{2M_1}{2(M_2-M_1+1)+1}\right]. \tag{5.46}$$

Dacă se găsește un număr N care să satisfacă condițiile

$$\begin{cases} m_{max}N<2M_1 \\ (m_{max}+1)N>2M_2 \end{cases}, \tag{5.47}$$

atunci acel număr va avea valoarea minimă (și $N\leq[2M_1/m_{max}]$). Dacă nu există nici un număr care să satisfacă condițiile din sistemul (5.47) se mai reduce valoarea lui m ($m<m_{max}$).

Condiția exprimată prin relația (5.45) este destul de greu de verificat așa că pentru simplificarea determinării numărului N de eșantioane necesare, se caută o condiție care să fie mai ușor de verificat.

Rescriem sistemul (5.39) sub forma

$$\begin{cases} m<\dfrac{2M_1}{N} \\ m+1>\dfrac{2M_2}{N} \end{cases} \tag{5.48}$$

Din prima inegalitate putem scrie

$$m=\left[\frac{2M_1}{N}\right]<\frac{2M_1}{N}. \tag{5.49}$$

Din a doua inegalitate avem

$$m+1>\frac{2M_2}{N}>\left[\frac{2M_2}{N}\right]=m', \quad m'\in\mathbf{N}. \tag{5.50}$$

Deoarece $M_2>M_1$ rezultă că

$$m'\geq m. \tag{5.51}$$

Relația (5.50) o rescriem sub forma

$$m'-m<1. \tag{5.52}$$

Deoarece m și $m'\in N$, din relațiile (5.51) și (5.52) se obține singura posibilitate pentru ca sistemul (5.48) sa fie valabil și anume $m=m'$, adică

$$\left[\frac{2M_1}{N}\right]=\left[\frac{2M_2}{N}\right]. \qquad (5.53)$$

Prin obținerea relației (5.53) s-a demonstrat punctul b) din teoremă.

O condiție suplimentară care trebuie satisfăcută este ca raportul $2M_1/N$ sau raportul $2M_2/N$ să nu fie numere întregi (vezi sistemul (5.39)).

Dacă în urma calculelor $N_{min} \in [M_1, M_2]$ atunci, numărul minim de eșantioane N ce poate fi ales este mai mare decât M_2.

Folosind relația (5.53), numărul N poate fi ușor calculat efectuând doar câteva împărțiri.

5.3 Condiții suplimentare pentru utilizarea numărului minim de eșantioane

Pentru a obține condițiile suplimentare în care se poate utiliza un număr minim de eșantioane din semnalul trece bandă analizat și sa fie posibilă reconstrucția sa, se va apela la o exemplificare grafică.

Dacă un semnal trece bandă periodic, de perioadă $T = 1/f$, cu frecvențe cuprinse între $f_m = M_1 f$ și $f_M = M_2 f$ inclusiv, unde $M_2 > M_1 > 1$, poate fi eșantionat cu frecvența de eșantionare minimă, adică $f_e = N_{min} f$ unde $N_{min} = 2(M_2 - M_1 + 1) + 1$, atunci avem unul din cele două cazuri prezentate în figurile de mai jos.

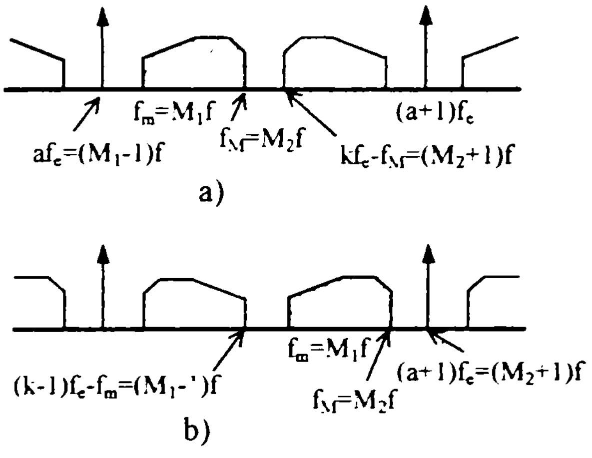


Fig. 5.1.Reprezentarea grafică a spectrului unui semnal trece bandă eșantionat cu o frecvență minimă de eșantionare.

În figura 5.1a se prezintă grafic spectrul unui semnal trece bandă eșantionat cu o frecvență minimă de eșantionare. Multiplul af_e al frecvenței minime de eșantionare are o valoare mai mică cu frecvența fundamentalei față de frecvența f_m corespunzătoare capătului inferior al benzii de frecvențe a semnalului. Zona hașurată corespunde spectrului semnalului trece bandă iar celelalte zone, cu aceeași formă sau vazută în oglindă, apar datorită periodicizării spectrului în urma procesului de eșantionare. Distanța în domeniu frecvență între multiplul frecvenței de eșantionare, spectrul semnalului și replicile sale este egală cu frecvența fundamentalei.

În figura 5.1b avem un caz similar celui din figura 5.1a, diferența constă în faptul că multiplul $(a+1)f_e$ al frecvenței minime de eșantionare este mai mare cu frecvența fundamentalei față de frecvența f_M corespunzătoare capătului superior al benzii de fre :vențe a semnalului.

Deoarece semnalul este periodic, spectrul nu va fi continuu ci (scret (în zonele corespunzătoare spectrului și al replicilor sale avem doar linii spectrale).

Pe baza graficelor din figura 5.1 putem scrie:

Figura 5.1a

$$kf_e - M_2 f \geq (M_2 + 1)f$$

$$kNf \geq 2M_2 f + f$$

$$kN \geq 2M_2 + 1, \tag{5.54}$$

Figura 5.1b

$$(k-1)f_e - M_1 f \leq (M_1 - 1)f$$

$$(k-1)Nf \leq 2M_1 f - f$$

$$(k-1)N \leq 2M_1 - 1. \tag{5.55}$$

Condițiile (5.54) și (5.55) rezultă și din sistemul (5.39) și anume: $2M_1/N$ sau $2M_2/N$ nu pot fi numere întregi pentru o eșantionare corectă.

Zona dintre af_e și $(a+1)f_e$ reprezintă o „perioadă" în domeniul frecvență, ea repetându-se de la $a=0$ la $a=\infty$. Astfel, din figura 5.1a, putem scrie

$$af_e = m\left[M_2 f - (M_1 - 1)f + \frac{1}{2}f\right], \tag{5.56}$$

unde termenul din paranteza dreaptă este $f_e/2$, iar m este un întreg (1, 2, ...). Rescriem relația (5.56) sub forma

$$(M_1 - 1)f = m\frac{f_e}{2} = m\frac{N_{\min} f}{2}$$

adică,

$$\frac{2(M_1 - 1)}{N_{\min}} = m. \tag{5.57}$$

Din figura 5.1b putem scrie

$$(a+1)f_e = m\left[(M_2 + 1)f - M_1 f + \frac{1}{2}f\right]$$

de unde rezultă

$$\frac{2(M_2+1)}{N_{\min}} = m. \tag{5.58}$$

Cu alte cuvinte, dacă una din relațiile (5.57) sau (5.58) este adevărată, atunci semnalul periodic trece bandă poate fi eșantionat cu frecvență minimă. În caz contrar va trebui calculat un $N > N_{\min}$ prin procedeul expus mai sus (în paragraful 5.2).

5.4 Eșantionarea semnalelor periodice trece bandă obținute prin modulare

În continuare, considerăm cazul în care semnalul trece bandă este obținut prin modularea în amplitudine a unui semnal purtător (periodic) cu un semnal periodic de tip trece jos, notat $p(t)$. Un semnal modulat în amplitudine cu purtătoare sinusoidală este descris de o ecuație de tipul [Hs1]

$$x(t) = p(t)\cos\omega_0 t, \tag{5.59}$$

unde $\cos\omega_0 t$ este purtătoarea cu frecvența f_0 și $p(t)$ este semnalul modulator de tip trece jos, frecvența fundamentalei notată f_1, iar frecvența maximă notată $f_{\max}$. Semnalul modulat va fi de tip trece bandă [Hs1] având frecvența centrală f_0, iar frecvențele corespunzătoare capetelor benzii de frecvențe vor avea valorile $f_0 \pm f_{\max}$.

Eșantionarea semnalelor trece bandă a fost și este tratată de mai mulți autori. S-au prezentat sub diverse forme condițiile impuse frecvenței de eșantionare astfel încât să nu apară procesul de aliere [Hs1, Br6, Pa4]. A fost enunțată și o teoremă ce se referă la eșantionarea semnalelor trece bandă reale [Br6, Ma3].

Se presupune că semnalul trece bandă are spectrul diferit de zero doar în intervalul $f_i < |f| < f_s$, unde cu f_i este notată limita inferioară și cu f_s este notată limita superioară a benzii de frecvențe. Banda semnalului va fi $B = f_s - f_i$. Se consideră că $B < f_i$, în caz contrar frecvența de eșantionare trebuie să fie mai mare decât $2f_s$.

Teorema eșantionării semnalelor trece bandă reale spune că reconstituirea semnalului pe baza eșantioanelor sale este posibilă dacă frecvența de eșantionare f_e satisface relația [Ma3]

$$\frac{2f_s}{n} \le f_e \le \frac{2f_i}{n-1} \quad \text{unde} \quad 2 \le n \le \frac{f_s}{B}. \tag{5.60}$$

Numărul n din relația (5.60) este un întreg cuprins în domeniul precizat.

Se observă că dacă f_s/B este un număr întreg, atunci se poate utiliza cea mai mică frecvență de eșantionare și anume $f_e = 2B$.

Pentru a calcula perioada semnalului periodic trece banda (modulat în amplitudine) pe baza perioadelor semnalelor modulator și purtător se face următorul enunț: produsul a două semnale periodice, cu frecvențe aflate în relație armonică, este un semnal periodic.

Considerăm că avem două semnale periodice, cu frecvențele fundamentale notate f_0, respectiv f_1 (perioadele $T_0 = 1/f_0$ respectiv $T_1 = 1/f_1$). Dacă aceste frecvețe sunt scrise ca raport de numere întregi sub forma

$$f_0 = \frac{a_0}{b_0} \quad \text{şi} \quad f_1 = \frac{a_1}{b_1}, \tag{5.61}$$

atunci raportul lor va fi

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{b_1}{b_0} = \frac{m_0}{m_1} \in Q, \tag{5.62}$$

unde a_0, b_0, a_1, b_1, $m_0 = a_0 \cdot b_1$ şi $m_1 = a_1 \cdot b_0$ sunt numere întregi.

Pe baza relaţiei (5.62) se poate rescrie enunţul anterior sub forma: produsul a două semnale periodice, cu frecvenţe aflate în relaţie armonică, de perioade T_0 şi respectiv T_1, va da ca rezultat un semnal periodic de perioadă T unde.

$$T = m_0 T_0 = m_1 T_1, \tag{5.63}$$

m_0 şi m_1 fiind numere întregi.

Pentru ca T să fie perioadă principală, m_0 şi m_1 nu trebuie să aibă nici un divizor comun (diferit de 1). În caz contrar, perioada calculată pentru semnalul produs de semnale periodice va fi un multiplu al perioadei principale.

Considerăm semnalul periodic trece bandă, notat $x(t)$, obţinut prin modularea în amplitudine a unei purtătoare sinusoidale cu un semnal periodic trece jos, notat $p(t)$, semnal descris de relaţia (5.59). Notăm perioada semnalul periodic modulator $p(t)$ cu T_1, perioada semnalului purtător $\cos\omega_0 t$ cu T_0 şi perioada semnalului modulat (trece bandă) $x(t)$ cu T_x. Cu K notăm ordinul componentei armonice maxime din semnalul $p(t)$ adică, $f_{max} = Kf_1$.

Termenii m_0 şi m_1 se aleg astfel încât raportul m_0/m_1 să fie ireductibil pentru ca perioada T_x, calculată folosind relaţia (5.63), să fie perioada principală a semnalului $x(t)$.

Dacă f_0 este un multiplu al lui f_1, frecvenţa fundamentalei semnalului trece bandă va fi $f_x = f_1$, adică $m_1 = 1$. În caz contrar, $f_x = f_1/m_1$ ($= f_0/m_0$), unde $m_1 > 1$. Se stabileşte raportul m_0/m_1 ireductibil după care se calculează frecvenţa fundamentalei f_x. În continuare, se calculează ordinele M_1 şi M_2 corespunzătoare componentelor armonicelor aflate la capetele benzii de frecvenţe (f_i şi f_s) a semnalului modulat $x(t)$ şi numărul N de eşantioane necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului modulator $p(t)$.

Pentru f_i şi f_s putem scrie

$$\begin{cases} f_i = M_1 f_x = f_0 - Kf_1 \\ f_s = M_2 f_x = f_0 + Kf_1 \end{cases}. \tag{5.64}$$

Din relaţiile (5.43) şi (5.44) rezultă succesiv

$$\begin{cases} M_1 f_x = m_0 f_x - K m_1 f_x \\ M_2 f_x = m_0 f_x + K m_1 f_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = m_0 - K m_1 \\ M_2 = m_0 + K m_1 \end{cases}. \tag{5.65}$$

Semnal $x(t)$ are spectru discret, diferit de zero în intervalul

$$M_1 f_x \le |f| \le M_2 f_x. \tag{5.66}$$

Banda semnalului va fi

$$B = f_0 + Kf_1 - (f_0 - Kf_1) = 2Kf_1. \tag{5.67}$$

Prin urmare, frecvența minimă de eşantionare va fi $f_e > 2B = 4Kf_1$ datorită faptului că în relația (5.66) avem şi egalitate (vezi şi relația (5.23)).

Din relația (5.45) se vede că este posibil cazul în care $M_1 > 1$, prin urmare semnalul $x(t)$ poate să nu aibă nici o componentă spectrală de frecvența fundamentalei, f_x.

Dacă semnalul trece bandă a fost obținut prin modularea unei purtătoare cu un semnal modulator, eşantionarea semnalului trece bandă se poate face astfel încât să se obțină eşantioanele semnalului modulator.

