UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ŞI TELECOMUNICAŢII

Teza de doctorat

Contribuţii la modulaţia codată trellis multidimensională folosită în realizarea modemurilor analogice de bandă vocală

Coordonator ştiinţific:
prof.dr.ing. Miranda NAFORNIŢĂ

Doctorand:
ing. Florin DĂRĂBAN

-2003-

CUPRINS

CAPITOLUL I
Introducere

1.1 Modemuri analogice de bandă vocală

În domeniul dinamic al telecomunicațiilor apare adesea tendința de a prezice declinul rapid al unei tehnologii existente în momentul în care o tehnologie alternativă mai puternică apare la orizont [1]. Acesta este şi cazul **modemurilor analogice de bandă vocală**, despre care în anii 1985 se credea că vor dispare complet odată cu apariția **rețelei digitale cu integrarea serviciilor (ISDN=Integrated Services Digital Network)**.

Cu toate acestea, în prezent, în condițiile dezvoltării rețelei Internet şi a utilizării calculatoarelor personale (PC=Personal Computer), **modemurile analogice sunt cele mai răspîndite vehicule pentru comunicațiile de date** [2].

În anul 1998, conform unui studiu realizat de Georgia Tech, în SUA, 69,6 % din toți utilizatorii rețelei Internet (persoane fizice şi persoane juridice) au accesat rețeaua Internet prin modemuri analogice. În acest studiu se prezintă repartizarea vitezei de conectare în funcție de locație, sex, grupe de vârstă, grupe de experiență [3]. În Tabelul 1.1 se prezintă repartizarea vitezei de conectare în funcție de locația geografică a utilizatorilor rețelei Internet.

Tabelul 1.1 Repartizarea vitezei de conectare în funcție de locația geografică a utilizatorilor persoane fizice şi persoane juridice a rețelei Internet

Tip acces (răspunsul subiecților chestionați)	Viteza de conectare	SUA [%]	Europa [%]	Altele [%]
Modemuri analogice	<14,4 kb/s	0,1	0,4	0
	14,4 kb/s	1,7	0,9	2,5
	28,8 kb/s	15,8	11,1	17,2
	33,6 kb/s	17,6	13,8	24,6
	56 kb/s	34,4	13,3	18,4
	Total	***69,6***	***39,5***	***62,7***
Modemuri digitale	128 kb/s (ISDN)	4,4	18,2	9
	1 Mb/s (T1*)	13	16	12,7
	4 Mb/s (Cablu coaxial)	3,2	1,8	7,8
	10 Mb/s	2,1	10,7	2,9
	45 Mb/s (T3*)	3,1	3,1	0,8
	>45 Mb/s (FDDI**)	0,6	4	0,8
	Total	***26,4***	***53,8***	***34***
Nu ştiu ce modem folosesc	Nu ştiu ce modem folosesc	3,9	6,7	3,3

*T1,T3=Flux PCM (Pulse Code Modulation) primar, ternar în SUA/Japonia
**FDDI=Fiber Distributed Data Interface.

În anul 2000, conform unui studiu realizat de Forrester Research, în SUA, 87,9 % din utilizatorii reţelei Internet (persoane fizice) au accesat reţeaua Internet prin modemuri analogice, iar 80 % din aceştia cu un modem analogic de 56 kb/s (conform recomandării ITU V.90) (Tabelul 1.2) [4].

Tabelul 1.2 Repartizarea pe modemuri a utilizatorilor reţelei Internet (persoane fizice)

Tip acces		1998 [%]	1999 [%]	2000 [%]
Modemuri analogice		96,5	92,1	87,9
Modemuri digitale	Cablu coaxial	2,4	5,7	9,5
	ISDN, DSL*, Wireless**	1,1	2,3	2,6

*=Digital Subscriber Line
**=Fără fir.

La succesul modemurilor analogice au contribuit [2, 5]:

- progresele în tehnicile de codare, modulaţie şi egalizare adaptivă,
- progresele în tehnologiile de prelucrare digitală a semnalelor, atît în ceea ce priveşte algoritmii de prelucrare digitală a semnalelor, cît si a **procesoarelor digitale de semnal DSP=Digital Signal Processor)**, care sunt din ce în ce mai performante şi mai ieftine,
- dezvoltarea **reţelei telefonice publice comutate (PSTN=Public Switched Telephone Network)** şi creşterea calităţii conexiunilor telefonice, prin introducerea pe scară largă a centralelor telefonice digitale şi a echipamentelor de transmisiuni digitale,
- standardizarea realizată de **Uniunea Internaţională a Telecomunicaţiilor-sectorul de standardizare în Telecomunicaţii (ITU-T=International Telecommunications Union-Telecommunication Standardization Sector)** (fostă CCITT = Consultative Committee Intenational Telegraph and Telephone) care începînd cu anii 1970 a adoptat succesiv standardele din **Seria V** pentru modemurile analogice.

1.2 Mărimi caracteristice

În cazul unei transmisii sincrone, definim **debitul binar (rata de bit) D [bit/s]** ca numărul de biţi ce pot fi transmişi în unitatea de timp prin canalul de comunicaţie [6]:

$$D = \frac{1}{T_b} \text{ [bit/s]} \qquad (1.1)$$

unde T_b = durata unui bit [s].

În cazul unei transmisii asincrone, definim **viteza de modulaţie (rata de simbol) R [simboluri/s] sau [Baud]** ca viteza cu care se schimbă stările semnalului modulat în canalul de comunicaţie [6]:

$$R = \frac{1}{T_S} \text{ [simboluri/s] sau [Baud]} \tag{1.2}$$

unde T_s = durata unui simbol [s].

Dacă semnalul modulat are $M=2^m$ nivele atunci avem relația:

$$D = R \log_2 M = R\, m \ \text{[bit/s]} \tag{1.3}$$

unde m = numărul de biți necesari codării.

În cazul unei transmisii oarecare, definim debitul binar ca raportul dintre numărul total de biți transmiși (biți utili + biți suplimentari ceruți de protocol) şi durata necesară transmisiei lor.

Eficiența spectrală η **[bit/s/Hz]** este definită ca numărul de biți per secundă pe care îi putem transmite într-o lățime de bandă de 1 Hz a canalului de comunicație [7]:

$$\eta = \frac{D}{B} \ \text{[bit/s/Hz]} \tag{1.4}$$

unde B = lățimea de bandă a canalului de comunicație care este disponibilă pentru transmisie [Hz] iar D = debitul binar [bit/s].

Rata de transmisie Q [bit/utilizare canal] sau [bit/interval de semnalizare] este definită ca numărul de biți per utilizarea canalului sau ca numărul de biți per interval de semnalizare [7]:

$$Q = T_S\, D \ \text{[bit/utilizare canal] sau [bit/interval de semnalizare]} \tag{1.5}$$

unde prin utilizarea canalului de comunicație se înțelege transmisia unui simbol de informație prin canalul de comunicație.

Viteza maximă de transmisie a datelor printr-un canal de comunicație ideal (stabil, omogen, invariant în timp, fără distorsiuni) este limitată. Această limită, numită **capacitatea canalului de comunicație C [bit/s]**, a fost stabilită de **Shannon** pentru un canal de comunicație ideal cu zgomot aditiv, alb, gaussian, cu o putere medie a semnalului util mărginită şi presupunînd o codare infinită ca fiind:

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \ \text{[bit/s]} \tag{1.6}$$

unde C = capacitatea canalului de comunicație [bit/s], S = puterea medie a semnalului util [W] iar N = puterea medie a zgomotului [W].

Dacă raportul semnal/zgomot se consideră în dB deci $SNR = 10 \log_{10}(\frac{S}{N})$ atunci:

$$C \cong 0{,}33\, B\, SNR \ \text{[bit/s]} \tag{1.7}$$

1.3 Canalul telefonic

Canalul telefonic poate fi considerat ca un canal de comunicație **cu zgomot redus, de bandă de frecvențe limitată și de putere limitată** [39].

Canalul telefonic poate fi presupus cu o bună aproximație ca un canal de comunicație **liniar** [39].

Canalul telefonic este un canal de comunicație **invariant în timp** și are o **caracteristică de frecvență relativ ușor egalizabilă** [39].

Un canal telefonic obișnuit are banda de frecvențe cuprinsă între 300 și 3400 Hz deci B=3100 Hz.

În toate cazurile de conexiune telefonică avem SNR=28 dB, iar în majoritatea cazurilor de conexiune telefonică avem SNR=32-38 dB [39].

În general, canalul telefonic este considerat ca un canal de comunicație cu **zgomot aditiv, alb, gaussian (AWGN=Aditive White Gaussian Noise) și cu interferență intersimbol (ISI= InterSymbol Interference)**.

1.4 Modemuri analogice și modemuri digitale utilizate în PSTN

În Tabelul 1.3 se prezintă caracteristicile modemurilor analogice și digitale utilizate în PSTN [8].

Modemurile sunt conectate la PSTN prin perechi de fire de cupru, torsadate, neecranate, cu diametrul cuprins între ϕ=0,3-0,4 mm (cabluri urbane) și ϕ=0,8-0,9 mm (cabluri interurbane).

Se observă că modemurile analogice oferă debite binare mici în comparație cu modemurile digitale. Din acest motiv modemurile analogice sunt aproape imposibil de utilizat în aplicații cum ar fi:

- acces de foarte mare viteză la rețeaua Internet,
- acces la servicii interactive de bandă largă,
- videoconferințe.

Modemurile digitale permit debite binare mari deoarece au fost proiectate pentru o banda de frecvențe a canalului de comunicație de ordinul a cîțiva MHz deci mult mai mare decît B=3000-3500 Hz ca în cazul modemurilor analogice. În cazul modemurilor digitale nu se mai folosesc ca și la modemurile analogice filtrele trece bandă de 4 kHz (antialiasing și interpolare) în CODEC-urile interfețelor de linie din unitățile de racordare locale/distante ale centralei telefonice sau din unitățile de rețea optică (ONU=Optical Network Unit) ale rețelei de acces (AN=Acces Network).

Tabelul 1.3 Caracteristicile modemurilor analogice şi digitale utilizate în PSTN

Tip modem	D [kbit/s]	η [bit/s/Hz]	Modulaţia (cod de linie)	Linii de transmisie	Lungimea maximă a liniei de transmisie [Km] (ϕ=0,3-0,4 mm)
MODEMURI ANALOGICE					
V.21	0,3	1	FSK	comutate/închiriate	1,8
V.22	0,6	2	PSK	comutate/închiriate	1,8
V.22 bis	2,4	4	QPSK	comutate	1,8
V.32	9,6	4	TCM	comutate/închiriate	1,8
V.32 bis	14,4	6	TCM	comutate/închiriate	1,8
V.33	14,4	6	TCM	închiriate	1,8
V.34	28,8	8,4	TCM	comutate/închiriate	1,8
V.34 bis	33,6	9,8	TCM	comutate/închiriate	1,8
MODEMURI DIGITALE					
ISDN BRI	144	2	PAM(4B3T)	comutate/închiriate	4
ISDN PRI	2048	2	PCM(HDB3)	comutate/închiriate	0,3
HDSL	2048	2	PAM(2B1Q) sau CAP	închiriate	4
SDSL	768	2	PAM(2B1Q)	închiriate	3,7
IDSL	128	2	PAM(2B/1Q)	închiriate	4
ADSL	Downstream= =8448-1554 Upstream= =640-16	8	CAP sau DMT	închiriate	3-5,5
VDSL	Downstream= =52000-13000 Upstream= =2300-1500	4	CAP sau DMT	închiriate	0,3-1

ISDN BRI = Integrated Services Digital Network Base Rate Interface
ISDN PRI = Integrated Services Digital Network Primary Rate Interface
HDSL = High bit rate Digital Subscriber Line
SDSL = Symmetric Digital Subscriber Line
IDSL = ISDN Digital Subscriber Line
ADSL = Asymmetric Digital Subscriber Line
VDSL = Very high bit rate Digital Subscriber Line.
FSK = Frequency Shift Keying
PSK = Phase Shift Keying
QPSK = Quadrature Phase Shift Keying
TCM = Trellis Coded Modulation
PAM = Pulse Amplitude Modulation
2B1Q = 2 Binary 1 Quaternary
4B3T = 4 Binary 3 Ternary
PCM = Pulse Code Modulation
HDB3 = High Density Bipolar 3
CAP = Carrierless Amplitude and Phase Modulation
DMT = Discrete MultiTone modulation.

În plus modemurile digitale folosesc tehnici digitale de modulație ca:

- **modulația impulsurilor în amplitudine (PAM=Pulse Amplitude Modulation)** cu un cod de linie cuaternar 2B1Q (2 Binary 1 Quaternary).
- **modulația impulsurilor în cod (PCM=Pulse Code Modulation)** cu un cod de linie ternar HDB3 (High Density Bipolar 3).
- **modulația de amplitudine și de fază fără purtătoare (CAP=Carrierless Amplitude and Phase Modulation)** în care se realizează 2 modulații digitale cu ajutorul a două filtre digitale transversale, care au funcțiile de transfer cu aceeași amplitudine dar defazate cu 90°. Semnalele de la ieșirile filtrelor digitale sunt însumate iar semnalul obținut este convertit cu un convertor digital-analogic (DAC=Digital-to-Analog Converter) pentru a fi transmis prin canalul de comunicație.
- **modulația multiton discretă (DMT=Discrete MultiTone modulation)** în care se realizează o multiplexare prin diviziune în frecvență (FDM=Frecquency Division Multiplexing), a mai multor canale de 4 kHz, cu modulație codată trellis (TCM=Trellis Coded Modulation). Pentru fluxul de date spre utilizator (Downstream) sunt multiplexate 249 de canale, în banda de frecvențe (133,8-1100) kHz iar pentru fluxul de date dinspre utilizator (Upstream) sunt multiplexate 25 de canale, în banda de frecvențe (26-133,8) kHz. Majoritatea canalelor sunt folosite pentru transmisii de date ($0 \le \eta \le 15$ bit/s/Hz) dar există și canale folosite pentru sincronizare. Semnalele purtătoare sunt distanțate la intervale de 4,3125 kHz.

Cu toate acestea modemurile analogice fiind mult mai ieftine și fiind primele care au apărut pe piață sunt mult mai răspîndite decît modemurile digitale.

1.5 Scurt istoric

În 1974 Massey a sugerat formal că performanțele sistemelor digitale de telecomunicații ar putea fi îmbunătățite prin folosirea codării și modulației ca o **entitate combinată** și nu ca două operații separate [9].

În 1976 Ungerboeck și Csajka prezintă ideea de **modulație codată trellis (TCM=Trellis Coded Modulation)** la simpozionul de teoria informației din Suedia [10].

În 1977 Imai și Hirakawa au publicat o lucrare în care codarea bloc sau codarea convoluțională au fost combinate cu modulația [11].

În 1982 Ungerboeck a descris principiile de baza ale TCM [12].

În 1984 Forney a arătat că utilizarea TCM la construcția modemurilor analogice permite obținerea unor debite binare mai apropiate de capacitatea canalului de comunicații (canalul telefonic) în comparație cu alte medii de transmisii fizice [13].

În 1984 Wei a prezentat o schemă TCM 2-D cu 8 stări [14] care a fost adoptată în același an de către ITU-T ca recomandarea V.32 pentru modemurile analogice care operează full-duplex la 9600 bit/s pe linii comutate sau închiriate cu 2 fire [15].

În 1987 Wei a prezentat lucrarea „TCM cu constelații de semnale multidimensionale" [16] în care a prezentat trei scheme TCM pentru Q=7 biți/interval de semnalizare și anume:

- o schemă TCM 4-D cu 16 stări,
- o schemă TCM 4-D cu 64 stări,
- o schemă TCM 8-D cu 64 stări.

În 1994 ITU-T a adoptat recomandarea V.34 bis pentru modemurile analogice care operează full-duplex la 33600 bit/s pe linii comutate sau închiriate cu 2 fire [17]. Se folosesc trei scheme TCM si anume:

- o schemă TCM 4-D cu 16 stări propusă de Wei [16]
- o schemă TCM 4-D cu 32 stări propusă de Williams [18]
- o schemă TCM 4-D cu 64 stări propusă şi corectată de Wei [19] după ce Rossin şi Heegard au descoperit şi au semnalat în 1993 o greşeală în schema iniţială.

În 1998 ITU-T a adoptat recomandarea V.90 pentru comunicaţia de date dintre un modem analogic şi un modem digital care operează full-duplex la 56000 bit/s în sensul modem digital→modem analogic şi la 33600 bit/s în sensul modem digital→modem analogic pe linii comutate cu 2 fire [20].

Modemul analogic se conectează la PSTN printr-o interfaţă analogică obişnuită. Modemul analogic emite semnale V.34 şi recepţionează semnale G.711 [21] după trecerea lor printr-un decodor G.711.

Modemul digital se conectează la PSTN printr-o interfaţă ISDN de bază (ISDN BRI=Integrated Services Digital Network Basic Rate Interface) sau printr-o interfaţă ISDN primară (ISDN PRI= Integrated Services Digital Network Primary Rate Interface). Modemul digital emite semnale G.711 şi recepţionează semnale V.34 după trecerea lor printr-un decodor G.711.

În prezent TCM rămîne un domeniu de cercetare activ în care continuă să apară idei noi ce deschid calea spre noi scheme practice. Progresul este relativ lent pentru că problema găsirii unor metode noi de codare şi modulaţie este în general foarte complicată.

CAPITOLUL II
Sisteme de transmisii de date cu modulaţie codată trellis (TCM)

2.1 Introducere

Sistemele de transmisii de date cu modulaţie codată trellis (TCM) prezintă o foarte bună protecţie la zgomot şi se folosesc la transmisii de date de foarte mare viteză.

În cazul unui canal de comunicaţie de putere limitată, creşterea eficienţei energetice se poate realiza prin utilizarea unor coduri corectoare de erori. Codurile corectoare de erori adaugă biţi suplimentari secvenţei codificate transmise, deci impune modulatorului să lucreze la un debit binar mai mare necesitînd o bandă de frecvenţe mai mare.

În cazul unui canal de comunicaţie de bandă de frecvenţe limitată, creşterea eficienţei spectrale se poate realiza prin utilizarea unor modulatoare de ordin mare. Modulatoarele de ordin mare necesită o putere a semnalului de linie mai mare pentru a menţine aceeaşi distanţă între semnale, cu alte cuvinte aceeaşi probabilitate de eroare.

Modulaţia codată trellis (TCM) este o tehnică ce combină utilizarea unor coduri corectoare de erori (în general coduri convoluţionale) cu utilizarea unor modulatoare de ordin mare.

Ideea modulării multidimensionale a simbolurilor codate convoluţional a apărut cu mult înaintea apariţiei modulaţiei codate trellis, operaţiile de codare-decodare şi modulare-demodulare fiind independente [10, 11]. Performanţele acestor sisteme nu sînt satisfăcătoare deoarece:

- în receptor deciziile se iau simbol cu simbol înainte de decodare ceea ce poate conduce la pierderi de informaţie,
- codurile convoluţionale optimizate după criteriul distanţei Hamming nu asigură o separare maximă între semnale.

O mai bună protecţie la zgomot se asigură dacă semnalele de linie emise diferă cît mai mult unul de altul şi o măsură a distanţei dintre ele este distanţa euclidiană. Pentru a mări distanţa euclidiană este necesară creşterea numărului de semnale, astfel încît să apară o redundanţă la codare, al cărei scop este maximizarea distanţei euclidiene minime.

Aspectul nou al modulaţiei codate trellis constă în faptul că operaţiile de codare şi modulaţie nu sînt tratate ca operaţii independente ci ca o operaţie unică. Semnalul de linie recepţionat, în loc să fie mai întîi demodulat şi apoi decodat, este procesat de un receptor care combină demodularea şi decodarea într-o singură operaţie. Procesul de detecţie implică mai mult decizii soft decît decizii hard (semnalul de linie recepţionat este procesat înainte de a lua decizia cărui simbol al sursei de date îi corespunde).

Considerăm un canal de comunicaţie cu zgomot aditiv alb gaussian. Semnalele de linie transmise pot fi considerate vectori într-un spaţiu euclidian N-dimensional (R^N) numit **spaţiu de semnale**.

Pentru fiecare simbol al sursei de date, vectorul semnal transmis **s** este ales dintr-un set Ω', format din M' vectori semnal, numit **constelaţie de semnale**.

Vectorul semnal recepţionat este:

$$\mathbf{r}=\mathbf{s}+\mathbf{n} \tag{2.1}$$

unde **n** este vectorul zgomot a cărui componente sînt variabile aleatoare gaussiene independente, cu media 0 şi dispersia $\frac{N_0}{2}$.

Energia medie a vectorilor semnal din setul Ω' este egală cu:

$$E'=\frac{1}{M'}\sum_{s\in\Omega'}\|s\|^2 \tag{2.2}$$

Fie o secvenţă de K vectori semnal transmişi $\{s_i\}_{i=0}^{K-1}$. Receptorul TCM care minimizează probabilitatea erorii de secvenţă operează astfel:

- observă secvenţa de K vectori semnal recepţionaţi $\{\mathbf{r}_i\}_{i=0}^{K-1}$,
- decide că s-a transmis secvenţa de vectori semnal $\{S_i\}_{i=0}^{K-1}$, dacă pătratul distanţei euclidiene $d^2=\sum_{i=0}^{K-1}\|\mathbf{r}_i-s_i\|^2$ este minim pentru $s_i=S_i$, i=0,...,K-1. Cu alte cuvinte secvenţa de vectori semnal $\{S_i\}_{i=0}^{K-1}$ este mai apropiată de secvenţa de vectori semnal recepţionaţi $\{\mathbf{r}_i\}_{i=0}^{K-1}$ decît oricare altă secvenţă de vectori semnal.

Probabilitatea erorii de secvenţă (ca şi probabilitatea erorii de simbol) este limitată superior de o funcţie descrescătoare a raportului $\frac{d'^2_{min}}{N_0}$ şi este bine aproximată de această expresie cînd raportul semnal/zgomot este mare. În expresia de mai sus d'^2_{min} este pătratul distanţei euclidiene minime dintre două secvenţe posibile de vectori semnal din Ω'.

2.1.1. Detecţia simbol cu simbol (SSD)

La **detecţia simbol cu simbol (SSD=Symbol by Symbol Detection)** secvenţa de vectori semnal $\{s_i\}_{i=0}^{K-1}$ este o secvenţă de vectori independenţi. Astfel secvenţele posibile de vectori semnal aparţin lui Ω'^K. Pătratul distanţei euclidiene este minimizat dacă se minimizează separat termenii $\|\mathbf{r}_i-s_i\|^2$ pentru $s_i\in\Omega'$ [7].

Probabilitatea erorii de secvenţă (ca şi probabilitatea erorii de simbol) este limitată superior de expresia:

$$P(e) \leq \left(\frac{M'-1}{2}\right) \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d'^{\,2}_{min}}{N_0}}\right) \tag{2.3}$$

fiind bine aproximată de această expresie cînd raportul semnal/zgomot este mare. În relația (2.3):

$$d'^{\,2}_{min} = \min_{s'_i, s''_i \in \Omega'} \left\| s'_i - s''_i \right\|^2 \tag{2.4}$$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \tag{2.5}$$

Concluzia 2.1-Problema proiectării unui sistem de transmisii de date cu modulație codată trellis cînd se dau N, E′, M′ se reduce la alegerea unui set Ω' de vectori semnal astfel încît distanța euclidiană minimă dintre oricare 2 vectori semnal să fie maximă [7].

Pentru compararea a 2 constelații de semnale se definesc următoarele 2 mărimi:

⇒ **eficiența spectrală**: $$\eta = \frac{\log_2 M'}{N} \text{ [bit/s/Hz]} \tag{2.6}$$

⇒ **eficiența energetică**: $$\delta^2 = \frac{d'^{\,2}_{min}}{E_b} \text{ [bit/s/W]} \tag{2.7}$$

unde $E_b = \dfrac{E'}{\log_2 M'}$ = **energia medie per bit de informație [W/bit]**.

Probabilitatea erorii de secvență (ca și probabilitatea erorii de simbol) este limitată superior de expresia:

$$P(e) \leq \left(\frac{M'-1}{2}\right) \mathrm{erfc}\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{2.8}$$

fiind bine aproximată de această expresie cînd raportul semnal/zgomot este mare.

Concluzia 2.2-Aceeași probabilitate a erorii de secvență (erorii de simbol) poate fi obținută cu un raport semnal/zgomot $\dfrac{E_b}{N_0}$ mai mic dacă eficiența energetică δ^2 este mai mare [7].

2.1.2. Detecția de probabilitate condiționată maximă (MLD)

La **detecția de probabilitate condiționată maximă (MLD=Maximum Likelyhood Detection)** secvența de vectori semnal $\{s_i\}_{i=0}^{K-1}$ este o secvență de vectori interdependenți. Astfel secvențele posibile de vectori semnal aparțin unui subset din Ω'^K ceea ce implică scăderea eficienței spectrale η [7].

Pentru a evita scăderea eficienței spectrale se înlocuiește Ω'cu $\Omega \supset \Omega'$ și M' cu $M > M'$, deci se **extinde constelația de semnale**. Astfel rezultă o secvență de vectori semnal mai puțin asemănători între ei și se obține o creștere a pătratului distanței euclidiene minime dintre două secvențe posibile de vectori semnal.

Se definesc două tipuri de cîștig:

⇒ **cîștigul de distanță**: $$\varepsilon=\frac{d_{min}{}^2}{d'_{min}{}^2} \tag{2.9}$$

⇒ **cîștigul asimptotic de codare**: $$\gamma=\frac{\frac{d_{min}{}^2}{E}}{\frac{d'_{min}{}^2}{E'}} \tag{2.10}$$

unde $d_{min}{}^2$=pătratul distanței euclidiene minime dintre două secvențe posibile de vectori semnal din setul Ω, iar E=energia medie a vectorilor semnal din setul Ω.

Vectorul semnal s_i transmis la momentul de timp discret i depinde nu numai de simbolul sursei de date a_i transmis la același moment de timp discret i, ci și de un număr finit L de simboluri anterioare ale sursei de date:

$$s_i=f(a_i, a_{i-1}, a_{i-2},\ldots,a_{i-L}) \tag{2.11}$$

Se definește **starea transmițătorului TCM** la momentul de timp discret i astfel [7]:

$$\sigma_i=(a_{i-1}, a_{i-2},\ldots,a_{i-L}) \tag{2.12}$$

Astfel se obțin relațiile [7]:

$$s_i=f(a_i, \sigma_i) \tag{2.13}$$

$$\sigma_{i+1}=g(a_i, \sigma_i) \tag{2.14}$$

unde se presupune că funcțiile f și g sînt invariante în timp.

Funcția f arată că fiecare vector semnal depinde nu numai de simbolul corespondent al sursei de date ci și de starea transmițătorului TCM. La fiecare moment de timp discret i, vectorul semnal s_i este selectat dintr-o subconstelație de semnale selectată de valoarea stării transmițătorului σ_i.

Funcția g arată evoluția stărilor transmițătorului TCM și descrie memoria transmițătorului TCM.

Modelul general al transmițătorului TCM este prezentat în Fig.2.1.

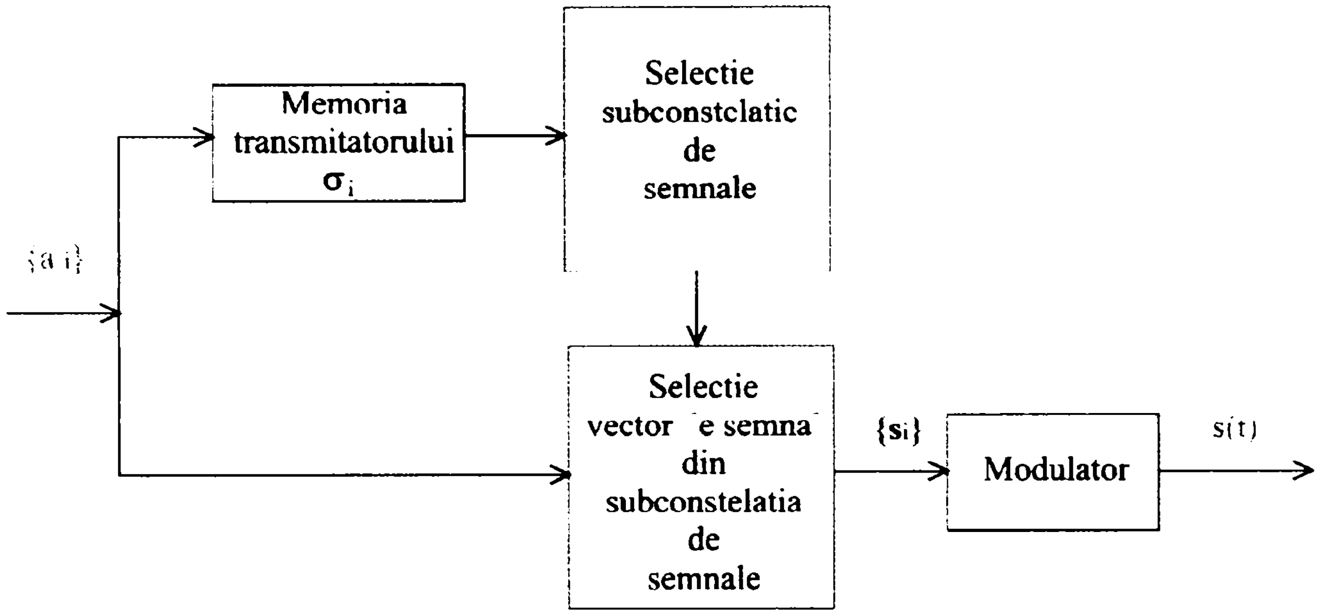


Fig.2.1 Modelul general al transmițătorului TCM.

2.2 Diagrama trellis

Pentru reprezentarea grafică a funcțiilor f și g se folosește o **diagramă trellis**.

Nodurile diagramei trellis sînt reprezentate prin valorile pe care le poate lua σ_i (stările transmițătorului TCM).

Fiecărui simbol a_i al sursei de date îi asociem o **ramură** care pornește de la un nod al diagramei trellis la un moment de timp discret i și care ajunge la un nod al diagramei trellis la momentul de timp discret i+1.

Funcția f determină care vector semnal s_i este asociat cu fiecare ramură de-a lungul diagramei trellis. Funcția g determină nodurile diagramei trellis.

Dacă avem o sursă de date care are $M'=2^{m'}$ simboluri (m' biți/simbol sursă) atunci din fiecare nod al diagramei trellis pornesc M' ramuri (1 ramură/simbol sursă).

Dacă două sau mai multe ramuri conectează aceleași perechi de noduri atunci apar **tranziții paralele**. Dacă 2 sau mai multe ramuri pornesc din același nod și ajung în același nod atunci avem **tranziții adiacente**.

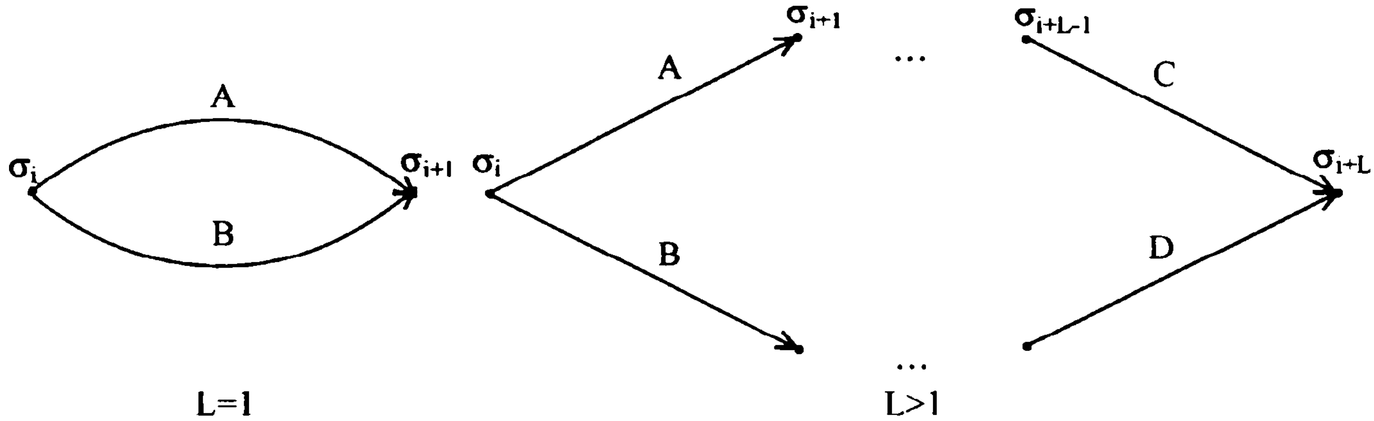
2.3 Partiționarea constelației de semnale

În cazul **detecției simbol cu simbol (SSD)** diagrama trellis are la un moment de timp discret un singur nod și toate tranzițiile sunt paralele.

În cazul **detecției de probabilitate condiționată maximă (MLD)** odată observată secvența de vectori semnal recepționați se caută traiectoria cea mai probabilă prin diagrama trellis.

Datorită zgomotului aditiv din canalul de comunicație traiectoria aleasă poate să difere de traiectoria corectă. Dacă traiectoria aleasă și traiectoria corectă diverg la momentul de timp discret i şi converg la momentul de timp discret i+L atunci a avut loc o eroare de lungime L.

Atunci d_{min} este egală cu distanţa euclidiană minimă dinte vectorii semnal asociaţi cu o pereche de traiectorii prin diagrama trellis care formează o eroare de lungime L (Fig.2.2).



$$d_{min}^2 = d^2(A,B) \qquad\qquad d_{min}^2 = d^2(A,B) + \ldots + d^2(C,D)$$

unde X,Y sînt subseturi de vectori semnal asociaţi cu ramurile diagramei trellis şi $d^2(X,Y)$=distanţa euclidiană minimă dintre vectorii semnal care aparţin lui X şi vectorii semnal care aparţin lui Y.

Fig.2.2 Pereche de traiectorii care formează o eroare de lungime L.

Concluzia 2.3-Subsetul de vectori semnal asociaţi cu tranziţii paralele trebuie să aibă o distanţă euclidiană minimă cît mai mare [7].

Concluzia 2.4-Subsetul de vectori semnal asociaţi cu tranziţii adiacente trebuie să aibă o distanţă euclidiană minimă cît mai mare [7].

Pentru partiţionarea optimă a unei constelaţii de semnale de mărime M se utilizează **tehnica lui Ungerboeck** (Fig.2.3) [12]:

- se partiţionează succesiv constelaţia de semnale în 2, 4, 8,... subconstelaţii de semnale de mărimi $\frac{M}{2}, \frac{M}{4}, \frac{M}{8}, \ldots$ şi cu distanţele euclidiene minime $d_{min}^{(1)} < d_{min}^{(2)} < d_{min}^{(3)} < \ldots$,
- se aplică cele trei reguli ale lui Ungerboeck:
  - ⇒ U1)pentru tranziţii paralele sunt asignaţi vectori semnal care aparţin aceleaşi partiţii,
  - ⇒ U2)pentru tranziţii adiacente sunt asignaţi vectori semnal care aparţin partiţiei de mărime mai mare imediat următoare,
  - ⇒ U3)toţi vectorii semnal sunt utilizaţi cu aceeaşi probabilitate.

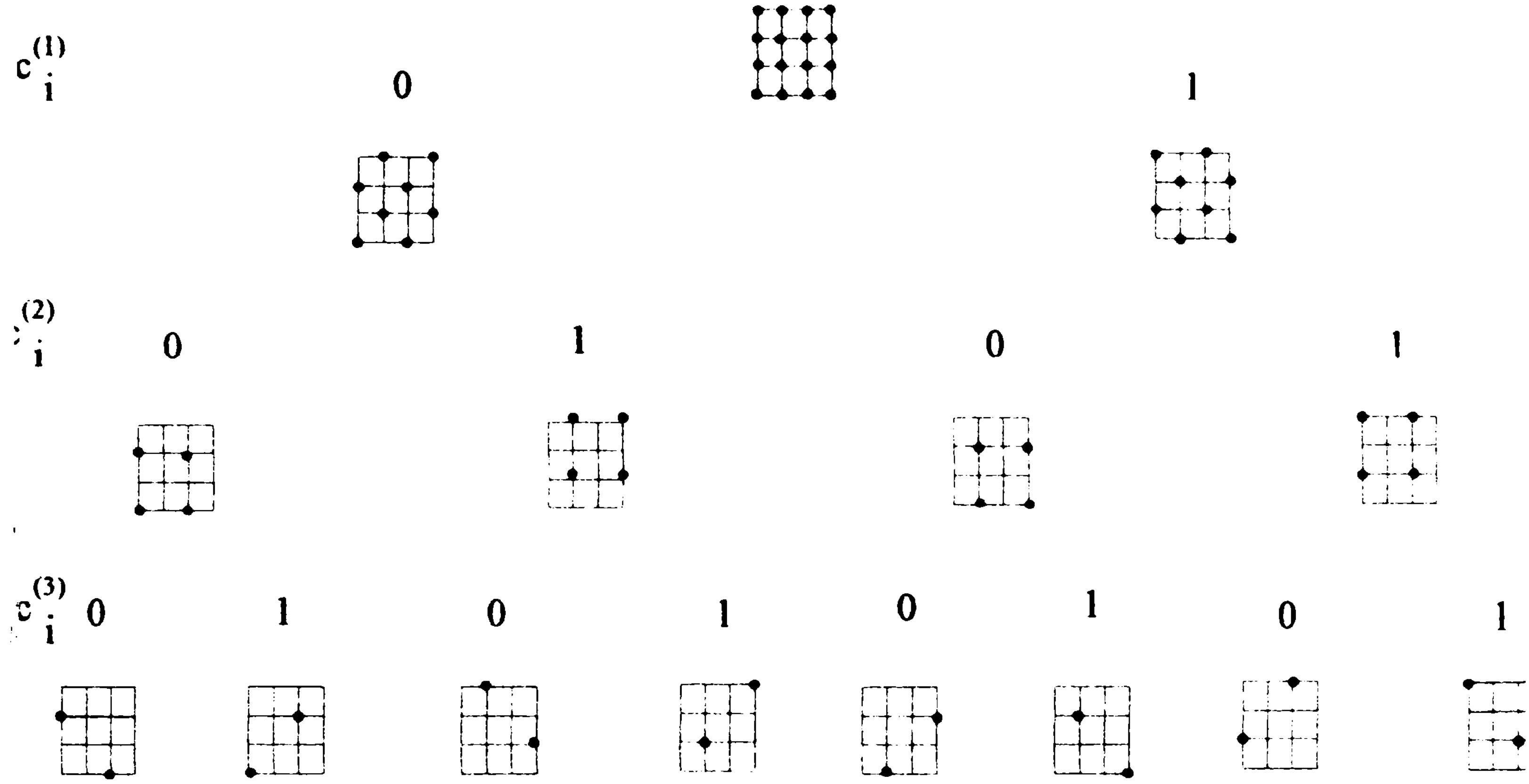


Fig.2.3 Partiţionarea unei constelaţii de semnale de mărime M=16.

Concluzia 2.5-Cele trei idei de bază ale modulaţiei codate trellis sunt următoarele:

- interdependenţa vectorilor de semnal care aparţin unei secvenţe,
- extinderea constelaţiei de semnale,
- partiţionarea optimă a constelaţiei de semnale.

2.4 Transmiţătorul TCM

2.4.1. Reprezentarea Ungerboeck a transmiţătorului TCM

Reprezentarea Ungerboeck a transmiţătorului TCM modelează partea de memorie a transmiţătorului TCM printr-un codor binar convoluţional [22].

Dacă a_i, simbolul sursei de date la momentul de timp discret i, poate lua $M'=2^{m'}$ valori distincte atunci el poate fi reprezentat ca un vector cuvînt de cod $\mathbf{b}_i=b_i^{(1)}b_i^{(2)}...b_i^{(m')}$ format din m' biţi care se aplică la intrarea transmiţătorului TCM.

În general s_i, vectorul semnal la momentul de timp discret i, depinde de $v_j \geq 0$ biţi anteriori ai intrării binare j=1, 2, 3,..., m' a transmiţătorului TCM:

$$s_i=f(b_i^{(1)},b_{i-1}^{(1)},...,b_{i-v_1}^{(1)};b_i^{(2)},b_{i-1}^{(2)},...,b_{i-v_2}^{(2)};...;b_i^{(m')},b_{i-1}^{(m')},...,b_{i-v_{m'}}^{(m')}) \qquad (2.15)$$

Transmiţătorul TCM este format din două părţi (Fig.2.4):

- codor binar convoluţional care are m' intrări binare $b_i^{(1)}b_i^{(2)}...b_i^{(m')}$ şi m ieşiri binare $c_i^{(1)}c_i^{(2)}...c_i^{(m)}$ deci are rata de codare $\frac{m'}{m}$,
- dispozitiv de corespondenţă fără memorie (Memoryless Mapper) care asociază fiecărui vector cuvînt de cod $\mathbf{c}_i=c_i^{(1)}c_i^{(2)}...c_i^{(m)}$ format din m biţi un vector semnal $s_i \in \Omega$.

Definim:

⇒ memoria transmițătorului TCM $$v=\sum_{j=1}^{m'} v_j \tag{2.16}$$

⇒ numărul de stări ale transmițătorului TCM $$V=2^v \tag{2.17}$$

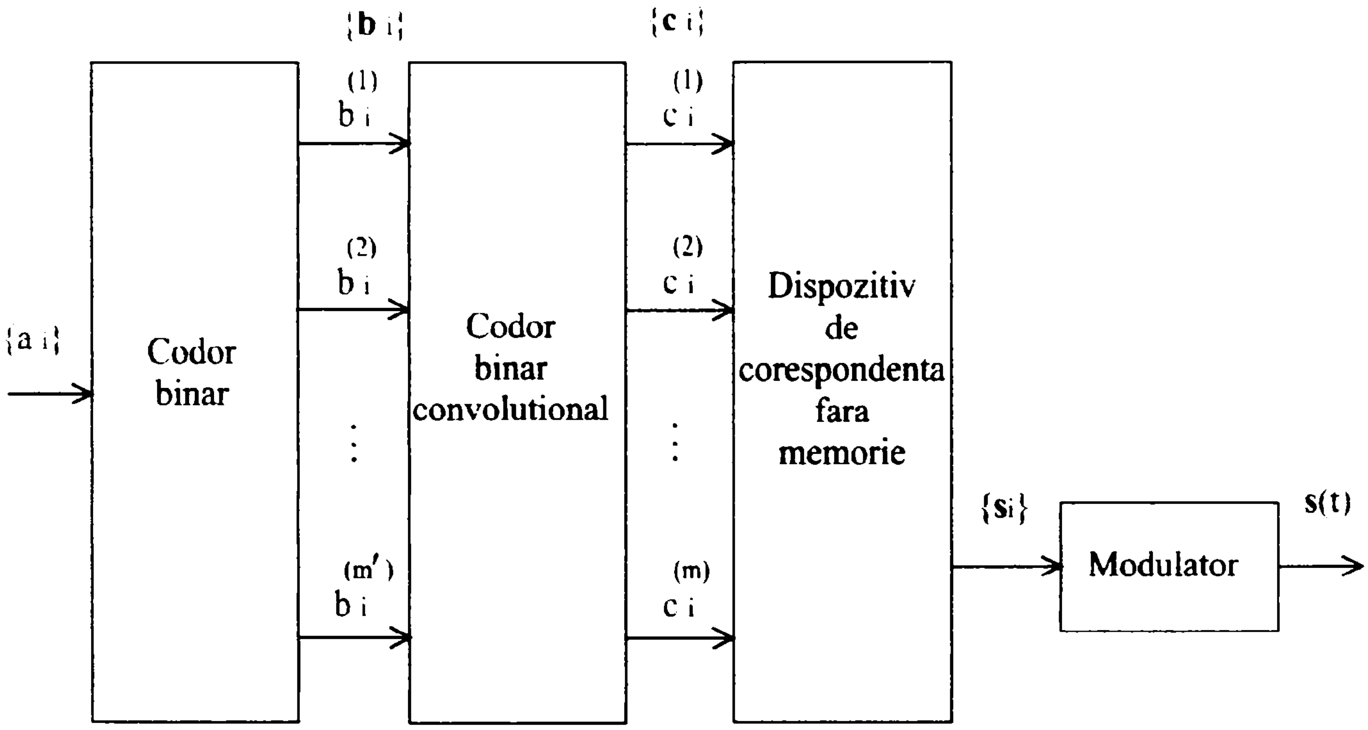


Fig.2.4 Reprezentarea Ungerboeck a transmițătorului TCM.

Un caz particular foarte important este transmițătorul Ungerboeck (Fig.2.5) care are proprietățile:

❖ $M=2M'$ deci $m=m'+1$

❖ Codorul binar convoluțional este liniar.

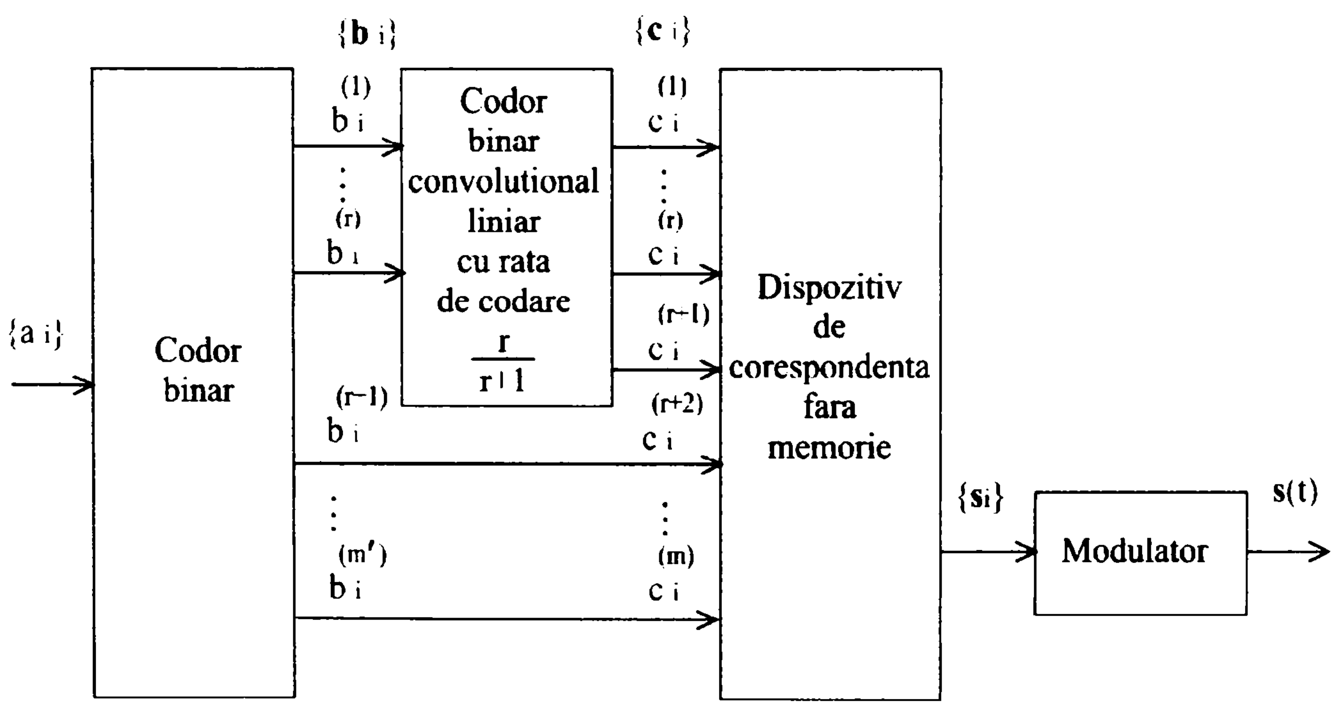


Fig.2.5 Schema bloc a unui transmițător Ungerboeck.

La fiecare moment de timp discret i codorul binar convoluţional liniar cu rata de codare $\frac{r}{r+1}$ recepţionează r biţi şi generează r+1 biţi codaţi, care selectează subconstelaţia de semnale din care se va alege un vector semnal şi deplasează transmiţătorul TCM în starea următoare.

Ceilalţi m'-r biţi rămaşi necodaţi selectează un vector semnal din subconstelaţia de semnale selectată anterior.

Prezenţa biţilor necodaţi determină apariţia tranziţiilor paralele în diagrama trellis ($2^{m'-r}$ tranziţii paralele asociate cu fiecare ramură).

2.4.2. Reprezentarea Calderbank-Mazo a transmiţătorului TCM

Reprezentarea Calderbank-Mazo a transmiţătorului TCM se bazează pe o descriere analitică a funcţiei f [23]:

$$s_i=f(a_i, a_{i-1}, a_{i-2},\dots,a_{i-L}) \tag{2.18}$$

Această relaţie poate fi privită ca o funcţie de transfer a unui sistem cu memorie. În scopul obţinerii unui cîştig asimptotic de codare $\gamma>1$ este necesar ca funcţia f să fie neliniară. De fapt o funcţie f liniară corespunde efectului interferenţei intersimbol (ISI) şi determină $\gamma=1$.

De exemplu, dacă simbolurile sursei de date sunt $a_i\in\{-1, +1\}$ şi funcţia f este liniară de forma:

$$f(a_1, a_2,\dots,a_n)=h_1a_1+h_2a_2+\dots+h_na_n \tag{2.19}$$

unde $h_1, h_2,\dots,h_n$=constante reale, atunci, alegînd o traiectorie prin diagrama trellis corespunzătoare secvenţei de simboluri $\{+1\}$ şi o altă traiectorie corespunzătoare aceleaşi secvenţe de simboluri dar cu un singur simbol $\{+1\}$ schimbat în $\{-1\}$, obţinem:

$$\begin{cases} d_{min}{}^2=\|(h_1+h_2+\dots+h_n)-(-h_1+h_2+\dots+h_n)\|^2+ \\ \|(h_1+h_2+\dots+h_n)-(h_1-h_2+\dots+h_n)\|^2+\dots+ \\ \|(h_1+h_2+\dots+h_n)-(h_1+h_2+\dots-h_n)\|^2= \\ =4(h_1{}^2+h_2{}^2+\dots+h_n{}^2) \\ E=(h_1{}^2+h_2{}^2+\dots+h_n{}^2) \\ \dfrac{d_{min}{}^2}{E}=4 \end{cases} \tag{2.20}$$

În absența codării avem $h_1=1$ şi $h_i=0$, $i>1$:

$$\begin{cases} {d'_{min}}^2 = \|(h_1)-(-h_1)\|^2 = 4{h_1}^2 \\ E' = {h_1}^2 \\ \dfrac{{d'_{min}}^2}{E'} = 4 \end{cases} \tag{2.21}$$

deci cîştigul asimptotic de codare este $\gamma=1$.

Fie $\mathbf{a}=(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ un vector n-dimensional a cărui componente sînt variabile aleatoare independente, identic distribuite, care iau K valori reale dintr-un set A. În general funcția $f(\mathbf{a})$ este neliniară şi poate fi scrisă ca o **serie ortogonală Volterra**:

$$f(\mathbf{a}) = k^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} k_i^{(1)} Q_i^{(1)}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^{(2)} Q_{ij}^{(2)}(\mathbf{a}) + \ldots \tag{2.22}$$

unde $Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a})$=polinom de grad l în variabila $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_l}$ care satisface condițiile de ortogonalitate $E[Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(a) Q^{(m)}_{j_1 j_2 \ldots j_m}(a)] = 0$ dacă $l \neq m$ sau dacă $l=m$ dar $j_1 j_2 \ldots j_m$ nu este o permutare a lui $i_1 i_2 \ldots i_l$ unde $l \leq n$ şi $m \leq n$.

Dacă normalizăm polinoamele $Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a})$ obținem o **serie ortonormală Volterra**.

Teorema 2.1-Seria ortonormală Volterra $f(\mathbf{a})$ are K^n termeni [23].

Demonstrație-Se notează $j_1 j_2 \ldots j_s$ cu $s \leq l$ indicii obținuți din indicii $i_1 i_2 \ldots i_l$ după eliminarea repetițiilor. Se notează v_k=numărul de indici i egali cu j_k, $k=1, 2,\ldots,s$.
Atunci se obține:

$$Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a}) = P_{v_1}(a_1) P_{v_2}(a_2) \ldots P_{v_s}(a_s) \tag{2.23}$$

unde $v_1+v_2+\ldots+v_s=l$ şi $P_{v_k}(a_k)$=polinom ortonormal de grad v_k în variabila a_k deci $E[P_{v_t}(a_t)\, P_{v_r}(a_r)]=0$ dacă $v_t \neq v_r$, $1 \leq t,r \leq n$.

Se consideră monoamele liniar independente $f_0(a)$, $f_1(a)$,... unde $a=a_1, a_2, \ldots,a_n$ Printr-o ortonormalizare Gram-Schmidt se obține:

$$\begin{cases} P_0(a) = f_0(a) \\ \ldots \\ P_k(a) = \det\begin{bmatrix} f_k(a) & f_{k-1}(a) & & f_0(a) \\ E[f_{k-1}(a)f_k(a)] & E[f_{k-1}(a)f_{k-1}(a)] & & E[f_{k-1}(a)f_0(a)] \\ \ldots & & & \\ E[f_0(a)f_k(a)] & E[f_0(a)f_{k-1}(a)] & & E[f_0(a)f_0(a)] \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.24}$$

unde k=1, 2,....

Numărul maxim de polinoame $P_k(a)$ este egal cu K-1.

Polinoamele $Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a})$ se obțin ca produse de polinoame $P_k(a)$ deci combinînd cîte un element de pe următoarele linii:

$$\begin{cases} 1 \\ P_1(a_1) \quad P_2(a_1) \quad \ldots \quad P_{K-1}(a_1) \\ P_1(a_2) \quad P_2(a_2) \quad \ldots \quad P_{K-1}(a_2) \\ \ldots \\ P_1(a_n) \quad P_2(a_n) \quad \ldots \quad P_{K-1}(a_n) \end{cases} \tag{2.25}$$

Numărul de produse de cîte 1 polinom $P_k(a)$ este egal cu $1 + (K-1)^1 C_n^1$.

Numărul de produse de cîte 2 polinoame $P_k(a)$ este egal cu $(K-1)^2 C_n^2$.

...

Numărul de produse de cîte n polinoame $P_k(a)$ este egal cu $(K-1)^n C_n^n$.

Numărul total de polinoame $Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a})$ este egal cu K^n (conform formulei lui Newton).

Corolarul 2.1-Dacă $f_i(a)=a^i$ atunci calculul polinoamelor $P_k(a)$ implică un număr finit de medii statistice ale variabilelor aleatoare a.

Corolarul 2.2-Dacă $f_i(a)=a^i$ atunci toate polinoamele $P_k(a)$ au media statistică 0 cu excepția polinomului $P_0(a)$ care are media statistică 1.

$$E[P_k(a)]=E[P_k(a)P_0(a)]=\begin{cases} 1, k=0 \\ 0, 1 \le k \le K-1 \end{cases} \tag{2.26}$$

Corolarul 2.3-Coeficienții $k^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}$ pot fi calculați cu formula:

$$k^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = E[f(\mathbf{a}) Q^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(\mathbf{a})] \tag{2.27}$$

Forma matricială a seriei ortonormale Voterra este:

$$\mathbf{f}=\mathbf{Qk} \tag{2.28}$$

unde:
f=vector coloană K^n dimensional format din valorile funcției f(**a**):

$$\mathbf{f}=\begin{bmatrix} f(1,1,...,1) \\ f(-1,1,...,1) \\ ... \\ f(1,1,...,-1) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

k=vector coloană K^n dimensional format din valorile coeficienților $k^{(l)}_{i_1 i_2 ... i_l}$:

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k^{(0)} \\ k^{(1)}_1 \\ k^{(1)}_2 \\ ... \\ k^{(n)}_{123...n} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Q=matrice K^n x K^n dimensională formată din valorile polinoamelor $Q^{(l)}_{i_1 i_2 ... i_l}(\mathbf{a})$.

Datorită ortonormalității polinoamelor $Q^{(l)}_{i_1 i_2 ... i_l}(\mathbf{a})$ există relația:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=K^n\mathbf{I} \tag{2.31}$$

unde **I** este matricea identitate K^n x K^n dimensională.

Dacă se înmulțeşte relația (2.28) la stînga cu $\mathbf{Q}^T$ se obține [23]:

$$\mathbf{k}=K^{-n}\mathbf{Q}^T\mathbf{f} \tag{2.32}$$

În concluzie vectorul **k** este o transformată a vectorului **f**. Tipul transformatei depinde de matricea **Q** adică de distribuția variabilelor aleatoare a [24].

În general s_n, vectorul semnal la momentul de timp discret n, depinde de m biți de intrare curenți (a_1, a_2,..., a_m) şi v biți de intrare anteriori (a_{m+1}, a_{m+2},..., a_{m+v}) ai transmițătorului TCM (Fig.2.6):

$$s_n = f(a_1, a_2, ..., a_n) =$$
$$= c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i a_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ i<j<l}}^{n} c_{ijl} a_i a_j a_l + ... + c_{12...n} a_1 a_2 ... a_n \qquad (2.33)$$

unde: $n=m+v$, v=numărul de elemente de memorare a codului TCM, $a_i \in \{0, 1\}$, $i=1,2,\ldots,n$ şi $c_0, c_1, \ldots, c_{123\ldots n}$=coeficienţi reali.

Pentru descrierea analitică a unui cod TCM este mai util să utilizăm pentru biţii de intrare a_i valorile $\{-1, +1\}$ în loc de valorile $\{0, 1\}$. De aceea se realizează următoarea conversie:

$$b_i = 1 - 2a_i,\ i=1,2,..,n \qquad (2.34)$$

Se obţine [23]:

$$s_n = f(b_1, b_2, ..., b_n) =$$
$$= d_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} b_i b_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ i<j<l}}^{n} d_{ijl} b_i b_j b_l + ... + d_{12...n} b_1 b_2 ... b_n \qquad (2.35)$$

unde $d_0, d_1, \ldots, d_{123\ldots n}$=coeficienţi reali.

Ecuaţia (2.35) poate fi scrisă sub formă matricială:

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{d} \qquad (2.36)$$

unde:

f=vector coloană 2^n dimensional format din valorile funcţiei f:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(1,1,...,1) \\ f(-1,1,...,1) \\ ... \\ f(1,1,...,-1) \end{bmatrix} \qquad (2.37)$$

d=vector coloană 2^n dimensional format din valorile coeficienţilor d:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ ... \\ d_{123...n} \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

B=matrice 2^n x 2^n dimensională a cărei linie i este $[1 \quad b_1 \quad \quad b_{12...n}]$ unde b_i îşi ia valorile din argumentul funcţiei f de pe linia i a matricei **f**.

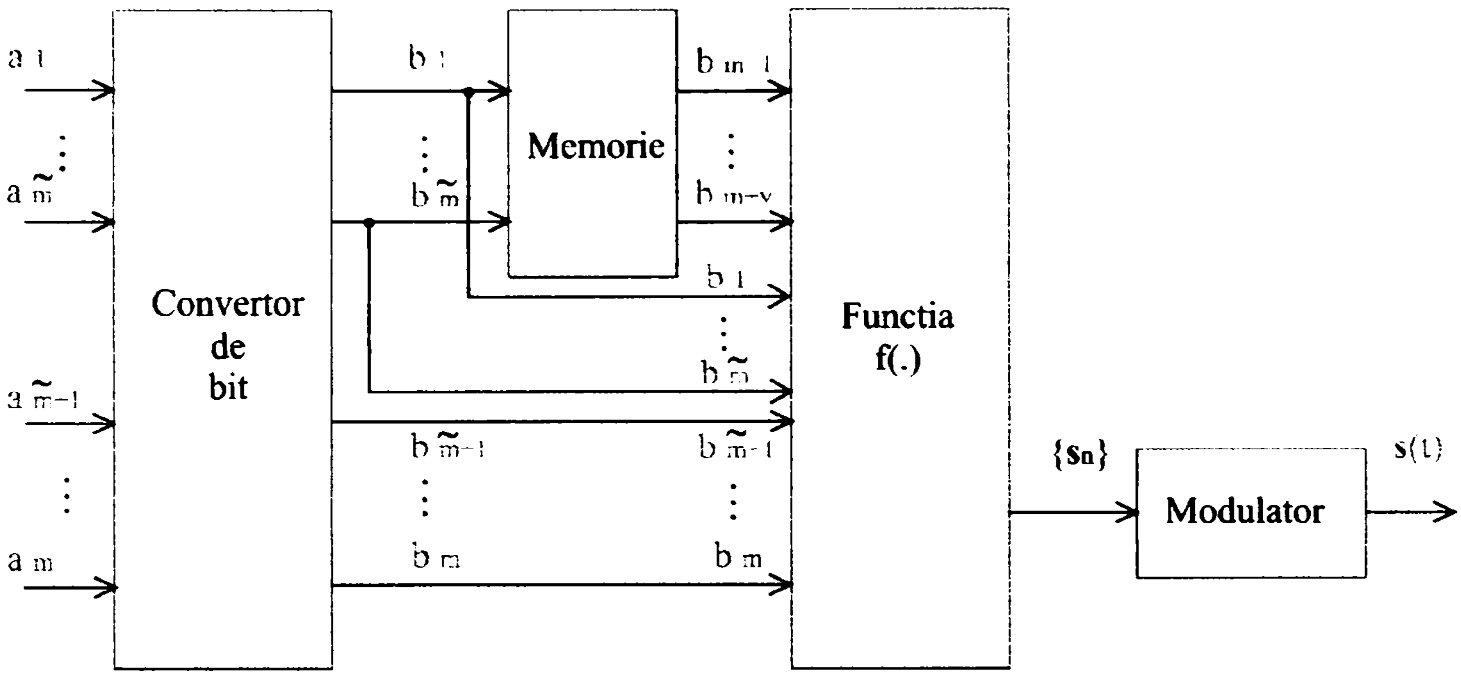


Fig.2.6 Schema bloc a unui transmiţător TCM Calderbank-Mazo.

În [23] se arată că matricea B este ortogonală deci se obţine realţia:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2^n}\mathbf{B}^T \tag{2.39}$$

Soluţia ecuaţiei matriciale (2.36) este:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2^n}\mathbf{B}^T\mathbf{f} \tag{2.40}$$

2.5 Receptorul TCM

Sarcina receptorului TCM este de a estima traiectoria, prin diagrama trellis, a secvenţei de vectori semnal transmişi. Astfel se asociază cu fiecare ramură a diagramei trellis un număr numit **metrica de ramură** şi se caută traiectoria prin diagrama trellis cu metrica totală minimă.

2.5.1 Receptorul TCM cu detecţie de probabilitate condiţionată maximă (MLD)

Se consideră o secvenţă de K vectori semnal $\mathbf{s}=\{\mathbf{s}_i\}_{i=0}^{K-1}$ unde fiecare vector semnal $\mathbf{s}_i$ poate lua M valori. Aceşti vectori semnal $\mathbf{s}_i$ modulează un semnal purtător p(t) şi semnalul de linie transmis este:

$$s(t)=\sum_{i=0}^{K-1} s_i p(t-iT_S) \tag{2.41}$$

unde T_s este durata unui simbol al sursei de date a_i.

Semnalul de linie recepţionat este egal cu:

$$\mathbf{r}(t)=s(t)+\mathbf{n}(t) \tag{2.42}$$

unde $\mathbf{n}(t)$ este zgomotul aditiv al canalului de comunicaţie.

Sarcina receptorului TCM este de a procesa semnalul de linie recepţionat $\mathbf{r}(t)$ şi de a determina un estimat $\hat{s}=\{\hat{s}_i\}_{i=0}^{K-1}$ a secvenţei de vectori semnal transmişi $s=\{s_i\}_{i=0}^{K-1}$ care minimizează probabilitatea erorii de secvenţă P(e).

Se presupune că la transmisie toţi vectorii semnal s_i sunt egali ca probabilitate [7].

La detecţia de probabilitate condiţionată maximă (MLD) se compară probabilităţile condiţionate ale semnalului de linie recepţionat $\mathbf{r}(t)$ faţă de toate secvenţele posibil transmise de vectori semnal şi se alege secvenţa de vectori semnal care maximizează aceste probabilităţi condiţionate.

Receptorul TCM alege $\hat{s}$ dacă:

$$P[\mathbf{r}(t)|\hat{s}]=\max_{\text{toate}s} P[\mathbf{r}(t)|s] \tag{2.43}$$

Forma acestor probabilităţi condiţionate $P[\mathbf{r}(t)|s]$ depinde de canalul de comunicaţie. Pentru un canal de comunicaţie cu **zgomot aditiv, alb, gaussian,** se consideră că semnalul recepţionat $\mathbf{r}(t)$ este egal cu suma unor **elemente (eşantioane) de semnal (signal chips) R(t)**, fiecare de durată T_s:

$$\mathbf{r}(t)=\sum_{i=0}^{K-1}\mathbf{R}(t-iT_S) \tag{2.44}$$

Astfel se obţine:

$$\log P[\mathbf{r}(t)|s]=\sum_{i=0}^{K-1}\log P[\mathbf{R}(t-iT_S)\,|\,s_i]=C-\sum_{i=0}^{K-1}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2 \tag{2.45}$$

unde C este o constantă şi $\|f(t)\|^2=\int|f(t)|^2dt$.

Metrica asociată cu distanţa dintre semnalul de linie recepţionat $\mathbf{r}(t)$ şi secvenţa de vectori semnal transmişi $s=\{s_i\}_{i=0}^{K-1}$ este definită ca:

$$m[\mathbf{r}(t),s]=\sum_{i=0}^{K-1}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2 \qquad (2.46)$$

La detecția de probabilitate condiționată maximă (MLD) se compară metricile asociate cu distanțele dintre semnalul de linie recepționat şi toate secvențele posibil transmise de vectori semnal şi se alege secvența de vectori semnal care minimizează aceste metrici.

Receptorul TCM alege $\hat{s}$ dacă:

$$m[\mathbf{r}(t),\hat{s}]=\min_{toate\, s} m[\mathbf{r}(t),s]=\min_{toate\, s_i}\sum_{i=0}^{K-1}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2 \qquad (2.47)$$

2.5.2 Receptorul TCM cu detecție simbol cu simbol (SSD)

La detecția simbol cu simbol (SSD) minimul sumei din relația (2.47) este egal cu suma minimelor:

$$\begin{aligned}&\min_{toate\, s} m[\mathbf{r}(t),s]=\\ &=\min_{toate\, s_i}\sum_{i=0}^{K-1}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2=\\ &=\sum_{i=0}^{K-1}\min_{toate\, s_i}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2\end{aligned} \qquad (2.48)$$

La detecția simbol cu simbol (SSD) se compară distanțele euclidiene dintre semnalul de linie recepționat la momentul de timp discret i şi toate semnalele de linie posibil transmise la momentul de timp discret i şi alege semnalul de linie care minimizează aceste distanțe euclidiene.

Receptorul TCM alege $\hat{s}_i$ dacă:

$$\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-\hat{s}_i p(t-iT_S)\right\|^2=\min_{toate\, s_i}\left\|\mathbf{R}(t-iT_S)-s_i p(t-iT_S)\right\|^2 \qquad (2.49)$$

În practică se consideră eşantioane de semnal în locul semnalelor continue. Rezultă o simplificare, avantaj plătit prin pierderea optimalității în cazul în care apare o alunecare în timp.

Receptorul TCM alege $\hat{s}_i$ dacă:

$$\left\| \mathbf{r}_i - \hat{\mathbf{s}}_i p_i \right\|^2 = \min_{\text{toate}\,\mathbf{s}_i} \left\| \mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i p_i \right\|^2 \tag{2.50}$$

Pentru $p_i=1$ se defineşte **metrica** asociată cu distanţa dintre eşantionul semnalului de linie recepţionat r_i şi cu vectorul semnal transmis s_i:

$$m[\mathbf{r}_i,\mathbf{s}_i] = \left\| \mathbf{r}_i - \mathbf{s}_i \right\|^2 \tag{2.51}$$

Dacă se consideră eşantioane de semnal în locul semnalelor continue atunci la detecţia simbol cu simbol (SSD) compară metricile asociate cu distanţele dintre eşantionul semnalului recepţionat $\mathbf{r}_i$ şi toţi vectorii semnal posibil transmişi şi alege vectorul semnal care minimizează aceste metrici.

Receptorul TCM alege $\hat{\mathbf{s}}_i$ dacă:

$$m[\mathbf{r}_i,\hat{\mathbf{s}}_i] = \min_{\text{toate}\,\mathbf{s}_i} m[\mathbf{r}_i,\mathbf{s}_i] \tag{2.52}$$

2.5.3 Algoritmul Viterbi

Întrucît fiecare vector semnal poate lua M valori, numărul total de secvenţe de vectori semnal de lungime K posibil transmise este M^K.

Receptorul TCM va calcula metricile pentru toate secvenţele posibil transmise de vectori semnal şi va alege secvenţa de vectori semnal avînd metrica minimă (secvenţa optimă de vectori semnal).

Această procedură are următoarele caracteristici:

- **întîrzîiere mare** - pentru a alege secvenţa optimă de vectori semnal trebuie să aşteptăm pînă cînd întreaga secvenţă de lungime K de vectori semnal este recepţionată ceea ce implică o întîrzîiere totală de KT_s secunde care în unele aplicaţii poate fi inacceptabilă,
- **memorie mare** - trebuiesc memorate M^K secvenţe posibile de vectori semnal,
- **complexitate** - pentru a alege secvenţa optimă de vectori semnal trebuiesc realizate multe comparaţii şi calcule.

Concluzia 2.6-Procedura prin care receptorul TCM va calcula metricile pentru toate secvenţele posibil transmise de vectori semnal şi va alege secvenţa de vectori semnal avînd metrica minimă, nu este practică şi din acest motiv se utilizează **algoritmul Viterbi**, în care numărul de calcule şi memoria necesară pentru alegerea secvenţei optime de vectori semnal creşte liniar cu lungimea K a secvenţei de vectori semnal [7]. Totuşi algoritmul Viterbi nu rezolvă problema întîrzîierii, datorită faptului că pentru a minimiză o funcţie trebuie să aşteptăm pînă cînd este observată toată funcţia.

Algoritmul Viterbi a fost creat în anul 1967 pentru decodarea codurilor convoluţionale şi la scurt timp după apariţia sa s-a observat că este bazat pe principiile **programării dinamice**, o tehnică generală de rezolvare a problemelor de minimizare [25].

Aplicarea algoritmului Viterbi pentru decodarea TCM a început în anul 1984 (ITU-T V.32) şi se bazează pe utilizarea diagramei trellis [15]. Algoritmul Viterbi determină traiectoria prin diagrama trellis care are metrica totală minimă, prin deplasarea secvențială pe diagrama trellis de la o stare la alta.

În fiecare stare i, deci în fiecare interval de T_s secunde, de exemplu de la iT_s la $(i+1)T_s$, receptorul TCM observă eşantionul r_i al semnalului de linie recepționat şi calculează **metrica de ramură** $m[\mathbf{r}_i,\mathbf{s}_i]=\|\mathbf{r}_i-\mathbf{s}_i\|^2$ pentru toate ramurile diagramei trellis care pornesc din starea i.

Metrica de traiectorie pentru o anumită traiectorie din diagrama trellis care trece printr-un anumit nod este egală cu suma **metricilor parțiale de traiectorie** pentru porțiunea de traiectorie din stînga nodului şi pentru porțiunea de traiectorie din dreapta nodului. Dintre toate traiectoriile posibile din stînga nodului receptorul TCM alege traiectoria cu cea mai mică metrică parțială de traiectorie denumită **traiectoria supraviețuitoare** pentru acel nod. Pentru fiecare nod receptorul TCM va memora traiectoria supraviețuitoare şi metrica parțială de traiectorie pentru ea.

De exemplu, fie un nod oarecare A al diagramei trellis în starea σ_i. Receptorul TCM va calcula pentru fiecare din ramurile care pornesc din nodurile în starea σ_{i-1} şi ajung în nodul A o metrica parțială de traiectorie, egală cu suma dintre metrica ramurii şi metrica parțială de traiectorie a nodului origine. Traiectoria supraviețuitoare pentru nodul A este aleasă ca traiectoria cu cea mai mică metrică parțială de traiectorie (Fig.2.7).

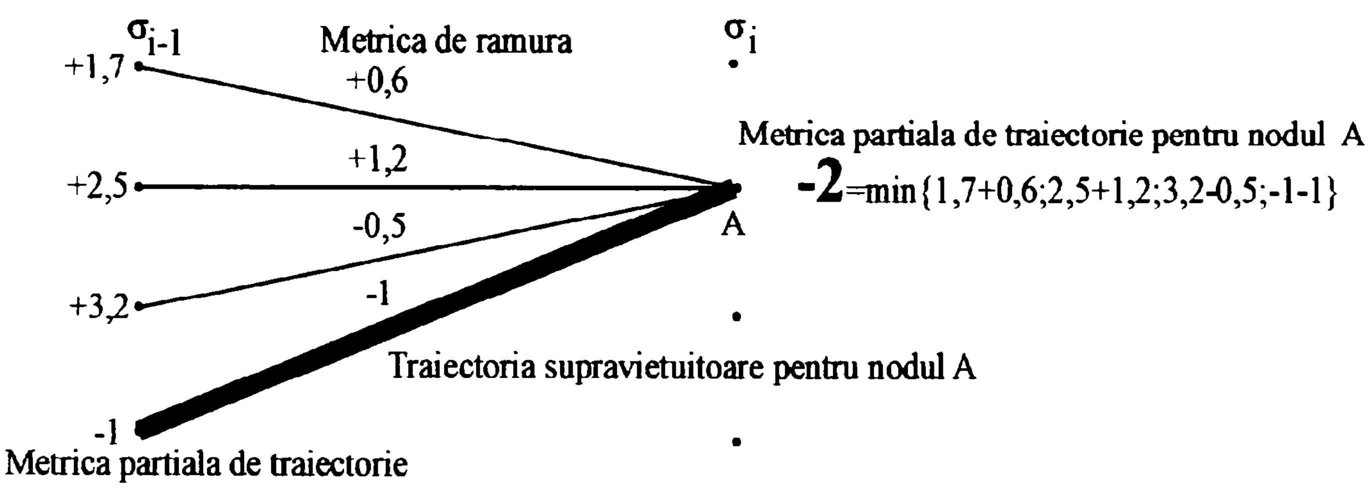


Fig.2.7 Calculul traiectoriei supraviețuitoare şi metricii parțiale de traiectorie pentru nodul A.

