UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ
CATEDRA DE REZISTENŢA MATERIALELOR

Ing. Cornelia MUNTEAN

TEZA DE DOCTORAT

STUDII ŞI CERCETĂRI PRIVIND ANALIZA CÂMPURILOR DE TENSIUNI ŞI DEPLASĂRI ÎN SOLIDE ELASTICE CU DEFECTE

Conducător ştiinţific: Prof. Dr. Ing. Ionel DOBRE

CUPRINS

P R E F A Ț Ă

Iată că au trecut ca în zbor șase ani de muncă asiduă, cu transpirație și oboseală, de când am început lucrul efectiv la această teză. Acum sunt la finalul ei, dar nu și al studiului și cercetărilor mele în general asupra minunatelor legi ale lui Dumnezeu lăsate spre descoperire, explorare și utilizare oamenilor. Totuși, nu pot să nu fiu de acord cu afirmația unui recunoscut autor creștin, E.G. White, care a spus: „***Cine aprofundează mai mult cercetarea tainelor naturii, va recunoaște că există adâncuri și înălțimi pe care el nu le poate atinge, taine pe care nu le poate pătrunde, că întinse câmpuri ale adevărului stau încă neexplorate înaintea sa***."

Țin să mulțumesc la acest sfârșit de cale colectivului Catedrei de Rezistența materialelor, care m-a primit cu colegialitate și pe care l-am simțit întotdeauna alături de strădania mea.

Din cadrul acestui colectiv în mod deosebit mulțumesc d-lui Prof. Dr. Ing. Nicolae FAUR, care m-a învățat și m-a ajutat să-mi însușesc metodele de element finit și de frontieră și care cu generozitate mi-a pus la dispoziție programele COSMOS/M 2.5 și BEASY 8.0; d-lui Conf. Dr. Ing. Liviu MARȘAVINA, care de asemenea cu mult altruism m-a ajutat la cercetările de fotoelasticimetrie; d-lui Asist. Ing. Radu NEGRU, care a participat la activitatea de cercetare bibliografică.

Nu în ultimul rând mulțumesc cu multă căldură d-lui Prof. Dr. Ing. Ionel DOBRE, care m-a încurajat nu de puține ori atunci când împotmolindu-mă pe cale eram gata să renunț. Doresc să apreciez în mod deosebit excepționala sa pregătire profesională și ajutorul enorm pe care mi l-a oferit în mod efectiv, muncind chiar mai mult ca mine în descâlcirea problemelor matematice care depășeau puterile mele. Îi rămân pentru totdeauna îndatorată pentru sprijinul acordat cu atâta bunăvoință.

Mulțumesc d-lui Conf. Dr. Ing. Romeo RESIGA de la Catedra de Mașini hidraulice, care mi-a dat programul MS Fortran Powerstation, cu care am lucrat la capitolul 4 al tezei.

Mulțumesc membrilor Comisiei de doctorat, distinșilor profesori universitari P.P. TEODORESCU și Nicolae ILIESCU, mari personalități din domeniul mecanicii, membrii ai Academiei de Științe Tehnice, care au avut bunăvoința să-mi analizeze teza de doctorat și să fie de acord cu susținerea ei publică.

Timișoara, 29 mai 2003

Autoarea

CAPITOLUL 1

STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR PRIVIND CALCULUL CÂMPURILOR DE TENSIUNI, DEFORMAȚII ȘI DEPLASĂRI ÎN SOLIDE ELASTICE CU DEFECTE

§ 1.1. INTRODUCERE. PREZENTAREA PROBLEMATICII

La ora actuală cercetarea științifică în domeniul mecanicii corpurilor cu fisuri (sau mai general cu defecte) a postulat anumite concluzii rezultate în principal din experiență, considerate ca puncte de plecare în orice analiză de esență a problemei:

- În toate corpurile solide, indiferent de modul de realizare, de modul de solicitare sau de importanța lor în structura de rezistență din care fac parte, **există defecte**, fie că este vorba de microdefecte de tipul dislocațiilor, vacanțelor, etc., fie că este vorba de macrodefecte de tipul golurilor, incluziunilor, fisurilor, crăpăturilor, tăieturilor, rezulatate în special în procesul de elaborare a materialelor în sine sau a structurilor în ansamblu.
- Rezistenta solidelor elastice deformabile **depinde în mod esențial** de defectele existente în elementele structurii.
- Sub acțiunea sarcinilor exterioare, care pot fi de natură mecanică, termică sau electromagnetică, microfisurile vor crește și, printr-un proces de coalescență, vor conduce la apariția fisurilor, care la rândul lor se vor propaga, putând conduce la distrugerea locală sau totală a corpului. După cum reiese din experiență acest fenomen este caracteristic mai ales pentru cazul ruperilor fragile si cvasifragile;
- Pentru a putea da un răspuns asupra capacității de rezistență a unui solid elastic solicitat, trebuie să cunoaștem natura și dimensiunile defectelor preexistente și să putem calcula starea de tensiune și deformație în imediata lor vecinătate.

Actualmente, în cazul teoriei liniare a elasticității, s-au rezolvat multe probleme referitoare la starea de tensiune și deformație a corpurilor cu fisuri. Majoritatea acestor soluții se referă la corpurile cu o fisură sau cu un sistem de fisuri, ordonate într-un fel determinat, fără să existe o metoda general valabilă de rezolvare. O încercare de rezolvare unitară a problemelor plane cu fisuri este făcută în monografia lui V.V. PANASIUK, M.P. SAVRUK și A.P. LAȚÎNIN-1976, **pe baza metodei ecuațiilor integrale singulare** aplicate atât la domenii simplu conexe, cât și la domenii multiplu conexe. Apariția calculatoarelor și a programelor specializate pe rezolvarea numerică a ecuațiilor integrale permite obținerea unor rezultate cu un grad de precizie ridicat.

Obiectivul principal al analizei câmpului de tensiuni și deformații în corpurile cu fisuri este de a obține o imagine globală a stării de tensiune și deformație în zona care include vârful sau frontul fisurii, zonă în care apare procesul progresiv de propagare a fisurii până la rupere. Considerând o comportare liniar elastică pentru a face o caracterizare în termenii valorilor K_I,

K_{II}, K_{III}, este suficientă cunoaşterea câmpului de tensiuni, deformaţii şi deplasări în apropierea vârfului fisurii. În acest sens în literatura specifică de mecanica ruperii sunt cunoscute un număr mare de soluţii în formă închisă pentru probleme bidimensionale relative la modul I şi modul II de deschidere a fisurii. Sub aspect teoretic acestea sunt valabile numai pentru planul infinit, în special pentru cele care se comporta după modul III. Vom face mai târziu o analiză amănunţită a acestei probleme.

§ 1.2. IDEEA ŞI PROBLEMATICA DEFECTELOR ADMISIBILE

Toată munca depusă de-a lungul anilor în domeniul mecanicii ruperii pleacă de la ideea – pe care am postulat-o mai sus – că nu există structuri de rezistenţă fără defecte, care apar fie în timpul elaborării materialelor, fie în timpul procesului tehnologic de fabricaţie, fie în timpul exploatării, ca urmare a acţiunii solicitării şi a mediilor active. Din aceste motive varietatea defectelor este extrem de mare, cuprinzând clase de incluziuni, porozităţi, fisuri, goluri, zone cu caracteristici fizico-chimice şi de rezistenţă modificate, cum ar fi zona de influenţă termică într-o îmbinare sudată, zone cu tenacitate diminuată printr-un efect tenso-termic etc. Această idee s-a cristalizat în timp, pe baza unui enorm material experimental, de la teoria dislocaţiilor din reţele cristaline până la incluziunile grosolane din procesele de turnate. Mai mult, existenţa unor incluziuni din materiale cu alte proprietăţi mecanice a devenit o caracteristică fundamentală în alcătuirea materialelor compozite. S-a schimbat însăşi concepţia despre fenomenul de rupere, care era privit în accepţiunea clasică a teoriilor de rezistenţă ca un fenomen global de cedare; astăzi studiile la nivel microscopic relevă faptul că ruperea este un proces puternic localizat, dependent de imperfecţiunile microstructurii: dislocaţii, vacanţe, agregate de impurităţi etc., care au în general o distribuţie şi o variaţie dimensională profund aleatoare.

Mecanica ruperii (M.R.) s-a dezvoltat pentru cazul defectelor de tipul fisurilor de formă plană, considerat ca un caz extrem de acuitate şi periculozitate. La cealaltă extremitate se află defectele volumice (tridimensionale), de forma cvasi-sferică, elipsoidală, cilindrică circulară etc., care în general afectează rezistenţa structurii numai în măsura în care diminuează secţiunea periculoasă şi induc concentrări de tensiune. Cazurile reale se situează între aceste doua extreme şi se vor adopta metode diferite de calcul, analiză şi interpretare, în funcţie de tipul defectului: cele care se apropie de modelul fisurilor plane se vor rezolva prin metodele (M.R.), celelalte cu metodele teoriei elasticităţii.

De multe ori se foloseşte pentru descrierea unei aglomerări de pori, incluziuni, fisuri, sau chiar a unei zone cu tenacitate scăzută, un **defect conceptual global de formă circulară sau elipsoidală**, care circumscrie această aglomerare. Această metodă de echivalenţă se bazează pe constatarea că o aglomerare de pori sau incluziuni se transformă într-o reţea de fisuri prin cedarea punţilor de material, care despart defectele în primul rând în interiorul aglomerării, cedare care se opreşte la limita domeniului înscris în golul echivalent.

Într-o estimare globală pur inginerească a mărimii defectelor admisibile pe baza unei metodologii generalizate, este utilă şi necesară adoptarea unei relaţii simple între parametrii stării de tensiune, mărimea defectului şi caracteristica de tenacitate corespunzătoare zonei investigate. In acest scop se utilizează relaţia:

$$K_{Ic} = \sigma\sqrt{\pi\beta a} \tag{1.2.1}$$

care guvernează iniţierea ruperii în condiţiile unei stări de tensiune elastice, respectiv:

$$\delta_c = \frac{8\sigma_c a}{\pi E}\ln\left[\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_c}\right] \tag{1.2.2}$$

în condiţiile apariţiei unei deformaţii plastice limitate.

Mărimea admisibilă a defectului se determină din condiţia ca iniţierea ruperii să nu survină la nivelul tensiunii admisibile de proiectare:

$$\sigma_{ad} = \frac{\sigma_c}{c} \tag{1.2.3}$$

unde c este un coeficient de siguranţă.

Din formulele precedente, considerând că:

$$\sigma_c = E\varepsilon_c \tag{1.2.4}$$

rezultă (v. CIOCLOV [C45]-1977)

$$\sigma_{ad} = \frac{c^2}{\pi\beta^2}\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}\right)^2 = C_1\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}\right)^2 \tag{1.2.5}$$

$$\sigma_{ad} = \frac{\pi}{8}\left[\ln\left(\sec\frac{\pi}{2c}\right)\right]^{-1}\frac{\delta_c}{\varepsilon_c} = C_2\frac{\delta_c}{\varepsilon_c} \tag{1.2.6}$$

De obicei, în condiţii normale de proiectare, se adoptă un coeficient de siguranţă global c=1.5, ceea ce conduce ca din relaţiile (1.2.5) şi (1.2.6) să avem:

$$C_1 \cong 0.5 \text{ şi } C_2 = 0.57 \tag{1.2.7}$$

Datorită experienţei limitate până în prezent, în interpretarea defectelor pe baza conceptelor (M.R) nu s-au cristalizat date privind valorile coeficientului de siguranţă. Există numai date limitate la anumite cazuri particulare de structuri, de exemplu în cazul vaselor de presiune se poate considera $c_a = 5$ (după BARTHOLOME şi DORNER 1971). După IRWIN (1960) şi DUFFY (1969) interpretarea defectelor maxime admisibile în cazul vaselor sub presiune se bazează pe ideea că extinderea fisurii are loc după "*scurgerea înaintea ruperii*"; această condiţie presupune că adâncimea critică a fisurii pentru propagarea instabilă este mai mare decât grosimea peretelui vasului. Când se îndeplineşte această condiţie, fisura se propagă stabil până străpunge peretele vasului, provocând "scurgerea", înainte de atingerea limitei la care se declanşează propagarea instabilă şi deci distrugerea intempestivă a vasului.

§ 1.3. ANALIZA TEMATICĂ A BIBLIOGRAFIEI

Este incontestabil că dezvoltarea mecanicii ruperii fragile a pornit de la lucrările lui GRIFFITH, IRWIN şi OROWAN. Progresele însemnate au apărut în ultimele decenii, când pentru cercetarea stărilor de tensiune în plăcile slăbite cu sisteme de fisuri s-au luat în considerare şi influenţa temperaturii, comportării vâscoelastice, anizotropia, neomogenitatea şi neliniaritatea, ajungând la formularea şi rezolvarea acestor probleme pentru materiale compozite.

1.3.1. Metodele matematice

Metodele matematice cele mai utilizate pentru rezolvarea acestor tipuri de probleme sunt următoarele:

1.3.1.1. Metoda ecuaţiilor integrale singulare

Această metodă, întâlnită cel mai frecvent în studiile de (M.R.), pleacă de la transformarea ecuaţiilor diferenţiale în ecuaţii integrale, care pot fi mult mai uşor rezolvate cu metode de tip Monte Carlo. Ele se formulează de obicei ca ecuaţii integrale de contur, care constituie şi baza metodei numerice a elementelor de frontieră. Funcțiile de sub integrală se exprimă sub forma produsului dintre funcția căutată și una din soluțiile fundamentale ale ecuației diferențiale omogene corespunzătoare. În calitate de soluție fundamentală, cel mai adesea se utilizează soluția Kelvin-Somigliana; ecuațiile integrale obținute prin această metodă sunt întotdeauna ecuații singulare. Bazele formulării și rezolvării acestor ecuații au fost puse de MIDLIN și dezvoltate de KUPRADZE. În Cap.3 § **3.3** se prezintă detaliat această problemă.

1.3.1.2. Metoda funcțiilor de variabilă complexă

Se bazează pe ecuațiile lui Kolosov – Mushelişvili, care pentru aplicații efective conduc la ecuații integrale cu nuclee de tip Cauchy. Lucrările dezvoltate pe baza acestei teorii sunt deosebit de complexe și foarte numeroase. În general, utilizarea ecuațiilor integrale este destul de complicată și laborioasă. A se vedea **Anexa nr.3**, Cap.2.

1.3.1.3. Metoda transformărilor integrale

De obicei se folosesc transformate Fourier în sinus și cosinus, transformate Laplace, transformate Mellin. Lucrările fundamentale sunt date de SNEDDON (1952), TRANTER (1956), SNEDDON și BERRY (1958). În rezultatele noi pe care le-am obținut la problema test nr. V am utilizat și eu transformata Laplace.

1.3.1.4. Metoda transformărilor conforme

În problemele de solide cu defecte sunt de remarcat lucrările lui MUSHELIŞVILI (1953), ale lui SHIH (1962), BOWIE (1956, 1964), IRWIN (1957), AKAO și KOBAYASHI (1967), BLOOM (1966), RICH și ROBERTS (1967), NEAL (1970).

1.3.1.5. Dezvoltarea în serie de puteri

1.3.1.6. Metoda aproximațiilor asimptotice

ISIDA (1965), FEDDERSEN (1967), FORMAN și KOBAYASHI (1964), SNEDDON și SRI VASTAV (1971), VENTHEM și KOITER (1973)

1.3.1.7. Metoda separării variabilelor

Cu ajutorul acesteia sunt obținute soluții pentru majoritatea problemelor mediilor cu incluziuni de formă canonică. Metoda se bazează pe utilizarea soluțiilor generale de bază ale teoriei elasticității în sisteme de coordonate ortogonale, care permit separarea variabilelor în ecuațiile lui Laplace sau a lui Helmholz. Având avantaje indiscutabile, această metodă nu este totuși lipsită de limitări esențiale, care sunt urmările faptului că în ecuațiile indicate variabilele se pot separa numai în anumite sisteme de coordonate curbilinii ortogonale.

1.3.1.8. Metoda incluziunii echivalente

Este o metodă larg răspândită în cazul problemelor spațiale sau plane cu neomogenități. A fost propusă de ESHELBY.

Se presupune că în interiorul corpului elastic izotrop o incluziune având un volum oarecare V, limitat de suprafața $\sum$, suferă o schimbare de formă. Aceasta în lipsa materialului înconjurător s-ar fi caracterizat de o deformație cunoscută omogenă ε_{ij}^0, numită în continuare deformație liberă. Rezistența mediului înconjurător duce la o stare de tensiune interioară. Se arată că deplasările în corp, u_i sunt egale cu deplasările de la nivelul forțelor volumice repartizate pe suprafața separării mediilor $\sum$, și care au mărimea $\sigma_{ij} n_j$, unde σ_{ij} are direcția, condiționată de deformația ε_{ij}^0 și legată de aceasta cu legea lui Hooke, iar n_j este normala exterioară la suprafața $\sum$. Astfel

$$u_i = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\sigma_{jk}^0 \frac{\partial^3\psi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{4\pi G}\sigma_{ij}^0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \qquad (1.3.1.1)$$

unde G este modulul de elasticitate transversală şi ν coeficientul lui Poisson.

$$\varphi = \int_V \frac{dU}{|\bar{r}| - |\bar{r}'|} \quad ; \quad \psi = \int_V |\bar{r} - \bar{r}'| dU \quad ; \qquad (1.3.1.2)$$

Dificultatea principală în rezolvarea problemelor pe baza acestei metode constă în calculul funcţiilor φ şi ψ.

- lucrările legate de „tensorul lui ESHELBY", care sunt axate pe studiul incluziunilor elipsoidale, sferice, cilindrice etc. în solide liniar elastice (v. [SB5], [SB36], [B70], [J17], [P52], [SB37], [C36], [SB38], [R24]);
- lucrările lui PODILCIUC N.Iu. [P43], [P44] şi în special o monografie de excepţie [SB21];
- amintesc, mai mult cu titlu de excepţie, monografia lui A.I. ALEKSANDROV [A13], apărută în 1978, în care se încearcă o extindere a aplicării funcţiilor de variabilă complexă la probleme spaţiale. Am citit o recenzie făcută în **P.M.M.** de doi mari academicieni de la Kiev: A.N. GUZI şi Iu.N. PODILCIUC, care au un ton destul de rezervat, deşi eu consider că este o carte deosebit de valoroasă.

1.3.1.9. Metoda alternantă

Permite să utilizăm cu succes principiul superpoziţiei. KANTOROVICI şi KRYLOV

1.3.1.10. Metoda colocaţiei

BARTA (1937), YULE şi KENDAL (1965), KOBAYASHI (1964), ISIDA (1973)

1.3.1.11. Metodele numerice: MEF şi MEFr

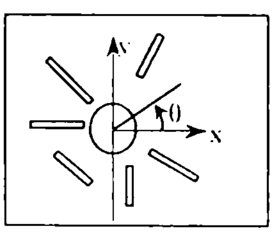
O parte din aceste metode nu sunt comentate în această introducere deoarece au fost prezentate şi comentate în cuprinsul lucrării.

Pentru cele două metode numerice fundamentale M.E.F. şi M.E.Fr., pe lângă lucrările citate în cuprinsul capitolului 3, voi mai cita:

[G32] L.J.GRAY, A.-V.PHAN, ş,a

- se prezintă o modificare la elementul de vârf de fisură *„sfert-de-punct"* şi se utilizează apoi acest element în analiza ruperii integrale la limită bidimensionale.

[J9] Z.Q.JIANG, A.CHANDRA, Y.HUANG



- se prezintă o tehnică hibridă micro-macro a (M.E.Fr.) cu interacţiuni la scară micro între incluziuni şi fisuri.

[A50] M.R. AYATOLLAHI, ş.a

- lucrarea cercetează utilizarea directă a analizei cu element finit pentru calculul tensiunii T pentru încărcări modul I şi modul I/II (mixt).

[S74] N. SUKUMAR, ş.a.

- se propune o metodologie pentru a modela găuri arbitrare şi incluziuni de material fără a discretiza frontierele interne.

[B36] D.E.BESKOS (Ed). Cap.: „Analiza plăcilor și învelișurilor prin colocația de frontieră", J.R. Hutchinson

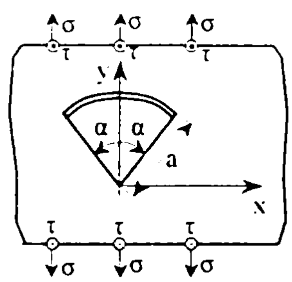
- explică metodologia și trece în revistă cercetările de până acum în ceea ce privește metoda colocației de frontieră aplicată la rezolvarea încovoierii, flambajului și oscilației plăcilor și învelișurilor.

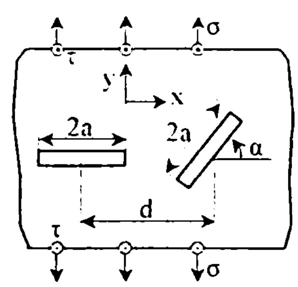
[B16] BARENBLATT

- studiază echilibrul fisurilor care se formează la ruperea fragilă, stabilitatea fisurilor izolate, respectiv legătura cu teoriile energetice.

[P3] ERNIAN PAN

-se prezintă analiza cu M.E.Fr. a (M.R.) liniar elastice în solide bidimensionale. Cea mai importantă caracteristică a acestei noi analize este faptul că este o metodă de domeniu-singular, și totuși este foarte precisă, eficientă și versatilă; proprietățile de material pot fi atât anizotrope cât și izotrope; domeniul problemei poate fi finit, infinit sau semi-infinit. Fisurile pot fi multiple, ramificate, interne sau marginale cu o formă dreaptă sau curbă. Încărcarea poate fi plană sau antiplană, și poate fi aplicată de-a lungul frontierei fără fisură sau pe suprafața fisurii.



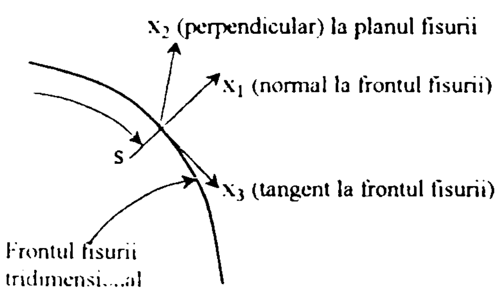


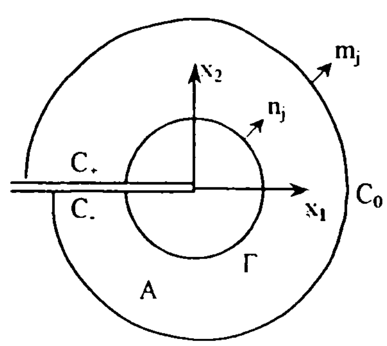
[O2] Y. OCHIAI

Există multe metode automate de generare a rețelei pentru M.E.F. Totuși, pentru cazul complicat al transferului de căldură, trebuiesc adăugate un număr mare de date care depind de poziție. Alte asemenea exemple care necesită adăugarea unor date depinzând de poziție sunt materialele compozite și cele din biomecanică. În lucrare se arată că aceste probleme pot fi rezolvate utilizând o metodă îmbunătățită de elemente de frontieră multiplu reciprocă. În această metodă sunt utilizate linii de contur de distribuție și aceste distribuții sunt presupuse că satisfac aproximativ ecuația lui Poisson.

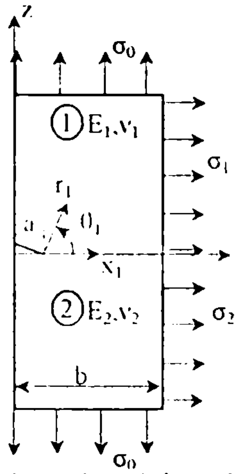
[N2] R. NAHTA, B. MORAN

- se obțin noi integrale de domeniu pentru probleme de fisuri de interfață axisimetrice.

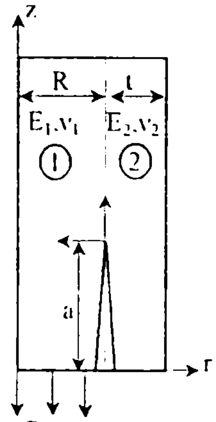




Convenții la vârful fisurii.
Dom. A este închis de Γ, C_+, C_- și C_0



a) Fisură de interfață sub formă de "penny" axisimetrică sub tensiunile σ_0, σ_1

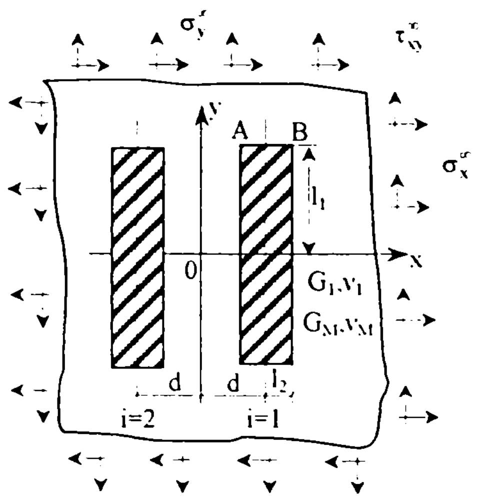


b) Fisură de interfață longitudinală axisimetrică

[P24] GLAUCIO H. PAULINO, MUHAMED T.A. SAIF, S. MUKHERJE

- se prezintă o metodă și o ecuație integrală de frontieră pentru un corp omogen și izotrop liniar elastic și de formă arbitrară, cu o fisură curbă încărcat astfel încât să avem o solicitare de forfecare antiplană.

[N20] N.A. NODA, Q. WANG, ș.a.



- Lucrarea prezintă soluții numerice a unor ecuații integrale singulare cu singularități de tip Cauchy în probleme de interacțiune a incluziunilor rectangulare sub diferite condiții de încărcare.

[A31] N. ARAVAS

- Este analizat în detaliu un algoritm stabil necondiționat pentru integrarea numerică a relațiilor constitutive elasto-plastice dependente de presiune. Se discută aplicarea metodei la probleme de tensiuni plane, la care componenta de deformație în afara planului nu este definită cinematic.

[A33] D.N. ARNOLD, R.S. FALK

- Propun o nouă formulare variațională mixtă pentru ecuațiile elasticității liniare. Nu necesită tensori simetrici și în consecință e ușor de discretizat adaptând elemente finite mixte dezvoltate pentru ecuații eliptice scalare de ordinul doi.

[E10] KJELL ERIKSSON

- Deduce expresia generală în coordonate curbilinii a unei integrale de arie pentru o fisură cu un front curbat.

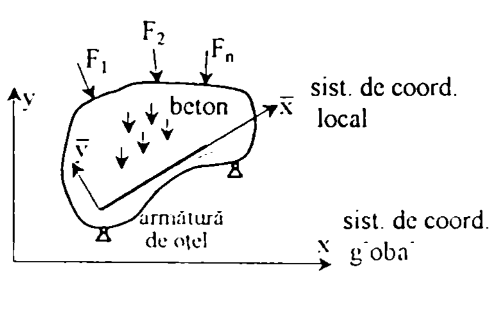
[E6] KJELL ERIKSSON

- Se deduce o valoare în puncte a integralei J pentru o fisură axisimetrică plană, care este independentă de cale și se furnizează rata de scădere a energiei din tensorul Eshelby, considerat în coordonate cilindrice.

[E9] KJELL ERIKSSON

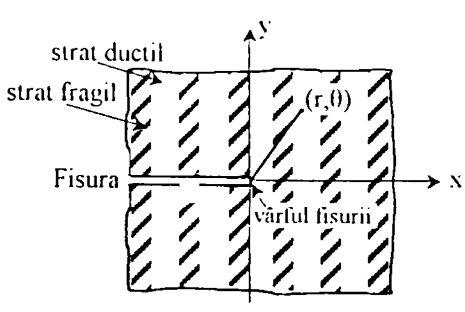
- prezintă integrala F, care este expresia generală a forței de extindere a fisurii pentru o fisură curbă în trei dimensiuni, și reprezintă o generalizare a integralei J la fisuri curbe în coordonate curbilinii ortogonale.

[G29] G. GOSPODINOV



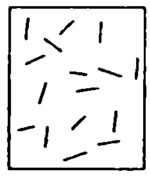
- se propune un model liniar simplu de element de frontieră capabil să trateze problema neomogenităților în beton armat plan datorită prezenței armăturii.

[J6] M. JHA, P.G. CHARALAMBIDES



- se face o analiză cu element finit a tensiunii plane din apropierea vârfului unei fisuri care se termină la și este perpendiculară pe interfață într-un laminat constând din straturi alternative fragile și ductile, sub încărcare modul I.

[H40] Y. HUANG, ş.a.

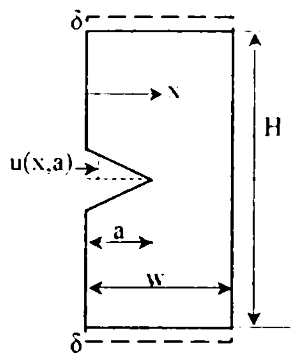


- prezintă o metodă numerică hibridă (M.E.Fr.), împreună cu un model de celulă unitate pentru a evalua modelele efective a solidelor microfisurate.

[I12] A.S.M. ISRAIL, P.K. BANERJEE

- prezintă formularea şi implementarea numerică prin M.E.Fr. a elastoplasticităţii dinamice tranzitorii bidimensionale.

[J14] I.S. JONES



- dezvoltă şi verifică o funcţie pondere pentru o geometrie cu fisură marginală singulară cu capete de prindere.

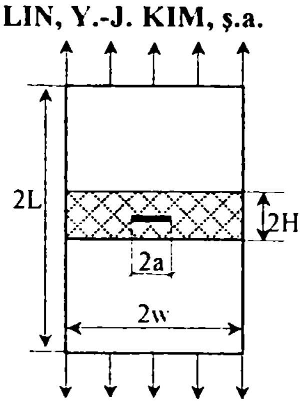
[K40] M. KIKUCHI, ş.a.

- fac o analiză a ruperii pentru materiale compozite metal-matrice utilizând M.E.Fr.

[L17] P. LESAINT, P.A. RAVIART

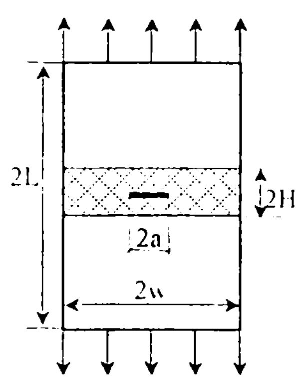
- utilizând metode de element finit şi metode de colocaţie asociate se rezolvă sisteme hiperbolice de ordinul întâi, pozitive în sensul lui Friedrichs.

[L32] G. LIN, Y.-J. KIM, ş.a.



- se studiază, făcând o analiză detaliat de element finit, ruperea ductilă a unei probe de tensiune, constând dintr-o foiţă de metal legată între două substraturi elastice, cu o fisură localizată în centrul metalului.

[L31] G. LIU, X.-G. MENG, ş.a.



- prezintă studii numerice cu privire la efectele de dezechilibru a rezistenţei în îmbinări sudate.

[S33] J.W. SIMONS, ş.a.

- descrie unele metode de a modela distrugeri de materiale în calculele de M.E.Fr.

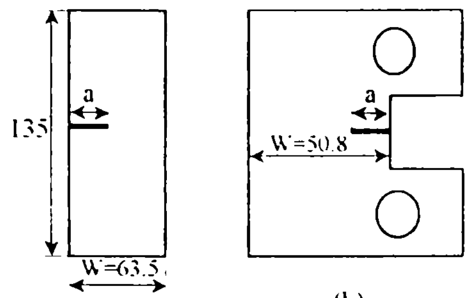
[S32] P. SILVESTER

- propune o nouă variantă pentru elemente finite triunghiulare de mare precizie utile pentru soluţii numerice a unor probleme de câmp ce implică ecuaţii Laplace, Poisson, Helmoltz sau ecuaţii diferenţiale parţiale eliptice înrudite în două dimensiuni.

[W12] C.-Y. WANG

- obţine soluţii explicite pentru funcţiile lui Green elastostatice bidimensionale în solide anizotrope generale (utilizând o tehnică de reprezentare integrală şi apoi o aplicare a calculului rezidual).

[Y5] C. YAN, Y.-W. MAI



(a) (b)

- fac o analiză amplă de element finit pentru a investiga câmpurile de tensiuni şi deformaţii în faţa unei fisuri care creşte pentru probe cu tensiune compactă (a/W=0.5) şi încovoiere în trei puncte (a/W=0.1 şi 0.5) în condiţii de tensiune plană.

[Y4] B. YANG, K. RAVI-CHANDAR

- o structură elastostatică fisurată este divizată artificial în subdomenii de topologie mai simplă astfel încât ecuaţiile integrale duale clasice să poată fi aplicate adecvat fiecărui domeniu.

- se dă o formulare de element de frontieră dual pentru domeniu singular, ce încorporează un model de zonă coezivă pentru fisuri elastostatice.

[Z9] N. ZHANG, P.F. JOSEPH

- prezintă o formulare de element finit bazată pe deplasări pentru analiza câmpurilor de tensiuni singulare în materiale călibile sub condiţiile deformaţiei plane.

[P53] N. N. V. PRASAD, M. H. ALIABADI, D. P. ROOKE

- se prezintă o formulare de element de frontieră bi-dimensională care nu necesită discretizarea domeniului şi permite o analiză cu regiune unică, pentru probleme de fisuri termoelastice tranzitorii.

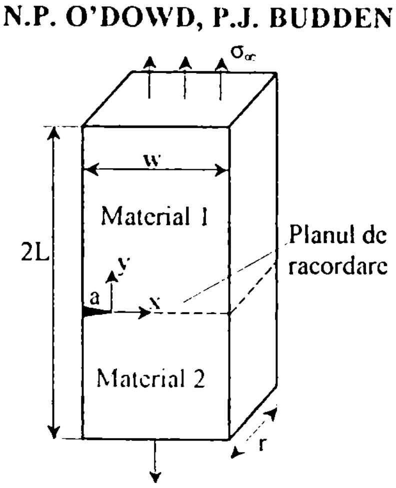
[J8] JIAN NIU, MAO S. WU

- determină numeric factorii de intensitate a tensiunilor pentru fisuri răsucite care interacţionează într-un solid şi deformaţiile generale ale solidului sub tensiune uniaxială la infinit.

[B37] D.E. BESKOS – BEM MECHANICS – cap V: Analiză elastodinamică avansată.

- se prezintă bazele teoretice ale M.E.Fr. în analiza elastodinamică.

[O17] N.P. O'DOWD, P.J. BUDDEN



- În multe aplicaţii practice apar racorduri între materiale diferite. Efectul acestui amestec de materiale trebuie luat în considerare în aprecierile integrităţii structurale. În special, aprecierea creşterii fisurii în interfeţe trebuie să ia în considerare efectul lui J şi, la temperaturi de fluaj, C*. În lucrare sunt prezentate rezultate de element finit pentru geometrii cilindrice bimateriale în funcţie de integrala J pentru domenii în condiţii intermediare, (între elastice şi condiţii total plastice).

1.3.2. Cercetarea stării de tensiune şi deformaţie în medii spaţiale cu incluziuni

Pe plan istoric una din primele cercetări a stării de tensiune-deformaţie a mediilor cu incluziuni a fost cu privire la repartizarea tensiunilor în apropierea orificiilor izolate şi a incluziunilor în spaţiu nelimitat. Lucrarea lui Goodier a fost destinată studiului concentrării tensiunilor în apropierea incluziunilor sferice sau a orificiilor de aceeaşi configuraţie în câmpul tracţiunii monoaxiale. H. Neuber, pe baza funcţiilor armonice a obţinut din nou soluţiile problemelor examinate mai sus pentru spaţiul cu orificiu sferic.

NEUBER [N10] a rezolvat probleme cu privire la repartizarea tensiunilor în apropierea orificiului sferoidal care se găseşte în câmpul tensiunii monoaxiale, a încovoierii pure şi a torsiunii. EDWARDS R.N. a utilizat rezultatele lucrării lui GOODIER pentru studiul stării de tensiune în spaţiul cu incluziune sferică şi cu orificiu sferic. El a determinat de asemenea tensiunile termice care apar la schimbarea temperaturii în mediul component. Problemele cu privire la starea de tensiune-deformaţie în corpuri cu orificiu sferoidal sau incluziuni s-au examinat cu ajutorul diferitelor metode într-o serie întreagă de lucrări. Autorii SHIBATA M. şi ONO K. au realizat soluţia numerică a metodei Eshelbi pentru rezolvarea problemelor cu privire la incluziunea elastică sferoidală în spaţiul infinit. Este prezentat un material grafic bogat pentru ilustrarea schimbării mărimii tensiunilor din incluziune în funcţie de forma acesteia. Câmpul tensiunilor în apropierea incluziunilor nu s-a determinat.

Probleme cu privire la tensionarea spaţiului nelimitat datorită incluziunilor sub formă de elipsoid de rotaţie au fost rezolvate de către S.C. DAS. Tot acest autor arată rezultatele analizei numerice pentru incluziuni de formă sferică şi de asemenea incluziuni sub formă de sferoidă întinsă şi aplanată.

În mai multe lucrări s-a obţinut repartizarea tensiunilor în spaţiul nelimitat cu orificiu de formă elipsoidală pentru diferite tipuri de încărcare. S-a considerat că direcţia tensiunilor aplicate la infinit coincide cu direcţia axelor principale ale elipsoidului. Rezolvarea problemelor s-a obţinut utilizând sistemele de coordonate carteziene şi elipsoidale. Într-un articol al lui ROBINSON K. se dă atenţie influenţei formei incluziunii asupra energiei elastice a deformaţiei. ESHELBI a arătat că dacă suprafaţa incluziunii este o elipsoidă, atunci câmpul de tensiuni omogen la infinit produce în incluziune de asemenea un câmp omogen de tensiuni. Mai departe, tot ESHELBI a demonstrat o afirmaţie mai generală, şi anume că: dacă la infinit tensiunea (respectiv deformaţia) se dă sub formă de polinom de grad oarecare, atunci în interiorul incluziunii de formă elipsoidală tensiunea (respectiv deformaţia) se vor exprima cu polinoame de acelaşi grad.

Posibilitatea determinării câmpului tensiunilor în afara elipsoidului cu metoda incluziunii echivalente este indicată în lucrarea lui ESHELBI [SB5]. Mai multe lucrări sunt destinate analizei stării de tensiune în apropierea incluziunii elipsoidale după metoda lui Eshelbi [R24], [M68], [P44], [C36], [P52], [J17],[B70].

O soluţie completă, închisă, pentru incluziunea elastică elipsoidală în mediu nelimitat a fost obţinută în lucrările lui PODILCIUK [P43]. Se cercetează câmpul tensiunilor în apropierea incluziunii produsă de o forţă arbitrară omogenă la infinit, şi de asemenea în cazul când la infinit tensiunile sunt date sub formă de funcţie liniară a coordonatelor. Rezolvarea se bazează pe utilizarea metodei lui Fourier şi prezentarea soluţiei ecuaţiilor de echilibru sub forma Pankovici-Neuber.

Soluţia aproximativă a problemei cu privire la incluziuni elipsoidale au fost obţinute de mai mulţi autori. S-a cercetat cazul tracţiunii monoaxiale [P14] şi al forfecării spaţiului la infinit. Rezolvarea problemelor s-a redus la ecuaţii integrale singulare bidimensionale. În formă închisă sunt date expresiile pentru determinarea tensiunilor în interiorul incluziunii şi de asemenea în apropierea acesteia. Pe baza rezultatelor din [P14], autorii SLADEK V. şi SLADEK J. au obţinut de asemenea ecuaţii integrale singulare care se propune să fie rezolvate numeric. În acest scop se elaborează algoritmul soluționării numerice a ecuațiilor integrale de acest tip. Rezultatele arătate aici a analizei numerice pentru incluziuni elipsoidale ilustrează eficiența algoritmului.

Într-o serie de lucrări metoda incluziunii echivalente propusă de Eshelbi pentru materiale izotrope a fost lărgită pentru cazul anizotrop.

Una din primele cercetări destinate problemei de interacțiunii dintre a neomogenitățile spațiale o putem considera ca fiind lucrarea lui E. STERNBERG și M.A. SADOWSKY (v. [P14]), în care s-a examinat problema de axă simetrică cu privire la două orificii sferice în spațiul nelimitat. Alți autori au studiat cazul când sarcina apare pe seama câmpului centrifugal al forțelor de inerție. Ei au obținut soluțiile problemei cu privire la interacțiunea a două orificii sferice în spațiul nelimitat. S-a studiat deasemenea gradul de interacțiune a două incluziuni rigide sferice în corp infinit. S-a cercetat și interacțiunea a două orificii sferice în câmpul torsiunii pure. Problema analoagă pentru două incluziuni rigide sferice a fost examinată de HILL. Aici problema utilizării polinoamelor Legendre se reduce la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare, care se rezolvă numeric.

Soluții aproximative a problemei cu privire la concentrarea tensiunilor în apropierea a două incluziuni sferoidale turtite în câmpul tracțiunii monoaxiale s-au obținut în mai multe lucrări. Se examinează cazul situării coplanare și paralele a incluziunilor fine în spațiu.

Ecuația generală pentru cazul numărului arbitrar de incluziuni fine coplanare, limitat de suprafețe netede, care se găsesc în câmpul solicitării simetrice față de plan, a servit ca bază pentru o serie de cercetări privind determinarea concentrării tensiunilor în spațiul cu incluziuni. Sunt examinate variantele deplasării incluziunilor sferoidale în vârful triunghiului și a pătratului, a trei incluziuni de-a-lungul unei drepte și diferite variante de situare periodică a incluziunilor într-un plan a spațiului. În toate cazurile sarcina s-a dat sub formă de întindere monoaxială la infinit. Soluțiile au fost obținute cu metoda asimptotică a parametrului mic [P14].

Există o serie de lucrări destinate studiului influenței graniței corpului asupra concentrației tensiunilor în apropierea incluziunilor. Cea mai simplă clasă dintre acestea tratează problema semispațiului care conține o incluziune. Torsiunea semispațiului cu orificiu sferic cu un moment concentrat în planul graniței a fost examinat în articolul lui S.C. DAS.

Influența suprafeței corpului cilindric asupra concentrației tensiunilor în orificii și incluziuni pentru diferite cazuri de solicitare exterioară a fost studiată în foarte multe lucrări: S-a cercetat starea de tensiune în cadrul torsiunii corpului cilindric cu orificii sferice și incluziuni rigide și de asemenea la torsiunea cilindrului circular cu orificiu sferic și sferoidal; s-a tratat problema cu privire la determinarea tensiunilor în cilindrul circular cu incluziuni sferice clasice la încovoiere și întindere; S-a examinat torsiunea cilindrilor cu incluziuni sferice și sferoidale, ținând cont de anizotropia proprietăților elastice a materialului.

M.M. STADNIK a construit ecuații integrale pentru soluția aproximativă a problemei teoriei elasticității în cazul corpurilor de dimensiuni finite care sunt limitate cu margini plane și conțin sisteme de incluziuni arbitrar orientate. Tratarea se bazează pe utilizarea condițiilor de interacțiune a mediului cu incluziuni de tipul ipotezei lui Winkler și utilizarea transformărilor integrale ale lui Fourier.

Pentru a încheia informarea bibliografică legată de problemele spațiale, care nu se regăsesc de fapt în cuprinsul tezei, voi cita, pe scurt, următoarele lucrări:

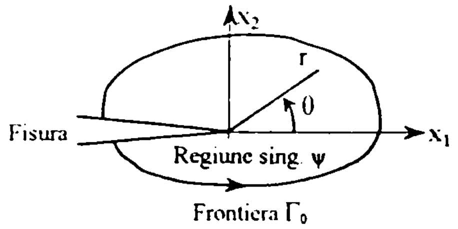
[O11] OSADCIUC V.A.

- face analiza câmpurilor de tensiuni cauzate de fisuri de diferite lungimi într-un înveliș cilindric. Se presupune un înveliș cilindric infinit având și fisuri drepte axiale. Se obține un sistem de 4N ecuații integrale singulare.

[E11] KJELL ERIKSSON

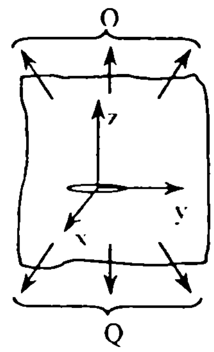
- o expresie integrală independentă de domeniu, care este derivată din principiul lucrului mecanic virtual și care este valabilă în coordonate curbilinii, este utilizată pentru a deduce rata de scădere a energiei pentru o fisură în formă de „*penny*" într-un solid piezo-electric liniar.

[L18] A.Y.T. LEUNG, R.K.L. SU



- bazat pe ecuaţiile lui Navier tridimensionale în coordonate cilindrice se deduc funcţiile generale în deplasări atât pentru fisuri circumferenţiale cât şi pentru fisuri în formă de *„penny”* prin metoda dezvoltării după funcţiile proprii.

[P7] PANASIUK V.V.



- rezolvă probleme referitoare la echilibrul corpului fragil infinit, slăbit cu o macrofisură interioară care are în plan o formă apropiată de cerc.

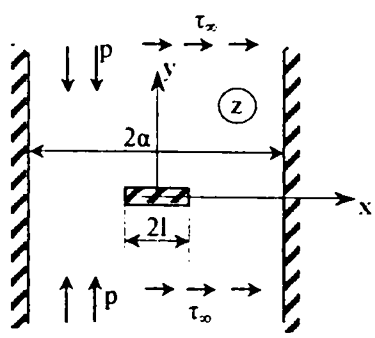
[N9] V.N. NEMIŞ

- examinează problema repartizării tensiunilor în cazul torsionării corpurilor ortotrope de rotaţie cu orificii cilindrice şi cu incluziuni rigide.

[SB47] L.V. RATICI, S. Ia. IAREMA

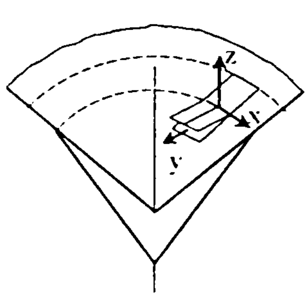
- se descrie efectul (observat experimental) de creştere a rezistenţei la torsionare a epruvetelor cilindrice fragile cu concentratori inelari în comparaţie cu epruvete fără concentratori, şi se dă explicaţia acestui fenomen.

[C9] G.P. CEREPANOV, R.S. KOCIAROV



- se studiază dezvoltarea alunecării într-un metal policristalin şi în roci cu fisuri.

[K57] A.V. KRISHNA MURTY, A. NAGAMANI

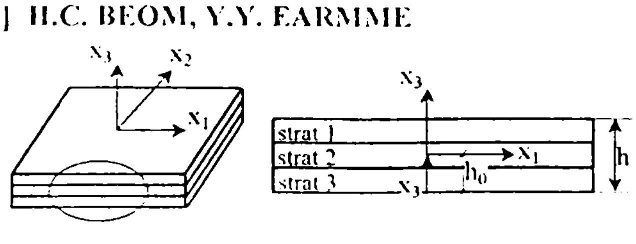


- .. ..a_ă ..ri_ţi_ compo..e...elo. ...elo. de descreştere a energiei în raport cu orientarea fisurii, ţinând cont de axele de ortotropie.

[U4] UWADIEGWU B.C.O. EJIKE

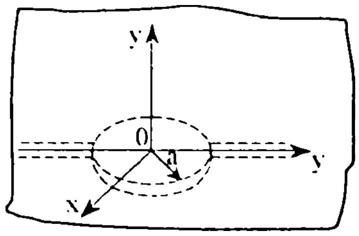
- se consideră problema fisurii circulare plane într-un corp elastic omogen şi izotrop sub tensiune uniaxială uniformă normală la planul fisurii şi sunt calculaţi factorii de intensitate a tensiunior.

[B30] H.C. BEOM, Y.Y. EARMME



- es e dezvoltat o nou meto ă e ana iză a unei plăci compusă din straturi subţiri de material liniar elastic izotrop.

[P16] K.S. PARIHAR, J.V.S. KRISHNA RAO



Geometria problemei

- se d du e o soluție a cuațiilor d e hi b u corespunzătoare încărcării axisimetrice pe fețele unei fisuri plane care acoperă exteriorul unui cerc de rază a într-un corp infinit elastic izotrop.

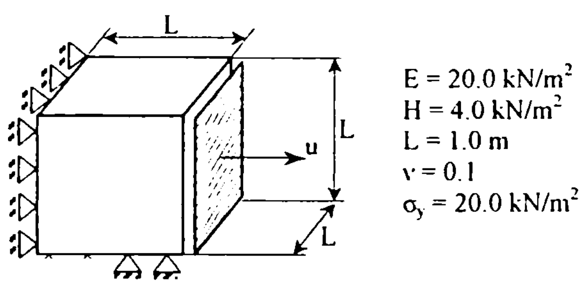
[L44] N. LOUAT

- utilizând conceptul de mediu continuu cu dislocații se studiază fisuri în trei dimensiuni. Dependența spațială a deplasării suprafeței fisurilor este formulată ca o ecuație integrală înrudită cu cea a lui Abel.

[T41] J. TWEED, D.P. ROOKE

- se determină (utilizând teoria transformatei Mellin) factorii de intensitate a tensiunilor și energia de rupere a fisurii unei aranjament simetric de fisuri marginale într-un cilindru circular solicitat la torsiune.

[M57] J. MOSLER, G. MESCHKE



Geometria și parametrii de material a barei 3D solicitată la tracțiune

- Lucrarea prezintă o extensie a SDA pentru analiza 3D cu metoda ele...entului finit a fisurilor în medii elastoplastice. Aplicabilitatea modelului SDA de element finit precum și performanțele sale numerice sunt investigate cu ajutorul unui exemplu 3D academic.

$E = 20.0$ kN/m^2

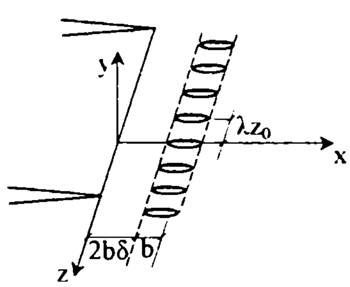
$H = 4.0$ kN/m^2

$L = 1.0$ m

$\nu = 0.1$

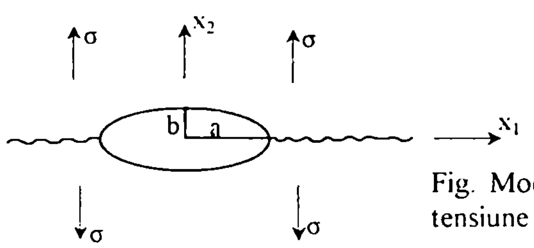
$\sigma_y = 20.0$ kN/m^2

[K29] B.L. KARIHALOO, X. HUANG



- _e ara_ _ per_ur_area fa_ _rului _e in_en_i_a_e a tensiunilor în modul I de-a lungul marginii unei fisuri a semiplanului datorată deschiderii uneia sau mai multor fisuri coplane în formă de "*penny*" în apropierea marginii, are aceeiași comportare asimptotică logaritmică ca și cea a perechii sale bidimensionale de deformație plană.

[S39] E. SMITH



- formulează relațiile efectului de mărime asociat cu efectul unei concentrații de tensiuni asupra ruperii unui material cvasi-fragil.

Fig. Modelul une gău c l ndrice eliptice într-un sol d nfin t supus la o tensiune de întindere; există zone coezive la rădăcinile găurii.

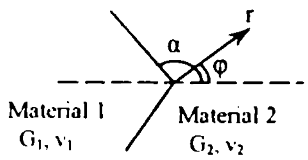
[S10] C.R. SCHULTHEISZ, ș.a.

- se prezintă o comparație între câmpurile de deplasări numerice și experimentale tridimensionale, care înconjoară o crestătură/fisură într-un oțel ductil 4340 testat la încovoiere prin trei puncte.

[O4] Z. OLESIAC

- se pune problema de a determina distribuția de tensiune de suprafață $p(\rho) = -\sigma_{zz}(\rho,0)$ necesară pentru a menține fisura în formă de „*penny*" $0 \le \rho \le a$, $z = 0$ în forma $u_z(\rho,0) = w(\rho)$, $0 \le \rho \le a$. Utilizând teoria transformatelor Hankel și teoria ecuațiilor integrale duale se găsește o soluție într-o formă care implică două integrări simple. Se investighează în detaliu și clasa deplasărilor $w(\rho) = \in (1 - \rho^2 / a^2)$.

[P36] CĂTĂLIN R. PICU



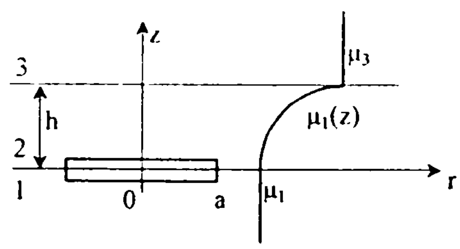
Detalii la un vârf conic

- este analizată problema axisimetrică a sigularității de la vârful unei incluziuni conice fixată într-o crestătură conică. Tensiunea de forfecare se consideră că se anulează de-a lungul interfeței în timp ce tensiunea normală este transmisă complet.

[M4] A.C. MAL

- se consideră problema difracției undelor normal incidente longitudinale și torsional elastice pe o fisură în formă de „penny" localizată într-un mediu elastic infinit și izotrop.

[O16] MURAT OZTURK, FAZIL ERDOGAN

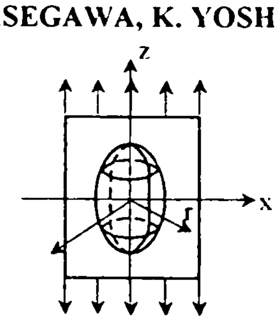


- se consideră problema unei fisuri în formă de "*penny*" în materiale omogeme diferite îmbinate printr-o regiune interfacială cu proprietăți mecanice gradate. Sarcinile aplicate sunt considerate a fi axisimetrice, dar arbitrare în rest.

[F27] W.S. FU, L.M. KEER

- sunt căutate distribuțiile de tensiuni într-un solid elastic infinit când încărcările sunt prescrise peste două regiuni circulare coplanare.

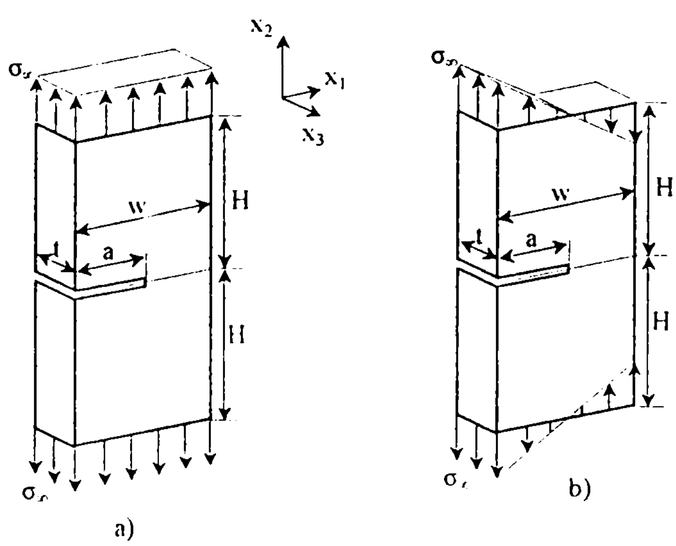
[H11] H. HASEGAWA, K. YOSHIIE



- se ia în discuție problema concentrației tensiunilor unui solid elastic cu o incluziune elastică circular cilindrică sub tensiune.

[N4] T. NAKAMURA, D. PARKS

- se prezintă o metodă de calcul bazată pe o „*integrală de interacțiune*" pentru a evalua tensiunea elastică T de-a lungul fronturilor fisurilor tridimensionale. Utilizând această procedură sunt determinate distribuții de tensiuni T pentru unele geometrii tridimensionale, rezultate din calcule de element finit.

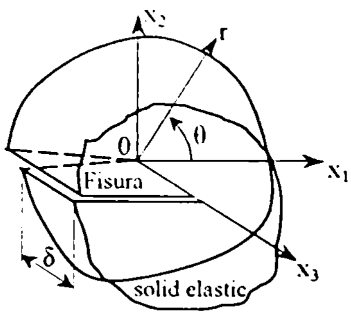


Placă solicitată la
a) tracțiune
b) încovoiere

[F1] V.I. FABRIKANT

- se descrie o soluție completă la problema unei fisuri circulare externe într-un corp transversal izotrop supus la o forfecare arbitrară.

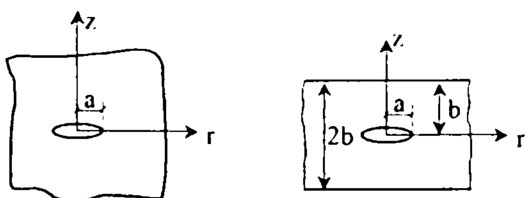
[M125] G. MEDA, T.W. MESSNER, ş.a.



În mecanica ruperii un număr de aplicaţii reale au în mod intrinsec geometrii de fisură tridimensională, necesitând de aceea extragerea factorilor de intensitate a tensiunilor sub astfel de circumstanţe. În lucrare sunt examinate două metode pentru aceasta:

1) o integrală J tridimensională
2) integrale H tridimensionale, pentru fiecare nod de dezvoltare a fisurii.

[J5] S.P. JEON, Y. TANIGAWA



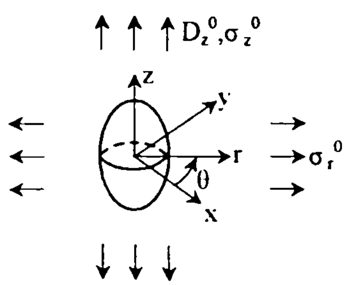
a) b)

- sunt tratate teoretic comportarea elastică axisimetrică şi factorul de intensitate a tensiunilor pentru un mediu neomogen cu o fisură în formă de penny.

[K34] W.D. KEAT, ş.a.

- se prezintă o procedură care se pretează bine pentru identificarea unor fisuri tridimensionale sub-suprafaţă (subterane) într-un semi-spaţiu prin inversiunea deplasărilor de suprafaţă măsurate.

[K48] L. KOGAN, ş.a.



- obţin soluţii sub formă închisă exacte pentru câmpul de tensiune a unei incluziuni sferoidale piezo-electrice într-o matrice infinită piezo-electrică supusă la încărcări mecanice şi electrice spaţial omogene departe de incluziune.

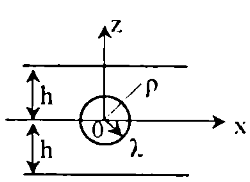
[K64] V.I. KUSHCH

- obţine soluţia strictă în serie a problemei teoriei elasticităţii pentru un domeniu nemărginit conţinând unele neomogenităţi sferoidale aliniate sub încărcări uniforme la distanţă.

[L40] V.V. LOBODA, A.E. SHEVELEVA

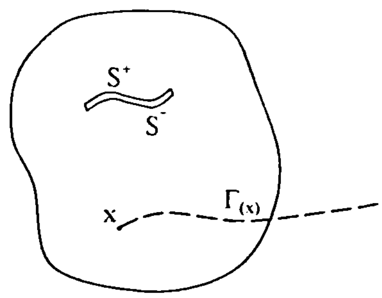
- se examinează o fisură în formă de penny în partea centrală a unui cilindru semiinfinit, având un capăt fixat.

[L9] DOO-SUNG LEE



- prezintă analiza asimetrică a distribuţiei de tensiuni care apare într-o dală infinită izotropă cu o cavitate sferică localizată simetric sub o tensiune uniformă unidirecţionată.

[S51] SONGSHAN LI, M.E. MEAR



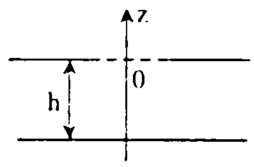
- se aplică o procedură sistematică pentru a dezvolta ecuaţii integrale reduse la singularităţi pentru discontinuităţi de deplasare în medii elastice liniar omogene tridimensionale.

[S10] C.R. SCHULTHEISZ, ş.a.
- fac un studiu detaliat a deformaţiei tridimensionale la vârful unei crestături într-o placă de oţel ductil încărcată la încovoiere prin trei puncte.

[S56] R.P. SRIVASTAV, D. LEE
- studiază câmpurile de tensiuni într-un mediu infinit omogen şi izotrop conţinând o cavitate cilindrică şi o fisură exterioară care o înconjoară. Se consideră atât eforturi mecanice cât şi termice.

[S58] K.N SRIVASTAVA, R.M. PALIYA
- investighează echilibrul termoelastic a unui solid semiinfinit conţinând o fisură în formă de penny situată paralel la frontiera liberă.

[S57] K.N. SRIVASTAVA, KRIPAL SINGH



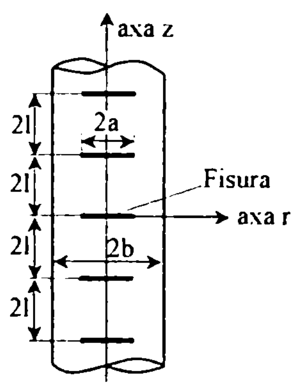
- fac o analiză a distribuţiei tensiunilor într-un solid elastic semiinfinit când acesta este deformat de aplicarea unei presiuni pe suprafaţa interioară a unei fisuri în formă de penny situată paralel la frontiera liberă.

[W8] X.M. WANG, S.GAO, Y.H. CHEN
- studiază problema interacţiunii macro/micro-fisură într-un corp izotrop infinit.

[X2] G. XU, A.F. BOWER, M. ORTIZ
- se prezintă o metodă pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunilor la vârful unei fisuri tridimensionale uşor ondulată.

-

[W14] K. WATANABE, A. ATSUMI



- studiază un cilindru circular lung având un rând infinit de fisuri în formă de penny.

[Y16] C.K. YOUNGDAHL
- introduce un set de trei funcţii de tensiune care e util în rezolvarea problemelor de electrostatică tridimensionale în coordonate cilindrice generale şi, în particular, probleme ne-axisimetrice în coordonate cilindrice cirulare.

[Y6] Q.S. YANG, Q.H. QIN
- prezintă o nouă tehnică numerică pentru a simula procesul de propagare a fisurilor pentru solide neomogene.

[L3] I. P. LAUŞNIK, M. V. HAI
- studiază problema tridimensională de termoelasticitate pentru corpul cu sistem de fisuri periodice în formă de disc.

1.3.3. Mediu omogen plan cu unul sau mai multe orificii

Metodele cele mai eficiente pentru rezolvarea problemelor de limită în cazul teoriei elasticităţii plane care folosesc aparatul teoriei funcţiilor cu variabile complexe se bazează pe posibilitatea construirii de funcţii sub forma analitică simplă (sub formă de polinom sau de funcţie raţională), care realizează reprezentarea conformă, exactă sau aproximativă, a domeniului dat pe un cerc unitate.

Din această cauză metodele teoriei funcțiilor de variabilă complexă sunt încă prea puțin dezvoltate pentru rezolvarea eficientă a problemelor cu domenii multiplu conexe. Totuşi pentru unele clase particulare de domeniu multiplu conex se poate construi o soluție suficient de eficace.

1.3.3.1. Soluțiile efective ale problemelor la limită pentru domenii dublu conexe. Metoda lui D.I. SHERMAN.

În ultimul timp au fost elaborate metode de soluționare a problemelor la limită ale teoriei plane a elasticității pentru o anumită clasă de domenii dublu conexe. De acestea aparțin domenii finite şi infinite, limitate de două contururi închise de forme speciale. Pentru a delimita respectiva clasă se ia în considerare domeniul exterior respectiv interior în raport cu una din curbele frontieră, domeniu care conține în interiorul său cealaltă curbă frontieră, şi se cere ca problema în cauză să aibă o soluție efectivă pentru acest domeniu dublu conex.

În acest fel întreaga frontieră a domeniului poate fi compusă din cercuri, elipse, poligoane regulate cu vârfuri rotunjite, etc. Metoda la care ne referim a fost propusă de D.I. SHERMAN [SB6] şi a fost folosită în versiunea ei inițială pentru rezolvarea problemelor de torsiune şi încovoiere a barelor elastice, fiind ulterior aplicată în cazul problemelor de deformație plană.

În particular, în legătură cu această problemă au fost analizate o serie de probleme concrete asupra planelor (resp. semiplanelor) slăbite datorită a două orificii. Se presupune că orificiile în semiplan sunt situate la o distanță suficient de mare de frontiera rectilinie. În aceste condiții, neglijând aşa numitele tensiuni inițiale, se poate neglija satisfacerea exactă a condițiilor la limită a semiplanului. La determinarea unor tensiuni suplimentare, condiționate de prezența orificiilor (concentratorilor), este permis să se înlocuiască semiplanul, fără a deforma starea de tensiune în apropierea orificiilor, prin întregul plan complex.

Metoda Sherman se poate aplica la majoritatea problemelor plane ale teoriei elasticității şi a fost ilustrată pentru prima oară într-un caz relativ simplu: semiplan slăbit cu două orificii circulare neegale. În cercetările ulterioare ale aceluiaşi autor, metoda a fost supusă transformărilor şi ca rezultat s-a obținut un grad de simplificare a etapelor intermediare în decursul rezolvării şi o scădere a volumului operațiilor, ceea ce a permis ca procesul rezolvării să aibe un caracter de recurență. Ulterior SHERMAN şi colaboratorii săi au rezolvat o serie de probleme din teoria plană a elasticității care prezintă interes din punct de vedere al aplicațiilor.

Vom cita câteva din acestea. Însuşi SHERMAN este autorul rezolvării problemelor de elasticitate în semiplan slăbit cu două orificii apropiate circulare sau eliptice, sau orificii apropiate circulare aşezate periodic, un orificiu eliptic aşezat aproape de marginea frontierei rectilinii, precum şi alte probleme analoage.

L.N. KISLER a rezolvat problema planului, cu greutate proprie, cu orificii circulare şi eliptice, într-o altă ipoteză, când orificiile au fost situate în mod arbitrar unul față de altul. Modificând etapele intermediare de studiu al procesului, autorul a simplificat considerabil schema de calcul. Acest lucru a uşurat calculele numerice şi a permis şi o analiza amănunțită a câmpului de tensiune pentru câteva cazuri care prezintă interes în ce priveşte amplasarea orificiilor. Cazul particular a două orificii nesimetrice circulare în raport cu frontiera rectilinie, a fost analizat tot de KISLER. ARAMANOVICI a studiat o problemă care prezintă interes în practică, şi anume cazul tensiunilor într-un semiplan elastic cu orificii neadâncite de formă circulară, întărite cu un inel dintr-un alt material. Acțiunea exterioară poate fi diferită, ca de exemplu presiunea normală asupra conturului interior al inelului lipit, întinderea semiplanului cu ajutorul unor forțe paralele cu marginea rectilinie, sarcina concentrată la capătul semiplanului etc. Folosind metodele de mai sus, ARAMANOVICI a construit ecuațiile integrale ale lui Fredholm pe o axă reală, ecuațiile integrale, au fost apoi înlocuite cu un sistem infinit de ecuații liniare algebrice cvasi-regulate pentru orice distanță a orificiului circular față de marginea semiplanului. Din exemplele concrete analizate în aceeaşi lucrare, elaborate până la capăt şi cu rezultate numerice, prezintă un interes deosebit cazul marginilor situate foarte aproape între ele (informații preluate din MUSHELIŞVILI [M70] Cap.8).

Într-o altă lucrare ARAMANOVICI analizează cazul semiplanului slăbit cu orifcii circulare, când pe frontiera rectilinie a mediului sunt date condițiile de tip combinat. Autorul modifică metoda lui Sherman şi reduce mai întâi problema la ecuațiile integrale ale lui Fredholm, iar apoi la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare cvasi-regulat pentru orice dimensiune relativă a domeniului. Ulterior aceeaşi metodă a fost folosită de mai multe ori în studiul stării de tensiune a domeniilor dublu conexe finite şi infinite pentru considerații mai generale ale frontierelor. Vom aminti de asemenea şi alte lucrări referitoare la domeniile dublu conexe care au fost rezolvate prin diferite metode. În lucrările lui SOLOMON ([S])şi DRĂGHICESCU ([ ]), precum şi SEICA se oferă generalizarea algoritmului lui Schwarz pentru unele domenii finite. În prima din lucrările indicate a fost analizat un pătrat slăbit cu orificii simetrice, tot pătrate, în cazul unei încărcări foarte simple; în a doua lucrare a fost analizată o formă eliptică cu două forțe concentrate opuse aplicate punctelor conturului exterior, paralele cu direcția axei mari a elipsei. În ambele cazuri analiza se bazează pe metodele lui Mushelişvili, folosite pentru rezolvarea problemelor plane pentru domenii interioare şi exterioare simplu conexe. În cazul pătratelor se foloseşte reprezentarea conformă cu ajutorul integralei Cristoffel - Schwarz şi integralei tip Cauchy, iar în cazul elipselor reprezentarea pe un inel circular cu aplicarea ulterioară a seriilor de puteri. Pe exemplele concrete au fost efectuate calcule amănunțite.

1.3.3.2. Plăci cu mai multe orificii. Problema periodică.

SHERMAN a propus o variantă îmbunătățită a metodei seriilor de puteri pentru cazul domeniului semiinfinit sau infinit cu două orificii circulare egale. Experiența calculării numerice a problemelor concrete, a arătat că sistemul infinit de ecuații algebrice obținut ca rezultat al folosirii seriilor de puteri direct pentru potențialele complexe φ şi ψ, într-o serie de cazuri este incomod ca structură. Seriile de puteri pentru tensiuni sunt de regulă lent convergente. Pentru înlăturarea acestui neajuns SHERMAN a introdus în locul funcției $\psi(z)$ o nouă funcție:

$$\chi(z)=z\varphi'(z)+\psi(z) \tag{1.3.3.1}$$

legată direct de componentele tensiunii paralele cu axa reală. Prin raționamente analoge cu cele pentru construirea ecuației funcționale, funcția nouă introdusă χ se poate elimina.

Ecuația funcțională obținută după dezvoltarea în serie de puteri a funcției φ conduce direct la un sistem de ecuații algebrice liniare. Se constată că sistemul obținut în acest fel este mai comod pentru studii şi conduce mai repede la rezultatele dorite. Aceste considerente au fost folosite de SHERMAN pentru studiul problemei periodice în teoria plană a elasticității. Astfel, ne imaginăm un mediu elastic, izotrop, omogen şi infinit, slăbit cu ajutorul unei serii de *orificii periodice egale* de formă circulară. Centrele orificiilor le vom considera aşezate pe aceeaşi dreaptă. În cazul semiplanului se consideră că această dreaptă este paralelă cu frontiera semiplanului şi se află la o distanță mai mare decât raza orificiilor.

Metoda construirii efective a problemei periodice cu acest aspect a fost propusă încă în 1935 de către HOWLAND. Autorul consideră o placă infinită supusă la infinit unor eforturi de întindere paralele sau normale la linia centrelor orificiilor. În acest caz soluția efectivă se bazează pe un algoritm al aproximărilor succesive, a cărui convergență este demonstrată pentru o valoare mică a raportului dintre raza orificiului şi distanța dintre două centre vecine. Calculele numerice s-au făcut în cazul acestui raport $\varepsilon = 0,25$.

SHERMAN, prin metoda aplicată în cazul a două orificii circulare egale, a analizat problema periodică cu orificii circulare pentru un semiplan. Esența acestei metode enunțate mai sus constă în folosirea simultană a reprezentărilor potențialelor complexe în formă de serii de puteri sau ecuație funcțională. Rezolvarea problemei, ca şi în cazurile neperiodice de mai sus, a fost redusă la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare. Această abordare a permis lui

SHERMAN să urmărescă distribuţia tensiunilor de-a lungul orificiilor într-o gamă considerabilă de variaţie a numărului ε, ce caracterizează dimensiunile relative ale domeniului, şi să efectueze analiza câmpului de tensiuni pentru orificii destul de apropiate între ele. Într-o altă lucrare a lui, SHERMAN analizează un caz mai general al orificiilor periodice necirculare. Orificiile care slăbesc mediul au formă de pătrat curbiliniu unde reprezentarea pe exteriorul unui cerc se dă cu ajutorul unei formule cu doi membri, care conţine ζ şi ζ^{-3}. Studiul se bazează pe aceaşi metodă care conduce la sistemul de ecuaţii liniare.

Problema periodică în cazul orificiilor curbilinii de formă mai generală s-a studiat anterior. Pe baza simetriei geometrice şi de încărcare, s-a ajuns la unele reprezentări integrale ale funcţiilor periodice căutate de variabile complexe prin alte funcţii, dar de argument complex, olomorfe în planul infinit cu un orificiu şi care dispar la infinit. Apoi aceste funcţii noi introduse se dezvoltă în serii de puteri de parametru mic d/c unde d reprezintă diametrul orificiului şi c distanţa dintre centrele orificiilor învecinate. Astfel problema se reduce la o serie infinită de probleme plane pentru domeniul simplu conex - plan cu un singur orificiu. Autorii permit în principiu să se aducă soluţia până la formula de calcul de fiecare dată, când reprezentarea exteriorului orificiului pe exteriorul unui cerc se realizează cu ajutorul unei funcţii raţionale. Problema convergenţei procesului nu a fost analizată (v. [SB6]).

O analiză asemănătoare, cu calcule numerice, a fost efectuată în cazul orificiilor eliptice egale şi având aceeaşi orientare, când placa a fost întinsă la infinit cu ajutorul eforturilor dirijate sub un anumit unghi α faţă de axa Ox, care reprezintă linia centrelor orificiilor. Marginile orificiilor se consideră nesolicitate.

La fel până la nivelul rezultatelor numerice a fost analizat cazul când orificiile circulare din placă sunt prevăzute cu nişte şaibe rigide lipite la marginea acestora (a doua problemă fundamentală). Toate calculele numerice au fost făcute pentru ε =0,15. După cum se vede din graficele date în lucrare pentru tensiunile maxime, în cazul primei probleme apare pentru α =0 (forţa de întindere a plăcii paralelă cu linia centrelor) o influenţă maximă a orificiilor vecine la un raport mic a/b ale semiaxelor elipsei (a fiind semiaxa în direcţia axei x). Tensiunea maximă în acest caz în placă se micşorează în comparaţie cu cazul când mediul are un singur orificiu.

La întindere cu eforturile perpendiculare pe linia centrelor, perturbarea cea mai mare se introduce dimpotrivă în cazul rapoartelor mari a/b, unde tensiunile maxime cresc cu trecerea de la un orificiu la o serie de orificii.

În cazul celei de-a doua probleme se obţine un aspect contrar. Aici pentru α=0 concentrarea tensiunilor în apropierea orificiilor creşte o dată cu trecerea de la un orificiu la o serie de orificii, iar pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$ dimpotrivă se micşorează.

În aceeaşi privinţă trebuie să remarcăm lucrările unui grup de savanţi chinezi care a analizat problemele concentrării tensiunilor în lanţ cu un număr finit de orificii de diferite forme şi au fost elaborate unele teze referitoare la posibilitatea folosirii metodei indicate. O bibliografie suficient de completă a acestor lucrări poate fi găsită în lucrarea lui CHEN-LIN-SI.

Cu aceeaşi metodă au rezolvat PERLIN şi TOLCENOV problema simetriei ciclice pentru un inel circular slăbit de două rânduri de orificii circulare, centrele acestor orificii aparţinând unuia şi aceluiaşi cerc construit pe inelul respectiv. Pentru orificiile aşezate aproape unul de altul KOSMODAMIANSKI utilizează o metoda care se bazează pe metoda lui Bubnov-Galerkin. Legat de aceasta, este util într-o serie de cazuri, atât pentru un număr finit cât şi pentru un număr infinit de orificii curbilinii asemănătoare, a se folosi schema practică de calcul bazată pe metoda lui Musheli̧svili.

Metodele aproximative de mai sus au fost folosite de KOSMODAMIANSKI în studiul stării de tensiune a plăcii slăbite de un număr finit de orificii de diferite conturuiri. În cazul orificiilor neegale KOSMODAMIANSKI a folosit metoda aproximărilor succesive. În lucrarea lui BUIVOL s-a studiat starea de tensiune a unui domeniu circular slăbit de un număr finit de orificii egale şi egal depărtate între ele a căror centre se află pe un acelaşi cerc concentric cu frontiera. La rezolvarea problemei autorul a folosit ecuaţia lui Lauricella-Sherman, care pe baza unei proprietăţi a simetriei ciclice se transformă într-o relaţie mai simplă, comodă pentru calculele numerice. Ecuaţia simplificată se rezolvă apoi prin metode numerice.

În lucrările lui KOITER au fost puse şi rezolvate problemele care prezintă interes teoretic şi practic referitoare la câmpul tensiunilor într-un corp infinit elastic slăbit cu un sistem dublu de orificii de formă arbitrară. Studiul problemei de teoria elasticităţii KOITER l-a precedat cu o lucrare specială cu caracter matematic, în care sunt analizate o serie de proprietăţi ale integralei generalizate tip Cauchy. Generalizarea constă în faptul că în locul lui $\frac{1}{t-z}$ se introduce $\zeta\ (z-t)$, unde ζ este funcţia lui Weierstrass. KOITER a generalizat astfel integralele din formula Sohoţki-Plemelj formulând şi demonstrând teorema corespunzătoare asupra valorilor la limită a funcţiilor cvasiperiodice şi dublu periodice şi pentru cazul când orificiile au formă circulară. KOITER a analizat prima problemă la limită a teoriei elasticităţii pentru corpul cu un sistem dublu periodic de orificii şi a adus-o la problema determinării funcţiilor analitice dublu periodice de forma analizată în lucrarea lui Koiter. Apoi el a demonstrat unicitatea soluţiei problemei propuse astfel în teoria elasticităţii şi a obţinut ecuaţia funcţională pentru funcţia $\phi(z)=\varphi'(z)$, pe care a adus-o la ecuaţiile lui Fredholm de speţa a-2-a. Această ecuaţie prezintă generalizarea corespunzătoare pentru cazul domeniului simplu conex. Folosind ecuaţia integrală Fredholm obţinută, şi bazându-se pe proprietăţile cunoscute ale acestor ecuaţii, KOITER a arătat existenţa unei soluţii propuse din teoria elasticităţii, trasând de asemenea un studiu al cazurilor la limită.

Trebuie să observăm că problemele plane din teoria elasticităţii pentru un corp infinit constituit dintr-un sistem dublu periodic de orificii circulare a fost pentru prima oară analizat de W.J. NATANSON şi ulterior de SAITO, care prin dezvoltare în serie a ambelor potenţiale complexe φ şi ψ au obţinut pentru coeficienţii dezvoltărilor respective un sistem dublu infinit de ecuaţii. Avantajul cercetărilor de mai sus ale lui KOITER constă în caracterul mai general al orificiilor de orice formă, precum şi, probabil, în eficacitatea lor mai mare la cercetări teoretice.

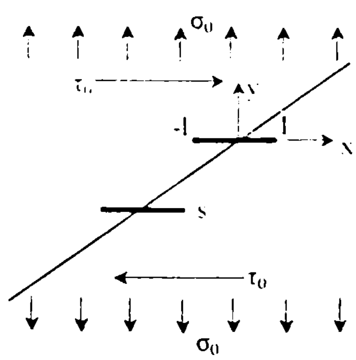
Multe din problemele amintite mai sus, în particular problema echilibrului unui semiplan greu în prezenţa orificiilor, sunt legate de probleme importante ale stării de tensiune a unui masiv de roci muntoase cu orificii cu forme şi dimensiuni diferite. Aceste probleme sunt foarte grele în cazul orificiilor mai multe decât unul, când ca factor principal care determină starea de tensiune a mediului, apare influenţa orificiilor alăturate. În cazul a două orificii circulare şi eliptice precum şi a numărului infinit de orificii periodic amplasate s-a analizat cu atenţie caracterul şi gradul acestei interacţiuni, a acestei influenţe, de către SHERMAN şi colaboratorii săi. Vezi şi:

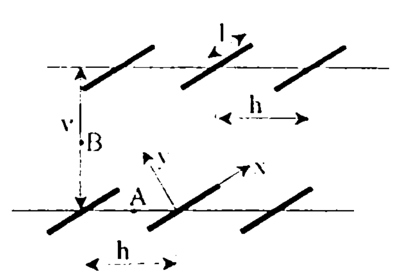
[M30] V.A. MERKULOV

- studiază încovoierea plăcii subţiri cu sistem periodic de fisuri curbilinii solicitate cu un sistem de forţe şi momente autoechilibrate în fiecare fisură.

[F22] R. FREIJ-AYOUB, ş.a.

- se prezintă o metodă simplificată pentru a calcula interacţiunea fisurilor, potrivită (adecvată) pentru aranjamente multifisură.





1.3.3.3. Planul infinit cu un orificiu necanonic. Transformări conforme

Cazul unui orificiu într-un mediu infinit omogen este supus cercetării în foarte multe lucrări. Problema concentrației tensiunilor în acest caz a atras atenția cercetătorilor încă din anii 1930, astfel încât în prezent este suficient de bine cunoscută. Vom da mai jos câteva noțiuni suplimentare.

Dacă funcția care realizează reprezentarea conformă a domeniului exterior al orificiului pe un cerc este rațională, atunci în rezolvarea problemei nu apar greutăți principiale. În cazul unor contururi mai complicate ale orificiilor, când această funcție de transformarea nu mai este rațională, se folosește de obicei metoda bazată pe reprezentarea conformă aproximativă. Una din abordările posibile de acest gen a fost făcută de către SAVIN ([SB6]). Vom aminti esența acestei metode.

Vom analiza problema tensiunilor într-un plan infinit slăbit de orificii sub formă de poligon cu laturi drepte. Vom reprezenta domeniul dat cu ajutorul integralei Cristoffel-Schwarz într-un cerc unitar al planului auxiliar ζ, și funcția de transformare o vom reprezenta sub formă de dezvoltare în serie după puterile lui ζ. Menținând numai primii termeni vom obține o reprezentare conformă care transformă cercul într-o curbă apropiată de conturul inițial, cu ajutorul funcției raționale de forma:

$$z = \omega(\zeta) = C\left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{1}^{n} C_k \zeta^k\right) \qquad (1.3.3.2)$$

sau în cazul particular al elipsei prin

$$z = C\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta^n\right) \qquad (1.3.3.3)$$

unde C, C_k, n sunt constante arbitrare.

Modificând în formula (1.3.3.2) numărul n și constantele C și C_k se pot obține orificii de diferite forme și dimensiuni. De aici, ca și cazuri particulare, se obțin orificiile care au formă circulară, eliptică, ovală, formă apropiată de dreptunghi, formă de patrulater cu colțuri rotunjite etc. De exemplu, ultima din formele enumerate care prezintă un interes practic mai mare, se obține cu ajutorul reprezentării (1.3.3.2) pentru $n = 3$ și $C_2 = 0$.

Problema plană în cazul unui astfel de orificiu a fost cercetată pentru prima oară de GREENSPAN. Dacă funcția de transformare conformă are forma prezentată mai sus, metoda Mushelișvili conduce imediat la rezultatul scontat.

Cu această metodă SAVIN și colaboratorii săi au analizat un mare număr de probleme concrete în cazul orificiilor curbilinii, pentru diferitele poziții ale acestora față de eforturile exterioare și pentru diferitele rapoarte ale dimensiunilor caracteristice. Soluțiile, aproape în toate exemplele, au fost prezentate sub formă de grafice ale distribuției tensiunilor pe conturul orificiului, de tabele și diagrame.

Metoda lui SAVIN a oferit posibilități largi pentru aplicarea metodelor din teoria funcțiilor la studiul efectiv al unei clase cunoscute de probleme concrete. În rezultatele acestor cercetări stă interesul pentru concentrarea tensiunilor în corpurile slăbite cu orificii și acest interes a crescut considerabil. Sfera problemelor s-a lărgit și a constituit obiectul cercetărilor multor altor autori.

În lucrările referitoare la problema tensiunilor într-un mediu cu orificii, forma conturului orificiilor a fost dată direct prin reprezentări conforme care în majoritatea cazurilor au fost date de segmente finite de serie, din dezvoltarea integralei Cristoffel-Schwarz. Pentru formele, importante din punct de vedere practic, a conturului orificiului, aproximația reprezentării cu ajutorul unor porțiuni de serii cu un număr mic de termeni nu a fost suficientă. Distribuția tensiunilor în apropierea orificiului depinde foarte mult de proprietățile diferențiale ale conturului orificiului și de aceea este foarte important să cunoaștem reprezentări mult mai precise, rămânând totuși în cadrul dificultăților de calcul moderate.

M.I.NEUMANN, în cazul orificiului de forma unui poligon cu colțurile rotunjite, a analizat o serie de polinoame cu coeficienți nedeterminați, paralel cu seriile obținute prin dezvoltarea integralei Cristoffel-Schwarz. Acești coeficienți el i-a determinat din condiția egalității cu zero a curburii în unele puncte ale frontierei și pe această cale a obținut o oarecare îndreptare a laturilor poligonului în comparație cu dezvoltarea integralei Cristoffel- Schwarz. Același autor a analizat și alte forme ale orificiilor și a obținut diferite reprezentări care se pot folosi cu succes în cazul problemei cilindrilor circulari slăbiți prin diferite orificii longitudinale. Asemenea reprezentări au fost folosite ulterior și în cazul deformațiilor plane pentru unele profile simple.

O altă abordare a fost propusă de KIKUKAWA. Analizând un mediu elastic infinit cu orificii, acest autor pornește de la reprezentarea aproximativă și de la forme mai simple, de exemplu în cazul unui poligon cu laturi rectilinii și cu vârfurile rotunjite din reprezentarea (1.3.3.2), cu un număr mic de termeni. Această reprezentare, considerată ca inițială, este precizată apoi cu ajutorul formulei cunoscute, a așa-numitei reprezentări apropiate.

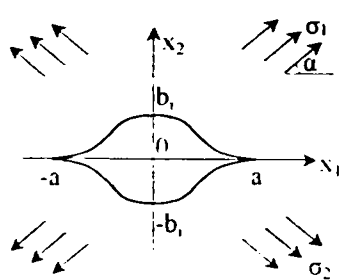
$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \frac{\zeta\omega_0'(\zeta)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta n_0(\sigma)}{|\omega_0'(\sigma)|}\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (1.3.3.4)$$

Aici γ este cercul cu rază unitară în planul ζ, $\sigma = e^{i\theta}$ este un punct în acest plan, iar $\delta n_0(\sigma)$este distanța pe normală între curba dată cu precizie și cea aproximativă care corespunde reprezentării $\omega_0(\zeta)$. Descompunând integrala din partea dreaptă (1.3.3.4) într-o serie de puteri și reținând numai câțiva termeni, autorul găsește o reprezentare cu mult mai precisă decât $\omega_0(\zeta)$. Funcția astfel găsită sub formă explicită $\omega(\zeta)$ este utilizată pentru transformarea conformă. Condițiile de limită inițiale a problemei în coordonate curbilinii stabilite de autor reprezintă ecuațiile de condiție bine cunoscute (ale primei probleme fundamentale) în forma propusă de KOLOSOV. Analiza se încheie cu reducerea la un sistem de ecuații algebrice liniare care se rezolvă cu metode aproximative.

KIKUKAWA a analizat o serie de forme de orificii, și a dat soluții numerice la o serie de probleme practice concrete. În afară de domenii infinite limitate de curbe închise finite, el a inclus în analiză și o clasă de domenii limitate de curbe infinite. După cum rezultă din calculele numerice arătate de autor, termenul auxiliar de corecție din funcția de transformare (1.3.3.4) introduce o schimbare importantă a repartizării tensiunilor în apropierea orificiilor. De exemplu în cazul orificiului care are forma unui romb cu colțuri rotunjite, o influență importantă asupra concentrației de tensiuni o au numai cei doi termeni din descompunerea integralei de corecție.
Cu toate acestea, în majoritatea cazurilor, pentru a obține o imagine precisă a stării de tensiune, trebuie să reținem cât mai mulți termeni din descompunere.

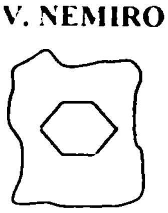
Mai citez:

[Z17] YU QIAO, YOUSHI HONG



- utilizând metoda transformărilor conforme s-a rezolvat problema unei plăci infinite care conține o fisură centrală sub *„formă de buză"* și e supusă la o încărcare biaxială la distanță.

[N7] Iu. V. NEMIROVSKI, MIRENKOV V. E.



- studiază starea de tensiune în plăci cu gaură poligonală convexă.

[H42] C. HWU
- bazat pe soluțiile obținute utilizând formalismul lui Stroh, în acest articol se demonstrează o formulă generală și simplificată pentru *găuri poligonale în medii anizotrope*.

[H42] CHYABIN HWU
- bazat pe soluțiile obținute utilizând formalismul lui Stroh se dă o formulă generală simplificată pentru găuri poligonale în medii anizotrope.

1.3.4. Mediul parțial omogen. Orificii întărite

Din punct de vedere al aplicațiilor practice prezintă interes problema privind determinarea a stării de tensiune dintr-un corp compus din piese diferite ca formă și proprietăți elastice, legate între ele cu o metodă sau alta. În mod special vom vorbi despre tensiunea în plăci cu orificii, în care sunt puse miezuri compacte sau la rândul lor cu orificii, și cu o compatibilitate elastică prestabilită. Îmbinarea pieselor în practică se realizează de obicei prin presare în stare caldă sau rece. Se presupune că marginile pieselor elastice legate se ating fără distanțe între ele și că sunt împiedicate să alunece unele față de altele.[1]

Granița totală L a corpului compus astfel obținut va consta din conturul exterior al plăcii (dacă aceasta nu se află la infinit), din conturul orificiilor neîntărite și, în sfârșit, din contururile interioare ale miezurilor introduse, dacă acestea există. Corpurile pot să fie supuse acțiunii cauzate de strângere și în afară de aceasta pot să fie solicitate de forțe exterioare oarecare, aplicate în interior și la graniță. Pe granița L obținem pentru solicitări oarecare obișnuitele condiții la limită (totdeauna vom avea în vedere cazul primei probleme de bază). Pe liniile de separare a pieselor în contact *trebuie să fie dat saltul deplasărilor elastice* în funcție de tensiunile exterioare corespunzătoare.

1.3.4.1. Incluziuni din același material

Metoda generală de cercetare a problemei în cazul când placa are un număr finit de orificii și piesele elastice îmbinate între ele sunt confecționate din unul și același material, a fost propusă de către SHERMAN. Această metodă este expusă în paragraful 6.1.4. al cărții lui MUSHELISHVILI, ediția a V-a. Reamintim unele fapte referitoare la aceasta.

Pentru simplitate vom considera că piesele elastice introduse în orificii sunt niște șaibe pline. Atunci, comform metodei amintite mai sus, problema analizată se reduce la o problemă simplă plană pentru componența totală a domeniului ocupat de corpurile compuse (fără nici o condiție la limita de separare). Numărul de legături al domeniului compus este mai mic decât numărul de legături al domeniului ocupat de placa, cu un număr egal cu numărul de șaibe puse în placă. În acest caz, problema nouă ce apare va corespunde deja unor acțiuni exterioare puțin schimbate. Linia de separare poate fi eliminată pe seama unor forțe suplimentare alese corespunzător și care revin asupra sistemului elastic în întregime.

În cazul când incluziunile elastice au formă rotundă termenul de corecție din partea dreaptă a condițiilor limită poate fi dat în formă explicită. Aceasta are o formă foarte simplă în cazul când saltul deplasărilor este dirijat pe direcția normală la de linia de separare și mărimea acestora este constantă.

În final, în cazul incluziunilor rotunde care umplu toate orificiile în placă, metoda Mushelișvili conduce la o soluție închisă, dacă domeniul simplu conex ocupat de corpurile conjugate se transformă conform pe cerc cu ajutorul unei funcții raționale.

---

[1] În cazul când conturul șaibei în stare nedeformată coincide cu conturul orificiului în placă, vom presupune că șaiba este lipită de-a lungul marginii de placă sau vom presupune existența unei frecări mari între șaibă și placa înconjurătoare. În alte presupuneri, cu excepția unor cazuri foarte particulare de acțiuni exterioare asupra corpului îmbinat, se obține o problemă mixtă a teoriei elasticității.

Cu această metodă au fost găsite soluții sub formă închisă într-o serie de cazuri și s-au calculat rezultate numerice. În afară de probleme cu privire la deformații plane sau în stare de tensiune generalizată (problema plană) s-au analizat probleme similare cu privire la încovoiere transversală a plăcilor subțiri.

1.3.4.2. Incluziuni din diferite materiale

Fixarea rigidă a orificiilor conduce la greutățile la fel de mari în ce privește rezolvarea acestor probleme ca și în cazul unor orificii total nefixate. În primul caz, pe conturul orificiului trebuie să fie respectate condițiile la limită ale problemei a doua de bază, iar în al doilea caz condițiile analoage ale primei probleme. Aceste două cazuri nu diferă în fond unul de altul și de aceea problema cu privire la incluziuni rigide nu o vom analiza separat.

Altfel stă problema cu privire la incluziunile elastice, care diferă de caracteristicile elastice ale plăcii ce le înconjoară; aici problema devine cu mult mai complicată.

Metoda de soluționare, analogă cu cea expusă mai sus, pentru cazul domeniilor dublu conexe, a fost utilizată de SHERMAN în problema calculării tensiunilor în medii parțial omogene, și anume pentru cazul când corpul neomogen ocupă un domeniu limitat (finit) simplu conex, și constă din două părți legate între ele având proprietăți elastice diferite. Orificiul în placa omogenă de dimensiuni finite, limitate de două contururi închise, se umple cu o șaibă plină din alt material. Pe granița exterioară a plăcii se dau condițiile obișnuite, ca la prima problemă, iar pe linia de separare a celor două medii se cere egalitatea tensiunilor, iar deplasările elastice trebuie să aibă o valoare de salt cunoscută.

Pentru găsirea funcției ajutătoare ω(t), introdusă în acest caz de granița plăcii, se obține ca și mai înainte sistemul de ecuații integrale a lui Fredholm, care soluționează complet în sens teoretic problema definită inițial. În cazul particular al plăcii circulare cu incluziuni excentrice rotunde, analizată pentru ilustrarea metodei, rezultă în locul sistemului de ecuații integrale un sistem infinit de ecuații algebrice liniare.

Cazul incluziunilor concentrice rotunde în parte, când fiecare din piesele consecutive incluse în orificiu reprezintă un inel concentric rotund, se tratează cu metoda seriilor de puteri.

Metoda seriilor de puteri este aplicabilă și la problema întăririlor inelare a ortificiilor și este principial aplicabilă pentru soluționarea efectivă de fiecare dată când domeniul infinit simplu conex ocupat de corpuri conjugate se transformă conform pe exteriorul cercului cu ajutorul funcției raționale și când inelul de fixare devine în acest caz un inel circular concentric. Soluționarea efectivă a problemei în cazul transformării conforme de tipul (1.3.3.3), este dată de ŞEREMETJEV, care a combinat metoda seriilor de puteri cu metoda integralelor de tip Cauchy.

1.3.4.3. Întărirea orificiilor cu inele subțiri

Problemele plane cu privire la întărirea cu inele a orificiilor (ca și problemele analoge cu aceasta, care se referă la încovoierea transversală a pläciilor subțiri) se pot simplifica mult în cazul când inelul de întărire este în plan o bandă subțire curbilinie. Un asemenea inel este considerat de obicei ca și o linie elastică, a cărei stare de tensiune și deformație se descrie cu ecuații elementare din rezistența materialelor.

Eforturile σ_x'' și σ_y'', care acționează asupra inelului din partea plăcii ce-l înconjoară, le vom considera temporar cunoscute. Pornind de la teoria deformațiilor mici a barelor curbilinii, determinăm starea de tensiune a inelului, sub acțiunea unor forțe exterioare care sunt date pe toate marginile[2]. Apoi, toate mărimile de bază care caracterizează deformația inelului – momentul încovoietor, forțele normale și tangențiale și de asemenea deplasările elastice ale axei

[2] Se presupune că pe conturul interior al inelului se dau condiții care corespund primei probleme de bază.

inelului – se exprimă în formă elementară prin solicitarea exterioară. Dacă acum expresia găsită pentru deformarea elastică a punctelor conturului exterior al inelului se înlocuieşte în condiţiile corespunzătoare de îmbinare pe liniile separării mediilor, se obţin două relaţii complexe pentru funcţiile determinate în domeniul plăcii φ şi ψ. În aceste relaţii intră eforturile necunoscute σ_x'' şi σ_y''. Influenţa întăririi cu inel subţire se exprimă astfel prin faptul că din condiţiile obişnuite a primei şi a celei de-a doua probleme pe periferia orificiului, eforturile de contur şi deplasările vor conţine, în afară de mărimile cunoscute, două funcţii reale care trebuiesc determinate în cursul soluţionării problemei. Utilizarea metodelor expuse aici duc la soluţionarea efectivă a problemei dacă domeniul în afara conturului întăriturii se transformă conform pe exteriorul cercului cu ajutorul unei funcţii raţionale.

În mod asemănător s-a studiat această problemă pentru o anumită clasă de orificii cu diferite presupuneri în ce priveşte caracterul deformaţiei inelului şi solicitarea plăcii. Rezultate importante în această direcţie au fost obţinute în lucrările lui SAVIN, ŞEREMETJEV, RADOK, FLEISCHMANN şi alţi autori. Ne oprim pe scurt la unele publicaţii relativ noi.

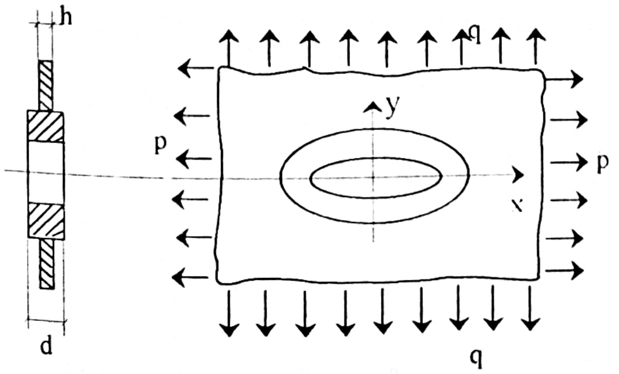
În lucrarea lui ŞEREMETJEV se analizează planul infinit întins în două direcţii şi având un orificiu întărit. Inelul de întărire are secţiune constantă şi este considerat ca o bară curbă plană elastică ce lucrează la încovoiere şi tracţiune. Se deduc relaţiile cu caracter general care caracterizează deformaţia unei asemenea bare. În final se formulează problema corespunzător schemei expuse în termenii teoriei funcţiilor de variabilă complexă. Problema obţinută se rezolvă pentru cazul orificiului rotund cu metoda dezvoltării în serie de puteri. Trebuie să menţionăm că aceeaşi problemă, cu aceeaşi complexitate, a fost soluţionată mai târziu de RADOK, care probabil nu a cunoscut lucrarea lui ŞEREMETJEV.

În altă lucrare a lui ŞEREMETJEV se studiază încovoierea plăcii infinite subţiri, întărite cu inel de secţiune constantă şi solicitată de eforturi normale şi momente aplicate la margine. Inelul care întăreşte marginea orificiului în placă (sau marginea plăcii), este tratat ca şi o linie elastică ce nu poate fi întinsă şi care este solicitată la încovoiere şi torsiune. Metoda soluţionării este aici complet analoagă cu cea indicată mai sus pentru cazul stării plane de tensiune. O analiză amănunţită se limitează la cazul orificiului rotund cu câmp de tensiune omogen la infinit, unde la infinit acţionează momente de torsiune şi de încovoiere repartizate uniform.

Influenţa întăririi inelare în plăcile încovoiate s-a studiat de asemenea şi de către FLEISCHMANN. Pe aceeaşi bază ca şi în lucrările anterioare autorul a simplificat foarte mult soluţionarea în cazul orificiului rotund. El a analizat două cazuri pentru încovoierea plăcii nelimitate, şi anume cazul acţiunii momentelor de încovoiere unilaterale şi cazul acţionării momentelor de torsiune din toate direcţiile. Pe aceste exemple autorul demonstrează o metodă efectivă de alegere a întăririi optime, la care concentraţia tensiunilor se elimină complet sau aproape complet.

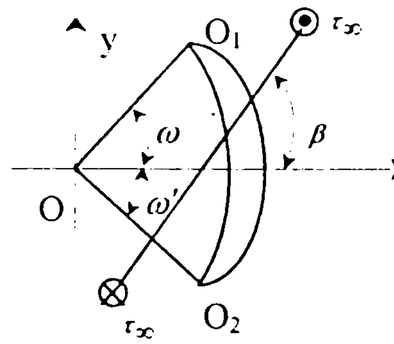
Mai citez:

[A12] ALEKSANDROV A.Iu.



– Analizează placa infinită solicitată la infinit de sarcini de tracţiune uniform repartizate pe două direcţii ortogonale. Orificiul din placă este întărit cu un inel subţire. Se încearcă optimizarea acestuia din condiţii de egală rezistenţă.

[F22] FRENCIKO S.D.



– Studiază deformația antiplană a corpului cu incluziuni subțiri în formă de arc. Utilizează analogia dintre forfecare longitudinală și conductibilitatea termică staționară a corpului cu incluziuni și fisuri. Obține o ecuație integro-diferențială pe care o rezolvă numeric cu metoda Multhopp, utilizând polinoame Cebâșev. Arată că valoarea maximă a factorului de intensitate a tensiunilor se obține la $\omega = \frac{\pi}{2}$ pentru $\beta = \frac{\pi}{4}$, depinzând și de alți parametri.

[J3] I. JASIUK

- cercetează corespondența între incluziunile rigide poligonale și cavități pe baza așa-numitelor *„module elastice efective"*. Se obțin rezultate pentru modulele elastice efective ale compozitelor cu o concentrație slabă de incluziuni poligonale rigide, apoi a materialelor cu cavități, respectiv pentru materialele conținând o concentrație finită de incluziuni.

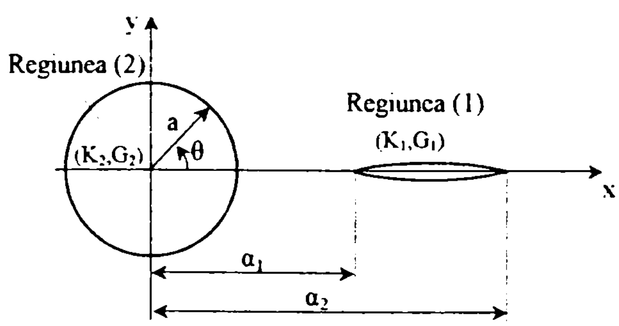
[S31] E.I. ȘIFRIN

- studiază fisuri plane în spațiul elastic când există legături liniare între suprafețele lor

[A19] G. ALESSANDRINI, ș.a.

- se studiază problema determinării unei incluziuni dintr-un material elastic diferit într-un corp elastic izotrop prin măsurături pe frontieră ale tracțiunii și deplasării.

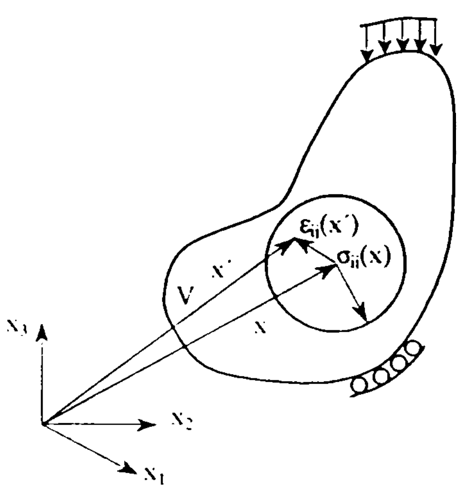
[A39] C. ATKINSON

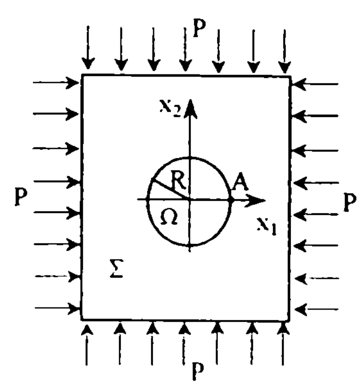


- utilizând o metodă numerică se calculează factorul de intensitate a tensiunilor pentru o fisură în apropierea unei incluziuni. Se reprezintă grafic rezultatele pentru variația factorului de intensitate a tensiunilor cu distanța vârfului fisurii de incluziune.

[K62] H. KUMASAKA, K. HIRASHIMA

- se descriu relațiile complementare între tensiuni și deplasări pentru elasticitatea nonlocală. Se consideră un plan infinit cu o incluziune circulară supus la o încarcare uniformă de compresiune. Se presupune că efectele nonlocale ale matricii și incluziunii sunt aceleași.



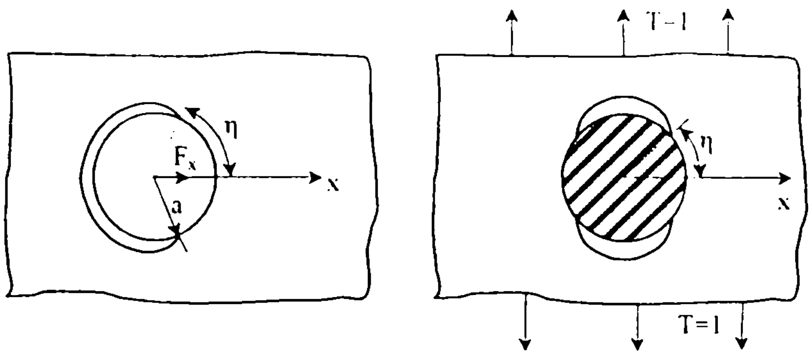


[N17] B. NOBLE

- se obțin soluții exacte pentru anumite serii trigonometrice duale care apar în studiul problemelor mixte de valori la limită cu frontiere circulare în elasticitatea bidimensională. Problemele considerate sunt :

(i) un corp infinit cu o incluziune circulară netedă pe care se aplică o forță concentrată

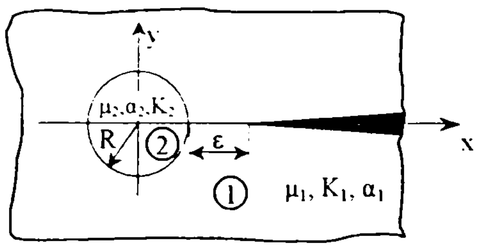
(ii) o incluziune elastică netedă într-un corp infinit supus la o tensiune uniformă la infinit



[J3] I. JASIUK

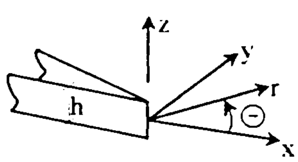
- investighează corespondența dintre incluziuni rigide și cavități, așa cum sunt acestea aplicate în cazul modulelor elastice efective a materialelor cu incluziuni rigide poligonale și cavități

[M59] W.H. MÜLLER



- sunt studiați factorii de intensitate a tensiunilor pentru o fisură semi-infinită în fața unei incluziuni circulare solicitate termic și elastic, bazat pe tehnica **ecuațiilor integrale singulare** și pe o metodă auto-consistentă.

[C42] CHUNG-YUEN HUI, ș.a.



- se analizează câmpul de tensiuni în apropierea vârfului unei fisuri într-o placă supusă la încărcări de membrană și de încovoiere și care suferă deflecții mari.

1.3.5. Mediul omogen continuu. Unele probleme speciale

Studiul stării de tensiune în cazul plăcilor elastice s-a concentrat în ultimii ani în primul rând asupra unor piese, care nu sunt în ceea ce privește forma și încărcarea foarte complicate dar sunt destul de dificile pentru analize precise, și care au o importanță deosebită în ce privește aplicabilitatea practică.

O atenție mare s-a dat plăcilor nelimitate slăbite cu incluziuni de diferite forme la granița mediului, plăcilor poligonale și de asemenea plăcilor de diferite forme care sunt supuse unor încărcări discontinue.

1.3.5.1. Plăcile cu contur poligonal

Metodele teoriei funcțiilor de variabile complexe au început să fie utilizate în ultimul timp cu succes la plăcile finite poligonale. Pentru soluționarea problemei, funcțiile care realizează transformarea conformă a domeniului solicitat pe cerc se reprezintă cu ajutorul integralei Cristoffel-Schwarz în formă întreagă, în formă de serie de puteri. În acest caz, mai ales atunci când funcția care exprimă acțiunile pe contur, nu este regulată, adesea se face uz în analiză de ecuațiile funcționale ale lui Mushelișvili. Indicăm unele din lucrările cele mai caracteristice în acest domeniu.

Amintim în primul rând lucrarea lui GRAY. La începutul lucrării autorul descompune în serie de puteri nu funcțiile: $\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}(\zeta)}, \varphi(\zeta)$, ca în cartea lui Mushelişvili, ci funcțiile: $\omega(\zeta), \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$.

De aceea sistemul obținut de GRAY are ecuațiile algebrice puțin diferite de cele corespunzătoare din cartea lui MUSHELIŞVILI. În lucrare este analizat amănunțit exemplul unui pătrat tracționat de-a lungul diagonalei de forțe concentrate aplicate la vârfurile opuse. Foarte interesant că sistemul de ecuații în acest caz se rezolvă cu ajutorul metodei interațiilor.

În lucrarea lui HOSKIN şi RADOK în legătură cu calculul unei aripi sub formă de săgeată se analizează problema tensiunilor într-o placă pătratică supusă unei solicitări complexe: la vârfurile opuse ale pătratului se aplică forțe concentrate având direcție pe diagonală şi în afară de aceasta două laturi apropiate sunt supuse unor tensiuni tangențiale repartizate după o lege oarecare. Pătratul analizat solicitat se înlocuieşte cu un patrulater curbiliniu cu vârfurile rotunjite, a cărui funcție de transformare conformă constă dintr-o expresie cu cinci termeni. Rezolvarea se face utilizând ecuațiile funcționale ale lui Mushelişvili. În lucrare o atenție deosebită se dă analizei calitative a stării elastice studiate. Se dau rezultate numerice în formă de tabele şi grafice la diferite valori ale parametrilor problemei.

În lucrarea lui WINSLOV se analizează placa dreptunghiulară la o solicitare specială când componentele eforturilor exterioare σ_x'', σ_y'' sunt polinoame în x şi y.

În lucrarea lui Deveral la plăcile poligonale încovoiate de forțe transversale se utilizează metoda seriilor de puteri. Menținând în funcția de transformare conformă trei sau patru termeni, autorul găseşte soluția aproximativă pentru un pătrat, un dreptunghi şi un triunghi echilateral, toate solicitate de forțe uniforme. Se dau calcule numerice care permit o compararție a valoarii săgeții maxime în placă cu valorile găsite de alți autori pe altă cale.

Pentru domeniul cu graniță parțial rectilinie G.N. POLOSCHI a studiat a treia problemă de bază a teoriei elasticității, după cum se numeşte câteodată problema contactului cu profil rigid când pe granița domeniului se dau deplasările normale şi tensiunile tangențiale. În condițiile de limită a acestei probleme, după transformarea lor corespunzătoare, la derivatele de ordin superior ale funcțiilor căutate apare un coeficient care conține curbura conturului ca şi factor. Datorită acestui fapt, în cazul conturului care constă din porțiuni de drepte problema se simplifică mult şi se reduce la două probleme de limită rezolvate consecutiv în teoria funcțiilor analitice. Pe această cale POLOSCHI a obținut soluționarea problemei în cazul când granița domeniului finit sau infinit este un contur poligonal de formă destul de generală. La soluționarea problemei autorul a formulat unele condiții critice care se referă la creşterea tensiunilor în apropierea unghiurilor şi care asigură unicitatea soluției.

1.3.5.2. Plăci cu marginile tinzând la infinit

Metoda de rezolvare indicată mai sus în lucrarea lui GRAY, a fost utilizată de acelaşi autor la probleme de deformare plană a unei benzi dreptunghiulare încovoiate în planul său de către o solicitare concentrată aplicată într-un punct al marginii sale perpendicular pe liniile de limită.

Sistemul de ecuații obținut în acest caz nu se soluționează cu ajutorul metodei interațiilor, dar se poate aduce la o formă comodă cu ajutorul unor transformări ale sale. După aceasta sistemul se rezolvă numeric şi se face o analiză amănunțită a stării de tensiune. Menționăm că forța dată, concentrată pe limita benzii, autorul o înlocuieşte cu două sisteme de forțe concentrate aplicate la limită şi soluția căutată se prezintă astfel în formă de suprapunere a două probleme particulare pentru aceeaşi bandă. Una din aceste probleme se poate analiza pe schema autorului destul de simplu. Este vorba de problema de bază, şi anume o bandă comprimată de două forțe opuse normale concentrate la graniță, aplicate la părțile opuse ale graniței. Menționăm că această problemă particulară se rezolvă în formă închisă după diferite metode.

Rezolvarea dată în lucrarea lui SONNTAG se bazează pe reprezentarea conformă a benzii și diferă de rezolvările cunoscute mai înainte printr-o convergență mai rapidă a integralelor improprii conținute în aceasta.

N.S. KURDIN a indicat soluționarea într-o formă închisă pentru exteriorul unei parabole când mediul se supune acțiunii unei solicitări concentrate într-un punct al marginii acesteia.

În lucrarea lui BUCHWALD și TIFFEN se studiază încovoierea transversală a unei plăci infinite subțiri desprinse liber de margini când suprafața medie este un semiplan sau o bandă rectilinie. Condiția reazemului liber pe contur, cum s-a arătat mai sus, se transformă pe porțiunile drepte ale acestuia. Aceasta permite autorilor să găsească soluția pentru cazurile analizate sub forma integralelor de tip Cauchy și Fourier. Analiza autorilor include demonstrația unicității stării elastice în condițiile cunoscute la infinit precum și rezolvarea amănunțită pentru cazul particular al unei solicitări concentrate (în interior).

Unele cazuri de domenii simplu conexe cu limite care tind spre infinit sunt analizate de asemenea în lucrarea lui SEIKA și SHOIYA. În prima din aceste lucrări se analizează problema deformării plane a semiplanului întins cu eforturi uniforme la infinit, când granița dreaptă a acestuia este slăbită cu crestături simetrice sub formă de litera U. Eforturile de tracțiune sunt paralele cu granița liniară a semiplanului y=0. Granița mediului elastic este liberă de acțiuni exterioare. Semiplanul cu crestătura dată în formă aproximativă de semioval, este transformată conform cu ajutorul funcției:

$$z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3}\right), \tag{1.3.5.1}$$

unde R, m, n sunt constante reale, pe semiplanul cu semicercul aruncat la graniță.

După cum se obișnuiește la astfel de probleme, potențialele căutate se reprezintă ca sumă a două funcții, dintre care prima reprezintă starea de tensiune în semiplanul nefisurat în timp ce a doua indică tensiunile ce apar suplimentar datorită crestăturilor. Apoi autorul dezvoltă funcțiile căutate în serii Laurent special alese (fără o motivație satisfăcătoare). Utilizarea seriilor de puteri dă aici posibilitatea de reducere a problemei la un sistem infinit oarecare de ecuații liniare care se rezolvă apoi aproximativ cu metoda perturbațiilor. Ca și parametru de perturbație se iau numerele m și n care intră în formula (1.3.5.1) și care se presupun mici, ele caracterizând forma și dimensiunile crestăturilor.

În lucrarea lui SHOIYA, cu aceeași procedură, se analizează problema despre încovoierea după o axă a semiplanului cu niște crestături semieliptice la graniță.

În ambele lucrări se dau pentru diferiți parametri rezultate numerice, sub formă de tabele, pentru coeficientul de concentrare a tensiunilor și sunt construite graficele tensiunilor și momentelor. Judecând după rezultatele numerice obținute aici, pe această cale pare că se poate obține o imagine a stării de tensiune destul de apropiată de cea reală, dar cu toate acestea tratarea astfel formulată mai trebuie încă justificată [M70].

1.3.6. Probleme mixte și de contact ale teoriei plane a elasticității

Problemele mixte și de contact, cu privire la atingerea corpurilor elastice, fac parte dintre aplicațiile cele mai importante, și constituie desigur cele mai grele probleme a teoriei liniare a elasticității.

Metoda generală de rezolvare a unui tip anume de probleme mixte și de contact care folosește aparatul teoriei funcțiilor de variabilă complexă, precum și numeroase exemple concrete sunt expusă în capitolul 6 al cărții lui MUSHELIȘVILI, ediția a V-a.

1.3.6.1. Problemele mixte ale teoriei plane elasticității și teoria încovoierii plăcilor.

SHERMAN a dat o metodă de soluționare a problemei mixte din teoria elasticității pentru domenii multiplu conexe. MANDJAVIDZE a cercetat amănunțit ecuațiile integrale singulare ale lui Sherman construite pentru rezolvarea problemei indicate și a rezolvat cu ajutorul lor problema mixtă de încovoiere a unei plăci izotrope subțiri, solicitată după direcție normală, când o parte din marginea plăcii este încastrată iar restul este liberă. Dacă domeniul ocupat de placă îl putem transforma conform pe cerc cu ajutorul unui polinom, atunci această problemă ca și problema mixtă de bază se poate rezolva eficace. Aceasta s-a făcut în articolul lui KARAPETIAN și STĂNESCU [K25], [K26], [K27].

KALANDIYA [K12] a construit un sistem de ecuații integrale singulare pentru rezolvarea problemei generale de încovoiere a unei plăci în cazul când o parte din margine este liberă, iar o parte este încastrată rigid. Același autor a constituit sistemul de ecuații integrale ale lui Fredholm pentru rezolvarea problemei la încovoiere a plăcii când o parte din marginea plăcii este încastrată și o parte este liberă [K12], [K13].

În lucrările lui Kalandiya se propune o metodă care permite găsirea unei soluții aproximative pentru unele probleme de încovoiere a plăcilor subțiri precum și pentru probleme plane a teoriei elasticității când mediul elastic ocupă un semicerc. Problema se rezolvă prin reducerea la o ecuație integrală singulară și prin utilizarea consecutivă a metodei numerice de rezolvare; Kalandiya ia ca exemplu concret problema încovoierii unei plăci în formă de semicerc care este încastrată pe semicerc și este liberă pe diametru.

În lucrarea lui ZORSKI cu ajutorul metodei ecuațiilor singulare integrale și a teoriei conjugării liniare, sunt soluționate problemele de încovoiere a plăcilor când placa are forma unui semiplan, unui pătrat sau unei semibenzi și când se dau condițiile mixte de limită (marginea plăcii parțial încastrată, sau sprijinită sau liberă).

În lucrarea lui SHERMAN* sunt deduse ecuațiile lui Fredholm pentru rezolvarea problemei de contact între conturul unui corp elastic și un profil rigid. Într-o lucrare mai târzie a lui SHERMAN, autorul deduce un sistem mai comod de ecuații Fredholm pentru rezolvarea aceleași probleme.

1.3.6.2. Probleme de contact ale teoriei plane a elasticității

În lucrarea lui MOSAKOVSKI și SAGUBUȘENKO se rezolvă problema de contact pentru planul infinit elastic slăbit cu o tăietură dreaptă și care se comprimă cu niște forțe dirijate sub un anumit unghi față de linia tăieturii. Lățimea tăieturii în starea nedeformantă se consideră constantă. După deformație marginile opuse se ating în partea de mijloc a tăieturii. Limita porțiunii de închidere se determină din condițiile care privesc caracterul final al tensiunilor pentru punctele marginale.

M.P. ȘEREMETJEV analizează starea de echilibru elastic în planul infinit cu orificiu circular în care s-a pus o șaibă rotundă absolut rigidă sau elastică de aceeași rază. Pentru rezolvare autorul utilizează ecuații integro-diferențiale de tipul ecuației Prandtl a teoriei aripei de dimensiune finită. ȘEREMETJEV a propus o metodă de rezolvare aproximativă a ecuației de tip Prandtl construită în lucrarea sa.

Tot cu ajutorul unei ecuații integro-diferențiale, PANASIUK [P8], [P9], tratează problema de contact a unei șaibe infinite cu un orificiu rotund în care se introduce un disc rigid de aceeași rază, când asupra discului se aplică o forță concentrată.

---

* Lucrările lui Sherman au apărut în Uniunea Sovietică în jurul anilor 1940; din acest motiv nu am reușit să procur decât lucrarea [SB6]. Comentariile făcute până acum au fost preluate din literatură din lucrările lui MUSHELIȘVILI [M70], V.V. PANASIUK [P7], [P12], SAVRUK [S6], HELSING [H21], [H26], [H29], SAVIN G.N. [S5], KALANDIYA [K12].

PANASIUK [P10] a construit ecuații integro-diferențiale care sunt generalizări ale ecuației integro-diferențiale a problemei de contact pentru cazul când ștanța de formă arbitrară (apropiată de cerc) se presează pe un orificiu rotund de-a lungul granițelor lor comune, suprafața de atingere nemaiputându-se considera mică.

KALANDIYA [K12] obține aceleași ecuații printr-o altă metodă; în afară de aceasta în lucrarea mai-sus-numită se construiește ecuația integro-diferențială pentru următoarea problemă de contact: Pe un orificiu rotund în mediul infinit elastic apasă o șaibă elastică rotundă de aceeași rază dar având în general alte constante elastice.

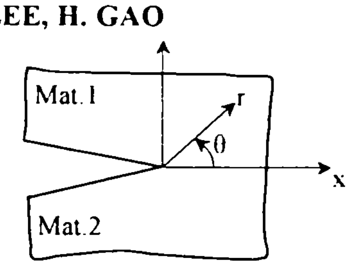
Ecuația integro-diferențială amintită este asemănătoare cu ecuația de tip Prandtl a teoriei aripii de dimensiune finită. Pentru rezolvarea acestor ecuații a fost propusă metoda aproximativă MULTHOPP. În lucrarea lui KALANDIYA se dă justificarea metodei aproximative MULTHOPP și de asemenea se dau unele aplicații ale acestei metode la problemele plane de contact.

KALANDIYA a rezolvat de asemenea problema de contact pentru cazul când în orificiul planului infinit se pune o șaibă elastică din alt material, șaibă care are inițial o rază puțin mai mică. Vzi și:

[S21] SHAVLAKADSE

- studiază probleme de contact ale teoriei elasticității pentru corpuri cu incluziuni elastice. Problemele sunt reduse la ecuații diferențiale integrale de tip Prandtl cu un coeficient la operatorul singular care are zerouri de ordin mai mare la capetele intervalului de integrare.

[L10] J. LEE, H. GAO

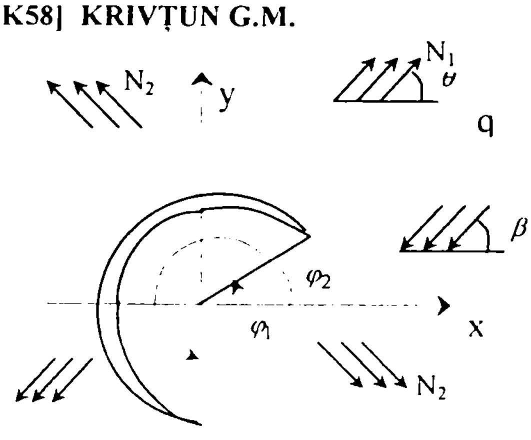


- se presupune un mo e e contact Comminou generalizat pentru fisuri de interfață în solide elastice anizotrope.

§ 1.4. ALTE SUBIECTE TEMATICE DIN BIBLIOGRAFIE

1.4.1. Tensiuni termoelastice

[K58] KRIVȚUN G.M.



– Se determină starea de tensiune a unui plan elastic izotrop care are o fisură curbă descrisă de un contur neted și care este supus la forțe exterioare și la un câmp staționar de temperatură.

[N19] NAOTAKE NODA, ZHI HE JIN

- se studiază o fisură într-o fâșie de material funcțional, cu gradient, modelat matematic printr-un solid neomogen cu temperatura de suprafață prescrisă. Fețele fisurii sunt presupuse a fi complet izolate. Se presupune că toate proprietățile de material depind doar de coordonata y (perpendiculară pe fețele fisurii) astfel încât proprietățile sunt niște funcții exponențiale de y. Utilizând transformatele Fourier, problemele termice și mecanice sunt reduse la două sisteme de ecuații integrale singulare, care sunt rezolvate numeric.

[C19] S.N. CHATERJEE, S.N. PRASAD

- se prezintă o soluție prin dezvoltarea în serie în coordonate cilindrice a problemei de limită a tracțiunii unui strat elastic infinit cu forțe de masă și distribuție de temperatură, arbitrare.

[SB51] BORODACEV A. N.

- propune o metodă generală de rezolvare a problemelor staționare de termoelasticitate pentru un corp nelimitat omogen izotop care conține o fisură eliptică plană.

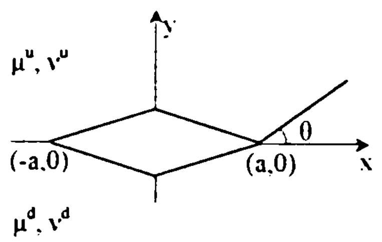
[K31] M. K. KASSIR

- arată cum se construiesc funcțiile armonice din care pot fi apoi obținute tensiunile și deplasările într-un solid infinit care conține o fisură eliptică și conduce căldura în condiții staționare.

1.4.2. Plăci plane anizotrope. Fisuri la interfața a două materiale diferite

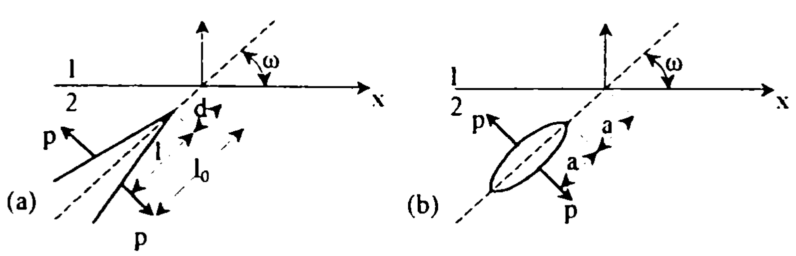
[B32] BEREJNIȚKII T.L. - Studiază încovoierea unei plăci plane infinite cu anizotropie liniară de tip general, slăbită cu o fisură dreaptă cu marginile neîncărcate.

[B47] B.T. CHEN, C.T. HU, S. LEE



- se investighează dislocațiile marginale în apropierea unei interfețe fisurate alunecătoare.

[C24] B. CHEN, T.J. LARDNER

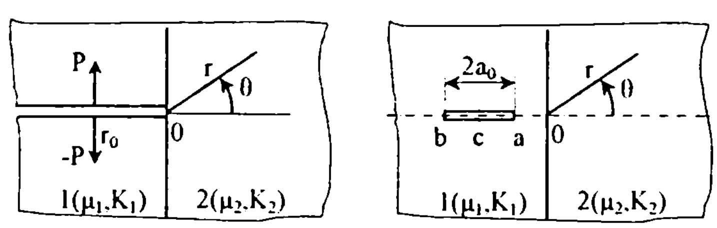


- aduc rezultate numerice suplimentare pentru rata de descărcare a energiei și factorii de intensitate ai tensiunilor la vârful unei fisuri drepte bidimensionale aflată la un anumit unghi față de interfața unui sistem bimaterial.

[P49] POVSTENKO Z. Iu.

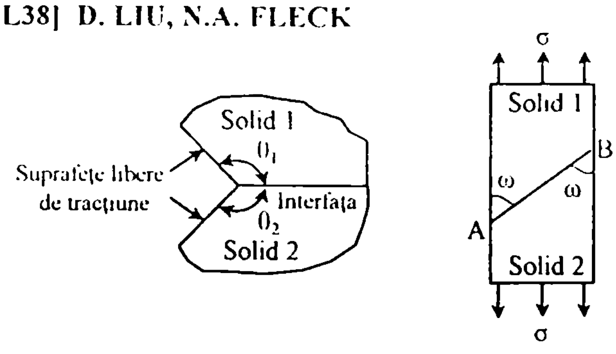
- studiază repartizarea tensiunilor și concentrarea adausurilor în stratul superior pe granița corpului solid, condiționat de schimbarea bruscă a energiei de suprafață.

[C56] T.S.COOK, F.ERDOGAN



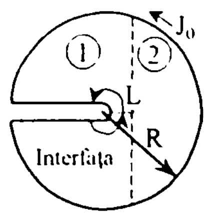
- se consideră problema a două semiplane conectate elastic ce conțin o fisură perpendiculară pe interfață.

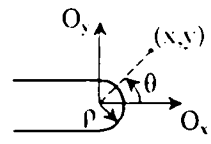
[L38] D. LIU, N.A. FLECK



- se analizează câmpul de tensiuni singulare la vârful [illegible] fisuri [illegible] într-o îmbinare bimaterială pentru o platbandă de lățime finită, sub tracțiune și încovoiere la infinit.

[K42] A.S. KIM, J. BESSON, A. PINEAU

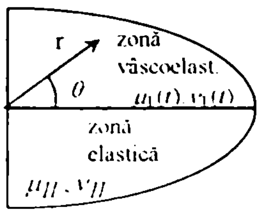




Regiunea vârfului fisurii

- se analizează problema unei fisuri care se apropie perpendicular de interfața unui bimaterial, utilizând aproximări atât globale cât şi locale de rupere.

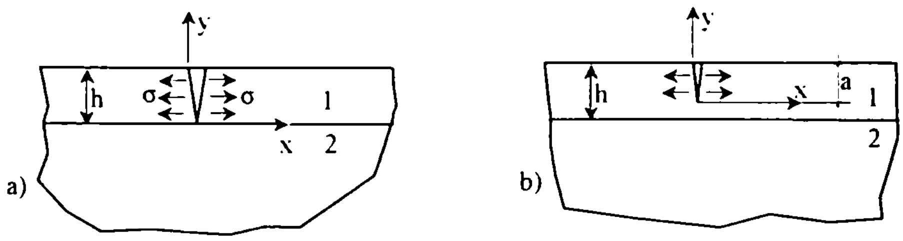
[SB4] S.S. LEE



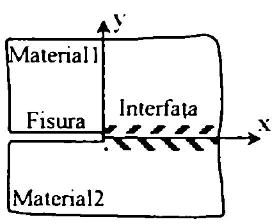
- studiază singularitatea tensiunii la colțul de interfață dintre fibra perfect îmbinată şi matricea unui model laminat bidimensional unidirecțional supus la o deformație de întindere transversală uniformă.

[B39] J.L. BEUTH, JR.

- obține soluții pentru două probleme de deformație plană elastică cu privire la fisurarea unui film subțire conectat la unmaterial de substrat semiinfinit.

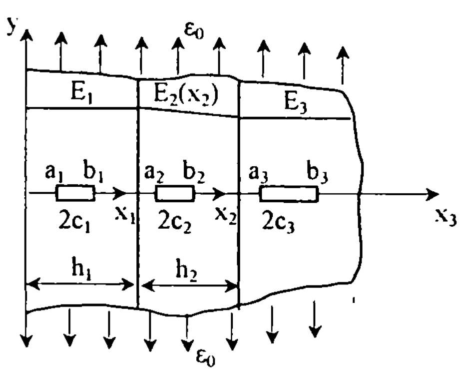


[D9] XIAOMIN DENG



- se studiază asimptotic problema de deformație plană a unei fisuri de interfață staționare între două solide ductile diferite, unde solidele ductile se presupun a fi incompresibile, elastic perfect plastice şi ascultă de teoria fluxului J_2 a plasticității

[H44] HYUNG JIP CHOI, ş.a.



- se cercetează problema fisurilor coliniare cuprinse înt -u s ipl t t fi t. M diul nstă di t -u t t suprafață şi un strat semiinfinit conectate printr-o zonă de interfață neomogenă cu proprietăți gradate.

[D12] M. DIMILLO, M.OSTOJA-STARZEWSKI

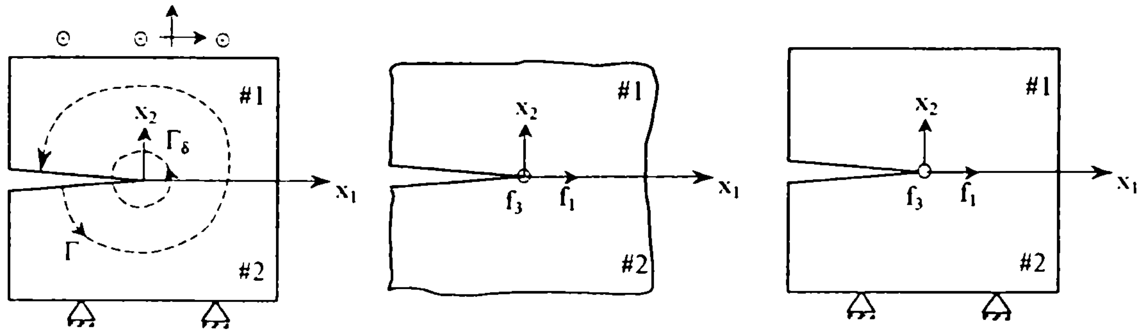
- datorită prezenței unei microstructuri fibroase, dezordonate în hârtie, caracteristicile ei mecanice nu sunt proprietăți de material universale, ci apar mai degrabă ca funcții de mărimea şi forma specimenului, cât şi a condițiilor de încărcare. Pentru a cuprinde variația statistică şi structura de corelare spațială a parametrilor de rezistență şi de elasticitate s-a introdus un model de câmp aleator.

[H42] C. HWU

- bazat pe soluțiile obținute utilizând formalismul lui Stroh, în acest articol se demonstrează o formulă generală şi simplificată pentru *găuri poligonale în medii anizotrope*.

[M52] H.J. MOON, Y.Y. EARMME

- sunt deduse relaţiile între integrala bazată pe J şi tensiunea T pentru probleme plane şi respectiv antiplane. Integrala mutuală se evaluează fără a rezolva problemele de valoare la limită. Tensiunea T, un parametru util pentru stabilitatea fisurii, este astfel obţinută uşor printr-o aplicare adecvată a conceptului *„integralei de conservare”*. Ca un exemplu, pentru a arăta aceasta, sunt prezentate problemele fundamentale de fisură la interfaţă pentru un solid finit diferit şi două fâşii infinite.

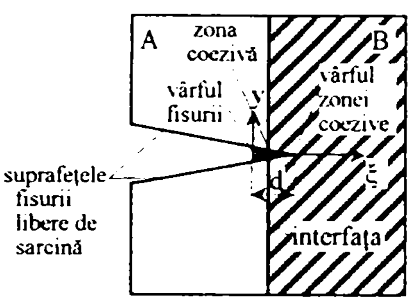


(a) (b) (c)

[W9] T.C. WANG, C.F. SHIH, Z. SUO

- se analizează câmpurile singulare la vârful unei fisuri de interfaţă în solide anizotrope, punând accent pe stabilirea unui cadru pentru a cuantifica rezistenţa la rupere sub condiţiile modului mixt.

[W13] D. WÄPPLING, ş.a.



- se examinează creşterea fisurii pe o interfaţă dintre materiale cu rezistenţe diferite utilizând un model de zonă coeziv.

[C33] Y.H. CHEN, H. ZUO

- este dedusă o soluţie generală pentru problema plană a unor microfisuri multiple în apropierea vârfului zonei de procesare a unei macrofisuri semiinfinite într-un solid elastic anizotrop.

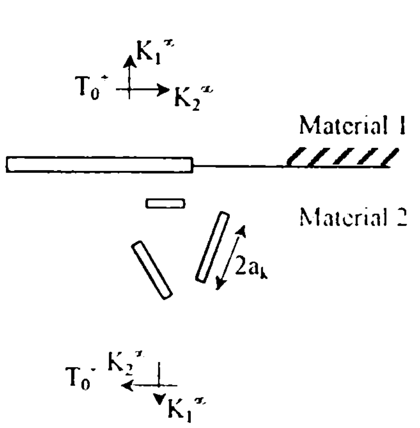
[S25] E. I. SHIFRIN, B. BRANK, G. SURACE

- se dă soluţia analitică-numerică a problemei fisurii de interfaţă eliptice, localizată între două semispaţii elastice diferite îmbinate.

[E4] F. ERDOGAN, K. ARIN

- se consideră problema elasto-statică axial simetrică pentru un strat legat la un semispaţiu cu proprietăţi de materiale diferite. Se presupune că interfaţa bimaterială conţine o fisură în formă de *„penny”* ale cărei suprafeţe sunt supuse la tracţiuni cunoscute.

[L30] LI-GUO ZHAO, Y.-H. CHEN



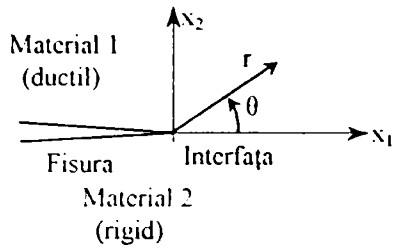
- se determină tensiunea T a unei macrofisuri de interfaţă indusă de microfisuri de sub interfaţă din apropierea vârfului.

1.4.3. Medii vâscoelastice

[SB52] V.G. KARNAUHOV

- stabileşte teoria termomecanică a vâscoelasticităţii pentru un material izotrop necomprimabil simplu generalizat termoreologic.

[D10] XIAOMIN DENG



- se studiază câmpul de tensiuni plane la vârful fisurii în jurul unei fisuri de interfaţă ductil/rigid care creşte rapid

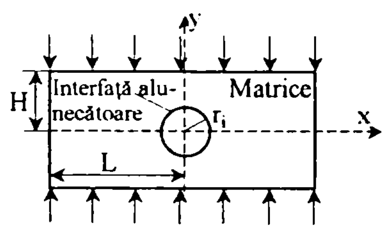
[A11] J. B. ALBLAS, M. KUIPERS

- tratează problema unui strat vâscoelastic de grosime finită, care este încărcat în efort plan de o ştanţă circulară. Aceasta rulează peste suprafaţa stratului cu o viteză constantă care este aşa de mică încât efectele inerţiei pot fi neglijate.

[Y18] YUEGUANG WEI, J.W. HUTCHINSON

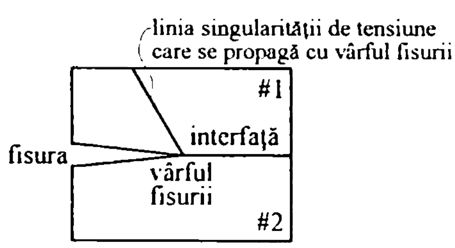
- sunt examinate două modele mecanice de continuu privind ruperea de interfaţă pentru materiale de legătură a interfeţelor la care cel puţin unul suferă o deformaţie plastică.

[H9] V.M. HARIK, R.A. CAIRNCROSS



- prezice formarea şi evoluţia cavităţilor interfaciale pentru flaxuri de compresiune ale unui solid vâscos în jurul unei incluziuni cilindrice rigide.

[H39] Y. HUANG, C. LIU, A.J. ROSAKIS

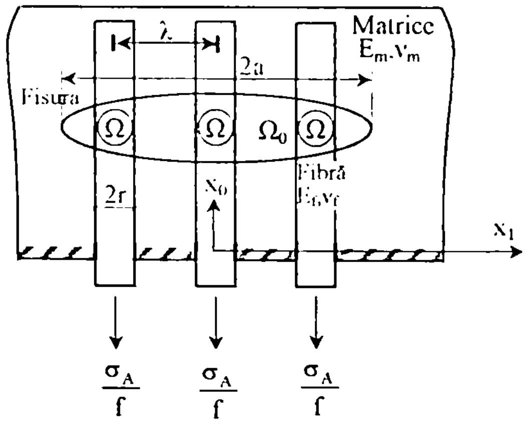


- analizează creşterea fisurilor interfaciale în sisteme bimateriale şi câmpul asimptotic din jurul vârfului fisurii care se propagă.

[L50] H. LU, T.J. LARDNER

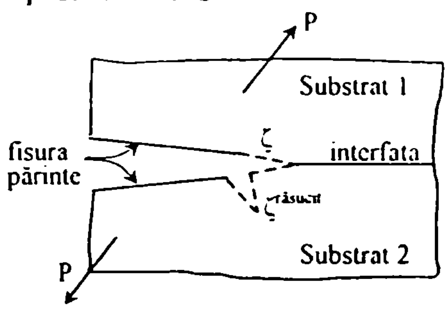
- se examinează fisuri finite bidimensionale în apropierea interfeţei unui bimaterial.

[S29] SHUH-HUEI LI, ş.a.



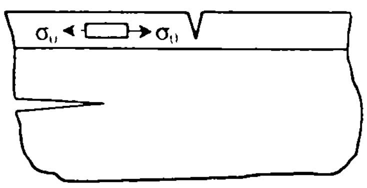
- s-a studiat ca acitatea de efort crescută în tim ul fisurării matriciale multiple în compozite fragile armate cu fibre continue supuse la tensiune uniaxială.

[W5] C.H. WANG



- se analizează problema unei fisuri inclusă într-un strat dintre doi aderenți elastici care justifică amestecul influenței proprietăților de material asupra deformației plastice la vârful fisurii care este conținută în strat.

[X3] YANJIANG XU, J.A BLUME



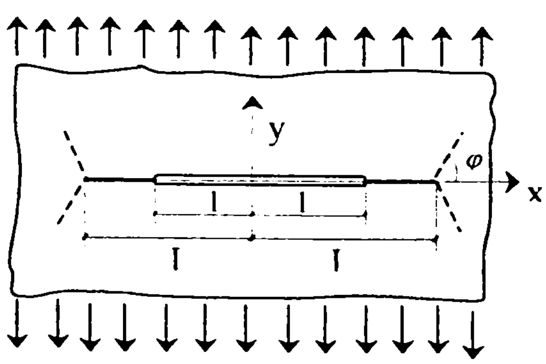
- investighează stabilitatea configurațională a unei fisuri semiinfinite în substratul unui film liniar elastic izotrop/sistem substrat sub tensiune reziduală în filmul subțire. Fisura înaintează paralel cu interfața film/substrat.

[Y15] C. YOON, D.H. ALLEN

- introduc o zonă coezivă în fața vârfului unei fisuri pentru a evita singularitatea la vârful fisurii.
- se analizează comportarea constitutivă dependentă de distrugere şi rata de scădere a energiei pentru o zonă coezivă într-un solid termovâscoelastic.

1.4.4. Deformații plastice şi tensiuni reziduale

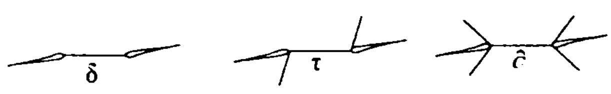
[SB22] RUSINKO N.K.



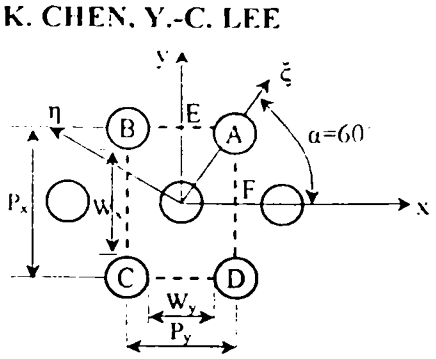
– Lucrarea cercetează deformațiile elasto-plastice într-o placă subțire, nelimitată, cu o tăietură dreaptă de lungime 2l, solicitată la tracțiune. Se admite criteriul de plasticitate formulat în cadrul macrotensiunilor.

[SB48] S. Ia. IAREMA

- continuă cercetarea legilor de dezvoltare a benzilor de plasticitate la întinderea epruvetelor plane cu concentratori sub formă de fisură
- se arată dependențele între mărimi obținute experimental şi cantitativ şi dependențele între mărimile care caracterizează procesul de deformație a plăcii.



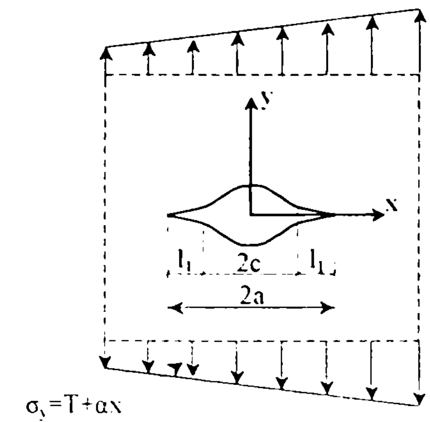
[F26] F.K. CHEN, Y.-C. LEE



- se face analiza deformațiilor plastice a unor foi perforate cu găuri circulare aranjate într-un model triunghiular. Foaia perforată e considerată ca fiind un material omogen compresibil, anizotrop, cu proprietăți mecanice echivalente.

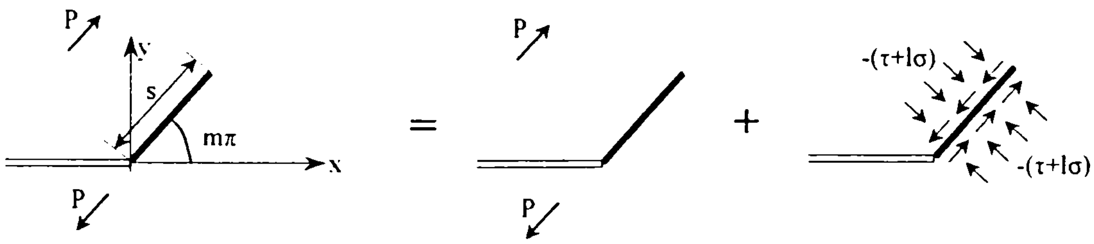
[T17] P.S. THEOCARIS, C.B. DEMAKOS
- se studiază efectul de ecruisare prin deformare asupra ruperii cu ajutorul criteriului T, utilizând câmpuri de tensiune HRR, în jurul vârfului fisurii, într-un material ecruisabil după o funcție de putere.

[K22] F.KANNINEN



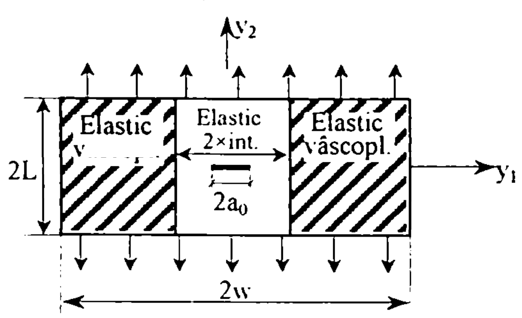
- un model de fisură Dugdale a fost extins pentru a include efectele unei încărcări de întindere ce variază liniar.

[L21] J. LI
- face un studiu elasto-plastic pentru o fisură semi-infinită sub acțiunea unor forțe concentrate în modul mixt, utilizând modelul Dugdale.



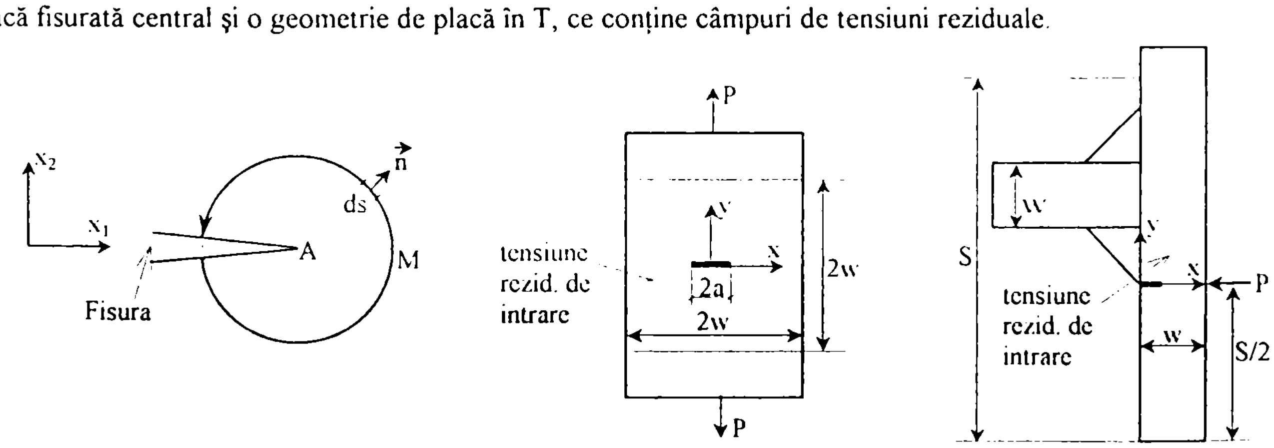
[P2] VINCENZO PALAZZO, LUCIANO ROSATI și NUNZIANTE VALOROSO
- se ilustrează o strategie de rezolvare recent propusă pentru elastroplasticitate cu suprafețe de curgere care depind de toți cei 3 invarianți ai tensorului de tensiune. Sunt demonstrate performanțele numerice a celor două strategii făcându-se referință la o problemă tipică de „benchmark"

[A30] J.J.M. ARATA, A. NEEDLEMAN



- Se analizează numeric efectul plasticității asupra creșterii unei fisuri care ia naștere într-un solid elastic pe o interfață cu un solid elastic-vâscoplastic.

[023] N.P. O'DOWD, Y. LEI, G.A. WEBSTER
- se utilizează o integrală J modificată, care să ia în considerare prezența tensiunilor reziduale. Comportarea la rupere este interpretată utilizând această integrala J modificată. S-au făcut simulări de elemente finite pentru o placă fisurată central și o geometrie de placă în T, ce conține câmpuri de tensiuni reziduale.



[A36] P.F. ARTHUR, W.S. BLACKBURN

- determină distribuția tensiunilor pentru o încărcare uniformă la infinit a unui material elasto-plastic de călire conținând fie două fisuri coliniare egale fie o singură fisură dar conținând și dislocații.

[A35] P.F. ARTHUR, W.S. BLACKBURN

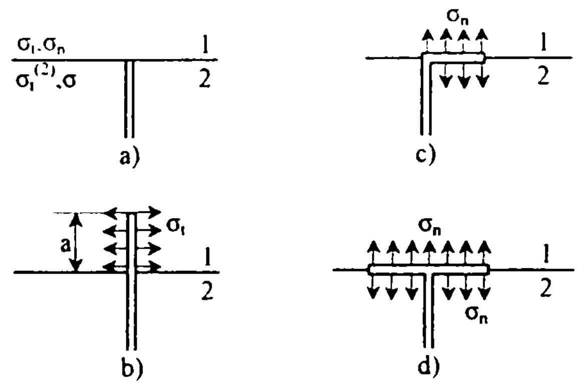
- se consideră o singură fisură într-un material elasto-plastic de călire sub efort antiplan datorat unei tensiunii de forfecare. Pentru diferite distribuții de tensiune coezive la vârful fisurii, sunt determinate tensiunile și deplasărilre pentru cazul când plasticitatea este limitată la planul fisurii.

[G5] Y.C. GAO, H.D. BUI

- se investighează câmpul de distrugere plastică în apropierea unui vârf de fisură staționară. Comportarea tensiunilor și deformărilor în apropierea vârfului fisurii este descrisă analitic.

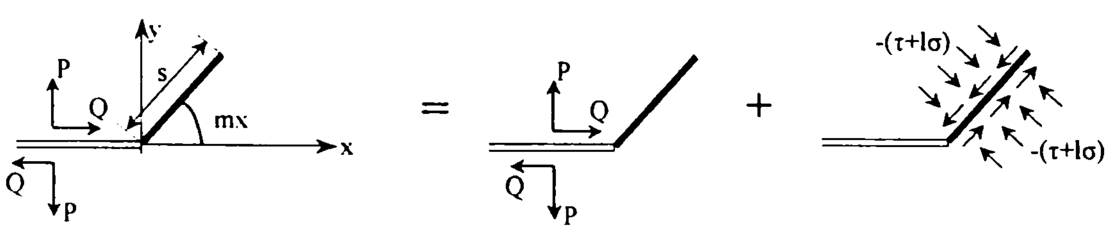
[M39] MING YUAN HE, ANTHONY G. EVANS, J.W. HUTCHINSON

- analizează rolul tensiunilor reziduale în cazul deflecției unei fisuri la interfața dintre două materiale elastice diferite.



[J7] LI JIA

- elaborează un modul Dugdale-Barenblatt în modul mixt pentru o fisură semiinfinită într.o placă subțire ideal elasto-plastică încărcată cu o pereche de forțe concentrate auto-echilibrante la bazele fisurii.

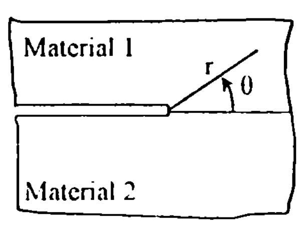


[Z6] A. ZERVOS, ş.a.

- prezintă un model de elastoplasticitate cu gradient, extinzând ideea de plasticitate cu gradient, presupunând că elasticitatea fundamentală este de asemenea de tip gradient.
- se dă o formulare în deplasări de element finit pentru elastoplasticitatea cu gradient.

[Y11] YONG-LI WU, ş.a.

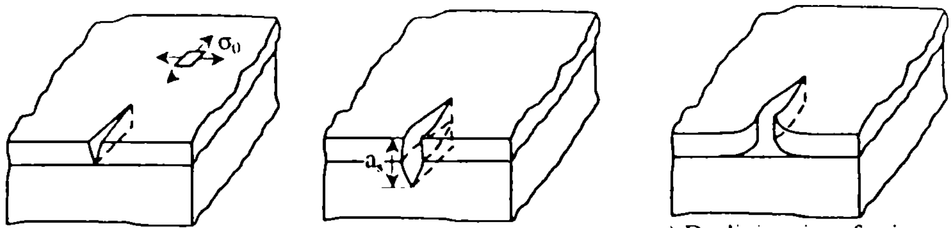
- prezintă o analiză asimptotică pentru o fisură care se află la interfața unui material plastic distrus și a unui material elastic liniar.



[SB49] B. ATZORI, P. LAZZARIN, R. ZAMBARDI

- prezintă o metodă comună pentru analiză, în condiții elasto-plastice a câmpurilor de tensiune din apropierea vârfului unor crestături în V ascuțite, supuse la încărcări modul I, II și III.

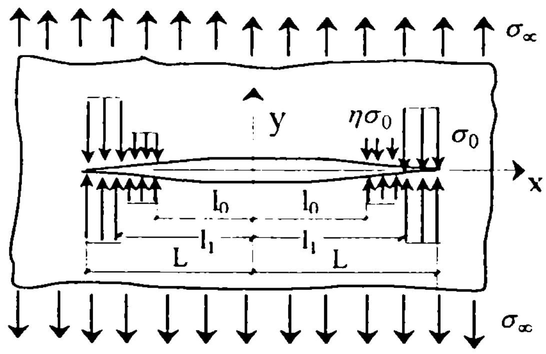
[Y8] T.YE, Z. SUO, A.G. EVANS
- examinează fisurile în filme subțiri cauzate de tensiuni reziduale. Se focalizează atenția asupra fisurarea filmului, supus fie la dezlipirea interfeței sau fisurarea substratului.



a) Fisurarea filmului b) Penetrarea substratului c) Dezlipirea interfeței

1.4.5. Diferite probleme legate de fisura Griffith

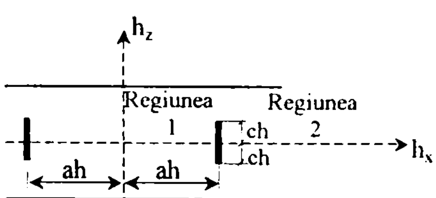
[SB23] ONÂȘKO V.L.



– Spațiul infinit cu comportare fragilă solicitat la întindere monoaxială cu tensiunea σ_x perpendiculară pe planul orificiului. Marginile fisurii solicitate la tensiunea σ_0 variind în trepte. Se arată că pentru macrofisuri tensiunea critică se exprimă cu formula lui Griffith.

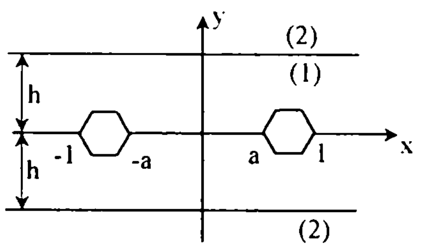
[F8] THEO FETT, D.MUNZ
- se fac comentarii asupra problemei cum poate fi utilizat câmpul de tensiune a unei fisuri Griffith într-un câmp infinit, pentru a estima tensiunile într-o placă fisurată central de lățime finită.

[C20] S.N.CHATERJEE, SHYAM N.PRASAD



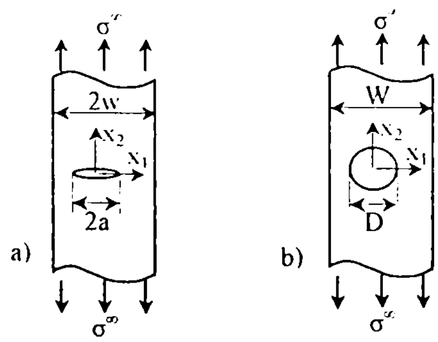
- discută problema a două fisuri Griffith paralele necoplanare localizate simetric într-o platbandă, presupunând condiții de deformație plană.

[D5] S. DAS, ș.a.



- ...zolvă ...obl... l...odi...i.ă ...o...ării î... regim staționar a două fisuri Griffith coliniare localizate într-un strat elastic ortotrop de grosime finită 2h aflat între două semiplane ortotrope identice.

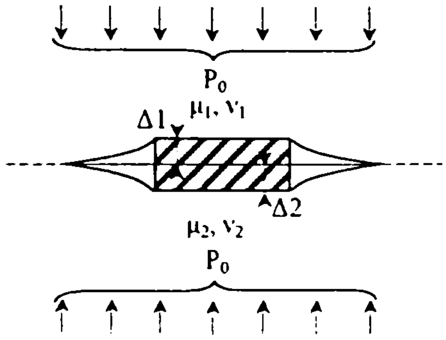
[C25] C. CHEN, N.A. FLECK, T.J.LU



- se prezice rezistența la mărirea fisurilor în modul I (curba R), utilizând un model de zonă coezivă de tip Dugdale.

[Z3] ZENG TAO CHEN, ş.a.
- se rezolvă problema unei fisuri Griffith antiplane care înaintează de-a lungul interfeţei unor materiale piezoelectrice diferite, utilizând metoda transformărilor integrale.

[G18] G.M.L. GLADWELL



- se consideră problema elasto-plastică în care contactul între două semispaţii elastice diferite comprimate este perturbat de incluziuni disc de grosimi constant diferite, şi de forme arbitrare.

[S42] SNEDDON I.N.
- determină distribuţia tensiunilor de suprafaţă $p(x)=-\sigma_{yy}(x,0)$ necesare pentru a menţine o fisură Griffith $|x|\leq 1$, $y=0$ în forma $u_y(x,0)=w(x)$, $|x|<1$.

[W23] T.-S. WU, Y.C. PAO, Y.P. CHIU
- se analizează un strat elastic finit ce conţine o fisură Griffith.

[SB50] RANJIT S. DAHALIWAL
- se determină factorii de intensitate a tensiunilor şi energia fisurii într-o platbandă elastică de lungime infinită ce conţine două fisuri Griffith coplanare.

[H36] C. HWU, WEN Y. YEN
- se rezolvă problema unei găuri eliptice continuă într-o placă bidimensională anizotropă dezvoltând funcţia lui Green.

[L47] M. LOWENGRUB, I. N. SNEDDON
- se determină câmpurile de tensiunii şi deplasări în vecinătatea unei fisuri Griffith localizată la interfaţa a două semiplane elastice diferite îmbinate.

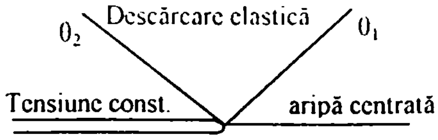
1.4.6. Solicitări de forfecare

[K55] KOSTROV
- studiază problema pregătirii fisurii de forfecare longitudinale pentru cazul plan, când deplasările sunt paralele cu marginea fisurii şi viteza de propagare a fisurii este variabilă arbitrar.

[M5] A.C. MAL
- se consideră problema difracţiei undelor normal incidente longitudinale şi antiplane de forfecare pe o fisură Griffith localizată într-un mediu elastic infinit izotrop şi elastic. În fiecare caz se obţine o ecuaţie integrală Fredholm de speţa a doua pentru determinarea câmpului de tensiuni.

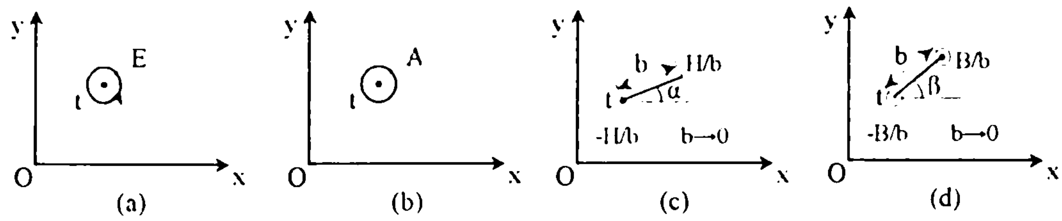
[P27] PELEH, LAZKO, MAHNIŢKI
- se studiază concentrarea tensiunilor în apropierea găurii circulare în plăci ortotrope, ţinând cont de deformaţia de forfecare.

[P31] SHOUKANG PENG, HAO PAN



- lucrarea face o analiză asimptotică a câmpurilor din apropierea fisurii pentru modul III, fisuri care cresc cvasi-statistic pentru unele materiale de călire.

[C34] Y.Z. CHEN
- calculează potenţialele complexe pentru patru situaţii în elasticitatea antiplană: a) o dislocare punctuală; b) o forţă concentrată; c) un cuplu de dislocare; d) un cuplu de forţă concentrată. Utilizând potenţialele complexe obţinute se introduce o ecuaţie integrală singulară pentru problema fisurii curbe.



[F1] V.I. FABRIKANT
- se descrie o soluţie completă la problema unei fisuri circulare externe într-un corp transversal izotrop supus la o forfecare arbitrară

[S40] E. SMITH
- examinează anumite probleme de deformaţie antiplană în ce priveşte extensia unor fisuri ce se află de-a lungul unei interfeţe circulare care separă două materiale cu module de forfecare diferite.

[Z27] L. ZHANG, ş.a.
- se obţin soluţiile de câmp asimptotic în apropierea vârfului şi soluţia câmpului complet pentru o fisură modul III într-un material elastic cu efecte de gradient de deformaţie.

1.4.7. Unele probleme fundamentale. Ruperi fragile şi cvasifragile

[F3] EPIFANOV, FAUSTOV
- se pune problema de a aprecia eficienţa secţiunii efective a fisurilor care apar în diferite etape de deformare a gheţii policristaline la comprimare monoaxială.

[B79] BUGAKOV I.I.
- studiază experimental ruperea cvasifragilă a epruvetelor plane cu tăieturi în formă de „*scobitură*".

[B16] BARENBLATT
- studiază echilibrul fisurilor care se formează la ruperea fragilă, stabilitatea fisurilor izolate, respectiv legătura cu teoriile energetice.

[B14] BARENBLATT
- o interesantă lucrare de sinteză care face o prezentare generală a teoriei matematice a ruperii fragile.

[A49] H. AWAJI
- criteriul de energie Griffith pentru ruperea fragilă este extins la ruperea în modul II.

[E7] KJELL ERIKSSON
- se prezintă o metodă generală de determinare a forţei de extensie a fisurii F în raport cu un element finit al unei fisuri curbe.

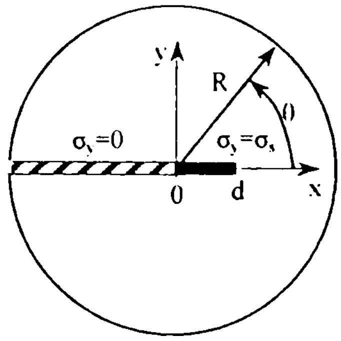
[L1] R.S. LAKES
- prezintă un studiu al implicaţiilor unui coeficient Poisson negativ în proiectarea unor componente supuse la tensiune.

[O19] N.P. O'DOWD
- s-au introdus metode cu doi parametri în (M.R.) elasto-plastică pentru a înlătura unele conservatorisme inerente în metoda cu un parametru bazată pe integrala J, şi pentru a explica „*efectele de mărime*" observate cu privire la rezistenţa la rupere.

[N14] T. NISHIOKA
- lucrarea prezintă o trecere în revistă a cercetărilor în domeniul (M.R.) dinamice computeţionale. Sunt incluse:
(i) aspecte fundamentale ale (M.R) dinamice computaţionale
(ii) tipuri de simulare a ruperii
(iii) modele computaţionale a propagării dinamice a fisurilor

(iv) utilizarea integralei J dinamice în modelele computaţionale

[C6] CEREPANOV – „Despre ruperea cvasifragilă"



- lucrarea demonstrează că mărimea raportului dintre energia de suprafaţă adevărată şi lucrul mecanic ireversibil al deformaţiilor plastice de ordinul σ_S / E unde σ_S - limita de curgere la întindere, E- modulul lui Young. Se examinează problema elasto-plastică a unor plăcisubţiri cu fisură arbitrară de rupere normală supusă acţiunii forţelor de întindere.

[E16] ERŞOV, IVLEV
- sunt examinate diferite condiţii de limită pentru o serie de modele ale corpului solid deformabil, ca şi condiţii de rupere cvasifragilă.

[L52] H.A. LUO, Q. WANG
- studiază redistribuirea tensiunilor într-o foaie compozită hibridă la întindere, datorită ruperii unei fibre cu modul înalt.

[Y14] Z. YONG, M.T. HANSON
- dau noi rezultate pentru factorii de intensitate ai tensiunilor în cazul încărcării normale arbitrare a unei fisuri inelare într-un mediu izotrop neomogen.

[L46] M. LOWENGRUB
- se determină câmpul de tensiuni într-un mediu elastic semi-infinit îmbinat cu o fundaţie rigidă şi conţinând o fisură la interfaţă.

[K2] M. KACHANOV
- se studiază solide cu fisuri şi pori non-sferici şi se discută parametrii adecvaţi densităţii de defect şi proprietăţile elastice efective.

1.4.8. Efecte neliniare

[L27] LIEBOWITZ, JONES
- fac o cercetare a efectelor neliniare ale mecanicii ruperii

[P40] POBEDRIA E., HOLMATOV T.
- se dă o tratare nouă în tensiuni, variaţională, a problemei cvasistatice a mecanicii neliniare a corpului solid deformabil.

[K28] B.L. KARIHALOO
- se studiază efectul de mărime pe o geometrie structurată particulară ce conţine o fisură care poate fi relativ puţin adâncă sau adâncă.

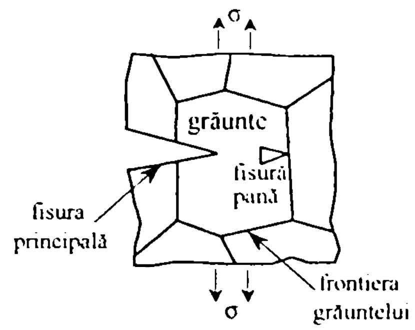
1.4.9. Iniţierea şi propagarea fisurii

[D8] ISMAIL DEMIR, ş.a.
- se cercetează interacţiunea fisurii elastice cu defecte interne, ca microfisuri, goluri şi incluziuni rigide, pentru a analiza propagarea fisurii.

[L12] D. LEGUILLON
- se studiază criteriul de nucleare a fisurilor la o crestătură în materiale omogene.

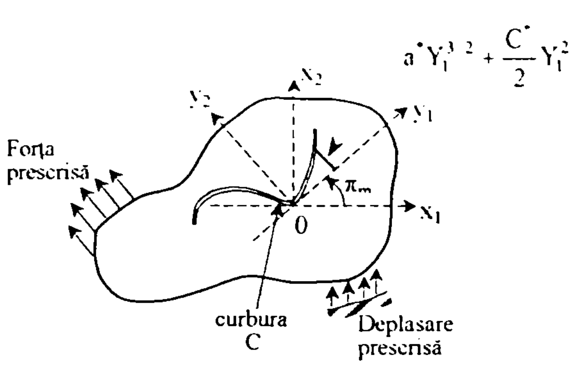
[G19] J. GIOVANOLA, S.W. KIRKPATRICK
- utilizând un model local se prezice ruperea ductilă în structuri geometrice similare de diferite mărimi, care conţin fie fisuri ascuţite sau concentratori de tensiune neascuţiţi (tociţi).

[N5] T. NAKAMURA, K. SAITO, S. ARAKI



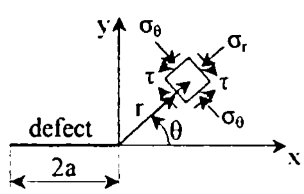
- se dă o soluție exactă la problema modelului de interacțiune fisură principală-microdefect, bazat pe metoda teoriei dislocațiilor continuu distribuite – se obțin funcțiile de distribuție atât pentru fisura principală cât și pentru microdefect.

[A23] M. AMESTOY, J.B. LEBLOND



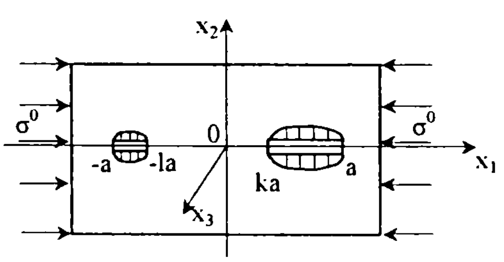
- se studiază o fisură care se propagă într-un corp bidimensional de-a lungul unei căi curbe arbitrare răsucite.

[B55] A. BOBET, H.H. EINSTEIN



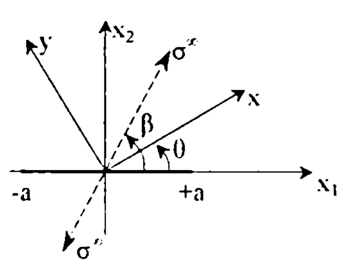
- prezintă metoda numerică și criteriul de inițiere a fisurii dezvoltat pentru a modela mo[illegible] examinate de Bobet și Einstein (1996, 1998) și Bobet (1997) în probe de gips cu ruperi și defecte preexistente [illegible].

[C70] E.M. CRĂCIUN, E. SOOS



- se consideră un material elastic ortotrop care este pretensionat și conține două fisuri colineare de lungimi diferite. Fețele fisurilor sunt acționate de tensiuni incrementale normele constante simeric distribuite. Se determină valorile critice ale tensiunilor incrementale aplicate pentru care vârfurile fisurilor încep să se propage, și se analizează interacțiunea fisurilor ca funcție de lungimile lor și de distanța dintre fisuri.

[A51] ABBAS AZHDARI, SIA NEMAT-NASSER



- se analizează buclarea fisurilor într-un plan infinit liniar elastic omogen și anizotrop, care conține o fisură centrală principală. Pentru aceasta se definesc doi factori de intensitate ai tensiunilor:

HSIF (sau $K_{\omega\omega}$) – factorul de intensitate a tensiunilor inelare

SSIF (sau $K_{r\omega}$) – factorul de intensitate a tensiunilor de forfecare.

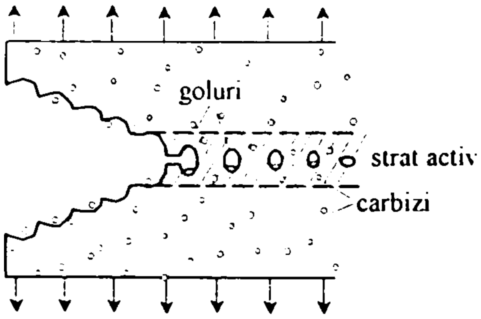
[H7] S. HALLSTROM, J.L. GRENESTEDT

- analizează ruperea inițială de către o fisură ascuțită sau o crestătură în formă de pană într-un material omogen, supus la încărcare diferită.

[K27] E.N. KARAPETIAN, M.T. HANSON

- dau o evaluare a deplasărilor de deschidere a fisurilor și a factorilor de intensitate a tensiunilor în termenii unor funcții elementare pentru problema unei sarcini concentrate în afara unei fisuri circulare.

[G42] A.S. GULLERUD, ş.a.



- explorează chestiuni de calcul – cheie (de bază) care efectuează analiza, utilizând metodologia celulă de calcul pentru a prezice creşterea fisurii în metale ductile cauzate de creşterea golurilor şi coalescenţe.

[K26] E. KARAPETIAN, M. KACHANOV
- sunt derivate soluţii exacte în funcţii elementare pentru factorii de intensitate a tensiunilor unei fisuri circulare care interacţionează cu diferite surse de tensiune: dipoli, momente, centre de dilatare şi rotaţie. Astfel de surse de tensiune pot modela defecte ca vacanţe, particule străine, dislocaţii.

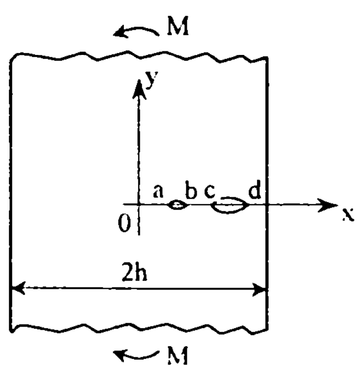
[L25] X. LI, L.M. KEER
- se analizează creşterea gradată a fisurilor semiplane şi sub formă de penny între bariere a căror rezistenţă la rupere este mai mare decât cea a zonei de rupere.

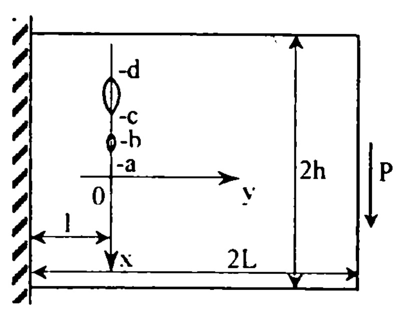
[L37] C. LIU, W.G. KNAUSS, A.J. ROSAKIS
- se analizează creşterea marcată determinată experimental a factorului de intensitate a tensiunii, necesară pentru a iniţia propagarea fisurii în solide fragile supuse la încărcări puternic variabile.

[L24] X. LI, L.M. KEER – partea I + partea a II-a (două lucrări)
- propun o metodă directă, bazată pe metoda ecuaţiei elementelor de frontieră, pentru a rezolva probleme de creştere a fisurilor la întindere pentru sarcini arbitrar distribuite. În partea a II-a metoda este extinsă pentru a rezolva probleme de creştere a fisurii sub o încărcare de forfecare arbitrară.

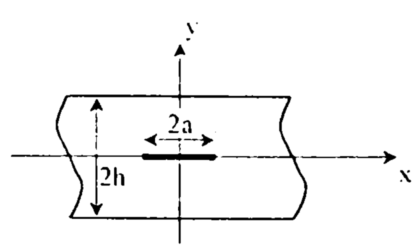
1.4.10. Banda elastică cu defecte

[P8] V.V. PANASIUK, LOZOVOI
- determină sarcina limită la încovoierea benzii cu două fisuri inegale, situate în zona tensiunilor de întindere şi dirijate de-a lungul dreptei perpendiculare pe axa benzii, când în planul median al benzii acţionează sarcini exterioare.





[K51] Y. KONISHI, A. ATSUMI

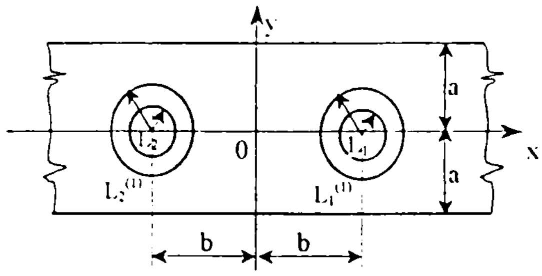


- presupunând o deformaţie plană şi utilizând metoda transformatelor Fourier se rezolvă ecuaţiile de echilibru exprimate în funcţie de deplasări şi se dau soluţii pentru problema fisurii paralele cu marginile într-o platbandă.

[C21] S.N.CHATTERJEE, S.N.PRASAD
- utilizând funcţii proprii Papkovich-Fadle se studiază o clasă de probleme de fisuri ale unei platbenzi elastice.

[M41] N.I. MIRONENKO

- cercetează starea de tensiune a benzii cu una sau două găuri circulare fixate cu inele elastice



[L7] P. LAZZARIN, R. TOVO, S. FILIPPI

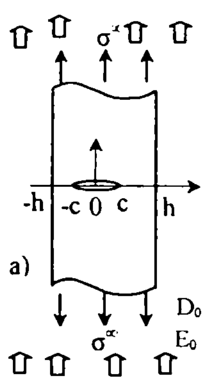
- studiază distribuția tensiunilor elastice în plăci de dimensiuni finite cu crestături marginale (pe muchii).

[S26] SHILANG XU, H.W. REINHARDT – Partea a II-a

- se determină parametrii de rupere K-dubli K_{Ic}^{ini} și K_{Ic}^{un} utilizând grinzi crestate la încovoierea în trei puncte.

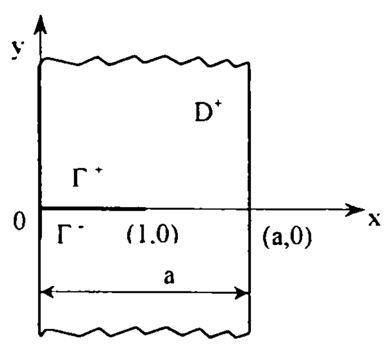
[S27] Y. SHINDO, K. WATANABE, F. NARITA

- rezolvă problema electroelastică de deformație plană a unei platbenzi ceramice piezoelectrice ortotropice cu o fisură centrală, care e situată simetric și orientată într-o direcție normală la muchiile platbenzii.



[U5] UWADIEGWU B. C. O. EJIKE

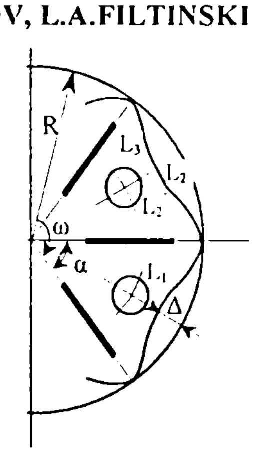
- se cercetează problema determinării distribuției tensiunilor și deformațiilor unei platbenzi lungi dintr-un material elastic, slăbită cu o fisură normală la muchia platbenzii.



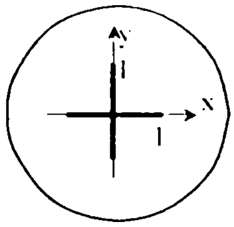
1.4.11. Discul circular cu defecte

[V24] N.I.VOLKOV, L.A.FILTINSKI

- se examinează starea de tensiune a discului slăbit cu găuri și fisuri și întărit cu întărituri rigide în câmpul forțelor centrifuge.

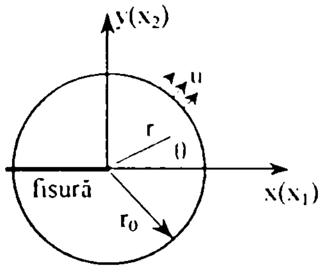


[S61] M.P. STALLYBRASS



- obține o soluție exactă pentru o fisură linie de forma unei cruci localizată într-un mediu elastic, atunci când brațele fisurii sunt supuse la o distribuție de presiuni egale, dar aleatoare.

[P4] J. PAN, C.F. SHIM



- sunt investigate în contextul ipotezei micilor deformații, câmpuri combinate modul I, II și III în apropierea vârfului fisurilor staționare în materiale de călire. Se utilizează o tehnică de element finit pentru a obține soluții în tensiuni asimptotice pentru modurile combinate I și II perturbate de modul III.

1.4.12. Solicitări dinamice și oboseală

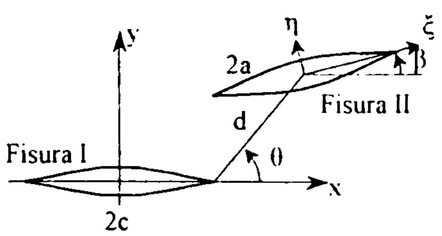
[N3] K. NAITO, T. FUJII

- Se examinează suprafețele rupte la oboseală în cazul unor adezivi Epoxi și fractali sub încărcări ciclice pentru modul I.

[M34] O. MILLER, N.B. FREUND, A. NEEDLEMAN

- Lucrarea prezintă două modele de fragmentare dinamică bazate pe echilibrul energetic și se compară predicțiile lor, cu privire la mărimea fragmentelor, cu rezultatele simulărilor numerice.

[M27] S.A. MEGUID, X.D. WANG



- Se examinează interacțiunea dinamică între două fisuri arbitrar localizate într-un mediu piezoelectric sub forfecare antiplană.

[M27] S.A. MEGUID, X.D.WANG

- Se dă o tratare teoretică cuprinzătoare a interacțiunii dinamice între o fisură principală și o microfisură **arbitrar** localizată și orientată în apropierea vârfului ei sub încărcare antiplană. Formulările teoretice se bazează pe utilizarea tehnicilor de transformări integrale și un procedeu adecvat de suprapunere. Ecuațiile integrale singulare rezultante sunt rezolvate numeric utilizând polinoame Cebâșev, pentru a furniza factorul de intensitate a tensiunilor dinamic în fisura principală la diferite frecvențe de încărcare.

[A4] J. D. ACHENBACH

- Se investighează difracția unei unde plane printr-o fisură de lungime finită, utilizând o reprezentare integrală a deplasării pentru probleme de propagare tranzitorie a unor unde de forfecare orizontal polarizate.

[X1] XIAO HUA ZHAO, HUICAI XIE

- se investighează factorii de intensitate ai tensiunilor dinamice pentru o fisură semiinfinită într-un corp elastic nemărginit pe de altă parte. Fisura este supusă la o pereche de sarcini punctuale de forfecare brusc aplicate pe fețele ei la o distanță l de vârful fisurii.

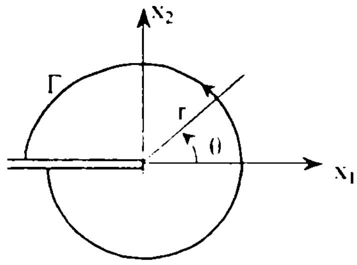
[W15] D. WEBB, C. ATKINSON

- Se obține soluția pentru problema unei fisuri în formă de „*penny*" ce se extinde cu viteză uniformă sub o anumită presiune internă neuniformă într-un mediu elastic izotop omogen.

[I14] S. ITOU
- prezintă problema dinamică pentru un mediu Cosserat elastic infinit slăbit printr-o fisură finită unde sistemul autoechilibrat de presiune variază armonic în timp.

[L52] F. LUND
- propune o metodologie universală pentru instabilitatea dinamică a unor fisuri ce se propagă rapid în materiale fragile subțiri.

[Z11] Z. ZHOU, B. WANG, S. DU

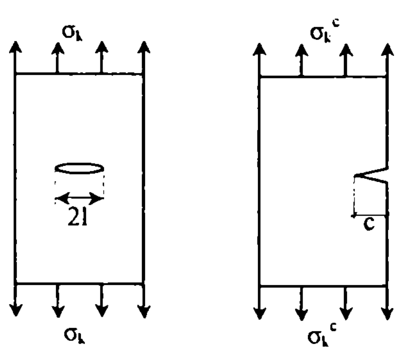


- studiază împrăștierea undelor antiplane de forfecare armonic elastice de către o fisură finită utilizând teoria non-locală.

1.4.13. Studii experimentale

[M21] G.B. MAY, A.S. KOBAYASHI
- utilizând interferometria Moiré cu densități de linii de 1200 și 40 linii/mm s-au determinat cele două deplasări ortogonale ce înconjoară o fisură ce se extinde stabil într-un aliaj de aluminiu 2024-T3.

[SB53] KOVCIK C.E.

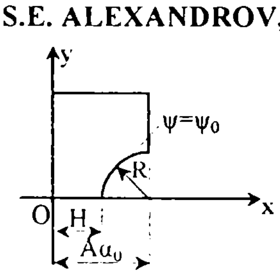


- se descriu rezultatele experimentale a încercării de întindere a epruvetelor din sticlă în formă de plăci cu fisuri.

[D17] DÎȘELI M.Ș.
- prezintă rezultatele cercetării experimentale în privința pierderii stabilității plăcii cu fisuri

[B61] R.J. BONENBERGER, J.W. DALLY
- se descrie o nouă probă pentru a determina rezistența la rupere într-o modalitate mai eficientă.

[A20] S.E. ALEXANDROV, R.V. GOLDSTEIN



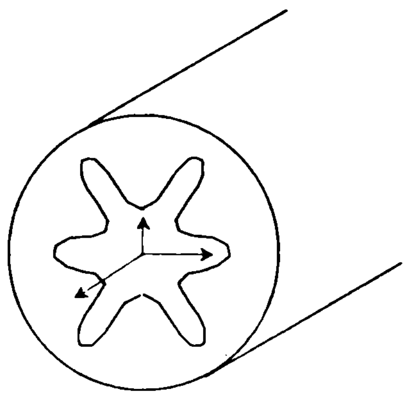
- determină tensiunile și deformațiile plastice la secțiunea transversală minimă a unei probe (epruvete) crestate supusă la întindere.

[O15] D. M. OWEN, S. ZHUANG, A.J. ROSAKIS, G. RAVICHANDRAN
- s-a realizat o investigare experimentală pentru a determina caracteristicile dinamice de rupere ale unor folii subțiri de aluminiu 2024-T3 cu grosimi între 1.63-2.54 mm. S-a determinat factorul de intensitate a tensiunilor dinamice critic K_c^d pe o zonă largă de domenii de încărcare.

[M51] A. MOLINARI, M. EL MOUDEN

- lucrarea determină proprietățile generale și tensiunile locale ale unui material compozit. Materialul constă din incluziuni elastice elipsoidale suspendate într-o matrice elastică omogenă.

[L39] C.T. LIU, C.W. SMITH, L. WANG



- prezintă rezultatele unui studiu fotoelastic de tensiuni „înghețate", a creșterii și distribuțiilor factorilor de intensitate ai tensiunilor pentru defecte de suprafață care emană de la vârful unei nervuri (aripioare de răcire) în modele de motor.

[Y7] YAOWU SHI, ZHUNG XIANG HAN, JIANQIN FU

- s-au studiat efectele nepotrivirii rezistenței de sudură la rezistența la rupere a unei zone afectate termic într-un oțel slab aliat cu rezistența de rupere 800MPa.

[S41] D.J. SMITH, ș.a.

- au examinat ruperea fragilă și ductilă a unui oțel de rotor de putere mare la temperatura camerei utilizând probe crestate la margine singulare.

[S26] SHILANG XU, H.W. REINHARDT – Partea a II-a

- se prezintă în detaliu rezultatele investigațiilor experimentale utilizând interferometria cu particule laser pe grinzi crestate, mici încovoiate prin trei puncte și utilizând de asemenea acoperirea fotoelastică.

[S26] X SHILANG XU, H.W. REINHARDT – Partea a III-a

- arată cum pot fi determinați parametri de rupere K-dubli K_{Ic}^{ini} și K_{Ic}^{un} pentru beton utilizând probe CT divizate cu pene.

CAPITOLUL 2

FORMULĂRI TEORETICE ŞI SOLUŢII ANALITICE. CONTRIBUŢII

§ 2.1. SINTEZA FORMULELOR FUNDAMENTALE DIN TEORIA ELASTICITĂŢII

2.1.1. Probleme spaţiale

1. Din motive legate de continuitatea expunerii, de unificarea soluţiilor şi de coerenţa structurală a conţinutului lucrării, am considerat util să prezint o sinteză a formulelor fundamentale din (T.E.) fără demonstraţii şi cu minim de explicaţii. Acesta este un domeniu în care literatura ştiinţifică românească are multe monografii excelente, în care se găsesc explicaţii complete şi demonstraţii riguroase. Citez în mod deosebit volumele domnului profesor P.P. TEODORESCU [T12] [T13] [T14] despre care domnul profesor I. DOBRE scria în cartea [D26]:

„Credem că un moment de cotitură în modul de înţelegere şi abordare a problemelor de Rezistenţa materialelor l-a constituit apariţia cărţilor de Teoria elasticităţii ale profesorului P.P. Teodorescu (patru volume, aprox. 2500 de pagini!) *ca şi excepţionala monografie în trei volume a lui P.P. Teodorescu şi V. Ille: „Teoria elasticităţii şi introducere în mecanica solidelor deformabile" Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976".*

Sunt de semnalat de asemenea monografiile L. SOLOMON [S50], M. HAIMOVICI [H5], L. DRAGOŞ [D35], W. KECS [K36], M. SOARE [S45], I. DOBRE vol. II [D19] şi traducerile din limba rusă: N. FILONENCO-BORODICI [F17], N.I. BEZUHOV [B40].

2. Se ştie că problema fundamentală a (T.E.) constă în cunoaşterea stării de tensiune şi a stării de deformaţie a unui corp solid deformabil în fiecare punct al său în funcţie de solicitările la care este supus, de modul de rezemare şi de o serie întreagă de alţi parametri: viteza de solicitare, timp, temperatură, material, mediu de lucru etc.

Pentru un mediu omogen şi izotrop, liniar elastic, *sub aspect local*, problema este descrisă de un sistem de 15 ecuaţii diferenţiale cu 15 necunoscute care sunt:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - trei tensiuni normale;

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - trei tensiuni tangenţiale care satisfac *principiul dualităţii sau parităţii*:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i, j = x, y, z) ;$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - trei deformaţii specifice liniare;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - trei deformaţii specifice unghiulare $(\gamma_{ij} = \gamma_{ji})$;

u, v, w - trei funcţii de deplasare după cele trei direcţii x,y,z.

Astfel în fiecare punct al corpului *starea de solicitare* este descrisă de:

- tensorul stării de tensiune:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

un tensor simetric de ordinul doi

- tensorul stării de deformaţie:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

de asemenea un tensor simetric de ordin doi (afin ortogonal)

- vectorul coloană al deplasărilor:

$$\Delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{u \quad v \quad w\}^T$$

Cele 15 ecuaţii care descriu local starea de solicitare a corpului, sunt (în sinteză), în coordonate carteziene rectilinii triortogonale următoarele:

I. Ecuaţiile diferenţiale de echilibru static şi/sau dinamic ale lui NAVIER-CAUCHY

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0 \quad (= -\rho \ddot{u}) \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0 \quad (= -\rho \ddot{v}) \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0 \quad (= -\rho \ddot{w}) \end{aligned} \qquad (2.1.1.1)$$

Aceste ecuaţii trebuie să fie satisfăcute în orice punct al solidului elastic atât în interiorul lui, cât şi pe suprafaţa sa. De aceea în punctele situate pe suprafaţa corpului tensiunile trebuie să fie în echilibru cu forţele exterioare date. Acest echilibru se exprimă prin aşa-numitele *condiţii pe contur* sau *condiţii pe suprafaţă* care se ataşează obligatoriu ecuaţiilor (2.1.1.1), şi care exprimate în tensiuni au forma:

$$\begin{aligned} q_{nx} &= \sigma_x \cos(\vec{n},\vec{x}) + \tau_{yx}\cos(\vec{n},\vec{y}) + \tau_{zx}\cos(\vec{n},\vec{z}) = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma \\ q_{ny} &= \tau_{xy} \cos(\vec{n},\vec{x}) + \sigma_y\cos(\vec{n},\vec{y}) + \tau_{zy}\cos(\vec{n},\vec{z}) = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma \\ q_{nz} &= \tau_{xz} \cos(\vec{n},\vec{x}) + \tau_{yz}\cos(\vec{n},\vec{y}) + \sigma_z\cos(\vec{n},\vec{z}) = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma \end{aligned} \qquad (2.1.1.2.)$$

II. Ecuaţiile diferenţiale geometrice ale lui CAUCHY

Forma liniară

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad (2.1.1.3)$$

Forma neliniară

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad (2.1.1.4)$$

Acestor ecuaţii li se ataşează „*condiţiile de compatibilitate*” sau de continuitate ale lui **SAINT- VENANT:**

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yzy}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}$$

III. Ecuaţiile constitutive, ecuaţiile fizice sau ecuaţiile de material numite şi „legea lui Hooke generalizată” -se prezintă sub diverse forme, dintre care cele mai frecvente sunt:

Forma 1

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\}\quad (2.1.1.6)$$

Forma 2

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_v\\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_v\\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z+\lambda\varepsilon_v\\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}\\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}\\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\}\quad (2.1.1.7)$$

unde: E – modulul de elasticitate longitudinal (sau modulul lui Young);
G – modulul de elasticitate transversal (sau modulul de forfecare);
ν – coeficientul de contracţie transversală (sau coeficientul lui Poisson), pentru oţel $\nu = 0.3$;

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned}\right\} \text{- coeficienţii lui Lamé sau constantele elastice ale lui Lamé} \qquad (2.1.1.8)$$

$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = I_{1\varepsilon}$ = const. – deformaţia specifică volumică sau primul invariant al deformaţiilor.

Alte forme de prezentare, întâlnite în literatură, sunt:

$$I_{1\sigma} = E^* I_{1\varepsilon} \quad \text{sau} \quad \sigma_m = E^* \varepsilon_m \qquad (2.1.1.9)$$

cunoscute sub numele *legea lui Hooke în forma lui Lamé*, unde:

$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_{1\sigma}}{3}$ - valoarea medie a tensiunilor

$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ = const.- primul invariant al tensiunilor

$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{I_{1\varepsilon}}{3}$ - valoarea medie a deformaţiilor specifice liniare

$E^* = \frac{E}{1-2\nu}$ - modulul de elasticitete redus

O ultimă formă utilizată mult în teoria deformaţiilor plastice:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m) \qquad & \tau_{xy} &= 2G \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m) \qquad & \tau_{yz} &= 2G \cdot \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_{zx} - \varepsilon_m) \qquad & \tau_{xz} &= 2G \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{aligned} \qquad (2.1.1.10)$$

Scrierea indicială. Se folosesc sisteme de axe triortogonale cu una din notaţiile (**Fig. 2.1.1.1**) privind versorii şi axele.

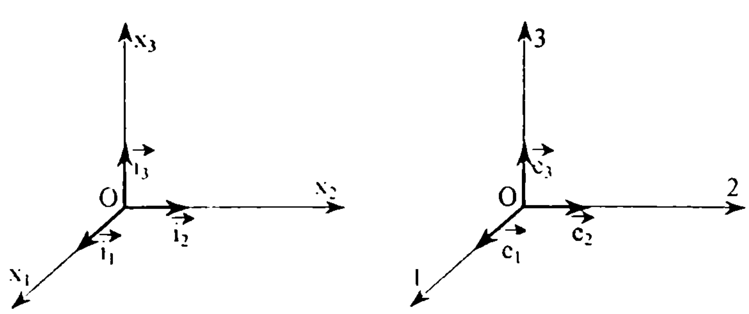


Fig. 2.1.1.1

În acest caz scrierea este deosebit de condensată. Mai mult, pentru a scurta scrierea formuelelor, derivatele parţiale se vor nota cu virgulă.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{,i} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = F_{,ik} \quad \text{etc.} \tag{2.1.1.11}$$

Sistemul complet de ecuaţii al (T.E.) va fi:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (i,j = 1,2,3); \quad j - \textit{indice mut}; \quad i - \textit{indice liber} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \therefore \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}u_{k,i} \cdot u_{k,j} \\ \sigma_{ij} = C_{ij}^{hk}\varepsilon_{hk} \therefore \varepsilon_{ij} = C_{ij}^{hk}\sigma_{hk} \end{cases} \tag{2.1.1.12}$$

Condiţiile de continuitate:

$$\varepsilon_{ik,jh} - \varepsilon_{jk,ih} = \varepsilon_{ih,jk} - \varepsilon_{jh,ik} \tag{2.1.1.13}$$

2.1.2. Problemele fundamentale ale (T.E.). Formulări

Rezolvarea directă a sistemului complet de ecuaţii al (T.E.) este dificilă, deoarece sunt prea multe necunoscute de natură diferită: tensiuni, deformaţii specifice, deplasări. De aceea, de obicei, acest sistem se reduce la alte sisteme cu un număr mai mic de necunoscute şi ecuaţii, obţinând aşa numitele *„formulări"*. Astfel vom avea:

1° Formularea în deplasări

Se aleg drept necunoscute fundamentale ale problemei *deplasările* punctelor corpului elastic; în acest caz în orice punct al corpului (de coordonate x,y,z) vom avea trei funcţii necunoscute:

$$u = f_1(x,y,z); \qquad \mathrm{v} = f_2(x,y,z); \qquad w = f_3(x,y,z)$$

Se ajunge la ecuaţiile de sinteză *în deplasări*, numite ***ecuaţiile lui Lamé:***

$$\begin{cases} (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x} + G\nabla^2 u + \rho X = 0 \qquad (= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \\ (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial y} + G\nabla^2 \mathrm{v} + \rho Y = 0 \qquad (= \rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}) \\ (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial z} + G\nabla^2 w + \rho Z = 0 \qquad (= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \end{cases} \tag{2.1.2.1}$$

Acestor ecuaţii li se ataşează condiţiile pe suprafaţă care pot fi scrise de asemenea în deplasări. Această situaţie, când se presupun cunoscute (date) deplasările în toate punctele de pe suprafaţa corpului, este numită *„a doua problemă fundamentală a elasticităţii"*.

2° Formularea în tensiuni

Se aleg drept necunoscute fundamentale ale problemei *tensiunile*, ceeace înseamnă că în fiecare punct din corp vom avea şase necunoscute:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x(x,y,z); \qquad \sigma_y = \sigma_y(x,y,z); \qquad \sigma_z = \sigma_z(x,y,z) \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z); \qquad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z); \qquad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y,z); \end{cases}$$

Se obţin în final ecuaţiile în tensiuni, numite *„ecuaţiile Beltrami-Mitchell"*:

$$
\begin{aligned}
&(1-\nu)\nabla^2\sigma_x+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial x^2}=0 &\qquad &(1+\nu)\nabla^2\tau_{xy}+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial x\partial y}=0\\
&(1-\nu)\nabla^2\sigma_y+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial y^2}=0 &\qquad &(1+\nu)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial y\partial z}=0 \qquad (2.1.2.2)\\
&(1-\nu)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial z^2}=0 &\qquad &(1+\nu)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2 I_{1\sigma}}{\partial z\partial x}=0
\end{aligned}
$$

Acestui sistem i se ataşează de asemenea nişte condiţii la limită exprimate în tensiuni (vezi 2.1.1.2). Sub alt aspect, această situaţie când se cunosc (sunt date) tensiunile pe suprafaţa exterioară a corpului, reprezintă ceea ce numim „*prima problemă fundamentală a elasticităţii*”.

3° Formularea mixtă

Evident că se poate imagina şi o *formulare mixtă* când se aleg ca necunoscute principale anumite deplasări şi anumite tensiuni. Acestea sunt cazuri particulare, speciale.

În privinţa procedeelor de rezolvare matematică a sistemelor de ecuaţii obţinute, se folosesc trei metode principale:

I. **Metoda directă**, care constă în integrarea directă a ecuaţiilor (T.E.) prezentate într-una din formele de mai sus.

II. **Metoda inversă** (sau **procedeul indirect**) conform căreia se aleg – de exemplu – deplasările ca funcţii de punct; de aici se determină deformaţiile specifice, apoi tensiunile. Mărimile astfel obţinute trebuie să verifice ecuaţiile de echilibru, condiţiile de suprafaţă şi condiţiile de compatibilitate; din aceste verificări rezultă constantele introduse iniţial în expresiile analitice ale deplasărilor. Aplicarea acestei metode este uşurată şi îmbunătăţită prin utilizarea aproximaţiilor succesive.

III. **Metoda semiinversă** (sau **semiindirectă**) a lui Saint-Venant, care alege ca necunoscute o parte din forţele exterioare, considerate ca tensiuni date, şi o parte din deplasări, celelalte tensiuni şi deplasări rezultând din satisfacerea ecuaţiilor de echilibru, condiţiilor la limită şi de compatibilitate.

2.1.3. Problema plană în coordonate carteziene

2.1.3.1. Starea plană de tensiune. Ecuaţia lui Lévy

Când vorbim despre *stări plane*, în funcţie de mărimile care *sunt nule sau se neglijează*, vom distinge două situaţii fundamentale diferite, şi anume:

- *Stări plane de tensiune*, care apar în situaţiile când una din tensiunile normale este nulă $(\sigma_z = 0)$; să notăm încă de pe acum că starea de deformaţie a corpului este însă triaxială $(\varepsilon_z \neq 0)$.

- *Stări plane de deformaţie* care apar în situaţia când una din componentele deplasării este nulă $(w = 0)$; în acest caz starea de tensiune este triaxială $(\sigma_z \neq 0)$.

În final rezultă că pentru problema plană starea de tensiune este descrisă de funcţiile:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = f_1(x,y) && \sigma_z = 0 \\ &\sigma_y = f_2(x,y) && \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0 \qquad \Leftrightarrow T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\tau_{xy} = f_3(x,y) && \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{2.1.3.1}$$

Cele 15 ecuaţii fundamentale ale (T.E) se transformă în consecinţă; vom considera situaţia cea mai frecventă, când forţele de masă sunt reprezentate numai de greutatea proprie, adică $X = Z = 0$; $Y\rho = -q$ (q – greutatea unităţii de volum). Atunci:

I. **Ecuaţiile diferenţiale de echilibru** (2.1.1.1) devin:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial y} - q = 0 \tag{2.1.3.2}$$

II. **Condiţiile pe contur** (2.1.1.2) devin:

$$\begin{aligned} q_{nx} &= \sigma_x \cos(\vec{n},\vec{x}) + \tau_{yx}\cos(\vec{n},\vec{y}) = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta \\ q_{ny} &= \tau_{xy}\cos(\vec{n},\vec{x}) + \sigma_y\cos(\vec{n},\vec{y}) = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta \end{aligned} \tag{2.1.3.3}$$

III. **Ecuaţiile geometrice** (2.1.1.3) devin:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1.3.4}$$

IV. **Ecuaţiile fizice** (2.1.1.6) devin:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) && \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ &\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) && \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ &\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} && \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{2.1.3.5}$$

V. **Condiţiile de compatibilitate** (2.1.1.5) se reduc la una singură:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{2.1.3.6}$$

Obţinem în final un sistem de 8 ecuaţii diferenţiale cu 8 necunoscute $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u, v)$ care poate fi transformat în alte sisteme echivalente, utilizând formulările amintite.

Putem arăta cu uşurinţă că starea de deformaţie este spaţială.

Din

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)\right] \quad cu \quad \sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

sau din:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1=\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{2.1.3.7}$$

Ecuaţia lui Lévy reprezintă aşa-numita *„formulare în tensiuni"*; înseamnă că se aleg ca necunoscute fundamentale ale problemei tensiunile şi se reduce sistemul iniţial de 8 ecuaţii la un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Se transformă ecuaţia de continuitate (2.1.3.6) utilizând legea lui Hooke (2.1.3.5) şi se obţine:

$$\frac{\partial^2}{\partial x}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{2.1.3.8}$$

Ecuaţia obţinută este numită *ecuaţia lui Lévy sau condiţia lui Lévy*. Aşadar, în cadrul stării plane de tensiune, când forţele de volum sunt reprezentate numai de greutatea proprie, grupul de ecuaţii fundamentale al (T.E.) se reduce la sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q = 0 \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases} \tag{2.1.3.9}$$

S-a obţinut un rezultat interesant cu o mare aplicabilitate practică, observând că în ecuaţiile de mai sus nu intervin constantele elastice de material. Aceasta înseamnă că *starea de tensiune într-o problemă plană nu depinde de natura materialului.*

Această concluzie stă la baza *„fotoelasticimetriei"* – o metodă experimentală optică de studiere a stărilor de tensiune cu ajutorul luminii polarizate, utilizând modele din materiale transparente optic active, cu proprietăţi de birefringenţă accidentală (v. Cap. 5).

2.1.3.2. Starea plană de deformaţie

Zicem că avem ***o stare plană de deformaţie*** dacă deplasările tuturor punctelor unui corp solid deformabil se pot produce numai după două direcţii. O asemenea stare de solicitare este caracterizată pentru toate punctele corpului,

- de deplasările $u = f_1(x,y); \quad v = f_2(x,y); \quad w = 0$

- de deformaţiile specifice $\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{zy} = 0$

$$\varepsilon_x = \varphi_1(x,y); \quad \varepsilon_y = \varphi_2(x,y); \quad \gamma_{xy} = \varphi_3(x,y) \tag{2.1.3.10}$$

Sintetic, în acest caz avem:

- tensorul deformaţiilor specifice $T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$

- tensorul tensiunilor $T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Aceste ecuaţii ne arată că toate deplasările şi deformaţiile au loc exclusiv în planul xOy; în toate secţiunile corpului paralelele planului xOy $(\forall z = z_0 = const)$ deplasările şi deformaţiile sunt aceleaşi. De aceea deformaţiile de acest gen se numesc *deformaţii plane*. Ca o consecinţă a dispariţiei componentei ε_z vor apare tensiuni normale σ_z care din legea lui Hooke vor fi:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = -\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \neq 0 \qquad (2.1.3.11)$$

Rezultă că într-o stare plană de deformaţie *starea de tensiune este spaţială*. Pentru starea plană de deformaţie, ecuaţiile de echilibru static (2.1.3.2), ecuaţiile geometrice (2.1.3.4) şi condiţiile de limită (2.1.3.3) rămân în forma stabilită la starea plană de tensiune. Se modifică numai ecuaţiile fizice, care pentru σ_z stabilit mai sus, obţin forme noi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\right] \qquad (2.1.3.12) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}$$

Ecuaţia de continuitate – procedând analog ca mai sus – devine:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x - \sigma_y\right) = -\frac{\rho}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

care pentru forţe masice constante se transformă de asemenea în condiţia lui Lévy:

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

În concluzie, pentru rezolvarea problemei stării de deformaţie plane trebuie să găsim în fond aceleaşi funcţii ca şi în cazul stării de tensiune plane, sistemul de ecuaţii fundamentale fiind acelaşi; diferă numai relaţiile fizice, în care se face de fapt o simplă înlocuire de constante elastice. Deci cele două probleme plane sunt identice din punct de vedere matematic, cu excepţia determinării lui ε_z (în cazul stării plane de tensiune) şi a lui σ_z (în cazul stării plane de deformaţie).

2.1.4. Funcţia de tensiune a lui Airy pentru probleme plane

Am văzut că în cazul în care forţele de volum sunt constante şi sunt reprezentate numai de greutatea proprie, soluţia problemei plane – în tensiuni – se obţine prin integrarea unui sistem de trei ecuaţii diferenţiale cu trei necunoscute.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = q \\ \nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \end{cases} \tag{2.1.4.1}$$

la care se adaugă condiţiile de graniţă.

Astronomul englez G.B.Airy, în 1862 a arătat că această problemă poate fi simplificată şi mai mult, dacă în loc de a căuta trei funcţii continue de punct $\left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)$, se caută una singură, F (x,y), cu ajutorul căreia toate tensiunile se pot calcula *prin simple operaţii de derivare:*

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + q \cdot x \tag{2.1.4.2}$$

în care $F=F(x,y)$ este *o funcţie arbitrară de punct, continuă şi derivabilă de câte ori este necesar, determinată abstracţie făcând de o funcţie liniară care ne dă o stare de tensiune nulă.*

Rămâne o singură ecuaţie din (2.1.4.1) – condiţia lui Lévy – care se exprimă uşor în funcţie de F:

$$\Delta\Delta F = \nabla^2 \left[\nabla^2 F\right] = \nabla^4 F = 0 \tag{2.1.4.3}$$

Scrisă dezvoltat această ecuaţie are forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{2.1.4.4}$$

În felul acesta soluţia problemei plane, în cazul când forţa de volum o constituie greutatea corpului, se reduce la aflarea soluţiei ecuaţiei biarmonice (2.1.4.4) care să satisfacă şi condiţiile pe graniţă. Această ecuaţie (reamintindu-ne de unde am plecat) reprezintă de fapt ecuaţia de continuitate exprimată prin funcţia de tensiune $F(x,y)$.

Funcţia $F(x,y)$ este denumită în literatură *funcţia lui Airy* (sau *funcţia de tensiune*). Funcţiile care satisfac nişte ecuaţii diferenţiale de tipul (2.1.4.4) se numesc *funcţii biarmonice*; funcţia lui Airy este deci o funcţie biarmonică.

Cunoscând această funcţie, cu relaţiile (2.1.4.2) tensiunile se pot calcula prin operaţii simple de diferenţiere; evident că funcţia de tensiune trebuie să satisfacă condiţiile la limită.

Notă. În general funcţiile armonice şi biarmonice au o importanţă excepţională în teoria elasticităţii. Această afirmaţie se justifică arătând că de fapt toate mărimile caracteristice stării de tensiune şi de deformaţie trebuie să aparţină acestei categorii de funcţii.

Astfel se arată că dacă forţele de masă lipsesc sau sunt constante în toate punctele corpului, adică:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{2.1.4.5}$$

atunci:

$$\Delta \varepsilon_V = 0 \tag{2.1.4.6}$$

*Deformaţia specifică volumică satisface ecuaţia lui Laplace, adică este o **funcţie armonică**.*

Avem de asemenea:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta u &= \nabla^4 u = 0 \\ \Delta\Delta \mathrm{v} &= \nabla^4 \mathrm{v} = 0 \\ \Delta\Delta w &= \nabla^4 w = 0 \end{aligned} \tag{2.1.4.7}$$

$\Rightarrow$ *componentele deplasărilor elastice sunt **funcţii biarmonice**.*

În mod cu totul similar, dacă aplicăm operatorul biarmonic asupra ambilor membri ai celor şase formule care exprimă legea generalizată a lui Hooke, obţinem:

$$\Delta\Delta\sigma_x = \Delta\Delta\sigma_y = \Delta\Delta\sigma_z = \Delta\Delta\tau_{xy} = \Delta\Delta\tau_{yz} = \Delta\Delta\tau_{zx} = 0 \tag{2.1.4.8}$$

ceea ce ne arată că şi *componentele stării de tensiune sunt **funcţii biarmonice**.*

§ 2.2. NOTAŢII ŞI UNELE NOŢIUNI GENERALE FUNDAMENTALE

2.2.1. Curbe netede pe porţiuni

Una din dificultăţile pe care le întâmpini citind diverse cărţi de Teoria Elasticităţii este legată de notaţii, *care sunt derutant de diverse*. Cu titlu de curiozitate amintesc că multe cărţi notează modulul de elasticitate transversal cu μ, dar toate cărţile inginereşti de Rezistenţa materialelor sau Mecanica solidului deformabil notează această mărime cu G. Iată ce spune despre această notaţie L. SOLOMON în celebra sa monografie de „Elasticitate liniară" [S50] la p.89: *„În literatura de specialitate ea se notează adesea cu G – ceea ce dă totuşi un aspect* ***dezagreabil*** *formulelor"!*. La pag.91 spune: *„mărimea ν se numeşte coeficientul lui Poisson; pentru această mărime se foloseşte uneori notaţia σ - care pretează însă la confuzie; dar şi mai puţin corectă este notaţia cu μ"!!*. Există însă tot atâtea cărţi, poate şi mai clebre, care folosesc notaţiile dezavuate de L. SOLOMON. De exempu: M.P. SAVRUK [S6], PANASIUK [P7], S.D. PONOMARIOV [P47], HÜTTE [***], P.P.TEODORESCU [T12],[T13],[T14].

De aceea îmi voi preciza de la început câteva din notaţiile fundamenale:

1). Caracteristicile elastice de material: E; G; ν; Λ (când nu intervin confuzii se foloseşte λ.

2). Când voi analiza probleme spaţiale, domeniul ocupat de corp îl voi nota cu Ω, iar frontiera domeniului care este o **suprafaţă considerată de obicei o suprafaţă Leapunov** – o voi nota cu Σ.

3). Când voi analiza probleme plane, domeniul plan analizat îl voi nota cu D, iar frontiera sa, care este o **curbă plană oarecare în sensul lui Jordan** – o voi nota cu Γ.

4). Vom defini câteva elemente caracteristice acestor curbe plane. Să considerăm planul raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale $x_1.x_2$ şi fie date funcţiile:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(r) \\ x_2 = x_2(r) \end{cases} \qquad r \in [a,b] \tag{2.2.1.1}$$

Aceste relaţii reprezintă *ecuaţia parametrică a unei curbe plane.*

Dacă funcţiile (2.2.1.1) sunt **uniforme şi continue**, atunci mulţimea de puncte (x_1,x_2) parcurse în sensul definit de sensul de creştere al lui r se numeşte **curbă jordaniană**. În general vom considera **curbe jordaniene simple**, care nu prezintă puncte multiple ($\forall r',r'' \in (a,b)$ astfel încât $x_1(r') = x_1(r''),\ \ x_2(r') = x_2(r'') \Rightarrow r' = r''$). Orice curbă jordaniană simplă închisă Γ (împarte planul în două domenii disjuncte, ea însăşi constituind frontiera lor comună: unul din aceste domenii este mărginit şi simplu conex, iar celălalt este nemărginit şi dublu conex. Se notează cu indicele „+" domeniile mărginite şi cu „-„ domeniile nemărginite. Urmărind **Fig.2.2.1.1**, domeniul mărginit de curba simplă închisă jordaniană Γ se va nota cu D^+, domeniul nemărginit exterior acestei curbe se va nota cu D^-.

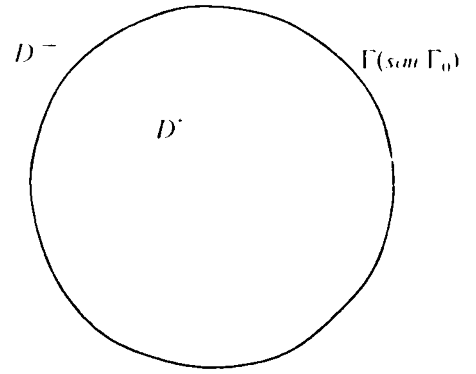


Fig. 2.2.1.1

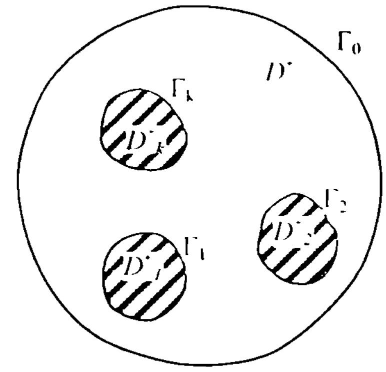


Fig. 2.2.1.2

În Fig. 2.2.1.2 am reprezentat un domeniu multiplu conex (de K+1 ori) a cărui frontieră este compusă din curba simplă închisă Γ_0 şi K curbe simple închise Γ_1, Γ_2,...Γ_K interioare curbei Γ_0 şi exterioare una în raport cu celelalte; domeniul interior se va nota cu

$$D^+ \Rightarrow D^+ = D_0^+ \cap \left(\bigcap_{j=1}^{K} D_j^- \right) \qquad (2.2.1.2)$$

Dacă fiecare frontieră Γ este compusă din curbe închise (v. **Fig.2.2.1.2**), orice punct de frontieră poate fi unit cu orice punct exterior sau interior printr-o curbă jordaniană care nu are puncte comune cu frontiera, exceptând punctul iniţial considerat. Astfel de puncte se numesc **accesibile** şi proprietatea este echivalentă cu afirmaţia că orice punct frontieră este accesibil atât din interior cât şi din exterior. ([S50]) - **Fig.2.2.1.3** -.

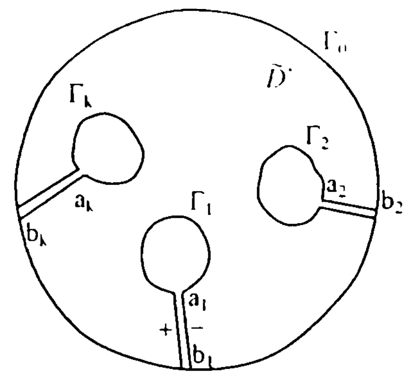


Fig. 2.2.1.3

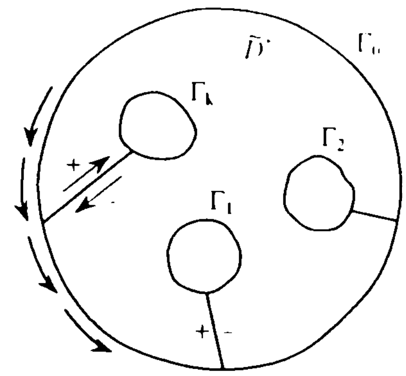


Fig. 2.2.1.4

Orice curbă jordaniană interioară unui domeniu şi care uneşte două puncte de frontieră ale acestuia se numeşte **tăietură**. Punctele care aparţin tăieturilor trebuie privite ca **ansamblul a două puncte geometrice confundate**, dar situate pe borduri (margini) diferite ale tăieturii. O tăietură nu poate fi traversată. Bordurile ei se pot nota cu $\pm$, în aşa fel încât Γ_0 să fie parcurs în sens trigonometric când trecem de la bordul – la bordul + (v. **Fig. 2.2.1.4**).

5). Dacă funcţiile (2.2.1.1) care definesc frontiera sunt cu **variaţia mărginită**, atunci D are arie iar curba frontieră este **rectificabilă**, adică pe ea are sens noţiunea de **lungime a arcului de curbă**; în acest caz locul parametrului r îl poate lua lungimea arcului notată cu s sau cu l. În cadrul tezei **voi considera numai domenii mărginite de curbe jordaniene rectificabile**. Uneori vom admite în alcătuirea lui Γ şi curbe Γ_i deschise care corespund situaţiei când orificiul interior se reduce la o fisură interioară a corpului.

6). Dacă curba (2.2.1.1) este o curbă jordaniană dar cu derivatele $x_1'(s)$, $x_2'(s)$ continui, ea se va numi **curbă netedă**. Un ansamblu finit de curbe jordaniene netede, deschise, cu capete comune două câte două şi care nu se intersectează reciproc se numeşte **curbă netedă pe porţiuni**; ea are deci un număr finit de puncte de discontinuitate pentru direcţia tangentei (puncte unghiulare) Dacă funcţiile (2.2.1.1) sunt desfăşurabile în serie după puterile parametrului, curba se numeşte **analitică**.

7). Cel mai adesea este suficient să ne limităm la aşa numitele **curbe Leapunov**, care satisfac următoarele condiţii:

a). Sunt netede pe porţiuni; această condiţie arată că aceste curbe Leapunov au tangentă ce variază continuu pe porţiuni;

b). Există un număr d astfel încât dreptele paralele cu normala la curbă într-un punct x intersectează cel mult o dată acea porţiune a curbei care e situată în interiorul cercului

S (s,d). Această condiţie mai poate fi interpretată şi ca o **condiţie suficientă** pentru a putea scrie ecuaţiile (2.2.1.1) sub forma $x_2 = f(x_1)$.

c). Există o constantă H>0 şi o constantă $0 \le \mu \le 1$ care nu depind de punct a.î. pentru normalele **n**, $\mathbf{n}_0$ în două puncte x_1, x_0 să avem:

$$\widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_0)} \le H|x - x_0|^{\mu} \tag{2.2.1.3}$$

Aceasta este de fapt o **condiţie de marginire uniformă** a variaţiei direcţiei normalei (sau tangentei).

Dacă aceste proprietăţi relative la curbele Leapunov se generalizează la spaţiul euclidian **E₃**, se obţin **suprafeţele Leapunov**.

2.2.2. Gradul de continuitate al funcţiilor

La aplicarea **metodei reziduurilor ponderate** se impune ca funcţia de aproximare *u* (a soluţiei necunoscute a problemei), funcţia pondere *w*, cât şi derivatele lor până la un anumit ordin, să satisfacă diferite condiţii de continuitate. Pentru a stabili aceste condiţii este necesar să intoducem o clasificare a „***gradului de continuitate a funcţiilor***".

Presupunem că funcţia „generică" *f* prezintă discontinuităţi în unele puncte, dar este totuşi finită pe întreg domeniul de definiţie. Aceasta înseamnă că avem de-a face cu discontinuităţi finite sau aşa numitele ***discontinuităţi de speţa întâi*** (v. **Fig. 2.2.2.1**). Transpusă analitic rezultă că norma acestei funcţii satisface următoarea condiţie:

$$\int f^2 dx < \infty \tag{2.2.2.1}$$

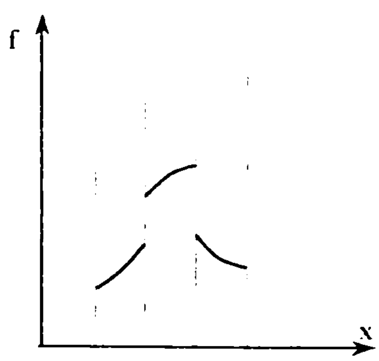


Fig. 2.2.2.1

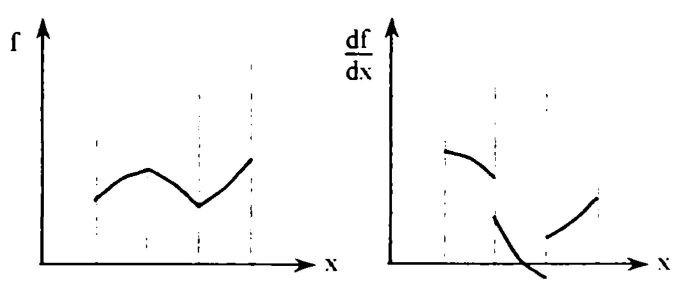


Fig. 2.2.2.2

Asemenea funcţii se vor numi **funcţii de pătrat sumabil** sau de **pătrat integrabil**. Dar o asemenea condiţie se poate introduce şi pentru prima derivată. De exemplu, putem avea o funcţie perfect continuă, dar care prezintă discontinuităţi finite pentru prima derivată. (v. **Fig. 2.2.2.2**).

Deci, şi în acest caz putem scrie:

$$\int \left[f^2 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] dx < \infty \tag{2.2.2.2}$$

Spunem că atât funcţia cât şi prima ei derivată sunt de pătrat integrabil.

Evident că asemenea cerinţe se pot impune şi pentru derivatele de ordin superior; de exemplu, pentru derivata de ordinul doi putem avea situaţia din **Fig. 2.2.2.3**, unde derivata de ordinul doi poate avea discontinuităţi finite, dar să fie de pătrat integrabil.

Se poate deci scrie:

$$\int\left[f^2+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)^2\right]dx<\infty \qquad (2.2.2.3)$$

Conchidem în final că funcţia de aproximaţie ***u*** trebuie să fie din ultima categorie, adică să fie de pătrat integrabil odată cu prima şi cea de-a doua derivată, iar funcţia pondere ***w*** este suficient să fie numai de pătrat integrabil.

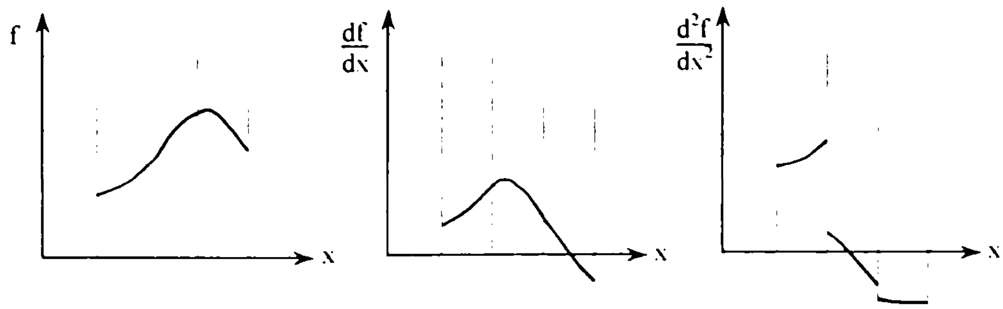


Fig. 2.2.2.3

În multe cazuri este preferabil să se micşoreze gradul de continuitate al funcţiei ***u*** care este destul de sever, ceea ce se poate face pe calea integrării prin părţi. În urma acestei operaţii ambele funcţii ***u*** şi ***w*** trebuie să fie continue şi de pătrat integrabil împreună cu prima derivată.

2.2.3. Câteva notaţii din „Analiza funcţională"

În continuare, vom introduce şi defini unele noţiuni şi notaţii de „Analiză funcţională" care sunt larg răspândite în literatura actuală relativă la metodele numerice: [C79], [C80], [G16], [K23], [M23], [P54], [V18], [T11].

Pentru a descrie comportarea funcţiei f(x) pentru $x \to x_0$, în termenii unei funcţii date $\phi(x)$, se utilizează unele notaţii datorate lui LANDAU [L2],[I1], [V21]:

a). Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=1$ vom scrie $f(x)\sim\phi(x)$ *pentru* $x\to x_0$ şi vom spune că cele două funcţii sunt **asimptotic echivalente** sau **asimptotic egale** pentru $x\to x_0$.

b). Vom spune că funcţia f(x) are în punctul x_0 **un ordin mai mic** decât funcţia $\phi(x)$ şi vom scrie: $f(x)=o(\phi(x))$ pentru $x\to x_0$ (citit „**zero mic**") dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=0$.

c). Vom scrie $f(x)=O(\phi(x))$ pentru $x\to x_0$ (citit „**zero mare**") şi vom spune că cele două funcţii au acelaşi ordin pentru $x\to x_0$, dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|\phi(x)|}=K>0, \quad K<+\infty$

Această notaţie, legată de fapt de dezvoltarea asimptotică a unei funcţii, o putem introduce şi defini şi altfel. Fie $\varphi(h): D_\varphi \to \mathbf{R}$ o funcţie oarecare de variabilă h reală în domeniul finit de definiţie D_φ; pe semiaxa $h>0$, $h\in D_\varphi$, h se poate considera oricât de mic. Atunci, dacă există numerele pozitive h, c, k, care pentru $\forall h\in D_\varphi$ ce îndeplineşte condiţia $0<h<h_0$, se satisface inegalitatea: $|\varphi(h)|\le ch^k$

se scrie:

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

şi se spune:

$\varphi(h)$ tinde la O (zero mare) ca şi h^k.

Conform acestei definiţii au loc următoarele proprietăţi evidente:

- dacă $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$ *iar* $D_\varphi = D_\psi$ *atunci*:

$$\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k) \quad sau \quad O(h^k) + O(h^k) = O(h^k)$$

- dacă $k > m > 0$, atunci $O(h^k)$ este în acelaşi timp $O(h^m)$
- dacă $\varphi(h) = O(h^k)$, atunci $a\varphi(h) = O(h^k)$, unde a este o constantă care nu depinde de h.

De exemplu $\sin^2 2h = O(h^2)$ deoarece $\sin^2 2h \le 4h^2, \forall h \in D_\varphi$.

Să mai notăm că ordinul O (zero mare) este mai important decât o(zero mic) întrucât dă mai multă informaţie asupra funcţiei $f(x)$. Astfel, $\sin x = x + o(x^2)$ arată că funcţia $f(x) = \sin x - x$ converge la zero mai repede decât x^2, pe când funcţia $\sin x = x + O(x^3)$ indică faptul că aceiaşi funcţie $f(x)$ converge la zero la fel de repede ca x^3.

Prezentăm în continuare altă serie de operaţii valabile în cazul relaţiilor de ordine. Astfel, dacă $f = O(g)$, atunci vom avea:

$$O(o(f)) = o(O(f)) = o(g)$$

$$O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$$

$$O(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$|f|^\alpha = O(|g|^\alpha) \text{ pentru } \alpha > 0.$$

Dacă $f_i = O(g_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, iar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt numere reale, atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = O\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i||g_i|\right)$$

$$\mathop{\pi}_{i=1}^{n} f_i = O\left(\mathop{\pi}_{i=1}^{n} g_i\right)$$

Se foloseşte destul de frecvent relaţia:

$$O(e^{-cx}) = o(x^{-n}) \text{ pentru } x \to \infty \quad (c > 0, n \in N)$$

(demonstraţia în [I1] vol.III, p.50)

Să presupunem acum că este dată funcţia $\varphi(h,t)$ de două argumente pozitive h, t, care pot fi considerate că au valori cât se poate de mici. Dacă există asemenea numere pozitive h_0, t_0, c, k, m, astfel încât pentru toate valorile lui h şi t care îndeplinesc condiţiile $0 \le h \le h_0$, $0 \le t \le t_0$, atunci are loc inegalitatea:

$$|\varphi(h,t)| \le c(h^k + t^m)$$

şi acest lucru se scrie astfel:

$$\varphi(h,t) = O(h^k + t^m)$$

şi vom zice că $\varphi(h,t)$ tinde la O („zero mare") ca şi $h^k + t^m$ (la $h \to 0$, $t \to 0$).

§ 2.3. ELEMENTE FUNDAMENTALE DE MECANICA RUPERII

2.3.1. Geneza. Cauzele obiective ale apariţiei şi dezvoltării mecanicii ruperii

2.3.1.1. Introducere

MECANICA SOLIDULUI DEFORMABIL (M.S.D.) reprezintă unul dintre cele mai moderne şi mai explozive domenii de cercetare în profil mecanic; ea cuprinde două mari categorii de discipline ştiinţifice:

- **Discipline preponderent matematice** – teoria elasticităţii; teoria plasticităţii; termoelasticitatea; elastovâscoplasticitatea; termovâscoplasticitatea, atât pentru materiale omogene şi izotrope cât şi pentru materiale neomogene şi anizotrope (materiale compozite). Toate acestea sunt domenii de ştiinţă fundamentale, care formulează şi desăvârşesc bazele generale matematice ale ramurii considerate.
- **Discipline tehnice**, cu caracter ingineresc, aplicativ, cum ar fi: rezistenţa materialelor, oboseala materialelor, fluajul şi relaxarea, stabilitatea echilibrului elastic, teoria solicitărilor de contact, statica şi dinamica structurilor din bare şi plăci, încercările de materiale, fiabilitatea şi siguranţa structurilor etc. Este adevărat că multe dintre acestea sunt astăzi ramuri de ştiinţă de-sine-stătătoare.

Cu toate rezultatele remarcabile acumulate în toate aceste domenii, încă de pe vremea lui Galileo Galilei şi Robert Hooke, în tot secolul trecut (şi chiar în zilele noastre) au avut loc o serie de „**catastrofe celebre**" care au surprins comunitatea oamenilor de ştiinţă şi a inginerilor prin lipsa explicaţiei şi a suportului ştiinţific justificator. Au apărut astfel probleme noi care au cerut soluţii noi, concepte de proiectare şi de analiză a siguranţei structurilor de rezistenţă de asemenea fundamental noi. Răspunzând la aceste cerinţe a apărut o nouă disciplină, unanim recunoscută astăzi, denumită „MECANICA RUPERII" (M.R.). Considerăm că patru momente fundamentale au constituit începuturile acestei noi ramuri a (M.S.D.):

- Calculele efectuate de Kirsch în 1898 privind starea de tensiune dintr-o platbandă solicitată la tracţiune, având gaură circulară centrală; s-a demonstrat astfel analitic efectul de concentrare a tensiunilor în zona cu discontinuităţi geometrice acute, deşi efectul nociv al concentratorilor era semnalat încă din 1843 de Rankine în legătură cu ruperea organelor de maşini rotative.
- Încercările lui August Wöhler, începute încă din 1847, care au condus la definirea conceptului de durabilitate în cazul tensiunilor variabile în timp prin intermediul celebrei „**curbe Wöhler**" (σ_{max}-N) publicată prima oară în 1905;
- Încercările de rezilienţă pe epruvete tip Charpy **V** (sau **U**) legate de ruperea fragilă, care au pus în evidenţă temperatura de tranziţie de la ruperea ductilă la cea fragilă. În anul 2001 s-a sărbătorit cu mare fast în Franţa 100 de ani de la apariţia epruvetei Charpy.
- În sfârşit, problemele de (M.R.) au intrat efectiv în atenţia cercetătorilor începând cu anii 1920-25, odată cu binecunoscutele, astăzi, lucrări ale lui Griffith. El a introdus ideea că un material fragil conţine o mulţime de fisuri care produc o concentrare de tensiuni suficient de mare ca în anumite zone să se atingă valoarea rezistenţei la rupere.

Dar activitatea ştiinţifică masivă, susţinută, orientată, începe după 1950, odată cu dezvoltarea noilor tehnici de vârf în domeniul nuclear, aerospaţial, naval, chimic, petrolier etc. Până în perioada anilor 1970 s-au introdus mărimi şi concepte noi: factorul de intensitate al tensiunilor (Westergard 1940, Irwin, Paris 1961), integrala J (Rice 1968) etc., s-au definitivat procedee noi de încercare şi caracterizare a materialelor ţinând cont de existenţa defectelor micro- sau macrostructurale (dislocaţii, vacanţe, incluziuni, goluri, fisuri etc.), de influenţa temperaturilor scăzute, de variaţia în timp a tensiunilor etc. Tot în acest timp s-au pus bazele matematice ale calculării câmpurilor de tensiuni şi deformaţii în corpuri elastice cu defecte de tipul fisurilor, golurilor, incluziunilor. Dificultăţile au fost mari datorită necesităţii adoptării şi folosirii unui aparataj matematic foarte elevat: ecuaţii integrale singulare, funcţii complexe şi transformări conforme, teoria potenţialului, metode variaţionale funcţionale etc. Din acest motiv foarte târziu s-au concretizat metodele de calcul şi s-au obţinut rezultate credibile şi concludente, dar numai pentru defecte unice sau grupuri de defecte cu anumite simetrii şi periodicităţi.

2.3.1.2. Catastrofe „celebre"

În secolul trecut, şi chiar în zilele noastre, au avut loc o serie de mari catastrofe provocate de ruperea brutală, intempestivă a unor construcţii metalice mari: poduri, nave, platforme marine, avioane, rezervoare, conducte etc. Voi cita numai câteva dintre aceste catastrofe, dintre cele care au fost reţinute şi au intrat în istoria mecanicii ruperii:

- 1919 are loc ruperea unui rezervor de melasă de 15 m înălţime şi un diametru de 27 m care a deversat in râul Boston (SUA) 7,5 milioane de litri de melasă, producând moartea a 12 oameni.
- 1938 martie, ruperea fragilă la temperaturi scăzute a podului metalic Vierendeel din Belgia; de altfel în deceniul 1930-40 se semnalează numeroase ruperi ale grinzilor principale de la podurile metalice - celebru fiind podul Silver din Ohio.
- 1943 ianuarie – este citată ruperea efectivă în două bucăţi a petrolierului Schenectady, realizat în construcţie sudată.
- Exemplul cel mai citat în literatură se referă la navele Liberty, asamblate prin sudură, care făceau prin oceanul Ingheţat de Nord aprovizionarea cu combustibil, armament şi hrană, de către SUA a armatei URSS în război cu Germania. Din cele 2500 de vase maritime Liberty lansate la apă în timpul războiului al doilea mondial, 10 s-au rupt fragil, în mod spectaculos în două bucăţi şi alte 700 au suferit avarii serioase. Încep deja să se incrimineze două cauze fundamentale: 1) existenţa inevitabilă a defectelor care apar în suduri şi a concentratorilor de tensiune datoraţi geometriei inadecvate a structurii şi 2) modificarea temperaturii de tranziţie ductil-fragil.
- Tot la începutul secolului apar numeroase ruperi la echipamantele de material rulant: osii şi roţi de vagoane, şine de cale ferată - ruperi aparent inexplicabile. Se iniţiază astfel celebrele cercetări exprimentale ale lui August Wöhler, care în 1905 publică prima curbă de oboseală din istoria rezistenţei materialelor şi declanşează cercetări de anvergură privind fenomenul de oboseală, care şi astăzi este în plină actualitate.
- De asemenea „celebre" sunt ruperile prin oboseală descoperite la autobuzele Grumman din New-York City, care au condus la retragerea din circulaţie a 637 dintre ele.
- 1950 – două avioane Comet s-au rupt în timpul zborului la mare altitudine, datorită apariţiei fisurilor prin oboseală din zona hublourilor, iniţiate sub efectul de concentrare al unor găuri de nit.
- 1967 – ruperea fragilă a podului metalic Point Pleasant din Virginia (SUA), care a provocat moartea a peste 40 de oameni.
- 1984 – ruperea unei nave marine Glomar Java; ruperea platformei marine Statfjord A.
- 1988 – ruperea unui avion Boeing 737 al companiei Aloha Air din Hawai datorită coroziunii aliajului de aluminiu folosit la construcţie: s-a produs o fisură de oboseală care a declanşat pierderea bruscă a carlingii superioare. Mai cităm ruperea unui alt Boeing 747 Japan Air Line datorită fisurării prin oboseală a batardolei.

Evident că situaţiile sunt mult mai numeroase:

- au apărut fisuri la conductele de reactori nucleari;
- multe fisuri şi ruperi parţiale au fost găsite în cazuri de obicei nedate publicităţii.

Toate aceste catastrofe care au produs pagube imense, au declanşat în mod justificat un efort uriaş de cercetare printre matematicieni şi ingineri: mecanici, metalurgi, constructori, aerospaţiali. *Acesta a fost primul motiv care a impus apariţia şi dezvoltarea impetuoasă a Mecanicii Ruperii.*

2.3.1.3. Impactul economic

Adevărata dimensiune a problemei a apărut în momentul când s-au făcut calcule care să arate mărimea efortului economic pe care trebuie să-l suporte societatea, provocat de catastrofe, de defecţiuni şi remedierea lor.

Astfel, în 1982, Biroul Naţional de Standarde al SUA a apreciat că s-au cheltuit 119 miliarde de dolari pentru prevenirea ruperilor şi a pagubelor produse când acestea au avut loc (suma reprezintă circa 4% din PIB). În aceste calcule s-au luat în considerare cheltuielile suplimentare necesitate de prevenirea ruperilor, proiectarea mai laborioasă, adoptarea de materiale şi tehnologii speciale de fabricaţie, efectuarea de controale planificate, de expertize tehnice ca şi cheltuielile de judecată şi despăgubiri.

Trebuie subliniat că din punct de vedere tehnic, 80% din ruperile produse se datoresc oboselii materialelor, fenomen care se amorsează datorită existenţei inevitabile, obiective, a micro- sau macrodefectelor în orice construcţie metalică. Structurile de rezistenţă cele mai afectate sunt cele ale materialului rulant şi vehiculelor, construcţiilor aerospaţiale, podurile, navele maritime, maşinile de ridicat. Studiul efectuat în SUA afirmă că aceste cheltuieli ar putea fi evitate în proporţie de:

47% prin aplicarea în proiectare, execuţie şi exploatare a cunoştinţelor actuale;
24% prin lucrări de cercetare-dezvoltare;
în 29% din cazuri sunt necesare noi deschideri în ştiinţă.

Un studiu similar s-a efectuat şi în Europa în 1991 de către Comunitatea Economică Europeană, care a regăsit aceeaşi proporţie de 4% din PIB.

Sursele ruperilor au fost clasificate după cum urmează:

<table>
<tr><th></th><th>Variaţia%</th><th>Media%</th><th>Reducere posibilă până la (%)</th></tr>
<tr><td>1) Proiectare</td><td>10...40</td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2) Fabricaţie</td><td>7...12</td><td>10</td><td rowspan="2">}8</td></tr>
<tr><td>3) Defecte ascunse de material</td><td>3...8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4) Reparaţii defectuoase</td><td>3...7</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5) Erori în exploatare</td><td>15...54</td><td>25</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6) Mentenanţă defectuoasă</td><td>18...31</td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>7) Asamblare, montaj general</td><td>2...20</td><td>12</td><td>10</td></tr>
<tr><td>8) Cauze necunoscute</td><td>2...20</td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

Reducerile de cheltuieli pot fi obţinute prin:

- Perfecţionarea codurilor, standardelor şi regulilor de proiectare
- Pregătirea şi perfecţionarea proiectanţilor şi specialiştilor
- Transferul informaţiilor existente de la cercetare spre proiectare şi producţie
- Introducerea în fabrici a regulilor de calitate care să conducă la un indice TQ ridicat (Total Quality).

Aplicarea acestor criterii ar putea conduce la o reducere de până la 60%.

Mai trebuie reţinută o apreciere interesantă a acestui studiu: o investiţie de 2 miliarde de ECU pe timp de 10 ani în cercetare şi dezvoltare ar conduce la economii de 5 ori mai mari.

Acesta a fost al doilea motiv major care a condus la naşterea şi dezvoltarea Mecanicii Ruperii.

2.3.2. Analiza stării de tensiune la vârful fisurii

Primele cărţi de (M.R.) apărute în limba română sunt cele ale lui PANĂ T. [P5]/1974, D. CIOCLOV [C45]/1977 şi I. DOBRE [B57]/1978. În literatura mondială au fost publicate numeroase monografii din care eu am studiat: [A25], B53], [C10], [G47], [K7], [K11], [M32], [N10], [P7], [P12], [P30], [P39], [S4], [S6], [S43], [T1]. Mai nou au apărut în limba română [D41], [M15], [P6], [T28].

Am dezvoltat acest paragraf după capitolul III din cartea [B57] redactat de I. DOBRE cu acordul domnului profesor – deoarece este cea mai clară prezentare (în stilul său caracteristic)!

2.3.2.1. Modele pentru propagarea fisurilor

Fisura este o fantă îngustă care există sau se formează într-un corp întrerupând regularitatea structurală a acestuia. Ea schimbă esenţial starea de tensiune a corpului în zona învecinată, care devine triaxială chiar în condiţiile unor solicitări simple. Analiza completă a acestor stări de tensiune din vecinătatea vârfului fisurii în condiţiile apariţiei unor deformaţii mari dincolo de limita de elasticitate, incumbă serioase dificultăţi matematice. De aceea s-au studiat numai probleme relativ simple, în special probleme plane cu orificii sau cu fisuri care imită tăieturile ideale infinit de subţiri. Dintre acestea cele mai importante se referă la corpurile nelimitate solicitate la infinit cu o stare de tensiune omogenă, iar problemele tipice sunt legate de modelele acceptate pentru propagarea fisurilor. În funcţie de mişcarea relativă pe care o au cele două suprafeţe ale fisurii, se acceptă că tipul de rupere şi propagarea acesteia se face în trei moduri fundamentale şi anume:

I. Ruperea normală sau prin separare. La acest model fisura se extinde prin deschidere. Este cazul prezentat în **Fig.2.3.2.1.** al fisurii într-un câmp de tracţiune, omogen la infinit, în condiţiile deformaţiei plane, când:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \tag{2.3.2.1}$$

Deplasările punctelor de pe frontul fisurii sunt perpendiculare pe planul în care se extinde fisura.

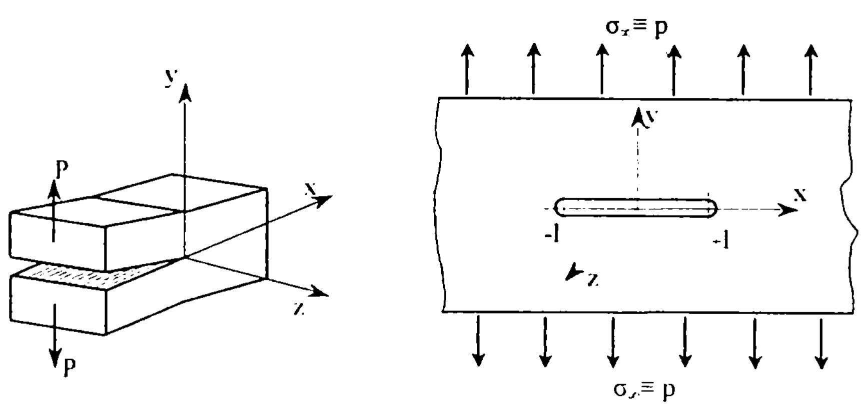


Fig.2.3.2.1.

II. Ruperea prin alunecare ca urmare a unei forfecări transversale. Deplasările punctelor de pe frontul fisurii se fac în planul fisurii perpendicular pe marginea acesteia în sensul de avans al ei. În **Fig.2.3.2.2.** este arătată fisura în condiţiile deformaţiilor plane la forfecarea în planul xy:

$$u = u(x, y), \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{2.3.2.2}$$

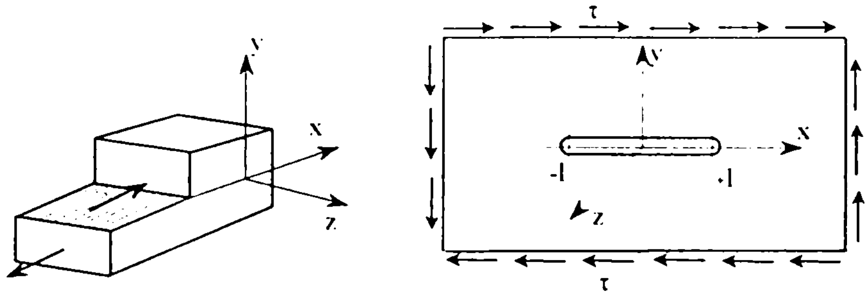


Fig. 2.3.2.2

III. Ruperea prin alunecare ca urmare a unei forfecări longitudinale. Acesta este cazul aşa-zisei deformaţii antiplane, pentru care componentele deplasării sunt:

$$u = 0\ ,\ v = 0\ ,\ w = w(x,\ y) \qquad (2.3.2.3)$$

Deplasările punctelor fisurii se fac în planul în care se extinde fisura, paralel cu frontul acesteia. Părţile opuse ale fisurii alunecă una faţă de cealaltă în direcţia axei z, ca urmare a câmpului omogen de tensiuni tangenţiale τ date la infinit (**Fig.2.3.2.3**).

Oricare alt mod de propagare a fisurii se poate obţine ca o combinaţie a celor precedente, prin suprapunerea de efecte. De aceea, mărimile specifice acestor moduri de propagare vor purta indicii I, II, respectiv III.

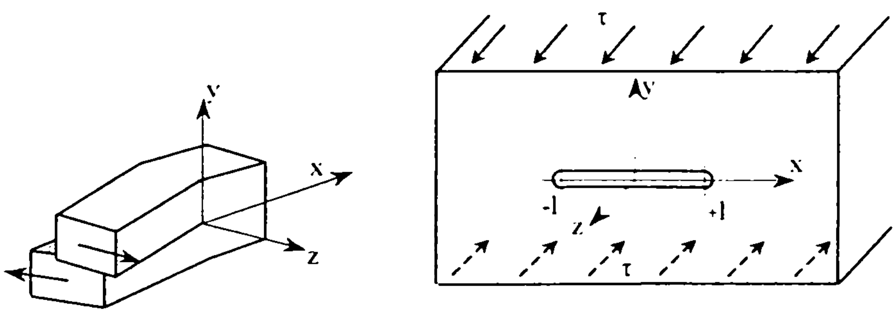


Fig. 2.3.2.3

2.3.2.2. Spaţiul cu fisură supus forfecării longitudinale

Este cel mai simplu dintre cazurile enumerate la § 2.3.2.1. Deoarece diferită de zero este numai deplasarea w = w(x, y), deformaţiile specifice unghiulare sunt egale cu :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}\ ,\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2.3.2.4)$$

şi deci componentele corespunzătoare ale tensiunilor vor fi, după legea lui Hooke :

$$\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}\ ,\ \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2.3.2.5)$$

Se analizează ecuaţiile diferenţiale de echilibru Navier-Cauchy; primele două sunt satisfăcute identic, iar cea de-a treia devine:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

adică deplasarea w este o funcţie armonică :

$$\Delta w = 0\,. \qquad (2.3.2.6)$$

Rezolvarea problemei se poate face prin suprapunerea unui câmp de forfecare omogen:

$$\tau_{xz} = 0\ ,\ \tau_{yz} = \tau\ ,\ w = \frac{\tau}{G}\cdot y \qquad (2.3.2.7)$$

peste starea creată de tensiunile tangenţiale :

$$\tau_{xz}=0\,,\tau_{yz}=-\tau\,, \tag{2.3.2.8}$$

care acţionează la marginile tăieturii, astfel că în acest caz tensiunile şi deplasările la infinit sunt nule.

Se analizează pentru început cea de-a doua stare de tensiune, într-o formulare mai generală, când tensiunile tangenţiale date pe tăietură sunt funcţii de x, adică :

$$\tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=-\tau(x), \quad |x|\le \ell. \tag{2.3.2.9}$$

Problema se reduce la a construi o funcţie armonică univocă $w(x, y)$, cunoscând derivata $\frac{\partial w}{\partial y}$ la marginea tăieturii $(-\ell\,,\,\ell)$ şi satisfăcând condiţiile de zero la infinit.

Rezolvarea acestei probleme poate fi făcută cu diferite metode. În particular, se pot folosi metodele funcţiilor de variabilă complexă. Pentru aceasta se notează cu w^* funcţia armonic conjugată a funcţiei w (atenţie! nu este vorba de funcţia conjugată), se introduce potenţialul complex:

$$\varphi(z)=w(z)+i\,w^*(z) \quad (z=x+iy), \tag{2.3.2.10}$$

a cărui parte reală este tocmai deplasarea w, adică:

$$w=\mathrm{Re}[\varphi(z)]. \tag{2.3.2.11}$$

Cu ajutorul formulelor (2.3.2.5) şi relaţiei Cauchy-Riemann se găseşte că

$$\varphi'(z_0)=\frac{\partial w}{\partial x_0}+i\frac{\partial w^*}{\partial x_0} \quad ; \quad \varphi'(z_0)=\frac{\partial w^*}{\partial y_0}-i\frac{\partial w}{\partial y_0}\,,$$

dar:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w^*}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial w^*}{\partial x}$$

$$\varphi'(z)=\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}$$

şi deci:

$$\tau_{xz}-i\,\tau_{yz}=G\varphi'(z)\,. \tag{2.3.2.12}$$

Este deci necesar să se găsească o funcţie olomorfă $\varphi'(z)$ care să satisfacă următoarele condiţii:

- pe marginile tăieturii sunt date valorile părţii imaginare a funcţiei $\varphi'(z)$, iar partea reală este nulă - conform (2.3.2.12) ;
- deoarece deplasarea w tinde spre zero la infinit, funcţia $\varphi'(z)$, pentru valori mari ale lui $|z|$, trebuie să scadă mai repede sau cel puţin ca z^{-2}. Această condiţie va rezulta ulterior în mod firesc pe măsura construirii funcţiei căutate, din necesitatea ca punctul de la infinit să nu fie un punct singular ;
- pe marginile tăieturii $\varphi'(z)$ poate avea singularităţi.

Asemenea probleme de margine sunt cazuri parţiale ale problemei limită a lui Hilbert, ale cărei metode de rezolvare sunt bine elaborate. Cazul analizat este însă o situaţie particulară care poate fi rezolvată cu metode mai simple (SEDOV L.) [S11], KACIANOV [K7], CEREPANOV [C10] .

Pentru moment, se părăsesc notaţiile de până acum şi se tratează problema într-o formă mai generală. Se presupune că pe marginile tăieturii: $y=0\,,|x|\le\ell$, este dată valoarea limită $f_2(x,0)$ a unei funcţii armonice $f_2(x,y)$; funcţia armonică conjugată $f_1(x,y)$ se transformă în zero pe axa reală conform (2.3.2.12).

Se consideră o funcţie complexă :

$$F(z) = f_1 - i f_2 \tag{2.3.2.13}$$

care trebuie să scadă la infinit, cel puţin ca şi z^{-2}.

Alegerea funcţiei $F(z)$ sub această formă este dictată de forma funcţiei căutate $\varphi'(z)$ (v.(2.3.2.12)); semnul minus în faţa părţii imaginare atrage câteva consideraţii suplimentare legate în special de sensul de parcurs pe conturul care înconjoară tăietura.

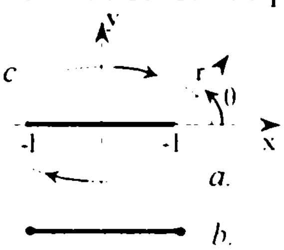


Fig.2.3.2.4.

Fiindcă pe marginile de sus şi de jos ale tăieturii, funcţia $f_2(x,y)$ are una şi aceeaşi valoare $f_2(x,0)$, înseamnă că ea este pară în raport cu y, adică $f_2(x,y) = f_2(x,-y)$.

Atunci, din condiţiile Cauchy-Riemann se stabileşte că funcţia conjugată $f_1(x,y)$ este impară în raport cu y.

Trebuie să considerăm acum o funcţie olomorfă care să aibă punctele $\pm\ell$ ca puncte singulare. O asemenea funcţie poate fi de tipul $\sqrt{z^2 - \ell^2}$. Dacă se unesc cele două puncte $+\ell$ şi $-\ell$ cu o tăietură (în particular segmentul din **Fig.2.3.2.4**), atunci funcţia $\sqrt{z^2 - \ell^2}$ va fi olomorfă în afara tăieturii, iar pe marginile tăieturii va fi pur imaginară având valoarea $+i\sqrt{\ell^2 - x^2}$ pe marginea de sus şi $-i\sqrt{\ell^2 - x^2}$ pe marginea de jos.

Se consideră încă o funcţie ajutătoare:

$$\Phi(z) = F(z)\cdot\sqrt{z^2 - \ell^2} \tag{2.3.2.14}$$

formată din produsul celor două funcţii introduse până acum, care este de asemenea olomorfă în afara tăieturii. Deoarece funcţia $\sqrt{z^2 - \ell^2}$ are şi punctul de la infinit ca punct singular, de aceea s-a impus condiţia ca funcţia F(z) să tindă la infinit spre zero, cel puţin ca z^{-2}, astfel ca noua funcţie $\Phi(z)$ să nu mai creeze nici un fel de "dificultăţi" la infinit.

Se presupune acum că tăietura $(-\ell, +\ell)$ se înconjoară cu un contur (C) pe care sensul pozitiv de parcurs este cel orar (din cauza semnului – din (2.3.2.12)).

Se mai consideră o altă funcţie ajutătoare de forma:

$$\frac{\Phi(\xi)}{\xi - z}, \tag{2.3.2.15}$$

sugerată de necesitatea aplicării formulei integrale a lui Cauchy. Aici z este un punct în afara conturului (C). Această funcţie are în afara lui (C) un singur punct special $\xi = z$, cu reziduul $\Phi(z)$. De aceea funcţia $\Phi(z)$ se poate reprezenta prin valoarea acesteia pe conturul (C) cu formula lui Cauchy.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{\Phi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \,. \tag{2.3.2.16}$$

Dacă se strânge conturul (C) în jurul tăieturii se observă că pe cele două margini ale tăieturii:

$$\begin{aligned} \Phi_+(\xi) &= \left[f_1(\xi, +0) - i f_2(\xi, +0)\right] i\sqrt{\ell^2 - \xi^2} \\ \Phi_-(\xi) &= \left[f_1(\xi, -0) - i f_2(\xi, -0)\right]\left(-i\sqrt{\ell^2 - \xi^2}\right) \end{aligned} \tag{2.3.2.17}$$

Dar:

$$f_1(\xi,+0)=f_1(\xi,-0)=0$$
$$f_1(\xi,+0)=f_{21}(\xi,-0)=f_2(\xi) \qquad (2.3.2.18)$$

Fiindcă $\Phi(\xi)$ este limitată la marginile tăieturii şi integralele după cercurile mici tind spre zero la limită, atunci :

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{f_2(\xi)}{\xi-z}\sqrt{\ell^2-\xi^2}\,d\xi \qquad (2.3.2.19)$$

Astfel, funcţia căutată F(z) se obţine sub forma (din (2.3.14)) :

$$F(z)=\frac{\Phi(z)}{\sqrt{z^2-\ell^2}}=\frac{1}{\pi i\sqrt{z^2-\ell^2}}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{f_2(\xi)}{\xi-z}\sqrt{\ell^2-\xi^2}\,d\xi\,. \qquad (2.3.2.20)$$

Se verifică uşor că această funcţie satisface condiţiile impuse la infinit şi la vârfurile tăieturii.

Revenind la problema iniţială se poate scrie soluţia :

$$G\cdot\varphi'(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{z^2-\ell^2}}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\tau(\xi)\sqrt{\ell^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi\,. \qquad (2.3.2.21)$$

Pentru mecanica ruperii sunt interesante două probleme : singulrităţile din vârful fisurii şi energia care se eliberează la formarea fisurii.

Pentru a clarifica comportarea tensiunilor în apropierea vârfului fisurii se analizează comportarea asimptotică a funcţiei (2.3.2.21) în condiţiile în care se tinde la limită după r. Trecând la coordonate polare, cu polul în vârful fisurii (**Fig.2.3.2.4.**) :

$$z-\ell=re^{i\theta} \qquad (2.3.2.22)$$

se poate scrie :

$$G\cdot\varphi'(z)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi(z-\ell)}}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{2}\,\tau(\xi)\sqrt{\ell^2-\xi^2}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{z+\ell}\,(z-\xi)}\,d\xi\,. \qquad (2.3.2.23)$$

Se notează :

$$K_{III}=\lim_{r\to 0}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{2}\,\tau(\xi)\sqrt{\ell^2-\xi^2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2\ell+re^{i\theta}}\left(\ell+re^{i\theta}-\xi\right)}\,d\xi=$$
$$=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{2}\,\tau(\xi)\sqrt{\ell+\xi}\cdot\sqrt{\ell-\xi}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2\ell}\,(\ell-\xi)}\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}\int_{-\ell}^{\ell}\tau(\xi)\sqrt{\frac{\ell+\xi}{\ell-\xi}}\,d\xi\,. \qquad (2.3.2.24)$$

Deci:

$$G\varphi'(z)=-\frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi(z-\ell)}}+\ldots \qquad (2.3.2.25)$$

unde s-au neglijat o serie de termeni care în mod normal apar prin dezvoltarea în serie a funcţiei de sub integrală în jurul lui $r=0$ şi care au valori finite în vecinătatea vârfului.

Deci:

$$\tau_{xz}-i\tau_{yz}=G\varphi'(z)=-\frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi(z-\ell)}}=-\frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}=-\frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\tau_{xz}-i\tau_{yz}=-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}-i\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\,.$$

Din egalarea părţilor reale şi imaginare se obţine:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \tag{2.3.2.26}$$

Se găseşte de asemenea:

$$\varphi(z) = -\frac{iK_{III}}{G\sqrt{2\pi}}2\sqrt{z-\ell} = -\frac{iK_{III}}{G}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{re^{i\theta}} =$$

$$= -\frac{iK_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.3.2.27}$$

Deci (2.3.2.11)

$$w(z) = \mathrm{Re}[\varphi(z)] = \frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.3.2.27 bis}$$

Mărimea K_{III} (indicele III indică cazul forfecării longitudinale) se numeşte ***coeficient de intensitate a tensiunilor***, *reprezentând o caracteristică a distribuţiei tensiunilor în vecinătatea vârfului fisurii în timpul propagării acesteia*, de aceea nu trebuie confundat cu factorii asemănători care au fost introduşi la studiul concentratorilor de tensiune.

Pentru o piesă cu geometria dată, coeficientul K_{III} depinde de tensiunea tangenţială dată $\tau(\zeta)$. Dacă aceasta este constantă, de exemplu $\tau(\zeta) = \tau$ = const. se obţine :

$$K_{III} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi\ell}}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{\ell+\zeta}{\ell-\zeta}}\,d\zeta \tag{2.3.2.28}$$

Calculul acestei integrale cu o singularitate în punctul $\xi = \ell$, se face printr-o trecere la limită. Demonstraţia este următoarea (aparţine autoarei):

Se face substituţia :

$$\frac{\ell+\zeta}{\ell-\zeta} = t^2 \quad\Rightarrow\quad \zeta = \ell\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad ; \quad d\zeta = \frac{4\ell t}{\left(t^2+1\right)^2}dt .$$

Deci:

$$I = \int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{\ell+\zeta}{\ell-\zeta}}\,d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\sqrt{\frac{2\ell-\varepsilon}{\varepsilon}}}\frac{4\ell t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt = 4\ell\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2\ell-\varepsilon}{\varepsilon}}}\frac{1}{t^2+1}dt - \int_0^{\sqrt{\frac{2\ell-\varepsilon}{\varepsilon}}}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt\right]$$

$$\int\frac{1}{t^2+1}dt = \mathrm{arctg}\,t + C$$

$$\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \mathrm{arctg}\,t\right) + C$$

$$I = 2\ell\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2\ell-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = 2\ell\frac{\pi}{2} = \pi\ell .$$

Deci :

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi\ell} . \tag{2.3.2.29}$$

2.3.2.3. Spaţiul cu fisură solicitat la tracţiune

După cum s-a arătat în **Anexa 1** tensiunile şi deplasările pentru starea plană generalizată de deformaţie sau de tensiune se pot exprima prin două funcţii de variabilă complexă $\varphi(z)$, $\psi(z)$ după formulele lui Kolosov-Mushelişvili [M69]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} &= 2\left[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)\right] \\ 2G\,(u + iv) &= \Lambda\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'}(z) - \overline{\psi(z)} \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.30}$$

unde:

$\Lambda = 3 - 4\nu$ - pentru starea plană de deformaţie,

$\Lambda = \dfrac{3 - \nu}{1 + \nu}$ - pentru starea plană de tensiune.

Rezolvarea problemei se face, similar cu cazul precedent: peste câmpul tracţiunii omogene $\sigma_y = \sigma_x = p$ se suprapune o stare de tensiune $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = -p$ aplicată pe marginile fisurii (mai general, $\sigma_y = -p(x)$).

Din considerente de simetrie, tensiunea tangenţială τ_{xy} este egală cu zero pe toată axa x şi este impară în raport cu y, iar tensiunile normale σ_x, σ_y sunt pare; de aceea se încearcă soluţii de forma:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(z) &= \Phi(z) = \frac{1}{2} Z_1(z) \\ \psi(z) &= \psi'(z) = -\frac{1}{2} z\, Z_1'(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.31}$$

Din relaţiile (2.3.2.30) cu aceste notaţii se obţin:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \mathrm{Re}\, Z_1 - y\, \mathrm{Im}\, Z_1' \\ \sigma_y &= \mathrm{Re}\, Z_1 + y\, \mathrm{Im}\, Z_1' \\ \tau_{xy} &= -\, y\, \mathrm{Re}\, Z_1' \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.32}$$

$$\left.\begin{aligned} 2Gu &= \frac{\Lambda + 1}{2} \mathrm{Re}\, \widetilde{Z}_1 - y\, \mathrm{Im}\, Z_1 \\ 2G\mathrm{v} &= \frac{\Lambda + 1}{2} \mathrm{Im}\, \widetilde{Z}_1 - y\, \mathrm{Re}\, Z_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.33}$$

unde $\widetilde{Z}_1$ - este primitiva funcţiei Z_1.

Spre deosebire de cazul precedent aici este necesar să se construiască o funcţie olomorfă în afara tăieturii, Z_1 după valorile părţii ei reale date pe ambele margini ale tăieturii:

$$\mathrm{Re}\, Z_1 = -\, p(x) \quad la \quad |x| \le \ell\,,\; y = 0\,, \tag{2.3.2.34}$$

care să tindă la zero pentru $|z| \to \infty$ cel puţin ca z^{-2}. Soluţia problemei are o formă analoagă :

$$Z_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{p(\zeta)\sqrt{\ell^2 - \zeta^2}}{z - \zeta} d\zeta\,. \tag{2.3.2.35}$$

Pentru $z - \ell = re^{i\theta}$ cu $r << \ell$, se obţine :

$$Z_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(z-\ell)}} + \ldots \text{ unde } K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} p(\zeta)\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}\, d\zeta \qquad (2.3.2.36)$$

Dacă:

$$p(\zeta) = p = \text{const.} \Rightarrow K_1 = p\sqrt{\pi\ell}. \qquad (2.3.2.37)$$

Din formulele (2.3.2.32) şi (2.3.2.33), se găseşte cu uşurinţă :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= K_I \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= K_I \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= K_I \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2.38)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\Lambda - 1}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ v &= \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{\Lambda + 1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2.39)$$

Analiza atentă a relaţiilor precedente arată că în formulele (2.3.2.38) sunt neglijaţi termenii care au valori finite în vârful fisurii, iar *în cazul deformaţiei plane starea de tensiune la vârful fisurii este destul de apropiată – în general – de câmpul de tensiuni din cazul tracţiunii hidrostatice, ceea ce favorizează ruperea fragilă.*

2.3.2.4. Spaţiul cu fisură solicitat la forfecare transversală

Este cazul modului II de propagare a fisurii care se poate rezolva suprapunând peste un câmp de forfecare omogenă starea produsă de acţionarea pe marginea fisurii a tensiunilor:

$$\sigma_y = 0 \qquad \text{şi} \qquad \tau_{xy} = -\tau,$$

sau mai general : $\tau_{xy} = -\tau(x)$.

Presupunând că σ_y devine zero pe axa x, se caută soluţia sub forma:

$$\Phi(z) = -\frac{i}{2} Z_2(z), \quad \psi(z) = \frac{i}{2}\left(2 Z_2(z) + z Z_2'(z)\right), \qquad (2.3.2.40)$$

unde Z_2 este funcţia căutată. Forma funcţiei Z_2 este dictată de condiţiile la limită pe marginea fisurii: $\mathrm{Re}\, Z_2 = -\tau(x)$ pentru $x \le \ell$, $y = 0$ şi de faptul că la infinit deplasările sunt nule. Rezultă o formă analoagă cu cele anterioare:

$$Z_2 = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\tau(\zeta)\sqrt{\ell^2 - \zeta^2}}{z - \zeta}\, d\zeta, \qquad (2.3.2.41)$$

care în vecinătatea vârfului fisurii obţine o dezvoltare asimpotică:

$$Z_2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(z-\ell)}} + \ldots$$

unde s-a notat factorul de intensitate a tensiunilor:

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi \ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \tau(\zeta) \sqrt{\frac{\ell + \zeta}{\ell - \zeta}}\, d\zeta \, . \tag{2.3.2.42}$$

Dacă se cunoaşte Z_2 , atunci:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,\mathrm{Im}\, Z_2 + y\,\mathrm{Re}\, Z_2' \\ \sigma_y &= -\, y\,\mathrm{Re}\, Z_2' \\ \tau_{xy} &= \mathrm{Re}\, Z_2 - y\,\mathrm{Im}\, Z_2' \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.43}$$

$$\left.\begin{aligned} 2Gu &= \frac{\Lambda + 1}{2}\mathrm{Im}\,\tilde{Z}_2 + y\,\mathrm{Re}\, Z_2 \\ 2Gv &= -(\Lambda + 1)\,\mathrm{Re}\,\tilde{Z}_2 - y\,\mathrm{Im}\, Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.44}$$

De aici, într-o vecinătate mică a vârfului fisurii, $r << \ell$, se obţine:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2.45}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{\Lambda + 1}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ v &= \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\Lambda - 1}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{2.3.2.46}$$

În problemele analizate tensiunile în apropierea vârfului fisurii au singularităţi de forma $K_i / \sqrt{2\pi r}$, iar deplasările tind spre zero, ca şi $\frac{K_i}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}$, unde prin K_i (i = I, II, III) s-a notat coeficientul de intensitate a tensiunilor dependent de sarcină care *caracterizează fluxul de energie spre vârf ce se eliberează la desfacerea fisurii.* Soluţiile obţinute s-au referit la fisurile dreptunghiulare în corpuri infinite.

În schimb relaţiile deduse vor caracteriza comportarea tensiunilor şi deplasărilor în apropierea marginilor unor cavităţi de orişice formă, dacă prin r vom înţelege distanţa pe normala la conturul fisurii.

2.3.3. Consideraţii energetice

Studiul condiţiilor de echilibru energetic lămureşte într-un context mai general problema propagării fisurilor. De aceea se vor prezenta o parte din rezultatele obţinute de J.RICE şi D.DRUCKER, L.KACIANOV [K7], CEREPANOV [C10], NOVOJILOV [N25] etc., în sistematizarea dată în [B57].

Se consideră un corp elastic de volum V limitat de suprfaţa exterioară $S = S_u + S_F$; în starea iniţială 1 pe S_u sunt date deplasările u_i^0, iar pe S_F sunt date forţele X_{ni}^0; tensiunile şi defomaţiile specifice sunt σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 . Corpul prezintă cavităţi interioare, care în particular pot fi şi fisuri ale căror suprafeţe Σ sunt libere de solicitări.

Prin trecerea de la starea 1 la starea 2 (v. **Fig.2.3.3.1**), volumul cavităților V va crește cu ΔV, suprafețele se vor modifica cu $\Delta\Sigma$, iar ecuația echilibrului energetic are forma :

$$\Delta U + \Delta K = \Delta A + \Delta Q - \Delta\pi \ ^{\bullet}, \qquad (2.3.3.1)$$

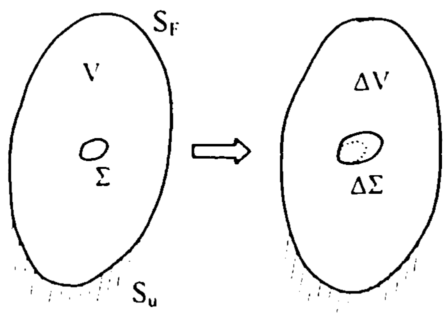


Fig. 2.3.3.1

în care ΔU reprezintă variația energiei elastice ; ΔK – variația energiei cinetice ; ΔA – variația lucrului mecanic al forțelor exterioare ; ΔQ – fluxul de căldură ; $\Delta\pi$- fluxul de energie de altă proveniență, din care se va considera numai energia cheltuită pentru rupere.

În ipoteza micilor deplasări (cvasistatice) se poate neglija variația energiei cinetice și a fluxului de căldură deci :

$$\Delta U - \Delta A = -\Delta\pi \qquad (2.3.3.2)$$

De obicei diferența $U - A = W$ definește energia potențială a corpului și deci relația precedentă devine:

$$\Delta W = -\Delta\pi \ . \qquad (2.3.3.3)$$

Este deci necesar să se calculeze variația energiei potențiale a corpului în procesul de creștere a fisurii.

Energia potențială a corpului în cele două stări va fi:

$$W^0 = \int_V w\left(\varepsilon_{ij}^0\right)dV - \int_{S_F} X_{ni}^0 u_i^0 \, dS \qquad (2.3.3.4)$$

$$W^0 + \Delta W = \int_{V-\Delta V} w\left(\varepsilon_{ij}^0 + \Delta\varepsilon_{ij}\right)dV - \int_{S_F} X_{ni}^0 (u_i^0 + \Delta u_i) dS \ . \qquad (2.3.3.5)$$

Aici $w\left(\varepsilon_{ij}\right)$ este energia specifică de deformație care pentru corpul liniar elastic este o formă pătratică omogenă pozitiv definită:

$$w\left(\varepsilon_{ij}\right) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{k\ell} \, d\varepsilon_{k\ell} \ . \qquad (2.3.3.6)$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare a fost calculat numai pe suprafața S_F, deoarece punctele de pe S_u la trecerea de la starea 1 la starea 2 nu se deplasează.

Rezultă imediat:

$$-\Delta W = \int_V w\left(\varepsilon_{ij}^0\right)dV - \int_{V-dV} w\left(\varepsilon_{ij}^0 + \Delta\varepsilon_{ij}\right)dV + \int_{S_F} X_{ni}^0 \Delta u_i \cdot dS \ . \qquad (2.3.3.7)$$

Din considerente de calcul, ultima integrală se transformă observând că pe S_F avem $\Delta X_{ni} = 0$; pe S_u, $\Delta u_i = 0$, iar pe $\Sigma + \Delta\Sigma$, $X_{ni} + \Delta X_{ni} = 0$, deci :

$$\int_{S_F} X_{ni}^0 \Delta u_i \, dS = \int_{S+\Sigma+\Delta\Sigma} \left(X_{ni}^0 + \Delta X_{ni}\right)\Delta u_i \, dS \ . \qquad (2.3.3.8)$$

Cu ajutorul teoremei lucrului mecanic virtual, integrala pe suprafața corpului S + Σ + ΔΣ se poate transforma într-o integrală pe volumul corpului V - ΔV :

• În toate aceste relații $\Delta(\ )$ reprezintă o variație a mărimii respective; nu trebuie confundat cu operatorul lui Laplace.

$$\int_{S_F} X_{ni}^{0}\,\Delta u_i\,dS = \int_{V-\Delta V}\left(\sigma_{ni}^{0}+\Delta\sigma_{ni}\right)\Delta\varepsilon_{ij}\,dV \tag{2.3.3.9}$$

Deci:

$$-\Delta W = \int_{\Delta V} w\left(\varepsilon_{ij}^{0}\right)dV + \int_{V-dV}\left\{\left(\sigma_{ij}^{0}+\Delta\sigma_{ij}\right)\Delta\varepsilon_{ij} - \left[w\left(\varepsilon_{ij}^{0}+\Delta\varepsilon_{ij}\right)-w(\varepsilon_{ij}^{0})\right]\right\}dV \tag{2.3.3.10}$$

Pentru corpurile liniar elastice expresia de sub integrala a doua este $\frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij}\,\Delta\varepsilon_{ij}$ şi folosind teorema lucrului mecanic virtual, pe baza condiţiilor la limită se obţine:

$$\frac{1}{2}\int_{V-\Delta V}\Delta\sigma_{ij}\,\Delta\varepsilon_{ij}\,dV = \frac{1}{2}\int_{S-\Sigma+\Delta\Sigma}\Delta X_{ni}\,u_i\,dS = \frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma}\Delta X_{ni}\,\Delta u_i\,dS. \tag{2.3.3.11}$$

Deci:

$$-\Delta W = \int_{\Delta V} w\left(\varepsilon_{ij}^{0}\right)dV - \frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma} X_{ni}^{0}\,\Delta u_i\,dS \tag{2.3.3.12}$$

deoarece pe suprafaţa nouă $\Delta\Sigma$ avem $\Delta X_{ni} = -\sigma_{ij}^{0}\,n_{ij} \equiv -X_{ni}^{0}$ (n_j – normala la $\Delta\Sigma$).

În cazul fisurilor, privite sub aspect matematic ca nişte tăieturi ideale, se poate considera $\Delta V \equiv 0$ şi deci:

$$-\Delta W = \frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma} X_{ni}^{0}\cdot\Delta u_i\,dS \tag{2.3.3.13}$$

Dacă se notează cu $\Delta\Sigma_+$ şi $\Delta\Sigma_-$ cele două margini ale suprafeţei fisurii pe care $X_{ni}^{0+} = -X_{ni}^{0-}$, se poate scrie:

$$-\Delta W = \frac{1}{2}\int_{\Delta\Sigma_+} X_{ni}^{0+}\left[\Delta u_i\right]dS\ , \tag{2.3.3.14}$$

unde :

$$\left[u_i\right] = \Delta u_i^{+} - \Delta u_i^{-}\ . \tag{2.3.3.15}$$

Pentru cazul bidimensional, presupunând că fisura de lungime ℓ este orientată după axa x (**Fig. 2.3.2.4**), notând prin W energia potenţială a corpului pe unitatea de lungime în direcţia axei z, se poate scrie:

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\int_0^{\Delta\ell}\left[\tau_{xy}\left(u_x^{+}-u_x^{-}\right)+\sigma_y\left(u_y^{+}-u_y^{-}\right)\right]dx\ . \tag{2.3.3.16}$$

Deoarece, din condiţii de simetrie $u_x^{+} = -u_x^{-}$, $u_y^{+} = -u_y^{-}$, rezultă :

$$\Delta W = -\int_0^{\Delta\ell}\left(\tau_{xy}\,u_x + \sigma_y\,u_y\right)dx. \tag{2.3.3.17}$$

Dacă $\Delta\ell$ se consideră la limită infinit de mic, atunci pentru calcularea energiei totale a corpului este suficient să se folosească reprezentările asimptotice ale tensiunilor şi deplasărilor în apropierea vârfului fisurii, înlocuind θ cu π şi $r = \Delta\ell - x = \Delta\ell(1-\xi)$. Atunci se obţine :

- pentru tracţiunea planului cu fantă (v. (2.3.2.39)) :

$$\Delta W_I = -\frac{K_I^2}{4\pi G}(\Lambda+1)\Delta\ell\int_0^1\sqrt{\frac{1-\zeta}{\zeta}}\,d\zeta = -\frac{K_I^2}{8G}(\Lambda+1)\Delta\ell. \tag{2.3.3.18}$$

- pentru forfecarea transversală (v. (2.3.2.46)):

$$\Delta W'_{II} = -\frac{K_{II}^2}{8G}(\Lambda+1)\Delta\ell \qquad (2.3.3.19)$$

- pentru forfecarea longitudinală (v. 2.3.2.27 bis):

$$\Delta W'_{III} = -\frac{K_{III}^2}{2G}\Delta\ell \ . \qquad (2.3.3.20)$$

Se poate trage concluzia că derivata $dW/d\ell$ are o valoare finită determinată de coeficientul de intensitate a tensiunilor.

Pentru creşterea fisurii este necesar să se învingă forţele de legătură dintre particulele materialului. Conform lui Griffith [C45],[P6],[C10], energia de distrugere este egală cu:

$$\Delta\pi = \gamma\cdot\Delta\Sigma \ , \qquad (2.3.3.21)$$

unde $\gamma > 0$ este *energia necesară pentru formarea unităţii de suprafaţă*. Relaţia precedentă devine pentru fisuri:

$$d\pi = 2\gamma\cdot d\ell \ . \qquad (2.3.3.22)$$

Cu aceste consideraţii, ecuaţia balanţei energetice (2.3.49) devine pentru cele trei cazuri studiate:

$$\frac{K_I^2}{8G}(\Lambda+1) = 2\gamma \quad ; \quad \frac{K_{II}^2}{8G}(\Lambda+1) = 2\gamma \quad ; \quad \frac{K_{III}^2}{2G} = 2\gamma \ . \qquad (2.3.3.23)$$

Pentru $p(\zeta) = p = const \;\Rightarrow\; K_I = p\sqrt{\pi\ell}$ şi din relaţia precedentă se obţine aşa-numita "**formulă a lui Griffith**" :

$$p^2 = \frac{2E\gamma}{\pi\left(1-\nu^2\right)} \ . \qquad (2.3.3.24)$$

Trebuie subliniat că schimbarea energiei potenţiale a întregului corp, dW se calculează după starea de tensiune-deformaţie din vârful fisurii care are acolo o singularitate. Astfel, se poate considera că prin vârful fisurii se scurge energia din sistem care se consumă în această zonă pentru distrugerea materialului. Dar, în vârful fisurii condiţiile de "*deformaţie mică*" şi legea lui Hooke nu sunt satisfăcute. Se consideră însă că în urma caracterului global al ecuaţiei energetice aceste incorectitudini nu au o influenţă mare asupra concluziilor finale.

2.3.4. Teorii şi criterii de rupere pentru modele elastice şi elasto-plastice

Teoria ruperii fragile a apărut de mai bine de 80 de ani, în urma lucrărilor clasice ale lui Griffith [1921]. Ea a fost privită iniţial mai mult ca un tip de problemă singulară din teoria elasticităţii, fără aplicabilitate, deoarece materialele care în condiţii normale se rup după mecanismul fragil sunt relativ rare. În ultimele decenii, interesul pentru echilibrul şi propagarea fisurilor s-a amplificat considerabil deoarece s-a clarificat că la temperaturi scăzute sau ridicate multe construcţii se rup după mecanismul cvazifragil, deşi sunt confecţionate din materiale de largă întrebuinţare care la încercările standard de tracţiune se comportă ca ideal plastice. Asemenea ruperi cvazifragile care presupun existenţa unui domeniu plastic foarte mic şi concentrat în imediata apropiere a suprafeţei fisurii pot fi tratate – aşa cum au arătat IRWIN şi OROWAN [C10] [C45] – cu ajutorul legilor obţinute pentru ruperea pur fragilă dacă se ia în considerare şi lucrul mecanic al deformaţiilor plastice cheltuit pentru formarea unităţii de suprafaţă. A fost necesară în felul acesta crearea unor modele noi mai complete, care să ţină cont de complexitatea fenomenului şi să apropie rezultatele teoretice de cele experimentale.

Cercetările efectuate în ultimii 30 de ani, asupra staticii şi dinamicii corpurilor elastice cu fisuri au permis o formulare corectă a problemelor de bază ale teoriei matematice a ruperii fragile, într-o formă generală, care îşi propune determinarea analitică a rezistenţei la rupere fragilă a unui corp cu anumite defecte (de tipul fisurilor) pentru solicitări şi condiţii ambientale date. Specificul acestor probleme este dictat de faptul că forma suprafeţei fisurilor iniţiale din corp nu este dată, circumstanţă care face ca teoria fisurilor să aibă un pronunţat caracter neliniar; de aceea, actualmente nu există soluţie analitică efectivă decât numai pentru câteva probleme particulare. Dealtfel rezolvarea problemei despre echilibrul corpului cu fisuri conţine mult mai multe informaţii decât sunt necesare în practică. Cunoaşterea câmpului tensiunilor şi deformaţiilor şi a dimensiunilor fisurilor nu este prea interesantă deoarece din punct de vedere practic este important să se ştie dacă corpul la o solicitare dată are sau nu capacitate portantă. Răspunsul la această problemă are evident un caracter esenţial integral şi nu poate fi determinat de structura locală a stării de tensiune într-un punct oarecare al corpului.

Sub acest aspect s-a considerat ca o limită importantă faptul că teoria nu cuprinde procesul de apariţie a fisurilor, iar criteriile de rezistenţă obţinute depind de dimensiunile iniţiale ale fisurilor existente în corp. Aceste idei au la bază o imagine incorectă despre evoluţia ruperii, considerând că dezvoltarea fisurilor are imediat un caracter catastrofal. În realitate, în construcţiile proiectate şi dimensionate corect dezvoltarea fisurilor are la început un caracter stabil, dimensiunile fisurilor crescând continuu odată cu creşterea solicitărilor. Asta înseamnă că dacă în intervalul de variaţie a solicitărilor se asigură o dezvoltare stabilă a fisurilor, caracteristica de rezistenţă a corpului nu depinde de fapt de dimensiunile iniţiale ale fisurilor.

2.3.4.1. Teoria lui GRIFFITH
([C10], [C45], [P6],[B9], [B10], [B11])

Se propune drept criteriu pentru extensia unei fisuri, egalitatea dintre variaţia de energie a câmpului de tensiuni elastice şi energia superficială a suprafeţelor libere create prin avansarea fisurii. Lucrul mecanic necesar pentru formarea unităţii de suprafaţă liberă se notează cu γ şi se numeşte ***densitatea de energie superficială*** (sau energia superficială specifică); această mărime poate fi privită ca *o constantă caracteristică pentru un material în condiţii ambientale date*. Ea poate fi apreciată folosind reprezentarea aproximativă ($\sigma = \sigma_t \sin 2\pi \frac{r - r_0}{r_0}$ [B57]), presupunând că $\sigma = 0$ la $r \geq 1{,}5\, r_0$ – din cauza micşorării rapide a forţelor de aderenţă :

$$2\gamma = \int_{r_t}^{\infty} \sigma\, dr \approx \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sigma_t \sin 2\pi\varepsilon \cdot r_0\, d\varepsilon = \frac{\sigma_t \cdot r_0}{2\pi} \approx 0{,}01 E r_0 . \tag{2.3.4.1}$$

Din condiţia echilibrului energetic aleasă drept criteriu de extensie a fisurii :

$$dW = -d\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \ell}(W + \pi) = 0 \ , \tag{2.3.4.2}$$

pentru cazul tracţiunii uniforme a planului cu tensiunea p când :

$$W = -\left(1 - \nu^2\right)\frac{\pi \ell^2 p^2}{E} \quad ; \quad \pi = 4\ell\gamma \tag{2.3.4.3}$$

se obţine formula lui Griffith.