Se cunoaşte faptul că un semnal trece bandă cu spectru continuu poate fi eşantionat cu o frecvență mai mică decât cea rezultată din teorema eşantionării. Cea mai mică frecvență de eşantionare folosită poate fi, în anumite condiții, $2f_B$, unde f_B este diferența dintre frecvența maximă şi cea minimă din semnalul trece bandă (banda semnalului) [Hs1, Br6, Pa4], relația (5.23).

Considerăm cazul semnalului periodic (cu spectru discret) din relația (5.39), $x(t) = p(t)\cos\omega_0 t$, adică, între semnalul modulator şi semnalul modulat nu avem defazaj.

Banda semnalului este dată de relația (5.67); prin urmare, conform [Hs1, Br6], frecvența minimă de eşantionare ar fi egală cu $2f_B = 4Kf_1$. În cazul nostru, deoarece în relația (5.66) avem şi egalitate, $f_{e\min} > 2f_B$.

Căutăm condițiile în care semnalul $x(t)$, cu spectru discret, poate fi eşantionat cu o frecvență egală cu cea corespunzătoare eşantionării semnalului $p(t)$, şi anume

$$f_e = f_{e1} = (2K+1)f_1 < 2f_s. \tag{5.68}$$

Rescriem relația (5.63) sub forma

$$f_1 = \frac{m_1}{m_0} f_0 \tag{5.69}$$

şi astfel relația (5.68) devine

$$f_{e1} = (2K+1)\frac{m_1}{m_0} f_0 . \tag{5.70}$$

Pentru ca eşantionând semnalul $x(t)$ cu frecvenţa minimă de eşantionare f_{e1} să obţinem direct eşantioanele semnalului modulator $p(t)$, trebuie ca frecvenţa f_0 să fie într-un anumit raport cu frecvenţa f_1. Notăm cu $T_{e1} = 1/f_{e1}$ pasul de eşantionare. Dacă dorim ca

$$x(iT_{e1}) = \pm p(iT_{e1}), \tag{5.71}$$

atunci trebuie să fie îndeplinită relaţia $\cos\omega_0 iT_{e1} = \pm 1$, adică

$$\cos\omega_0 iT_{e1} = \cos 2\pi f_0 i \frac{m_0}{m_1}\frac{1}{(2K+1)f_0} = \cos 2\pi i \frac{m_0}{m_1}\frac{1}{(2K+1)} = \pm 1 .$$

Rezultă două condiţii

1.

$$\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{2K+1} = s \Rightarrow \cos\omega_0 iT_{e1} = 1 \tag{5.72}$$

2.

$$\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{2K+1} = \frac{2s-1}{2} \Rightarrow \cos\omega_0 iT_{e1} = \pm 1 \tag{5.73}$$

unde s este un număr întreg.

Din condiţiile de mai sus rezultă valorile pe care le poate lua f_0 în funcţie de f_1, pentru cazul în care se doreşte utilizarea frecvenţei minime de eşantionare f_{e1}

1.

$$\frac{m_0}{m_1} = s(2K+1) \Rightarrow f_0 = s(2K+1)f_1 \tag{5.74}$$

2.

$$\frac{m_0}{m_1} = \frac{2s-1}{2}(2K+1) \Rightarrow f_0 = \frac{2s-1}{2}(2K+1)f_1 \tag{5.75}$$

unde $s = 1, 2, \ldots$.

Prin urmare f_0 poate lua valorile sf_{e1} sau $sf_{e1} - f_{e1}/2$, în acest caz, numărul de eşantioane prelevate din semnalul $x(t)$ pe o perioadă T_1, este minim şi egal cu $N = 2K+1$.

Dacă f_0 are o altă valoare, atunci numărul N de eşantioane prelevate va fi mai mare decât $2K+1$.

Pentru calculul coeficienţilor Fourier, între numărul de eşantioane N, perioada de eşantionare T_e şi perioada T_1 a semnalului modulator $p(t)$, avem relaţia

$$NT_e = mT_1 , \tag{5.76}$$

unde m este un număr întreg. Din condițiile (5.72) și (5.73) avem două relații pentru calculul numărului N de eșantioane ce se prelevează din semnalul $x(t)$, eșantioane ce au proprietatea descrisă de relația (5.71). Acestea sunt:
Cazul I

$$\omega_0 T_e = s2\pi \qquad (\cos\omega_0 i T_e = 1)$$

$$2\pi\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{T_1}\frac{mT_1 1}{N} = s2\pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; N = m\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{s} \tag{5.77}$$

Cazul II

$$\omega_0 T_e = s\pi \qquad \cos\omega_0 i T_e = \pm 1$$

$$2\pi\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{T_1}\frac{mT_1}{N_1} = s\pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; N = 2m\frac{m_0}{m_1}\frac{1}{s}. \tag{5.78}$$

unde: s este un număr întreg, N numărul de eșantioane prelevate de pe parcursul a mT_1 perioade, din semnalul $x(t)$. Pentru m se alege o astfel de valoare încât N să rezulte un întreg cât mai mic, dar mai mare sau egal cu $2K+1$. Frecvența de eșantionare utilizată rezultă din relația (5.76) și va avea valoarea

$$f_e = \frac{Nf_1}{m}.$$

Coeficienții Fourier corespunzători semnalului modulator $p(t)$ se vor calcula cu relația

$$c_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)e^{-jk\omega iT_e}, \tag{5.79}$$

pentru cazul I (N calculat cu relația (5.77)) și

$$c_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(iT_e)e^{-jk\omega iT_e}(-1)^i, \tag{5.80}$$

pentru cazul II (N calculat cu relația (5.78)). În relațiile (5.79) și (5.80) $\omega = 2\pi f_1$.

Semnalul $x(t) = p(t)\cos\omega_0 t$ conține termeni de forma $a_k \cos k\omega_1 t \cos\omega_0 t$ și $b_k \sin k\omega_1 t \cos\omega_0 t$. Aceștia pot fi scriși sub forma

$$a_k \cos k\omega_1 t \cos\omega_0 t = \frac{a_k}{2}\cos(\omega_0 - k\omega_1)t + \frac{a_k}{2}\cos(\omega_0 + k\omega_1)t \tag{5.81}$$

respectiv

$$b_k \sin k\omega_1 t \cos\omega_0 t = \frac{b_k}{2}\sin(\omega_0 - k\omega_1)t + \frac{b_k}{2}\sin(\omega_0 + k\omega_1)t. \tag{5.82}$$

Din relațiile (5.81) și (5.82) se observă că cele două componente ale semnalului trece bandă $x(t)$ cu frecvențele $f_0 - kf_1$ și $f_0 + kf_1$ au aceeași amplitudine, ceea ce particularizează acest semnal.

Concluzie: În cazul unui semnal trece bandă obținut prin modularea unei purtătoare de frecvență f_0, componentele armonicelor cu frecvențe simetrice față de f_0 au aceeași amplitudine.

Din sistemul (5.65) putem scrie

$$M_1 + M_2 = 2m_0 \tag{5.83}$$

deci suma ordinelor componentelor armonice corespunzătoare capetelor benzii de frecvență este un număr întotdeauna par. Această condiție este obligatorie datorită simetriei spectrului semnalului $x(t)$ față de frecvența f_0.

Se consideră că semnalul trece bandă $x(t)$ este real. În acest caz, coeficienții Fourier c_k și c_{-k} sunt complex conjugați prin urmare pot fi calculați doar coeficienții cu indice pozitiv, cei cu indice negativ se obțin ușor din cei calculați cu relația (5.29). Dacă semnalul trece bandă $x(t)$ este obținut prin modulare în amplitudine, în relația (5.59) coeficienții Fourier corespunzători componentelor armonice cu frecvențe aflate în stânga lui f_0 sunt complex conjujații celor corespunzători componentelor armonice cu frecvențe aflate în dreapta lui f_0. Astfel, se pot calcula chiar mai puțini coeficienți, aproximativ o pătrime. De exemplu, se vor calcula doar coeficienții c_k pentru k având valori în intervalul cu limitele date de componenta armonică de ordinul $M_0 = (M_1 + M_2)/2$, corespunzătoare frecvenței f_0 și componenta armonică de ordinul M_2.

Mai înainte a fost tratat cazul particular $p(t)\cos\omega_0 t$. Între semnalul purtător și cel modulator putem avea un defazaj astfel, în relație, mai apare un termen. Considerăm semnalul

$$y(t) = p_i(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos k\omega t \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5.84}$$

unde φ reprezintă defazajul purtătoarei față de semnalul modulator $p_i(t)$. Relația (5.84) poate fi scrisă sub forma

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos k\omega t \cos\varphi \cos\omega_0 t - \sum_{k=0}^{K} a_k \cos k\omega t \sin\varphi \sin\omega_0 t$$

$$= \sum_{k=0}^{K} a_k \cos\varphi \cos k\omega t \cos\omega_0 t - \sum_{k=0}^{K} a_k \sin\varphi \cos k\omega t \sin\omega_0 t$$

$$= p(t)\cos\omega_0 t - q(t)\sin\omega_0 t . \tag{5.85}$$

Semnalele modulatoare $p(t)$ şi $q(t)$ au aceeaşi perioadă şi acelaşi număr de coeficienţi în dezvoltarea în serie Fourier, coeficienţii $c_p(k)$, corespunzători semnalului $p(t)$ şi $c_q(k)$, corespunzători semnalului $q(t)$, nefiind independenţi. În cazul general, semnalele $p(t)$ şi $q(t)$ sunt două semnale modulatoare independente, relaţia (5.85) descriind o modulare în amplitudine în cuadratură.

În continuare, considerăm că semnalele periodice $p(t)$ şi $q(t)$ sunt diferite dar că au aceeaşi perioadă, notată T_1 şi păstrăm notaţia K pentru ordinul componentei armonice maxime din aceste semnale.

Funcţiile cosinus şi sinus sunt periodice în cazul nostru, cu perioada T_0. Rezultă, la fel ca în cazul anterior (fără defazaj) că există nişte numere întregi m_1 şi m_0, astfel încât $m_1 T_1 = m_0 T_0 = T$, adică

$$y(t) = y(t+T), \tag{5.86}$$

T fiind perioada semnalului modulat în amplitudine în cuadratură $y(t)$.

Pentru a obţine eşantioanele semnalelor $p(t)$ şi $q(t)$ direct din eşantioanele semnalului $y(t)$, pentru reconstrucţie corectă, avem nevoie de minim $2K+1$ eşantioane din fiecare semnal modulator (în total $2(2K+1)$ eşantioane).

Dacă se foloseşte o frecvenţă de eşantionare $f_e = 1/T_e$ astfel încât să fie valabilă relaţia

$$\omega_0 T_e = (2s-1)\frac{\pi}{2} \tag{5.87}$$

unde $s = 1, 2, \ldots$, atunci sunt valabile relaţiile

$$\begin{aligned} x(iT_e) &= \pm p(iT_e), \text{ pentru } i \text{ număr par,} \\ x(iT_e) &= \pm q(iT_e), \text{ pentru } i \text{ număr impar.} \end{aligned} \tag{5.88}$$

Cu alte cuvinte, se eşantionează semnalul modulat (trece bandă) $x(t)$ şi se obţin eşantioanele semnalelor modulatoare.

Din relaţiile notate (5.88) se poate observa că pasul de eşantionare corespunzător obţinerii de eşantioane din semnalele modulatoare $p(t)$ şi $q(t)$ este $2T_e$. Prin urmare, se poate scrie

$$N2T_e = mT_1, \quad N, m \text{ - numere întregi,} \tag{5.89}$$

unde N este numărul de eşantioane utilizate pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului $p(t)$ sau $q(t)$, iar m reprezintă numărul de perioade T_1 de pe care se vor preleva cele $2N$ eşantioane.

Din (5.87) şi (5.89), înlocuind pe ω_0 cu $2\pi m_0/(m_1 T_1)$, rezultă pentru calculul lui N relaţia

$$N = m\frac{m_0}{m_1}\frac{2}{2s-1}. \tag{5.90}$$

Termenul m se alege astfel încât N să fie întreg şi cât mai mic posibil, dar mai mare decât $2K+1$. Numărul total de eşantioane prelevate este $2N$. Calculul numărului N de eşantioane începe cu $m=1$ şi $s=1$.

Caz 1: Dacă în urma calculului folosind relaţia (5.90) rezultă pentru N un număr întreg, se măreşte variabila s şi se caută un întreg mai mic. În cazul în care se ajunge în situaţia $N<2(2K+1)$ se opreşte incrementarea lui s şi se alege cel mai mic număr întreg N care este mai mare sau egal cu $2(2K+1)$.

Caz 2: Dacă rezultatul calculului este un număr ce are partea fracţionară diferită de zero, se măreşte variabila m până când se ajunge la un rezultat întreg. În continuare, se execută calcule identice cu cele prezentate în cazul 1.

Din relaţia (5.90) se observă că pentru un număr de eşantioane N cât mai mic, trebuie ca m să fie cât mai mic şi s cât mai mare.

Perioada de eşantionare rezultă simplu din relaţia (5.89) şi anume

$$T_e = \frac{mT_1}{2N}. \tag{5.91}$$

Coeficienţii Fourier corespunzători semnalelor modulatoare $p(t)$ şi $q(t)$ se calculează cu relaţiile

$$c_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(2iT_e)e^{-jk\omega 2iT_e}(-1)^i, \tag{5.92}$$

$$c_q(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(2iT_e+T_e)e^{-jk\omega(2iT_e+T_e)}(-1)^{i+s}. \tag{5.93}$$

Pulsaţia ω va fi egală cu $2\pi f_1$, $k\in[-K,K]$.