Pentru fiecare nod al diagramei trellis în starea σ_i, algoritmul Viterbi calculează şi memorează traiectoria supraviețuitoare şi metrica parțială de traiectorie. După aceea algoritmul Viterbi trece la starea σ_{i+1} şi aşa mai departe. După starea σ_{i+K-1} algoritmul Viterbi alege traiectoria prin diagrama trellis cu metrica totală minimă.

Modelul general al unui receptor TCM este prezentat în Fig.2.8:

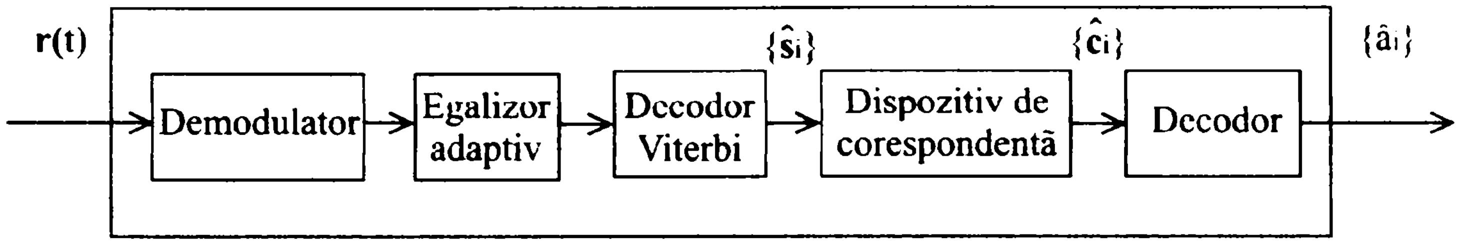


Fig.2.8 Modelul general al unui receptor TCM.

În cazul în care diagrama trellis conține tranziții paralele, deci mai mulți vectori semnal (subconstelație de semnale) sînt asociați cu o ramură, apare o modificare minoră în algoritmul Viterbi prezentat anterior: la calculul metricii de ramură se va determina vectorul semnal, din subconstelația de semnale asociată cu ramura respectivă, cel mai apropiat de eşantionul r_i al semnalului de linie recepționat. Astfel metrica de ramură este egală cu:

$$\min_{\substack{s_i \in \text{subconstelatiei de semnale} \\ \text{asociata cu ramura resectiva}}} \left\| r_i - s_i \right\|^2 \qquad (2.53)$$

Pentru a rezolva problema întîrzîierii se utilizează **algoritmul Viterbi trunchiat**. Se utilizează o adîncime de decizie d şi se forțează decizia în starea σ_i pentru toate traiectoriile prin diagrama trellis pînă în starea σ_{i-d}.

Concluzia 2.7-**Algoritmul Viterbi trunchiat** are următoarele avantaje şi dezavantaje [7]:

⇒ **avantaje**:
- rezolvă problema întîrzîierii - în loc să aşteptăm KT_s secunde pînă cînd întreaga secvență de vectori semnal este recepționată se aşteaptă doar dT_s secunde ($d<K$) după care se estimează cîte un vector semnal la fiecare T_s secunde,
- necesită o memorie mai mică decît algoritmul Viterbi normal - pentru fiecare stare a diagramei trellis trebuiesc memorate traiectoriile supraviețuitoare şi metricile parțiale de traiectorie pentru d stări anterioare.

⇒ **dezavantaje**:
- creşte probabilitatea erorii de secvență (sau de simbol).

Concluzia 2.8-Întîrzîierea introdusă de algoritmul Viterbi trunchiat (dT_s secunde) poate crea probleme dacă se foloseşte un egalizor adaptiv. Deciziile algoritmului adaptiv se întorc la egalizor după un număr de intervale T_s. Pentru evitarea acestui lucru o soluție este utilizarea unei detecții simbol cu simbol preliminare, pentru adaptarea egalizorului adaptiv. Astfel deciziile luate în detecția simbol cu simbol vor fi corelate cu deciziile luate în algoritmul Viterbi trunchiat [7].

CAPITOLUL III
Performanțele sistemelor de transmisii de date cu modulație codată trellis

3.1 Limita superioară a probabilității erorii de secvență

Se consideră reprezentarea Ungerboeck a unui transmițător TCM care are rata de codare a codorului binar convoluțional egală cu $\frac{m'}{m}$, unde $m=m'+1$ (vezi Fig.2.5).

O eroare de lungime L apare cînd receptorul TCM alege în locul secvenței de vectori semnal transmiși $\mathbf{S}_L=(s_i, s_{i+1},\ldots,s_{i+L-1})$ o altă secvență de vectori semnal $\mathbf{S'}_L=(s'_i, s'_{i+1},\ldots,s'_{i+L-1})$, care corespunde unei traiectorii prin diagrama trellis care diverge de la traiectoria corectă la un anumit moment de timp discret și converge la traiectoria corectă după exact L stări.

Dacă presupunem o transmisie suficient de lungă, atunci **P(e) probabilitatea erorii de secvență (de simbol)** este [7]:

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{+\infty} \sum_{\mathbf{S}_L} \sum_{\mathbf{S'}_L \neq \mathbf{S}_L} P[\mathbf{S}_L] P[\mathbf{S'}_L \to \mathbf{S}_L] \tag{3.1}$$

unde $P[\mathbf{S}_L]$ = probabilitatea de a transmite $\mathbf{S}_L$ iar $P[\mathbf{S'}_L{\to}\mathbf{S}_L]$ = probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{S}_L$ să se aleagă $\mathbf{S'}_L$.

Întrucît avem o corespondență unu la unu între s_i = vectorul semnal și $\mathbf{c}_i$ = vectorul cuvînt de cod se obține pentru probabilitatea erorii de secvență (de simbol) [7]:

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{+\infty} \sum_{\mathbf{C}_L} \sum_{\mathbf{C'}_L \neq \mathbf{C}_L} P[\mathbf{C}_L] P[\mathbf{C'}_L \to \mathbf{C}_L] \tag{3.2}$$

unde $\mathbf{C}_L=(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i+1},\ldots,\mathbf{c}_{i+L-1})$ este secvența de vectori cuvinte de cod transmise, $\mathbf{C'}_L=(\mathbf{c'}_i, \mathbf{c'}_{i+1},\ldots,\mathbf{c'}_{i+L-1})$ este secvența aleasă de vectori cuvinte de cod, $P[\mathbf{C}_L]$ = probabilitatea de a transmite $\mathbf{C}_L$ iar $P[\mathbf{C'}_L{\to}\mathbf{C}_L]$ = probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{C}_L$ să se aleagă $\mathbf{C'}_L$.

Dacă $\mathbf{E}_L=(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1},\ldots,\mathbf{e}_{i+L-1})$ este secvența de vectori eroare atunci $\mathbf{C'}_L$ secvența aleasă de vectori cuvinte de cod se poate exprima astfel:

$$\mathbf{C'}_L=\mathbf{C}_L \oplus \mathbf{E}_L \tag{3.3}$$

Dacă $P[\mathbf{E}_L]=\sum_{\mathbf{C}_L} P[\mathbf{C}_L] P[\mathbf{C'}_L \to \mathbf{C}_L]$ este probabilitatea medie a unei erori de lungime L cauzată de secvența de vectori eroare $\mathbf{E}_L$ atunci se obține pentru probabilitatea erorii de secvență (de simbol) [7]:

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{+\infty} \sum_{E_L \neq 0} P[\mathbf{E}_L] \tag{3.4}$$

Dacă avem un canal de comunicație cu zgomot aditiv, alb, gaussian cu densitatea spectrală de putere $\frac{N_0}{2}$ și utilizăm o detecție de probabilitate condiționată maximă (MLD) atunci putem utiliza **limita Bhattacharyya** pentru probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{C}_L$ să se aleagă $\mathbf{C'}_L$:

$$P[\mathbf{C'}_L \to \mathbf{C}_L] \leq \exp\{\frac{-1}{4N_0}\|f(\mathbf{C}_L) - f(\mathbf{C'}_L)\|^2\} \tag{3.5}$$

Astfel limita pentru $P[\mathbf{E}_L]$ probabilitatea medie a unei erori de lungime L cauzată de secvența de vectori eroare $\mathbf{E}_L$ devine:

$$P[\mathbf{E}_L] \leq W[\mathbf{E}_L] \tag{3.6}$$

unde $W[\mathbf{E}_L] = \sum_{\mathbf{C}_L} P[\mathbf{C}_L]\exp\{\frac{-1}{4N_0}\|f(\mathbf{C}_L) - f(\mathbf{C'}_L)\|^2\}$.

Probabilitatea erorii de secvență (de simbol) devine [7]:

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{+\infty} \sum_{\mathbf{E}_L \neq 0} W[\mathbf{E}_L] \tag{3.7}$$

Dacă se presupune că simbolurile sursei de date a_i sunt echiprobabile ($P(a_i) = \frac{1}{M'} = 2^{-m'}$ unde m' este numărul de biți folosiți la codarea simbolurilor sursei) se definesc $G(\mathbf{e}_i)$ **matricile ponderilor vectorilor eroare** $\mathbf{e}_i$ astfel încît $[G(\mathbf{e}_i)]_{p,q}$ elementul de pe lina i și coloana j este [7]:

$$[G(\mathbf{e}_i)]_{p,q} = \begin{cases} 0, & \text{daca nu exista tranzitii } p \to q \\ \frac{1}{M'} \sum_{c_{p \to q}} D^{\|f(c_{p\to q}) - f(c_{p\to q} \oplus \mathbf{e}_i)\|^2}, & \text{daca exista tranzitii } p \to q \end{cases} \tag{3.8}$$

unde D este o nedeterminată care poate fi considerată ca operația de întîrzîere cu o unitate de timp și $c_{p\to q}$ este vectorul cuvînt de cod corespunzător tranziției din starea p în stare q (suma apare din cauza tranzițiilor paralele posibile între starea p și starea q). Prezența biților necodați convoluțional în transmițătorul Ungerboeck determină apariția tranzițiilor paralele în diagrama trellis ($2^{m'-r}$ tranziții paralele / fiecare ramură).

Pentru $W[\mathbf{E}_L]$ se obține expresia [7]:

$$W[\mathbf{E}_L] = \frac{1}{N} 1^T \prod_{i=0}^{L-1} G(\mathbf{e}_i)_{p,q} 1 \tag{3.9}$$

unde **1** este vectorul coloană N-dimensional cu toate elementele egale cu 1 şi $[\prod_{i=0}^{L-1} \mathbf{G}(\mathbf{e}_i)]_{p,q}$ reprezintă distanțele euclidiene implicate în tranzițiile din starea p în starea q în exact L paşi.

3.1.1 Diagrama de stare a erorii

Vectorii eroare $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_{i+L-1}$ din secvența $\mathbf{E}_L$ nu sînt independenți. **Diagrama de stare a erorii** este un graf care descrie dependența dintre vectorii $\mathbf{e}_i$.

Datorită liniarității codului binar convoluțional vectorii cuvinte de cod $\mathbf{c}_i$ formează un grup aditiv şi comutativ C. Vectorii eroare $\mathbf{e}_i$ fiind diferențe ale vectorilor cuvinte de cod $\mathbf{c}_i$ sînt şi ei elemente din C. Deci în diagrama de stare a erorii, conexiunile dintre vectorii eroare $\mathbf{e}_i$ sînt aceleaşi ca şi conexiunile dintre vectorii cuvinte de cod $\mathbf{c}_i$.

Diagrama de stare a erorii are o structură determinată doar de codul binar convoluțional deci diferă de diagrama de stare a codului doar prin denumirile stărilor şi prin etichetele de ramură, care sunt **matricile $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ a ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$**.

Concluzia 3.1-Probabilitatea erorii de secvență (de simbol) este limitată superior de expresia [7]:

$$P(e) \le T(D)\Big|_{D=\exp\left\{\frac{-1}{4N_0}\right\}} \tag{3.10}$$

unde:

T(D) = funcția de transfer scalară a diagramei de stare a erorii:

$$T(D) = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \mathbf{G} \mathbf{1} \tag{3.11}$$

G = funcția de transfer matricială a diagramei de stare a erorii:

$$\mathbf{G} = \sum_{L=1}^{+\infty} \sum_{\mathbf{E}_L \neq 0} \prod_{i=0}^{L-1} \mathbf{G}(\mathbf{e}_i) \tag{3.12}$$

3.1.2 Consideraţii de simetrie a funcţiei de transfer matriciale a diagramei de stare a erorii

Se consideră următoarele limite:

$[G]_{p,q}$ = limita superioară a probabilităţii de apariţie a unei erori care începe în starea p şi se termină în starea q,

$[\frac{1}{N}G1]_p$ = limita superioară a probabilităţii de apariţie a unei erori care începe în starea p,

$[\frac{1}{N}1^T G]_q$ = limita superioară a probabilităţii de apariţie a unei erori care se termină în starea q.

Concluzia 3.2-Dacă **funcţia de transfer matricială a diagramei de stare a erorii G are toate elementele egale** atunci toate traiectoriile din diagrama trellis contribuie în mod egal la P(e). În acest caz în analiza unei scheme TCM se poate considera o singură traiectorie ca referinţă şi se poate calcula P(e) pentru orice secvenţă transmisă. **O condiţie suficientă dar nu şi necesară** ca **G** să aibă toate elementele egale este ca toate matricile **G(e$_i$)** să aibă toate elementele egale [7].

Funcţia de transfer matricială a diagramei de stare a erorii G este uniformă pe linii dacă **1** este valoare principală a **G** şi **G1**=C_1**1** unde C_1=ct. (suma elementelor de pe orice linie a **G** este independentă de numărul liniei).

Funcţia de transfer matricială a diagramei de stare a erorii G este uniformă pe coloane dacă **1** este valoare principală a $\mathbf{G}^T$ şi $\mathbf{1}^T\mathbf{G}=\mathbf{1}^T C2$ unde C_2=ct. (suma elementelor de pe orice coloană a **G** este independentă de numărul coloanei).

Funcţia de transfer matricială a diagramei de stare a erorii G este uniformă pe linii sau pe coloane dacă **1** este valoare principală a **G** sau a lui $\mathbf{G}^T$ şi $\mathbf{1}^T\mathbf{G1}=NC_3$ unde C_3=ct. (suma elementelor de pe orice linie sau coloană a **G** este independentă de numărul liniei sau coloanei).

Concluzia 3.3-Dacă **funcţia de transfer matricială a diagramei de stare a erorii G este uniformă pe linii sau pe coloane** atunci toate stările din diagrama de stare a erorii contribuie în mod egal la P(e). În acest caz în analiza unei scheme TCM se poate considera o singură stare ca referinţă pentru calculul P(e) în loc să se considere toate perechile posibile de stări. Mai exact trebuiesc considerate pentru calculul P(e) doar erorile care încep dintr-o stare fixată (dacă **G** este uniformă pe linii) sau doar erorile care se termină într-o stare fixată (dacă **G** este uniformă pe coloane). **O condiţie necesară şi suficientă** ca **G** să fie uniformă pe linii sau pe coloane este ca toate matricile **G(e$_i$)** să fie uniforme pe linii sau pe coloane. În acest caz spunem că **schema TCM este uniformă** şi funcţia de transfer a diagramei de stare a erorii poate fi calculată utilizînd etichete de ramură scalare în diagrama de stare a erorii [7].

Matricile G(e$_i$) sînt uniforme pe linii dacă tranziţiile care încep din orice stare a diagramei de stare a erorii transportă acelaşi set de etichete de ramură.

Matricile G(e$_i$) sînt uniforme pe coloane dacă tranziţiile care se termină în orice stare a diagramei de stare a erorii transportă acelaşi set de etichete de ramură.

Fie C_0 submulţimea formată din $M'=2^{m'}$ vectori cuvinte de cod **c**, corespunzătoare tuturor stărilor nule ale codorului binar convoluţional liniar.

Fie $C_0+\check{\mathbf{c}}$ submulţimea formată din vectorii cuvinte de cod $\check{\mathbf{c}}$, corespunzători tuturor stărilor nenule ale codorului binar convoluţional liniar.

Lema 3.1-Submulţimea C_0 este un grup comutativ şi există o singură submulţime $C_0+\check{\mathbf{c}}$ asociată submulţimii C_0. Fiecare stare a codorului convoluţional liniar generează un cuvînt de cod care aparţine submulţimii C_0 sau submulţimii $C_0+\check{\mathbf{c}}$.

Orice linie din matricile $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ corespunde unei anumite stări a codorului binar convoluţional liniar deci corespunde la C_0 sau $C_0+\check{\mathbf{c}}$.

Concluzia 3.4-O condiţie suficientă pentru ca o schemă TCM să fie uniformă este:

$$\sum_{\mathbf{c}\in C_0} D^{\|f(\mathbf{c})-f(\mathbf{c}\oplus\mathbf{e})\|^2} = \sum_{\mathbf{c}\in C_0} D^{\|f(\mathbf{c}\oplus\check{\mathbf{c}})-f(\mathbf{c}\oplus\check{\mathbf{c}}\oplus\mathbf{e})\|^2}, \text{ pentru orice } \mathbf{e} \quad (3.13)$$

Fie transformata T definită astfel:

$$f(\mathbf{c}) \to f(\mathbf{c}\oplus\mathbf{e}), \text{ pentru orice } \mathbf{c}\in C_0 \quad (3.14)$$

Concluzia 3.5-O condiţie suficientă pentru ca o schemă TCM să fie uniformă este ca transformata T să reprezinte o izometrie (de exemplu o rotaţie, o reflexie sau combinaţii ale acestora).

În cazul unei scheme TCM uniforme definim $W(\mathbf{e})$ **profilul ponderilor vectorului eroare e**:

$$W(\mathbf{e}) = \frac{1}{M'}\sum_{\mathbf{c}\in C_0} D^{\|f(\mathbf{c})-f(\mathbf{c}\oplus\mathbf{e})\|^2} \quad (3.15)$$

sau

$$W(\mathbf{e}) = \frac{1}{M'}\sum_{\mathbf{c}(v)} D^{\|f(\mathbf{c}(v))-f(\mathbf{c}(v)\oplus\mathbf{e})\|^2} \quad (3.16)$$

unde v este ordinul componentei vectorului cuvînt de cod **c** care variază în izometria T, iar **c**(v) este **c** cu componenta de ordin v aleasă arbitrar „0" sau „1".

Concluzia 3.6-În cazul unei scheme TCM uniforme probabilitatea erorii de secvenţă (de simbol) este limitată superior de expresia [7]:

$$P(e) \le T(D) \quad (3.17)$$

unde $T(D)=\sum_{\mathbf{e}} W(\mathbf{e})$.

3.1.3 Considerații asimptotice a funcției de transfer matriciale a diagramei de stare a erorii

$[G]_{p,q}$ limita superioară a probabilității de apariție a unei erori care începe în starea p şi se termină în starea q, poate fi scrisă ca o serie de puteri în nedeterminata D, cu termenul general $v_{p,q}(d_l)D^{d_l^2}$, unde:

- $v_{p,q}(d_l)=\frac{1}{M'^{L_1}}n_1+\frac{1}{M'^{L_2}}n_2+\ldots$ = numărul mediu de traiectorii care se întîlnesc la distanța d_l asociate cu orice traiectorie din diagrama trellis care începe în starea p şi se termină în starea q,
- $n_1, n_2,\ldots$ = numărul de traiectorii eroare care diverg de la traiectoria corectă în starea p şi converg la traiectoria corectă în starea q după $L_1, L_2,\ldots$intervale de simbol,
- $\frac{1}{M'^{L_1}},\frac{1}{M'^{L_2}},\ldots$ = probabilitatea secvenței de simboluri ale sursei de date de lungime $L_1, L_2,\ldots$.

Astfel se obține:

$\Rightarrow$ $v_p(d_l)=\sum_q v_{p,q}(d_l)$ = numărul mediu de traiectorii care se întîlnesc la distanța d_l asociate cu orice traiectorie din diagrama trellis care începe în starea p şi se termină în orice stare,

$\Rightarrow$ $N(d_l)=\frac{1}{N}\sum_{p,q} v_{p,q}(d_l)$ = numărul mediu de traiectorii care se întîlnesc la distanța d_l asociate cu orice traiectorie din diagrama trellis.

Concluzia 3.7-Pentru un raport semnal/zgomot mare ($N_0 \to 0$) singurul element din **G** funcția de transfer matricială a diagramei de stare a erorii care contribuie semnificativ la P(e) este $v_{p,q}(d_{min})D^{d_{min}^2}$ [7]. În acest caz probabilitatea erorii de secvență (de simbol) **tinde asimptotic** către:

$$N(d_{min})D^{d_{min}^2}\Big|_{D=\exp\{\frac{-1}{4N_0}\}} \tag{3.18}$$

unde d_{min}= distanța euclidiană minimă dintre două secvențe posibile de vectori semnal din setul Ω (constelația de semnale extinsă).

Concluzia 3.8-Dacă în locul relației (3.4) utilizăm următoarea **limită Bhattacharyya** pentru probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{C}_L$ să se aleagă $\mathbf{C'}_L$:

$$P[C'_L \to C_L] \le \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}})\exp(\frac{d^2_{min}}{4N_0})\exp\{\frac{-1}{4N_0}\|f(C_L) - f(C'_L)\|^2\} \qquad (3.19)$$

atunci în locul relației (3.17) se obține o altă limită superioară pentru probabilitatea erorii de secvență (de simbol):

$$P(e) \le \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}})\exp(\frac{d^2_{min}}{4N_0})T(D)\Big|_{D=\exp\left\{\frac{-1}{4N_0}\right\}} \qquad (3.20)$$

Concluzia 3.9-Pentru un raport semnal/zgomot mare ($N_0 \to 0$), probabilitatea erorii de secvență (de simbol) **tinde asimptotic** către:

$$\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}})N(d_{min})D^{d^2_{min}}\Big|_{D=\exp\{\frac{-1}{4N_0}\}} \qquad (3.21)$$

<u>3.1.4 Limita superioară a probabilității erorii de bit</u>

Pentru a calcula limita superioară a probabilității erorii de bit P_b trebuie făcută următoarea modificare în matricile $\mathbf{G(e_i)}$ [7]: $[\mathbf{G(e_i)}]_{p,q}$=trebuie multiplicat cu un factor I^{ε} unde ε reprezintă numărul de biți eronați asociați cu vectorul eroare $\mathbf{e}_i$ și cu tranziția din starea p în starea q în diagrama trellis.

$[\mathbf{G}]_{p,q}$ limita superioară a probabilității de apariție a unei erori care începe în starea p și se termină în starea q, poate fi scrisă ca o serie de puteri în nedeterminatele D și I, cu termenul general $\mu_{p,q}(d_l,\varepsilon_h)D^{d_l^2}I^{\varepsilon_h}$ unde:

$\mu_{p,q}(d_l,\varepsilon_h)$=numărul mediu de traiectorii care se întîlnesc la distanța d_l, avînd ε_h biți eronați și asociate cu orice traiectorie din diagrama trellis care începe în starea p și se termină în starea q.

Dacă se calculează derivata termenului general în raport cu I, pentru I=1 se obține numărul estimat de biți eronați per ramură, generați de traiectoriile incorecte care încep în starea p și se termină în starea q. Dacă se împarte cu m' și se însumează, se obține limita superioară a probabilității erorii de bit P_b.

Concluzia 3.10-Limita superioară pentru P_b este:

$$P_b \le \frac{1}{m'} \frac{\partial T(D)}{\partial I}\bigg|_{I=1, D=\exp\{\frac{-1}{4N_0}\}} \tag{3.22}$$

Concluzia 3.11-Dacă în locul relației (3.4) utilizăm relația (3.19) la **limita Bhattacharyya** pentru probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{C}_L$ să se aleagă $\mathbf{C'}_L$ se obține o altă limită superioară pentru probabilitatea erorii de bit:

$$P_b \le \frac{1}{2m'} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \exp\left(\frac{d_{min}^2}{4N_0}\right) \frac{\partial T(D)}{\partial I}\bigg|_{I=1, D=\exp\{\frac{-1}{4N_0}\}} \tag{3.23}$$

3.1.5 Considerații de convergență a funcției de transfer scalare a diagramei de stare a erorii

T(D) sau T(D,I) funcția de transfer scalară a diagramei de stare a erorii este o **serie convergentă** pentru un raport semnal/zgomot suficient de mare.

Există situații în care funcția scalară a diagramei de stare a erorii este o **serie neconvergentă** deoarece unul sau mai mulți coeficienți ai săi au valori infinite. Asemenea situații pot apare pentru scheme TCM în care 2 secvențe de vectori semnal cu distanță euclidiană finită corespund la 2 secvențe de simboluri ale sursei de date cu o distanță Hamming infinită [7]. Aceste scheme TCM se numesc **catastrofice** deoarece un număr finit de erori ale canalului de comunicație cauzează un număr infinit de erori ale simbolurilor sursei de date [26].

3.1.6 Cazul unui canal de comunicație general

Fie $\mathbf{R}_L=(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1},\ldots,\mathbf{r}_{i+L-1})$ secvența de vectori semnal recepționați. Metrica care semnifică distanța euclidiană dintre $\mathbf{R}_L$ secvența de vectori semnal recepționați și $\mathbf{S}_L$ secvența de vectori semnal transmiși și care este utilizată de receptorul TCM este:

$$m[\mathbf{R}_L, \mathbf{S}_L] = \sum_{i=0}^{L-1} m[\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i] \tag{3.24}$$

Receptorul TCM alege $\mathbf{S'}_L$ dacă:

$$m[\mathbf{R}_L, \mathbf{S}'_L] = \min_{\text{toate} \mathbf{S}_L} m[\mathbf{R}_L, \mathbf{S}_L] \tag{3.25}$$

Probabilitatea erorii de secvență (de simbol) este limitată superior conform relațiilor (3.4) şi (3.7).

Dacă canalul de comunicație nu este un canal cu zgomot aditiv, alb, gaussian şi detecția nu este totdeauna de probabilitate condiționată maximă (MLD) atunci se poate utiliza **limita Chernoff** pentru probabilitatea ca atunci cînd se transmite $\mathbf{C}_L$ să se aleagă $\mathbf{C}'_L$:

$$P[\mathbf{C}'_L \to \mathbf{C}_L] \le E\{e^{\lambda\sum_{i=1}^{L}[m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)] - m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i)]]} | \mathbf{c}_i\} \qquad (3.26)$$

unde $\lambda>0$ este parametrul Chernoff care nu depinde de i.

Dacă se consideră un canal de comunicație fără memorie (memoryless communications channel) atunci:

$$E\{e^{\lambda\sum_{i=1}^{L}[m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)] - m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i)]]} | \mathbf{c}_i\} = \prod_{i=1}^{L} E\{e^{\lambda[m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)] - m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i)]]} | \mathbf{c}_i\} \qquad (3.27)$$

Se defineşte:

$$\exp\{-\Delta_\lambda [f(\mathbf{c}_i), f(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)]\} = E\{e^{\lambda[m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)] - m[\mathbf{r}_i, f(\mathbf{c}_i)]]} | \mathbf{c}_i\} \qquad (3.28)$$

unde parametrul λ ar trebui ales astfel încît să minimizeze limita Chernoff (3.26).

Astfel limita pentru $P[\mathbf{E}_L]$ probabilitatea medie a unei erori de lungime L cauzată de secvența de vectori eroare $\mathbf{E}_L$ devine:

$$P[\mathbf{E}_L] \le W[\mathbf{E}_L] = \sum_{\mathbf{C}_L} P[\mathbf{C}_L] \exp\{-\Delta_\lambda [f(\mathbf{C}_L), f(\mathbf{C}_L \oplus \mathbf{E}_L)]\} \qquad (3.29)$$

Dacă se presupune că simbolurile sursei de date a_i sunt echiprobabile ($P(a_i)=\frac{1}{M'}=2^{-m'}$ unde m' este numărul de biți folosiți la codarea simbolurilor sursei) se definesc $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ **matricile ponderilor vectorilor eroare** $\mathbf{e}_i$ astfel încît $[\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)]_{p,q}$ elementul de pe lina i şi coloana j este [7]:

$$[\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)]_{p,q} = \frac{1}{M'} \sum_{\mathbf{c}_{p\to q}} \exp\{-\Delta_\lambda [f(\mathbf{c}_{p\to q}), f(\mathbf{c}_{p\to q} \oplus \mathbf{e}_i)]\} \qquad (3.30)$$

unde D este o nedeterminată care poate fi considerată ca operația de întîrzîiere cu o unitate de timp şi $\mathbf{c}_{p\to q}$ este vectorul cuvînt de cod corespunzător tranziției din starea p în stare q (suma apare din cauza tranzițiilor paralele posibile între starea p şi starea q). Prezența biților necodați convolutional în transmițătorul TCM determină apariția tranzițiilor paralele în diagrama trellis.

Concluzia 3.12-Pentru modelul canalului de comunicație general, parametrul Δ_λ este echivalent cu d^2_{min}, pătratul distanței euclidiene minime dintre două secvențe posibile de vectori semnal din setul Ω (constelația de semnale extinsă), pentru modelul canalului de comunicație cu zgomot aditiv, alb, gaussian.

3.2 Limita inferioară a probabilității erorii de secvență

Se consideră cazul unui canal de comunicație cu zgomot aditiv, alb, gaussian. Calculul limitei superioare a probabilității erorii de secvență (de simbol) se bazează pe faptul că P(e) a oricărui receptor TCM real este mai mare decît P(e) a oricărui receptor TCM ideal care utilizează informațiile furnizate de un observator.

Receptorul TCM ideal operează astfel: observatorul analizează o secvență lungă de vectori semnal, sau echivalent o secvență lungă de cuvinte de cod transmise $\mathbf{C}_K=(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i+1},\ldots,\mathbf{c}_{i+K-1})$ și îi comunică receptorului TCM ideal că secvența de vectori cuvinte de cod transmise a fost $\mathbf{C}'_K=(\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_{i+1},\ldots,\mathbf{c}'_{i+K-1})$, dacă $\mathbf{C}'_K$ are cea mai mica distanță euclidiană fată de $\mathbf{C}_K$ (nu neapărat egală cu d_{min} = distanța euclidiană minimă dintre două secvențe posibile de vectori semnal din setul Ω, constelația de semnale extinsă).

Probabilitatea erorii de secvență (de simbol) pentru receptorul TCM ideal este [7]:

$$P_{ideal}(e) = \frac{1}{2}\sum_{C_L} P[C_K]\mathrm{erfc}\left(\frac{\|f(C_K)-f(C'_K)\|}{2\sqrt{N_0}}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{C_L} I[C_K]P[C_K]\mathrm{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \quad (3.31)$$

unde:

$$I[C_K]=\begin{cases} 1, \text{pt.} d_{min} = \min\limits_{C_K}\|f(C_K)-f(C'_K)\| \\ 0, \text{rest} \end{cases} \quad (3.32)$$

Concluzia 3.13-Probabilitatea erorii de secvență (de simbol) pentru receptorul TCM real este limitată inferior astfel [7]:

$$P(e) \geq \frac{1}{2}\Psi\, \mathrm{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \quad (3.33)$$

unde $\psi = \frac{1}{2}\sum_{C_L} I[C_K]P[C_K]$ este probabilitatea ca la orice moment de timp discret, o traiectorie aleasă aleator prin diagrama trellis, să aibă o altă traiectorie, care diverge de la ea la acel moment de timp discret și converge la ea mai tîrziu, astfel încît distanța euclidiană dintre ele să fie egală cu d_{min}.

$\psi = 1$ dacă pentru orice traiectorie prin diagrama trellis, la orice moment de timp discret, există o altă traiectorie, care diverge de la ea la acel moment de timp discret și converge la ea mai tîrziu, astfel încît distanța euclidiană dintre ele să fie egală cu d_{min}

(în general această proprietate nu este adevărată).

O condiţie suficientă pentru ca $\psi = 1$ este ca toate traiectoriile din diagrama trellis să contribuie în mod egal la P(e) [7]. **O condiţie suficientă** pentru ca $\psi = 1$ este ca **G** să aibă toate elementele egale [7]. **O condiţie suficientă** pentru ca $\psi = 1$ este ca toate matricile $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ să aibă toate elementele egale [7].

Se notează:

m' = numărul de biţi folosiţi la codarea simbolurilor sursei,

Λ = lungimea minimă a evenimentului eroare care produce d_{min},

$N_\Lambda(d_{min})$ = numărul de traiectorii de lungime Λ care au o traiectorie cu care se întîlnesc la distanţa d_{min}.

Cu aceste notaţii rezultă:

$N2^{m'\Lambda}$ = numărul de traiectorii de lungime Λ care încep din orice stare,

$\frac{N_\Lambda(d_{min})}{N2^{m'\Lambda}}$ = este probabilitatea ca la orice moment de timp discret, o traiectorie aleasă aleator prin diagrama trellis, să aibă o altă traiectorie, care diverge de la ea la acel moment de timp discret şi converge la ea mai tîrziu, astfel încît distanţa euclidiană dintre ele să fie egală cu d_{min} şi lungimea lor să fie Λ.

Astfel se obţine [7]:

$$\Psi \geq \frac{N_\Lambda(d_{min})}{N2^{m'\Lambda}} \tag{3.34}$$

Concluzia 3.13-Probabilitatea erorii de secvenţă (de simbol) pentru receptorul TCM real este limitată inferior astfel [7]:

$$P(e) \geq \frac{1}{2}\frac{N_\Lambda(d_{min})}{N2^{m'\Lambda}}\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \tag{3.35}$$

3.2.1 Limita inferioară a probabilităţii erorii de bit

Concluzia 3.14-Probabilitatea erorii de bit este limitată inferior astfel:

$$P_b \geq \frac{1}{2m'}\Psi\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2m'}\frac{N_\Lambda(d_{min})}{N2^{m'\Lambda}}\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \tag{3.36}$$

3.3 Calculul funcţiei de transfer scalară a diagramei de stare a erorii

Funcţia de transfer scalară a diagramei de stare a erorii T(D,I) se calculează astfel:

- din diagrama de stare a erorii se calculează funcţia de transfer scalară T(D,I) prin metode bazate pe soluţia unui sistem de ecuaţii liniare sau prin tehnici de reducere a grafurilor,

- se calculează matricile **G**($\mathbf{e}_i$) a ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$ (sau în cazul unei scheme TCM uniforme se calculează profilurile W($\mathbf{e}_i$) a ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$),
- se înlocuiesc etichetele formale ale funcţiei de transfer T(D,I) cu matricile ponderilor **G**($\mathbf{e}_i$) sau profilurile ponderilor W($\mathbf{e}_i$) vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$ după ce în prealabil s-au înmulţit cu I^{ε}.

3.4 Calculul distanţei euclidiene minime

3.4.1 Calculul distanţei euclidiene minime utilizînd diagrama de stare a erorii

Se consideră **G**($\mathbf{e}_i$) matricile ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$. În general elementele lor sînt sume de termeni generaţi de tranziţii paralele. Aceste tranziţii paralele apar datorită prezenţei biţilor necodaţi convoluţional în transmiţătorul TCM. Pentru calculul d_{min}, este suficient să considerăm pentru elementele matricilor **G**($\mathbf{e}_i$) a ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$, în locul sumelor de termeni, doar un singur termen şi anume acela cu exponentul mai mic (întrucît ne interesează calculul lui d_{min}).

Funcţia de transfer scalară T(D) a diagramei de stare a erorii poate fi scrisă ca o serie de genul [7]:

$$T(D) = N(d_{min})D^{d^2_{min}} + N(d_{next})D^{d^2_{next}} + \dots \tag{3.37}$$

unde d_{next} este după d_{min} următoarea distanţă euclidiană dintre două traiectorii din diagrama trellis care formează un eveniment eroare.

Se definesc funcţiile $\Phi_1(D)$ şi $\Phi_2(D)$ [7]:

$$\Phi_1(D) = \ln\left[\frac{T(eD)}{T(D)}\right] \tag{3.38}$$

$$\Phi_2(D) = \frac{\ln[T(D)]}{\ln D} \tag{3.39}$$

Se arată că funcţiile $\Phi_1(D)$ şi $\Phi_2(D)$ au următoarele propietăţi [7]:

⇒ funcţia $\Phi_1(D)$ descreşte monoton către d^2_{min} cînd D→0, deci pentru orice D>0 funcţia $\Phi_1(D)$ va furniza o limită superioară pentru d^2_{min},

⇒ funcţia $\Phi_2(D)$ creşte monoton către d^2_{min} cînd D→0, deci pentru orice D>0 funcţia $\Phi_2(D)$ va furniza o limită inferioară pentru d^2_{min}.

Concluzia 3.15-Dacă considerăm două secvenţe de valori pozitive, descrescătoare către 0 ale nedeterminatei D atunci funcţiile $\Phi_1(D)$ şi $\Phi2(D)$ furnizează două secvenţe de valori care converg către d^2_{min}.

În cazul schemelor TCM uniforme, funcția de transfer scalară T(D) a diagramei de stare a erorii poate fi calculată utilizînd etichete de ramură scalare în diagrama de stare a erorii. Aceste etichete de ramură scalare sînt egale cu suma elementelor de pe orice linie sau coloană a matricilor $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ a ponderilor vectorilor eroare $\mathbf{e}_i$. Pentru calculul d_{min}, este suficient să considerăm pentru etichetele de ramură scalare din diagrama de stare a erorii, în locul sumelor de termeni, doar un singur termen şi anume acela cu exponentul mai mic (întrucît ne interesează calculul lui d_{min}).

Se defineşte w(e) **ponderea euclidiană a vectorului eroare e** [7]:

$$w(\mathbf{e}) = \min_{\mathbf{c}\in C_0} \left\| f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{c} \oplus \mathbf{e}) \right\|^2 \tag{3.40}$$

Concluzia 3.16-În cazul schemelor TCM uniforme, funcția de transfer scalară T(D) a diagramei de stare a erorii poate fi calculată utilizînd etichete de ramură scalare în diagrama de stare a erorii pentru care se consideră valorile $D^{w(e)}$ [7].

3.4.2 Algoritmul Saxona-Mulligan-Wilson

Pentru fiecare pereche de ramuri dintr-o secțiune a diagramei trellis se defineşte o distanță euclidiană între vectorii semnal care etichetează ramurile respective.

Dacă există tranziții paralele atunci fiecare ramură va fi asociată cu o subconstelație de semnale. În acest caz va fi utilizată distanța euclidiană minimă dintre oricare doi vectori semnal extraşi din cele două subconstelații de semnale.

Pătratul distanței euclidiene dintre două secvențe de vectori semnal asociate cu două traiectorii din diagrama trellis se obține prin suma pătratelor distanțelor euclidiene individuale (vezi Fig.2.2).

Algoritmul Saxona-Mulligan-Wilson [27] se bazează pe actualizarea elementelor matricii $\mathbf{D}^{(n)}$, unde termenul general $[\mathbf{D}^{(n)}]_{pq} = \delta_{pq}^{(n)}$ = minimul pătratelor distanțelor euclidiene dintre toate perechile de traiectorii din diagrama trellis, care diverg dintr-o stare inițială σ_0 şi care ajung în stările p şi q la acelaşi moment de timp discret (Fig.3.1).

Concluzia 3.17-Matricea $\mathbf{D}^{(n)}$ este simetrică şi elementele ei de pe diagonala principală sînt egale cu $\delta_{pp}^{(n)}$=minimul pătratelor distanțelor euclidiene dintre toate perechile de traiectorii din diagrama trellis care diverg dintr-o stare inițială σ_0 şi care ajung în aceeaşi stare p la acelaşi moment de timp discret [27].

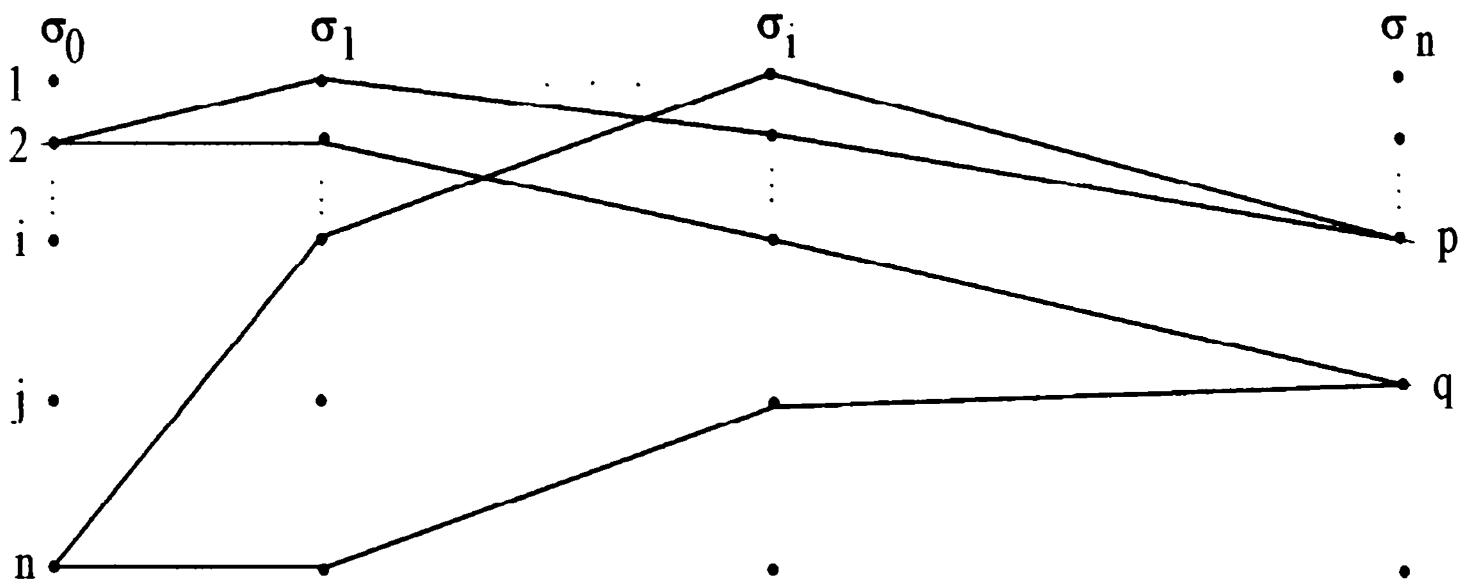


Fig.3.1 Două perechi de traiectorii din diagrama trellis care diverg dintr-o stare inițială σ_0 și care ajung în stările p și q la același moment de timp discret.

Algoritmul Saxona-Mulligan-Wilson [27] se desfăşoară astfel:

Etapa 1-Pentru fiecare stare p, se găsesc cele M stări predecesoare din care sunt posibile tranziții către starea p și se memorează aceste M stări predecesoare într-un tabel. Se setează $\delta_{pq}^{(0)} = -1$ pentru toate p și q≥p.

Etapa 2-Pentru fiecare pereche de stări (p, q), se găsește minimul pătratelor distanțelor euclidiene dintre toate perechile de traiectorii din diagrama trellis care diverg dintr-o stare inițială σ_0 și care ajung în stările p și q într-o unitate timp discret și se memorează ca $\delta_{pq}^{(1)}$ (Fig.3.2).

Etapa 3-Pentru fiecare pereche de stări (p, q) se găsesc în tabelele memorate la Etapa 1 cele M stări predecesoare: $p_1, p_2, \ldots, p_M$ și $q_1, q_2, \ldots, q_M$ (Fig.3.3). În general există M^2 traiectorii posibile la momentul de timp discret n-1 care trec prin stările p și q la momentul de timp discret n. Aceste traiectorii trec prin perechile de stări:

$$\begin{cases} (p_1, q_1), (p_1, q_2), \ldots, (p_1, q_M) \\ (p_2, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_2, q_M) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p_M, q_1), (p_M, q_2), \ldots, (p_M, q_M) \end{cases} \tag{3.41}$$

Se calculează $\delta_{pq}^{(n)}$ astfel:

$$
\begin{aligned}
\delta_{pq}^{(n)} = \min\{ & \delta_{p_1 q_1}^{(n-1)} + d^2(p_1 \to p, q_1 \to q) + \\
& \delta_{p_1 q_2}^{(n-1)} + d^2(p_1 \to p, q_2 \to q) + \\
& \\
& \delta_{p_1 q_M}^{(n-1)} + d^2(p_1 \to p, q_M \to q) + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \delta_{p_M q_1}^{(n-1)} + d^2(p_M \to p, q_1 \to q) + \\
& \delta_{p_M q_2}^{(n-1)} + d^2(p_M \to p, q_2 \to q) + \\
& \\
& \delta_{p_M q_M}^{(n-1)} + d^2(p_M \to p, q_M \to q)\}
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

unde $\delta_{p_1 q_1}^{(n-1)},\ldots,\delta_{p_M q_M}^{(n-1)}$ sînt calculate din etapa anterioară şi $d^2(p_i \to p, q_j \to q)$ sînt pătratele distanţelor euclidiene dintre cei doi vectori semnal asociaţi cu tranziţiile $p_i \to p$ şi $q_j \to q$.

Etapa 4-Dacă există cel puţin o pereche de stări astfel încît $\delta_{pq}^{(n)} < \min\limits_{p} \delta_{pp}^{(n)}$ atunci se setează n=n+1 şi se reia Etapa 3.

Dacă nu există cel puţin o pereche de stări astfel încît $\delta_{pq}^{(n)} < \min\limits_{p} \delta_{pp}^{(n)}$ atunci se opreşte iteraţia şi se setează $d_{min}^2 = \min\limits_{p} \delta_{pp}^{(n)}$.

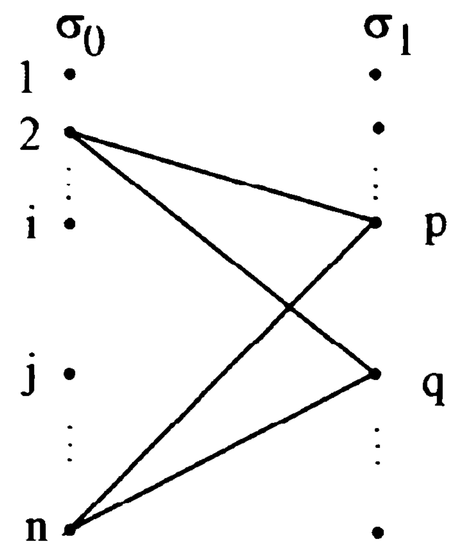


Fig.3.2 Două perechi de traiectorii din diagrama trellis care diverg dintr-o stare inițială σ_0 şi care ajung în stările p şi q într-o unitate timp discret.

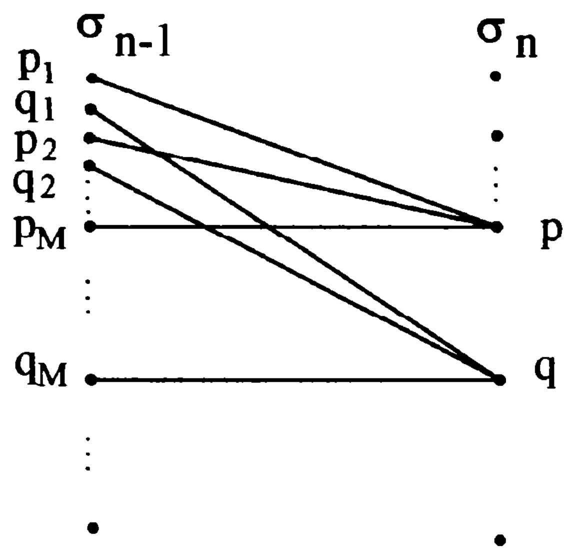


Fig.3.3 Stările predecesoare ale stărilor p şi q.

3.4.3 Algoritmul produs trellis

Algoritmul produs trellis (the product-trellis algorithm) [28] se poate aplica pentru orice schemă TCM şi utilizează o diagramă produs trellis care este produsul a 2 diagrame trellis originale.

Se definesc următoarele elemente ale unei diagrame produs trellis:

Supernodurile = perechi de noduri din diagramele trellis originale.

Superramurile = perechi de ramuri din diagramele trellis originale. Fiecărei superramuri îi asociem o distanţă euclidiană dintre cele două seturi de vectori semnal asociate cu cele două ramuri din diagramele trellis originale.

Superstările = perechi de stări (i,j) din diagramele trellis originale. Dacă diagramele trellis originale au N stări fiecare atunci diagrama produs trellis are N^2 stări. Se definesc 2 tipuri de superstări [28]:

- ✓ superstări bune, dacă i=j,
- ✓ superstări rele, dacă i≠j.

Astfel **supertraiectoriile** = perechi de traiectorii din diagramele trellis originale. Supertraiectoriile care trec doar prin superstări bune sînt perechi de traiectorii identice din diagramele trellis originale. Supertraiectoriile care trec prin cel puţin o superstare rea sînt perechi de traiectorii diferite din diagramele trellis originale.

Algoritmul produs trellis constă în următoarele etape [28]:

1) se consideră fiecare pereche de traiectorii din diagramele trellis originale care pornesc din aceleaşi stări şi ajung în aceleaşi stări, deci care corespund unei supertraiectorii care porneşte dintr-o superstare bună şi ajunge într-o superstare bună
2) se calculează pătratul distanţei euclidiene pentru fiecare pereche de traiectorii din diagramele trellis originale considerată anterior
3) se calculează d^2_{min} ca minimul pătratelor distanţelor euclidiene de mai sus.

Concluzia 3.18-Deşi d_{min}, distanţa euclidienă minimă dintre două secvenţe posibile de vectori semnal din constelaţia de semnale extinsă, este cel mai bun parametru pentru descrierea calităţii unei scheme TCM totuşi trebuie să avem în vedere o serie de precauţii în cazul schemelor TCM care operează la valori mici şi medii ale raportului semnal/zgomot. Pentru astfel de cazuri se recomandă considerarea în plus a încă doi parametri [7]:

⇒ **coeficientul erorii $N(d_{min})$**-în [29] se arată că dublarea lui $N(d_{min})$ conduce la reducerea cu 0,2 dB a cîştigului asimptotic de codare γ la o probabilitate a erorii de secvenţă P(e) de ordinul 10^{-6},

⇒ **distanţa euclidiană minimă următoare d_{next}**-dacă d_{next} este foarte aproape de d_{min} atunci raportul semnal/zgomot, necesar pentru o bună aproximare a probabilităţii erorii de secvenţă P(e) cu expresia $\frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}})N(d_{min})D^{d^2_{min}}$, poate deveni foarte mare (vezi relaţia (3.21)).

3.4.4 Limita inferioară a distanţei euclidiene minime

Pentru un canal de comunicaţie cu zgomot aditiv, alb, gaussian, spre deosebire de schemele TCM care care operează la valori mici şi medii ale raportului semnal/zgomot, la care d_{min} nu este suficient pentru caracterizarea lor, la schemele TCM care operează la valori mari ale raportului semnal/zgomot, d_{min} este suficient şi este cel mai bun parametru pentru descrierea calităţii.

De aceea este interesant de determinat intervalul de variaţie a lui d_{min} pentru o anumită constelaţie de semnale şi pentru un anumit de număr de stări a transmiţătorului TCM.

Se consideră reprezentarea Ungerboeck a transmiţătorului TCM cu o constelaţie de semnale formată din $M=2^m=2M'=2^{m'+1}$ vectori semnal (vezi Fig.2.5).

Bitul necodat $c_i^{(m'+1)}$ alege o subconstelaţie de semnale cu distanţa euclidiană minimă $\delta_{m'+1}$.

Bitul necodat $c_i^{(m')}$ alege o subconstelaţie de semnale cu distanţa euclidiană minimă $\delta_{m'}<\delta_{m'+1}$.

Bitul necodat $c_i^{(r+2)}$ alege o subconstelaţie de semnale cu distanţa euclidiană minimă $\delta_{r+2}<\delta_{r+3}<\ldots\delta_{m'}<\delta_{m'+1}$.

Biţii codaţi $c_i^{(r+1)}, c_i^{(r)}, \ldots, c_i^{(1)}$ aleg un vector semnal dintr-o subconstelaţie de semnale, formată din 2^{r+1} vectori semnal, cu distanţa euclidiană minimă δ_1.

Dacă apare o eroare la decodare atunci va fi implicat cel puţin unul din biţii $c_i^{(j)}$, j=1,...,m'. În acest caz rezultă:

$$\begin{cases} d_{min} \geq \delta_{r+2}, & \text{daca } j \geq r+2 \\ d_{min} \geq d_{min}^H \delta_1, & \text{daca } j < r+2 \end{cases} \tag{3.43}$$

unde d_{min}^H este distanţa Hamming minimă a codului binar convoluţional liniar rata de codrare $\frac{r}{r+1}$.

Concluzia 3.19-Limita inferioară a distanţei euclidiene minime este:

$$d_{min} \geq \min\{\delta_{r+2},\ d_{min}^H\,\delta_1\} \tag{3.44}$$

Concluzia 3.20-Cu toate că relaţia (3.42) nu reflectă prea mult din structura diagramei trellis, ea totuşi arată rolurile distincte jucate în determinarea lui d_{min} de către:

- vectorii semnal utilizaţi de modulator avînd distanţele euclidiene minime δ_{r+2} şi δ_1
- codul convoluţional binar liniar avînd distanţa Hamming minimă d_{min}^H.

3.4.5 Limita superioară a distanţei euclidiene minime

Se consideră reprezentarea Ungerboeck a transmiţătorului TCM cu o constelaţie de semnale formată din $M=2^m=2M'=2^{m'+1}$ vectori semnal (vezi Fig.2.5).

Distanţa euclidiană minimă d_{min} este egală cu minimul distanţei euclidiene dintre perechile de traiectorii care determină un eveniment eroare. Fiecare traiectorie din diagrama trellis care determină un eveniment eroare de lungime L, implică L vectori semnal N-dimensionali sau echivalent, un punct într-un spațiu NL-dimensional. Cu alte cuvinte d_{min} este egală cu minimul distanței euclidiene dintre perechile de puncte din spațiul euclidian NL-dimensional pentru L=1, 2,....

Dacă ne imaginăm aceste puncte din spațiul euclidian NL-dimensional ca fiind înconjurate de **sfere NL-dimensionale** atunci o schemă TCM eficientă, în sensul maximizării d_{min}, corespunde unei împachetări eficiente a sferelor NL-dimensionale într-un spațiu NL-dimensional.

În [30] se prezintă următoarea procedură de determinare a limitei superioare a distanței euclidiene minime d_{min}:

⇒ pentru fiecare valoare a lui L, se calculează numărul de puncte M(L) și dimensiunea N(L) a spațiului euclidian în care se găsesc cele M(L) puncte

⇒ pentru fiecare valoare a lui L, se calculează limita superioară d(L) a distanței euclidiene dintre centrele celor M(L) sfere N(L)-dimensionale

⇒ se calculează limita superioară a distanței euclidiene minime cu relația:

$$d_{min} \le \min_{L} d(L) \tag{3.45}$$

În [31] se arată că dacă rata de codare a codorului binar convoluțional liniar este $\frac{m'}{m'+1}$ atunci numărul M(L) de puncte din spațiul euclidian N(L) dimensional este:

$$M(L) = \prod_{j=1}^{m'} \max\{2^{L-v_j}, 1\} \tag{3.46}$$

Fie (S_A, S_B) o pereche de stări din diagrama trellis care sunt conectate prin traiectorii de lungime L. Fiecare traiectorie de lungime L determină o secvență **S** de lungime L de vectori semnal care poate fi considerată un vector NL-dimensional:

$$\mathbf{S}=(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_L) \tag{3.47}$$

Dacă **S′** și **S″** sunt 2 traiectorii diferite de lungime L care conectează perechea de stări (S_A, S_B) atunci:

$$d_{min}^2 \le \|\mathbf{S}' - \mathbf{S}''\|^2 \tag{3.48}$$

Energia medie $\overline{E}$ a celor M(L) vectori NL-dimensionali este:

$$\overline{E} = \frac{1}{M(L)} \sum_{\mathbf{S}} \|\mathbf{S}\|^2 \tag{3.49}$$

Se obține [7]:

$$\frac{d_{min}^2}{\overline{E}} \le r[M(L), NL] \tag{3.50}$$

unde r[M(L),NL] este raportul $\left(\frac{d_{min}^2}{\overline{E}}\right)$ maxim care se poate obține cu M(L) vectori semnal NL-dimensionali.

Pentru toate perechile de stări din diagrama trellis conectate prin traiectorii de lungime L:

$$\frac{\overline{E}}{L} = E \tag{3.51}$$

unde E este energia medie a vectorilor semnal și $\overline{E}$ este energia medie a traiectoriilor de lungime L. Pentru o anumită pereche de stări (S_A, S_B) din diagrama trellis:

$$\frac{\overline{E}}{L} \le E \tag{3.52}$$

Concluzia 3.21-Limita superioară a distanței euclidiene minime normalizate este:

$$\frac{d_{min}^2}{E} \le \min_{L}\{L\, r[M(L), NL]\} \tag{3.53}$$

Concluzia 3.22-Dacă pentru r[M(L),NL] se utilizează o limită simplex (simplex bound) [7]:

$$r[M(L), NL] \le \frac{2M(L)}{M(L)-1} \tag{3.54}$$

atunci limita superioară a distanței euclidiene minime normalizate devine:

$$\frac{d_{min}^2}{E} \le \min_{L}\{L \frac{2M(L)}{M(L)-1}\} \tag{3.55}$$

Dacă $L \ge \max_{j}\{v_j\}$ atunci ținînd cont de relația (3.46) se obține:

$$M(L) = 2^{m'L-v} \tag{3.56}$$

Concluzia 3.23-Dacă $L \geq \max_j\{v_j\}$ şi în plus m' divide v atunci $L = \frac{v}{m'} + t$, t=1, 2,... şi limita superioară a distanţei euclidiene minime normalizate devine:

$$\frac{d^2_{min}}{E} \leq \min_{t \geq 1}\{(\frac{v}{m'} + t)\frac{2^{tm'+1}}{2^{tm'} - 1}\} \tag{3.57}$$

Concluzia 3.24-În [31] se arată că dacă $v \to +\infty$ limita superioară a distanţei euclidiene minime normalizate tinde asimptotic către:

$$\frac{d^2_{min}}{E} \leq \begin{cases} \frac{1,74\, v}{N\, 4^{\frac{m'}{N}}}, \text{pentru} \frac{m'}{N} < 0,72 \\ \\ \frac{6,57\, v}{4\, m'}, \text{pentru} \frac{m'}{N} \geq 0,721 \end{cases} \tag{3.58}$$

Concluzia 3.25-În [30] se prezintă **limita superioară Pottie-Taylor a distanţei euclidiene minime normalizate** atît pentru scheme TCM cu constelaţie de semnale de energie constantă (tip PSK) cît şi pentru scheme TCM cu o constelaţie de semnale rectangulară (tip QAM) (Tabelul 3.1).

Tabelul 3.1 Exemple de limite pentru distanța euclidiană minimă normalizată pentru scheme TCM cu $V=2^{v}$ stări si m′ biți/simbol sursă

v	m′	$\frac{m'}{m'+1}$	Modulație	Limita inferioară	Limita superioară simplex	Limita superioară Pottie-Taylor
2	2	$\frac{2}{3}$	8-PSK	4	5,3	5,3
3				4,6	6,9	6,7
4				5,2	8	8
5				5,8	9,1	9
6				6,3	10,7	10,1
7				6,3	11,4	11,2
8				6,9	12,8	12,3
2	3	$\frac{3}{4}$	16-PSK	1,3	4	2,6
3				1,5	4,6	3,3
4				1,6	5,3	3,9
5				1,9	6,4	4,5
6				2	6,9	5,1
7				-	8	5,6
8				-	8,5	6,2
2	2	$\frac{2}{3}$	8-QAM	3,2	5,3	4
3				4	6,9	4,8
4				4,8	8	6,4
5				4,8	9,1	7,2
6				5,6	10,7	8
7				6,4	11,4	8,8
8				6,4	12,8	9,6
2	4	$\frac{4}{5}$	32-QAM	0,76	2,7	0,95
3				0,96	4	1,14
4				1,14	4,3	1,52
5				1,14	4,3	1,71
6				1,33	5,3	1,9
7				1,52	6,1	2,1
8				1,52	6,4	2,29

Concluzia 3.26-În Fig.3.4 se prezintă graficul cîştigului asimptotic de codare γ în funcţie de eficienţa spectrală a canalului de comunicaţie $\eta=\frac{D}{B}$. Energia medie a tuturor semnalelor este normalizată la 1 ($E=E'=1$). Schema TCM de referinţă este modulaţia necodată 4-PSK cu $d'^{2}_{min}=2$. Un cîştig asimptotic de codare γ=3/4/5/6 dB poate fi obţinut cu o schemă TCM cu 4/8/16/128 sau 256 stări. Pentru o schemă TCM cu mai mult de 256 stări cîştigul asimptotic de codare γ creşte nesemnificativ [22].

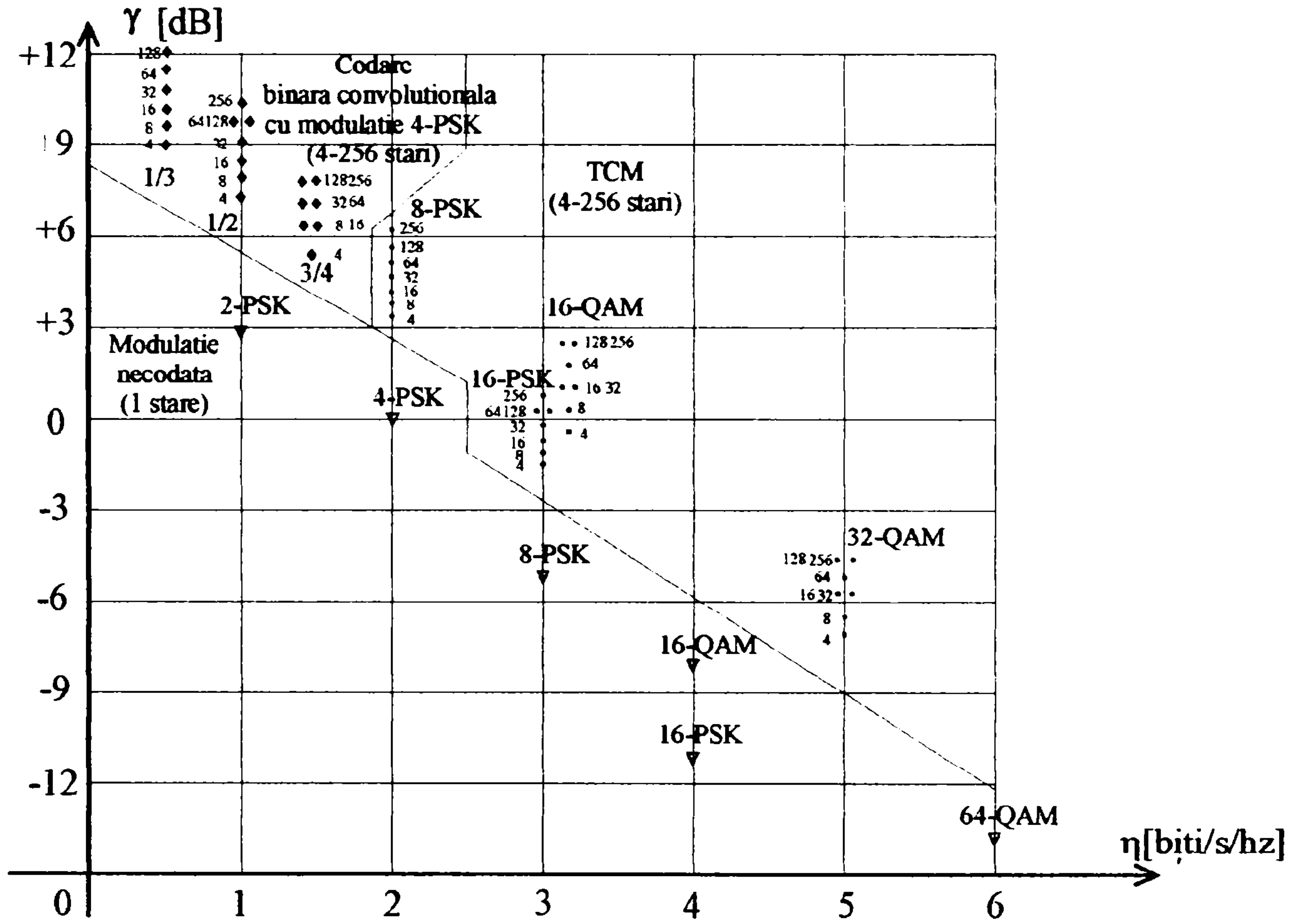


Fig.3.4 Cîştigul asimptotic de codare γ în funcţie de eficienţa spectrală a canalului de comunicaţie η.

3.5 Densitatea spectrală de putere a semnalului de linie transmis

Se consideră o schemă TCM cu un codor convoluţional binar liniar şi o modulaţie 1 sau 2-dimensională.

Semnalul de linie transmis este:

$$s(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i p(t-iT_s) \qquad (3.59)$$

unde p(t) este semnalul purtător cu transformata Fourier P(f), T_s este durata unui simbol al sursei de date a_i, iar s_i sînt vectorii semnal transmişi.

Se presupune că simbolurile sursei de date a_i sunt echiprobabile ($P(a_i)=M'=2^{m'}$ unde m' este numărul de biţi folosiţi la codarea simbolurilor sursei). Datorită structurii invariante în timp a codului trellis înseamnă că secvența de vectori semnal $\{s_i\}$ este invariantă în timp.

Densitatea spectrală de putere a semnalului de linie transmis este egală cu:

$$S(f) = S(f)^{(c)} + S(f)^{(d)} \tag{3.60}$$

unde $S(f)^{(c)}$ şi $S(f)^{(d)}$= partea continuă, respectiv partea discretă a densității spectrale de putere.

Partea continuă a densității spectrale de putere este egală cu:

$$S(f)^{(c)} = \frac{\sigma_s^2}{T_s} |P(f)|^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho_i e^{-j2\pi f i T_s} \tag{3.61}$$

unde $E[s_l s_m^*] = \sigma_s^2 \rho_{l-m} + |\mu|^2$, $\rho_0 = 1$, $\rho_{+\infty} = 0$, $E[s_i]=\mu$.

Partea discretă a densității spectrale de putere este egală cu:

$$S(f)^{(d)} = \frac{\mu^2}{T_s^2} |P(f)|^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{i}{T_s}) \tag{3.62}$$

În cazul detecției simbol cu simbol (SSD) avem:

$$\rho_i = \delta_{0,i} = \begin{cases} 1, i = 0 \\ 0, i \neq 0 \end{cases} \text{ (simbolul lui Kronecker)} \tag{3.63}$$

$$S(f)^{(c)} = \frac{\sigma_s^2}{T_s} |P(f)|^2 \tag{3.64}$$

Ne interesează condițiile în care densitatea spectrală de putere în cazul detecției simbol cu simbol este egală cu densitatea spectrală de putere în cazul detecției de probabilitate condiționată maximă.

Se presupune că $\sigma_s^2 = 1$. Atunci se obține [32]:

$$\rho_i = \sum_{s_i} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_0} \sum_{s_0} s_i^* s_0 P[s_i, \sigma_i, \sigma_0, s_0] \tag{6.65}$$

unde σ_i este starea transmițătorului TCM cînd se transmite vectorul semnal s_i şi σ_{i+1} este starea următoare a transmițătorului TCM.

Ținînd cont de relația $P[\mathbf{s}_i,\sigma_i,\sigma_0,\mathbf{s}_0]=P[\mathbf{s}_i|\sigma_i]P[\sigma_i|\sigma_1]P[\mathbf{s}_0|\sigma_1]$ se obține:

$$\rho_i=\sum_{\sigma_i}\sum_{\sigma_0}E[\mathbf{s}_i|\sigma_i]P[\sigma_i|\sigma_1]E[\mathbf{s}_0|\sigma_1] \tag{3.66}$$

O condiție suficientă pentru ca $\rho_i=\delta_{0,i}$ = simbolul lui Kronecker este ca:

$$E[\mathbf{s}_i|\sigma_i]=0,\forall\mathbf{s}_i \tag{3.67}$$

deci pentru orice stare a transmițătorului TCM, media statistică a vectorului semnal de la ieşirea transmițătorului TCM să fie nulă.

O condiția suficientă pentru ca $\rho_i=\delta_{0,i}$ = simbolul lui Kronecker este ca [7]:

$$E[\mathbf{s}_{i-1}|\sigma_i]=0,\forall\mathbf{s}_{i-1} \tag{3.68}$$

deci pentru orice stare a transmițătorului TCM, media statistică a vectorului semnal care forțează transmițătorul TCM în starea respectivă să fie nulă.

O condiția suficientă pentru ca $S(f)^{(d)}=0$ este ca $\mu=0$ [7].

CAPITOLUL IV
Coduri TCM multidimensionale

4.1 Introducere

Pentru canalele de comunicație de bandă limitată **modulația codată trellis (TCM)** asigură un cîştig de codare γ semnificativ față de o transmisie necodată, fără a sacrifica eficiența spectrală η [12]. Costul plătit relativ la o transmisie necodată constă în extinderea constelației de semnale.

În cazul **codurilor TCM 2-D** pentru a transmite Q biți în fiecare interval de semnalizare 2-D se foloseşte o constelație de semnale 2-D care conține 2^{Q+1} puncte de semnal 2-D. Această constelație de semnale 2-D se partiționează în 2^{m+1} subseturi 2-D, cu pătratul distanței euclidiene minime (MSED=Minimum Squared Euclidian Distance) de intrasubset mai mare decît pătratul distantei euclidiene minime a constelației de semnale 2-D inițiale. Din cei Q biți care sosesc în fiecare interval de semnalizare 2-D:

- primii m biți sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare $\frac{m}{m+1}$ astfel încît cei m+1 biți de la ieşirea codorului convoluțional selectează subsetul 2-D care va fi utilizat,
- ceilalți Q-m biți rămaşi necodați selectează punctul de semnal 2-D care va fi transmis din subsetul 2-D selectat anterior [16].

Costul plătit relativ la o transmisie necodată constă în dublarea constelației de semnale 2-D ceea ce înseamnă o pierdere de 3 dB în cîştigul de codare. Acest lucru se datorează faptului că se adaugă cîte 1 bit redundant în fiecare interval de semnalizare 2-D.

Această pierdere de 3 dB în cîştigul de codare poate fi redusă dacă se utilizează coduri TCM multidimensionale (multi-D) deoarece se va adăuga mai puțin de 1 bit redundant în fiecare interval de semnalizare 2-D [13]. Astfel în cazul codurilor TCM 4-D pierderea în cîştigul de codare este de 1,5 dB, iar în cazul codurilor TCM 8-D pierderea în cîştigul de codare este de 0,75 dB [13, 33].

Primul cod TCM 4-D numit **codul GCS (Gallager-Calderbank-Sloane)** a apărut independent în [13] şi [34]. Din păcate codul GCS poate transmite doar un număr neîntreg de biți în fiecare interval de semnalizare 2-D.

Wei a construit coduri TCM 4-D, 8-D şi 16-D care pot transmite un număr întreg de biți în fiecare interval de semnalizare 2-D dar dimensiunile codurilor TCM sunt limitate la puteri întregi ale lui 2 [16].

Pietrobon şi **Costello** au căutat coduri TCM multidimensionale care folosesc constelații de semnale rectangulare multidimensionale cu propietăți optimale de distanță [35]. Pentru partiționarea constelațiilor de semnale rectangulare multidimensionale ei au utilizat coduri bloc, tehnică care a fost utilizată anterior (1990) la partiționarea constelațiilor de semnale M-PSK [36]. Din nefericire nu au fost luați în considerare parametrii **CER (Constellation Extension Rate)** şi **PAR (Peak-to-Average power Rate)** care sunt foarte importanți în modemurile de mare viteză.

Wang şi **Costello** au prezentat o metodă de construcţie a codurilor TCM multidimensionale, bazată pe **corespondenţa de formă (Shell Mapping),** dar au fost considerate doar codurile TCM 4-D [37].

Sterian a prezentat o metodă de extindere a construcţiei Wei a codurilor TCM 2N-D pentru cazurile în care N nu este o putere ale lui 2. El a prezentat ca exemple codurile TCM 6-D şi 12-D dar nici aici nu au fost luaţi în considerare parametrii CER şi PAR [40, 42].

Dinh şi **Hashimoto** au prezentat o metodă de construcţie a codurilor TCM multidimensionale bazată pe **coduri coset** [38]. Ei au construit constelaţii de semnale multidimensionale cu parametrii CER şi PAR optimali (minimi) ai constelaţiilor de semnale 2-D constituente.

În cazul **codurilor TCM multidimensionale 2N-D** pentru a transmite Q biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D se foloseşte o constelaţie de semnale multidimensională 2N-D care conţine 2^{NQ+1} puncte de semnal 2N-D. Această constelaţie de semnale 2N-D se partiţionează în 2^{m+1} subseturi 2N-D, cu pătratul distanţei euclidiene minime (MSED=Minimum Squared Euclidian Distance) de intrasubset mai mare decît pătratul distantei euclidiene minime a constelaţiei de semnale 2N-D iniţiale. Din cei NQ biţi care sosesc în fiecare interval de semnalizare 2-D:

- primii m biţi sunt codaţi cu un codor convoluţional cu rata de codare $\frac{m}{m+1}$ astfel încît cei m+1 biţi de la ieşirea codorului convoluţional selectează subsetul 2N-D care va fi utilizat,
- ceilalţi NQ-m biţi rămaşi necodaţi selectează punctul de semnal 2N-D care va fi transmis din subsetul 2N-D selectat anterior [16].

Concluzia 4.1-Avantajele codurilor TCM multidimensionale faţă de codurile TCM 2-D sînt următoarele:

- reducerea pierderii în cîştigul de codare, datorat extinderii constelaţiilor de semnale multidimensionale, prin reducerea numărului de biţi redundanţi per interval de semnalizare 2-D,
- reducerea dimensiunilor şi parametrilor CER şi PAR ai constelaţiilor de semnale 2-D constituente ale constelaţiilor de semnale multidimensionale,
- posibilitatea de a transmite un număr întreg sau neîntreg de biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D,
- toleranţă mai mare la ambiguităţile de fază (jitter de fază),
- compromis mai bun între complexitate şi performanţe.

4.2 Construcţia Wei pentru coduri TCM multidimensionale

Pentru a transmite Q biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D, constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D este formată din 2 grupuri:

- **grupul intern IG (Inner Group)** care conţine 2^Q puncte de semnal 2-D, la fel ca şi constelaţia de semnale 2-D folosită într-o transmisie necodată pentru a transmite Q biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D,
- **grupul extern OG (Outer Group)** care conţine $\frac{1}{N}2^Q$ puncte de semnal 2-D.