Din această relaţie, pentru o lungime ℓ dată se poate determina tensiunea critică $p = p_c$ care duce la creşterea fisurii. Dar odată cu creşterea lungimii ℓ tensiunea critică scade, deci mai departe se produce o propagare intempestivă a fisurii (asemenea fisuri se numesc neechilibrate). Din (2.3.3.24) rezultă că pentru un material dat:

$$p\sqrt{\pi \ell} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1 - \nu^2}} = \text{const.} \tag{2.3.4.4}$$

Pentru materialele fragile această dependenţă de tipul $p_c \approx 1/\sqrt{\ell}$ este confirmată experimental (v. experienţele cu epruvete din sticlă ale lui Griffith ([B57]). Dar în cazul în care ruperea este însoţită de apariţia unor deformaţii plastice, abaterile cantitative sunt relativ mari.

În felul acesta ***criteriul energetic al lui Griffith*** are următoarea formulare: ***ruperea se dezvoltă dacă intensitatea energetică care se eliberează atinge valoarea critică***.

2.3.4.2. Corecţii plastice. Teoria lui IRWIN şi OROWAN

([C6], [C10], [C45], [B10], [B14])

Experimental s-a constatat că la suprafaţa fisurii este aderent un strat subţire de metal deformat plastic care atinge câteodată 0,2...2,4 mm. În acest caz lucrul mecanic consumat pentru deformarea plastică a unităţii de suprafaţă a acestui strat este cu câteva ordine de mărime mai mare decât energia specifică superficială γ a ruperii ideal-fragile.

După cum au propus în 1952 Orowan şi Irwin, se poate ţine cont de lucrul mecanic plastic în cadrul aceleaşi scheme a lui Griffith dacă se atribuie energiei superficiale un sens mai larg, considerând că este formată din energia de suprafaţă a ruperii fragile γ şi lucrul mecanic al deformaţiilor plastice γ_p. Atunci formula lui Griffith are forma:

$$p^2 = \frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi(1 - \nu^2)l} \tag{2.3.4.5}$$

Este interesant de a sublinia că pentru metale $\gamma_p >> \gamma$ (de exemplu pentru oţel $\gamma_p \approx 10^3 \cdot \gamma$), ceea ce explică rezistenţa sporită a metalelor faţă de ruperea fragilă. În felul acesta lărgirea teoriei permite să se includă într-o formă unitară şi ruperile denumite cvazifragile sau fragile-vâscoase.

Discutarea amănunţită a limitelor de utilizare a acestui model se poate găsi în lucrările lui V.V. NOVOJILOV [N22], [N23], [N24].

2.3.4.3. Criteriul lui IRWIN

([K6], [K7], [B60])

Unei relaţii de tipul:

$$dW = \frac{1}{2} \int_{d\Sigma_+} X_{ni}^+ [\Delta u_i] dS$$

i se poate da o formă structurală de tipul

$$dW = - \mathcal{F} \cdot d\Sigma_+ \tag{2.3.4.6}$$

unde factorul $\mathcal{F}$ este finit şi depinde de dimensiunile fisurii, de forma corpului, de condiţiile la limită şi de constantele elastice. De exemplu, din formula (2.3.64) se poate deduce că :

$$\mathcal{F} = \frac{K_I^2}{4G}(\Lambda + 1) \tag{2.3.4.7}$$

sau din (2.3.3.19) $\Rightarrow$

$$\mathcal{F} = \frac{K_{II}^2}{4G}(\Lambda + 1) \text{ ; etc.} \tag{2.3.4.8}$$

Pentru cazul unei fisuri simetrice care se propagă în ambele părţi, din faptul că $d\pi = 4\gamma d\ell$ se găseşte condiţia lui Griffith pentru propagarea fisurii sub forma :

$$\frac{\partial W}{\partial \ell} = -4\gamma \ . \tag{2.3.4.9}$$

Cu notaţia $d\Sigma_{+} = 2d\ell$ condiţia precedentă se scrie sub forma :

$$\mathcal{T} = 2\gamma \ . \qquad (2.3.4.10)$$

Pe de altă parte soluţiile prezentate în § **2.3.2.** arată că factorul $\mathcal{T}$ are structura:

$$\mathcal{T} = cK^2 \ , \qquad (2.3.4.11)$$

unde K este coeficientul de intensitate a tensiunilor, iar c depinde numai de constantele elastice.

Din (2.3.4.10) şi (2.3.4.11) reiese imediat că :

$$K = \sqrt{\frac{2\gamma}{c}} = K_c \ . \qquad (2.3.4.12)$$

Aceasta este cunoscuta ***formulă a lui Irwin***, care înlocuieşte criteriul energetic global al lui Griffith cu nişte condiţii "*de forţă*" la vârful fisurii. În felul acesta raportul K^2 / G se poate trata ca şi o forţă de extensie a fisurii. Fisura începe să se propage atunci când forţa K atinge valoarea critică K_c , caracteristică pentru materialul dat, criteriul de rupere având în acest caz un caracter local. În fond, condiţia lui Griffith şi criteriul lui Irwin sunt echivalente; ultimul este mai comod în aplicaţii deoarece analiza se face într-o vecinătate a vârfului fisurii şi se poate astfel aprecia pericolul de rupere după intensitatea corespunzătoare a stării de tensiune. *Deşi experimental nu se confirmă că K_c este o caracteristică riguros constantă de material, criteriul lui Irwin este mai bun decât alţi parametri care caracterizează tenacitatea ruperii, respectiv sensibilitatea materialului la concentraţia tensiunilor.*

Valoarea critică K_c care caracterizează o stare periculoasă în vârful fisurii poate fi determinată experimental pe epruvete speciale cu crestături, în funcţie de diferiţi factori: temperatură, viteză de solicitare, mediu ambiant etc. De obicei se încearcă epruvete plate care au o fisură centrală la care în regim subcritic se măsoară creşterea lungimii cu creşterea solicitării. Aceste date permit determinarea lui K_c. Se precizează însă că în cazul deformaţiilor plastice mari în vârful fisurii, obţinerea unor valori corecte pentru K_c este destul de greoaie.

Detalii asupra cercetărilor experimentale şi a utilizării acestor rezultate se dau în [C45] şi STAS 9760-84. Se pot cerceta de asemenea şi STAS E 12803-90, ASTM E 813-87, ASTM E 1290-89.

2.3.4.4. Modelul lui G. I. BARENBLATT
([B9], [B10], ..., [B18])

Dacă se analizează problema tracţiunii planului cu fisură, atunci imaginea deplasărilor v (la $\theta = \pm\pi$) depinde esenţial de semnul lui K_I. De exemplu, în **Fig. 2.3.4.1** s-au reprezentat marginile fisurii după deformaţie. Pentru $K_I = 0$ tensiunile sunt finite şi marginile fisurii formează un vârf. Dacă $K_I > 0$, tensiunile sunt finite şi după solicitare, capătul fisurii are o formă netedă; cazul $K_I < 0$ nu are sens fizic.

Trebuie să se sublinieze că aceste rezultate sunt o consecinţă a utilizării teoriei liniare a elasticităţii în epicentrul deformaţiilor mari şi nu sunt în concordanţă cu tabloul fizic real din vârful fisurii. Încă Griffith în 1920 a presupus că imaginile fisurii sub influenţa forţelor mari de aderenţă, de ordinul rezistenţei teoretice, trebuie să se închidă perfect, formând un vârf (cazul a, **Fig. 2.3.4.1**).

Mai mult, în materialele reale imaginea frontului fisurii este foarte complicată din cauza unor defecte diferite, unele dintre ele aflându-se chiar în punctele de propagare.

De aceea modelul propus de Barenblatt încearcă să ţină cont de forţele de aderenţă, rămânând însă în cadrul teoriei liniare a elasticităţii. Se presupune că într-o zonă mică de lungime a ($a \ll l$) de la vârful fisurii (**Fig. 2.3.4.2**) acţionează forţele de aderenţă $Q(x)$ a căror distribuţie în general nu este cunoscută. Se mai postulează că în starea limită configuraţia frontului fisurii nu depinde de sarcinile date şi pentru un material dat, în condiţii de experimentare date, este totdeauna aceeaşi. Fisurile au forma din **Fig. 2.3.4.1.a**), tensiunile din vârful fisurii sunt finite, iar noul coeficient de intensitate a tensiunilor este $K_I' = 0$. Deci, în formula (2.3.36) $p(\xi)$ este de forma:

$$\begin{cases} p(\zeta) & \text{, dacă } 0 \le |\zeta| < l - a \\ p(\zeta) - Q(\zeta), & \text{dacă } l - a \le |\zeta| < l \end{cases} \tag{2.3.4.13}$$

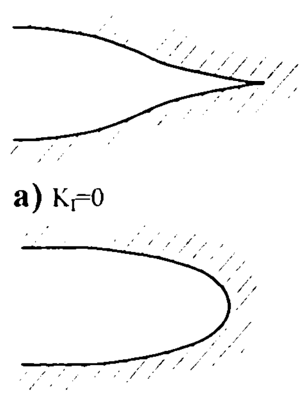


Fig.2.3.4.1

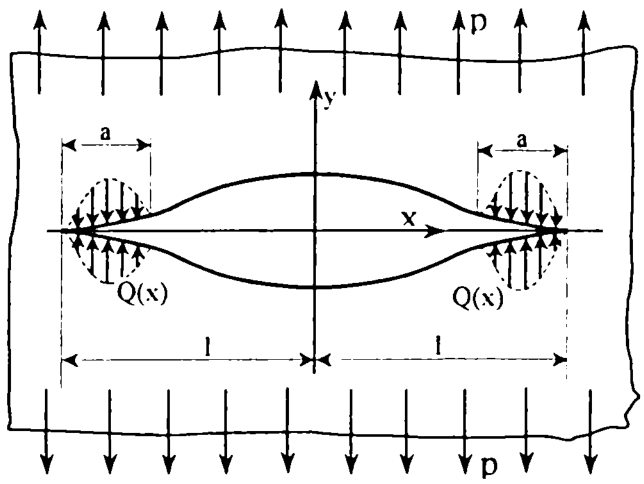


Fig. 2.3.4.2

Condiţia $K_I' = 0$ are următoarea formă desfăşurată:

$$\int_{-l}^{l} p(\zeta)\sqrt{\frac{l+\zeta}{l-\zeta}}d\zeta - \int_{l-a}^{l} Q(\zeta)\sqrt{\frac{l+\zeta}{l-\zeta}}d\zeta - \int_{-l}^{-l+a} Q(\zeta)\sqrt{\frac{l+\zeta}{l-\zeta}}d\zeta = 0 \tag{2.3.4.14}$$

Prima integrală a fost calculată şi este egală cu $K_I\sqrt{\pi l}$. A doua integrală, dacă se înlocuieşte $l - \zeta = \xi$ şi $l + \zeta \cong 2l$, va avea formula:

$$\sqrt{2l}\int_0^a \frac{Q(l-\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi = \sqrt{2l}\,K \tag{2.3.4.15}$$

Mărimea K se numeşte **coeficient de aderenţă** şi poate fi considerată ca o constantă de material.

A treia integrală este mică în comparaţie cu celelalte două şi se neglijează. Rezultă:

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}K_I \tag{2.3.4.16}$$

Deci, în cadrul teoriei liniare a elasticităţii în ipoteza a<< l modelul lui Barenblatt formal este echivalent cu criteriul lui Irwin. Pentru corpurile elastice este preferată schema lui Irwin, deoarece utilizează o caracteristică stabilă şi nu introduce ipoteze suplimentare despre condiţii locale în domenii de limită. Utilitatea modelului lui Barenblatt constă în posibilităţile de analiză mai detaliată a stării din vârful fisurii, în particular la analiza proceselor variabile.

2.3.4.5. Modelul elasto-plastic al lui DUGDALE D.S. şi MUSHELIŞVILI N.I. ([D38], [D39], [M70])

Puţinele date experimentale şi soluţii analitice care există în acest domeniu atestă faptul că zonele plastice au în general o configuraţie foarte complicată.

Cu toate acestea pentru aplicaţii sunt utile soluţiile obţinute prin schematizarea domeniului elasto-plastic cu zonele plastice degenerate de diverse forme.

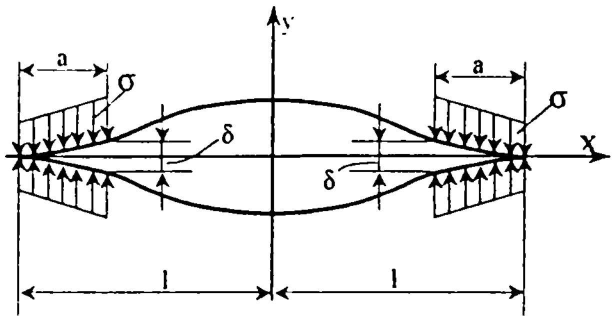


Fig. 2.3.4.3

Astfel, modelul propus de Dugdale, utilizând ecuaţiile lui Musheli$\c{s}$vili, admite că în domeniul de capăt al fisurii se poate considera o zonă îngustă plastică de lungime a (**Fig.2.3.4.3**).

Tensiunea σ_y în această zonă este constantă şi egală cu limita de curgere σ_c (conform condiţiei de plasticitate a lui Tresca).

În acest context problema se reduce la construirea soluţiei pentru planul cu fisură cu zone de capăt determinate solicitate de tensiunile constante $\sigma_y = \sigma_c$.

O problemă mult mai generală de acelaşi tip a fost rezolvată în paragraful precedent. Aici, considerând $Q(\xi) = \sigma_c$, se obţine:

$$\sqrt{\pi \ell}\, K_I - \sigma_c \int_{\ell - a}^{\ell} \sqrt{\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}}\, d\xi - \sigma_c \int_{-\ell}^{-\ell + a} \sqrt{\frac{\ell + \xi}{\ell - \xi}}\, d\xi = 0 \ , \tag{2.3.4.17}$$

de unde:

$$\sqrt{\pi \ell}\; K_I - 2\sigma_c\, \ell \arccos\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) = 0 \ , \tag{2.3.4.18}$$

care determină lungimea a a zonei plastice. De exemplu, pentru placa solicitată la tracţiune la infinit uniform cu $p(\xi) = p = \text{const.}$ cu $K_I = p\sqrt{\pi \ell}$ se obţine:

$$\frac{a}{\ell} = 1 - \cos\frac{\pi p}{2\sigma_c} \ . \tag{2.3.4.19}$$

Experienţele au confirmat formarea unei asemenea zone plastice înguste pentru metalele care au o limită de curgere pronunţată, iar măsurătorile pentru zonele plastice făcute de Dugdale ş.a sunt în concordanţă cu calculele.

Deplasarea verticală pentru y = 0 şi $x = \ell - a$ se poate calcula cu formulele din paragrafele precedente:

$$2\upsilon = \frac{\Lambda + 1}{2G}\left(\operatorname{Im} \widetilde{Z}_1\right)_{y = 0,\, x = \ell - a} \ . \tag{2.3.4.20}$$

De aici se poate calcula distanţa dintre marginile fisurii, la începutul zonei plastice ("deschiderea" δ, v. **Fig.2.3.4.3**). Efectuând calculele se obţine:

$$\delta = \frac{(\Lambda + 1)\ell \sigma_c}{\pi G}\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)\ln\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)^{-1} \tag{2.3.4.21}$$

Această deschidere δ se alege de obicei în calitate de criteriu de producere a ruperii: fisura creşte şi conduce la rupere când deschiderea atinge valoarea critrică δ_c ; ea devine astfel o caracteristică de rezistenţă a materialului.

La fisuri de lungime mare, cu tensiuni relativ mici, pentru :

$$\overline{\delta} = \delta \Big/ \left[(\Lambda + 1)\cdot \ell \sigma_c / \pi G\right] << 1 \quad , \quad p / \sigma_c << 1$$

se obţine $a / \ell << 1$. Dacă se dezvoltă în serie relaţia (2.3.4.21) şi se reţin numai primii termeni, presupunând $\delta = \delta_c$ se obţine :

$$p\sqrt{\pi \ell} = \sqrt{E \sigma_c\, \delta_c} \ , \tag{2.3.4.22}$$

complet analoagă cu criteriul lui Irwin. Astfel noua caracteristică de material δ_c se reduce la cea anterioară K_c.

În literatură se găsesc şi alte modele: WELLS, LEONOV şi PANASIUK [P7],[P12],[P15].

§ 2.4. *PROBLEME TEST („BENCHMARKS")*

Pentru a putea verifica o serie de programe noi sau de generalizări a unor rezultate parţiale, voi prezenta în continuare unele probleme clasice – pe care le-am denumit "*probleme test*" – pentru care se poate da o soluţie analitică completă. La unele din aceste probleme am dat mai multe metode de rezolvare iar *pe altele le-am generalizat obţinând rezultate noi, originale*.

2.4.1. Problema test Nr. I: Problema KIRSCH*

Aşa numita "**problemă Kirsch**" se ocupă cu cercetarea influenţei pe care un orificiu circular de diametru 2a o are asupra distribuţiei tensiunilor din zona slăbită în cazul unei plăci dreptunghiulare (teoretic infinită) solicitată la tracţiune de o tensiune uniform distribuită la infinit σ_0 (notată uneori şi σ_∞ sau p). (v. **Fig. 2.4.1.1**). Particularitatea acestei probleme constă în faptul că în zonele îndepărtate de orificiu ("teoretic la infinit") condiţiile de frontieră privind câmpul de tensiuni sunt mai bine exprimate în coordonate carteziene, pe când cele din jurul orificiului trebuiesc scrise în coordonate polare.

Să presupunem că avem o placă teoretic infinită de secţiune dreptunghiulară constantă A, solicitată la tracţiune de o tensiune uniform distribuită pe feţele ei de capăt, de valoare σ_0 (v. **Fig. 2.4.1.1a**).

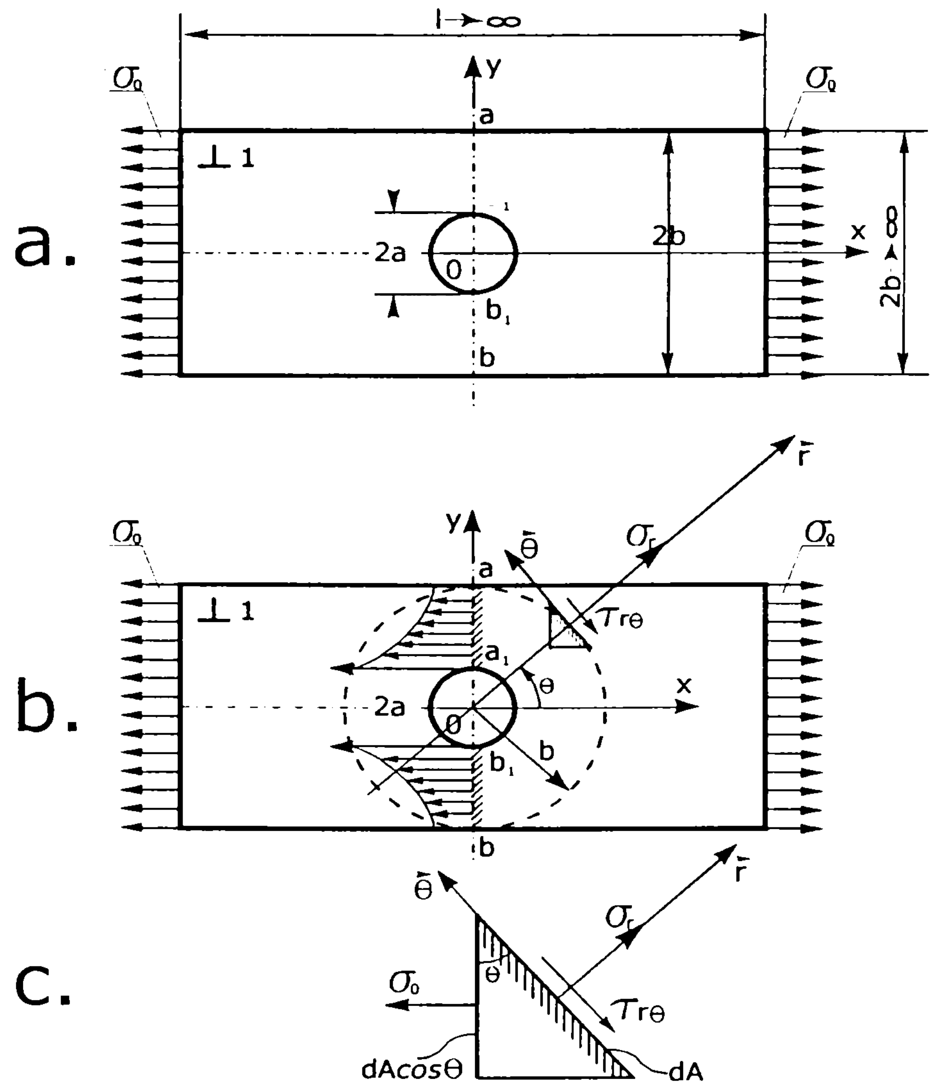


Fig. 2.4.1.1

* KIRSCH în "Zeitschr.d.Ver.d.Ing., 1898.

Pe axa Ox placa are un orificiu circular de diametru $2a << 2b$. Existența acestui orificiu va influența distribuția tensiunilor din zonă, astfel încât în secțiunea *a-b* tensiunile vor fi distribuite neuniform, având loc o concentrare pronunțată în punctele $a_1 - b_1$.

Rezolvarea problemei o vom face printr-un mic artificiu de calcul. Astfel, vom decupa (vom izola) din placă un corp cilindric, cu ajutorul unei suprafețe cilindrice concentrice cu orificiul, având raza exterioară egală cu b. În continuare vom examina starea de tensiune a acestui corp, independent de restul plăcii. În felul acesta în loc să calculăm placa, am redus problema la calculul unui inel cu pereți groși (cu lățimea egală cu grosimea plăcii și egală eventual cu unitatea), problemă rezolvată în literatură, la "*Calculul tuburilor cu pereți groși*" [D19] [P47] [P48]. Pentru început trebuie să stabilim solicitările exterioare care lucrează pe fețele acestui inel. Aici vom aplica principiul lui Saint-Venant și vom considera că dacă dimensiunea b este mult mai mare decât a atunci tensiunile care lucrează pe suprafața cilindrică exterioară de rază b vor fi foarte puțin diferite de cele care ar apărea dacă placa nu ar avea nici un orificiu. În acest caz, acceptând această ipoteză, tensiunile de pe suprafața exterioară se pot calcula cu formulele de la tracțiunea monoaxială când s-au determinat tensiunile de pe o suprafață înclinată. Utilizând notațiile din **Fig. 2.4.1.1.c)** se obține, prin simple ecuații de proiecții:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_0 \cos^2\theta = \dfrac{\sigma_0}{2} + \dfrac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \sigma_0 \sin^2\theta = \dfrac{\sigma_0}{2} - \dfrac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\sigma_\theta \sin\theta\cos\theta = -\dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \end{cases} \qquad (2.4.1.1)$$

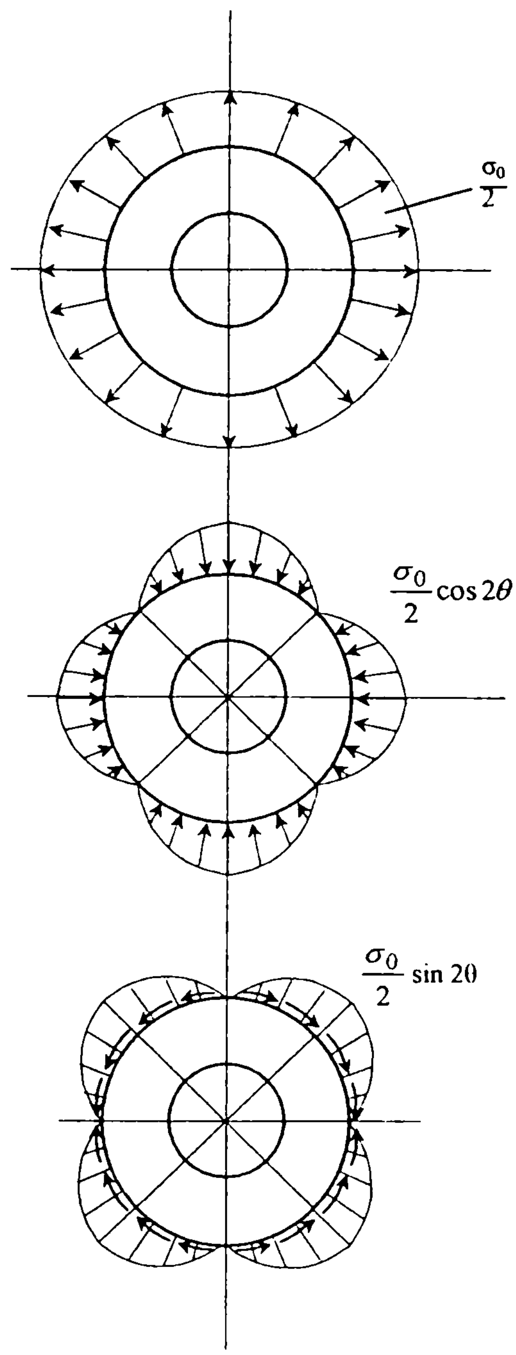


Fig. 2.4.1.2

În acest caz condițiile la limită care se pot pune pentru inelul astfel decupat, sunt evidente:

- pentru $r = R_i = a \;\Rightarrow\; \sigma_r = 0,\;\; \tau_{r\theta} = 0$
  (fața interioară este nesolicitată)

- pentru $r = R_e = b \;\Rightarrow$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_0(1+\cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta .$$

Mergem mai departe cu artificiul, regrupând tensiunile exterioare și vom considera că pe suprafața exterioară a inelului forțele pot fi descompuse în două părți: prima – datorită acțiunii componentei constante pe întregul perimetru exterior egală cu $\sigma_0/2$; a doua formată din componentele normale

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta \text{ și tangențiale } \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta .$$

O schemă simbolică pentru aceste regrupări este dată în **Fig. 2.4.1.2**.

Primul caz este rezolvat la studiul tuburilor cu pereți groși solicitați la presiune exterioară (v. I. DOBRE [D19] p.225). S-au obținut tensiunile:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\sigma_0}{2}\dfrac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \dfrac{R_i^2}{r^2}\right) = \dfrac{\sigma_0}{2}\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_0}{2}\dfrac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \dfrac{R_i^2}{r^2}\right) = \dfrac{\sigma_0}{2}\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \tag{2.4.1.2}$$

Tensiunile produse de cel de-al doilea caz de încărcare trebuie să le determinăm. Pentru aceasta vom utiliza metoda generală a separării variabilelor, alegând o funcţie Airy de forma:

$$F(r,\theta) = f(r)\cdot\cos 2\theta \tag{2.4.1.3}$$

căreia îi impunem condiţia ca să satisfacă ecuaţia de continuitate. Forma acestei funcţii de tensiune, este sugerată de rezultatele generale obţinute în "Fizica matematică" la studiul ecuaţiei lui Laplace, dacă se reţin numai termenii ce conţin ca factor pe $\cos 2\theta$, factor care apare în mod constant în expresiile tensiunilor.

Calculând derivatele parţiale necesare, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = f'(r)\cdot\cos 2\theta\ ; \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = f''(r)\cdot\cos 2\theta ; \\ \dfrac{\partial^3 F}{\partial r^3} = f'''(r)\cdot\cos 2\theta ; \\ \dfrac{\partial^4 F}{\partial r^4} = f^{IV}(r)\cdot\cos 2\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -2f(r)\cdot\sin 2\theta\ ; \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -4f(r)\cdot\cos 2\theta\ ; \\ \dfrac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} = 8f(r)\cdot\sin 2\theta\ ; \quad \dfrac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} = 16f(r)\cdot\cos 2\theta\ ; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 F}{\partial r^2\partial\theta} = -2f''(r)\cdot\sin 2\theta\ ; \quad \dfrac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2} = -4f''(r)\cdot\cos 2\theta \\ \dfrac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2} = -4f'(r)\cdot\cos 2\theta \end{cases} \tag{2.4.1.4}$$

Ecuaţia de continuitate devine:

$$f^{IV}(r) + \frac{2}{r}f'''(r) - \frac{9}{r^2}f''(r) + \frac{9}{r^3}f'(r) = 0 \tag{2.4.1.5}$$

Făcând schimbarea de variabilă $r = e^t \quad\Rightarrow\quad t = \ln r$ ecuaţia precedentă obţine forma:

$$\frac{d^4 f}{dt^4} - 4\frac{d^3 f}{dt^3} - 4\frac{d^2 f}{dt^2} + 16\frac{df}{dt} = 0 \tag{2.4.1.6}$$

Ecuaţia caracteristică $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 16\lambda = 0$ are rădăcinile: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = -2$. Deci:

$$f(t) = Ae^{4t} + Be^{2t} + Ce^{0t} + De^{-2t}$$

sau, revenind la variabila r:

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2} \tag{2.4.1.7}$$

Funcţia lui Airy este atunci de forma:

$$F(r,\theta) = \left(Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2}\right)\cos 2\theta \tag{2.4.1.8}$$

Se pot acum calcula tensiunile care, exprimate cu ajutorul funcţiei Airy, au forma :

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad ; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \qquad (2.4.1.9)$$

Rezultă :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -2\left(B + \frac{2C}{r^2} + \frac{3D}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= 2\left(6Ar^2 + B + \frac{3D}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= 2\left(3Ar^2 + B - \frac{C}{r^2} - \frac{3D}{r^4}\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.1.10)$$

Cele patru constante de integrare se determină din condiţiile la limită, care explicitate au forma:

$$\begin{aligned} &\text{I. pentru } r = a,\ \sigma_r = 0 \quad (\forall\,\theta \in [0, 2\pi]) && \Rightarrow\ B + \frac{2C}{a^2} + \frac{3D}{a^4} = 0 \\ &\text{II. pentru } r = b \text{ şi } \theta = 0 \ \Rightarrow\ \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} && \Rightarrow\ B + \frac{2C}{b^2} + \frac{3D}{b^4} = -\frac{\sigma_0}{4} \\ &\text{III. pentru } r = a,\ \tau_{r\theta} = 0 \quad (\forall\,\theta \in [0, 2\pi]) && \Rightarrow\ 3Aa^2 + B - \frac{C}{a^2} - \frac{3D}{a^4} = 0 \\ &\text{IV. pentru } r = b \text{ şi } \theta = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} && \Rightarrow\ 3Ab^2 + B - \frac{C}{b^2} - \frac{3D}{b^4} = -\frac{\sigma_0}{4} \end{aligned} \qquad (2.4.1.11)$$

Sistemul (2.4.1.11) se rezolvă imediat dacă vom ţine cont că b este foarte mare, teoretic $b \to \infty$ (de altfel în cărţile de elasticitate (v. BEZUHOV [B40]), se impune iniţial ca $\frac{a}{b} \to 0$). În acest caz din ecuaţia a doua rezultă $B = -\sigma_0/4$ iar din ultima ecuaţie $A = 0$. Sistemul (2.4.1.11) devine:

$$\begin{cases} \dfrac{2C}{a^2} + \dfrac{3D}{a^4} = \dfrac{\sigma_0}{4} \\ -\dfrac{C}{a^2} - \dfrac{3D}{a^4} = \dfrac{\sigma_0}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\sigma_0}{2}a^2 \\ D = -\dfrac{\sigma_0}{4}a^4 \end{cases} \qquad (2.4.1.12)$$

Înlocuind aceste constante în (2.4.1.10) se obţin valorile căutate ale tensiunilor, pentru cel de-al doilea caz de încărcare studiat:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{\sigma_0}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_0}{2}\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.1.13)$$

Să ne întoarcem la expresiile tensiunilor (2.4.1.2) produse de tracţiunea uniformă $\sigma_0/2$; dacă facem $b \to \infty$, ele devin :

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (2.4.1.14)$$

Prin suprapunerea celor două soluții, (2.4.1.13) și (2.4.1.14), se obține distribuția tensiunilor în placă (***soluția problemei Kirsch în coordonate polare***):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_0}{2}\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_0}{1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_0}{2}\left(1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{2.4.1.15}$$

Reprezentarea grafică a relațiilor (2.4.1.15) ilustrează variația tensiunilor în placă.

a) Variația tensiunii normale radiale σ_r

În lungul axei Ox (pentru $\theta = 0$) tensiunea σ_r devine:

$$\sigma_r = \sigma_0\left(1-\frac{5a^2}{2r^2}+\frac{3a^4}{2r^4}\right) \tag{2.4.1.16}$$

Pe conturul orificiului în punctul $r = a$ (pct.1, **Fig.2.4.1.2**) $\sigma_{r(1)} = \sigma_0\left(1-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=0$. În punctul 2 de pe axa Ox, foarte îndepărtat de orificiu ($r \to \infty$) obținem: $\sigma_{r(2)} = \sigma_0(1-0+0)=\sigma_0$. Reprezentarea grafică este făcută în **Fig.2.4.1.3**; atenție însă, în această reprezentare se dă numai variația mărimii tensiunii pentru $\theta=0$, pe măsură ce ne îndepărtăm de gaură; sensul tensiunii este cel indicat pe elementul de volum desenat deasupra diagramei, ea fiind orientată după axa Ox.

În lungul axei Oy (pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$) vom avea :

$$\sigma_r = \frac{3\sigma_0}{2}\cdot\frac{a^2}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) \tag{2.4.1.17}$$

În punctul 3, pentru $r = a \Rightarrow \sigma_{r(3)} = 0$; analog în punctul 4, pentru $r \to \infty \Rightarrow \sigma_{r(4)} = 0$. Valoarea maximă se obține anulând derivata de ordinul întâi:

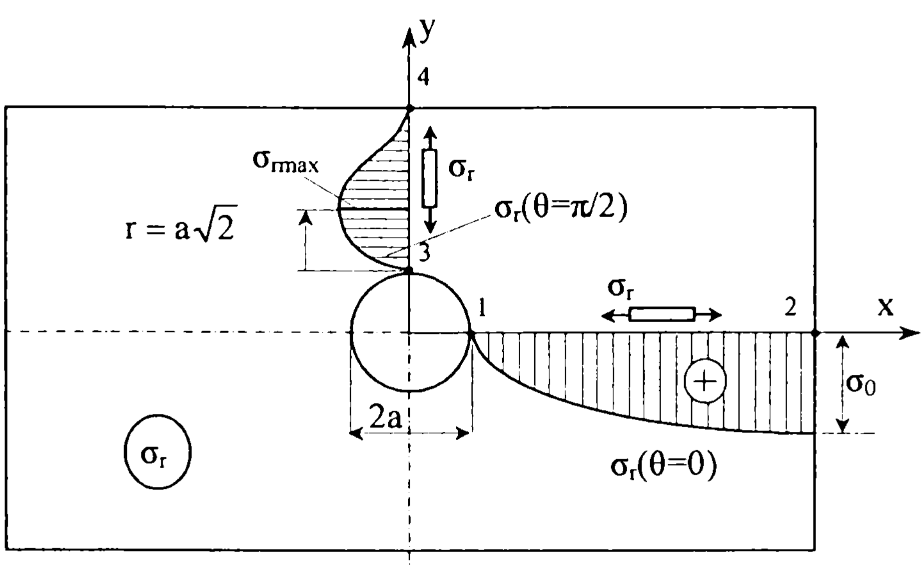


Fig. 2.4.1.3

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{3\sigma_0 a^2}{2}\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{4a^2}{r^5}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad r=a\sqrt{2}$$

$$\sigma_{r\max}=\frac{3\sigma_0}{2}\cdot\frac{a^2}{2a^2}\left(1-\frac{a^2}{2a^2}\right)=\frac{3}{8}\sigma_0 \tag{2.4.1.18}$$

b) Variaţia tensiunii normale circumferenţiale (σ_θ)

În lungul axei x ($\theta = 0$) :

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_0}{2}\cdot\frac{a^2}{r^2}\left(1-3\frac{a^2}{r^2}\right) \tag{2.4.1.19}$$

- punctul 1 (**Fig. 2.4.1.4**) $r = a, \Rightarrow \sigma_{\theta(1)} = -\sigma_0$

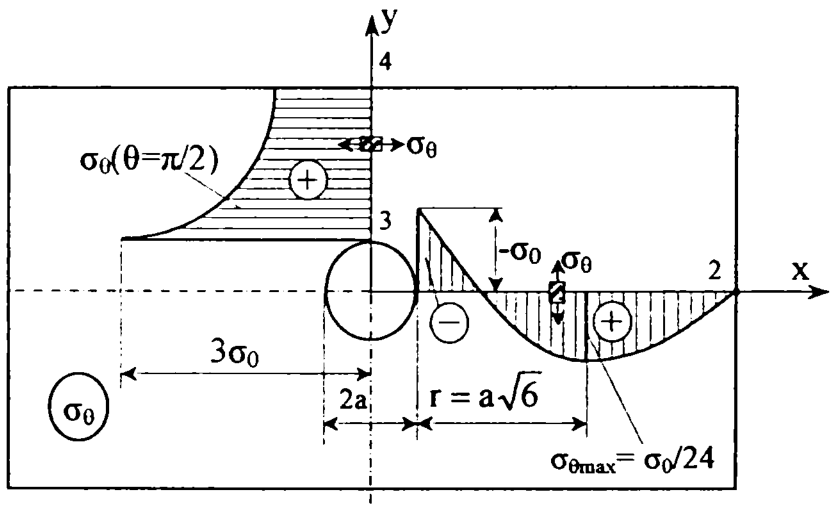


Fig. 2.4.1.4

- punctul 2, $r \to \infty \Rightarrow \sigma_{\theta(2)} = 0$

Tensiunea maximă se găseşte analog, anulând derivata:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr}=\frac{\sigma_0 a^2}{2}\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{3a^2\cdot 4r^3}{r^8}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad r=a\sqrt{6}$$

$$\sigma_{\theta\max}=\frac{\sigma_0}{2}\cdot\frac{a^2}{6a^2}\left(1-3\frac{a^2}{6a^2}\right)=\frac{\sigma_0}{24} \tag{2.4.1.20}$$

În lungul axei $y\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sigma_\theta=\sigma_0\left(1+\frac{a^2}{2r^2}+\frac{3a^4}{2r^4}\right) \tag{2.4.1.21}$$

- punctul 3, r = a $\Rightarrow \sigma_{\theta(3)} = 3\sigma_0$ (cea mai mare valoare a tensiunilor care apar în placă) ;
- punctul 4 , $r \to \infty \Rightarrow \sigma_{\theta(4)} = \sigma_0$.

Deci, pe conturul orificiului pentru $r = a$ (punctul 3 din **Fig. 2.4.1.4**), tensiunea σ_θ este de trei ori mai mare decât tensiunea medie σ_0 din placă. Expresia lui σ_θ arată că el descreşte rapid şi tinde către σ_0, imediat ce se îndepărtează de marginea orificiului pe axa Oy.

Rezultatele obţinute prezintă o importanţă teoretică şi practică deosebită, ele ilustrând şi caracterizând cantitativ efectul de concentrare a tensiunilor pe marginea orificiului din placă; se justifică astfel necesitatea practică a consolidării marginilor acestor orificii.

Verificarea numerică şi experimentală a acestor rezultate va fi făcută în capitolele 3 şi 5.

2.4.2. Problema test Nr. II: Planul cu orificiu eliptic

Este una dintre cele mai cunoscute probleme din literatura de (M.R.), deoarece, dacă semiaxa mică a elipsei tinde la zero, se obţine planul cu fisură – o problemă tipică pentru definirea conceptelor fundamentale ale acestei ramuri moderne a solidului deformabil. De-a lungul timpului această problemă a primit tot felul de soluţii şi a contribuit decisiv la dezvoltarea cercetărilor moderne de (M.R.), şi astăzi existând numeroase lucrări ştiinţifice consacrate acestei probleme. Prima soluţie a fost dată de Kolosov în 1909, apoi Inglis în 1913 – folosind coordonate curbilinii elipsoidale, Mushelişvili în 1919 – utilizând transformarea conformă, Westergaard în 1939 cu o metodă originală în complex şi Irwin în 1957 – care se ocupă în fapt de problema fisurii şi introduce conceptul fundamental de *„factor de intensitate a tensiunilor”*.

SOLUŢIA LUI MUSHELIŞVILI (1919)

2.4.2.1. Transformarea conformă. Unele elemente de sinteză*

Fie z şi ζ două variabile complexe legate între ele prin relaţia:

$$z = \omega(\zeta) \tag{2.4.2.1}$$

unde $\omega(\zeta)$ este o funcţie uniformă şi analitică într-un domeniu Ω oarecare din panul variabilei ζ. Prin această relaţie se pun în corespondenţă biunivocă punctele domeniului Ω din planul ζ cu punctele domeniului $\mathcal{D}$ din planul z (v. **Fig. 2.4.2.1**); dacă această transformare realizează invarianţa unghiurilor ea se numeşte **transformare conformă**. Se demonstrează că o funcţie olomorfă cu derivata nenulă defineşte o transformare conformă.

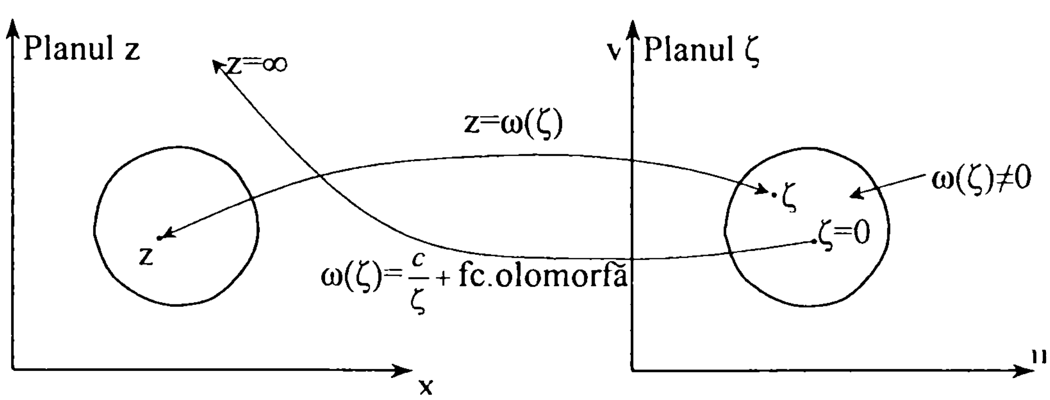


Fig. 2.4.2.1

Domeniile Ω şi $\mathcal{D}$ pot fi atât mărginite cât şi nemărginite. Dacă, de exemplu, domeniul Ω este marginit iar domeniul $\mathcal{D}$ nemărginit, atunci funcţia $\omega(\zeta)$ trebuie să ia valoarea infinit pentru un punct din domeniul Ω, ceea ce înseamnă că funcţia $\omega(\zeta)$ trebuie să aibă în acest punct un pol simplu. În particular, dacă punctului $z = \infty$ îi corespunde punctul $\zeta = 0$, funcţia $\omega(\zeta)$ va trebui să fie de forma:

---

* O prezentare amănunţită a problemei se poate găsi în: V.I. SMIRNOV Vol. III, partea a II-a (p.137-243)[S38]; D. HOMENTCOVSCHI p.167-211 [H34]; MUSHELIŞVILI [M69]

$$\omega(\zeta)=\frac{c}{\zeta}+\text{ o funcţie olomorfă,} \qquad c=\text{const} \tag{2.4.2.1}$$

Alte singularităţi nu mai pot apărea în domeniul Ω deoarece corespondenţa nu ar mai fi univocă.

Întrebarea fundamentală care se pune este următoarea: Fiind date două domenii arbitrare Ω şi $\mathcal{D}$ se poate găsi totdeauna o funcţie $\omega(\zeta)$ în aşa fel încât relaţia (2.4.2.1) să fie tocmai reprezentarea lui $\mathcal{D}$ pe Ω şi reciproc? Răspunsul este pozitiv pentru foarte multe situaţii. De exemplu, să presupunem că domeniul Ω este un cerc de rază 1 cu centrul în origine, circumferinţa lui o vom nota cu γ. Aşadar pe γ vom avea $|\zeta|=1$. În cele ce urmează vom presupune că funcţia $\omega(\zeta)$ este continuă împreună cu derivatele de ordinul întâi şi doi.

$$\omega'(s)=\frac{d\omega(s)}{ds}\neq 0 \text{ peste tot pe } \gamma; \qquad s=1\cdot e^{i\theta}$$

$$\omega''(s)=\frac{d\omega'(s)}{ds}\neq 0 \text{ peste tot în } \gamma \text{ şi pe } \gamma$$

2.4.2.2. Coordonate curbilinii

Vom folosi reprezentarea conformă a domeniului dat $\mathcal{D}$ din planul z pe un domeniu Ω din planul ζ care este fie un cerc, fie o coroană circulară, fie un plan infinit cu un orificiu circular; întotdeauna originea $\zeta=0$ va fi luată în originea axelor de coordonate. În toate aceste cazuri este natural să introducem coordonatele polare (ρ,θ) în planul ζ notând $\zeta=\rho\, e^{i\theta}$. Dacă $\mathcal{D}$ este un domeniu finit, mărginit de un contur închis L, iar Ω cercul de rază $\rho=1$ cu centrul în punctul $\zeta=0$ din planul ζ, atunci putem considera că punctele z=0 şi $\zeta=0$ se corespund prin aplicaţia ω (v. **Fig. 2.4.2.2**).

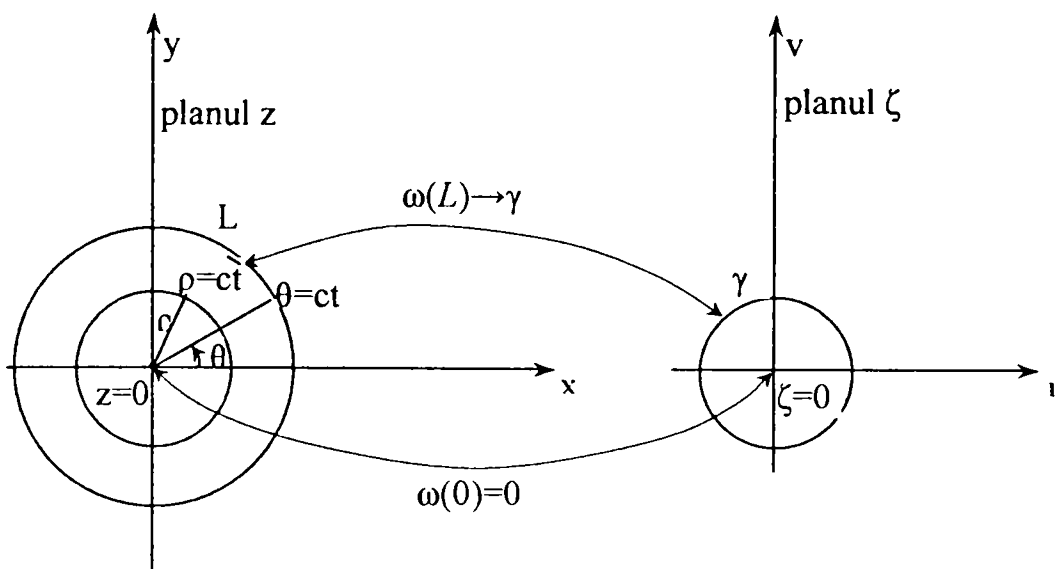


Fig. 2.4.2.2

În planul z curbele $\rho=const.$ sunt nişte cercuri care înconjoară punctul z=0, iar curbele $\theta=const.$ sunt nişte drepte radiale care ies toate din punctul z=0 şi se termină pe conturul L. Conturul L însuşi corespunde cercului γ cu $\rho=1$ din planul ζ. Aceste familii de curbe sunt ortogonale. Mărimile ρ şi θ pot fi considerate drept coordonate curbilinii ale punctelor (x,y) din planul z şi corelaţia dintre ele este:

$$z=x+iy=\omega(\zeta)=\omega\left(\rho e^{i\theta}\right) \tag{2.4.2.3}$$

2.4.2.3. Componentele unui vector

Să considerăm un punct arbitrar în planul z; prin punctul z ducem două curbe ortogonale care fac parte din familia de coordonate curbilinii. Notăm cu ρ vectorul tangent în z la curba θ = const.; notăm cu $\vec{\theta}$ vectorul tangent în z la curba ρ= const. Ambii vectori sunt dirijaţi în sensul creşterii coordonatelor respective.

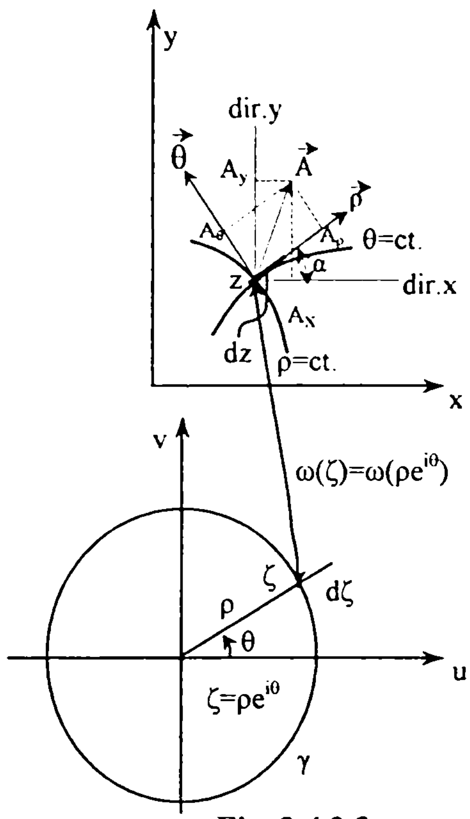


Fig. 2.4.2.3

Să considerăm în planul z un vector $\vec{A}$ (v. **Fig. 2.4.2.3**) cu originea în punctul $z = \omega\left(\rho e^{i\theta}\right)$. Componentele lui în cele două sisteme de coordonate sunt: $A(x,y)$ şi $A(\rho,\theta)$. Legătura dintre ele este imediată:

$$A_\rho + iA_\theta = e^{-i\alpha}\left(A_x + iA_y\right) \qquad (2.4.4.4)$$

unde α este unghiul pe care-l face vectorul $\vec{A}$ cu axa Ox, considerat pozitiv în sens trigonometric. Pentru a calcula pe $e^{i\alpha}$ vom proceda astfel: Vom da punctului z o deplasare dz în sensul tangentei $\vec{\rho}$; atunci punctul corespunzător ζ va avea o deplasare radială $d\zeta$. Prin urmare avem: $dz = e^{i\alpha}|dz|$; $\quad d\zeta = e^{i\theta}|d\rho|$ de unde:

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)d\zeta}{|\omega'(\zeta)||d\rho|} = e^{i\theta}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\zeta}{\rho}\cdot\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \qquad (2.4.2.4)$$

$$e^{-i\alpha} = e^{-i\theta}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\cdot\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \qquad (2.4.2.6)$$

$$\Rightarrow A_\rho + iA_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\cdot\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}\left(A_x + iA_y\right) \qquad (2.4.2.7)$$

2.4.2.4. Transformarea formulelor Kolosov-Musheli\c{s}vili

Pentru transformarea formulelor lui Kolosov-Mushelişvili în funcţie de noua variabilă ζ introdusă prin relaţia $z = \omega(\zeta)$, vom nota:

$$\varphi(\zeta) = \varphi[\omega(\zeta)]; \quad \psi(\zeta) = \psi[\omega(\zeta)] \qquad (2.4.2.8)$$

Atunci

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \varphi'(\zeta)\cdot\frac{1}{\omega'(\zeta)} \qquad (2.4.2.9)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \qquad (2.4.2.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(\zeta)+\omega(\zeta)\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}+\overline{\psi(\zeta)} \tag{2.4.2.11}$$

În aceste condiţii vom avea în final:

$$2G(u+iv)=\chi\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)} \qquad |\zeta|\le 1 \tag{2.4.2.12}$$

Pe baza relaţiilor precedente (2.4.2.4), (2.4.2.5), (2.4.2.7) putem calcula componentele vectorului deplasare în coordonatele (ρ,θ):

$$2G(u_\rho+iv_\theta)=\left[\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}(u+iv)\right]$$

$$2G|\omega'(\zeta)|(u_\rho+iv_\theta)=\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\overline{\omega'(\zeta)}\left\{\chi\varphi(\zeta)-\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}\right\} \tag{2.4.2.13}$$

Componentele tensiunilor, în coordonatele curbilinii considerate, se pot obţine plecând de la formele cunoscute privind rotaţia sistemului de axe (x,y) cu unghiul α, astfel încât noua axă x' să coincidă cu axa $\vec{\rho}$, iar axa ortogonală y' să coincidă cu axa $\vec{\theta}$. Atunci, deoarece:

$$e^{2ix}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{[\omega'(\zeta)]^2}{|\omega'(\zeta)|^2}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{[\omega'(\zeta)]^2}{\omega'(\zeta)\cdot\overline{\omega'(\zeta)}}=\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}} \tag{2.4.2.14}$$

se obţine:

$$\sigma_{\rho\rho}+\sigma_{\theta\theta}=2\left[\phi(\zeta)+\overline{\phi(\zeta)}\right]=4\,\mathrm{Re}\,\phi(\zeta) \tag{2.4.2.15}$$

$$\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\rho\rho}+2i\tau_{r\theta}=\frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right] \tag{2.4.2.16}$$

Prin scăderea relaţiilor precedente obţinem încă o formulă:

$$\sigma_{\rho\rho}-i\tau_{r\theta}=\phi(\zeta)+\overline{\phi(\zeta)}-\frac{\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right] \tag{2.4.2.17}$$

care exprimă tensiunile ce acţionează asupra conturului $\rho=const.$ produse de către domeniul exterior.

Notaţiile sunt cele obişnuite (v. **Anexa 3**):

$$\varphi'(z)=\phi(z) \qquad \Psi(z)=\psi'(z) \tag{2.4.2.18}$$

Să presupunem că avem de-a face cu domenii infinite: domeniul infinit $\mathcal{D}$ reprezentat conform pe domeniul infinit Ω în aşa fel încât punctului $\zeta=\infty$ să-i corespundă punctul $z=\infty$.

Atunci în [M69] p.251 se demonstrează că funcţia de transformare conformă are forma:

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_0}{\zeta^n}$$

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}\ln\zeta+R\Gamma\zeta+\varphi_0(\zeta) \tag{2.4.2.19}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{X - iY}{2\pi(1+\chi)} \ln \zeta + R\Gamma'\zeta + \psi_0'(\zeta) \tag{2.4.2.20}$$

unde:

$\Gamma = B + iC$, $\Gamma' = B' + iC'$ - sunt nişte constante, în general complexe;

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ -sunt nişte funcţii olomorfe inclusiv în punctul de la infinit, adică pentru $|z|$ suficient de mare ele au dezvoltări în serie de forma:

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\ldots \tag{2.4.2.21}$$

$$\psi_0(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \ldots\ldots \tag{2.4.2.22}$$

Fără a modifica starea de tensiune putem lua $a_0 = a_0' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty = 0)$.

2.4.2.5. Observaţii privind condiţiile la limită şi transformarea lor conformă

a) Domenii simplu conexe

Se ştie că la rezolvarea problemelor plane, în funcţie de condiţiile la limită, întâlnim trei situaţii numite *probleme de bază sau probleme fundamentale*.

Prima problemă fundamentală

Pe conturul L al domeniului $\mathcal{D}$ (v. **Fig. 2.4.2.4**) sunt date forţele exterioare X_n şi Y_n(n indică normala exterioară la contur în punctul considerat).

Condiţiile de frontieră se scriu sub forma:

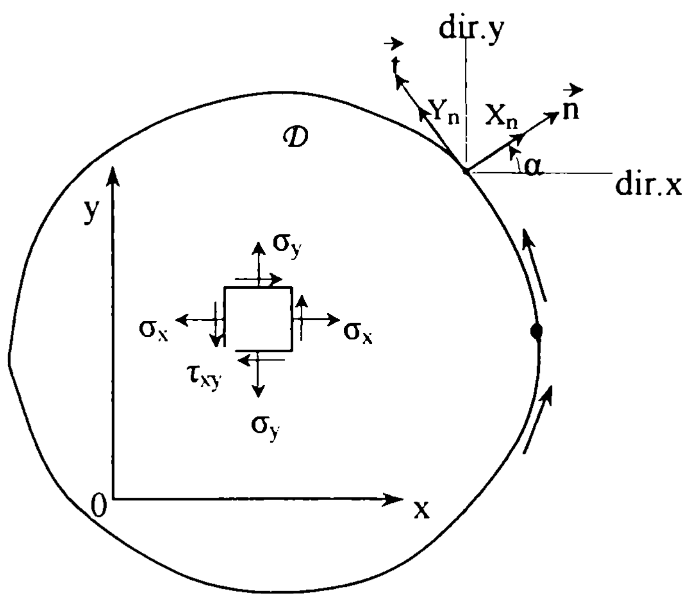


Fig. 2.4.2.4

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \cos(\vec{n},x) + \tau_{xy}\cos(\vec{n},y) &= X_n \\ \tau_{xy}\cos(\vec{n},x) + \sigma_y \cos(\vec{n},y) &= Y_n \end{aligned}\right\} \tag{2.4.2.23}$$

Se mai zice că avem de-a face cu o *problemă tip Dirichlet*.

A doua problemă fundamentală

Pe conturul L al domeniului $\mathcal{D}$ sunt date deplasările u şi v. În acest caz condiţiile la limită (pe frontieră) se scriu sub forma:

$$u = g_1(s); \quad v = g_2(s) \tag{2.4.2.24}$$

unde $g_1(s)$ şi $g_2(s)$ sunt nişte funcţii date de arcul s al conturului măsurat de la un punct arbitrar al acestuia. Se mai zice că avem de-a face cu o *problemă de tip Neumann*.

A treia problemă fundamentală sau problema mixtă

Are loc atunci când pe o parte a conturului L sunt date tensiunile iar pe restul conturului sunt date deplasările. În **Anexa 1** am arătat că în loc să studiem expresiile lui $\frac{\partial U}{\partial x}$ şi $\frac{\partial U}{\partial y}$ separat (U(x,z), funcţia Airy) este mai comod să cercetăm combinaţia complexă (Mushelişvili p.153):

$$f(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \tag{2.4.2.25}$$

Să revenim la prima problemă fundamentală, relaţiile (2.4.2.19), exprimând tensiunile cu ajutorul funcţiei Airy:

$$\begin{cases} X_n=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(n,x)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,y) \\ Y_n=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(n,y)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(n,x) \end{cases} \tag{2.4.2.26}$$

Dar (v. **Fig. 2.4.2.4**):

$$\cos(n,x)=\cos(t,y)=\frac{dy}{ds}; \qquad \cos(n,y)=-\cos(t,x)=-\frac{dx}{ds} \tag{2.4.2.27}$$

$$\Rightarrow \qquad X_n=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{2.4.2.28}$$

$$Y_n=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{2.4.2.29}$$

Sub formă complexă:

$$X_n+iY_n=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial x}\right)=-i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{2.4.2.30}$$

sau

$$(X_n+iY_n)ds=-id\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{2.4.2.31}$$

Vom cerceta semnificaţia mecanică a funcţiei f(x,y) (2.4.2.25) deoarece avem nevoie de ea la explicitarea condiţiilor pe frontieră. Să considerăm un element de arc AB de pe conturul L al domeniului $\mathcal{D}$. Să considerăm eforturile care acţionează asupra elementului de arc AB dinspre dreapta dacă ne deplasăm de la A spre B; sau, altfel spus, eforturile ce acţionează din partea normalei pozitive $\vec{n}$. Să calculăm rezultanta acestor eforturi aplicate pe arcul AB; să notăm (X,Y) vectorul rezultant. Vom deduce:

$$X+iY=\int_{AB}(X_n+iY_n)ds=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B=-i\left[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\right]_A^B \tag{2.4.2.32}$$

unde simbolul $[\ ]_A^B$ reprezintă *creşterea expresiei din paranteză la o deplasare pe arcul AB de la A până în B*. Dacă în această formulă vom considera puntul A fix iar punctul B variabil, de afix $z=x+iy$, vom avea:

$$f(x,y)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{AB}(X_n+iY_n)ds+const=i(X+iY)+const=f_1+if_2+const \tag{2.4.2.33}$$

Astfel, în cadrul primei probleme fundamentale, relaţia (2.4.2.29) stabileşte legătura dintre funcţiile φ şi ψ, care rezolvă complet problema plană şi forţele aplicate pe contulul L al corpului solicitat.

Pe baza unor considerente similare se poate stabili o formulă analoagă cu (2.4.2.29) şi pentru momentul rezultant M_0 al eforturilor de pe contur în raport cu originea axelor de coordonate.

$$M_0=\int_{AB}(XY_n-YX_n)ds=\mathrm{Re}\left[\chi(z)-z\psi(z)-z\bar{z}\varphi'(z)\right]_A^B \tag{2.4.2.34}$$

b) Domenii multiplu conexe

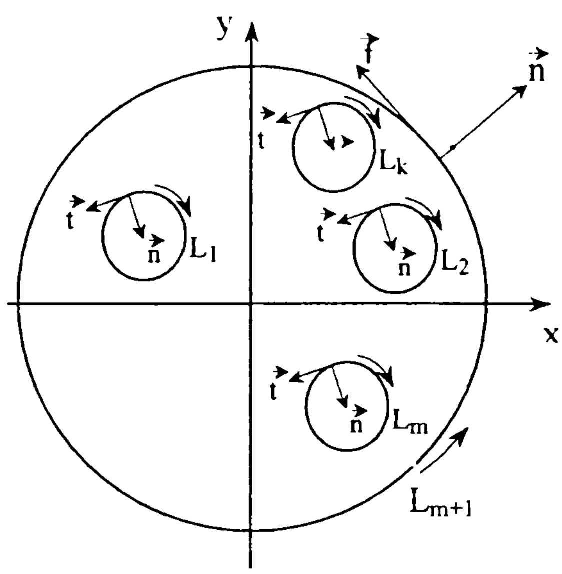


Fig. 2.4.2.5

Ne imaginăm o placă plană cu mai multe goluri care nu au puncte comune. Deci, domeniul $\mathcal{D}$ ocupat de corp este multiplu conex; el este mărginit de un contur L_{m+1} şi de m conture simple închise (**Fig. 2.4.2.5**).

Prin ipoteză tensiunile şi deplasările sunt funcţii uniforme. Cu toate aceastea funcţiile φ şi ψ pot să fie funcţii multiforme. Mushelişvili [M69] p.167 stabileşte că aceste funcţii au forma:

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1-\chi)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi_0(z) \tag{2.4.2.35}$$

$$\psi(z)=-\frac{\chi}{2\pi(1-\chi)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi_0(z) \tag{2.4.2.36}$$

unde:

X_k, Y_k - sunt componentele vectorului rezultat al forţelor exterioare aplicate pe conturul L_k;

z_k – un punct arbitrar inclus în domeniul simplu conex mărginit de conturul L_k;

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ - funcţii analitice şi uniforme în tot domeniul $\mathcal{D}$.

2.4.2.6. Planul infinit cu orificiu eliptic. Soluţia primei probleme fundamentale

Vom rezolva această problemă prin explicitarea funcţiilor φ şi ψ care prin intermediul relaţiilor Kolosov-Mushelişvili determină complet starea de tensiune şi deplasarea în zona adiacentă orificiului eliptic. Vom considera că în planul infinit z există un orificiu de formă eliptică cu semiaxele a şi b care reprezintă domeniul $\mathcal{D}$ simplu conex, având frontiera L, şi vom face transformarea conformă a acesteia pe domeniul $|\zeta|>1$, adică pe planul infinit (planul ζ) cu un orificiul circular de rază $\rho=1$, (v. **Fig. 2.4.2.6**) având conturul γ de ecuaţie $s=e^{i\theta}$. Funcţia care realizează această transformare conformă este (v. [M69], [C45], [S4], [S6], [L49], [R3]):

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right) \quad \text{cu} \quad R>0,\quad 0\le m<1 \tag{2.4.2.37}$$

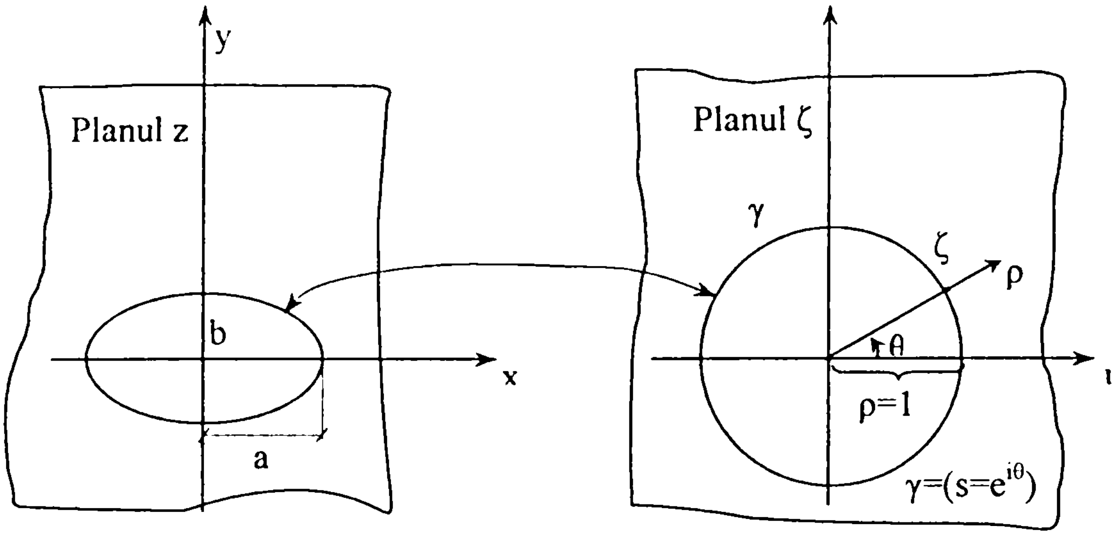


Fig. 2.4.2.6

În felul acesta cercului $|\zeta| = 1$ îi corespunde elipsa L în planul fizic z cu centrul în originea axelor de coordonate şi cu semiaxele:

$$a = R(1+m); \quad b = R(1-m) \tag{2.4.2.38}$$

Alegând în mod potrivit pe R şi m putem obţine o elipsă de orice dimensiune şi formă. De exemplu, dacă m=0, elipsa se reduce la un cerc (problema Kirsch); cazul limită când m=1, elipsa degenerează într-un segment de pe axa Ox, de lungime $4R$, cuprins între punctele $x = \pm 2R$, astfel că avem o altă cunoscută problemă a planului infinit cu o fantă sau o fisură rectilinie (v. Probl. test Nr.III).

Condiţiile pe contur pe cercul unitate $|\zeta| = 1$ se exprimă prin relaţia (2.4.2.19) particularizată pentru valorile pe conturul γ al cercului $s = e^{i\theta}$ şi pentru valorile rapoartelor:

$$\frac{\omega(s)}{\overline{\omega'(s)}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+m}{1-ms^2}; \qquad \frac{\overline{\omega(s)}}{\omega'(s)} = s\frac{1+ms^2}{s^2-m} \tag{2.4.2.39}$$

obţinute din conjuncţia cu relaţia (2.4.2.36).

Condiţia la limită obţine forma:

$$\varphi(s) + \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+m}{1-ms^2} \cdot \overline{\varphi'(s)} + \overline{\psi(s)} = f \tag{2.4.2.40}$$

sau trecând la valorile complexe conjugate:

$$\overline{\varphi(s)} + s \cdot \frac{1+ms^2}{s^2-m} \cdot \varphi'(s) + \psi(s) = \overline{f} \tag{2.4.2.41}$$

Să presupunem pentru început că rezultanta forţelor exterioare aplicate pe conturul L este nulă şi că tensiunile şi rotaţia la infinit se anulează; vom avea deci:

$$X = Y = 0, \qquad B = C = B' = C' = 0$$

Atunci funcţiile $\varphi(\zeta)$ şi $\psi(\zeta)$ vor fi olomorfe în exteriorul cercului unitate γ inclusiv în punctele de la infinit; de asemenea se poate presupune că $\varphi(\infty) = 0$.

Se ştie din teoria integralelor de tip Cauchy că o condiţie necesară şi suficientă ca o funcţie $\psi(s)$ continuă pe cercul unitate γ, să fie o valoare limită a unei funcţii olomorfe în afara lui γ este:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\psi(s)}ds}{s-\zeta}=0 \tag{2.4.2.42}$$

unde ζ este un punct arbitrar în afara lui γ.

Aplicând această condiţie relaţiei (2.4.2.39) avem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{fds}{s-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(s)ds}{s-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{s}\frac{s^2+m}{1-ms^2}\overline{\varphi'(s)}\frac{ds}{s-\zeta}=0 \tag{2.4.2.43}$$

Pe baza formulei Cauchy pentru domenii infinite:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(s)ds}{s-\zeta}=-\varphi(\zeta)+\varphi(\infty)=-\varphi(\zeta) \tag{2.4.2.44}$$

obţinem în final:

$$-\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{s}\cdot\frac{s^2-m}{1-ms^2}\cdot\overline{\varphi'(s)}\frac{ds}{s-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{fds}{s-\zeta} \tag{2.4.2.45}$$

Se mai poate arăta că expresia: $\frac{1}{s}\cdot\frac{s^2-m}{1-ms^2}\cdot\overline{\varphi'(s)}$ este valoarea limită a funcţiei: $\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{\zeta^2-m}{1-m\zeta^2}\cdot\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ olomorfă în interiorul lui γ, (pentru demonstraţie v. MUSHELIŞVILI [M69] p. 438).

În aceste condiţii integrala din membrul stâng din relaţia (2.4.2.44) se anulează şi obţinem expresia generală a funcţiei ζ:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{fds}{s-\zeta} \tag{2.4.2.46}$$

Expresia funcţiei $\psi(s)$ se determină din condiţia de contur (2.4.2.40) ca valoare limită a funcţiei $\psi(\zeta)$, care se exprimă prin formula integrală a lui Cauchy pentru domenii infinite:

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\psi(s)ds}{s-\zeta}+\psi(\infty) \tag{2.4.2.47}$$

Introducem în (2.4.2.46) expresia lui $\psi(s)$ din (2.4.2.40) şi ţinem cont că:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\varphi(s)}}{s-\zeta}ds=0 \tag{2.4.2.48}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}s\cdot\frac{1+ms^2}{s^2-m}\varphi'(s)\frac{ds}{s-\zeta}=-\zeta\cdot\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta) \tag{2.4.2.49}$$

Obţinem în final (renunţând la constanta $\psi(\infty)$, care nu influenţează repartiţia tensiunilor):

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{f}\cdot ds}{s-\zeta}-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta) \tag{2.4.2.50}$$

Vom considera în continuare cazul general pentru prima problemă fundamentală; componentele forţelor exterioare aplicate pe contur sunt (X,Y) diferite de zero, iar la infinit tensiunile sunt mărginite şi rotaţiile sunt nule. În aceste condiţii, structura funcţiilor φ şi ψ este dată de relaţiile (2.4.2.19), (2.4.2.20), în care:

- Condiţia de anulare a rotaţiilor la infinit implică:

  $B + iC = B - iC; \quad B' + iC' = B' - iC' \quad \Leftrightarrow \quad B + iC = B' + iC'$

- $\varphi_0(\zeta)$ şi $\psi_o(\zeta)$ sunt analitice pentru $|\zeta| > 1$;
- $\varphi_0(\infty) = 0$.

Introducând această condiţie în (2.4.2.9) se observă că $\varphi_0(\zeta)$ şi $\psi_0(\zeta)$ satisfac exact aceleaşi condiţii la limită, cu deosebirea că în locul lui f trebuie pusă expresia f_0:

$$f_o = f - (B + iC)R\left[s + \frac{s^2 + m}{s(1 - ms^2)}\right] - \frac{B' + iC'}{s}R + \frac{X + iY}{2\pi}\ln s + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \chi)} \cdot \frac{s^2 + m}{1 - ms^2} \qquad (2.4.2.51)$$

Expresiile funcţiilor $\varphi_0(\zeta)$ şi $\psi_0(\zeta)$ rezultă din introducerea relaţiei (2.4.2.51) în (2.4.2.46) şi (2.4.2.50):

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_0 ds}{s - \zeta} \qquad (2.4.2.52)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f_0} ds}{s - \zeta} - \zeta\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\varphi_o'(\zeta) \qquad (2.4.2.53)$$

Ca o aplicaţie concretă (particulară) a teoriei expuse, să considerăm cazul unei plăci (v. **Fig. 2.4.2.7**) care are un gol eliptic; placa este solicitată la infinit la tracţiune de tensiunea uniformă $\sigma_{x_1}^\infty = p$ care acţionează după o direcţie x_1 ce face unghiul α cu axa Ox (axa mare a elipsei); celelalte tensiuni la infinit sunt nule: $\sigma_{y_1}^\infty = 0$, $\tau_{x_1y_1}^\infty = 0$; conturul orificiului eliptic nu este solicitat de forţe exterioare, deci X=Y=0. Din relaţia (2.4.2.29) rezultă f=0.

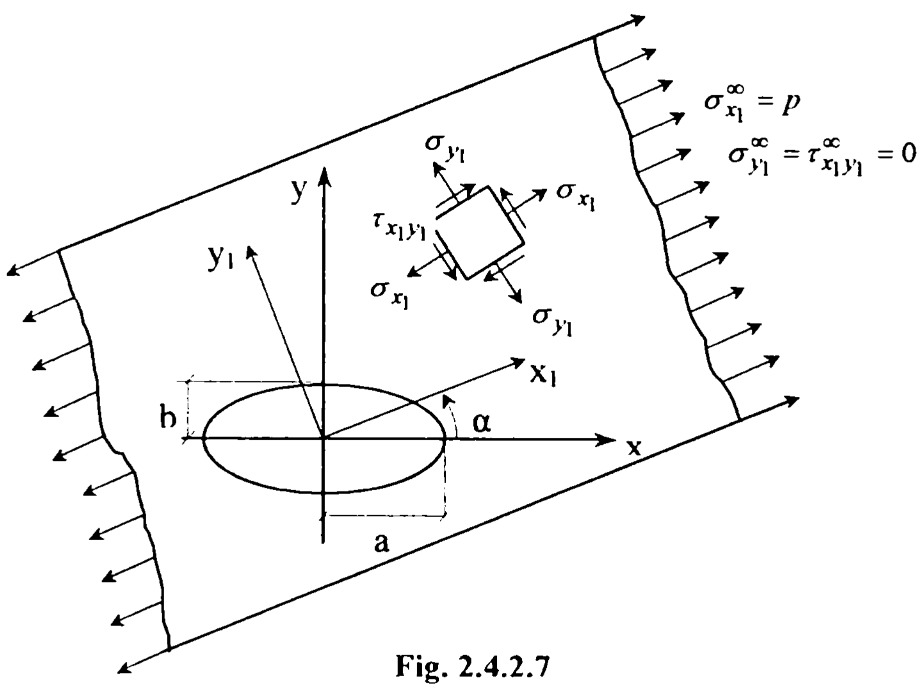


Fig. 2.4.2.7

Din condiţii de echilibru cunoscute rezultă:

$$\sigma_{xx}^{\infty} = p\cos^2\alpha$$

$$\sigma_{yy}^{\infty} = p\sin^2\alpha$$

$$\tau_{xy}^{\infty} = p\sin\alpha\cos\alpha$$

Din relaţiile (2.4.2.20), (2.4.2.51) obţinem valoarea constantelor B, B' şi C':

$$B = \frac{p}{4}, \quad B' + iC' = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha} \tag{2.4.2.54}$$

Din formula (2.4.2.51) obţinem:

$$f_0 = -p\frac{R}{4}\left[s + \frac{s^2+m}{s\left(1-ms^2\right)}\right] + \frac{pRe^{2i\alpha}}{2s} \tag{2.4.2.55}$$

$$\overline{f_0} = -p\frac{R}{4}\left(\frac{1}{s} + s\cdot\frac{1+ms^2}{s^2-m}\right) + p\frac{Re^{-2i\alpha}}{2}s \tag{2.4.2.56}$$

Funcţia $\dfrac{\zeta^2+m}{\zeta\left(1-m\zeta^2\right)}$ este olomorfă în interiorul cercului γ, cu excepţia punctului $\zeta = 0$, unde are un pol cu partea principală $\dfrac{m}{\zeta}$. Funcţia $\zeta\dfrac{1+m^2\zeta}{\zeta^2-m}$ este olomorfă în afara lui γ, cu excepţia punctului $\zeta = \infty$ unde are forma: $m\zeta + O\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.

Prin aplicarea formulelor integrale ale lui Cauchy vom avea:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{s^2+m}{s\left(1-ms^2\right)}\cdot\frac{ds}{s-\zeta} = -\frac{m}{\zeta} \tag{2.4.2.57}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma s\frac{1+ms^2}{s^2-m}\cdot\frac{ds}{s-\zeta} = -\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} + m\zeta = -\frac{\left(1+m^2\right)\zeta}{\zeta^2-m} \tag{2.4.2.58}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{sds}{s-\zeta} = 0; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{ds}{s(s-\zeta)} = -\frac{1}{\zeta} \tag{2.4.2.59}$$

Din (2.4.2.51) şi (2.4.2.52), (2.4.2.53) obţinem expresiile funcţiilor:

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{mpR}{4\zeta} + \frac{pRe^{2i\alpha}}{2\zeta} = \frac{pR\left(2e^{2i\alpha}-m\right)}{4\zeta} \tag{2.4.2.60}$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{pR}{4\zeta} - \frac{pR\left(1+m^2\right)\zeta}{4\left(\zeta^2-m\right)} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta) \tag{2.4.2.61}$$

În sfârşit în baza relaţiilor (2.4.2.46), (2.4.2.47) se obţine:

$$\varphi(\zeta) = \frac{p^2}{4}\left(\zeta + \frac{2e^{2i\alpha}-m}{\zeta}\right) \tag{2.4.2.62}$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{pR}{2}\left[e^{-2i\alpha}\zeta+\frac{e^{2i\alpha}}{m\zeta}-\frac{\left(1+m^2\right)\left(e^{2i\alpha}-m\right)}{m}\cdot\frac{\zeta}{\zeta^2-m}\right] \tag{2.4.2.63}$$

În continuare calculul tensiunilor şi deplasărilor nu prezintă dificultăţi. Să calculăm suma: $\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=4\,\mathrm{Re}\,\phi(\zeta)$.

$$4\phi(\zeta)=4\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=p\frac{\zeta^2+m-2e^{2i\alpha}}{\zeta^2-m}=p\frac{\rho^2e^{2i\theta}+m-2e^{2i\alpha}}{\rho^2e^{2i\theta}-m}\cdot\frac{\rho^2e^{2i\theta}-m}{\rho_e^{2-2i\theta}-m}$$

Numitorul acestei expresii este o cantitate reală: $\rho^4-2m\rho^2\cos 2\theta+m^2$.

Separând partea reală de cea complexă obţinem:

$$\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=p\frac{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\theta-\alpha)-m^2+2m\cos 2\alpha}{\rho^4-2m\rho^2\cos 2\theta+m^2}$$

Pe conturul găurii avem $\rho=1$ şi $\sigma_{rr}=0$. De aceea valorile lui $\sigma_{\theta\theta}$ pe conturul găurii vor fi date de:

$$\sigma_{\theta\theta}=p\cdot\frac{1-m^2+2m\cos 2\alpha-2\cos 2(\theta-\alpha)}{1-2m\cos 2\theta+m^2} \tag{2.4.2.64}$$

Comentarii privind factorul de intensitate a tensiunilor în cazul golurilor eliptice

Factorul de intensitate a tensiunilor K_I pentru fisura eliptică, considerând o solicitare uniformă sau chiar polinomială, a fost introdus de KASSIR şi SIH în 1975 sub forma:

$$K_I(\phi)=p\frac{\sqrt{\pi(b/a)}}{E(k)}(a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{4}} \tag{2.4.2.65}$$

unde $p=\sigma^{\infty}$ - sarcina normală uniformă;

ϕ - coordonata polară care fixează un punct de pe conturul fisurii;

$E(k)$ - integrala eliptică de speţa a doua de argument $k=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$;

a,b – semiaxele elipsei (**Fig. 2.4.2.8**)

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.4.2.66}$$

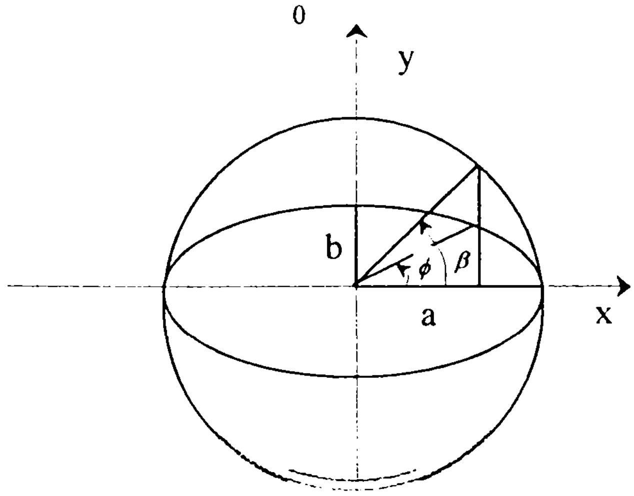


Fig. 2.4.2.8.

Este surprinzător faptul că soluţia lui KASSIR şi SIH, doi savanţi recunoscuţi în domeniul mecanicii ruperii, este greşită şi încă se mai lucrează cu ea în această formă.

Cauza acestei erori este o identificare incorectă a parametrului unghiului ϕ care caracterizează poziţia unui punct pe frontul a elipsei. FABRIKANT (1987) a sesizat această eroare şi a indicat soluţia:în expresia (2.4.2.65) unghiul ϕ trebuie înlocuit cu unghiul β (Fig. 2.4.2.8) care parametrizează un punct pe fisură.

Analitic corecţia se face punând în loc de ϕ unghiul $\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\phi\right)$.

Astfel, păstrând notaţia cu ϕ expresia corectă este:

$$K_I(\phi)=p\frac{\sqrt{\pi(b/a)}}{E(k)}\cdot\left(\frac{a^4\sin^2\phi+b^4\cos^2\phi}{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}\right)^{1/4} \tag{2.4.2.67}$$

Cele două expresii coincid pentru unghiuri $\phi=0$ şi $\frac{\pi}{2}$, precum şi atunci când $a=b$ (cazul unui cerc), oricare ar fi unghiul ϕ. Totuşi, atunci când $a\neq b$, pentru unghiuri $\phi\neq 0$ şi $\phi\neq\frac{\pi}{2}$ diferenţa între valorile K_I date de cele două formule (2.4.2.65) şi (2.4.2.67) devin foarte mari şi cresc odată cu creşterea excentricităţii elipsei.

Să considerăm cazul particular al unei elipse foarte alungite, (**Fig. 2.4.2.9**), luând a/b=100 ca exemplu numeric. Factorul de intensitate a tensiunilor pe aproape toată partea de margine a fisurii eliptice va trebui să fie aproape de valoarea factorului de intensitate a tensiunilor pentru o configuraţie 2D a unei fisuri „*tunel*" de lăţime 2*b*, adică:

$$K_I=p\sqrt{\pi b} \tag{2.4.2.68}$$

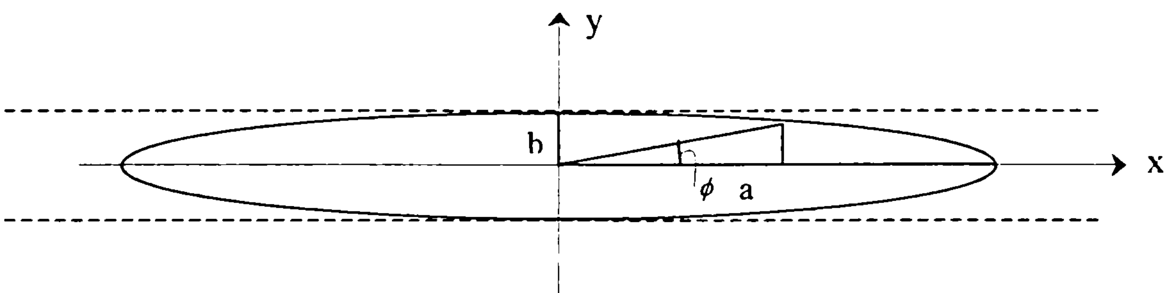


Fig. 2.4.2.9

Într-adevăr, formula lui FABRIKANT (2.4.2.67) la un raport *a*/*b* aşa de mare conduce la un factor de intensitate a tensiunilor K_I care este aproape constant de-a lungul fisurii eliptice şi este foarte apropiat de rezultatul obţinut cu expresia (2.4.2.68) pentru fisura „*tunel*" pentru unghiuri ϕ luând valori de la $\frac{\pi}{2}$ la valori destul de mici: Raportul soluţiilor obţinute cu expresiile (2.4.2.67) şi (2.4.2.68.) se modifică de la 1 pentru $\phi=\frac{\pi}{2}$ la 0.99997 pentru $\phi=\frac{\pi}{4}$ şi la 0.9968 pentru $\phi=5^\circ$. (Ca o justificare în plus a cerinţei ca factorul de intensitate a tensiunilor să fie aproape de (2.4.2.68) pentru fisura „tunel", observăm că schimbarea în lăţime a fisurii eliptice în intervalul $5^\circ\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$ este aproape neglijabilă: de la 0.9935*b* la *b*).

Pe de altă parte, rezultatul incorect (2.4.2.65) *nu este apropiat* de cel dat de expresia (2.4.2.68). La unghiul $\phi=\frac{\pi}{2}$ de exemplu, formula (2.4.2.65) prezice $K_I/p\sqrt{\pi b}=0.8409$, iar la un unghi $\phi=10^\circ$ ea prezice $K_I/p\sqrt{\pi b}=0.4169$.

În concluzie, în cazul limită a unei fisuri eliptice foarte alungite rezultatul lui FABRIKANT (2.4.2.67) aproximează foarte bine soluţia (2.4.2.68) pentru fisura „*tunel*", în timp ce rezultatul lui KASSIR şi SIH diferă substanţial de (2.4.2.68).

2.4.3. Problema test Nr. III: Platbanda cu o fisură centrală

Cea mai cercetată problemă de (M.R.) este reprezentată de **„platbanda cu o fisură centrală de dimensiune 2*a*"** solicitată la tracţiune de o tensiune uniform repartizată la infinit σ^{∞} (v.**Fig.2.4.3.1**). Este cazul clasic al modului I de deplasare a flancurilor fisurii (modul I de extindere a fisurii). Se defineşte şi se calculează factorul de intensitate al tensiunilor:

$$K_I = \sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}F\left(\frac{a}{b}\right) \tag{2.4.3.1}$$

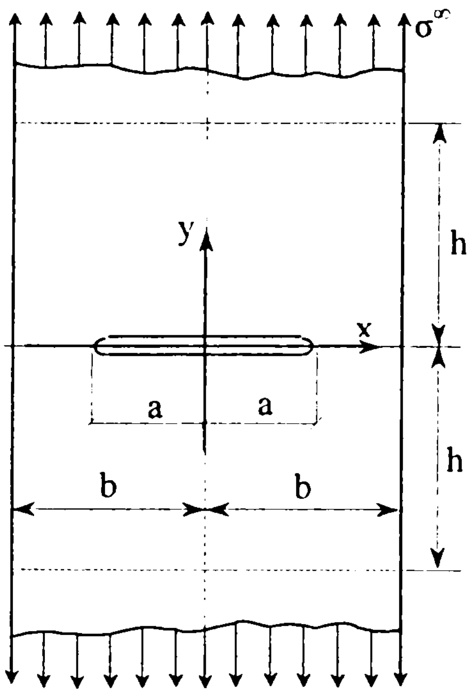


Fig. 2.4.3.1

O parte din rezultatele obţinute până acum sunt prezentate în celebra monografie de sinteză a lui TADA, PARIS, IRWIN [T1]:

1). IRWIN (1957)

Propune o formulă semiempirică cu dezvoltare asimptotică:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{2b}{\pi a}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2b}} \tag{2.4.3.2}$$

Erori mai mari de 5% pentru $\frac{a}{b} \le 0{,}5$

2). BROWN (1966)

Propune tot o formulă empirică:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + 0{,}128\left(\frac{a}{b}\right) - 0{,}288\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1{,}525\left(\frac{a}{b}\right)^3 \tag{2.4.3.3}$$

Erori de 0,5% pentru $\frac{a}{b} \le 0{,}7$

Abaterea medie pătratică se potriveşte cu rezultatele lui ISIDA.

3). FEDDERSEN (1966)

Formulă empirică bazată pe rezultatele lui ISIDA:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{\sec\frac{\pi a}{2b}} \tag{2.4.3.4}$$

Erori: 0,3% pentru $\frac{a}{b} \le 0{,}7$; 1% pentru $\frac{a}{b} = 0{,}8$

4). KOITER (1965)

Aproximarea asimptotică:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1 - 0.5\left(\frac{a}{b}\right) + 0{,}326\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \tag{2.4.3.5}$$

Erori de 1% pentru orice a/b.

5). TADA (1973)

Modificarea formulei lui Koiter:

$$F\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1-0.5\left(\frac{a}{b}\right)+0.370\left(\frac{a}{b}\right)^2-0,044\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1-\frac{a}{b}}} \qquad (2.4.3.6)$$

Erori de 0,3% pentru orice a/b.

6). TADA (1973)

Modificarea formulei lui FEDDERSEN:

$$F\left(\frac{a}{b}\right)=\left[1-0,025\left(\frac{a}{b}\right)^2+0,06\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]\cdot\sqrt{\sec\frac{2\pi}{2b}} \qquad (2.4.3.7)$$

7). ISIDA (1962, 1965, 1973)

Stabileşte potenţialul complex în tensiuni pe care-l dezvoltă în serie Laurent în funcţie de $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, din care reţine 36 de termeni. Valorile numerice sunt date în graficul şi tabelul alăturat (**Fig. 2.4.3.2**).

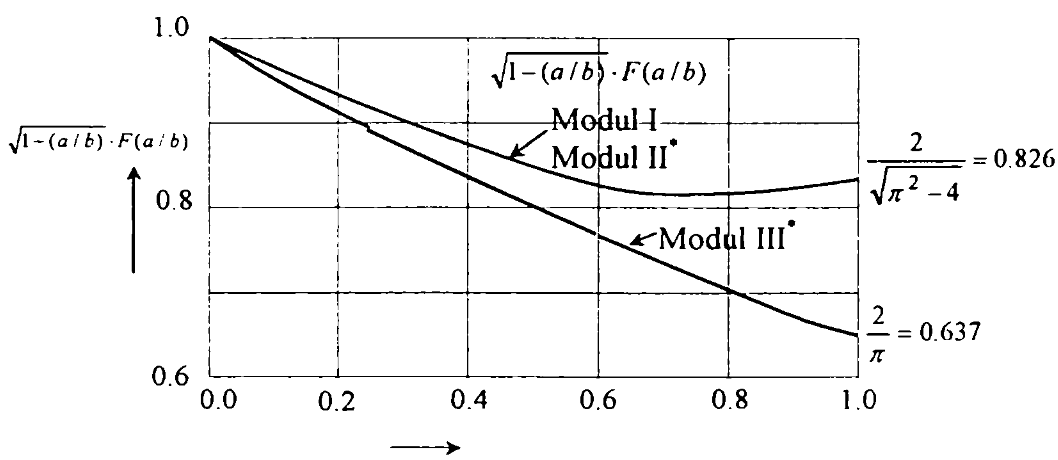


Fig. 2.4.3.2

a/b	F(a/b)
0.0	1.0000
0.1	1.0060
0.2	1.0246
0.3	1.0577
0.4	1.1094
0.5	1.1867
0.6	1.3033
0.7	1.4882
0.8	1.8160
0.9	2.5776
1.0	$\frac{2}{\sqrt{\pi^2-4}} \Big/ \sqrt{1-a/b}$

În **Fig.2.4.3.2** s-au reprezentat şi factorii de corecţie pentru modurile II şi III (**Fig.2.4.3.3**):

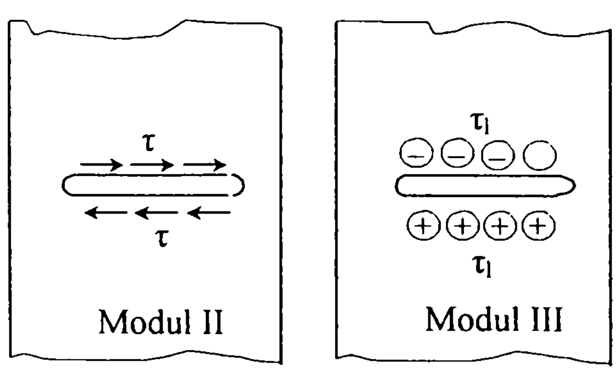


Fig. 2.4.3.3

$$K_{II}=\tau\sqrt{\pi a}F\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (2.4.3.8)$$

$$K_{III}=\tau_l\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{2b}{\pi a}\mathrm{tg}\frac{\pi a}{2b}} \qquad (2.4.3.9)$$

(formula exactă)

În literatură se întâlnesc multe alte rezultate obţinute prin toate metodele posibile, cum ar fi:

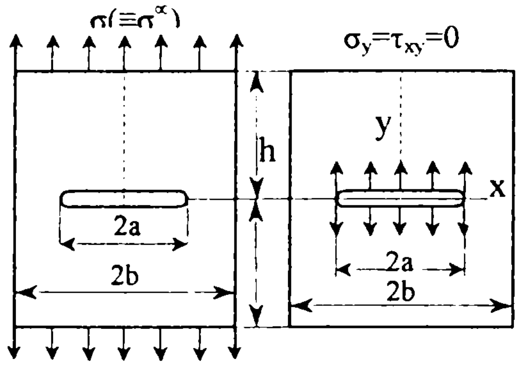
- metoda complianţei: FORMAN, 1964;
- utilizarea transformatelor Fourier şi a ecuaţiilor integrale: SNEDDON, 1971;

- metoda elementelor finite: MENDELSON, 1972, YAMAMOTO, 1972;
- metoda colocaţiei de frontieră: BOWIE, 1970;
- ecuaţii integrale combinate cu o metodă de relaxare a tensiunilor: TADA, 1971,1972.

Studii mai amănunţite iau în considerare şi dimensiunea finită a platbenzii prin raportul *h/b*.

În **Fig. 2.4.3.4** se prezintă rezultatele obţinute de ISIDA (1971) şi de KOBAYASHI (1974) utilizând metoda potenţialelor de tensiune complexe combinată cu metoda colocaţiei de frontieră.

În **Fig. 2.4.3.5** se prezintă cazul platbenzii infinite cu fisura excentrică, obţinute de ISIDA (1965) utilizând dezvoltarea în serie Laurent a funcţiilor complexe de potenţial.



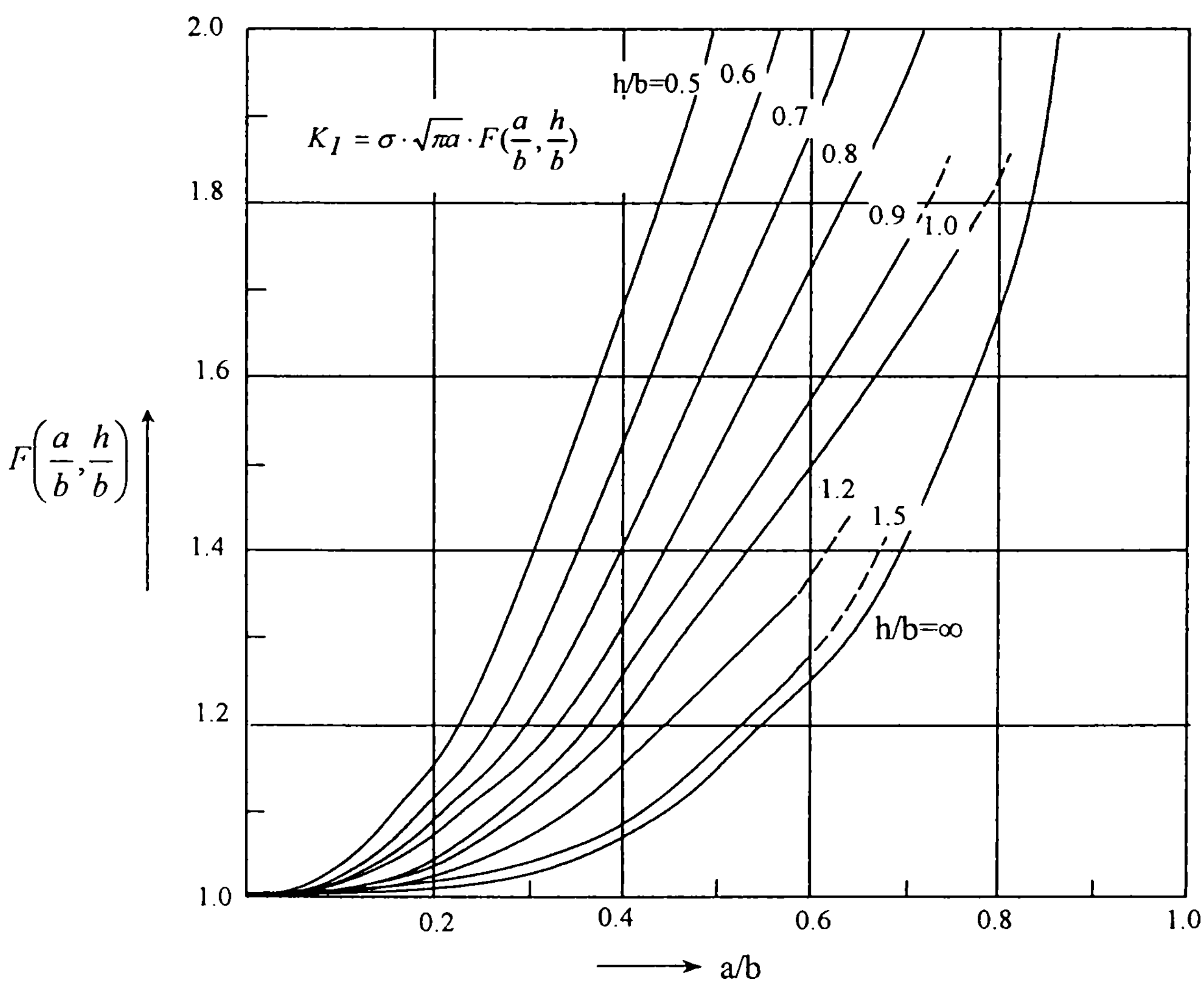


Fig. 2.4.3.4

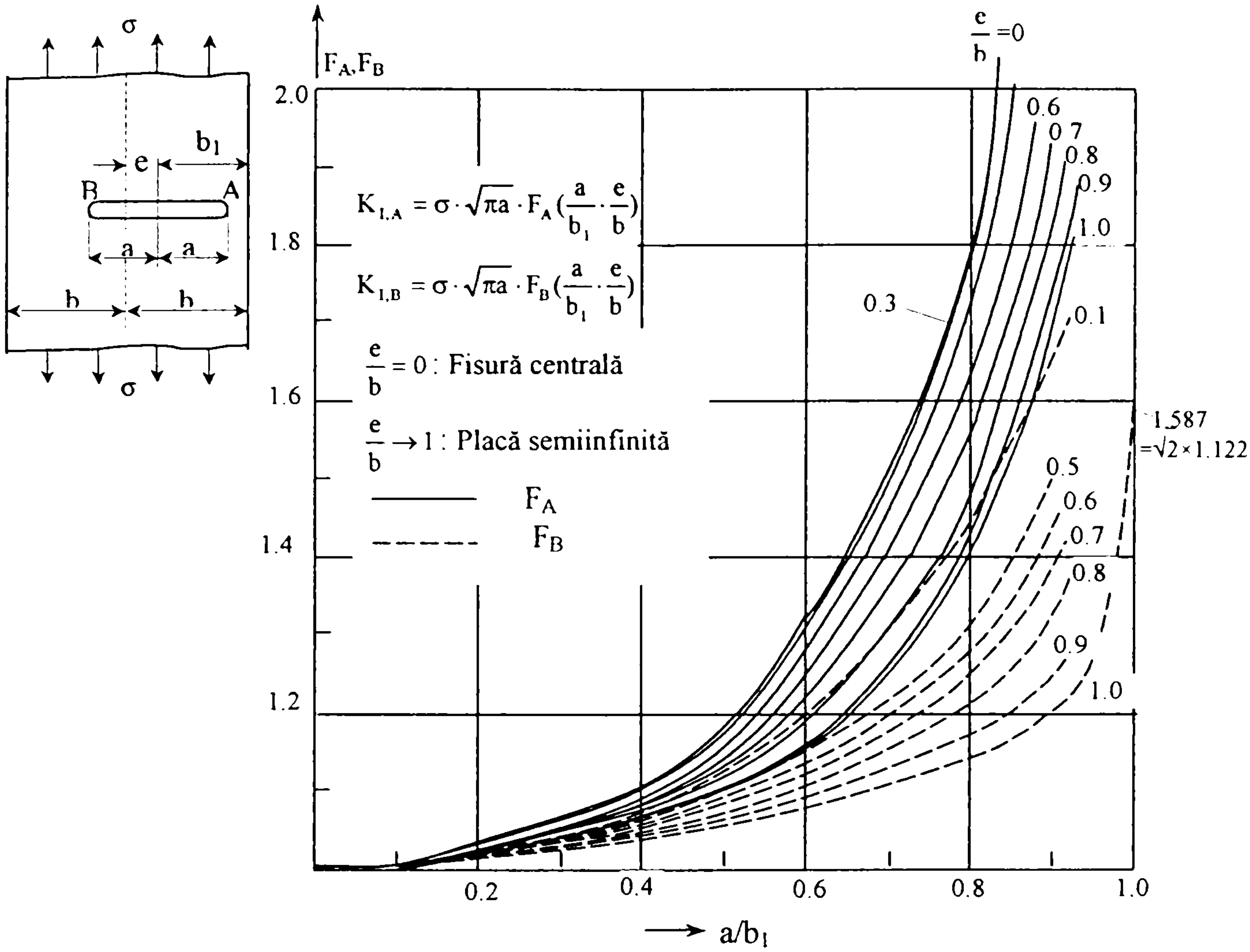


Fig. 2.4.3.5

Soluţia WESTERGAARD (1939)

Pentru planul cu orificiu eliptic există trei soluţii obţinute independent de KOLOSOV (1909), INGLISH (1913), MUSHELIŞVILI (1919). Tot astfel pentru planul sau platbanda cu fisură există două soluţii: prima dată de WESTERGAARD în 1939 şi a doua dată mult mai târziu, în 1952, de WILLIAMS. În cadrul acestui paragraf voi prezenta soluţia lui WESTERGAARD, ceva mai simplă; în paragraful următor – problema test nr. IV – voi prezenta soluţia lui WILLIAMS extinsă la cazul semiplanului din două materiale diferite cu crestătură marginală în V în zona de joncţiune a celor două materiale.

Se ştie (v. **Anexa 1**) că rezolvarea problemelor plane se poate face cu ajutorul a două funcţii analitice de variabilă complexă, numite şi *potenţialele lui Musheli*ş*vili*. Westergaard a arătat că poate rezolva aceleaşi probleme utilizând o singură funcţie complexă notată $Z(z)$, care poate fi corelată cu funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ introduse de Musheli\u015fvili. În cele ce urmează se notează:

$$Z'(z)=\frac{dZ(z)}{dz};\quad Z''(z)=\frac{d^2Z(z)}{dz^2}\ ;\quad \overline{Z}(z)=\int Z(z)dz;\quad \overline{\overline{Z}}=\int \overline{Z}(z)dz \qquad (2.4.3.10)$$

Să considerăm o placă infinită, solicitată de o tensiune biaxială $\sigma_{xx}=\beta\sigma_0$, (unde β reprezintă un coeficient numeric); $\sigma_{yy}=\sigma_0$. Placa prezintă o fisură de dimensiune $2a$ orientată faţă de sistemul de axe de coordonate ca în **Fig. 2.4.3.6**. Atunci, pe marginile fisurii, (y=0), sunt îndeplinite condiţiile:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy};\quad \tau_{xy}=0 \qquad (2.4.3.11)$$

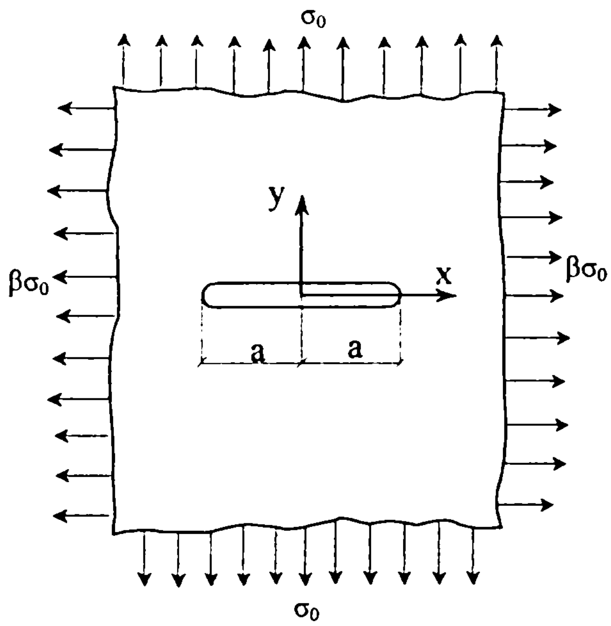


Fig. 2.4.3.6

La demonstrarea formulelor Kolosov-Mushelişvili am găsit:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}+i\tau_{xy}&=\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(z)-z\overline{\varphi}''(z)-\overline{\psi}'(z)\\ \sigma_{yy}+i\tau_{xy}&=\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(z)+z\overline{\varphi}''(z)+\overline{\psi}'(z)\end{aligned}\quad(2.4.3.12)$$

Dacă scădem cele două relaţii obţinem:

$$\sigma_{xx}-\sigma_{yy}+2i\tau_{xy}=-2[z\overline{\varphi}''(z)+\overline{\psi}'(z)]$$

sau:

$$\sigma_{xx}-\sigma_{yy}+2i\tau_{xy}=$$

$$-2\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]+2i\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\quad(2.4.3.13)$$

Condiţia $\tau_{xy}=0$ *la* $y=0$ ne conduce la:

$$\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]=0$$

Această condiţie este satisfăcută dacă:

$$\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)=A\quad(2.4.3.14)$$

unde A este o constantă reală care depinde de modul de încărcare al plăcii:

Dacă se integrează relaţia (2.4.3.14) se obţine:

$$\bar{z}\varphi'(z)-\varphi(z)+\psi(z)=Az+B\quad(2.4.3.15)$$

Constanta reală B poate fi luată egală cu zero, deoarece ea caracterizează mişcarea de solid rigid. Se vede din relaţia (2.4.3.15) că funcţia $\psi(z)$ se poate exprima prin funcţia $\varphi(z)$ şi a derivatelor sale. În aceste condiţii şi formula pentru calculul deplasărilor devine:

$$2G(u+iv)=\chi\varphi(z)-\overline{\varphi}(z)+(\bar{z}-z)\overline{\varphi}'(z)-A\bar{z}\quad(2.4.3.16)$$

Se introduce funcţia $Z(z)$ definită prin relaţia:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}\int Zdz\quad(2.4.3.17)$$

Se poate arăta că atât tensiunile cât şi deplasările se pot exprima numai prin intermediul funcţiei $Z(z)$. De exemplu din (2.4.3.14) şi (2.4.3.15) vom avea:

$$\psi'(z)=A-\frac{1}{2}zZ'\quad(2.4.3.18)$$

Se obţin rezultatele:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\operatorname{Re}Z-y\operatorname{Im}Z'-A\\ \sigma_{yy}&=\operatorname{Re}Z+y\operatorname{Im}Z'+A\\ \tau_{xy}&=-y\operatorname{Re}Z'\\ 2Gu&=\frac{\chi-1}{2}\operatorname{Re}\int Zdz-y\operatorname{Im}Z-Ax\\ 2Gv&=\frac{\chi+1}{2}\operatorname{Im}\int Zdz-y\operatorname{Re}Z+Ay\end{aligned}\right\}\quad(2.4.3.19)$$

Condiţiile la limită:

$$|z| \to \infty \Rightarrow \sigma_{xx} = \beta\sigma_0; \qquad \sigma_{yy} = \sigma_0; \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{2.4.3.20}$$

$$-a < x < a, \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy} = 0; \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{2.4.3.21}$$

Rezultă:

$$A = -\mathrm{Re}\, Z \tag{2.4.3.22}$$

În conformitate cu tehnologia metodei semiinverse se alege pentru Z expresia:

$$Z = \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - A \tag{2.4.3.23}$$

unde $g(z)$ este o funcţie analitică în domeniul de definiţie astfel încât pe conturul fisurii să avem $\mathrm{Im}[g(z)] \equiv 0$ pentru a satisface (2.4.3.22). Din conjuncţia relaţiilor (2.4.3.20) şi (2.4.3.19) obţinem:

$$(1-\beta)\sigma_0 = (\bar{z} - z)Z' + 2A \tag{2.4.3.24}$$

Dar funcţia Z este analitică în tot domeniul de definiţie, inclusiv punctul de la infinit; rezultă că este continuă în jurul acestui punct, deci pentru $|z| \to \infty \Rightarrow$

$$Z \to \frac{g(z)}{z} - A \tag{2.4.3.25}$$

şi

$$Z' \to \frac{g'(z)}{z} - \frac{g(z)}{z^2} \tag{2.4.3.26}$$

Introducând aceste rezultate în (2.4.3.24) avem:

$$(1-\beta)\sigma_0 = (\bar{z} - z)\left(\frac{g'(z)}{z} - \frac{g(z)}{z^2}\right) + 2A$$

Această relaţie poate fi nesatisfăcută identic numai dacă:

$$g(z) = \sigma_0 \cdot z; \qquad A = \frac{(1-\beta)\sigma_0}{2}$$

În final vom avea:

$$Z(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - (1-\beta)\frac{\sigma_0}{2} \tag{2.4.3.27}$$

Putem particulariza relaţia precedentă:

- pentru tracţiune monoaxială, uniformă la infinit: $\beta = 0 \Rightarrow A = \dfrac{\sigma_0}{2}$
- pentru tracţiune biaxială uniformă: $\beta = 1 \Rightarrow A = 0$

Notă: Soluţia originală a lui Westergaard a fost dată cu A=0 în relaţia (2.4.3.23), ceea ce s-ar părea că nu influenţează prea mult rezultatele, deoarece constanta A depinde numai de geometria piesei şi de modul de încărcare; mai mult, se poate demonstra că expresiile lui σ_{yy} şi τ_{xy} rămân neschimbate. Dar tensiunea σ_{yy} este mărimea determinantă în stabilirea criteriilor de rezistenţă în (M.R.). Deoarece, de-a lungul anilor, soluţia originală a lui Westergaard a fost larg utilizată în formularea şi fundamentarea conceptelor de bază ale mecanicii ruperilor, (v. Irwin, 1957), vom analiza care este gradul de inacurateţe pe care-l introduce neglijarea constantei A, justificând afirmaţia făcută mai sus în privinţa stării de tensiune. Vom nota, pornind de la (2.4.3.23):

$$Z^* = Z + A$$

funcţia propusă de Westergaard. Atunci relaţiile (2.4.3.19) vor deveni:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z^* - y\operatorname{Im}\left(Z^*\right)' - 2A \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z^* + y\operatorname{Im}\left(Z^*\right)' \\ \tau_{xy} &= -y\operatorname{Re} Z^* \\ 2Gu &= \frac{\chi-1}{2}\operatorname{Re}\int Z^* dz - y\operatorname{Im} Z^* - \frac{\chi+1}{2}Ax \\ 2Gv &= \frac{\chi+1}{2}\operatorname{Im}\int Z^* dz - y\operatorname{Re} Z^* + \frac{3-\chi}{2}Ay \end{aligned}\right\} \tag{2.4.3.28}$$

Se observă că în adevăr componentele tensiunilor σ_{yy} şi τ_{xy} nu se modifică, deci rezultatele sunt aceleaşi fie că utilizăm funcţia Z, fie Z^*. Expresii ale funcţiei Z^* se găsesc în literatură ([C45], [P6], [P12], [M69]).

Aproximarea după IRWIN (1957)

Se ştie că, în cazul fisurii analizate, soluţia elastică este singulară în punctul care marchează vârful fisurii: $x \to a \Rightarrow \sigma_{yy} \to \infty$ (v. şi soluţia Westergaard de mai sus).

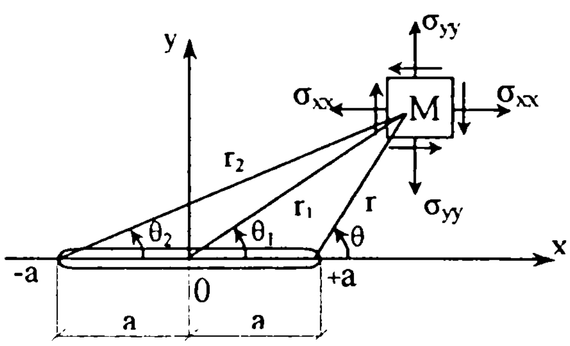


Fig. 2.4.3.7

Irwin a avut inspiraţia să evite această singularitate, calculând starea de tensiune într-un domeniu foarte apropiat de vârful fisurii, plecând tot de la soluţia lui Westergaard exprimată în coordonate polare (v. **Fig. 2.4.3.7**). Astfel, considerând placa infinită cu fisură, vom considera starea de tensiune complexă din punctul M; punctul M are coordonata complexă $z = x + iy$, sau în sistemul de coordonate polare din **Fig. 2.4.3.7**: $z = r_1 e^{i\theta_1}$.

Din **Fig. 2.4.3.7** avem relaţiile evidente:

$$z - a = re^{i\theta} \quad ; \quad z + a = r_2 e^{i\theta_2} \tag{2.4.3.29}$$

Vom considera solicitarea plăcii la infinit, biaxială omogenă $(\beta = 1; A = 0); \sigma_0$.

Funcţia de tensiune Z va fi:

$$Z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \Rightarrow Z = \frac{\sigma_0 r_1}{\sqrt{rr_2}} e^{i\left(\theta_1 - \frac{\theta+\theta_2}{2}\right)} \tag{2.4.3.30}$$

Derivata:

$$Z' = -\frac{\sigma_0 a^2}{\sqrt{(rr_2)^3}} e^{-\frac{3}{2}i(\theta+\theta_2)} \tag{2.4.3.31}$$

Cu aceste rezultate, relaţiile (2.4.3.19) devin:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy} = \sigma_0 \left[\frac{r_1}{\sqrt{rr_2}} \cos\left(\theta_1 - \frac{\theta+\theta_2}{2}\right) \pm \frac{ra^2}{\sqrt{(rr_2)^3}} \sin\theta_1 \sin\frac{3}{2}(\theta+\theta_2)\right] \tag{2.4.3.32}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_0 \frac{r_1 a^2}{\sqrt{(rr_2)^3}} \sin\theta_1 \cdot \cos\frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \quad (2.4.3.33)$$

Facem nişte consideraţii geometrice evidente, pentru a introduce nişte aproximaţii.

$$r_1 \sin\theta_1 = r\sin\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta} = \frac{r}{r_1} \cong \frac{r}{a} \quad (2.4.3.34)$$

$$r_2 \sin\theta_2 = r\sin\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} = \frac{r}{r_2} \cong \frac{r}{a} \quad (2.4.3.35)$$

În relaţiile precedente s-au făcut nişte aproximaţii care sunt valabile numai dacă ne limităm la domenii suficient de apropiate de vârful fisurii. Astfel, dacă r<<a putem presupune că $r_1 \cong a \quad si \quad r_2 \cong 2a$. În aceste condiţii unghiurile θ_1 şi θ_2 sunt suficient de mici pentru a face aproximarea:

$$\sin\theta_1 \cong \theta_1 = \frac{r}{a}\sin\theta; \qquad \sin\theta_2 \cong \theta_2 = \frac{b}{2a}\sin\theta \quad (2.4.3.36)$$

Înlocuind aceste relaţii aproximative în (2.4.3.32) şi (2.4.3.33) vom obţine:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.4.3.37)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.4.3.38)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} \quad (2.4.3.39)$$

S-a obţinut un rezultat remarcabil: Deşi starea de tensiune la vârful fisurii are un caracter singular, în imediata vecinătate a sa ea se poate exprima ca produsul dintre un factor constant $K = \sigma_0\sqrt{a}$, care conţine intensitatea solicitării şi dimensiunea fisurii, un factor singular $1/\sqrt{2r}$ şi trei funcţii de unghi: $f_{xx}(\theta), f_{yy}(\theta)$ şi $f_{xy}(\theta)$, astfel încât relaţiile (2.4.3.37), (2.4.3.38) şi (2.4.3.39) se pot scrie:

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2r}} f_{xx}(\theta) = \frac{K}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.4.3.40)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2r}} f_{yy}(\theta) = \frac{K}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.4.3.41)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2r}} f_{xy}(\theta) = \frac{K}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \quad (2.4.3.42)$$

Se obişnuieşte să se amplifice cu $\sqrt{\pi}$ şi să se noteze:

$$\mathbf{K} = \sqrt{\pi}K$$

Deci vom avea:

$$\sigma_{xx} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi r}} f_{xx}(\theta); \quad \sigma_{yy} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi r}} f_{yy}(\theta); \quad \tau_{xy} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi r}} f_{xy}(\theta) \quad (2.4.3.43)$$

În mod similar se obţin formulele şi pentru deplasări.

Făcând un calcul comparativ se constată că pentru $r/a \le 0.01$ eroarea introdusă de aproximaţia Irwin este sub 1%; pentru r/a=0.1, eroarea este de 7.4%.

2.4.4. Problema test Nr. IV: Semiplanul cu crestătură în V pe o muchie. Calculul tensiunilor şi deplasărilor. Soluţia WILLIAMS (1952); (1957)

Să considerăm că o placă semi-infinită de grosime unitară, modelată matematic de aşa numitul "***semiplan elastic***", prezintă o crestătură laterală în formă de V, având dimensiunile de calcul prezentate în **Fig.2.4.4.1**.

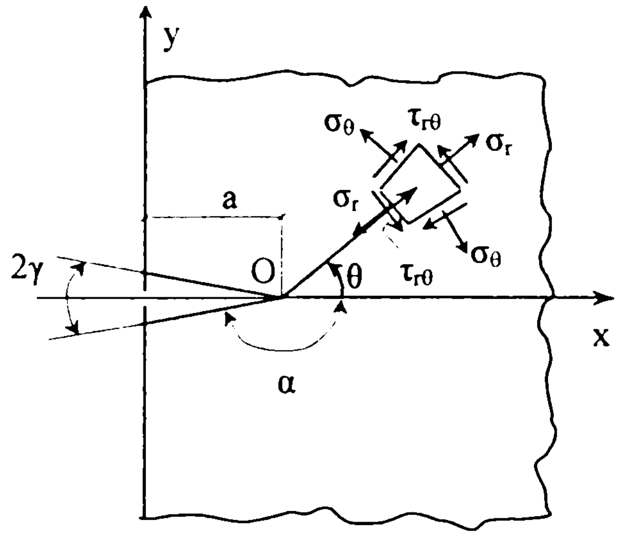


Fig. 2.4.4.1

Problema a fost rezolvată în coordonate polare de *WILLIAMS în 1952* utilizând ***metoda separării variabilelor***.

Formulele fundamentale ale problemei plane în coordonate polare se găsesc în toate cărţile de Rezistenţa materialelor şi Teoria elasticităţii. Vom folosi prezentarea din cursul I.Dobre [D19] vol.II, p.203, în care găsim:

- ***ecuaţiile diferenţiale de echilibru*** :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4.4.1}$$

- ***ecuaţiile geometrice ale lui Cauchy*** :

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\ ;\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\ ;\ \gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{2.4.4.2}$$

- ***expresia operatorului lui Laplace în coordonate polare :***

$$\Delta U=\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} \tag{2.4.4.3}$$

- ***ecuaţia biarmonică a funcţiei de tensiune Airy (F(r,θ)) :***

$$\nabla^2\nabla^2 F(r,\theta)=0$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial\theta^2\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}=0 \tag{2.4.4.4}$$

- ***expresiile tensiunilor cu ajutorul funcţiei de tensiune Airy :***

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta&=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.4.5}$$

- ***legea lui Hooke*** :

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\nu\sigma_\theta)\ ;\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\nu\sigma_r)\ ;\ \gamma_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta} \tag{2.4.4.6}$$

Pentru aplicarea metodei separării variabilelor, se consideră funcţia de tensiune de forma:

$$F(r,\theta)=r^{\lambda+1}\phi(\theta,\lambda) \tag{2.4.4.7a}$$

unde:

$$\phi(\theta,\lambda)=e^{\varphi(\lambda)\theta} \tag{2.4.4.7b}$$

iar funcţia $\varphi(\lambda)$ se va determina din ecuaţia biarmonică (2.4.4.4). Avem evident:

$$\frac{\partial F}{\partial r}=(\lambda+1)r^{\lambda}\phi(\theta,\lambda) \qquad \frac{\partial^k F}{\partial\theta^k}=r^{\lambda+1}\frac{\partial^k\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta^k} \quad k=1,2,3,4.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot r^{\lambda-1}\phi(\theta,\lambda) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}=(\lambda+1)\cdot r^{\lambda}\frac{\partial\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)r^{\lambda-2}\phi(\theta,\lambda) \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial r^2\partial\theta}=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot r^{\lambda-1}\frac{\partial\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)(\lambda-2)r^{\lambda-3}\phi(\theta,\lambda) \qquad \frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}=(\lambda+1)\cdot\lambda\cdot r^{\lambda-1}\frac{\partial^2\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta^2}$$

Înlocuind aceste rezultate în ecuaţia biarmonică (2.4.4.4), obţinem:

$$\frac{\partial^4\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta^4}+2(\lambda^2+1)\frac{\partial^2\phi(\theta,\lambda)}{\partial\theta^2}+(\lambda^2-1)^2\phi(\theta,\lambda)=0 \tag{2.4.4.8}$$

Ţinând cont că $\phi(\theta,\lambda)$ este dat de (2.4.4.7), avem:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=\varphi(\lambda)^2 e^{\varphi(\lambda)\theta} \quad ; \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}=\varphi^4(\lambda)e^{\varphi(\lambda)t}$$

astfel că ecuaţia (2.4.4.8) devine:

$$\varphi(\lambda)^4+2(\lambda^2+1)\varphi^2(\lambda)+(\lambda^2-1)^2=0.$$

Avem o ecuaţie bipătrată în $\varphi(\lambda)$ care ne dă:

$$\varphi(\lambda)^2=-(\lambda^2+1)\pm2\lambda \begin{cases}\varphi^2(\lambda)=-(\lambda-1)^2 \Rightarrow \varphi(\lambda)=\pm i(\lambda-1)\\ \varphi^2(\lambda)=-(\lambda+1)^2 \Rightarrow \varphi(\lambda)=\pm i(\lambda+1)\end{cases} \tag{2.4.4.9}$$

Deoarece $\phi(\theta,\lambda)$ este o funcţie reală, iar soluţiile ecuaţiei diferenţiale (2.4.4.4) trebuie să fie de asemenea funcţii reale, vom selecta următoarele soluţii:

$$\begin{aligned}\phi_1(\theta,\lambda)&=\cos(\lambda-1)\theta\\ \phi_2(\theta,\lambda)&=\cos(\lambda+1)\theta\\ \phi_3(\theta,\lambda)&=\sin(\lambda-1)\theta\\ \phi_4(\theta,\lambda)&=\sin(\lambda+1)\theta\end{aligned} \tag{2.4.4.10}$$

Evident că soluţia finală a ecuaţiei (2.4.4.8) va fi o combinaţie liniară a soluţiilor (2.4.4.10):

$$\phi(\theta,\lambda)=A\cos(\lambda-1)\theta+B\cos(\lambda+1)\theta+C\sin(\lambda-1)\theta+D\sin(\lambda+1)\theta \tag{2.4.4.11}$$

A, B, C, D fiind constante care vor fi determinate din condiţiile la limită în tensiuni.

Relaţia (2.4.4.11) combinată cu (2.4.4.7) se introduce în relaţiile (2.4.4.9) şi obţinem:

$$\begin{cases} \sigma_r = r^{\lambda-1}\left[\phi''(\theta) + (\lambda+1)\phi(\theta)\right] & (a) \\ \sigma_\theta = r^{\lambda-1}\cdot\lambda(\lambda+1)\phi(\theta) & (b) \\ \tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\cdot\lambda\cdot\phi'(\theta) & (c) \end{cases} \tag{2.4.4.12}$$

Condiţiile de frontieră exprimă faptul că pe muchiile crestăturii, pentru $\theta = \pm\alpha$, avem $\sigma_\theta = 0$ şi $\tau_{r\theta} = 0$, de aceea vom dezvolta numai ultimele două relaţii din (2.4.4.12) :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = r^{\lambda-1}\cdot\lambda(\lambda+1)\left[A\cos(\lambda-1)\theta + B\cos(\lambda+1)\theta + C\sin(\lambda-1)\theta + D\sin(\lambda+1)\theta\right] & (2.4.4.13) \\ \tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\cdot\lambda\left[-A(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta - B(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + \right. & \\ \qquad \left. + C(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta + D(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta\right] & (2.4.4.14) \end{cases}$$

Condiţiile de frontieră sunt evidente :

$$\theta = \pm\alpha \;\Rightarrow\; \sigma_\theta\big|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \;;\; \tau_{r\theta}\big|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \tag{2.4.4.15}$$

Introducem notaţia :

$$\omega = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \tag{2.4.4.16}$$

Atunci expresia lui $\tau_{r\theta}$ va fi :

$$\tau_{r\theta} = r^{\lambda-1}\cdot\lambda(\lambda+1)\left[A\omega\sin(\lambda-1)\theta + B\sin(\lambda+1)\theta - C\omega\cos(\lambda-1)\theta - D\cos(\lambda+1)\theta\right]$$

Impunând condiţiile la limită vom avea:

$$\left.\begin{array}{ll} \theta=\alpha \to \sigma_\theta = 0 \Rightarrow & A\cos(\lambda-1)\alpha + B\cos(\lambda+1)\alpha + C\sin(\lambda-1)\alpha + D\sin(\lambda+1)\alpha = 0 \\ \theta=-\alpha \to \sigma_\theta = 0 \Rightarrow & A\cos(\lambda-1)\alpha + B\cos(\lambda+1)\alpha - C\sin(\lambda-1)\alpha - D\sin(\lambda+1)\alpha = 0 \\ \theta=\alpha \to \tau_{r\theta} = 0 \Rightarrow & A\omega\sin(\lambda-1)\alpha + B\sin(\lambda+1)\alpha - C\omega\cos(\lambda-1)\alpha - D\cos(\lambda+1)\alpha = 0 \\ \theta=-\alpha \to \tau_{r\theta} = 0 \Rightarrow & -A\omega\sin(\lambda-1)\alpha - B\sin(\lambda+1)\alpha - C\omega\cos(\lambda-1)\alpha - D\cos(\lambda+1)\alpha = 0 \end{array}\right\} \tag{2.4.4.17}$$

Prin adunări şi scăderi ale ecuaţiilor de mai sus, putem scrie sistemul obţinut sub o formă matricială convenabilă, matricea coeficienţilor fiind o matrice bloc-diagonală.

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha & 0 & 0 \\ \omega\sin(\lambda-1)\alpha & \sin(\lambda+1)\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\lambda-1)\alpha & \sin(\lambda+1)\alpha \\ 0 & 0 & \omega\cos(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.4.4.18}$$

Am obţinut în felul acesta o primă concluzie interesantă, observând că A şi B sunt independente de C şi D, ceea ce înseamnă că în ecuaţia (2.4.4.11) coeficienţii A şi B corespund unor sarcini simetrice (modul I) iar coeficienţii C şi D unor sarcini antisimetrice (modul II).

Sistemul de ecuaţii algebrice (2.4.4.18) este un sistem liniar şi omogen, care pentru a avea o soluţie diferită de soluţia banală, trebuie să aibă determinantul principal egal cu zero. Această condiţie revine la a scrie:

$$\begin{cases} \sin(\lambda+1)\alpha\cdot\cos(\lambda-1)\alpha - \omega\cos(\lambda+1)\alpha\cdot\sin(\lambda-1)\alpha = 0 & (2.4.4.19) \\ \sin(\lambda-1)\alpha\cdot\cos(\lambda+1)\alpha - \omega\cos(\lambda-1)\alpha\cdot\sin(\lambda+1)\alpha = 0 & (2.4.4.20) \end{cases}$$

Înlocuind $\omega = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, grupând termenii şi utilizând relaţii cunoscute din trigonometrie, ecuaţiile de mai sus se reduc la:

$$\sin 2\lambda\alpha \pm \lambda \sin 2\alpha = 0 \qquad (2.4.4.21)$$

Aceasta este o ecuaţie trigonometrică transcendentă, mult studiată în literatură (v. PARTON [P20] vol.I, p.334). Voi reveni asupra ei.

Voi nota în continuare cu λ_n valorile proprii ale lui λ care sunt soluţii ale ecuaţiei (2.4.4.21) în cazul sarcinilor simetrice şi cu ξ_n în cazul sarcinilor antisimetrice:

$$\begin{cases} \sin 2\xi_n \alpha - \xi_n \sin 2\alpha = 0 & (2.4.4.21a) \\ \sin 2\lambda_n \alpha + \lambda_n \sin 2\alpha = 0 & (2.4.4.21b) \end{cases}$$

Valoarea particulară $\alpha = \pi$ - ne conduce la un caz practic deosebit de important: ***cazul fisurii***. Ecuaţiile caracteristice vor fi:

$$\sin(2\pi\lambda_n) = 0 \qquad (2.4.4.22a)$$

$$\sin(2\pi\xi_n) = 0 \qquad (2.4.4.22b)$$

cu soluţiile :

$$\lambda_n = \frac{n}{2} \quad \text{cu} \quad n = 1,3,4,\ldots$$

Din şirul valorilor lui n se elimină $n = 2$, care corespunde unei mişcări de solid rigid şi soluţia banală $n = 0$. Introducând rezultatul obţinut în (2.4.4.11), vom avea:

$$\phi(\theta,\lambda) = A_n \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right)\theta + B_n \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta + C_n \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right)\theta + D_n \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta \quad (2.4.4.23)$$

Revenim la sistemul de ecuaţii (2.4.4.18) în care vom introduce valorile proprii λ_n şi ξ_n şi vom obţine :

- ***pentru sarcini simetrice*** :

$$\begin{cases} A_n \cos(\lambda_n - 1)\alpha + B_n \cos(\lambda_n + 1)\alpha = 0 & (2.4.4.24a) \\ A_n \omega \sin(\lambda_n - 1)\alpha + B_n \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0 & (2.4.4.24b) \end{cases}$$

- ***pentru sarcini antisimetrice*** :

$$\begin{cases} C_n \sin(\lambda_n - 1)\alpha + D_n \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0 & (2.4.4.25a) \\ C_n \omega \cos(\lambda_n - 1)\alpha + D_n \cos(\lambda_n + 1)\alpha = 0 & (2.4.4.25b) \end{cases}$$

Notând : $\dfrac{A_n}{B_n} = a_n$; $\dfrac{C_n}{D_n} = c_n$ relaţiile precedente devin :

$$\begin{cases} a_n \cos(\lambda_n - 1)\alpha + \cos(\lambda_n + 1)\alpha = 0 \\ a_n \omega \sin(\lambda_n - 1)\alpha + \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} c_n \sin(\lambda_n - 1)\alpha + \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0 \\ c_n \omega \cos(\lambda_n - 1)\alpha + \cos(\lambda_n + 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

Notă: Pentru necesităţi ulterioare de calcul vom stabili şi expresiile deplasărilor în coordonate polare. Pornim de la relaţiile cunoscute, prezentate mai sus, (2.4.4.2) şi (2.4.4.6):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \qquad\qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow E = 2G(1+\nu)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = r^{\lambda-1}[\phi''(\theta) + (\lambda+1)\phi(\theta)] \\ \sigma_\theta = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)\phi(\theta) \\ \tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\lambda\phi'(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2Gu = \frac{r^\lambda}{\lambda(1+\nu)}[\phi''(\theta) + (\lambda+1)\phi(\theta) - \nu\lambda(\lambda+1)\phi(\theta)]$$

$$\begin{cases} \phi(\theta,\lambda) = A\cos(\lambda-1)\theta + B\cos(\lambda+1)\theta + C\sin(\lambda-1)\theta + D\sin(\lambda+1)\theta \\ \phi'(\theta,\lambda) = -A(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta - B(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + \\ \qquad + C(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta + D(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta \\ \phi''(\theta,\lambda) = -A(\lambda-1)^2\cos(\lambda-1)\theta - B(\lambda+1)^2\cos(\lambda+1)\theta - \\ \qquad - C(\lambda-1)^2\sin(\lambda-1)\theta - D(\lambda+1)^2\sin(\lambda+1)\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2Gu = \frac{r^\lambda}{\lambda(1+\nu)}\{ & -A(\lambda-1)^2\cos(\lambda-1)\theta - B(\lambda+1)^2\cos(\lambda+1)\theta - \\ & - C(\lambda-1)^2\sin(\lambda-1)\theta - D(\lambda+1)^2\sin(\lambda+1)\theta + A(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta + \\ & + B(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + C(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta + D(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta - \\ & - \nu\lambda[A(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta + B(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + \\ & + C(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta + D(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta]\} \end{aligned}$$

Pentru o grupare convenabilă a termenilor, vom face un mic artificiu: Adunăm şi scădem:

$$+A(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta\,;\, -A(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta\,;\, C(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta\,;\, -C(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta$$

Grupând convenabil termenii, vom avea :

$$\begin{aligned} 2Gu = \frac{r^\lambda}{\lambda(1+\nu)}\{ & -A\lambda(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta - B\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - \\ & - C\lambda(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta - D\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + 2\lambda A\cos(\lambda-1)\theta + 2\lambda C\sin(\lambda-1)\theta \\ & - \nu\lambda[A(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta + B(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta ++ C(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta + D(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta]\} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} +A(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta & \qquad +C(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta \\ -A(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta & \qquad -C(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta \end{matrix}$$

Grupăm iarăşi convenabil, făcând să apară factorul $(1+\nu)$:

$$\begin{aligned} 2Gu = \frac{r^\lambda}{1+\nu}\{ & -(1+\nu)(\lambda+1)A\cos(\lambda-1)\theta - (1+\nu)(\lambda+1)B\cos(\lambda+1)\theta - \\ & - (1+\nu)(\lambda+1)C\sin(\lambda-1)\theta - (1+\nu)(\lambda+1)D\sin(\lambda+1)\theta + \\ & + 4A\cos(\lambda-1)\theta + 4C\sin(\lambda-1)\theta\} \end{aligned}$$

În final:

$$2Gu = r^{\lambda}\left\{-(\lambda+1)\phi(\theta) + 4(1+\nu)^{-1}\left[A\cos(\lambda-1)\theta + C\sin(\lambda-1)\theta\right]\right\}$$

În mod absolut analog se obţine:

$$2G\mathrm{v} = r^{\lambda}\left\{-\phi'(\theta) - 4(1+\nu)^{-1}\left[-A\sin(\lambda-1)\theta + C\cos(\lambda-1)\theta\right]\right\}$$

2.4.5. Problema test Nr. V: Fisură la interfaţa dintre două materiale diferite. Soluţia ZAK şi WILLIAMS (1963)

Considerăm că la interfaţa dintre două materiale diferite, omogene şi izotrope, există o fisură. Se cere să se calculeze câmpul de tensiuni şi deformaţii în jurul vârfului fisurii.

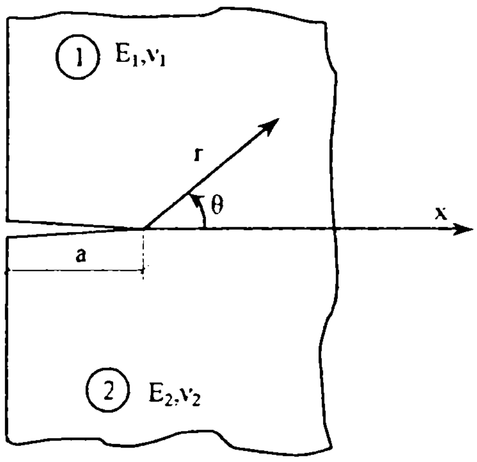


Fig. 2.4.5.1

Şi această problemă a fost rezolvată de WILLIAMS în 1959 şi definitivată de ZAK şi WILLIAMS în 1963. Ne folosim tot de metoda separării variabilelor.

$$F_K(r,\theta) = r^{\lambda+1}\Phi_K(\theta,\lambda)\ ,\ K=1,2 \quad (2.4.5.1)$$

unde

$$\Phi_K(\theta,\lambda) = e^{\varphi_K(\lambda)\theta} \quad (2.4.5.2)$$

Urmând calculele prezentate în detaliu la problema test IV, găsim soluţia:

$$\phi_K(\theta,\lambda) = A_K\cos(\lambda-1)\theta + B_K\cos(\lambda+1)\theta + C_K\sin(\lambda-1)\theta + D_K\sin(\lambda+1)\theta \quad (2.4.5.3)$$

unde dacă: $K=1$ – ne referim la materialul 1 ; $K=2$ – ne referim la materialul 2.

Condiţiile la limită pentru această problemă sunt mult mai multe, comparativ cu testul precedent.

- Pentru $\theta = \pm\pi \Rightarrow \sigma_\theta^{(K)} = 0$ (folosim relaţia (2.4.4.12a) de la problema test nr.IV)

$$\begin{cases} \underset{(K=1)}{\theta} = +\pi \Rightarrow \sigma_\theta^{(1)} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)\left[A_1\cos(\lambda-1)\pi + B_1\cos(\lambda+1)\pi + C_1\sin(\lambda-1)\pi + \right. \\ \qquad\qquad \left. + D_1\sin(\lambda+1)\pi\right] = 0 \quad (2.4.5.4) \\ \underset{(K=2)}{\theta} = -\pi \Rightarrow \sigma_\theta^{(2)} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)\left[A_2\cos(\lambda-1)\pi + B_2\cos(\lambda+1)\pi - C_2\sin(\lambda-1)\pi - \right. \\ \qquad\qquad \left. + D_2\sin(\lambda+1)\pi\right] = 0 \quad (2.4.5.5) \end{cases}$$

echivalent cu a scrie $\phi_1(\pi) = \phi_2(-\pi) = 0$

- Pentru $\theta = \pm\pi \Rightarrow \tau_{r\theta}^{(K)} = 0$ (folosim relaţia (2.4.4.12b) de la problema test nr.IV)

$$\begin{cases} \underset{(K=1)}{\theta} = \pi \Rightarrow \tau_{r\theta}^{(1)} = -r^{\lambda-1}\lambda\left[-A_1(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi - B_1(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi + \right. \\ \qquad\qquad \left. + C_1(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi + D_1(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi\right] = 0 \quad (2.4.5.6) \\ \underset{(K=2)}{\theta} = -\pi \Rightarrow \tau_{r\theta}^{(2)} = -r^{\lambda-1}\lambda\left[A_2(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi + B_2(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi + \right. \\ \qquad\qquad \left. + C_2(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi + D_2(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi\right] = 0 \quad (2.4.5.7) \end{cases}$$

- Continuitatea tensiunilor $\sigma_\theta^{(K)}$ în zona de trecere de la un material la celălalt:

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\theta^{(K)}\Big|_{K=1} = \sigma_\theta^{(K)}\Big|_{K=2}$$

Din relaţiile precedente (2.4.5.4) şi (2.4.5.5) în care în loc de $\theta = \pm\pi$ vom pune $\theta = 0$, obţinem imediat:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{2.4.5.8}$$

- Continuitatea tensiunilor tangenţiale $\tau_{r\theta}^{(K)}$ în zona de trecere de la un material la celălalt :

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta}^{(1)}\Big|_{K=1} = \tau_{r\theta}^{(2)}\Big|_{K=2}$$

Folosind relaţia (2.4.4.14) de la problema test nr.IV sau relaţiile (2.4.5.6) şi (2.4.5.7) de mai sus, avem:

$$C_1(\lambda-1) + D_1(\lambda+1) = C_2(\lambda-1) + D_2(\lambda+1) \tag{2.4.5.9}$$

- În sfârşit, o ultimă condiţie exprimă continuitatea deplasărilor pe muchia de separaţie a celor două materiale.

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_r^1 = u_r^2 \\ u_\theta^1 = u_\theta^2 \end{cases} \quad \text{(v. Nota de la problema test nr. IV)}$$

unde:

$$u_r^K = \frac{1}{2G_K} r^\lambda \left\{-(\lambda+1)\phi_K(\theta) + 4(1+\nu_K)^{-1}\left[A_K \cos(\lambda-1)\theta + C_K \sin(\lambda-1)\theta\right]\right\}$$

$$u_\theta^K = \frac{1}{2G_K} r^\lambda \left\{-\phi'_K(\theta) - 4(1+\nu_K)^{-1}\left[-A_K \sin(\lambda-1)\theta + C_K \cos(\lambda-1)\theta\right]\right\} \quad K = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2G_1}\left[-(\lambda+1)\phi_1(0) + 4(1+\nu_1)^{-1}\cdot A_1\right] = \frac{1}{2G_2}\left[-(\lambda+1)\phi_2(0) + 4(1+\nu_2)^{-1} A_2\right] \\ &\frac{1}{2G_1}\left[-\phi'_1(0) - 4(1+\nu_1)^{-1}\cdot C_1\right] = \frac{1}{2G_2}\left[-\phi'_2(0) - 4(1+\nu_2)^{-1} C_2\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.4.5.10}$$

Am obţinut în final un sistem de opt ecuaţii liniare omogene cu opt necunoscute: A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2. Dacă ţinem cont că avem:

$$\begin{aligned} &\phi_1(0) = A_1 + B_1 \qquad &\phi'_1(0) = C_1(\lambda-1) + D_1(\lambda+1) \\ &\phi_2(0) = A_2 + B_2 \qquad &\phi'_2(0) = C_2(\lambda-1) + D_2(\lambda+1) \end{aligned} \tag{2.4.5.11}$$

vom obţine sistemul final de ecuaţii algebrice:

$$\left.\begin{aligned} A_1\cos(\lambda-1)\pi + B_1\cos(\lambda+1)\pi + C_1\sin(\lambda-1)\pi + D_1\sin(\lambda+1)\pi = 0 \\ A_2\cos(\lambda-1)\pi + B_2\cos(\lambda+1)\pi - C_2\sin(\lambda-1)\pi - D_2\sin(\lambda+1)\pi = 0 \\ -A_1(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi - B_1(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi + C_1(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi + D_1(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi = 0 \\ A_2(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi + B_2(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi + C_2(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi + D_2(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi = 0 \\ A_1 - A_2 + B_1 - B_2 = 0 \\ C_1(\lambda-1) - C_2(\lambda-1) + D_1(\lambda+1) - D_2(\lambda+1) = 0 \\ \left[4(1+\nu_1)^{-1} - (\lambda+1)\right]A_1 + \left[K(\lambda+1) - 4K(1+\nu_2)^{-1}\right]A_2 - (\lambda+1)B_1 + K(\lambda+1)B_2 = 0 \\ -\left[(\lambda-1) + 4(1+\nu_1)^{-1}\right]C_1 + \left[K(\lambda-1) + 4K(1+\nu_2)^{-1}\right]C_2 - (\lambda+1)D_1 + K(\lambda+1)D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4.5.12}$$

Pentru ca sistemul să aibă o soluţie diferită de soluţia banală este necesar ca determinantul principal al sistemului să fie nul:

$$\Delta_{pr}=\begin{vmatrix}
\cos(\lambda-1)\pi & \cos(\lambda+1)\pi & \sin(\lambda-1)\pi & \sin(\lambda+1)\pi & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda-1)\pi & \cos(\lambda+1)\pi & -\sin(\lambda-1)\pi & -\sin(\lambda+1)\pi\\
-(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi & -(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi & (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi & (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi & (\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi & (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi & (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi\\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\lambda-1) & (\lambda+1) & 0 & 0 & -(\lambda-1) & -(\lambda+1)\\
\frac{4}{1+\nu_1}-(\lambda+1) & -(\lambda+1) & 0 & 0 & K(\lambda+1)-\frac{4K}{1+\nu_2} & K(\lambda+1) & 0 & 0\\
0 & 0 & -(\lambda-1)-\frac{4}{1+\nu_1} & -(\lambda+1) & 0 & 0 & K\left[(\lambda-1)+\frac{4}{1+\nu_2}\right] & +K(\lambda+1)
\end{vmatrix}$$

(2.4.5.13)

Am notat : $K=\dfrac{G_1}{G_2}$.

Dezvoltând acest determinant, după calcule algebrice elementare (dar obositoare), obţinem ecuaţia:

$$\operatorname{ctg}^2\lambda\pi+\left[\frac{2K(1+\nu_2)^{-1}-2(1+\nu_1)^{-1}-(K-1)}{2K(1+\nu_2)^{-1}+2(1+\nu_1)^{-1}}\right]^2=0 \qquad (2.4.5.14)$$

Se introduce notaţia:

$$\beta=\frac{2K(1+\nu_2)^{-1}-2(1+\nu_1)^{-1}-(K-1)}{2K(1+\nu_2)^{-1}+2(1+\nu_1)^{-1}} \qquad (2.4.5.15)$$

Ecuaţia (2.4.5.14) devine:

$$\operatorname{ctg}^2\lambda\pi=-\,\beta^2$$

de unde rezultă imediat:

$$\operatorname{ctg}\lambda\pi=\pm\, i\,\beta \qquad (2.4.5.16)$$

Pentru a nu exclude valorile complexe ale lui λ, vom considera:

$$\lambda=\lambda_r+i\lambda_j \qquad \left(i=\sqrt{-1}\right) \qquad (2.4.5.17)$$

Vom mai introduce nişte notaţii, (care nu au nimic de-a face cu componentele deplasărilor):

$$\begin{cases} u=\operatorname{tg}\lambda_r\,\pi\\ \mathrm{v}=\operatorname{th}\lambda_j\,\pi\end{cases} \qquad (2.4.5.18)$$

Scriind funcţiile trigonometrice cu ajutorul tangentei de jumătatea argumentului avem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2\lambda_r\,\pi&=\frac{2\operatorname{tg}\lambda_r\,\pi}{1+\operatorname{tg}^2\lambda_r\,\pi}=\frac{2u}{1+u^2}\\
\cos 2\lambda_r\,\pi&=\frac{1-\operatorname{tg}^2\lambda_r\,\pi}{1+\operatorname{tg}^2\lambda_r\,\pi}=\frac{1-u^2}{1+u^2}\\
sh 2\lambda_j\,\pi&=\frac{2\operatorname{th}\lambda_j\,\pi}{1-\operatorname{th}^2\lambda_j\,\pi}=\frac{2\mathrm{v}}{1-\mathrm{v}^2}\\
ch 2\lambda_j\,\pi&=\frac{1+\operatorname{th}^2\lambda_j\,\pi}{1-\operatorname{th}^2\lambda_j\,\pi}=\frac{1+\mathrm{v}^2}{1-\mathrm{v}^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4.5.19)$$

Din memoratoare pe baza unor relaţii clasice vom calcula:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\sin 2x - i\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} \tag{2.4.5.20}$$

Înlocuind relațiile (2.4.5.19) în (2.4.5.20), obținem:

$$\operatorname{ctg}\lambda\pi = \frac{u\left(1 - v^2\right) - iv\left(1 + u^2\right)}{u^2 + v^2} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\lambda_r\pi\left(1 - \operatorname{th}^2\lambda_j\pi\right)}{\operatorname{tg}^2\lambda_r\pi + \operatorname{th}^2\lambda_j\pi}}_{\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}\lambda\pi) = 0} - i\underbrace{\frac{\left(\operatorname{tg}^2\lambda_r\pi + 1\right)\operatorname{th}\lambda_j\pi}{\operatorname{tg}^2\lambda_r\pi + \operatorname{th}^2\lambda_j\pi}}_{\operatorname{Im}(\operatorname{ctg}\lambda\pi) = \pm\beta} \tag{2.4.5.21}$$

Prin aceste transferări ecuația (2.4.5.14) se reduce în final la:

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{ctg}\lambda\pi\right) = 0 \tag{2.4.5.22}$$

$$\operatorname{Im}\left(\operatorname{ctg}\lambda\pi\right) = \pm\beta \tag{2.4.5.23}$$

Ne trebuie soluția comună a celor două ecuații. Sunt posibile două situații:

Cazul I: $\operatorname{Re}\left(\operatorname{ctg}\lambda\pi\right) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\lambda_r\pi = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_r = n = 0,1,2,3,\ldots$ (2.4.5.24)

Din această ecuație, relația (2.4.5.23) scrisă cu ajutorul lui (2.4.5.21) ne dă:

$$\frac{1}{\operatorname{th}\lambda_j\pi} = \pm\beta \;\Rightarrow\; \operatorname{cth}\lambda_j\pi = \pm\beta \;\Rightarrow\; \lambda_j = \pm\frac{1}{\pi}\operatorname{arcth}\beta \tag{2.4.5.25}$$

Cazul II: $\operatorname{tg}\lambda_r\pi = \infty \;\Rightarrow\; \lambda_r = \dfrac{2n+1}{2} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$ (2.4.5.26)

ceea ce conduce la:

$$\operatorname{th}\lambda_j\pi = \pm\beta \Rightarrow \lambda_j = \pm\frac{1}{\pi}\operatorname{arcth}\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{\beta+1}{\beta-1}\right] \tag{2.4.5.27}$$

Se vede că dacă: $v_1 = v_2 \;\Rightarrow\; K = 1 \;\Rightarrow\; \beta = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_j = 0$.

În continuare, după ce am calculat valorile lui λ, ne reîntoarcem la calculul câmpului de tensiuni din jurul fisurii. Formula (2.4.5.1) o vom scrie astfel:

$$F(r,\theta) = r^{\lambda+1}\phi(\theta,\lambda) = G(r)\phi(\theta,\lambda) \tag{2.4.5.28}$$

cu notația evidentă $G(r) = r^{\lambda+1}$.

Tensiunile au forma cunoscută (v. problema test nr. IV):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = r^{-2}G(r)\phi''(\theta) + r^{-1}G'(r)\phi(\theta)\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = G''(r)\phi(\theta)\\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\theta} = r^{-2}G(r)\phi'(\theta) - r^{-1}G'(r)\phi'(\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.5.29}$$

La calculul derivatelor din relațiile precedente trebuie să ținem cont de forma complexă a lui λ: $\lambda = \lambda_r + i\lambda_j$

$$G(r) = r^{\lambda+1} = r^{(\lambda_r+1)+i\lambda_j} \cdot r^{i\lambda_j} \tag{2.4.5.30}$$

$$r^{i\lambda_j} = e^{i\lambda_j\ln r}$$

Dar : $\ln r = \ln r + i2K\pi$ [•], $K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Atunci : $r^{i\lambda_j} = e^{i\lambda_j \ln r} = e^{-2K\pi\lambda_j} e^{i\lambda_j \ln r} = e^{-2K\pi\lambda_j}\left[\cos\left(\lambda_j \ln r\right) + i\sin\left(\lambda_j \ln r\right)\right]$

Pentru $K = 0$ rezultă:

$$r^{i\lambda_j} = \cos\left(\lambda_j \ln r\right) + i\sin\left(\lambda_j \ln r\right) \tag{2.4.5.31}$$

Cu acest rezultat ecuaţia (2.4.5.30) devine:

$$G(r) = r^{\lambda_r + 1}\left[\cos\left(\lambda_j \ln r\right) + i\sin\left(\lambda_j \ln r\right)\right] \tag{2.4.5.32}$$

care pentru $\lambda_r = \dfrac{1}{2}$ ne conduce la :

$$G(r) = r^{\frac{3}{2}}\left[\cos\left(\lambda_j \ln r\right) + i\sin\left(\lambda_j \ln r\right)\right] \quad \text{cu} \quad \mathrm{Re}\,G(r) = r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\lambda_j \ln r\right) \tag{2.4.5.33}$$

$\Rightarrow$

$$\left[\mathrm{Re}\,G(r)\right]' = r^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\cos\left(\lambda_j \ln r\right) - \lambda_j \sin\left(\lambda_j \ln r\right)\right] \tag{2.4.5.34}$$

$$\left[\mathrm{Re}\,G(r)\right]'' = r^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{3}{2} - \lambda_j^2\right)\cos\left(\lambda_j \ln r\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_j}{2}\right)\cos\left(\lambda_j \ln r\right)\right] \tag{2.4.5.35}$$

Revenim la soluţia (2.4.5.11) de la problema test nr.IV:

$$\phi(\theta,\lambda) = A\cos(\lambda - 1)\theta + B\cos(\lambda + 1)\theta + C\sin(\lambda - 1)\theta + D\sin(\lambda + 1)\theta \tag{2.4.5.36}$$

unde vom înlocui $\lambda = \lambda_r + i\lambda_j$ şi vom ţine cont de formulele cunoscute:

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \sin x\cosh y - i\cos x\sinh y \\ \cos(x + iy) &= \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y \end{aligned} \tag{2.4.5.37}$$

Vom avea:

$$\mathrm{Re}\left\{\sin\left[(\lambda_r \pm 1) + i\lambda_j\right]\theta\right\} = \sin(\lambda_r \pm 1)\theta\cosh\lambda_j\theta \tag{2.4.5.38}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\cos\left[(\lambda_r \pm 1) + i\lambda_j\right]\theta\right\} = \cos(\lambda_r \pm 1)\theta\cosh\lambda_j\theta \tag{2.4.5.39}$$

Introducem aceste rezultate în (2.4.5.36) şi separăm partea reală:

$$\mathrm{Re}\left[\phi(\theta)\right] = \cosh\lambda_j\theta\left[A\cos(\lambda_r - 1)\theta + B\cos(\lambda_r + 1)\theta + C\sin(\lambda_r - 1)\theta + D\sin(\lambda_r + 1)\theta\right] \tag{2.4.5.40}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[F(r,\theta)\right] = r^{\lambda_r + 1}\cos(\lambda_j \ln r)\cosh\lambda_j\theta\big[&A\cos(\lambda_r - 1)\theta + B\cos(\lambda_r + 1)\theta + \\ &+ C\sin(\lambda_r - 1)\theta + D\sin(\lambda_r + 1)\theta\big] \end{aligned} \tag{2.4.5.41}$$

Dacă facem:

$$\lambda_r = \frac{1}{2} \Rightarrow Re\left[\phi(\theta)\right] = \cosh\lambda_j\theta\left[A\cos\frac{\theta}{2} + B\cos\frac{3\theta}{2} - C\sin\frac{\theta}{2} + D\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

Pentru calculele ulterioare vom descompune:

[•] Ştim că $\ln(z) = \ln(z) + i\arg z$, unde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$

$$\operatorname{Re}[\phi(\theta)] = f(\theta)\cdot g(\theta) \text{ unde: } \begin{cases} f(\theta) = \cosh \lambda_j \theta \\ g(\theta) = A\cos\frac{\theta}{2} + B\cos\frac{3\theta}{2} - C\sin\frac{\theta}{2} + D\sin\frac{3\theta}{2} \end{cases} \qquad (2.4.5.42)$$

Impunem condiţiile la limită:

- pentru $\theta = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \sigma_\theta = 0$. Din relaţia (42) $f(+\pi) = f(-\pi) \neq 0 \Rightarrow$

$$g_1(\pi) = -C - D = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -D = -a$$
$$g_2(-\pi) = C + D = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -D$$

- pentru $\theta = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = 0$

Calculele elementare ne arată că pentru a satisface condiţiile de mai sus trebuie să avem:

$$g_1'(\pi) = g_2'(-\pi).$$

Din (2.4.5.43) rezultă:

$$g'(\theta) = -\frac{A}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{3B}{2}\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{C}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3D}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

Relaţia de mai sus ne dă:

$$A = 3B = b$$

Din (2.4.5.42) obţinem:

$$g(\theta) = a\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) + b\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

Avem succesiv:

$$f'(\theta) = \lambda_j \, sh \lambda_j \theta$$

$$g'(\theta) = a\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) - b\left(\frac{1}{6}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \phi'(\theta) &= f'(\theta)g(\theta) + f(\theta)g'(\theta) = \\ &= a\left[\operatorname{ch}\lambda_j\theta\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + \lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j\theta\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \\ &\quad + b\left[\operatorname{ch}\lambda_j\theta\left(-\frac{1}{6}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j\theta\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''(\theta) &= f''(\theta)g(\theta) + 2f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g''(\theta) = \\ &= a\left\{\operatorname{ch}\lambda_j\theta\left[-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{9}{4}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + 2\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j\theta\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_j^2 \operatorname{ch}^2\lambda_j\theta\left[\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right]\right\} + \\ &\quad + b\left\{\operatorname{ch}\lambda_j\theta\left[-\frac{3}{4}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{9}{4}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + 2\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j\theta\left[-\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_j^2 \operatorname{ch}^2\lambda_j\theta\left[\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Cu aceste rezultate expresiile tensiunilor vor deveni:

$$\sigma_r = r^{-\frac{1}{2}}\cos(\lambda_j \ln r)\phi''(\theta) + r^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\cos(\lambda_j \ln r) + \lambda_j \sin(\lambda_j \ln r)\right]\phi(\theta)$$

$$\sigma_\theta = r^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{3}{4} - \lambda_j^2\right)\cos(\lambda_j \ln r) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_j}{2}\right)\sin(\lambda_j \ln r)\right]\phi(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = r^{-\frac{1}{2}}\left\{\left[\cos(\lambda_j \ln r)\right]\phi'(\theta) + \left[\frac{3}{2}\cos(\lambda_j \ln r) + \lambda_j \sin(\lambda_j \ln r)\right]\phi'(\theta)\right\}$$

2.4.6. Contribuţii la generalizarea problemei crestăturii de interfaţă în domeniul vâscoelastic

Am pornit de la ideea că cele două materiale care alcătuiesc semiplanul cu fisură interfacială de la problema test nr.V, ar putea avea o comportare vâscoelastică, manifestându-se fie fenomene de fluaj, fie fenomene de relaxare. Privind această comportare sub alt aspect, putem spune că atât tensiunile, cât şi deplasările sunt funcţii de timp. Evident că m-am gândit încă de la început că, pentru a elimina factorul timp, trebuie să utilizăm transformate Laplace. Voi detalia această problemă în continuare. *Ea se constituie într-o contribuţie teoretică relativă la acest tip de probleme.*

2.4.6.1. Câteva elemente de vâscoelasticitate liniară

Solidele vâscoelastice având capacitatea de a acumula şi de a disipa energia mecanică, manifestă simultan proprietăţile solidului elastic şi ale fluidului vâscos. De aceea ele reprezintă aşa-numitele „**corpuri cu memorie**" deoarece starea de tensiune din momentul considerat t depinde de întreaga „**istorie**" a deformaţiei, adică de stările de deformaţie de pe intervalul $(-\infty, t\,]$.

Cele două fenomene fundamenale care se desfăşoară într-un corp din material vâscoelastic sunt: **fenomenul de fluaj** şi **fenomenul de relaxare**, destul de bine-cunoscute şi studiate amândouă. Considerând că materialele posedă proprietăţi vâscoelastice facem o ipoteză mult mai apropiată de realitate decât toate cele făcute până acum.

I. Fenomenul de fluaj – reprezintă procesul variaţiei deformaţiei unui corp în funcţie de timp în condiţiile menţinerii constante a tensiunii şi a temperaturii. Graficul care descrie comportarea la fluaj $\varepsilon = \varepsilon(t)$ are forma din **Fig.2.4.6.1**. El se obţine urmărind creşterea deformaţiei specifice (ε) în timp, la o bară dreaptă de secţiune constantă supusă la întindere sub acţiunea unei tensiuni σ_0 aplicată brusc şi menţinută constantă. Prin aplicarea instantanee a tensiunii σ_0 la momentul iniţial t=0, apare deformaţia specifică instantanee ε_0 dependentă de σ_0, anume:

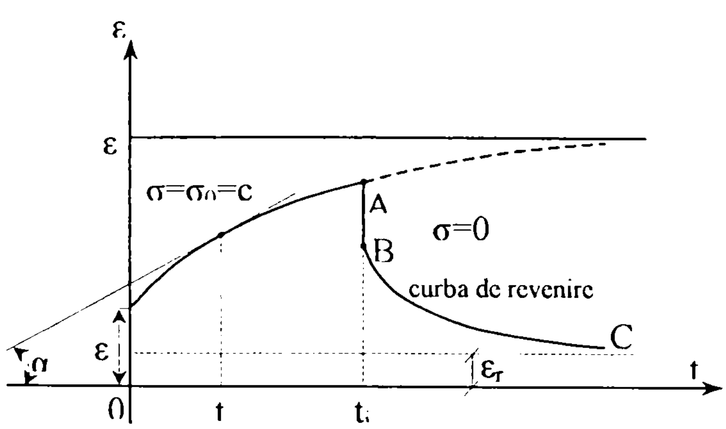


Fig. 2.4.6.1.

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \tag{2.4.6.1}$$

unde E reprezintă **modulul dinamic de elasticitate**. Se va constata experimental că deşi tensiunea σ_0 este menţinută constantă, are loc o creştere a deformaţiei specifice ε în raport cu timpul, creştere care poate fi mărginită, ceea ce înseamnă că graficul $\varepsilon(t)$ admite o asimptotă orizontală $\varepsilon = \varepsilon_1$ (ca în **Fig. 2.4.6.2**) sau creşterea lui ε poate fi continuă până la rupere: se spune că materialul cercetat are proprietăţile unui **lichid vâscos**. O prezentare sintetică şi completă a problemelor de reologie se găseşte în Radu VOINEA [V21] Cap.46, p.687.

Pentru caracterizarea proprietăţilor mecanice ale materialelor aflate în condiţii de fluaj se defineşte aşa-numita **funcţie de fluaj** $\varphi(\sigma_0, t)$ astfel:

$$\varphi(\sigma_0, t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}, \qquad t \geq 0, \quad T^\circ C = \text{const} \tag{2.4.6.2}$$

unde
$$\lim_{t \to +0} \varepsilon(t) = \varepsilon(+0) = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \tag{2.4.6.3}$$

Deducem de aici că la aplicarea bruscă a sarcinilor corpul posedă proprietăţi elastice. De pe grafic se vede că viteza de deformaţie $\dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \text{tg}\alpha$ descreşte în raport cu timpul, deci $\ddot{\varepsilon} = \dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} < 0$.

Dacă la un anumit moment t_i se suprimă brusc încărcarea şi se continuă observarea variaţiei deformaţiei specifice ε, curba va avea forma ABC din **Fig. 2.4.6.1**: o scădere bruscă AB datorită deformaţiei elastice, apoi o scădere progresivă din ce în ce mai lentă, până la o asimptotă orizontală, care defineşte **deformaţia reziduală** (permanentă) ε_r. Curba BC pentru $t \geq t_i$ se numeşte **curbă de fluaj invers** sau **curbă de revenire**. Dacă $\varepsilon_r = 0$ spunem că avem un **corp cu elasticitate întârziată**.

Printre materialele cu comportare vâscoasă sunt şi acelea care au capacitatea să înmagazineze o parte din energia mecanică consumată de forţele exterioare pentru deformarea lor şi să difuzeze (să împrăştie) o parte din această energie. Se ştie că aşa numitul **lichid vâscos newtonian**, caracterizat prin **legea lui Newton**

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{2.4.6.4}$$

unde $\eta \left[\dfrac{N \cdot s}{m^2}\right]$ este **coeficientul dinamic de vâscozitate**, are proprietatea de a împrăştia energie mecanică dar nu şi de a o înmagazina. Pentru un asemenea lichid vâscos s-a imaginat un corespondent mecanic reprezentat de **amortizorul pneumatic liniar**. Acesta constă dintr-un piston perforat care se poate deplasa fără frecare într-un cilindru în care se găseşte un lichid vâscos.

II. Fenomenul de relaxare. Să presupunem că la momentul t=0 am produs în epruveta încercată o tensiune σ_0 care a dat naştere la deformaţia elastică instantanee $\varepsilon_0 = \dfrac{\sigma_0}{E}$. Să mai presupunem că printr-un procedeu oarecare menţinem constantă deformaţia ε_0. Atunci vom constata că tensiunea σ din bară scade în timp în mod continuu de la o valoare σ_0 la o valoare asimptotică $\sigma_\infty = E_\infty \cdot \varepsilon_0$.

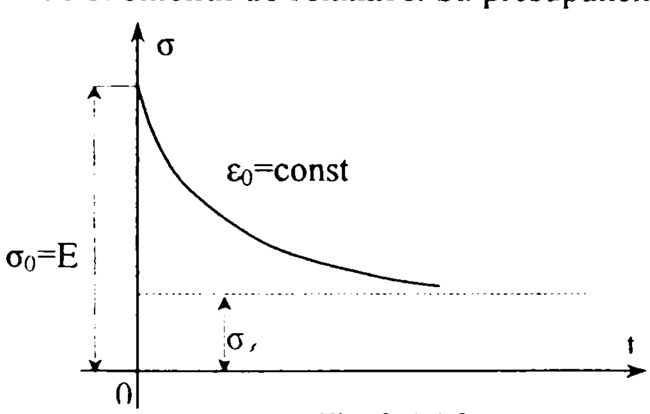


Fig .2.4.6.2.

Fenomenul descris de această experienţă şi ilustrat grafic în **Fig. 2.4.6.2** se numeşte **fenomen de relaxare**. Pentru a caracteriza comportarea corpului studiat din punct de vedere al fenomenului de relaxare se defineşte **funcţia de relaxare**.

$$r(\varepsilon_0, t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \tag{2.4.6.5}$$

Se observă că $\sigma \geq 0$, $\dot{\sigma} \leq 0$, $\ddot{\sigma} \geq 0$, deci funcţia de relaxare are proprietăţile:

$$r \geq 0, \quad \dot{r} \leq 0, \quad \ddot{r} \geq 0 \tag{2.4.6.6}$$

Cu ajutorul funcţiilor de fluaj şi relaxare putem studia proprietăţile mecanice ale corpurilor vâscoase.

2.4.6.2. Legi constitutive

a). Solide elastice

Reamintim (vezi *§2.2*) că proprietăţile elastice ale unui material omogen, izotrop şi liniar elastic sunt caracterizate prin trei constante elastice de material E, G, ν, din care numai două sunt independente, deoarece:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4.6.7}$$

Se mai definesc:

- constanta elastică a lui Lamé (notată şi λ):

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \tag{2.4.6.8}$$

- deformaţia specifică volumică (numită şi dilatarea cubică):

$$\varepsilon_V = \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = const.$$

- modulul de compresibilitate hidrostatică sau modulul volumetric:

$$K = \Lambda + \frac{2}{3}\nu \tag{2.4.6.9}$$

- valorile medii:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_{1\sigma}}{3}; \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \frac{\theta}{3} = \frac{\varepsilon_V}{3} \tag{2.4.6.10}$$

Cu valorile medii se definesc tensorii sferici şi tensorii deviatori:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^d \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^d \end{aligned} \quad \text{unde: } \sigma_{ij}^s = \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ij}^s = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad i,j,k = 1,2,3 \tag{2.4.6.11}$$

O serie de legi amintite în § **2.1.** se scriu astfel:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} \qquad \text{(Lamé)} \tag{2.4.6.12}$$

$$E\varepsilon_{ij} = (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\left(\sum_k \sigma_{kk}\right)\delta_{ij} \qquad \text{(Hooke)} \tag{2.4.6.13}$$

$$\sigma_m = 3K\varepsilon_m \tag{2.4.6.14}$$

$$\sigma_{ij}^d = 2G\varepsilon_{ij}^d \tag{2.4.6.15}$$

b). Fluidul lui Newton (corpuri vâscoase)

La lichidele newtoniene în mişcare, deformaţiile sunt însoţite de tensiuni tangenţiale care se opun mişcării, modificând repartiţia vitezelor. Legea lui Newton (2.4.6.4) este valabilă numai pentru fluidele newtoniene în regim de scurgere laminară. Ea are aceeiaşi formă şi pentru componentele tensorilor T_σ şi T_ε:

$$\sigma_{ij}^s = A \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^s \quad ; \quad \sigma_{ij}^d = B \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^d \tag{2.4.6.16}$$

unde: A – vâscozitatea dinamică de volum; B – vâscozitatea dinamică de formă.

În starea de repaus tensorul tensiunilor se reduce numai la un tensor sferic al unei compresiuni hidrostatice p:

$$\sigma_{ij}^s = -p\delta_{ij} \tag{2.4.6.17}$$

Deoarece în timpul deplasării în fiecare moment starea de tensiune şi deformaţie se schimbă, în relaţii trebuiesc introduse vitezele de deformaţii. De exemplu viteza de deformaţie cubică $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \sum_i \varepsilon_{ij} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \dot{\varepsilon}_{ij}^s dt \tag{2.4.6.18}$$

În aceste condiţii, pentru fluide vâscoase, ecuaţiile lui Lamé au forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \overline{\lambda}\dot{\theta}\delta_{ij} + 2\overline{\eta}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.4.6.19}$$

unde $\overline{\lambda}$ şi $\overline{\eta}$ sunt caracteristici de vâscozitate şi se numesc *coeficienţii lui Navier*. Se observă că în aceste relaţii a apărut o necunoscută în plus: presiunea p, în repaus.

c). Corpuri bolzmaniene

Corpuri la care se aplică principiul lui Bolzmann al suprapunerii efectelor se numesc corpuri bolzmaniene sau corpuri care posedă vâscozitate liniară. Vom analiza pe scurt curbele de fluaj şi relaxare pentru materialele bolzmaniene.

Curba de fluaj: Presupunem că aplicăm o tensiune care este funcţie de timp $\sigma = \sigma(t)$. Dacă notăm $\frac{d\sigma}{dt} = \sigma'(t)$ obţinem în final:

$$\varepsilon(t)\int_{-\infty}^{t} \sigma'(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{2.4.6.20}$$

Aceasta este o ecuaţie integrală de tip VOLTERRA.

Dacă pentru $\tau < 0 \Rightarrow \sigma = 0$, iar pentru $\tau > 0$, $\sigma = \sigma_0$, putem scrie:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 K_0 + \int_0^t \sigma_0 f'(t-\tau)d\tau \tag{2.4.6.21}$$

unde $f'(t-\tau)$ este numită **funcţie de memorie**.

Dacă se integrează vom avea:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 K_0 + \sigma_0[f(t) - f(0)] \tag{2.4.6.22}$$

Se alege $f(0) = K_0 \Rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 f(t)$.

Primitiva funcţiei de memorie este tocmai funcţia de fluaj.

Curba de relaxare. Introducând o funcţie de memorie $r'(t-\tau)$, tensiunea totală va fi:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)G_0 + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)r'(t-\tau)d\tau \tag{2.4.6.23}$$

Punând r(0) = G_0, se găseşte

$$\sigma(t)=\eta_0\varepsilon(t)+\int_0^t \varepsilon'(\tau)r(t-\tau)d\tau \qquad (2.4.6.24)$$

d). Solide vâscoelastice izotrope

Fie $\sigma(\mathbf{r},t)$ şi $\varepsilon(\mathbf{r},t)$, $(\mathbf{r},t)\in\Omega\times\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$ câmpurile tensoriale ale tensiunii şi deformaţiei specifice ale căror componente admitem că sunt funcţii de clasă $C^{0,0}(\Omega\times\mathbf{R})$ şi satisfac condiţiile:

$$\sigma_{ij}=0,\ \varepsilon_{ij}=0 \quad \text{pentru} \quad t\le 0, \forall(\mathbf{r})(x_h)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$$

care corespund *stării naturale* a solidului înainte de t = 0.

Într-o reprezentare funcţională legătura dintre cele două câmpuri se poate scrie:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=L_{ij}(\varepsilon_{kl}) \qquad k,l=1,2,3 \qquad (2.4.6.25)$$

Dacă şi **r** şi t sunt variabile L_{ij} reprezintă un operator, astfel că relaţia precedentă se poate scrie condensat:

$$\sigma=L\varepsilon \qquad (2.4.6.26)$$

$$L: C^{o,o}(\Omega,\mathbf{R})\to\mathbf{R}\,;\ \varepsilon_{kl}=0 \text{ pentru } t<0.$$

În mod riguros, vom numi **solid liniar vâscoelastic** un solid deformabil cu deformaţii liniarizate (gradientul deplasării $u_{i,j}<<1$) la care legea constitutivă are forma $\sigma=L\varepsilon$ şi verifică următoarele condiţii:

a) $\forall\varepsilon',\varepsilon''\in C^{o,o}(\Omega\times\mathbf{R})$, pentru $t<0\Rightarrow\varepsilon'=\varepsilon''=0$

b) $\forall\alpha',\alpha''\in\mathbf{R}\Rightarrow L(\alpha'\varepsilon'+\alpha''\varepsilon'')=\alpha'L(\varepsilon')+\alpha''L(\varepsilon'')$

c) $\forall t,\tau\in\mathbf{R}$ avem $\varepsilon'(\mathbf{r},t)=\varepsilon(\mathbf{r},t-\tau)\Rightarrow\sigma(\mathbf{r},t)=L(\varepsilon'(\mathbf{r},t))=\sigma(\mathbf{r},t-\tau)$

d) $\forall t\in\mathbf{R},\forall\mathbf{r}\in\Omega$ fixaţi $\exists\mu_t>0$ astfel încât:

$$|L(\varepsilon(\mathbf{r},t))|\le\mu_t\|\varepsilon(\mathbf{r},t)\|$$

unde:

$$\|\varepsilon(\mathbf{r},t)\|=\max_{\tau\in[0,t]}\{|\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)|\}$$

Condiţiile impuse funcţionalei L au următoarea interpretare mecanică:

b) → exprimă liniaritatea funcţionalei L iar din punct de vedere mecanic asigură aplicarea principiului suprapunerii efectelor al lui Bolzmann privind solidele liniar vâscoelastice;
c) → arată independenţa faţă de originea de măsurare a timpului, pentru L;
d) → arată că L este mărginită, şi împreună cu b) asigură continuitatea ei.

Pe componente se poate scrie:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=L_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t) \qquad (\text{i, j, k, l} = 1, 2, 3)$$

Această lege constitutivă se poate reprezenta cu ajutorul **integralei Stieltjes** în baza unei teoreme a lui **F. Riesz** astfel:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\int_0^t\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t-\tau)\,d\Psi_{ijkl}(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t-\tau)\,d\Psi_{ijkl}(\mathbf{r},t) \qquad (2.4.6.27)$$

unde ψ_{ijkl} sunt funcţii cu variaţie mărginită în raport cu $t\in\mathbf{R}$, pe orice interval $[a,b]\subset\mathbf{R}$ şi nule pentru $t\le 0$. Funcţiile ψ_{ijkl} se numesc **funcţii de relaxare** şi sunt componentele unui tensor de ordinul patru simetric în raport cu indicii (i,j) şi (k,l); cele 36 de componente distincte caracterizează complet solidul vâscoelastic liniar anizotrop.

Pe baza unor proprietăţi ale integralei Stieltjes, legea constitutivă are forma:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t)\psi_{ijkl}(\mathbf{r},0+)+\int_0^t \varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t-\tau)\frac{\partial\Psi_{ijkl}(\mathbf{r},\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{2.4.6.28}$$

Dacă aceste mărimi fundamentale admit o transformată Laplace, legea constitutivă se poate scrie:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p)=\tilde{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{r},p)p\tilde{\Psi}_{ijkl}(\mathbf{r},p) \tag{2.4.6.29}$$

Astfel legile din domeniul elastic se pot transpune în domeniul vâscoelastic dacă se stabilesc următoarele corespondenţe:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)&\leftrightarrow\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p)\\ C_{ijkl}&\leftrightarrow p\tilde{\Psi}_{ijkl}(\mathbf{r},p)\end{aligned} \tag{2.4.6.30}$$

Ca exemplu să transpunem legea constitutivă a solidelor vâscoelastice izotrope:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p)=\tilde{\lambda}(\mathbf{r},p)\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},p)+2\tilde{\mu}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r},p) \tag{2.4.6.31}$$

şi analog:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{d}_{ij}(\mathbf{r},p)&=2\tilde{\mu}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}^{d}_{ij}(\mathbf{r},p)\\ \tilde{\sigma}^{s}_{ij}(\mathbf{r},p)&=3\tilde{K}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}^{s}_{ij}(\mathbf{r},p)\\ \tilde{K}(\mathbf{r},p)&=\tilde{\lambda}(\mathbf{r},p)+\frac{2}{3}\tilde{\mu}(\bar{\mathbf{r}},p)\end{aligned}\right\} \tag{2.4.6.32}$$

Distribuţia μ se numeşte **modulul de relaxare la alunecare** şi K se numeşte **modulul de relaxare la dilatare volumetrică**.

Reţinem de aici faptul că problemele fundamentale formulate pentru solidul elastic vor fi identice şi pentru solidul vâscoelastic, deoarece deosebirea dintre ele este dată numai de legea constitutivă. Între legile constitutive ale celor două modele de solide există o dependenţă specifică constând în faptul că imaginea Laplace (sau Fourier) în distribuţii a legii constitutive a solidului vâscoelastic coincide ca structură matematică cu legea lui Hooke de la solidele elastice unde variabila complexă p a transformatei Laplace joacă rol de parametru ca şi $\mathbf{r}\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$. Pornind de la această idee, V.Volterra a arătat că rezolvarea problemelor vâscoelasticităţii se reduce în esenţă la probleme ale teoriei elasticităţii. Astfel T.ALFREY şi E.H.LEE au formulat o metodă de rezolvare a problemelor de vâscoelasticitate numită **principiul corespondenţei** sau **principiul lui Volterra**.

Aplicând transformata Laplace în distribuţii obţinem:

- **Ecuaţii de echilibru static:**

$$\tilde{\sigma}_{ij,j}(\mathbf{r},p)+\tilde{X}_i(\mathbf{r},p)=0 \tag{2.4.6.33}$$

- **Ecuaţii geometrice:**

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r},p)=\frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{i,j}+\tilde{u}_{j,i}\right) \tag{2.4.6.34}$$

- **Condiţiile de frontieră:**

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p)\cdot n_j(\mathbf{r})&=\tilde{p}^*_i(\mathbf{r},p) \quad \text{pe} \quad S_\sigma\\ \tilde{u}_i\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p)&=\tilde{u}^*_i(\mathbf{r},p) \quad \text{pe} \quad S_u\end{aligned}\right\} \tag{2.4.6.35}$$

- **Legi constitutive:**

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{\sigma}_{ij}^{d}(\mathbf{r},p) &= 2\tilde{\mu}^{*}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}_{ij}^{d}(\mathbf{r},p) \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{s}(\mathbf{r},p) &= 3\tilde{K}^{*}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}_{ij}^{s}(\mathbf{r},p) \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.6.36)$$

- **Ecuaţii de compatibilitate:**

$$\tilde{\varepsilon}_{ij,kl}(\mathbf{r},p)+\tilde{\varepsilon}_{lk,ij}(\mathbf{r},p)=\tilde{\varepsilon}_{jk,il}(\mathbf{r},p)+\tilde{\varepsilon}_{il,kj}(\mathbf{r},p) \qquad (2.4.6.37)$$

2.4.6.3. Modele mecanice pentru descrierea comportării vâscoelastice

Se utilizează de obicei patru modele mecanice simple (sau fundamentale): resortul, amortizorul, patina şi regulatorul.

Resortul (**Fig.2.4.6.3**) – simbolizează un corp dotat cu o elasticitate totală şi instantanee, având masa neglijabilă, numit corpul lui Hooke.

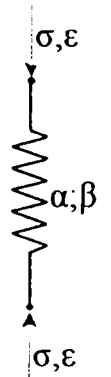


Fig. 2.4.6.3

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{s} &= \alpha\varepsilon_{ij}^{s} \\ \sigma_{ij}^{d} &= \beta\varepsilon_{ij}^{d} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.6.38)$$

Proporţionalitatea dintre tensorii sferici şi deviatori introduce două constante elastice independente α,β, care în funcţie de natura solicitării iau diferite denumiri. De exemplu, pentru forfecare pură $\alpha=\beta=G$ - modulul de elasticitate transversal.

Amortizorul (**Fig. 2.4.6.4**) – este reprezentat printr-un piston perforat, care se deplasează fără frecare solidă într-un ci lindru în care se găseşte un fluid newtonian. Relaţiile între tensorii sferici şi deviatori sunt:

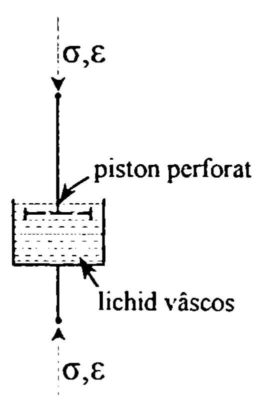


Fig. 2.4.6.4

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{s} &= A\dot{\varepsilon}_{ij}^{s} \\ \sigma_{ij}^{d} &= B\dot{\varepsilon}_{ij}^{d} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.6.39)$$

Patina (**Fig. 2.4.6.5**) – simbolizează frecarea solidă. Creşterea tensiunilor are efect numai când s-a ajuns la limita de curgere, după care tensiunea rămâne constantă.

-pentru materialele ideal plastice.

$-\sigma_c \le \sigma \le \sigma_c$

La limită există relaţia:

$$\sigma=\sigma_c\cdot\frac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} \qquad (2.4.6.40)$$

În cazul materialelor cu consolidare se foloseşte o patină înclinată (patina lui Képès) care simbolizează sporul de rezistenţă după atingerea limitei de curgere, domeniu în care frecarea este proporţională cu deformaţia.

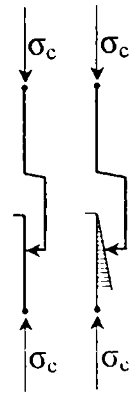


Fig. 2.4.6.5

$$\sigma = K|\varepsilon|\frac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} \tag{2.4.6.41}$$

Regulatorul (Fig. 2.4.6.6) – simbolizează corpurile care până la o anumită viteză de deformare $\dot{\varepsilon}_c$ nu opun nici o rezistenţă la deformare, dar nici nu permit să se depăşească niciodată această viteză de deformare.

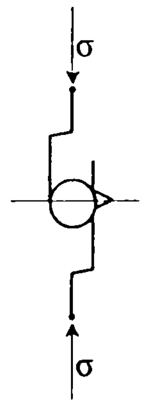


Fig. 2.4.6.6

$$-\dot{\varepsilon}_c \leq \dot{\varepsilon} \leq \dot{\varepsilon}_c \tag{2.4.6.42}$$

Gruparea modelelor mecanice elementare

Modelul KELVIN-VOIGT (Fig. 2.4.6.7) este alcătuit din legarea în paralel a unui resort cu un amortizor; aceasta însemnă că ambele elemente vor avea aceeaşi deformaţie iar tensiunea rezultantă este egală cu suma tensiunilor elementelor:

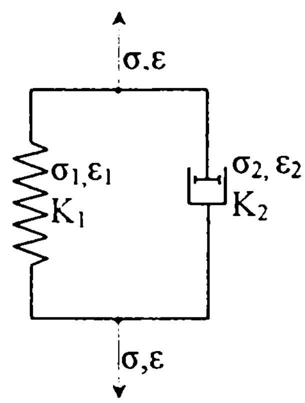


Fig. 2.4.6.7

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = K_1\varepsilon_1 + K_2\dot{\varepsilon}_2$$
$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Aceasta este **ecuaţia de stare** la momentul t, care scrisă mai explicit este:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{K_1}{K_2}\varepsilon = \frac{1}{K_2}\sigma(t)$$

Prin integrare rezultă:

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{K_1}{K_2}}\left(\frac{1}{K_2}\int_0^t \sigma(t)e^{\frac{K_1}{K_2}t}dt + \varepsilon_0\right) \tag{2.4.6.43}$$

Ecuaţia diagramei de fluaj se obţine considerând $\sigma = \sigma_0 = const$

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{K_1}{K_2}t}\varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{K_1}\left(1 - e^{-\frac{K_1}{K_2}t}\right) \tag{2.4.6.44}$$

Dacă se consideră că la $t = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = 0$ rezultă

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{K_1}\left(1 - e^{-\frac{K_1}{K_2}t}\right) \tag{2.4.6.45}$$

De aici rezultă expresia funcţiei de fluaj:

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{K_1}\left(1 - e^{-\frac{K_1}{K_2}t}\right) \tag{2.4.6.46}$$

Pentru solicitări monoaxiale $K_1 = E$; $K_2 = \eta$; nu există fenomene de relaxare. Pentru $t \le 0$, luăm $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$. La $t = 0+$ aplicăm o încărcare variabilă:

$$\sigma(t) = \left(K_1 + K_2 \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(t) \qquad \Big| \cdot e^{-pt} \tag{2.4.6.47}$$

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \sigma(t)e^{-pt}dt}_{\tilde{\sigma}(p)} = K_1 \underbrace{\int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-pt}dt}_{\tilde{\varepsilon}(p)} + K_2 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}e^{-pt}dt}_{p\tilde{\varepsilon}(p)-\varepsilon(0)} \tag{2.4.6.48}$$

$$\tilde{\sigma}(p) = K_1\tilde{\varepsilon}(p) + K_2[p\tilde{\varepsilon}(p) - \varepsilon(0)]; \qquad \varepsilon(0) = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \frac{\tilde{\sigma}(p)}{K_1 + pK_2} = \frac{\tilde{\sigma}(p)}{K_2\left(p + \frac{K_1}{K_2}\right)} \tag{2.4.6.49}$$

Revenim în domeniul timpului aplicând transformata Laplace inversă:

$$f_1(p) = \tilde{\sigma}(p) \Rightarrow f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{\sigma}(p)) = \sigma(t)$$

$$f_2(p) = \frac{1}{K_2\left(p + \frac{K_1}{K_2}\right)} \Rightarrow f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{K_2\left(p + \frac{K_1}{K_2}\right)}\right] = \frac{1}{K_2}e^{-\frac{K_1}{K_2}t} \text{ •} \tag{2.4.6.50}$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \tilde{\varepsilon}(p) = f_1(p) \cdot f_2(p)$$

Conform teoremei convoluției:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)dt = \frac{1}{K_2}\int_0^t \sigma(\tau)e^{-\frac{K_1}{K_2}(t-\tau)}dt \tag{2.4.6.51}$$

Modelul MAXWELL (Fig. 2.4.6.8) – se obține prin legarea în serie a unui resort cu un amortizor. Ecuația de stare este imediată:

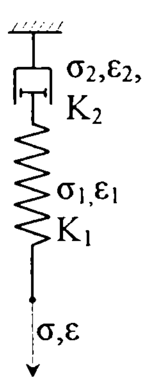


Fig. 2.4.6.8

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{K_1}\ ; \qquad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{K_2}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{K_1} + \frac{\sigma}{K_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma} + \frac{K_1}{K_2}\sigma = K_1\dot{\varepsilon}$$

$$\sigma(t) = e^{-\frac{K_1}{K_2}t} \cdot \sigma_0 + K_1\int_0 \dot{\varepsilon} \cdot e^{\frac{K_1}{K_2}t}dt \tag{2.4.6.52}$$

• $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-at}$

$$f(t)=\frac{1}{K_1}\left(1+\frac{K_1}{K_2}t\right) \quad ; \qquad r(t)=K_1 e^{-\frac{K_1}{K_2}t} \tag{2.4.6.53}$$

Raportul $\tau_r=\dfrac{K_2}{K_1}$ se numește **timp de relaxare**.

Modelul ZENER (Fig. 2.4.6.9) – este format din legarea în paralel a unui corp Maxwell cu un resort. Se pot scrie relațiile evidente:

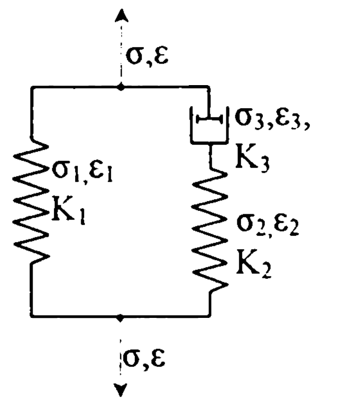


Fig. 2.4.6.9

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_1+\sigma_2\\ \varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2+\varepsilon_3\end{cases}$$

unde $\sigma_1=K_1\varepsilon_1=K_1\varepsilon \quad ; \quad \sigma_2=K_2\varepsilon_2=K_3\dot{\varepsilon}_3$

Pentru a găsi ecuația reologică a corpului trebuie să găs m o re aț e ntre tens unile și deformațiile specifice ale întregului model și derivatele lor – $f(\sigma,\varepsilon,\dot{\sigma},\dot{\varepsilon})$.

După calcule elementare găsim:

$$\left(\lambda+\frac{K_1}{K_2}\right)\dot{\varepsilon}(t)+\frac{K_1}{K_3}\varepsilon(t)=\frac{1}{K_2}\dot{\sigma}(t)+\frac{1}{K_3}\sigma(t) \tag{2.4.6.54}$$

Modelul BÜRGER (Fig. 2.4.6.10). – este alcătuit dintr-un model Maxwell legat în serie cu un model Kelvin. Rezultă că tensiunea din cele două corpuri este aceeiași (σ) în timp ce deformațiile vor diferi. Vom nota cu σ_M și ε_M - tensiunea, respectiv deformația specifică în corpul Maxwell, și cu σ_K,ε_K tensiunea și deformația specifică în corpul Kelvin.

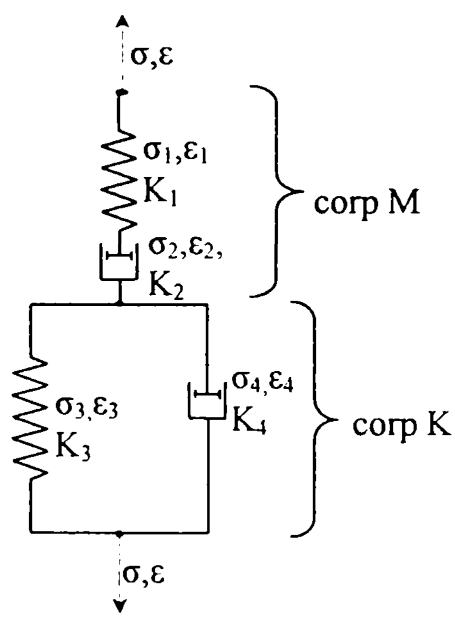


Fig. 2.4.6.10

$$\begin{cases}\sigma(t)=\sigma_M=\sigma_K\\ \varepsilon(t)=\varepsilon_M+\varepsilon_K\end{cases}$$

Înlocuind datele cunoscute anterior se obține ecuația de stare a corpului Bürger:

$$\dot{\varepsilon}(t)=\frac{\dot{\sigma}(t)}{K_1}+\frac{\sigma(t)}{K_2}+\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{K_3}{K_4}t}\left(\varepsilon_0+\frac{1}{K_4}\int_0^t\sigma(t)e^{\frac{K_3}{K_4}t}dt\right)\right] \tag{2.4.6.55}$$

Dacă vom considera că $\sigma(t)=\sigma_0=const \Rightarrow \dot{\sigma}=0$ și integrăm în raport cu timpul obținând ecuația diagramei de fluaj:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0 t}{K_2}+\varepsilon_0 e^{-\frac{K_3}{K_4}t}+\frac{\sigma_0}{K_3}\left(1-e^{-\frac{K_3}{K_4}t}\right) \tag{2.4.6.56}$$

Modelul KELVIN-VOIGT generalizat (Fig. 2.4.6.11) – se compune dintr-un resort legat în serie cu n modele Kelvin. Fiind legate în serie

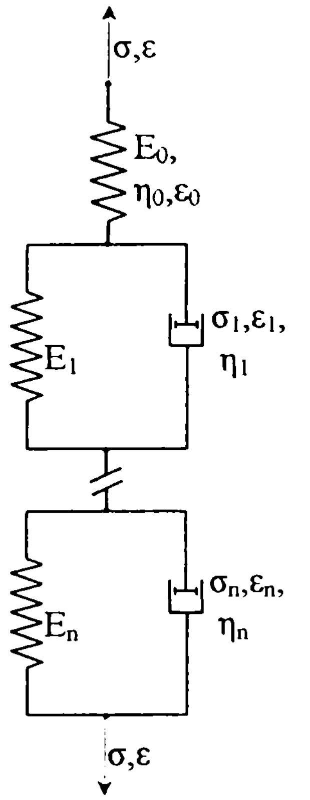


Fig.2.4.6.11

că tensiunea totală este egală cu tensiunea din fiecare element, iar deformaţia totală este egală cu suma deformaţiilor fiecărui element. În aceste condiţii avem:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)$$

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon_0 + \left(E_i + \eta_i \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_i(t)$$

În final

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_i}\left(1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i}t}\right)\right]$$

(2.4.6.57)

Modelul MAXWELL generalizat (**Fig.2.4.6.12**) – este alcătuit din n elemente Maxwell legate în paralel. În acest caz deformaţia totală a modelului este egală cu deformaţia fiecărui element iar tensiunea totală este egală cu suma tensiunilor în fiecare element.

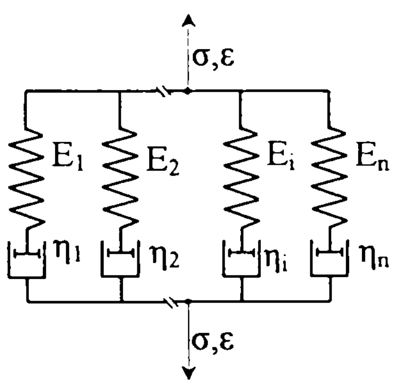


Fig.2.4.6.12

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i$$

În final se obţine:

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau} r(t-\tau)d\tau \tag{2.4.6.58}$$

Cu funcţia de relaxare:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} E_i e^{-\frac{E_i}{\eta_i}t} \tag{2.4.6.59}$$

2.4.7. Rezolvarea problemei test nr.V pentru materiale vâscoelastice. Soluţia autoarei.

Revenim la problema test nr.V. Deoarece toate mărimile care intervin în studiu sunt acum funcţii de timp, pentru a elimina dependenţa de acest parametru vom aplica transformata Laplace tuturor ecuaţiilor care guvernează fenomenul, cunoscute din (T.E.). Această idee şi această posibilitate se bazează pe principiul lui Voltera, sau principiul corespondenţei, enunţat mai sus.

Evident că odată demonstrat şi acceptat acest principiu au apărut numeroase lucrări bazate pe transformata Laplace şi Fourier, cu atât mai mult cu cât diferenţa de la un caz la celălalt este dată în principal numai de ecuaţia constitutivă. Voi cita numai câteva dintre lucrările mai noi pe care le-am studiat efectiv. Ample detalii în acest sens se găsesc în excelenta monografie a lui W.KECS [K36], în care însă problema este tratată numai în distribuţii. Tot dintre lucrările mai ample, de sinteză, citez monografia lui PARTON [P20], care are capitolul V dedicat numai problemei fisurilor în medii vâscoelastice şi care rezolvă problemele pe baza unui principiu variaţional integral. Dintre articole citez N.KAY /2002 [K32], lucrare pe care am primit-o de la unul dintre autori: E.MADENCI, care cu multă amabilitate a răspuns la solicitările mele de informare bibliografică, trimiţându-mi zeci de aticole însumând câteva sute de pagini. Lucrarea foloseşte transformata lui Laplace şi conduce problema până la rezolvarea numerică cu element de frontieră; C. ATKINSON/1990 [A41], foloseşte o dublă corespondenţă, transformata Laplace de timp şi transformata subsecventă Mellin pe coordonata radială r; KAMINSKI /1980 [K18] se ocupă cu creşterea subcritică a fisurilor în materiale vîscoelastice cu îmbătrânire; J.P. SHI [S23]/1997 studiază tot o fisură interfacială într-o placă finită bimaterială; F.J. LOCKETT [L41] /1969 se ocupă de relaţiile constitutive în materiale vâscoelastice neliniare; G.A.C. GRAHAM /1973 [G30] se ocupă în mod esenţial de principiul corespondenţei în vâscoelasticitatea liniară.

În acest context informaţional, precizez condiţiile generale în care voi rezolva problema:

- mediul este liniar vâscoelastic în fiecare punct al său;
- nu apar deformaţii plastice pe marginile fisurii şi nici chiar pe frontul fisurii;
- începerea creşterii rapide a fisurii (starea critică) apare la un anumit timp t* după aplicarea sarcinii.

Vom nota transformatele Laplace de parametru p cu o „bară” ondulată deasupra (tilda).

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{lm}^{(k)}(r,\theta,p)&=\int_0^\infty \sigma_{lm}^{(k)}(r,\theta,t)e^{-pt}dt\\ \tilde{\varepsilon}_{lm}^{(k)}(r,\theta,p)&=\int_0^\infty \varepsilon_{lm}^{(k)}(r,\theta,t)e^{-pt}dt\\ \tilde{u}_{lm}^{(k)}(r,\theta,p)&=\int_0^\infty u_{lm}^{(k)}(r,\theta,p)e^{-pt}dt\end{aligned}\right\} \tag{2.4.7.1}$$

Vom utiliza următoarele definiţii şi notaţii:

- Transformata Laplace directă:

$$\tilde{f}(\mathrm{x},p)=L\{f(\mathrm{x},\mathrm{t});\ t\to p\}=\int_0^\infty f(\mathrm{x},\mathrm{t})e^{-pt}dt \tag{2.4.7.2}$$

- Transformata Laplace inversă:

$$f(\mathrm{x},\mathrm{t})=L^{-1}\{\tilde{f}(\mathrm{x},p):p\to t\} \tag{2.4.7.3}$$

Ecuaţiile diferenţiale care descriu starea de tensiune şi deformaţie locală în coordonate polare, precum şi transformatele lor Laplace, în conformitate cu principiul lui Volterra, vor fi:

- **Ecuaţile de echilibru static**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_r^{(k)}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{r\theta}^{(k)}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r}\left(\sigma_r^{(k)}-\sigma_\theta^{(k)}\right)=0\\ \dfrac{\partial\tau_{r\theta}^{(k)}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta^{(k)}}{\partial\theta}+\dfrac{2}{r}\tau_{r\theta}^{(k)}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{\sigma}_{rr,r}^{(k)}+\dfrac{1}{r}\tilde{\sigma}_{r\theta,\theta}^{(k)}+\dfrac{1}{r}\left(\tilde{\sigma}_{rr}^{(k)}-\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}\right)=0\\ \tilde{\sigma}_{r\theta,r}^{(k)}+\dfrac{1}{r}\tilde{\sigma}_{\theta\theta,\theta}^{(k)}+\dfrac{2}{r}\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(k)}=0\end{cases} \tag{2.4.7.4}$$

- **Ecuaţia de continuitate (Lévy)**

$$\nabla^2 I_{1\sigma}=0\ \Rightarrow\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\tilde{\sigma}_{rr}^{(k)}+\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}\right)=0 \tag{2.4.7.5}$$

În relaţiile de mai sus, în spaţiul imaginilor Laplace, am trecut la scrierea cu doi indici: $\sigma_r \to \sigma_{rr}$; $\tau_{r\theta} \to \sigma_{r\theta}$ etc. şi la folosirea virgulei în reprezentarea derivatei: $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \sigma_{rr,r}$; $\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = \sigma_{r\theta,\theta}$ etc., datorită generalităţii acestei scrieri.

- **Ecuaţii constitutive (legi de material)**

Legile constitutive, adică acele relaţii care leagă între ele tensiunile cu deformaţiile specifice cu ajutorul unor caracteristici de material, sunt cele care fac să se deosebească între ele solidele deformabile.

Legi constitutive foarte generale pentru materiale vâscoelastice găsim în monografia lui W. KECS [K36], ca de exemplu:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t)\psi_{ijkl}(\mathbf{r},0+) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t-\tau)\frac{\tilde{\partial}\psi_{ijkl}(\mathbf{r},t)}{\partial\tau}d\tau \tag{2.4.7.6}$$

unde $\frac{\tilde{\partial}}{\partial \tau}$ reprezintă derivata în sens obişnuit.

Scrisă cu ajutorul produsului de convoluţie în spaţiul distribuţiilor în raport cu variabila t, vom avea:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_{kl}(\mathbf{r},t) \underset{(t)}{*} \frac{\partial \psi_{ijkl}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{2.4.7.7}$$

sau sub formă echivalentă:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t) = \sigma_{kl}(\mathbf{r},t) \underset{(t)}{*} \frac{\partial \varphi_{ijkl}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{kl}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \underset{(t)}{*} \varphi_{ijkl}(\mathbf{r},t) \tag{2.4.7.8}$$

unde $\varphi = (\varphi_{ijkl})$ reprezintă **tensorul de fluaj** având componentele sale distribuţii din K'_+ .

Pentru solide vâscoelastice omogene şi izotrope se scrie o lege analoagă legii lui Hooke:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) = \lambda(\mathbf{r},t)\delta_{ij} \underset{(t)}{*} \varepsilon(\mathbf{r},t) + 2G(\mathbf{r},t) \underset{(t)}{*} \varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t) \tag{2.4.7.9}$$

a cărei transformată Laplace este:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r},p) = \tilde{\lambda}(\mathbf{r},p)\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},p) + 2\tilde{G}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r},p) \tag{2.4.7.10}$$

sau alte forme echivalente:

$$\sigma_{ij}^d = 2G\varepsilon_{ij}^d \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}_{ij}^d(\mathbf{r},p) = 2\tilde{G}(\mathbf{r},p)\varepsilon_{ij}^d(\mathbf{r},p) \tag{2.4.7.11}$$

$$\sigma = 3\varepsilon K \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}(\mathbf{r},p) = 3\tilde{K}(\mathbf{r},p)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},p) \tag{2.4.7.12}$$

unde:

$$\sigma = \sigma_{kk} = I_{1\sigma}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_V = \theta$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^d \quad \to \quad \sigma_{ij}^s = \frac{\sigma}{3}\delta_{ij} \tag{2.4.7.13}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^s \quad \to \quad \varepsilon_{ij}^s = \frac{\varepsilon}{3}\delta_{ij}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G \quad \Rightarrow \quad \tilde{K}(\mathbf{r},p) = \tilde{\lambda}(\mathbf{r},p) + \frac{2}{3}\tilde{G}(\mathbf{r},p)$$

N. KAY ş.a. [K32], dau următoarele forme:

$$\sigma_{lm}^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_k(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{nn}^{(k)}(\tau)}{\partial\tau}\delta_{lm}+2G_k(t-\tau)\left(\frac{\partial\varepsilon_{lm}^{(k)}(\tau)}{\partial\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{nn}^{(k)}(\tau)}{\partial\tau}\delta_{lm}\right)\right]d\tau \qquad (2.4.7.14)$$

sau, transformata Laplace:

$$\tilde{\sigma}_{lm}^{(k)}(p)=p\tilde{K}_k(p)\tilde{\varepsilon}_{nn}^{(k)}(p)\delta_{lm}+2p\tilde{G}_k(p)\left(\tilde{\varepsilon}_{lm}^{(k)}(p)-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{nn}^{(k)}(p)\right) \qquad (2.4.7.15)$$

unde:

$$\tilde{G}_k(p)=\int_0^{\infty}G_k(t)e^{-pt}dt$$

$$\tilde{K}_k(p)=\int_0^{\infty}K_k(t)e^{-pt}dt \quad\Rightarrow\quad \tilde{K}_k(p)=\frac{\tilde{G}_k(p)}{1-2\nu_k} \qquad (2.4.7.16)$$

După G.A.C. GRAHAM [G30]:

$$s_{ij}(\mathbf{x},t)=\{G_1^{*}de_{ij}\}(\mathbf{x},t) \qquad (2.4.7.17)$$

$$\sigma_{kk}(\mathbf{x},t)=\{G_2^{*}d[\varepsilon_{kk}-3\alpha T]\}(\mathbf{x},t) \qquad (2.4.7.18)$$

unde

$$e_{ij}(\mathbf{x},t)=\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)-\frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\mathbf{x},t) \text{ - deviatorul stării de deformaţie} \qquad (2.4.7.19)$$

$$s_{ij}(\mathbf{x},t)=\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}(\mathbf{x},t) \text{ - deviatoprul stării de tensiune} \qquad (2.4.7.20)$$

G_1, G_2 – sunt nişte funcţii de timp $0\le t\le\infty$, numite **funcţii de relaxare** ale materialului la forfecare, respectiv la compresiune hidrostatică.

Rezolvarea problemei în continuare în domeniul imaginii Laplace se face utilizând descompunerea în serii cu variabile separabile, în forma:

$$\tilde{\sigma}_{lm}^{(k)}(r,\theta;p)=\sum_{n=0}^{\infty}r^{\lambda_n}\tilde{\phi}_{lm}^{(k)}(\theta;p,\lambda_n) \qquad (2.4.7.21)$$

unde $l,m=r,\theta;\quad k=1,2;\quad \lambda_0=0;\quad \lambda_n\neq 0;\quad n=1,2,...N$.

$$\tilde{u}_{\beta}^{k}(r,\theta;p)=\sum_{n=0}^{\infty}r^{\lambda_n+1}\tilde{U}_{\beta}^{(k)}(\theta;p,\lambda_n) \qquad (2.4.7.22)$$

Aceste funcţii trebuie să satisfacă ecuaţiile de echilibru şi compatibilitate şi vor avea forma:

$$\tilde{\phi}_{rr}^{(k)}(\theta;p,\lambda_n)=\frac{2-\lambda_n}{4}\left[\tilde{A}_n^{(k)}\cos\lambda_n\theta+\tilde{B}_n^{(k)}\sin\lambda_n\theta\right]-\left[\tilde{C}_n^{(k)}\cos(\lambda_n+2)\theta+\tilde{D}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta\right]$$

$$\tilde{\phi}_{\theta\theta}^{(k)}(\theta;p,\lambda_n)=\frac{2+\lambda_n}{4}\left[\tilde{A}_n^{(k)}\cos\lambda_n\theta+\tilde{B}_n^{(k)}\sin\lambda_n\theta\right]+\left[\tilde{C}_n^{(k)}\cos(\lambda_n+2)\theta+\tilde{D}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta\right]$$

$$\tilde{\phi}_{r\theta}^{(k)}(\theta;p,\lambda_n)=\frac{\lambda_n}{4}\left[\tilde{A}_n^{(k)}\sin\lambda_n\theta-\tilde{B}_n^{(k)}\cos\lambda_n\theta\right]-\left[\tilde{C}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta-\tilde{D}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta\right]$$

$$\widetilde{U}_r^{(k)}(\theta;p,\lambda_n)=\frac{1}{\lambda_n+1}\left\{\frac{4(1-\nu_k)-(2+\lambda_n)}{8p\widetilde{G}_k}\left[\widetilde{A}_n^{(k)}\cos\lambda_n\theta+\widetilde{B}_n^{(k)}\sin\lambda_n\theta\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2p\widetilde{G}_k}\left[\widetilde{C}_n^{(k)}\cos(\lambda_n+2)\theta+\widetilde{D}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta\right]\right\}$$

$$\widetilde{U}_\theta^{(k)}(\theta;p,\lambda_n)=\frac{1}{\lambda_n+1}\left\{\frac{4(1-\nu_k)+\lambda_n}{8p\widetilde{G}_k}\left[\widetilde{A}_n^{(k)}\sin\lambda_n\theta-\widetilde{B}_n^{(k)}\cos\lambda_n\theta\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2p\widetilde{G}_k}\left[\widetilde{C}_n^{(k)}\sin(\lambda_n+2)\theta-\widetilde{D}_n^{(k)}\cos(\lambda_n+2)\theta\right]\right\}$$

Coeficienții necunoscuți din expresiile precedente se vor determina impunând condițiile la limită, care sunt evidente:

- pentru $\theta=\pm\pi \;\Rightarrow\; \widetilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}=0$; $\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(k)}=0$

Aceste condiții exprimă faptul că cele două fețe ale fisurii sunt libere de sarcini:

- pentru $\theta=0 \;\Rightarrow\; \widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}=\widetilde{\sigma}_\theta^{2}$; $\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}=\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}$; $U_r^{(1)}=U_r^{(2)}$; $U_\theta^{(1)}=U_\theta^{(2)}$.

Aceste condiții exprimă faptul că îmbinarea dintre cele două materiale este perfectă și în zona joncțiunii se asigură continuitatea tensiunilor și deplasărilor.

Vom explicita aceste condiții:

- $\theta=+\pi,\;(k=1)\;\Rightarrow\;\widetilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}=0$

$$\frac{2+\lambda_n}{4}\left[\widetilde{A}_n^1\cos\lambda_n\pi+\widetilde{B}_n^1\sin\lambda_n\pi\right]+\left[\widetilde{C}_n^1\cos(\lambda_n+2)\pi+\widetilde{D}_n^1\sin(\lambda_n+2)\pi\right]=0$$

- $\theta=-\pi,\;(k=2)\;\Rightarrow\;\widetilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}=0$

$$\frac{2+\lambda_n}{4}\left[\widetilde{A}_n^2\cos\lambda_n\pi-\widetilde{B}_n^2\sin\lambda_n\pi\right]+\left[\widetilde{C}_n^2\cos(\lambda_n+2)\pi-\widetilde{D}_n^2\sin(\lambda_n+2)\pi\right]=0$$

- $\theta=\pi,\;(k=1)\;\Rightarrow\;\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}=0$

$$\frac{\lambda_n}{4}\left[\widetilde{A}_n^1\sin\lambda_n\pi-\widetilde{B}_n^1\cos\lambda_n\pi\right]+\left[\widetilde{C}_n^1\sin(\lambda_n+2)\pi-\widetilde{D}_n^1\cos(\lambda_n+2)\pi\right]=0$$

- $\theta=-\pi,\;(k=2)\;\Rightarrow\;\widetilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}=0$

$$\frac{\lambda_n}{4}\left[-\widetilde{A}_n^2\sin\lambda_n\pi-\widetilde{B}_n^2\cos\lambda_n\pi\right]+\left[-\widetilde{C}_n^2\sin(\lambda_n+2)\pi-\widetilde{D}_n^2\cos(\lambda_n+2)\pi\right]=0$$

- $\theta=0\;\Rightarrow\;\widetilde{\sigma}_\theta^{(1)}=\widetilde{\sigma}_\theta^{(2)}$

$$\frac{2+\lambda_n}{4}\widetilde{A}_n^1+\widetilde{C}_n^1=\frac{2+\lambda_n}{4}\widetilde{A}_n^2+\widetilde{C}_n^2$$

- $\theta = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)}$

$$-\frac{\lambda_n}{4}\tilde{B}_n^1 - \tilde{D}_n^1 = -\frac{\lambda_n}{4}\tilde{B}_n^2 - \tilde{D}_n^2$$

- $\theta = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{U}_r^{(1)} = \tilde{U}_r^{(2)}$

$$\frac{4(1-\nu_1)-(2+\lambda_n)}{8p\tilde{G}_1}\tilde{A}_n^1 - \frac{1}{2p\tilde{G}_1}\tilde{C}_n^1 = \frac{4(1-\nu_2)-(2+\lambda_n)}{8p\tilde{G}_2}\tilde{A}_n^2 - \frac{1}{2p\tilde{G}_2}\tilde{C}_n^2$$

- $\theta = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{U}_\theta^{(1)} = \tilde{U}_\theta^{(2)}$

$$\frac{4(1-\nu_1)+\lambda_n}{8p\tilde{G}_1}\tilde{B}_n^1 + \frac{1}{2p\tilde{G}_1}\tilde{D}_n^1 = \frac{4(1-\nu_2)-(2+\lambda_n)}{8p\tilde{G}_2}\tilde{B}_n^2 + \frac{1}{2p\tilde{G}_2}\tilde{D}_n^2$$

Se vede că dacă ordonăm relaţiile obţinute, obţinem un sistem algebric liniar şi omogen. Se ştie că pentru ca un astfel de sistem să admită o soluţie diferită de soluţia banală este necesar şi suficient ca determinantul principal al sistemului să fie nul.

$$\begin{vmatrix}
\frac{(2+\lambda_n)}{4}\cos\lambda_n\pi & \frac{(2+\lambda_n)}{4}\sin\lambda_n\pi & \cos(\lambda_n+2)\pi & \sin(\lambda_n+2)\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\lambda_n)}{4}\cos\lambda_n\pi & -\frac{(2+\lambda_n)}{4}\sin\lambda_n\pi & \cos(\lambda_n+2)\pi & -\sin(\lambda_n+2)\pi \\
\frac{\lambda_n}{4}\sin\lambda_n\pi & -\frac{\lambda_n}{4}\cos\lambda_n\pi & \sin(\lambda_n+2)\pi & -\cos(\lambda_n+2)\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_n}{4}\sin\lambda_n\pi & -\frac{\lambda_n}{4}\cos\lambda_n\pi & -\sin(\lambda_n+2)\pi & -\cos(\lambda_n+2)\pi \\
\frac{2+\lambda_n}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2+\lambda_n}{4} & 0 & -1 & 0 \\
0 & -\frac{\lambda_n}{4} & 0 & -1 & 0 & \frac{\lambda_n}{4} & 0 & 1 \\
\frac{4(1-\nu_1)-(2+\lambda_n)}{8p\tilde{G}_1} & 0 & -\frac{1}{2p\tilde{G}_1} & 0 & -\frac{4(1-\nu_2)-(2+\lambda_n)}{8p\tilde{G}_2} & 0 & \frac{1}{2p\tilde{G}_2} & 0 \\
0 & \frac{4(1-\nu_1)+\lambda_n}{8p\tilde{G}_1} & 0 & \frac{1}{2p\tilde{G}_1} & 0 & -\frac{4(1-\nu_2)+\lambda_n}{8p\tilde{G}_2} & 0 & -\frac{1}{2p\tilde{G}_2}
\end{vmatrix} = 0$$

(2.4.7.23)

Pentru a uşura efortul de calcul şi a micşora sursele de erori, vom face unele transformări neesenţiale şi vom nota:

$$\alpha_1 = 2-4\nu_1; \quad \alpha_3 = 4(1-\nu_1) \quad ; \quad K = \frac{\tilde{G}_1}{\tilde{G}_2}$$
$$\alpha_2 = 2-4\nu_2; \quad \alpha_4 = 4(1-\nu_2)$$
$$\sin(\lambda_n+2)\pi = \sin(\lambda_n\pi+2\pi) = \sin\lambda_n\pi$$
$$\cos(\lambda_n+2)\pi = \cos(\lambda_n\pi+2\pi) = \cos\lambda_n\pi$$

Cu aceste notaţii şi transformări determinantul sistemului devine:

$$\begin{vmatrix}
(2+\lambda_n)\cos\lambda_n\pi & (2+\lambda_n)\sin\lambda_n\pi & 4\cos\lambda_n\pi & 4\sin\lambda_n\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (2+\lambda_n)\cos\lambda_n\pi & -(2+\lambda_n)\sin\lambda_n\pi & 4\cos\lambda_n\pi & -4\sin\lambda_n\pi \\
\lambda_n\sin\lambda_n\pi & -\lambda_n\cos\lambda_n\pi & 4\sin\lambda_n\pi & -4\cos\lambda_n\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n\sin\lambda_n\pi & \lambda_n\cos\lambda_n\pi & 4\sin\lambda_n\pi & 4\cos\lambda_n\pi \\
2+\lambda_n & 0 & 4 & 0 & -(2+\lambda_n) & 0 & -4 & 0 \\
0 & -\lambda_n & 0 & -4 & 0 & \lambda_n & 0 & 4 \\
\alpha_1-\lambda_n & 0 & -4 & 0 & -(\alpha_2-\lambda_n)K & 0 & 4K & 0 \\
0 & \alpha_3+\lambda_n & 0 & 4 & 0 & -(\alpha_4+\lambda_n)K & 0 & -4K
\end{vmatrix} = 0$$

(2.4.4.24)

Prin dezvoltarea acestui determinant se obţine o ecuaţie trigonometrică reprezentând **ecuaţia caracteristică** a problemei, ale cărei soluţii sunt **valorile proprii**.

Utilizând un program matematic "**Mathematica**" obţinem pentru ecuaţia caracteristică următoarea formă:

$$2048\alpha_3\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+1024\alpha_1\alpha_3\cos^2[\pi\lambda_n]\cdot\sin^2[\pi\lambda_n]+2048\alpha_3 K\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+$$
$$1024\alpha_2\alpha_3 K\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+2048\alpha_4 K\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+$$
$$+1024\alpha_1\alpha_4 K\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+2048\alpha_4 K^2\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]+$$
$$1024\alpha_2\alpha_4 K^2\cos^2[\pi\lambda_n]\sin^2[\pi\lambda_n]-2048\alpha_1\sin^4[\pi\lambda_n]+1024\alpha_1\alpha_3\sin^4[\pi\lambda_n]+$$
$$+2048\alpha_1 K\sin^4[\pi\lambda_n]+2048\alpha_2 K\sin^4[\pi\lambda_n]-1024\alpha_2\alpha_3 K\sin^4[\pi\lambda_n]-1024\alpha_1\alpha_4 K\sin^4[\pi\lambda_n]-$$
$$-2048\alpha_2 K^2\sin^4[\pi\lambda_n]+1024\alpha_2\alpha_4 K^2\sin^4[\pi\lambda_n]=0$$

Simplificând această ecuaţie obţinem:

$$1024[\alpha_3+\alpha_2 K+\alpha_3 K+\alpha_4 K-\alpha_2 K^2+\alpha_4 K^2+\alpha_2\alpha_4 K^2+\alpha_1(\alpha_3-1+K)+$$
$$(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_1 K-\alpha_2 K+\alpha_3 K+\alpha_2\alpha_3 K+\alpha_4 K+\alpha_1\alpha_4 K+\alpha_2 K^2+\alpha_4 K^2)\cdot$$
$$\cdot\cos(2\pi\lambda_n)]\cdot\sin^2(\pi\lambda_n)=0$$

soluţiile fiind:

$$\lambda_{n1}=\frac{1}{2\pi}\cdot\arccos\left[\frac{\alpha_1-\alpha_3-\alpha_1\alpha_3-\alpha_1 K-\alpha_2 K-\alpha_3 K-\alpha_4 K+\alpha_2 K^2-\alpha_4 K^2-\alpha_2\alpha_4 K^2}{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_1 K-\alpha_2 K+\alpha_3 K+\alpha_2\alpha_3 K+\alpha_4 K+\alpha_1\alpha_4 K+\alpha_2 K^2+\alpha_4 K^2}\right]$$
$$\lambda_{n2}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\arccos\left[\frac{\alpha_1-\alpha_3-\alpha_1\alpha_3-\alpha_1 K-\alpha_2 K-\alpha_3 K-\alpha_4 K+\alpha_2 K^2-\alpha_4 K^2-\alpha_2\alpha_4 K^2}{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_1 K-\alpha_2 K+\alpha_3 K+\alpha_2\alpha_3 K+\alpha_4 K+\alpha_1\alpha_4 K+\alpha_2 K^2+\alpha_4 K^2}\right]$$

Transformăm în continuare soluţia:

$$\lambda_n=\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{A_1+B_1K+C_1K^2}{A_2+B_2K+C_2K^2}=\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{A_1\widetilde{G}_2^2+B_1\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2+C_1\widetilde{G}_1^2}{A_2\widetilde{G}_2^2+B_2\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2+C_2\widetilde{G}_1^2}$$

unde:

$$A_1=-2(5-12\nu_1+8\nu_1^2)\quad;\quad A_2=6-8\nu_1$$
$$B_1=-4(3-2\nu_1-2\nu_2)\quad;\quad B_2=4$$
$$C_1=-2(5-12\nu_2+8\nu_2^2)\quad;\quad C_2=6-8\nu_2$$

Observăm că G_k^0, G_k^∞ şi τ_k sunt mărimi constante şi cunoscute. Mai putem să notăm:

$$a_1=G_1^\infty;\qquad b_1=G_1^0-G_1^\infty;\qquad c_1=\frac{1}{\tau_1};$$
$$a_2=G_2^\infty;\qquad b_2=G_2^0-G_2^\infty;\qquad c_2=\frac{1}{\tau_2};$$
$$M_1=A_1a_2^2+B_1a_1a_2+C_1a_1^2\quad;\quad N_1=A_2a_2^2+B_2a_1a_2+C_2a_1^2$$
$$M_2=C_1b_1^2\quad;\quad N_2=C_2b_1^2$$

$$M_3 = A_1 b_2^2 \qquad ; \; N_3 = A_2 b_2^2$$

$$M_4 = B_1 a_2 b_1 + 2C_1 a_1 b_1 \qquad ; \; N_4 = B_2 a_2 b_1 + 2C_2 a_1 b_1$$

$$M_5 = 2A_1 a_2 b_2 + B_1 a_1 b_2 \qquad ; \; N_5 = 2A_2 a_2 b_2 + B_2 a_1 b_2$$

$$M_6 = B_1 b_1 b_2 \qquad ; \; N_6 = B_2 b_1 b_2$$

Astfel că:

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \arccos\left[\frac{\dfrac{M_1}{p^2} + \dfrac{M_2}{(p+C_1)^2} + \dfrac{M_3}{(p+C_2)^2} + \dfrac{M_4}{p(p+C_1)} + \dfrac{M_5}{p(p+C_2)} + \dfrac{M_6}{(p+C_1)(p+C_2)}}{\dfrac{N_1}{p^2} + \dfrac{N_2}{(p+C_1)^2} + \dfrac{N_3}{(p+C_2)^2} + \dfrac{N_4}{p(p+C_1)} + \dfrac{N_5}{p(p+C_2)} + \dfrac{N_6}{(p+C_1)(p+C_2)}}\right]$$

Se mai fac unele transformări, notații și se aduce soluția la forma raportului a două polinoame de gradul patru în p:

$$\cos 2\pi\lambda_n = \frac{K_4^{(1)} p^4 + K_3 p^3 + K_2 p^2 + K_1 p + K_0}{K_4^{(2)} p^4 + K_3 p^3 + K_2 p^2 + K_1 p + K_0}$$

unde am notat:

$$K_4^{(1)} = \sum_{i=1}^{6} M_i \qquad ; \; K_2^{(1)} = K_2^{(2)} = K_2 = 3(c_1^2 + 3c_1 c_2 + c_2^2)$$

$$K_4^{(2)} = \sum_{j=1}^{6} N_j \qquad ; \; K_1^{(1)} = K_1^{(2)} = K_1 = 3c_1 c_2 (c_1 + c_2)$$

$$K_3^{(1)} = K_3^{(2)} = K_3 = 8(c_1 + c_2) \qquad ; \; K_0^{(1)} = K_0^{(2)} = K_0 = c_1^2 c_2^2$$

Folosim una din teoremele de dezvoltare care ne spune că dacă:

$F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ cu A și B polinoame, cu următoarele proprietăți:

1) gr{A}<gr{B};

2) B(p) are toate rădăcinile simple; fie acestea p_1, p_2, p_3, p_4;

atunci F este imaginea funcției f, de valori:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{4} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

În cazul nostru:

$$F(p) = \frac{K_4^{(1)} p^4 + K_3 p^3 K_2 p^2 + K_1 p + K_0}{K_4^{(2)} p^4 + K_3 p^3 K_2 p^2 + K_1 p + K_0} = \frac{K_4^{(1)}}{K_4^{(2)}} + \frac{\alpha(K_3 p^3 + K_2 p^2 + K_1 p + K_0)}{K_4^{(2)} p^4 + K_3 p^3 K_2 p^2 + K_1 p + K_0}$$

unde $\alpha = 1 - \dfrac{K_4^{(1)}}{K_4^{(2)}}$.

Presupunem că (identificăm notațiile):

$$B(p) = K_4^{(2)}(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)$$

$$B'(p) = K_4^{(2)}\left[(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4) + (p-p_1)(p-p_3)(p-p_4) + \right.$$
$$\left. + (p-p_1)(p-p_2)(p-p_4) + (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\ \right]$$

Atunci:

$$f(t) = \frac{K_4^{(1)}}{K_4^{(2)}}\delta(t) + \frac{\alpha\left(K_3p_1^3 + K_2p_1^2 + K_1p_1 + K_0\right)}{K_4^{(2)}(p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_1-p_4)}e^{p_1t} +$$
$$\frac{\alpha\left(K_3p_2^3 + K_2p_2^2 + K_1p_2 + K_0\right)}{K_4^{(2)}(p_2-p_1)(p_2-p_3)(p_2-p_4)}e^{p_2t} + \frac{\alpha\left(K_3p_3^3 + K_2p_3^2 + K_1p_3 + K_0\right)}{K_4^{(2)}(p_3-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_4)}e^{p_3t} +$$
$$\frac{\alpha\left(K_3p_4^3 + K_2p_4^2 + K_1p_4 + K_0\right)}{K_4^{(2)}(p_4-p_1)(p_4-p_2)(p_4-p_3)}e^{p_4t},$$

unde $\delta(t)$ este funcţia lui Dirac.

Evident că se mai pot comenta şi celelalte cazuri care apar de obicei la descompunerea în fracţii raţionale cunoscute din literatură. Ele nu aduc însă elemente noi şi nici nu contribuie la obţinerea unei soluţii finale; de aceea nu le-am mai prezentat.

Concluzii:

Se observă că rezultatul obţinut atât în planul imaginilor Laplace cât şi în domeniul funcţiilor original are o formă deosebit de complicată, care nu mai poate fi dezvoltată sub aspect literal. Aşa se explică faptul că în literatura cercetată se dau numai soluţii numerice, utilizând formulări cu metoda colocaţiei. De aceea şi eu sugerez că rezolvarea finală a acestor tipuri de probleme se poate face numai cu o metodă numerică.

§2.5 CONTRIBUȚII LA STUDIUL SOLIDELOR ELASTICE BIDIMENSIONALE CU DEFECTE MULTIPLE

Din cele prezentate până acum se desprinde o concluzie importantă, care a constituit impulsul necesar pentru investigația din acest paragraf: planul infinit cu un singur defect, fie că este vorba de un gol circular sau o incluziune circulară, de un gol sau o incluziune eliptică, de o fisură (tăietură) liniară sau curbă, pentru toate tipurile de solicitări, pentru materiale omogene izotrope sau anizotrope, a fost studiat cu toate metodele matematice posibile. În marea majoritate a cazurilor ele au primit confirmări experimentale și au fost validate prin diverse metode numerice. Deci în esență, acest domeniu se poate considera închis.

Realitatea, legată de construcțiile sudate, de materialele compozite a postulat ideea că toate elementele de rezistență au defecte multiple atât la nivelul microscopic cât și macroscopic. De aceea, în ultimele decenii, marea majoritate a lucrărilor publicate se ocupă cu formularea unor algoritmi de calcul pentru planul finit sau infinit cu defecte multiple. Ca o dominantă a acestor cercetări este utilizarea funcțiilor de variabilă complexă care conduc la ecuații integrale singulare cu nuclee de tip Cauchy. Pornind de la această constatare am considerat necesar să reamintesc câteva noțiuni fundamentale din teoria integralelor de tip Cauchy și a ecuațiilor integrale singulare (deosebit de sumar).

2.5.1. Despre integralele de tip Cauchy

Problema este bine cunoscută și amplu tratată în literatura de specialitate. Evident că cele mai complete și cu accent pe problemele de (M:R) sunt cărțile lui MUSHELIȘVILI [M69], [M70]; vol.III din monografia lui C. IACOB [I1]; monografia lui L. SOLOMON [S50], monografia specifică V.V.PANASIUK [P7], [P12], și SAVRUK [S6], celebra monografie a lui SMIRNOV [S38].

Să presupunem că Γ este frontiera de tip Leapunov a unui domeniu simplu conex; fie $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ o funcție oarecare, în general comlexă, dată pe Γ, absolut integrabilă în sens riemannian. Atunci integrala:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z} \tag{2.5.1.1}$$

este o funcție analitică pe tot planul variabilei complexe $z=x+iy$ cu excepția punctelor conturului Γ. Aceste integrale de obicei se numesc **integrale de tip CAUCHY**, funcția $f(t)$ se numește „**densitate**", iar expresia $1/(t-z)$ se numește „**nucleu**".

Dacă funcția $f(t)$ satisface pe Γ condiția lui Hölder (pe scurt condiția H sau $H(\mu)$), ceea ce înseamnă că pentru oricare două puncte ale conturului Γ se satisface inegalitatea:

$$|f(t_2)-f(t_1)|\le A|t_2-t_1|^{\mu},\ A> [illegible],\quad \mu\le [illegible] \qquad ([illegible])$$

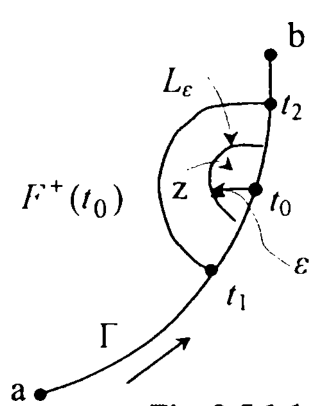


Fig. 2.5.1.1

atunci integrala (2.5.1.1.) are valoare limită $F^+(t_0)$ și $F^-(t_0)$ în toate punctele t_0 ale conturului Γ, care nu coincid cu capetele acestuia, când $z\to t_0$ corespunzător din stânga $(+)$ sau dreapta $(-)$ față de direcția pozitivă aleasă (v. **Fig. 2.5.1.1**). Aceste valori limită de asemenea satisfac condiția $H(\mu)$ și se determină cu formulele lui SOHOȚKI-PLEMELJ.

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-t_0} \tag{2.5.1.3}$$

$$F^{-}(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-t_0}, \qquad t_0 \in \Gamma \tag{2.5.1.4}$$

Formulele (2.5.1.3.) şi (2.5.1.4.) pot fi înlocuite prin formulele echivalente lor:

$$F^{+}(t_0) - F^{-}(t_0) = f(t_0)$$

$$F^{+}(t_0) + F^{-}(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-t_0}$$

Integrala din partea dreaptă se înţelege în sensul **valorii principale după CAUCHY**, adică:

$$\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-t_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-L_\varepsilon} \frac{f(t)dt}{t-t_0}, \qquad t_0 \in \Gamma \tag{2.5.1.5}$$

unde L_ε este partea curbei Γ care cade în cercul $|z-t_0| < \varepsilon$, infinit mic construit în jurul lui t_0. Integralele de forma (2.5.1.5) se numesc **„singulare"**; sau, altfel spus, valoarea principală a integralei (2.5.1.1.) există dacă funcţia $f(t)$ satisface condiţia $H(\mu)$ în vecinătatea punctului t_0.

Dacă Γ constă dintr-un singur arc de curbă $\widehat{ab}$, se demonstrează ([M69]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{f(t)dt}{t-t_0} = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}f(t_0)\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt \tag{2.5.1.6}$$

Derivarea integralelor lui Cauchy

Derivatele de orice ordin ale funcţiei $F(z)$ dată de (2.5.1.1) se obţin diferenţiind pur şi simplu integrala din membrul drept în raport cu parametrul z:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} \;\Rightarrow\; F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{(t-z)^{K+1}} \tag{2.5.1.7}$$

Dacă vom determina poziţia punctului t pe $\widehat{ab}$ cu ajutorul lungimii s a arcului măsurată în sens pozitiv de la un punct fix oarecare pe Γ (de exemplu, de la punctul a) avem evident:

$$\frac{df(t)}{ds} = \frac{df(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = f'(t)\frac{dt}{ds} = e^{i\alpha}f'(t) \Rightarrow f'(t) = e^{-i\alpha}\frac{df(t)}{ds} \tag{2.5.1.8}$$

$$\frac{d^2 f(t)}{ds^2} = f''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + f'(t)\frac{d^2 t}{ds^2} = e^{2i\alpha}f''(t) + ie^{i\alpha}\frac{d\alpha}{ds}f'(t) \tag{2.5.1.9}$$

etc.

Calculul integralelor de tip Cauchy

Vom aminti unele formule care uşurează calculul integralelor de tip Cauchy. Să considerăm în planul infinit un contur închis de tip Leapunov Γ care delimitează un domeniu finit $\mathcal{D}^+$. Vom nota cu $\mathcal{D}^-$ partea infinită a planului compusă din punctele din afara lui Γ (v. **Fig.2.5.1.2**).

I. Dacă $f(z)$ este o funcţie olomorfă în $\mathcal{D}^+$ şi continuă pe $\mathcal{D}^+ \cup \Gamma$, atunci:

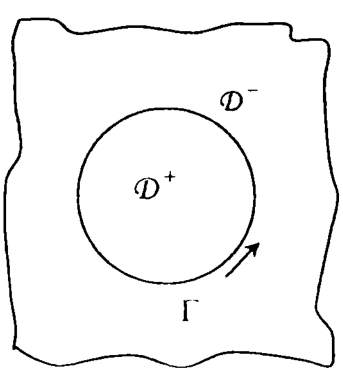


Fig. 2.5.1.2

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = f(z), \text{ dacă } z \in \mathcal{D}^+ \tag{2.5.1.10}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = 0, \text{ dacă } z \in \mathcal{D}^- \tag{2.5.1.11}$$

II. Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă în $\mathcal{D}^-$ inclusiv punctul de la infinit al planului, şi continuă în $\mathcal{D}^- \cup \Gamma$. Atunci:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=-f(z)+f(\infty),\qquad \text{pentru } z\in\mathcal{D}^{-} \tag{2.5.1.12}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=f(\infty)\quad ,\qquad \text{pentru } z\in\mathcal{D}^{+} \tag{2.5.1.13}$$

Formula (2.5.1.12) se numeşte **formula lui Cauchy pentru domeniul infinit** $\mathcal{D}^{-}$. Condiţiile impuse ne spun că pentru $|z|$ destul de mare, are loc dezvoltarea în serie:

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots \tag{2.5.1.14}$$

unde

$$c_0=f(\infty)$$

Generalizarea formulelor precedente

Fie a un punct arbitrar din planul z, la distanţă finită. Să presupunem că într-o vecinătate a acestui punct funcţia $f(z)$ are forma:

$$f(z)=G(z)+f_0(z) \tag{2.5.1.15}$$

unde $f_0(z)$ este o funcţie olomorfă în vecinătatea punctului a, iar

$$G(z)=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(z-a)^k} \tag{2.5.1.16}$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt nişte constante complexe.

*În aceste condiţii se spune că f(z) are în punctul **a** un pol de ordinul **k** cu partea principală G(z).*

În mod analog, dacă în vecinătatea punctului $z=\infty$ are loc formula (2.5.1.15), unde de data aceasta $f_0(z)$ este o funcţie olomorfă în vecinătatea punctului $z=\infty$ şi **care se anulează în acest punct**, iar:

$$G(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_kz^k \tag{2.5.1.17}$$

*atunci vom spune că f(z) are în punctul de la infinit un pol de ordinul **k** cu partea principală G(z).*

III. Fie deci funcţia f(z) olomorfă în $\mathcal{D}^{+}$, continuă în $\mathcal{D}^{+}\cup\Gamma$, eventual cu excepţia punctelor $a_1, a_2, \ldots a_n$ în care are poli cu părţile principale $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_n(z)$. Atunci:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\begin{cases} f(z)-\sum\limits_{j=1}^{n}G_j(z), & \text{daca } z\in\mathcal{D}^{+}\\ -\sum\limits_{j=1}^{n}G_j(z), & \text{daca } z\in\mathcal{D}^{-}\end{cases} \tag{2.5.1.18}$$

IV. Dacă funcţia f(z) este olomorfă în $\mathcal{D}^{-}$ şi continuă în $\mathcal{D}^{-}\cup\Gamma$ cu excepţia eventual a punctelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ din acest domeniu precum şi a punctului $z=\infty$, unde are poli cu părţile principale $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_\infty(z)$, atunci:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}G_j(z), & \text{daca } z\in\mathcal{D}^{+}\\ -f(z)+\sum\limits_{j=1}^{n}G_j(z), & \text{daca } z\in\mathcal{D}^{-}\end{cases} \tag{2.5.1.19}$$

V. Cu ajutorul datelor de mai sus vom putea calcula integrale singulare de tipul:

$$I(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi}\,\varphi(\zeta)}{\xi-x}d\zeta \tag{2.5.1.20}$$

unde $\varphi(\zeta)$ este o funcţie raţională cunoscută pe segmentul de integrare.

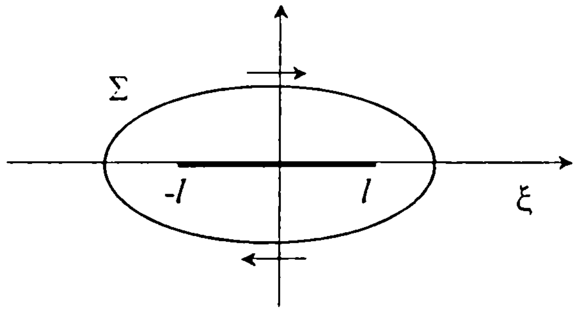


Fig. 2.5.1.3

Vom înconjura segmentul de integrare cu un contur Σ ca în **Fig. 2.5.1.3** şi vom folosi integrala ajutătoare:

$$\int_{\Sigma}\frac{\sqrt{l^2-\zeta^2}\,\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{2.5.1.21}$$

Vom considera că la valori mari ale lui $|z|$ avem:

$$\sqrt{l^2-z^2}=-i\sqrt{z^2-l^2}=-iz\left(1-\frac{l^2}{2z^2}+\dots\right) \tag{2.5.1.22}$$

Apropiind conturul de integrare Σ până pe tăietura liniară

$$|\zeta|=|\xi+i0|\le l$$

pe baza relaţiilor (2.5.1.18) şi (2.5.1.22) vom găsi:

$$J(z)=\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}\,\varphi(\xi)}{\xi-z}d\xi=\pi\left[\sqrt{z^2-l^2}\,\varphi(z)-\sum_j G_j(z)\right] \tag{2.5.1.23}$$

unde $G_j(z)$ - este partea principală a funcţiei $\sqrt{z^2-l^2}\,\varphi(z)$ relativă la polii săi. Pe baza formulelor Sohoţi – Plemelj (2.5.1.3) şi (2.5.1.4) obţinem valoarea integralelor singulare (2.5.1.20).

$$\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}\,\varphi(\xi)}{\xi-x}d\xi=\frac{1}{2}\left[J^+(x)+J^-(x)\right] \tag{2.5.1.24}$$

Dar funcţia $\sqrt{l^2-z^2}$ va avea semne diferite pe marginea de sus şi de jos a tăieturii, astfel încât din (2.5.1.23) şi (2.5.1.24) pentru $|x|<l$ vom obţine:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}\,\varphi(\xi)}{\xi-x}d\xi=-\pi\sum_j G_j(x),\quad |x|<l \tag{2.5.1.25}$$

VI. În mod analog găsim valoarea integralei de tip Cauchy:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}\,(\xi-z)}=-\pi\left[\frac{\varphi(z)}{\sqrt{z^2-l^2}}-\sum_j G_j(z)\right] \tag{2.5.1.26}$$

VII. Tot aşa obţinem şi integrala singulară:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}\,(\xi-x)}=\pi\sum_j G_j(x),\qquad |x|<l \tag{2.5.1.27}$$

VIII. Aplicând acelaşi artificiu (cu conturul de integrare Σ) se rezolvă o serie de integrale de tipul:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}} \tag{2.5.1.28}$$

Aplicând metoda reziduurilor şi ţinând cont de (2.5.1.22) obţinem:

$$\int_{\Sigma_i}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}}=-2\pi\sum_k rez\left\{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{z^2-l^2}}\right\}_{z=a_k} \tag{2.5.1.29}$$

unde a_k – sunt polii funcției $\varphi(z)/\sqrt{z^2-l^2}$ în exteriorul conturului Σ, inclusiv punctul de la infinit al planului. De aici, reducând conturul Σ la fisură avem:

$$\int_{-l}^{l} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}} = -\pi \sum_k rez\left\{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{z^2-l^2}}\right\}_{z=a_k} \tag{2.5.1.30}$$

Problemele conjugării liniare (Mushelișvili)

Vom considera planul infinit cu fisura L pe axa x, $|x| \le l$, $y = 0$. Vom nota cu $\phi(z)$ o funcție analitică univocă, determinată pe tot planul complex z; vom zice că este olomorfă pe porțiuni dacă are valoarea limită $\phi^+(x)$ și $\phi^-(x)$ pe marginea superioară și inferioară a tăieturii, iar în punctele $x = \pm l$ are loc inegalitatea:

$$|\phi(z)| < A_1 |z \mp l|^{-\alpha_1}, \quad A_1 > 0, \quad 0 \le \alpha_1 < 1 \tag{2.5.1.31}$$

Prima problemă a conjugării liniare este determinarea funcției parțial olomorfe $\phi(z)$ după saltul dat pe punctul ℓ:

$$\phi^+(x) - \phi^-(x) = \varphi(x), \qquad |x| < l \tag{2.5.1.32}$$

unde $\varphi(x)$ - o funcție dată care satisface condiția $H(\mu)$: (2.5.1.2).

Pe baza relațiilor (2.5.1.3) , (2.5.1.4) se poate deduce că soluția limitată la infinit a acestei probleme este dată de:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{\varphi(x)dx}{x-z} + C \tag{2.5.1.33}$$

unde C este o constantă arbitrară. Soluția nulă la infinit se obține pentru C=0.

A doua problemă a conjugării liniare. Se cere determinarea funcției parțial olomorfe $F(z)$ care să satisfacă următoarele condiții pe conturul L:

$$F^+(x) + F^-(x) = f(x), \qquad |x| < l \tag{2.5.1.34}$$

unde $f(x)$ este o funcție cunoscută ce satisface condițiile $H(\mu)$.

Să considerăm, de exemplu, funcția:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}} \tag{2.5.1.35}$$

analitică în afara conturului L, care pentru $|z|$ foarte mare se poate scrie:

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{l^2}{2z^3} + \dots \tag{2.5.1.36}$$

Ținând cont că:

$$\sqrt{z^2-l^2} = \begin{cases} \sqrt{x^2-l^2}, & y \to \pm 0, \quad x \ge l \\ -\sqrt{x^2-l^2}, & y \to \pm 0, \quad x \le -l \\ \pm i\sqrt{l^2-x^2}, & y \to \pm 0, \quad |x| \le l \end{cases} \tag{2.5.1.37}$$

se demonstrează că la trecerea prin conturul L funcția X(z) schimbă semnul:

$$X^+(x) + X^-(x) = 0, \qquad |x| < l \tag{2.5.1.38}$$

Condițiile de graniță (2.5.1.34) se pot scrie acum sub forma:

$$\left[\frac{F(x)}{X(x)}\right]^{+}-\left[\frac{F(x)}{X(x)}\right]^{-}=\frac{f(x)}{X^{+}(x)},\quad |x|<l$$

Ajungem tot la prima problemă a conjugării (2.5.1.32), care în cazul dat are soluția:

$$F(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{f(x)dx}{X^{+}(x)(x-z)}+CX(z) \tag{2.5.1.39}$$

Transformarea integralei tip CAUCHY

Să considerăm următoarea ecuație integrală:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(t)dt}{t-x}=\pi f(x),\quad |x|<l \tag{2.5.1.40}$$

unde integrala se înțelege în sensul valorii principale a lui Cauchy, iar funcția $f(x)$ satisface condiția $H(\mu)$ (2.5.1.2).

Introducem funcția:

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{2.5.1.41}$$

Pe baza formulelor Sohoțki-Plemelj, putem scrie pentru această funcție:

$$\phi^{+}(x)+\phi^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(t)dt}{t-x},\quad |x|<l \tag{2.5.1.42}$$

Rezultă atunci că ecuația (2.5.1.40) este echivalentă cu problema conjugării tratată mai sus:

$$\phi^{+}(x)+\phi^{-}(x)=-if(x),\quad |x|<l \tag{2.5.1.43}$$

deci putem determina pe $\phi(z)$ după o formulă de tipul (2.5.1.39)

$$\phi(z)=-\frac{X(z)}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}+CX(z) \tag{2.5.1.44}$$

Soluția ecuației (2.5.1.40) se poate scrie:

$$\varphi(x)=\phi^{+}(x)-\phi^{-}(x) \tag{2.5.1.45}$$

Dar:

$$X^{+}(x)=\frac{1}{i\sqrt{l^{2}-x^{2}}};\quad X^{-}(x)=-\frac{l}{i\sqrt{l^{2}-x^{2}}},\quad |x|<l \tag{2.5.1.46}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^{2}-x^{2}}}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^{2}-t^{2}}f(t)dt}{t-x}+C_{1}\right] \tag{2.5.1.47}$$

De obicei $\varphi(x)$ este cunoscută, și atunci:

$$C_{1}=\int_{-l}^{l}\varphi(x)dx \tag{2.5.1.48}$$

Dacă ținem cont că:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dt}{\sqrt{l^{2}-t^{2}}(t-x)}=\begin{cases}0, & |x|<l\\ -\dfrac{\operatorname{sign}x}{\sqrt{x^{2}-l^{2}}}, & |x|>l\end{cases} \tag{2.5.1.49}$$

atunci:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l-x}{l+x}}\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l+t}{l-t}}\cdot\frac{f(t)dt}{t-x} \tag{2.5.1.50}$$

Impunând condiţia suplimentară:

$$\int_{-l}^{l} \frac{f(t)dt}{\sqrt{l^2 - t^2}} = 0 \qquad (2.5.1.51)$$

obţinem în final:

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{f(t)dt}{\sqrt{l^2 - t^2}(t - x)} \quad , \qquad |x| \le l \qquad (2.5.1.52)$$

2.5.2. Teoria ecuaţiilor integrale (t.e.i.)*

În literatura de specialitate românească, (t.e.i) este relativ puţin abordată şi reprezentată. Exceptând celebra monografie a lui Traian Lalescu (pe care cu părere de rău nu am studiat-o!) m-am folosit de următoarele lucrări:

- cartea coordonată de CAIUS IACOB: „Matematici clasice şi moderne", vol.III, în care cap.XIV scris de Paul COCÂRLAN (p.178-307) se ocupă de „Ecuaţii integrale şi elemente de analiză funcţională" [I1];
- excelenta monografie a lui V.I. SMIRNOV [S38] – traducere din limba rusă – care în vol. IV, dedică (t.e.i.) Cap.I (p.5-210).

Ambele cărţi sunt scrise de matematicieni pentru matematicieni: utile dar dificile. Am apelat mai mult la:

- monografiile lui V.PARTON şi P.PERLINE [P20] „ Methodes de la théorie mathematique de l'élasticité" (1981); [P19] „Equation intégrales de la théorie de l'élasticité" (1983).
- Evident ca mi-a fost de un real folos cartea lui N.I. MUSHELISVILI [M70] „Singular Integral Equations" (1972), una dintre cele mai citate cărţi din literatura specifică.
- Am utilizat de asemenea notele de la cursul ţinut de MARC BONNET la Universitatea din Bucureşti în mai 1993: „Equations intégrales et éléments de frontière en Mécanique des Solides: Théorie, mise en oeuvre, applications" [B62].
- Mai amintesc şi teza de doctorat a lui Patrick DANGLA [D3]/1990: „Couplage Éléments finis équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure", care utilizează foarte mult (t.e.i.) şi funcţiile Green. Lucrarea a făcut parte dintr-un program naţional extins pe perioada 1985-1990, privind: „Methodes d'équations intégrales appliquées aus sols".
- Merită evidenţiată şi cartea autorilor Robert DAUTRAY şi Jacques Louis LIONS: „Mathematical Analiysis and Numerical Methods for Science and Tehnology, Vol.4: „ Integral Equations and Numerical Methods", Springer Verlag, 1990 [D6].

În literatura modernă, cu ajutorul nucleului ecuaţiei integrale, se defineşte un **operator integral** astfel că ecuaţiile integrale se scriu sub o formă prescurtată, „operatorială" şi sunt încadrate în teoria generală a operatorilor ca un capitol de Analiză funcţională. Cărţile utilizate de mine au fost:

- L.V.KANTOROVICI [K23]; N. TEODORESCU [T11]; A. HAIMOVICI [H4] şi care dau evident o formă foarte modernă şi generală acestei probleme.

1. Într-un sens foarte general, se numeşte *„ecuaţie integrală"* (e.i.) o ecuaţie în care funcţia necunoscută $\varphi(x)$ apare şi sub semnul integral. Sub aspect matematic o asemenea ecuaţie se prezintă într-o formă intrinsecă astfel:

$$F\left(x, \varphi(x), \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right) = 0 \qquad (2.5.2.1)$$

unde $\varphi(x)$ este funcţia necunoscută, iar funcţiile F, K, a, b sunt presupuse cunoscute, mulţimile pe care acestea sunt definite precum şi mulţimile în care iau valori se precizează de la caz la caz.

Vom deosebi următoarele tipuri mai importante:

I. ECUAŢII INTEGRALE LINIARE

a). de tip VOLTERA

- **de speţa întâi** (conţin funcţia necunoscută φ numai sub semnul integral):

$$\int_{a}^{x} K(x\xi)\varphi(\xi)d\xi + f(x) = 0 \qquad (2.5.2.2)$$

* Prima ecuaţie integrală a fost considerată de N.Abel (1828), iar teoria acestora a fost dezvoltată de Volterra (1896) şi E.Fredholm (1900-1902). Matematicianul român Traian Lalescu a scris prima monografie consistentă din lume cu acest subiect: „Introduction à la théorie des équations intégrales" in 1912.

- **de speţa a doua:**

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+f(x)=0 \qquad (2.5.2.3)$$

b). de tip FREDHOLM

- **de speţa întâia**

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+f(x)=0 \qquad (2.5.2.4)$$

- **de speţa a doua**

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+f(x)=0 \qquad (2.5.2.5)$$

Formal cele două tipuri de (e.i) seamănă. Diferenţa esenţială este legată de faptul că la ecuaţia Fredholm limita superioară a integralei este o constantă, pe când la ecuaţiile Volterra este variabilă.

În aceste ecuaţii funcţia K se numeşte **„nucleul (sau sâmburele) ecuaţiei integrale"** şi cu ajutorul ei se defineşte operatorul integral K:

$$K\varphi=\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (2.5.2.6)$$

Ecuaţiile integrale de mai sus se pot scrie acum într-o formă operaţională:

$$\varphi=\lambda K\varphi+f \qquad (2.5.2.7)$$

şi se tratează sub aspect foarte general şi abstract în cărţile de Analiză funcţională şi Teoria operatorilor [C38], [C79], [C80], [G11], [G16], [I13], [K35], [S38], [T11].

În ecuaţiile precedente dacă $f(x)=0$, zicem că avem o **ecuaţie omogenă**.

II. ECUAŢII INTEGRALE NELINIARE

Nu există o clasificare a lor datorită marii diversităţi în care sunt întâlnite în literatură. Voi enumera numai câteva tipuri, cu importanţă aplicativă:

- **Ecuaţia lui HAMMMERSTEIN**

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\xi)F(\xi,\varphi(\xi))d\xi \qquad (2.5.2.8)$$

- **Ecuaţia neliniară a lui VOLTERRA**

$$\varphi(x)=\int_a^x F(x,\xi,\varphi(\xi))d\xi \qquad (2.5.2.9)$$

III. ECUAŢII INTEGRALE SINGULARE

Au o teorie specială deoarece operatorul integral nu mai poate fi definit cu ajutorul unei integrale obişnuite în sensul lui Riemann sau Lebesgue – ci trebuie definit în valoare principală, în sensul lui Cauchy.

2. Facem unele precizări. Fie $I=[a,b]\subset \mathbf{R}$ şi $\Delta = IxI$. Vom considera că funcţiile: $f:I\to\mathbf{R}$ sau **C**; $K:\Delta\to\mathbf{R}$ sau **C**; funcţia necunoscută φ, cu valori reale sau complexe, se caută în mulţimea funcţiilor integrabile Riemann pe $I=[a,b]$.

3. Vom analiza pe scurt ecuaţia integrală Volterra de speţa a doua pe care o vom scrie sub forma:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+f(x) \qquad (2.5.2.10)$$

unde λ este un parametru cu valori reale sau complexe.

Soluţiile ecuaţiei (2.5.2.10) se caută sub forma seriei de funcţii:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots \tag{2.5.2.11}$$

unde $\varphi_n(x)$ sunt funcţii continue pe I care urmează să fie determinate. Din (2.5.2.10) rezultă:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^x K(x,\xi)\varphi_n(\xi)d\xi \tag{2.5.2.12}$$

Această identitate este verificată pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ (sau **C**) dacă:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = f(x) \\ &\varphi_1(x) = \int_a^x K(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi \\ &\\ &\varphi_n(x) = \int_a^x K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{2.5.2.13}$$

Se demonstrează că seria (2.5.2.12) este absolut şi uniform convergentă pe $I = [a,b]$, $\forall\lambda \in \mathbf{C}$, iar soluţia construită mai sus este unică.

4. Ecuaţiile lui FREDHOLM

Analizăm sumar numai ecuaţia de speţa a doua. În literatură se demonstrează continuitatea soluţiei φ şi unicitatea care are loc numai dacă:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{2.5.2.14}$$

unde $M = supp|K(x,\xi)|$, $(x,\xi) \in \Delta$

În aceste condiţii soluţia ecuaţiei se poate obţine prin *metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard*. Astfel, pornim de la o funcţie $\varphi_0 \in C_I^0$ arbitrară, se construieste sirul $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ cu $\varphi_n = A\varphi_{n-1}$ soluţia φ este limita acestui şir. Se poate lua $\varphi_0 = f$ şi avem:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi \qquad n = 1,2\ldots$$

Termenii acestei serii se obţin din aproape în aproape, pentru fiecare fiind necesară cunoaşterea termenului precedent. Pentru a scrie soluţia φ sub o formă mai convenabilă, se notează:

$$\left.\begin{aligned} &K_1(x,\xi) = K(x,\xi) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_p(x,\xi) = \int_a^b K(x,\eta)K_{p-1}(\eta,\xi)d\eta \quad p = 2,3\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.5.2.15}$$

dacă se notează:

$$K(x,\xi,\lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{p-1} K_p(x,\xi) \tag{2.5.2.16}$$

atunci:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi;\lambda) f(\xi)d\xi \tag{2.5.2.17}$$

Determinarea soluţiei ecuaţiei (2.5.2.5) pentru valorile lui λ care satisfac (2.5.2.14) revine în principal la determinarea funcţiei K care se numeşte **nucleul rezolvant** al ecuaţiei (2.5.2.6). Funcţiile K_p se numesc **nuclee iterate** ale acestei ecuaţii.

5. Ecuaţii cu nucleu degenerat. Dacă nucleul ecuaţiei integrale Fredholm se poate scrie sub forma:

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{p} a_i(x)b_i(\xi) \tag{2.5.2.18}$$

se zice că este un **nucleu degenerat**, iar ecuaţia este o (e.i.) cu nucleu degenerat. În acest caz se demonstrează că determinarea soluţiilor poate fi redusă la un sistem algebric liniar, în felul următor:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{p} a_i(x)\underbrace{\int_a^b b_i(\xi)\varphi(\xi)d\xi}_{C_i}=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{p} C_i a_i(x)$$

$$C_i=\int_a^b b_i(\xi)\left[f(\xi)+\lambda\sum_{k=1}^{p} C_k a_k(\xi)\right]d\xi$$

cu notaţiile:

$$f_i=\int_a^b b_i(\xi)f(\xi)d\xi; \qquad K_{ki}=\int_a^b a_k(\xi)b_i(\xi)d\xi \Rightarrow C_i=\lambda\sum_{k=1}^{p} K_{ki}C_k+f_i, \quad i=1,2,\dots,p$$

6. Ecuaţii integrale singulare, care sunt numite ecuaţii integrale liniare nefredholmiene şi sunt caracterizate prin următoarele două fenomene:

1^0 apariţia punctelor de acumulare finite ale mulţimii valorilor caracteristice sau chiar a *spectrelor continui*.

2^0 apariţia valorilor caracteristice de multiplicitate infinită, adică a valorilor caracteristice cărora le corespund o infinitate de funcţii proprii liniar independente. Dintre acestea voi aminti:

7. Ecuaţii integrale singulare cu nuclee de tip Cauchy

Se poate arăta că ecuaţia integrală Fredholm cu nucleul de forma:

$$K(x,\xi)=\frac{K_1(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha} \qquad (0<\alpha<1)$$

poate fi transformată într-o ecuaţie de tipul Fredholm cu nucleul mărginit. Dacă $\alpha<1$, nucleul $K(x,\xi)$ are o singularitate neintegrabilă iar operatorul integral corespunzător nu mai poate fi definit cu ajutorul unei integrale obişnuite în sensul lui Reimann sau Lebesque. Integrala respectivă există, în anumite condiţii impuse funcţiei $K_1(x,\xi)$, în valoare principală în sensul lui Cauchy.

Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie nemărginită în vecinătatea punctului $c\in(a,b)$. Limita următoare, în ipoteza că există şi este finită,:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right], \qquad 0<\varepsilon<\min(c-a,b-c)$$

se numeşte **valoarea principală în sensul lui Cauchy a integralei funcţiei *f* pe intervalul** $[a,b]$ şi se notează:

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx \quad , \int_a^{b_1} f(x)dx \text{ sau } \left|\int_a^b\right| f(x)dx$$

Integralele în valoare principală se mai numesc şi **singulare**.

Se pune problema: ce condiţii trebuiesc impuse funcţiei f(x) pentru ca limita de mai sus să existe? Se demonstrează că dacă f(x) verifică pe intervalul (a,b) condiţia lui Hölder:

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^{\alpha} \qquad \forall (x,y)\in[a,b]^{*}$$

unde C și α sunt constante iar $0<\alpha\le 1$, atunci pentru orice $y\in[a,b]$ integrala singulară $\int_a^b \frac{f(x)}{x-y}dx$ există în valoare principală în sensul lui Cauchy.

2.5.3. Contribuții

2.5.3.1. Generalități

Se știe că (v. **Anexa 3**), utilizând două funcții de variabilă complexă $\varphi(z)$ și $\psi(z)$, Kolosov și Mushelișvili [M69] au reușit să exprime tensiunile și deplasările pentru o problemă plană cu ajutorul relațiilor (36) din **Anexa 3**, numite **ecuațiile Kosolov-Mushelișvili.**

$$\begin{cases}\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'}(z)]=4\operatorname{Re}[\varphi'(z)]\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar z\varphi''(z)+\psi'(z)]\\ 2G(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\varphi'}(z)-\overline{\psi}(z)\end{cases} \tag{2.5.3.1}$$

unde

$$\chi=\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}=\begin{cases}3-4\nu & \text{– pentru starea plană de deformație}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{– pentru starea plană de tensiune}\end{cases} \tag{2.5.3.2}$$

Se obișnuiește să se introducă *funcțiile notate cu litere mari.*

$$\Phi(z)=\varphi'(z)\ \Rightarrow\ \Phi'(z)=\varphi''(z);\quad \Psi(z)=\psi'(z) \tag{2.5.3.3}$$

astfel încât relațiile (2.5.3.1) se scriu:

$$\begin{cases}\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)]=4\operatorname{Re}[\Phi(z)]\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar z\Phi'(z)+\Psi(z)]\\ 2G(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\Phi}(z)-\overline{\psi}(z)\end{cases} \tag{2.5.3.4}$$

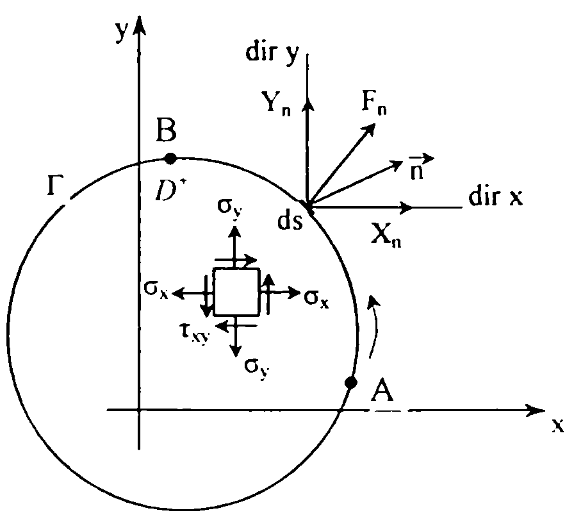


Fig. 2.5.3.1

Să considerăm dat un domeniu plan $\mathcal{D}^+$ cu frontiera Γ (curbă Leapunov). Pe elementul de arc ds acționează forțele exterioare date $X_n ds$ și $Y_n ds$.

Se demonstrează (v. Mushelișvili [M69], p.155):

$$X_n+iY_n=-id\{\varphi(z)+z\overline{\varphi'}(z)+\overline{\psi}(z)\}=-id[-\mu(z)] \tag{2.5.3.5}$$

Vectorul rezultant al forțelor exterioare care acționează pe un arc AB este:

$$X+iY=\int_A^B(X_n+iY_n)ds=-i[\varphi(z)+z\overline{\varphi'}(z)+\overline{\psi}(z)]_A^B=-i[\mu(z)]_A^B \tag{2.5.3.6}$$

---

* pentru $\alpha=1$, avem *condiția lui Lipschitz*

unde se notează simbolic $[\ ]_A^B$ creşterea expresiei din paranteză după o deplasare pe arcul AB de la A la B.

Momentul rezultant al acestor forţe:

$$M = \int_{AB} (xY_n - yX_n) ds = -\mathrm{Re}\left[\int_A^B \bar{z}\mu'(z) dz\right] \tag{2.5.3.7}$$

unde

$$\mu(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'}(z) + \overline{\psi}(z) \tag{2.5.3.8}$$

Transformări de coordonate

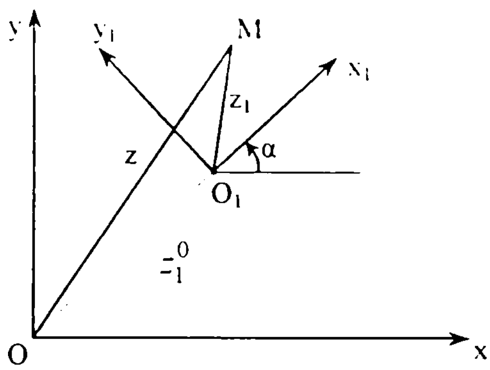


Fig. 2.5.3.2

La înlocuirea sistemului de coordonate carteziene funcţiile $\Phi(z)$ şi $\Psi(z)$ *nu sunt invariante*. Dacă noul sistem de coordonate xOy este legat de vechiul sistem de coordonate xOy prin relaţia:

$$z = z_1^0 + z_1 e^{i\alpha} \tag{2.5.3.9}$$

atunci funcţiile $\Phi_1(z_1)$ şi $\Psi_1(z_1)$ joacă acelaşi rol în sistemul $x_1O_1y_1$ ca şi funcţiile $\Phi(z)$ şi $\Psi(z)$ în sistemul xOy. Legătura dintre funcţii este evidentă:

$$\Phi_1(z) = \Phi\left(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0\right) \tag{2.5.3.10}$$

$$\Psi_1(z_1) = e^{2i\alpha}\left[\Psi\left(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0\right) + \bar{z}_1^0 \Phi'\left(z_1 e^{i\alpha} + z_1^0\right)\right] \tag{2.5.3.11}$$

unde:

$z_1 = x_1 + iy_1$;

$z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0 \sim \left(x_1^0, y_1^0\right)$ - coordonatele originii O_1 în sistemul xOy.

Coordonate polare

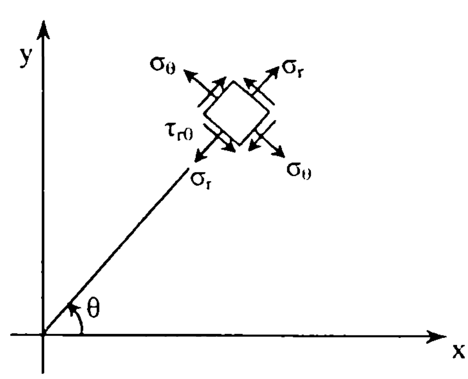


Fig. 2.5.3.3

Componentele tensiunilor $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ şi ale deplasărilor u_r, u_θ, într-un sistem de coordonate polare sunt legate de componentele tensiunilor $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ şi deplasărilor u, v din sistemul cartezian xOy, cu aceeaşi origine, prin relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \text{ (primul invariant)} \\ &\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = e^{2i\theta}\left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right) \\ &u_r + iu_\theta = e^{-i\theta}(u + iv) \end{aligned}\right\} \tag{2.5.3.12}$$

Mai dăm din [P12] încă două formule utile în aplicaţii:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi'}(z) + \overline{\Psi}(z) \tag{2.5.3.13}$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(z) - e^{2i\theta}\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \tag{2.5.3.14}$$

Probleme fundamentale şi condiţii de graniţă (în complex)

Se întâlnesc trei tipuri de probleme fundamentale (clasice):

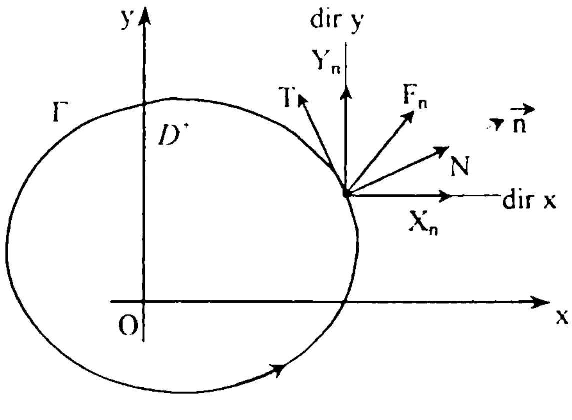


Fig. 2.5.3.4

- **prima problemă fundamentală:** pe conturul Γ sunt date tensiunile exterioare.

  Condiţiile pe friontieră, utilizând relaţia (2.5.3.14), se scriu:

$$\Phi(t)+\overline{\Phi}(t)-e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\Phi'(t)+\Psi(t)\right]=N-iT,\quad t\in\Gamma \tag{2.5.3.15}$$

unde:

t – punctul variabil pe contur;

N, T – componentele date – normală şi tangenţială – ale forţelor exterioare ce acţionează pe contur.

- **a doua problemă fundamentală**: pe frontiera Γ sunt date deplasările; condiţiile pe graniţă se obţin din (2.5.3.1) prin trecerea la limită $(z \to t)$:

$$\chi\varphi(t)-t\overline{\Phi}(t)-\psi(t)=2G\left[u(t)+iv(t)\right],\quad t\in\Gamma \tag{2.5.3.16}$$

Aici, $u(t)$ şi $v(t)$ sunt funcţii cunoscute pe Γ.

Calculul tensiunilor în planul infinit solicitat local

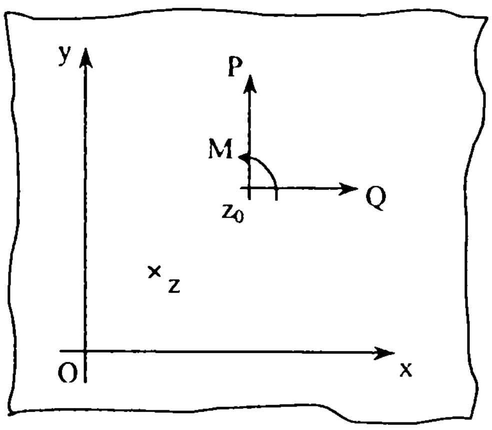


Fig. 2.5.3.5

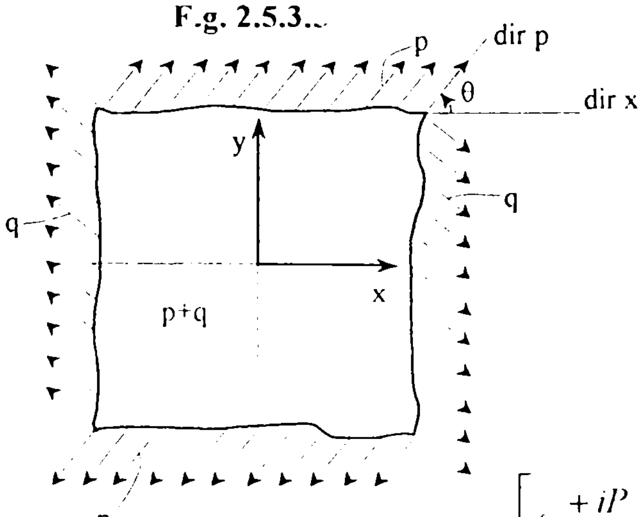


Fig. 2.5.3.6

Presupunem că în punctul dat z_0 acţionează sarcinile P, Q, M cu sensurile pozitive ca în **Fig. 2.5.3.5**. Potenţialii complecşi ai tensiunilor au forma dată de Musheli̧svili [M69], [M70]:

$$\Phi_0(z)=-\frac{Q+iP}{2\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{z-z_0} \tag{2.5.3.17}$$

$$\psi_0(z)=\frac{\chi(Q-iP)}{2\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{z-z_o}-\frac{(Q+iP)\bar{z}_o+i(1+\chi)M}{2\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^2} \tag{2.5.3.18}$$

Dacă introducem (2.5.3.17) şi (2.5.3.18) în (2.5.3.13) obţinem combinaţia tensiunilor $\sigma_x - i\tau_{xy}$ pe axa x, sub forma:

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi(1+\chi)}\cdot\left[\frac{Q+iP}{x-z_0}-\frac{Q+iP}{x-\bar{z}_0}-\frac{(Q-iP)(\bar{z}_0-z_0)+i(1+\chi)M}{(x-\bar{z}_0)^2}\right] \tag{2.5.3.19}$$

Dacă problema este mai complicată *se aplică principiul suprapunerii efectelor.*

Să presupunem planul elastic solicitat la infinit de forțele de tracțiune uniform repartizate p și q ortogonale ca direcție și înclinate cu unghiul α față de axa Ox (v. **Fig. 2.5.3.6**). Atunci vom avea:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(p+q), \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2}(p-q)e^{-2i\alpha} \tag{2.5.3.20}$$

Tensiunile σ_y și τ_{xy}, pe axa x, vor rezulta din (2.5.3.1):

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left[(p+q)-(p-q)e^{2i\alpha}\right] \tag{2.5.3.21}$$

2.5.3.2. Planul infinit* cu o tăietură rectilinie

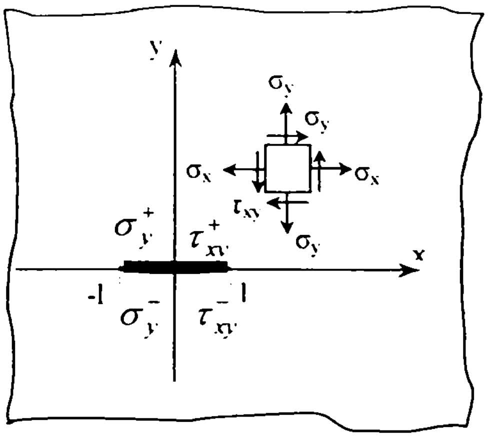


Fig.2.5.3.7

Date inițiale. Presupunem că în planul complex există o tăietură de grosime nulă, orientată după axa Ox:

$$|x| \le l, \quad y = 0$$

• Presupunem că tensiunile la infinit sunt nule, dar pe marginile tăieturii acționează tensiunile σ_y^+, τ_{xy}^+ (pe marginea de sus) și σ_y^- și τ_{xy}^- (pe marginea de jos).

În aceste condiții vom considera că avem:

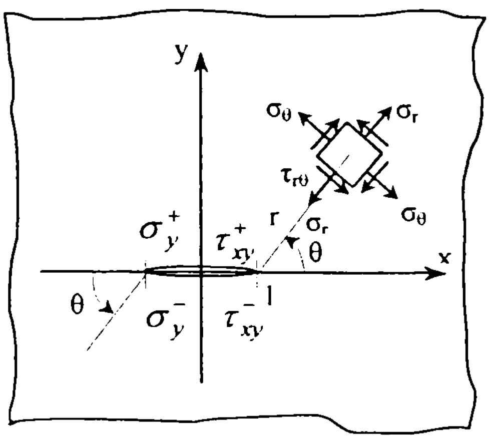


Fig.2.5.3.8

$$\sigma_y^{\pm}(x,0) - i\tau_{xy}^{\pm}(x,0) = p(x) + iq(x), \quad |x| < l \tag{2.5.3.22}$$

unde $p(x)$ și $q(x)$ sunt funcții cunoscute (date):

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(\sigma_y^+ + \sigma_y^-\right) - \frac{i}{2}\left(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-\right) \tag{2.5.3.23}$$

$$q(x) = \frac{1}{2}\left(\sigma_y^+ - \sigma_y^-\right) - \frac{i}{2}\left(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-\right) \tag{2.5.3.24}$$

Pentru început vom rezolva o problemă auxiliară, considerând că pe marginile tăieturii sunt date **salturile tensiunilor și ale derivatelor deplasărilor:**

$$\sigma_y^+ - \sigma_y^- - i\left(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-\right) = 2q(x) \tag{2.5.3.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u^+ - u^- + i\left(v^+ - v^-\right)\right] = \frac{2(\chi+1)}{2G}g'(x) \tag{2.5.3.26}$$

iar pe vârfurile tăieturii, saltul deplasărilor să fie nul:

$$g(-l) = g(l) = 0 \tag{2.5.3.27}$$

Introducem o funcție ajutătoare:

* Deși sunt conștientă că a spune „planul infinit" constituie un pleonasm, deoarece planul nu poate fi decât infinit, voi persista în utilizarea acestei formulări pentru a elimina orice confuzie cu placa plană.

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi}'(z)+\overline{\Psi}(z) \tag{2.5.3.28}$$

prin intermediul căreia tensiunile şi deplasările din relaţiile (2.5.3.4), (2.5.3.13) se scriu:

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)\right] \tag{2.5.3.29}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi}'(z) \tag{2.5.3.30}$$

$$2G(u'+iv')=\chi\Phi(z)-\Omega(z)-(z-\bar{z})\overline{\Phi}'(z) \tag{2.5.3.31}$$

unde $u'=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $v'=\dfrac{\partial v}{\partial x}$,: iar pentru $|x|<l$ vom avea:

$$\lim_{z\to x}(z-\bar{z})\Phi'(z)=0 \tag{2.5.3.32}$$

Pe baza relaţiilor (2.5.3.30), (2.5.3.31), condiţiile de frontieră (2.5.3.25) şi (2.5.3.26) se scriu:

$$\Phi^+(x)+\Omega^-(x)-\Phi^-(x)-\Omega^+(x)=2q(x),\qquad |x|<l \tag{2.5.3.33}$$

$$\chi\Phi^+(x)-\Omega^-(x)-\chi\Phi^-(x)+\Omega^+(x)=i(\chi+1)g'(x)\quad |x|<l \tag{2.5.3.34}$$

Suma relaţiilor (2.5.3.33) şi (2.5.3.34) ne dă:

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=i\left[g'(x)-i\frac{2q(x)}{\chi+1}\right]=iQ(x),\qquad |x|<l \tag{2.5.3.35}$$

Înmulţim ecuaţia (2.5.3.33) cu χ şi din ea scădem (2.5.3.34)

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=i[Q(x)+2iq(x)],\qquad |x|<l \tag{2.5.3.36}$$

Din relaţiile (2.5.3.35) şi (2.5.3.36), ţinând cont de integrala Cauchy, găsim:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{Q(t)}{t-z}dt \tag{2.5.3.37}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{Q(t)+2iq(t)}{t-z}dt \tag{2.5.3.38}$$

$$\Psi(z)=\overline{\Omega}(z)-\Phi(z)-z\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\left[\frac{\overline{Q}(t)-2i\overline{q}(t)}{t-z}-\frac{tQ(t)}{(t-z)^2}\right]dt \tag{2.5.3.39}$$

Am găsit astfel potenţialii complecşi Kolosov-Mushelişvili pentru problema de limită (2.5.3.25) şi (2.5.3.26).

Vom considera o altă problemă limită, când sunt date tensiunile pe marginile fisurii după (2.5.3.1), dar nu mai sunt date salturile deplasărilor la vârful fisurii- ceea ce înseamnă că funcţia $g(x)$ este necunoscută.

Vom scrie condiţiile pe frontieră sub forma (v. (2.5.3.23)):

$$\left[\sigma_y^+(x,0)+\sigma_y^-(x,0)\right]-i\left[\tau_{xy}^+(x,0)+\tau_{xy}^-(x,0)\right]=2p(x),\qquad |x|<l \tag{2.5.3.40}$$

Ecuaţia integrală singulară a problemei astfel formulate este:

$$\int_{-l}^{l} \frac{Q(t)+iq(t)}{t-x}dt = \pi p(x), \qquad |x|<l \tag{2.5.3.41}$$

Din conjuncţia relaţiei (2.5.3.27) cu (2.5.3.47) şi (2.5.3.48) condiţia de univocitate a deplasărilor se scrie sub forma:

$$\int_{-l}^{l} g'(t)dt = 0 \tag{2.5.3.42}$$

şi se explicitează astfel:

$$g'(x) = -i\frac{\chi-1}{\chi+1}q(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}p(t)dt + iR\right] \tag{2.5.3.43}$$

unde

$$R = \frac{\chi-1}{\chi+1}\int_{-l}^{l} q(t)dt \tag{2.5.3.44}$$

Mai ştim că:

$$\int_{-l}^{l} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{l^2-t^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{z^2-l^2}}, \qquad z \notin [-l,l] \tag{2.5.3.45}$$

Relaţiile (2.5.3.37), (2.5.3.38) conduc la soluţia totală a problemei

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}\,p(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-l}^{l}\frac{q(t)dt}{t-z} + \frac{R}{\sqrt{z^2-l^2}}\right] \tag{2.5.3.46}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}\,p(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{q(t)dt}{t-z} + \frac{R}{\sqrt{z^2-l^2}}\right] \tag{2.5.3.47}$$

Ne propunem să studiem distribuţia de tensiuni în jurul vârfului fisurii. Pentru aceasta trecem la sistemul de coordonate polare cu originea în vârful fisurii $z_{10}=l$ (**Fig. 2.5.3.7**) ceea ce se face înlocuind:

$$z_1 = re^{i\theta} \Rightarrow z = \pm(z_1 + l) \tag{2.5.3.48}$$

Atunci potenţialele complexe vor fi:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(\pm z_1 \pm l)$$
$$\Omega_1(z_1) = \Omega(\pm z_1 \pm l) \tag{2.5.3.49}$$

Pentru aceste funcţii de potenţial, vom avea explicit:

$$\Phi_1(z_1) = \pm\frac{1}{2\pi\sqrt{z_1(z_1+2l)}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}\,p(t)dt}{t\mp z_1\mp l} + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-l}^{l}\frac{q(t)dt}{t\mp z_1\mp l} \pm \frac{R}{\sqrt{z_1(z_1+2l)}}\right] \tag{2.5.3.50}$$

$$\Omega_1(z_1) = \pm\frac{1}{2\pi\sqrt{z_1(z_1+2l)}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}\,p(t)dt}{t\mp z_1\mp l} + \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{q(t)dt}{t\mp z_1\mp l} \pm \frac{R}{\sqrt{z_1(z_1+2l)}}\right] \tag{2.5.3.51}$$

Pentru valori $z_1 << l$, deci în vecinătatea vârfului fisurii, se obţine o dezvoltare asimptotică a funcţiilor $\Phi_1(z_1)$ şi $\Omega_1(z_1)$, astfel:

$$\Phi_1(z_1)=\frac{K_1^{\pm}-iK_2^{\pm}}{2\sqrt{2z_1}}+O(1); \qquad \Omega_1(z_1)=\frac{K_1^{\pm}-iK_2^{\pm}}{2\sqrt{2z_1}}+O(1) \tag{2.5.3.52}$$

unde: O(1) cuprinde termenii finiţi când $|z_1|\to 0$;

$K_1^{\pm},K_2^{\pm}$ - mărimi reale (semnul + se referă la partea dreaptă a vârfului fisurii, semnul – se referă la partea stângă)

Rezultă:

$$K_1^{\pm}-iK_2^{\pm}=-\frac{1}{\pi\sqrt{l}}\left[\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l\pm t}{l\pm t}}p(t)dt\pm i\frac{\chi-1}{\chi+1}\int_{-l}^{l}q(t)dt\right] \tag{2.5.3.53}$$

Revenind la calculul tensiunilor şi deplasărilor, se obţine următoarea distribuţie asimptotică a acestora:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_y\\ \sigma_x\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{K_1^{\pm}}{4\sqrt{2r}}\begin{bmatrix}5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}\\ 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2}\end{bmatrix}+\frac{K_2^{\pm}}{4\sqrt{2r}}\begin{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2}\\ -7\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{5\theta}{2}\\ 3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2}\end{bmatrix}+O(r^0) \tag{2.5.3.54}$$

$$4G\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\pm K_1^{\pm}\sqrt{\frac{r}{2}}\begin{bmatrix}(2\chi-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\\ (2\chi+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}+K_2^{\pm}\sqrt{\frac{r}{2}}\cdot\begin{bmatrix}(2\chi+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\\ -(2\chi-3)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\end{bmatrix}+O\left(r^{\frac{3}{2}}\right) \tag{2.5.3.55}$$

2.5.3.3. Planul elastic infinit cu defecte multiple

a) Câteva repere bibliografice

Aceasta este problema teoretică fundamentală care apropie (M.R.) de situaţiile reale întâlnite în structurile de rezistenţă şi care a constituit încă de la început obiectul preocupărilor mele; este, de altfel, o etapă intermediară obligatorie în abordarea problemelor din mecanica probabilistă a ruperii. Bibliografia aferentă acestor probleme este mult mai bogată decât am crezut iniţial.