Reconstrucţia semnalelor modulatoare se face folosind relaţiile

$$p_r(t) = \sum_{k=-K}^{+K} c_p(k)e^{jk\omega t}, \tag{5.94}$$

$$q_r(t) = \sum_{k=-K}^{+K} c_q(k)e^{jk\omega t}. \tag{5.95}$$

Semnalul trece bandă va fi reconstituit simplu, şi anume

$$x_r(t) = p_r(t)\cos\omega_0 t - q_r(t)\sin\omega_0 t. \tag{5.96}$$

5.5 Exemplu numeric

Conform [Hs1, Li1], un semnal trece bandă cu componente în domeniul de frecvenţe $f_m < f < f_M$ poate fi eşantionat cu o frecvenţă de eşantionare f_e mai mică decât f_M fără să apară procesul de aliere. Există anumite constrângeri în alegerea frecvenţei de eşantionare şi anume

$$\begin{cases} 1 \le i \le \dfrac{f_M}{f_B} \le \dfrac{i}{2}\dfrac{f_e}{f_B} \\ \dfrac{i-1}{2}\dfrac{f_e}{f_B} \le \dfrac{f_M}{f_B} - 1 \end{cases},$$

unde $f_B = f_M - f_m$ şi i este un întreg. Acest sistem poate fi scris mai simplu sub forma

$$\begin{cases} if_e \ge 2f_M \\ (i-1)f_e \le 2f_m \end{cases}$$

de unde rezultă limitele pentru frecvenţa de eşantionare

$$f_e \ge \frac{2f_M}{i} \quad \text{şi} \quad f_e \le \frac{2f_m}{i-1}. \tag{5.97}$$

Dacă

$$\frac{f_M}{f_B} = n$$

unde $n \in (I, I+1]$, I număr întreg, numărul de intervale în care poate exista o frecvenţă de eşantionare utilizabilă (nu apar erori de aliere) este I. Pentru fiecare interval, limitele pentru frecvenţa de eşantionare se calculează cu relaţiile notate (5.97). În aceste relaţii, i este un întreg ce poate lua valorile $i = 1, \ldots, I$.

Considerăm $f_M / f_B = 4$. Calculăm limitele celor trei intervale de frecvenţe în care poate exista frecvenţa de eşantionare aleasă. Pentru simplificarea calculelor alegem $f_B = 10$ şi atunci rezultă $f_M = 40$, $f_m = 30$. Rezultatele sunt trecute în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1 Limitele intervalelor de frecvenţe pentru $f_M / f_B = 4$

$\dfrac{f_M}{f_B}$	i	$f_e \ge$	$f_e \le$	$\dfrac{f_e}{f_B} \ge$	$\dfrac{f_e}{f_B} \le$
4	3	26.6	30	2,66	3,0
	2	40	60	4.0	6,0
	1	80	∞	8,0	∞

În tabel au fost trecute şi limitele frecvenţelor de eşantionare normate cu banda f_B pentru a fi utilizate mai târziu în desenarea unui grafic.

Pentru simulare a fost construit un semnal periodic trece bandă obţinut prin modulare în amplitudine în cuadratură. Acesta este descris de ecuaţia

$$x(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t) - q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

unde

$$p(t) = 0{,}5 + \cos(2\pi f_1 t) + 0{,}25\cos(2\pi 2 f_1 t) + 0.5\cos(2\pi K f_1 t) +$$
$$+ 0{,}5\sin(2\pi f_1 t) + 0.5\sin(2\pi K f_1 t)$$

şi

$$q(t) = \cos(2\pi 2 f_1 t) + 0{,}5\cos(2\pi K f_1 t) + 0{,}25\sin(2\pi 3 f_1 t) + 0{,}5\sin(2\pi K f_1 t).$$

Calculul numărului de eşantioane necesar pentru utilizarea relației (5.31) este prezentat în anexa F pentru valorile $f_1 = 1$, $K = 5$, $f_0 = 35$. Se pot obține numărul minim teoretic de eşantioane *Nm*, numărul minim utilizabil *Nu* şi alte valori mai mari, care respectă condițiile din teorema enunțată în paragraful 5.2. Pe baza numărului de eşantioane utilizat şi a frecvenței fundamentalei f_1 se obține frecvența de eşantionare corespunzătoare. Pentru valorile alese mai sus banda va fi $f_B = 10$, frecvența maximă din spectru $f_M = 40$ şi frecvența minimă $f_m = 10$. Raportul f_M / f_B are valoarea 4. În tabelul 5.2 sunt trecute frecvențele de eşantionare ce pot fi utilizate pentru o reconstrucție corectă.

Tabelul 5.2 Frecvențele de eşantionare ce pot fi utilizate pentru un semnal periodic trece bandă cu $f_1 = 1$, $K = 5$ $f_0 = 35$

$\frac{f_M}{f_B}$	i	N	f_e	$\frac{f_e}{f_B}$
4	3	27	27	2,7
		28	28	2,8
		29	29	2,9
	2	$41 \div 59$	$4{,}1 \div 5{,}9$	$4{,}1 \div 5{,}9$
	1	$81 \div \infty$	$8{,}1 \div \infty$	$8{,}1 \div \infty$

Frecvențele de eşantionare normate f_e / f_B sunt în intervalele definite în tabelul 5.1.

Reprezentarea grafică a semnalului periodic trece bandă $x(t)$ şi a semnalului reconstituit, notat $xr2(t)$, sunt prezentate în figura 5.2. Frecvența de eşantionare utilizată este $f_e = 27$.

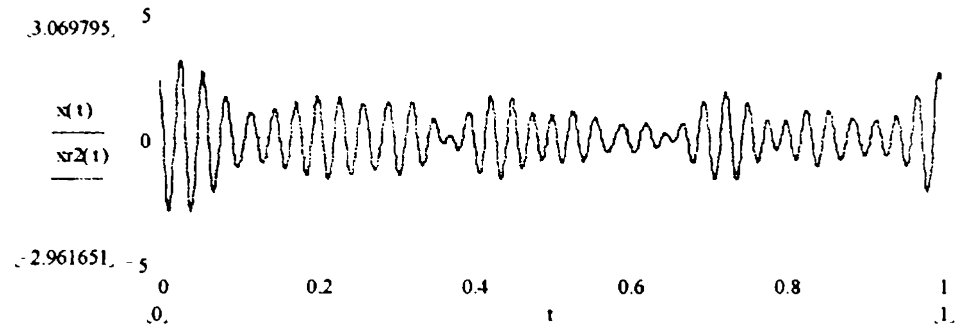


Fig. 5.2. Semnalul trece bandă x(t) şi reconstrucţia sa xr2(t).

Din figura 5.2 se vede că semnalul reconstituit trece prin aceleaşi puncte ca şi semnalul analizat, eroarea de reconstrucţie fiind neglijabilă.

Pentru obţinerea directă a eşantioanelor semnalelor modulatoare se calculează numărul de eşantioane cu relaţia (5.90). Termenul m_1 se alege 1, iar numărul de perioade m de pe care se prelevează esantioanele, se alege tot 1. În tabelul 5.3 se prezintă rezultatul calculelor obţinute cu relaţia (5.90) în funcţie de s.

Tabelul 5.3. Numărul de eşantioane N şi frecvenţa de eşantionare f_e în cazul $p(t), q(t)$

s	1	2	3	4	5
N	70	23,33	14	10	7,77
f_e	140	-	28	20	-

Deoarece $K = 5$, numărul minim de eşantioane necesar la eşantionarea semnalului $p(t)$ sau $q(t)$ este 11. Prin urmare, din tabel se poate alege $N = 14$. Calculele coeficienţilor Fourier s-au făcut cu relaţiile (5.92) şi (5.93), reconstrucţia semnalelor $p(t)$ şi $q(t)$ cu relaţiile (5.94) şi (5.95), iar semnalul trece bandă a fost reconstruit cu relaţia (5.96). Semnalele $p(t)$ şi $q(t)$ sunt prezentate în figura 5.3.

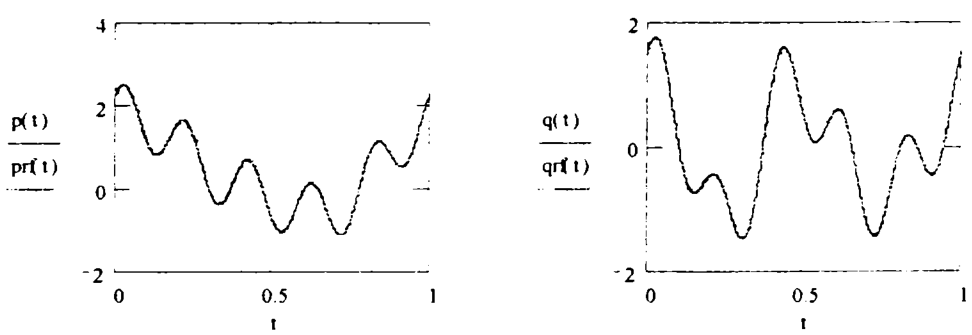


Fig. 5.3. Semnalele p(t), q(t) şi reconstrucţiile lor.

La fel ca în figura 5.2, reconstrucţia semnalelor modulatoare este făcută cu erori neglijabile.

Eşantionarea semnalelor periodice trece bandă poate fi făcută pe mai multe perioade T_1, astfel frecvenţa de eşantionare fiind mult redusă. În cazul în care se utilizează relaţia (5.31) şi se achiziţionează $N = 27$ eşantioane de pe o perioadă T_1, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e = 27$. Dacă aceste eşantioane se prelevează de pe $2T_1$, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e = 13{,}5$. Pentru achiziţia de pe $4T_1$, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e = 6{,}75$.

În cazul în care se doreşte obţinerea directă a eşantioanelor semnalelor modulatoare, din tabelul 5.3 rezultă că frecvenţa minimă de eşantionare este $f_e = 28$ (se prelevează $2N = 28$ eşantioane). Dacă prelevarea se face de pe $3T_1$ perioade, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e = 9{,}33$ dar şi $s = 2$ (dacă $2s - 1 = 3$ rezultă $s = 2$). Dacă prelevarea se face de pe $5T_1$, frecvenţa de eşantionare va fi $f_e = 5{,}6$, $s = 1$ (sau $s = 3$).

Prin urmare, dacă semnalul trece bandă este periodic, frecvenţele de eşantionare normate f_e / f_B pot avea şi valori mai mici decât 2. În cazul semnalelor trece bandă oarecare prezentat în literatură [Br1, Hs1, Va1], valoarea minimă a f_e / f_B este 2.

În figura de mai jos se prezintă zonele în domeniul frecvenţe (normate cu f_B), în care pot exista frecvenţe de eşantionare astfel încât reconstrucţia semnalului să se facă corect. Zonele haşurate reprezintă zonele în care constrângerile date de relaţiile notate (5.97) nu sunt satisfacute (nu pot fi alese frecvenţe din acele zone).

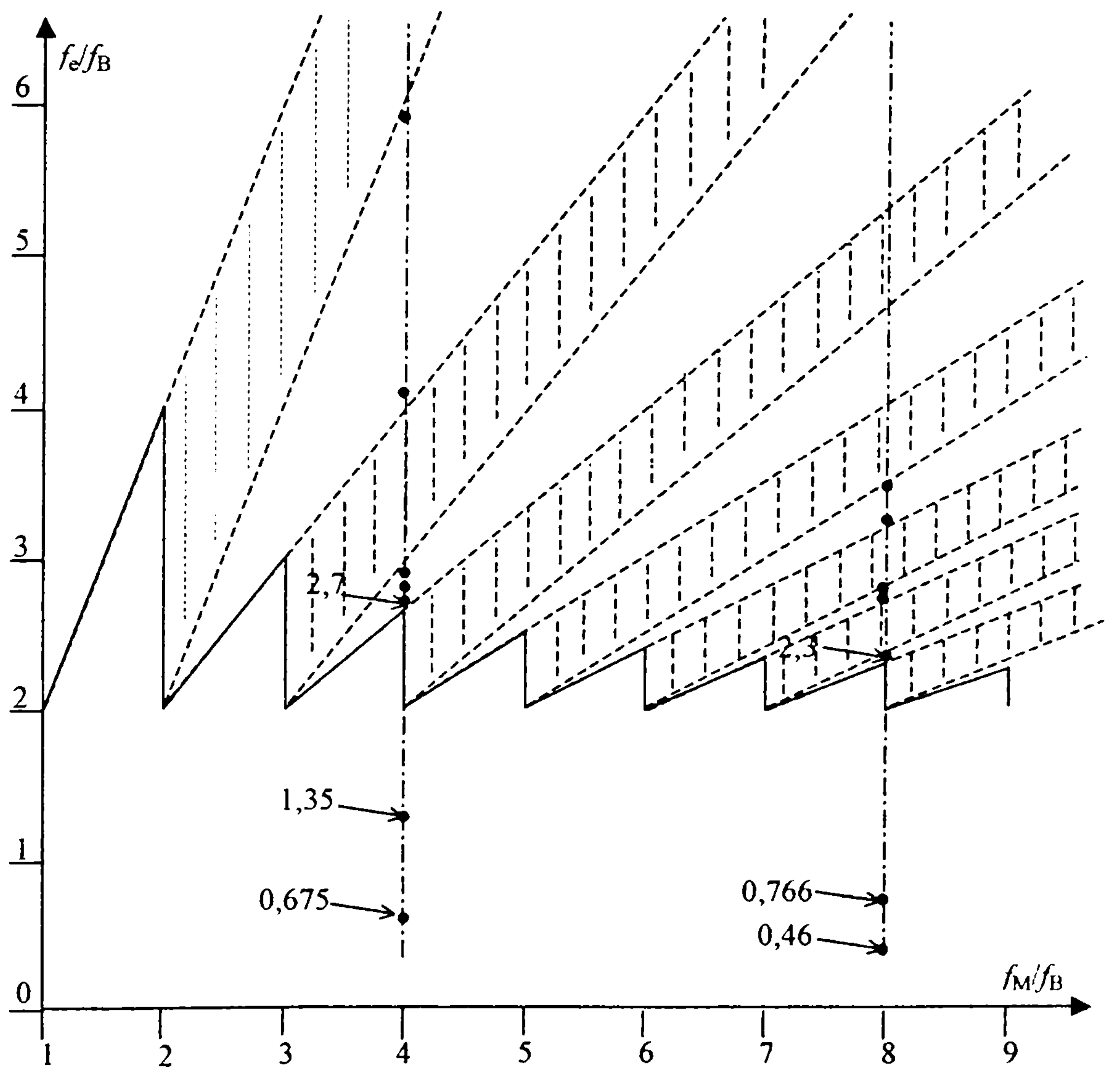


Fig. 5.4. Frecvenţe de eşantionare permise pentru un semnal trece bandă.