Întrucît grupul extern conține $\frac{1}{N}2^Q$ puncte de semnal 2-D, este evident că N trebuie să fie o putere întreagă a lui 2. Din acest motiv metoda de construcție Wei a codurilor TCM mutidimensionale este limitată practic la cazurile 4-D şi 8-D [16].

Construirea punctelor de semnal 2N-D se face prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D şi ținînd cont de următoarele observații:

- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N puncte de semnal 2-D din IG este 2^{NQ}
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG este 2^{NQ}.

Rezultă în total $2^{NQ+1}=2^{NQ}+2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D.

În construcția punctelor de semnal 2N-D, un punct de semnal 2-D din IG este utilizat de 2N-1 ori mai des decît un punct de semnal 2-D din OG. Dacă p_{IG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din IG şi p_{OG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din OG atunci avem:

$$\begin{cases} \frac{p_{IG}}{p_{OG}} = 2N-1 \\ p_{IG}+p_{OG}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{IG} = \frac{2N-1}{2N} \\ p_{OG} = \frac{1}{2N} \end{cases} \tag{4.1}$$

Energia medie a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D este egală cu [16]:

$$E_{medie} = p_{IG}E_{IG} + p_{OG}E_{OG} = \frac{2N-1}{2N}E_{IG} + \frac{1}{2N}E_{OG} \tag{4.2}$$

unde:

E_{IG}=energia medie a grupului intern IG a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D = suma pătratelor distanțelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupul intern IG, raportată la numărul de puncte de semnal 2-D situate în grupul intern IG,

E_{OG}=energia medie a grupului extern OG a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D = suma pătratelor distanțelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupul extern OG, raportată la numărul de puncte de semnal 2-D situate în grupul intern OG,

2N=dimensiunea codului TCM multidimensional.

4.2.1 Codul TCM 4-D, cu rata 2/3 şi cu 16 stări

Se consideră transmisia a Q=7 biți/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 4-D cu rata 2/3 şi 16 stări este prezentată în Fig.4.1 [16].

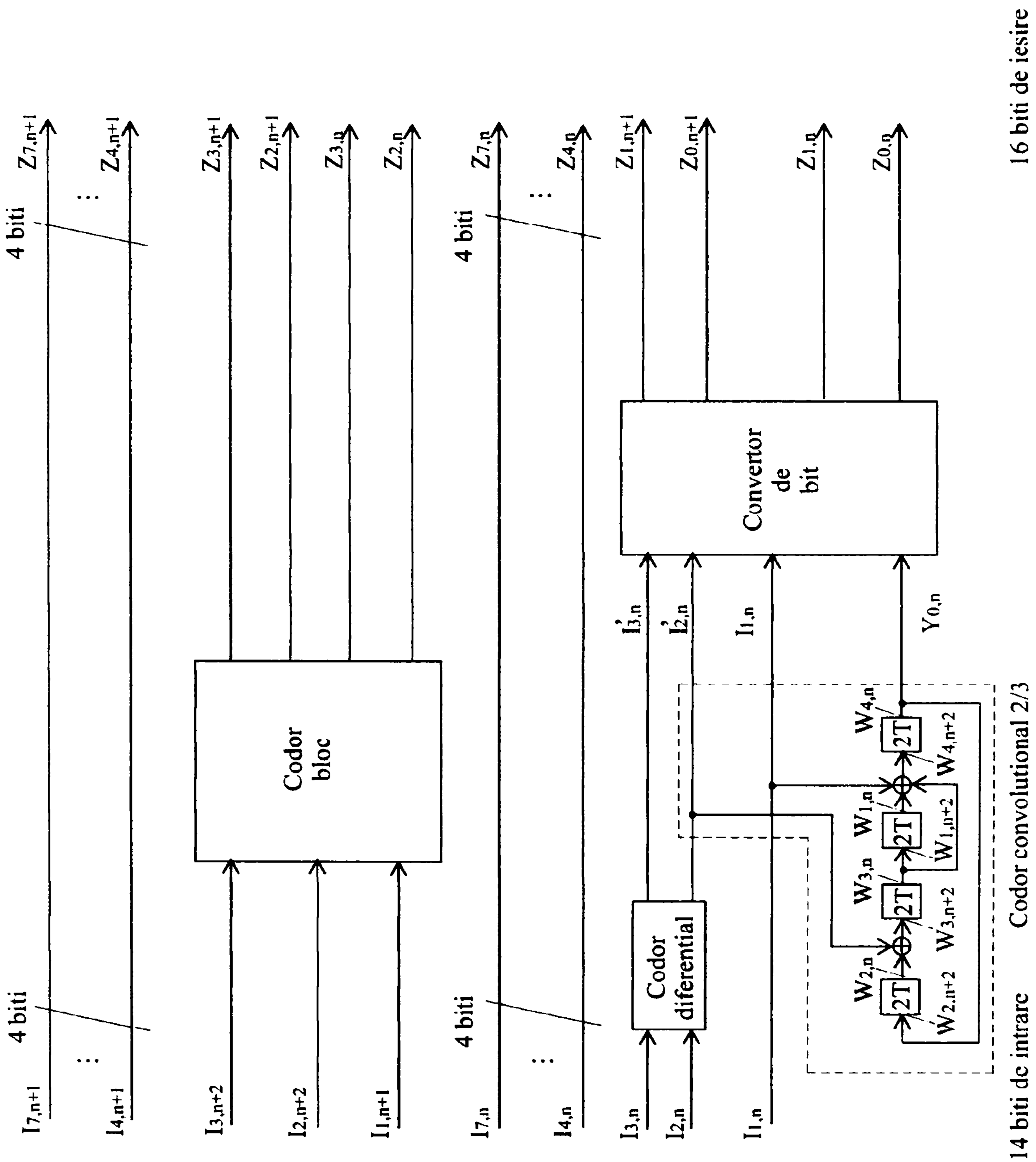
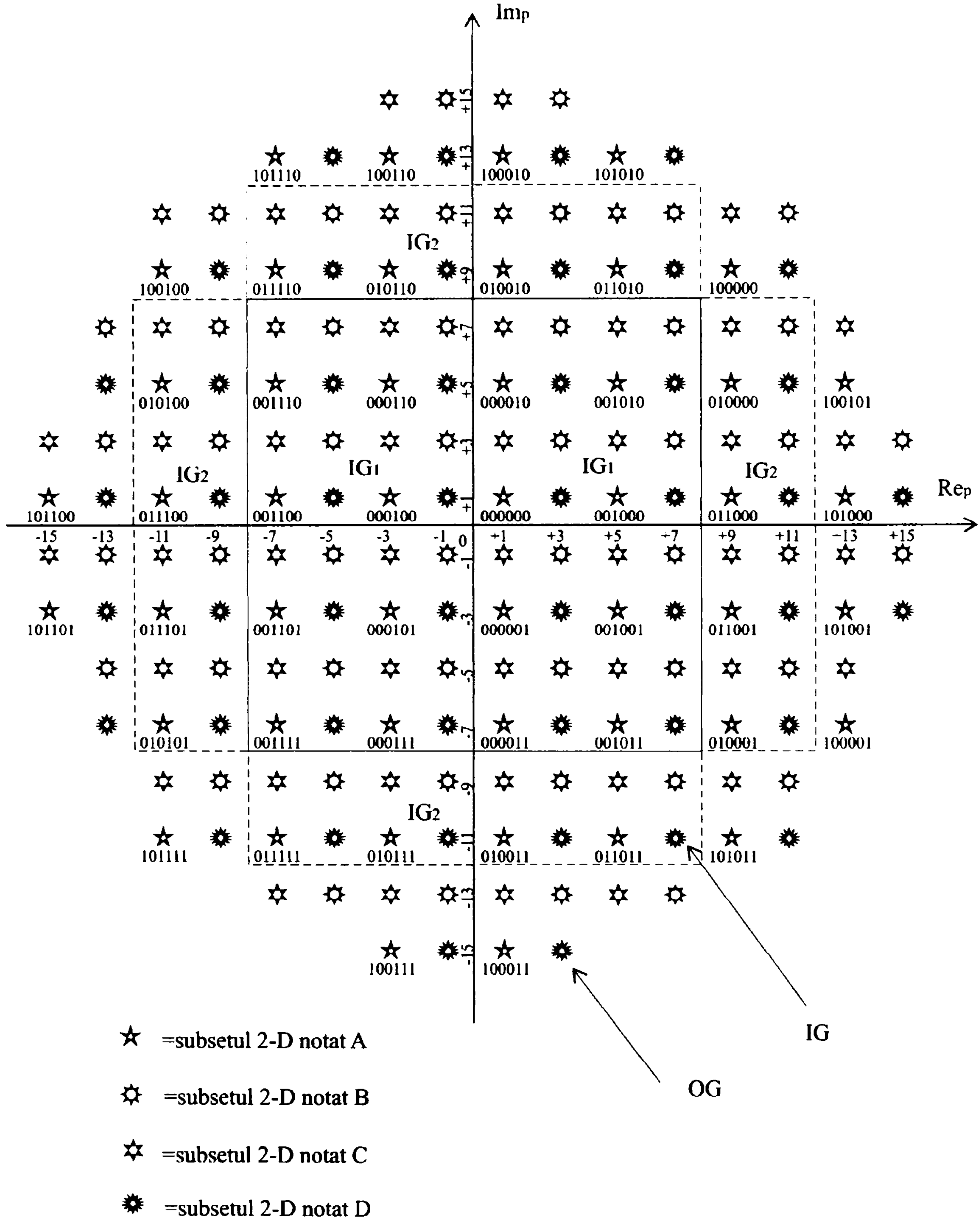


Fig.4.1 Schema bloc a codorului TCM 4-D cu rata 2/3 şi 16 stări (construcţia Wei).



Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1.

Fig.4.2 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 192 puncte de semnal 2-D (construcția Wei).

Constelația de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 4-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ ($\mathbf{Z}$ = mulțimea numerelor întregi) și este formată din 192 puncte de semnal 2-D:

- $2^7=128$ puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- $\frac{2^7}{2}=64$ puncte de semnal 2-D în grupul OG.

Se partiționează constelația de semnale 2-D constituentă (Fig.4.2) în 4 **subseturi 2-D** [16]:

$\Rightarrow$ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
$\Rightarrow$ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
$\Rightarrow$ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
$\Rightarrow$ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelația de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2=4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D [16]:

$$A\rightarrow C\rightarrow B\rightarrow D\rightarrow A \tag{4.3}$$

Prin concatenarea a 2 constelații de semnale 2-D constituente și prin eliminarea punctelor de semnal 4-D care conțin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG, se obține **constelația de semnale 4-D** cu $2^{2x7+1}=2^{15}$ puncte de semnal 4-D.

Se construiesc 16 **tipuri 4-D** cu MSED=$d^2=4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 2-D și notate astfel [16]:

$$(A, A), (A, B), (A, C), (A, D),\ldots,(D, D) \tag{4.4}$$

Cele 16 tipuri 4-D sunt grupate în 8 **subseturi 4-D** astfel încît MSED a fiecărui subset 4-D obținut să fie egală cu $d^2=4d_0^2$ [16]:

$$\begin{cases} S_0=(A, A)\cup(B, B)\\ S_1=(C, C)\cup(D, D)\\ S_2=(A, B)\cup(B, A)\\ S_3=(C, D)\cup(D, C)\\ S_4=(A, C)\cup(B, D)\\ S_5=(C, B)\cup(D, A)\\ S_6=(A, D)\cup(B, C)\\ S_7=(C, A)\cup(D, B)\end{cases} \tag{4.5}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 4-D [16]:

$$\begin{cases} S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \\ S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \\ S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \\ S_6 \rightarrow S_7 \rightarrow S_6 \end{cases} \tag{4.6}$$

Subseturile 4-D sunt grupate în 2 **familii 4-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 4-D să conțină 4 subseturi 4-D [16]:

$$\begin{cases} F_0 = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\ F_1 = S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \end{cases} \tag{4.7}$$

În acest caz avem m=2 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 2/3 şi cu 16 stări.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 4 subseturi [16]:

$$\{4i + j \mid 0 \le i \le 3, 0 \le j \le 3\} \tag{4.8}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+2}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 4 subseturi [16]:

$$\{4j + k \mid 0 \le j \le 3, 0 \le k \le 3\} \tag{4.9}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 3$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă 4i+j, $0 \le i \le 3$ şi fiecare stare următoare 4j+k, $0 \le k \le 3$.

Asignarea subseturilor 4-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 4-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 4-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele şi să aparțină aceleaşi familii 4-D.

Acelaşi considerent se aplică şi pentru subseturile 4-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{4,n}=0$) sunt asignate subseturi 4-D din familia 4-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{4,n}=1$) sunt asignate subseturi 4-D din familia 4-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 4-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este

MSED a fiecărui subset 4-D (MSED de intersubset 4-D să fie mai mare sau cel puţin egală cu MSED de intrasubset 4-D).

Această cerinţă garantează că MSED dintre două secvenţe de puncte de semnal 4-D este $d^2 = 4d_0^2$ şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 4-D faţă de secvenţa corectă de puncte de semnal 4-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 4-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiaţi ai unui punct de semnal 4-D şi aflaţi într-un subset 4-D cu un număr finit de puncte de semnal 4-D. În acest caz N_{free}=24 per punct de semnal 4-D (N_{free}=12 per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 4-D este mai mic decît 24.

3. Dacă X este subsetul 4-D asociat cu tranziţiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+2} şi dacă X_1 este subsetul 4-D obţinut prin rotirea lui X cu 90° atunci se poate defini o funcţie F_1 de corespondenţă între stările codului TCM 4-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+2})$.

Pentru o rotaţie de 90° în sens orar se defineşte funcţia F_1 astfel [16]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n} \rightarrow \overline{W}_{1,n}W_{2,n}\overline{W}_{3,n}W_{4,n} \tag{4.10}$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Acestă cerinţă garantează că vom obţine un cod TCM 4-D transparent la toate ambiguităţile de fază ale constelaţiei de semnale 4-D, cu alte cuvinte un cod TCM 4-D invariant rotaţional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguităţi de fază a constelaţiei de semnale 4-D (0°, 90°, 180°, 270°) se foloseşte un **codor diferenţial** pe 2 biţi [16]:

$$(I'_{2,n}I'_{3,n}) = (I'_{2,n-2}I'_{3,n-2} + I_{2,n}I_{3,n})\bmod 4 \tag{4.11}$$

Convertorul de bit converteşte cei 4 biţi de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I'_{2,n}$, $I'_{3,n}$ în 2 grupuri de cîte 2 biţi fiecare [16]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1 \tag{4.12}$$

care selectează 2 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 4-D selectat în cadrul subsetului 4-D utilizat.

Pentru a obţine un cod TCM 4-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelaţiei de semnale 4-D trebuie sa fie îndeplinită cerinţa prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 4-D asociat cu structura de biţi $Y_{0,n}, I_{1,n}, I'_{2,n}, I'_{3,n}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 4-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_1$, $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_2$, $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_3$ sunt perechile de biţi obţinute prin translaţia perechii de biţi $(I'_{2,n}, I'_{3,n})$ cu una, două sau trei poziţii în secvenţa circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 4-D asociate cu structurile de biţi: $Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_1$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_2$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_3$,

sunt X_1, X_2, X_3.

Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1 și subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcționarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.2.

Tabelul 4.1 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ și subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.2 Convertorul de bit

Familie 4-D	Subset 4-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I'_{2,n}$	$I'_{3,n}$	Tip 4-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$
0	0	0	0	0	0	(A, A)	0	0	0	0
		0	0	0	1	(B, B)	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	(C, C)	1	0	1	0
		0	0	1	1	(D, D)	1	1	1	1
	2	0	1	0	0	(A, B)	0	0	0	1
		0	1	0	1	(B, A)	0	1	0	0
	3	0	1	1	0	(C, D)	1	0	1	1
		0	1	1	1	(D, C)	1	1	1	0
1	4	1	0	0	0	(A, C)	0	0	1	0
		1	0	0	1	(B, D)	0	1	1	1
	5	1	0	1	0	(C, B)	1	0	0	1
		1	0	1	1	(D, A)	1	1	0	0
	6	1	1	0	0	(A, D)	0	0	1	1
		1	1	0	1	(B, C)	0	1	1	0
	7	1	1	1	0	(C, A)	1	0	0	0
		1	1	1	1	(D, B)	1	1	0	1

Codorul bloc folosește cei 3 biți $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$ pentru a genera 2 grupuri de cîte 2 biți fiecare [16]:

$$Z_{2,p},\ Z_{3,p},\ p=n,\ n+1 \tag{4.13}$$

care selectează pentru cele 2 subseturi 2-D utilizate, prima jumătate a grupului intern IG_1, a doua jumătate a grupului intern IG_2 sau grupul extern OG.

Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, p=n, n+1 și grupurile constelației de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.3 iar funcționarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.4.

Cele 2 grupuri de cîte 4 biți fiecare [16]:

$$Z_{4,p},\ Z_{5,p},\ Z_{6,p},\ Z_{7,p},\ p=n,\ n+1 \tag{4.14}$$

selectează pentru fiecare din cele 2 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelației de semnale 2-D selectat anterior.

Tabelul 4.3 Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	Grup constelaţie de semnale 2-D
0	0	IG_1
0	1	IG_2
1	0	OG

Tabelul 4.4 Codorul bloc

$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 4-D faţă de o transmisie necodată se calculează astfel [16]:

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{\dfrac{4d_0^2}{28{,}0625d_0^2}}{\dfrac{d_0^2}{20{,}5d_0^2}}\right) = 10\log_{10}(2{,}922) \cong 4{,}65680 \text{ [dB]} \qquad (4.15)$$

unde:

d_0^2=MSED a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată,

$4d_0^2$=MSED a subseturilor 4-D obţinute prin partiţionarea constelaţiei de semnale 4-D,

$20{,}5\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată, (128 de puncte de semnal 2-D) = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D,

$28{,}0625\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 4-D calculată ţinînd cont de relaţia (4.2).

4.2.2 Codul TCM 8-D, cu rata 3/4 şi cu 64 stări

Se consideră transmisia a Q=7 biţi/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 8-D cu rata 3/4 şi 64 stări este prezentată în Fig.4.3.

Constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 8-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ ($\mathbf{Z}$ = mulţimea numerelor întregi) şi este formată din 160 puncte de semnal 2-D:

- 2^7=128 puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- $\frac{2^7}{4} = 32$ puncte de semnal 2-D în grupul OG.

Se partiţionează constelaţia de semnale 2-D (Fig.4.4) constituentă în 4 **subseturi 2-D** [16]:

$\Rightarrow$ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
$\Rightarrow$ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
$\Rightarrow$ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
$\Rightarrow$ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelaţia de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2 = 4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relaţia 4.3) [16]:

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Prin concatenarea a 4 constelaţii de semnale 2-D constituente şi prin eliminarea punctelor de semnal 8-D care conţin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG, se obţine **constelaţia de semnale 8-D** cu $2^{4\times7+1}=2^{29}$ puncte de semnal 8-D.

Se construiesc 64 **tipuri 8-D** cu MSED=$d^2 = 4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 4-D şi notate astfel [16]:

$$(0, 0), (0, 1), \ldots, (7, 7) \tag{4.16}$$

unde i=0, 1,…,7 reprezintă indicele subseturilor 4-D notate S_i în paragraful 4.2.1.

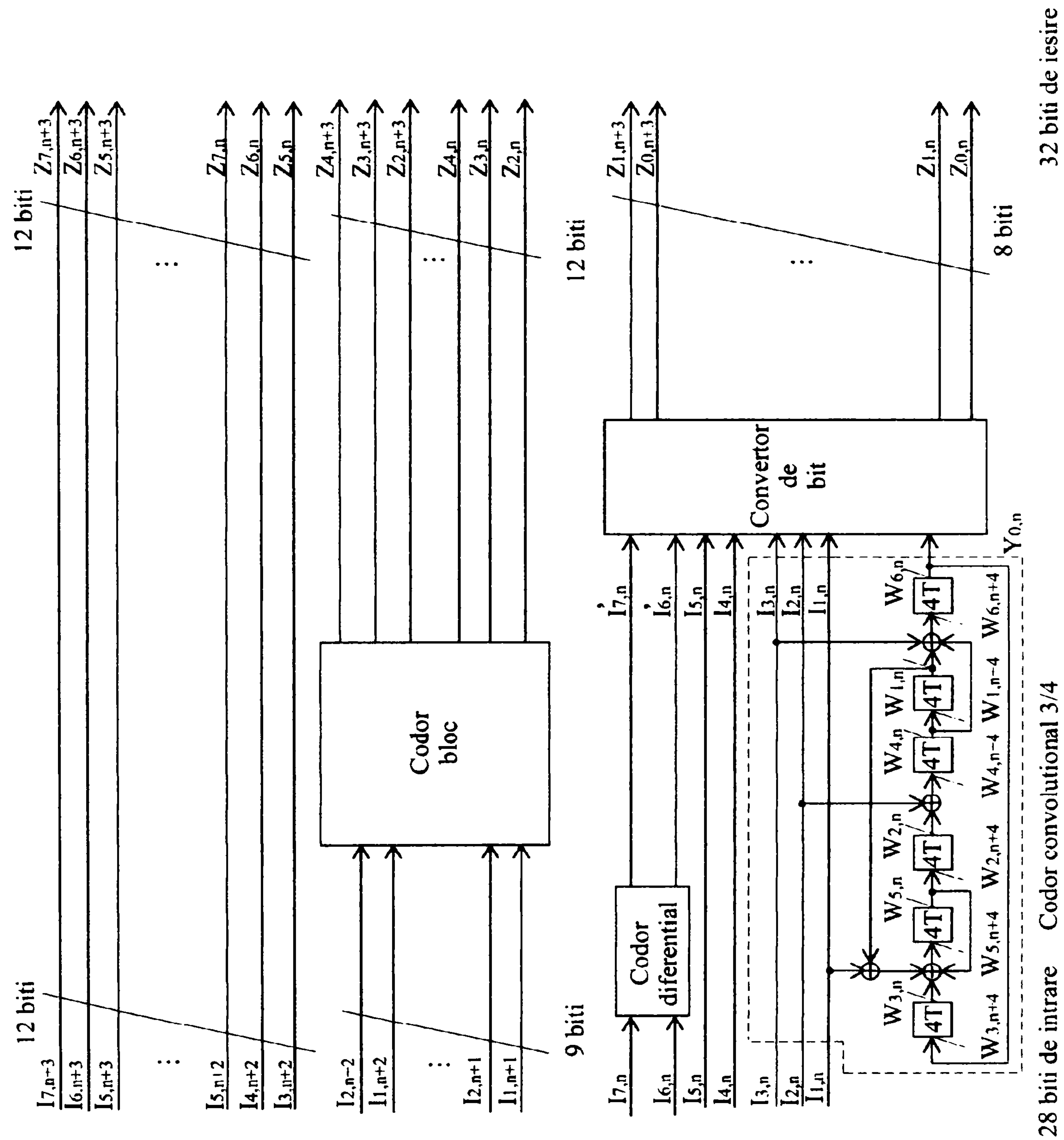
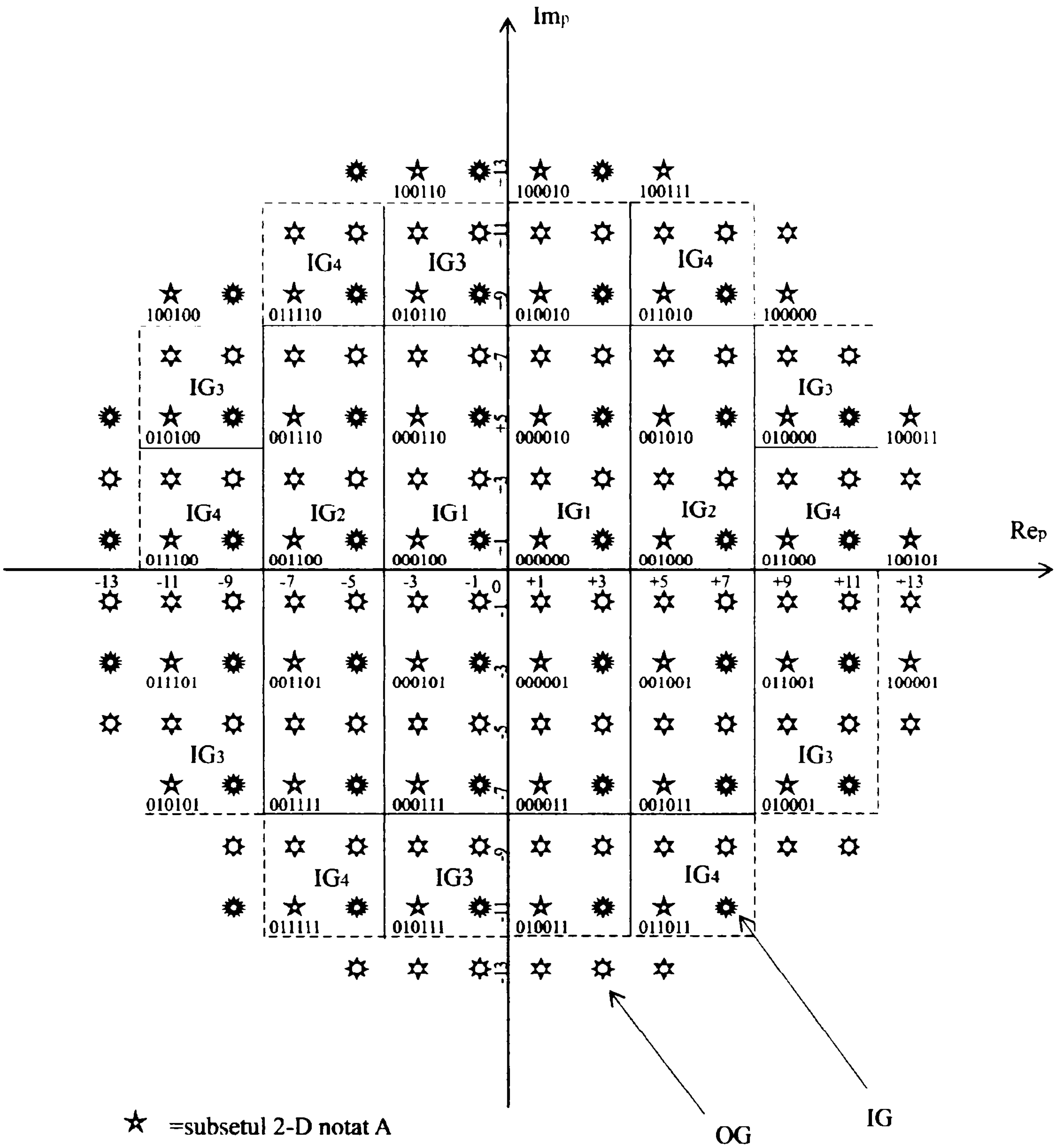


Fig.4.3 Schema bloc a codorului TCM 8-D cu rata 3/4 şi 64 stări (construcţia Wei).



=subsetul 2-D notat A

=subsetul 2-D notat B

=subsetul 2-D notat C

=subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3.

Fig.4.4 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 160 puncte de semnal 2-D (construcția Wei).

Cele 64 tipuri 8-D sunt grupate în 16 **subseturi 8-D** astfel încît MSED a fiecărui subset 8-D obținut să fie egală cu $d^2 = 4d_0^2$ [16]:

$$\begin{cases} S_0=(0,0) \cup (1,1) \cup (2,2) \cup (3,3) \\ S_1=(0,1) \cup (1,0) \cup (2,3) \cup (3,2) \\ S_2=(0,2) \cup (1,3) \cup (2,0) \cup (3,1) \\ S_3=(0,3) \cup (1,2) \cup (2,1) \cup (3,0) \\ S_4=(4,4) \cup (5,5) \cup (6,6) \cup (7,7) \\ S_5=(4,5) \cup (5,4) \cup (6,7) \cup (7,6) \\ S_6=(4,6) \cup (5,7) \cup (6,4) \cup (7,5) \\ S_7=(4,7) \cup (5,6) \cup (6,5) \cup (7,4) \\ S_8=(0,4) \cup (1,5) \cup (2,6) \cup (3,7) \\ S_9=(0,5) \cup (1,4) \cup (2,7) \cup (3,6) \\ S_{10}=(0,6) \cup (1,7) \cup (2,4) \cup (3,5) \\ S_{11}=(0,7) \cup (1,6) \cup (2,5) \cup (3,4) \\ S_{12}=(4,0) \cup (5,1) \cup (6,2) \cup (7,3) \\ S_{13}=(4,1) \cup (5,0) \cup (6,3) \cup (7,2) \\ S_{14}=(4,2) \cup (5,3) \cup (6,0) \cup (7,1) \\ S_{15}=(4,3) \cup (5,2) \cup (6,1) \cup (7,0) \end{cases} \tag{4.17}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° nu au loc transformări ale subseturilor 8-D, cu alte cuvinte subseturile 8-D sunt invariante la aceste rotații.

Subseturile 8-D sunt grupate în 2 **familii 8-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 8-D să conțină 8 subseturi 8-D [16]:

$$\begin{cases} F_0=S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \\ F_1=S_8 \cup S_9 \cup S_{10} \cup S_{11} \cup S_{12} \cup S_{13} \cup S_{14} \cup S_{15} \end{cases} \tag{4.18}$$

În acest caz avem m=3 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 3/4 și cu 64 stări.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 8 subseturi [16]:

$$\{8i + j \mid 0 \le i \le 7, 0 \le j \le 7\} \tag{4.19}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+4}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 8 subseturi [16]:

$$\{8j + k \mid 0 \le j \le 7, 0 \le k \le 7\} \tag{4.20}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 7$ există tranziţii de stare între fiecare stare curentă $8i+j$, $0 \le i \le 7$ şi fiecare stare următoare $8j+k$, $0 \le k \le 7$.

Asignarea subseturilor 8-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 8-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerinţe [16]:

1. Subseturile 8-D, asociate cu tranziţiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele şi să aparţină aceleaşi familii 8-D.

Acelaşi considerent se aplică şi pentru subseturile 8-D asociate cu tranziţiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerinţe:

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=0$) sunt asignate subseturi 8-D din familia 8-D notată F_0,

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=1$) sunt asignate subseturi 8-D din familia 8-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvenţe de subseturi 8-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală decît $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 8-D (MSED de intersubset 8-D să fie mai mare sau cel puţin egală cu MSED de intrasubset 8-D).

Această cerinţă garantează că MSED dintre două secvenţe de puncte de semnal 8-D este $d^2 = 4d_0^2$ şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 8-D faţă de secvenţa corectă de puncte de semnal 8-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 8-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiaţi ai unui punct de semnal 8-D şi aflaţi într-un subset 8-D cu un număr finit de puncte de semnal 8-D. În acest caz $N_{free}=240$ per punct de semnal 8-D ($N_{free}=60$ per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 8-D este mai mic decît 240.

3. Dacă X este subsetul 8-D asociat cu tranziţiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+4} şi dacă X_1, X_2, X_3 sunt subseturile 8-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270° atunci $X=X_1=X_2=X_3$.

Acestă cerinţă garantează că vom obţine un cod TCM 4-D transparent la toate ambiguităţile de fază ale constelaţiei de semnale 8-D, cu alte cuvinte un cod TCM 8-D invariant rotaţional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguităţi de fază a constelaţiei de semnale 8-D (0°, 90°, 180°, 270°) se foloseşte un **codor diferenţial** pe 2 biţi [16]:

$$(I'_{6,n} I'_{7,n}) = (I'_{6,n-4} I'_{7,n-4} + I_{6,n} I_{7,n}) \bmod 4 \tag{4.21}$$

Convertorul de bit converteşte cei 8 biţi de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I_{4,n}$, $I_{5,n}$, $I'_{6,n}$, $I'_{7,n}$ în 4 grupuri de cîte 2 biţi fiecare [16]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3 \tag{4.22}$$

care selectează 4 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 8-D selectat în cadrul subsetului 8-D utilizat.

Pentru a obţine un cod TCM 8-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelaţiei de semnale 8-D trebuie sa fie îndeplinită cerinţa prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 8-D asociat cu structura de biţi $Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{5,n}, I'_{6,n}, I'_{7,n}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 8-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{6,n}, I'_{7,n})_1$, $(I'_{6,n}, I'_{7,n})_2$, $(I'_{6,n}, I'_{7,n})_3$ sunt perechile de biţi obţinute prin translaţia perechii de biţi $(I'_{6,n}, I'_{7,n})$ cu una, două sau trei poziţii în secvenţa circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 8-D asociate cu structurile de biţi:

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{5,n}(I'_{6,n}, I'_{7,n})_1$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{5,n}(I'_{6,n}, I'_{7,n})_2$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n}, I_{5,n}(I'_{6,n}, I'_{7,n})_3$,

sunt X_1, X_2 ,X_3.

Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3 şi subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcţionarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.5.

Codorul bloc foloseşte cei 9 biţi $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$, $I_{4,n+1}$, $I_{5,n+1}$, $I_{6,n+1}$, $I_{7,n+1}$, $I_{1,n+2}$, $I_{2,n+2}$ pentru a genera 4 grupuri de cîte 3 biţi fiecare [16]:

$$Z_{2,p}, Z_{3,p}, Z_{4,p}, \; p=n, n+1, n+2, n+3 \tag{4.23}$$

care selectează pentru cele 4 subseturi 2-D utilizate primul sfert al grupului intern IG_1, al doilea sfert al grupului intern IG_2, al treilea sfert al grupului intern IG_3, al patrulea sfert al grupului intern IG_4 sau grupul extern OG.

Corespondenţa dintre cei 3 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3 şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.6 iar funcţionarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.7.

Cele 4 grupuri de cîte 3 biţi fiecare [16]:

$$Z_{5,p}, Z_{6,p}, Z_{7,p}, \; p=n, n+1, n+2, n+3 \tag{4.24}$$

selectează pentru fiecare din cele 4 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelaţiei de semnale 2-D selectat anterior.

Tabelul 4.1 Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ şi subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.5 Convertorul de bit

Subset 8-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	Tip 8-D	$I'_{6,n}$	$I'_{7,n}$	Subset 2-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$	$Z_{0,n+3}$	$Z_{1,n+3}$
0	0	0	0	0	0	0	(0, 0)	0	0	(A, A)∪(A, A)	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0		0	1	(A, A)∪(B, B)	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0		1	0	(B, B)∪(A, A)	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0		1	1	(B, B)∪(B, B)	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	1	(1, 1)	0	0	(C, C)∪(C, C)	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	0	0	0	0	1		0	1	(C, C)∪(D, D)	1	0	1	0	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	1		1	0	(D, D)∪(C, C)	1	1	1	1	1	0	1	0
	0	0	0	0	0	1		1	1	(D, D)∪(D, D)	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	1	0	(2, 2)	0	0	(A, B)∪(A, B)	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	0		0	1	(A, B)∪(B, A)	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0		1	0	(B, A)∪(A, B)	0	1	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	0		1	1	(B, A)∪(B, A)	0	1	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	1	(3, 3)	0	0	(C, D)∪(C, D)	1	0	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1		0	1	(C, D)∪(D, C)	1	0	1	1	1	1	1	0
	0	0	0	0	1	1		1	0	(D, C)∪(C, D)	1	1	1	0	1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1		1	1	(D, C)∪(D, C)	1	1	1	0	1	1	1	0
...																		
15	1	1	1	1	0	0	(4, 3)	0	0	(A, C)∪(C, D)	0	0	1	0	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	0		0	1	(A, C)∪(D, C)	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	0		1	0	(B, D)∪(C, D)	0	1	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	0		1	1	(B, D)∪(D, C)	0	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	1	(5, 2)	0	0	(C, B)∪(A, B)	1	0	0	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	0	1		0	1	(C, B)∪(B, A)	1	0	0	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	0	1		1	0	(D, A)∪(A, B)	1	1	1	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	0	1		1	1	(D, A)∪(B, A)	1	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	(6, 1)	0	0	(A, D)∪(C, C)	0	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	0		0	1	(A, D)∪(D, D)	0	0	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	0		1	0	(B, C)∪(C, C)	0	1	1	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	0		1	1	(B, C)∪(D, D)	0	1	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	(7, 0)	0	0	(C, A)∪(A, A)	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1		0	1	(C, A)∪(B, B)	1	0	0	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	1	1		1	0	(D, B)∪(A, A)	1	1	0	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1		1	1	(D, B)∪(B, B)	1	1	0	1	0	1	0	1

Tabelul 4.6 Corespondența dintre cei 3 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ $Z_{4,p}$ și grupurile constelației de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	$Z_{4,p}$	Grup constelație de semnale 2-D
0	0	0	IG_1
0	0	1	IG_2
0	1	0	IG_3
0	1	1	IG_4
1	0	0	OG

Tabelul 4.7 Codorul bloc

$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$	$Z_{2,n+3}$	$Z_{3,n+3}$	$Z_{4,n+3}$
0	X	X	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	0	0	1	0	0	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	0	1	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	1	0	0	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	1	0	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	1	0	0	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	1	1	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	1	0	0

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 8-D faţă de o transmisie necodată se calculează astfel [16]:

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{\dfrac{4d_0^2}{23,59375d_0^2}}{\dfrac{d_0^2}{20,5d_0^2}}\right) = 10\log_{10}(3,475) \cong 5,40955 \text{ [dB]} \qquad (4.25)$$

unde :

d_0^2=MSED a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată,

$4d_0^2$=MSED a subseturilor 8-D obţinute prin partiţionarea constelaţiei de semnale 8-D,

$20,5\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată, (128 de puncte de semnal 2-D) = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D,

$23,59375\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 8-D calculată ţinînd cont de relaţia (4.2).

4.3 Construcţia Sterian pentru coduri TCM multidimensionale

În cazul construcţiei Wei a codurilor TCM multidimensionale, pentru a transmite Q biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D, constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D este formată din 2 grupuri:

- **grupul intern IG (Inner Group)** care conţine 2^Q puncte de semnal 2-D, la fel ca şi constelaţia de semnale 2-D folosită într-o transmisie necodată pentru a transmite Q biţi în fiecare interval de semnalizare 2-D,
- **grupul extern OG (Outer Group)** care conţine $\frac{1}{N}2^Q$ puncte de semnal 2-D.

Întrucît grupul extern conţine $\frac{1}{N}2^Q$ puncte de semnal 2-D, este evident că N trebuie să fie o putere întreagă a lui 2.

Sterian a extins construcţia Wei a codurilor TCM multidimensionale şi pentru cazurile cînd N nu este o putere întreagă a lui 2 [42].

Lema 4.1-Dacă N şi c sunt două numere întregi pozitive astfel încît:

$$2^{c-1} \le N \le 2^c \qquad (4.26)$$

atunci se pot găsi două numere întregi pozitive N_1 şi N_2, astfel încît [42]:

$$N_1 + N_2 = N \\ N_1 + 2N_2 = 2^c \tag{4.27}$$

Se observă că 2^c este cea mai mică putere întreagă a lui 2 care este mai mare decît N [42].

Se consideră două subgrupuri externe [42]:

❖ subgrupul extern O_1, care conține n_{O_1} puncte de semnal 2-D,

❖ subgrupul extern O_2, care conține n_{O_2} puncte de semnal 2-D.

Se notează cu N_1, respectiv N_2 numărul de poziții ocupate de punctul de semnal 2-D din O_1, respectiv O_2 în construcția unui punct de semnal 2N-D. Se obține [42]:

$$N_1 + N_2 = N \\ N_1 n_{O_1} + N_2 n_{O_2} = 2^Q \tag{4.28}$$

Pentru cazurile în care N nu este o putere întreagă a lui 2, se consideră că numărul de puncte de semnal 2-D din subgrupul extern O_2 este dublu față de numărul de puncte de semnal 2-D din O_1 [42]:

$$n_{O_2} = 2n_{O_1} \tag{4.29}$$

Ținînd cont de relațiile (4.27), (4,28) și (4.29) se obține [42]:

$$n_{O_1} = 2^{Q-c} \\ n_{O_2} = 2^{Q+1-c} \tag{4.30}$$

Se consideră că grupul extern OG, este format din două subgrupuri externe Ω_1 și Ω_2, care au fiecare același număr n_{O_1} de puncte de semnal 2-D [42], astfel încît:

$$O_1 = \Omega_1 \\ O_2 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{4.31}$$

Construirea punctelor de semnal 2N-D se face prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D și ținînd cont de următoarele observații:

- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N puncte de semnal 2-D din IG este 2^{NQ},
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG și un punct de semnal 2-D din Ω_1 în una din primele N poziții este $\frac{N}{2^c}2^{NQ}$,
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din

IG şi un punct de semnal 2-D din Ω_2 în una din primele N_2 poziţii este $\frac{N_2}{2^c}2^{NQ}$.

Rezultă în total $2^{NQ+1}=2^{NQ}+\frac{N}{2^c}2^{NQ}+\frac{N_2}{2^c}2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D.

În construcţia punctelor de semnal 2N-D, un punct de semnal 2-D din Ω_1 este utilizat de $\frac{N}{N_2}$ ori mai des decît un punct de semnal 2-D din Ω_2. Dacă p_{Ω_1} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din Ω_1, p_{Ω_2} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din Ω_2 şi p_{OG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din OG atunci se obţine [42]:

$$\begin{cases} \dfrac{p_{\Omega_1}}{p_{\Omega_2}}=\dfrac{N}{N_2} \\ p_{\Omega_1}+p_{\Omega_2}=p_{OG}=\dfrac{1}{2N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\Omega_1}=\dfrac{1}{2(N+N_2)} \\ p_{\Omega_2}=\dfrac{N_2}{2N(N+N_2)} \end{cases} \tag{4.32}$$

Energia medie a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D este egală cu [42]:

$$\begin{aligned} E_{medie} &= p_{IG}E_{IG}+p_{\Omega_1}E_{\Omega_1}+p_{\Omega_2}E_{\Omega_2}= \\ &=\frac{2N-1}{2N}E_{IG}+\frac{1}{2(N+N_2)}E_{\Omega_1}+\frac{N_2}{2N(N+N_2)}E_{\Omega_2} \end{aligned} \tag{4.33}$$

unde:
E_{IG}=energia medie a grupului intern IG a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupul intern IG,
E_{Ω_1}=energia medie a subgrupului extern Ω_1 a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupul extern Ω_1, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D situate în grupul extern Ω_1,
E_{Ω_2}=energia medie a subgrupului extern Ω_2 a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupul extern Ω_2, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D situate în grupul extern Ω_2,
N_1 şi N_2=două numere întregi pozitive care respectă condiţiile lemei 4.1,
2N=dimensiunea codului TCM multidimensional.

4.3.1 Codul TCM 6-D, cu rata 3/4 şi cu 64 stări

Se consideră transmisia a Q=7 biţi/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 6-D cu rata 3/4 şi 64 stări este prezentată în Fig.4.5 [42].

În acest caz N=3 şi din relaţiile (4.24), (4.25), (4.28) rezultă că c=2, $N_1=2$, $N_2=1$.

Constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 6-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ (**Z** = mulţimea numerelor întregi) şi este formată din 192 puncte de semnal 2-D:

- $2^7=128$ puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- $n_{O_1}=2^5=32$ puncte de semnal 2-D în subgrupul Ω_1,
- $n_{O_1}=2^5=32$ puncte de semnal 2-D în subgrupul Ω_2.

Se partiţionează constelaţia de semnale 2-D (Fig.4.6) constituentă în 4 **subseturi 2-D** [42]:

⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelaţia de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2=4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relaţia 4.3) [42]:

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Prin concatenarea a 3 constelaţii de semnale 2-D constituente şi prin eliminarea punctelor de semnal 6-D care conţin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG, se obţine **constelaţia de semnale 6-D** cu $2^{3x7+1}=2^{22}$ puncte de semnal 6-D.

Se construiesc 64 **tipuri 6-D** cu MSED=$d^2=4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 3 subseturi 2-D şi notate astfel [42]:

$$(A, A, A), (A, A, B), (A, A, C), (A, A, D), \ldots, (D, D, D) \tag{4.34}$$

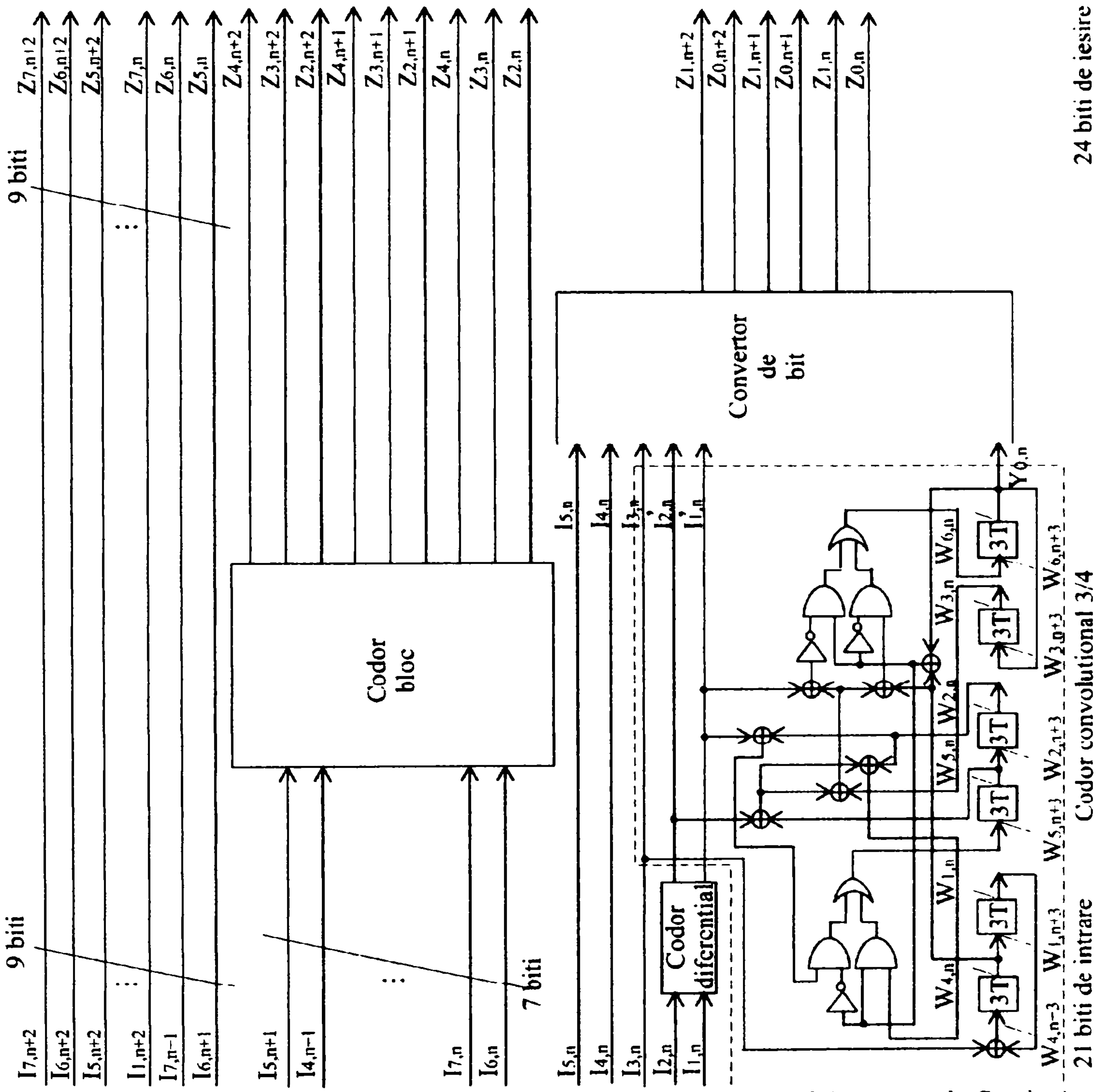
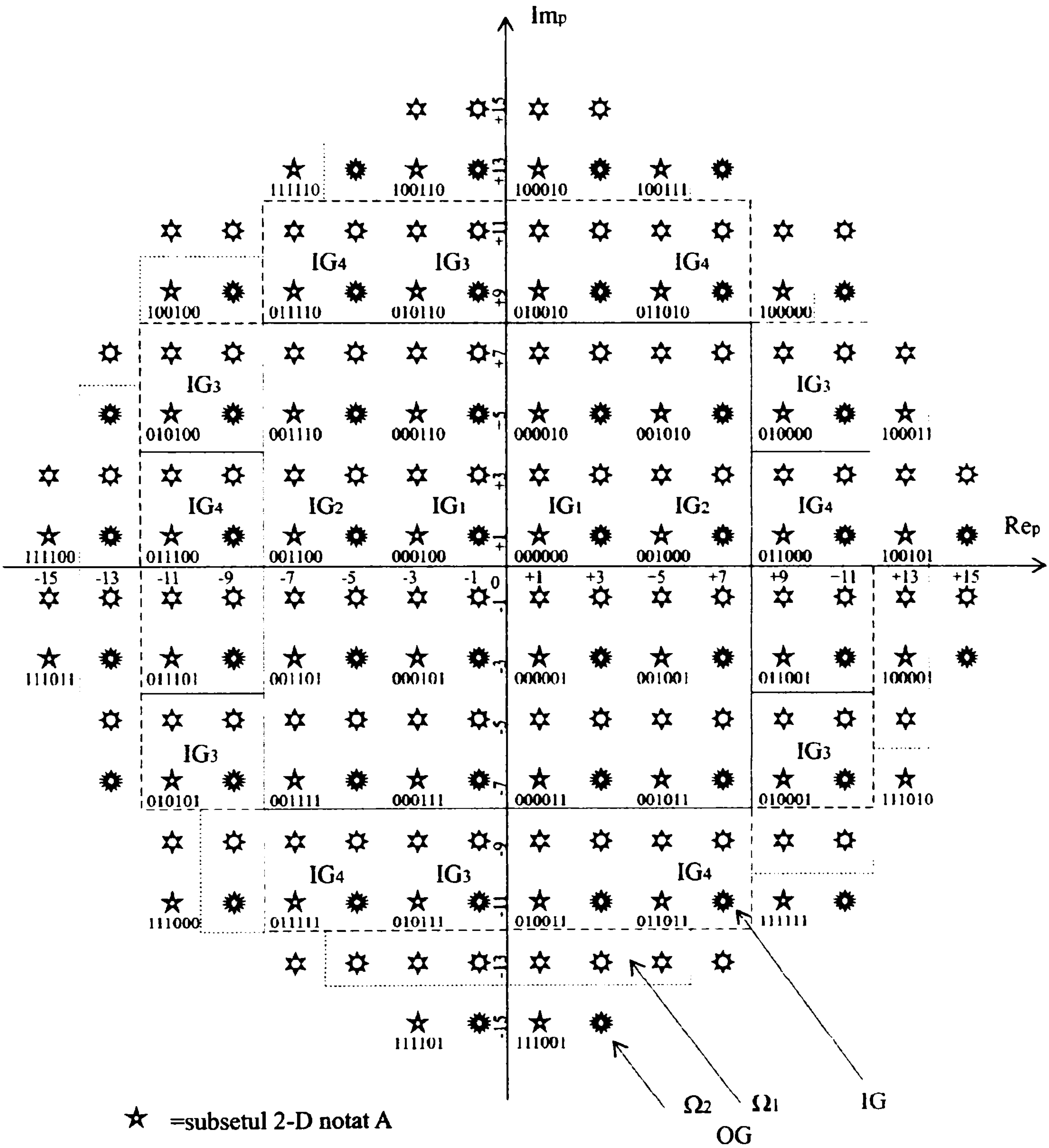


Fig.4.5 Schema bloc a codorului TCM 6-D cu rata 2/3 şi 16 stări (construcţia Sterian).



★ =subsetul 2-D notat A

✪ =subsetul 2-D notat B

✡ =subsetul 2-D notat C

✹ =subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2.

Fig.4.6 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 172 puncte de semnal 2-D (construcția Sterian).

Cele 64 tipuri 6-D sunt grupate în 16 **subseturi 6-D** astfel încît MSED a fiecărui subset 6-D obținut să fie egală cu $d^2 = 4d_0^2$ [42]:

$$\begin{cases} S_0=(A, A, A) \cup (A, B, B) \cup (B, A, B) \cup (B, B, A) \\ S_1=(C, A, B) \cup (C, B, A) \cup (D, A, A) \cup (D, B, B) \\ S_2=(A, C, C) \cup (A, D, D) \cup (B, C, D) \cup (B, D, C) \\ S_3=(C, C, C) \cup (C, D, D) \cup (D, C, D) \cup (D, D, C) \\ S_4=(A, A, B) \cup (A, B, A) \cup (B, A, A) \cup (B, B, B) \\ S_5=(C, A, A) \cup (C, B, B) \cup (D, A, B) \cup (D, B, A) \\ S_6=(A, C, D) \cup (A, D, C) \cup (B, C, C) \cup (B, D, D) \\ S_7=(C, C, D) \cup (C, D, C) \cup (D, C, C) \cup (D, D, D) \\ S_8=(C, A, C) \cup (C, B, D) \cup (D, A, D) \cup (D, B, C) \\ S_9=(A, A, D) \cup (A, B, C) \cup (B, A, C) \cup (B, B, D) \\ S_{10}=(C, C, A) \cup (C, D, B) \cup (D, C, B) \cup (D, D, A) \\ S_{11}=(A, C, A) \cup (A, D, B) \cup (B, C, B) \cup (B, D, A) \\ S_{12}=(C, A, D) \cup (C, B, C) \cup (D, A, C) \cup (D, B, D) \\ S_{13}=(A, A, C) \cup (A, B, D) \cup (B, A, D) \cup (B, B, C) \\ S_{14}=(C, C, B) \cup (C, D, A) \cup (D, C, A) \cup (D, D, B) \\ S_{15}=(A, C, B) \cup (A, D, A) \cup (B, C, A) \cup (B, D, B) \end{cases} \tag{4.35}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 6-D [42]:

$$\begin{cases} S_0 \to S_3 \to S_4 \to S_7 \to S_0 \\ S_1 \to S_2 \to S_5 \to S_6 \to S_1 \\ S_8 \to S_{11} \to S_{12} \to S_{15} \to S_8 \\ S_9 \to S_{10} \to S_{13} \to S_{14} \to S_9 \end{cases} \tag{4.36}$$

Subseturile 6-D sunt grupate în 2 **familii 6-D** cu MSED$=2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 6-D să conțină 8 subseturi 6-D [42]:

$$\begin{cases} F_0=S_0 \cup S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_8 \cup S_{10} \cup S_{12} \cup S_{14} \\ F_1=S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9 \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{15} \end{cases} \tag{4.37}$$

În acest caz avem m=3 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 3/4 şi cu 64 stări.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 8 subseturi [42]:

$$\{8i + j \mid 0 \le i \le 7, 0 \le j \le 7\} \tag{4.38}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+3}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 8 subseturi [42]:

$$\{8j + k \mid 0 \le j \le 7, 0 \le k \le 7\} \quad (4.39)$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 7$ există tranziţii de stare între fiecare stare curentă $8i+j$, $0 \le i \le 7$ şi fiecare stare următoare $8j+k$, $0 \le k \le 7$.

Asignarea subseturilor 6-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 6-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerinţe [16]:

1. Subseturile 6-D, asociate cu tranziţiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele şi să aparţină aceleaşi familii 6-D.

Acelaşi considerent se aplică şi pentru subseturile 6-D asociate cu tranziţiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerinţe:

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=0$) sunt asignate subseturi 6-D din familia 6-D notată F_0,

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=1$) sunt asignate subseturi 6-D din familia 6-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvenţe de subseturi 6-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 6-D (MSED de intersubset 6-D să fie mai mare sau cel puţin egală cu MSED de intrasubset 6-D).

Această cerinţă garantează că MSED dintre două secvenţe de puncte de semnal 6-D este $d^2 = 4d_0^2$ şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 6-D faţă de secvenţa corectă de puncte de semnal 6-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 6-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiaţi ai unui punct de semnal 6-D şi aflaţi într-un subset 6-D cu un număr finit de puncte de semnal 6-D. În acest caz $N_{free}=60$ per punct de semnal 6-D ($N_{free}=20$ per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 6-D este mai mic decît 60.

3. Dacă X este subsetul 6-D asociat cu tranziţiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+3} şi dacă X_1, X_2, X_3 sunt subseturile 6-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270° atunci se pot defini trei funcţii F_1, F_2, F_3 de corespondenţă între stările codului TCM 6-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+3})$, X_2 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_2(\sigma_n)$ în starea următoare $F_2(\sigma_{n+3})$, X_3 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_3(\sigma_n)$ în starea următoare $F_3(\sigma_{n+3})$.

Pentru o rotaţie de 90° în sens orar se defineşte funcţia F_1 astfel [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \rightarrow W_{1,n}V_{2,n}V_{3,n}W_{4,n}V_{5,n}V_{6,n} \quad (4.40)$$

unde [42]:

$$\begin{cases} V_{2,n}V_{3,n} = (W_{2,n}W_{3,n} + 01)\bmod 4 \\ V_{5,n}V_{6,n} = (W_{5,n}W_{6,n} + 01)\bmod 4 \end{cases} \tag{4.41}$$

Pentru o rotație de 180° în sens orar se definește funcția F_2 astfel [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \to W_{1,n}\overline{W}_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}\overline{W}_{5,n}W_{6,n} \tag{4.42}$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Pentru o rotație de 270° în sens orar definim funcția F_3 astfel [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \to W_{1,n}V_{2,n}V_{3,n}W_{4,n}V_{5,n}V_{6,n} \tag{4.43}$$

unde [42]:

$$\begin{cases} V_{2,n}V_{3,n} = (W_{2,n}W_{3,n} + 11)\bmod 4 \\ V_{5,n}V_{6,n} = (W_{5,n}W_{6,n} + 11)\bmod 4 \end{cases} \tag{4.44}$$

Acestă cerință garantează că vom obține un cod TCM 6-D transparent la toate ambiguitățile de fază ale constelației de semnale 6-D, cu alte cuvinte un cod TCM 6-D invariant rotațional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguități de fază a constelației de semnale 6-D (0°, 90°, 180°, 270°) se folosește un **codor diferențial** pe 2 biți [42]:

$$(I'_{1,n}I'_{2,n}) = (I'_{1,n-3}I'_{2,n-3} + I_{1,n}I_{2,n})\bmod 4 \tag{4.45}$$

Convertorul de bit convertește cei 6 biți de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I'_{1,n}$, $I'_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I_{4,n}$, $I_{5,n}$ în 3 grupuri de cîte 2 biți fiecare [42]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2 \tag{4.46}$$

care selectează 3 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 6-D selectat în cadrul subsetului 6-D utilizat.

Pentru a obține un cod TCM 6-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelației de semnale 6-D trebuie sa fie îndeplinită cerința prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 6-D asociat cu structura de biți $Y_{0,n}, I'_{1,n}, I'_{2,n}, I_{3,n}, I_{4,n} I_{5,n}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 6-D obținute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{1,n}, I'_{2,n})_1$, $(I'_{1,n}, I'_{2,n})_2$, $(I'_{1,n}, I'_{2,n})_3$ sunt perechile de biți obținute prin translația perechii de biți $(I'_{1,n}, I'_{2,n})$ cu una, două sau trei poziții în secvența circulară $00 \to 10 \to 01 \to 11 \to 00$, atunci tipurile 6-D asociate cu structurile de biți:

$Y_{0,n}, (I'_{1,n}, I'_{2,n})_1, I_{3,n}, I_{4,n} I_{5,n}$,

$Y_{0,n}, (I'_{1,n}, I'_{2,n})_2, I_{3,n}, I_{4,n} I_{5,n}$,

$Y_{0,n}, (I'_{1,n}, I'_{2,n})_3, I_{3,n}, I_{4,n} I_{5,n}$,

sunt X_1, X_2 ,X_3.

Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2 şi subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcţionarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.8.

Tabelul 4.1 Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ şi subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.8 Convertorul de bit

Subset 6-D	$Y_{0,n}$	$I'_{1,n}$	$I'_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	Tip 6-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$
0	0	0	0	0	0	0	(A, A, A)	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	(A, B, B)	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	(B, A, B)	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	1	(B, B, A)	0	1	0	1	0	0
...													
...													
15	1	1	1	1	0	0	(A, C, B)	0	0	1	0	0	1
	1	1	1	1	0	1	(A, D, A)	0	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	(B, C, A)	0	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	1	(B, D, B)	0	1	1	1	0	1

Dacă se notează cu S_i subseturile 6-D atunci indexul i este furnizat de relaţia [42]:

$$i = 8Y_{0,n} + 4I'_{1,n} + 2I'_{2,n} + I_{3,n}, \; i = 0, 1, \ldots, 15 \qquad (4.47)$$

Codorul bloc foloseşte cei 7 biţi $I_{6,n}$, $I_{7,n}$, $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$, $I_{4,n+1}$ $I_{5,n+1}$ pentru a genera 3 grupuri de cîte 3 biţi fiecare [42]:

$$Z_{2,p}, Z_{3,p}, Z_{4,p}, \; p=n, n+1, n+2 \qquad (4.48)$$

care selectează pentru fiecare din cele 3 subseturi 2-D utilizate, primul sfert al grupului intern IG_1, al doilea sfert al grupului intern IG_2, al treilea sfert al grupului intern IG_3, al patrulea sfert al grupului intern IG_4, subgrupul extern Ω_1 sau subgrupul extern Ω_2.

Corespondenţa dintre cei 3 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3 şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.9 iar funcţionarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.10.

Cele 3 grupuri de cîte 3 biţi fiecare [42]:

$$Z_{5,p},\ Z_{6,p},\ Z_{7,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2 \tag{4.49}$$

selectează pentru fiecare din cele 3 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelaţiei de semnale 2-D selectat anterior.

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 6-D faţă de o transmisie necodată se calculează astfel [42]:

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{\dfrac{4d_0^2}{25{,}0833d_0^2}}{\dfrac{d_0^2}{20{,}5d_0^2}}\right) = 10\log_{10}(3{,}269) \cong 5{,}14415\ [\mathrm{dB}] \tag{4.50}$$

unde:

d_0^2=MSED a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată,

$4d_0^2$=MSED a subseturilor 6-D obţinute prin partiţionarea constelaţiei de semnale 6-D,

$20{,}5\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată, (128 de puncte de semnal 2-D) = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D,

$25{,}0833\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 6-D calculată ţinînd cont de relaţia (4.33).

Tabelul 4.9 Corespondenţa dintre cei 3 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ $Z_{4,p}$ şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	$Z_{4,p}$	Grup constelaţie de semnale 2-D
0	0	0	IG_1
0	0	1	IG_2
0	1	0	IG_3
0	1	1	IG_4
1	0	0	Ω_1
1	1	1	Ω_2

Tabelul 4.10 Codorul bloc

$I_{6,n}$	$I_{7,n}$	$I_{1,n+1}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$
0	X	X	0	$I_{7,n}$	$I_{1,n+1}$	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$
1	0	0	1	0	0	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$
1	0	1	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	1	0	0	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$
1	1	0	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$

4.3.2 Codul TCM 12-D, cu rata 4/5 şi cu 256 stări

Se consideră transmisia a Q=7 biţi/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 12-D cu rata 4/5 şi 256 stări este prezentată în Fig.4.7 [42].

În acest caz N=6 şi din relaţiile (4.24), (4.25), (4.28) rezultă că c=3, $N_1=4$, $N_2=2$.

Constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 12-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ ($\mathbf{Z}$ = mulţimea numerelor întregi) şi este formată din 160 puncte de semnal 2-D:

- $2^7=128$ puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- $n_{O_1}=2^4=16$ puncte de semnal 2-D în subgrupul Ω_1,
- $n_{O_1}=2^4=16$ puncte de semnal 2-D în subgrupul Ω_2.

Se partiţionează constelaţia de semnale 2-D (Fig.4.8) constituentă în 4 **subseturi 2-D** [42]:

⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelaţia de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2=4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relaţia 4.3) [42]:

$$A \to C \to B \to D \to A$$

Prin concatenarea a 6 constelaţii de semnale 2-D constituente şi prin eliminarea punctelor de semnal 12-D care conţin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG, se obţine **constelaţia de semnale 12-D** cu $2^{6\times7+1}=2^{43}$ puncte de semnal 6-D.

Se construiesc 256 **tipuri 12-D** cu MSED=$d^2=4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 6-D şi notate astfel [42]:

$$(0, 0), (0, 1), \ldots, (15, 15) \qquad (4.51)$$

unde i=0, 1,…,15 reprezintă indicele subseturilor 6-D notate S_i în paragraful 4.3.1.

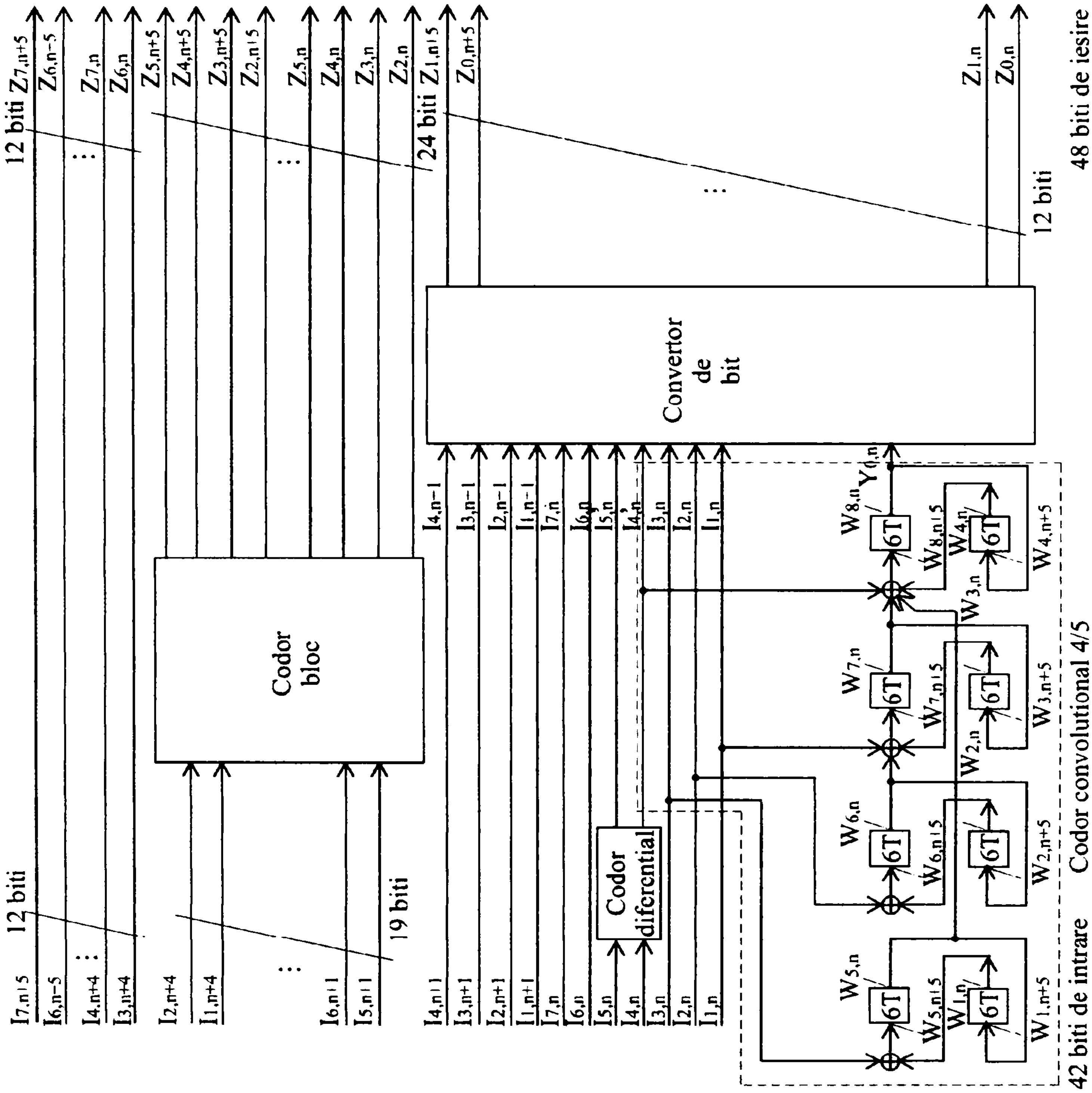
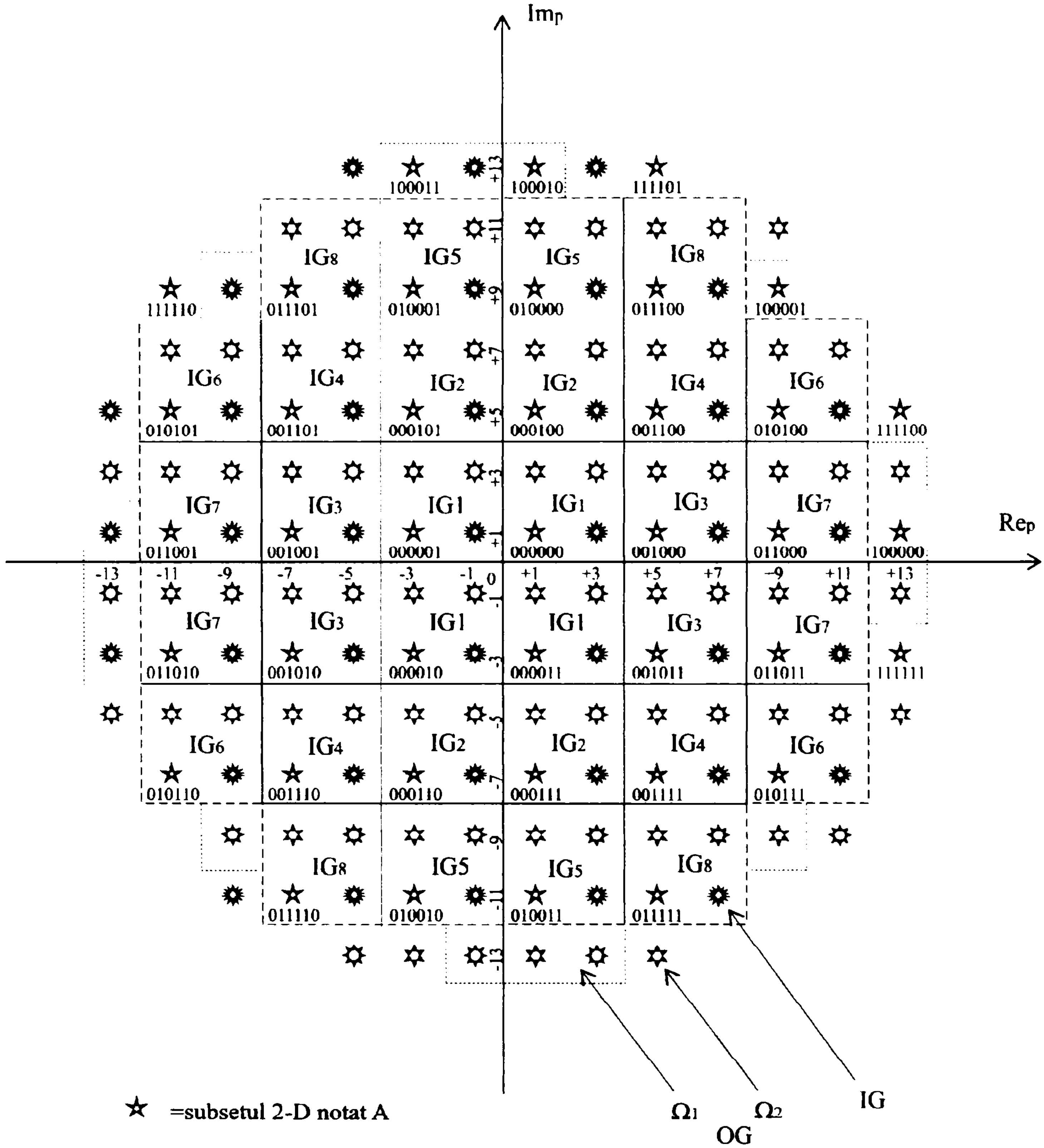


Fig.4.7 Schema bloc a codorului TCM 12-D cu rata 4/5 şi 256 stări (construcţia Sterian).



=subsetul 2-D notat A

=subsetul 2-D notat B

=subsetul 2-D notat C

=subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5.

Fig.4.8 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 160 puncte de semnal 2-D (construcția Sterian).