Trebuie să amintesc de la început câteva monografii fundamentale:

- Cartea lui V.V. PANASIUK; M.P.SAVRUK şi A.P. DATÎŞIN [P12] apărută în 1975 la Kiev, autorii fiind mari personalităţi ale celebrei *„Şcoli de la Kiev”* în mecanica solidului deformabil. Utilizează în mod constant metoda potenţialilor complecşi ai lui Kosolov-Mushelişvili, integralele de tip Cauchy, reducând problemele abordate la ecuaţii integrale singulare. Are un nivel matematic greu abordabil.
- A doua monografie este cea a lui M.P. SAVRUK [S6] apărută – în 1982, destul de asemănătoare cu prima, la care a fost coautor şi M.P. SAVRUK.
- Trebuie amintită cartea lui JIAN-KE LU de metode complexe în elasticitatea plană [L49], apărută în 1995 şi care are Cap.V (p.151-182) dedicat solidelor elastice cu defecte multiple.
- O altă monografie de excepţie este cea a lui G.N. SAVIN [SB24] privind distribuţia tensiunilor în jurul găurilor, apărută tot la Kiev în 1968 (887 pagini!) şi care este una din lucrările cele mai complete în domeniu.
- Nu trebuie utitată celebra monografie a lui G.P. CEREPANOV [C10] „Mecanica ruperii fragile”, (640 pagini) apărută în aceeaşi editură „NAUKA” - Moscova 1974.
- Dintre articole, lucrarea lui GUZ şi SAVIN [G51] care tratează, tot în complex, problema planului infinit slăbit cu găuri circulare.

- Voi cita lucrările lui J. HELSING (v.Anexa). De exemplu [H21] şi [G34] pleacă tot de la funcţiile potenţial ale lui Kosolov-Mushelişvili, pe care le reprezintă cu ajutorul integralelor de tip Cauchy şi ajunge la ecuaţii integrale noi, abordate iniţial de SHERMAN, dare care se încadrează tot în categoria ecuaţiilor integrale de tip Fredholm (v. §2.5.3.2) de speţa a doua. În lurările sale J. HELSING prezintă un algoritm rapid pentru calculul câmpurilor elastostatice în materiale compozite local izotrope cu defecte multiple. Combină ecuaţia integrală dată de Sherman cu o metodă multipol rapidă şi cu o tehnică de cuadratură adecvată. În [H29], HELSING şi JONSON, utilizând o ecuaţie integrală singulară de tip Mushelişvili pentru domenii multiple conexe, rezolvă o placă pătrată cu 4096 găuri şi fisuri. În [H23] rezolvă cazul spaţiului cu o incluziune elastică şi 19 fisuri radiale, pornind tot de o ecuaţie Fredholm de speţa a doua.

b). Formularea problemei

Să presupunem că în planul elastic omogen şi izotrop, raportat la un sistem cartezian de coordonate, există N fisuri drepte orientate arbitrar, de lungimi arbitrare, aflate în puncte arbitrare ale planului (**Fig. 2.5.3.9**).

Ne vom fixa atenţia asupra a două fisuri arbitrare.

Notaţii:

- Coordonatele centrelor fisurilor O_j şi O_k în sistemul de axe global xOy:

$$z_j^o = x_j^o + iy_j^0; \qquad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0 \tag{2.5.3.56}$$

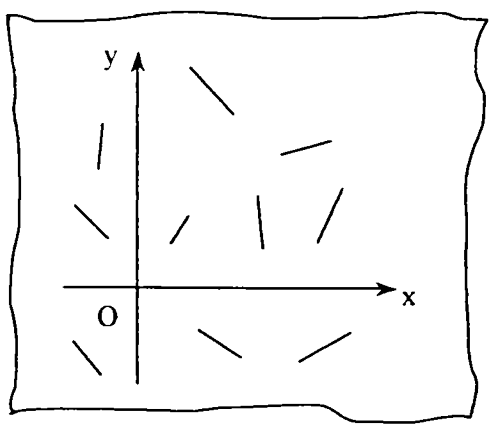


Fig.2.5.3.9

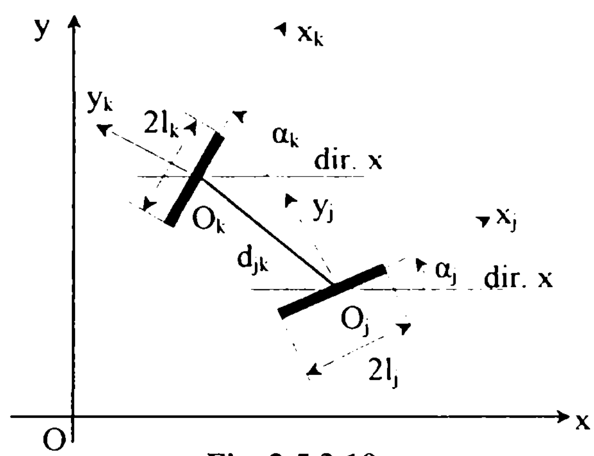


Fig. 2.5.3.10

- lungimea fisurii $2l_j$ $j=1,2,\ldots,k,\ldots N$
- sistemul de coordonate locale: $x_jO_jy_j$ cu axa O_jx_j orientată după direcţia fisurii, cu centrul O_j la mijlocul lungimii fisurii;
- direcţia fisurii determinată de unghiul α_j dintre axa O_jx_j şi axa Ox;
- d_{jk} – distanţa între centrele fisurilor $O_j \rightarrow O_k$

Ipoteze:

- Vom presupune că fiecare fisură este parcursă în sensul pozitiv al axei O_jx_j, astfel încât mărimile ce acţionează pe partea stângă vor purta indicele plus, cele de pe partea dreaptă semnul minus.
- Întocmai ca în subparagraful precedent, vom accepta că pe marginile fisurilor acţionează sarcinile:

$$\sigma_j^{\pm} - i\tau_j^{\pm} = p_j(x_j) \pm q_j(x_j), \qquad |x_j| < l_j; \qquad g_j = 0\ (j = 1,2,\ldots,N) \tag{2.5.3.57}$$

Tensiunile σ_j şi τ_j sunt date în sistemul local de coordonate.

- Presupunem de asemenea că la vârfurile tăieturii sunt date *salturile tensiunilor şi deplasărilor*.

În sistemul de coordonate locale problema a fost rezolvată mai sus, unde s-au stabilit funcţiile de potenţial (2.5.3.37) şi (2.5.3.39), pe care acum le scriem astfel:

$$\Phi(z_j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l_j}^{l_j}\frac{Q_j(t)}{t-z_j}dt$$

$$\Psi(z_j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l_j}^{l_j}\left[\frac{\overline{Q}_j(t)-2i\overline{q}_j(t)}{t-z_j}-\frac{tQ(t)}{(t-z_j)^2}\right]dt \tag{2.5.3.59}$$

unde:

$$z_j=x_j+iy_j;\qquad Q_j(x)=g_j'(x)-i\frac{2q_j(x)}{\chi+1}$$

$$g_j(x)=(u^+-u^-)+i(v^+-v^-)\text{- saltul deplasărilor} \tag{2.5.3.60}$$

$$q_j(x)=\frac{1}{2}\left[(\sigma_y^+-\sigma_y^-)-i(\tau_{xy}^+-\tau_{xy}^-)\right]\text{ - saltul tensiunilor}$$

Toate rezultatele obţinute în continuare se bazează pe o ipoteză fundamentală că funcţiile de potenţial sunt funcţii liniare, şi pentru întregul spaţiu se obţin prin însumare:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\frac{Q_j(t)}{t-z_j}dt \tag{2.5.3.61}$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}e^{-2i\alpha_j}\int_{-l_j}^{l_j}\left[\frac{\overline{Q}_j(t)-2i\overline{q}_j(t)}{t-z_j}-\frac{\overline{T}_je^{i\alpha_j}}{(t-z_j)^2}Q_j(t)\right]dt \tag{2.5.3.62}$$

unde:

$$T_j=te^{i\alpha_j}+z_j^0;\qquad z_j=e^{-i\alpha_j}(z-z_j^0)$$

Să considerăm cazul când condiţiile la limită au forma:

$$(\sigma_k^++\sigma_k^-)-i(\tau_k^++\tau_k^-)=2p_k(x_k),\qquad |x_k|<l_k,\quad k=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.63}$$

Utilizând formulele de transformare la trecerea într-un nou sistem de coordonate (2.5.3.10), (2.5.3.11), scriem potenţialii complecşi în sistemele de coordonate $x_kO_ky_k$ sub forma:

$$\Phi_k(z_k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\frac{Q_j(t)}{t-z_j}dt \tag{2.5.3.64}$$

$$\Psi_k(z_k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\left[\frac{\overline{Q}_j(t)-2i\overline{q}_j(t)}{t-z_j}-\frac{(\overline{T}_j-\overline{z}_k^0)e^{i\alpha_j}}{(t-z_j)^2}Q_j(t)\right]dt \tag{2.5.3.65}$$

unde:

$$z_j=e^{-i\alpha_j}(z_ke^{i\alpha_k}+z_k^0-z_j^0);\quad \alpha_{kj}=\alpha_k-\alpha_j$$

Dacă utilizând formulele (2.5.3.13), vom determina tensiunile pe axa Ox, pe care le vom introduce în condiţiile de graniţă (2.5.3.63) şi vom obţine un sistem de N ecuaţii integrale singulare ca soluţie a problemei puse:

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\left[Q_j(t)K_{kj}(t,x)+\overline{Q}_j(t)L_{kj}(t,x)+\frac{iq_j(t)}{\overline{T}_j-\overline{X}_k}e^{i(\alpha_j-2\alpha_k)}\right]dt=\overline{U}p_n(x),\quad |x|<l_k,\ k=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.66}$$

unde:

$$K_{kj}(t,x)=\frac{e^{i\alpha_j}}{2}\left(\frac{1}{\overline{T}_j-\overline{X}_k}+\frac{e^{-2i\alpha_k}}{\left(\overline{T}_j-\overline{X}_k\right)^2}\right) \tag{2.5.3.67}$$

$$L_{kj}(t,x)=\frac{e^{-i\alpha_j}}{2}\left(\frac{1}{\overline{T}_j-\overline{X}_k}-\frac{T_j-X_k}{\left(\overline{T}_j-\overline{X}_k\right)^2}\cdot e^{-2i\alpha_k}\right) \tag{2.5.3.68}$$

$$X_k=xe^{i\alpha_k}+z_k^0$$

Nucleele (2.5.3.67) şi (2.5.3.68) sistemului de ecuaţii obţinute sunt funcţii regulate cu excepţia cazului $k=j$, când $K_{kj}(t,x)$ devine miez singular Cauchy, iar $L_{kj}=0$. Sistemul (2.5.3.66) se poate scrie în acest caz:

$$\int_{-l_k}^{l_k}\frac{g'_k(t)dt}{t-x}+\sum_{j\neq k}\int_{-l_j}^{l_j}\left[g_j^0(t)K_{kj}(t,\alpha)+\overline{g}'_j(t)L_{kj}(t,\alpha)\right]dt=$$

$$=\pi p_k(x)+\frac{2i}{\chi+1}\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\left\{q_j(t)\left[K_{kj}(t,x)-\frac{\chi+1}{2\left(\overline{T}_k-\overline{X}_k\right)}e^{i(\alpha_j-2\alpha_k)}\right]-\overline{q}_j(t)L_{kj}(t,x)\right\}dt$$

$$|x|<l_k,\qquad k=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.69}$$

Dacă pe marginea fisurii este aplicată o sarcină autoechilibrată, condiţiile de margine vor avea forma:

$$\sigma_j^+-i\tau_j^+=\sigma_j^--i\tau_j^-=p_j(x_j),\qquad |x_j|<l_j,\qquad j=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.70}$$

iar sistemul de ecuaţii integrale va avea o formă mai simplă:

$$\int_{-l_k}^{l_k}\frac{g'_k(t)dt}{t-x}+\sum_{j\neq k}\int_{-l_j}^{l_j}\left[g'_j(t)K_{kj}(t,x)+\overline{g}'_j(t)L_{kj}(t,x)\right]dt=\pi p_k(x)\qquad k=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.71}$$

În cazul fisurilor coliniare: $\alpha_j=0,\ \ y_j^0=0,\ \ j=1,2,\dots,N$, sistemul (2.5.3.66) are forma:

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{-l_j}^{l_j}\frac{R_j(t)dt}{t-x+x_j^0-x_k^0}=\pi p_k\qquad |x|<l_k,\qquad k=1,2,\dots,N \tag{2.5.3.72}$$

unde:

$$R_j(t)=g'_j(x)+i\frac{\chi-1}{\chi+1}q_j(x) \tag{2.5.3.73}$$

Impunând condiţia:

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k'(t)dt = 0 \qquad k = 1,2,\dots,N \tag{2.5.3.74}$$

sistemul (2.5.3.71) devine un sistem de ecuaţii Fredholm de speţa a doua:

$$g_k'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{l_k^2 - x^2}}\left\{-\int_{-l_k}^{l_k} \frac{\sqrt{l_k^2 - t^2}\,p_k(t)}{t - x}dt + \sum_{j \neq k}\int_{-l_j}^{l_j}\left[g_j'(t)M_{kj}(t,x) + \bar{g}_j'(t)N_{kj}(t,\alpha)\right]dt\right\}$$

$$|x| < l_k, \quad k = 1,2,\dots,N \tag{2.5.3.75}$$

unde:

$$M_{kj}(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}\,K_{kj}(t,\xi)}{\xi - x}d\xi \tag{2.5.3.76}$$

$$N_{kj}(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}\,L_{kj}(t,\xi)}{\xi - x}d\xi \tag{2.5.3.77}$$

Expresiile (2.5.3.76) şi (2.5.3.77) sunt integrale singulare cu miezul de tip Cauchy, care pot fi calculate în formă închisă; pentru a efectua integrarea le scriem mai dezvoltat:

$$M_{kj}(t,x) = -\frac{e^{i\alpha_{jk}}}{2\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}}{\xi - x}\left(\frac{1}{\xi - T_{kj}} + \frac{1}{\xi - \bar{T}_{kj}}\right)d\xi \tag{2.5.3.78}$$

$$N_{kj}(t,x) = \frac{e^{i\alpha_{kj}}}{2\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}}{\xi - x}\left(-\frac{1}{\xi - T_{kj}} + \frac{\xi - \bar{T}_{kj}}{(\xi - \bar{T}_{kj})^2}\right)d\xi \tag{2.5.3.79}$$

unde:

$$T_{kj} = e^{i\alpha_{kj}}\left[t - d_{kj}e^{i(\alpha_j - \beta_{kj})}\right] \tag{2.5.3.80}$$

$$d_{kj} = e^{i\beta_{kj}} = z_k^0 - z_j^0 \tag{2.5.3.81}$$

Utilizăm soluţiile unor integrale existente în literatură.

$$\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}}{(\xi - x)(\xi - T_{kj})}d\xi = -\pi\left(1 + \frac{\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}}{x - T_{kj}}\right) \tag{2.5.3.82}$$

$$\int_{-l_k}^{l_k}\frac{\sqrt{l_k^2 - \xi^2}\left(\xi - \bar{T}_{kj}\right)}{(\xi - x)(\xi - T_{kj})^2}d\xi = \pi\left[\frac{\left(\bar{T}_{kj} - T_{kj}\right)\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}}{(x - T_{kj})^2} + \frac{l_k^2 - 2T_{kj}^2 + T_{kj}\bar{T}_{kj}}{(x - T_{kj})\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}} - \right] \quad (\dots\dots)$$

Cu aceste rezultate, mărimile (2.5.3.76) şi (2.5.3.77) devin:

$$M_{kj}(t,x) = \frac{e^{i\alpha_{jk}}}{2}\left(2 + \frac{\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}}{x - T_{kj}} - \frac{\sqrt{\bar{T}_{kj}^2 - l_k^2}}{x - \bar{T}_{kj}}\right) \tag{2.5.3.84}$$

$$N_{kj}(t,x) = \frac{1}{2} e^{i\alpha_{kj}} \frac{\overline{T}_{kj} - T_{kj}}{x - T_{kj}} \left(\frac{T_{kj}}{\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}} + \frac{\sqrt{T_{kj}^2 - l_k^2}}{x - T_{kj}} \right) \qquad (2.5.3.85)$$

În felul acesta problema planului infinit având N fisuri drepte, străpunse, situate arbitrar, care nu se întretaie, se reduce la sistemul de ecuaţii integrale singulare (2.5.3.71), cu condiţiile de graniţă (2.5.3.70); la rândul său acest siStem se reduce la sitemul de ecuaţii integrale de tip Fredholm de speţa a doua (2.5.3.75).

În concluzie, dacă se cunosc funcţiile $g_k'(x)$, întocmai ca în cazul unei singure fisuri, prin trecere la limită, putem calcula coeficienţii de intensitate a tensiunilor la vârful oricărei fisuri:

$$K_{1k}^{\pm} - iK_{2k}^{\pm} = \mp \lim_{x_k \to \pm l_k} \left[\sqrt{\frac{l_k^2 - x_k^2}{l_k}}\, g_k'(x_k) \right] \qquad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.5.3.86)$$

2.5.3.4. Planul infinit cu două fisuri rectilinii egale

Pentru a verifica exactitatea celor prezentate până aici, mă voi opri asupra cazului particular al planului elastic omogen şi izotrop, care prezintă două fisuri rectilinii, coliniare şi egale; planul este solicitat la infinit de sarcina p uniform distribuită având direcţia perpendiculară pe linia fisurilor, aleasă drept axa x. Evident că problema se găseşte rezolvată în literatură, dar toate lucrările cercetate de mine utilizează metoda funcţiilor de variabilă complexă şi pleacă de la ecuaţiile Kolosov-Mushelişvili (2.5.3.4) şi (2.5.3.12), (2.5.3.13), (2.5.3.14). Soluţii finale unanim acceptate sunt date în cunoscutul HANDBOOK al lui TADA, PARIS, IRWIN [T1], rezultate pe care le prezint în copie în **Fig. 2.5.3.12** şi **Fig. 2.5.3.13**. Se vede din aceste pagini că bibliografia de referinţă este reprezentată de lucrările lui BARENBLATT 1962, ERDOGAN 1962, SIH 1914 – lucrări pe care din păcate eu nu le-am avut la dispoziţie. Dar ele se găsesc ca şi cazuri particulare în cadrul unei teorii generale prezentate în monografiile [P12], [S6], [L49], de care nu mă mai ocup. În aceste condiţii voi prezenta alte variante şi voi încerca o soluţie nouă, prin sup
de efecte.

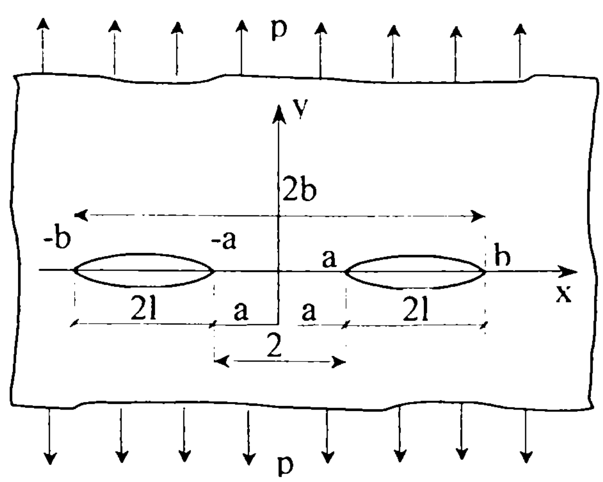


Fig. 2.5.3.11

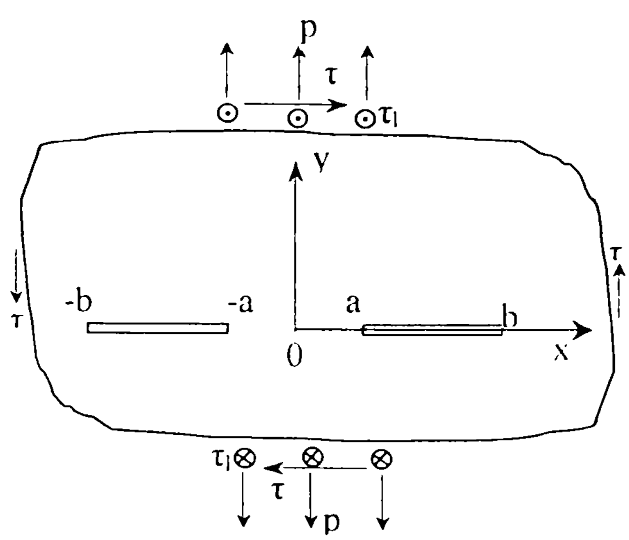


Fig. 2.5.3.12

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}_{\pm a} = \begin{Bmatrix} p \\ \tau \\ \tau_l \end{Bmatrix} \sqrt{\pi a} \dfrac{b^2 \dfrac{E(k)}{K(k)} - a^2}{a\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \\ \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}_{\pm b} = \begin{Bmatrix} p \\ \tau \\ \tau_l \end{Bmatrix} \sqrt{\pi b} \dfrac{1}{k} \left\{ 1 - \dfrac{E(k)}{K(k)} \right\} \end{cases}$$

unde

$$k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

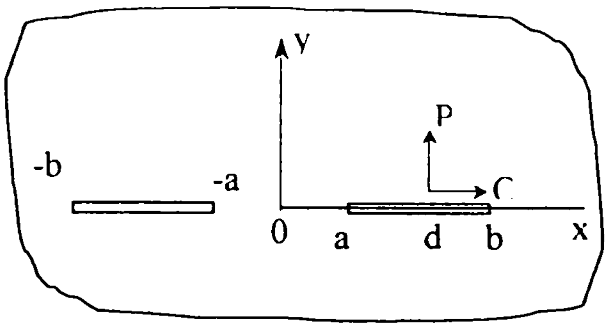


Fig. 2.5.3.13

$$K_{I_{\pm b}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi b}\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ P\sqrt{d^2 - a^2} \sqrt{\frac{b \pm d}{b \mp d}} + \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \left(1 \pm \frac{\pi}{2K(k)} \right) Qb \mp \frac{Pb}{K(k)} \left[E(k)F(\theta,k) - K(k)E(\theta,k) \right] \right\}$$

$$K_{II_{\pm b}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi b}\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ Q\sqrt{d^2 - a^2} \sqrt{\frac{b \pm d}{b \mp d}} + \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \left(1 \pm \frac{\pi}{2K(k)} \right) Pb \mp \frac{Qb}{K(k)} \left[E(k)F(\theta,k) - K(k)E(\theta,k) \right] \right\}$$

$$K_{I_{\pm a}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ P\sqrt{b^2 - d^2} \sqrt{\frac{d \pm a}{d \mp a}} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) Q \left(a \pm \frac{\pi}{2K(k)} b \right) \pm \frac{Pb}{K(k)} \left[E(k)F(\theta,k) - K(k)E(\theta,k) \right] \right\}$$

$$K_{II_{\pm a}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ Q\sqrt{b^2 - d^2} \sqrt{\frac{d \pm a}{d \mp a}} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) P \left(a \pm \frac{\pi}{2K(k)} b \right) \pm \frac{Qb}{K(k)} \left[E(k)F(\theta,k) - K(k)E(\theta,k) \right] \right\}$$

unde $k = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}}$, $\theta = \sqrt{\dfrac{b^2 - d^2}{b^2 - a^2}}$

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad , \quad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$F(\theta,k)=\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad , \quad E(\theta,k)=\int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

A. Soluţia lui Y. Z. CHEN [C35]/ 1997

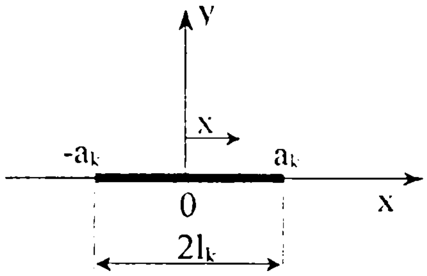


Fig. 2.5.3.14

Este în mare parte similară cu ceea ce am prezentat în § 2.5.3 reducând problema la o ecuaţie hipersingulară de tipul (2.5.3.71) cu mici diferenţe de notaţie şi de încărcare; vom nota cu M numărul fisurilor.

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-a_k}^{a_k}\frac{g_k(t)dt}{(t-x_k)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{M}{}^{*}\int_{-a_j}^{a_j}\left[M_{jk}(x_j,x_k)g_j(x_j)+L_{jk}(x_j,x_k)\overline{g_j(x_j)}\right]ds_j=$$

$$=N_k(x_k)+iT_k(x_k)\,;\quad |x_k|<a_k\ ;\ k=1,2,...,M \tag{2.5.3.87}$$

unde:

$$M_{jk}(x_j,x_k)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(x_j-T_{jk}\right)^2}+e^{2i(\alpha_j-\alpha_k)}\cdot\frac{1}{\left(x_j-\overline{T}_{jk}\right)^2}\right] \tag{2.5.3.88}$$

$$L_{jk}(x_j,x_k)=\frac{1}{2}\left[\left(1+e^{2i(\alpha_j-\alpha_k)}\right)\frac{1}{\left(x_j-\overline{T}_{jk}\right)^2}+e^{2i(\alpha_j-\alpha_k)}\cdot\frac{2(x_j-T_{jk})}{\left(x_j-\overline{T}_{jk}\right)^3}\right] \tag{2.5.3.89}$$

$$T_{jk}=e^{-\alpha_j}\left(z_k^0-z_j^0+x_k e^{i\alpha_k}\right) \tag{2.5.3.90}$$

$\sum^{*}$ - notează faptul că termenul corespunzător lui $j=k$ trebuie exclus din însumare;

v.p. – integrala trebuie luată în valoarea principală în sensul lui Cauchy

$N_k(x_k)+iT_k(x_k)$ - reprezintă *tracţiunile date* pe marginea fisurii cu numărul k

$g_k(t)$ - funcţie care poate fi exprimată sub forma:

$$g_k(t)=\sqrt{a_k^2-t^2}\,G_k(t) \quad , \quad |t|<a_k\ ,\ k=1,2,...,M \tag{2.5.3.91}$$

După ce ecuaţia (2.5.3.87) a fost rezolvată, factorii de intensitate a tensiunilor la cele două vârfuri (sau extremităţi) ale fisurii cu numărul j vor fi:

$$\begin{aligned}(K_1-iK_2)_j&=\sqrt{\pi a_j}\,G(-a_j)\\(K_1-iK_2)_j&=\sqrt{\pi a_j}\,G(a_j)\end{aligned} \qquad j=1,2,\ldots,M \tag{2.5.3.92}$$

Aspectul dificil al problemei este legat de rezolvarea ecuaţiei (2.5.3.87) pentru care autorul propune o soluţie de cuadratură numerică cu utilizarea polinoamelor Cebâşev [B2], [B31], [R11].

$$U_n(t) = \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sin(\arccos t)} \qquad |t| < 1 \tag{2.5.3.93}$$

(v.[R11] / p.410)

Se va introduce o nouă funcţie:

$$h(s) = \sqrt{h^2 - s^2}\, H(s) \quad , \quad |s| < a \tag{2.5.3.94}$$

Funcţia H(s) poate fi aproximată cu polinoame Cebâşev astfel:

$$H(s) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n U_n(s/a) \quad , \quad |s| < a \tag{2.5.3.95}$$

unde:

$$c_n = \frac{2}{N+2} \sum_{k=1}^{N+1} \sin\left(\frac{k\pi}{N+2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)k\pi}{N+2}\right) H(s_k) \tag{2.5.3.96}$$

$$s_k = a \cos\frac{k\pi}{N+2} \tag{2.5.3.97}$$

Vom folosi acum următoarea regulă de cuadratură:

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-a}^{a} \frac{h(s)ds}{(s-t)^2} = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - s^2}\, H(s)ds}{(s-t)^2} = \sum_{k=1}^{N+1} W_k(t) H(s_k) \tag{2.5.3.98}$$

unde:

$$W_k(t) = \sum \frac{2(n+1)}{N+2} \sin\frac{k\pi}{N+2} \sin\left[\frac{(n+1)k\pi}{N+2} U_n(t/a)\right] \tag{2.5.3.99}$$

Chiar şi pentru integrala obişnuită, regulată, vom da o regulă de cuadratură:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} h(s)\, L(s,t)\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - s^2}\, H(s)\, L(s,t)\, ds = \sum_{k=1}^{N+1} V_k(t) H(s_k) \tag{2.5.3.100}$$

unde:

$$\mathrm{V_k(t)} = \frac{\mathrm{a}^2 - s_k^2}{N+2} L(s_k, t) \tag{2.5.3.101}$$

$L(s,t)$ – o funcţie ce depinde de argumentele s, t.

Utilizând ecuaţiile (2.5.3.98) şi (2.5.3.100) ecuaţia hipersingulară (2.5.3.87) se poate rezolva numeric.

* * *

B. Soluţia lui Y. KONISHI [K50]/ 1972

KONISHI rezolvă aceeşi problemă a două fisuri coplanare în planul infinit omogen şi izotrop transversal, utilizând formularea în deplasări a problemei plane. Pentru generalitate ecuaţiile constitutive se scriu sub forma:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & 0\\ c_{12} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & c_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2.5.3.102}$$

unde c_{ij} sunt constante elastice.

În absenţa forţelor de masă, ecuaţiile de echilibru exprimate numai prin deplasări, au forma:

$$\begin{cases} c_{11}u_{,xx}+c_{66}u_{,yy}+(c_{12}+c_{66})\mathrm{v}_{,xy}=0\\ c_{66}\mathrm{v}_{,xx}+c_{22}\mathrm{v}_{,yy}+(c_{12}+c_{66})u_{,xy}=0\end{cases} \tag{2.5.3.103}$$

Utilizând transformata Fourier, expresiile deplasărilor vor fi:

$$\bar{u}(\xi,y)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\,e^{ix\xi}\,dx \quad\Leftrightarrow\quad u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\bar{u}(\xi,y)\,e^{-ix\xi}\,d\xi$$

Ecuaţiile (2.5.3.103) se scriu în urma aplicării transformatei Fourier:

$$\begin{cases} -c_{11}\xi^2\bar{u}+c_{66}\bar{u}_{,yy}-i\xi(c_{12}+c_{66})\bar{\mathrm{v}}_{,y}=0\\ -c_{66}\xi^2\bar{\mathrm{v}}+c_{22}\bar{\mathrm{v}}_{,yy}-i\xi(c_{12}+c_{66})\bar{u}_{,y}=0\end{cases} \tag{2.5.3.104}$$

Eliminând componenta $\bar{u}$ între aceste ecuaţii, se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul patru:

$$\bar{\mathrm{v}}_{,yyyy}-2B_1\bar{\mathrm{v}}_{,yy}+B_2\bar{\mathrm{v}}=0 \tag{2.5.3.105}$$

unde:

$$\begin{aligned} 2B_1&=\frac{1}{c_{22}c_{66}}\left[c_{66}^2+c_{11}c_{22}-(c_{12}+c_{66})^2\right]\xi^2\\ B_2&=\frac{c_{11}}{c_{22}}\xi^4\end{aligned} \tag{2.5.3.106}$$

Vom căuta pentru ecuaţia (2.5.3.105) o soluţie de forma:

$$\bar{\mathrm{v}}\cong e^{\lambda y} \tag{2.5.3.107}$$

Înlocuind (2.5.3.107) în (2.5.3.105) se obţine o ecuaţie bipătrată:

$$\lambda^4-2B_1\lambda^2+B_2=0 \tag{2.5.3.108}$$

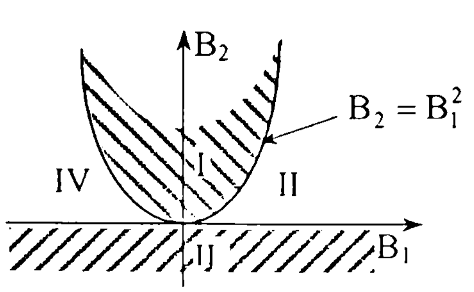


Fig. 2.5.3.15

Studiul amănunţit al acestei ecuaţii în funcţie de raportul valoric între B_1 şi B_2, împarte planul în patru regiuni prin dreapta $B_2=0$ şi prin parabola $B_2=B_1^2$; în fiecare domeniu valoarea proprie λ, rezultată ca soluţie a ecuaţiei (2.5.3.108) este dată ca una din relaţiile (2.5.3.109):

$$I.\quad \lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{B_2}+B_1\right)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{B_2}-B_1\right)}$$

$$II.\quad \lambda=\pm\sqrt{B_1\pm\sqrt{B_1^2-B_2}}$$

$$III.\quad \lambda = \pm\sqrt{B_1 + \sqrt{B_1^2 - B_2}} \pm i\sqrt{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - B_2}}$$
$$IV.\quad \lambda = \pm i\sqrt{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - B_2}}$$

(2.5.3.109)

Din aceste relaţii se vede clar că λ este o funcţie de două variabile, pe care pentru uşurinţa scrierii le vom nota cu α şi β. Utilizând transformata Fourier inversă, vom exprima tensiunile şi deplasările cu ajutorul lui $\overline{v}$.

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{c_{12}+c_{66}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(c_{11}c_{66}\xi^2\int\overline{v}dy\right)-(c_{22}c_{11}-c_{12}^2-c_{66}c_{12})\overline{v}_{,y}\right]\cdot e^{-ix\xi}d\xi$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(c_{12}\xi^2\int\overline{v}dy\right)+c_{22}\overline{v}_{,y}\right]\cdot e^{-ix\xi}d\xi$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi}\left(c_{22}\overline{v}_{,yy}+c_{12}\xi^2\overline{v}\right)\cdot e^{-ix\xi}d\xi \qquad (2.5.3.110)$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{c_{12}+c_{66}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{\xi}\left[\left(c_{66}\xi^2\int\overline{v}dy\right)-c_{22}\overline{v}_{,y}\right]\cdot e^{-ix\xi}d\xi$$

Pentru cazul prezentat în **Fig. 2.5.3.11** este convenabil să alegem pentru $\overline{v}$, expresia:

$$\overline{v} = A(\xi)e^{-\alpha y} + B(\xi)e^{-\beta y} \qquad (2.5.3.111)$$

unde "constantele" A şi B sunt funcţii de ξ şi vor fi determinate din condiţiile de frontieră care pot fi de diverse forme. Varianta prezentată de KONISHI este:

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x,0) = -E\,p_0(x) &&,\quad a<|x|<b \\ &v(x,0) = 0 &&,\quad |x|<a,\ |x|>b \\ &\tau_{xy}(x,0) = 0 &&,\quad \forall x\in\mathbf{R} \end{aligned} \qquad (2.5.3.112)$$

Ţinând cont de (2.5.3.110) şi (2.5.3.111) aceste condiţii devin:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha}\left(c_{12}\xi^2+c_{22}\alpha^2\right)A+\frac{1}{\beta}\left(c_{12}\xi^2+c_{22}\beta^2\right)B\right]\cdot\cos\xi x\,dx =$$
$$= E\,p_0(x)\quad,\quad a<x<b \qquad (2.5.3.113)$$
$$\int_0^{\infty}(A+B)\cos\xi x\,d\xi = 0\quad,\quad 0\le x<a\,,\ x>b$$

unde:

$$A(\xi) = -\frac{c_{22}\beta^2+c_{12}\xi^2}{c_{22}\alpha^2+c_{12}\xi^2}B(\xi) \qquad (2.5.3.114)$$

Fără a mai detalia calculele, pentru $p_0(x) = p_0$ = const. se obţine:

$$\phi(t^2)=\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}}\cdot\frac{E}{K}p_0\frac{(t^2-b^2)(E/F)}{\sqrt{(t^2-a^2)(b^2-t^2)}} \tag{2.5.3.115}$$

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi}\int_a^b \phi(t^2)\sin t\xi\,dt=\frac{c_{22}(\alpha^2-\beta^2)}{c_{22}\alpha^2+c_{12}\xi^2}\beta(\xi) \tag{2.5.3.116}$$

$$K=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta}\left(c_{22}\alpha^2+c_{12}\xi^2\right)\left(c_{22}\beta^2+c_{12}\xi^2\right)\frac{1}{\xi c_{22}} \tag{2.5.3.117}$$

unde **E**, **F** sunt integrale eliptice de ordinul doi şi unu (v.[R11]).

* * *

C. O soluţie nouă

Urmărind numeroasele lucrări dedicate acestei probleme, unele prezentate în exemplele de mai sus, voi formula în continuare o soluţie nouă, sugerată de o metodologie simplă, de suprapunere de efecte, pornind de la probleme cunoscute, idee întâlnită din ce în ce mai frecvent în literatură.

Raţionamentul de bază este următorul:

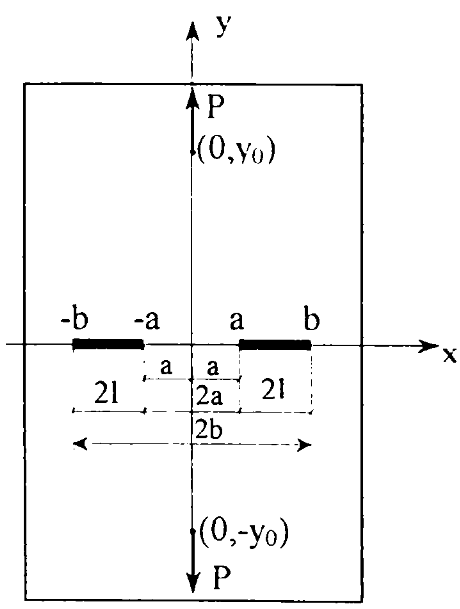


Fig. 2.5.3.15

- Voi considera planul încărcat numai cu forţele de tracţiune P, considerând că nu există fisuri, şi voi calcula după metoda lui Musheli\u015fvili care sunt tensiunile care apar pe o linie imaginară care urmează traseul fisurilor reale (vezi **Fig. 2.5.3.15**). Problema este deci cunoscută şi rezolvată.
- Voi considera din nou planul dar fără solicitări, care are două fisuri (ca în **Fig. 2.5.3.15**), de data acesta încărcate cu un sistem de tensiuni pe cele două margini, egale şi de semn contrar cu cele determinate în primul caz; şi acest caz este cunoscut şi a fost prezentat mai sus, la § 2.5.3.2.

Prin suprapunere de efecte se obţine starea finală de tensiune în vecinătatea fisurilor. Voi studia cazul prezentat în **Fig. 2.5.3.15** când planul este încărcat cu două forţe concentrate care-l solicită la tracţiune, deoarece pentru acest caz am obţinut şi rezultate experimentale.

În primul caz funcţiile potenţial ale lui Musheli\u015fvili sunt:

$$\Phi(z)=\frac{y_0P}{\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{z^2+y_0^2} \tag{2.5.3.118}$$

$$\Psi'(z)=\frac{\chi y_0P}{\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{z^2+y_0^2}-\frac{y_0P}{\pi(1+\chi)}\cdot\frac{z^2-y_0^2}{z^2+y_0^2} \tag{2.5.3.119}$$

unde:

$z = x + iy$

χ = constanta lui Musheli\u015fvili

$$\chi=\begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{pentru starea plană de tensiune}\\ 3-4\nu & \text{pentru starea plană de deformatie}\end{cases}$$

Din cunoscutele ecuaţii ale lui Kolosov-Musheli\c{s}vili rezultă:

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{y_0P}{\pi(1+\chi)}\left[\frac{\chi-1}{x^2+y^2}+\frac{4y_0^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \tag{2.5.3.120}$$

Pentru determinarea tensiunilor $\sigma_y^{(2)}(x,0)$ din cea de a doua situaţie de încărcare, când pe marginile fisurilor acţionează $\sigma_y^{(1)}(x,0)$, se folosesc tot formulele lui Mushelişvili.

Dacă se notează:

$$\begin{aligned}&Q(z)=\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}\\&P_n(z)=c_0z^2+c_1z+c_2\end{aligned} \tag{2.5.3.121}$$

atunci funcţiile complexe de potenţial se pot scrie:

$$\begin{aligned}&\Phi(z)=\frac{P_n(z)}{Q(z)}+\Phi_0(z)\\&\Psi(z)=\Phi(z)+z\Phi'(z)\end{aligned} \tag{2.5.3.122}$$

unde:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi iQ(z)}\int_L\frac{Q(x)\cdot\sigma_y^{(1)}(x,0)}{x-z}dx \tag{2.5.3.123}$$

Constanta c_0 se va determina din condiţia că la infinit tensiunile sunt nule. Rezultă $c_0 = 0$.
Constantele c_1 şi c_2 se deduc din sistemul de ecuaţii:

$$2(\chi+1)\int_{L_k}\frac{P_n(x)}{Q(x)}dx+\chi\int_{L_k}\left[\Phi^+(x)-\Phi^-(x)\right]dx=0 \tag{2.5.3.124}$$

Introducând (2.5.3.120) în (2.5.3.123) se obţine:

$$\begin{aligned}\Phi_0(z)=\frac{y_0P}{2\pi(1+\chi)}&\left\{(\chi-1)\left[\frac{1}{z^2+y_0^2}-\frac{1}{Q(z)}\left(-\frac{\Delta}{z^2+y_0^2}-1\right)\right]+\frac{4y_0^2}{(z^2+y_0^2)^2}+\right.\\&\left.+\frac{2}{(z^2+y_0^2)Q(z)}\left[\Delta_1+\frac{\Delta(z^2-y_0^2)}{z^2+y_0^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.5.3.125}$$

$$\Delta=\sqrt{(y_0^2+a^2)(y_0^2+b^2)}\quad,\quad\Delta_1=\frac{y_0^4-a^2b^2}{\Delta} \tag{2.5.3.126}$$

Facem în (2.5.3.125) y = 0 şi introducem rezultatul în (2.5.3.124); obţinem un sistem de două ecuaţii pentru determinarea lui c_1 şi c_2.

$$\begin{aligned}&c_1\int_a^b\frac{\chi\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}+c_2\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}=-\frac{1}{2}\int_a^b\left[\Phi^+(x)-\Phi^-(x)\right]dx\\&-c_1\int_a^b\frac{\chi\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}+c_2\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}=-\frac{1}{2}\int_a^b\left[\Phi^+(x)-\Phi^-(x)\right]dx\end{aligned} \tag{2.5.3.127}$$

Scăzând cele două ecuaţii, obţinem:

$$2c_1\int_a^b\frac{\chi\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}=0\quad\Rightarrow\quad c_1=0 \tag{2.5.3.128}$$

Din (2.5.3.127) în care punem $c = 0$ obţinem pe c:

$$c_2 = \frac{y_0 P}{2\pi(1+\chi)} c_2^{\bullet}$$

$$c_2^{\bullet} = \frac{1}{\mathbf{F}}\left\{(\chi - 1)\left[\frac{\Delta}{h}\mathbf{\Pi} + F\right] - \frac{2\delta}{h}\mathbf{\Pi} + \right.$$

$$\left. + 4\Delta y_0^2 \frac{\left[q^2 + 2qh\left(1+k^2\right) + 3k^2h^2\right]\frac{1}{h}\mathbf{\Pi} - hk^2\mathbf{F} - q(\mathbf{F} - \mathbf{E})}{2h(q+h)\left(q + hk^2\right)}\right\} \quad (2.5.3.129)$$

unde:

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad ; \quad q = -(b^2 - a^2) \qquad h = b^2 + y_0^2$$
$$\Delta = \sqrt{(y_0^2 + a^2)(y_0^2 + b^2)} \quad ; \quad \delta = \frac{2y_0^4 + (a^2 + b^2)y_0^2}{\Delta} \quad (2.5.3.130)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}; k\right) \quad ; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}; k\right) \quad ; \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{q}{h}; k\right) \quad (2.5.3.131)$$

sunt integrale eliptice complete de speţa întâi, respectiv de speţa a doua şi a treia.

Din combinarea formulelor precedente putem obţine funcţia $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{y_0 P}{2\pi(1+\chi)}\left\{(\chi - 1)\left[\frac{1}{z^2 + y_0^2} + \frac{1}{Q(z)}\left(\frac{\Delta}{z^2 + y_0^2} + 1\right)\right] + \frac{4y_0^2}{(z^2 + y_0^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q(z)}\left[\frac{2\delta}{z^2 + y_0^2} - \frac{4\Delta y_0^2}{(z^2 + y_0^2)^2} + c_2^{\bullet}\right]\right\} \quad (2.5.3.132)$$

Rezultă acum expresia tensiunii σ_y pe axa x, pentru valori ale lui x care se află în afara fisurilor:

$$\sigma_y^{(2)}(x,0) = \frac{y_0 P}{2\pi(1+\chi)}\left\{(\chi - 1)\left[\frac{1}{x^2 + y_0^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}\left(\frac{\Delta}{x^2 + y_0^2} + 1\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{4y_0^2}{(x^2 + y_0^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}\left(\frac{2\delta}{x^2 + y_0^2} - \frac{4\Delta y_0^2}{(x^2 + y_0^2)^2} + c_2^{\bullet}\right)\right\} \quad (2.5.3.133)$$

Dau în continuare soluţia numerică, obţinută cu programul „Mathematica", pentru cazul concret al unei plăci cu două fisuri ca cele din **Fig. 2.5.3.15**, având:
a=10mm, b=30mm, P=998 N, y_0=95 mm, $\nu = 0.33$ (este cazul verificat şi fotoelastic în capitolul 5). Prin program s-a reprezentat grafic variaţia lui $\sigma_y^{(2)}$ pe axa x în afara fisurilor.

Se observă că la vârful fisurilor tensiunea este infinită, scăzând spre marginile plăcii la 12.62 N/mm^2 şi între fisuri, la x =0, la 63.4855 N/mm^2.

Programul cu reprezentările grafice aferente (**Fig. 2.5.3.16**, **Fig. 2.5.3.17** şi **Fig. 2.5.3.18**) sunt pe paginile următoare:

In[1]:= $$c_2 = \frac{1}{\mathrm{EF}}\left((\chi - 1)\left(\frac{\Delta}{h}\,\mathrm{EPI} + \mathrm{EF}\right) - \frac{2\,\delta}{h}\,\mathrm{EPI} + 4\,\Delta\,y_0\text{^}2\,\frac{(q\text{^}2 + 2\,q\,h\,(1+m) + 3\,m\,h\text{^}2)\,\frac{1}{h}\,\mathrm{EPI} - h\,m\,\mathrm{EF} - q\,(\mathrm{EF} - \mathrm{EE})}{2\,h\,(q+h)\,(q+h\,m)}\right)$$

Out[1]= $$\frac{\frac{2\left(-\mathrm{EF}\,h\,m - (\mathrm{EF}-\mathrm{FE})\,q + \frac{\mathrm{EPI}\,(3\,m\,h^2 + 2\,(m+1)\,q\,h + q^2)}{h}\right)\Delta\,y_0^2}{h\,(h+q)\,(h\,m+q)} - \frac{2\,\mathrm{EPI}\,\delta}{h} + \left(\mathrm{EF} + \frac{\mathrm{EPI}\,\Delta}{h}\right)(\chi - 1)}{\mathrm{EF}}$$

In[2]:= $$\mathrm{SigmaY}[x\_] := \frac{y_0\,P}{2\,\pi\,(1+\chi)}\left((\chi - 1)\left(\frac{1}{x\text{^}2 + y_0\text{^}2} + \frac{\frac{\Delta}{x\text{^}2+y_0\text{^}2} + 1}{\sqrt{(x\text{^}2 - a\text{^}2)\,(x\text{^}2 - b\text{^}2)}}\right) + \frac{4\,y_0\text{^}2}{(x\text{^}2 + y_0\text{^}2)\text{^}2} + \frac{1}{\sqrt{(x\text{^}2 - a\text{^}2)\,(x\text{^}2 - b\text{^}2)}}\left(\frac{2\,\delta}{x\text{^}2 + y_0\text{^}2} - \frac{4\,\Delta\,y_0\text{^}2}{(x\text{^}2 + y_0\text{^}2)\text{^}2} + c_2\right)\right)$$

In[3]:= $$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

Out[3]= $$\frac{3 - \nu}{\nu + 1}$$

In[4]:= $$\delta = \frac{2\,y_0\text{^}4 + (a\text{^}2 + b\text{^}2)\,y_0\text{^}2}{\Delta}$$

Out[4]= $$\frac{2\,y_0^4 + (a^2 + b^2)\,y_0^2}{\Delta}$$

In[5]:= $$\Delta = \sqrt{(y_0\text{^}2 + a\text{^}2)\,(y_0\text{^}2 + b\text{^}2)}$$

Out[5]= $$\sqrt{(a^2 + y_0^2)\,(b^2 + y_0^2)}$$

In[6]:= $$n = \frac{q}{h}$$

Out[6]= $$\frac{q}{h}$$

In[7]:= $$h = b\text{^}2 + y_0\text{^}2$$

Out[7]= $$b^2 + y_0^2$$

In[8]:= $$q = -(b\text{^}2 - a\text{^}2)$$

Out[8]= $$a^2 - b^2$$

In[9]:= $$m = \frac{b\text{^}2 - a\text{^}2}{b\text{^}2}$$

Out[9]= $$\frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

In[10]:= $P = 998$

Out[10]= 998

In[11]:= $a = 10$

Out[11]= 10

In[12]:= **b = 30**

Out[12]= 30

In[13]:= **y_0 = 95**

Out[13]= 95

In[14]:= **ν = 0.33**

Out[14]= 0.33

In[15]:= **m**

Out[15]= $\frac{8}{9}$

In[16]:= **EF = EllipticF$\left[\frac{\pi}{2}, m\right]$ // N**

Out[16]= 2.52863

In[17]:= **EE = EllipticE[m] // N**

Out[17]= 1.11374

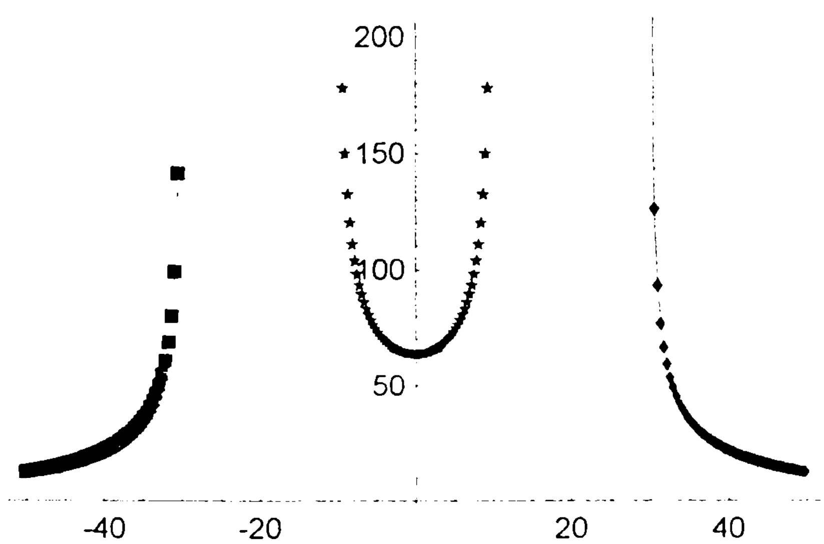
In[18]:= **EPI = EllipticPi[n, m] // N**

Out[18]= 2.40825

In[19]:= **<< Graphics`MultipleListPlot`**

In[20]:=
```
(list1 = Table[{x, SigmaY[x]},
        {x, 30.1, 50, 0.4}];
 list2 = Table[{x, SigmaY[x]},
        {x, -9.9, 9.9, 0.3}];
list3 = Table[{x, SigmaY[x]},
        {x, -50, -30.1, 0.4}];)
```

In[21]:= **MultipleListPlot[list1, list2, list3, PlotJoined -> True]**



Out[21]= - Graphics -

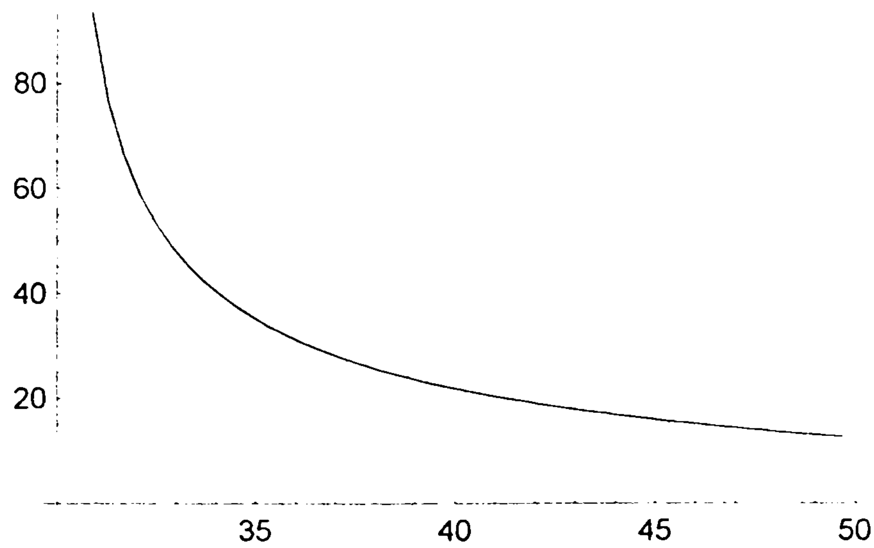
Fig. 2.5.3.16

```
In[22]:= list1 = Table[{x, SigmaY[x]},
           {x, 30.1, 50, 0.4}]
```

Out[22]=

30.1	283.623
30.5	126.048
30.9	93.0345
31.3	76.5803
31.7	66.2227
32.1	58.9092
32.5	53.3768
32.9	48.995
33.3	45.4086
33.7	42.4001
34.1	39.8276
34.5	37.594
34.9	35.6304
35.3	33.886
35.7	32.3228
36.1	30.9113
36.5	29.6286
36.9	28.4562
37.3	27.3793
37.7	26.3858
38.1	25.4654
38.5	24.6098
38.9	23.8119
39.3	23.0655
39.7	22.3655
40.1	21.7073
40.5	21.0871
40.9	20.5015
41.3	19.9473
41.7	19.4221
42.1	18.9235
42.5	18.4493
42.9	17.9977
43.3	17.567
43.7	17.1558
44.1	16.7627
44.5	16.3863
44.9	16.0257
45.3	15.6798
45.7	15.3477
46.1	15.0285
46.5	14.7215
46.9	14.4259
47.3	14.141
47.7	13.8664
48.1	13.6013
48.5	13.3454
48.9	13.098
49.3	12.8588
49.7	12.6274

```
In[23]:= ListPlot[list1, PlotJoined -> True]
```



Out[23]= - Graphics -

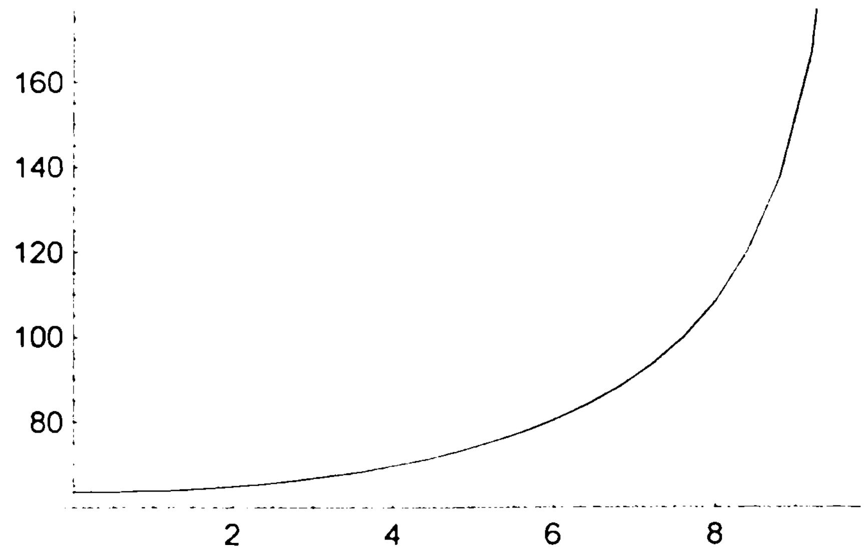
Fig. 2.5.3.17

```
In[24]:= list2 = Table[{x, SigmaY[ x]},
            {x, 0., 9.99, 0.4}]
```

Out[24]=

0.	63.4855
0.4	63.5404
0.8	63.706
1.2	63.9845
1.6	64.3801
2.	64.8986
2.4	65.548
2.8	66.3387
3.2	67.2841
3.6	68.4014
4.	69.7122
4.4	71.2442
4.8	73.0333
5.2	75.1259
5.6	77.5837
6.	80.4899
6.4	83.96
6.8	88.1591
7.2	93.3327
7.6	99.8653
8.	108.399
8.4	120.112
8.8	137.467
9.2	166.849
9.6	233.678

In[25]:= **ListPlot[list2, PlotJoined -> True]**

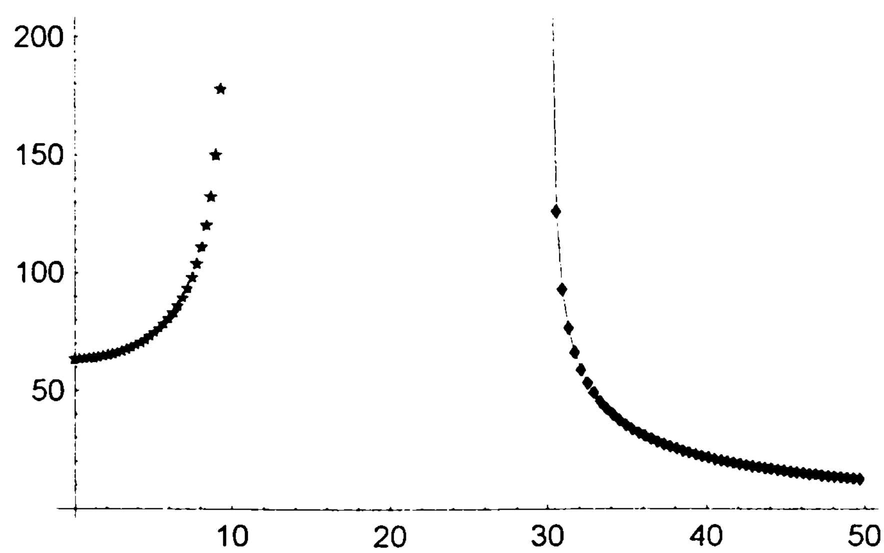


Out[25]= - Graphics -

Fig. 2.5.3.18.

In[26]:= **(list1 = Table[{x, SigmaY[x]},**
{x, 30.1, 50, 0.4}];
list2 = Table[{x, SigmaY[x]},
{x, 0, 9.9, 0.3}]);

In[27]:= **MultipleListPlot[list1, list2, PlotJoined -> True]**



Out[27]= - Graphics -

Fig. 2.5.3.19

CAPITOLUL 3

CONTRIBUŢII PRIVIND FORMULAREA ŞI APLICAREA METODELOR NUMERICE LA CALCULUL CÂMPURILOR DE TENSIUNI ŞI DEPLASĂRI ÎN SOLIDE ELASTICE CU DEFECTE

§ 3.1. GENERALITĂŢI

Cea mai mare parte din problemele formulate de Mecanica Solidului Deformabil (MSD) nu se poate rezolva pe cale analitică utilizând binecunoscutele tehnici de determinare a soluţiilor exacte: separarea variabilelor, transformările integrale etc. (v.cap.1 şi 2). De aceea problemele de interes practic care sunt formulate în general pe domenii cu o geometrie complicată, pe elemente de rezistenţă cu **defecte interioare existente obiectiv**, nu se pot rezolva decât în mod aproximativ cu ajutorul metodelor numerice. Evident că formidabila dezvoltare a calculatoarelor, a vitezei şi posibilităţilor lor de calcul a făcut ca opinia privind soluţia aproximativă numerică să se schimbe deoarece, pe de o parte, erorile pot fi reduse până la valori insignifiante, iar pe de altă parte, existenţa programelor mari de firmă fac abordabilă orice problemă.

După cum se ştie metodele numerice cele mai utilizate sunt:

- Metoda diferenţelor finite (M.D.F.)
- Metoda elementelor finite (M.E.F.)
- Metoda elementelor de frontieră (M.E.Fr.)

M.D.F., numită şi *metoda reţelelor*, bazată pe ideea înlocuirii derivatelor prin diferenţe finite (ceea ce însemană de fapt utilizarea unor serii Taylor trunchiate) este cea mai simplă şi cea mai veche metodă de rezolvare numerică aproximativă a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale. Precizia de aproximare a soluţiei **conţine** prin valorile sale în nodurile unei reţele de discretizare a domeniului de câmp, depinde de forma şi pasul reţelei, de expresia de discretizare a derivatelor parţiale prin diferenţe finite, de modul de aproximare a condiţilor la limită şi de procedeele de calcul utilizate. Deoarece nu o vom folosi în cadrul acestei teze, nu ne mai ocupăm de ea. Detalii se pot găsi în lucrările [B57], [M38], [S46] etc.

M.E.F. este actualmente cea mai utilizată metodă pentru rezolvarea unei game largi de probleme din domeniul (M.S.D.). Este tot o metodă de discetizare a mediului continuu în elemente foarte mici numite *elemente finite* pe care funcţia necunoscută care guvernează fenomenul fizic studiat poate fi aproximată în fel şi chip. Ecuaţia diferenţială va fi satisfăcută într-un sens global – *„în medie"* – pe fiecare element de diviziune. Deoarece o voi folosi pe parcursul lucrării, atât pentru verificarea şi validarea unor rezultate teoretice cât şi în cuplare cu M.E.Fr., îi voi acorda un paragraf special (§3.2).

În esenţă cele două metode (M.D.F. şi M.E.F.) sunt de fapt nişte cazuri particulare ale **metodei reziduurilor ponderate**. Ambele metode reduc mediul continuu cu un număr infinit de grade de libertate la o mulţime finită, aproximând sistemul de ecuaţii diferenţiale de domeniu, pe fiecare element de discretizare, cu legi mai simple, alegând ca necunoscute fundamentale ale problemei valorile acesteia în noduri. Problema se reduce în final la rezolvarea unor sisteme liniare de ecuaţii algebrice, astfel elaborate încât să cuprindă şi condiţiile de limită impuse (date).

M.E.Fr. – deşi istoric a apărut înaintea M.E.F., bazele matematice fiind formulate încă din 1886 odată cu stabilirea identităţii integrale a lui Somigliana şi cu apariţia teoriei ecuaţiilor integrale Voltera (1896) şi Fredholm (1902), dezvoltarea şi mai ales aplicarea M.E.Fr. este de dată mult mai recentă, începând cu anul 1970.

În esenţă şi aceasta este o metodă de rezolvare aproximativă a problemelor de limită care se bazează pe transformarea ecuaţiei diferenţiale de domeniu într-o ecuaţie integrală pe frontiera domeniului, utilizând ca **funcţie pondere** o soluţie a ecuaţiei omogene asociate sau **o soluţie fundamentală** a ecuaţiei date. Aceasta este o dificultate intimă a metodei care retrânge sfera de aplicabilitate la operatori diferenţiali cu coeficienţi constanţi. Odată obţinută ecuaţia integrală de frntieră, aceasta se rezolvă de obicei numeric, ceea ce necesită discretizarea doar a frontierei, reducând în felul acesta cu o unitate dimensiunea problemei şi micşorând numărul ecuaţiilor sistemului algebric rezultant şi numărul datelor de intrare şi ieşire.

Deoarece cea mai mare parte a preocupărilor mele în cadrul acestui capitol vor fi legate de aplicarea M.E.Fr., voi rezerva acestei probleme un paragraf special (§ 3.3).

§ 3.2. METODA ELEMENTELOR FINITE (M.E.F.)

3.2.1. Generalităţi

Deoarece în literatura ştiinţifică românească s-au publicat foarte multe monografii de certă valoare consacrate M.E.F., dintre care amintesc: C.AVRAM [A44]/1984, C.BRĂTIANU [B71]/1983, T.PETRILA [P34]/1987, C.PACOSTE [P1]/1988, I.N.CONSTANTINESCU [C58] [C57]/1989, D.GÂRBEA [G7]/1990, M.GAFIŢEANU [G1]/1987, D.STEMATIU [S64]/1988, M.BLUMENFELD [B54]/1995, N.FAUR [F3]/2002, N.G.OLTEANU [O6]/1978, nu voi face decât o sumară prezentare de principiu a acestei metode. Cu atât mai mult cu cât la noi în ţară există numeroase programe profesionale de element finit (programe de firmă) cu posibilităţi enorme de calcul, cum ar fi: COSMOS/M, ANSYS, ADINA, NASTRAN-PATRAN, ABAQUS, SAMCEF etc, şi am convingerea că, de unul singur, nu se mai poate face nimic în acest domeniu în care lucrează mari firme specializate pe probleme de soft. Mai mult, la noi în ţară există din 1992 Societatea de Inginerie Asistată de Calculator (S.I.A.C.*), care organizează din doi în doi ani conferinţe naţionale cu participare internaţională specializate pe teoria şi practica M.E.F., sub numele ELFIN (în 2003 are loc ELFIN 6 la Timişoara - unde şi eu am înscrise în program două lucrări). Pe lângă toate acestea se găsesc în bibliotecile din România cele mai celebre monografii din lume privind M.E.F., cum ar fi: ZIENKIEWICS O.C. [Z13], K.J.BATHE [B21]/1982, DANGLA P. [D3]/1990, GALLANGER H.P. [G4]/1975, H.D. NORRIE [N21]/1978, N.SUKUMAR [S75]/1999 etc.

În aceste condiţii M.E.F. s-a bucurat de o cunoaştere profundă şi de o larga aplicare aproape în toate domeniile (la noi în ţară) – de aceea am limitat la maxim informaţiile cu caracter general.

Intenţia mea iniţială a fost să mă ocup numai de metoda elementului de frontieră (M.E..Fr.), o metodă care intră în actualitate datorită unor avantaje certe faţă de M.E.F. A fost însă nevoie să folosesc şi M.E.F (drept pentru care am scris acest paragraf) din mai multe motive:

- a trebuit să verific pe „problemele test" unele rezultate obţinute cu M.E.Fr.;
- există numeroase situaţii când cuplarea M.E.Fr. cu M.E.F. conduce la rezultate mult mai bune şi cu un efort de calcul mult mai mic; această metodologie devine absolut necesară în condiţiile unei probleme extinse pe regiuni cu proprietăţi mecanice diferite. De altfel, cercetările actuale de vârf se ocupă de cuprinderea celor două metode într-o teorie unitară
- marea majoritate a rezultatelor teoretice obţinute până acum în mecanica ruperii au fost verificate cu M.E.F.; o analiză interesantă a acestei probleme este făcută de L. MARŞAVINA [M15]/1988.
- Utilizarea M.E.F. în mecanica ruperii este de dată relativ recentă (după 1980), aplicaţiile şi programele de firmă fiind foarte rare la noi în ţară (vezi §3.3).

* * *

Schema generală a M.E.F. apare pentru prima dată într-o lucrare a lui COURANT în 1943 referitoare la soluţionarea problemei torsiunii barelor necirculare. Prima etapă importantă a fost realizată de ARGYRIS care a dat formularea matricială a metodei deplasărilor în calculul structurilor din bare. Noţiunea de discretizare a mediului continuu prin elemente finite este introdusă de TURNER, CLOUGH, MARTIN şi TOPP (P1), care în 1996 soluţionează ecuaţiile problemei plane a teoriei elasticităţii utilizând elemente finite triunghiulare şi dreptunghiulare. Ulterior au urmat perfecţionări atât în ceea ce priveşte formularea matricială cât şi a unor noi variante în diverse sisteme de coordonate etc. Sinteza cea mai completă este făcută în cartea lui ZIENKIEWICS, cea mai cunoscută lucrare şi cea mai citită în literatura de specialitate

3.2.2. Prezentarea generală a metodei

M.E.F. este în esenţă un procedeu de rezolvare aproximativă a problemelor de câmp, adică de determinarea într-un domeniu dat a uneia sau a mai multor funcţii necunoscute caracteristice naturii fizice a câmpului cercetat (de exemplu câmpurile tensiunilor, deformaţiilor si deplasărilor în M.S.D.) atunci când nu putem rezolva analitic ecuaţiile diferenţiale şi/sau integro-diferenţiale care guvernează fenomenul.

Ideea fundamentală o constituie înlocuirea corpului deformabil printr-un sistem structural articulat ale cărui subregiuni sunt numite **elemente finite**; ele au în principiu dimensiuni mici şi forme regulate şi sunt legate între ele articulat în diverse puncte numite **noduri** sau **puncte nodale**. Dar, pentru a exista **echivalenţă** – *din punct de vedere al stării de deformaţie şi tensiune* – între corpul real şi structura articulată înlocuitoare formată din elemente finite, este necesară formularea unor condiţii de continuitate, de obicei în deplasări, care să asigure această echivalenţă cel puţin în nodurile reţelei.

* Autoarea tezei este membră S.I.A.C.

Pentru rezolvarea acestor probleme M.E.F. foloseşte de cele mai multe ori un **principiu variaţional**. Potrivit calculului variaţional rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale într-un anumit domeniu şi în anumite condiţii la limită, este **echivalentă** cu *minimizarea în acel domeniu a unei mărimi funcţionale corespunzătoare ecuaţiilor diferenţiale şi condiţiilor la limită date*. Specific M.E.F. este faptul că minimizarea se face pe subdomeniile reprezentate de elementele finite. Acest lucru permite ca funcţiile necunoscute căutate, continue pe întreg domeniul, să fie aproximate printr-un set de funcţii convenţionale numite **funcţii coordonate** sau **triale**, liniar independente, *continue numai pe cuprinsul elementelor finite*. Atunci, ca urmare a minimizării funcţionalei în toate elementele finite şi a asamblării pe tot domeniul a efectelor obţinute, rezultă un sistem de ecuaţii algebrice prin a cărui rezolvare se determină valorile funcţiilor căutate în noduri. Pentru a răspunde acestui raţionament, elementului finit trebuie să i se asigure nişte proprietăţi formulate în mod adecvat, astfel încât el să aibă o funcţionalitate dependentă evident de restricţiile impuse corpului real din care face parte. Formularea acestor proprietăţi ale elementelor finite ca o parte a unui întreg constituie punctul de plecare în rezolvarea problemei. Aceste proprietăţi se bazează pe:

- cunoaşterea precisă a caracteristicilor geometrice şi mecanice a fiecărui element în parte;
- evaluarea printr-un calcul separat a forţelor nodale pentru fiecare element în parte.

3.2.2.1. Precizări despre forţele nodale

Sub această denumire intră două categorii distincte de forţe, şi anume:

- **Forţe concentrate preluate de către noduri** şi transmise elementului; ele reprezintă acţiunea restului corpului asupra elementului finit considerat. Se prezintă de obicei sub forma unui vector coloană $\{F\}_e$.
- **Forţe transmise în noduri** de către elementul însuşi, fiind cauzate de sarcinile existente pe element; ele se reprezintă prin matricea $\{F\}_p$.

Admiţând o comportare elastică a elementului, ecuaţia de echilibru a acestuia se scrie sub forma:

$$\{F\}_e + \{F\}_p + \{F\}_T + \{F\}_{\sigma_0} = [K]_e \{\delta\}_e \tag{3.2.1}$$

S-au mai introdus notaţiile:

$\{F\}_T$ - matricea forţelor nodale cauzate de variaţii de temperatură şi de inexactităţile de montaj;

$\{F\}_{\sigma_0}$ - matricea forţelor nodale datorate tensiunilor remanente şi altor cauze;

$\{K\}_e$ - matricea de rigiditate a elementului;

$\{\delta\}_e$ - vectorul deplasărilor nodale ale elementului.

Prin asamblarea tuturor elementelor finite, ecuaţia (3.2.1) devine:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\{F\}_{e,n} + \{F\}_{p,n} + \{F\}_{T,n} + \{F\}_{\sigma_0 n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{m}[K]_{e,n}\right)\{\delta\} \tag{3.2.2}$$

$$\Leftrightarrow \{F\} = [K]\cdot\{\delta\} \tag{3.2.3}$$

notaţiile fiind evidente.

La scrierea ecuaţiei precedente am presupus în mod tacit că toate matricile au fost extinse la dimensiunea structurii întregi, proces în care termenii au fost rearanjaţi în aşa fel încât să corespundă cu termenii din matricea $\{\delta\}$ a deplasărilor nodale.

În rezolvarea problemelor din M.S.D. cu M.E.F. se pot urma în principiu trei căi:

- **prima cale** este cea schiţată până aici, cunoscută sub numele de **metoda deplasărilor**, deoarece drept necunoscute principale ale problemei sunt alese **deplasările nodale**. În această metodă sunt utilizate trei concepte fundamentale:
  - deplasările nodale;
  - forţele nodale;
  - matricea de rigiditate a elementului.
- **a doua cale** alege drept necunoscute principale **tensiunile** şi în acest caz se vorbeşte despre o metodă de echilibru, cunoscută şi sub numele de **metoda forţelor**.
- **a treia cale** este evident o combinaţie a primelor două, numită **metoda mixtă**.

3.2.2.2. Etapele de rezolvare a unei probleme cu ajutorul M.E.F.

În principiu la rezolvarea unei probleme de câmp cu M.E.F. se parcurg o serie de etape specifice:

Etapa I.: ***Împărţirea domeniului de analiză în elemente finite***

În această etapă analistul alege **tipul sau tipurile de elemente finite** adecvate problemei de rezolvat, apoi împarte structura în elemente finite. Această operaţie, care se numeşte „***discretizare***" poate fi făcută şi cu ajutorul calculatorului. Alegerea tipului de element finit are mare importanţă pentru necesarul de memorie internă, efortul de calcul impus calculatorului şi pentru calitatea rezultatelor.

De exemplu, trebuie să determinăm funcţia necunoscută $\phi(x,y)$ definită pe un domeniu plan D (v. **Fig. 3.2.1. a)**),

$$\phi(x,y): D \to \mathbf{R}$$

Pe acest domeniu funcţia necunoscută descrie o suprafaţă curbă în spaţiu. Domeniul de definiţie plan se împarte în elemente finite plane, în cazul desenat – „*patrulatere*". Pe fiecare element finit, funcţia necunoscută ϕ este aproximată printr-o funcţie $\tilde{\phi}$ numită **funcţie de aproximare** sau **funcţie de interpolare**, care de obicei este o **funcţie polinominală**, cea mai convenabilă din punct de vedere calculatoriu.

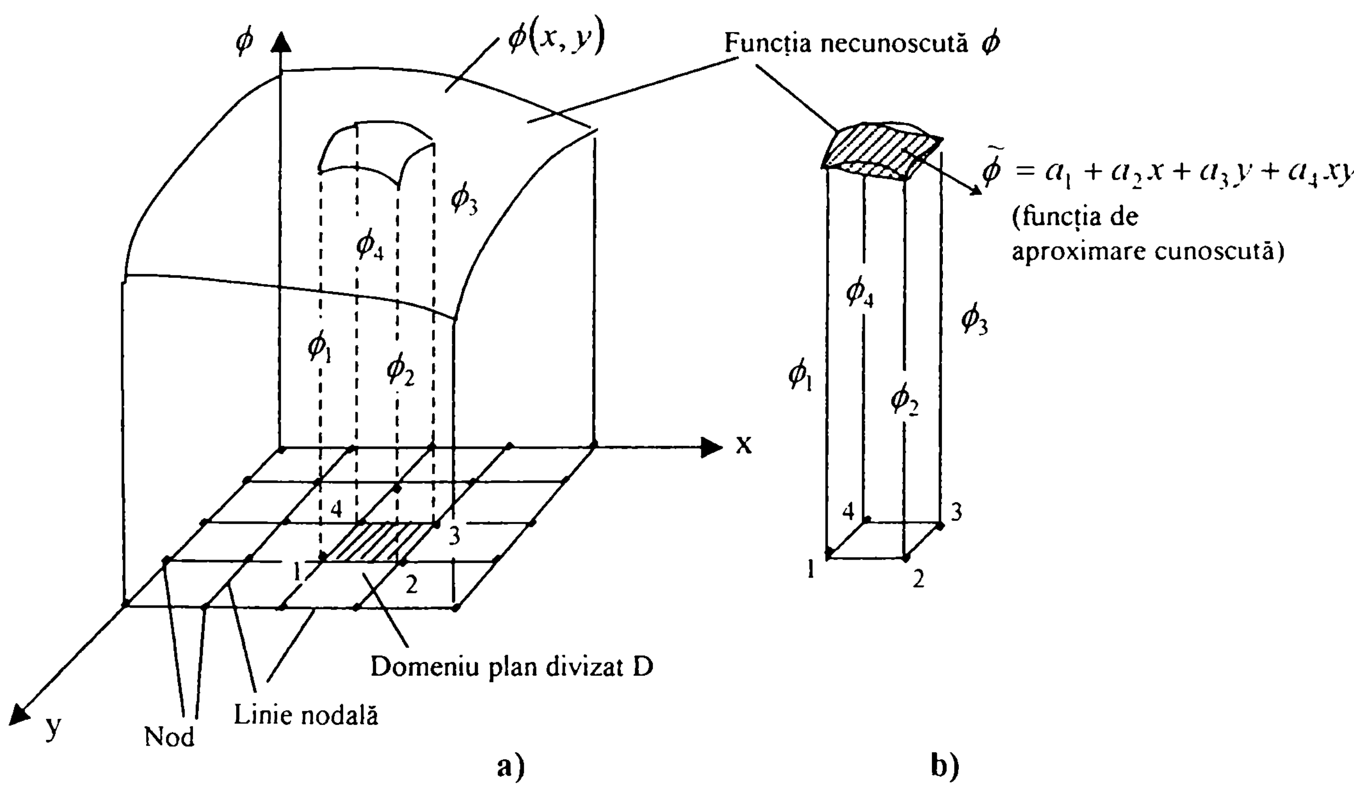


Fig. 3.2.1

De exemplu, în cazul analizat funcţia de interpolare ar putea avea forma (desenul din **Fig.1 b)** este grăitor în privinţa metodei de raţionament):

$$\tilde{\phi} = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \tag{3.2.4}$$

în care a_i sunt coeficienţi necunoscuţi care se determină impunând condiţia ca în nodurile elementului finit funcţia să capete valorile din noduri, notate cu $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.

$$\begin{cases} \phi_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 \\ \phi_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 \\ \phi_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 \\ \phi_4 = a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 \end{cases} \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4 \tag{3.2.5}$$

Deci în acest fel funcţia de aproximare se poate scrie sub forma:

$$\widetilde{\phi} = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4 = [N_1\ N_2\ N_3\ N_4]\cdot\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix} = [N]\{\phi_e\} \qquad (3.2.6)$$

în care:

- N_i se numesc **funcţii de formă** iar $[N]$ matricea funcţiilor de formă;

- Vectorul $\{\phi\}_e$ se numeşte **vectorul funcţiilor nodale** şi cuprinde valorile *necunoscute* ale funcţiei în noduri, care devin **necunoscutele fundamentale ale problemei**.

Dacă pe acelaşi domeniu plan D avem definite mai multe funcţii necunoscute, atunci pentru fiecare din ele se scriu ecuaţii de forma de mai sus; aceste funcţii necunoscute se numesc şi **grade de libertate** şi dacă ele sunt, de exemplu, în număr de trei, se spune că fiecare nod are trei grade de libertate; elementul finit are atunci 3x4=12 grade de libertate.

Etapa II.: ***Constituirea ecuaţiilor elementelor finite***

Proprietăţile fizice şi comportarea mediului în cuprinsul elementului este descrisă de ecuaţiile finite, denumite şi **ecuaţii elementale**; numărul acestor ecuaţii este egal cu numărul gradelor de libertate pe element şi se stabileşte cu o metodă variaţională (de exemplu metoda Rayleigh – Ritz) obţinându-se un sistem de ecuaţii de forma:

$$[K]_e\{\phi\}_e = \{f\}_e \qquad (3.2.7)$$

în care:

$[K]_e$ - este o matrice a caracteristicilor fizico-geometrice ale materialului elementului finit. Ea se numeşte „**matricea de rigiditate**", preluând o denumire din mecanica structurilor;

$\{\phi\}_e$ - vectorul funcţiilor nodale necunoscute pe element;

$\{f\}_e$ - vectorul încărcărilor mecanice, termice etc. pe elementul finit considerat.

Programele de calcul alcătuiesc astfel de sisteme de ecuaţii pentru fiecare element finit în care a fost divizată structura.

Etapa III.: ***Asamblarea ecuaţiilor elementale***

Pentru aceasta se impune ca în nodurile *comune elementelor*, funçţia sau funcţiile necunoscute să aibă aceiaşi valoare. Asamblarea ecuaţiilor constă în asamblarea matricilor de rigiditate $[K]_e$ ale elementelor finite în aşa-numita matrice de rigiditate a structurii, $[K]_{nxn}$, şi a vectorului încărcării pe elemente $\{f\}_e$ în vectorul încărcării pe toată structura $\{F\}$.

Se obţine un sistem algebric liniar:

$$\underbrace{[K]}_{n\times n}\cdot\underbrace{\{\phi\}}_{n\times 1} = \underbrace{\{F\}}_{n\times 1} \qquad (3.2.8)$$

în care:

$[K]_{n\times n}$ - se numeşte şi matricea coeficienţilor, în care intervin şi caracteristicile fizico-geometrice ale câmpului studiat; ea este o matrice pătrată, pozitiv definită şi rară sau slab populară, ceeace constituie un avantaj enorm, deoarece poate fi transcrisă într-o matrice de tip bandă.

$\{\phi\}_{n\times 1}$ - matricea coloană a valorilor necunoscute;

$\{F\}_{n\times 1}$ - matricea coloană a termenilor liberi, care conţine *informaţii referitoare la funcţiile de sursă elementale*, precum şi la condiţiile la limită neomogene.

Am subînţeles că în scopul asigurării convergenţei soluţiei aproximative spre soluţia reală a problemei de câmp, pe măsură ce se micşorează talia elementelor finite şi se sporeşte numărul lor în domeniul de câmp, funcţiile de interpolare trebuie să îndeplinească două condiţii fundamentale:

a). La frontiera comună a două elemente vecine, funcția necunoscută și toate derivatele sale parțiale trebuie să fie contunui; aceasta constituie **condiția de compatibilitate**. De obicei se satisface numai o condiție de compatibilitate în **clasa C" de continuitate**, adică se asigură la granițele interelementale numai continuitatea funcției, nu și a derivatelor.

b). În interiorul fiecărui element funcția necunoscută și derivatele sale trebuie să fie de asemenea continui; aceasta este **condiția de completitudine**.

3.2.3. Bazele teoretice ale analizei stării de tensiune prin M.E.F.

Pentru a face o prezentare cât mai clară, dar și elementară, voi prezenta sumar numai **elementul finit triunghiular** pentru o stare plană de solicitare.

Se consideră o structură plană oarecare (placă plană) aflată în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe date, și al cărui mod de rezemare este cunoscut. Vom alege drept element finit așa-numitul **element finit triunghiular**, adică vom diviza structura în triunghiuri, care se constituie drept elementele finite ale acesteia. Altfel spus vom trasa pe suprafața plăcii considerate o rețea de triunghiuri de diverse dimensiuni impuse de geometria plăcii; cu cât această rețea este mai fină, cu atât rezultatele sunt mai exacte.

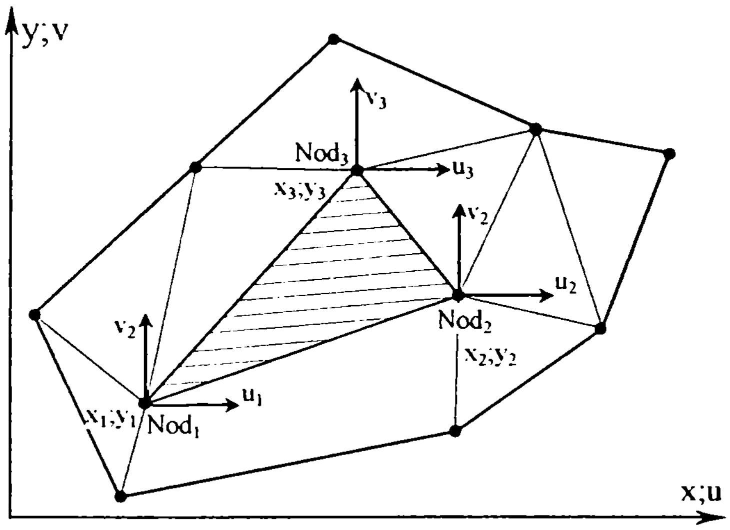


Fig. 3.2.2

În **Fig. 3.2.2** am arătat o astfel de structură plană divizată în triunghiuri. Am ales un sistem de referință inițial, **fix**, (x,y) în care se cunosc coordonatele fiecărui nod (x_i, y_i), $i=1,2 \ldots ,n$.

Pe de altă parte fiecare nod are două grade de libertate sau două **deplasări nodale** (u_i,v_i), astfel încât **fiecare element finit triunghiular are șase grade de libertate**.

Matricea deplasărilor $\{\delta\}$ pentru un element finit arbitrar este alcătuită din necunoscutele problemei **(deplasările nodale)** și se reprezintă sub forma unui vector coloană:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{3.2.9}$$

în care cu litera u convenim să notăm deplasările în direcția axei x iar cu v deplasările în direcția axei y.

În acest moment al raționamentului apare prima idee interesantă a metodei: presupunând cunoscute deplasările nodale trebuie să exprimăm în funcție de acestea câmpul $\{f\}$ al deplasărilor oricărui punct aparținând elementului finit! Există numeroase soluții pentru aceasta; considerând însă elementul de dimensiuni mici, cea mai convenabilă formulare este cea liniară, adică vom presupune că deplasările oricărui punct din interiorul elementului sunt funcții liniare de coordonatele punctului:

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v = a_4 + a_5 x + a_6 y \end{cases} \tag{3.2.10}$$

În transcrierea matriceală **deplasarea unui punct arbitrar al elementului, de componente u și v**, este:

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a_1+a_2x+a_3y \\ a_4+a_5x+a_6y \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}=[N]\cdot\{\delta\} \qquad (3.2.11)$$

unde am **corelat deplasările unui punct curent din interiorul elementului cu deplasările nodurilor**.

În această scriere mărimile „a" sunt niște constante momentan necunoscute, iar cu $[N]$ am notat o matrice care **definește natura câmpului deplasărilor**; aceste elemente urmează să le explicităm în continuare.

Matricea $[N]$ are 2 linii (câte deplasări are punctul arbitrar din câmp) și 6 coloane (câte grade de libertate are elementul). Aceste matrici se numesc **funcții de formă**; ele trebuiesc astfel alese încât să existe o continuitate a deplasărilor între elemente. Rezultă că prin matricea $[N]$ se face legătura între deplasările nodale ale elementului – presupuse cunoscute – și deplasările unui punct arbitrar din interiorul elementului.

Valorile constantelor $a_1, a_2, \ldots, a_6$ le vom determina impunând condiții la limită, adică deplasările câmpului trebuie să fie egale cu deplasările nodale **când punctul arbitrar se află în nod**, adică pentru

$$\begin{cases} x = x_i \\ y = y_i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} u = u_i \\ v = v_i \end{vmatrix} \qquad (3.2.12)$$

Rezultă că aceste mărimi se află prin rezolvarea următorului sistem liniar de șase ecuații cu șase necunoscute:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (3.2.13)$$

Se introduce notația:

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad (3.2.14)$$

unde $\det[A]=2A$ (A fiind aria triunghiului 1-2-3).

Expresiile deplasărilor nodale se pot scrie condensat sub forma:

$$\begin{cases} \{u_e\}=[A]\cdot\{a_u\} \\ \{v_e\}=[A]\cdot\{a_v\} \end{cases} \qquad (3.2.15)$$

Obținem coeficienții căutați a_i prin inversiunea relațiilor (3.2.15):

$$\begin{cases} \{a_u\}=[A]^{-1}\cdot\{u_e\} \\ \{a_v\}=[A]^{-1}\cdot\{v_e\} \end{cases} \qquad (3.2.16)$$

După ce se calculează A^{-1}, cu metode elementare cunoscute, se rearanjează aceste rezultate parțiale într-o formă matricială globală dictată de corespondența dintre matricea coeficienților $\{a\}$ și matricea deplasărilor $\{\delta\}$.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

(3.2.17)

$$\{a\} = \frac{1}{|A|} \cdot [D] \cdot \{\delta\} \tag{3.2.18}$$

Dacă relaţia (3.2.18) o înmulţim la stânga în ambii membrii cu matricea $\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$, obţinem matricea $[N]$, adică:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot [D] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Deci

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot [D] \tag{3.2.19}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\} \tag{3.2.20}$$

Funcţiile $[N]$ pentru diferite tipuri de elemente şi formulări ale proprietăţilor acestora, au rol cheie în analiza tensiunilor prin elemente finite. Acestea se numesc „**funcţii de modelare**" definind fie modelul ales pentru câmpul deplasărilor, fie geometria elementului adoptat, fie atât câmpul deplasărilor cât şi geometria elementului în cazul opţiunii pentru aşa-numitele ***elemente finite izoparametrice***.

* * *

În cazul problemei bidimensionale de care ne ocupăm, deformaţiile specifice sunt date de relaţiile geometrice cunoscute din teoria elasticităţii:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \text{Dar } \begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y \\ v = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_x = a_2; \quad \varepsilon_y = a_6; \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5 \end{array}\right\} \tag{3.2.21}$$

Se poate observa că deformaţiile specifice sunt independente de valorile constantelor a_1 şi a_4, cât şi de coordonatele locului în care se calculează (nu depind de x şi y), ceeace justifică denumirea dată uneori acestui tip de element finit de „**element cu deformaţii constante**".

Trecând la o scrie matricială vom avea:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ \mathrm{v}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot[N]\cdot\begin{Bmatrix}u_1\\ \mathrm{v}_1\\ u_2\\ \mathrm{v}_2\\ u_3\\ \mathrm{v}_3\end{Bmatrix}=[B]\cdot\{\delta\} \tag{3.2.22}$$

Am definit astfel o matrice foarte importantă:

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot[N]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\cdot[D]$$

sau efectuând calculele mai amănunțit:

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0\\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1\\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2\end{bmatrix} \tag{3.2.23}$$

unde cu A s-a notat aria triunghiului 1-2-3.

Matricea $[B]$, denumită **„matricea de deformații-deplasări"** are un rol cheie în evaluarea matricii de rigiditate a elementului.

Ecuațiile fizice:

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right)\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right)\\ \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)\\ \sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)\\ \tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}\end{cases} \tag{3.2.24}$$

Relațiile (3.2.24) dacă le transcriem matricial vom avea:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

sau condensat:

$$\{\sigma\}=[\mathcal{E}]\cdot\{\varepsilon\} \tag{3.2.25}$$

unde cu $[\mathcal{E}]$ am notat așa-numita **matrice de elasticitate**:

$$[\mathcal{E}]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{3.2.26}$$

în care: E – modulul de elasticitate longitudinal al materialului (modulul lui Young);

ν - coeficientul lui Poisson;

Se poate acum observa că tensiunile se pot de asemenea exprima cu ajutorul matricei $[B]$ folosind (3.2.22):

$$\{\sigma\} = [E]\cdot\{\varepsilon\} = [E]\cdot[B]\cdot\{\delta\} \tag{3.2.27}$$

Valorile deplasărilor nodale $\{\delta\}$ care intră în expresiile deformațiilor specifice (3.2.22) și respectiv în ale tensiunilor (3.2.27) se calculează cu relația (3.2.9), adică:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\cdot\{R\} \tag{3.2.28}$$

Întrucât matricea de rigiditate structurală $[K]$ reprezintă o suprapunere a matricilor de rigiditate $[k]_e$ a elementelor, în cele ce urmează ne vom referi la matricea $[k]_e$ și respectiv la forțele din nodurile elementului $\{F\}_e$.

Expresia matricii de rigiditate a elementului $[k]_e$ o vom obține pornind de la principiul conservării energiei, considerând că elementului i se asociază deplasări nodale virtuale $d\{\delta\}_e$. În acest caz lucrul mecanic al forțelor nodale corespunzătoare este:

$$dL_e = \left(d\{\delta\}_e\right)^T\cdot\{F\}_e \tag{3.2.29}$$

Lucrul mecanic specific al forțelor interioare (sau energia specifică de deformație) va fi de forma:

$$dU_S = \left(d\{\varepsilon\}\right)^T\cdot\{\sigma\} \tag{3.2.30}$$

în care s-a considerat că elementului i se aplică doar sarcini concentrate în noduri și că nu există sarcini distribuite, deformații inițiale sau tensiuni remanente. Expresia (3.2.30) se transformă ținând cont de (3.2.22) și (3.2.27), astfel:

$$dU_S = \left([B]\cdot d\{\delta\}_e\right)^T\cdot[E]\cdot[B]\cdot\{\delta\}_e \tag{3.2.31}$$

care pentru întregul volum al elementului devine:

$$U_d = \int_{(V)}\left(d\{\delta\}_e\right)^T\cdot[B]^T\cdot[E]\cdot[B]\cdot\{\delta\}_e\cdot dV \tag{3.2.32}$$

Din egalitatea lucrului mecanic al forțelor nodale cu energia de deformație rezultă:

$$\left(d\{\delta\}_e\right)^T\cdot\{F\}_e = \left(d\{\delta\}_e\right)^T\cdot\left(\int_{(V)}[B]^T\cdot[E]\cdot[B]\cdot dV\right)\{\delta\}_e \tag{3.2.33}$$

de unde:

$$\{F\}_e = [k]_e\cdot\{\delta\}_e \text{, în care } \boxed{[k]_e = \int_{(V)}[B]^T\cdot[E]\cdot[B]dV} \tag{3.2.34}$$

Pentru generalizarea relației (3.2.34), se consideră că pe element acționează sarcini distribuite p, ale căror valori reduse în noduri sunt date de:

$$\{p\} = \{p_1\ \ p_2\ \ p_3\} \tag{3.2.35}$$

și că elementul este supus unor deformații termice inițiale:

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha T\quad \alpha T\quad 0\} \tag{3.2.36}$$

în care α este coeficientul de dilatare termică liniară.

Incluzând și eventualele tensiuni remanente inițiale $\{\sigma_0\}$, expresia generală a tensiunilor din relația (3.2.30) are forma:

$$\{\sigma\} = [E]\cdot\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\} \tag{3.2.37}$$

Cu aceste precizări, relația (3.2.34) devine:

$$U_d = \left(d\{\delta\}_e\right)^T \left(\left(\int_{(V)} [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot dV \right) \{\delta\}_e - \int_{(V)} [B]^T [E] \cdot \{\varepsilon_0\} dV + \int_{(V)} [B]^T \cdot \{\sigma_0\} dV - \int_{(V)} [N]^T \cdot \{p\} dV \right) \tag{3.2.38}$$

Introducând acest rezultat în locul membrului drept din (3.2.33) se obține:

$$\{F\}_e + \int_{(V)} [N]^T \cdot \{p\} \cdot dV + \int_{(V)} [B]^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon_0\} dV - \int_{(V)} [B]^T \cdot \{\sigma_0\} dV = [k]_e \cdot \{\delta\}_e \tag{3.2.39}$$

în care se poate recunoaște ușor că:

$$\left. \begin{aligned} \{F\}_p &= \int_{(V)} [N]^T \cdot \{p\} dV \\ \{F\}_T &= \int_{(V)} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV \\ \{F\}_{\sigma_0} &= - \int_{(V)} [B]^T \{\sigma_0\} dV \end{aligned} \right\} \tag{3.2.40}$$

* * *

§ 3.3. METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ (M.E.Fr.)

3.3.1. Generalități

Printre primele lucrări care au pus – în mod indirect - bazele matematice ale M.E.Fr. sunt considerate cele ale lui George GREEN, care a formulat ecuațiile integrale ale teoriei potențialului. Dar FREDHOLM este cel care a utilizat primul teoria potențialului și teoria ecuațiilor integrale la rezolvarea problemelor elasticității liniare a corpurilor omogene când pe frontiera corpului sunt date deplasările. Mult mai târziu O.D. KUPRADZE, tot cu ajutorul teoriei potențialului și a teoriei ecuațiilor integrale singulare a demonstrat existanța soluției și a dezvoltat relații aproximative atât pentru probleme statice, cât și pentru probleme dinamice în medii omogene pe porțiuni. Intuind repartizarea hiperbolică de suprafață a resurselor, Kupradze a formulat legătura dintre deplasări și tensiuni pe frontiera mediului elastic, ceea ce a stimulat rezolvarea problemelor de bază ale (T.E.). Tot el a dezvoltat atât formularea directă cât și formularea indirectă, punând în evidență echivalența acestora și marile posibilități ale metodei ecuațiilor integrale de frontieră. Trebuie să amintim și rezultatele obținute în jurul anilor 1920 de I.G. BUBNOV și B.G. GALËRKIN, utilizate astăzi pe scară mare în rezolvarea numerică a problemelor de potențial (v. [F20]). Tot printre lucrările de fundamentare matematică trebuiesc amintite cele ale lui MUSHELIŞVILI [M69] și MIKHLIN [M33]. *Cu toate acestea o teorie matematică unitară a M.E.Fr. nu este încă elaborată deoarece integralele care intervin în aplicațiile M.E.Fr. depășesc cu mult clasa ecuațiilor integrale ale lui Fredholm și Voltera.* Actualmente M.E.Fr. este studiată în cadrul așa-numitor „**operatori pseudo-diferențiali**" de către W.L. WENDLENDT și colaboratorii săi, de unde se așteaptă rezultate noi. Prezentarea pe care o voi face în continuare se bazează pe lucrările lui C.A. BREBBIA și colaboratorii săi, făcând parte din așa-numita „*Școală de la Southampton*" [B72], [B62], [B36], [B37].

Dezvoltarea explozivă a M.E.Fr este de dată recentă, după 1970, odată cu dezvoltarea calculatoarelor; de altfel denumirea de „**element de frontieră**" a fost introdusă de Brebbia în 1978. În termenii aplicațiilor inginerești, formularea directă (de care s-a ocupat și Kupradze) a fost pentru prima dată introdusă de RIZZO F.J. în 1967, plecând de la egalitatea lui Somigliana. Lucrările de pionerat au fost făcute de RIZZO F.J., JASWON M.A., CRUSE T.A. (1967-68). În privința formulării indirecte trebuiesc amintiți MASSONNET și OLIVEIRA. De altfel în literatură [P50] se arată că fiecare dintre ecuațiile integrale și integro-diferențiale de tip Rizzo corespunde unei ecuații funcționale de tip Kupradze. Contrar ecuațiilor integrale de tip Rizzo, ecuațiile funcționale de tip Kupradze au nuclee regulate, integranzii au întotdeauna valori finite iar integralele nu trebuie să fie definite în sensul valorii principale Cauchy. De aceea, la prima vedere ecuațiile funcționale Kupradze par să fie preferabile ecuațiilor integrale din cauza aplicabilității lor mai simple. Însă, o investigare mai detaliată indică serioase dificultăți privind **stabilitatea numerică**. Discretizarea ecuațiilor funcționale Kupradze conduce la niște sisteme de ecuații algebrice rău condiționate.

În literatura de specialitate românească, M.E.Fr. este – comparativ cu M.E.F. – destul de puțin reprezentată, mai ales în partea aplicativă. Din bibliografia studiată de mine, am constatat că preocupări concrete și eficace în acest domeniu sunt în special la Iași și Cluj-Napoca. De la Iași, remarc cărțile foarte complexe și cu un suport matematic remarcabil ale lui V.F. POTERAȘU și N. MIHALACHE [P50]/1992, [G1]/1997; de la Cluj-Napoca semnalez cartea lui T. PETRILA și C. I.GHEORGHIU [P34] remarcabil de bine redactată (urmând cărțile lui Brebbia), cartea lui GH. MÎNDRU și M.M. RĂDULESCU [M38]/1986 – dedicată analizei câmpului electromagnetic, și relativ noua carte a lui I. LAZĂR din 1997 [L6] care urmărește de asemenea cărțile lui Brebbia.

Pe plan mondial însă, are loc o activitate atât de intensă încât copleşeşte orice încercare de informare şi sistematizare. Nu este totuşi lipsit de interes să arătăm că domeniul M.E.Fr. este încă în fază de dezvoltare, căutându-se noi formulări şi noi soluţii fundamentale. De exemplu: P.M. QUILAN şi O'CALLAGHAM M.J.A. în 1987 au propus „**metoda funcţiilor de muchie**" (The Edge - Function Method) bine adaptată pentru fisuri, cavităţi şi frontiere curbe; în cadrul metodei au fost alese funcţii speciale care să se potrivească fiecărei muchii a frontierei, iar soluţiile generale finale au fost obţinute ca o suprapunere pentru fiecare segment. O altă formulare a fost dată în perioada 1986-97 de către GHOSH N., RAJIYAH H., MUKHERJEE S., care au ales ca variabile ale stării de bază **tracţiunile şi gradienţii deplasărilor tangenţiale pe frontieră**. Această formulare are avantajul de a furniza tensiuni de mare acurateţe aproape de sau pe graniţă. O altă formulare nouă se bazează pe utilizarea variabilelor complexe pentru elementul de frontieră – metodă cu rezultate deosebite pentru probleme bidimensionale. Şi, în sfârşit, începe să se contureze metoda elementelor de frontieră stohastice cu aplicaţii la problemele de defecte multiple.

Pentru soluţiile fundamentale, pe lângă celebrele soluţii Kelvin, se mai utilizează soluţiile fundamentale ale lui Mindlin propuse de Telles şi Brebbia şi soluţiile fundamentale speciale propuse de Snyder M.D. şi Cruse T.A.

Pentru a ilustra amploarea pe care a luat-o dezvoltarea M.E.Fr. între anii 1980-1990, voi cita câteva din culegerile de lucrări de la congresele special dedicate acestei metode, editate de obicei de către C.A.BREBBIA. De altfel, pe Internet acestei probleme îi sunt dedicate zeci de mii de titluri, încât orice sinteză rezonabilă este aproape imposibilă.

1). BREBBIA C.A. (ed.), „*Recent Advances in Boundary Element Methods*", Proc. 1st Int. Conf. BEM, Southampton, Pentach Press, **1978**.
2). BREBBIA C.A. (ed.), „*New Development in Boundary Element Methods*", Proc. 2nd Int. Seminar, CML Publications, **1980**.
3). BREBBIA C.A. (ed.), „*Boundary Element Methods*", Proc. 3rd Int. Seminar, California, USA, CML Publications, **1981**.
4). BREBBIA C.A. (ed.), „*Boundary Element Methods in Engineering*", Proc. 4th Int. Seminar, Southampton, CML Publications, **1982**.
5). BREBBIA C.A., FUTAGAMI T., TANAKA M. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 5th Int.Conf., Japan, CML Publications, **1983**.
6). BREBBIA C.A. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 6th Int. Conf., The Queen Elisabeth 2, CML Publications, **1984**.
7). BREBBIA C.A., MAIER G. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 7th Int. Conf, Italy, **1985**.
8). TANAKA M., BREBBIA C.A. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 8th Int. Conf., Japan, CML Publications, **1986**.
9). BREBBIA C.A., WENDLAND W.L., KUHN G. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 9th Int. Conf., Stuttgart, Germany, CML Publications, **1987**.
10). BREBBIA C.A. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 10th Int. Conf., Southampton, CML Publications, **1988**.
11). BREBBIA C.A., CONNER J.J. (ed.), „*Boundary Elements*", Proc. 11th Int. Conf., Boston, USA, CML Publications, **1989**.
12). BREBBIA C.A., NOYE B.J. (ed.), „*BETECH 85*", Proc. 1st BETECH Conf., Adelaide, Australia, CML Publications, **1985**.
13). CONNER J.J., BREBBIA C.A. (ed.), „*BETECH 86*", Proc. 2nd BETECH Conf., Cambridge USA, CML Publications, **1986**.
14). BREBBIA C.A., VENTURINI W.S. (ed.), „*Boundary Element Techniques*", Proc. 3rd BETECH Conf., Brazil, CML Publications, **1987**.
15). CRUSE T.A. (ed.), „*IUTAM Symposium on Advanced Boundary Element Method*", Springer Verlag, **1987**.

16). BREBBIA C.A., ZAMANA N.G. (ed.), „*Boundary Element Techniques: Applications in Engineering*", Proc. 5th BETECH Conf., Windsor, CANADA, CML Publications, 1989.

Informațiile mele sunt incomplete, evident, dar și această simplă enumerare a acestor prestigioase conferințe internaționale arată importanța care se acordă actualmente M.E.Fr. De aici și opțiunea mea spre aplicarea cu predilecție a acestei metode.

Dată fiind importanța și eficacitatea M.E.Fr., nu au întârziat să apară zeci de programe specializate (de firmă) aproape în toate țările din lume. POTERAȘU (1992) [P56] citează 75 astfel de programe. Voi aminti numai câteva din programele care au facilități de rezolvare a problemelor de Mecanica ruperilor:

- **programul ABIEQ, EBIEQ (Anglia)** – rezolvă probleme de elasticitate plană liniară, cu condiții de contur neliniare, folosind elemente de contur segmente de dreaptă și curbe liniare, pătratice și de ordin superior. Este adaptat calculatoarelor CDC600, T600, VAX11. Rezolvă de asemenea probleme de contact și de potențial în regim static sau dinamic staționar.
- **programul BEM 3D (S.U.A.)** – rezolvă probleme de Elastostatică liniară în regim static și dinamic, de (M.R.)., cu cele mai diverse condiții de frontieră și toate tipurile de elemente de contur. Are și parte grafică, de substructurare, și poate lucra în regim interactiv (calculator VAX11/70).
- **programul BIECRX, programul FRACTURE-CORNELL, programul IOWA**, toate elaborate în SUA, și având, în mare, aceleași facilități legate de rezolvarea problemelor de elasticitate plană pentru medii omogene, liniar elastice cu fisuri, goluri sau incluziuni.
- alte programe elaborate în Anglia: **BIEQD, BIE3D-UK, MAINEXE, SAI5, BEANS, BIEAXI, NPL**
- programe elaborate în **Belgia**: **BEMAC, BIEP**
- programe elaborate în **Japonia**: **BEM, BE2TE**
- programul **BECOP (Franța)**

Evident că în realitate, numărul lor este mult mai mare; am citat numai o parte dintre programe, neavând acces la o informare mai amplă.

Eu am utilizat programul **BEASY**, adus la Catedra de Rezistența materialelor – în cadrul unui grant – de dl. Prof.dr. ing. NICOLAE FAUR. O prezentare mai amănunțită a acestuia va urma în paragraful 3.3.4.

În paralel însă am elaborat programe proprii verificate pe problemele test (v. §3.8). Această acțiune nu este inutilă, deoarece așa-numitele „*programe mici, specializate*", dedicate rezolvării numai unei anumite clase de probleme, sunt mult mai eficiente și mai rapide. În activitatea de programare asistată de calculator de obicei aceste miniprograme sunt necesare. De altfel, această activitate se încadrează în ramura modernă de știință numită „*Computational Fracture Mechanics*", care se ocupă cu modelarea și analiza numerică a problemelor de determinare a câmpului de tensiuni și deformații și a parametrilor specifici de mecanica ruperilor în solide elestice cu defecte: dislocații, fisuri, goluri, incluziuni etc.

3.3.2. Preliminarii matematice

Fundamentele matematice ale M.E.Fr. sunt destul de dificile, conținând multe elemente din teoria potențialului, din teoria formulelor și funcțiilor Green, din teoria ecuațiilor integrale și integrale singulare, din teoria transformărilor integrale și conforme, din teoria integralelor de tip Chauchy etc. Deoarece majoritatea acestor probleme nu fac parte din activitatea curentă a inginerilor – indiferent de profilul lor – pentru a fixa noțiunile și formulele de bază, pentru a stabili notații uniforme și pentru a nu aglomera textul de bază cu date cunoscute preluate din literatură, am prezentat multe din aceste noţiuni în **Anexele** lucrării. Deşi relativ voluminoase, ele sunt indispensabile.

3.3.2.1. Metoda reziduurilor ponderate

A). FORMULAREA DIRECTĂ

M.E.Fr. cunoaşte două tipuri de metode sau formulări, care sunt de altfel valabile pentru toate problemele de (T.E.):

- **Metoda directă** care formulează probleme în funcţie de nişte variabile care au un sens fizic precis şi care pot fi: *„funcţii de deplasări"* sau *„funcţii de tensiuni"* după cum se pleacă de la ecuaţiile fundamentale ale (T.E.) formulate în deplasări (ecuaţiile lui Lamé) sau în tensiuni (ecuaţiile lui Beltrami-Mitchell). În mod global ele se numesc **funcţii de potenţial**, iar în *„metoda potenţialului direct"* ele sunt deplasările şi tracţiunile pe frontieră.
- **Metoda indirectă** care foloseşte variabile ale căror sens fizic nu este totdeauna evident; de exemplu formulările cu ajutorul potenţialului de simplu sau de dublu strat conduc la metoda indirectă. După ce aceste necunoscute fictive au fost calculate, deplasările şi tensiunile reale pot fi obţinute prin integrarea pe frontieră a necunoscutelor fictive.

În principiu tehnica de rezolvare constă în transformarea ecuaţiilor cu derivate parţiale care descriu comportarea câmpului necunoscut în interiorul şi pe frontiera domeniului într-o ecuaţie integrală (de obicei de tip Fredholm de speţa a doua) cu valori numai pe frontiera domeniului, care este în continuare discretizată şi transformată într-un sistem de ecuaţii algebrice. Obţinerea acestor ecuaţii integrale pe frontieră se poate face cu diferite metode: principiul lucrului mecanic virtual, teoremele lui Green, identitatea lui Somigliana şi teoremele lui Betti şi metoda reziduului ponderat – cea mai generală şi mai eficientă. Ecuaţia integrală de frontieră micşorează astfel cu o unitate dimensiunea problemei încorporând în structura ei şi condiţiile la limită asociate, pentru care nu mai sunt necesare soluţii speciale. În schimb este necesară construcţia explicită a unei soluţii a ecuaţiei omogene sau a unei **soluţii fundamentale**, ceea ce este în general o problemă dificilă. Actualmente există ca şi o bază de date, tabele cu soluţii fundamentale la cele mai diferite probleme (v. **Anexa 9**). Mai menţionăm că deşi cele două formulări sunt bazate pe acelaşi principiu de transformare a condiţiilor de domeniu în ecuaţii integrale pe frontieră, procedurile de rezolvare sunt diferite. Formularea directă are avantajul de a fi mai simplă conceptual şi mai uşor de implementat.

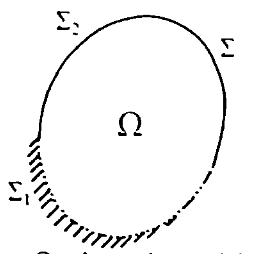
Se ştie că într-o formă foarte generală, orice sistem fizic poate fi caracterizat printr-o mulţime de variabile care sunt funcţii de coordonatele spaţiale $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ şi de timpul t (daca t=0, sistemul este **staţionar**, dacă $t\neq0$, sistemul este **nestaţionar**). Din această mulţime de variabile, unele pot fi prestabilite: proprietăţile fizico-mecanice ale materialelor, forma şi dimensiunile geometrice, forţele exterioare aplicate, condiţiile la limită sau de margine, etc. Restul variabilelor, notate generic cu litera u – care pot fi deplasări, tensiuni, temperaturi, viteze, etc. – constituie necunoscutele problemei. Dacă se stabileşte o relaţie între mărimile date şi variabilele necunoscute pe baza legilor fizice caracteristice sistemului, se zice că s-a realizat un model matematic al sistemului, descris de obicei de un ansamblu de ecuaţii cu derivate parţiale de un anumit ordin, liniare sau neliniare, pe care-l vom scrie simbolic

$$\mathrm{L}(u)=b \tag{3.3.1}$$

unde L este un *operator diferenţial* definit pe un anumit spaţiu de funcţii (v. **Fig. 3.3.1**).

La aceste ecuaţii se ataşează un sistem de condiţii la limită (sau condiţii pe frontieră). Funcţia necunoscută u, cât şi funcţia dată b sunt definite pe acelaşi domeniu spaţial Ω de frontieră Σ şi trebuie să satisfacă simultan ambele tipuri de ecuaţii. Pentru a formula metoda reziduurilor ponderate (MRP), vom considera ecuaţia omogenă

$$\mathrm{L}(u)=0 \qquad (3.3.2)$$



Ω - domeniu spațial
Σ – suprafețe-frontieră
($\Sigma_1 \mathrm{U} \Sigma_2 = \Sigma$)

Fig. 3.3.1

și alegând o **funcție de pondere** w vom face **produsul interior sau scalar** cu operatorul $\mathcal{L}(u)$, și vom avea:

$$< \mathrm{L}(u) w > \equiv \int_{\Omega} \mathrm{L}(u) w \cdot d\Omega = 0 \qquad (3.3.3)$$

Acum în ecuația de mai sus, putem efectua o integrare prin părți până ce toate derivatele funcției u sunt eliminate și vom obține o așa-numită **„formă transpusă"** a produsului interior care are următorul aspect:

$$\int_{\Omega} \mathrm{L}(u) w d\Omega = \int_{\Omega} u \mathrm{L}^*(w) d\Omega + \int_{\Sigma} [S^*(w) G(u) - G^*(w) S(u)] d\Sigma \qquad (3.3.4)$$

Acum putem să ne explicăm introducerea funcției pondere w. Numai așa putem să integrăm prin părți și să *„scăpăm"* de derivatele funcției necunoscute u.

În procesul de integrare prin părți s-au introdus noi operatori. De exemplu operatorul L* numit **operator adjunct sau conjugat** cu L, care se aplică funcției pondere w. S-au mai introdus alți doi operatori S, G, care sunt legați de condițiile de frontieră. Astfel:

- dacă operatorul $S(u)$ este dat numai în anumite puncte sau zone ale suprafeței Σ, atunci în acele zone avem **condiții de frontieră esențiale**;
- dacă operatorul $G(u)$ este dat în alte puncte ale frontierei se zice că în punctele respective se generează **condiții pe frontieră neesențiale sau naturale**.

Ne întoarcem la ecuația (3.3.1). Să notăm cu u_0 soluția exactă a problemei pe care în general nu o cunoaștem.

Vom avea

$$\mathrm{L}(u_0) = b \text{ în domeniul } \Omega \qquad (3.3.5)$$

cu condițiile de frontieră:

$S(u_0) = s$ pe porțiunea Σ_1 a frontierei, ($\Sigma_1 \mathrm{U} \Sigma_2 = \Sigma$)

$G(u_0) = g$ pe porțiunea Σ_2 a frontierei

Să notăm cu u **o soluție aproximativă** oarecare a problemei. Atunci această funcție satisface aproximativ ecuația dată, *deci apare o eroare sau un reziduu*; vorbim de obicei de „**o funcție reziduu**" exprimată prin relația diferențială:

$$R = \mathrm{L}(u) - b \neq 0 \qquad (3.3.6)$$

Acest lucru este într-adevăr așa, deoarece în ecuația (3.3.5) rezultă că b este valoarea exactă a operatorului **L** pentru u_0, pe când **L**(u) este o valoare aproximativă; diferența lor este tocmai eroarea sau reziduul.

Dacă în plus funcția u nu satisface toate celelalte condiții de frontieră, obținem încă două tipuri de funcții reziduu:

$R_1 = S(u) - s \neq 0$ pe o porțiune Σ_1 a frontierei, reprezentând eroarea legată de satisfacerea condițiilor de limită **esențiale**.

$R_2 = G(u) - g \neq 0$ pe o porțiune Σ_2 a frontierei reprezentând eroarea legată de satisfacerea condițiilor de limită **naturale**.

Metodele de aproximare urmăresc să minimizeze aceste reziduuri. În funcție de maniera în care se rezolvă acest lucru avem diferite tipuri de metode de aproximare:

a) Metoda reziduurilor ponderate.

Presupunem că funcţia u a fost aleasă astfel încât să satisfacă de la început toate condiţiile la limită, (R_1=0, R_2=0). Atunci vom alege o funcţie pondere w astfel încât:

$$< R, w >= \int_{\Omega} R w d\Omega = 0 \tag{3.3.7}$$

ceea ce înseamnă că ecuaţia dată va fi satisfăcută **în medie** în raport cu ponderea **w**.

b) Metoda colocaţiei.

Are loc atunci când vom pretinde ca reziduul R să fie nul numai în anumite puncte date sau numai pe anumite subdomenii din Ω.

c) Metoda reziduurilor ponderate generalizată

Are loc când se impun condiţii asemănătoare de satisfacere **în medie** şi prntru condiţiile pe frontieră. Atunci în locul problemei iniţiale se consideră o **ecuaţie ponderată unică**:

$$< R, w >= - < R_1, G(u) > + < R_2, w > \tag{3.3.8}$$

ecuaţie sinonimă cu impunerea pentru aproximarea u a condiţiilor $u = \overline{u}$ pe Σ_1 şi $q = \overline{q}$ pe Σ_2.

De exemplu, putem alege funcţia w ca o combinaţie liniară a unui sistem de funcţii liniar independente $\{\Psi_k\}$care pot satisface aprioric condiţiile omogene de graniţă:

$$w = \beta_1\Psi_1 + \beta_2\Psi_2 + ... + \beta_n\Psi_n \tag{3.3.9}$$

unde β_i sunt coeficienţi nedeterminaţi.

Presupunând că funcţia u satisface toate condiţiile de graniţă (R_1=R_2=0), atunci

$$< R, w >\equiv \int_{\Omega} R w d\Omega = 0 \tag{3.3.10}$$

Deoarece coeficienţii β_i sunt arbitrari, egalitatea precedentă devine:

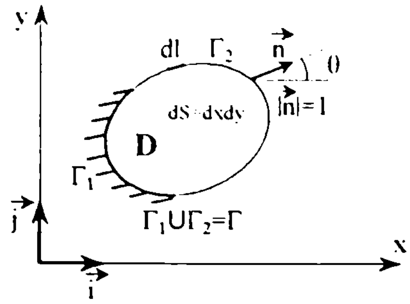
$$\int_{\Omega} R(\beta_1\Psi_1 + \beta_2\Psi_2 + ...)d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} R\Psi_i d\Omega = 0 \quad i = 1,2,..,n \tag{3.3.11}$$

ceea ce revine la o satisfacere în medie a ecuaţiei iniţiale în raport cu ponderea w.

Dacă în calitate de funcţie pondere Ψ_i vom folosi **funcţia** $\delta(x - x_i)$ **a lui Dirac** (v. **Anexa 6**) care se bucură de proprietatea de filtrare, vom defini metoda colocaţiei:

$$\int_{\Omega} R w d\Omega = 0, \quad unde \quad w = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + ... + \beta_k\delta_k \tag{3.3.12}$$

Să ilustrăm cele spuse mai sus pe o **ecuaţie de tip Poisson** frecvent întâlnită în aplicaţii din (M.S.D.) (v. **Fig. 3.3.2**).



D – domeniu plan

Γ- conturul frontierei (curbă plană Liapunov)

Fig. 3.3.2

$n_x = \vec{n}\cdot\vec{i} = \cos\theta$

$n_y = \vec{n}\cdot\vec{j} = \sin\theta$

$\frac{\partial}{\partial n} = n_x\frac{\partial}{\partial x} + n_y\frac{\partial}{\partial y}$

$dx = n_y dl$; $dy = n_x dl$

$dS = dx\cdot dy$ (elementul de arie din **D**)

$$\nabla^2 u = b \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \quad \text{în } D \tag{3.3.13}$$

cu condiţiile la limită:

$u = \bar{u}$ pe Γ_1 condiţii tip Dirichlet (sau **condiţii esenţiale**)

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right|_{\Gamma_2} = f_{\Gamma_2} \quad \text{condiţii de tip Cauchy (sau Rodin)} \tag{3.3.14}$$

pentru $\alpha = 0 \Rightarrow q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ *pe* Γ_2 condiţii de tip Neuman (sau **condiţii naturale**)

Aplicând metoda reziduului ponderat (3.3.8), ecuaţia integrală caracteristică ecuaţiei lui Poisson are forma:

$$\int_D \left(\nabla^2 u - b\right) w dS + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u})\frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma = 0 \tag{3.3.15}$$

Dacă se integrează de două ori prin părţi prima integrală din (3.3.2.15) se obţine **ecuaţia integrală pe contur** pe care o căutăm:

$$\int_D u\nabla^2 w dS - \int_D b w dS + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w dl + \int_{\Gamma_1} q w dl \cong \int_{\Gamma_2} u\frac{\partial w}{\partial n} dl + \int_{\Gamma_1} \bar{u}\frac{\partial w}{\partial n} dl \tag{3.3.16}$$

Să observăm că prin această integrare prin părţi sub operatorul ∇^2 se schimbă locul funcţiei u necunoscute cu funcţia w, presupusă cunoscută („*comută*" u cu w).

Suntem acum în situaţia de a alege funcţia pondere w; în formularea directă se alege funcţia w ca fiind **soluţia fundamentală** a ecuaţiei lui Laplace, care în majoritatea lucrărilor se notează cu u^*:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \delta(x - \xi_i) \tag{3.3.17}$$

În felul acesta eliminăm din ecuaţia (3.3.16) prima integrală pe domeniul D, care ne deranjează, scopul nostru fiind să avem numai integrale pe contur.

Presupunând că $w=u^*$ se cunoaşte (v. **Anexa 9**) şi ţinând cont de proprietatea de filtraj a funcţiei lui Dirac $\delta(x-\xi_i)$- v. **Anexa 6**, ecuaţia (3.3.16) devine:

$$u_i - \int_D b u^* dS + \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* dl + \int_{\Gamma_1} q u^* dl = \int_{\Gamma_2} u q^* dl + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* dl \tag{3.3.18}$$

unde: ξ_i este punctul de aplicaţie a potenţialului unitar, x este punctul curent de observaţie de pe contur,

$u^* = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ soluţia ecuaţiei (3.3.17) pentru cazul bidimensional de care ne ocupăm, cunoscută din (T.E.) – soluţia fundamentală -

$r = |x - \xi_i|$, distanţa dintre punctele x şi ξ_i

$$q^*(\xi_i, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n(x)}$$

Calculul derivatei soluţiei fundamentale după direcţia normalei exterioare este imediat:

$$q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}\right)$$

unde $\frac{\partial x}{\partial n} = n_x$; $\frac{\partial y}{\partial n} = n_y$ sunt componentele vectorului unitar normal exterior la frontieră, $\vec{n}$ (cu $|\vec{n}| = 1$) în punctul curent x.

Ecuaţia obţinută (3.3.18) furnizează o legătură între funcţiile u şi q de pe frontiera Γ şi potenţialul din punctul ξ_i, legătură care exprimă şi o condiţie de compatibilitate a datelor pe frontieră. Să observăm că soluţia fundamentală u^* este **singulară** în punctul $r = \xi_i$. Este posibil ca punctul ξ_i să fie în interiorul domeniului, exterior domeniului sau pe frontieră. Se demonstrează în literatură că în final ecuaţia integrală de contur are forma [B36], [B72], [F3], [P34], [P50]:

$$\int_\Gamma uq^*\,d\Gamma - \int_\Gamma qu^*\,d\Gamma + \int_D bu^*\,dS = u_i\begin{Bmatrix}1\\0\\c_i\end{Bmatrix}\quad\begin{matrix}\text{daca } \xi_i \in D,\ \xi_i \notin \Gamma\\ \text{daca } \xi_i \notin D,\ \xi_i \notin \Gamma\\ \text{daca } \xi_i \in \Gamma\end{matrix} \tag{3.3.19}$$

Coeficientul c_i va fi egal cu π dacă ξ_i este un punct care aparţine unei porţiuni netede a lui Γ şi este egal cu $\pi + (\alpha_1 - \alpha_2)$ dacă el este un punct unghiular încadrat de porţiunile netede Γ_S şi Γ_d ale frontierei Γ a căror normală exterioară furnizează unghiurile α_1 respectiv α_2 cu axa Ox_1 ([P34], [P50]).

B). FORMULAREA INDIRECTĂ

Ecuaţia Poisson (3.3.13) împreună cu condiţiile la limită (3.3.14) se zice că se rezolvă cu „**metoda indirectă**" dacă valorile lui u^* se distribuie pe frontieră şi formează aşa-numita **distribuţie de surse** şi asemănător se distribuie şi valorile lui q* $= \frac{\partial u^*}{\partial n}$ realizând aşa-numita **distribuţie de dipoli**; densităţile acestor distribuţii satisfac ecuaţia dată, pe contur.

Pornind de la formularea directă în domeniul D', exteriorul lui $(D \cup \Gamma)$, se defineşte o funcţie de potenţial necunoscută u' pentru care metoda reziduului ponderat se scrie sub forma:

$$\int_\Gamma u'q^*\,d\Gamma - \int_\Gamma q'u^*\,d\Gamma = u_i\begin{Bmatrix}-1\\0\\-c_i\end{Bmatrix}\quad\begin{matrix}\textit{pentru } \xi_i \in D'\\ \textit{pentru } \xi_i \in D\\ \textit{pentru } \xi_i \in \Gamma\end{matrix} \tag{3.3.20}$$

Din relaţiile (3.3.19) şi (3.3.20) se obţine:

$$u_i \int_{\Gamma}(u-u')q^*d\Gamma - \int_{\Gamma}(q-q')u^*d\Gamma + \int_D bu^*dS \qquad (3.3.21)$$

Pe conturul (frontiera) Γ se impune condiţia $u = u'$ şi se notează $\sigma_q(\Gamma) = q - q'$; ecuaţia (3.3.2.21) devine:

$$u_i = -\int_{\Gamma} \sigma_q u^* d\Gamma + \int_D bu^* dS \qquad (3.3.22)$$

Această ecuaţie defineşte o formulare sursă indirectă cu necunoscuta $\sigma_q(\Gamma)$ care se determină impunând condiţiile pe contur:

$$\bar{u}_i = u_i = -\int_{\Gamma} \sigma_q u^* d\Gamma + \int_D bu^* dS \quad \text{pe } \Gamma_1 \qquad (3.3.23)$$

$$\bar{q}_i = q_i = c_i\sigma_{qi} - \int_{\Gamma} \sigma_q q^* d\Gamma + \int_D bq^* dS \quad \text{pe } \Gamma_2 \qquad (3.3.24)$$

Există şi alternativa de a impune pe contur condiţia de echilibru $q' = q$ şi a introduce distribuţia de dipoli necunoscută $\mu_u = u - u'$. Se obţine în final:

$$u_i = c_i\mu_{u_i} + \int_{\Gamma} \mu_u q^* d\Gamma + \int_D bu^* dS \qquad (3.3.25)$$

$$q_i = \frac{\partial u_i}{\partial n} = \int_{\Gamma} \mu_n \frac{\partial^2 u^*}{\partial n^2} d\Gamma + \int_D bq^* dS \qquad (3.3.26)$$

În final, densitatea se determină impunând condiţiile la limită:

$$\bar{u}_i = u_i; \qquad \bar{q}_i = q_i;$$

unde u_i şi q_i sunt date de relaţiile (3.3.25) şi (3.3.26).

3.3.2.2. Elemente de frontieră. Discretizarea ecuaţiilor integrale

În ecuaţia integrală de frontieră stabilită trebuie să efectuăm numeric anumite integrale, care de obicei nu le putem efectua analitic. Pentru aceasta frontieră Γ a domeniului D, care este o curbă plană oarecare, se împarte în elemente de lungime relativ mici numite **elemente de frontieră** pe care se poate face o evaluare numerică a integralelor cu una dintre metodele de cuadratură cunoscute, acceptând şi anumite ipoteze simplificatoare. Aceste elemente de frontieră pot fi segmente de dreaptă sau porţiuni de curbe plane. Rezultatele oricărui program de element de frontieră depind în mod esenţial de modul de aproximare a frontierei şi de evaluare a integralelor pe fiecare element. Fiecărui element de frontieră i se asociază unul sau mai multe puncte numite **noduri** în care se presupun cunoscute sau nu cele două variabile care apar în problemă: potenţialul u şi gradientul potenţialului q. Dacă N este nmărul de elemente în care este discretizată frontiera, iar n este numărul total de noduri vom avea $2n$ variabile nodale. Pentru a putea obţine o soluţie unică, o parte dintre acestea trebuiesc cunoscute şi ele sunt date sub forma condiţiilor pe frontieră în fiecare nod $(\bar{u};\bar{q})$.

Descrierea geometriei fiecărui element de frontieră ca şi stabilirea legilor de variaţie a mărimilor necunoscute u şi q de pe frontieră se face cu ajutorul unor **funcţii de interpolare** sau **funcţii de formă**, care pot fi constante, liniare, pătratice, cubice etc. Ele pot avea acelaşi grad sau grade diferite pentru cele două elemente aproximate: mărimile geometrice şi mărimile fizice

(u; q). Dacă se folosesc funcții de același grad pentru ambele categorii de mărimi se zice că se folosesc **elemente de frontieră izoparametrice**.

În practica utilizării M.E.Fr. se întâlnesc:

- **Elemente de frontieră constante (Fig. 3.3.3)**

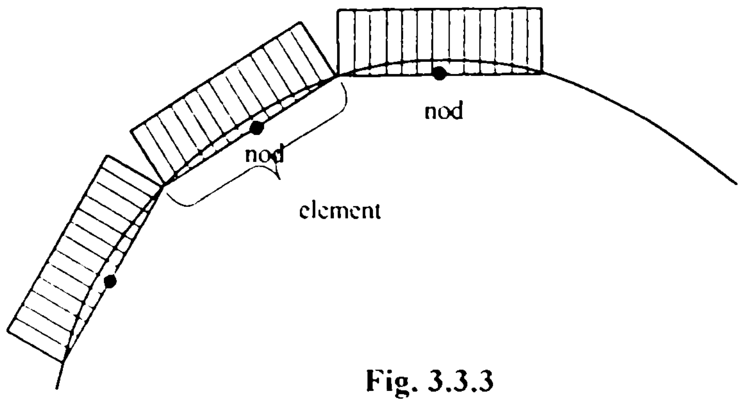


Fig. 3.3.3

Frontiera este aproximată prin segmente de dreaptă, extremitățile segmentelor nu sunt considerate ca noduri. Elementul are un singur nod, la mijlocul lungimii sale, deci numărul de noduri este egal cu numărul de elemente. Pe fiecare element se consideră că valorile lui u și q sunt constante și egale cu valorile lor în nodul din mijlocul elementului.

- **Elemente de frontieră liniare (Fig. 3.3.4)**

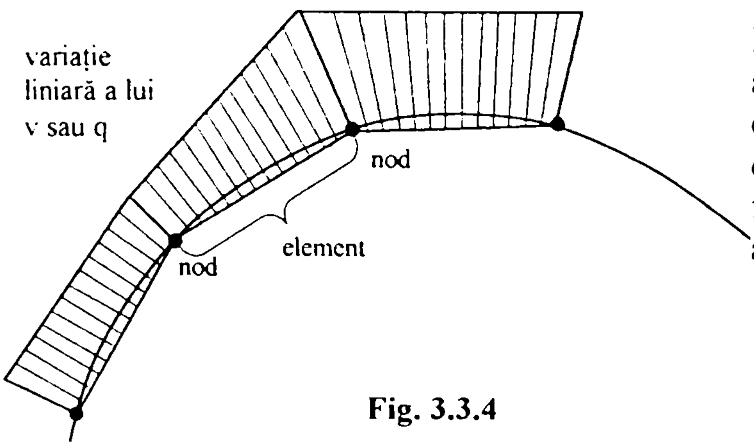


Fig. 3.3.4

Frontiera din punct de vedere geometric, este aproximată tot prin segmente de dreaptă, dar extremitățile acestor segmente se consideră drept noduri ale elementului de frontieră. Pe fiecare element vom accepta că funcțiile u și q au o **variație liniară**.

- **Elemente de frontieră pătratice (Fig. 3.3.5)**

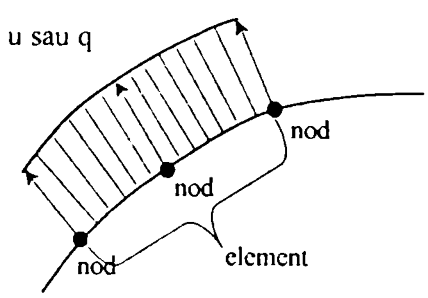


Fig. 3.3.5

În acest caz elementul de frontieră are trei noduri și este descrisă de o curbă care trece prin cele trei puncte cu ajutorul unei funcții polinomiale sau de altă natură. O funcție de același tip descrie și legile de variație ale mărimilor fizice u și q. Generalizarea acestor elemente este imediată, deoarece se pot lua oricâte noduri interioare dorim pe fiecare element. Evident că pentru aceste elemente de ordin superior cresc dificultățile de calcul și timpul de calculator.

A. ELEMENTE DE FRONTIERĂ CONSTANTE

Voi încerca să prezint în amănunt modul de discretizare a ecuației integrale de frontieră și transformarea ei într-un sistem de ecuații algebrice pentru cazul cel mai simplu când se ucrează cu elemente de frontieră constante.

Considerăm că frontiera reprezentată de o curbă plană oarecare, a fost discretizată în N segmente de dreaptă înscrise, din care $N_1 \in \Gamma_1$ și $N_2 \in \Gamma_2$. Ne vom ocupa de ecuația integrală pe frontieră a metodei directe:

$$\int_\Gamma uq^*\,d\Gamma-\int_\Gamma qu^*\,d\Gamma+\int_D bu^*\,dS=u_i\begin{Bmatrix}1\\0\\c_i\end{Bmatrix}\qquad(3.3.27)$$

Dacă avem N elemente, avem $n=N$ noduri şi în fiecare nod două mărimi fizice variabile (u şi q); ar rezulta că avem $2n$ necunoscute. Pentru a obţine un sistem compatibil determinat cu soluţie unică vom considera că pe fiecare element valoarea uneia dintre cele două variabile u sau q este cunoscută:

$$u=\bar{u}\quad pe\quad N_1 \text{ elemente}$$
$$q=\bar{q}\quad pe\quad N_2 \text{ elemente},\quad (N_1+N_2=N)$$

Obţinem atunci un sistem algebric liniar de n ecuaţii cu n necunoscute. Soluţia fundamentală a ecuaţiei Laplace, respectiv potenţialul unitar este aplicat în ξ_i şi $u(\xi_i)=u_i$. Dacă în ecuaţia (3.3.27) facem b=0 obţinem ecuaţia lui Laplace:

$$c_iu_i+\int_\Gamma uq^*\,d\Gamma=\int_\Gamma qu^*\,d\Gamma\qquad(3.3.28)$$

unde $u^*=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ iar $c_i=\dfrac{1}{2}$ datorită „netezimii" elementului respectiv.

Dar în condiţiile noastre ecuaţia de mai sus se poate discretiza sub forma:

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}uq^*\,d\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}u^*q\,d\Gamma\qquad(3.3.2.29)$$

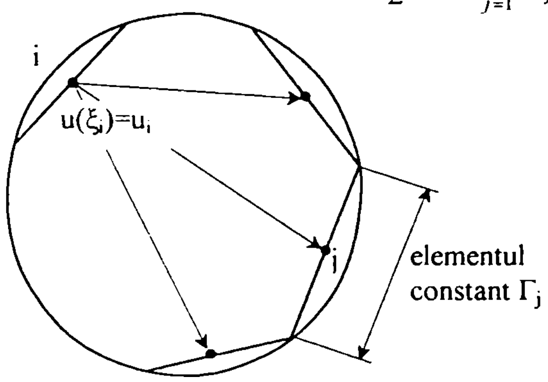


Fig. 3.3.6

unde Γ_j este lungimea elementului j. Această ecuaţie reprezintă relaţia dintre nodul i în care se aplică potenţialul unitar şi toate elementele j de pe contur. Dar, ţinem cont de tipul elementului folosit, pe care am presupus că u şi q sunt constante (egale cu u_j sau q_j pe fiecare element j). Aceste mărimi se pot scoate deci de sub semnul integral şi avem:

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}u_j\int_{\Gamma_j}q^*\,d\Gamma=\sum_{j=1}^{N}q_j\int_{\Gamma_j}u^*\,d\Gamma\qquad(3.3.30)$$

Pentru o scriere mai condensată, introducem nişte notaţii:

$$\int_{\Gamma_j}q^*\,d\Gamma=\hat{H}_{ij};\qquad\int_{\Gamma_j}u^*\,d\Gamma=G_{ij}\qquad(3.3.31)$$

Ecuaţia (3.3.30) devine:

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\hat{H}_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j\qquad(3.3.32)$$

În cazul în care se mai face o notaţie:

$$H_{ij}=\begin{cases}\hat{H}_{ij} & pentru\quad i\neq j\\ \hat{H}_{ij}+\dfrac{1}{2} & pentru\quad i=j\end{cases}$$

ecuaţia (3.3.32) obţine o formă foarte simplă şi elegantă:

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}q_j \qquad (3.3.33)$$

sau într-o scriere matricială condensată:

$$[H]\cdot\{U\} = [G]\cdot\{Q\} \qquad (3.3.34)$$

Cele N_1 valori ale lui u şi cele N_2 valori ale lui q sunt necunoscutele problemei pe Γ.

A rezultat un sistem algebric liniar cu N necunoscute care se ordonează trecând toate necunoscutele în membrul stâng şi aranjând sistemul în formă canonică

$$[A]\cdot\{X\} = \{F\} \qquad (3.3.35)$$

unde:

$\{X\}$ este o matrice coloană care conţine toate cele N necunoscute u_i şi q_i (vectorul necunoscut);

$\{F\}$ este tot o matrice coloană care conţine toate cele N mărimi de graniţă cunoscute: potenţialele $\bar{u}_i$ şi fluxurile $\bar{q}_i$;

$[A]$ este o matrice pătrată de tipul NxN **în întregime populată** formată cu integralele H_{ij} şi G_{ij}. În limbaj de calculator H_{ij} şi G_{ij} pot fi direct asamblate în A astfel încât ecuaţia anterioară (3.3.34) nu mai trebuie formată.

După rezolvarea acestui sistem (3.3.35) vom cunoaşte toate valorile potenţialului u şi fluxului q pe contur; rezultă atunci valorile acestor mărimi în orice punct interior al domeniului:

$$u_i = \int_\Gamma qu^* d\Gamma - \int_\Gamma q^* u d\Gamma \Leftrightarrow u_i = \sum_{j=1}^{N} q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^{N} u_j \hat{H}_{ij} \qquad (3.3.36)$$

În cazul particular al elementelor de contur constante, integralele $\hat{H}_{ij}$ şi G_{ij} pot fi calculate analitic; dacă nu, se utilizează *regula de cuadratură numerică Gauss*, pentru care sunt suficiente patru puncte de integrare Gauss. De exemplu:

$$\hat{H}_{ii} = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_i} grad\, u^* \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma \equiv 0 \quad \text{deoarece } u^* = \text{const.} \qquad (3.3.37)$$

utilizând coordonate omogene:

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_{(0)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr = \frac{|r_1|}{\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{|r_1|}+1\right)\right] \qquad (3.3.38)$$

B. ELEMENTE DE FRONTIERĂ LINIARE

Elementul de frontieră este tot un segment de dreaptă, care are însă două noduri ce se identifică cu punctele de intersecţie ale segmentelor frontieră (vârfurile poligonului înscris) –v. **Fig. 3.3.7**.-; vom accepta însă că funcţiile u şi q au o variaţie liniară pe fiecare element.

Plecăm tot de la ecuaţia formulării directe, discretizată (3.3.28):

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_i} uq^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma \qquad (3.3.39)$$

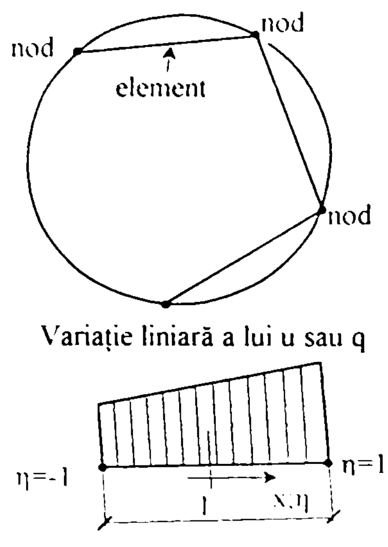


Fig. 3.3.7

(unde coeficientul c_i nu mai este constant). Acum integralele pe elementele Γ_j care intervin în ecuaţia (3.3.2.39) sunt mult mai dificil de calculat tocmai datorită variaţiei liniare a lui u şi q pe fiecare element. **Valorile lui u şi q în orice punct al unui element vor fi definite cu ajutorul valorior lor ......le ş.. ....ă f...ţ.. .e ....e. p..... e ....e:**

$$u(x) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 = [\varphi_1 \varphi_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$q(x) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 = [\varphi_1 \varphi_2]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

În unele cărţi funcţiile φ_1 şi φ_2 se notează cu N_1 şi N_2 ca la (M.E.F.) şi seamănă cu funcţiile de formă de acolo:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N_1 N_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]^T \{U\}$$

$$q = N_1 q_1 + N_2 q_2 = [N_1 N_2]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [N]^T \{Q\}$$

Se introduce pe fiecare element aşa-numita **coordonată adimensională** (omogenă):

$$\eta = \frac{x}{l/2}, \quad l \text{ fiind lungimea elementului.}$$

Atunci funcţiile de interpolare (sau „**de formă**") vor fi:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2}(1+\eta) \tag{3.3.40}$$

Integrala pe un element de frontieră j (segmentul de dreaptă Γ_j) devine:

$$\int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\varphi_1 \varphi_2] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left[h_{ij}^1 h_{ij}^2\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.41}$$

$$\int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\varphi_1 \varphi_2] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \left[g_{ij}^1 g_{ij}^2\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.42}$$

unde:

$$h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 q^* d\Gamma, \qquad h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \varphi_2 q^* d\Gamma, \tag{3.3.43}$$

$$g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 u^* d\Gamma, \qquad g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \varphi_2 u^* d\Gamma, \tag{3.3.44}$$

În principiu deci **coeficienţii de influenţă** h_{ij}^k definesc interacţiunea dintre **punctul i considerat şi nodul k al elementului j**.

Observăm că pentru a scrie ecuația discretă corepsunzătoare nodului i, va trebui să însumăm într-un singur termen contribuțiile celor două elemente de frontieră alăturate (j-1) și j, obținând astfel coeficientul nodal. Aceasta va conduce la următoarea formă a ecuației globale discrete:

$$c_i u_i + \left[\hat{H}_{i1}\hat{H}_{i2}\ldots\hat{H}_{iN}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \left[G_{i1}G_{i2}\ldots G_{iN}\right]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \tag{3.3.45}$$

unde fiecare coeficient $\hat{H}_{ij}$ este egal cu termenul h_{ij}^2 al elementului j-1, însumat cu termenul h_{ij}^1 al elementului j, pentru o numerotare orară. Analog pentru G_{ij}.

Reprezentarea de mai sus fiind deja ecuația asamblată pentru nodul i vom avea:

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j \tag{3.3.46}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j \tag{3.3.47}$$

unde am notat

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & pt. \quad i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i & pt. \quad i = j \end{cases} \tag{3.3.48}$$

exprimare echivalentă ecuației matriceale:

$$[H]\{U\} = [G]\{Q\} \tag{3.3.49}$$

Prin aplicarea condițiilor la limită ecuația matriceală precedentă se reordonează astfel încât să aibă forma:

$$[A]\{X\} = \{F\} \tag{3.3.50}$$

Matricea $[A]$ este formată direct de calculator.

C. ELEMENTE DE FRONTIERĂ PĂTRATICE ȘI DE ORDIN SUPERIOR

Aceste tipuri de elemente sunt frecvent utilizate pentru o aproximare mai bună atât a **geometriei frontierei cât și a funcțiilor necunoscute *u* și *q***. Ele nu prezintă dificultăți deosebite de calcul, dar pentru aplicarea lor este necesară transformarea coordonatelor cartaziene în coordonate curbilinii (mai exact coordonata curbilinie adimensională locală η). În acest sens pe fiecare element pătratic (**Fig. 3.3.8**) funcțiile u și q vor fi aproximate cu ajutorul valorilor nodale pe un ansamblu de trei noduri, (1), (2), (3), și a unor **funcții de interpolare pătratice** $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ astfel:

$$u(\eta) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\varphi]^T\{U\} \tag{3.3.51}$$

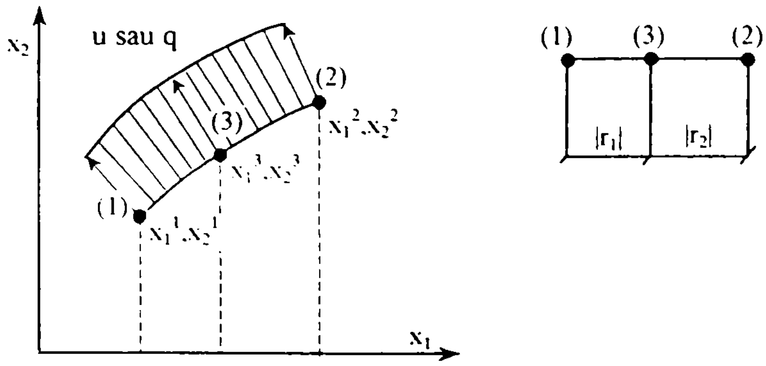
$$q(\eta) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3 = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = [\varphi]^T\{Q\} \tag{3.3.52}$$

în care funcţiile φ_i satisfăcând condiţia:

$$\varphi_i(\eta_j) = \delta_{ij}$$

sunt date de:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1);\quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\eta(1 + \eta);\quad \varphi_3 = (1 - \eta)(1 + \eta) \tag{3.3.53}$$



Nod	η	φ1	φ3	φ2
1	-1	1	0	0
3	0	0	1	0
2	1	0	0	1

Fig. 3.3.8

Vom avea aceeaşi ecuaţie discretizată:

$$c_i u_i = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} uq^* \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} qu^* \, d\Gamma$$

iar integralele de-a lungul elementelor Γ_j vor fi similare cu cele de la elementele liniare. Astfel, integralele pentru u vor fi de forma:

$$\int_{\Gamma_j} u(\eta) q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] q^* \, d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left[h_{ij}^1 h_{ij}^2 h_{ij}^3\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{3.3.54}$$

similar şi pentru integralele în q.

Evaluarea acestor integrale se va face numeric după ce în prealabil s-a exprimat elementul de arc $d\Gamma$ prin variabila η, ceea ce cere ca jacobianul transformării să fie $\neq 0$. Relaţiile de transformare sunt:

$$\int_{\Gamma_j} u(\eta) q^* \, d\Gamma = \int_{(1)}^{(2)} u(\eta) q^* |J| d\eta$$

şi (3.3.55)

$$\int_{\Gamma_j} q(\eta) u^* \, d\Gamma = \int_{(1)}^{(2)} q(\eta) u^* |J| d\eta$$

unde: $|J|$ este jacobianul transformării de coordonate efectuate $(d\Gamma = |J| d\eta)$.

De exemplu pentru o problemă bidimensională, jacobianul este:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} \Rightarrow d\Gamma = |J|d\eta$$

Este evident că pentru calculul lui $|J|$ este necesară cunoaşterea variaţiei pe frontieră a lui x_1 şi x_2 (sau y) în raport cu η. Aceasta se poate face scriind pe x_1 şi x_2 cu ajutorul funcţiilor de interpolare φ_i şi a **coordonatelor nodale** x_1^i **şi** x_2^i **în sistemul coordonate globale**, adică:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1 x_1^1 + \varphi_2 x_1^2 + \varphi_3 x_1^3 \\ x_2 = \varphi_1 x_2^1 + \varphi_2 x_2^2 + \varphi_3 x_2^3 \end{cases}$$

În ceea ce priveşte elementele de frontieră de ordin superior, ele sunt generalizări imediate. De exemplu, **elementele cubice** vor pretinde câte 4 noduri pe element (v. **Fig. 3.3.9**), funcţiile de interpolare având o **variaţie cubică**!

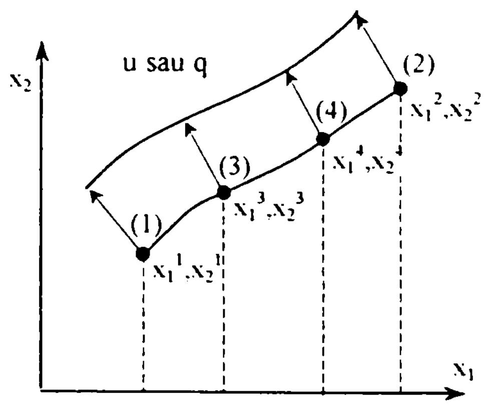


Fig. 3.3.9

$$\begin{cases} u(\eta) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \varphi_4 u_4 \\ q(\eta) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3 + \varphi_4 q_4 \end{cases}$$

unde:

$$\varphi_1 = \frac{1}{16}(1+\eta)\left[-10 + 9(\eta^2+1)\right]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{16}(1+\eta)\left[-10 + 9(\eta^2+1)\right]$$

$$\varphi_3 = \frac{9}{16}(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

$$\varphi_4 = \frac{9}{16}(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

Notă: Vom exemplifica modul în care se determină funcţiile de formă pentru un element cu 5 noduri, **care nu se găseşte de altfel în literatură**.

Utilizând coordonata adimensională $\eta = \frac{x}{l}$, unde l este lungimea elementului de frontieră considerat, funcţia de interpolare trebuie să fie un polinom de gradul 4 care trebuie să satisfacă condiţiile din tabelul alăturat:

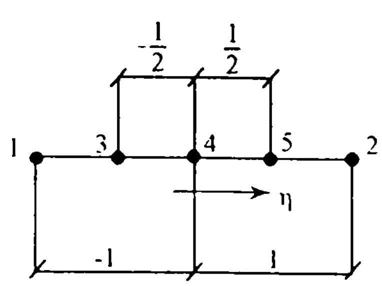


Fig. 3.3.10

Nod	η	φ_1	φ_3	φ_4	φ_5	φ_2
1	-1	1	0	0	0	0
3	-1/2	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	½	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0	1

$$\varphi_i(\eta) = a\eta^4 + b\eta^3 + c\eta^2 + d\eta + e$$

$\boxed{i=1}$

$$\varphi_1(\eta_1)=\varphi_1(-1)=1 \Rightarrow a-b+c-d+e=1$$

$$\varphi_1(\eta_3)=\varphi_1\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{16}a-\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}d+e=0$$

$$\varphi_1(\eta_4)=\varphi_1(0)=0 \Rightarrow e=0$$

$$\varphi_1(\eta_5)=\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{16}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}d+e=0$$

$$\varphi_1(\eta_2)=\varphi_1(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d+e=0$$

Rezolvarea este imediată şi se obţine:

$$\varphi_1=\frac{2}{3}\eta^4-\frac{2}{3}\eta^3-\frac{1}{6}\eta^2+\frac{1}{6}\eta=\frac{1}{6}\eta(\eta-1)(2\eta-1)(2\eta+1)$$

$\boxed{i=2}$

$$\varphi_2(\eta_1)=\varphi_2(-1)=0 \Rightarrow a-b+c-d+e=0$$

$$\varphi_2(\eta_3)=\varphi_2\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{16}a-\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}d+e=0$$

$$\varphi_2(\eta_4)=\varphi_2(0)=0 \Rightarrow e=0$$

$$\varphi_2(\eta_5)=\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{16}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}d+e=0$$

$$\varphi_2(\eta_2)=\varphi_2(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d+e=1$$

$$\Rightarrow \varphi_2=\frac{2}{3}\eta^4+\frac{2}{3}\eta^3-\frac{1}{6}\eta^2-\frac{1}{6}\eta=\frac{1}{6}\eta(\eta+1)(2\eta+1)(2\eta-1)$$

Procedeul se repetă pentru i =3,4,5 şi se obţine setul complet de funcţii formă:

$$\varphi_3=\frac{4}{3}\eta(1-2\eta)(\eta-1)(\eta+1)$$

$$\varphi_4=\frac{1}{12}(\eta-1)(\eta+1)(2\eta-1)(2\eta+3)$$

$$\varphi_5=\frac{4}{3}\eta\left(1-\eta^2\right)(1-2\eta)$$

3.3.3. Formularea directă pentru sistemul de ecuaţii fundamentale al (T.E.)

3.3.3.1. Cazul problemelor tridimensionale

Am arătat în Cap.2 că problema fundamentală a (T.E.) este descrisă complet de un sistem de 15 ecuaţii cu 15 necunoscute, destul de dificil şi incomod de utilizat. De aceea el se reformulează de obicei în două moduri distincte:

1") Se aleg ca necunoscute principale numai deplasările și se elimină prin operații simple celelalte necunoscute; se obține un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi, de trei ecuații cu trei necunoscute, numite ecuațiile lui Lamé (sau chiar ecuațiile lui Navier), care este de forma:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + F_j = 0 \tag{3.3.56}$$

2") Se aleg ca necunoscute principale numai tensiunile și se elimină celelalte necunoscute; se obține un sistem de 6 ecuații diferențiale cu 6 necunoscute numite ecuațiile lui Beltrami – Mitchell.

Ne vom ocupa în continuare numai de ecuația (3.3.56) care este extrem de convenabilă atunci când condițiile la limită atașate problemei sunt date în deplasări și au forma:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i + G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) n_j = p_i \tag{3.3.57}$$

unde n_j - sunt componentele vectorului unitar, normal pe frontiera corpului, $|\vec{n}| = 1$ (cosinușii directori ai normalei);

$p_i = \sigma_{ji} n_j$ - sunt componentele tensiunii totale pe un element de suprafață care trece prin punctul considerat, având normala $\vec{n}$.

Pentru obținerea ecuațiilor integrale pe frontieră în cazul general pe care l-am abordat, se pot aplica diverse metode:

- se poate pleca de la teorema reciprocității energiei de deformație a lui Betti;
- se poate pleca de la una din identitățile lui Green;
- se poate folosi metoda reziduurilor ponderate și identitatea lui Somigliana.

Fiindcă despre aceste lucruri am mai vorbit, vom folosi ultimul procedeu. În acest caz ecuația generală a reziduurilor ponderate se poate scrie sub forma:

$$\int_\Omega \left(\sigma_{jk,j} + F_k\right) u_k^* d\Omega = \int_{\Sigma_2} \left(p_k - \bar{p}_k\right) u_k^* d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \left(\bar{u}_k - u_k\right) p_k^* d\Sigma \tag{3.3.58}$$

Acestei ecuații i se atașează condițiile de frontieră:

- $p_i = \sigma_{ji} n_j = \bar{p}_i$ pe suprafața Σ_2 a frontierei, unde $\bar{p}_i$ sunt tensiuni date (cunoscute) pe frontieră;
- $u_i = \bar{u}_i$ pe suprafața Σ_1 a frontierei, unde $\bar{u}_i$ sunt deplasări cunoscute (date) pe Σ_1;
- u^* și p^* sunt funcții pondere, deplasări și tracțiuni, aparținând unui câmp pondere încă neprecizat căruia îi aparțin și tensorii simetrici σ_{jk}^* și ε_{jk}^* legați între ei prin aceleași ecuații și relații ca și σ_{jk}, ε_{jk}, u_k, p_k. (v. Cap.2).
- $p_k^* = n_j \sigma_{jk}^*$

Integrând prin părți de două ori prima componentă a integralei din membrul stâng, vom obține:

$$-\int_\Omega \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_\Omega F_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Sigma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Sigma - \int_{\Sigma_1} p_k u_k^* d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \left(\bar{u}_k - u_k\right) p_k^* d\Sigma \tag{3.3.59}$$

Vom accepta valabilitatea legii lui Hooke:

$$\sigma_{jk} = C_{jkli} \varepsilon_{li} \tag{3.3.60}$$

unde tensorul de elasticitate se bucură de proprietățile de simetrie:

$$C_{jkli} = C_{lijk} \tag{3.3.61}$$

Ținând cont și de teorema de reciprocitate:

$$\int_\Omega \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_\Omega \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* \tag{3.3.62}$$

relația (3.3.60) devine:

$$\int_{\Omega} \sigma^{*}_{jk,j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} F_k u^{*}_k d\Omega = -\int_{\Sigma_2} \overline{p}_k u^{*}_k d\Sigma - \int_{\Sigma_1} p_k u^{*}_k d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \overline{u}_k p^{*}_k d\Sigma + \int_{\Sigma_2} u_k p^{*}_k d\Sigma \qquad (3.3.63)$$

Deoarece forţele mecanice F_k sunt funcţii cunoscute, integala a doua din membrul stâng al relaţiei (3.3.63) nu introduce necunoscute sau dificultăţi suplimentare. În schimb prima integrală, care conţine deplasările necunoscute din domeniul Ω (funcţiile u_k) *trebuie eliminată*, ceea ce se realizează printr-o alegere convenabilă a funcţiilor câmpului pondere. De obicei pentru rezolvarea acestei probleme se folosesc două noţiuni noi: identitatea lui Somigliana şi problema Kelvin.

- **Identitatea lui Somigliana pentru deplasări**

$$u_i(\xi) = \int_{\Sigma} u^{*}_{ij}(\xi,x) p_j(x) d\Sigma(x) - \int_{\Sigma} p^{*}_{ij}(\xi,x) u_j(x) d\Sigma(x) + \int_{\Sigma} u^{*}_{ij}(\xi,x) F_j(x) d\Sigma(x) \qquad (3.3.64)$$

Dacă se cunosc deplasările şi tensiunile pe frontiera domeniului studiat precum şi forţele masice, relaţia (3.3.64) ne dă o reprezentare continuă a deplasărilor în orice punct $\xi \in \Omega$.

- **Problema Kelvin**

Vom considera că forţa volumică este reprezentată de o forţă egală cu unitatea care acţionează în punctul $\xi \in \Omega$ după fiecare dintre cele trei direcţii ortogonale date de vectorii $\vec{e}_j$:

$$F^{*}_j = \delta(x-\xi) e_j \qquad (3.3.65)$$

şi atunci soluţiile fundamentale luate ca funcţii pondere se obţin din ecuaţia (3.3.56) a lui Navier:

$$G u^{*}_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u^{*}_{k,kj} + \delta(x-\xi) e_j = 0 \qquad (3.3.66)$$

În privinţa soluţiilor fundamentale, trebuie precizat că există mai multe clase de astfel de soluţii, în metodologia adoptată vom considera numai soluţiile fundamentale ale lui Kelvin, considerând că domeniul Ω examinat de noi face parte dintr-un mediu infinit. În acest caz avem:

$$u^{*}_{ij}(\xi,x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}\cdot r_{,j}\right] \text{ - cazul tridimensional} \qquad (3.3.67)$$

$$u^{*}_{ij}(\xi,x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G}\left[\delta_{ij}(3-4\nu)\ln r - r_{,i}\cdot r_{,j}\right] \text{ - cazul bidimensional} \qquad (3.3.68)$$

$$p^{*}_{ij}(\xi,x) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^{\alpha}}\left\{\left[\delta_{ij}(1-2\nu) + \beta r_{,i}\cdot r_{,j}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_j - r_{,j}\eta_i)\right\} \qquad (3.3.69)$$

unde: $\alpha = 2$, $\beta = 3$ - pentru cazul tridimensional;

$\alpha = 1$, $\beta = 2$ - pentru cazul bidimensional.

S-a notat:

$r = r(\xi, x)$ distanţa dintre punctul fixat („punctul sursă") şi punctul curent x;

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad ; \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad \text{şi} \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} \qquad (3.3.70)$$

Pentru a obţine în sfârşit ecuaţiile integrale pe frontieră – punctul de plecare în M.E.Fr.- va fi suficient ca în identitatea lui Somigliana să facem pe ξ să tindă către un punct al frontierei. Se obţine:

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Sigma} p^{*}_{ij}(\xi,x) u_j(x) d\Sigma(x) = \int_{\Sigma} u^{*}_{ij}(\xi,x) p_j(x) d\Sigma(x) + \int_{\Omega} u^{*}_{ij}(\xi,x) F_j(x) d\Omega(x) \qquad (3.3.71)$$

unde:

$$c_{ij} = \left\{ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Sigma_\varepsilon} p^*_{ij}(\xi, x) d\Sigma(x) \right\} \tag{3.3.72}$$

Comentarii suplimentare se găsesc în [B36], [B72], [G1], [L6], [P34], [P50].

3.3.3.2. Cazul problemelor bidimensionale

Soluţia fundamentală se găseşte din ecuaţia:

$$\sigma^*_{jk,j} + \delta(\xi, x) e_j = 0 \qquad j = 1,2; \quad k = 1,2 \tag{3.3.73}$$

şi are o formă cunoscută din literatură. Pentru starea plană de deformaţie:

$$u^*_{lk} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \tag{3.3.74}$$

$$p^*_{lk} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu) r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{lk} + 2 r_{,l} r_{,k} \right] - (1-2\nu)(r_{,l} n_k - r_{,k} n_l) \right\} \tag{3.3.75}$$

unde u^*_{lk}, p^*_{lk} sunt respectiv deplasările şi tensiunile în direcţia k produse de o forţă unitară acţionând în direcţia l. Mărimile u^*_{lk}, p^*_{lk} se pot scrie pe componente sub formă de matrici:

$$u^* = \begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} \\ u^*_{21} & u^*_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad p^* = \begin{bmatrix} p^*_{11} & p^*_{12} \\ p^*_{21} & p^*_{22} \end{bmatrix} \tag{3.3.76}$$

În mod cunoscut deplasările şi tensiunile pe graniţă ca şi forţele de volum se pot scrie ca vectori coloană:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.77}$$

Rezultatele sunt similare cu cele de la cazul tridimensional, numai că aici integralele de suprafaţă se reduc la integrale de contur, iar integralele de volum în care apar forţele de masă se reduc la integrale pe suprafaţă.

3.3.4. Prezentare a programului de element de frontieră BEASY 8.0

3.3.4.1. Caracteristici generale

Versiunea 8.0 a programului BEASY, care aduce multe noutăţi şi îmbunătăţiri faţă de versiunea anterioară, a fost lansat pe piaţă în iunie 2002 de către firma Computational Mechanics Inc. din SUA.

Făcând o comparaţie cu versiunile anterioare, BEASY 8.0 dă timpi de soluţionare mult mai buni a problemelor complexe, datorită îmbunătăţirii tehnologiei BEASY de rezolvare a ecuaţiilor. De asemenea BEASY poate rula acum pe orice versiune de sistem de operare Windows sau UNIX, inclusiv Windows NT, XP, incluzând de asemenea procesoare Pentium şi Athlon şi punând la dispoziţie o documentaţie electronică de aproape 10000 de pagini.

Pentru a rula bine, programul BEASY necesită un monitor color de înaltă rezoluţie, deoarece oferă şi o parte grafică foarte bine pusă la punct; de asemenea necesită un minim de 16MB RAM, cu toate că ideal este să existe câteva sute de MB memorie RAM pentru a îmbunătăţi performanţele în cazul modelelor complexe. Codul aplicaţiei BEASY împreună cu fişierele de resurse ataşate ocupă aproximativ 45MB. Alţi 77MB ocupă programele demonstrative şi exemplele, iar fişierele documentaţie necesită încă 206MB de memorie pe disc.

3.3.4.2. Etapele de realizare a unui model BEASY

În continuare vor fi prezentate pe scurt **etapele de realizare a unui model utilizând BEASY** sub Windows. Unele din aceste etape (de exemplu 3, 4, 5, 6) pot fi însă omise, funcţie de modelul concret care se doreşte a fi realizat.

1) Începerea unui nou model

- se selectează comanda **New** din meniul **File** (**Fig.3.3.4.1**) şi din fereastra care apare (**Fig.3.3.4.2**) se selectează tipul de geometrie dorit;

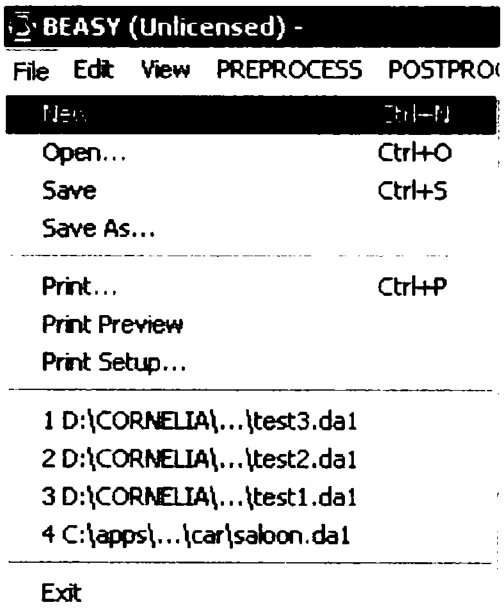


Fig. 3.3.4.1

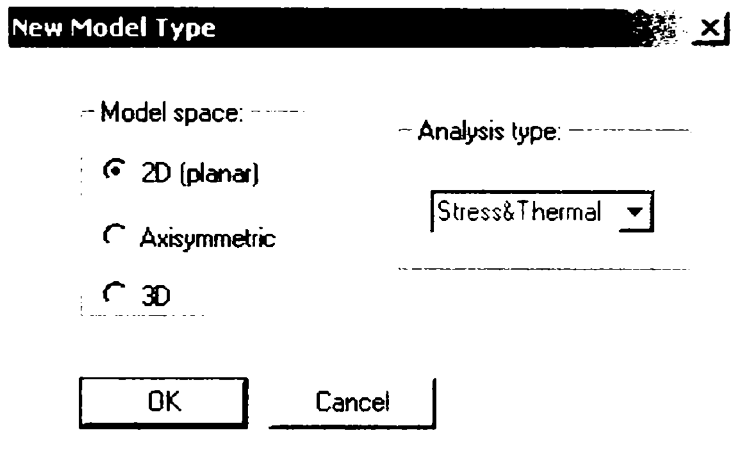


Fig. 3.3.4.2

- este util ca în această etapă să se salveze numele modelului utilizând comanda **Save** sau **Save As** din meniul **File**; oricum înainte de a trece la faza de rezolvare (analiză) a modelului (notată cu **8)**), salvarea modelului este obligatorie; în caz că salvarea se face doar după faza de analiză sau de vizualizare a rezultatelor, nu vor mai putea fi aduse modificări ulterioare modelului în ceea ce priveşte crearea modelului (geometria sa, proprietăţile de material, încărcarea sa).

2) Crearea modelului (faza de preprocesare)

- comenzile de generare a modelului sunt conţinute în meniul **PREPROCESS** (**Fig.3.3.4.3**).

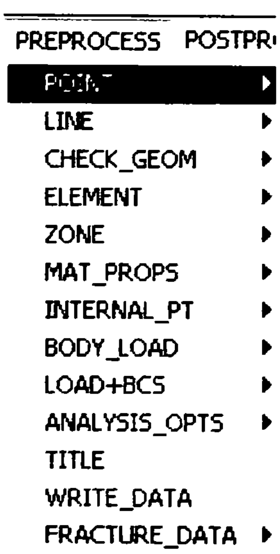


Fig. 3.3.4.3.

Pentru crearea modelului va trebui în mod simplu să urmăm opţiunile din meniul din figura alăturată pentru a crea puncte, linii, elemente, zone, a defini constantele de material, punctele interioare, condiţiile de încărcare şi de graniţă etc.

Totuşi, ordinea de definire a entităţilor de mai sus nu este impusă, ci poate fi aleasă după dorinţă.

3) Redesenarea modelului

După fiecare modificare modelul poate fi redesenat utilizând comanda **REDRAW** din meniul **Global**.

4) Rotiri, măriri/micşorări, zooming, panoramare

Modelul poate fi rotit dinamic, translatat panoramic etc., utilizând uneltele din panoul de transformări. Pentru a afişa acest panou se selectează comanda **Transformations** din meniul **View**(**Fig.3.3.4.4**) şi apare fereastra din **Fig.3.3.4.5.**

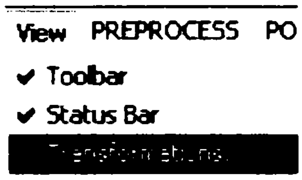


Fig. 3.3.4.4

De exemplu, pentru a mări doar o anumită parte a modelului se face uz alternativ de opțiunile **Zoom** și **Pan**, selectându-se cu mouse-ul zona de mărit (când e activă comanda **Zoom**), respectiv trăgând cu mouse-ul pentru o panoramare adecvată (când e activă comanda **Pan**). Sau se poate roti cu mouse-ul modelul, atunci când e activă opțiunea Rotate.

Utilizând iconurile din a doua jumătate a ferestrei **View Transform** se pot alege vederi specifice; de exemplu se poate face ca modelul să se potrivească mărimii ecranului, dacă se dă click pe icon-ul **Fit screen** (ultimul icon din panou)

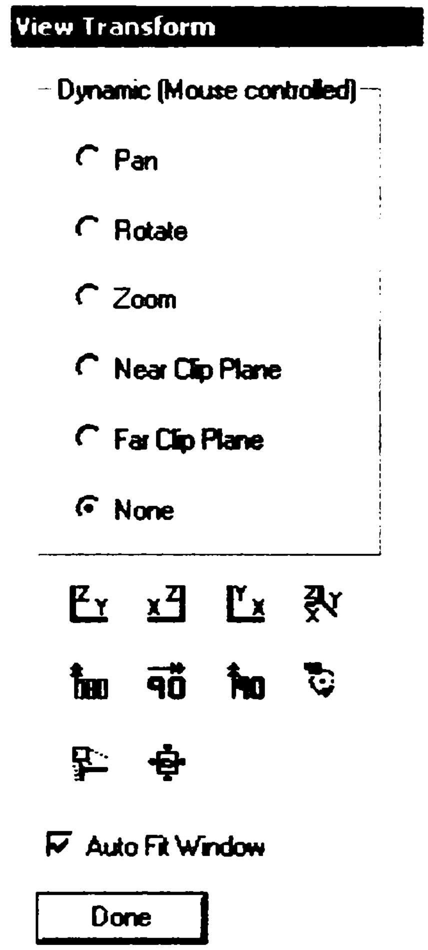


Fig. 3.3.4.5

Comanda **Appearance** din meniul **View** controlează care entități sunt afișate (**Fig.3.3.4.6**).

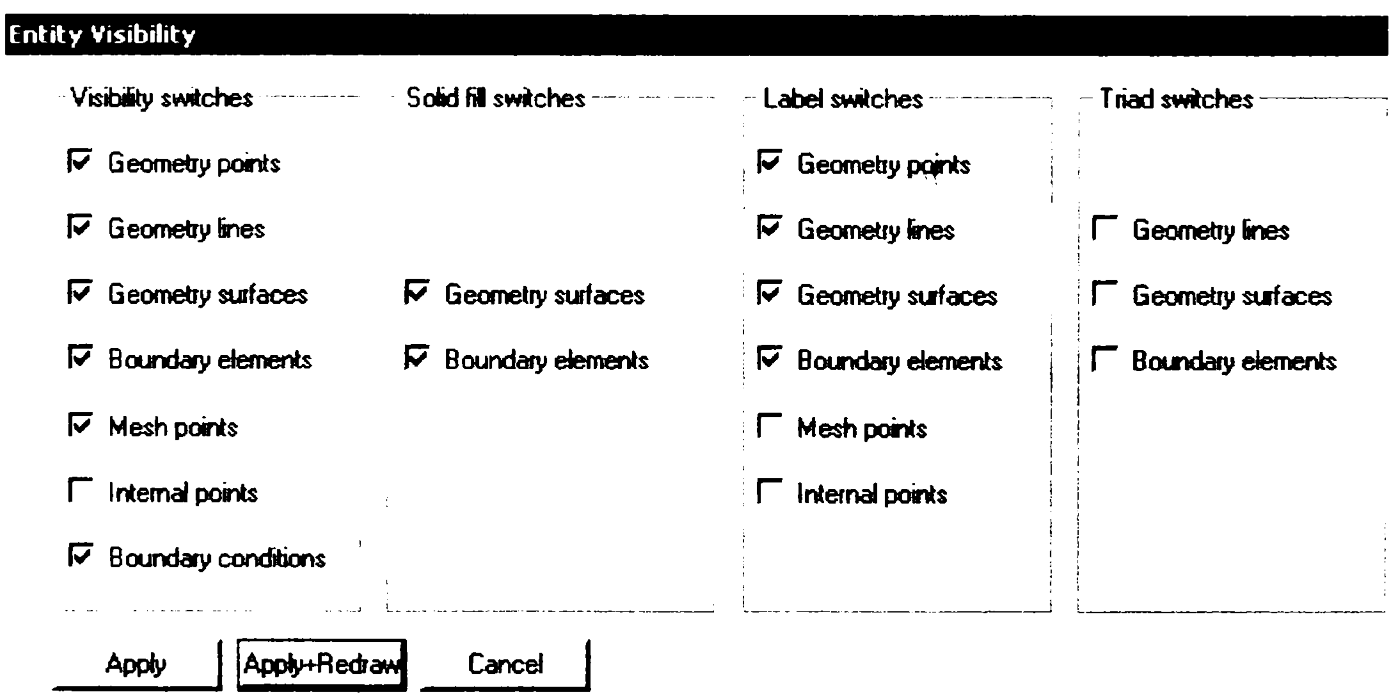


Fig.3.3.4.6

Inițial, pentru a vizualiza un model complicat, este recomandat ca toate entitățile să fie deselectate cu excepția elementelor, liniilor și suprafețelor. Când pe desenul modelului apar și punctele interne, și cele de discretizare, și toate etichetele tuturor entităților, desenul devine prea încărcat și astfel prea greoi și dificil de urmărit.

Observație: Pentru a vedea efectul oricărei modificări făcute setărilor pe această formă va trebui să se utilizeze comanda **REDRAW** din meniul **Global**.

5) Utilizarea mouse-ului pentru a manipula puncte, linii sau conexiuni

Există posibilitatea de a introduce/manipula date prin intermediul tastaturii sau utilizând mouse-ul, implicit fiind modul de lucru cu tastatura. Comutarea între cele două moduri de lucru se face prin intermediul comenzii **DATA_SOURCE** din meniul **Global**.

6) Crearea grupurilor

Grupurile pot fi utilizate pentru a simplifica informația afișată pe ecran. Meniul **GROUP** furnizează comenzi pentru a crea grupuri de elemente, linii de conectare etc. Grupul poate fi apoi selectat în vederea afișării, când se construiește modelul sau se afișează rezultatele

7) Salvarea modelului

- modelul se salvează utilizând comenzile **Save** sau **Save As** (când se dorește salvarea sub o altă denumire) din meniul **File**.

8) Rezolvarea modelului (faza de analiză)

Odată ce modelul este complet trebuie creat fișierul de date utilizând comanda **Write Data** din meniul **Interface**. Apoi se activează rezolvitorul utilizând comanda **Solve...** din meniul **Solve**. Această etapă creează un fișier având numele modelului dar extensia **.log**, fișier care conține mesajele generate de rezolvitor în urma analizei. Acest fișier, de tip text, se poate vizualiza cu comanda **View LogFile** din meniul **Solve**, și el conține eventualele avertizări, mesaje de eroare sau erorile fatale care au dus la eventuala întrerupere a rezolvării problemei.

9) Vizualizarea rezultatelor (faza de postprocesare)

Având rezolvată problema, se pot vizualiza rezultatele. Pentru a „citi" rezultatele se selectează comanda **READ_SOL'N** din meniul **INTERFACE**. Apoi se pot afișa rezultatele care interesează utilizând meniul **POSTPROCESS** (**Fig. 3.3.4.7**).

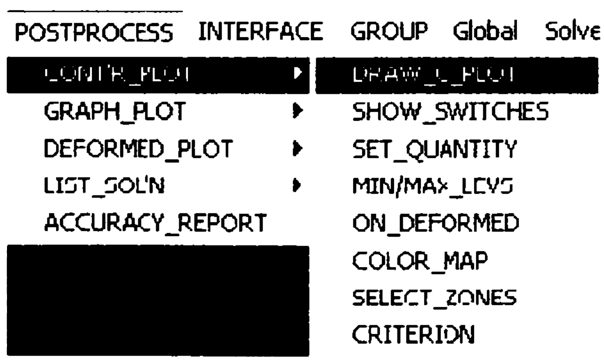


Fig. 3.3.4.7.

3.3.4.3. Câteva noțiuni fundamentale în BEASY

A. Elementele de frontieră

Elementele trebuie plasate pe toate frontierele externe și pe toate suprafețele de interfață sau liniile între subregiunile modelului. Acest paragraf ia în discuție diferitele tipuri de elemente disponibile în sistemul BEASY. Ca și în alte tehnici de analiză bazate pe elemente, este necesar a avea mai multe noduri sau elemente în părțile modelului în care condițiile și geometria se modifică rapid. De exemplu, într-o regiune de concentrație a tensiunilor elementele trebuie să fie mici. Elementele pot fi apoi gradate la dimensiuni mai mari în părți ale modelului în care comportarea este mai stabilă.

Numărul de elemente care ar trebui utilizate este o chestiune care necesită experiență din partea utilizatzorului programului BEASY. Această alegere poate fi însă ghidată de către estimatorii de eroare furnizați de BEASY. Fiecare problemă este diferită, iar utilizatorii pot, având un pic de experiență, să decidă câte elemente să utilizeze pentru a avea un bilanț avantajos atât în ceea ce priveşte precizia, cât şi timpul de execuție.

B. Tipuri de elemente pentru probleme 2D şi axisimetrice

Pentru probleme 2D şi axisimetrice, elementele de frontieră sunt linii. Acestea pot fi curbe. Fiecare element reprezintă comportarea de potențial sau tensiune a unei mici secțiuni a frontierei. Cu toate că toate elementele 2D şi axisimetrice sunt la fel în această privință există un număr de tipuri de elemente diferite, dintre care utilizatorul poate alege. Toate elementele linie au trei puncte de discretizare rețea (în limba engleză „*mesh points*"), adică cele trei puncte geometrice definesc poziția şi curbura elementului linie. Deoarece sunt trei puncte de discretizare rețea, geometria elementului poate fi pătratică. Acest lucru este adevărat chiar şi pentru elementele de ordin mai redus (de exemplu liniare) – ele totuşi au trei puncte de discretizare rețea astfel încât geometria poate fi curbă. Fiecare punct de discretizare rețea are un număr unic de identificare şi poziția sa este definită prin coordonatele x,y,z în fişierul de date BEASY (*.DAT), care este citit în faza de analiza BEASY.

Fiecare element are de asemenea un număr de noduri. Acestea sunt pozițiile în care se calculează valoarea variabilelor problemei (de exemplu deplasarea după direcția x, temperatura, presiunea acustică). Numărul de noduri a unui element depinde de ordinul elementului. De exemplu un element liniar va avea două noduri, în apropierea fiecărui capăt al elementului. Valorile variabilelor în orice punct pe un element liniar sunt găsite prin interpolare liniară între aceste două puncte. Poziționarea nodală este calculată intern de către analiza BEASY. Pozițiile nodale sunt difinite de continuitatea elementelor. În majoritatea cazurilor nodurile şi punctele de rețea de discretizare vor avea aceeaşi poziție, dar în anumite circumstanțe unde există o discontinuitate (de exemplu un vârf de fisură) locul lor va fi diferit.

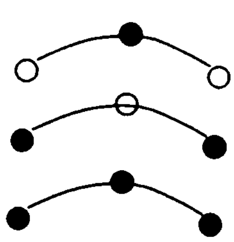
Nodurile nu au numere de identificare unice, dar sunt referite printr-un sistem de numerotare local pentru fiecare element.

De exemplu un element linie pătratic are 3 noduri care sunt identificate simplu ca nodurile 1,2 şi 3 pentru un element.

Nodurile nu apar în fişierul *.DAT. Tipurile de elemente 2D sunt cele prezentate în tabelul de mai jos (**Tab. 3.3.1.1**).

Elemente linie 2D şi axisimetrice în BEASY

Ordinul elementului	Numele în fişierul *.DAT	Numărul de puncte de discretizare rețea	Numărul de noduri
Constant	L1	3	1
Liniar	L2	3	2
Pătratic	L3	3	3



constant ● nod

liniar ○ punct de discretizare rețea

pătratic

Tab. 3.3.1.1.

Utilizatorul trebuie, în mod normal, să aleagă doar ordinul elementului, adică dacă elementul este constant, liniar sau pătratic. (Alegerea cu privire la continuitatea sau discontinuitatea unui nod o face BEASY automat.)

C. Zone

Zonele sunt grupuri de elemente care pot fi considerate ca substructuri ale componentei. Toate problemele vor avea minim o zonă. Zonele sunt separate de elementele de interfaţă. Acestea sunt create în exact acelaşi mod ca şi elementele de frontieră, dar sunt în interiorul materialului. De definiţia zonelor dintr-un model se ţine cont în etapa de preprocesare în construirea unui model.

În ceea ce priveşte modelul de analiză, informaţia de zonă conţinută în fişierul *.DAT defineşte:

- elementele care aparţin zonei
- eventuala simetrie care se aplică zonei
- eventualele puncte interne din zonă
- proprietăţile de material ale zonei
- tipul zonei (adică infinită, semi-infinită, sau complet mărginită)

Fiecare zonă este tratată ca un model de element de frontieră de-sine-stătător pentru prima parte a analizei. Pentru fiecare zonă se generează un set de ecuaţii care descriu complet comportarea zonei. Aceste seturi de ecuaţii separate sunt îmbinate înainte de a fi rezolvate pentru a impune cuplajul între zone. Cuplajul poate lua o varietate de forme, depinzând de condiţiile de interfaţă care au fost aplicate.

Câteva **motive pentru a împărţi un model în zone**:

1. modelul constă din mai multe materiale diferite;

Fiecare zonă poate să aibe doar un singur set de proprietăţi de material. Pentru a face calculul unor probleme ce conţin mai multe materiale, va fi necesar să se definească mai multe zone. Această caracteristică s-a utilizat cu succes şi în cazul analizei problemelor cu anumite neliniarităţi în proprietăţile lor de material. Un exemplu tipic este în proiectarea unor motoare sau altor componente care operează la temperaturi înalte. Pe un domeniu larg de variaţie a temperaturii, efectul temperaturii asupra modulului lui Young poate deveni considerabil în comportamentul tensiunii componentei. Programul BEASY suportă unele proprietăţi de material dependente de temperatură şi acest lucru va permite, de exemplu, ca modulul Young (E) să fie modificat la diferite valori în diferite zone ale modelului, depinzând de temperatura acelei zone a modelului. Temperatura fiecărei zone a modelulu poate fi sau predefinită în analiză, sau calculată utilizând o analiză de potenţial BEASY. Atunci valoarea adecvată a modulului lui Young poate fi utilizată pentru fiecare zonă a modelului.

2. modelul constă din regiuni de grosimi diferite;

În analiza 2D, grosimea zonei este definită ca o proprietate de material, grosimea fiind o constantă pentru întreaga zonă. Astfel, problemele care implică grosimi diferite pot fi simulate prin „spargerea" adecvată a modelulu într-un număr corespunzător de zone.

3. geometria problemei este lungă şi subţire;

Rezultatele elementelor de frontieră încep să se deterioreze în ceea ce priveşte calitatea atunci când raportul lăţime/înălţime a zonelor din model devine excesiv de mare. Pentru a evita acest tip de problemă numerică, utilizatorii sunt sfătuiţi să se asigure de faptul că zonele lor nu au raportul lăţime/înălţime mai mari de 7/1. Dacă părţi ale problemei sunt lungi şi subţiri s-ar putea să fie necesar să se „spargă" modelul în zone cu un raport lăţime/înălţime mai acceptabil.

4. pentru a evita existenţa elementelor apropiate spate-n-spate în aceiaşi zonă;

Din motive de calcul numeric nu este de dorit ca elementele de frontieră să stea faţă-n faţă vizavi de un mic gol dacă ele sunt în aceiaşi zonă. Această problemă poate fi de obicei foarte uşor depăşită prin crearea de zone. Să considerăm ca exemplu un model BEASY pentru o placă dreptunghiulară cu o crestătură ascuțită. Cu toate că acesta este un model de element de frontieră valid, el ar putea produce unele inadverențe locale datorită elementelor aflate pe ambele părți ale fisurii de crestătură și care se găsesc față-n față vizavi de un foarte mic gol. Modelul va trebui să utilizeze împărțirea în zone pentru a evita problema. Există și probleme la care grosimea golului mic se reduce la zero. Acest lucru se întâmplă adesea în aplicații de rupere, în care fisurile linie sunt adesea modelate. În aceste cazuri elementele ce modelează cele două suprafețe ale fisurii se află actualmente una peste alta. Cum condițiile de graniță acționează în sensul de a deschide fisura, nu va fi nevoie să se utilizeze elemente de contact neliniare, ci elemente de frontieră linie normale vor fi suficiente. Dacă problema nu este tratată ca o problemă bi-zonală, faptul că două elemente din aceeași zonă ocupă aceeași locație va cauza probleme grave, și aproape sigur programul se va opri din execuție înainte de vreme. Dacă modelul se va „sparge" în două zone, problema va fi complet rezolvată.

5. **pentru a beneficia de avantajul facilității de ștergere a unor zone în programul BEASY;**

Programul BEASY permite ca anumite zone să fie șterse din model. Această facilitate de ștergere zonă permite ca o analiză de tensiune să fie efectuată pe o *parte* a problemei pentru care s-a efectuat o analiză termică. Privind la modelul unui cilindru izolat putem observa că, cu toate că este esențial ca stratul izolant să fie modelat pentru a obține distribuția termică corectă, aceasta însă nu va juca nici un rol în determinarea tensiunilor termice care apar în cilindru. Astfel, dacă materialul izolant este modelat în analiza de tensiune, aceasta va conduce la un timp de calcul mai mare decât este necesar. Acest lucru este evitat în mod simplu dând comanda prin programul BEASY ca zona care corespunde stratului izolant să nu fie inclusă atunci când se efectuează analiza de tensiune.

6. **pentru a aplica o condiție de interfață ca de ex. un resort sau un gol inițial;**

Condițiile de interfață sunt simple condiții de frontieră care sunt aplicate elementelor pe interfețele zonelor. Dacă există vreo caracteristică de proiectare interioară materialului, atunci ar putea fi eficient să se „spargă" modelul în zone, pur și simplu pentru a crea un element într-o locație particulară adecvat pentru aplicarea unei condiții de interfață pentru modelarea caracteristicii. Un exemplu ar putea fi în proiectarea unei probleme de rotor de turbină. În acest exemplu există o conductă de răcire la latura de ieșire a paletei de turbină. În timp ce aceasta ar putea fi modelată ca o sursă de rezistență negativă, sursa linie poate primi doar o condiție de flux prescrisă, în timp ce unui element de interfață i se poate da o condiție de convecție. Astfel, este foarte eficient pentru această problemă a „sparge" modelul în zone pentru a aplica această condiție de interfață. (De notat faptul că acest model este de dorit a se „sparge" în zone și din motive geometrice).

7. **pentru a reduce timpul de procesare și de memorare pe disc pentru probleme complexe.**

Deoarece crearea de mai multe zone pentru un model BEASY adaugă elemente de interfață la model, și în consecință adaugă grade de libertate modelului, cineva ar putea gândi că acest lucru ar mări timpul de execuție și ar cere un spațiu mai mare de memorare. Însă practic se întâmplă exact opusul. O caracteristică utilă în „spargerea" unui model în zone este faptul că, în general, timpul de procesare necesitat de BEASY pentru a analiza problema se va reduce. De asemenea și spațiul de memorare pe disc se va micșora considerabil. Motivele pentru acest fapt sunt că matricile elementelor de frontieră se formează zonă cu zonă, astfel încât pentru fiecare zonă se formează un set de ecuații care descriu comportarea zonei ca și cum n-ar fi cuplată cu celelalte zone (astfel se explică cum funcționează facilitatea de ștergere a zonelor). Spațiul de memorare necesitat pentru a păstra în memorie matricile de zonă este mai mic decât dacă problema ar fi rezolvată ca fiind o singură zonă. În formarea matricilor de elemente de frontieră, sunt efectuate integrări între *fiecare pereche* de elemente, cu scopul de a calcula influenţa unui element asupra altuia. Astfel numărul de operaţii de calcul necesitate pentru a efectua aceste integrări pentru o zonă este proporţională cu pătratul numărului de elemente din zonă. Să considerăm de exemplu un model uni-zonal având 10 elemente. Timpul de procesare al unităţii centrale pentru a efectua integrările pe această zonă este de 100 de unităţi. Să spargem acum modelul în două zone. Deoarece prin aceasta se adaugă elemente de interfaţă, să presupunem că acum fiecare zonă constă din 6 elemente. Pentru fiecare zonă timpul de procesare al unităţii centrale va fi de 36 de unităţi, rezultând un total de 72 de unităţi de timp de procesare. S-a realizat deci o economie de timp de 28%. Astfel, împărţirea în zone din acest motiv este foarte importantă pentru modele de tensiune mari 3D.

D. Simetria

Simetria este definită ca proprietate a zonei. Utilizarea simetriei poate să reducă foarte mult atât timpul de pregătire a datelor cât şi timpul necesar execuţiei analizei BEASY. Simetria se poate utiliza dacă:

- pentru probleme 3D, geometria este simetrică cu privire la unul sau mai multe din planele de coordonate x=0, y=0 şi z=0;
- pentru probleme 2D, geometria este simetrică cu privire la unul sau mai multe din planele de cordonate x=0 şi y=0;
- pentru probleme axisimetrice, geometria este simetrică cu privire la planul de coordonate z=0;
- încărcarea este de asemenea simetrică;

În aceste cazuri doar 1/2, 1/4 sau 1/8 din geometrie trebuie definită (depinzând de numărul de plane de simetrie utilizat). În plus, planul de simetrie *nu ar trebui definit cu elemente.* Astfel nu este nevoie de elemente linie (şi elemente de suprafaţă în 3D) pe planele de simetrie.

Dacă există simetrie, toate coordonatele trebuie să fie *pozitive*. Faptul că simetria poate fi definită doar în jurul planelor de coordonate x=0, y=0 şi z=0 trebuie avut în vedere la începutul creării geometriei modelului, pentru că atunci trebuie decis unde se află originea şi care direcţii ale modelului vor fi reprezentate prin x, y, şi z.

Modelele axisimetrice pot avea doar o simetrie în jurul planului z=0. Orice altă simetrie nu-şi are sensul într-un sistem de coordonate (r, θ, z). Modelele 3D pot avea până la 3 plane de simetrie. Pentru problemele 3D de tensiune este posibil a se defini o condiţie *antisimetrică*, în care geometria este total simetrică, dar încărcările sunt oglindite în jurul planului de simetrie intervenind însă direcţia lor. Această condiţie e utilă pentru analiza unor probleme de torsiune şi de încovoiere.

Definirea simetriei în BEASY se face *implicit*, adică atunci când nu sunt definite elemente în planul simetric şi când programului BEASY i se spune că problema e simetrică.

Totuşi, se permite şi a defini *explicit* simetria, definind elemente pe planul de simetrie şi aplicând condiţii de frontieră de tip deplasare acelor elemente. În acest caz utilizatorul *nu* trebuie să spună programului BEASY că problema e simetrică, şi problema trebuie tratată în acelaşi fel ca un model nesimetric cu un set specific de condiţii de graniţă. Simetria este simulată utilizând condiţii de graniţă pe acele elemente (de exemplu într-o analiză de tensiuni se utilizează impunerea deplasării normale nule). E bine a se utiliza această simetrie „explicită" atunci când ar implica adăugarea doar a unui mic număr de elemente în planul de simetrie în comparaţie cu numărul de elemente din restul modelului. Acesta deoarece definirea simetriei implicite a programului BEASY cauzează unele calcule adiţionale şi deci timp de execuţie sumplimentar.

E. Punctele interne

Acestea sunt puncte care se află în interiorul materialului care se analizează, puncte în care BEASY găseşte rezultatele de potenţial sau tensiuni, de exemplu la sfârşitul analizei efectuate. Ele sunt entități de zonă deoarece aparțin zonei în care au fost localizate fizic. Ele sunt utilizate din două motive generale:

- pentru a găsi rezultatele BEASY într-un anumit punct sau linie de puncte în interiorul materialului. Acest mod de utilizare al punctelor interne permite utilizatorului să investigheze comportarea internă a componentelor fără a fi asaltat cu informații din toate părțile modelului.
- Pentru a face graficele de contur cu rezultate mai netede și mai precise pentru aplicațiile 2D și cele axisimetrice. În acest scop este indicat a împrăștia câteva puncte interne în regiune, concentrându-le în zonele cu o foarte mare variație a rezultatelor.

Observație: Este foarte important ca punctele interne să nu fie plasate pe frontieră. Ele nu trebuie plasate de asemenea nici pe elemente de interfață. Totuși, ele pot fi definite aproape de frontieră. Trebuie avut în vedere că punctele interne sunt proprietăți de zonă. Dacă un punct intern nu se află efectiv în zona în care este definit, atunci se vor produce rezultate incorecte pentru acel punct.

F. Reguli cu privire la condițiile de graniță

Prima zonă (aceasta fiind prima zonă creată, care nu este în mod necesar cea cu numărul de identificare 1) trebuie întotdeauna să aibe impuse condiții care să împiedice mișcarea de solid rigid. Acest lucru înseamnă că pentru prima zonă:

- într-o analiză de transfer de căldură trebuie dată cel puțin o valoare de potențial sau o condiție convectivă. Nu este suficient să dăm doar condiții de frontieră de densitate a fluxului, deoarece atunci vor fi un număr infinit de soluții pentru acea problemă.
- într-o analiză de tensiune, modelul nu are voie să fie liber să se miște în nici o direcție. Astfel, pentru un model axisimetric, zona trebuie restricționată pe direcția z, un model 2D trebuie restricționat pe direcția x și y și un model 3D trebuie restricționat pe direcțiile x, y și z. Aceste restricții trebuie aplicate chiar dacă nu este nici o încărcare în acea direcție, și pot fi aplicate utilizând fie condiții de deplasări, fie condiții de arcuire elastică.

Dacă modelul are un plan de simetrie, acest lucru va furniza o condiție în una din direcțiile de coordonate, deoarece mișcarea de solid rigid nu poate avea loc perpenticular pe planul de simetrie. În acest caz nu este necesar a se mai da nici o altă restricție în această direcție. O situație similară există pentru plane de antisimetrie, cu excepția faptului că aici deplasarea nu poate avea loc paralel cu planul. (A se observa de asemenea faptul că pentru antisimetrie nu este nici o condiție în direcția perpendiculară pe plan.) În plus, este de asemenea necesar a se verifica faptul ca modelul să nu sufere o rotație în jurul unei axe oarecare. BEASY efectuează întotdeauna o verificare pentru a determina dacă există o astfel de rotație, și este posibil să apară mesaje de avertizare cu privire la efectele de solid rigid în fișierul *.log*, generat în urma etapei de analiză BEASY (inițiată de comanda **Solve...** din meniul **Solve**).

3.3.4.4. Exemplu de calcul BEASY pentru placa cu gaură circulară

În continuare voi prezenta în detaliu rezolvarea cu programul BEASY a unei platbenzi dreptunghiulare având în centru un orificiu circular de diametru $2a$, platbandă solicitată simetric la tracțiune axială de către o forță concentrată F (este situația problemei test nr.I, numit, în cazul plăcilor infinite "problema Kirsch").

În mod concret voi considera următoarea geometrie (**Fig. 3.3.4.8**), care va fi analizată și fotoelastic în capitolul 5, §5.6.2. - cazul 2:

- grosimea plăcii: 6 mm
- lățimea h= 70 mm
- lungimea l= 212 mm
- distanța dintre punctele de aplicație a forței d=188 mm
- modulul de elasticitate longitudinală E=2850 N/mm^2

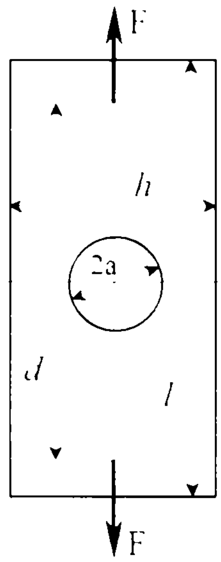


Fig. 3.3.4.8

- coeficientul lui Poisson $\nu = 0.33$
- forța de tracțiune $F = 300$ N (cazul apariției franjei a 2-a)
- diametrul găurii $2a = 35$ mm

Pentru a descrie această geometrie, care este simetrică atât față de axa Ox cât și față de axa Oy, este suficient a crea în BEASY un model pentru un sfert din această placă, utilizând simetria explicită.

Faza de preprocesare se va începe cu definirea coordonatelor punctelor pentru sfertul de placă, conform cu **Fig. 3.3.4.9.**, utilizând comanda **PREPROCESS → POINT → POSITION** și introducând de la tastatură coordonatele x și y ale fiecărui punct.

Imediat după definirea punctelor se poate trece la legarea acestora prin linii și respectiv arc de cerc, utilizând comenzile **PREPROCESS → LINE → END_PTS** (și introducând pentru fiecare linie identificatorul punctului de început și identificatorul punctului de sfârșit de linie), respectiv comanda **PREPROCESS → LINE → CIRCULAR_ARC** (și introducând pe lângă cei doi identificatori ai punctelor de început și sfârșit de arc și identificatorul punctului care este centrul cercului din care face parte arcul).

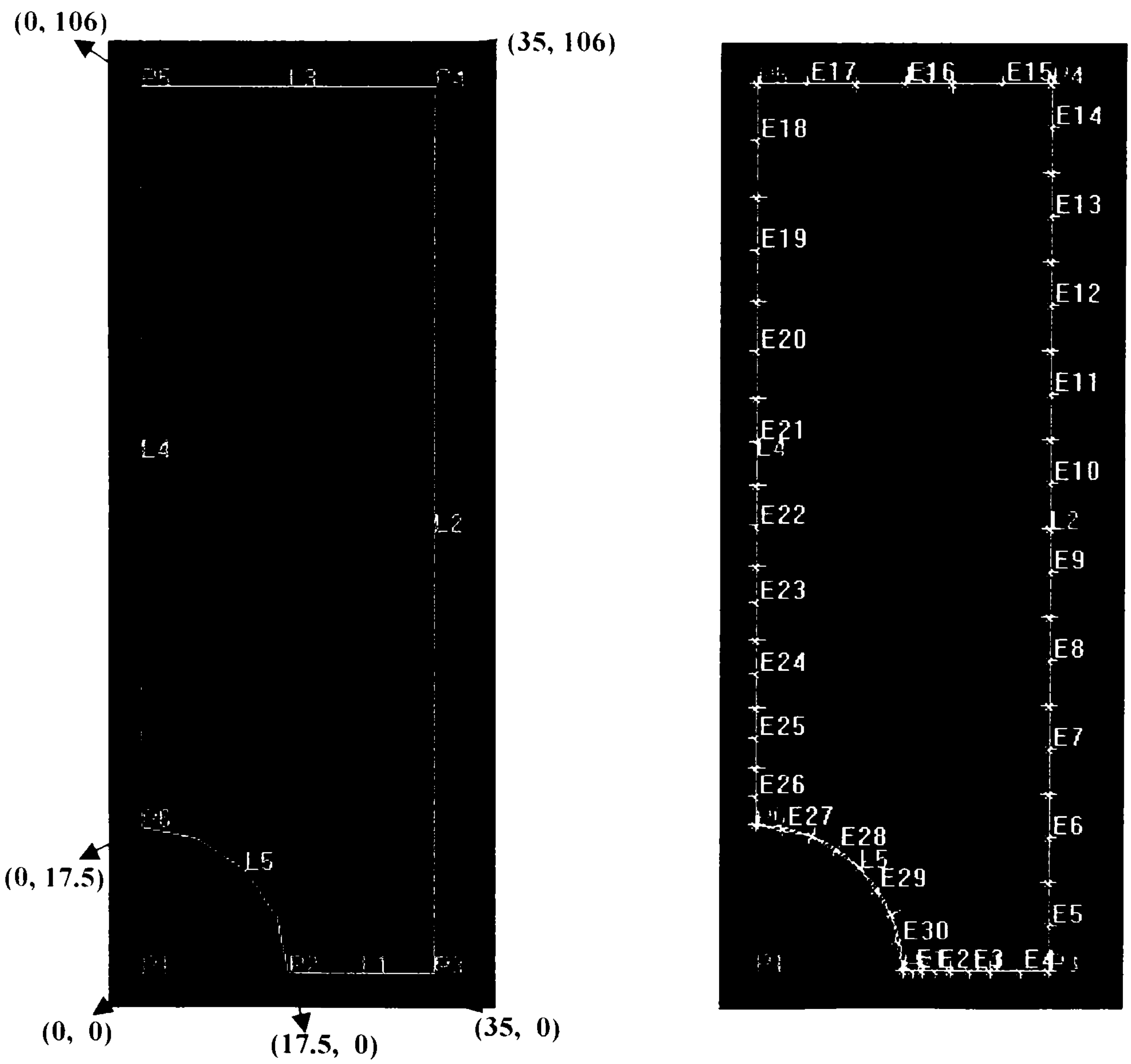


Fig. 3.3.4.9

Fig.3.3.4.10

Observație: Este foarte important ca atunci când se definesc liniile ele să aibă ca sens de parcurgere (punct de început → punct de sfârșit) acel sens în care în partea stângă a liniei materialul este plin (aparține modelului), iar în partea dreaptă a liniei nu este material. Aceasta în cazul în care liniile sunt linii de frontieră, și nu doar linii care să despartă între ele două zone ale aceluiași model. În acest ultim caz vor trebui definite liniile externe și cele interne materialului cu comenzile **PREPROCESS → ZONE → OUTWARD_LINE** respectiv **PREPROCESS → ZONE → INWARD_LINE**.

Pasul următor îl constituie discretizarea frontierei în elemente de frontieră. Aceasta se face cu ajutorul comenzii **PREPROCESS → ELEMENT → MANUAL_MESH**. Deoarece este indicat ca în zonele critice, cu concentratori de tensiune sau cu schimbări bruște ale geometriei, să se aleagă elemente de frontieră mai mici, iar pentru restul modelului elemente de frontieră de dimensiuni mai mari (v. **Fig. 3.3.4.10**), s-a ales ca pe liniile L2 și L3 și L5 să se definească elemente de frontieră de lungime constantă, (dând pentru fiecare linie identificatorul ei și numărul de elemente egale în care să se împarte respectiva linie) și pentru L1 și L4 să se definească elemente de frontieră cu lungime variabilă, astfel:

1 –204
2 10
3 3
4 209
5 4

În codificarea de mai sus s-a arătat modul de introducere de la tastatură a datelor necesare discretizării celor cinci linii, L1, L2, ..., L5. Primul număr reprezintă identificatorul linei (1, 2, 3, 4 sau 5), iar cel de-al doilea, dacă este format din maxim două cifre, reprezintă numărul de elemente de frontieră de dimensiune egală în care să fie discretizată linia, respectiv dacă acest număr conține mai mult de două cifre atunci:

-ultimele două cifre vor indica numărul de elemente în care să fie discretizată linia;

-prima/primele cifre reprezintă de câte ori primul element al liniei să fie mai mare decât ultimul element al liniei – dacă numărul e pozitiv, respectiv de câte ori primul element al liniei să fie mai mic decât ultimul element al liniei – dacă numărul e negativ.

În cazul de față numărul –204 indică faptul că pe linia 1 s-au ales 4 elemente, din care primul e de două ori mai mic decât ultimul, adică mărimea elementelor va crește dinspre gaură spre marginea platbenzii.

Analog numărul 209 indică faptul că pe linia 4 s-au ales 9 elemente din care primul e de două ori mai mare decât ultimul, adică mărimea elementelor va descrește dinspre extremitatea platbenzii către gaură.

După terminarea creării elementelor e bine să se elimine punctele de discretizare rețea care coincid, și acest lucru se face utilizând comanda **PREPROCESS → ELEMENT → MERGE_MP**, urmată de o valoare minimă pentru distanța între două puncte de discretizare pentru ca acestea să fie considerate că se suprapun (coincid). Punctele de discretizare rețea sunt pozițiile care definesc forma elementelor, și la capetele liniilor (sau la marginile elementelor de suprafață în 3D) s-au creat cu siguranță puncte de discretizare multiple. A nu elimina aceste dubluri nu este o eroare fatală, (singurul efect fiind lungirea timpului de rezolvare a problemei), dar este mai bine a se proceda după cum s-a arătat mai sus. În cazul problemei noastre s-a ales pentru această distanță critică valoarea 0.5.

Pasul următor este definirea constantelor de material. Aceasta se face cu comanda **PREPROCESS → MAT_PROPS → YOUNG'S_MODULUS**, pentru a introduce valoarea de 2850 pentru modulul de elasticitate longitudinală E, comanda **PREPROCESS → MAT_PROPS → POISSON_RATIO**, pentru a introduce valoarea de 0.33 pentru coeficientul lui Poisson, și comanda **PREPROCESS → MAT_PROPS → THICKNESS** pentru a introduce valoarea 6 ca grosime a plăcii.

Urmează faza de definire a punctelor interne (v. **Fig. 3.3.4.11** şi **3.3.4.12**).

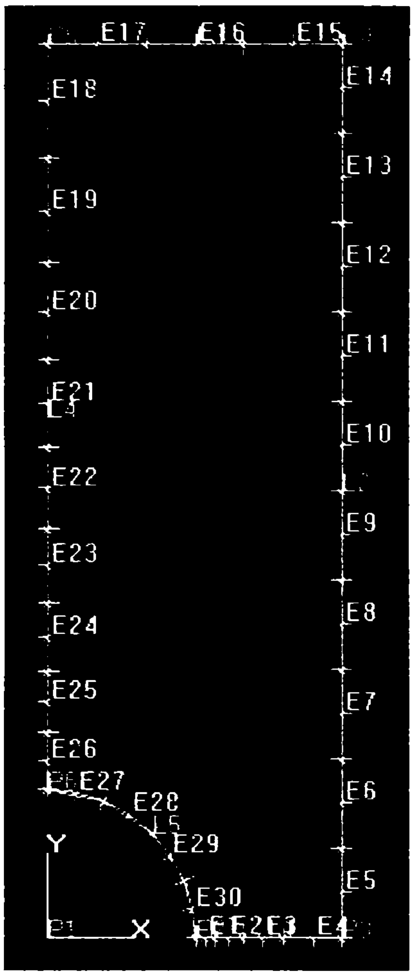


Fig. 3.3.4.11

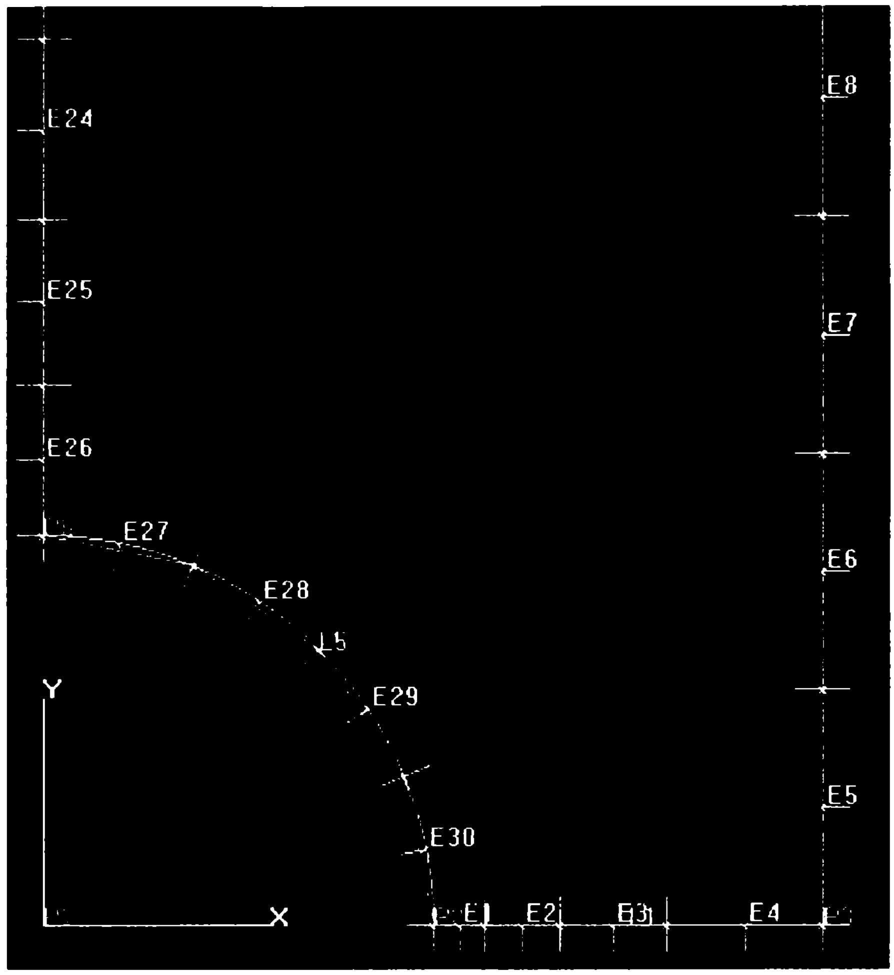


Fig. 3.3.4.12

Deoarece punctele interne le utilizăm doar pentru a rafina şi egaliza aspectul graficelor pe curbe de nivel, nu este important să cunoaştem cu precizie coordonatele acestor puncte. De aceea e mai simplu a împrăştia doar aceste puncte cu mouse-ul în interiorul zonei de interes. Pentru aceasta se comută controlul de la tastatură la mouse utilizând comanda **Global → DATA_SOURCE** şi se setează faptul că se doreşte ca punctele interne să fie vizibile pe desen prin bifarea opţiunii **Internal Points** din cheneral **Visibility switches** care apare după alegerea comenzii **View → Appearance...**.Apoi se alege comanda de generare a punctelor interne **PREPROCESS → INTERNAL_PT → POSITION** şi se execută clickuri de mouse în punctele care se doresc a fi puncte interne (**Fig. 3.3.4.11**). Deoarece în preajma găurii tensiunile şi deformaţiile vor fi mai mari, se măreşte un pic zona din apropierea găurii (cu **View → Transformations...** opţiunea **Zoom** şi eventual **Pan**) şi din nou se dă comanda de generare puncte interne şi se dau clickuri de mouse în această zonă, mărind densitatea punctelor interne din jurul găurii (v. **Fig. 3.3.4.12**).

Deoarece vom dori în final să aflăm tesiunile în câteva din punctele cele mai apropiate de gaură din jurul celor două axe, x şi y, va trebui să ne notăm etichetele acelor puncte interioare, în care, ulterior printr-un grafic vom afla tensiunile.

De aceea mărim şi mai mult zona de interes şi setăm tot prin **View → Appearance...**, de data aceasta opţiunea **Internal Points** din cheneral **Label switches**, pentru a obţine imaginile din **Fig. 3.3.4.13** şi **Fig.3.3.4.14** şi a ne nota etichetele punctelor interne de interes (de exemplu 148, 130,147 şi 128 pentru cele din apropierea axei Ox şi 94, 144 şi 145 pentru cele din apropierea axei Oy). Numărul acestor etichete îl vom necesita mai târziu, când vom dori afişarea tensiunilor σ_{xx} şi σ_{yy} în aceste puncte.

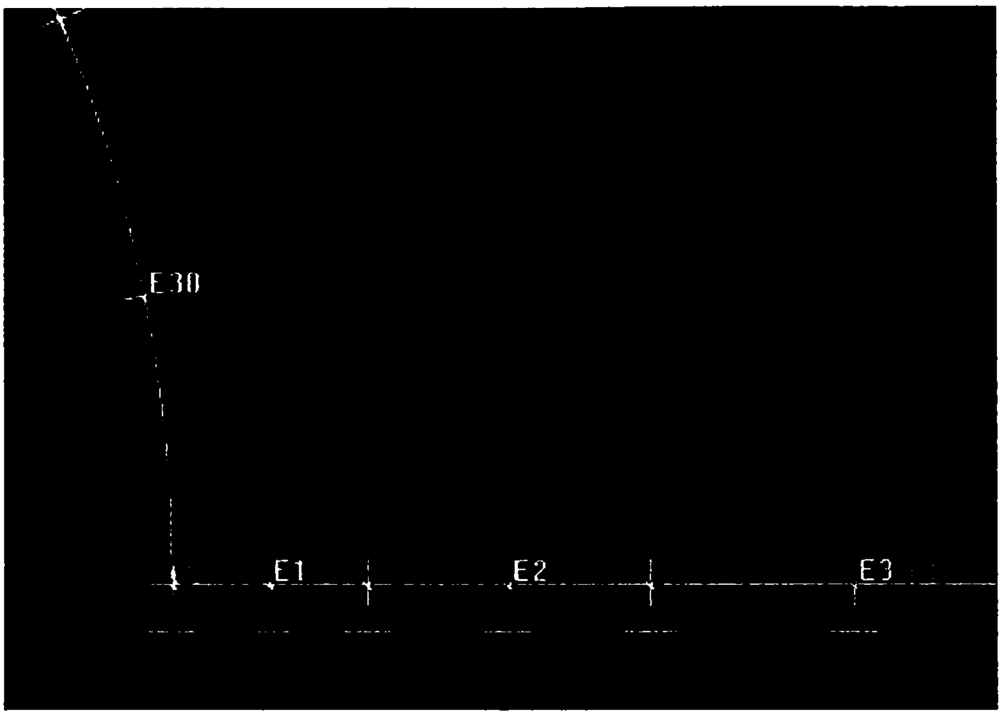


Fig. 3.3.4.13

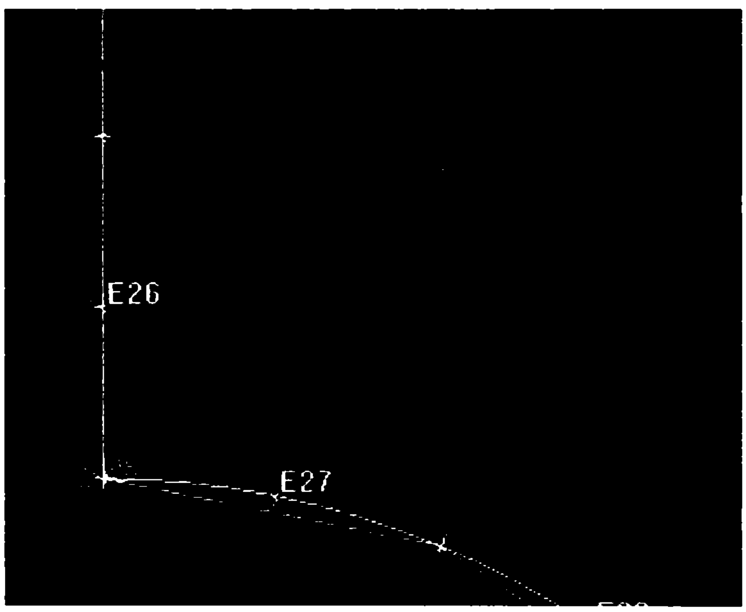


Fig.3.3.4.14

În continuare vom stabili încărcarea modelului. Pentru aceasta va trebui mai întâi să definim punctul de aplicare al forței de tracțiune. Acest lucru se face numai după alegerea comenzii **Global** → **LOAD_GEOM**, şi anume tot cu comanda **PREPROCESS** → **POINT** → **POSITION** şi introducând de la tastatură coordonatele (x,y), în cazul nostru 0 şi 94 pentru punctul de aplicație al forței. Pe desen se generează punctul LP1 (notat cu galben – v. **Fig. 3.3.4.15**).

Pentru a defini forța de tracțiune se alege acum comanda **PREPROCESS** → **BODY_LOAD** → **PT_FORCE** şi se introduce de la tastatură 1 2 300, ceea ce reprezintă:

1 – identificatorul punctului aplicare a sarsinii (LP1)

2 - direcția y în care acționează forța (ar fi fost 1 pentru direcția x)

300 – valoarea forței în Newton

Pe desen (**Fig. 3.3.4.15**) apare săgeata galbenă de la punctul LP1 în sus, care reprezintă forța F.

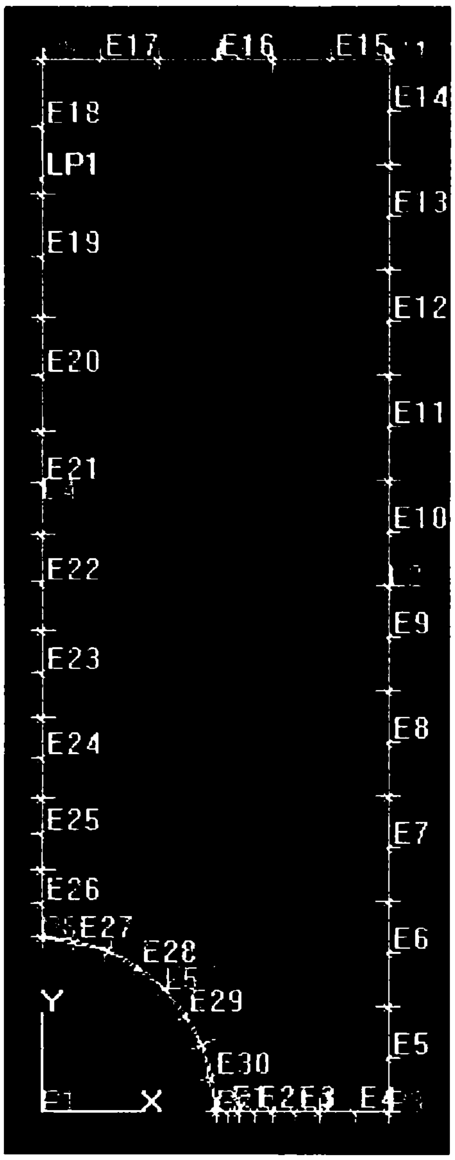


Fig. 3.3.4.15

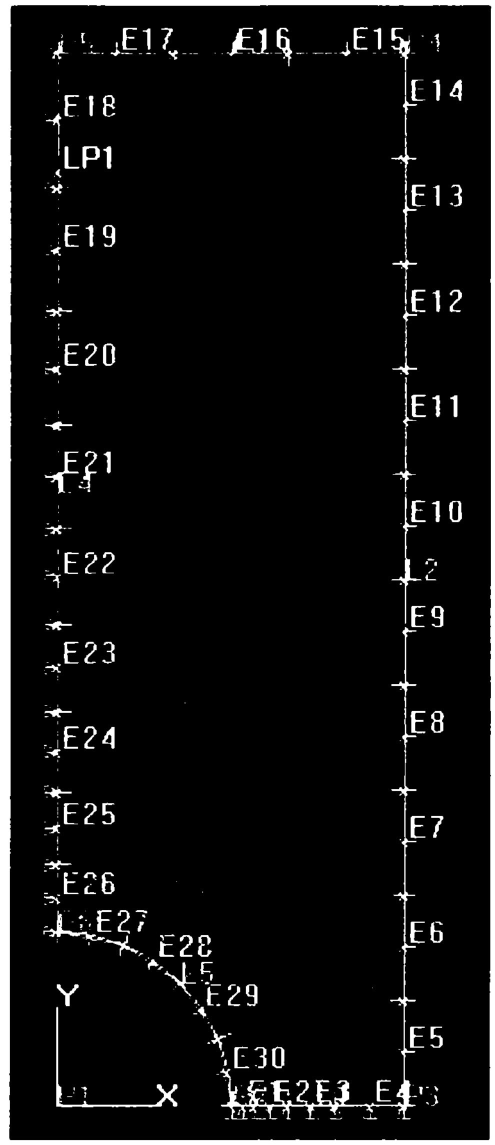


Fig. 3.3.4.16

Urmează impunerea condiţiilor de frontieră. Deoarece în cazul de faţă alegerea simetriei explicite ar implica adăugarea doar a unui mic număr de elemente în planul de simetrie în comparaţie cu numărul de elemente din restul modelului, am ales-o pe aceasta în locul simetriei implicite, în care ar fi trebuit să spunem programului BEASY că problema e simetrică. Astfel câştigăm puţin timp de execuţie, dar trebuie să punem condiţii de graniţă după direcţiile x şi y. În cazul de faţă este suficient să impunem ca pe liniile de simetrie L1 (axa Ox) şi respectiv L4 (axa Oy) deplasările să fie nule pe direcţia perpendiculară pe linia respectivă. Practic se realizează o rezemare simplă pe cele două linii (v. **Fig. 3.3.1.16**).

Comenzile prin care se realizează cele prezentate mai sus sunt **PREPROCESS → LOAD+BCS→ LINE_STRESS_BC → DISPLACEMENT**, după care se introduce de la tastatură: 1 y 0 (însemnând că pentru linia L1 se impune ca deplasarea după direcţia y să fie 0) şi 4 x 0 (însemnând că pentru linia L4 se impune ca deplasarea după direcţia x să fie 0)

Ca urmare pe desenul modelului apar reazămele de culoare verde din **Fig. 3.3.4.16**.

În clipa aceasta faza de preprocesare se poate considera încheiată şi e bine să salvăm modelul în această faza (cu comenzile **File→ Save** sau **File →Save As**. Dacă ulterior fazei de analiză sau postprocesare se mai doresc modificări asupra geometriei sau încărcării modelului, aceste modificări se vor putea efectua încărcâd din nou modelul salvat în această fază, de dinainte de analiză şi postprocesare. Dacă ulterior analizei şi postprocesării se salvează din nou modelul sub vechea denumire (cu comanda **Save** în loc de **Save As**), nu vor mai putea fi făcute modificări care ţin de faza de preprocesare.

În continuare se trece la faza de rezolvare a problemei (numită şi de analiză). Pentru aceasta trebuie creat fişierul de date utilizând comanda **Write Data** din meniul **Interface**. Apoi se activează rezolvitorul utilizând comanda **Solve...** din meniul **Solve**. Această etapă creează un fişier având numele modelului dar extensia **.log**, fişier care conţine mesajele generate de rezolvitor în urma analizei. Acest fişier, de tip text, se poate vizualiza cu comanda **View LogFile** din meniul **Solve**, şi el conţine eventualele avertizări, mesaje de eroare sau erorile fatale care au dus la eventuala întrerupere a rezolvării problemei.

Pentru a vizualiza rezultatele trebuie mai întâi „citite" rezultatele cu comanda **READ_SOL'N** din meniul **INTERFACE**. Apoi, în ultima fază, cea de postprocesare, se afişează rezultatele care interesează utilizând meniul **POSTPROCESS**, astfel: cu comanda **POSTPROCESS → CONTR_PLOT → SET_QUANTITY** se alege (din nou codificat!) mărimea ce urmează să o afişăm grafic, iar cu comanda **POSTPROCESS → CONTR_PLOT → DRAW_C_PLOT** apare pe ecran graficul conţinând curbe de nivel pentu modelul studiat.

De exemplu, dacă în urma comenzii **SET_QUANTITY**, se alege una din următoarele mărimi codificate astfel:

Tracţiune 6 1/2 (1=x,2=y)
Deplasare 7 1/2 (1=x,2=y)
Tensiuni normale 8 1/2/4 (1=SIG-xx,2=SIG-yy,4 SIG-zz)
Tensiunea tangenţială 9 1 (1=TOR-xy)
Tensiuni principale 10 1/2/4
(1=MIN,2=MAX,4=Intermed.)
(+ve=algebraic,-ve=absolute)
Tensiuni efective 11 1/2 (1=Von Mises,2=Tresca)
Deplasări relative 12 1/2 (1=x,2=y)
Deplasare rezultantă relativă 13
Tensiune hidrostatică 14
(Sqrt(S1**2+S2**2+S3**2)/3)
Amplitudinea deplasării rezultante 17
Norma erorii de tensiune 19

şi se dă apoi comanda **DRAW_C_PLOT,** se obţine, funcţie de mărimea aleasă unul din graficele de mai jos (**Fig. 3.3.4.17**, **Fig.3.3.4.18**, ..., **Fig.3.3.4.27**).

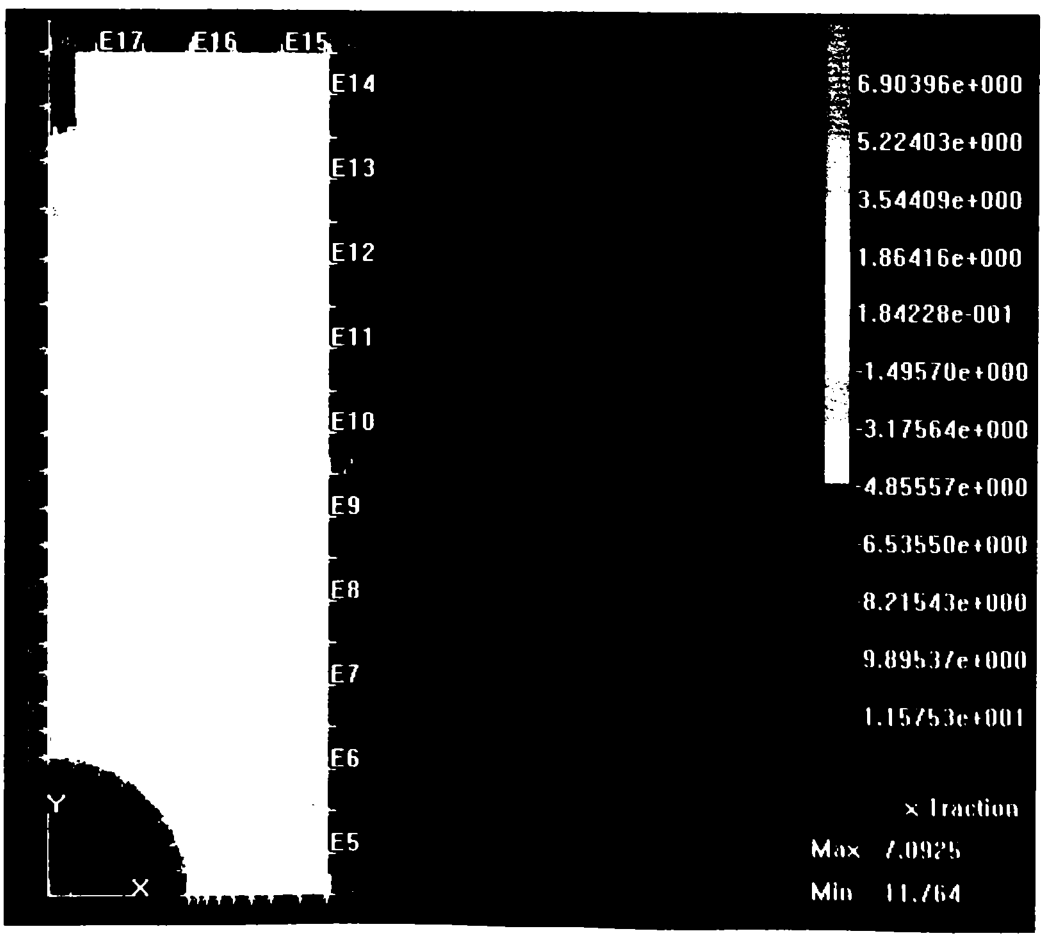


Fig. 3.3.4.17 Tracţiunea după direcţia x

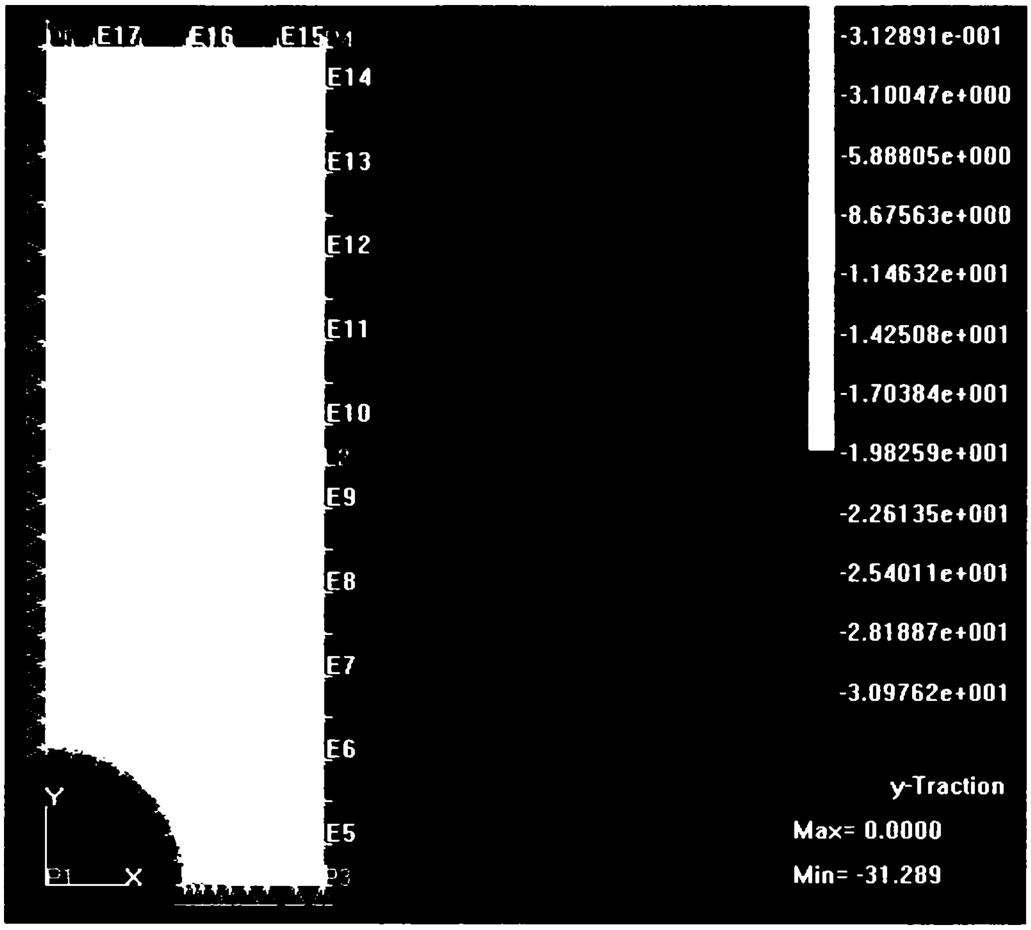


Fig.3.3.4.18 Tracțiunea după direcția y

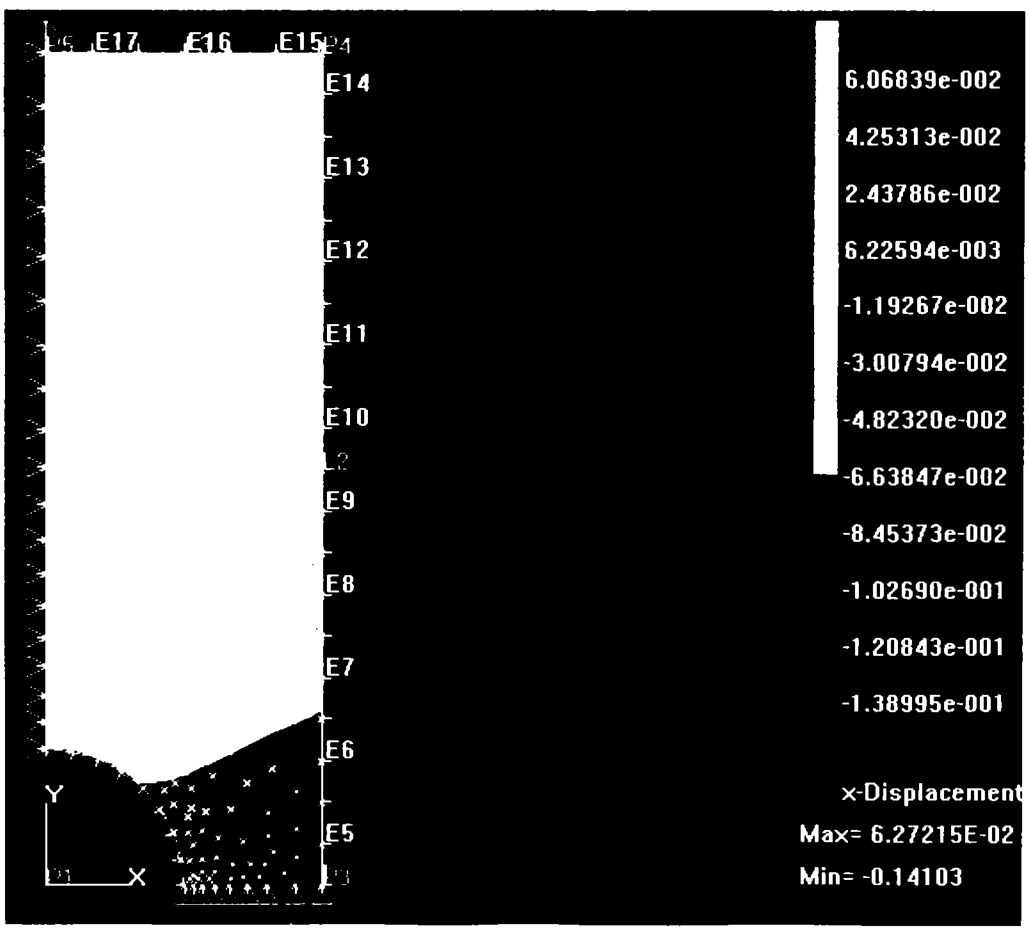


Fig.3.3.4.19 Deplasarea după direcția x

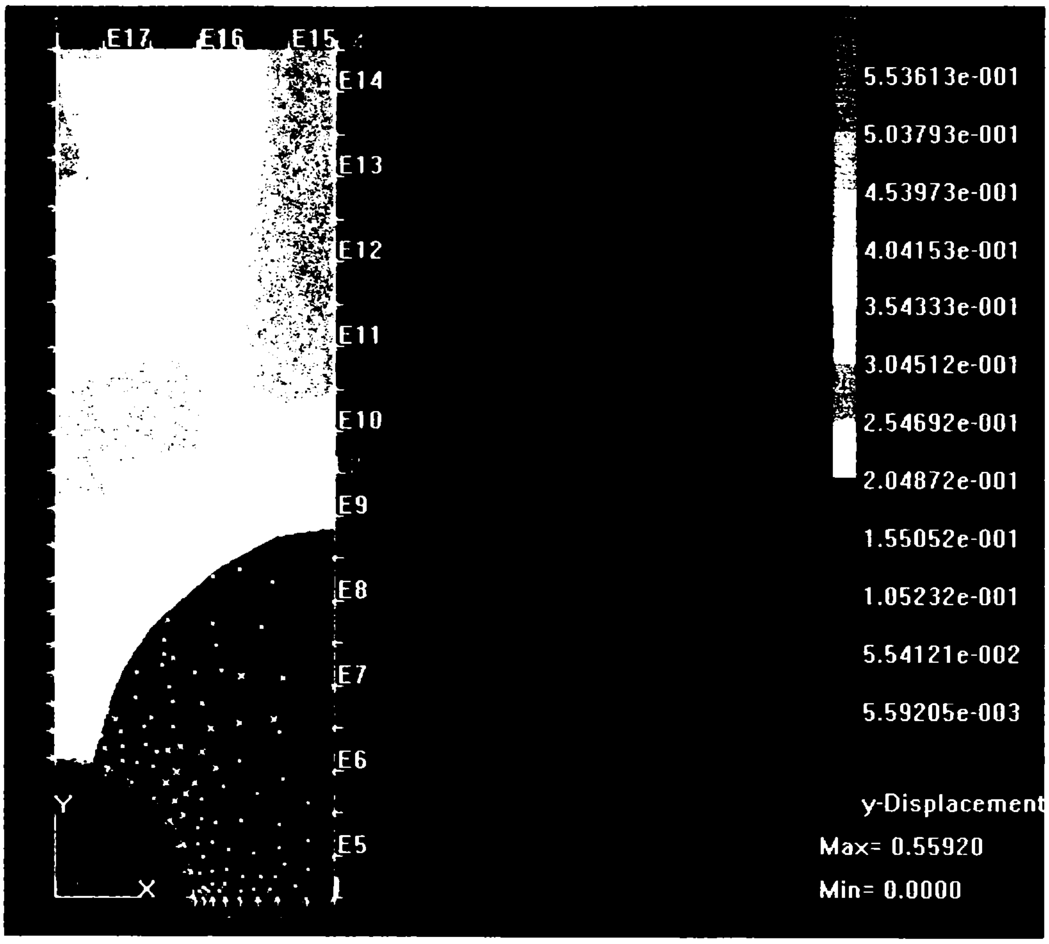


Fig.3.3.4.20 Deplasarea după direcţia y

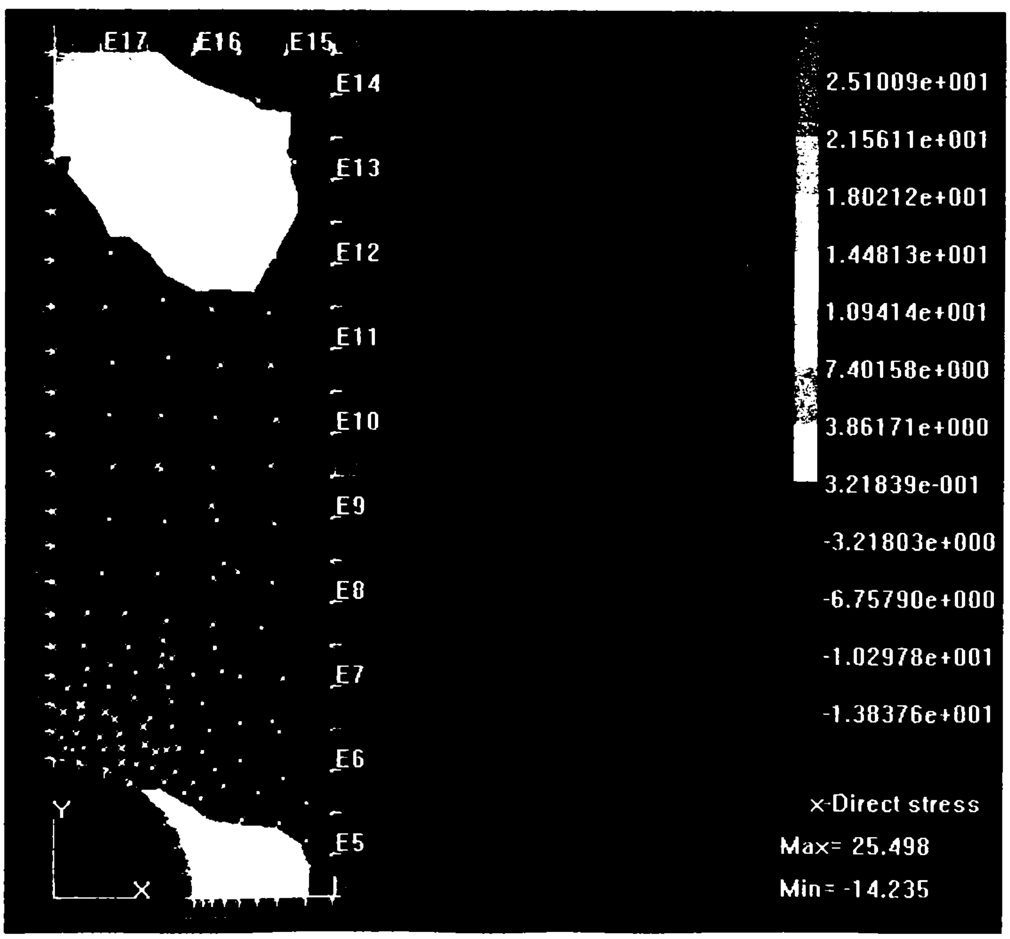


Fig.3.3.4.21 Tensiunea σ_{xx}

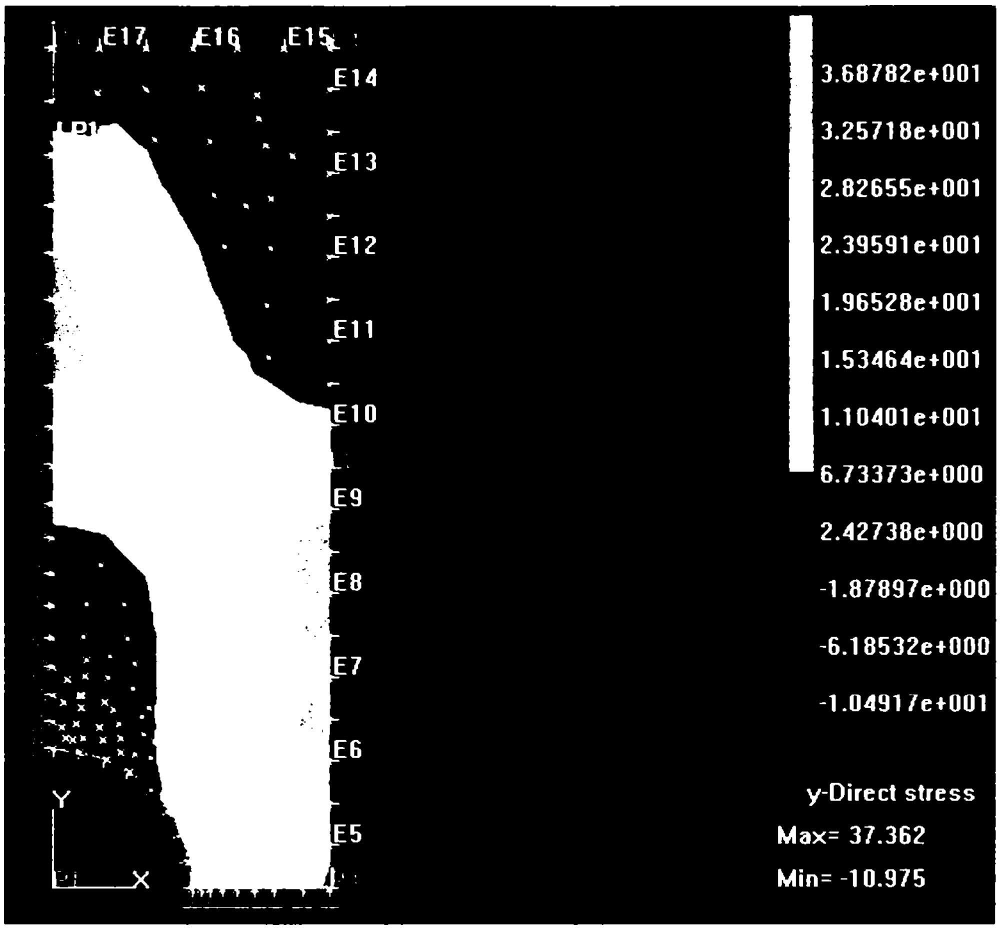


Fig.3.3.4.22 Tensiunea σ_{yy}

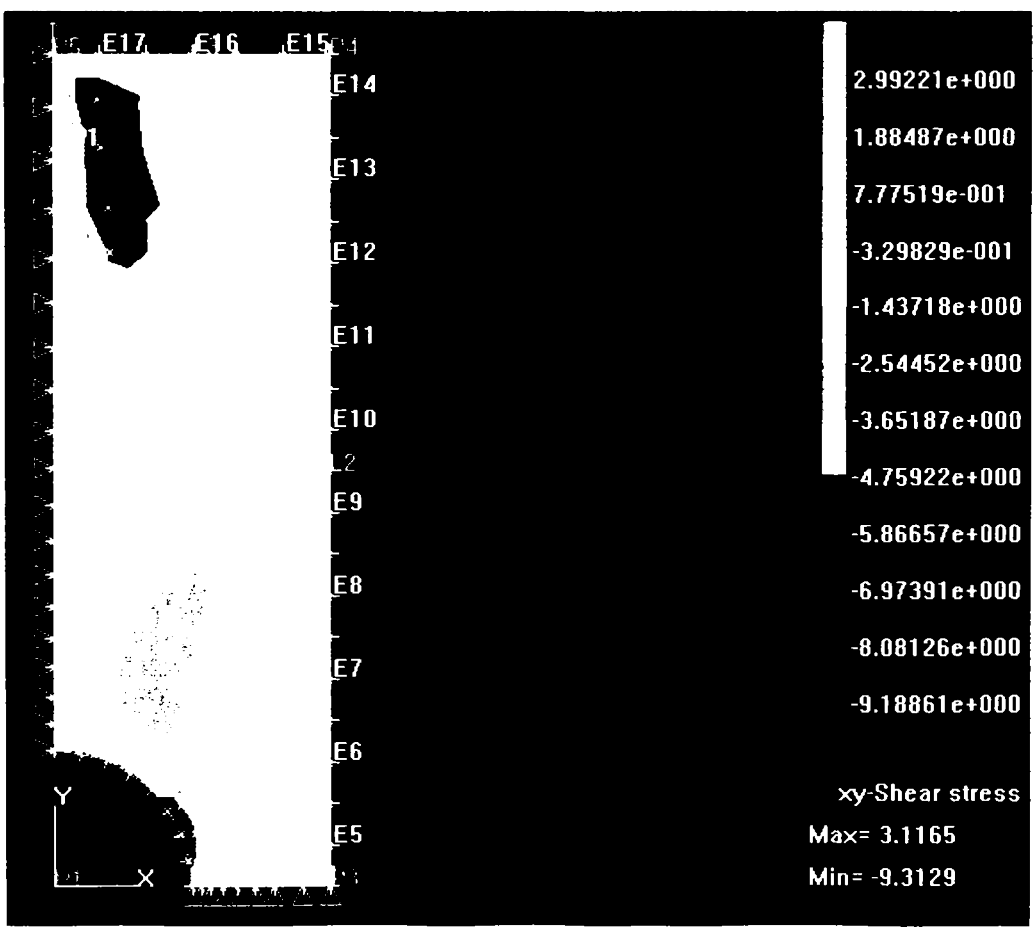


Fig.3.3.4.23 Tensiunea τ_{xy}

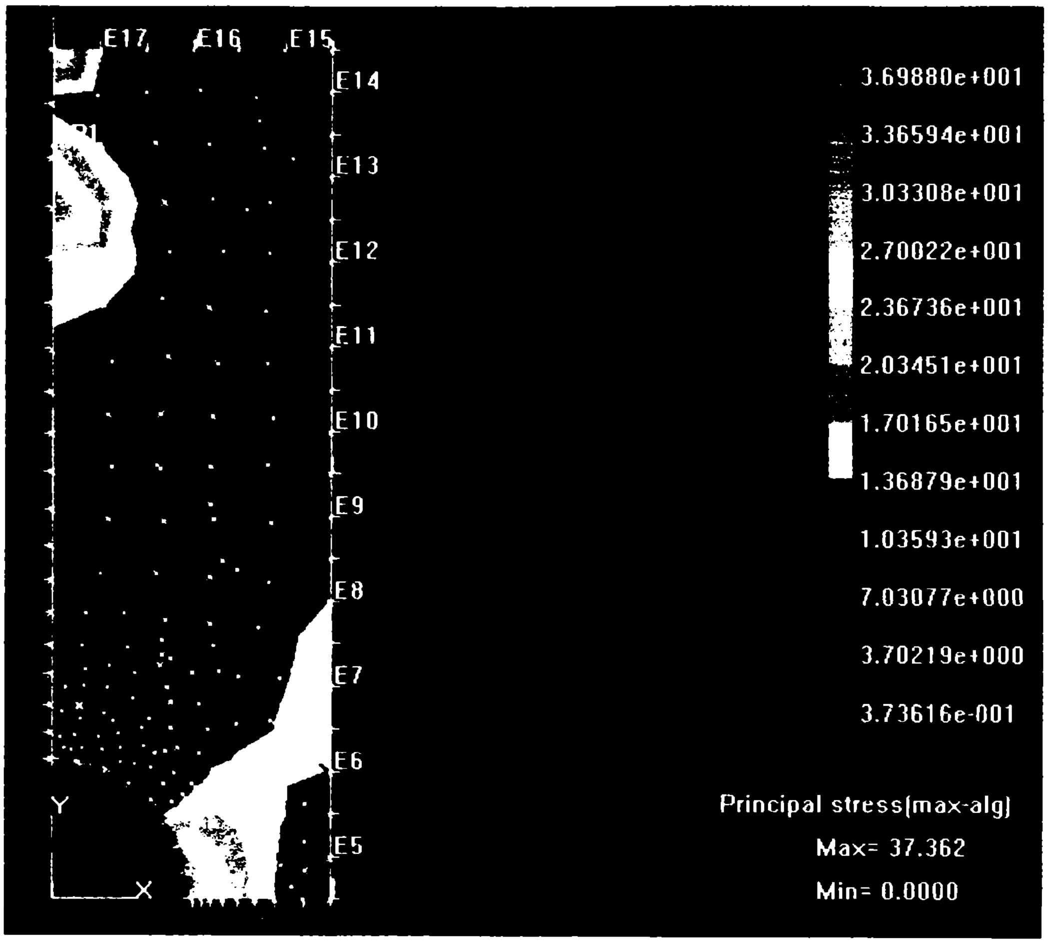


Fig.3.3.4.24 Tensiunea principală maximă

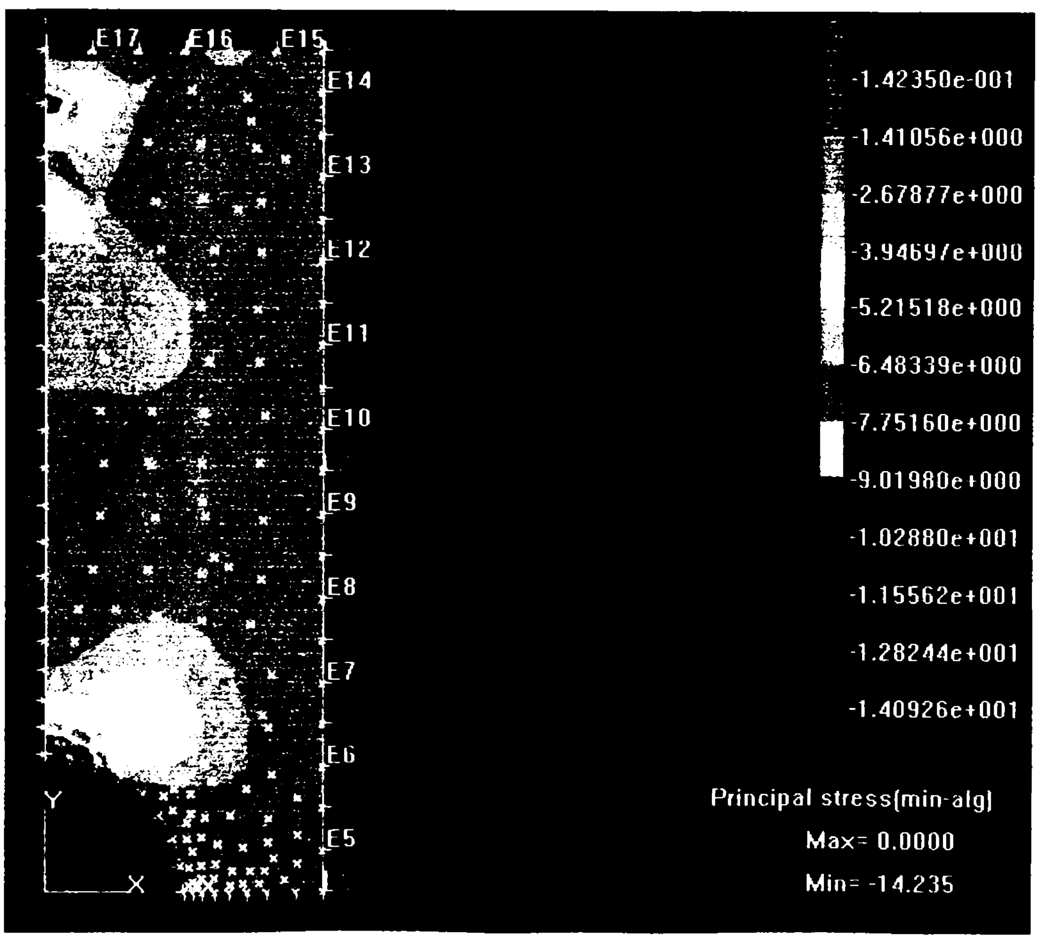


Fig.3.3.4.25 Tensiunea principală minimă

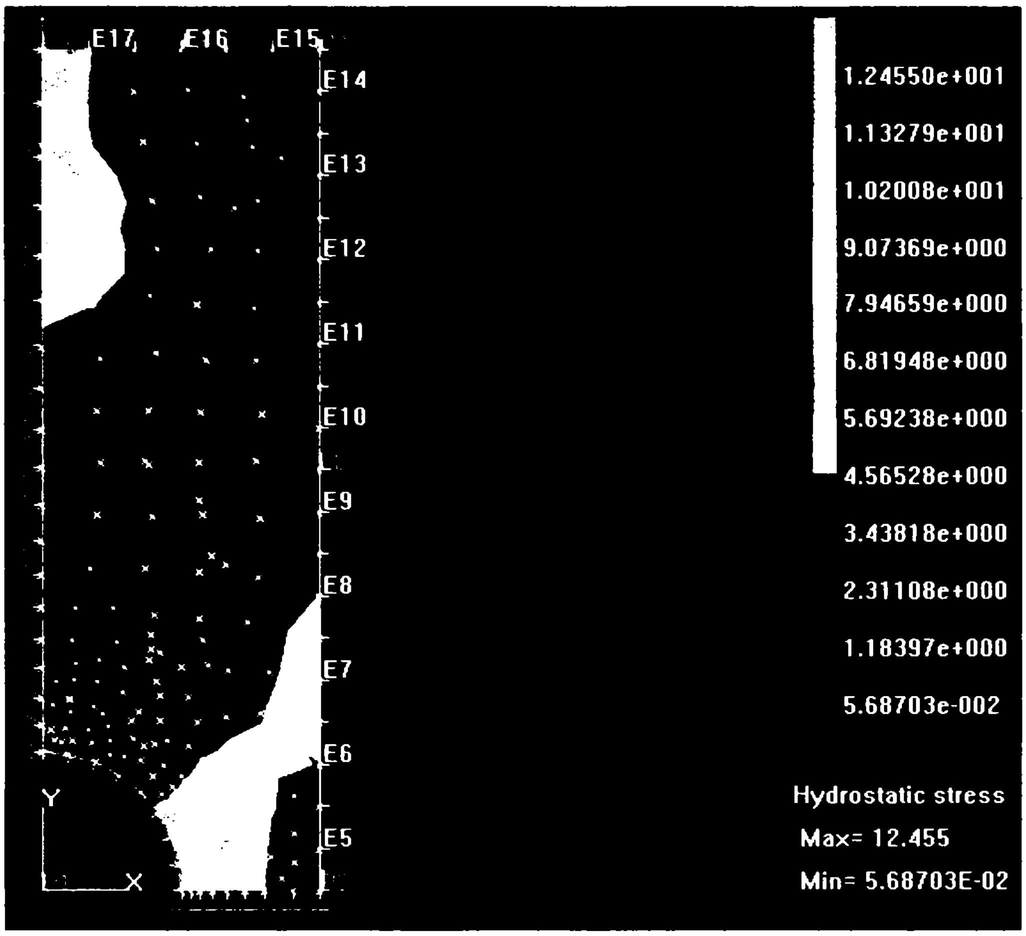


Fig.3.3.4.26 Tensiunea hidrostatică

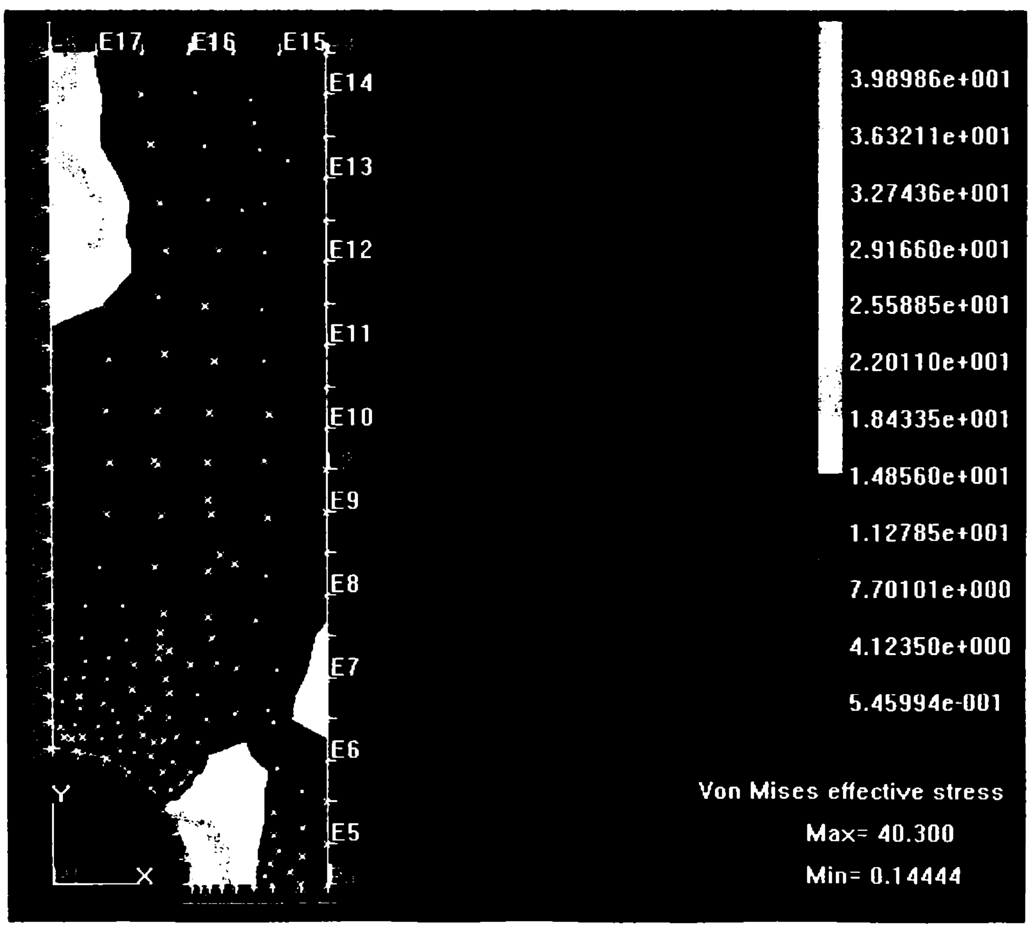


Fig.3.3.4.27 Tensiunea efectivă von Mises

Pentru a afişa graficul anumitor mărimi (ca cele de mai sus) în anumite puncte interioare, puncte de discretizare sau pe un anumit element, se va proceda după cum urmează:
- cu comanda **POSTPROCESS→GRAPH_PLOT→SET_QUANTITY** se alege (la fel ca mai sus!) mărimea ce urmează să o afişăm grafic, apoi se alege una din comenzile:
  - **POSTPROCESS→GRAPH_PLOT→INT_PT_SOL'N** (pentru soluţii în anumite puncte interne),
  - **POSTPROCESS→GRAPH_PLOT→MESH_PT_SOL'N** (pentru soluţii în anumite puncte de discretizare)
  - sau **POSTPROCESS→GRAPH_PLOT→ELEMENT_SOL'N** (pentru soluţii pe anumite elemente de frontieră)
- apoi cu comanda **POSTPROCESS→ GRAPH_PLOT →DRAW_GRAPH** apare pe ecran graficul conţinând curbele de valori ale mărimii solicitate pentru punctele interioare cerute, sau cele de discretizare cerute sau elementul cerut, după caz.

De exemplu, pentru cele patru puncte interioare din imediata apropiere a găurii şi a axei Ox, având etichetele 148, 130, 147 şi 128, pe care ne-am propus din faza de preprocesare să le studiem, şi pentru cele 3 puncte interioare din imediata apropiere a găurii şi a axei Oy, având etichetele 94,144 şi 145, am obţinut graficele din **Fig. 3.3.4.28, Fig.3.3.4.29, Fig.3.3.4.30,** şi **Fig.3.3.4.31** pentru tensiunile σ_{xx} şi σ_{yy}

Utilizând **POSTPROCESS→GRAPH_PLOT→ELEMENT_SOL'N** s-a realizat graficul din **Fig.3.3.4.32** reprezentându-se σ_{yy} pe elementele E1, E2 şi E3 (v. **Fig. 3.3.4.10**).

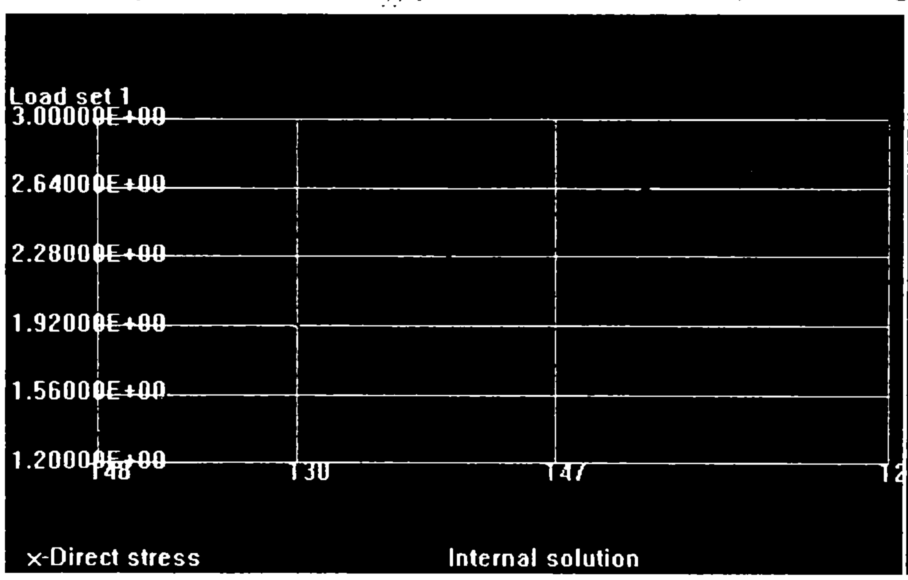


Fig. 3.3.4.28 Tensiunea σ_{xx} în cele 4 puncte interne alese aproape de gaură şi Ox

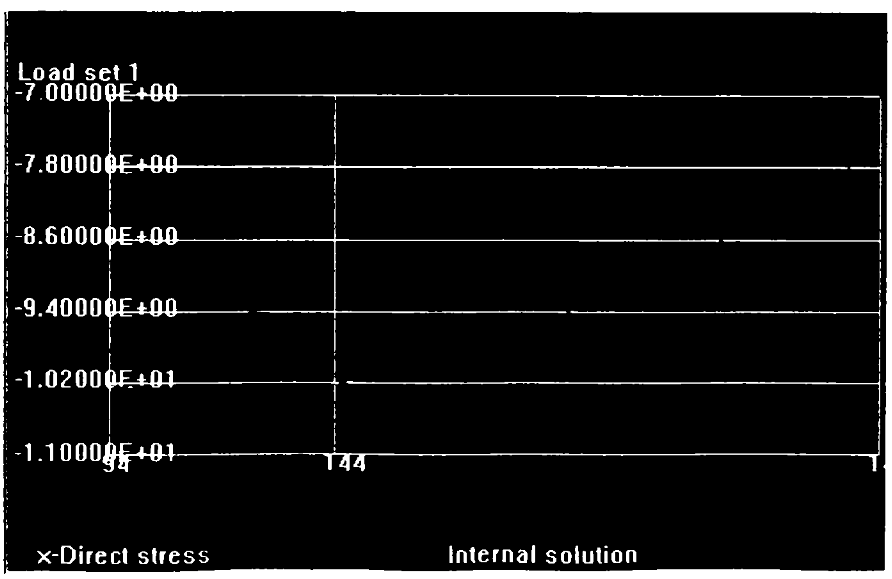


Fig. 3.3.4.29 Tensiunea σ_{xx} în cele 3 puncte interne alese aproape de gaură şi Oy

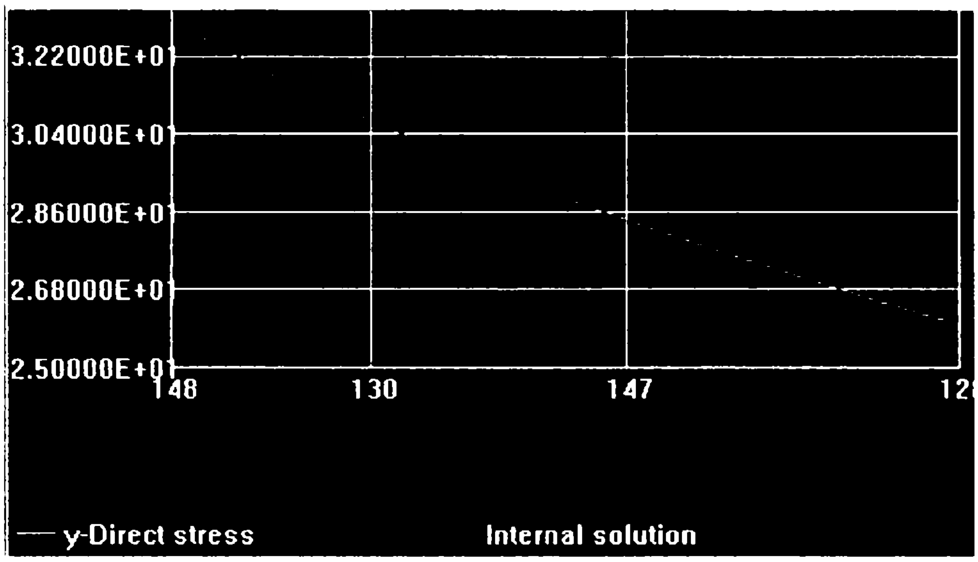


Fig. 3.3.4.30 Tensiunea σ_{yy} în cele 4 puncte interne alese aproape de gaură şi Ox

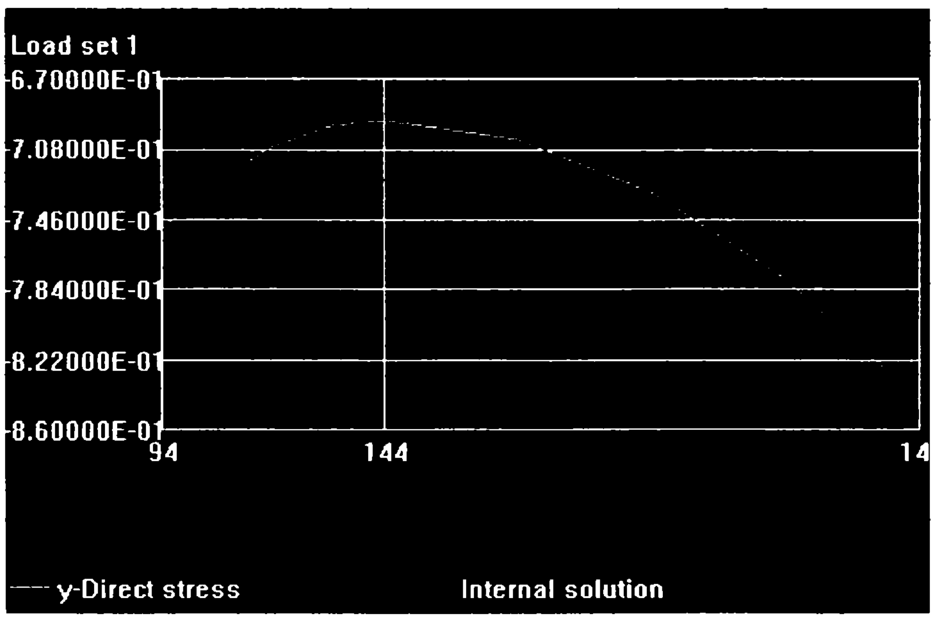


Fig. 3.3.4.31 Tensiunea σ_{yy} în cele 3 puncte interne alese aproape de gaură şi Oy

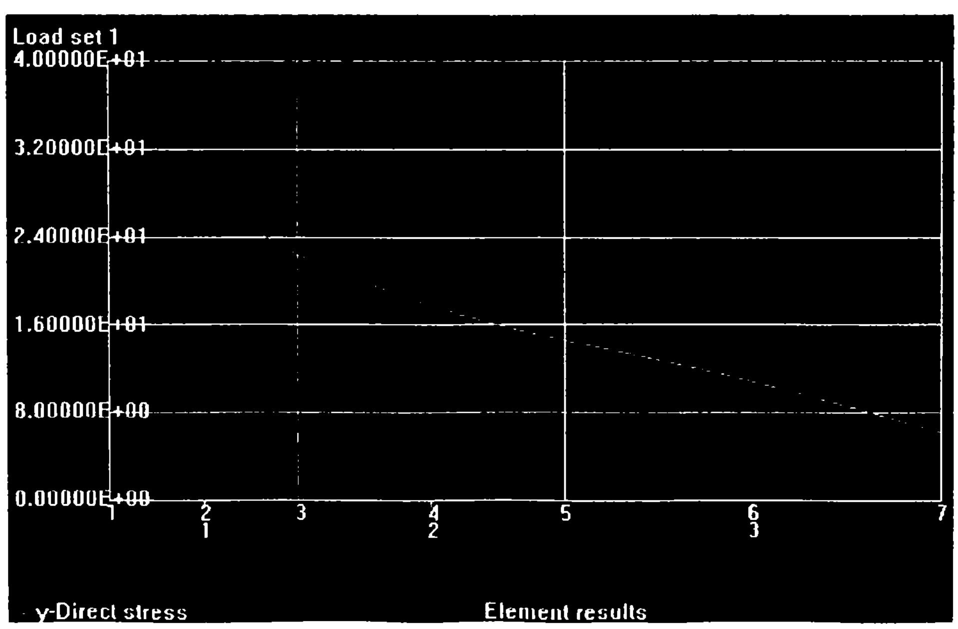
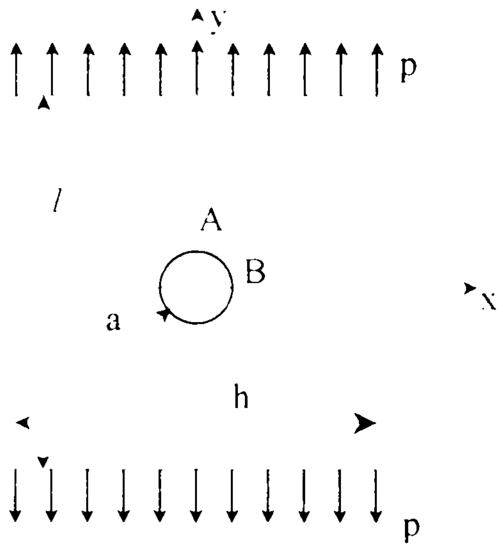


Fig. 3.3.4.32 Tensiunea σ_{yy} pe elementele de frontieră 1, 2 şi 3

3.3.4.5. Studiu al erorilor introduse de M.E.Fr. pentru diverse variante de discretizare

În vederea evaluării cantitative a efectului pe care îl are finețea discretizării asupra preciziei cu care se determină valoarea tensiunii maxime din zona unui concentrator, se prezintă modelul de calcul tot a unei plăci dreptunghiulare cu un orificiu circular, dar solicitată la întindere de o forță uniform distribuită p, ca în **Fig. 3.3.4.33**.



Lungimea plăcii l =305 mm
Lățimea plăcii h=254 mm
Grosimea plăcii g=25.4 mm
Raza orificiului circular a=25.4 mm
Forța de întindere uniform distribuită:
$p=100 N/mm^2$
Modulul de elasticitate longitudinală:
$E=210\,000\ N/mm^2$
Coeficientul lui Poisson
$\nu = 0.25$

Fig. 3.3.4.33

S-au realizat trei variante BEASY pentru modelul de calcul, și anume cu 2, 4, respectiv 8 puncte de discretizare rețea pe un sfert din conturul orificiului. Astfel s-au ales în cele trei cazuri:

I. un singur element de frontieră de tip pătratic pe sfertul de cerc;
II. două elemente de frontieră pe sfertul de cerc;
III. patru elemente de frontieră pe sfertul de cerc;

Ținând cont de faptul că orice element linie 2D și axisimetric în BEASY are trei puncte de discretizare rețea (v. **Tab. 3.3.1.1**), unul din aceste puncte suprapunându-se desigur cu punctul de discretizare învecinat al elementului următor, rezultă cele 2, 4, respectiv 8 puncte de discretizare rețea de care am amintit anterior, și a căror imagine am captat-o în figurile **3.3.4.34**, **3.3.4.35** și **3.3.4.36**.

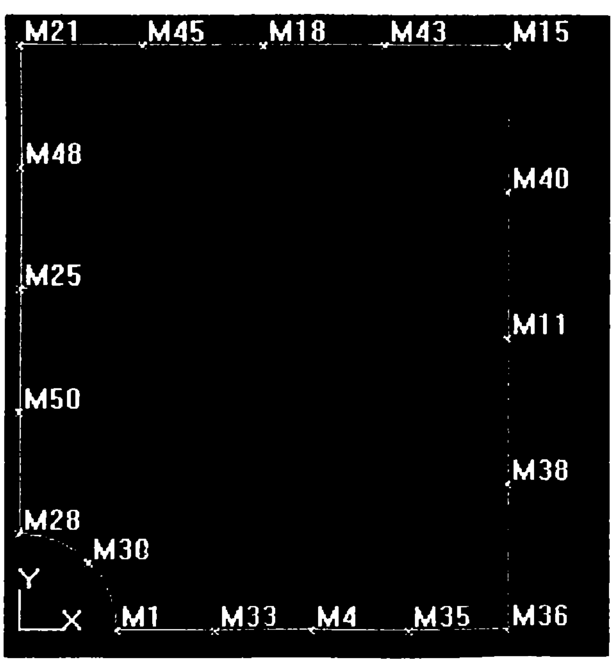


Fig. 3.3.4.34 Cazul I

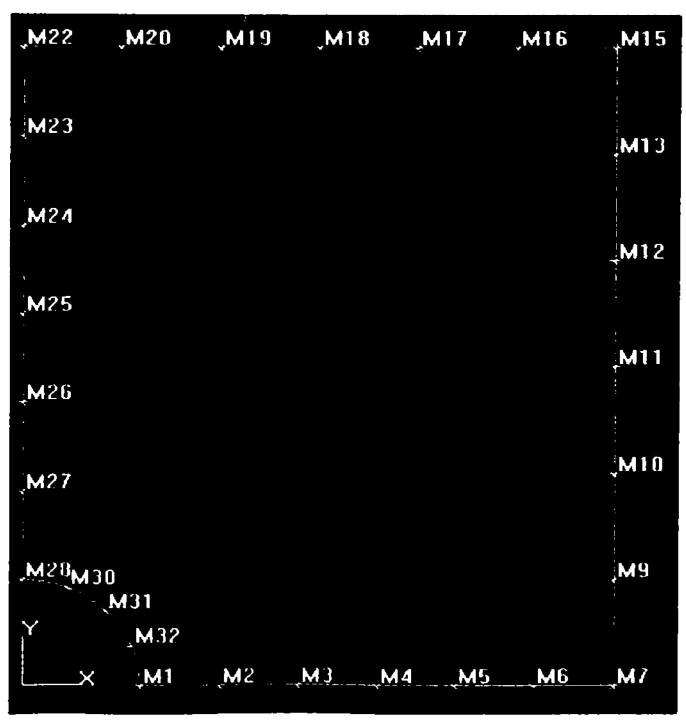


Fig. 3.3.4.35 Cazul II

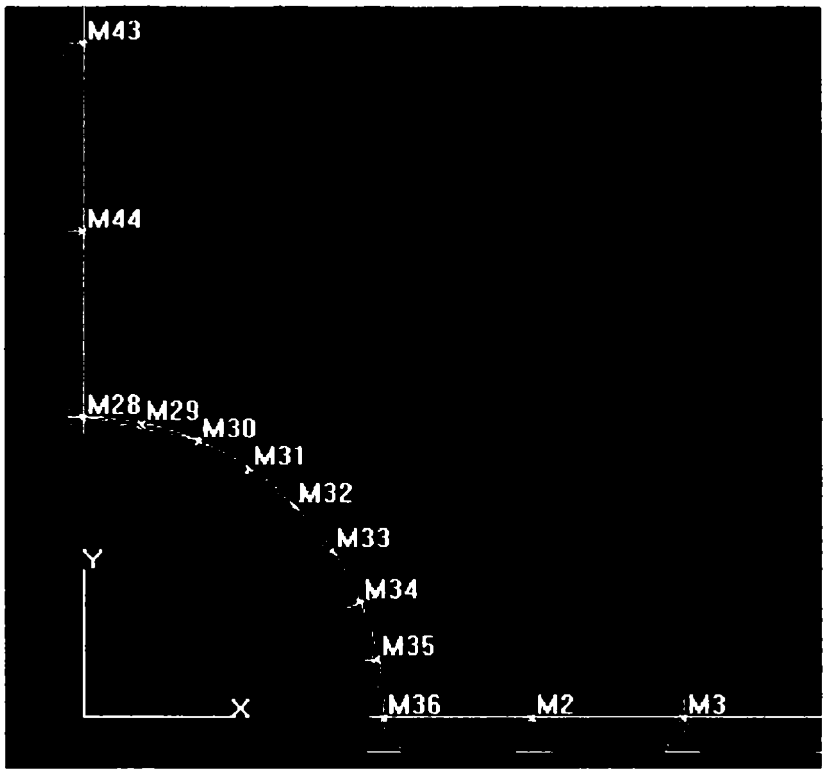


Fig. 3.3.4.36 Cazul III

Valorile tensiunilor adimensionale σ_{xx} p din punctele A, respectiv σ_{yy} p din punctele B ale plăcii şi erorile acestora faţă de valorile exacte, cunoscute din teorie, se dau în **Tab. 3.3.4.1**. Valorile tensiunilor σ_{xx} şi σ_{yy} s-au citit de fiecare dată din graficele variaţiei tensiunilor respective funcţie de numărul punctului de discretizare reţea din lungul sfertului de cerc. Redau mai jos, în figurile **3.3.4.37**, **3.3.4.38**, **3.3.4.39**, **3.3.4.40**, **3.3.4.41** şi **3.3.4.42** aceste grafice obţinute cu programul BEASY.