În figura 5.4 au fost trecute câteva puncte ce reprezintă frecvenţe de eşantionare, normate cu f_B, ce pot fi utilizate. De la limita $f_e/f_B = 2$ în sus, zonele nehaşurate reprezintă intervale, pentru o anumită valoare a termenului f_M/f_B, în care pot exista frecvenţe de eşantionare. De la limita $f_e/f_B = 2$ în jos, pot fi alese frecvenţe de eşantionare doar dacă semnalul trece bandă analizat este periodic. În acest caz eşantionarea se face pe mai multe perioade. Astfel, domeniul de frecvenţe de eşantionare ce pot fi utilizate a fost mărit.

Trecerea de la reprezentarea tradiţională analogică a semnalelor la una numerică (digitală) este motivată de numeroase avantaje. Aceste avantaje includ uşurinţa procesării semnalului, posibilitatea de a fi salvat pe un suport pentru mult timp fără ca proprietăţile sale să se modifice, posibilitatea de a face o copie sau mai multe fără pierdere de informaţie etc.

În prezenta teză de doctorat se tratează cu precădere eşantionarea semnalelor periodice şi, pe baza eşantioanelor prelevate, calculul coeficienţilor Fourier. Teza este structurată pe cinci capitole. În capitolul 1 se face o introducere în eşantionarea semnalelor cu accent pe eşantionarea semnalelor periodice. Este prezentată eroarea de aliere ce poate să apară în cazul eşantionării unui semnal oarecare de tip trece jos respectiv, un semnal periodic de tip trece jos. În capitolul 2 se prezintă posibilitatea de reducere a frecvenţei de eşantionare a unui semnal periodic prin prelevarea eşantioanelor de pe mai multe perioade. În capitolul 3 se tratează eşantionarea semnalelor periodice şi pare respectiv, impare. Sunt obţinute relaţii de calcul a coeficienţilor Fourier şi sunt prezentate câteva posibilităţi de obţinere a eşantioanelor necesare. În capitolul 4 se prezintă prelucrarea unui semnal oarecare prin periodicizarea pe porţiuni (intervale). Aceste intervale sunt considerate o perioadă dacă se utilizează periodicizarea prin repetare respectiv, o jumătate de perioadă dacă se utilizează periodicizarea prin oglindire şi repetare. semnalele utilizate sunt semnalul rampă şi semnalul sinusoidal. Semnalul rampă a fost ales deoarece, pe lângă faptul că este simplu de generat, fiecare eşantion prelevat are o valoare diferită de a celor deja prelevate sau de a celor ce urmează să fie prelevate. De asemenea, valoarea semnalului de la sfârşitul intervalului considerat a fi o perioadă este diferită de valoarea semnalului de la începutul acestui interval. Astfel, în cazul periodicizării prin repetare va rezulta un punct de discontinuitate indiferent de mărimea intervalului ales. Semnalul sinusoidal a fost ales deoarece este un semnal periodic simplu de generat iar diferenţa între două eşantioane succesive este variabilă pe parcursul intervalului de observare considerat a fi o perioadă. Dacă semnalul are o variaţie mai lentă şi valorile de la capetele intervalului ales sunt aproape egale, banda de frecvenţe a semnalului obţinut prin periodicizare este redusă şi prin urmare reconstrucţia poate fi realizată cu erori mai mici la frecvenţe reduse de eşantionare. În capitolul 5 se tratează eşantionarea semnalelor periodice de tip trece bandă. Sunt obţinute relaţiile de calcul a numărului de eşantioane necesare (şi implicit a frecvenţei de eşantionare) pentru calculul coeficienţilor Fourer. Sunt prezentate două cazuri. Unul în care semnalul periodic de tip trece bandă conţine doar componente armonice de ordin mai mare corespunzătoare unei frecvenţe $1/T$, unde T este perioada semnalului, ce pot fi obţinute prin filtrarea trece bandă a unui semnal periodic de tip trece jos. Al doilea caz îl reprezintă obţinerea semnalului periodic de tip trece bandă prin modularea în amplitudine a unei purtătoare sinusoidale cu un semnal modulator periodic de tip trece jos.

Generarea semnalelor, calculul frecvenţei de eşantionare (număr de eşantioane) necesară, al coeficienţilor Fourier, reconstrucţia semnalelor analizate şi graficele din lucrare au fost făcute cu ajutorul a două programe de calcul matematic şi anume: Mathcad şi Matlab.

Programul Mathcad a fost utilizat datorită uşurinţei cu care se scriu relaţiile de calcul. Acestea se introduc la fel ca în cazul editării ecuaţilor într-un program de editare. Domeniul de variaţie al variabilelor (de exemplu t pentru $x(t)$) poate fi ales în orice interval folosind un pas între două valori succesive ce poate fi diferit de unu. De asemenea este simplu de efectuat modificări într-un program (fişier) deja scris. Dezavantajul programului Mathcad este că efectuarea calculelor durează destul de mult timp. Acest lucru se datorează faptului că rezultatul calculelor nu se memorează. În cazul în care rezultatul unei operaţii matematice se utilizează în mai multe locuri in cadrul unui program, acea operaţie matematică se va executa la fiecare apelare (utilizare) a acelui rezultat. Ca exemplu considerăm două ecuaţii notate *ec*1 şi *ec*2. Cu ecuaţia *ec*1 se calculează unul din cei N=2K+1 coeficienţi Fourier ai unui semnal periodic $x(t)$ unde, K este ordinul componentei armonice corespunzătoare frecvenţei maxime din semnal. Pentru a calcula toţi coeficienţii ecuaţia *ec*1 se apelează de N ori. Cu ecuaţia *ec*2 se obţine semnalul $xr(t)$ ce reprezintă reconstrucţia semnalului $x(t)$ pe baza coeficienţilor Fourier. Timpul t nu este continuu ci discret; pasul între două valori succesive ale semnalului reconstituit poate fi ales mult mai mic decât perioada de eşantionare. Dacă se doreşte calculul valorii semnalului reconstituit $xr(t)$ pentru M valori ale lui t, ecuaţia *ec*2 va fi apelată de M ori. În calculul valorii semnalului $xr(t)$ într-un punct intervin toţi cei N coeficienţi Fourier. Astfel, pentru calculul a M valori ale semnalului $xr(t)$, ecuaţia *ec*1 va fi apelată de $M{\cdot}N$ ori (fiecare coeficient Fourier va fi calculat de M ori).

Pentru programul Matlab este mai dificil de scris un fişier (program) care să implementeze o ecuaţie (sau mai multe ecuaţii). Acest program de calcul lucrează cu vectori şi matrice. Indicele unui element dintr-un vector poate fi doar un număr întreg mai mare decât zero (de exemplu pentru $x(t)$, t poate avea valori întregi de la unu în sus). Acest indice indică poziţia elementului în vector. Modificarea conţinutului unui fişier nu este simplu de făcut. Ca avantaj – calculele sunt efectuate mai rapid – dacă elementele unui vector sau al unei matrice au fost calculate ele sunt memorate şi pot fi utilizate fără a fi recalculate la fiecare apelare.

Pentru calcule simbolice (calculul determinanţilor din tabelul 3.1) a fost utilizat programul Mathematica.

Principalele contribuţii aduse în cadrul prezentei teze de doctorat sunt evidenţiate în continuare:

1. În capitolul 1 se prezintă grafic faptul că un semnal periodic, datorită spectrului său discret, poate fi eşantionat cu o frecvenţă mai mică decât cea dată de teorema eşantionării fără să apară fenomenul de aliere. Condiţia ca fenomenul de aliere să nu apară este următoarea: diferenţa dintre frecvenţa minimă de eşantionare a semnalelor periodice dată de relaţia (1.17) şi frecvenţa de eşantionare utilizată nu poate fi egală cu multiplul frecvenţei fundamentalei. Dacă această condiţie este îndeplinită, spectrul semnalului şi replica sa centrată pe frecvenţa de eşantionare, se întrepătrund dar, liniile spectrale nu se suprapun. În acest caz, pentru reconstrucţia semnalului iniţial nu se mai poate utiliza un filtru trece jos deoarece anumite componente ce apar în spectru datorită întrepătrunderii trebuie să fie eliminate. Acest lucru se poate face cu ajutorul unui filtru pieptene ce are benzi de trecere cu frecvenţe centrale egale cu frecvenţele fundamentalei şi armonicelor din semnalul analizat.

2. În paragraful 1.5 se prezintă un algoritm ce permite alegerea frecvenţei minime de eşantionare a unui semnal periodic dacă nu se cunoaşte ordinul K_1 al componentei armonice corespunzătoare frecvenţei maxime din semnal, în cazul în care în semnalul analizat sunt prezente toate componentele armonice până la ordinul K_1. Dacă ordinul K

ales este mai mic sau egal cu K_1, coeficientul c_K va fi diferit de zero. De asemenea, $c_{K+1} = c_{-K} = c_K^*$, unde cu * s-a notat complex conjugatul, deoarece transformata Fourier (discretă) este periodică. Dacă ordinul K ales este mai mare decât K_1 atunci, $c_K = c_{K+1} = 0$. Dacă $c_{K-1} = c_{K+2}^* \neq 0$ şi $c_K = c_{K+1} = 0$ atunci valoarea lui K_1 este egală cu K-1. În cazul în care din semnalul analizat lipsesc mai multe componente armonice (succesive), obţinerea lui K_1 este puţin mai dificilă. Aceasta deoarece se poate ajunge la situaţia $c_K = c_{K+1} = 0$ chiar dacă K ales este mai mic decât K_1. În acest caz, semnal cu componente armonice lipsă, trebuie verificaţi toţi coeficienţii Fourier la modificarea valorii atribuite lui K şi nu doar coeficientul c_K. Pentru $K < K_1$ există coeficienţi c_k care au o valoare pentru $K = K'$ şi o altă valoare pentru $K = K''$, unde $K' < K'' \leq K_1$. Dacă $K > K_1$ coeficienţii c_k nu îşi schimbă valoarea dacă K se modifică de la K' la K'', unde $K_1 \leq K' < K''$. Şi acest caz este prezentat în acelaşi paragraf.

3. În paragraful 2.2 este obţinută relaţia notată (2.13) cu ajutorul căreia se calculează o valoare pentru frecvenţa de eşantionare a unui semnal periodic, valoare mai mică decât cea rezultată din teorema eşantionării. La această relaţie s-a ajuns pornind de la condiţia ca în intervalul de frecvenţe a unui semnal periodic să nu avem, pentru o anumită frecvenţă de eşantionare, două componente cu aceleaşi eşantioane. În acelaşi paragraf se demonstrează că prin utilizarea unei frecvenţe de eşantionare obţinută cu ajutorul relaţiei (2.13) nu apar erori de aliere. Prelevarea eşantioanelor necesare se face de pe un număr întreg şi par (putere a lui doi datorită împărţirii cu 2^P) de perioade ale semnalului analizat.

4. Relaţia (2.13) este destul de restrictivă prin faptul că eşantioanele necesare sunt prelevate doar de pe un număr par - putere a lui doi - de perioade. În paragraful 2.3 se tratează cazurile în care numărul M de perioade de pe care sunt prelevare eşantioanele necesare este impar sau par (nu doar putere a lui doi). Este enunţată o teoremă ce prezintă condiţia necesară pentru reducerea frecvenţei de eşantionare în cazul semnalelor periodice, şi anume, distanţa dintre oricare două eşantioane prelevate trebuie să fie diferită de multiplul perioadei de eşantionare. Din această teoremă rezultă condiţia necesară pentru o eşantionare corectă şi anume: numărul N de eşantioane necesare şi numărul M de perioade de pe care sunt ele prelevate nu trebuie să aibe nici un divizor comun. De aici rezultă că eşantioanele necesare pot fi prelevate şi de pe un număr impar de perioade ale semnalului analizat fără apariţia erorilor de aliere.

5. Dacă eşantioanele necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier sunt prelevate de pe o perioadă a semnalului analizat, se obţin într-o anumită ordine (eşantioane cu indicii de la 0 la N-1 în ordine crescătoare). În cazul în care acelaşi număr de eşantioane se prelevează de pe mai multe perioade, prin utilizarea unei frecvenţe mai mici de eşantioare, eşantioanele se vor obţine într-o ordine diferită faţă de eşantionarea pe o perioadă. Acest lucru înseamnă că eşantionul i, în cazul eşantionării pe mai multe perioade, nu este acelaşi cu eşantionul i în cazul eşantionării pe o perioadă. Sunt şi excepţii când aceste eşantioane sunt aceleaşi ca, de exemplu, prelevarea a câte un eşantion din perioade succesive. În acelaşi paragraf 2.3 se obţine o relaţie (notată (2.37)) cu ajutorul căreia se calculează ordinea de prelevare a eşantioanelor de pe mai multe perioade faţă de cazul eşantionării pe o perioadă.

6. În paragraful 3.4 se prezintă relaţiile de calcul ale coeficienţilor Fourier pentru un semnal periodic şi par, pentru un număr impar respectiv, par de eşantioane. Aceste eşantioane pot fi prelevate de pe parcursul unei jumătăţi de perioadă, de pe parcursul unei perioade sau de pe parcursul a mai multe perioade corespunzătoare semnalului analizat. Modul de obţinere a acestor relaţii este prezentat în anexa A. În paragraful 3.5 se prezintă relaţiile de calcul ale coeficienţilor Fourier pentru un semnal periodic şi impar şi, posibilităţi de prelevare a eşantioanelor necesare (de pe o perioadă sau mai multe). Modul de obţinere a acestor relaţii este prezentat în anexa B.