Cele 256 tipuri 12-D sunt grupate în 32 **subseturi 12-D** astfel încît MSED a fiecărui subset 12-D obținut să fie egală cu $d^2 = 4d_0^2$ [42]:

$$\left\{\begin{array}{l}
S_0=(0,0)\cup(2,2)\cup(4,4)\cup(6,6)\cup(8,8)\cup(10,10)\cup(12,12)\cup(14,14)\\
S_1=(0,3)\cup(2,5)\cup(4,7)\cup(6,1)\cup(8,11)\cup(10,13)\cup(12,15)\cup(14,9)\\
S_2=(0,4)\cup(2,6)\cup(4,0)\cup(6,2)\cup(8,12)\cup(10,14)\cup(12,8)\cup(14,10)\\
S_3=(0,7)\cup(2,1)\cup(4,3)\cup(6,5)\cup(8,15)\cup(10,9)\cup(12,11)\cup(14,13)\\
S_4=(0,2)\cup(2,0)\cup(4,6)\cup(6,4)\cup(8,10)\cup(10,8)\cup(12,14)\cup(14,12)\\
S_5=(0,5)\cup(2,3)\cup(4,1)\cup(6,7)\cup(8,13)\cup(10,11)\cup(12,9)\cup(14,15)\\
S_6=(0,6)\cup(2,4)\cup(4,2)\cup(6,0)\cup(8,14)\cup(10,12)\cup(12,10)\cup(14,8)\\
S_7=(0,1)\cup(2,7)\cup(4,5)\cup(6,3)\cup(8,9)\cup(10,15)\cup(12,13)\cup(14,11)\\
S_8=(0,8)\cup(2,10)\cup(4,12)\cup(6,14)\cup(8,0)\cup(10,2)\cup(12,4)\cup(14,6)\\
S_9=(0,11)\cup(2,13)\cup(4,15)\cup(6,9)\cup(8,3)\cup(10,5)\cup(12,7)\cup(14,1)\\
S_{10}=(0,12)\cup(2,14)\cup(4,8)\cup(6,10)\cup(8,4)\cup(10,6)\cup(12,0)\cup(14,2)\\
S_{11}=(0,15)\cup(2,9)\cup(4,11)\cup(6,13)\cup(8,7)\cup(10,1)\cup(12,3)\cup(14,5)\\
S_{12}=(0,10)\cup(2,8)\cup(4,14)\cup(6,12)\cup(8,2)\cup(10,0)\cup(12,6)\cup(14,4)\\
S_{13}=(0,13)\cup(2,11)\cup(4,9)\cup(6,15)\cup(8,5)\cup(10,3)\cup(12,1)\cup(14,7)\\
S_{14}=(0,14)\cup(2,12)\cup(4,10)\cup(6,8)\cup(8,6)\cup(10,4)\cup(12,2)\cup(14,0)\\
S_{15}=(0,9)\cup(2,15)\cup(4,13)\cup(6,11)\cup(8,1)\cup(10,7)\cup(12,5)\cup(14,3)\\
S_{16}=(1,1)\cup(3,3)\cup(5,5)\cup(7,7)\cup(9,9)\cup(11,11)\cup(13,13)\cup(15,5)\\
S_{17}=(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)\cup(7,0)\cup(9,10)\cup(11,12)\cup(13,14)\cup(15,8)\\
S_{18}=(1,5)\cup(3,7)\cup(5,1)\cup(7,3)\cup(9,13)\cup(11,15)\cup(13,9)\cup(15,11)\\
S_{19}=(1,6)\cup(3,0)\cup(5,2)\cup(7,4)\cup(9,14)\cup(11,8)\cup(13,10)\cup(15,12)\\
S_{20}=(1,7)\cup(3,5)\cup(5,3)\cup(7,1)\cup(9,15)\cup(11,13)\cup(13,11)\cup(15,9)\\
S_{21}=(1,0)\cup(3,6)\cup(5,4)\cup(7,2)\cup(9,8)\cup(11,14)\cup(13,12)\cup(15,10)\\
S_{22}=(1,3)\cup(3,1)\cup(5,7)\cup(7,5)\cup(9,11)\cup(11,9)\cup(13,15)\cup(15,13)\\
S_{23}=(1,4)\cup(3,2)\cup(5,0)\cup(7,6)\cup(9,12)\cup(11,10)\cup(13,8)\cup(15,14)\\
S_{24}=(1,9)\cup(3,11)\cup(5,13)\cup(7,15)\cup(9,1)\cup(11,3)\cup(13,5)\cup(15,7)\\
S_{25}=(1,10)\cup(3,12)\cup(5,14)\cup(7,8)\cup(9,2)\cup(11,4)\cup(13,6)\cup(15,0)\\
S_{26}=(1,13)\cup(3,15)\cup(5,9)\cup(7,11)\cup(9,5)\cup(11,7)\cup(13,1)\cup(15,3)\\
S_{27}=(1,14)\cup(3,8)\cup(5,10)\cup(7,12)\cup(9,6)\cup(11,0)\cup(13,2)\cup(15,4)\\
S_{28}=(1,15)\cup(3,13)\cup(5,11)\cup(7,9)\cup(9,7)\cup(11,5)\cup(13,3)\cup(15,1)\\
S_{29}=(1,8)\cup(3,14)\cup(5,12)\cup(7,10)\cup(9,0)\cup(11,6)\cup(13,4)\cup(15,2)\\
S_{30}=(1,11)\cup(3,9)\cup(5,15)\cup(7,13)\cup(9,3)\cup(11,1)\cup(13,7)\cup(15,5)\\
S_{31}=(1,12)\cup(3,10)\cup(5,8)\cup(7,14)\cup(9,4)\cup(11,2)\cup(13,0)\cup(15,6)
\end{array}\right. \tag{4.52}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 12-D [42]:

$$S_i \rightarrow S_{i+16} \rightarrow S_i,\ i = 0, 1, \ldots, 15 \tag{4.53}$$

Subseturile 12-D sunt grupate în 2 **familii 12-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 12-D să conțină 16 subseturi 12-D [42]:

$$\begin{cases} F_0=S_0 \cup S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_8 \cup S_{10} \cup S_{12} \cup S_{14} \cup S_{16} \cup S_{18} \cup S_{20} \cup S_{22} \cup S_{24} \cup S_{26} \cup \\ \cup S_{28} \cup S_{30} \\ F_1=S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9 \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{15} \cup S_{17} \cup S_{19} \cup S_{21} \cup S_{23} \cup S_{25} \cup S_{27} \cup \\ \cup S_{29} \cup S_{31} \end{cases} \quad (4.54)$$

În acest caz avem m=4 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 4/5 și 256 stări.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 16 subseturi [42]:

$$\{16i + j \mid 0 \le i \le 15, 0 \le j \le 15\} \quad (4.55)$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+6}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în 16 subseturi [42]:

$$\{16j + k \mid 0 \le j \le 15, 0 \le k \le 15\} \quad (4.56)$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 15$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă $16i+j$, $0 \le i \le 15$ și fiecare stare următoare $16j+k$, $0 \le k \le 15$.

Asignarea subseturilor 12-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 12-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 12-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele și să aparțină aceleași familii 12-D.

Același considerent se aplică și pentru subseturile 12-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{8,n}=0$) sunt asignate subseturi 12-D din familia 12-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{8,n}=1$) sunt asignate subseturi 12-D din familia 12-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 6-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 6-D (MSED de intersubset 6-D să fie mai mare sau cel puțin egală cu MSED de intrasubset 6-D).

Această cerință garantează că MSED dintre două secvențe de puncte de semnal 6-D este $d^2 = 4d_0^2$ și elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 6-D față de secvența corectă de puncte de semnal 6-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 12-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiați ai unui punct de semnal 12-D şi aflaţi într-un subset 12-D cu un număr finit de puncte de semnal 12-D. În acest caz N_{free}=6408 per punct de semnal 12-D (N_{free}=1068 per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 12-D este mai mic decît 6408.

3. Dacă X este subsetul 12-D asociat cu tranziţiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+6} şi dacă X_1 este subsetul 12-D obţinut prin rotirea lui X cu 90° atunci se poate defini o funcţie F_1 de corespondenţă între stările codului TCM 12-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+6})$.

Pentru o rotaţie de 90° în sens orar se defineşte funcţia F_1 astfel [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n}W_{7,n}W_{8,n} \rightarrow \overline{W}_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}\overline{W}_{5,n}W_{6,n}W_{7,n}W_{8,n} \quad (4.57)$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Acestă cerinţă garantează că vom obţine un cod TCM 12-D transparent la toate ambiguităţile de fază ale constelaţiei de semnale 12-D, cu alte cuvinte un cod TCM 12-D invariant rotaţional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguităţi de fază a constelaţiei de semnale 12-D (0°, 90°, 180°, 270°) se foloseşte un **codor diferenţial** pe 2 biţi [42]:

$$(I'_{4,n}I'_{5,n}) = (I'_{4,n-6}I'_{5,n-6} + I_{4,n}I_{5,n})\mathrm{mod}4 \quad (4.58)$$

Convertorul de bit converteşte cei 12 biţi de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I'_{4,n}$, $I'_{5,n}$, $I_{6,n}$, $I_{7,n}$, $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$, $I_{4,n+1}$ în 6 grupuri de cîte 2 biţi fiecare [42]:

$$Z_{0,p}, Z_{1,p}, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 \quad (4.59)$$

care selectează 6 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 12-D selectat în cadrul subsetului 12-D utilizat.

Pentru a obţine un cod TCM 12-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelaţiei de semnale 12-D trebuie sa fie îndeplinită cerinţa prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 12-D asociat cu structura de biţi $Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I'_{4,n}I'_{5,n}, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 12-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_1$, $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_2$, $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_2$ sunt perechile de biţi obţinute prin translaţia perechii de biţi $(I'_{4,n}, I'_{5,n})$ cu una, două sau trei poziţii în secvenţa circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 12-D asociate cu structurile de biţi:

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n}I'_{5,n})_1, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n}I'_{5,n})_2, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n}I'_{5,n})_3, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$, sunt X_1, X_2, X_3.

Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 şi subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcţionarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.11.

Dacă se notează cu S_i subseturile 12-D atunci indexul i este furnizat de relaţia [42]:

$$i = 16Y_{0,n} + 8I_{1,n} + 4I_{2,n} + 2I_{3,n} + I'_{4,n},\ i = 0, 1, \ldots, 31 \quad (4.60)$$

Codorul bloc foloseşte cei 16 biţi $I_{5,n+1}$, $I_{6,n+1}$, $I_{7,n+1}$, $I_{1,n+2}$, $I_{2,n+2}$, $I_{3,n+2}$ $I_{4,n+2}$, $I_{5,n+2}$, $I_{6,n+2}$, $I_{7,n+2}$, $I_{1,n+3}$, $I_{2,n+3}$, $I_{3,n+3}$ $I_{4,n+3}$, $I_{5,n+3}$, $I_{6,n+3}$, $I_{7,n+3}$, $I_{1,n+4}$, $I_{2,n+4}$ pentru a genera 6 grupuri de cîte 4 biţi fiecare [42]:

$$Z_{2,p}, Z_{3,p}, Z_{4,p}, Z_{5,p},\ p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 \quad (4.61)$$

care selectează pentru fiecare din cele 6 subseturi 2-D utilizate, prima optimea grupului intern IG_1,...,a opta optime a grupului intern IG_8, subgrupul extern Ω_1 sau subgrupul extern Ω_2.

Corespondenţa dintre cei 4 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.12 iar funcţionarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.13.

Cele 6 grupuri de cîte 2 biţi fiecare [42]:

$$Z_{6,p}, Z_{7,p},\ p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 \quad (4.62)$$

selectează pentru fiecare din cele 6 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelaţiei de semnale 2-D selectat anterior.

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 12-D faţă de o transmisie necodată se calculează astfel [42]:

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{\dfrac{4d_0^2}{22{,}448d_0^2}}{\dfrac{d_0^2}{20{,}5d_0^2}}\right) = 10\log_{10}(3{,}653) \cong 5{,}62650\ [\mathrm{dB}] \quad (4.63)$$

unde:

d_0^2=MSED a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată,

$4d_0^2$=MSED a subseturilor 12-D obţinute prin partiţionarea constelaţiei de semnale 12-D,

$20{,}5\,d_0^2$=energia medie a constelaţiei de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată, (128 de puncte de semnal 2-D) = suma pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate ale planului complex şi punctele de semnal 2-D, raportată la numărul punctelor de semnal 2-D,

$22{,}448\, d_0^2$=energia medie a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 12-D calculată ținînd cont de relația (4.33).

Tabelul 4.1 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ şi subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.12 Corespondența dintre cei 4 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$ şi grupurile constelației de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	$Z_{4,p}$	$Z_{5,p}$	Grup constelație de semnale 2-D
0	0	0	0	IG_1
0	0	0	1	IG_2
0	0	1	0	IG_3
0	0	1	1	IG_4
0	1	0	0	IG_5
0	1	0	1	IG_6
0	1	1	0	IG_7
0	1	1	1	IG_8
1	0	0	0	Ω_1
1	1	1	1	Ω_2

Tabelul 4.11 Convertorul de bit

Subset 12-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I'_{4,n}$	$I'_{5,n}$	$I_{6,n}$	$I_{7,n}$	Tip 12-D	$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$	$Z_{0,n+3}$	$Z_{1,n+3}$	$Z_{0,n+4}$	$Z_{0,r+4}$	$Z_{0,n+5}$	$Z_{1,n+5}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	(0,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	(2,2)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
														0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelul 4.13 Codorul bloc

$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{5,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{5,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$	$Z_{5,n+2}$	$Z_{2,n+3}$	$Z_{3,n+3}$	$Z_{4,n+3}$	$Z_{5,n+3}$	$Z_{2,n+4}$	$Z_{3,n+4}$	$Z_{4,n+4}$	$Z_{5,n+4}$	$Z_{2,n+5}$	$Z_{3,n+5}$	$Z_{4,n+5}$	$Z_{5,n+5}$
0	X	X	X	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	0	0	0	1	0	0	0	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	0	0	1	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	1	0	0	0	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	0	1	0	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	1	0	0	0	0	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	0	1	1	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	1	0	0	0	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	1	0	0	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	1	0	0	0	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$
1	1	0	1	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	1	0	0	0
1	1	1	X	1	1	1	1	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	0	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	0	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$

4.4 Generalizarea construcţiei Wei pentru coduri TCM multidimensionale

Construcţia Wei a codurilor TCM multidimensionale am realizat-o în următoarele **etape**:

- construcţia constelaţiei de semnale 2N-D,
- partiţionarea constelaţiei de semnale 2N-D,
- asignarea subseturilor 2N-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 2N-D,
- realizarea corespondenţei dintre cei NQ+1 biţi (primii m+1 biţi codaţi cu un codor convoluţional şi ceilalţi NQ-m biţi rămaşi necodaţi) şi constelaţia de semnale 2N-D.

Aceste etape le-am detailat în următoarele patru paragrafe [56].

4.4.1 Construcţia constelaţiei de semnale 2N-D

Pentru valori mici ale lui NQ+1 şi un sistem de transmisii de date în care singura perturbaţie este zgomotul aditiv alb gaussian din canalul de comunicaţie, se poate construi o constelaţie de semnale 2N-D cît mai mică posibil [16].

Pentru valori mari ale lui NQ+1 şi/sau un sistem de transmisii de date în care în afară de zgomotul aditiv alb gaussian din canalul de comunicaţie mai apar şi alte perturbaţii cum ar fi distorsiuni liniare, distorsiuni neliniare şi jitter de fază, construcţia constelaţiei de semnale 2N-D trebuie să respecte următoarele **cerinţe** [16]:

- dimensiunile constelaţiilor de semnale 2-D constituente să fie cît mai mici posibil,
- parametrii CER şi PAR ai constelaţiilor de semnale 2-D constituente să fie cît mai mici posibil,
- corespondenţa complicată dintre cei NQ+1 biţi (primii m+1 biţi codaţi cu un codor convoluţional şi ceilalţi NQ-m biţi rămaşi necodaţi) şi constelaţia de semnale 2N-D să fie convertită în N corespondenţe simple ale constelaţiilor de semnale 2-D constituente.

4.4.1.1 Metode de construcţie a unei constelaţii de semnale 2-D optimală

Există două metode de construcţie a unei constelaţii de semnale 2-D optimală în sensul unei energii medii minime:

- modelarea constelaţiei,
- corespondenţă în inele.

În construcţia Wei, în construcţia Sterian şi în construcţia Wei generalizată pe care am propus-o în continuare se foloseşte modelarea constelaţiei ca metodă de construcţie a constelaţiilor de semnale 2-D constituente a constelaţiei de semnale 2N-D.

4.4.1.1.1 Modelarea constelaţiei

În cazul metodei **modelarea constelaţiei (Trellis Shaping)** [43] toate punctele de semnal 2-D au aceeaşi probabilitate de utilizare indiferent de grupul din care fac parte dar constelația de semnale 2-D este formată din grupuri din mărimi diferite (cu un număr diferit de puncte de semnal). Astfel grupul intern (de E_{medie} mai mică) va avea cel mai mare număr de puncte de semnal 2-D iar grupurile externe (de E_{medie} mai mare) vor avea un număr din ce în ce mai mic de puncte de semnal 2-D. Se obține un cîștig de codare suplimentar numit **cîștig de modelare γ_s (Shaping Gain)**.

Pentru o constelație de semnale 2-D suficient de mare (cu un număr suficient de mare de puncte de semnal 2-D) folosind **aproximarea continuă** se obține numărul de puncte de semnal 2-D [39]:

$$N_{\text{puncte de semnal 2-D}} = \frac{S(C)}{S(\text{Voronoi})} \tag{4.64}$$

unde:
S(C)=aria regiunii din planul 2-D care este ocupată de constelația de semnale 2-D,
S(Voronoi)=aria **regiunii Voronoi** a unui punct de semnal 2-D din constelația de semnale 2-D care este setul de puncte din planul 2-D mai apropiate de respectivul punct de semnal 2-D decît față de alte puncte de semnal 2-D. Regiunea Voronoi este de fapt regiunea de decizie corectă a demodulatorului QAM de la recepție.

Energia medie a unei constelației de semnale 2-D este aproximativ egală cu [39]:

$$E_{medie} \cong \frac{1}{S(C)} \int_C \|\mathbf{x}\|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{S(C)} \iint_C (x^2 + y^2) dxdy \tag{4.65}$$

unde:
C=regiunea din planul 2-D care este ocupată de constelația de semnale 2-D,
S(C)=aria regiunii din planul 2-D care este ocupată de constelația de semnale 2-D.

Dintre toate regiunile din planul 2-D cu aceeași arie S(C), discul este regiunea care permite obținerea unei constelații de semnale 2-D cu energia medie minimă. Deci constelațiile de semnale 2-D de formă circulară sunt optimale din puncte de vedere al energiei medii.

Cîștigul de modelare a unei constelații de semnale 2-D de formă circulară față de o constelație de semnale 2-D de formă pătrată este de 0,2 dB [39], după cum se prezintă mai jos.

Dacă C este un cerc de rază R și cu centrul în origine, atunci un punct de semnal 2-D din constelația de semnale 2-D care ocupă regiunea C poate fi reprezentat în coordonate polare astfel:

$$\mathbf{x} = (\rho, \theta_1) \tag{4.66}$$

unde $\rho \in [0, R]$ și $\theta_1 \in [0, 2\pi)$.

Iacobianul pentru schimbarea de coordonate polare în planul 2-D este:

$$J = \rho \tag{4.67}$$

Se obține energia medie a constelației de semnale 2-D care ocupă regiunea circulară C [39]:

$$\begin{cases} \int\limits_C \|\mathbf{x}\|^2 d\mathbf{x} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 J\, d\rho\, d\theta_1 = \int\limits_0^R \rho^3 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 = \frac{\pi R^4}{2} \\ S(C)_{cerc} = \pi R^2 \\ (E_{medie})_{cerc} = \frac{R^2}{2} \end{cases} \tag{4.68}$$

Dacă C este un pătrat cu centrul în origine şi de latură L atunci se obține energia medie a constelației de semnale 2-D care ocupă regiunea pătrată C [39]:

$$\begin{cases} \int\limits_C \|x\|^2 dx = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{L^4}{6} \\ S(C)_{patrat} = L^2 \\ (E_{medie})_{patrat} = \frac{L^2}{6} \end{cases} \tag{4.69}$$

Deoarece cele două constelații de semnale 2-D provin din aceeaşi lattice, deci au aceeaşi arie a regiunii Voronoi, pentru ca cele două constelații de semnale 2-D să conțină acelaşi număr de puncte de semnal 2-D este necesar ca:

$$\begin{aligned} & S(C)_{cerc} = S(C)_{patrat} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \pi R^2 = L^2 \Leftrightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{\pi} \end{aligned} \qquad 4.70)$$

Se obține raportul între energia medie a constelației de semnale 2-D care ocupă o regiune circulară C şi energia medie a constelației de semnale 2-D care ocupă o regiune pătrată C [39]:

$$\frac{(E_{medie})_{cerc}}{(E_{medie})_{patrat}} = \frac{3R^2}{L^2} = \frac{3}{\pi} \cong 0{,}2 \text{ dB} \tag{4.71}$$

Energia medie a unei constelației de semnale 2N-D este aproximativ egală cu [39]:

$$E_{medie} = \frac{1}{NV(C)}\int_C \|x\|^2 dx = \\ = \frac{1}{NV(C)}\int\int\ldots\int_C (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2N}^2)dx_1 dx_2 \ldots dx_{2N} \tag{4.72}$$

unde:
C=regiunea din spațiul 2N-D care este ocupată de constelația de semnale 2N-D,
V(C)=volumul regiunii din spațiul 2N-D care este ocupată de constelația de semnale 2N-D.

Dintre toate regiunile din planul 2N-D cu aceeași volum V(C), hipersefera este regiunea care permite obținerea unei constelații de semnale 2N-D cu energia medie minimă. Deci constelațiile de semnale 2N-D de formă hipersferică sunt optimale din puncte de vedere al energiei medii.

Cîștigul de modelare a unei constelații de semnale 2N-D de formă hipersferică față de o constelație de semnale 2N-D de formă hipercubică este de 1,53 dB [39], după cum se prezintă mai jos.

Dacă C este o hipersferă de rază R și cu centrul în origine, atunci un punct de semnal 2N-D din constelația de semnale 2N-D care ocupă regiunea hipersferică C poate fi reprezentat în coordonate polare astfel:

$$\mathbf{x}=(\rho, \theta_1, \theta_2,\ldots,\theta_{2N-1}) \tag{4.73}$$

unde $\rho\in[0, R]$, $\theta_1\in[0, 2\pi)$ și $\theta_2, \theta_3,\ldots,\theta_{2N-1}\in[0, \pi)$.

Iacobianul pentru schimbarea de coordonate polare în spațiul 2N-D este:

$$J = \rho^{2N-1}\prod_{i=2}^{2N}\sin^{2N-i}\theta_{2N-i+1} = \rho^{2N-1}\theta(\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_{2N-1}) \tag{4.74}$$

Se obține energia medie a constelației de semnale 2N-D care ocupă regiunea hipersferică C [39]:

$$\begin{cases} \int\limits_C \|\mathbf{x}\|^2 d\mathbf{x} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi} \rho^2 J d\rho \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_{2N-1} = \\ = \int\limits_0^R \rho^{2N+1} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi} \boldsymbol{\theta}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{2N-1}) d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_{2N-1} \\ V(C)_{hipersfera} = \int\limits_C d\mathbf{x} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi} J d\rho \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_{2N-1} = \\ = \int\limits_0^R \rho^{2N-1} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi} \boldsymbol{\theta}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{2N-1}) d\theta_2 d\theta_3 \dots d\theta_{2N-1} \\ (E_{medie})_{hipersfera} = \frac{1}{N} \frac{\int\limits_0^R \rho^{2N+1} d\rho}{\int\limits_0^R \rho^{2N-1} d\rho} = \frac{R^2}{N+1} \end{cases} \tag{4.75}$$

Dacă C este un hipercub de latură L şi cu centrul în origine, atunci se obţine energia medie a constelaţiei de semnale 2N-D care ocupă regiunea hipercubică C [39]:

$$\begin{cases} \int\limits_C \|\mathbf{x}\|^2 d\mathbf{x} = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \dots \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2N}^2) dx_1 dx_2 \dots dx_{2N} = N \frac{L^{2N+2}}{6} \\ V(C)_{hipercub} = L^{2N} \\ (E_{medie})_{hipercub} = \frac{L^2}{6} \end{cases} \tag{4.76}$$

Deoarece cele două constelaţii de semnale 2N-D provin din aceeaşi lattice, deci au aceeaşi volum a regiunii Voronoi, pentru ca cele două constelaţii de semnale 2N-D să conţină acelaşi număr de puncte de semnal 2N-D este necesar ca:

$$V(C)_{\text{hipersfera}} = V(C)_{\text{hipercub}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi^N R^{2N}}{\Gamma(N+1)} = L^{2N} \Leftrightarrow \frac{R^{2N}}{L^{2N}} = \frac{\Gamma(N+1)}{\pi^N} \tag{4.77}$$

unde $\Gamma(N+1) \cong \left(\frac{N}{e}\right)^N$ este **aproximarea Stirling** a funcţiei gamma.

Se obţine maxim posibil raportul între energia medie a constelaţiei de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipersferică şi energia medie a constelaţiei de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipercubică [39]:

$$\frac{(E_{\text{medie}})_{\text{hipersfera}}}{(E_{\text{medie}})_{\text{hipercub}}} = \frac{N}{N+1}\frac{6}{\pi e} \tag{4.78}$$

Prin calculul limitei cînd $N \to +\infty$ se obţine limita asimptotică a cîştigului de modelare γ_s a unei constelaţii de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipersferică faţă de o constelaţie de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipercubică [39]:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{(E_{\text{medie}})_{\text{hipersfera}}}{(E_{\text{medie}})_{\text{hipercub}}} = \frac{6}{\pi e} \cong 1{,}53 \text{ dB} \tag{4.79}$$

Concluzia 4.2-Limita asimptotica a cîştigului de modelare γ_s a unei constelaţii de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipersferică faţă de o constelaţie de semnale 2N-D care ocupă o regiune hipercubică este 1,53 dB. Cu alte cuvinte valoarea maximă a cîştigului de modelare γ_s este 1,53 dB.

4.4.1.1.2 Corespondenţă în inele

În cazul metodei **corespondenţă în inele (Shell Mapping)** [44] constelaţia de semnale 2-D este formată din grupuri de mărimi egale (cu un număr egal de puncte de semnal 2-D) dar cu probabilităţi diferite de utilizare ale grupurilor. Toate punctele de semnal 2-D din interiorul unui grup au aceeaşi probabilitate de utilizare. Se obţine un cîştig de codare suplimentar numit **cîştig de ajustare γ_b (Biasing Gain)**.

Valoarea maximă a cîştigului de ajustare a unei constelaţii de semnale 2-D de formă circulară este de 1,33 dB [39], după cum se prezintă mai jos.

Se consideră o constelaţie de semnale 2-D de formă circulară, pe care o divizăm în K inele concentrice cu centrul în origine care conţin acelaşi număr de puncte de semnal 2-D.

Dacă r_0 este raza inelului 0 (definit ca inelul de rază minimă) atunci se poate arăta că raza inelului i este [39]:

$$r_i = r_0\sqrt{i+1},\ i=1,\ 2,\ldots,K-1 \tag{4.80}$$

Întrucît toate punctele de semnal 2-D din interiorul unui inel sunt utilizate echiprobabil , energia medie a inelului i este egală cu:

$$E_i = \frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta_1}{\pi(r_i^2 - r_{i-1}^2)} = \frac{(r_i^2 + r_{i-1}^2)}{2},\ i=1,\ 2,\ldots,K-1 \tag{4.81}$$

Dacă $E_0 = \frac{r_0^2}{2}$ este energia medie a inelului 0 rezultă că energia inelului i este egală cu:

$$E_i = (2i+1)E_0,\ i=1,\ 2,\ldots,K-1 \tag{4.82}$$

Dacă punctele de semnal 2-D sunt extrase dintr-o lattice $\boldsymbol{Z}^2$ indexată impar, atunci energia medie a inelului 0 devine:

$$E_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)n_0 \tag{4.83}$$

unde n_0 este numărul de puncte de semnal 2-D care se găsesc în inelul 0.

În timpul transmisiei, fiecare inel este extras cu probabilitatea p_i, deci energia medie a constelației de semnale 2-D este [39]:

$$E_{medie} = \sum_{i=0}^{K-1} E_i p_i = E_0 \sum_{i=0}^{K-1}(2i+1)p_i \tag{4.84}$$

Informația transmisă este împărțită în două părți:

- prima parte, asociată cu indexul punctului de semnal 2-D din interiorul inelului. Entropia sa este:

$$H_1 = \log_2 n_0 \tag{4.85}$$

întrucît toate punctele de semnal 2-D din interiorul unui inel sunt utilizate echiprobabil,

- a doua parte, asociată cu indexul inelului. Entropia sa este:

$$H_2 = -\sum_{i=0}^{K-1} p_i \log_2 p_i \tag{4.86}$$

Pentru a transmite aceeaşi informaţie cu o semnalizare echiprobabilă avem nevoie de o constelaţie de semnale 2-D cu energia medie:

$$(E_{medie})_{echiprobabil} = \left(\frac{2}{\pi}\right) 2^{(H_1+H_2)} = E_0 2^{H_2} = E_0 2^{-\sum_{i=0}^{K-1} p_i \log_2 p_i} \tag{4.87}$$

Se obţine cîştigul de ajustare [39]:

$$\gamma_b = \frac{(E_{medie})_{echiprobabil}}{E_{medie}} = \frac{2^{-\sum_{i=0}^{K-1} p_i \log_2 p_i}}{\sum_{i=0}^{K-1} (2i+1) p_i} \tag{4.88}$$

Ţinînd cont de condiţia $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$ şi maximizînd cîştigul de ajustare γ_b, se obţine o formă parametrică pentru probabilitatea de utilizare a inelului i [39]:

$$p_i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\lambda^i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots,K-1 \tag{4.89}$$

unde $0<\lambda<1$ este un parametru real.

Se observă că pentru un K mare aceste probabilităţi p_i prezintă o **distribuţie binomială** care este aproximarea discretă a **distribuţiei gaussiene**.

Pentru un K dat se obţine cîştigul de ajustare maxim posibil prin evaluare numerică [39]:

$$(\gamma_b)_{max} = \frac{2^{-\sum_{i=0}^{K-1}\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\lambda^i\right)\log_2\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\lambda^i\right)}}{\sum_{i=0}^{K-1}(2i+1)\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\lambda^i\right)} \tag{4.90}$$

Prin calculul limitei cînd ~~K~~+∞ se obține limita asimptotică a cîştigului de ajustare γ_b a unei constelații de semnale 2-D de formă circulară:

$$\lim_{K \to +\infty} (\gamma_b) = \frac{e}{2} \cong 1{,}33 \text{ dB} \tag{4.91}$$

Concluzia 4.3-Limita asimptotica a cîştigului de ajustare γ_b a unei constelații de semnale 2-D de formă circulară este 1,33 dB. Cu alte cuvinte valoarea maximă a cîştigului de ajustare γ_b este 1,33 dB.

4.4.1.2 Extinderea constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D

Pentru extinderea constelaței de semnale 2-D, constituentă a constelației de semnale 2N-D, am folosit metoda Dinh şi Hashimoto [38] pe care am prezentat-o şi am demonstrat-o în continuare.

Se construieşte o constelație de semnale 2-D. Această constelație de semnale 2-D este un subset finit al latticei $\mathbf{Z}^2$ sau al unei versiuni translatată, rotită şi/sau scalată a latticei $\mathbf{Z}^2$ [38].

Se presupune că avem o constelație de semnale 2-D cu $2^Q+\beta 2^Q=(1+\beta)2^Q$ puncte de semnal 2-D, unde Q este rata de transmisie a codorului TCM 2N-D iar β este un număr rațional ales astfel încît $\beta 2^Q$ să fie un număr întreg [38].

Constelația de semnale 2-D este formată din 2 grupuri:

- **grupul intern IG (Inner Group)** care conține 2^Q puncte de semnal 2-D, la fel ca şi constelația de semnale 2-D folosită într-o transmisie necodată pentru a transmite Q biți în fiecare interval de semnalizare 2-D,
- **grupul extern OG (Outer Group)** care conține $\beta 2^Q$ puncte de semnal 2-D.

Cele două grupuri IG şi OG trebuie să îndeplinească trei **cerințe** [16]:

1) fiecare grup să poată fi partiționat în subseturi 2-D, astfel încît pătratul distanței euclidiene minime de intrasubset la fiecare nivel de partiționare să fie cît mai mare posibil.
2) fiecare grup să conțină puncte de semnal 2-D situate cît mai aproape de originea axelor de coordonate ale planului complex, astfel încît energia medie (E_{medie}) a fiecărui grup să fie cît mai mică posibil. Din acest motiv se lucrează cu **constelații de semnale 2-D de formă circulară (circular-shaped signal sets)**. Aceste constelații de semnale 2-D de formă circulară permit creşterea cîştigului de codare asimptotic cu cîțiva dB pentru canale de comunicații neliniare [35]. Deci întotdeauna există un cerc cu centrul în originea axelor de coordonate ale planului complex care încadrează o constelație de semnale 2-D de formă circulară. Se presupune că IG este încadrat de cercul $C_0(O,R_0)$ şi OG este încadrat de cercurile $C_0(O, R_0)$ şi $C_2(O, R_2)$, unde $R_2>R_0$.
3) fiecare grup să fie invariant la o rotație de 0°, 90°, 180°, 270°. Astfel dacă un punct de semnal 2-D dintr-un anumit grup este rotit cu 0°, 90°, 180°, 270° trebuie să se obțină un alt punct de semnal 2-D din acelaşi grup. Această cerință permite demodulatorului să se caleze pe fază doar într-un interval de 90° ceea ce implică timpi de sincronizare mai mici [35]. De asemenea achiziția de semnal poate fi făcută

fără o perioadă de antrenare (sau secvențe de antrenare).

Construcția unei constelații de semnale 2N-D rectangulare (subset finit al latticei $\mathbf{Z}^{2N}$) se face prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D constituente şi eliminînd acele puncte de semnal 2N-D rezultante care conțin mai mult decît un punct de semnal 2-D din OG [16].

Construcția unei constelații de semnale 2N-D nerectangulare (subset finit al lattticei $\mathbf{D}^{2N}$, $\mathbf{E}^{2N}$, $\mathbf{DE}^{2N}$) se face prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D constituente şi eliminînd acele puncte de semnal 2N-D rezultante care conțin mai mult decît un punct de semnal 2-D din OG sau care nu sunt puncte valide ale latticii nerectangulare [16].

În continuare am prezentat construcția unei constelații de semnale 2N-D rectangulare [38]. Se construiesc puncte de semnal 2N-D prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D şi se ține cont de următoarele observații [38]:

- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N puncte de semnal 2-D din IG este 2^{NQ}
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG în una din primele N poziții este $\beta N2^{NQ}$.

Deoarece în total sunt necesare $2^{NQ+1}=2^{NQ}+2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D, se presupune că numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG este mai mare decît 2^{NQ} care este numărul necesar de puncte de semnal 2-D[38]:

$$\beta N2^{NQ}\geq 2^{NQ}\Leftrightarrow\beta\geq\frac{1}{N} \tag{4.92}$$

Se presupune că fiecare punct de semnal 2-D al constelației de semnale 2-D, prezintă o **regiune Voronoi** de arie unitară [38]:

$$S(\text{Voronoi})=1 \tag{4.93}$$

Se presupune că în constelația de semnale 2-D există un număr suficient de mare de puncte de semnal 2-D astfel încît E_{medie} a constelației de semnale 2-D să poate fi aproximată cu integrala pe suprafața cercului $C_2(O, R_2)$ care o încadrează [38].

<u>4.4.1.2.1 Extinderea simplă a constelației de semnale 2-D</u>

Am urmărit demonstrarea formulelor pentru numărul de puncte de semnal 2-D, energia medie şi parametrii CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă simplu.

Se construiesc puncte de semnal 2N-D prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D şi se ține cont de următoarele observații [38]:

- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N puncte de semnal 2-D din IG este 2^{NQ}
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG în una din primele $\frac{1}{\beta}$ poziții este

$\frac{1}{\beta}\beta 2^{NQ}=2^{NQ}$.

Rezultă în total $2^{NQ+1}=2^{NQ}+2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D.

Lema 4.2-O constelaţie de semnale 2-D, încadrată de un cerc C(O, ρ) de rază ρ şi cu centrul în origine, conţine $\pi\rho^2$ puncte de semnal 2-D şi are energia medie $E_{medie}=\frac{\rho^2}{2}$ [38].

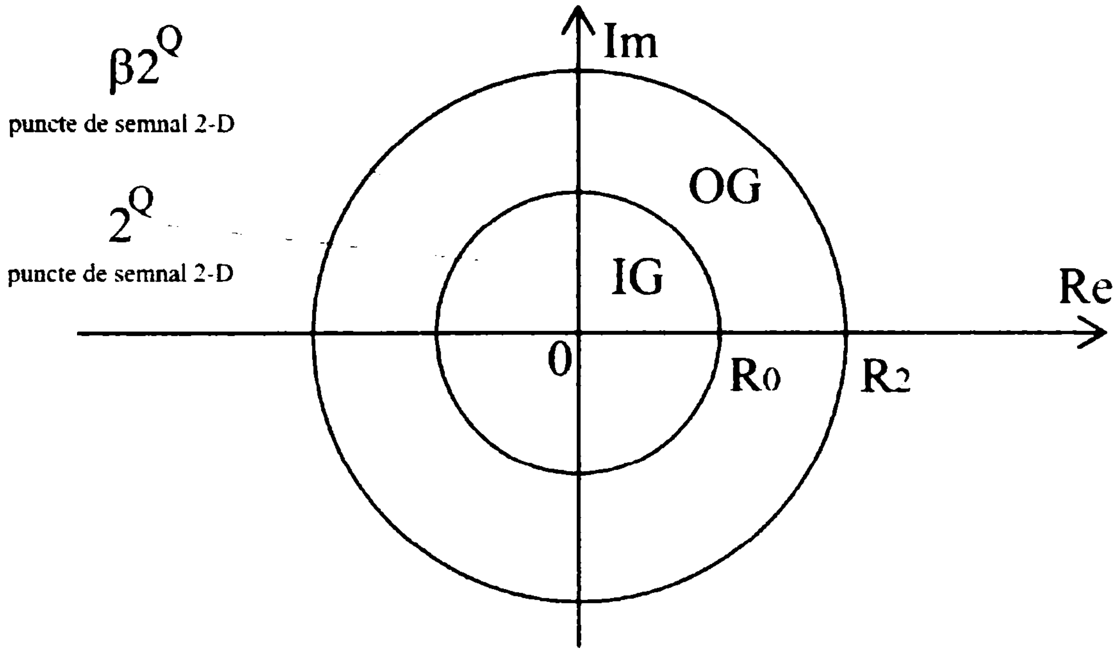


Fig.4.9 Constelaţia de semnale 2-D obţinută prin extindere simplă.

Lema 4.3-O constelaţie de semnale 2-D, încadrată de două cercuri $C_1(O, \rho_1)$ şi $C_2(O, \rho_2)$ de raze $\rho_1<\rho_2$ şi cu centrul în origine, conţine $\pi(\rho_2^2-\rho_1^2)$ puncte de semnal 2-D şi are energia medie $E_{medie}=\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2}$ [38].

Ţinînd cont de lema 4.2 şi lema 4.3 se obţin formulele pentru numărul de puncte de semnal 2-D şi energia medie a celor două grupuri IG şi OG pentru extinderea simplă [38]:

$$(N_{\text{puncte de semnal 2-D}})_{IG}=2^Q=\pi R_0^2 \tag{4.94}$$

$$(E_{medie})_{IG}=E_{IG}=\frac{R_0^2}{2} \tag{4.95}$$

$$(N_{\text{puncte de semnal 2-D}})_{OG}=\beta 2^Q=\pi(R_2^2-R_0^2) \tag{4.96}$$

$$(E_{medie})_{OG} = E_{OG} = \frac{R_0^2 + R_2^2}{2} \qquad (4.97)$$

Numărul de puncte de semnal 2-D a constelației de semnale 2-D extinsă simplu este egal cu [16, 42, 38]:

$$N_{\text{puncte de semnal 2-D}} = 2^Q + \beta 2^Q = (1+\beta)2^Q = \pi R_2^2 \qquad (4.98)$$

În construcția punctelor de semnal 2N-D, un punct de semnal 2-D din IG este utilizat de 2N-1 ori mai des decît un punct de semnal 2-D din OG. Dacă p_{IG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din IG și p_{OG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din OG atunci se obține [16]:

$$\begin{cases} \dfrac{p_{IG}}{p_{OG}} = 2N-1 \\ p_{IG} + p_{OG} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{IG} = \dfrac{2N-1}{2N} \\ p_{OG} = \dfrac{1}{2N} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Energia medie a constelației de semnale 2-D extinsă simplu este egală cu [16, 42, 38]:

$$E_{medie} = p_{IG}E_{IG} + p_{OG}E_{OG} = \frac{2N-1}{2N}E_{IG} + \frac{1}{2N}E_{OG} \qquad (4.3)$$

Parametrii CER și PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă simplu sunt [38]:

$$\begin{cases} CER = \dfrac{E_{medie}}{E_{IG}} = \dfrac{2N-1}{2N} + \dfrac{1}{2N}\dfrac{E_{OG}}{E_{IG}} = \dfrac{1}{2N}(2N+1+\beta) \\ PAR = \dfrac{E_{maxim\tilde{a}}}{E_{medie}} = \dfrac{1}{CER}\dfrac{E_{maxim\tilde{a}}}{E_{IG}} = \dfrac{1}{CER}\dfrac{R_2^2}{\frac{R_0^2}{2}} = \dfrac{2}{CER}(1+\beta) \end{cases} \qquad (4.99)$$

Concluzia 4.4-În cazul construcției Wei, cînd N este o putere a lui 2, parametrii β, CER și PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă simplu sunt [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N} \\ CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) \\ PAR_0 = \dfrac{2}{CER_0}(1 + \dfrac{1}{N}) \end{cases} \qquad (4.100)$$

Concluzia 4.5-În cazul construcției Sterian, cînd N nu este o putere a lui 2, parametrii β, CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă simplu sunt [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N'} \\ CER_1 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N'}) \\ PAR_1 = \dfrac{2}{CER_1}(1 + \dfrac{1}{N'}) \end{cases} \qquad (4.101)$$

unde N'=cea mai mare putere a lui 2 mai mică decît N.

<u>4.4.1.2.2 Extinderea optimală a constelației de semnale 2-D</u>

Am urmărit demonstrarea formulelor pentru numărul de puncte de semnal 2-D, energia medie şi pentru parametrii CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă optimal.

Grupul extern OG se divide în două subgrupuri cu ajutorul unui cerc $C_1(O, R_1)$ de rază R_1 şi cu centrul în origine, unde $R_0<R_1<R_2$ [38]:

- o **subgrupul extern de energie medie mică (OG_L)** care conține $\beta(1-\alpha)2^Q$ puncte de semnal 2-D, unde α este un număr rațional ales astfel încît $0\leq\alpha<1$,
- o **subgrupul extern de energie medie mare (OG_H)** care conține $\beta\alpha2^Q$ puncte de semnal 2-D.

Se construiesc puncte de semnal 2N-D prin concatenarea a N puncte de semnal 2-D şi se ține cont de următoarele observații [38]:

- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N puncte de semnal 2-D din IG este 2^{NQ},
- numărul punctelor de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG_L în una din primele N poziții este $N\beta(1-\alpha)2^{NQ}$.

Întrucît în total sunt necesare $2^{NQ+1}=2^{NQ}+2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D, rezultă că mai trebuiesc construite încă $2^{NQ+1}-2^{NQ}-N\beta(1-\alpha)2^{NQ}=\beta\alpha(N-P)2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D, unde se notează [38]:

$$P=\frac{\beta N-1}{\beta\alpha},\ 0\leq P\leq N \Leftrightarrow 0\leq N-P\leq N \tag{4.102}$$

Dacă P este un număr întreg, se vor considera punctele de semnal 2N-D care conțin N-1 puncte de semnal 2-D din IG şi un punct de semnal 2-D din OG_H în una din primele N-P poziții adică $\beta\alpha(N-P)2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D.

Rezultă în total $2^{NQ+1}=2^{NQ}+N\beta(1-\alpha)2^{NQ}+\beta\alpha(N-P)2^{NQ}$ puncte de semnal 2N-D.

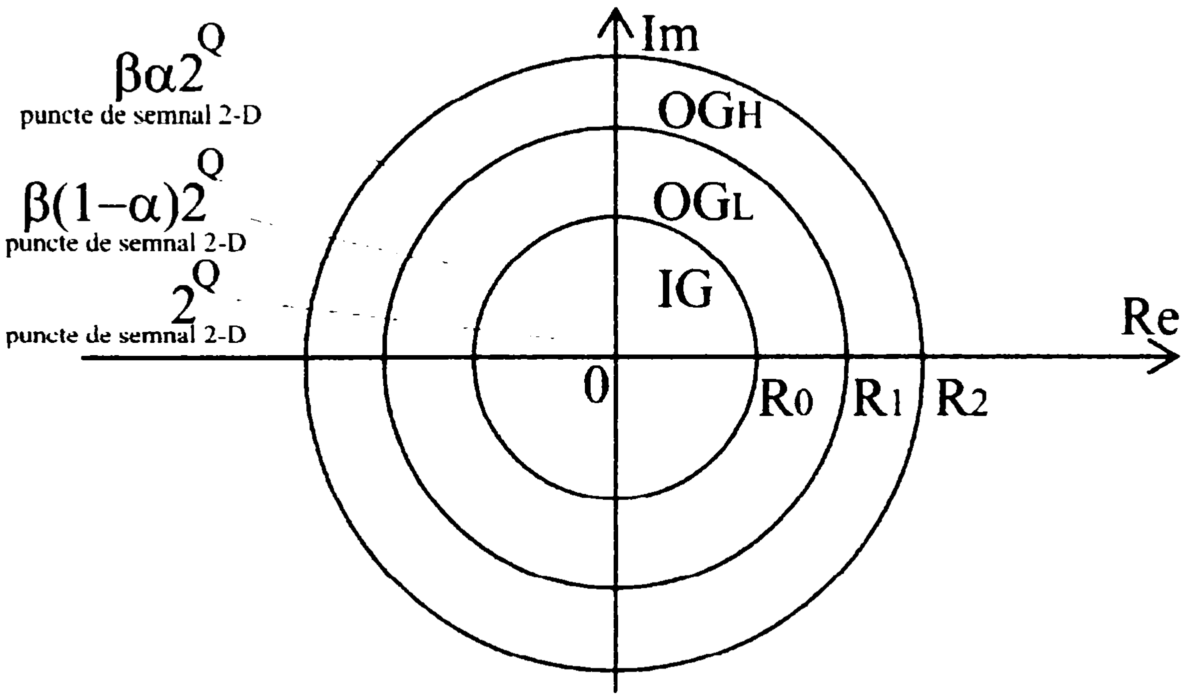


Fig.4.10 Constelația de semnale 2-D obținută prin extindere optimală.

Ținînd cont de relația (4.102) rezultă că:

$$\frac{1}{N}\leq\beta\leq\frac{1}{(1-\alpha)N} \tag{4.103}$$

Dacă p_{IG} este probabilitatea de utilizare a unui punct de semnal 2-D din IG şi p_{OG_L}, respectiv p_{OG_H} sunt probabilităţile de utilizare a unui punct de semnal 2-D din OG_L, respectiv OG_H atunci am obţinut relaţiile:

$$\begin{cases} \dfrac{p_{IG}}{p_{OG_L}+p_{OG_H}} = 2N-1 \\ p_{IG}+p_{OG_L}+p_{OG_H} = 1 \\ \dfrac{p_{OG_L}}{p_{OG_H}} = \dfrac{\beta(1-\alpha)N}{\beta\alpha(N-P)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{IG} = \dfrac{2N-1}{2N} \\ p_{OG_L}+p_{OG_H} = \dfrac{1}{2N} \\ \dfrac{p_{OG_L}}{p_{OG_H}} = \dfrac{\beta(1-\alpha)N}{\beta\alpha(N-P)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{IG} = \dfrac{2N-1}{2N} \\ p_{OG_L} = \dfrac{(1-\alpha)}{2(N-\alpha P)} \\ p_{OG_H} = \dfrac{\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} \end{cases} \tag{4.104}$$

Energia medie a constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal este egală cu:

$$\begin{aligned} E_{medie} &= p_{IG}E_{IG} + p_{OG_L}E_{OG_L} + p_{OG_H}E_{OG_H} = \\ &= \frac{2N-1}{2N}E_{IG} + \frac{(1-\alpha)}{2(N-\alpha P)}E_{OG_L} + \frac{\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)}E_{OG_H} \end{aligned} \tag{4.105}$$

Parametrii CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal sunt:

$$\begin{cases} CER = \dfrac{E_{medie}}{E_{IG}} = \dfrac{2N-1}{2N} + \dfrac{(1-\alpha)}{2(N-\alpha P)}\dfrac{E_{OG_L}}{E_{IG}} + \dfrac{\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)}\dfrac{E_{OG_H}}{E_{IG}} \\ PAR = \dfrac{E_{maxim\breve{a}}}{E_{medie}} = \dfrac{1}{CER}\dfrac{E_{maxim\breve{a}}}{E_{IG}} = \dfrac{1}{CER}\dfrac{E_{maxim\breve{a}}}{E_{IG}} = \dfrac{1}{CER}\dfrac{R_2^2}{\frac{R_0^2}{2}} = \dfrac{2}{CER}(1+\beta) \end{cases} \tag{4.106}$$

Ţinînd cont de lema 4.2 şi lema 4.3 am obţinut obţinut formulele pentru numărul de puncte de semnal 2-D şi energia medie a celor trei grupuri IG, OG_L şi OG_H pentru extinderea optimală:

$$(N_{\text{puncte de semnal 2-D}})_{IG} = 2^Q = \pi R_0^2 \tag{4.107}$$

$$(E_{medie})_{IG} = E_{IG} = \frac{R_0^2}{2} \tag{4.108}$$

$$(N_{\text{puncte de semnal 2-D}})_{OG_L} = \beta(1-\alpha)2^Q = \pi(R_1^2 - R_0^2) \tag{4.109}$$

$$(E_{medie})_{OG_L} = E_{OG_L} = \frac{R_0^2 + R_1^2}{2} \tag{4.110}$$

$$(N_{\text{puncte de semnal 2-D}})_{OG_H} = \beta\alpha 2^Q = \pi(R_2^2 - R_1^2) \tag{4.111}$$

$$(E_{medie})_{OG_H} = E_{OG_H} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \tag{4.112}$$

Numărul de puncte de semnal 2-D a constelației de semnale 2-D extinsă optimal este egal cu:

$$N_{\text{puncte de semnal 2-D}} = 2^Q + \beta(1-\alpha)2^Q + \beta\alpha 2^Q = (1+\beta)2^Q = \pi R_2^2 \tag{4.113}$$

Rezultă raportul dintre energia medie a subgrupului extern de energie mică OG_L și energia medie a grupului intern IG și raportul dintre energia medie a subgrupului extern de energie mare OG_H și energia medie a grupului intern IG:

$$\begin{cases} \dfrac{E_{OG_L}}{E_{IG}} = 1 + \dfrac{R_1^2}{R_0^2} = 1 + \beta \\ \dfrac{E_{OG_H}}{E_{IG}} = \dfrac{R_1^2}{R_0^2} + \dfrac{R_2^2}{R_0^2} = 1 + \beta(1-\alpha) \end{cases} \tag{4.114}$$

Ținînd cont de relațiile (4.100), (4.106) și (4.114) am demonstrat formula pentru parametrul CER al constelației de semnale 2-D extinsă optimal:

$$\begin{aligned} CER &= \frac{2N-1}{2N} + \frac{(1-\alpha)}{2(N-\alpha P)}[2+\beta(1-\alpha)] + \frac{\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)}[2+\beta(1-\alpha)+\beta] = \\ &= \frac{2N-1}{2N} + \frac{[2+\beta(1-\alpha)]}{2(N-\alpha P)}[(1-\alpha) + \frac{\alpha(N-P)}{N}] + \frac{\beta\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} = \\ &= \frac{2N-1}{2N} + \frac{[2+\beta(1-\alpha)]}{2N} + \frac{\beta\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} = \frac{2N+1+\beta(1-\alpha)}{2N} + \frac{\beta\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} = \\ &= \frac{2N+1+\frac{1}{N}}{2N} + \frac{\beta(1-\alpha)-\frac{1}{N}}{2N} + \frac{\beta\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} = CER_0 + \frac{\beta(1-\alpha)-\frac{1}{N}}{2N} + \frac{\beta\alpha(N-P)}{2N(N-\alpha P)} = \\ &= CER_0 + \frac{(1-\alpha)}{2N}[\beta - \frac{1}{N(1-\alpha)}] + \frac{\beta\alpha}{2N}\,\frac{N - \frac{\beta N-1}{\beta\alpha}}{N - \frac{\beta N-1}{\beta}} = \end{aligned}$$

$$= CER_0 + \frac{(1-\alpha)}{2N}[\beta - \frac{1}{N(1-\alpha)}] + \frac{\beta(1-\alpha)}{2}[\frac{1}{N(1-\alpha)} - \beta]$$

$$CER = CER_0 + \frac{(1-\alpha)}{2}[\frac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \frac{1}{N}] \tag{4.115}$$

Concluzia 4.6-Parametrii CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal sunt [38]:

$$\begin{cases} CER = \frac{E_{medie}}{E_{IG}} = CER_0 + \frac{(1-\alpha)}{2}[\frac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \frac{1}{N}] \\ PAR = \frac{E_{maxim\check{a}}}{E_{medie}} = \frac{2(1+\beta)}{CER_0 + \frac{(1-\alpha)}{2}[\frac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \frac{1}{N}]} \end{cases} \tag{4.116}$$

Concluzia 4.7-Deoarece $0 \le \alpha < 1$ şi $\frac{1}{N} \le \beta \le \frac{1}{(1-\alpha)N}$, cu cît α este mai apropiat de 0, cu atît β este mai apropiat de $\frac{1}{N}$ şi parametrii CER şi PAR sunt mai mici [38].

Concluzia 4.8-Dacă Q este rata de transmisie a codorului TCM 2N-D iar α şi β sunt două numere raţionale alese astfel încît $\beta 2^Q$ să fie un număr întreg, $0 \le \alpha < 1$ şi $\frac{1}{N} \le \beta \le \frac{1}{(1-\alpha)N}$, atunci parametrul CER al constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal şi constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D are limitele [38]:

$$CER_0 \le CER \le CER_0 + \frac{\alpha^2}{8(1-\alpha)N^2} \tag{4.117}$$

Se caută condiţiile pentru parametrii β, α şi P astfel încît parametrii CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal să aibe valori optimale (minime). Se notează [38]:

$$\begin{cases} I = \beta 2^Q \\ J = \beta\alpha 2^Q \\ K = JP = (\beta N - 1)2^Q \end{cases} \tag{4.118}$$

unde:
Q este rata de transmsie a codorului TCM 2N-D,
β este un număr raţional ales astfel încît $\beta 2^Q$ să fie un număr întreg,
α este un număr raţional ales astfel încît $0 \le \alpha < 1$.

Din relațiile (4.118) rezultă că:

$$\begin{cases} I = I(K) = \dfrac{2^Q + K}{N} \\ P = \dfrac{K}{J} \end{cases} \qquad (4.119)$$

Fie K_0 cel mai mic număr întreg pozitiv astfel încît $I(K_0)$ să fie un număr întreg. Un astfel de număr întreg K_0 există întotdeauna şi în plus dacă se dă K_0 atunci pentru orice număr întreg $K=K_0+RN$, unde R este un număr întreg arbitrar şi 2N dimensiunea constelației de semnale multidimensională, rezultă că I(K) este număr întreg.

Fie J_0 cel mai mic număr întreg pozitiv astfel încît $P = \dfrac{K_0}{J_0}$ să fie un număr întreg. Un astfel de număr întreg J_0 există întotdeauna şi este egal cu 1.

Lema 4.4-Pentru o dimensiune 2N a codului TCM multidimensional şi o rată de transmisie Q a codorului TCM multidimensional, parametrii CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă optimal au valori optimale (minime) dacă [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{I(K_0)}{2^Q} \\ \alpha = \dfrac{1}{I(K_0)} \\ P = K_0 \end{cases} \qquad (4.120)$$

Constelația de semnale 2-D, formată din cele trei grupuri IG, OG_L şi OG_H, va conține:

- ❖ 2^Q puncte de semnal 2-D în grupul IG
- ❖ $I(K_0)-1$ puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L
- ❖ 1 punct de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Fiecare grup (subgrup) va fi invariat rotațional (la o rotație de 0°, 90°, 180°, 270°) dacă I şi J sunt multipli de 4.

Fie K_0' cel mai mic număr întreg pozitiv astfel încît $\dfrac{I(4K_0')}{4}$ să fie un număr întreg.

Lema 4.5-Pentru o dimensiune 2N a codului TCM multidimensional şi o rată de transmisie Q a codorului TCM multidimensional, parametrii CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D invariantă rotaţional şi extinsă optimal au valori optimale (minime) dacă [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{I(4K_0')}{2^Q} \\ \alpha = \dfrac{4}{I(4K_0')} \\ P = K_0' \end{cases} \tag{4.121}$$

Constelaţia de semnale 2-D, formată din cele trei grupuri IG, OG_L şi OG_H, va conţine:

- ❖ 2^Q puncte de semnal 2-D în grupul IG
- ❖ $I(4K_0')$-4 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L
- ❖ 4 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Concluzia 4.9-În cazul construcţiei Wei, cînd N este o putere a lui 2, parametrii β, α, CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal sunt [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N} \\ \alpha = 0 \\ CER_{WEI} = CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) \\ PAR_{WEI} = PAR_0 = \dfrac{2}{CER_0}(1 + \dfrac{1}{N}) \end{cases} \tag{4.122}$$

Concluzia 4.10-În cazul construcţiei Sterian , cînd N nu este o putere a lui 2, parametrii β, α, CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D extinsă optimal sunt [38]:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N'} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ CER_{STERIAN} = CER_0 + \dfrac{1}{4}(\dfrac{2}{N} - \dfrac{1}{N'})(\dfrac{1}{N'} - \dfrac{1}{N}) \\ PAR_{STERIAN} = \dfrac{2(1+\dfrac{1}{N'})}{CER_0 + \dfrac{1}{4}(\dfrac{2}{N} - \dfrac{1}{N'})(\dfrac{1}{N'} - \dfrac{1}{N})} \end{cases} \tag{4.123}$$

unde N'=cea mai mare putere a lui 2 mai mică decît N.

Concluzia 4.11-În cazul construcției Wei generalizate pe care am propus-o, parametrii β, α, CER și PAR ai constelației de semnale 2-D extinsă optimal sunt [56]:

a) cînd N este o putere a lui 2:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N} \\ \alpha = 0 \\ CER = CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) \\ PAR = PAR_0 = \dfrac{2}{CER_0}(1 + \dfrac{1}{N}) \end{cases} \tag{4.124}$$

b) cînd N nu este o putere a lui 2:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{I(4K_0')}{2^Q} \\ \alpha = \dfrac{4}{I(4K_0')} \\ CER = CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}] \\ PAR = \dfrac{2(1+\beta)}{CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}]} \end{cases} \tag{4.125}$$

unde K_0' este cel mai mic număr întreg pozitiv astfel încît $\dfrac{I(4K_0')}{4} = \dfrac{2^Q + 4K_0'}{4N}$ să fie un număr întreg.

4.4.2 Partiţionarea constelaţiei de semnale 2N-D în subseturi 2N-D

Partiţionarea constelaţiei de semnale 2N-D în subseturi 2N-D este a doua etapă în construcţia Wei generalizată a codurilor TCM multidimensionale şi are ca scop obţinerea unor subseturi 2N-D şi a unor familii 2N-D care vor fi asignate în etapa a treia la tranziţiile de stare ale codului TCM multidimensional.

Am presupus o constelaţie de semnale 2N-D cu $MSED = d_0^2$ şi am dorit partiţionarea acesteia în subseturi cu $MSED = d^2 > d_0^2$.

Partiţionarea constelaţiei de semnale 2N-D în subseturi 2N-D am realizat-o diferit pentru cazul în care N este par, respectiv impar.

Dacă **N este par** atunci:

1. Am partiţionat fiecare din cele 2 constelaţii de semnale N-D constituente cu $MSED = d_0^2$ în **familii N-D**, **subfamilii N-D** şi **subseturi N-D** cu MSED din ce în ce mai mare.

Fiecare nivel de partiţionare a constelaţiei de semnale N-D dublează MSED (**partiţionare binară**). Am continuat cu partiţionarea pînă cînd am obţinut subseturi N-D cu $MSED = d^2 > d_0^2$.

După primul nivel de partiţionare a constelaţiei de semnale N-D am obţinut **familii N-D** iar după următoarele nivele de partiţionare (cu excepţia ultimului) am obţinut **subfamilii N-D**. După ultimul nivel de partiţionare am obţinut **subseturi N-D**.

Cu cît este mai fină partiţionarea constelaţiei de semnale N-D cu atît rezultă mai multe subseturi N-D şi cu MSED mai mare.

2. Am construit **tipuri 2N-D** cu $MSED = d^2 > d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi N-D.

3. Am construit **subseturi 2N-D** cu $MSED = d^2 > d_0^2$ prin gruparea a cîte $S=2^s$ tipuri 2N-D, unde S este numărul subseturilor N-D conţinute într-o subfamilie N-D.

Gruparea tipurilor 2N-D în subseturi 2N-D trebuie făcută astfel încît să fie îndeplinite două cerinţe [16]:

- construcţia codului TCM 2N-D să fie cît mai simplă posibil (să se obţină un număr cît mai mic de posibil de subseturi 2N-D adică selecţia unui subset 2N-D să se facă cu un număr cît mai mic posibil de biţi codaţi de codorul convoluţional),
- fiecare subset 2N-D să fie invariant rotaţional la cît mai multe rotaţii posibile (ambiguităţi de fază ale constelaţiei de semnale 2N-D). Dacă nu este posibil ca fiecare subset 2N-D să fie invariant la toate rotaţiile, atunci ar trebui cel puţin ca orice rotaţie să transforme un subset 2N-D în alt subset 2N-D.

4. Am grupat subseturile 2N-D în **subfamilii 2N-D** şi **familii 2N-D** cu MSED din ce în ce mai mică.

Fiecare nivel de grupare a subseturilor 2N-D înjumătăţeşte MSED. Am continuat cu gruparea pînă cînd am obţinut două familii 2N-D cu $MSED = 2d_0^2$ şi notate F_0 şi F_1.

Dacă **N este impar** atunci:

1. Am partiţionat fiecare din cele N constelaţii de semnale 2-D constituente cu $MSED = d_0^2$ în **familii 2-D**, **subfamilii 2-D** şi **subseturi 2-D** cu MSED din ce în ce mai mare.

Fiecare nivel de partiţionare a constelaţiei de semnale 2-D dublează MSED (**partiţionare binară**). Am continuat cu partiţionarea pînă cînd am obţinut subseturi 2-D cu $MSED = d^2 > d_0^2$.

După primul nivel de partiţionare a constelaţiei de semnale 2-D am obţinut **familii 2-D** iar după următoarele nivele de partiţionare cu excepţia ultimului am obţinut **subfamilii 2-D**. După ultimul nivel de partiţionare am obţinut **subseturi 2-D**.

Cu cît este mai fină partiţionarea constelaţiei de semnale 2-D cu atît rezultă mai multe subseturi 2-D şi cu MSED mai mare.

2. Am construit **tipuri 2N-D** cu $MSED = d^2 > d_0^2$ prin concatenarea a cîte N subseturi 2-D.

3. Am construit **subseturi 2N-D** cu $MSED = d^2 > d_0^2$ prin gruparea a cîte $S=2^s=2^{Nu-m-1}$ tipuri 2N-D, unde $U=2^u$ este numărul de subseturi 2-D ale constelaţiei de semnale 2-D constituentă.

Gruparea tipurilor 2N-D în subseturi 2N-D trebuie făcută astfel încît să fie îndeplinite cele două cerinţe de mai sus [16]:

- construcţia codului TCM 2N-D să fie cît mai simplă posibil,
- fiecare subset 2N-D să fie invariant rotaţional la cît mai multe rotaţii posibile.

4. Am grupat subseturile 2N-D în **subfamilii 2N-D** şi **familii 2N-D** cu MSED din ce în ce mai mică.

Fiecare nivel de grupare a subseturilor 2N-D înjumătăţeşte MSED. Am continuat cu gruparea pînă cînd am obţinut două familii 2N-D cu $MSED = 2d_0^2$ şi notate F_0 şi F_1.

4.4.3 Asignarea subseturilor 2N-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 2N-D

Asignarea subseturilor 2N-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 2N-D se face astfel încît să fie îndeplinite trei cerinţe [16]:

1. Subseturile 2N-D, asociate cu tranziţiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele şi să aparţină aceleaşi familii 2N-D.

Acelaşi considerent se aplică şi pentru subseturile 2N-D asociate cu tranziţiile care ajung într-o anumită stare.

2. MSED dintre două secvenţe de subseturi 2N-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2$, care este MSED a fiecărui subset 2N-D (MSED de intersubset 2N-D să fie mai mare sau cel puţin egală cu MSED de intrasubset 2N-D).

Această cerinţă garantează că MSED dintre două secvenţe de puncte de semnal 2N-D este d^2 şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 2N-D faţă de secvenţa corectă de puncte de semnal 2N-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 2N-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiaţi ai unui punct de semnal 2N-D şi aflaţi într-un subset 2N-D cu un număr finit de puncte de semnal 2N-D.

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 2N-D este mai mic decît cel din definiţia anterioară.

3. Dacă X este subsetul 2N-D asociat cu tranziţiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+N} şi dacă X_1, X_2 ,X_3 sunt subseturile 2N-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270° atunci se pot defini trei funcţii F_1, F_2, F_3 de corespondenţă între stările codului TCM 2N-D astfel încît [16]:

⇒ X_1 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+N})$,

⇒ X_2 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_2(\sigma_n)$ în starea următoare $F_2(\sigma_{n+N})$,

⇒ X_3 să fie asociat cu tranziţiile din starea curentă $F_3(\sigma_n)$ în starea următoare $F_3(\sigma_{n+N})$.

Acestă cerinţă garantează că vom obţine un cod TCM 2N-D transparent la toate ambiguităţile de fază ale constelaţiei de semnale 2N-D, cu alte cuvinte un cod TCM 2N-D invariant rotaţional la 0°, 90°, 180°, 270°.

4.4.4 Realizarea corespondenţei dintre cei NQ+1 biţi şi constelaţia de semnale 2N-D

Corespondenţa complicată dintre cei NQ+1 biţi (primii m+1 biţi codaţi cu un codor convoluţional şi ceilalţi NQ-m biţi necodaţi) şi constelaţia de semnale 2N-D am convertit-o în N corespondenţe simple ale constelaţiilor de semnale 2-D constituente cu ajutorul unui **convertor de bit** şi a unui **codor bloc**.

Convertorul de bit şi codorul bloc transformă cei NQ+1 biţi în N grupuri de cîte Q+1 biţi fiecare, adică în NQ+N biţi.

Fiecare grup de Q+1 biţi adresează un **bloc de corespondenţă 2-D** şi selectează un punct de semnal 2-D.

Astfel sunt selectate N puncte de semnale 2-D şi prin concatenarea lor se obţine un punct de semnal 2N-D corespunzător celor NQ+1 biţi.

4.5 Generalizarea construcţiei Wei a codorului TCM 2N-D

Schema bloc codorului TCM 2N-D (construcţia propusă) am prezentat-o în Fig.4.11 [57, 59].

Am utilizat o constelaţie de semnale 2N-D cu 2^{NQ+1} puncte de semnal 2N-D. Construcţia constelaţiei de semnale 2N-D şi partiţionarea ei în subseturi 2N-D le-am realizat ca şi în paragrafele anterioare 4.4.1 şi 4.4.2.

Primii m biţi de la intrare sunt codaţi cu un **codor convoluţional** cu rata de codare $\frac{m}{m+1}$ şi cu $V=2^v$ stări.

Am notat starea curentă şi starea următoare a codorului convoluţional astfel:

$$W_{1,p}, W_{2,p}, \ldots, W_{v,p} \tag{4.126}$$

unde:
p=n este starea curentă a codorului convoluţional,
p=n+N este starea următoare a codorului convoluţional.

Valoarea zecimală a stării ($W_{1,p}$, $W_{2,p}$,..., $W_{v,p}$) a codorului convoluţional este egală cu:

$$\sigma_p = 2^{v-1} W_{1,p} + \ldots + 2^1 W_{v-1,p} + W_{v,p} \tag{4.127}$$

unde:
p=n este starea curentă codorului convoluţional,
p=n+N este starea următoare codorului convoluţional.

Am presupus că numărul de subseturi 2N-D dintr-o familie 2N-D este egal cu F, unde este necesar ca $F \leq V$.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluţional le-am partiţionat în F subseturi:

$$\{Fi + j | 0 \leq i \leq F-1, 0 \leq j \leq F-1\} \tag{4.128}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+N}\}$ a codorului convoluţional le-am partiţionat în F subseturi:

$$\{Fj + k | 0 \leq j \leq F-1, 0 \leq k \leq F-1\} \tag{4.129}$$

Conectivitatea diagramei trellis a codorului TCM 2N-D am realizat-o astfel: pentru orice $0 \leq j \leq F-1$ există tranziţii de stare între fiecare stare curentă Fi+j, $0 \leq i \leq F-1$ şi fiecare stare următoare Fj+k, $0 \leq k \leq F-1$.

Am determinat rotaţia subseturilor 2N-D la rotaţii sucesive cu 90° a subseturilor 2-D şi rotaţia stărilor codorului convoluţional la rotaţii sucesive cu 90° a subseturilor 2N-D. Din rotaţia stărilor codorului convoluţional am dedus cele trei funcţii de corespondenţă F_1, F_2 şi F_3.

Asignarea subseturilor 2N-D la tranziţiile de stare ale codului TCM 2N-D am realizat-o ca şi în paragraful 4.4.3. Astfel:

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{v,n}=0$) sunt asignate subseturi 2N-D din familia 2N-D notată F_0,

⇒ la tranziţiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{v,n}=1$) sunt asignate subseturi 2N-D din familia 2N-D notată F_1.

Am folosit un **codor convoluţional cu reacţie cu conexiune înapoi (systematic feedback convolutional encoder)**. Biţii de intrare $I_{1,n}$, $I_{2,n}$,...,$I_{m,n}$ sunt conectaţi direct la ieşire. Bitul $Y_{0,n}$ este codat convoluţional şi depinde de biţii de intrare $I_{1,n}$, $I_{2,n}$,...,$I_{m,n}$ şi de biţii de stare curentă $W_{1,n}$, $W_{2,n}$,..., $W_{v,n}$.

Din diagrama trellis a codorului TCM 2N-D am dedus relaţiile pentru biţii de stare următoare $W_{1,n+N}$, $W_{2,n+N}, \ldots, W_{v-1,n+N}$, $W_{v,n+N}$ în funcţie de biţii de intrare $I_{1,n}$, $I_{2,n}, \ldots, I_{m,n}$ şi de biţii de stare curentă $W_{1,n}$, $W_{2,n}, \ldots, W_{v,n}$.

Cei m+1 biţi de la ieşirea codorului convoluţional selectează cu ajutorul unui **convertor de bit**, subsetul 2N-D care va fi utilizat. Ceilalţi NQ-m biţi de la intrare, rămaşi necodaţi convoluţional, selectează cu ajutorul unui **codor bloc**, punctul de semnal 2N-D care va fi transmis din subsetul 2N-D selectat anterior.

Am notat cu $U=2^u$ numărul de subseturi 2-D ale constelaţiei de semnale 2-D, constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D.

Dacă N=par, la intrarea convertorului de bit:

$\Rightarrow$ primii m+1 biţi selectează subsetul 2N-D utilizat,

$\Rightarrow$ următorii s biţi selectează tipul 2N-D în cadrul subsetului 2N-D utilizat,

$\Rightarrow$ următorii Nu-m-1-s biţi selectează tipul N-D, pentru fiecare din cele 2 subseturi N-D constituente ale tipului 2N-D şi aşa mai departe pînă la selecţia celor N subseturi 2-D constituente.

Dacă N=impar la intrarea convertorului de bit:

$\Rightarrow$ primii m+1 biţi selectează subsetul 2N-D utilizat,

$\Rightarrow$ următorii s=Nu-m-1 biţi selectează tipul 2N-D, în cadrul subsetului 2N-D utilizat şi implicit cele N subseturi 2-D constituente.

Am notat cu r = restul împărţirii lui Nu la Q şi cu c = cîtul împărţirii lui Nu la Q.

Convertorul de bit converteşte cei Nu biţi de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}, \ldots$, $I_{r-1,n+c}$ în N grupuri de cîte u biţi fiecare:

$$Z_{0,p}, Z_{1,p}, \ldots, Z_{u-1,p}, \; p=n, n+1, \ldots, n+N-1 \qquad (4.130)$$

Aceste N grupuri de cîte u biţi fiecare selectează N subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 2N-D selectat în cadrul subsetului 2N-D utilizat.

Pentru a obţine un cod TCM 2N-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelaţiei de semnale 2N-D trebuie sa fie îndeplinită cerinţa detailată în continuare.

Dacă X este tipul 2N-D asociat cu structura de biţi $Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, \ldots, I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b}, \ldots, I_{r-2,n+c}, I_{r-1,n+c}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 2N-D obţinute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°, unde $2 \le a \le r-1$ şi $0 \le b \le c$.

Dacă $(I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_1$, $(I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_2$, $(I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_3$ sunt perechile de biţi obţinute prin translaţia perechii de biţi $(I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})$ cu una, două sau trei poziţii în secvenţa circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 2N-D asociate cu structurile de biţi:

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, \ldots, (I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_1, \ldots, I_{r-2,n+c}, I_{r-1,n+c}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, \ldots, (I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_2, \ldots, I_{r-2,n+c}, I_{r-1,n+c}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, \ldots, (I'_{a-1,n+b}\, I'_{a,n+b})_3, \ldots, I_{r-2,n+c}, I_{r-1,n+c}$,

sunt X_1, X_2, X_3.