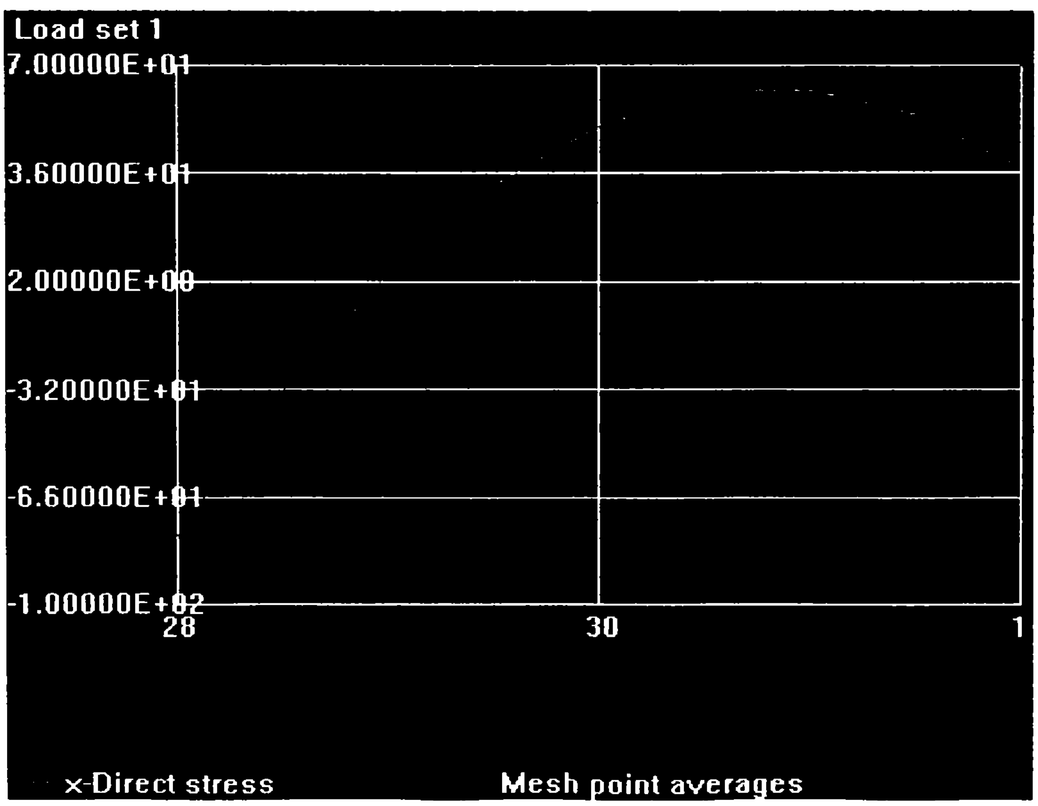


Fig. 3.3.4.37 Tensiunea σ_{xx} în cazul I pe sfertul de contur al orificiului (pentru punctul A se citeşte în dreptul punctului 28 σ_{xx}=-80 N/mm^2)

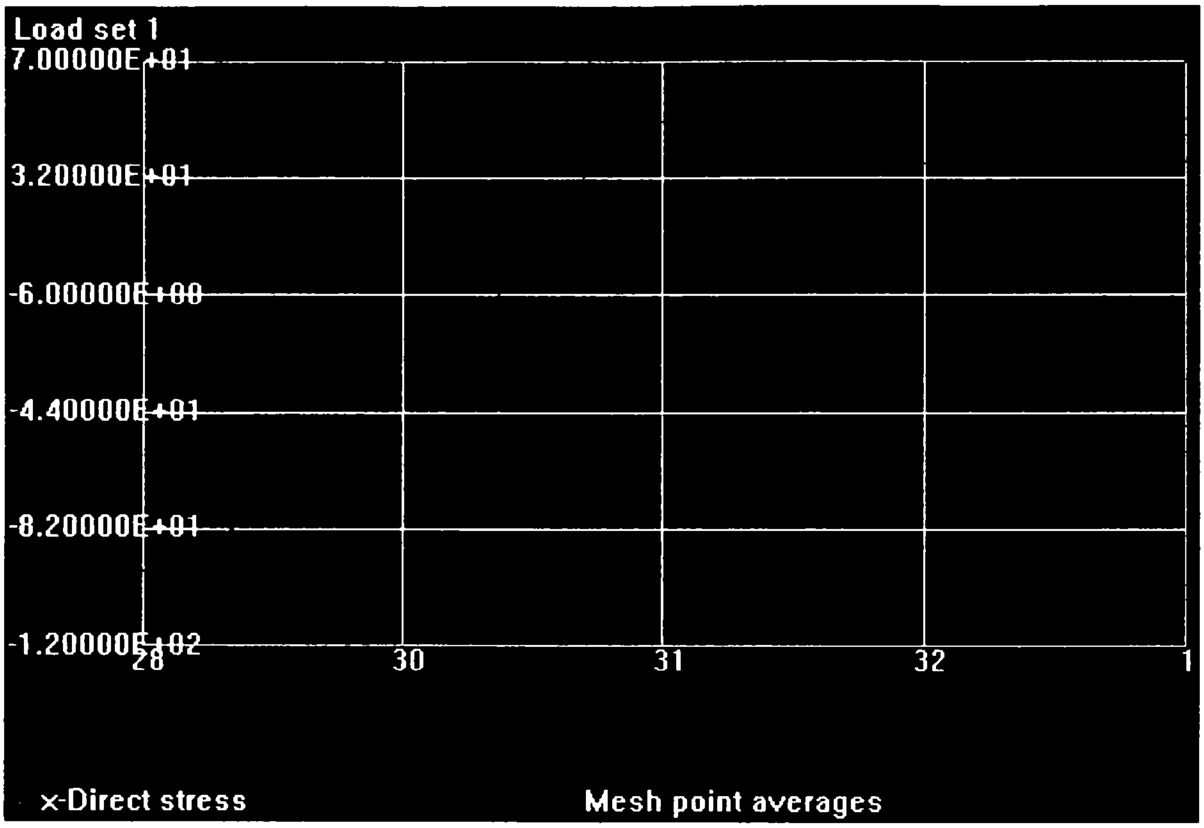


Fig. 3.3.4.38 Tensiunea σ_{xx} în cazul II pe sfertul de contur al orificiului (pentru punctul A se citește în dreptul punctului 28 σ_{xx} =-95 N/mm^2)

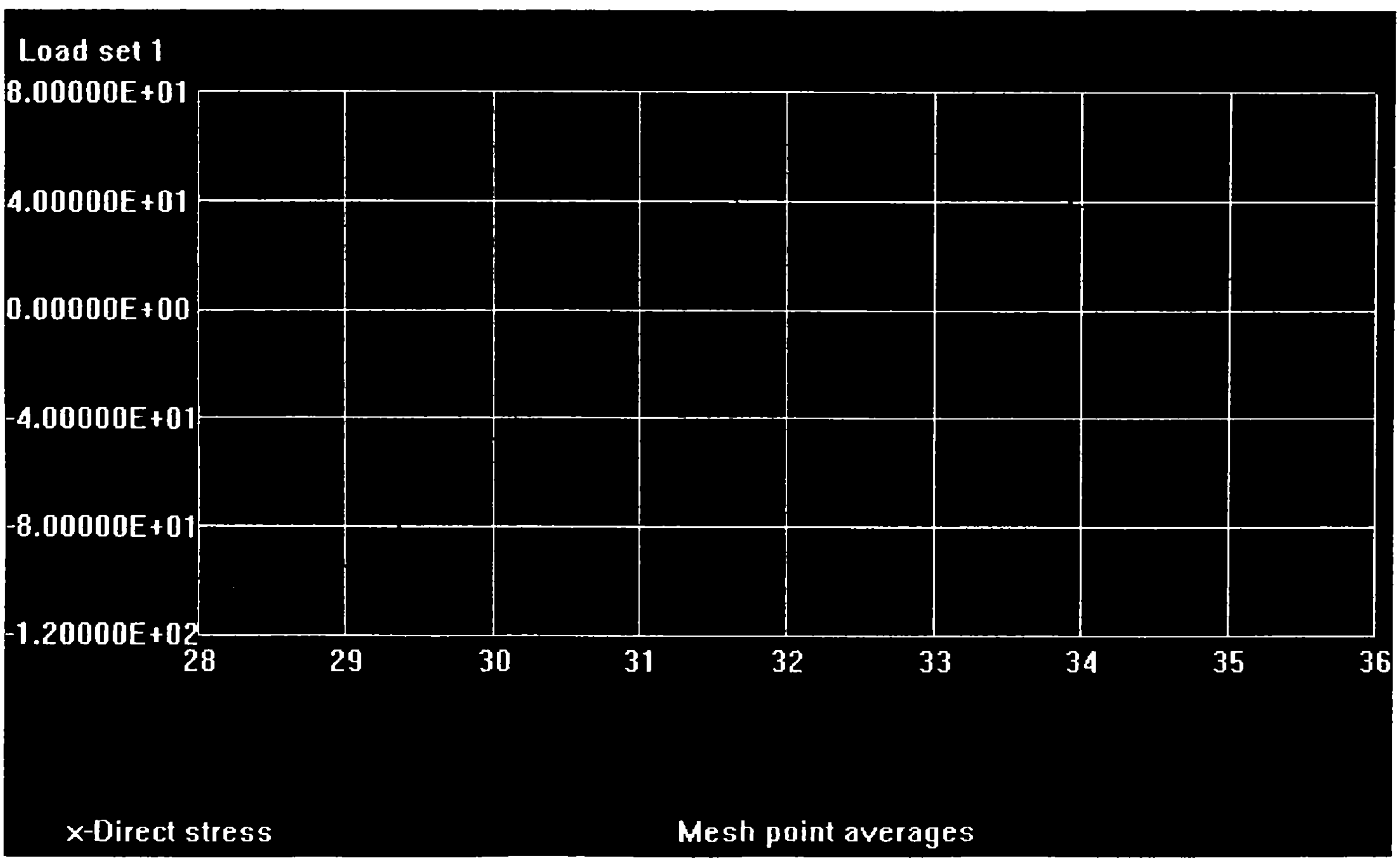


Fig. 3.3.4.39 Tensiunea σ_{xx} în cazul III pe sfertul de contur al orificiului (pentru punctul A se citește în dreptul punctului 28 σ_{xx} =-100 N/mm^2)

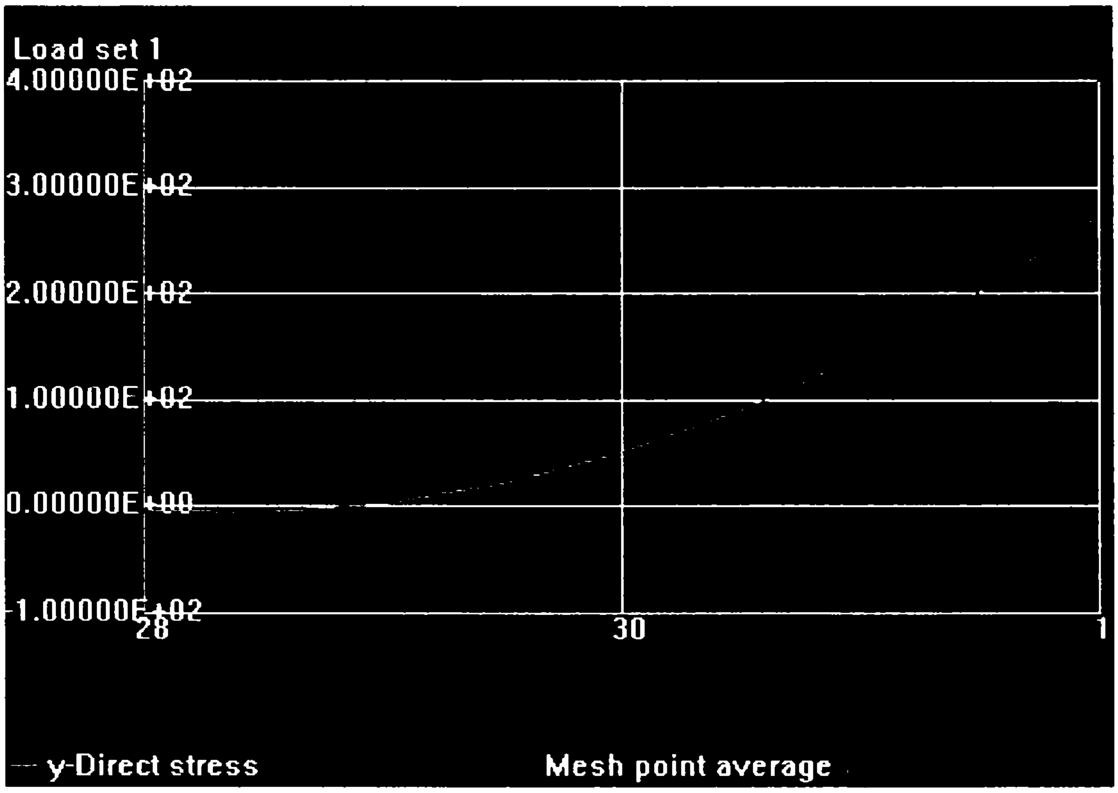


Fig. 3.3.4.40 Tensiunea σ_{yy} în cazul I pe sfertul de contur al orificiului

(pentru punctul B se citeşte în dreptul punctului 1 σ_{yy} =270 N/mm^2)

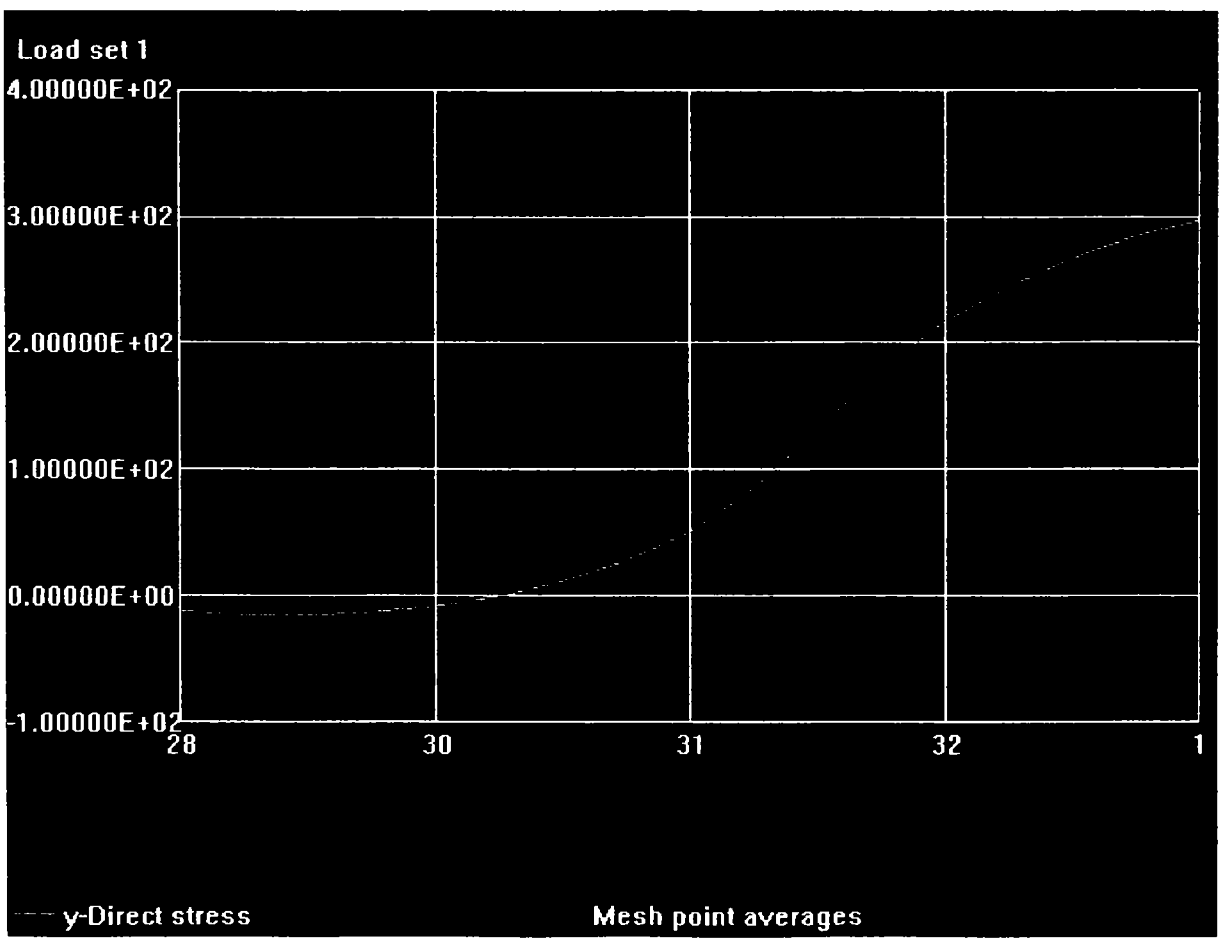


Fig. 3.3.4.41 Tensiunea σ_{yy} în cazul II pe sfertul de contur al orificiului

(pentru punctul B se citeşte în dreptul punctului 1 σ_{yy} =300 N/mm^2)

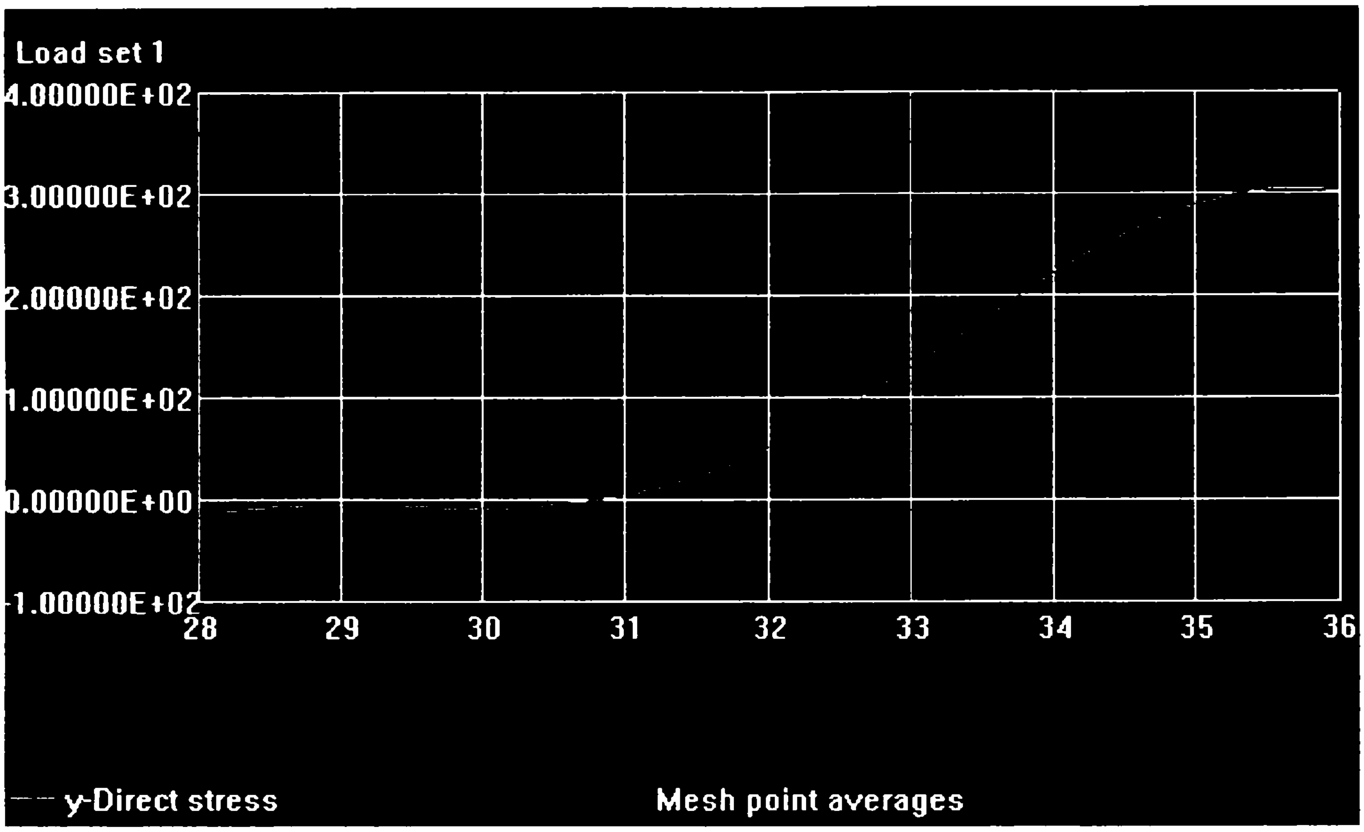


Fig. 3.3.4.42 Tensiunea σ_{yy} în cazul III pe sfertul de contur al orificiului (pentru punctul B se citeşte în dreptul punctului 28 σ_{yy}=305 N/mm^2)

Varianta Nr.	Nr. de noduri pe ¼ din conturul orificiului	Tensiuni în punctul A		Tensiuni în punctul B	
		σ_{xx}/p	Eroarea relativă %	σ_{yy}/p	Eroarea relativă %
I	2	-0.80	36	2.70	15.09
II	4	-0.95	24	3.00	5.66
III	8	-1.00	20	3.05	4.08
Teoria exactă		-1.25		3.18	

Tab. 3.3.4.1

Se remarcă faptul că erorile tensiunilor calculate cu programul BEASY faţă de valorile exacte sunt destul de mari, în special în punctul A. Erorile se pot reduce dacă se utilizează elemente de frontieră de ordin superior sau se utilizează o discretizare mai fină.

§ 3.4. METODE NUMERICE PENTRU DESCRIEREA ANALITICĂ A FRONTIERELOR ÎN M.E.Fr. CONTRIBUŢII

În aplicarea M.E.Fr. apare evident faptul că un rol special îl joacă **frontiera domeniului de definiţie**, deoarece la nivelul ei se descriu condiţiile de unicitate ale problemei şi ea este suportul discretizării în *„elemente de frontieră"*, cu ajutorul cărora se rezolvă în mod propriu-zis problema. De aceea în acest paragraf am abordat problema generală a interpolării, deoarece – în fond – descrierea curbei Γ a frontierei domeniului plan D şi acceptarea unei anumite legi de distribuţie a funcţiei potenţial căutată pe acest contur, revine la a avea la dispoziţie un număr oarecare de puncte prin care trebuie să ducem o curbă, **exprimată analitic**, şi *care să aproximeze cel mai bine conturul real.*

Încercarea de a exprima analitic o dependenţă funcţională dată prin valori discrete este foarte veche şi constituie o preocupare fundamentală a problemelor de interpolare din *Analiza numerică*. Problema s-a dezvoltat şi s-a fundamentat prin lucrările unor matematicieni iluştri: NEWTON, LAGRANGE, GAUSS, EULER, HERMITE, CEBÂŞEV, WEIERSTRASS, BERNSTEIN, etc.

Dacă la început era mai mult o preocupare pur matematică, actualmente ea a devenit o necesitate, fiind indispensabilă oricărui program de proiectare asistată de calculator. Această afirmaţie, care justifică preocupările prezentate în acest capitol, este susţinută şi de apariţia în literatura de specialitate din ultimii ani a numeroase lucrări ştiinţifice dedicate acestei probleme.

3.4.1. Metode şi principii de interpolare analitică. Formularea problemei de interpolare

Această problemă este deosebit de bine cunoscută şi amplu prezentată în literatura matematică de specialitate ([B2], [B31], [B76], C84], I1], [M11], [T7], [V19]); de aceea voi trece doar foarte sumar în revistă principalele formule de interpolare, mai ales pentru a arăta deficienţele acestor metode şi a justifica trecerea la utilizarea funcţiilor *„spline"*.

Situaţiile în care apare necesitatea aproximării funcţiilor de o variabilă sunt în mod frecvent următoarele:

- Din măsurătorile făcute în cadrul unor experimente se cunosc valorile funcţiei căutate pe o mulţime discretă şi finită de puncte numite *„noduri"*.
- Trebuie să înlocuim o funcţie dată, mult prea complicată ca structură, cu o altă funcţie mai simplă, şi deci mai uşor de folosit, în cadrul unui şir de operaţii de derivare, integrare etc., unde urmează să fie utilizată.
- În cadrul problemelor de mecanica ruperii, apar situaţii frecvente în care pentru domeniul studiat se cunoaşte forma grafică a conturului care, având un aspect necanonic pentru a putea fi introdusă în ecuaţii, trebuie exprimată analitic.

În toate aceste probleme este necesar să ne alegem un **criteriu de aproximare**. Cele mai utilizate criterii sunt:

- **Criteriul de interpolare**. Dacă funcţia necunoscută $f(x):[a,b]\to \mathbf{R}$ este dată numai în n puncte distincte $\{x_i\}_1^n$, numite noduri, (cunosc $f(x_i)=y_i$, pentru o diviziune $a=x_1<x_2<...<x_n=b$), atunci se va căuta o funcţie $F(x)$ care să aproximeze funcţia $f(x)$, astfel încât în noduri cele două funcţii să aibă aceleaşi valori:

$$F(x_i)=f(x_i)=y_i=f_i, \qquad i=\overline{1,n}$$

- **Criteriul mini-max**. Acest criteriu impune o condiţie de minimizare a abaterii dintre cele două funcţii, măsurată prin modulul diferenţei valorilor lor, pe fiecare interval:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-F(x)|=\min \quad \Leftrightarrow \quad \max_{i\in\overline{1,n}}|y_i-F(x_i)|=\min$$

- **Criteriul abaterii pătratice minime**. În situaţia când n este un număr prea mare, deci sunt necesare calcule anevoioase, sau când valorile $f(x_i)$ nu sunt exacte şi nu se cunoaşte valoarea exactă a funcţiei $f(x)$ în nici un punct de pe $[a,b]$, nu are sens să i se determine o aproximaţie uniformă pe acest interval.

În aceste situaţii se poate utiliza o funcţie $F(x)$, nu neapărat continuă, care trece printre punctele $f(x_i)=y_i$, astfel încât abaterea ei faţă de $f(x)$, măsurată prin numărul (numit abatere pătratică):

$$\sqrt{\int_a^b|f(x)-F(x)|^2dx} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}|y_i-F(x_i)|^2=\min$$

să aibă valoarea minimă. Aceasta este „**metoda celor mai mici pătrate**".

Este interesant să subliniem evoluţia modului de abordare a problemelor de interpolare odată cu apariţia şi dezvoltarea calculatoarelor. Mulţimea tipurilor de polinoame de interpolare cunoscute (Lagrange, Newton etc.) constituiau elementul principal pentru evaluarea unei funcţii într-un punct, cunoscând valorile ei tabelare (discrete). Problema având o mare importanţă aplicativă atât în ştiinţă cât şi în tehnică, a constituit o preocupare îndelungată a multor matematicieni celebri.

Dar analiza numerică modernă a renunţat la acest mod de interpolare, care de multe ori conduce la erori grosolane, constatând că aproximarea uniformă, efectuată cu deosebit succes de calculatoarele electronice, este mult mai eficace şi mai corectă. Polinoamele de interpolare se utilizează în continuare, îndeosebi în problemele de derivare şi de integrare numerică. Vom aminti pe scurt cele mai cunoscute polinoame de interppolare; acestea de obicei realizează ceea ce se numeşte o **interpolare globală** în sensul că se foloseşte un singur polinom pe tot intervalul [a,b].

3.4.2. Polinomul de interpolare Lagrange

Se consideră $n+1$ puncte distincte x_i, $i=1,2,...,n$ pe un interval I al axei reale. Aceste puncte se numesc **noduri**. Fie $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcţie pentru care cunoaştem numai valorile ei în noduri, $f(x_i)=f_i=y_i$. Se cere să determinăm un polinom de grad cel mult egal cu n care să coincidă cu funcţia f pe nodurile date sau, altfel spus, să treacă prin punctele (x_i, f_i), $i=0,1...,n$.

De obicei se folosesc nişte funcţii l_{nj} numite **polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange**, de forma:

$$l_{nj}(x)=\frac{(x-x_0)..(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})..(x-x_n)}{(x_j-x_0)..(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})..(x_j-x_n)} \qquad 0\le j\le n$$

care se bucură de proprietatea:

$$l_{ij}(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Atunci polinomul lui Lagrange va fi:

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j l_{nj}(x)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\prod_{j\neq i}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

Nu voi mai insista asupra estimării erorii de interpolare cu polinomul lui Lagrange şi asupra altor proprietăţi: ele se găsesc amplu rezolvate în literatura citată.

3.4.3. Polinomul de interpolare Newton de prima speţă

Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, pentru care se cunosc valorile $f(x_i)=y_i=f_i$ în punctele diviziunii uniforme $d_{[a,b]}=(x_0,x_1,x_2,...,x_n)$ cu pasul de interpolare de mărime h: $x_i=x_0+ih$, $i=1,2,...,n$. Se cere determinarea unui polinom de gradul n care să aibă în punctele x_i aceleaşi valori ca funcţia $f(x)$. Se introduc unele noţiuni noi:

- **Noţiunea de diferenţă finită**. Dacă $h=\Delta x$ este pasul de interpolare constant, atunci diferenţa $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ se numeşte **diferenţă finită de ordinul întâi**. Relaţia $\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x))$ defineşte procedeul determinării diferenţelor finite de ordin superior, operatorul Δ fiind un operator liniar. Pornind de la orice valoare $f(x_i)=y_i$ poate fi construit tabelul diferenţelor după formula:

$$\Delta^p y_i=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_p^k(1+\Delta)^{p-k}y_i=y_{i+p}-C_p^1 y_{i+p-1}+C_p^2 y_{i+p-2}+...+(-1)^p y_i$$

- **Noţiunea de putere generalizată**. Produsul $x^{[n]}=x(x-h)(x-2h)..(x-(n-1)h)$, $h>0$ se numeşte *putere generalizată a lui x*; dacă $h\to 0$, atunci $x^{[n]}\to x^n$.

Cu aceste notaţii, polinomul Newton de prima speţă, având coeficienţii exprimaţi prin diferenţe finite, are forma:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h1!}(x-x_0)^{[1]}+...+\frac{\Delta^k y_0}{h^k k!}(x-x_0)^{[k]}+...+\frac{\Delta^n y_0}{h^n\cdot n!}(x-x_0)^{[n]}$$

Pentru $h\to 0$, $P_n(x)$ devine polinom Taylor al funcţiei $y=f(x)$.

Acest polinom se recomandă pentru $x\in V(x_0)$ - pentru capătul din stânga al intervalului de interpolare.

3.4.4. Polinomul de interpolare Newton de speţa a doua

În aceleaşi condiţii ca mai sus se găseşte:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{h\cdot 1!}(x-x_n)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{h^2\cdot 2!}(x-x_{n-1})^{[2]}+...+\frac{\Delta^n y_0}{h^n\cdot n!}(x-x_1)^{[n]}$$

Acest polinom se recomandă pentru capătul din dreapta al intervalului de interpolare.

3.4.5. Polinomul Gauss de interpolare

Se construieşte un polinom de interpolare pornind de la un punct x_0 interior diviziunii $d_{[a,b]}$. Numerotarea nodurilor devine: $x_{-n}x_{-n+1},...,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,...,x_n$

Printr-o asemenea alegere se obţine eroarea minimă de interpolare pentru $x \in V(x_0)$. După calcule obişnuite se obţine următoarea formă generală a polinomului Gauss de interpolare:

$$P(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h\cdot 1!}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_{-1}}{h^2\cdot 2!}(x-x_0)^{[2]}+\frac{\Delta^3 y_2}{h^3\cdot 3!}(x-x_1)^{[3]}+\ldots+$$
$$+\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n+1}}{h^{2n-1}(2n-1)!}(x-x_{-n+1})^{[2n-1]}+\frac{\Delta^{2n}y_{-n}}{h^{2n}\cdot(2n)!}(x-x_{-n+1})^{[2n]}$$

Observaţii.

1^0. Polinomul de interpolare scris mai sus, care se numeşte **prima formulă de interpolare a lui Gauss**, foloseşte diferenţe finite de forma:

$$\Delta y_o,\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-1},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-2},\ \Delta^6 y_{-3},\ldots$$

Dacă se folosesc diferenţe finite de forma:

$$\Delta y_{-1},\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-2},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-3},\ \Delta^6 y_{-3},\ldots$$

se obţine **a doua formuilă de interpolare a lui Gauss**.

2^o. Dacă se foloseşte media aritmetică a celor două formule de interpolare Gauss, se obţine **formula lui Stirling de interpolare**.

3.4.6. Polinoamele Cebâşev de speţa întâi.

Pentru $x \in [-1,1]$ şi $n \geq 0$ se definesc **polinoamele lui Cebîşev de speţa întâi**[*1] :

$$T_n(x)=\cos(n \arccos x)$$

- Se demonstrează prin inducţie că $T_n(x)$ este un polinom de gradul n; pentru $n \geq 5$ coeficientul lui x^n este 2^{n-1}. Aşadar:

$$T_n(x)=2^{n-1}x^n+\ldots \quad n\geq 5$$

- Se demonstrează relaţia de recurenţă:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad n\geq 1$$

- Se demonstrează că:

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0, \quad m\neq n$$

Rezultă că polinoamele Cebâşev de speţă întâi sunt ortogonale pe intervalul $[-1,1]$ cu ponderea $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Se mai defineşte polinomul $\overline{T}_n(x)=2^{1-n}T_n(x)$; aceasta are coeficientul lui x^n egal cu unitatea. Polinoamele care au coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1 se

[1] De multe ori este util să trecem de la inervalul de definiţie [a,b] la un interval canonic [-1,1]. Acest lucru se realizează printr-o transformare de scară evidentă:

$$x=z\frac{b-a}{2}+\frac{b+a}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=a\Rightarrow z=-1 \\ x=b\Rightarrow z=1 \end{cases}$$

Problema se poate formula şi reciproc.

numesc **polinoame monice**. Se demonstrează că dintre toate polinoamele monice de grad n fixat, $\overline{T}_n(x)$ are cea mai mică margine în valoare absolută pe intervalul $[-1,1]$. Deci polinoamele Cebâşev sunt mai eficiente în descrierea variațiilor unei funcții pe $[-1,1]$ decât monoamele x^k.

- Definiția polinoamelor Cebâşev se mai poate face şi cu ajutorul unei relații echivalente:

$$T_{n+1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

3.4.7. Interpolarea prin metoda celor mai mici pătrate

Deşi metodele de interpolare sunt mult mai numeroase, voi încheia amintind o metodă foarte frecvent întâlnită în activitățile inginereşti de prelucrare a datelor experimentale.

În principiu se pune problema aproximării unei funcții $f(x)$ continue pe intervalul $[a,b]$ printr-un polinom $P_n(x)$ de grad $\leq n$ în aşa fel ca norma e_2 dată prin:

$$\|P_n-f\|_2=\left\{\int_a^b (P_n(x)-f(x))^2\,dx\right\}^{1/2}$$

să fie minimă pentru toate polinoamele $P_n(x)$ de grad $\leq n$. În locul intervalului continuu $a\leq x\leq b$ se va considera o mulțime de puncte M: x_1, x_2,..., x_n şi se urmăreşte minimizarea normei e_2:

$$S=\|P_n-f\|_2=\left[\sum_{i=1}^{N}(P_n(x_i)-f(x_i))^2\right]^{1/2}=\min \qquad (*)$$

Şi acest criteriu minimizează o eroare care însă este scrisă ca o sumă de pătrate. Pentru calcul este convenabil ca aproximanta $P_n(x)$ să se scrie sub forma:

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j p_j(x)$$

unde $p_j(x)$ sunt funcții cunoscute, liniar independente, iar a_j (j = 1,2,...,n) parametri nedeterminați. (Avem evident $n<N$).

Condiția de extrem a sumei (*) cere ca:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j}=0, \qquad j=1,n$$

Folosind o funcție pondere $W(x)$ pozitivă, continuă, definită pe $[0,1]$, care să ia în considerație unele distincții privind importanța valorilor luate în noduri, putem calcula:

$$S^2=\sum_{i=1}^{N}W(x_i)[P_n(x_i)-f(x_i)]^2$$

Folosind notațiile precedente ultima relație se poate scrie:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\sum_{i=1}^{N}W(x_i)p_k(x_i)p_j(x_i)\right)=\sum_{i=1}^{N}y_kW(x_k)p_j(x_k) \qquad j=\overline{1,n}$$

Se obține un sistem de n ecuații algebrice liniare pentru determinarea celor n parametri a_j, $j=1,n$.

* * *

3.4.8. Utilizarea funcţiilor spline în aproximarea analitică a frontierelor

3.4.8.1. Generalităţi despre funcţiile SPLINE*

Funcţiile spline sunt nişte funcţii segmentar polinomiale, descrise de polinoame pe subintervale adiacente, care în nodurile unde se racordează asigură nu numai continuitatea funcţiei ci şi continuitatea unor derivate ale acesteia. Ideea şi utilizarea lor este foarte veche, chiar de pe vremea grecilor antici, fiind folosite într-o formă elementară şi de J. Bernoulli şi L. Euler care utilizau liniile poligonale pentru a aproxima soluţiile ecuaţiilor diferenţiale; ele au însă o dezvoltare impresionantă numai după 1964, când I.J. Schoenberg (cel care le-a dat numele) a descoperit relaţia dintre funcţiile spline de interpolare şi cele mai bune formule de aproximare în sensul lui Sard. Esenţial este faptul că noţiunea se generalizează pe un spaţiu Hilbert în care se formulează o problemă variaţională de minim a cărei soluţie se numeşte „spline". Pornind de aici s-au putut defini clase noi de funcţii spline utilizând funcţii trigonometrice, exponenţiale, Cebîşev etc. Ele şi-au dovedit marea utilitate la rezolvarea numerică a unor clase de ecuaţii diferenţiale şi integrale, ecuaţii cu derivate parţiale, la aproximarea optimală a unor funcţionale liniare, la procesele de interpolare etc. Datorită acestui câmp larg de aplicaţii, după 1968 s-au creat adevărate şcoli de funcţii Spline: MADISON (SUA); GRENOBLE (Franţa); NOVOSIBIRSK (Rusia); MÜNSTER-FREIBURG-KARLSRUHE (Germania); CLUJ-NAPOCA (România).

Din cauza caracterului polinomial pe intervale mici funcţiile spline prezintă, din punct de vedere aplicativ, avantajul de a permite ducerea până la capăt a calculelor, programarea algoritmilor la calculator făcându-se fără dificultate.

Urmărind diversele tipuri de polinoame de interpolare, prezentate în §3.4.1-3.4.7 s-a constatat, în procesul utilizării lor practice, că se poate întâmpla ca diferenţa dintre valorile funcţiei f(x) şi ale polinomului de interpolare, **în afara nodurilor $\{x_i\}$** să fie foarte mare. Construcţia unei reţele mai dese şi a unui polinom de grad mai mare, nu rezolvă problema. Exemple celebre: RUNGE (1901), BERNSTEIN (1912), precum şi teorema fundamentală a lui FABER (1914), au arătat că polinoamele nu sunt cele mai potrivite funcţii de aproximare pentru o funcţie dată. Aşa au apărut **funcţiile spline**, care sunt funcţii **segmentar polinomiale** care se racordează în noduri împreună cu un anumit număr de derivate ale lor.

3.4.8.2. Funcţii spline cubice

Voi prezenta în continuare funcţiile spline de ordinul trei sau cubice. Este forma cea mai utilizată din mulţimea funcţiilor spline existente la ora actuală, deoarece se racordează în noduri astfel încât să aibă derivate continui până la ordinul doi inclusiv, ceea ce permite şi calculul razei de curbură. Acest mod de definire îi asigură proprietăţi remarcabile de convergenţă, spre deosebire de rezultatele negative care se obţin cu celelalte polinoame de interpolare prezentate mai sus. Mai mult, utilizarea lor este legată şi de proprietăţile lor de extrem descoperite mult mai târziu, care arată că ele sunt singurele funcţii de interpolare care satisfac o anumită condiţie de minim definită de funcţionala:

$$f \to \left(\int_a^b \left(D^2 f\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

* Literatura de specialitate din ţara noastră a preluat şi utilizează termenul englezesc deoarece – din păcate – nu s-a găsit un echivalent corespunzător în limba română; de altfel nu i s-a găsit un echivalent în nici o altă limbă şi în toate ţările lumii acest cuvânt nu a fost tradus ci a fost preluat „ad litteram". Voi prezenta generalităţile din acest paragraf – necesare pentru continuitatea expunerii – după excelenta monografie a lui Gh. Micula ([M31]); am mai folosit T. Vladislav ([V19]), C. Berbente ([B31]), G. Marchouk ([M9]), ş.a.

În continuare voi prezenta o modalitate de a construi polinomul spline de interpolare de ordinul trei, printr-o demonstraţie completă faţă de cele existente în literatura de specialitate [B2], [B31], [B76], [M11], [M31], pentru a uşura scrierea unui program de calcul.

Fie $f(x):[a,b]\to\mathbf{R}$ funcţia continuă necunoscută care trebuie aproximată. Fie Δ o diviziune a intervalului $[a,b]\subset\mathbf{R}$: $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Considerăm date (cunoscute, printr-un procedeu oarecare) valorile funcţiei f în nodurile reţelei de discretizare $\Delta : f(x_i) = f_i = y_i,\quad i=\overline{1,n}$. Mulţimea acestor valori vom zice că formează vectorul dat $Y\in\mathbf{R}^n$, $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$. Vom mai nota $I_i\equiv(x_i,x_{i+1})$ şi $h_i = x_{i+1}-x_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1$ (v. **Fig.3.4.8.1**).

Atunci prin definiţie funcţia $S_{\Delta,Y}^{(3)}:[a,b]\to R$ se numeşte **funcţie spline cubică de interpolare** pentru vectorul Y pe diviziunea Δ, dacă satisface următoarele două condiţii:

$$S_{\Delta,Y}^{(3)}\Big|_{I_i}\in P_3(x_i,x_{i+1}),\quad i=1,2,\ldots,n-1 \tag{3.4.8.1}$$

$$S_{\Delta,Y}^{(3)}\in C^2[a,b] \tag{3.4.8.2}$$

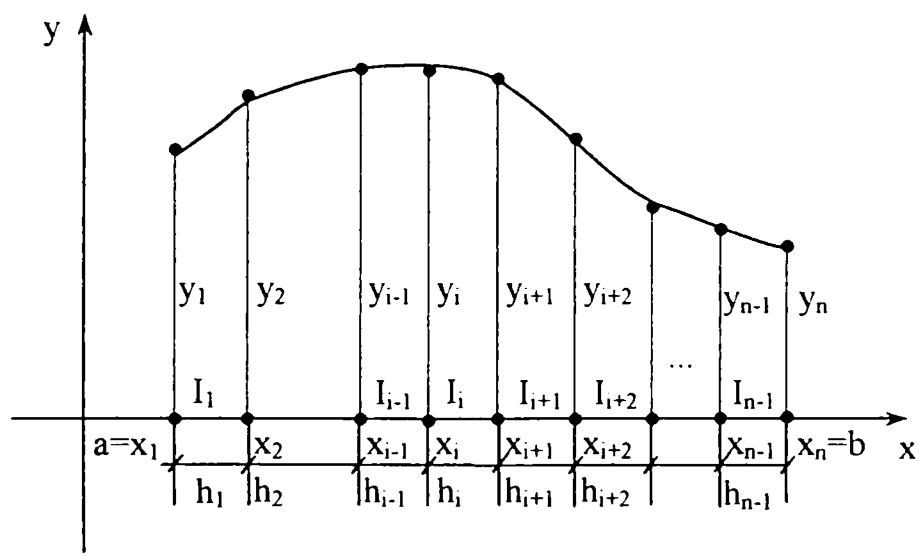


Fig. 3.4.8.1.

Dacă nu sunt confuzii vom nota simplu $S_f^{(3)}$- funcţia spline cubică de interpolare pentru funcţia f (sau pentru intervalul $I_i\to S_i$).

Prima condiţie (3.4.8.1) ne spune că funcţia spline căutată trebuie să fie un polinom de gradul trei pe fiecare interval $I_i=(x_i,x_{i+1})$.

A doua condiţie (3.4.8.2) cere ca funcţia spline căutată să aibă derivate de ordinul întâi şi de ordinul doi conţine pe tot intervalul de definiţie, inclusiv în noduri (sau mai ales în noduri).

Pe două intervale alăturate $I_i=[x_i,x_{i+1}]$ şi $I_{i+1}=[x_{i+1},x_{i+2}]$ vom căuta funcţia spline de interpolare sub forma unor polinoame de gradul trei:

$$x\in[x_i,x_{i+1}]\Rightarrow\begin{cases}S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3 & (3.4.8.3)\\ DS_i(x)=S_i'(x)=b_i+2c_i(x-x_i)+3d_i(x-x_i)^2 & (3.4.8.4)\\ D^2S_i(x)=S_i''(x)=2c_i+6d_i(x-x_i) & (3.4.8.5)\end{cases}$$

$$x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \Rightarrow \begin{cases} S_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_{i+1}) + c_{i+1}(x - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x - x_{i+1})^3 & (3.4.8.6) \\ DS_{i+1}(x) = S'_{i+1}(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_{i+1}) + 3d_{i+1}(x - x_{i+1})^2 & (3.4.8.7) \\ D^2 S_{i+1}(x) = S''_{i+1}(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_{i+1}) & (3.4.8.8) \end{cases}$$

unde am notat operatorii de derivare $D = \frac{d(\cdot)}{dx}; \quad D^2 = \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}$

Pentru calculul coeficienţilor necunoscuţi vom impune condiţiile de continuitate în noduri pentru funcţie şi derivate.

- pentru $x = x_i$, $S_i(x_i) = y_i$; din $(3.4.8.3) \Rightarrow a_i = y_i$ (3.4.8.9)
- pentru $x = x_{i+1}$, $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$; din $(3.4.8.3) \Rightarrow a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}$ (3.4.8.10)
- pentru $x = x_i$, $S'_i(x_i) = m_i$; din $(3.4.8.4) \Rightarrow b_i = m_i$ (3.4.8.11)
- pentru $x = x_{i+1}$, $S'_i(x_{i+1}) = m_{i+1}$; din $(3.4.8.4) \Rightarrow b_i + 2c_i h_i + 3d_{i,i} h_i^2 = m_{i+1}$ (3.4.8.12)

Am introdus o notaţie nouă: m_i reprezentând panta la graficul funcţiei de interpolare în nodul x_i; asemănător m_{i-1} este panta pe nodul x_{i+1}. Aceste pante vor fi noile necunoscute ale problemei. Atunci ecuaţiile (3.4.8.10) şi (3.4.8.12) se scriu:

$$\begin{cases} y_i + m_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1} \\ m_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = m_{i+1} \end{cases}$$

Din rezolvarea acestui sistem rezultă imediat:

$$\begin{cases} c_i = 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i} \\ d_i = -2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} + \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2} \end{cases} \qquad (3.4.8.13)$$

Utilizând rezultatele obţinute în noile necunoscute, expresia (3) devine:

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \left(3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i}\right)(x - x_i)^2 + \left(-2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} + \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2}\right)(x - x_i)^3$$

(3.4.8.14)

Evident că pe intervalul următor $I_{i+1} = (x_{i+1}, x_{i+2})$ vom obţine o expresie absolut similară, cu indicele i mărit cu o unitate.

$$S_{i+1}(x) = y_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) + \left(3\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{m_{i+2} + 2m_{i+1}}{h_{i+1}}\right)(x - x_{i+1})^2 +$$

$$+\left(-2\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{m_{i+2} + m_{i+1}}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_{i+1})^3 \qquad (3.4.8.15)$$

Dacă vom scrie condiţia de continuitate a derivaţiei de ordinul doi în nodul x_{i+1}, din (3.4.8.14) şi (3.4.8.15) calculând $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ obţinem:

$$2\left(3\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{h_i}\right)+6\left(-2\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^3}+\frac{m_{i+1}+m_i}{h_i^2}\right)h_i=2\left(3\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}^2}-\frac{m_{i+2}+2m_{i+1}}{h_{i+1}}\right)$$

Simplificând şi ordonând obţinem

$$\frac{m_i}{h_i}+2m_{i+1}\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)+\frac{m_{i+2}}{h_{i+1}}=3\left(\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}\right) \qquad (3.4.8.16)$$

Se înmulţeşte cu $\frac{h_i h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}>0$ şi se mai adoptă nişte notaţii consacrate în literatură ([M11], [B31]):

$$\rho_{i+1}=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}};\quad \lambda_{i+1}=1-\rho_{i+1}=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\,,\qquad (i=1,2,...n-2) \qquad (3.4.8.17)$$

$$\beta_{i+1}=\frac{3h_ih_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}\right),\qquad (i=1,2,...n-2)$$

Se obţine sistemul:

$$\rho_{i+1}m_i+2m_{i+1}+\lambda_{i+1}m_{i+2}=\beta_{i+1}\quad,\qquad (i=1,2,...,n-2) \qquad (3.4.8.18)$$

Să observăm că avem n necunoscute m_i şi numai (n-2) ecuaţii, datorită sistemului de condiţii impuse, care lasă două grade de libertate. Este necesară deci adăugarea a două condiţii suplimentare la limită; aceasta se face de obicei prin precizarea pantelor la capetele intervalului de definiţie ($m_1; m_n$), care se leagă prin relaţii liniare cu pantele vecine, astfel:

$$\begin{cases} i=0\Rightarrow & 2m_1+\lambda_1 m_2=\beta_1 \\ i=n-1\Rightarrow & \rho_n m_{n-1}+2m_n=\beta_n \end{cases} \qquad (3.4.8.19)$$

În aceste relaţii coeficienţii $\lambda_1,\beta_1,\rho_n,\beta_n$ *sunt aleşi de noi prin natura condiţiilor puse la capetele intervalului*; ei nu pot fi deduşi din relaţiile (3.4.8.17) care nu sunt definite pentru i=1 şi $i=n$.

De exemplu, dacă luăm $\lambda_1=0,\ \rho_n=0\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=2m_1\\ \beta_n=2m_n\end{cases}$

Întâlnim în literatură un caz particular important de funcţii spline cubice care definesc condiţiile de capete astfel:

$$S_1''(x_1)=S_{n-1}''(x_n)=0$$

ceea ce ne conduce la:

$$\begin{cases} 2m_1+m_2=3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} \\ m_{n-1}+2m_n=3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases} \qquad (3.4.8.20)$$

Identificând (3.4.8.19) cu (3.4.8.20) vom avea:

$$\lambda_1=1;\ \beta_1=3(y_2-y_1)/h_1;\ \rho_n=1;\ \beta_n=3(y_n-y_{n-1})/h_{n-1} \qquad (3.4.8.21)$$

Acestea sunt numite **funcţii spline cubice naturale**. Se poate demonstra că impunerea acestor condiţii de capăt minimizează integrala:

$$I = \int_{x_1}^{x_n} \left[f''(x)\right]^2 dx \qquad (3.4.8.22)$$

unde $f(x)$ este funcţia exactă, necunoscută, de clasă $C^2[a,b]$.

Minimizarea acestei integrale (3.4.8.22) prin impunerea condiţiilor naturale (3.4.8.20) conduce la cea mai netedă interpolare spline, cubică. În absenţa unor informaţii *precise* asupra pantelor de la capetele intervalului de definiţie (m_1, m_n) se recomandă folosirea condiţiilor naturale care conduc de regulă la minimizarea erorii de interpolare. ([B31]).

Sistemul de ecuaţii algebrice liniare (3.4.8.18), completat cu condiţiile de margine (3.4.8.19) se poate scrie matriceal astfel ([M31]):

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{Bmatrix} \qquad (3.4.8.23)$$

Se demonstrează că sistemul (3.4.8.23) are soluţie unică dacă $|\lambda_1| < 2$, $|\rho_n| < 2$, deoarece în acest caz matricea sistemului este diagonal dominantă; practic problema este rezolvabilă dacă impunem condiţii necontradictorii şi distincte. Din acest punct de vedere funcţiile spline cubice pot fi privite ca fiind definite formal în sens Hermite pe porţiuni.

Observaţii:

1. Funcţiile spline cubice descrise mai sus, pot avea abateri în zonele cu pante mari; de aceea în vecinătatea nodurilor cu pante mari, $m_i \geq 5$, se recomandă verificări mai atente.
2. Funcţiile spline pe I_i nu trebuie să fie obligatoriu polinoame; se pot racorda tot felul de funcţii dictate şi de geometria frontierei: cercuri, elipse, parabole cu polinoame etc. Astfel de combinaţii pot rezolva problemele în cazul subdomeniilor cu pante mari.

3.4.8.3. A doua variantă pentru funcţiile spline cubice

Vom alege ca necunoscute ale problemei derivatele de ordinul doi ale funcţiei spline $S_i(x)$ pe fiecare nod. Fie

$$M_i = S_i''(x_i), \quad (i = 0,1,2,\dots,n) \qquad (3.4.8.24)$$

Deoarece restricţia funcţiei spline pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, notată $S_i(x)$, este o funcţie polinomială de gradul trei, atunci derivata sa de ordinul doi va fi o funcţie liniară care are expresia analitică evidentă:

$$S_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3.4.8.25)$$

unde

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,\dots,n \qquad (3.4.8.26)$$

Prin două integrări succesive se obţine:

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_i x + D_i \qquad (3.4.8.27)$$

unde

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Constantele de integrare C_i şi D_i se determină impunând condiţiile de continuitate în nodul i:

$$S(x_i) = f_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3.4.8.28}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_i(x_{i-1}) = M_{i-1}\dfrac{h_i^2}{6} + C_i \cdot x_{i-1} + D_i = f_{i-1} & (3.4.8.29) \\ S_i(x_i) = M_i \dfrac{h_i^2}{6} + C_i x_i + D_i = f_i & (3.4.8.30) \end{cases}$$

Cu aceste rezultate relaţia (3.4.8.27) se scrie:

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{3.4.8.31}$$

Mai trebuie să asigurăm şi continuitatea derivatei de ordinul întâi pe fiecare nod, despre care n-am spus încă nimic. Avem imediat:

$$S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6}h_i \tag{3.4.8.32}$$

Funcţia (8) aplicată pe fiecare interval din diviziunea domeniului de definiţie, ne conduce la o funcţie de interpolare S(x) continuă pe [a,b] deoarece în toate punctele x_i avem $S_i(x_i) = f_i$, i=1,2, ...,n. Atunci condiţia de continuitate a derivaţiei de ordinul întâi:

$$S_i'(x_i - 0) = S_i'(x_i + 0) \approx S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \quad i = 1,2,\ldots,(n-1) \tag{3.4.8.33}$$

ne conduce la:

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad i = 1,2,\ldots,(n-1) \tag{3.4.8.34}$$

Se vede că am obţinut un sistem de (n-1) ecuaţii liniare cu (n+1) necunoscute: $M_0, M_1, \ldots, M_n$; un astfel de sistem este nedeterminat şi putem găsi o infinitate de funcţii spline de interpolare *S(x)* pentru funcţia căutată *f(x)* şi diviziunea dată. Ca să avem o problemă cu soluţie unică, mai trebuie să impunem două condiţii suplimentare. Deşi această problemă nu este complet lămurită în literatură, se obişnuieşte să se impună două categorii de condiţii:

I. **Prima categorie de condiţii se referă la derivatele de ordinul doi pe nodurile marginale: $M_0=M_n=0$**. Acestea s-au numit *condiţiile naturale*. Atunci, din prima ecuaţie (3.4.8.34) dispare primul termen, iar din ultima ecuaţie (3.4.8.34) dispare termenul care-l conţine pe M_n. Se ajunge astfel la un sistem de (n-1) ecuaţii cu (n-1) necunoscute, tridiagonal, cu diagonala principală dominantă, care se ştie că are o soluţie unică.

II. **A doua categorie de condiţii** se referă la derivatele de ordinul întâi tot pe nodurile extreme ale intervalului de definiţie. **Se presupune că sunt cunoscute valorile** $f_0' = f'(x_0)$ **şi** $f_n' = f'(x_n)$. Vom scrie atunci condiţiile pentru polinomul de interpolare:

$$S'(x_0) = f_0'; \quad S'(x_n) = f_n' \tag{3.4.8.35}$$

Din relaţiile (3.4.8.34) obţinem:

$$\left.\begin{aligned} i=0 &\Rightarrow \quad M_0\frac{h_1}{3}+M_1\frac{h_1}{6}=\frac{f_1-f_0}{h_1}-f_0' \\ i=n &\Rightarrow M_{n-1}\frac{h_n}{6}+M_n\frac{h_n}{3}=f_n'-\frac{f_n-f_{n-1}}{h_n} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.8.36}$$

În sistemul (3.4.8.34) înmulţim cu $\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}$ şi avem:

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right) \tag{3.4.8.37}$$

Vom nota coeficienţii:

$$A_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}};\ B_i=2\ \forall i=1,2,\dots,n-1;\ C_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}};\ D_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right) \tag{3.4.8.38}$$

În final vom avea sistemul (din (3.4.8.36) şi (3.4.8.37)):

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1-f_0}{h_1}-f_0'\right) \\ A_iM_{i-1}+2M_i+C_iM_{i+1}=D_i \\ M_{n-1}+2M_n=\dfrac{6}{h_n}\left(f_n'-\dfrac{f_n-f_{n-1}}{h_n}\right) \end{cases} \tag{3.4.8.39}$$

Avem acum un sistem de (n+1) ecuaţii cu (n+1) necunoscute, care se rezolvă după un algoritm similar cu primul caz analizat, în ipoteza că se cunosc f_0' şi f_n' - *valori care de obicei nu se cunosc a priori.*

3.4.8.4. A treia variantă pentru funcţiile spline cubice. Funcţii spline exponenţiale.

În cazul funcţiilor spline cubice, analizate până acum, chiar dacă polinomul de gradul trei care intră în structura lor, este definit pe un interval foarte mic, apar adeseori oscilaţii, care influenţează calitatea interpolării. De aceea, pentru a evita aceste neajunsuri, s-au introdus aşa-numitele **funcţii spline exponenţiale** care înlocuiesc polinomul algebric de gradul trei de pe fiecare interval $[x_{i-1},x_i]$ cu o combinaţie liniară a următoarelor patru funcţii: $1, x, e^{\alpha_i x}, e^{-\alpha_i x}$. Pentru calculele numerice se preferă introducerea unei coordonate adimensionale $t=(x-x_{i-1})/h_i$ şi înlocuirea funcţiilor exponenţiale cu funcţii trigonometrice hiperbolice, astfel încât în literatură ([I1]) se găseşte următoarea formă analitică de reprezentare a elementului local $S_i(x)$:

$$S_i(x)=f_it+f_{i-1}(1-t)+\frac{M_i}{\alpha_i^2}\left[\frac{sh\beta_i t}{sh\beta_i}-t\right]+\frac{M_{i-1}}{\alpha_i^2}\left[\frac{sh\beta_i(1-t)}{sh\beta_i}-(1-t)\right] \tag{3.4.8.40}$$

$$x\in[x_{i-1},x_i];\quad t=\frac{x-x_{i-1}}{h_i};\quad \beta_i=\alpha_ih_i \tag{3.4.8.41}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1};\quad \begin{cases} S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}; & S_i(x_i) = f_i \\ S_i''(x_{i-1}) = M_{i-1}; & S_i''(x_i) = M_i \end{cases} \tag{3.4.8.42}$$

Se vede că relația (3.4.8.40) este o combinație liniară a sistemului fundamental de funcții care asigură continuitatea funcției de interpolare pe $[a,b]$ (v. relația (3.4.8.42)). Întocmai ca la punctul precedent am ales ca necunoscute derivatele de ordinul doi în nodurile rețelei de discretizare.

Mai trebuie să punem condiții de continuitate în noduri și pentru derivatele de ordinul întâi. Pentru aceasta vom calcula derivata de ordinul întâi a funcției $S_i(x)$, ținând cont că ea depinde de x prin intermediul lui t. Obținem:

$$S_i'(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + M_{i-1}\frac{sh\beta_i - \beta_i ch\beta_i(1-t)}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i + M_i\frac{\beta_i ch\beta_i t - sh\beta_i}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i,\quad i = 1,2,\dots,n \tag{3.4.8.43}$$

Impunem condiția ca:

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \tag{3.4.8.44}$$

Trebuie să ținem cont de următoarele situații:

- dacă $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $t = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}$; pentru $x = x_i \Rightarrow t = 1$ (se introduce în $S_i'(x_i)$)
- dacă $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t = \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}$; pentru $x = x_i \Rightarrow t = 0$ (se introduce în $S_{i+1}'(x_i)$)

După calcule algebrice simple vom obține:

$$M_{i-1}\frac{sh\beta_i - \beta_i}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i + M_i\left[\frac{\beta_i ch\beta_i - sh\beta_i}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i + \frac{\beta_{i+1}ch\beta_{i+1} - sh\beta_{i+1}}{\beta_{i+1}^2 sh\beta_{i+1}}h_{i+1}\right] + M_{i+1}\frac{sh\beta_{i+1} - \beta_{i+1}}{\beta_{i+1}^2 sh\beta_{i+1}}h_{i+1} =$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \tag{3.4.8.45}$$

Se introduc niște notații fără vreo semnificație aparte, numai pentru condensarea scrierii:

$$A_{i-1} = \frac{sh\beta_i - \beta_i}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i;\quad B_i = \frac{\beta_i ch\beta_i - sh\beta_i}{\beta_i^2 sh\beta_i}h_i;\quad B_{i+1} = \frac{\beta_{i+1}ch\beta_{i+1} - sh\beta_{i+1}}{\beta_{i+1}^2 sh\beta_{i+1}}h_{i+1};$$

$$C_i = \frac{sh\beta_{i+1} - \beta_{i+1}}{\beta_{i+1}^2 sh\beta_{i+1}}h_{i+1};\quad D_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \tag{3.4.8.46}$$

Ecuația (3.4.8.45) devine:

$$A_{i-1}M_{i-1} + (B_i + B_{i+1})M_i + C_i M_{i+1} = D_i;\qquad (i = 1,2,\dots n-1) \tag{3.4.8.47}$$

Această relație reprezintă un sistem de (n-1) ecuații cu (n+1) necunoscute (M_0, M_1, ..., M_n). Condițiile de înlăturare a nedeterminării sunt aceleași ca la paragraful precedent:

I. $M_0 = 0$; $M_n = 0$. Se obține un sistem de (n-1) ecuații cu (n-1) necunoscute: M_1, M_2, ..., M_{n-1}

II. $S_1'(x_0) = f_0'$; $S_n'(x_n) = f_n'$, mărimi presupuse date.

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} B_1 M_0 + C_0 M_1 = D_0 \\ A_{i-1} M_{i-1} + (B_i + B_{i+1}) M_i + C_i M_{i+1} = D_i \qquad (i=1,2,\ldots,(n-1)) \\ A_{n-1} M_{n-1} + B_n M_n = D_n \end{cases}$$

unde

$$D_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'; \quad D_n = f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}$$

De data aceasta avem un sistem de (n+1) ecuaţii cu (n+1) necunoscute, care se rezolvă după acelaşi algoritm.

Observaţii: Au rămas totuşi unele aspecte destul de neclare.
De exemplu:
- Ce valori pot lua parametrii? Aceasta este încă o problemă nerezolvată şi este deschisă cercetării ([I1]). S-a constatat că pentru valori mici ale lui α_i, funcţiile spline exponenţiale se comportă asemănător cu funcţiile spline cubice, adică vom avea oscilaţii nedorite în unele cazuri, pentru valori mari vor apărea puncte unghiulare caracteristice funcţiior spline liniare. De aceea, într-o singură bibliografie se recomandă $\alpha_i \in [4,15]$ ([I1]).
- De asemenea se presupune că f_0' şi f_n' sunt cunoscute, ceeace de obicei nu se întâmplă.

De aceste motive am făcut în continuare un studiu al influenţei acestor parametrii asupra erorii maxime relative.

3.4.8.5. Realizare program pentru interpolarea cu funcţii spline

Cu fiecare din metodele descrise mai sus am realizat câte un program de calcul al aproximărilor cu funcţii spline pentru cazul unui semicerc (**Fig. 3.4.8.2**), resp. pentru cazul unei semielipse (**Fig. 3.4.8.3**); deoarece pentru aceste cazuri soluţiile exacte se cunosc, putem să apreciem erorile introduse de aproximarea prin funcţii spline.

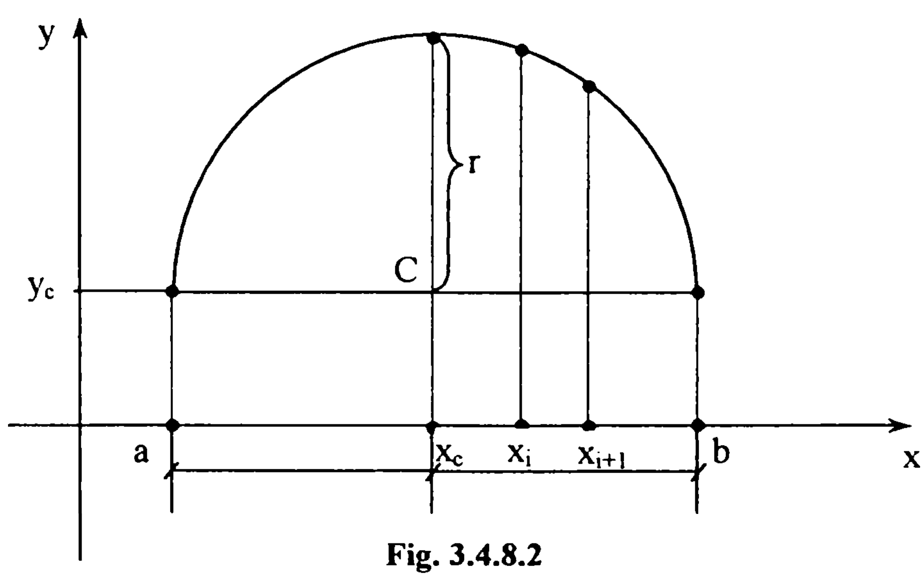


Fig. 3.4.8.2

S-a considerat într-o primă variantă pasul reţelei de discretizare ($h_i = x_{i+1} - x_i$) ca fiind constant, iar într-o a doua variantă (v. **Fig. 3.4.8.4** şi **Fig. 3.4.8.5**) s-a efectuat o discretizare după unghiuri egale măsurate din centrul semicercului, resp. din centrul semielipsei. Prin program sunt date ca valori cunoscute coordonatele centrului cercului (x_c, y_c) şi raza cercului r, respectiv coordonatele centrului elipsei (x_c, y_c) şi raza mare (R) şi mică (r) a elipsei.

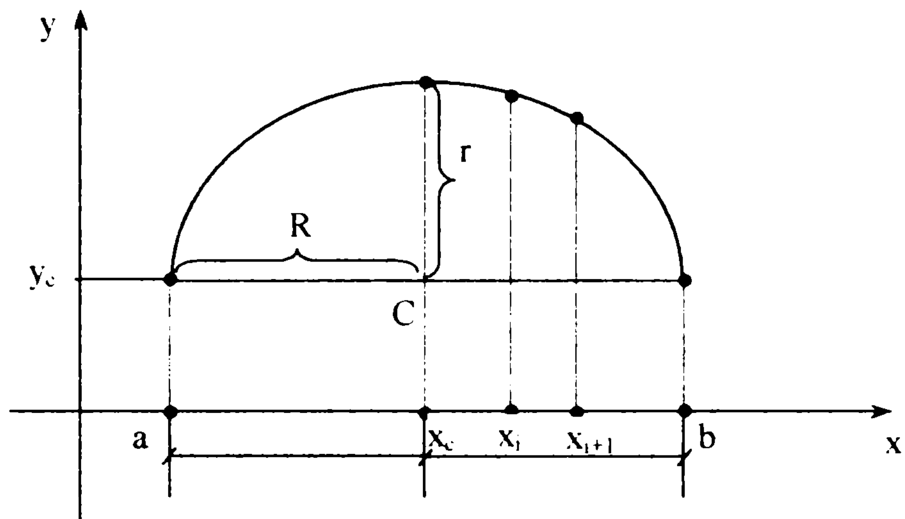


Fig. 3.4.8.3

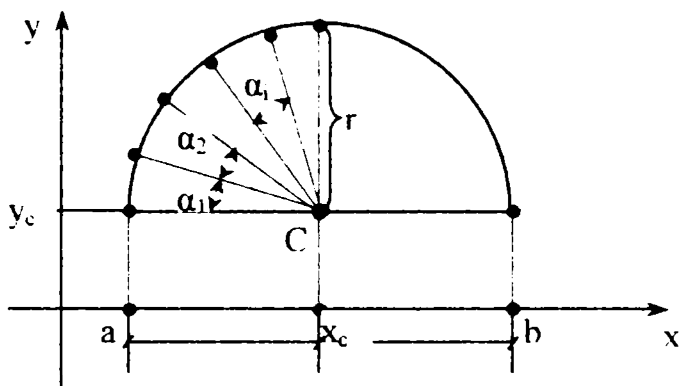


Fig. 3.4.8.4

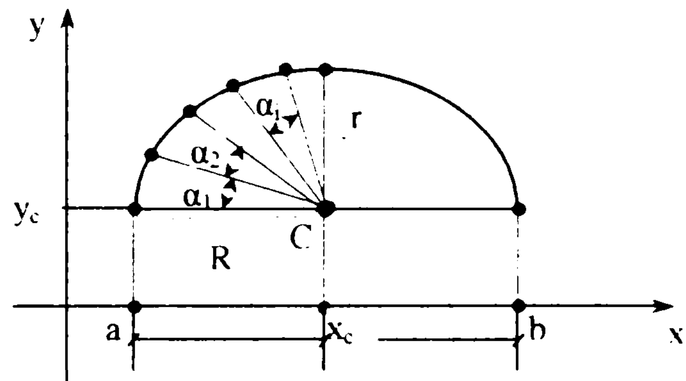


Fig. 3.4.8.5

Voi prezenta în continuare **algoritmul programului de implementare a funcţiilor spline cubice naturale, varianta I-a, pentru aproximarea unui semicerc utilizând o eşantionare în arce egale** (cazul din **Fig. 3.4.8.4**); celelalte variante de program sunt similare, codurile lor sursă fiind date la sfârşitul acestui paragraf.

La pornirea programului apare o fereastră mesaj cu titlul problemei pe care o rezolvă programul (v. **Fig. 3.4.8.6**). De asemene a se deschide fişierul text *"Iesire.txt"*, în care se vor memora rezultatele.

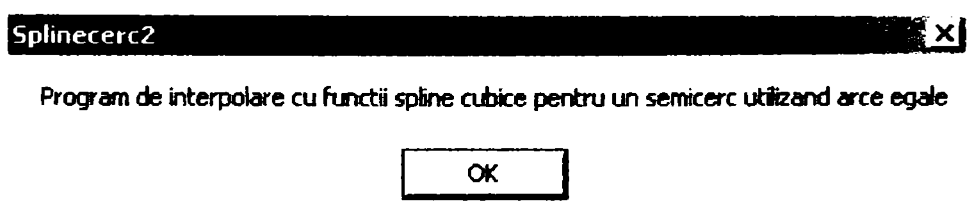


Fig.3.4.8.6

Citirea datelor de intrare se face cu ajutorul formei **Frmintro** din **Fig. 3.4.8.7**. Aici se dau coordonatele centrului semicercului, care se vor memora în variabilele x_c şi y_c, raza semicercului r, precum şi numărul de puncte de eşantionare în arce egale, n, în care va fi discretizat acest semicerc. După clic pe butonul de comandă *OK* are loc calculul mai multor vectori:

- vectorul *unghi*, de n elemente, ce conţine unghiurile la centru a celor n puncte de discretizare;
- vectorul x, de n elemente, ce conţine coordonatele corespunzătoare axei x a celor n puncte de discretizare;
- vectorul y, de n elemente, ce conţine coordonatele corespunzătoare axei y a celor n puncte de discretizare;

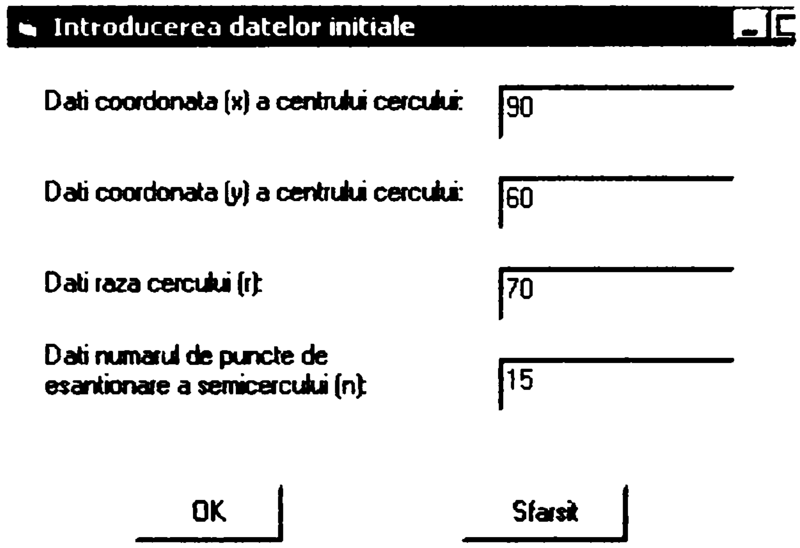


Fig. 3.4.8.7

- vectorul λ, de n-1 elemente, calculat cu formulele (3.4.8.17), resp. din condiții naturale $\lambda_1 = 0$, conform relațiilor (3.4.8.21);

$$unghi = \begin{Bmatrix} unghi_1 = 0 \\ unghi_2 = unghi_1 + \pi/(n-1) \\ \ldots \\ unghi_i = unghi_{i-1} + \pi/(n-1) \\ \ldots \\ unghi_n = unghi_{n-1} + \pi/(n-1) \end{Bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 = x_c - r\cos(unghi_1) \\ x_2 = x_c - r\cos(unghi_2) \\ \ldots \\ x_i = x_c - r\cos(unghi_i) \\ \ldots \\ x_n = x_c - r\cos(unghi_n) \end{Bmatrix},$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 = y_c + \sqrt{r^2 - (x_1 - x_c)^2} \\ y_2 = y_c + \sqrt{r^2 - (x_2 - x_c)^2} \\ \ldots \\ y_i = y_c + \sqrt{r^2 - (x_i - x_c)^2} \\ \ldots \\ y_n = y_c + \sqrt{r^2 - (x_n - x_c)^2} \end{Bmatrix}, \quad \lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2} \\ \ldots \\ \lambda_i = \dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \\ \ldots \\ \lambda_{n-1} = \dfrac{h_{n-2}}{h_{n-2} + h_{n-1}} \end{Bmatrix},$$

$$\rho = \begin{Bmatrix} \rho_2 = \dfrac{h_2}{h_1 + h_2} \\ \ldots \\ \rho_i = \dfrac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \\ \ldots \\ \rho_{n-1} = \dfrac{h_{n-1}}{h_{n-2} + h_{n-1}} \\ \rho_n = 1 \end{Bmatrix}, \quad \beta = \begin{Bmatrix} \beta_1 = 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \beta_2 = \dfrac{3h_1h_2}{h_1 + h_2}\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_2^2} + \dfrac{y_2 - y_1}{h_1^2}\right) \\ \ldots \\ \beta_i = \dfrac{3h_{i-1}h_i}{h_{i-1} + h_i}\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} + \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2}\right) \\ \ldots \\ \beta_n = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{Bmatrix}.$$

(3.4.8.49)

- vectorul ρ, de n-1 elemente, calculat cu formulele (3.4.8.17), resp. din condiții naturale $\rho_n = 1$, conform relațiilor (3.4.8.21);
- vectorul β, de n elemente, calculat cu formulele (3.4.8.17'), resp. din condiții naturale β_1 și β_n, conform relațiilor (3.4.8.21);

După calculul tuturor elementelor vectorilor de mai sus apare pe ecran forma **Frmafis** din **Fig. 3.4.8.8.**

Afisarea functiilor spline obtinute

Cele 15 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:

x	y
20,000	60,000
21,755	75,576
26,932	90,372
35,272	103,644
46,356	114,728
59,628	123,068
74,424	128,245
90,000	130,000
105,576	128,245
120,372	123,068
133,644	114,728
144,728	103,644
153,068	90,372
158,245	75,576
160,000	60,000

Continuare pt. a face comparatie pe un anumit interval de esantionare

Sfarsit

Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:

2,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m1	26,6257364249
0,75	2,	0,25	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m2	22,0553850501
0,	0,62	2,	0,38	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m3	7,118415887
0,	0,	0,57	2,	0,43	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m4	4,012591636
0,	0,	0,	0,54	2,	0,46	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m5	2,4926047695
0,	0,	0,	0,	0,53	2,	0,47	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m6	1,4900464815
0,	0,	0,	0,	0,	0,51	2,	0,49	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m7	0,7030337984
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m8	0,0
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,49	2,	0,51	0,	0,	0,	0,	0,	m9	-0,7030337984
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,47	2,	0,53	0,	0,	0,	0,	m10	-1,4900464815
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,46	2,	0,54	0,	0,	0,	m11	-2,4926047695
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,43	2,	0,57	0,	0,	m12	-4,012591636
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,38	2,	0,62	0,	m13	-7,118415887
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,25	2,	0,75	m14	-22,0553850501
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	2,	m15	-26,6257364249

Cele 14 functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:

S1 =60,0	+9,66806	(x-20,0	)+0,0	(x-20,0	)^2+-0,25739	(x-20,0	)^3
S2 =75,57647	+7,28962	(x-21,755	)+-1,3552	(x-21,755	)^2+0,09642	(x-21,755	)^3
S3 =90,37186	+1,01035	(x-26,9322	)+0,14232	(x-26,9322	)^2+-0,00871	(x-26,9322	)^3
S4 =103,64429	+1,56689	(x-35,2718	)+-0,07558	(x-35,2718	)^2+0,0022	(x-35,2718	)^3
S5 =114,7282	+0,704	(x-46,3557	)+-0,00227	(x-46,3557	)^2+-0,00026	(x-46,3557	)^3
S6 =123,06782	+0,50711	(x-59,6281	)+-0,01257	(x-59,6281	)^2+0,00013	(x-59,6281	)^3
S7 =128,24495	+0,22148	(x-74,4235	)+-0,00674	(x-74,4235	)^2+-0,00002	(x-74,4235	)^3
S8 =130,0	+0,0	(x-90,0	)+-0,00748	(x-90,0	)^2+0,00002	(x-90,0	)^3
S9 =128,24495	+-0,22148	(x-105,5765	)+-0,00674	(x-105,5765	)^2+-0,00013	(x-105,5765	)^3
S10=123,06782	+-0,50711	(x-120,3719	)+-0,01257	(x-120,3719	)^2+0,00026	(x-120,3719	)^3
S11=114,7282	+-0,704	(x-133,6443	)+-0,00227	(x-133,6443	)^2+-0,0022	(x-133,6443	)^3
S12=103,64429	+-1,56689	(x-144,7282	)+-0,07558	(x-144,7282	)^2+0,00871	(x-144,7282	)^3
S13=90,37186	+-1,01035	(x-153,0678	)+0,14232	(x-153,0678	)^2+-0,09642	(x-153,0678	)^3
S14=75,57647	+-7,28962	(x-158,245	)+-1,3552	(x-158,245	)^2+0,25739	(x-158,245	)^3

Fig.3.4.8.8

în care se afişează:

- coordonatele celor n puncte de eşantionare (în exemplul dat n=15), date de elementele vectorilor x şi y determinate mai sus;
- matricea rezultată pentru calculul pantelor $m_1, m_2, ..., m_n$, respectiv vectorul β, de forma (3.4.8.23);

- cele n-1 (în acest caz 14) ecuații ale funcțiilor spline obținute pe fiecare din cele n-1 intervale de discretizare a frontierei, conform relațiilor (3.4.8.14).

Tot ce apare afișat în această formă va fi memorat de asemenea și în fișierul text „*Iesire.txt*".

Pentru aceste afișări a fost necesar să se formeze mai întâi matricea *mat*, de $n \times n$ elemente, a coeficienților necunoscutelor $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

$$mat = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n & 2 \end{bmatrix} \qquad (3.4.8.50)$$

după care, utilizând metoda Gauss a eliminării se rezolvă sistemul de n ecuații cu n necunoscute rezultat (v. ecuația (3.4.8.14)).

În continuare, pentru a afișa cele n-1 ecuații de forma (3.4.8.3), a funcțiilor spline pentru fiecare interval de eșantionare, s-au calculat vectorii a, b, c, d, cu n-1 elemente, care formează coeficienții polinoamelor de interpolare spline:

$$a = \left\{ \begin{array}{l} a_1 = y_1 \\ a_2 = y_2 \\ \ldots \\ a_i = y_i \\ \ldots \\ a_{n-1} = y_{n-1} \end{array} \right\}, \quad b = \left\{ \begin{array}{l} b_1 = m_1 \\ b_2 = m_2 \\ \ldots \\ b_i = m_i \\ \ldots \\ b_n = m_n \end{array} \right\}, \quad c = \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1^2} - \dfrac{m_2 + 2m_1}{h_1} \\ c_2 = 3\dfrac{y_3 - y_2}{h_2^2} - \dfrac{m_3 + 2m_2}{h_2} \\ \ldots \\ c_i = 3\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i{}^2} - \dfrac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i} \\ \ldots \\ c_{n-1} = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^2} - \dfrac{m_n + 2m_{n-1}}{h_{n-1}} \end{array} \right\},$$

$$d = \left\{ \begin{array}{l} d_1 = -2\dfrac{y_2 - y_1}{h_1^3} + \dfrac{m_2 + m_1}{h_1^2} \\ d_2 = -2\dfrac{y_3 - y_2}{h_2^3} + \dfrac{m_3 + m_2}{h_2^2} \\ \ldots \\ d_i = -2\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} + \dfrac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2} \\ \ldots \\ d_{n-1} = -2\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^3} + \dfrac{m_n + m_{n-1}}{h_{n-1}^2} \end{array} \right\}. \qquad (3.4.8.51)$$

La clic pe butonul *Continuare pt. a face comparație pe un anumit interval de esantionare*, va apare pe ecran forma **Frmcontcompar**, prezentată în **Fig. 3.4.8.9**, în care se cere numărul intervalului, k, care se dorește a fi studiat și numărul de puncte, *nrp*, în care acest interval să fie discretizat cu pas orizontal constant, puncte în care să se determine eroarea dintre valoarea reală a funcției și cea aproximată cu funcțiile spline cubice.

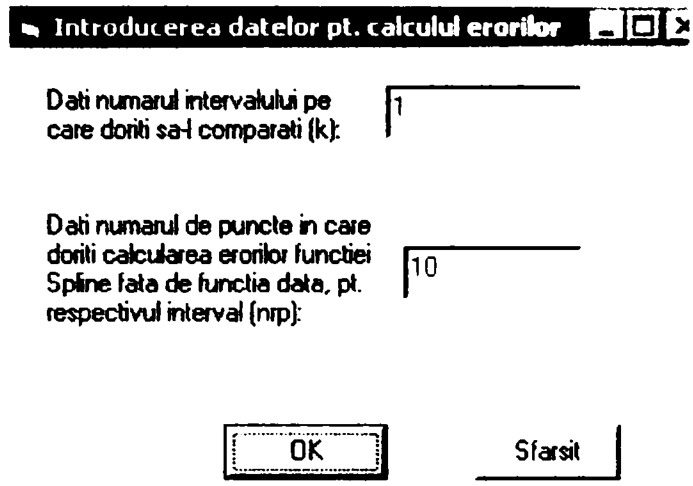


Fig. 3.4.8.9

După ce se tastează un număr de interval la alegere cuprins între 1 și n-1 și un număr arbitrar (cuprins între 3 și 30 de exemplu) de puncte de calcul al erorii în acel interval, la clic pe butonul de comandă *OK* se calculează:

- vectorii $x1$ și $y1$ de câte *nrp* elemente, ce reprezintă coordonatele punctelor de discretizare a intervalului k de pe semicerc, respectiv

$$x1=\begin{Bmatrix} x1_1 = x_k \\ x1_2 = x1_1 + h1 \\ \ldots \\ x1_i = x1_{i-1} + h1 \\ \ldots \\ x1_{nrp} = x1_{nrp-1} + h1 \end{Bmatrix},\quad y1=\begin{Bmatrix} y1_1 = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_1 - x_c)^2} \\ y1_2 = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_2 - x_c)^2} \\ \ldots \\ y1_i = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_i - x_c)^2} \\ \ldots \\ y1_{nrp} = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_{nrp} - x_c)^2} \end{Bmatrix} \qquad (3.4.8.52)$$

unde $h1$ reprezintă pasul constant de discretizare pe orizontală a intervalului ales k, adică:

$$h1 = \frac{pas}{nrp-1} \qquad (3.4.8.53)$$

- vectorul sk, de *nrp* elemente, ce conține valorile returnate de funcția spline pentru acele puncte;

$$sk=\begin{Bmatrix} sk_1 = a_k + b_k(x1_1 - x_k) + c_k(x1_1 - x_k)^2 + d_k(x1_1 - x_k)^3 \\ sk_2 = a_k + b_k(x1_2 - x_k) + c_k(x1_2 - x_k)^2 + d_k(x1_2 - x_k)^3 \\ \ldots \\ sk_i = a_k + b_k(x1_i - x_k) + c_k(x1_i - x_k)^2 + d_k(x1_i - x_k)^3 \\ \ldots \\ sk_{nrp} = a_k + b_k(x1_{nrp} - x_k) + c_k(x1_{nrp} - x_k)^2 + d_k(x1_{nrp} - x_k)^3 \end{Bmatrix} \qquad (3.4.8.54)$$

În continuare pe ecran apare o nouă formă, **Frmafis2**, în care sunt afișate rezultatele obținute(v. **Fig. 3.4.8.10**). De asemenea tot ce apare afișat în această fereastră este memorat în același timp și în fișierul text „*Iesire.txt*". Pe această formă se pune întrebarea dacă se dorește să se repete procedura pentru un alt interval dintre cele n-1 intervale de discretizare în arce egale a semicercului.

Afisarea comparativa pentru intervalul k a mai multor puncte de pe cerc si de pe functia SPLINE corespondenta

Coordonata x	y (pt. cerc)	sk (pt. functia SPLINE)
20,000	60,000	60,000
20,195	65,221	61,883
20,390	67,379	63,755
20,585	69,031	65,604
20,780	70,421	67,419
20,975	71,643	69,188
21,170	72,745	70,900
21,365	73,757	72,543
21,560	74,696	74,105
21,755	75,576	75,576

Doriti sa continuati dand un alt interval de comparatie? DA

OK

Fig.3.4.8.10

Dacă se alege răspunsul *DA*, programul ne întoarce la forma **Frmcontcompar**, unde putem alege un alt interval de discretizare *k*, şi/sau, eventual, un alt număr de puncte în care să fie discretizat intervalul *k* – vezi **Fig. 3.4.8.11**.

Introducerea datelor pt. calculul erorilor

Dati numarul intervalului pe care doriti sa-l comparati (k): 8

Dati numarul de puncte in care doriti calcularea erorilor functiei Spline fata de functia data, pt. respectivul interval (nrp): 10

OK Sfarsit

Fig. 3.4.8.11

Se repetă aceleaşi calcule şi se afişează noile rezultate (v. **Fig. 3.4.8.12**), observându-se faptul că pentru intervale care se află cât mai aproape de unghiul de 90° faţă de axa Ox (cum este cel cu numărul *k*=8), diferenţa între funcţia reală şi aproximarea dată de funcţia spline este minimă.

Afisarea comparativa pentru intervalul k a mai multor puncte de pe cerc si de pe functia SPLINE corespondenta

Coordonata x	y (pt. cerc)	sk (pt. functia SPLINE)
90,000	130,000	130,000
91,731	129,979	129,978
93,461	129,914	129,911
95,192	129,807	129,801
96,923	129,657	129,647
98,654	129,463	129,450
100,384	129,225	129,211
102,115	128,944	128,930
103,846	128,617	128,608
105,576	128,245	128,245

Doriti sa continuati dand un alt interval de comparatie?

OK

Fig. 3.4.8.12

La alegerea răspunsului *NU* la întrebarea de continuare de mai sus programul se încheie.

O variantă mai completă a acestor programe, adăugite cu un algoritm adaptiv, respectiv un studiu mai detaliat al erorilor cu proceduri grafice pentru reprezentarea acestor erori, se va prezenta la paragraful 3.6.2.

În continuare prezint codurile sursă a programelor descrise în acest paragraf:

Cod sursă al programului de interpolare cu funcţii spline varianta I-a cu condiţii naturale pentru cazul unui semicerc cu discretizare în arce egale

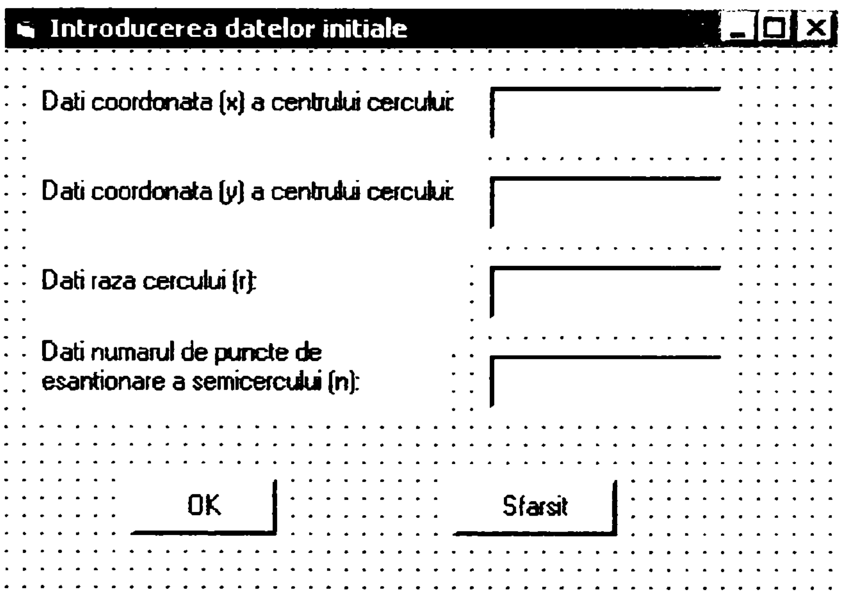
Module 1:

```
Public n, k, nrp As Integer
Public xc, yc, r, pas, h1, z As Single
Public h(), x(), y(), panta(), lambda(), ro(), beta(), m() As Single
Public mat(), a(), b(), c(), d() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
```

Sub main()

```
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru un semicerc utilizand arce egale")
Frmintro.Show
End Sub
```

Frmintro:



Private Sub cmdok_Click()

```
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r = Val(Txtr.Text)
n = Val(Txtn.Text)
ReDim h(1 To n - 1), unghi(1 To n), x(1 To n), y(1 To n), lambda(1 To n - 1), ro(2 To n), beta(1 To n), m(1 To n)
As Single
ReDim mat(1 To n, 1 To n), a(1 To n - 1), b(1 To n - 1), c(1 To n - 1), d(1 To n - 1) As Single
unghi(1) = 0
For i = 2 To n
  unghi(i) = unghi(i - 1) + 4 * Atn(1) / (n - 1)
Next i
For i = 1 To n
   x(i) = xc - r * Cos(unghi(i))
Next i
 For i = 1 To n
  y(i) = yc + Sqr(r ^ 2 - (x(i) - xc) ^ 2)
Next i
For i = 1 To n - 1
  h(i) = x(i + 1) - x(i)
Next i
lambda(1) = 1
For i = 2 To n - 1
```

```
 lambda(i) = h(i - 1) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
For i = 2 To n - 1
 ro(i) = h(i) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
ro(n) = 1
beta(1) = 3 * (y(2) - y(1)) / h(1)
For i = 2 To n - 1
 beta(i) = 3 * h(i - 1) * h(i) / (h(i - 1) + h(i)) * ((y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 + (y(i) - y(i - 1)) / h(i - 1) ^ 2)
Next i
beta(n) = 3 * (y(n) - y(n - 1)) / h(n - 1)
Frmintro.Hide
Frmafis.Show
End Sub
```

Private Sub cmdsf_Click()

```
 End
End Sub
```

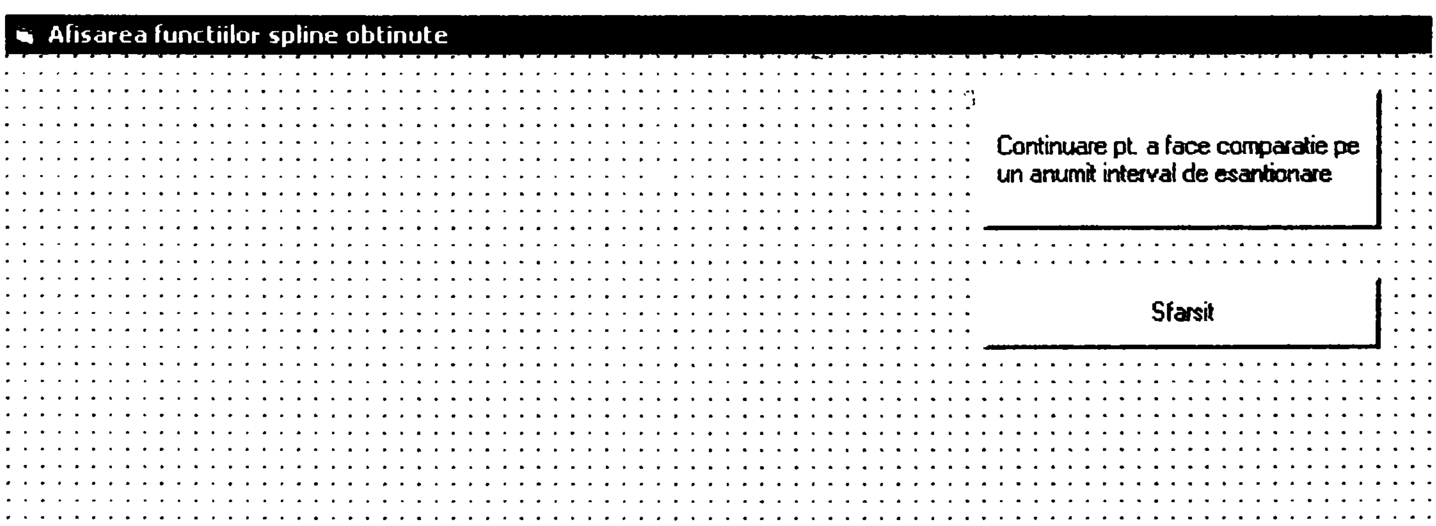
Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)

```
n = Val(Txtn.Text)
 If n <= 2 Then
  MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=3!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

Private Sub Txtr_Validate(Cancel As Boolean)

```
r = Val(Txtr.Text)
 If r <= 0 Then
  MsgBox ("r trebuie sa fie >=0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

Frmafis:



Private Sub Cmdcont_Click()

```
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub
```

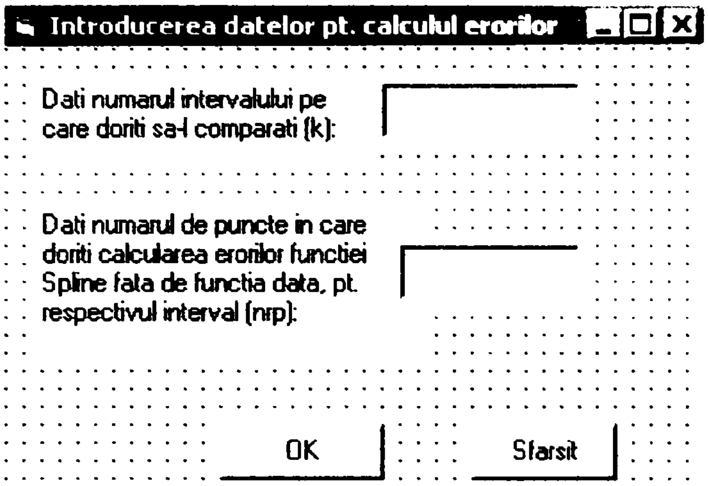
Private Sub cmdsf_Click()

```
 End
End Sub
```

```
Private Sub Form_Activate()
Cls
Open "Iesire.txt" For Output As #1
Print "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print "      x          y"
Print #1, "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print #1, "    x        y"
For i = 1 To n
  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
Next i
mat(1, 1) = 2: mat(1, 2) = lambda(1)
For i = 1 To n - 2
 mat(1, i + 2) = 0
Next i
For i = 2 To n - 1
 For j = 1 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = ro(i): mat(i, j + 1) = 2: mat(i, j + 2) = lambda(i)
 j = j + 2
 For k = j To n - 1
  mat(i, k + 1) = 0
 Next k
Next i
For i = 1 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = ro(n): mat(n, n) = 2
Print
Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
Print #1, ""
Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
For i = 1 To n
  For j = 1 To n
    Print Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
    Print #1, Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
  Next j
 Print Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
 Print #1, Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
Next i
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
   If Abs(mat(i1, i)) < Abs(mat(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If mat(i1, i) <> 0 Then
   If i1 <> 1 Then
     For j = 1 To n
       z = mat(i, j)
       mat(i, j) = mat(i1, j)
       mat(i1, j) = z
     Next j
     z = beta(i)
     beta(i) = beta(i1)
     beta(i1) = z
   End If
   z = mat(i, i)
   For j = 1 To n
     mat(i, j) = mat(i, j) / z
   Next j
```

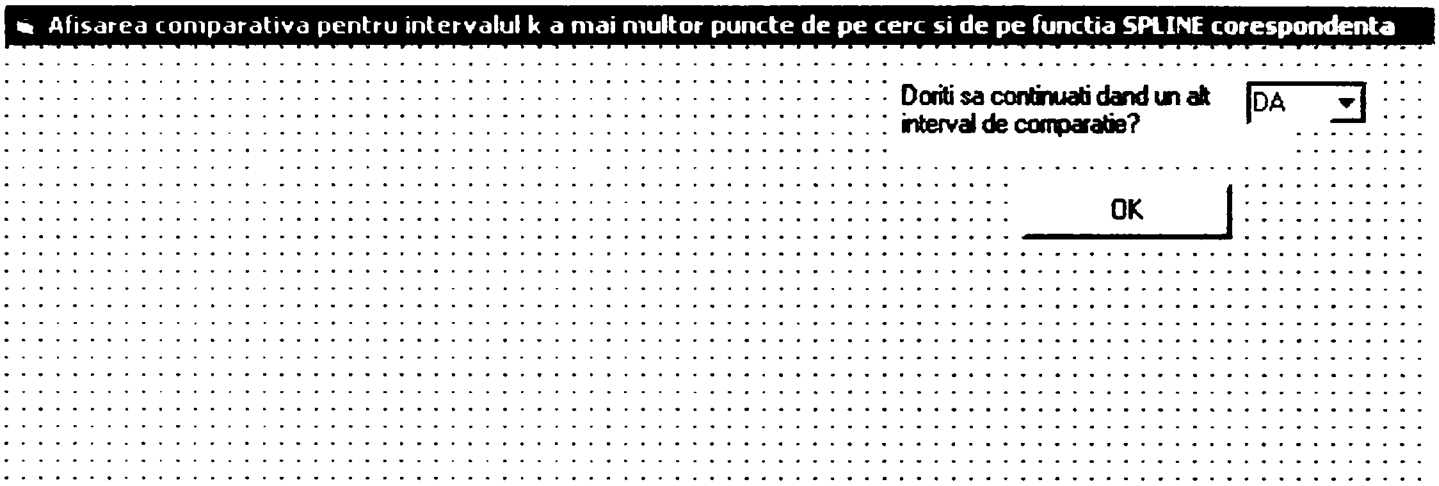
```
  beta(i) = beta(i) / z
  i1 = i + 1
  For j = i1 To n
   If mat(j, i) <> 0 Then
    z = mat(j, i)
    For k = i To n
     mat(j, k) = mat(j, k) - z * mat(i, k)
    Next k
    beta(j) = beta(j) - beta(i) * z
   End If
  Next j
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
  End
 End If
Next i
If mat(n, n) <> 0 Then
 m(n) = beta(n) / mat(n, n)
 For i = 1 To n1
  m(n - i) = beta(n - i)
  For k = 1 To i
   m(n - i) = m(n - i) - mat(n - i, n - i + k) * m(n - i + k)
  Next k
 Next i
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
  End
End If
For i = 1 To n - 1
  a(i) = y(i)
  b(i) = m(i)
  c(i) = 3 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 - (m(i + 1) + 2 * m(i)) / h(i)
  d(i) = -2 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 3 + (m(i + 1) + m(i)) / h(i) ^ 2
Next i
Print
Print "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
Print #1, ""
Print #1, "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
For i = 1 To n - 1
  Print "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(19); "+"; Format(b(i), "#####0.0####"); Tab(31);
"(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(44); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(58); "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(71); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(88); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###");
Tab(101); ")^3"
  Print #1, "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(19); "+"; Format(b(i), "#####0.0####");
Tab(31); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(44); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(58); "(x-";
Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(71); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(88); "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(101); ")^3"
Next i
End Sub
```

Frmcontcompar:




```
Private Sub cmdok_Click()
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = h(k) / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 sk(i) = a(k) + b(k) * (x1(i) - x(k)) + c(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 2 + d(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 3
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
Close #1
End
End Sub

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n - 1 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n - 1)
End If
End Sub

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 10 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si" & 10)
End If
End Sub
```

Frmafis2:




```
Private Sub cmdok_Click()
If UCase(Cbocont.Text) = "DA" Then
  frmafis2.Hide
  Frmcontcompar.Show
 Else
  Close #1
  End
End If
End Sub
```

```
Private Sub Form_Activate()
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print #1, ""
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
Next i
End Sub
```

Fişierul text "Iesire.txt"

```
Cele 15 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:
     x           y
20,000       60,000
21,755       75,576
26,932       90,372
35,272       103,644
46,356       114,728
59,628       123,068
74,424       128,245
90,000       130,000
105,576      128,245
120,372      123,068
133,644      114,728
144,728      103,644
153,068      90,372
158,245      75,576
160,000      60,000
```

```
Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:
2,      1,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m1      26,6257364249
0,75    2,      0,25    0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m2      22,0553850501
0,      0,62    2,      0,38    0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m3      7,118415887
0,      0,      0,57    2,      0,43    0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m4      4,012591636
0,      0,      0,      0,54    2,      0,46    0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m5      2,4926047695
0,      0,      0,      0,      0,53    2,      0,47    0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m6      1,4900464815
0,      0,      0,      0,      0,      0,51    2,      0,49    0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m7      0,7030337984
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,
0,      m8      0,0
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,49    2,      0,51    0,      0,      0,      0,
0,      m9      -0,7030337984
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,47    2,      0,53    0,      0,      0,
0,      m10     -1,4900464815
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,46    2,      0,54    0,      0,
0,      m11     -2,4926047695
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,43    2,      0,57    0,
0,      m12     -4,012591636
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,38    2,      0,62
0,      m13     -7,118415887
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,25    2,
0,75    m14     -22,0553850501
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      1,
2,      m15     -26,6257364249

Cele 14 functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:
S1  =60,0         +9,66806     (x-20,0      )+0,0        (x-20,0      )^2+-0,25739     (x-20,0
)^3
S2  =75,57647     +7,28962     (x-21,755    )+-1,3552    (x-21,755    )^2+0,09642      (x-21,755
)^3
S3  =90,37186     +1,01035     (x-26,9322   )+0,14232    (x-26,9322   )^2+-0,00871     (x-26,9322
)^3
S4  =103,64429    +1,56689     (x-35,2718   )+-0,07558   (x-35,2718   )^2+0,0022       (x-35,2718
)^3
S5  =114,7282     +0,704       (x-46,3557   )+-0,00227   (x-46,3557   )^2+-0,00026     (x-46,3557
)^3
S6  =123,06782    +0,50711     (x-59,6281   )+-0,01257   (x-59,6281   )^2+0,00013      (x-59,6281
)^3
S7  =128,24495    +0,22148     (x-74,4235   )+-0,00674   (x-74,4235   )^2+-0,00002     (x-74,4235
)^3
S8  =130,0        +0,0         (x-90,0      )+-0,00748   (x-90,0      )^2+0,00002      (x-90,0
)^3
S9  =128,24495    +-0,22148    (x-105,5765  )+-0,00674   (x-105,5765  )^2+-0,00013     (x-
105,5765  )^3
S10 =123,06782    +-0,50711    (x-120,3719  )+-0,01257   (x-120,3719  )^2+0,00026      (x-
120,3719  )^3
S11 =114,7282     +-0,704      (x-133,6443  )+-0,00227   (x-133,6443  )^2+-0,0022      (x-
133,6443  )^3
S12 =103,64429    +-1,56689    (x-144,7282  )+-0,07558   (x-144,7282  )^2+0,00871      (x-
144,7282  )^3
S13 =90,37186     +-1,01035    (x-153,0678  )+0,14232    (x-153,0678  )^2+-0,09642     (x-
153,0678  )^3
S14 =75,57647     +-7,28962    (x-158,245   )+-1,3552    (x-158,245   )^2+0,25739      (x-158,245
)^3

Intervalul care se compara:1
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. cerc)  sk (pt. functia SPLINE)

  20,000          60,000        60,000
  20,195          65,221        61,883
  20,390          67,379        63,755
  20,585          69,031        65,604
  20,780          70,421        67,419
  20,975          71,643        69,188
  21,170          72,745        70,900
  21,365          73,757        72,543
  21,560          74,696        74,105
  21,755          75,576        75,576
```

```
Intervalul care se compara:1
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. cerc)  sk (pt. functia SPLINE)

  20,000          60,000        60,000
  20,195          65,221        61,883
  20,390          67,379        63,755
  20,585          69,031        65,604
  20,780          70,421        67,419
  20,975          71,643        69,188
  21,170          72,745        70,900
  21,365          73,757        72,543
  21,560          74,696        74,105
  21,755          75,576        75,576

Intervalul care se compara:8
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. cerc)  sk (pt. functia SPLINE)

  90,000          130,000       130,000
  91,731          129,979       129,978
  93,461          129,914       129,911
  95,192          129,807       129,801
  96,923          129,657       129,647
  98,654          129,463       129,450
  100,384         129,225       129,211
  102,115         128,944       128,930
  103,846         128,617       128,608
  105,576         128,245       128,245
```



```
Intervalul care se compara:8
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. cerc)  sk (pt. functia SPLINE)

  90,000          130,000       130,000
  91,731          129,979       129,978
  93,461          129,914       129,911
  95,192          129,807       129,801
  96,923          129,657       129,647
  98,654          129,463       129,450
  100,384         129,225       129,211
  102,115         128,944       128,930
  103,846         128,617       128,608
  105,576         128,245       128,245
```


Cod sursă al programului de interpolare cu funcţii spline varianta II-a cu a doua categorie de condiţii (deci f_0' şi f_n' presupuse date) pentru cazul unui semicerc discretizare cu pas constant în direcţie orizontală

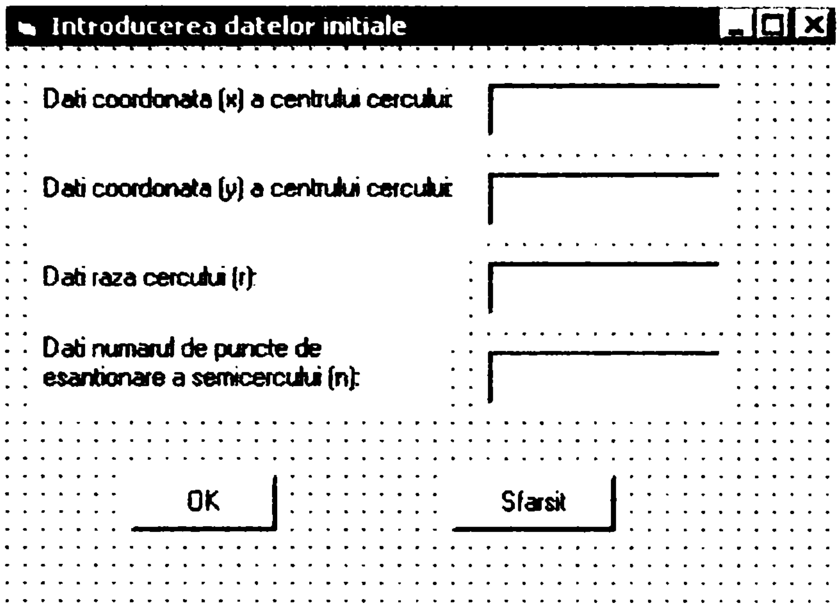
Module 1:

```
Public n, k, nrp As Integer
Public xc, yc, r, pas, h1, z, f0prim, fnprim As Single
Public h(), x(), f(), beta(), m(), m1() As Single
Public mat(), a(), b(), c(), d(), mat1(), beta1() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
```

Sub main()

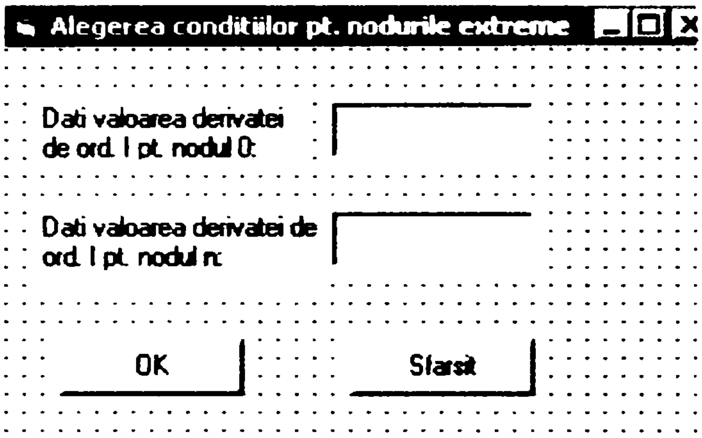
```
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru un semicerc varianta a II-a cu impunerea
derivatelor de ordinul I in nodurile extreme")
Frmintro.Show `
End Sub
```

Frmintro



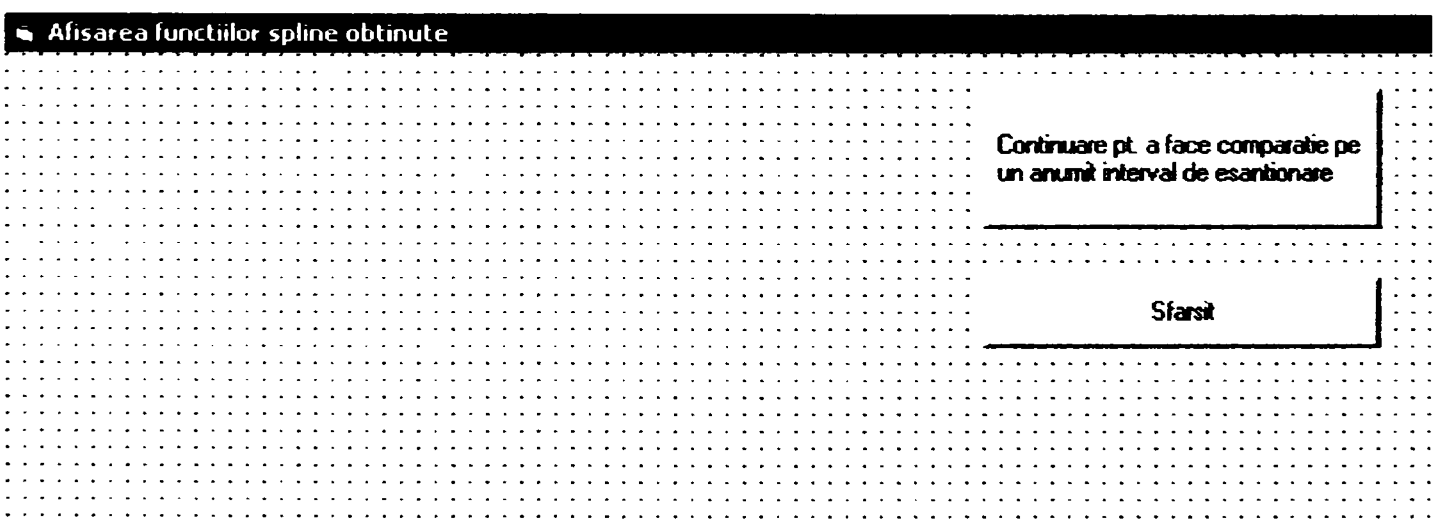

```
Private Sub cmdok_Click()
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r = Val(Txtr.Text)
n = Val(Txtn.Text)
ReDim h(1 To n), x(0 To n), f(0 To n), ro(1 To n), lambda(0 To n - 1), beta(0 To n), m(0 To n)
ReDim mat(0 To n, 0 To n), a(1 To n), b(1 To n), c(1 To n), d(1 To n)
ReDim mat1(1 To n + 1, 1 To n + 1), beta1(1 To n + 1), m1(1 To n + 1)
Open "Iesire.txt" For Output As #1
pas = 2 * r / n
 x(0) = xc - r
 f(0) = yc + Sqr(r * r - (x(0) - xc) ^ 2)
For i = 1 To n
  x(i) = x(i - 1) + pas
  f(i) = yc + Sqr(r * r - (x(i) - xc) ^ 2)
Next i
For i = 1 To n
  h(i) = pas
Next i
Frmintro.Hide
frmconditii.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
  End
End Sub

Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)
n = Val(Txtn.Text)
 If n <= 2 Then
   MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=3!")
   Cancel = True
 End If
End Sub

Private Sub Txtr_Validate(Cancel As Boolean)
r = Val(Txtr.Text)
 If r <= 0 Then
   MsgBox ("r trebuie sa fie >=0!")
   Cancel = True
 End If
End Sub
```

Frmconditii




```
Private Sub cmdcancel_Click()
txtf0prim.Text = ""
txtfnprim.Text = ""
txtfoprim.SetFocus
End Sub

Private Sub cmdok_Click()
f0prim = Val(txtf0prim.Text)
fnprim = Val(txtfnprim.Text)
beta(0) = 6 / h(1) * ((f(1) - f(0)) / h(1) - f0prim)
For i = 1 To n - 1
  beta(i) = 6 / (h(i + 1) + h(i)) * ((f(i + 1) - f(i)) / h(i + 1) - (f(i) - f(i - 1)) / h(i))
Next i
beta(n) = 6 / h(n) * (fnprim - (f(n) - f(n - 1)) / h(n))
frmconditii.Hide
Frmafis.Show
End Sub

Private Sub cmdsfarsit_Click()
Close #1
End
End Sub
```

Frmafis:



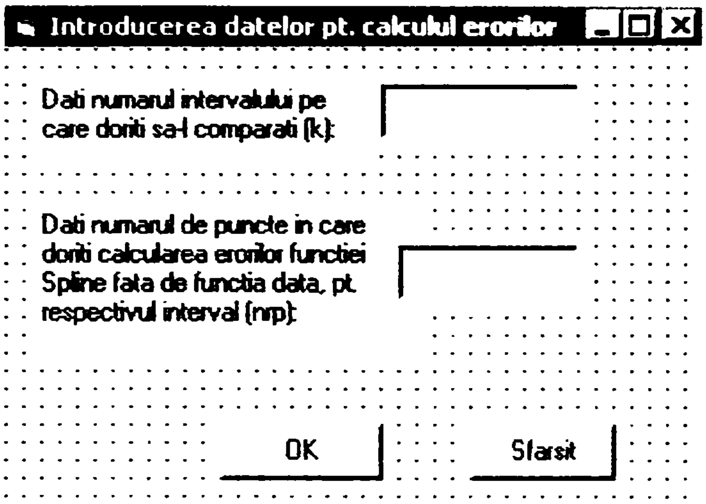

```
Private Sub Cmdcont_Click()
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub
```

```
Private Sub cmdsf_Click()
 Close #1
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Print "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print "       x          y"
Print #1, "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print #1, "    x       y"
For i = 0 To n
  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
Next i
mat(0, 0) = 2: mat(0, 1) = 1
For j = 2 To n
 mat(0, j) = 0
Next j
For i = 1 To n - 1
 For j = 0 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = h(i) / (h(i) + h(i + 1)): mat(i, j + 1) = 2: mat(i, j + 2) = h(i + 1) / (h(i) + h(i + 1))
 j = j + 3
 For k = j To n
  mat(i, k) = 0
 Next k
Next i
For i = 0 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = 1: mat(n, n) = 2
Print
Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
Print #1, ""
Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
For i = 0 To n
  For j = 0 To n
    Print Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
    Print #1, Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
  Next j
  Print Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
  Print #1, Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
Next i
For i = 1 To n + 1
  For j = 1 To n + 1
    mat1(i, j) = mat(i - 1, j - 1)
    beta1(i) = beta(i - 1)
  Next j
Next i
n = n + 1
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
  If Abs(mat1(i1, i)) < Abs(mat1(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If mat1(i1, i) <> 0 Then
  If i1 <> 1 Then
   For j = 1 To n
```

```
      z = mat1(i, j)
      mat1(i, j) = mat1(i1, j)
      mat1(i1, j) = z
     Next j
     z = beta1(i)
     beta1(i) = beta1(i1)
     beta1(i1) = z
   End If
   z = mat1(i, i)
   For j = 1 To n
    mat1(i, j) = mat1(i, j) / z
   Next j
   beta1(i) = beta1(i) / z
   i1 = i + 1
   For j = i1 To n
    If mat1(j, i) <> 0 Then
     z = mat1(j, i)
     For k = i To n
      mat1(j, k) = mat1(j, k) - z * mat1(i, k)
     Next k
     beta1(j) = beta1(j) - beta1(i) * z
    End If
   Next j
  Else
   MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
   End
  End If
Next i
If mat1(n, n) <> 0 Then
 m1(n) = beta1(n) / mat1(n, n)
 For i = 1 To n1
   m1(n - i) = beta1(n - i)
   For k = 1 To i
    m1(n - i) = m1(n - i) - mat1(n - i, n - i + k) * m1(n - i + k)
   Next k
 Next i
Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
  End
End If
n = n - 1
For i = 0 To n
 m(i) = m1(i + 1)
Next i
For i = 1 To n
  a(i) = m(i - 1) / 6 / h(i)
  b(i) = m(i) / 6 / h(i)
  c(i) = (f(i - 1) - m(i - 1) * h(i) ^ 2 / 6) / h(i)
  d(i) = (f(i) - m(i) * h(i) ^ 2 / 6) / h(i)
Next i
Print
Print "Cele " & n & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
Print #1, ""
Print #1, "Cele " & n & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
For i = 1 To n
 Print "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0###"); Tab(17); "("; Format(x(i), "####0.0##"); Tab(27); "-
x)^3+"; Format(b(i), "####0.0###"); Tab(43); "(x-"; Format(x(i - 1), "####0.0##"); Tab(56); ")^3+"; Format(c(i),
"####0.0###"); Tab(70); "("; Format(x(i), "####.0##"); Tab(80); "-x)+"; Format(d(i), "####0.0###"); Tab(95); "(x-
"; Format(x(i - 1), "####0.0##"); Tab(107); ")"
 Print #1, "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0###"); Tab(17); "("; Format(x(i), "####0.0##"); Tab(27); "-
x)^3+"; Format(b(i), "####0.0###"); Tab(43); "(x-"; Format(x(i - 1), "####0.0##"); Tab(56); ")^3+"; Format(c(i),
```

```
"####0.0###"); Tab(70); "("; Format(x(i), "####.0##"); Tab(80); "-x)+"; Format(d(i), "####0.0###"); Tab(95); "(x-
"; Format(x(i - 1), "####0.0##"); Tab(107); ")"
Next i
End Sub
```

Frmcontcompar:



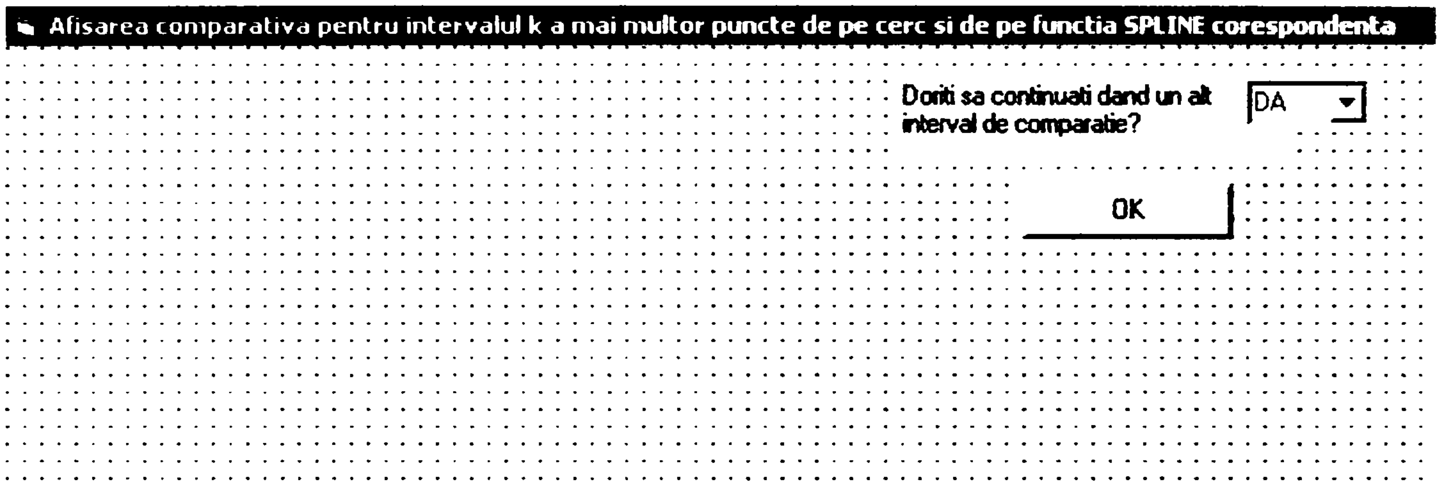
Private Sub cmdok_Click()
```
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 sk(i) = a(k) * (x(k) - x1(i)) ^ 3 + b(k) * (x1(i) - x(k - 1)) ^ 3 + c(k) * (x(k) - x1(i)) + d(k) * (x1(i) - x(k - 1))
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub
```

Private Sub cmdsf_Click()
```
Close #1
End
End Sub
```

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
```
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n - 1 Then
 Cancel = True
 MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n - 1)
End If
End Sub
```

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)
```
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 10 Then
 Cancel = True
 MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si" & 10)
End If
End Sub
```

Frmafis2:




```
Private Sub cmdok_Click()
If UCase(Cbocont.Text) = "DA" Then
 frmafis2.Hide
 Frmcontcompar.Show
 Else
  frmafis2.Hide
  frmconditii.Show
  End If
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print #1, ""
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
Next i
End Sub
```

Fişierul text Iesire.txt

```
Cele 15 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:
     x          y
20,000      60,000
30,000      96,056
40,000      108,990
50,000      117,446
60,000      123,246
70,000      127,082
80,000      129,282
90,000      130,000
100,000     129,282
110,000     127,082
120,000     123,246
130,000     117,446
140,000     108,990
150,000     96,056
160,000     60,000
```

```
Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:
2,      1,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m0      0,9633307653
0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m1      -0,6936369196
0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m2      -0,1343535147
0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m3      -0,0796771462
0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m4      -0,0589032185
0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,      0,
0,      m5      -0,0490947943
0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,      0,
0,      m6      -0,0444607584
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,      0,
0,      m7      -0,0430780618
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,      0,
0,      m8      -0,0444607584
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,      0,
0,      m9      -0,0490947943
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5     0,
0,      m10     -0,0589032185
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,      0,5
0,      m11     -0,0796771462
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5     2,
0,5     m12     -0,1343535147
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,5
2,
0,5     m13     -0,6936369196
0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,      0,
1,
2,      m14     3,9633307653

Cele 14 functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:
S1  =0,0127     (30,0     -x)^3+-0,0093    (x-20,0      )^3+4,7314     (30,0      -x)+10,5371    (x-
20,0      )
S2  =-0,0093    (40,0     -x)^3+0,0015     (x-30,0      )^3+10,5371    (40,0      -x)+10,7534    (x-
30,0      )
S3  =0,0015     (50,0     -x)^3+-0,001     (x-40,0      )^3+10,7534    (50,0      -x)+11,8432    (x-
40,0      )
S4  =-0,001     (60,0     -x)^3+-0,0002    (x-50,0      )^3+11,8432    (60,0      -x)+12,3413    (x-
50,0      )
S5  =-0,0002    (70,0     -x)^3+-0,0003    (x-60,0      )^3+12,3413    (70,0      -x)+12,7391    (x-
60,0      )
S6  =-0,0003    (80,0     -x)^3+-0,0002    (x-70,0      )^3+12,7391    (80,0      -x)+12,9514    (x-
70,0      )
S7  =-0,0002    (90,0     -x)^3+-0,0002    (x-80,0      )^3+12,9514    (90,0      -x)+13,0246    (x-
80,0      )
S8  =-0,0002    (100,0    -x)^3+-0,0002    (x-90,0      )^3+13,0246    (100,0     -x)+12,9504    (x-
90,0      )
S9  =-0,0002    (110,0    -x)^3+-0,0003    (x-100,0     )^3+12,9504    (110,0     -x)+12,7431    (x-
100,0     )
S10 =-0,0003    (120,0    -x)^3+0,0        (x-110,0     )^3+12,7431    (120,0     -x)+12,3264    (x-
110,0     )
S11 =0,0        (130,0    -x)^3+-0,0015    (x-120,0     )^3+12,3264    (130,0     -x)+11,8987    (x-
120,0     )
S12 =-0,0015    (140,0    -x)^3+0,0035     (x-130,0     )^3+11,8987    (140,0     -x)+10,5461    (x-
130,0     )
S13 =0,0035     (150,0    -x)^3+-0,0171    (x-140,0     )^3+10,5461    (150,0     -x)+11,3106    (x-
140,0     )
S14 =-0,0171    (160,0    -x)^3+0,0416     (x-150,0     )^3+11,3106    (160,0     -x)+1,8447     (x-
150,0     )

Intervalul care se compara:4
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. cerc)  sk (pt. functia SPLINE)

  50,000          117,446       117,446
  51,111          118,204       118,292
  52,222          118,931       119,073
  53,333          119,628       119,794
  54,444          120,298       120,462
  55,556          120,939       121,084
  56,667          121,554       121,666
  57,778          122,143       122,216
  58,889          122,706       122,741
  60,000          123,246       123,246
```

Cod sursă al programului de interpolare cu funcții spline varianta I-a cu condiții naturale pentru cazul unei semielipse cu pasul *h* de discretizare pe orizontală constant

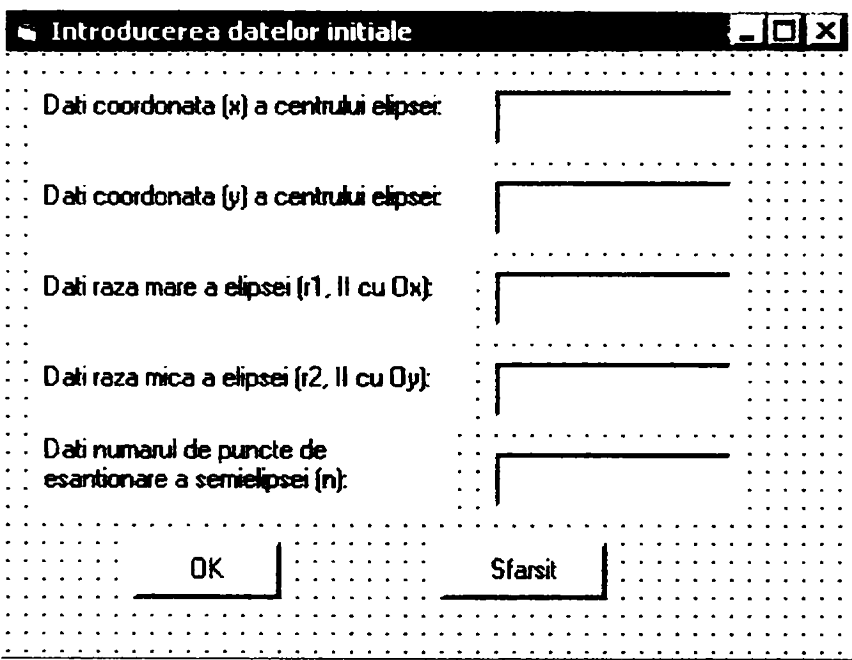
Module 1:

```
Public n, k, nrp As Integer
Public xc, yc, r1, r2, pas, h1 As Single
Public h(), x(), y(), lambda(), ro(), beta(), m() As Single
Public mat(), a(), b(), c(), d() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
```

Sub main()

```
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru o semielipsa")
Frmintro.Show
End Sub
```

Frmintro:

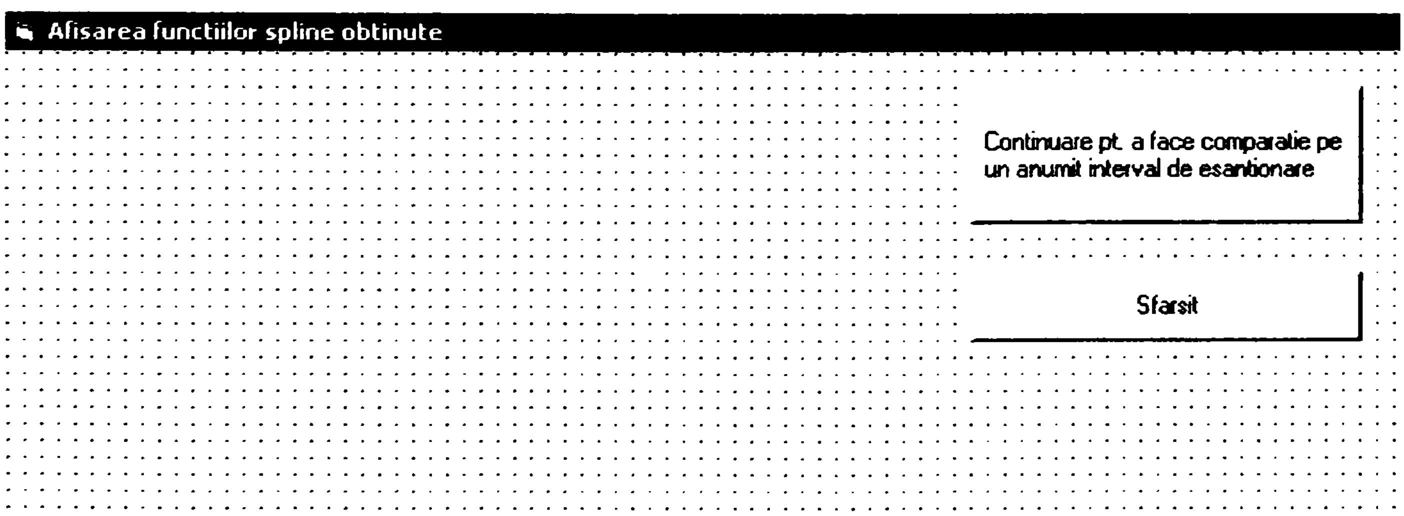


Private Sub cmdok_Click()

```
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r1 = Val(Txtr1.Text)
r2 = Val(txtr2.Text)
n = Val(Txtn.Text)
ReDim h(1 To n), x(1 To n), y(1 To n), lambda(1 To n - 1), ro(2 To n), beta(1 To n), m(1 To n) As Single
ReDim mat(1 To n, 1 To n), a(1 To n - 1), b(1 To n - 1), c(1 To n - 1), d(1 To n - 1) As Single
pas = 2 * r1 / (n - 1)
For i = 1 To n - 1
  h(i) = pas
Next i
 x(1) = xc - r1
 y(1) = yc + Sqr(r2 ^ 2 * (1 - (x(1) - xc) ^ 2 / r1 ^ 2))
For i = 2 To n
  x(i) = x(i - 1) + h(i - 1)
  y(i) = yc + Sqr(r2 ^ 2 * (1 - (x(i) - xc) ^ 2 / r1 ^ 2))
Next i
lambda(1) = 1
For i = 2 To n - 1
  lambda(i) = h(i - 1) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
For i = 2 To n - 1
```

```
 ro(i) = h(i) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
ro(n) = 1
beta(1) = 3 * (y(2) - y(1)) / h(1)
For i = 2 To n - 1
 beta(i) = 3 * h(i - 1) * h(i) / (h(i - 1) + h(i)) * ((y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 + (y(i) - y(i - 1)) / h(i - 1) ^ 2)
Next i
beta(n) = 3 * (y(n) - y(n - 1)) / h(n - 1)
Frmintro.Hide
Frmafis.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 End
End Sub

Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)
n = Val(Txtn.Text)
 If n <= 2 Then
  MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=3!")
  Cancel = True
 End If
End Sub

Private Sub Txtr1_Validate(Cancel As Boolean)
r1 = Val(Txtr1.Text)
 If r1 <= 0 Then
  MsgBox ("r1 trebuie sa fie >0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub

Private Sub txtr2_Validate(Cancel As Boolean)
r2 = Val(txtr2.Text)
 If r2 <= 0 Then
  MsgBox ("r2 trebuie sa fie >0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

Frmafis:

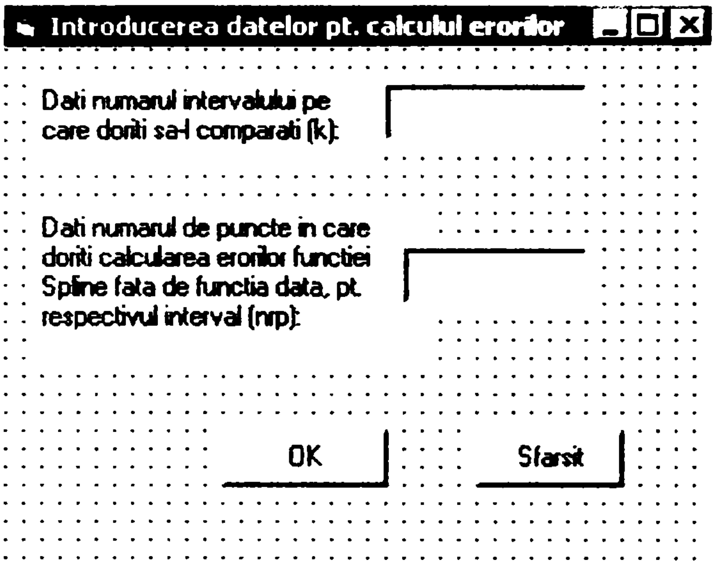



```
Private Sub Cmdcont_Click()
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub
```

```
Private Sub cmdsf_Click()
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Open "Iesire.txt" For Output As #1
Print "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print "      x          y"
Print #1, "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print #1, "    x          y"
For i = 1 To n
  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
Next i
mat(1, 1) = 2: mat(1, 2) = lambda(1)
For i = 1 To n - 2
 mat(1, i + 2) = 0
Next i
For i = 2 To n - 1
 For j = 1 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = ro(i): mat(i, j + 1) = 2: mat(i, j + 2) = lambda(i)
 j = j + 2
 For k = j To n - 1
  mat(i, k + 1) = 0
 Next k
Next i
For i = 1 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = ro(n): mat(n, n) = 2
Print
Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
Print #1, ""
Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
For i = 1 To n
  For j = 1 To n
    Print Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
    Print #1, Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
  Next j
 Print Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
 Print #1, Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
Next i
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
   If Abs(mat(i1, i)) < Abs(mat(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If mat(i1, i) <> 0 Then
   If i1 <> 1 Then
     For j = 1 To n
       z = mat(i, j)
       mat(i, j) = mat(i1, j)
       mat(i1, j) = z
     Next j
     z = beta(i)
     beta(i) = beta(i1)
     beta(i1) = z
```

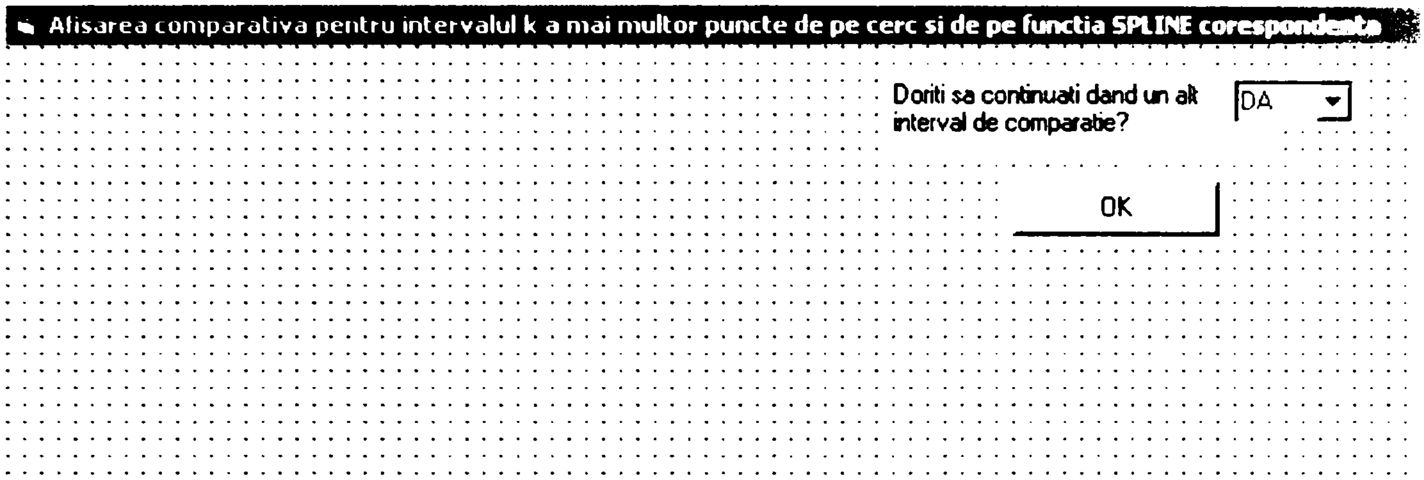
```
   End If
   z = mat(i, i)
   For j = 1 To n
     mat(i, j) = mat(i, j) / z
   Next j
   beta(i) = beta(i) / z
   i1 = i + 1
   For j = i1 To n
     If mat(j, i) <> 0 Then
       z = mat(j, i)
       For k = i To n
         mat(j, k) = mat(j, k) - z * mat(i, k)
       Next k
       beta(j) = beta(j) - beta(i) * z
     End If
   Next j
  Else
   MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
   End
  End If
Next i
If mat(n, n) <> 0 Then
  m(n) = beta(n) / mat(n, n)
  For i = 1 To n1
    m(n - i) = beta(n - i)
    For k = 1 To i
      m(n - i) = m(n - i) - mat(n - i, n - i + k) * m(n - i + k)
    Next k
  Next i
 Else
   MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
   End
End If
For i = 1 To n - 1
   a(i) = y(i)
   b(i) = m(i)
   c(i) = 3 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 - (m(i + 1) + 2 * m(i)) / h(i)
   d(i) = -2 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 3 + (m(i + 1) + m(i)) / h(i) ^ 2
Next i
Print
Print "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
Print #1, ""
Print #1, "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
For i = 1 To n - 1
  Print "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(18); "+"; Format(b(i), "#####0.0####"); Tab(30);
"(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(43); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(56); "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(69); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(85); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###");
Tab(99); ")^3"
  Print #1, "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(18); "+"; Format(b(i), "#####0.0####");
Tab(30); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(43); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(56); "(x-";
Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(69); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(85); "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(99); ")^3"
Next i
End Sub
```

Frmcontcompar:




```
Private Sub cmdok_Click()
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r2 ^ 2 * (1 - (x1(i) - xc) ^ 2 / r1 ^ 2))
 sk(i) = a(k) + b(k) * (x1(i) - x(k)) + c(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 2 + d(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 3
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
Close #1
End
End Sub

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n - 1 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n - 1)
End If
End Sub

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 10 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si" & 10)
End If
End Sub
```

Frmafis2:



Private Sub cmdok_Click()
```
If UCase(Cbocont.Text) = "DA" Then
 frmafis2.Hide
 Frmcontcompar.Show
Else
 Close #1
 End
End If
End Sub
```

Private Sub Form_Activate()
```
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. elipsa)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. elipsa)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print #1, ""
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
Next i
End Sub
```

Fişierul text "Iesire.txt"

```
Cele 10 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:
     x         y
10,000       60,000
27,778       91,427
45,556       101,574
63,333       107,140
81,111       109,690
98,889       109,690
116,667      107,140
134,444      101,574
152,222      91,427
170,000      60,000

Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:
2,     1,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     m1     5,3033008589
0,5    2,     0,5    0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     m2     3,5078038001
0,     0,5    2,     0,5    0,     0,     0,     0,     0,     0,     m3     1,3258252147
```

0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	0,	0,	0,	0,	m4	0,6848236577
0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	0,	0,	0,	m5	0,2151518136
0,	0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	0,	0,	m6	-0,2151518136
0,	0,	0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	0,	m7	-0,6848236577
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	0,	m8	-1,3258252147
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,5	2,	0,5	m9	-3,5078036912
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	2,	m10	-5,3033006411

Cele 9 functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:

```
S1  =60,0        +2,07266    (x-10,0      )+0,0        (x-10,0      )^2+-0,00096    (x-10,0
)^3
S2  =91,42697    +1,15798    (x-27,7778   )+-0,05145   (x-27,7778   )^2+0,00104     (x-27,7778
)^3
S3  =101,57397   +0,31102    (x-45,5556   )+0,00381    (x-45,5556   )^2+-0,00021    (x-45,5556
)^3
S4  =107,14045   +0,2496     (x-63,3333   )+-0,00726   (x-63,3333   )^2+0,00007     (x-63,3333
)^3
S5  =109,6904    +0,06023    (x-81,1111   )+-0,00339   (x-81,1111   )^2+0,0         (x-81,1111
)^3
S6  =109,6904    +-0,06023   (x-98,8889   )+-0,00339   (x-98,8889   )^2+-0,00007    (x-98,8889
)^3
S7  =107,14045   +-0,2496    (x-116,6667  )+-0,00726   (x-116,6667  )^2+0,00021     (x-116,6667
)^3
S8  =101,57397   +-0,31102   (x-134,4444  )+0,00381    (x-134,4444  )^2+-0,00104    (x-134,4444
)^3
S9  =91,42697    +-1,15798   (x-152,2222  )+-0,05145   (x-152,2222  )^2+0,00096     (x-152,2222
)^3
```

Intervalul care se compara:1
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

Coordonata x	y (pt. elipsa)	sk (pt. functia SPLINE)
10,000	60,000	60,000
11,975	71,042	64,087
13,951	75,518	68,129
15,926	78,885	72,082
17,901	81,667	75,901
19,877	84,066	79,541
21,852	86,189	82,959
23,827	88,098	86,109
25,802	89,835	88,946
27,778	91,427	91,427

Intervalul care se compara:2
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

Coordonata x	y (pt. elipsa)	sk (pt. functia SPLINE)
27,778	91,427	91,427
29,753	92,896	93,522
31,728	94,258	95,263
33,704	95,525	96,698
35,679	96,706	97,876
37,654	97,811	98,843
39,630	98,845	99,649
41,605	99,814	100,341
43,580	100,722	100,967
45,556	101,574	101,574

Intervalul care se compara:3
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

Coordonata x	y (pt. elipsa)	sk (pt. functia SPLINE)
45,556	101,574	101,574
47,531	102,373	102,202
49,506	103,122	102,849
51,481	103,823	103,508
53,457	104,479	104,167
55,432	105,091	104,817
57,407	105,662	105,450
59,383	106,193	106,054
61,358	106,686	106,621
63,333	107,140	107,140

Cod sursă al programului de interpolare cu funcţii spline varianta I-a cu condiţii naturale pentru cazul unei semielipse cu discretizare în unghiuri la centrul elipsei egale

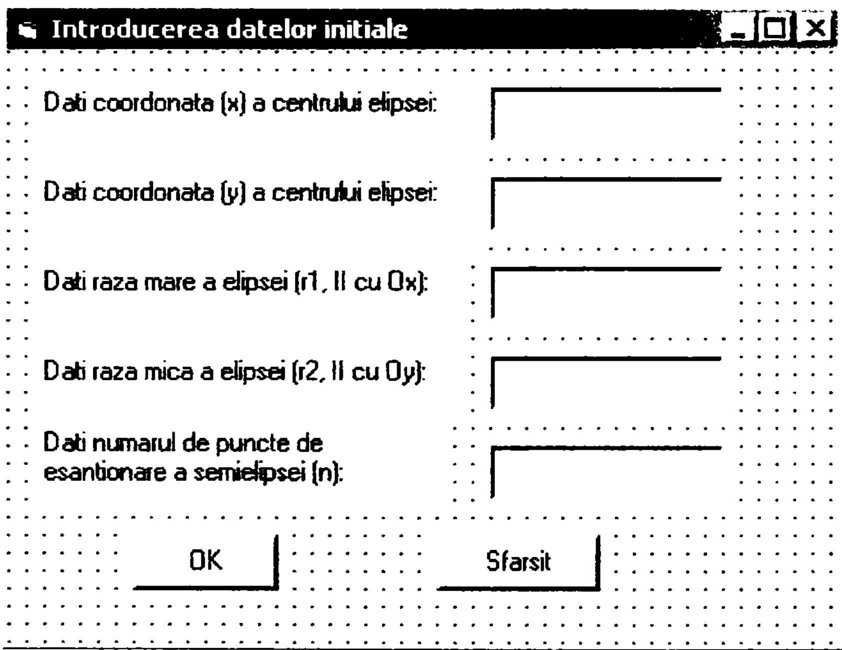
Module 1:

```
Public n, k, nrp As Integer
Public xc, yc, r1, r2, pas, h1 As Single
Public h(), x(), y(), lambda(), ro(), beta(), m() As Single
Public mat(), a(), b(), c(), d() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
```

Sub main()

```
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru o semielipsa")
Frmintro.Show
End Sub
```

Frmintro:



Private Sub cmdok_Click()

```
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r1 = Val(Txtr1.Text)
r2 = Val(txtr2.Text)
n = Val(Txtn.Text)
ReDim h(1 To n), panta(1 To n), x(1 To n), y(1 To n), lambda(1 To n - 1), ro(2 To n), beta(1 To n), m(1 To n) As Single
ReDim mat(1 To n, 1 To n), a(1 To n - 1), b(1 To n - 1), c(1 To n - 1), d(1 To n - 1) As Single
panta(1) = Tan(0)
For i = 2 To n
  panta(i) = Tan((n - i) / (n - 1) * 4 * Atn(1))
Next i
If n Mod 2 = 0 Then
  For i = 1 To n / 2
    x(i) = xc - r2 / Sqr(r2 ^ 2 / r1 ^ 2 + panta(i) ^ 2)
  Next i
  For i = n / 2 + 1 To n
    x(i) = xc + r2 / Sqr(r2 ^ 2 / r1 ^ 2 + panta(i) ^ 2)
  Next i
Else
  For i = 1 To n / 2 - 1 / 2
```

```
   x(i) = xc - r2 / Sqr(r2 ^ 2 / r1 ^ 2 + panta(i) ^ 2)
  Next i
  x(n / 2 + 1 / 2) = xc
  For i = n / 2 + 3 / 2 To n
   x(i) = xc + r2 / Sqr(r2 ^ 2 / r1 ^ 2 + panta(i) ^ 2)
  Next i
End If
For i = 1 To n
 y(i) = yc + Sqr(r2 ^ 2 * (1 - (x(i) - xc) ^ 2 / r1 ^ 2))
Next i
For i = 1 To n - 1
 h(i) = x(i + 1) - x(i)
Next i
lambda(1) = 1
For i = 2 To n - 1
 lambda(i) = h(i - 1) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
For i = 2 To n - 1
 ro(i) = h(i) / (h(i - 1) + h(i))
Next i
ro(n) = 1
beta(1) = 3 * (y(2) - y(1)) / h(1)
For i = 2 To n - 1
 beta(i) = 3 * h(i - 1) * h(i) / (h(i - 1) + h(i)) * ((y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 + (y(i) - y(i - 1)) / h(i - 1) ^ 2)
Next i
beta(n) = 3 * (y(n) - y(n - 1)) / h(n - 1)
Frmintro.Hide
Frmafis.Show
End Sub
```

Private Sub cmdsf_Click()

```
 End
End Sub
```

Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)

```
n = Val(Txtn.Text)
 If n <= 2 Then
  MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=3!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

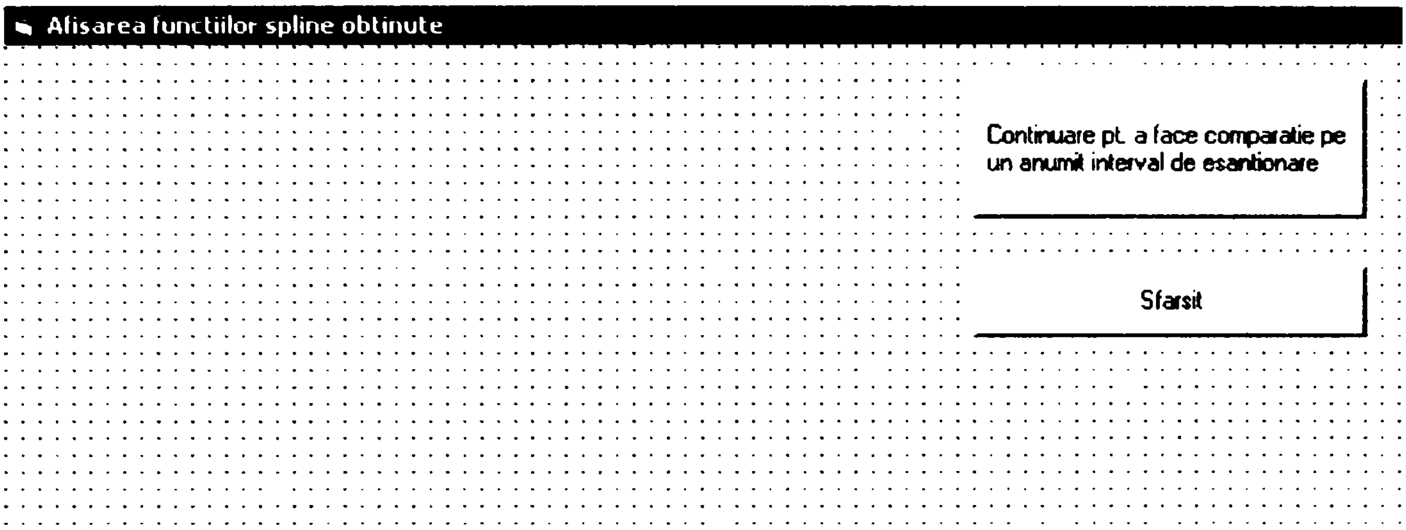
Private Sub Txtr1_Validate(Cancel As Boolean)

```
r1 = Val(Txtr1.Text)
 If r1 <= 0 Then
  MsgBox ("r1 trebuie sa fie >0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

Private Sub txtr2_Validate(Cancel As Boolean)

```
r2 = Val(txtr2.Text)
 If r2 <= 0 Then
  MsgBox ("r2 trebuie sa fie >0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

Frmafis:

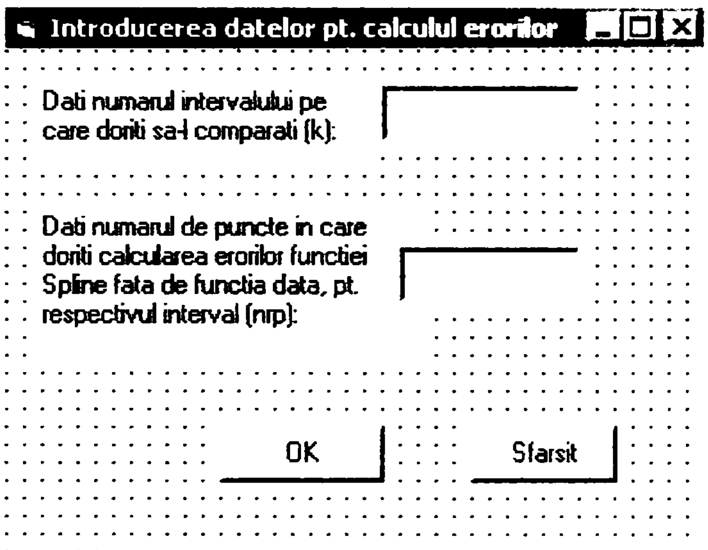



```
Private Sub Cmdcont_Click()
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Open "Iesire.txt" For Output As #1
Print "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print "        x           y"
Print #1, "Cele " & n & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print #1, "    x        y"
For i = 1 To n
  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(y(i), "#####0.000")
Next i
mat(1, 1) = 2: mat(1, 2) = lambda(1)
For i = 1 To n - 2
 mat(1, i + 2) = 0
Next i
For i = 2 To n - 1
 For j = 1 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = ro(i): mat(i, j + 1) = 2: mat(i, j + 2) = lambda(i)
 j = j + 2
 For k = j To n - 1
  mat(i, k + 1) = 0
 Next k
Next i
For i = 1 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = ro(n): mat(n, n) = 2
Print
Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
Print #1, ""
Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
For i = 1 To n
```

```
  For j = 1 To n
   Print Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
   Print #1, Tab(1 + (j - 1) * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
  Next j
 Print Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
 Print #1, Tab(1 + n * 7); "m" & i; Tab(8 + n * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
Next i
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
  If Abs(mat(i1, i)) < Abs(mat(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If mat(i1, i) <> 0 Then
  If i1 <> 1 Then
    For j = 1 To n
     z = mat(i, j)
     mat(i, j) = mat(i1, j)
     mat(i1, j) = z
    Next j
    z = beta(i)
    beta(i) = beta(i1)
    beta(i1) = z
  End If
  z = mat(i, i)
  For j = 1 To n
   mat(i, j) = mat(i, j) / z
  Next j
  beta(i) = beta(i) / z
  i1 = i + 1
  For j = i1 To n
   If mat(j, i) <> 0 Then
    z = mat(j, i)
    For k = i To n
     mat(j, k) = mat(j, k) - z * mat(i, k)
    Next k
    beta(j) = beta(j) - beta(i) * z
   End If
  Next j
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
  End
 End If
Next i
If mat(n, n) <> 0 Then
 m(n) = beta(n) / mat(n, n)
 For i = 1 To n1
  m(n - i) = beta(n - i)
  For k = 1 To i
   m(n - i) = m(n - i) - mat(n - i, n - i + k) * m(n - i + k)
  Next k
 Next i
Else
 MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
 End
End If
For i = 1 To n - 1
 a(i) = y(i)
 b(i) = m(i)
 c(i) = 3 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 2 - (m(i + 1) + 2 * m(i)) / h(i)
 d(i) = -2 * (y(i + 1) - y(i)) / h(i) ^ 3 + (m(i + 1) + m(i)) / h(i) ^ 2
Next i
```

```
Print
Print "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
Print #1, ""
Print #1, "Cele " & n - 1 & " functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:"
For i = 1 To n - 1
 Print "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(18); "+"; Format(b(i), "#####0.0####"); Tab(30);
"(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(43); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(56), "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(69); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(85); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###");
Tab(99); ")^3"
 Print #1, "S" & i; Tab(5); "="; Format(a(i), "#####0.0####"); Tab(18); "+"; Format(b(i), "#####0.0####");
Tab(30); "(x-"; Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(43); ")+"; Format(c(i), "#####0.0####"); Tab(56); "(x-";
Format(x(i), "#####0.0###"); Tab(69); ")^2+"; Format(d(i), "#####0.0####"); Tab(85); "(x-"; Format(x(i),
"#####0.0###"); Tab(99); ")^3"
Next i
End Sub
```

Frmcontcompar:



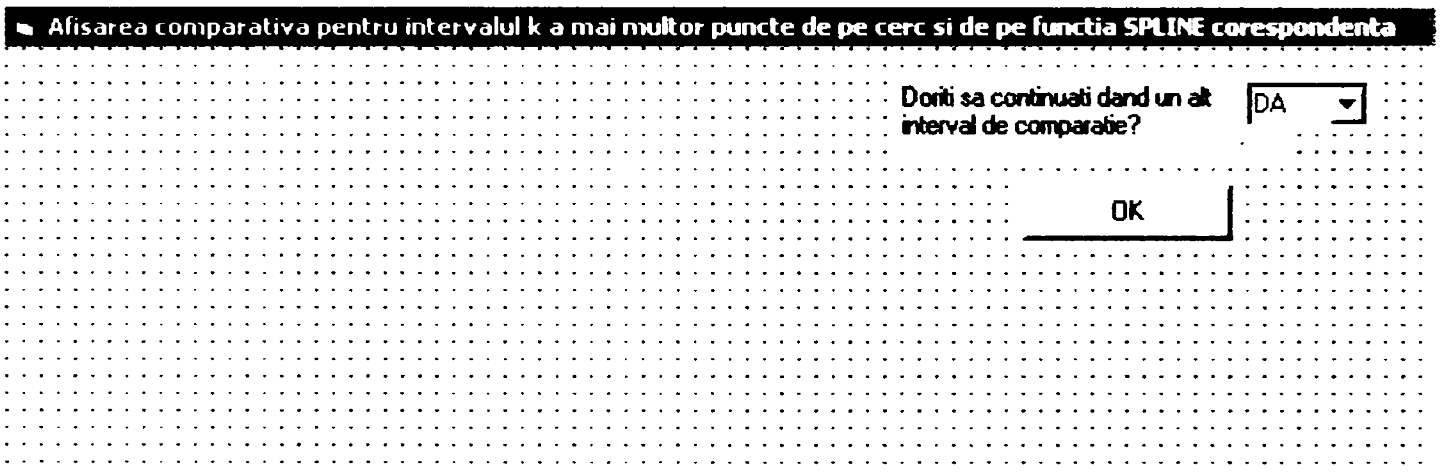

```
Private Sub cmdok_Click()
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = h(k) / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r2 ^ 2 * (1 - (x1(i) - xc) ^ 2 / r1 ^ 2))
 sk(i) = a(k) + b(k) * (x1(i) - x(k)) + c(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 2 + d(k) * (x1(i) - x(k)) ^ 3
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
Close #1
End
End Sub

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n - 1 Then
 Cancel = True
```

```
  MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n - 1)
End If
End Sub
```

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)

```
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 10 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si" & 10)
End If
End Sub
```

Frmafis2:



Private Sub cmdok_Click()

```
If UCase(Cbocont.Text) = "DA" Then
  frmafis2.Hide
  Frmcontcompar.Show
 Else
   Close #1
   End
End If
End Sub
```

Private Sub Form_Activate()

```
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. elipsa)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. elipsa)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print #1, ""
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
Next i
End Sub
```

Fişierul text "Iesire.txt"

```
Cele 20 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:
     x           y
20,000       60,000
24,770       70,885
35,367       78,756
46,542       83,518
56,236       86,279
64,310       87,907
71,126       88,889
77,067       89,484
82,447       89,825
87,516       89,981
92,484       89,981
97,553       89,825
102,933      89,484
108,874      88,889
115,690      87,907
123,764      86,279
133,458      83,518
144,633      78,756
155,230      70,885
160,000      60,000

Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:
2,     1,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m1     6,8456448794
0,69   2,     0,31   0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m2     5,4123153818
0,     0,51   2,     0,49   0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m3     1,7660366563
0,     0,     0,46   2,     0,54   0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m4     1,0514752318
0,     0,     0,     0,45   2,     0,55   0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m5     0,7181370433
0,     0,     0,     0,     0,46   2,     0,54   0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m6     0,511192182
0,     0,     0,     0,     0,     0,47   2,     0,53   0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m7     0,3617719534
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,48   2,     0,52   0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m8     0,2425606156
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,49   2,     0,51   0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m9     0,1399408795
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,5    2,     0,5    0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m10    0,0457781292
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,5    2,     0,5    0,     0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m11    -0,0457781292
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,51   2,     0,49   0,
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m12    -0,1399408795
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,52   2,     0,48
0,     0,     0,     0,     0,     0,     m13    -0,2425606156
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,53   2,
0,47   0,     0,     0,     0,     0,     m14    -0,3617719534
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,54
2,     0,46   0,     0,     0,     0,     m15    -0,511192182
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,55   2,     0,45   0,     0,     0,     m16    -0,7181370433
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,54   2,     0,46   0,     0,     m17    -1,0514752318
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,49   2,     0,51   0,     m18    -1,7660366563
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,31   2,     0,69   m19    -5,4123153818
0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,     0,
0,     0,     0,     0,     1,     2,     m20    -6,8456448794

Cele 19 functii SPLINE obtinute au urmatoarele ecuatii:
S1  =60,0        +2,53193    (x-20,0      )+0,0        (x-20,0      )^2+-0,01099    (x-20,0
)^3
S2  =70,88494    +1,78179    (x-24,7702   )+-0,15726   (x-24,7702   )^2+0,00559     (x-24,7702
)^3
S3  =78,75562    +0,33109    (x-35,3668   )+0,02036    (x-35,3668   )^2+-0,00106    (x-35,3668
)^3
S4  =83,51835    +0,38893    (x-46,5419   )+-0,01518   (x-46,5419   )^2+0,00046     (x-46,5419
)^3
S5  =86,2795     +0,22377    (x-56,2361   )+-0,00186   (x-56,2361   )^2+-0,00011    (x-56,2361
)^3
```

```
S6  =87,90665    +0,17205    (x-64,3101    )+-0,00455    (x-64,3101    )^2+0,00007     (x-64,3101
)^3
S7  =88,88892    +0,11925    (x-71,1259    )+-0,0032     (x-71,1259    )^2+0,0         (x-71,1259
)^3
S8  =89,48355    +0,08076    (x-77,0673    )+-0,00328    (x-77,0673    )^2+0,00001     (x-77,0673
)^3
S9  =89,82487    +0,04646    (x-82,4473    )+-0,00309    (x-82,4473    )^2+0,0         (x-82,4473
)^3
S10 =89,9811     +0,01524    (x-87,5157    )+-0,00307    (x-87,5157    )^2+0,0         (x-87,5157
)^3
S11 =89,9811     +-0,01524   (x-92,4843    )+-0,00307    (x-92,4843    )^2+0,0         (x-92,4843
)^3
S12 =89,82487    +-0,04646   (x-97,5527    )+-0,00309    (x-97,5527    )^2+-0,00001    (x-97,5527
)^3
S13 =89,48355    +-0,08076   (x-102,9327   )+-0,00328    (x-102,9327   )^2+0,0         (x-102,9327
)^3
S14 =88,88892    +-0,11925   (x-108,8741   )+-0,0032     (x-108,8741   )^2+-0,00007    (x-108,8741
)^3
S15 =87,90665    +-0,17205   (x-115,6899   )+-0,00455    (x-115,6899   )^2+0,00011     (x-115,6899
)^3
S16 =86,2795     +-0,22377   (x-123,7639   )+-0,00186    (x-123,7639   )^2+-0,00046    (x-123,7639
)^3
S17 =83,51835    +-0,38893   (x-133,4581   )+-0,01518    (x-133,4581   )^2+0,00106     (x-133,4581
)^3
S18 =78,75562    +-0,33109   (x-144,6332   )+0,02036     (x-144,6332   )^2+-0,00559    (x-144,6332
)^3
S19 =70,88494    +-1,78179   (x-155,2298   )+-0,15726    (x-155,2298   )^2+0,01099     (x-155,2298
)^3

Intervalul care se compara:1
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. elipsa)sk (pt. functia SPLINE)

  20,000          60,000        60,000
  20,530          63,685        61,340
  21,060          65,201        62,671
  21,590          66,358        63,982
  22,120          67,327        65,263
  22,650          68,177        66,505
  23,180          68,940        67,698
  23,710          69,637        68,833
  24,240          70,283        69,898
  24,770          70,885        70,885

Intervalul care se compara:2
Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:10

 Coordonata x     y (pt. elipsa)sk (pt. functia SPLINE)

  24,770          70,885        70,885
  25,948          72,101        72,774
  27,125          73,187        74,282
  28,302          74,171        75,463
  29,480          75,075        76,372
  30,657          75,912        77,064
  31,835          76,691        77,594
  33,012          77,421        78,016
  34,189          78,108        78,385
  35,367          78,756        78,756
```

§ 3.5. CÂTEVA CONSIDERAȚII ȘI OPINII PRIVIND ERORILE ÎN REZOLVAREA CU M.E.Fr. A PROBLEMELOR DE CÂMP

Ca orice metodă numerică, și M.E.Fr., deși este foarte performantă, introduce erori, care dacă nu sunt controlate pot conduce la rezultate profund incorecte.

Cu toată literatura deosebit de bogată legată de calculul erorilor în analiza numerică, noțiunea de *„eroare"* nu este încă suficient de bine clarificată și nu este încă acceptată o definiție generală a ei. Vom da în continuare câteva definiții din literatura specifică domeniului, pentru a sublinia criteriile de definiție și diversitatea lor, deoarece intenționăm să facem, un studiu al erorilor introduse de algoritmul M.E.Fr.

I. Cea mai generală definiție și mai riguros matematic este definiția funcțională prezentată de R.TEMAM [T7] în contextul aproximării externe în spații vectoriale normate:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "r_h"'] & & F \\ & W_h \arrow[ur, "p_h"'] & \end{tikzcd}$$

*Se numește **aproximație externă** a unui spațiu vectorial normat W, mulțimea formată din:*

i) un spațiu vectorial normat F și un izomorfism ω a lui W în F

ii) o familie de triplete $\{W_h, p_h, r_h\}h \in$ în care pentru $\forall h \in H$ (H o familie de indici):

- W_h este un spațiu vectorial normat;

- p_h este o aplicație liniară continuă a lui W_h în F;

- r_h este o aplicație (posibil neliniară) a lui W în W_h (vezi schema de alături)

Cazurile cele mai interesante sunt acelea în care W_h are dimensiune finită; deseori operatorii p_h sunt injectivi, iar operatorii r_h –surjectivi. Ei se numesc **operatori de prelungire** și respectiv **operatori de trunchiere**.

Dacă W și W_h sunt spații Hilbert, atunci aproximarea se spune că este de tip Hilbert.

În aceste condiții abstracte, dar foarte generale, se introduce noțiunea de eroare pentru a se putea evalua calitatea aproximării, -operatorii p_h și r_h fiind cunoscuți- astfel:

„Pentru un h dat, dacă $u \in W_h$ se spune că:

a). $\left\|\omega_u - p_h u_h\right\|_F$ *- reprezintă eroarea dintre u și u_h*

b). $\left\|u_h - r_h u\right\|_{W_h}$ *- reprezintă eroarea discretă dintre u și u_h* (3.5.1)

c). $\left\|\omega_u - p_h r_h u\right\|_F$ *- reprezintă eroarea de trunchiere"*

Deși definițiile de mai sus sunt riguroase, aplicabilitatea lor practică este limitată, deoarece în cazul M.E.Fr. definirea și descrierea operatorilor de prelungire și restricție este greu de realizat. Chiar și mulțimea de indici H este greu de stabilit; ea se construiește introducând o corespondență între mulțimea numerelor naturale și mărimea elementelor de frontieră evaluate într-o măsură convenabil aleasă.

II. I. PĂVĂLOIU [P] evită introducerea noțiunii de eroare, utilizând pentru compararea relativă a soluțiilor numerice și exacte, așa-numita ε **aproximare**.

Fie X un spațiu Banach și fie X' un subspațiu al său. Fie $\varepsilon \geq 0$ un număr real nenegativ dat. Spunem că elementul x din spațiul X este ε aproximat de elementul x' din spațiul X' (cu $x' \neq x$) dacă există $x' \in X'$ astfel încât:

$$\left\|x - x'\right\| \leq \varepsilon \left\|x\right\| \tag{3.5.2}$$

Deşi acest mod de raţionament este mult mai flexibil şi mai precis totuşi nu rezolvă problema estimării erorii în sens relativ. Mai mult, în cazul elementului nul, concluziile sunt derutante. Astfel dacă 0 este elementul nul din X, din definiţie rezultă:

$$\|x\| \le \varepsilon \|0\| = 0 \qquad (3.5.3)$$

ceea ce contrazice faptul că $x \neq x'$. Rezultă de aici că elementul nul nu poate fi aproximat. Dar în problemele de care ne ocupăm, apar frecvent situaţii când pe frontiera domeniului de definiţie mărimile necunoscute (deplasări şi tensiuni) sunt nule.

III. C.M. BUCUR în [B76] procedează în modul următor:

Presupunem că sistemul fizic studiat Ω, conduce la o problemă P formulată corect matematic prin $x = \Lambda(a)$ unde Λ este un operator. Pentru a utiliza o metodă numerică de rezolvare a problemei P se presupune că $\Lambda : A \to B$ este o aplicaţie surjectivă. O metodă numerică implică înlocuirea mulţimii A prin A^*, $\Lambda(a)$ prin $x = \Lambda^*(a)$. $\Lambda^*(a)$ determină valoriale lui x cu condiţiile:

$$\Lambda^* : A^* \to B^*, \qquad A^*, B^* \text{ mulţimi finite } A^* \subset A, \quad B^* \subset B.$$

Aplicaţia $\Lambda^* : A^* \to B^*$ determină o problemă P_1 diferită de problema P. Soluţia problemei P_1 este considerată, în anumite condiţii, ca fiind o aproximare a soluţiei problemei P.

Problema P_1 este corect pusă dacă:

$$\Lambda^* : A^* \to B^*$$

este surjectivă, iar

$$\rho(\Lambda^*(\mathbf{a}), \Lambda(\mathbf{a})) < \varepsilon \quad (*)$$

unde ε este suficient de mic.

Mulţimile A şi B se presupun **spaţii metrice complete** iar $\rho(x, y)$ este **funcţia distanţă** sau **metrica** definită pe spaţiile respective.

Relaţia (*) caracterizează **eroarea** făcută prin trecerea de la problema P la problema P_1. Această eroare se compune din **eroarea iniţială** (înlocuirea lui A prin A*) şi **eroarea metodei** (trecerea de la $\Lambda(\mathbf{a})$ la $\Lambda^*(\mathbf{a})$).

Deşi face legătura cu metoda numerică propriu-zisă acoperind noţiunea de eroare de metodă şi eroare de calcul, şi definiţia propusă are mai mult un caracter calitativ.

IV. Evident că majoritatea autorilor rămân la definiţiile clasice: MARCHOUK [M9], BAKHALOV [B2], MICULA [M31], BERBENTE [B31], C.M. BUCUR [B76], GH. MARINESCU [M11] ş.a.

Rezolvarea problemei P prin metode numerice presupune satisfacerea anumitor restricţii (condiţii de existenţă, condiţii la limită, condiţii iniţiale etc). Printre altele, soluţia este funcţie şi de datele iniţiale: Dacă acestea sunt rezultatul unor măsurări sau soluţii aproximative ale altor probleme, atunci în rezolvarea problemei P se introduce o eroare, numită **eroare iniţială**. Eroare iniţială nu poate fi influenţată de metoda de rezolvare a problemei P. Însă erorile incluse în datele iniţiale necesită un **studiu probabilistic**. Ele nu pot fi înlăturate prin perfecţionarea procesului de calcul, însă este necesar un studiu al modului în care se propagă de-a lungul calculului. Astfel, există procese calculatorii bine condiţionate, la care rezultatele finale sunt puţin influenţate de erorile din datele iniţiale, şi procese calculatorii rău condiţionate, la care erori mici în datele iniţiale conduc la erori mari în rezultate. Erorile incluse în datele iniţiale au un rol important în interpolarea datelor experimentale şi la soluţionarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare.

Prin folosirea unei metode numerice în rezolvarea problemei P (se înlocuieşte P prin P_1) se introduce o nouă eroare numită **eroarea metodei**. Eroarea metodei poate fi micşorată prin alegerea metodei celei mai adecvate pentru rezolvarea problemei $P^{\bullet}$.

Se ştie că proprietăţile constructive ale calculatorului impun restricţii asupra numărului zecimalelor semnificative; de asemenea, prin metoda rotunjirii la numerele ce intervin în calcule, se reţine un număr finit de cifre semnificative. Aceste restricţii conduc la apariţia **erorii de calcul**. În eroarea de calcul vom cuprinde **erorile de trunchiere** şi **erorile de rotunjire** care apar în procesul de calcul. Propagarea erorilor de rotunjire poate fi controlată prin extinderea tehnicilor de programare. Protecţia contra erorilor de rotunjire poate fi obţinută prin folosirea preciziei duble în anumite etape ale algoritmului de calcul. De asemenea, în cadrul unei rutine de evaluare scrise pentru virgulă mobilă, se pot folosi calcule în virgulă fixă pentru etape intermediare, deoarece precizia în virgulă fixă pentru unele calculatoare este mai bună decât în virgulă mobilă de simplă precizie.

Eroarea de trunchiere în general nu poate fi determinată şi de aceea ne mulţumim cu stabilirea unor limite între care este cuprinsă aceasta. O caracteristică a erorii de trunchiere este faptul că ea poate fi făcută oricât de mică, luând în considerare („însumând") un număr suficient de mare de termeni.

Cu toate acestea **eroarea totală**, care este suma tuturor acestor erori, nu poate fi coborâtă sub o anumită limită. Creşterea numărului termenilor însumaţi face să crească erorile datorate pseudooperaţiilor, ajungându-se la un moment dat ca acestea să domine eroarea totală. Algoritmul optim va fi acela care realizează un echilibru între cele două tipuri de erori.

Mai facem câteva precizări. Dacă x este valoarea adevărată a unei mărimi şi x* este o valoare aproximativă a lui x rezultată în urma unei măsurători, observaţii, sau a unui calcul numeric, atunci:

$$\delta_x = x - x^* \quad \text{- se numeşte } \textbf{eroare} \tag{3.5.4}$$

$$|\delta_x| = |x - x^*| \quad \textbf{- eroare absolută} \tag{3.5.5}$$

$$\delta_r = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{|\delta_x|}{|x|} \quad \textbf{- eroare relativă} \tag{3.5.6}$$

În cazul aproximării funcţiilor prin polinoame sau funcţii raţionale, analiza erorilor se face cu ajutorul „**funcţiei de eroare**". Astfel, dacă F(x) este aproximata lui f(x), atunci **funcţiile eroare absolută şi eroare relativă** sunt:

$$|\delta_a(x)| = |F(x) - f(x)|, \tag{3.5.7}$$

$$\delta_r(x) = \frac{|F(x) - f(x)|}{|F(x)|} \tag{3.5.8}$$

V. În cazul utilizării funcţiilor spline cubice s-a reuşit să se stabilească o evaluare a erorii de interpolare în sensul exprimării analitice a unui majorant [I1] [M31] pe intervalul de definiţie. Astfel, dacă notăm:

$f(x) \in C^2[a,b]$ - funcţia original care trebuie determinată

$S_{(x)}$ - funcţia spline de interpolare pentru funcţia $f(x)$

$^{\bullet}$ Alegerea metodei de rezolvare este o problemă foarte importantă şi dificilă. De exemplu, dacă alegem să rezolvăm un sistem algebric liniar cu regula lui Cramer, pentru n=20 (numărul de necunoscute), atunci numărul operaţiilor algebrice elementare este de aproximativ 16×10^{19}; aceasta înseamnă că un calculator modern, capabil să execute $2 \cdot 10^6$ operaţii pe secundă, va trebui să ruleze continuu la această problemă $2 \cdot 10^6$ ani!. În plus, la un asemenea număr de operaţii, acumularea erorilor de rotunjire poate conduce la rezultate absurde.

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$ - o diviziune a intervalului [a,b]

construită în condițiile:

I. $M_0 = M_1 = 0$; II. $f_0' = f'(x_0)$, $f_n' = f'(x_n)$ cunoscute

$h = \max(x_i - x_{i-1})$, $i = 1,2\ldots,n$

atunci vom avea:

$$\|f'(x) - S'(x)\| \le \|f''\|_2 \sqrt{h} \tag{3.5.9}$$

$$\|f(x) - S(x)\| \le \|f''\|_2 h^{3/2} \tag{3.5.10}$$

unde prin definiție:

$$\|g(x)\|_2 = \left\{ \int_a^b g^2(x)dx \right\}^{1/2} \tag{3.5.11}$$

este norma naturală din $L^2(a,b)$.

Dacă funcția f(x) are un grad de regularitate mai ridicat decât $C^2[a,b]$, pot fi obținute estimări mai puternice ale erorii de interpolare decât cele date mai sus. Astfel, în cazul în care $f(x) \in C^4[a,b]$ se demonstrează că:

$$\|f'(x) - S'(x)\| \le \frac{1}{20} \left\| f^{(4)}(x) \right\| h^3 \tag{3.5.12}$$

$$\|f(x) - S(x)\| \le \frac{5}{384} \left\| f^{(4)}(x) \right\| h^4 \tag{3.5.13}$$

* * *

§ 3.6. PROBLEMATICA ALGORITMILOR ADAPTIVI

3.6.1. Generalități privind algoritmii adaptivi

Una dintre deficiențele majore ale M.E.Fr., în condiții concrete de aplicare, constă în faptul că precizia rezultatelor aproximative nu poate fi evaluată „**a priori**", aceasta depinzând în mod esențial de modul în care se face discretizarea frontierei în obiectele fizico-geometrice pe care le-am numit **elemente de frontieră**.

Pentru a elimina acest minus al metodei s-au imaginat așa-numiții **algoritmi adaptivi** care au ca obiect să determine în mod automat o **rețea de discretizare optimă** din punctul de vedere al minimizării erorilor.

Termenul de **adaptiv** definește interacțiunea reciprocă dintre **eroarea calculată a posteriori** și refacerea discretizării inițiale. Această „*refacere*" a rețelei de frontieră în vederea obținerii unei soluții mai exacte pentru problema studiată se numește „**rafinare**". În prezent există trei modalități de a realiza această rafinare în algoritmi de frontieră adaptivi.

- **rafinarea h** - este cea mai frecventă și se realizează prin creșterea numărului elementelor de frontieră (în cazul 3D, implicit prin micșorarea suprafeței medii a acestora). Este un procedeu ușor de programat, conduce la soluții foarte bune, dar de multe ori solicită un necesar de memorie și un timp de calcul foarte mare. După numai trei iterații, în funcție de algoritmul utilizat și de precizia cerută, numărul de elemente poate crește de peste 20-30 de ori.
- **rafinarea p** - nu se referă la aspectul geometric al rețelei de frontieră ci la modul de aproximare pentru funcția necunoscută; în această tehnică numărul și forma elementelor de frontieră rămân constante, crescându-se doar gradul polinomului de aproximare. Rafinarea p conduce la soluții foarte precise cu un necesar de memorie de calculator comparabil cu rafinarea h.
- **rafinarea r** - (cunoscută și ca **metoda adaptivă r**) – este o tehnică diferită de celelalte două, unii autori neconsiderând-o ca o tehnică propriu-zisă de rafinare; numărul elementelor de frontieră, precum și gradul polinomului de aproximare rămânând constante, modificându-se doar poziția nodurilor și a elementelor de frontieră. Rafinarea r nu a fost studiată și nici utilizată atât de intens cum au fost celelalte două, pentru că, desigur, convergența către soluția exactă a problemei nu se poate obține doar prin rearanjarea punctelor nodale.

Evident că la ora actuală există tehnici de algoritmi adaptivi care combină cele trei metode de rafinare.

În principiu schema logică de lucru a unui algoritm adaptiv este evidentă (v. **Fig. 3.5.1**).

Se vede că într-un program de analiză asistată de calculator după ideea prezentată, etapele iterative ale algoritmului adaptiv sunt transparente pentru utilizator: el nu trebuie decât să furnizeze datele unei rețele inițiale cu care se stabilesc configurațiile geometrice și mecanice ale problemei și o valoare pentru limita maximă a erorii admisibile. Programul care implementează algoritmul va prelucra aceste date constituind o rețea de frontieră optimă și oferind soluția căutată.

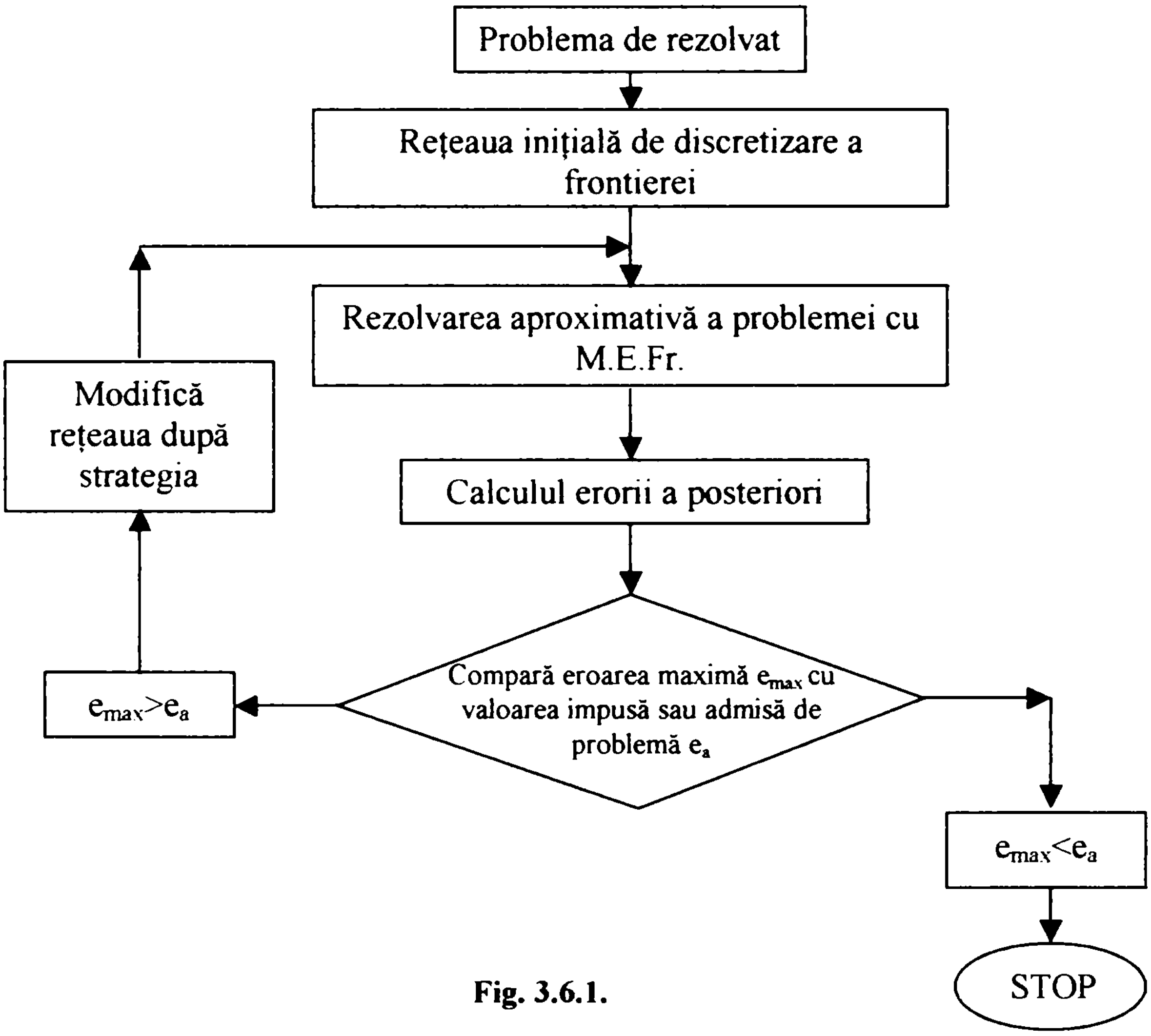


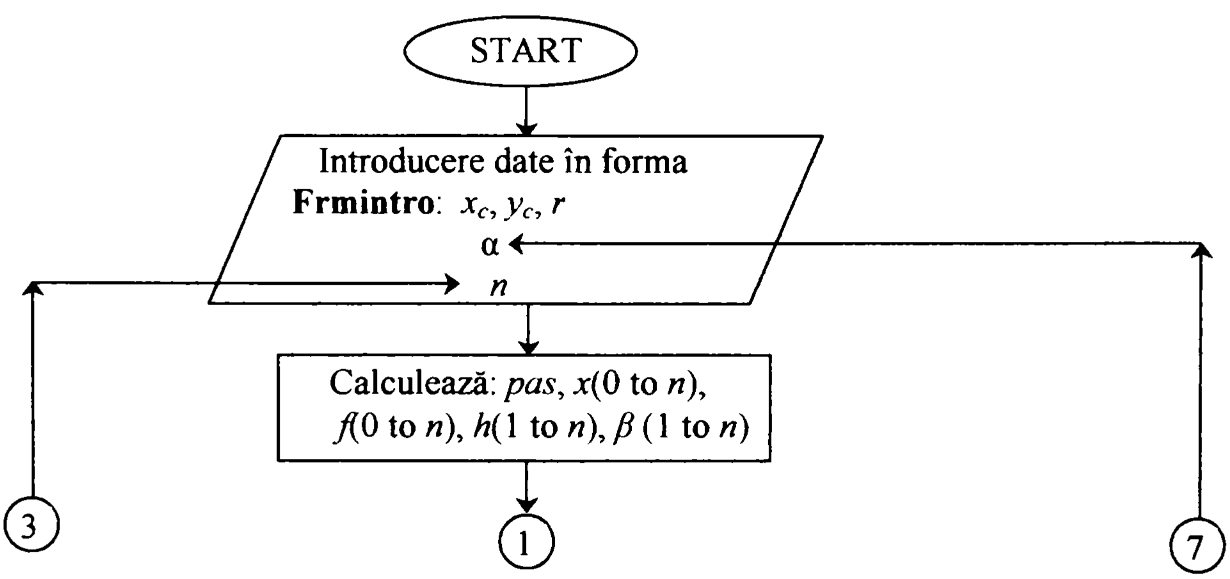
Fig. 3.6.1.

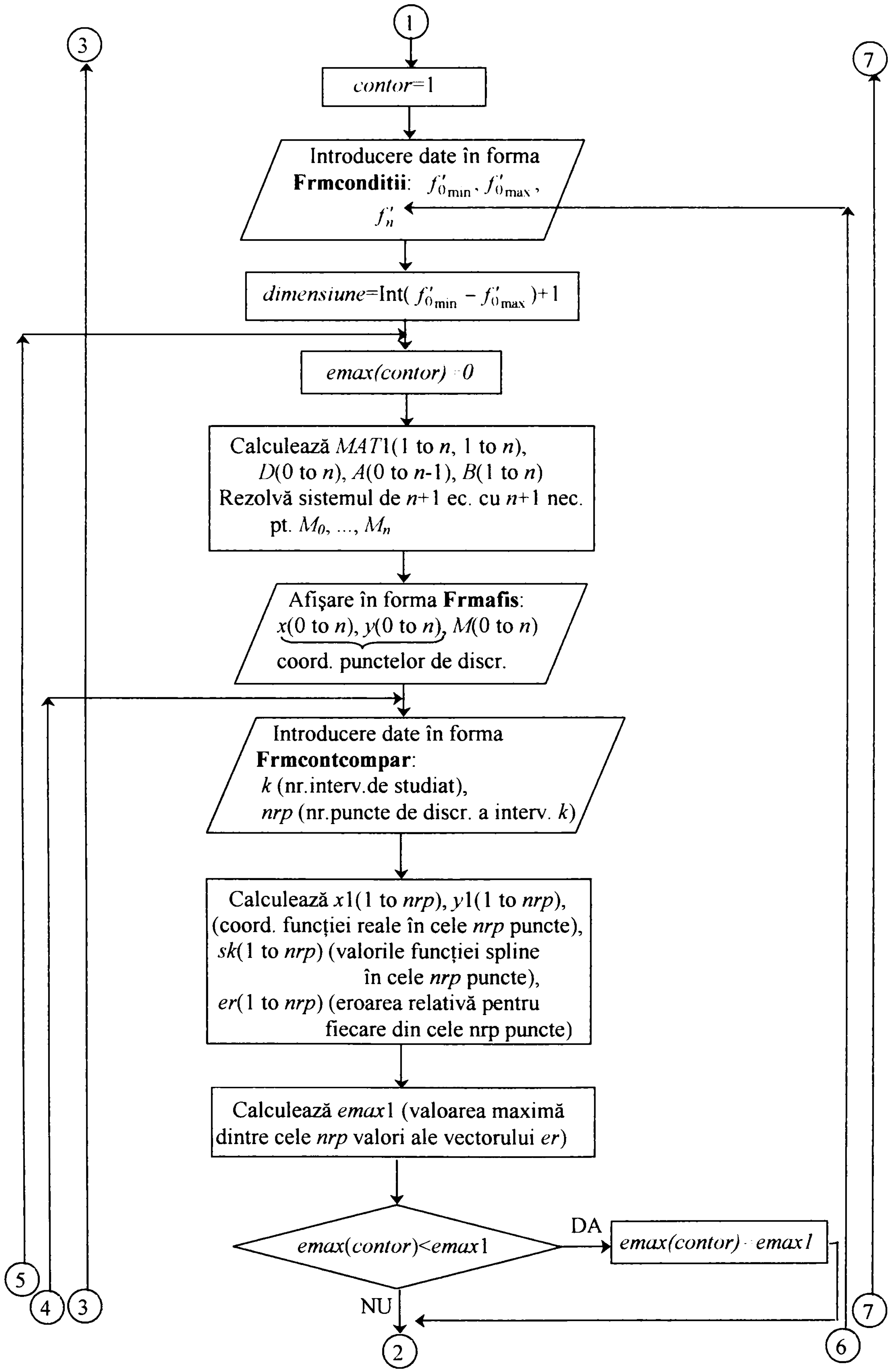
3.6.2. Program adaptiv pentru studiul erorilor în interpolarea cu funcții spline

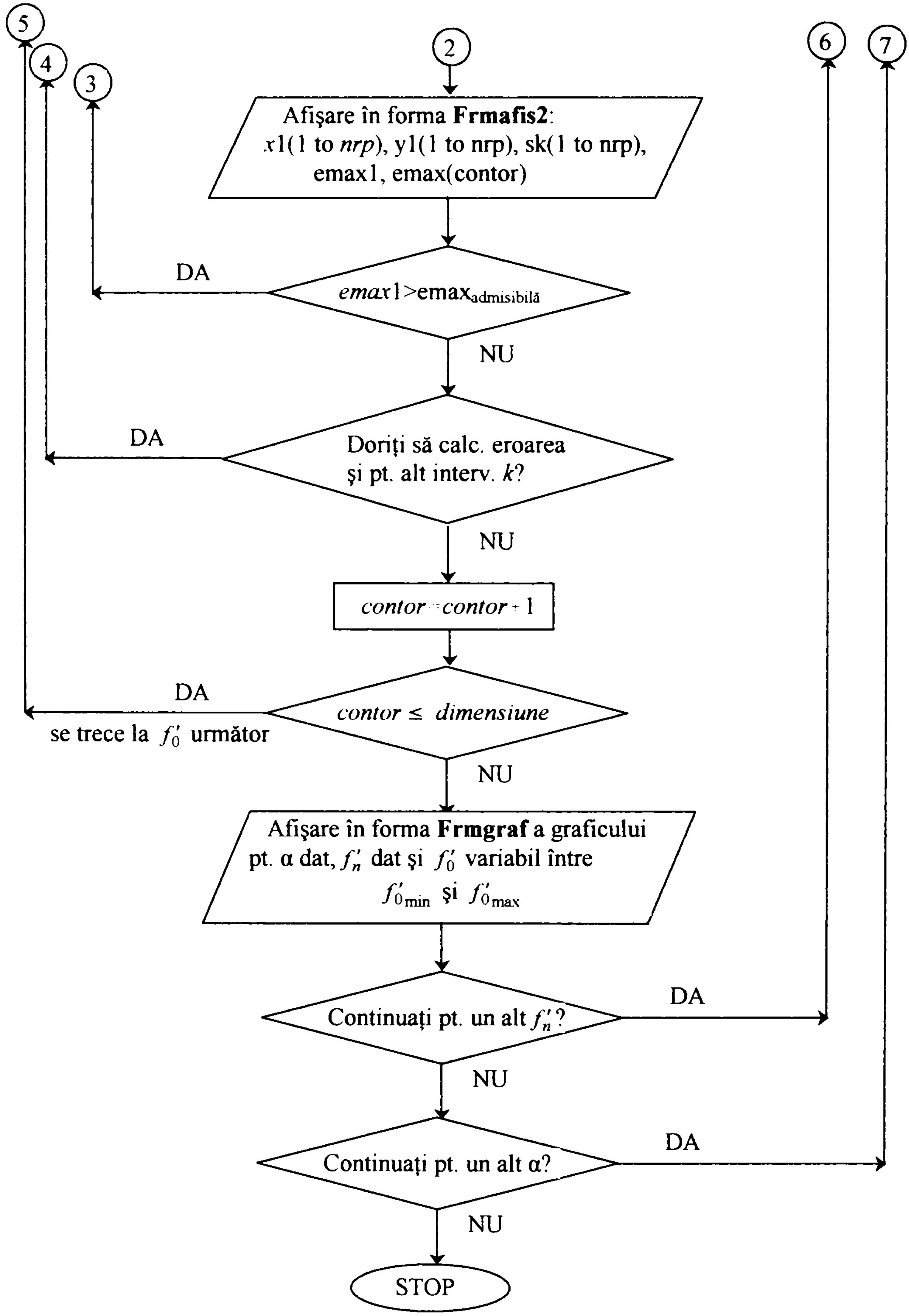
Programele prezentate în paragraful **3.4.8.** au fost completate cu un algoritm adaptiv cu **rafinare h** a rețelei de discretizare și cu proceduri grafice care să releve variația erorii dată de aproximarea cu funcții spline față de funcția adevărată. Rafinarea h s-a utilizat deoarece s-a impus ca eroarea relativă maximă pentru întregul contur să i-a valori mai mici decât o anumită valoare admisibilă considerată.

3.6.2.1. Algoritmul programului h-adaptiv

Schema logică a programului h-adaptiv realizat este redată mai jos.




1
3
7
contor=1
Introducere date în forma
Frmconditii: f'_{0min}, f'_{0max}, f'_n
dimensiune=Int(f'_{0min} − f'_{0max})+1
emax(contor)=0
Calculează $MAT1$(1 to n, 1 to n),
D(0 to n), A(0 to n-1), B(1 to n)
Rezolvă sistemul de n+1 ec. cu n+1 nec.
pt. M_0, ..., M_n
Afişare în forma **Frmafis**:
x(0 to n), y(0 to n), M(0 to n)
coord. punctelor de discr.
Introducere date în forma
Frmcontcompar:
k (nr.interv.de studiat),
nrp (nr.puncte de discr. a interv. k)
Calculează $x1$(1 to nrp), $y1$(1 to nrp),
(coord. funcţiei reale în cele nrp puncte),
sk(1 to nrp) (valorile funcţiei spline
în cele nrp puncte),
er(1 to nrp) (eroarea relativă pentru
fiecare din cele nrp puncte)
Calculează $emax1$ (valoarea maximă
dintre cele nrp valori ale vectorului er)
emax(contor)<emax1
DA
emax(contor)=emax1
NU
5
4
3
2
6
7



Voi prezenta în continuare în detaliu **algoritmul programului de interpolare cu funcţii spline exponenţiale pentru un semicerc în varianta a III-a, cu specificarea derivatelor de ordinul I pentru nodurile extreme**. Celelalte variante de program, pentru elipsă sau discretizarea după unghiuri egale la centru, sunt similare cu acesta.

Se va analiza deci cazul prezentat în **Fig. 3.4.8.2**. Codul sursă complet al programului, precum şi imaginile formelor, resp. o mostră de fişier de ieşire, sunt date la sfârşitul acestui paragraf.

La lansarea aplicaţiei din programul principal **Sub Main( )** va apare mai întâi un mesaj cu titlul problemei (v. **Fig. 3.6.2**), după care se deschide fişierul text "*Ieşire.txt*" pregătit pentru a memora rezultatele. Controlul se dă apoi formei de introducere a datelor de intrare, **Frmintro**, (v. **Fig. 3.6.3**), în care se introduc de la tastatură coordonatele centrului semicercului, x_c, y_c, şi raza acestuia r, respectiv numărul de intervale egale de eşantionare şi valoarea α_i din relaţia (3.4.8.41), valoare care apare în expresia funcţiei spline locale $S_i(x)$, prin intermediul lui β_i din argumentul funcţiei hiperbolice. La această formă se va reveni mai târziu pentru modificarea valorii parametrului α_i în vederea studiului erorii relative maxime funcţie de valorile lui α_i.

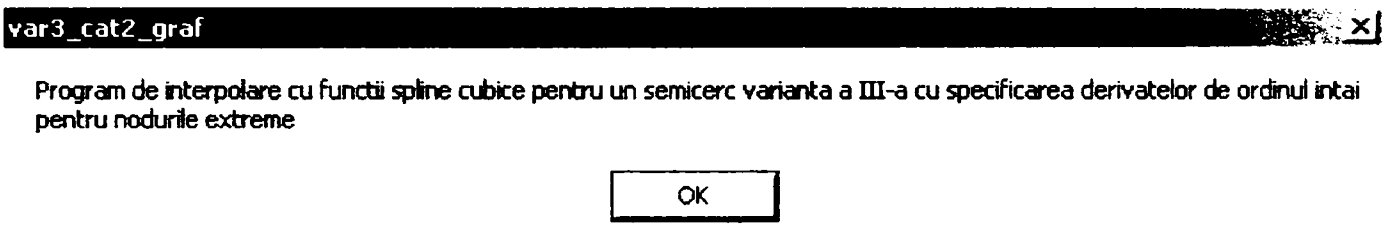


Fig. 3.6.2

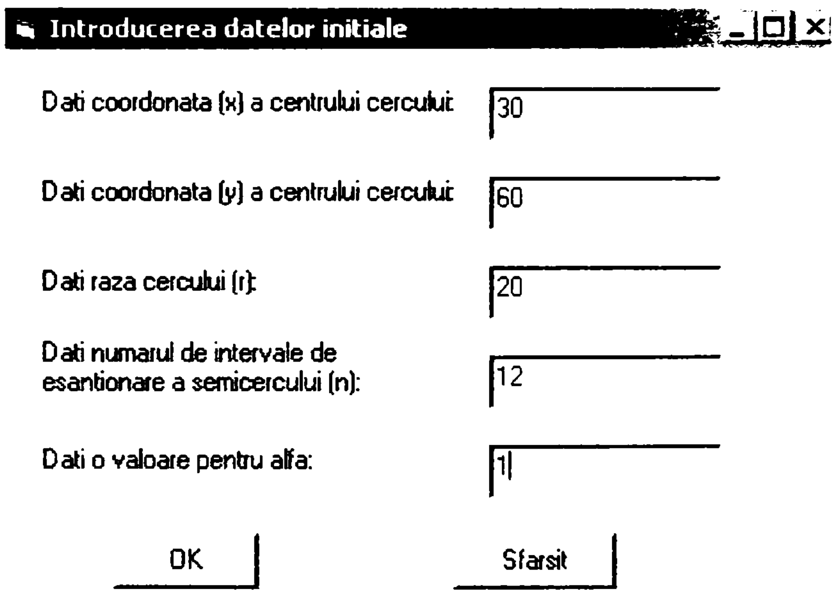


Fig. 3.6.3

La clic pe butonul de comandă OK se calculează $pas = \dfrac{2r}{n}$, se formează vectorii

$$x = \underbrace{\begin{Bmatrix} x_0 = x_c - r \\ x_1 = x_0 + pas \\ x_2 = x_1 + pas \\ \\ x_i = x_{i-1} + pas \\ \\ x_n = x_{n-1} + pas \end{Bmatrix}}_{n+1 \text{ elemente}}, \quad f = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_0 = y_c - \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\ f_1 = y_c - \sqrt{r^2 - (x_1 - x_c)^2} \\ f_2 = y_c - \sqrt{r^2 - (x_2 - x_c)^2} \\ \dots \\ f_i = y_c - \sqrt{r^2 - (x_i - x_c)^2} \\ \dots \\ f_n = y_c - \sqrt{r^2 - (x_n - x_c)^2} \end{Bmatrix}}_{n+1 \text{ elemente}}, \quad h = \underbrace{\begin{Bmatrix} h_1 = pas \\ h_2 = pas \\ h_3 = pas \\ \\ h_i = pas \\ \\ h_n = pas \end{Bmatrix}}_{n \text{ elemente}}, \quad \beta = \underbrace{\begin{Bmatrix} \beta_1 = \alpha h_1 \\ \beta_2 = \alpha h_2 \\ \beta_3 = \alpha h_3 \\ \\ \beta_i = \alpha h_i \\ \\ \beta_n = \alpha h_n \end{Bmatrix}}_{n \text{ elemente}}. \tag{3.6.1}$$

În continuarea apare forma **Frmconditii** (v. **Fig. 3.6.4**) pentru a citi de la tastatură condiţiile în punctele de capăt ale intervalului $[a,b]$ pentru derivatele de ordinul întâi. Deoarece se doreşte obţinerea unor grafice cu variaţia erorii relative maxime pentru diverşi f_n' când f_0' variază într-un anumit interval (v. **Fig. 3.6.14**), se va citi pentru f_0' o valoare minimă şi una maximă:

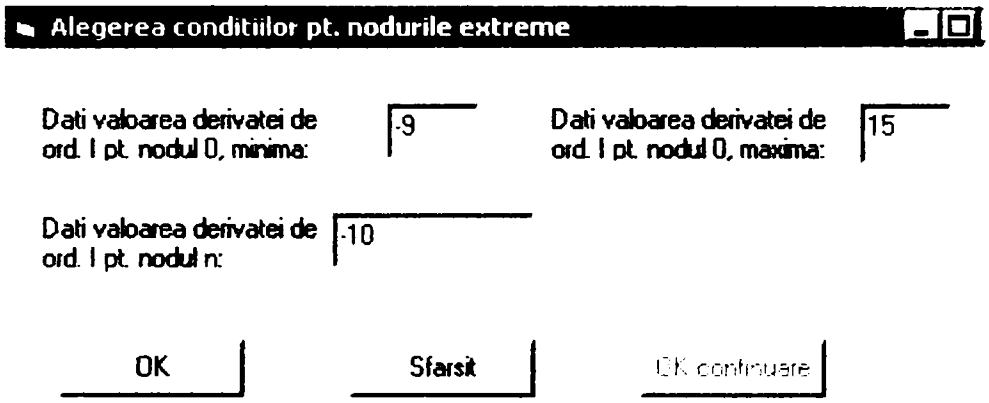


Fig. 3.6.4

La clic pe butonul *OK* au loc o serie de calcule. Mai întâi însă va fi poziţionată o variabilă cu numele *contor* pe 1, variabilă care va număra fiecare caz în parte, pentru f_0' luând toate valorile întregi între $f_{0\min}'$ şi $f_{0\max}'$. Pentru aceasta se declară un vector cu numele f_0', având un număr de *dimensiune* elemente, unde:

$$dimensiune = Int(f_{0\max}' - f_{0\min}') + 1 \tag{3.6.2}$$

Int fiind simbolul funcţiei care extrage partea întreagă a numărului dat ca argument între paranteze. Elementele vectorului f_0' vor fi:

$$f_0' = \left\{ \begin{array}{l} f_{01}' = Int(f_{0\min}') \\ \ldots \\ f_{0i}' = Int(f_{0\min}') + (i-1) \\ \ldots \\ f_{0dimensiune}' = Int(f_{0\min}') + (dimensiune - 1) \end{array} \right\} \tag{3.6.3}$$

Tot acum se declară un vector *emax* de *dimensiune* elemente, în care se vor memora erorile relative maxime pentru fiecare valoare a lui f_0', cuprinsă între f_{01}' şi $f_{0dimensiune}'$:

$$emax = \left\{ \begin{array}{l} emax_1 \\ \ldots \\ emax_i \\ \ldots \\ emax_{dimensiune} \end{array} \right\} \tag{3.6.4}$$

Pentru început se presupune $emax_1=0$, pentru valoarea variabilei $contor=1$, dar această valoare va fi modificată imediat după calculul erorii relative maxime în acest prim caz, adică pentru f_{01}'.

Revenim acum la calculul necunoscutelor M_0, $M_1, \ldots, M_n$ din sistemul (3.4.8.48), pentru care va trebui să stabilim mai întâi vectorii *D*, *A* şi *B*:

$$D=\underbrace{\begin{Bmatrix} D_0=\dfrac{f_1-f_0}{h_1}-f'_{01} \\ \cdots \\ D_i=\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\dfrac{f_i-f_{i-1}}{h_i} \\ \cdots \\ D_n=f'_n-\dfrac{f_n-f_{n-1}}{h_n} \end{Bmatrix}}_{n+1 \text{ elemente}}, \tag{3.6.5}$$

$$A=\underbrace{\begin{Bmatrix} A_0=\dfrac{sh\,\beta_1-\beta_1}{\beta_1^2 sh\,\beta_1}h_1 \\ \cdots \\ A_{i-1}=\dfrac{sh\,\beta_i-\beta_i}{\beta_i^2 sh\,\beta_i}h_i \\ \cdots \\ A_{n-1}=\dfrac{sh\,\beta_n-\beta_n}{\beta_n^2 sh\,\beta_n}h_i \end{Bmatrix}}_{n \text{ elemente}}, \quad B=\underbrace{\begin{Bmatrix} B_1=\dfrac{\beta_1 ch\,\beta_1-sh\,\beta_1}{\beta_1^2 sh\,\beta_1}h_1 \\ \cdots \\ B_{i+1}=\dfrac{\beta_{i+1} ch\,\beta_{i+1}-sh\,\beta_{i+1}}{\beta_{i+1}^2 sh\,\beta_{i+1}}h_{i+1} \\ \cdots \\ B_n=\dfrac{\beta_n ch\,\beta_n-sh\,\beta_n}{\beta_n^2 sh\,\beta_n}h_n \end{Bmatrix}}_{n \text{ elemente}}, \tag{3.6.6}$$

cu ajutorul cărora se formează matricea MAT1:

$$MAT1=\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\ A_0 & B_1+B_2 & A_1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & A_1 & B_2+B_3 & A_2 & 0 & & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & A_{i-1} & B_i+B_{i+1} & A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & A_{n-2} & B_{n-1}+B_n & A_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{n-1} & B_n \end{bmatrix}}_{(n+1)\times(n+1) \text{ elemente}} \tag{3.6.7}$$

Observație: Valoarea f'_{01} care apare în expresia primului element al vectorului D (relația 3.6.5) reprezintă prima valoare întreagă mai mare sau egală cu $f'_{0\min}$, conform vectorului definit de (3.6.3). Toate calculele care se fac sunt deci pentru primul f'_0 deocamdată, calcule ce se vor repeta după incrementarea variabilei *contor*, care ia valori de la 1 la *dimensiune*.

În continuare se rezolvă sistemul de n+1 ecuații cu n+1 necunoscute (3.4.8.48), care cu notațiile din program este:

$$[MAT1]\times\{M\}=\{D\} \tag{3.6.8}$$

sau mai detaliat:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ A_0 & B_1+B_2 & A_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & A_1 & B_2+B_3 & A_2 & 0 & & & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i-1} & B_i+B_{i+1} & A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n-2} & B_{n-1}+B_n & A_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \;\dots & 0 & 0 & A_{n-1} & B_n \end{bmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)} \times \begin{Bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_i \\ \dots \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_i \\ \dots \\ D_n \end{Bmatrix} \tag{3.6.9}$$

unde necunoscutele sunt M_i, $i = 0,1,\dots,n$, şi care reprezintă de fapt derivatele de ordinul doi ale funcţiei spline în punctul x_i, deci $S_i''(x_i)$. Ca metodă de rezolvare a sistemului s-a ales metoda eliminării lui Gauss, al cărei algoritm nu-l mai prezint, deoarece este uşor de găsit în literatura de specialitate.

În urma efectuării tuturor acestor calcule pe ecran apare forma **Frmafis** din **Fig. 3.6.5**:

Afisarea functiilor spline obtinute

Cele 13 puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:

x	y
10,000	60,000
13,333	71,055
16,667	74,907
20,000	77,321
23,333	78,856
26,667	79,720
30,000	80,000
33,333	79,720
36,667	78,856
40,000	77,321
43,333	74,907
46,667	71,055
50,000	60,012

Continuare pt. a face comparatie pe un anumit interval de esantionare

Sfarsit

Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:

0,7	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m0	12,31662
0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m1	-2,161112
0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m2	-0,4314949
0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m3	-0,2633171
0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m4	-0,2014732
0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	0,	m5	-0,1753075
0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	0,	m6	-0,1678391
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	0,	m7	-0,1753075
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	0,	m8	-0,2014732
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	0,	m9	-0,2633171
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	0,	m10	-0,4314926
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	1,41	0,23	m11	-2,15741
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,23	0,7	m12	-6,687079

Fig. 3.6.5

Practic, în forma de mai sus am afişat doar coordonatele punctelor de eşantionare obţinute şi sistemul (3.6.9) care s-a rezolvat, fără a afişa litaral forma celor 12 funcţii spline obţinute în acest caz – vezi expresia funcţiilor spline (3.4.8.40). Acestea se vor calcula numeric puţin mai târziu, când, pentru diferite intervale la alegere, se va calcula eroarea faţă de valoarea reală a funcţiei pentru un număr de puncte în care se divizează respectivul interval.

Astfel, la clic pe butonul *Continuare pt. a face comparaţie pe un anumit interval de eşantionare* (v. **Fig.3.6.5**) va apărea pe ecran forma **Frmcontcompar** din **Fig. 3.6.6**.

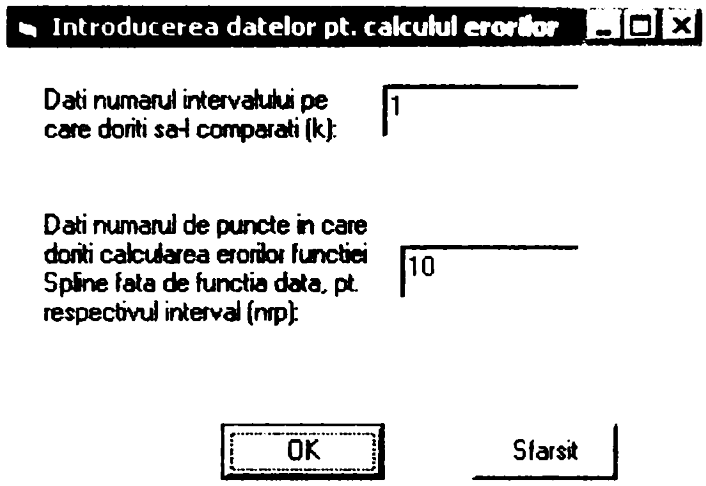


Fig. 3.6.6

La clic pe butonul *OK* se citeşte:

- în variabila k un număr între 1 şi n care este intervalul care se doreşte a fi eşantionat din nou şi pentru care se calculează eroarea maximă a aproximării spline faţă de funcţia exactă;
- în variabila *nrp* un număr după dorinţă, cuprins între 3 şi o valoare maximă (pe care am considerat-o 30) şi care reprezintă numărul de puncte în care se va diviza intervalul k şi în care se vor calcula valoarea exactă şi valoarea aproximativă dată de funcţia spline şi se va calcula eroarea maximă dată de aceste *nrp* situaţii.

Pentru calculul erorii maxime se calculează la clic pe *OK*:

- vectorii $x1$ şi $y1$ de câte *nrp* elemente, ce reprezintă coordonatele punctelor de discretizare a intervalului k de pe semicerc, respectiv

$$x1 = \begin{Bmatrix} x1_1 = x_k \\ x1_2 = x1_1 + h1 \\ \ldots \\ x1_i = x1_{i-1} + h1 \\ \ldots \\ x1_{nrp} = x1_{nrp-1} + h1 \end{Bmatrix}, \quad y1 = \begin{Bmatrix} y1_1 = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_1 - x_c)^2} \\ y1_2 = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_2 - x_c)^2} \\ \ldots \\ y1_i = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_i - x_c)^2} \\ \ldots \\ y1_{nrp} = y_c + \sqrt{r^2 - (x1_{nrp} - x_c)^2} \end{Bmatrix} \qquad (3.6.10)$$

relaţii identice cu cele din varianta de program prezentată în paragraful 3.4.8, respectiv relaţiile (3.4.8.52), unde $h1$ reprezintă pasul constant de discretizare pe orizontală a intervalului ales k, adică:

$$h1 = \frac{pas}{nrp - 1} \qquad (3.6.11)$$

- vectorul *sk*, de *nrp* elemente, ce conţine valorile returnate de funcţia spline pentru acele puncte;

$$
sk = \begin{cases}
sk_1 = f_k t_1 + f_{k-1}(1-t_1) + \dfrac{M_k}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k t_1}{sh\,\beta_k} - t_1\right) + \dfrac{M_{k-1}}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k(1-t_1)}{sh\,\beta_k} - (1-t_1)\right) \\
sk_2 = f_k t_2 + f_{k-1}(1-t_2) + \dfrac{M_k}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k t_2}{sh\,\beta_k} - t_2\right) + \dfrac{M_{k-1}}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k(1-t_2)}{sh\,\beta_k} - (1-t_2)\right) \\
\ldots \\
sk_i = f_k t_i + f_{k-1}(1-t_i) + \dfrac{M_k}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k t_i}{sh\,\beta_k} - t_i\right) + \dfrac{M_{k-1}}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k(1-t_i)}{sh\,\beta_k} - (1-t_i)\right) \\
\ldots \\
sk_{nrp} = f_k t_{nrp} + f_{k-1}(1-t_{nrp}) + \dfrac{M_k}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k t_{nrp}}{sh\,\beta_k} - t_{nrp}\right) + \dfrac{M_{k-1}}{\alpha^2}\left(\dfrac{sh\,\beta_k(1-t_{nrp})}{sh\,\beta_k} - (1-t_{nrp})\right)
\end{cases}
\tag{3.6.12}
$$

unde

$$
t_i = \frac{x1_i - x_{k-1}}{h_k} \tag{3.6.13}
$$

relații care rezultă din expresiile (3.4.8.40) și (3.4.8.41).

În continuare pe ecran apare o nouă formă, **Frmafis2**, în care sunt afișate comparativ rezultatele obținute pentru intervalul k a funcției reale și a aproximării cu funcții spline - v. **Fig. 3.6.7**).

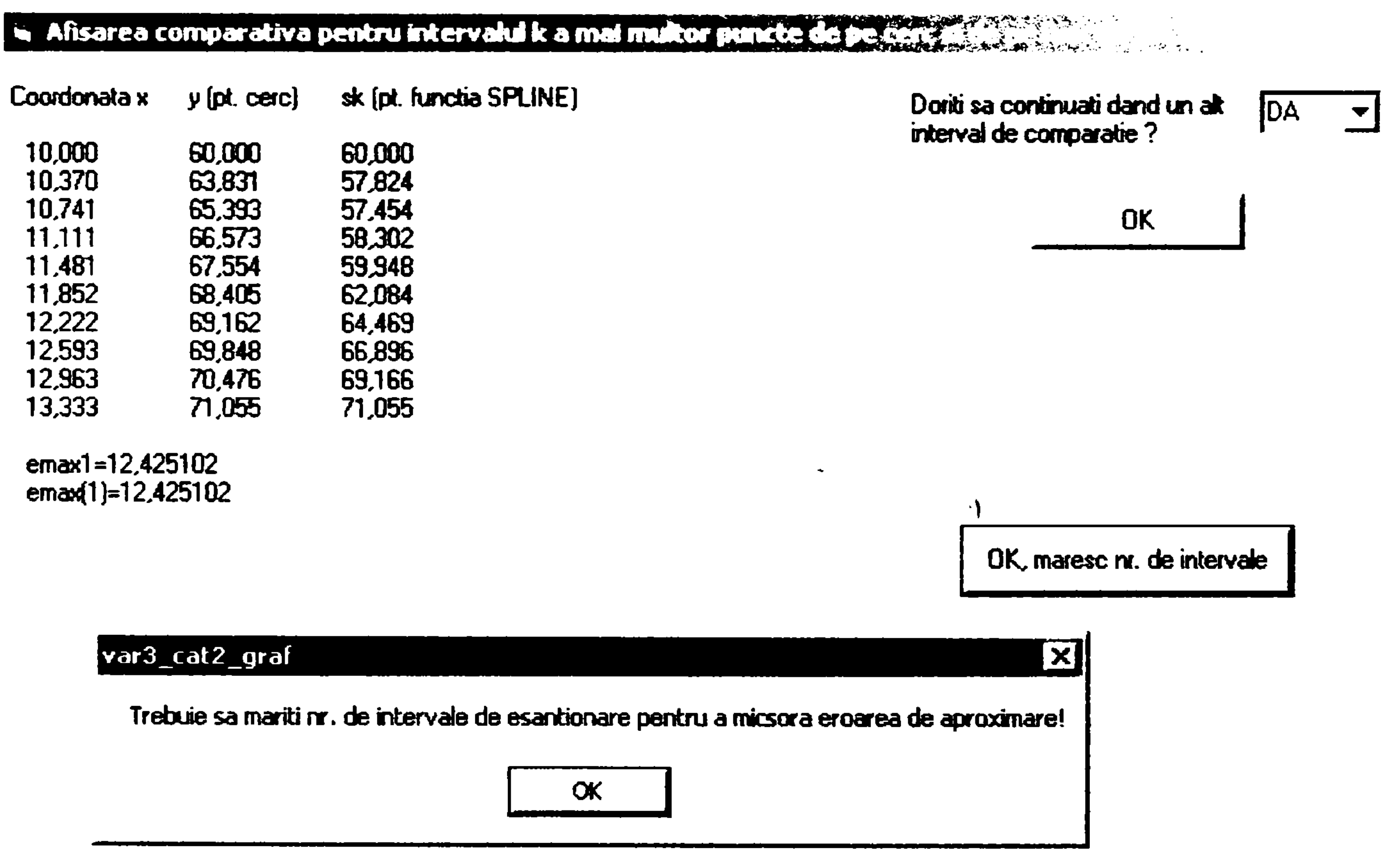


Fig. 3.6.7

Tot pe această formă se calculează eroarea relativă maximă în procente, *emax*1, ca fiind maximul dintre cele *nrp* erori relative obținute cu formula (3.5.8), (dar înmulțite cu 100, pentru a obține rezultatele în procente). Se va calcula deci maximul dintre valorile vectorului *er* de *nrp* elemente:

$$er = \begin{cases} er_1 = \dfrac{|y1_1 - sk_1|}{|y1_1|} \cdot 100 \\ \dots \\ er_i = \dfrac{|y1_i - sk_i|}{|y1_i|} \cdot 100 \\ \dots \\ er_{nrp} = \dfrac{|y1_{nrp} - sk_{nrp}|}{|y1_{nrp}|} \cdot 100 \end{cases} \tag{3.6.13}$$

Acest maxim, notat $emax1$, îl compar cu $emax_{contor}$ (cu $emax_1$ fiind vorba de cazul pentru f_{01}') şi în caz că este mai mare decât $emax_{contor}$, în $emax_{contor}$ voi reţine valoarea lui $emax1$. Cu alte cuvinte, doresc ca în $emax_{contor}$ să reţin valoarea maximă a erorii relative pentru o anumită valoare a variabilei *contor*, variabilă care ia toate valorile întregi între $f_{0_{min}}'$ şi $f_{0_{max}}'$.

Prin program am considerat o valoare maximă admisibilă a erorii relative egală cu 7%. Dacă $emax1$ calculat depăşeşte această valoare admisibilă, pe ecran apare mesajul: *Trebuie să măriţi nr. de intervale de eşantionare pentru a micşora eroarea!* - v. **Fig. 3.6.7**, şi va trebui să acţionez butonul *OK, măresc nr. de intervale*, care mă conduce înapoi la forma **Frmintro** (**Fig. 3.6.8**), unde însă nu voi putea modifica altceva decât valoarea lui *n*.

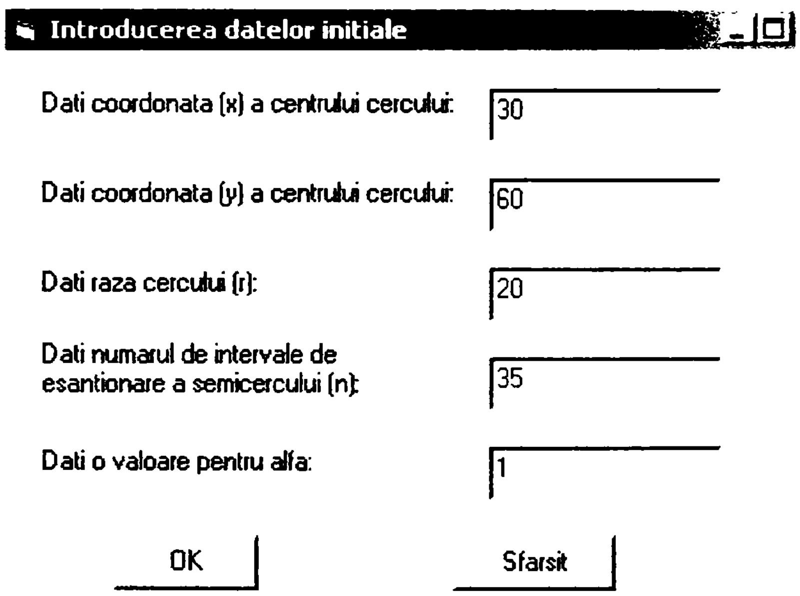


Fig.3.6.8

Cu noul *n* se refac calculele până în acest punct, când apare din nou forma **Frmafis2** care afişează erorile obţinute de această dată. Dacă discretizarea aleasă, (de exemplu pentru n=35) conduce la erori mai mici decât eroarea admisibilă impusă, nu va mai apărea mesajul cu privire la mărirea numărului de intervale de eşantionare (v. **Fig. 3.6.9**), şi programul va continua prin răspunsul utilizatorului la întrebarea: *Doriţi să continuaţi dând un alt interval de comparaţie?* Dacă se alege răspunsul *DA* şi se dă clic pe butonul de comandă *OK*, vom obţine din nou forma **Frmcontcompar** (v. **Fig. 3.6.10**) şi calculele se vor repeta, afişând din nou rezultatele din forma **Frmafis2** (v. **Fig. 3.6.11**). Aici valoarea $emax1$ afişată reprezintă eroarea relativă maximă în procente pentru acest al ultim (k=2) interval ales, iar $emax(_1)$ reprezintă eroarea relativă maximă de până acum pentru cazul $f_0' = f_{01}'$, (respectiv $emax(_{contor})$ va reprezenta în cele ce urmează eroarea relativă maximă până la momentul respectiv pentru cazul $f_0' = f_{0_{contor}}'$).

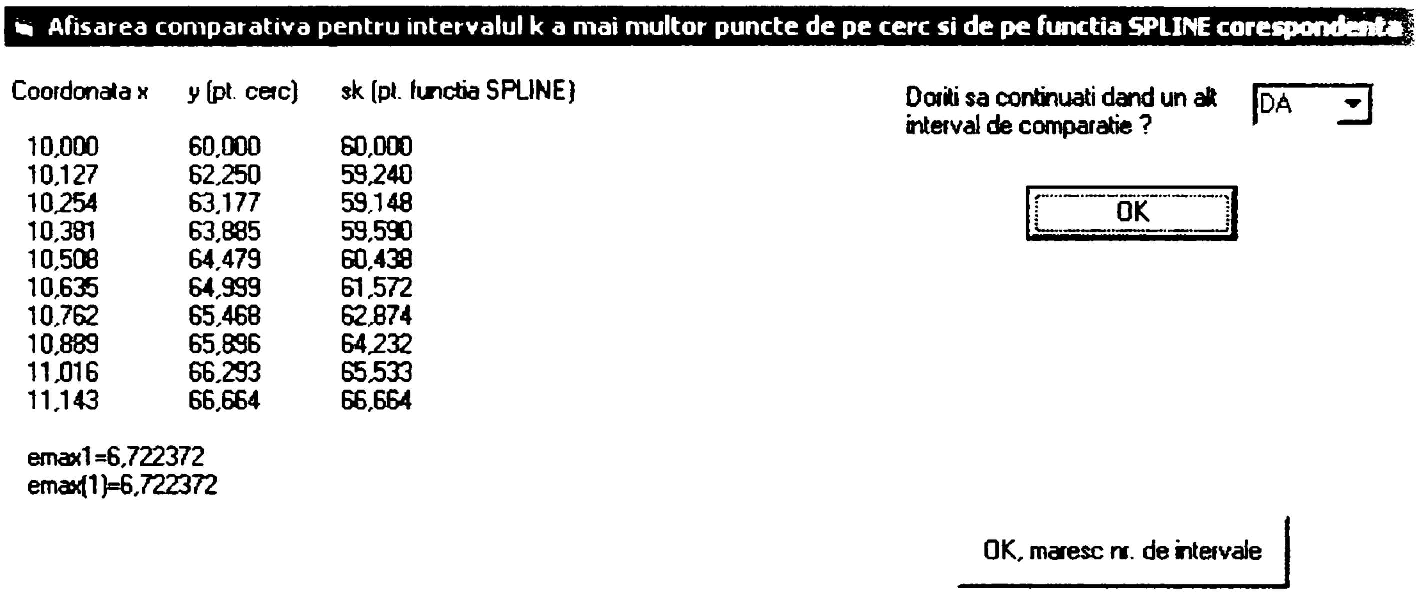


Fig. 3.6.9

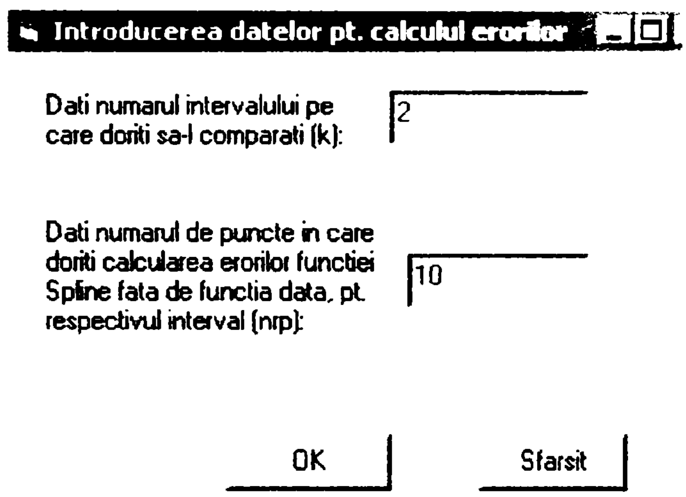


Fig. 3.6.10

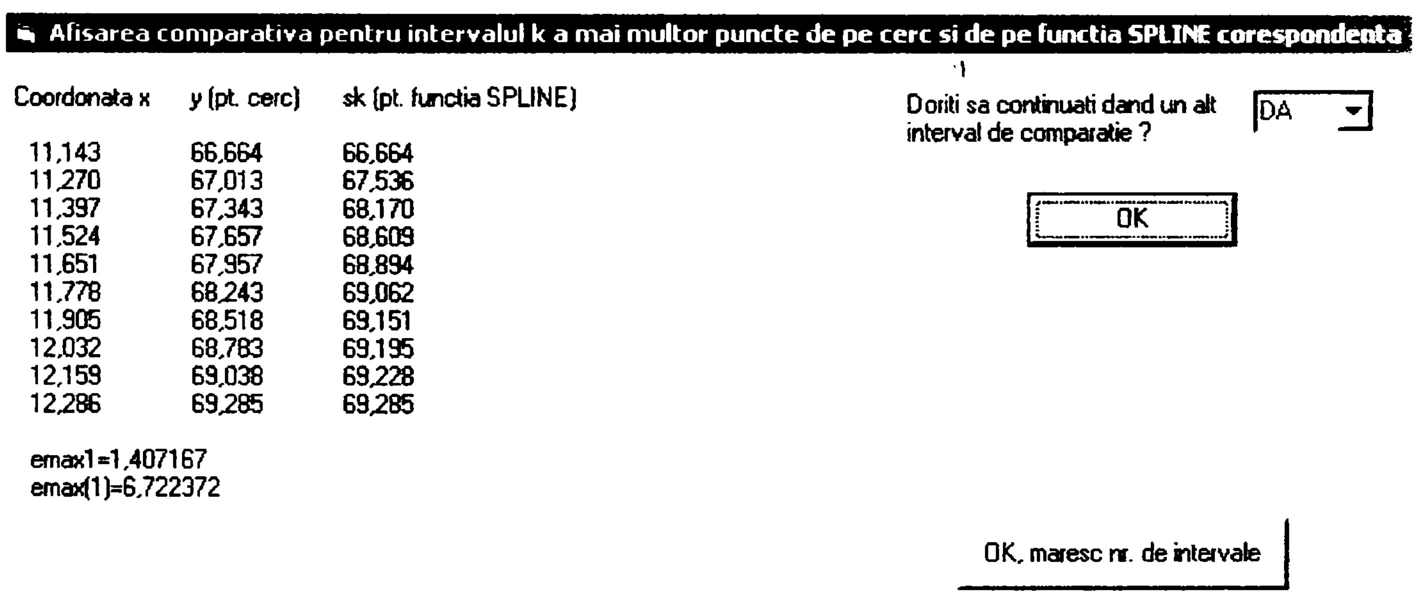


Fig. 3.6.11

Dacă răspund la întrebarea *Doriți să continuați dând un alt interval de comparație?* cu *NU*, atunci variabila *contor* se incrementează, iar dacă valoarea aceasta incrementată a contorului nu depășește valoarea lui *dimensiune* apare mesajul: *Dați clic pe OK continuare pentru a efectua calculele pentru f_0' următor!* (v. **Fig. 3.6.12**).

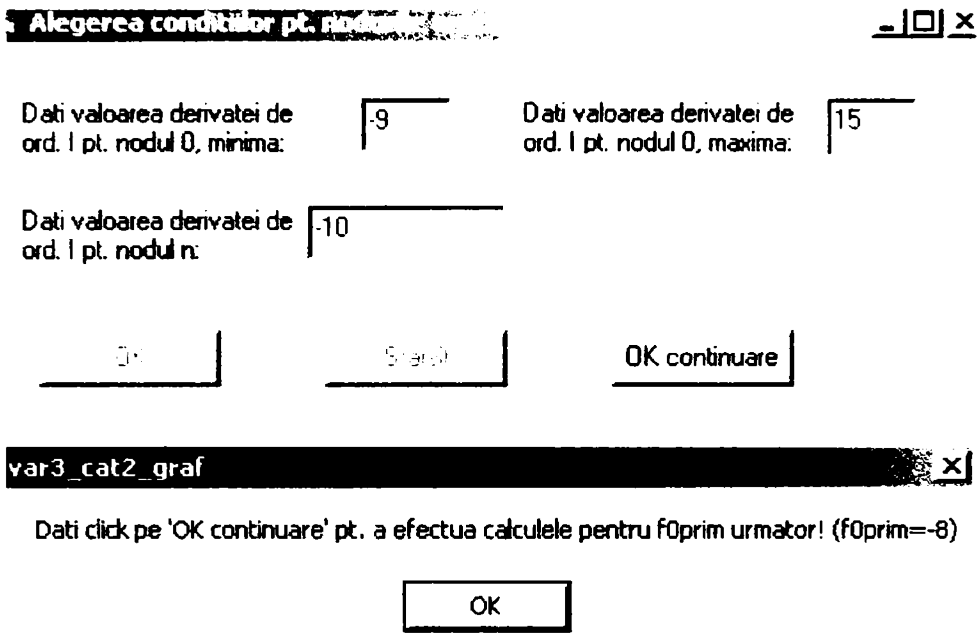


Fig. 3.6.12

La clic pe butonul OK al ferestrei mesaj devine activă din nou fereastra **Frmcondiții**, în care nu se pot însă modifica vechile date ci doar se dă clic pe butonul *OK continuare*, fapt care provoacă reinițializarea cu zero a variabilei $emax(_{\text{contor}})$, recalcularea vectorului D cu f_{02}' (v. relația (3.6.5) și reluarea tuturor etapelor din acest punct începând.

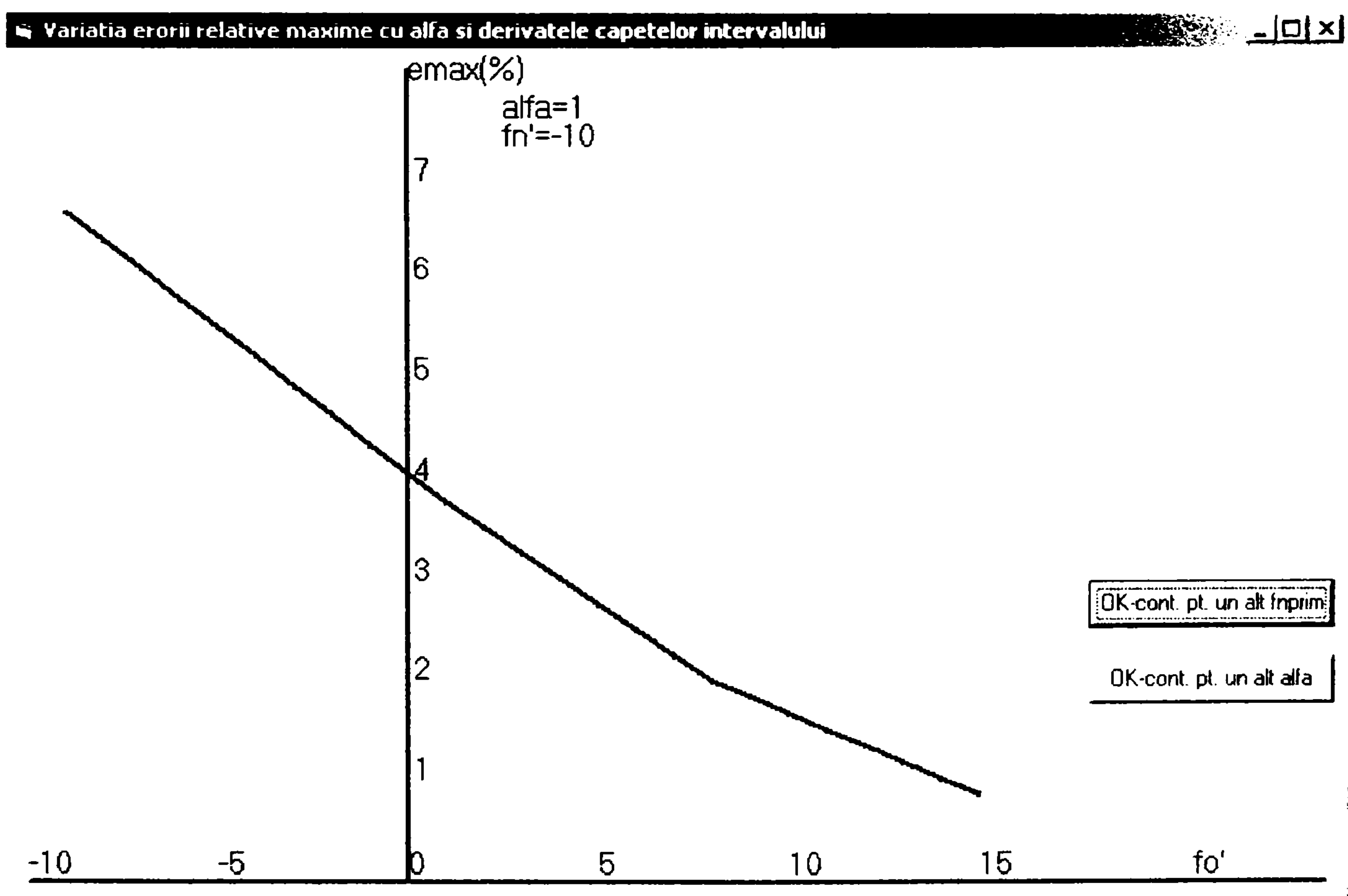


Fig.3.6.13

Dacă s-a trecut în felul acesta prin toate cazurile de f_0' întregi între $f_{0\min}'$ şi $f_{0\max}'$ se realizează reprezentarea grafică a erorii relative maxime pentru α dat şi f_n' dat cu variaţia lui f_0' între $f_{0\min}'$ şi $f_{0\max}'$. Astfel se obţine reprezentarea din **Fig. 3.6.13**.

La clic pe buonul *OK – continuare pt. un alt fnprim*, se revine la forma **Frmconditii**, unde se va putea modifica doar valoarea lui f_n' şi calculele se reiau până în punctul acesta pentru noul f_n' dat. Se observă că orice valori am da lui f_n', graficul erorii nu se va modifica funcţie de acesta – v. **Fig. 3.6.14**.

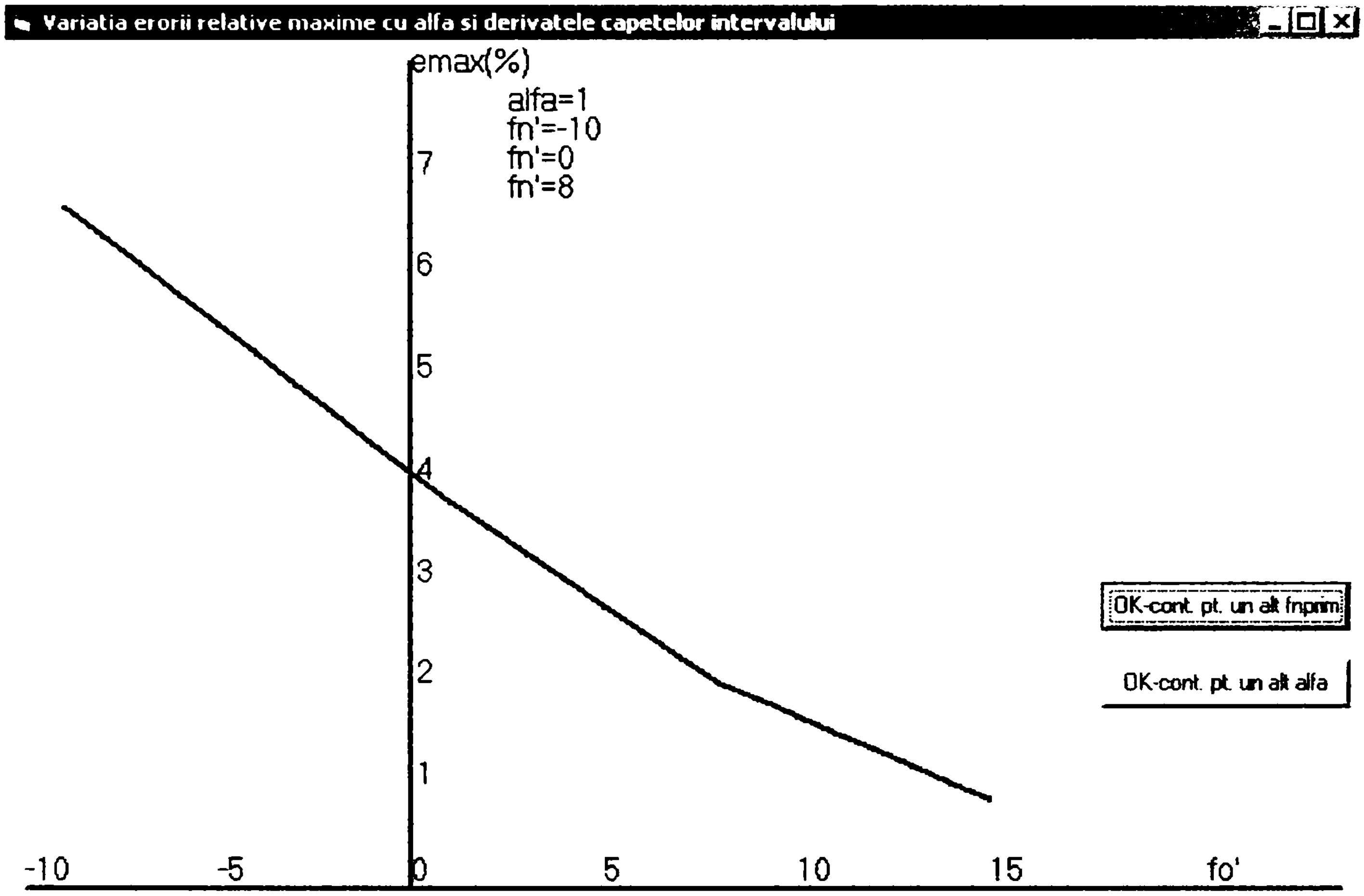


Fig. 3.6.14

Dacă se dă clic pe butonul *OK – continuare pentru un alt alfa*, programul ne va întoarce la forma **Frmintro**, unde nu vom putea schimba decât valoarea lui α, calculele fiind refăcute din acest punct până la reprezentarea grafică. Astfel vom obţine pe acelaşi grafic variaţia erorii relative maxime pentru un alt α şi una sau mai multe valori ale lui f_n', v. **Fig. 3.6.15**.

În **Fig. 3.6.16** se prezintă pentru şase valori diferite ale lui α cele şase curbe de eroare relativă maximă obţinute.

Cod sursă al programului de interpolare cu funcţii spline varianta III-a cu a doua categorie de condiţii – pentru cazul unui semicerc cu pasul *h* de discretizare pe orizontală constant – varianta prezentată în paragraful 3.6.2.1.

Module 1:

```
Public i, n, k, jj, nrp, prima As Integer
Public xc As Single, yc As Single, r As Single, pas As Single, h1 As Single, alfa, Max, CX, CY, pozx, pozy As
Single
Public h() As Single, x() As Single, f() As Single, beta() As Single, m() As Single, bet() As Single
Public Ai(), Bi()
Public f0prim(), emax(), f0primmin, f0primmax, fnprim
```

```
Public mat() As Single, mat1() As Single, beta1() As Single, m1() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
Public contor, dimensiune As Integer
```

Sub main()

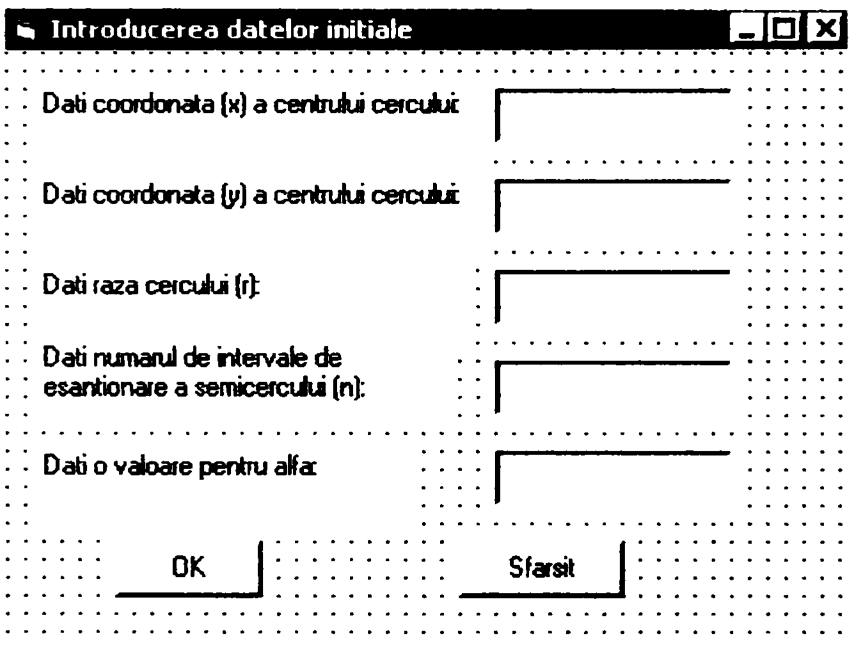
```
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru un semicerc varianta a III-a cu specificarea derivatelor de ordinul intai pentru nodurile extreme")
Open "Iesire.txt" For Output As #1
Frmintro.Show
prima = 0
End Sub
```

Sub rezolv_sist(n As Integer, a() As Single, b() As Single, x() As Single)

```
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
  If Abs(a(i1, i)) < Abs(a(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If a(i1, i) <> 0 Then
  If i1 <> 1 Then
    For j = 1 To n
     y = a(i, j)
     a(i, j) = a(i1, j)
     a(i1, j) = y
    Next j
    y = b(i)
    b(i) = b(i1)
    b(i1) = y
  End If
  y = a(i, i)
  For j = 1 To n
   a(i, j) = a(i, j) / y
  Next j
  b(i) = b(i) / y
  i1 = i + 1
  For j = i1 To n
   If a(j, i) <> 0 Then
    y = a(j, i)
    For k = i To n
     a(j, k) = a(j, k) - y * a(i, k)
    Next k
    b(j) = b(j) - b(i) * y
   End If
  Next j
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
  End
 End If
Next i
If a(n, n) <> 0 Then
 x(n) = b(n) / a(n, n)
 For i = 1 To n1
  x(n - i) = b(n - i)
  For k = 1 To i
   x(n - i) = x(n - i) - a(n - i, n - i + k) * x(n - i + k)
  Next k
 Next i
Else
 MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
 End
End If
End Sub
```

```
Function hsin(x As Single)
 hsin = (Exp(x) - Exp(-x)) / 2
End Function

Function hcos(x As Single)
 hcos = (Exp(x) + Exp(-x)) / 2
End Function

Sub calcule()
emax(contor) = 0
beta(0) = (f(1) - f(0)) / h(1) - f0prim(contor)
For i = 1 To n - 1
   beta(i) = (f(i + 1) - f(i)) / h(i + 1) - (f(i) - f(i - 1)) / h(i)
Next i
beta(n) = fnprim - (f(n) - f(n - 1)) / h(n)
End Sub
```

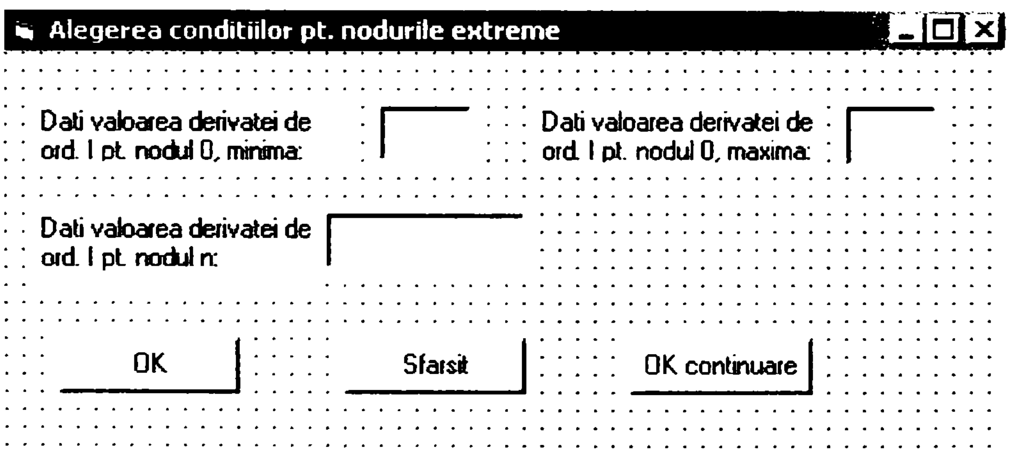
Frmintro:




```
Private Sub cmdok_Click()
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r = Val(Txtr.Text)
n = Val(Txtn.Text)
alfa = Val(txtalfa.Text)
contor = 1
jj = 0
ReDim h(1 To n), x(0 To n), f(0 To n), beta(0 To n), m(0 To n), bet(1 To n)
ReDim mat(0 To n, 0 To n), mat1(1 To n + 1, 1 To n + 1), beta1(1 To n + 1), m1(1 To n + 1)
ReDim Ai(0 To n - 1), Bi(1 To n)
pas = 2 * r / n
 x(0) = xc - r
 f(0) = yc + Sqr(r * r - (x(0) - xc) ^ 2)
For i = 1 To n
  x(i) = x(i - 1) + pas
  f(i) = yc + Sqr(Abs(r * r - (x(i) - xc) ^ 2))
Next i
For i = 1 To n
  h(i) = pas
Next i
For i = 1 To n
 bet(i) = alfa * h(i)
```

```
Next i
Frmintro.Hide
frmconditii.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 Close #1
 End
End Sub

Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)
n = Val(Txtn.Text)
 If n < 2 Then
  MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=2!")
  Cancel = True
 End If
End Sub

Private Sub Txtr_Validate(Cancel As Boolean)
r = Val(Txtr.Text)
 If r <= 0 Then
  MsgBox ("r trebuie sa fie >=0!")
  Cancel = True
 End If
End Sub
```

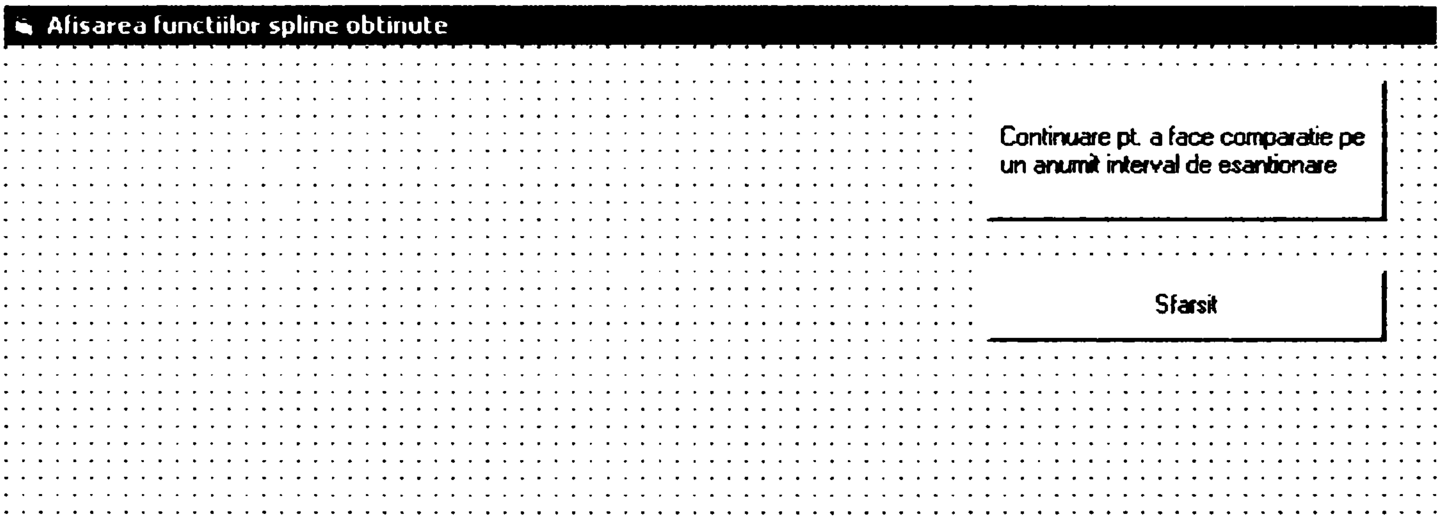
Frmconditii:




```
Private Sub cmdcancel_Click()
txtf0primmin.Text = ""
txtf0primmax.Text = ""
txtfnprim.Text = ""
txtf0primmin.SetFocus
End Sub

Private Sub cmdok_Click()
f0primmin = Val(txtf0primmin.Text)
f0primmax = Val(txtf0primmax.Text)
dimensiune = Int(f0primmax - f0primmin) + 1
ReDim f0prim(1 To dimensiune), emax(1 To dimensiune)
fnprim = Val(txtfnprim.Text)
f0prim(contor) = Int(f0primmin)
calcule
frmconditii.Hide
Frmafis.Show
End Sub
```

```
Private Sub cmdsfarsit_Click()
Close #1
End
End Sub

Private Sub OKcont_Click()
f0prim(contor) = f0prim(contor - 1) + 1
calcule
frmconditii.Hide
Frmafis.Show
End Sub
```

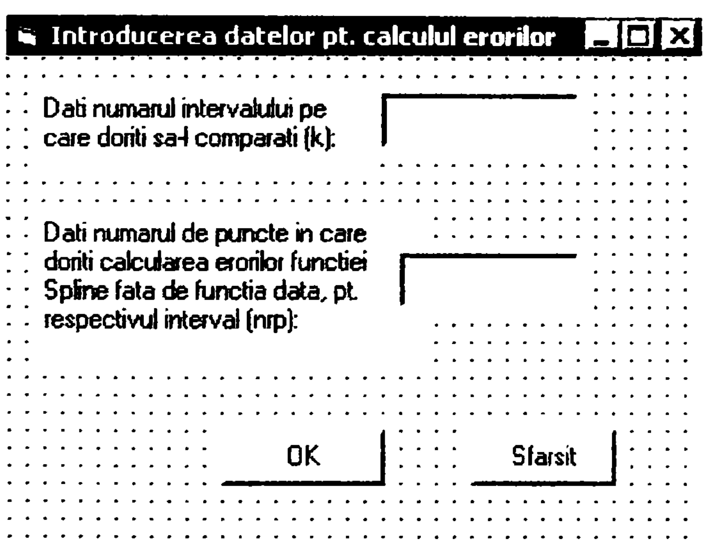
Frmafis:




```
Private Sub Cmdcont_Click()
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 Close #1
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Print "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print "      x          y"
Print #1, "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
Print #1, "    x        y"
For i = 0 To n
  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
Next i
Ai(0) = (hsin(bet(1)) - bet(1)) / (bet(1) ^ 2 * hsin(bet(1))) * h(1)
For i = 1 To n - 1
  Ai(i) = (hsin(bet(i + 1)) - bet(i + 1)) / (bet(i + 1) ^ 2 * hsin(bet(i + 1))) * h(i + 1)
  Bi(i) = (bet(i) * hcos(bet(i)) - hsin(bet(i))) / (bet(i) ^ 2 * hsin(bet(i))) * h(i)
Next i
Bi(n) = (bet(n) * hcos(bet(n)) - hsin(bet(n))) / (bet(n) ^ 2 * hsin(bet(n))) * h(n)
mat(0, 0) = Bi(1): mat(0, 1) = Ai(0)
For j = 2 To n - 1
 mat(0, j) = 0
Next j
For i = 1 To n - 1
```

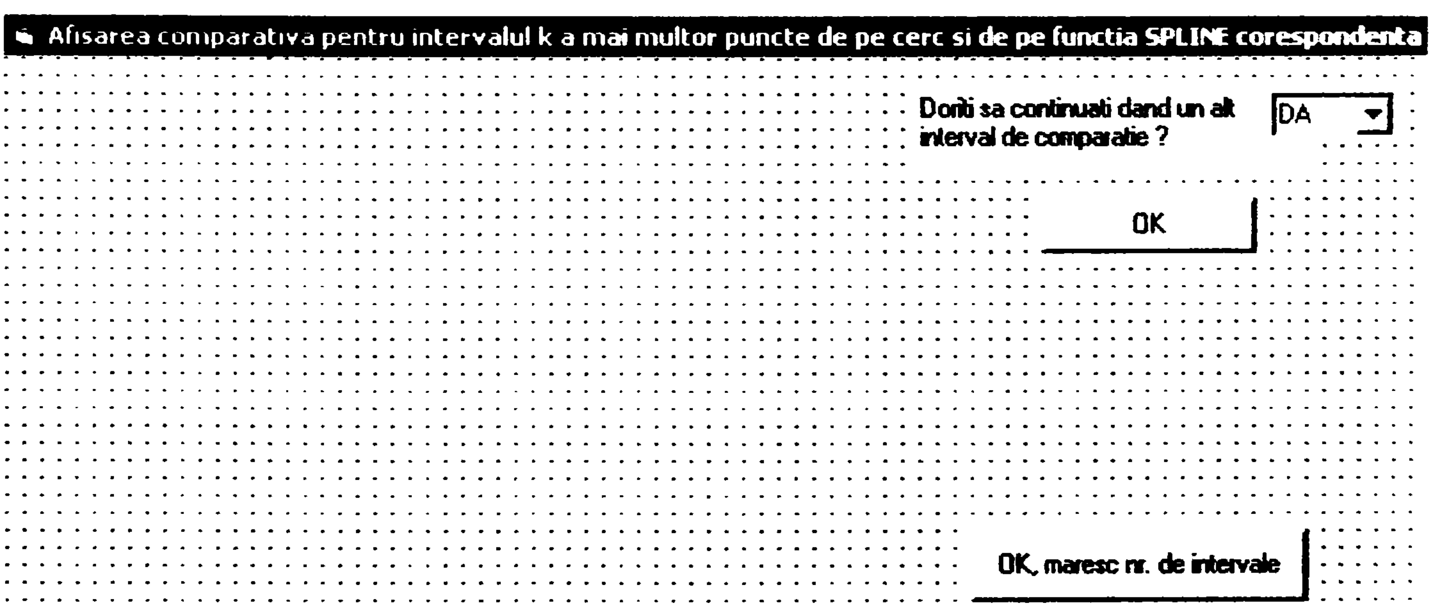
```
 For j = 0 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = Ai(i - 1): mat(i, j + 1) = Bi(i) + Bi(i + 1): mat(i, j + 2) = Ai(i)
 j = j + 3
 For k = j To n
   mat(i, k) = 0
 Next k
Next i
For i = 0 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = Ai(n - 1): mat(n, n) = Bi(n)
Print
Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
Print #1, ""
Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
For i = 0 To n
  For j = 0 To n
    Print Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
    Print #1, Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
  Next j
  Print Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
  Print #1, Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
Next i
For i = 1 To n + 1
  For j = 1 To n + 1
   mat1(i, j) = mat(i - 1, j - 1)
  Next j
  beta1(i) = beta(i - 1)
  m1(i) = m(i - 1)
Next i
rezolv_sist n + 1, mat1(), beta1(), m1()
For i = 0 To n
  For j = 0 To n
   mat(i, j) = mat1(i + 1, j + 1)
  Next j
  beta(i) = beta1(i + 1)
  m(i) = m1(i + 1)
Next i
End Sub
```

Frmcontcompar:



```
Private Sub cmdok_Click()
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 t = (x1(i) - x(k - 1)) / h(k)
 t1 = f(k) * t
 t2 = f(k - 1) * (1 - t)
 t3 = m(k) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * t) / hsin(bet(k)) - t)
 t4 = m(k - 1) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * (1 - t)) / hsin(bet(k)) - (1 - t))
 sk(i) = t1 + t2 + t3 + t4
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
End
End Sub

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n Then
  Cancel = True
  MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n)
End If
End Sub

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 30 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si 30")
End If
End Sub
```

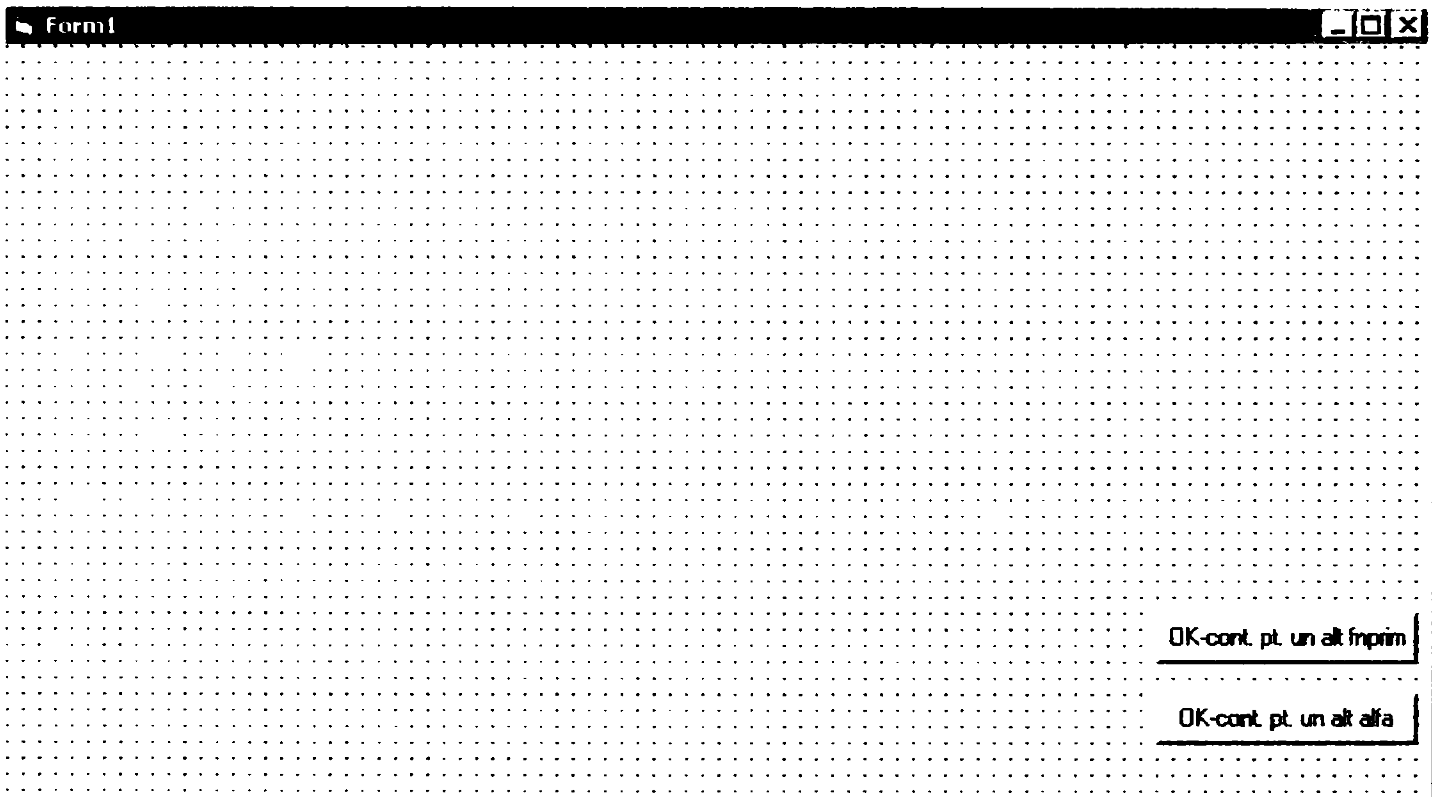
Frmafis2:



```
Private Sub cmdok_Click()
If UCase(Cbocont.Text) = "DA" Then
  frmafis2.Hide
  Frmcontcompar.Show
 Else
  contor = contor + 1
  If contor <= dimensiune Then
    frmafis2.Hide
    frmconditii.Show
    frmconditii.OKcont.Enabled = True
    frmconditii.cmdok.Enabled = False
    frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = False
    MsgBox "Dati click pe 'OK continuare' pt. a efectua calculele pentru f0prim urmator! (f0prim=" & f0prim(contor
- 1) + 1 & ")"
  Else
   If prima = 0 And jj = 0 Then
    frmafis2.Hide
    Frmgraf.Show
   Else
    frmafis2.Hide
    Frmgraf.AutoRedraw = False
   End If
  End If
End If
End Sub

Private Sub Cmdschimb_Click()
 frmafis2.Hide
 Frmintro.Show
 Frmintro.Txtn.SetFocus
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print #1, ""
emax1 = Abs(y1(1) - sk(1)) / Abs(y1(1)) * 100
semnal = 0
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 emaxcurent = Abs(y1(i) - sk(i)) / Abs(y1(i)) * 100
 If emaxcurent > 7 Then semnal = 1
 If emax1 < emaxcurent Then emax1 = emaxcurent
Next i
If emax(contor) < emax1 Then emax(contor) = emax1
Print
Print Tab(3); "emax1="; Format(emax1, "#####0.000000")
Print #1, Tab(3); "emax1="; Format(emax1, "#####0.000000")
Print Tab(3); "emax(" & contor & ")="; Format(emax(contor), "#####0.000000")
Print #1, Tab(3); "emax(" & contor & ")="; Format(emax(contor), "#####0.000000")
If semnal = 1 Then
```

```
 MsgBox ("Trebuie sa mariti nr. de intervale de esantionare pentru a micsora eroarea de aproximare!")
 Cmdschimb.SetFocus
Else
 cmdok.SetFocus
End If
End Sub
```

Frmgraf:




```
Private Sub cmdok_Click()
 frmconditii.Show
 contor = 1
 MsgBox ("Dati o alta valoare pt. fnprim!")
 jj = jj + 1
 frmconditii.OKcont.Enabled = False
 frmconditii.txtf0primmax.Enabled = False
 frmconditii.txtf0primmin.Enabled = False
 frmconditii.cmdok.Enabled = True
 frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = True
End Sub

Private Sub cmdokalfa_Click()
 prima = prima + 1
 Frmintro.Show
 MsgBox ("Dati o alta valoare pt. alfa!")
 Frmintro.txtcentx.Enabled = False
 Frmintro.Txtcenty.Enabled = False
 Frmintro.Txtr.Enabled = False
 Frmintro.Txtn.Enabled = False
 frmconditii.OKcont.Enabled = False
 frmconditii.txtf0primmax.Enabled = False
 frmconditii.txtf0primmin.Enabled = False
 frmconditii.cmdok.Enabled = True
 frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = True
End Sub

Private Sub Form_Paint()
Frmgraf.AutoRedraw = True
```

```
If prima = 0 And jj = 0 Then
 Dim Msg, XPos(30), YPos(30)  ' Declare variables.
  ScaleMode = 3  ' Set ScaleMode to pixels.
  DrawWidth = 2  ' Set DrawWidth.
  ForeColor = QBColor(prima)
  Line (10, ScaleHeight - 10)-(ScaleWidth - 10, ScaleHeight - 10)
  Line (210, ScaleHeight - 10)-(210, 10)
  FontSize = 13  ' Set point size.
  CX = ScaleWidth / 2 ' Get horizontal center.
  CY = ScaleHeight / 2  ' Get vertical center.
  Msg = "fo'": CurrentX = 9 * 2 * CX / 10 - TextWidth(Msg) / 2: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
  Msg = "emax(%)":  CurrentX = 210:  CurrentY = 0:  Print Msg
  Msg = "-10":  CurrentX = 10:  CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
  Msg = "0":  CurrentX = 210: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
  Msg = "10":  CurrentX = 10 + 20 * 20: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
  Msg = "alfa=" & alfa:  CurrentX = 260:  CurrentY = 20: pozx = CurrentX: pozy = CurrentY: Print Msg
    Max = emax(1)
    For i = 1 To dimensiune
      If Max < emax(i) Then Max = emax(i)
    Next i
  Msg = Round(Max, 2): CurrentX = 205: CurrentY = 70:  Print Msg
  Else
    If jj = 0 Then
      ForeColor = QBColor(prima)
      Msg = "alfa=" & alfa: CurrentX = 260 + prima * 80: CurrentY = 20: pozx = CurrentX: pozy = CurrentY: Print
Msg
    End If
End If
  ForeColor = QBColor(prima)
  Msg = "fn'=" & fnprim
  pozx = pozx  ' Horizontal position.
  pozy = pozy + 15 ' Vertical position
  CurrentX = pozx
  CurrentY = pozy
  Print Msg  ' Print message.
  For i = 1 To dimensiune
    XPos(i) = 210 + f0prim(i) * 15 ' Get horizontal position.
    YPos(i) = (ScaleHeight - 10) - ((ScaleHeight - 80) / Max * emax(i)) ' Get vertical position.
    PSet (XPos(i), YPos(i)), QBColor(1)
    'DoEvents  ' Yield to other
  Next i
  For i = 1 To dimensiune - 1
    Line (XPos(i), YPos(i))-(XPos(i + 1), YPos(i + 1))
  Next i
End Sub
```

3.6.2.2. Studiu al erorilor introduse de aproximarea cu funcții spline

A) Studiu al erorii relative maxime pe intervale de discretizare

Din acest studiu dorim să rezulte care este influența asupra erorii a poziției intervalului față de centrul semicercului sau elipsei, utilizând cele trei variante de funcții spline descrise la paragraful 3.4.8.

Pentru cazul concret când $x_c = 90$, $y_c = 60$, și $r = 70$ și se ia număr de 30 puncte de discretizare (deci 29 de intervale egale pe direcția axei x) s-au obținut comparativ rezultatele din coloanele **tabelului 1** pentru eroarea relativă maximă funcție de numărul intervalului, și anume:

- **Coloana 1** s-a obținut din rularea programului pentru ***aproximarea cu funcții spline cubice în prima variantă cu condiții naturale***;

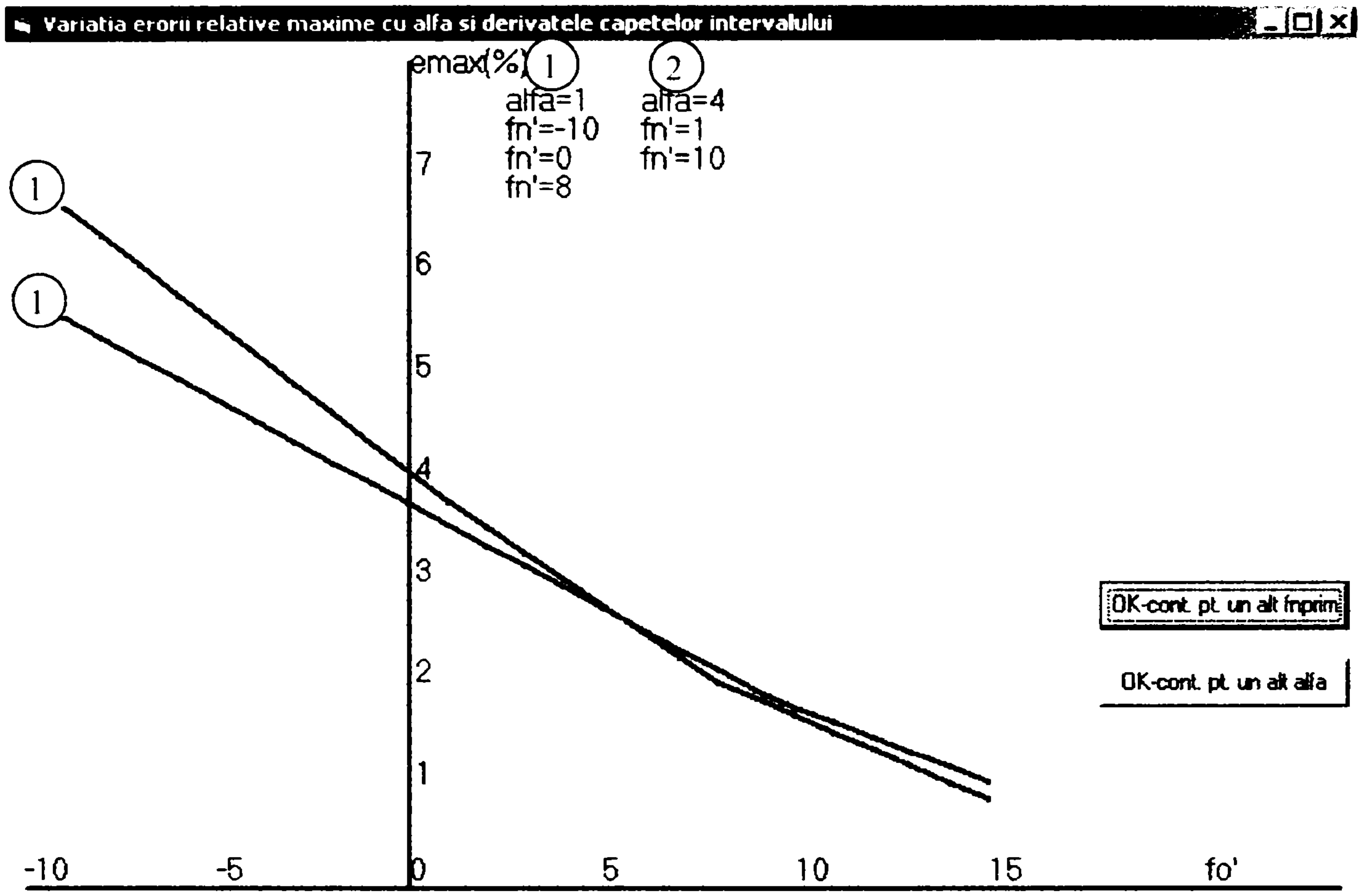


Fig. 3.6.15

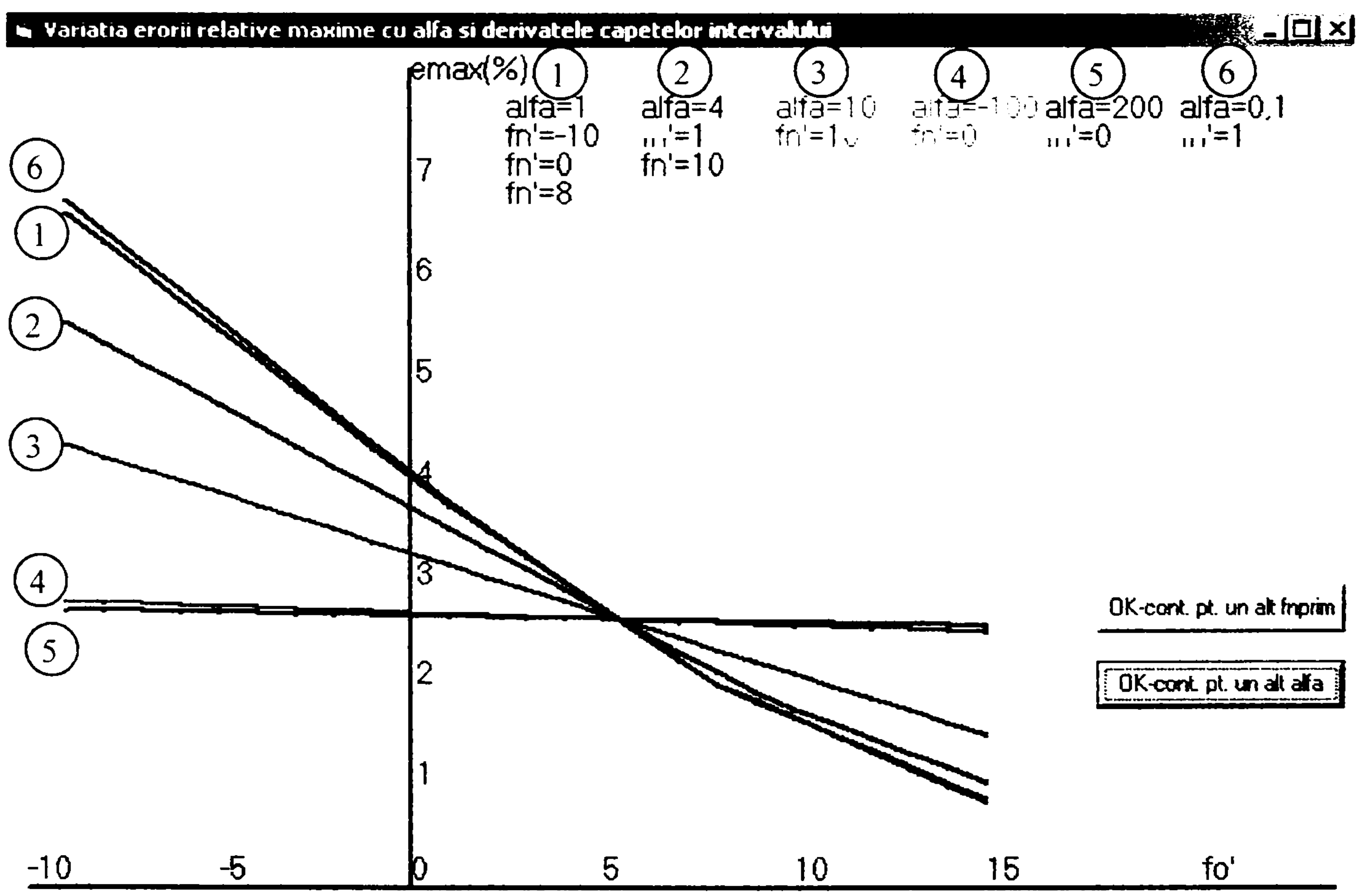


Fig. 3.6.16

Se observă faptul că eroarea relativă maximă este de 7.87% în acest caz, şi ea se obţine la intervalele de capăt, respectiv 1 şi 29, scăzând spectaculos spre intervalele de mijloc, 14,15 şi 16, unde are valori de ordinul 10^{-5}, respectiv 10^{-6} procente.

- **Coloana 2** s-a obţinut din rularea programului pentru ***aproximarea cu funcţii spline cubice în a doua variantă cu condiţii naturale***;

În acest caz se observă de asemenea un maxim al erorii relative pe intervalele de capăt, dar mult mai accentuată este totuşi eroarea din capătul stâng (primul interval). Restul intervalelor prezintă de asemenea valori foarte mici, asemănătoare cu cele din coloana **1**, şi mai ales în intervalele de mijloc.

- **Coloana 3** s-a obţinut din rularea programului pentru ***aproximarea cu funcţii spline exponenţiale (varianta a treia) cu a doua categorie de condiţii***, respectiv considerând date mărimile f_0', f_n' şi α_i (v. relaţiile (40) şi (41)), şi anume: $\alpha_i = 15$, $f_0' = -5$ şi $f_n' = 5$.

Intervalul care se compară	**Eroarea relativă maximă pentru aproximarea cu funcții spline**		
	cubice în prima variantă cu condiții naturale	**cubice în a doua variantă cu condiții naturale**	**exponențiale cu a doua categorie de condiții**
Coloana 0	**Coloana 1**	**Coloana 2**	**Coloana 3**
1	7,87223756086777	7,76022496920264	10,6693056371636
2	1,00038936478074	0,988423845495557	0,464248942970218
3	0,244150793459215	0,241408670333209	0,221513010020889
4	6,18115610714704E-02	0,061133462582622	0,131940007818739
5	1,55162544616565E-02	1,53465106391004E-02	9,11537796071938E-02
6	4,1371147616899E-03	4,08770638727776E-03	6,88601735417646E-02
7	9,95051135797718E-04	9,88002908456708E-04	5,52711066332365E-02
8	3,13767254990702E-04	3,08466331690711E-04	4,63869066703149E-02
9	4,82741933772075E-05	4,90550153104369E-05	4,03046638681338E-02
10	4,25627823808989E-05	4,05613799009367E-05	3,60134550009417E-02
11	1,10409232265651E-05	1,19124801128483E-05	3,29569303529166E-02
12	1,60163434598186E-05	1,7917602780349E-05	3,07880651546668E-02
13	1,34299000876311E-05	1,31094950996387E-05	0,029300191058267
14	8,04478169260229E-06	1,14201429056989E-05	2,83681088984605E-02
15	1,24028756580974E-05	1,37169559804496E-05	0,02791202137751
16	8,04478169260229E-06	1,37169559804496E-05	0,02791202137751
17	1,34299000876311E-05	1,14201429056989E-05	2,83681088984605E-02
18	1,60163434598186E-05	1,43440665419084E-05	0,029300191058267
19	1,10409232377366E-05	1,56448823063748E-05	3,07880651546446E-02
20	4,25627823922126E-05	9,33083927244663E-06	3,29569303529053E-02
21	4,82741933656871E-05	3,65574853489834E-05	3,60134550009303E-02
22	3,13767255014161E-04	4,90550152872254E-05	4,03046638681222E-02
23	9,95051135749481E-04	3,08466331714303E-04	4,63869066702913E-02
24	4,13711476173966E-03	9,81489495329964E-04	5,52711066332486E-02
25	1,55162544616177E-02	4,08770638725273E-03	6,88601735417646E-02
26	6,18115610714976E-02	1,53465106391394E-02	9,11537796072068E-02
27	0,244150793459215	6,11334625825673E-02	0,131940007818766
28	1,00038936478073	0,241408670333297	0,221513010020947
29	7,87223756086801	0,988423845495412	0,464248942970314

Tab.1.

Desigur că în acest caz eroarea relativă maximă nu va depinde doar de poziţia intervalului în cadrul curbei studiate, ci şi (sau mai ales) de alegerea celor trei parametri f_0', f_n' şi α_i. Un studiu mai detaliat al influenţei acestora asupra erorii relative maxime s-a realizat în paragraful următor. Oricum se observă că valoarea erorii relative maxime se obţine din nou pentru primul interval.

B) Studiu al influenţei parametrilor α_i, respectiv f_0' şi f_n' asupra erorii relative maxime.

În cele ce urmează vom încerca să răspundem la întrebarea: Ce valori pot lua parametrii α_i? *Aceasta este încă o problemă nerezolvată şi este deschisă cercetării.* S-a constatat că pentru valori mici ale lui α_i, funcţiile spline exponenţiale se comportă asemănător cu funcţiile spline cubice, adică vom avea oscilaţii nedorite în unele cazuri, pentru valori mari vor apărea puncte unghiulare caracteristice funcţiior spline liniare. De aceea, într-o singură bibliografie se recomandă $\alpha_i \in [4,15]$. Totuşi, programele de calculator testate de autoare arată că α_i poate lua un spectru mult mai larg de valori (v. **Fig. 3.6.17, 3.6.18** şi **3.6.19**).

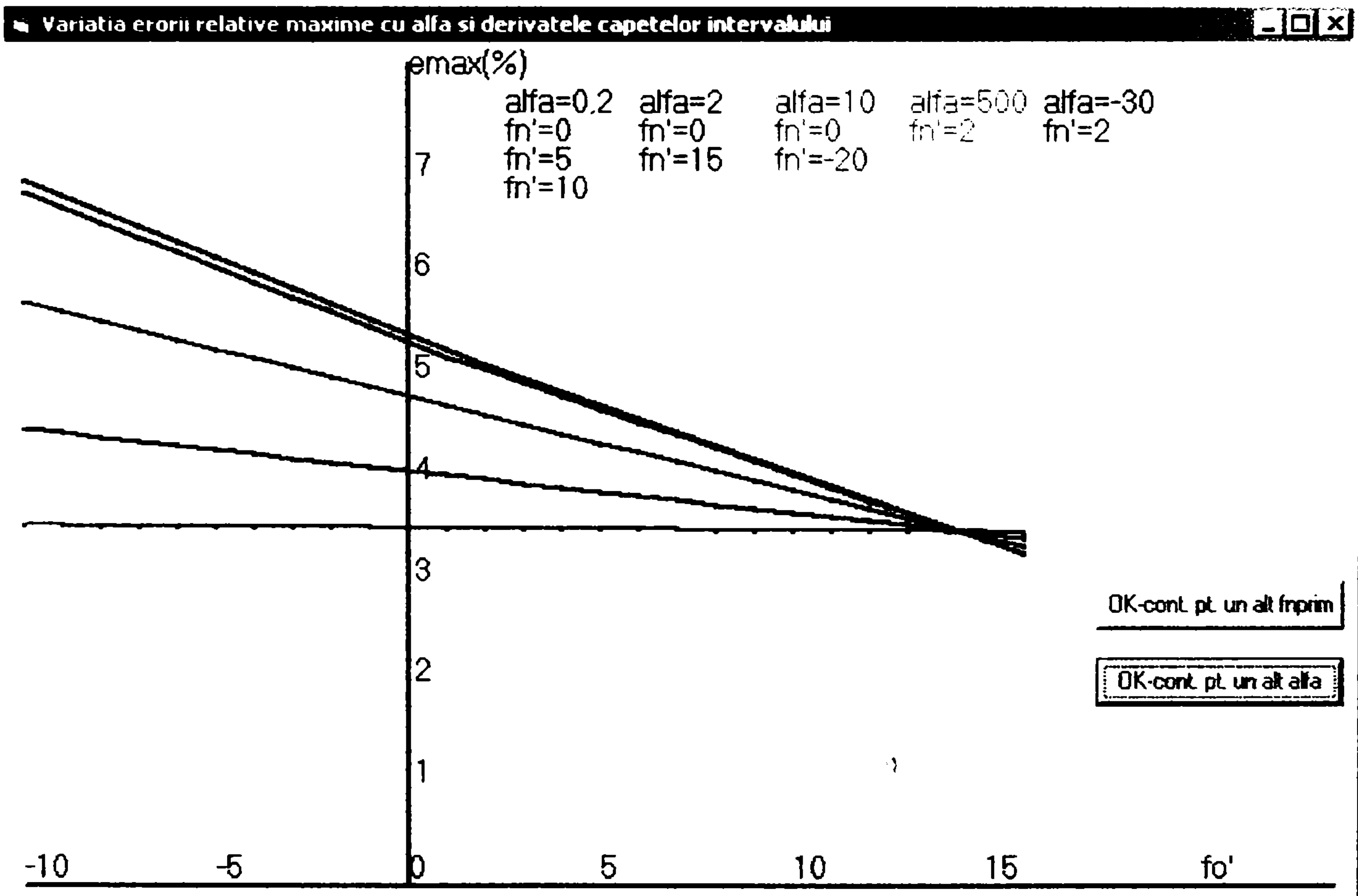


Fig. 3.6.17: Cazul semicercului $x_c = 90$, $y_c = 60$, şi $r = 70$,

şi necesitând 238 de intervale de eşanţionare pentru primul $\alpha_i = 0.2$

- $\alpha_i = 0$ dă eroare prin împărţire la zero, deci nu se va putea utiliza, în schimb pot fi utilizate valori subunitare, atât pozitive, cât şi negative, precum şi valori supraunitare pozitive şi negative până la aproximativ 700-800, sau chiar 900;
- Se observă că pentru aceeaşi valoare absolută a lui α_i curbele erorii relative maxime funcţie de f_0' şi f_n' sunt identice;
- De asemenea se constată că eroarea relativă maximă creşte cu descreşterea în modul a valori lor lui α_i şi scade pe măsură ce α_i creşte în modul spre ordinul sutelor.

Metoda presupune de asemenea că f_0' şi f_n' sunt cunoscute, fapt care de obicei nu se întâmplă. De aceea am făcut prin program un studiu al influenţei acestor parametrii asupra erorii maxime relative. Graficele rezultate relevă încă un fapt interesant, şi anume că pentru un α_i dat, eroarea relativă maximă depinde doar de f_0', (deci orice valoare s-ar da lui f_n' curbele de eroare se suprapun pe grafic).

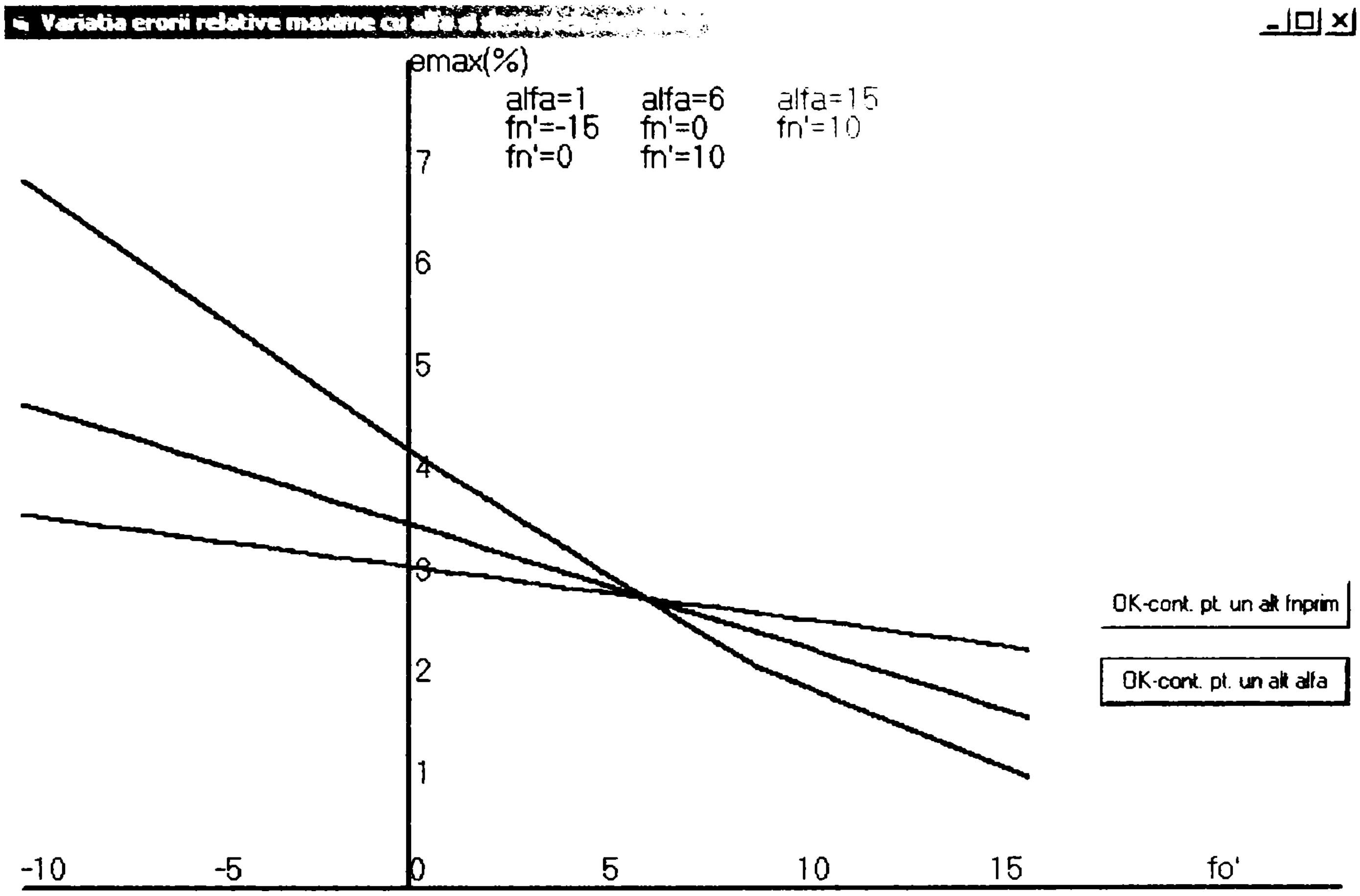


Fig. 3.6.18: Cazul semicercului $x_c = 50$, $y_c = 100$, şi $r = 30$,

şi necesitând 44 de intervale de eşanţionare pentru primul $\alpha_i = 1$

Deoarece s-a dorit ca eroarea relativă maximă pentru întregul contur să ia valori mai mici decât o anumită valoare admisibilă considerată, în programul de calcul al aproximărilor cu funcţii spline cubice s-a prevăzut şi un algoritm adaptiv, care să ceară rafinarea reţelei de discretizare în cazul nerealizării erorii admisibile respective. Pentru aceasta s-a utilizat aşa-numita **rafinare h**, care este cea mai frecventă modalitate de rafinare şi care se realizează prin creşterea numărului elementelor de frontieră (în cazul 3D, implicit prin micşorarea suprafeţei medii a acesteia). Este un procedeu uşor de programat, conduce la soluţii foarte bune, dar de multe ori solicită un necesar de memorie şi un timp de calcul foarte mare. După numai trei iteraţii, în funcţie de algoritmul utilizat şi de precizia cerută, numărul de elemente poate creşte de peste 20-30 de ori.