7. În paragraful 3.7.3 sunt obţinute relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier corespunzători unor semnale periodice pare, respectiv impare, în cazul în care procesul de eşantionare începe la un moment t_0 diferit de zero (se consideră începutul unei perioade ca fiind momentul zero). Se demonstrază faptul că pentru o eşantionare corectă (posibilitatea calculării coeficienţilor Fourier) t_0 trebuie să fie diferit de zero sau de multiplii de $T_e/2$, unde T_e este perioada de eşantionare. Această demonstrare se face în două moduri. Prima demonstrare porneşte de la relaţia de calcul a coeficienţilor Fourier şi se impune condiţia ca numitorul să fie diferit de zero. Pentru a doua demonstrare se scrie sistemul format din ecuaţiile corespunzătoare descompunerii în serie Fourier trigonometrică a semnalului analizat, pentru fiecare eşantion prelevat. Pentru ca sistemul să fie compatibil determinat, matricea formată din termenii cosinus (în cazul semnalelor periodice şi pare) trebuie să aibe determinantul diferit de zero. Sunt calculate valorile determinanţilor pentru mai multe astfel de matrice (K diferit) şi se obţine condiţia ca deteminantul să fie diferit de zero.

8. În capitolul 4 se analizează un semnal oarecare pe o anumită perioadă de timp, numită în teză „interval de observare" şi notat cu *IO*. Dacă *IO* este considerat o perioadă a unui semnal periodic, datorită valorilor diferite a semnalului la capetele intervalului, vor apare discontinuităţi. Rezultă o bandă de frecvenţe infinită. Acest mod de obţinere a unui semnal periodic pe baza unui *IO* dintr-un semnal oarecare este denumit în teză periodicizare prin repetare. Coeficienţii Fourier calculaţi sunt numere complexe. În teză se utilizează oglindirea setului de eşantioane corespunzătoare unui *IO* faţă de unul din capete pentru reducerea sau chiar eliminarea eventualelor discontinuităţi ce pot apare la capătul intervalului. Noul interval (*IO* plus *IO* oglindit) este considerat o perioadă a unui semnal periodic. În plus, prin oglindire şi repetare, semnalul periodic ce se formează este şi par, coeficienţii Fourier sunt numere reale şi pot fi calculaţi mai uşor pe baza unui număr mai mic de eşantioane faţă de cazul anterior (periodicizare prin repetare). În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare coeficienţii Fourier descresc mai repede decât în cazul periodicizării prin repetare datorită faptului că banda de frecvenţe este mai mică. Prin urmare, pentru erori comparabile, se pot neglija coeficienţii cu ordin mai mic, ceea ce duce la reducerea numărului de eşantioane necesare şi la reducerea volumului de calcul.

9. Eroarea de reconstrucţie a semnalului pe baza coeficienţilor Fourier scade mult mai mult dacă intervalul de reconstrucţie (notat *IR*) este ales mai mic mai mic ca *IO* decât dacă este mărită frecvenţa de eşantionare. În cazul periodicizării prin repetare, la creşterea frecvenţei de eşantionare, eroarea de reconstrucţie la începutul şi sfârşitul *IR* scade neglijabil; se consideră că *IR* este egal cu *IO*. În cazul periodicizării prin oglindire şi repetare, eroarea de reconstrucţie la începutul şi sfârşitul *IR* scade la jumătate cu dublarea frecvenţei de eşantionare. Aceeaşi scădere a erorii de reconstrucţie la începutul *IR* are loc în cazul oglindirii, dacă frecvenţa de eşantionare rămâne nemodificată dar, *IR* este mai mic decât *IO* cu două perioade de eşantionare; *IR* începe cu o perioadă de eşantionare mai târziu şi se termină cu o perioadă de eşantionare mai repede decât *IO*. Acest lucru duce la concluzia că în urma periodicizării prin oglindire şi repetare şi alegerea unui IR mai mic decât IO, se obțin erori de reconstrucție mici la frecvențe de eșantionare mici.

10. În paragraful 5.2 se demonstrează faptul că un semnal periodic trece bandă, ce are banda de frecvențe notată f_B și frecvența maximă din spectru notată f_M, poate fi eșantionat cu o frecvență de eșantionare f_e mai mare decât $2f_B$ dar mai mică decât $2f_M$ fără să apară procesul de aliere. Demonstrarea pornește de la condiția ca în intervalul de frecvențe a semnalului periodic trece bandă, pentru f_e aleasă, să nu existe componente cu aceleași eșantioane. O condiție suplimentară este ca frecvența minimă f_m din banda de frecvențe să fie mai mare decât această bandă, $f_m > f_M - f_m = f_B$.

11. Tot în paragraful 5.2 se prezintă o teoremă ce precizează condițiile pe care trebuie să le îndeplinească numărul N de eșantioane, prelevate de pe o perioadă a unui semnal periodic trece bandă astfel încât reconstrucția semnalului să se facă corect (să nu apară procesul de aliere). De asemenea, se deduce o relație (notată (5.31)), cu ajutorul căreia semnalul periodic trece bandă poate fi reconstituit pe baza celor N eșantioane prelevate, dacă N respectă condițiile teoremei. În anexa D se prezintă un program scris în Matlab ce implementează relația 5.31. În anexa C se prezintă un program scris în Matlab cu ajutorul căruia se poate calcula numărul minim de eșantioane ce îndeplinește condițiile teoremei din paragraful 5.2. Acest program atribuie lui N valori de la numărul minim teoretic (dat de condiția a) din teoremă) în sus, efectuează împărțiri și comparări pentru a verifica condițiile b) și c) din teoremă și, dacă ele sunt satisfăcute, returnează valoarea minimă ce poate fi utilizată pentru N. Un program similar scris în Mathcad oferă pe lângă valoarea minimă utilizabilă pentru N și alte valori mai mari. De asemenea sunt calculate și frecvențele de eșantionare corespunzătoare pentru cazul în care eșantioanele se prelevează de pe o perioadă a semnalului periodic trece bandă analizat.

12. În paragraful 5.3, pornind de la reprezentarea grafică a spectrului semnalului trece bandă eșantionat, sunt date două condiții care, dacă una din ele este îndeplinită, semnalul poate fi eșantionat cu o frecvență minimă, deoarece se pot preleva numărul minim de eșantioane necesare fără să apară procesul de aliere. În acest caz, un multiplu al frecvenței minime de eșantionare va fi mai mică decât frecvența minimă din spectrul semnalului cu o valoare egală cu $1/T$, unde T este perioada semnalului, sau mai mare decât frecvența maximă din spectrul semnalului cu aceeași valoare $1/T$.

13. În paragraful 5.4 se prezintă cazul semnalelor periodice de tip trece bandă obținute prin modularea în amplitudine a unei purtătoare sinusoidale cu un semnal modulator periodic de tip trece jos. Se obține o relație de calcul a perioadei semnalului trece bandă (notată 5.63) în funcție de perioada semnalului modulator respectiv, perioada semnalului purtător. În anexa C se prezintă un program de calcul a termenilor m_0 și m_1 ce intervin în relația 5.63, utili pentru calculul perioadei semnalului trece bandă și, calculul ordinelor M_1 și M_2 corespunzătoare componentelor armonice aflate la capetele benzii de frecvențe a semnalului modulat (trece bandă).

În același paragraf sunt obținute relațiile de calcul a frecvenței f_0 a semnalului purtător în funcție de frecvența minimă de eșantionare a semnalului modulator pentru ca semnalul rezultat prin modulare în amplitudine să poată fi eșantionat cu o frecvență minimă de eșantionare. Pentru cazul f_0 oarecare, sunt obținute relații de calcul a numărului minim de eșantioane, implicit și a frecvenței de eșantionare, pentru ca prin eșantionarea semnalului modulat să se obțină direct informații despre semnalul modulator (de fapt prin această eșantionare se face și demodularea semnalului periodic de tip trece bandă obținut prin modulare în amplitudine). În anexa E se prezintă schema logică a unui program de calcul a numărului minim de eșantioane necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului modulator. Informaţiile pe baza cărora se calculează acest număr sunt frecvenţa fundamentalei semnalului modulator, ordinul componentei maxime din semnalul modulator şi frecvenţa semnalului purtător.

În acelaşi paragraf sunt prezentate relaţiile de calcul ale coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului modulator (semnalelor modulatoare dacă este vorba de modulare în amplitudine în cuadratură).

Deoarece semnalul trece bandă analizat în capitolul 5 este periodic, eşantioanele necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier pot fi prelevate de pe mai multe perioade. Dacă eşantioanele sunt prelevate de pe o perioadă a semnalului atunci frecvenţa minimă de eşantionare este mai mare decât $2f_B$ (raportul f_e/f_B nu poate fi mai mic de 2). Dacă eşantionarea se face pe mai multe perioade rezultă o frecvenţă de eşantionare mult mai mică, iar raportul f_e/f_B poate ajunge mai mic decât 2. În cazurile prezentate în literatură sub acest prag f_e/f_B=2 nu se poate ajunge fără apariţia erorilor de aliere.

În continuarea celor prezentate, o direcţie de dezvoltare o reprezintă eşantionarea semnalelor trece bandă obţinute prin modularea în amplitudine a unei purtătoare (co)sinusoidale, $x(t) = p(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)$, la momente de timp iT_e pentru care $\cos(\omega_0 iT_e + \varphi) \neq 1$ dar şi $\neq 0$. În acest caz, valoarea eşantioanelor semnalului modulator $p(t)$ se pot obţine din eşantioanele semnalului modulat $x(t)$ prin împărţirea lor la $\cos(\omega_0 iT_e + \varphi)$

$$p(iT_e) = \frac{x(iT_e)}{\cos(\omega_0 iT_e + \varphi)}.$$

În acest caz este necesară cunoaşterea momentului prelevării unui eşantion din semnalul modulat faţă de momentul trecerii prin zero a semnalului purtător pentru calculul numitorului din relaţia de mai sus. De asemenea frecvenţa de eşantionare trebuie să fie sincronizată cu frecvenţa purtătoarei, la fel ca şi în cazul prezentat în paragraful 5.4 unde eşantionarea este făcută la momente de timp pentru care $\cos(\omega_0 iT_e) = \pm 1$.

După obţinerea unui set de eşantioane din semnalul modulator se poate aplica metoda periodicizării prin oglindire şi repetare (periodicizare prin paritate) pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului modulator.

Este posibil ca prin această metodă de obţinere a eşantioanelor, restricţiile cu privire la alegerea frecvenţei de eşantionare (relaţiile notate (5.97)) să fie mai puţin restrictive deoarece nu mai este necesar ca $\cos(\omega_0 iT_e + \varphi) = 1$.

[An1] Andre Angot, *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi telecomunicații*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965

[Be1] Bellman R., *Introducere în analiza matricească*, Ed. Tehnică, Bucureşti 1969

[Br1] Brown J. L., Jr., „First-Order Sampling of Bandpass Signals – A New Approach", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-26, no. 5, September 1980

[Br2] Brown J. L., Jr., „Sampling Bandlimited Periodic Signals – An Application of the DFT", Transaction on Education, vol. E-23, no. 4, November 1980

[Br3] Brown J. L., Jr., „An RKHS Analisis of Sampling Theorems for Harmonic – Limited Signals", IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, pp 437-440, April 1985

[Br4] Brown J. L., Jr., „Sampling of Bandlimited Signals: Fundamental Results and Some Extensions", Cap.3 din Bose N. K. and Rao C. R., Handbook of Statistics, vol. 10, Elsevder Science Publishers B.V., 1993

[Br5] Brown J. L., Jr., „On Quadrature Sampling of Bandpass Signals", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol AES-15, No. 3, pp 366-371, May 1979

[Br6] Bracewell N. R., *The Fourier Transform and Its Applications*, Mc. Graw-Hill Inc. 1978

[Br7] Brigham E. Oran, *The Fast Fourier Transform and its Application*, Prentice-Hall 1988

[Br8] Brăileanu G., „Sampled Signal Reconstruction and Nyquist Frequency", IEEE Signal Processing Magazine, vol. 13, Issue 6, pp 26-32, September 1996

[Bu1] Buzdugan Gh. (coordonator), *Manualul Inginerului*, vol.1, Ed. Tehnică, Bucureşti 1965

[Bu2] Butzer P. L., Nessel R., *Fourier Analis and Approximation*, vol. I, Birkhäuser Verlag, Stutgart, 1971

[Ca1] Cartianu Gh., *Analiza şi sinteza circuitelor electrice*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1972

[Ce1] Ceangă E., Munteanu T., Bratcu A., Culea M., *Semnale, Circuite şi Sisteme*, Partea 1: Analiza semnalelor, Ed. Academică, 2001

[Ch1] Chassaing R., *Digital Signal Processing with C and the TMS320C30*, John Willey & Sons, Inc., New - York, 1992

[Cr1] Crstici B., *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[Dr1] Dragu I., Iosif I., *Prelucrarea numerică a semnalelor discrete în timp*, Ed. Militară, Bucureşti 1985

[Du1] Dumitrescu B., *Prelucrarea semnalelor: breviar teoretic, probleme rezolvate, ghid Matlab*, versiunea 5.3, mai 2003, Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Automatică şi Calculatoare

[Ga1] Gallagher N. C., Jr., Wise G. L., „A representation for bandlimited functions", Proceesing of the IEEE, vol. 63, pp 1624-1625, 1975

[Gh1] Ghinea M., *Procesarea digitală a semnalelor*, Editura Tritonic, Bucureşti, 1997

[Go1] Goldman S., *Teoria Informatiei*, NY Interscience 1965

[Ha1] Harris F. J., „On the use of windows for harmonic analisis with the discrete Fourier Transform", Proceesing of the IEEE, vol. 66, no. 1, pp 51-83, Ianuary 1978

[Hi1] Higgins R. J., „Five short stories about the cardinal series", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 12, no. 1, pp 45-89, 1985