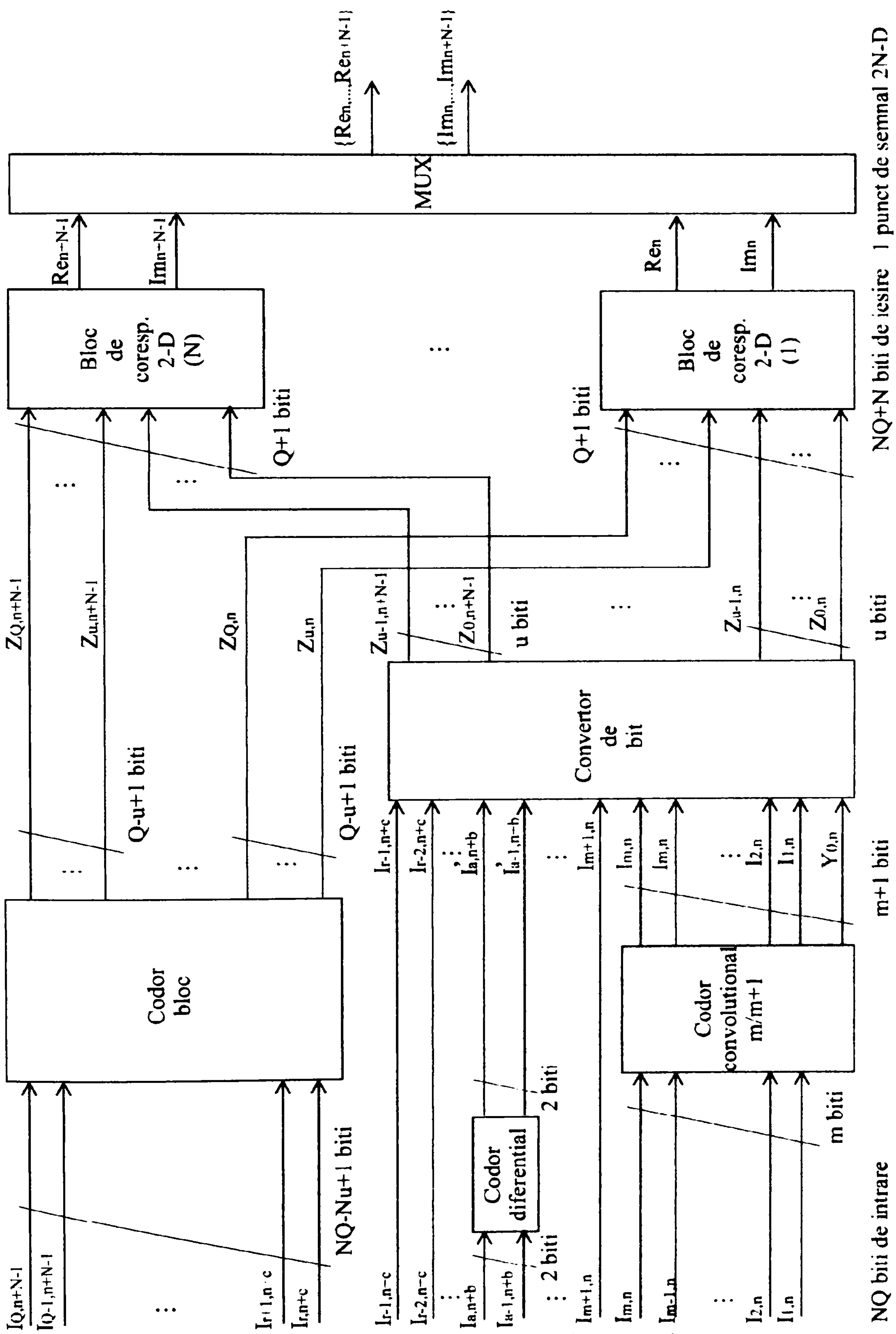


Fig.4.11 Schema bloc a codorului TCM 2N-D (construcţia propusă).

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguităţi de fază a constelaţiei de semnale 2N-D (0°, 90°, 180°, 270°) am folosit un **codor diferenţial** pe 2 biţi de forma:

$$(I'_{a-1,n+b}\ I'_{a,n+b}) = (I'_{a-1,n+b-N}\ I'_{a,n+b-N} + I_{a-1,n+b}\ I_{a,n+b})\bmod 4 \quad (4.131)$$

Tabelul de adevăr al codorului diferenţial care rezultă din relaţia (4.131) este următorul:

Tabelul 4.14 Tabelul de adevăr al codorului diferenţial

Biţii de ieşire $I'_{a-1,n+b}b\,I'_{a,n+b}$		Biţii de ieşire anteriori $I'_{a-1,n+b-N}\ I'_{a,n+b-N}$			
		00	01	10	11
Biţii de intrare $I_{a-1,n+b}\ I_{a,n+b}$	00	00	01	10	11
	01	01	10	11	00
	10	10	11	00	01
	11	11	00	01	10

Din tabelul de adevăr de mai sus am dedus următoarele relaţii între ieşirile şi intrările codorului diferenţial (Fig.4.12):

$$\begin{cases} I'_{a,n+b} = (I_{a,n+b} \oplus I'_{a,n+b-N}) \oplus (I_{a-1,n+b} \otimes I'_{a-1,n+b-N}) \\ I'_{a-1,n+b} = (I_{a-1,n+b} \oplus I'_{a-1,n+b-N}) \end{cases} \quad (4.132)$$

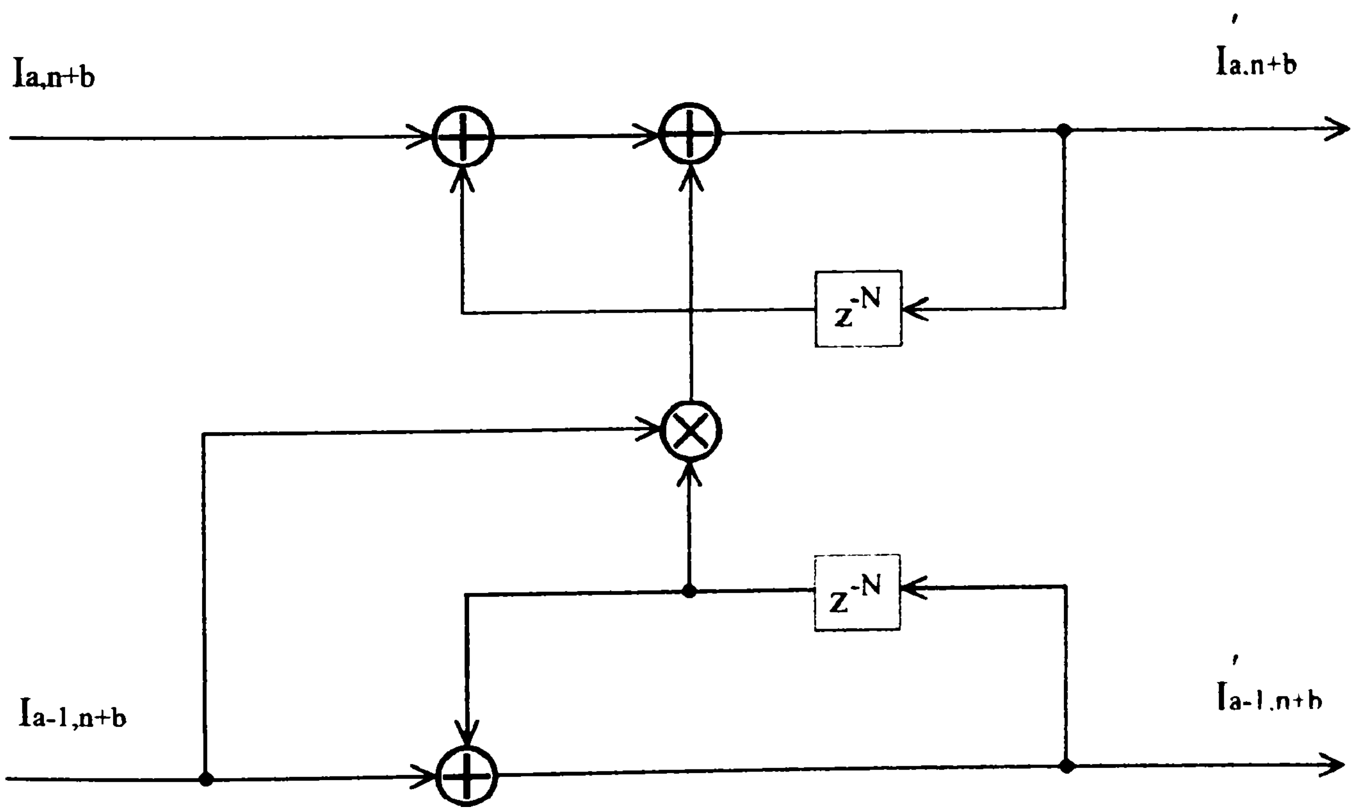


Fig.4.12 Codorul diferenţial pe 2 biţi (construcţia propusă).

Ultimii NQ-Nu+1 biți de la intrare sînt codați cu un **codor bloc**, la ieșirea căruia se obțin N grupuri de cîte Q-u+1 biți fiecare:

$$Z_{u,p}, Z_{u+1,p}, \ldots, Z_{Q,p}, \; p=n, n+1, \ldots, n+N-1 \tag{4.133}$$

Aceste N grupuri, de cîte Q-u+1 biți fiecare, selectează cele N puncte de semnal 2-D, astfel încît cel mult unul să fie situat în grupul extern OG a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D.

Cîștigul de codare asimptotic al codului TCM 2N-D față de o transmisie necodată este egal cu:

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{\dfrac{d^2}{E_{medie}}}{\dfrac{d_0^2}{E_{IG}}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{d^2}{d_0^2}\frac{1}{CER}\right) \text{[dB]} \tag{4.134}$$

unde:

$d_{free}^2 = d^2$=MSED a subseturilor 2N-D obținute prin partiționarea constelației de semnale 2N-D,

d_0^2=MSED a constelației de semnale 2-D utilizată la o transmisie necodată,

E_{medie}=energia medie a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D,

E_{IG}=energia medie a grupului intern IG a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D,

CER=rata de extindere a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D (Constellation Extension Rate).

Întrucît formulele stabilite de Wei și Sterian pentru cîștigul de codare asimptotic γ al codului TCM 2N-D față de o transmisie necodată, nu țin cont de parametrii PAR și CER ai constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D, am dedus o nouă formulă care ia în calcul parametrii respectivi (relația 4.134).

În relațiile folosite de Wei și Sterian (relațiile 4.2 și 4.33), energiile medii ale grupurilor se calculează dificil prin însumarea pătratelor distanțelor dintre originea axelor de coordonate a planului complex și punctele de semnal 2-D situate în grupurile respective și prin împărțirea la numărul de puncte de semnal 2-D ale grupurilor. Spre deosebire de relațiile folosite de Wei și Sterian, relația propusă (4.134) permite calculul imediat a cîștigului de codare asimptotic γ al codului TCM 2N-D, după calculul parametrului CER a constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 2N-D.

4.6 Generalizarea construcției Wei a decodorului TCM 2N-D

Decodorul TCM 2N-D utilizează un algoritm de **decodare de probabilitate condiționată maximă (MLD=Maximum Likelihood Decoding)** numit **algoritmul Viterbi**.

Decodorul Viterbi utilizează o **tehnică de decodare cu decizie hard (hard-decision decoding technique)** şi găseşte punctul de semnal 2N-D cel mai apropiat de punctul de semnal 2N-D recepționat.

Schema propusă pentru decodorul Viterbi conține două blocuri:

⇒ **blocul de calcul** a celor mai apropiate puncte de semnal 2N-D față de punctul de semnal 2N-D recepționat în fiecare subset 2N-D şi a metricilor de subset 2N-D asociate,

⇒ **decodorul Viterbi propriu-zis**, care analizează traiectoriile din diagrama trellis şi alege traiectoria cu metrica totală minimă. Astfel decodorul Viterbi propriu-zis, generează o secvență de puncte de semnal 2N-D care sunt cele mai apropiate de secvența de puncte de semnal 2N-D recepționate.

Dacă N este nu este o putere a lui 2 atunci am folosit diagrama de decodare Viterbi I iar dacă N este o putere a lui 2 atunci am folosit diagrama de decodare Viterbi II. Pentru a decide dacă N este sau nu o putere a lui 2 am propus organigrama din Fig.4.13. Am citit valoarea lui N şi am atribuit la i valoarea inițială 1.

Dacă N este impar atunci am ales diagrama de decodare Viterbi I.

Dacă N este par atunci am efectuat operația $\frac{N}{2^i}$. Dacă rezultatul operației $\frac{N}{2^i}$ este impar atunci apar două cazuri:

⇒ dacă rezultatul operației este diferit de 1, atunci am ales diagrama de decodare Viterbi I,

⇒ dacă rezultatul operației este egal cu 1, atunci am ales diagrama de decodare Viterbi II.

Dacă rezultatul operației $\frac{N}{2^i}$ este par atunci am incrementat i şi am reluat operația $\frac{N}{2^i}$.

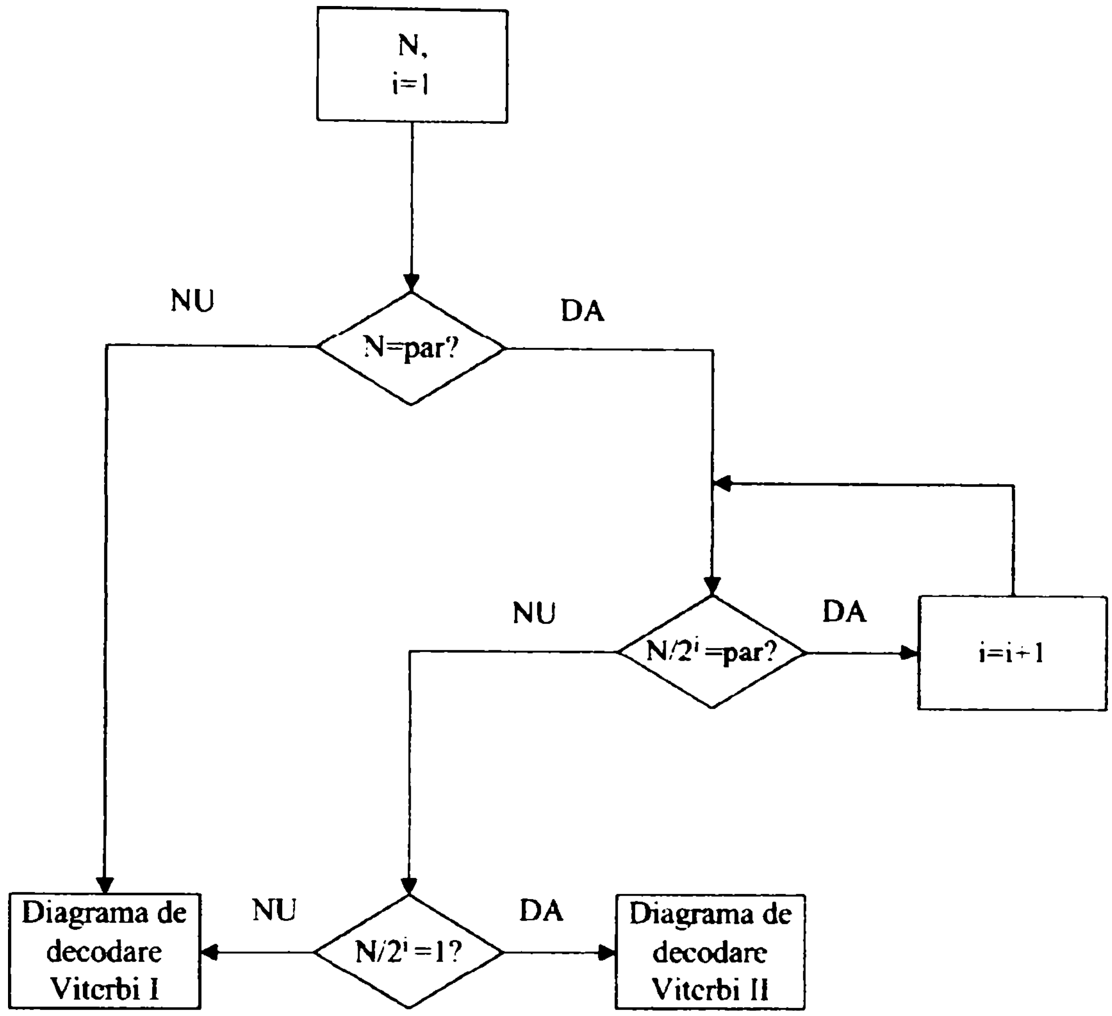


Fig.4.13 Organigrama de alegere a diagramei de decodare Viterbi (construcția propusă).

Pentru **diagrama de decodare Viterbi I** (Fig.4.14) am executat următoarele operații:

- am descompus punctul de semnal 2N-D recepționat în N puncte de semnal 2-D constituente,
- am găsit în fiecare subset 2-D, **cel mai apropiat punct de semnal 2-D** față de fiecare din cele N puncte de semnal 2-D recepționate și am calculat **metrica de subset 2-D** asociată,

- pentru fiecare tip 2N-D, am calculat **metrica de tip 2N-D** ca suma a N metrici de subset 2-D,
- pentru fiecare subset 2N-D, am comparat cele S metrici de tip 2N-D și metrica cea mai mică devine **metrica de subset 2N-D** asociată cu subsetul 2N-D respectiv. Punctul de semnal 2N-D corespunzător tipului 2N-D cu cea mai mică metrică de tip 2N-D devine **cel mai apropiat punct de semnal 2N-D** față de punctul de semnal 2N-D recepționat,
- am extins traiectoriile din diagrama trellis și am generat decizia finală asupra punctului de semnal 2N-D recepționat.

Pentru **diagrama de decodare Viterbi II** (Fig.4.15) am executat următoarele operații:

- am descompus punctul de semnal 2N-D recepționat în N puncte de semnal 2-D constituente,
- am găsit în fiecare subset 2-D, **cel mai apropiat punct de semnal 2-D** față de fiecare din cele N puncte de semnal 2-D recepționate și am calculat **metrica de subset 2-D** asociată,
- pentru fiecare tip 4-D, am calculat **metrica de tip 4-D** ca suma a două metrici de subset 2-D,
- pentru fiecare subset 4-D, am comparat cele două metrici de tip 4-D și metrica cea mai mică devine **metrica de subset 4-D** asociată cu subsetul 4-D respectiv. Punctul de semnal 4-D corespunzător tipului 4-D cu cea mai mică metrică de tip 4-D devine **cel mai apropiat punct de semnal 4-D** față de primul punct de semnal 4-D recepționat (primul și al doilea punct de semnal 2-D recepționate). Am repetat procedeul pentru toate cele $\frac{N}{2}$ puncte de semnal 4-D recepționate,

- pentru fiecare tip 2N-D, am calculat **metrica de tip 2N-D** ca suma a două metrici de subset N-D,
- pentru fiecare subset 2N-D, am comparat cele S metrici de tip 2N-D și metrica cea mai mică devine **metrica de subset 2N-D** asociată cu subsetul 2N-D respectiv. Punctul de semnal 2N-D corespunzător tipului 2N-D cu cea mai mică metrică de tip 2N-D devine **cel mai apropiat punct de semnal 2N-D** față de punctul de semnal 2N-D recepționat,
- am extins traiectoriile din diagrama trellis și am generat decizia finală asupra punctului de semnal 2N-D recepționat.

Dacă ținem cont de efectul de margine al unei constelații de semnale 2N-D cu un număr finit de puncte de semnal 2N-D, este necesar ca decizia finală pentru punctul de semnal 2N-D recepționat, să corespundă unui punct de semnal valid al constelației de semnale 2N-D, adică să conțină cel mult un punct de semnal 2-D din grupul extern OG [16].

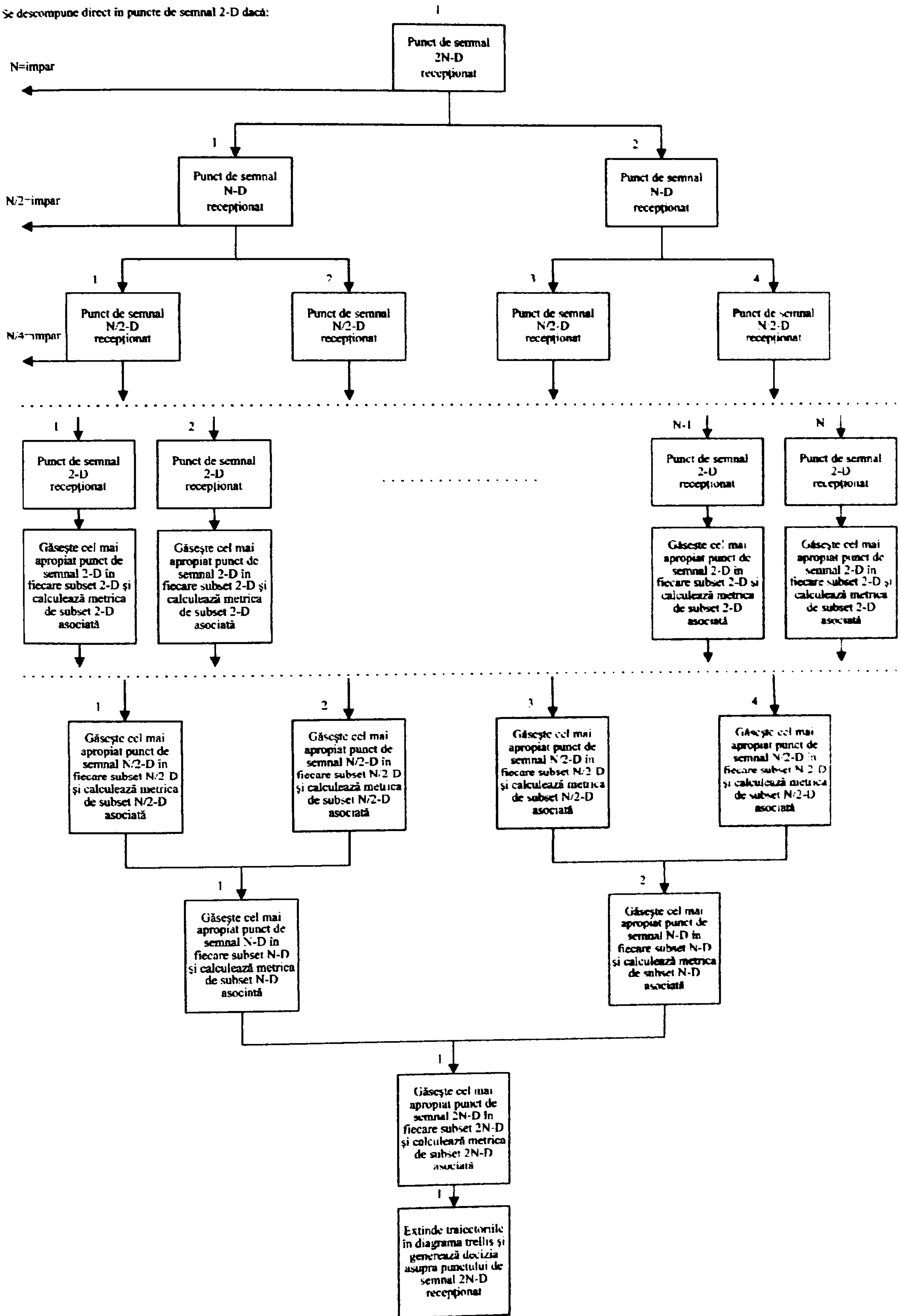


Fig.4.14 Diagrama de decodare Viterbi I (N nu este o putere a lui 2).

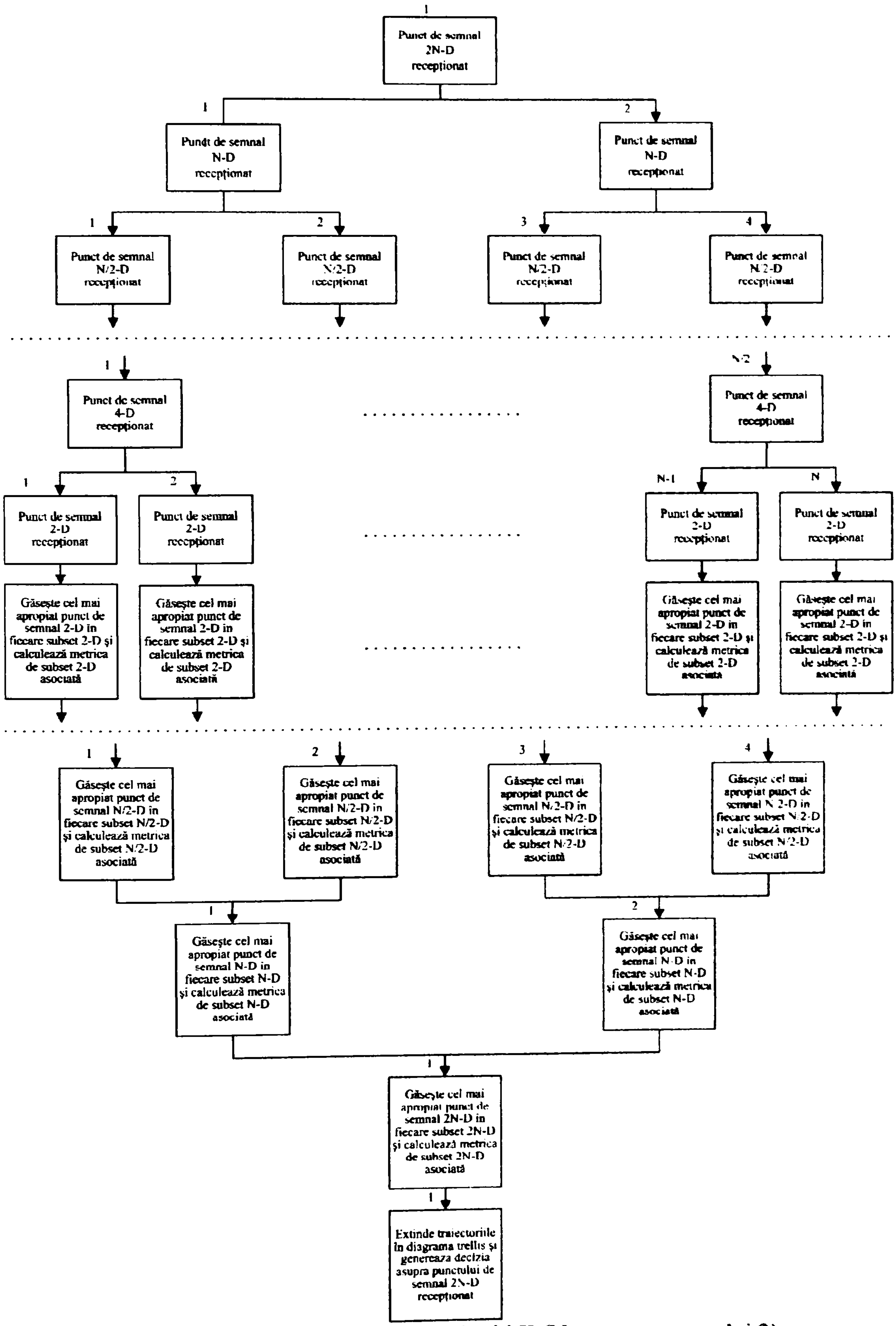


Fig.4.15 Diagrama de decodare Viterbi II (N este o putere a lui 2).

În continuare, decodorul TCM 2N-D conţine N **blocuri de corespondenţă 2-D**, un **convertor de bit**, un **decodor diferenţial** şi un **decodor bloc** care realizează operaţiile inverse de la codare. Schema bloc a decodorului TCM 2N-D (construcţia propusă) am prezentat-o în Fig.4.16 [57, 60].

Am prelucrat relaţiile (4.132) şi am obţinut următoarele relaţii între ieşirile şi intrările decodorului diferenţial (Fig.4.17):

$$\begin{cases} \hat{I}_{a,n+b} = (\hat{I}'_{a,n+b} \oplus \hat{I}'_{a,n+b-N}) \oplus [(\hat{I}'_{a-1,n+b} \oplus \hat{I}'_{a-1,n+b-N}) \otimes \hat{I}'_{a-1,n+b-N}] \\ \hat{I}_{a-1,n+b} = (\hat{I}'_{a-1,n+b} \oplus \hat{I}'_{a-1,n+b-N}) \end{cases} \tag{4.135}$$

Tabelul de adevăr al decodorului diferenţial care rezultă din relaţia (4.135) este următorul:

Tabelul 4.15 Tabelul de adevăr al decodorului diferenţial

Biţii de intrare $\hat{I}'_{a-1,n+b}\ \hat{I}'_{a,n+b}$		Biţii de intrare anteriori $\hat{I}'_{a-1,n+b-N}\ \hat{I}'_{a,n+b-N}$			
		00	01	10	11
Biţii de ieşire $\hat{I}_{a-1,n+b}\ \hat{I}_{a,n+b}$	00	00	01	10	11
	01	01	10	11	00
	10	10	11	00	01
	11	11	00	01	10

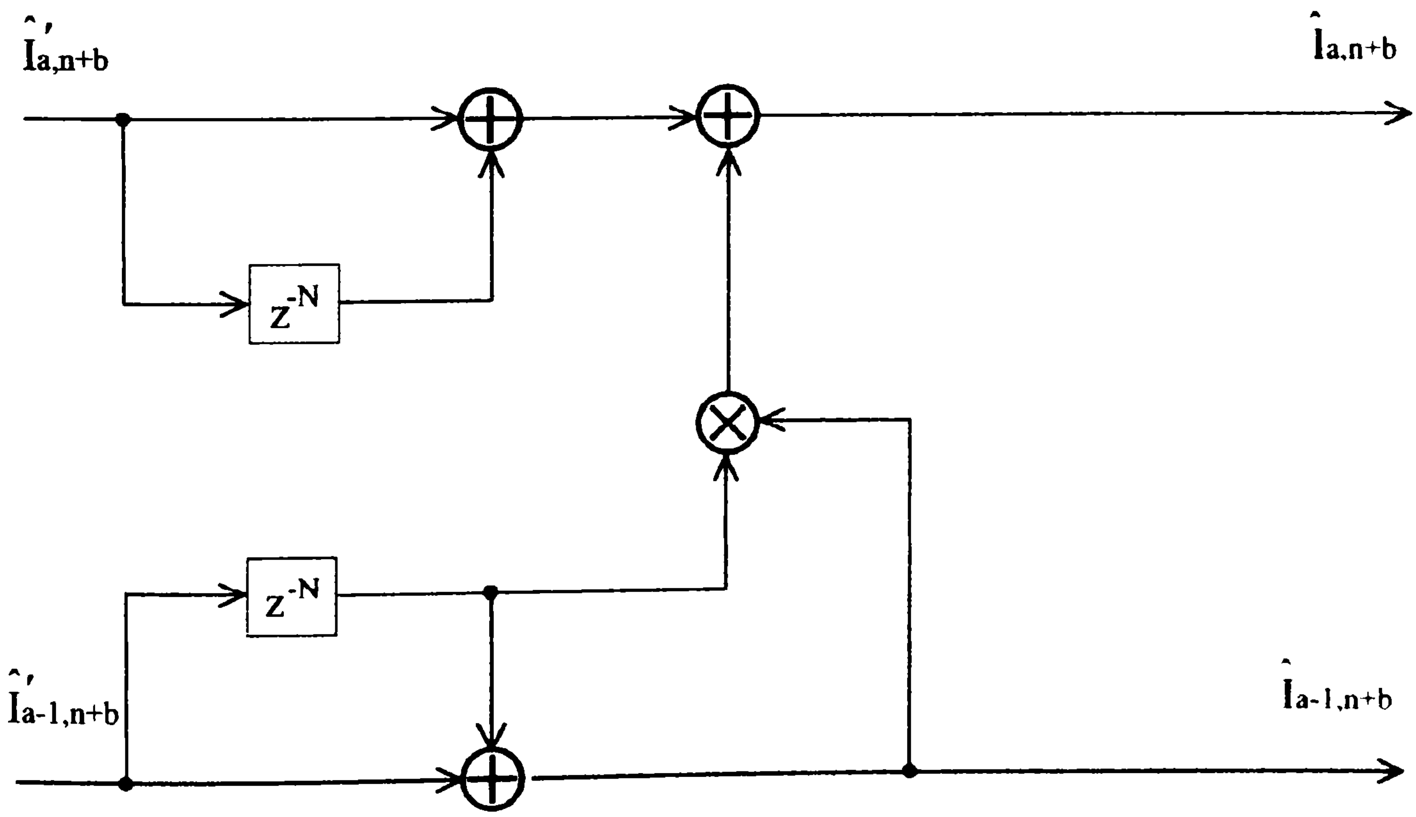


Fig.4.17 Decodorul diferenţial pe 2 biţi (construcţia propusă)

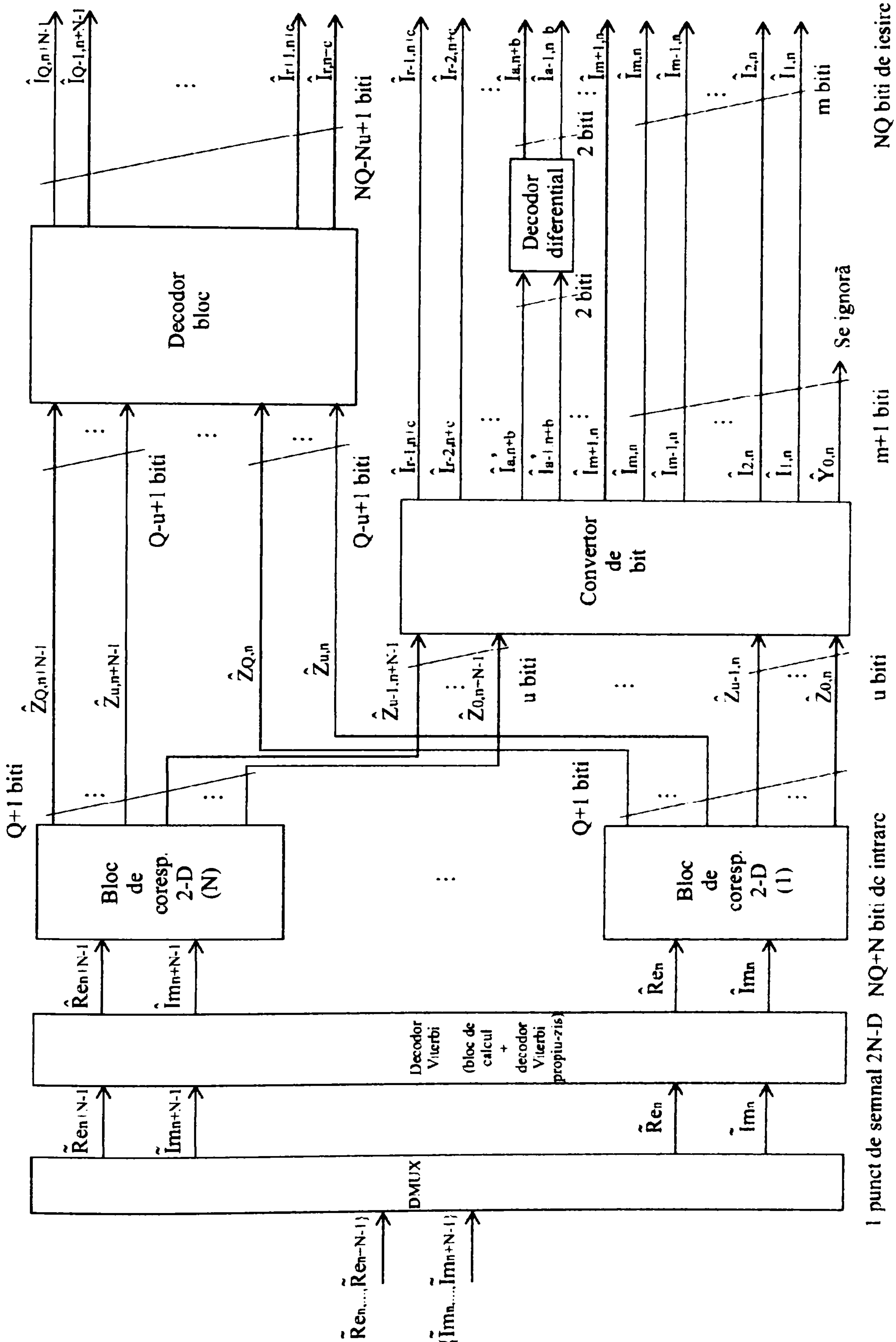


Fig.4.16 Schema bloc a decodorului TCM 2N-D (construcţia propusă).

4.7 Exemple pentru construcția Wei generalizată a codurilor TCM 2N-D

4.7.1 Codul TCM 4-D, cu rata 2/3 şi cu 16 stări

Am considerat transmisia a Q=7 biți/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 4-D cu rata 2/3 şi 16 stări am prezentat-o în Fig.4.18.

În acest caz N=2 este o putere a lui 2 deci am obținut conform relațiilor (4.124):

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = 0 \\ CER = CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) = \dfrac{11}{8} = 1{,}37500 \\ PAR = \dfrac{2(1+\beta)}{CER_0} = \dfrac{24}{11} \cong 2{,}18182 \end{cases} \tag{4.136}$$

Deosebirea față de construcția Wei a codului TCM 4-D, cu rata 2/3 şi cu 16 stări prezentată în paragraful 4.2, constă doar în calculul parametrilor CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 4-D.

Întrucît în acest caz N=2 este o putere a lui 2, am observat că valorile obținute pentru parametrii CER şi PAR ai constelației de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 4-D sunt optimale deşi Wei nu a calculat aceste valori.

Constelația de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 4-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ (**Z** = mulțimea numerelor întregi) şi este formată din 192 puncte de semnal 2-D:

- ❖ 2^7=128 puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- ❖ $\dfrac{2^7}{2} = 64$ puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L,
- ❖ 0 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Am partiționat constelația de semnale 2-D (Fig.4.11) constituentă în $U=2^u=4$ **subseturi 2-D**:

- ⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
- ⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
- ⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
- ⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelația de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2 = 4d_0^2$.

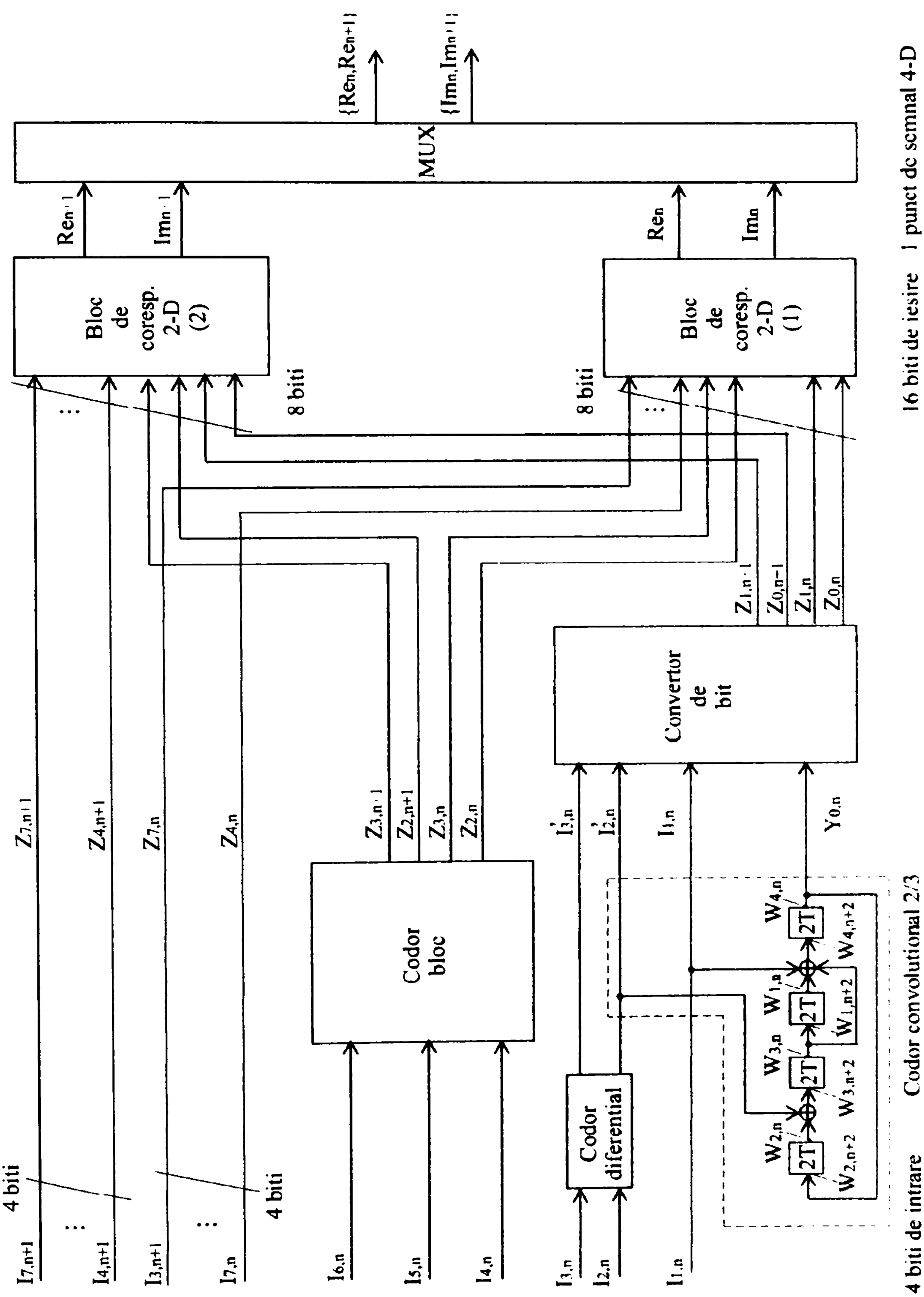
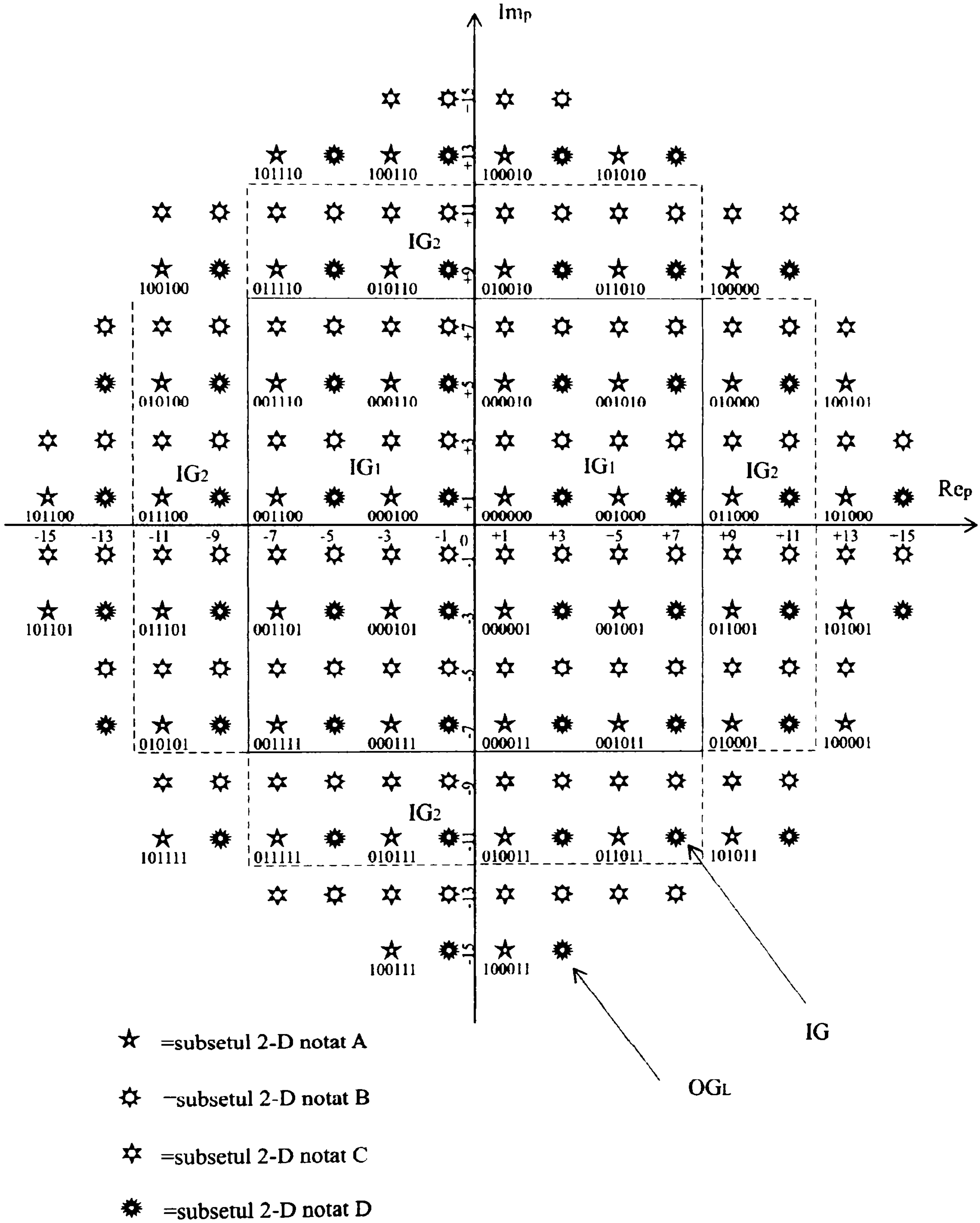


Fig.4.18 Schema bloc a codorului TCM 4-D cu rata 2/3 şi 16 stări (construcţia Wei).



Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1.

Fig.4.19 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 192 puncte de semnal 2-D (construcția Wei).

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relația 4.3) [16]:

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Prin concatenarea a 2 constelații de semnale 2-D constituente și prin eliminarea punctelor de semnal 4-D care conțin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG se obține **constelația de semnale 4-D** cu $2^{2\times 7+1}=2^{15}$ puncte de semnal 4-D.

Se construiesc 16 **tipuri 4-D** cu MSED$=d^2=4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 2-D și notate astfel (vezi relația 4.4) [16]:

$$(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), \ldots, (D, D)$$

Cele 16 tipuri 4-D sunt grupate în 8 **subseturi 4-D** (deci S=2) astfel încît MSED a fiecărui subset 4-D obținut să fie egală cu $d^2=4d_0^2$ (vezi relația 4.5) [16]:

$$\begin{cases} S_0=(A, A) \cup (B, B) \\ S_1=(C, C) \cup (D, D) \\ S_2=(A, B) \cup (B, A) \\ S_3=(C, D) \cup (D, C) \\ S_4=(A, C) \cup (B, D) \\ S_5=(C, B) \cup (D, A) \\ S_6=(A, D) \cup (B, C) \\ S_7=(C, A) \cup (D, B) \end{cases}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 4-D (vezi relația 4.6) [16]:

$$\begin{cases} S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \\ S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \\ S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \\ S_6 \rightarrow S_7 \rightarrow S_6 \end{cases}$$

Subseturile 4-D sunt grupate în 2 **familii 4-D** cu MSED$=2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 4-D să conțină F=4 subseturi 4-D (vezi relația 4.7) [16]:

$$\begin{cases} F_0=S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\ F_1=S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \end{cases}$$

În acest caz avem m=2 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 2/3 și cu $V=2^4=16$ stări. De asemenea, restul și cîtul împarțirii lui Nu=4 la Q=7 sunt r=4 și respectiv c=0.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=4 subseturi (vezi relația 4.8) [16]:

$$\{4i + j \mid 0 \le i \le 3, 0 \le j \le 3\}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+2}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=4 subseturi (vezi relația 4.9) [16]:

$$\{4j + k \mid 0 \le j \le 3, 0 \le k \le 3\}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 3$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă $4i+j$, $0 \le i \le 3$ și fiecare stare următoare $4j+k$, $0 \le k \le 3$.

Asignarea subseturilor 4-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 4-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 4-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele și să aparțină aceleași familii 4-D.

Același considerent se aplică și pentru subseturile 4-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{4,n}=0$) sunt asignate subseturi 4-D din familia 4-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{4,n}=1$) sunt asignate subseturi 4-D din familia 4-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 4-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 4-D (MSED de intersubset 4-D să fie mai mare sau cel puțin egală cu MSED de intrasubset 4-D).

Această cerință garantează că MSED dintre două secvențe de puncte de semnal 4-D este $d^2 = 4d_0^2$ și elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 4-D față de secvența corectă de puncte de semnal 4-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 4-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiați ai unui punct de semnal 4-D și aflați într-un subset 4-D cu un număr finit de puncte de semnal 4-D. În acest caz N_{free}=24 per punct de semnal 4-D (N_{free}=12 per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 4-D este mai mic decît 24.

3. Dacă X este subsetul 4-D asociat cu tranzițiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+2} și dacă X_1 este subsetul 4-D obținut prin rotirea lui X cu 90° atunci se poate defini o funcție F_1 de corespondență între stările codului TCM 4-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranzițiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+2})$.

Pentru o rotație de 90° în sens orar se definește funcția F_1 astfel (vezi relația 4.10) [16]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n} \rightarrow \overline{W}_{1,n}W_{2,n}\overline{W}_{3,n}W_{4,n}$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Acestă cerință garantează că vom obține un cod TCM 4-D transparent la toate ambiguitățile de fază ale constelației de semnale 4-D, cu alte cuvinte un cod TCM 4-D invariant rotațional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguități de fază a constelației de semnale 4-D (0°, 90°, 180°, 270°) se folosește un **codor diferențial** pe 2 biți (vezi relația 4.11) [16]:

$$(I'_{2,n}I'_{3,n}) = (I'_{2,n-2}I'_{3,n-2} + I_{2,n}I_{3,n})\text{mod}4$$

deci în acest caz avem a=3 și b=0.

Convertorul de bit convertește cei 4 biți de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}$, $I'_{3,n}$ în 2 grupuri de cîte 2 biți fiecare (vezi relația 4.12) [16]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1$$

care selectează 2 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 4-D selectat în cadrul subsetului 4-D utilizat.

Pentru a obține un cod TCM 4-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelației de semnale 4-D trebuie sa fie îndeplinită cerința prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 4-D asociat cu structura de biți $Y_{0,n}, I_{1,n}, I'_{2,n}, I'_{3,n}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 4-D obținute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_1$, $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_2$, $(I'_{2,n}, I'_{3,n})_3$ sunt perechile de biți obținute prin translația perechii de biți $(I'_{2,n}, I'_{3,n})$ cu una, două sau trei poziții în secvența circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 4-D asociate cu structurile de biți:

$Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_1$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_2$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}(I'_{2,n}, I'_{3,n})_3$,

sunt X_1, X_2 ,X_3.

Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1 și subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcționarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.2.

Tabelul 4.1 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ și subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.2 Convertorul de bit

Familie 4-D	Subset 4-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I'_{2,n}$	$I'_{3,n}$	Tip 4-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$
0	0	0	0	0	0	(A, A)	0	0	0	0
		0	0	0	1	(B, B)	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	(C, C)	1	0	1	0
		0	0	1	1	(D, D)	1	1	1	1
	2	0	1	0	0	(A, B)	0	0	0	1
		0	1	0	1	(B, A)	0	1	0	0
	3	0	1	1	0	(C, D)	1	0	1	1
		0	1	1	1	(D, C)	1	1	1	0
1	4	1	0	0	0	(A, C)	0	0	1	0
		1	0	0	1	(B, D)	0	1	1	1
	5	1	0	1	0	(C, B)	1	0	0	1
		1	0	1	1	(D, A)	1	1	0	0
	6	1	1	0	0	(A, D)	0	0	1	1
		1	1	0	1	(B, C)	0	1	1	0
	7	1	1	1	0	(C, A)	1	0	0	0
		1	1	1	1	(D, B)	1	1	0	1

Am notat cu S_i subseturile 4-D şi astfel indexul i este furnizat de relaţia:

$$i = 4Y_{0,n} + 2I_{1,n} + I'_{2,n}, \; i = 0, 1, \ldots, 7 \qquad (4.137)$$

Codorul bloc foloseşte cei 3 biţi $I_{4,n}$, $I_{5,n}$, $I_{6,n}$ pentru a genera 2 grupuri de cîte 2 biţi fiecare (vezi relaţia 4.13) [16]:

$$Z_{2,p}, Z_{3,p}, \; p=n, n+1$$

care selectează pentru cele 2 subseturi 2-D utilizate, prima jumătate a grupului intern IG_1, a doua jumătate a grupului intern IG_2 sau subgrupul extern de energie mică OG_L.

Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, p=n, n+1 şi grupurile constelaţiei de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.16 iar funcţionarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.4.

Cele 2 grupuri de cîte 4 biţi fiecare (vezi relaţia 4.14) [16]:

$$Z_{4,p}, Z_{5,p}, Z_{6,p}, Z_{7,p}, \; p=n, n+1$$

selectează pentru fiecare din cele 2 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelaţiei de semnale 2-D selectat anterior.

Tabelul 4.16 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ şi grupurile constelației de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	Grup constelație de semnale 2-D
0	0	IG_1
0	1	IG_2
1	0	OG_L

Tabelul 4.17 Codorul bloc

$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	$I_{6,n}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 4-D față de o transmisie necodată este conform relației (4.134):

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{4\frac{1}{11}}{\frac{8}{8}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{32}{11}\right) \cong 4{,}63757\ [\mathrm{dB}] \qquad (4.138)$$

4.7.2 Codul TCM 6-D, cu rata 3/4 şi cu 64 stări

Am considerat transmisia a Q=7 biți/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 6-D cu rata 3/4 şi 64 stări am prezentat-o în Fig.4.20.

În acest caz N=3 nu este o putere a lui 2 deci am obținut conform relațiilor (4.125):

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{I(4K_0')}{2^Q} = \dfrac{11}{32} \\ \alpha = \dfrac{4}{I(4K_0')} = \dfrac{1}{11} \\ P = K_0' = 1 \\ N - P = 2 \\ I(4K_0') = \dfrac{2^Q + 4K_0'}{N} = 44 \\ CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) = \dfrac{11}{9} \cong 1{,}22222 \\ CER = CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}] \cong 1{,}22233 \\ PAR = \dfrac{2(1+\beta)}{CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}]} \cong 2{,}19867 \end{cases} \qquad (4.139)$$

Constelația de semnale 2-D constituentă a constelației de semnale 6-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ ($\mathbf{Z}$ = mulțimea numerelor întregi) și este formată din 172 puncte de semnal 2-D:

- 2^7=128 puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- 40 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L,
- 4 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Am partiționat constelația de semnale 2-D (Fig.4.21) constituentă în $U=2^u=4$ **subseturi 2-D**:

⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelația de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2 = 4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relația 4.3) [42]:

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$$

Prin concatenarea a 3 constelații de semnale 2-D constituente și prin eliminarea punctelor de semnal 6-D care conțin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG se obține **constelația de semnale 6-D** cu $2^{3x7+1}=2^{22}$ puncte de semnal 6-D.

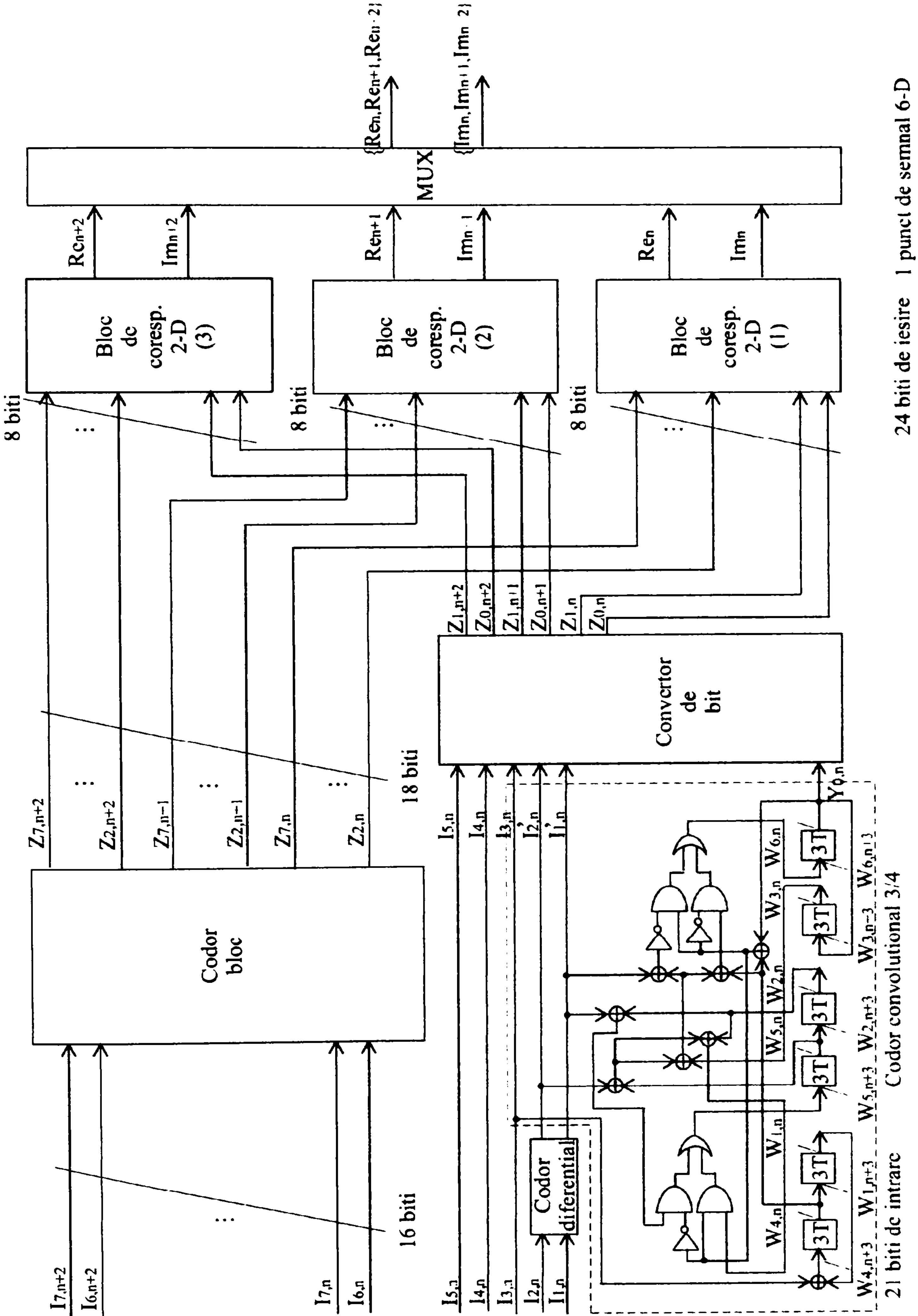
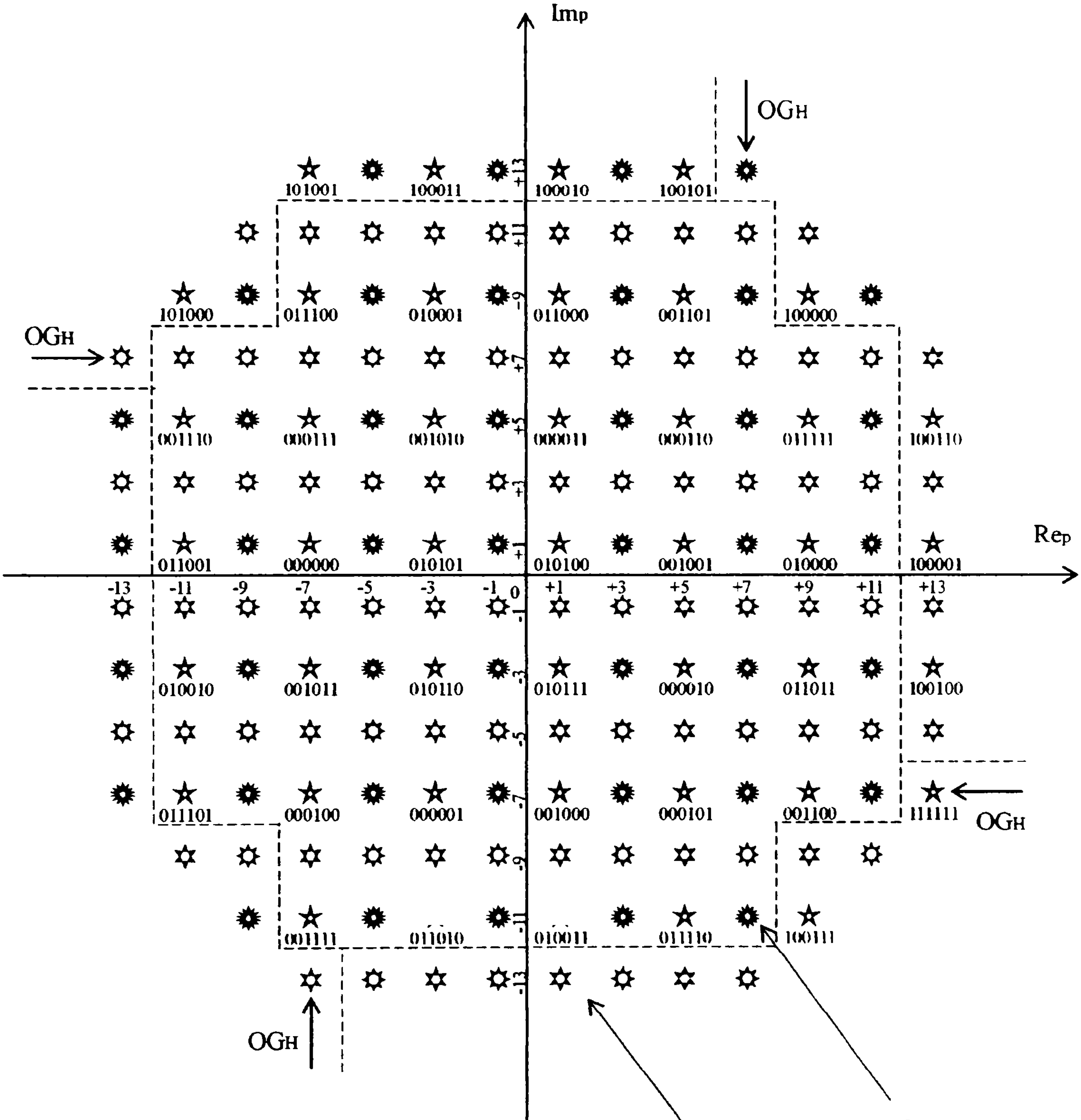


Fig.4.12 Schema bloc a codorului TCM 6-D cu rata 2/3 şi 16 stări (construcţ a propusă).



★ =subsetul 2-D notat A

✡ =subsetul 2-D notat B

✡ =subsetul 2-D notat C

✹ =subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2.

Fig.4.13 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 172 puncte de semnal 2-D (construcția propusă).

Se construiesc 64 **tipuri 6-D** cu MSED=$d^2 = 4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 3 subseturi 2-D şi notate astfel (vezi relaţia 4.34) [42]:

(A, A, A), (A, A, B), (A, A, C), (A, A, D),...,(D, D, D)

Cele 64 tipuri 6-D sunt grupate în 16 **subseturi 6-D** (deci S=4) astfel încît MSED a fiecărui subset 6-D obţinut să fie egală cu $d^2 = 4d_0^2$ (vezi relaţia 4.35) [42]:

$$\begin{cases} S_0=(A, A, A) \cup (A, B, B) \cup (B, A, B) \cup (B, B, A) \\ S_1=(C, A, B) \cup (C, B, A) \cup (D, A, A) \cup (D, B, B) \\ S_2=(A, C, C) \cup (A, D, D) \cup (B, C, D) \cup (B, D, C) \\ S_3=(C, C, C) \cup (C, D, D) \cup (D, C, D) \cup (D, D, C) \\ S_4=(A, A, B) \cup (A, B, A) \cup (B, A, A) \cup (B, B, B) \\ S_5=(C, A, A) \cup (C, B, B) \cup (D, A, B) \cup (D, B, A) \\ S_6=(A, C, D) \cup (A, D, C) \cup (B, C, C) \cup (B, D, D) \\ S_7=(C, C, D) \cup (C, D, C) \cup (D, C, C) \cup (D, D, D) \\ S_8=(C, A, C) \cup (C, B, D) \cup (D, A, D) \cup (D, B, C) \\ S_9=(A, A, D) \cup (A, B, C) \cup (B, A, C) \cup (B, B, D) \\ S_{10}=(C, C, A) \cup (C, D, B) \cup (D, C, B) \cup (D, D, A) \\ S_{11}=(A, C, A) \cup (A, D, B) \cup (B, C, B) \cup (B, D, A) \\ S_{12}=(C, A, D) \cup (C, B, C) \cup (D, A, C) \cup (D, B, D) \\ S_{13}=(A, A, C) \cup (A, B, D) \cup (B, A, D) \cup (B, B, C) \\ S_{14}=(C, C, B) \cup (C, D, A) \cup (D, C, A) \cup (D, D, B) \\ S_{15}=(A, C, B) \cup (A, D, A) \cup (B, C, A) \cup (B, D, B) \end{cases}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 6-D (vezi relaţia 4.36) [42]:

$$\begin{cases} S_0 \to S_3 \to S_4 \to S_7 \to S_0 \\ S_1 \to S_2 \to S_5 \to S_6 \to S_1 \\ S_8 \to S_{11} \to S_{12} \to S_{15} \to S_8 \\ S_9 \to S_{10} \to S_{13} \to S_{14} \to S_9 \end{cases}$$

Subseturile 6-D sunt grupate în 2 **familii 6-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 6-D să conţină F=8 subseturi 8-D (vezi relaţia 4.37) [42]:

$$\begin{cases} F_0=S_0 \cup S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_8 \cup S_{10} \cup S_{12} \cup S_{14} \\ F_1=S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9 \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{15} \end{cases}$$

În acest caz avem m=3 biţi de la intrare care sunt codaţi cu un codor convoluţional cu rata de codare 3/4 şi cu $V=2^6=64$ stări. De asemnea, restul şi cîtul împărţirii lui Nu=6 la Q=7 sunt r=6 şi respectiv c=0.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=8 subseturi (vezi relația 4.38) [42]:

$$\{8i + j \mid 0 \le i \le 7, 0 \le j \le 7\}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+3}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=8 subseturi (vezi relația 4.39) [42]:

$$\{8j + k \mid 0 \le j \le 7, 0 \le k \le 7\}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 7$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă $8i+j$, $0 \le i \le 7$ și fiecare stare următoare $8j+k$, $0 \le k \le 7$.

Asignarea subseturilor 6-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 6-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 6-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele şi să aparțină aceleaşi familii 6-D.

Acelaşi considerent se aplică şi pentru subseturile 6-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=0$) sunt asignate subseturi 6-D din familia 6-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=1$) sunt asignate subseturi 6-D din familia 6-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 6-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 6-D (MSED de intersubset 6-D să fie mai mare sau cel puțin egală cu MSED de intrasubset 6-D).

Această cerință garantează că MSED dintre două secvențe de puncte de semnal 6-D este $d^2 = 4d_0^2$ şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 6-D față de secvența corectă de puncte de semnal 6-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 6-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiați ai unui punct de semnal 6-D şi aflați într-un subset 6-D cu un număr finit de puncte de semnal 6-D. În acest caz $N_{free}=60$ per punct de semnal 6-D ($N_{free}=20$ per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 6-D este mai mic decît 60.

3. Dacă X este subsetul 6-D asociat cu tranzițiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+3} şi dacă X_1, X_2, X_3 sunt subseturile 6-D obținute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270° atunci se pot defini trei funcții F_1, F_2, F_3 de corespondență între stările codului TCM 6-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranzițiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+3})$, X_2 să fie asociat cu tranzițiile din starea curentă $F_2(\sigma_n)$ în starea următoare $F_2(\sigma_{n+3})$, X_3 să fie asociat cu tranzițiile din starea curentă $F_3(\sigma_n)$

în starea următoare $F_3(\sigma_{n+3})$.

Pentru o rotație de 90° în sens orar se definește funcția F_1 astfel (vezi relația 4.40) [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \rightarrow W_{1,n}V_{2,n}V_{3,n}W_{4,n}V_{5,n}V_{6,n}$$

unde (vezi relația 4.41) [42]:

$$\begin{cases} V_{2,n}V_{3,n} = (W_{2,n}W_{3,n} + 01)\bmod 4 \\ V_{5,n}V_{6,n} = (W_{5,n}W_{6,n} + 01)\bmod 4 \end{cases}$$

Pentru o rotație de 180° în sens orar se definește funcția F_2 astfel (vezi relația 4.42) [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \rightarrow W_{1,n}\overline{W}_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}\overline{W}_{5,n}W_{6,n}$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Pentru o rotație de 270° în sens orar definim funcția F_3 astfel (vezi relația 4.43) [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n} \rightarrow W_{1,n}V_{2,n}V_{3,n}W_{4,n}V_{5,n}V_{6,n}$$

unde (vezi relația 4.44) [42]:

$$\begin{cases} V_{2,n}V_{3,n} = (W_{2,n}W_{3,n} + 11)\bmod 4 \\ V_{5,n}V_{6,n} = (W_{5,n}W_{6,n} + 11)\bmod 4 \end{cases}$$

Acestă cerință garantează că vom obține un cod TCM 6-D transparent la toate ambiguitățile de fază ale constelației de semnale 6-D, cu alte cuvinte un cod TCM 6-D invariant rotațional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguități de fază a constelației de semnale 6-D (0°, 90°, 180°, 270°) se folosește un **codor diferențial** pe 2 biți (vezi relația 4.45) [42]:

$$(I'_{1,n}I'_{2,n}) = (I'_{1,n-3}I'_{2,n-3} + I_{1,n}I_{2,n})\bmod 4$$

deci în acest caz avem a=2 și b=0.

Convertorul de bit convertește cei 6 biți de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I'_{1,n}$, $I'_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I_{4,n}$, $I_{5,n}$ în 3 grupuri de cîte 2 biți fiecare (vezi relația 4.46) [42]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2$$

care selectează 3 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 6-D selectat în cadrul subsetului 6-D utilizat.

Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2 şi subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcţionarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.8.

Tabelul 4.1 Corespondenţa dintre cei 2 biţi $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ şi subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.8 Convertorul de bit

Subset 6-D	$Y_{0,n}$	$I'_{1,n}$	$I'_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	Tip 6-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$
0	0	0	0	0	0	0	(A, A, A)	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	(A, B, B)	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	(B, A, B)	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	1	(B, B, A)	0	1	0	1	0	0
...													
...													
15	1	1	1	1	0	0	(A, C, B)	0	0	1	0	0	1
	1	1	1	1	0	1	(A, D, A)	0	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	(B, C, A)	0	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	1	(B, D, B)	0	1	1	1	0	1

Am notat cu S_i subseturile 6-D şi astfel indexul i este furnizat de relaţia (vezi relaţia 4.47) [42]:

$$i = 8Y_{0,n} + 4I_{1,n} + 2I_{2,n} + I_{3,n}\,,\ i = 0,\ 1, \ldots, 15$$

Codorul bloc foloseşte cei 16 biţi $I_{6,n}$, $I_{7,n}$, $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$, $I_{4,n+1}$ $I_{5,n+1}$, $I_{6,n+1}$, $I_{7,n+1}$, $I_{1,n+2}$, $I_{2,n+2}$, $I_{3,n+2}$, $I_{4,n+2}$ $I_{5,n+2}$, $I_{6,n+2}$, $I_{7,n+2}$ pentru a genera 3 grupuri de cîte 6 biţi fiecare:

$$Z_{2,p},\ Z_{3,p},\ Z_{4,p},\ Z_{5,p},\ Z_{6,p},\ Z_{7,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2 \tag{4.140}$$

care selectează pentru fiecare din cele 3 subseturi 2-D utilizate, punctul de semnal 2-D care va fi transmis. Funcţionarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.18.

Cîştigul de codare asimptotic al codului TCM 6-D faţă de o transmisie necodată este conform relaţiei (4.134):

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{4}{1,222}\right) \cong 5,14871\ [\mathrm{dB}] \tag{4.141}$$

Tabelul 4.18 Codorul bloc

$I_{6,n}$	$I_{7,n}$	$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{5,n}$	$Z_{6,n}$	$Z_{7,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{5,n+1}$	$Z_{6,n+1}$	$Z_{7,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$	$Z_{5,n+2}$	$Z_{6,n+2}$	$Z_{7,n+2}$
0	X	X	X	X	X	0	$I_{7,n}$	$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	0	0	X	X	X	1	0	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	1	1	0	0	X	1	0	1	0	0	$I_{4,n+1}$	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	0	1	X	X	X	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	1	0	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	1	1	0	1	X	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	1	0	1	0	0	$I_{4,n+1}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	1	0	X	X	X	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	1	0	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$I_{4,n+1}$
1	1	1	1	0	X	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	1	0	1	0	0	$I_{4,n+1}$
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$
1	1	1	1	1	1	0	$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	1	1	1	1	1	1	0	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$

4.7.3 Codul TCM 8-D, cu rata 3/4 şi cu 64 stări

Am considerat transmisia a Q=7 biţi/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 8-D cu rata 3/4 şi 64 stări am prezentatat-o în Fig.4.22.

În acest caz N=4 este o putere a lui 2 deci am obţinut conform relaţiilor (4.124):

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{4} \\ \alpha = 0 \\ CER = CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) = \dfrac{37}{32} \cong 1{,}15625 \\ PAR = \dfrac{2(1+\beta)}{CER_0} = \dfrac{80}{37} \cong 2{,}16216 \end{cases} \tag{4.142}$$

Deosebirea faţă de construcţia Wei a codului TCM 8-D, cu rata 3/4 şi cu 64 stări prezentată în paragraful 4.2, constă doar în calculul parametrilor CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 8-D.

Întrucît în acest caz N=2 este o putere a lui 2, am observat că valorile obţinute pentru parametrii CER şi PAR ai constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 8-D sunt optimale deşi Wei nu a calculat aceste valori.

Constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 8-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ ($\mathbf{Z}$ = mulţimea numerelor întregi) şi este formată din 160 puncte de semnal 2-D:

- 2^7=128 puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- $\dfrac{2^7}{4} = 32$ puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L,
- 0 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Am partiţionat constelaţia de semnale 2-D (Fig.4.23) constituentă în $U=2^u=4$ **subseturi 2-D**:

⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelaţia de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2 = 4d_0^2$.