Din cele trei cazuri concrete considerate se observă ceea ce era de aşteptat, şi anume că: Dacă se lucrează cu eroarea relativă definită clasic ca fiind:

$$\delta y = \frac{|A - y|}{A}, \tag{3.6.14}$$

unde A este un număr real exact şi y este o aproximare a sa, va rezulta că pentru $A \to 0$ eroarea relativă $\delta y \to \infty$, adică:

- Atunci când arcul în formă de semicerc este situat foarte aproape de axa Ox, eroarea relativă maximă va fi mare şi deci va fi necesar să intervină algoritmul adaptiv şi să rafineze reţeaua. Astfel pentru frontiera din **Fig. 3.6.19** au fost necesare 856 de intervale de eşantionare cu toate că raza era mică, doar datorită faptului că valorile funcţiei semicerc erau foarte mici.

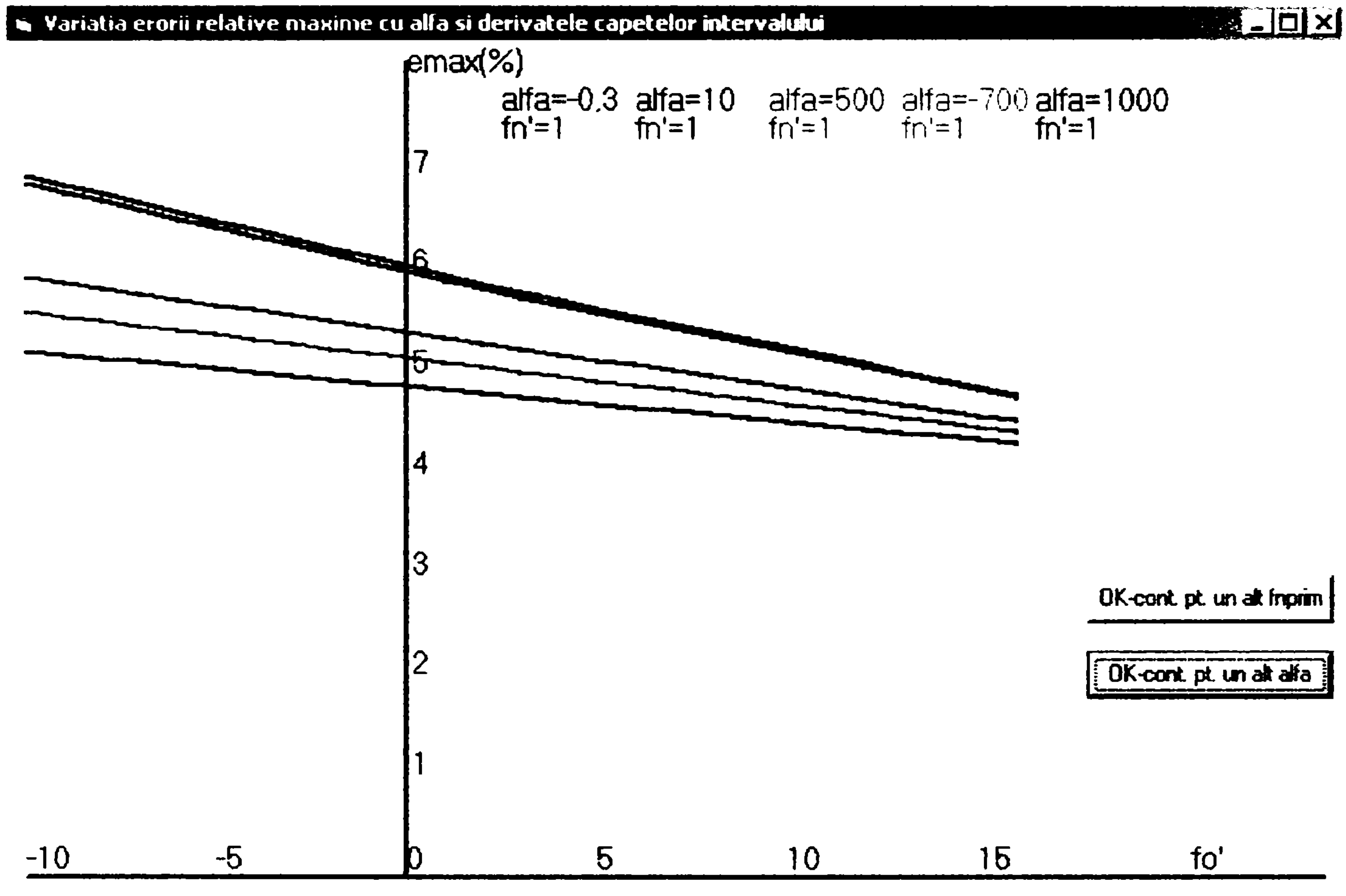


Fig. 3.6.19: Cazul semicercului $x_c = 300$, $y_c = 2$, şi $r = 5$,
şi necesitând 856 de intervale de eşanţionare pentru primul α_i = - 0,3

- Atunci când arcul în formă de semicerc este situat foarte departe de axa Ox eroarea relativă maximă va fi mică şi deci nu va fi necesar să intervină algoritmul adaptiv şi să rafineze reţeaua. Astfel pentru frontiera din **Fig. 3.6.18** au fost necesare doar 44 de intervale de eşantionare cu toate că raza era mult mai mare decât în cazul anterior, doar datorită faptului că valorile funcţiei semicerc erau foarte mari.

Observaţie: Totuşi, aceste valori relativ mari pentru numărul de intervale de eşantionare necesare (856, dar chiar şi 44!) se datorează şi faptului că s-a dat ca primă valoare α_i de calcul o valoare mică în modul (0.2 resp. –0.3), iar anterior am arătat că eroarea relativă creşte foarte mult cu descreşterea modulului lui α_i.

Deoarece această definiţie a erorii relative nu oferă o imagine corectă a erorii de calcul mai ales în porţiunea în care valoarea funcţiei de aproximat tinde la zero sau este chiar nulă, am studiat şi cazul utilizării unei erori relative mărginite, definite după cum urmează:

Definiţie. Funcţia $e: D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ se numeşte eroare relativă L-mărginită pentru $A \in \mathbf{R}$ dacă:

i) $e(A,x) = 0$ dacă şi numai dacă $A = x$;

ii) dacă $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $|x - A| > |y - A|$, următoarea inegalitate este adevărată:

$$|e(A,x)| > |e(A,y)|;$$

iii) există o valoare $L \in (0,+\infty)$ astfel încât pentru orice $(A,y) \in D$ este adevărată inegalitatea:

$$|e(A, y) \leq L|. \tag{3.6.15}$$

Funcțiile eroare absolută $\Delta y = |A - y|$ și eroare relativă $\delta y = \dfrac{\Delta y}{|A|}$, definite în sens clasic, verifică i) și ii).

Funcții eroare relativă L-mărginite $e(A, y)$, care îndeplinesc toate cele trei condiții de mai sus, pot fi găsite mai multe, dintre care am ales una care ia valori cuprinse în intervalul $[-1, 1]$ și conduce la evaluări rezonabile ale erorii, chiar în cazul în care A=0:

$$e(A, y) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(A - y) \tag{3.6.16}$$

În cazul nostru A reprezintă valoarea exactă a funcției semicerc, iar y este valoarea dată de aproximarea spline. Exemplificăm în **Fig. 3.6.20, 3.6.21** și **3.6.22** rezultatele obținute prin program utilizând definiția erorii mărginite dată de relația (3.6.16).

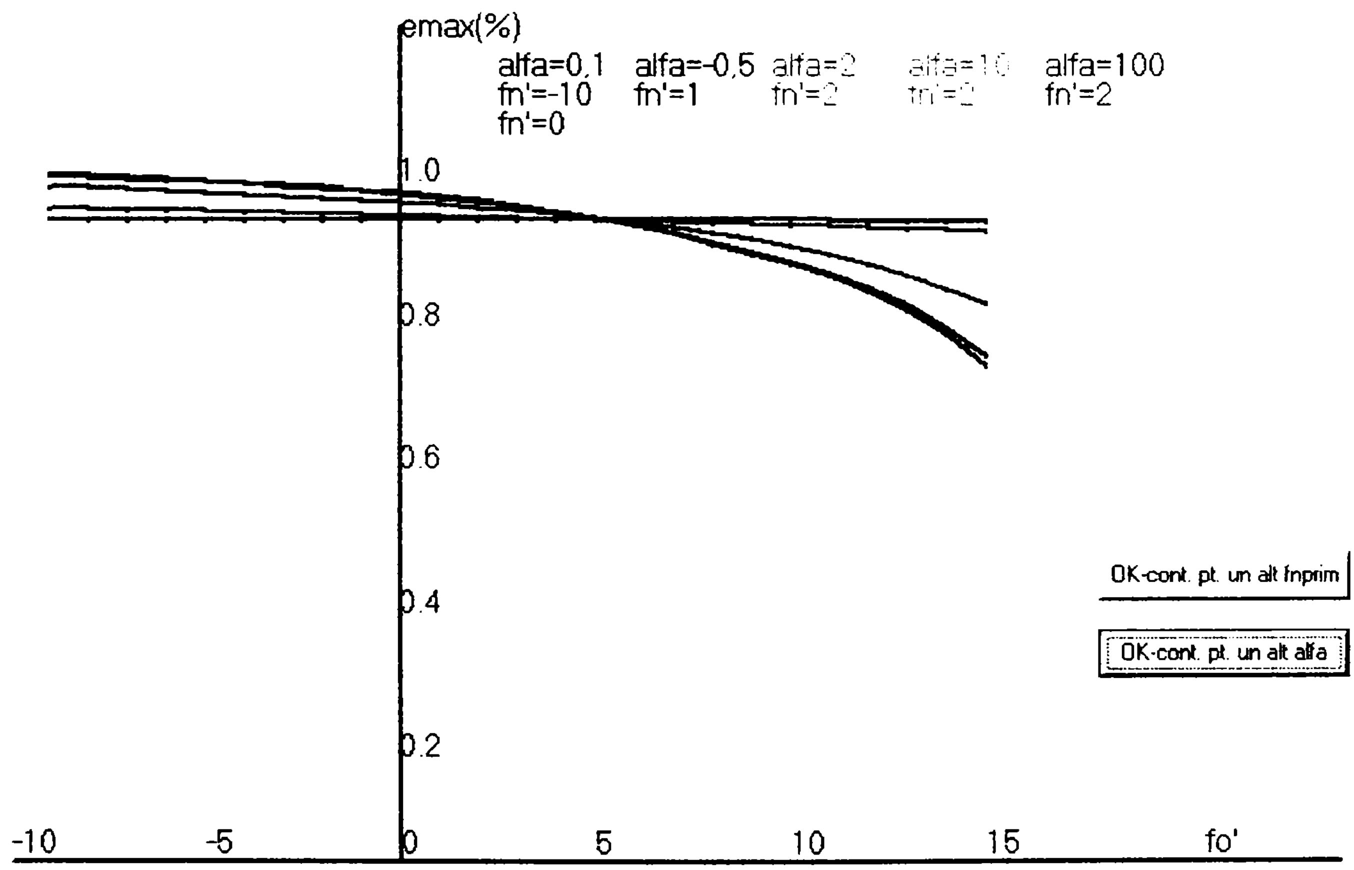


Fig. 3.6.20: Cazul semicercului $x_c = 90$, $y_c = 60$, și $r = 70$, și necesitând 35 de intervale de eșanționare pentru primul $\alpha_i = 0.1$

După cum se observă, s-a ales și cazul (v. **Fig.3.6.21**) când centrul semicercului se află pe axa Ox, deci valorile de capăt ale funcției semicerc sunt nule, iar eroarea relativă definită clasic ar fi condus la valori infinite. Utilizând funcția eroare relativă mărginită dată de relația (3.6.16) s-au obținut însă rezultatele din **Fig. 3.6.21** pentru diferitele valori ale lui α_i. De altfel se observă că la fel ca în cazul erorii relative definită clasic, și eroarea relativă mărginită scade cu creșterea în modul a lui α_i, respectiv crește tinzând către unu când α_i tinde spre zero, iar pentru un α_i dat nu depinde de f_n'.

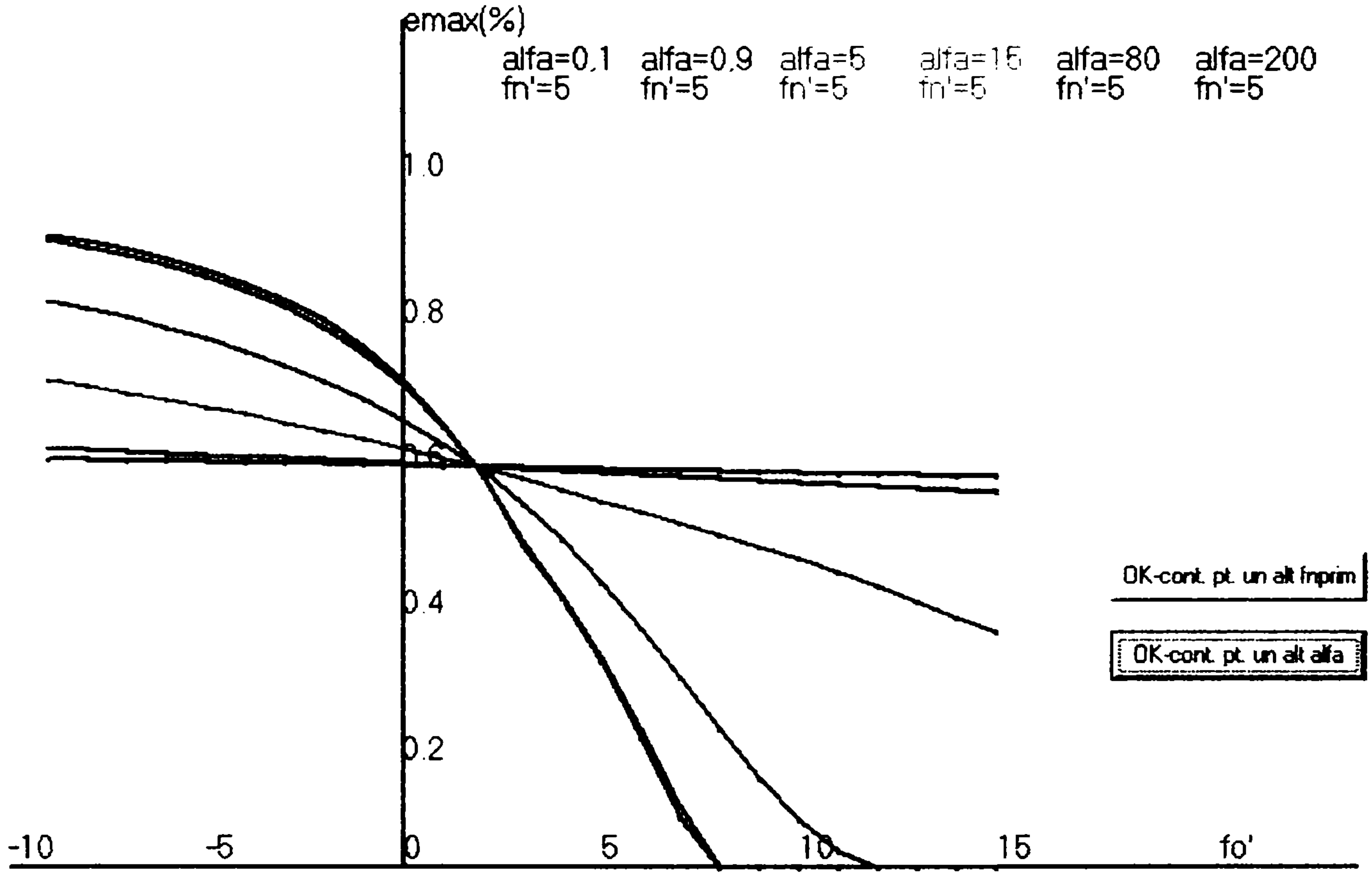


Fig. 3.6.21: Cazul semicercului $x_c = 80$, $y_c = 0$, și $r = 5$, și alegând 5 intervale de eșantionare pentru primul $\alpha_i = 0.1$

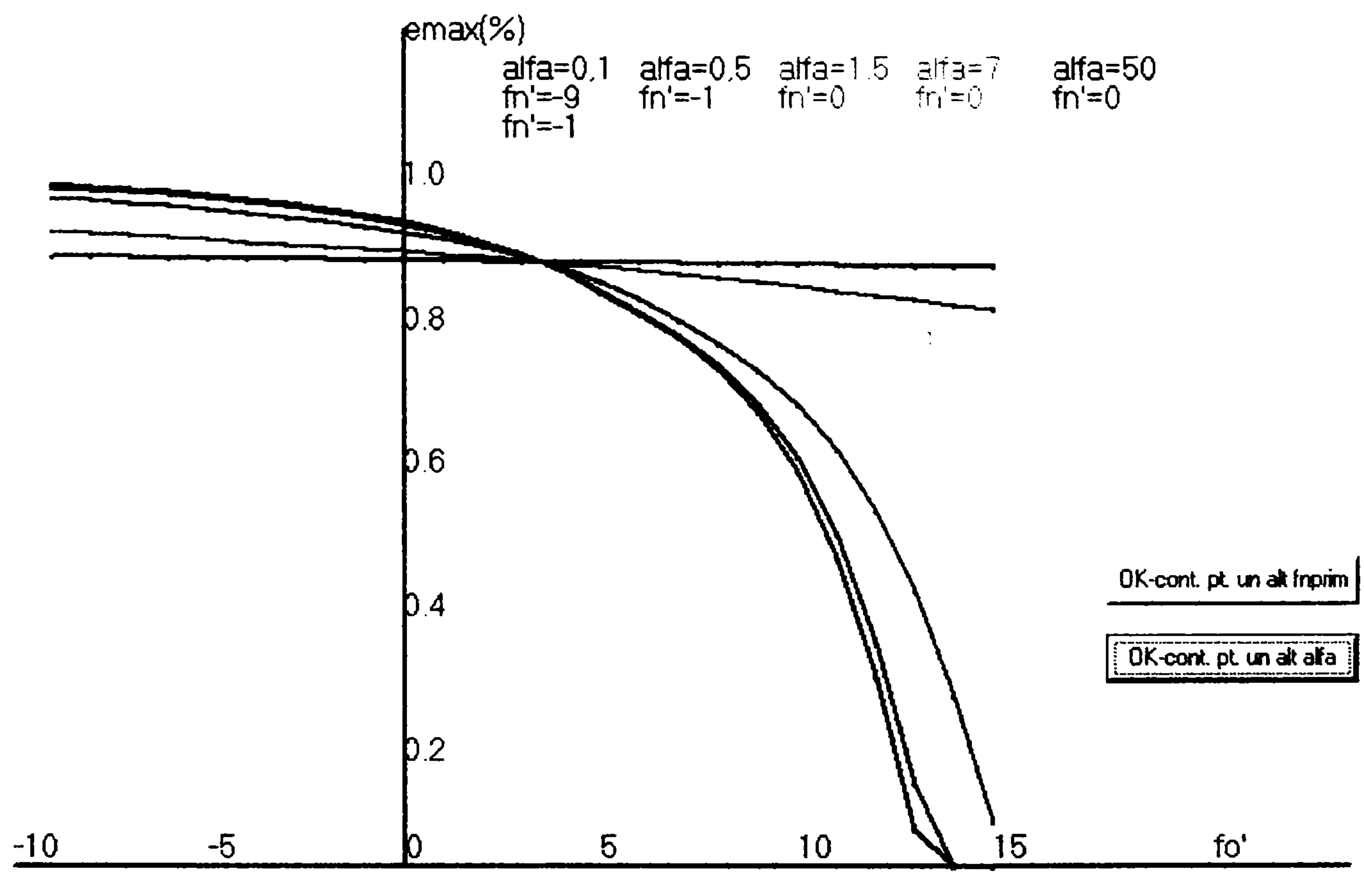


Fig. 3.6.22: Cazul semicercului $x_c = 50$, $y_c = 100$, și $r = 30$, și alegând 15 intervale de eșantionare pentru primul $\alpha_i = 0.1$

Cod sursă al programului de interpolare cu funcţii spline varianta III-a cu a doua categorie de condiţii – pentru cazul unui semicerc cu pasul *h* de discretizare pe orizontală constant – varianta cu funcţia de eroare dată de formula (3.6.16) prezentată în paragraful 3.6.2.2.

Module 1:

```
Public i As Integer, n As Integer, k As Integer, jj As Integer, nrp As Integer, prima As Integer
Public xc As Double, yc As Double, r As Double, pas As Single, h1 As Single, alfa, Max, CX, CY, pozx, pozy As Single
Public h() As Single, x() As Double, f() As Double, beta() As Single, m() As Single, bet() As Single
Public Ai(), Bi()
Public f0prim(), emax(), f0primmin, f0primmax, fnprim
Public mat() As Single, mat1() As Single, beta1() As Single, m1() As Single
Public x1(), y1(), sk() As Single
Public contor, dimensiune As Integer
Public pi

Sub main()
pi = 4 * Atn(1)
MsgBox ("Program de interpolare cu functii spline cubice pentru un semicerc varianta a III-a cu specificarea derivatelor de ordinul intai pentru nodurile extreme")
Open "Iesire.txt" For Output As #1
Frmintro.Show
prima = 0
End Sub

Sub rezolv_sist(n As Integer, a() As Single, b() As Single, x() As Single)
n1 = n - 1
For i = 1 To n1
 i1 = i
 For i2 = i To n
  If Abs(a(i1, i)) < Abs(a(i2, i)) Then i1 = i2
 Next i2
 If a(i1, i) <> 0 Then
  If i1 <> 1 Then
    For j = 1 To n
     y = a(i, j)
     a(i, j) = a(i1, j)
     a(i1, j) = y
    Next j
    y = b(i)
    b(i) = b(i1)
    b(i1) = y
  End If
  y = a(i, i)
  For j = 1 To n
   a(i, j) = a(i, j) / y
  Next j
  b(i) = b(i) / y
  i1 = i + 1
  For j = i1 To n
   If a(j, i) <> 0 Then
    y = a(j, i)
    For k = i To n
     a(j, k) = a(j, k) - y * a(i, k)
    Next k
    b(j) = b(j) - b(i) * y
   End If
  Next j
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
```

```
  End
 End If
Next i
If a(n, n) <> 0 Then
 x(n) = b(n) / a(n, n)
 For i = 1 To n1
  x(n - i) = b(n - i)
  For k = 1 To i
   x(n - i) = x(n - i) - a(n - i, n - i + k) * x(n - i + k)
  Next k
 Next i
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat")
  End
End If
End Sub
```

Function hsin(x As Single)

```
 hsin = (Exp(x) - Exp(-x)) / 2
End Function
```

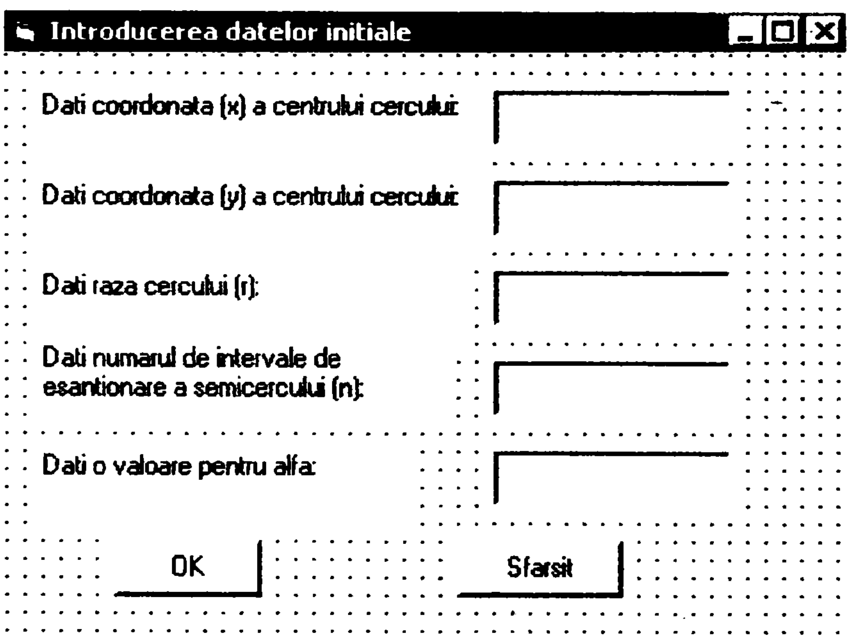
Function hcos(x As Single)

```
 hcos = (Exp(x) + Exp(-x)) / 2
End Function
```

Sub calcule()

```
emax(contor) = 0
beta(0) = (f(1) - f(0)) / h(1) - f0prim(contor)
For i = 1 To n - 1
  beta(i) = (f(i + 1) - f(i)) / h(i + 1) - (f(i) - f(i - 1)) / h(i)
Next i
beta(n) = fnprim - (f(n) - f(n - 1)) / h(n)
End Sub
```

Frmintro:

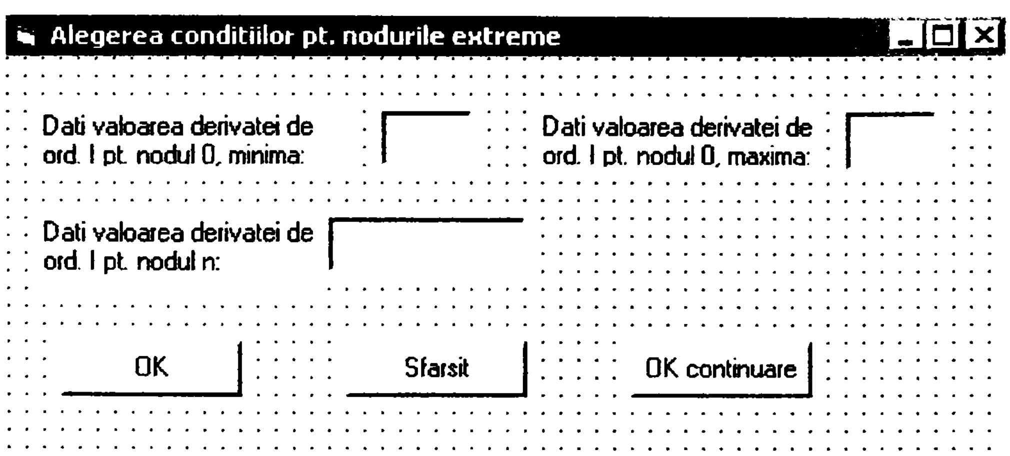


Private Sub cmdok_Click()

```
xc = Val(txtcentx.Text)
yc = Val(Txtcenty.Text)
r = Val(Txtr.Text)
n = Val(Txtn.Text)
alfa = Val(txtalfa.Text)
```

```
contor = 1
jj = 0
ReDim h(1 To n), x(0 To n), f(0 To n), beta(0 To n), m(0 To n), bet(1 To n)
ReDim mat(0 To n, 0 To n), mat1(1 To n + 1, 1 To n + 1), beta1(1 To n + 1), m1(1 To n + 1)
ReDim Ai(0 To n - 1), Bi(1 To n)
pas = 2 * r / n
 x(0) = xc - r
 f(0) = yc + Sqr(r * r - (x(0) - xc) ^ 2)
For i = 1 To n
  x(i) = x(i - 1) + pas
  f(i) = yc + Sqr(Abs(r * r - (x(i) - xc) ^ 2))
  'MsgBox ("x" & i & "=" & x(i) & " si f" & i & "=" & f(i))
Next i
For i = 1 To n
  h(i) = pas
Next i
For i = 1 To n
 bet(i) = alfa * h(i)
Next i
Frmintro.Hide
frmconditii.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
  Close #1
  End
End Sub

Private Sub Txtn_Validate(Cancel As Boolean)
n = Val(Txtn.Text)
 If n < 2 Then
   MsgBox ("n trebuie sa fie natural si >=2!")
   Cancel = True
 End If
End Sub

Private Sub Txtr_Validate(Cancel As Boolean)
r = Val(Txtr.Text)
 If r <= 0 Then
   MsgBox ("r trebuie sa fie >=0!")
   Cancel = True
 End If
End Sub
```

Frmconditii:



```
Private Sub cmdok_Click()
f0primmin = Val(txtf0primmin.Text)
f0primmax = Val(txtf0primmax.Text)
dimensiune = Int(f0primmax - f0primmin) + 1
ReDim f0prim(1 To dimensiune), emax(1 To dimensiune)
fnprim = Val(txtfnprim.Text)
f0prim(contor) = Int(f0primmin)
calcule
frmconditii.Hide
Ai(0) = (hsin(bet(1)) - bet(1)) / (bet(1) ^ 2 * hsin(bet(1))) * h(1)
For i = 1 To n - 1
  Ai(i) = (hsin(bet(i + 1)) - bet(i + 1)) / (bet(i + 1) ^ 2 * hsin(bet(i + 1))) * h(i + 1)
  Bi(i) = (bet(i) * hcos(bet(i)) - hsin(bet(i))) / (bet(i) ^ 2 * hsin(bet(i))) * h(i)
Next i
Bi(n) = (bet(n) * hcos(bet(n)) - hsin(bet(n))) / (bet(n) ^ 2 * hsin(bet(n))) * h(n)
mat(0, 0) = Bi(1): mat(0, 1) = Ai(0)
For j = 2 To n - 1
 mat(0, j) = 0
Next j
For i = 1 To n - 1
 For j = 0 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = Ai(i - 1): mat(i, j + 1) = Bi(i) + Bi(i + 1): mat(i, j + 2) = Ai(i)
 j = j + 3
 For k = j To n
   mat(i, k) = 0
 Next k
Next i
For i = 0 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = Ai(n - 1): mat(n, n) = Bi(n)
For i = 1 To n + 1
  For j = 1 To n + 1
   mat1(i, j) = mat(i - 1, j - 1)
  Next j
  beta1(i) = beta(i - 1)
  m1(i) = m(i - 1)
Next i
rezolv_sist n + 1, mat1(), beta1(), m1()
For i = 0 To n
  For j = 0 To n
   mat(i, j) = mat1(i + 1, j + 1)
  Next j
  beta(i) = beta1(i + 1)
  m(i) = m1(i + 1)
Next i
k = 1
nrp = 10
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 t = (x1(i) - x(k - 1)) / h(k)
 t1 = f(k) * t
 t2 = f(k - 1) * (1 - t)
 t3 = m(k) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * t) / hsin(bet(k)) - t)
```

```
t4 = m(k - 1) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * (1 - t)) / hsin(bet(k)) - (1 - t))
sk(i) = t1 + t2 + t3 + t4
Next i
frmafis2.Show
End Sub
```

Private Sub cmdsfarsit_Click()

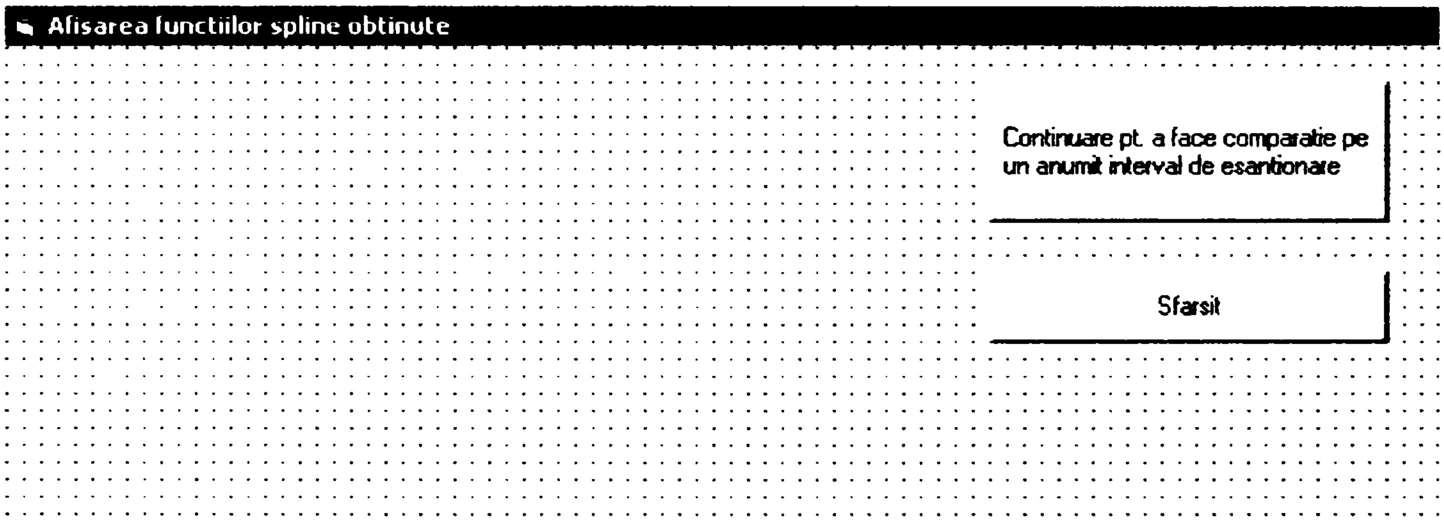
```
Close #1
End
End Sub
```

Private Sub OKcont_Click()

```
f0prim(contor) = f0prim(contor - 1) + 1
calcule
frmconditii.Hide
Ai(0) = (hsin(bet(1)) - bet(1)) / (bet(1) ^ 2 * hsin(bet(1))) * h(1)
For i = 1 To n - 1
  Ai(i) = (hsin(bet(i + 1)) - bet(i + 1)) / (bet(i + 1) ^ 2 * hsin(bet(i + 1))) * h(i + 1)
  Bi(i) = (bet(i) * hcos(bet(i)) - hsin(bet(i))) / (bet(i) ^ 2 * hsin(bet(i))) * h(i)
Next i
Bi(n) = (bet(n) * hcos(bet(n)) - hsin(bet(n))) / (bet(n) ^ 2 * hsin(bet(n))) * h(n)
mat(0, 0) = Bi(1): mat(0, 1) = Ai(0)
For j = 2 To n - 1
 mat(0, j) = 0
Next j
For i = 1 To n - 1
 For j = 0 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = Ai(i - 1): mat(i, j + 1) = Bi(i) + Bi(i + 1): mat(i, j + 2) = Ai(i)
 j = j + 3
 For k = j To n
  mat(i, k) = 0
 Next k
Next i
For i = 0 To n - 2
  mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = Ai(n - 1): mat(n, n) = Bi(n)
For i = 1 To n + 1
  For j = 1 To n + 1
   mat1(i, j) = mat(i - 1, j - 1)
  Next j
  beta1(i) = beta(i - 1)
  m1(i) = m(i - 1)
Next i
rezolv_sist n + 1, mat1(), beta1(), m1()
For i = 0 To n
  For j = 0 To n
   mat(i, j) = mat1(i + 1, j + 1)
  Next j
  beta(i) = beta1(i + 1)
  m(i) = m1(i + 1)
Next i
k = 1
nrp = 10
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
```

```
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 t = (x1(i) - x(k - 1)) / h(k)
 t1 = f(k) * t
 t2 = f(k - 1) * (1 - t)
 t3 = m(k) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * t) / hsin(bet(k)) - t)
 t4 = m(k - 1) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * (1 - t)) / hsin(bet(k)) - (1 - t))
 sk(i) = t1 + t2 + t3 + t4
Next i
frmafis2.Show
End Sub
```

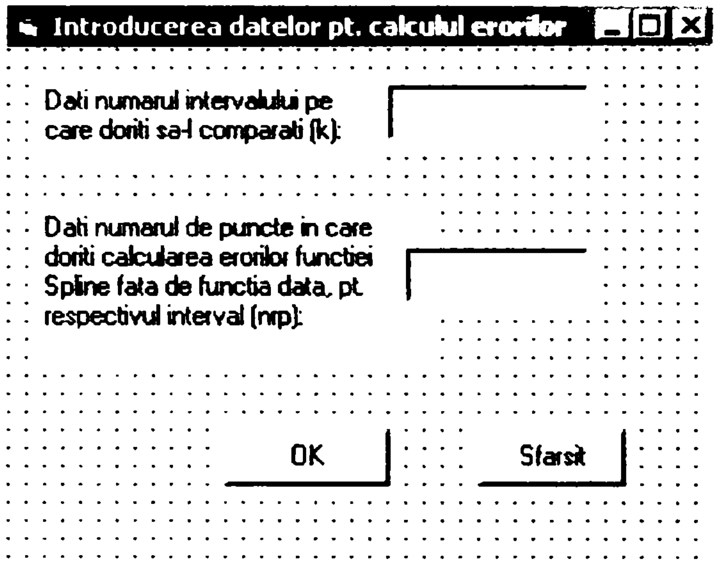
Frmafis:




```
Private Sub Cmdcont_Click()
Frmafis.Hide
Frmcontcompar.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 Close #1
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
'Cls
'Print "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
'Print "        x           y"
'Print #1, "Cele " & n + 1 & " puncte de esantionare au coordonatele urmatoare:"
'Print #1, "    x        y"
'For i = 0 To n
'  Print Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
'  Print #1, Format(x(i), "#####0.000"); Tab(13); Format(f(i), "#####0.000")
'Next i
Ai(0) = (hsin(bet(1)) - bet(1)) / (bet(1) ^ 2 * hsin(bet(1))) * h(1)
For i = 1 To n - 1
  Ai(i) = (hsin(bet(i + 1)) - bet(i + 1)) / (bet(i + 1) ^ 2 * hsin(bet(i + 1))) * h(i + 1)
  Bi(i) = (bet(i) * hcos(bet(i)) - hsin(bet(i))) / (bet(i) ^ 2 * hsin(bet(i))) * h(i)
Next i
Bi(n) = (bet(n) * hcos(bet(n)) - hsin(bet(n))) / (bet(n) ^ 2 * hsin(bet(n))) * h(n)
mat(0, 0) = Bi(1): mat(0, 1) = Ai(0)
For j = 2 To n - 1
 mat(0, j) = 0
Next j
For i = 1 To n - 1
```

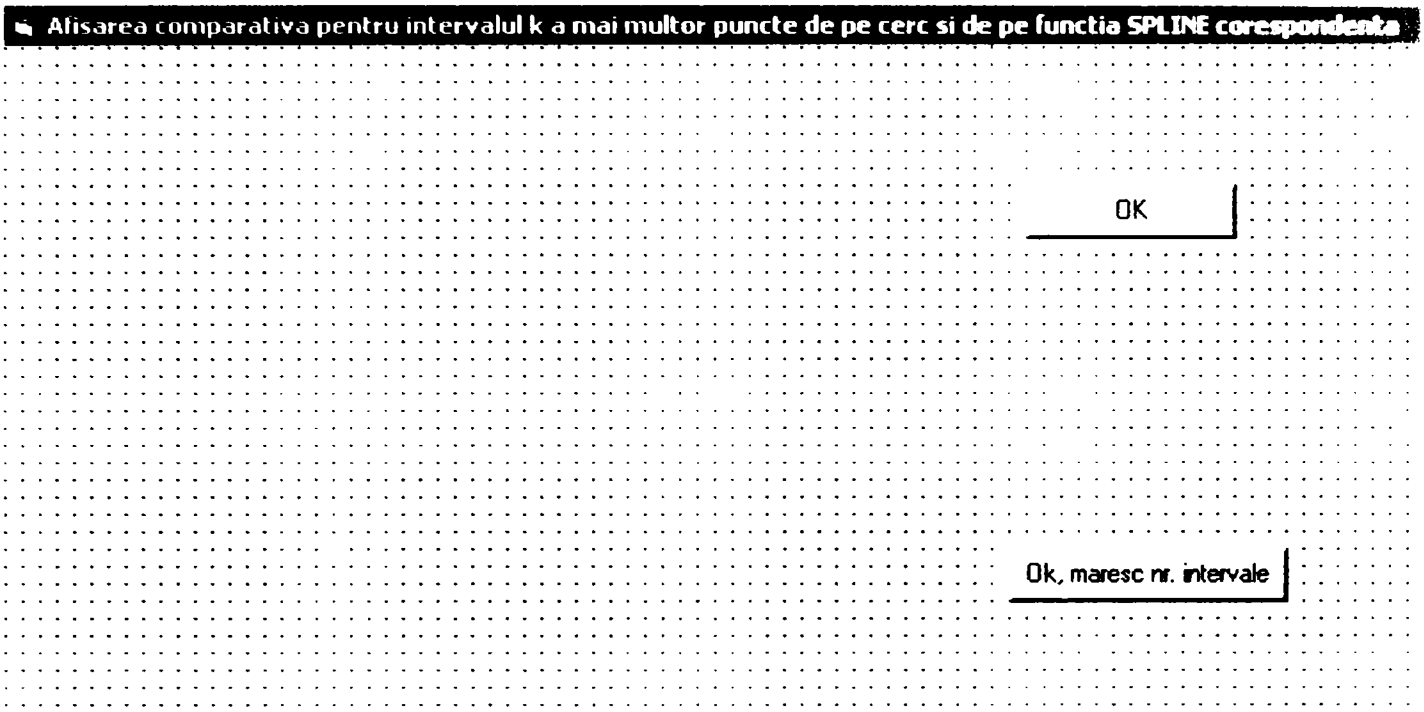
```
 For j = 0 To i - 2
  mat(i, j) = 0
 Next j
 mat(i, j) = Ai(i - 1): mat(i, j + 1) = Bi(i) + Bi(i + 1): mat(i, j + 2) = Ai(i)
 j = j + 3
 For k = j To n
  mat(i, k) = 0
 Next k
Next i
For i = 0 To n - 2
 mat(n, i) = 0
Next i
mat(n, n - 1) = Ai(n - 1): mat(n, n) = Bi(n)
'Print
'Print "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
'Print #1, ""
'Print #1, "Matricea rezultata pentru calculul pantelor, respectiv vectorul beta va fi:"
'For i = 0 To n
' For j = 0 To n
'   Print Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
'   Print #1, Tab(1 + j * 7); Format(mat(i, j), "###0.##");
' Next j
' Print Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
' Print #1, Tab(1 + (n + 1) * 7); "m" & i; Tab(8 + (n + 1) * 7); Format(beta(i), "####0.0#########")
'Next i
For i = 1 To n + 1
 For j = 1 To n + 1
  mat1(i, j) = mat(i - 1, j - 1)
 Next j
 beta1(i) = beta(i - 1)
 m1(i) = m(i - 1)
Next i
rezolv_sist n + 1, mat1(), beta1(), m1()
For i = 0 To n
 For j = 0 To n
  mat(i, j) = mat1(i + 1, j + 1)
 Next j
 beta(i) = beta1(i + 1)
 m(i) = m1(i + 1)
Next i
k = 1
nrp = 10
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 t = (x1(i) - x(k - 1)) / h(k)
 t1 = f(k) * t
 t2 = f(k - 1) * (1 - t)
 t3 = m(k) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * t) / hsin(bet(k)) - t)
 t4 = m(k - 1) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * (1 - t)) / hsin(bet(k)) - (1 - t))
 sk(i) = t1 + t2 + t3 + t4
Next i
frmafis2.Show
End Sub
```

Frmcontcompar:




```
Private Sub cmdok_Click()
k = Val(txtk.Text)
nrp = Val(txtnrp.Text)
h1 = pas / (nrp - 1)
ReDim x1(1 To nrp), y1(1 To nrp), sk(1 To nrp)
x1(1) = x(k - 1)
For i = 2 To nrp
 x1(i) = x1(i - 1) + h1
Next i
For i = 1 To nrp
 y1(i) = yc + Sqr(r * r - (x1(i) - xc) ^ 2)
 t = (x1(i) - x(k - 1)) / h(k)
 t1 = f(k) * t
 t2 = f(k - 1) * (1 - t)
 t3 = m(k) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * t) / hsin(bet(k)) - t)
 t4 = m(k - 1) / alfa ^ 2 * (hsin(bet(k) * (1 - t)) / hsin(bet(k)) - (1 - t))
 sk(i) = t1 + t2 + t3 + t4
Next i
Frmcontcompar.Hide
frmafis2.Show
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
End
End Sub

Private Sub txtk_Validate(Cancel As Boolean)
k = Val(txtk.Text)
If k < 1 Or k > n Then
  Cancel = True
  MsgBox ("k trebuie sa ia valori intregi intre 1 si" & n)
End If
End Sub

Private Sub txtnrp_Validate(Cancel As Boolean)
nrp = Val(txtnrp.Text)
If nrp < 3 Or k > 30 Then
  Cancel = True
  MsgBox ("nrp trebuie sa ia valori intregi intre 3 si 30")
End If
End Sub
```

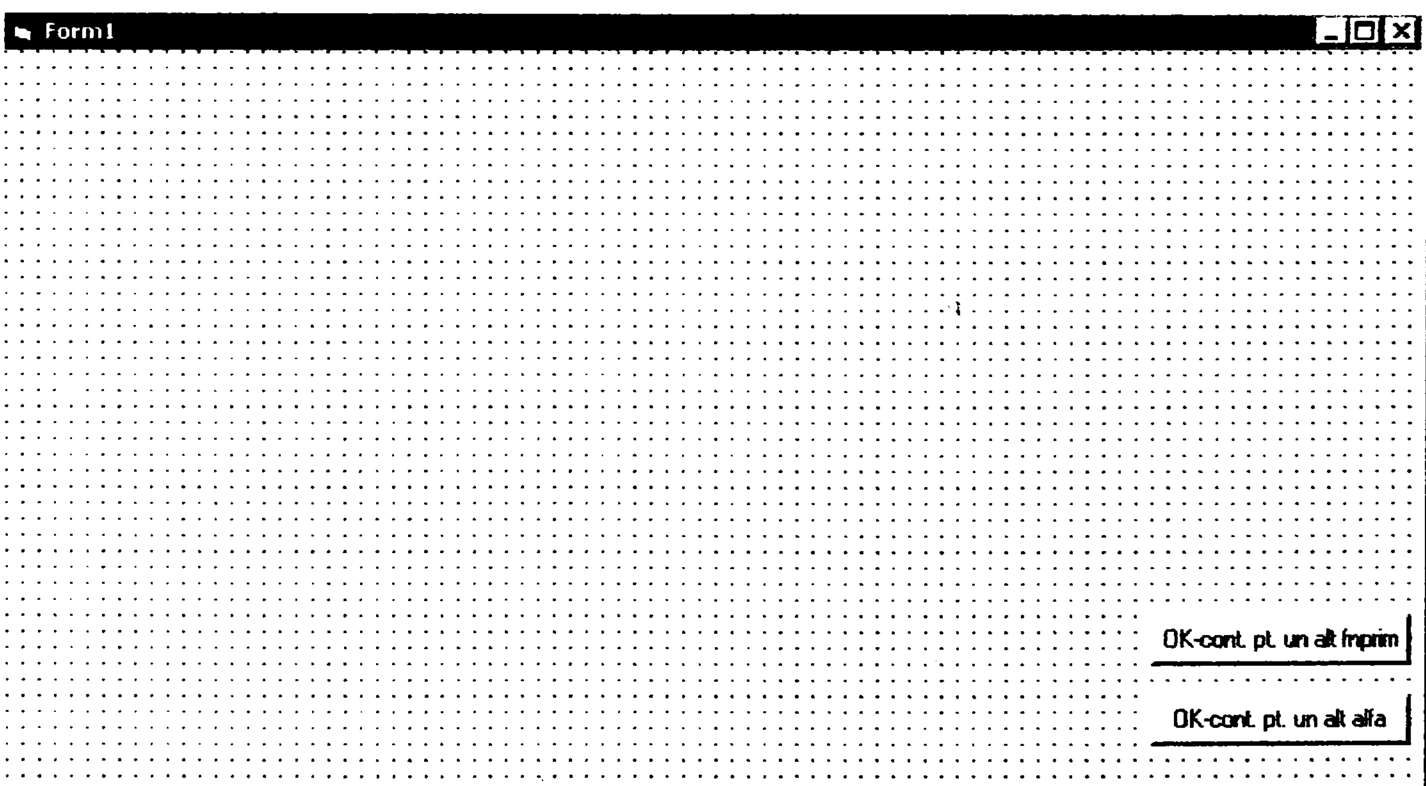
Frmafis2:




```
Private Sub cmdok_Click()
contor = contor + 1
If contor <= dimensiune Then
   frmafis2.Hide
   frmconditii.Show
   frmconditii.OKcont.Enabled = True
   frmconditii.cmdok.Enabled = False
   frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = False
   MsgBox "Dati click pe 'OK continuare' pt. a efectua calculele pentru f0prim urmator! (f0prim=" & f0prim(contor
- 1) + 1 & ")"
   frmconditii.OKcont.SetFocus
Else
  If prima = 0 And jj = 0 Then
   frmafis2.Hide
   Frmgraf.Show
  Else
   frmafis2.Hide
   Frmgraf.AutoRedraw = False
  End If
End If
End Sub

Private Sub cmdschimb_Click()
 frmafis2.Hide
 Frmintro.Show
 Frmintro.Txtn.SetFocus
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Cls
Print #1, ""
Print #1, "Intervalul care se compara:" & k
Print #1, "Numarul de puncte de comparatie din cadrul respectivului interval:" & nrp
Print
Print " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
Print
Print #1, ""
Print #1, " Coordonata x"; Tab(18); "y (pt. cerc)"; Tab(32); "sk (pt. functia SPLINE)"
```

```
Print #1, ""
'emax1 = Abs(y1(1) - sk(1)) / Abs(y1(1)) * 100
emax1 = 2 / pi * Atn(y1(1) - sk(1))
semnal = 0
For i = 1 To nrp
 Print Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 Print #1, Tab(3); Format(x1(i), "######0.000"); Tab(18); Format(y1(i), "######0.000"); Tab(32); Format(sk(i),
"######0.000")
 'emaxcurent = Abs(y1(i) - sk(i)) / Abs(y1(i)) * 100
 emaxcurent = 2 / pi * Atn(y1(i) - sk(i))
 If emaxcurent > 0.96 Then semnal = 1
 If emax1 < emaxcurent Then emax1 = emaxcurent
Next i
If emax(contor) < emax1 Then emax(contor) = emax1
Print
Print Tab(3); "emax1="; Format(emax1, "#####0.000000")
Print #1, Tab(3); "emax1="; Format(emax1, "#####0.000000")
Print Tab(3); "emax(" & contor & ")="; Format(emax(contor), "#####0.000000")
Print #1, Tab(3); "emax(" & contor & ")="; Format(emax(contor), "#####0.000000")
If semnal = 1 Then
  MsgBox ("Trebuie sa dati un numar mai mare de intervale de esantionare pentru a micsora eroarea de
aproximare!")
  cmdschimb.SetFocus
 Else
  cmdok.SetFocus
End If
End Sub
```

Frmgraf:




```
Private Sub cmdok_Click()
  frmconditii.Show
  contor = 1
  MsgBox ("Dati o alta valoare pt. fnprim!")
  jj = jj + 1
  frmconditii.OKcont.Enabled = False
  frmconditii.txtf0primmax.Enabled = False
```

```
  frmconditii.txtf0primmin.Enabled = False
  frmconditii.cmdok.Enabled = True
  frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = True
End Sub
```

Private Sub cmdokalfa_Click()

```
  prima = prima + 1
  Frmintro.Show
  MsgBox ("Dati o alta valoare pt. alfa!")
  Frmintro.txtcentx.Enabled = False
  Frmintro.Txtcenty.Enabled = False
  Frmintro.Txtr.Enabled = False
  Frmintro.Txtn.Enabled = False
  frmconditii.OKcont.Enabled = False
  frmconditii.txtf0primmax.Enabled = False
  frmconditii.txtf0primmin.Enabled = False
  frmconditii.cmdok.Enabled = True
  frmconditii.cmdsfarsit.Enabled = True
End Sub
```

Private Sub Form_Paint()

```
Frmgraf.AutoRedraw = True
If prima = 0 And jj = 0 Then
  Dim Msg, XPos(30), YPos(30)  ' Declare variables.
   ScaleMode = 3   ' Set ScaleMode to pixels.
   DrawWidth = 2   ' Set DrawWidth.
   ForeColor = QBColor(prima)
   Line (10, ScaleHeight - 10)-(ScaleWidth - 10, ScaleHeight - 10)
   Line (210, ScaleHeight - 10)-(210, 10)
   FontSize = 13   ' Set point size.
   CX = ScaleWidth / 2 ' Get horizontal center.
   CY = ScaleHeight / 2   ' Get vertical center.
   Msg = "fo'": CurrentX = 9 * 2 * CX / 10 - TextWidth(Msg) / 2: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "emax(%)":  CurrentX = 210:  CurrentY = 0:  Print Msg
   Msg = "-10":   CurrentX = 10:  CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "-5": CurrentX = 110: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "0":   CurrentX = 210: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "5": CurrentX = 310: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "10":   CurrentX = 10 + 20 * 20: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "15":   CurrentX = 510: CurrentY = ScaleHeight - 30: Print Msg
   Msg = "alfa=" & alfa:  CurrentX = 260:  CurrentY = 20: pozx = CurrentX: pozy = CurrentY: Print Msg
   For i = 1 To 5
     Select Case i
      Case 1
        Msg = "1.0"
      Case 2
        Msg = "0.8"
      Case 3
        Msg = "0.6"
      Case 4
        Msg = "0.4"
      Case 5
        Msg = "0.2"
     End Select
     CurrentX = 209: CurrentY = (ScaleHeight - 80) / 5 * i: Print Msg
   Next i
 Else
    If jj = 0 Then
      ForeColor = QBColor(prima)
      Msg = "alfa=" & alfa: CurrentX = 260 + prima * 70: CurrentY = 20: pozx = CurrentX: pozy = CurrentY: Print
 Msg
    End If
```

```
End If
  ForeColor = QBColor(prima)
  Msg = "fn'=" & fnprim
  pozx = pozx  ' Horizontal position.
  pozy = pozy + 15 ' Vertical position
  CurrentX = pozx
  CurrentY = pozy
  Print Msg  ' Print message.
  For i = 1 To dimensiune
    XPos(i) = 210 + f0prim(i) * 20 ' Get horizontal position.
    YPos(i) = (ScaleHeight - 10) - ((ScaleHeight - 80) * emax(i)) ' Get vertical position.
    PSet (XPos(i), YPos(i)), QBColor(1)
    'DoEvents  ' Yield to other
  Next i
  For i = 1 To dimensiune - 1
    Line (XPos(i), YPos(i))-(XPos(i + 1), YPos(i + 1))
  Next i
End Sub
```

§ 3.7. IMPLEMENTAREA FUNCȚIILOR SPLINE ÎN M.E.Fr.

3.7.1. Calculul funcțiilor spline

Din literatura de specialitate [P50], [M31] se cunoaște teoria funcțiilor spline care sunt niște funcții segmentar polinomiale, descrise de polinoame pe subintervale adiacente, care în nodurile unde se racordează asigură nu numai continuitatea funcției, ci și continuitatea unor derivate ale acesteia.

Fie $f(x)\colon [a,b] \to R$ funcția continuă necunoscută care trebuie aproximată. Fie Δ o diviziune a intervalului $[a,b] \subset R$:

$$\Delta\colon\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Considerăm cunoscute valorile funcției f în nodurile rețelei de discretizare $\Delta : f(x_i) = f_i = y_i,\quad i = \overline{1,n}$.

Vom nota $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ și $h_i = x_i - x_{i-1}$. Alegem ca necunoscute ale problemei derivatele de ordinul doi ale funcției spline $S_i(x)$ pe fiecare nod:

$$M_i = S_i''(x_i) \qquad i=0,1,2,\ldots, n \tag{3.7.1}$$

Restricția funcției spline pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ se notează cu $S_i(x)$ și este o funcție polinomială de gradul trei. Se poate arăta că:

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{3.7.2}$$

$$f(x) = \frac{M_{i-1}}{6}\left[\frac{(x_i - x)^3}{x_i - x_{i-1}} - (x_i - x)(x_i - x_{i-1})\right] + \frac{M_i}{6}\left[\frac{(x - x_{i-1})^3}{x_i - x_{i-1}} - (x - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right] +$$

$$+ f_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\quad ,\qquad x_{i-1} \le x \le x_i,\ i=1,2,\ldots,n \tag{3.7.3}$$

Asigurând și continuitatea derivatei de ordinul întâi pe fiecare nod, vom obține:

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} \tag{3.7.4}$$

Se vede că am obținut un sistem de (n-1) ecuații liniare cu (n+1) necunoscute: $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Ca să avem o problemă cu o soluție unică, mai trebuie să impunem două condiții suplimentare. *Deși această problemă nu este complet lămurită în literatură* (v.[B31], [M9]), se obișnuiește să se impună două categorii de condiții:

condițiile naturale: $M_0=M_n=0$. Se ajunge la un sistem de (n-1) ecuații cu (n-1) necunoscute tridiagonal, cu diagonala principală dominantă, care se știe că are o soluție unică.

În acest caz putem scrie matricial:

$$[A]\{M\}=[H]\{f\} \tag{3.7.5}$$

unde:

$$\{M\}^T=\{M_1 \quad M_2 \quad \ldots \quad M_{n-1}\},\ \{f\}^T=\{f_1 \quad f_2 \quad\quad f_{n-1}\} \tag{3.7.6}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{bmatrix} \tag{3.7.7}$$

$$[H]=\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h_{n-1}}-\frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{bmatrix} \tag{3.7.8}$$

$$\Rightarrow \quad \{M\}=[A]^{-1}[H]\{f\} \tag{3.7.9}$$

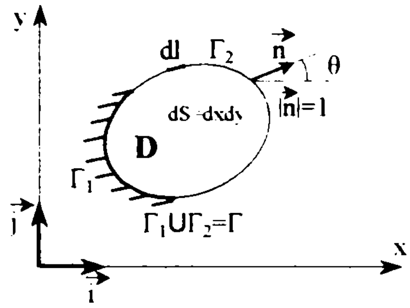
Se presupun cunoscute $S'(x_0)=f_0'$ și $S'(x_n)=f_n'$. În acest caz se ajunge la următorul sistem de (n+1) ecuații cu (n+1) necunoscute:

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1-f_0}{h_1}-f_0'\right) \\ A_iM_{i-1}+2M_i+C_iM_{i+1}=D_i \\ M_{n-1}+2M_n=\frac{6}{h_n}\left(f_n'-\frac{f_n-f_{n-1}}{h_n}\right) \end{cases} \tag{3.7.10}$$

unde

$$A_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}};\quad C_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}};\quad D_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right);\quad \forall i=1,2,\ldots,n-1; \tag{3.7.11}$$

3.7.2. Implementarea funcţiilor spline într-o problemă de potenţial



D - domeniu plan

Γ- conturul frontierei (curbă plană Liapunov)

Fig. 3.7.1

Să considerăm o ecuaţie diferenţială tip Laplace într-un domeniu bidimensional D cu graniţa Γ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \nabla^2 u=0 \qquad (3.7.12)$$

căreia i se ataşează două tipuri de condiţii de frontieră (**Fig. 3.7.1**):

$u=\bar{u}$ pe Γ_1 (condiţii tip Dirichlet)

$q=\dfrac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}$ pe Γ_2 (condiţii tip Neumann)

Aici $\bar{u}$ sunt valorile cunoscute ale funcţiei de potenţial u pe porţiunea Γ_1 a frontierei şi $\bar{q}$ este valoarea cunoscută pe frontieră a derivatei normale a funcţiei de potenţial u.
Soluţia ecuaţiei lui Laplace

$$\nabla^2 U^* = \delta(x-\xi_i) \qquad (3.7.13)$$

o vom nota cu u^* deoarece este aşa-numita soluţie fundamentală, esenţială în formularea (M.E.Fr.). Ea se cunoaşte din literatură ([P50], [P34) şi

$$u^*(\xi_i,x)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(\xi_i,x)} \qquad (3.7.14)$$

unde: $\delta(x-\xi_i)$ este funcţia δ a lui Dirac;

ξ_i este punctul sursă unde se aplică potenţialul unitar;

x este punctul curent de pe frontieră;

$r(\xi_i,x)=|x-\xi_i|$ este distanţa dintre cele două puncte.

Derivata normală a lui u^* o vom nota tot cu un asterisc şi ea este:

$$q^*(\xi_i,x)=\frac{\partial u^*(\xi_i,x)}{\partial n} \qquad (3.7.15)$$

Se ştie de asemenea că formularea (M.E.Fr.) se poate face în foarte multe moduri [B72], [P34]. De exemplu, putem porni de la cea de-a doua identitate a lui Green şi să discretizăm relaţia:

$$\int_\Gamma \left(\frac{u}{r}\frac{\partial r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)dr=0 \qquad (3.7.16)$$

care conduce, prin discretizare pe elemente finite la o ecuaţie matricială de forma:

$$[H]\{u\}=[G]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} \qquad (3.7.17)$$

unde $[H]$ şi $[G]$ depind numai de geometria frontierei.

În paragraful precedent am arătat că frontiera domeniului poate fi descrisă de ecuaţia (3.7.4), care poate fi scrisă matricial sub forma (3.7.5) şi de aici (3.7.9). Ecuaţia matricială (3.7.9) ne determină derivatele de ordinul doi pe fiecare nod şi ea mai poate fi scrisă sub forma:

$$f_j''=\sum_{k=1}^{n} q_{ik} f_k \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (3.7.18)$$

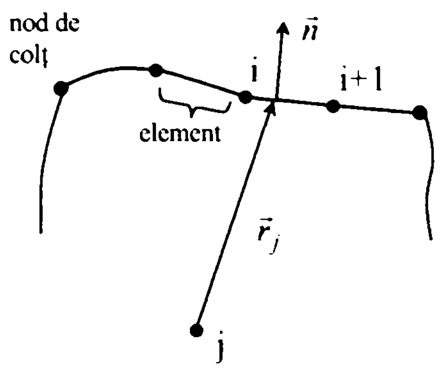


Fig. 3.7.2

unde q_{ik} reprezintă un element din $[A]^{-1}[H]$. Ecuația (3.7.17) este utilizată pentru a înlocui derivatele de ordinul doi din (3.7.3), ceea ce conduce la forma finală a funcției spline cubice de interpolare, deoarece toți coeficienții puterilor lui x depind numai de geometria conturului și de modul de discretizare. Folosind nodul j ca *„punct de observație"* și integrând între nodurile i și $i+1$ (**Fig.3.7.2**), integralele din ecuația (3.7.16) luate pe un singur element devin:

$$h_{ji} = \int_i^{i+1} \left\{ \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{ik} \frac{u_k}{r_j}\frac{\partial r_j}{\partial n}\left[\frac{(x_i - x)^3}{x_{i+1}-x_i} - (x_{i+1}-x)(x_{i+1}-x_i)\right] + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{i+1,k}\frac{u_k}{r_j}\frac{\partial r_j}{\partial n}\cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left[\frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} - (x-x_i)(x_{i+1}-x_i)\right] + \frac{u_i}{r_j}\frac{\partial r_j}{\partial n}\cdot\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} + \frac{u_{i+1}}{r_j}\frac{\partial r_j}{\partial n}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right\} ds \qquad (3.7.19)$$

$$g_{ji} = \int_i^{i+1} \left\{ \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{ik} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln r_j\left[\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1}-x_i} - (x_{i+1}-x)(x_{i+1}-x_i)\right] + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{i+1,k}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln r_j \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left[\frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} - (x-x_i)(x_{i+1}-x_i)\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln r_j \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln r_j \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right\} ds \qquad (3.7.20)$$

În felul acesta ecuația integrală (3.7.16) se transformă într-un sistem de ecuații algebrice:

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ji} - \sum_{j=1}^{n} g_{ji} = 0, \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad (3.7.21)$$

unde N este numărul de elemente și n este numărul de noduri.

Să analizăm relațiile (3.7.19) și (3.7.20). Deoarece în integrale apar numai u și $\partial u/\partial n$ cu valori în noduri, acestea pot fi scoase în afara integralelor și apar ca niște coeficienți în ecuațiile pentru h_{ji} și g_{ji}. În mod asemănător factorii q_{ik} și x_i depind numai de geometrie și de aceea sunt priviți ca niște constante sub integrală. Rezultă că numai r_j și x variază pe element, deci se integrează. Dar aceste variabile care depind și de geometrie se integrează fără a se ține cont de repartiția lui u și $\partial u/\partial n$.

Observație: În relațiile (3.7.19) și (3.7.20) funcția spline cubică este exprimată în funcție de x în timp ce integrala este luată de-a lungul unui element curb $(i,i+1)$ de ecuație $y=y(x)$; pe acest element curb diferențiala elementului de arc este:

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (3.7.22)$$

unde y' rezultă din (3.7.2) prin derivare ($y=f=S$; $y_i = f_i$; $y_{i+1} = f_{i+1}$). Derivatele f_i'' și f_{i+1}'' (sau y_i'' și y_{i+1}'') sunt date de ecuația (3.7.2). În practică sistemul global de coordonate (x,y) se deplasează și se rotește până când axa x devine noua axă ξ care trece prin nodurile i și $i+1$ și face unghiul α cu axa x. Relațiile (3.7.19) și (3.7.20) conțin distanța r_j de la punctul de observație j până la punctul $x \in (i, i+1)$, care în sistemul global de coordonate este:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \tag{3.7.23}$$

Folosind interpolarea spline cubică pentru y_j se obține:

$$r_j = r_j(x, y) = r_j[x, y(x)] \tag{3.7.24}$$

Înlocuind expresiile lui r_j (3.7.24) și ds (3.7.22) în (3.7.19) și (3.7.20) ajungem la niște integrale care conțin numai variabila x și care pot fi calculate numeric pentru o geometrie dată.

Dacă punctul j coincide cu extremitatea unui element, în relațiile (3.7.19) există o singularitate aparentă; în acest caz integrarea se realizează în sistemul local de coordonate (ξ, η).

Sunt doi factori de care trebuie să ne ocupăm în mod special:

Factorul $\frac{1}{r_j}\frac{\partial r_j}{\partial n}$**.** Se poate arăta că acest factor, atunci când punctul j se află în nodul i, nu reprezintă o singularitate și poate fi integrat în mod obișnuit.

Factorul $\ln r_j$**.** Utilizând sistemele de coordonate din **Fig. 3.7.3**, se poate arăta că:

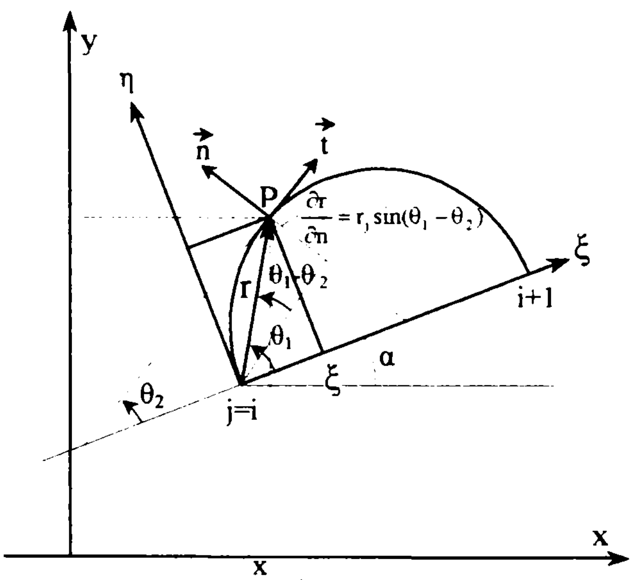


Fig. 3.7.3

$$\ln r_j = \ln \xi + h(\xi) \tag{3.7.25}$$

unde:

$$h(\xi) = \ln\left\{1 + \left[\frac{\eta_i''}{6}\left(3\xi - \frac{\xi^2}{\xi_{i+1}} - 2\xi_{i+1}\right) + \frac{\eta_{i+1}''}{6}\left(\frac{\xi^2}{\xi_{i+1}} - \xi_{i+1}\right)\right]^2\right\}^{1/2} \tag{3.7.26}$$

Pentru $\xi \to 0$ rezultă că numai termenul $\ln\xi$ este singular, și el intervine în integralele care compun expresia lui g_{ji} (3.7.20), pe care o vom descompune, utilizând (3.7.25), într-o sumă de două integrale.

$$g_{ji} = \int_0^{i+1} \ln\xi \cdot \varphi_l(\xi) d\xi + \int_0^{i+1} h(\xi) \cdot \varphi_l(\xi) d\xi \tag{3.7.27}$$

$$g_{ij} = \int_0^{i+1} \left\{\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{ik}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln\xi\left[\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} - (x - x_i)(x_{i+1} - x_i)\right]\left[1 + (\eta')^2\right]^{1/2} d\xi +\right.$$

$$+ \int_0^{i+1} \left\{\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{i+1,k}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k \ln\xi\left[\frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} - (x - x_i)(x_{i+1} - x_i)\right]\left[1 + (\eta')^2\right]^{1/2} d\xi +\right.$$

$$+ \int_0^{i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i \ln\xi \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\left[1 + (\eta')^2\right]^{1/2} d\xi + \int_0^{i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{i+1} \ln\xi \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[1 + (\eta')^2\right]^{1/2} d\xi +$$

$$+\int_0^{i+1}\left\{\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{ik}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k h(\xi)\left[\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i}-(x-x_i)(x_{i+1}-x_i)\right]\left[1+(\eta')^2\right]^{1/2} d\xi +\right.$$

$$+\int_0^{i+1}\left\{\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} q_{i+1,k}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k h(\xi)\left[\frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}-(x-x_i)(x_{i+1}-x_i)\right]\left[1+(\eta')^2\right]^{1/2} d\xi +\right.$$

$$+\int_0^{i+1}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i h(\xi)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\left[1+(\eta')^2\right]^{1/2} d\xi+\int_0^{i+1}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{i+1} h(\xi)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left[1+(\eta')^2\right]^{1/2} d\xi \tag{3.7.28}$$

Apar aici opt integrale în care variabila x trebuie înlocuită cu variabila ξ din sistemul local de coordonate, utilizând relația de transformare:

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha+x_j$$

cu η dat de:

$$\eta(\xi)=\frac{\eta_i''}{6}\left[\frac{(\xi_{i+1}-\xi)^3}{\xi_{i+1}}-\xi_{i+1}(\xi_{i+1}-\xi)\right]+\frac{\eta_{i+1}''}{6}\left[\frac{\xi^3}{\xi_{i+1}}-\xi\xi_{i+1}\right] \tag{3.7.29}$$

În patru dintre integrale apare factorul $\ln\xi$, deci ele se rezolvă utilizând o cuadratură Gauss specială în care ponderile gaussiene şi zerourile corespunzătoare sunt exprimate în cazul singularității logaritmice. Pentru celelalte patru integrale se foloseşte o cuadratură Gauss obişnuită cu 4, 8 sau 16 puncte.

3.7.3. Realizare program calculator

Aşa-numita "problemă Kirsch" se ocupă cu cercetarea influenței pe care un orificiu circular de diametru $2a$ o are asupra distribuției tensiunilor din zona slăbită în cazul unei plăci dreptunghiulare solicitată la tracțiune de o tensiune uniform distribuită la infinit σ_0.

S-a implementat un program care rezolvă probleme de acest gen cu metoda elementului de frontieră şi utilizând funcții spline cubice ca funcții de formă la aproximarea conturului domeniului studiat. Schema bloc a programului este redată în **Fig.3.7.4**.

Programul principal este scurt, oferind un meniu de forma celui din **Fig. 3.7.5**, inițializând tablourile care conțin coordonatele punctelor şi ponderile Gauss, şi gestionând subrutinele evidențiate în **Fig.3.7.4**.

Subrutinele apelate corespund fiecare unei etape de implementare numerică a M.E.Fr., şi sunt:

INTRO_DAT, are rolul de a citi, fie de la tastatură, fie din fişierul de date *Intrare_date.txt* datele referitoare la: titlul şi tipul problemei, proprietățile materialului, noduri, puncte interioare, elemente şi condiții impuse pe frontieră;

ASAMBL_SISTEM, care asamblează sistemul de ecuații algebrice liniare prin apelarea subrutinei EVAL_INTEGR, care face evaluarea integralelor pe frontieră şi impunerea condițiilor pe frontieră;

EVAL_INTEGR, este cea mai importantă şi cea mai utilizată subrutină din întregul program, având rolul de a efectua evaluarea numerică sau analitică a integralelor pe fiecare element al frontierei şi de a calcula coeficienții de influență din submatricile [H] şi [G] atât la formarea sistemului de ecuații algebrice liniare, cât şi la calculul variabilelor în interiorul domeniului soluției. După cum s-a arătat în paragraful precedent, atunci când punctele j şi i sunt pe elemente diferite, sau aparţin aceluiaşi element dar nu se suprapun, se foloseşte formula standard de cuadratură Gauss, integralele nefiind singulare. Atunci însă când punctele i şi j se suprapun se face o integrare analitică pentru coeficienţii g_{ij} şi se aplică un potenţial constant sau o deplasare de solid rigid pentru calculul coeficienţilor h_{ij}.

REZOLV_SISTEM rezolvă sistemul de ecuaţii prin metoda eliminării Gauss;

IESIRE_DAT separă variabilele pe frontieră în vectorii corespunzători tipului analizei, face sumarea tensiunilor pe frontieră şi salvează rezultatele în fişierul de ieşire *Iesire.txt*;

P_INT calculează şi salvează în fişierul de ieşire valorile variabilelor din puncte interioare domeniului.

Algoritmul de realizare al programului este prezentat detaliat în paragraful următor, iar codul sursă este dat în întregime la anexe. Ceea ce diferă la această variantă de program faţă de cea prezentată în §3.8 este doar modul de implementare al funcţiilor de formă, care sunt funcţii de interpolare spline cubice care intervin în integralele prezentate anterior în relaţiile (3.7.28).

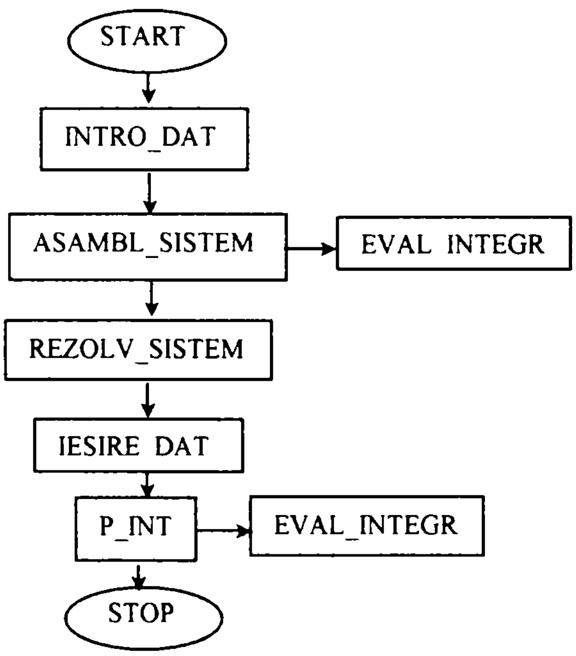


Fig. 3.7.4

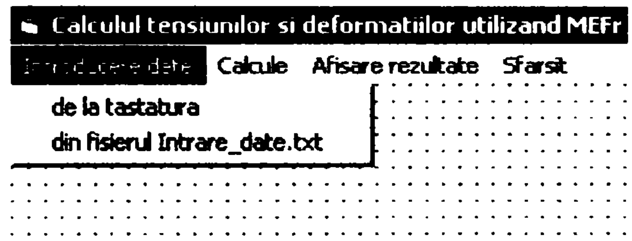


Fig. 3.7.5

§ 3.8. PROGRAM DE ELEMENT DE FRONTIERĂ PENTRU PROBLEME BIDIMENSIONALE

În acest paragraf este prezentat pe scurt programul realizat în limbajul Visual Basic destinat rezolvării problemelor de elastostatică plană folosind elemente de frontieră izoparametrice liniare, adică elemente cu variația liniară a geometriei și a variabilelor pe frontieră, în acest caz a deplasărilor și tensiunilor. Materialul pieselor analizate trebuie să fie omogen și izotrop. Programul permite soluționarea unor probleme pe domenii simplu sau multiplu conexe.

Schema bloc de ansamblu a programului este dată în **Fig. 3.8.1**.

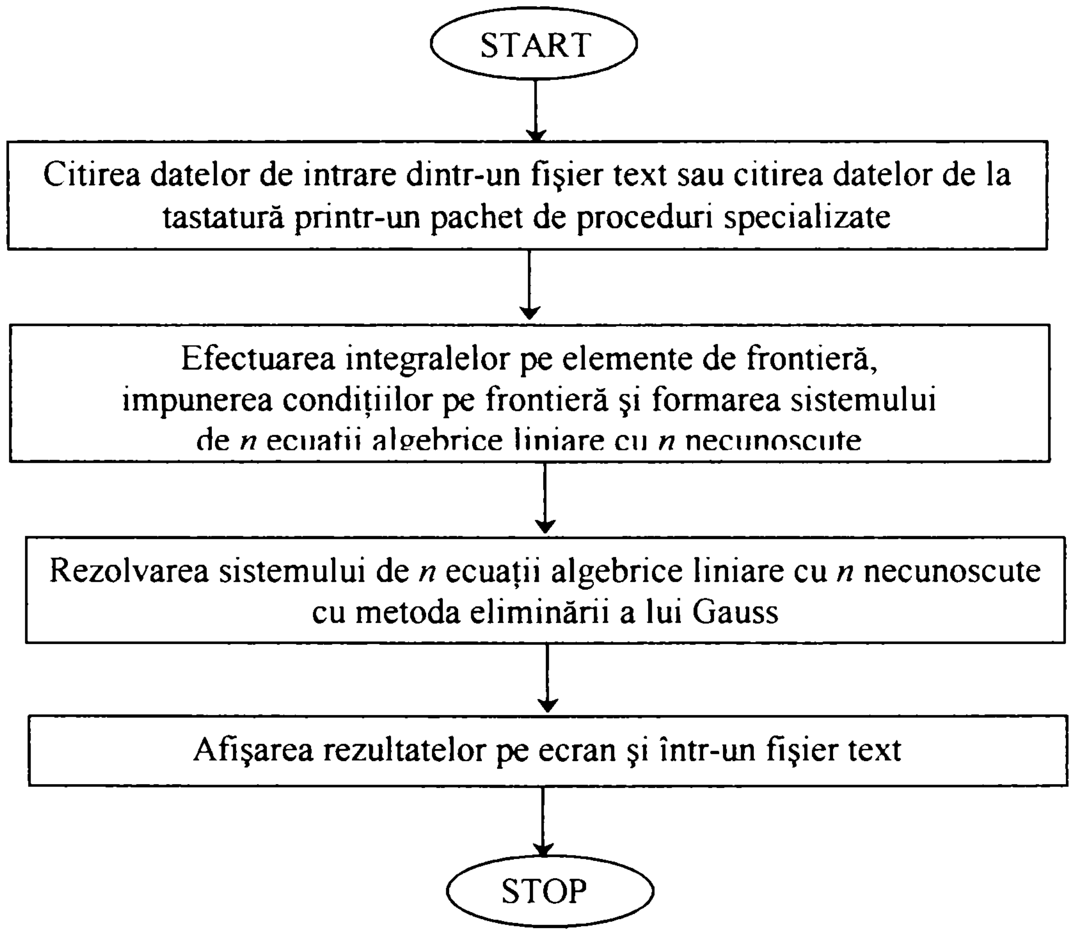


Fig. 3.8.1

Dacă piesa studiată are unul sau două plane de simetrie, perpendiculare pe axele sistemului global de coordonate, piesa poate fi studiată pe jumătate sau pe sfert, programul luând în considerare tipul simetriei piesei. Dacă simetria este luată în considerare nu este necesar să se discretizeze axele de simetrie rezultate din intersecția dintre planul de simetrie și domeniul soluției, astfel reducându-se semnificativ numărul datelor de intrare și dimensiunile matricei sistemului de ecuații algebrice liniare. Discretizarea pieselor simetrice și numerotarea nodurilor este prezentată în **Fig. 3.8.2**, respectiv în **Fig. 3.8.3** este arătată discretizarea și numerotarea nodurilor pentru un domeniu multiplu conex.

Deoarece în Visual Basic este necesar să se declare dimensiunile maxime a teblourilor utilizate am stabilit ca dimensiunea maximă a matricei sistemului de ecuații să fie de (400x400), ceea ce implică utilizarea a maxim 200 de noduri în cazul analizei elastice, deoarece în fiecare nod vor exista două necunoscute, care sunt deplasări sau tensiuni. Oricum această limitare este ușor de modificat prin simpla setare a constantei MAXDIM declarată în modulul de cod cu o altă valoare (mai mare de 400!) dorită.

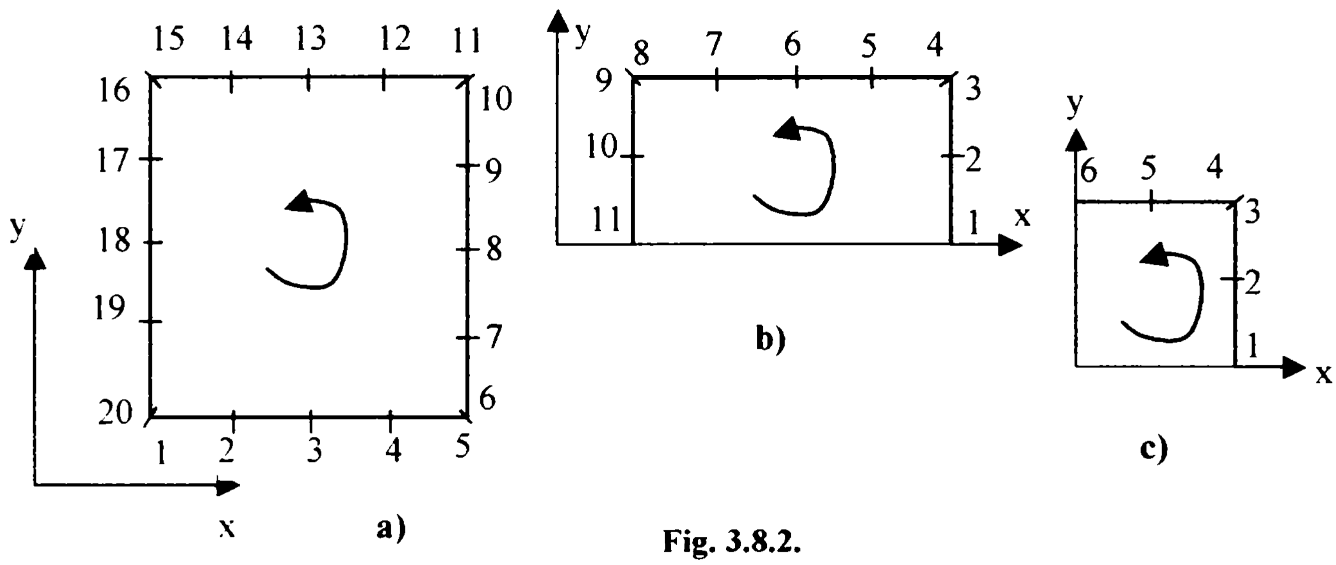


Fig. 3.8.2.

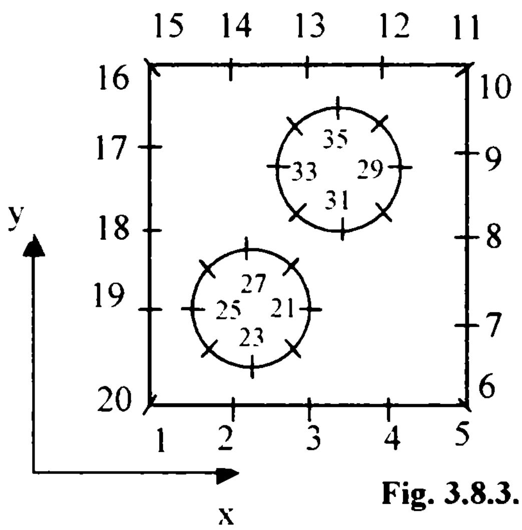


Fig. 3.8.3.

Nodurile duble fac posibilă modelarea colțurilor și a discontinuității condițiilor impuse pe frontieră. Singura limitare care se impune este să se prescrie în cele două noduri duble cel puțin o tensiune pe fiecare direcție a sistemului global de coordonate.

La pornire programul prezintă un meniu de forma:

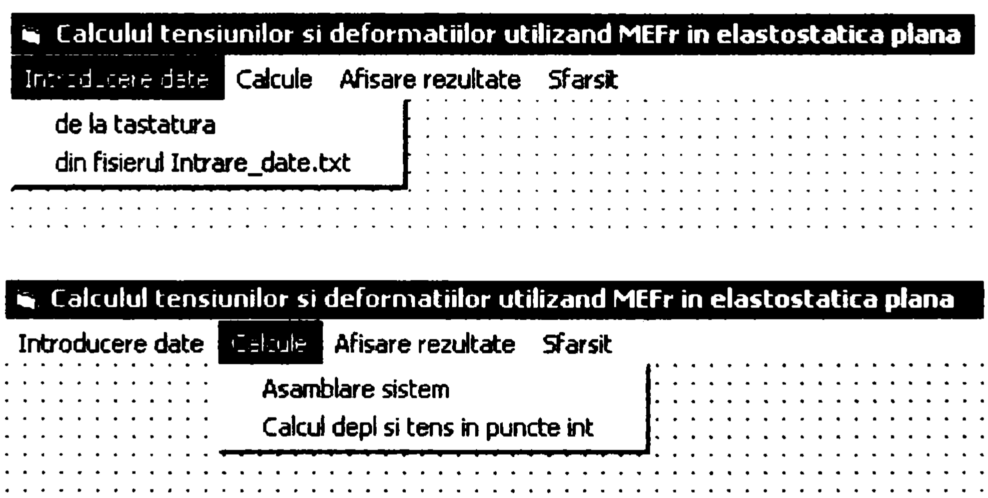


Fig. 3.8.4

Programul are în structură:

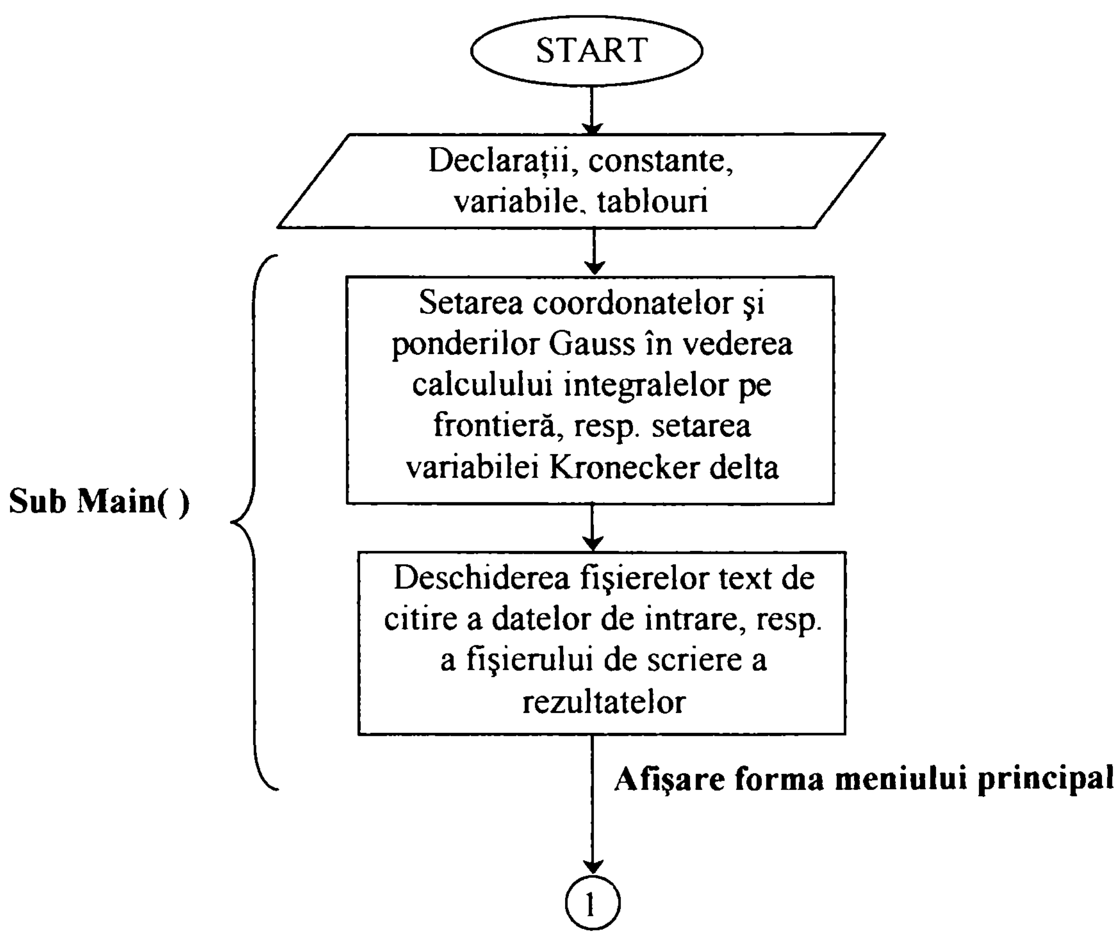
A) un modul de cod, care conţine declararea variabilelor globale, un program principal de lansare în execuţie **Sub main()** şi două proceduri:

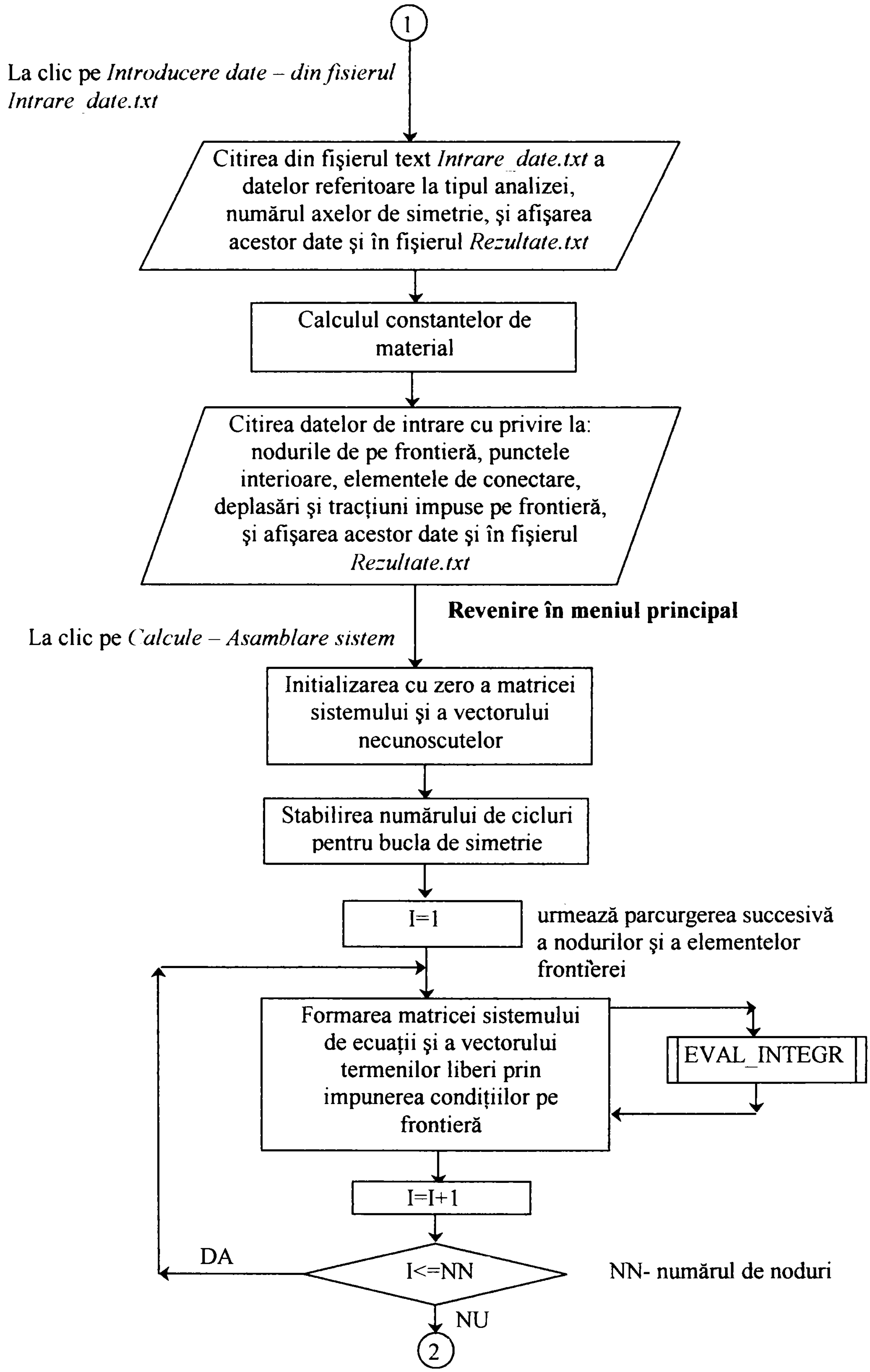
- **Eval_Integr**, care face evaluarea numerică sau analitică a integralelor pe fiecare element de frontieră, şi
- **Rezolv_sistem**, care are rolul de a găsi soluţiile sistemului de ecuaţii algebrice liniare care conţine necunoscutele nodale;

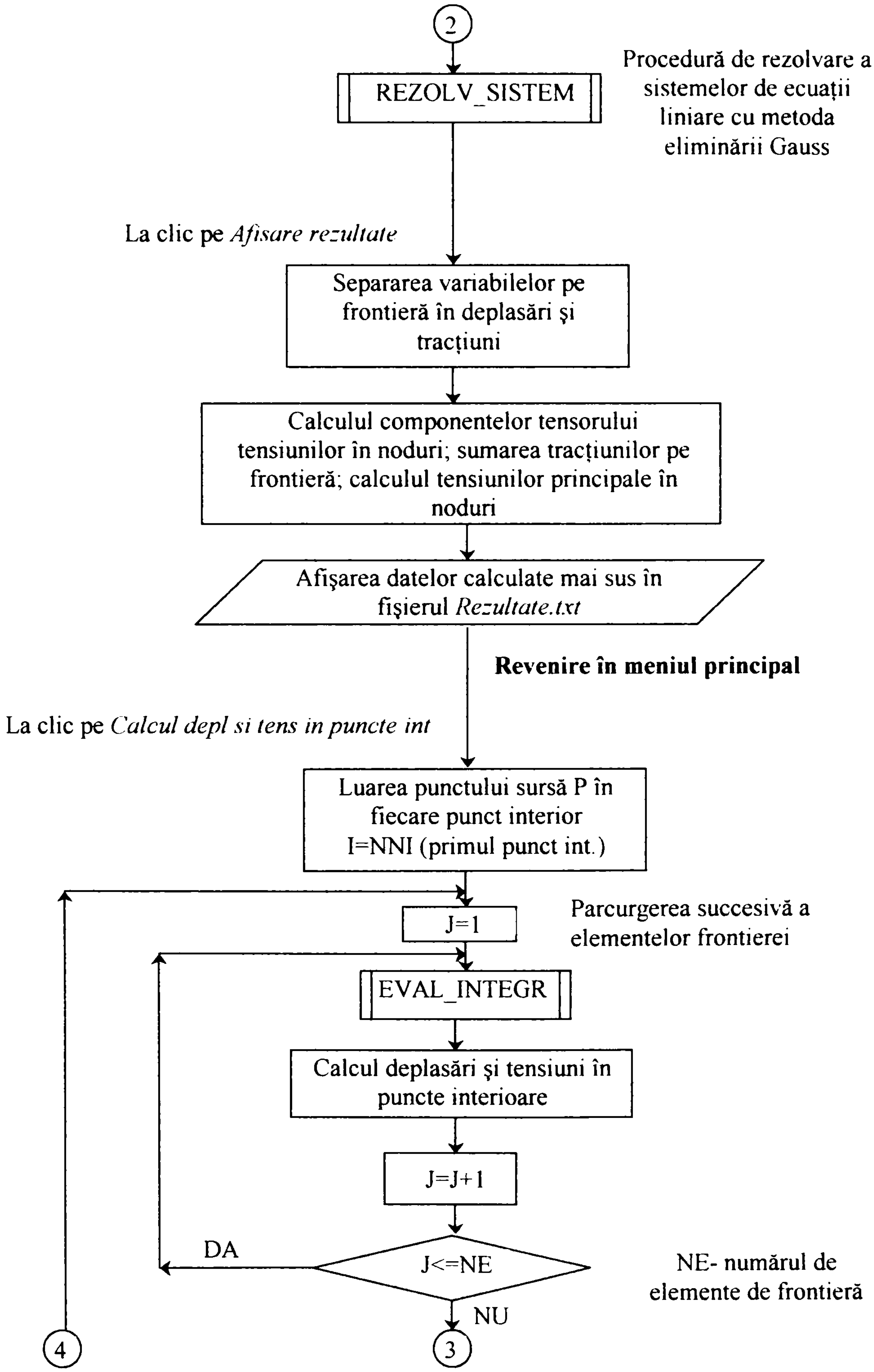
B) o formă cu meniul prezentat în **Fig. 3.8.4**, formă care conţine la rândul ei câte o procedură pentru fiecare opţiune de meniu:

- **INTRO_DAT**, este procedura apelată la clic pe subopţiunea *din fisierul Intrare date.txt* a meniului *Introducere date*, şi ea face citirea datelor din acest fişier text şi calculul câtorva constante de material;
- **ASAMBL_SISTEM**, este procedura apelată la clic pe subopţiunea *Asamblare sistem* din meniul *Calcule*; ea are rolul de a calcula valorile coeficienţilor de influenţă din matricile **[H]** şi **[G]** – v. ecuaţiile (3.3.34, 3.3.49), şi de a forma matricea **[A]** şi vectorul termenilor liberi **[F]** (notat cu **[B]** în program) al sistemului de ecuaţii algebrice liniare (3.3.35).
- **P_INT**, se apelează la alegerea opţiunii *Calcul depl si tens in puncte int* a meniului *Calcule*, şi ea face, aşa cum spune şi denumirea ei, calculul deplasărilor şi tensiunilor în puncte interioare domeniului soluţiei.
- **IESIRE_DAT**, se apelează la alegerea opţiunii *Afisare rezultate* şi ea face separarea variabilelor nodale în deplasări şi tensiuni nodale, calculează componentele tensorului tensiunilor în nodurile frontierei, precum şi tensiunile principale, direcţiile principale şi tensiunile echivalente în nodurile frontierei, salvând totodată aceste rezultate în fişierul text de iesire *Rezultate.txt*.

Schematic, algoritmul programului ar putea fi redat ca în **Fig. 3.8.5**.




1
La clic pe *Introducere date – din fișierul Intrare_date.txt*
Citirea din fişierul text *Intrare_date.txt* a datelor referitoare la tipul analizei, numărul axelor de simetrie, şi afişarea acestor date şi în fişierul *Rezultate.txt*
Calculul constantelor de material
Citirea datelor de intrare cu privire la: nodurile de pe frontieră, punctele interioare, elementele de conectare, deplasări şi tracțiuni impuse pe frontieră, şi afişarea acestor date şi în fişierul *Rezultate.txt*
Revenire în meniul principal
La clic pe *Calcule – Asamblare sistem*
Initializarea cu zero a matricei sistemului şi a vectorului necunoscutelor
Stabilirea numărului de cicluri pentru bucla de simetrie
I=1
urmează parcurgerea succesivă a nodurilor şi a elementelor frontierei
Formarea matricei sistemului de ecuații şi a vectorului termenilor liberi prin impunerea condițiilor pe frontieră
EVAL_INTEGR
I=I+1
DA
I<=NN
NN- numărul de noduri
NU
2


2
REZOLV_SISTEM
Procedură de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare cu metoda eliminării Gauss
La clic pe Afișare rezultate
Separarea variabilelor pe frontieră în deplasări și tracțiuni
Calculul componentelor tensorului tensiunilor în noduri; sumarea tracțiunilor pe frontieră; calculul tensiunilor principale în noduri
Afișarea datelor calculate mai sus în fișierul Rezultate.txt
Revenire în meniul principal
La clic pe Calcul depl si tens in puncte int
Luarea punctului sursă P în fiecare punct interior I=NNI (primul punct int.)
J=1
Parcurgerea succesivă a elementelor frontierei
EVAL_INTEGR
Calcul deplasări și tensiuni în puncte interioare
J=J+1
DA
J<=NE
NE- numărul de elemente de frontieră
NU
4
3

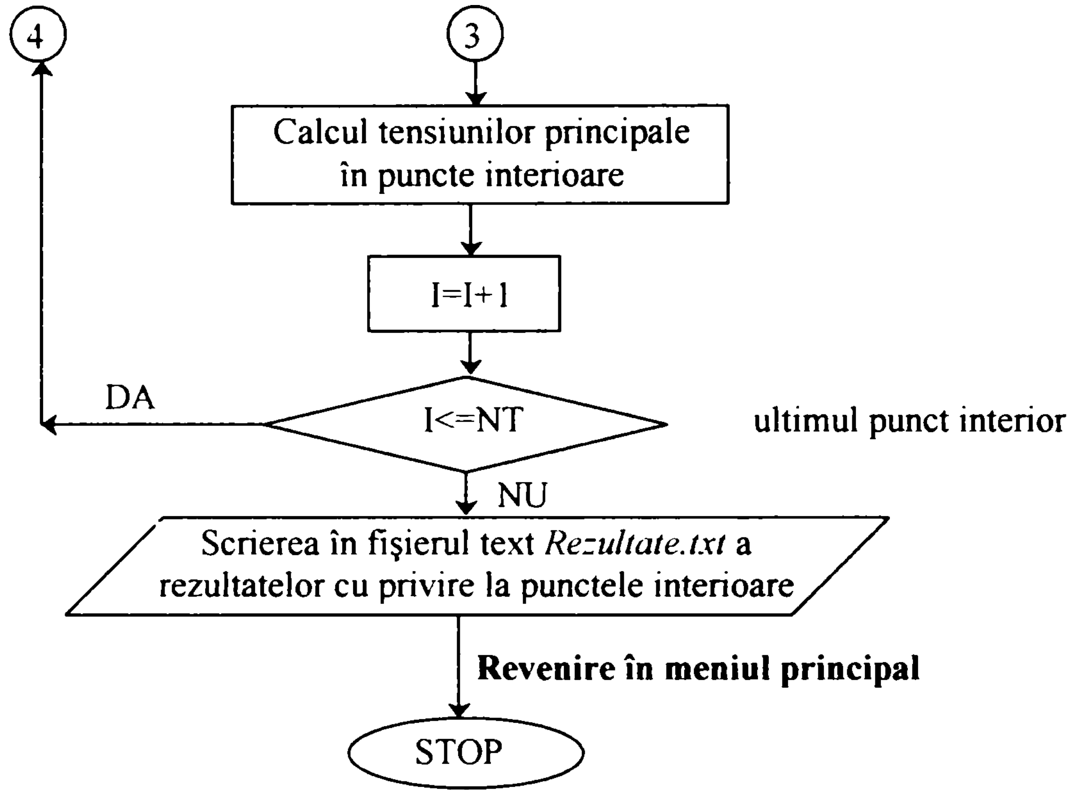


Fig. 3.8.5

Ca şi exemplu numeric s-a considerat o placă plană, de formă pătrată solicitată la compresiune şi fixată pe două suprafeţe laterale între doi pereţi consideraţi ca rigide nedeformabile (v. **Fig. 3.8.6 a**) . Placa se află într-o stare plană de tensiune şi prezintă simetrie geometrică şi de încărcare. Din acest motiv s-a discretizat numai un sfert din frontiera plăcii (**Fig.3.8.6. b**). Dimensiunile acesteia sunt 200x200 mm iar grosimea unitară. Proprietăţile elastice ale materialului sunt: modulul de elasticitate longitudinal E=2000 Mpa, iar coeficientul de contracţie transversală $\nu = 0.3$. S-a considerat că placa este supusă la o solicitare de compresiune uniformă cu tensiunea $\sigma_{xx} = 100$ Mpa. Frontiera piesei a fost împărţită în 4 elemente delimitate de 6 noduri, condiţiile de frontieră fiind: tensiuni cunoscute în nodurile 1,2 şi 3 iar în nodurile 4,5 şi 6 s-a impus imposibilitatea deplasării acestor noduri pe direcţia axei Oy.

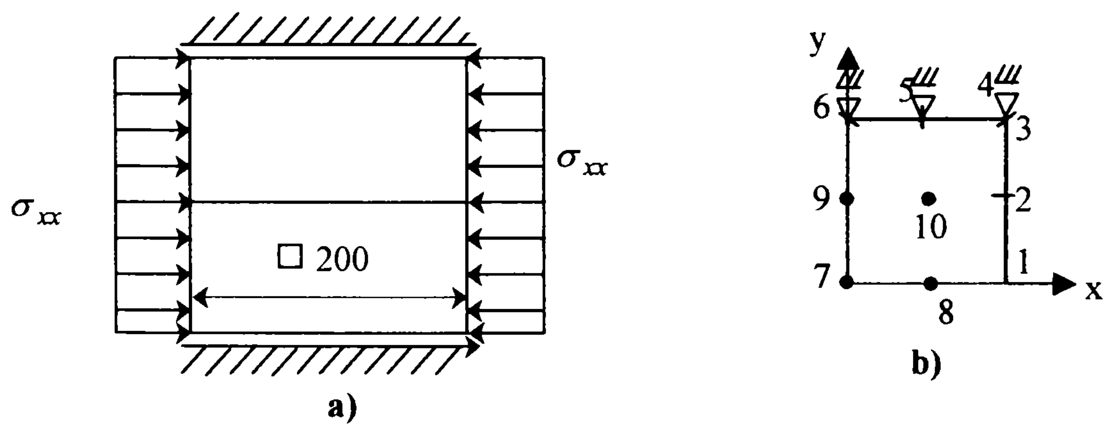


Fig. 3.8.6

Codul sursă al programului realizat în limbajul Visual Basic, resp. fişierele de intrare şi de ieşire date sunt date în continuare:

Cod sursă al programului de element de frontieră pentru probleme bidimensionale

Module 1:

```
Public Const MAXDIM = 400
Public X(0 To MAXDIM) As Single, Y(0 To MAXDIM) As Single, Idub(0 To MAXDIM) As Integer
Public Isim(1 To MAXDIM) As Integer, D(1 To 2, 1 To 2) As Single
Public Inc(1 To MAXDIM, 1 To 2) As Integer, Elung(1 To MAXDIM) As Single
Public CoG(1 To 6, 1 To 3) As Single, Pon(1 To 6, 1 To 3) As Single
Public ICFr(1 To MAXDIM) As Integer, Ct(1 To 12) As Single
Public Trac(1 To MAXDIM) As Single, Depl(1 To MAXDIM) As Single
Public Tip_problema As Integer, NREC As Integer
Public Coef_Poisson As Single, modul_E As Single, modul_G As Single
Public H(1 To 2, 1 To 4) As Single, G(1 To 2, 1 To 4) As Single
Public HP(1 To 3, 1 To 4) As Single, GP(1 To 3, 1 To 4) As Single
Public HT(1 To 2) As Single, GT(1 To 2) As Single
Public NN As Integer, NE As Integer, NT As Integer, ISym As Integer
Public A(1 To MAXDIM, 1 To MAXDIM) As Single, XNEC(1 To MAXDIM) As Single, B(1 To MAXDIM) As
Single
Public Ten(1 To MAXDIM / 2, 1 To 8) As Single
Public Den_Probl As String, PI As Single
Public J As Integer, ising As Integer, I As Integer, Xp As Single, Yp As Single, ksim As Integer, iinc As Integer, isf
As Integer
Public iend As Integer

Sub main()
  PI = 4 * Atn(1)
'Coordonate si ponderi Gauss
  CoG(1, 3) = -0.9324695142
  CoG(2, 3) = -0.661209386466
  CoG(3, 3) = -0.238619186083
  CoG(4, 3) = -CoG(3, 3)
  CoG(5, 3) = -CoG(2, 3)
  CoG(6, 3) = -CoG(1, 3)
  Pon(1, 3) = 0.171324492379
  Pon(2, 3) = 0.360761573048
  Pon(3, 3) = 0.467913934572
  Pon(4, 3) = Pon(3, 3)
  Pon(5, 3) = Pon(2, 3)
  Pon(6, 3) = Pon(1, 3)
  CoG(1, 2) = -0.861136311594
  CoG(2, 2) = -0.339981043584
  CoG(3, 2) = -CoG(2, 2)
  CoG(4, 2) = -CoG(1, 2)
  Pon(1, 2) = 0.347854845137
  Pon(2, 2) = 0.652145154862
  Pon(3, 2) = Pon(2, 2)
  Pon(4, 2) = Pon(1, 2)
  CoG(1, 1) = -0.577350269189
  CoG(2, 1) = -CoG(1, 1)
  Pon(1, 1) = 1
  Pon(2, 1) = 1

'Valorile variabilei Kronecker delta
  D(1, 1) = 1: D(2, 2) = 1: D(1, 2) = 0: D(2, 1) = 0

'Deschiderea fisierelor de intrare si de iesire
  Open "D:\cornelia\coco\doctorat\programe\coco\mefr\Intr_date.txt" For Input As #2
  Open "D:\cornelia\coco\doctorat\programe\coco\mefr\Rezultate.txt" For Output As #3
  Form1.Show
End Sub
```

```
Sub Eval_Integr(JA As Integer, ising As Integer, IA As Integer, Xp As Single, Yp As Single, isime As Integer,
iinc As Integer, isf As Integer)
'Evaluarea numerica sau analitica a integralelor pe elementele de frontiera
'Formarea submatricelor H si G a coeficientilor de influenta

Dim RNXY(1 To 2) As Single, DRXY(1 To 2) As Single
Dim UIJK(1 To 2, 1 To 2, 1 To 2) As Single, TIJK(1 To 2, 1 To 2, 1 To 2) As Single
Dim UIJ(1 To 2, 1 To 2) As Single, TIJ(1 To 2, 1 To 2) As Single
Dim FFor(1 To 2) As Single
Dim W As Integer
Dim V As Integer

'Initializarea matricilor H, G, HT, GT si HP, GP cu zero
For k = 1 To 2
 HT(k) = 0
 GT(k) = 0
 For W = 1 To 4
  H(k, W) = 0
  G(k, W) = 0
 Next W
Next k
For k = 1 To 3
 For W = 1 To 4
  HP(k, W) = 0
  GP(k, W) = 0
 Next W
Next k
ki = Inc(JA, 1)
kt = Inc(JA, 2)
difx = X(kt) - X(ki)
dify = Y(kt) - Y(ki)

'Stabilirea nodului in care se afla singularitatea
If ising <> 4 Then
 If isime = 1 Or Isim(IA) = (isime - 1) Then
  If IA = ki Or IA = Idub(ki) Then ising = 1
  If IA = kt Or IA = Idub(kt) Then ising = 2
 End If
End If

'Stabilirea numarului de puncte de integrare la 2, 4 sau 6
xyj = 0.5 * Sqr((2 * Xp - X(ki) - X(kt)) ^ 2 + (2 * Yp - Y(ki) - Y(kt)) ^ 2) / Elung(JA)
npi = 4
If xyj > 5.5 Then npi = 2
If xyj <= 1.5 Then npi = 6
inp = npi / 2

'Valorile cosinusurilor directoare ale normalei la frontiera domeniului solutiei
RNXY(1) = dify / Elung(JA)
RNXY(2) = -difx / Elung(JA)

'Integrare numerica
For kk = 1 To npi
 Xq = 0.5 * (1 + CoG(kk, inp)) * difx + X(ki) - Xp
 Yq = 0.5 * (1 + CoG(kk, inp)) * dify + Y(ki) - Yp
 r = Sqr(Xq ^ 2 + Yq ^ 2)

'Vectorul functiilor de forma pt. elemente liniare
 FFor(1) = 0.25 * (1 - CoG(kk, inp)) * Elung(JA)
 FFor(2) = 0.25 * (1 + CoG(kk, inp)) * Elung(JA)
 DRXY(1) = Xq / r
```

```
 DRXY(2) = Yq / r
 drdn = DRXY(1) * RNXY(1) + DRXY(2) * RNXY(2)
 For V = 1 To 2
  For W = 1 To 2
   UIJ(V, W) = -Ct(1) * (Ct(2) * Log(r) * D(V, W) - DRXY(V) * DRXY(W))
   TIJ(V, W) = -Ct(3) * ((Ct(4) * D(V, W) + 2 * DRXY(V) * DRXY(W)) * drdn + Ct(4) * (DRXY(W) *
RNXY(V) - DRXY(V) * RNXY(W))) / r
  Next W
 Next V
 For k = 1 To 2
  ic = 0
  For kj = 1 To 2
   For jj = 1 To 2
    ic = ic + 1
    If ising <> kj Then H(k, ic) = H(k, ic) + TIJ(k, jj) * FFor(kj) * Pon(kk, inp)
    G(k, ic) = G(k, ic) + UIJ(k, jj) * FFor(kj) * Pon(kk, inp)
   Next jj
  Next kj
 Next k
```

'Integrare numerica - Deplasari si tensiuni in puncte interioare

```
If ising = 4 Then
 For k = 1 To 2
  For W = k To 2
   For V = 1 To 2
    UIJK(k, W, V) = Ct(3) * (Ct(4) * (DRXY(W) * D(V, k) + DRXY(k) * D(V, W) - DRXY(V) * D(k, W)) + 2 *
DRXY(k) * DRXY(W) * DRXY(V)) / r
    b1 = 2 * drdn * (Ct(4) * DRXY(V) * D(k, W) + Coef_Poisson * (DRXY(W) * D(k, V) + DRXY(k) * D(W,
V)) - 4 * DRXY(V) * DRXY(W) * DRXY(k))
    b2 = 2 * Coef_Poisson * (RNXY(k) * DRXY(W) * DRXY(V) + RNXY(W) * DRXY(V) * DRXY(k))
    b3 = Ct(4) * (2 * RNXY(V) * DRXY(k) * DRXY(W) + RNXY(W) * D(k, V) + RNXY(k) * D(W, V))
    TIJK(k, W, V) = Ct(6) * (b1 + b2 + b3 - Ct(7) * RNXY(V) * D(k, W)) / r ^ 2
   Next V
  Next W
 Next k
 IL = 0
 For k = 1 To 2
  For W = k To 2
   ic = 0
   IL = IL + 1
   For ik = 1 To 2
    For jk = 1 To 2
     ic = ic + 1
     HP(IL, ic) = HP(IL, ic) + TIJK(k, W, jk) * FFor(ik) * Pon(kk, inp)
     GP(IL, ic) = GP(IL, ic) + UIJK(k, W, jk) * FFor(ik) * Pon(kk, inp)
    Next jk
   Next ik
  Next W
 Next k
End If
Next kk
If ising <= 2 Then
```

'Integrare analitica

```
 ctx = Ct(5) * difx * difx / Elung(JA)
 cty = Ct(5) * dify * dify / Elung(JA)
 ctxy = Ct(5) * difx * dify / Elung(JA)
 cl1 = Ct(12) * Elung(JA) * (1.5 - Log(Elung(JA)))
 cl2 = Ct(12) * Elung(JA) * (0.5 - Log(Elung(JA)))
 G(1, 1) = ctx
 G(1, 2) = ctxy
 G(1, 3) = ctx
```

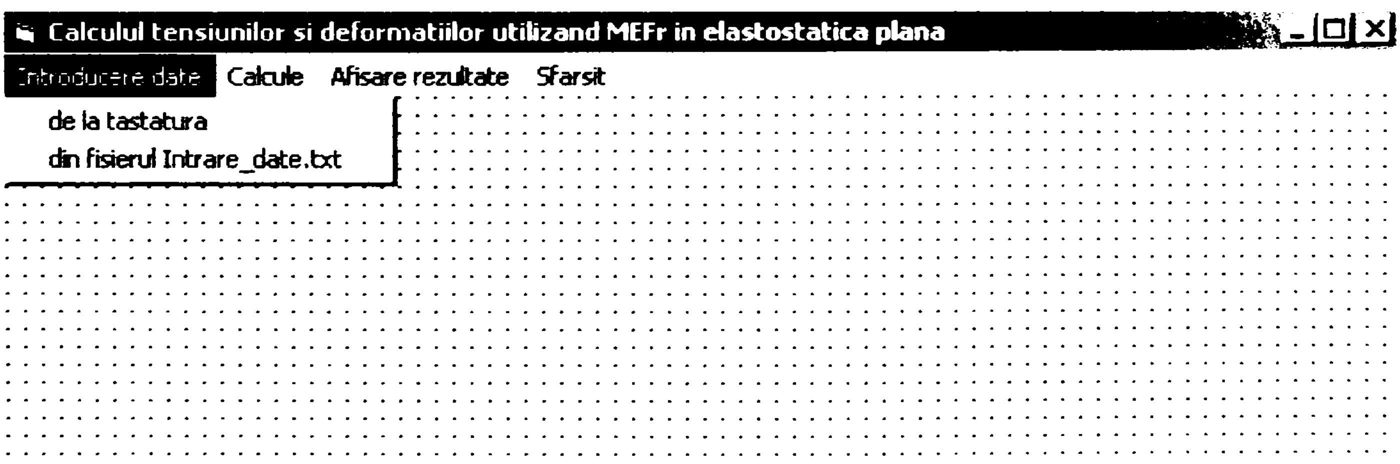
```
  G(1, 4) = ctxy
  G(2, 1) = ctxy
  G(2, 2) = cty
  G(2, 3) = ctxy
  G(2, 4) = cty
  If ising = 1 Then
   G(1, 1) = G(1, 1) + cl1
   G(1, 3) = G(1, 3) + cl2
   G(2, 2) = G(2, 2) + cl1
   G(2, 4) = G(2, 4) + cl2
  Else
   G(1, 1) = G(1, 1) + cl2
   G(1, 3) = G(1, 3) + cl1
   G(2, 2) = G(2, 2) + cl2
   G(2, 4) = G(2, 4) + cl1
  End If
End If
If isime <> 1 Then
  For V = iinc To isf
   For W = 1 To 4
    H(V, W) = -H(V, W)
    G(V, W) = -G(V, W)
   Next W
  Next V
  If ising = 4 And isime <> 4 Then
   For W = 1 To 4
    HP(2, W) = -HP(2, W)
    GP(2, W) = -GP(2, W)
   Next W
  End If
End If
MsgBox ("s-a efectuat integrarea!!")
End Sub
```

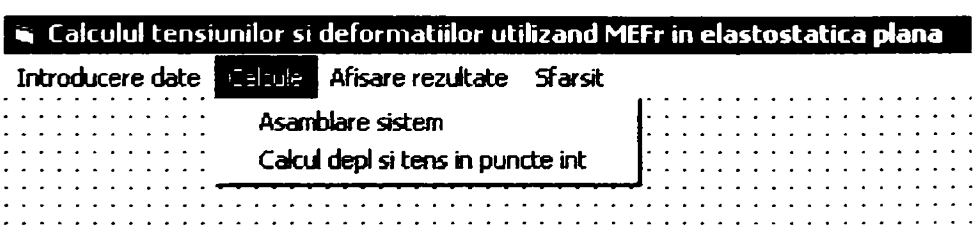
Sub rezolv_sistem(NREC As Integer, A() As Single, B() As Single, XNEC() As Single, eroare As Integer)

```
n1 = NREC - 1
For I = 1 To n1
 i1 = I
 For i2 = I To NREC
  If Abs(A(i1, I)) < Abs(A(i2, I)) Then i1 = i2
 Next i2
 If A(i1, I) <> 0 Then
  If i1 <> 1 Then
    For J = 1 To NREC
     Z = A(I, J)
     A(I, J) = A(i1, J)
     A(i1, J) = Z
    Next J
    Z = B(I)
    B(I) = B(i1)
    B(i1) = Z
  End If
  Z = A(I, I)
  For J = 1 To NREC
   A(I, J) = A(I, J) / Z
  Next J
  B(I) = B(I) / Z
  i1 = I + 1
  For J = i1 To NREC
   If A(J, I) <> 0 Then
    Z = A(J, I)
    For k = I To NREC
```

```
      A(J, k) = A(J, k) - Z * A(I, k)
     Next k
     B(J) = B(J) - B(I) * Z
    End If
  Next J
 Else
  MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat!")
  eroare = 1
  GoTo 200
 End If
Next I
If A(NREC, NREC) <> 0 Then
 XNEC(NREC) = B(NREC) / A(NREC, NREC)
 For I = 1 To n1
  XNEC(NREC - I) = B(NREC - I)
  For k = 1 To I
   XNEC(NREC - I) = XNEC(NREC - I) - A(NREC - 1, NREC - I + k) * XNEC(NREC - I + k)
  Next k
 Next I
 eroare = 0
Else
 eroare = NREC
 MsgBox ("Sistem incompatibil sau nedeterminat; matrice singulara in linia" & eroare)
 GoTo 200
End If
200 End Sub
```

Frmmeniu






```
Dim citire As String, eroare As Integer
```

Private Sub mnuafis_Click()

```
'Separarea variabilelor pe frontiera
nn2 = 2 * NN
For I = 1 To nn2
 If ICFr(I) <> 0 Then XNEC(I) = XNEC(I) * Ct(8)
Next I
For k = 1 To nn2
 If ICFr(k) = 0 Then
```

```
    Depl(k) = XNEC(k)
  Else
    Depl(k) = Trac(k)
    Trac(k) = XNEC(k)
  End If
Next k

'Salvarea datelor de iesire
Print #3, ""
Print #3, "Deplasari si sarcini in noduri"
Print #3, "*******************************"
Print #3, "Nod", "u", "v", "Tx", "Ty"
For ic = 1 To NN
  Print #3, ic, Depl(2 * ic - 1), Depl(2 * ic), Trac(2 * ic - 1), Trac(2 * ic)
Next ic
For k = 1 To NT
  For J = 1 To 8
    Ten(k, J) = 0
  Next J
Next k
Tx = 0
Ty = 0

'Calculul componentelor tensorului tensiunilor in noduri
'Sumarea tractiunilor pe frontiera
For J = 1 To NE
  ki = Inc(J, 1)
  kt = Inc(J, 2)
  If ISym <> 2 Then
    Tx = Tx + (Trac(2 * ki - 1) + Trac(2 * kt - 1)) * Elung(J) / 2
    Ty = Ty + (Trac(2 * ki) + Trac(2 * kt)) * Elung(J) / 2
  End If
  rnx = (Y(kt) - Y(ki)) / Elung(J)
  rny = (X(ki) - X(kt)) / Elung(J)
  For jn = 1 To 2
    ic = Inc(J, jn)
    fct = 2
    If Idub(ic) <> 0 Or Isim(ic) <> 0 Then fct = 1
    t12 = Trac(2 * ic) * rnx - Trac(2 * ic - 1) * rny
    t22 = Trac(2 * ic - 1) * rnx + Trac(2 * ic) * rny
    eps = (rny * Depl(2 * ki - 1) - rnx * Depl(2 * ki) - rny * Depl(2 * kt - 1) + rnx * Depl(2 * kt)) / Elung(J)
    tii = Ct(9) * t22 + Ct(8) * eps
    c1 = rnx ^ 2
    c2 = rny ^ 2
    c3 = rnx * rny
    Ten(ic, 1) = Ten(ic, 1) + (t11 * c2 + t22 * c1 - 2 * t12 * c3) / fct
    Ten(ic, 2) = Ten(ic, 2) + (t11 * c1 + t22 * c2 + 2 * t12 * c3) / fct
    Ten(ic, 3) = Ten(ic, 3) + ((t22 - t11) * c3 + t12 * (c1 - c2)) / fct
    Ten(ic, 4) = Ct(11) * (Ten(ic, 1) + Ten(ic, 2))
    If Isim(ic) <> 0 Then Ten(ic, 3) = 0

'Tensiuni principale in noduri
    c1 = 0.5 * (Ten(ic, 1) + Ten(ic, 2))
    c2 = 0.5 * Sqr((Ten(ic, 1) - Ten(ic, 2)) ^ 2 + 4 * Ten(ic, 3) ^ 2)
    Ten(ic, 5) = c1 + c2
    Ten(ic, 6) = c1 - c2
    Ten(ic, 7) = Sqr(0.5 * ((Ten(ic, 5) - Ten(ic, 6)) ^ 2 + (Ten(ic, 5) - Ten(ic, 4)) ^ 2 + (Ten(ic, 6) - Ten(ic, 4)) ^ 2))
    Ten(ic, 8) = 90
    If Abs(Ten(ic, 1) - Ten(ic, 2)) >= 0.0001 Then
      Ten(ic, 8) = 90 * Atn(2 * Ten(ic, 3) / (Ten(ic, 1) - Ten(ic, 2))) / PI
    End If
  Next jn
```

```
Next J
If ISym <> 0 Then
 If ISym = 1 Then Ty = 0
End If
Print #3, "Suma tractiunilor pe frontiera:"
Print #3, "Suma trac. Txx=", Tx, "Suma trac. Tyy=", Ty
Print #3, ""
Print #3, "Tensiuni in noduri"
Print #3, "******************"
Print #3, "Nod", "Sxx", "Syy", "Sxy", "Szz"
For I = 1 To NN
 Print #3, I,
 For J = 1 To 4
  Print #3, Ten(I, J),
 Next J
 Print #3,
Next I
Print #3,
Print #3, "Tensiuni principale in noduri"
Print #3, "*****************************"
Print #3, "Nod", "Sigma 1", "Sigma 2", "Sigma ech.", "Alfa"
For I = 1 To NN
 Print #3, I,
 For J = 5 To 8
  Print #3, Ten(I, J),
 Next J
 Print #3,
Next I
End Sub

Private Sub ASAMBL_SISTEM_Click()
'Parcurgerea succesiva a nodurilor si a elementelor frontierei
'Formarea matricei sistemului de ecuatii si a vectorului termenilor
'liberi prin impunerea conditiilor pe frontiera
Dim DIAGE(1 To 2, 1 To 2) As Single, J As Integer, I As Integer, ksim As Integer
NREC = 2 * NN
'Initializarea cu zero a matricei sistemului si a vectorului necunoscutelor
For k = 1 To NREC
 XNEC(k) = 0
 For J = 1 To NREC
  A(k, J) = 0
 Next J
Next k

'Stabilirea numarului de cicluri pt. bucla de simetrie
iend = 1
If ISym = 1 Then iend = 2
If ISym = 2 Then iend = 4

'Bucla de simetrie
For ksim = 1 To iend
 If ksim = 4 Then
  iinc = 1
  isf = 2
 Else
  If ksim = 2 Then
   iinc = 4 - ksim
   isf = iinc
  End If
 End If

'Luarea punctului sursa P in fiecare nod al frontierei
```

```
  For I = 1 To NN
   Print "Simetrie:" & ksim, "nod:" & I
   Xp = X(I)
   Yp = Y(I)
   If ksim = 2 Or ksim = 4 Then Yp = -Yp
   If ksim > 3 Then Xp = -Xp

'Initializarea cu zero a elementelor diagonale
   For ki = 1 To 2
    For kj = 1 To 2
     DIAGE(ki, kj) = 0
    Next kj
   Next ki
   For J = 1 To NE
    ising = 3

    Eval_Integr J, ising, I, Xp, Yp, ksim, iinc, isf

    For k = 1 To 2
     jj = 2 * (I - 1) + k
     inn = 0
     For IL = 1 To 2
      For ICOL = 1 To 2
       inn = inn + 1
       ic = 2 * Inc(J, IL) + ICOL - 2
       If ICFr(ic) <> 0 Then
        A(jj, ic) = A(jj, ic) - G(k, inn) * Ct(8)
        XNEC(jj) = XNEC(jj) - H(k, inn) * Trac(ic)
       Else
        A(jj, ic) = A(jj, ic) + H(k, inn)
        XNEC(jj) = XNEC(jj) + G(k, inn) * Trac(ic)
       End If
       If ksim = 2 And ICOL = 2 Then H(k, inn) = -H(k, inn)
       If ksim = 3 And ICOL = 1 Then H(k, inn) = -H(k, inn)
       If ksim = 4 Then H(k, inn) = -H(k, inn)
       DIAGE(k, ICOL) = DIAGE(k, ICOL) - H(k, inn)
      Next ICOL
     Next IL
    Next k
   Next J

'Coeficienti diagonali
   jj = 2 * I - 1
   If ICFr(jj) = 0 Then
    A(jj, jj) = A(jj, jj) + DIAGE(1, 1)
    A(jj + 1, jj) = A(jj + 1, jj) + DIAGE(2, 1)
   Else
    XNEC(jj) = XNEC(jj) - DIAGE(1, 1) * Trac(jj)
    XNEC(jj + 1) = XNEC(jj + 1) - DIAGE(2, 1) * Trac(jj)
   End If
   jj = 2 * I
   If ICFr(jj) = 0 Then
    A(jj - 1, jj) = A(jj - 1, jj) + DIAGE(1, 2)
    A(jj, jj) = A(jj, jj) + DIAGE(2, 2)
   Else
    XNEC(jj - 1) = XNEC(jj - 1) - DIAGE(1, 2) * Trac(jj)
    XNEC(jj) = XNEC(jj) - DIAGE(2, 2) * Trac(jj)
   End If
  Next I
Next ksim
MsgBox ("sfarsit rutina sistem")
For I = 1 To NREC
```

```
  B(I) = XNEC(I)
  XNEC(I) = 0
Next I
MsgBox ("nrec=" & NREC)
rezolv_sistem NREC, A, B, XNEC, eroare
If eroare = 0 Then
  MsgBox ("S-a rezolvat sistemul de ecuatii algebrice prin metoda eliminarii a lui Gauss")
  For I = 1 To NREC
    MsgBox ("xnec" & I & "=" & XNEC(I))
  Next I
  MsgBox ("Dati click pe optiunea Afisare rezultate pentru a obtine fisierul de iesire Rezultate.txt!")
End If
End Sub

Private Sub INTRO_DAT_Click()
  Input #2, Den_Probl
  Print #3, Den_Probl
  Print #3, "=========================================="

'Date referitoare la tipul analizei
  NP = 0
  NDE = 0
  NTR = 0
  Input #2, ISym, Tip_problema, Coef_Poisson, modul_E
  maxnod = MAXDIM/2
  maxele = MAXDIM/2
  For I = 1 To maxnod
    Isim(2 * I - 1) = 0: Isim(2 * I) = 0
    ICFr(2 * I - 1) = 0: ICFr(2 * I) = 0
    Depl(2 * I - 1) = 0: Depl(2 * I) = 0
    Trac(2 * I - 1) = 0: Trac(2 * I) = 0
  Next I
  Print #3, "Numarul de axe de simetrie", "ISYM=" & ISym
  Print #3, "Modul de elasticitate", "E=" & modul_E
  Print #3, "Coeficientul lui Poisson", "P=" & Coef_Poisson
  modul_G = modul_E / (2 * (1 + Coef_Poisson))
  Ct(11) = Coef_Poisson
  If Tip_problema = 1 Then
     Coef_Poisson = Coef_Poisson / (1 + Coef_Poisson)
     Ct(11) = 0
     Print #3, "Stare plana de tensiune"
   Else
     Print #3, "Stare plana de deformatie"
  End If

'Calculul constantelor de material
  Ct(2) = 3 - 4 * Coef_Poisson
  Ct(3) = 1 / (4 * PI * (1 - Coef_Poisson))
  Ct(4) = 1 - 2 * Coef_Poisson
  Ct(6) = 2 * Ct(3) * modul_G
  Ct(7) = 1 - 4 * Coef_Poisson
  Ct(1) = Ct(3) / 2 / modul_G
  Ct(5) = Ct(1) / 2
  Ct(8) = 2 * modul_G / (1 - Coef_Poisson)
  Ct(9) = Coef_Poisson / (1 - Coef_Poisson)
  Ct(10) = (2 - Coef_Poisson) / (1 - Coef_Poisson)
  Ct(12) = Ct(5) * Ct(2)

'Citirea datelor de intrare
 Do
  Input #2, citire
  Select Case UCase(citire)
```

```
  Case "NODURI PE FRONTIERA"
    NN = 0
    For I = 1 To maxnod
      Input #2, k
      Input #2, X(k)
      Input #2, Y(k)
      Input #2, Idub(k)
      'Print #3, k, X(k), Y(k), Idub(k)
      If k = 0 Then Exit For
      NN = NN + 1
      If (X(k) = 0 And ISym = 2) Then Isim(k) = 2
      If (Y(k) = 0 And ISym > 0) Then Isim(k) = 1
    Next I
  Case "PUNCTE INTERIOARE"
    NNI = NN + 1
    For I = NNI To MAXDIM
      Input #2, k
      Input #2, X(k)
      Input #2, Y(k)
      'Print #3, k, X(k), Y(k)
      If k = 0 Then Exit For
      If (X(k) = 0 And ISym = 2) Then Isim(k) = 2
      If (Y(k) = 0 And ISym > 0) Then Isim(k) = 1
      If ((X(k) = 0 And Y(k) = 0) And ISym = 2) Then Isim(k) = 3
      NP = NP + 1
    Next I
  Case "ELEMENTE CONECTARE"
    NE = 0
    For I = 1 To maxele
      Input #2, ki, nod1, nod2
      If ki = 0 Then Exit For
      NE = NE + 1
      Inc(ki, 1) = nod1
      Inc(ki, 2) = nod2
      Elung(ki) = Sqr((X(nod2) - X(nod1)) ^ 2 + (Y(nod2) - Y(nod1)) ^ 2)
    Next I
  Case "DEPLASARI IMPUSE PE FRONTIERA"
    For I = 1 To maxnod
      Input #2, inod, dxx, dyy, ixx, iyy
      If inod = 0 Then Exit For
      NDE = NDE + 1
      Trac(2 * inod - 1) = dxx
      Trac(2 * inod) = dyy
      ICFr(2 * inod - 1) = ixx
      ICFr(2 * inod) = iyy
    Next I
  Case "TRACTIUNI IMPUSE PE FRONTIERA"
    For I = 1 To maxnod
      Input #2, inod, txx, tyy
      If inod = 0 Then Exit For
      NTR = NTR + 1
      Trac(2 * inod - 1) = txx
      Trac(2 * inod) = tyy
    Next I
 End Select
Loop Until UCase(citire) = "END"

'Salvarea datelor de intrare in fisierul de iesire
Print #3, "Numarul de elemente", "NE=", NE
Print #3, "Numarul de noduri", "NN=", NN
Print #3, "Numarul de puncte", "NP=", NP
Print #3, "=================================================================="
```

```
Print #3, "Coordonatele nodurilor frontierei"
Print #3, "=============================================================="
Print #3, "Nod", "X", "Y", "Dublu simetrie"
For k = 1 To NN
 Print #3, k, X(k), Y(k), Idub(k), Isim(k)
Next k
NT = NN + NP
If NP > 0 Then
  Print #3, "=============================================================="
  Print #3, "Coordonatele punctelor interioare"
  Print #3, "=============================================================="
  Print #3, "Punct", "X", "Y", "Simetrie"
  For I = NN1 To NT
   Print #3, I, X(I), Y(I), Isim(I)
  Next I
End If
Print #3, "=============================================================="
Print #3, "Conectarea elementelor"
Print #3, "=============================================================="
Print #3, "Element", "Inceput  -  Sfarsit", "Lungime"
For I = 1 To NE
 Print #3, I, Inc(I, 1), Inc(I, 2), Elung(I)
Next I
If NDE > 0 Then
 Print #3, "=============================================================="
 Print #3, "Se prescriu deplasari in nodurile:"
 Print #3, "=============================================================="
 Print #3, "Nod", "Uxx", "Uyy", "Cond_front.", "Cond_front."
 For I = 1 To NN
  If ICFr(2 * I - 1) <> 0 Or ICFr(2 * I) <> 0 Then
    Print #3, I, Trac(2 * I - 1), Trac(2 * I), ICFr(2 * I - 1), ICFr(2 * I)
  End If
 Next I
End If
If NTR > 0 Then
 Print #3, "=============================================================="
 Print #3, "Se prescriu sarcini in nodurile:"
 Print #3, "=============================================================="
 Print #3, "Nod", "Txx", "Tyy"
 For I = 1 To NN
  If ICFr(2 * I - 1) = 0 And ICFr(2 * I) = 0 Then
   If Trac(2 * I - 1) <> 0 Or Trac(2 * I) <> 0 Then
    Print #3, I, Trac(2 * I - 1), Trac(2 * I)
   End If
  End If
 Next I
End If
If NN > maxnod Then
  MsgBox ("Numar prea mare de noduri:" & NN & ">" & maxnod)
End If
If NT > MAXDIM Then
  MsgBox ("Numar de noduri si puncte mai mare de 400: NT=" & NT)
End If
eroare = 0
If NN > maxnod Or NE > maxele Or NT > MAXDIM Then
 MsgBox " Au aparut erori in fisierul de intrare!!!"
 End
End If
MsgBox ("OK- Citirea datelor! Dati click pe optiunea Calcule pentru continuare!")
End Sub
```

Private Sub P_INT_Click()

```
Dim u(1 To 2)
 ising = 4
 nni = NN + 1
 Print #3, "Deplasari si tensiuni in puncte interioare"
 Print #3, "Punct", "Uy", "Ux", "Sxx", "Syy", "Sxy", "Szz"
 For I = nni To NT
   u(1) = 0: u(2) = 0
   For J = 1 To 4
     Ten(I, J) = 0
   Next J
' Bucla de simetrie
   For ksim = 1 To iend
     Xp = X(I)
     Yp = Y(I)
     If ksim = 2 Or ksim = 4 Then Yp = -Yp
     If ksim > 3 Then Xp = -Xp
     If ksim = 2 Or ksim = 3 Then
       iinc = 4 - ksim
       isf = iinc
     Else
      If ksim = 4 Then
       iinc = 1
       isf = 2
      End If
     End If
  'Parcurgerea elementelor frontierei
     For J = 1 To NE
      Eval_Integr J, ising, I, Xp, Yp, ksim, iinc, isf
      ' Deplasari si tensiuni in puncte interioare
      For k = 1 To 3
       ij = 0
       For kx = 1 To 2
        For kv = 1 To 2
         ij = ij + 1
         ic = 2 * Inc(J, kx) + kv - 2
         If k < 3 Then u(k) = u(k) - H(k, ij) * Depl(ic) + G(k, ij) * Trac(ic)
         Ten(I, k) = Ten(I, k) - HP(k, ij) * Depl(ic) + GP(k, ij) * Trac(ic)
        Next kv
       Next kx
      Next k
     Next J
   Next ksim
   tx = Ten(1, 2)
   Ten(1, 2) = Ten(1, 3)
   Ten(1, 3) = tx
   c1 = Ten(I, 1) + Ten(I, 2)
   Ten(I, 4) = ci * Ct(11)
  'Tensiuni principale in puncte interioare
   c2 = Sqr((Ten(I, 1) - Ten(I, 2)) ^ 2 + 4 * Ten(I, 3) ^ 2)
   Ten(I, 5) = 0.5 * (c1 + c2)
   Ten(I, 6) = 0.5 * (c1 - c2)
   Ten(I, 7) = Sqr(0.5 * ((Ten(I, 5) - Ten(I, 6)) ^ 2 + (Ten(I, 5) - Ten(I, 4)) ^ 2 + (Ten(I, 6) - Ten(I, 4)) ^ 2))
   Ten(I, 8) = 90
   If Abs(Ten(I, 1) - Ten(I, 2)) >= 0.001 Then Ten(I, 8) = 90 * Atn(2 * Ten(I, 3) / (Ten(I, 1) - Ten(I, 2))) / PI
   Print #3, I, u(1), u(2), Ten(I, 1), Ten(I, 2), Ten(I, 3), Ten(I, 4)
Next I
  'Salvarea datelor pentru puncte interioare
   Print #3, "Tensiuni principale in puncte interioare"
   Print #3, "Punct", "Sigma 1", "Sigma 2", "Sigma echiv.", "Alfa"
   For I = nni To NT
    Print #3, I, Ten(I, 5), Ten(I, 6), Ten(I, 7), Ten(I, 8)
   Next I
```

```
End Sub

Private Sub mnusf_Click()
 Close #2
 Close #3
 End
End Sub
```

Fişierul de introducere a datelor "Intr_date.txt"

```
Placa plana- Elasticitate- Simetrie dubla
2, 1, 0.3, 2000
NODURI pe frontiera
1 100 0 0
2 100 50 0
3 100 100 4
4 100 100 3
5 50 100 0
6 0 100 0
0 0 0 0
PUNCTE interioare
7 0 0
8 50 0
9 0 50
10 50 50
0 0 0
ELEMENTE conectare
1 1 2
2 2 3
3 4 5
4 5 6
0 0 0
DEPLASARI impuse pe frontiera
4 0 0 0 1
5 0 0 0 1
6 0 0 0 1
0 0 0 0 0
TRACTIUNI impuse pe frontiera
1 -100 0
2 -100 0
3 -100 0
0 0 0
END
```

Fisierul de rezultate "Rezultate.txt"

```
Placa plana- Elasticitate- Simetrie dubla
=========================================
Numarul de axe de simetrie   ISYM=2
Modul de elasticitate        E=2000
Coeficientul lui Poisson     P=0,3
Stare plana de tensiune
Numarul de elemente          NE=            4
Numarul de noduri            NN=            6
Numarul de puncte            NP=            4
=============================================================
Coordonatele nodurilor frontierei
=============================================================
Nod           X             Y             Dublu simetrie
 1             100           0             0             1
 2             100           50            0             0
 3             100           100           4             0
 4             100           100           3             0
 5             50            100           0             0
 6             0             100           0             2
=============================================================
Coordonatele punctelor interioare
=============================================================
Punct          X             Y             Simetrie
 7             0             0             3
 8             50            0             1
 9             0             50            2
 10            50            50            0
==============================================================
Conectarea elementelor
```

```
=================================================================
Element        Inceput  -  Sfarsit         Lungime
 1              1           2               50
 2              2           3               50
 3              4           5               50
 4              5           6               50
=================================================================
Se prescriu deplasari in nodurile:
=================================================================
Nod            Uxx          Uyy            Cond_front.    Cond_front.
 4              0            0              0              1
 5              0            0              0              1
 6              0            0              0              1
=================================================================
Se prescriu sarcini in nodurile:
=================================================================
Nod            Txx          Tyy
 1             -100          0
 2             -100          0
 3             -100          0

Deplasari si sarcini in noduri
****************************
Nod            u            v              Tx             Ty
 1             -4,55        0              -100            0
 2             -4,55        0              -100            0
 3             -4,55        0              -100            0
 4             -4,55        0              0              -30
 5             -2,275       0              0              -30
 6              0           0              0              -30
Suma tractiunilor pe frontiera:
Suma trac. Txx=          0                 Suma trac. Tyy=       0

Tensiuni in noduri
*****************
Nod            Sxx          Syy            Sxy            Szz
 1             -100         -30            0              0
 2             -100         -30            0              0
 3             -100         -30            0              0
 4             -100,0001    -30            0              0
 5             -100         -30            0              0
 6             -100         -30            0              0

Tensiuni principale in noduri
***************************
Nod            Sigma 1      Sigma 2        Sigma ech.     Alfa
 1             -30           -100            88,882         0
 2             -30           -100            88,8819        0
 3             -30           -100            88,8819        0
 4             -30           -100,0001       88,8820        0
 5             -30           -100            88,8820        0
 6             -30           -100            88,8820        0
```

CAPITOLUL 4

MECANICA PROBABILISTĂ A RUPERII. PROBLEME. PRINCIPII. MODELE. METODE. CONTRIBUŢII

§ 4.1. PLEDOARIE PENTRU "MECANICA PROBABILISTĂ A RUPERII"

4.1.1. Introducere

MECANICA SOLIDULUI DEFORMABIL (M.S.D.) reprezintă unul dintre cele mai moderne şi mai explozive domenii de cercetare în profil mecanic; ea cuprinde două mari categorii de discipline ştiinţifice:

- **Discipline preponderent matematice** – teoria elasticităţii; teoria plasticităţii; termoelasticitatea; elastovâscoplasticitatea; termovâscoplasticitatea, atât pentru materiale omogene şi izotrope cât şi pentru materiale neomogene şi anizotrope (materiale compozite). Toate acestea sunt domenii de ştiinţă fundamentale, care formulează şi desăvârşesc bazele generale matematice ale ramurii considerate.
- **Discipline tehnice**, cu caracter ingineresc, aplicativ, cum ar fi: rezistenţa materialelor, oboseala materialelor, fluajul şi relaxarea, stabilitatea echilibrului elastic, teoria solicitărilor de contact, statica şi dinamica structurilor din bare şi plăci, încercările de materiale, fiabilitatea şi siguranţa structurilor etc. Este adevărat că multe dintre acestea sunt astăzi ramuri de ştiinţă de-sine-stătătoare.

Cu toate rezultatele remarcabile acumulate în toate aceste domenii, încă de pe vremea lui Galileo Galilei şi Robert Hooke, în tot secolul trecut (şi chiar în zilele noastre) au avut loc o serie de **„catastrofe celebre"** [R26] care au surprins comunitatea oamenilor de ştiinţă şi a inginerilor prin lipsa explicaţiei şi a suportului ştiinţific justificator. Au apărut astfel probleme noi care au cerut soluţii noi, concepte de proiectare şi de analiză a siguranţei structurilor de rezistenţă de asemenea fundamental noi. Răspunzând la aceste cerinţe a apărut o nouă disciplină, unanim recunoscută astăzi, denumită „MECANICA RUPERII" (M.R.). Considerăm că patru momente fundamentale au constituit începuturile acestei noi ramuri a (M.S.D.):

- Calculele efectuate de Kirsch în 1898 privind starea de tensiune dintr-o platbandă solicitată la tracţiune, având gaură circulară centrală; s-a demonstrat astfel analitic efectul de concentrare a tensiunilor în zona cu discontinuităţi geometrice acute, deşi efectul nociv al concentratorilor era semnalat încă din 1843 de Rankine în legătură cu ruperea organelor de maşini rotative.
- Încercările lui August Wöhler, începute încă din 1847, care au condus la definirea conceptului de durabilitate în cazul tensiunilor variabile în timp prin intermediul celebrei **„curbe Wöhler"** (σ_{max}-N) publicată prima oară în 1905;
- Încercările de rezilienţă pe epruvete tip Charpy V (sau U) legate de ruperea fragilă, care au pus în evidenţă temperatura de tranziţie de la ruperea ductilă la cea fragilă.

În anul 2001 s-a sărbătorit cu mare fast în Franța, 100 de ani de la apariția epruvetei Charpy.

- În sfârșit, problemele de (M.R.) au intrat efectiv în atenția cercetătorilor începând cu anii 1920-25, odată cu binecunoscutele, astăzi, lucrări ale lui Griffith. El a introdus ideea că un material fragil conține o mulțime de fisuri care produc o concentrare de tensiuni suficient de mare ca în anumite zone să se atingă valoarea rezistenței la rupere.

Dar activitatea științifică masivă, susținută, orientată, începe după 1950, odată cu dezvoltarea noilor tehnici de vârf în domeniul nuclear, aerospațial, naval, chimic, petrolier etc. Până în perioada anilor 1970 s-au introdus mărimi și concepte noi: factorul de intensitate al tensiunilor (Westergard 1940, Irwin, Paris 1961), integrala J (Rice 1968) etc., s-au definitivat procedee noi de încercare și caracterizare a materialelor ținând cont de existența defectelor micro- sau macrostructurale (dislocații, vacanțe, incluziuni, goluri, fisuri etc.), de influența temperaturilor scăzute, de variația în timp a tensiunilor etc. Tot în acest timp s-au pus bazele matematice ale calculării câmpurilor de tensiuni și deformații în corpuri elastice cu defecte de tipul fisurilor, golurilor, incluziunilor. Dificultățile au fost mari datorită necesității adoptării și folosirii unui aparataj matematic foarte elevat: ecuații integrale singulare, funcții complexe și transformări conforme, teoria potențialului, metode variaționale funcționale etc. Din acest motiv foarte târziu s-au concretizat metodele de calcul și s-au obținut rezultate credibile și concludente, dar numai pentru defecte unice sau grupuri de defecte cu anumite simetrii și periodicități.

4.1.2. Mecanica probabilistă a ruperii

Realitatea industrială (tehnică), în special în cazul construcțiilor industriale mari cu zone de sudură importante, cu variații brusce de formă, în cazul pieselor turnate și laminate, arată existența unor zone cu defecte multiple care nu pot fi modelate de repartiții simetrice sau periodice și nici de forme geometrice regulate.

Din aceste motive în ultimii 20 de ani comunitatea științifică internațională s-a axat cu mult interes și perseverență pe utilizarea principiilor și metodelor probabilistice care să ia în calcule o serie întreagă de parametri statistici: distribuția defectelor în spațiu sau în plan (poziția centrelor geometrice, înclinația față de axe a unui sistem de axe propriu al defectului, dimensiunile reprezentative etc.), descrierea probabilistă a câmpului de tensiuni și deplasări, calculul probabilist al elementelor specifice de mecanica ruperii (K_{ij}; J), caracterizarea statistică a proprietăților mecanice ale materialelor etc. În această accepțiune s-a recunoscut că analiza riscului, respectiv studiul fiabilității și siguranței structurilor se poate face numai pe baze statistice. A apărut astfel o nouă ramură de cercetare numită: „MECANICA PROBABILISTĂ A RUPERII" (M.P.R.) (PROBABILISTIC FRACTURE MECHANICS).

(M.P.R.) este astfel definită ca un domeniu al fiabilității structurale pentru care mecanismul de cedare este „ruperea", luând în considerare existența obiectivă a defectelor și aspectele probabilistice legate de acestea.

De altfel, practica a impus faptul că cele mai posibile mecanisme de cedare a elementelor și structurilor de rezistență sunt:

- instabilitatea elastică (buckling)
- oboseala (fatigue)
- apariția deformațiilor elastice mari (jamming)
- deformații plastice mari (yielding)
- instabilitatea plastică (necking)
- ruperea (fracture)

În **Fig 4.1.2.1** sunt ilustrate variatele aspecte ale analizei riscului pentru a fixa locul și problematica (M.P.R.).

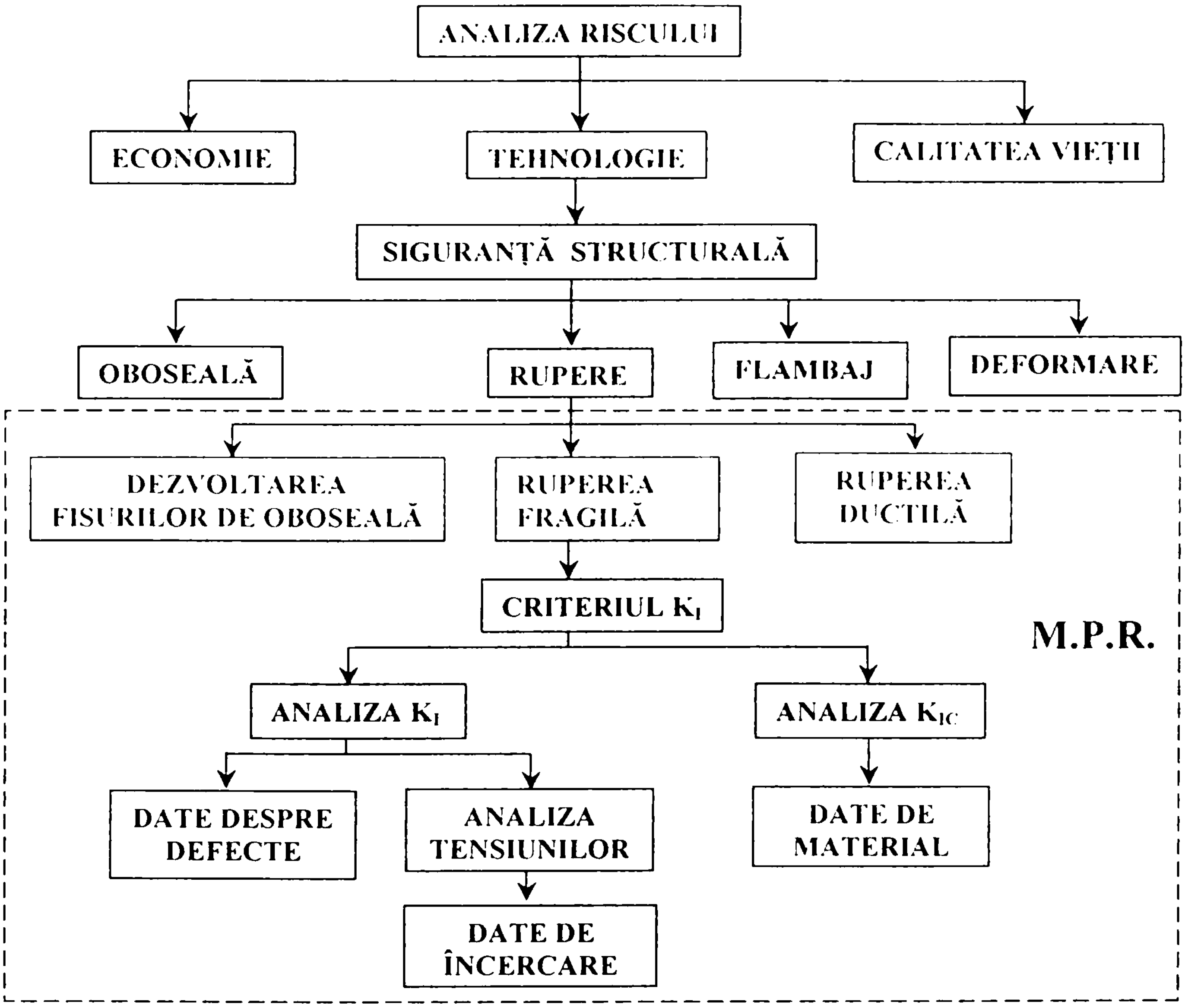


Fig. 4.1.2.1. Analiza riscului şi locul şi problematica (M.P.R.),
(după J.M. Bloom, A. Ma. Dermott Company, Research and Development Division, Alliance, Ohio)

4.1.3. Organizarea activităţilor (M.P.R.)

În Statele Unite există de mulţi ani comunităţi ştiinţifice care se ocupă, pe lângă altele, şi cu standardizarea în (M.P.R.), există coduri ASME şi programe de calculator bazate pe tehnicile şi metodele de simulare Monte-Carlo, utilizând în general distribuţiile gamma şi Weibull.

De exemplu comitetul ASTM Task Group E24.06.03, constituit în 1979, a avut printre alte sarcini şi organizarea a două simpozioane şi a unui lucrushop:

- „Program special cu privire la (M.P.R.)", Pittsburgh, Pennsylvania, October 31, 1979
- „Metode probabiliste pentru proiectarea şi mentenanţa structurilor", St.Louis, Missouri, October 19, 1981, (ASTM, STP798)
- „Aplicaţii ale statisticii în oboseală şi rupere" (lucrushop) San Francisco, California, December 13, 1982.

Rezultă de aici că (M.P.R.) este un domeniu de vârf, de mare actualitate în cercetările de (M.R.) şi în general de solid deformabil. Pentru a sublinia în plus această idee vom da câteva detalii legate de cercetarea fiabilităţii vaselor sub presiune foarte mare şi a conductelor întâlnite frecvent în construcţiile nucleare, petroliere, chimice, navale, miniere etc. Prima lucrare importantă a apărut în 1976 în „**Nuclear Engineering and Design**" **Nr.17** (P.E. Becher şi A. Pedersen), care a făcut o evaluare a probabilităţii de cedare a unui vas sub presiune, considerând

K_I şi K_{IC} ca **variabile statistice** calculul integralelor de distribuţie fiind făcute cu metoda Monte Carlo, cu simularea pe calculator. Numărul lucrărilor dedicate acestui domeniu este impresionant şi până acum 15-20 de ani erau considerate secrete. Mai cităm numai un studiu efectuat în Anglia în 1976, legat de programul său nuclear, în care s-a determinat probabilitatea de a exista fisuri de dimensiuni critice. D.O.Harrie în 1977 a arătat că din datele experimentale rezultă că distribuţia mărimii defectelor este de tip gamma sau Weibull.

Comisia de reglementare nucleară (NRC) a dezvoltat un cod de calculator pentru a determina probabilitatea de apariţie a unor defecte produse de procesul tranzitoriu de variaţie a presiunii în reactorii cu apă.

Mai subliniem apariţia codurilor ASME elaborate de diferitele subcomisii ale Comitetului de Mecanica Probabilistă a Ruperii, dintre care cităm:

- NRC's OCTAVIA (1978) (W.E.Vesely; E.K. Lynn; F.F. Goldberg). Lucrează cu distribuţia exponenţială şi simularea Monte-Carlo.
- Becher's PEP 706/ PFM683, distribuţie Weibull şi simulare Monte Carlo
- LLL's (Lawrence Livermore Laboratory) PRAISE („Analiza securităţii conductelor incluzând evenimente seismice")
- NRC's NUREG-0778 Code (iunie 1981) – R.M. Gamble; J. Strosnider. Prezintă o schemă originală de eşantionare.
- ISPRA's (Joint Research Center of the European Commities) COVASTOL

Existenţa acestor programe care sunt deja coduri ASME ilustrează importanţa deosebită care se acordă (M.P.R.), în special în domeniile de risc major din energetica nucleară.

4.1.4. Câteva repere bibliografice

Cele prezentate până acum s-au bazat pe lucrările* [1] [2] [3] (v. subsol), care sunt de fapt nişte culegeri de articole dedicate acestei teme, reprezentând lucrările susţinute la un anumit congres; ele constituie aşa-numitele S.T.P. („Special Technical Publications"). De exemplu în [1] sunt prezentate lucrările congresului de la St. Louis din 1981 (amintit mai sus). Cartea conţine 11 lucrări repartizate pe două teme:

- M.P.R. („Probabilistic Fracture Mechanics") – 5 lucrări
- Aspecte statistice în oboseală („Statistical Aspects on Fatigue") – 6 lucrări

A doua carte [2] conţine lucrările conferinţei „**Pressure Vessel and Piping**" (PVP Vol.92) care s-a desfăşurat la San Antonio, Texas, 1984, şi are 12 lucrări dedicate numai (M.P.R.)!

A treia carte [3] este tot un PVP Vol.58 publicat în 1982 şi conţine 17 lucrări de (M.P.R.) şi de oboseală în condiţii variabile de temperatură, fisuri, coroziune etc.

Deşi cărţile amintite de noi sunt relativ vechi, ele ne prezintă demarajul fulminant şi necesar în acest domeniu, schiţând preocupările esenţiale de (M.P.R.). Pentru a sublinia continuitatea activităţii în (M.P.R.) vom cita şi câteva lucrări apărute în ultimii ani, deşi numărul lor la ora actuală este impresionant de mare. Ele sunt orientate pe două tematici fundamentale:

1) Cele mai multe dintre lucrări se ocupă de **fenomenul de oboseală**, domeniu în care prelucrarea statistică şi descrierea probabilistă a unor parametri specifici este destul de veche. Aici, dintre cercetările româneşti, vom cita – în mod cu totul subiectiv (datorită lipsei de informaţie) – lucrările [D20] [D25] (**I. DOBRE**) şi [C46] (**D. CIOCLOV**), care propun noi criterii de cumulare a degradărilor în condiţiile unor spectre de tensiuni descrise de procese stohastice. Cunoaştem lucrările d-lui Corneliu Biţ, pe care însă nu le-am încadrat în acest

* 1. *** Probabilistic Fracture Mechanics and Fatigue Methods: Applications for Structural Design and Maintenance, ASTM-S.T.P.-798 / 1983
2. *** Advances in Probabilistic Fracture Mechanics. (ed. C. (RAJ) Sundararajan), ASTM - PVP Vol.92 / 1984
3. *** Aspects of Fracture Mechanics in Pressure Vessels and Piping. (ed. S.S. Palusamy, S.G.Sampath), ASTM-PVP Vol.58/1982

domeniu. O informare utilă se obţine şi din articolul de recenzii publicat în buletinul ARMR Nr. 3/1996. Vom prezenta numai câteva lucrări mai recente:

- **B. FEDELICH** [F4]/1998, prezintă o teorie cinetică a procesului de microfisurare prin oboseală care ţine cont explicit de efectele coalescenţei. Predicţia coalescenţei microdefectelor cere ca să se cunoască distribuţiile lor spaţiale şi dimensionale şi mecanismul de coalescenţă. Datorită caracterului aleatoriu a nucleaţiei microfisurilor, problema este în mod esenţial de natură statistică. Ea utilizează distribuţia Poisson şi verificarea prin simulare Monte Carlo. De altfel lucrarea este foarte bine susţinută de un aparat matematic elevat.
- **Y. LEI** (ş.a.) [L14]/1998. Se dezvoltă expresii analitice şi semianalitice pentru tensiunea Weibull ca un parametru privind predicţia degradării prin clivaj a unor corpuri cu fisuri. Expresiile au fost verificate utilizând tehnici de element finit.
- **P. SHI, S. MAHADEVAN** [S24]/1998. Lucrarea se ocupă de cercetarea procesului de degradare la oboseală în condiţiile coroziunii de pitting. Se propune un model probabilistic de oboseală la coroziune prin pitting cu simulare Monte Carlo şi implementarea unei metode analitice de reliabilitate de ordinul întâi. Se propune o metodă de predicţie a limitei de oboseală la coroziune şi se prezintă exemple numerice pe aliaje de aluminiu.
- **LEVON MINNETYAN** (ş.a.) [M40]/2002. Sunt discutate metode şi coduri corespunzătoare de computer pentru evaluarea probabilistică a ruperii sub cicluri de oboseală a structurilor compozite (din grafit/epoxi). Cumularea degradărilor este simulată pe computer prin creşterea numărului de cicluri. Se introduce funcţia de distribuţie cumulativă (CDF) a răspunsului.
- **V.S. SERENSEN** (ş.a.) [SB1]. Determină apariţia fisurii de rupere la solicitări oligociclice prin atingerea valorilor critice pentru degradarea prin oboseală însumată cu cea cvasistatică, produsă de mărimea deformaţiei unilaterale cumulate care reflectă schimbarea anizotropă reversibilă. Se studiază de asemenea experimental viteza de propagare a fisurilor.
- **V.V. PANASIUK** (ş.a.) [SB2]/1977. Se studiază durabilitatea unui corp cvazifragil cu fisură de o configuraţie oarecare, diferite de cea circulară, considerând că sarcina exterioară variază sinusoidal. Se propune o metodă eficientă de aproximaţie analitică a vitezei de creştere a fisurii plane de oboseală; comparaţia fisurii necirculare cu cea circulară arată abateri în durabilitate în jur de 36%.

2) A doua direcţie fundamentală este legată de exprimarea probabilistă a câmpului de tensiuni şi deformaţii în solide elastice cu defecte multiple precum şi a caracteristicilor de material, a factorului de scară, a geometriei defectelor, a parametrilor de mecanica ruperilor etc. Rezultatele din acest domeniu trebuie să meargă până la elaborarea de programe adecvate combinate cu metode numerice, care să dea valori concrete pentru mărimile studiate. Această formă de raţionament devine obligatorie şi inevitabilă pentru materialele compozite şi pentru structurile unde se previzionează existenţa defectelor multiple. Vom aminti şi din acest domeniu numai câteva lucrări considerate de noi mai reprezentative. Astfel:

- **IVAN SPRUNG** [S54]/1998 demonstrează şi verifică experimental pe plăci cu fisuri că există situaţii când calculele probabiliste indică o probabilitate foarte mare de deteriorare în timp ce calculele de mecanica ruperii arată o margine de siguranţă adecvată!
- **A.M. HASOFER** [H13]/1988 combate modelele existente de rupere: *„modelul verigii celei mai slabe”* şi **modelul lui Daniels** al *„fasciculelor de fibre”*. Prezintă o teorie stohastică nouă privind ruperea fragilă a oţelului utilizând o distribuţie Pareto urmărind stabilirea efectului acumulării de fisuri asupra distribuţiei fisurilor şi sarcinii de rupere. Pleacă de la distribuţia tensiunii maxime de forma:

$$p(\sigma_{max} < x) = 1 - \left(\frac{x}{\sigma_0}\right)^{\theta}$$

unde σ_0 este tensiunea minimă de nucleație a unei fisuri și θ un parametru care depinde de distribuția dimensiunilor fisurilor. Considerăm totuși modelul insuficient justificat.

- **MANS ISACSSON** [I10]/1998 pleacă de la ideea (cunoscută de altfel) că procesul creșterii fisurii este de natură aleatoare și depinde de condițiile microstructurale din vecinătatea vârfului fisurii. *Se adoptă modelul verigii celei mai slabe*, utilizând statistici Weibull și legi constitutive de tipul Gurson-Tvergaard. Mai presupune că ruperea se datorează unor *„inițiatori"* uniform distribuiți fără nici o dependență funcțională. Modelul probabilistic propus a luat în considerare și concentrația locală a tensiunilor datorită golurilor în creștere.
- **SULIN ZHANG, WEI YANG** [Z10]/1998 studiază extensia unei macrofisuri prin coalescența unor microfisuri distribuite statistic, calculând lungimea extinderii estimate a fisurii și deplasarea verticală a vârfului fisurii. Pentru a obține rezultate analitice pentru fisuri cu poziții și orientări arbitrare face un program de simulare în trei pași, asemănător soluției drumului aleator. El arată că lungimea preconizată a extensiei nu depinde numai de densitatea microfisurilor ci și de distribuția statistică a dimensiunilor de ligament.
- **JOHAN HELSING** [H23]/1999, profesor la Institutul Regal de Tehnologie din Stockholm – Suedia, a avut amabilitatea să ne dea aproape toate lucrările domniei sale publicate în domeniul (M.P.R.) - peste 30 de titluri. Lucrarea pe care o prezentăm elaborează un algoritm adaptiv pentru problema fisurilor multiple în domenii bidimensionale liniar elastice, bazat pe o ecuație integrală tip Fredholm de speța a doua, într-o formă stabilită de Helsing și Peters în 1999 [H21]. După discretizarea ecuațiilor integrale cu o *schemă Nyström* se obține un sistem de ecuații liniare rezolvat iterativ și accelerat cu metoda multipol rapidă; adaptivitatea este incorporată în algoritm după un procedeu Helsing [H19](1996). Este interesant că autorul prezintă un calcul numeric făcut pentru o placă ce conține 10000 de fisuri orientate aleator.
- **TOSHIHISA NISHIOKA, TETSUJI KATO** [N16]/1998. Soluția VNA din titlul lucrării înseamnă soluția analitică completă dată de Vijayakumar, Nishioka și Alturi în 1981 și 1983 pentru planul cu fisură eliptică supusă la tracțiuni arbitrare pe fețele fisurii. Pornind de aici, utilizând parametrul *„densitate de fisuri"* și ideea *„modulelor elastice efective pentru corpuri cu fisuri"*, ei au stabilit un algoritm pentru studierea câmpului de tensiuni și deformații în cazul unor microfisuri eliptice arbitrar distribuite.
- **N.B. RAO, S. RAHMAN** [R6]/2002. Este prezentată o metodă fără rețea de discretizare bazată pe procedeul Galerkin, pentru a previziona derivatele de ordinul întâi a factorilor de intensitate a tensiunilor în raport cu dimensiunea fisurii într-o structură liniar-elastică. Metoda implică o discretizare fără rețea care utilizează o aproximație mobilă prin cele mai mici pătrate a unei funcții din care se obțin funcțiile de formă pentru noduri plasate arbitrar.
- **T. YOKOBORI** (ș.a) [Y9]/1974. Prezintă o teorie stohastică privind ruperea solidelor conținând un număr mic de defecte macroscopice. Se stabilește că rezistența de rupere este foarte bine aproximată de funcția de distribuție Weibull (n≥1-10) sau de o distribuție gamma când lungimea fisurii are o distribuție exponențială. Se admite că materialul conține defecte de tip fisură sau neomogenități structurale cu diferite grade de concentrare a tensiunilor. Fiecare defect este tratat cu o fisură circulară echivalentă.

- **L. CIZELJ**, (ş.a) [C51]/1994. Se aplică metoda reabilităţii de primul şi al doilea ordin (FORM şi SORM) la un tub cu pereţi groşi în care apar fisuri de coroziune. Se compară probabilitatea de rupere după aceste metode şi prin simulare Monte Carlo. Cu o metodă numerică se analizează erorile relative.
- **W.J. STROUD, T. KRISHNAMURTHY** [S71]/2001. Se explică efectele incertitudinilor asupra rezistenţei unei îmbinări singulare la forfecare prin suprapunere. Sunt utilizate metode probabiliste pentru a explica incertitudinile. În studii se utilizează analiza liniară şi geometric neliniară cu elemente finite. Studiul arată că analiza liniară conduce la preziceri conservative pentru sarcinile de rupere.
- **M.P. MANAHAN, R.B. STONESIFER** [M7]. Această lucrare prezintă rezultate ale unei determinări probabiliste de mecanica ruperii la un reactor nuclear energetic moderat şi răcit cu apă obişnuită în fierbere pentru acţionarea reglajului de penetrare a tuburilor de racordare.
- **M.A. CESARE, R.H. SUES** [C14]/1999. ProFES este un sistem de analiză probabilist cu elemente finite care permite proiectanţilor să realizeze o analiză probabilistă cu element finit într-un mediu grafic 3D care este complet familiar şi similar cu analiza deterministă modernă de element finit. ProFES permite inginerilor să utilizeze tehnici probabiliste puternice pentru a rezolva probleme spinoase, ca de exemplu analiza oboselii la cicluri înalte fără a fi nevoie de mult antrenament în ceea ce priveşte tehnicile în mecanica probabilistă. Parteneri industriali în dezvoltarea sistemului ProFES sunt: GE, Pratt&Whitney, Allison Engine, General Motors precum şi furnizorii comerciali de analiză cu element finit ANSYS şi MSC/NASTRA. Această lucrare descrie ProFES şi prezintă trei probleme demonstrative executate cu ProFES.
- **D.N. MAVRIS, O. BANDTE** [M19]/1997. Se prezintă o metodă pentru proiectarea probabilistă, care se bazează pe o tehnică rapidă de integrare probabilistă. Lucrarea compară în mod critic metodologia combinată a *„ecuaţiei de suprafaţă răspuns"/simularea Monte Carlo* cu metoda AMV (*valorii medii avansate)*, care este una dintre tehnicile rapide de integrare probabiliste. Ambele metode sunt utilizate pentru a genera CDF (*funcţii cumulative de distribuţie*), care sunt comparate într-un studiu de caz exemplu. Din acest studiu rezultă că metoda AMV este mult mai economică în ceea ce priveşte necesarul de timp şi conduce în general la distribuţii mai precise ale CDF. Metoda ilustrează de asemenea modul în care utilizând metoda AMV pentru generarea distribuţiei pot fi obţinute soluţii robuste de proiectare la probleme supuse la condiţii multidimensionale.
- **B. MORAN**, (ş.a) [M52]/2001. Obiectivul acestui proiect de cercetare a fost să se dezvolte o metodologie pentru fiabilitatea la oboseală şi predicţia duratei de viaţă a componentelor structurale metalice în cadrul unei mentenanţe bazate pe condiţii. Astfel au fost dezvoltate noi metode pentru fiabilitatea la oboseală sau determinarea riscului stucturilor critice de siguranţă şi au fost dezvoltate noi tehnici computaţionale pentru a modela creşterea fisurilor la oboseală.
- **C. ANNIES** [A29]/2002. Mulţi ingineri abordează *„predicţia probabilistă a vieţii"* înlocuind constantele cu distribuţiile probabiliste şi modelând cu grijă relaţiile fizice dintre parametri. Din păcate legăturile *statistice* dintre „constante" sunt adesea poate chiar cu totul ignorate. Puţini recunosc faptul că în timp ce această simplă înlocuire a distribuţiilor pentru constante va produce într-adevăr un rezultat nedeterminist, „probabilităţile" corespunzătoare sunt adesea jalnic de imprecise. De fapt, chiar „tendinţa" poate fi greşită, astfel încât aceste studii nu pot fi utilizate nici măcar pentru studii de sensibilitate. Aceast lucrare explorează rata de creştere a fisurii care se leagă de ecuaţia familiară Paris şi intensitatea tensiunii aplicate pentru a ilustra

multe realităţi statistice care sunt adesea ignorate de către unii ingineri de altfel foarte atenţi.

- **N.P. O'DOWD, Y. LEI, E.P. BUSSO** [O20]/2000. Este examinată utilizarea tensiunii Weibull ca o măsură a probabilităţii de rupere a unui corp fisurat. Sunt prezentate expresii în formă închisă pentru tensiunea Weibull pentru materiale liniar elastice şi cu legi exponenţiale. Aceste expresii permit valorilor de tensiuni Weibull şi probabilităţilor de rupere să fie estimate fără a fi necesară analiza cu element finit şi oferă o viziune asupra utilizării tensiunii Weibull ca un parametru pentru predicţia ruperii prin clivaj a corpurilor fisurate.

Cele prezentate până aici au constituit un articol publicat în Buletinul ARMR (autori: I.DOBRE, C.MUNTEAN), şi care avea următorul final:

4.1.5. Concluzii*

Articolul nostru are următoarele obiective:

- Să justifice şi să propună înfiinţarea în cadrul ARMR a unei comisii specializate pe problemele de (M.P.R.). Problema nu este simplă deoarece membrii unei astfel de comisii trebuie să fie specialişti care au preocupări de teoria probabilităţilor şi statistică matematică.
- În programul acestei comisii să intre şi problemele de standardizare în domeniu, coroborate strâns cu problemele de (M.R.).
- Nu în ultimul rând să se înceapă o acţiune amplă de documentare, de informare, de specializare şi în final de cercetare în acest domeniu fascinant care are acea notă exotică indusă de utilizarea metodelor Monte Carlo.
- Să desfăşoare un amplu program de colaborare exterioară cu specialişti recunoscuţi de la marile universităţi şi centre de cercetare, care, din experienţa noastră, sunt în general dispuşi şă colaboreze şi să dea ajutor.

Supunem aceste idei discuţiei conducerii şi membrilor ARMR.

* Când lucrarea noastră a fost gata pentru expediat, am primit buletinul ARMR Nr. 13 / 2002 în care există articolul regretatului prof. O. Rusu "Mecanica probabilistă şi fiabilitatea structurilor. Note pe marginea unei conferinţe" (p.22-25). Deoarece cele două lucrări nu se exclud ci se completează reciproc, ne-am permis să trimitem lucrarea noastră spre publicare, fără anumite modificări care poate ar fi fost necesare (notă prof. I. Dobre).

*§4.2. CÂTEVA NOȚIUNI FUNDAMENTALE DIN TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICA MATEMATICĂ**

4.2.1. Eveniment. Câmpuri de evenimente

Noțiunea primară a teoriei probabilităților (T.P.) este aceea de **eveniment**, care este rezultatul unui anumit experiment. Dar sub aspect matematic, nu interesează natura fizică sau geometrică a evenimentului, ci numai producerea sau neproducerea lui. Deci "*eveniment*" este o noțiune abstractă care poate sau nu poate avea loc.

În (T.P.) se arată că mulțimea tuturor evenimentelor corespunzătoare unui experiment dat poate fi organizată ca o algebră Boole cu ajutorul operațiilor logice : "sau", "și", "non", care se transpun în limbajul specific teoriei mulțimilor utilizând simbolurile operațiilor $\cup, \cap, C$. Pe această bază se construiește noțiunea de **câmp de evenimente** care este mulțimea Ω a evenimentelor elementare, înzestrată cu un corp borelian de evenimente K; se va nota $\{\Omega, K\}$.

4.2.2. Probabilitate. Câmp de probabilitate

Noțiunea de probabilitate este strâns legată de aceea de **frecvență relativă**, cu deosebirea esențială că probabilitatea este dată a priori, iar frecvența relativă a posteriori. (T.P.) se poate aplica numai acelor fenomene care prezintă o anumită stabilitate a frecvențelor relative în jurul probabilității (așa numitele *fenomene omogene de masă*).

4.2.2.1. Definiția clasică a probabilității (definiția statistică)

Considerăm un grup de evenimente elementare $\bigcup_{i=1}^{n} A := \Omega$ cu $A_i \cap A_j = 0\,(i \neq j)$; fie evenimentul $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$. Dacă evenimentele A_i sunt *egal posibile*, probabilitatea evenimentului A este:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \tag{4.2.2.1}$$

Deci prin definiție, dacă într-o operație de masă, evenimentul A se observă în medie de m ori într-un număr total de n operații individuale, probabilitatea rezultatului favorabil într-o operație individuală este raportul dintre numărul cazurilor favorabile observate și numărul total de cazuri care compun operația de masă respectivă (m/n).

Această definiție statistică este, pe bună dreptate, criticată. Astfel, ea nu poate fi aplicată când numărul cazurilor posibile este infinit și în condițiile în care cazurile nu sunt *egal posibile*. Pe de altă parte, cazuri egal posibile înseamnă de fapt cazuri egal probabile, adică ne folosim de noțiunea de probabilitate pe care urmează s-o definim. În sfârșit nu pune în evidență legătura cu practica, adică nu subliniază legătura dintre probabilitate și frecvență.

Această definiție este însă utilă dacă-i privim mai atent latura constructivă decât "defectul" ei strict logic, deoarece în grupuri formate cu un număr mare de probe, frecvențele reprezintă valorile experimentale ale *probabilității, care este o constantă obiectivă depinzând de*

---

* ***Cuvinte specifice***: Cuvântul "**aleator**" are sens de "întâmplător" și provine de la latinescul "alea" care înseamnă "zar". Cuvântul "**stohastic**" este împrumutat din limba greacă, unde στόχορ înseamnă "scopul atins"; στόχοσιρ înseamnă "prezumție", "conjunctură", "presupunere"; un στόχαστχηρ este o persoană capabilă de a prevedea un eveniment viitor (de a ghici). Sensul folosit în teoria probabilităților a fost dat de J. BERNOULLI, care în opera sa "Ars conjectandis" (1713) vorbește despre: "Ars conjectandis sive stochastice" adică "arta conjuncturii (presupunerii) sau stohastice". Cuvântul stohastic este aproape sinonimul cuvântului aleator, dar în matematică unii autori rezervă cuvântul de "stohastic" atunci când intervenția hazardului are un caracter dinamic.

natura fenomenului considerat şi de sistemul de condiţii. Deosebirea dintre probabilitate şi frecvenţă relativă este mai ales de natură practică (statistică).

4.2.2.2. Definiţia axiomatică a probabilităţii (după A.N. Kolmogorov / 1933)

Fie dat câmpul de evenimente $\{\Omega, K\}$. Se numeşte *probabilitate* pe câmpul de evenimente $\{\Omega, K\}$ o funcţie P definită pe K cu valori în $\mathbf{R}^+$ (P: $K \to \mathbf{R}^+$) cu următoarele proprietăţi:

P_1) $P(A) \geq 0$, pentru $\forall A \in K$

P_2) $P(\Omega) = 1$ (4.2.2.2)

P_3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, pentru $\forall A_1, A_2 \in K$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Proprietatea P_3 rămâne valabilă pentru orice familie finită de evenimente din K, incompatibile două câte două.

4.2.2.3. Câmp de probabilitate

1. Un câmp de evenimente $\{\Omega, K\}$ înzestrat cu o probabilitate P se numeşte **câmp de probabilitate** şi se notează $\{\Omega, K, P\}$. Un câmp de probabilitate este alcătuit din tripletul $\{\Omega, K, P\}$ unde Ω este mulţimea evenimentelor elementare, K un corp de părţi generat de familia de părţi ale lui Ω, iar P o probabilitate pe K. Când Ω este finită, K este $P(\Omega)$.
2. Vom numi **probabilitate σ–aditivă** (sau **complet aditivă**) pe câmpul borelian de evenimente $\{\Omega, K\}$, o funcţie definită pe K cu valori în $\mathbf{R}^+$, cu proprietăţile:

P_1) $P(A) \geq 0$, pentru $\forall A \in K$

P_2) $P(\Omega) = 1$ (4.2.2.3)

P_3) $P(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sum\limits_{i \in I} P(A_i)$, pentru orice famile numărabilă de evenimente $(A_i)_{i \in I} \subset K$;

$$A_i \cap A_j = 0, \; i \neq j, \; i, j \in I$$

Aceasta este **axioma aditivităţii complete**.

4.2.2.4. Consecinţe şi proprietăţi

1. $\forall A \in K \;\Rightarrow\; P(CA) = 1 - P(A)$
2. $P(0) = 0$
3. $A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; P(A_1) \leq P(A_2)$
4. $\forall A \in K \;\Rightarrow\; 0 \leq P(A) \leq 1$
5. $\forall A_1, A_2 \in K \;\Rightarrow\; P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
6. $A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$
7. $\forall A_1, A_2 \in K \;\Rightarrow\; P(A_1 \Delta A_2) = P(A_1) - 2P(A_1 \cap A_2) + P(A_2)$
8. $\forall A_1, A_2 \in K \;\Rightarrow\; P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
9. $\forall (A_i)_{i \in I} \subset K \;\Rightarrow\; P(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \leq \sum\limits_{i \in I} P(A_i)$
10. Inegalitatea lui Boole. $\forall (A_i)_{i \in I} \subset K$ avem $P(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \geq 1 - \sum\limits_{i \in I} P(C_{Ai})$

Această inegalitate ne dă o margine inferioară pentru probabilitatea unei intersecţii de n evenimente.

11. $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i<j<l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) - ... + (-1)^{n-1} P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i)$

   (Poincaré)

4.2.3. Probabilităţi condiţionate. Independenţa evenimentelor

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate şi fie $A \in K$ un eveniment arbitrar din K cu $P(A) \neq 0$. Vom numi probabilitate a evenimentului B condiţionată de evenimentul A, notată prin $P_A(B)$ raportul:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (4.2.3.1)$$

Tripletul $\{\Omega, K, P_A\}$ este un **câmp borelian de probabilitate**.

Independenţa evenimentelor

1. Se spune că evenimentele $A_1, A_2 \in K$, sunt independente, dacă:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \qquad (4.2.3.2)$$

Această relaţie ne dă regula de calcul a probabilităţii evenimentului produs de două evenimente independente. Această definiţie este echivalentă cu relaţiile $P(A_1 / A_2) = P(A_1)$; $P(A_2 / A_1) = P(A_2)$, fiind însă mai generală. Se poate arăta că dacă evenimentele $A_1, A_2 \in K$, sunt independente, atunci şi perechile de evenimente (A_1, C_{A_2}), (C_{A_1}, A_2), (C_{A_1}, C_{A_2}) sunt independente.

2. Definiţia se poate generaliza la un şir finit de evenimente. Spunem că evenimentele $(A_i)_{1 \le i \le n} \subset K$ sunt independente în totalitatea lor, sau pe scurt independente, dacă pentru orice subşir $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le n$, avem:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} ... \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) ... \cdot P(A_{i_n}) \qquad (4.2.3.3)$$

4.2.4. Variabile aleatoare şi legi de repartiţie

Vom înţelege printr-o **variabilă aleatoare**, o mărime care în funcţie de rezultatul unei experienţe, poate lua orice valoare dintr-o mulţime bine definită de valori (mulţimea valorilor posibile). Această valoare nu poate fi cunoscută înainte de efectuarea experienţei, din cauza factorilor întâmplători care influenţează rezultatul acestei experienţe. Vom nota variabilele aleatoare cu literele X,Y,..., iar valorile lor posibile în mod corespunzător cu x_1, x_1, ..., x_1; y_1, y_2, ..., y_m .

Pentru definirea unei **variabile aleatoare discrete** nu este suficient să enumerăm toate valorile ei posibile, ci trebuie să cunoaştem şi probabilităţile acestora. Vom numi **repartiţie** a unei variabile aleatoare discrete, enumerarea valorilor posibile şi a probabilităţilor corespunzătoare acestora:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix} \Rightarrow X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, 1 \le i \le n \qquad (4.2.4.1)$$

Funcţia de repartiţie. Fie dat un câmp borelian de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ şi $X \in V$ Vom numi funcţie de repatiţie a variabilei aleatoare X, funcţia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin relaţia:

$$F(x) = P(A_x),\ x \in \mathbf{R} \text{ unde } A_x = \{\omega | X(\omega) < x\} \qquad (4.2.4.2)$$

Pentru simplificarea scrierii vom face convenţia de notaţie:

$$F(x) = P(X < x)$$

Rezultă imediat:

1) $F(x_1) \le F(x_2)$ daca $x_1 < x_2$
2) $F(x-0) = F(x)$ pentru $\forall x \in R$
3) $F(-\infty) = 0$
4) $F(+\infty) = 0$

În baza acestor proprietăţi putem afirma că funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare este o funcţie nedescrescătoare, continuă la stânga şi ale cărei valori în -∞ şi +∞ sunt respectiv 0 şi 1.

Densitatea de probabilitate. O clasă de variabile aleatoare importante în aplicaţii, este aceea pentru care funcţiile de repartiţie corespunzătoare variabilelor aleatoare se pot pune sub forma:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (4.2.4.3)$$

unde f este o funcţie definită pe **R** măsurabilă Borel.

Din această relaţie rezultă că $f \ge 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Atunci funcţiile de repartiţie de această formă se numesc **funcţii de repartiţii de tip continuu**, iar variabilele aleatoare corespunzătoare se numesc **variabile aleatoare de tip continuu**. Funcţia f se numeşte **densitate de repartiţie** sau **densitate de probabilitate**.

4.2.5. Valori tipice ale variabilelor aleatoare

4.2.5.1. Tendinţa centrală de grupare.

1.) Valoarea medie

a) Variabile aleatoare discrete. Fie dată variabila aleatoare:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \,;\; p_i \ge 0 \quad \Rightarrow \qquad (4.2.5.1)$$

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \qquad (4.2.5.2)$$

Valoarea medie numită şi **speranţă matematică** sau **aşteptarea matematică**, reprezintă de fapt o medie ponderată a valorilor x_i cu ponderea p_i. Se subliniază că valoarea medie este o categorie cu care ne întâlnim în teoria probabilităţilor, şi ea este aproximativ egală cu **media aritmetică** a valorilor observate ale lui x.

b) Variabile aleatoare continue. Fiind dată:

$$X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, x \in [a,b], \begin{cases} 1/ & f(x) \ge 0 \\ 2/ & \int_{a}^{b} f(x)dx = 1 \end{cases} \qquad (4.2.5.3)$$

se defineşte valoarea medie:

$$M(X) = \int_{a}^{b} x\, f(x)dx. \qquad (4.2.5.4)$$

În cazul când pentru valorile lui x se consideră drept domeniu de variaţie toată axa reală, valoarea medie devine:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, cu condiția ca integrala singulară scrisă să fie absolut congruentă.

2. Mediana

Se numeşte *mediana unei variabile aleatoare X*, acea valoare *Me* a argumentului *x*, pentru care probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori inferioare lui *Me* este egală cu probabilitatea ca să ia valori superioare lui *Me*.

$$P(X < Me) = P(X > Me) \tag{4.2.5.5}$$

$$F(x) = 1 - F(x)\,;\; F(x) = \frac{1}{2}. \tag{4.2.5.6}$$

Soluția acestei ecuații este mediana *Me*.

3. Modul (sau valoarea cea mai probabilă)

Se numeşte *modul unei variabile aleatoare X*, acea valoare *Mo* a argumentului *x*, pentru care funcția densitate de probabilitate are valoarea maximă.

Între cele trei caracteristici ale tendinței centrale de grupare, nu există relații determinate. Pentru repartiții simetrice toate cele trei caracteristici sunt egale între ele; pentru repartițiile puțin asimetrice, mediana se găseşte între valoarea medie şi mod în situația $|Me - Mo| = 2|Me - M|$.

4. Quantile

Se numeşte *quantile de ordinul n* ale variabilei aleatoare *X*, rădăcinile reale ale ecuațiilor:

$$F(x) = \frac{i}{n} \quad, i = 1, 2, ..., n-1 \tag{4.2.5.7}$$

n fiind un număr natural dat, iar $F(x)$ funcția de repartiție corespunzătoare. Pentru n=2 (i=1) → mediana; n=4 (i=1,2,3)→quartile; n=10 (i=1,2...,9)→decile; n=100 (i=1,2...,99)→centile.

Se arată că:

$$M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) \tag{4.2.5.8}$$

$$M\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} M(X_k) \tag{4.2.5.9}$$

pentru variabile aleatoare independente.

5. Momente şi medii de ordin superior

Se numeşte *moment de ordinul r*, al variabilei aleatoare *X* expresia:

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r f(x_i) \quad \text{pentru variabila aleatoare discretă} \tag{4.2.5.10}$$

$$M_r = \int_a^b x^r f(x) dx \quad \text{pentru variabila aleatoare continuă.} \tag{4.2.5.11}$$

Vom numi *medie de ordinul r*, a variabilei aleatoare *X*, expresia:

$$\mu_r = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} x_i^r f(x_i)} \quad \text{respectiv} \quad \mu_r = \sqrt[r]{\int_a^b x^r f(x) dx}. \tag{4.2.5.12}$$

Avem relațiile echivalente:

$$M_r = [\mu_r]^r = M[X^r]\,; \quad \mu_r = \sqrt[r]{M_r} \tag{4.2.5.13}$$

Pentru variabilele aleatoare continue, o extindere la întreaga axă:

$$\overline{f(x)}=\begin{cases}0 & ,x<a,x>b\\ f(x) & ,x\in[a,b]\end{cases} \quad\Rightarrow\quad M_r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r\overline{f(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^r\,dF(x)\quad\text{(Stieltjes)}\qquad(4.2.5.14)$$

Momentele M_r sunt ordonate în acelaşi sens cu valorile ordinului r, adică dacă α şi β sunt valori ale lui r, care satisfac relaţia α < β atunci avem şi $M_\alpha < M_\beta$.

4.2.5.2. Împrăştierea sau concentraţia (Dispersia)

1. Extinderea sau intervalul de variaţie, se obţine calculând diferenţa valorilor extreme ale argumentelor variabilelor, aceste argumente fiind considerate ordonate în ordinea mărimii lor naturale.

$$R=x_{max}-x_{min}\qquad(4.2.5.15)$$

2. Intervale interquantile. Pentru a micşora influenţa valorilor extreme ale argumentului care apare în folosirea intervalului de variaţie R, se pot folosi şi intervalele dintre quantile, adică diferenţa de forma:

$$\eta_{n-1}-\eta_1\,;\,\eta_{n-2}-\eta_2\,;\ldots\qquad(4.2.5.16)$$

Pentru repartiţiile asimetrice se obişnuieşte să se ia ca măsură a îmrăştierii şi media aritmetică:

$$\frac{(\overline{\overline{X}}-\eta_1)+(\eta_3-\overline{\overline{X}})}{2}=\frac{\eta_3-\eta_1}{2}\qquad(4.2.5.17)$$

3. Abaterea şi abaterea absolută medie. Se consideră variabila aleatoare $X\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}$; fie α o valoare oarecare din intervalul de variaţie. Vom numi abatere a variabilei X o nouă variabilă aleatoare ξ al cărui argument este dat de diferenţa dintre argumentul lui X şi α, adică: $\xi\begin{pmatrix}x-\alpha\\ f(x)\end{pmatrix}$.

În general dacă nu se specifică, abaterea se calculează faţă de valoarea medie, deci:

$$\xi=X-M(X)\quad\Rightarrow\quad M(\xi)=0\qquad(4.2.5.18)$$

Dacă vom considera valorile absolute ale abaterilor, adică variabile de forma $\xi\begin{pmatrix}|x-\overline{X}|\\ f(x)\end{pmatrix}$, valoarea medie a abaterilor nu mai este zero. Această medie se numeşte **abatere absolută medie** şi este $\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})f(x)dx$.

4. Dispersia. Abaterea medie pătratică. Vom asocia variabilei $\xi\begin{pmatrix}x-\overline{X}\\ f(x)\end{pmatrix}$ o nouă variabilă: $\xi^2\begin{pmatrix}(x-\overline{X})^2\\ f(x)\end{pmatrix}$. Prin definiţie, valoarea medie a acestei variabile, adică expresia $M(\xi^2)$ este numită **dispersia** variabilei aleatoare iniţiale X. Cu alte cuvinte **dispersia** (numită şi **variantă** sau **fluctuaţia variabilei**) este valoarea medie a pătratului abaterii sau momentul de ordinul doi al abaterii lui X:

$$\sigma_x^2=D(X)=M(\xi^2)=M[(X-M(X))^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2f(x)dx\qquad(4.2.5.19)$$

Valoarea medie de ordinul doi a abaterii, adică expresia:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M(\xi^2)}, \tag{4.2.5.20}$$

se numeşte *abatere medie pătratică a variabilei X sau abaterea tip (standard)*.

5. Momente concentrate. Să considerăm variabila aleatoare $X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ a cărei valoare medie este $M(x)=m$ şi variabila aleatoare abatere corespunzătoare $\xi\begin{pmatrix} x-m \\ f(x) \end{pmatrix}$. Se observă că pe axa argumentelor Ox, abaterea $\xi = x - m$ realizează de fapt *o translaţie* a valorilor, *mutând originea argumentului în centrul de grupare m*. Se obişnuieşte a se spune că *abaterea centrează variabila dată*. Variabila abatere $\xi = X - M(X)$ mai este numită şi **variabila centrată**. Pe aceeaşi linie de nomenclatură, momentele abaterii şi valorile ei medii sunt numite momente centrate respectiv valori medii centrate ale variabilei date X.

Cu aceste denumiri putem spune că **dispersia** şi **abaterea medie pătratică** a unei variabile X sunt **momentul centrat de ordinul doi**.

Vom numi moment centrat de ordinul r, mărimea:

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^r f(x)dx \tag{4.2.5.21}$$

Folosind legătura cu momentele obişnuite se obţine:

$$m_r = M_r - C_r^1 M_{r-1} M_1 + C_r^2 M_{r-2} M_1^2 + \ldots + (-1)^{r-1} C_r^r M_1^r \tag{4.2.5.22}$$

Particularizând pe r:

$r=1 \rightarrow m_1 = 0$

$r=2 \rightarrow m_2 = D(X) = \sigma_x^2 = M_2 - M_1^2 \therefore D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

$r=3 \rightarrow m_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$

$r=4 \rightarrow m_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$ etc.

6. Proprietăţile dispersiei.

1.) Pentru variabilele aleatoare independente:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)\,;\; D(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) \tag{4.2.5.23}$$

Dacă variabilele sunt dependente:

$$D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \geq \sum_{k=1}^{n} D(X_k) \tag{4.2.5.24}$$

2.) $D(C) = 0$; C = const. (4.2.5.25)

3.) Orice translaţie aplicată unei variabile aleatoare nu schimbă dispersia:

$$D(X \cdot C) = D(X) \tag{4.2.5.26}$$

4.) $D(C \cdot X) = C^2 D(X)$ (4.2.5.27)

5.) $D\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k X_k + b_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 D(X_k)$ (4.2.5.28)

6.) $D(X\text{-}Y) = D(X) + D(Y)$ (4.2.5.29)

Din aceste proprietăţi rezultă că *operatorul de medie M este un operator liniar*, pe când *operatorul dispersiei D, nu este liniar*.

7.) Dispersia mediei aritmetice a n variabile independente X, care urmează aceeaşi lege de repartiţie, este egală cu dispersia uneia din variabile împărţită la numărul variabilelor:

$$D(X_i) = D(X)$$

$$D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{D(X)}{n} \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \tag{4.2.5.30}$$

Ultima relaţie ne arată că dacă într-o colectivitate oarecare facem o selecţie de volum n, *împrăştierea variabilei aleatoare se micşorează atunci când mărim volumul selecţiei.*

7. Normarea variabilelor aleatoare

Numim *normarea variabilei aleatoare X*, transformarea definită de funcţia: $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{\sigma_x}$,

adică trecerea de la argumentul x la un argument z dat de raportul dintre abatere şi abaterea medie pătratică corespunzătoare. Rezultă:

1.) $M(Z) = 0$ (4.2.5.31)

2.) $D(Z) = 1 ; \sigma_Z = 1$ (4.2.5.32)

8. Coeficient de împrăştiere

Se foloseşte pentru a elimina influenţa naturii variabilei studiate asupra măsurii împrăştierii şi se obţine făcând raportul dintre o valoare a împrăştierii studiată mai sus şi o mărime de aceeşi natură care în practică în general este o valoare tipică.

Un exemplu este coeficientul de variaţie:

$$V = \frac{\sigma_X}{M[X]}. \tag{4.2.5.33}$$

4.2.5.3. Caracteristici ale formei graficelor de repartiţie

1. Simetria şi asimetria. Considerăm o variabilă aleatoare $X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$. Repartiţia acestei variabile este numită **simetrică** faţă de valoarea medie m, dacă:

$$f(m - \xi) = f(m + \xi) \quad \text{, pentru } \forall \xi = x - m.$$

Caracterizăm proprietăţile de asimetrie prin:

a) Coeficientul de asimetrie a lui Pearson $\alpha = \dfrac{M - M_0}{\sigma}$

b) Gradul de asimetrie: $\tilde{\alpha} = \dfrac{m_3}{\sigma^3}$

2. Boltirea şi /sau turtirea

a) Coeficientul de boltire $\beta = \dfrac{m_4}{m_2^2}$ *sau* $\beta = \dfrac{m_4}{\sigma^4}$

b) Excesul $E = \beta - 3$

Se demonstrează că momentele centrate de ordin impar ale unei distribuții simetrice sunt nule, adică $m_{2r+1} = 0$.

4.2.6. Legi de repartiție clasice, discrete și continue

4.2.6.1. Legi de repartiție discrete

A. Repartiția binomială (Bernoulli). Are la bază schema urnei cu bile revenite. O variabilă aleatoare cu o repartiție binomială are forma:

$$X_{(n)}\begin{pmatrix} n & n-1 & & x & & 0 \\ p^n & np^{n-1}q & & C_n^x p^x q^{n-x} & & q^n \end{pmatrix} \tag{4.2.6.1}$$

Deci repartiția binomială este o repartiție discretă în care punctelor 0, 1, 2, ...,n li se atribuie corespunzător probabilitățile:

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad , x = 0, 1, 2, ..., n \tag{4.2.6.2}$$

Pentru a evidenția parametrii acestei distribuții se scrie:

$$f_n(x;p) = C_n^x p^x q^{n-x} \tag{4.2.6.3}$$

Aceasta este funcția de probabilitate (sau funcția de frecvență) a distribuției binomiale.

$$F(n;x) = P(X_t < x) = \sum_{i=0}^{[x]} C_n^i p^i q^{n-i} \tag{4.2.6.4}$$

Funcția de repartiție F(n;x) este o funcție în trepte admițând discontinuități de speța întâia în punctele 0, 1, 2, ..., [x].

Momentele:

$$M(X) = np \quad ; \quad np - q \le M_0 \le np + q$$

$$M_r = \sum x^r C_n^x p^x q^{n-x} \quad ; \quad M_2 = np(np+q) \quad ; \quad \mu_2 = \sqrt{np(np+q)}$$

$$M_3 = n^3 p^3 + 3n^2 p^2 q + npq(1-2p) \tag{4.2.6.5}$$

Momentele centrale:

$$m_1 = 0 \quad ; \quad m_2 = D(X) = npq \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

$$m_3 = npq(q-p) \tag{4.2.6.6}$$

B. Repartiția hipergeometrică (Gauss). Se ajunge la această repartiție pe modelul schemei probabilistice a urnei cu bile nerevenite.

$$P(x;t,a,n) = \frac{C_a^x C_{t-a}^{n-x}}{C_t^n} \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le n - x \le t - a \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{an}{t}; \quad M_0(X) \approx np; \quad D(X) = npq\frac{t-n}{t-1} \tag{4.2.6.7}$$

$$g(t) = \sum_{x=0}^{n} t^x P(x;t,a,n)$$

C. **Repartiția Poisson**. Este repartiția unei variabile aleatoare discrete, a cărei funcție de probabilitate este:

$$f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!};\quad x=0,1,2,\dots,n;\quad \lambda>0 \tag{4.2.6.8}$$

$$M(X)=\lambda;\quad g(t)=e^{\lambda(e^t-1)};\quad C_x(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)} \tag{4.2.6.9}$$

$$M_2=\left(\frac{d^2g(t)}{dt^2}\right)_{t=0}=\lambda(1+\lambda);\quad D(X)=M_2-M_1^2=\lambda \tag{4.2.6.10}$$

$$M_0\in[\lambda-1,\lambda];\quad \alpha=\frac{m_3}{\sigma^3}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}};\quad \beta=\frac{m_4}{\sigma^4}=3+\frac{1}{\lambda} \tag{4.2.6.11}$$

$$F(x)=\sum_{x=0}^{|x|-1}P_{\infty,x};\quad m_1=0;\quad m_2=\lambda;\quad m_3=\lambda;\quad m_4=3\lambda^2+\lambda \tag{4.2.6.12}$$

4.2.6.2. Legi de repartiție continue

A. Repartiția normală. (Gauss-Laplace-Moivre) – este repartiția cu funcția de frecvență (densitatea de probabilitate):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=N(x;m_x,\sigma_x) \tag{4.2.6.13}$$

Constantele m_x și σ_x sunt **parametrii distribuției normale**; vom nota orice distribuție normală cu aceşti parametri $N(x;m_x,\sigma_x)$. Semnificația acestor parametri este imediată:

$$M(X)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=m_x \tag{4.2.6.14}$$

$$D(X)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=\sigma_x^2 \tag{4.2.6.15}$$

Rezultă de aici că densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare normale este perfect determinată de media şi dispersia variabilei.

Repatiția centrată:

$$N(x;0,\sigma_x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \tag{4.2.6.16}$$

Funcția de repartiție şi normarea ei:

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m_x}{\sigma_x}\right)^2}dt \tag{4.2.6.17}$$

Notând:

$$Z=\frac{t-m_x}{\sigma_x}\quad\Rightarrow\quad F(z)=P(Z<z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{4.2.6.18}$$

Se poate arăta că funcția de repartiție se poate pune sub forma:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right), \tag{4.2.6.19}$$

unde $\Phi(z)$ este **funcția integrală a lui Laplace** definită prin:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{4.2.6.20}$$

Momentele: -repartiție centrată: $m_{2r} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)\sigma^{2r}$

-repartiția normată: $\nu_{2r} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r \cdot r!}$

Coeficienți de formă: $\alpha_1 = \frac{M - M_0}{\sigma_x} = 0$; $\alpha_3 = \frac{m_3}{\sigma^3} = 0$; $\beta = \frac{m_4}{\sigma^4} = 3$

Funcția caracteristică pentru $N(x; 0,1)$:

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{4.2.6.21}$$

Pentru $N(X; m_x, \sigma_x)$ avem:

$$c(t) = e^{itm_x - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} \tag{4.2.6.22}$$

4.2.7. Șiruri și serii de variabile aleatoare. Noțiunile de limită și convergență în teoria probabilităților.

4.2.7.1. Convergența în probabilitate.

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un câmp de probabilitate complet aditiv, și

$$X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots \tag{4.2.7.1}$$

un șir de variabile aleatoare și X o variabilă aleatoare. Vom spune că șirul (4.2.7.1) converge în probabilitate către X, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, $\exists N(\varepsilon,\eta), \forall n \geq N(\varepsilon,\eta)$ $\Rightarrow$ $P(X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \eta$. Prin această notație vom înțelege evident $P(\{x \| x_n(x) - X(x)| \geq \varepsilon\})$.

Câteva propoziții importante:

a) Dacă șirul $(X_n)_{0\leq n<\infty}$, converge în probabilitate către X și către Y, atunci $P(X+Y)=0$.

b) Fie $(X_n)_{0\leq n<\infty}$ și $(Y_n)_{0\leq n<\infty}$ două șiruri de variabile aleatoare. Dacă șirul $(X_n)_{0\leq n<\infty}$ converge în probabilitatea către variabila aleatoare X, iar șirul $(Y_n)_{0\leq n<\infty}$ către variabila aleatoare Y, atunci șirul $(\alpha X_n + \beta Y_n)_{0\leq n<\infty}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ converge în probabilitate către $\alpha X + \beta Y$.

c) Dacă șirul $(X_n)_{0\leq n<\infty}$ converge în probabilitate către X și dacă Y este o variabilă aleatoare, atunci șirul $(X_n Y)_{0\leq n<\infty}$ converge în probabilitate către XY.

Criterii de convergență.

Se acceptă **principiul momentelor**: *o variabilă aleatoare se consideră determinată dacă îi sunt cunoscute momentele de orice ordin.* Atunci, dacă $X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $a\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, avem $|M_r(X-a)| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, adică: o variabilă aleatoare X are ca limită o constantă a, dacă modulele momentelor de orice ordin ale abaterii față de constanta respectivă satisfac operația clasică de limită din analiză.

Un şir de variabile aleatoare $(X_n)_{0\le n<\infty}$ este un **şir Cauchy în probabilitate**, dacă pentru $\forall\varepsilon > 0, \eta > 0, \exists N(\varepsilon,\eta) \;\Rightarrow\; P(|X_n - X_m| \ge \varepsilon) \le \eta$; $n,m \ge N(\varepsilon,\eta)$.

Teorema lui Slutki. Pentru ca un şir de variabile aleatoare $(X_n)_{0\le n<\infty}$, să conveargă în probabilitate către o variabilă aleatoare, este necesar şi suficient ca el să fie şir Cauchy.

4.2.7.2. Funcţii de repartiţie şi convergenţă în probabilitate.

Să considerăm un şir de variabile aleatoare $(X_n)_{0\le n<\infty}$ şi fie pentru $\forall n \in [0,\infty)$, $F_n(a) = P(X_n < a)$. Fie X o variabilă aleatoare şi $F(a) = P(X < a)$. Este uşor de văzut că relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$ pentru $\forall a \in \mathbf{R}$, nu atrage convergenţa în probabilitate a şirului $(X_n)_{0\le n<\infty}$ către X. Un exemplu este construit în [ ]. Se poate însă arăta că dacă $P(X_n = A) = 1$, unde A este o constantă, şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ în orice punct x de continuitate ale funcţiei F, atunci şirul $(X_n)_{0\le n<\infty}$ converge în probabilitate către A, şi reciproc: dacă şirul (X_n) converge în probabilitate către variabila aleatoare X, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ în orice punct x de continuitate al funcţiei de repartiţie F.

4.2.7.3. Convergenţa tare (Cantelli). Convergenţa aproape sigură.

Fie $\{\Omega, K, P\}$ un câmp de probabilitate complet aditiv, şi fie $(X_n)_{0\le n<\infty}$ şi X respectiv un şir şi o variabilă aleatoare . Vom spune că şirul $(X_n)_{0\le n<\infty}$ converge tare către X, dacă $\varepsilon > 0$,$\eta > 0$ fiind daţi, $\exists N(\varepsilon,\eta)$ astfel încât: $P \bigcup\limits_{n\ge N(\varepsilon,\eta)} \{x \| X_n(x) - X(x)| \ge \varepsilon\} \le \eta$.

Şirul $(X_n)_{0\le n<\infty}$ converge aproape sigur către X, dacă:

$P\left(\left\{x \middle| \lim\limits_{n\to\infty} X_n(x) \text{există şi este egală cu } X(x)\right\}\right) = 1$. Se arată că şirul (X_n) converge tare către X, dacă şi numai dacă converge aproape sigur.

4.2.7.4. Convergenţa în medie pătratică.

Şirul de variabile aleatoare $X_1(x)$, ..., $X_n(x)$, ... converge în medie pătratică către variabila aleatoare $X(x)$, dacă: $\lim\limits_{n\to\infty} M\left\{|X_n(x) - X(x)|^2\right\} = 0$. Acest lucru se scrie: $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n(x) = X(x)$ unde prin simbolul $l.i.m$ se înţelege limită în medie pătratică. Se demonstrează o teoremă care permite să se cerceteze convergenţa în medie pătratică, prin cercetarea convergenţei simple a trei şiruri de funcţii nealeatoare: şirul speranţelor matematice şi al funcţiilor de corelaţie.

4.2.8. Legea numerelor mari

Această lege care stă la baza statisticii matematice, a fost dovedită pentru prima dată de J. BERNOULLI în 1705 şi publicată în 1713 (Arta conjuncturii). POISSON în 1837 a demonstrat o teoremă care generalizează teorema lui J. Bernoulli şi a introdus denumirea de legea numerelor mari. CEBÎŞEV în 1867 dovedeşte teorema în toată generalitatea ei cu toată rigoarea matematică.

Teorema lui J. Bernoulli. Dacă se consideră un eveniment A, a cărui probabilitate de realizare este p, frecvența relativă f_n (numărul care indică de câte ori s-a realizat A în probe) tinde către p "în probabilitate", adică: $\lim_{n\to\infty} P(|f_n - p| < \varepsilon) = 1$.

Aşadar diferenţa dintre frecvenţa relativă a unui eveniment, pe care o putem evalua în baza probelor făcute şi probabilitatea evenimentului, care este un număr necunoscut, poate fi făcută oricât de mică, cu o probabilitate apropiată de 1, dacă numărul probelor creşte.

4.2.9. Teoria selecţiei

4.2.9.1. Enunţul problemei

Fie o colectivitate Γ, discretă sau continuă, de volum mare, pentru care este imposibilă sau nepractică cunoaşterea individuală a tuturor elementelor ce o constitue. Faţă de această colectivitate se cercetează sau o anumită proprietate sau fenomen care generează o variabilă aleatoare X (în particular aceasta putând fi şi o constantă). De exemplu, în populaţia reprezentată de locuitorii unei ţări putem cerceta repartiţia lor după înălţime (variabila X).

În acest sens se consideră o subcolectivitate γ de volum n ($\gamma \subset \Gamma$) cercetându-se proprietatea sau fenomenul care defineşte variabila X în Γ prin intermediul valorilor ce le ia X în γ.

Fie $X_1, X_2, \ldots X_n$, sistemul de variabile aleatoare care determină valori ale variabilei X în subcolectivitatea γ. Cuvântul "**selecţie**" este folosit curent cu diferite sensuri, însemnând:

- **operaţia** descrisă mai sus, adică constituirea subcolectivităţii γ şi determinarea sistemului de valori X_j;
- **subcolectivitatea γ** formată din elemente ale lui Γ luate la întâmplare;
- **sistemul de variabile** X_j, j=1, 2, ... n;

Sunt folosite de asemenea numirile:

- **Sondaj**, echivalent cu selecţia ca operaţie sau subcolectivitatea γ. Acest cuvânt subliniază ideea că formarea subcolectivităţii γ se face luând la întâmplare elemente din Γ.
- **Eşantion**, pentru subcolectivitatea γ; acest cuvânt subliniază ideea că γ este o parte de volum relativ mic, a colectivităţii Γ, de volum mare.

Relativ la variabilele X_j, j=1, 2, ... n , care reprezintă valorile variabilei X în eşantionul γ, observăm că în cazul când sondajul este efectuat la întâmplare, ele au aceeaşi şansă de a se realiza, de aceea ele determină următoarea variablă aleatoare discretă, cu repartiţie uniformă:

$$X^{*}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_j & X_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \qquad (4.2.9.1)$$

pe care o numim **variabilă de selecţie**.

Într-o selecţie de volum n, valorile observate: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale caracteristicii X, *pot fi privite* ca valori respective ale unui şir de variabile aleatorii $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pe câmpul de probabiliate $(\Omega^{(n)}, K^{(n)}, P_n)$. În cazul unei selecţii repetate pentru care aceste variabile aleatoare sunt independente şi au aceeşi repartiţie ca X, avem:

$$P_n = \underbrace{P \times P \times \ldots \times P}_{\text{de n ori}} \qquad (4.2.9.2)$$

În cazul unei selecţii repetate, variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formează **un lanţ de legături complete** şi P_n are o expresie mai complicată.

Dacă volumul colectivității generale este suficient de mare, iar volumul selecției este suficient de mic, *deosebirea între cele două feluri de selcție este foarte mică* și în aplicațiile practice, o selecție nerepetată poate fi considerată ca o selecție repetată.

Pe scurt, obiectivul fundamental al selecției este de a da maximul de informații asupa populației întregi cu minimum de efort. Prin urmare trebuie să examinăm tipul informației pe care o primim și metodele prin care ea se obține. Cercetând selectiv o populație avem de obicei în vedere una sau mai multe dintre caracteristicile sale. Obiectivul nostru este de a deduce din eșantion care este **repartiția de frecvență** în întreaga populație – pentru caracteristica aleasă. ***Ar fi ideal să exprimăm această repartiție într-o formă matematică, de exemplu cu o curbă Pearson***. Este posibil totuși ca populația să nu admită o astfel de reprezentare sau ca eșantionul să nu fie suficient de mare pentru a risca să-i acordăm încredere. În astfel de cazuri încercăm să găsim ***estimații*** ale unor valori tipice ale întregii populații. *Foarte adesea aceasta este tot ce se cere*. Din acest motiv o mare parte a teoriei selecției este consacrată găsirii -pe bază eșantionului- de estimații ale unor valori tipice ale întregii populații. Astfel de valori tipice sunt **media, dispersia (în general momentele) sau asimetria**; în populațiile multidimensionale avem de considerat **corelațiile** totale sau parțiale.

Despre estimații și testele de semnificație

În general există mai multe căi de estimare a unei valori tipice pe baza datelor eșantionului. Unele dintre aceste căi vor fi mai bune decât celelalte. Există atunci o **teorie a estimației** care se ocupă de aceste probleme și de altele adiacente lor. Ea caută să precizeze condițiile pe care trebuie să le îndeplinească estimația și să indice totodată care sunt cele mai bune estimații în circumstanțele date ca și măsura în care o estimație este mai bună în comparație cu alta.

Este evident că deducțiile pe bază de eșantion nu sunt categorice, cum sunt în mod obișnuit deducțiile matematice. Dacă avem 1000 de bile într-o urnă și extragem 999 din ele, **întâmplător toate negre**, ***este totuși posibil*** ca bila rămasă să fie de altă culoare. Lucrul acesta este atât de ***improbabil*** încât, în multe situații practice este pe deplin justificat să conchidem că toate bilele sunt negre. Dacă tragem o astfel de concluzie și acționăm pe baza ei, în fapt ne bazăm acțiunile *nu pe certitudine ci pe posibilitate*.

Al doilea scop al teoriei selecției este deci de a determina cât mai obiectiv cu putință care este **gradul de încredere** pe care-l putem acorda estimațiilor obținute. Acest lucru trebuie făcut pe cât posibil în termeni probabilistici; dacă nu putem face aceasta, va trebui să ne bizuim pe impresii intuitive, sau pe rezultatele unor experiențe efectuate mai înainte, deci pe elemenete neexprimabile cantitativ. Cu alte cuvinte putem spune că obiectivul nostru este de a determina **precizia unei estimații**. Încercăm să facem aceasta stabilind limita pentru **abaterea posibilă** între estimația bazată pe eșantion și valoarea adevărată a cantității estimate, corespunzătoare întregii populații. *Precizia unei estimații va depinde de*:

a) modul în care estimația este obținută pe baza eșantionului;
b) modul în care a fost obținut eșantionul;

Considerarea lui **a)** ne conduce din nou la teoria estimației. Considerarea lui **b)** ne conduce la stadiul *tehnicii selecției* și al *planificării anchetelor selective*.

4.2.9.2. Calități ale estimațiilor

Selecția este considerată *corect efectuată* (și aceasta este situația pe care trebuie să o cercetăm în practică) atunci când caracteristicile variabilei X (numită în cele ce urmează **variabilă teoretică** sau **variabilă globală**) sunt egale cu **caracteristicile variabilei de selecție** X^*. Aceasta se consideră că are loc dacă avem:

$$M_r(X^*) = M_r(X),\ r = 1, 2, 3, \ldots$$
$$M_e(X^*) = M_e(X) \qquad (4.2.9.3)$$
$$M_o(X^*) = M_o(X) \quad \text{etc.}$$

Din punct de vedere statistic, relațiile de mai sus **nu pot avea loc decât în conformitate cu legea numerelor mari, adică de fapt putem afirma că speranțele matematice ale caracteristicilor variabilei de selecție tind în probabilitate către valorile caracteristicilor teoretice, atunci când volumul selcției n crește suficient de mult**.

Dat fiind că variabila teoretică este necunoscută, nu se poate ști a priori dacă relațiile (4.2.9.3) au sau nu au loc. Pentru acest motiv problema se inversează, în sensul că dispunând de variabila de selecție X^*, se determină caracteristicile ei, cercetându-se în ce condiții valorile obținute **aproximează suficient** caracteristicile corespunzătoare ale variabilei teoretice. **Aproximarea respectivă având loc în sens probabilistic este numită *estimare***.

Estimarea unei caracteristici a variabilei teoretice prin caracteristica analoagă a variabilei de selecție, depinde în mod evident de selecția efectuată: **de reprezentativitatea acesteia, de volum, de modul de efectuare**, etc., precum și **de expresia statistică** care se construiește cu variabilele X_j, ceea ce face să avem estimări de precizii diferite și care este util a fi cunoscute.

Pentru formularea generală a problemei estimării să notăm valoarea caracteristicii studiate (care poate fi: media, mediana, modul, abaterea-tip, un parametru care intră în funcția de probabilitate, etc.) în modul următor:

$$\begin{cases} \lambda, & \text{când este raportată la variabila X definită în } \Gamma \\ \lambda^*, & \text{când este raportată la variabila } X^* \text{ definită în } \gamma \end{cases}$$

Este foarte important să observăm că valoarea λ^* depinzând de selecția efectuată, din motivele arătate mai sus, constituie la rândul ei o variabilă aleatoare, pe când λ este o constantă.

Definiție: Spunem că λ^* este valoarea estimată a caracteristicii λ dacă λ^* converge în probabilitate către λ, atunci când volumul n al eșantionului γ tinde către volumul t al colectivității Γ (t putând fi un număr determinat sau infinit).

Această definiție se scrie astfel:

$$\lim_{n \to t(\infty)} P\left(\left|\lambda^* - \lambda\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (4.3.9.4)$$

A. Estimația corectă și estimația absolut corectă

Să cercetăm cum poate fi îndeplinită această condiție de convergență în probabilitate. Folosind convergența în medie pătratică, trebuie să avem:

$$\begin{cases} M(\lambda^* - \lambda) \to 0 \\ D(\lambda^* - \lambda) \to 0 \end{cases} \text{când } n \to t(\infty) \qquad (4.2.9.5)$$

Aceste condiții de convergență pot fi satisfăcute sub următoarele două forme:

1.) $M(\lambda^*) \to \lambda$; $D(\lambda^*) \to 0$, când $n \to t(\infty)$

În acest caz se spune că **λ^* estimează corect pe λ**.

2.) $M(\lambda^*) = \lambda$; $D(\lambda^*) \to 0$, când $n \to t(\infty)$

În acest caz se spune că **λ^* estimează absolut corect pe λ**.

Diferența $M(\lambda^*) - \lambda$ este numită **distorsiunea estimației λ**.

În cazul estimației absolut corecte distorsiunea estimației este nulă. În cazul estimației corecte, distorsiunea estimației este un infinit mic ε(n), o dată cu $\frac{1}{n}$. *Se observă că nu este suficientă calitatea de infinit mic pentru estimare, ci este necesară convergența în probabilitate care implică condiția ca* $D(\lambda^*)$ *să fie finită.*

În cazul când distorsiunea estimării nu este un infinit mic având astfel ca limită un număr a, adică:

$$M(\lambda^*) - \lambda \to a \text{, când } n \to t(\infty) \tag{4.2.9.6}$$

constanta a reprezintă **o eroare sistematică**. Dacă eroarea sistematică a este cunoscută, estimarea parametrului λ este dată de $\lambda^* - a$.

B. Precizia estimației

Estimația λ^* a caracteristicii λ este efectuată prin intermediul variabilei de selecție X^*. Considerând efectuate selecții diferite în aceeşi populație Γ, de exemplu, două selecții care conduc la variabilele de selecție X_1^* şi X_2^*, se obțin două estimații λ_1^* şi λ_2^* care, în cazul când sunt diferite, pun problema de a şti care dintre ele este mai precisă. (Estimațiile le vom presupune fără distorsiune).

Notând dispersiile respective cu: $D(\lambda_1^*) = \sigma_1^2$; $D(\lambda_2^*) = \sigma_2^2$, după inegalitatea Bienaymé-Cebîşev, putem scrie relațiile:

$$\begin{cases} P(|\lambda_1^* - \lambda| < k\sigma_1) > 1 - \dfrac{1}{k^2} = 1 - \delta = \alpha \\ P(|\lambda_2^* - \lambda| < k\sigma_2) > 1 - \dfrac{1}{k^2} = 1 - \delta = \alpha \end{cases} \tag{4.2.9.7}$$

α fiind **indicele de încredre** iar **δ pragul de semnificație**.

Aceste relații ne arată următorul fapt: corespunzător aceluiaşi prag de semnificație δ, intervalele de încredre sunt diferite având lungimi determinate de produsul $2k\sigma_i$. Evident, estimația este cu atât mai precisă cu cât valoarea λ_i^* este mai aproape de valoarea λ, cu alte cuvinte precizia estimației este mai mare când intervalul de încredere este mai mic (**Fig. 4.2.9.1**).

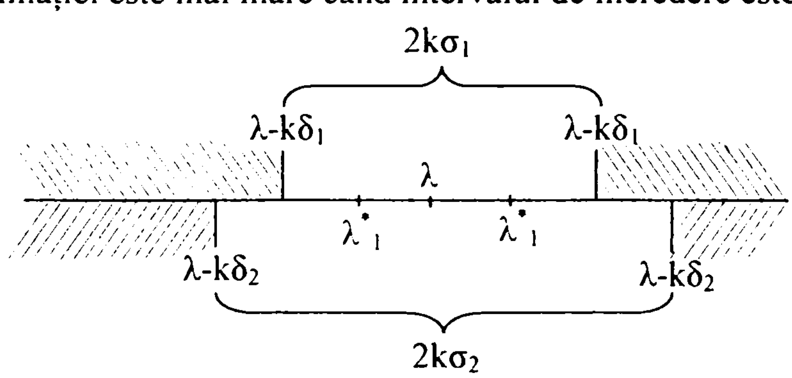


Fig. 4.2.9.1

Rezumând: dintre cele două estimații $\lambda_1^* \neq \lambda_2^*$ estimația mai precisă este aceea care are cea mai mică abatere standard sau, ceea ce este acelaşi lucru, cea mai mică dispersie.

4.2.9.3. Estimarea mediei teoretice. Media de selecție.

A. Media de selecție estimează absolut corect media teoretică

Considerând variabila de selecție

$$X^{\bullet}\begin{pmatrix} X_j \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n \tag{4.2.9.8}$$

media de selecție (numită și **medie empirică**), are expresia:

$$m^{\bullet} = M(X^{\bullet}) = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{1}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} \tag{4.2.9.9}$$

Mărimea $m^{\bullet}$ constituie la rândul său o variabilă aleatoare care conform legii numerelor mari, tinde în probabilitate către media teoretică m=M(X) adică avem:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|m^{\bullet} - m\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{4.2.9.10}$$

Practic se pune problema de a ști întrucât estimarea lui m prin $m^{\bullet}$ este sau nu corectă. În acest sens calculăm expresiile: $M(m^{\bullet})$ și $D(m^{\bullet})$ [*„media mediei de selecție"*].

Avem: $M(m^{\bullet}) = M\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n} M(X_j)}{n}$. Dar cum pentru fiecare variabilă X_j avem

$M(X_j) = m$, rezultă: $M(m^{\bullet}) = \frac{n \cdot m}{n} = m$ adică

$$\boxed{M(m^{\bullet}) = M(X)} \tag{4.2.9.11}$$

Pentru calculul dispersiei mediei de selecție $D(m^{\bullet})$ să calculăm în prealabil momentul de ordinul doi al medie de selecție pe care-l notăm cu $\overline{M_2}$.

$$\overline{M_2} = M(m^{*2}) = M\left[\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\right)^2\right] = M\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 + 2\sum_{j,k=1, j\neq k}^{n} X_j X_k}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} M(X_j^2) + \frac{2}{n^2}\sum_{j,k=1,j\neq k}^{n} \underbrace{M(X_j)M(X_k)}_{\substack{s-au\ considerat\ variabi- \\ lele\ X_j,\ X_k\ independente}}$$

Cum avem : $M(X_j^2) = M_2$; $M(X_j) = M(X_k) = M_1$

Numărul termenilor din cele două sume sunt: $C_n^1 = n$ pentru prima sumă și $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ pentru a doua sumă.

$$\overline{M_2} = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot M_2 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot M_1^2 = \frac{M_2}{n} + \frac{n-1}{n} M_1^2$$

Dar: $D(m^{\bullet} = \overline{M_2} - \overline{M_1}^2) = \frac{M_2}{n} + \frac{n-1}{n}M_1^2 - M_1^2 = \frac{M_2}{n} - \frac{M_1^2}{n} = \frac{M_2 - M_1^2}{n}$

Dar cum pentru dispersia D a variabilei X avem: $D(X) = M_2 - M_1^2$

$$\Rightarrow \boxed{D(m^{\bullet}) = \frac{D}{n}} \tag{4.2.9.12}$$

Rezultatele (4.2.9.11) și (4.2.9.12) ne arată că avem $M(m^*) = m$ și $D(m^*) = \frac{D}{n} \to 0$ când $n \to \infty$, adică estimarea caracteristicii $m = M(X)$ prin media de selecție $m^* = M(X^*)$ este o **estimare absolut corectă**.

B. Repartiția medie de selecție m^*, pentru n suficient de mare, este aproximată de repartiția normală cu parametrii $m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

4.2.9.4. Estimarea dispersiei teoretice. Dispersia de selecție

Dispunând de variabila aleatorie X^*, putem calcula dispersia respectivă pe care o numim dispersie de selecție sau dispersie empirică.

$$D^* = M[(X^* - m^*)^2] = \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m^*)^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - m^*)^2}{n} \tag{4.2.9.13}$$

Dispersia de selecție constituie la rândul ei o variabilă aleatoare. Conform legii numerelor mari ea tinde în probabilitate către dispersia teoretică $D = M[(X-m)^2]$ dacă avem:

$$\lim_{n \to \infty} P(|D^* - D| < \varepsilon) = 1 .$$

Se demonstrează că:

$$M(D^*) = D - D(m^*) \tag{4.2.9.14}$$

adică, **în orice tip de selecție media dispersiei de selecție este mai mică decât dispersia teoretică cu dispersia mediei de selecție**.

Am arătat însă că $D(m^*) = \frac{D}{n}$ deci relația de mai sus (4.2.9.14) devine:

$$M(D^*) = D - \frac{D}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)D \quad ; \quad M(D^*) = \frac{n-1}{n}D \tag{4.2.9.15}$$

Rezultă:

$$M(D^*) - D = -\frac{1}{n}D \to 0 \text{ când } n \to \infty$$

adică, **estimarea dispersiei teoretice prin dispersia de selecție D^* se face totdeauna cu o distorsiune de valoare $-\frac{D}{n}$ și ca atare nu este o estimare absolut corectă.**

Pentru a estima absolut corect dispersia D cu ajutorul datelor de selecție, considerăm dispersia modificată $\tilde{D}$:

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1} D^* \text{ sau } \tilde{D} = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m^*)^2}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m^*)^2}{n-1} \tag{4.2.9.16}$$

Pentru dispersia modificată avem:

$$M(\tilde{D}) = \frac{n}{n-1} M(D^*) \Rightarrow M(\tilde{D}) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D = D \tag{4.2.9.17}$$

Această relație ne arată că dispersia de selecție modificată $\tilde{D}$ dată de ecuația (4.2.9.16), **estimează absolut corect dispersia D**. Cu alte cuvinte din punct de vedere practic **dispersia teoretică D se estimează absolut corect printr-o sumă de tipul dispersiei de selecție în care însă n se înlocuiește prin n-1**.

Evident pentru n suficient de mare, cele două estimări ale dispersiei teoretice, dispersia de selecție D^{*} și dispersia modificată $\tilde{D}$ vor diferi neesențial, ambele mărimi tinzând în probabilitate către D.

Calculând dispersia lui $\tilde{D}$ (dispersia dispersiei modificate), se găsește expresia

$$D(\tilde{D}) = \frac{m_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2 \qquad (4.2.9.18)$$

pentru care se verifică și a doua condiție de convergență în media pătratică, adică din relațiile (4.2.9.17) și (4.2.9.18) rezultă:

$$\begin{cases} M(\tilde{D}) = D \\ D(\tilde{D}) \to 0 \quad \text{când} \quad n \to \infty \end{cases}$$

ceea ce dovedește faptul că $\tilde{D}$ estimează absolut corect pe D.

§ 4.3. METODA MONTE-CARLO

4.3.1. Acul lui BUFFON

Metoda Monte-Carlo (m.M.C.) este o metodă de analiză numerică foarte veche dar şi deosebit de modernă. Este o metodă destul de „exotică" chiar şi printre matematicieni, de aceea literatura specifică în limba română este deosebit de săracă. Eu nu am găsit decât două cărţi: o traducere din limba rusă a cărţii lui ERMACOV [E14] dedicată chiar (m.M.C.) dar foarte greu accesibilă şi pe care nu am putut-o folosi, şi cartea lui M STOKA şi R.THEODORESCU [S69] de probabilităţi geometrice, care are un capitol privind (m.M.C.) excelent! Spre surprinderea mea nici una din cărţile de analiză numerică, româneşti sau traduse, nu se ocupă de (m.M.C.) deşi toate articolele de (M.P.R) folosesc tensiuni şi deplasări. Nu am găsit nici o definiţie a (m.M.C.). În [E14] se spune că „este metoda modelării variabilelor aleatoare în scopul calculării repartiţiilor lor", efectuată de obicei cu ajutorul calculatoarelor electronice. În [S69] se zice că *„este o metodă a experimentelor aleatoare care permite pentru o multitudine de probleme concrete, construirea unor algoritmi de rezolvare care pot fi uşor programaţi pe calculatoare".*

De altfel cred că metoda este dificil de înţeles în esenţa sa intimă: aplicarea ei urmează însă un mecanism foarte simplu. Dificultatea constă în a vedea legătura ce se poate stabili între nişte fenomene profund deterministe şi nişte experimente aleatoare care aparent nu au nici o legătură cu problema pusă. Voi lămuri această idee, urmărind problema *„acului lui BUFFON"* pe care acesta a formulat-o în 1760 şi care a fost rezolvată numai în 1860 de către E. BARBIER [S69].

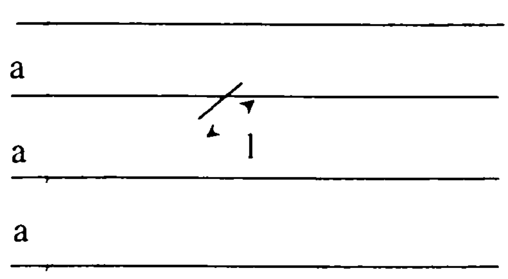


Fig. 4.3.1.1

Problema este următoarea: Să presupunem că avem dat un caroiaj al unei suprafeţe plane, format din drepte paralele şi echidistante (a). Pe această suprafaţă aruncăm un ac de lungime $l < a$. Să stabilim care este probabilitatea ca acul să intersecteze una din dreptele coroiajului. După un calcul destul de lung şi dificil [S69] p.110, care acum nu ne interesează, se demonstrează că această probabilitate este:

$$P = \frac{2l}{\pi a} \qquad (4.3.1.1)$$

Pe de altă parte, în mod surprinzător, acest experiment aleator simplu poate fi pus în legătură cu calculul aproximativ al numărului π. Pentru aceasta vom face efectiv această experienţă: aruncând acul de n ori şi constatând că acul intersectează o linie a coroiajului de n' ori, frecvenţa relativă a fenomenului este $\frac{n'}{n}$; deci putem spune că $\frac{n'}{n} \approx \frac{2l}{\pi a} \Rightarrow \pi \cong \frac{n}{n'} \cdot \frac{2l}{a}$.

Am obţinut un rezultat surprinzător, care leagă calculul numărului π, o problemă deterministă, cu o experienţă aleatoare!.

Au fost mulţi cercetători care au făcut această experienţă simplă pentru a verifica rezultatul. De exemplu LAZZERINI (1901) considerând l/a=0.83 şi n=3408, $n' = 1808$ $\Rightarrow \pi \equiv 3{,}1415929$ sau GRIEDGEMAN (1960): l/a=0.7857, n=2, $n' = 1 \Rightarrow \pi = 3{,}143$.

Să vedem acum care este modelul aleator asociat acestei probleme. Să presupunem că A este evenimentul care constă în aceea că acul intersectează una din liniile coroiajului. Se demonstrează că evenimentul A se produce cu probabilitatea $P = \frac{2l}{\pi a}$. *Problema care se pune este deci estimarea mărimii P.* Dar în teoria estimaţiei (v. § 4.2.9.3.) se demonstrează că *frecvența n'/n constituie o estimație consistentă nedeplasată a mărimii P*, sau altfel spus, variabila aleatoare n'/n converge în probabilitate către P când $n \to \infty$, iar $M\left(\frac{n'}{n}\right) = P$. Prin urmare suntem îndreptățiți să luăm ca valoare aproximativă pentru $P = 2l/\pi a$ valoarea n'/n. Ceea ce este propriu (m.M.C.*) este faptul că observarea modelului (experimentului) construit și înregistrarea rezultatelor corespunzătoare se înlocuiesc cu rezultatele unor calcule efectuate cu *numere aleatoare*** și prin aceasta se dispensează de prelucrarea efectivă a experimentelor. În baza acestui raționament (m.M.C.) are trei părți:

- Modelarea variabilei aleatoare având o lege de repartiție dată;
- Construirea modelului probabilist al procesului (sistemului) real, analizat;
- Utilizarea teoriei statistice a estimației.

Elaborarea limbajelor de programare automată a simplificat substanțial una din etapele acestei munci. Din această cauză, în prezent etapele cele mai complicate sunt următoarele: descrierea matematică a fenomenului studiat, simplificările necesare ale problemei, alegerea metodei numerice corespunzătoare, studiul erorilor și scrierea algoritmului. În cazul metodelor deterministe este necesar să se construiască un model probabilistic – să se randomizeze problema inițială – pentru a se putea folosi (m.M.C.)

Analizând **precizia metodei Monte-Carlo**, în lucrările menționate se arată că dacă introducem eroarea absolută $\delta = |\bar{x} - M(\xi)|$ vom obține:

$$\delta = |\bar{x} - M(\xi)| < \frac{D(\xi)}{\sqrt{n\varepsilon}} \tag{4.3.1.2}$$

ceea ce spune că eroarea (m.M.C.) este de ordinul $\frac{1}{\sqrt{n}}$, evident privită în sens probabilistic.

4.3.2. Numere aleatoare

Noțiunea de „*număr aleator*”, fundamentală în formularea (m.M.C) are o semnificație numai asociată cu un anumit experiment. Fie ξ o variabilă aleatoare reală, definită pe un anumit câmp de probabilitate; orice valoare x pe care o poate lua variabila aleatoare ξ se numește **număr aleator**. Rezultă că un șir de numere aleatoare nu este altceva decât o **selecție efectivă de volum finit** efectuată asupra variabilei aleatoare ξ. Deci (m.M.C.) caută să folosească aparatul statisticii matematice la rezolvarea unor probleme strict deterministe *prin intermediul conceptului fundamental de selecție*. Nu voi mai prezenta problemele legate de generarea numerelor aleatoare și pseudoaleatoare. Se găsesc în [S69]. Voi reda numai câteva idei privind *modelarea diferitelor experimente* care se desfășoară după o funcție de repartiție dată fără a mai efectua aceste experimente, ci înlocuindu-le cu niște calcule mult mai simple cu numere aleatoare uniform repartizate pe intervalul [0,1]. O variabilă aleatoare ξ se numește uniformă pe intervalul [a,b] (sau uniform repartizată pe intervalul [a,b], dacă densitatea sa de probabilitate este dată de funcția:

* (m.M.C.) s-a dezvoltat în mod sistematic începând cu cel de-al doilea război mondial, când a fost utilizată la producerea bombei atomice în legătură cu modelarea directă a problemelor probabiliste privind difuzia aleatoare a neutronilor dintr-un material fisionabil. Posibilitatea aplicării (m.M.C.) la probleme deterministe a fost semnalată de E. FERMI, J. von NEUMANN, S. ULAM și popularizată de ei imediat după cel de-al doilea război mondial. Acestă metodă, care și-a găsit ulterior numeroase aplicații, joacă un rol central în „Analiza numerică”.

** Primele tabele de **numere aleatoare** s-au alcătuit pe baza rezultatelor obținute la jocurile de ruletă și care la cazinoul din Monte-Carlo se afișează în mod regulat; de aici provine și denumirea de metoda Monte-Carlo dată procedeelor descrise mai sus, metodă introdusă de matematicienii americani N. METROPOLIS, S.ULAM în 1949.

$$p(x) = e_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dacă} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin [a,b] \end{cases} \tag{4.3.2.1}$$

În acest caz funcția de repartiție corespunzătoare este:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ x, & \text{dacă} \quad a \le x < b \\ 1, & \text{dacă} \quad x \ge b \end{cases} \tag{4.3.2.2.}$$

Voi sistematiza câteva proprietăți ale șirurilor de numere aleatoare.

1^0) Să considerăm un șir de numere aleatoare $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ uniform repartizat pe intervalul [0,1] și fie [a,b] un interval inclus în [0,1]: $[a,b] \subseteq [0,1]$. Vom nota cu $\nu_n = \nu_k(a,b)$ - numărul de elemente ale subșirului finit $(x_i)_{1 \le i \le n}$ care se găsesc în intervalul [a,b]. Atunci are loc relația:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n}{n} = b - a \tag{4.3.2.3}$$

adică frecvența relativă a unui șir de numere aleatoare $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ uniform repartizate pe intervalul [0,1] pentru fiecare subinterval $[a,b] \subset [0,1]$ este egală cu lungimea acestui subinterval.

2^0) Dintr-un șir de numere aleatoare $(x_n)_{n \in N^*}$ uniform repartizate pe intervalul [0,1], obținem imediat un șir de numere aleatoare $(y_n)_{n \in N^*}$ uniform repartizate pe un interval dat [A,B]; pentru aceasta e suficient să punem:

$$y_n = A + (B - A)x_n \qquad n \in \mathbf{N}^*$$

3^0) Deosebit de important este să stabilim ce relație există între șirurile de numere aleatoare uniform repartizate pe intervalul [0,1] și *șirurile de numere aleatoare cu o funcție de repartiție dată.* Această legătură se bazează pe faptul că dacă variabila aleatoare η are densitatea de probabilitate $p(x)$, atunci variabila aleatoare

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} p(u)du \tag{4.3.2.4}$$

este uniform repartizată pe intervalul [0,1].

Pe baza acestui rezultat se poate da următoarea regulă: dacă $(x_n)_{n \in N^*}$ este un șir de numere aleatoare uniform repartizate pe intervalul [0,1], atunci pentru a obține un șir de numere aleatoare $(y_n)_{n \in N^*}$ densitatea de repartiție $p(x)$ – respectiv cu funcția de distribuție $F(x)$, - vom rezolva ecuațiile în y_n:

$$x_n = \int_{-\infty}^{y_n} p(u)du, \qquad n \in \mathbf{N}^* \tag{4.3.2.5}$$

sau, sub formă echivalentă, ecuațiile:

$$x_n = F(y_n), \quad n \in \mathbf{N}^* \tag{4.3.2.6}$$

unde $F(x)$ este funcția de repartiție corespunzătoare densității de probabilitate $p(x)$. Rezultă atunci că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{\nu}_n}{n} \int_a^b p(u)du \qquad n \in \mathbf{N}^* \tag{4.3.2.7}$$

unde $\tilde{\nu}_n$ este numărul de elemente ale subşirului finit $(y_i)_{1 \le i \le n}$ care aparţin unui subinterval arbitrar [a,b].

4.3.3. Calculul numeric aproximativ al integralelor

În „Analiza numerică" una dintre probelemele cele mai importante este calculul integralelor definite, datorită frecvenţei ridicate cu care se întâlnesc acestea în probleme de cercetare. De aceea şi există numeroase metode – să le spunem clasice – pentru calculul numeric al acestor integrale. Dar dacă se trece de la integralele simple la integralele multiple volumul calculelor creşte considerabil. În aceste situaţii (m.M.C.) rezolvă cu succes şi relativ repede şi simplu cele mai complicate probleme în care intervin integrale multiple, în special în acele cazuri în care nu se impun condiţii prea severe asupra preciziei rezultatelor. Mai mult, precizia rezultatelor nu depinde de ordinul de multiplicitate a integralelor.

Pentru a înţelege principiul metodei ne propunem să calculăm integrala:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{4.3.3.1}$$

care presupunem că există. De multe ori, la începutul problemei, această integrală pe [a,b] se reduce mai întâi la o integrală pe [0,1] cu substituţia $y=(x-a)/(b-a)$.

Voi prezenta două procedee:

I. Ideea metodei are la bază unul din rezultatele obţinute în teoria selecţiei confom căruia *„media de selecţie estimează corect media teoretică"*.

Fie ξ o variabilă aleatoare uniform repartizată pe intervalul [a,b]. Să formăm o nouă variabilă aleatoare $f(\xi)$; se vede legătura cu integrala (4.3.3.1) deoarece ne folosim de expresia analitică a funcţiei de sub semnul integral pentru a forma noua variabilă aleatoare $f(\xi)$. Acestei noi variabile aleatoare să-i calculăm valoarea medie (teoretică):

$$M(f(\xi)) = \int_a^b f(u)\; e_{[a,b]}(u)du = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du = \frac{1}{b-a}\cdot I \tag{4.3.3.2}$$

unde $e_{[a,b]}$ este densitatea de probabilitate uniformă pe [a,b] (v. (4.3.2.1)).

Pe de altă parte să efectuăm asupra variabilei aleatoare ξ o selecţie de volum n; fie acesta $x_1, x_2, ..., x_n$ şi să calculăm valorile de selecţie pentru noua variabilă, $f(x_i)$, şi să-i determinăm valoarea medie:

$$M(f(x_i)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Dar:

$$M(f(x_i)) \cong M(f(\xi)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a} I \quad \Rightarrow \quad I \cong \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{4.3.3.3}$$

Accentuăm faptul că x_i sunt n numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul [0,1] care sunt în tabele sau pot fi generate de funcţii specializate din anumite limbaje de programare a calculatorului. De exemplu, 10 astfel de numere sunt: 0.878; 0.260; 0.694; 0.922; 0.129; 0.359; 0.119; 0.877; 0.347; 0.081.

II. Un alt procedeu: Să considerăm, pentru simplitate, că $0 \le f(x) \le c, \quad x \in [a,b]$

Fie (ξ, η) o variabilă aleatoare bidimensională uniform repartizată* în dreptunghiul:

$$D = \{(x,y): a \le x \le b, \quad 0 \le y \le c\}$$

Asupra acestei variabile efectuăm o selecție de volum n descrisă prin mulțimea perechilor: (x_1,y_1), $(x_2,y_2),\ldots,(x_n y_n)$. Asemenea perechi de puncte uniform distribuite în pătratul unitate [0,1]x[0,1] (numere aleatoare bidimensionale uniform distribuite) sunt date în tabele sau sunt generate de calculator la apelarea anumitor funcții specializate.

Să notăm cu n' numărul acestor puncte din această selecție care se găsesc sub graficul funcției f (v. **Fig.4.3.3.1**), adică numărul punctelor pentru care $y_i < f(x_i)$. Atunci putem scrie:

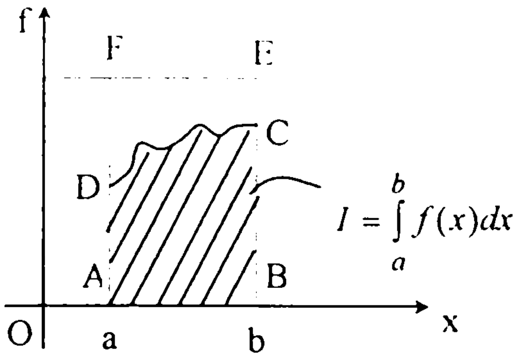


Fig. 4.3.3.1

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } ABEF} \cong \frac{n'}{n} \tag{4.3.3.4}$$

sau, în mod echivalent:

$$\frac{\int_a^b f(u)du}{c(b-a)} \cong \frac{n'}{n} \Rightarrow I \cong c(b-a)\frac{n'}{n} \tag{4.3.3.5}$$

Dăm în continuare ***programul (realizat în limbajul Visual Basic) pentru calculul integralelor duble cu metoda Monte Carlo***.

Am considerat că se cere evaluarea integralei multiple de gradul doi de forma:

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy \tag{4.3.3.6}$$

pe un domeniu G care se află în interiorul unui cub unitar bidimensional ($0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$). Dacă acest lucru nu se întâmplă în realitate, se poate face trecerea la această situație printr-o transformare de variabilă. Funcția $f(x,y)$ de sub semnul integral s-a considerat de forma: $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, unde coeficienții a, b, c, d, e, f se dau de către utilizator.

Vom alege n secvențe de numere aleatoare repartizate uniform pe intervalul [0,1]:

$$\begin{aligned} &M_1(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ &M_2(x^{(2)}, y^{(2)}) \\ &M_3(x^{(3)}, y^{(3)}) \\ &\\ &M_n(x^{(n)}, y^{(n)}) \end{aligned} \tag{4.3.3.7}$$

* Reamintim: O variabilă aleatoare r- dimensională ξ se numește uniformă pe domeniul D (sau **uniform repartizată** pe domeniul D) dacă densitatea sa de probabilitate este dată de funcția:

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = e_D(x_1,\ldots,x_r) = \begin{cases} \dfrac{1}{v(D)} & \text{dacă } (x_1,x_2,\ldots,x_r) \in D \\ 0 & \text{dacă } (x_1,x_2,\ldots,x_r) \notin D \end{cases}$$ unde $v(D)$ este volumul r-dimensional al domeniului D.

Atunci cele n secvențe $M_i\left(x^{(i)}, y^{(i)}\right)$, $i = 1,n$ pot fi considerate ca puncte aleatoare uniform distribuite în cubul unitar bidimensional.

Fie ca din totalul n de numere aleatoare, n' puncte să fie localizate în domeniul G, iar restul de $n - n'$ să fie în afara lui. Atunci, pentru un număr n suficient de mare, calculul integralei I cu metoda Monte Carlo se va face cu următoarea formulă aproximativă:

$$I \approx \frac{n'}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n'} f(M_i)}{n'} = \frac{\sum_{i=1}^{n'} f(M_i)}{n} \tag{4.3.3.8}$$

Algoritmul este simplu de implementat și nu necesită alte explicații. Dăm mai întâi codul sursă al programului, realizat în Visual Basic, și apoi câteva exemple de calcul a unor integrale simple, pe baza cărora s-a testat corectitudinea rezultatelor furnizate de program.

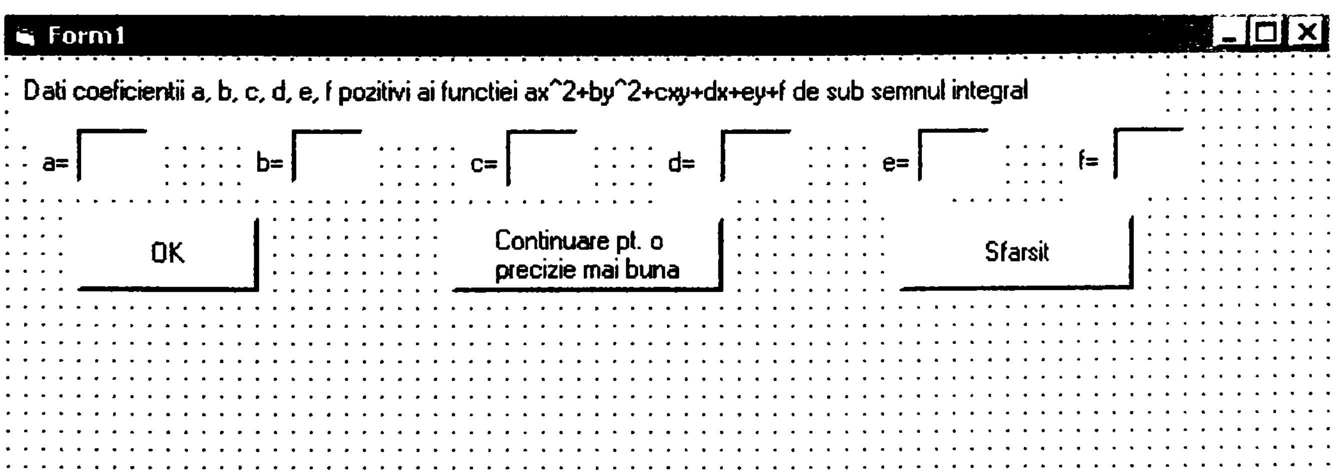
Desigur că pentru a ne asigura de o înaltă precizie numărul de puncte n trebuie să fie cât mai mare. Eroarea formulei (4.3.3.8) este invers proporțională cu rădăcina pătrată a numărului de puncte de test, adică, luând 25 de puncte de test eroarea poate fi pâna la $1/\sqrt{25}$, adică 0.2=20%. Deoarece însă formulele aproximative (4.3..3.6) s-ar putea scrie similar și pentru integrale de orice ordin de multiplicitate, rezultă că eroarea nu crește cu ordinul de multiplicitate al integralelor, și deci metoda Monte Carlo se pretează foarte bine și în cazul calculului integralelor de ordin mare.