[Hs1] Hsu P. Hwei, „Sampling", cap. 2 din „The Communications Handbook", Gibson D. Jerry, CRC Press, 1997

[If1] Ifeachor C. E., Jervis W. B., *Digital Signal Processing. A Practical Approach*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993

[Ig1] Ignea A., Pop E., „Eşantionarea semnalelor pentru obținerea de valori medii", Metrologia aplicată, vol. XXVII, nr. 1, pp 7-11, 1980

[Je1] Jerri J. Abdul, „The Shannon Sampling Theorem – Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review", Proceedings of the IEEE, vol. 65, no. 11, pp. 1565-1596, November 1977

[Ku1] Kuo M. S., Lee H. B., *DSP - Real Time Digital Signal Processing*, John Willey & Sons Ltd., England, 2001

[Li1] Liu J.,Zhon X., Peng Y., „Spectral Arrangement and other Topics in First – Order Bandpass Sampling Theory", IEEE Trans. on Sig. Proc., vol. 49, no. 6, pp. 1260-1263, June 2001

[Ly1] Lyons G. R., *Understanding Digital Signal Processing*, Prentice Hall 2001

[Ma1] Mateescu Ad., *Semnale, circuite şi sisteme*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

[Ma2] Marks II J. R., *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 1991

[Ma3] Marple L., „Exploding the Nyquist Barrier Misconception", IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 13, Issue 6, pp. 32-42, September 1996

[Ma4] Marple S. L. jr., „Restoring the Nyquist Barrier", IEEE Signal Processing Magazine, pp 24-28, January 1996

[Na1] Nafornită I, Câmpeanu A, Isar A., *Semnale, circuite şi sisteme*, Centrul de multiplicare UPT, Timişoara, 1995

[Ne1] Neal C. G., Wise L. G., „A Representation for Band-Limited Functions", Proceedings of the IEEE, pp. 1624-1625, November, 1975

[Op1] Oppenheim A., Schafer R., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975

[Pa1] Papoulis A., *The Fourier Integral and its Applications*, N.Y., McGraw-Hill, 1962

[Pa2] Papoulis A., *Signal Analysis*, N.Y., McGraw-Hill, 1977

[Pa3] Pazsitka R., „Sampling of even or odd signals", Proceedings of the Symposium of Electronics and Telecommunications, ETC2000, vol. 2, pp. 117-120, Timişoara, November 23-24, 2000

[Pa4] Pazsitka R., „Sampling of Bandpass Periodical Signals", Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications, ETC2002, vol. 1, pp. 162-167, Timişoara, September 19-20, 2002

[Pa5] Pazsitka R., Toma L., Stoiciu D., De Sabata A., „A Method to Derive the Sampling Theorem for Bandpass Signals", Buletinul Ştiinţific al Universităţii "Politehnica" din Timişoara, Tom 48 (62), Fascicola 2, 2003

[Pa6] Pazsitka R., „Sampling Amplitude Modulated Signal", Buletinul Ştiinţific al Universităţii "Politehnica" din Timişoara, Tom 48 (62), Fascicola 2, 2003

[Pf1] Pfaffelhuber E., „Sampling Series for Band-Limited Generalized Functions", Transactions on Information Theory, vol IT-17, no. 6, pp. 650-654 , November, 1971

[Po1] Pop E., Stoica V., *Principii şi metode de măsurare numerică*, Ed. Facla, Timişoara, 1977

[Po2] Pop E., Nafornită I., Tiopnuţ V., Toma L., Mihăescu A., *Metode în prelucrarea numerică a semnalelor*, Ed. Facla, Timişoara, 1986

[Po3] Pop E., „Teoria generală a măsurării", curs an 6, ETC-IE, 1997

[Ra1] Radu O., Săndulescu Gh., *Filtre numerice. Aplicații*, Ed. Tehnică, București, 1979

[Ra2] Rabiner R. L., „On the Use of Symetry in FFT Computation ", IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol. AASP-27, no. 3, pp 233-239, June, 1979

[Ra3] Rader M. C., „Recovery of Undersampled Periodic Waveforms", IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-25, no. 3, pp 242-249, June 1977

[Sh1] Shannon E. C., „Communications in the Presence of Noise", Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pp 10-21, January, 1949; Proceedings of the IEEE, vol. 86, no. 2, pp 447-457, February, 1998

[Sp1] Spătaru Al., *Teoria transmisiunii informației. Semnale și perturbații*, Ed, Tehnică, București, 1965

[Sm1] Smith W. S., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, Second Edition, California Technical Publishing, San Diego, California,1999

[Sm2] Smith J. L., „Breaking the Nyquist Barrier", IEEE Signal Procesing Magazine, pp 41-43, July 1995

[St1] Straton J. A., *Theorie de L'Electromagnetisme*, Dunod, Paris, 1961

[St2] Stearns D. S., *Digital Signal Analisis*, Hayden Book Company, Inc. New-Jersey, 1975

[St3] Stanomir D., Stănășilă O., *Metode matematice în teoria semnalelor*, Ed. Tehnică, București, 1980

[St4] Stănășilă O., Șabac Gh. I., *Matematici speciale*, vol. 2, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983

[St5] Stolojanu G., ș.a., *Prelucrarea numerică a semnalului vocal*, Ed. Militară, București, 1984

[St6] Stremler G. F., „Analog Modulation", cap. 1 din „The Communications Handbook", Gibson D. Jerry, CRC Press, 1997

[St7] Stearns D. S., David A. R., *Signal Processing Algorithms in Matlab*, Prentice Hall, 1996

[Ti1] Tiponuț V., „Studii privind aplicarea eșantionării la aparatele de măsură", Teză de doctorat, Timișoara, 1981

[To1] Tolstov G. P., *Serii Fourier*, Ed. Tehnică, București, 1955

[To2] Toma L. „Metodă de eliminare a erorilor la estimarea frecvențelor sinusoidelor", EAA – Automatică şi electronică, vol. 30, nr. 3, pp 91-92, 1986

[Ts1] Tseng C. H., „Bandpass Sampling Criteria for Nonlinear Systems", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 3, pp 568-577, March 2002

[Ți1] Țițeica S., *Mecanica cuantică*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1984

[Un1] Unser M., „Sampling – 50 Years After Shannon", Proceedings of the IEEE, vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April, 2000

[Va1] Vaughan B. R., Scott L. N., White R. D., „The Theory of Bandpass Sampling", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 39, no. 9, pp. 1973-1984, September, 1991

[Vl1] Vlasov A. K., *Curs de Matematică Superioară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1951

[Xi1] Xi J., Chicharo J., „A New Algorithm for Improving the Accuracy of Periodic Signal Analisis", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 45, no. 4, pp. 827-831, August, 1996

[Yo1] Young H. P., *Electronic Communication Techniques*, Prentice Hall, 1994

[Ze1] Zemanian A. H., *Generalized Integral Transformation*, John Wiley & Sons Inc., 1968

CALCULUL COEFICIENŢILOR FOURIER a_k CORESPUNZĂTORI UNUI SEMNAL PERIODIC ŞI PAR

În această anexă se vor obţine relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier a_k, $k = 0,1,...,K$, a unui semnal periodic par $f_p(t)$, de perioadă T_0, care are un număr de K componente armonice. Utilizăm ca punct de plecare relaţia (1.3) rescrisă mai jos

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right], \tag{A.1}$$

unde coeficienţii b_k sunt egali cu zero. Indicele superior de însumare ∞ îl înlocuim cu $N-1$ unde N reprezintă numărul de eşantioane prelevate din semnalul $f_p(t)$ pe parcursul unei perioade (sau a mai multor perioade). De asemenea, timpul continuu t este înlocuit cu momentele iT_e, unde T_e reprezintă perioada de eşantionare $T_e = T_0/N$, iar $i = 0,1,...,N-1$. Rezultă relaţia

$$f_p(iT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(k\omega_0 iT_e). \tag{A.2}$$

Înmulţim relaţia (A.2) cu $\cos(n\omega_0 iT_e)$ unde n este o variabilă cu acelaşi domeniu de definiţie ca şi k. Se obţine

$$f_p(iT_e)\cos(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(k\omega_0 iT_e)\cos(n\omega_0 iT_e). \tag{A.3}$$

În continuare, în urma însumării după toate valorile lui i, relaţia (A.3) devine

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_p(iT_e)\cos(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{i=0}^{N-1}\cos(k\omega_0 iT_e)\cos(n\omega_0 iT_e). \tag{A.4}$$

În relaţia (A.4) se aplică formula

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

rezultând

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_p(iT_e)\cos(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{i=0}^{N-1}\frac{\cos\left((k+n)\omega_0 iT_e\right) + \cos\left((k-n)\omega_0 iT_e\right)}{2}. \tag{A.5}$$

Suma după i din membrul drept poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\cos((k+n)\omega_0 iT_e)+\cos((k-n)\omega_0 iT_e)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\cos((k+n)\omega_0 iT_e)+\sum_{i=0}^{N-1}\cos((k-n)\omega_0 iT_e)\right] \tag{A.6}$$

Folosindu-ne de relația

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos i\alpha=\cos(N-1)\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin N\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{A.7}$$

şi înlocuind pe α cu $(k-n)\omega_0 T_e$, respectiv cu $(k+n)\omega_0 T_e$, avem pentru sumele din relația (A.6)

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos((k-n)\omega_0 iT_e)=\begin{cases}0 & pentru \quad k\neq n\\ N & pentru \quad k=n\end{cases} \tag{A.8}$$

respectiv

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos((k+n)\omega_0 iT_e)=\begin{cases}0 & pentru \quad k+n>0\\ N & pentru \quad k+n=0\end{cases} \tag{A.9}$$

Suma din relația (A.9) este diferită de zero doar pentru $k=n=0$ deoarece variabilele k şi n sunt numere pozitive în domeniul 0 la $N-1$. Astfel, pentru coeficientul a_0 se obține relația

$$a_0=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}f_p(iT_e), \tag{A.10}$$

iar pentru coeficienții a_k, $k=1,2,...,K$, se obține

$$a_k=\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}f_p(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e). \tag{A.11}$$

În cazul în care N este un număr *impar*, datorită faptului ca eşantioanele sunt egale între ele două câte două ($f_p(iT_e)=f_p((N-i)T_e)$), se pot utiliza un număr mai mic de eşantioane pentru a calcula valorile coeficienților a_k. Deoarece ultimul eşantion prelevat dintr-o perioadă a semnalului periodic par $f_p(t)$ este $f_p((N-1)T_e)$, înseamnă că eşantionul $f_p(0)$ este unic ($f_p(0)=f_p(NT_e)$, eşantion care nu este prelevat), restul eşantioanelor fiind egale două câte două ($N-1$ fiind un număr par). Şi în cazul funcției cosinus avem aceeaşi relație de egalitate şi anume

$$\cos(k\omega_0(N-i)T_e) = \cos(k\frac{2\pi}{NT_e}(N-i)T_e) = \cos(k\frac{2\pi}{N}i) = \cos(k\omega_0 iT_e)$$

astfel relaţia (A.11) devine

$$a_k = \frac{2}{N}\left(f_p(0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{K} f_p(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e)\right). \tag{A.12}$$

În acest caz numărul de eşantioane prelevate este $K+1$ (primele $K+1$ eşantioane din cele $N=2K+1$). Deoarece semnalul analizat este periodic, frecvenţa de eşantionare poate fi redusă prin prelevarea eşantioanelor, necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier, de pe mai multe perioade ale semnalului $f_p(t)$.

În cazul în care N este un număr *par*, primul eşantion $f_p(0)$ este unic şi, deoarece $N-1$ este un număr impar, rezultă că şi eşantionul $f_p(\frac{N}{2})$ $(=f_p(K+1))$ este unic, restul fiind egale două câte două; prin urmare, relaţia (A.11) poate fi rescrisă sub forma

$$a_k = \frac{2}{N}\left(f_p(0) + f_p((K+1)T_e)\cos(k(K+1)\omega_0 T_e) + 2\cdot\sum_{i=1}^{K} f_p(iT_e)\cos(k\omega_0 iT_e)\right). \tag{A.13}$$

În acest caz numărul de eşantioane prelevate este $K+2$.