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relaţia 4.3) [16]:

$$A \to C \to B \to D \to A \tag{4.3}$$

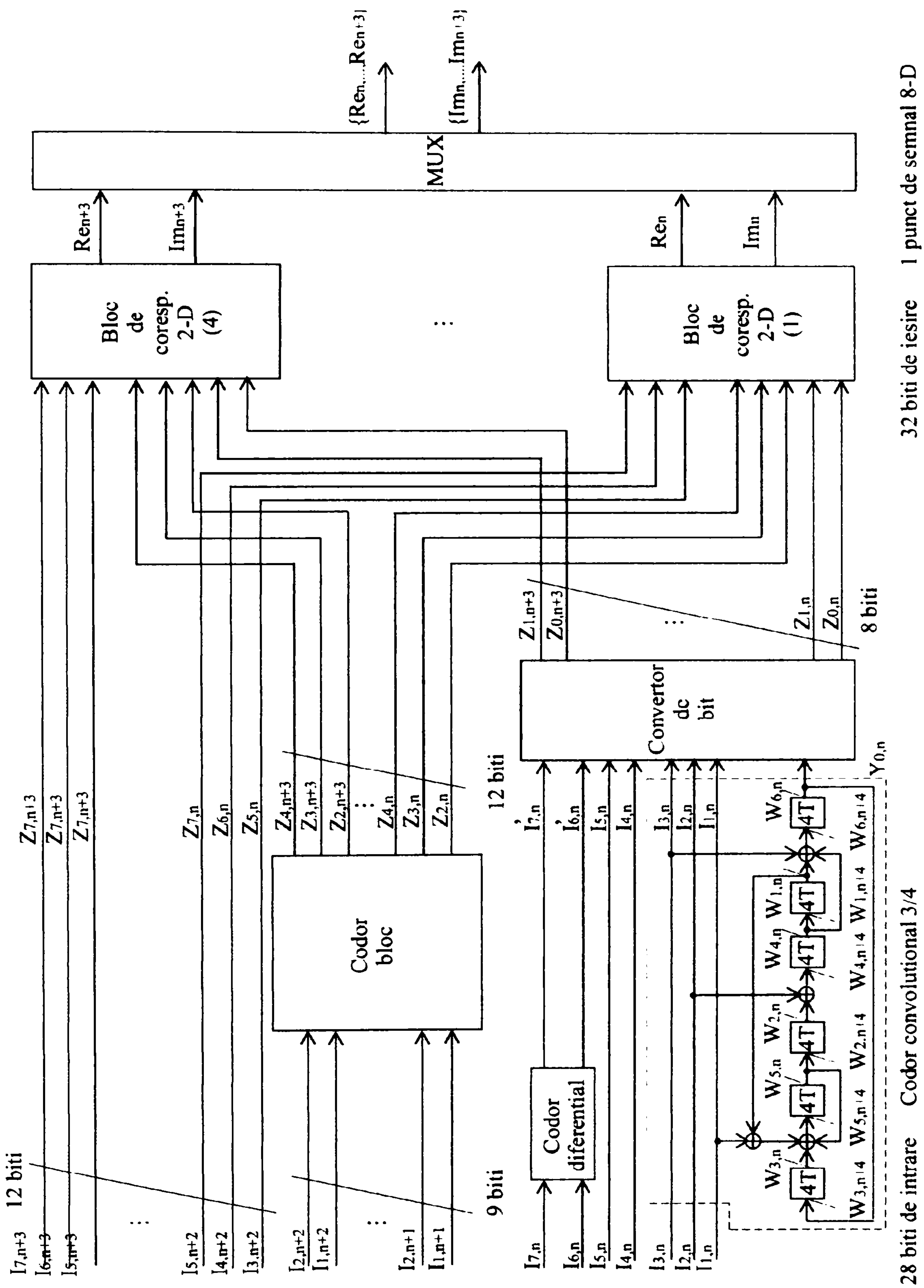
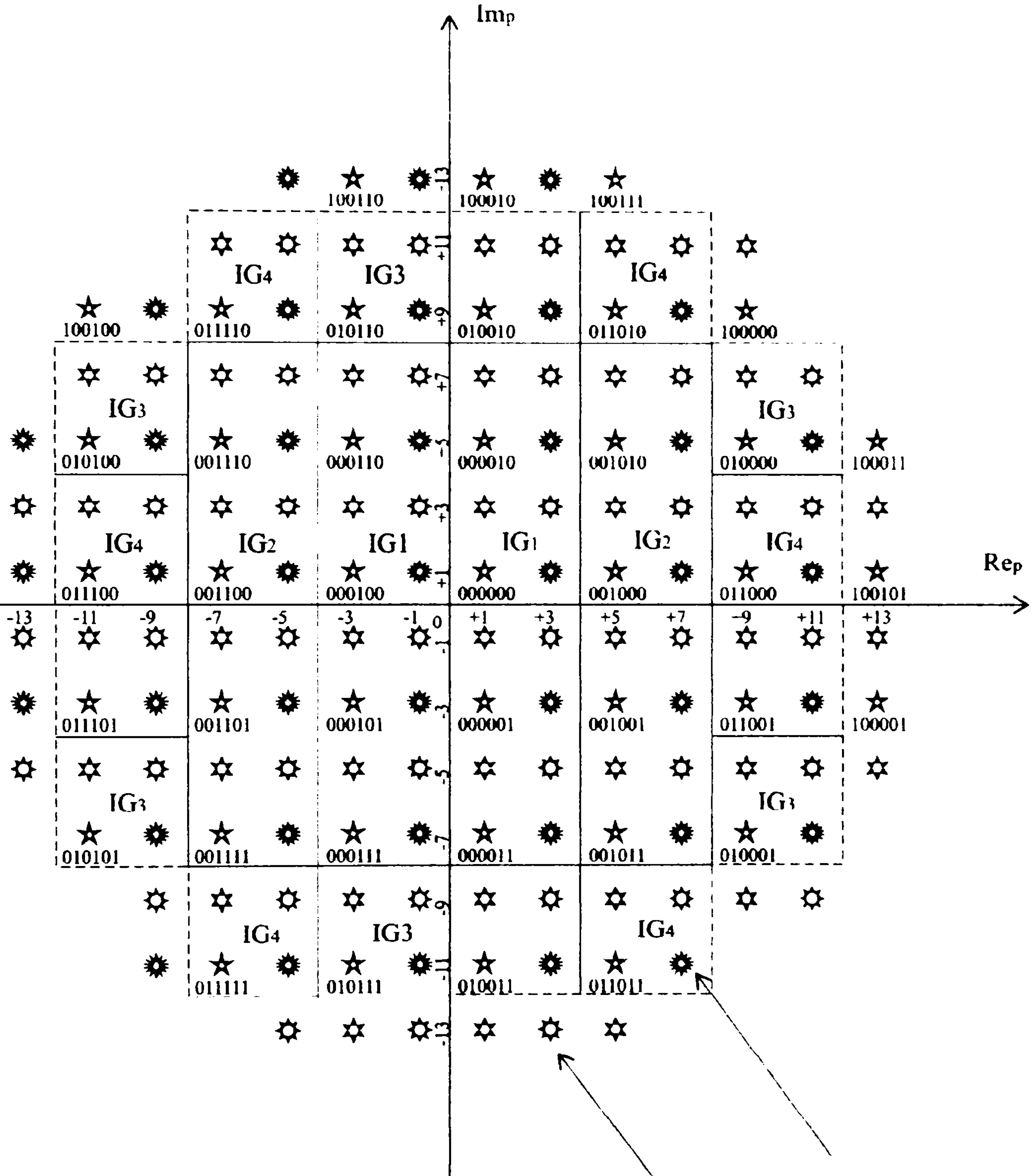


Fig.4.14 Schema bloc a codorului TCM 8-D cu rata 3/4 şi 64 stări (construcţia Wei).



=subsetul 2-D notat A

=subsetul 2-D notat B

=subsetul 2-D notat C

=subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3.

Fig.4.15 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 160 puncte de semnal 2-D (construcția Wei).

Prin concatenarea a 4 constelații de semnale 2-D constituente şi prin eliminarea punctelor de semnal 8-D care conțin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG se obține **constelația de semnale 8-D** cu $2^{4\times 7+1}=2^{29}$ puncte de semnal 8-D.

Se construiesc 64 **tipuri 8-D** cu MSED=$d^2=4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 4-D şi notate astfel (vezi relația 4.16) [16]:

$$(0, 0), (0, 1),\ldots,(7, 7)$$

unde i=0, 1,...,7 reprezintă indicele subseturilor 4-D notate S_i în paragraful 4.7.2.

Cele 64 tipuri 8-D sunt grupate în 16 **subseturi 8-D** (deci S=4) astfel încît MSED a fiecărui subset 8-D obținut să fie egală cu $d^2=4d_0^2$ (vezi relația 4.17) [16]:

$$\begin{cases} S_0=(0,0)\cup(1,1)\cup(2,2)\cup(3,3)\\ S_1=(0,1)\cup(1,0)\cup(2,3)\cup(3,2)\\ S_2=(0,2)\cup(1,3)\cup(2,0)\cup(3,1)\\ S_3=(0,3)\cup(1,2)\cup(2,1)\cup(3,0)\\ S_4=(4,4)\cup(5,5)\cup(6,6)\cup(7,7)\\ S_5=(4,5)\cup(5,4)\cup(6,7)\cup(7,6)\\ S_6=(4,6)\cup(5,7)\cup(6,4)\cup(7,5)\\ S_7=(4,7)\cup(5,6)\cup(6,5)\cup(7,4)\\ S_8=(0,4)\cup(1,5)\cup(2,6)\cup(3,7)\\ S_9=(0,5)\cup(1,4)\cup(2,7)\cup(3,6)\\ S_{10}=(0,6)\cup(1,7)\cup(2,4)\cup(3,5)\\ S_{11}=(0,7)\cup(1,6)\cup(2,5)\cup(3,4)\\ S_{12}=(4,0)\cup(5,1)\cup(6,2)\cup(7,3)\\ S_{13}=(4,1)\cup(5,0)\cup(6,3)\cup(7,2)\\ S_{14}=(4,2)\cup(5,3)\cup(6,0)\cup(7,1)\\ S_{15}=(4,3)\cup(5,2)\cup(6,1)\cup(7,0) \end{cases}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° nu au loc transformări ale subseturilor 8-D, cu alte cuvinte subseturile 8-D sunt invariante la aceste rotații [16].

Subseturile 8-D sunt grupate în 2 **familii 8-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 8-D să conțină F=8 subseturi 8-D (vezi relația 4.18) [16]:

$$\begin{cases} F_0=S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7\\ F_1=S_8\cup S_9\cup S_{10}\cup S_{11}\cup S_{12}\cup S_{13}\cup S_{14}\cup S_1 \end{cases}$$

În acest caz avem m=3 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 3/4 şi cu V=2^6=64 stări. De asemenea, restul şi cîtul împărțirii lui Nu=8 la Q=7 sunt r=1 şi respectiv c=1.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=8 subseturi (vezi relația 4.19) [16]:

$$\{8i + j \mid 0 \le i \le 7, 0 \le j \le 7\}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+4}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=8 subseturi (vezi relația 4.20) [16]:

$$\{8j + k \mid 0 \le j \le 7, 0 \le k \le 7\}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 7$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă $8i+j$, $0 \le i \le 7$ și fiecare stare următoare $8j+k$, $0 \le k \le 7$.

Asignarea subseturilor 8-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 8-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 8-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele și să aparțină aceleași familii 8-D.

Același considerent se aplică și pentru subseturile 8-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=0$) sunt asignate subseturi 8-D din familia 8-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{6,n}=1$) sunt asignate subseturi 8-D din familia 8-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 8-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală decît $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 8-D (MSED de intersubset 8-D să fie mai mare sau cel puțin egală cu MSED de intrasubset 8-D).

Această cerință garantează că MSED dintre două secvențe de puncte de semnal 8-D este $d^2 = 4d_0^2$ și elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 8-D față de secvența corectă de puncte de semnal 8-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 8-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiați ai unui punct de semnal 8-D și aflați într-un subset 8-D cu un număr finit de puncte de semnal 8-D. În acest caz N_{free}=240 per punct de semnal 8-D (N_{free}=60 per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 8-D este mai mic decît 240.

3. Dacă X este subsetul 8-D asociat cu tranzițiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+4} și dacă X_1, X_2, X_3 sunt subseturile 8-D obținute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270° atunci $X=X_1=X_2=X_3$.

Acestă cerință garantează că vom obține un cod TCM 4-D transparent la toate ambiguitățile de fază ale constelației de semnale 8-D, cu alte cuvinte un cod TCM 8-D invariant rotațional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguități de fază a constelației de semnale 8-D (0°, 90°, 180°, 270°) se folosește un **codor diferențial** pe 2 biți (vezi relația 4.21) [16]:

$$(I'_{6,n} I'_{7,n}) = (I'_{6,n-4} I'_{7,n-4} + I_{6,n} I_{7,n}) \mathrm{mod} 4$$

deci în acest caz avem a=7 și b=0.

Convertorul de bit convertește cei 8 biți de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I_{4,n}$, $I_{5,n}$, $I'_{6,n}$, $I_{7,n}$ în 4 grupuri de cîte 2 biți fiecare (vezi relația 4.22) [16]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$$

care selectează 4 subseturi 2-D, corespunzătoare tipului 8-D selectat în cadrul subsetului 8-D utilizat.

Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3 și subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcționarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.5.

Am notat cu S_i subseturile 8-D și astfel indexul i este furnizat de relația:

$$i = 8Y_{0,n} + 4I_{1,n} + 2I_{2,n} + I_{3,n},\ i = 0, 1, \ldots, 15 \qquad (4.143)$$

Codorul bloc folosește cei 9 biți $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I_{3,n+1}$, $I_{4,n+1}$, $I_{5,n+1}$, $I_{6,n+1}$, $I_{7,n+1}$, $I_{1,n+2}$, $I_{2,n+2}$ pentru a genera 4 grupuri de cîte 3 biți fiecare (vezi relația 4.23) [16]:

$$Z_{2,p},\ Z_{3,p},\ Z_{4,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$$

care selectează pentru cele 4 subseturi 2-D utilizate primul sfert al grupului intern IG_1, al doilea sfert al grupului intern IG_2, al treilea sfert al grupului intern IG_3, al patrulea sfert al grupului intern IG_4 sau subgrupul extern de energie mică OG_L.

Corespondența dintre cei 3 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3 și grupurile constelației de semnale 2-D este prezentată în Tabelul 4.19 iar funcționarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.7.

Cele 4 grupuri de cîte 3 biți fiecare (vezi relația 4.24) [16]:

$$Z_{5,p},\ Z_{6,p},\ Z_{7,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$$

selectează pentru fiecare din cele 4 subseturi 2-D utilizate, cîte un punct de semnal 2-D din grupul constelației de semnale 2-D selectat anterior.

Cîștigul de codare asimptotic al codului TCM 8-D față de o transmisie necodată este conform relației (4.134):

$$\gamma = 10\log_{10}\left(4\frac{1}{\frac{37}{32}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{128}{37}\right) \cong 5{,}39008\ [\mathrm{dB}] \qquad (4.144)$$

Tabelul 4.1 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ și subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.5 Convertorul de bit

Subset 8-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	Tip 8-D	$I'_{6,n}$	$I'_{7,n}$	Subset 2-D	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$	$Z_{0,n+3}$	$Z_{1,n+3}$
0	0	0	0	0	0	0	(0, 0)	0	0	(A, A)∪(A, A)	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0		0	1	(A, A)∪(B, B)	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0		1	0	(B, B)∪(A, A)	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0		1	1	(B, B)∪(B, B)	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	1	(1, 1)	0	0	(C, C)∪(C, C)	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	0	0	0	0	1		0	1	(C, C)∪(D, D)	1	0	1	0	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	1		1	0	(D, D)∪(C, C)	1	1	1	1	1	0	1	0
	0	0	0	0	0	1		1	1	(D, D)∪(D, D)	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	1	0	(2, 2)	0	0	(A, B)∪(A, B)	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	0		0	1	(A, B)∪(B, A)	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0		1	0	(B, A)∪(A, B)	0	1	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	0		1	1	(B, A)∪(B, A)	0	1	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	1	(3, 3)	0	0	(C, D)∪(C, D)	1	0	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1		0	1	(C, D)∪(D, C)	1	0	1	1	1	1	1	0
	0	0	0	0	1	1		1	0	(D, C)∪(C, D)	1	1	1	0	1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1		1	1	(D, C)∪(D, C)	1	1	1	0	1	1	1	0
...																		
15	1	1	1	1	0	0	(4, 3)	0	0	(A, C)∪(C, D)	0	0	1	0	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	0		0	1	(A, C)∪(D, C)	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	0		1	0	(B, D)∪(C, D)	0	1	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	0	0		1	1	(B, D)∪(D, C)	0	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	0	1	(5, 2)	0	0	(C, B)∪(A, B)	1	0	0	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	0	1		0	1	(C, B)∪(B, A)	1	0	0	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	0	1		1	0	(D, A)∪(A, B)	1	1	1	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	0	1		1	1	(D, A)∪(B, A)	1	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	(6, 1)	0	0	(A, D)∪(C, C)	0	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	0		0	1	(A, D)∪(D, D)	0	0	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	0		1	0	(B, C)∪(C, C)	0	1	1	0	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	0		1	1	(B, C)∪(D, D)	0	1	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	(7, 0)	0	0	(C, A)∪(A, A)	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1		0	1	(C, A)∪(B, B)	1	0	0	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	1	1		1	0	(D, B)∪(A, A)	1	1	0	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1		1	1	(D, B)∪(B, B)	1	1	0	1	0	1	0	1

Tabelul 4.19 Corespondența dintre cei 3 biți $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$ $Z_{4,p}$ și grupurile constelației de semnale 2-D

$Z_{2,p}$	$Z_{3,p}$	$Z_{4,p}$	Grup constelație de semnale 2-D
0	0	0	IG_1
0	0	1	IG_2
0	1	0	IG_3
0	1	1	IG_4
1	0	0	OG_L

Tabelul 4.7 Codorul bloc

$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$	$Z_{2,n+3}$	$Z_{3,n+3}$	$Z_{4,n+3}$
0	X	X	0	$I_{2,n+1}$	$I_{3,n+1}$	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	0	0	1	0	0	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	0	1	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	1	0	0	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	1	0	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	1	0	0	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$
1	1	1	0	$I_{4,n+1}$	$I_{5,n+1}$	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	0	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	1	0	0

4.7.4 Codul TCM 12-D, cu rata 4/5 şi cu 256 stări

Am considerat transmisia a Q=7 biţi/interval de semnalizare 2-D. Schema bloc a codorului TCM 12-D cu rata 4/5 şi 256 stări am prezentat-o în Fig.4.24.

În acest caz N=6 nu este o putere a lui 2 deci am obţinut conform relaţiilor (4.125):

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{I(4K_0')}{2^Q} = \dfrac{3}{16} \\ \alpha = \dfrac{4}{I(4K_0')} = \dfrac{1}{6} \\ P = K_0' = 4 \\ N - P = 2 \\ I(4K_0') = \dfrac{2^Q + 4K_0'}{N} = 24 \\ CER_0 = \dfrac{1}{2N}(2N + 1 + \dfrac{1}{N}) = \dfrac{79}{72} \cong 1{,}09722 \\ CER = CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}] \cong 1{,}09733 \\ PAR = \dfrac{2(1+\beta)}{CER_0 + \dfrac{(1-\alpha)}{2}[\dfrac{1}{N(1-\alpha)} - \beta][\beta - \dfrac{1}{N}]} \cong 2{,}16434 \end{cases} \qquad (4.145)$$

Constelaţia de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 12-D este un subset finit al latticei $(2\mathbf{Z}+1)^2$ (**Z** = mulţimea numerelor întregi) şi este formată din 152 puncte de semnal 2-D:

- 2^7=128 puncte de semnal 2-D în grupul IG,
- 20 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_L,
- 4 puncte de semnal 2-D în subgrupul OG_H.

Am partiţionat constelaţia de semnale 2-D (Fig.4.257) constituentă în $U=2^u=4$ **subseturi 2-D**:

- ⇒ $A=(4\mathbf{Z}+1)^2$,
- ⇒ $B=(4\mathbf{Z}+3)^2$,
- ⇒ $C=(4\mathbf{Z}+1)(4\mathbf{Z}+3)$,
- ⇒ $D=(4\mathbf{Z}+3)(4\mathbf{Z}+1)$.

Dacă constelaţia de semnale 2-D constituentă are MSED=d_0^2 atunci subseturile 2-D au MSED de intrasubset egală cu $d^2 = 4d_0^2$. Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 2-D (vezi relaţia 4.3) [42]: A→C→B→D→A.

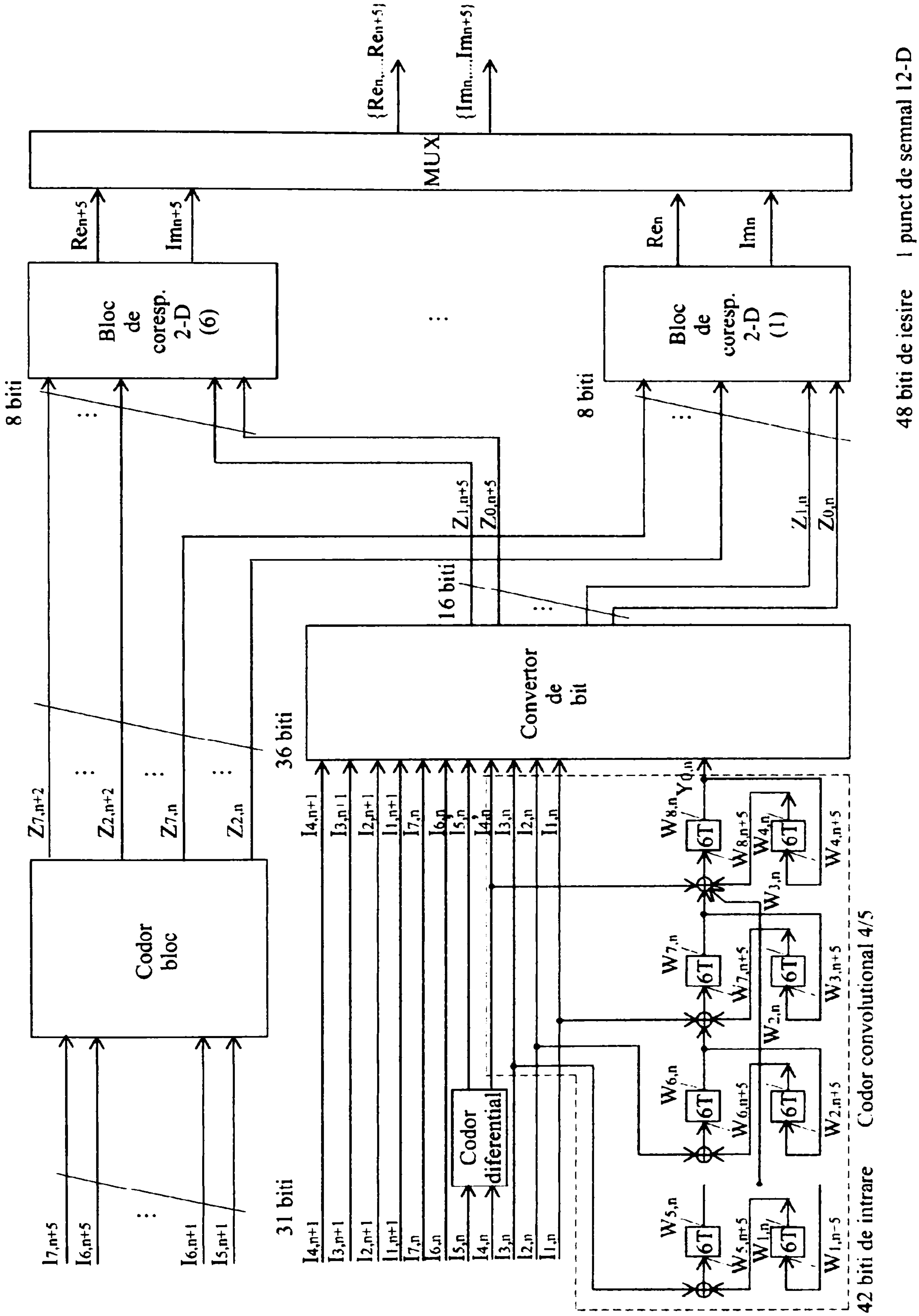
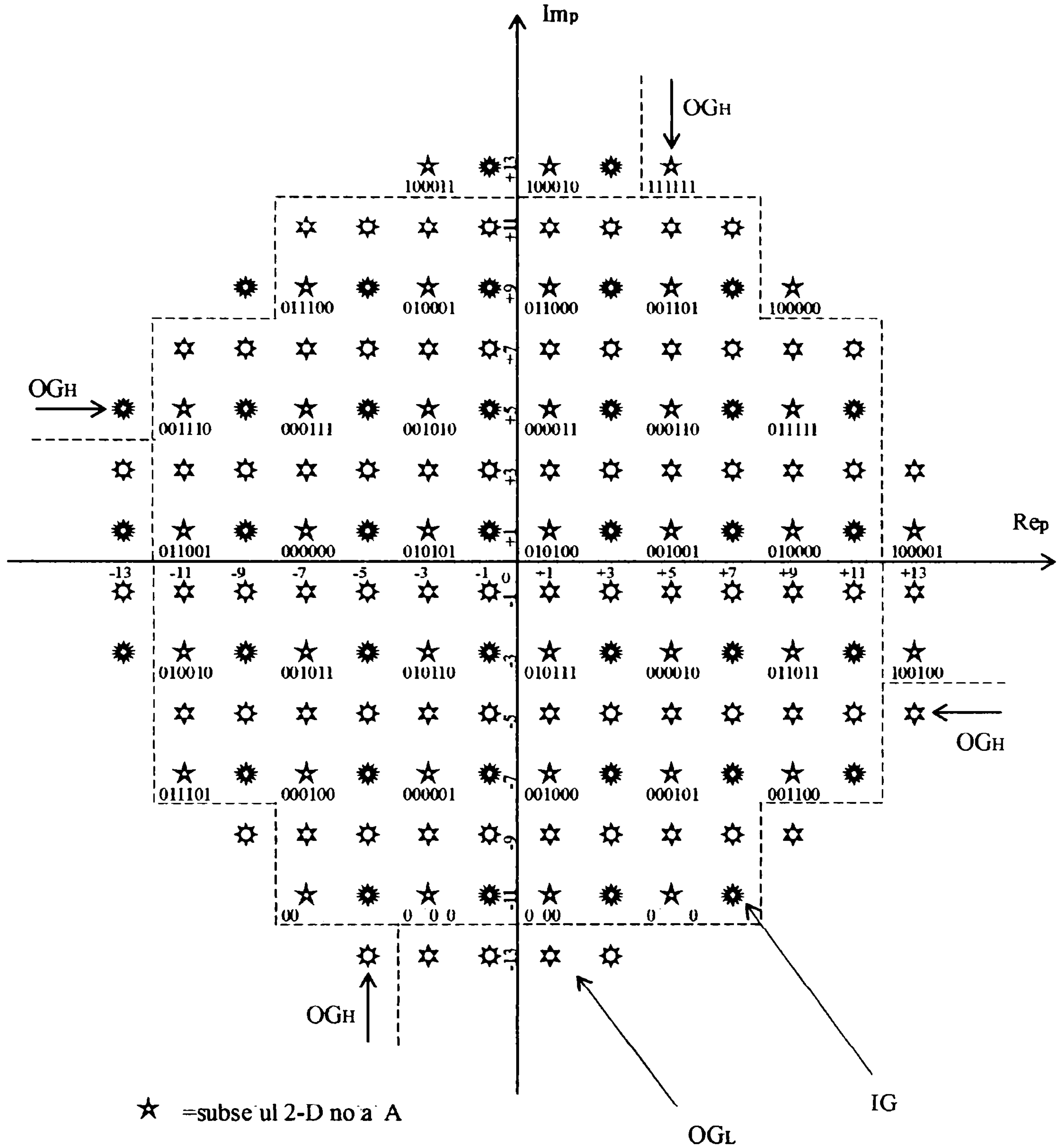


Fig.4.24 Schema bloc a codorului TCM 12-D cu rata 4/5 şi 256 stări (construcţia propusă).



★ =subse ul 2-D no a A

✡ =subsetul 2-D notat B

✡ =subsetul 2-D notat C

✸ =subsetul 2-D notat D

Numărul dedesubtul fiecărui punct de semnal 2-D este $Z_{2,p}$, $Z_{3,p}$, $Z_{4,p}$, $Z_{5,p}$, $Z_{6,p}$, $Z_{7,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5.

Fig.4.25 Constelația de semnale 2-D constituentă cu 152 puncte de semnal 2-D (construcția propusă).

Prin concatenarea a 6 constelații de semnale 2-D constituente şi prin eliminarea punctelor de semnal 12-D care conțin mai mult decît un singur punct de semnal 2-D din grupul extern OG se obține **constelația de semnale 12-D** cu $2^{6x7+1}=2^{43}$ puncte de semnal 6-D.

Se construiesc 256 **tipuri 12-D** cu MSED=$d^2 = 4d_0^2$ prin concatenarea a cîte 2 subseturi 6-D şi notate astfel (vezi relaţia 4.51) [42]:

$$(0, 0), (0, 1), \ldots, (15, 15)$$

unde i=0, 1,...,15 reprezintă indicele subseturilor 6-D notate S_i în paragraful 4.7.3.

Cele 256 tipuri 12-D sunt grupate în 32 **subseturi 12-D** (deci S=8) astfel încît MSED a fiecărui subset 12-D obţinut să fie egală cu $d^2 = 4d_0^2$ (vezi relaţia 4.52) [42]:

$$\begin{cases}
S_0=(0,0)\cup(2,2)\cup(4,4)\cup(6,6)\cup(8,8)\cup(10,10)\cup(12,12)\cup(14,14)\\
S_1=(0,3)\cup(2,5)\cup(4,7)\cup(6,1)\cup(8,11)\cup(10,13)\cup(12,15)\cup(14,9)\\
S_2=(0,4)\cup(2,6)\cup(4,0)\cup(6,2)\cup(8,12)\cup(10,14)\cup(12,8)\cup(14,10)\\
S_3=(0,7)\cup(2,1)\cup(4,3)\cup(6,5)\cup(8,15)\cup(10,9)\cup(12,11)\cup(14,13)\\
S_4=(0,2)\cup(2,0)\cup(4,6)\cup(6,4)\cup(8,10)\cup(10,8)\cup(12,14)\cup(14,12)\\
S_5=(0,5)\cup(2,3)\cup(4,1)\cup(6,7)\cup(8,13)\cup(10,11)\cup(12,9)\cup(14,15)\\
S_6=(0,6)\cup(2,4)\cup(4,2)\cup(6,0)\cup(8,14)\cup(10,12)\cup(12,10)\cup(14,8)\\
S_7=(0,1)\cup(2,7)\cup(4,5)\cup(6,3)\cup(8,9)\cup(10,15)\cup(12,13)\cup(14,11)\\
S_8=(0,8)\cup(2,10)\cup(4,12)\cup(6,14)\cup(8,0)\cup(10,2)\cup(12,4)\cup(14,6)\\
S_9=(0,11)\cup(2,13)\cup(4,15)\cup(6,9)\cup(8,3)\cup(10,5)\cup(12,7)\cup(14,1)\\
S_{10}=(0,12)\cup(2,14)\cup(4,8)\cup(6,10)\cup(8,4)\cup(10,6)\cup(12,0)\cup(14,2)\\
S_{11}=(0,15)\cup(2,9)\cup(4,11)\cup(6,13)\cup(8,7)\cup(10,1)\cup(12,3)\cup(14,5)\\
S_{12}=(0,10)\cup(2,8)\cup(4,14)\cup(6,12)\cup(8,2)\cup(10,0)\cup(12,6)\cup(14,4)\\
S_{13}=(0,13)\cup(2,11)\cup(4,9)\cup(6,15)\cup(8,5)\cup(10,3)\cup(12,1)\cup(14,7)\\
S_{14}=(0,14)\cup(2,12)\cup(4,10)\cup(6,8)\cup(8,6)\cup(10,4)\cup(12,2)\cup(14,0)\\
S_{15}=(0,9)\cup(2,15)\cup(4,13)\cup(6,11)\cup(8,1)\cup(10,7)\cup(12,5)\cup(14,3)\\
S_{16}=(1,1)\cup(3,3)\cup(5,5)\cup(7,7)\cup(9,9)\cup(11,11)\cup(13,13)\cup(15,5)\\
S_{17}=(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)\cup(7,0)\cup(9,10)\cup(11,12)\cup(13,14)\cup(15,8)\\
S_{18}=(1,5)\cup(3,7)\cup(5,1)\cup(7,3)\cup(9,13)\cup(11,15)\cup(13,9)\cup(15,11)\\
S_{19}=(1,6)\cup(3,0)\cup(5,2)\cup(7,4)\cup(9,14)\cup(11,8)\cup(13,10)\cup(15,12)\\
S_{20}=(1,7)\cup(3,5)\cup(5,3)\cup(7,1)\cup(9,15)\cup(11,13)\cup(13,11)\cup(15,9)\\
S_{21}=(1,0)\cup(3,6)\cup(5,4)\cup(7,2)\cup(9,8)\cup(11,14)\cup(13,12)\cup(15,10)\\
S_{22}=(1,3)\cup(3,1)\cup(5,7)\cup(7,5)\cup(9,11)\cup(11,9)\cup(13,15)\cup(15,13)\\
S_{23}=(1,4)\cup(3,2)\cup(5,0)\cup(7,6)\cup(9,12)\cup(11,10)\cup(13,8)\cup(15,14)\\
S_{24}=(1,9)\cup(3,11)\cup(5,13)\cup(7,15)\cup(9,1)\cup(11,3)\cup(13,5)\cup(15,7)\\
S_{25}=(1,10)\cup(3,12)\cup(5,14)\cup(7,8)\cup(9,2)\cup(11,4)\cup(13,6)\cup(15,0)\\
S_{26}=(1,13)\cup(3,15)\cup(5,9)\cup(7,11)\cup(9,5)\cup(11,7)\cup(13,1)\cup(15,3)\\
S_{27}=(1,14)\cup(3,8)\cup(5,10)\cup(7,12)\cup(9,6)\cup(11,0)\cup(13,2)\cup(15,4)\\
S_{28}=(1,15)\cup(3,13)\cup(5,11)\cup(7,9)\cup(9,7)\cup(11,5)\cup(13,3)\cup(15,1)\\
S_{29}=(1,8)\cup(3,14)\cup(5,12)\cup(7,10)\cup(9,0)\cup(11,6)\cup(13,4)\cup(15,2)\\
S_{30}=(1,11)\cup(3,9)\cup(5,15)\cup(7,13)\cup(9,3)\cup(11,1)\cup(13,7)\cup(15,5)\\
S_{31}=(1,12)\cup(3,10)\cup(5,8)\cup(7,14)\cup(9,4)\cup(11,2)\cup(13,0)\cup(15,6)
\end{cases}$$

Dacă se rotesc succesiv subseturile 2-D în sens orar cu cîte 90° au loc următoarele transformări ale subseturilor 12-D (vezi relația 4.53) [42]:

$$S_i \to S_{i+16} \to S_i,\ i = 0, 1, \ldots, 15$$

Subseturile 12-D sunt grupate în 2 **familii 12-D** cu MSED=$2d_0^2$ astfel încît fiecare familie 12-D să conțină F=16 subseturi 12-D (vezi relația 4.54) [42]:

$$\begin{cases} F_0 = S_0 \cup S_2 \cup S_4 \cup S_6 \cup S_8 \cup S_{10} \cup S_{12} \cup S_{14} \cup S_{16} \cup S_{18} \cup S_{20} \cup S_{22} \cup S_{24} \cup S_{26} \cup \\ \cup S_{28} \cup S_{30} \\ F_1 = S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9 \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{15} \cup S_{17} \cup S_{19} \cup S_{21} \cup S_{23} \cup S_{25} \cup S_{27} \cup \\ \cup S_{29} \cup S_{31} \end{cases}$$

În acest caz avem m=4 biți de la intrare care sunt codați cu un codor convoluțional cu rata de codare 4/5 și $V=2^8=256$ stări. De asemenea, restul și cîtul împărțirii lui Nu=12 la Q=7 sunt r=5 și respectiv c=1.

Setul stărilor curente $\{\sigma_n\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=16 subseturi (vezi relația 4.55) [42]:

$$\{16i + j \mid 0 \le i \le 15, 0 \le j \le 15\}$$

Setul stărilor următoare $\{\sigma_{n+6}\}$ a codorului convoluțional se partiționează în F=16 subseturi (vezi relația 4.56) [42]:

$$\{16j + k \mid 0 \le j \le 15, 0 \le k \le 15\}$$

Conectivitatea diagramei trellis se realizează astfel: pentru orice $0 \le j \le 15$ există tranziții de stare între fiecare stare curentă $16i+j$, $0 \le i \le 15$ și fiecare stare următoare $16j+k$, $0 \le k \le 15$.

Asignarea subseturilor 12-D la tranzițiile de stare ale codului TCM 12-D este realizată astfel încît să fie îndeplinite trei cerințe [16]:

1. Subseturile 12-D, asociate cu tranzițiile care pornesc dintr-o anumită stare, să difere unele de altele și să aparțină aceleași familii 12-D.

Același considerent se aplică și pentru subseturile 12-D asociate cu tranzițiile care ajung într-o anumită stare.

Conform acestei cerințe:

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări pare ($Y_{0,n}=W_{8,n}=0$) sunt asignate subseturi 12-D din familia 12-D notată F_0,

⇒ la tranzițiile care pornesc din stări impare ($Y_{0,n}=W_{8,n}=1$) sunt asignate subseturi 12-D din familia 12-D notată F_1.

2. MSED dintre două secvențe de subseturi 6-D, care corespund la două traiectorii distincte prin diagrama trellis, să fie mai mare sau egală cu $d_{free}^2 = d^2 = 4d_0^2$, care este MSED a fiecărui subset 6-D (MSED de intersubset 6-D să fie mai mare sau cel puțin

egală cu MSED de intrasubset 6-D).

Această cerință garantează că MSED dintre două secvențe de puncte de semnal 6-D este $d^2 = 4d_0^2$ şi elimină evenimentele eroare care diferă cu mai mult decît un punct de semnal 6-D față de secvența corectă de puncte de semnal 6-D.

Dacă se neglijează efectul de margine, atunci **coeficientul de eroare N_{free}** al codului TCM 12-D, este egal cu numărul vecinilor cei mai apropiați ai unui punct de semnal 12-D şi aflați într-un subset 12-D cu un număr finit de puncte de semnal 12-D. În acest caz N_{free}=6408 per punct de semnal 12-D (N_{free}=1068 per punct de semnal 2-D).

Dacă nu se neglijează efectul de margine, atunci coeficientul de eroare al codului TCM 12-D este mai mic decît 6408.

3. Dacă X este subsetul 12-D asociat cu tranzițiile din starea curentă σ_n în starea următoare σ_{n+6} şi dacă X_1 este subsetul 12-D obținut prin rotirea lui X cu 90° atunci se poate defini o funcție F_1 de corespondență între stările codului TCM 12-D astfel încît X_1 să fie asociat cu tranzițiile din starea curentă $F_1(\sigma_n)$ în starea următoare $F_1(\sigma_{n+6})$.

Pentru o rotație de 90° în sens orar se defineşte funcția F_1 astfel (vezi relația 4.57) [42]:

$$W_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}W_{5,n}W_{6,n}W_{7,n}W_{8,n} \rightarrow \overline{W}_{1,n}W_{2,n}W_{3,n}W_{4,n}\overline{W}_{5,n}W_{6,n}W_{7,n}W_{8,n}$$

unde bara deasupra înseamnă inversare binară.

Acestă cerință garantează că vom obține un cod TCM 12-D transparent la toate ambiguitățile de fază ale constelației de semnale 12-D, cu alte cuvinte un cod TCM 12-D invariant rotațional la 0°, 90°, 180°, 270°.

Pentru a suprima toate cele 4 ambiguități de fază a constelației de semnale 12-D (0°, 90°, 180°, 270°) se foloseşte un **codor diferențial** pe 2 biți (vezi relația 4.58) [42]:

$$(I'_{4,n}I'_{5,n}) = (I'_{4,n-6}I'_{5,n-6} + I_{4,n}I_{5,n})\text{mod}4$$

deci în acest caz avem a=5 şi b=0.

Convertorul de bit converteşte cei 12 biți de la intrarea sa $Y_{0,n}$, $I_{1,n}$, $I_{2,n}$, $I_{3,n}$, $I_{4,n}$, $I_{5,n}$, $I_{6,n}$, $I_{7,n}$, $I_{1,n+1}$, $I_{2,n+1}$, $I'_{3,n+1}$, $I'_{4,n+1}$ în 6 grupuri de cîte 2 biți fiecare (vezi relația 4.59) [42]:

$$Z_{0,p},\ Z_{1,p},\ p=n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$$

care selectează 6 subseturi 2-D corespunzătoare tipului 12-D selectat în cadrul subsetului 12-D utilizat.

Pentru a obține un cod TCM 12-D transparent la orice ambiguitate de fază a constelației de semnale 12-D trebuie sa fie îndeplinită cerința prezentată în continuare.

Dacă X este tipul 12-D asociat cu structura de biți $Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, I'_{4,n}I'_{5,n}, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$ atunci se notează cu X_1, X_2, X_3 tipurile 12-D obținute prin rotirea lui X cu 90°, 180°, 270°.

Dacă $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_1$, $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_2$, $(I'_{4,n}, I'_{5,n})_2$ sunt perechile de biți obținute prin translația perechii de biți $(I'_{4,n}, I'_{5,n})$ cu una, două sau trei poziții în secvența circulară 00→10→01→11→00, atunci tipurile 12-D asociate cu structurile de biți:

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n} I'_{5,n})_1, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n} I'_{5,n})_2, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$,

$Y_{0,n}, I_{1,n}, I_{2,n}, I_{3,n}, (I'_{4,n} I'_{5,n})_3, I_{6,n}, I_{7,n}, I_{1,n+1}, I_{2,n+1}, I_{3,n+1}, I_{4,n+1}$,

sunt X_1, X_2, X_3.

Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$, p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 și subseturile 2-D este prezentată în Tabelul 4.1 iar funcționarea convertorului de bit este prezentată în Tabelul 4.11.

Am notat cu S_i subseturile 12-D și astfel indexul i este furnizat de relația (vezi relația 4.60) [42]:

$$i = 16Y_{0,n} + 8I_{1,n} + 4I_{2,n} + 2I_{3,n} + I_{4,n}, \; i = 0, 1, \ldots, 31$$

Codorul bloc folosește cei 31 biți $I_{5,n+1}$, $I_{6,n+1}$, $I_{7,n+1}$, $I_{1,n+2}$, $I_{2,n+2}$, $I_{3,n+2}$ $I_{4,n+2}$, $I_{5,n+2}$, $I_{6,n+2}$, $I_{7,n+2}$, $I_{1,n+3}$, $I_{2,n+3}$, $I_{3,n+3}$ $I_{4,n+3}$, $I_{5,n+3}$, $I_{6,n+3}$, $I_{7,n+3}$, $I_{1,n+4}$, $I_{2,n+4}$, $I_{3,n+4}$ $I_{4,n+4}$, $I_{5,n+4}$, $I_{6,n+4}$, $I_{7,n+4}$, $I_{1,n+5}$, $I_{2,n+5}$, $I_{3,n+5}$ $I_{4,n+5}$, $I_{5,n+5}$, $I_{6,n+5}$, $I_{7,n+5}$ pentru a genera 6 grupuri de cîte 6 biți fiecare:

$$Z_{2,p}, Z_{3,p}, Z_{4,p}, Z_{5,p}, Z_{6,p}, Z_{7,p}, \; p=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 \tag{4.146}$$

care selectează pentru fiecare din cele 6 subseturi 2-D utilizate, punctul de semnal 2-D care va fi transmis. Funcționarea codorului bloc este prezentată în Tabelul 4.20.

Cîștigul de codare asimptotic al codului TCM 12-D față de o transmisie necodată este conform relației (4.134):

$$\gamma = 10\log_{10}\left(\frac{4}{1{,}098}\right) \cong 5{,}61722 \text{ [dB]} \tag{4.147}$$

Tabelul 4.1 Corespondența dintre cei 2 biți $Z_{0,p}$, $Z_{1,p}$ și subseturile 2-D

Subset 2-D	$Z_{0,p}$	$Z_{1,p}$
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tabelul 4.11 Convertorul de bit

Subset 12-D	$Y_{0,n}$	$I_{1,n}$	$I_{2,n}$	$I_{3,n}$	$I_{4,n}$	$I_{5,n}$	$I_{6,n}$	$I_{7,n}$	Tip 12-D	$I_{1,n+1}$	$I_{2,n+1}$	$I'_{3,n+1}$	$I'_{4,n+1}$	$Z_{0,n}$	$Z_{1,n}$	$Z_{0,n+1}$	$Z_{1,n+1}$	$Z_{0,n+2}$	$Z_{1,n+2}$	$Z_{0,n+3}$	$Z_{1,n+3}$	$Z_{0,n+4}$	$Z_{0,n+4}$	$Z_{0,n+5}$	$Z_{1,n+5}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	(0,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	(2,2)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
														0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelul 4.20 Codorul bloc

$Z_{5,n+2}$	$Z_{6,n+2}$	$Z_{7,n+2}$	$Z_{2,n+3}$	$Z_{3,n+3}$	$Z_{4,n+3}$	$Z_{5,n+3}$	$Z_{6,n+3}$	$Z_{7,n+3}$	$Z_{2,n+4}$	$Z_{3,n+4}$	$Z_{4,n+4}$	$Z_{5,n+4}$	$Z_{6,n+4}$	$Z_{7,n+4}$	$Z_{2,n+5}$	$Z_{3,n+5}$	$Z_{4,n+5}$	$Z_{5,n+5}$	$Z_{6,n+5}$	$Z_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
0	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
1	0	0	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	1	0	0	0	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	1	0	0	1	0	0	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	0	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	1	0	0	0	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	1	0	0	1	0	0	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	0	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	0	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	1	0	0	0	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$	1	0	0	1	0	0
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$
$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$	$I_{2,n+4}$	$I_{3,n+4}$	$I_{4,n+4}$	0	$I_{5,n+4}$	$I_{6,n+4}$	$I_{7,n+4}$	$I_{1,n+5}$	$I_{2,n+5}$	0	$I_{3,n+5}$	$I_{4,n+5}$	$I_{5,n+5}$	$I_{6,n+5}$	$I_{7,n+5}$

$I_{5,n+1}$	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$Z_{2,n}$	$Z_{3,n}$	$Z_{4,n}$	$Z_{5,n}$	$Z_{6,n}$	$Z_{7,n}$	$Z_{2,n+1}$	$Z_{3,n+1}$	$Z_{4,n+1}$	$Z_{5,n+1}$	$Z_{6,n+1}$	$Z_{7,n+1}$	$Z_{2,n+2}$	$Z_{3,n+2}$	$Z_{4,n+2}$
0	X	X	X	X	X	0	$I_{6,n+1}$	$I_{7,n+1}$	$I_{1,n+2}$	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	0	0	0	X	X	1	0	0	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	0	0	1	X	X	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	1	0	0	0	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	1	1	0	0	1	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	1	0	0	1	0	0	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	0	1	0	X	X	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	0	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$		0	0
1	1	1	0	1	0	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	1	0	0
1	0	1	1	X	X	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	0	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	0	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$
1	1	1	0	1	1	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$
1	1	0	0	X	X	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	0	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	0	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$
1	1	1	1	0	0	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$
1	1	0	1	X	X	0	$I_{2,n+2}$	$I_{3,n+2}$	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	0	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	0	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$
1	1	1	1	0	1	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$	$I_{4,n+3}$	$I_{5,n+3}$	$I_{6,n+3}$	0	$I_{7,n+3}$	$I_{1,n+4}$
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$
1	1	1	1	1	1	0	$I_{4,n+2}$	$I_{5,n+2}$	$I_{6,n+2}$	$I_{7,n+2}$	$I_{1,n+3}$	1	1	1	1	1	1	0	$I_{2,n+3}$	$I_{3,n+3}$

CAPITOLUL V
Modemuri analogice de bandă vocală cu modulaţie codată trellis multidimensională

5.1 Schema bloc funcţională

Schema bloc funcţională a unui modem analogic de bandă vocală cu TCM multidimensională 2N-D am prezentat-o în Fig.5.1 [58].

5.1.1 Cifratorul şi decifratorul

Cifratorul (scrambler) are 2 funcţii:

- facilitarea regenerării semnalului de tact la recepţie,
- distribuirea uniformă a energiei semnalului modulat QAM (Quadrature Amplitude Modulation) în întreaga banda de frecvenţe a canalului de comunicaţii.

Cifratorul este un registru de deplasare liniar cu reacţie înapoi şi este definit de un **polinom generator (generating polynomial)** [17]:

⇒ pentru modemul chemător: $GPC=1+x^{-18}+x^{-23}$ (Generating Polynomial Calling modem),

⇒ pentru modemul chemat: $GPA=1+x^{-5}+x^{-23}$ (Generating Polynomial Answering modem).

Cifratorul aleatorizează **secvenţa binară de date de intrare** $\{b_n\}$ adică converteşte această secvenţă într-o **secvenţă binară pseudoaleatoare** $\{c_n\}$ cu perioada $2^{23}-1=8\ 388\ 607$ biţi. O astfel de secvenţă binară pseudoaleatoare lungă nu necesită utilizarea unui **polinom de gardă** pentru a preveni apariţia la ieşirea cifratorului a unor structuri de bit repetate.

La transmisie, polinomul care reprezintă secvenţa de mesaj, se divide la polinomul generator GPC/GPA iar coeficienţii cîtului luaţi în ordine descrescătoare formează secvenţa de date transmisă (Fig.5.2).

La recepţie, polinomul care reprezintă secvenţa de date recepţionată, se multiplică cu polinomul generator GPC/GPA iar coeficienţii produsului luaţi în ordine descrescătoare formează secvenţa de mesaj (Fig.5.3).

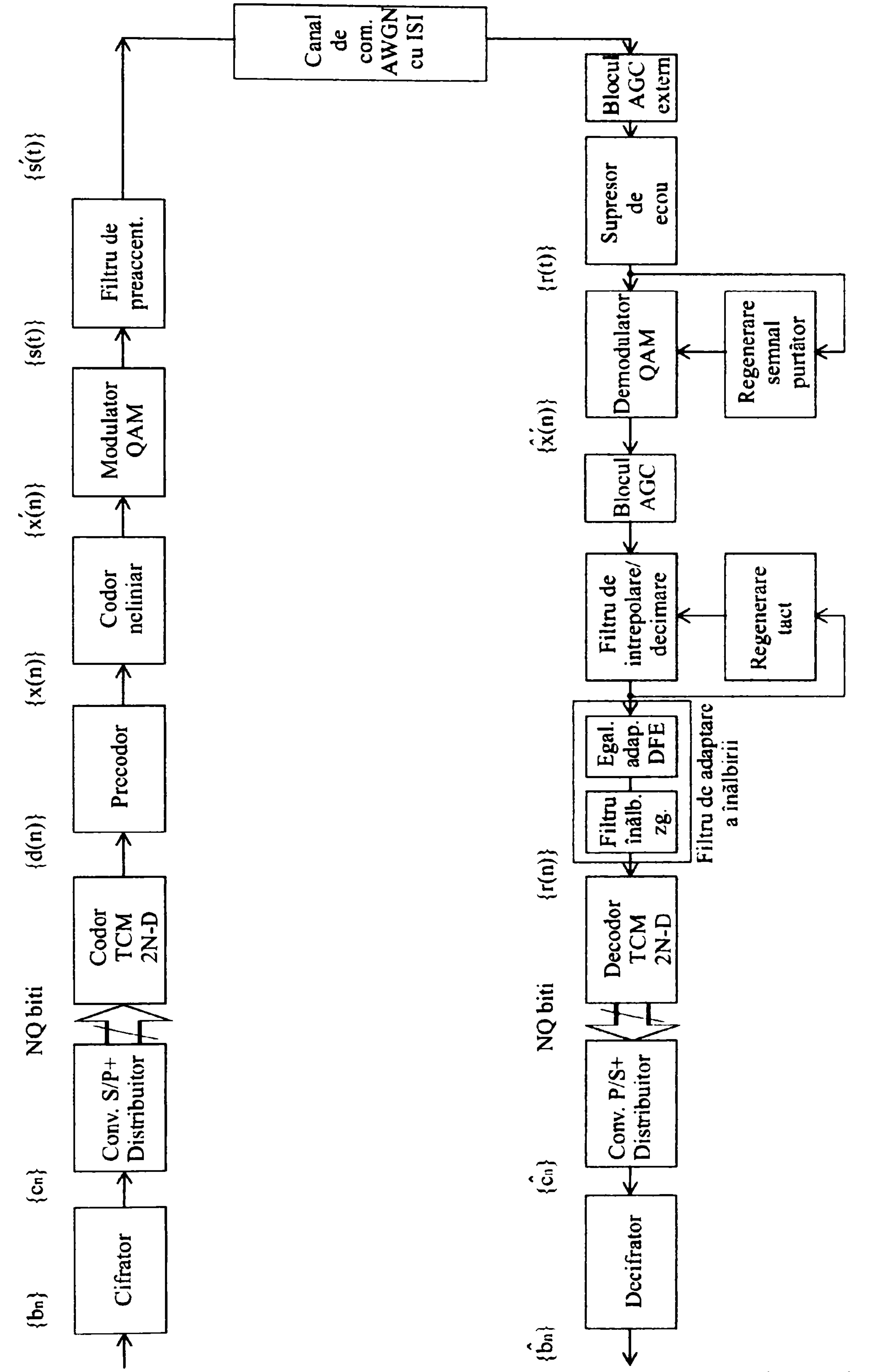
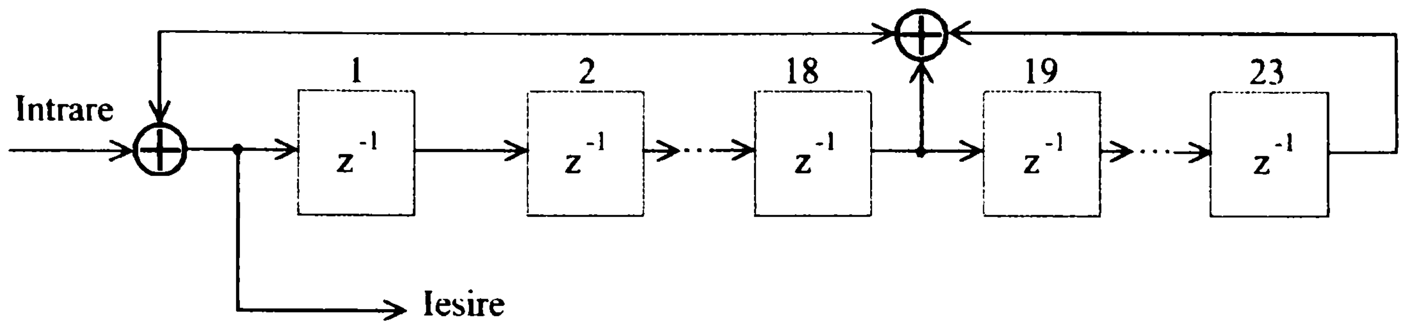
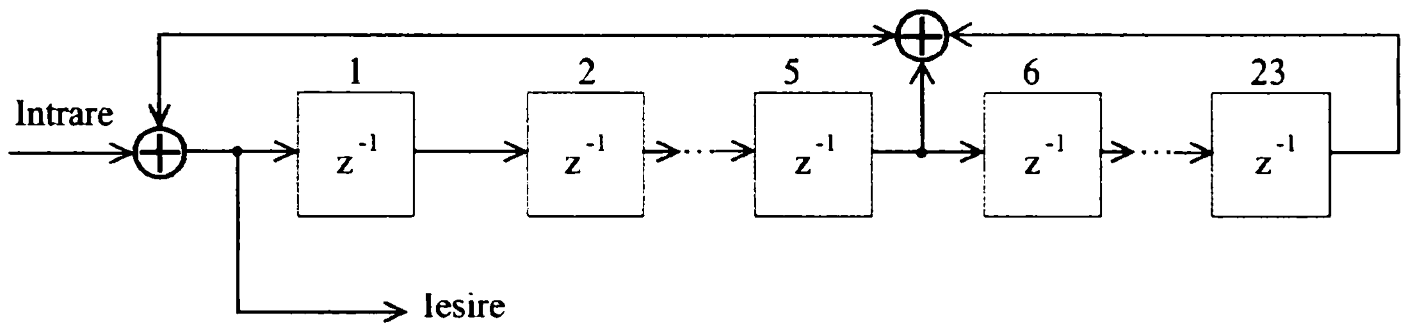


Fig.5.1 Schema bloc funcţională a unui modem analogic de bandă vocală cu TCM multidimensională 2N-D.

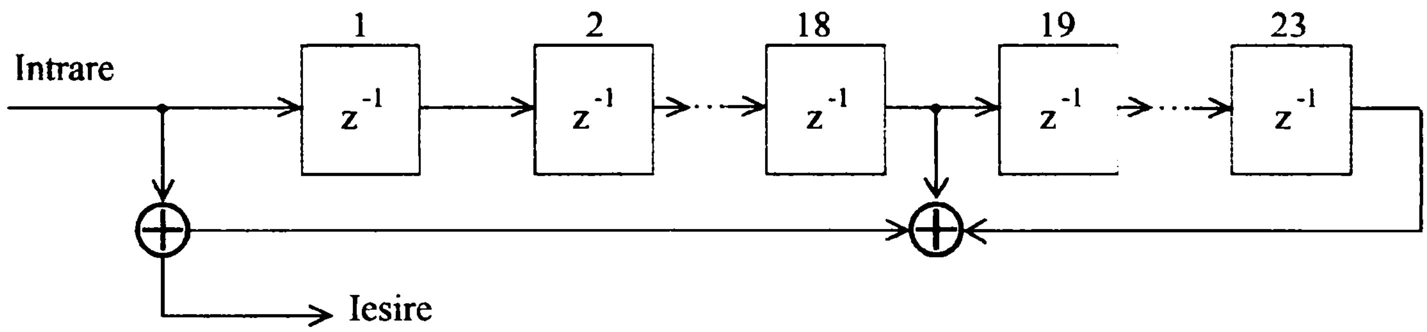


a) modem chemător

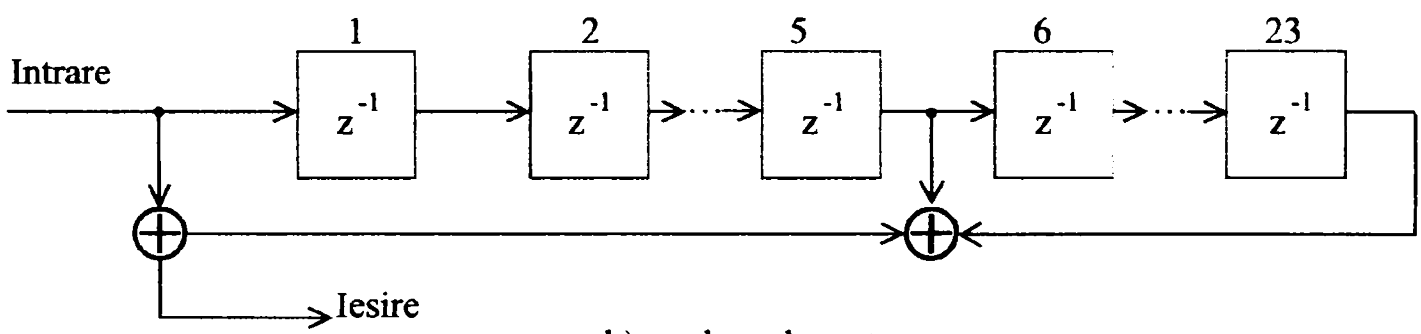


b) modem chemat

Fig.5.2 Cifrator (scrambler).



a) modem chemător



b) modem chemat

Fig.5.3 Decifrator (descrambler).

5.1.2 Convertorul serie/paralel şi convertorul paralel/serie

La transmisie, **convertorul serie/paralel (S/P)**, care este un registru de deplasare de lungime Q biți, realizează conversia serie/paralel a secvenței binare $\{c_n\}$ de la ieşirea cifratorului.

Pentru fiecare interval de semnalizare 2-D (interval de simbol 2-D) dintr-un grup de N intervale de semnalizare 2-D, distribuitorul asigură transmisia celor Q biţi de la ieşirea convertorului S/P spre cele Q intrări corespunzătoare ale codorului TCM 2N-D (Fig.5.4).

La recepţie, pentru fiecare interval de semnalizare 2-D dintr-un grup de N intervale de semnalizare 2-D, distribuitorul asigură transmisia celor Q biţi de la ieşirile corespunzătoare ale decodorului TCM 2N-D spre cele Q intrări ale **convertorului paralel/serie (P/S)**.

Convertorul P/S, care este un registru de deplasare de lungime Q biţi, realizează conversia paralel/serie a secvenţei binare de la ieşirea decodorului TCM 2N-D (Fig.5.5).

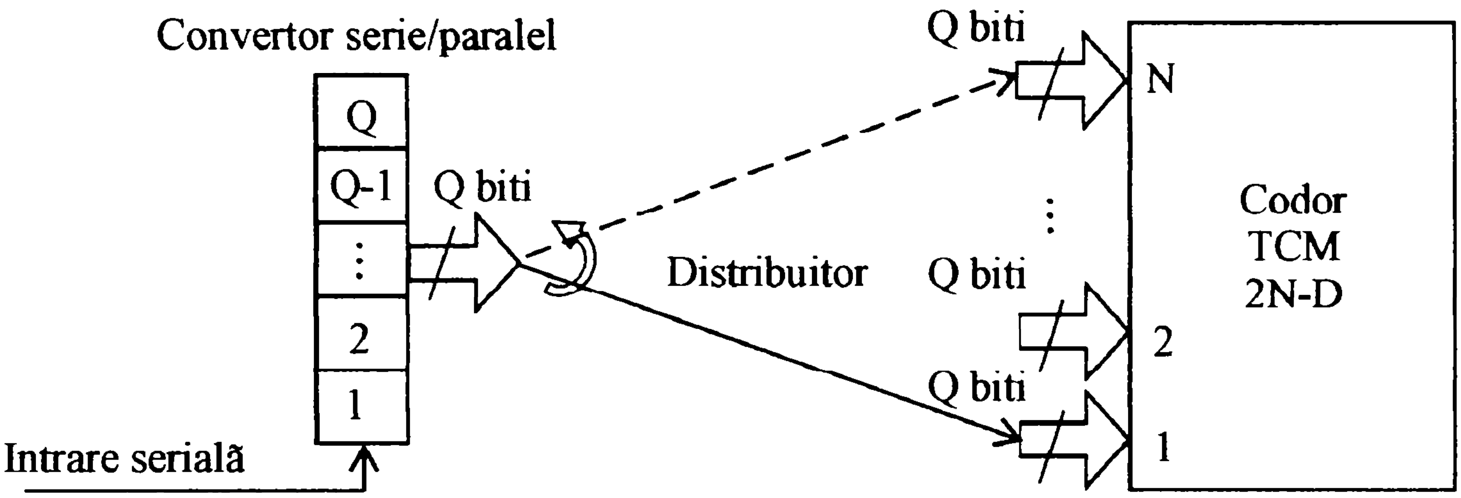


Fig.5.4 Convertor S/P + distribuitor.

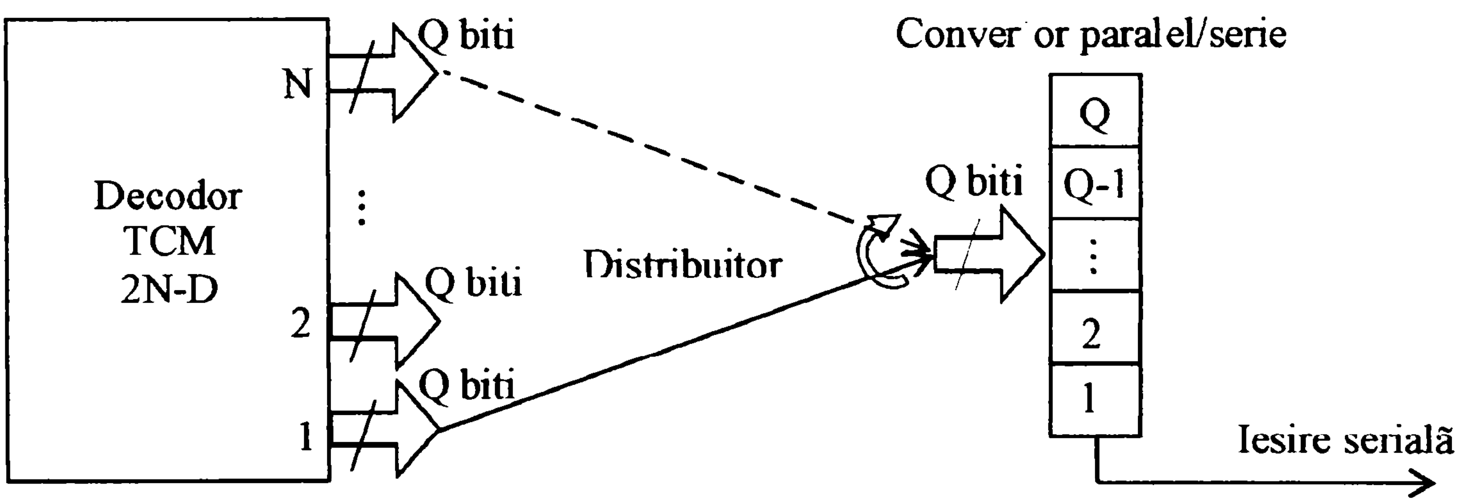


Fig.5.5 Convertor P/S + distribuitor.

5.1.3 Codorul neliniar

Distorsiunile neliniare sunt cauzate de cuantizarea de la codarea PCM (Pulse Code Modulation), a semnalelor analogice de bandă vocală, la intrarea într-o porţiune digitală a PSTN şi/sau de unele componente analogice (bobine de încărcare, transformatoare de linie) prezente în PSTN.

Întrucît distorsiunile neliniare afectează punctele de semnal 2-D din OG mai mult decît punctele de semnal 2-D din IG, **codarea neliniară (warping)** măreşte imunitatea la zgomot a punctelor de semnal 2-D din OG şi micşorează imunitatea la zgomot a punctelor de semnal 2-D din IG.

Cu alte cuvinte, codarea neliniară întinde porțiunea OG și strînge porțiunea IG a constelației de semnale 2-D [45, 55] (Fig.5.6).

În consecință, se mărește distanța euclidiană medie dintre punctele de semnal 2-D din OG și se micșorează distanța euclidiană medie dintre punctele de semnal 2-D din IG.

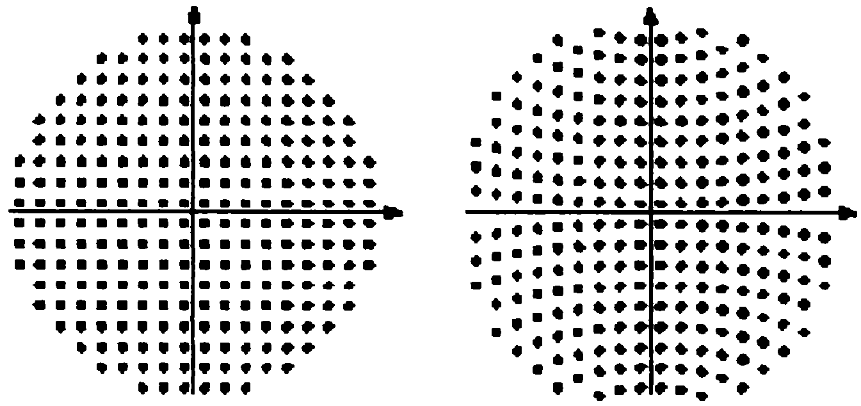


Fig.5.6 Efectul codării neliniare asupra constelației de semnale 2-D.

Secvența de intrare $\{x(n)\}$ este codată neliniar conform relației [17]:

$$x'(n)=\Phi(n)\,x(n) \tag{5.1}$$

unde:

$\Phi(n) = 1 + \frac{\xi(n)}{6} + \frac{\xi^2(n)}{120}$ este funcția de proiecție neliniară,

$$\xi(n) = \delta \frac{[x_r^2(n) + x_i^2(n)]}{\overline{[x_r^2(n) + x_i^2(n)]}}, \tag{5.2}$$

$\overline{[x_r^2(n) + x_i^2(n)]}$ este energia medie a secvenței de intrare $\{x(n)\}$,

δ este o constantă care se selectează în faza 4 a procedurii de negociere dintre modemul local și modemul distant și poate fi 0 sau 0,3125 [17].

5.1.4 Filtrul de preaccentuare

În faza 2 a procedurii de negociere dintre modemul local și modemul distant se determină [17]:

⇒ rata de bit=D_b [bit/s]

⇒ rata de simbol=v_m [Baud] sau [simboluri/s]:

$$v_m = \frac{a}{c} 2400 \pm 0{,}01\% \tag{5.3}$$

unde a şi c sunt constante (Tabelul 5.1)

$\Rightarrow$ frecvenţa semnalului purtător=f_p [Hz]:

$$f_p = \frac{d}{e} v_m \tag{5.4}$$

unde d şi e sunt constante (Tabelul 5.2).

Tabelul 5.1

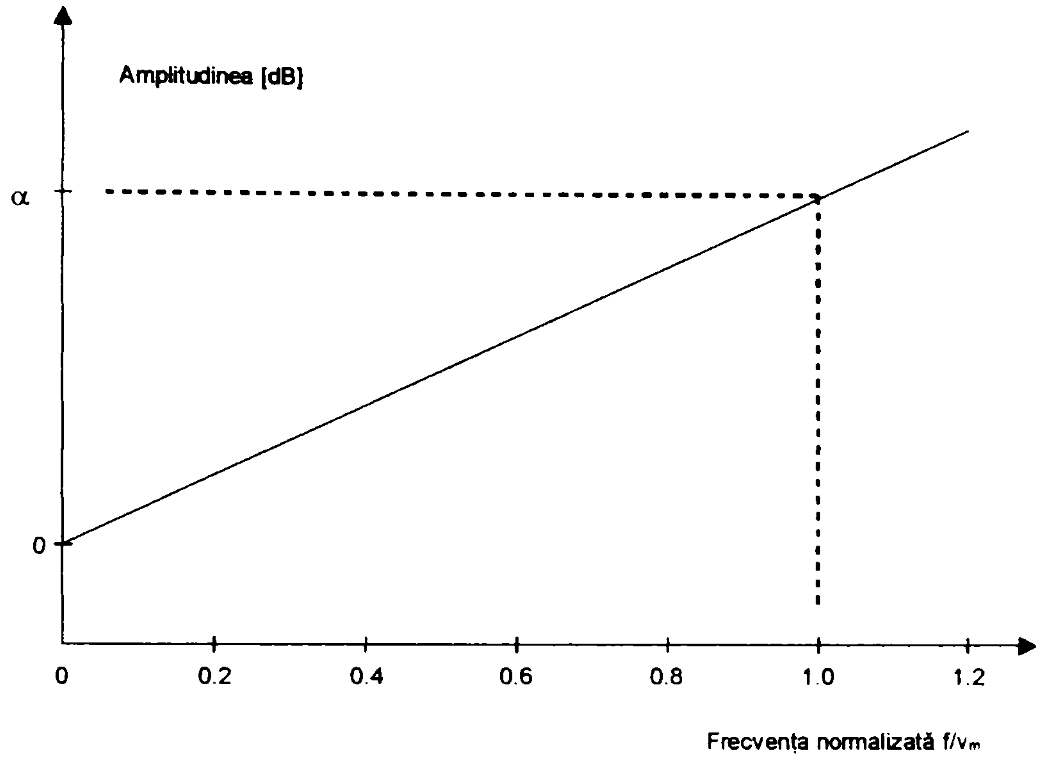
v_m [Baud]	a	c
2400	1	1
2743	8	7
2800	7	6
3000	5	4
3200	4	3
3429	10	7

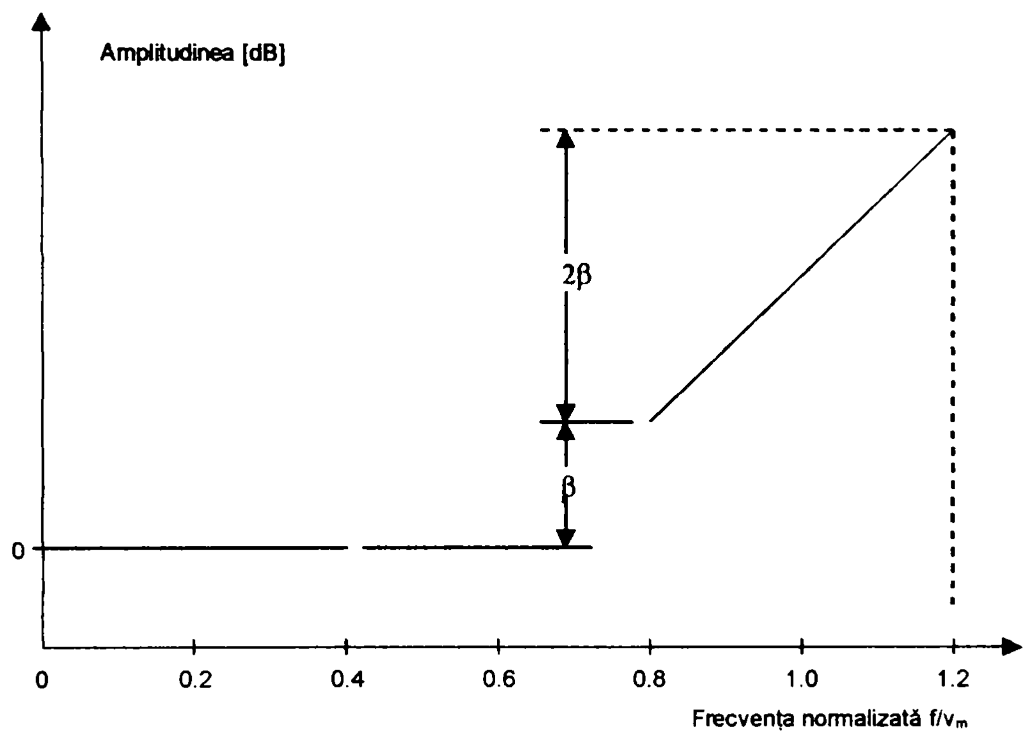
Tabelul 5.2

v_m [Baud]	Joasă frecvenţă			Înaltă frecvenţă		
	f_p [Hz]	d	e	f_p [Hz]	d	e
2400	1600	2	3	1800	3	4
2743	1646	3	5	1829	2	3
2800	1680	3	5	1867	2	3
3000	1800	3	5	2000	2	3
3200	1829	4	7	1920	3	5
3429	1959	4	7	1959	4	7

Filtrul de preaccentuare folosit este specificat printr-un index numeric i=0,1,2,...,10 care este furnizat de modemul distant în faza 2 a procedurii de negociere [17].

Amplitudinea spectrului de putere a semnalului transmis s'(t) trebuie să se încadreze între limitele precizate de graficele următoare pentru o frecvenţa normalizată $\frac{f}{v_m} \in [\frac{d}{e} - 0{,}45; \frac{d}{e} + 0{,}45]$ (Fig.5.7 şi Tabelul 5.3).





NOTĂ – Toleranța pentru amplitudinea spectrului de putere a semnalului transmis este ± 1 dB

Fig. 5.7 Amplitudinea spectrului de putere a semnalului transmis.

Tabelul 5.3 Indexul numeric al filtrului de preaccentuare

Index numeric	α [dB]	β [dB]
0	0	-
1	2	-
2	4	-
3	6	-
4	8	-
5	10	-
6	-	0,5
7	-	1
8	-	1,5
9	-	2
10	-	2,5

5.1.5 Egalizarea adaptivă

Egalizarea este procedura prin care se compensează distorsiunile de amplitudine şi de fază ale semnalului util introduse de canalul de comunicaţie.

Întrucît caracteristicile canalului de comunicaţie variază în timp se foloseşte o procedură de **egalizare adaptivă** care asigură o calitate constantă a transmisiei de date.