Cod sursă al programului de calcul al integralelor multiple cu metoda Monte Carlo

Module 1:

```
Public a As Single, b As Single, c As Single, d As Single, e As Single, f As Single
Public nt As Integer, i As Integer, integr As Single, ValMax As Single
Public X() As Single, Y() As Single, Z() As Single, Z1() As Single, Eps() As Integer

Sub main()
  MsgBox "Rezolvarea integralelor multiple cu metoda Monte Carlo"
Form1.Show
End Sub

Public Function FNF(i As Integer, a1 As Single, b1 As Single, c1 As Single, d1 As Single, e1 As Single, f1 As Single)
FNF = a1 * X(i) ^ 2 + b1 * Y(i) ^ 2 + c1 * X(i) * Y(i) + d1 * X(i) + e1 * Y(i) + f1
End Function
```

Form 1



Private Sub CmdOK_Click()
```
a = Val(Txta.Text)
b = Val(Txtb.Text)
c = Val(Txtc.Text)
d = Val(Txtd.Text)
e = Val(Txte.Text)
f = Val(Txtf.Text)
ValMax = a + b + c + d + e + f
Randomize Timer
nt = InputBox("Nr total de puncte=")
 ReDim X(1 To nt), Y(1 To nt), Z(1 To nt), Z1(1 To nt), Eps(1 To nt)
For i = 1 To nt
  X(i) = Rnd
  Y(i) = Rnd
  Z(i) = Rnd
Next i
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "______________________________________________________________"
Print "X", "Y", "Z", "f(x,y)", "Eps"
Print "______________________________________________________________"
n = 0
For i = 1 To nt
 Z1(i) = FNF(i, a, b, c, d, e, f) / ValMax
 If Z(i) <= Z1(i) Then
   Eps(i) = 1
   n = n + 1
  Else
   Eps(i) = 0
 End If
 Print Format(X(i), "##0.0000000"), Format(Y(i), "##0.0000000"), Format(Z(i), "##0.0000000"), Format(Z1(i),
"##0.0000000"), Eps(i)
Next i
Print "_________________________________________________________________"
Print "n=", n
integr = n / nt * ValMax
MsgBox ("Valoarea integralei I=" & integr)
Cmdrepet.Visible = True
cmdsf.Visible = True
End Sub
```

Private Sub Cmdrepet_Click()
```
nt = InputBox("Nr total de puncte=")
 ReDim X(1 To nt), Y(1 To nt), Z(1 To nt), Z1(1 To nt), Eps(1 To nt)
For i = 1 To nt
  X(i) = Rnd
  Y(i) = Rnd
  Z(i) = Rnd
Next i
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "______________________________________________________________"
Print "X", "Y", "Z", "f(x,y)", "Eps"
Print "______________________________________________________________"
n = 0
For i = 1 To nt
 Z1(i) = FNF(i, a, b, c, d, e, f) / ValMax
 If Z(i) <= Z1(i) Then
   Eps(i) = 1
   n = n + 1
  Else
   Eps(i) = 0
```

```
 End If
 Print Format(X(i), "##0.0000000"), Format(Y(i), "##0.0000000"), Format(Z(i), "##0.0000000"), Format(Z1(i),
"##0.0000000"), Eps(i)
Next i
Print "____________________________________________________________"
Print "n=", n
integr = n / nt * ValMax
MsgBox ("Valoarea integralei I=" & integr)
End Sub
```

Private Sub cmdsf_Click()

```
 End
End Sub
```

Private Sub Txta_Validate(Cancel As Boolean)

```
If Val(Txta.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie pozitivi!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Private Sub Txtb_Validate(Cancel As Boolean)

```
If Val(Txtb.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie >=0!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Private Sub Txtc_Validate(Cancel As Boolean)

```
If Val(Txtc.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie >=0!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Private Sub Txtd_Validate(Cancel As Boolean)

```
If Val(Txtd.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie >=0!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Private Sub Txte_Validate(Cancel As Boolean)

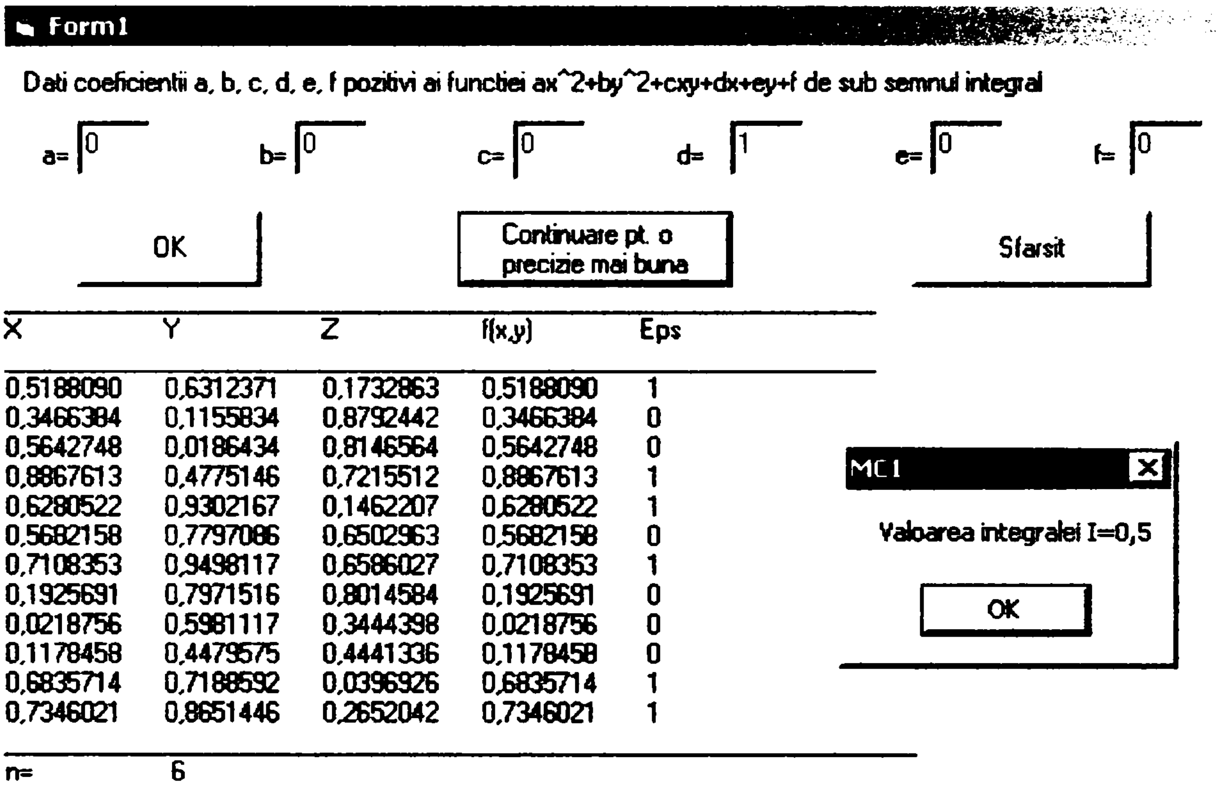
```
If Val(Txte.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie >=0!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Private Sub Txtf_Validate(Cancel As Boolean)

```
If Val(Txtf.Text) < 0 Then
 MsgBox ("Coeficientii trebuie sa fie >=0!")
 Cancel = True
End If
End Sub
```

Exemple de calcul:

1) cazul $I = \iint x\,dx\,dy$



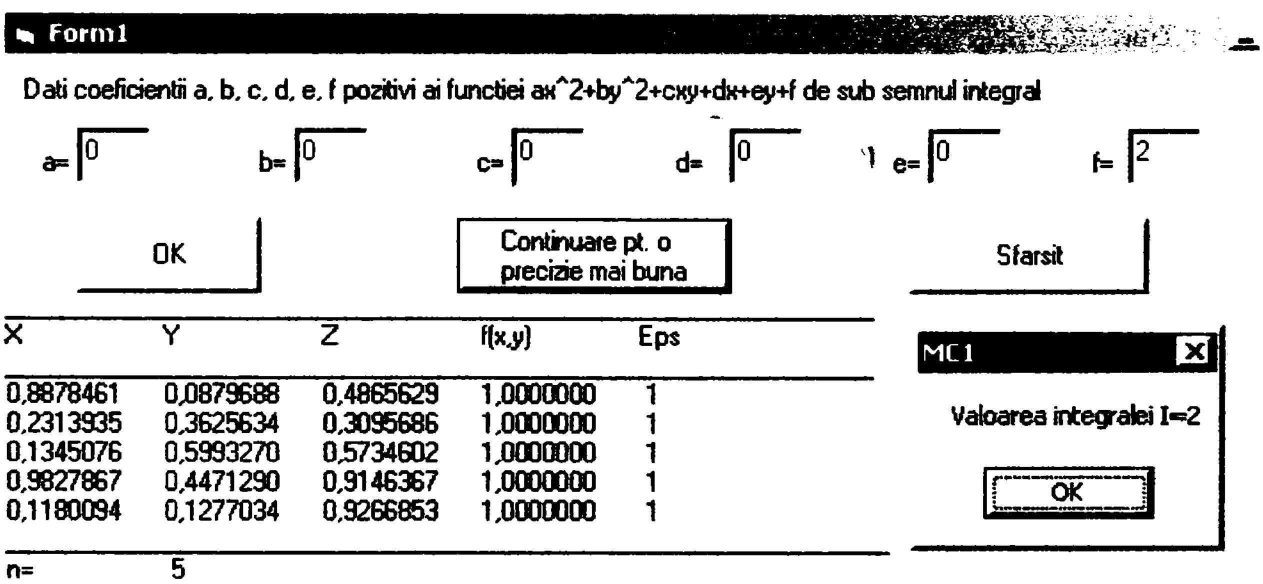
X	Y	Z	f(x,y)	Eps
0,5188090	0,6312371	0,1732863	0,5188090	1
0,3466384	0,1155834	0,8792442	0,3466384	0
0,5642748	0,0186434	0,8146564	0,5642748	0
0,8867613	0,4775146	0,7215512	0,8867613	1
0,6280522	0,9302167	0,1462207	0,6280522	1
0,5682158	0,7797086	0,6502963	0,5682158	0
0,7108353	0,9498117	0,6586027	0,7108353	1
0,1925691	0,7971516	0,8014584	0,1925691	0
0,0218756	0,5981117	0,3444398	0,0218756	0
0,1178458	0,4479575	0,4441336	0,1178458	0
0,6835714	0,7188592	0,0396926	0,6835714	1
0,7346021	0,8651446	0,2652042	0,7346021	1

n= 6

Se observă că alegând doar 12 perechi de puncte (x,y) aleatoare s-a obținut soluția exactă a integralei, care este de 0.5.

Observație: În figurile care prezintă execuția programului, cu n l-am notat de fapt pe n', adică numărul cazurilor când punctele aleatoare alese sunt cuprinse în spațiul integralei.

2) cazul $I = \iint 2\,dx\,dy$

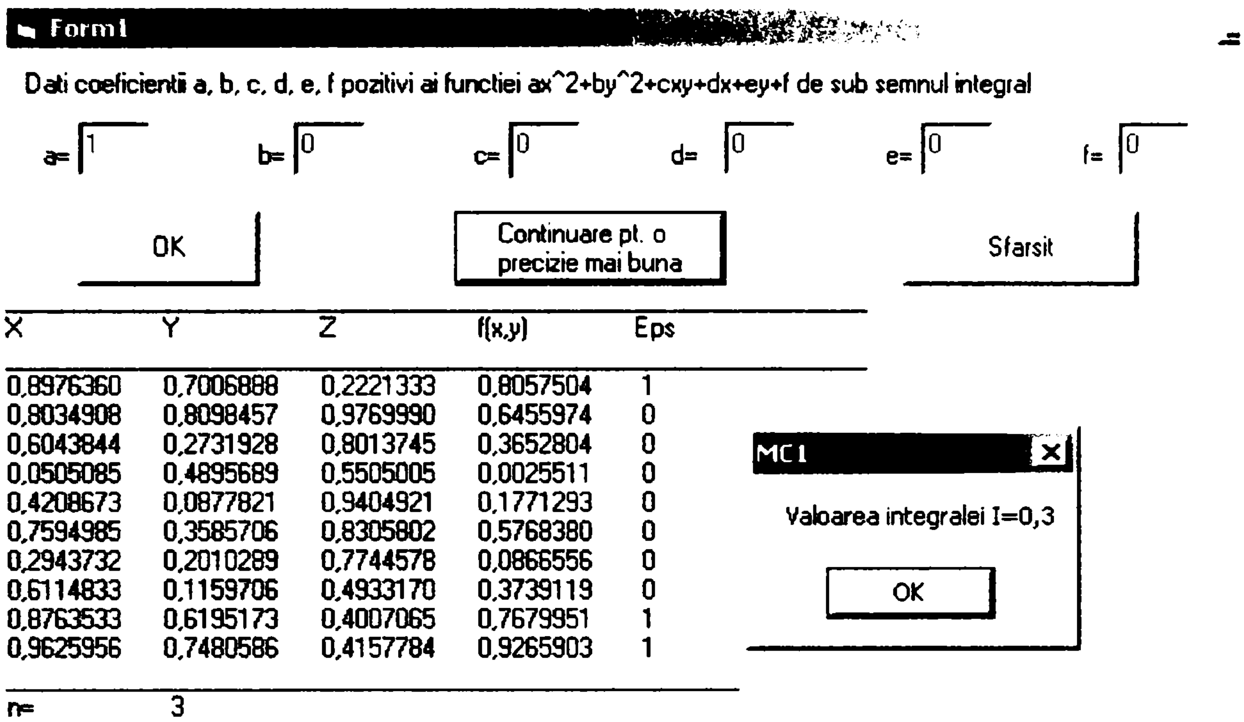


X	Y	Z	f(x,y)	Eps
0,8878461	0,0879688	0,4865629	1,0000000	1
0,2313935	0,3625634	0,3095686	1,0000000	1
0,1345076	0,5993270	0,5734602	1,0000000	1
0,9827867	0,4471290	0,9146367	1,0000000	1
0,1180094	0,1277034	0,9266853	1,0000000	1

n= 5

Pentru cazul funcției constante sub semnul integral valoarea calculată va fi de asemenea exactă, și aceasta oricât de mic ar fi numărul de puncte n ales.

3) cazul $I = \iint x^2\,dx\,dy$

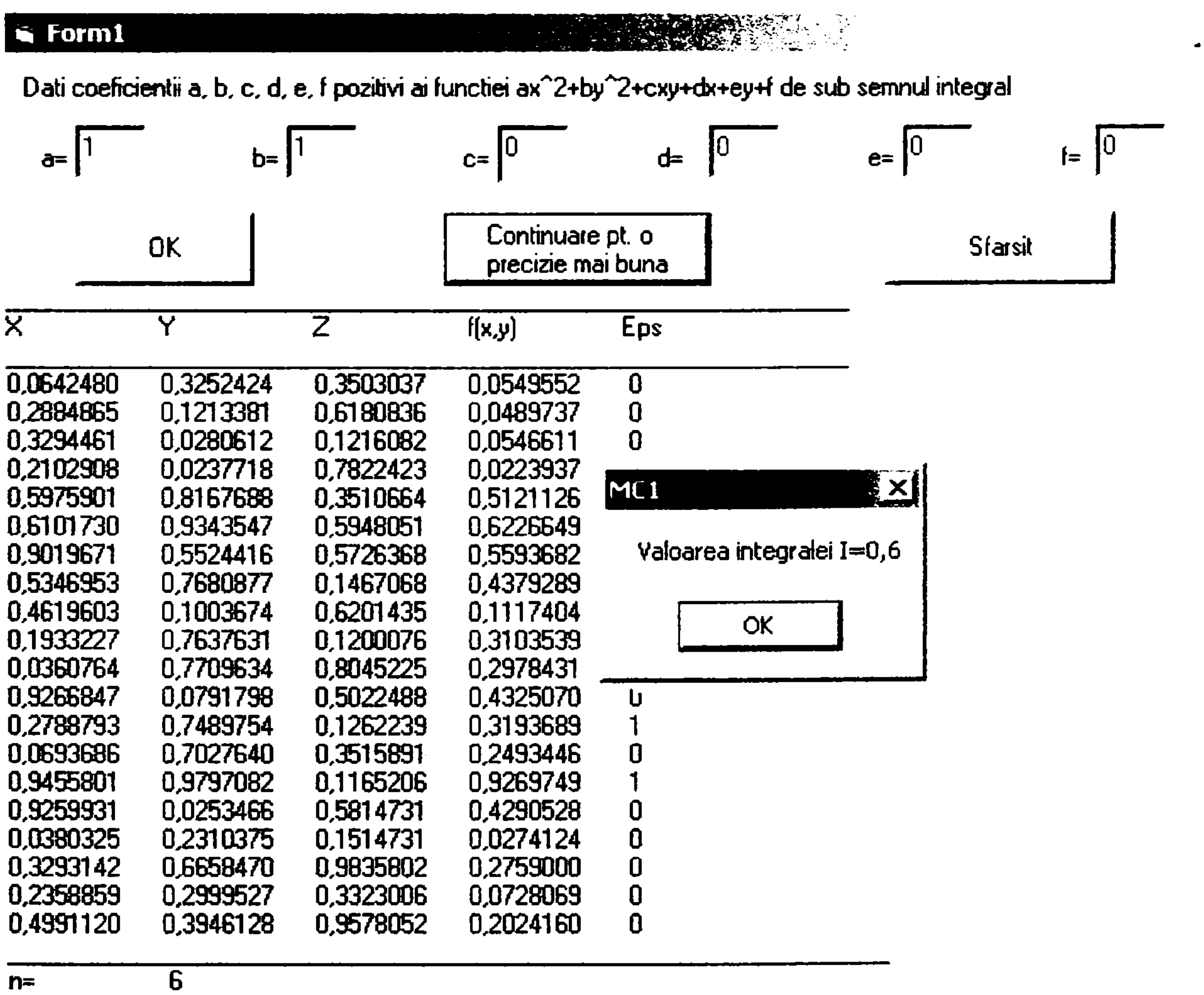


X	Y	Z	f(x,y)	Eps
0,8976360	0,7006888	0,2221333	0,8057504	1
0,8034908	0,8098457	0,9769990	0,6455974	0
0,6043844	0,2731928	0,8013745	0,3652804	0
0,0505085	0,4895689	0,5505005	0,0025511	0
0,4208673	0,0877821	0,9404921	0,1771293	0
0,7594985	0,3585706	0,8305802	0,5768380	0
0,2943732	0,2010289	0,7744578	0,0866556	0
0,6114833	0,1159706	0,4933170	0,3739119	0
0,8763533	0,6195173	0,4007065	0,7679951	1
0,9625956	0,7480586	0,4157784	0,9265903	1

n= 3

Valoarea exactă a integralei este I=1/3, şi prin program s-a obţinut, utilizând doar 10 puncte aleatoare, valoarea 0.3.

4) cazul $I = \iint (x^2 + y^2)\,dxdy$



X	Y	Z	f(x,y)	Eps
0,0642480	0,3252424	0,3503037	0,0549552	0
0,2884865	0,1213381	0,6180836	0,0489737	0
0,3294461	0,0280612	0,1216082	0,0546611	0
0,2102908	0,0237718	0,7822423	0,0223937	
0,5975901	0,8167688	0,3510664	0,5121126	
0,6101730	0,9343547	0,5948051	0,6226649	
0,9019671	0,5524416	0,5726368	0,5593682	
0,5346953	0,7680877	0,1467068	0,4379289	
0,4619603	0,1003674	0,6201435	0,1117404	
0,1933227	0,7637631	0,1200076	0,3103539	
0,0360764	0,7709634	0,8045225	0,2978431	
0,9266847	0,0791798	0,5022488	0,4325070	0
0,2788793	0,7489754	0,1262239	0,3193689	1
0,0693686	0,7027640	0,3515891	0,2493446	0
0,9455801	0,9797082	0,1165206	0,9269749	1
0,9259931	0,0253466	0,5814731	0,4290528	0
0,0380325	0,2310375	0,1514731	0,0274124	0
0,3293142	0,6658470	0,9835802	0,2759000	0
0,2358859	0,2999527	0,3323006	0,0728069	0
0,4991120	0,3946128	0,9578052	0,2024160	0

n= 6

Şi în acest caz s-a obţinut cu doar 20 de puncte valoarea i=0.6 în locul celei exacte de 2/3.

În final doresc să indic că la **Anexa 14** este dat codul sursă al unei a doua variante de program pentru calculul integralelor în cazul plan cu metoda Monte Carlo. De asemenea la **Anexa 15** există un alt program care realizează calculul integralelor, de data aceasta cu formulele de cuadratură Gauss, program care s-a utilizat şi în cadrul paragrafului următor, care prezintă un program Fortran mai complex pentru calculul plăcilor cu fisuri multiple.

§ 4.4. PROBLEMA FISURILOR MULTIPLE ORIENTATE ALEATOR ÎN ELASTOSTATICA LINIARĂ PLANĂ. O SOLUŢIE NUMERICĂ.

4.4.1. Introducere

Problema proiectării de algoritmi pentru calculul câmpurilor de tensiuni într-un material bidimensional liniar elastic, încărcat mecanic, cu fisuri şi incluziuni multiple, a atras în ultimul timp foarte mult atenţia cercetătorilor. Algoritmul tipic care se prezintă în general de către cercetători face parte din una dintre cele două categorii de algoritmi: *algoritmi de precizie moderată, bazaţi pe ecuaţii integrale singulare*, şi *algoritmi aproximativi bazaţi tot pe ecuaţii integrale singulare*. Algoritmii de precizie moderată adesea nu pot lua în calcul mai mult de câteva fisuri sau incluziuni (vezi de exemplu [C35], [W10], [C16]). Algoritmii aproximativi pot lua în calcul mai multe fisuri, dar cu preţul unei precizii mai slabe, mai ales atunci când fisurile sunt foarte aproape unele de altele (vezi, de exemplu, [F22]).

Sunt, după părerea mai multor cercetători, trei motive principale care fac ca mulţi algoritmi pentru probleme de fisuri multiple să atingă doar nişte performanţe limitate:

1) *faptul că aceşti algoritmi sunt bazaţi pe ecuaţii integrale singulare*. Operatorii integrali singulari au adesea proprietăţi spectrale, care conduc la algoritmi instabili. Precizia va descreşte eventual datorită anulării numerice pe măsură ce reţeaua de discretizare este rafinată.
2) *Algoritmii au proprietăţi adaptive slabe*. Adesea se cere o discretizare uniformă.
3) *Algoritmii sunt rezolvaţi cu metode care au o complexitate cubică*. Pe măsură ce numărul de puncte de discretizare este dublat, costul de calcul creşte de opt ori. Metoda de eliminare Gauss pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare este un exemplu de algoritm cu complexitate cubică.

În continuare voi prezenta în acest paragraf un algoritm inspirat în principal din lucrările [H23], [G33], [H21], [H29] pentru problema fisurilor multiple, un algoritm care este adaptiv şi care are o complexitate liniară. Algoritmul se bazează pe o ecuaţie integrală Fredholm de speţa a doua, derivată în [H21]. Ecuaţiile integrale Fredholm de speţa a doua sunt piese de construcţie excelente a algoritmilor numerici stabili. Noutatea metodei constă în combinarea şi implementarea de algoritmi, ecuaţii şi idei care au fost prezentate în literatura de matematică aplicată în ultimii 15 ani.

4.4.2. Ecuaţia integrală Fredholm şi modulele elastice efective

Să considerăm un material constând dintr-un mediu infinit cu modulele elastice bidimensionale K şi G. Materialul este periodic. Într-o celulă unitate există un număr de N fisuri. Notăm fisurile în celula unitate cu Γ^j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Reunuiunea tuturor fisurilor din plan este Γ. Punctul de pornire şi punctul final al fisurii Γ^j, aşa-numitele vârfuri ale fisurii, sunt notate cu γ_p^j şi γ_f^j. Deformaţia medie în material este notată cu $\bar{\varepsilon} = \left(\bar{\varepsilon}_{xx}, \bar{\varepsilon}_{yy}, \bar{\varepsilon}_{xy}\right)$, şi tensiunea medie este notată cu $\bar{\sigma} = \left(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}\right)$. Dorim să rezolvăm ecuaţia elastostatică în materialul supus la trei deformații medii impuse diferite, și anume $\bar{\varepsilon}_I = (1,0,0)$, $\bar{\varepsilon}_{II} = (0,1,0)$ și $\bar{\varepsilon}_{III} = (0,0,1)$. Vom începe cu o reprezentare a câmpului de tensiuni bazat pe potențialele cu majusculă Φ și Ψ (v. [M69]) sub forma următoare:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Omega(\tau)\rho(\tau)d\tau}{\tau - z} + \frac{\alpha}{2}, \tag{4.4.1}$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\Omega(\tau)\rho(\tau)d\tau}}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{\tau}\,\Omega(\tau)\rho(\tau)\,d\tau}{(\tau - z)^2} + \beta \tag{4.4.2}$$

unde $\Omega(z)$ este o densitate necunoscută pe Γ și $\rho(z)$ este o funcție pondere care pe fisura Γ este dată de:

$$\rho(z) = \left(\left(z - \gamma_p^j\right)\left(z - \gamma_f^j\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.4.3}$$

Potențialele cu majusculă Φ și Ψ din (4.4.1) și (4.4.2) sunt în relație cu funcția de tensiune a lui Airy prin intermediul expresiilor:

$$U = \mathrm{Re}\left\{\bar{z}\Phi + \chi\right\} \quad , \quad \Phi = \phi', \ \Psi = \chi''$$

Constantele α și β în (4.4.1) și (4.4.2) reprezintă termenii de forțare în formularea de față. Cele două constante iau valorile K și -G pentru deformația $\bar{\varepsilon}_I$, valorile K și G pentru deformația $\bar{\varepsilon}_{II}$, și valorile 0 și 2iG pentru deformația $\bar{\varepsilon}_{III}$.

S-a demonstrat într-un mod riguros de către autorii lucrării [H21] că, utilizând reprezentarea de mai sus, ecuația elastostatică parțial diferențială poate fi rescrisă ca fiind următoarea ecuație integrală Fredholm de speța a doua:

$$\left(I + M_4^{\bullet}\left(M_1^0 - M_3\right)\right)\Omega(z) = M_4^{\bullet}\left(\frac{\bar{n}}{n}\bar{\beta} - \alpha\right) \quad , \quad z \in \Gamma \tag{4.4.4}$$

Aici I reprezintă operatorul de identitate, $M_4^{\bullet}$ este un operator integral singular și limitat, M_1^0 și M_3 sunt operatori integrali compacți, și n este vectorul unitar normal (v. [H21] pentru detalii).

Câmpurile de tensiuni și deformații în material și factorii de intensitate a tensiunilor la vârfurile fisurii pot fi ușor evaluate după ce ecuația (4.4.4) este rezolvată pentru Ω. Așa-numitele *module elastice efective* sunt alte mărimi care pot fi ușor evaluate ca funcție de Ω. Modulele elastice efective sunt deosebit de simplu de definit și de calculat în cadrul unui material dublu periodic cu o celulă unitate pătrată de arie unitară. Modulele elastice efective a unui material pot fi definite prin următoarele relații între tensiuni medii și deformații medii:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \sqrt{2}\,\bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{*1} & c_{*2} & c_{*3} \\ c_{*2} & c_{*4} & c_{*5} \\ c_{*3} & c_{*5} & c_{*6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.4.5}$$

4.4.3. Prezentarea algoritmului și codul sursă al programului Fortran

Am implementat ecuația (4.4.4) după modul recomandat în [H21], făcând însă două modificări importante:

1) *S-a modificat regula de cuadratură.* În [H21] s-a utilizat o cuadratură Gauss-Legendre pe paneluri de cuadratură interne și o cuadratură Gauss-Jacobi pe paneluri conținând vârfuri de fisuri. În implementarea algoritmului de față utilizăm tot cuadraturi Gauss-Legendre de ordinul 31 de precizie pentru panouri de cuadratură interne, dar folosim o integrare produs de ordinul 15 de precizie pe panourile ce conțin vârfuri de fisuri. Diferența în ceea

ce priveşte performanţa s-a constatat a fi minoră. Avantajul integrării produs, în schimb, este că se poate utiliza aceeaşi spaţiere relativă între punctele de cuadratură pe toate panourile. Acest fapt simplifică în mod considerabil programul.

2) *S-a modificat modul de rezolvare iterativă a sistemului de ecuaţii liniare care rezultă după discretizarea (4.4.4).* În [H21] s-au format explicit matricile corespunzătoare lui M_1^0, M_3 şi $M_4^{\bullet}$. Această procedură a condus la un algoritm cu complexitate pătratică şi astfel nu se puteau lua în calcul sisteme care implicau mai mult decât aproximativ 20 de fisuri şi incluziuni. În metoda de faţă se exploatează avantajul metodei multipol rapide, care a fost adaptată la problemele de elasticitate liniară de către GREENGARD şi HELSING [G34]

La rulare programul cere ca date de intrare:
- tipul încărcării;
- lungimea relativă a fisurilor (toate fisurile se vor considera de aceeaşi lungime, plasate uniform în punctele unei reţele matriceale de împărţire a domeniului pătrat unitar în care sunt plasate fisurile), unde 0 reprezintă faptul că fisurile sunt infinit de mici iar 1 reprezintă faptul că fisurile au lungimea egală cu distanţa dintre două puncte ale reţelei matriceale;
- rădăcină pătrată din numărul de fisuri, cu alte cuvinte numărul de fisuri de pe marginea laturii pătratului care reprezintă domeniul analizat;
- modulele elastice bidimensionale K şi G.

Orientările fisurilor sunt generate aleator prin program, prin atribuirea unor pante de înclinare a fisurilor cuprinse între 0 şi π.

Un exemplu de calcul ar fi cel pentru matricea de 4×4 fisuri de lungimi relative egale cu 0.5 şi orientări aleatoare, reprezentat în **Fig. 4.4.1**.

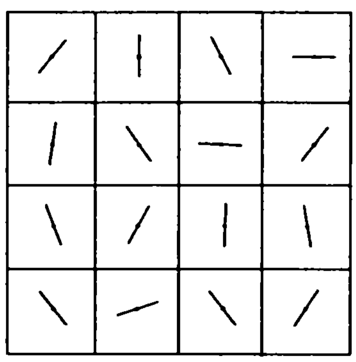


Fig. 4.4.1

Programul furnizează în urma calculelor modulele elastice efective $c_{\bullet 1}$, $c_{\bullet 2}$, $c_{\bullet 3}$, $c_{\bullet 4}$, $c_{\bullet 5}$ şi $c_{\bullet 6}$. Deoarece programul s-a prevăzut cu dimensiuni ale matricii şi posibilităţi de calcul de până la 100×100 fisuri periodic distribuite în domeniul pătrat unitar, verificarea rezultatelor cu probleme "benchmark" de o asemenea complexitate este imposibilă. Totuşi putem şti că rezultatele sunt corecte comparând rezultatele furnizate de acest program cu soluţiile analitice şi numerice a unor probleme mai simple, efectuate de alţi cercetători. Astfel de exemplu problema unei fisuri drepte singulare şi cea a unei fisuri sub formă de arc circular într-un mediu elastic infinit au soluţii analitice (v.[M69]). Se pot utiliza valori calculate pentru factorii de intensitate a tensiunilor ca o măsură a corectitudinii, deoarece conceptul de proprietăţi efective nu se aplică la acest tip de probleme "libere spaţial". Pentru diferite lungimi, unghiuri de deschidere şi încărcări programul de faţă reproduce valorile analitice cunoscute pentru factorii de intensitate a tensiunilor cu o precizie de 10 poziţii zecimale.

Două probleme mai puţin banale care implică două fisuri drepte bine separate sub tensiuni normale şi de forfecare uniforme au fost prezentate de către Xueli şi Tzuchiang, care obţin pentru K_1 şi K_2 valorile:

$K_1 = 0.9751386$ la "vârful fisurii A" şi $K_2 = 0.1793005$ la "vârful fisurii C".

Programul de faţă se suprapune cu aceste rezultate, dând o precizie şi mai mare, şi anume:

$K_1 = 0.9751386767$ şi $K_2 = 0.1793005636$.

Dăm mai jos rezultatele obţinute la rularea programului pentru 4 fisuri de lungimi relative egale cu 0.2 într-o celulă unitate de lungime unitară sub încărcare de tipul I, vezi (4.4.5):

$c_{*1} = 9.5520368379$; $c_{*2} = -3.7001953485$; $c_{*3} = -2.4457665257$

În cazul tipului II de încărcare se calculează c_{*2}, c_{*4} şi c_{*5}, iar în cazul tipului III de încărcare se calculează c_{*3}, c_{*5} şi c_{*6}. Formulele de calcul utilizate în program pentru modulele elastice efective, aşa cum au fost ele deduse în lucrarea lui J. HELSING şi G. PETERS [H21] sunt următoarele:

I. Dacă se impune deformaţia medie $\bar{\varepsilon}_{I}$, modulele efective c_{*1}, c_{*2}, c_{*3} pot fi calculate cu formulele:

$$
\begin{aligned}
c_{*1} &= K_1 - G_1 + \mathrm{Im}\{a - b\} \\
c_{*2} &= K_1 + G_1 - \mathrm{Im}\{a + b\} \\
c_{*5} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{a\}
\end{aligned}
\tag{4.4.6}
$$

II. Dacă se impune $\bar{\varepsilon}_{II}$, modulele efective c_{*2}, c_{*4}, c_{*5} pot fi calculate ca fiind:

$$
\begin{aligned}
c_{*2} &= K_1 - G_1 + \mathrm{Im}\{a - b\} \\
c_{*4} &= K_1 + G_1 - \mathrm{Im}\{a + b\} \\
c_{*5} &= -\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\{a\}
\end{aligned}
\tag{4.4.7}
$$

III. Dacă se impune deformaţia medie $\bar{\varepsilon}_{III}$, modulele efective c_{*3}, c_{*5}, c_{*6} pot fi calculate ca fiind:

$$
\begin{aligned}
c_{*3} &= \mathrm{Im}\{a - b\}/2 \\
c_{*5} &= -\,\mathrm{Im}\{a + b\}/2 \\
c_{*6} &= 2G_1 - \mathrm{Re}\{a\}
\end{aligned}
\tag{4.4.8}
$$

unde a şi b sunt mărimi calculate tot în [H21] cu formulele (63), (64), (65) şi (66).

Programul implementat în limbajul FORTRAN, prezintă următorul cod sursă:

```
ccc   *** np(k) este numărul de punte pe fisura/incluziunea k ***
ccc   *** npcm(k) este numărul cumulativ de puncte la începutul fisurii/incluziunii k ***
ccc   *** mxc trebuire setat la numarul de fisuri plus 1 ***
ccc   *** nptot=puncte pe fisuri ***
      IMPLICIT NONE
      INTEGER nup,mxc,mxs
      PARAMETER(nup=600000)
      PARAMETER(mxc=10001)
      PARAMETER(mxs=20)
      REAL*8 pi,W(16),T(16),Td(16),ax,mag(mxs,mxc),mu1,kp1,rot(mxc)
      REAL*8 diff(16,16),dseg(mxs,mxc),Bi(16,16),c(6),tol(7)
      COMPLEX*16 z(nup),zp(nup),x(nup),znbn(nup),dt1(nup)
      COMPLEX*16 dt2(nup),zsum2,zsum3,zlucru416(nup),a,b
      COMPLEX*16 zim,zcent(mxc),zlucru44(nup)
      COMPLEX*16 WW(16),W1lf(16),W1rg(16),W2lf(16),W2rg(16)
      COMPLEX*16 pre1(nup),pre2(nup),tmp(nup),tmp2(nup),fvec(nup)
      INTEGER iseg(mxc),k,m,n,Nrfisuri,nptot,iter,ifanion,npcm(mxc)
      INTEGER np(mxc)
      COMMON /vecs/ z,zp,znbn,dt1,pre1,pre2
      COMMON /param/ zim,pi,zcent,ax,rot
      COMMON /spec/ zlucru416,zlucru44,diff,kp1,mu1,Nrfisuri,iseg
      pi=4.D0*DATAN(1.D0)
      zim=DCMPLX(0.D0,1.D0)
      kp1=0.5D0
      mu1=0.5D0
      tol(1)=1.D-5
      tol(2)=1.D-6
      tol(3)=1.D-7
```

```
tol(4)=1.D-8
tol(5)=1.D-9
tol(6)=1.D-10
tol(7)=1.D-11
write(*,*) Dati tipul incarcarii (1,2,3)'
read(*,*) ifanion
CALL ponderiGauss(T,W)
DO m=1,16
  WW(m)=DCMPLX(W(m),0.D0)
ENDDO
CALL Winit(W1lf,W1rg,W2lf,W2rg)
CALL Biinit(Bi)
CALL diffinit(diff)
CALL zcentseginit(zcent,dseg,ax,rot,iseg,mxs,mxc,Nrfisuri,nup)
OPEN(27,FISIER='convmoduli.dat')
DO iter=1,7
CALL zinit(z,zp,znbn,pre1,pre2,WW,dt1,dt2,T,Td,W1lf,W1rg,
&W2lf,W2rg,dseg,mxs,mxc,iseg,Nrfisuri,np,npcm,nptot,nup)
CALL M4SinitSH(zlucru416,zlucru44,z,zp,dt2,dseg,iseg,Nrfisuri,
&mxs,mxc,np,npcm,nup)
CALL cVeczero(tmp,nup)
DO n=1,nptot
  IF (ifanion.EQ.0) THEN
    tmp(n)=-1.D0
  ELSEIF (ifanion.EQ.1) THEN
    tmp(n)=-kp1-znbn(n)*mu1
  ELSEIF (ifanion.EQ.2) THEN
    tmp(n)=-kp1+znbn(n)*mu1
  ELSEIF (ifanion.EQ.3) THEN
    tmp(n)=-znbn(n)*2*mu1*zim
  ENDIF
ENDDO
CALL cVeczero(fvec,nup)
CALL Matvecf(tmp,fvec,z,pre2,tmp2,np,npcm,Nrfisuri,mxc,nup,nptot)
CALL Matvecf16(zlucru416,zlucru44,tmp,fvec,diff,iseg,np,npcm,
&Nrfisuri,mxc,nup)
CALL GMRES(x,fvec,tol(iter),mxc,np,npcm,nptot)
zsum2=DCMPLX(0.D0,0.D0)
zsum3=DCMPLX(0.D0,0.D0)
DO k=1,Nrfisuri
  DO m=npcm(k)+1,npcm(k)+np(k)
    zsum2=zsum2+z(m)*x(m)*zp(m)*dt1(m)*pi
    zsum3=zsum3+DCONJG(z(m))*x(m)*zp(m)*dt1(m)*pi
  ENDDO
ENDDO
zsum2=-zsum2*(1+mu1/kp1)
zsum3=-zsum3*(1+kp1/mu1)
a=DCMPLX(0.D0,0.D0)
b=DCMPLX(0.D0,0.D0)
write(*,*) 'iter: ',iter
write(27,*) 'iter: ',iter
IF (ifanion.EQ.1) THEN
  c(1)=kp1+mu1+DIMAG(zsum2-zsum3+a-b)
  c(2)=kp1-mu1-DIMAG(zsum2+zsum3+a+b)
  c(3)=-DSQRT(2.D0)*DREAL(zsum2+a)
  write(*,*) 'c*1',c(1)
  write(*,*) 'c*2',c(2)
  write(*,*) 'c*3',c(3)
  write(*,*) 'masa1',(c(1)+c(2))/2.D0
  write(*,*) 'forfec1',(c(1)-c(2))/2.D0
  write(27,*) 'c*1',c(1)
  write(27,*) 'c*2',c(2)
```

```
      write(27,*) 'c*3',c(3)
      write(27,*) 'masa1',(c(1)+c(2))/2.D0
      write(27,*) 'forfec1',(c(1)-c(2))/2.D0
    ELSEIF (ifanion.EQ.2) THEN
      c(2)=kp1-mu1+DIMAG(zsum2-zsum3+a-b)
      c(4)=kp1+mu1-DIMAG(zsum2+zsum3+a+b)
      c(5)=-DSQRT(2.D0)*DREAL(zsum2+a)
      write(*,*) 'c*2',c(2)
      write(*,*) 'c*4',c(4)
      write(*,*) 'c*5',c(5)
      write(*,*) 'masa1',(c(4)+c(2))/2.D0
      write(*,*) 'forfec1',(c(4)-c(2))/2.D0
      write(27,*) 'c*2',c(2)
      write(27,*) 'c*4',c(4)
      write(27,*) 'c*5',c(5)
      write(27,*) 'masa1',(c(4)+c(2))/2.D0
      write(27,*) 'forfec1',(c(4)-c(2))/2.D0
    ELSEIF (ifanion.EQ.3) THEN
      c(3)= DIMAG(zsum2-zsum3+a-b)/DSQRT(2.D0)
      c(5)=-DIMAG(zsum2+zsum3+a+b)/DSQRT(2.D0)
      c(6)=2*mu1-DREAL(zsum2+a)
      write(*,*) 'c*3',c(3)
      write(*,*) 'c*5',c(5)
      write(*,*) 'c*6',c(6)
      write(*,*) 'forfec2',c(6)/2.D0
      write(27,*) 'c*3',c(3)
      write(27,*) 'c*5',c(5)
      write(27,*) 'c*6',c(6)
      write(27,*) 'forfec2',c(6)/2.D0
    ENDIF
    CALL FLUSH(27)
    CALL magcalc(Bi,x,mag,dseg,iseg,nup,Nrfisuri,mxs,mxc)
    CALL expand(x,dseg,mag,iseg,Nrfisuri,nup,mxs,mxc)
    ENDDO
    CLOSE(27)
    STOP
    END

    SUBROUTINE magcalc(Bi,x,mag,dseg,iseg,nup,Nrfisuri,mxs,mxc)
    IMPLICIT NONE
    INTEGER mxs,mxc,i,iseg(mxc),nup,Nrfisuri,k,j
    REAL*8 Bi(16,16),mag(mxs,mxc),coada,dseg(mxs,mxc)
    COMPLEX*16 x(nup)
    j=1
    DO k=1,Nrfisuri
      DO i=1,iseg(k)
        mag(i,k)=(dseg(i+1,k)-dseg(i,k))*coada(Bi,x(j),16)
        j=j+16
      ENDDO
    ENDDO
    RETURN
    END

    SUBROUTINE expand(x,dseg,mag,iseg,Nrfisuri,nup,mxs,mxc)
    IMPLICIT NONE
    INTEGER i,nup,mxs,mxc,iseg(mxc),imax,kmax,Nrfisuri,m
    REAL*8 mag(mxs,mxc),dseg(mxs,mxc),fmax
    COMPLEX*16 x(nup)
    DO m=1,Nrfisuri/16
      CALL maxmag(mag,fmax,iseg,kmax,imax,mxs,mxc,Nrfisuri)
      IF (m.EQ.1) THEN
        write(*,*) 'Max error for',kmax,imax,fmax,iseg(kmax)+1
```

```
      ELSEIF (m.EQ.Nrfisuri/16) THEN
        write(*,*) 'Eroare maxim pt.',kmax,imax,fmax,iseg(kmax)+1
      ENDIF
      IF ((imax.EQ.1).OR.(imax.EQ.iseg(kmax))) THEN
        iseg(kmax)=iseg(kmax)+2
        IF (iseg(kmax).GE.mxs) THEN
          write(*,*) 'mxs prea mic',m,kmax
          STOP
        ENDIF
        dseg(iseg(kmax)+1,kmax)=dseg(iseg(kmax)-1,kmax)
        DO i=iseg(kmax),imax+3,-1
          dseg(i,kmax)=dseg(i-2,kmax)
          mag(i,kmax)=mag(i-2,kmax)
        ENDDO
        dseg(imax+2,kmax)=(dseg(imax+1,kmax)+dseg(imax,kmax))/2
        dseg(imax+1,kmax)=(dseg(imax+1,kmax)+3*dseg(imax,kmax))/4
        mag(imax,kmax)=0.D0
        mag(imax+1,kmax)=0.D0
        mag(imax+2,kmax)=0.D0
      ELSE
        iseg(kmax)=iseg(kmax)+1
        IF (iseg(kmax).GE.mxs) THEN
          write(*,*) 'mxs too low',m,kmax
          STOP
        ENDIF
        dseg(iseg(kmax)+1,kmax)=dseg(iseg(kmax),kmax)
        DO i=iseg(kmax),imax+2,-1
          dseg(i,kmax)=dseg(i-1,kmax)
          mag(i,kmax)=mag(i-1,kmax)
        ENDDO
        dseg(imax+1,kmax)=(dseg(imax+1,kmax)+dseg(imax,kmax))/2
        mag(imax,kmax)=0.D0
        mag(imax+1,kmax)=0.D0
      ENDIF
    ENDDO
    write(*,*) 'expand done'
100 FORMAT(I10,F21.15)
    RETURN
    END

    SUBROUTINE maxmag(mag,fmax,iseg,kmax,imax,mxs,mxc,Nrfisuri)
    IMPLICIT NONE
    INTEGER mxs,mxc,i,k,iseg(mxc),kmax,imax,Nrfisuri
         REAL*8 mag(mxs,mxc),fmax
    fmax=0.D0
    DO k=1,Nrfisuri
      DO i=1,iseg(k)
        IF (mag(i,k).GT.fmax) THEN
          fmax=mag(i,k)
          kmax=k
          imax=i
        ENDIF
      ENDDO
    ENDDO
    RETURN
    END

    REAL*8 FUNCTION coada(Bi,vec,Ng)
    IMPLICIT NONE
    INTEGER i,j,Ng
         REAL*8 Bi(Ng,Ng),dum1
    COMPLEX*16 vec(Ng),dum2
```

```
      dum1=0.D0
      DO i=Ng-1,Ng
        dum2=DCMPLX(0.D0,0.D0)
        DO j=1,Ng
          dum2=dum2+Bi(i,j)*vec(j)
        ENDDO
        dum1=dum1+DSQRT(DREAL(dum2)**2+DIMAG(dum2)**2)
      ENDDO
      coada=dum1
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GMRES(x,bvec,tol,mxc,np,npcm,nptot)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER i,LL,LLp1,mxc,np(mxc),maxite,nptot,npcm(mxc)
      INTEGER nup,nhu,nhup1
      PARAMETER (nup=600000)
      PARAMETER (nhu=36)
      PARAMETER(nhup1=37)
      REAL*8 vnorm,cnorm,prod,rho,snormw,q(2*nhu),r02(nhup1)
      REAL*8 coco(nhup1,nhu),tol
      COMPLEX*16 x(nup),bvec(nup),v(nup,nhup1)
      maxite=nhu
      DO i=1,nptot
        v(i,1)=bvec(i)
      ENDDO
      vnorm=cnorm(v(1,1),nptot,nup)
      CALL cscal2(v(1,1),1.D0/vnorm,nptot,nup)
      CALL rMatzero(coco,nhup1,nhu)
      prod=1.D0
      DO LL=1,nhu
        LLp1=LL+1
        CALL MatvecMainff(v(1,LL),v(1,LLp1),tol,np,npcm,nptot)
        CALL dorth(v(1,LLp1),v,coco,LL,snormw,nhu,nhup1,nptot,nup)
        coco(LLp1,LL)=snormw
        CALL dheqr(coco,nhup1,LL,q,LL,nhu)
        prod=prod*q(2*LL)
        rho=ABS(prod)
        CALL cscal2(v(1,LLp1),1.D0/snormw,nptot,nup)
        write(*,*) 'residual',LL,rho
        IF ((rho.LE.tol).OR.(LL.EQ.maxite)) THEN
          CALL dVeczero(r02,nhup1)
          r02(1)=vnorm
          CALL autor(coco,nhup1,LL,Q,r02,nhu)
          CALL cVeczero(x,nup)
          DO i=1,LL
            CALL caxpy(r02(i),v(1,i),x,nptot,nup)
          ENDDO
          RETURN
        ENDIF
      ENDDO
  100 FORMAT(I10,D23.15)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE autor(A,LDA,N,Q,B,nhu)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER IQ,K,KB,KP1,nhu,LDA,N
           REAL*8 A(LDA,nhu),B(LDA),q(2*nhu),C,S,T,T1,T2
      DO K=1,N
        KP1=K+1
        IQ=2*(K-1)+1
```

```
  C=q(IQ)
  S=q(IQ+1)
  T1=B(K)
  T2=B(KP1)
  B(K)=C*T1-S*T2
  B(KP1)=S*T1+C*T2
ENDDO
DO KB=1,N
  K=N+1-KB
  B(K)=B(K)/A(K,K)
  T=-B(K)
  CALL daxpy(T,A(1,K),B,k-1,LDA)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE dorth(vnew,v,coco,LL,snormw,nhu,nhup1,n,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER n,LL,nup,i,nhu,nhup1
REAL*8 arg,sumdsq,tem,vnrm,cnorm,cdotp,coco(nhup1,nhu),snormw
COMPLEX*16 vnew(nup),v(nup,nhup1)
vnrm=cnorm(vnew,n,nup)
DO i=1,LL
  coco(i,LL)=cdotp(v(1,i),vnew,n,nup)
  tem=-coco(i,LL)
  CALL caxpy(tem,v(1,i),vnew,n,nup)
ENDDO
snormw=cnorm(vnew,n,nup)
IF (vnrm+0.001D0*snormw.NE.vnrm) RETURN
sumdsq=0.0D0
DO i=1,LL
  tem=-cdotp(v(1,i),vnew,n,nup)
  IF (coco(i,LL)+0.001D0*tem.NE.coco(i,LL)) THEN
    coco(i,LL)=coco(i,LL)-tem
    CALL caxpy(tem,v(1,i),vnew,n,nup)
    sumdsq=sumdsq+tem**2
  ENDIF
ENDDO
IF (sumdsq.NE.0.D0) THEN
  arg=MAX(0.0D0,snormw**2-sumdsq)
  snormw=DSQRT(arg)
ENDIF
RETURN
END

SUBROUTINE dheqr(A,LDA,N,Q,IJOB,nhu)
IMPLICIT NONE
INTEGER LDA,N,IJOB,I,IQ,J,K,KM1,KP1,NM1,nhu
     REAL*8 A(LDA,nhu),q(2*nhu),C,S,T,T1,T2
IF (IJOB.EQ.1) THEN
  DO K=1,N
    KM1=K-1
    KP1=K+1
    IF (KM1.GE.1) THEN
      DO J=1,KM1
        I=2*(J-1)+1
        T1=A(J,K)
        T2=A(J+1,K)
        C=q(I)
        S=q(I+1)
        A(J,K)=C*T1-S*T2
        A(J+1,K)=S*T1+C*T2
```

```
        ENDDO
      ENDIF
      IQ=2*KM1+1
      T1=A(K,K)
      T2=A(KP1,K)
      IF(T2.EQ.0.0D0) THEN
        C=1.0D0
        S=0.0D0
      ELSEIF(ABS(T2).GE.ABS(T1)) THEN
        T=T1/T2
        S=-1.0D0/DSQRT(1.0D0+T*T)
        C=-S*T
      ELSE
        T=T2/T1
        C=1.0D0/DSQRT(1.0D0+T*T)
        S=-C*T
      ENDIF
      q(IQ)=C
      q(IQ+1)=S
      A(K,K)=C*T1-S*T2
    ENDDO
  ELSE
    NM1=N-1
    DO K=1,NM1
      I=2*(K-1)+1
      T1=A(K,N)
      T2=A(K+1,N)
      C=q(I)
      S=q(I+1)
      A(K,N)=C*T1-S*T2
      A(K+1,N)=S*T1+C*T2
    ENDDO
    T1=A(N,N)
    T2=A(N+1,N)
    IF (T2.EQ.0.0D0) THEN
      C=1.0D0
      S=0.0D0
    ELSEIF( ABS(T2).GE.ABS(T1) ) THEN
      T=T1/T2
      S=-1.0D0/DSQRT(1.0D0+T*T)
      C=-S*T
    ELSE
      T=T2/T1
      C=1.0D0/DSQRT(1.0D0+T*T)
      S=-C*T
    ENDIF
    IQ=2*N-1
    q(IQ)=C
    q(IQ+1)=S
    A(N,N)=C*T1-S*T2
  ENDIF
  RETURN
  END

  SUBROUTINE rMatzero(M,nup1,nup2)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER i,j,nup1,nup2
       REAL*8 M(nup1,nup2)
  DO i=1,nup1
    DO j=1,nup2
      M(i,j)=0.D0
    ENDDO
```

```
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE dVeczero(v,Ng)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,Ng
     REAL*8 v(Ng)
DO i=1,Ng
  v(i)=0.D0
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE cVecadd(c,a,b1,b,np,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER np,nup,i
     REAL*8 b1
COMPLEX*16 a(nup),b(nup),c(nup)
DO i=1,np
  c(i)=a(i)+b1*b(i)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE caxpy(a,x,y,n,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,n,nup
     REAL*8 a
COMPLEX*16 x(nup),y(nup)
DO i=1,n
  y(i)=y(i)+a*x(i)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE daxpy(a,x,y,n,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,n,nup
     REAL*8 x(nup),y(nup),a
DO i=1,n
  y(i)=y(i)+a*x(i)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE cscal2(a,a1,np,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER np,nup,i
     REAL*8 a1
COMPLEX*16 a(nup)
DO i=1,np
  a(i)=a1*a(i)
ENDDO
RETURN
END

REAL*8 FUNCTION cdotp(a,b,np,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER np,nup,i
     COMPLEX*16 a(nup),b(nup)
cdotp=0.D0
```

```
      DO i=1,np
        cdotp=cdotp+DREAL(a(i))*DREAL(b(i))+DIMAG(a(i))*DIMAG(b(i))
      ENDDO
      RETURN
      END

      REAL*8 FUNCTION cnorm(v,n,nup)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER i,n,nup
           COMPLEX*16 v(nup)
          cnorm=0.D0
      DO i=1,n
        cnorm=cnorm+DREAL(v(i))*DREAL(v(i))+DIMAG(v(i))*DIMAG(v(i))
      ENDDO
      cnorm=DSQRT(cnorm)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MatvecMainff(x,b,tol,np,npcm,nptot)
ccc   *** Inmultirea matricilor pt.rezolvarea ecuatiei principale ***
      IMPLICIT NONE
      INTEGER nup,mxs,mxc,LENW,LENIW
      PARAMETER(nup=600000)
      PARAMETER(mxc=10001)
      PARAMETER(mxs=20)
      PARAMETER(LENW=8000000)
      PARAMETER(LENIW=2000000)
      REAL*8 kp1,mu1,tol,diff(16,16)
      COMPLEX*16 x(nup),dt1(nup),pre2(nup),pre1(nup),tmp(nup)
      COMPLEX*16 b(nup),z(nup),zp(nup),CLUCRU(LENW),znbn(nup)
      COMPLEX*16 zim,zlucru416(nup),b0(nup),b1(nup),b3(nup)
      COMPLEX*16 zlucru44(nup)
      INTEGER np(mxc),npcm(mxc),nptot,m,Nrfisuri,iseg(mxc)
      INTEGER INFORM(6),IER(5),ILUCRU(LENIW),LEVMAX
      COMMON /vecs/ z,zp,znbn,dt1,pre1,pre2
      COMMON /spec/ zlucru416,zlucru44,diff,kp1,mu1,Nrfisuri,iseg
      zim=DCMPLX(0.D0,1.D0)
      CALL cVeczero(b0,nup)
      CALL Matvecf(x,b0,z,pre1,b1,np,npcm,Nrfisuri,mxc,nup,nptot)
      CALL cVeczero(b1,nup)
      CALL cVeczero(b3,nup)
      LEVMAX=8
      write(*,*) 'calling...'
      CALL ELASTCOMP(LEVMAX,z,zp,znbn,nptot,x,dt1,ILUCRU,LENIW,CLUCRU,
     1          LENW,b1,b3,tol,INFORM,IER,kp1,mu1,nup)
      write(*,*) '..done'
      DO m=1,nptot
        tmp(m)=b1(m)-b0(m)-b3(m)/2.D0
        b(m)=x(m)
      ENDDO
      CALL Matvecf(tmp,b,z,pre2,b1,np,npcm,Nrfisuri,mxc,nup,nptot)
      CALL Matvecf16(zlucru416,zlucru44,tmp,b,diff,iseg,np,npcm,Nrfisuri,
     &mxc,nup)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE Matvecf(x,b,z,pre,pp,np,npcm,Nrfisuri,mxc,nup,nptot)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER mxc,np(mxc),nup,Nrfisuri,k,mm,nn,npcm(mxc),nptot
           COMPLEX*16 x(nup),b(nup),pre(nup),z(nup),pp(nup)
      DO mm=1,nptot
        pp(mm)=x(mm)*pre(mm)
```

```
ENDDO
DO k=1,Nrfisuri
  DO mm=npcm(k)+1,npcm(k)+np(k)
    DO nn=npcm(k)+1,mm-1
      b(mm)=b(mm)+pp(nn)/(z(nn)-z(mm))
    ENDDO
    DO nn=mm+1,npcm(k)+np(k)
      b(mm)=b(mm)+pp(nn)/(z(nn)-z(mm))
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE Matvecfl6(zlucru416,zlucru44,x,b,diff,iseg,np,npcm,
&Nrfisuri,mxc,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,mn0,mxc,np(mxc),nup,Nrfisuri,k,mm,nn,npcm(mxc),mj,nj
     REAL*8 diff(16,16)
COMPLEX*16 zlucru416(nup),x(nup),b(nup),zlucru44(nup),zdum
INTEGER iseg(mxc)
DO k=1,Nrfisuri
  DO i=1,iseg(k)
    mn0=npcm(k)+(i-1)*16
    DO mj=1,16
      mm=mn0+mj
      zdum=DCMPLX(0.D0,0.D0)
      DO nj=1,16
        nn=mn0+nj
        zdum=zdum+diff(mj,nj)*x(nn)
      ENDDO
      b(mm)=b(mm)+zdum*zlucru416(mm)+zlucru44(mm)*x(mm)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE conjugate(x,xb,np,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER np,nup,i
     COMPLEX*16 x(nup),xb(nup)
    DO i=1,np
  xb(i)=DCONJG(x(i))
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE zinit(z,zp,znbn,pre1,pre2,WW,dt1,dt2,T,Td,W1lf,
&W1rg,W2lf,W2rg,dseg,mxs,mxc,iseg,Nrfisuri,np,npcm,nptot,nup)
IMPLICIT NONE
INTEGER nup,i,j,k,mxc,np(mxc),iseg(mxc),mxs,Nrfisuri,n0,nptot
     INTEGER ipup
PARAMETER(ipup=10000)
REAL*8 pi,T(16),Td(16),dseg(mxs,mxc),ph0(0:ipup)
REAL*8 parm,hweigh,hf1,hf2,ph(ipup)
COMPLEX*16 z(nup),zim,zp(nup),znbn(nup),dt1(nup)
COMPLEX*16 zfunc,zpfunc,zpbfunc,wf1,pre1(nup),pre2(nup)
COMPLEX*16 dt2(nup),wf2,pondere1(ipup),pondere0(ipup)
COMPLEX*16 WW(16),W1lf(16),W1rg(16),W2lf(16),W2rg(16)

INTEGER npcm(mxc),m0
```

```
pi=4.D0*DATAN(1.D0)
zim=DCMPLX(0.D0,1.D0)
DO j=1,16
  Td(j)=(T(j)+1.D0)/2
ENDDO
n0=0
npcm(1)=0
DO k=1,Nrfisuri
  IF (17*iseg(k)+1.GE.ipup) THEN
    write(*,*) 'dimensiune ph prea mica'
    STOP
  ENDIF
  m0=0
  DO i=1,iseg(k)
    DO j=1,16
      m0=m0+1
      ph(m0)=dseg(i,k)+(dseg(i+1,k)-dseg(i,k))*Td(j)
    ENDDO
  ENDDO
  CALL cornadd(ph,ph0,dseg,iseg,mxs,mxc,k,ipup)
  CALL ponderecalc(ph0,pondere0,k,iseg(k)*17,ipup)
  CALL cornsub(pondere0,pondere1,iseg,mxs,mxc,k,ipup)
  m0=0
  DO i=1,iseg(k)
    DO j=1,16
      n0=n0+1
      m0=m0+1
      IF (i.EQ.1) THEN
        dt1(n0)=W1lf(j)/2.D0/pi
        dt2(n0)=W2lf(j)/2.D0/pi
        hf1=hweigh(1,Td(j))
        hf2=1.D0/hweigh(1,Td(j))
      ELSEIF (i.EQ.iseg(k)) THEN
        dt1(n0)=W1rg(j)/2.D0/pi
        dt2(n0)=W2rg(j)/2.D0/pi
        hf1=hweigh(2,Td(j))
        hf2=1.D0/hweigh(2,Td(j))
      ELSE
        dt1(n0)=WW(j)/2.D0/pi
        dt2(n0)=dt1(n0)
        hf1=hweigh(3,Td(j))
        hf2=hf1
      ENDIF
      parm=ph(m0)
      z(n0)=zfunc(ph(m0),k,1)
      zp(n0)=zpfunc(ph(m0),k,1)
      znbn(n0)=-zpbfunc(ph(m0),k,1)/zp(n0)
      wf1=pondere1(m0)
      wf2=1.D0/pondere1(m0)
      dt1(n0)=dt1(n0)*wf1/hf1*(dseg(i+1,k)-dseg(i,k))
      dt2(n0)=dt2(n0)*wf2/hf2*(dseg(i+1,k)-dseg(i,k))
      pre1(n0)=dt1(n0)*zp(n0)/zim
      pre2(n0)=dt2(n0)*zp(n0)/zim
    ENDDO
  ENDDO
  npcm(k+1)=n0
  np(k)=npcm(k+1)-npcm(k)
ENDDO
nptot=npcm(Nrfisuri+1)
write(*,*) 'points:',nptot,n0,nup
IF (nptot.GT.nup) THEN
  write(*,*) 'nup too small',nptot,nup
```

```
  STOP
ENDIF
write(*,*) 'points:',nptot,n0,nup
RETURN
END

SUBROUTINE cornadd(phin,phout,dseg,iseg,mxs,mxc,k,ipup)
IMPLICIT NONE
INTEGER mxs,mxc,ipup,iseg(mxc),i,j,k,m,n
     REAL*8 dseg(mxs,mxc),phin(ipup),phout(0:ipup)
m=0
n=0
phout(m)=dseg(1,k)
DO i=1,iseg(k)
  DO j=1,16
    m=m+1
    n=n+1
    phout(m)=phin(n)
  ENDDO
  m=m+1
  phout(m)=dseg(i+1,k)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE cornsub(win,wout,iseg,mxs,mxc,k,ipup)
IMPLICIT NONE
INTEGER mxs,mxc,ipup,iseg(mxc),i,j,k,m,n
     COMPLEX*16 win(ipup),wout(ipup)
m=0
n=0
DO i=1,iseg(k)
  DO j=1,16
    m=m+1
    n=n+1
    wout(n)=win(m)
  ENDDO
  m=m+1
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE ponderecalc(t,pondere,k,ip,ipup)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,ip,ipup,isignf,isign0,isign1,isign2,k
     REAL*8 t(0:ipup),dcarg
COMPLEX*16 zfunc,zd1,zd2,pondere(ipup)
IF (dcarg(zfunc(t(ip),k,1)-zfunc(t(0),k,1)).GT.0.D0) THEN
  isign0=1
ELSE
  isign0=-1
ENDIF
isign1=isign0
isign2=1
DO i=1,ip-1
  isign1=isign1*isignf(t(i-1),t(i),t(0),k)
  isign2=isign2*isignf(t(i-1),t(i),t(ip),k)
  zd1=zfunc(t(i),k,1)-zfunc(t(0),k,1)
  zd2=zfunc(t(i),k,1)-zfunc(t(ip),k,1)
  pondere(i)=isign1*isign2*zd1**(-0.5D0)*zd2**(-0.5D0)
ENDDO
isign1=isign1*isignf(t(ip-1),t(ip),t(0),k)
```

```
      IF (isign1*isign0.EQ.-1) THEN
        DO i=1,ip-1
          pondere(i)=-pondere(i)
        ENDDO
      ENDIF
      RETURN
      END

      REAL*8 function dcarg(a)
      IMPLICIT NONE
      COMPLEX*16 a
      dcarg=DIMAG(CDLOG(a))
      RETURN
      END

      INTEGER function isignf(t1,t2,s0,k)
      IMPLICIT NONE
      REAL*8 t1,t2,tav,s0,th,dth,pi,unghi,curba,dcarg,meas
      COMPLEX*16 zfunc,zpfunc,zpbfunc,zppfunc
      INTEGER k
      pi=4.D0*DATAN(1.D0)
      IF (t1.EQ.s0) THEN
        th=dcarg(zpfunc(s0,k,1))
      ELSE
        th=dcarg(zfunc(t1,k,1)-zfunc(s0,k,1))
      ENDIF
      IF (t2.EQ.s0) THEN
        unghi=-(dcarg(zpfunc(s0,k,1))-th-3.D0*pi)/2.D0/pi
        dth=-2.D0*pi*DMOD(unghi,1.D0)+pi
      ELSE
        unghi=-(dcarg(zfunc(t2,k,1)-zfunc(s0,k,1))-th-3.D0*pi)/2.D0/pi
        dth=-2.D0*pi*DMOD(unghi,1.D0)+pi
      ENDIF
      tav=(t1+t2)/2.D0
      curba=DIMAG(zpbfunc(tav,k,1)*zppfunc(tav,k,1))/
     &CDABS(zpfunc(tav,k,1))**2.D0
      meas=curba*DABS(t2-t1)
      IF (meas.GT.(pi-DABS(dth))) THEN
        write(*,*) t1,t2,s0,k
        write(*,*) 'se necesita recurenta',meas,pi-DABS(dth)
        STOP
      ELSE
        IF (((dth+th).GT.pi).OR.((dth+th).LE.-pi)) THEN
          isignf=-1
        ELSE
          isignf=1
        ENDIF
      ENDIF
      RETURN
      END

      SUBROUTINE zcentseginit(zcent,dseg,ax,rot,iseg,mxs,mxc,
     &Nrfisuri,nup)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER i,j,k,n,mxc,iseg(mxc),Nrfisuri,Ns,nup,mxs
           REAL*8 dseg(mxs,mxc),ax,rot(mxc),pi,dum,drand,x,y
      COMPLEX*16 zcent(mxc),zim
      zim=DCMPLX(0.D0,1.D0)
      pi=4.D0*DATAN(1.D0)
      write(*,*) 'Dati lungimea relativa a fisurii in intervalul (0,1)'
ccc   write(*,*) '0 inseamna ca fisura este infinit de mica'
ccc   write(*,*) '1 inseamna ca fisura e egala cu distanta '
```

```
ccc     write(*,*) dintre puctele retelei de discretizare'
      read(*,*) ax
      IF (ax.GT.1.D0) THEN
        write(*,*) 'fisura prea lunga'
        STOP
      ENDIF
      IF (ax.LE.0.D0) THEN
        write(*,*) 'fisura prea scurta'
        STOP
      ENDIF
      ax=ax/2.D0
      write(*,*) 'Dati radacina patrata din numarul de fisuri'
      read(*,*) Nrfisuri
      IF (Nrfisuri.GT.100) THEN
        write(*,*) 'prea multe fisuri pt. memoria alocata'
        STOP
      ENDIF
      Ns=3
      IF (Ns.GE.mxs) THEN
        write(*,*) 'mxs prea mic'
        STOP
      ENDIF
      DO i=1,Nrfisuri
        DO j=1,Nrfisuri
          k=(i-1)*Nrfisuri+j
          x=-0.5D0+0.5D0/Nrfisuri+(i-1)*1.D0/Nrfisuri
          y=-0.5D0+0.5D0/Nrfisuri+(j-1)*1.D0/Nrfisuri
          zcent(k)=DCMPLX(x,y)
          iseg(k)=Ns
          DO n=1,iseg(k)+1
            dseg(n,k)=(n-1)*2.D0/iseg(k)-1.D0
          ENDDO
        ENDDO
      ENDDO
      ax=ax/Nrfisuri
      Nrfisuri=Nrfisuri*Nrfisuri
ccc     dum=drand(4.D0)
      dum=drand(6.D0)
      DO k=1,Nrfisuri
        rot(k)=pi*(2.D0*drand(0.D0)-1.D0)+pi/2
ccc       write(*,*) k,zcent(k),rot(k)
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE M4SinitSH(zlucru416,zlucru44,z,zp,dt2,dseg,iseg,
     &Nrfisuri,mxs,mxc,np,npcm,nup)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER nup,i,m,n,k,Nrfisuri,mxc,iseg(mxc),mxs,mj,np(mxc)
           REAL*8 dseg(mxs,mxc)
      COMPLEX*16 zlucru44(nup),z(nup),zp(nup),dt2(nup),zim,zfunc
      COMPLEX*16 zlucru416(nup)
      INTEGER npcm(mxc),mm,nn
      zim=DCMPLX(0.D0,1.D0)
      CALL cVeczero(zlucru44,nup)
      CALL cVeczero(zlucru416,nup)
      DO k=1,Nrfisuri
        DO m=1,np(k)
          mm=npcm(k)+m
          DO n=1,np(k)
            nn=npcm(k)+n
            IF (mm.NE.nn) THEN
```

```
      zlucru44(mm)=zlucru44(mm)-dt2(nn)*zp(nn)/(z(nn)-z(mm))/zim
        ENDIF
      ENDDO
      zlucru44(mm)=zlucru44(mm)+(z(mm)-
&     (zfunc(dseg(1,k),k,1)+zfunc(dseg(iseg(k)+1,k),k,1))/2.D0)
    ENDDO
  ENDDO
  DO k=1,Nrfisuri
    DO i=1,iseg(k)
      DO mj=1,16
        m=(i-1)*16+mj
        mm=npcm(k)+m
        zlucru416(mm)=dt2(mm)*2.D0/(dseg(i+1,k)-dseg(i,k))/zim
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
  write(*,*) 'M4SinitSH done'
  RETURN
  END

  REAL*8 FUNCTION hweigh(i,x)
  IMPLICIT NONE
  REAL*8 x
  INTEGER i
  IF (i.EQ.1) THEN
    hweigh=1.D0/DSQRT(2.D0*x)
  ELSEIF (i.EQ.2) THEN
    hweigh=1.D0/DSQRT(2.D0-2.D0*x)
  ELSE
    hweigh=1.D0
  ENDIF
  RETURN
  END

  COMPLEX*16 FUNCTION zfunc(par,k,itype)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER mxc
  PARAMETER(mxc=10001)
  REAL*8 ax,par,pi,rot(mxc)
  COMPLEX*16 zim,zcent(mxc)
  INTEGER k,itype
  COMMON /param/ zim,pi,zcent,ax,rot
  IF (itype.EQ.1) THEN
    zfunc=zcent(k)+ax*par*CDEXP(zim*rot(k))
  ELSE
    STOP
  ENDIF
  RETURN
  END

  COMPLEX*16 FUNCTION zpfunc(par,k,itype)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER mxc
  PARAMETER(mxc=10001)
  REAL*8 ax,par,pi,rot(mxc)
  COMPLEX*16 zim,zcent(mxc)
  INTEGER k,itype
  COMMON /param/ zim,pi,zcent,ax,rot
  IF (itype.EQ.1) THEN
    zpfunc=ax*CDEXP(zim*rot(k))
  ELSE
    STOP
```

```
ENDIF
RETURN
END

COMPLEX*16 FUNCTION zppfunc(par,k,itype)
IMPLICIT NONE
INTEGER mxc
PARAMETER(mxc=10001)
REAL*8 ax,par,pi,rot(mxc)
COMPLEX*16 zim,zcent(mxc)
INTEGER k,itype
COMMON /param/ zim,pi,zcent,ax,rot
IF (itype.EQ.1) THEN
  zppfunc=DCMPLX(0.D0,0.D0)
ELSE
  STOP
ENDIF
RETURN
END

COMPLEX*16 FUNCTION zpbfunc(par,k,itype)
IMPLICIT NONE
INTEGER mxc
PARAMETER(mxc=10001)
REAL*8 ax,par,pi,rot(mxc)
COMPLEX*16 zim,zcent(mxc)
INTEGER k,itype
COMMON /param/ zim,pi,zcent,ax,rot
IF (itype.EQ.1) THEN
  zpbfunc=DCONJG(ax*CDEXP(zim*rot(k)))
ELSE
  STOP
ENDIF
RETURN
END

SUBROUTINE cVeczero(v,Ng)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,Ng
     COMPLEX*16 v(Ng)
DO i=1,Ng
  v(i)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE cMatzero(M,nup1,nup2)
IMPLICIT NONE
INTEGER i,j,nup1,nup2
     COMPLEX*16 M(nup1,nup2)
DO i=1,nup1
  DO j=1,nup2
    M(i,j)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
  ENDDO
ENDDO
RETURN
END

SUBROUTINE ELASTCOMP(LEVMAX,ZSRC,DZDT,znbn,NATOMI,DENS,H,ILUCRU,
1      LENIW,CLUCRU,LENW,M1,M3,TOL,INFORM,IER,KP1,MU1,nup)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER*4 NATOMI,LENIW,LENW,IER(1),INFORM(1),ILUCRU(1),nup
```

```
REAL*8 TOL,KP1,MU1
COMPLEX*16 ZSRC(1),DZDT(1),DENS(1),Z2PI,M1(1),M3(1),CLUCRU(1)
COMPLEX*16 znbn(1),H(1)
Z2PI = 1.0D0/(2*4*DATAN(1.0D0)*DCMPLX(0.0D0,1.0D0))
IER(1) = 0
NTERMENI = - NINT(dlog(TOL)/dlog(2.0D0))
INFORM(2) = NTERMENI
write(*,*) 'Numar de termeni',NTERMENI
write(*,*) 'Numar de atomi',NATOMI,nup
IF (NTERMENI .GT. 60) THEN
      IER(1) = 4
      IER(2) = NTERMENI
      RETURN
ENDIF
IQA = 1
IQB = IQA + NATOMI
IQC = IQB + NATOMI
IZSRC2 = IQC + NATOMI
IQA2 = IZSRC2 + NATOMI
IQB2 = IQA2 + NATOMI
IQC2 = IQB2 + NATOMI
ITOTP = IQC2 + NATOMI
IF ( ITOTP .GT. LENW) THEN
      IER(1) = 8
      IER(2) = ITOTP
      IER(3) = LENW
      write(6,*)' spatiu de lucru insuficient'
      write(13,*)' spatiu de lucru insuficient'
  write(*,*) IER(2),IER(3)
      RETURN
ELSE
      DO J = 1,NATOMI
    CLUCRU(IQA+J-1) =  DENS(J)*H(J)*DZDT(J)/DCMPLX(0.D0,1.D0)
    CLUCRU(IQB+J-1) =  DCONJG(CLUCRU(IQA+j-1))
    CLUCRU(IQC+J-1) = -DCONJG(ZSRC(J))*CLUCRU(IQA+J-1)
  ENDDO
ENDIF
CALL ZVECZERO(M1,NATOMI)
CALL ZVECZERO(M3,NATOMI)
DO 1000 ILEV = 0,LEVMAX
      INFORM(1) = ILEV
  NDIM = 2**ILEV
  NALLBX = NDIM*NDIM
  LICNT  = NALLBX
  LICNT2 = NALLBX
  LLOC   = NALLBX
  LTOFST = NALLBX+1
  LOFFST = NALLBX+1
  LATADR = NATOMI
  ICNT = 1
  ICNT2 = ICNT + LICNT
  IOFFST = ICNT2 + LICNT2
  ITOFST = IOFFST + LOFFST
  IBOX = ITOFST + LTOFST
  IATADR = IBOX + NATOMI
  ITRADR = IATADR + LATADR
  ILOC = ITRADR
  ITOT = ILOC + LLOC
  IF ( ITOT .GT. LENIW) THEN
        IER(1) = 8
        IER(4) = ITOT
        IER(5) = LENIW
```

```
          write(6,*)' spatiu de lucru insuficient'
          write(13,*)' spatiu de lucru insuficient'
      write(*,*) IER(4),IER(5)
          RETURN
        ENDIF
      CALL ASSIGN(ILEV,ZSRC,ILUCRU(IOFFST),ILUCRU(IBOX),NATOMI,
     1 ILUCRU(ICNT),ILUCRU(ICNT2),ILUCRU(IATADR),ILUCRU(ITRADR),
     2 ILUCRU(ITOFST),ILUCRU(ILOC),NTBOX,NSMAX)
      LLOCXP = (NTERMENI+1)*NTBOX
      ILOCXP1 = ITOTP
      ILOCXP2 = ILOCXP1 + LLOCXP
      ITOTC = ILOCXP2 + LLOCXP
      IF ( ITOTC .GT. LENW) THEN
          IER(1) = 8
          IER(2) = ITOTC
          IER(3) = LENW
          write(6,*)' spatiu de lucru insuficient'
          write(13,*)' spatiu de lucru insuficient'
      write(*,*) IER(2),IER(3)
          RETURN
      ENDIF
      CALL DOINTOPER(ILEV,ZSRC,CLUCRU(IQA),CLUCRU(IQB),CLUCRU(IQC),
     1 CLUCRU(IZSRC2),CLUCRU(IQA2),CLUCRU(IQB2),CLUCRU(IQC2),NATOMI,
     2 CLUCRU(ILOCXP1),CLUCRU(ILOCXP2),NTERMENI,ILUCRU(IOFFST),
     3 ILUCRU(IBOX),ILUCRU(IATADR),ILUCRU(ITRADR),ILUCRU(ITOFST),
     4 ILUCRU(ICNT),ILUCRU(ICNT2),ILUCRU(ILOC),NTBOX,M1,M3,znbn,KP1,MU1)
        IF ((ILEV.EQ.LEVMAX).OR.(NSMAX.LE.NTERMENI)) GOTO 1001
1000 CONTINUE
1001 CONTINUE
    write(*,*) 'spatiu de lucru COMPLEX',ILEV,ITOTC,LENW
    write(*,*) 'spatiu de lucru INTEGER ',ILEV,ITOT,LENIW
    write(*,*) 'Niveluri:',INFORM(1),LEVMAX
    CALL DONNOPER(ILEV,ZSRC,CLUCRU(IQA),CLUCRU(IQB),CLUCRU(IQC),
   1 NATOMI,CLUCRU(IZSRC2),CLUCRU(IQA2),CLUCRU(IQB2),CLUCRU(IQC2),
   2 ILUCRU(IOFFST),ILUCRU(IBOX),ILUCRU(IATADR),M1,M3,znbn)
    RETURN
    END

    SUBROUTINE DOINTOPER(ILEV,ZSRC,QA,QB,QC,ZSRC2,QA2,QB2,QC2,
   1    NATOMI,LOCEXP1,LOCEXP2,NTERMENI,IOFFST,IBOX,IATADR,
   2    ITRADR,ITOFST,ICNT,ICNT2,ILOC,NTBOX,M1,M3,znbn,KP1,MU1)
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    INTEGER*4 NTERMENI,NATOMI,IOFFST(1),NTBOX,IATADR(1),INTACT(30)
    INTEGER*4 IBOX(1),ICNT(1),ICNT2(1),NSIDE,ILOC(1),IADRS(30)
    INTEGER*4 ITOFST(1),ITRADR(1)
    REAL*8 C(120,120),H,KP1,MU1
    COMPLEX*16 ZSRC(1),QA(1),QB(1),QC(1),ZOFF(30),ZTRANS
    COMPLEX*16 ZSRC2(1),QA2(1),QB2(1),QC2(1),M1(1),M3(1),znbn(1)
    COMPLEX*16 MPOLE1(60),MPOLE2(60),B1(0:60),B2(0:60),ZCENT,ZCENT2
    COMPLEX*16 MPOLECOR(60),LOCEXP1(0:NTERMENI,1),LOCEXP2(0:NTERMENI,1)
    C(1,1) = 1.0D0
    DO I=2,120
         C(1,I) = 0.0D0
         C(I,1) = 1.0D0
    ENDDO
    DO I=2,120
         DO J=2,I
           C(I,J)=C(I-1,J-1)+C(I-1,J)
      ENDDO
    ENDDO
    NSIDE = 2**(ILEV)
    NBOXES = NSIDE*NSIDE
```

```
      H = 1.D0/NSIDE
      DO I = 1,NTBOX
         DO J = 0,NTERMENI
        LOCEXP1(J,I) = DCMPLX(0.D0,0.D0)
        LOCEXP2(J,I) = DCMPLX(0.D0,0.D0)
       ENDDO
      ENDDO
      NINTAC = 27
      DO 1000 I = 1,NBOXES
         IOFF =  IOFFST(I)
         NINBOX = IOFFST(I+1) - IOFF
       DO K = 1,NINBOX
        ZSRC2(K) = ZSRC(IATADR(IOFF+K))
        QA2(K) = QA(IATADR(IOFF+K))
        QB2(K) = QB(IATADR(IOFF+K))
        QC2(K) = QC(IATADR(IOFF+K))
       ENDDO
         IF ( NINBOX .LE. 0 ) GOTO 1000
       ICOL = 1 + MOD(I-1,NSIDE)
       ILINIE = 1 + (I-1)/NSIDE
       XC = -0.5D0+ICOL*H-H/2
       YC = -0.5D0+ILINIE*H-H/2
       ZCENT = DCMPLX(XC,YC)
       CALL SRCMUL(ZCENT,ZSRC2,QA2,QB2,QC2,NINBOX,MPOLE1,MPOLE2,
     1    NTERMENI)
       IF (ILEV.EQ.0) THEN
        CALL MULTAYPER(MPOLE1,MPOLE2,B1,B2,NTERMENI,C)
        DO K=1,NATOMI
       CALL TAYSRC(B1,B2,NTERMENI,ZCENT,ZSRC(K),M1(K),M3(K),znbn(K))
        ENDDO
        CALL DIPOLECORR(KP1,MU1,ZSRC,QA,NATOMI,M1,M3,znbn)
       ELSE
          CALL INTLIST(ILEV,I,IADRS)
        CALL TRANSL(ILEV,IADRS,INTACT,ZOFF,NINTAC)
          DO 800 J = 1,NINTAC
            IADR = INTACT(J)
            INOFF = IOFFST(IADR)
            NINNBR = IOFFST(IADR+1) - INOFF
            IF (NINNBR .LE. NTERMENI/2) THEN
              DO K = 1,NINNBR
                  JT = IATADR(INOFF+K)
            ZTRANS = ZSRC(JT) + ZOFF(J)
                  CALL MULSRC(MPOLE1,MPOLE2,ZCENT,NTERMENI,
     1              ZTRANS,M1(JT),M3(JT),znbn(JT))
          ENDDO
            ELSE
              ICOL = 1 + MOD(IADR-1,NSIDE)
              ILINIE = 1 + (IADR-1)/NSIDE
              XC = -0.5D0+ICOL*H-H/2
              YC = -0.5D0+ILINIE*H-H/2
              ZCENT2 = DCMPLX(XC,YC)
              ZTRANS = ZCENT - ZOFF(J)
              IADLOC = ILOC(IADR)
                MPOLECOR(1) = MPOLE2(1)
                DO JJ = 2,NTERMENI
                  MPOLECOR(JJ) = MPOLE2(JJ) -
     1            (JJ-1)*DCONJG(ZOFF(J))*MPOLE1(JJ-1)
                ENDDO
              CALL MULTAY(MPOLE1,MPOLECOR,ZTRANS,NTERMENI,ZCENT2,
     1         B1,B2,C)
              CALL ADDEXP(B1,B2,LOCEXP1(0,IADLOC),
     1         LOCEXP2(0,IADLOC),NTERMENI)
```

```
            ENDIF
800       CONTINUE
      ENDIF
1000  CONTINUE
      DO I = 1,NBOXES
          INOFF = IOFFST(I)
          NINBOX = IOFFST(I+1) - INOFF
          IF (NINBOX .GT. NTERMENI/2) THEN
            ICOL = 1 + MOD(I-1,NSIDE)
            ILINIE = 1 + (I-1)/NSIDE
            XC = -0.5D0+ICOL*H-H/2
            YC = -0.5D0+ILINIE*H-H/2
            ZCENT = DCMPLX(XC,YC)
            JADR = ILOC(I)
            DO K = 1,NINBOX
              JT = IATADR(INOFF+K)
              CALL TAYSRC(LOCEXP1(0,JADR),LOCEXP2(0,JADR),
     1         NTERMENI,ZCENT,ZSRC(JT),M1(JT),M3(JT),znbn(JT))
        ENDDO
          ENDIF
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ASSIGN(ILEV,ZSRC,IOFFST,IBOX,NATOMI,ICNT,ICNT2,
     1       IATADR,ITRADR,ITOFST,ILOC,NTBOX,NSMAX)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER*4  NATOMI,NSIDE,IOFFST(1),IBOX(1),ILOC(1)
      INTEGER*4  ICNT(1),ICNT2(1),ITRADR(1),ITOFST(1),IATADR(1)
      COMPLEX*16 ZSRC(1)
      REAL*8    X,Y,H
      NSIDE = 2**ILEV
      NBOXES = NSIDE*NSIDE
      DO J = 1,NBOXES
          ICNT2(J) = 1
          ICNT(J) = 0
          ILOC(J) = 0
      ENDDO
      H = 1.D0/NSIDE
      NTBOX = 0
      NSMAX = 0
      DO J = 1, NATOMI
          X = DREAL(ZSRC(J)) + 0.5D0
          Y = DIMAG(ZSRC(J)) + 0.5D0
          IXH = X/H
          IYH = Y/H
          IF (IXH .GE. NSIDE) IXH = NSIDE-1
          IF (IYH .GE. NSIDE) IYH = NSIDE-1
          IF (IXH .LT. 0) IXH = 0
          IF (IYH .LT. 0) IYH = 0
          ICOL = 1 + IXH
          ILINIE = 1 + IYH
          IADR = (ILINIE-1)*NSIDE + ICOL
          ICNT(IADR) = ICNT(IADR) + 1
          IBOX(J) = IADR
          IF (ICNT(IADR).GT.NSMAX) NSMAX = ICNT(IADR)
        IF (ILOC(IADR) .EQ. 0) THEN
          NTBOX = NTBOX+1
          ILOC(IADR) = NTBOX
        ENDIF
      ENDDO
      IOFFST(1) = 0
```

```
      DO J = 2,NBOXES+1
           IOFFST(J) = IOFFST(J-1) + ICNT(J-1)
      ENDDO
      DO J = 1,NATOMI
           IADR = IBOX(J)
           INDX = IOFFST(IADR) + ICNT2(IADR)
           IATADR(INDX) = J
           ICNT2(IADR) = ICNT2(IADR)+1
      ENDDO
      DO J = 1,NBOXES+1
           ITOFST(J) = 0
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ZVECZERO(ZVEC,NTERMENI)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER*4 NTERMENI,I
        COMPLEX*16 ZVEC(NTERMENI)
```

Programul implementat în limbajul FORTRAN, prezintă următorul cod sursă:

```
DO I=1,NTERMENI
        ZVEC(I)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SRCMUL(ZCENT,ZSRC,QA,QB,QC,NINBOX,MPOLE1,MPOLE2,
     1          NTERMENI)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER*4 NINBOX,NTERMENI
      COMPLEX*16 ZCENT,ZSRC(NINBOX),ZSHIFT,ZACC,MPOLE1(NTERMENI)
      COMPLEX*16 QA(NINBOX),QB(NINBOX),QC(NINBOX),MPOLE2(NTERMENI)
      CALL ZVECZERO(MPOLE1,NTERMENI)
      CALL ZVECZERO(MPOLE2,NTERMENI)
      DO I = 1,NINBOX
           ZSHIFT = ZSRC(I) - ZCENT
        ZACC = DCMPLX(1.D0,0.D0)
           DO J = 1,NTERMENI
             MPOLE1(J) = MPOLE1(J) - QA(I)*ZACC
             MPOLE2(J) = MPOLE2(J) - QB(I)*ZACC
             ZACC = ZACC*ZSHIFT
        ENDDO
        ZACC = DCMPLX(1.D0,0.D0)
           DO J = 2,NTERMENI
             MPOLE2(J) = MPOLE2(J) + QC(I)*(J-1)*ZACC
             ZACC = ZACC*ZSHIFT
        ENDDO
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MULSRC(MPOLE1,MPOLE2,ZCENT,NTERMENI,ZTARG,M1,M3,znbn)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER*4 NTERMENI
      COMPLEX*16 ZCENT,ZTARG,MPOLE1(NTERMENI),MPOLE2(NTERMENI)
      COMPLEX*16 ZSHIFT,ZSINV,PHI,PSI,PHIPLOC,M1,M3,znbn
      ZSHIFT = ZTARG - ZCENT
      ZSINV = 1.0D0/ZSHIFT
      PHI = MPOLE1(NTERMENI)*ZSINV
      PHIPLOC = NTERMENI*MPOLE1(NTERMENI)*ZSINV
```

```
PSI = MPOLE2(NTERMENI)*ZSINV
DO J = NTERMENI-1,1,-1
      PHI = (PHI + MPOLE1(J))*ZSINV
      PSI = (PSI + MPOLE2(J))*ZSINV
  PHIPLOC = (PHIPLOC + J*MPOLE1(J))*ZSINV
ENDDO
PHIPLOC = -PHIPLOC*ZSINV
M1 = M1 + PHI
M3 = M3 + PHI - DCONJG(PHI)
& + ZTARG*DCONJG(PHIPLOC)*znbn + DCONJG(PSI)*znbn
RETURN
END

SUBROUTINE TAYSRC(LOCAL1,LOCAL2,NTERMENI,ZCENT,ZTARG,M1,M3,znbn)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER*4 NTERMENI
COMPLEX*16 ZCENT,ZTARG,ZSHIFT,PHI,PSI,PHIPLOC,M1,M3,znbn
COMPLEX*16 LOCAL1(0:NTERMENI),LOCAL2(0:NTERMENI)
ZSHIFT = ZTARG - ZCENT
PHI = 0.0D0
PHIPLOC = 0.0D0
PSI = 0.0D0
DO J = NTERMENI,0,-1
      PHI = LOCAL1(J) + ZSHIFT*PHI
      PSI = LOCAL2(J) + ZSHIFT*PSI
ENDDO
DO J = NTERMENI,1,-1
  PHIPLOC = J*LOCAL1(J) + ZSHIFT*PHIPLOC
ENDDO
M1 = M1 + PHI
M3 = M3 + PHI - DCONJG(PHI)
& + ZTARG*DCONJG(PHIPLOC)*znbn + DCONJG(PSI)*znbn
RETURN
END

SUBROUTINE MULTAY(MPOLE1,MPOLE2,ZCENT,N,ZCENT2,B1,B2,C)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER*4 N
COMPLEX*16 MPOLE1(*),MPOLE2(*),B1(0:60),B2(0:60)
COMPLEX*16 ZCENT,ZCENT2,Z0,Z0P(0:60),CD,CDD,M1(60),M3(60)
REAL*8 C(120,120)
Z0=ZCENT2-ZCENT
CD=1.0D0/Z0
CDD=CD
Z0P(0)=1.0
DO I=1,N
  Z0P(I)=CDD
  CDD=CDD*CD
ENDDO
DO I=1,N
      M1(I) = MPOLE1(I)*Z0P(I)
      M3(I) = MPOLE2(I)*Z0P(I)
      B1(I)=0.0D0
      B2(I)=0.0D0
ENDDO
B1(0) = 0.0D0
B2(0) = 0.0D0
DO M=0,N-1
      DO K=1,N
    B1(M)=B1(M)+ M1(K)*C(M+K,K)
    B2(M)=B2(M)+ M3(K)*C(M+K,K)
  ENDDO
```

```
      ENDDO
      DO M=0,N-1,2
         B1(M) = B1(M)*Z0P(M)
         B2(M) = B2(M)*Z0P(M)
      ENDDO
      DO M=1,N-1,2
         B1(M) = -B1(M)*Z0P(M)
         B2(M) = -B2(M)*Z0P(M)
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE DONN0PER(ILEV,ZSRC,QA,QB,QC,NATOMI,ZSRC2,QA2,QB2,QC2,
     2    IOFFST,IBOX,IATADR,M1,M3,znbn)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 XOFF(30),YOFF(30)
      COMPLEX*16 ZSRC(1),QA(1),QB(1),QC(1),ZSRC2(1),QA2(1)
      COMPLEX*16 M1(1),M3(1),znbn(1),ZTRANS,QB2(1),QC2(1)
      INTEGER*4 NATOMI,IOFFST(1),IATADR(1),IBOX(1),NSIDE
      INTEGER*4 VECINI(30),NVECINI
      NSIDE = 2**ILEV
      NBOXES = NSIDE*NSIDE
      DO 800 I = 1,NBOXES
         IOFF =   IOFFST(I)
         NINBOX = IOFFST(I+1) - IOFF
         IF ( NINBOX .LE. 0 ) GOTO 800
        DO K = 1,NINBOX
          ZSRC2(K) = ZSRC(IATADR(IOFF+K))
          QA2(K) = QA(IATADR(IOFF+K))
          QB2(K) = QB(IATADR(IOFF+K))
          QC2(K) = QC(IATADR(IOFF+K))
        ENDDO
        CALL SRCSRC1(ZSRC2,IOFF,IATADR,NINBOX,QA2,QB2,QC2,M1,M3,znbn)
        CALL MKNBORPER(ILEV,I,VECINI,NVECINI,XOFF,YOFF)
           DO J = 2,NVECINI
             IADR = VECINI(J)
             INOFF = IOFFST(IADR)
             NINNBR = IOFFST(IADR+1) - INOFF
          DO K = 1,NINNBR
            JT = IATADR(INOFF+K)
            ZTRANS = ZSRC(JT) + DCMPLX(XOFF(J),YOFF(J))
            CALL SRCSRC2(ZTRANS,ZSRC2,NINBOX,QA2,QB2,QC2,
     1          M1(JT),M3(JT),znbn(JT))
          ENDDO
           ENDDO
800   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SRCSRC1(ZSRC,IOFF,IATADR,NATOMI,QA,QB,QC,M1,M3,znbn)
      IMPLICIT REAL*8  (A-H,O-Z)
      INTEGER*4 NATOMI,IATADR(*),IOFF
      COMPLEX*16 QA(1),QB(1),QC(1),M1(1),M3(1),znbn(1),ZSRC(1)
      COMPLEX*16 PHILOC,PSILOC,ZDIS,ZDIS2,PHIP
      DO K = 1,NATOMI
        PHILOC = 0.0D0
        PHIP = 0.0D0
        PSILOC = 0.0D0
           KT = IATADR(IOFF+K)
        DO 30 J = 1,NATOMI
              IF (J.EQ.K) GOTO 30
              ZDIS = ZSRC(J) - ZSRC(K)
```

```
          ZDIS2 = ZDIS*ZDIS
          PHILOC = PHILOC + QA(J)/ZDIS
          PHIP = PHIP + QA(J)/ZDIS2
          PSILOC = PSILOC + QC(J)/ZDIS2 + QB(J)/ZDIS
30     CONTINUE
     M1(KT) = M1(KT) + PHILOC
     M3(KT) = M3(KT) + PHILOC - DCONJG(PHILOC)
   & + ZSRC(K)*DCONJG(PHIP)*znbn(KT) + DCONJG(PSILOC)*znbn(KT)
    ENDDO
    RETURN
    END

    SUBROUTINE SRCSRC2(ZTARG,ZSRC,NATOMI,QA,QB,QC,M1,M3,znbn)
    IMPLICIT NONE
    COMPLEX*16 ZTARG,ZSRC(1),QA(1),QB(1),QC(1),M1,M3,ZINV,ZINV2C
    COMPLEX*16 znbn
    INTEGER*4 J,NATOMI
    DO J = 1,NATOMI
      ZINV = 1.0D0/(ZSRC(J) - ZTARG)
      ZINV2C = DCONJG(ZINV*ZINV)
      M1 = M1 + QA(J)*ZINV
      M3 = M3 + QA(J)*ZINV - DCONJG(QA(J)*ZINV)
   1 + DCONJG(QB(J)*ZINV)*znbn
   2 + (ZTARG*DCONJG(QA(J)) + DCONJG(QC(J)))*ZINV2C*znbn
    ENDDO
    RETURN
    END

    SUBROUTINE ADDEXP(B1,B2,LOCEXP1,LOCEXP2,NTERMENI)
    INTEGER*4 NTERMENI
    COMPLEX*16 B1(0:60),B2(0:60)
    COMPLEX*16 LOCEXP1(0:NTERMENI),LOCEXP2(0:NTERMENI)
    DO J = 0,NTERMENI
          LOCEXP1(J) = LOCEXP1(J) + B1(J)
          LOCEXP2(J) = LOCEXP2(J) + B2(J)
    ENDDO
    RETURN
    END

    SUBROUTINE MKNBORPER(ILEV,IBOX,VECINI,NVECINI,XOFF,YOFF)
    REAL*8 XOFF(1),YOFF(1)
    INTEGER*4 NSIDE,IBOX,VECINI(1),ILEV,NVECINI
    NSIDE = 2**ILEV
    NVECINI = 1
    VECINI(NVECINI) = IBOX
    XOFF(NVECINI) = 0.0D0
    YOFF(NVECINI) = 0.0D0
    ILINIEB = (IBOX-1)/NSIDE + 1
    ICOLB = IBOX - (ILINIEB-1)*NSIDE
    DO I = -1,1
      DO 1000 J = -1,1
        IF ((I*I + J*J).EQ.0) GOTO 1000
            NVECINI = NVECINI+1
        IF ( (ICOLB+I).LT. 1) THEN
          ICOMP = ICOLB+I+ NSIDE
          XOFF(NVECINI) = -1.D0
        ELSE IF ( (ICOLB+I).GT.NSIDE) THEN
          ICOMP = ICOLB+I- NSIDE
          XOFF(NVECINI) = 1.D0
        ELSE
          ICOMP = ICOLB+I
          XOFF(NVECINI) = 0.0D0
```

```
      ENDIF
      IF ( (ILINIEB+J).LT. 1) THEN
        JCOMP = ILINIEB+J+ NSIDE
        YOFF(NVECINI) = -1.D0
      ELSE IF ( (ILINIEB+J).GT.NSIDE) THEN
        JCOMP = ILINIEB+J- NSIDE
        YOFF(NVECINI) = 1.D0
      ELSE
        JCOMP = ILINIEB+J
        YOFF(NVECINI) = 0.0D0
      ENDIF
          VECINI(NVECINI) = (JCOMP-1)*NSIDE + ICOMP
1000  CONTINUE
    ENDDO
    RETURN
    END

    SUBROUTINE INTLIST(LEV,IBOX,INTACT)
    INTEGER*4 IBOX,INTACT(1),LEV
    IDIM = 2**LEV
    IMARE = 3*IDIM
    ICOL = IDIM + 1 + MOD(IBOX-1,IDIM )
    ILINIE = IDIM + 1 + (IBOX-1)/IDIM
    NMARE = (ILINIE - 1)*IMARE + ICOL
    INTACT(1) = NMARE + 2
    INTACT(2) = NMARE + 2*IMARE
    INTACT(3) = NMARE - 2
    INTACT(4) = NMARE - 2*IMARE
    INTACT(5) = NMARE + IMARE + 2
    INTACT(6) = NMARE + 2*IMARE - 1
    INTACT(7) = NMARE - IMARE - 2
    INTACT(8) = NMARE - 2*IMARE + 1
    INTACT(9) = NMARE + 2*IMARE + 2
    INTACT(10)= NMARE + 2*IMARE - 2
    INTACT(11)= NMARE - 2*IMARE - 2
    INTACT(12)= NMARE - 2*IMARE + 2
    INTACT(13)= NMARE + 2*IMARE + 1
    INTACT(14)= NMARE + IMARE - 2
    INTACT(15)= NMARE - 2*IMARE - 1
    INTACT(16)= NMARE - IMARE + 2
    IF ((MOD(ICOL,2).EQ.1).AND.(MOD(ILINIE,2).EQ.1)) THEN
      INTACT(17) = NMARE - 2*IMARE + 3
      INTACT(18) = NMARE + 3*IMARE + 2
      INTACT(19) = NMARE - IMARE + 3
      INTACT(20) = NMARE + 3*IMARE + 1
      INTACT(21) = NMARE + 3
      INTACT(22) = NMARE + 3*IMARE
      INTACT(23) = NMARE + IMARE + 3
      INTACT(24) = NMARE + 3*IMARE - 1
      INTACT(25) = NMARE + 2*IMARE + 3
      INTACT(26) = NMARE + 3*IMARE - 2
      INTACT(27) = NMARE + 3*IMARE + 3
    ELSE IF ((MOD(ICOL,2).EQ.1).AND.(MOD(ILINIE,2).EQ.0)) THEN
      INTACT(17) = NMARE - 3*IMARE - 2
      INTACT(18) = NMARE - 2*IMARE + 3
      INTACT(19) = NMARE - 3*IMARE - 1
      INTACT(20) = NMARE - IMARE + 3
      INTACT(21) = NMARE - 3*IMARE
      INTACT(22) = NMARE + 3
      INTACT(23) = NMARE - 3*IMARE + 1
      INTACT(24) = NMARE + IMARE + 3
      INTACT(25) = NMARE - 3*IMARE + 2
```

```
      INTACT(26) = NMARE + 2*IMARE + 3
      INTACT(27) = NMARE - 3*IMARE + 3
    ELSE IF ((MOD(ICOL,2).EQ.0).AND.(MOD(ILINIE,2).EQ.0)) THEN
      INTACT(17) = NMARE + 2*IMARE - 3
      INTACT(18) = NMARE - 3*IMARE - 2
      INTACT(19) = NMARE + IMARE - 3
      INTACT(20) = NMARE - 3*IMARE - 1
      INTACT(21) = NMARE - 3
      INTACT(22) = NMARE - 3*IMARE
      INTACT(23) = NMARE - IMARE - 3
      INTACT(24) = NMARE - 3*IMARE + 1
      INTACT(25) = NMARE - 2*IMARE - 3
      INTACT(26) = NMARE - 3*IMARE + 2
      INTACT(27) = NMARE - 3*IMARE - 3
    ELSE IF ((MOD(ICOL,2).EQ.0).AND.(MOD(ILINIE,2).EQ.1)) THEN
      INTACT(17) = NMARE + 3*IMARE + 2
      INTACT(18) = NMARE + 2*IMARE - 3
      INTACT(19) = NMARE + 3*IMARE + 1
      INTACT(20) = NMARE + IMARE   - 3
      INTACT(21) = NMARE + 3*IMARE
      INTACT(22) = NMARE -         3
      INTACT(23) = NMARE + 3*IMARE - 1
      INTACT(24) = NMARE - IMARE   - 3
      INTACT(25) = NMARE + 3*IMARE - 2
      INTACT(26) = NMARE - 2*IMARE   - 3
      INTACT(27) = NMARE + 3*IMARE - 3
    ENDIF
6000  FORMAT(10I5)
    RETURN
    END

    SUBROUTINE TRANSL(NIVEL,NMARE,IADR,ZOFF,NN)
    IMPLICIT NONE
    COMPLEX*16 ZOFF(1)
    INTEGER*4 NIVEL,NMARE(1),IADR(1),NN
    INTEGER*4 IDIM, ICOL, ILINIE, IMARE, I, NB
    REAL*8 XX,YY
    IDIM = 2**NIVEL
    IMARE = 3*IDIM
    DO 100 I = 1,NN
      NB = NMARE(I)
      ICOL = 1 + MOD(NB-1,IDIM)
      ILINIE = 1 + (NB-1)/IMARE
      ILINIE = 1 + MOD(ILINIE-1,IDIM)
          IADR(I) = (ILINIE - 1)*IDIM + ICOL
          ICOL = 1 + MOD(NB-1,IMARE)
          ILINIE = 1 + (NB-1)/IMARE
          XX = ((ICOL-1)/IDIM -1 )
          YY = ((ILINIE-1)/IDIM -1 )
      ZOFF(I) = DCMPLX(XX,YY)
 100  CONTINUE
    RETURN
    END

    SUBROUTINE ZPOWINIT(DZPOW,DZBPOW)
    IMPLICIT NONE
    REAL*8 DZPOW(25),DZBPOW(24)
    DZPOW(1) = 0.151212002153897D+00
    DZPOW(2) = 0.577303536518952D-02
  ..............................................................................
    DZBPOW(24) = 0.126214477762726D-28
    RETURN
```

```
      END

      SUBROUTINE MULTAYPER(MPOLE1,MPOLE2,LOC1,LOC2,NTERMENI,C)
      IMPLICIT NONE
      COMPLEX*16 MPOLE1(60),MPOLE2(60),LOC2(0:60),LOC1(0:60)
      REAL*8  C(120,120),DZPOW(25),DZBPOW(24)
      INTEGER*4  NTERMENI,I,J
      CALL ZPOWINIT(DZPOW,DZBPOW)
      DO I=0,NTERMENI
         LOC1(I) = DCMPLX(0.D0,0.D0)
         LOC2(I) = DCMPLX(0.D0,0.D0)
         DO J=1,NTERMENI
        IF ( MOD(I+J,4) .EQ. 0) THEN
            LOC1(I) = LOC1(I) +
     1      MPOLE1(J)*DZPOW((I+J)/4)*C(I+J,J)*(-1)**J
            LOC2(I) = LOC2(I) +
     1      MPOLE2(J)*DZPOW((I+J)/4)*C(I+J,J)*(-1)**J
        ENDIF
        IF ( ((I+J).GT.4) .AND. (MOD(I+J,4).EQ.3) ) THEN
         LOC2(I) = LOC2(I) +
     1      MPOLE1(J-1)*DZBPOW((I+J-3)/4)*C(I+J,J)*(-1)**J*(J-1)
        ENDIF
       ENDDO
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE DIPOLECORR(KP1,MU1,ZSRC,QA,NATOMI,M1,M3,znbn)
      IMPLICIT NONE
      REAL*8  KP1,MU1,PI,S2,S2M3,T4,ST24
      COMPLEX*16 ZSRC(1),M1(1),M3(1),MPOLE1(3),QA(1),znbn(1)
      INTEGER*4 I,NATOMI
      CALL ZVECZERO(MPOLE1,3)
      DO I=1,NATOMI
        MPOLE1(1) = MPOLE1(1) - QA(I)
        MPOLE1(2) = MPOLE1(2) - QA(I)*ZSRC(I)
        MPOLE1(3) = MPOLE1(3) + QA(I)*DCONJG(ZSRC(I))
      ENDDO
      PI = 4.D0*DATAN(1.0D0)
      S2 = PI*KP1/MU1
      T4 = 4.07845116116140D0
      S2M3 = (1.0D0 + 2*MU1/KP1)*PI
      ST24= 2.D0*T4-4.D0-PI
      DO I = 1,NATOMI
        M1(I)=M1(I)+DREAL(S2*(MPOLE1(3)+MPOLE1(1)*DCONJG(ZSRC(I))))
        M3(I)=M3(I)-znbn(I)*S2M3*(MPOLE1(2)-MPOLE1(1)*ZSRC(I))
        M3(I)=M3(I)-znbn(I)*ST24*DCONJG(MPOLE1(2)-MPOLE1(1)*ZSRC(I))
      ENDDO
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ponderi Gauss(T,W)
      IMPLICIT NONE
      REAL*8 T(16),W(16)
      T( 1)=-0.989400934991649932596154l7D+00
....................................................................
      T(16)= 0.98940093499164993259615417D+00
      W( 1)= 0.27152459411754094851780572D-01
....................................................................
      W(16)= 0.27152459411754094851780572D-01
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE Winit(W1lf,W1rg,W2lf,W2rg)
      IMPLICIT NONE
      COMPLEX*16 W1lf(16),W1rg(16),W2lf(16),W2rg(16)
      W1lf( 1)=( 0.38765519596025710844615313D+00, 0.000000D+00)
.........................................................................................
      W1lf(16)=( 0.18522493335799527456531526D-01, 0.000000D+00)
      W1rg( 1)=( 0.18522493335799527456531526D-01, 0.000000D+00)
.........................................................................................
      W1rg(16)=( 0.38765519596025710844615313D+00, 0.000000D+00)
      W2lf( 1)=( 0.26586237667088595121474370D-02, 0.000000D+00)
.........................................................................................
      W2lf(16)=( 0.38298824416714774839445396D-01, 0.000000D+00)
      W2rg( 1)=( 0.38298824416714774839445396D-01, 0.000000D+00)
.......................................................................
      W2rg(16)=( 0.26586237667088595121474370D-02, 0.000000D+00)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE Biinit(Bi)
      IMPLICIT NONE
      REAL*8 Bi(16,16)
      Bi( 1, 1)= 0.13576229705877047425890286D-01

............................................................
      Bi(16,16)= 0.32781304863961739415597058D-01
      RETURN
      END