CALCULUL COEFICIENŢILOR FOURIER b_k CORESPUNZĂTORI UNUI SEMNAL PERIODIC ŞI IMPAR

În această anexă se vor obţine relaţiile de calcul a coeficienţilor Fourier b_k, $k = 1,2,...,K$, a unui semnal periodic impar $f_I(t)$, de perioadă T_0, care are un număr de K componente armonice. Utilizăm ca punct de plecare relaţia (1.3), rescrisă mai jos

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right], \tag{B.1}$$

unde coeficienţii a_k sunt egali cu zero, $f(t)$ devenind $f_I(t)$. Indicele superior de însumare ∞ îl înlocuim cu K care reprezintă numărul de coeficienţi diferiţi de zero deoarece presupunem că în semnal avem K componente armonice. De asemenea, timpul continuu t este înlocuit cu momentele iT_e, unde T_e reprezintă perioada de eşantionare $T_e = T_0/N$ iar $i = 0,1,...,N-1$, N fiind numărul de eşantioane prelevate pe parcursul unei perioade ţinând cont de teorema eşantionării aplicată la semnale periodice ($N \geq 2K+1$). Rezultă relaţia

$$f_I(iT_e) = \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(k\omega_0 iT_e). \tag{B.2}$$

Înmulţim relaţia (B.2) cu $\sin(n\omega_0 iT_e)$, unde n este o variabilă de calcul cu acelaşi domeniu de definiţie ca şi k, obţinând

$$f_I(iT_e)\sin(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega_0 iT_e)\sin(n\omega_0 iT_e). \tag{B.3}$$

Pentru fiecare din cele N eşantioane prelevate avem o relaţie de tipul (B.3). Însumând toate aceste relaţii obţinem

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_I(iT_e)\sin(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=1}^{K} b_k \sum_{i=0}^{N-1}\sin(k\omega_0 iT_e)\sin(n\omega_0 iT_e). \tag{B.4}$$

Ţinând cont de faptul că

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2},$$

relaţia (B.4) devine

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_I(iT_e)\sin(n\omega_0 iT_e) = \sum_{k=1}^{K} b_k \sum_{i=0}^{N-1}\frac{\cos((k+n)\omega_0 iT_e)+\cos((k-n)\omega_0 iT_e)}{2}. \tag{B.5}$$

Suma după i din partea dreaptă a egalităţii o rescriem sub forma

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\cos((k+n)\omega_0 iT_e) + \cos((k-n)\omega_0 iT_e)}{2} = \\ = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\cos((k+n)\omega_0 iT_e) + \sum_{i=0}^{N-1}\cos((k-n)\omega_0 iT_e)\right] \tag{B.6}$$

Folosind egalitatea

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos i\alpha = \cos(N-1)\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin N\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{B.7}$$

şi înlocuind pe α cu $(k+n)\omega_0 iT_e$ respectiv, cu $(k-n)\omega_0 iT_e$, vom obţine

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos((k+n)\omega_0 iT_e) = \begin{cases} 0 & pentru \quad k+n>0 \\ N & pentru \quad k+n=0 \end{cases} \tag{B.8}$$

respectiv,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos((k-n)\omega_0 iT_e) = \begin{cases} 0 & pentru \quad k \neq n \\ N & pentru \quad k=n \end{cases}. \tag{B.9}$$

Relaţia (B.8) este diferită de zero doar pentru $k = n = 0$, ceea ce nu este posibil deoarece nu avem coeficientul b_0. Prin urmare, relaţia de calcul pentru coeficienţii b_k, $k = 1,2,\ldots,K$, este

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e). \tag{B.10}$$

Deoarece între eşantioane avem o relaţie de egalitate (în modul) şi în acelaşi timp avem o înmulţire între două funcţii impare, rezultatul fiind o funcţie pară, rezultă că

$$f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e) = f_I((N-i)T_e)\sin(k\omega_0(N-i)T_e), \tag{B.11}$$

prin urmare, relaţia (A.10) poate fi scrisă sub forma

$$b_k = \frac{4}{N}\sum_{i=0}^{K} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e), \tag{B.12}$$

dacă N este un număr impar şi

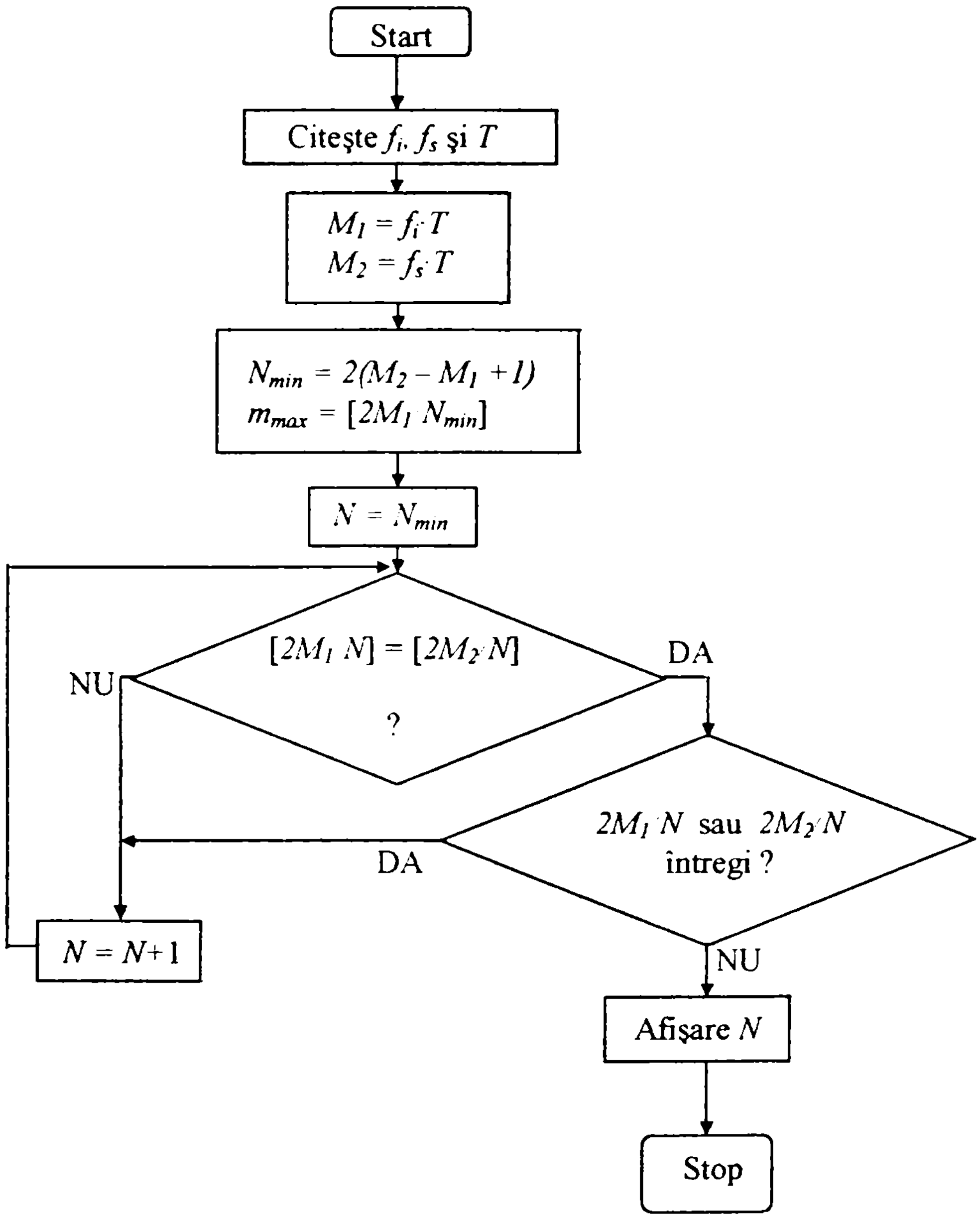
$$b_k = \frac{4}{N}\sum_{i=0}^{K+1} f_I(iT_e)\sin(k\omega_0 iT_e), \tag{B.13}$$

dacă N este un număr par.

Deoarece $K+1=\frac{N}{2}$ şi $\sin(k\omega_0 \frac{N}{2}T_e)=\sin(k\pi)=0$, rezultă că eşantionul $f_I(\frac{N}{2}T_e)$ (care oricum are valoarea zero deoarece semnalul este periodic şi impar) este înmulţit cu zero şi prin urmare poate fi eliminat din calcul; relaţia (B.13) devine aceeaşi cu (B.12). Astfel, se utilizează doar jumătate din numărul de eşantioane necesare conform teoremei eşantionării, prin urmare se poate reduce frecvenţa de eşantionare cel puţin la jumătate. O reducere mai mare a frecvenţei de eşantionare poate fi realizată prin prelevarea eşantioanelor, necesare calculului coeficienţilor Fourier, de pe mai multe perioade a semnalului analizat.

CALCULUL TERMENILOR N, M_1, M_2, m_1, m_0 PENTRU UN SEMNAL DE TIP TRECE BANDĂ

Mai jos se prezintă schema logică pentru calculul numărului N de eşantioane ce trebuie prelevate din semnalul periodic trece bandă $x(t)$ analizat, pentru ca, utilizând relaţia (5.31), acesta să poată fi reconstituit din eşantioanele sale. Dacă avem doar banda de frecvenţe (f_i, f_s) a acestui semnal şi perioada T a semnalului, ordinele M_1 şi M_2 ale armonicelor corespunzătoare capetelor benzii de frecvenţe se pot calcula uşor cu relaţiile $M_1 = f_i \cdot T$ şi $M_2 = f_s \cdot T$.



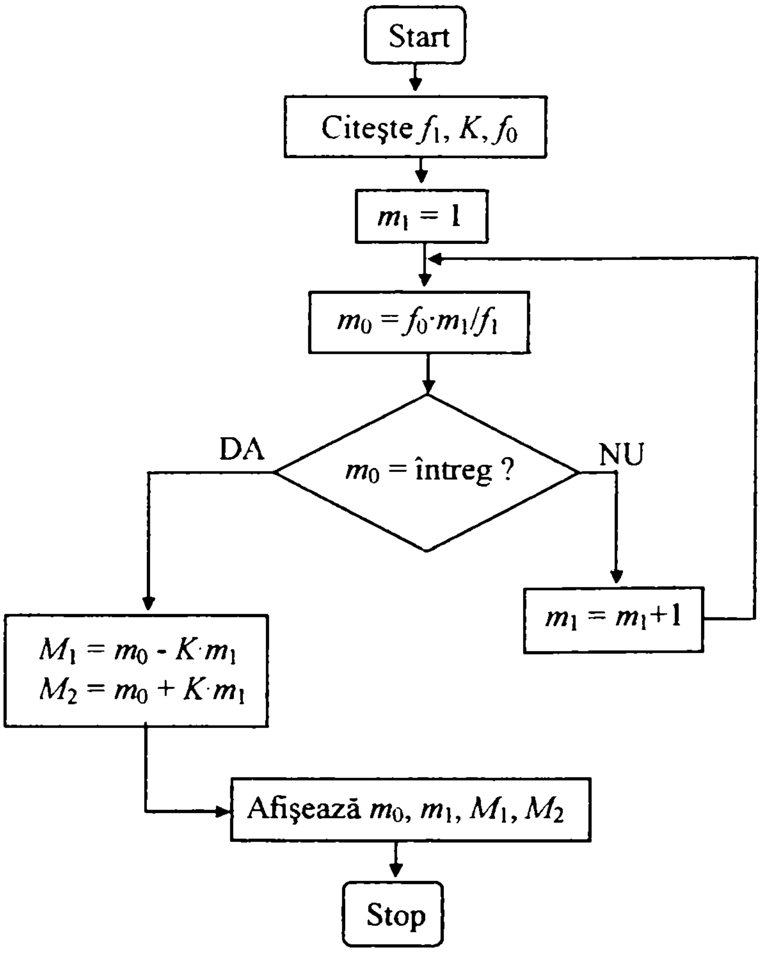
Programul scris în matlab ce imlementează schema logica de mai sus, este listat în continuare:

```
clear
fi = 70;
fs = 90;
f = 2;
T = 1/f;
M1 = fi*T;
```

```
M2 = fs*T;
Nmin = 2*(M2-M1+1);
m_max = floor(2*M1/Nmin);
N = Nmin;
for k = Nmin:2*Nmin
   co1 = floor(2*M1/N);
   co2 = floor(2*M2/N);
   co3 = 2*M1/N-co1;
   co4 = 2*M2/N-co2;
   if co1 == co2 & co3 ~= 0 & co4 ~=0
      break
   end
   N = N+1;
end

N
```

Dacă semnalul periodic trece bandă a fost obținut prin modularea în amplitudine a unei purtătoare sinusoidale cu un semnal periodic trece jos $p(t)$, ordinele M_1 și M_2 se obțin după efectuarea unor calcule puțin mai complicate. Calculele se fac în funcție de frecvența f_1 a fundamentalei semnalului modulator, ordinul K corespunzător armonicei maxime din acest semnal și frecvența f_0 a purtătoarei. Se calculează termenii m_0 și m_1 (vezi relația (5.62 sau 5.63)), întregi ce nu au voie să aibă divizori comuni și pe baza lor, se calculează M_1 și M_2. Mai jos, se prezintă schema logică pentru calculul termenilor m_0, m_1, M_1 și M_2.



Programul scris în matlab ce implementează schema logica de mai sus este listat în continuare:

```
clear
f1=2;       se introduce [illegible]
K=5;        [illegible] introduce K
f0=80;      se introduce [illegible]
m01=f0/f1;
m1=1;       initializare
m0=m01*m1;
R=rem(m0,1); restul [illegible] la
while R ~=0
   m1=m1+1;
   m0=m01*m1;
   R=rem(m0,1);
end
M1 = m0 - K*m1;
M2 = m0 + K*m1;
Af
m1
m0
M1
M2
```

PROGRAM CE IMPLEMENTEAZĂ RELAȚIA (5.31)

În această anexă se prezintă un program numit *k1_k2* ce implementează relația (5.31) în matlab. Acest program, la rândul sau, apelează o funcție *fincdf* ce generează eșantioanele semnalului trece bandă $x(t)$ obținut prin modulare în amplitudine, relația (5.85). Modificând această funcție se poate schimba numărul de componente și amplitudinile acestora din semnalele $p(t)$ și $q(t)$.

```
clear
global f1 Km f0
f1 = 2;
T1 = 1/f1;
Km = 5;
f0 = 80;
m1 = 1;
m0 = (f0*m1)/f1;
K1 = m0-Km*m1;

K2 = m0+Km*m1;
Nmin = 2*(K2-K1+1);
m_max = floor(2*K1/Nmin);
N = Nmin;
cont = 1;

for k = Nmin:2*Nmin
   co1 = floor(2*K1/N);
   co2 = floor(2*K2/N);
   co3 = 2*K1/N-co1;
   co4 = 2*K2/N-co2;
   if co1 == co2 & co3 ~= 0 & co4 ~=0
      break
   end
   N = N+1;
end
N
incep = 0;
pas = 0.001;
sf = 1;
t = incep:pas:sf;
increm = incep;

for tt = 1:length(t)
   si(tt) = fincdf(f0, f1, Km, increm);
   increm = increm + pas;
end
figure(1)
plot(t,si)
title '          '
Te = T1/N;
increm = incep;
for tr = 1:length(t)
   co(tr) = 0;
   suma(tr) = 0;
   fr(tr) = 0;
   for ir = 1:N
      for kr = K1:K2
         co(tr) = co(tr) + cos(kr*2*pi*f1*(increm-(ir-1)*Te));
      end
      suma(tr) = suma(tr) + fincdf(f0, f1, Km, (ir-1)*Te)*co(tr);
      co(tr) = 0;
   end
```

```
   fr(tr) = (2/N)*suma(tr);
   increm = increm + pas;
end
figure(2)
plot(t,fr)
title '      ..    :     '
for tr=1:length(t)
   er(tr)=fr(tr)-si(tr);
end
figure(3)
plot(t,er)
title '    -          :       '
```

În program se poate alege valoarea frecvenței f_1 corespunzătoare fundamentalei semnalului $p(t)$ și ordinul Km corespunzător armonicei maxime. De asemenea, se poate stabili frecvența f_0 a purtătoarei $\cos(2\pi f_0 t)$. Trebuie ales și termenul m_1 întreg astfel încât termenul $m_0 = (f_0 m_1)/f_1$, să rezulte întreg. De asemenea, m_0 și m_1 trebuie să nu aibe nici un divizor comun. Programul returnează numărul N minim de eșantioane necesare pentru reconstrucția corectă a semnalului trece bandă.