Se foloseşte o schemă de **egalizare adaptivă neliniară cu precodare Tomlinson-Harashima (THP=Tomlinson Harashima Precoding)** (Fig.5.8) [46, 47, 48].

Ideea este de împărţi egalizarea adaptivă între transmiţător şi receptor. Receptorul de date calculează coeficienţii optimali ai **egalizorului adaptiv cu reacţie decizională (DFE=Decision Feedback Equalizer)** în faza 2 a procedurii de negociere, după care îi transmite la transmiţător în faza 4 a procedurii de negociere [17]. Transmiţătorul de date utilizează aceşti coeficienţi de filtrare optimali pentru a **precoda (preegaliza)** semnalul util înainte de transmisia prin canalul de comunicaţie.

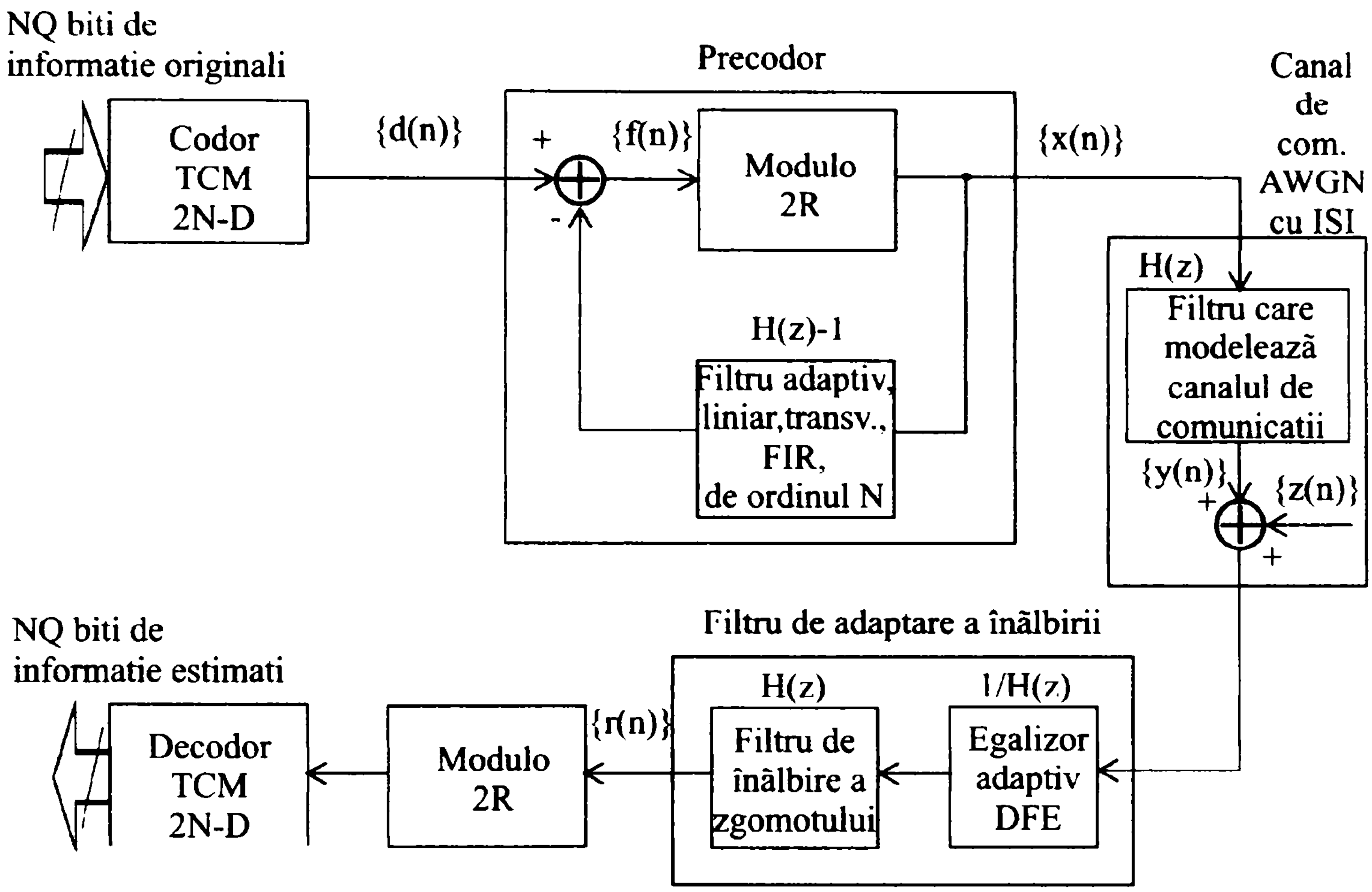


Fig.5.8 Schema de egalizare adaptivă neliniară cu precodare.

La transmisie secvenţa de date {d(n)} de la ieşirea codorului TCM 2N-D, este precodată astfel încît la ieşirea precodorului se obţine secvenţa transmisă {x(n)}.

La fiecare moment de timp discret n, se calculează simbolul f(n) prin scăderea din simbolul de date curent d(n) a contribuţiei ISI a simbolurilor transmise anterioare $\{x(n-i), i \geq 1\}$ [46, 47]:

$$f(n) = d(n) - \sum_{i \geq 1} h_i x(n-i) \tag{5.5}$$

unde $H(z)=1+h_1z^{-1}+h_2z^{-2}+\ldots$ este funcţia de transfer a canalului de comunicaţie modelat drept un canal AWGN cu ISI.

Simbolul transmis curent x(n) se obţine prin aplicarea operaţiei modulo-2R [46, 47]:

$$x(n) = f(n) - a(n) = d(n) - \sum_{i \geq 1} h_i x(n-i) - a(n) \tag{5.6}$$

unde R este partea întreagă din R_2 ($R=[R_2]$) şi simbolul $a(n) \in 2R\mathbf{Z}^2$.

Dacă se aplică transformata z se obţine [46, 47]:

$$X(z)=F(z)-A(z)=D(z)-A(z)-X(z)[H(z)-1] \Leftrightarrow X(z)H(z)=D(z)-A(z) \tag{5.7}$$

Dar X(z)H(z)=Y(z) deci rezultă că [46, 47]:

$$Y(z)=D(z)-A(z) \tag{5.8}$$

În absența zgomotului secvența de la ieșirea canalului de comunicație este egală cu secvența de date modificată [46, 47]:

$$y(n)=d(n)-a(n),\ a(n)\in 2R\mathbf{Z}^2 \tag{5.9}$$

Filtrul cu funcția de transfer H(z), care modelează canalul de comunicație, include efectele codorului neliniar, modulatorului QAM, filtrului de preaccentuare, anulatorului de ecou, demodulatorului QAM, blocului AGC (Automatic Gain Control) , filtrului de interpolare/decimare.

La recepție, egalizorul adaptiv DFE îndepărtează ISI iar **filtrul de înălbire a zgomotului (whitening noise filter)** (care de fapt este un filtru de predicție a erorii) reduce varianța zgomotului de la ieșirea egalizorului adaptiv DFE prin **cîștigul de predicție**:

$$\gamma_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{|H(f)|^2}df \tag{5.10}$$

unde H(f) este funcția de transfer a filtrului care modelează canalul de comunicație.

Atenuarea introdusă la marginile benzii de frecvențe este:

$$\alpha = \frac{|H(\pi)|}{H(0)} \tag{5.11}$$

La ieșirea filtrului de înălbire a zgomotului, se obține secvența recepționată $\{r(n)\}$, care conține un zgomot aditiv, alb, gaussian:

$$R(z)=Y(z)+Z(z) \tag{5.12}$$

Urmează blocul care realizează operația modulo-2R și decodorul TCM 2N-D, pentru estimarea secvenței de date $\{\hat{d}(n)\}$ și a biților de informație originali.

Egalizorul adaptiv DFE se bazează pe următorul principiu = odată ce un simbol recepționat din canalul de comunicație fost estimat (detectat), contribuția ISI a acestui simbol la simbolurile recepționate ulterior, poate fi estimată și îndepărtată înainte de estimarea (detecția) simbolurilor recepționate ulterior [50].

Schema bloc a egalizorului adaptiv DFE este prezentată în Fig.5.9.

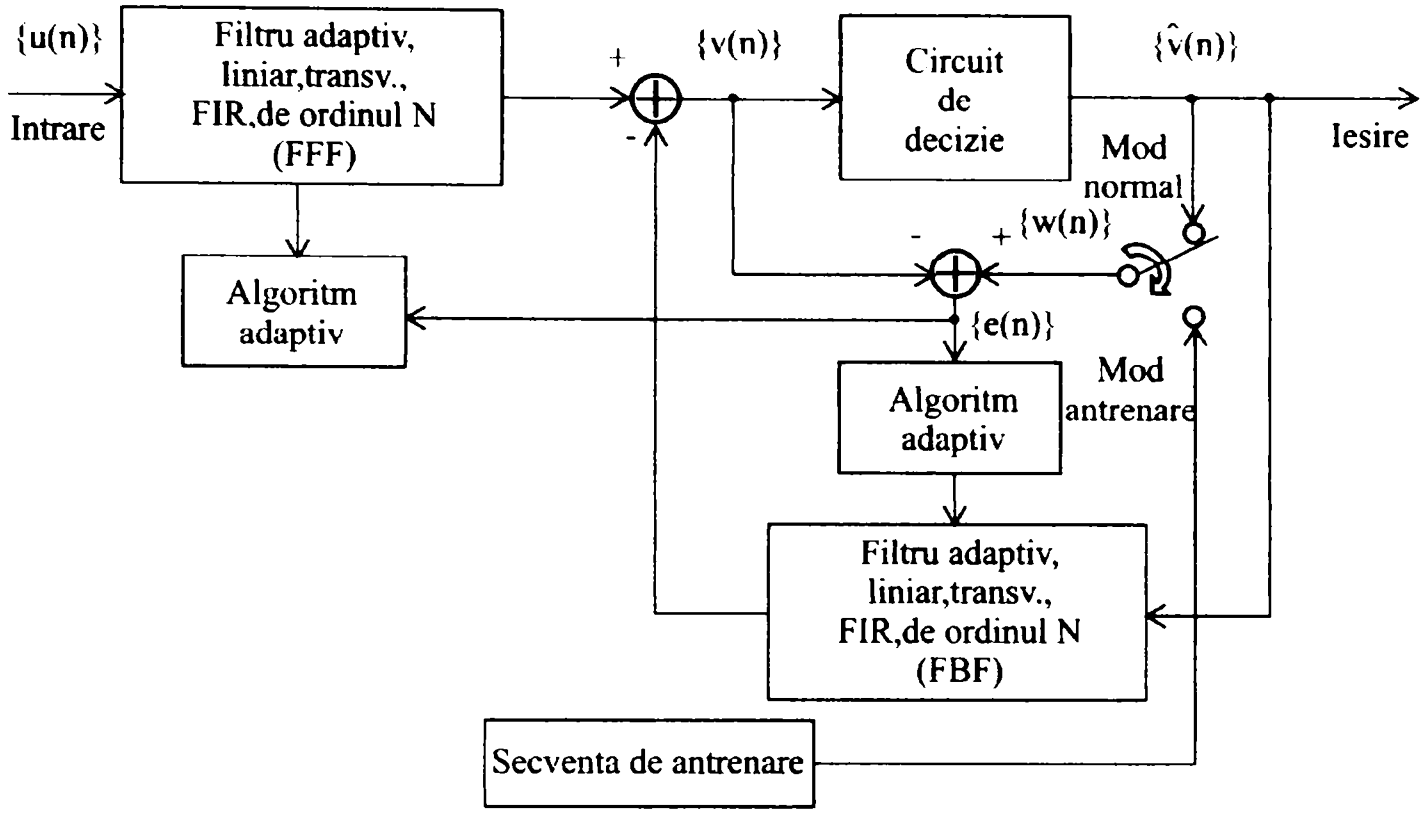


Fig.5.9 Schema bloc a egalizorului adaptiv DFE.

Am notat:

⇒ {u(n)}=secvența recepționată din canalul de comunicație,

⇒ {v(n}=secvența egalizată,

⇒ {w(n)}=secvența estimată $\{\hat{v}(n)\}$ în modul normal sau secvența de antrenare în modul antrenare,

⇒ {e(n)}=secvența eroare de estimare:

$$e(n)=w(n)-v(n) \tag{5.13}$$

Înaintea de transmisia de date propriu-zisă nu se cunosc caracteristicile canalului de comunicație. Din aceste motiv egalizorul adaptiv DFE trece în **modul antrenare (training mode),** în care se transmite o **secvență de antrenare (training sequence),** pentru a colecta informații despre caracteristicile canalului de comunicație. Astfel se colectează o secvență eroare de estimare {e(n)}, care se folosește la ajustarea sincronă a coeficienților de filtrare ai filtrului cu reacție cu conexiune înainte și a filtrului cu reacție cu coenxiune înapoi, în scopul minimizării **erorii de estimare medii pătratice (MSE=Mean Squared Error)**.

Circuitul de decizie (Slicer) estimează, pentru fiecare simbol din secvența egalizată {v(n)}, care a fost simbolul cel mai probabil transmis dintr-un set disponibil de simboluri.

Filtrul cu reacție cu conexiune înainte (Feedforward Filter=FFF) filtrează secvența recepționată din canalul de comunicație {u(n)}, astfel încît să se obțină o eroare de estimare medie pătratică minimă, deci secvența estimată $\{\hat{v}(n)\}$ să fie corectă cu o probabilitate maximă.

Filtrul cu reacție cu conexiune înapoi (Feedbackward Filter=FBF) înlătură contribuția ISI a fiecărui simbol estimat la simbolurile recepționate ulterior.

5.1.6 Modulatorul QAM. Demodulatorul QAM. Blocul de refacere a semnalului purtător

Modulaţia de amplitudine în cuadratură (Quadrature Amplitude Modulation) este o tehnică de modulaţie care combină modulaţia de amplitudine şi modulaţia de fază, în sensul că informaţia pe care dorim să o transmitem prin canalul de comunicaţie se reprezintă prin variaţii de amplitudine şi schimbări de fază ale unui semnal purtător.

Schema bloc a modulatorului QAM este următoarea:

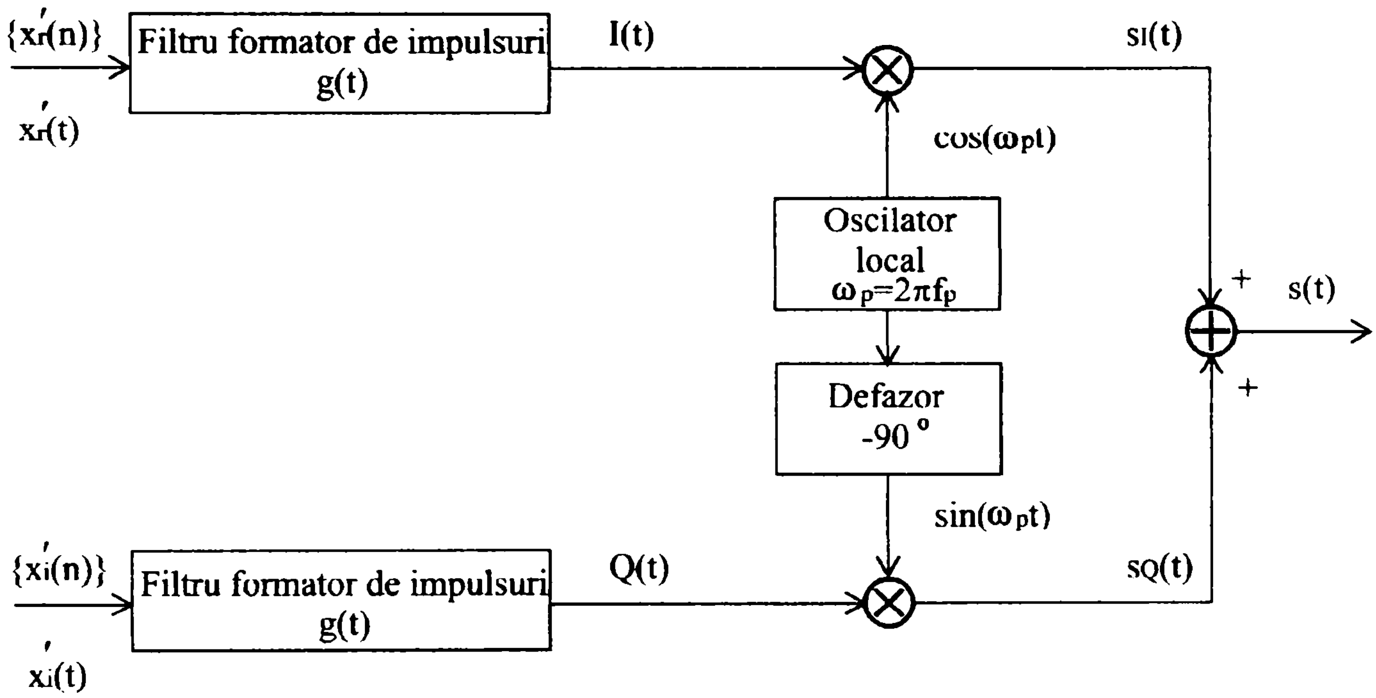


Fig.5.10 Modulatorul QAM.

La momentul de timp discret n, simbolul de informaţie complex:

$$x'(n) = x_r'(n) + jx_i'(n) \tag{5.14}$$

reprezintă punctul de semnal 2-D cu coordonatele $(x_r'(n), x_i'(n))$, unde $x_r'(n), x_i'(n)$ sunt numere reale.

La intrarea **filtrelor formatoare de impulsuri (Pulse Shaping Filter)** avem [39]:

$$\begin{cases} x_r'(t) = \sum\limits_n x_r'(n)\,\delta(t - nT_S) = \textbf{semnalul modulator în fază} \\ x_i'(t) = \sum\limits_n x_i'(n)\,\delta(t - nT_S) = \textbf{semnalul modulator în cuadratură} \end{cases} \tag{5.15}$$

unde δ(t) este impulsul Dirac$=\begin{cases} 1, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$ iar T_s este durata simbolului de informaţie.

La ieşirea **filtrelor formatoare de impulsuri (Pulse Shaping Filter)** avem [39]:

$$\begin{cases} I(t) = \sum_n x_r'(n)\, g(t - nT_S) = \textbf{semnalul modulator în fază} \\ Q(t) = \sum_n x_i'(n)\, g(t - nT_S) = \textbf{semnalul modulator în cuadratură} \end{cases} \quad (5.16)$$

unde g(t) este răspunsul la impuls a filtrelor formatoare de impulsuri (care sunt identice).

Semnalul modulat QAM se obţine prin înmulţirea semnalelor modulatoare în fază, respectiv în cuadratură, de la ieşirea filtrelor formatoare de impulsuri, cu componentele în fază, respectiv în cuadratură ale semnalului purtător şi prin însumarea semnalelor rezultante [39]:

$$s(t) = s_I(t) + s_Q(t) = I(t)\cos(\omega_p t) + Q(t)\sin(\omega_p t) \quad (5.17)$$

unde $\omega_p = 2\pi f_p$ este pulsaţia semnalului purtător.

Componentele în fază şi în cuadratură ale semnalului purtător sunt generate de un oscilator local şi un defazor cu (-90°).

Dacă răspunsul la impuls al filtrelor formatoare de impulsuri ar fi [39]:

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_S}\right) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{T_S}{2} \\ 0, |t| > \frac{T_S}{2} \end{cases} \leftrightarrow G(f) = T_S\,\mathrm{sinc}(fT_S) \quad (5.18)$$

atunci durata răspunsului la impuls g(t) este strict limitată la durata T_s a simbolului de informaţie dar spectrul de putere al semnalului modulat QAM ocupă o bandă de frecvenţe infinită.

Întrucît funcţia sinc(fT_s) scade lent cu creşterea frecvenţei f (cu rata $\cong \frac{1}{f}$), rezultă că este necesară o lăţime de bandă B foarte mare a canalului de comunicaţie pentru a conţine cea mai mare parte din puterea semnalului modulat QAM. De exemplu, pentru ca banda de frecvenţe B să conţină 90% din puterea semnalului modulat QAM este necesar ca:

$$B \ge \frac{2}{T_S} \quad (5.19)$$

Dacă răspunsul la impuls al filtrelor formatoare de impulsuri ar fi [39]:

$$g(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_S}) \leftrightarrow G(f) = 2\pi\, T_S\, \mathrm{rect}(fT_S) = \begin{cases} 2\pi\, T_S, |f| \le \dfrac{1}{2T_S} \\ 0, \quad |f| > \dfrac{1}{2T_S} \end{cases} \tag{5.20}$$

atunci spectrul de putere al semnalului modulat QAM este strict limitat la lăţimea de bandă $B = \frac{1}{T_S}$ pe care o oferă canalul de comunicaţie, dar durata răspunsului la impuls g(t) este infinită.

Întrucît răspunsul la impuls $g(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_S})$ ia valori nule la momentele de timp egale cu multipli întregi ai T_s, rezultă că pentru a obţine ISI=0 vom eşantiona semnalul modulat QAM la momente de timp $t=kT_s$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Practic este imposibil de a realiza şi de a menţine o sincronizare perfectă la recepţie. În consecinţă, fiecare eşantion ale semnalului demodulat QAM, va conţine urme ale eşantioanelor anterioare, sub forma unor de sume de eşantioane ale cozilor din jurul impulsurilor principale şi deci ISI≠0 [39].

Deoarece sunt dificil de realizat practic filtre formatoare de impulsuri cu un răspuns la impuls $g(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{T_S})$, se folosesc **filtre formatoare de impulsuri de tip cosinus ridicat (Raised Cosine Pulse Shaping Filter)** cu răspunsul la impuls [39]:

$$g(t) = \left[\frac{\sin(\frac{\pi t}{T_S})}{(\frac{\pi t}{T_S})}\right]\left[\frac{\cos(\frac{\pi t}{T_S})}{1 - (\frac{2\alpha \pi t}{T_S})^2}\right], 0 < \alpha < 1 \tag{5.21}$$

unde α este **excesul de bandă (roll-off factor)** (Fig.5.11).

Întrucît funcţia cosinus ridicat scade mult mai rapid cu creşterea timpului t (cu rata $\cong \frac{1}{t^3}$) decît funcţia sinus cardinal (cu rata $\cong \frac{1}{t}$), implementarea FIR a filtrelor formatoare de impulsuri de tip cosinus ridicat, este posibilă prin utilizarea unui număr finit de eşantioane.

Excesul de bandă α determină lăţimea de bandă în exces a spectrului de putere al semnalului modulat QAM. În general, α se alege astfel încît lăţimea de bandă în exces a spectrului de putere a semnalului QAM, să fie egală cu 10% din B.

Schema bloc a demodulatorului QAM şi a blocului de refacere a semnalului purtător este prezentată în Fig.5.12.

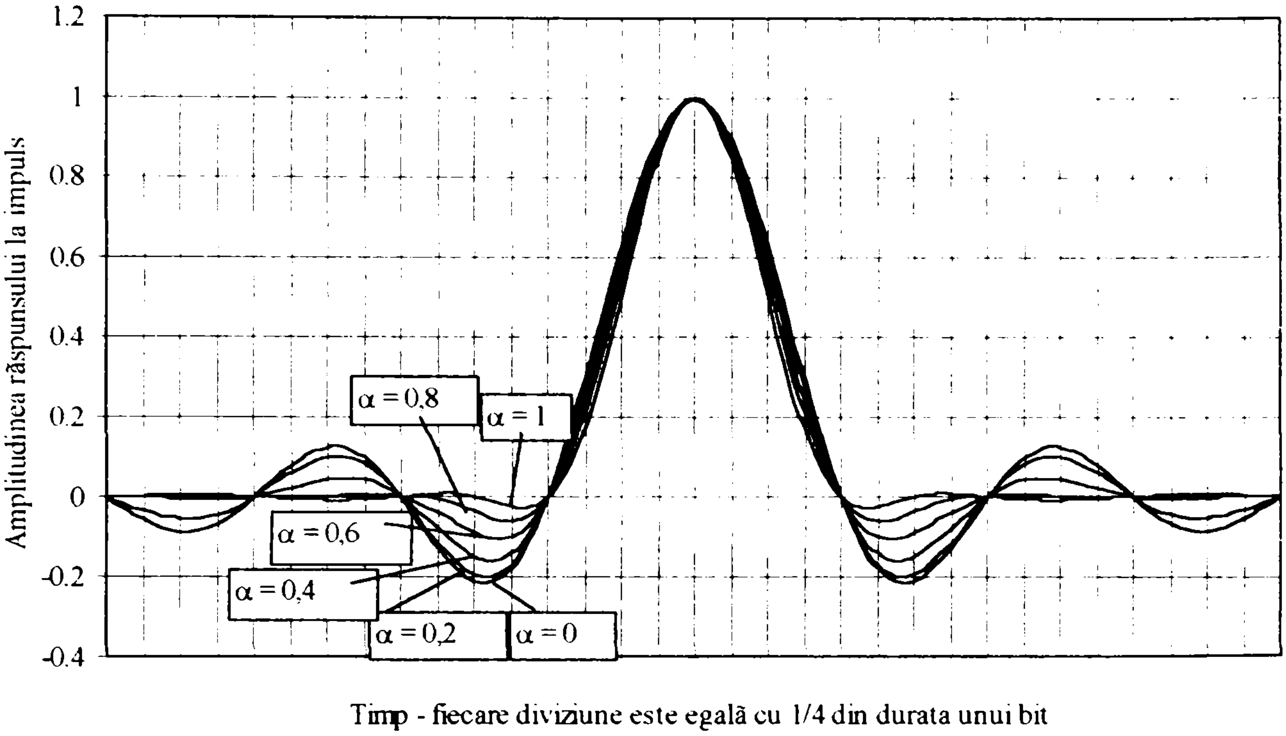


Fig.5.11 Răspunsul la impuls a filtrului de tip cosinus ridicat.

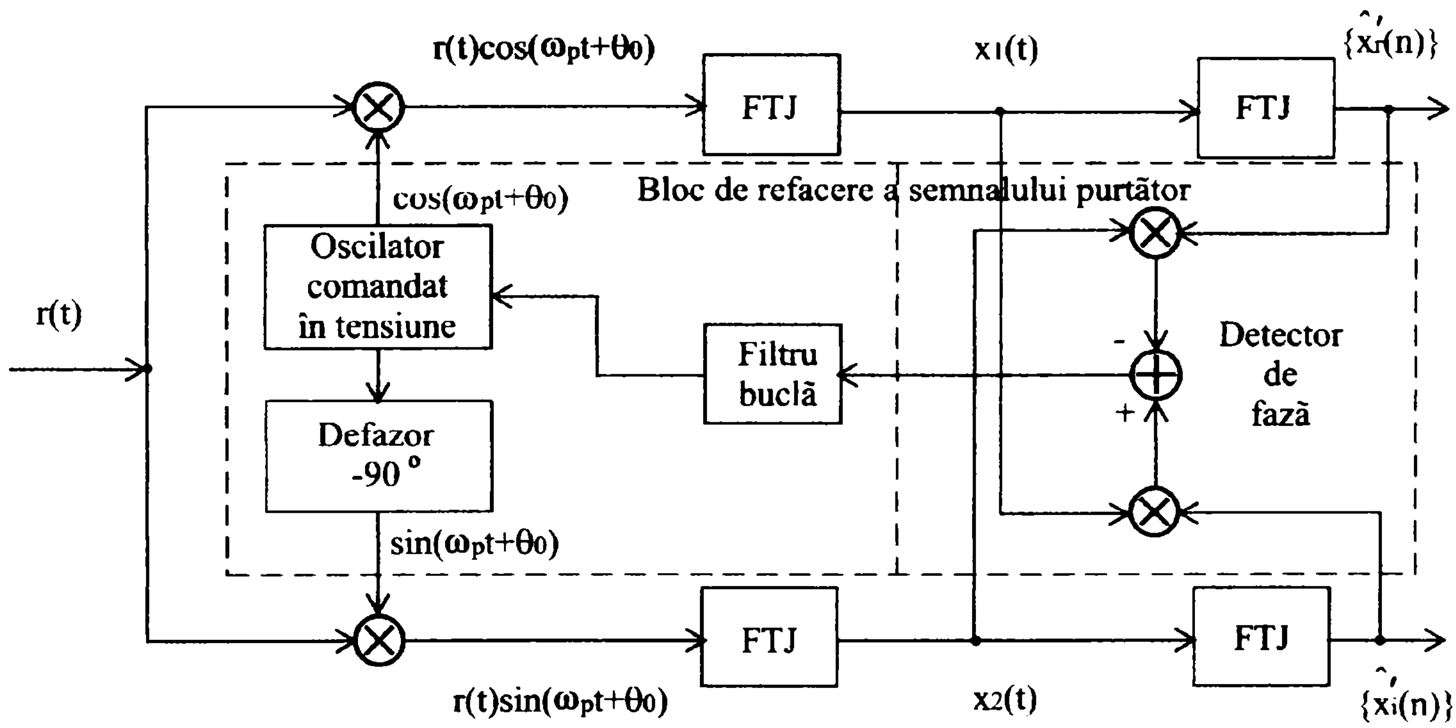


Fig.5.12 Demodulatorul QAM. Blocul de refacere a semnalului purtător.

Semnalul recepționat este egal cu [49]:

$$r(t) = I(t)\cos(\omega_p t + \psi_0) + Q(t)\cos(\omega_p t + \psi_0) \qquad (5.22)$$

unde ψ_0 este deplasarea totală de fază (jitterul de fază) introdusă de modulatorul QAM, filtrul de preaccentuare, canalul de comunicație și supresorul de ecou.

Semnalul recepţionat se înmulţeşte cu componentele în fază şi în cuadratură ale semnalului purtător, generate de blocul de refacere a semnalului purtător (Fig.5.12) şi se obţin semnalele produs [49]:

$$r(t)\,2\cos(\omega_p t+\theta_0)=I(t)[\cos\Delta\varphi+\cos(2\omega_p t+\psi_0+\theta_0)]+ \\ +Q(t)[\sin\Delta\varphi+\sin(2\omega_p t+\psi_0+\theta_0)] \tag{5.23}$$

$$r(t)\,2\sin(\omega_p t+\theta_0)=I(t)[-\sin\Delta\varphi+\sin(2\omega_p t+\psi_0+\theta_0)]+ \\ +Q(t)[\cos\Delta\varphi-\cos(2\omega_p t+\psi_0+\theta_0)] \tag{5.24}$$

unde θ_0 este faza iniţială a semnalului purtător generat la recepţie iar $\Delta\varphi=\psi_0-\theta_0$.

Prin filtrarea trece-jos a celor două semnale produs prezentate în relaţiile (5.23) şi (5.24), se îndepărtează componentele situate în jurul frecvenţei $2f_p$ astfel încît se obţin semnalele:

$$\begin{cases} x_1(t)=I(t)\cos\Delta\varphi+Q(t)\sin\Delta\varphi \\ x_2(t)=Q(t)\cos\Delta\varphi-I(t)\sin\Delta\varphi \end{cases} \tag{5.25}$$

Blocul de refacere a semnalului purtător (Fig.5.12) se bazează pe o **buclă cu calare pe fază (PLL=Phase-Locked Loop) de tip Costas** formată din :

- o detectorul de fază care produce un semnal diferenţă de fază egal cu $2\sin\Delta\varphi$,
- o filtrul de buclă (FIR de ordinul 2) care urmăreşte variaţiile semnalului diferenţă de fază,
- o oscilatorul comandat în tensiune (VCO=Voltage Controlled Oscillator) care generează un semnal purtător cu faza θ_0 mai mare sau mai mică în funcţie de tensiunea aplicată la intrare.

Cînd bucla PLL se apropie de calarea pe fază se obţine:

$$\Delta\varphi\to 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\Delta\varphi\to 1\\ \sin\Delta\varphi\to 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t)\to I(t)\\ x_2(t)\to Q(t)\end{cases} \tag{5.26}$$

Astfel, la ieşirile circuitelor de decizie (Slicer), se obţin cele două secvenţe de simboluri estimate $\{\hat{x}_r'(n)\}$ şi $\{\hat{x}_i'(n)\}$.

5.1.7 Filtrul de interpolare/decimare. Blocul de refacere a tactului de simbol

În cazul ideal, dacă receptorul ar eşantiona un semnal recepţionat identic cu semnalul transmis şi cu o frecvenţă de eşantionare egală cu rata de simbol de la transmiţător atunci s-ar obţine exact secvenţa de simboluri transmise.

În practică, lucrurile diferă față de cazul ideal, în principal din două motive:

1) frecvența de eșantionare de la receptor diferă de rata de simbol de la transmițător datorită mediilor diferite de operare, a frecvențelor de ceas diferite chiar pentru cristale de aceeași frecvență și produse de aceeași firmă,
2) neliniaritățile din mediul de propagare al semnalului util.

Prima problemă este corectată de blocul de refacere a tactului de simbol (Fig.5.13) [50].

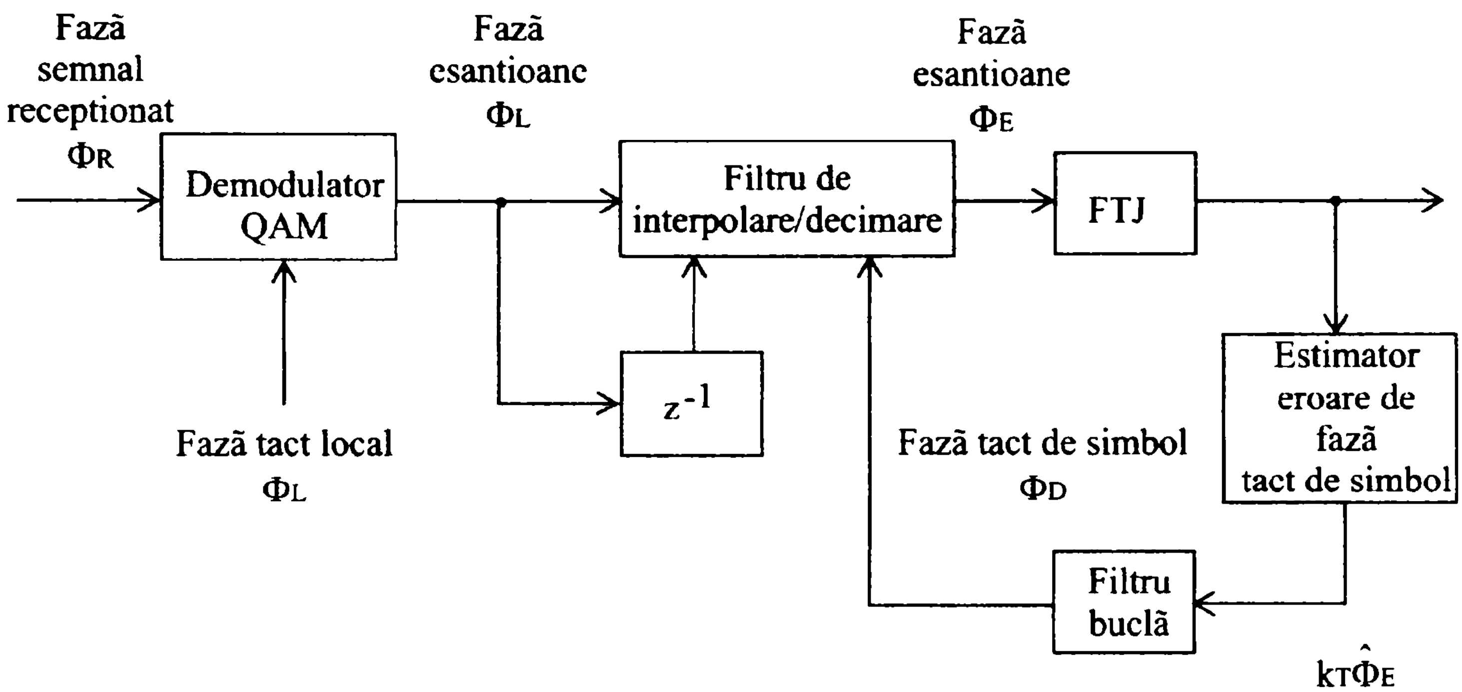


Fig.5.13 Filtrul de interpolare/decimare. Blocul de refacere a tactului de simbol.

Filtrul de interpolare/decimare este un circuit de supraeșantionare/subeșantionare. La ieșirea estimatorului erorii de fază a tactului de simbol, se obține $k_T\hat{\Phi}_E$, unde k_T este o constantă iar $\hat{\Phi}_E$ este eroarea estimată a tactului de simbol. Bucla formată din estimatorul erorii de fază a tactului de simbol și filtrul de buclă încearcă să apropie faza tactului de simbol Φ_D de faza semnalului recepționat Φ_R.

A doua problemă este corectată de schema de egalizare adaptivă neliniară cu precodare prezentată în paragraful 5.1.5.

Filtrul de interpolare/decimare este format în general dintr-un circuit analogic de eșantionare care lucrează liber la o perioadă $T \le \frac{T_S}{2}$ (de obicei $T = \frac{T_S}{4}$) urmat de un circuit de reeșantionare digital (interpolator) care lucrează la perioada $T = \frac{T_S}{2}$, unde T_s este perioada simbolului.

Filtrul trece-jos este utilizat pentru înlăturarea componentelor spectrale nedorite și are frecvența de tăiere (în [Hz]) egală cu rata de simbol R (în [Baud]).

Pentru îmbunătățirea performanțelor modemului analogic de bandă vocală (BER), filtrul trece-jos poate fi înlocuit cu un **filtru adaptat la forma semnalului (Matched Filter)** avînd răspunsul la impuls [51]:

$$h(t)=g(T_s-t) \tag{5.27}$$

unde g(t) este răspunsul la impuls al filtrelor formatoare din modulatorul/demodulatorul QAM. Filtrul adaptat la forma semnalului limitează banda zgomotului care se aplică blocurilor următoarele ale receptorului.

Estimatorul erorii de fază a tactului de simbol eşantionează semnalul de la intrarea sa cu perioada $T = \frac{T_s}{2}$, unde T_s este perioada simbolului. **Algoritmul Gardner** este cel mai folosit în implementările practice deorece nu este sensibil la abaterile (offset-urile) de frecvenţă ale semnalului purtător. Convergenţa buclei de refacere a tactului de simbol nu este condiţionată de convergenţa buclei de refacere a semnalului purtător.

Algoritmul Gardner utilizează două eşantioane per simbol şi calculează o eroare de fază conform relaţiei:

$$e_n = \mathrm{Re}\{sample[2]^*(sample[3]\text{-}sample[1])\} \tag{5.28}$$

unde sample[1], sample[2], sample[3] sunt trei eşatioanele succesive ale semnalului de la intrarea estimatorului.

Dacă $e_n>0$ atunci eşantionarea simbolului are loc prea tîrziu şi dacă $e_n<0$ atunci eşantionarea simbolului are loc prea devreme. La convergenţa buclei de refacere a tactului de simbol, $e_n \to 0$ şi eşantionarea simbolului are loc la momentele de timp corecte.

Filtrul de buclă este identic cu cel folosit în bucla PLL din blocul de refacere a semnalului purtător şi este un filtru activ de ordinul doi cu funcţia de transfer [52]:

$$H(s) = \frac{g_p s + g_i}{s} \tag{5.29}$$

unde avem:

$g_p = 2\xi\,\omega_n$ =cîştigul proporţional,

$g_i = \omega_n{}^2$ =cîştigul integrator,

ξ=factorul de amortizare, egal de obicei cu 0,707,

B_L=banda de frecvenţe a buclei, egală cu 0,05 şi care poate fi redusă după convergenţa buclei de refacere a tactului de simbol,

$\omega_n = \frac{8\xi\,B_L}{1+4\xi^2}$ =frecvenţa naturală a buclei.

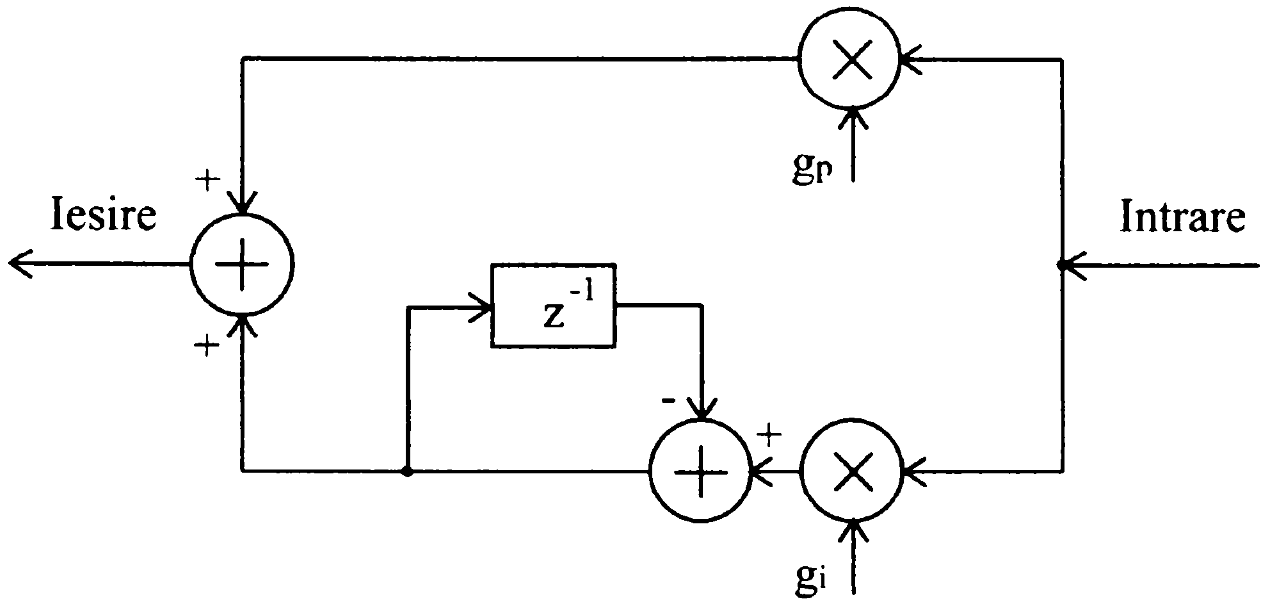


Fig.5.14 Filtrul de buclă.

Filtrul de buclă este format din două ramuri (Fig.5.14):
-1) ramura proporțională care multiplică eroarea de fază a tactului de simbol cu un cîştig proporțional g_p şi asigură urmărirea erorii de fază a tactului de simbol,
-2) ramura integratoare care multiplică eroarea de fază a tactului de simbol cu un cîştig integrator g_i şi apoi integrează semnalul rezultat. Se asigură urmărirea erorii de frecvență a tactului de simbol.

5.1.8 Blocul de control automat a cîştigului

Blocul de control automat al cîştigului (AGC=Automatic Gain Control) este un sistem adaptiv care are rolul de a menține semnalul de la ieşirea sa la un nivel mediu de energie constant. Acest lucru este absolut necesar pentru funcționarea corectă a blocului de refacere a tactului de simbol.

Schema bloc a blocului de control automat a cîştigului este prezentată în Fig.5.15 [53].

Fiecare simbol de la intrare x'(n), este înmulțit cu un factor de cîştig $\alpha(n)$, iar rezultatul este furnizat la ieşire şi este folosit pentru actualizarea **detectorul de energie totală din intervalul de baud**.

Energia totală din intervalul de baud se calculează cu relația [53]:

$$E_{totala} = \sum_{\text{intervalul de baud}} x'(n) \qquad (5.30)$$

Energia totală din intervalul de baud este comparată cu un **nivel de referință AGC** şi se calculează o **eroare de buclă AGC** care este minimizată de blocul AGC.

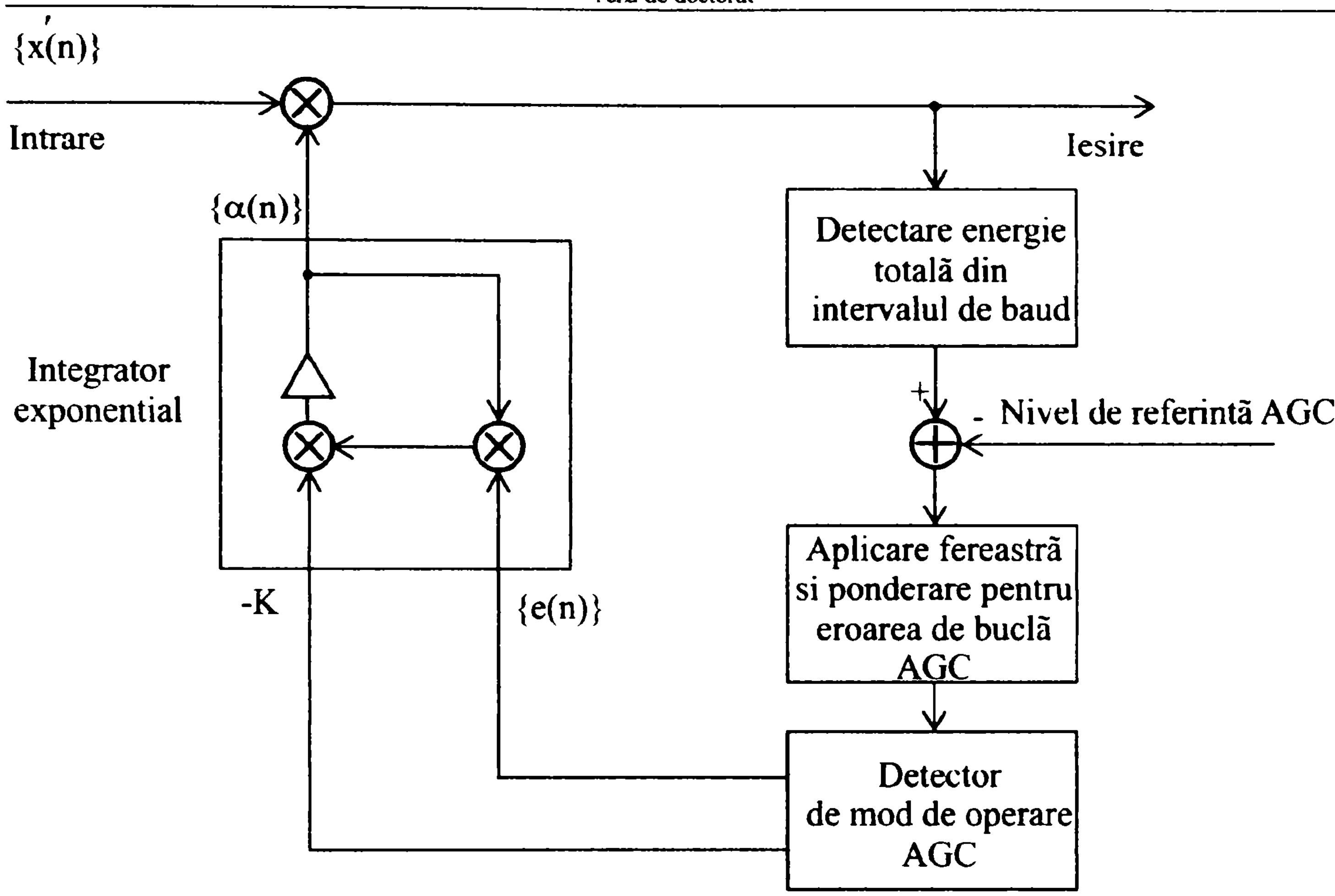


Fig.5.15 Blocul de control automat a cîştigului.

Energia semnalului modulat QAM pentru un punct de semnal 2-D, cu coordonatele $(x_r'(n), x_i'(n))$, este egală cu [53]:

$$E(n)=\int_0^{T_s} s^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x_r'(n)\cos(\omega_p t)+x_i'(n)\sin(\omega_p t)]^2 dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x_r'(n)]^2[\frac{1+\cos(2\omega_p t)}{2}]dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x_i'(n)]^2[\frac{1-\cos(2\omega_p t)}{2}]dt+ \quad (5.31)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x_r'(n)x_i'(n)][\sin(2\omega_p t)]dt=\frac{[x_r'(n)]^2+[x_i'(n)]^2}{2}$$

Nivelul de referință AGC se calculează cu relația [53]:

$$E_{ref}=E\{E(n)\} \quad (5.32)$$

unde $E\{.\}$ este operatorul de mediere statistică.

În continuare se aplică o **fereastră (fereastra 1)** în jurul nivelului de referință AGC. Astfel blocul AGC va aplica corecții numai dacă eroarea de buclă AGC se află în exteriorul acestei ferestre. De asemenea se aplică o pondere (în general egală cu 2) erorii de buclă AGC astfel încît să se realizeze o relație de paritate între erorile pozitive şi negative.

Detectorul de mod de operare AGC funcționează astfel:

⇒ atît timp cît eroarea de buclă AGC se află în interiorul **ferestrei 2**, blocul AGC operează în **modul urmărire (tracking mode)** și compensează schimbările din nivelul mediu de energie al semnalului de intrare, prin înmulțirea acestuia cu un factor de cîștig, care este ajustat în mod corespunzător de către **integratorul exponențial,**

⇒ în momentul în care eroarea de buclă AGC iese din interiorul ferestrei 2, blocul AGC trece în **modul urmărire rapidă (fast tracking mode),** iar în momentul în care eroarea de buclă AGC revine în interiorul ferestrei 2, blocul AGC trece din nou în modul urmărire (Fig.5.16).

Integratorul exponențial calculează factorul de cîștig conform relației [53]:

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) - K\,\alpha(n)e(n) \tag{5.33}$$

unde:
e(n) este eroarea de buclă AGC,
K este o constantă care determină viteza de convergență a buclei AGC.

În general, constanta K este egală cu [53]:

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}, \text{pentru modul urmărire rapidă} \\ 0 < K < \dfrac{1}{2}, \text{pentru modul urmărire} \end{cases} \tag{5.34}$$

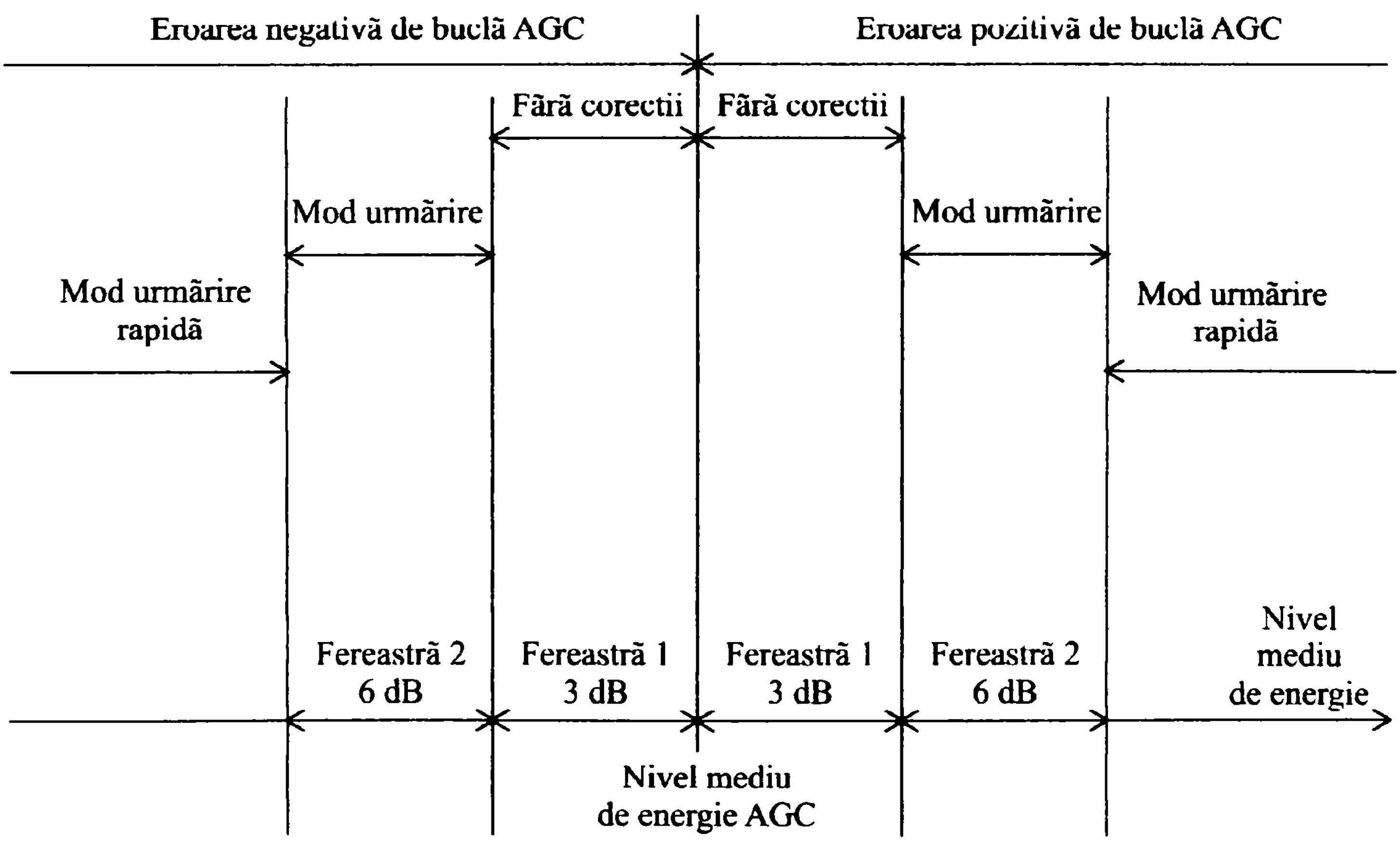


Fig.5.16 Modurile de operare a blocului AGC.

5.1.9 Supresorul de ecou

Schema bloc a conexiunii telefonice prin PSTN dintre un modem local şi un modem distant este prezentată în Fig.5.17.

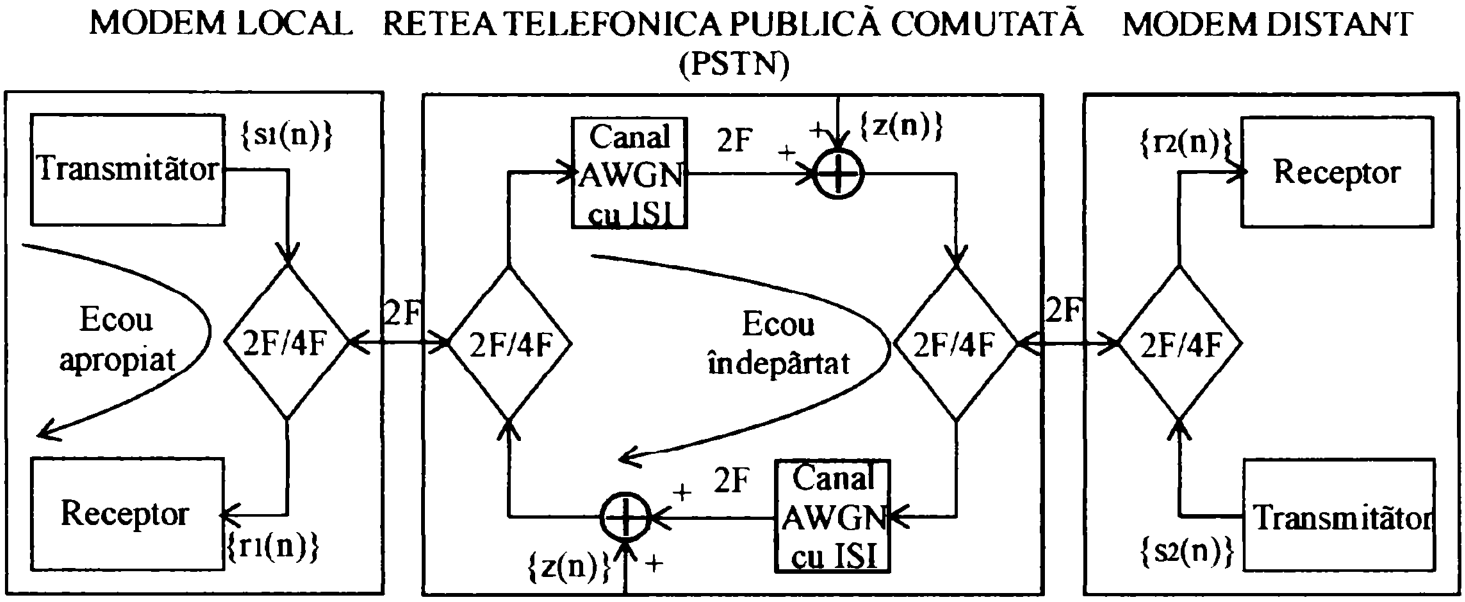


Fig.5.17 Schema bloc a conexiunii telefonice prin PSTN dintre un modem local şi un modem distant.

Sistemul diferenţial 2F/4F realizează conversia de la o conexiune pe 2 fire (2F) în linia telefonică la o conexiune pe 4 fire (4F) în PSTN sau în modem. Sistemele diferenţiale 2F/4F introduc **neadaptări de impedanţă** în punctele în care sunt utilizate. Din acest motiv, dacă ne referim la modemul local, o parte din semnalul transmis de acesta $s_1(n)$, se reflectă înapoi sub forma unui **ecou**.

Apar două tipuri de ecou:

⇒ **ecou apropiat (NE=Near end Echo)** care este reflexia semnalului transmis de la sistemul diferenţial 2F/4F din capătul local al PSTN,

⇒ **ecou îndepărtat (FE=Far end Echo)** care reflexia semnalului transmis de la sistemul diferenţial 2F/4F din capătul distant al PSTN.

Pe linia telefonică asociată unui modem coexistă următoarele semnale:

❖ semnalul transmis de modemul respectiv, care are un nivel de putere relativ mare,

❖ semnalul recepţionat de la modemul corespondent, care are un nivel de putere relativ mic,

❖ ecoul apropiat, acer are un nivel de putere relativ mare,

❖ ecoul distant, care are un nivel de putere relativ mic.

Se pune problema de a separa aceste semnale astfel încît modemul local să preia doar semnalul recepţionat de la modemul corespondent.

Semnalul recepţionat de modemul local este egal cu [50]:

$$r_1'(n) = s_2(n) + s_{NE}(n) + s_{FE}(n) + z(n) + ISI \qquad (5.35)$$

unde:

- $s_2(n)$ este semnalul transmis de modemul distant,
- $s_{NE}(n)$ este ecoul apropiat,
- $s_{FE}(n)$ este ecoul îndepărtat,
- $z(n)$ este zgomotul aditiv, alb, gaussian introdus de canalul de comunicaţie.

Suprimarea ecoului se face prin extragerea unui estimat al ecoului total din semnalul recepţionat de modemul local. Astfel semnalul recepţionat de modemul local după suprimarea ecoului devine [50]:

$$r_1(n) = r_1'(n) - \hat{s}_E(n) = s_2(n) + [s_{NE}(n) - \hat{s}_{NE}(n)] + [s_{FE}(n) - \hat{s}_{FE}(n)] + z(n) + ISI \tag{5.36}$$

unde estimatul ecoului total este:

$$\hat{s}_E(n) = \hat{s}_{NE}(n) + \hat{s}_{FE}(n) \tag{5.37}$$

Estimarea ecoului apropiat se face prin trecerea semnalului transmis de modemul local $s_1(n)$ printr-un filtru adaptiv liniar, transversal, FIR, de ordinul N_1 cu funcţia de transfer $H_{NE}(z)$.

Estimarea ecoului îndepărtat se face prin trecerea semnalului transmis de modemul local $s_1(n)$ printr-o linie de întîrzîiere cu N_1 elemente şi printr-un filtru adaptiv liniar, transversal, FIR, de ordinul N_2 cu funcţia de transfer $H_{FE}(z)$.

Algoritmul adaptiv utilizat pentru ajustarea coeficienţilor de filtrare a celor două filtre adaptive este LMS (Least Mean Squares) (Fig.5.18).

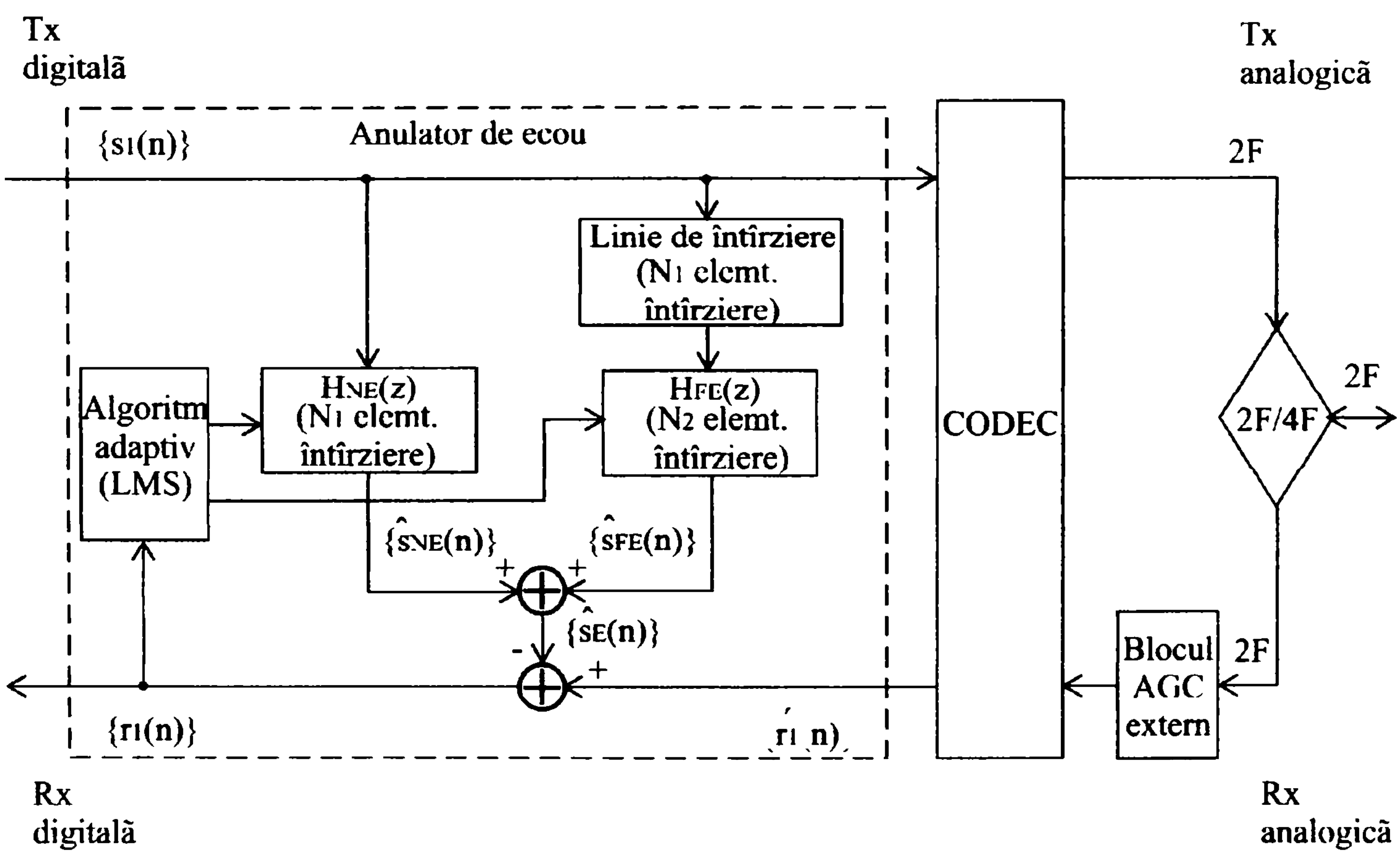


Fig.5.18 Supresorul de ecou.

Filtrul adaptiv, cu funcția de transfer $H_{NE}(z)$ sau $H_{FE}(z)$, trebuie să fie suficient de lung astfel încît să fie capabil să aproximeze răspunsul la impuls şi întîrzîierea asociată funcției de transfer pe care încearcă să o adapteze.

O linie telefonică are un răspuns la impuls şi o întîrzîiere asociată funcției de transfer de apoximativ 13 milisecunde [50].

O conexiune telefonică prin PSTN are un răspuns la impuls şi o întîrzîiere asociată funcției de transfer care depinde de lungimea acestei conexiuni:

- zeci de milisecunde pentru conexiuni locale,
- sute de milisecunde pentru conexiuni interurbane,
- cîteva secunde pentru conexiuni internaționale.

Dacă frecvența de eşantionare a circuitului de codare/decodare (CODEC) este f_e [eşantioane/s] atunci numărul de elemente de întărzîiere ale filtrelor adaptive cu funcțiile de transfer $H_{NE}(z)$, respectiv $H_{FE}(z)$ sunt [50]:

$$\begin{cases} N_1=0{,}013f_e \\ N_2=Df_e \end{cases} \tag{5.38}$$

De exemplu, pentru f_e=9600 eşantioane/s rezultă N_1=125 elemente de întîrzîiere şi N_2=9600D elemente de întîrzîiere.

Antrenarea supresorului de ecou are loc în faza 3 a procedurii de negociere dintre modemul local şi modemul distant. Secvența de antrenare se obține prin aplicarea de biți „1" la intrarea cifratorului.

5.2 Implementare hard

Schema bloc hard a uni modem analogic de bandă vocală este următoarea:

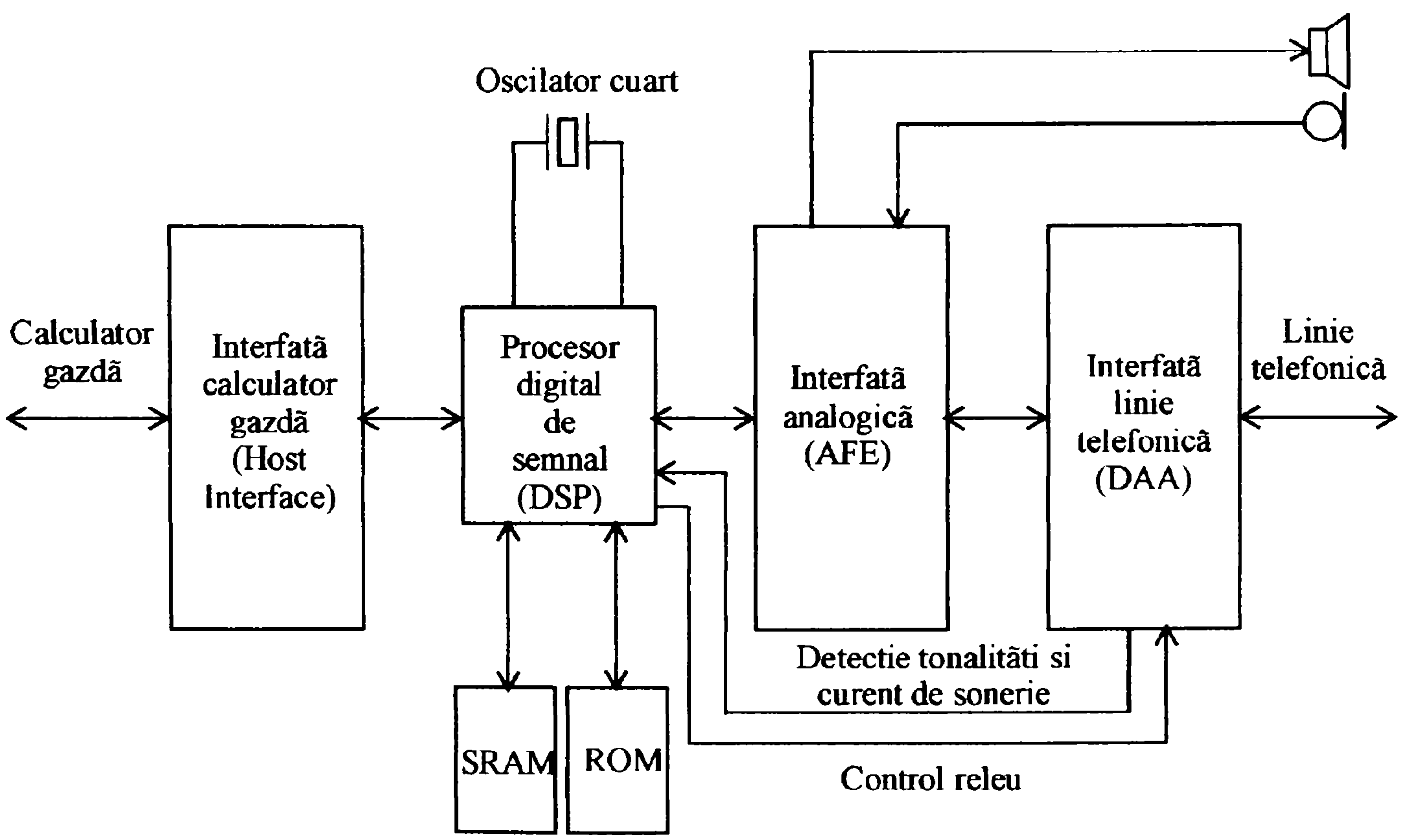


Fig. 5.19 Schema bloc hard a unui modem analogic de bandă vocală.

5.2.1 Procesorul digital de semnal (DSP)

Procesorul digital de semnal (DSP=Digital Signal Processor) este un chip de tip microprocesor, dedicat pentru realizarea funcţiilor de procesare digitală a semnalelor.

Un microprocesor dintr-un PC sau un simplu microcontroller nu pot realiza funcţii complexe pe care le realizează un procesor digital de semnal, pentru că procesarea digitală a semnalelor implică utilizarea extensivă a operaţiilor de multiplicare şi însumare.

În general, microprocesoarele convertesc operaţiile de multiplicare şi de divizare într-o serie de deplasări, însumări sau scăderi. Din acest motiv un microprocesor nu poate realiza funcţiile complexe de procesare digitală a semnalelor la fel de rapid ca şi un procesor digital de semnal.

Funcţiile DSP-ului:

⇒ recepţia şi transmisia datelor,

⇒ formatarea şi executarea comenzilor în format AT (AttenTion command),

⇒ monitorizarea progresului apelului care constă în detecţia tonalităţilor (ton de disc, ton de ocupat, ton de fax,...), detecţia curentului de sonerie, detecţia răspunsului abonatului chemat,

⇒ monitorizarea procedurii de negociere şi luarea deciziilor cu privire la deplasarea în starea anterioară/următoare a unei maşini de stare,

⇒ tratarea protocoalelor de nivel legătură de date (V.42 pentru corecţia de erori şi V.42 bis pentru controlul erorilor).

5.2.2 Memoria SRAM

Memoria SRAM (Static Random Access Memory) memorează datele statice, adică tabelele de date şi codul program.

Viteza memoriei SRAM depinde de timpul de acces al DSP-ului. De exemplu, pentru un DSP Texas Instruments TMS320C51 care operează la o frecvenţă de ceas de 57 MHz (deci durata unui ciclu de citire/scriere este de 35 ns), este necesară o memorie SRAM cu timpul de acces de 20 ns.

Capacitatea memoriei SRAM depinde de schema bloc funcţională a modemului şi de algoritmii utilizaţi. De exemplu, pentru modem anaolgic de bandă vocală construit conform recomandării ITU-T V.34, memoria SRAM necesară este de 64 Ko.

5.2.3 Memoria ROM

Memoria ROM (Read Only Memory) memorează codul program al DSP-ului.

Viteza memoriei ROM depinde de timpul de acces al DSP-ului. De exemplu, pentru un DSP Texas Instruments TMS320C51 care operează la o frecvenţă de ceas de 57 MHz (deci durata unui ciclu de citire/scriere este de 35 ns), este necesară o memorie SRAM cu timpul de acces de 20 ns. Problema este că o astfel de memorie ROM nu există sau dacă ar exista ar fi foarte scumpă (costul ei ar fi prohibitiv). Pentru a rezolva cerinţa de viteză a memoriei ROM DSP-ul conţine un **generator de stări de aşteptare**, programat la pornire. Fiecare stare de aşteptare prelungeşte un ciclu de citire/scriere cu un ciclu maşină al DSP-ului. Numărul stărilor de aşteptare se alege printr-un compromis între:

- costul memoriei ROM, ţinînd cont că un număr mic de stări de aşteptare înseamnă o memorie ROM rapidă şi scumpă,
- performanţele modemului, ţinînd cont că un număr mare de stări de aşteptare înseamnă o întîrziere totală mare introdusă de modem.

Capacitatea memoriei ROM depinde de schema bloc funcţională a modemului şi de algoritmii utilizaţi. De exemplu, pentru modem anaolgic de bandă vocală construit conform recomandării ITU-T V.34, memoria ROM necesară este de 128 Ko.

5.2.4 Interfaţa cu calculatorul gazdă

Interfaţa cu calculatorul gazdă (Host Interface) este o interfaţă serială de tip RS-232 sau USB (Universal Serial Bus) pentru modemurile externe sau o interfaţă de magistrală de tip PCI (Peripheral Component Interconnect) sau ISA (Industry Standard Architecture) pentru modemurile interne.

În cazul modemurilor interne interfaţa cu calculatorul gazdă se implementează hard cu ajutorul unui circuit integrat **I/O ASIC (Input/ Output Application Specific Integrated Circuit)** care conţine:

- logica de interfaţă cu calculatorul gazdă,
- logica Plug&Play (PnP) care asigură identificarea modemului şi alocarea de resurse pentru modem de către sistemul de operare al calculatorului gazdă,
- logica UART 16550 (Universal Asynchronous Receiver/Transmitter),
- logica DMA (Direct Memory Access) care permite înregistrarea de voce în modemurile care suportă aplicaţii multimedia.

5.2.5 Interfaţa analogică

Schema bloc a **interfeţei analogice (AFE=Analog Front End)** este prezentată în Fig.5.20 [50].

Întrucît în canalul de comunicaţie se utilizează semnale analogice şi posibilităţile de prelucrare a semnalelor analogice sunt limitate, semnalele analogice sunt convertite în semnale digitale înainte de a fi prelucrate de DSP cu un **circuit de codare/decodare (CODEC)** care operează la o frecvenţă de eşantionare f_e [eşantioane/s] sau [Hz] şi conform legii μ. În general, circuitul de codare/decodare (CODEC) operează la o frecvenţă de eşantionare f_e=9600 eşantioane/s.