      SUBROUTINE diffinit(diff)
      IMPLICIT NONE
      REAL*8 diff(16,16)
      diff( 1, 1)=-0.46922640442193156429764101D+02
..............................................................
      diff(16,16)= 0.46922640442193156429764101D+02
      RETURN
      END
```

CAPITOLUL 5

CERCETĂRI, VERIFICĂRI ŞI VALIDĂRI EXPERIMENTALE

§ 5.1. ELEMENTE DE FOTOELASTICIMETRIE

Cercetarea experimentală a stărilor de tensiune şi deformaţie în solide elastice solicitate este tot atât de veche ca şi teoria, sau poate chiar mai veche. Astăzi sunt puse la punct numeroase metode, dintre care amintesc:

- **metode de măsurare electrice**, folosind:
  - traductori rezistivi (mărci tensometrice)
  - traductori inductivi
  - traductori capacitivi
  - traductori piezoelectrici, etc.
- **metode de măsurare mecanice**, utilizând tot felul de *extensometre* cu amplificare mecanică sau optică etc. Acestea se folosesc în special la aşa-numitele *„încercări de materiale"* pentru determinarea caracteristicilor mecanice de rezistenţă, elasticitate şi plasticitate $(E, G, \nu, \sigma_{10}, \sigma_{0.02}, \sigma_r, \delta_5, \delta_{10}, Z, \text{etc.})$- v. STAS .
- **metode de modelare electrică, fotoelastică** etc.

Mă voi ocupa în continuare cu **metoda fotoelastică (m.f.) prin transparenţă** şi voi reda, foarte sumar, elementele definitorii, pe baza unei bibliografii suficient de bogată. Voi aminti cărţile clasice de domeniu: N. IOSIPESCU [SB39], HETENYI M. [SB41], D.R.MOCANU [SB31], M.M. FROCHT [SB40], E. GHITA [G16], E.ALĂMOREANU [A10], şi lucrările ştiinţifice: BUGA [SB25], [SB26], [SB27], N.ILIESCU [SB28], [SB29], [SB30], HAJDU I. [H6], DOBRE I. [D19], PĂSTRĂV I. [SB42].

Metoda fotoelastică se bazează pe observaţia fundamentală că starea de tensiune în cazul unei probleme plane de solicitare nu depinde de constantele elastice de material. Într-adevăr, dacă urmărim ecuaţiile de echilibru de la starea plană (2.1.3.1) constatăm că în structura lor nu apar constante de material.

Pornind de la această observaţie s-a imaginat o metodă de investigaţie experimentală, care permite vizualizarea stării de tensiune reale pe un model construit dintr-un material optic activ care manifestă fenomenul de birefringenţă accidentală.

Ca metodă de lucru, fotoelasticitatea, se bazează pe determinarea unor efecte optice (a diferenţei de drum optic) care se produc la trecerea luminii polarizate prin medii birefringente solicitate mecanic.

În dezvoltarea acestei teme există o serie de fenomene specifice cu denumiri mai puţin uzuale, pe care numai le voi aminti în continuare:

- **Fenomenul de birefringenţă** (dublă refracţie). Raza de lumină, la trecerea prin anumite cristale transparente, suferă un fenomen de dublă refracţie. Astfel, raza refractată are două componen*te: una **ordinară**, care ascultă de legile clasice ale lui Snellius-Descartes (sin i sin r* n = const.), şi alta **extraordinară**, care nu mai ascultă de aceste legi.

- **Fenomenul de birefringenţă accidentală**. Sunt unele materiale transparente numite *„optic active"*, care manifestă proprietăţi de birefringenţă *numai când sunt solicitate mecanic* (de aici denumirea de *„accidental"*) - Brewster 1816 –. Acestea fac parte din clasa răşinilor epoxidice. Exemplu: Araldit, Dinox, Rompoxid, Plexiglas etc.
- **Polarizarea luminii**. Circumscris teoriei ondulatorii a luminii ne putem imagina raza luminoasă ca o undă electromagnetică de înaltă frecvenţă în care vectorul intensitate al câmpului electric (numit şi vectorul lumină) oscilează într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare, schimbându-şi periodic mărimea şi direcţia.
- **Lumină polarizată plan** – se caracterizează prin faptul că vectorul lumină vibrează într-un singur plan care trece prin direcţia de propagare a luminii şi este perpendicular faţă de planul de polarizare (v. **Fig.5.1.1**).

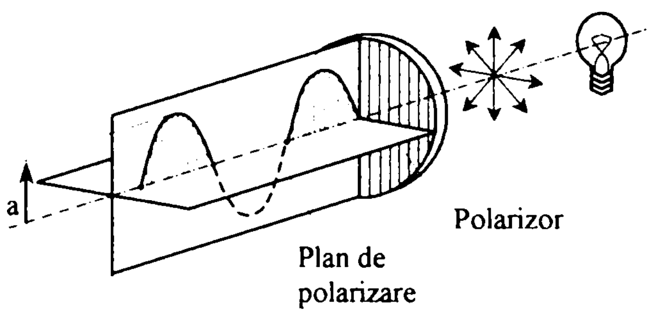


Fig. 5.1.1

- **Polariscopul** cu lumină polarizată plan este alcătuit dintr-o sursă de lumină albă sau monocromatică şi două lame polarizante (sau polaroizi[1]) având planele de polarizare orientate pe direcţii perpendiculare (v. **Fig. 5.1.2**). Prima lamă aşezată în apropierea sursei de lumină poartă numele de **polarizor**, iar cealaltă de **analizor**.

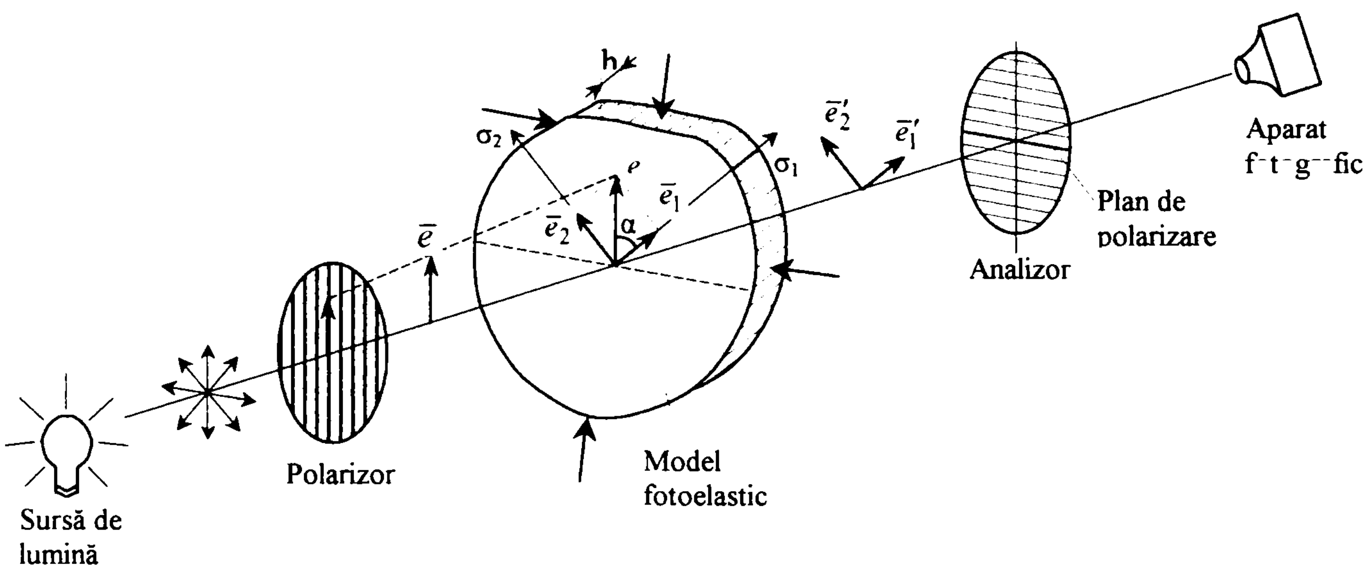


Fig. 5.1.2

- **Legile fotoelasticităţii**. S-au stabilit experimental două legi specifice.

I. **Legea calitativă**: axele de birefringenţă accidentală coincid cu direcţiile principale ale stării de tensiune din punctul considerat al modelului solicitat.

[1] Un polaroid este format dintr-un strat subţire de material plastic transparent, cum este nitroceluloza sau celuloidul impregnat cu cristale microscopice de hurapatită fixate într-un câmp electric intens care face ca axele lor optice să fie paralele.

II. Legea cantitativă (sau *legea efortului optic* formulată de Maxwell): diferenţa indicilor de refracţie pe direcţiile principale este proporţională cu diferenţa tensiunilor normale principale:

$$n_1 - n_2 = D(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{5.1.1}$$

Expresia precedentă se mai scrie:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N \cdot f_\sigma \tag{5.1.2}$$

unde f_σ se numeşte **constanta fotoelastică de efort a modelului**, se exprimă în MPa/franje şi se determină experimental. În limbaj curent se mai numeşte „ **valoarea benzii**";
N = 0,1,2,3,... se numeşte **ordinul de bandă** („**ordinul benzii**").

- **Izocline şi izocromate**. Dacă modelul nu este solicitat şi este privit prin analizor când acesta are planul său de polarizare perpendicular pe planul de polarizare al primului polarizor, ecranul apare neluminat (stins, întunecat). În cazul când modelul este solicitat mecanic starea de tensiune a acestuia variază – în general – de la un punct la altul, ceea ce face ca şi proprietăţile optice ale materialului modelului să fie diferite în diferite puncte. În acest caz, privind modelul prin analizor, pe suprafaţa lui apar o serie de puncte şi benzi întunecate, alternând cu benzi luminoase. Astfel, dacă într-un punct al modelului diferenţa tensiunilor normale principale este nulă, acolo nu apare birefringenţă, deci imaginea pe ecran a acestui punct va fi întunecată. De asemenea, pe suprafaţa modelului apare o familie de franje întunecate numite **izocromate**, care reprezintă locul geometric al punctelor în care diferenţa tensiunilor normale principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$ este constantă (şi minimă). Folosind această familie de franje se determină valorile tensiunilor principale în orice punct de pe suprafaţa modelului.

  Pe lângă izocromate, pe suprafaţa modelului mai apare însă o familie de franje întunecate care se numesc **izocline** şi care reprezintă locul geometric al punctelor în care direcţiile tensiunilor normale principale σ_1 şi σ_2, coincid cu direcţiile de polarizare ale polarizorului, respectiv analizorului. Rotind simultan polarizorul şi analizorul astfel încât planele lor de polarizare să rămână perpendiculare, se obţin familii de izocline de diferiţi parametri unghiulari, cu care se determină direcţiile tensiunilor principale din orice punct de pe suprafaţa modelului.

  Se observă că în cazul polariscopului cu lumină polarizată plan, pe suprafaţa modelului se suprapun cele două familii de franje, izoclinele şi izocromatele. Uneori acestea sunt greu de identificat, şi în asemenea cazuri, în locul luminii monocromatice se foloseşte lumina albă, care face ca izocromatele să apară colorate.

- **Eliminarea izoclinelor. Lumina polarizată circular**

  Pentru stabilirea cât mai exactă a traseului franjelor izocromatice în scopul determinării diferenţelor $(\sigma_1 - \sigma_2)$, modelul fotoelastic este examinat într-un polariscop cu lumină polarizată circular, unde franjele izocline sunt eliminate prin efectele optice care au loc. Acest lucru se poate realiza introducând în plus două componente optice numite „**lame sfert de undă**", care sunt formate din folii subţiri transparente dintr-un material cu birefringenţă permanentă. Ele sunt aşezate ca în **Fig. 5.1.3**. Efectul de birefringenţă permanentă se obţine printr-o pretensionare controlată astfel încât să rezulte o diferenţă de drum de $\lambda/4$. Se demonstrează că în felul acesta pe suprafaţa modelului apar numai izocromatele.

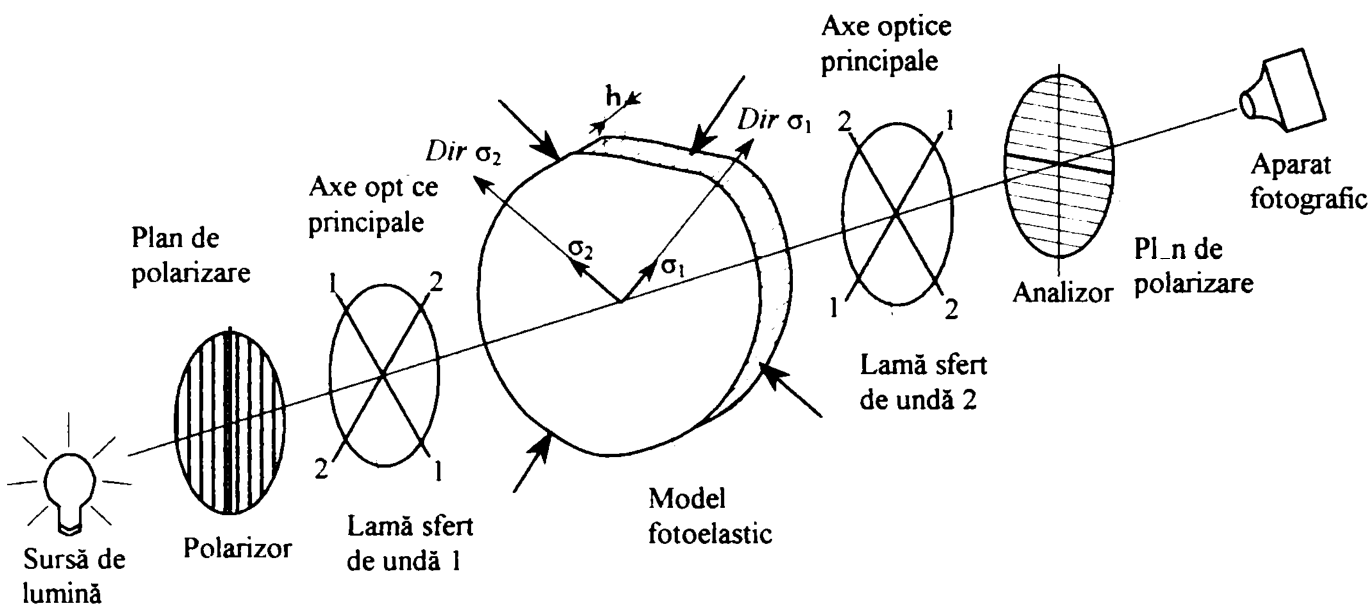

Axe optice
principale
h
Dir σ2
Dir σ1
2
1
Axe opt ce
principale
Plan de
polarizare
σ2
σ1
1
2
1
2
Aparat
fotografic
Pl_n de
polarizare
Analizor
Lamă sfert
de undă 2
2
1
Model
fotoelastic
Sursă de
lumină
Polarizor
Lamă sfert
de undă 1

Fig. 5.1.2

§ 5.2. PRELUCRAREA DATELOR FOTOELASTICE

5.2.1. Etalonarea materialului fotoelastic. Ordinul și valoarea benzii

Într-o tehnică experimentală care la ora actuală este bine pusă la punct, problema esențială este legată de prelucrarea imaginilor fotoelastice în special în cazul problemelor din mecanica ruperilor când numărul franjelor de la vârful fisurii este mic.

Cercetarea experimentală se începe cu *„etalonarea (sau calibrarea) materialului fotoelastic utilizat"*, prin determinarea valorii benzii.

Eu am folosit o rășină DINOX 010P turnată în plăci 210x70 mm, cu grosimea de 6mm și ca întăritor trietilentetramina. Am folosit de asemenea ca substanță de bază și ROMPOXID.

Calcularea tensiunilor normale principale în diferite puncte ale modelului necesită determinarea în prealabil a creșterii de tensiune între două izocromate vecine:

$$f_\sigma = \Delta(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{5.2.1}$$

Exprimând diferența de drum optim în funcție de lungimea de undă $\delta = k\lambda$, se obține:

$$k\lambda = d \cdot D(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{5.2.2}$$

Se vede de aici că pe suprafața modelului vor fi întunecate acele puncte (izocromate) pentru care k=0,1,2,3,.... Zonele luminoase corespund la $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Valoarea întreagă a factorului k relativă la o anumită bandă întunecată, reprezintă **ordinul benzii**. Zonele întunecate cărora le aparține valoarea k = 0, în care deci $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, sunt de regulă zone punctiforme și se numesc **puncte izotrope**.

Mărimea

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{dD} \tag{5.2.3}$$

egală cu variația diferenței $(\sigma_1 - \sigma_2)$ când ordinul benzii variază cu o unitate se numește **valoarea benzii**.

Cunoașterea valorii benzii este un element fundamental pentru acuratețea măsurătorilor fotoelastice. Ea se determină pe modele cu o stare de tensiune cunoscută. În laboratorul de Rezistența materialelor, se consideră drept model o grindă de acțiune dreptunghiulară solicitată la încovoiere pură [H6].

Deoarece $\sigma_2 = 0$, rezultă că fiecare izocromată este locul geometric al punctelor cu $\sigma_1 = \text{const}$. În axa geometrică având $\sigma_1 = 0$, ordinal acestei izocromate este k = 0. Pornind de la această bandă izocromatele se numerotează spre fibrele extreme k = 1, 2, 3, etc. (v. **Fig. 5.2.1**). Dacă se cunosc momentul încovoietor M_i dimensiunile grinzii $h \times d$, avem:

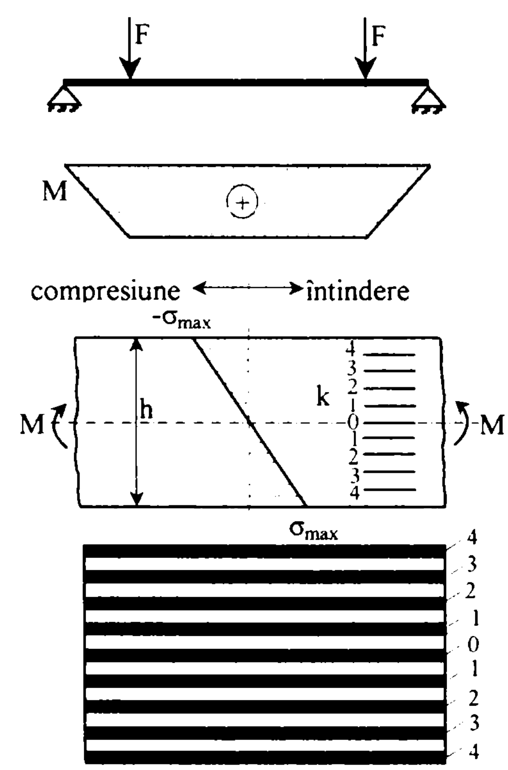


Fig. 5.2.1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z}[MPa] \text{ unde } W_z = \frac{dh^2}{6} \qquad (5.2.4)$$

Atunci, dacă în fibra extremă ordinul benzii este de $k = 4$, valoarea benzii va fi:

$$f_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{4} \qquad (5.2.5)$$

Dacă modelul are o altă grosime decât epruveta de etalonare, valoarea benzii se modifică în raportul grosimilor:

$$f_\sigma^* = f_\sigma \cdot \frac{d^*}{d} \qquad (5.2.6)$$

5.2.2. Calculul tensiunilor principale din imaginile fotoelastice

Din cele prezentate rezultă că din înregistrările făcute la încercarea modelelor transparente se pot determina direcţiile principale cu ajutorul izoclinelor şi diferenţa tensiunilor principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$ cu ajutorul izocromatelor. Dar cunoaşterea stării de tensiune dintr-un punct al modelului înseamnă de fapt determinarea valorilor individuale σ_1 şi σ_2 ale tensiunilor principale din acel punct. Cu excepţia contururilor neîncărcate, în lungul cărora se pot determina tensiunile principale direct din determinările fotoelastice, *separarea tensiunilor principale* se face fie utilizând ecuaţiile diferenţiale de echilibru, fie alte metode auxiliare prin care se detemină suma tensiunilor principale $(\sigma_1 + \sigma_2)$.

a) Calculul tensiunilor pe conturul neîncărcat al modelului

În general, tensiunile maxime apar în zonele din apropierea conturului, chiar în cazul pieselor cu concentratori. De aceea problema principală a metodei fotoelastice este determinarea tensiunilor în lungul conturului, respectiv trasarea curbei de variaţie a tensiunilor pe conturul neîncărcat; aceasta se rezolvă cu uşurinţă cu ajutorul izocromatelor.

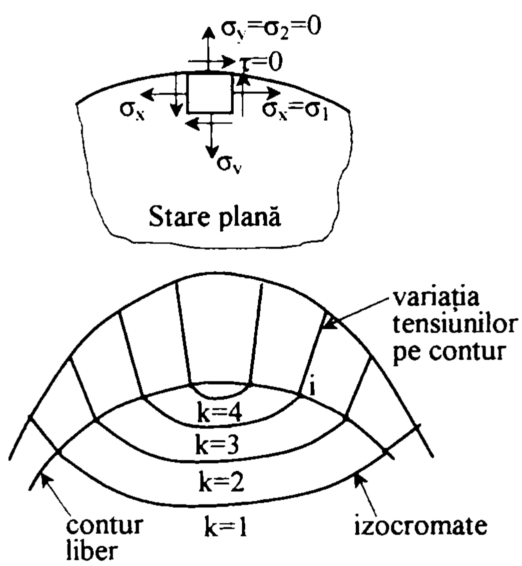


Fig. 5.2.2

Să considerăm o placă aflată într-o stare p'an' de tensiune şi un e'ement de vo'um care are una din feţe făcând parte din contur; pe această faţă tensiunile sunt nule $\sigma_y = \sigma_2 = 0$; $\tau_{xy} = \tau = 0$. Rezultă că feţele acestui element sunt plane principale, iar valoarea diferenţei $(\sigma_1 - \sigma_2)$ corespunzătoare izocromatei care intersectează conturul în acel punct este chiar .a.oa._a ....siu..ii ..o....a.e p..n..p..l. σ_1 orientată după direcţia tangentei la contur. De exemplu în punctul i (**Fig. 5.2.2**) în care conturul este intersectat de izocromata cu ordinul $k = 3$, 'ensiunea σ_1 din ace' punc' este:

$$(\sigma_{1i})_c = k \cdot f_\sigma = 3 \cdot f_\sigma \qquad (5.2.7)$$

Problema **separării tensiunilor** este larg prezentată în literatură, în special prin lucrările d-lui prof. dr.ing. N. ILIESCU. Voi aminti numai câteva metode prezentate în [SB31] şi [A10]:

- integrarea ecuaţiilor diferenţiale de echilibru [SB31] p.338;
- metoda incidenţei oblice [A10] p.444;

- metoda diferenţei tensiunilor tangenţiale [SB1] p.339;
- metoda Frocht (numită şi „RAPID");
- metoda de integrare de-a lungul unei izostatice (FILON);
- metoda de integrare de-a lungul unei izostatice folosind unghiul dintre izocline şi izostatice;
- a doua metodă de integrare în lungul unei izostatice;
- metode mixte; furnizarea unor informaţii suplimentare prin alte metode, cum ar fi:
  - metoda locurilor casante
  - metoda reţelelor
  - utilizarea extensometrelor laterale
  - metode numerice
  - analogia electrică
  - analogia electrooptică
  - metoda Moiré
  - interferometria holografică

§ 5.3. FOTOELASTICIMETRIA APLICATĂ ÎN MECANICA RUPERII

Folosind fotoelasticimetria în Mecanica ruperii se urmăreşte în special determinarea factorului de intensitate a tensiunilor, pe lângă cunoaşterea câmpului de tensiuni şi deplasări din vecinătatea fisurilor. Problema cea mai modernă este determinarea factorilor K *dintr-o singură izocromată* deoarece datorită gradientului mare de variaţie a tensiunilor în zona vârfului fisurii, numărul de izocromate este mic. O prezentare destul de completă a acestei probleme este făcută de L.MARŞAVINA în cartea [G17] (cap.V). Dintre lucrările moderne care nu se găsesc în sinteza din [G17] voi aminti o parte, de care mă voi ocupa în continuare.

- CHEN ZENGTAO [Z4] [Z5]/1995; CHEN FENG [C28]/1997; LI XIAN-FANG [L22]/1998.

După anii apariţiei se vede că acestea sunt printre ultimele publicaţii în domeniu.

După cum se afirmă în [G17], se pare că primele încercări experimentale fotoelastice pentru determinarea parametrilor de mecanica ruperii au fost făcute de POST şi WELLS în 1950. Cele mai celebre lucrări sunt însă cele ale lui IRWIN [I9], care lansează *metodele biparametrice*, despre care Chen Zengato [Z4] scrie: *„de la apariţia faimoasei proceduri cu doi parametrii a lui Irwin"*. Dar sunt de amintit şi metoda BRADLEY-KOBAYASHI, metoda SCHROEDEL-SMITH, alte două metode ale lui C.W. SMITH. Voi prezenta pe scurt, pentru unitatea temei, prima parte după [G17].

5.3.1. Metoda biparametrică a lui IRWIN

Toate metodele pe care le voi prezenta în continuare pleacă de la expresiile tensiunilor, în coordonate polare (r,θ), din zona vârfului fisurii, pentru încărcări monoaxiale.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.1.1)$$

Pe lângă parametrul necunoscut K_I, Irwin mai introduce în expresia σ_{xx} o tensiune nesingulară σ_{xx}^0, care se constituie ca al doilea parametru necunoscut, astfel că prima relaţie din (5.3.1.1) se scrie:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\sigma_{xx}^0 \tag{5.3.1.2}$$

Dar tensiunea tangenţială minimă în starea plană este dată de relaţii bine cunoscute:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+4\tau_{xy}^2} \tag{5.3.1.3}$$

Introducând (5.3.1.1), (5.3.1.2) în (5.3.1.3) obţinem:

$$\tau_{max}^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{K_I^2}{2\pi r}\sin^2\theta + \frac{2\sigma_{xx}^0 K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}+\left(\sigma_{xx}^0\right)^2\right] \tag{5.3.1.4}$$

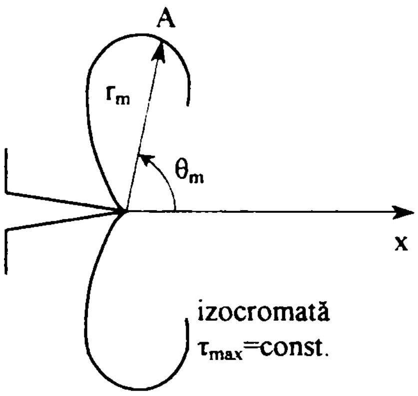


Fig. 5.3.1.1

... geo...e.... .zo..o.....e. .e po.te considera că există un punct A (**Fig.5.3.1.1**) în care franja are un extrem; poziţia punctului A este dată de coordonatele r_m şi θ_m, cu originea în vârful fisurii. Aceste mărimi le aproximăm prin măsurare directă pe franje – moment în care se .nt..du. e.....e. Pe de a.tă pa.te dacă punctu. A este un punct de extrem trebuie ca:

$$\left.\frac{\partial\tau_{max}}{\partial\theta}\right|_{(A)} = 0$$

Se obţine:

$$e_{xx}^0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_m}}\cdot\frac{\sin\theta_m\cos\theta_m}{\cos\theta_m\sin\frac{3\theta_m}{2}+\frac{3}{2}\sin\theta_m\cos\frac{3\theta_m}{2}} \tag{5.3.1.5}$$

Din ultimele două ecuaţii se determină parametrii necunoscuţi:

$$e_{xx}^o = -\frac{2\tau_{max}\cos\theta_m}{\cos\frac{3\theta_m}{2}\left(\cos^2\theta_m+\frac{9}{4}\sin^2\theta_m\right)^{1/2}} \tag{5.3.1.6}$$

$$K_I = \frac{2\tau_{max}\sqrt{2\pi r_m}}{\sin\theta_m}\left[1+\left(\frac{2}{3tg\,\theta_m}\right)^2\right]^{1/2}\left(1+\frac{2tg\frac{3\theta_m}{2}}{3tg\,\theta_m}\right) \tag{5.3.1.7}$$

Pe de altă parte, din măsurătoare directă:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{kf_\sigma}{2} \tag{5.3.1.8}$$

unde k – ordinul benzii

f_σ - constanta fotoelastică a materialului (valoarea benzii)

Comentarii şi alte detalii în [G17].

5.3.2. Metoda BRADLEY-KOBAYASHI

În prima parte poate fi privită ca un caz particular al metodei IRWIN deoarece alege

$$\sigma_{xx}^{o} = \alpha\sigma^{\infty} = \alpha\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \tag{5.3.2.1}$$

şi ajunge la aceiaşi expresie pentru K_I (5.3.17).

În partea a doua cei doi autori propun *folosirea a două franje izocromate*. Scriind ecuaţia (5.3.1.4) în care am introdus (5.3.2.1) pentru fiecare franje şi făcând diferenţa lor, se obţine:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}\left(\tau_{m_1} - \tau_{m_2}\right)\sqrt{r_1 r_2}}{f_2\sqrt{r_1} - f_1\sqrt{r_2}}$$

unde

$$f_i = \left[\sin^2\theta + 2\alpha\sqrt{\frac{2r_i}{a}}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{2r_i\alpha^2}{a}\right]^{1/2} \qquad i = 1,2$$

Comparativ cu Irwin rezultatele sunt îmbunătăţite.

5.3.3. Metoda SCHROEDEL-SMITH

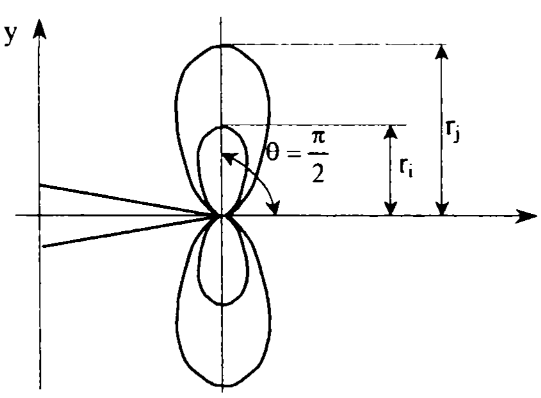


Fig. 5.3.3.1

Este tot o variantă biparametrică după Irwin, cu deosebirea că utilizează măsurătorile făcute pe o direcţie perpendiculară pe direcţia fisurii, adică pentru $\theta = 90^o$ (v. **Fig. 5.3.3.1**). Atunci relaţia (5.3.1.4) se scrie:

$$\tau_{\max}^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I\sigma_{xx}^{o}}{\sqrt{\pi r}} + \left(\sigma_{xx}^{o}\right)^2\right] \tag{5.3.3.1}$$

Privind această relaţie ca o ecuaţie de gradul II în K_I se obţine (rădăcina pozitivă):

$$K_I = \sqrt{\pi r}\left\{\left[8\tau_{\max}^2 - \left(\sigma_{xx}^{o}\right)^2\right]^{1/2} - \sigma_{xx}^{o}\right\} \tag{5.3.3.2}$$

Dacă se neglijează $\left(\sigma_{xx}^{o}\right)^2$ faţă de $\left(8\tau_{\max}^2\right)$ - soluţia Smith – se obţine:

$$K_I = \sqrt{\pi r}\left(2\sqrt{2}\tau_{\max} - \sigma_{xx}^{o}\right)$$

De aici încolo se utilizează tehnica Bradley-Kobayashi a celor două izocromate; făcând determinări ale factorului de intensitate a tensiunii K_I pentru toate combinaţiile posibile ale perechilor de izocromate care apar pe modele în urma solicitării, se obţne un set de valori $K_{I(i,j)}$ care apoi este supus unei prelucrări statistice.

5.3.4. Un nou algoritm C.W. SMITH

Exprimă tensiunea tangenţială maximă scrisă pentru $\theta = 90^o$ (5.3.3.1) sub forma:

$$\tau_{\max} = \frac{k}{\sqrt{8\pi r}} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{8}} \tag{5.3.4.1}$$

unde $\sigma_0 / \sqrt{8}$ „*factorul de influenţă al lui Smith*" arată influenţa tensiunii nesingulare asupra tensiunii tangenţiale maxime.

Autorul defineşte apoi un *factor de intensitate a tensiunilor aparent*

$$k_{ap} = \tau_{\max}\sqrt{8\pi r} \tag{5.3.4.2}$$

Ecuaţia (5.3.4.1) o transformă şi devine:

$$\frac{k_{ap}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \frac{k}{\sigma\sqrt{\pi a}} + \frac{\sigma_0}{\sigma}\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \tag{5.3.4.3}$$

unde:

σ - tensiunea efectivă de încărcare a modelului;

a - lungimea fisurii (pentru fisuri marginale) sau semilungimea fisurii (pentru fisuri înglobate în corp).

Reprezentând grafic relaţia (5.3.4.3): $k_{ap} / \sigma\sqrt{\pi a} \sim \sqrt{\frac{r}{a}}$ se obţine o dreaptă cu panta σ_0 / σ; extrapolând această dreaptă pentru $\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \to 0$ se obţine K_I.

Alte comentarii în [G17] / p.132.

5.3.5. Metoda SMITH pentru modul mixt (I+II) de deplasare a flancurilor fisurii

Utilizând soluţia aproximativă a lui Irwin pentru tensiunile nesingulare σ_{ij}^o, expresia condensată a câmpului de tensiuni în vecinătatea vârfului fisurii, este după Smith:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{I,ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{II,ij}(\theta) - \sigma_{ij}^o \qquad (i,j) = (x,y) \tag{5.3.5.1}$$

unde:

$f_{I,ij}(\theta), f_{II,ij}(\theta)$ - funcţii de unghiul θ, date de soluţia Irwin;

σ_{ij}^0 - componentele nesingulare ale câmpului de tensiune.

Calculele sunt similare cu cele precedente şi se exprimă:

$$\tau_{\max} = \frac{A}{\sqrt{r}} + B \tag{5.3.5.2}$$

unde:

$$A = \left\{\frac{1}{8\pi}\left[(K_I \sin\theta + 2K_{II}\cos\theta)^2 + (K_{II}\sin\theta)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{5.3.5.3}$$

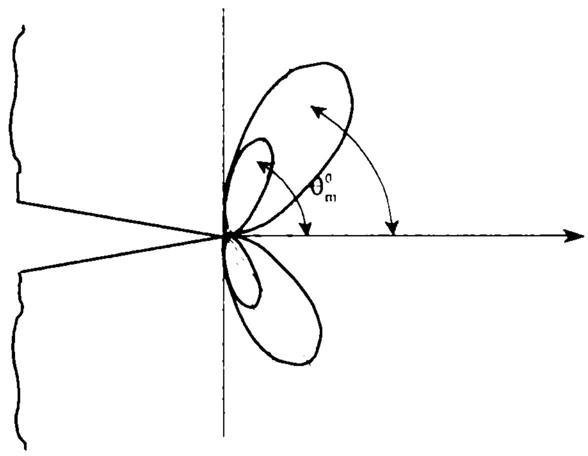


Fig. 5.3.5.1

$B = B(\sigma_{ij}^0)$ - un termen care ţine cont de tensiunea nesingulară, care conduce atât la rotirea cât şi la modificarea excentricităţii franjelor izocromate (v. **Fig. 5.3.5.1**). Încărcarea după modul II conduce la înclinarea axei izocromatei faţă de planul fisurii, iar împreună cu efectul tensiunii nesingulare σ_{ij}^0 conduc la obţinerea unor izocromate care la acelaşi ordin de bandă k au dimensiuni diferite de o parte şi de alta a planului fisurii. Detalii privind aplicarea acestei metode în [G17].

5.3.6. Metodele lui CHEN ZENGTAO şi WANG DUO

5.3.6.1. Prima metodă CHEN ZENGTAO

În principiu, aşa cum se va vedea la sfârşit, metodele nu sunt fundamental diferite între ele, deşi autorii lor susţin contrariul (v. [Z4], [Z5])/1984, 1995.

Autorii pleacă de la ideea că în dezvoltarea în serie a câmpului de tensiuni la vârful fisurii, trebuie luaţi în considerare primii trei termeni, obţinând astfel un domeniu mult mai consistent de date.

Utilizând ideile din lucrările lui WILLIAMS [W18], [W19], [W20], câmpul de tensiuni la vârful fisurii se poate scrie (în coordonate polare (r,θ), sub forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} A_1 r^{-\frac{1}{2}} f_{ij}(\theta) + 4A_2\delta_{xj} + \frac{3}{2} A_3 r^{\frac{1}{2}} g_{ij}(\theta) + 0(r) \qquad (5.3.6.1)$$

unde:

σ_{ij} - tensorul tensiunilor;

δ_{xj} - simbolul Kronecker;

$f_{ij}(\theta); g_{ij}(\theta)$ - funcţii cunoscute de θ.

Ştim de asemenea că:

$$\tau_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (5.3.6.2)$$

Introducând (5.3.6.1) în (5.3.6.2) găsim:

$$\tau_{\max}^2 = \frac{1}{4}\left(f_1 \sin^2\theta + f_2\right) \qquad (5.3.6.3)$$

unde

$$f_1 = A_1^2 r^{-1} + 9A_3^2 r - 6A_1 A_3 \cos\theta \qquad (5.3.6.4)$$

$$f_2 = 16A_2^2 - 8A_2 \sin\theta\left(A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{3\theta}{2} - 3A_3 r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad (5.3.6.5)$$

Pe de altă parte, pe baza legii efortului optic avem:

$$\tau_{max} = \frac{f\sigma \cdot k}{2d} \tag{5.3.6.6}$$

unde

f_σ - valoarea benzii
k – ordinul benzii
d – grosimea plăcii de probă

Înlocuind ultimele relaţii în (5.3.6.3) obţinem:

$$\sin^2\theta\left(A_1^2 r^{-1} + 9A_3^2 r - 6A_1A_3\cos\theta\right) + 16A_2^2 - 8A_2 r^{-\frac{1}{2}}\sin\theta\left(A_1\sin\frac{3\theta}{2} - 3A_3\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{k^2 f_\sigma^2}{4d^2} = 0 \tag{5.3.6.7}$$

Sub formă implicită, ecuaţia (5.3.6.7) se scrie:

$$f_i(A_1, A_2, A_3) = 0, \qquad i = 1,2,3 \tag{5.3.6.8}$$

Ecuaţia (5.3.6.7) este evident o ecuaţie neliniară în A_i (i=1,2,3). Vom selecta trei puncte pe o izocromată şi vom înlocui coordonatele lor $(r_m, \theta_m)_i$ în (5.3.6.8) şi vom obţine un sistem neliniar din care putem determina necunoscultele A_1, A_2, A_3. Rezultă atunci factorul de intensitate a tensiunilor:

$$K_I = \lim_{r\to 0} \sigma_{yy}\Big|_{\theta=0} \sqrt{2\pi r} = \sqrt{2\pi}A_1 \tag{5.3.6.9}$$

5.3.6.2. Prima metodă a lui CHEN ZENGTAO îmbunătăţită

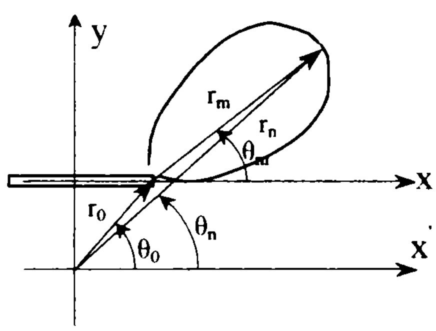


Fig. 5.3.6.1

Porneşte de la ideea că în mod practic localizarea vârfului fisurii nu poate fi făcută cu eroare acceptabilă. De aceea se alege ca origine a sistemului de axe, în locul vârfului fi[illegible]rii, [illegible]t[illegible] di[illegible]l[illegible]l[illegible]b[illegible]i (v. **Fig. 5.3.6.1**). Faţă de noul sistem de axe, coordonatele punctului de extrem de pe izocroma[illegible] (r_m, θ_m) sun[illegible]:

$$r_m = \left[(r_n\cos\theta_n - r_0\cos\theta_0)^2 + (r_n\sin\theta_n - r_0\sin\theta_0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.6.10}$$

$$\theta_m = tg^{-1}\frac{r_n\sin\theta_n - r_0\sin\theta_0}{r_n\cos\theta_n - r_0\cos\theta_0} \tag{5.3.6.11}$$

Se iau coordonatele vârfului fisurii ((r_0, θ_0) ca necunoscute şi se dezvoltă funcţiile (5.3.6.8) în serie Taylor.

$$(f_i)_{j+1} = (f_i)_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial A_1}\right)_j (\Delta A_1)_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial A_2}\right)_j (\Delta A_2)_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial A_3}\right)_j (\Delta A_3)_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_0}\right)_j (\Delta r_0)_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_0}\right)_j (\Delta\theta_0)_j \tag{5.3.6.12}$$

Precizia este satisfăcută dacă $(f_i)_{j+1} = 0$, atunci din (5.3.6.12) se obţine:

$$J \cdot \Delta X = -F \tag{5.3.6.13}$$

unde

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A_1} & \frac{\partial f_1}{\partial A_2} & \frac{\partial f_1}{\partial A_3} & \frac{\partial f_1}{\partial r_0} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A_1} & \frac{\partial f_2}{\partial A_2} & \frac{\partial f_2}{\partial A_3} & \frac{\partial f_2}{\partial r_0} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial A_1} & \frac{\partial f_m}{\partial A_2} & \frac{\partial f_m}{\partial A_3} & \frac{\partial f_m}{\partial r_0} & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_0} \end{bmatrix} \tag{5.3.6.14}$$

$$\Delta X=\{\Delta A_1 \quad \Delta A_2 \quad \Delta A_3 \quad \Delta r_0 \quad \Delta\theta_0\}^T \tag{5.3.6.15}$$

$$F=\{f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots f_m\}^T \tag{5.3.6.16}$$

Elementele matricii $[J]$ sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial A_1}=\sin^2\theta_m\left(2A_1r_m^{-1}-6A_3\cos\theta_m\right)-8A_2r_m^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta_m}{2}\sin\frac{3\theta_m}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial A_2}=-8\sin\theta_m\left(A_1r^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{3\theta_m}{2}-3A_3r_m^{\frac{1}{2}}\sin\theta_m\right)+32A_2$$

ş.a.m.d. (v.[Z4])

5.3.6.3. A doua metodă a lui CHEN ZENGTAO [Z5]/1995

Autorul susţine că în toate metodele prezentate până acum stabilirea coordonatelor vârfului fisurii este o operaţie care introduce erori mari. Pentru a evita această sursă de erori autorul prezintă metodologia de transformare a relaţiilor fundamentale pe baza căruia determină factorul de intensitate a tensiunlor K_I din diametrul maxim al izocromatei din jurul vârfului fisurii care este simetrică faţă de linia fisurii (v. **Fig. 5.3.6.2**).

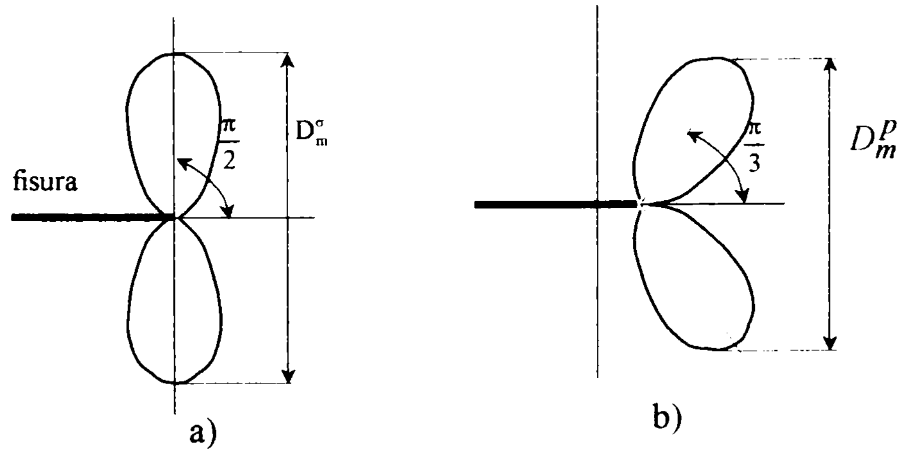


Fig. 5.3.6.2

Câmpul de tensiuni în apropierea vârfului fisurii, pentru modul I este cunoscut şi a fost prelucrat la metoda lui Irwin, unde am stabilit:

$$\tau_{max}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{kf_\sigma}{2} \tag{5.3.6.17}$$

De aici rezultă:

$$r = \frac{K_I^2 \sin^2\theta}{2\pi k^2 f_\sigma^2} \tag{5.3.6.18}$$

În cazul modului I, izocromatele sunt distribuite simetric faţă de axa fisurii, astfel că diametrul buclei se poate scrie:

$$D_m^\sigma = 2y_{max} \tag{5.3.6.19}$$

unde

y_{max} - este ordonata maximă a punctelor buclei izocromatei; ea se poate determina din următorul sistem de ecuaţii:

$$\left.\begin{array}{l} y = r\sin\theta = \dfrac{K_I^2 \sin^3\theta}{2\pi k^2 f_\sigma^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta} = 0;\ \ \dfrac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} < 0 \end{array}\right\} \tag{5.3.6.20}$$

Se obţine:

$$D_m^\sigma = \frac{2K_I^2}{2\pi k^2 f_\sigma^2}$$

de unde

$$K_I = kf_\sigma\sqrt{\pi D_m^\sigma} \tag{5.3.6.21}$$

În felul acesta factorul de identitate a tensiunilor K_I poate fi determinat prin simpla măsurare a diametrului maxim al izocromatelor.

Prin tehnici de holografie autorul determină şi suma tensiunilor normale principale (v. **Fig.5.3.6.2b)**).

5.3.7. Metoda CHEN FENG; SUN ZONQI; XU JICHENG [C28]/1997

Urmează aceiaşi cale ca şi ultima metodă prezentată şi scrie:

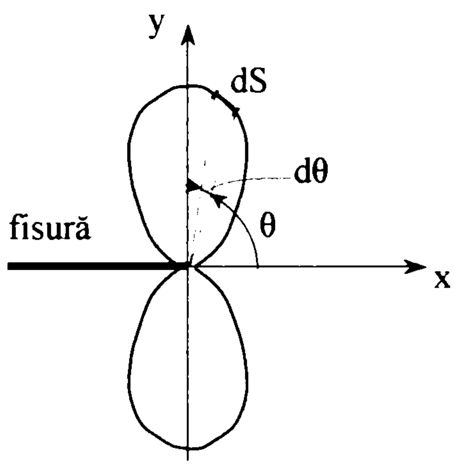


Fig. 5.3.7.1

$$\tau_{max} = \frac{K_I \sin\theta}{\sqrt{2\pi r}} = kf_\sigma \tag{5.3.7.1}$$

$$\Rightarrow r = \frac{K_I^2 \sin^2\theta}{2\pi (kf_\sigma)^2} \tag{5.3.7.2}$$

De aici începe o nouă prelucrare a rezultatelor obţinute; se calculează lungimea unui arc infinitezimal de pe o izocromată (dS) – v. **Fig. 5.3.7.1**.

$$dS = (r + r')^{1/2} d\theta \tag{5.3.7.3}$$

Din conjuncţia relaţiilor precedente obţinem:

$$dS = \frac{K_I^2}{2\pi (kf_\sigma)^2} = \sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \cdot d\cos\theta \tag{5.3.7.4}$$

Integrând această relaţie pentru $\theta = 0$ până la $\theta = \pi$, vom avea:

$$S = \int_0^{\sigma} dS = \frac{K_I^2}{\sqrt{3}\pi(kf_\sigma)^2}\left[\sqrt{3} + 0{,}5\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\right] \qquad (5.3.7.5)$$

De aici rezultă:

$$K_I^2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}+0{,}5\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}(kf_\sigma)^2 \cdot S \qquad (5.3.7.6)$$

Dacă vom nota:

$$\alpha = \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}+0{,}5\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}\right]^{1/2} = 1{,}50872 \qquad (5.3.7.7)$$

atunci expresia lui K_I este deosebit de simplă:

$$K_I = \alpha(kf_\sigma)\sqrt{S} \qquad (5.3.7.8)$$

unde:

S – lungimea buclei izocromatei între $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$.

Tragem de aici concluzia că factorul de intensitate a tensiunilor K_I este direct proporţional cu $\sqrt{S}$ - mărimea care se măsoară pe imaginea fotoelastică.

5.3.8. Metoda LI XIAN-FANG şi FAN TIAN-YOU [L22]/1998

Autorii demonstrează că pentru a determina factorii de intensitate a tensiunilor pentru modul I şi II singura informaţie de care am nevoie este aria buclei izocromatei de margine. Voi reda sumar această demonstraţie după [L 22].

Se cunosc relaţiile (v. Cap.2) (scrise cu greşeli în [L22]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) - \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(2+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) + \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases} \qquad (5.3.8.1)$$

Dar:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sqrt{(K_I\sin\theta + 2K_{II}\cos\theta)^2 + (K_{II}\sin\theta)^2}}{\sqrt{2\pi r}} = kf_\sigma \qquad (5.3.8.2)$$

De aici :

$$r = \frac{(K_I\sin\theta + 2K_{II}\cos\theta)^2 + (K_{II}\sin\theta)^2}{2\pi(kf_\sigma)^2} \qquad (5.3.8.3)$$

De aici putem calcula aria A_k din interiorul unei franje izocromate marginale de ordinul k:

$$A_k = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{32\pi}\left(\frac{1}{kf_\sigma}\right)^4\left(3K_I^4 + 30K_I^2K_{II}^2 + 59K_{II}^4\right) \qquad (5.3.8.4)$$

Pentru o fisură în modul I pur ($K_{II} = 0$) sau numai pentru modul II ($K_I = 0$) relaţia precedentă se poate scrie:

$$K_I(K_{II}) = \alpha_c \cdot k \cdot f_\sigma \quad \text{unde} \quad \alpha_c = \begin{cases} \sqrt[4]{32\pi/3} = 2{,}4060\,(\text{modul I}) \\ \sqrt[4]{32\pi/59} = 1{,}1425\,(\text{modul II}) \end{cases} \tag{5.3.8.5}$$

Pentru a elimina erorile introduse de stabilirea ordinului benzii k şi de mărimea ariei A_k, se fac aceleaşi calcule pentru două franje diferite: k şi $k+m$ şi se obţine:

$$\frac{K}{\sqrt[4]{A_{k+m}}} - \frac{K}{\sqrt[4]{A_k}} = m\alpha_c f_\sigma \tag{5.3.8.6}$$

de unde:

$$K = m\alpha_c f_\sigma \frac{\sqrt[4]{A_k \cdot A_{k+m}}}{\sqrt[4]{A_k} - \sqrt[4]{A_{k+m}}} \tag{5.3.8.7}$$

În particular pentru două izocromate alăturate (m=1) rezultă:

$$K = \alpha_c f_\sigma \frac{\sqrt[4]{A_k \cdot A_{k+1}}}{\sqrt[4]{A_k} - \sqrt[4]{A_{k+1}}} \tag{5.3.8.8}$$

Avantajul metodei este faptul că valorile K sunt destul de stabile şi foarte apropiate de cele teoretice.

5.4. OBSERVAŢII ASUPRA PROBLEMEI TEST NR. I. GOLUL CIRCULAR ÎNTR-O PLATBANDĂ DE DIMENSIUNI FINITE SOLICITATĂ LA TRACŢIUNE.

Problema golului circular în planul infinit, sau aşa-numita problemă Kirsch, am tratat-o în Cap. 2, la problemele test. Dar, spre surprinderea mea, am întâlnit destul de frecvent ideea, chiar printre specialişti, că tensiunea maximă care apare într-o placă sau într-o platbandă cu gol circular, solicitată la tracţiune de tensiunea p, este $3p$. Nu am găsit în nici o carte de rezistenţa materialelor, de organe de maşini, sau de teoria elasticităţii, expusă situaţia platbenzii de dimensiuni finite cu gol circular. Numai în SAVIN [SB24] am găsit indicaţii în acest sens, arătând că tensiunea maximă depinde de raportul dintre diametrul orificiului şi lăţimea platbenzii; când acest raport este de 0.5, tensiunea maximă este de $4.32p$. Mă voi ocupa în continuare de această problemă.

Fie platbanda de lăţime $2b$ cu gaura centrală de diametru $2a(a < b)$. Vom raporta toate dimensiunile la semilăţimea benzii (b), introducând coordonatele adimensionale:

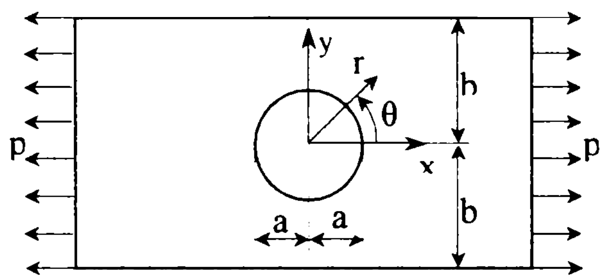


Fig. 5.4.1

$$\xi = \frac{x}{b}; \quad \eta = \frac{y}{b} \tag{5.4.1}$$

şi vom nota $\lambda = \frac{a}{b}$.

În afară de coordonatele carteziene (ξ, η) vom folosi şi coordonatele polare (ρ, θ):

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad \rho = \frac{r}{b}$$

Aşa cum se ştie, problema constă în determinarea funcţiei biarmonice $U(x, y) \approx U(\xi, \eta)$ care satisface ecuaţia:

$$\nabla^4 U = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \tag{5.4.2}$$

şi condiţiile la limită:

- pe conturul neîncărcat al benzii, adică la $y = \pm b$ (sau $\eta = \pm 1$) avem:

$$\begin{matrix} \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_y = \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{cases} \tag{5.4.3}$$

- pe conturul orificiului la $r = a$ (adică la $\rho = \lambda$) avem:

$$\begin{matrix} \sigma_\rho = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_\rho = \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho}\right) = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases} \tag{5.4.4}$$

- dacă banda are lungime infinită, adică dacă $x = \xi b \to \infty$ avem:

$$\begin{matrix} \sigma_x = p \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = p \\ \sigma_y = \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{cases} \qquad (5.4.5)$$

Vom considera pentru funcţia $U(\xi,\eta)$ o dezvoltare în serie de forma:

$$U(\xi,\eta) = U_{0.1}(\xi,\eta) + U_0(\xi,\eta) + U_1(\xi,\eta) + U_2(\xi,\eta) + \dots \qquad (5.4.6)$$

Termenii acestei serii *sunt funcţii biarmonice*, care trebuie să satisfacă anumite condiţii:

- funcţia $U^0(\xi,\eta) = U_{0.1}(\xi,\eta) + U_0(\xi,\eta)$ (5.4.7)

trebuie să satisfacă condiţia la infinit (5.4.5) şi pe conturul orificiului (5.4.4), dar nu trebuie să satisfacă condiţia pe marginea liberă a benzii. Altfel spus funcţia $U^0(\xi,\eta)$ *reprezintă soluţia problemei planului infinit slăbit cu un orificiu rotund şi solicitat la tracţiune de forţe uniform distribuite **p** paralele cu axa Ox*. Aceasta este soluţia cunoscută de la problema test nr.I.

$$U^0(\rho,\theta) = \frac{b^2 p}{4}\left[\rho^2 - 2\lambda^2 \ln\rho + \left(2\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{\rho^4} - \rho^2\right)\cos 2\theta\right] \qquad (5.4.8)$$

De obicei, pentru o utilizare mai comodă, se scrie:

$$U_{0.1} = \frac{b^2 p}{4}\rho^2(1 - \cos 2\theta) \qquad (5.4.9)$$

$$U_0 = \frac{b^2 p}{4}\left[\left(2\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{\rho^4}\right)\cos 2\theta - 2\lambda^2 \ln\rho\right] \qquad (5.4.10)$$

- funcţiile $U_k(\xi,\eta)$ $k = 1,2...$ se aleg astfel încât:

$U_{2k} + U_{2k+1}$ să conducă la tensiune nulă pe frontiera liberă de sarcini $(\eta = \pm 1)$

$U_{2k-1} + U_{2k}$ să conducă la tensiune nulă pe conturul orificiului $(\rho = \lambda)$

Deoarece condiţiile la limită sunt date numai de tensiuni, R HOWLAND* (citat de SAVIN [SB24]) porneşte de la o descompunere în serie de puteri a tensiunilor în coordonate polare de forma (pentru $\lambda \le 0{,}5$):

$$\sigma_\rho = p\left\{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) + 2A_0 - \frac{B_0}{\rho^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k(2k+1)B_{2k}}{\rho^{2k+2}} + \frac{(k+1)(2k-1)C_{2k}}{\rho^{2k}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2k(2k-1)D_{2k}\rho^{2k-2} + (k-1)(2k+1)A_{2k}\rho^{2k}\right]\cos 2k\theta\right\} \qquad (5.4.11)$$

$$\sigma_\theta = p\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)+2A_0+\frac{B_0}{\rho^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k(2k+1)B_{2k}}{\rho^{2k+2}}+\frac{(k-1)(2k-1)C_{2k}}{\rho^{2k}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k(2k-1)D_{2k}\rho^{2k-2}+(k+1)(2k+1)A_{2k}\rho^{2k}\right]\cos 2k\theta\right\} \tag{5.4.12}$$

$$\tau_{\rho\theta} = -p\left\{\frac{1}{2}\sin 2\theta+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(2k-1)\left(D_{2k}\rho^{2k-2}-\frac{C_{2k}}{\rho^{2k}}\right)+k(2k+1)\left(A_{2k}\rho^{2k}-\frac{B_{2k}}{\rho^{2k+2}}\right)\right]\sin 2k\theta\right\}$$
$$(5.4.13)$$

Calculul într-o formă generală a coeficienţilor nedetrrminaţi A_k, B_k, C_k, D_k este deosebit de dificil. De aceea vom considera un caz particular cond $\lambda = 0,5$ $(b = 2a)$ şi vom considera numai puncte pe conturul orificiului pentru care $\rho = \lambda = 0,5$. Dacă ne vom limita la formulele (5.4.11)-(5.4.13) numai la primii 4 termeni ($k = 4$) vom găsi din condiţiile la limită:

$A_0 = 1,40\cdot10^{-2}$	$B_0 = 1,32\cdot10^{-1}$		
$A_2 = -3,62\cdot10^{-2}$	$B_2 = 2,33\cdot10^{-2}$	$C_2 = -1,80\cdot10^{-2}$	$D_2 = 1,40\cdot10^{-1}$
$A_4 = -1,75\cdot10^{-2}$	$B_4 = 3,14\cdot10^{-4}$	$C_4 = -1,7\cdot10^{-3}$	$D_4 = 3,27\cdot10^{-2}$
$A_6 = -6,47\cdot10^{-3}$	$B_6 = 7,51\cdot10^{-6}$	$C_6 = -3,64\cdot10^{-5}$	$D_6 = 8,09\cdot10^{-3}$
$A_8 = -2,08\cdot10^{-4}$	$B_8 = 1,45\cdot10^{-7}$	$C_8 = -6,7\cdot10^{-7}$	$D_8 = 1,95\cdot10^{-3}$

Cu aceste valori vom calcula σ_θ / p, funcţie de θ, pe conturul orificiului $(\lambda = \rho = 0,5)$

θ	0	15°	30°	45°	60°	76°	90°
σ_θ / p	-1,58	-1,32	-0,51	0,77	2,32	3,72	4,32

Rezultatele sunt reprezentate grafic în **Fig. 5.4.2**.

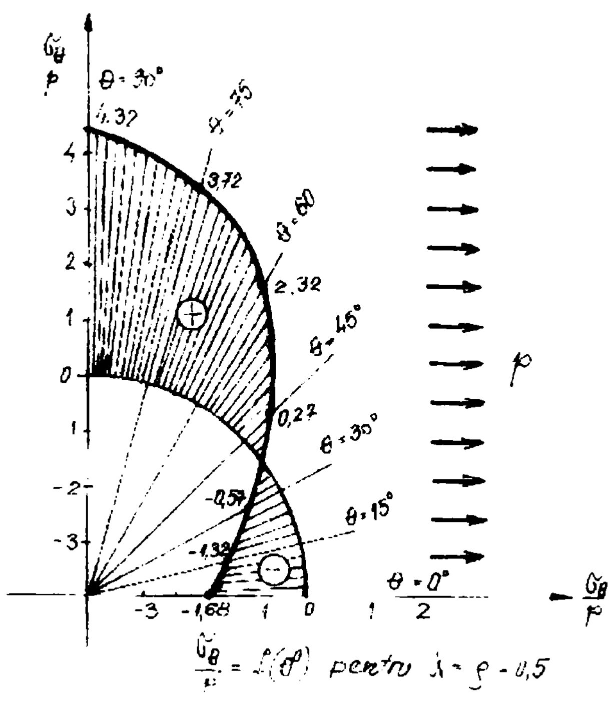


Fig. 5.4.2

Din acest studiu se desprind unele concluzii cu mare aplicabilitate:

1°) Pentru o lăţime dată (fixă) a platbandei (b), coeficientul de concentrare a tensiunilor creşte în mod semnificativ odată cu creşterea razei cercului (respectiv cu creşterea raportului $\lambda = a/b$). Ştim că pentru $\lambda = 0$ (planul infinit, $b = \infty$) $\sigma_{\theta_{\max}} = 3p$; pentru $\lambda = 0{,}1 \Rightarrow \sigma_\theta = 3{,}03p$, iar pentru $\lambda = 0{,}5 \Rightarrow \sigma_\theta = 4{,}32p$, deci o creştere de peste 45%. În proiectarea acestor elemente de rezistenţă este deci necesar un studiu amănunţit relativ la această situaţie.

2°) Soluţia obţinută pentru planul infinit se poate utiliza şi pentru plăci de dimensiuni finite în limitele unei precizii de 5%, numai daca $\lambda \le 0{,}2$, (cu alte cuvinte lăţimea benzii trebuie să fie cel puţin de cinci ori mai mare decât diametrul orificiului).

§ 5.5. PLANUL CU GOLURI CIRCULARE. O SOLUŢIE NOUĂ.

Ipoteze:

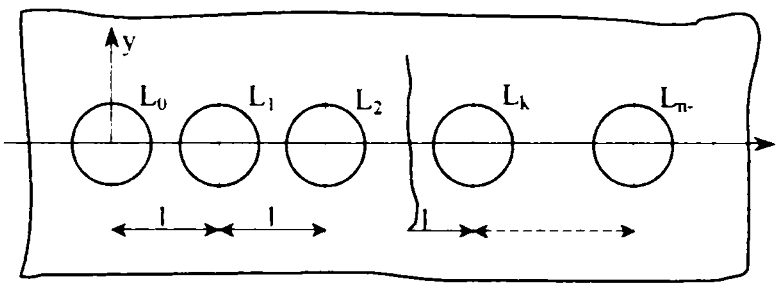


Fig. 5.5.1

- me u e ast c ocupă p anu xOy ş prezintă un număr de ***n* goluri circulare identice** cu centrele pe axa Ox, cu distanţa între centre l şi raza $r = 1$ (ipoteza nu modifică generalitatea problemei).
- forţe.e ce..trate autoech...brate care acţionează pe conturul găurilor sunt X_n şi Y_n (şi pot fi diferite de la un orificiu la altul) - v. **Fig. 5.5.1**.
- se va folosi teoria funcţiilor de variabilă complexă, în metodologia Kolosov-Mushelişvili, conform căreia se determină două funcţii olomorfe de variabilă complexă $\varphi_1(z)$şi $\psi_1(z)$ cu **satisfacerea condiţiilor la limită cunoscute:**

pentru prima problemă fundamentală:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = i\int_0^s (X_n + iY_n)ds + C = f_1 + if_2 + const \qquad (5.5.1)$$

pentru a doua problemă fundamentală:

$$2G\,(u + iv) = \chi\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} = 2G(g_1 + ig_2) \qquad (5.5.2)$$

unde:

$$U = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \qquad \text{iar} \qquad \psi_1(z) = \frac{d\chi_1(z)}{dz} \qquad (5.5.3)$$

Vom introduce funcţia:

$$\psi(z) = \psi_1(z) + z\varphi_1'(z) \qquad (5.5.4)$$

care este *invariantă la translaţia originii sistemului de axe de-a lungul axei x*, deoarece $\varphi(z) = \varphi_1(z)$. Cu această funcţie, condiţiile la limită (5.5.1) se scriu:

$$F(z,\bar{z}) = \varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} - (f_{1k} + if_{2k} + C_k) = 0 \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (5.5.5)$$

Se aleg funcţiile olomorfe $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ sub formă de serii infinite:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j^{(k)}}{(z - kl)^j}; \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta_j^{(k)}}{(z - kl)^j} \qquad (5.5.6)$$

Într-o aproximație de ordinul N, funcțiile $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ le vom căuta sub forma unor serii trunchiate:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j^{(k)}}{(z-kl)^j};\qquad \psi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{N+2}\frac{\beta_j^{(k)}}{(z-kl)^j} \tag{5.5.7}$$

În fiecare funcție avem $n\times N$ (respectiv $n\times(N+2)$) coeficienți necunoscuți.

Să ne fixăm atenția asupra golului cu numărul l (l = 0,1, 2, ..., n+1) și să introducem relațiile (5.5.7) în condițiile de graniță (5.5.5). Se obține funcția $F(z,\bar{z})=F(t)$ unde $t=e^{i\theta}$ este un punct pe conturul găurii l: impunem condiția ca această funcție să fie ortogonală la primele N+4 funcții ale sistemului complet de funcții $t^{(\pm k)}(k=0,1,2,3,\ldots)$. În acest caz pentru determinarea coeficienților $\alpha_j^{(l)};\beta_j^{(l)}$ obținem ecuația:

$$\int_{\gamma_l} F(t)t^{\pm k}dt=0 \tag{5.5.8}$$

După integrarea ecuației (5.5.8) obținem un sistem finit de ecuații algebrice în care coeficienții $\alpha_j^{(l)}$ și $\beta_j^{(l)}$ sunt exprimați prin coeficienții $\alpha_j^{(k)}$ și $\beta_j^{(k)}, k\neq l$.

Efectuăm asemenea operații pentru fiecare contur; obținem un sistem algebric de ecuații din care vom determina toate constantele $\alpha_j^{(k)};\beta_j^{(k)}$. După ce am determinat acești coeficienți din relațiile (5.5.7) stabilim expresiile funcțiilor $\varphi(z)$ și $\psi(z)$. Având aceste funcții putem calcula expresiile tensiunilor:

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_x^0+\mathrm{Re}\left[-(\bar{z}-z)\varphi''(z)+z\varphi'(z)-\psi'(z)\right]\\ \sigma_y&=\sigma_y^0+\mathrm{Re}\left[(\bar{z}-z)\varphi''(z)+\varphi'(z)+\psi'(z)\right]\\ \tau_{xy}&=\tau_{xy}^0+\mathrm{Im}\left[(\bar{z}-z)\varphi''(z)-\varphi'(z)+\psi'(z)\right]\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

unde $\sigma_x^0,\sigma_y^0,\tau_{xy}^0$ sunt tensiunile produse în planul continuu (fără goluri) de forțele date la infinit.

În mod principial problema este rezolvată pe baza schemei generale de mai sus. Pentru a putea verifica rezultatele, atât numeric cât și experimental, voi considera trei cazuri particulare, prezentate în paragrafele următoare.

5.5.1. Cazul a două orificii circulare identice

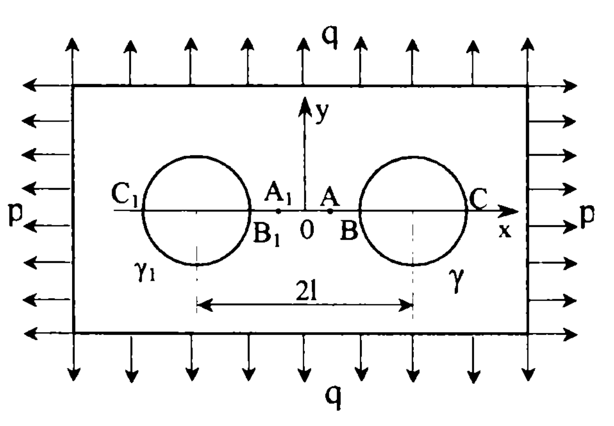


Fig. 5.5.2

Condițiile de simetrie impun să alegem sistemul de coordonate ca în **Fig. 5.5.2**, ceea ce induce niște modificări de notații. De exemplu, distanța dintre centrele celor două găuri va fi $2l$. Solicitările sunt date: p după direcția x (axa centrelor) și q după o direcție perpendiculară pe prima.

Datorită simetriei geometrice și mecanice condițiile limită (5.5.8) trebuie satisfăcute numai pe conturul din dreapta.

Într-o aproximaţie de ordinul N, relaţiile (5.5.7) se scriu pentru acest caz particular.

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left[\frac{1}{(z-l)^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{(z+l)^j}\right];\quad \psi(z)=\sum_{j=1}^{N+2}\beta_j\left[\frac{1}{(z-l)^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{(z+l)^j}\right]; \qquad (5.5.10)$$

Atunci, dacă vom nota punctul curent de pe conturul γ: $t = z - l$, ecuaţia (5.5.8) se scrie:

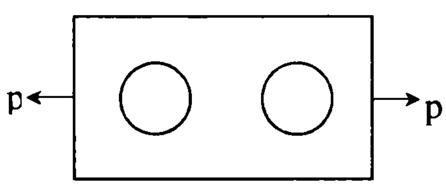
$$\int_\gamma\left[\varphi(t)+\left(t-\frac{1}{t}\right)\overline{\varphi'}(t)-\overline{\psi}(t)-\frac{p-q}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{p+q}{2}t+c\right]\frac{dt}{t^j}=0 \qquad (5.5.11)$$

De exemplu, **într-o primă aproximaţie, dacă N=1**, sistemul pentru determinarea constantelor căutate α_j şi β_j va avea forma:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(1+2m^2-8m^4-3m^8\right)=\frac{p-q}{2}-m^2\frac{p+q}{2}\\&\beta_1=\alpha_1\left(1-2m^2\right)-\frac{p+q}{2}\\&\beta_2=-\alpha_1 m^3\\&\beta_3=\alpha_1\left(1+m^4\right)\end{aligned} \qquad (5.5.12)$$

unde $m=\dfrac{1}{2l}$. De exemplu, pentru $m=\dfrac{2}{5}=0{,}4$ $\left(\dfrac{r}{2l}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow l=1{,}25r\right)$

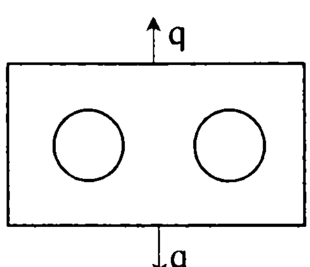
$$\begin{cases}\alpha_1=0{,}377p-0{,}521q\\ \beta_1=-0{,}24364p-0{,}85428q\\ \beta_2=0{,}024128p-0{,}032768q\\ \beta_3=0{,}38665p-0{,}5251q\end{cases}$$



a)

Dacă q = 0 (v. **Fig. 5.5.3. a)**) avem:

$$\alpha_1=0{,}377p$$
$$\beta_1=-0{,}24364p$$
$$\beta_2=0{,}024128p$$
$$\beta_3=0{,}38665p$$



b)

Fig. 5.5.3

Dacă p = 0 (v. **Fig. 5.5.3. b)**) avem:

$$\alpha_1'=-0{,}521q$$
$$\beta_1'=-0{,}85428q$$
$$\beta_2'=-0{,}032768q$$
$$\beta_3'=-0{,}5251q$$

Efectuând calculele pentru m = 0.4, vom găsi tensiunile în punctele O, A, B, C prezentate mai jos:

	O	A	B	C
σ_x/q	0.41	0.32	0.00	0.00
σ_y/q	3.26	3.43	4.03	3.26
σ_x/p	-0.06	-0.04	0.00	0.00
σ_y/p	-0.30	-0.32	-0.38	-0.90

$$m = \frac{r}{2l} = 0{,}4$$

$$l = \frac{r}{0{,}8} = \frac{5}{4}r = 1{,}25r$$

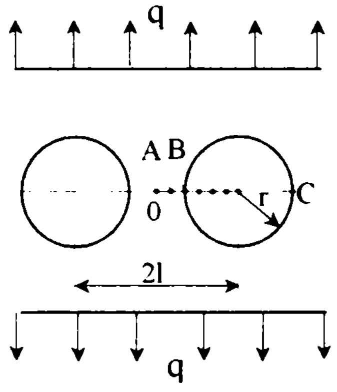


Fig. 5.5.4

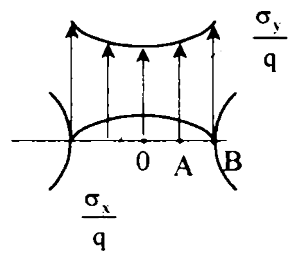


Fig. 5.5.5

5.5.2. Cazul a trei orificii circulare identice

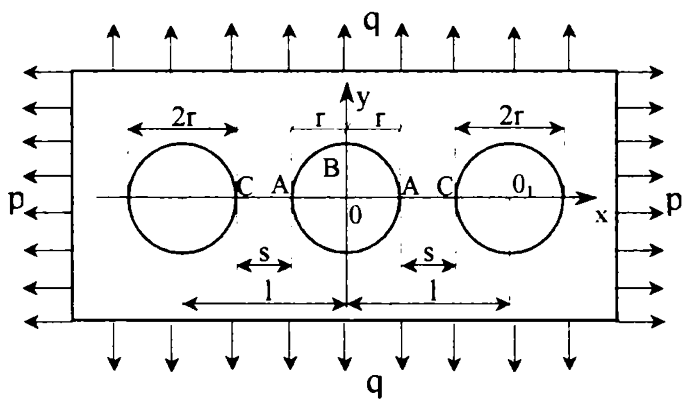


Fig. 5.5.6

Sistemul de axe este ales ca în **Fig.5.5.6** şi este impus de condiţiile de simetrie geometrică şi de încărcare. Sarcina p este orientată după direcţia axei x, care coincide cu linia centrelor, iar sarcina q este normal la aceasta. Urmând raţionamentul făcut până acum vom lua funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ sub forma seriilor:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k\left[\frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k}\right] + \frac{\alpha_k^0}{z^k}\right\} \tag{5.5.13}$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\beta_k\left[\frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k}\right] + \frac{\beta_k^0}{z^k}\right\} \tag{5.5.14}$$

Pentru determinarea coeficienţilor necunoscuţi din aceste serii vom impune condiţii la limită numai pentru orificiul din mijloc şi cel din dreapta, cu centrul în O_1, deoarece pe conturul din stânga acestea sunt satisfăcute automat. Condiţiile de frontieră exprimă faptul că orificiile sunt libere de sarcini. Se obţine:

$$\alpha_k^0 - \left[1 + (-1)^{k+1}\right]\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left\{j\alpha_j\varepsilon^{k+j}\left(C_{k+j}^k - \varepsilon^2 C_{k+j+2}^{k+1}\right) - \varepsilon^{k+j}C_{k-j-1}^k\beta_j^*\right\} = \omega_k \tag{5.5.15}$$

$$\beta_k^0 + 2\delta_k\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j j\alpha_j\varepsilon^{j+1} + \left[1-(-1)^{k+1}\right]\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\alpha_j\varepsilon^{k+j}C_{k+j-1}^k = t_k \tag{5.5.16}$$

$$\alpha_k + (-1)^k \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ (-1)^j j\alpha_j \varepsilon_1^{k+j} \left(C_{k+j}^j - \varepsilon_1^2 C_{k+j+2}^{k+1} \right) - j\alpha_j^0 \varepsilon^{k+j} \left(C_{k+j}^k - \varepsilon^2 C_{k+j+2}^{k+1} \right) - \\ (-1)^j \beta_j^* \varepsilon_1^{k+j} C_{k+j-1}^k + \beta_j^0 \varepsilon^{k+j} C_{k+j-1}^k \Big\} = \omega_k \tag{5.5.17}$$

$$\beta_k^* + \delta_k \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j j\alpha_j \varepsilon_1^{j+1} - \delta_k \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j^0 \varepsilon^{j+1} - (-1)^j - (-1)^j \cdot \\ \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ (-1)^j \alpha_j \varepsilon_1^{k+j} C_{k+j-1}^k - \alpha_j^0 \varepsilon^{k+j} C_{k+j-1}^k \right\} = t_k \tag{5.5.18}$$

unde:

$$\beta_k^* = \beta_k + k\alpha_k - (k-2)\alpha_{k-2} \tag{5.5.19}$$

$$\beta_k^{*0} = \beta_k^0 + k\alpha_k^0 - (k-2)\alpha_{k-2}^0 \tag{5.5.20}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{l}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2l}; \quad \omega_1 = \frac{p-q}{2}; \quad t_1 = \frac{p+q}{2}; \quad \omega_k = t_k = 0 \quad \forall k \geq 2$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$ - simbolul combinărilor.

Ecuaţiile precedente formează un sistem care este cvasiregulat, oricât ar fi de apropiate între ele orificiile examinate. Pentru stabilirea acestui fapt trebuie să adunăm la necunoscutele din sumele infinite, coeficienţii α_k şi β_k luaţi în mărime absolută şi să ţinem cont de faptul că suma acestor coeficienţi tinde spre zero odată cu creşterea lui k. În felul acesta obţinem:

$$A_{1k} = 2\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} \left[k + 3 - (k+2)\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1-\varepsilon)^{k+1} \right] \right\}$$

$$A_{2k} = 2\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} + 2\delta_k \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2$$

$$A_{3k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} \left[(k+3) - (k+2)\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1-\varepsilon)^{k+1} \right] + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{k+1} \left[(k+3) - (k+2)\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1+\varepsilon)^{k+1} \right] + \\ + \left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^{k+1} \left[(k+3) - (k+2)\left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^2 - (1-\varepsilon_1)^{k+1} \right]$$

$$A_{4k} = \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{k+1} + \delta_k \left[\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \right] \right\} + \left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^{k+1} + \delta_k \left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^2$$

Calculele efectuate, într-o aproximaţie de ordinul doi, conduc la următoarele rezultate pentru tensiunea maximă:

- dacă acţionează numai sarcina p (dacă $q = 0$), în punctul B, pentru diverse valori ale lui ε vom avea:

ε	1/4	1/3	2/5
$\left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$	2,42	2,27	2,19

- dacă acţionează numai sarcina q (deci $p = 0$), în punctul A, pentru aceleaşi valori ale lui ε, se obţine:

ε	1/4	1/3	2/5
$\left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{\theta=0}$	3,10	3,46	4,44

Comparăm aceste rezultate cu cele date de Peterson [P33], vezi **Anexa 11**.

5.5.3. Cazul a două orificii de diametre diferite

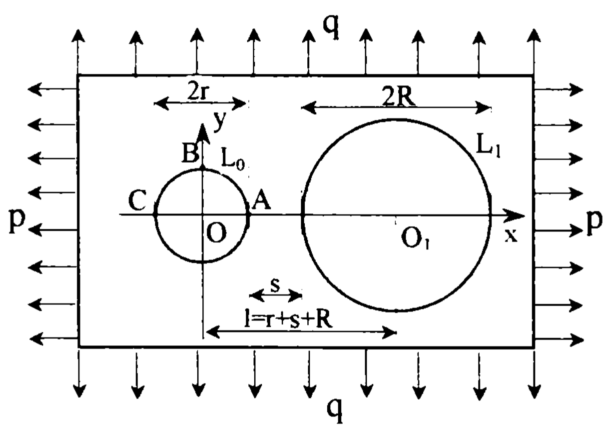


Fig. 5.5.7

Vom considera că planul elastic omogen şi izotrop este slăbit cu două orificii circulare de raze diferite (r = 1 raza orificiului mic; R>1 raza orificiului mare); planul este solicitat la infinit de sarcinile de tracţiune uniforme p, q. Alegem sistemul de axe ca în **Fig.5.5.7** unde s este „*puntea*" dintre orificii iar l distanţa centrelor.

Problema a obţinut diferite soluţii cu diferite metode, dar dacă găurile sunt situate aproape una de cealaltă, rezolvarea este deosebit d_ d...c.lă.

Aşa cum se arată în [SB24], dacă distanţa dintre găuri depăşeşte de două ori diametrul găurii mai mici ($s \geq 4r$) se pot obţine rezultate suficient de exacte aplicând o metodă de aproximaţii succesive, destul de frecventă azi în literatură. Se consideră pentru început că planul are numai orificiul mare, problemă cunoscută şi pe care o putem rezolva, de exemplu, cu metoda lui Mushelişvili; această soluţionare produce pe conturul virtual al găurii mici (L_0), un sistem de eforturi pe elementele de arc $\overline{X_n}, \overline{Y_n}$ diferite de zero. Se consideră după aceea numai conturul mic (L_0) încărcat cu forţele exterioare ($-\overline{X_n}, -\overline{Y_n}$), a cărei soluţie este deasemenea cunoscută. Suprapunerea acestor două câmpuri de tensiuni conduce la soluţia problemei într-o primă aproximaţie. Se vede uşor că în acest caz se satisfac condiţiile la infinit şi condiţiile pe frontieră numai pe conturul orificiului mic L_0. Eforturile necompensate care apar pe conturul L_1 reprezintă o măsură a gradului de aproximaţie al soluţiei date.

Cazul I. : Sarcinile exterioare uniform distribuite ortogonale pe linia centrelor

Dacă asupra planului acţionează numai forţele $q \neq 0$ şi $p = 0$, ortogonale pe linia centrelor, tensiunile într-o vecinătate a orificiilor sunt date de următoarele ecuaţii ale lui Kolosov-Musheli\c{s}vili:

$$\sigma_x + \sigma_y = q + 2q\,\mathrm{Re}\left\{\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{R^2}{(z-l)^2} + \frac{R^2(1+zl-3z^2-lz^3)}{(1-zl)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-zl)^4}\right\} \quad (5.5.21)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q\left\{1 + \frac{3R^4}{(z-l)^4} + \frac{R^2(z-2\bar{z}+l)}{(z-l)^3} + 2\left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right)\cdot\right.$$
$$\cdot\left[-\frac{1}{z^3} + \frac{3R^4z(1+lz)}{(1-lz)^5} + \frac{R^2(2l-3z+l^2z)}{(1-lz)^4}\right] + \frac{1}{z^2}\cdot \quad (5.5.22)$$
$$\left.\cdot\left[1 + \frac{2R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{R^2(1+zl-3z^2+lz^3)}{(1-lz)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4}\right] + \frac{R^2}{(1-lz)^2}\right\}$$

Studiile experimentale au arătat că cea mai interesantă este tensiunea σ_θ care acţionează pe conturul L_0 al orificiului mic, iar influenţa acestui orificiu asupra stării de tensiune din vecinătatea orificiului mare este neglijabilă. Tensiunile în punctele conturului L_0 sunt:

$$\sigma_\theta = q\left(1 + \frac{2R^2}{l^2}\right) + 2qR_e\left[\frac{1}{t^2} + \frac{R^2}{(t-l)^2} + \frac{R^2(1+tl-3t^2+lt^3)}{(1-lt)^4} + \frac{3R^4t^2}{(1-lt)^4}\right] \quad (5.5.23)$$

unde $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Dacă formula (5.5.23) o vom dezvolta în serie după parametrul unic $\varepsilon = \frac{1}{l} << \frac{1}{2}$ şi vom reţine numai primele trei componente, vom putea calcula tensiunile în punctele $A(\theta = 0)$; $B(\theta = \frac{\pi}{2})$; $C(\theta = \pi)$, care vor fi:

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = 2q\left[1.5 - R^2\varepsilon^2(2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + 5\varepsilon^4) + 3R^4\varepsilon^4\cdot(1 + 4\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 20\varepsilon^3 + 35\varepsilon^4)\right] \quad (5.5.24)$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2q\left[-1.5 + R^2\varepsilon^2(2\varepsilon - 15\varepsilon^2 + 45\varepsilon^4) - 3R^4\varepsilon^4\cdot(1 - 10\varepsilon^2 + 35\varepsilon^4)\right] \quad (5.5.25)$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = 2q\left[1.5 + R^2\varepsilon^2(2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 5\varepsilon^4) + 3R^4\varepsilon^4\cdot(1 - 4\varepsilon + 10\varepsilon^2 - 20\varepsilon^3 + 35\varepsilon^4)\right] \quad (5.5.26)$$

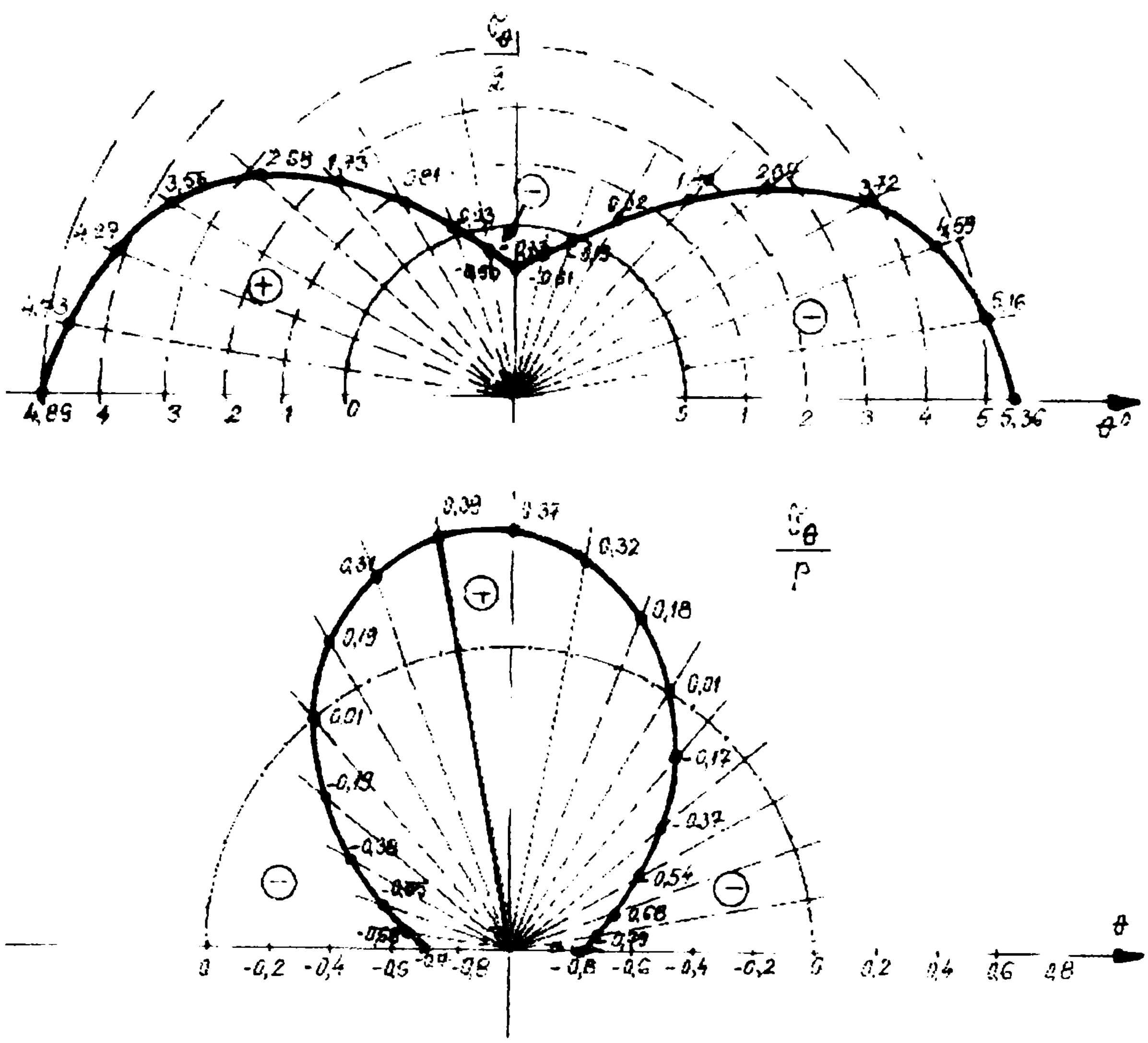


Fig. 5.5.8: Variaţia lui $\dfrac{\sigma_\theta}{q}$ respectiv a lui $\dfrac{\sigma_\theta}{p}$ pe conturul orificiului mic (L_0).

Cazul II. : Sarcinile exterioare uniform distribuite orientate după direcţia liniei centrelor

Dacă asupra planului acţionează numai forţele $p \neq 0$ ($q = 0$), în lungul liniei centrelor, tensiunile rezultă din sistemul:

$$\sigma_x + \sigma_y = p - 2pR_e\left\{\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{R^2}{(z-l)^2} - \frac{R^2(1-3lz+3z^2-lz^3)}{(1-lz)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4}\right\} \tag{5.5.27}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p\Bigg\{&-1-\frac{3R^4}{(z-l)^4}+\frac{R^2(z-2\bar{z}-3l)}{(z-l)^3}+2\left(\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)\cdot\\ &\cdot\left[\frac{1}{z^3}+\frac{3R^2z(1+l^2)}{(1-lz)^4}-\frac{3zR^4(1-lz)}{(1-lz)^5}\right]+\frac{1}{z^2}\cdot\\ &\cdot\left[1-\frac{1}{z^2}-\frac{2R^2}{l^2}+\frac{R^2(1-3lz+3z^2+lz^3)}{(1-lz)^3}-\frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4}\right]-\frac{R^2}{(1-lz)^2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.5.28}$$

În punctele conturului L_0 vom avea:

$$\sigma_\theta = p\left(1-\frac{2R^2}{l^2}\right) - 2p\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{t^2} + \frac{R^2}{(t-l)^2} - \frac{R^2(1-3lt^2+3t^2-lt^3)}{(1-lt)^3} + \frac{3R^4t^2}{(1-lt)^4}\right] \tag{5.5.29}$$

De aici rezultă imediat:

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = -2p\left[0.5 - R^2\varepsilon^2(2+6\varepsilon+9\varepsilon^2+12\varepsilon^3+15\varepsilon^4)+3R^4\varepsilon^4(1+4\varepsilon+10\varepsilon^2+20\varepsilon^3+35\varepsilon^4)\right] \tag{5.5.30}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = p\left\{1+2\left[1-R^2\varepsilon^2(4-21\varepsilon^2+55\varepsilon^4)+3R^4\varepsilon^4(1-10\varepsilon^2+35\varepsilon^4)\right]\right\} \tag{5.5.31}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = -2p\left[0.5 - R^2\varepsilon^2(2-6\varepsilon+9\varepsilon^2-12\varepsilon^3+15\varepsilon^4)+3R\varepsilon^4(1-4\varepsilon+10\varepsilon^2-20\varepsilon^3+35\varepsilon^4)\right] \tag{5.5.32}$$

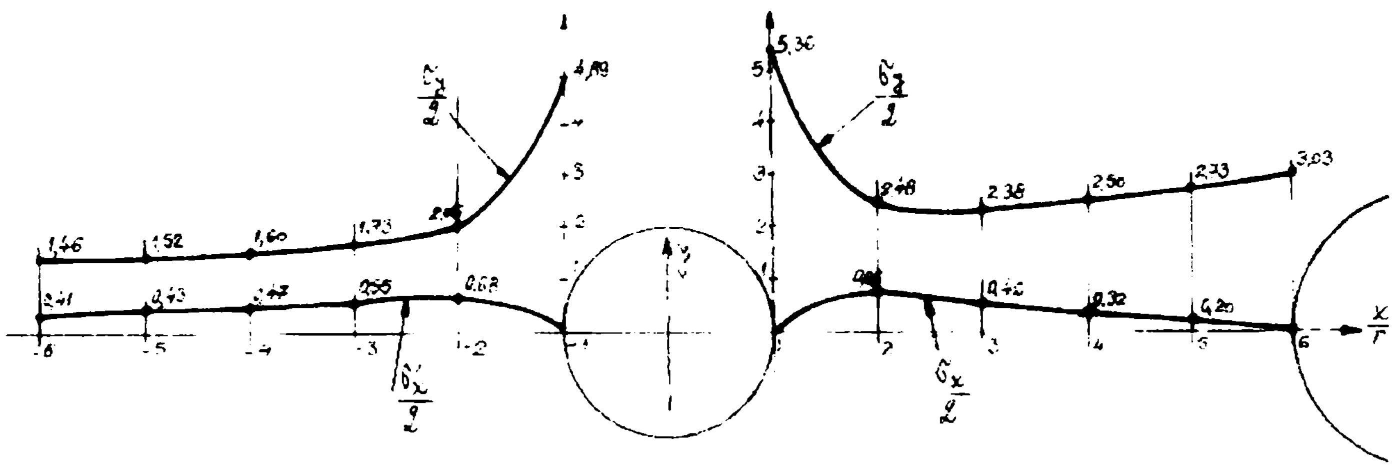


Fig. 5.5.9

Cazul III. Dacă planul este supus la infinit la o tracţiune uniformă după cele două direcţii ($p=q$), tensiunile pe conturul L_0 sunt mult mai simple:

$$\sigma_\theta = 2p\left[1+\mathrm{Re}\frac{R^2}{(1-lt)^2}\right] \tag{5.5.33}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = 2p\left[1+\frac{2R^2}{(1-l)^2}\right] \tag{5.5.34}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2p\left[1+\frac{2R^2(1-l^2)}{(1+l^2)^2}\right] \tag{5.5.35}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = 2p\left[1+\frac{2R^2}{(1+l)^2}\right] \tag{5.5.36}$$

S-a luat în studiu cazul: r = 10mm pentru diferite rapoarte R/r (R/r = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 13, 16, 20) şi s-a reprezentat grafic variaţia lui $\frac{\sigma_\theta}{q}$ funcţie de raportul $\frac{s}{r}$, (unde s ia valori între 1 şi 100 mm) pentru cele trei puncte A (la $\theta = 0$), B (la $\theta = \frac{\pi}{2}$) şi C (la $\theta = \pi$) ale orificiului mic.

Utilizând formulele (5.5.24), (5.5.25) şi (5.5.26) şi programul de calcul tabelar Excel, s-au obţinut următoarele grafice (**Fig. 5.5.10, 5.5.11** şi **5.5.12**), pe care nu le-am întâlnit în literatura de specialitate cercetată.

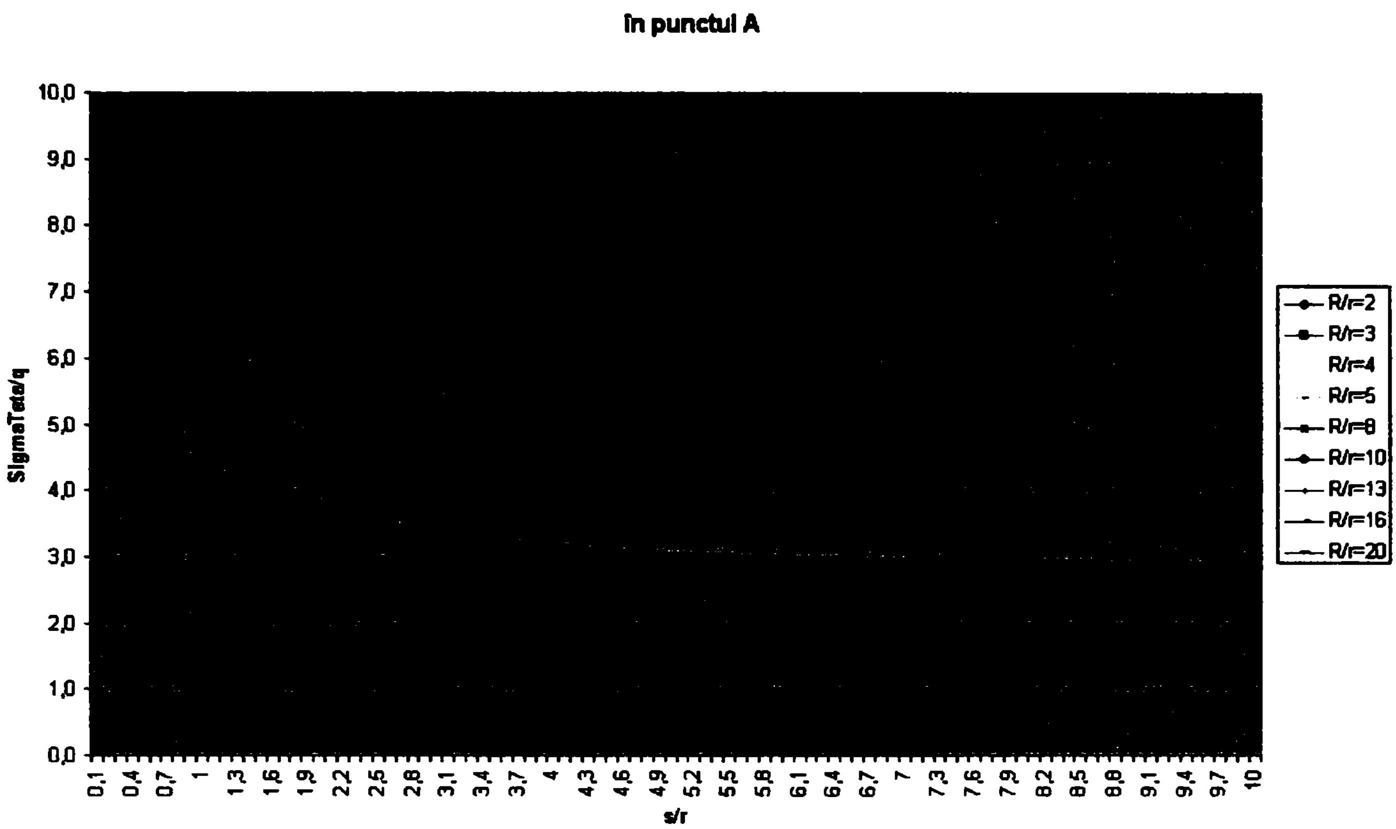


Fig.5.5.10

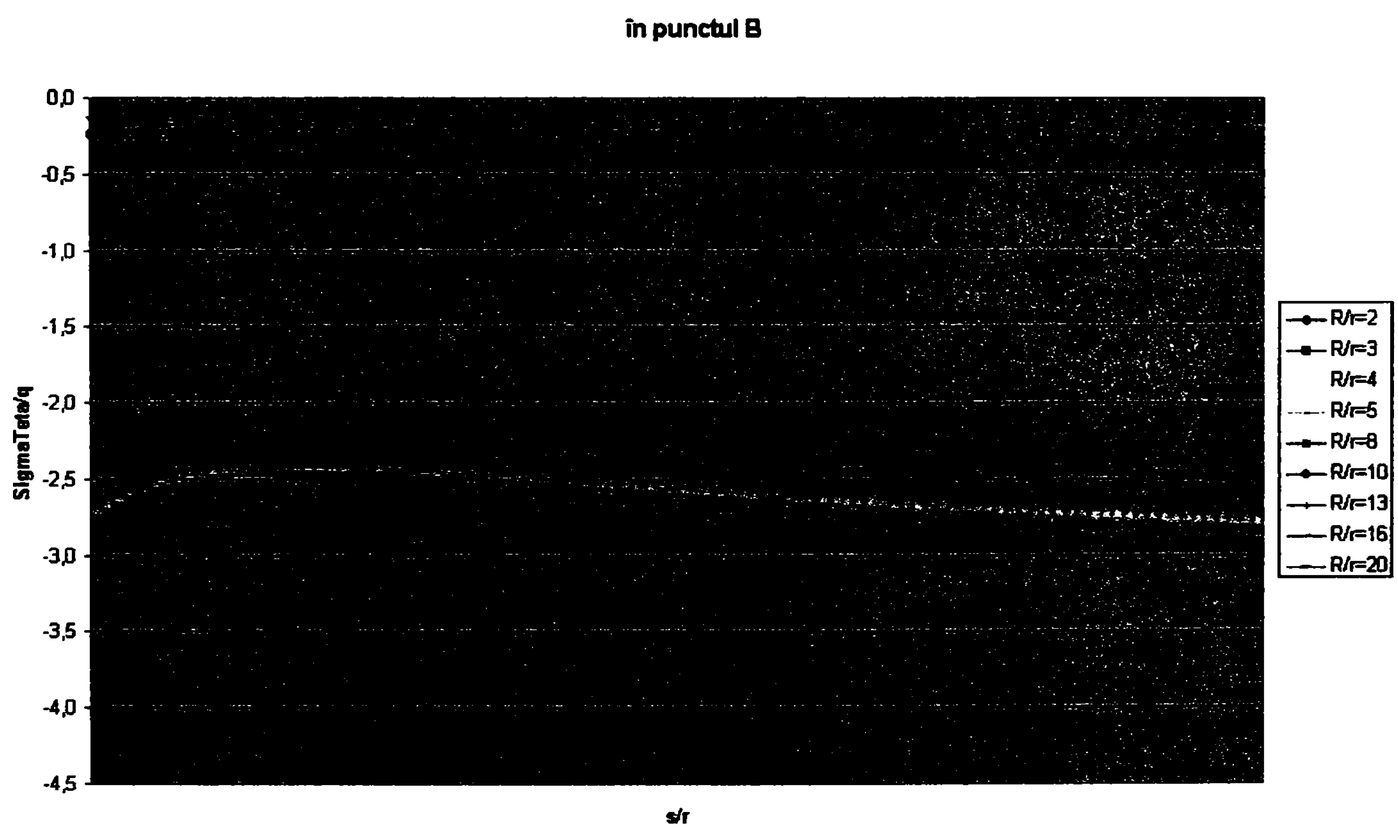


Fig. 5.5.11

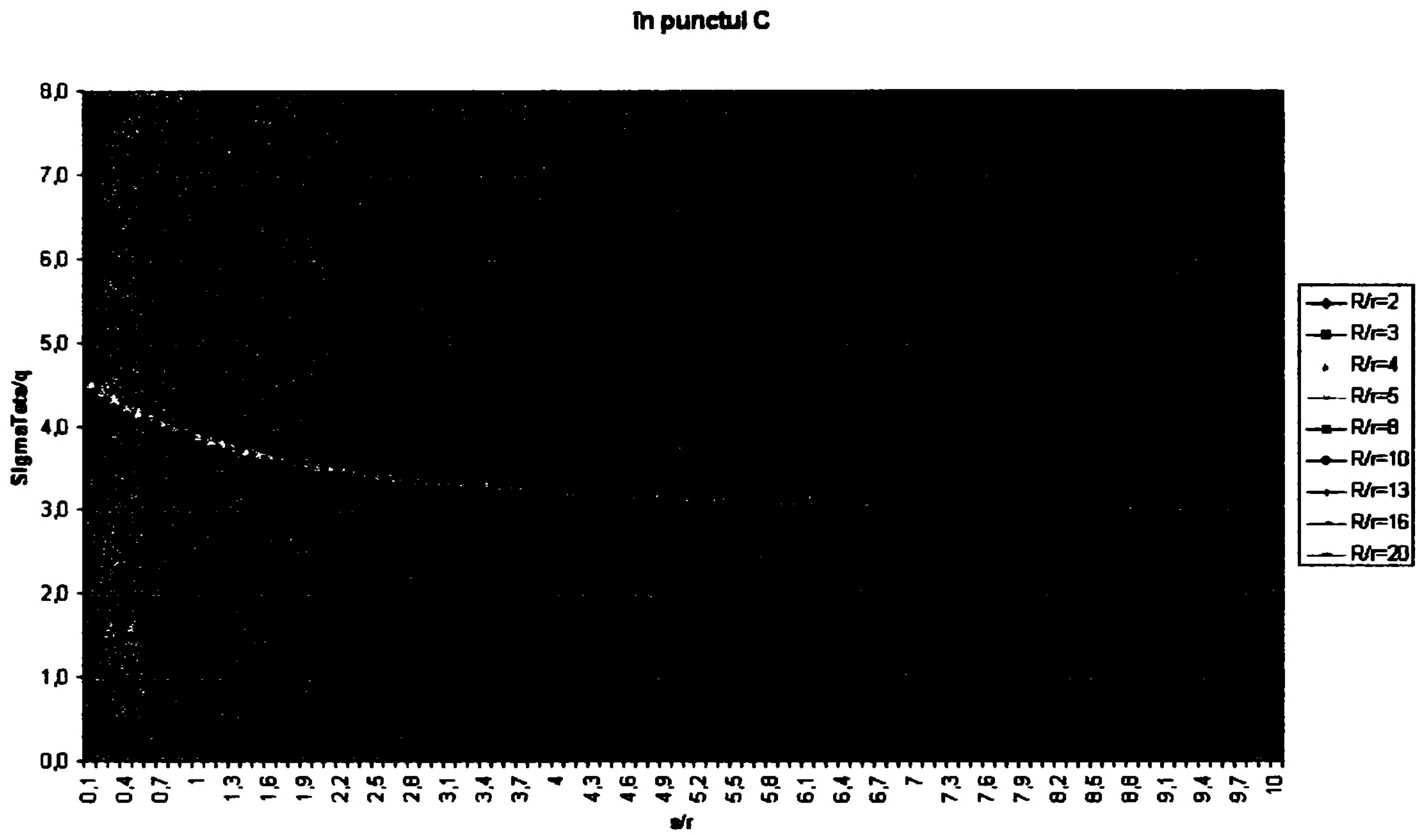


Fig. 5.5.12

Atrag atenţia asupra faptului că afirmaţiile făcute sunt valabile numai în condiţiile acceptate pentru metoda aproximativă utilizată, deci pentru $\frac{s}{r} \geq 4$, ceea ce înseamnă că cele două orificii sunt destul de îndepărtate. Altfel, dacă urmărim imaginile fotoelastice (**Fig. 5.6.26-5.6.29**, respectiv **5.6.17-5.6.20**), se constată că tensiunile maxime apar pe orificiul cu dimensiunile cele mai mici.

§ 5.6. ANALIZA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

În cadrul acestui paragraf voi prezenta o serie de rezultate experimentale (de imagini fotoelastice) obţinute pentru platbanda cu goluri, diverse orificii circulare şi cu fisuri. Pentru cazul orificiilor circulare o serie de rezultate s-au obţinut şi teoretic, şi sunt prezentate în cadrul capitolului 2, § 2.5. Tot în cadrul acestui paragraf am prezentat şi o serie de rezultate noi pentru cazul platbenzii cu două fisuri, care sunt comparate cu rezultatele experimentale.

Urmând metodologia expusă pentru măsurătorile fotoelastice, am început cu etalonarea materialelor fotoelastice utilizate şi am prezentat informaţiile date de firma producătoare a polariscopului privind legătura dintre culori şi ordinul franjei de interferenţă. Pentru a putea compara cu rezultatele existente în literatură am prezentat şi câteva planşe preluate din PETERSON [P33] ediţia rusească, aşa cum se găsesc ele în carte. Sunt prezentate în **Anexa 11**.

5.6.1. Etalonare

Am efectuat o calibrare la întindere asupra unei probe dintr-o o răşină DINOX 010P turnată într-o placă 155x37.7 mm, cu grosimea de 3.2mm, şi ca întăritor trietilentetramina.

Am supus proba la întindere până când am observat apariţia primei franje, de culoare roşu-purpuriu, corespunzătoare primului ordin de bandă. Am notat într-un tabel forţa necesară pentru apariţia acestei franje, citind numărul de diviziuni pe afişajul dinamometrului şi înmulţind cu constanta de etalonare a dinamometrului, (cunoscută şi egală cu 15,35 N/div.). Am supus proba în continuare la întindere până la apariţia culorii albastru-spre-verde, corespunzătoare ordinului de bandă 1.22 (a se vedea **Fig. 5.6.1** – preluată din documentaţia polariscopului cu care am efectuat experienţele, şi de asemenea **Tab. 5.6.1** corespondent, preluat din aceeaşi sursă, care indică ordinul benzilor funcţie de culoarea franjelor). Apoi am continuat încărcarea, citind forţele de încărcare pentru apariţia franjelor verde-spre-galben(având ordinul de bandă 1.39), orange (cu k=1.63), roz-spre-roşu (cu k=1,82) şi din nou roşu purpuriu (pt. k=2, al doilea ordin întreg de bandă). Toate aceste date le-am prelucrat în Excel, în **Tab. 5.6.2**, obţinând în final o valoare medie $\bar{\sigma}_0$, ca fiind valoarea benzii, măsurată în [MPa/franjă].

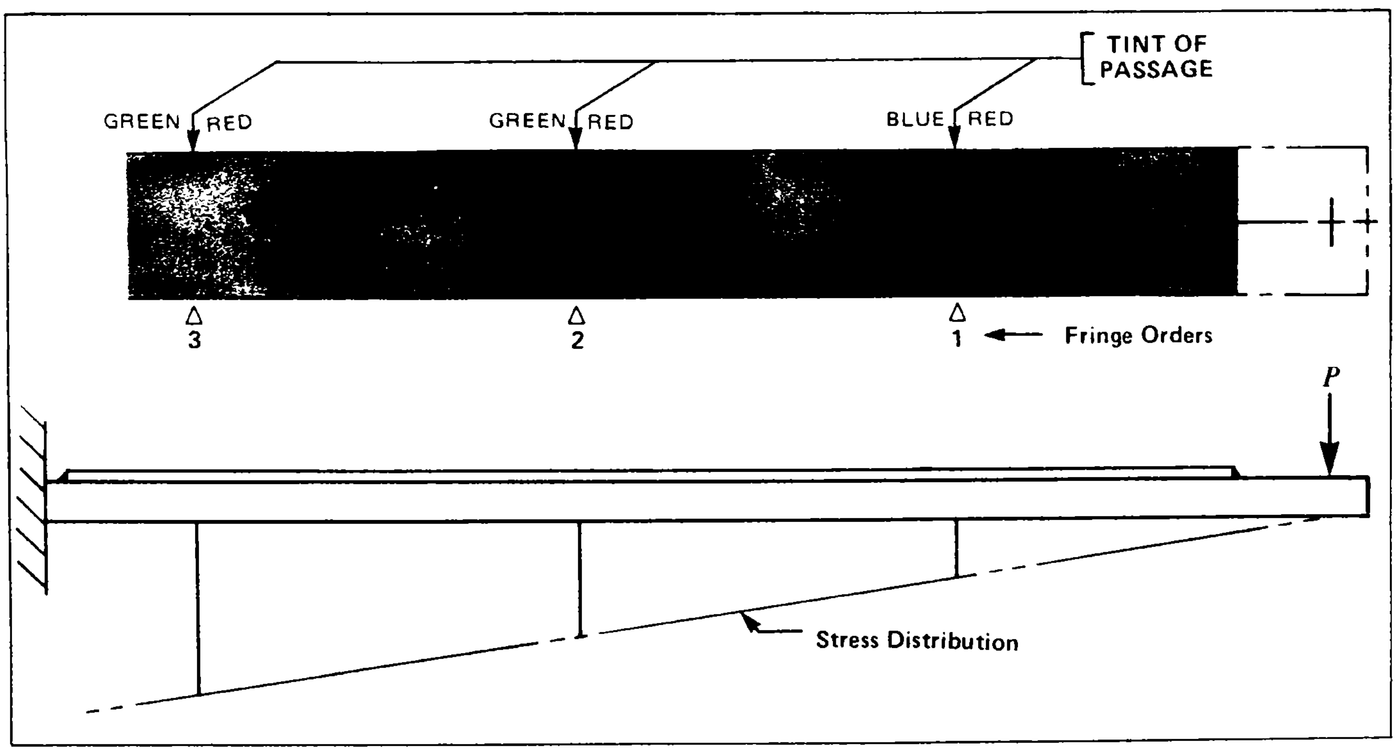


Fig. 5.6.1

BUPT

Tab. 5.6.1 Ordinul benzilor funcţie de culoarea franjelor – date preluate din documentaţia aparatului de fotoelasticimetrie

TABLE 1
Isochromatic Fringe Characteristics

Color	Approximate Relative Retardation nm	Fringe Order N	Strain* $\mu\epsilon$
BLACK	0	0	0
GRAY	160	0.28	265
WHITE	260	0.45	425
PALE YELLOW	345	0.60	570
ORANGE	460	0.80	760
DULL RED	520	0.90	855
PURPLE (TINT OF PASSAGE)	575	1.00	950
DEEP BLUE	620	1.08	1025
BLUE-GREEN	700	1.22	1160
GREEN-YELLOW	800	1.39	1320
ORANGE	935	1.63	1550
ROSE RED	1050	1.82	1730
PURPLE (TINT OF PASSAGE)	1150	2.00	1900
GREEN	1350	2.35	2230
GREEN-YELLOW	1440	2.50	2380
RED	1520	2.65	2520
RED/GREEN TRANSITION	1730	3.00	2850
GREEN	1800	3.10	2950
PINK	2100	3.65	3470
PINK/GREEN TRANSITION	2300	4.00	3800
GREEN	2400	4.15	3940

**Type PS-1 Photoelastic Plastic, 0.080 in (2 mm) thick,*
f = 950 $\mu\epsilon$/fringe (reflection)

Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Latime (2b)	37,7	mm
Grosime (h)	3,2	mm
Aria (A)	120,64	mm^2

Tab. 5.6.2

F		σ_n=F/A	k	$\sigma_0=\sigma_n$ /k
[div]	[N]	[MPa]	[franje]	[MPa/franje]
13	199,550	1,65409	1	1,65409
16	245,600	2,03581	1,22	1,66870
18	276,300	2,29029	1,39	1,64769
23,5	360,725	2,99009	1,82	1,64291
26	399,100	3,30819	2	1,65409
30,5	468,175	3,88076	2,35	1,65139

Valoarea medie $\bar{\sigma}_0$:	1,65314

În toate calculele care urmează pentru diferitele experienţe efectuate, am considerat ordinul benzii $\overline{\sigma}_0 = 1.65$ MPa/franjă. Constantele de material cu care se va lucra, în speţă modulul de elasticitate E, respectiv coeficientul lui Poisson ν al materialului utilizat, (extrase din documentaţie) sunt: E=2850 N/mm^2, respectiv ν=0.33.

5.6.2. Platbanda cu un orificiu circular

Este solicitată la tracţiune epruveta din **Fig. 5.6.2**. Dimensiunile plăcuţei şi al orificiului se consideră cele din figură.

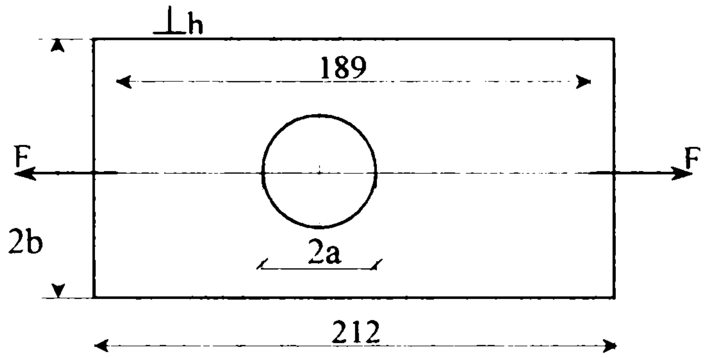


Fig. 5.6.2

Dimensiuni epruvetă		
Latime (2b)	70	mm
Grosime (h)	6	mm
Diametru orificiu (2a)	20	mm
Aria netă (A_n)	300	mm^2
Aria brută (A_b)	420	mm^2
λ =a/b	0,2857	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

Se definesc doi coeficienţi teoretici de concentrare a tensiunilor (v. PETERSON [P33]):

$$K_{tn} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \quad \text{unde} \quad \sigma_n = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{(2b-2a)h} \tag{5.6.1}$$

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{p}, \quad \text{unde} \quad p = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{2bh} \tag{5.6.2}$$

unde s-a notat *aria brută* cu $A_b = 2bh$ şi *aria netă* cu $A_n = (2b-2a)h$.

Se vede că avem imediat:

$$K_{tn} = K_{tg}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = K_{tg}(1-\lambda) \tag{5.6.3}$$

Mărimea $p = \dfrac{F}{A_b}$ are diverse notaţii: $\sigma_\infty, \sigma^\infty, \sigma$.

În cadrul experienţei s-a încărcat proba cu o forţă de tracţiune crescândă, citindu-se valoarea acesteia până la apariţia primei, respectiv a celei de-a doua, a treia etc. franje de ordin întreg (sau eventual neîntreg). În urma măsurătorilor s-a completat tabelul **Tab. 5.6.3**.

Tab. 5.6.3

F [div]	F [N]	σ_n=F/A$_n$ [MPa]	k [franje]	σ_{max} [MPa]	K$_{tn}$= σ_{max}/σ_n	p=F/A$_b$ [MPa]	K$_{tg}$= σ_{max} / p
9,5	145,825	0,48608	1	1,65	3,39448	0,34720	4,75227
27	414,450	1,38150	2	3,3	2,38871	0,98679	3,34419
41	629,350	2,09783	3	4,95	2,35958	1,49845	3,30341
41,5	637,025	2,12342	3,2	5,28	2,48656	1,51673	3,48118

Valori medii		Valori medii excluzând prima citire	
K$_{tn}$	K$_{tg}$	K$_{tn}$	K$_{tg}$
2,65733	3,72026	2,41161	3,37626

Se observă că în urma calculelor, făcând o medie pentru coeficienţii de concentrare a tensiunilor K_{tn} şi K_{tg} , rezultă nişte valori puţin cam mari faţă de cele date în literatură (v. PETERSON [P33], respectiv **Anexa 11,** de unde, conform Fig. 86 de la p.143 ar trebui să rezulte K_{tn}=2,365 şi K_{tg}=3,32); dar atunci când excludem prima citire din această medie (prima citire fiind în general afectată de erori mari) valorile obţinute sunt foarte aproape de cele aşteptate.

În continuare prezint imaginile obţinute cu un aparat foto digital pentru cele patru citiri din **Tab. 5.6.3**, respectiv pentru prima, a doua, a treia franjă şi apariţia culorii albastru-spre-verde din cea de-a patra franjă (v. **Fig. 5.6.3**, **Fig. 5.6.4**, **Fig. 5.6.5** şi **Fig. 5.6.6**).

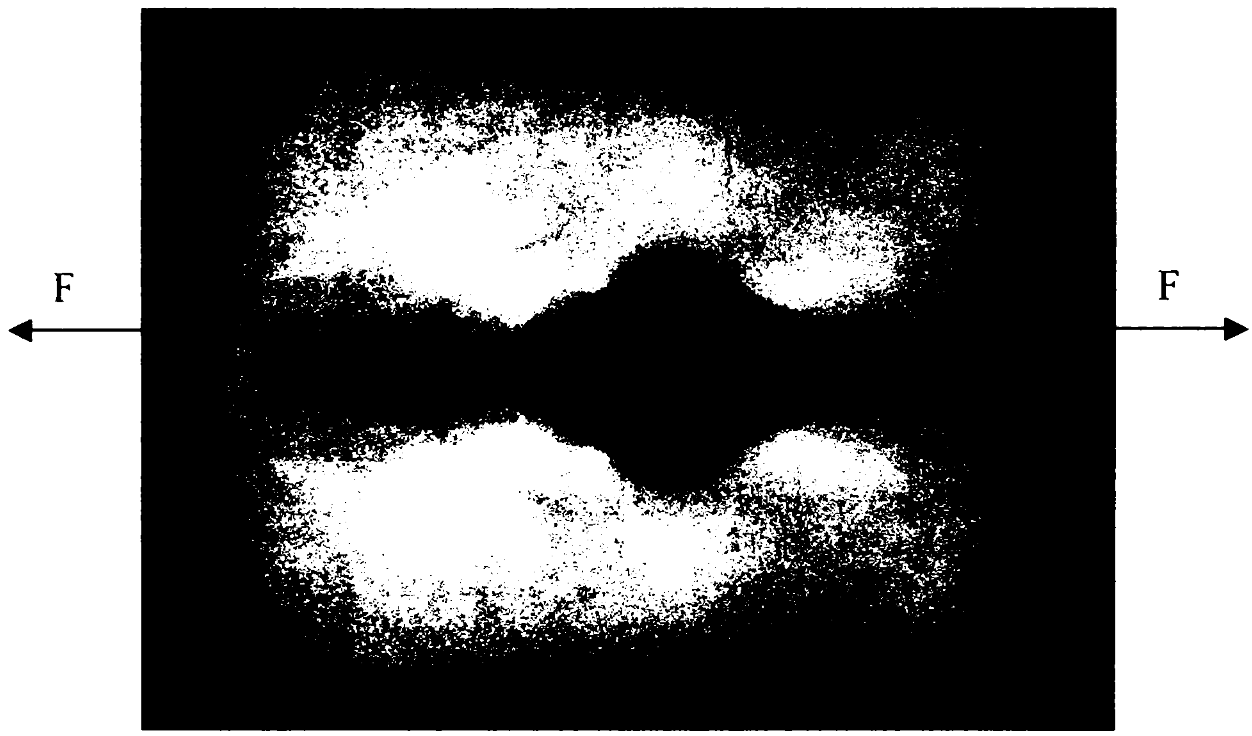


Fig. 5.6.3. Franja 1, la F=9,5×35N=145,825 N (9,5 diviziuni)

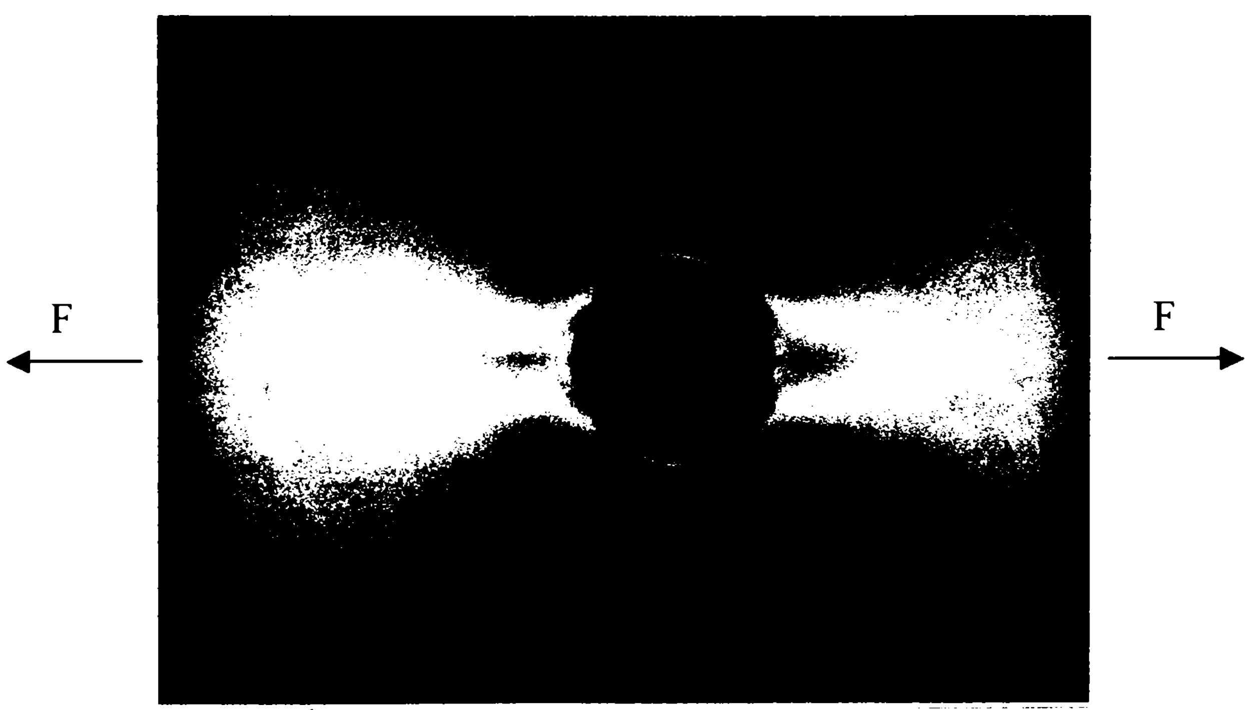


Fig. 5.6.4. Franja 2, la F=27x15.35N = 414.450 N (27 diviziuni)

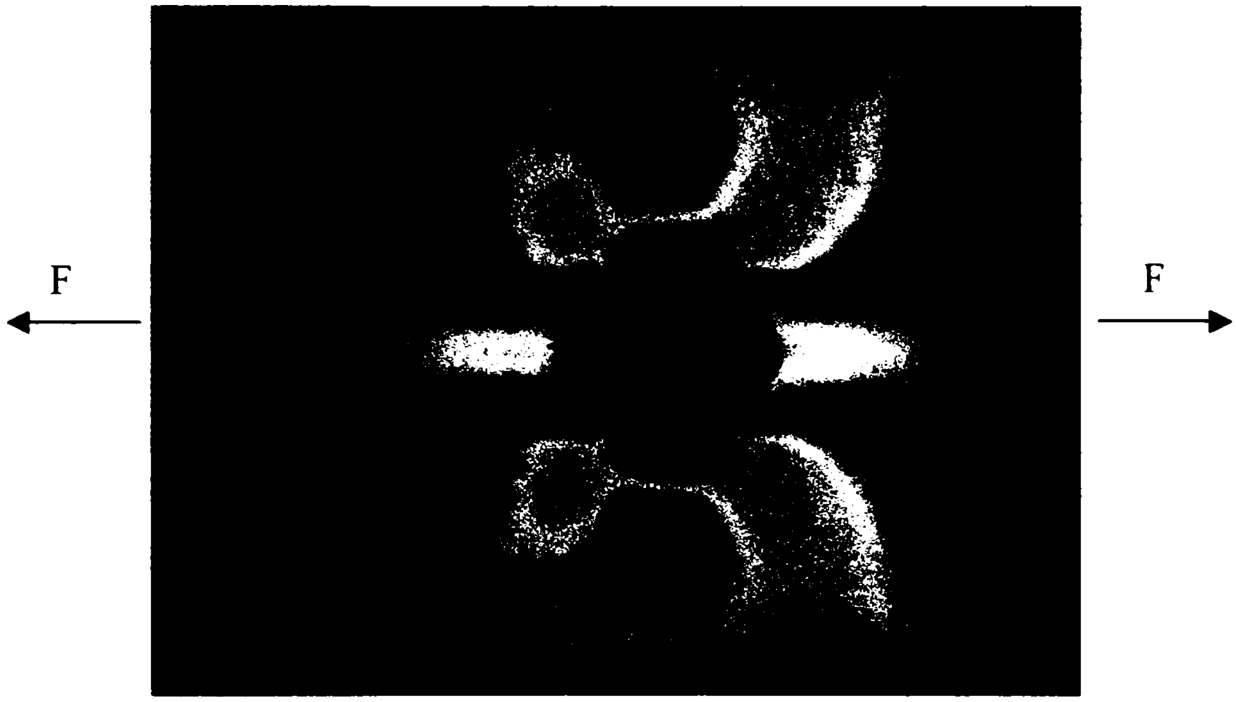


Fig. 5.6.5. Franja 3, la F=41x15.35N = 629,350 N (41diviziuni)

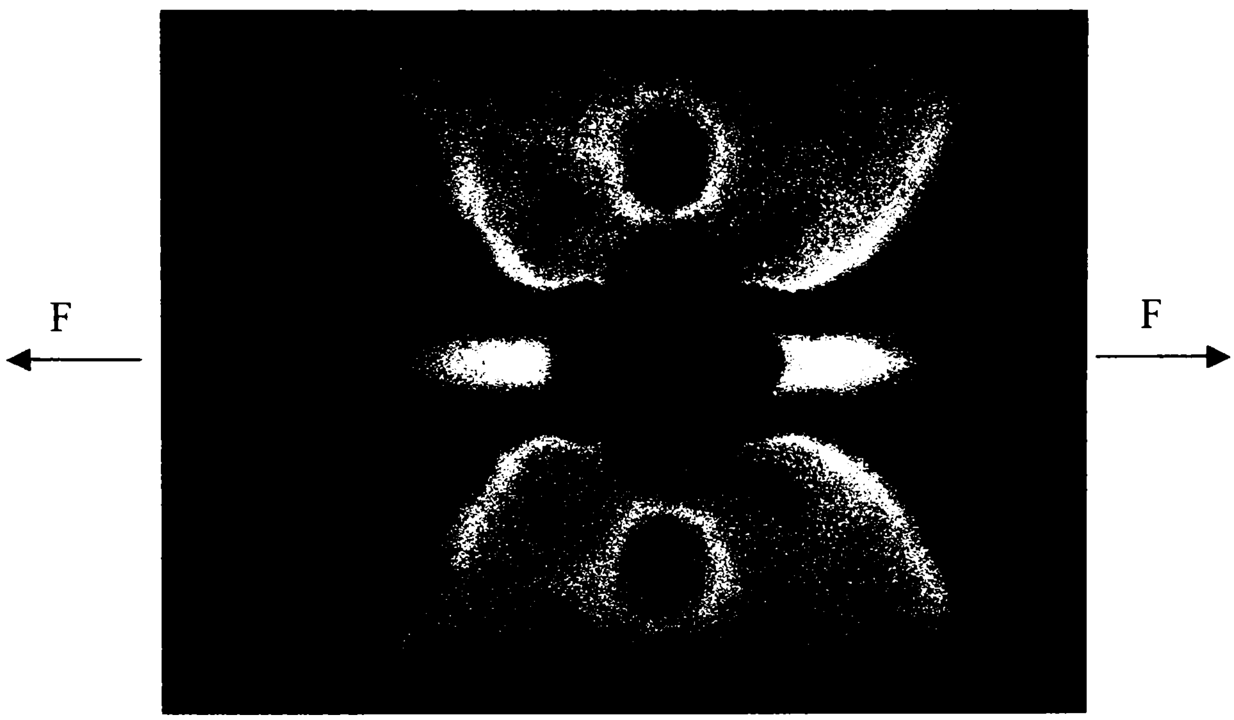


Fig. 5.6.6. Franja 3.2, la F=41,5x15.35N = 637,025 N (41,5 diviziuni)

Pentru acest caz al unui singur orificiu circular, problemă dezbătută foarte mult în literatură, nu am mai prezentat nici o metodă numerică. Totuşi, la capitolul 3, §3.3.4.4, s-a prezentat un model de rezolvare a acestei probleme în detaliu, cu programul de element de frontieră BEASY.

În continuare voi prezenta foarte pe scurt alte două experienţe fotoelastice, cazurile 2 şi 3, cu plăcuţe având orificii circulare.

Cazul 2

Este vorba de exact aceeaşi plăcuţă de mai sus, la care însă orificiul a fost mărit, astfel încât raportul $\lambda = a / b = 0.5$. Prezint mai jos schiţa, tabelele de calcul a coeficienţilor de concentrare a tensiunilor, respectiv imaginile fotoelastice obţinute.

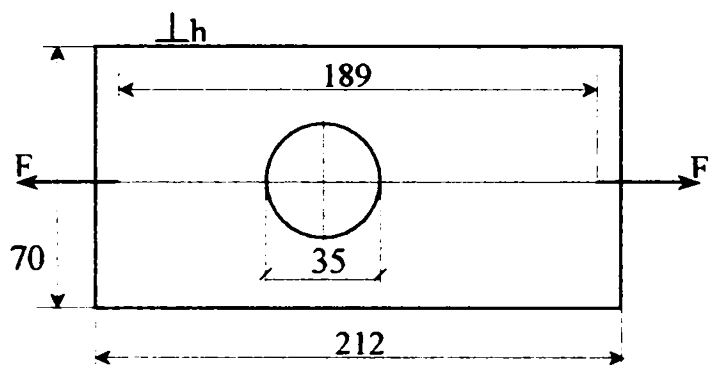


Fig. 5.6.7

Dimensiuni epruvetă		
Latime (2b)	70	mm
Grosime (h)	6	mm
Diametru orificiu (2a)	35	mm
Aria netă (A_n)	210	mm^2
Aria brută (A_b)	420	mm^2
λ =a/b	0,500	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\bar{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

Tab. 5.6.4

F		σ_n=F/A_n	k	σ_{max}	K_{tn}=	p=F/A_b	K_{tg}=
[div]	[N]	[MPa]	[franje]	[MPa]	σ_{max} / σ_n	[MPa]	σ_{max} / p
7	107,450	0,51167	1	1,65	3,22476	0,25583	6,44951
21	322,350	1,53500	2	3,3	2,14984	0,76750	4,29967
30	460,500	2,19286	3	4,95	2,25733	1,09643	4,51466
41	629,350	2,99690	4	6,6	2,20227	1,49845	4,40454

Valori medii		Valori medii excluzând prima citire	
K_{tn}	K_{tg}	K_{tn}	K_{tg}
2,45855	4,91710	2,20315	4,40629

Rezultatele coincid din nou cu cele date de PETERSON [P33].

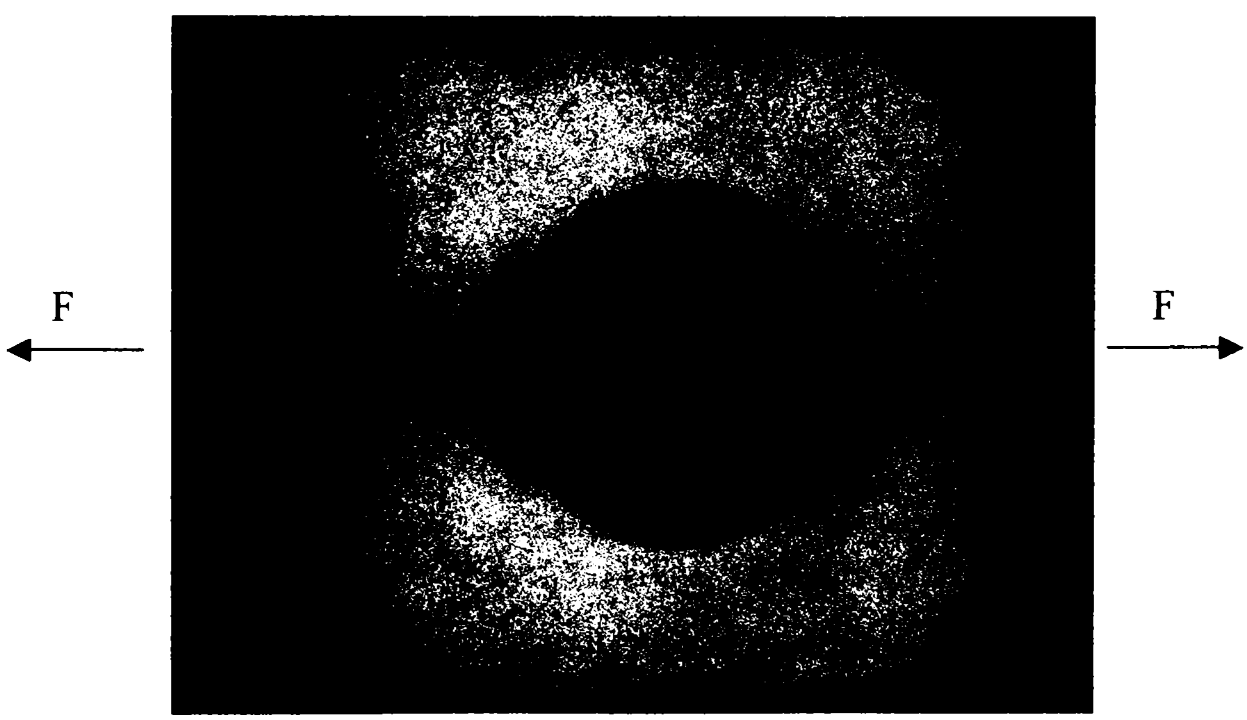


Fig. 5.6.8. Franja 1, la F=7x15.35N=107,450 N (7 diviziuni)

Fig. 5.6.9. Franja 2, la F=21x15.35N = 322,350 N (21 diviziuni)

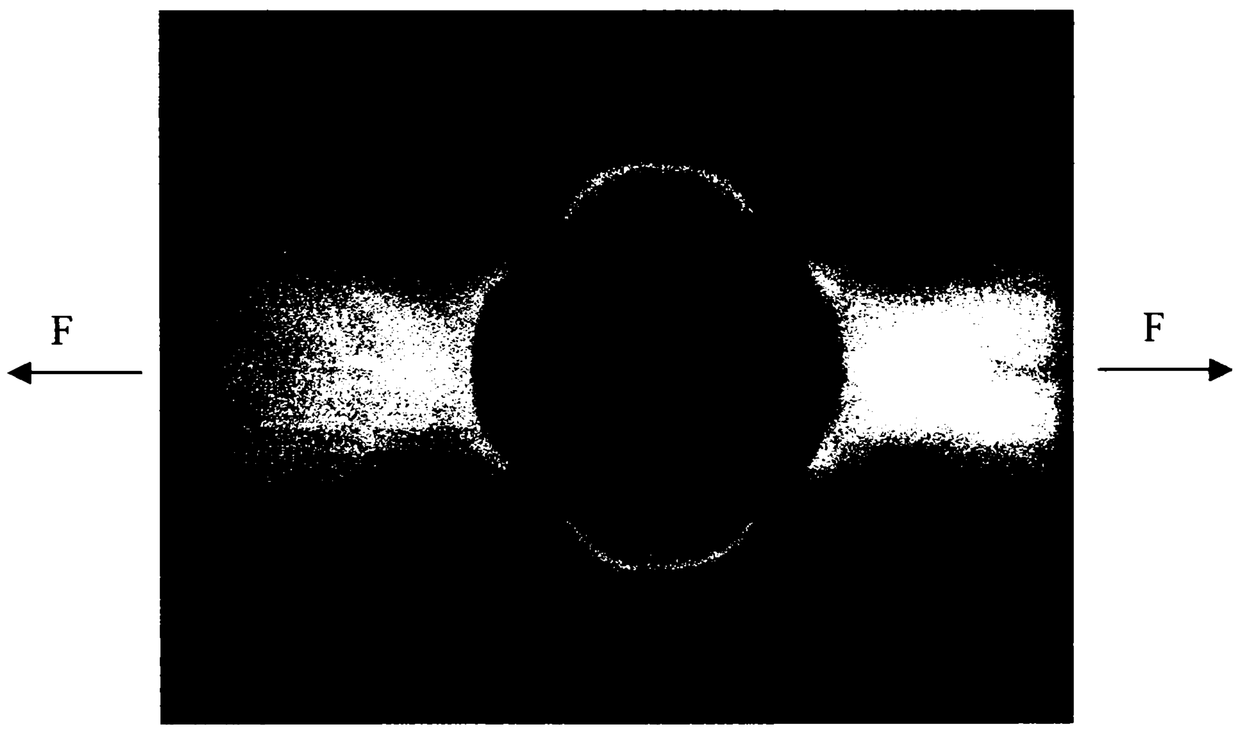


Fig. 5.6.10. Franja 3, la F=30x15.35N = 460,5 N (30 diviziuni)

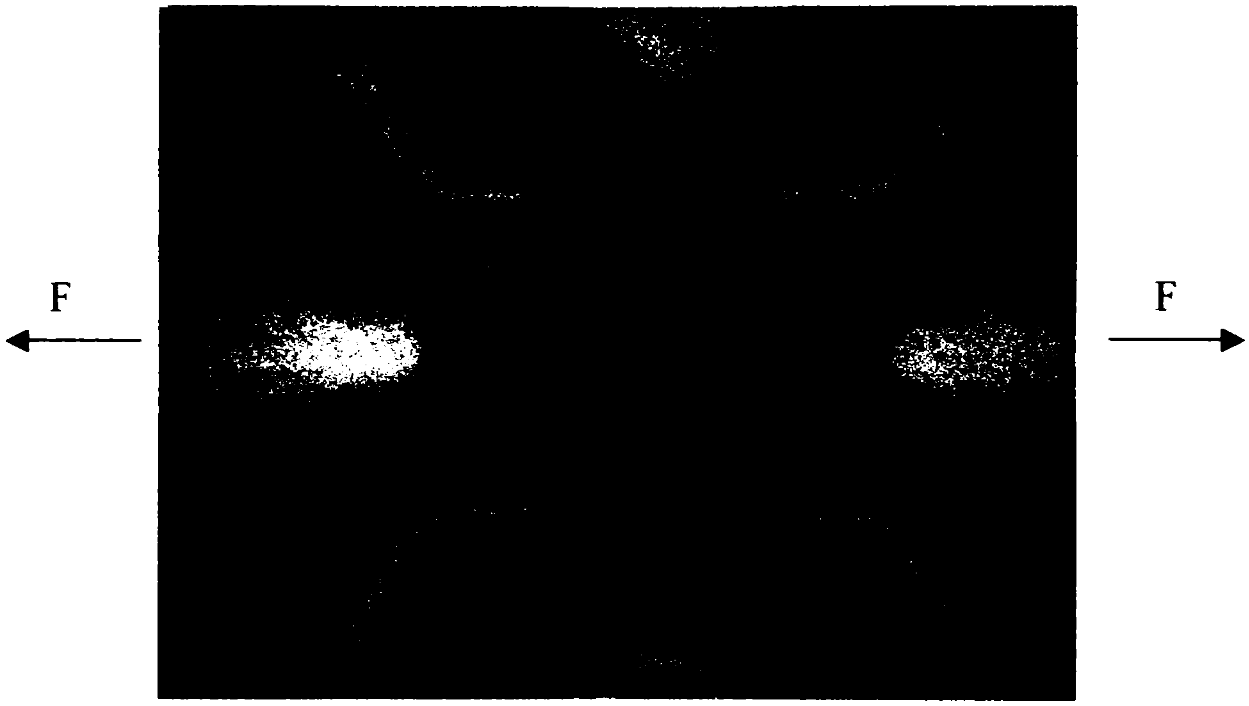


Fig. 5.6.11. Franja 4, la F=41x15.35N = 629,35 N (41 diviziuni)

Cazul 3

Acest ultim caz studiat fotoelastic este cel al unei plăcuţe cu dimensiunile date în **Fig. 5.6.12** şi în tabelul alăturat, respectiv cu coeficienţii de concentrare a tensiunilor calculaţi în **Tab. 5.6.5** şi cu imaginile fotoelastice din figurile **5.6.12**, **5.6.13** şi **5.6.14**.

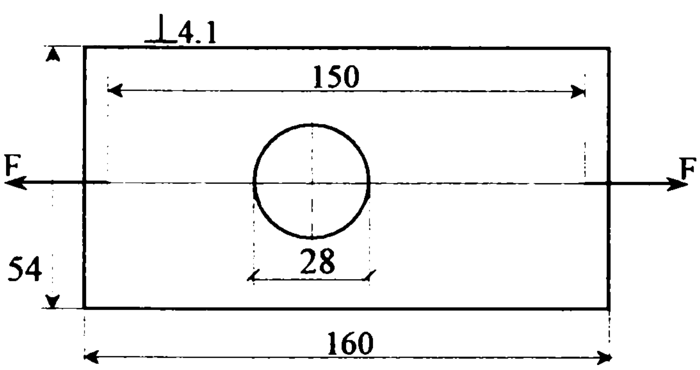


Fig. 5.6.12

Dimensiuni epruvetă		
Latime (2b)	54	mm
Grosime (h)	4,1	mm
Diametru orificiu (2a)	28	mm
Aria netă (A_n)	106,6	mm^2
Aria brută (A_b)	221,4	mm^2
λ =a/b	0,519	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	2,04	MPa/franje

Tab. 5.6.5

F [div]	F [N]	σ_n=F/A_n [MPa]	k [franje]	σ_{max} [MPa]	K_{tn}= σ_{max}/σ_n	p=F/A_b [MPa]	K_{tg}= σ_{max} / p
11	168,850	1,58396	1	2,04	1,28791	0,76265	2,67489
14	214,900	2,01595	2	4,08	2,02386	0,97064	4,20341
19	291,650	2,73593	3	6,12	2,23690	1,31730	4,64587

Valori medii		Valori medii excluzând prima citire	
K_{tn}	K_{tg}	K_{tn}	K_{tg}
1,84956	3,84139	2,13038	4,42464

Rezultatele coincid din nou cu cele date de PETERSON [P33].

Fig. 5.6.13 Franja 1, la F=9x15.35N=138,150 N (9 div.)

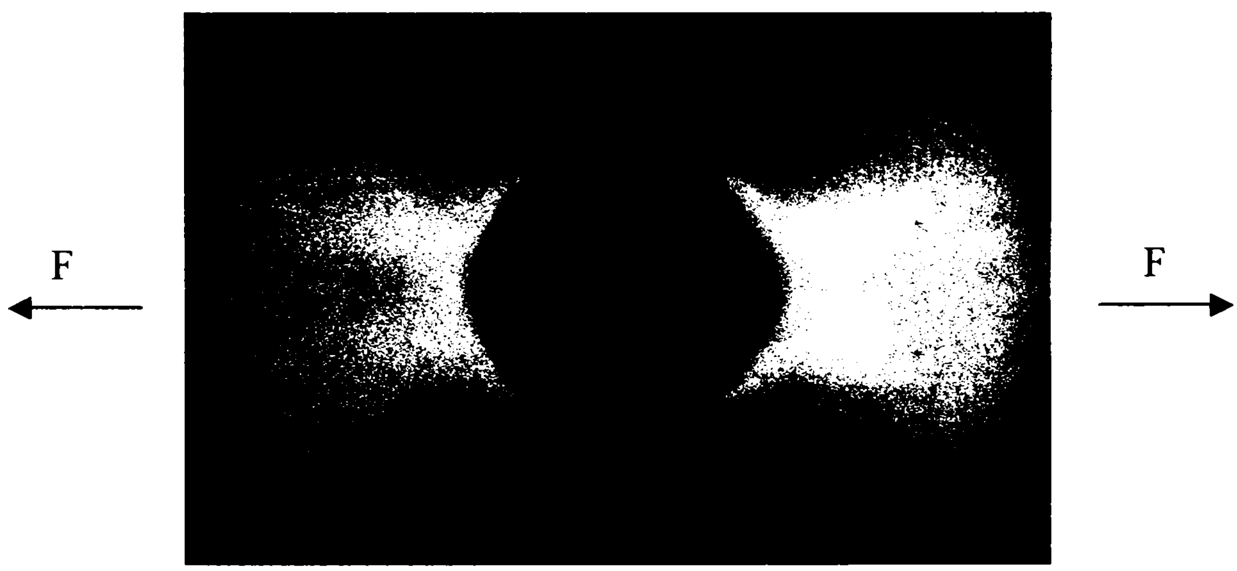


Fig. 2.6.14. Franja 2, la F=12x15.35N = 184,2 N (12 div.)

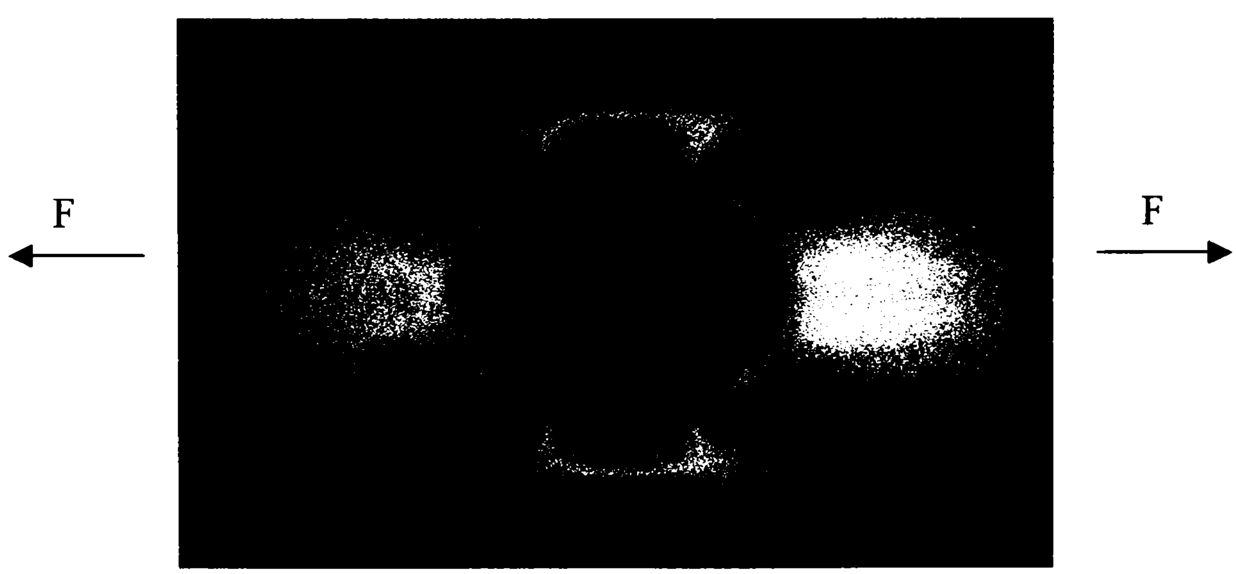


Fig. 2.6.15. Franja 3, la F=16x15.35N = 245,6 N (16 div.)

5.6.3. Două orificii circulare inegale

În acest paragraf am studiat experimental şi numeric platbanda cu două orificii circulare inegale solicitată la tracţiune de către o forţă aplicată pe direcţia centrelor celor două orificii.

Am luat în considerare din nou două cazuri:

Cazul 1

Este vorba de proba de încercare reprezentată schematic în **Fig. 5.6.16**, cu dimensiunile date în tabelul alăturat şi calculele efectuate în urma măsurătorilor fotoelastice sintetizate în **Tab. 5.6.6**.

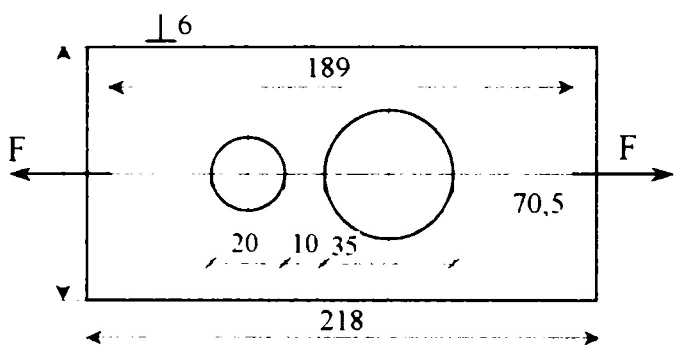


Fig. 5.6.16

Dimensiuni epruveta		
Latime (2b)	70	mm
Grosime (h)	6	mm
Diametru orificiu mare (2R)	35	mm
Diametru orificiu mic (2r)	20	mm
Distanţa între marginile găurilor (s)	10	mm
R/r	1,75	
Aria brută (A_b)	420	mm^2
s/r	1,000	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

Tab. 5.6.6

F		k [franje]	σ_{max} [MPa]	$p=F/A_b$ [MPa]	$K_{tg}=\sigma_{max}/p$
[div]	[N]				
20	307,000	1	1,65	0,73095	2,25733
35	537,250	2	3,3	1,27917	2,57980
55	844,250	3	4,95	2,01012	2,46254
70	1074,500	3,1	5,115	2,55833	1,99935

Valori medii	Valori medii excluzând prima citire
K_{tg}	K_{tg}
2,32476	2,34723

Ordinul franjelor k notat în **Tab. 5.6.6** este cel corespunzător orificiului mare, deoarece acesta preia în cea mai mare parte tensiunea aplicată.

Comparând rezultatul obţinut pentru coeficientul de concentrare al tensiunilor global K_{tg} cu cel dat în [P33] Fig 110, p.169, observăm o destul de bună corelare a rezultatelor.

Voi da în continuare imaginile fotoelastice obţinute la încărcarea probei, în cele patru situaţii în care am citit forţele şi ordinul benzii: **Fig. 5.6.17**, **Fig. 5.6.18**, Fig. **5.6.19** şi **Fig. 5.6.20**.

Acest exemplu l-am modelat şi cu programul de element de frontieră BEASY, cu care am reprezentat tensiunile σ_{xx} în toate punctele probei, σ_{xx} pe conturul orificiului mic şi σ_{xx} pe conturul orificiului mare. S-a considerat cazul de încărcare cu F=737N, corespunzător ordinului de bandă k=2,5. Figurile **5.6.21** – **5.6.24** prezintă această simulare numerică, ce coincide aproximativ cu rezultatele experimentale.

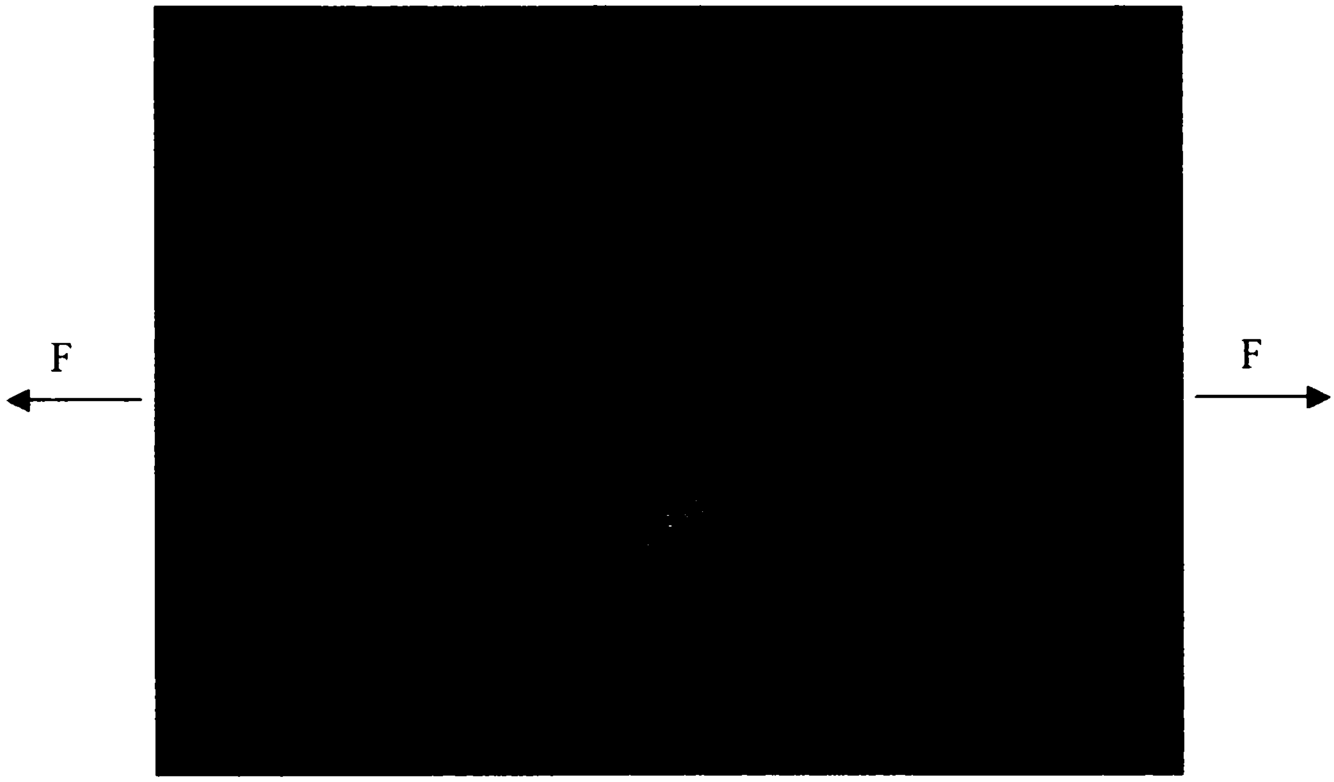


Fig. 5.6.17 Franja 1, la F=20x15.35N=307N

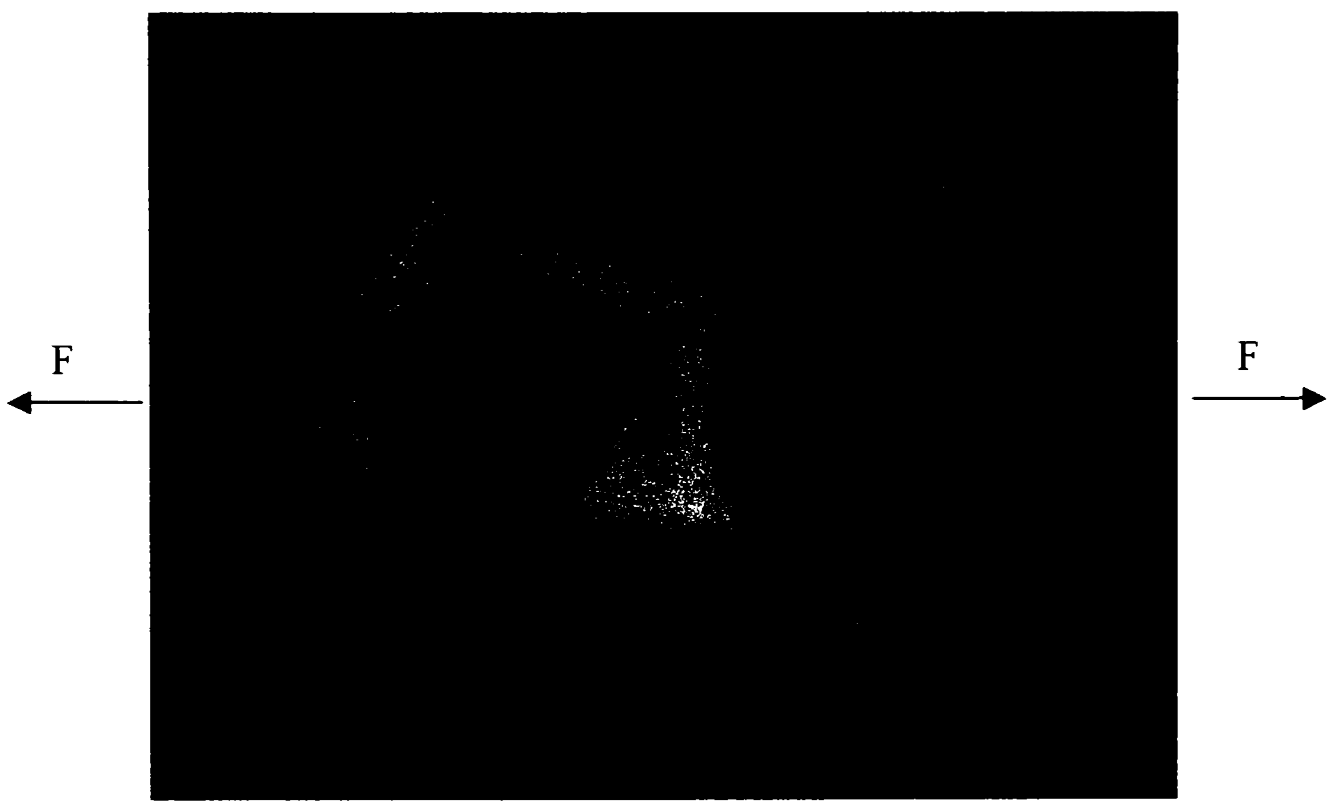


Fig. 5.6.18 Franja 2, la F=35x15.35N=537.25N

Fig. 5.6.19 Franja 3, la F=55x15.35N=844.25N

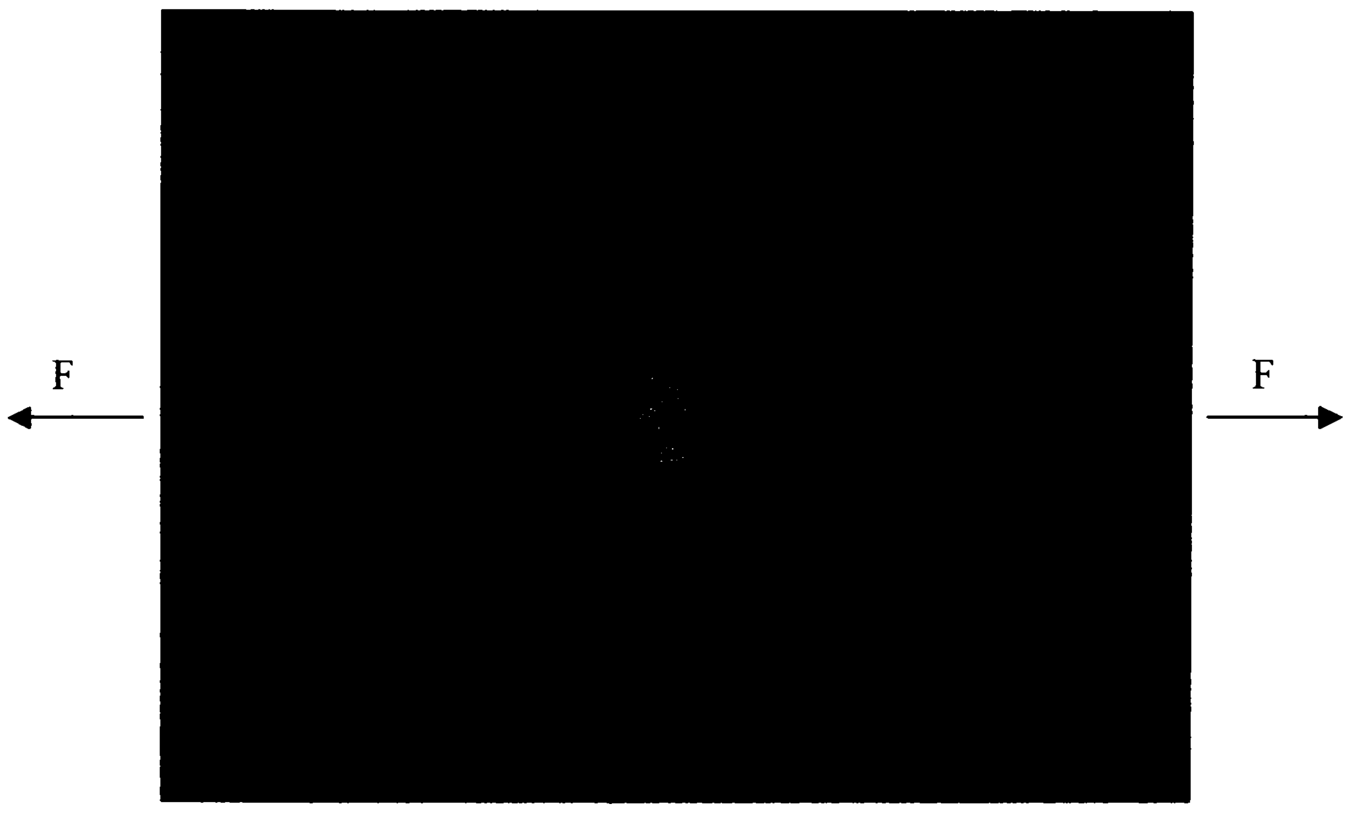


Fig. 5.6.20 Franja 3.1, la F=70x15.35N=1074.5N

În acest context doresc să atrag atenţia asupra faptului că cel puţin până la data elaborării acestui paragraf de teză nu am avut la dispoziţie decât varianta demonstrativă a programului BEASY, variantă cu restricţii, şi care nu permitea utilizarea a mai mult de 30 de elemente de frontieră pentru un model. De aceea nici rezultatele obţinute nu sunt de o precizie foarte bună – comparativ cu ceea ce poate acest program care are în Help exemple asemănătoare cu ale mele dar rezolvate cu de 7-10 ori mai multe elemente de frontieră decât am putut utiliza eu.

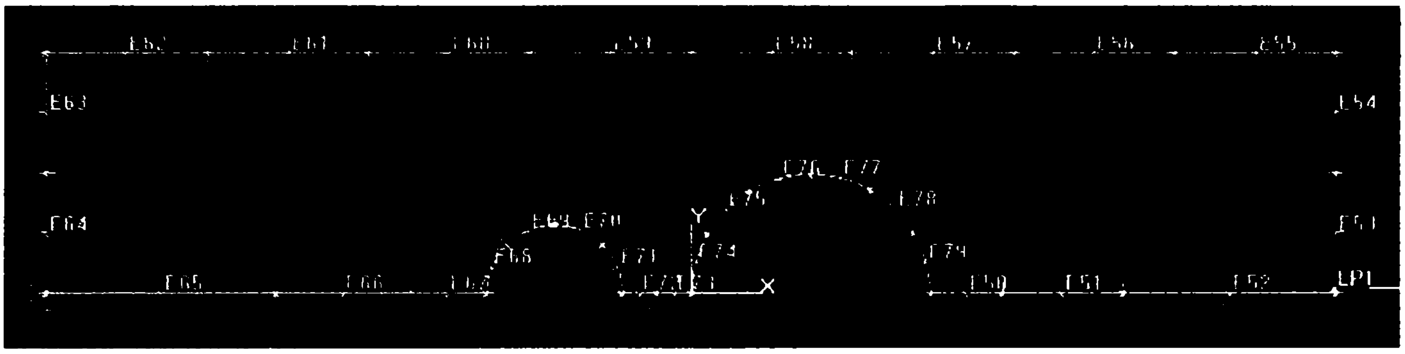


Fig. 5.6.21. Discretizarea frontierei

Cazul de încărcare F=737N, (corespunzător ordinului de bandă 2.5)

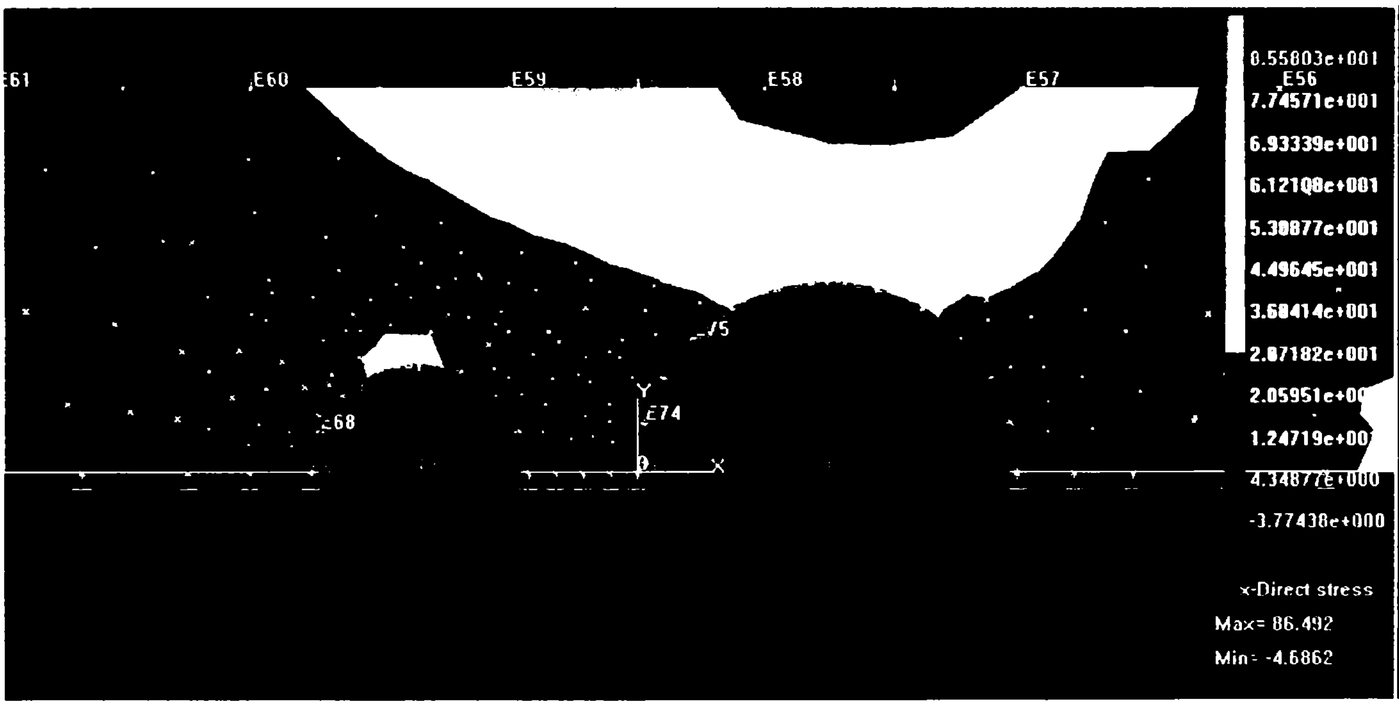


Fig. 5.6.22. Tensiunea σ_{xx} pe probă

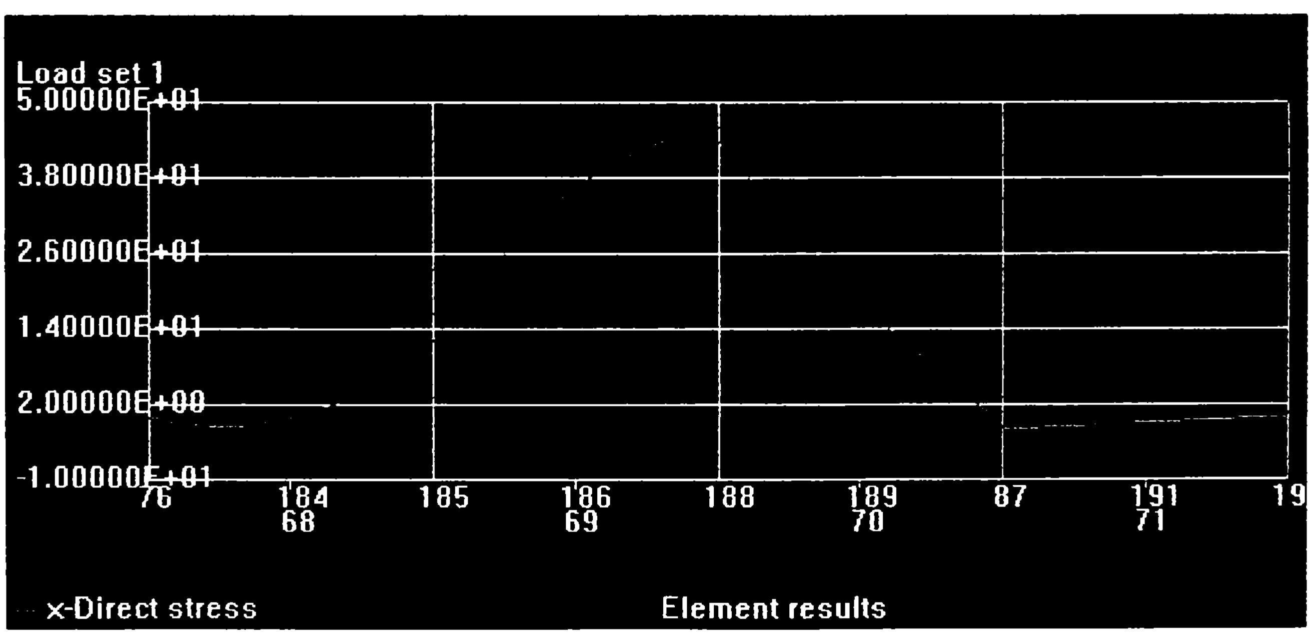


Fig. 5.6.23. Tensiunea σ_{xx} pe conturul orificiului mic

BUPT

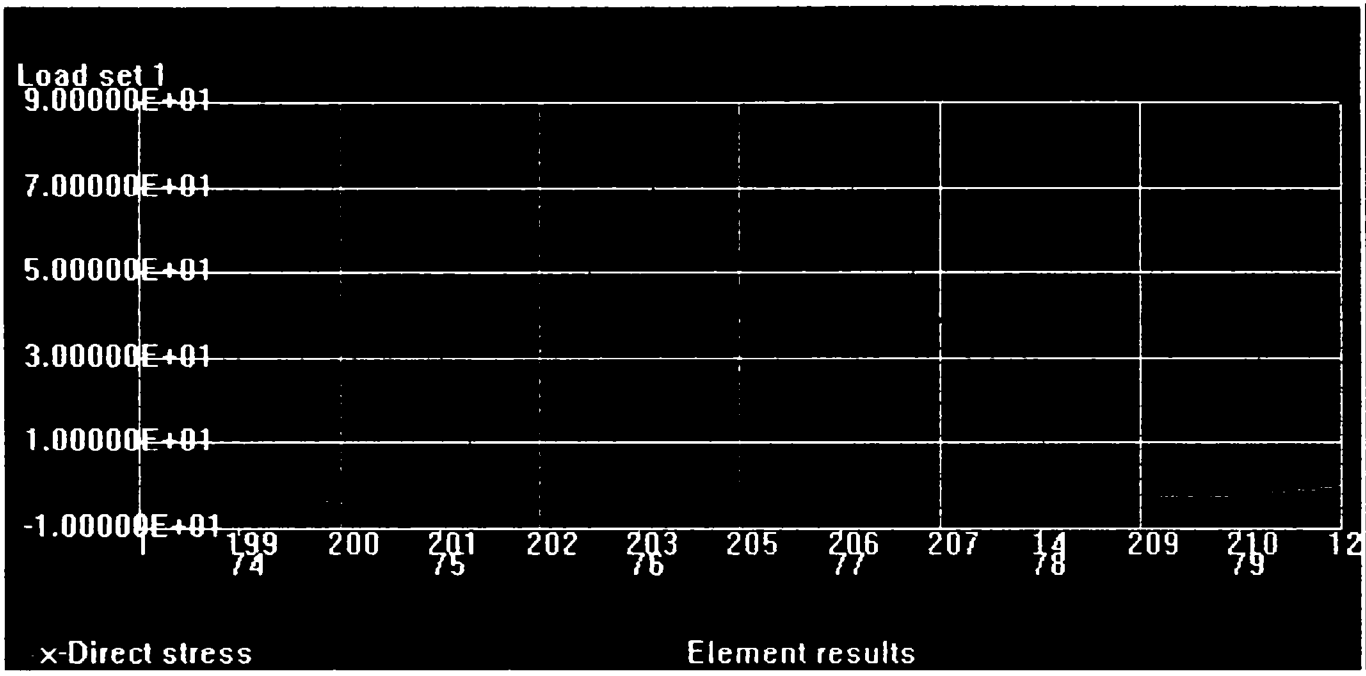


Fig. 5.6.24. Tensiunea σ_{xx} pe conturul orificiului mare

Cazul 2

S-a studiat, de data aceasta doar fotoelastic şi făcând comparaţia cu datele din PETERSON, o a doua epruvetă cu două orificii circulare, având dimensiunile date în **Fig. 5.6.25**.

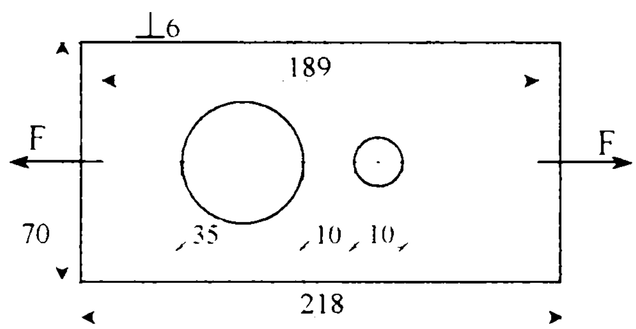


Fig. 5.6.25

Dimensiuni epruveta		
Latime (2b)	70	mm
Grosime (h)	6	mm
Diametru orificiu mare (2R)	35	mm
Diametru orificiu mic (2r)	10	mm
Distanţa între marginile găurilor (s)	10	mm
R/r	3,5	
Aria netă (A_n)	210	mm^2
Aria brută (A_b)	420	mm^2
s/r	2,000	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

În urma calculelor, efectuate în Excel, am obţinut datele din **Tab. 5.6.7**, ce coincid cu cele din [P33] Fig.110, p.169.

Tab. 5.6.7

F		k [franje]	σ_{max} [MPa]	$p=F/A_b$ [MPa]	$K_{tg}=\sigma_{max}/p$
[div]	[N]				
15	230,250	1	1,65	0,54821	3,00977
31	475,850	2	3,3	1,13298	2,91268
52	798,200	3	4,95	1,90048	2,60461
56	859,600	3,1	5,115	2,04667	2,49919

Valori medii	Valori medii excluzând prima citire
K_{tg}	K_{tg}
2,75656	2,67216

Imaginile fotoelastice obținute sunt redate în figurile **Fig. 5.6.26 – 5.6.29**. Studiind franjele de interferență apărute în acest caz se poate observa, mult mai pregnant decât în cazul anterior, cum orificiul de diametru mai mare preia toată tensiunea aplicată, iar orificiul mic aproape că nu este afectat și nu afectează starea de tensiune (fiind și relativ aproape situat de orificiul mare).

Fig. 5.6.26 Franja 1, la F=15x15.35N=230.25N

Fig. 5.6.27, Franja 2 la F=31x15.35N=475.85N

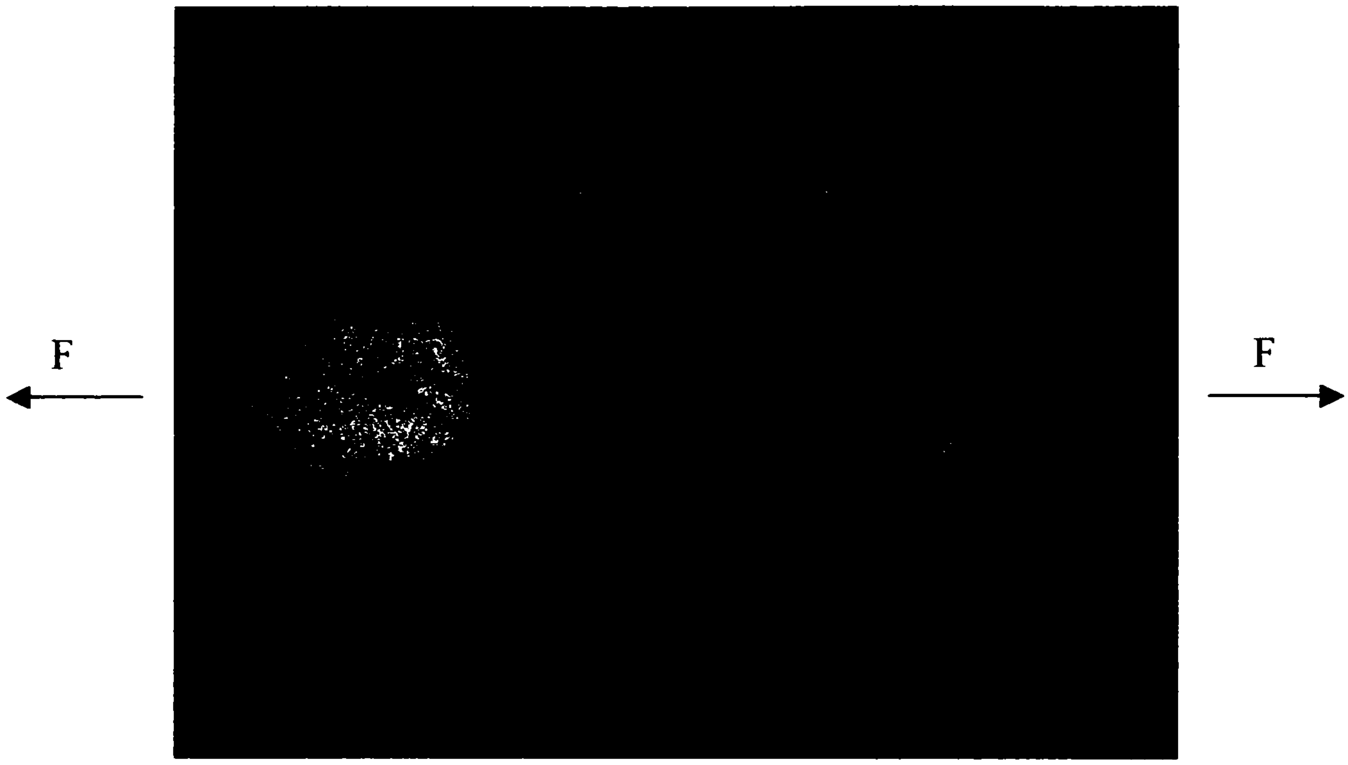


Fig. 5.6.28 , Franja 3 la F=52x15.35N=798.2N

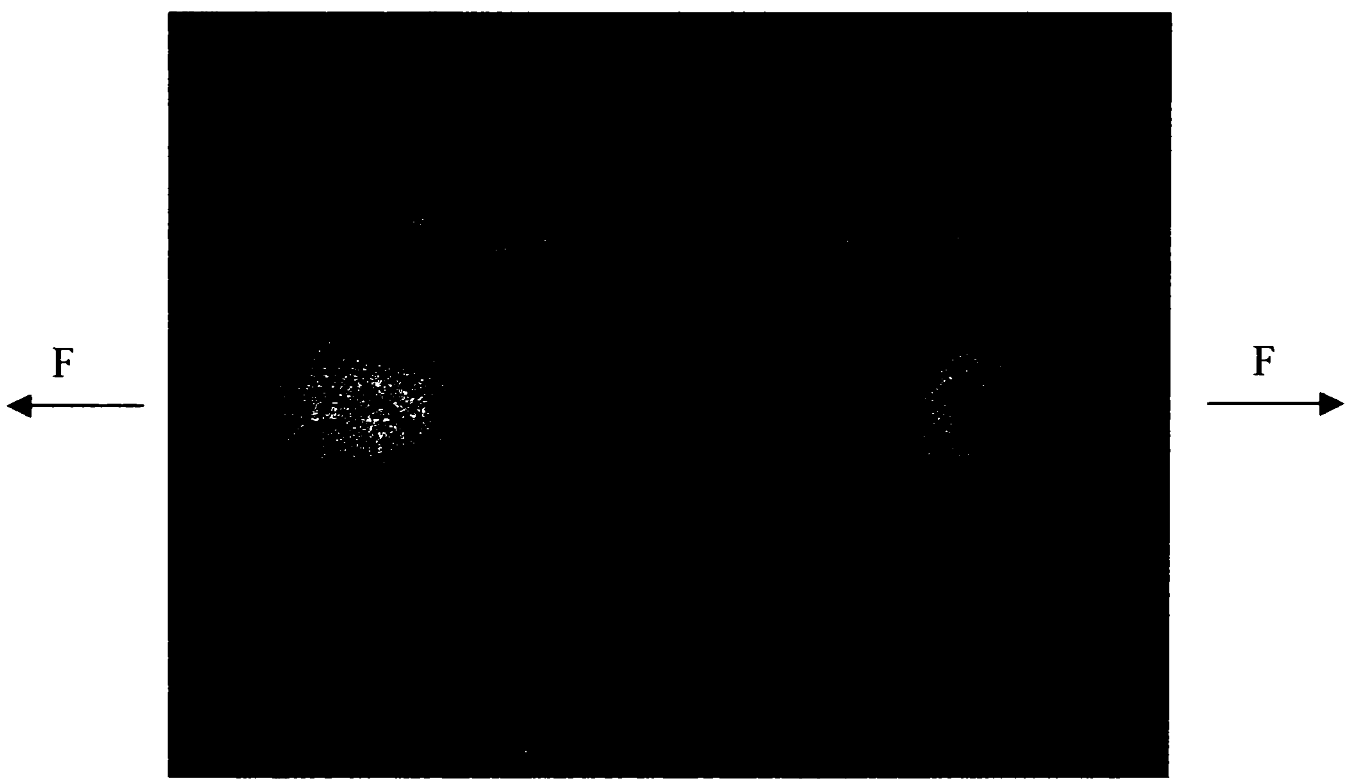


Fig. 5.6.29, Franja 3,1 la F=56x15.35N=859.6N

5.6.4. Trei orificii circulare egale

În acest paragraf se va studia, experimental şi numeric, platbanda slăbită de trei orificii circulare egale supusă la tracţiune. Se vor lua în considerare două cazuri:
Cazul 1: când orificiile au axa centrelor pe direcţia de aplicare a forţei;
Cazul 2: când orificiile au axa centrelor perpendiculară pe direcţia de aplicare a forţei;

Cazul 1

Se consideră o plăcuţă cu trei orificii circulare egale, cu axa centrelor pe direcţia de aplicare a forţei (v. **Fig. 5.6.30**). Urmând aceeaşi metodologie ca şi până acum se obţin rezultatele din **Tab. 5.6.8**.

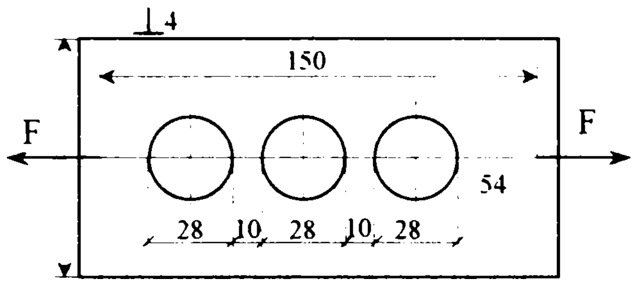


Fig. 5.6.30

Dimensiuni epruveta		
Latime (2b)	54	mm
Grosime (h)	4,1	mm
Diametru orificii (2a)	28	mm
Aria netă (A_n)	106,6	mm^2
Aria brută (A_b)	221,4	mm^2
λ =a/b	0,519	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div
Valoarea benzii (σ_0)	1,65	MPa/franje
Distanţa între centrele a 2 găuri (d)	38	mm
d/2a	1,3571	

Tab. 5.6.8

F		σ_n=F/A_n [MPa]	k [franje]	σ_{max} [MPa]	K_{tn}= σ_{max}/σ_n	p=F/A_b [MPa]	K_{tg}= σ_{max}/p
[div]	[N]						
5	76,750	0,71998	1	1,65	2,29173	0,34666	4,75974
12	184,200	1,72795	2	3,3	1,90977	0,83198	3,96645
16	245,600	2,30394	3	4,95	2,14849	1,10930	4,46226

Valori medii		Valori medii excluzând prima citire	
K_{tn}	K_{tg}	K_{tn}	K_{tg}
2,11666	4,39615	2,02913	4,21435

Comparând cu [P33] Fig. 113, p.172, rezultă din nou o bună concordanţă, pentru coeficientul de concentrare a tensiunilor net K_{tn} , pentru cel global însă (K_{tg}) rezultatele în PETERSON lipsesc.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt date în **Fig. 5.6.31**, **5.6.32** şi **5.6.33**. Orificiile marginale sunt trunchiate pe figură deoarece imaginea franjelor proiectată pe ecran de către polariscop era limitată, şi nu aş fi avut altă soluţie decât să fac câte două poze pentru fiecare figură, pe care apoi să le asamblez – metodologie pe care am şi aplicat-o în cazul unei alte probe cu trei orificii circulare inegale, care nu puteau fi altfel fotografiate (v. §5.6.5, cazul 2).

Pentru acest caz se dă şi soluţia numerică, obţinută de data aceasta cu programul de element finit COSMOS/M.

Fig. 5.6.34 prezintă variaţia tensiunii σ_{xx} pe probă, iar următoarele figuri (**Fig. 5.6.35-5.6.38**) variaţia lui σ_{xx} pe conturul orificiului central, respectiv a celor marginale în cele două cazuri de încărcare: F=568N, respectiv F=844N.

Fig. 5.6.31 Franja 1, la F=5x15.35N=76.75N

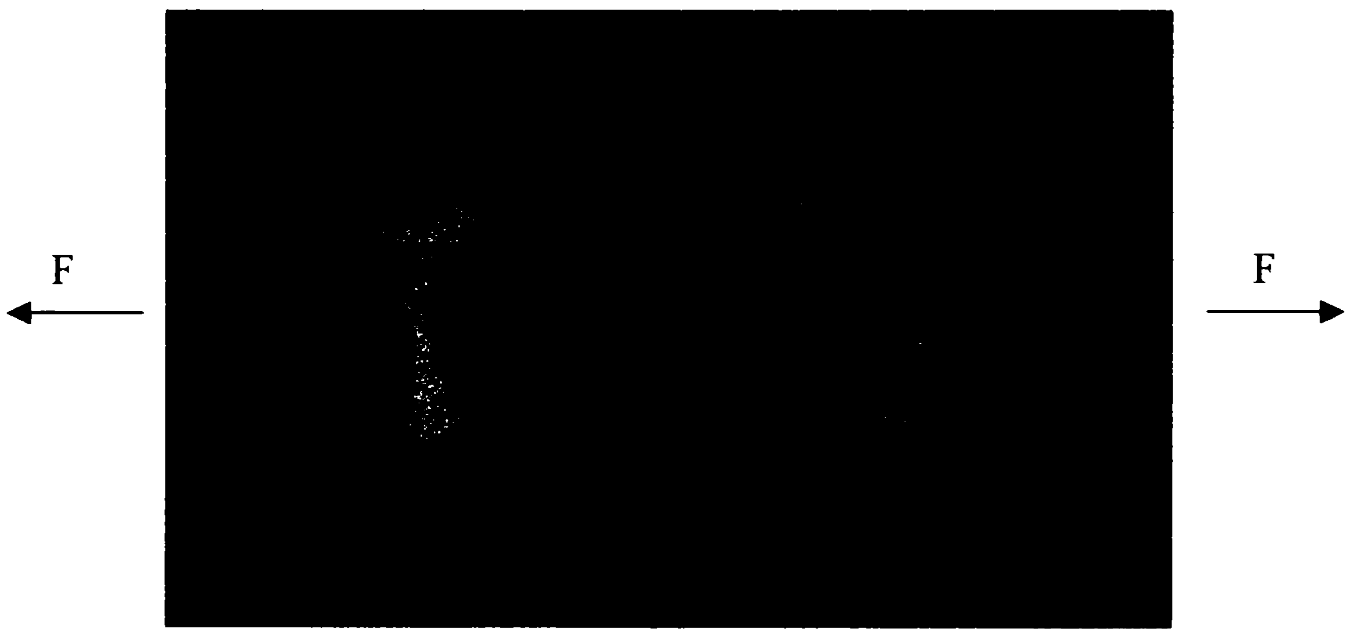


Fig. 5.6.32 Franja 2, la F=12x15.35N=184.2N

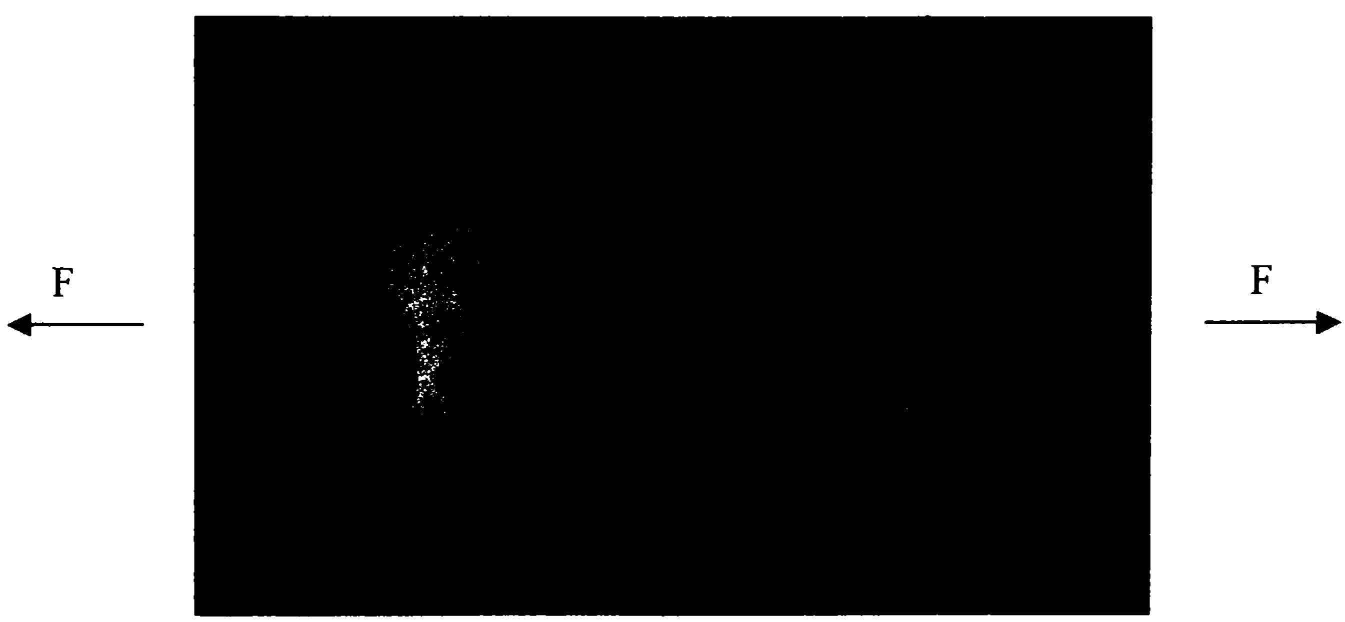


Fig. 5.6.33 Franja 3, la F=16x15.35N=245.6N

Utilizând programul COSMOS am obţinut:

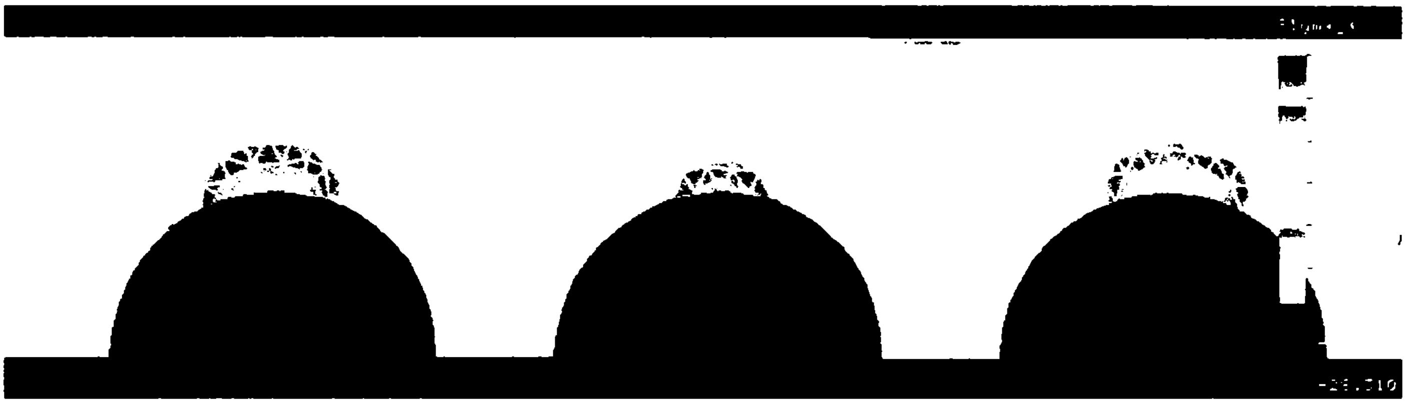


Fig. 5.5.34. Variaţia tensiunii σ_{xx} pe probă (datorită simetriei am reprezentat ½ din probă)

Cazul de încărcare F=568N

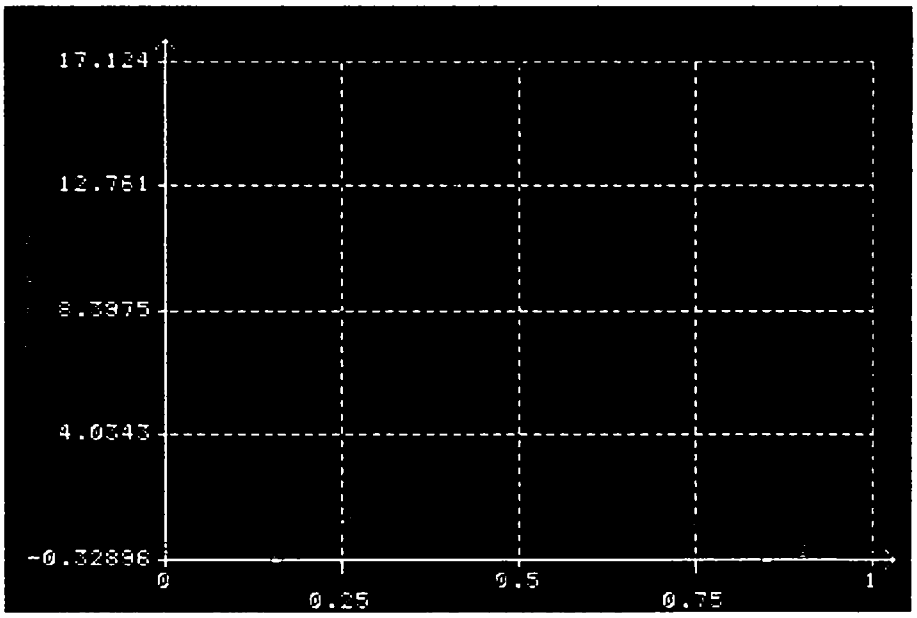


Fig. 5.6.35, σ_{xx} pe conturul orificiului central

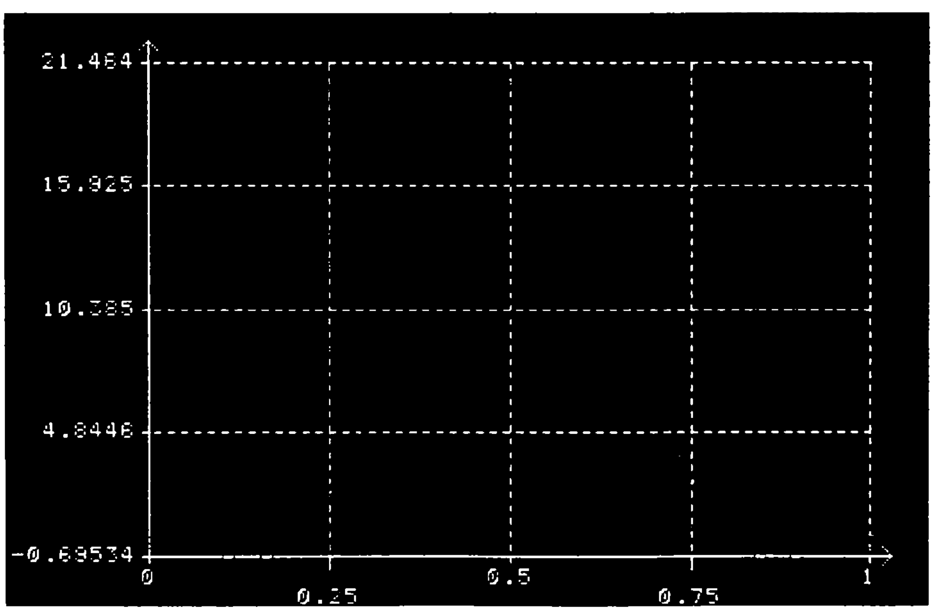


Fig. 5.6.36, σ_{xx} pe conturul orificiului marginal

Din **Fig. 5.6.35** rezultă şi faptul că valoarea maximă a lui σ_{xx} nu se obţine exact în punctul situat pe diametrul orificiului perpendicular pe direcţia axelor, ci decalat corespunzător unui unghi de aproximativ 87°. De asemenea rezultă faptul că orificiile marginale sunt mai solicitate decât orificiul central (valoarea maximă de 21.464 MPa pe orificiile marginale depăşeşte cu aproape 25% pe cea de 17.127 MPa pe orificiul central).

Calculând pentru F= 568N, valoarea lui $p=F/A_n$, rezultă $p=5{,}32\ N/mm^2$ şi obţinem un coeficient de concentrare a tensiunilor pe orificiul central egal cu 17.124/5.3=3.23 şi un coeficient de concentrare a tensiunilor pe orificiile marginale egal cu 21.464/5.3=4.04.

Cazul de încărcare F=844N

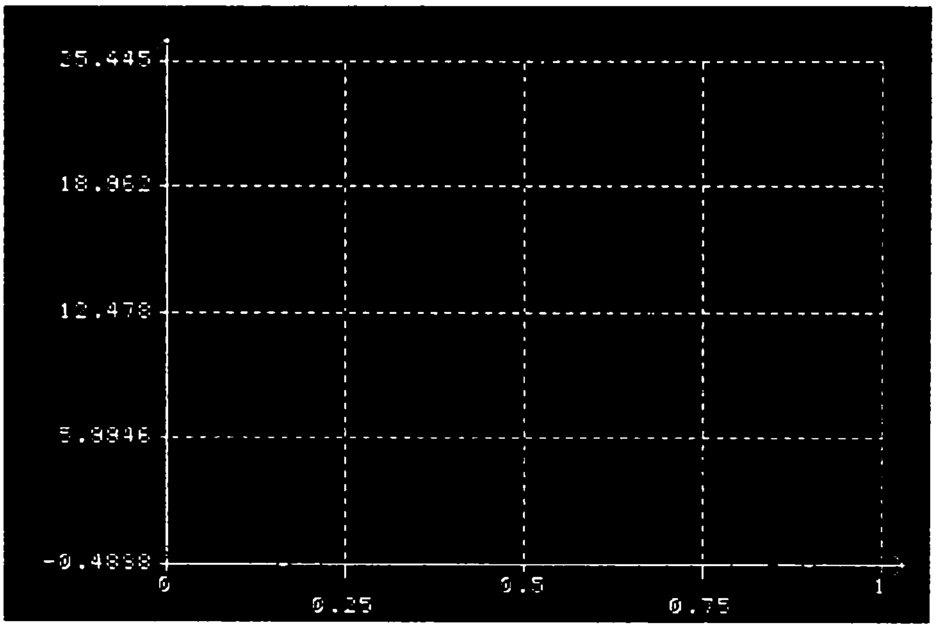


Fig. 5.6.37 σ_{xx} pe conturul orificiului central

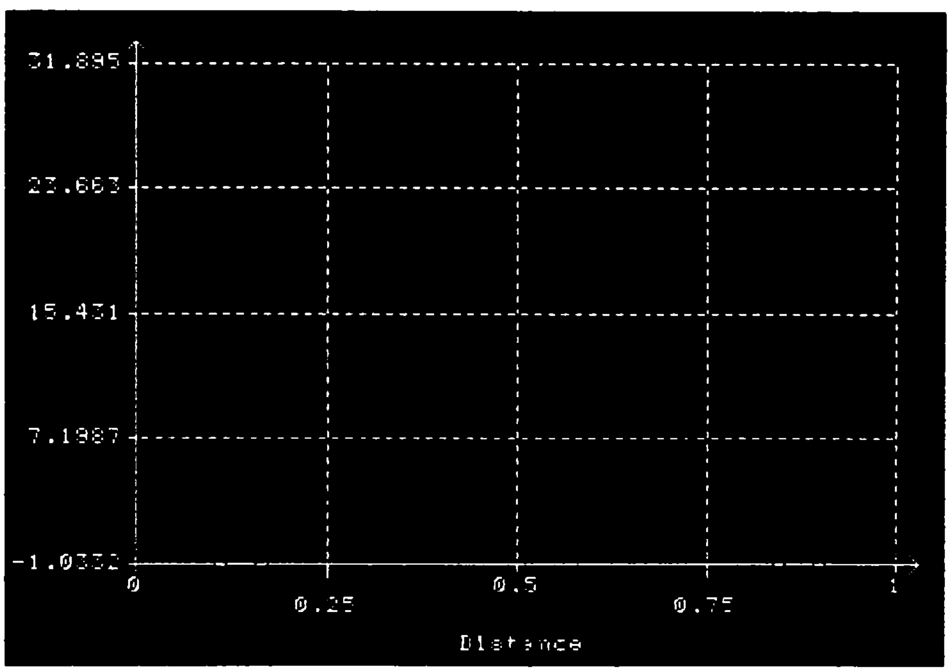


Fig. 5.6.38 σ_{xx} pe conturul orificiului marginal

Calculând ca şi în cazul anterior coeficienţii de concentrare a tensiunilor, pentru orificiul central rezultă o valoare de 3.21, iar pentru orificiile marginale rezultă o valoare de 4.02 – evident din nou mai mare decât cea pentru orificiul central.

Cazul 2

Se consideră o plăcuţă cu trei orificii circulare egale, cu axa centrelor perpendiculară pe direcţia de aplicare a forţei (v. **Fig. 5.6.39**). Urmând aceeaşi metodologie ca şi până acum se obţin rezultatele din **Tab. 5.6.9**.

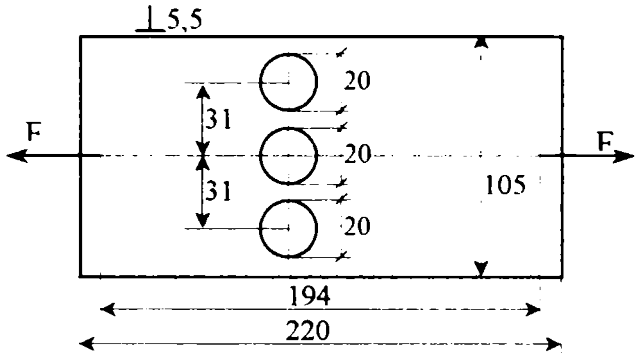


Fig. 5.6.39

Di[illegible]		
Latime (2b)	105	mm
Grosime (h)	5,5	mm
Diametru orificii (2a)	20	mm
Aria netă (A_n)	247,5	mm^2
Aria brută (A_b)	577,5	mm^2
λ =a/b	0,190	
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje
Distanţa între centrele a 2 orificii (d)	31	mm
2a/d	0,6452	

Tab. 5.6.9

F		σ_n=F/A_n [MPa]	k [franje]	σ_{max} [MPa]	K_{tn}= σ_{max}/σ_n	p=F/A_b [MPa]	K_{tg}= σ_{max} / p
[div]	[N]						
33	506,550	2,04667	1	1,65	0,80619	0,87714	1,88111
40	614,000	2,48081	2	3,3	1,33021	1,06320	3,10383
50	767,500	3,10101	3	4,95	1,59625	1,32900	3,72459

Valori medii		Valori medii excluzând prima citire	
K_{tn}	K_{tg}	K_{tn}	K_{tg}
1,24422	2,90318	1,46323	3,41421

Comparând cu [P33] Fig. 112, p.171, rezultă o diferenţă acceptabilă, adică: pentru coeficientul de concentrare a tensiunilor net K_{tn} eu am obţinut 1.46323 faţă de 1.35, iar pentru K_{tg} eu am obţinut 3.41 faţă de 3.70 în PETERSON.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt date în **Fig. 5.6.40, 5.6.41** şi **5.6.42**.

Voi da apoi şi pentru acest caz soluţia numerică, obţinută tot cu programul de element finit COSMOS.

Fig. 5.6.43 prezintă variaţia tensiunii σ_{yy} pe probă, iar următoarele figuri (**Fig. 5.6.44-5.6.46**) variaţia lui σ_{yy} pe conturul orificiului central, şi pe jumătatea interioară de contur a orificiului marginal, respectiv pe cea exterioară a orificiului marginal. S-a considerat cazul de încărcare F=737N (respectiv apariţia celei de-a treia franje).

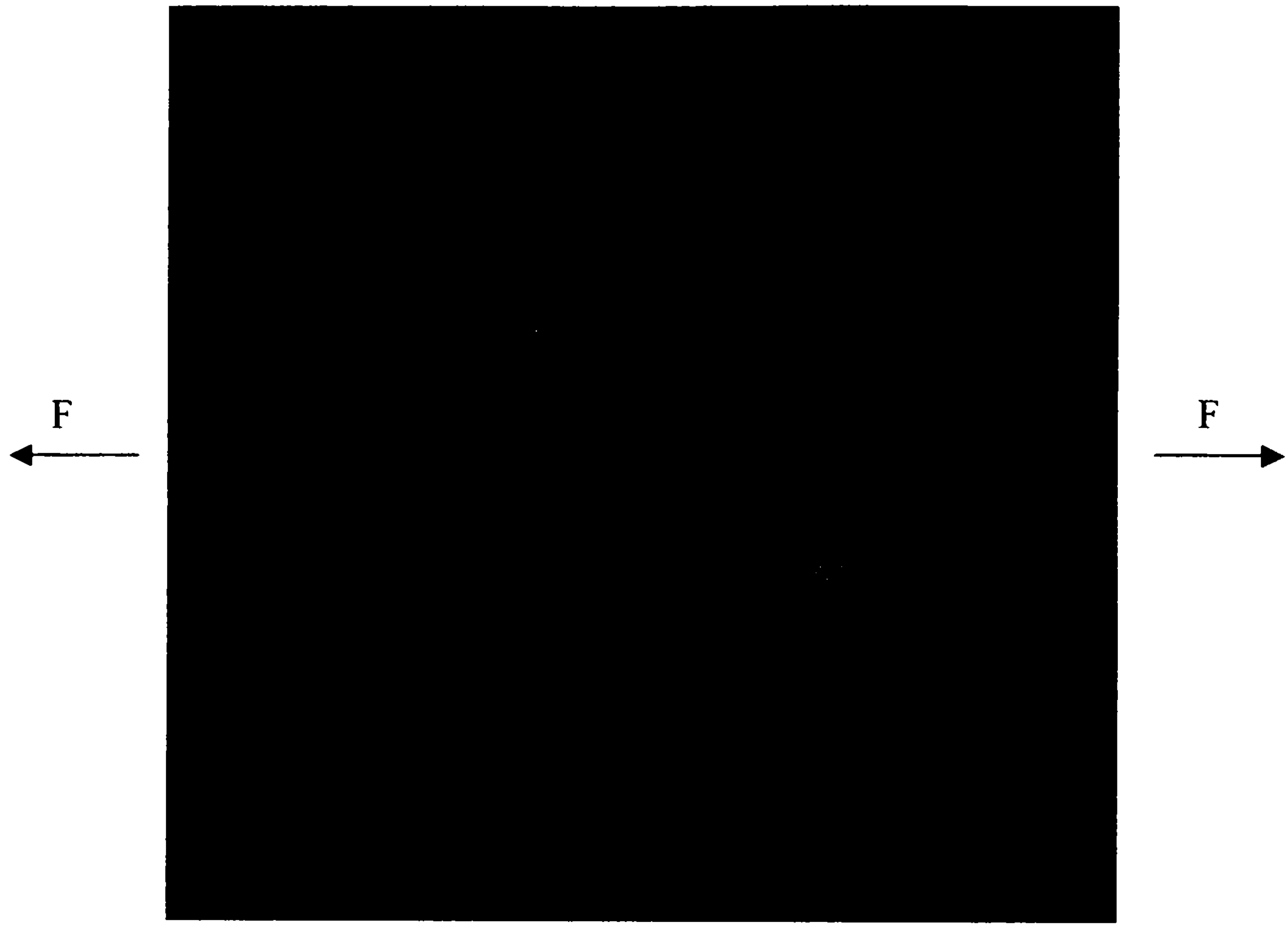


Fig. 5.6.40 Franja 1, la F=33x15.35N=506.55N

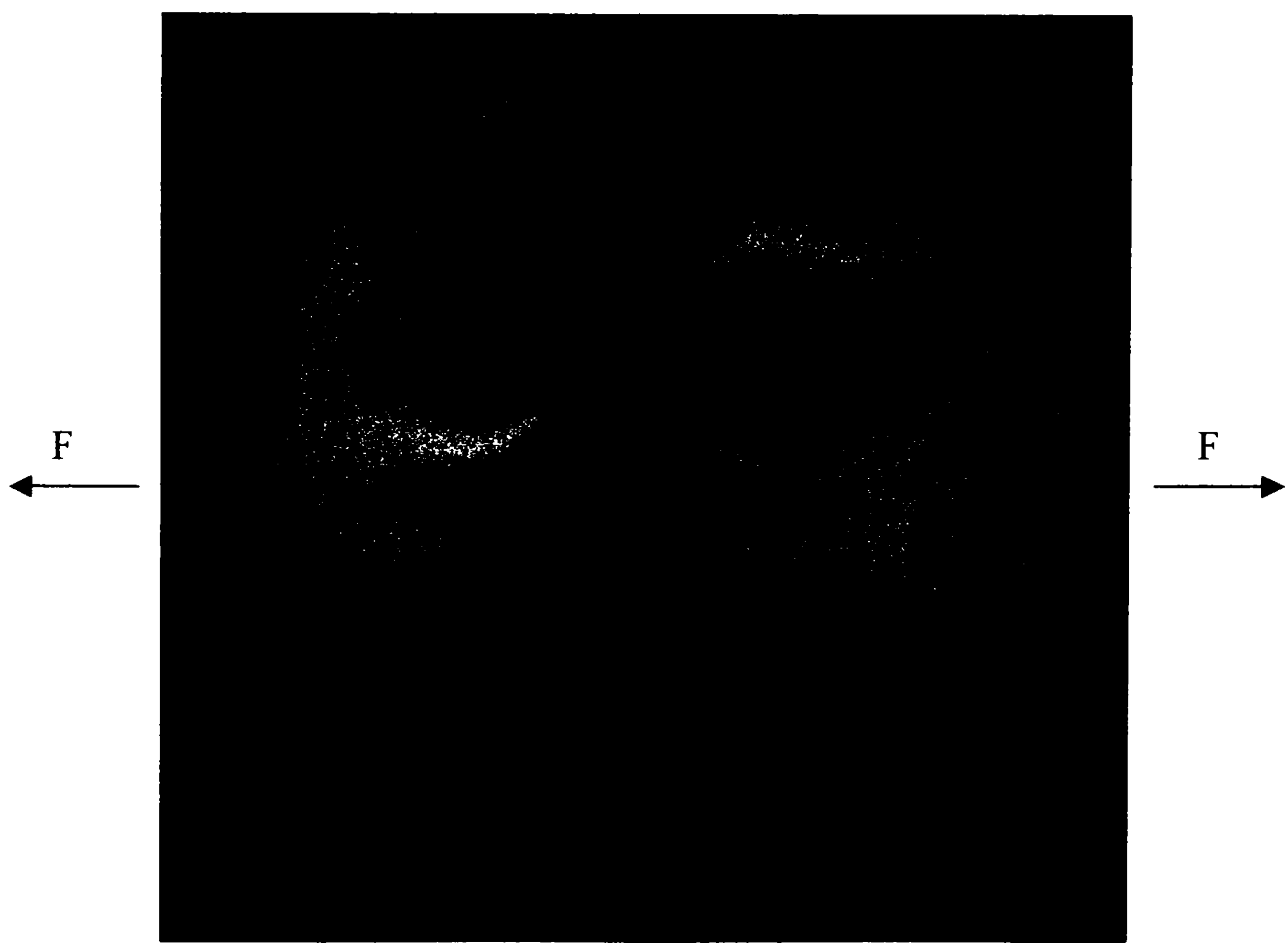


Fig. 5.6.41 Franja 2, la F=40x15.35N=614N

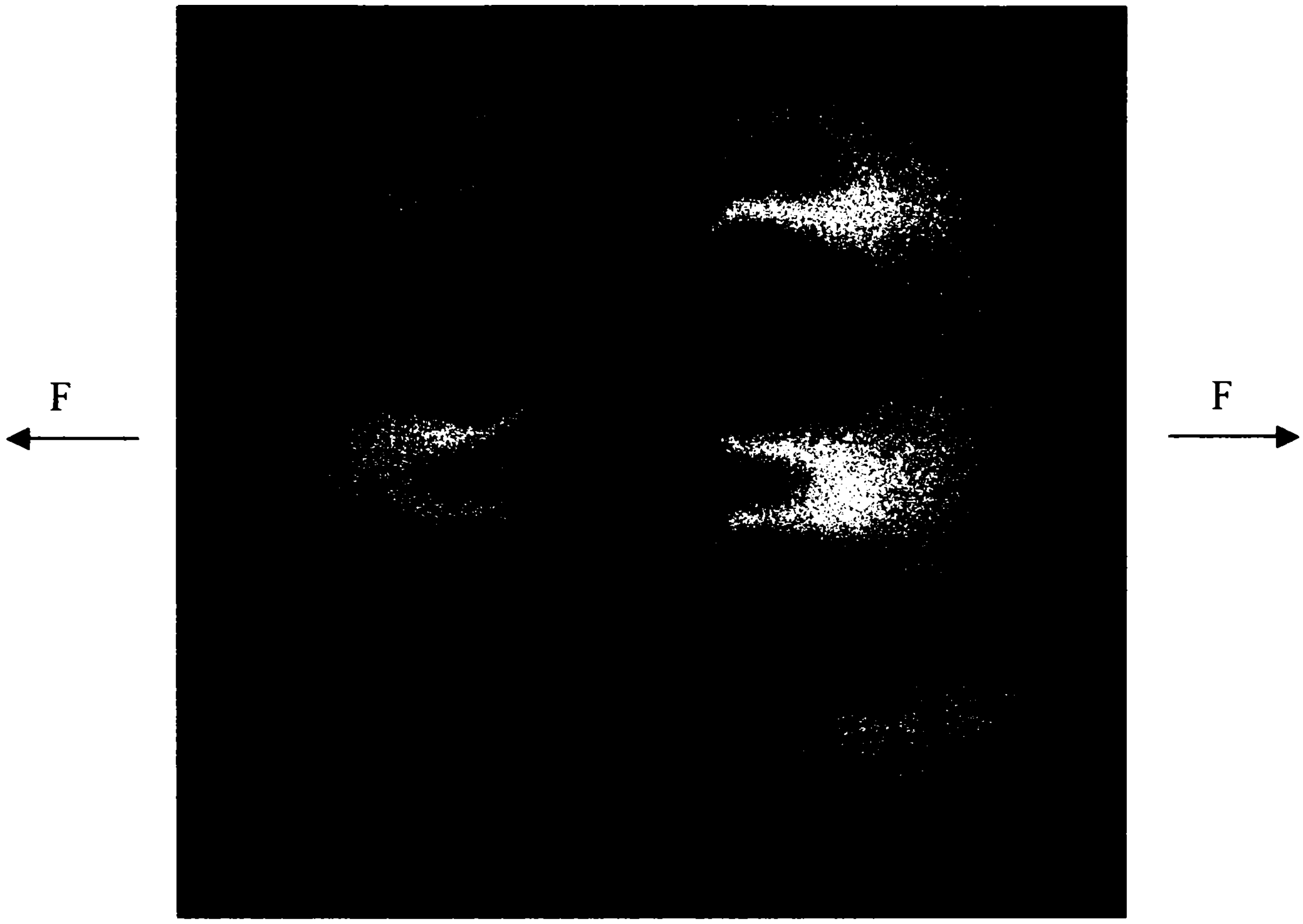


Fig. 5.6.42 Franja 3, la F=50x15.35N=767.5N

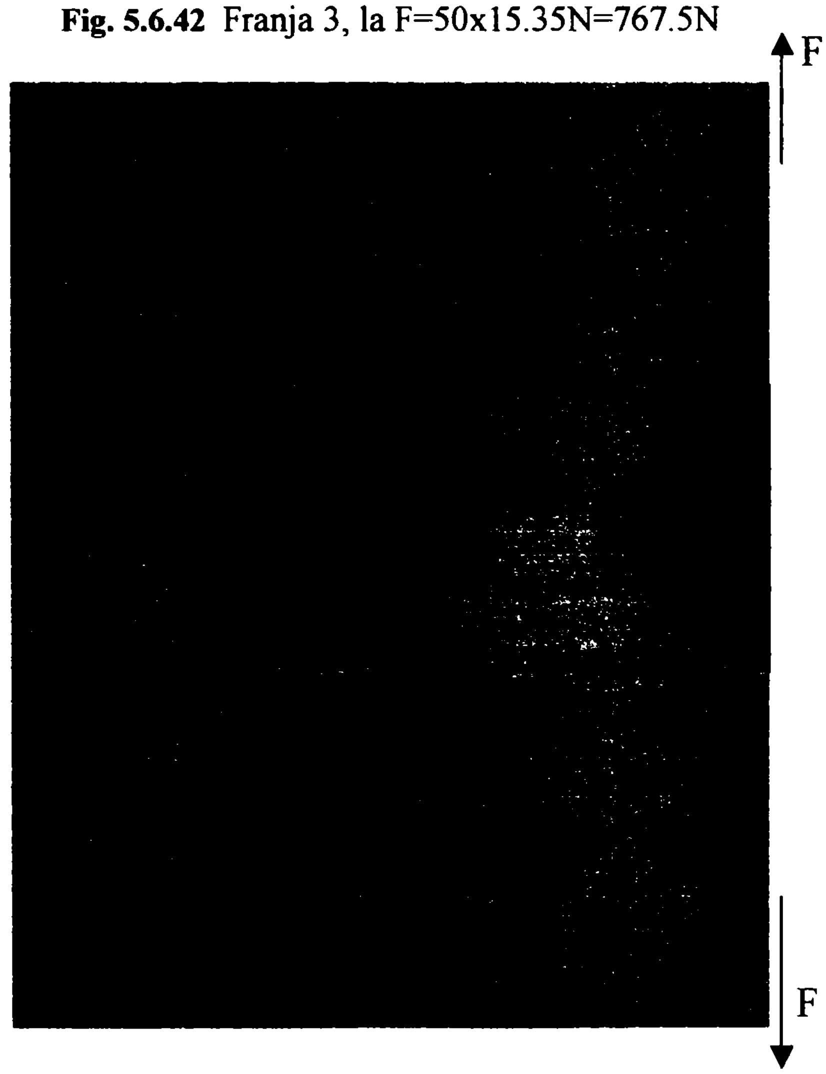


Fig. 5.6.43, σ_{yy} pe probă (datorită simetriei am reprezentat ½ din probă)

Cazul de încărcare F=737N (franja a 2-a)

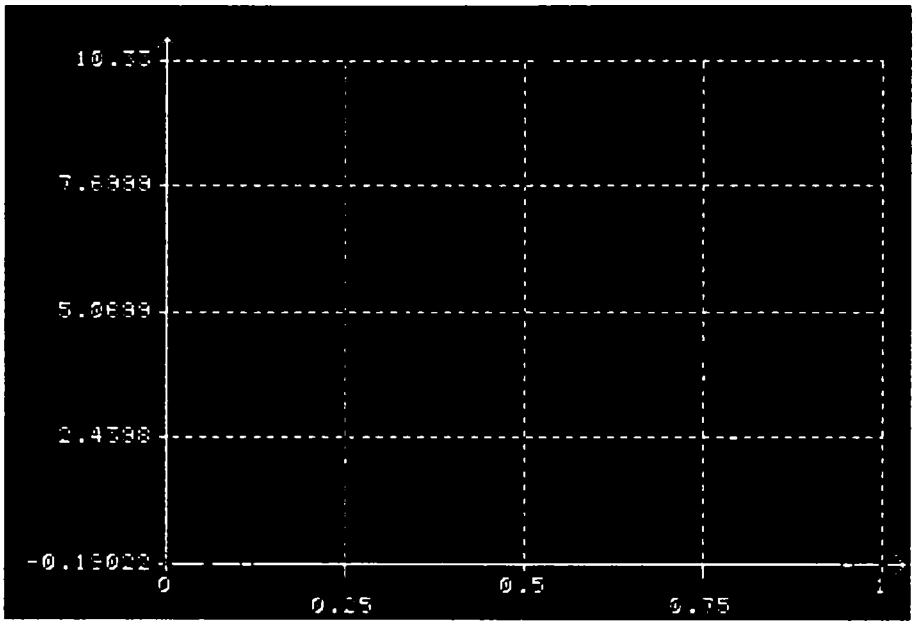


Fig. 5.6.44. σ_{yy} pe conturul orificiului central

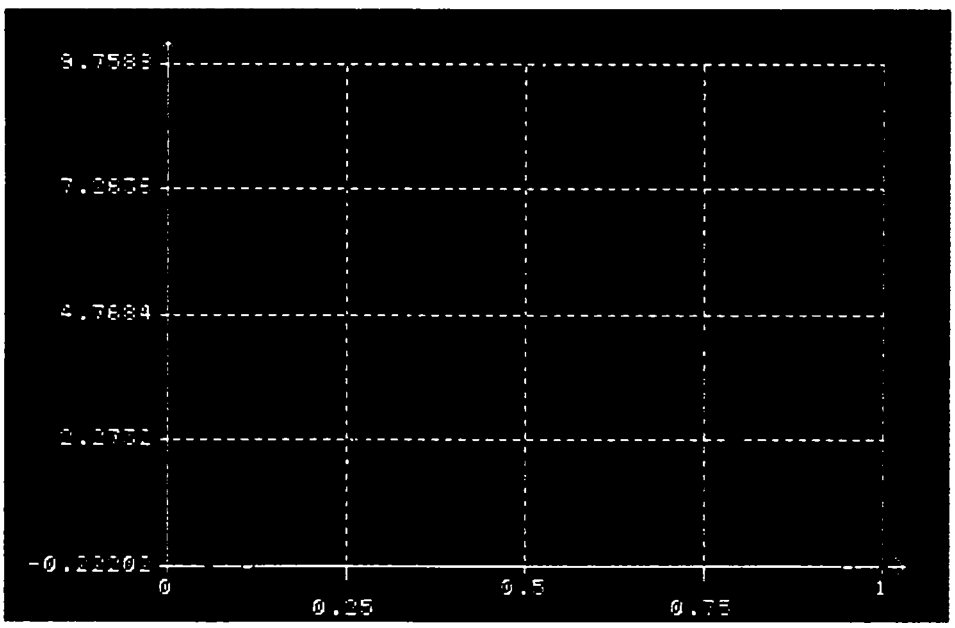


Fig. 5.6.45. σ_{yy} pe jumătatea interioară de contur al orificiilor marginale

Din citirea valorilor maxime ale tensiunii σ_{yy} de pe contururile orificiilor rezultă o variaţie foarte mică a lui σ_{yy} maxim funcţie de faptul că este vorba de un orificiu central sau de margine. Valoarea maximă σ_{yy} se obţine însă, cum era şi firesc, pentru punctele situate pe diametrul perpendicular pe direcţia de aplicare a forţei de tracţiune.

Calculând $p=F/A_n$, rezultă $p=737/247.5=2.977$ N/mm^2, şi de aici rezultă următoarele valori pentru coeficienţii de concentrare a tensiunilor în cele trei cazuri:

- pentru orificiul central $K=10.33/2.977=3.47$
- pentru partea interioară a orificiului marginal $K=9.75/2.977=3.275$
- pentru partea exterioară a orificiului marginal $K=10.307/2.977=3.46$.

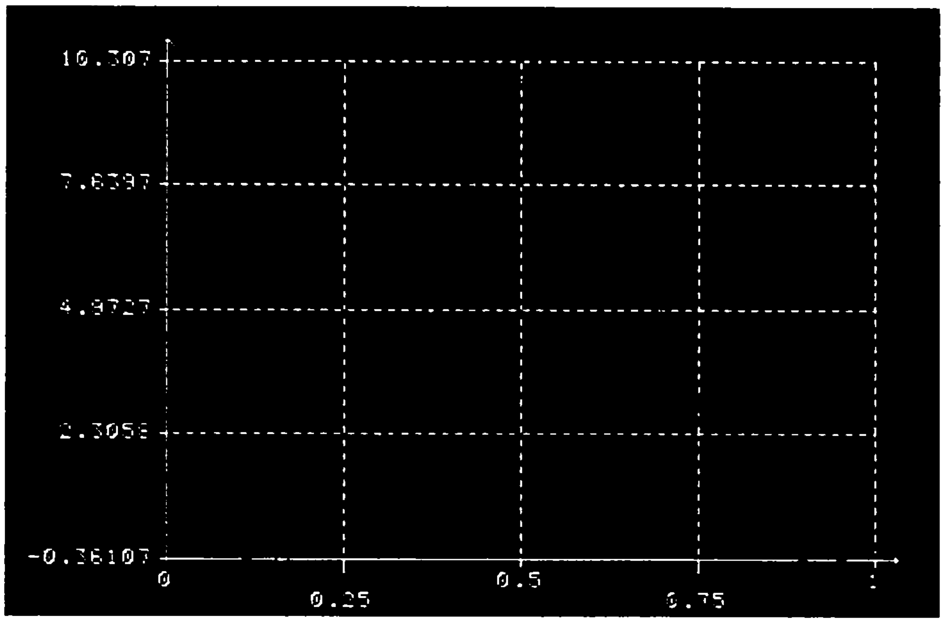


Fig. 5.6.46. σ_{yy} pe jumătatea exterioară de contur al orificiilor marginale

5.6.5. Trei orificii circulare inegale

În acest paragraf se va studia, experimental şi numeric, platbanda slăbită de trei orificii circulare inegale cu axa centrelor pe direcţia de aplicare a forţelor de tracţiune la care este supusă proba. Se vor lua în considerare două cazuri:
Cazul 1: când orificiile au diametre descrescătoare;
Cazul 2: când orificiul cel mai mic este situat între celelalte două;

Cazul 1

Se consideră o plăcuţă cu trei orificii circulare cu diametre descrescătoare, cu axa centrelor pe direcţia de aplicare a forţei (v. **Fig. 5.6.47**). Urmând aceeaşi metodologie ca şi până acum se obţin rezultatele pentru coeficientul de concentrare al tensiunilor global K_{tg} dat în **Tab. 5.6.10**. Acest caz nu l-am regăsit în PETERSON, şi de aceea pentru verificare am efectuat şi o modelare numerică, utilizând programul COSMOS.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt prezentate în continuare, în figurile **Fig. 5.6.48 – 5.6.51**.

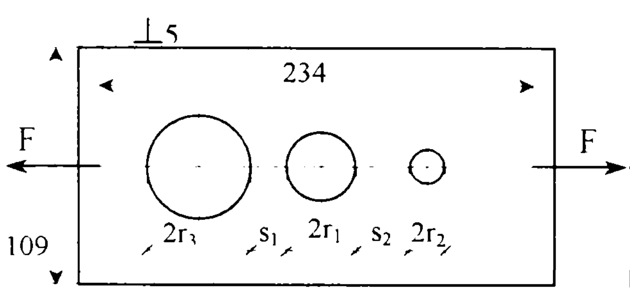


Fig. 5.6.47

Dimensiuni epruveta		
Latime (2b)	109	mm
Grosime (h)	5	mm
Diametru orificiu mare ($2r_3$)	30	mm
Diametru orificiu mijlociu ($2r_1$)	20	mm
Diametru orificiu mic ($2r_2$)	10	mm
Distanţa între marginile orificiului [illegible] şi 1 (s_1)	10	mm
Distanţa între marginile orificiului 1 şi 2 (s_2)	15	mm
s_1/r_1	1	
s_2/r_2	3	
Aria brută (A_b)	545	mm^2
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div.
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

Tab. 5.6.10

F		k [franje]	σ_{max} [MPa]	$p=F/A_b$ [MPa]	$K_{tg}=\sigma_{max}/p$
[div]	[N]				
27	414,450	1	1,65	0,76046	2,16974
46	706,100	2	3,3	1,29560	2,54709
57	874,950	2,5	4,95	1,60541	3,08332
72	1105,200	3	6,6	2,02789	3,25461

Valori medii	Valori medii excluzând prima citire
K_{tg}	K_{tg}
2,76369	2,96167

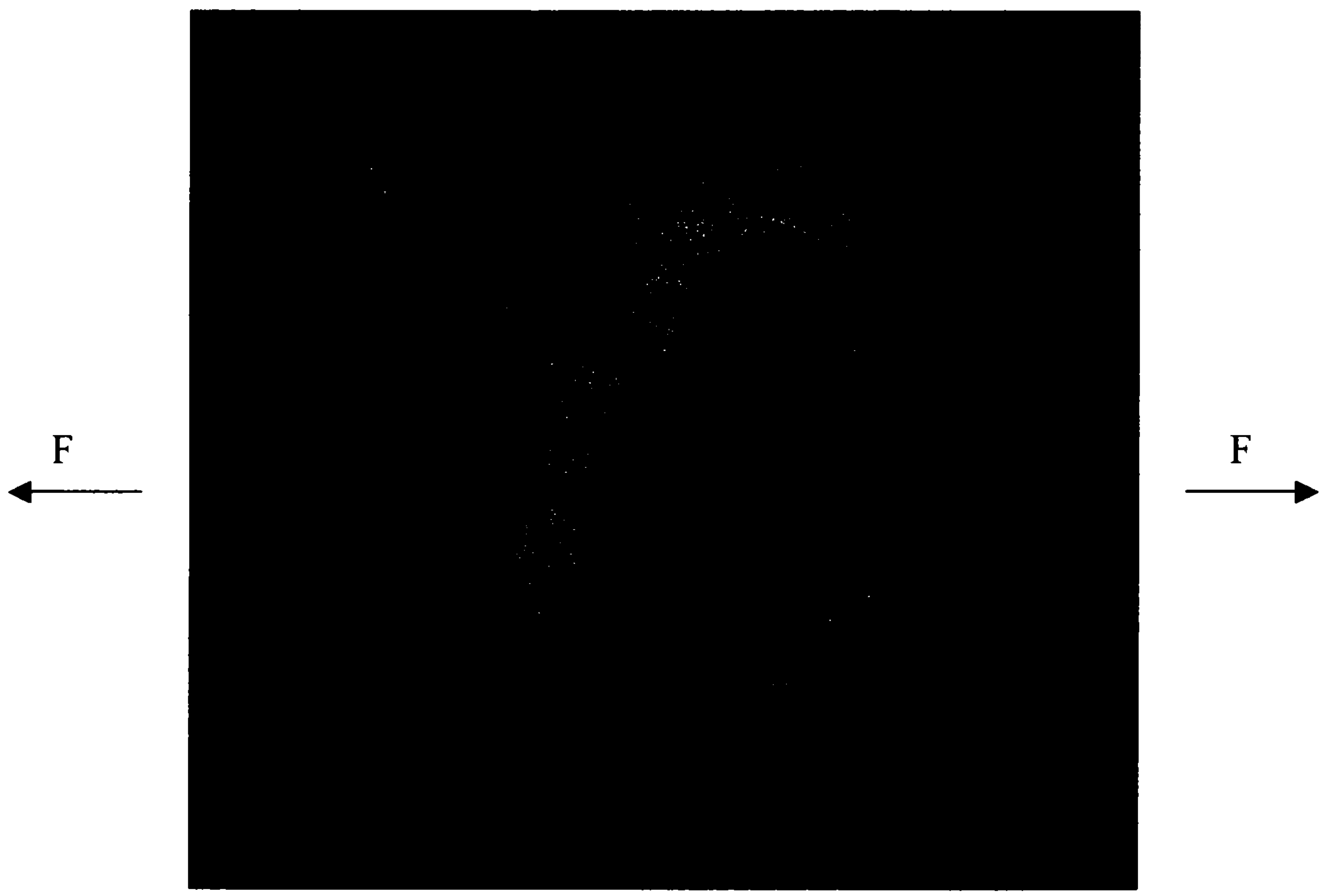


Fig. 5.6.48, Franja 1, la F=27x15.35N=414.45N

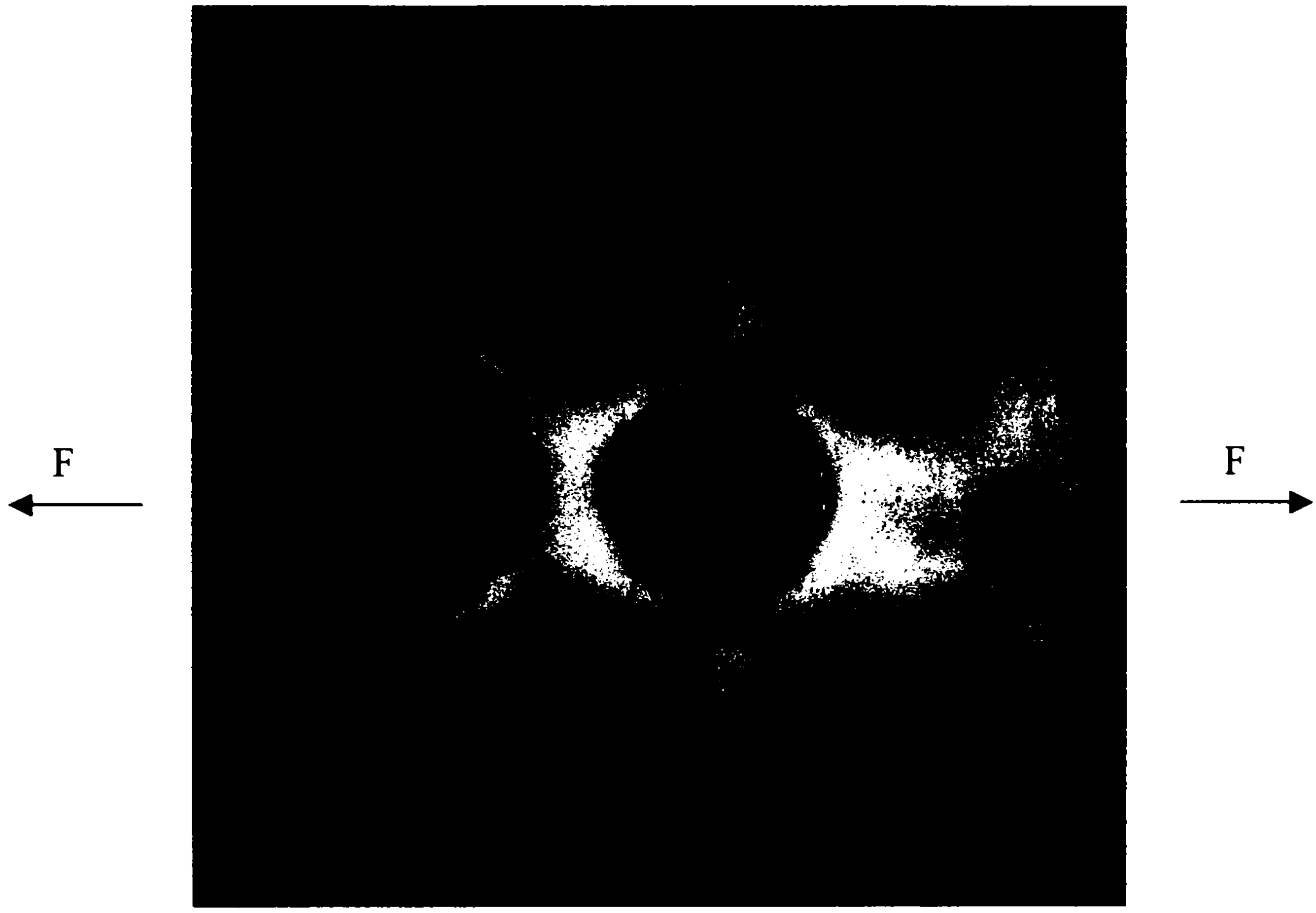


Fig. 5.6.49, Franja 2, la F=46x15.35N=706.1N

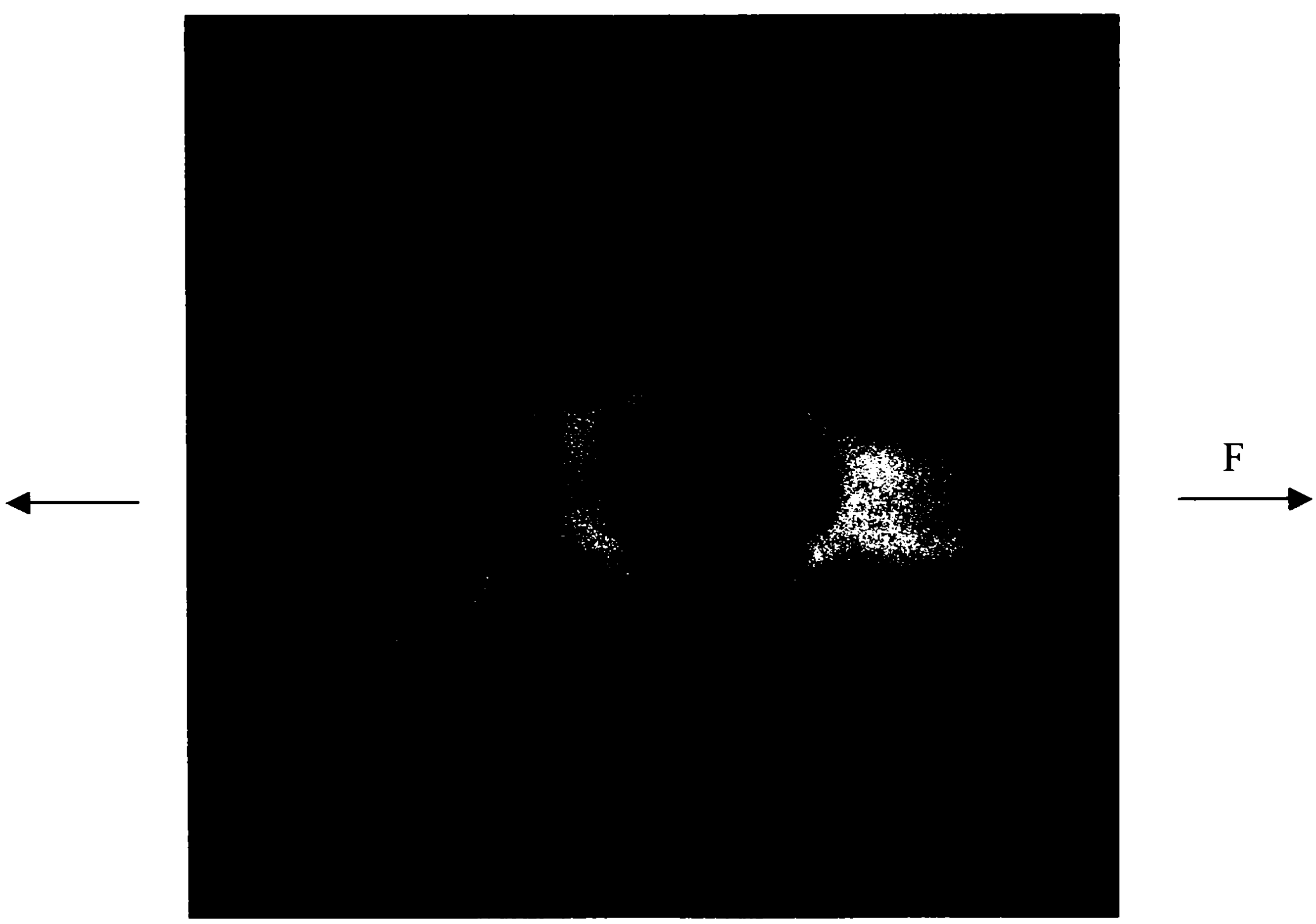


Fig. 5.6.50, Franja 2,5 la F=57x15.35N=874.95N

Fig. 5.6.51, Franja 3, la F=72x15.35N=1105.2N

Cu programul COSMOS am obţinut următoarele rezultate pentru variaţia tensiunii σ_{xx} în primele două cazuri de încărcare, adică pentru F=414N (corespunzător apariţiei primei franje), respectiv pentru F=706N (corespunzător apariţiei celei de-a doua franje):

Fig. 5.6.52, tensiunea σ_{xx} pe probă în cazul încărcării cu F=414N
(datorită simetriei am reprezentat ½ din probă)

Voi studia în continuare variaţia tensiunii σ_{xx} pe conturul tuturor celor trei orificii în cele două cazuri de încărcare enunţate mai sus.

Cazul de încărcare F=414N (franja 1-a)

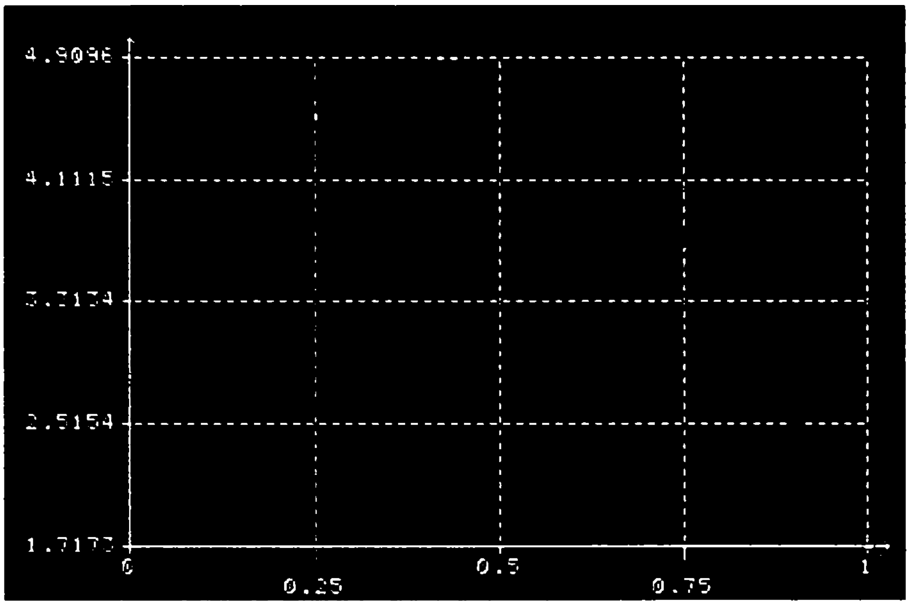


Fig. 5.6.53. σ_{xx} pe conturul orificiului mare

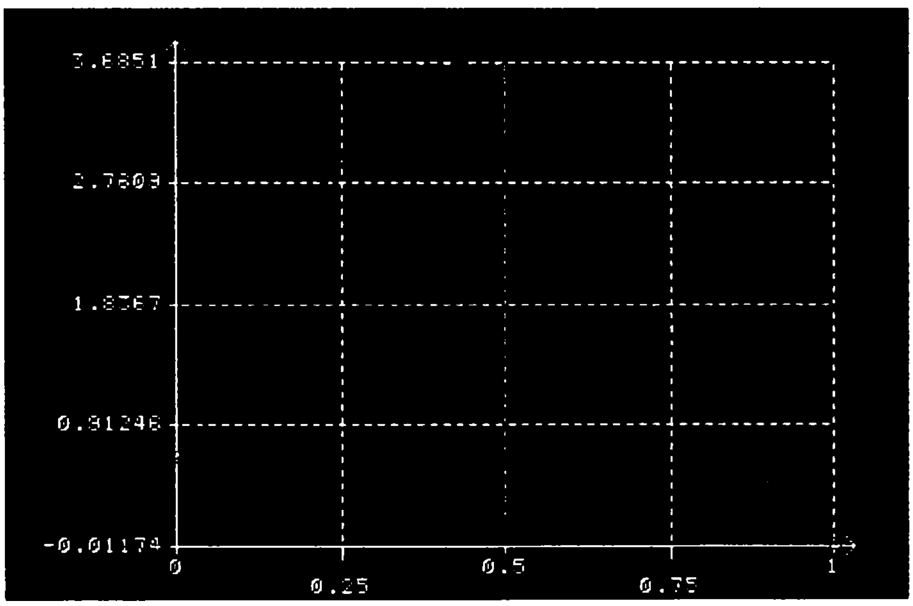


Fig. 5.6.54. σ_{xx} pe conturul orificiului mijlociu

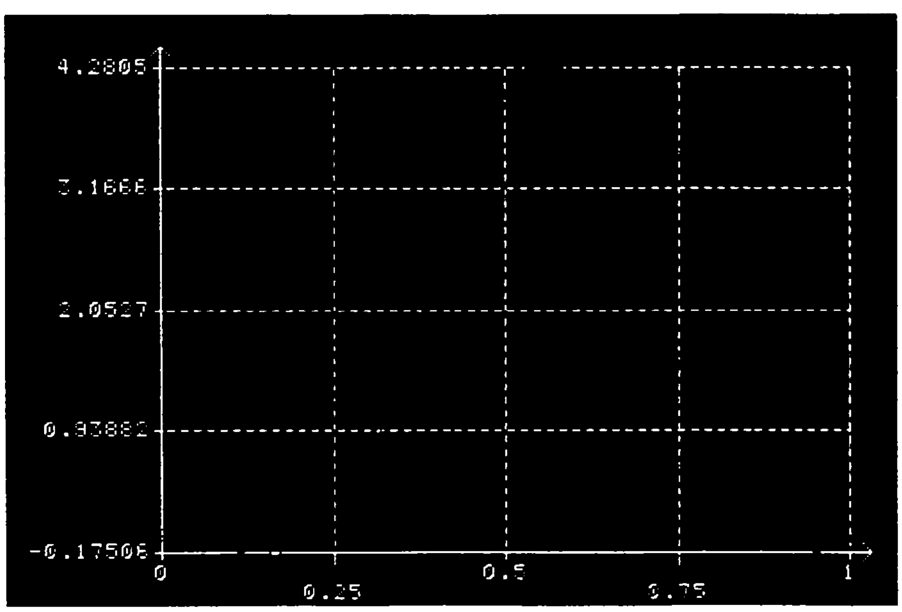


Fig. 5.6.55. σ_{xx} pe conturul orificiului mic

Cazul de încărcare F=706N (franja a 2-a)

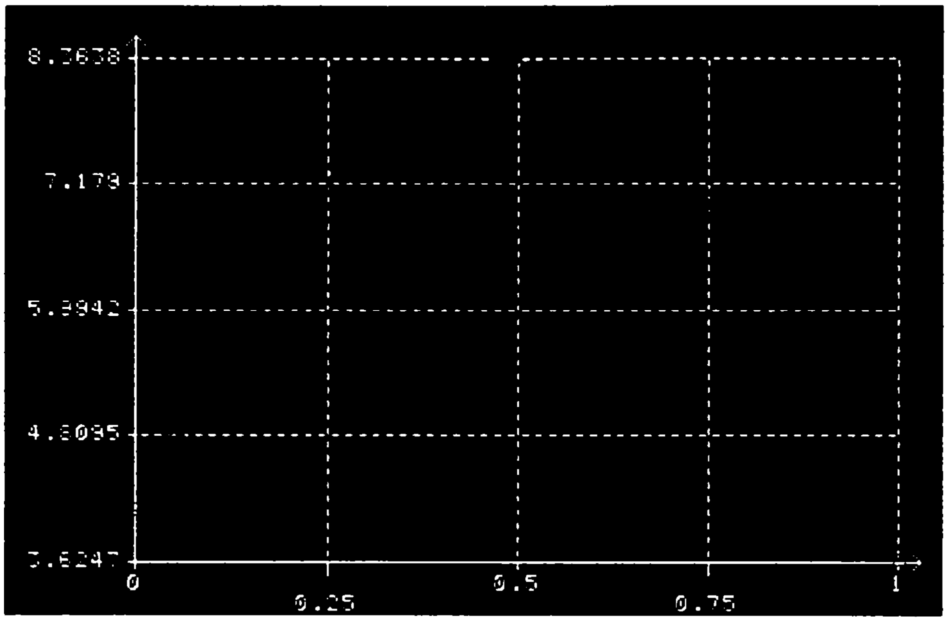


Fig. 5.6.56. σ_{xx} pe conturul orificiului mare

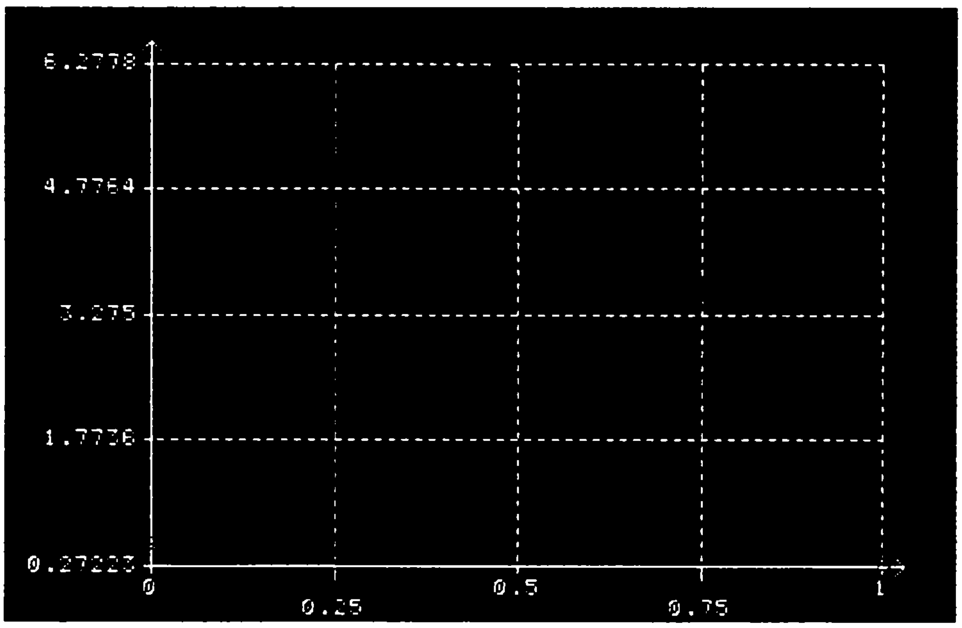


Fig. 5.6.57. σ_{xx} pe conturul orificiului mijlociu

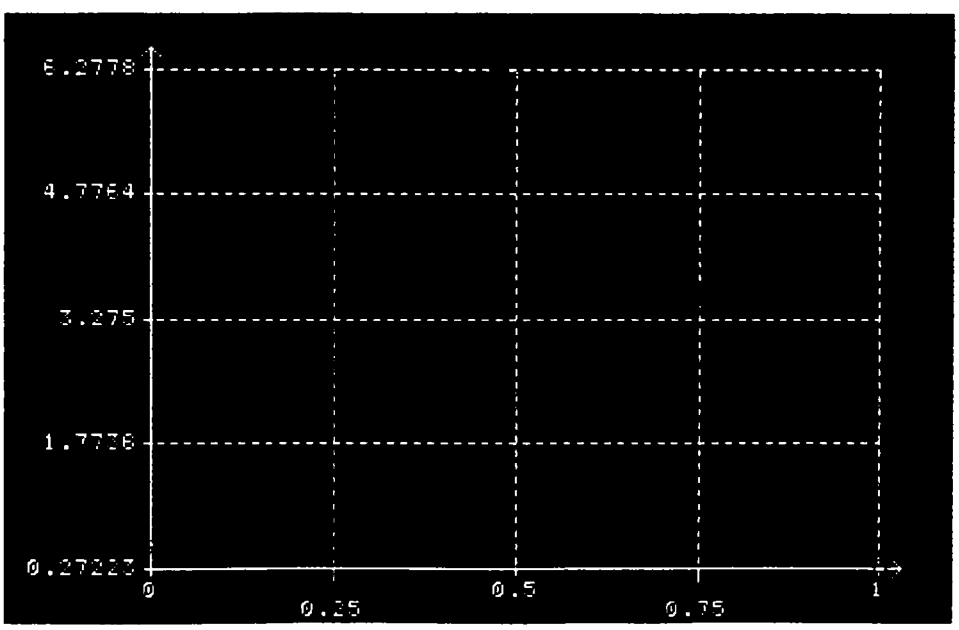


Fig. 5.6.58. σ_{xx} pe conturul orificiului mic

Cazul 2

Se consideră o plăcuţă cu trei orificii circulare inegale, cu axa centrelor pe direcţia de aplicare a forţei (v. **Fig. 5.6.59**). Urmând aceeaşi metodologie ca şi până acum se obţin rezultatele pentru coeficientul de concentrare al tensiunilor global K_{tg} dat în **Tab. 5.6.11**.

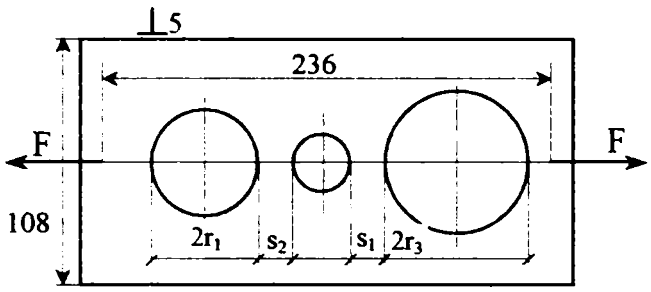


Fig. 5.6.59

mens un epruveta		
Latime (2b)	108	mm
Grosime (h)	5	mm
Diametru orificiu mare ($2r_3$)	50	mm
Diametru orificiu mijlociu ($2r_1$)	40	mm
Diametru orificiu mic ($2r_2$)	20	mm
Distanţa între marginile găurii 3 şi 2 s_1	10	mm
Distanţa între marginile găurii 1 şi 2 (s_2)	10	mm
s_1/r_1	0,5	
s_2/r_2	1	
Aria brută (A_b)	540	mm^2
Coef. etalonare dinamometru	15,35	N/div
Valoarea benzii ($\overline{\sigma}_0$)	1,65	MPa/franje

Tab. 5.6.10

F		k [franje]	σ_{max} [MPa]	$p=F/A_b$ [MPa]	$K_{tg}=\sigma_{max}/p$
[div]	[N]				
35	537,250	1,5	2,475	0,99491	2,48767
52	798,200	2,5	4,125	1,47815	2,79065
62	951,700	3,5	5,775	1,76241	3,27677

Valori medii	Valori medii excluzând prima citire
K_{tg}	K_{tg}
2,85170	3,03371

Imaginile fotoelastice obţinute sunt prezentate în continuare, în figurile **Fig. 5.6.60** – **5.6.62**. Ele au fost fotografiate pe bucăţi deoarece nu a încăput întreaga zonă care m-a interesat în spaţiul proiectat de către aparat pe ecran. De aceea am fost nevoită să asamblez pozele parţiale, ceea ce nu arată perfect, dar nu am avut altă soluţie.

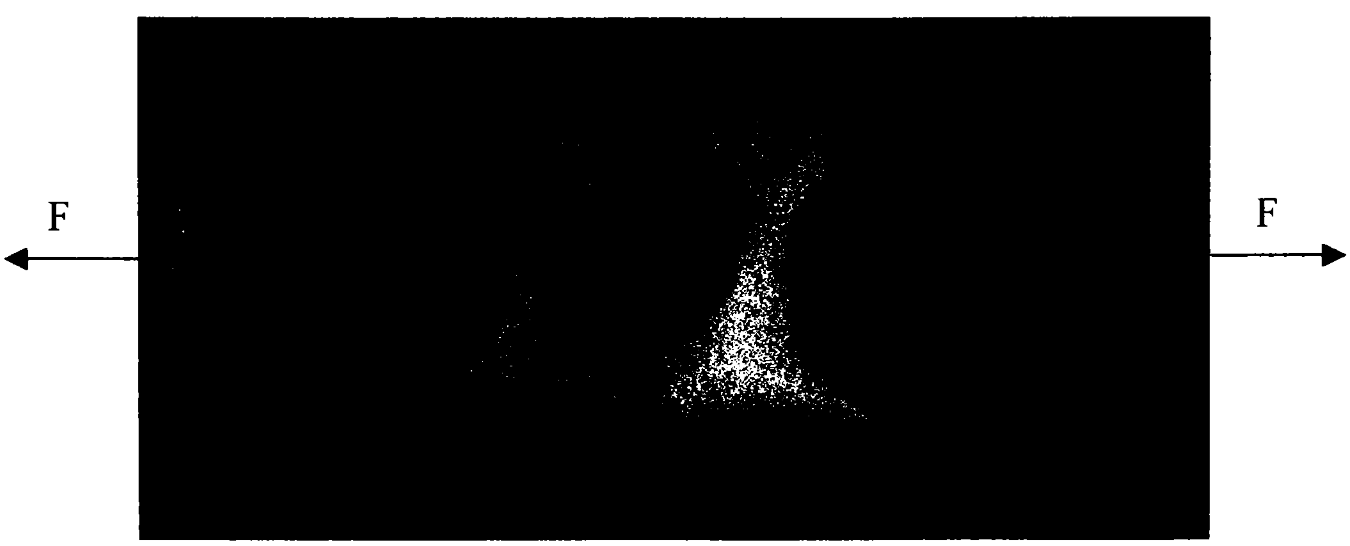


Fig. 5.6.60, Franja 1.5, la F=35x15.35N=537.25N

Fig. 5.6.61, Franja 2.5, la F=52x15.35N=798.2N

Fig. 5.6.62, Franja 3.5, la F=62x15.35N=951.7N

5.6.6. Platbanda cu două fisuri coliniare egale

Problema platbenzii cu două fisuri coliniare egale a fost prezentată în detaliu în § 2.5.3.4., în care am dat o soluţie nouă, obţinută prin suprapunere de efecte şi am reprezentat grafic, cu ajutorul programului „Mathematica”, variaţia tensiunilor pentru un caz concret. Reiau această problemă, pe care o voi cerceta în continuare fotoelastic.

Proba analizată fotoelastic a fost plăcuţa cu cele două fisuri reprezentată schematic în **Fig. 2.6.63**.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt cele redate în **Fig. 5.6.64**, **Fig. 5.6.65** şi **Fig. 5.6.66**.

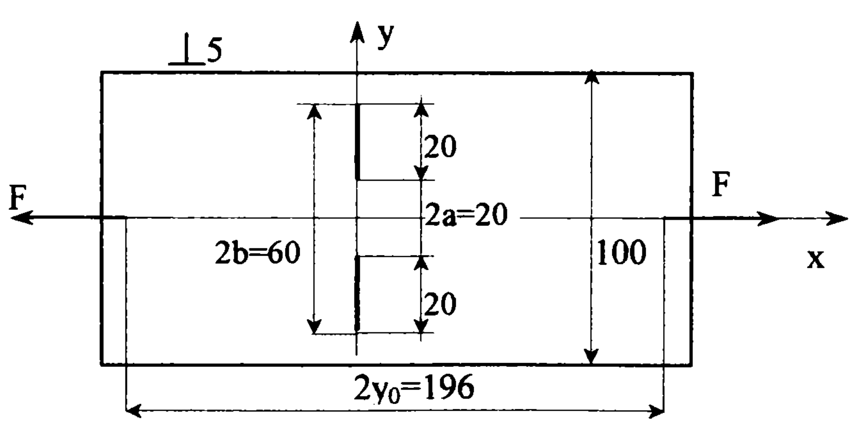


Fig. 5.6.63

Fig. 5.6.64 Franja 1, la F=30x15.35N=460.5N

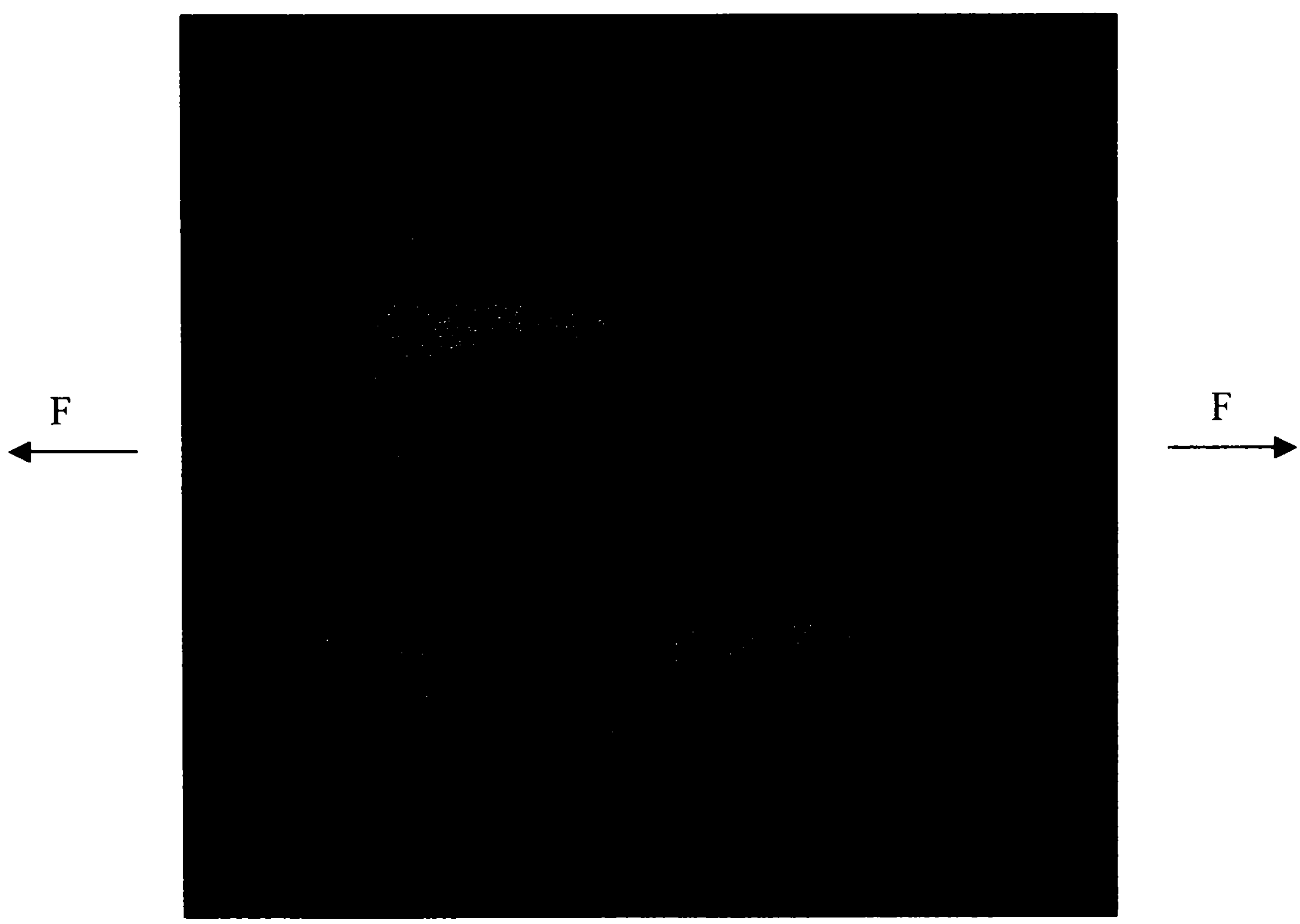


Fig. 5.6.65 Franja 2, la 47x15.35N=721.45N

F F

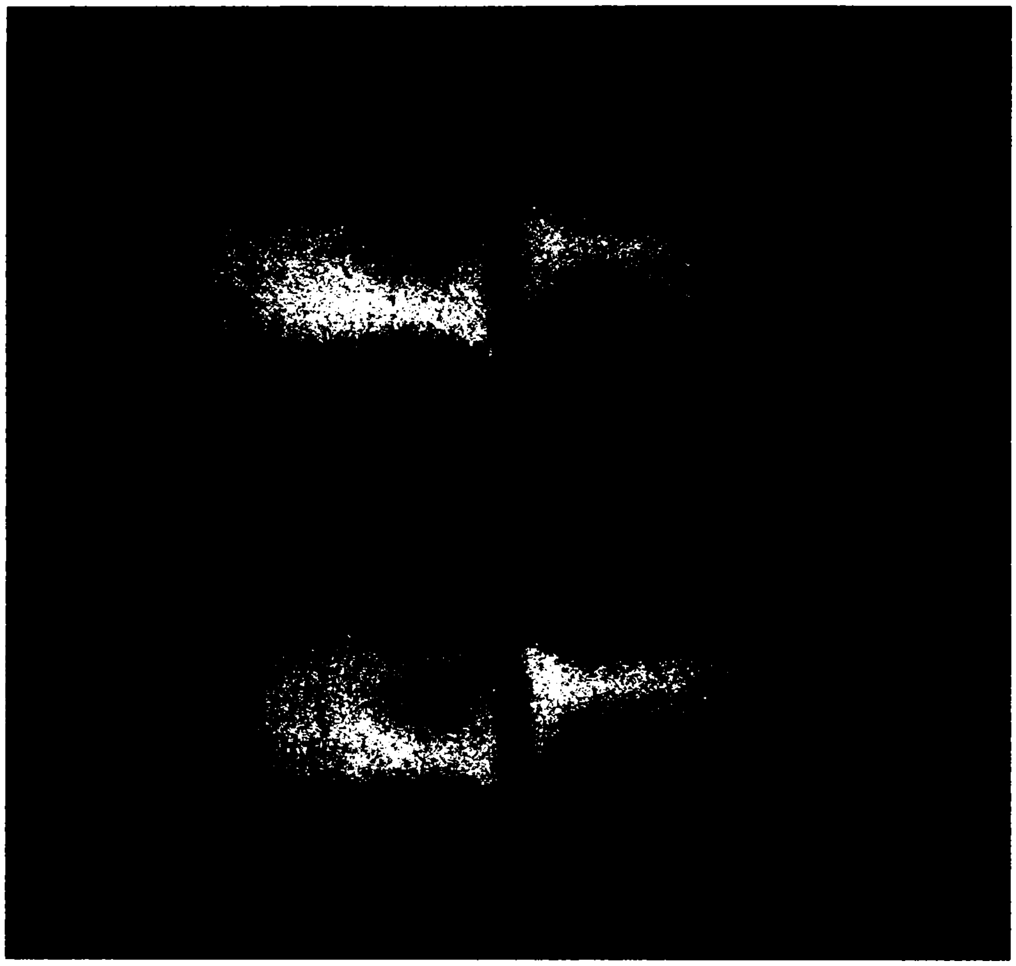


Fig. 5.6.66, Franja 3, la F=65x15.35N=997.75N

Înainte de a interpreta imaginile fotoelastice, voi calcula factorul de intensitate a tensiunilor, care pe baza relaţiilor din § 2.5.3.4 se reduce la relaţia:

$$K_I = p\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{b^2\mathbf{E}(k) - a^2\mathbf{K}(k)}{\mathbf{K}(k)\sqrt{b^2 - a^2}} \tag{5.6.4}$$

în care $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} = 1 - \left(\frac{10}{30}\right)^2 = \frac{8}{9}$;

$p = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{100 \cdot 5} = \frac{997.75}{500} = 1.99\ \text{N/mm}^2$; (s-a considerat forţa corespunzătoare apariţiei celei de-a treia franje);

a=10mm; b=30 mm^2;

K(k)=2,52863 (integrala eliptică de speţa I-a);

E(k)=1.11374 (integrala eliptică de speţa II-a);

În urma calculelor rezultă: $K_I = 11.747$.

Pentru interpretarea imaginilor fotoelastice vom folosi a doua metodă a lui CHEN ZENGTAO [Z5], conform căreia :

$$K_I = k\bar{\sigma}_0\sqrt{\pi D_m^{\sigma}} \tag{5.6.5}$$

(v. relaţia (5.3.6.21) şi **Fig. 5.3.6.2 a)**) unde k este ordinul benzii, $\bar{\sigma}_0$ este valoarea benzii şi D_m^{σ} este diametrul maxim al izocromatei de ordin k din jurul vârfului fisurii, conform schiţei din **Fig. 5.3.6.2. a)**.

Deoarece însă în acest caz imaginile fotoelastice ale franjelor arată o inclinare de 60 față de axa fisurilor, deci o situație analoagă cazului din **Fig. 5.3.6.2 b)**, am extras din lucrarea lui CHEN ZENGTAO [Z5] formula de calcul a factorului de intensitate a tensiunilor corespunzătoare acestui caz:

$$K_I = \left[\frac{C_p(N_p) \cdot D_m^p}{1.5\sqrt{3}} \right] \tag{5.6.6}$$

unde:

$$C_p(N_p) = \frac{\pi \bar{\sigma}_0^{\,2}}{h^2} k^2 \tag{5.6.7}$$

Aici h reprezintă grosimea probei și D_m^p diametrul maxim al izocromatei de ordin k din jurul vârfului fisurii, conform schiței din **Fig. 5.3.6.2. b)**. Efectuând măsurătoarea lui D_m^p pentru $k=3$ de pe **Fig. 5.6.66.** (rezultă D_m^p=20mm) și înlocuind toate datele cunoscute în relațiile (5.6.7) și (5.6.6) obținem: K_I=10,5, un rezultat apropiat de cel analitic dedus anterior.

Pentru cazul platbenzii cu două fisuri coliniare egale am efectuat și o modelare cu programul de element de frontieră BEASY, obținând repartiția tensiunilor σ_{yy} (v. **Fig. 6.6.69**) pe o succesiune de puncte interioare amplasate foarte aproape de linia fisurilor, și anume pe dreapta x=0.1 (v. **Fig. 6.6.68**).

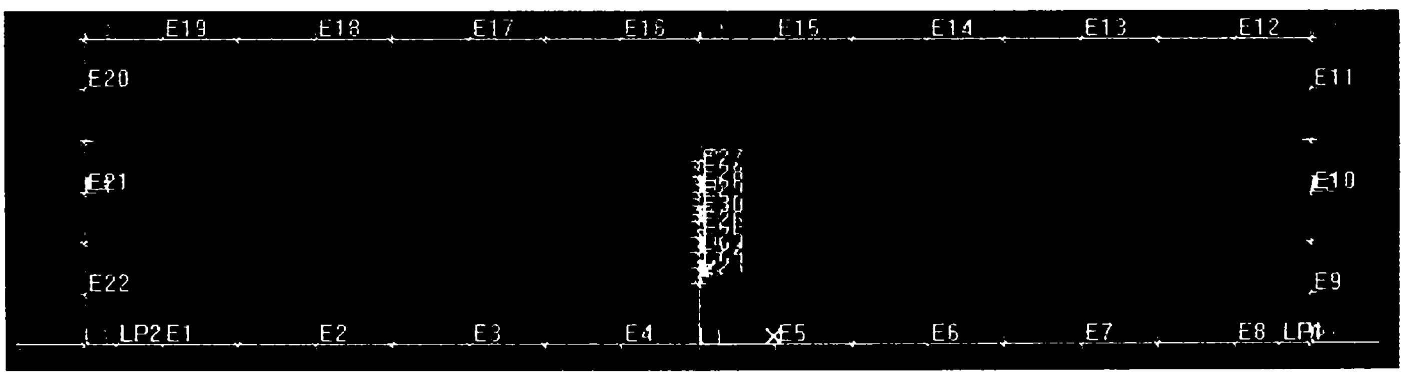


Fig. 5.6.67 Proiectarea modelului și amplasarea elementelor pe frontieră (din motive de simetrie s-a reprezentat doar ½ din probă)

Se observă că pe graficul din **Fig. 5.6.69** fisura se află între punctele interne 5 și 15, iar variația lui σ_{yy} obținută este foarte aemănătoare cu cea obținută la § 2.5.3.4. cu programul Mathematica (v. **Fig. 2.5.3.16**)

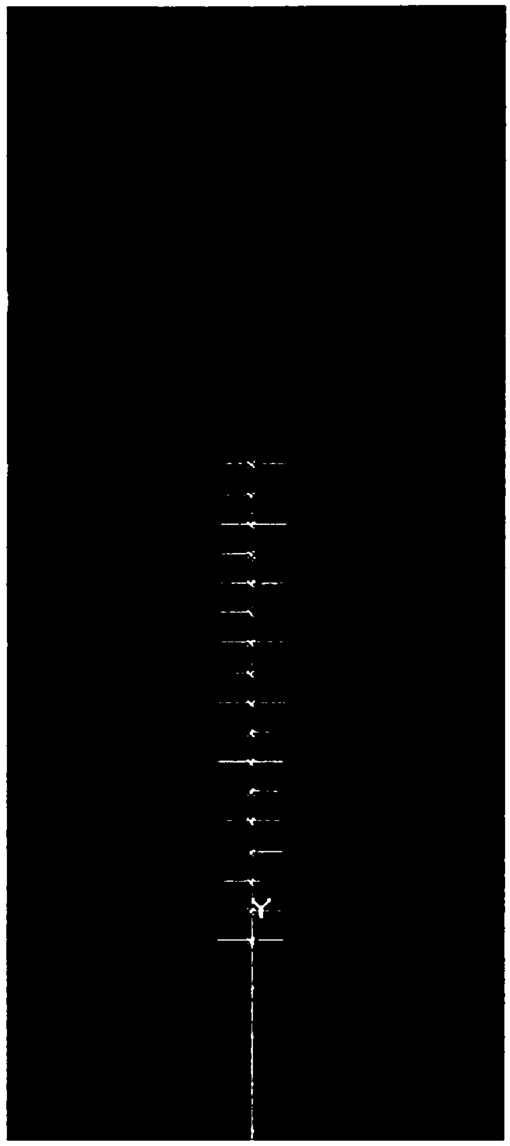


Fig. 5.6.68. Amplasarea punctelor interioare pe o linie foarte apropiată de axa Oy, şi anume pe dreapta cu x=0.1, puncte în care am vizualizat apoi tensiunile σ_{yy}

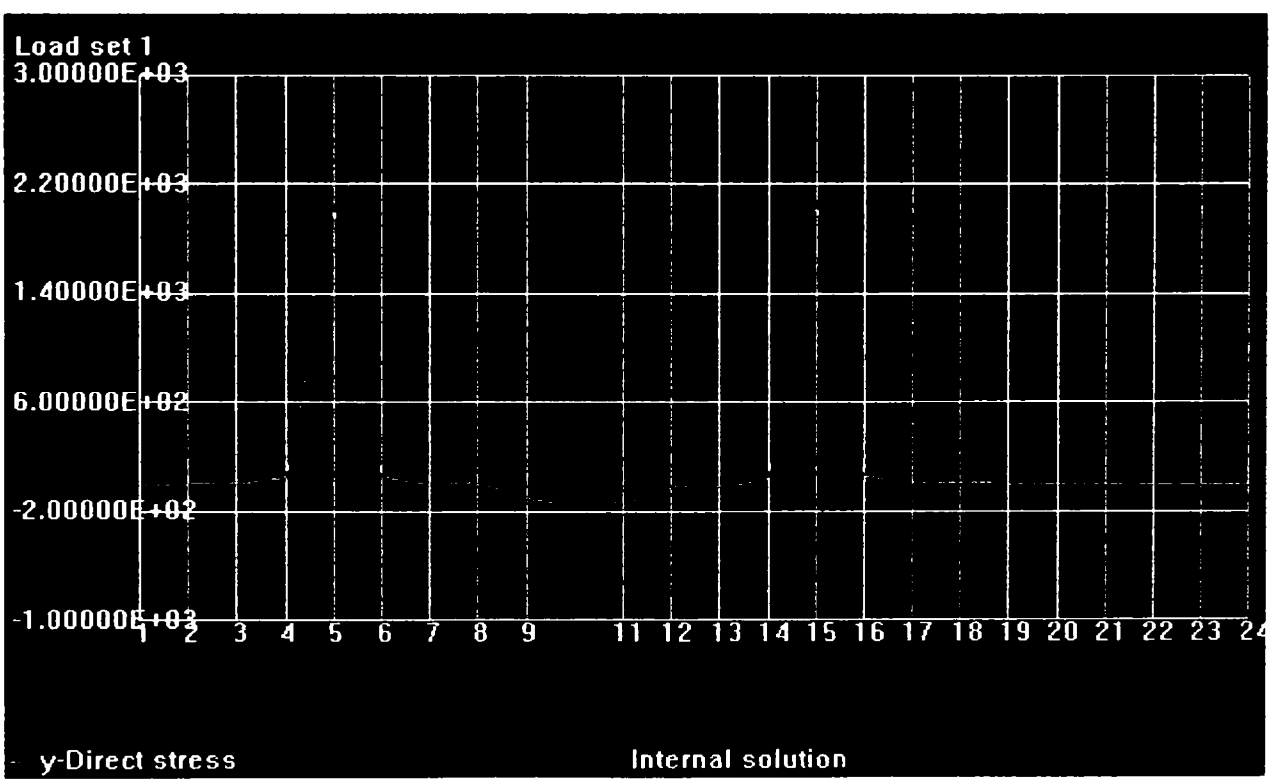


Fig. 5.6.69, Variaţia tensiunii σ_{yy} pe dreapta x=0.1

5.6.7. Platbanda cu o crestătură laterală

S-a luat în studiu platbanda cu o crestătură laterală, care a constituit obiectul paragrafului 2.4.4, a semispaţiului cu crestătură laterală – soluţia WILLIAMS.

Cazul I.: Crestătura laterală în V, cu o deschizătură de 30°, reprezentată schematic în **Fig. 5.6.70**.

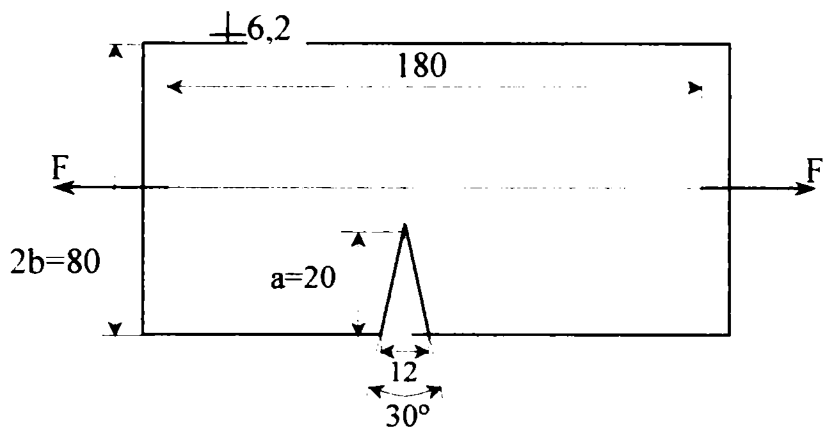


Fig. 5.6.70

Pentru acest caz, conform [C10], avem:

$$K_I = p\sqrt{\pi a}\,\xi\left(\frac{a}{b}\right) \tag{5.6.8}$$

unde $p = \dfrac{F}{A_b} = \dfrac{767.5}{80 \cdot 6.2} = 1.54\dfrac{N}{mm^2}$ (considerându-se forţa F=50div.x15.35N/div., corespunzătoare apariţiei celei de-a patra franje – v. **Fig.5.6.74**), iar valorile funcţiei $\xi\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sunt date în **Tab.5.6.11** (preluat de asemenea din [C10]).

Tab. 5.6.11

a/b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\xi(a,b)$	1.12	1.14	1.19	1.29	1.37	1.50	1.66	1.87	2.12	2.44	2.82

În acest caz a/b=20/40=0.5, deci $\xi(a,b)$=1.5. Rezultă K_I=19.09.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt redate în **Fig. 5.6.71-Fig.5.6.74**. Aplicând de asemenea cea de-a doua metodă a lui CHEN ZENGTAO (respectiv formulele (5.6.6) şi (5.6.7), după ce am măsurat D_m^p corespunzător celei de a 4-a franje ca fiind 24mm) am obţinut: K_I=18.28, rezultat destul de apropiat de cel calculat anterior.

Fig. 5.6.71 Franja 1, la F=13x15,35N=199,55N

Fig. 5.6.72 Franja 2, la F=22x15.35N=337.7N

Fig. 5.6.73 Franja 3, la F=33x15,35N=506.55N

Fig. 5.6.74 Franja 4, la F=50x15.35N=767.5N

Cazul II.: O fisură laterală, conform schiţei din **Fig. 5.6.75**.

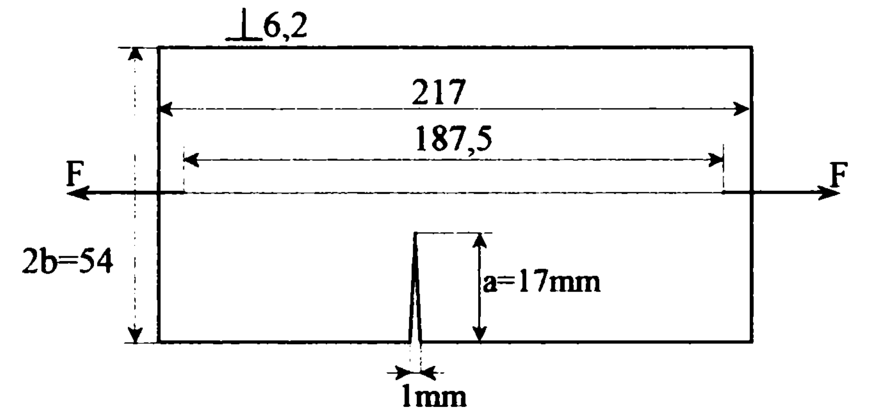


Fig. 5.6.75

Acest caz l-am calculat absolut analog cu cel anterior. Astfel a/b=17/27=0,629, de unde conform **Tab.6.6.11** rezultă $\xi(a,b) \cong 1{,}7$ şi $p = \dfrac{F}{A_b} = \dfrac{475.85}{54 \cdot 6.2} = 1.42 \dfrac{N}{mm^2}$ (considerându-se forţa F=31div.x15.35N/div.=475.85N, corespunzătoare apariţiei celei de-a patra franje – v. **Fig.5.6.79**). Astfel, înlocuind în formula (5.6.8) rezultă: K_I=17,64.

Imaginile fotoelastice obţinute sunt cele reprezentate în **Fig. 5.6.76 - Fig.5.6.80**. Aplicând de asemenea cea de-a doua metodă a lui CHEN ZENGTAO (respectiv formulele (5.6.6) şi (5.6.7), după ce am măsurat D_m^p corespunzător celei de a 4-a franje ca fiind 20 mm) am obţinut: K_I=16.19, rezultat destul de apropiat de cel calculat anterior.

F

F

Fig. 5.6.76 Franja 1, la F=5x15.35N=76.75N

Fig. 5.6.77 Franja 2, la F=10x15.35N=153.5N

Fig. 5.6.78 Franja 3, la F=20x15.35N=307N

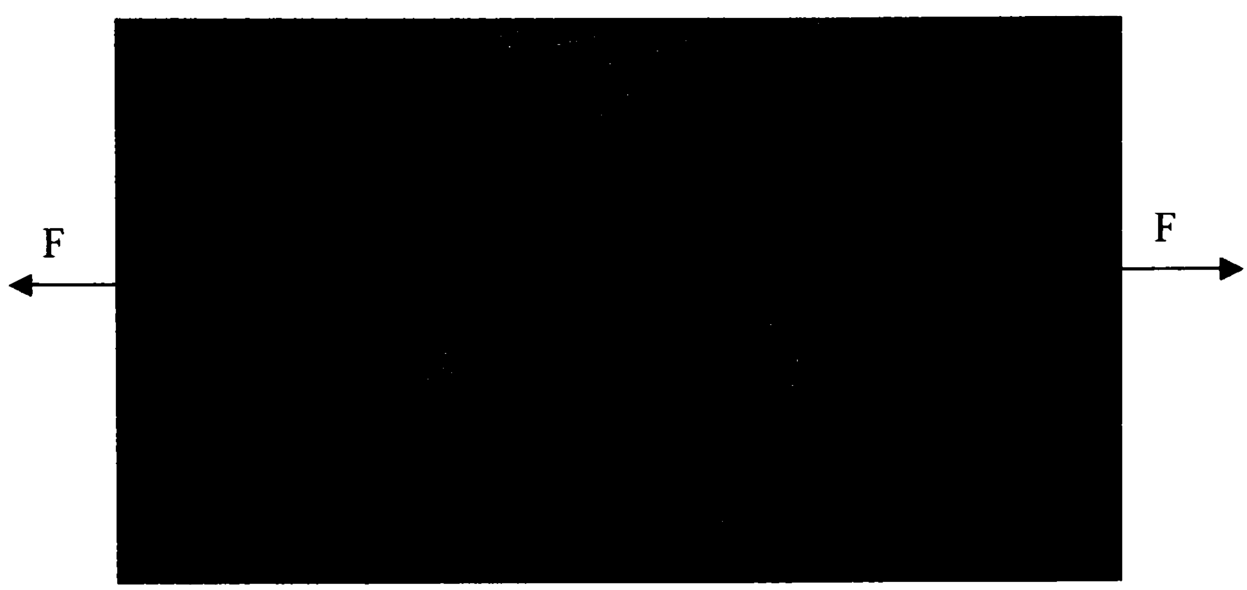


Fig. 5.6.79 Franja 4, la F=31x15,35N=475.85N

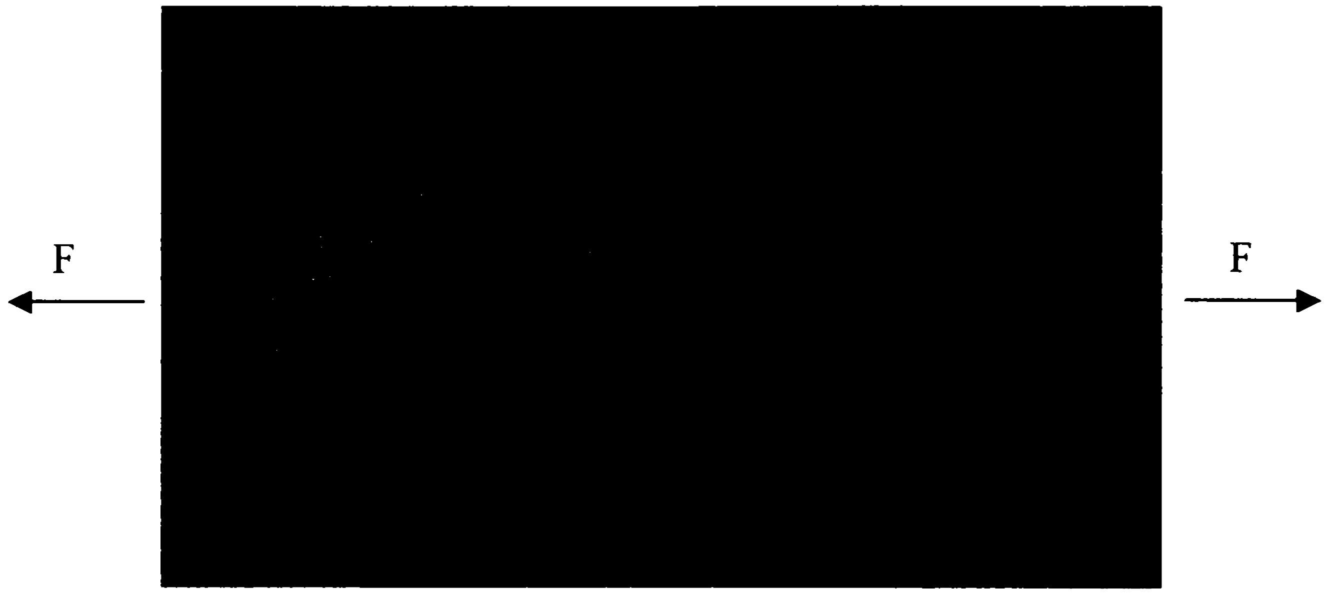


Fig. 5.6.80 Franja 4,5 la F=42x15.35N=644.7N

Cazul III.: Aceeaşi fisură laterală de la cazul II, dar mărită cu 10 mm, conform schiţei din **Fig. 5.6.81**.

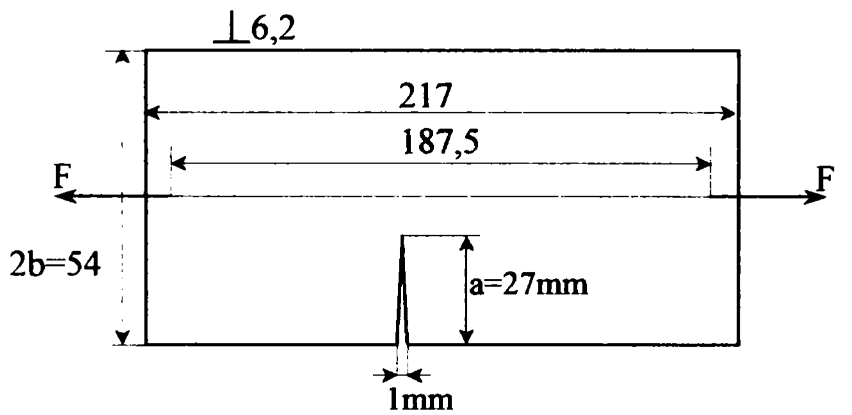


Fig. 5.6.81

De data aceasta a/b=27/27=1, de unde conform **Tab.6.6.11** rezultă $\xi(a,b)=2{,}82$ şi $p=\dfrac{F}{A_b}=\dfrac{337.7}{54\cdot 6.2}=1.008\dfrac{N}{mm^2}$ (considerându-se forţa F=22div.x15.35N/div.=337.7N, corespunzătoare apariţiei celei de-a patra franje – v. **Fig.5.6.85**).
Astfel, înlocuind în formula (5.6.8) rezultă: K_I=26.17. (Se observă că factorul de concentrare a tensiunilor a crescut odată cu creşterea fisurii).

Imaginile fotoelastice obţinute sunt cele reprezentate în **Fig. 5.6.82 - Fig.5.6.86**. Aplicând de asemenea cea de-a doua metodă a lui CHEN ZENGTAO (respectiv formulele (5.6.6) şi (5.6.7), după ce am măsurat D_m^p corespunzător celei de a 4-a franje ca fiind 28 mm) am obţinut: K_I=25.08, rezultat destul de apropiat de cel calculat anterior.

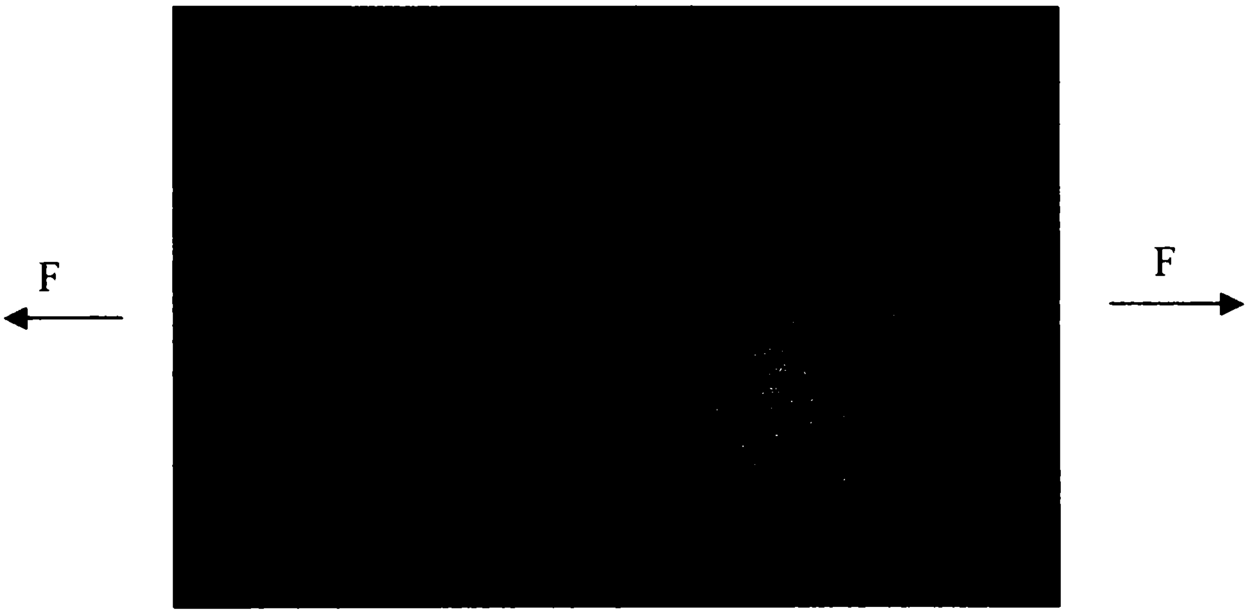


Fig. 5.6.82 Franja 1, la F=7x15.35N=107,45N

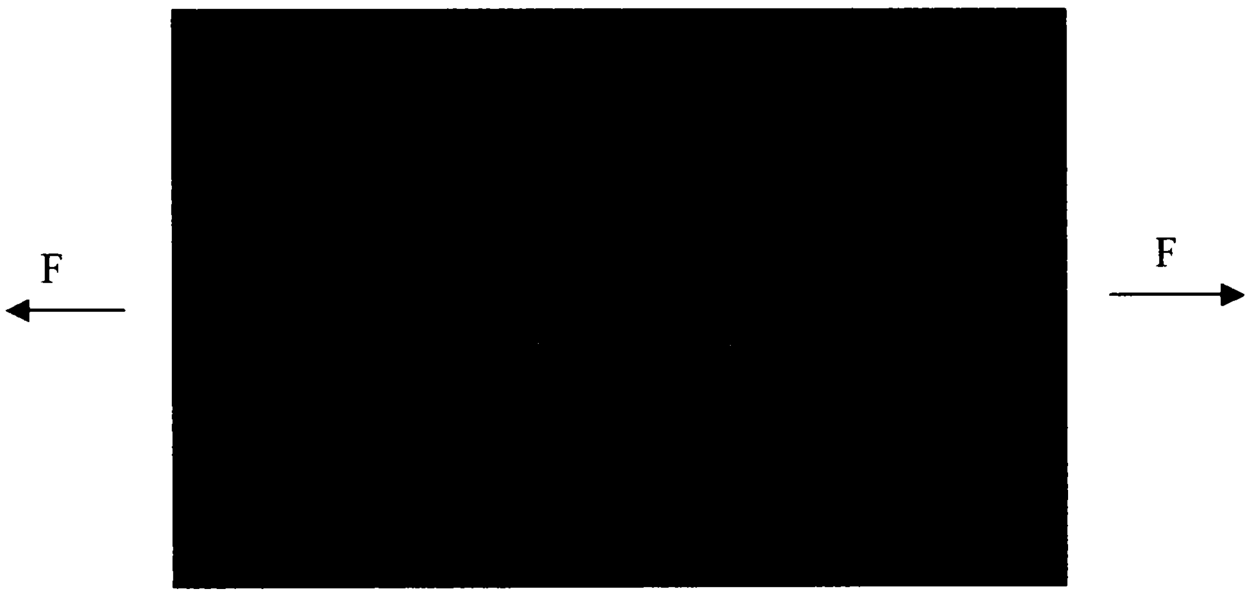


Fig. 5.6.83 Franja 2, la F=11x15.35N=168,85N

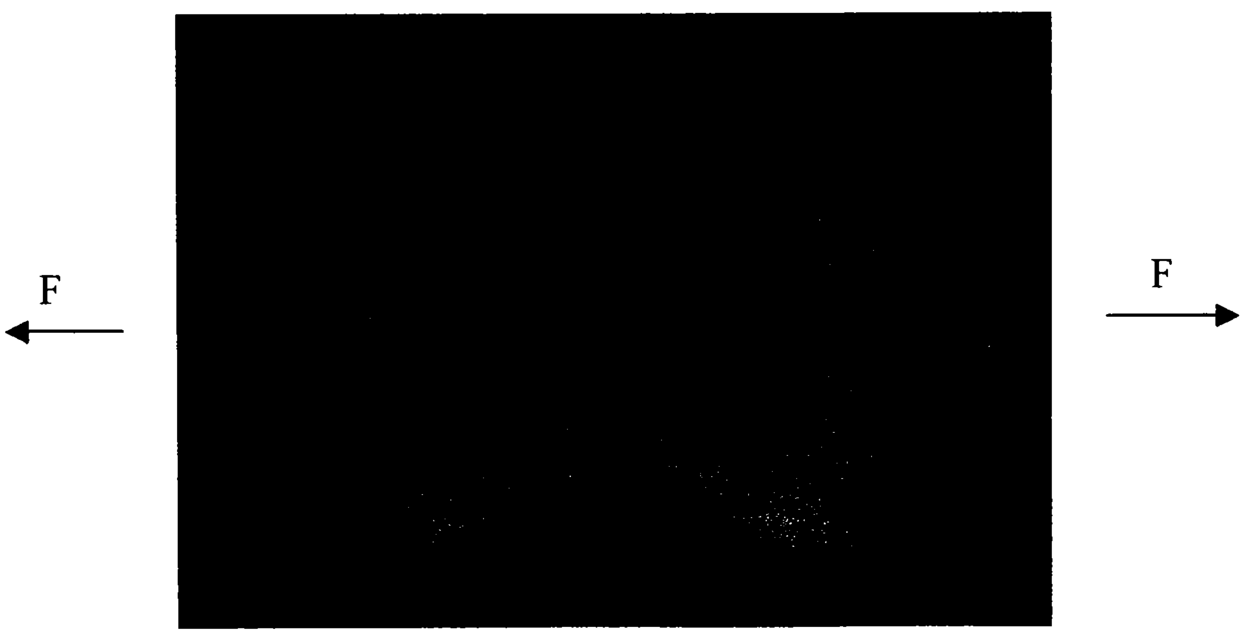


Fig. 5.6.84 Franja 3, la F=18x15.35N=276.3N

Fig. 5.6.85 Franja 4, la F=22x15.35N=337.7N

Fig. 5.6.86 Franja 5, la F=31x15.35N=475.85N

CAPITOLUL 6

PRIVIRE DE SINTEZĂ. CONCLUZII. CONTRIBUȚII

Așa cum se vede din dezvoltarea tezei până la acest capitol, am urmărit, în esență, să rezolv unele probleme ale planului elastic omogen și izotrop, solicitat la tracțiune mono- sau biaxială, prezentând numai anumite categorii de defecte: fie goluri circulare sau eliptice, fie fisuri drepte, fie crestături laterale în cazul semiplanului. După multe luni de zile de documentare, am ajuns la concluzia că nu există o temă majoră neabordată de care să te ocupi și s-o rezolvi de la început până la sfârșit sau, dacă există, este covârșitor de complicată. În general, aproape toate problemele care se pot pune în acest domeniu care face legătura între teoria aplicată a elasticității și mecanica ruperii, au fost abordate și rezolvate parțial sau total de către cercetători și profesori străluciți sau chiar de către institute de cercetare. Am constatat însă că există, în general vorbind, o ruptură informațională la trecerea de la concentratorii de tensiune de tipul găurilor, rezolvabili cu metodele matematice ale teoriei clasice a elasticității, la defectele de tipul fisurilor, crăpăturilor, tăieturilor, abordate în mod esențial de mecanica ruperii, caracterizate prin factorul de intensitate a tensiunilor și cărora li se aplică metode matematice mult mai pretențioase.

În aceste condiții informaționale și circumstanțe de lucru, am abordat diverse probleme, în care am considerat că se mai poate obține un rezultat nou, fie o soluție nouă, un comentariu pertinent pe soluțiile existente, sau un program de calcul adecvat problemei. Acesta a fost și motivul pentru care titlul tezei mele este: *„**Studii și cercetări** privind analiza câmpurilor de tensiuni și deplasări în solide elastice cu defecte”*.

Cred că în final am reușit să demonstrez că opțiunea mea este justificată: multe din problemele clasice considerate închise au totuși aspecte neelucidate, iar problemele moderne pe care eu le-am considerat că aparțin *„Mecanicii probabiliste a ruperii”* sunt relativ noi și au un grad ridicat de dificultate.

Teza este organizată conform unei metodologii firești: teorie $\rightarrow$ investigație și validare numerică $\rightarrow$ verificare experimentală.

În continuare voi expune pe scurt conținutul capitolelor și voi sublinia principalele rezultate obținute în cadrul tezei, care aduc elemente de noutate și se constituie drept contribuții originale.

CAPITOLUL 1:

STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR PRIVIND CALCULUL CÂMPURILOR DE TENSIUNI, DEFORMAȚII ȘI DEPLASĂRI ÎN SOLIDE ELASTICE CU DEFECTE

Se ocupă cu analiza bibliografică a problematicii abordate, respectiv cu încadrarea preocupărilor și rezultatelor obținute în vastitatea preocupărilor și rezultatelor similare ale cercetărilor din întreaga lume. Desigur că afirmația mea este pretențioasă fiindcă acest domeniu este deosebit de prolific, dar strădania mea a fost orientată în acest sens.

- De aceea îmi permit să consider ca o contribuție acest amplu studiu bibliografic bazat pe un număr de peste 1000 de titluri, conținând – în principal – lucrări apărute în ultimii zece ani, în marile reviste de specialitate și în lucrările unor congrese mondiale dedicate în exclusivitate problemelor de mecanica ruperii. Din prima parte a capitolului se vede că nu am făcut o simplă inventariere de titluri și de rezultate; am făcut o analiză comparativă și uneori critică, ceeace mi-a permis să desprind principalele direcții de cercetare și problemele care necesită încă investigații teoretice și experimentale. Așa am sesizat marea actualitate a Mecanicii probabiliste a ruperii și am propus Asociației Române de Mecanica Ruperii (ARMR) înființarea unei comisii de specialitate care să monitorizeze acest domeniu. Am sesizat tendința mondială de implementare în rezolvarea problemelor de defecte multiple, a *„exoticei"* metode Monte Carlo, legată strâns de aplicațiile de mecanica ruperii materialelor compozite. Tot așa am constatat orientarea actuală în domeniul calculului numeric spre metoda elementului de frontieră. Am enunțat astfel două domenii relativ puțin investigate în cercetarea științifică românească, ceea ce confirmă eficiența cercetării bibliografice efectuate.

CAPITOLUL 2:

FORMULĂRI TEORETICE ȘI SOLUȚII ANALITICE. CONTRIBUȚII.

Acestui capitol i-am dedicat cel mai mult timp din cei șase ani cât a durat elaborarea acestei teze. A fost evident și o perioadă de inițiere și aprofundare prin examene și referate, dar și o lungă perioadă de investigații personale, multe dintre ele soldate cu insuccese, dar unele încheiate cu rezultate care conțin acel mic „ε" de noutate și originalitate necesar în orice activitate științifică.

În primul paragraf am prezentat o sinteză a principalelor formule din teoria clasică a elasticității cu referire în special la problemele plane – absolut necesară pentru dezvoltarea în ansamblu a lucrării.

În paragraful următor am dat unele definiții din Analiza funcțională foarte utilizate în articolele de specialitate dar puțin folosite de ingineri (din lipsă de cunoaștere).

Paragraful **2.3**. prezintă într-o manieră aparte elementele fundamentale ale mecanicii ruperii. Este pentru prima dată din literatura studiată de mine când se prezintă modul firesc de definire a stării de tensiune la vârful unei fisuri și factorul de intensitate a tensiunilor, deși evident că nu am avut lucrările fundamentale ale lui GRIFFITH, IRWIN și OROWAN. În felul acesta a apărut clar existența singularităților în tensiuni la vârful unei fisuri și rolul funcțiilor complexe în definirea câmpurilor de tensiuni în vecinătatea fisurii.

Începând cu § **2.4.** apar și contribuțiile subsemnatei. Problemele test, care fac subiectul acestui paragraf, erau necesare pentru a putea valida anumite metodologii de calcul și pentru a putea compara unele rezultate noi. De aceea ele se vor regăsi pe tot parcursul tezei, și la partea numerică și la partea experimentală. Am făcut preluarea acestor probleme din literatură în mod critic nu ca o simplă copiere a unor soluții devenite clasice. Problemele analizate sunt:

- planul elastic cu gol circular și cu gol eliptic
- banda elastică cu fisură centrală
- semiplanul cu crestătură în V pe o muchie
- semiplanul alcătuit din două materiale diferite, cu fisură de interfață.

În rezolvarea acestor probleme consider că am următoarele contribuții:

- Chiar în cazul problemei golului circular, evidențierea faptului că prin trecerea de la planul infinit la placa finită coeficientul de concentrare a tensiunilor este mult diferit față de valoarea maximă $3p$ obținută de KIRSCH, fiind de exemplu pentru $\lambda = 0,5$ (λ = diametrul orificiului/lățimea plăcii) egal cu $4,32p$. De altfel această valoare depinde și de modul de definire a coeficientului de concentrare a tensiunilor. Pentru a putea face comparația cu rezultatele teoretice obținute pe planul infinit, trebuie să raportăm vârful de tensiuni la mărimea p, reprezentând tensiunea uniformă de tracțiune de la infinit; transpus în cazul plăcii finite, această tensiune se obține împărțind forța de tracțiune la secțiunea transversală brută, ceeace duce la definirea unui *coeficient de concentrare global* cert diferit de coeficientul teoretic obținut prin raportarea la aria netă din zona slăbită. Acest rezultat nu este sesizat, demonstrat sau comentat în nici un manual de rezistenţa materialelor sau teoria elasticităţii din cele cercetate de subsemnata (v. Bibliografie).

- Verificarea şi validarea acestor rezultate atât teoretic, printr-o descompunere în serie a funţiei de tensiune a lui Airy, cât şi numeric, prin mtoda elementelor finite şi metoda elementelor de frontieră, cât şi experimental, prin fotoelasticimetrie.
- O prezentare nouă, amănunţită a ecuaţiilor Kolosov-Musheli̧svili (expusă însă în **Anexa 3**) aplicate la rezolvarea, prin transformare conformă, a spaţiului cu gol eliptic, pentru care se dă soluţia completă a primei probleme fundamentale. În legătură cu această problemă, sesizarea faptului că în literatura de specialitate circulă încă soluţiile lui KASSIR şi SIH care sunt greşite; în locul lor trebuie introduse soluţiile lui FABRIKANT susţinute şi de MARK KACHANOV.
- Analiza amănunţită a semiplanului care prezintă o crestătură în V pe o muchie; crestătura are margini libere. În legătură cu soluţia lui WILLIAMS (1957) preluată de PARTON, KALANDIYA şi TIMOSHENKO, am atras atenţia asupra ecuaţiei valorilor proprii $\sin 2\lambda\alpha = \lambda \sin 2\alpha$, care, deşi aparent simplă, nu a putut fi rezolvată de nici un program matematic: *Matlab* sau *Mathematica*. Am dat o soluţie aproximativă (care se află la **Anexa 12**) prin dezvoltarea în serie a funcţiei $\sin 2\lambda\alpha$, soluţie în care nu am prea mare încredere. Aceasta o consider, din punctul meu de vedere, încă o problemă deschisă.
- Am generalizat soluţia dată de ZAK şi WILLIAMS pentru cazul semiplanului alcătuit din două materiale diferite, care prezintă o fisură în lungul interfeţei. Generalizarea pleacă de la ideea că cele două materiale au o comportare vâscoelastică; sub aspect matematic aceasta se traduce prin faptul că mărimile mecanice specifice: tensiuni, deformaţii, constante elastice, sunt funcţii de timp. Am folosit o nouă formă de lege constitutivă, reprezentată cu ajutorul unei integrale Stieltjes, deoarece diferenţa dintre formulele fundamentale care descriu comportarea solidului elastic clasic şi a solidului vâscoelastic este dată numai de legea constitutivă. Pentru a elimina factorul timp am utilizat transformata Laplace, şi folosind principiul corespondenţei sau principiul lui Volterra, am rezolvat problema în domeniul imaginii Laplace. Valorile proprii se găsesc ca soluţii ale unei ecuaţii caracteristice de forma unui determinant de tip (8×8) care dezvoltat ne conduce la o imagine Laplace de forma unei funcţii raţionale dată de raportul a două polinoame de gradul patru. Am arătat astfel că în final calculul nu se poate realiza decât numeric (v. § **2.4.7.**).

Ultimul paragraf al acestui capitol (§ **2.5.**) se ocupă de utilizarea funcțiilor de variabilă complexă, în particular a ecuațiilor Kolosov-Mushelișvili, pentru calculul câmpului de tensiuni în cazul planului elastic omogen și izotrop, cu defecte multiple. Acesta ar fi cazul cel mai general posibil când planul are un număr arbitrar de goluri, fisuri, incluziuni, de diferite forme și dimensiuni. Evident că astfel formulată problema nu are încă o soluție închisă, dar prin suprapunere de efecte ea a fost în general rezolvată. Deoarece funcțiile potențial Kolosov-Mushelișvili de multe ori se exprimă cu ajutorul integralelor de tip Cauchy, iar soluțiile finale se dau sub forma unor ecuații integrale de obicei de tip Fredholm de speța a doua, am început acest paragraf cu niște *„pilule"* despre integralele de tip Cauchy și teoria ecuațiilor integrale.

În cadrul acestui paragraf consider că am avut contribuții privind o serie întreagă de aspecte legate de planul cu goluri și fisuri:

- Urmărind metodologia lui Mushelișvili, considerând că funcțiile de potențial sunt funcții liniare, am reușit să găsesc aceste funcții pentru cazul planului cu două fisuri arbitrare, considerând că se cunosc salturile tensiunilor și deplasărilor la vârful fisurii în sistemul local de coordonate (§ **2.5.3.3**).
- Am realizat studiul în detaliu a planului cu două fisuri rectilinii egale (§ **2.5.3.4**), considerat ca un caz particular al soluțiilor obținute pentru fisuri arbitrare, prezentând din literatură și soluțiile finite date de SHIH (1914), ERDOGAN (1962), BARENBLATT (1962) (centralizate în TADA și PARIS). Din lucrările actuale am prezentat soluțiile date de Y.Z. CHEN [C35] – 1997 și de Y. KONISHI [K50] – 1972; după aceste metode am prezentat o soluție nouă bazată pe ideea suprapunerii efectelor, considerând planul solicitat și fără fisură suprapus cu planul nesolicitat, dar cu fisuri încărcate cu tensiunii pe margini (pag.169).
- Pentru metodologia propusă am întocmit un program de calcul și pentru cazul concret studiat numeric și experimental, prin care am obținut graficul variației tensiunilor $\sigma_y(x,0)$ în zona fisurilor.

CAPITOLUL 3:

CONTRIBUȚII PRIVIND FORMULAREA ȘI APLICAREA METODELOR NUMERICE

Capitolul începe cu o sumară prezentare – absolut necesară pentru elaborarea unor algoritmi adaptivi și înțelegerea proceselor de dicretizare – a celor două metode numerice reprezentative: metoda elementelor finite (§ **3.2.**) și metoda elementelor de frontieră (§ **3.3.**). Ambele metode au fost folosite pe larg în cuprinsul tezei cu observația că pentru metoda elementelor finite s-a folosit programul COSMOS/M 2.5, program intrat de mulți ani în practica curentă a inginerilor utilizatori și asupra căreia nu m-am oprit în mod special. Am demonstrat însă documentat că, la ora actuală se afirmă puternic, în special în problemele de mecanica ruperii, metoda elementului de frontieră. De aceea întregul capitol este axat în special pe fundamentarea acestei medote care transformă problemele de domeniu în probleme de contur guvernate de ecuații integrale singulare, a căror rezolvare am făcut-o în capitolul următor cu metoda Monte Carlo. Tot în legătură cu această metodă, am făcut o prezentare a programului de element de frontieră BEASY 8.0, după cunoștința mea utilizat pentru prima dată la noi în țară. Deoarece (M.E.Fr.) necesită o descriere de mare acuratețe a frontierei domeniului am utilizat pentru aceasta funcțiile spline cubice, elaborând și un program pentru interpolarea cu aceste funcții. M-am ocupat după aceea și cu implementarea acestor funcții în (M.E.Fr) utilizând un algoritm adaptiv și am studiat erorile care apar în acest caz, și în final am întocmit un program de element de frontieră pentru probleme bidimensionale de potențial.

Din cuprinsul acestui capitol se desprind următoarele elemente de noutate, care reprezintă contribuții ale autoarei:

- Calculul funcțiilor de formă, în coordonate adimensionale, pentru un element de frontieră cu 5 noduri, descris prin polinoame de gradul patru, descompuse în funcții de gradul întâi. Este polinomul de gradul cel mai mare în care funcția de modelare este dată de produsul unor funcții liniare, cu o formă simplă, elegantă.
- O prezentare documentată a exploziei metodelor de element de frontieră și aplicarea programului de element de frontieră BEASY 8.0 pentru probleme de mecanica ruperii – după cunoștința mea pentru prima oară în literatura științifică din țara noastră.
- Introducerea funcțiilor spline cubice – în trei variante analitice – în aproximarea frontierelor domeniilor bidimensionale – și elaborarea unor programe de interpolare cu astfel de funcții, în limbajul Visual Basic.
- Prezentarea algoritmilor adaptivi și elaborarea unui program pentru interpolarea cu funcții spline cubice.
- O nouă metodă de definire și analiză a erorilor în rezolvarea cu M.E.Fr. a problemelor de câmp.
- Prezentarea în detaliu a modului de implementare a funcțiilor spline în M.E.Fr.
- Elaborarea pe baza rezultatelor amintite, a unui program de element de frontieră pentru rezolvarea problemelor de câmp bidimensionale, în limbajul Visul Basic.

- Analiza teoretică, numerică și experimentală (fotoelastică) a plăcii plane de dimensiuni finite cu două sau trei goluri circulare, ocazie cu care s-a evidențiat variația poziției punctului de pe contur în care apare tensiunea maximă.

Notă: Volumul mare de pagini al capitolului 3 se datorează în special programelor pe care le-am întocmit și pentru care am dat și explicații complete! Ele se întind pe 130 de pagini.

CAPITOLUL 4:

MECANICA PROBABILISTĂ A RUPERII. PROBLEME. PRINCIPII. MODELE. METODE. CONTRIBUȚII

Este un capitol cu totul nou în literatura științifică românească, încercând să implementeze metodele de calcul și interpretare probabilistică în problemele de mecanica ruperii, constituindu-se ca o pledoarie pentru un nou segment de cercetare numit Mecanica Probabilistă a Ruperii (M.P.R.). Capitolul este strâns legat de celelalte două anterioare, și cuprinde atât elemente de calcul teoretic, cât și aspecte de analiză numerică.

El începe cu un paragraf intitulat: „Pledoarie pentru Mecanica probabilistă a ruperii" (Probabilistic Fracture Mechanics) care s-a constituit ca un articol aflat în curs de publicare în Buletinul ARMR (autori: I. DOBRE, C.MUNTEAN). De altfel lucrările analizate în acest paragraf arată importanța pe care comunitatea științifică internațională o acordă conceptelor probabilistice și descrierilor statistice a majorității parametrilor care intervin într-o problemă de M.R. Astfel se pleacă de la caracterizarea statistică a proprietăților mecanice și a geometriei și distribuției defectelor și se ajunge la descrierea probabilistă a câmpului de tensiuni și deplasări și la calculul probabilist al elementelor specifice de mecanica ruperii (K_{ij}, J). În multe țări avansate d.p.d.v. tehnologic, ca de exemplu SUA, s-a ajuns în faza de standardizare, există coduri ASME și programe de calculator bazate pe tehnicile și metodele de simulare Monte Carlo, utilizând în general distribuțiile gamma și Weibull. Aceasta înseamnă ajungerea la maturitate a domeniului.

În paragraful **4.2.** se prezintă câteva elemente de sinteză din teoria probabilităților și statistica matematică. Extragerea elementelor reprezentative și a noțiunilor necesare calculelor ulterioare, a reprezentat un efort deosebit, deoarece în acest domeniu s-au scris zeci de volume remarcabile în cadrul școlii românești de „Statistică și probabilitate" – creată și condusă de academicienii Octav ONICESCU și Gh. MIHOC. A trebuit să scot în evidență legătura dintre probabilitate (ca mărime a priori) și cea de frecvență relativă (ca mărime a posteriori) stabilită de convergența în probabilitate. A trebuit să dau câteva noțiuni din teoria selecției și estimației arătând că media de selecție estimează absolut corect media teoretică, deoarece aceste rezultate stau la baza formulării metodei Monte Carlo.

În condițiile unei totale lipse de documentație, cred că am reușit să dau în cadrul § **4.3.** o prezentare a metodei Monte Carlo care să explice utilizarea experiențelor aleatoare în calcularea unor mărimi deterministe, cum sunt de exemplu integralele.

Din cele prezentate mai sus, cred că se desprind ca și contribuții ale autoarei următoarele:

- Formularea aspectelor fundamentale ale unui capitol nou al mecanicii ruperii intitulat „Mecanica probabilistă a ruperii" și argumentarea necesității implementării acestei problematici în activitatea colectivelor de cercetare, standardizare, expertizare și proiectare; în acest sens am făcut propuneri concrete către ARMR.
- Realizarea unei sinteze echilibrate a elementelor necesare din teoria probabilităților și statistica matematică pentru descrierea în limbaj probabilist a mărimilor specifice de mecanica ruperii;
- O prezentare conceptuală coerentă și explicită a metodei Monte Carlo încheiată cu *elaborarea unui program de calcul a integralelor multiple cu metoda Monte Carlo în limbajul Visual Basic*;
- În final, *elaborarea unui program Fortran pentru calculul modulelor elastice efective* în cazul plăcilor cu fisuri având orientări arbitrare și amplasate într-o rețea periodică.

CAPITOLUL 5:

CERCETĂRI, VERIFICĂRI ȘI VALIDĂRI EXPERIMENTALE

Se ocupă cu validarea experimentală prin fotoelasticimetrie a unora din problemele cercetate până în acest capitol, sau cu măsurarea numerică a câmpurilor de tensiuni în cazul unor probleme noi, complicate, pentru care nu am reușit să dau soluție teoretică.

În § **5.1.** și § **5.2.** am prezentatat în mod sumar câteva cunoștințe de fotoelasticimetrie.

Paragraful **5.3.** se ocupă în mod special de prelucrarea imaginilor fotoelastice în cazul corpurilor cu fisuri, specifice mecanicii ruperii. În acest caz problema cea mai modernă este determinarea factorilor K dintr-o singură izocromată. Pe lângă metodele prezentate de L. MARȘAVINA în [G17], am prezentat o serie de lucrări noi: CHEN ZENGTAO [Z4] [Z5]/1995; CHEN FENG [C28]/1997; LI XIAN-FANG [L22]/1998.

În paragraful **5.4.** am reluat problema test nr.I. privind platbanda cu un gol circular, căreia i-am dat o altă soluție teoretică prin descompunerea în serie de puteri a tensiunilor în coordonate polare.

În paragraful **5.5.** am studiat cazul platbenzilor cu două şi trei orificii egale şi inegale, pentru care am stabilit şi variaţia tensiunilor normale circumferenţiale, precum şi a tensiunilor σ_x şi σ_y în punctele extreme ale orificiului de dimensiuni mai mici. În cazul platbenzii cu două orificii inegale pentru prima dată în literatură se prezintă grafice care dau variaţia raportului $\frac{\sigma_\theta}{q}$ în funcţie de raportul razelor R/r, pentru cele două puncte caracteristice de pe conturul orificiului mic. Acestea au fost realizate utilizând programul Excel.

În paragraful **5.6.** se prezintă imaginile fotoelastice obţinute şi prelucrarea acestora, precum şi comparaţia rezultatelor mele cu cele date de PETERSON [P33] (acolo unde au existat date pentru aceasta).

În cadrul acestui capitol consider ca şi contribuţii ale subsemnatei următoarele:

- Analiza pertinentă a metodelor moderne de determinare a factorului de intensitate a tensiunilor prin prelucrarea unei singure izocromate;
- O nouă analiză a stării de tensiune în cazul platbenzii de dimensiuni finite solicitată la tracţiune, având un gol circular; această prelucrare se bazează pe o dezvoltare în serie a funcţiei de tensiune a lui Airy, şi pe baza ei, o descompunere în serie de puteri a tensiunilor în coordonate polare. Rezultatele sunt prezentate în graficul din **Fig. 5.4.2.**
- Am studiat în detaliu, teoretic, numeric şi experimental platbanda elastică cu două orificii inegale, pentru care am dat graficele de variaţie a lui σ_θ/q în funcţie de raportul R/r pentru punctele caracteristice de pe conturul L_0 al orificiului cu dimensiunile cele mai mici. Aceste grafice sunt o noutate absolută în literatura consacrată acestui domeniu.
- Am obţinut o serie de rezultate fotoelastice pentru cazuri particulare de platbenzi cu goluri şi/sau fisuri, pentru care nu am reuşit însă să dau soluţii analitice, dar care sunt o noutate în baza de date a mecanicii ruperii.

ANEXE

ARGUMENTAȚIE

Deoarece problemele de care m-am ocupat în teză sunt prezentate în literatura de specialitate cu ajutorul unui aparataj matematic deosebit de elevat şi sofisticat, care de obicei nu se află la îndemâna inginerului, indiferent de profil, în ultimii cinci ani am făcut eforturi deosebite pentru a-mi completa pregătirea în următoarele domenii mari:

I. BAZE MATEMATICE, cuprinzând în special:
- Teoria ecuaţiilor integrale (cu precădere singulare)
- Teoria şi practica transformărilor integrale
- Funcţii de variabilă complexă. Integrale de tip Cauchy
- Elemente de teoria potenţialului
- Calculul tensorial
- Metoda Monte Carlo

II. BAZELE MECANICII SOLIDULUI DEFORMABIL
- Teoria elasticităţii şi elemente de teoria plasticităţii
- Teoria solidului deformabil cu defecte: goluri, incluziuni, fisuri
- Mecanica ruperii materialelor

III. BAZELE CALCULULUI NUMERIC
- Metoda elementului finit
- Programul „COSMOS"
- Metoda elementelor de frontieră şi programul „BEASY"

IV. METODE EXPERIMENTALE
- Tensometrie electrică rezistivă
- Fotoelasticimetrie

Aceste volum deosebit de muncă a fost posibil în special datorită programului impus de conducătorul tezei, care mi-a cuprins majoritatea materialului citat mai sus în referatele şi examenele obligatorii.

De aceea, pentru a nu repeta în cadrul tezei o serie de noţiuni fundamentale pe care le-am utilizat şi pe care le-am presupus cunoscute apriori, mi-am permis să le prezint sumar în anexele care urmează. Am avut astfel şi posibilitatea unui comentariu pertinent al bibliografiei studiate. În felul acesta în materialul cuprins în teza propriu-zisă am prezentat sinteze şi rezultate originale.

Mai există încă o explicaţie şi justificare legată de faptul că, datorită importanţei deosebite – ştiinţifică şi aplicativă – a domeniului, numărul lucrărilor ştiinţifice publicate este impresionant şi dezarmant, iar nivelul matematic foarte ridicat.

Ţin să precizez că temele prezentate în „Anexe" nu sunt simple rezumate din cărţile de specialitate; ele reprezintă o sinteză personală a domeniului temei, pe care am încercat să o reformulez într-o manieră cât mai clară posibil, renunţând uneori la sofisticate şi condensate subtilităţi matematice, care de altfel au puţină utilitate aplicativă.

* * *

*CÂTEVA ELEMENTE DIN „TEORIA POTENŢIALULUI". FORMULELE LUI GREEN**

§1. Potenţialul newtonian sau potenţialul de volum

(I.) În spaţiul euclidian E_3 raportat la sistemul xOyz, considerăm două puncte: **Q** (ξ, η, ρ) şi **P**(x,y,z). În aceste două puncte se află două particule materiale **m** şi **M** (**Fig. 1**). Ştim că între aceste două particule se exercită acţiuni reciproce pe care le reprezentăm prin forţe şi pe care le-am numit ***forţe de atracţie universală*** sau ***forţe newtoniene***; intensitatea acestor forţe este direct proporţională cu masele **m** şi **M** şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre cele două puncte.

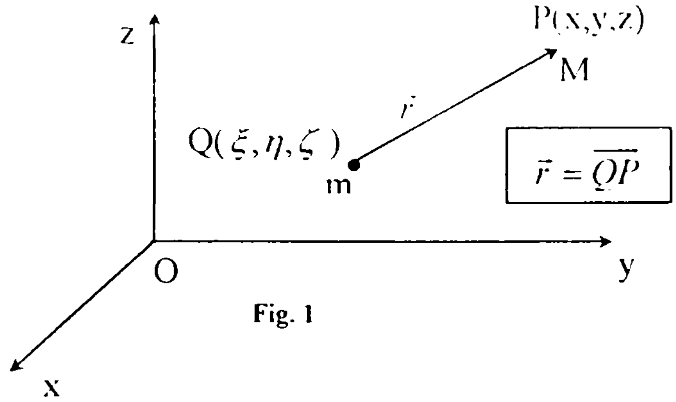


Fig. 1

Considerăm **Q** fix şi **P** variabil în E_3 şi notăm $\vec{r} = \overline{QP}$. Forţa de atracţie newtoniană pe care o exercită **m** asupra lui **M** este dată de următoarea formulă analitică:

$$\vec{F} = -f\frac{M \cdot m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad cu\ proiectiile \rightarrow \begin{cases} F_x = -f\dfrac{Mm}{r^2}\cdot\dfrac{x-\xi}{r} \\ F_y = -f\dfrac{Mm}{r^2}\cdot\dfrac{x-\eta}{r} \\ F_z = -f\dfrac{Mm}{r^2}\cdot\dfrac{x-\zeta}{r} \end{cases} \tag{1.1}$$

Alegând sistemul de unităţi astfel încât constanta universală f=1 şi presupunând că în **P** se găseşte o masă egală cu unitatea **M**=1, vom avea:

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_x = -\dfrac{m}{r^2}\cdot\dfrac{x-\xi}{r} \\ F_y = -\dfrac{m}{r^2}\cdot\dfrac{x-\eta}{r} \\ F_z = -\dfrac{m}{r^2}\cdot\dfrac{x-\zeta}{r} \end{cases} \tag{1.2}$$

Se defineşte astfel un ***câmp vectorial*** $\vec{F} : E_3 \setminus \{Q\} \rightarrow V_3$ care se numeşte ***câmpul atracţiilor newtoniene*** datorită masei **m** situată în punctul **Q**.

Mai ştim că dacă există o funcţie de punct $U(x,y,z) = U(P)$ continuă şi derivabila pe un anumit domeniu, astfel încât forţa $\vec{F}$ să se exprime prin:

$$\vec{F} = gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{1.3}$$

vom zice ca $\vec{F}$ este o forţă conservativă care derivă din funcţia U:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x};\quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y};\quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.4}$$

În locul lui U se poate lua funcţia:

$$V(P) = -U(P) \tag{1.5}$$

* Această anexă reprezintă o prelucrare originală a autoarei a unui material vast răspândit în cele mai diverse tratate de matematică. Deoarece se află la baza teoriei „elementelor de frontieră" am făcut de multe ori şi demonstraţia afirmaţiilor enunţate

care se numeşte ***potențialul forțelor***.

În cazul nostru potențialul forțelor este de forma:

$$V(P) = \frac{m}{r} \quad \Leftrightarrow \quad U(P) = -\frac{m}{r} \tag{1.6}$$

care se numeşte ***potențialul newtonian*** creat de particula materială **m** plasată în **Q** într-un alt punct **P** $\neq$ **Q**.

(II.) **Cazul unei distribuți discrete de sarcini**. Considerăm un sistem de particule materiale distribuite în punctele $Q_i(\xi_i, \eta_i, \rho_i)$ de mase m_i. Fie punctul $P(x, y, z)$ în care există o masă M=1. Atunci, masa m_i, acționează asupra masei M cu forța:

$$\vec{F_i} = \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r_i}}{r_i} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r_i}}{r_i} \tag{1.7}$$

Potențialul creat în punctul **P** în cele n particule cu masa m_i, va fi

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} \quad unde \quad r_i = \sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2} \tag{1.8}$$

(III.) **Cazul unei distribuții continui**. Într-un domeniu Ω din spațiu presupunem că avem o distribuție continuă a masei. Această distribuție continuă în fiecare punct $Q \in \Omega$ ne este dată de funcția:

$$\rho(Q) = \rho(\xi, \eta, \zeta)$$

care se numeşte ***densitatea de distribuție a masei*** în punctul **Q**.

Împărțim domeniul Ω în domenii elementare $\Delta\omega_i$ de masă Δm_i; putem scrie $\Delta m_i = \rho\Delta\omega_i$. Prin procedeele obişnuite de trecere de la discret la continuu, de la sume finite la integrale, potențialul newtonian datorit unei distribuții continue în Ω, cu densitatea ρ se scrie:

$$V(P) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} = \int_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\omega_Q = \int_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{r} d\omega \tag{1.9}$$

Potențialul definit prin formula (1.9) se numeşte ***potențial de volum***. Se presupune că $\rho(Q)$ este o funcție mărginită şi integrabilă pe Ω.

Notă: *Pentru generalitate*, deoarece forța dintre sarcinile electrice sau dintre polii magneților are acelaşi caracter ca şi cea gravitațională, la aplicarea problemelor de potențial în metoda elementelor de frontieră, vom vorbi de **surse** şi nu de **mase**; vom presupune că sursa noastră unitară produce în punctul de coordonată x un potențial de tip newtonian $\frac{1}{r(\xi, x)}$ care este o funcție continuă indefinit diferențiabilă, cu excepția punctului ξ unde se află sursa.

§2. Potențialul de simplu strat şi de dublu stat

Se poate întâmpla ca potențialele noastre de masă m_i să fie situate pe o suprafață Σ şi să aibă pe această suprafață o distribuție continuă, cu densitatea superficială μ. Potențialul creat în punctul **P**(x,y,z) se exprimă printr-o integrală de forma:

$$V(P) = \int_{\Sigma} \frac{\mu(Q)}{r} d\sigma_Q = \int_{\Sigma} \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\sigma_Q \tag{2.1}$$

Potențialul newtonian definit de formula (2.1) se numeşte ***potențial de simplu strat***. Dacă μ este continuă iar Σ este o suprafață cu normala continuă, integrala are sens şi pentru $P \in \Sigma$, deci potențialul de simplu strat este definit pe E_3 (sau R_3).

Câmpul newtonian datorat acestei distribuții se poate obține pentru $\forall M \in E_3 \setminus \Sigma$, derivând sub semnul de integrare:

$$\vec{V}(P) = -gradU(P) = \int \mu(Q) \frac{\vec{r}}{r^3} d\sigma_Q, \qquad \vec{r} = \overline{QP} \tag{2.2}$$

În punctele P de pe suprafața Σ, funcția de sub semnul integral prezintă, în general, o discontinuitate de aceiaşi natură cu cea a factorului $1/r^2$ pentru $r = 0$, ceea ce face ca integrala de suprafață să fie divergentă. Deci în general formula (2.2) defineşte un câmp newtonian pe $E_3 \setminus \Sigma$.

Potențialul de dublu strat. În teoria potenialului se mai foloseşte şi noțiunea de potențial de strat dublu, întâlnită în electrostatică şi în multe probleme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul 2, aplicabilă în M.E.Fr. – în formularea indirectă.

Considerăm o suprafață Σ pe care o presupunem de clasă C^1 (aceasta înseamnă că suprafața este reprezentată analitic printr-o funcție de clasă C^1: continuă, şi cu derivate parțiale continue). Să considerăm un punct Q pe Σ şi normala la suprafața Σ în Q, de vector unitar $\vec{n}$ (v. **Fig. 2**) ; $|\vec{n}| = 1$

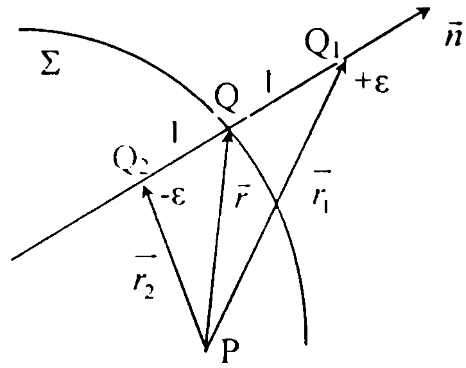


Fig. 2

De o parte şi de alta consider punctele Q_1 şi Q_2 situate la distanța l de Q; presupun că în Q_1 se află o sarcină $+\varepsilon$ şi în Q_2 o sarcină $-\varepsilon$. Potențialul creat de aceste două sarcini într-un punct P(x,y,z) se obține simplu:

sarcina $+\varepsilon \longrightarrow$ crează potențialul $\dfrac{\varepsilon}{r_1}$; sarcina $-\varepsilon \longrightarrow$ crează potențialul $-\dfrac{\varepsilon}{r_2}$

Potențialul total este:

$$V(P) = \frac{\varepsilon}{r_1} - \frac{\varepsilon}{r_2} = \varepsilon\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 2l\varepsilon \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)_{Q=Q^*} \tag{2.3}$$

într-un punct Q* convenabil ales pe direcția $\vec{n}$. Relația s-a obținut aplicând formula creşterilor finite.

Fie $2l$ distanța dintre punctele Q_2 şi Q_1 şi $\vec{n}$ versorul vectorului $\overline{Q_2Q_1} \Rightarrow \overline{Q_2Q_1} = 2l\vec{n}$. Când $l \longrightarrow 0$ cu $\vec{n}$ constant vom accepta că produsul $2l\varepsilon$ are o limită finită: $2l\varepsilon = \mu$; se obține o nouă configurație care se numeşte ***sursă dublă***, ***dublet*** sau ***dipol***. Această configurație este complet determinată de vectorul $\vec{\mu} = \mu \cdot \vec{n}$, care se numeşte ***momentul dipolului***.

Atunci potențialul dipolului în punctul P se deduce din (3) aplicând formula creşterilor finite:

$$V(P) = \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.4}$$

Dacă vom presupune că dipolii de pe Σ au o distribuție continuă dată de funcția $\mu(Q)$, atunci potențialul în punctul P este:

$$W(P) = \int_{\Sigma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_Q \tag{2.5}$$

care se numeşte ***potențial de dublu strat***.

§3. Integrale improprii

Se observă că în cazul potențialelor cercetate intervin integrale de următoarea formă:

$$I = \int_{\Omega} \frac{f(Q)}{r^{\alpha}} d\omega \qquad \alpha > 0 \tag{3.1}$$

unde $f(Q)$ este o funcție mărginită şi integrabilă pe Ω, r reprezentând distanța dintre două puncte, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ şi $P(x, y, z)$, adică $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Dacă amândouă punctele P și Q $\in \Omega$, atunci funcția $1/r$ are un punct singular în P=Q, adică are o discontinuitate de natură polară; această funcție este definită peste tot în E_3 cu excepția punctului P=Q.

Știm că dacă în domeniul de integrare, funcția are o astfel de discontinuitate polară, integrala nu se mai poate defini ca o sumă; în acest caz ea se definește ca o așa-numită ***integrală improprie***.

Problema care se pune este de a stabili când are sens integrala improprie de această formă (3.1). În acest scop vom demonstra următoarea teoremă:

T. ***Integrala improprie (3.1), când P,Q $\in \Omega$, are sens dacă $\alpha < 3$.***

Demonstrație:

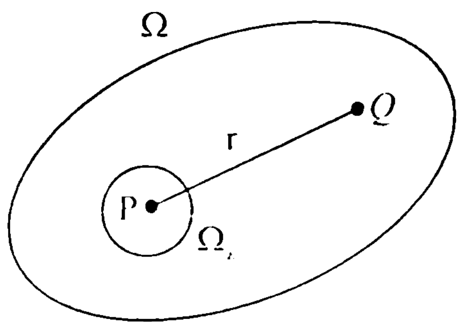


Fig.3

Fie domeniul nostru Ω cu punctele P(x,y,z), și Q(ξ,η,ζ). În punctul P=Q (deci când $r \to 0$), funcția $1/r$ este discontinuă. Presupun că punctul P este fix, și-l exclud împreună cu o vecinătate a sa de formă sferică de rază ε (v. Fig. 3).

$$I = \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} \frac{f(Q)}{r^\alpha} d\omega + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{f(Q)}{r^\alpha} d\omega \tag{3.2}$$

Prima integrală din (3.2) are sens deoarece $\dfrac{1}{r^\alpha}$ are sens.

Notez: $I_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \dfrac{f(Q)}{r^\alpha} d\omega$

Avem majorările succesive evidente:

$$|I_\varepsilon| \le \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f(Q)|}{r^\alpha} d\omega \le M \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{d\omega}{r^\alpha}$$

unde am notat cu M marginea superioară a lui f(Q). Știm însă, de la sistemele de coordonate sferice că:

- elementul de volum $d\omega = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi dQ$
- elementul de suprafață pe o sferă de rază R: $d\sigma = R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$

Pe sfera de rază unitară (R=1) elementul de suprafață va fi: $d\tilde{\omega} = \sin\varphi d\varphi d\theta$ și deci $d\omega = r^2 dr \, d\tilde{\omega}$.

Rezultă:

$$|I_\varepsilon| \le M \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{d\omega}{r^\alpha} = M \int_0^\varepsilon r^{2-\alpha} dr \int_{\Sigma_{...}} d\tilde{\omega} = M \left| \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha} \right|_0^\varepsilon \cdot 4\pi \cdot 1^3 = M \cdot \frac{4\pi}{3-\alpha} \cdot \varepsilon^{3-\alpha}$$

Se vede că numai dacă $\alpha < 3$ când $\varepsilon \to 0 \Rightarrow |I_\varepsilon| \to 0$, c.c.t.d.

§4. Câteva formule integrale uzuale. Formulele lui Green

Considerăm formula integrală a divergenței, cunoscută sub numele de Gauss-Ostrogradski:

$$\underbrace{\int_\Omega div \vec{F} \, d\omega}_{\text{integrală de volum}} = \underbrace{\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma}_{\text{integrală de suprafață}} \tag{4.1}$$

Această formulă (4.1) este valabilă pentru fiecare câmp vectorial $\vec{F}(P)$ de clasă C^0 în $\overline{\Omega}$ (închiderea lui Ω), de clasă C^1 în Ω, Σ fiind frontiera lui Ω ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$).

Cu ajutorul acestei formule putem deduce alte două formule, considerând câmpul vectorial de forma:

$$\vec{F}(P) = \varphi(P) \cdot grad \, \psi(P) = \varphi \cdot grad \, \psi \tag{4.2}$$

unde: $\begin{cases} - \ \varphi(P) \text{ este un câmp scalar definit pe } \overline{\Omega}\text{, de clasă } C^0 \text{ pe } \overline{\Omega}\text{, și de clasă } C^1 \text{ în } \Omega \\ - \ \psi(P) \text{ este de asemenea un câmp scalar definit pe } \overline{\Omega}\text{, de clasă } C^1 \text{ pe } \overline{\Omega}\text{, și de clasă } C^2 \text{ în } \Omega. \end{cases}$

Înlocuim în (4.1) și rezultă:

$$\int_\Omega div(\varphi\, grad\psi)d\omega = \int_\Sigma \varphi\, grad\psi \cdot \vec{n}\, d\sigma \tag{4.3}$$

Dar știm că:

$$div(\varphi\, grad\psi) = \nabla(\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\nabla\nabla\psi$$

unde

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{(operatorul „nabla").}$$

Dar $\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ (laplacianul sau operatorul lui Laplace).

Deci: $div(\varphi\, grad\psi) = grad\varphi \cdot grad\psi + \varphi\Delta\psi$

Mai știm că:

$$grad\psi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{(derivata funcției } \psi \text{ după normală, în punctul P)}$$

Relația (4.3) devine:

$$\boxed{\int_\Omega \varphi \cdot \Delta\psi \cdot d\omega + \int_\Omega grad\varphi \cdot grad\psi \cdot d\omega = \int_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma} \tag{I}$$

Am obținut ***prima formulă a lui Green***.

Formula a doua a lui Green. Lărgim ipotezele de mai sus și considerăm:

$$\begin{cases} \varphi(P) \to \text{ definit în } \overline{\Omega}\text{, de clasă } C^1 \text{ în } \overline{\Omega} \text{ și de clasă } C^2 \text{ în } \Omega \\ \psi(P) \to \text{ definit în } \overline{\Omega}\text{, de clasă } C^1 \text{ în } \overline{\Omega} \text{ și de clasă } C^2 \text{ în } \Omega \end{cases}$$

În acest caz în formula (I) putem schimba rolul lui φ cu ψ:

$$\int_\Omega \psi \cdot \Delta\varphi \cdot d\omega + \int_\Omega grad\psi \cdot grad\varphi \cdot d\omega = \int_\Sigma \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma \tag{4.4}$$

Scădem ultima relație (4.4) din (I) și obținem:

$$\boxed{\int_\Omega (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) = \int_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma} \tag{II}$$

Am obținut astfel ***a doua formulă a lui Green***.

Cazuri particulare:

a) $\varphi = \psi$; din (I) rezultă:

$$\boxed{\int_\Omega \varphi\Delta\varphi\, d\omega + \int_\Omega (grad\varphi)^2 d\omega = \int_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma} \tag{III}$$

b) $\varphi = 1$; în acest caz $\vec{F}(P) = grad\,\psi(P)$; din (I) rezultă:

$$\boxed{\int_\Omega \Delta\psi\, d\omega = \int_\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma} \tag{IV}$$

§5. Reprezentarea câmpurilor scalare de clasă C^1 în Ω prin potențiali

Vom presupune că avem un câmp scalar $\varphi(P)$: $\overline{\Omega}$, de clasă C^0 pe $\overline{\Omega}$ și de clasă C^1 în Ω. Să arătăm că în aceste condiții funcția noastră $\vec{F}(P)$ se poate reprezenta prin potențiali.

Pentru aceasta vom demonstra următoarea teoremă:

T. *Câmpul scalar $\varphi(P)$ definit în condițiile de mai sus, de clasă C^0 pe $\overline{\Omega}$ și de clasă C^1 pe Ω, se poate reprezenta prin formula:*

$$\boxed{p\varphi(P)=\int_\Omega grad\,\varphi(Q)\cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right)d\omega-\int_\Sigma \varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_Q} \qquad (V)$$

unde:

$$p=\begin{cases}4\pi, & daca\ P\in\Omega\\ 2\pi, & daca\ P\in\Sigma=frontiera\ lui\ \Omega\\ 0, & daca\ P\notin\overline{\Omega}\ (exterior\ domeniului\ \overline{\Omega})\end{cases}$$

Demonstrație.

a) **Cazul în care** $P\notin\overline{\Omega}$, deci p=0. (Să observăm că în notația noastră **Q** este punctul variabil, iar **P**(x,y,z) este privit ca parametru.

Folosim (I) deoarece **P** este exterior lui $\overline{\Omega}$, deci integralele de volum care apar au sens fiindcă $Q\in\Omega$; fac $\psi(Q)=\frac{1}{r}$, care nu are singularitate în acest caz ($r=\left|\overline{PQ}\right|$)

$$\int_\Omega \varphi(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)d\omega_Q+\int_\Omega grad\,\varphi(Q)\cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right)d\omega_Q=\int_\Sigma \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_Q$$

sau:

$$\int_\Omega grad\,\varphi(Q)\cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right)d\omega_Q-\int_\Sigma \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_Q=-\int_\Omega \varphi(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)d\omega_Q \qquad (*)$$

Să arătăm că membrul drept este nul! Pentru aceasta este suficient să arăt că: $\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=0$, adică funcția $1/r$ este o soluție a ecuației lui Laplace; aceasta se numește și ***soluția elementară***, iar în metoda reziduurilor ponderate se numește soluție fundamentală.

Dar $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$.

Știm că:

$$grad_P\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),$$ acesta reprezentând gradientul lui $1/r$ în raport cu coordonatele punctului **P** (sau în punctul **P**).

$$\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2(x-\xi)}{2r}=-\frac{x-\xi}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x-\xi}{r^3}\right]=-\frac{1\cdot r^3-(x-\xi)\cdot 3r^2\frac{x-\xi}{r}}{r^6}=-\frac{r^3-3r(x-\xi)^2}{r^6}$$

Analog găsim:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^3-3r(y-\eta)^2}{r^6};\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^3-3r(z-\zeta)^2}{r^6}$$

deci:

$$\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3r^3-3r\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]}{r^6}=-\frac{3r^3-3r^3}{r^6}=0$$

Dar

$$\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=-\Delta_P\left(\frac{1}{r}\right)=0,\ \text{c.c.t.d.}$$

Formula (*) este analoagă cu (V) și fiindcă am pornit de la (I) este adevărată.

b) Cazul când $P \in \Omega$. Acum **P** și **Q** $\in \Omega$ deci în **P=Q** avem o singularitate. Exclud punctul **P** din Ω cu ajutorul unei sfere de rază ε, notată cu Ω_ε (v **Fig. 4**). Aplicăm formula (I) domeniului $\Omega - \Omega_\varepsilon$.

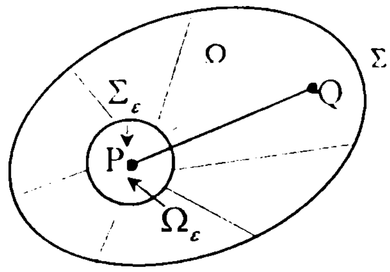


Fig. 4

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} \varphi \Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega + \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} grad\,\varphi(Q)\cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega = \int_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_Q$$

Pe suprafața Σ_ε normala exterioară este dirijată către **P**, deci $\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$. Avem astfel:

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_Q = -\int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi(Q)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_Q = \int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi(Q)\frac{1}{r^2} d\sigma_Q = \int_{\Sigma_{\varepsilon=1}} \varphi(Q) d\tilde{\omega} = 4\pi\varphi(Q^*)$$

Dar $d\sigma_Q = r^2 d\tilde{\omega}$ unde $d\tilde{\omega}$ este elementul de suprafață pe sfera de rază $\varepsilon = 1$.

Ultimul rezultat se obține pe baza unor teoreme de medie pentru integralele de suprafață.

$Q^* \in \Sigma_\varepsilon$ este un punct situat pe suprafața sferei de rază ε. Atunci:

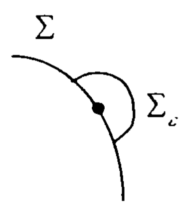
$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} grad\varphi \cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_Q = 4\pi\varphi(Q^*)$$

$$grad\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$ unde $\left|\dfrac{\vec{r}}{r}\right| = 1$; avem aici $\alpha = 2 < 3$, deci prima integrală are sens.

Când $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \varphi(Q^*) \to \varphi(P)$, și rezultă:

$$\boxed{\int_{\Omega} grad\varphi \cdot grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 4\pi\varphi(P)}$$, c.c.t.d.

c) Cazul când $P \in fr.\Omega$ (v. **Fig. 5**), atunci în loc de o sferă voi lua o semisferă și deci apare factorul 2π.



După ce am demonstrat această teoremă adun formulele (I) și (V):

Fig. 5

$$p\varphi(P) = \int_{\Omega} grad\varphi \cdot grad_Q\left[\psi(Q) + \frac{1}{r}\right] d\omega - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left[\psi(Q) + \frac{1}{r}\right] d\sigma + \int_{\Omega} \varphi\Delta\psi d\omega$$

Dacă vom nota : $H(P,Q) = \psi(Q) + \dfrac{1}{r}$ rezultă:

$$p\varphi(P) = \int_{\Omega} grad\varphi \cdot grad\, H(P,Q) d\omega_Q - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial H(P,Q)}{\partial n} d\sigma_Q + \int_{\Omega} \varphi\Delta\psi d\omega \qquad \text{(VI)}$$

§6. Reprezentarea câmpurilor $\varphi(P)$ de clasă C^2 prin potențiale

Teoremă. ***Dacă funcția $\varphi(P)$ este definită în $\overline{\Omega}$, de clasă C^1 în $\overline{\Omega}$ și de clasă în C^2 în Ω, atunci ea se poate reprezenta printr-o formulă de următoarea formă:***

$$\boxed{p\varphi(P)=\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(Q)]d\sigma-\int_{\Sigma}\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma-\int_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta_Q\varphi(Q)d\omega}\tag{VII}$$

unde:

$$p=\begin{cases}4\pi & daca\ P\in\Omega\\ 2\pi & daca\ P\in\Sigma\\ 0 & daca\ P\notin\overline{\Omega}\end{cases}$$

Justificarea acestei formule se poate face folosind tot prima formulă a lui Green în care înlocuim pe φ cu ψ și luăm $\varphi(Q)=\dfrac{1}{r}$. Vom obține:

$$\int_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta_Q\psi(Q)d\omega+\int_{\Omega}grad_Q\varphi(Q)grad\left(\frac{1}{r}\right)d\omega-\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(Q)]d\sigma=0\tag{a}$$

Între formulele (V) și (a) eliminăm a doua integrală:

$$\int_{\Omega}grad\varphi\, grad\left(\frac{1}{r}\right)d\omega=p\varphi(P)+\int_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

Formula (VIII). Stabilim formula de reprezentare. Luăm formula (VII) și formula a II-a a lui Green:

$$\begin{cases}p\varphi(P)=\displaystyle\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(Q)]d\sigma-\int_{\Sigma}\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma-\int_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta_Q\varphi(Q)d\omega\\ 0=\displaystyle\int_{\Omega}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)d\omega-\int_{\Sigma}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma\end{cases}$$

Însumăm:

$$p\varphi(P)=\int_{\Omega}\varphi\Delta\psi-\int_{\Omega}\left[\psi(Q)+\frac{1}{r}\right]\Delta Q\varphi(Q)d\omega_Q-\int_{\Sigma}\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left[\psi(Q)+\frac{1}{r}\right]d\sigma+\int_{\Sigma}\left[\psi(Q)+\frac{1}{r}\right]\frac{\partial}{\partial n}[\psi(Q)]d\sigma$$

Notez $H(P,Q)=\psi(Q)+\dfrac{1}{r}$ și rezultă:

$$\boxed{p\varphi(P)=\int_{\Omega}\varphi\Delta\psi d\omega_Q-\int_{\Omega}H(P,Q)\Delta_Q\varphi(Q)d\omega_Q-\int_{\Sigma}\varphi(Q)\frac{\partial H(P,Q)}{\partial n}d\sigma_Q+\int_{\Sigma}H(P,Q)\frac{\partial}{\partial n}[\varphi(Q)]d\sigma_Q}\tag{VIII}$$

§7. Alte probleme legate de potențialul newtonian

Am văzut că potențialul newtonian creat de o distribuție continuă într-un punct P este:

$$V(P)=\int_{\Omega}\frac{\rho(Q)}{r}d\omega_Q\tag{7.1}$$

sau pentru cazul celor două mase (v. Fig. 6):

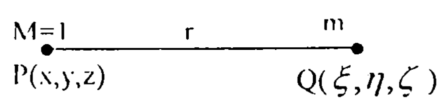


Fig. 6

$$V(P)=\frac{m}{r} \Rightarrow \vec{F}=grad\ V(P)$$

Problema se poate pune şi în cazul unei distribuţii oarecare pe un volum oarecare din spaţiu.

Teoremă. ***Dacă distribuţia $\rho(Q)$ este mărginită şi integrabilă în Ω, atunci potenţialul newtonian (7.1) este de clasă C^1 în tot spaţiul euclidian E_3.***

Demonstraţie.

Vom arăta mai întâi că V(P) este o funcţie continuă în tot spaţiul şi apoi că are derivate continui de ordinul 1 în raport cu x,y,z, coordonatele punctului P.

Vom arăta că integrala (7.1) are sens ca integrală improprie deoarece suntem în cazul $\alpha=1<3$.

Pentru demonstraţie vom considera o funcţie auxiliară definită astfel:

$$f_\varepsilon(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & daca \quad \varepsilon>r\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(3-\dfrac{r^2}{\varepsilon^2}\right) & daca \quad \varepsilon\le r\end{cases} \tag{7.2}$$

unde ε este raza unei sfere cu centrul în P conţinută în întregime în Ω. (Se vede imediat că $f_\varepsilon(r)\in C^2$ şi este mărginită în tot spaţiul.) Vom nota cu:

$$V_\varepsilon(P)=\int_\Omega \rho(Q)f_\varepsilon(r)d\omega_Q \tag{7.3}$$

Vom evalua diferenţa:

$$|V(P)-V_\varepsilon(P)|=\left|\int_\Omega \frac{\rho(Q)}{r}d\omega_Q-\int_\Omega \varphi(Q)f_\varepsilon(r)d\omega_Q\right| \tag{7.4}$$

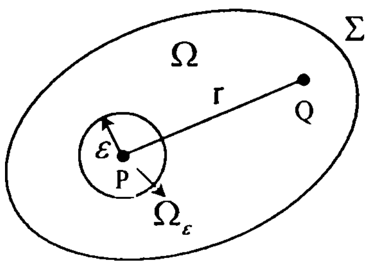


Fig. 7

Vom descompune domeniul Ω în două subdomenii: $\Omega-\Omega_\varepsilon$ şi Ω_ε (v. Fig.7): $\Omega=(\Omega-\Omega_\varepsilon)\cup\Omega_\varepsilon$

Să observăm că diferenţa celor două integrale pe domeniul $\Omega-\Omega_\varepsilon$ este nulă, deoarece $\varepsilon>r$ şi $f_\varepsilon(r)\equiv\frac{1}{r}$. Deci, diferenţa (7.4) devine:

$$|V(P)-V_\varepsilon(P)|=\left|\int_{\Omega_\varepsilon}\rho(Q)\left[\frac{1}{r}-f_\varepsilon(r)\right]d\omega_Q\right|\le\int_{\Omega_\varepsilon}|\rho(Q)|\left[\frac{1}{r}+f_\varepsilon(r)\right]d\omega_Q$$

Notez cu $M=\sup|\rho(Q)|$. (Ştim că $\rho(Q)$ e mărginită!)

$$|V(P)-V_\varepsilon(P)|\le M\int_{\Omega_\varepsilon}\left[\frac{1}{r}+f_\varepsilon(r)\right]d\omega_Q$$

Trec la coordonate sferice; ştim că $d\omega_Q=r^2dr\ d\tilde{\omega}$, unde $d\tilde{\omega}$ este elementul de arie pe sfera de rază $\varepsilon=1$.

Deci:

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{1}{r}+f_\varepsilon(r)\right)d\omega_Q=\int_{\Sigma_{\varepsilon=1}}d\tilde{\omega}\int_0^\varepsilon\left(\frac{1}{r}+f_\varepsilon(r)\right)r^2dr=4\pi\int_0^\varepsilon\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{2\varepsilon}\left(3-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]r^2dr=$$

$$=4\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{10}\right)=\frac{18}{5}\pi\varepsilon^2$$

Deci: $|V(P)-V_\varepsilon(P)|\le\frac{18}{5}\pi\varepsilon^2$

De aici rezultă: Când $\varepsilon\to0$ şirul de funcţii $\{V_\varepsilon(P)\}\to V(P)$. Însă cum $V_\varepsilon(P)$ sunt funcţii continue de clasă C^0 în E_3 rezultă că potenţialul V(P) este şi al de clasă C^0 în E_3.

Să mai arătăm în plus că, în aceste condiții, V(P) are și derivate parțiale continue (deci este de clasă C^1).

Să observăm că:

$V_\varepsilon(P)=\int\limits_\Omega \rho(Q) f_\varepsilon(r) d\omega_Q$ este mărginită și de clasă C^2 în E_3, deci pot deriva direct sub semnul integrală, în raport cu x,y,z.

$$grad_P V_\varepsilon(P)=\int\limits_\Omega \rho(Q) grad_P f_\varepsilon(r) d\omega_Q \qquad (**)$$

Considerăm acum o funcție vectorială de punct $\vec{V_1}(P)=\int\limits_\Omega \rho(Q) grad_P\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_Q = grad_P V(P)$

Facem diferența:

$$\left|grad_P V_\varepsilon(P)-\vec{V_1}(P)\right|=\left|\int\limits_\Omega \rho(Q) grad_P f_\varepsilon(r) d\omega_Q - \int\limits_\Omega \rho(Q) grad_P\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_Q\right|$$

$$grad_P f_\varepsilon(r)=\vec{i}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-\xi}{r};\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-\eta}{r};\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-\zeta}{r}$$

$$grad_P f_\varepsilon(r)=\frac{\partial f\varepsilon}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow grad_P\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\left|grad_P V_\varepsilon(P)-\vec{V_1}(P)\right|=\left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\rho(Q)\left[\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\right]\frac{\vec{r}}{r}d\omega_Q\right|\le\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\rho(Q)\right|\left(\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\right|+\frac{1}{r^2}\right)\underbrace{\left|\frac{\vec{r}}{r}\right|}_{=1}d\omega_Q\le M\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\right|+\frac{1}{r^2}\right)d\omega_Q$$

Iau pentru coordonatele sferice: $d\omega_Q = r^2 dr\, d\tilde{\omega}$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\right|+\frac{1}{r^2}\right)d\omega_Q=\int\limits_{\Sigma_{\varepsilon=1}}d\tilde{\omega}\int_0^\varepsilon\left(\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial r}\right|+\frac{1}{r^2}\right)r^2dr=4\pi\int\limits_0^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon^3}+\frac{1}{r^2}\right)r^2dr=4\pi\left(\frac{\varepsilon}{4}+\varepsilon\right)=5\pi\varepsilon$$

În final deci:

$$\left|grad_P V_\varepsilon(P)-\vec{V_1}(P)\right|\le 5\pi M\varepsilon$$

De aici se vede că dacă $\varepsilon\to 0$, atunci șirul de funcții $\{grad_P V_\varepsilon(P)\}\to\vec{V_1}(P)$ (converge uniform în tot spațiul).

Însă cum $grad_P V_\varepsilon(P)$ sunt funcții continue de P rezultă că și $\vec{V_1}(P)$ este o funcție continuă de P. Deci, dacă $\rho(Q)$ este mărginită și integrabilă pe Ω, atunci V(P) este o funcție de clasă C^1 în tot spațiul E_3. Rezultă deci că avem:

$$\vec{V_1}(P)=grad V(P)=\int\limits_\Omega \rho(Q) grad_P\left(\frac{1}{r}\right)d\omega_Q$$

adică funcția V(P) se poate deriva direct sub semnul integral: $\begin{cases}\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}=\int\limits_\Omega \rho(Q)\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}d\omega_Q=F_x\\ \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}=\int\limits_\Omega \rho(Q)\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}d\omega_Q=F_y\\ \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}=\int\limits_\Omega \rho(Q)\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}d\omega_Q=F_z\end{cases}$, oricare ar fi poziția punctului **P**.

Teoremă. ***Dacă distribuția de masă sau densitatea de sarcină $\rho(Q)$* este continuă în Ω, atunci există derivatele de ordinul doi ale potențialului de volum $V(P)$ care sunt și funcții continue în tot spațiul E_3.***

Demonstrație. Ne folosim de următoarea observație:

$$grad_P\left(\frac{1}{r}\right) = -grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) \quad \Leftrightarrow \quad grad_P V(P) = -grad_Q V(P)$$

Deci $$grad_P V(P) = \int_\Omega \rho(Q) grad_P\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_Q = -\int_\Omega \rho(Q) grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_Q$$

Însă $$\int_\Omega \rho(Q) grad_Q\left(\frac{1}{r}\right) d\omega_Q = \int_\Omega grad_Q\left[\frac{\rho(Q)}{r}\right] d\omega_Q - \int_\Omega \frac{1}{r} grad_Q \rho(Q) d\omega_Q$$

$$grad_P V(P) = \int_\Omega \frac{1}{r} grad_Q \rho(Q) d\omega_Q - \int_\Omega grad_Q\left[\frac{\rho(Q)}{r}\right] d\omega_Q$$

Vom aplica ultimei integrale, pentru domeniul $\Omega - \Omega_\varepsilon$, formula integrală a gradientului, care în general este de forma:

$$\int_\Omega grad\varphi(Q) d\omega = \int_\Sigma \varphi(Q)\vec{n}\, d\sigma \qquad (***)$$

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} grad_Q\left[\frac{\rho(Q)}{r}\right] d\omega_Q = \int_\Sigma \frac{\rho(Q)}{r}\vec{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma_{\varepsilon=1}} \frac{\rho(Q)}{\varepsilon}\vec{n}\, \varepsilon^2 d\tilde{\omega} \qquad (****)$$

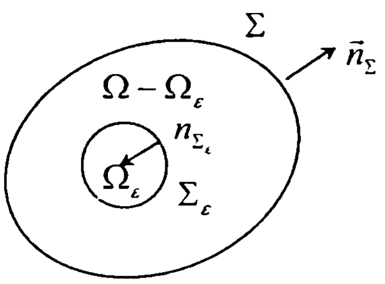


Fig.8

Observ m c norma a exterioară a $\Sigma\,(\vec{n}_\Sigma)$ este de sens contrar cu normala la $\Sigma_\varepsilon\ (\vec{n}_{\Sigma_\varepsilon})$ (v. **Fig. 8**).

Rezultă că:

$$\varepsilon \int_{\Sigma_{\varepsilon=1}} \rho(Q)\vec{n} d\tilde{\omega} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Dacă în egalitatea (****) trec la limită făcând $\varepsilon \to 0$, vom obține:

$$\int_\Omega grad_Q\left[\frac{\rho(Q)}{r}\right] d\omega_Q = \int_\Sigma \frac{\rho(Q)}{r}\vec{n} d\sigma_Q \qquad (7.5)$$

În final:

$$grad_P V(P) = \int_\Omega \frac{1}{r} grad_Q \rho(Q) d\omega_Q - \int_\Sigma \frac{\rho(Q)}{r}\vec{n}\, d\sigma_Q \qquad (7.6)$$

Să arătăm că dacă distribuția $\rho(Q)$ este de clasă C^0, atunci V(P) admite derivate de ordinul doi.

Într-adevăr, prima integrală poate fi considerată ca un potențial cu distribuția de sarcină $\mu(Q) = grad_Q \rho(Q)$. Ce-a de-a doua integrală este indefinit derivabilă în raport cu (x,y,z) dacă punctul **P** nu se află pe suprafața Σ. În concluzie dacă **P** se află în interiorul sau exteriorul lui Ω, rezultă că V(P) admite derivate de ordinul doi.

Consecința 1. Dacă P este exterior domeniului Ω, atunci potențialul newtonian V(P) verifică ecuația lui Laplace:

$$\Delta_P V(P) = 0 \qquad (1)$$

* Pentru densitatea $\rho(Q)$ nu există date în literatură exemple de legi analitice.

Demonstrație.

$$V(P) = \int_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{r} d\omega_Q$$

Cum $P \neq Q$ rezultă că nu avem singularități, integrandul este o funcție infinit derivabilă, deci V(P) este cel puțin de clasă C^2.
Derivez direct sub semnul integrală:

$$\Delta_P V(P) = \int_{\Omega} \Delta_P \left[\frac{\rho(Q)}{r} \right] d\omega_Q = \int_{\Omega} \rho(Q) \Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) d\omega_Q = 0$$

deoarece se știe că $\Delta_P \left(\frac{1}{r} \right) = 0$

Consecința 2. Potențialul newtonian verifică în interiorul lui Ω ecuația lui Poisson:

$$\Delta_P V(P) = -4\pi\varphi(P) \qquad (\text{II})$$

Demonstrație. Știm că

$$\Delta_P V(P) = div_P grad_P V(P) \qquad (\text{II.1})$$

Aplic operatorul **div** integralei (7.6), care este o funcție vectorială:

$$\Delta_P V(P) = \int_{\Omega} div_P \left[\frac{1}{r} grad_Q \rho(Q) \right] d\omega_Q - \int_{\Sigma} div_P \left[\frac{\rho(Q)}{r} \vec{n} \right] d\sigma_Q \qquad (\text{II.2})$$

Folosim identitatea:

$$div\left(\lambda \vec{F} \right) = \vec{F}\, grad\lambda + \lambda div \vec{F} \qquad (*)$$

și rezultă:

$$\Delta_P V(P) = \int_{\Omega} grad_P \left(\frac{1}{r} \right) grad_Q \rho(Q) d\omega_Q + \int_{\Omega} \frac{1}{r} div_P \left[grad_Q \rho(Q) \right] d\omega_Q -$$

$$\int_{\Sigma} grad_P \left(\frac{1}{r} \right) \rho(Q) \vec{n} d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{1}{r} div_P \left[\rho(Q) \vec{n} \right] d\sigma$$

Dar:

$$\begin{cases} div_P \left[grad_Q \rho(Q) \right] = 0 \\ div_P \left[\rho(Q) \vec{n} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_P V(P) = \int_{\Omega} grad_P \left(\frac{1}{r} \right) grad_Q \rho(Q) d\omega_Q - \int_{\Sigma} grad_P \left(\frac{1}{r} \right) \rho(Q) \vec{n}\, d\sigma$$

Dacă folosim și egalitatea: $grad_P \left(\frac{1}{r} \right) = -grad_Q \left(\frac{1}{r} \right)$, avem:

$$\Delta_P V(P) = \int_{\Sigma} \rho(Q) grad_Q \left(\frac{1}{r} \right) \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega} grad_Q \left(\frac{1}{r} \right) grad_Q \rho(Q) d\omega_Q \qquad (\text{II.3})$$

Pe de altă parte, deoarece P se află în interiorul lui Ω, putem folosi relația:

$$4\pi\rho(P) = \int_{\Omega} grad_Q \left(\frac{1}{r} \right) grad_Q \rho(Q) d\omega_Q - \int_{\Sigma} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

$\Delta_P V(P) = -4\pi\rho(P) + \int_{\Sigma} \rho(Q) grad_Q \left(\frac{1}{r} \right) \vec{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$, relație în care ultimele două integrale se anulează deoarece $grad_Q \left(\frac{1}{r} \right) \vec{n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$. Rezultă că $\Delta_P V(P) = -4\pi\rho(P)$, c.c.t.d.

§8. Expresia asimptotică a potențialului de volum

Considerăm domeniul Ω în care avem dată o distribuție continuă $\rho(Q)$; fie punctul **O** originea sistemului de axe. Vom presupune că domeniul Ω, este mărginit, deci $\exists$ o sferă cu centrul în **O** de rază R care conține în interiorul său domeniul Ω (v. **Fig. 9**). Fie $Q(\xi,\eta,\zeta)$ în Ω și **P**(x,y,z) exterior sferei de rază R.

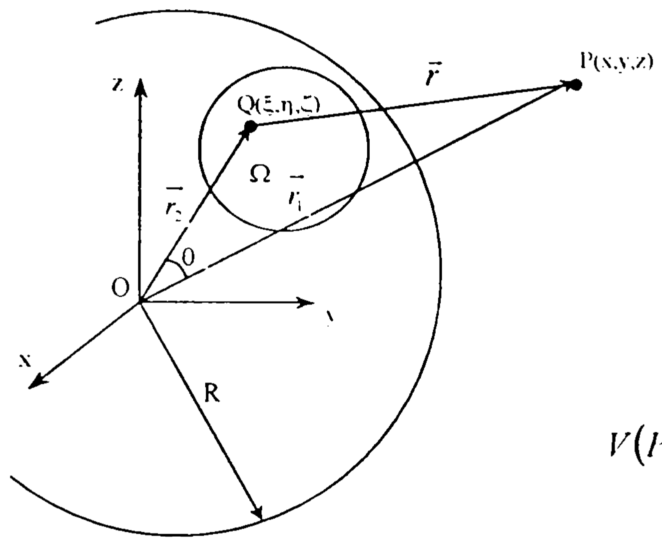


Fig.9

În Δ OQP aplic teorema lui Pitagora generalizată:

$$r^2 = r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta + r_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta + r_2^2}}$$

Potențialul creat de acest corp (Ω) în punctul **P** al spațiului este:

$$V(P) = \int_\Omega \frac{\rho(Q)}{r}d\omega_Q = \int_\Omega \frac{\rho(Q)}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta + r_2^2}}d\omega_Q$$

Deoarece $r_1 > r_2 \Rightarrow \frac{r_2}{r} < 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1\sqrt{1 - 2\frac{r_2}{r_1}\cos\theta + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}$;

Se notează de obicei $\frac{r_2}{r_1} = t$; $\quad \cos\theta = x$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r} = g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \qquad unde \quad |t| < 1$$

Rezultă că $g(t,x)$ se poate dezvolta într-o serie de puteri după puterile pozitive ale lui t:

$$g(t,x) = \left[1 - 2tx + t^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - t(2x - t)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

Notez: $t(2x - t) = u \quad \Rightarrow g(t,x) = (1 - u)^{-\frac{1}{2}}$

Știm că : $\quad (1 - z)^\lambda = 1 - \frac{\lambda}{1!}z + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2!}z^2 - \ldots\ldots(-1)^n \frac{\lambda(\lambda - 1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - n + 1)}{n!}z^n + \ldots$

Dar cum $z=u$ și $\lambda = -\frac{1}{2}$, avem: $\quad (1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}u^2 + \ldots.. + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n - 1)}{2^n\cdot n!}u^n + \ldots$

Ne interesează coeficientul lui t^n Ultimul termen care-l conține pe t^n va fi:

$$u^n = t^n(2x - t)^n = \ldots\ldots A(2x)^n t^n$$

$u^{n-k} = t^{n-k}(2x - t)^{n-k} = \ldots\ldots$ $\qquad$ Aici coeficientul lui t^n va fi: $(-1)^k\cdot C_{n-k}^k(2x)^{n-2k}t^n$

Deci coeficientul căutat al lui t^n va fi: $\qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n - 2k - 1)}{2^{n-k}(n - k)!}(2x)^{n-2k}$

unde $\left[\frac{n}{2}\right]$ este partea întreagă a numărului.

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^k\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^k(n-k)!}x^{n-2k}} \tag{8.1}$$

Aceste expresii se numesc ***polinoamele Legendre*** (sau funcțiile Legendre de prima speță).

Dar: $C_{n-k}^k=\dfrac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}$

Deci:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^k\cdot k!(n-2k)!}x^{n-2k}$$, amplific cu: $2^n(n-k)!$

$$\Rightarrow\quad \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^k\cdot k!(n-2k)!}\cdot\frac{2^n(n-k)!}{2^n(n-k)!}=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)\cdot 2^{n-k}\cdot(n-k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}$$

Dar $\quad 2^{n-k}(n-k)!=\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{(n-k)\,factori}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-k)=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2k)$

$$P_n(x)\Rightarrow\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)\cdot(2n-2k)}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}=\frac{(2n-2k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}\cdot x^{n-2k}$$

Pentru n=0 $\Rightarrow P_0(x)=1$
n=1 $\Rightarrow P_1(x)=$ ......
n=2 $\Rightarrow P_2(x)=$ .....

Se poate demonstra însă că mai putem scrie:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$ relație cunoscută sub numele de ***formula lui Rodrigues***.

De aici rezultă mult mai ușor:

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2\right]=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left[2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\right]=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$, etc.

Revenim la notațiile din problema noastră inițială:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$V(P)=\int_\Omega\rho(Q)\frac{1}{r}d\omega_Q=\frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega\rho(Q)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta)d\omega_Q=\frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_1^n}\int_\Omega\rho(Q)r_2^n P_n(\cos\theta)d\omega_Q$$

Se notează:

$$V_n(P)=\frac{1}{r_1^n}\int_\Omega \rho(Q)r_2^n P_n(\cos\theta)d\omega_Q$$

$$\Rightarrow \qquad V(P)=\frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}V_n(P) \tag{8.2}$$

Această scriere se numește ***formula asimptotică a potențialului de volum***.

Calculăm mai întâi ***aproximația de ordinul zero***.

n=0 $\Rightarrow \quad V_0(P)=\frac{1}{r_1^0}\int_\Omega \rho(Q)r_2^0 P_0(\cos\theta)d\omega_Q=\int_\Omega \rho(Q)d\omega_Q=m$

unde m reprezintă masa totală a corpului nostru Ω.

Calculăm ***aproximația de ordinul 1***

n=1 $\Rightarrow \quad V_1(P)=\frac{1}{r_1}\int_\Omega \rho(Q)r_2\cos\theta d\omega_Q$

dar: $\cos\theta=\dfrac{\vec{r_1}\vec{r_2}}{r_1r_2}$

Cum: $\begin{cases}\vec{r_1}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\\ \vec{r_2}=\vec{i}\xi+\vec{j}\eta+\vec{k}\zeta\end{cases} \qquad \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r_1r_2}$

$$V_1(P)=\frac{1}{r_1^2}\int_\Omega \rho(Q)[x\xi+y\eta+z\zeta]d\omega_Q \tag{8.3}$$

Dar, vectorul care ne dă poziția centrului de masă este: $\vec{C}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\dfrac{\int_\Omega \vec{r_2}(\xi,\eta,\zeta)\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{m=\int_\Omega \rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}$

Notez de asemenea:

$$m\bar{x}=\int_\Omega \xi\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta=M_1$$

$$m\bar{y}=\int_\Omega \eta\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta=M_2$$

$$m\bar{z}=\int_\Omega \zeta\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta=M_3$$

$$\Rightarrow \quad V_1(P)=\frac{1}{r_1^2}[xM_1+yM_2+zM_3] \tag{8.4}$$

Calculăm ***aproximația de ordinul 2***:

n=2 $\Rightarrow \quad V_2(P)=\frac{1}{r_1^2}\int_\Omega \rho(Q)r_2^2\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}d\omega_Q$

$$V_2(P)=\frac{1}{2r_1^2}\int_\Omega \rho(Q)r_2^2\frac{\left[3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-r_1^2r_2^2\right]}{r_1^2r_2^2}d\omega_Q=$$

$$=\frac{1}{2r_1^4}\int_\Omega \rho(Q)\left\{3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-\left[(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right]\right\}d\omega_Q=$$

$$=\frac{1}{2r_1^4}\int_\Omega \rho(Q)\left[3(x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2+2xy\xi\eta+2xz\xi\zeta+2yz\eta\zeta)-(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right]d\omega_Q$$

Dacă notez: $x_1 = \xi; \quad x_2 = \eta; \quad x_3 = \zeta$

și $M_{ik} = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi, \eta, \zeta) x_i x_k d\xi d\eta d\zeta$

$$\Rightarrow V_2(P) = \frac{1}{2r_1^4}\{x^2[3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + y^2[3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ z^2[3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + 6xyM_{12} + 6xzM_{13} + 6yzM_{23}\}$$

$$V_2(P) = \frac{1}{2r_1^4}[x^2(M_{11} - M_{22}) + x^2(M_{11} - M_{33}) + y^2(M_{22} - M_{11}) + y^2(M_{22} - M_{33}) +$$
$$+ z^2(M_{33} - M_{11}) + z^2(M_{33} - M_{22}) + 6xyM_{12} + 6xzM_{13} + 6yzM_{23}]$$

$$V_2(P) = \frac{1}{2r_1^4}[(M_{11} - M_{22})(x^2 - y^2) + (M_{11} - M_{33})(x^2 - z^2) + (M_{22} - M_{33})(y^2 - z^2) +$$
$$+ 6xyM_{12} + 6xzM_{13} + 6yzM_{23}] \tag{8.5}$$

Observăm că pentru corpul nostru care ocupă domeniul Ω, avem momentele de inerție (notate cu A, B, C):

$$J_{xx} = A = \int\limits_{\Omega} \rho(Q)(x_2^2 + x_3^2)d\omega_Q = M_{22} + M_{33}$$
$$J_{yy} = B = \int\limits_{\Omega} \rho(Q)(x_1^2 + x_3^2)d\omega_Q = M_{11} + M_{33}$$
$$J_{zz} = C = \int\limits_{\Omega} \rho(Q)(x_1^2 + x_2^2)d\omega_Q = M_{11} + M_{22}$$

Atunci:

$$V_2(Q) = \frac{1}{2r_1^4}[(B - A)(x^2 - y^2) + (C - A)(x^2 - z^2) + (C - B)(y^2 - z^2) +$$
$$+ 6xyM_{12} + 6xzM_{13} + 6yzM_{23}]$$

Deci, în general:

$$V(P) = \frac{m}{r_1} + \frac{1}{r_1^3}[xM_1 + yM_2 + zM_3] + \tag{8.6}$$
$$+ \frac{1}{2r_1^5}[(B - A)(x^2 - y^2) + (C - A)(x^2 - z^2) + (C - B)(y^2 - z^2) + 6xyM_{12} + 6xzM_{13} + 6yzM_{23}] + \ldots$$

Dacă alegem originea O astfel încât să coincidă cu centrul de masă, de coordonate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, atunci $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ și relația precedentă se simplifică mult.

* * *

DESPRE FUNCȚIA LUI GREEN

Să considerăm ecuația diferențială a lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta u=0 \tag{1}$$

unde Δ este cunoscutul operator al lui Laplace; știm că soluțiile acestei ecuații se numesc ***funcții armonice***, iar ecuația se întâlnește în teoria potențialului* (v. Anexa 1).

Rezolvarea acestei ecuații se face întotdeauna căutând niște soluții (unice!) care să satisfacă anumite condiții la limită, care în general sunt de forma:

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma \tag{2}$$

unde α și β sunt niște constante date sau niște funcții cunoscute pe frontieră, iar γ de asemenea o funcție dată pe frontieră; $\frac{\partial u}{\partial n}$, este derivata normală.

În privința acestor condiții la limită deosebim două cazuri particulare importante:

a) $\alpha=1$; $\beta=0$, adică $u=\gamma$ pe frontieră; aceasta este numită ***problema interioară a lui Dirichlet***.

b) $\alpha=0$; $\beta=1$, adică $\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma$ pe frontieră; aceasta este numită ***problema lui Neumann***.

Vom folosi o soluție particulară a ecuației lui Laplace (2) cu simetrie sferică, presupunând că u este funcție numai de distanța $r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$ dintre două puncte ale domeniului de definiție; atunci, din relația (***) deoarece $\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$ și $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$, ecuația lui Laplace se scrie sub forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0 \tag{3}$$

care după simplificare cu r^2 ne dă: $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0 \;\Rightarrow\; r^2\frac{du}{dr}=a \;\Rightarrow\; \frac{du}{dr}=\frac{a}{r^2}$.

Integrând încă o dată rezultă:

$$u=-\frac{a}{r}+b \tag{4}$$

---

* Se găsește demonstrată în literatură expresia operatorului lui Laplace în diverse sisteme de coordonate:

- în coordonate curbilinii (ortogonale):

$$\Delta u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] \tag{*}$$

- în coordonate polare în spațiu (coordonate sferice):

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] \tag{**}$$

sau $$\Delta u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] \tag{***}$$

- în coordonate cilindrice:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{****}$$

Aici a şi b sunt constante arbitrare de integrare; să facem în particular $u=-1$; $b=0$. Obţinem:

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{5}$$

Această funcţie este evident ***o soluţie particulară a ecuaţiei lui Laplace*, care însă devine infinită în punctul r=0**.

Să considerăm acum un domeniu $\mathcal{D}$ (spaţial) mărginit de o suprafaţă S. Fie un punct P în interiorul domeniului $\mathcal{D}$ şi un punct Q care poate parcurge suprafaţa S. Să considerăm încă nişte soluţii ale ecuaţiei (2) notate:

$$V=\frac{1}{r_{PQ}} \tag{6}$$

Evident V este o funcţie armonică în $\mathcal{D}$ discontinuă în P.

u este o funcţie armonică şi regulată în $\mathcal{D}$ (adică funcţia şi derivatele ei de ordinul întâi şi al doilea neavând discontinuităţi în $\mathcal{D}$).

Avem evident:

$$\Delta V=0 \quad ; \qquad \Delta u=0 \tag{7}$$

Ne folosim acum de una din formulele integrale a lui Green*, (b), în care facem: $\psi=u.;\varphi=v$, în acest caz integrala spaţială este nulă (vezi (7)) şi ne rămâne:

$$\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0 \tag{8}$$

Vom lua normala dirijată spre interiorul domeniului. Înconjurăm punctul de discontinuitate P cu o sfera K de rază foarte mică ε şi extindem integrala de suprafaţă şi la această sferă. Rezultă:

$$\iint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS+\iint_K\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\Sigma=0 \tag{9}$$

unde $d\Sigma$ este elementul de arie al sferei K:

$$d\Sigma=\varepsilon^2 d\Omega=\varepsilon^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{10}$$

Să observăm însă că sfera K are raza foarte mică, iar versorul normalei $\vec{n}$ este dirijat spre exteriorul sferei K, adică spre interiorul domeniului $\mathcal{D}$; atunci a doua integrală (9) o putem pune:

$$\frac{1}{r_{PQ}}=\frac{1}{\varepsilon} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)=\frac{\partial}{\partial r_{PQ}}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)=-\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{11}$$

Egalitatea (9) devine:

$$\iint_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS=\iint_K\left(\frac{1}{\varepsilon^2}u+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial r_{PQ}}\right)\varepsilon^2 d\Omega \tag{12}$$

Dacă vom nota cu $\overline{u}$ şi $\overline{\partial u/\partial r_{PQ}}$ valorile medii pe suprafaţa sferei K ale funcţiei u şi ale derivatei sale (să nu uităm că ε este foarte mic), putem scrie (deoarece $\overline{u}$ şi $\overline{\partial u/\partial r_{PQ}}$ sunt constante şi ies de sub integrală):

* **Formulele lui Green** (v. Anexa 1).

- prima formulă a lui Green (numită şi prima teoremă a lui Green-Gauss):

$$\iiint_D(\psi\Delta\varphi+grad\,\psi\, grad\,\varphi)d\tau=\iint_\Sigma\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \tag{a}$$

- a doua formulă a lui Green:

$$\iiint_D(\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi)d\tau=\iint_\Sigma\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS \tag{b}$$

$$\begin{cases} \iint\limits_K u d\Omega = \iint\limits_K u \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 4\pi \overline{u} \\ \iint\limits_K \frac{\partial u}{\partial r_{PQ}} d\Omega = 4\pi \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r_{PQ}}\right)} \end{cases} \tag{13}$$

Atunci ecuația (12) devine:

$$\iint\limits_S \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS = 4\pi \overline{u} + 4\pi \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r_{PQ}}\right)} \cdot \varepsilon \tag{14}$$

Dacă facem ca $\varepsilon \to 0$, observăm că atunci $\overline{u} \to u_P$ și obținem:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \tag{15}$$

Această formulă ne permite să calculăm soluția într-un punct oarecare P al domeniului $\mathcal{D}$ când cunoaștem valorile lui u și ale derivatei sale normale pe frontiera domeniului. Așa se leagă metoda elementelor de frontieră de punctele din interiorul domeniului.

Ne vom mărgini numai la problema lui Dirichlet. Dacă pe frontiera domeniului este dată numai funcția u este convenabil ca în relația de mai sus să se elimine din membrul al doilea derivata normală $\partial u / \partial n$. Aceasta se face în felul următor: Să considerăm o nouă funcție armonică H regulată în întregul domeniu $\mathcal{D}$, adică astfel încât să avem:

$$\Delta H = 0 \tag{16}$$

Funcția H nu are puncte de discontinuitate în $\mathcal{D}$, atunci din formula lui Green (b) în care facem $\psi = u$, $\varphi = H$, dacă luăm normala pozitivă spre interior, obținem:

$$O = \iint\limits_S \left(u \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \tag{17}$$

Adunând (15) cu (17) obținem:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right) - \left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \tag{18}$$

Dacă impunem o condiție ca funcția H să fie astfel încât pe frontiera S a domeniului să avem:

$$H + \frac{1}{r_{PQ}} = 0 \tag{19}$$

egalitatea (18) devine:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S u \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right) \right] dS \tag{20}$$

Notăm cu (x,z,y) coordonatele punctului P și cu (ξ, η, ζ) coordonatele punctului Q de pe frontieră. Rezultă:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S u(\xi,\eta,\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right) \right] dS \tag{21}$$

Să observăm că în ultimele relații nu mai apare derivata normală a funcției u. Atunci funcția:

$$\boxed{G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right)}$$

(22)

se numeşte *funcţia lui Green*.

Cu această notaţie relaţia (21) se scrie:

$$\boxed{u(x,y,z)=\iint\limits_S u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)dS} \tag{23}$$

Am redus astfel rezolvarea problemei lui Dirichlet la determinarea unei funcţii a lui Green, cu următoarele proprietăţi:

a) G este armonică în întreg domeniul D.

b) G este regulată în acest domeniu cu excepţia punctului P unde devine infinită, comportându-se ca $H+\dfrac{1}{r_{PQ}}$.

c) G este nulă pe frontiera S a domeniului $\mathcal{D}$.

Problema exterioară a lui Dirichlet

Se poate pune şi problema determinării unei funcţii armonice într-un domeniu D exterior suprafeţei S, regulată la infinit şi luând pe suprafaţa S o serie continuă de valori date. Aceasta se numeşte problema exterioară a lui Dirichlet.

Ea se poate reduce la problema interioară printr-o transformare prin raze reciproce relativă la un punct O din interiorul suprafeţei S; astfel domeniul D exterior suprafeţei S este înlocuit cu un domeniu D' interior unei alte suprafete S'. Transformarea prin raze reciproce este de forma:

$$x=\frac{x'}{r'^2},\quad y=\frac{y'}{r'^2},\quad z=\frac{z'}{r'^2} \tag{24}$$

unde $r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$ şi transformă soluţia $u(x,y,z)$ a ecuaţiei (1) în soluţia:

$$U(x',y',z')=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}u\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\frac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\frac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2}\right) \tag{25}$$

Ecuaţia Poisson

Prin acelaşi procedeu ca mai sus se poate deduce şi o soluţie a ecuaţiei lui Poisson:

$$\Delta U=\varphi(x,y,z) \tag{26}$$

unde $\varphi(x,y,z)$ este o funcţie cunoscută.

Pornim tot de la formula lui Green (b), unde schimbăm orientarea normalei orientând-o spre interior, înlocuind pe ΔU prin $\varphi(x,y,z)$ şi introducând pe v, soluţie a ecuaţiei $\Delta v=0$. Obţinem:

$$\iiint\limits_D \varphi\cdot v\cdot d\tau=\iint\limits_S\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS \tag{27}$$

Alegând $v=\dfrac{1}{r_{PQ}}$, ca şi mai sus, avem:

$$u_P=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\varphi\frac{1}{r_{PQ}}d\tau \tag{28}$$

Dacă punem: $v=H$, H fiind o funcţie armonică regulată în $\mathcal{D}$, avem:

$$O=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(u\frac{\partial H}{\partial n}-H\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\varphi H d\tau \tag{29}$$

Adunând egalităţile (28) şi (29) şi substituind funcţia lui Green (22) se obţine soluţia ecuaţiei lui Poisson (26).

$$u(x,y,z)=\iint\limits_S\left[u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)\right]dS+f(x,y,z) \tag{30}$$

unde am pus:

$$f(x,y,z) = -\iiint_D \varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \qquad (31)$$

deoarece $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$.

<u>Aplicaţie</u> Să arătăm cum se poate transforma o ecuaţie diferenţială de forma $\Delta u + \lambda u = 0$ într-o ecuaţie integrală, cu ajutorul funcţiei Green.

$$\Delta u + \lambda u = 0 \qquad (I)$$

Fie u o soluţie a ecuaţiei (I) - într-un domeniu (spaţial) $\mathcal{D}$ mărginit de suprafaţa S - care satisface condiţia la limită:

$$u = 0 \text{ pe frontiera S} \qquad (II)$$

Transformarea ecuaţiei diferenţiale (I) într-o ecuaţie integrală pe S, se poate face în mai multe moduri; vom arăta aici cum se poate face acest lucru cu ajutorul funcţiei lui Green definită mai sus:

$$G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left(H + \frac{1}{r_{PQ}}\right) \qquad (III)$$

Deoarece $\Delta H = 0,\ \Delta\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = 0 \Rightarrow \Delta G = 0$ (IV)

După cum a fost definită, funcţia G este nulă pe frontieră, deci:

$$G = 0 \text{ pe frontiera S} \qquad (V)$$

Să aplicăm funcţiilor G şi u formulele lui Green (b) unde vom lua versorul normalei $\vec{n}$ spre interiorul domeniului $\mathcal{D}$. Avem:

$$\iiint_D (G\Delta u - u\Delta G)d\tau = -\iint_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS \qquad (VI)$$

Înconjurăm punctul de discontinuitate P printr-o sferă de rază foarte mică (ε→0) şi extindem integrala de suprafaţă şi la această sferă; vom scrie ţinând cont de ecuaţia (III):

$$\iiint_D (G\Delta u - u\Delta G)d\tau = -\iint_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\iint_K \left(H\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial H}{\partial n}\right)dS}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\iint_K \left[\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\right]dS}_{-u_p}$$

(VII)

Cum am arătat la început ultima integrală este tocmai $-u_p$, penultima este 0, deci:

$$u_p = \iiint_D (G\Delta u - u\Delta G)d\tau + \iint_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS \qquad (VIII)$$

Dar, u şi G sunt nule pe frontiera S, $\Delta G = 0$, $\Delta u = -k^2 u$ (am notat $\lambda = k^2$); obţinem ecuaţia integrală:

$$u(x,y,z) = -k^2 \iiint_D G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)u(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \qquad (IX)$$

Analog transformăm şi ecuaţia

$$\Delta u + k^2 u = \varphi \qquad (X)$$

unde $\varphi = \varphi(x,y,z)$ este o funcţie cunoscută şi u=0 pe S.

Se pune $\Delta u = -k^2 u + \varphi$ şi se obţine ecuaţia integrală:

$$u(x,y,z) = -k^2 \iiint_D G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)u(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta + f(x,y,z) \qquad (XI)$$

unde:

$$f(x,y,z) = \iiint_D G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \qquad (XII)$$

* * *

UTILIZAREA FUNCȚIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR PLANE DE TEORIA ELASTICITĂȚII. REPREZENTAREA LUI GOURSAT. ECUAȚIILE LUI KOLOSOV-MUSHELISHVILI

§1. Introducere

În studiul stării plane de tensiune sau deformație se demonstrează că toate mărimile mecanice care intervin (tensiuni, deformații specifice, deplasări) – figurând ca necunoscute în problema generală a teoriei elasticității – sunt funcții biarmonice.

Se numește ***funcție biarmonică*** o funcție $f(x,y) \in C^4$, definită pe domeniul $D \subset R^2$ care satisface o ecuație diferențială de tipul

$$\Delta\Delta f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

numită ***ecuație biarmonică***.

Este necesar să observăm că orice funcție armonică este și biarmonică; astfel, dacă $\varphi(x,y) \in C^2$ este o funcție armonică, ceea ce înseamnă că este soluție a ecuației lui Laplace, $\Delta\varphi = 0$, atunci:

$$\Delta[\Delta\varphi] = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ este o funcție biarmonică.}$$

§2. Operatorul lui Laplace în variabile complexe

În literatură se arată că teoria funcțiilor armonice este strâns legată de teoria funcțiilor analitice de variabilă complexă. Trecerea din domeniul real în domeniul complex are marele avantaj că poate să soluționeze probleme cu singularități, de exemplu cele întâlnite în teoria fisurilor.

Problema a fost începută de Goursat (1893), a primit o soluție interesantă în 1903 dată de Faylon, dezvoltată de Kolosov (1909) și în sfârșit adusă sub forma unei teorii complete de către Mushelișvili în perioada 1933-1953. De aceea în literatură se vorbește de metoda Kolosov-Mushelișvili.

Fie f(x,y): $D \subset R^2 \to R$ o funcție armonică, având derivate parțiale de ordinul doi, continue în domeniul D; această funcție verifică evident ecuația lui Laplace:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Să înlocuim variabilele independente x,y prin două variabile complex conjugate (facem o schimbare de variabile):

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z \\ y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z \end{cases} \qquad (T) \tag{2}$$

Prin transformarea (T) funcția *f(x,y)* devine o funcție de variabilele $z, \bar{z}$:

$$f(x,y) \xrightarrow{(T)} f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = f(z,\bar{z}) \tag{3}$$

Prin urmare este convenabil ca orice funcție (reală sau complexă) de punct f(x,y) să fie pusă sub forma:

$$f(x,y) \equiv f(z,\bar{z}) \tag{3'}$$

unde membrul al doilea poate fi întotdeauna scris efectiv cu ajutorul unei formule, dacă membrul întâi este dat printr-o formulă.

Să remarcăm că am făcut de fapt un abuz de notație, deoarece am păstrat simbolul funcțional f indiferent de faptul că avem de-a face cu variabilele (x,y) sau ($z, \bar{z}$). Putem explica necesitatea acestui "abuz" dacă vom observa că $\bar{z}$ este în fapt o funcție – chiar funcție continuă – de z. Se demonstrează însă că aceasta nu este o funcție derivabilă deoarece raportul $\delta\bar{z}/\delta z$ nu posedă o limită unic determinată pentru $\delta z \to 0$ ([S24]). Din acest motiv nu este convenabil să privim funcția f ca funcție de **o singură** variabilă complexă z.

Dacă derivăm expresiile (2) în raport cu x și y găsim:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=i \quad ; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=1 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=-i \tag{4}$$

Să căutăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f în raport cu x și y, considerată însă ca o funcție compusă de z și $\bar{z}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}=i\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \end{cases} \tag{5}$$

De aici rezultă imediat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial z} \tag{6}$$

În mod analog căutăm derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}+\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)=-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}-\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} \tag{8}$$

Adunând aceste două relații termen cu termen obținem formula de transformare a operatorului lui Laplace funcție de noile variabile complexe z și $\bar{z}$, sau, cum se mai numește, ***forma complexă a operatorului lui Laplace***:

$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}} \tag{9}$$

Deci ecuația lui Laplace $\nabla^2 f=0$, în noile variabile complexe z și $\bar{z}$ are forma:

$$\frac{\partial^2 f(z,\bar{z})}{\partial z\partial \bar{z}}=0 \tag{10}$$

Acest rezultat deosebit are marele avantaj că soluția generală este imediată și are forma sumei a două funcții analitice arbitrare de variabilele z și $\bar{z}$, adică:

$$f(z,\bar{z})=F_1(z)+F_2(\bar{z}) \tag{11}$$

Justificarea este imediată: din (10) rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f_1(z) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=f_2(\bar{z})$$

iar diferența totală a funcției $f(z,\bar{z})$ se poate pune sub forma:

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}=f_1(z)dz+f_2(\bar{z})d\bar{z} \tag{*}$$

Fie $F_1(z)$ și $F_2(\bar{z})$ primitivele funcțiilor de variabilă complexă $f_1(z)$ și $f_2(\bar{z})$; atunci din (*) rezultă prin integrare expresia (11):

$$f(z,\bar{z})=F_1(z)+F_2(\bar{z})$$

În **concluzie**:

1) Orice funcție armonică în baza relației (10) poate fi reprezentată ca suma a două funcții analitice arbitrare de variabilele complexe z și $\bar{z}$.

2) Funcția biarmonică este partea reală a unei expresii alcătuită cu două funcții olomorfe.

§3. Reprezentarea complexă a lui Goursat pentru funcții biarmonice. Cazul funcției potențial de tensiune a lui Airy*[1]

Să revenim acum la funcția și ecuația biarmonică. Fie *U (x,y)* o funcție continuă cu derivate continue, definită în domeniul *D* finit și simplu conex cu valori reale, și care satisface în acest domeniu o ecuație de tipul:

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 U(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \tag{12}$$

deci o *funcție de potențial de tip Airy*. Se vede atunci cu ușurință că funcția:

$$\nabla^2 U = p(x,y) \tag{13}$$

este o funcție armonică, deoarece

$$\nabla^2\left(\nabla^2 U\right) = \nabla^2 p(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x,y) \text{ funcție armonică} \tag{14}$$

În consecință putem construi o funcție biarmonică de variabilă complexă z, dacă vom căuta o funcție *q(x,y)* ***conjugată armonic*** cu *p(x,y)*.

Fie:

$$f(z) = p(x,y) + iq(x,y) \tag{15}$$

unde funcțiile *p(x,y)* și *q(x,y)* satisfac condițiile de monogeneitate Cauchy-Riemann.

Reamintim că înțelegem prin funcție conjugată armonic cu *p(x,y)* funcția care, dacă se cunoaște *p(x,y)* se poate determina pe baza relațiilor de olomorfism ale lui Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{16}$$

Construim acum o nouă funcție analitică pe care o definim astfel:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)dz = r(x,y) + is(x,y) \tag{17}$$

Deoarece *f(z)* este o funcție analitică formată din suma a două funcții armonice, *p(x,y)* și *q(x,y)*, rezultă că și *r(x,y)* și *s(x,y)* sunt funcții armonice, deci:

$$\nabla^2 r(x,y) = 0 \quad \text{și} \quad \nabla^2 s(x,y) = 0 \tag{18}$$

Deoarece *φ(z)* este o funcție analitică, din relația (17) $\Rightarrow$

$$\varphi'(z) = \frac{\partial r}{\partial x} + i\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{4}f(z) = \frac{1}{4}(p + iq) \tag{19}$$

---

* Reamintim: Derivata unei funcții complexe este $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ oricare ar fi modul în care creșterea complexă Δz tinde la zero.

De aceea dacă facem ca deplasarea să aibă loc după axa x: $\Delta y=0 \Rightarrow \Delta z=\Delta x \Rightarrow f'(z) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x,y) - v(x,y)}{\Delta x}\right]$

sau dacă facem ca deplasarea să aibă loc după axa y: $\Delta x=0 \Rightarrow \Delta z=\Delta y \Rightarrow f'(z) = \lim\limits_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x,y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x,y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}\right]$

Rezultă deci: $f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ sau $f'(z) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Pentru ca aceste două forme ale derivatei să fie identice este necesar ca: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Acestea sunt cunoscutele **condiții de monogeneitate ale lui Cauchy-Riemann**.

Dar funcțiile r și s trebuie să satisfacă la rândul lor condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial s}{\partial y} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = -\dfrac{\partial s}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{4}p = \dfrac{1}{4}\mathrm{Re}[f(z)] \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = -\dfrac{1}{4}q = -\dfrac{1}{4}\mathrm{Im}[f(z)] \end{cases} \tag{20}$$

Vom considera acum o altă funcție de forma:

$$p_1(x,y) = U(x,y) - [xr(x,y) + ys(x,y)] \tag{21}$$

căreia să-i aplicăm operatorul lui Laplace. Aplicăm operatorul ∇^2 la relația (21):

$$\nabla^2 p_1(x,y) = \nabla^2 U - \nabla^2(xr + ys) = p - \nabla^2(xr + ys) \tag{21'}$$

Calculăm $\nabla^2(xr + ys) = \dfrac{\partial^2}{\partial x}(xr + ys) + \dfrac{\partial^2}{\partial y}(xr + ys)$

Pornim de la :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(xr + ys) = r + x\dfrac{\partial r}{\partial x} + y\dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(xr + ys) = x\dfrac{\partial r}{\partial y} + s + y\dfrac{\partial s}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(xr + ys) = \dfrac{\partial}{\partial x}(r + x\dfrac{\partial r}{\partial x} + y\dfrac{\partial s}{\partial x}) = 2\dfrac{\partial r}{\partial x} + x\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(xr + ys) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x\dfrac{\partial r}{\partial y} + s + y\dfrac{\partial s}{\partial y}) = x\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial s}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} \end{cases}$$

Adunând ecuațiile de mai sus $\Rightarrow$

$$\nabla^2(xr + ys) = 2\frac{\partial r}{\partial x} + 2\frac{\partial s}{\partial y} + x\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + y\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)$$

r și s fiind armonice $\Rightarrow \nabla^2(xr + ys) = 2\dfrac{\partial r}{\partial x} + 2\dfrac{\partial s}{\partial y}$

Înlocuind în ecuația (21') $\Rightarrow$ $\nabla^2 p_1(x,y) = p - 2\dfrac{\partial r}{\partial s} - 2\dfrac{\partial s}{\partial y}$

Ținând cont de relațiile (20) $\Rightarrow \nabla^2 p_1(x,y) = p - 2\cdot\dfrac{1}{4}p - 2\cdot\dfrac{1}{4}p \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla^2 p_1(x,y) = 0 \quad \Rightarrow p_1(x,y)$ - funcție armonică

Tragem de aici concluzia că membrul drept din expresia (21) este o funcție armonică, pe care o vom nota cu $p_1(x,y)$. Acestei funcții îi vom căuta imediat funcția conjugată armonic $q_1(x,y)$ în sensul de mai sus (20) pe baza condițiilor Cauchy-Riemann, și introducem atunci o nouă funcție de variabilă complexă:

$$\psi(z) = p_1(x,y) + iq_1(x_1 y), \tag{22}$$

astfel încât putem scrie (din (21)):

$$U = (xr + ys) + p_1 = \mathrm{Re}[(x - iy)(r + is)] + p \tag{23}$$

Această formă de scriere se verifică imediat:

$$(x - iy)(r + is) = xr + ixs - iyr + ys = (xr + ys) + i(xs - yr) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}[(x - iy)(r + is)] = xr + ys$$

sau scris altfel:

$$U = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)] \tag{24}$$

Această formulă se numeşte de obicei ***reprezentarea lui Goursat*** şi ea ne spune că orice funcţie biarmonică se exprimă cu ajutorul a două funcţii analitice de variabilă complexă utilizând relaţia (24). Se poate uşor demonstra că şi invers, oricare ar fi funcţiile analitice $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ formula (24) ne dă o funcţie biarmonică, adică formula (24) care conţine două funcţii analitice arbitrare, ne dă ***expresia generală în complex a funcţiilor biarmonice***.

Observații:

1) În alte manuale (v. Mushelişvili) relaţia (24) se scrie sub forma:

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi}(z) + \psi(z) + \overline{\psi}(z), \tag{25}$$

formă sub care a dat-o Goursat printr-o demonstraţie rapidă. Să arătăm că relaţia precedentă este adevărată, adică membrul drept al relaţiei (25) ne dă expresia lui U.

$$\begin{aligned}\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)} &= (x - iy)(r + is) + (x + iy)(r - is) + p_1 + iq_1 + p_1 - iq_1 = \\ &= xr - iry + isx + ys + xr + iry - isx + ys + 2p_1 = \\ &= 2(xr + ys + p_1) = 2U \,, \qquad c.c.t.d.\end{aligned}$$

Această formă de scriere (25′) are următoarea justificare: Membrul drept al ecuaţiei este în general o funcţie de variabilele complexe z şi $\bar{z}$, însă, datorită aspectului fizic al problemei, el trebuie să fie real, şi în forma (25) se vede imediat că părţile imaginare se reduc

2) Atunci când este dată o funcţie biarmonică U, funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ care intră în formula (24) nu sunt complet determinate, ci conţin nişte constante arbitrare complexe. De exemplu, încă de la început când determinăm funcţia *q(x,y)* din relaţiile Cauchy-Riemann (16) apare automat la integrare o constantă aditivă, deci funcţia *f(z)* (15) este determinată cu aproximaţia unei constante aditive pur imaginare. După aceea, la determinarea funcţiei *φ(z)* cu ajutorul formulei (17) mai apare o constantă arbitrară complexă. Astfel funcţia *φ(z)* va conţine în definitiv elemente arbitrare sub forma unui termen $C + iaz$, unde "*C*" este o constantă arbitrară complexă, iar "*a*" o constantă arbitrară reală. Determinarea acestor constante arbitrare se poate face impunând nişte condiţii suplimentare, care pot fi de forma: $\varphi(0) = 0$ sau $\mathrm{Im}[\varphi'(0)] = 0$

3) O situaţie similară apare şi la determinarea funcţiei $\psi(z)$ (22) când se obţine un termen arbitrar sub forma unei constante pur imaginare

§4. Problema "la limită" fundamentală a funcţiilor biarmonice

Enunț[*]: ***Să se găsească o funcţie biarmonică*** $U(x,y): D \to R$ ***în interiorul unui contur închis*** L **(Fig.1)** ***atunci când sunt date pe acest contur valorile funcţiei şi ale derivatei sale normale:***

$$U = \omega_1(s) \;;\; \frac{\partial U}{\partial n} = \omega_2(s) \; \textit{pe conturul } L. \tag{26}$$

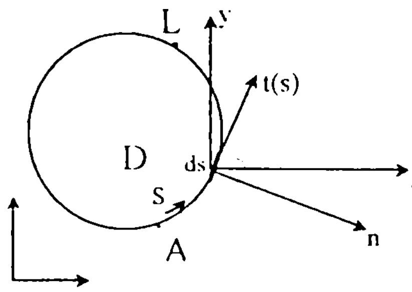


Fig.1.

Deoarece avem de rezolvat o ecuaţie de tip Laplace, $\Delta U = 0$, când se dau atât valorile pe contur ale lui U (problemă Dirichlet), cât şi valorile derivatei normale $\frac{\partial U}{\partial n}$ (problemă Neumann), înseamnă că avem de rezolvat o problemă de tip mixt.

Pentru început să arătăm că din aceste condiţii limită putem determina şi valorile limită ale derivatei obişnuite ale funcţiei U în raport cu coordonatele x şi y.

[*] Problema găsirii unei funcţii biarmonice după valorile date ale derivatelor sale parţiale $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ pe frontieră este numită: **problema biarmonică fundamentală**. Această problemă a constituit obiectul a numeroase cercetări începând din 1907, când a fost declarată obiect al unui premiu de către Academia de Ştiinţe din Paris. Premiul a fost obţinut de Hadamard, Lauricella, Korn şi Boggio, iar mai nou a fost rezolvată într-un cadru foarte general de Sobolev ([M]).

În adevăr, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial s}\cos(s,x) + \dfrac{\partial U}{\partial n}\cos(n,x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial s}\cos(s,y) + \dfrac{\partial U}{\partial n}\cos(n,y) \end{cases} \tag{27}$$

unde s este direcția tangentei la conturul L. Deci condițiile la limită date sub forma (26) se pot pune sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \omega_1' \cos(s,x) + \omega_2 \cos(n,x) = \omega_3(s) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \omega_1' \cos(s,y) + \omega_2 \cos(n,y) = \omega_4(s) \end{cases} \tag{28}$$

Trebuie să observăm că, în condițiile din urmă, funcțiile $\omega_3(s)$ și $\omega_4(s)$ nu le putem alege oricum, deoarece trebuie să fie satisfăcută condiția:

$$\oint_L \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) = 0,$$

adică integrala curbilinie de mai sus, care ne dă creşterea funcției de-a lungul conturului închis L trebuie să fie nulă deoarece funcția U trebuie să fie uniformă. Aceasta înseamnă că funcțiile $\omega_3(s)$ și $\omega_4(s)$ trebuie să îndeplinească o condiție suplimentară:

$$\oint \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \oint (\omega_3 dx + \omega_4 dy)\frac{ds}{ds} = \oint (\omega_3 \frac{dx}{ds} + \omega_4 \frac{dy}{ds}) ds = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \oint (\omega_3 \cos(s,x) + \omega_4 \cos(s,y)) ds = 0 \tag{29}$$

În alte privințe funcțiile $\omega_3(s)$ și $\omega_4(s)$ pot fi luate arbitrar.

Vom căuta acum funcția biarmonică $U(x,y)$ care să răspundă la problema pusă pornind de la reprezentarea lui Goursat pentru funcții biarmonice:

$$U = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]$$

Derivăm funcția U în raport cu x și y prin intermediul lui z și $\bar{z}$ și vom avea:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \mathrm{Re}\left[\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} \cdot \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}\varphi(z) + \bar{z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right] = \mathrm{Re}[\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \mathrm{Re}\left[\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} \cdot \varphi(z) + \bar{z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right] = \mathrm{Re}[-i\varphi(z) + i\bar{z}\varphi'(z) + i\psi'(z)] \end{cases} \tag{30}$$

Ținând cont că: $\begin{cases} \varphi(z) = r + is \\ \psi(z) = p_1 + iq_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \mathrm{Re}\left[r + is + (x - iy)(r' + is') + p_1' + iq_1'\right] = r + xr' + ys' + p_1'$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mathrm{Re}\left[-i(r + is) + i(x - iy)(r' + is') + i\left(p_1' + iq_1'\right)\right] = s + yr' - xs' - q_1'$$

De aici obținem două egalități pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile căutate $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ pe conturul L:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = r + xr' + ys' + p_1' - is - iyr' + ixs' + iq_1' =$$

$$= (r - is) + r'(x - iy) + is'(x - iy) + p_1 + iq_1 =$$
$$= \overline{\varphi}(z) + \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = r + xr' + ys' + p_1' + is + iyr' - ixs' - iq_1' =$$
$$= (r + is) + r'(x - iy) + is'(x - iy) + p_1 + iq_1 =$$
$$= \varphi(z) + z\overline{\varphi}'(z) + \overline{\psi}'(z)$$

Am obținut următoarele relații:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} - i\dfrac{\partial U}{\partial y} = \overline{\varphi}(z) + \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z) = \omega_3 - i\omega_4 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi}'(z) + \overline{\psi}'(z) = \omega_3 + i\omega_4 \end{cases} \tag{31}$$

Calculăm în continuare $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ și $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ pentru a verifica dacă funcția *U(x,y)* este armonică, respectiv biarmonică.

Din (30) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathrm{Re}[\varphi(z) + \overline{z}\varphi'(z) + \psi'(z)]$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mathrm{Re}[-i\varphi(z) + i\overline{z}\varphi'(z) + i\psi'(z)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial x}\cdot\varphi'(z) + \overline{z}\frac{\partial \varphi'(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \psi'(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \mathrm{Re}\left[-i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + i\frac{\partial \overline{z}}{\partial y}\cdot\varphi'(z) + i\overline{z}\frac{\partial \varphi'(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + i\frac{\partial \psi'(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mathrm{Re}[2\varphi'(z) + \overline{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \mathrm{Re}[2\varphi'(z) - \overline{z}\varphi''(z) - \psi''(z)] \end{cases}$$

Înlocuim în ecuația lui Laplace:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4\,\mathrm{Re}[\varphi'(z)] = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(z)] \tag{32}$$

Rezultă, deoarece $\varphi(z)$ este armonică, faptul că și funcția $\nabla^2 U$ va fi armonică, deci că:

$$\nabla^2(\nabla^2 U) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^4 U = 0 \quad \Rightarrow \quad U\text{ - biarmonică}$$

Relația (32) ne mai arată că, dacă ne dăm expresia lui $\nabla^2 U$, atunci partea reală a lui $\varphi'(z)$ este pe deplin determinată.

§5. Reprezentarea în complex a tensiunilor și deplasărilor

Vom reprezenta componentele tensiunilor normale și tangențiale cu ajutorul acelorași funcții $\varphi(z)$ și $\psi(z)$. În acest scop pornim de la expresiile condițiilor la limită în tensiuni pentru starea plană, sau a tensiunilor pe o suprafață înclinată, care sunt de forma:

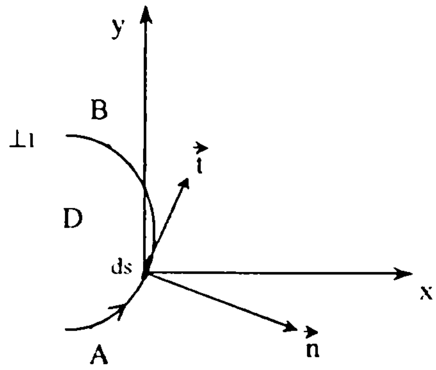


Fig.2.

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x \cos(\vec{n},\vec{x}) + \tau_{xy} \cos(\vec{n},\vec{y}) \\ p_{ny} = \tau_{xy} \cos(\vec{n},\vec{x}) + \sigma_y \cos(\vec{n},\vec{y}) \end{cases}$$

Aceste tensiuni acționează pe un element de suprafață ds, care este reprezentat în planul xOy de arcul ds și care are grosimea perpendiculară pe planul figurii egală cu unitatea.

Alegem în planul xOy un arc oarecare AB și ne fixăm un sens pozitiv de deplasare (de la A la B), și trasăm normala $\vec{n}$ spre dreapta în raport cu un observator care se mișcă în sensul pozitiv ales (v. **Fig.2**).

Știm că în absența forțelor de masă avem:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

unde U este ***funcția de tensiune a lui Airy***.

Notând cu q forțele superficiale care lucrează pe marginea conturului, vom avea:

$$\begin{cases} q_{nx} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(\vec{n},\vec{x}) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(\vec{n},\vec{y}) \\ q_{ny} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(\vec{n},\vec{x}) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(\vec{n},\vec{y}) \end{cases}$$

Se vede cu ușurință că avem:
$$\begin{cases} \cos(\vec{n},\vec{x}) = \cos(\vec{t},\vec{y})\dfrac{dy}{ds} \\ \cos(\vec{n},\vec{y}) = -\cos(\vec{t},\vec{x})\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

Astfel relațiile precedente devin:

$$\begin{cases} q_{nx} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial x}{\partial s} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) \\ q_{ny} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial s} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Deci:

$$q_{nx} + iq_{ny} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$q_{nx} + iq_{ny} = -i\frac{d}{ds}\left(\varphi(z) + z\overline{\varphi'}(z) + \overline{\psi'}(z)\right) \qquad (*)$$

Caz I.

Particularizăm, atribuind elementului ds direcția axei Oy (**Fig. 3.**):

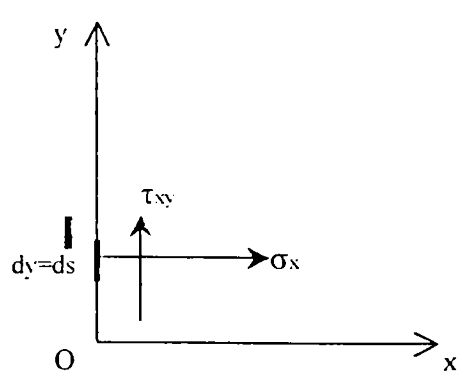


Fig.3.

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ ds = dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz \quad \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = i \\ d\bar{z} = -idy \Rightarrow \dfrac{d\bar{z}}{dy} = -i \end{cases}$$

Înlocuind în (*) q_{nx} cu σ_x și q_{ny} cu τ_{xy} $\Rightarrow$

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = -i\frac{d}{dy}\left(\varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\psi'}\right) = -i\left(\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\overline{\varphi'} + z\frac{d\overline{\varphi'}}{d\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dy} + \frac{d\overline{\psi'}}{d\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dy}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_x + i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(z) - z\overline{\varphi''}(z) - \overline{\psi''}(z)}$$

<u>Caz II.</u> Particularizăm acum, atribuind elementului ds direcția axei Ox. Atunci:

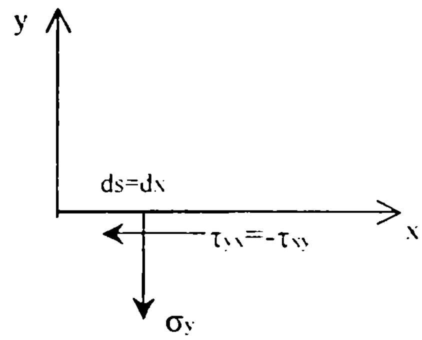


Fig.4.

$$\Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \\ ds = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 1 \\ d\bar{z} = dx \Rightarrow \dfrac{d\bar{z}}{dx} = 1 \end{cases}$$

Expresia (*) o vom amplifica cu i și vom înlocui q_{nx} cu $-\tau_{xy}$ și q_{ny} cu $-\sigma_y$:

$$\Rightarrow \quad iq_{nx} - q_{ny} = \frac{d}{ds}(\varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\psi'})$$

$$\Rightarrow \ \sigma_y - i\tau_{yx} = \frac{d}{dx}(\varphi + z\overline{\varphi'} + \overline{\psi''}) = \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\overline{\varphi'} + z\frac{d\overline{\varphi'}}{d\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dx} + \frac{d\overline{\psi'}}{d\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dx} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_y - i\tau_{yx} = \varphi' + \overline{\varphi'} + z\overline{\varphi''} + \overline{\psi''}}$$

Cele două formule încadrate de mai sus ne dau expresiile căutate ale tensiunilor. Ele se înlocuiesc de obicei cu altele mai simple, puse sub forma care urmează:

- adunăm cele două relații:

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(z)\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right]}$$

- înmulțim prima relație cu (-1) și o adunăm cu a doua:

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\left[z\overline{\varphi''}(z) + \overline{\psi''}(z)\right]}$$

Aceste relații le vom numi ***formulele lui Kolosov-Mushelisvili***:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(z)\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right] \\ &\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\left[z\overline{\varphi''}(z) + \overline{\psi''}(z)\right] \end{aligned}} \qquad (33)$$

Să căutăm expresii analoage și pentru <u>deplasări</u>.

Pentru a găsi expresiile deplasărilor în complex se pleacă de la legea lui Hooke generalizată pentru starea plană:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\varepsilon_V + 2G\varepsilon_x = \lambda\varepsilon_V + 2G\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = \lambda\varepsilon_V + 2G\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_V + 2G\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Reamintim că dacă U este funcția biarmonică de tensiune a lui Airy, atunci în absența forțelor masice:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Să considerăm că ni se dă funcția biarmonică de tensiune $U(x,y): D \subset R$ (D simplu conex). Ne propunem să găsim deplasările u și v din ecuațiile:

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon_v + 2G\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \lambda\varepsilon_v + 2G\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ G\cdot(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}) = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \varepsilon_v = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \nabla U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}$$

Primele două ecuații le rezolvăm în raport cu $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial y}$. Dacă le adunăm obținem:

$$2\lambda\varepsilon_V + 2G\varepsilon_V = \nabla^2 U \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_V = \frac{1}{2(\lambda + G)}\nabla^2 U \quad \text{și deci:}$$

$$\begin{cases} 2G\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+G)}\cdot\nabla^2 U \\ 2G\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\lambda}{2(\lambda+G)}\cdot\nabla^2 U \end{cases}$$

Dacă notăm $\nabla^2 U = p(x,y)$, am arătat că aceasta este o funcție armonică și putem înlocui $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = p - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Rezultă:

$$\begin{cases} 2G\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\lambda + 2G}{2(\lambda+G)}p \\ 2G\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\lambda + 2G}{2(\lambda+G)}p \end{cases} \tag{**}$$

Să considerăm funcția $q(x,y)$ armonic conjugată cu $p(x,y)$, adică satisfăcând condițiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Din aceste relații pentru p dat se determină q abstracție făcând de o constantă arbitrară. Atunci expresia $f(z)=p(x,y)+iq(x,y)$ va fi o funcție de variabilă complexă $z=x+iy$, olomorfă în domeniul S ocupat de corp. Am introdus de asemenea funcția $\varphi(z)$ cu relația:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)dz = r(x,y) + is(x,y)$$

Deoarece $f(z)$ este o funcție analitică formată din suma a două funcții armonice, p și q, rezultă că și r și s sunt funcții armonice conjugate, și deci vor satisface condițiile de olomorfism.

Rezultă:

$$\varphi'(z)=\frac{\partial r}{\partial x}+i\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{4}(p+iq)=\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}iq$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\partial s}{\partial y}=\dfrac{1}{4}p\\[2mm]\dfrac{\partial r}{\partial y}=-\dfrac{\partial s}{\partial x}=-\dfrac{1}{4}q\end{cases}$$

$$\Rightarrow p=4\frac{\partial r}{\partial x}=4\frac{\partial s}{\partial y}$$

Relațiile (**) devin:

$$\begin{cases}2G\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\dfrac{\partial r}{\partial x}\\[2mm]2G\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\dfrac{\partial s}{\partial y}\end{cases}$$

Dacă integrăm aceste relații obținem:

$$\begin{cases}2Gu=-\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}r+f_1(y)\\[2mm]2Gv=-\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}s+f_2(x)\end{cases}$$

unde f_1 este o funcție numai de y (derivata în raport cu x trebuie să fie nulă) iar f_2 este o funcție numai de x (derivata în raport cu y trebuie să fie nulă).

Aceste valori ale lui u și v le introducem în cea de-a treia ecuație a legii lui Hooke. Pentru aceasta trebuie să derivăm relațiile de mai sus:

$$\begin{cases}2G\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\dfrac{\partial r}{\partial y}+f_1'(y)\\[2mm]2G\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\dfrac{\partial s}{\partial x}+f_2'(x)\end{cases}$$

Adunăm cele două relații și ținem cont că:

$$2G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\quad \text{și}\quad \frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial x}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\left(\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial x}\right)+f_1'(y)+f_2'(x)$$

$$\Rightarrow\quad f_1'(y)+f_2'(x)=0$$

De aici rezultă că funcțiile $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sunt de forma:

$$\begin{cases}f_1=2G(-ay+b)\\f_2=2G(ax+c)\end{cases}$$

în care a, b, c sunt constante arbitrare, iar factorul $2G$ s-a introdus pentru omogenizarea ecuației.

Aceste expresii ale lui f_1 și f_2 fiind însă niște funcții liniare (de gradul I), ne dau de fapt numai o deplasare de solid rigid, și de aceea ele pot fi neglijate. În cazul acesta se obțin relațiile următoare, cunoscute sub numele de ***formulele lui Löve***:

$$\begin{cases} 2Gu = -\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G} r \\ 2Gv = -\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G} s \end{cases} \tag{34}$$

Deoarece funcția $\varphi(z)$ introdusă mai sus este olomorfă în domeniul D simplu conex, rezultă că u și v sunt niște funcții uniforme în acel domeniu.

De obicei, relațiile (34) se transformă înmulțind a doua relație cu i și adunându-le:

$$2G(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) + 2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G}(r + is)$$

Înlocuind cele două paranteze din membrul drept cu ceea ce cunoaștem din relațiile (31), respectiv (17), rezultă:

$$2G(u + iv) = -\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}' + 2\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G}\varphi$$

$$\Rightarrow 2G(u + iv) = \varphi\left(2\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} - 1\right) - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi}'$$

Facem următoarea notație:

$$\wp = 2\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} - 1 = \frac{2\lambda + 4G - \lambda - G}{\lambda + G} = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G}$$

Ținând cont că: $\lambda = \dfrac{2\mu G}{1 - 2\mu}$ rezultă că:

$$\wp = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} = 3 - 4\mu$$

Cu notația de mai sus ecuațiile (34) s-au transformat în:

$$2G(u + iv) = \wp\,\varphi - z\overline{\varphi}' + \overline{\psi}' \tag{35}$$

Atașând la sistemul (33) ecuația (35) rezultă un sistem de ecuații care dă soluția problemei plane în complex, sistem cunoscut sub numele de ***ecuațiile lui Kolosov-Mushelisvili***:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(z)\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right] \\ \sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\left[z\overline{\varphi}''(z) + \psi''(z)\right] \\ 2G(u + iv) = \wp\,\varphi - z\overline{\varphi}' + \overline{\psi}' \end{cases} \tag{36}$$

* * *

COORDONATE CURBILINII

CAZUL A: Coordonate curbilinii ortogonale

1. Suprafețe și curbe de coordonate

Există numeroase probleme teoretice și practice când este mult mai convenabil ca în locul coordonatelor carteziene obișnulte Ox, Oy, Oz, să folosim alte sisteme de referință care să corespundă mai bine condițiilor firești ale problemei[*1]. Într-un mod foarte general un sistem de referință se poate defini prin trei familii de suprafețe care se intersectează între ele după niște curbe care reprezintă axele sistemului de referință curbiliniu. Să presupunem deci că în loc de coordonatele carteziene x,y,z, se introduc trei noi variabile q_1, q_2, q_3 definite astfel:

$$f_1(x,y,z)=q_1;\quad f_2(x,y,z)=q_2;\quad f_3(x,y,z)=q_3 \tag{1}$$

Știm că în sistemul x,y,z, o relație de forma de mai sus $f_1(x,y,z)=q_1$ este ecuația intrinsecă a unei suprafețe, iar două asemenea suprafețe se întretaie după o curbă. Pentru fiecare valoare dată parametrilor q_1,q_2,q_3 se obține câte o suprafață determinată din fiecare familie. Aceste trei suprafețe se intersectează într-un punct determinat P de coordonate carteziene x,y,z. Astfel, atribuind noilor variabile q_1, q_2, q_3 valorile constante A,B,C obținem trei familii de suprafețe de coordonate. Ecuațiile acestor noi suprafețe de coordonate, în coordonatele x,y,z, vor fi:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=A & (I) \\ f_2(x,y,z)=B & (II) \\ f_3(x,y,z)=C & (III) \end{cases} \tag{2}$$

Să luăm două suprafețe de coordonate oarecare din familii diferite, de exemplu din familiile II și III. Ele se intersectează de-a lungul unei linii ale cărei ecuații vor fi:

$$\begin{cases} f_2(x,y,z)=B_0 \\ f_3(x,y,z)=C_0 \end{cases}$$

unde B_0 și C_0 sunt constante determinate.

De-a lungul acestei „linii" variază numai q_1 și putem numi această curbă **„linia de coordonată q_1"**. Analog se obțin liniile de coordonate q_2 și q_3 (v. **Fig. 1**).

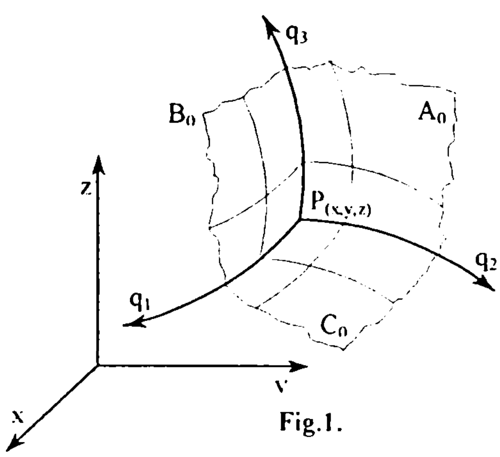


Fig.1.

Vo[illegible] co[illegible]a c[illegible] a[illegible] [illegible]-a [illegible]ac[illegible] [illegible] [illegible]ş[illegible] coordonate curbilinii ortogonale, adică cele trei familii de suprafețe se taie ortogonal în orice punct al spațiului; aceasta presupune că tangentele din orice punct P din spațiu, la axele curbilinii care trec prin P, formează un triedru tridreptunghic.

Vom mai presupune că sistemul de ecuații (1) este rezolvabil în raport cu x,y,z, ceea ce înseamnă că funcțiile f_1 , f_2 , f_3 sunt continue, au derivate parțiale continue, iar determinantul funcțional (sau jacobianul transformării) e[illegible]e di[illegible]eri[illegible] de ze[illegible]:

$$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{3}$$

[*1] Asemenea situații se întâlnesc mai ales în formularea și rezolvarea problemelor de limită

Deci vechile coordonate x,y,z, sunt legate de noile coordonate q_1, q_2, q_3 prin relațiile:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{4}$$

obținute prin rezolvarea sistemului (1).

Putem ilustra cu multă ușurință asemenea tipuri de relații care să ne lămurească despre ce este vorba. Fie de exemplu așa numitele coordonate sferice, cunoscute din „Geometria analitică", asupra cărora vom reveni. Se știe că în acest caz poziția unui punct în spațiu poate fi definită prin trei numere reale (sau trei parametrii reali) r, φ, θ legate de coordonatele obișnuite (x,z,y) prin relațiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta = \varphi_1(r,\varphi,\theta)\, cu\ q_1 = r \\ y = r\sin\varphi\sin\theta = \varphi_2(r,\varphi,\theta)\, cu\ q_2 = \theta \\ z = r\cos\theta \quad\quad = \varphi_3(r,\varphi,\theta)\, cu\ q_3 = \varphi \end{cases}$$

Suprafețele de coordonate sunt sfere, conuri de rotație și plane.

2. Elementul de lungime

Este important pentru noi să stabilim forma analitică pe care pătratul elementului de arc (elementul de lungime- într-o denumire generică) o are în diverse sisteme de coordonate. În coordonate carteziene elementul de lungime are forma binecunoscută:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

Aici coeficienții diferențialelor coordonatelor sunt constanți și egali cu unitatea, ceea ce vom arăta în continuare- nu se mai întâmplă în cazul general al coordonatelor curbilinii. Astfel, din (4) avem:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3 \\ dy = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}dq_1 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}dq_2 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}dq_3 \\ dz = \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}dq_1 + \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}dq_2 + \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}dq_3 \end{cases} \tag{6}$$

Ridicând la pătrat și înlocuind în (5) vom obține:

$$ds^2\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2\right]dq_1^2 + \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2\right]dq_2^2 + \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2\right]$$

$$dq_3^2 + 2\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right]\cdot dq_1dq_2 + 2\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right]dq_2dq_3 +$$

$$+2\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right]dq_3dq_1 \tag{7}$$

Am obținut astfel un polinom omogen de gradul al doilea în dq_1, dq_2, dq_3. Să stabilim condițiile în care acest polinom nu conține termenii cu produse de diferențiale diferite $dq_i \cdot dq_j$ (i,j=1,2,3), și să arătăm că acestea sunt tocmai condițiile de ortogonalitate.

În relația (7) să ne fixăm atenția -de exemplu- asupra termenului care conține produsul dq_1dq_2. Coeficientul acestui termen va fi:

$$2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right) \tag{8}$$

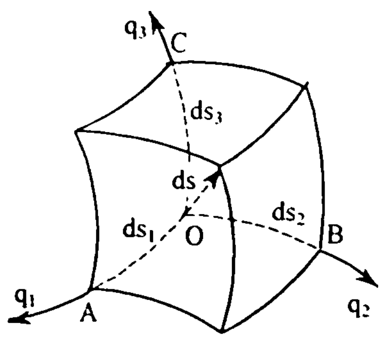


Fig.2.

Să analizăm acum elementul de volum în noile coordonate curbilinii (**Fig. 2**). Din punctul O pleacă trei muchii OA, OB, OC, de-a lungul lui OA variază numai q_1, de-a lungul OB numai q_2 şi de-a lungul OC numai q_3.

Pe prima muchie, funcţiile (4) depind numai de q_1, deci:

$$ds_1^2=\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2\right]dq_1^2=H_1^2dq_1^2 \tag{9}$$

unde am notat:

$$H_1^2=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2 \tag{10}$$

Pe de altă parte cosinuşii directori ai tangentei la această muchie sunt proporţionali cu:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1},\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1},\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}.$$

Pe baza unui raţionament identic, pe cea de-a doua muchie OB variază numai coordonata q_2, deci funcţiile (4) depind numai de q_2 şi vom avea:

$$ds_2^2=\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2\right]dq_2^2=H_2^2dq_2^2$$

(11)

unde am notat:

$$H_2^2=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2 \tag{12}$$

Cosinuşii directori ai tangentei la această muchie (OB) sunt proporţionali cu:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2},\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2},\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Dar din geometria analitică se ştie că o egalitate de forma:

$$aa_1+bb_1+cc_1=0$$

este condiţia de ortogonalitate a două direcţii ai căror cosinuşi directori sunt proporţionali cu a,b,c respectiv a_1, b_1, c_1.

Transpusă în cazul nostru, condiţia de ortogonalitate a curbelor OA şi OB revine la:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}=0 \tag{13}$$

Egalarea cu zero a expresiei (8), este, prin urmare, echivalentă cu condiţia ca cele două muchii considerate să fie perpendiculare între ele. Punând condiţia ca în expresia (7) şi coeficienţii lui dq_2dq_3 şi dq_3dq_1 să fie nuli, aceasta ar reveni la a cere ca cele trei muchii să fie perpendiculare două câte două. În concluzie, condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul de coordonate curbilinii să fie ortogonal este ca expresia lui ds^2 să nu conţină decât termeni cu pătrate de diferențiale, adică termeni în dq_1^2, dq_2^2, dq_3^2. În aceste condiții obținem pentru ds^2 o expresie de forma:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \tag{14}$$

unde:

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2 \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2 \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2 \end{aligned} \tag{15}$$

mărimi care se numesc **coeficienții diferențiali ai lui Lamé** sau **unități locale de lungime**, iar **condițiile de ortogonalitate** numite și **condiții de substituție ortogonală** sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} + \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} + \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} + \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\cdot\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Ținând seama de faptul că de-a lungul fiecărei muchii a volumului elementar nu variază decât una din variabile, obținem conform (14) lungimile acestor muchii:

$$ds_1 = H_1 dq_1;\quad ds_2 = H_2 dq_2;\quad ds_3 = H_3 dq_3 \tag{17}$$

Elementul de volum în noile coordonate va fi:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{18}$$

3. Operatori diferențiali în coordonate curbilinii ortogonale

Fără a mai da definiții sau a mai face demonstrații, care pot fi găsite în [ ], [ ], [ ], redăm în continuare doar rezultatele.

- **Gradientul câmpului scalar U(x,y,z):**

$$\begin{cases} grad_{q_1} U = \dfrac{dU}{ds_1} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial q_1} \\ grad_{q_2} U = \dfrac{dU}{ds_2} = \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial q_2} \\ gradq_{q_3} U = \dfrac{dU}{ds_3} = \dfrac{1}{H_3}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial q_3} \end{cases} \tag{19}$$

- **Divergența câmpului vectorial $\vec{A}$:**

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 A_{q_2})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_{q_3})}{\partial q_3}\right] \tag{20}$$

- **Operatorul lui Laplace:**

$$\Delta U = div\, grad\, U = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right]$$

- **Ecuația lui Laplace:** $\Delta U = 0$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)=0$$

- **Rotorul câmpului vectorial** $\vec{A}$:

$$rot_{q_1}\vec{A} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_3A_{q_3}\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_2A_{q_2}\right)\right]$$

$$rot_{q_2}\vec{A} = \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1A_{q_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_3A_{q_3}\right)\right]$$

$$rot_{q_3}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2A_{q_2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1A_{q_1}\right)\right]$$

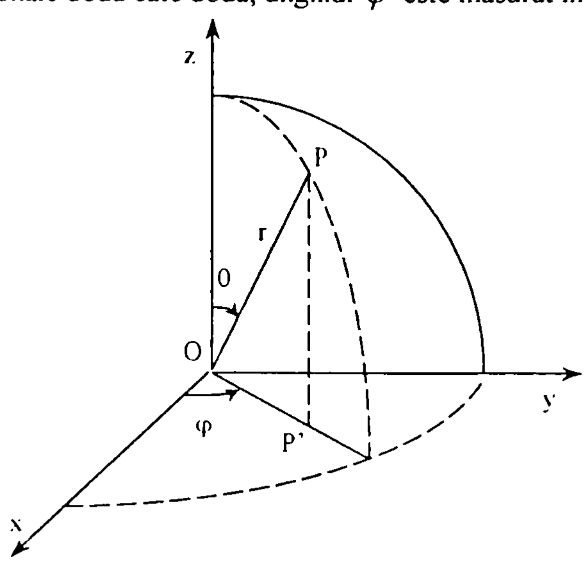
4. Sisteme particulare de coordonate curbilinii ortogonale

I. Coordonate sferice (sau coordonate polare în spațiu).

Să considerăm un sistem de axe carteziene x,y,z,. Poziția unui punct P în spațiu poate fi definită și prin următoarele trei numere:

- **distanța r** de la originea O până la punctul P, numită și **rază vectoare**.
- **unghiul** φ pe care-l face proiecția P' a punctului P pe planul xOy cu axa Ox, numit și **azimut** [] sau **longitudine** [].
- **unghiul** θ pe care-l face raza vectoare cu r cu axa Oz, numit și **colatitudine** [].

Aceste trei numere reale r,φ,θ reprezintă așa numitele **coordonate sferice** sau **coordonate polare în spațiu**. Suprafețele de coordonate sunt sfere cu centrul în O și cu raza r; conuri de rotație cu vârful în O și axa Oz și cu semiunghiul la vârf θ, plane care trec prin raza Oz și fac cu planul xOz unghiul φ. Aceste suprafețe sunt ortogonale două câte două; unghiul φ este măsurat în sens direct, unghiul θ de la axa Oz către r (**Fig. 3**).



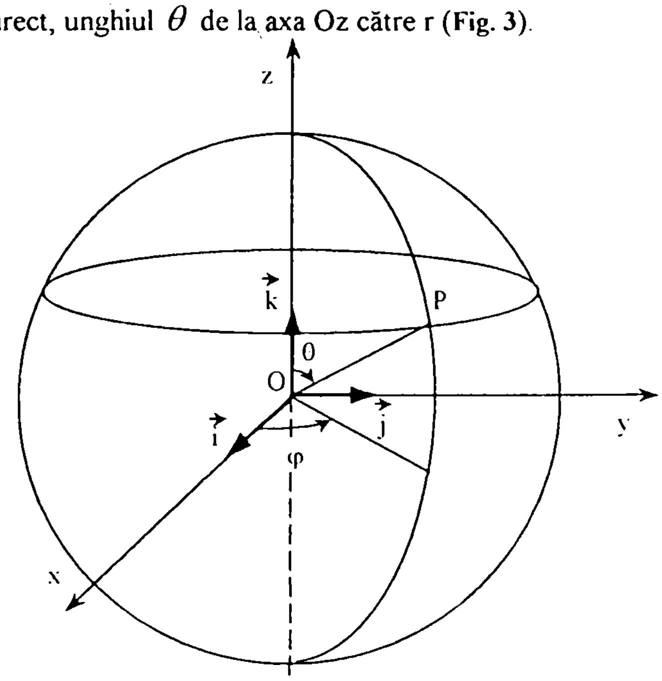


Fig.3.

Noile coordonate r,φ,θ sunt legate de vechile coordonate x,y,z, prin relațiile evidente (observăm că $\overline{OP'} = r\sin\theta$).

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{21}$$

Utilizând notațiile generale (4) identificăm:

$$q_1 = r;\quad q_2 = \theta;\quad q_3 = \varphi$$

În sistemele cartezian și sferic, suprafețele de coordonate au respectiv ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 tg^2\theta = 0 \\ \dfrac{y}{x} = tg\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = const. \\ \theta = const. \\ \varphi = const. \end{cases} \tag{22}$$

Din relațiile (21) găsim:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\sin\theta dr - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta d\theta \\ dy = \sin\varphi\sin\theta dr + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta d\theta \\ dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Ridicăm la pătrat și adunăm; obținem expresia elementului de lungime:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Comparând cu formula (14) deducem:

$$H_1 = 1;\quad H_2 = r;\quad H_3 = r\sin\theta$$

deoarece $0 \le 0 \le \pi \Rightarrow H_3 \ge 0$

Ecuația lui Laplace în coordonate sferice va fi:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) = 0$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{23}$$

Ca un caz particular, să găsim de exemplu soluția acestei ecuații care să depindă numai de raza vectoare r. În acest caz trebuie considerat:

$\dfrac{\partial U}{\partial\theta} = \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$ și prin urmare ecuația lui Laplace are forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0$$

de unde:

$$r^2\frac{\partial U}{\partial r} = -c_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{c_1}{r^2} \Rightarrow U = \frac{c_1}{r} + c_2$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare. În particular pentru $c_1=1$ şi $c_2=0$ obţinem soluţia $\frac{1}{r}$, întâlnită în teoria potenţialului [], []. Operatorii diferenţiali amintiţi mai sus vor fi:

$$grad_r U = \frac{\partial U}{\partial r};\quad grad_\theta U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta};\quad grad_\varphi U = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$div\vec{A} = \frac{2}{r}A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{rtg\theta}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$rot_r\vec{A} = \frac{1}{rtg\theta}A_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}$$

$$rot_\theta\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}$$

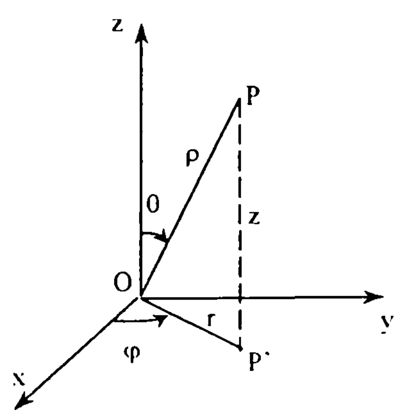
$$rot_\varphi\vec{A} = \frac{1}{r}A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}$$

II. Coordonate cilindrice

Poziţia punctului P(x,y,z) din spaţiu poate fi determinată şi în modul următor:

Proiectăm punctul P în P' pe planul xOy şi notăm cu r raza vectoare a punctului P' în planul xOy. Notăm cu φ unghiul pe care-l face această rază vectoare $\vec{r} = \overrightarrow{OP'}$ cu axa Ox (**Fig. 4a**). Atunci poziţia punctului P' în planul xOy este determinată prin parametrii r şi φ; în final pentru a cunoaşte poziţia punctului P mai trebuie să cunoaştem şi cota z. Aceste trei mărimi, (r,φ,z) reprezintă aşa-numitele **coordonate cilindrice** sau **semipolare** ale punctului P. Acest sistem de coordonate curbilinii este format din următoarele trei familii de suprafeţe ortogonale, două câte două:

r= const. care sunt nişte cilindri de revoluţie în jurul axei z;
φ =const. care sunt nişte plane care trec prin axa z şi sunt perpendiculare pe planul xOy şi, în sfârşit,
z=const. care sunt nişte plane perpendiculare pe axa z respectiv paralele cu axa xOy (**Fig. 4b**).



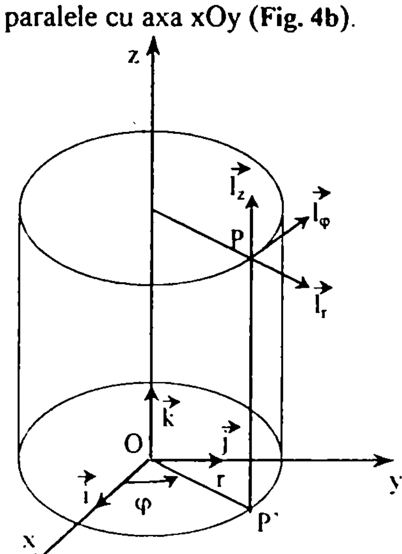


Fig.4.

Cele trei coordonate cilindrice r,φ,z sunt legate de coordonatele x,y,z prin relaţiile evidente:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

iar prin comparaţie cu (14) avem:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

În cele două sisteme de coordonate, cartezian şi cilindric, sprafeţele de coordonate au respectiv ecuaţiile:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad r = const.$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi \qquad \varphi = const.$$

$$z = z \qquad z = z$$

Elementul de lungime va fi:

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi \\ dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

De aici deducem unităţile de lungime locale: $H_1=1$; $H_2=r$, $H_3=1$

Ecuaţia lui Laplace în coordonate cilindrice va fi:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + r\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Soluţia acestei ecuaţii, care nu depinde decât de distanţa r a punctului până la axa Oz, este:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial U}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow U = C_1\ln r + C_2$$

Presupunem că valorile lui U nu depind de z, adică U are valori identice în toate planele paralele cu axa xOy. În acest caz avem de fapt o problemă şi ecuaţia lui Laplace are formele:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

Se vede că în cazul plan, ln r va fi o soluţie a ecuaţiai lui Laplace, sau chiar $\ln\frac{1}{r} = -\ln r$.

Alţi operatori au expresiile:

$$grad_r U = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad grad_\varphi U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \quad grad_z U = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{r}A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$rot_r\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$rot_\varphi\,\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$rot_z \vec{A} = \frac{1}{r} A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$$

Notă: Trebuie sa observăm atent că schimburile r si θ au o semnificaţie diferită în cazul coordonatelor sferice şi cilindrice, ca urmare şi versorii $\overline{e_r}$ şi $\overline{e_\theta}$ sunt diferiţi în cele două sisteme de coordonate.

5. Formularea indicială

Evident că dacă vom folosi un sistem de coordonate cu o notaţie mai generală, vom putea utiliza o scriere indicială mult mai condensată şi mai maniabilă.

Fie deci $\Re_3$ un spaţiu euclidian cu trei dimensiuni, în care se dau funcţiile:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1,2,3$$

sau (24)

$$x_i = x_i(q_k) \quad i,k = 1,2,3$$

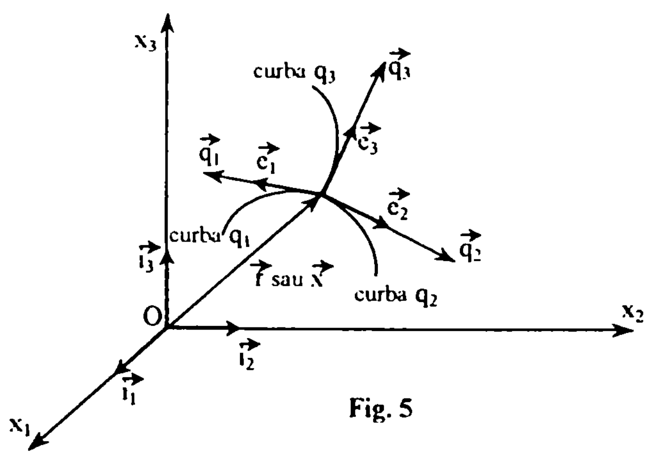


Fig. 5

unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele carteziene rec angulare ale unui punc oarecare N, iar q_1, q_2, q_3 un sistem de trei parametri independenţi (**Fig. 5**).

Vom presupune că funcţiile $x_i(q_k)$ admit derivate parţiale continue până la ordinul necesar; în cazul de faţă vom presupune că ele sunt de clasă C^1 într-un domeniu $D \subset \Re_3$ şi astfel încât determinantul funcţional (jacobianul) transformării (1) este nenul în D:

$$J = \frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(q_1,q_2,q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (25)$$

Această condiţie este necesară pentru a putea rezolva sistemul de funcţii implicite (1), astfel încât:

$$q_i = q_i(x_1,x_2,x_3) \quad i = 1,2,3 \sim q_i = q_i(x_k) \quad i,k = 1,2,3 \qquad (26)$$

Între punctele N din spaţiul $\Re_3$ şi sistemul de numere q_i avem o corespondenţă biunivocă; când parametrii q_i iau valori într-un domeniu D' atunci punctele N din spaţiu descriu un domeniu $D \subset \Re^3$, imaginea domeniului D'.

Poziţia unui punct precizat N_0 din $\Re_3$ este dată de intersecţia a trei suprafeţe având ecuaţiile:

$$\begin{cases} q_1^0 = q_1(x_1,x_2,x_3) \\ q_2^0 = q_2(x_1,x_2,x_3) \sim q_i^0 = q_i(x_k) \qquad i,k = 1,2,3 \\ q_3^0 = q_3(x_1,x_2,x_3) \end{cases}$$

Intersectând aceste suprafeţe două câte două, obţinem în punctul N_0 trei curbe, de-a lungul cărora variază numai câte o coordonată q:

$$\begin{cases} q_2^0 = q_2(x_1,x_2,x_3) \cap q_3^0 = q_3(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow (C_1) \xrightarrow{\text{variaza}} numai\ q_1 \\ q_1^0 = q_1(x_1,x_2,x_3) \cap q_3^0 = q_3(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow (C_2) \xrightarrow{\text{variaza}} numai\ q_2 \\ q_1^0 = q_1(x_1,x_2,x_3) \cap q_2^0 = q_2(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow (C_3) \xrightarrow{\text{variaza}} numai\ q_3 \end{cases}$$

Din acest motiv curbele (C_1), (C_2), (C_3), le numim **curbe de coordonate**, iar parametrii (q_1, q_2, q_3) se numesc **coordonate curbilinii** şi vom zice că spaţiul $\Re_3$ a fost raportat, în domeniul D, la un sistem de coordonate curbilinii. Coordonatele curbilinii q_1, q_2, q_3 se numesc **ortogonale** dacă curbele coordonate se intersectează două câte două sub unghiuri drepte, oricare ar fi $N \in D$.

Se vede astfel că s-au realizat o serie de corespondenţe biunivoce între tripletele ordonate de coordonate curbilinii (q_1, q_2, q_3), tripletele ordonate de coordonate carteziene (x_1, x_2, x_3), punctele corespunzătoare N aparţinând unui domeniu D al spaţiului euclidian tridimensional $\Re_3$ şi vectorii de poziţie ale acestor puncte în sistemul cartezian ortogonal (O, $\vec{i}_k$).

$$\vec{r} = \vec{ON} = x_1 \vec{i}_1 + x_2 \vec{i}_1 + x_3 \vec{i}_3 \tag{27}$$

Baze

Din (24) şi (27) avem:

a) Baza naturală

$$\vec{x}(q_1,q_2,q_3) = x_1(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_1 + x_2(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_2 + x_3(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_3$$

$$\vec{r} = x_k(q_i)\vec{i}_k \qquad k,i = 1,2,3 \tag{28}$$

unde $\vec{r}$ este o funcţie continuă cu derivate parţiale continue în $\Re_3$ de acelaşi ordin ca şi x_i.

Pornind de la relaţiile (28) vom introduce vectorii $\vec{g}_i = (q_1, q_2, q_3)$ definiţi astfel:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\vec{i}_k \qquad i = 1,2,3 \tag{29}$$

Să evidenţiem câteva proprietăţi ale vectorilor $\vec{g}_i$:

- Pentru fiecare i=1,2,3 vectorul $\vec{g}_i$ este dirijat după tangenta la curba coordonată q_i ce trece prin punctul N considerat, în care sunt calculate derivatele parţiale (8), întrucât de-a lungul acestei curbe variază numai parametrul q_i.
- În orice punct $N \in D$, vectorii $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ sunt liniar independenţi deoarece determinantul lor este tocmai determinantul funcţional J(2)*.

---

* Putem demonstra şi direct această afirmaţie făcând produsul mixt al celor trei vectori $\vec{g}_1 \cdot \left(\vec{g}_2 \times \vec{g}_3\right) = V \neq 0$

$$i = 1 \Rightarrow \vec{g}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\vec{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\vec{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_1}\vec{i}_3$$

$$i = 2 \Rightarrow \vec{g}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\vec{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\vec{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_2}\vec{i}_3 \quad \Rightarrow \vec{g}_1 \cdot \left(\vec{g}_2 \times \vec{g}_3\right) = \left| \quad \right| = J \neq 0$$

$$i = 3 \Rightarrow \vec{g}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial q_3}\vec{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_3}\vec{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial q_3}\vec{i}_3$$

Rezultă că vectorii: $\vec{g}_1(N)$, $\vec{g}_2(N)$, $\vec{g}_3(N)$ formează o bază în N, $\forall N \in D$, numită **bază naturală** în punctul N, corespunzătoare sistemului de coordonate curbilinii q_1, q_2, q_3.

b) Bază fizică – este reprezentată de versorii sau vectorii unitari corepsunzători bazei $\vec{g}_i$, definiţi astfel:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|} = \frac{\vec{g}_i}{H_i} \qquad i = 1,2,3 \quad \textit{fara} \quad \textit{sumare}$$

unde

$$H_i = \|\vec{g}_i\| = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2 \qquad i = 1,2,3$$

sunt mărimile vectorilor $\vec{g}_i$ numite **coeficienţii lui Lamé**.

Considerând coordonate curbilinii ortogonale, baza fizică introdusă mai sus $\{\vec{e}_i(N)\}$ este o bază ortonormată în orice punct $N \in D$, lucru care se scrie astfel:

$$\vec{e}_i(N)\cdot\vec{e}_k(N) = \delta_{ik} \qquad i,k = 1,2,3$$

Vom mai presupune că vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formează un triedru drept. Deosebirea esenţială între cele două baze $\{\vec{e}_i\}$ şi $\{\vec{i}_k\}$ este dată de faptul că direcţiile vectorilor bazei $\{\vec{e}_i\}$ se schimbă de la un punct la altul al spaţiului. Mai trebuie să precizăm că trecerea de la baza fizică, numită baza locală din N sau reperul local din N, este necesară deoarece baza naturală prezintă dezavantajul că dacă coordonatele q_1, q_2, q_3 au dimensiuni fizice diferite, atunci şi coordonatele vectorilor în această bază au dimensiuni fizice diferite. De aceea, păstrând avantajele utilizării coordonatelor curbilinii adecvate condiţiilor de simetrie specifice problemei de rezolvat, s-a introdus ca bază locală sistemul versorilor tangenţi în fiecare punct la liniile de coordonate. De aceea, componentele vectorilor şi tensorilor în bazele reprezentate de versorii ortogonali $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ se numesc componente fizice, întrucât au aceleaşi dimensiuni fizice cu ale vectorilor şi tensorilor respectivi.

Legătura dintre componentele fizice şi cele carteziene se stabileşte prin formulele de transformare, care leagă între ele două baze ortonormate.

$$\vec{e}_k\cdot\vec{e}_m = \delta_{km}; \quad \vec{e}'_r\cdot\vec{e}'_s = \delta_{rs}$$

Exprimăm fiecare vector al unei baze ca o combinaţie liniară a valorilor celeilalte baze:

$$\vec{e}_r = \alpha_{kr}\cdot\vec{e}_k; \quad \vec{e}_k = \alpha'_{rk}\vec{e}'_r$$

unde cele două matrice ale cosinuşilor directori $[\alpha_{kr}]$ şi $[\alpha'_{rk}]$ sunt matrici inverse iar

$$\alpha_{kr} = \vec{e}_k\cdot\vec{e}'_r = \cos\left(\vec{e}_k, \vec{e}'_r\right)$$

Referindu-ne la cele două baze cu care lucrăm $\{0, \vec{i}_k\}$ şi $\{N, \vec{e}_i\}$ putem scrie:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ki}\cdot\vec{i}_k \qquad \vec{i}_k = \alpha_{ki}\,\vec{e}_i$$

unde $\alpha_{ki} = \vec{i}_k\cdot\vec{e}_i$. Deoarece aceste baze sunt ortonormate rezultă:

$$\alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}; \qquad \alpha_{ki}\alpha_{ji} = \delta_{kj}$$

Pe de altă parte din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\alpha_{ki} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \quad \text{(fără sumare)}$$

* * *

SPAȚIUL LINIAR EUCLIDIAN[*]

§1. Produs scalar

Presupunem că într-un spațiu liniar $\mathscr{L}$ este posibil să se introducă o operație algebrică care să asocieze la doi vectori arbitrari din $\mathscr{L}$ un număr real (sau un scalar din corpul K) pe care-l vom nota $\vec{x}\cdot\vec{y}$ (sau $<\vec{x}\cdot\vec{y}>$) și-l vom numi **produs scalar**, cu următoarele proprietăți:

$$\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathscr{L},\quad \forall\alpha\in K\ \Rightarrow$$

a) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ (produsul scalar este comutativ)

b) $\left(\alpha\vec{x}\right)\vec{y}=\vec{x}\cdot\left(\alpha\vec{y}\right)=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})$ (produsul scalar este asociativ față de amplificarea cu un scalar)

c) $\vec{x}\left(\vec{y}+\vec{z}\right)=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$ (distribuitivitatea față de adunarea vectorială)

d) $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ pentru $\vec{x}$ arbitrar $\Rightarrow\vec{y}=\vec{0}$.

Deci, dacă într-un spațiu liniar se poate introduce o asemenea operație vom zice că în acest spațiu am definit un produs scalar.

Un spațiu liniar $\mathscr{L}$ dotat cu un produs scalar îl vom numi **spațiu liniar euclidian** și-l vom nota cu E. Este deci un spațiu liniar particular în care mai apare o operație în plus. Dacă este vorba de un spațiu liniar n – dimensional, $\mathscr{L}_n$, spațiul euclidian corespunzător îl notăm cu E_n

Să vedem ce consecințe are definirea produsului scalar într-un spațiu liniar euclidian n- dimensional E_n.

Să considerăm că ne dăm o bază $\vec{e}_i$ și pentru doi vectori arbitrari vom avea:

$$\vec{x}=x^i\vec{e}_i\ ;\qquad \vec{y}=y^j\vec{e}_j$$

Atunci:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(x^i\vec{e}_i\right)\left(y^j\vec{e}_j\right)=x^iy^j\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right)$$

Deci într-un spațiu euclidian E_n pentru a calcula produsul scalar a doi vectori este suficient să cunosc produsele scalare ale vectorilor bazei $\left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\right)$. Se obișnuiește să se noteze acest produs:

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}=g_{ji}$$

și deci:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=g_{ij}x^iy^j$$

Tragem concluzia că expresia analitică a produsului scalar este o formă biliniară simetrică în coordonatele vectorilor factori. Mai mult, să presupunem că $g_{ij}\cdot x^i\cdot y^j=0$. Pentru x^i arbitrar rezultă $g_{ij}\cdot y^j=0$, care are loc pentru $y^j=0$. Sistemul admite numai soluția banală, deci $\left|g_{ij}\right|\neq 0$. Înseamnă că forma biliniară simetrică a produsului scalar este o **formă nedegenerată**.

Vom arăta că prin intermediul produsului scalar se pot asocia spațiului euclidian anumite elemente specifice: **norma**, **modulul** și **unghiul a doi vectori**.

---

[*] după A. Lichnerovics ([L 1])

§2. Norma, modulul și unghiul a doi vectori

a) **Norma unui vector** (notată $N\vec{x}$). Vom înțelege prin norma unui vector $\vec{x}$ produsul scalar al vectorului $\vec{x}$ prin el însuși:

$$N\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}^2 \Leftrightarrow N\vec{x} = g_{ij}x^i x^j > 0$$

Este deci o formă pătratică nedegenerată în componentele vectorului. Dacă forma este **pozitiv definită** spațiul se numește **spațiu euclidian propriu**.

Un vector pentru care $N\vec{x} = 1$ se numește **vector normat sau unitar (versor)**.

b) **Modulul (sau mărimea) unui vector** (notat $|\vec{x}|$ sau mod $\vec{x}$)

Prin definiție modulul unui vector este:

$$|\vec{x}| = \sqrt{N\vec{x}} = \sqrt{g_{ij}\cdot x^i\cdot x^j}$$

Se observă că aceasta are loc numai într-un spațiu euclidian propriu; într-un asemenea spațiu norma este zero numai pentru vectorul nul $\left(N\vec{x} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{0}\right)$.

c) **Unghiul a doi vectori. Inegalitatea lui Schwarz**

Pentru oricare doi vectori arbitrari din E_n are loc relația:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|,\ \text{numită inegalitatea lui Schwarz}$$

(Valoarea absolută a produsului scalar a doi vectori este mai mică sau egală cu produsul modulelor celor doi vectori).

Demonstrație. Pornim de la vectorul $\lambda\vec{x} + \vec{y}$ căruia îi calculăm norma.

$$N(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda^2 N\vec{x} + 2\lambda\,\vec{x}\,\vec{y} + N\vec{y} > 0$$

Pentru ca această expresie să fie pozitivă pentru orice $\lambda \in K$ trebuie ca discriminantul expresiei privită ca o funcție de gradul doi în λ să fie negativ:

$$\Delta_\lambda \le 0 \Rightarrow \left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right) - N\vec{x}\cdot N\vec{y} \le 0$$

Aceasta are evident loc dacă:

$$\frac{\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} \le 1$$

Dar noi știm că există două funcții trigonometrice care se bucură de această proprietate, de aceea întotdeauna acestei expresii pot să-i asociez funcția:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$$

prin care definim unghiul φ, numit „unghiul" vectorilor $\vec{x}$ și $\vec{y}$. De aici rezultă imediat că dacă $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$ fără ca $\vec{x}$ sau $\vec{y}$ să fie nuli, rezultă $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Vom spune deci că **doi vectori sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este nul**.

§3. Sistem ortonormat de vectori

Să presupunem că într-un spațiu euclidian propriu E_n avem un sistem de r vectori cu următoarele proprietăți:

- fiecare vector al sistemului este normat $\left(N\vec{a}_i = 1\right)$
- fiecare pereche de vectori este ortogonală $\left(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0\right)$

Un astfel de sistem de vectori $\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r\right)$ care satisface condiţiile de mai sus se numeşte **ortonormat**.

Vom pune în evidenţă două proprietăţi importante ale sistemeloor ortonormate de vectori:

1) Produsul scalar este:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

2) Un sistem ortonormat este întotdeauna un sistem de vectori liniar independenţi.

Într-adevăr dacă scriem relaţia de dependenţă liniară:

$$\lambda^i \vec{a}_i = 0 \quad \Big| \cdot \vec{a}_j \quad \left(i = 1,2,\ldots,r\right) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \lambda^i \vec{a}_j \cdot \vec{a}_j = \lambda^i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda^j = 0$$

Deci relaţia (*) are loc numai pentru $\lambda^j = 0$, adică vectorii sunt liniar independenţi. Numărul r al oricărui sistem de vectori ortonormat este $\leq$ dimensiunea n a spaţiului. Dacă $r=n$ sistemul poate forma o bază a spaţiului care se numeşte **bază ortonormată**. În legătură cu aceasta se poate demonstra o teoremă fundamentală: „În orice spaţiu E_n există cel puţin o bază ortonormată".

Spaţiul E_n este la rândul lui un spaţiu liniar $\mathcal{L}_n$, deci el are o bază $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Problema se pune de a arăta că din această bază se poate deduce totdeauna una ortonormată. Rezolvarea probelemei se face cu ajutorul **metodei de ortogonalizare a lui Schmidt** ([ ] [ ]). Să mai precizăm că existând o bază ortonormată există de fapt o infinitate de baze ortonormate.

§4. Componente contravariante şi componente covariante într-un spaţiu E_n

Fie $\vec{x} \in E_n$ un vector arbitrar din E_n şi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ o bază oarecare a spaţiului. Am văzut că putem scrie:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \qquad (4.1)$$

(s-a aplicat convenţia de semne a lui Einstein), unde x^i sunt componentele vectorului $\vec{x}$, care la o schimbare de bază se schimbă după o **lege de contravarianţă**. Amplific relaţia (1) cu un vector oarecare $\vec{e}_j$ al bazei:

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_j = x^i \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = x^i g_{ij}$$

Notez cu un indice jos produsul scalar de mai sus:

$$x_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j = g_{ij} x^i \qquad (4.2)$$

Relaţiile (4.2) ne pun astfel în evidenţă n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ asociate în mod unic vectorului $\vec{x}$ şi, reciproc, dacă ne dăm n numere $\left(x_j\right)$, prin relaţia (4.2) pot întotdeauna determina coordonatele $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ ale vectorului $\vec{x}$. Asta înseamnă că ansamblul ordonat de numere $\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ definesc vectorul $\vec{x}$ tot aşa de bine ca şi componentele iniţiale $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$. Pe primele $\left(x^i\right)$ le vom numi **componentele contravariante** ale vectorului $\vec{x}$, iar pe ultimele $\left(x_j\right)$ le vom numi **componentele covariante**. Putem arăta cu uşurinţă că într-adevăr la o schimbare a bazei $\left(\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i'\right)$ aceste componente $\left(x_j\right)$ se schimbă după o lege de covarianţă.

Fie $\vec{e}'_i = \alpha_i^j \vec{e}_j$ relația care ne dă schimbarea bazei.

Notez x_i componentele covariante în noua bază. Prin definiție:

$$x'_i = \vec{x} \cdot \vec{e}'_i$$

Dar $\vec{x}$ nu depinde de baza aleasă, este un obiect al spațiului, adică:

$$x'_i = \vec{x} \cdot \vec{e}'_i = \vec{x} \cdot \alpha_i^j \cdot \vec{e}_j = \alpha_i^j \left(\vec{x} \cdot \vec{e}_j \right) = \alpha_i^j \cdot x_j, \quad \text{c.c.t.d.}$$

Cu ajutorul acestor componente produsul scalar obține o formă foarte simetrică. Fie doi vectori arbitrari $\vec{x}(x^i)$ și $\vec{y}$ ($y_i = g_{ij} y^j$ - vezi relația (4.2)). Atunci:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i \cdot g_{ij} y^j = g_{ij} x^i y^j = x^i y_i = x_j y^j$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y_i = x_j y^j \tag{4.3}$$

Tot așa de simpu se poate scrie și norma și unghiul a doi vectori:

$$N\vec{x} = x^i x_j; \qquad \cos\varphi = \frac{x_i y^i}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{x_i y^j}{\sqrt{x^i x_j}\sqrt{y^i y_j}} \tag{4.4}$$

§5. Baze reciproce

Am văzut că pentru un vector arbitrar $\vec{x}$ din E_n, în baza $(\vec{e}_i)$ putem scrie:

$$\vec{x} = x^i \cdot \vec{e}_i \tag{5.1}$$

unde x^i sunt componentele contravariante pe care le presupun cunoscute. Introducând produsul scalar am definit componentele covariante cu relația:

$$x_j = g_{ij} x^i \tag{5.2}$$

Să presupunem că ne dăm vectorul $\vec{x}$ și componentele sale covariante $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Există deci o bază în raport cu care aceste numere să fie componentele lui $\vec{x}$. Mă întreb cum arată această bază. Voi nota vectorii acestei baze necunoscute cu $\vec{e}^i$, astfel încât să avem:

$$\vec{x} = x_i \cdot \vec{e}^i \tag{5.3}$$

Voi introduce de asemenea așa-numiții **cofactori normalizați** $g^{ij} = g^{ji}$ ai elementelor g_{ij} care satisfac următoarele condiții:

$$g_{ij} \cdot g^{ik} = \delta_j^k = \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases} \tag{5.4}$$

În aceste condiții formulele (5.2) se pot rezolva amplificând cu g^{ik} și voi avea:

$$g^{ik} x_j = g^{ik} g_{ij} x^i = \delta_j^k x^i$$

Pentru $j = k \Rightarrow \delta_j^k = 1 \Rightarrow$

$$x^i = g^{ik} x_k \tag{5.5}$$

Deci:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = g^{ik} x_k \vec{e}_i = x_k \left(g^{ik} \vec{e}_i \right)$$

dar:
$$\vec{x} = x_i \vec{e}^i$$

Comparând ultimele două relaţii avem:

$$\vec{e}^i = g^{ik} \vec{e}_k \tag{5.6}$$

şi invers, amplificând cu g_{ij} avem:

$$\vec{e}_j = g_{ij} \vec{e}^i \tag{5.7}$$

Formulele (5.6) şi (5.7) ne dau posibilitatea să trecem de la baza iniţială la baza componentelor covariante şi invers. Aceste baze se numesc **baze reciproce** ale spaţiului E_n datorită faptului că una se deduce din cealaltă folosind determinanţii reciproci $|g_{ij}|$ sau $|g^{ij}|$. Este de observat că matricea trecerii de la o bază la baza reciprocă este tocmai matricea $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ a produselor scalare formate cu vectorii bazei iniţiale date.

Să încheiem punând în evidenţă legea după care se transformă vectorii bazei reciproce la o schimbare a bazei iniţiale.

Am văzut că la o schimbare de axe baza iniţială se schimbă după o lege de covarianţă:

$$\vec{e}_i^{\,\prime} = \alpha_i^j \cdot \vec{e}_j \tag{5.8}$$

Să arătăm că în acest caz vectorii bazei reciproce se schimbă după o lege de contravarianţă de forma:

$$\vec{e}^{\prime i} = \tilde{\alpha}_j^i \overline{e^j} \tag{5.9}$$

Pornim de la relaţii cunoscute:

$$g_{ij}^{\prime} = \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j^{\,\prime} = \alpha_i^k \vec{e}_k \cdot \alpha_j^h \vec{e}_h = \alpha_i^k \alpha_j^h g_{kh}$$

Deci g_{ij} se transformă după o lege dublă de covarianţă. Dar ţinând cont de relaţiile (5.4) trebuie să avem:

$$g^{\prime kh} = \tilde{\alpha}_i^k \cdot \tilde{\alpha}_j^h \cdot g^{ij}$$

Atunci, din (5.6) rezultă

$$\overline{e^{\prime i}} = g^{\prime ij} \vec{e}_j^{\,\prime} = \tilde{\alpha}_r^i \tilde{\alpha}_s^j g^{rs} \cdot \alpha_j^t \vec{e}_t = \tilde{\alpha}_r^i \cdot \delta_s^t g^{rs} \vec{e}_t$$

Voi însuma după t şi rămânem numai cu situaţiile în care $t=s$, deci:

$$\overline{e^{\prime i}} = \alpha_r^i g^{rs} \vec{e}_s = \tilde{\alpha}_r^i \vec{e}^r, \quad \text{c.c.t.d.}$$

* * *

FUNCȚIA δ A LUI DIRAC

1. Prin **funcția** δ se înțelege o funcție nulă în întreg domeniul în care este definită cu excepția unui singur punct în care devine infinită. Ea a fost introdusă și utilizată pentru prima dată în mecanica cuantică de către Dirac pentru a descrie *„surse punctiforme cu debit finit"*, și face parte din clasa așa-numitelor ***funcții impulsive***. Funcția δ se prezintă de obicei ***normată***, adică integrala ei pe întreg domeniul de definiție să fie egală cu unitatea, iar în afara acestui domeniu să ia valoarea zero. Fie deci intervalul (a,b) în interiorul căruia definim funcția $\delta(x - x_o)$unde x este punctul curent din intervalul (a,b), iar x_0 punctul de discontinuitate al funcției δ (v. **Fig.1**). Sub formă analitică, cele spuse mai sus se transcriu astfel:

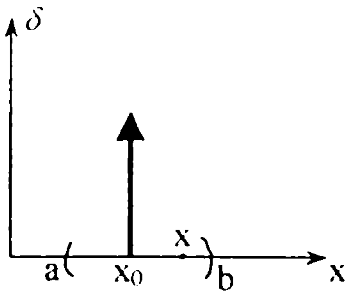


Fig.1.

$$\begin{cases} \delta(x - x_0) = 0, & \forall x \in (a,b), \quad x \neq 0 \\ \delta(x - x_0) = \infty, & \text{pentru} \quad x = x_0 \\ \int_a^b \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1, & pentru \quad a < x_0 < b \\ 0, & pentru \quad x_0 < a \quad sau \quad x_0 > b \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

2. Funcția δ posedă proprietatea remarcabilă numită **proprietatea filtrantă**. Acest lucru înseamnă că $\forall$ ar fi $f(x):(a,b) \to R$, continuă și mărginită pe (a,b), vom avea:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x) & daca \quad x_0 \in (a,b) \\ 0 & daca \quad x_0 \notin (a,b) \end{cases} \tag{2}$$

3. Funcția δ poate fi pusă și în legătură cu dezvoltarea în serie Fourier. În acest sens să considerăm un sistem închis de funcții ortonormate $\varphi_n(x)$definite pe (a,b). Dacă notăm cu $\overline{\varphi_k}(x)$ conjugata complexă a lui $\varphi_k(x)$, atunci se știe că între aceste funcții avem relația:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \overline{\varphi_k(x)}dx = \delta_{nk} \tag{3}$$

unde δ_{nk} este simbolul lui Kronecker.

Să considerăm dată o funcție periodică f(x) cu intervalul de periodicitate (a,b). Se știe că f(x) poate fi dezvoltată în serie Fourier cu ajutorul funcțiilor $\varphi_n(x)$ dacă îndeplinește condițiile lui Dirichlet.

În acest caz:

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) \tag{4}$$

unde coeficienții Fourier a_n sunt:

$$a_n = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_n}(x)dx \tag{5}$$

Din (5) și (4) rezultă:

$$f(x) = \sum_n \int_a^b f(z)\overline{\varphi_n}(z)\varphi_n(x)dz$$

(6)

Utilizând proprietatea filtrantă a frontierei δ putem scrie:

$$f(x) = \int_a^b f(z)\delta(z-x)dz \tag{7}$$

Din comparația expresiilor (7) și (6) rezultă relația formală:

$$\delta(z-x) = \sum_n \overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(x) \tag{8}$$

Această formulă este valabilă pentru un sistem de valori discrete date indicelui n, adică pentru un spectru discret al funcțiilor ortogonale.

Prin trecerea la limită se obține valoarea funcției δ și pentru un spectru continuu. Înlocuind funcțiile $\varphi_n(x)$ cu funcțiile $\varphi(x,n)$unde n este un parametru continuu, obținem:

$$\delta(z-x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \overline{\varphi}(z,n)\varphi(x,n)dn \tag{9}$$

4. Funcția δ și funcția lui Green

Funcția δ poate fi pusă în legătură și cu funcția lui Green. Considerăm operatorul diferențial:

$$D = a_0 + a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + a_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \ldots \tag{10}$$

și ecuația diferențială neomogenă:

$$D = \varphi(x_i) = -\rho(x_i) \tag{11}$$

Aici cu x_i se notează atât ansamblul coordonatelor spațiale cât și timpul. Soluția ecuației (11) se obține aplicând operatorul diferențial invers D^{-1}.

$$\varphi(x_i) = -D^{-1}\rho(x_i) \tag{12}$$

Dar, pe baza proprietății filtrante a funcției δ avem:

$$\rho(x_i) = \int_\Omega \rho(z_i)\delta(z_i - x_i)d\Omega_z$$

(13)

Trebuie precizat că operatorii introduși D și D^{-1} se referă la variabilele x_i și nu la variabilele z_i și de aceea ei pot fi trecuți sub semnul integralei care se referă la variabilele z_i. Atunci introducând (13) în (12) obținem:

$$\varphi(x_i) = -\int_\Omega \rho(z_i)D^{-1}\delta(z_i - x_i)d\Omega_z \tag{14}$$

Pe de altă parte, funcția lui Green $G(z_i,x_i)$ referitoare la ecuația omogenă $D\varphi(x_i) = 0$ conduce direct la soluția ecuației neomogene (11) sub forma:

$$\varphi(x_i) = \int_\Omega \rho(z_i)G(z_i,x_i)d\Omega_z$$

(15)

Comparând (15) cu (14) rezultă:

$$\boxed{G(z_i,x_i) = -D^{-1}\delta(z_i - x_i)} \tag{16}$$

Aceasta este o relație fundamentală care stabilește legătura dintre funcția lui Green și funcția δ, corespunzătoare ecuației diferențiale (11).

5. Despre operatorul D^{-1}

În relaţia (16) aplicăm operatorul D la stânga şi obţinem:

$$DG(z_i, x_i) = -\delta(z_i - x_i) \tag{17}$$

relaţie care ne arată că funcţia G nu poate fi determinată decât cu aproximaţia unei funcţii G_0, soluţie a ecuaţiei omogene $DG_0=0$.

Revenim la ecuaţia (16), înmulţim ambii membrii cu o funcţie continuă $f(z_i)$ şi integrăm în domeniul Ω în raport cu variabilele z_i. Obţinem:

$$\int_\Omega G(z_i, x_i) f(z_i) d\Omega_z = -D^{-1} \int_\Omega f(z_i)\delta(z_i - x_i) d\Omega_z \tag{18}$$

Scoaterea lui D^{-1} în afara integralei e admisibilă deoarece - aşa cum am mai menţionat - operatorii D şi D^{-1} se aplică numai variabilelor x_i care nu sunt supuse interpretării.

Dar integrala din membrul drept al relaţiei (18) este tocmai integrala filtrantă, deci:

$$D^{-1} f(x_i) = -\int_\Omega f(z_i) G(z_i, x_i) d\Omega_z$$

(19)

În concluzie, din această relaţie vedem că D^{-1} este un operator integral liniar având ca nucleu funcţia lui Green cu semn schimbat.

6. În cartea lui R.D.STUART ([S]) funcţia δ, numită şi impulsul unitate, este definită pornind de la impulsul rectangular. Acest impuls reprezentat în **Fig.2**, este definit astfel:

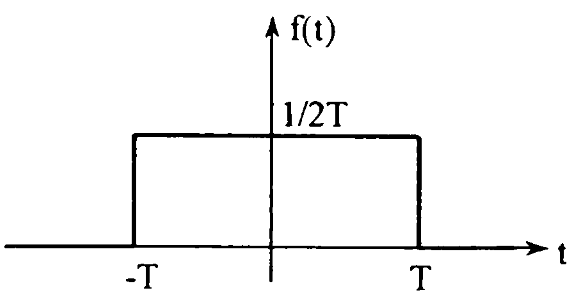


Fig.2

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T} & daca \quad t \in (-T, T) \\ 0 \quad daca & t \notin (-T, T) \end{cases} \tag{20}$$

Se observă cu uşurinţă că această definiţie determină un impuls de arie egală cu unitatea. Impulsul unitate se obţine luând limita $T \to 0$. În acest caz amplitudinea funcţiei devine infinită în origine, dar aria rămâne egală cu unitatea.

OPERATORI DIFERENȚIALI UZUALI

Amintim câțiva dintre operatorii diferențiali cei mai utilizați în teoria elasticității:

1. NABLA (simbolizat ∇) – operator diferențial liniar de ordinul întâi, definit în coordonate carteziene prin:

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Aplicat unei funcții scalare, el dă gradientul, iar aplicat vectorilor dă divergența sau rotorul.

Noțiunea a fost introdusă de W.Hamilton (1853), iar simbolul de O.Heaviside (1892). Se mai numește ***operatorul lui Hamilton***.

2. *LAPLACIAN* (simbolizat ∇^2 sau Δ) operator diferențial liniar de ordinul doi, definit formal în spațiul funcțiilor de clasă C^2 prin produsul scalar al operatorului nabla cu el insuși.

$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta$ =div grad,

adică, într-un sistem de referință cartezian:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

În coordonate sferice (r, θ, φ), unde $r^2=x^2+y^2+z^2$:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

iar în coordonate cilindrice, unde $r^2=x^2+y^2$:

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Este singurul operator diferențial de ordinul doi invariant la o transformare ortogonală de coordonate.

Ecuația $\Delta U=0$ se numește ***ecuația lui Laplace*** și joacă un rol important în mecanică, fizică, matematică, teoria elasticității și plasticității. Soluția acestei ecuații, funcția „U", se numește ***funcție armonică***.

3. ***DALAMBERTIAN***, operatorul lui D'Alembert (simbolizat $\Box$), numit și operator ondulatoriu – este un operator diferențial de ordinul doi, care în coordonate carteziene are forma:

$$\Box u\equiv\Delta u-\frac{1}{C_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

unde Δ - operatorul lui Laplace iar C – constantă.

În coordonate sferice are forma:

$$\Box u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

iar în coordonate cilindrice:

$$\Box u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}$$

În coordonate curbilinii generalizate:

$$\Box u\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right)$$

unde g – determinantul matricei $\left\|g_{\mu\nu}\right\|$, compusă din coeficienții matricei tensorului $g_{\mu\nu}$.

Operatorul poartă numele lui J. D'Alembert (1747) care l-a folosit în forma sa simplă la rezolvarea ecuației ondulatorii unidimensională.

PROBLEMA KELVIN. FORȚĂ CONCENTRATĂ ÎNTR-UN MEDIU INFINIT (HÜTTE p.E99)

O forță concentrată F acționând într-un punct O pe direcția z, într-un mediu elastic infinit în toate direcțiile (**Fig.1**), produce următoarele câmpuri de tensiuni și deplasări (Se consideră coordonate cilindrice: ρ, φ, z; $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$):

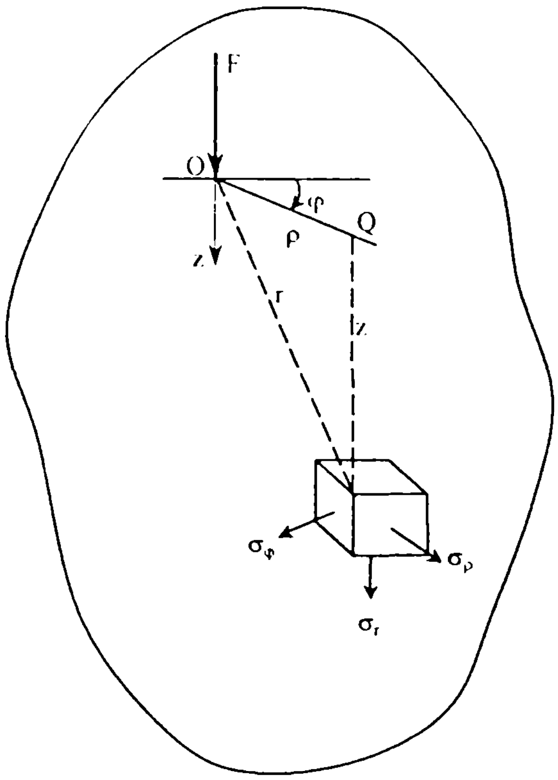


Fig. 1.

Tensiuni:

$$\sigma_\rho = \frac{F}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)\frac{z}{r} - \frac{3\rho^2 z}{r^3}\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{F}{8\pi(1-\nu)r^2}(1-2\nu)\frac{z}{r}$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)\frac{z}{r} + \frac{3z^3}{r^3}\right]$$

$$\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi z} \equiv 0$$

Deplasări :

$$u_\varphi \equiv 0$$

$$u_\rho = \frac{F}{16\pi(1-\nu)Gr}\cdot\frac{\rho z}{r^2}$$

$$u_z = \frac{F}{16\pi(1-\nu)Gr}\left(3 - 4\nu + \frac{z^2}{\rho^2}\right)$$

* * *

CÂTEVA SOLUȚII FUNDAMENTALE UTILIZATE ÎN M.E.Fr.

Se știe că una din dificultățile majore în aplicarea Metodei Elementelor de Frontieră este necesitatea de a utiliza ca funcție pondere o soluție a ecuației omogene sau o soluție fundamentală. Actualmente există însă o *„bază de date"* , adică tabele cu soluții fundamentale (numite și soluții elementare ....). Notăm aceste soluții cu un asterisc pentru a sublinia particularitatea lor.

Redau în această anexă, principalele cazuri de ecuații diferențiale și soluții fundamentale întâlnite în aplicațiile tehnice.

I. Ecuația lui LAPLACE

- **Probleme unidimensionale**: $$\frac{d^2u^*}{dx^2} + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{2}r, \quad r = |x|$$
- **Probleme bidimensionale**: $$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$
- **Probleme tridimensionale**: $$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_3^2} + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{4\pi r}$$

II. Ecuația lui HELMHOLTZ

- **Probleme unidimensionale**: $$\frac{d^2u^*}{dx^2} + \lambda^2 u^* + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = -\frac{1}{2\lambda}\sin\lambda r$$
- **Probleme bidimensionale**: $$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} + \lambda^2 u^* + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{4i}H_0^{(2)}(\lambda r)$$

  unde H_0 – funcția HANKEL
- **Probleme tridimensionale**: $$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_3^2} + \lambda^2 u^* + \delta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{4\pi r}e^{-i\lambda r}$$

III. Ecuația undelor

- **Probleme unidimensionale**: $$c^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \delta_0\delta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{1}{2c}H(ct - r)$$

  unde H - funcția treaptă Heaveside
- **Probleme bidimensionale**: $$c^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2}\right) - \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \delta_0\delta(t) = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{H(ct - r)}{2\pi c\left(c^2t^2 - r^2\right)}$$
- **Probleme tridimensionale**: $$c^2\nabla^2 u^* - \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \delta_0\delta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}$$

PROBLEME UNIDIMENSIONALE

I. Bare drepte de rigiditate constantă, solicitate la încovoiere

Ecuația diferențială: $$EI\frac{d^4u^*}{dx^4} = \delta(x, \rho)$$

Soluția fundamentală: $u*(r) = \frac{L^3}{12EI}\left[2 + \left(\frac{r}{L}\right) - 3\left|\frac{r}{L}\right|^2\right]$

II. Vibrațiile barelor drepte de rigiditate constantă solocitate la încovoiere

a) Vibrații libere

Ecuația diferențială: $\frac{d^4u*}{dx^4} - \lambda^4 u* = \frac{1}{EI}\delta(x,\xi)$ *unde* $\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$

Soluția fundamentală: $u*(x,\zeta) = \frac{1}{4\lambda^3 EI}\left[\sec\lambda l \cdot \sin\lambda(l - |r|) - \sec h\lambda l\, sh\,\lambda(l - |r|)\right]$

b) Vibrații forțate (acționează o sarcină transversală $q(x,t) = Q(x)\sin\omega t$ și o forță axială P).

Ecuația diferențială: $\frac{d^4u*}{dx^4} - \mu^4 u* - 2\alpha^2\frac{d^2u*}{dx^2} = \frac{1}{EI}\delta(x,\xi)$

unde $\mu^4 = \frac{mk^2}{EI}$; $\alpha^2 = \frac{P}{2EI}$; $k = \omega i$

Soluția fundamentală:

$$u*(x,\xi) = \frac{1}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)EI}\sec\alpha l \sin\alpha(l - |r|) - \frac{1}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)EI}\sec h\,\beta l\, sh\,\beta(l - |r|)$$

unde $|r| = |x - \xi|$; $\beta = \left[\alpha^2 + (\alpha^4 - \mu^8)^{1/2}\right]^{1/2}$

III. Flambajul barelor drepte de secțiune constantă

Ecuația diferențială: $EI = \frac{d^4u*}{dx^4} + P\frac{d^2u*}{dx^2} = \delta(x,\xi)$

Soluția fundamentală: $u*(r) = \frac{1}{2k}P\left[-\sin k|r| + tg\,kL\cos k|r| + k(|r| - L)\right]$ *cu* $k^2 = \frac{P}{EI}$

PROBLEME BIDIMENSIONALE

Ecuația diferențială a unei plăci plane subțiri elastice încărcată transversal cu o forță uniform distribuită p este:

$$D\Delta\Delta w = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}\right) = p$$

Vom avea:

I. Plăci plane circulare încărcate cu o forță concentrată în centru

Ecuația diferențială: $D\nabla^4 w* = \delta$ *unde* $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$

Soluția fundamentală: $w*(r) = \frac{1}{16\pi D}\left(r^2 \ln r^2 - r^2\right)$

II. Flambajul plăcilor circulare subțiri,

încărcate cu o forță de compresiune radială perimetrală în planul plăcii notată xr.

Ecuația diferențială: $D\nabla^4 w* = N\nabla^2 w* = \delta$

Soluția fundamentală: $w*(r) = \frac{D}{2\pi N}\left(\ln r + k_0\sqrt{Nr^2 / D}\right)$

III. Flambajul plăcilor subțiri de formă arbitrară

Ecuația diferențială: $D\nabla^4 w^* / N\nabla^2 w^* = \delta$.

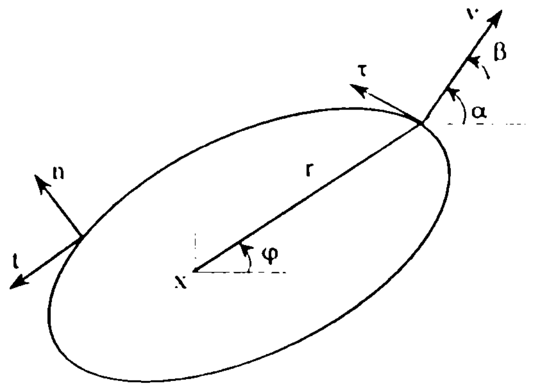


Fig. 1.

Soluția fundamentală: $w^* = a(\ln r + k_0)$

$$\theta^* = \frac{\partial w^*}{\partial n} = a\left(\frac{1}{r} - \lambda k_1\right)\cos\beta$$

$$\text{unde } a = \frac{1}{2\pi}\frac{N}{D}; \quad \lambda = \left(\frac{N}{D}\right)^{1/2}$$

Deplasarea pe contur în punctul y când forța concentrată unitară acționează în punctul sursă x (v. **Fig.1**).

$$w^*(y,x) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} r \frac{dr}{d\nu}(1 + 2\ln r)$$

IV. Ecuația lui NAVIER (soluția KELVIN)

Ecuația diferențială: $\dfrac{\partial \tau^*_{jk}}{\partial x_j} + \delta_l = 0$

__Cazul a__: forță concentrată unitară în direcția l. $u^*_k = \dfrac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\dfrac{1}{r}\delta_{kl} + r_{,k}r_{,l}\right]e_l$

__Cazul b__: tracțiune în direcția k $p^*_k = -\dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{dr}{dn}\left[(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}\right] - (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l})\right\}\dfrac{e_l}{4\pi(1-\nu)}$

V. Ecuația lui DARCY (cazul ortotrop)

Ecuația diferențială: $k_1\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + k_2\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} + \delta_0 = 0$

Soluția fundamentală: $u^* = \dfrac{1}{\sqrt{k_1 k_2}}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_0}, \quad r_0 = \left(\dfrac{x_1^2}{k_1} + \dfrac{x_2^2}{k_2}\right)^{1/2}$

PROBLEME TRIDIMENSIONALE

I. Ecuația lui DARCY

Ecuația diferențială: $k_1\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + k_2\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} + k_3\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_3^2} + \delta_0 = 0$

Soluția fundamentală: $u^* = \dfrac{1}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}}\cdot\dfrac{1}{4\pi r_0}, \qquad r_0 = \left(\dfrac{x_1^2}{k_1} + \dfrac{x_2^2}{k_2} + \dfrac{x_3^2}{k_3}\right)^{1/2}$

II. Ecuația lui NAVIER (soluția KELVIN)

Ecuația diferențială: $\dfrac{\partial \sigma^*_{jk}}{\partial x_j} + \delta_0 = 0$

Soluția fundamentală (deplasarea după direcția k): $u^*_k = \dfrac{-1}{16\pi G(1-\nu)}\left(\dfrac{3-4\nu}{r}\delta_{lk} + \dfrac{\partial r}{\partial x_l}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x_k}\right)$

$$p^*_j = p^*_{ij}e_i = \frac{-1}{8\pi(1-\nu^2)^{1/2}}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\right] + (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j})\right\}\cdot e_j \quad ; \qquad p^*_i = p^*_{ji}e_j$$

CÂMPURI SCALARE ŞI CÂMPURI VECTORIALE. CÂTEVA FORMULE UTILE

- Dacă fiecărui punct P al unui domeniu D îi corespunde cantitatea scalară unică $\varphi(P)$, spunem că φ este o *funcţie scalară uniformă* definită pe D, iar mulţimea valorilor lui φ se numeşte *câmp scalar uniform*. Suprafeţele $\varphi = const.$ se numesc suprafeţe de nivel.
- Dacă fiecărui punct P din D îi corespunde o cantitate vectorială unică V(P), spunem că **V** este o *funcţie vectorială uniformă* definită pe D, iar mulţimea tuturor valorilor lui **V** se numeşte *câmp vectorial uniform*.
- Curba C din D care are proprietatea că, în fiecare punct $P \in C$, tangenta la curbă este paralelă cu V(P), se numeşte *linie de câmp*. Se numeşte *suprafaţă de câmp* a câmpului vectorial V(P), o suprafaţă S la care, în fiecare punct P, vectorul V(P) este tangent.
- Liniile de câmp ale câmpului vectorial $V=V_1i + V_2j + V_3k$ sunt soluţii ale sistemului sub formă simetrică

$$\frac{dx}{V_1} = \frac{dy}{V_2} = \frac{dz}{V_3} \tag{1}$$

  sau ale ecuaţiei vectoriale

$$V \times dr = 0, \tag{2}$$

  unde ***r*** este vectorul de poziţie.
- Ecuaţia F(x,y,z)=0, reprezintă o suprafaţă de câmp a câmpului vectorial $V=V_1j+V_2j+V_3k$, dacă şi numai dacă F este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi.

$$V_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \tag{3}$$

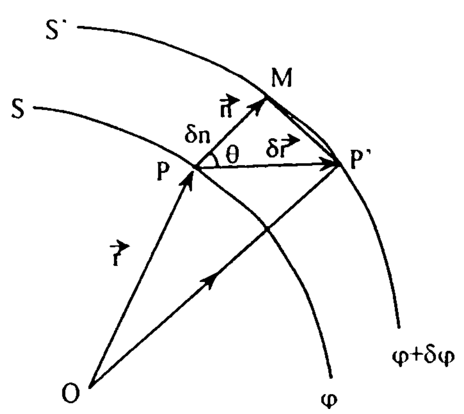


Fig.1.

Considerăm $\varphi(P)$ o funcţie scalară uniformă în domeniul D şi fie S o suprafaţă de nivel a lui φ prin punctul $P(x,y,z) \in D$ şi S' o altă suprafaţă de nivel prin punctul vecin $P'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ - v. **Fig.1**.

- Se numeşte derivata câmpului φ după direcţia *s* (versorul vectorului determinat de punctele P şi P') în punctul P, următoarea limită:

$$\lim_{\delta s \to 0}\frac{\delta\varphi}{\delta s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} \tag{4}$$

- Dacă $\varphi = \varphi(x,y,z)$ este un câmp scalar uniform diferenţiabil şi $s = \alpha i + \beta j + \gamma k$ unde α, β, γ sunt cosinusurile directoare ale vectorului *s* atunci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{5}$$

- Dintre toate direcţiile *s* care pleacă din punctul P al unei suprafeţe de nivel a câmpului φ, derivata este maximă în direcţia normalei şi are loc formula

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta \tag{6}$$

- Se numeşte *gradientul* câmpului φ în punctul P, vectorul

$$grad\varphi(P) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}n\right)_{/P} \tag{7}$$

- Dacă $\varphi = \varphi(x,y,z)$ este un câmp uniform diferențial, atunci grad $\varphi(P)$ este dat prin:

$$grad\varphi(P) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k\right)_{/P} \tag{8}$$

- Operatorul vectorial-diferențial

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

se numește operatorul *nabla* al lui Hamilton. Dacă $V = V_1 i + V_2 j + V_3 k$ este un câmp vectorial, atunci operatorul $V\nabla$ se definește prin:

$$V\nabla = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{\partial z},$$

și se poate aplica unui câmp scalar sau unui câmp vectorial. Astfel,

$$(V\nabla)\varphi = V_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + V_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + V_3\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$(V\nabla)U = V_1\frac{\partial U}{\partial x} + V_2\frac{\partial U}{\partial y} + V_3\frac{\partial U}{\partial z},$$

Cu ajutorul operatorului nabla putem scrie $grad\varphi = \nabla\varphi$.

- Fluxul vectorului **V** prin suprafața S este definit de integrala de suprafață.

$$\Phi = \int_S V\cdot ndS, \qquad \text{unde } \boldsymbol{n} \text{ este versorul normalei la S.}$$

În jurul punctului P considerăm o suprafață închisă S care conține volumul elementar v. Fie ***n*** versorul normalei exterioare la S.

- Se numește *divergența* vectorului **V** în punctul P, scalarul dat prin:

$$divV(P) = \lim_{v\to 0}\frac{\Phi}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{\int_S V\cdot ndS}{v} \tag{10}$$

Dacă $V=V_1i+V_2j+V_3k$ este un câmp vectorial uniform diferențiabil, atunci divergența lui V (P) în punctul P este dată de formula:

$$divV(P) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)_{/P}, \tag{11}$$

sau de formula

$$divV(P) = \nabla\cdot V(P) = \left(i\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + j\cdot\frac{\partial V}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{/P} \tag{12}$$

- Se numește *circulația* vectorului **V** de-a lungul curbei C integrala curbilinie:

$$\Gamma = \int_C V\cdot dr \tag{13}$$

Fie C o curbă plană închisă în $\mathbf{R}^3$ care delimitează o arie elementară ΔS și P(x,y,z) un punct interior curbei C. Fie ***n*** versorul normalei în P la planul curbei C.

- Se numește *rotorul vectorului* **V** în punctul P, vectorul notat rot V(P), dat prin formula

$$n\cdot rotV(P) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_C V\cdot dr}{\Delta S} \tag{14}$$

- Dacă V este un câmp vectorial uniform diferențiabil, atunci rotorul se calculează cu formulele:

$$rotV = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$rotV = \nabla\times V = i\times\frac{\partial V}{\partial x} + j\times\frac{\partial V}{\partial y} + k\times\frac{\partial V}{\partial z} \quad (16)$$

Aplicând operatorul nabla unor sume şi produse obţinem formulele:

1). $grad(\varphi+\psi) = grad\varphi + grad\psi$,
2). $div(U+V) = divU + divV$
3). $rot(U+V) = rotU + rotV$
4). $grad(\varphi\psi) = \varphi grad\psi + \psi grad\varphi$
5). $div(\varphi V) = Vgrad\varphi + \varphi divV$
6). $rot(\varphi V) = \varphi rotV - V\times grad\varphi$
7). $div(U\times V) = V\cdot rotU - U\cdot rotV$
8) $rot(U\times V) = (V\nabla)U - VdivU + UdivV - (U\nabla)V$,
9) $grad(U\cdot V) = V\times rotU + (V\nabla)U + U\times rotV + (U\nabla)V$.

În cazul aplicării repetate a operatorului nabla obţinem:

1). $div\ grad\varphi = \Delta\varphi$
2). $rot\ grad\varphi = 0$
3). $div\ rotV = 0$
4). $rot\ rotV = grad\ divV - \Delta V$,

unde operatorul Δ, numit *laplacian*, este dat prin:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (17)$$

Între unele integrale curbilinii, de suprafaţă şi de volum, există relaţiile următoare:

$$\int_S n\cdot VdS = \int_V divVdV \quad \text{(formula divergenţei a lui Gauss-Ostrogradski)} \quad (18)$$

$$\int_S n\varphi dS = \int_V grad\varphi dV \quad \text{(formula gradientului)} \quad (19)$$

$$\int_S n\times VdS = \int_V rotVdV \quad \text{(formula rotorului)} \quad (20)$$

$$\int_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = \int_V (grad\varphi\cdot grad\psi + \varphi\Delta\psi)dV \quad \text{(prima formulă a lui Green)} \quad (21)$$

$$\int_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \int_V(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV \quad \text{(a doua formulă a lui Green)} \quad (22)$$

unde S este o suprafaţă închisă care delimitează un volum V şi

$$\int_C V\cdot dr = \int_S n\cdot rotVdS \quad (23)$$

unde C este o curbă închisă ce delimitează o suprafaţă S.

- Dacă x,y,z sunt coordonatele carteziene ale unui punct P, atunci variabilele x_1,x_2,x_3 definite prin relaţiile:

$$\begin{cases} x = x(x_1,x_2,x_3) \\ y = y(x_1,x_2,x_3) \\ z = z(x_1,x_2,x_3) \end{cases} \quad (24)$$

cu determinantul funcţional nenul, se numesc *coordonate curbilinii*. Fie P^0 punctul de coordonate curbilinii x_1^0, x_2^0, x_3^0. Suprafeţele $x_1(x,y,z) = x_1^0$, $x_2(x,y,z) = x_2^0$, $x_3(x,y,z) = x_3^0$, se numesc *suprafeţe de coordonate*, iar curbele

$$(C_1)\quad x_2(x,y,z)=x_2^0,\ x_3(x,y,z)=x_3^0$$
$$(C_2)\quad x_1(x,y,z)=x_1^0,\ x_3(x,y,z)=x_3^0$$
$$(C_3)\quad x_1(x,y,z)=x_1^0,\ x_2(x,y,z)=x_2^0$$

se numesc *curbe de coordonate*.

Pe curba (C_1) variază numai x_1, iar sensul crescător al acestei variabile va fi indicat prin versorul $\boldsymbol{u_1}$, tangent în P^0 la această curbă. Analog se definesc versorii $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$.

- Versorii $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{u_3}$ formează un triedru nedegenerat (sunt necoplanuri), numit *reper local*.
- Dacă $V = V_1u_1 + V_2u_2 + V_3u_3$, este un câmp vectorial, atunci liniile sale de câmp sunt soluţii ale sistemului

$$\frac{h_1dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3)} = \frac{h_2dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3)} = \frac{h_3dx_3}{V_3(x_1,x_2,x3)} \tag{25}$$

unde $h_i = \left|\partial r / \partial x_i\right|, i = 1,2,3$ se numesc *parametrii lui Lamé*.

- Dacă $F(x_1,x_2,x_3)$ este un câmp scalar uniform diferenţiabil, atunci în coordonate curbilinii ortogonale avem

$$gradF = \nabla F = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}u_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}u_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}u_3 \tag{26}$$

- Dacă V este un câmp vectorial uniform diferenţiabil, atunci în coordonate curbilinii ortogonale au loc formulele:

$$rotV = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1u_1 & h_2u_2 & h_3u_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}, \tag{27}$$

$$divV = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(V_1h_2h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(V_2h_1h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(V_3h_1h_2)}{\partial x_3}\partial x_3\right], \tag{28}$$

$$\Delta F = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial F}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3}\right]. \tag{29}$$

Linii de forţă. Funcţii de forţă. Forţe conservative. Energie potenţială.

Fie F=F(x,y,z,t) un câmp de forţe (câmp vectorial) definit într-un anumit domeniu $D\times(0,\infty)$. Liniile de câmp ale acestui câmp vectorial se mai numesc *linii de forţă* şi sunt soluţii ale sistemului (1).

Lucrul mecanic efectuat de forţa **F** între două momente t_0 şi t_1 este:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} F\cdot dr = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz \tag{30}$$

care este o integrală curbilinie de-a lungul arcului de traiectorie C de la puntul M_0 (corespunzător timpului t_0) la punctul M_1 (corespunzător timpului t_1). De fapt. L reprezintă circulaţia câmpului F de-a lungul curbei C (13)).

Presupunem că integrandul din relaţia (30) este o diferenţială totală exactă a unei funcţii $U \in C^1$, definită într-un domeniu care să conţină punctele traiectoriilor ce unesc M_0 cu M_1. În acest caz are loc relaţia:

$$F\cdot dr = dU \tag{31}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o astfel de funcţie U să existe, este ca vectorul **F** să fie *irotaţional*, adică rot F=0. O dată găsită o astfel de funcţie, avem:

$$F = gradU \tag{32}$$

şi vom spune că U este *funcţia de forţă* a câmpului vectorial F. Se mai spune că acest câmp vectorial derivă din funcţia de forţă U. Funcţia U+c, oricare ar fi constanta c, este de asemenea funcţie de forţă pentru **F**.

Dacă **F** este un câmp vectorial ce derivă dintr-o funcţie de forţă, atunci el se numeşte *conservativ*. Pentru un câmp de forţe, ce derivă din funcţia de forţă U, rezultă:

$$L = \int_C F \cdot dr = \int_C dU = U(M) - U(M_0), \tag{33}$$

funcţia U fiind presupusă uniformă (câmp scalar uniform).

Se consideră familia de suprafeţe de nivel a câmpului U, date prin U(x,y,z)+c, c fiind o constantă arbitrară. Fie M_0 un punct din domeniul de definiţie al funcţiei U. Deoarece U este determinată până la o constantă aditivă, putem alege acea constantă astfel ca $U(M_0)=0$.

Prin această determinare a constantei c, suprafaţa care trece prin M_0 este luată ca suprafaţă de referinţă pentru suprafeţele de nivel şi o vom numi *suprafaţă de nivel zero*. Este clar că orice suprafaţă de nivel poate fi aleasă ca suprafaţă de referinţă.

Integrala din formula (33) are, în acest caz, valoarea U(M) şi ne dă lucrul mecanic efectuat de forţa F de-a lungul unui drum ce uneşte un punct M de pe o anumită suprafaţă de nivel cu un punct de pe suprafaţa de referinţă. Mărimea V(M) dată prin V(M) = - U(M), se numeşte *energie potenţială (câmp potenţial)* a punctului material. Astfel, suprafaţa de nivel zero se mai numeşte *suprafaţă de energie potenţială zero*.

Energia potenţială a punctului material rămâne neschimbată la deplasări pe o aceeaşi suprafaţă de nivel (dU=0). Energia potenţială variază când trecem de la o anumită suprafaţă de nivel la o altă suprafaţă de nivel; creşte sau descreşte după cum lucrul mecanic al forţei **F**, ce derivă din funcţia de forţă U, este negativ sau pozitiv. Energia potenţială are aceeaşi dimensiune ca şi lucrul mecanic.

Dacă în domeniul considerat, câmpul vectorial **F** este *solenoidal*, adică div **F**=0, atunci există un câmp vectorial **W** astfel ca:

$$F = rot W \tag{34}$$

Vectorul **W** se numeşte *potenţial vector* al câmpului vectorial **F**.

Exemplul 1. Să se afle liniile de forţă ale câmpului vectorial:

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}r + \mathbf{r}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$$

unde **a**,**b** sunt vectori constanţi, **r** este vectorul de poziţie al unui punct oarecare şi r = | **r** |.

Rezolvare. Ecuaţia (31) devine:

$$-\mathbf{a}\,(\,\mathbf{r}\;\mathbf{b}\;d\mathbf{r} + \mathbf{r}\;d\mathbf{r}\,) + \mathbf{b}\;\mathbf{r}\,(\,\mathbf{a}\;d\mathbf{r}\,) + \mathbf{r}\,(\,\mathbf{a}\;d\mathbf{r}\,) = 0$$

Vectorii **a**, **b**, **r** fiind liniar independenţi, rezultă ecuaţiile diferenţiale

$$\mathbf{r}\;\mathbf{b}\;d\mathbf{r} + \mathbf{r}\;d\mathbf{r} = 0\,, \quad \mathbf{a}\;d\mathbf{r} = 0$$

care dau imediat **b r** + r = C_1 , **a r** =C_2. Liniile de forţă sunt deci curbe situate la intersecţia suprafeţelor de rotaţie **b r** + r = C_1 cu planele paralele **a r** =C_2.

Exemplul 2. Fie câmpul vectorial:

$$\mathbf{F}(M) = [(\,\mathbf{b} + \mathbf{c})\,\mathbf{r}\,]\,\mathbf{a} + [(\,\mathbf{c} + \mathbf{a})\,\mathbf{r}]\,\mathbf{b} + [(\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\,)\,\mathbf{r}\,]\,\mathbf{c}\,,$$

unde **a**, **b**, **c** sunt constanţi, iar **r** este vectorul de poziţie a punctului M.

I. Să se arate că F(M) este iraţional şi să se determine funcţia de forţă U(M).

II. În cazul când **a**, **b**, **c** formează un triedru dreptunghic, U(M) este o funcţie armonică, iar F(M), admite un potenţial vector de forma:

$$\mathbf{W}(M) = \lambda\,\{[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,\mathbf{r}](\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + [(\mathbf{c}+\mathbf{a})\,\mathbf{r}](\mathbf{b} \times \mathbf{r}) + [(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{r}](\,\mathbf{c} \times \mathbf{r})\},$$

unde λ este o constantă ce va fi determinată.

Rezolvare. Scalarul **F** dr = (**c r**)(**b** dr) + (**b r**)(**c** dr)+... este diferenţiala funcţiei:

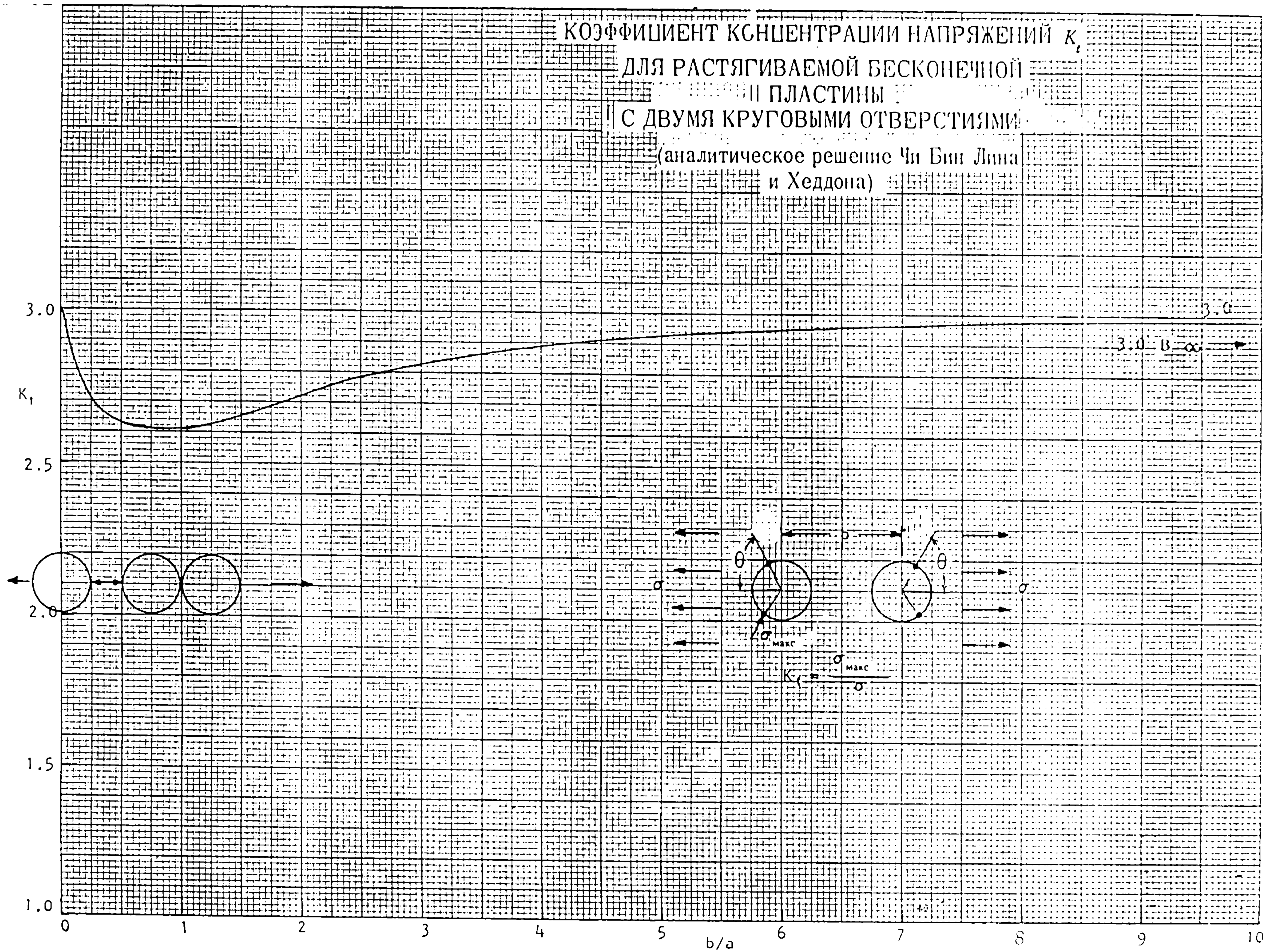
$$U(M)=(\mathbf{b}\;\mathbf{r})(\mathbf{c}\;\mathbf{r}) + (\mathbf{c}\;\mathbf{r})(\mathbf{a}\;\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\;\mathbf{r})(\mathbf{b}\;\mathbf{r})$$

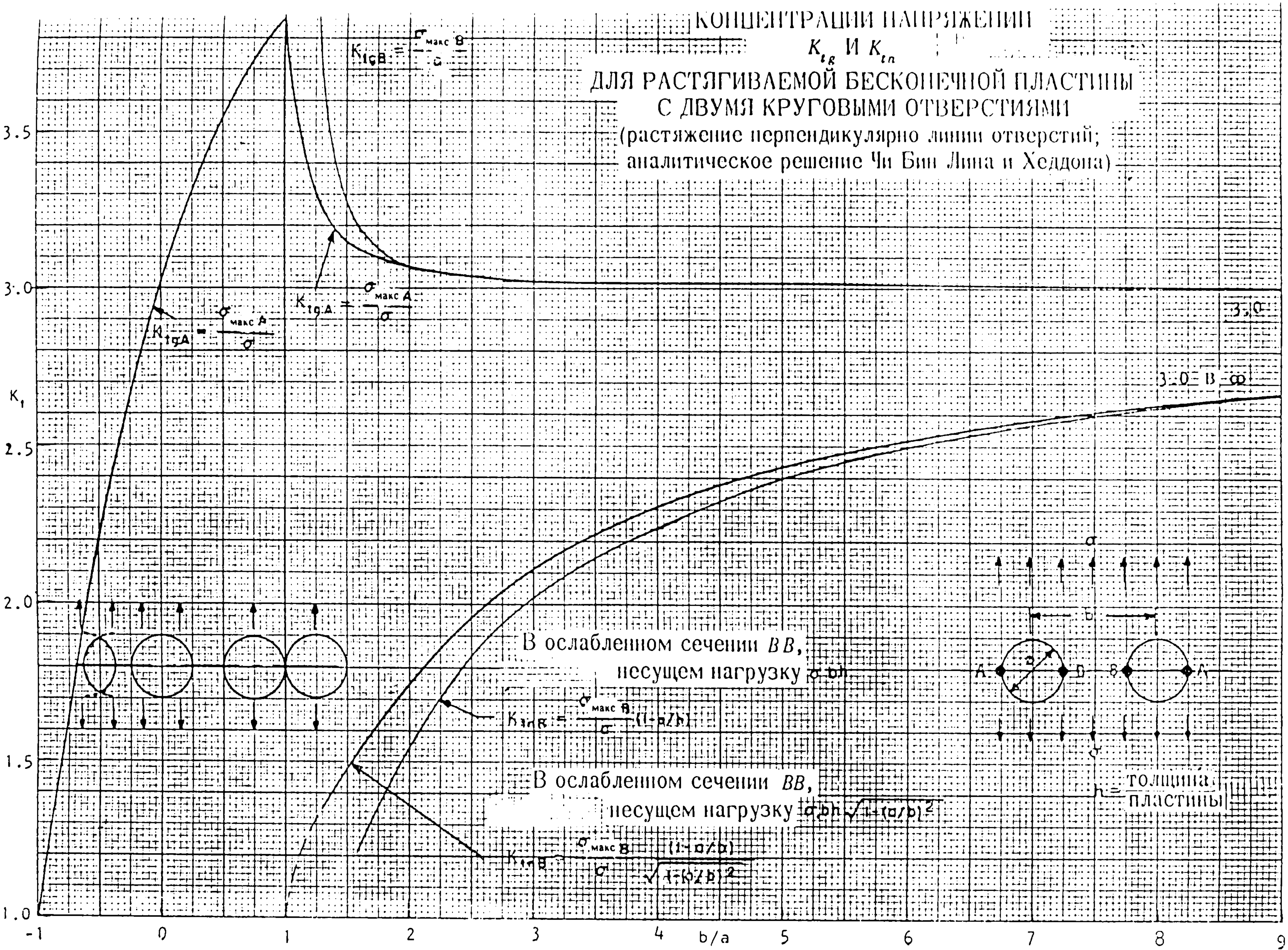
II. Deoarece **a**, **b**, **c** sunt ortogonali rezultă div **F** =0. Deci $div\, grad\, U(M) = \Delta U = 0$. În continuare,

rot $\mathbf{W}(M)=\lambda\{[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,\mathbf{r}]\,2\mathbf{a} + (\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + [(\mathbf{c}+\mathbf{a})\,\mathbf{r}]\,2\mathbf{b} + (\mathbf{c}+\mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) + [(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{r}]\,2\mathbf{c} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\} = 3V$,

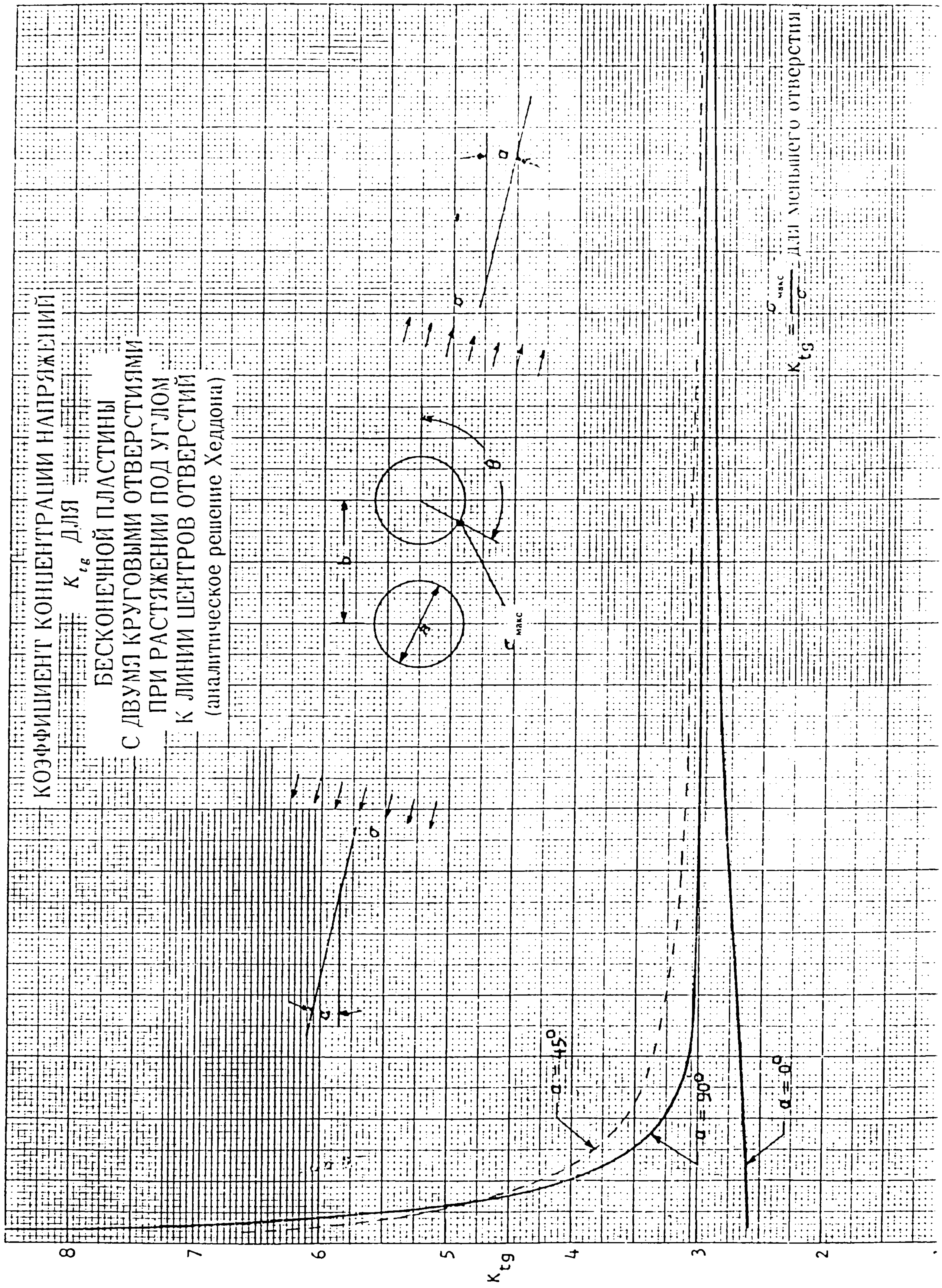
de unde λ = 1/3.

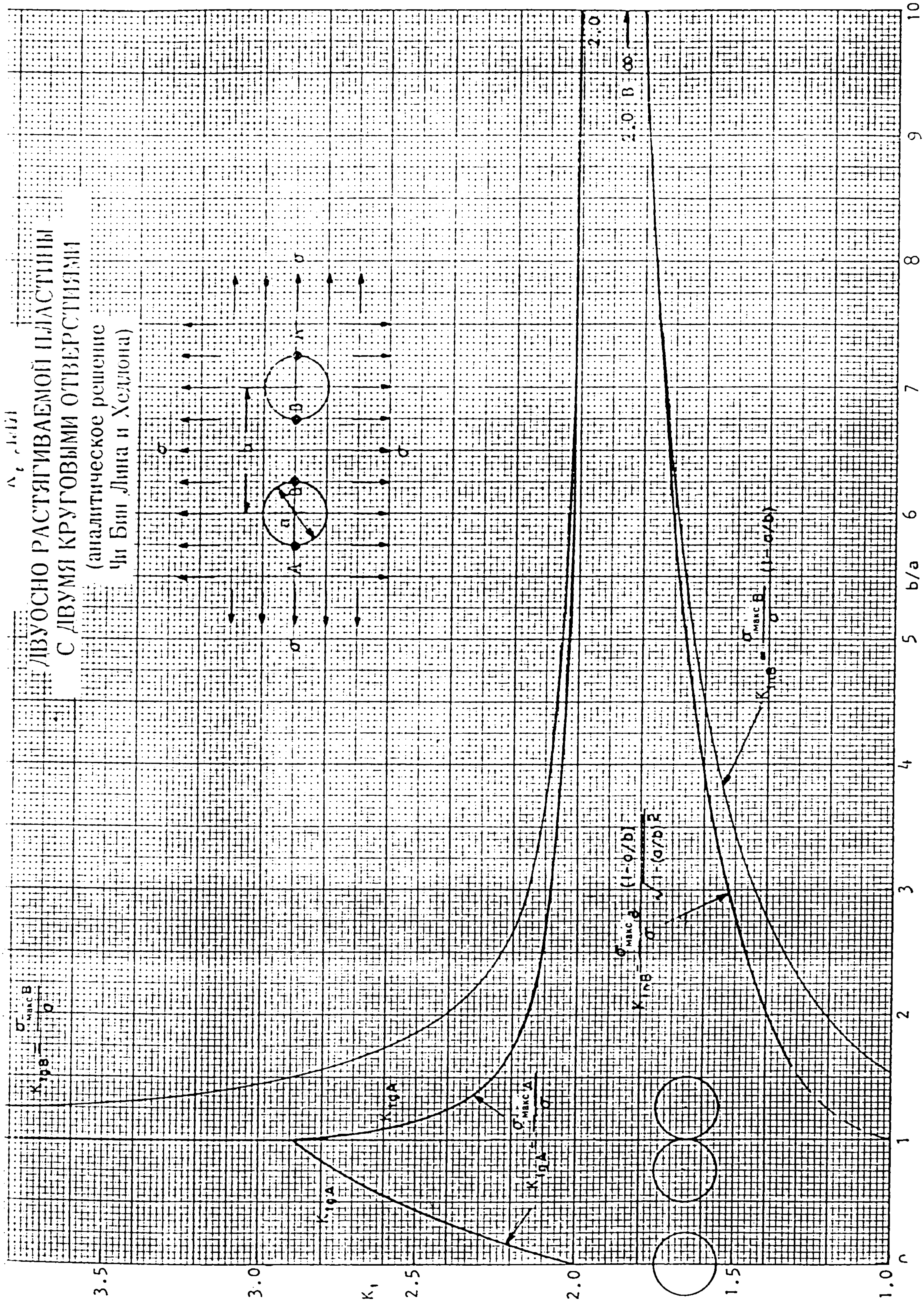
* * *


КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ K_t
ДЛЯ РАСТЯГИВАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ
ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(аналитическое решение Чи Бин Лина
и Хеддона)
3.0
3.0 в ∞
K_t
2.5
2.0
1.5
1.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
b/a
θ
σ
b
$\sigma_{макс}$
$K_t = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma}$

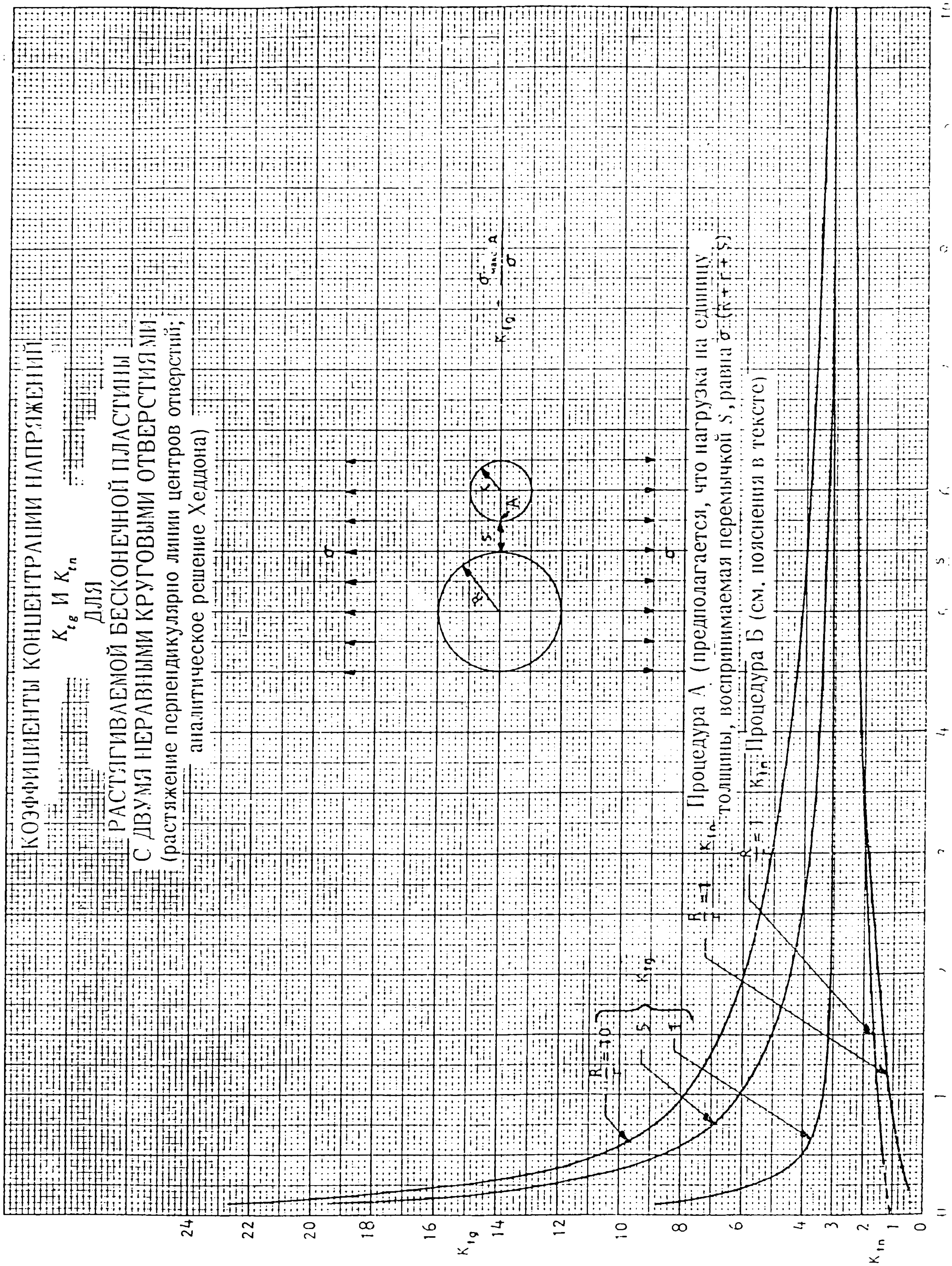

КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_{tg} И K_{tn}
ДЛЯ РАСТЯГИВАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(растяжение перпендикулярно линии отверстий;
аналитическое решение Чи Бин Лина и Хеддона)
$K_{tgB} = \frac{\sigma_{макс\,B}}{\sigma}$
$K_{tgA} = \frac{\sigma_{макс\,A}}{\sigma}$
$K_{tgA} = \frac{\sigma_{макс\,A}}{\sigma}$
3.0
3.0 В ∞
В ослабленном сечении BB,
несущем нагрузку σbh
$K_{tnB} = \frac{\sigma_{макс\,B}}{\sigma}(1-a/b)$
В ослабленном сечении BB,
несущем нагрузку $\sigma bh\sqrt{1-(a/b)^2}$
$K_{tnB} = \frac{\sigma_{макс\,B}}{\sigma}\frac{(1-a/b)}{\sqrt{1-(a/b)^2}}$
h = толщина пластины
K_t
b/a
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

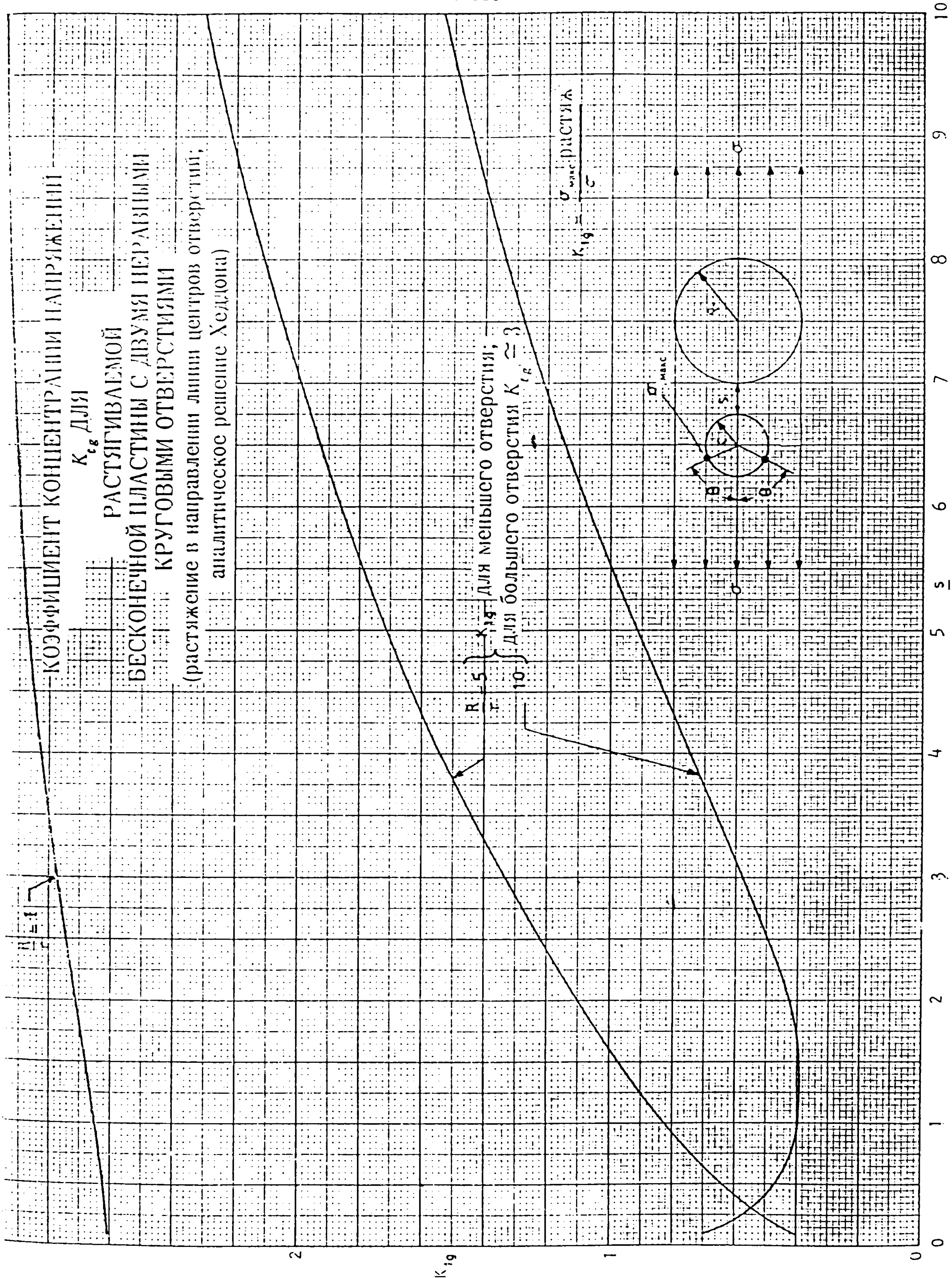
ФИГ. 106

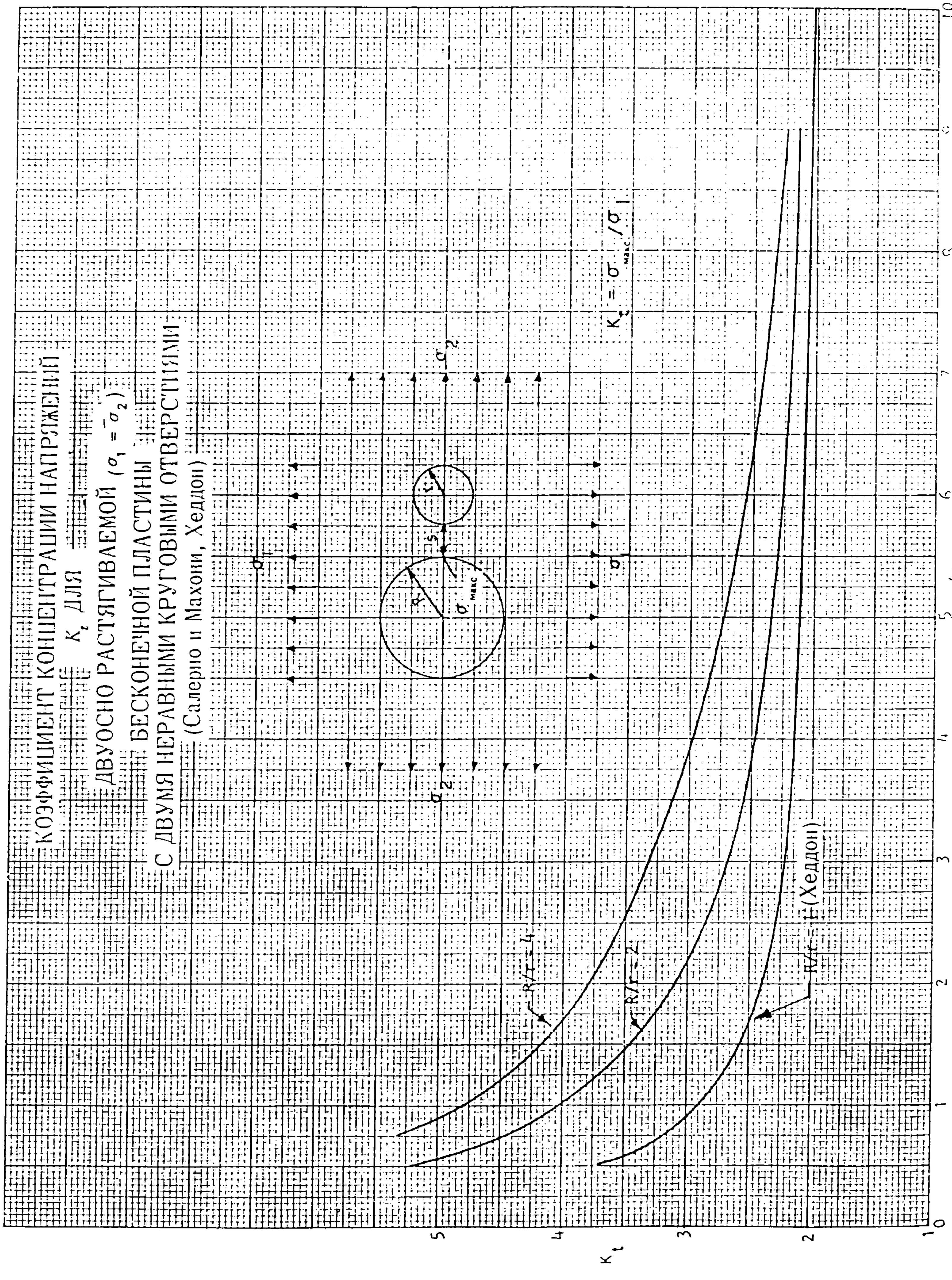

КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
$K_{t\theta}$ ДЛЯ
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ПОД УГЛОМ
К ЛИНИИ ЦЕНТРОВ ОТВЕРСТИЙ
(аналитическое решение Хеддона)
$\sigma_{макс}$
$\alpha = 45^{\circ}$
$\alpha = 90^{\circ}$
$\alpha = 0^{\circ}$
$K_{tg} = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma}$ для меньшего отверстия
K_{tg}
8
7
6
5
4
3
2


ДВУОСНО РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(аналитическое решение
Чи Бин Лина и Хедлона)
σ
b
a
A
B
K1
b/a
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
2.0 B ∞
2.0

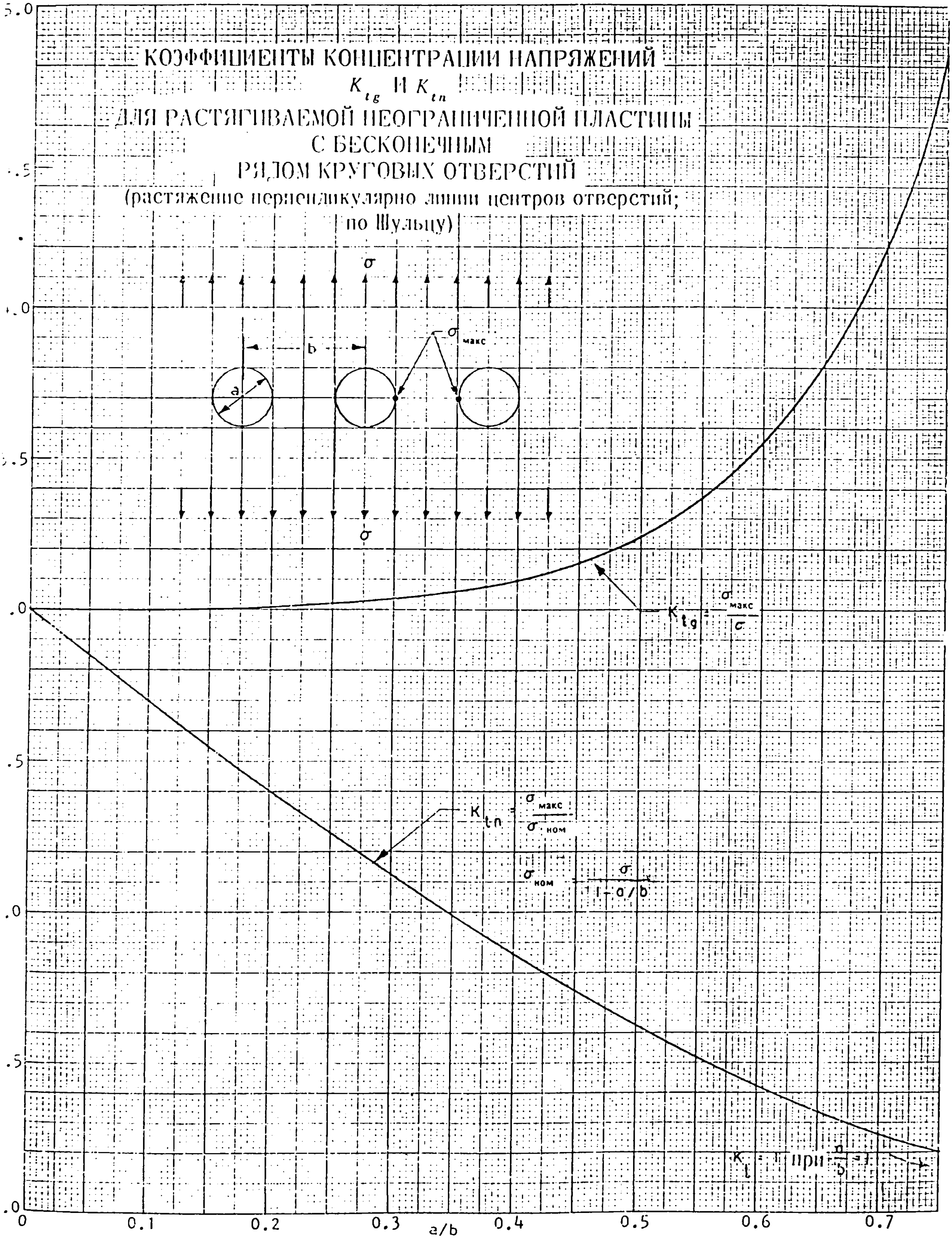
ФИГ. 109


КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_tg И K_tn
ДЛЯ
РАСТЯГИВАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(растяжение перпендикулярно линии центров отверстий;
аналитическое решение Хеддона)
K_tg = σ_макс A / σ
Процедура А (предполагается, что нагрузка на единицу толщины, воспринимаемая перемычкой S, равна σ(R + r + S)
K_tn Процедура Б (см. пояснения в тексте)
R/r = 10
5
1
K_tg
K_tn
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
3
2
1
0

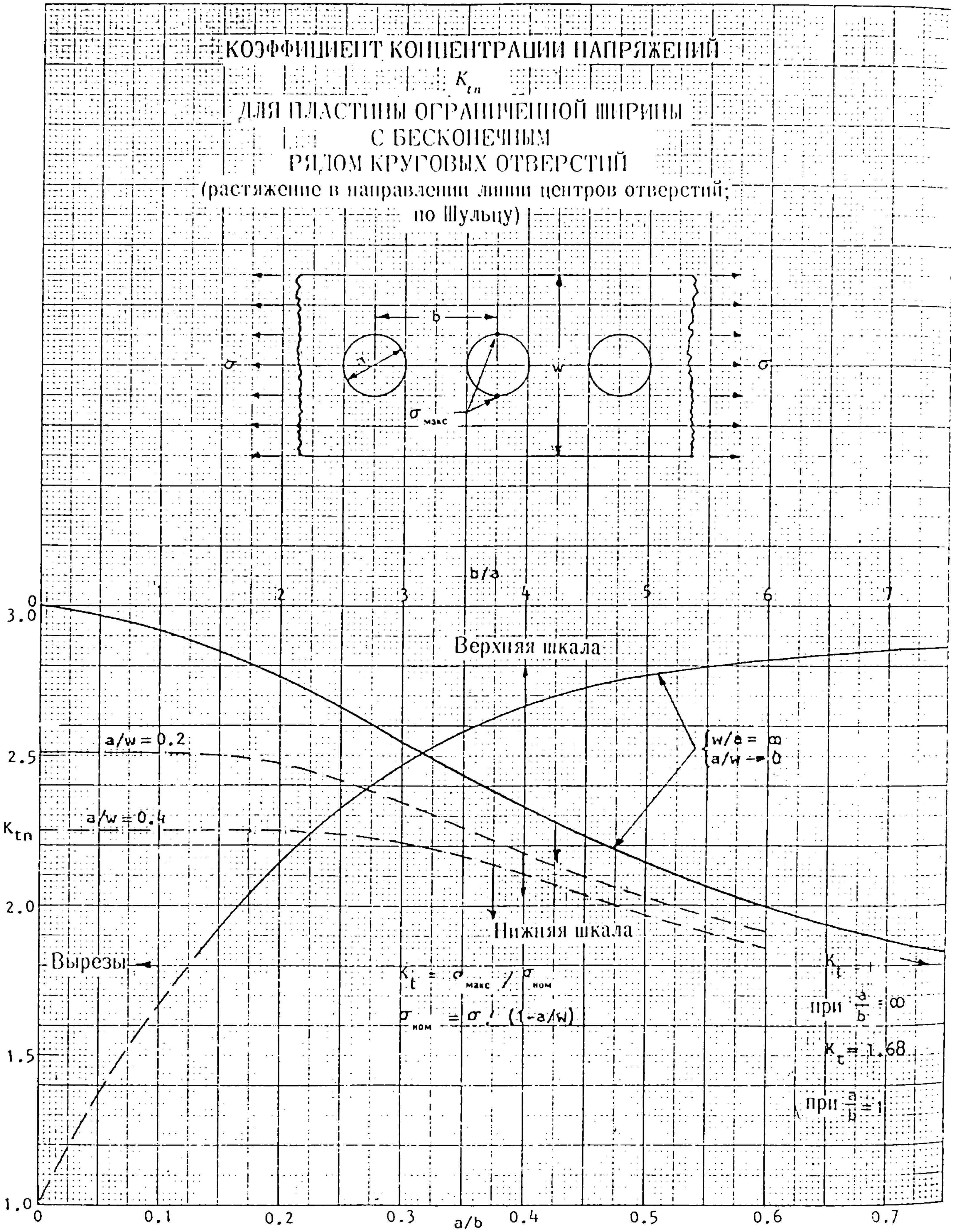

КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_{t_g} ДЛЯ
РАСТЯГИВАЕМОЙ
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ
КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(растяжение в направлении линии центров отверстий;
аналитическое решение Хейдона)
$\frac{R}{r} = 1$
$\frac{R}{r}$ 5 } K_{t_g} для меньшего отверстия;
10 } для большего отверстия $K_{t_g} \simeq 3$
$K_{t_g} = \frac{\sigma_{макс}\ растяж}{\sigma}$
$\sigma_{макс}$
σ
R
r
s
θ
K_{t_g}
$\frac{s}{r}$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_t ДЛЯ
ДВУОСНО РАСТЯГИВАЕМОЙ $(\sigma_1 = -\sigma_2)$
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ
С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
(Салерно и Махони, Хеддон)
$K_t = \sigma_{макс} / \sigma_1$
σ_1
σ_2
$\sigma_{макс}$
R
r
s
R/r = 4
R/r = 2
R/r = 1 (Хеддон)
K_t
s/r
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

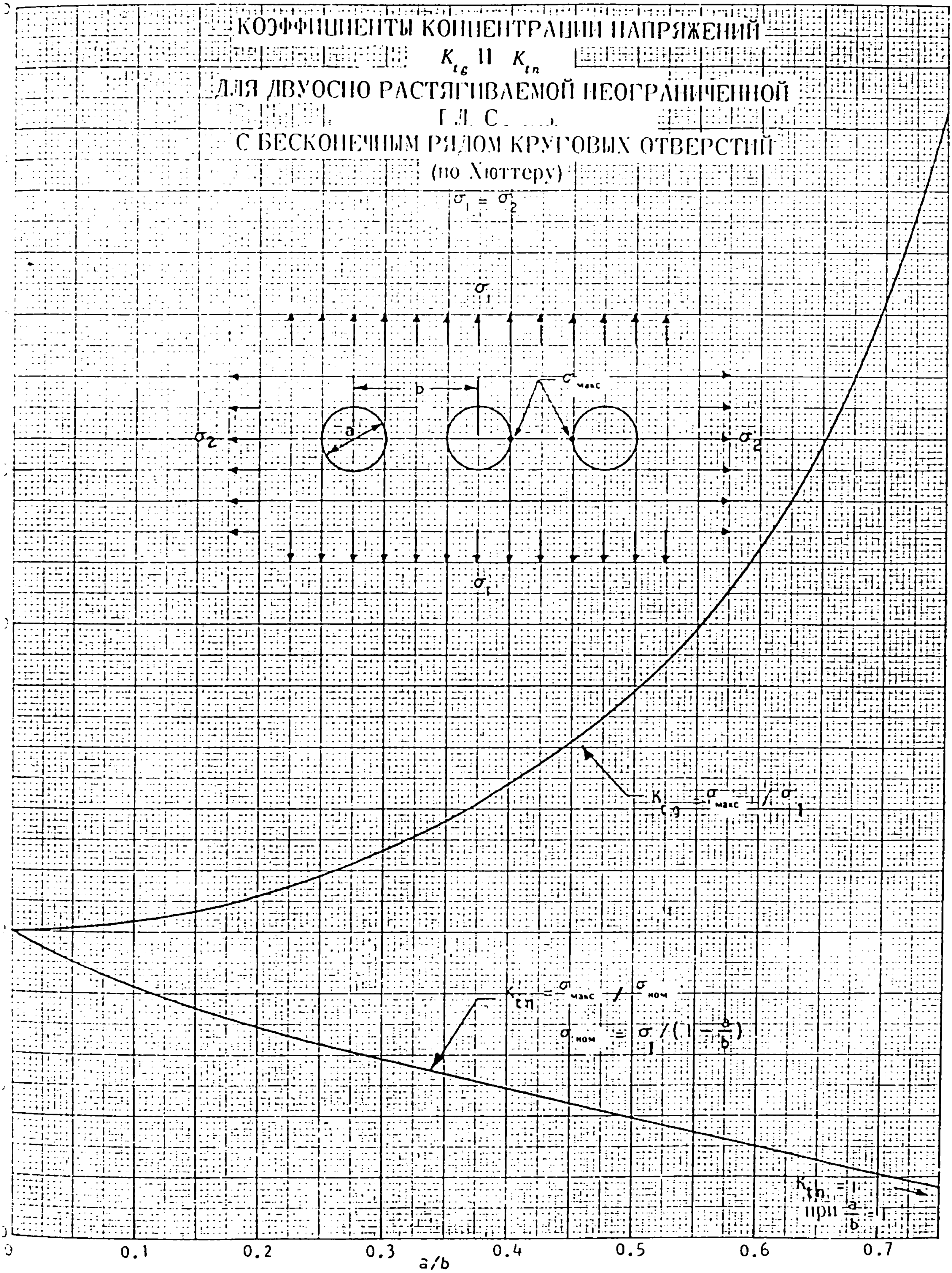
ФИГ. 112


КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_{tg} И K_{tn}
ДЛЯ РАСТЯГИВАЕМОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ
С БЕСКОНЕЧНЫМ
РЯДОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ
(растяжение перпендикулярно линии центров отверстий;
по Шульцу)
σ
b
a
$\sigma_{макс}$
$K_{tg} = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma}$
$K_{tn} = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma_{ном}}$
$\sigma_{ном} = \frac{\sigma}{1 - a/b}$
$K_t = 1$ при $\frac{a}{b} = 1$
a/b
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

ФИГ. 113

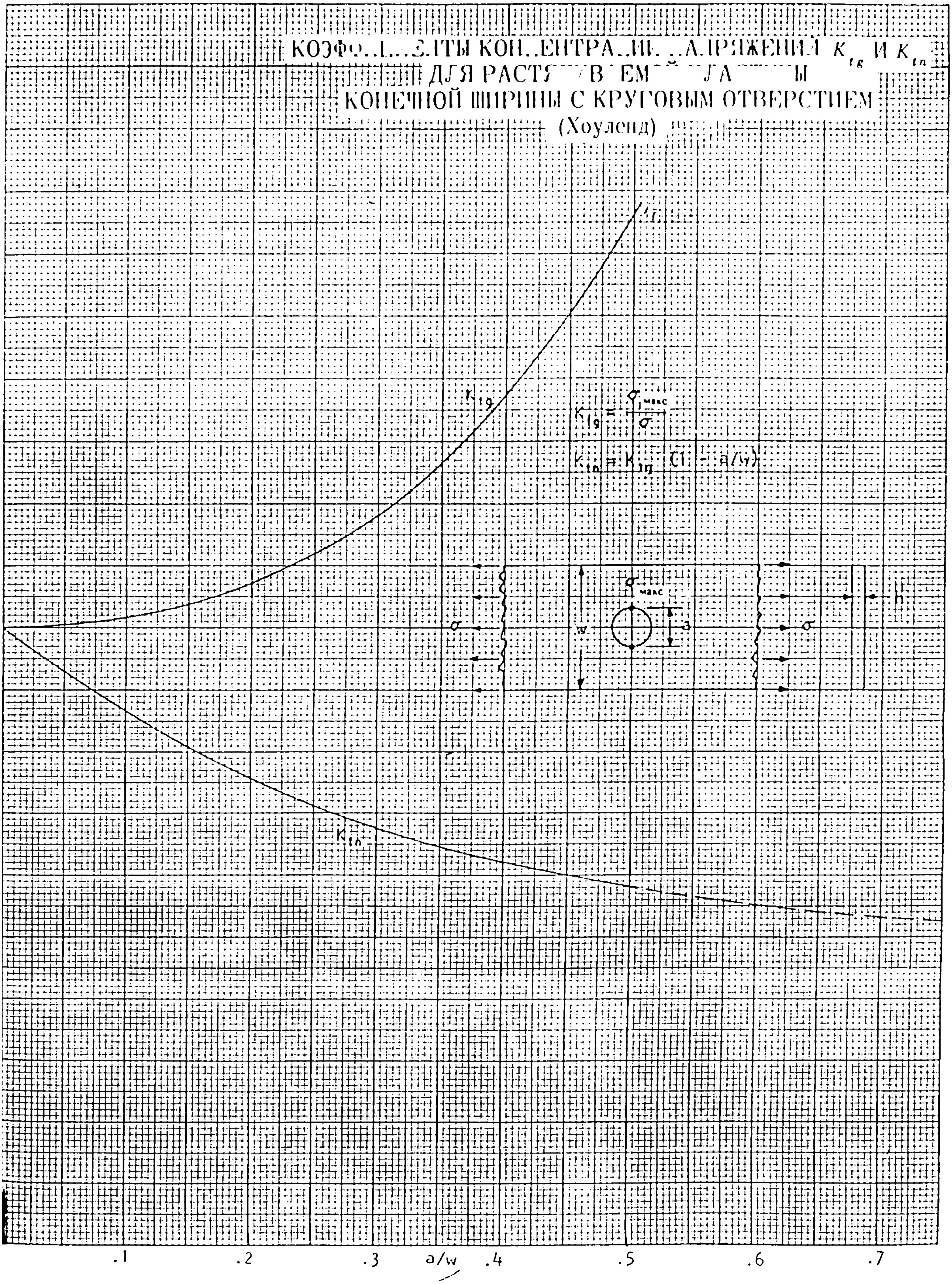

КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_{tn}
ДЛЯ ПЛАСТИНЫ ОГРАНИЧЕННОЙ ШИРИНЫ
С БЕСКОНЕЧНЫМ
РЯДОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ
(растяжение в направлении линии центров отверстий;
по Шульцу)
σ
b
w
σ
$\sigma_{макс}$
b/a
0
2
3
4
5
6
7
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
K_{tn}
Верхняя шкала
a/w = 0.2
a/w = 0.4
w/a = ∞
a/w → 0
Нижняя шкала
Вырезы
$K_t = \sigma_{макс} / \sigma_{ном}$
$\sigma_{ном} = \sigma / (1 - a/w)$
$K_t = 1$
при $\frac{a}{b} = \infty$
$K_t = 1.68$
при $\frac{a}{b} = 1$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
a/b

ФИГ. 114



КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
K_{tg} И K_{tn}
ДЛЯ ДВУОСНО РАСТЯГИВАЕМОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ
С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ
(по Хюттеру)
$\sigma_1 = \sigma_2$
σ_1
b
a
$\sigma_{макс}$
σ_2
$K_{tg} = \sigma_{макс} / \sigma_1$
$K_{tn} = \sigma_{макс} / \sigma_{ном}$
$\sigma_{ном} = \sigma_1 / (1 - \frac{a}{b})$
$K_{tn} = 1$ при $\frac{a}{b} = 1$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
a/b

ФИГ. 86


КОЭФФ...ТЫ КОН...ЕНТРА...И...А.ПРЯЖЕНИЙ K_{tg} И K_{tn}
ДЛЯ РАСТЯ...В...ЕМ...А...Ы
КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ
(Хоуленд)
K_{tg}
$K_{tg} = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma}$
$K_{tn} = K_{tg}\ (1 - a/w)$
$\sigma_{макс}$
σ
w
a
h
K_{tn}
.1
.2
.3
a/w
.4
.5
.6
.7

581

In[1]:= expr = a^9/362880 x^8 − a^7/5040 x^6 + a^5/120 x^4 − a^3/6 x^2 + a − Sin[a]

Out[1]= $\frac{x^8 a^9}{362880} - \frac{x^6 a^7}{5040} + \frac{x^4 a^5}{120} - \frac{x^2 a^3}{6} + a - \sin(a)$

In[2]:= a = Pi/12

Out[2]= $\frac{\pi}{12}$

In[3]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[3]= $\{\{x \to -1.\}, \{x \to 1.\}, \{x \to -22.5678\}, \{x \to 22.5678\}, \{x \to -20.9328 + 12.9648\, i\}, \{x \to 20.9328 - 12.9648\, i\}, \{x \to -20.9328 - 12.9648\, i\}, \{x \to 20.9328 + 12.9648\, i\}\}$

In[4]:= a = Pi/6

Out[4]= $\frac{\pi}{6}$

In[5]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[5]= $\{\{x \to -1.\}, \{x \to 1.\}, \{x \to -11.2492\}, \{x \to 11.2492\}, \{x \to -10.4593 + 6.46975\, i\}, \{x \to 10.4593 - 6.46975\, i\}, \{x \to -10.4593 - 6.46975\, i\}, \{x \to 10.4593 + 6.46975\, i\}\}$

In[6]:= a = Pi/4

Out[6]= $\frac{\pi}{4}$

In[7]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[7]= $\{\{x \to -6.96515 - 4.29924\, i\}, \{x \to 6.96515 + 4.29924\, i\}, \{x \to -7.46071 + 9.52379 \times 10^{-16}\, i\}, \{x \to 7.46071 - 9.52379 \times 10^{-16}\, i\}, \{x \to -1. - 1.06581 \times 10^{-14}\, i\}, \{x \to 1. + 1.06581 \times 10^{-14}\, i\}, \{x \to -6.96515 + 4.29924\, i\}, \{x \to 6.96515 - 4.29924\, i\}\}$

In[8]:= a = Pi/3

Out[8]= $\frac{\pi}{3}$

In[9]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[9]= $\{\{x \to -5.21591 - 3.21003\, i\}, \{x \to 5.21591 + 3.21003\, i\}, \{x \to -5.55457 + 6.39602 \times 10^{-16}\, i\}, \{x \to 5.55457 - 6.39602 \times 10^{-16}\, i\}, \{x \to -1. - 3.55271 \times 10^{-15}\, i\}, \{x \to 1. + 3.55271 \times 10^{-15}\, i\}, \{x \to -5.21591 + 3.21003\, i\}, \{x \to 5.21591 - 3.21003\, i\}\}$

In[10]:= a = Pi/2

Out[10]= $\frac{\pi}{2}$

In[11]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[11]= $\{\{x \to -1.\}, \{x \to 1.\}, \{x \to -3.62383\}, \{x \to 3.62383\}, \{x \to -3.46292 + 2.11367\, i\}, \{x \to 3.46292 - 2.11367\, i\}, \{x \to -3.46292 - 2.11367\, i\}, \{x \to 3.46292 + 2.11367\, i\}\}$

In[12]:= a = 2 Pi/3

Out[12]= $\frac{2\pi}{3}$

In[13]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[13]= $\{\{x \to -2.58362 - 1.55974\,i\}, \{x \to 2.58362 + 1.55974\,i\}, \{x \to -2.63236 + 3.37408 \times 10^{-16}\,i\},$
$\{x \to 2.63236 - 3.37408 \times 10^{-16}\,i\}, \{x \to -1.00004 - 4.4407 \times 10^{-16}\,i\}, \{x \to 1.00004 + 4.4407 \times 10^{-16}\,i\},$
$\{x \to -2.58362 + 1.55974\,i\}, \{x \to 2.58362 - 1.55974\,i\}\}$

In[14]:= a = 3 Pi / 4

Out[14]= $\frac{3\pi}{4}$

In[15]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[15]= $\{\{x \to -1.00013\}, \{x \to 1.00013\}, \{x \to -2.29247\}, \{x \to 2.29247\}, \{x \to -2.29003 + 1.37386\,i\},$
$\{x \to 2.29003 - 1.37386\,i\}, \{x \to -2.29003 - 1.37386\,i\}, \{x \to 2.29003 + 1.37386\,i\}\}$

In[16]:= a = 5 Pi / 6

Out[16]= $\frac{5\pi}{6}$

In[17]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[17]= $\{\{x \to -1.00034\}, \{x \to 1.00034\}, \{x \to -2.01443\}, \{x \to 2.01443\}, \{x \to -2.05511 + 1.22487\,i\},$
$\{x \to 2.05511 - 1.22487\,i\}, \{x \to -2.05511 - 1.22487\,i\}, \{x \to 2.05511 + 1.22487\,i\}\}$

In[18]:= a = 11 Pi / 12

Out[18]= $\frac{11\pi}{12}$

In[19]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[19]= $\{\{x \to -1.00089\}, \{x \to 1.00089\}, \{x \to -1.78086\}, \{x \to 1.78086\}, \{x \to -1.86307 + 1.10307\,i\},$
$\{x \to 1.86307 - 1.10307\,i\}, \{x \to -1.86307 - 1.10307\,i\}, \{x \to 1.86307 + 1.10307\,i\}\}$

In[20]:= a = Pi

Out[20]= π

In[21]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[21]= $\{\{x \to -1.00226\}, \{x \to 1.00226\}, \{x \to -1.57982\}, \{x \to 1.57982\}, \{x \to -1.70339 + 1.00207\,i\},$
$\{x \to 1.70339 - 1.00207\,i\}, \{x \to -1.70339 - 1.00207\,i\}, \{x \to 1.70339 + 1.00207\,i\}\}$

In[22]:= a = Pi / 60

Out[22]= $\frac{\pi}{60}$

In[23]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[23]= $\{\{x \to -1.\}, \{x \to 1.\}, \{x \to -112.95\}, \{x \to 112.95\}, \{x \to -104.687 + 64.865\,i\}, \{x \to 104.687 - 64.865\,i\},$
$\{x \to -104.687 - 64.865\,i\}, \{x \to 104.687 + 64.865\,i\}\}$

In[24]:= a = 0

Out[24]= 0

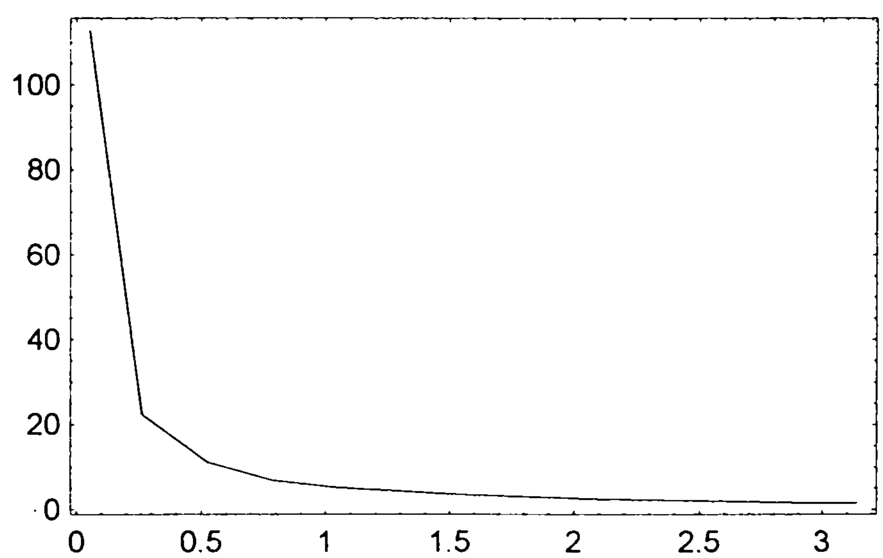
In[25]:= Solve[expr == 0, x] // N

Out[25]= {{}}

In[26]:= puncte = {{Pi/60, 112.95}, {Pi/12, 22.56}, {Pi/6, 11.25}, {Pi/4, 6.96}, {Pi/3, 5.21}, {Pi/2, 3.62}, {2 Pi/3, 2.58}, {3 Pi/4, 2.29}, {5 Pi/6, 2.01}, {11 Pi/12, 1.78}, {Pi, 1.58}}

Out[26]= $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{60} & 112.95 \\ \frac{\pi}{12} & 22.56 \\ \frac{\pi}{6} & 11.25 \\ \frac{\pi}{4} & 6.96 \\ \frac{\pi}{3} & 5.21 \\ \frac{\pi}{2} & 3.62 \\ \frac{2\pi}{3} & 2.58 \\ \frac{3\pi}{4} & 2.29 \\ \frac{5\pi}{6} & 2.01 \\ \frac{11\pi}{12} & 1.78 \\ \pi & 1.58 \end{pmatrix}$

In[27]:= Show[Graphics[{Hue[0], Line[puncte], GrayLevel[0]}, Frame -> True], PlotRange -> All]



Out[27]= - Graphics -

BUPT

SCURTĂ PREZENTARE A ACTIVITĂȚII DIDACTICE ȘI ȘTIINȚIFICE A PROFESORULUI JOHAN HELSING - SUEDIA

LUND UNIVERSITY

Johan Helsing

Numerical Analysis
Center for Mathematical Sciences
Lund University

Address: Box 118, SE-221 00 Lund, SWEDEN
Phone: +46-(0)46 222 33 72
Visitors address: Sölvetagan 18, Rum 129
e-mail: helsing@maths.lth.se

Doamna şef de lucrări ing. Cornelia Muntean, în pregătirea tezei de doctorat privind „Analiza câmpurilor de tensiuni şi deformaţii în solide elastice cu defecte multiple", a apelat pentru documentare la domnul profesor Johan Helsing. Acesta, cu o amabilitate ieşită din comun, i-a pus la dispoziţie aproape toate lucrările sale.

Văzând bogata şi deosebit de valoroasa activitate ştiinţifică a domniei sale, i-am propus să-i facem o prezentare în Buletinul ARMR şi a fost de acord. Sunt convins că în viitor îl vom face membru al ARMR şi vom obţine colaborarea sa directă, care ne poate fi utilă.

Pe baza datelor furnizate de domnul profesor Johan Helsing este prezentată în continuare o scurtă analiză a activităţii sale profesionale şi ştiinţifice.

(Prof. Dr. Ing. Ionel DOBRE)

Date personale

- Născut în Stockholm, Suedia, în Decembrie 1961
- Licenţiat (Master) în Fizică aplicată, la Institutul Regal de Tehnologie din Stockholm (abreviat KTH), 1986
- Jurnalist ştiinţific, la Institutul Suedez de Matematici Aplicate 1986
- Manager de proiect, la Compania de Cercetări şi Inovaţii Electrolux, 1987-1988
- Doctorat în Fizică teoretică, KTH, 1992
- Post-doctorat, la Courant Institute of Mathematical Sciences, 1992-1993
- Docent în Fizică teoretică, la Institutul Regal de Tehnologie din Stockholm (KTH), 1994
- Lector de Matematică invitat la Universitatea din Utah, 1994-1995
- Lector de Matematică, Rensselaer Polytechnic Institute, 1995-1996
- Conferenţiar în Utilizarea sistemelor de calcul, Universitatea Uppsala, 1997-1998
- Cercetător principal în Mecanica solidelor, KTH, 1997-2001
- Conferenţiar în Analiză numerică, NADA, KTH, 1999-2001
- Docent în Analiză numerică, KTH, 1999
- Profesor de Tehnici de calcul numeric, Institutul de Tehnologie din Lund, 2001-

Conferințe, activitate de referent științific, administrație

- 1997 Conferințe la KTH, Universitatea Uppsala, Universitatea Luleå, și la Conferința SIAM „Mathematical aspects of materials science" în Philadelphia. Referent științific pentru *J. Comput. Phys.*, *J. Mech. Phys. Solids*, *Appl. Phys. Lett.*, *și J. Appl. Phys.* Membru în comisia de evaluare a certificării ca docent a lui Nils Svanstedt în Matematici la Universitatea Luleå.
- 1998 Conferințe la Universitățile Yale și Uppsala. Referent științific pentru *Proc. R. Soc. Lond. A*, *J. Mech. Phys. Solids*, *J. Phys.*, și *J. Phys A.*
- 1999 Conferințe la Universitatea Luleå, la întâlnirea din Oberwolfach „Numerik von Mikrostrukturen", și la simpozionul SES99 „Fast solution strategies for integral equations" (Strategii de soluții rapide pentru ecuații integrale) în Austin. Membru al comitetului în discuțiile conduse de Ivo Babuska. Referent științific pentru *J. Mech. Phys. Solids*, *J. Phys A.* și *Proc. R. Soc. Lond. A.*
- 2000 Evaluator extern pentru Consiliul de Granturi de cercetare din Hong Kong. Invitat să scrie un articol de analiză cu privire la „Effective conductivity of continuum composites" (Conductivitatea efectivă a compozitelor continue) dintr-un punct de vedere numeric pentru *Journal of Physics*. Referent științific pentru *SIAM J. Appl. Math.*, *Appl. Mech. Rev.*, și *Compos. Engng.*
- 2001 Evaluator extern pentru Fundația Suedeză pentru Cooperare Internațională în Cercetare și Învățământ Superior. Conferință la Centrul de Element Finit Chalmers. Invitat să scrie o lucrare despre „Fast boundary integral equation solvers" (Rezolvitori rapizi de ecuații integrale de frontieră) pentru o ediție specială a *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Referent științific pentru *Philosophical Magazine A.*, *ASME J. Appl. Mech*, și *Int J. Num Meth. Engng.*
- 2002 Discurs la al treilea workshop China-Suedia de matematici computaționale de la Chalmers. Membru al grupului de investigare a nemulțumirilor la Centrul de Științe Matematice din Lund. Invitat să scrie o lucrare despre „Recent advances in micromechanics of composite materials" (Realizări recente în micromecanica materialelor compozite) pentru o ediție specială a *Journal of Multiscale Computational Engineering*. Referent științific pentru *Engng. Anal. Bound. Elem.*, *J. Mech.*, *Phys. Solids*, și *Int. J. Solids Structures*.

Activități didactice, proiecte pedagogice, și conducere de proiecte, doctorate

- 1984-1992 Asistent și lector la treisprezece cursuri universitare pentru ingineri la KTH incluzând Mecanică, Analiză vectorială și Mecanică statistică.
- 1994-1996 Șef de lucrări la trei cursuri ODE pentru ingineri la Universitatea din Utah. Conferențiar la două cursuri de Sisteme de calcul și variabile complexe la Rensselaer Polytechnic Institute.
- 1997-2001 Conferențiar și profesor la patru cursuri intermediare de analiză numerică și conducător a două proiecte de diplomă în Utilizarea sistemelor de calcul la Universitatea Uppsala. Conferențiar și profesor la trei cursuri intermediare de Analiză numerică la NADA, KTH. Conferențiar invitat la curs postuniversitar de Metode multinivel. A realizat un material didactic pentru cursul de Metoda Elementului Finit ținut și dat pentru firma SCANIA (producător de vagoane și autocamioane) de către Departamentul de Mecanica Solidului.

- 2001- Conferențiar la un curs intermediar de analiză numerică la LTH. Ținut un curs postuniversitar de „Stable Numerical Methods for Boundary Value Problems" (Metode numerice stabile pentru probleme de valori de frontieră).
- 1997- Lucrat la elaborarea unei colecții de probleme contemporane, cu soluții, pentru studenții de anul doi la disciplina Utilizarea sistemelor de calcul. Vezi *http: www.maths.lth.se/na/staff/helsing/gproblems.ps*
- 2000-2001 Conducător la master al masterandului Jonas Englund, Utilizarea sistemelor de calcul, Universitatea Uppsala. Teza „Fast, Accurate and Stable Algorithm for the Stress Field around a Zig-Zag-Shaped Crack" (Algorim rapid, de precizie şi stabil pentru câmpul de tensiuni din jurul unei fisuri în formă de zig-zag) aprobată în aprilie 2001.
- 1994-1997 Conducător de doctorat al doctorandului Henrik Christiansson în Fizică teoretică, KTH. Dizertația „High-Order Accurate Calculations and Bounds on Effective Properties of Composites" (Calculații de precizie de ordin mare şi limitări a proprietăților efective ale compozitelor) susținută în iunie 1997. Henrik este acum la FOI (Agenția Suedeză de Cercetare pentru Apărare).
- 1999-2002 Conducător de doctorat al doctorandului Anders Jonsson, Mecanica Solidului, KTH. Dizertația „Integral equation methods for Fracture Mechanics and Micro-Mechanical Problems" (Metode de ecuații integrale pentru Mecanica Ruperii şi probleme micro-mecanice) susținută în mai 2002. Anders este acum la SCANIA.

Rezultate majore ale cercetării ştiințifice

- Noi estimări a proprietăților fizice a cementitei (Fe_3C) prin rezolvarea unei probleme inverse [5]. Estimările aplanează mai vechile extrapolări care variau puternic.
- Limitări ale conductivității unor policristale aleatoare. Am îmbunătățit limitele Hashin-Shtrikman (1963) utilizând metode variaționale şi aproximanți Pade [9,10,11].
- Parametrii structurali: aceşti parametri sunt utilizați pentru a estima proprietățile omogenizate de materiale ale căror geometrii sunt fie parțial necunoscute fie atât de complexe încât a rezolva o ecuație PDE din ele este considerat a fi prea dificil. Algoritmii autorilor au în vedere primul calcul pe colecții de obiecte 3D care nu sunt elipsoide [13] şi pentru calcule 2D implicând până la 60 000 de obiecte [15]. Algoritmii autorilor îmbunătățesc pe cei ai investigatorilor anteriori cu câteva ordine de mărime. Publicarea lor pare a fi „ucis" acest domeniu de cercetare.
- Algoritmi stabili pentru probleme fundamentale de incluziuni în electrostatica izotropă şi anizotropă [18,20,21] şi în elastostatică [19,24]. Rezultatele numerice cu o precizie neegalată incluzând mari îmbunătățiri asupra calculelor anterioare făcute pe supercomputere [19].
- Infirmarea teoremelor de punct fix sugerate pentru diagramele coeficienților Poisson [22].
- Evaluare adaptivă rapidă a potențialelor de strat în apropierea sursei lor: Această lucrare [23] dl. J. Helsing o consideră ca una din cele mai importante lucrări ale domniei sale şi ea este utilizată ca fundament crucial în lucrările sale ulterioare [25], [26] şi [35], care tratează suspensii dense.
- Sisteme aleatoare mari: Algoritmul de uz general [25] pentru problema incluziunii în elastostatica liniară plană este bazat pe o ecuație integrală discutată de către Sherman în 1959, rezultatele în [23], şi o versiune biarmonică a metodei multipol rapide. Autorii rezolvă tensiunile şi deformațiile în materiale complicate cu mai multe mii de incluziuni pe o stație de lucru obişnuită. Această lucrare ar trebui să aibe un impact semnificativ în

comunitatea mecanicii computaționale, unde așa-numitele „programe BEM", bazate pe formulări de ecuații integrale mai puțin eficiente, sunt în vogă. Lucrarea [26] cu privire la un algoritm automatizat de uz general pentru ecuația PDE electrostatică pe domenii 2D mari cu geometrii complicate introduce o nouă noțiune de precizie și viteză într-un domeniu în care au fost standard până acum măsurătorile experimentale și metodele statistice încet convergente.

- Probleme fundamentale de fisuri în elastostatica plană: Practica ce guvernează, când sunt implicate fisuri, este de a rescrie ecuația PDE elastostatică ca o ecuație integrală Fredholm de prima speță. Această metodă conduce la instabilități. Autorii au formulat o ecuație integrală Fredholm de speța a doua și au obținut o îmbunătățire enormă a stabilității [28]. Rezultate de precizie pentru sisteme care implică 10000 de fisuri și condiții periodice de frontieră au fost obținute pe o stație de lucru obișnuită [31]. Investigatorii anteriori au putut trata, cu precizie, geometrii care implicau două sau trei fisuri în spațiul liber. Lucrările [28] și [31] au fost bine primite și foarte apreciate la *SIAM J. Appl. Math.* și *Int. J. Fracture* - „ ... o contribuție importantă la mecanica ruperii și matematici aplicate ... exemplele alese sunt noi și nu pot fi rezolvate cu metodele obișnuite" – „ ... o lucrare convingătoare, și care făgăduiește să aducă unele instrumente foarte puternice care să suporte problemele de mecanica ruperii ... ".
- Fisuri de interfață: Câmpul de tensiuni prezintă oscilații rapide precum și singularități puternice în apropierea vârfurilor fisurii. Metodele bazate pe ecuații integrale au fost disponibile, până în prezent, doar pentru fisuri de formă dreaptă sau de forma unui arc eliptic. Metodele de element finit ating o porecizie slabă în apropierea vârfurilor fisurii, care reprezintă regiunea de interes maxim. Algoritmul stabil al autorului [29] este bazat pe o ecuație integrală Fredholm de speța a doua și este aplicabil fisurilor de forme diferite.
- Probleme neliniare de contact în mecanica ruperii: Când un material fisurat este supus la o sarcină externă se poate întâmpla, în formularea liniară a acestei probleme, ca părți a unor fisuri şă prezinte deplasări de deschidere a fisurii negative. Într-o formulare neliniară zone de contact a priori necunoscute trebuie să fie determinate. Aceasta a fost considerată ca o problemă numerică formidabilă. Utilizând teoria funcțiilor analitice care, în conformitate cu referentul științific al *SIAM J. Appl. Math.*, este de „ ... o extrem de înaltă calitate ..." autorii au găsit un algoritm stabil [33]. Aceasta este în opinia domnului Johan Helsing lucrarea sa cea mai avansată.
- Fisuri plate 3D: Un câmp larg deschis. În afară de soluțiile analitice pentru fisuri eliptice în literatură sunt rezultate de precizia doar a unei singure cifre semnificative. Autorii au îmbunătățit situația [36].
- Probleme eliptice pe domenii poligonale: Acestea sunt probleme clasice a căror dificultate constă în a rezolva singularitățile de colț. Metodele standard sunt rafinamentul adaptiv de discretizare și metodele hibride ce implică aplicații Dirichlet-spre-Neumann. Performanța lor nu este întotdeauna așa de impresionantă, nici măcar pentru probleme care au soluții analitice. Probleme de colț și crestătură care sunt departe de a fi banale sunt rezolvate utilizând funcții de bază speciale în [32, 38, 41].
- Probleme de tensiuni exterioare și interioare: Chiar și în cadrul clasei de formulări ale ecuației integrale Fredholm de speța a doua, există adesea multe opțiuni pentru o problemă dată [34, 35, 39]. În [39] autorii rezolvă problema deosebită (Muskhelishvili) de a găsi o ecuație, liberă de operatori singulari, pentru domenii multiplu conexe cu găuri. Mărimea necunoscută este limita unei funcții analitice, care simplifică formarea unei cvadraturi stabile. Reprezentarea potențială a câmpului de tensiuni în [39] este practic același ca în [25] și în [28]. De aceea autorii sunt într-o poziție în care pot rezolva, cu

precizie, câmpuri de tensiuni într-un număr mare de domenii complexe și topologic diferite utilizând un set mic de ecuații înrudite. O comparație cu „benchmark"-uri de ordinul 50 produse de investigatorii anteriori arată faptul că algoritmi mai eficienți sunt de maximă necesitate [38, 39, 40, 42].

Publicații

1. J. Helsing, J. Axell, and G. Grimvall (1989) *Conduction in inhomogeneous materials: Hot and high-field spots* Phys. Rev. B **39**(13), 9231-9235.
2. J. Helsing and G. Grimvall (1990) *Conductance in random inductance-capacitance networks* Phys. Rev. B **41**(16), 11364-11367.
3. J. Axell and J. Helsing (1990) *Conductance fluctuations in weakly inhomogeneous finite-size random media* Phys. Rev. B **42**(7), 4471-4476.
4. J. Helsing and A. Helte (1991) *Effective conductivity of aggregates of anisotropic grains* J. Appl. Phys. **69**(6), 3583-3588.
5. J. Helsing and G. Grimvall (1991) *Thermal conductivity of cast iron: Models and analysis of experiments* J. Appl. Phys. **70**(3), 1198-1206.
6. J. Helsing, G. Grimvall, and K. D. Bao (1991) *Conduction in a two-phase plane with diamond shaped tiling* J. Math. Phys. **32**(7), 1958-1960.
7. J. Helsing (1991) *Transport properties of two-dimensional tilings with corners* Phys. Rev. B **44**(21), 11677-11682.
8. J. Helsing (1993) *Bounds to the conductivity of some two-component composites* J. Appl. Phys. **73**(3), 1240-1245.
9. J. Helsing (1993) *Improved bounds on the conductivity of composites by translation in a variational principle* J. Appl. Phys. **74**(8), 5061-5063.
10. J. Helsing (1993) *Higher-order bounds on the conductivity of composites from symmetry considerations* Proc. R. Soc. (London) A **443**(1918), 451-455.
11. J. Helsing (1994) *Improved bounds on the conductivity of composites by interpolation* Proc. R. Soc. (London) A **444**(1921), 363-374.
12. J. Helsing (1994) *Fast and accurate calculations of structural parameters for suspensions* Proc. R. Soc. (London) A. **445**(1923), 127-140.
13. J. Helsing (1994) *Third-order bounds on the conductivity of a random stacking of cubes* J. Math. Phys. **35**(4), 1688-1692.
14. J. Helsing (1994) *Bounds on the shear modulus of composites by interface integral methods* J. Mech. Phys. Solids **42**(7), 1123-1138.
15. L. Greengard and J. Helsing (1995) *A numerical study of the zeta2 parameter for random suspensions of disks.* J. Appl. Phys. **77**(5), 2015-2019.
16. H. Christiansson and J. Helsing (1995) *A numerical study of the zeta2 and eta2 parameters for a class of fiber reinforced composites* J. Appl. Phys. 77(9), 4734-4738.
17. J. Helsing (1995) *Estimating effective properties of composites from cross-sectional photographs* J. Comput. Phys. **117**(2), 281-288.
18. J. Helsing (1995) *An integral equation method for electrostatics of anisotropic composites* Proc. R. Soc. (London) A **450**(1939), 343-350.
19. J. Helsing (1995) *An integral equation method for elastostatics of periodic composites* J. Mech. Phys. Solids **43**(6), 815-828.
20. J. Helsing (1995) *A Nystrom algorithm for electrostatics of an anisotropic composite* J. Math. Phys. **36**(6), 2941-2950.
21. J. Helsing and K. Samuelsson (1995) *Electrostatics of anisotropic inclusions in anisotropic media* J. Appl. Phys. **78**(4), 2498-2503.
22. H. Christiansson and J. Helsing (1996) *Poisson's ratio of fiber-reinforced composites* J. Appl. Phys. **79**(10), 7582-7585.
23. * J. Helsing (1996) *Thin bridges in isotropic electrostatics* J. Comp. Phys. **127**(1), 142-151.

24. J. Helsing, G. W. Milton, and A. Movchan (1997) *Duality relations, correspondences, and numerical results for planar elastic composites* J. Mech. Phys. Solids 45(4), 565-590.
25. * L. Greengard and J. Helsing (1998) *On the numerical evaluation of elastostatic fields in locally isotropic two-dimensional composites.* J. Mech. Phys. Solids **46**(8), 1441-1462.
26. * J. Helsing (1998) *A high-order accurate algorithm for electrostatics of overlapping disks.* J. Stat. Phys. **90**(5-6), 1461-1473.
27. H. Mandyam, M.E. Glicksman, J. Helsing, and S.P. Marsh (1998) *Statistical simulation of diffusional coarsening in finite clusters* Phys. Rev. E **58**(2), 2119-2130.
28. * J. Helsing and G. Peters (1999) *Integral equation methods and numerical solutions of crack and inclusion problems in planar elastostatics* SIAM J. Appl. Math. **59**(3), 965-982.
29. J. Helsing (1999) *On the numerical evaluation of stress intensity factors for an interface crack of a general shape.* Int. J. Numer. Meth. Engng **44**(5), 729-741.
30. J. Helsing (1999) *Stress intensity factors for a crack in front of an inclusion.* Engn Fracture Mech. **64**(2), 245-253.
31. J. Helsing (1999) *Fast and accurate numerical solution to an elastostatic problem involving ten thousand randomly oriented cracks.* Int. J. Fracture **100**(4), 321-327.
32. J. Helsing (2000) *Corner singularities for elliptic problems: special basis functions versus ``brute force".* Comm. Num. Meth. Engn **16**(1), 37-46.
33. * J. Helsing and G. Peters (2000) *An efficient numerical algorithm for cracks partly in frictionless contact* SIAM J. Appl. Math. **61**(2), 551-566.
34. J. Helsing (2000) *On the interior stress problem for elastic bodies* ASME J. Appl. Mech. **67**(4), 658-662.
35. J. Helsing and A. Jonsson (2001) *Complex variable boundary integral equations for perforated infinite planes* Engng Anal. Boundary Elem. **25**(3), 191-202.
36. J. Helsing, A. Jonsson, and G. Peters (2001) *Evaluation of stress intensity factors for a square crack in 3D* Engn Fracture Mech. **68**(5), 605-612.
37. J. Byström, J. Helsing, and A. Meidell (2001) *Some compuational aspects of iterated structures* Composites Part B. **32**(6), 485-490.
38. J. Helsing and A. Jonsson (2002) *On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches* Int. J. Numer. Meth. Engng **53**(2), 433-454.
39. * J. Helsing and A. Jonsson (2002) *Stress Caclulations on Multiply Connected Domains* J. Comput. Phys. **176**(2), 456-482.
40. J. Helsing and A. Jonsson (2002) *On the accuracy of benchmark tables and graphical results in the applied mechanics literature* ASME J. Appl. Mech. **69**(1), 88-90.
41. J. Englund and J.Helsing (2003) *Stress computations on perforated polygonal domains*, Engng. Anal. Boundary Elem. (in press).
42. J. Helsing and A.Jonsson *A seventh order accurate and stable algorithm for the computation of stress inside cracked rectangular domains*, J. Multiscale Comput. Engng. (submitted)

Legendă: Cele mai bune lucrări în opinia domnului Johan Helsing sunt marcate cu simbolul *.

Lucrări ale unor conferințe

- J. Helsing (1996) *Electrostatics of thin bridges*, in Mathematics is for solving problems, A volume in honour of Julian D. Cole on his 70th birthday (Ed.: L. Pamela Cook, Victor Roytburd, and Marshall Tulin), SIAM, Philadelphia.
- J. Helsing, L.E. Persson and P. Wall (1997) *Numerical and mathematical methods for calculation of effective properties of multiphase materials*, Proceedings of the International Conference on Composite Engineering, ICCE/4 (Ed: David Hui), Hawaii, 1031-1032.

ANEXA 14

Cod sursă al programului de calcul al integralelor duble cu metoda Monte Carlo

Module 1:

```
Public a As Single, b As Single, c As Single, d As Single, e As Single, f As Single
Public nt As Integer, i As Integer, integr As Single, ValMax As Single
Public X() As Single, Y() As Single, Z1() As Single, Eps() As Integer
```

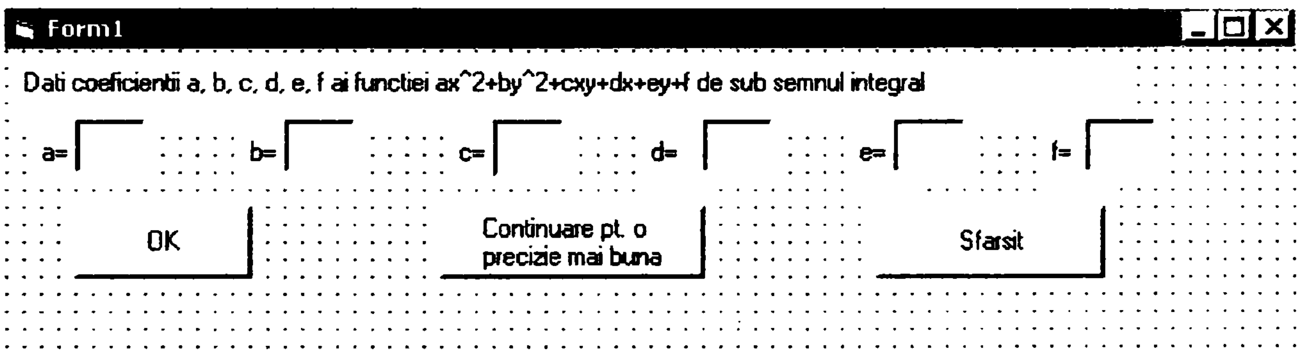
Sub main()

```
  MsgBox "Rezolvarea integralelor duble (in domeniul 0<=x<=1 si 0<=y<=1) cu metoda Monte Carlo"
Form1.Show
End Sub
```

Public Function FNF(i As Integer, a1 As Single, b1 As Single, c1 As Single, d1 As Single, e1 As Single, f1 As Single)

```
FNF = a1 * X(i) ^ 2 + b1 * Y(i) ^ 2 + c1 * X(i) * Y(i) + d1 * X(i) + e1 * Y(i) + f1
End Function
```

Form 1



Private Sub CmdOK_Click()

```
a = Val(Txta.Text)
b = Val(Txtb.Text)
c = Val(Txtc.Text)
d = Val(Txtd.Text)
e = Val(Txte.Text)
f = Val(Txtf.Text)
Randomize Timer
nt = InputBox("Nr total de puncte=")
 ReDim X(1 To nt), Y(1 To nt), Z(1 To nt), Z1(1 To nt), Eps(1 To nt)
For i = 1 To nt
  X(i) = Rnd
  Y(i) = Rnd
Next i
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "____________________________________________________________"
Print "X", "Y", "f(x,y)", "Eps"
Print "____________________________________________________________"
suma = 0
For i = 1 To nt
 Z1(i) = FNF(i, a, b, c, d, e, f)
   Eps(i) = 1
```

```
  suma = suma + Z1(i)
 Print Format(X(i), "##0.0000000"), Format(Y(i), "##0.0000000"), Format(Z1(i), "##0.0000000"), Eps(i)
Next i
Print "______________________________________________________________________"
media = suma / nt
MsgBox ("Valoarea integralei I=" & media)
Cmdrepet.Visible = True
cmdsf.Visible = True
End Sub
```

Private Sub Cmdrepet_Click()

```
nt = InputBox("Nr total de puncte=")
 ReDim X(1 To nt), Y(1 To nt), Z1(1 To nt), Eps(1 To nt)
For i = 1 To nt
  X(i) = Rnd
  Y(i) = Rnd
Next i
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "_________________________________________________________________"
Print "X", "Y", "f(x,y)", "Eps"
Print "_________________________________________________________________"
suma = 0
For i = 1 To nt
 Z1(i) = FNF(i, a, b, c, d, e, f)
 suma = suma + Z1(i)
 Eps(i) = 1
 Print Format(X(i), "##0.0000000"), Format(Y(i), "##0.0000000"), Format(Z1(i), "##0.0000000"), Eps(i)
Next i
Print "______________________________________________________________________"
media = suma / nt
MsgBox ("Valoarea integralei I=" & media)
End Sub
```

Private Sub cmdsf_Click()

```
 End
End Sub
```

ANEXA 15

Cod sursă al programului de calcul al integralelor cu metoda de cuadratură Gauss

Module 1:

```
Public a As Single, b As Single
Public integr As Single, i As Integer
Public Ai(1 To 5) As Single, Ti(1 To 5) As Single, x(1 To 5) As Single, f(1 To 5) As Single
```

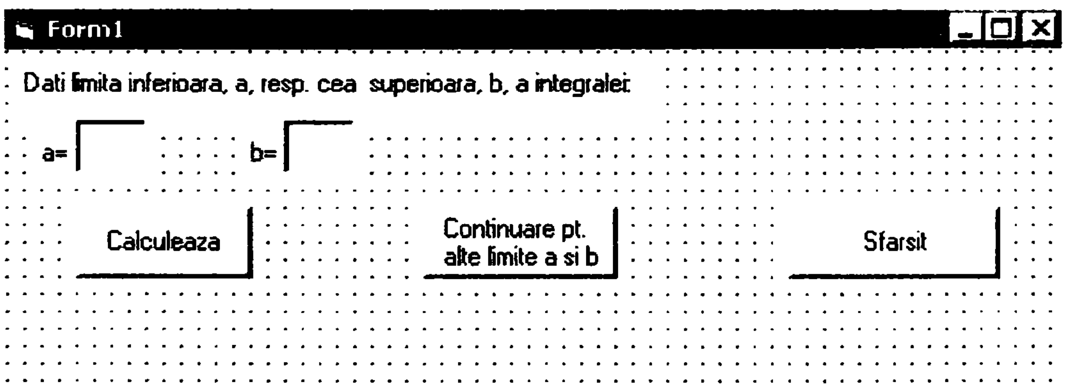
Sub Main()

```
 MsgBox "Rezolvarea integralelor cu metoda de cuadratura Gauss"
  Ti(1) = -0.906179846
  Ti(2) = -0.53846931
  Ti(3) = 0
  Ti(4) = 0.53846931
  Ti(5) = 0.906179846
  Ai(1) = 0.236926885
  Ai(2) = 0.47862867
  Ai(3) = 0.568888889
  Ai(4) = 0.47862867
  Ai(5) = 0.236926885
 Form1.Show
End Sub
```

Public Function FNF(i As Integer, x1 As Single)

```
 FNF = 1 / (1 + x1 ^ 2)
End Function
```

Form 1



Private Sub cmdcont_Click()

```
Cls
Txta.Text = ""
Txtb.Text = ""
Txta.SetFocus
a = Val(Txta.Text)
b = Val(Txtb.Text)
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "________________________________________________________________"
Print "i", "Ti", "f(i)", "Ai"
Print "________________________________________________________________"
integr = 0
```

```
For i = 1 To 5
 x(i) = (b + a) / 2 + (b - a) / 2 * Ti(i)
 f(i) = (b - a) / 2 * FNF(i, x(i))
 Print i, Format(Ti(i), "##0.0000000"), Format(f(i), "##0.0000000"), Format(Ai(i), "##0.0000000")
 integr = integr + Ai(i) * f(i)
Next i
Print "________________________________________________________________________"
Print "Valoarea integralei I=", Format(integr, "###0.00000000000")
End Sub

Private Sub CmdOK_Click()
a = Val(Txta.Text)
b = Val(Txtb.Text)
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "________________________________________________________________________"
Print "i", "Ti", "f(i)", "Ai"
Print "________________________________________________________________________"
integr = 0
For i = 1 To 5
 x(i) = (b + a) / 2 + (b - a) / 2 * Ti(i)
 f(i) = (b - a) / 2 * FNF(i, x(i))
 Print i, Format(Ti(i), "##0.0000000"), Format(f(i), "##0.0000000"), Format(Ai(i), "##0.0000000")
 integr = integr + Ai(i) * f(i)
Next i
Print "________________________________________________________________________"
a = Val(Txta.Text)
b = Val(Txtb.Text)
Cls
Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print: Print
Print "________________________________________________________________________"
Print "i", "Ti", "f(i)", "Ai"
Print "________________________________________________________________________"
integr = 0
For i = 1 To 5
 x(i) = (b + a) / 2 + (b - a) / 2 * Ti(i)
 f(i) = (b - a) / 2 * FNF(i, x(i))
 Print i, Format(Ti(i), "##0.0000000"), Format(f(i), "##0.0000000"), Format(Ai(i), "##0.0000000")
 integr = integr + Ai(i) * f(i)
Next i
Print "________________________________________________________________________"
Print "Valoarea integralei I=", Format(integr, "###0.00000000000")
cmdcont.Visible = True
cmdsf.Visible = True
End Sub

Private Sub cmdsf_Click()
 End
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Txta.SetFocus
End Sub
```

BIBLIOGRAFIE

A

1. **ABOVSKII P.N.** (i.d.), *Cislennie metodi v teorii uprugosti teorii obolecek*, Izd. Krasnoiarskovo Univ., Krasnoiarsk, 1986
2. **ABOVSKII P.N., ANDREEV P.N., DERUGA P.A.,** *Variationie principî teorii uprugosti i teorii obolocek*, Moskva Nauka",1978
3. **ACZEL U., BOZAN C.,** *Dislocațiile și frecarea internă la metale*, Editura Facla, Timişoara, 1974
4. **ACHENBACH J.D.,** *Brittle and ductile extension of a finite crack by a horizontally polarized shearwave*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.947-966
5. **ADDA-BEDIA M., ARIAS R.,** *Brittle fracture dynamics with arbitrary paths I. Kinking of a dynamic crack in general antiplane loading*
6. **AFFIANA.B., PAUKŞTO U.M.,** *O metode konformnih otobrajenii v yadaciah teorii uprugosti dlia lomanih treşcin*, **I.U.P.** Nr.15, 1986, p. 7-12
7. **AGAREV A.V.,** *Metod nacialnih funcții dlia dvuhmernîh kraevîh zadaci teorii uprugosti*, Akad. Nauk Ukranskoi SSR, Kiev, 1963
8. **AHMAD S., BANERJEE K.P.,** *Inelastic transient dynamic analysis of three- dimensional problems by BEM*, **I.J.N.M.E.** Vol. 29, 1990, p.371-390
9. **AIT HOCINE N., NAIT ABDELAZIZ, G. MESMACQUE,** *Experimental and Numerical Analysis on Single Specimen Methods of Determination of J in Rubber Materials*, **I.J.F.** 94: 321-338, 1998
10. **ALĂMOREANU E., BUZDUGAN GH., ILIESCU M., MINCĂ I., SANDU M.,** *Îndrumător de calcul în ingineria mecanică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996
11. **ALBLAS J.B., KUIPERS M.,** *The contact problem of a rigid cylinder rolling on a thin viscoelastic layer*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.363-380
12. **ALEKSANDROV A.Ia., KOSENIUK V.K.,** *Ob adnom tipe podkrepleniia kontura otverstii v plastinkah*, **P.M.**,Nr.10,T.15,1979
13. **ALEKSANDROV A.Ia., SOLOVIEV IU.I.,** *Prostranstvennie zadaci teorii uprugosti-Primenie metodov teorii funkții komplecsnogo peremennogo*, Moskva "Nauka", 1978
14. **ALEKSANDROV V.M.,** *Asimptoticeskie metodi v smeşciannih zadaciah teorii uprugosti dlia neklasiceskih oblastei*, **K.NJv.2**, p.14-24
15. **ALEKSANDROV V.M., SMETANIN V.I.,** *Ravnovesnaia treşcina v sloe maloi tolşcini*, **P.M.M.**, Vol.4, 1965
16. **ALEKSANDROV V.M., KOVALENKO E.V.,** *Metod ortogonalinîh funkții v smeşannîh zaducic mehaniki sploşnih sred*. **P.M.**, Tom XIII, Nr.12, 1977
17. **ALEKSEEV G.V., ŞALÂGHIN V.N.,** *Mehanizm raznuşeniia polimera soderjaşcego makrodefectî*, **P.M.**Tom XIII, Nr.11, 1977
18. **ALESHIN N.P., ALTPETER I., DOBMANN G.,** ş.a., *NDT – Techiques for Life Time Assessment of Components In Service - An International Cooperative Approach*, National Seminar of ISNT Chennai, 5 - 7.12.2002, www.nde2002.org
19. **ALESSANDRINI G., MORASSI A., ROSSET E.,** *Detecting an Inclusion in an Elastic Body by Boundary Measurements*
20. **ALEXANDROV S.E., GOLDSTEIN R.V.,** *Distributions of Stress and Plastic Strain in Notched Tensile Bars*, **I.J.F.** 91: 1-11,1998
21. **ALIABADI M.H.,** *A new generation of boundary element methods in fracture mechanics*, **I.J.F.** 86: 91-125,1997
22. **AMBARȚUMIAN S.A.,** *Roznomodulinaia teoriia uprugosti*, Moskva "Nauka", 1982
23. **AMESTOY M., LEBLOND J.B.,** *Crack paths in plane situations – II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors*, **I.J.S.S.**, Vol.29, Nr.4, 1992, p.465-501
24. **AMMONS A.B., MADHUKAR VABLE,** *Boundary element Analysis of cracks*, **I.J.S.S.** Vol. 33, Nr.13, 1996
25. **ANDERSON L.T.,** *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, CRC Press, Inc. Boston, 1991
26. **ANDREEV V.A.,** *Kriterii procinosti dlia zon konțentrații napriajenii*, Moskva, Masinostroenie, 1985
27. **ANDRUET H.RAUL,** *Special 2-D and 3-D Geometrically Nonlinear Finite Elements for Analysis of Adhesively Bonded Joints* Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 1998
28. **ANNIGERI S.B., TSENG K.,** *Boundary Element Methods in Engineering*, Proceedings of the International Symposium on Boundary Element Methods: Advances in Solid and Fluid Mechanics, U.S.A., 1989
29. **ANNIS CHARLES,** *Probabilistic Life Prediction Isn't as Easy as It Looks*, ASTM STP-1450, p.1-13
30. **ARATA J.J.M., NEEDLEMAN A.,** *The effect of plasticity on dynamic crack growth across an interface*, **I.J.F.** 9/1998, p.383-399
31. **ARAVAS N.,** *On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models*, **I.J.N.M.E.**, Vol. 24, 1987, p.1395-1416
32. **ARKULIS E.G.,** *Sovmestnaia plasticeskaia deformațiia raznîh metallov*, Izd. Metallurghia, Moskva, 1964
33. **ARNOLD N. DOUGLAS, FALK S.RICHARD,** *A New Mixed Formulation for Elasticity*, Math. Model.&Numer.Anal.19,1985
34. **ARSENIIAN V.A.,** ş.a., *O reşenii integralinîh uravnenii ploskoi teorii uprugosti metodom posledovatelinîh pribliJenii*, **M.T.T.** Nr.1/1982, p.79-83
35. **ARTHUR P.F., BLACKBURN W.S.,** *Growth of a crack in antiplane strain in an elastic-plastic material*, **I.J.E.S.** Vol. 8, 1970, p.747-752
36. **ARTHUR P.F., BLACKBURN W.S.,** *Anti-plane strain around two equal collinear cracks and a crack containing dislocations in a nonwork hardening elastic-plastic material loaded uniformly at infinity*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.975-988
37. **ARUN ROY Y., R. NARASIMHAN,** *J-Dominance in Mixed Mode Ductile Fracture Specimens*, **I.J.F.** 88, 1997, p.259-279
38. **ATKINS G.A.,** *Scaling Laws for Elastoplastic Fracture*, **I.J.F.** 95, 1999, p.51-65
39. **ATKINSON C.,** *The interaction between a crack and an inclusion*, **I.J.E.S.** Vol. 16, 1972, p.127-136
40. **ATKINSON C.,** *Some ribbon-like inclusion problems*, **I.J.E.S.** Vol.11, 1973, p.243-266
41. **ATKINSON C., BOURNE P.J.,** *Stress singularities in angular sectors of viscoelastic media*, **I.J.E.S.**, Vol. 28, Nr.7, 1990, p. 615-630
42. **ATKINSON C., LIST R.D.,** *A moving crack problem in a viscoelastic solid*, **I.J.E.S.** Vol 10, 1972, p.309-322

43. **ATUMI A.**, ş.a., *Reports of the Research Institute for Strength and Fracture of Materials*, Tohoku University Sendai, Japan, Vol.15, Nr.2, 1980
44. **AVRAM C., BOB C., FRIEDRICH R., STOIAN V.**, *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalenţelor*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1984
45. **AWAJI H.**, *The Griffith Criterion for Mode II Fracture*, **I.J.F.** 89, 1998, L3-L7
46. **AWAJI H., KATO T., HONDA S., NISHIKAWA T.**, *Criterion for combined mode I-II of brittle fracture* **J.C.S.J.** 107, 1999, p.918-924
47. **AWAJI H., SATO S.**, *Combined mode fracture toughness measurement by the disk test*, **J.E.M.T.** Vol.100, April 1978, p.175-182
48. **AWAJI H., KATO T.**, *Criterion for combined mode I-II of brittle fracture*, Materials Transactions, JIM, Vol. 40, Nr. 9, 1999, p.972-979
49. **AWAJI H., KATO T.**, *Griffith criterion for mode II fracture of ceramics*, Experimental Mechanics, Allison (ed.), 1998, Balkema, Rotterdam, Brookfield
50. **AYATOLLAHI M.R., PAVIER M.J., SMITH D.J.**, *Determination of T-Stress from Finite Element Analysis for Mode I and Mixed Mode I/II Loading*, **I.J.F.** 91, 1998, p.283-298
51. **AZHDARI ABBAS, SIA NEMAT-NASSER**, *Hoop stress intensity factor and crack-kinking in anisotropic brittle solids*, **I.J.S.S.** Vol. 33, Nr.14, 1996

B

1. **BEBEŞKO A.V.**, *Ob odnom asimptoticeskom metode pri renenii integralinikuravnenii teorii uprugosti i matematicenkoi fizichi*, **P.M.M.**, Tom XXX, 1966, p.732-741
2. **BAKHVALOV N.**, *Methodes numeriques*, Editura MIR, Moskva, 1976
3. **BALANKIN A.**, ş.a., *Mechanics of Self-Affine Cracks in Carton*, **I.J.F.** 90, 1998, L57-L62
4. **BALARINI R., MULLEN L.R., HEUER H.A.**, *The Effects of Heterogeneity and Anisotropy on the Size Effect in Cracked Polycrystalline films*, **I.J.F.** 95, 1999, p.19-39
5. **BALKEY K.R., FURCHI E.L.**, *Probabilistic Fracture Mechanics Sensitivity Study for Plant Specific Evaluations of Reactor Vessel Pressurized Thermal Shock*, **ASME**, PVP Vol.92, 1984, p.71-87
6. **BANERJEE P.K., BUTTERFIELD R.**, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGrow-Hill Book Company, London, 1981
7. **BANICHUK N.V.**, ş.a., *Mesh rafinement for shape optimization*, „Structural Optimization" 9, 1995, p.46-51
8. **BAO WEIZHU, HAN HOUDE, HUANG ZHONGYI**, *Numerical simulations of fracture problems by coupling the FEM and the direct method of lines*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190, 2001, p.4831-4846
9. **BARENBLATT G.I., CEREPANOV G.N.**, *O hrupkih treşcinah prodolinogo cdviga*, **P.M.M.**, Tom XXV, 1961
10. **BARENBLATT G.I., CEREPANOV G.N.**, *O konecinosti napriajenii na kraiu proizvolinoi treşcini*, **P.M.M.**, Tom 28, Nr.5, 1963
11. **BARENBLATT G.I., CEREPANOV G.N.**, *O rasklinivanii hrupkih tel.*, **P.M.M.**, Tom XXIV, 1960
12. **BARENBLATT G.I., CEREPANOV G.N.**, *O ravnovesii i rasprostranenii trescin i anizotropnoi srede*, **P.M.M.**, Tom 15, 1961
13. **BARENBLATT G.I., CERNÎI G.G.**, *O momentîh sootnaşeniiah na pavernostnîh razriva i dissipativnîh sredah*, **P.M.M.**, Tom XVII, 1963
14. **BARENBLATT G.I.**, *O nekotorîh obşcih predstavleniiah matematiceskoi teorii hrupkogo razruşeniia*, **P.M.M.**, Tom 28, 1964
15. **BARENBLATT G.I.**, *O ravnovesnîh treşcinah obrazuiuşcihsia pri hrupkom razruşenii priamolineinîe treşcini v ploskih plastinah*, **P.M.M.**, Tom XXIII, 1959
16. **BARENBLATT G.I.**, *O ravnovesnîh treşcinah obrazuiuşcihsia pri hrupkom razruşenii ustoicivoisti izolirovannîh treşcin sviazi s energeticeskimi teoriianii*, **P.M.M.**, Tom XXIII, 1959
17. **BARENBLATT G.I.**, *O ravnovesnîh treşcinah, obrazuiuşcihsia pri hrupkom razruşenie obscie predstavleniia i ghipotezî osesimetricinîe treşcini* **P.M.M.**, Tom XXIII, 1959
18. **BARENBLATT G.I.**, ş.a., *O neustanovivşemsiia rasprostranenii treşcin*, **P.M.M.**, Tom XXVI, 1962
19. **BARUT A., GUVEN I., MADENCI E.**, *Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading*
20. **BASU S., NARASIMAN S.**, *Finite element simulation of mode I dynamic, ductile fracture initiation*, **I.J.S.S.**, Vol.33, Nr.8, 1996
21. **BATHE K.-J., WILSON L.E.**, *Numerical methods in finite element analysis*, (ed. limba rusă), Moskva, 1982
22. **BATOZ J.L., DHATT G.**, *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermes, Paris, 1990
23. **BÉDA GY.**, *Possible constitutive equations of a dinamically loaded continuum taking into account small deformations*, Periodica Polytechnica, Budapest, 1989
24. **BÉDA GY.**, *Intrinsic variables of constitutive equation*, Periodica Polytechnica, Budapest, 1989
25. **BÉDA GY.**, *Pon differential forms of the constitutive equations for elasto-plastic solids*, Periodica Polytechnica, Budapest, 1989
26. **BEJU I., SOÓS E., TEODORESCU P.P.**, *Tehnici de calcul vectorial cu aplicaţii*, Editura Teh., Buc., 1976
27. **BEJU I., SOÓS E., TEODORESCU P.P.**, *Tehnici de calcul tensional euclidian cu aplicaţii*, Ed.Teh., Buc., 1977
28. **BEJU I., SOÓS E., TEODORESCU P.P.**, *Tehnici de calcul spinorial şi tensorial neeuclidian cu aplicaţii*, Ed.Teh., Buc., 1979
29. **BELOKOPÎTOVA N.L.**, ş.a., *Sosredotocennaia sila ili zapiad v piezokeramiceskoi plastine s trescinoi*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p.12-20
30. **BEOM H.G., Y.Y. EARMME**, *Complex Variable Method for Problems of a Laminate Composed of Multiple Isotropic Layers*, **I.J.F.** 92, 1998, p.305-324
31. **BERBENTE C., MITRAN S., ZANCU S.**, *Metode numerice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997
32. **BEREJNIŢKII L.T.**, ş.a., *Izghib anizotropnoi plastinî s treşcinoi*, **P.M.**, Tom XIV, Nr.11, 1978
33. **BEREJNIŢKII T.L., DELIAVSKII V.M., PANASIUK V.V.**, *Izghib tonkih plastin s defectami tipa treşcin*, Kiev, "Naukova Dumka", 1979
34. **BEREMS A.P., HOVEY P.W.**, *Statistical Methods for Estimating Crack Detection Probabilities*, **ASTM**, STP798, 1983, p.79-94
35. **BEREZIN A.V.**, *Deformirovanie defektnîh materialov*, **M.T.T.** Nr.6/1982, p.124-130
36. **BESKOS E.D.**, *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*, Springer Verlag, 1991

37. **BESKOS E.D.**, *Boundary Element Methods in Mechanics*, Vol. 3 in Computational Methods in Mechanics, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991
38. **BESKOS E.D.**, *Boundary element methods in dynamic analysis*, **A.M.R.** Vol. 40, Nr.1, 1987
39. **BEUTH J.L. Jr**, *Cracking of thin bonded films in residual tension*, **I.J.S.S.** Vol. 29, Nr.13, 1992, p.1657-1675
40. **BEZUHOV N.I.**, *Teoria elasticității și plasticității*, Editura Tehnică, București, 1957 (traducere din limba rusă)
41. **BEZUHOV N.I.**, *Primeri i zadaci po teorii uprugorti, plasticinosti i polzucesti*, Izd. "Vîşaia Şcola", Moskva, 1965
42. **BHARGAVA R.D., BHARGAVA R.R.**, *Elastic circular inclusion in an infinite plane containing two cracks*, **I.J.E.S.** Vol. 11, 1973, p.437-449
43. **BIA C., ILLE V., SOARE M.V.**, *Rezistența materialelor și teoria elasticității*, Editura Didactică și Pedagogică, Buc., 1983
44. **BIRGER I.A., MAVLIUTOV R.R.**, *Soprotivlenie materialov*, Moskva "Nauka", 1986
45. **BIȚ CORNELIU**, *Propunere pentru o lege de propagare a fisurilor de oboseală în domeniul liniar elastic (LEFM)*, Buletinul ARMR Nr.5, 1998, p.13-18
46. **BIȚENO B.K., GRAMMEL R.**, *Tehniceskaia dinamica. Vol.I. Gosudarstvennoe izdatelistvo tehniko-teoreticeskoi literaturi*, Leningrad-Moskva, 1950
47. **BI-TRONG CHEN, C.T.HU, SANBOH LEE**, *Edge Dislocations Near a Cracked Sliding Interface*, **I.J.F.** 91, 1998, p.131-147
48. **BI-TRONG CHEN, C.T.HU, SANBOH LEE**, *Comparison of Elastic Interaction of a Dislocation and a Crack for Four Bonding Conditions of the Crack Plane*, **I.J.F.** 91, 1998, p.149-164
49. **BLANCO C.**, ş.a., *Analysis of Sharp Angular Notches in Anisotropic Materials*, **I.J.F.** 93, 1998, p.373-386
50. **BLANCO C.**, ş.a., *Kinked Cracks in Anisotropic Elastic Materials*, **I.J.F.** 93, 1998, p.387-407
51. **BLOOM J.M.**, *Probabilistic Fracture Mechanics – A State of-the-Art Review*, **ASME**, PVP Vol.92, 1984, p.1-19
52. **BLOOM J.M., EKVAL J.C.** (editors), *Probabilistic Fracture Mechanics and Fatigue Methods: Applications for Structural Design and Maintenance*, **ASTM** Special Technical Publication 798, **ASTM** STP-798
53. **BLUMENAUER H., PUSCH G.**, *Bruchmechanik. Grundlagen, Prüfmethoden, Anwendungsgebiete*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1973
54. **BLUMENFELD M.**, *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, București, 1995
55. **BOBET A.**, ş.a., *Numericol modeling of fracture coalescence in a model rock material*, **I.J.F.** 92, 1998, p.221-252
56. **BOIARŞINOV S.V.**, *Osnovi stroitelinoi mehaniki maşin*, Moskva, "Maşinostroenie", 1973
57. **BOLEANȚU L., DOBRE I.**, *Aplicații ale mecanicii solidului deformabil în construcția de mașini*, Ed. Facla, Timișoara, 1978
58. **BOLEANȚU L., DOBRE I.**, *Analiza propagării fisurilor de oboseală la șocuri repetate de încovoiere*, ICEFIZ-81, Timișoara, secț. XI, p.27-29
59. **BOLEANȚU L., DOBRE I.**, *Die Wahrscheinlichkeitsberechnung des Masstabfaktors in der Untersuchung der statischen Festigkeitswerte von Stählen*, Lucrările Sesiunii științifice jubiliare ale Școlii superioare tehnice din Brno – R.S.C., iunie 1975
60. **BOLOTIN V.N.**, *Nekatorae vaprosi teorii hrupkovo razruşeniia*, Rascioti na pocinosti, Vîpusk 8, Moskva, 1962
61. **BONENBERGER R.J., DALLY J.W.**, *On improvements in measuring crack-arrest toughness23*, **I.J.S.S.**, 1994, p.897-909
62. **BONNET MARC**, *Équations intégrales et éléments de frontière en Mécanique des Solides: Théorie, mise en oeuvre, applications*, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1993
63. **BONORA N.**, *On the Effect of Triaxial State of Stress on Ductility Using Nonlinear CDM Model*, **I.J.F.** 88, 1997, p.359-371
64. **BORȘ C.I.**, *Teoria elasticității corpurilor anizotrope*, Editura Academiei R.S.R., București, 1970
65. **BORODICH M.F.**, *Fractals and Fractal Scaling in Fracture Mechanics*, **I.J.F.** 95, 1999, p.239-259
66. **BOSAKOV S.V.**, *Rasciot zaglublennîh ankernîh plit konecinoi jestkosti*, **P.M.**, Tom XVI, nr.3, 1980
67. **BOTHE K.-J., WILSON L.E.**, *Numerical methods in finite element analysis*, Moscova, 1982
68. **BOWER A.F.**, *Advanced Mechanics of Solids*, Lecture Notes, Brown University, 1998
69. **BOWER A.F.**, *Introductory Mechanics of Solids*, Lecture Notes, Brown University, 1998
70. **BOWER A.F.**, *Linear Elasticity*, Lecture Notes, Fall 1997-98, Brown University
71. **BRĂTIANU CONSTANTIN**, *Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor*, Ed. Academiei R.S.R., Buc., 1983
72. **BREBBIA A.C., ORSAG A.S.** (editori), *Lecture Notes in Engineering*, Nr. 62, **Z.ZHAO**, *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimisation using the Boundary Element Method*, Springer Verlag, Berlin, 1991
73. **BRELOT M.**, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, Paris, 1962
74. **BRUCKNER A.**, ş.a., *Scatter of Fracture Toughness in Plates of the Aluminium Alloy 7475-T 7351*, **ASME**, PVP Vol. 92, 1984, p.113-133
75. **BRUCKNER A.I., MUNZ D.**, *Scatter of Fracture Toughness in the Brittle-Ductile Transition Region of a Ferritic Steel*, **ASME**, PVP Vol. 92, 1984, p.105-113
76. **BUCUR M.C.**, *Metode numerice*, Editura Facla, Timișoara, 1973
77. **BUELL J., KAGIWADA H., KALABA R.**, *Solution of a system of dual integral equations*, **I.J.E.S.** Vol. 10, 1972, p.503-510
78. **BUGAKOV I.I.**, *Issledovanie procinosti obrazțov s uglavîmi virezami*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p. 20-26
79. **BUGAKOV I.I.**, *Kvazihrupkoe razruşenie obrazțov s virezom v vide lunki*, **M.T.T.** Nr.6/1982, p.177-180
80. **BULANOV G.S.**, *Rastiajenie tolstoi plastini s inorodnîm tilindriceskîm vkliuceniem*, **P.M.**, Tom XIII, Nr.8, 1977
81. **BULLOCK G., SMITH E.**, *Effects of grain size and temperature on flat fracture propagation and arrest in mild steel*. – In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 286-300
82. **BURCZYNSKI T.**, *Stochastic Boundary Element Methods*
83. **BYSTRÖM J., HELSING J., MEIDELL A.**, *Some computational aspects of iterated structures*, Composites Part B. 32(6), 2001, p.485-490

C

1. **CARACOSTEA D. ANDREI** (redactor), *Manual pentru calculul construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1959
2. **CARSTENSEN C., DOLZMAN G., FUNKEN S.A., HELM D.S.**, *Locking-free Adaptive Mixed Finite Element Method in Linear Elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engineering, 190, 2000, p.1701-1718

3. **CAZACU ANDREIAN, CABIRIA** (coordonator), *Analiza complexă. Aspecte clasice şi moderne*, Ed.Şt. şi Encicl., Buc., 1988
4. **CEGOB A.U.**, *Введение в механику сплошной среды*, Изд-во "Физматгиз", 1962
5. **CEREPANOV G.I.**, *Nekotorie zadaci teorii treşcin v ghidrodinamiceskoi postanovke*, **P.M.M.**,Tom XXI,Nr.6,1963
6. **CEREPANOV G.N.**, *O cvazihrupkom razruşenii*, **P.M.M.**, Tom XXXII, 1968
7. **CEREPANOV G.N.**, *O rasprostranenii treşcin v sploşnoi srede*, **P.M.M.**, Tom XXXI, 1967
8. **CEREPANOV G.N.**, *Obratnaia uprugo plasticeskaia zadacia v usloviiah artiploskoi deformatii*, **P.M.M.**,Nr.4,1967
9. **CEREPANOV G.P., KOCIAROV R.S.**, *Razvitie skoljeniia v polikristallicescom metalle i v treşcinowatîh skalinîh porodah*, **P.P.**, Nr. 1, 1977, p.107-120
10. **CEREPANOV G.P.**, *Mehanika hrupkovo razruşeniia*, Izd. "Nauka", Moskva, 1974
11. **CEREPANOV G.P.**, *O razvitii treşcin v sjatîh telah*, **P.M.M.**, Tom XXX, 1966
12. **CEREPANOV G.P.**, *O razvitii polostoi v viazkih telah*, **P.M.M.**, Nr.3, 1969, p.544-547
13. **CEREPANOV. G.P.**, *Uprugo plasticeskaia zadacia v usloviiah antiploskoi deformatii*. **P.M.M.**, Tom XXVI, 1962
14. **CESARE A.M., SUES H.R.**, *Profes Probabilistic Finite Element System – Bringing Probabilistic Mechanics to the Desktop*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA 99-1607
15. **CHAKRABARTI ALOKNATH**, *On some mixed boundary value problems of plane elasticity associated with a wedge*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.81-91
16. **CHANG C., MEAR M.E.**, *A boundary element method for two dimensional linear elastic fracture analysis*. **I.J.F.** 74, 1995, p.219-251
17. **CHANG P.T.**, *Dynamic Finite Element Analysis of a Beam on Random Foundation*. Composites and Structures, Vol. 48, Nr.4, 1993, p.583-589
18. **CHAO K.C., SHEN H.M.**, *Solutions of thermoelastic crack problems in bonded dissimilar media or half-plane medium*, **I.J.S.S.** Vol. 32, Nr.24, 1995, p.3537-3554
19. **CHATTERJEE S.N., PRASAD S.N.**, *Series solution of the three-dimensional elasticity problem of a layer*, **I.J.E.S.**, Vol.10, 1972, p.813-839
20. **CHATTERJEE S.N., PRASAD S.N.**, *On the problem of two non-coplanar parallel cracks in a strip*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.353-368
21. **CHATTERJEE S.N., PRASAD S.N.**, *On Papkovich-Fadle solutions of crack problems relating to an elastic strip*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.1079-1101
22. **CHAU K.T., WANG Y.B.**, *Singularity analysis and boundary integral equation method for frictional crack problems in two dimensional elasticity*. **I.J.F.** 90, 1998, p.251-274
23. **CHAU K.T., WANG Y.B.**, *Sanew boundary integral formulation for plane elastic bodies containing cracks and holes*. **I.J.S.S.** 36, 1999, p.2041-2074
24. **CHEN B., LARDNER J.T.**, *Two-dimensional cracks at an angle to an interface*. **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.13, 1993
25. **CHEN C., FLECK N.A., LU T.J.**, *The Mode I Crack Growth Resistance of Metallic Foams*, **J.M.P.S.** 49, 2001, p.231-259
26. **CHEN C., LU T.J., FLECK N.A.**, *Effect of Inclusions and Holes on the Stiffness and Strength of Honeycomb*, **I.J.M.S.** 43, 2001, p.487-504
27. **CHEN D.H., NISITANI H.**, *Body force method*, **I.J.F.** 86, 1997, p.161-189
28. **CHEN FENG**, ş.a., *An easy method for calculation of mode I stress intensity factor using isochromatic fringe patterns*, **I.J.F.** 87, 1997, p.L51-L55
29. **CHEN J.T., HONG H.K.**, *Review of Dual Integral Representations with Emphasis on Hipersingularity and Divergent Series*, Fifth International Colloquium on Numerical Analysis, Plovdiv, Bulgaria, 1996
30. **CHEN T.**, *The rotation of a rigid ellipsoidal inclusion embeded in an anisotropic piezoelectric medium*. **I.J.S.S.** 30, Nr.15, 1993
31. **CHEN WEN-HWA, SHEN CHIH-MING**, *A finite element alternating approach to the bending of thin plates containing mixed mode cracks*. **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.16, 1993
32. **CHEN YI-HENG, HASEBE N.**, *Interaction between a mai- crack and a parallel micro-crack in an orthotropic plane elastic solid*, **I.J.S.S.** Vol.31, Nr.14, 1994, p.1877-1890
33. **CHEN YI-HENG, ZUO HONG**, *Investigation of macrocrack-microcrack interaction problems in anisotropic elastic solids. Part I: General solution to the problem and application of the J-integral*. **I.J.F.** 91, 1998, p.61-82
34. **CHEN Y.Z.**, *Complex Potentials and Singular Integral Equation for Curve Crack Problem in Antiplane Elasticity*, **I.J.E.S.** 38, 2000, p.565-574
35. **CHEN Y.Z.**, *Numerical solution of multiple crack problem by using hypersingular integral equation*. **I.J.F.** 88: L9-L14,1997
36. **CHENG Z.-Q., BATRA C.R.**, *Exact Eshelby tensor for dynamic circular cylindrical inclusion*, **J.A.M.** Vol.66, 1999, p.563-569
37. **CHENGALVA M.K., KENNER V.H., POPELAR C.H.**, *An evaluation of a free volume representation for viscoelastic properties*. **I.J.S.S.**, Vol.32, Nr.6/7, 1995, p.847-856
38. **CHIORESCU GH.**, *Matematici speciale. Culegere de aplicaţii în mecanică*, Editura "Gh. Asachi", Iaşi, 1995
39. **CHIRICĂ I.**, *Elasticitate. Fundamente. Exemple. Aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997
40. **CHIU W.C.**, ş.a, *An Analysis in Chipping in Brittle Materials*. **I.J.F.** 90, 1998, p.287-298
41. **CHUNG T.J.**, *Continuum Mechanics*, Prentice-Hall International Inc., 1988
42. **CHUNG-YUEN HUI**, ş.a., *Williams Meets von Karnak: Mode Coupling and Nonlinearity in the Fracture of Thin Plates*, **I.J.F.** 93, 1998, p.409-429
43. **CIARLET G.P.**, *Mathematical Elasticity vol I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland C, 1988
44. **CIOBANU GH., CONSTANTINESCU C.**, *Fizica stării solide*. Editura Tehnică, Bucureşti, 1982
45. **CIOCLOV D.**, *Mecanica ruperii materialelor*. Editura Academici R.S.R., Bucureşti, 1977
46. **CIOCLOV D.**, *Rezistenţă şi fiabilitate la solicitări variabile*. Editura Facla, Timişoara, 1975
47. **CISILINO P.A., ALIABADI H.M.**, *BEM implementation of the energy domain integral for the elastoplastic analysis of 3D fracture problems*. **I.J.F.** 96, 1999, p.229-245

48. **CIUCU G., CRAIU V.**, *Introducere în teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Ed.Did.şi Ped., Buc., 1971
49. **CIUCU G., TUDOR C.**, *Probabilităţi şi procese stocastice*, Vol. I, II, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1979
50. **CIUDNOVSKII I.A.**, *O razruşenii makrotel*, "Isledovaniia po uprugosti i plasticinosti", Sbornik 9, 1973
51. **CIZELJ L., MAVKO B., RIESCH-OPPERMAN H.**, *Application of first and second order reliability methods in the safety assessment of cracked steam generator tubing*, Nuclear Engineering and Design, 147, 2002
52. **CLOUSTON P.L., LAM F.**, *Computational Modeling of Strand-Based Wood Composites*, Journal of Engineering Mechanics, Vol.127, Nr.8, August 2001,
53. **COLOJOARĂ I.**, *Elemente de teorie spectrală*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1968
54. **CONGLETON J., DENTON B.K.**, *Measurement of fast crack growth in metals and nonmetals.* In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 336-358
55. **COOK F.R., SUO Z.**, *Mechanisms Active during Fracture under Constraint*, MRS Bulletin, January 2002
56. **COOK T.S., ERDOGAN F.**, *Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface*, **I.J.E.S.**, Vol. 10, 1972, p.677-697
57. **CONSTANTINESCU I.N., TACU T.**, *Calcule de rezistenţă pentru utilaje tehnologice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979
58. **CONSTANTINESCU I.N., DĂNEŢ V.G.**, *Metode noi pentru calcule de rezistenţă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989
59. **CONSTANTINESCU M.D.**, *Criterii de iniţiere la propagarea bidimensională a fisurii în moduri mixte*, Buletinul ARMR Nr.13, 2002, p.8-21
60. **CONSTANTINESCU M.D.**, *Soluţii analitice fundamentale utilizate în mecanica ruperii liniar elastice*, Buletinul ARMR Nr.5, 1998, p.2-7
61. **CORTÉS R.**, *The growth of microvoids under intense dynamic loading*, **I.J.S.S.**, Vol. 29, Nr.11, 1992
62. **CORTÉS R.**, *Dynamic growth of microvoids under combined hydrostatic and deviatoric stresses*, **I.J.S.S.**, Vol. 29, Nr.13, 1992
63. **CORTÉS R.**, *The growth of microvoids under intense dynamic loading*, **I.J.S.S.**, Vol. 29, Nr.11, 1992
64. **COSTANZO FRANCESCO, WALTON R.J.**, *Numerical Simulations of a Dynamically Propagating Crack With a Nonlinear Cohesive Zone*, **I.J.F.** 91, 1998, p.373-389
65. **COSTIN L.S., DUFFY J., FREUND L.B.**, *Fracture initiation in metals under stress wave loading conditions.* – In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 301-318
66. **COSTINESCU OLGA**, *Elemente de topologie generală*, Editura Tehnică, Buc.,1969
67. **COTTRELL B.**, *On the Nature of Moving Cracks*, **J.A.M.**, March, 1964
68. **COURBON J.**, *Rezistance des materiaux*, Vol. I, II, Dunod, Paris, 1964-1965
69. **COWAN A., KIRBY N.**, *The Application of C.O.D. Measurments to Large Scale Test Behaviour*, In: "Proceedings of the Symposium on Fracture Concepts for Weldable Structural Steel", Risley, Apr.1969, Edit.: **M.O. DOBSON**
70. **CRĂCIUN E.M., SOÓS E.**, *Interaction of Two Unequal Cracks in a Prestressed Fiber Reinforced Composite*, **I.J.F.** 94, 1998, p.137-159
71. **CRAIU M., ROŞCULEŢ N.M.**, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971
72. **CRAIU V.**, *Verificarea ipotezelor statistice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
73. **CRAIU V., ENACHE R., BÂSCĂ O.**, *Teste de concordanţă cu programe în FORTRAN*, Ed. Ştiinţ. Şi Enciclopedică, Buc., 1986
74. **CREANGĂ I., LUCHIAN T.**, *Introducere în calculul tensorial*, Editura Didactică şi Pedagogică, Buc., 1963
75. **CRISTESCU N.**, *Dynamic Plasticity*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967
76. **CRISTESCU N.**, *Probleme dinamice în teoria plasticităţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958
77. **CRISTESCU N., SULICIU I.**, *Vîscoplasticitate*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976
78. **CRISTESCU R.**, *Spaţii liniare ordonate*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1959
79. **CRISTESCU R.**, *Analiză funcţională*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965
80. **CRISTESCU R.**, *Elemente de analiză funcţională şi introducere în teoria distribuţiilor*, Ed. Tehn. Bucureşti, 1966
81. **CROSLEY P.B., RIPLING E.J.**, *Caracteristics of a run-arrest segment of crack extension.* – In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 203-227
82. **CROSLEY P.B., RIPLING E.J.**, *Towards development of a standard test for measuring K_{Ia}*. – In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 372-391
83. **CRUSE A.T.**, *Numerical Solutions in three Dimensional Elastostatics*, **I.J.S.S.**, Vol.5, 1969, p.1259-1274
84. **CUCULESCU I.**, *Analiza numerică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967

D

1. **DAI-HENG CHEN**, *Plane Elastic Problem of a Crack Normal to and Terminating at Bimaterial Interface of Isotropic and Orthotropic Half Plates*, **I.J.F.** 88, 1997, p.393-406
2. **DALI I. M.**, *O forme poteri ustoicivosti rastianustoi priamongolnoi plastină s trescinoi*, **P.M.**,Tom XVII,Nr.7, 1981
3. **DANGLA P.**, *Éléments finis, équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure*, Laboratoire central des ponts et chausées, Rapports des laboratoires MA-4, 1990
4. **DAS RANJAN BIKAS**, *A note on thermal stresses in a long circular cylinder containing a penny-shaped crack*, **I.J.E.S.**, Vol.7, 1969, p.667-676
5. **DAS S., PATRA B., DEBNATH L.**, *Stress Intensity Factors for Two Coplanar Griffith Cracks in an Orthotropic Layer Sandwitched between Two Identical Orthotropic Half Planes*, **I.J.E.S.** 38, 2000, p.121-133
6. **DAUTRAY R., LIONS J.-L.**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol.4: *Integral Equations and Numerical Methods*, Springer Verlag, Berlin, 1990
7. **DAUX C., MOES N., SUKUMAR N., BELYTSCHKO T.**, *Arbitrary branched and intersecting crack with the extended finite element method*, **I.J.N.M.E.**, 48, 2000, p.1741-1760
8. **DEMIR ISMAIL, H.M.ZBIB, M. KHALEEL**, *Microscopic Analysis of Crack Propagation in the Case of Multiple Cracks, Inclusions and Voids*, School of Mechanical and Materials Engineering, Washington State University, CMM Report 2001-10
9. **DENG X.**, *Plane strain near-tip fields for elastic plastic interface cracks*, **I.J.S.S.** Vol.32, Nr.12, 1995, p.1727-1741

10. **DENG X.**, *Plane Stress Crack Tip Field Around a Rapidly Growing Ductile/Rigid Interface Crack*, **I.J.F.** 90, 1998, p. 325-340
11. **DIETER E.G.**, *Metalurgie mecanică*, (traducere din limba engleză), Editura Tehnică, Bucureşti, 1970
12. **DIMILLO M., OSTOJA-STARZEWSKI M.**, *Paper Strength: Statistics and correlation structure*, **I.J.F.**, 90, 1998, L33-L38
13. **DIMO P.**, *Programarea în Fortran*, Ed did. Şi ped. Buc., 1971
14. **DINCĂ G.**, *Metode variaţionale şi aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980
15. **DINCĂ G.**, *Operatori monotoni în teoria plasticităţii*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1972
16. **DÎŞELI M.Ş.**, *Ob ustoicivosti tonkoi rastianutoi plastinî s treşcinoi*, **P.M.**, Tom XIV, Nr.11, 1978
17. **DÎŞELI M.Ş.**, *Razruşenie plastin s trescinami pri rastiajenii posle poteri ustoicivosti*,. **P.M.**, Tom XVII, Nr.4, 1981
18. **DLUGACI M.I.**, ş.a., *Teoreticeskoie i experimentalnoe issledovanie napriajenno-deformirovannovo sostoianiia rebristîh obolocek s bolişimi priamougolinîmi otverstiiani*, Institut mehaniki, AN USSR, Kiev, 1976
19. **DOBRE I.**, *Curs de rezistenţa materialelor*, Litografia I.P. Timişoara, Vol.I (1978) : *Solicitări fundamentale. Probleme clasice*, Vol.II (1980) : *Bazele mecanicii solidului deformabil*, Vol.III (1981) : *Chestiuni speciale*
20. **DOBRE I.**, *Untersuchungen über die Dauerhaltbarkeit von dünnwandigen geschweissten Rohren aus Weichstahl*, Lucrările Sesiunii ştiinţifice jubiliare ale Şcolii superioare tehnice din Brno – R.S.C., iunie 1975
21. **DOBRE I.**, *Caracteristici statistice ale răspunsurilor sistemelor oscilante la excitaţii aleatoare*, Conferinţa internaţională "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975, Vol.II, p.147-156
22. **DOBRE I.**, *New elements concerning the response of oscillatory systems subjected to random excitations in the correlation theory*, Bul. Şt. şi Tehnic al I.P.T., Timişoara, Seria Matematică-Mecanică, Tom 22(36), fasc.1, 1977, p.63-65
23. **DOBRE I.**, *Les calcul des contraintes et des deplacements au pic d'une fissure dans un milieu anisotrope*, Lucrările Simpozionului jubiliar: "70 de ani de la înfiinţarea Laboratorului de Rezistenţa materialelor", oct.1993, p.99-106
24. **DOBRE I., CHELU P.**, *Digital analysis of stress and strain state in a steel strip forced to traction and having two cracks*, 10[th] Congress on Material Testing, Budapesta, 1991, p.325-334
25. **DOBRE I., DOBRE S.**, *Wahrscheinlichkeitsanalyse betreffend die Überschreitungen der Bezugsniveaus bei aleatorischen Beanspruchungen*, Lucrările Sesiunii ştiinţifice jubiliare ale Şcolii superioare tehnice din Brno – R.S.C., iunie 1975
26. **DOBRE I., MOŢICA A.**, *Rezistenţa materialelor. Elasticitate. Plasticitate.* Vol. I: *Solicitări fundamentale*, Editura de Vest, Timişoara, 1997
27. **DOBRE I., MOŢICA A.**, *Rezultate noi privind vibraţiile aleatoare ale unui sistem elastic liniar*, Proceedings of the Scientific Communications Meeting of "Aurel Vlaicu" University, Third Edition, Arad, Mai 1996, Vol.5, partea exp., p.163-169
28. **DOBRE I., MOTIŞAN M., TRIPA P.**, *Analiza stării de tensiune dintr-o platbandă cu fisuri*, Lucrările sesiunii jubiliare de comunicări ştiinţifice, Inst. Politehnic Iaşi, 1988, Vol.IX, p.41-45
29. **DOBRE I., MOTIŞAN M., TRIPA P.**, *Researches on stress variation in a steel strip strained to traction and having two parallel cracks*, A VI-a Conferinţă de "Vibraţii mecanice", Timişoara, 1988, p.239-244
30. **DOBRE I., MUNTEANC.**, *Fisură la interfaţa dintre două materiale diferite. Soluţia în tensiuni*, Bul. Asociaţiei Române de Mecanica Ruperii (în curs de publicare)
31. **DOBRE I., MUNTEAN C., NEGRU R.**, *Semispaţiul din două materiale diferite, liniar vâscoelastice, cu fisură marginală în zona joncţiunii*, A XXVII-a Conf. naţ. de Mecanica Solidelor, 2003, Bul. Şt. al Univ. din Piteşti (în curs de publicare)
32. **DOBRE I., POPESCU D.**, *The Study of the Stress Concentration About the Fatigue Behavior of a Unidirectional Laminate Composite*, 5-th International Conference on Boundary and Finite Element, ELFIN 5, Univ. din Oradea, mai 2000, p.171-177
33. **DODESCU GH.**, *Metode numerice în algebră*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979
34. **DOLBY R.E., EGAN G.R., DAWES M.G., SAUNDERS G.G., ARCHER G.L.**, *Brittle Fracture Initiation in Welded Low Strength Steels*, In: "Proceedings of the Symposium on Fracture Concepts for Weldable Structural Steel", Risley, April 1969, Editor: **M.O. DOBSON**
35. **DRĂGANU M.**, *Introducere matematică în fizica teoretică modernă*, Vol.I,II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958
36. **DRAGOŞ L.**, *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976
37. **DRAGOŞ L.**, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983
38. **DUDNIKOV A.V.**, *Oţenka velicinî razruşuiuşcei nagruzki v neomentnoi zadace Griffith*, **I.U.P.** Nr.15/1986,p.29-32
39. **DUFFY S.F., BAKER E.H.**, *Weibull Parameter Estimation. Theory and Background – Information*, Connecticut Reserve Technologies, LLC, Cleaveland Ohio 44114
40. **DUGDALE S.D.**, *Determinarea teoretică a deplasării la deschiderea vârfului fisurii*, Buletinul ARMR Nr.6, 1998, p.4-10
41. **DUMITRU I., MARŞAVINA L.**, *Introducere în mecanica ruperii*, Editura Mirton, Timişoara, 2001

E

1. **EHRLICH ROBERT**, *Monte Carlo Evaluation of definite integrals*, Project PHYSNET *Physics Bldg* Michigan State Univ.
2. **EKLÖF MATIAS**, *Exercises on Numerical and Monte Carlo integration*, Course in Computer intensive methods in Econometrics, Uppsala University, Falt 2001
3. **EPIFANOV V.P., FAUSTOV M.A.**, *Izmenenie effektivnogo seceniia treşcin pri deformirovanii lida*, **M.T.T.** Nr.6/1982,p.171-186
4. **ERDOGAN F., ARIN K.**, *Penny-shaped interface crack between an elastic layer and a half spac*, **I.J.E.S.** Vol.10, 1972,p.115-125
5. **ERDOGAN F., BIRICIKOGLU V.**, *Two bonded half planes with a crack going through the interface*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.745-766
6. **ERIKSSON K.**, *On the Point-Wise J-Value of Axisymmetric Plane Cracks*, **I.J.F.** 91, L31-L36, 1998
7. **ERIKSSON K.**, *The crack extension force of a curved crack derived from the principle of virtual work*, **I.J.F.** 102, 2000, p. 15-20,
8. **ERIKSSON K., LORENTZON M.**, *A path independent integral for the crack extension force of the circular arc crack*, **E.F.M.** 66, 2000, p.423-439.
9. **ERIKSSON K.**, *A domain independent integral expression for the crack extension force of a curved crack in three dimensions*, **J.M.P.S.** 50, 2002, p. 381-403.
10. **ERIKSSON K.**, *A general expression for an area integral of a point-wise J for a curved crack front*, **I.J.F.** 106, 2000, p. 65-80.
11. **ERIKSSON K.**, *Energy release rates for the penny-shaped crack in a linear piezoelectric solid*

12. **ERJANOV J.S., KARIMBAEV T.D., BAITELIEV T.B.,** *Dvuhmernie volnî napriajenii v odnorodnîh i strukturno neodnorodnîh sredah*, Izd. "Nauka" Kazanskoi SSR, ALMA-ATA, 1933
13. **ERJANOV J.S., TUSUPOV T.M.,** *K reşeniiu dvoiakoperiodiceskoi teorii uprugosti,* **K.N./v.2**, p. 59-66
14. **ERMAKOV M.S.,** *Metoda Monte Carlo şi probleme înrudite*, (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1976
15. **EROFEEV V.I., IABLONKO V. IA.,** *Vlianie jeskosti ispatatelinoi maşinî na kinetiku maloţiklovoi treşcinî,* **P.P.,** Nr.1, 1977
16. **ERŞON L.V., IVLEV D.D.,** *Ob usloviiah cvazihrupkogo razruşeniia.* **P.M.M.** 3,1967

F

1. **FABRIKANT I.V.,** *Complete solution to the problem of an transversely isotropic body subjected to arbitrary shear loading.* **I.J.S.S.,** Vol. 33, Nr.2, 1996
2. **FABRIKANT I.V.,** *External circular crack under concentrated antisimmetric loading.* **I.J.S.S.,** Vol. 27, Nr.3, 1991, p.343-354
3. **FAUR N.,** *Elemente finite. Fundamente*, Editura Politehnica, Timişoara, 2002
4. **FAUR N., MUNTEAN C., NEGRU R.,** *Verificarea unui program de element de frontieră pe câteva probleme test clasice*, Simp. Internaţ. ELFIN 6, organizat de SIAC, 2003
5. **FEDELICH B.,** *A stochastic theory for the problem of multiple surface crack coalescence*, **I.J.F.** 91,1998, p.23-45
6. **FENG J.,** *Statistical Assessment of Fatique Life for TF Coil Case*, Plasma Science and Fusion Center / RR-98-6, 1998
7. **FETT T.,** *Mode II Weight Function for Circular Disks with Internal Radial Crack and Application to the Brazilian Disk Test*, **I.J.F.** 89, 1998, L9-L13
8. **FETT T., MUNZ D.,** *Comments on "SIF Expressions for Center Cracked Strip Loaded by Uniformly* ", **I.J.F.** 89, 1998,L15-L18
9. **FETZER J., KURZ S., LEHNER G.,** *Comparison of analytical and numerical integration techniques for the boundary integrals in the BEM-FEM coupling considering TEAM workshop problem no.13,* IEEE T.M. Vol.33, Nr.2, March 1997, p.1227-1230
10. **FICHERA G.,** *Existence Theorems in Elasticity*, Springer Verlag, Berlin, 1972
11. **FICHTHORN A. KRISTEN,** *Theoretical foundations of dynamical Monte Carlo simulations*, J. Chem. Phys. 95 (2) July 1991, p.1090-1096
12. **FIHTENHOLT G.M.,** *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Vol. I,II,III, (trad. Din lb. Rusă), Ed. Teh., Buc., 1965
13. **FILICIAKOVA V.P.,** *Konformnie otobrajeniia oblastei speţialnogo tipa*, Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1972
14. **FILIMON I., SOARE M.V.,** *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în mecanica construcţiilor*, Editura Tehn., Buc.,1983
15. **FILIN A.P.,** *Prikladnaia mehanika tviordovo deformiruemovo tela*, Tom I, II, III, Izd. "Nauka", Moskva, 1975
16. **FILIPESCU D., TRANDAFIR R., ZORILESCU D.,** *Probabilităţi geometrice şi aplicaţii*, Editura Dacia, Cuj-Napoca, 1981
17. **FILIPOV A.P., KOHMANIUK S.S., JANIUTIN E.G.,** *Deformirovanie elementov konstrukţii pod deistviem udarnîh i impulisnîh nagruzok*, Kiev, "Naukova Dumka", 1978
18. **FILONENKO-BORODICI M.M.,** *Teoria elasticităţii*, (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Buc., 1952
19. **FINLAYSON F.E.,** *Stress Intensity Factor Distributions in Bimaterial Systems – A Three-Dimensional Photoelastic Investigation*, Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute
20. **FLETCHER J.A.C.,** *Computational Galerkin Methods*, Springer Verlag, 1984
21. **FORRAY M.J.,** *Calculul variaţional în ştiinţă şi tehnică*, (trad. Din limba engleză), Editura Tehnică, Buc.,1975
22. **FREIJ-AYOUB R., DYSKINA.V., GALYBIN N.,** *The dislocation approximation for calculating crack interaction,* **I.J.F.** 86, L57-L62, 1997
23. **FRENCIKO S.I., TKACI L.M.,** *Antiplaskaia deformaţiia tela s tonkim dugoobraznim vkliuzeniem.* **F.M.P.D.S.** 1978, p.81-84
24. **FRIEDMAN A.,** *Variaţionnie prinţipi i zadaci so svobodnîmi graniţami*, (Perevod s angliskovo), Moskva "Nauka", 1990
25. **FRYBA L.,** ş.a., *Stochastic finite elements for beam on a random foundation with uncertain damping under a moving force*, **J.S.V.,** 1993, 163 (1), p.31-45
26. **FUH-KUO CHEN, YI-CHE LEE,** *Plastic Deformation and Finite Element Analysis of Perforated Sheet with Circular Holes*, ECCOMAS, Barcelona, Sept. 2000
27. **FU W.S., KEER L.M.,** *Coplanar circular cracks under shear loading.* **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.361-372

G

1. **GAFIŢEANU M., POTERAŞU F.V., MIHALACHE N.,** *Elemente finite şi de frontieră cu aplicaţii la calculul organelor de maşini,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1987
2. **GALIN L.A.**(redactor), *Razvitie teorii kontaktnîh zadaci v S.S.S.R.*, Izd "Nauka", Moskva, 1976
3. **GALLAGHER H.R.,** *Finite Element Analysis. Fundamentals*, Prentice-Hall, 1975
4. **GAO C.Y., BUI D.H.,** *Damage field near a stationary crack tip.* **I.J.S.S.,** Vol.32, Nr.14, 1995, p1979-1995
5. **GAO X., RUGGIERI C., DODDS H.R.,** *Calibration of Weibull stress parameters using fracture toughness data,* **I.J.F.** 92, 1998, p175-200
6. **GÂRBEA DAN,** *Analiză cu elemente finite,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1990
7. **GAŞPAR D., SUCIU N.,** *Analiză matematică. Introducere în analiza complexă*, Editura Univ. din Timişoara,1989
8. **GATES R.S.,** *Some Aspects of Elastic-Plastic Probabilistic Fracture Mechanics*, **ASME,** PVP Vol. 92, 1984, p.177-197
9. **GATEWOOD B.E.,** *Thermal Stresses With Applications to Airplanes, Missiles, Turbines and Nuclear Reactors*, New York,1957
10. **GELFAND I.M., VILENKIN N.I.,** *Funcţii generalizate. Aplicaţii ale analizei armonice* (traducere din limba rusă), Editura Ştiinţifică şi Enciclopedica., Bucureşti, 1985
11. **GERŢRIKEN S.D.,** ş.a., *Fiziceskie osnovî procinosti i plasticinosti metallov*, Metalurghizdat, Moskva, 1963
12. **GERU N.,** *Teoria structurală a proprietăţilor metalelor,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
13. **GHELFOND A.O.,** *Calculul cu diferenţe finite* (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1956
14. **GHIHMAN I.J., SKUROHOD A.V.,** *Teoria sluciainîh proţessov*, Tom I, II, III, Izd. "Nauka", Moskva, 1975
15. **GHIKA A.,** *Analiza funcţională*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1967
16. **GHITA E., MARŞAVINA L.,** *Fotoelasticimetria. Metodă modernă în analiza experimentală a tensiunilor*, Editura "Eurostampa", Timişoara, 2002
17. **GLADWELL L.M.G.,** *On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape*, **I.J.S.S.** 32,1995,p 383-389

18. GIOVANOLA H.J., KIRKPATRICK W. ST., *Using the Local Approach to Evaluate Scaling Effects in Ductile Fracture*, I.J.F.92, 1998, p. 101-110
19. GODUNOV S.K., *Elementi mehaniki sploşnoi sredî*, Izd. "Nauka", Moskva, 1978
20. GOLDENBLAT I.I., *Nekotorie voprosî mehaniki deformiruemih sred*, Gostehizdat, 1955
21. GOLDENBLAT I.I., *Nelineinie problemî teorii uprugosti*, Moskva "Nauka", 1969
22. GOLDSTEIN R.V., KAPŢOV A.V., *Formirovanie struktur razruşeniia slabo vzaimodeistvuiuşcih treşcin*, M.T.T. Nr.4/1982, p.173-182
23. GOLOGAN R.N., *Aplicaţii ale teoriei ergodice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989
24. GOLOVCIAN V.T., NIKITIUK N.I., *K reşeniiu zadaci o sdvighe voloknistoi kompoziţionnoi sredî*, P.M., Tom XVII, Nr.2,1981
25. GÓMEZ J.B., ş.a., *Bounds for the time to failure of hierarchical systems of fracture*, Physical Review E, Third Series, Vol.59, Nr.2, Part A, Feb.1999, R1287-R1290
26. GORDUNOV S.K., *Elementî mehaniki sploşnoi sredî*, Izd. "Nauka", Moskva, 1978
27. GORDUNOV S.K., REABENKI V.S., *Scheme de calcul cu diferenţe finite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977
28. GOSPODINOV G., *A boundary element linear solution applied to reinforced concrete, Journal of theoretical and applied mechanics*, Sofia 2000, Vol.30, No. 3, p.66-73
29. GRAHAM G.A.C., SABIN G.C.W., *The correspondence principle of linear viscoelasticity for problems that involve time-dependent regions*, I.J.E.S. Vol.11, 1973, p.123-140
30. GRANINO A. KORN, *Simularea şi măsurarea proceselor aleatoare*, (trad. Din lb. Engl.), Ed. Tehn., Buc., 1969
31. GRAY L.J., ş.A., *Improved quarter-point crack tip element*, Engineering Fracture Mechanics, 70, 2003, p.269-283
32. GREEN A.E., ZERNA W., *Theoretical Elasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1954
33. GREENGARD L., HELSING J., *On the numerical evaluation of elastostatic fields in locally isotropic two-dimensional composites*, J. Mech. Phys. Solids 46 (8), 1998, p.1441-1462
34. GRINDEI I., *Termoelasticitate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967
35. GRUBIN N.A., *Nelineinie zadaci konţentraţii napriajenii v detaliah maşin*, Izd. "Maşinostroenie", Leningrad, 1972
36. GUIGGIANI M., ş.a., *A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations*, Transactions of the ASME, Vol.59, 1992
37. GUIGGIANI M., GIGANTE A., *A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method*, Transactions of the ASME, Vol.57, 1990
38. GULIK B.I., ERMAKOV B.E., *Deistvie cososimetricinoi nagruzki na polosu so svobodâm i podkreplenîm otverstiem*, P.M., Tom XVI, Nr.2, 1980
39. GULIK B.I., ERMAKOV B.E., *Deistvie momentov nabezkonecinuiu mnogosviaznuiu polosu*, P.M., Tom XVI, Nr.3, 1980
40. GULIK B.I., KOSMODAMIIANSKII A.S., *Cistâi sdvig poluprostranstva s ţilindriceskoi polostiiu*, P.M., Tom XV, Nr.5, 1979, p.27-32
41. GULLERUD ARNE S., ş.a., *Simulation of Ductile Crack Growth Using Computational Cells: Numerical Aspects*, Engineering Fracture Mechanics, Nr. 66, 2000, p.65-92
42. GUTIERREZ A.M., *Formulation of a Path-Following Constraint with Application to Monte-Carlo Simulations of failure in Quasi-Brittle Solids*, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, June2-5, 2002, Columbia University, New York (EM2002)
43. GUZI A.N. (redactor), *Prostranstvennie zadaci teorii uprugosti i plasticinosti*, Vol.V: GOLOVCIAN V.T., KUBENKO V.D., ŞULIGA N.A., GUZI A.N., GRINCENKO V.T., *Dinamika uprughih tel*, Kiev "Naukova Dumka", 1986
44. GUZI A.N. (redactor), *Prostranstvennie zadaci teorii uprugosti i plasticinosti*, Vol.IV: GUZI A.N., BABICI I.Iu., *Triohmernaia teoriia ustoicivosti deformiruenîh tel*, Kiev "Naukova Dumka", 1985
45. GUZI A.N. (redactor), *Prostranstvennie zadaci teorii uprugosti i plasticinosti*, Vol.III: GRINCENKO V.T., ULITKO A.F., *Ravnovesie uprughih tel kanoniceskoi formî*, Kiev "Naukova Dumka", 1985
46. GUZI A.N. (redactor), *Prostranstvennie zadaci teorii uprugosti i plasticinosti*, Vol.II: GUZI A.N., NEMIŞI Iu.N., *Statika uprughih tel nekanoniceskoi formî*, Kiev "Naukova Dumka", 1984
47. GUZI A.N., *Teoriia treşcin v uprughih telah s naciolinîmi napriajeniiami (vîsokoelasticinîe materiali)*, P.M., Tom 17, Nr.2, 1981
48. GUZI A.N., BABICI I.I., *Triohmernaia teoriia ustoicivosti sterjnei plastin i obolocek*, Kiev Golovnîe Izd., 1980
49. GUZI A.N., CERNÎŞENKO I.S., CEHOV V.N., ş.a., *Metodî rasciota obolocek*, Vol. 1: *Teoria tonkih obolocek oslabcennîh otverstiiami*, "Naukova Dumka", Kiev, 1980
50. GUZI A.N., ş.a., *Razruşenie i ustoicivosti tonkih tel s treşcinami*, "Naukova Dumka", Kiev, 1981

H

1. HAGGAG F.M., NANSTAD R.K., *Estimating Fracture Toughness Using Tension or Ball Indentation Tests and a Modified Critical Strain Method*, „The American Society of Mechanical Engineers", PVP Vol. 170, 1989
2. HAHN G.T., ROSENFIELD A.R., ş.a., *Crack arrest concepts and applications*. – X Symposium on Naval Structural Mechanics, 1978, Fracture Mechanics, University Press of Virginia
3. HAI V.M., DAUŞNIK P.I., *O vyaimodeistvii periodiceskoi sistemi diskoobraznih trescin*, F.M.P.D.S. 1978, p.65-73
4. HAIMOVICI ADOLF, *Ecuaţiile fizicii matematice şi elemente de calcul variaţional*, Ed. Didact. Şi Pedagogică, Bucureşti, 1966
5. HAIMOVICI M., *Teoria elasticităţii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Buc., 1969
6. HAJDU I., *Lucrări de laborator de Rezistenţa materialelor*, Ediţia a 2-a, IPT, 1970
7. HALLSTRÕM S., GRENESTEDT J.L., *Mixed Model Fracture of Cracks and Wedge Shaped Notches in Expanded PVC Foam*, I.J.F. 88, 1997
8. HANAUSKA J., KRADINOV V., MADENCI E., *A composite double-lap joint with staggered bolts: an experimental and analytical investigation*, C.S. 54, 2001, p.3-15
9. HARIK M.V., CAIRNCROSS A.R., *Evolution of Interfacial Voids Around a Cylindrical Inclusion*, Trans. ASME, Vol.66, 1999
10. HARRIS D.O., LIM E.Y., *Applications of a Probabilistic Fracture Mechanics Model to the Influence of In-Service Inspection on Structural Reliability*, ASTM, STP 798 p.19-41, 1983

11. HASEGAWA H., YOSHIIE K., *Tension of Elastic Solid with Elastic Circular-Cylindrical Inclusion*, JSME Int. Journal, Series A, Vol.39, Nr.2, 1996
12. HASHIN ZVI, *The inelastic inclusion problem*, I.J.E.S., Vol.7, 1969, p.11-36
13. HASOFER A.M., *A Statistical Theory of the Brittle Fracture of Steel*, I.J.F.M., Vol.4, Nr.4, 1968
14. HATIAŞVILI G.M., *Zadaci Almanzi-Micella dlia odnorodnih i sostavnih tel*, Izd. „Meţnicreba", Tbilisi, 1983
15. HAUCH A.J., MARDER P.M., *Energy Balance in Dynamic Fracture, Investigated by a Potential Drop Technique*, I.J.F. 90, 1998, p.133-151
16. HAZANOV I.I., POLITOV V.A., *Veroiatnostnaia modeli ustalostnoi dolgoveci-nosti v svete predstavlenii lineinoi mehaniki razruşeniia*, P.P., Nr.2, 1977
17. HEITZER M., STAAT M., *Direct FEM limit and shakedown analysis with uncertain data*, ECCOMAS 2000, Barcelona
18. HELMS E.L.K., ALLEN H.D., HURTADO D.L., *A Model for Predicting Grain Boundary Cracking in Pollycristalline Viscoplastic Materials Including Scale Effects*, I.J.F. 95, 1999, p.175-194
19. HELSING J., *An integral equation method for electrostatics of periodic composites*, J.Mech.Phys.Solids 43(6),1995
20. HELSING J., MILTON G.W., MOVCHAN A., *Duality relations, correspondences and numerical results for planar elastic composites*, J. Mech. Phys. Solids 45 (4), 1997, p.565-590
21. HELSING J., PETERS G., *Integral equation methods and numerical solutions of crack and inclusion problems in planar elastostatics*, SIAM J. Appl. Math. 59(3), 1999, p.965-982
22. HELSING J., *On the numerical evaluation of stress intensity factors for an interface crack of a general shape*, I.J.N.M.E. 44(5), 1999, p.729-741
23. HELSING J., *Fast and accurate numerical solution to an elastostatic problem involving ten thousand randomly oriented cracks*. I.J.F. 100(4), 1999, p.321-327.
24. HELSING J., *Stress Intensity Factors for a Crack in Front of an Inclusion*, Engn. Fracture Mech. 64(2), 1999, p.245-253
25. HELSING J., *Corner singularities for elliptic problems: special basis functions versus "brute force"*, Comm. Num. Meth. Engn. 16(1), 2000, p.37-46
26. HELSING J., PETERS G., *An efficient numerical algorithm for cracks partly in frictionless contact*, SIAM J. Appl. Math. 61(2), 2000, p.551-566
27. HELSING J., *On the interior stress problem for elastic bodies*, ASME J.A.M. 67(4), 2000, p.658-662
28. HELSING J., JONSSON A., PETERS G., *Evaluation of stress intensity factors for a square crack in 3D*, Engn. Fracture Mech. 68(5), 2001, p.605-612
29. HELSING J, JONSSON A., *Complex variable boundary integral equations for perforated infinite planes*, Engng. Anal. Boundary Elem. 25(3), 2001, p.191-202
30. HELSING J., JONSSON A., *On the accuracy of benchmark tables and graphical results in the applied mechanics literature* ASME J.A.M. 69(1), 2002, p.88-90
31. HELSING J., JONSSON A., *On the computation of stress fields on polygonal domains with V-notches*, I.J.N.M.E. 53(2), 2002, p.433-454
32. HELSING J., JONSSON A., *Stress Cachulations on Multiply Connected Domains*, J. Comput. Phys. 176(2), 2002, p.456-482
33. HOAGLAND R.G., ROSENFIELD A.R., GEHLEN P.C., HAHN G.T., *A crack arrest measuring procedure for K_{Im}, K_{ID} and K_{Ia} properties*. - In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 177-202
34. HOMENTCOVSCHI D., *Funcţii complexe cu aplicaţii în ştiinţă şi tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986
35. HONG S.Y., YEATHER M.L., *A Sensitivity Study of PWR Primary Coolant Piping Leak Failures Using Probabilistic Fracture Mechanics*, ASME, PVP Vol.92, 1984, p.133-153
36. HOROŞUN P.L., *Konţentraţiia napriajenii v stohasticeski armirovannih telah*, K.N.Jv.2, p. 232-240
37. HU X.K., CHANDRA A., HUANG Y., *Multiple void-crack interaction*, I.J.S.S., Vol.30, Nr.11, 1993
38. HUANG R., PRÉVOST J.H., SUO Z., *Loss of constraint on fracture in thin film structures due to creep*, Acta Materialia 50 (2002), p.4137-4138
39. HUANG Y., LIU C., ROSAKIS J.A., *Transonic crack growth along a bimaterial interface: an investigation of the asymptotic structure of near-tip fields*, I.J.S.S. Vol.33, Nr.18, 1996
40. HUANG Y., ş.a., *The numerical calculation of two-dimensional effective moduli for microcracked solids*, I.J.S.S. 33, Nr.11, 1996
41. HURTADO J.A., *Elastic Plastic Mode III Crack under Internal Shear*, I.J.F. 91, 1998, p.205-216
42. HWU C., *Polygonal holes in anisotropic media*, I.J.S.S. Vol.29, Nr.19, 1992, p.2369-2384
43. HWU C., WEN J. YEN, *Greens's functions of two-dimensional anisotropic plates containing an elliptic hole*, I.J.S.S. Vol.27, Nr.13, 1991
44. HYUNG JIP CHOI, KANG YONG LEE, TAE EUN JIN, *Collinear Cracks in a Layered Half-Plane with a Graded Nonhomogeneous Interfacial Zone. Part I: Mechanical Response. Part II: Thermal Shock Response*, I.J.F. 94, 1998, p.103-122; 123-135

I

1. IACOB C., CRĂCIUNESCU A., CRISTEA C., DRAGOŞ L., GHEORGHIŢA ŞT, TRANDAFIR R., *Matematici clasice şi moderne*, Vol. I (1978), Vol. II (1979), Vol. III / Vol. IV (1984), Ed. Tehn., Bucureşti
2. IEŞAN D., *Teoria termoelasticităţii*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1979
3. IFTIMIE V., *Operatori pseudo-diferenţiali şi integrali Fourier*, Litografia Univ. Bucureşti, Fac. De Mat.-Mecanică, Buc., 1978
4. ILIUŞIN A.A., *Plasticinosti. Osnovi obşcei matematiceskoi teorii*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1963
5. ILIUŞIN A.A., LOMAKIN V.A., ŞMAKOV A.P., *Zadaci i uprajnenie po mehanike sploşnoi sredi*, Izd. Moskovskovo Universiteta, 1973
6. IN LEE, *Finite Element Methods in Structural Dynamics*, Departament of Aerospace Engineering, KAIST, 2002
7. IONOV V.N., OGHIBALOV P.M., *Procinosti prostranstvennih elementov konstructii. Osnovi mehaniki sploşnoi sredi*, Moskva, 1972; 1979

8. IOSIFESCU M., GRIGORESCU S., OPRIŞAN GH., POPESCU GH., *Elemente de modelare stohastică*, Ed.Teh., Buc., 1984
9. IRWIN G.R., *Comments on dynamic fracturing*. - In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 7-18
10. ISACSSON MÅNS, ş.a., *Probabilistic Cell Modeling of Cleavage Fracture*, I.J.F. 92, 1998, p.359-372
11. ISAEV R.G., *O filtraţii v glubokozalegaiuşcik anizotropnîh trescinovatîh plastah s obscim harakterom nelineinoi nasledstvennosti*, P.M. Tom XIII, Nr.11, 1977
12. ISRAIL M.S.A., BANERJEE K.P., *Advanced development of boundary element method for two-dimensional dynamic elasto-plasticity*, I.J.S.S., Vol.29, Nr.11, 1992, p.1433-1451
13. ISTRĂTESCU VASILE, *Introducere în teoria operatorilor liniari*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1975
14. ITOU SHOUETSU, *The effect of couple-stresses on the dynamic stress concentration around a crack*, I.J.E.S. 10, 1972, p.393-400
15. IVAN MARIN, *Teoria elasticităţii*, Lito. Inst. Polit. „Traian Vuia", Timişoara, 1983
16. IVLEV D.D., ERŞOV L.V., *Metod vozmuşcenii v teorii uprugoplasticeskovo tela*, Moskva „Nauka", 1978

J

1. JADUL B., *Étude de la plasticité et application aux métaux*, Dunod, Paris, 1965
2. JARDAK M., SU C.H., KARNIADAKIS G.E., *Spectral Polynomial Chaos Solutions of the Stochastic Advection Equation*, Division of Applied Mathematics, Brown University, October 29, 2001
3. JASIUK IWONA, *Cavities vis-a-vis rigid inclusions: elastic moduli of materials with poligonal inclusions*, I.J.S.S. Vol.32, 1995, p.407-422
4. JEKOV N.D., *Ravnovesie priamougolnovo tela s naklonoi treşcinoi sdviga*, Moskovski Aviaţionnii Institut, 1977
5. JEON SANG-PYO, TANIGAWA Y., *Axisymmetrical Elastic Behavior and stress intensity factor for a nonhomogeneous medium with a penny-shaped crack*, JSME Int. Journal, series A, Vol.41, No.4, 1998
6. JHA M., CHARALAMBIDES G.P., *A finite element analzsis of fracture initiation in ductile/brittle periodically layered composites*, I.J.F. 90, 1998, p.299-323
7. JIA L., *A Dugdale-Barenblatt model for a plane stress semi-infinite crack under mixed mode concentrated forces*, I.J.F. 88, 1997, p. 153-166
8. JIAN N., MAO S., *Analysis of Asymmetric Kinked Cracks of Arbitrary Size, Location and Orientation, Part I: Remote Compression, Part II: Remote tension*, I.J.F. 89, 1998, p.19-57; 59-84
9. JIANG Q.Z., CHANDRA A., HUANG Y., *A hybrid micro-macro BEM with micro-scale inclusion-crack interactions*, I.J.S.S. Vol.33, Nr.16, 1996
10. JILKIN V.A., POPOV A.M., *Opredelenie trioh komponent tenzora deformaţii po dannîm toliko odnogo deformirovannogo rastra*, P.P., Nr.5, 1977
11. JITNIAIA G.V., KOSMODAMIANSKII C.A., *Deistvie sosredotocennoi silî prilojennoi k konturu krugovo otverstiia, oslabliaiuşcego poluploskosti*, K.N.Jv.2, p. 67-73
12. JOHNSON W., MELLOR P.B., *Teoriia plasticinosti dlia injenerov*, (trad. Din lb. Engl.), Moskva „Masinostroenie", 1979
13. JOHNSTON G.O., *Statistical Scatter in Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Rate Data*, ASTM STP798, 1983, p.42-66
14. JONES I.S., *A Wide Range Weight Function for a Single Edge Cracked Geometry with Clamped Ends*, I.J.F. 89, 1998, p.1-18
15. JOO HO CHOI, BYUNG MAN KWAK, *Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures*, I.J.N.M.E., Vol.26, 1988, p.1579-1595
16. JOURIS G.M., *Probabilistic Evaluation of Conservatisms Used in Section III, Appendix G of the ASME Code*, ASTM, STP 798, 1983, p.7-18
17. JU W.J., SUN Z.L., *A Novel Formulation for the Exterior-Point ESHELBY's Tensor of an Ellipsoidal Inclusion*, Transactions of the ASME, Vol.66, 1999
18. JUBAEV N.J., *Odnomernîe uprugoplasticeskie volnî pri slojnom nagrujenii*, Izd. "Nauka" Kazanskoi SSR, Alma-Ata, 1979

K

1. KABULOV K.V., *Integralinie uravneniia tipa balansa*, Izd. Akad. NAUK Uzbekskoi SSR Taşkent, 1961
2. KACHANOV M., *Solids with cracks and non-spherical pores: proper parameters of defect density and effective elastic properties*, I.J.F. 97, 1999, p.1-32
3. KACHANOV M., TSUKROV I., SHAFIRO B., *Effective moduli of solids with cavities of various shapes*, A.M.R. vol. 47, no.1, part. 2, January 1994
4. KACHANOV M., *Elastic solid with many cracks and related problems*, Advan. in Appl.Mech.,Vol.30, Acad.Press,1993, p.259-445
5. KACHANOV M., SEVOSTIANOV I., *Explicit cross-property correlations for anisotropic two-phase composite materials*, J.M.P.S., vol.50, 2002, p. 253-282
6. KACIANOV L.M., *K kinetike rosta treşcin*, P.M.M., Tom 25, Nr.8, 1961
7. KACIANOV L.M., *Osnovî mehaniki razruşeniia*, Izd. "MIR", Moskva, 1974
8. KACPRZYNSKI G.J., MAYNARD K., *Enhancement of Physics-of-Failure Prognostic Models with System Level Features*, papers/ieee2002/PhysicsofFailure_ver1.doc
9. KADAŞEVICI I.Iu., MIHAILOV N.A., *Uciot microrazruşenie v teorii plasticinosti i palzucesti*, I.U.P. Nr.15, 1986, p.46-52
10. KATCHANOV L., *Éléments de la théorie de la plasticité*, Ed. MIR, Moscou, 1975
11. KASSEM MOHAMMED A., *Zur Bruchzähigkeit und deren Bestimmung*, 1974, 16, Nr.7, p.197-202
12. KALANDIYA A.I., *Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity*, Moscow, Mir Publishers, 1975
13. KALANDIYA A.I., *Zamecianiia ob osobennosti uprughih vblizi uglov*, P.M.M., 1969, Vipusk 1, 1969, p.132-135
14. KALTHOFF J.F., BEINERT J., WINKLER S., *Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running and arresting cracks in double-cantilever-beam specimens*. In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 161-176
15. KAMEI A., YOKOBORI T., *Some Results on Stress Intensity Factors of the Cracks and/or Slip Bonds System*, Reports of the Research Institute for Strength and Fracture Materials, Tohoku University, Sendai, Japan, 1974, Vol.10, p.29-93

16. **KAMENTEVA P.Z.**, ş.a., *Iavlenie fragmentaţii v probleme plasticinosti: rezruşeniia metallov*, **I.U.P.** Nr.15/ 1986, p.52-64
17. **KAMINSKI M.**, *Symbolic computations for random fields using second order perturbation method*, Numerical Methods in Continuum Mechanics 2000, Liptovsky Ján, Slovak Republic
18. **KAMINSKII A.A., GORELIK A.V.**, *Issledovanie kinetiki razvitia treşcinî v viazko-uprugom voloknistom kompoziţionnom materiale*, **P.M.** Tom XVII, Nr.11, p.75-81
19. **KAMINSKII A.A.**, *Ob odnom priblijennom metode reşeniia uravneniia treşcinî v viazko-uprugoi srede*, **P.M.**, Tom 13, Nr.8, 1977
20. **KAMIYA N., KITA E.**, *Structural Optimization by an Adaptive Boundary Element Method*, Proceedings of the First Join Japan/ U.S. Symposium on Boundary Element Methods, University Tokyo, Japan, 3-6 Oct. 1988
21. **KANAUN S.K.**, *O modeli tocieciniîh defectov v mehanike uprugoi neodnorodnoi sredi*, **M.T.T.** Nr.4/1982, p.109-118
22. **KANNINEN M.F.**, *A solution for a dugdale crack subjected to a linearly varying tensile loading*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.85-95
23. **KANTOROVICI L.V., AKILOV G.P.**, *Analiză funcţională*, (traducere din limba rusă), Ed. Şt. Şi Enciclopedică, Buc., 1986
24. **KARABALIS D.**, *Formulation of 3D dynamic SSI analysis involving contact nonlinearities by time domain BEM-FEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Nr.11, 1993, p.277-284
25. **KARAPETIAN E., KACHANOV M.**, *On Calculation of SIFs for Circular and Moderately Non-Circular Cracks*, **I.J.F.** 92,1998, L21-L26
26. **KARAPETIAN E., KACHANOV M.**, *Three-dimensional interactions of a circular crack with dipoles, centers of dilatation and moments*, **I.J.S.S.** Vol. 33, Nr.27, 1996, p.3951-3967
27. **KARAPETIAN N.E., HANSON T.M.**, *Crack opening displacements and stress intensity factors caused by a concentrated load outside a circular crack*, **I.J.S.S.** Vol.31, Nr.15, 1994, p.2035-2052
28. **KARIHALOO L.B.**, *Size Effect in Shallow and Deep Notched Quasi-Brittle Structures*, **I.J.F.** 95, 1999, p.379-390
29. **KARIHALOO L.B., HUANG X.**, *Asymptotics of three-dimensional macrocrack-microcrack interaction*, **I.J.S.S.**, Vol.32, Nr.11, 1995, p.1495-1500
30. **KARPOV N.I.**, *Ob odnom podhode k reşeniia kraevih zadaci matematiceskoi fiziki i ego primenenii v teorii plastin i sterjnei*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.7, 1981
31. **KASSIR M.K.**, *On the distribution of thermal stresses around an elliptical crack in an infinite solid*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.769-784
32. **KAY N., BARUT A., MADENCI E.**, *Singular stresses in a finite region of two dissimilar viscoelastic materials with traction-free edges*, **C.M.A.M.E.** 191, 2002, p.1221-1244
33. **KAYMAZ I., McMAHON C.A.**, *An approach to reliability analysis using the response surface method and Monte Carlo Simulation*, Proceedings of DETC '99, Sept.12-15, 1999, Las Vegas, Nevada
34. **KEAT W.**, ş.a., *Inverse method of identification for three-dimensional subsurface cracks in a half-space*, **I.J.F.** 92, 1998, p.253-270
35. **KECS W.**, *Complemente de matematici cu aplicaţii în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981
36. **KECS W.**, *Elasticitate şi vâscoelasticitate*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986
37. **KECS W.**, *Produsul de convoluţie şi aplicaţii*, Editura Academiei R.S.R., Buc., 1978
38. **KEER L.M., FREEDMAN J.M.**, *Tensile strip with edge cracks*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.1265-1275
39. **KHALED ABDEL-TAWAB, GREGORY J. RODIN**, *Fracture Size Effects and Polycrystalline Inhomogeneity*, **I.J.F.** 93, 1998, p.247-259
40. **KIKUCHI M.**, ş.a., *Fracture Analysis of Metal-Matrix Composite Materials*, Annual Report of ADVENTURE Project ADV-99-1, 1999, Science University of Tokyo
41. **KILCEVSKI N.A.**, *Elemente de calcul tensorial şi aplicaţiile lui în mecanică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956
42. **KIM A.S., BESSON J., PINEAU A.**, *Global and local approaches to fracture normal to interfaces*, **I.J.S.S.** 36, 1999, p.1845-1864
43. **KISELEV V.A.**, *Ploskaia zadacia teorii uprugosti*, Moskva, "Vîşaia şkola", 1976
44. **KIT G.S.**, *Obşcii metod reşeniia prostranstvennîh zadaci teploprovodnosti i termouprugosti dlia tela s diskoobraznimi trescinami*, **P.M.**, Tom XIII, Nr.12, 1977
45. **KIT G.S., HAI V.M.**, *Prodolinii sdvig sloia s sistemoi priamolineinik treşcin*, **F.M.P.D.S.**, 1978, p.77-81
46. **KPBAYASHI T., DALLY J.W.**, *Relation between crack velocity and stress intensity factor in birefringent polymers*. - In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 257-273
47. **KOCIN N.E.**, *Calculul vectorial şi introducere în calculul tensorial*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1954
48. **KOGAN L., HUI Y.C., MOLKOV V.**, *Stress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material*, **I.J.S.S.** Vol.33, Nr.19, 1996, p.2719-2737
49. **KOITER V.T.**, *Obşcie teoremî teorii uprugo-plasticeskih sred*, Moskva "I.L.", 1961
50. **KONISHI Y.**, *On two coplanar cracks in an infinite transversely isotropic medium*, **I.J.E.S.**, Vol.10, 1972, p.917-923
51. **KONISHI Y., ATSUMI A.**, *Crack problem of transversely isotropic strip*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.9-20
52. **KOSMODAMIANSKII A.S.**, *Izghib anizotropnih plit s krivolineinîmi otverstiiami*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.2, 1981
53. **KOSMODAMIANSKII A.S.**, Cernic V.I., *Napriajennoe sostoianie plastinki, oslabennoi dvumia elipticeskimi otverstiiami s parallelinîmi osiami*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.6, 1981
54. **KOSTROV B.V.**, *Automodelinie zadaci o rasprostranenii treşcin kasatelinovo razrîva*, **P.M.M.**, Tom XXVIII,1964
55. **KOSTROV B.V.**, *Neustanovivşeesia rasprostraneniie treşcinî prodolnogo sdviga*, **P.M.M.**, Tom XXX, 1966, p.1042-1049
56. **KOSTROV B.V.**, *Osesimetricinaia zadaciu o rasprostranenii treşcinî normalnovo razrîva*, **P.M.M.**, Tom 28, 1964
57. **KRISHNAMURTY A.V., NAGAMANI A.**, *Studies on Elastic Coupling Parameters of Fracture Modes in Orthotropic Materials*, **I.J.F.** 94, 1998
58. **KRIVŢUN M.**, *Termouprugue sostoianie ploskosti s treşcinoi vdoli gladkovo kontura*, **P.M.**, Tom XIV, Nr.11,1978
59. **KRUTKOV Iu.A.**, *Tenzor funktii napriajenii i obşcie reşeniia v statike teorii uprugosti*, Izd. Akad., Nauk SSSR, Moskva, 1949
60. **KULIEV G.G.**, *K teorii ustoicivosti tel s treşcinoi v sluciae ploskoi deformatii*, **P.M.**, Tom XIII, Nr.12, 1977
61. **KULIEV G.G.**, *Vlianie vida vneşnih nagruzok na lokalinuiu poteriu ustoicivosti sostoianiia ravnovesiia polupostranstva vozle ţentralinoi verticalinoi treşcini*, Ukrainskoi Akademia, Kiev, 1978

62. KUMASAKA H., HIRASHIMA K., *Stress Distributions around Circular Innclusion in Infinite Plane for Nonlocal Elasticity. (Matrix and Circular Inclusion have the sSame Nonlocal Coefficients)*, **JSME** Int. Journal, Series A, Vol.39, Nr.2, 1996
63. **KÜNTZ M., LAVALLEE P., MARESCHAL J.C.**, *Steady-state flow experiments to visualize the stress field and potential crack traiectories in 2D elastic brittle cracked media in uniaxial compression*, **I.J.F.** 92,1998,p.349-357
64. **KUSHCH I.V.**, *Elastic equilibrium of a medium containing a finite number of aligned spheroidal inclusions*, **I.J.S.S.** 33, Nr.8,1996

L

1. **LAKES, R.S.**, *Design Considerations for Negative Poisson's Ratio Materials*, **ASME** Journal of Mechanical Design 115, p. 696-700, 1993
2. **LANDAU L., LIFCHITZ E.**, *Théorie de l'élasticité*, Edition MIR, Moscov, 1967
3. **LAUŞNIC I.P., HAI M.V.**, *Triohmernaia zodacia termouprugosti dlia tela s periodiceskoi sistemoi disceobraznik treşcin*, **P.M.**, Tom XVI, Nr.4, 1980
4. **LAVRENTIEV A.M., LIUSTERNIK A.I.**, *Curs de calcul variaţional*, (trad. din lb. rusă), Ed. Tehn., Bucureşti, 1955
5. **LAVŞNIK P.I.**, *Vzaimodeistvie proizvolino raspolojennih diskoobraznih treşcin nagrujennih kasatelinîmi usiliiami*, **FMPDS**, 1978, p.58-65
6. **LAZĂR I.**, *Metoda elementelor de frontieră în inginerie*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997
7. **LAZZARIN P., TOVO R., FILIPPI S.**, *Elastic Stress Distributions in Finite Size Plates with Edge Notches*, **I.J.F.** 91, 1998, p.269-282
8. **LEBEDEV D.V.**, ş.a., *Oţenka viazkosti razruşeniia konstrukţionnîh stalei metodom kriticeskogo rascrîtiia treşcinî*, **P.P.**Nr.11/1977
9. **LEE DOO-SUNG**, *Stress analysis of a stretched slab having a spherical cavity under unidirectional tension*, **I.J.S.S.** Vol.30, Nr.19, 1993
10. **LEE JIN, HUAJIAN GAO**, *A generalized Comninou contact model for interface cracks in anisotropic elastic solids*, **I.J.F.** 67, 1994, p.53-68
11. **LEE JONGHEE**, ş.a., *Dynamic Ductile Fracture of Aluminium SEN Specimens, an Experimental – Numerical Analysis*, **I.J.F.** 93, 1998, p.39-50
12. **LEGUILLON D.**, *A Criterion for Crack Nucleation in Homogeneons Materials*, C.R.Acad.Sei.Paris, T.329, sér.IIb, p.97-102,2001
13. **LEHNITKII S.G.**, *Teoriia uprugosti anizotropnovo tela*, Moskva,1950
14. **LEI Y, O'DOWD N.P.**, *Weibull stress solutions for 2D cracks in elastic and elastic-plastic materials*, **I.J.F.** 89, 1998, p.245-268
15. **LEMIDOVA I.I.**, *O primenenie metod fotouprugosti k issledovaniiu ostatocinîk napriajenii v sostavnîk telah*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p.26-29
16. **LEÓN S., PARIS F.**, *Analysis of thin plates on elastic foundations with boundary element methods*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, Vol.6, Nr.4, p.192-196
17. **LESAINT P., RAVIART A.P.**, *Finite Element Collocation Methods for First Order Systems*, Mathematics of Computation Vol.33, Nr.147, July1979, p.891-918
18. **LEUNG A.Y.T., R.K.L. SU**, *Eigenfunction expansion for penny-shaped and circumferential cracks*, **I.J.F.** 89, 1998, p. 205-222
19. **LEUNG L.K., ZAVAREH B.P., BESKOS E.D.**, *2-D elastostatic analysis by a symmetric BEM/FEM scheme*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Nr.15, 1995, p.67-78
20. **L'HERMITE R.L.**, *Résistence des matériaux théorique et experimentale*, Vol.I, Dunod, Paris, 1954
21. **LI J.**, *Elastic-plastic study of a mixed mode semi-infinite crack by using the DUGDALE model*, **I.J.F.** 90, 1998, L27-L31
22. **LI XIAN-FANG, FAN TIAN-YOU**, *A new photoelastic approuch to determine stress intensity factors*, **I.J.F.** 91, 1998, L3-L8
23. **LI XIAN-FANG, FAN TIAN-YOU**, *Stress Intensity Factors for a Planar Crack by the Self-Similar Crack Extension Method*, **I.J.F.** 90, 1998, L69-L74
24. **LI X., KEER M.L.**, *A direct method for solving crack growth problems*, I – **I.J.S.S.** Vol. 29, Nr.22, 1992, p.2735-2747, II- *Shear mode problems* : **I.J.S.S.** Vol. 29, Nr.22, 1992, p.2749-2760
25. **LI X., KEER M.L.**, *The growth of pressurized planar cracks between barriers*. **I.J.S.S.** Vol. 29, Nr.1, 1992
26. **LIAH Y.U.**, *O hrupkom razruşenii gazonasîşcernogo gornovo massivo*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.4, 1981
27. **LIEBOWITZ H., JONES D.L.**, *Nekatorîe nelinienîh effektov mehaniki razruşeniia*
28. **LIEBOWITZ** (redactor), *Fracture, an Advanced Treatise*, 1972, Academic Press, New-York, Vol.7: *Fracture of nonmetals and composites*, Cap.6. **H.T. KORTEW**: *Mehanika razruşeniia kompozitov*, p.367-471
29. **LIEBETRAU A.M., SIMONEN F.A.**, *The Effect of Input Distributions on the Probabilistic Fracture Mechanics Analysis of Reactor Pressure Vessels*, **ASME**, PVP Vol. 92, 1984, p.35-55
30. **LI-GUO ZHAO, YI-HENG CHEN**, *T-stress of an Interface Macrocrack Induced by Near Tip Subinterface Microcracks*, **I.J.F.** 90,1998, p.275-285
31. **LIN G., MENG G.X.**, ş.a., *The effect of strength mis-match on mechanical performance og weld joints*, **I.J.F.** 96, 1999, p.37-54
32. **LIN GUOYU, YUN-JAE KIM**, ş.a., *Numerical Analysis of Ductile Failure of Undermatched Interleaf in Tension*, International Journal of Fatigue 91, 1998, p.323-347
33. **LINKOV A.M.**, *O konţentraţii napriajenii v plaste*, Issledovaniia po uprugosti i plasticinosti, Sbornic 9, 1971, p.133-135
34. **LINKOV A.M., KOSHELEV V.F.**, *Tip, Corner and Wedge Elements: A Regular Way to Increase Accuracy of the BEM*, IABEM 2002, International Association for Boundary Element Methods, Austin, USA, May 2002
35. **LINNIK Iu. V., OSTRAOVSKII I. V.**, *Razlojeniia sluciainîh velicin i vector*, Izd. "Nauka", Moskva, 1972
36. **LIU C.**, (ş.a.), *A study of the fracture behavior of unidirectional fiber-reinforced composites using Coherent Gradient Sensing (CGS) interferometry*, **I.J.F.** 90, 1998, p.355-382
37. **LIU C., KNAUSS G.W., ROSAKIS J.A.**, *Loading Rates and the Dynamic Initiation Toughness in Brittle Solids*, **I.J.F.** 90, 1998, p.103-118
38. **LIU D., FLECK A.N.**, *Scale Effects in the Initiation of Cracking of a Scarf Joint*, **I.J.F.** 95, 1999, p. 67-88
39. **LIU T.C., SMITH W.C., WANG L.**, *Three-dimensional effects on stress intensity factors distributions and crack growth in motor grain models*, **I.J.S.S.** Vol.33, Nr.3, 1996

40. LOBODA V.V., SHEVELEVA E.A., *On the quasi-invariant phenomena in the axisymmetrical interface crack problem and its application to fixed and cylinder investigation*, I.J.S.S. Vol.32, Nr.1, 1999, p.117-125
41. LOCKETT F.J., STAFFORD R.O., *On special constitutive relations in nonlinear viscoelasticity*, I.J.E.S. Vol.7, 1969, p.917-930
42. LOMAKIN A.V., *O teorii deformirovanisa mikroneodnorodnihtel i ee cviazi s momentonoi teoriei uprugosti*, P.M.M. Tom XXX, Nr.5, 1966, p.875-881
43. LORET B., BONNET M., *Méthodes d'équations intégrales régulières et singulières pour les structures géotechniques soumises à des sollicitations dynamiques*, Congrès : "Tendances actuelles en calcul des structures", Bastia, 1985 (Pluralis)
44. LOUAT N., *Circular cracks in tension and torsion*, I.J.E.S., Vol 10, 1972, p.665-676
45. LOUNIS Z., MARTIN-PEREZ B., HUNAIDI A.O., *Decision support tools for life prediction and rehabilitation of concrete bridge decks*, APWA International Publik Works Congress, Philadelphia, Sep. 2001, www.nrc.ca/irc/uir/apwa
46. LOWENGRUB M., *Stress distribution due to a Griffith crack at the interface of an elastic half plane and a rigid foundation*, I.J.E.S., Vol.11, 1973, p.477-488
47. LOWENGRUB M., SNEDDON I.N., *The stress field near a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic half-planes*, I.J.E.S., Vol.11, 1973, p.1025-1034
48. LOWENGRUB M., SNEDDON I.N., *The effect of shear on a penny-shaped crack at the interface of an elastic half-space and a rigid foundation*, I.J.E.S., Vol.10, 1972, p.899-913
49. LU JIAN-KE, *Complex Variable Methods in Plane Elasticity*, World Scientific, Singapore, 1995
50. LU H., LARDNER J.T., *Mechanics of subinterface cracks in layered material*, I.J.S.S. Vol.29, Nr.6, 1992
51. LUGOYOI P.Z., *O vlianii ortotropii na raspredelenie napriajenii vozle otverstiia v koniceskoi obolocike*, P.M., 1978, Nr. 2
52. LUND F., *Elastic forces that do no work and the dynamics of fast cracks*
53. LUNGU DAN, GHIOCEL DAN, *Metode probabilistice în calculul construcțiilor*, Editura Tehnică, Buc., 1982
54. LUO A.H., WANG Q., *Stress Concentrations in an Intermingled Hybrid Composite*, Trans. ASME, Vol.4, 1997
55. LURIE A.I., *Teoriia uprugosti*, Izd. „Nauka", Moskva, 1970
56. LURIE V.M., *Primenenie variationogo printipa dlia issledovaniia razràvov v spoşnoi srede*, P.M.M. Tom XXX, vip.4, 1966, p.747-753
57. LURIE M.V., *Ispolizovanie variaţionnogo prinţipa dlia izuceniia rasprostreneniia novernostei razrîva v splaşnoi srede*, P.M.M. Tom XXXIII, 1969
58. LURIE M.V., *Primenenie variotionnogo prinţipa dlia isledovaniia razràvovi splaşnoi srede*, P.M.M.Vîpusk 4,1966

M

1. MADENCI E., SERGEEV B., SHKARAYEV S., *Boundary collocation method for multiple defect interactions in an anisotropic finite region*. I.J.F.94,1998, p.339-355
2. MADENCI E., BARUT A., NEMETH M.P., *A complex potential-variational method for stress analysis of unsymmetric laminates with an elliptical cutout*, J.A.M. 68, 2001, p. 731-739.
3. MADENCI E., SERGEEV B., SHKARAYEV S., OPLINGER D.W., SHYPRYKEVICH P., *Analysis of composite laminates with multiple fasteners*, I.J.S.S. vol.35, no. 15, 1998, p. 1793-1811
4. MAL A.K., *Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack*. I.J.E.S. Vol.8, 1970, p.381-388
5. MAL A.K., *Interaction of elastic waves with a Griffith crack*. I.J.E.S. Vol.8, 1970, p.763-776
6. MALVERN E.L., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey,1969
7. MANAHAN M.P., STONESIFER R.B., *Probabilistic Fracture Mechanics Assessment of BWR Control Rod Drive Penetrations*
8. MANOLIS G., BESKOS D.E., *Boundary element methods in elastodynamics, London, 1988, ed. Unwin Hyman*
9. MARCHOUK G., *Methodes de calcul numerique*, (trad. din lb. rusă), Edition MIR, Moscou 1980
10. MAREK P., KREJSA M., *Performance Based Structural Reliability Assessment Using SBRA as a Tool*, 8th ASCE Speciality Conference on Pobabilistic Mechanics and Structural Reliability, PMC2000-088
11. MARINESCU G., *Analiză numerică*, Editura Academici R.S.R., Bucureşti, 1974
12. MARINESCU G., *Tratat de analiză funcțională*, Editura Academici R.S.R., Bucureşti, Vol.I-1970; Vol.II-1972
13. MARRIOTT D.L., *Evaluation of the Limitations of Probabilistic Fracture Mechanics in Risk Assessment*, ASME, PVP Vol.92, 1984, p.197-209
14. MARSDEN E. JERROLD, HUGHES J.R. THOMAS, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, New Jersey, 1983
15. MARŞAVINA L., *Metode numerice în mecanica ruperii*, Ed. Mirton, Timişoara, 1998
16. MARŞAVINA L., *Factorul de intensitate a tensiunii pentru platbanda cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură*, Buletinul ARMR Nr.7, 1999, p.5-9
17. MATEHIN A.N., *Integralinîe uravnenna v napriajeniiah dlia ploscoi deformaţii*, I.U.P. Nr.15/1986, p.79-82
18. MATYSIAK J.S., PAUK J.V., *On crack problem in an elastic ponderable layer*, I.J.F. 96, 1999, p.371-380
19. MAVRIS N.D., BANDTE D., *Comparison of two probabilistic techniques for the assessment of economic uncertainty*, 19th annual conference of the International Society of Parametric Analysis in New Orleans, May 1997
20. MAVRIS N.D., BANDTE D., *A probabilistic Approach to Multivariate Constrained Robust Design Simulation*, 1997, Society of Automotive Engineers
21. MAY G.B., KOBAYASHI A.S., *Plane stress stable crack growth and J-integral/HRR field*, I.J.S.S.,Vol.32,Nr.6/7,1995,p.857-881
22. MAYER OCTAV, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Editura Academici R.S.R., Bucureşti, 1981
23. MAZILU P., SBURLAN S.F., *Metode funcționale în rezolvarea ecuațiilor Teoriei elasticității*, Editura Academici R.S.R., Bucureşti, 1973
24. McFEE S., WEBB J.P., *Computational Analysis and Design Laboratory*, IEEE T.M. Vol.29, Nr.2, March 1993, p.1894-1897
25. MEDA G., MESSNER T.W., SINCLAIR G.B., SOLECKI J.S., *Path Independent H-Integrals for Three-Dimensional Fracture Mechanics*, I.J.F. 94, 1998, p.217-234
26. MEGUID S.A., WANG X.D., *The dynamic interaction of a microcrack with a main crack under antiplane loading*, I.J.S.S., Vol. 31, Nr.8, 1994

27. **MEGUID S.A., WANG X.D.**, *Dynamic Antiplane Behaviour of Interacting Cracks in a Piezoelectric Medium*, **I.J.F.** 91, 1998, p.391-403
28. **MEHTA S., CHAUDHRY H.R.**, *Thermoelastic stresses in rotation of a circular cylinder in finite deformation theory*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.747-755
29. **MEISNER M.J., KOURIS D.A.**, *Interaction of two elliptic inclusions*, **I.J.S.S.**, Vol.32, Nr.3/4, 1995, p.451-466
30. **MERKULOV U.A.**, *Izghib plastin s periodiceskoi sistemoi razrezov*, **M.T.T.**, Nr.4, 1982, p.187
31. **MICULA Gh.**, *Funcţii spline şi aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978
32. **MIHAILOV I.A.**, *Hrubkoe razruşenie elementov stalinîh konstrukţii*, Moskva, Stroizdat, 1986
33. **MIHLIN G.S.**, *Variaţionnîe metodi v matematiceskoi fizike*, Moskva, 1957
34. **MILLER O.**, *Modeling and simulation of dynamic fragmentation in brittle materials*, **I.J.F.** 96, 1999, p.101-125
35. **MILNE-THOMSON L.M.**, *Plane Elastic System*, Springer Verlag, 1960
36. **MILNE-THOMSON L.M.**, *Antiplane Elastic System*, Springer Verlag, 1962
37. **MILOVANOVA D.B., DÎŞELI M.Ş.**, *Ustoicivosti tonkih plastin s naklonno raspolojennim razrezom pri rastiajenii*, **P.M.**, Tom XVI, Nr.4, 1980
38. **MÎNDRU GH., RĂDULESCU M.M.**, *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Ed. Dacia, Cluj, 1986
39. **MING YUAN HE, EVANS G.A., HUTCHINSON W.J.**, *Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials: role of residual stresses*, **I.J.S.S.** Vol.31, Nr.34, 1994
40. **MINNETYAN L., HUANG D., CHAMIS C.C.**, *Probabilistic fatique life evaluation of composite structures*
41. **MIRONENKO N.I.**, *Napriajennoe sostoianie polosi s odnim ili dvumia uprugonodkreplennîmi krugovîmi otverstiiami*, **M.T.T.**, Nr.6, 1982, p.73-80
42. **MIRSALIMOV V.M.**, *Reşenie zadaci termo uprugosti dlia izotropnoi sredi, oslabennoi periodiceskoi sistemoi kruglih otverstii i priamolineinâmi treşcinami*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.1, 1981
43. **MIŞICU M.**, *Mecanica mediilor deformabile. Fundamentele elasticităţii structurale*, Ed. Acad.R.S.R., Buc., 1967
44. **MIŞICU M., TEODOSIU C.**, *Reşenie pri pomoşci teorii funkţii kompleksnogo peremennogo staticeski ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia neodnorodnîh izotropnîh tel*, **P.M.M.**, Vol. 2, 1966
45. **MIŞURIS S.G.**, *Ploskaia zadacia teorii uprugosti dlia sloistoi sredî s polubeskonecinoi treşcimoi, perpendikuliarnoi graniţe razdela sloev*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p. 82-96
46. **MOCANU D.R.** (colectiv), *Analiza experimentală a tensiunilor*, Vol. I.II, Editura Tehnică, Buc., 1977
47. **MOCANU GH.**, *Introducere în teoria funcţiilor complexe*, Vol. I, II, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996
48. **MOCANU GH., STOIAN GH., VIŞINESCU E.**, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă. Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Buc., 1970
49. **MOGILEVSKAYA S.G.**, *Numerical modeling of 2-D smooth crack growth*, **I.J.F.** 87, 1997, p.389-405
50. **MOGILEVSKAYA S.G., CROUCH S.L., WANG J.**, *A Galerkin Boundary Integral Method for an Elastic Plane with Multiple Inclusions, Holes and Cracks*, University of Minnesota, U.S.A., 2002
51. **MOLINARI A., ELMOUDEN M.**, *The problem of elastic inclusions at finite concentration*, **I.J.S.S.** Vol. 33, Nr. 20-22, 1996, p.3131-3150
52. **MOON H.J., EARMME Y.Y.**, *Calculation of Elastic T-Stresses Near Interface Crack Tip under In-Plane and Anti-Plane Loading*, **I.J.F.** 91, 1998, p.179-195
53. **MORAN BRIAN, SUKUMAR N.**, *Failure prediction methodology/ Fatique reliability*
54. **MOROZOV E.M.**, *Energeticeskoe uslovie rosta treşcin v uprugo-plasticesnih telah*, Dokladi Akademii Nauk SSSR, Tom 187, Nr.1, 1969
55. **MORRIE D.H., G. DE VRIES**, *An introduction to finite element analysis*, London, 1978
56. **MOSAKOVSKII V.I., RABKA M.T.**, *Obobşcenie kriteriia Griffitsa-Sneddona na sluciai neodnorodnovo tela*, **P.M.M.**, T.28, 1964
57. **MOSLER J., MESCHKE G.**, *3D FE Analysis of Cracks by Means of the Strong Discontinuity Approach*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000, Barcelona, Sept. 2000
58. **MOSZYNSKI K.**, *Metode numerice de rezolvare e ecuaţiilor diferenţiale ordinare*, Editura Tehnică, Buc., 1973
59. **MÜLLER H.W.**, ş.a., *A semi-infinite crack in front of a circular, thermally mismatched heterogeneity*, **I.J.S.S.** Vol.33, Nr.5, 1996
60. **MUNTEAN C.**, *Utilizarea funcţiilor complexe în studiul stării plane*, Referat doctorat Nr.1, 1999
61. **MUNTEAN C.**, *Teoria concentratorilor de tensiune*, Referat doctorat Nr.2, 2001
62. **MUNTEAN C.**, *Metode numerice aplicate în studiul concentratorilor de tensiune*, Referat doctorat Nr.3, 2001
63. **MUNTEAN C.**, *Implementarea funcţiilor de modelare de tip spline în metoda elementelor de frontieră*, A XXVII-a Conf. Naţ. De Mecanica Solidelor, 2003, Bul. Şt. Al Univ. din Piteşti (în curs de publicare)
64. **MUNTEAN C.**, *Rezultate noi privind rezolvarea unei ecuaţii Laplace cu metoda elementelor de frontieră utilizând un procedeu adaptiv*, Bul. Şt. al Univ. Politehnica Timişoara, Seria Mecanică, Tom 48 (62), 2003
65. **MUNTEAN C.**, *Un algoritm adaptiv pentru aproximarea spline a curbelor plane din metoda elementelor de frontieră*, Simp. Internaţ. ELFIN 6, organizat de SIAC, 2003
66. **MUNTEANU GH. M.**, *Aplicarea pe calculator a metodei elementului finit*, Lito. Universitatea din Braşov, 1979
67. **MUR G.**, *Edge elements, their advantages and their disadvantages*, **IEEE T.M.** Vol.30, Nr.5, September 1994, p.3552-3555
68. **MURA T., SHODJA M.H., HIROSE Y.**, *Inclusion problems*, **A.M.R.**, Vol.49, Nr.10, Part 2, 1996
69. **MUSHELISHVILI N.I.**, *Nekotorîe osnovîe zadacii matematiceskoi teorii uprugosti*, Izd."Nauka", Moskva, 1966
70. **MUSHELISHVILI N.I.**, *Singular Integral Equations*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, Netherlands, 1972

N

1. **NADAI A.**, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Izd. "MIR, Moskva, 1969, Tom 2
2. **NAHTA R., MORAN B.**, *Domain integrals for axisymmetric interface crack problems*, **I.J.S.S.**, Vol.30, Nr.15, 1993
3. **NAITO K., FUJII T.**, *Fatigue-fractured surfaces of epoxy adhesives and fractals under mode i cyclic loading*, **J.S.M.E.**, Int Journal, Series A, Vol.41, Nr.3, 1998

4. **NAKAMURA T., PARKS M.D.**, *Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fonts using an interaction integral*, **I.J.S.S.**, Vol.29, Nr.13, 1992
5. **NAKAMURA T., SAITO K., ARAKI S.**, *Effect of a Microdefect ahead of a Main Crack on Strength of Solids, (Exact Solution of the Main Crack-Microdefect Interaction Model)*, **JSME** International Journal, Series A, Vol.39, Nr.2, 1996
6. **NAZAROV A.S., SEMENOV N.B.**, *Asimptotica reşeniia zadaci mehaniki treşcin v momentnoi postanovke*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p.118-135
7. **NEMIROVSKII IU.V., MIRENKOV V.E.**, *Ob issledovanii napriajenovo sostoianiia v plastinke vîpuklîm poligonalnîm otverstiem*, **P.M.** Tom 14, Nr.1,1978
8. **NEMIŞ V.N.**, *K obosnovaniiu metoda vozmuşceniia triohmernîh zadaciah mehaniki deformiruemîh sred*, **P.M.**, Tom 13,Nr.12,1977
9. **NEMIŞ V.N.**, *Raspredelenie napriajenii okolo zamknutîh osesimetricinîh polostei i vkliucenii pri krucenii*, **P.M.**, Tom XIII, Nr.11, 1977
10. **NEUBER H.**, *Kerbspannungslehre*, Springer Verlag, Berlin, 1985
11. **NICHOLS R.W., BURDEKIN F.M., COWAN A., ELLIOTT D., INGHAM T.**, *The Use of Critical Crack Opening Displacement Techniques for the Selection of Fracture Resistant Materials*, In: "Proceedings of the Symposium on Fracture Concepts for Weldable Structural Steel", Risley, April 1969, Editor: **M.O. DOBSON**
12. **NICOLESCU L.J., STOKA M.I.**, *Matematici pentru ingineri*, Vol. I, II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1971
13. **NINGSHENG Z., PAUL F.J.**, *A Nonlinear Finit Element Eigenanalysis of Singular Plane Stress Fields in Bimaterial Wedges Including Complex Eigenvalues*, **I.J.F.** 90, 1998, p.175-207
14. **NISHIOKA T.**, *Computational dynamic fracture mechanics*, **I.J.F.** 86, 1997, p.127-159
15. **NISHIOKA T.**, *Concepte de bază şi dezvoltări recente în mecanica ruperii dinamice*, Mecanica Ruperii – Bul. **ARMR**, part.I: Nr.8/2000, p.4-11, part.II: Nr.9/2000, p.2-7
16. **NISHIOKA T., KATO T.**, *An alternating method based on the VNA solution for analysis of damaged solid containing arbitrarily distributed elliptical microcracks*, **I.J.F.** 89, 1998, p.159-192
17. **NOBLE B., HUSSAIN M.A.**, *Exact solution of certain dual series for indentation and inclusion problems*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.1149-1161
18. **NODA N., ASHIDA F.**, *Thermal shock in a transversely isotropic cylinder containing an annular crack*, **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.3, 1993, p.427-440
19. **NODA N., JIN ZHI-HE**, *Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material*, **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.8, 1993, p.1039-1056
20. **NODA N., WANG Q**, (ş.a.), *Singular Integral Equation Method in the Analysis of Interaction between Rectangular Inclusions*, **JSME** Int. J., Series A, 40, Nr.3, 1998
21. **NORRIE H.D., G deVRIES**, *An introduction to finite element analysis*, London,1978
22. **NOVIJILOV V.V.**, *K osnovom teorii ravnovestnîh treşcin v uprughih telah*, **P.M.M.**, Tom XXXIII, 1969
23. **NOVIJILOV V.V.**, *O neobhodimom i dostatocinom kriterii hrupkoi procinosti*, **P.M.M.**, Tom XXXIII, 1969
24. **NOVIJILOV V.V.**, *O plasticeskom razrîhlenii*, **P.M.M.**, Tom XXIX, 1965
25. **NOVIJILOV V.V.**, *Teoriia uprugosti*, Sudpromghiz, Leningrad, 1957
26. **NOWAK J.A., BREBBIA A.C.**, *The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, Vol.6, Nr.3
27. **NULLER B., KARAPETIAN E., KACHANOV M.**, *On the Stress Intensity Factor for The Elliptical Crack*, **I.J.F.** 92, 1998, L17-L20

O

1. **OCHI M., HATO S., ABE T.**, *Numerical analysis of deformation of rubber composite material (Tensile deformation under plane strain)*, **JSME** Int. Journal, Series I, Vol.35, Nr.4, 1992
2. **OCHIAI YOSHIHIRO**, *Generation method of distributed data for FEM analysis*, **JSME** Int. J., Series A, Vol.39, Nr.1, 1996
3. **OLARIU V., PREPELIŢĂ V.**, *Teoria distribuţiilor, funcţii complexe şi aplicaţii*, Editura Ştiinţifică şi Encicl., Buc., 1986
4. **OLESIAK Z., SNEDDON I.N.**, *The distribution of surface stress necessary to produce a penny-shaped crack of prescribed shape*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.863-873
5. **OLSZAK WACLAW, PIOTR PERZYNA, ANTON SAWCZUK**, *Teoria plasticităţii*, Editura Tehnică, Bucureşti,1970
6. **OLTEANU N.Gh., PÂRVU E.A.**, *Metode de discretizare a continuului în vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică*, Vol.II. Metoda elementelor finite, I.N.I.D., Bucureşti, 1972
7. **ONICESCU O.**, *Principiile teoriei probabilităţilor*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1969
8. **ONICESCU O.**, *Probabilităţi şi procese aleatoare*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977
9. **ONUKI T., WAKO S.**, *Novel boundary element formulation in hybrid FE-BE method for electromagnetic field computations*, **IEEE T.M.**, Vol.28, Nr.2, March 1992, p.1162-1165
10. **ONUKI T., WAKO S., HATTORI T.**, *Hybrid finite and boundary element method applied to nonlinear magnetic field analysis*, **IEEE T.M.** Vol.30, Nr.5, September 1994, p.2908-2911
11. **OSADCIUK A.V.**, *Sistema prodolinîh treşcin razlicinoi dlinî v pologoi ţilindriceskoi obolocike*, **FMPDS**, 1978, p.45-51
12. **OSADCIUK A.V.**, *Uprugoe ravnovenii zamknutoi obolociki s sistemoi raspolojennîh paralellinîh trescin*, **FMPDS**, 1978, p.51-58
13. **OSADCIUK V.A.**, ş.a., *Napriajennoe sostoianie neodnorodnoi pologoi sfericeskoi obolociki s trescinoi*, **P.M.**, Tom 13, Nr.6,1977
14. **OSMOLOVSKII G.V.**, *Variaţionaia zadacia ob ustoicivosti treşcinî*, **I.U.P.** Nr.15/1986, p.135-146
15. **OWEN M.D.**, ş.a., *Experimental Determination of Dynamic Crack Initiation and Propagation Fracture Toughness in Thin Aluminium Sheets*, **I.J.F.** 90, 1998, p.153-174
16. **OZTURK M., ERDOGAN F.**, *Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region*, **I.J.S.S.** Vol. 33, Nr.2, 1996
17. **O'DOWD N.P.** and **BUDDEN P.J.**, *The effects of mismatch on J and C* for interfacial cracks in plane and cylindrical geometries*, din *Mis-Matching of Interfaces and Welds*, editat de **SCHWALBE K.H. & KOÇAK**, 1997, p.221-232

18. O'DOWD N.P. ,BUDDEN P.J. and GRIFFITHS E.R.J. *Finite element analzsis of a bi-material sent specimen under elastic-plastic loading.*
19. O'DOWD N.P., *Applications of two parameter approaches in elastic-plastic fracture mechanics* E.F.M..52, Nr.3,1995, p.445-465
20. O'DOWD N.P., LEI Y., BUSSO E.P., *Prediction of cleavage failure probabilities using the Weibull stress.* E.F.M.Vol. 67, 2000, p.87-100.
21. O'DOWD N.P.,KOLEDNIK O., NAUMENKO V.P., *Elastic-Plastic analysis of biaxially loaded center-cracked plates,* I.J.S.S. 36, 1999, P. 5639-5661
22. O'DOWD N.P., LEI Y., WEBSTER G.A., *Fracture Mechanics analysis of a crack in a residual stress field*
23. O'DOWD N.P., LEI Y., WEBSTER G.A., *The effect of residual stresses on the fracture behaviour of a ferritic steel*
24. O'DOWD N.P., LEI Y., WEBSTER G.A., *J estimation and defect assessment for combined residual stress and mechanical loading*

P

1. PACOSTE C., STOIAN V., DUBINĂ D., *Metode moderne în mecanica structurilor,* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Buc., 1988
2. PALAZZO V., ROSATI L., VALOROSO N., *Computational Issues of General Isotropic Elastoplastic Models,* European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, Sept.2000
3. PAN E., *A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics,* I.J.F. 88: 41-59,1997
4. PAN J., SHIH F.C., *Elastic-plastic analysis of combined mode I, II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions,* I.J.S.S., Vol.29, Nr.22, 1992, p.2795-2814
5. PANĂ T., *Aplicaţii inginereşti ale mecanicii ruperilor,* Editura Tehnică, Buc., 1974
6. PANĂ T., *Mecanica ruperii materialelor,* Editura T.Pană et Co. SNC, Buc., 1992
7. PANASIUK V.V., *Predelinoe ravnovesie hrupkih tel s treşcinami,* Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1968
8. PANASIUK V.V., ş.a., *Osesimetricinaia uprugaia zadacia dlia poluprostranstra s tonkim vkliuceniem,* M.T.T. Nr.2/1982, p.65-69
9. PANASIUK V.V., ANDREIKIV A.E., *K teorii opredeleniia kriticeskovo raskrîtiia treşcinî,* Izd. An. SSSR, Mehanika i maşinostroienie, Nr.1, 1959
10. PANASIUK V.V., ANDREIKIV A.E., STADNIK M.M., *Dolgovecinosti kvasihrupkogo tela s vnutrennoi treşcinoi blizkoi v plane k krugovoi pri ţikliceskom nagrujenii,* P.P., Nr.5, 1977
11. PANASIUK V.V., SAVRUK M.P., DAŢÎŞIN A.P., *Dvoiakoperiodiceskaia zadacia teorii treşcin,* P.P., Nr.12, 1976, p.63-68
12. PANASIUK V.V., SAVRUK M.P., DAŢÎŞIN A.P., *Raspredelenie napriajenenii okolo treşcin v plastinah i obolocikah,* Kiev, "Naukova Dumka", 1976
13. PANASIUK V.V., SAVRUK M.P., SOLTIS I.F., *Periodiceskaia zadacia termouprugosti dlia tela s termoizolirovannîmi treşcinami,* P.P., Nr.7, 1976
14. PANASIUK V.V., STADHUK M.M., SILOVANIUC V.P., *Koncentraţia napriajenii v trohmersîh telah c tonkimi vkliuceniiami,* Kiev, "Naukova Dumka", 1986
15. PANASIUK V.V., VITVIŢKII P.M., KUTENI S.I., *Uprugo-plasticeskoe ravnovesie plastinki s prikraevoi treşcinoi,* P.M., T.15/1
16. PARIHAR S.K., RAO KRISHNA S.V.J., *Axisymmetric stress distribution in the vicinity of an external crack under general surface loadings,* I.J.S.S. 30, Nr.18,1993
17. PARIS PAUL, *Concepts in Fracture Mechanics,* Course Notes from TV Course, St. Louis, 1985
18. PARK Y.G., JUNG H., HAHN S., *An adaptive boundary element method for3-D eddy current computation using local error estimation,* IEEE T.M. Vol.30, Nr.5, September 1994, 3543-3546
19. PARTON V., PERLINE P., *Équations intégrales de la théorie de l'élasticité,* Izd., "MIR", Moscov, 1977
20. PARTON V., PERLINE P., *Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité,* Vol. I, II, Izd., "MIR", Moscou, 1983
21. PASCARIU I., *Elemente finite. Concepţii-Aplicaţii. Editura Militară, Bucureşti, 1985*
22. PASTRAMĂ D.Ş., *Contribuţii la studiul tensiunilor şi al factorului de intensitate al tensiunii la învelişuri cu fisuri de suprafaţă,* Teză de doctorat, 1997, Univ. Polit., Buc.
23. PASTRAMĂ D.Ş., *O nouă abordate a metodei funcţiei de pondere în mecanica ruperii,* Buletinul ARMR Nr.5, 1998, p.8-12
24. PAULINO H.G., SAIF A.T.M., MUKHERJEE S., *A finite elastic body with a curved crack loaded in anti-plane shear,* I.J.S.S., Vol.30, Nr.8, 1993, p.1015-1037
25. PAVEL PARASCHIVA RUS A.I., *Ecuaţii diferenţiale şi integrale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Buc., 1975
26. PELEH B.L., *Konţentraţia napriajeniiokolo otverstii pri izghibe transversalno izotropnnîh plastin,* Kiev "Naukova Dumka",1977
27. PELEH B.L., LAZIKO V.A., MAHNIŢKII R.N., *Konţentraţia napriajenii vozle krugovo otverstiia v ortotropnîh plastinkah s uciotom deformaţii sdviga,* P.M., Tom XII, Nr.6, 1979, p.62-86
28. PELEH B.L., LAZIKO V.A., POLEVOI B.N., *Procinosti transvernalino-izotropnoi plastinki s ellipticeskim vîrezom v staţionarmen temperaturnom pole,* P.P., Nr.5, 1977, p.17-18
29. PELEH B.L., POLEVOI B.N., *Razreşaiuşcie uravneniia termouprugosti transversalino izotropnîh obolocek v complexnoi forme i ih prilojeniia v zadacioh konţentratii napriajenii,* P.M., Tom XIII, Nr.7, 1977
30. PELEH B.L., SIASKII A.A., *Raspredelenie napriajenii vozle otverstii v podatlivîh na sdvig anizotropnîh obolocikah,* Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1975
31. PENG SHOUKANG, HAO PAN, *Reinvestigation of Elastic-Plastic Growth of Mode III Cracks in POWER Law Hardening Materials,* I.J.F. 88, 1997
32. PETCU V., SOARE M., SVASTA C., *Automatizarea calculului de rezistenţă în construcţii. Programe BASIC,* Ed.Teh.,Buc.,1989
33. PETERSON R.E., *Stress concentration factors,* John Wiley & Sons, New-York, 1974
34. PETRILA TITUS, GHEORGHIU I.C., *Metode element finit şi aplicaţii,* Editura Academiei R.S.R., Buc., 1987
35. PETROV V. Iu., *Ob opredelenii formî ravnoprocinîh kontov tonkovo vîreza v usloviiah kruceniia,* I.U.P. Nr.15, 1986, p.158-163
36. PICU R.C., *Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces,* I.J.S.S. Vol.33, Nr.17, 1996
37. PISARENKO G.S., NAUMENKO V.P., VOLKOV G.S., *K opredeleniiu koeffi- ţienta intensivnosti napriajenii v obrazţe s bokovîmi pazami,* P.P., Nr.10, 1977

38. **PISARENKO G.S., NAUMENKO V.P., VOLKOV G.S.**, *Vlianie stesnennosti deformații na viazkosti razrușenia plasticnih stalei*, **P.P.**, Nr.11, 1977, p.45-50
39. **PISSARENKO G., YAKOVLEV A., MATVEEV V.**, *Aide mémoire des matériaux*, Editions "MIR", Moscou, 1979
40. **POBEDRIA B.E., ȘEȘENIN S.V., HOLMATOV T.**, *Zadacia v napriajeniia*, Tașkent, Izd. "FAN", Uzbekskoi SSR, 1988
41. **PODGORNÎI A.N., GUZI I.S., MILEȘKIN M.B.**, *Issledovanie zakonomernostoi razvitia i tormojeniia bîstrîh treșcin pri razrușenii sloistah metalliceskih materialov*, **P.P.**, Nr.1, 1977, p.9-13
42. **PODGORNÎI A.N., MARCENKO G.A., PUSTÎNNIKOV V.I.**, *Osnovî i metodi prikladnoi teorii uprugosti*, Kiev, "Vîșaia Școla", 1981
43. **PODILCIUK Iu.N., KOBZARI IU.M.**, *O konțentrații napriajenii v transversalino izotropnoi srede vozle ghiperboloidalinoi vitociki*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.11
44. **PODILCIUK Iu.N.**, *O napriajenom sostoionii s jestkim ellipsoidalinîm vklluceniem*, **P.M.**, Tom XV, Nr.10, 1979
45. **POKLUDA JAROSLAV**, *Tortuous Cracks under Remote Mode I: The Statistical LEFM Approach*, Zeszyty Naukove Politechniki Opolskiej, Seria: Mechanika z.67, Nr. Kol. 264, 2001
46. **POLOJII G.N.**, *Teoriia i primenenie p-analiticeskih i(p,q)-analiticeskih funkții*, Kiev, "Naukova Dumka", 1973
47. **PONOMARIOV S.D.**, ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, București, Vol.I-1960, Vol.II-1963, Vol.III-1964
48. **POSEA N.**, *Rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
49. **POVSTENKO IU. Z.**, *Raspredelenie napriajenii i konțentrații primesei v pripoverhnostnom sloe na granițe tviordogo tela, obuslovlennoe skacikoobraznîm izmeneniem povernostnoi energhii*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.4, 1981
50. **POTERAȘU F.V., MIHALACHE N.**, *Elemente de contur. Aplicații.*, Editura Militară, București, 1992
51. **POVSTENKO V. Iu.**, *Uprugoe vzaimodeistvie tocecinogo defekta s treșcinoi*, **FMPDS**, 1978, p.73-77
52. **POUYA AHMAD**, *Une transformation du probleme de l'élasticité linéaire en vue d'application au problème de l'inclusion et aux fonctions de Green*, C. R. Acad. Sci., Paris, T.328, Série Iib, p.437-443, 2000
53. **PRASAD V.N.N., ALIABADI H.M.**, *The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems*, **I.J.S.S.** Vol.33, Nr.19, 1996
54. **PRECUPANU T.**, *Spații liniare, topologice și elemente de analiză complexă*, Ed. Acad. Române, București, 1992
55. **PROȚENKO A.M.**, *Teoriia uprugo-idealinoplasticesohih □robab*, Izd. "Nauka", Moskva, 1982

Q

1. **QIN QING-HUA**, *Thermoelectroelastic Green's Function for a Piezoelectric Plate Containing an Elliptical Hole*, Mechanics of Materials 30, 1998, p.21-29
2. **QIN QING-HUA**, *Thermoelectroelastic Green's Function for a Thermal Load Inside or on the Boundary of an Elliptic Inclusion.* Mechanics of Materials 31, 1999, p.611-626
3. **QIN QING-HUA**, *Thermoelectroelastic solution for elliptic inclusions and application to crack-inclusion problems*, Applied Mathematical Modelling 25, 2000, p.1-23
4. **QIN Q-H**, *GREEN function and its application for a piezoelectric plate with various openings*, Archive of Applied Mechanics 69, 1999, p.133-144
5. **QIN Q-H**, *Thermopiezoelectric interaction of macro- and micro-cracks in piezoelectric medium*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 32, 1999, p.129-135
6. **QIN Q-H**, *General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading*, **I.J.S.S.** 37, 2000, p.5561-5578
7. **QIN Q-H, YU S.W.**, *Fracture and damage analysis of a cracked body by a new boundary element model*, Comunications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1997, p.327-336
8. **QIN Q-H, YU S.W.**, *Effective moduli of piezoelectric material with microcavities*, **I.J.S.S.** 35, Nr.36, 1998, p.5085
9. **QIN Q-H, MAI Y-W**, *A closed crack tip model for interface cracks in thermopiezoelectric materials*, **I.J.S.S.** Vol. 36, 1999, p.2463-2479
10. **QIN Q-H, MAI Y-W, YU S.W.**, *Some problems in plane thermopiezoelectric materials with holes*, **I.J.S.S.** 36, 1999, p.427-439
11. **QU X., VENKATARAMANS., HAFTKA R.T., JOHNSON T.F.**, *Deterministic and Reliability-based Optimization of Composite Laminates for Cryogenic Environments*, Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics

R

1. **RABOTNOV I.N.**, *Mehanika deforminruenovo tviordovo tela*, Moskva "Nauka", 1979
2. **RACOVEANU N., DODESCU GH., MINCU T.**, *Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip probabilistic*, Editura Tehnică, București, 1976
3. **RAHMAN M.**, *Some Problems of a Rigid Elliptical Disk-Inclusion Bonded Inside a Transversely Isotropic Space: Part I, II*, Transactions of the **ASME**, Vol.66, 1999
4. **RANESTAD O**, ș.a., *Two-Parameter (J-M) Description of Crack Tip Stress-Field for an Idealized Weldment in Small Scale Yielding*, **I.J.F.** 88,1997
5. **RAO B.N., RAHMAN S.**, *Mesh-Free Analysis of Cracks in Isotropic Functionally Graded Materials*, Eng. Fract. Mec.,April 2002
6. **RAO B.N., RAHMAN S.**, *Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods. Part I: Rates of stress intensity factors.* Computational Mechanics 28 (2002), p.351-364, *Part II: Reliability analysis*, Computational Mechanics 28 (2002), p.365-374
7. **RAU I.S.**, *On fatique-crack propagation under stationary random loading*, **I.J.E.S.** Vol. 8, 1970, p.175-189
8. **RAVEENDRA T.S., BANERJEE K.P.**, *Boundary element analysis of cracks in thermally stressed planar structures*, **I.J.S.S.**, Vol.29, Nr.18, 1992
9. **REKACI V.G.**, *Rukovostvo k reșeniiu zadacii po teorii uprugosti*, Izd. "Vîșaia Școla", Moskva, 1966
10. **REKTORYS K.**, *Variaționnie metodî v matematiceskoi fizike i tehnike*, Moskva, "MIR", 1985
11. **RÎJIK M.I., GRADSTEIN S.I.**, *Tablițî integralov, sum riadov; proizvedenii*, Gostehteorizdat Moskva, 1951
12. **RITTEL D.**, *Thermomechanical aspects of dynamic crack initiation*, **I.J.F.** 99, 1999, p.199-209
13. **RIZZOLI I.**, *Introducere în teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Editura Universității din București, 1999

14. **RODIN J.G.**, *The overall elastic response of materials containing inhomogeneities*, **I.J.S.S.** Vol.30, Nr.14, 1993, p.1849-1863
15. **RODIN J.G., HWANG YUH-LONG**, *On the problem of linear elasticity for an infinite region containing a finite number of non-intersecting spherical inhomogeneities*, **I.J.S.S.** Vol.27, Nr.2, 1991, p.145-159
16. **ROMANIN N.O.**, *Viazkosti raznușeniia konstrukționnih stalei*, Moskva "Metalurghia", 1979
17. **ROOKE D.P., SNEDDON I.N.**, *The crack energy and the stress intensity factor for a cruciform crack deformed by internal pressure*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.1079-1089
18. **ROOKE D.P., TWEED J.**, *The stress intensity factors of a radial crack in a finite rotating elastic disc*, **I.J.E.S.** Vol.10, 1972, p.709-714
19. **ROOKE D.P., TWEED J.**, *The stress intensity factor of an edge crack in a finite rotating elastic disc*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.279-283
20. **ROOKE D.P., TWEED J.**, *The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc*, **I.J.E.S.**, 1973, Vol.11, p.285-290
21. **ROY A., CHATTERJEE M.**, *Interaction between coplanar elliptic cracks. I.Normal loading*, **I.J.S.S.** 31, Nr.1, 1994, p.127-144
22. **ROZENBLIUM J.V.**, *K teoreme o razgruzke*, Issledovaniia po uprugosti i plasticinosti, Sbornic 9, 1971, p.121-128
23. **ROZIN L.A.**, *Variaționnie postunovki zadaci dlia uprughih Drobab*, Izd. Leningradskovo Universiteta, 1978
24. **RU Q.C.**, *Analytic Solution for ESHELBY's Problem of an Inclusion of Arbitrary Shape in a Plane or Half-Plane*, **J.A.M.** 66, 1999
25. **RUBINSTEIN A.A.**, *Remarks on macrocrack-microcrack interaction and related problems.* **I.J.F.** 96,1999, L9-L14
26. **RUSU OLIVIU**, *Noțiunile fundamentale ale mecanicii ruperii*, Buletinul Asociației Române de Mecanica Ruperii (ARMR) Nr.1, 1996, p.5-9; Nr.2/1996, p.2-10
27. **RUSU OLIVIU**, *Metode probabilistice în analiza integrității structurilor*, Buletinul ARMR Nr.6, 1998, p.11-16, Buletinul ARMR Nr.7, 1999, p.13-18
28. **RUSU OLIVIU**, *Mecanica probabilistă și fiabilitatea structurilor. Note pe marginea unei conferințe*, Buletinul ARMR Nr.13, 2002, p.22-25
29. **RUSU OLIVIU, GALL TRAIAN**, *Probleme moderne ale rezistenței materialelor*, Editura Tehnică, Buc., 1970
30. **RUSU O., TEODORESCU M., LAȘCU-SIMION N.**, *Oboseala materialelor. Vol.I: Baza de calcul, Vol.II: Aplicații inginerești*, Editura Tehnică, București, 1992
31. **RYSZARD E. W.**, *Dynamic Growth of a Sherical Inclusion in Thermoelastic Medium*, Mater. Phys. Mech., Nr.3, 2001, p.52-56
32. **RYVKIN M.**, *A mode I crack parallel to the interfaces in a periodically layered medium*, **I.J.F.** 99, 1999, p.171-186

S

1. **ŞABAC I.GH.**, *Matematici speciale*, Vol.II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965, 1981
2. **SALGANIK R.L.**, *O hrupkom raznușenii skleenîh tel*, **P.M.M.**, Tom 28, Nr.5, 1963
3. **SANTHANAM S.**, *Infinite periodic array of cracks in axisymmetric disking*, **I.J.S.S.**, Vol.30, Nr.6, 1993, p.739-749
4. **SAOUMA E.V.**, *Lecture Notes in Fracture Mechanics*, University of Colorado,1997
5. **SAVIN N.G.**, *Osnovnîe zadaci ploskoi momentnoi teorii uprugosti*, **K.N.Jv.2**, p. 145-
6. **SAVRUK M.P.**, *Dvumernaia zadaci uprugosti dlia tel s treșcinami*, Kiev, "Naukova Dumka", 1981
7. **SBORNIK**, *Uprugosti i neuprugosti metallov*, Izd. "I.L." Moskva, 1954
8. **SCHAPERY A.R.**, *Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equationswith growing damage*, **I.J.F.** Vol. 97, 1999, p.33-66
9. **SCHIOP I.A.**, *Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1975
10. **SCHULTHEISZ R.C.**, ș.a., *An Experimental/Analytical comparison of Three-Dimensional Deformations of the Tip of a Crack in a Plastically Deforming Plate,*
    I-/Optical Interferometry and Experimental Preliminaries, **I.J.F.** 90, 1998, p.1-25
    II-/Material Characterization and Finite Element Analysis, **I.J.F.** 90, 1998, p.27-46
    III-/Comparison of Numerical and Experimental Results, **I.J.F.** 90, 1998, p.47-81
11. **SEDOV L.**, Mecanique des milieux continus, (Tom I, II), Ed. MIR, Mokva, 1975
12. **SEDOV L.I.** (redactor), *Mehanike tverdyh deformiruemyh tel*, Tom 8, Moskva, 1975
13. **SELVARATHINAM S.A.**, *Fracture in Off-Axis Unidirectionally Reinforced Ceramic Composites*, **I.J.F.** 90, 1998, p.209-234
14. **SERGEEV B., MADENCI E., AMBUR D.R.**, *Stress intensity factor for an arbitrarily oriented crack near a hole in longeron web*, **T.A.F.M.** 31, 1999, p. 213-222
15. **SERGEEV B., MADENCI E., AMBUR D.R.**, *Influence of bolt spacing and degree of anisotropy in single-lap joints*, Computers and Structures 76, 2000, p. 89-103
16. **SERGIESCU V.**, *Introducere în fizica solidului*, Editura Tehnică, București, 1956
17. **SEVCENKO IU.H.**, *Cislenîe metodî reșeniia prikladnih zadaci*, Vol. VI din (redactor) **GUZI N.A.**, *Prostranstnennie zadaci teorii uprugosti i plasticinosti*, Kiev, "Naukova Dumka", 1986
18. **ȘEVLIAKOV IU.A.**, *Matricinîe algoritmi v teorii uprugosti neodnorodnîh sred*, Kiev, "Vișaia Școla", 1997
19. **SEVOSTIANOV T., KACHANOV M.**, *Compliance tensors of ellipsoidal inclusions*, **I.J.F.** 96, 1999, L3-L7
20. **SHABAKHTY N., van GELDER P., BOONSTRA H.**, *Reliability analysis of jack-up platforms based on fatique degradation*, Proceedings of OMAE 2002-28360
21. **SHAVLAKADZE N.**, *On Some Contact Problems for Bodies with Elastic Inclusions*, Georgian Mathematical Journal, Vol.5, Nr.3, 1998, p.285-3000
22. **SHI JUN PING, LIU XIE HUI, CHEN YI HENG**, *A complex variable boundary element method for solving interface crack problems*, **I.J.F.** 96, 1999, p.167-178
23. **SHI P.J., CHEN Y.H., ZHAO L.G.**, *T-stress for an interfacial crack in a finite bimaterial plate*, **I.J.F.** 87, 1997, p. L21-L26
24. **SHI P., MAHADEVAN S.**, *Probabilistic Corrosion Fatique Life Prediction*, 8[th] ASCE Speciality Conference Probabilistic Mechanics and Structural Reliability
25. **SHIFRIN E.I., BRANK B., SURACE G.**, *Analytical-numerical solution of elliptical interface crack problems*, **I.J.F.** 94, 1998, p.201-215

26. **SHILANG XU, HANS W. REINHARDT**, *Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture. Part I: Experimental investigation of crack propagation. Part II: Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams*, **I.J.F.**98, 1999, p.111- 149,151-177,179-193
27. **SHINDO Y., WATANABE K., NARITA F.**, *Electroelastic Analysis of Piezoelectric Ceramic Strip with a Central Crack*, **I.J.E.S.** 38, 2000, p.1-19
28. **SHOCKEY D.A., SEAMAN L., CURRAN D.R.**, *Computation of crack propagation and arrest by simulating microfracturing at the crack tip.* - In: Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (G.T. Hahn, M.F. Kanninen, eds.), 1977, p. 274-285
29. **SHUH-HUEI LI**, ş.a., *Micromechanical analysis of multiple fracture and evaluation of debonding behaviour for fiber-reinforced composites*, **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.11, 1993, p.1429-1459
30. **SIASKII A.A., IAREMA D.I.**, *Neravnomernoe podkreplenie krugovogo otverstiia v sfericeskoi obolocike*, Institut mehaniki An. SSSR, Kiev, 1976
31. **ŞIFRIN E.I.**, *Ploskaia treşcina normalinovo otriva pri nalicii lineinih sviazei mejdu eio poverhnostiami*, **M.T.T.**Nr.3/1982,p.80-86
32. **SILVESTER P.**, *High-order polynomial triangular finite elements for potential problems*, **I.J.E.S.**, Vol. 7, 1969
33. **SIMONS W. JEFFREY**, ş.a., *Methods for Modeling Damage in Finite Element Calculations*, Osaka Univ., Japan, 1999, p.79-86
34. **SINGER I.**, *Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente de subspaţii vectoriale*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1967
35. **ŞIŞKIN V.P.**, *Cislennoe reşenie nekotorih ploskih kraevih zadaci teorii uprugosti metodom potenţiala*, **M.T.T.**Nr.5/1982,p.173-175
36. **SLEPIAN L.I.**, *Antiploskaia zadacia o treşcine v reşetke*, **M.T.T.**, Nr.5, 1982, p.101-115
37. **SLIVKER V.I.**, *Metod RITZ zadaciah teorii uprugosti osnovannih na posledovatelnoi minimizaţii dvuh funkţionalov*, **M.T.T.** Nr.2/1982, p.57-64
38. **SMIRNOV V.I.**, *Curs de matematici superioare*, (5 volume – trad. din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1955
39. **SMITH E.**, *Size effect relations associated with cohesive zone type fracture at a blunt stress concentration*, **I.J.F.** 95, 1999, p.41-50
40. **SMITH E.**, *The extension of circular-arc cracks in anti-plane strain deformation*, **I.J.E.S.**, Vol.7, 1969, p.973-991
41. **SMITH D.J., AYATOLLAHI M.R., DAVENPORT J.V.W., SWANKIE T.D.**, *Mixed Mode Brittle and Ductile Fracture of a High Strength Rotor Steel at Room Temperature*, **I.J.F.** 94, 1998, p.235-250
42. **SNEDDON I.N.**, *The distribution of surface stress necessary to produce a Griffith crack of prescribed shape*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.875-882
43. **SNEDDON I.N., LOWENGRUB M.**, *Crack Problems in The Classical Theory of Elasticity*, John Wiley & Sons, New York, 1969
44. **SNEDDON I.N., BERRY D.S.**, *Klassiceskaia teoriia uprugosti*, Moskva, 1961
45. **SOARE V. M.**, *Elemente de teoria elasticităţii, teoria plăcilor plane şi teoria plăcilor curbe subţiri. Curs şi aplicaţii*, Lito., Inst. de Construcţii, Bucureşti, 1972
46. **SOARE V. M.**, *Metode de discretizare a continuului în vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică*, Vol.I: *Metoda diferenţelor finite*, Sinteză documentară, I.D.T., Bucureşti, 1972
47. **SOARE V. M.**, *Structuri discrete şi structuri continue în mecanica construcţiilor*, Ed. Academiei R.S.R., Buc., 1986
48. **SOKOLNIKOFF I.S.**, *Mathematical Theory of Elasticity*, New York, 1956
49. **SOKOLOVSCHI V.V.**, *Teoria plasticităţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1953
50. **SOLOMON L.**, *Elasticitate liniară. Introducere matematică în statica solidului elastic*, Editura Academiei R.S.R., Buc., 1969
51. **SONGSHAN LI, MARK E. MEAR**, *Singularity-Reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three-Dimensional Linear Elastic Media*, **I.J.F.** 93, 1998, p.87-114
52. **SØRENSEN J.D., FABER M.H.**, *Codified Risk Based Inspection Planning*
53. **SOÓS E., TEODOSIU C.**, *Calculul tensorial cu aplicaţii în mecanica solidelor*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Buc., 1983
54. **SPRUNG I.**, *Probability of failure in fracture mechanics applications*, **I.J.F.** 89, 1998, L19-L24
55. **SRAWLEY J.E.**, *Linear Elastic Fracture Mechanics – A Review of Principles and Methods*, In: "Proceedings of the Symposium on Fracture Concepts for Weldable Structural Steel", Risley, April 1969, Editor: **M.O. DOBSON**
56. **SRIVASTAV R.P., LEE D.**, *Axisymmetric external crack problems for media with cavities*, **I.J.E.S.**10/1972,p.217-232
57. **SRIVASTAVA K.N., KRIPAL SINGH**, *The effect of penny-shaped crack on the distribution of stress in a semi-infinite solid*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.469-490
58. **SRIVASTAVA K.N., PALAIYA R.M.**, *The distribution of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.641-666
59. **STADNIK M.M., GORBACEVSKII I.Iu.**, *Predelinoe ravnovesie tela s ploscoi treugolinoi treşcinoi*, **P.M.**, Tom 17, Nr.7, 1981
60. **ŞTAIERMAN I.Ia.**, *Kontaktnaia zadacia teorii uprugosti*, Moskva, 1949
61. **STALLYBRASS M.P.**, *A cruciform crack deformed by an arbitrary internal pressure*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.1103
62. **STALLYBRASS M.P.**, *A crack perpendicular to an elastic half-plane*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.351-362
63. **STASIUK K.G., OSIV I.N.**, *Zadacia o napriajenno-deformirovannom sostoianii kusocino-odnovodnoi plastini s razrezami na eelipticeskoi linii razdela materialov*, **P.M.**, Tom XV, Nr.9, 1979
64. **STEMATIU D.**, *Calculul structurilor hidrotehnice prin metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988
65. **STOICA L.**, *Elemente de varietăţi diferenţiabile*, Geometry Balkan Press, Buc., 1998
66. **STOICESCU L.**, *Rezistenţa materialelor*, Vol. 1, Univ. din Galaţi, 1986, (curs lito)
67. **STOILOW S.**, *Teoria funcţiilor de variabilă complexă*, Editura Academiei R.P.R., Buc., Vol.I- 1954, Vol.II- 1958
68. **STOKA M.**, *Funcţii de variabile reale şi funcţii de variabilă complexă*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1964
69. **STOKA M., THEODORESCU R.**, *Probabilitate şi geometrie*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966
70. **STRANG G., FIX J.G.**, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973
71. **STROUD W.J.**, ş.a., *Probabilistic and Possibilistic Analysis of the Strength of a Bonded Joint*, 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 2001, Seattle, WA
72. **STUART D.R.**, *Introducere în analiza Fourier cu aplicaţii în tehnică*, (trad. din lb engleză), Editura Tehnică, Bucureşti, 1971

73. SUDAK L.J., RU C.Q., SCHIAVONE P., MIODUCHOVSKI A., *A Circular Inclusion with Circumferentially Inhomogenous Non-Slip Interface in Plane Elasticity*, Q.J.Mech. Appl. Math., 54(3), p.449-468, 2001
74. SUKUMAR N., ş.a., *Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 2001, p. 6183-6200
75. SUKUMAR N., *The extended finite element method.*
76. SUKUMAR N., *The natural element method in solid mechanics*, I.J.N.M.E, 43, 1998, p.839-887
77. SUKUMAR N., BELYTSCHKO T., MOES N., MORAN B., *Extended finite element method for three-dimensional crack modeling*, I.J.N.M.E., 48, 2000, p. 1549-1570,
78. SUKUMAR N., CHOPP D.L., MORAN B., *Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation*. E.F.M. 70, 2003, p. 29-48.
79. SULIM G.T., *Konţentraţia napriajenii vozle tonkostennih lineinih vkliucenii*, P.M., Tom XVII, Nr.11, p.82-89
80. SUN C.T., QIAN W., *A Treatment of Interfacial Cracks in the Presence of Friction*, I.J.F. 94, 1998, p.371-382
81. SUNCELEEV Ia.R., *Uprughoe ravnovesie neogranicennovo transversalino-izotropnovo tela, oslablennovo vnutrennim ploskim kpygovîm razrezom*, P.M.M. Tom 30, Vol.3, 1966, p.579-583
82. SUNDARARAJAN (RAJ) C. (editor), *Advance in Probabilistic Fracture Mechanics*, ASME, PVP Vol. 92, 1984

T

1. TADA H., PARIS P., IRWIN G., *The Stress Analysis of Crack Handbook*, Paris Productions Incorporated (and Del Research Corporation), St. Louis, Missouri, 1973, 1985
2. TANAKA MASATAKA, *Some Recent Advances in Boundary Element Methods*, A.M.R. Vol.36, Nr.5, 1983
3. TAN L.C., GAO L.Y., AFAGH F.F., *Boundary element analysis of interface cracks between dissimilar anisotropic materials*, I.J.S.S. Vol.29, Nr.24, 1992, p.3201-3220
4. TAN M.A., MEGUID S.A., *Analysis of Bimaterial Wedges Using a New Singular Finite Element*, I.J.F. 88,1997, p.373-391
5. TARASIEV S.G., ŢURPAL A.I., *Analiz variantov kvadraticinih priblijenii v nelineinih zadaciah o konţentraţii napriajenii*, K.N.Jv.2, p. 167-179
6. TÂRCOLEA C., FILIPOIU A., BONTAŞ S., *Tehnici actuale în teoria fiabilităţii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989
7. TEMAM R., *Metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor funcţionale*, (trad. din lb. franceză), Editura Tehnică., Bucureşti, 1973
8. TENG HONG, *Effective longitudinal shear modulus of a unidirectional fiber composite containing interfacial cracks*, I.J.S.S. Vol.29, Nr.12, 1992, p.1589-1595
9. TEODORESCU N, *Metode vectoriale în fizica matematică*, (Vol. I, II), Editura Tehnică, Bucureşti, 1954
10. TEODORESCU N., OLARIU V., *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura Tehnică, Bucureşti, Vol.I-1978, Vol.II-1979, Vol.III-1980
11. TEODORESCU N., OLARIU V., *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975
12. TEODORESCU P.P., ILLE V., *Teoria elasticităţii şi introducere în mecanica solidelor deformabile*, Editura „Dacia", Cluj-Napoca, Vol.I-1976, Vol. II-1979, Vol.III-1981
13. TEODORESCU P.P., *Probleme plane în teoria elasticităţii*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, Vol.I-1961, Vol.II-1962
14. TEODORESCU P.P., *Probleme spaţiale în teoria elasticităţii*, Editura Academici R.S.R., Bucureşti, 1970
15. TEZUKA AKIRA, *2D Mesh Generation Scheme for Adaptive Remeshing Process in Finite Element Method*, JSME Int. Journal, Series A, Vol.39, Nr.2, 1996
16. THEOCARIS S.P., ş.a., *Negative Poisson's Ratios in Composites with Star-Shaped Inclusions: A Numerical Homogenisation Approach*, Archive of Applied Mechanics 67, 1997, p.276-286
17. THEOCARIS S.P., DEMAKOS B.C., *The strain-hardening effect in HRR plane fields according to T-criterion*, I.J.F. 67, 1994, p.117-132
18. THOMAS T.Y., *Fatique fracture of brittle solids*, I.J.E.S. Vol.8, 1970, p.113-136
19. TIMOSHENKO S., *Strength of Materials*, Third Edition, D. van Nostrand Company, Inc. New York, 1956
20. TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N., *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGrow-Hill Book Company, 1970
21. TIRON M., *Analiza preciziei de estimare a funcţiilor aleatoare*, Ed. Teh., Buc., 1981
22. TOSHIMITSU OTSU, WEN-XUE WANG, TAKAO Y., *Asymetrical Cracks Parallel to an Interface between Dissimilar Materials*, I.J.F. 96, 1999, p.75-100
23. TRACY Y. THOMAS, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, (limba rusă), Izd. „MIR", Moskva, 1964
24. TRĂDEGÅRD A., NILSSON F., ÖSTLUND S., *J-Q Characterization of Propagating Cracks*, I.J.F. 94, 1998, p.357-369
25. TRANDAFIR R., *Matematici pentru ingineri. Culegere de probleme*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969
26. TRANTINA G.G., JOHNSON C.A., *Probabilistic Defect Size Analysis Using Fatique and Cyclic Crack Growth Rate Data*, ASTM, STP 798, 1983, p.67-78
27. TRAVKIN IU.I., *O sisteme parnih trigonometriceskih riadov i eio primenenii k smeşcennîm zadaciom teorii uprugosti*, P.M., Tom XIII, Nr.6, 1977
28. TRIPA P., *Mecanica ruperii cu aplicaţii la conducte*, Ed. Mirton, Timişoara, 1998
29. TRLEP M., ŠKERGET L., KREČA B., HRIBERNIK B., *Hybrid finite element – boundary element method for nonlinear electromagnetic problems*, IEEE T.M., Vol.31, Nr.3, May 1995, p.1380
30. TRUESDELL C., *A First Course in Rotational Continuum Mechanics*, The Johns Hopkins Univ., Maryland, 1972
31. TRUSDELL K., *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin,1966
32. TSUKROV I., KACHANOV M., *Anisotropic Material with Arbitrarily Oriented Cracks and Elliptical Holes: Effective Elastic Moduli*, I.J.F. 92,1998, L9-L14
33. TUDOSIE C., *Probleme de ecuaţii diferenţiale*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1990
34. ŢURPAL A.I., *Nekotorie zadaci konţentraţii napriajenii okolo otverstii i polostei s uciotom fiziceskoi nelineinosti materiale*, K.N.Jv.2, p. 241-253

35. **TVERGAARD V., HUTCHINSON W.J.**, *Effect of T-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid*, **I.J.S.S.**, Vol.31, Nr.6, 1994
36. **TWEED J.**, *The determination of the stress intensity factor of a partially closed Griffith crack*, **I.J.E.S.** Vol.8, 1970, p.793-803
37. **TWEED J.**, *The distribution of stress in the vicinity of a penny-shaped crack in an elastic solid under the action of symmetric body forces*, **I.J.E.S.**Vol.7,1969, p.723-735
38. **TWEED J.**, *The distribution of stress in the vicinity of a Griffith crack in an elastic solid in which body forces are acting*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.815-842
39. **TWEED J., DAS C.S.**, *The stress intensity factor of a radial crack in a finite elastic disc*, **I.J.E.S.**, 1972, Vol.10, p.323-335
40. **TWEED J., ROOKE D.P.**, *The distribution of stress near the tip of a radial crack at the edge of a circular hole*, **I.J.E.S.**, Vol.11, 1973, p.1185-1195
41. **TWEED J., ROOKE D.P.**, *The torsion of a circular cylinder containing a symmetric array of edge cracks*, **I.J.E.S.** Vol.10, 1972, p.801-812
42. **TWEED J., ROOKE D.P.**, *The stress intensity factor of an edge crack in a finite elastic disc*, **I.J.E.S.**, 1973, Vol.11, p.65-73

U

1. **UFLIAND, IA. S.**, *Integralnie preobrazovaniia v zadaciah teorii uprugosti*, Izd. „Nauka", Leningrad, 1968
2. **UGODCIIKOV G.A.**, *K reşeniiu kraevîh zadaci s pomoşcin konformnîh otobrajenii*, **K.N.**/v.2, p. 191-200
3. **ULITKO Ф.A.**, *Rastiajenie uprugogo prostranstva oslablennogo dvumnia krugovîmi treşcinami lejaşcimi v odnoi ploskosti*, **K.N.**/v.2, p. 201-208
4. **UWADIEGWU B.C., O. EJIKE**, *The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.947-961
5. **UWADIEGWU B.C., O. EJIKE**, *Edge crack in a strip of an elastic solid*, **I.J.E.S.** Vol.11, 1973, p.109-121

V

6. **VĂDUVA I.**, *Modele de simulare cu calculatorul*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977
7. **VAINBERG V.D.**, *Konţentraţiia napriajenii v plastinah okobo otverstii i vîkrujek*, Izd. "Tehnika", Kiev, 1969
8. **VAINBERG V.D., GULIAEV I.V.**, *Konformnoe otobrajenie i raznostei metod v zadaciah o konţentraţii napriajenii*, **K.N.**/v.2, p. 25-34
9. **VAINŞTOK V.A.**, *Sravnenie dvuh cilennîh metodov rasciota koefiţientov intensivnosti napriajenii*, **P.P.**, Nr.9, 1977, p.80-82
10. **VALOV V.P.**, ş.a., *O vlianii vnutrennîh mikronapriajenii na skorosti dvijeniia trescinî pri ţigliceskoi deformaţii*, Problemî procinosti, Nr.12, 1976
11. **VANIN G.A.**, *Prodolinîe sdvig mnogokomponentoi voloknistoi sredî s defectami*, **P.M.**, Tom XIII, Nr.8, 1977
12. **VASIDZU K.**, *Variaţionnîe metodî v teorii uprugosti i plasticinosti*, Moskva, Izd. "MIR", 1987
13. **VASILIEVA B.A., BUTUZOV F.V.**, *Singuliarno vozmuşcennîe uravneniia v criticeskih sluciniah*, Izd. Moskoskovo Univ., 1978
14. **VECUA P.N.**, *Sistemî singuliarnîh integralnîh uravnenii i nekotorie zadaci*, Izd. "Nauka", Moskva, 1970
15. **VENTSEL H**, *Theorie des Probabilities*, Editiones MIR, Moscou, 1973
16. **VIGDERGAUZ S.B.**, *Ravnoprocinoe otverstie v poluplaskosti*, **M.T.T.** Nr.1/1982, p.94-98
17. **VINOKUROV L.P.**, *Teoriia uprugostii i plasticinosti*, Izd. Harikovskovo Universiteta, Harkov, 1965
18. **VLADIMIROV V.S.**, *Ecuaţiile fizicii matematice*, (trad. Din lb. Rusă), Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Buc., 1980
19. **VLADISLAV T., RAŞA I.**, *Analiză numerică. Elemente introductive*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997
20. **VOINEA P. RADU**, *Elasticity and Plasticity*, Lito, Univ. Politehnica Bucureşti, 1993
21. **VOINEA P., VOICULESCU D., SIMION F.**, *Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989
22. **VOLKOV S.D.**, *Statisticeskaia teoriia procinosti*, Maşghiz, Moskva 1960
23. **VOLKOV A.E.**, *Cislennîe metodi*, Moskva "Nauka" 1982
24. **VOLKOV N.I., FILŞTINSKII L.A.**, *O napriajenom sostoianii vraşciaiuşcegosia orebrennogo diska slojnoi konfiguraţii pri nalicii otverstii i treşcin*, **M.T.T.**, Nr.5, 1982, p.124-129
25. **VORODACEV A.N.**, *Opredelenie koefficientov intensivnosti temperaturnîh napriajenii dlia ploskoi elipticeskoi trescinî v neogranicennom uprugom tele*, **P.M.**, Tom XVII, Nr.2, 1981
26. **VOROVICI I.I.**, *Nekotorie problemî konţentraţii napriajenii*, **K.N.**/v.2, p. 45-53
27. **VOROVICI I.I., ALEKSANDROV V.M., BABEŞKOV V.A.**, *Neklassiceskie smeşcenie zadaci teorii uprugosti*, Izd. "Nauka", Moskva, 1974

W

1. **WACLAW OLSZAK, PIOTR PERZYNA, ANTON SAWCZUK**, *Teoria plasticităţii*, (tr. din lb. pol.), Ed. Tehn., Buc., 1970
2. **WALKER E.K.**, *Exploratory Study of Crack-Growth Based Inspection Rationale*, **ASTM**, STP 798,1983, p.116-130
3. **WANG C.C., TRUESDELL C.**, *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff Intern. Publ. Leyden, 1973
4. **WANG C.**, *Applied Elasticity*, Mc Grow-Hill Publ. Co., 1953
5. **WANG H.C.**, *On the Fracture of Constrained Layers*, **I.J.F.** 93, 1998, p. 227-246
6. **WANG J., MOGILEVSKAYA S.G., CROUCH S.L.**, *A numerical procedure for multiple circular inclusions and holes in a finite domain with a circular boundary*, IABEM 2002, International Association for BEM, UT Austin, TX USA, May 2002
7. **WANG J., MOGILEVSKAYA S.G., CROUCH S.L.**, *Numerical implementation of a Galerkin boundary integral method for elastic materials with circular inclusions and holes*, Electronic J. of Boundary Elements Vol.BETEQ 2001, Nr.1, p.85-93,2002
8. **WANG M.X., GAO S., CHEN H.Y.**, *Further investigation for the macro-microcrack interaction I in the infinite isotropic body*, **I.J.S.S.** Vol.33, Nr.27, 1996, p.4051-4063
9. **WANG T.C, SHIH F.C, SUO Z.** *Crack extension and kinking in laminates and bicrystals*, **I.J.S.S.** Vol.29,Nr.3,1992
10. **WANG Y.B., CHAU K.T.**, *A new boundary element for plane elastic problems involving cracks and holes*, **I.J.F.**87,1997,p.1-20
11. **WANG Y.B., CHAU K.T.**, *A new boundary element method for mixed boundary value problems involving cracks and holes Interactions between rigid inclusions and cracks*, **I.J.F.** 110, 2001, p.387-406

12. **WANG Y.C.**, *Two-dimensional elastostatic GREEN's function for general anisotropic solids and generalization of STROH's formalism*, **I.J.S.S** Vol. 31, Nr.19, 1994, p.2591-2597
13. **WÄPPLING D.**, ş.a., *Crack Growth Across a Strength Mismatched Bimaterial Interface*, **I.J.F.** 89, 1998, p.223-243
14. **WATANABE K., ATSUMI A.**, *Long circular cylinder having an infinite row of penny-shaped cracks*, **I.J.E.S.** Vol.10, 1972, p.159-171
15. **WEBB D., ATKINSON C.**, *A note on a penny-shaped crack expanding under a uniform internal pressure*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p.525-530
16. **WERT A.C., THOMSON M.R.**, *Physics of solids*, McGrow-Hill Book Company, New-York, 1964
17. **WIENER U., ISAC-MANIU A, VODĂ V.**, *Aplicaţii ale reţelelor probabiliste în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983
18. **WILLIAMS M.L.**, *Stress singularities resulting from various loading conditions in angular corners of plates in extension*, ASME **J.A.M.** 19 (1952), p.526-528
19. **WILLIAMS M.L.**, *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, ASME **J.A.M.** 24 (1952), p.109-114
20. **WILLIAMS M.L.**, *The bending stress distribution at the base of a stationary crack*, ASME **J.A.M.** 28 (1961), p.78-82
21. **WITT F. J.**, *Development and Applications of Probabilistic Fracture Mechanics for Critical Nuclear Reactor Components*, ASME, PVP Vol. 92, 1984, p. 55-71
22. **WRIGHT T.W.**, *A Note of Frictional Release in Microcracks*, **I.J.F.**91, 1998, L37-42
23. **WU SHU-TING, PAO Y.C., CHIU Y.P.**, *Analysis of a finite elastic layer containing a Griffith crack*, **I.J.E.S.** 8, 1970, p.578-582

X

1. **XIAOHUA ZHAO, HUICAI XIE**, *Elastodynamic Stress Intensity Factors for a Semi-Infinite Crack Due to Three-Dimensional Concentrated Shear Loading on the Crack Faces*, **I.J.F.** 94,1998, p.1-16
2. **XU G., BOWER F.A., ORTIZ M.**, *An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading*, **I.J.S.S.** Vol.31, Nr.16, 1994, p.2167-2193
3. **XU YANJIANG, BLUME A.J.**, *Crack interaction and propagation stability in a thin film/ substrate system*, **I.J.S.S** 30, Nr.19,1993

Y

1. **YAHAYA N.**, *Risk-based Maintenance Management of Corroded Pipelines*
2. **YAMADA T.**, *An application of the dual reciprocity boundary element method to magnetic field and eddy current problems*, **IEEE T.M.** Vol.30, Nr.5, September 1994, p.3566-3569
3. **YAMAJI S.**, *Development of p-Version Adaptive Boundary Element Analysis System*, **JSME** International Journal, Series A, Vol.41, Nr.2, 1998
4. **YANG B., K. RAVI-CHANDAR**, *A Single-Domain Dual-Boundary-Element Formulation Incorporating a Cohesive Zone Model for Elastostatic Cracks*, **I.J.F.** 93, 1998, p.115-144
5. **YAN CHENG, YIU-WING MAI**, *Numerical Investigation on Stable Crack Growth in Plane Stress*, **I.J.F.** 91, 1998, p.117-130
6. **YANG QING-SHENG, QIN Q.H.**, *Numerical simulation of cracking processes in dissimilar media*, Composites Structures 53, 2001, p.403-407
7. **YAOWU SHI**, ş.a., *Effects of Weld Strength Undermatch on Fracture Toughness of HAZ Notched Weldments in a HSLA Steel*, **I.J.F.** 91, 1998, p.349-358
8. **YE T., SUO Z., EVANS G.A.**, *Thin film cracking and the roles of substrate and interface*, **I.J.S.S.** Vol.29, Nr.21, 1992
9. **YOKOBORI T., ICHIKAWA M., FUJITA F.**, *A Stochastic Theory of Fracture of Solids Containing a Small Number of Macroscopic Defects*, Rep. Res. Inst. Strength and Fracture of Materials, Tohoku Univ., 1974, Vol.10, p.19-27
10. **YOKOBORI T., YOKOBORI T.A., KAMEI A.**, *Computer simulation of disloca-tion emission from a stressed source*, Philosophical Magazine, Vol.30, Nr.2, 1974
11. **YONG-LI WU, ZHI-FA DONG, GUO-CHEN U.**, *Asymptotic Analysis for a Crack on Interface of Damaged Materials*, **I.J.F.** 91, 1998, p.47-60
12. **YONG LI XU**, *GREEN's function for general disk-crack problems*, **I.J.S.S.** Vol.32, Nr.1, 1995, p.63-77
13. **ZONG LI XU**, *Stress intensity factorsof a radial crackin a compound disk subjected to point loads*, **I.J.S.S.**, Vol. 30, Nr.4, 1993, p.499-511
14. **YONG ZHOU, HANSON T.M.**, *Stress intensity factors for annular cracks in inhomogeneous isotropic materials*, **I.J.S.S** Vol. 29, Nr.8, 1992, p.1033-1050
15. **YOON C., ALLEN H.D.**, *Damage dependent constitutive behavior and energy release rate for a cohesive zone in a thermoviscoelastic solid*, **I.J.F.** 96, 1999, p.55-74
16. **YOUNGDAHL C.K.**, *On the completeness of a set of stress functions appropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates*, **I.J.E.S.** Vol.7, 1969, p. 61-79
17. **YU QIAO, YOUSHI HONG**, *Singularity characteristics for a lip-shaped crack subjected to remote biaxial loading*, **I.J.F.** 96, 1999, p.203-214
18. **YUEGUANG WEI, HUTCHINSON W.J.**, *Models of Interface Separation Accompanied by Plastic Dissipation at Multiple Scales*, **I.J.F.** 95, 1999, p.1-17
19. **YUH J. CHAO, YHU X.K.**, *J-A2 Characterization of Crack-Tip Fields: Extent of J-A2 Dominance and Size Requirements*, **I.J.F.** 89, 1998, p.285-307

Z

1. **ZARGARIIAN S.S.**, *Integralnîe uravneniia ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia mnogosviaznîh oblastei s uglami*, **M.T.T.** Nr.3/1982, p.87-97
2. **ZEINALOV N.K.**, *Vîpucivanie neogranicennoi tonkoi plastinki s krugovim otverstiem pri dvuhosnom rastiajenii*, **P.M.**, Tom. XIII, Nr. 42, 1977
3. **ZENGTAO CHEN**, ş.a., *A Griffith Crack Moving Along the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials*, **I.J.F.** 91, 1998, p.197-203
4. **ZENGTAO CHEN**, *A new photoelastic procedure to determine SIF of mode I crack*, **I.J.F.** 69, 1995

5. **ZENGTAO C., D. WANG,** *An over-deterministic photoelastic procedure for mode I crack problems*, **I.J.F.** 67, 1994, R93-R98
6. **ZERVOS A., PAPANASTASIOU P.,** ş.a., *A Finite Element Displacement Formulation for Gradient Elastoplasticity*
7. **ZHANG L.,** ş.a., *The Mode III Full-Field Solution in Elastic Materials with Strain Gradient Effects*, **I.J.F.** 92, 1998, p.325-348
8. **ZHANG NINGSHENG, PAUL F. JOSEPH,** *A Nonlinear Finite Element Eigenanalysis of Singular Plane Stress Fields in Bimaterial Wedges Including Complex Eigenvalues*, **I.J.F.** 90, 1998, p.175-207
9. **ZHANG NINGSHENG, PAUL F. JOSEPH,** *A Nonlinear Finite Element Eigenanalysis of Singular Stress Fields in Bimaterial Wedges for Plane Strain*, **I.J.F.** 94, 1998, p.299-319
10. **ZHANG SULIN, WEI ZANG,** *Macrocrack Extension by Connecting Statistically Distributed Microcracks*, **I.J.F.** 90, 1998, p.341-353
11. **ZHOU ZHENGONG, WANG B., SHANYI DU,** *Investigation of the Scattering of Harmonic Elastic Antiplane Shear Waves by a Finite Crack Using the Non-Local Theory*, **I.J.F.** 91, 1998, p.13-22
12. **ZHU Y.Y., CESCOTTO S.,** *A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials*, **I.J.S.S.**, Vol.32, Nr.11, 1995, p.1607-16415
13. **ZIENKIEWICS O.C.,** *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, London, 1977

ST	
1.	*** *Dicţionar de matematici generale*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1974
2.	*** Hütte, *Manualul inginerului. Fundamente*, (traducere din limba germană după ediţia a 29-a), Editura Tehnică, Buc., 1995
3.	*** *Sbornik po cislennîm metodam v mehanike tviordovo deformiruemovo tela*, Akademia Nauk SSSR, Moskva, 1978
4.	*** *Proceedings of the 6th National Japanese Conference on Boundary Element Methods*, Tokyo, Japan, December, 1989, **J.A.M.**
5.	*** STAS 1963-81: *Rezistenţa materialelor. Terminologie şi simboluri*
6.	*** STAS 9760-84: *Determinarea tenacităţii la rupere în condiţiile stării plane de deformaţie. Metoda K_{IC}*
7.	*** STAS E 12803-90: *Determinarea deplasării la deschidere a fisurii*
8.	*** ASTM E 616-89: *Standard Terminology relating to Fracture Testing*
9.	*** ASTM E 813-87: *Standard Test Method for J_{IC} a Measure of Fracture Toughness*
10.	*** ASTM E 1290-89: *Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness Measurement*

REVISTE ŞI CULEGERI DE LUCRĂRI STUDIATE

Nr. crt.	Abrevieri în lista bibliografică	Denumirea revistei
1.	A.M.R.	Applied Mechanics Review
2.	C.M.A.M.E.	Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
3.	C.S.	Composite Stuctures
4.	E.F.M.	Engineering Fracture Mechanics
5.	FMPDS	Sbornik: Fiziko-mehaniceskie polia v deformiruemih sredah: Akademiia Nauk Ukranskoi SSR, Kiev „Naukova Dumka", 1978
6.	I.J.E.S.	International Journal of Engineering Science
7.	IEEE T.M.	IEEE Transactions on Magnetics
8.	I.J.F.	International Journal of Fracture
9.	I.J.M.S.	International Journal of Mechanical Sciences
10.	I.J.N.M.E.	International Journal for Numerical Methods in Engineering
11.	I.J.S.S.	International Journal of Solids and Structures
12.	I.U.P. Nr.15/1986	Issledovaniia po uprugosti i plasticinosti (limba rusă), Problemî teorii treşcin i mehanika razruşeniia
13.	J.A.M.	Journal of Applied Mechanics
14.	J.C.S.J.	Journal of Ceramic Society of Japan
15.	J.E.M.T.	Journal of Engineering Materials and Technology
16.	J.M.P.S.	Journal of the Mechanics and Physics of Solids
17.	J.S.V.	Journal of Sound and Vibration
18.	K.N.Jv.2	Akademiia Nauk Ukranskoi S.S.R. Institut mehaniki, „Kontentraţiia napriajenii", Vipusk 2, Naukova Dumka, Kiev, 1968
19.	M.T.T.	Mehanika Tviordago Tela
20.	P.M.	Prikladnaia mehanika (limba rusă) (Прикладная механика)
21.	P.M.M.	Prikladnaia matematika i mehanika (limba rusă) (Прикладная математика и механика)
22.	P.P.	Problemî procinosti (limba rusă) (Продлемы проьности)
23.	T.A.F.M.	Theoretical and Applied Fracture Mechanics

CULEGERI DE LUCRĂRI

CL	
1.	*** European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000, Barcelona, 2000
2.	*** Novie metodî razruşeniia i mehanika gornîh porod. Sbornik naucinîh trudov. Akademiia Nauk Ukranskoi SSR Institut geotehniceskoi mehaniki, Kiev „Naukova Dumka", 1981, (Новые методы разрушения и механика горных порог)
3.	*** Voprosî mehaniki realinogo tviordogo tela, Akademiia Nauk Ukrainskoi SSR, Institut maşinovedeniia i automatiki, Kiev „Naukova Dumka", 1964, (Вопросы механики реального твёрдого тела)
4.	*** Probabilistic Fracture Mechanics and Fatigue Methods: Applications for Structural Design and Maintenance, ASTM-S.T.P.-798 / 1983
5.	*** Advances in Probabilistic Fracture Mechanics. (ed. C. (RAJ) Sundararajan), ASTM - PVP Vol.92 / 1984
6.	*** Aspects of Fracture Mechanics in Pressure Vessels and Piping, (ed. S.S.Palusamy, S.G.Sampath),ASTM-PVP Vol.58/1982

SUPLIMENT BIBLIOGRAFIC

După ce în anul 2002 am considerat încheiată bibliografia şi i-am dat o formă finală, am mai găsit o serie de lucrări pe care am considerat necesar să le semnalez. Pentru a scăpa de o muncă de sisif în vederea introducerii în lucrare a unei noi numerotări a bibliografiei, am adăugat acest supliment bibliografic. Mă voi referi la lucrările cuprinse în acest supliment cu abrevierea [SB...].

1. **SERENSEN V.S., MAHUTOV A.M.**, *Uslovia iniţirovaniia I rasprostraneniia treşcin malotiklovorazruşeniia v zonah konţentraţii napriajenii*, "Maşinovedanie", Nr.5, 1972
2. **PANASIUK V.V., ANDREIKIV E.A., STADNIK M.M.**, *Dolgovecinosti kvazihrupkovo tela s vnutrenii treşcinoi, blizkoi v plane k krugovoi, pri ţikliceskom n ajrujenii*, P.P. Nr.5, 1977, p.19-22
3. **MADENCI E., SERGEEV B., SHSKSRAYEV S.**, *Boundary collocation method for multiple defect interaction in an anisotropic finite region*, I.J.F., 94, 1998, p.339-355
4. **LEE S.S.**, *Free-edge stress singularity in a two-dimensional unidirectional viscoelastic laminate model*, J.A.M., Vol.64 (1997), p.408-414
5. **ESHELBY J.D.**, *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*, Proceedings of the Physical Society, London, A241, 1957, p.276-303
6. **SHERMAN D.I.**, *On the problem of plane strain in non-homogeneous media*, Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity, ed. WOLSZAK, Pergamon Press, p.3-20
7. **NEMAT-NASSER S.**, *Averaging theorems in finite deformation plasticity*, Mechanics of Materials 31, 1999, p.493-523
8. **NEWMAN J.C. Jr.**, *Analysis of fatique and fatique-crack growth under constant and variable-amplitude loading*
9. **MOGILEVSKAYA S.G., CROUCH S.L.**, *A Galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions with homogeneously imperfect interfaces*, I.J.S.S. 39, 2002, p. 4723-4746
10. **MOGILEVSKAYA S.G., CROUCH S.L.**, *A Galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions*, I.J.N.M.E., Vol.52, 2001, p.1069-1106
11. **MICHELITSCH TH., LEVIN V.M.**, *Inclusion and Inhomogeneity Problems in the Hexagonal Electroelastic Medium*, Phys. Stat. Sol. (b) 215, R13, 1999
12. **OLLER S., SALOMÓN O., OÑATE E.**, *Thermo-mechanical fatique analysis using generalived continuum damage mechanics and the finite element method*, I.J.N.M.E., 2001
13. **NARAYAN S.H., BEUTH J.L.**, *Designation of mode mix in orthotropic composite delamination problems*, I.J.F. 90, 1998, p.383-400
14. **TOSHIMITSU OTSU, WEN-XUE WANG, YOSHIHIRO TAKAO**, *Asymmetrical cracks parallel to an interface between dissimilar materials*, I.J.F., 96, 1999, p.75-100
15. **CARSTENSEN C., DOLZMANN G., FUNKEN S.A., HELM D.S.**, *Locking-free adaptive mixed finite element methods in linear elasticity*, C.M.A.M.E. 190, 2000, p.1701-1718
16. **ZHOU CHENG-TI**, *Phenomenological theory of failure criterion for composite materials*, Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, Vol.5, Nr.2, Apr. 1984, p. 1143-1150
17. **RICE J.R.**, *Recapitulation of important facts about tensors*, Course Notes for ES 120, Febr. 2001
18. **RITTEL D.**, *Thermomechanical aspects of dynamic crack initiation*. I.J.F. 99, 1999, p.199-209

19. REDDY Y.S.N., DAKSHINA MOORTHY C.M., REDDY J.N., *Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.30, Nr.5, 1995, p. 629-649
20. PETERS J.O., BOYCE B.L. ş.a., *On the application of the Kitagawa-Takahashi diagram to foreign-object damage and high-cycle fatigue*, E.F.M. 69, 2002, p.1425-1446
21. PODILCIUK N.Iu., *Triohmernie zadaci teorii uprugosti*, Kiev, „Naukova Dumka", 1979
22. RUSINKO N.K., *Ob usloviiah voyniknoveniia polos plasticinosti pri rastiajenii plastinki s priamo lineinoi şceliiu*. Culegeri de lucrări rândul 3
23. ONAŞKO V.L., *O vliaianie zakona raspredeleniia sil vzaimodeistviia mejdu povernostiami mikrotreşcin na usloviia razruşeniia hrupkovo tela*, Culegeri de lucrări rândul 1
24. SAVIN N.G., *Raspredelenie napriajenii okolon otverstii*, Izd. "Naukova Dumka", Kiev, 1968
25. BUGA M., ILIESCU N., *Consideraţii privind evaluarea stării de tensiune în unele probleme de contact cu ajutorul fotoelasticităţii*, Simpozion Ştiinţific, Suceava, 1985
26. BUGA M., ILIESCU N., ATANASIU C., TUDOSE T., TIPERCIUC Gh., *A Photoelastic Invesigation on Pressure Distribution in Contact Area between Tire and Ground*, V.D.J. Berichte nr.313, 1978
27. BUGA M., ILIESCU N., PERIDE N., *On the Szress State in the Work Rolls of a Quarto Rolling Mill*, Proc. Of the 9th Int. Conf. On Exp. Mech., Copenhaga, 1990
28. ILIESCU N., CONSTANTINESCUD.M., JIGA G., PASTRAMĂ Şt., *Photoelastic Determination of the Mode I Stress Intensity Factor*, "Politehnica" Scientific Bulletin, 1994
29. ILIESCU N., NĂSTĂSESCU V., *Contribuţii privind determinarea factorului de intensitate a tensiunilor la vârful fisurii unei plăci cu crestătură*, Simpozionul naţional de Mecanica Ruperii, Midia, 1996, p.85-100
30. ILIESCU N., CONSTANTINESCUD.M., PASTRAMĂ Şt., *Cercetări privind estimarea factorului de intensitate a tensiunilor la vârful unei fisuri centrale străpunse*, "Politehnica" Scientific Bulletin, 1994
31. MOCANU D.R. (coord.), *Analiza experimentală a tensiunilor*, Vol.I-II, Cap.4 (Vol.I) ILIESCU N., BOLEANŢU L., PĂSTRAV I., p.298-433, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977
32. *** Vishay Measurements Group, Tech. Note TN-701, *Calibration of Photoelastic Coatings*
33. *** Vishay Measurements Group, Tech. Note TN-704, *How to Select Photoelastic Coatings*
34. *** Vishay Measurements Group, Tech. Note TN-706, *Corrections to Photoelastic Coating Fringe-Order Measurements*
35. *** Vishay Measurements Group, Tech. Note TN-708, *Principal Stress Separation in Photo-Stress Measurements*
36. NADEAV C.J., *Eshelby Tensors*
37. BERRYMAN G.J., *Generalization of Eshelby's formula for a Single Ellipsoidal Elastic Inclusion to Poroelasticity and Termoelasticity*, Lawrence LivermoreNational Laboratory, 1997
38. MURA TOSHIO, *Micromechanics of Defects in Solids*, Kluwer, Dordrecht, second revised edition, 1987
39. IOSIPESCU N., *Introducere in fotoelasticitate*, Vol. I (1958), Vol. II (1960), Ed. Tehnică, Bucureşti
40. FROCHT M.M., *Phototoelasticity*, Vol.I, II, John Wiley and Sons, 1948, 1949
41. HETENYI M., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, London 1950
42. PĂSTRAV I., *Analogia electro-optică – metodă auxiliară în fotoelasticimetrie. Studii şi cercetări de mecanică aplicată*, Bucureşti, 1974, 33, nr.3, p.563-568
43. BOLDEA M., MUNTEAN C., *Culegere de probleme rezolvate în Turbo Pascal*, Editura Mirton, Timişoara, 1994
44. BANDU I., MUNTEAN C., *Aplicaţii rezolvate în Foxpro 2.0*, Editura Mirton, Timişoara, 1995
45. MUNTEAN C., *Die Arbeit mit relationalen Database Dateien bei der Benutzung eingebauter FoxPro Generatoren*, Analele Universităţii de Vest, Timişoara, 1995
46. MUNTEAN C., *Data Exchange Between Visual FoxPro and other Windows-based Applications*, Analele Universităţii de Vest, Timişoara, 1999