Funcția *fincdf* este prezentată în continuare

```
function[rez]=funcdf(f0, f1, Km, tx)
x = 0.5 + 1*cos(2*pi*f1*tx) + 0.5*cos(2*pi*2*f1*tx) +
0.25*sin(2*pi*Km*f1*tx);
y = 1*sin(2*pi*f1*tx) + 0.5*sin(2*pi*2*f1*tx) +
0.5*cos(2*pi*Km*f1*tx);
rez = x*cos(2*pi*f0*tx) - y*sin(2*pi*f0*tx);
```

Parametrii de intrare sunt:

f0 - frecvența purtătoarei,

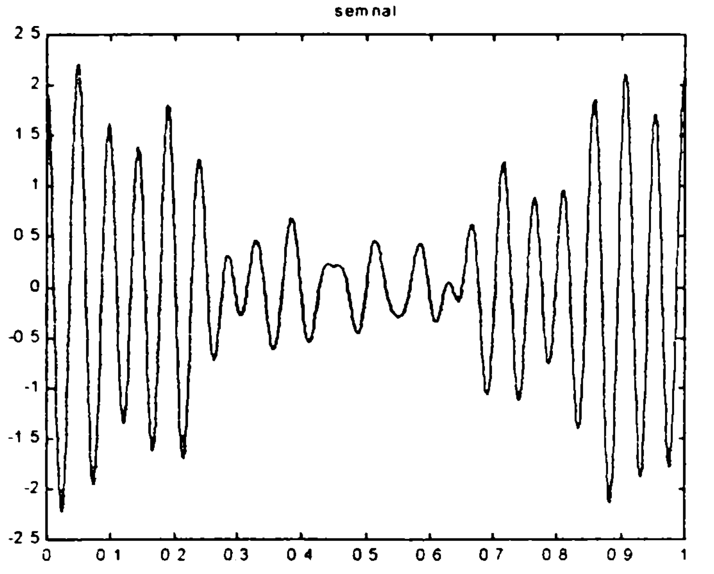
f1 - frecvența fundamentalei semnalului modulator,

Km - ordinul componentei armonice maxime din semnalul modulator,

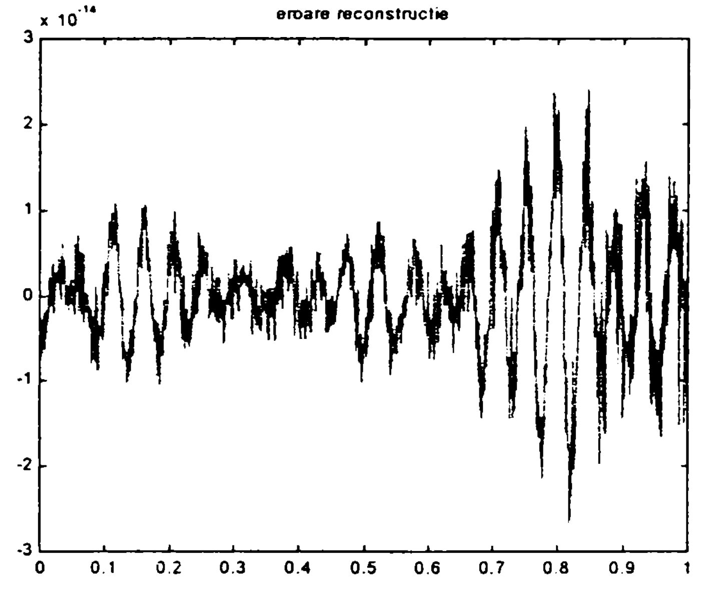
tx - momentul în care se dorește calculul valorii semnalului modulat în amplitudine.

Cu valorile - $f_1 = 1$ (Hz, kHz, ...), $Km = 5$, $f_0 = 20$, numărul minim teoretic de eșantioane necesare rezultă 22 dar, deoarece semnalul trece bandă are componente între $K1 = 15$ și $K2 = 25$, acesta nu poate fi ales. Conform calculelor, numărul minim de eșantioane care trebuie prelevate este 26 ($f_e = 26$ în loc de 51). Acest lucru a fost prezentat și în capitolul 5 și anume, dacă numărul necesar de eșantioane este între $K1$ și $K2$, atunci numărul minim care poate fi ales este mai mare decât $K2$.

Semnalul are forma de variație din figura următoare



Eroarea de reconstrucție este neglijabilă după cum se poate observa mai jos

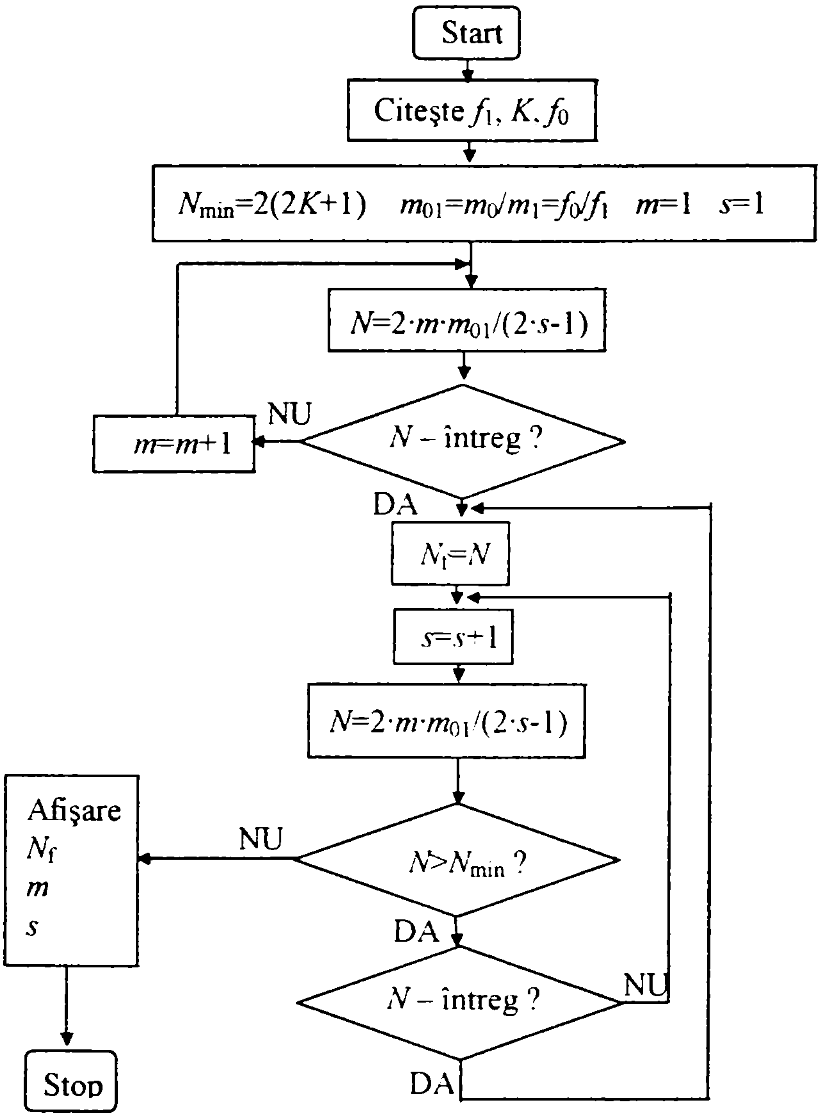


Dacă f_1 şi Km rămân neschimbaţi şi $f_0 = 30$, numărul minim de eşantioane necesar ce rezultă în urma calculelor este 24 (în loc de 71), $K1 = 25$, $K2 = 35$.

CALCULUL NUMĂRULUI *N* PENTRU UN SEMNAL TRECE BANDĂ OBŢINUT PRIN MODULARE ÎN AMPLITUDUNE

Schema logică prezentată mai jos corespunde unui program ce calculează numărul N de eşantioane necesare pentru calculul coeficienţilor Fourier corespunzători semnalului modulator. Eşantioanele se prelevează din semnalul periodic trece bandă obţinut prin modularea în amplitudine a unei purtătoare sinusoidale cu un semnal modulator periodic de tip trece jos.

Datele de intrare pentru calculul numărului N de eşantioane necesare sunt trei la număr: frecvenţa f_1 a fundamentalei semnalului (semnalelor) modulator, ordinul K al componentei armonice corespunzătoare frecvenţei maxime din acest semnal şi frecvenţa f_0 corespunzătoare purtătoarei sinusoidale.



Pentru obţinerea frecvenţei de eşantionare în cazul semnalului modulat în amplitudine în cuadratură, numărul de eşantioane N_f obţinut se înmulţeşte cu doi.

PROGRAM PENTRU CALCULUL NUMĂRULUI *N* CONFORM TEOREMEI DIN PARAGRAFUL 5.2

Programul este scris în mathcad şi calculează numărul minim teoretic *Nm* de eşantioane necesare în procesul de eşantionare al unui semnal periodic trece bandă obţinut prin modulare în amplitudine. De cele mai multe ori acesta nu se poate utiliza deoarece, frecvenţa de eşantionare ce rezultă, nu este potrivită apărând erori de aliere. Pe baza condiţiilor din teorema 2, capitolul 5, se calculează numărul minim util *Nu* ce poate fi utilizat. De asemenea, se crează şi un tabel de unde se pot obţine şi alte valori pentru numărul de eşantioane ce pot fi achiziţionate dintr-o perioadă a semnalului analizat, valori care sunt mai mari decât *Nu*.

Ca date de intrare trebuie date frecvenţa f_1 a fundamentalei semnalului modulator, ordinul K corespunzător componentei armonice de ordin maxim din acest semnal şi frecvenţa f_0 corespunzătoare purtătoarei. Se alege valoarea potrivită pentru m_1 (vezi anexa C), programul calculând mai departe ordinele $M1$ şi $M2$ corespunzătoare armonicelor componentelor cu frecvenţele de la capetele benzii de frecvenţe. De asemenea, se obţine şi frecvenţa de eşantionare corespunzătoare unui număr de eşantioane ales.

Ca exemplu, se consideră: $f_1 = 1$, $K = 5$, $f_0 = 35$ şi se alege $m_1 = 1$.

$f1 := 1 \quad K := 5 \quad f0 := 35 \quad m1 := 1$

$m0 := \frac{f0}{f1}\cdot m1 \quad m0 = 35 \quad M1 := m0 - K\cdot m1 \quad M1 = 30 \quad M2 := m0 - K\cdot m1 \quad M2 = 40$

$Nm := 2\cdot(M2 - M1 - 1) - 1 \quad Nm = 23 \quad k := 1\cdot Nm..2\cdot Nm \quad x1(k) := \frac{2\cdot M1}{k} \quad x2(k) := \frac{2\cdot M2}{k}$

$fe(k) := k\cdot f1$

$$
\begin{aligned}
Nu := \;& (ind \leftarrow 1) \\
& nx \leftarrow Nm \\
& \text{while } ind = 1 \\
& \quad nx \leftarrow nx + 1 \\
& \quad con1 \leftarrow \text{floor}\left(2\cdot\frac{M1}{nx}\right) \\
& \quad con2 \leftarrow \text{floor}\left(2\cdot\frac{M2}{nx}\right) \\
& \quad con3 \leftarrow \text{floor}\left(2\cdot\frac{M1}{nx}\right) - 2\cdot\frac{M1}{nx} \\
& \quad con4 \leftarrow \text{floor}\left(2\cdot\frac{M2}{nx}\right) - 2\cdot\frac{M2}{nx} \\
& \quad ind \leftarrow \text{if}(con1 = con2, \text{if}(con3 \neq 0, \text{if}(con4 \neq 0, 0, 1), 1), 1) \\
& nx
\end{aligned}
\qquad Nu = 27
$$

k	x1(k)	x2(k)	fc(k)
23	2.608696	3.478261	23
24	2.5	3.333333	24
25	2.4	3.2	25
26	2.307692	3.076923	26
27	2.222222	2.962963	27
28	2.142857	2.857143	28
29	2.068966	2.758621	29
30	2	2.666667	30
31	1.935484	2.580645	31
32	1.875	2.5	32
33	1.818182	2.424242	33
34	1.764706	2.352941	34
35	1.714286	2.285714	35
36	1.666667	2.222222	36
37	1.621622	2.162162	37
38	1.578947	2.105263	38
39	1.538462	2.051282	39
40	1.5	2	40
41	1.463415	1.95122	41
42	1.428571	1.904762	42
43	1.395349	1.860465	43
44	1.363636	1.818182	44
45	1.333333	1.777778	45
46	1.304348	1.73913	46

În urma calculelor, numărul minim de eşantioane ce trebuie prelevat este 27. Frecvenţa este tot 27 deoarece, $f_1 = 1$. Din tabelul de mai sus de pot alege şi alte valori, notate *k*, pentru numărul de eşantioane prelevat. Conform teoremei din paragraful 5.2, valorile corecte pentru *k* sunt cele pentru care părţile întregi ale lui $x1$ şi $x2$ sunt egale şi $x1$ sau $x2$ nu sunt numere întregi.