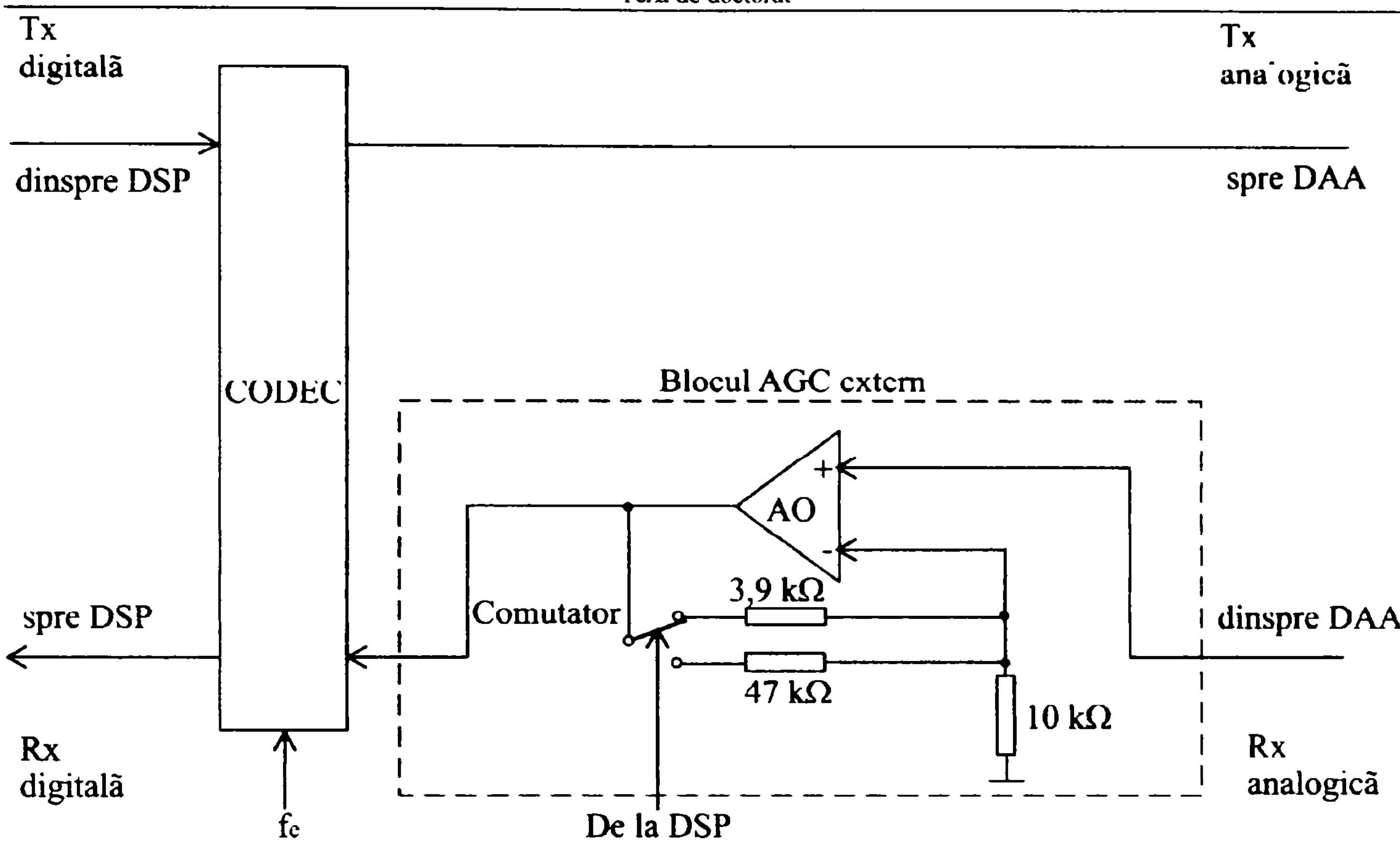


Fig.5.20 Schema bloc a interfeței analogice.

Blocul de control automat al cîştigului extern (AGC extern) are rolul de a menține semnalul analogic recepționat la un nivel mediu de energie aproximativ constant. Acest lucru este necesar pentru funcționarea corectă a circuitului de codare/decodare (CODEC) şi a blocului de refacere a semnalului purtător.

În cazul în care nivelul de putere al semnalului recepționat scade sub –28 dBm, DSP setează o linie de stare care comandă comutarea unei rezistențe diferite în circuitul de reacție al unui amplificator operațional (AO) ceea ce introduce un cîştig de 12 dB.

Dacă nivelul de putere al semnalului recepționat creşte peste –28 dBm, DSP resetează linia de stare.

Pentru a preveni activarea sau dezactivarea repetată a cîştigului de 12 dB cînd nivelul de putere al semnalului recepționat variază repetat în jurul valorii de prag de –28 dBm, se introduce un **histeresis** de 4 dBm între activare şi dezactivare.

Astfel:

- dacă nivelul de putere a semnalului recepționat scade sub –24 dBm se activează cîştigul,
- dacă nivelul de putere al semnalului recepționat creşte peste –28 dBm se dezactivează cîştigul.

5.2.6 Interfața cu linia telefonică

Interfața cu linia telefonică (DAA=Data Arrangement Access) conține:

- circuitele de protecție la supratensiuni (varistoare),
- transformatorul de linie (TL),
- terminația de 600 Ω,

- sistemul diferențial 2F/4F,
- circuitul de limitare al curentului,
- circuitul de detecție al curentului de sonerie,
- circuitul de detecție a identității (numărului) abonatului chemător (Caller ID).

Sistemul diferențial 2F/4F funcționează ca un supresor de ecou analogic. Componentele R și C ale sistemului diferențial 2F/4F se aleg astfel încît să modeleze impedanța liniei telefonice (Fig.5.21).

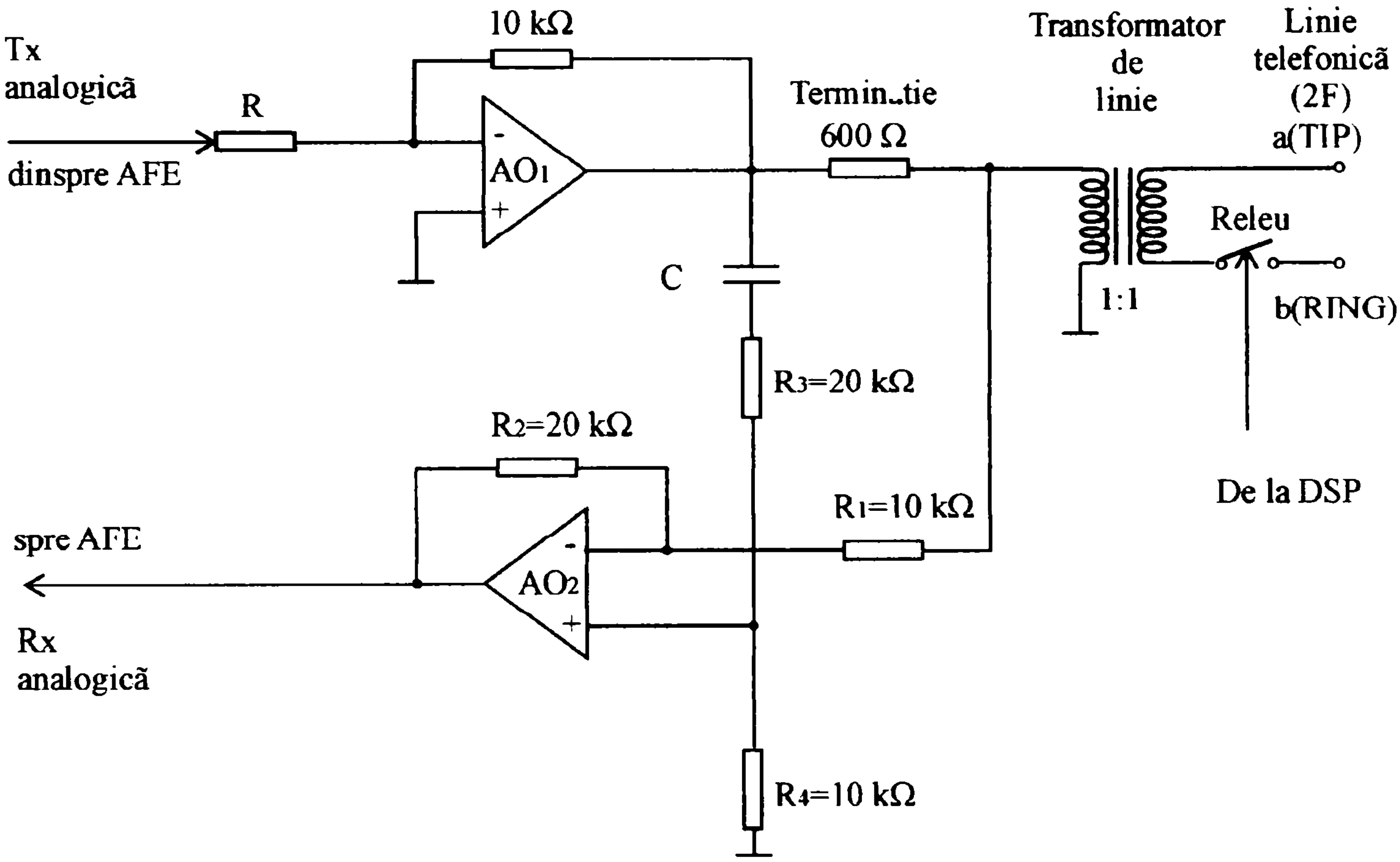


Fig.5.21 Interfața cu linia telefonică.

Presupunem că avem o linie telefonică ideală cu impedanța egală cu 600 Ω. Fie V_x semnalul de la ieșirea amplificatorului operațional AO_1. Rezultă că semnalul de la bornele transformatorului de linie TL este $\frac{V_x}{2}$.

Cîștigul intrării invertoare (-) a amplificatorului operațional AO_2 este [50]:

$$V_- = \frac{-R_F}{R_I} V_{in} = \frac{-R_2}{R_1} \frac{V_x}{2} = -V_x \tag{5.39}$$

Cîștigul intrării neinvertoare (+) a amplificatorului operațional AO_2 este [50]:

$$V_+ = (1 + \frac{R_F}{R_I})V_{in} = (1 + \frac{R_2}{R_1})(\frac{R_4}{R_3 + R_4})V_x = +V_x \tag{5.40}$$

Semnalul V_{Rx} se anulează complet în traseul de recepție analogică [50]:

$$V_{Rx} = V_- + V_+ = 0 \tag{5.41}$$

În cazul unei linii telefonice ideale cu impedanța egală cu 600 Ω, sistemul diferențial 2F/4F suprimă complet ecoul rezidual.

În practică impedanța liniei telefonice variază atît cu lungimea liniei cît și cu frecvența. Din acest motiv în majoritatea cazurilor apare o neadaptare de impedanță care cauzează un ecou care poate fi suprimat cu un supresor de ecou digital.

5.3 Implementare soft

Schema bloc soft a unui modem analogic de bandă vocală este prezentată în Fig.5.22 [54].

La nivelul microprocesorului din calculatorul gazdă se găsesc următoarele blocuri soft [54]:

⇒ soft API (Application Programming Interface) care sunt o serie de funcții ale sistemului de operare a calculatorului gazdă pe care modemul le utilizează pentru realizarea anumitor sarcini,

⇒ soft comezi AT (AttenTion command) care asigură formatarea și executarea de către modem a comenzilor în format AT),

⇒ soft V.42 și V.42 bis care asigură tratarea de către calculatorul gazdă a protocoalelor de nivel legătură de date (V.42 pentru corecția de erori și V.42 bis pentru controlul erorilor),

⇒ soft transmisie sincronă/asincronă care asigură transmisia datelor de către calculatorul gazdă și modem prin tehnica sincronă sau asincronă,

⇒ soft protocol HDLC (High-level Data Link Control) care asigură tratarea de către calculatorul gazdă a protocolului de nivel legătură de date de tip HDLC.

La nivelul DSP-ului din modem se găsesc următoarele blocuri soft [54]:

⇒ soft transmisie/recepție de date (Data Pump) care asigură recepția și transmisia propriu-zisă a datelor. Softul de transmisie/recepție de date conține toate blocurile funcționale digitale ale modemului analogic de bandă vocală (cifrator/decifrator, codor/decodor TCM 2N-D, codor neliniar, egalizor adaptiv, blocul AGC, supresorul de ecou, modulator/demodulator QAM),

⇒ driver pentru CODEC care permite softului de transmisie/recepție de date al DSP-ului să controleze și să utilizeze circuitul de codare/decodare (CODEC).

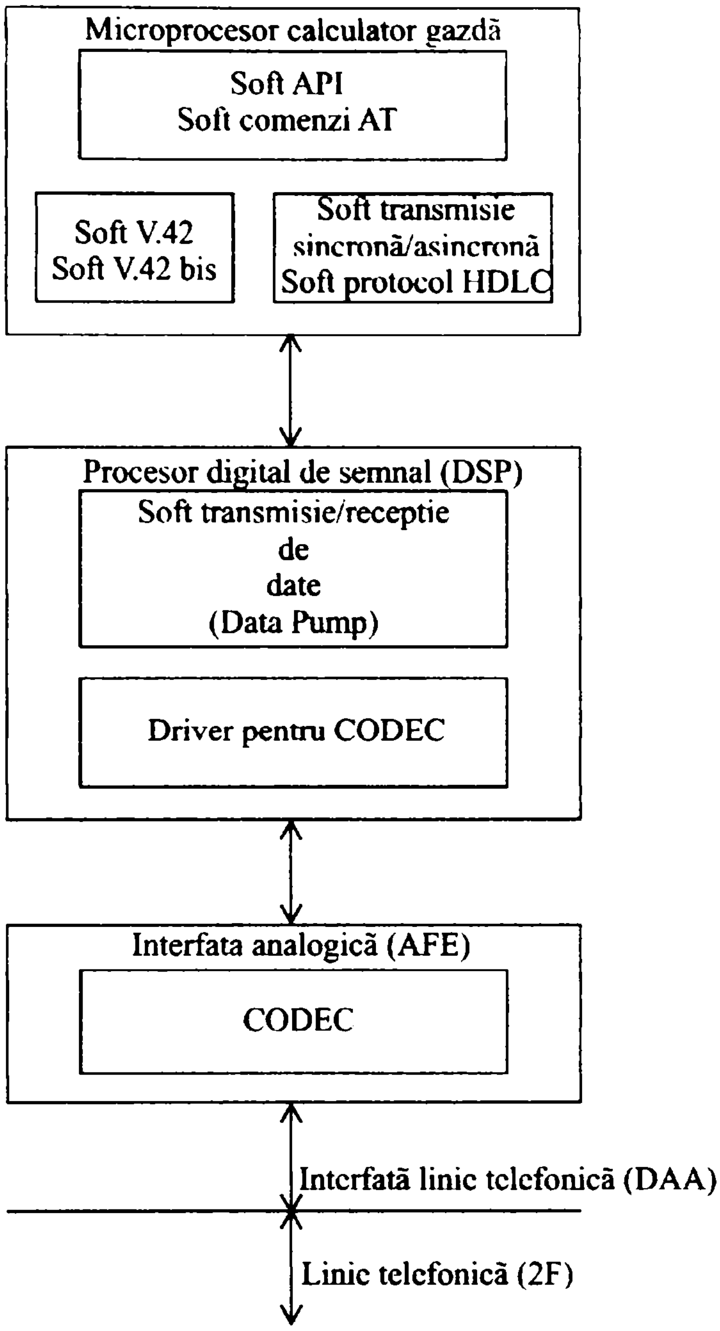


Fig. 5.22 Schema bloc soft a unui modem analogic de bandă vocală.

La nivelul interfeței analogice (AFE) din modem se găsesc următoarele blocuri soft [54]:

⇒ softul circuitului de codare/decodare (CODEC) care asigură funcționarea corectă a acestuia,

⇒ driver pentru interfața cu linia telefonică care permite softului circuitului de codare/decodare al interfeței analogice să controleze şi să utilizeze interfața cu linia telefonică.

La nivelul interfeței cu linia telefonică din modem nu se găsesc blocuri soft.

CAPITOLUL VI
Concluzii şi contribuţii personale la modulaţia codată trellis multidimensională

6.1 Concluzii personale cu privire la modulaţia codată trellis multidimensională

Concluzia 6.1-Construcţia propusă permite **generalizarea construcţiei Wei a codurilor TCM 2N-D** şi pentru cazul în care N nu este o putere a lui 2 şi permite **obţinerea unor parametri CER, PAR şi γ mai buni decît construcţia Sterian** care devine astfel un caz particular al acestei construcţii (cazul $\alpha = \frac{1}{2}$).

Concluzia 6.2-Costul plătit pentru această îmbunătăţire a performanţelor codurilor TCM 2N-D în cazul în care N nu este o putere a lui 2, constă în creşterea complexităţii codorului bloc mai ales pentru cazurile în care N ia valori mari. Acest cost nu este foarte mare întrucît în practică se construiesc coduri TCM 2N-D cu $N\leq 8$ şi în prezent costul memoriilor şi al DSP-urilor este relativ scăzut.

În Anexa 1 am calculat folosind funcţiile din Microsoft Excel 2002 şi am obţinut un tabel cu parametrii codurilor TCM 2N-D pentru dimensiunile codului N=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi pentru două valori Q=7 şi Q=10 biţi/s ale ratei de transmisie a codorului TCM 2N-D. Concluziile obţinute sunt prezentate în continuare.

Concluzia 6.3-În cazul în care N nu este o putere a lui 2, **pentru un N fixat, cu cît Q este mai mare,** cu atît parametrii CER şi PAR obţinuţi sunt mai mici şi cu atît parametrul γ este mai mare în comparaţie cu parametrii corespunzători ai construcţiei Sterian, în condiţiile menţinerii coeficientului de eroare N_{free}.

Concluzia 6.4-În cazul în care N nu este o putere a lui 2, **pentru un Q fixat, cu cît N este mai mare,** cu atît îmbunătăţirea parametrilor CER, PAR şi γ obţinuţi relativ la construcţia Sterian este mai mică, dar numărul total de puncte de semnal 2-D a constelaţiilor de semnale 2-D constituente a constelaţiei de semnale 2N-D, este din ce în ce mai mic faţă de construcţia Sterian.

Concluzia 6.5-Atît în cazul în care N este o putere a lui 2 cît şi în cazul în care N nu o putere a lui 2, **pentru un N şi un Q fixat, cu cît cîştigul de distanţă** $\varepsilon = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2$ **este mai mare**, cu atît cîştigul de codare asimptotic γ relativ la o transmisie necodată este mai mare.

Concluzia 6.6-La alegerea valorilor pentru 2N dimensiunea codului TCM, rata de transmisie Q a codorului TCM 2N-D, cîştigul de distanţă ε, numărul m de biţi de intrare codaţi convoluţional şi numărul V de stări ale codorului convoluţional este necesar să facem un **compromis** între complexitatea codorului TCM 2N-D şi valorile obţinute pentru parametrii CER, PAR şi γ.

În Anexa 2 am realizat 27 aplicaţii în MathWorks MATLAB-Simulink 6.0 şi anume:

Codoare şi decodoare TCM:

01) codor TCM 4-D (construcţia Wei),
02) decodor TCM 4-D cu detecţie SSD (construcţia Wei),
03) decodor TCM 4-D cu detecţie MLD (construcţia Wei)
04) codor TCM 6-D (construcţia Sterian),
05) decodor TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia Sterian),
06) decodor TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia Sterian),
07) codor TCM 6-D (construcţia propusă),
08) decodor TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia propusă),
09) decodor TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia Sterian),

Sisteme de transmisii de date cu TCM şi fără modulaţie QAM:

10) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie SSD (construcţia Wei),
11) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie MLD (construcţia Wei)
12) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia Sterian),
13) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia Sterian),
14) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia propusă),
15) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia propusă),

Sisteme de transmisii de date cu TCM şi cu modulaţie QAM în banda de bază:

16) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie SSD (construcţia Wei),
17) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie MLD (construcţia Wei)
18) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia Sterian),
19) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia Sterian),
20) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia propusă),
21) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia propusă),

Sisteme de transmisii de date cu TCM și cu modulație QAM în banda de trecere:

22) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie SSD (construcţia Wei),
23) sistem de transmisii de date cu TCM 4-D şi cu detecţie MLD (construcţia Wei)
24) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia Sterian),
25) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia Sterian),
26) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie SSD (construcţia propusă),
27) sistem de transmisii de date cu TCM 6-D şi cu detecţie MLD (construcţia propusă).

Pentru fiecare sistem de transmisii de date de mai sus, am rulat simulări în MathWorks MATLAB-Simulink 6.0 pe un PC Compaq cu sistemul de operare Microsoft Windows 2000 Professional şi avînd o memorie RAM de 128 Mo şi un procesor Intel Pentium III cu frecvenţa de ceas de 667 MHz (hardisk Quantum Fireball 20 Go, placă video Nvidia Vanta 8 Mo, placă audio Creative ES1371, CD-ROM Compaq CDR-8402B).

Fiecare simulare am realizat-o pentru un număr total de 10000 de biţi transmişi şi pentru 12 valori ale raportului semnal/zgomot (SNR=Signal to Noise Ratio) din canalul de comunicaţie AWGN (în paşi de 1 dB). Am obţinut numărul de biţi recepţionaţi eronaţi şi rata erorilor de bit (BER=Bit Error Rate) şi am reprezentat grafic BER în funcţie de SNR (Anexa 3). Concluziile sunt prezentate în continuare.

Concluzia 6.7-Atît în cazul în care nu utilizăm modulaţia QAM cît şi în cazul în care utilizăm modulaţia QAM, sistemul de transmisii de date cu TCM 6-D (construcţia propusă) are rata erorilor de bit mai mică decît sistemul de transmisii de date cu TCM 6-D (construcţia Sterian). Astfel am obţinut un cîştig mediu de 0,2 dB pentru sistemul de transmisii de date cu TCM 6-D (construcţia propusă) relativ la sistemul de transmisii de date cu TCM 6-D (construcţia Sterian).

Concluzia 6.8-Dacă utilizăm modulaţia QAM în banda de trecere, se obţin valori mai mici pentru rata erorilor de bit decît în cazul în care nu utilizăm modulaţia QAM sau utilizăm modulaţia QAM în banda de bază. Raportul semnal/zgomot pentru care am obţinut o transmisie cu rata erorilor egală cu zero este 4 dB dacă utilizăm modulaţia QAM în banda de trecere şi 11 dB dacă nu utilizăm modulaţia QAM sau dacă utilizăm modulaţia QAM în banda de bază.

Concluzia 6.9-Dacă utilizăm modulaţia QAM, se obţin valori mai mici pentru rata erorilor de bit a sistemelor de transmisii de date cu detecţie MLD decît a celor cu detecţie SSD.

6.2 Contribuţii personale la modulaţia codată trellis multidimensională

1. **Generalizarea construcţiei Wei a codurilor TCM 2N-D.**

Am utilizat ideea extinderii unei constelaţii de semnale 2-D care a fost formulată de Dinh şi Hashimoto în articolul „A systematic approach to construction of bandwith-efficient multidimensional trellis codes", *IEEE Trans. Comms.*, Vol. 48, No. 11, Nov. 2000.

Am demonstrat formulele pentru energia medie (E_{medie}) şi parametrii PAR şi CER ai constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D (paragraful 4.4.1.2).

În paragraful 4.4 am propus o construcţie Wei generalizată pentru codurile TCM 2N-D.

Întrucît formulele stabilite de Wei şi Sterian pentru cîştigul de codare asimptotic γ al codului TCM 2N-D faţă de o transmisie necodată, nu ţin cont de parametrii PAR şi CER ai constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D, am dedus o nouă formulă care ia în calcul parametrii respectivi (relaţia 4.134).

În relaţiile folosite de Wei şi Sterian (relaţiile 4.2 şi 4.33), energiile medii ale grupurilor se calculează dificil prin însumarea pătratelor distanţelor dintre originea axelor de coordonate a planului complex şi punctele de semnal 2-D situate în grupurile respective şi prin împărţirea la numărul de puncte de semnal 2-D ale grupurilor. Spre deosebire de relaţiile folosite de Wei şi Sterian, relaţia propusă (4.134) permite calculul imediat a cîştigului de codare asimptotic γ al codului TCM 2N-D, după calculul parametrului CER a constelaţiei de semnale 2-D constituentă a constelaţiei de semnale 2N-D.

2. **Generalizarea construcţiei Wei a codorului TCM 2N-D.**

În anul 1987, Wei a prezentat trei codoare TCM multidimensionale pentru cazul în care N este o putere a lui 2:

- un codor TCM 4-D cu 16 stări (paragraful 4.2.1),
- un codor TCM 4-D cu 64 stări,
- un codor TCM 8-D cu 64 stări (paragraful 4.2.2).

În anul 1997, Sterian a găsit o metodă de extindere a construcţiei Wei pentru cazurile în care N nu este o putere a lui 2 şi a prezentat două codoare TCM multidimensionale:

- un codor TCM 6-D cu 64 stări (paragraful 4.3.1),
- un codor TCM 12-D cu 256 stări (paragraful 4.3.2).

În paragraful 4.5 am propus un codor TCM 2N-D pentru cazul în care N este un număr întreg pozitiv.

Am propus un codor diferenţial pe 2 biţi (Fig.4.12) care asigură condiţiile de invarianţă rotaţională a constelaţiei de semnale 2N-D la o rotaţie de 0°, 90°, 180°, 270° şi am dedus relaţiile dintre intrările şi ieşirile sale (relaţiile 4.132).

3. **Generalizarea construcției Wei a decodorului TCM 2N-D**.

În paragraful 4.6 am propus un decodor TCM 2N-D pentru cazul în care N este un număr întreg pozitiv.

Pentru decodorul Viterbi, am construit două diagrame de decodare Viterbi (Fig.4.14 şi Fig.4.15) şi o organigramă de alegere a diagramei Viterbi (Fig.4.13).

Am propus un decodor diferențial pe 2 biți (Fig.4.17) care asigură condițiile de invarianță rotațională a constelației de semnale 2N-D la o rotație de 0°, 90°, 180°, 270° şi am dedus relațiile dintre intrările şi ieşirile sale (relațiile 4.135).

4. **Construcția unui modem analogic de bandă vocală cu TCM 2N-D.**

În capitolul 5 am propus o aplicație a codorului/decodorului TCM 2N-D la construcția unui modem analogic de bandă vocală.

5. **Realizarea în MathWorks MATLAB-Simulink 6.0 a 27 de aplicații**.

Lista acestor aplicații este prezentată în paragraful 6.1. şi aplicațiile se găsesc pe CD-ul ataşat în Anexa 2. Pîna în prezent am văzut doar realizări în MathWorks MATLAB-Simulink ale unui codor/decodor TCM 2-D.

În Anexa 3 am prezentat rezultatele simulărilor pe care le-am realizat în MathWorks MATLAB-Simulink 6.0.

Bibliografie citată în teza de doctorat

1. M. V. EYUBOGLU -„Multimedia modems"-*IEEE Comms. Mag.*, Vol. 34, No. 12, pag. 26-28, Dec. 1996

2. M. ALI -„Evolution from Voiceband to Broadband Internet Access"-DSPS R&D Center, Texas Instruments, 2000

3. GEORGIA TECH Studies - http://www.gvu.gatech.edu/user_surveys/survey-1998-10/graphs/technology/q01.htm

4. B. GOODMAN -„Internet telephony and modem delay"-*IEEE Network*, May/June, 1999

5. W. CONWAY -„A management briefing on V.34 modems: History, technology and economics", General DataComm, 1996

6. M. NAFORNIȚĂ, C. MUNTEAN -„Comunicații de date"-*Ed. „Gheorghe Asachi" Iași*, 1996

7. E. BIGLIERI, D. DIVSALAR, P. J. McLANE și M. K. SIMON -„Introduction to Trellis Coding Modulation with applications"-*Macmillan Publishing Company New York*, 1991

8. Z. PAPIR, A. SIMMONDS -„Competing for throughput in the local loop"-*IEEE Comms. Mag.*, Vol. 37, No. 5, pag. 61-67, May 1999

9. J. L. MASSEY -„Coding and modulation in digital communications", *1974 International Zurich Seminar on Digital Communications*, Zurich, Switzerland, March, 1974

10. G. UNGERBOECK, I. CSAJKA -„On improving data-link performance by increasing the channel alphabet and introducing sequence coding", *1976 International Symposium of Information Theory*, Ronneby, Sweden, Jun. 1976

11. H. IMAI, S. HIRAKAWA -„A new multilevel coding method using error-correcting codes"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol.IT-23, No. 3, pag. 371-377, May 1977

12. G. UNGERBOECK -„Channel coding with multilevels/phase signals"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-28, No. 1, pag. 56-67, Jan. 1982

13. G. D. FORNEY Jr., R. G. GALLAGER, G. R. LANG, F. M. LONGSTAFF, S. U. QURESHI -„Efficient modulation for bandlimited channels"-*IEEE J. Select. Areas. Comms*, Vol. SAC-2, No. 5, pag. 632-647, Sept. 1984

14. L. -F. WEI -„Rotationally invariant convolutional channel coding with expanded signal space. Part II: Nonlinear Coding"-*IEEE J. Select. Areas. Comms*, Vol. SAC-2, No. 5, pag. 672-686, Sept. 1984

15. ITU-T „Recommendation V.32 for a family of 2-wire duplex modems operating at data signalling rates of up to 9600 bit/s for use on the General Switched Telephone Network and on leased telephone-type circuits", May 1984

16. L. -F. Wei „Trellis-Coded Modulation with multidimensional constellations"-*IEEE J. Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-33, No. 4, pag. 483-501, July. 1987

17. ITU-T „Recommendation V.34 for a family of 2-wire duplex modems operating at data signalling rates of up to 33600 bit/s for use on the General Switched Telephone Network and on leased point-to-point 2-wire telephone-type circuits", May 1994

18. R. G. C. Williams -„A trellis code for V.fast", CCITT V.fast Rapporteur Meeting, Bath , UK, Sept. 1992

19. L. -F. WEI -„A new 4-D, 64-state, rate-4/5 Trellis Code"-*Cont.D19*, ITU-T, Study Group 14, Geneva, Switzerland, Sept. 1993
20. ITU-T „Recommendation V.90 for a digital modem and analogue modem pair operating for use on the Public Switched Telephone Network (PSTN) at data signalling rates of up to 56000 bit/s downstream and up to 33600 bit/s upstream", Sept. 1998
21. ITU-T „Recommendation G.711 for Pulse Code Modulation of voice frequencies", 1988
22. G. UNGERBOECK -„TCM with redundant signals sets. Part I: Introduction. Part II: State of the art"-*IEEE Comms. Magazine*, Vol.25, No.2, pag. 5-21, Feb. 1987
23. A. R. CALDERBANK, J. E MAZO -„A new description of trellis codes"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-30, pag. 784-791, Nov. 1984
24. O. AGAZZI, D. G. MESSERSCHMITT şi D. A. HODGES -„Nonlinear echo cancellation of data signals"-*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-30, Nr.11, pag. 2421-2433, Nov. 1982
25. G. D. FORNEY Jr. -„The Viterbi Algorithm"-*IEEE Proc.*, Vol. 61, pag. 268-278, 1973
26. BENEDETTO, M. AJMONE MARSAN, G. ALBETENGO, E. GIACHIN -„Combined coding and modulation. Theory and applications"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-34, No. 2, pag. 223-236, Mar. 1988
27. M. M. MULLIGAN, S. G. WILSON -„An improved algorithm for evaluating trellis phase codes"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-30, No. 6, pag. 846-851, Nov. 1984
28. E. BIGILERI-„High-level modulation and coding for nonlinear satellite channels"-*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-32, No. 5, pag. 616-626, May 1984
29. G. D. FORNEY Jr. -„Coset codes. Part I: Introduction and geometrical clasification"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-34, No. 5, pag. 1123-1151, Sept. 1988
30. G. J. POTTIE, D. P. TAYLOR -„Sphere-packing upper bounds on the free distance of trellis codes"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-34, No.2, pag. 435-447, May 1988
31. A. R. CALDERBANK, J. E. MAZO, V. K. WEI -„Asymtotic upper bounds on the minimum distance of trellis codes"-*IEEE Trans.Comms.*, Vol. COM-33, pag. 305-309, Apr. 1985
32. E. BIGLIERI -„Ungerboeck codes do not shape the signal power spectrum"-*IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-32, No. 4, pag. 595-596, Jun. 1986
33. G. D. FORNEY Jr. -„Geometrically uniform codes", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-37, No. 9, pag. 1241-1260, Sept. 1991
34. A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane -„Four-dimensional modulation with eight-state trellis code", *AT&T Tech. Journal*, Vol. 64, pag. 1005-1018, May/June 1985
35. S. S. PIETROBON , D. J. COSTELLO -„Trellis coding modulation with multidimensional QAM signals sets", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-39, No. 3, pag. 325-336, Mar. 1993
36. S. S. PIETROBON, R. H. DENG, A. LAFANACHERE, G. UNGERBOECK, D. J. COSTELLO -„Trellis-coded multidimensional phase modulation", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-36, No. 3, pag. 63-89, Jan. 1990
37. F. Q. WANG, D. J. COSTELLO -„New rotationally invariant four-dimensional trellis codes", *IEEE Trans. Inf. Theory* , Vol. IT-42, pag. 291-300, Jan. 1996

38. T. C. DINH, T. HASHIMOTO -„A systematic approach to construction of bandwith-efficient multidimensional trellis codes", *IEEE Trans. Comms.*, Vol. 48, No. 11, pag. 1808-1817, Nov. 2000
39. P. PRANDONI -„Information theory in modem practice", Laboratoire de Communication Audio Visuelle (LCAV) Tech-Report, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Feb. 1997
40. C. -E. D. STERIAN -„Extending Wei'trellis coded modulation technique with 2N-D rectangular constellation for N not a power of 2", *Telecomunicații*, Anul XXI, Nr. 4, 1994
41. C. -E. D. STERIAN -„128-state, rate-4/5 rotationally invariant trellis code with 4-D rectangular signal constellation having a coding gain of 5,63 dB", *Telecomunicații*, Anul XXIII, Nr. 2, 1996
42. C. -E. D. STERIAN -„Wei-type trellis-coded modulation with 2N-dimensional rectangular constellation for N not a power of 2", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-43, No. 3, pag. 750-758, Mar. 1997
43. G. D. FORNEY Jr. -„Trellis Shaping", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-38, No. 3, pag. 281-300, Mar. 1992
44. A. K. KHANDANI, P. KABAL -„Shaping Multidimensional Spaces - Part I: Optimum shaping, Shell Mapping", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-39, No. 11, pag. 1799-1808, Nov. 1993
45. Black Box Inc. -„V.34", *Technology Overview*, 1999 - http://www.blackbox.com
46. G. D. FORNEY Jr., M. V. EYUBOGLU -„Combined equalization and coding using precoding"-*IEEE Comms. Mag.*, Vol. 29, No. 12, pag. 23-34, Dec. 1991
47. G. D. FORNEY Jr. , M. V. EYUBOGLU -„Trellis precoding: combined coding , precoding and shaping for intersymbol interference channels", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-38, No. 2, pag. 301-313, Mar. 1992
48. W. H. GERSTAKER, R. F. H. FISCHER, J. B. HUBER -„A transmission scheme for twisted pair lines with coding, precoding and blind equalization", *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecomm'97)*, pag. 52-56, Phoenix, AZ, Nov. 1997
49. F. HARRIS –„Carrier synchronization techniques for DSP-based modems", Communication Systems Design Magazine, July 2000 - http://www.csdmag.com/main/2000/07/0007feat2.htm
50. T. MASSEY, R. IYER - „DSP solutions for telephony and data/facsimile modems", *Texas Instruments - Application Book*, Jan.1997
51. L. LITWIN -„Matched filtering and timing recovery in digital receivers", *Thompson Multimedia Corporate Research*, Sept. 2001
52. J. WENG -„Digital Transmissions Systems", course 2002-2003, Department of Electrical and Computer Engineering, Concordia University , Montreal, Canada
53. A. LOVRICH, R. CHIRAYIL - „An all-digital automatic gain control", *Texas Instruments - Application Report*, Jan.1997
54. F. GAO -„Modem and fax standards and software", *GAO Research and Consulting Article* , 2001 - http://www.gaoresearch.com/resources/articles/mfstds.html
55. E. KAREN -„ITU-T Recommendation V.34", The University of Toronto, 2000 - http://www.comm.toronto.edu/~karen/projects/38.ITUV34/index.html

56. **F. DĂRĂBAN** -„Generalization of Wei's construction for the 2N-dimensional TCM codes", *Proceedings of the International Workshop "Trends and Recent Achivements in Information Technology"*, pag.197-205, Cluj Napoca, Romania, May 2002 - http://193.226.6.174/IT2002/pdf/L35.pdf
57. **F. DĂRĂBAN** -„Generalization of Wei's construction for the 2N-dimensional TCM encoder and decoder", *Proceedings of the International Workshop "Trends and Recent Achivements in Information Technology"*, pag.205-213, Cluj Napoca, Romania, May 2002 - http://193.226.6.174/IT2002/pdf/L36.pdf
58. **F. DĂRĂBAN** -„An analog voice modem with generalized Wei's type 2N-dimensional trellis coded modulation", *Proceedings of the International Workshop "Trends and Recent Achivements in Information Technology"*, pag.213-223, Cluj Napoca, Romania, May 2002 - http://193.226.6.174/IT2002/pdf/L37.pdf
59. **F. DĂRĂBAN** -„A Wei's Type Multidimensional TCM Encoder", *Transactions on Electronics and Communications - Buletinul Stiințific al Universității Politehnica Timişoara*, pag.3-12, Tom 46(60), Fascicola 2, 2001
60. **F. DĂRĂBAN** -„A Wei's Type Multidimensional TCM Decoder", *Transactions on Electronics and Communications - Buletinul Stiințific al Universității Politehnica Timişoara*, pag.13-18, Tom 46(60), Fascicola 2, 2001.

Bibliografie consultată pentru documentare

61. M. E. BORDA -„Teoria transmiterii informației. Teoria informației şi codării. Fundamente şi aplicații" -*Ed. Dacia*, Cluj-Napoca, 1999

62. T. STARR, J. M. CIOFFI, P. J. SILVERMAN -„Understanding Digital Subscriber Line Technology" -*Prentice Hall PTR*, 1999

63. S. RAJPAL, D. J. RHEE, S. LIN -„Multidimensional Trellis Coded Phase Modulation Using a Multilevel Concatenation Approach - Part I: Code Design" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.01, pag. 64-72, Jan. 1997

64. S. RAJPAL, D. J. RHEE, S. LIN -„Multidimensional Trellis Coded Phase Modulation Using a Multilevel Concatenation Approach - Part II: Codes for the AWGN and Fading Channels" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.02, pag. 177-186, Feb. 1997

65. A. MASOOMZADEH-FARD, S. PASUPATHY -„Combined Equalization and Differential Detection Using Precoding" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.03, pag. 274-278, Mar. 1997

66. S.-L. SU, J.-M.WU -„Combination of BCM and TCM with 90°, 180° and 270° Phase Rotational Invariance" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.07, pag. 800-808, July 1997

67. J.-Y. WANG, M.-C. LIN -„On Constructing Trellis Codes with Large Free Distances and Low Decoding Complexities" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.09, pag. 1017-1020, Sept. 1997

68. E. BACCARELLI, R. CUSANI, G. DI BLASIO -„Performance Bound and Trellis-Code Design Criterion for Discrete Memoryless Channels and Finite-Delay Symbol-by-Symbol Decoding" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.10, pag. 1192-1199, Oct. 1997

69. T. JI, P. AN, S. C. KWATRA -„Nonlinear Rotationally Invariant Trellis Codes for Multidimensional Modulation" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.10, pag. 1231-1235, Oct. 1997

70. E. S. ESTEVES, R. SAMPAIO-NETO -„A Per-Survivor Phase Acquisition and Tracking Algorithm for Detection of TCM Signals with Phase Jitter and Frequency Error" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-45, Nr.11, pag. 1381-1384, Nov. 1997

71. E. BACCARELLI, S. GALLI -„New Results About Analysis and Design of TCM for ISI Channels and Combined Equalization/Decoding" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.04, pag. 417-420, April 1998

72. J. K. CAVERS, J.-H. KIM, P. HO -„Exact Calculation of the Union Bound on Performance of Trellis-Coded Modulation in Fading Channels" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.05, pag. 576-579, May 1998

73. K. M. MACKENTHUN JR. -„Codes Based on a Trellis Cut-Set Transformation - Part I: Rotationally Invariant Codes" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.05, pag. 610-620, May 1998

74. J. E. SMEE, N. C. BEAULIEU -„Error-Rate Evaluation of Linear Equalization and Decision Feedback Equalization with Error Propagation" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.05, pag. 656-665, May 1998

75. E. AYANOGLU, N. R. DAGDEVIREN, G. D. GOLDEN, J. E. MAZO -„An Equalizer Design Technique for the PCM Modem: A New Modem for the Digital Public Switched Network" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.06, pag. 763-774, June 1998

76. J. LABAT, O. MACCHI, C. LAOT -„Adaptive Decision Feedback Equalization: Can You Skip the Training Period?" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.07, pag. 921-930, July 1998

77. T.-T. CHEN, J. S. LEHNERT -„TCM/SSMA Communication Systems with Cascaded Sequences and PAM/QAM Signal Sets" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.07, pag. 950-956, July 1998

78. D. G. LAINIOTIS, P. PAPAPARASCHEVA -„Partitioned Adaptive Approach to Nonlinear Channel Equalization" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.10, pag. 1325-1336, Oct. 1998

79. A. E. VITYAEV, P. H. SIEGEL -„On Viterbi Detector Path Metric Differences" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-46, Nr.12, pag. 1549-1554, Dec. 1998

80. W. LEE, K. CHEUN -„Convergence Analysis of the Stop-and-Go Blind Equalization Algorithm" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-47, Nr.02, pag. 177-180, Feb. 1999

81. D. HUANG, F. GUSTAFSSON -„Sufficient Output Conditions for Identifiability in Blind Equalization" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-47, Nr.02, pag. 191-194, Feb. 1999

82. H. A. RAJAB, M. D. YUCEL -„Efficient Performance Computations for Trellis-Coded Modulation” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-47, Nr.07, pag. 796-798, June 1999

83. K. M. MACKENTHUN Jr. -„Codes Based on a Trellis Cut Set Transformation - Part II: Codes for Noncoherent Detection” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-47, Nr.07, pag. 998-1007, July 1999

84. K. J. KIM, R. A. ILTIS -„An Importance Sampling Technique for a Symbol-by-Symbol TCM Decoding/Equalization Algorithm” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.07, pag. 1141-1150, July 2000

85. M.-C. LIN, Y.-L. UENG, J.-Y. WANG -„Two Trellis Coding Schemes for Large Free Distances” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.08, pag. 1286-1296, Aug. 2000

86. Z. DING, Z.-Q. LUO -„A Fast Linear Programming Algorithm for Blind Equalization” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.09, pag. 1432-1436, Sept. 2000

87. W. H. GERSTACKER, R. R. MULLER, J. B. HUBER -„Iterative Equalization with Adaptive Soft Feedback” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.09, pag. 1462-1467, Sept. 2000

88. J. X. YU, Y. LI, H. MURATA, S. YOSHIDA -„Hybrid-ARQ Scheme Using Different TCM for Retransmission” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.10, pag. 1609-1613, Oct. 2000

89. D. RAPHAELI, T. KAITZ -„A Reduced-Complexity Algorithm for Combined Equalization and Decoding” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.11, pag. 1797-1807, Nov. 2000

90. E. BACCARELLI -„On the Performance Limits of TCM in Fast-Fading Multipath Channels with Combined Equalization/Decoding” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-48, Nr.12, pag. 1957-1964, Dec. 2000

91. J. MANNERKOSKI, V. KOIVUNEN, D. P. TAYLOR -„Performance Bounds for Multistep Prediction-Based Blind Equalization” -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-49 Nr.01, pag. 84-93, Jan. 2001

92. S. A. ALTEKAR, A. E. VITYAEV, J. K. WOLF -„Decision-Feedback Equalization via Separating Hyperplanes" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-49, Nr.03, pag. 480-486, Mar. 2001

93. L. M. GARTH -„A Dynamic Convergence Analysis of Blind Equalization Algorithms" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-49, Nr.04, pag. 624-634, April 2001

94. K. R. NARAYANAN, G. L. STUBER -„Performance of Trellis-Coded CPM with Iterative Demodulation and Decoding" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-49, Nr.04, pag. 676-687, April 2001

95. Q. WANG, L. WEI -„Iterative Viterbi Algorithm for Concatenated Multidimensional TCM" -*IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-50, Nr.01, pag. 12-15, Jan. 2002

96. M. E. PELLENZ, J. PORTUGHEIS -„ On the Analysis of the Performance of Coded Modulation Schemes for Unequal Error Protection"- *IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-50, Nr.08, pag. 1205-1208, Aug. 2002

97. Y.-L. UENG, C.-J. ZEH, M.-C. LIN -„ On Trellis Codes with a Delay Processor and a Signal Mapper"- *IEEE Trans. Comms.*, Vol. COM-50, Nr.12, pag. 1906-1917, Dec. 2002

98. W. Y. CHEN -„The Development and Standardization of Asymmetrical Digital Subscriber Line" -*IEEE Comms. Mag.*, Vol. 37, Nr.05, pag. 68-72, May 1999

99. J. F. HAYES -„The Viterbi Algorithm Applied to Digital Data Transmission" -*IEEE Comms. Mag.*, 50th Anniversary Issue, pag. 26-32, May 2002

100. E. BIGLIERI -„Digital Transmission in the 21st Century" -*IEEE Comms. Mag.*, 50th Anniversary Issue, pag. 128-137, May 2002

101. N. V. TRAU -„Performance and Distance Spectrum Calculation of TCM over ISI Channels" -*Master Thesis*, The University of South Australia, 1998

102. S. A. AL-SEMARI -„Design and Performance of Trellis Codes for Wireless Channels" -*PhD Thesis*, The University of Maryland, 1995

103. R. LAROIA -„An Optimal Shaping for Multidimensional Constellations-An Alternative Approach to Lattice-Bounded (Voronoi) Constellations" -*Tech Report*, The University of Maryland, 1992

104. R. LAROIA, S. TRETTER, N. FARVARDIN -„A Simple and Effective Precoding Scheme for Noise Whitening on ISI Channels" -*Tech Report*, The University of Maryland, 1992

105. S. A. AL-SAMARI, T. E. FUJA -„Performance Analysis of Coherent TCM Systems with Diversity Reception in Slow Rayleigh Fading" -*Tech Report*, The University of Maryland, 1996.

Anexa 1-Tabel cu parametrii calculați ai codurilor TCM 2N-D pentru N=2≤8

Q [biti/s]	N	N'	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2$	α	β	CER0	CER	PAR	CER0 [dB]	CER [dB]	PAR [dB]	γ [dB]	Nr. total puncte	CER WEI	PAR WEI	CER WEI [dB]	PAR WEI [dB]	γ WEI [dB]	Nr. total puncte	CER STERIAN	PAR STERIAN	CER STERIAN [dB]	PAR STERIAN [dB]	γ STERIAN [dB]	Nr total puncte
7	2	2	4	0,00000	0,50000	1,37500	1,37500	2,18182	1,38303	1,38303	3,38819	4,63757	192	1,37500	2,18182	1,38303	3,38819	4,63757	192	-	-	-	-	-	-
7	3	2	4	0,09091	0,34375	1,22222	1,22233	2,19867	0,87150	0,87189	3,42160	5,14871	172	-	-	-	-	-	-	1,22917	2,44068	0,89611	3,87510	5,12449	192
7	4	4	4	0,00000	0,25000	1,15625	1,15625	2,16216	0,63052	0,63052	3,34888	5,39008	160	1,15625	2,16216	0,63052	3,34888	5,39008	160	-	-	-	-	-	-
7	5	4	4	0,14286	0,21875	1,12000	1,12012	2,17611	0,49218	0,49263	3,37681	5,52797	156	-	-	-	-	-	-	1,12188	2,22841	0,49944	3,47996	5,52116	160
7	6	4	4	0,16667	0,18750	1,09722	1,09733	2,16434	0,40295	0,40338	3,35326	5,61722	152	-	-	-	-	-	-	1,09896	2,27488	0,40981	3,56959	5,61079	160
7	7	4	4	0,20000	0,15625	1,08163	1,08175	2,13774	0,34080	0,34128	3,29954	5,67932	148	-	-	-	-	-	-	1,08259	2,30928	0,34464	3,63476	5,67596	160
7	8	8	4	0,00000	0,12500	1,07031	1,07031	2,10219	0,29511	0,29511	3,22672	5,72549	144	1,07031	2,10219	0,29511	3,22672	5,72549	144	-	-	-	-	-	-

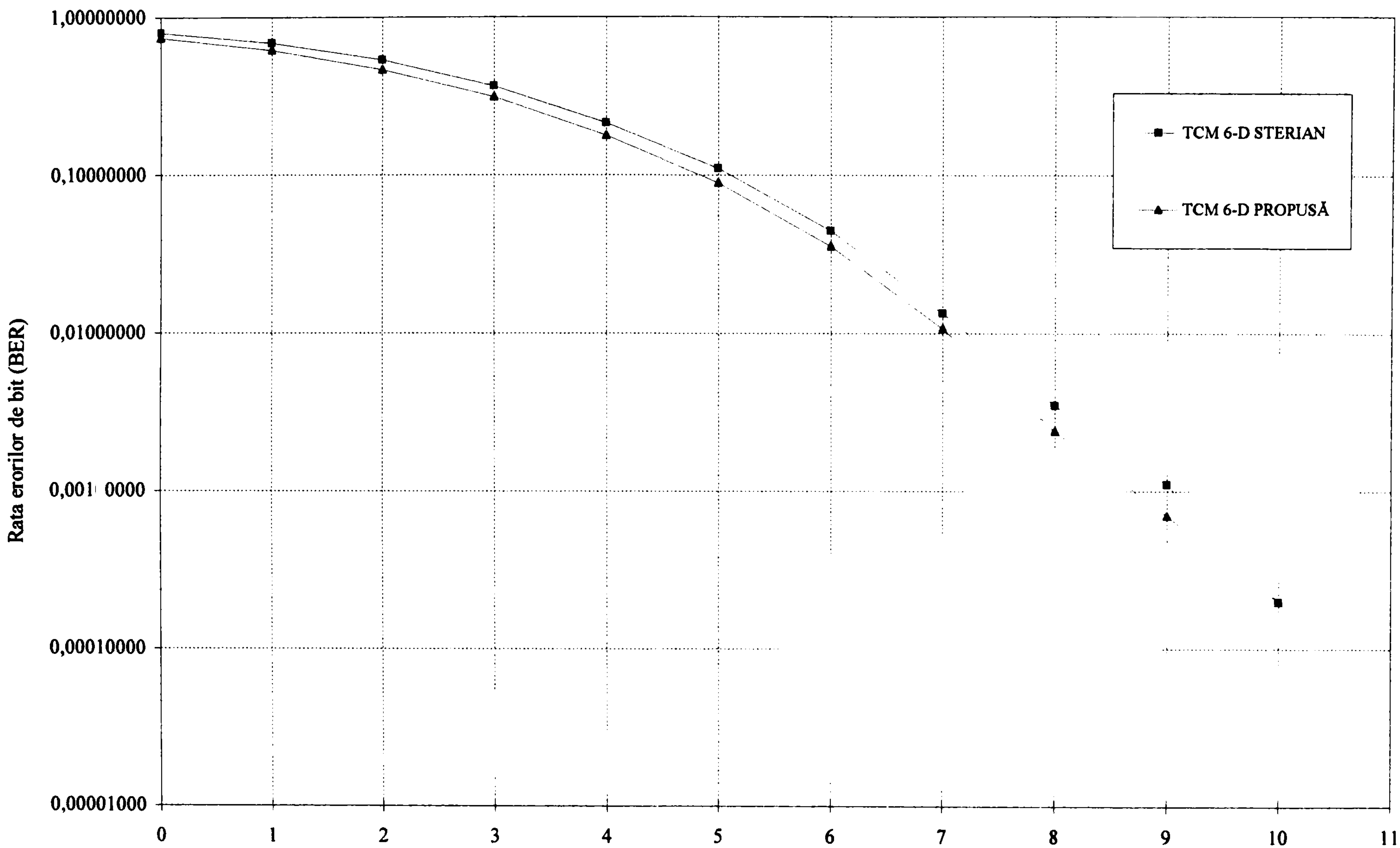
Q [biti/s]	N	N'	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2$	α	β	CER0	CER	PAR	CER0 [dB]	CER [dB]	PAR [dB]	γ [dB]	Nr total puncte	CER WEI	PAR WEI	CER WEI [dB]	PAR WEI [dB]	γ WEI [dB]	Nr total puncte	CER STERIAN	PAR STERIAN	CER STERIAN [dB]	PAR STERIAN [dB]	γ STERIAN [dB]	Nr total puncte
10	2	2	4	0,00000	0,50000	1,37500	1,37500	2,18182	1,38303	1,38303	3,38819	4,63757	1536	1,37500	2,18182	1,38303	3,38819	4,63757	1536	-	-	-	-	-	-
10	3	2	4	0,01163	0,33594	1,22222	1,22222	2,18608	0,87150	0,87151	3,39665	5,14909	1368	-	-	-	-	-	-	1,22917	2,44068	0,89611	3,87510	5,12449	1536
10	4	4	4	0,00000	0,25000	1,15625	1,15625	2,16216	0,63052	0,63052	3,34888	5,39008	1280	1,15625	2,16216	0,63052	3,34888	5,39008	1280	-	-	-	-	-	-
10	5	4	4	0,01923	0,20313	1,12000	1,12000	2,14844	0,49218	0,49218	3,32122	5,52841	1232	-	-	-	-	-	-	1,12188	2,22841	0,49944	3,47996	5,52116	1280
10	6	4	4	0,02326	0,16797	1,09722	1,09722	2,12895	0,40295	0,40295	3,28166	5,61765	1196	-	-	-	-	-	-	1,09896	2,27488	0,40981	3,56959	5,61079	1280
10	7	4	4	0,02703	0,14453	1,08163	1,08163	2,11630	0,34080	0,34081	3,25577	5,67979	1172	-	-	-	-	-	-	1,08259	2,30928	0,34464	3,63476	5,67596	1280
10	8	8	4	0,00000	0,12500	1,07031	1,07031	2,10219	0,29511	0,29511	3,22672	5,72549	1152	1,07031	2,10219	0,29511	3,22672	5,72549	1152	-	-	-	-	-	-

Q [biti/s]	N	N'	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2$	α	β	CER0	CER	PAR	CER0 [dB]	CER [dB]	PAR [dB]	γ [dB]	Nr total puncte	CER WEI	PAR WEI	CER WEI [dB]	PAR WEI [dB]	γ WEI [dB]	Nr total puncte	CER STERIAN	PAR STERIAN	CER STERIAN [dB]	PAR STERIAN [dB]	γ STERIAN [dB]	Nr total puncte
7	2	2	8	0,00000	0,50000	1,37500	1,37500	2,18182	1,38303	1,38303	3,38819	7,64787	192	1,37500	2,18182	1,38303	3,38819	7,64787	192	-	-	-	-	-	-
7	3	2	8	0,09091	0,34375	1,22222	1,22233	2,19867	0,87150	0,87189	3,42160	8,15901	172	-	-	-	-	-	-	1,22917	2,44068	0,89611	3,87510	8,13479	192
7	4	4	8	0,00000	0,25000	1,15625	1,15625	2,16216	0,63052	0,63052	3,34888	8,40038	160	1,15625	2,16216	0,63052	3,34888	8,40038	160	-	-	-	-	-	-
7	5	4	8	0,14286	0,21875	1,12000	1,12012	2,17611	0,49218	0,49263	3,37681	8,53827	156	-	-	-	-	-	-	1,12188	2,22841	0,49944	3,47996	8,53146	160
7	6	4	8	0,16667	0,18750	1,09722	1,09733	2,16434	0,40295	0,40338	3,35326	8,62752	152	-	-	-	-	-	-	1,09896	2,27488	0,40981	3,56959	8,62109	160
7	7	4	8	0,20000	0,15625	1,08163	1,08175	2,13774	0,34080	0,34128	3,29954	8,68962	148	-	-	-	-	-	-	1,08259	2,30928	0,34464	3,63476	8,68626	160
7	8	8	8	0,00000	0,12500	1,07031	1,07031	2,10219	0,29511	0,29511	3,22672	8,73579	144	1,07031	2,10219	0,29511	3,22672	8,73579	144	-	-	-	-	-	-

Q [biti/s]	N	N'	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2$	α	β	CER0	CER	PAR	CER0 [dB]	CER [dB]	PAR [dB]	γ [dB]	Nr total puncte	CER WEI	PAR WEI	CER WEI [dB]	PAR WEI [dB]	γ WEI [dB]	Nr total puncte	CER STERIAN	PAR STERIAN	CER STERIAN [dB]	PAR STERIAN [dB]	γ STERIAN [dB]	Nr total puncte
10	2	2	8	0,00000	0,50000	1,37500	1,37500	2,18182	1,38303	1,38303	3,38819	7,64787	1536	1,37500	2,18182	1,38303	3,38819	7,64787	1536	-	-	-	-	-	-
10	3	2	8	0,01163	0,33594	1,22222	1,22222	2,18608	0,87150	0,87151	3,39665	8,15939	1368	-	-	-	-	-	-	1,22917	2,44068	0,89611	3,87510	8,13479	1536
10	4	4	8	0,00000	0,25000	1,15625	1,15625	2,16216	0,63052	0,63052	3,34888	8,40038	1280	1,15625	2,16216	0,63052	3,34888	8,40038	1280	-	-	-	-	-	-
10	5	4	8	0,01923	0,20313	1,12000	1,12000	2,14844	0,49218	0,49218	3,32122	8,53871	1232	-	-	-	-	-	-	1,12188	2,22841	0,49944	3,47996	8,53146	1280
10	6	4	8	0,02326	0,16797	1,09722	1,09722	2,12895	0,40295	0,40295	3,28166	8,62795	1196	-	-	-	-	-	-	1,09896	2,27488	0,40981	3,56959	8,62109	1280
10	7	4	8	0,02703	0,14453	1,08163	1,08163	2,11630	0,34080	0,34081	3,25577	8,69009	1172	-	-	-	-	-	-	1,08259	2,30928	0,34464	3,63476	8,68626	1280
10	8	8	8	0,00000	0,12500	1,07031	1,07031	2,10219	0,29511	0,29511	3,22672	8,73579	1152	1,07031	2,10219	0,29511	3,22672	8,73579	1152	-	-	-	-	-	-

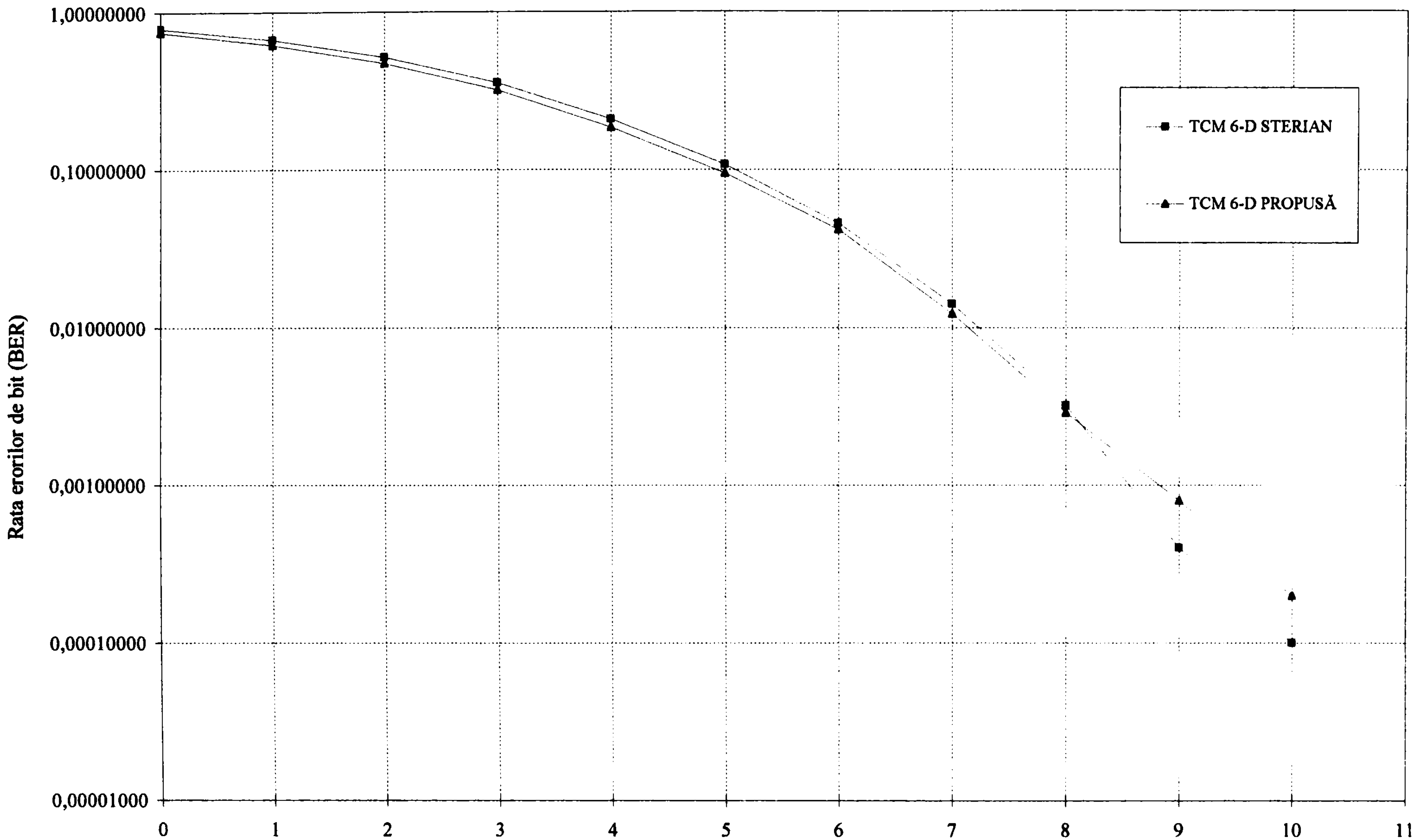
Anexa 2- Modelele MATLAB-Simulink pentru sistemele de transmisii de date cu TCM 4-D (construcţia Wei), TCM 6-D (construcţia Sterian) şi TCM 6-D (construcţia propusă)

Anexa 3a



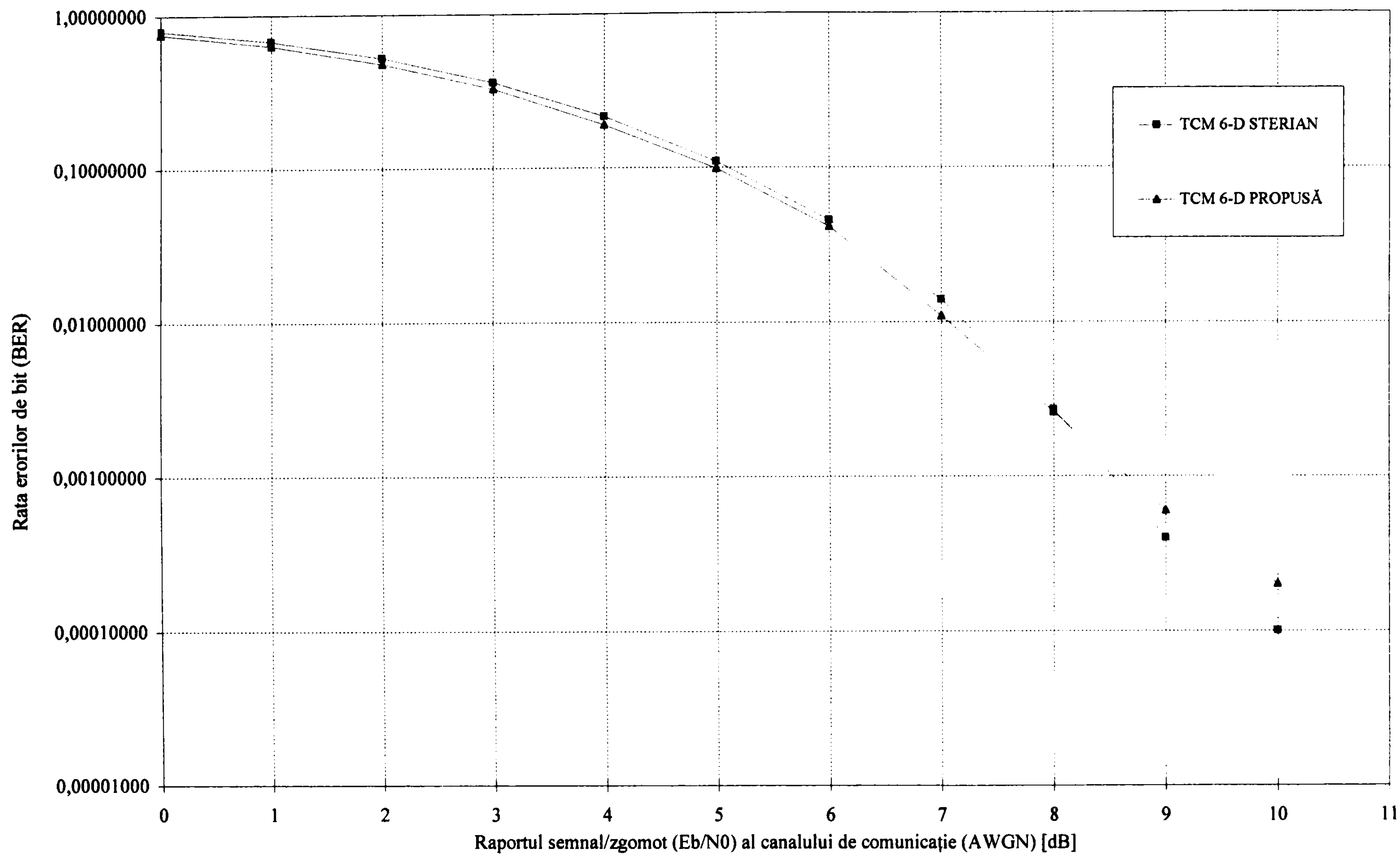
Raportul semnal/zgomot (Eb/N0) al canalului de comunicație (AWGN) [dB]
Detecție SSD sau detecție MLD, fără modulație QAM.

Anexa 3b



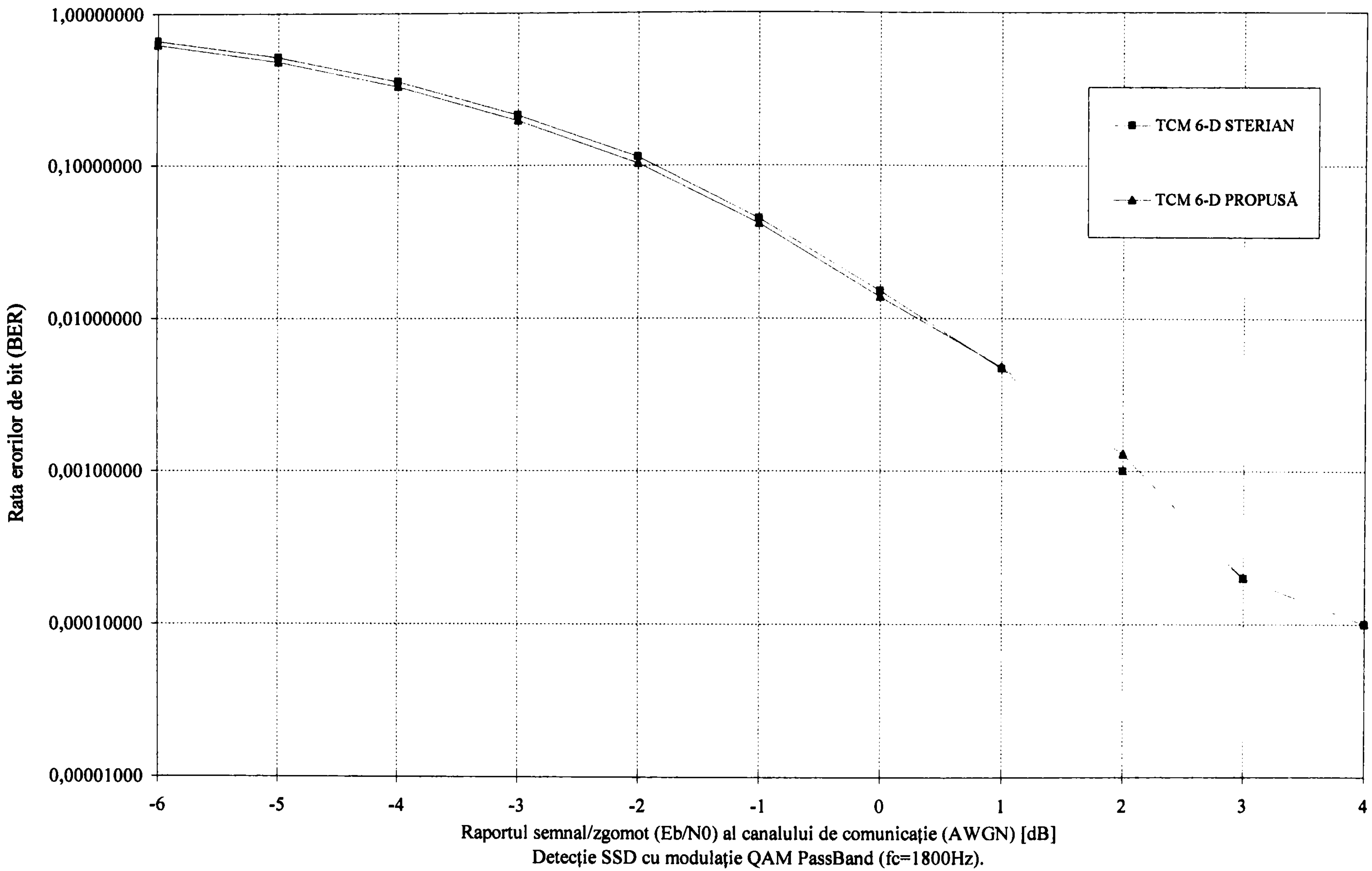
Raportul semnal/zgomot (Eb/N0) al canalului de comunicație (AWGN) [dB]
Detecție SSD cu modulație QAM BassBand.

Anexa 3c



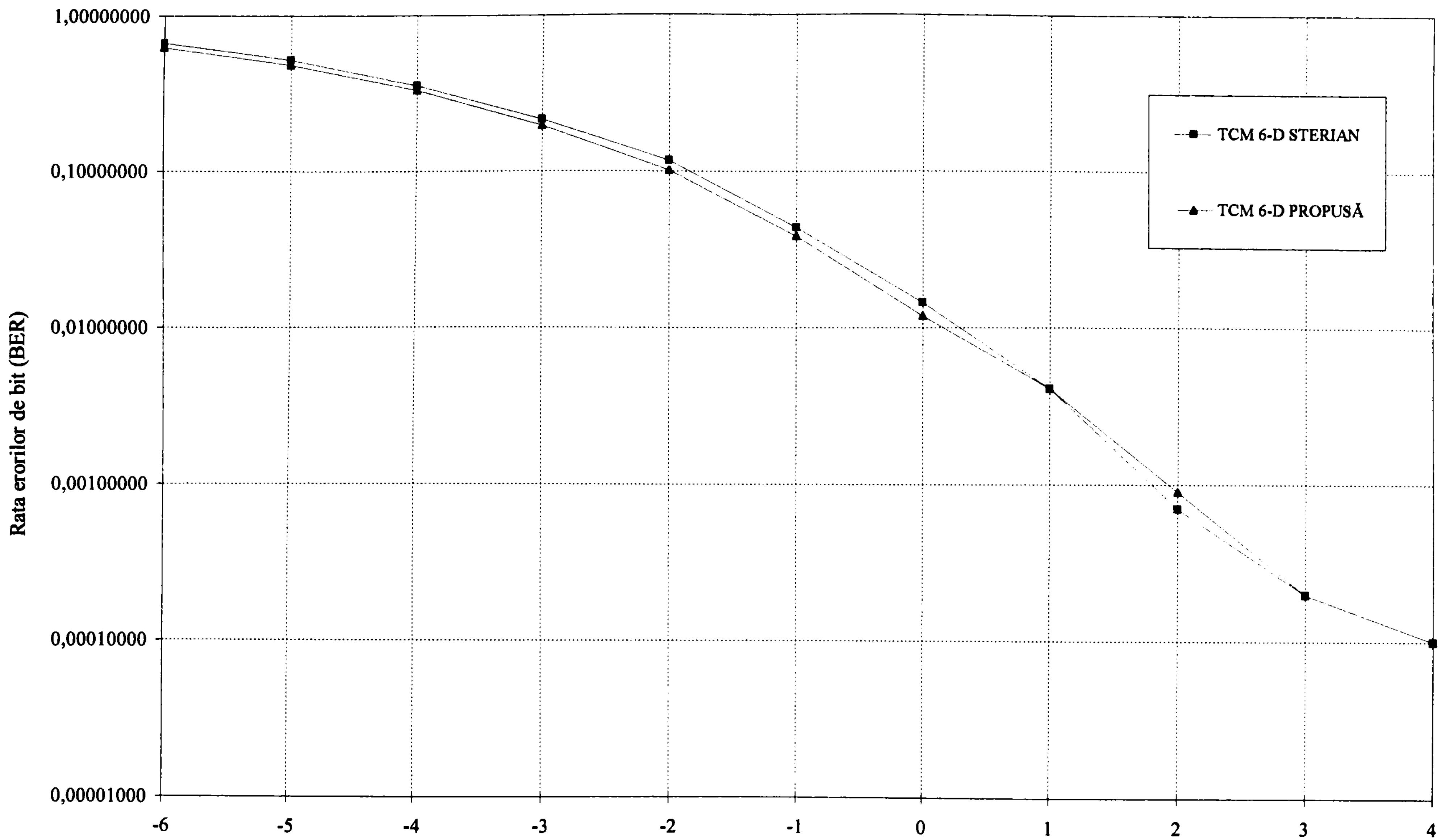
Detecție MLD cu modulație QAM BassBand.

Anexa 3d



1,00000000
0,10000000
0,01000000
0,00100000
0,00010000
0,00001000
Rata erorilor de bit (BER)
TCM 6-D STERIAN
TCM 6-D PROPUSĂ
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
Raportul semnal/zgomot (Eb/N0) al canalului de comunicație (AWGN) [dB]
Detecție SSD cu modulație QAM PassBand (fc=1800Hz).

Anexa 3e



Raportul semnal/zgomot (Eb/N0) al canalului de comunicație (AWGN) [dB]
Detecție MLD cu modulație QAM PassBand (fc=1800Hz).