

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ

Nr. Inv. 029.994

Dulap 163 Lit. 17

A "POLITEHNICA" TIMIȘOARA
de Automatică și Calculatoare

Ing. CORNELIA – VICTORIA ANGHEL

TEZA DE DOCTORAT

CONTRIBUTII LA IDENTIFICAREA
ON-LINE A SISTEMELOR UTILIZÂND
SERII DE FUNCȚII TEMPORALE

Conducător științific:
Prof.univ.dr.ing. Ștefan GÂRLAȘU

TIMIȘOARA
- 2001 -

*Parintilor mei.
daca nu ati fi existat, trebuia sa fiti inventati*

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ
Nr. volum 629.497
După 369 Lit. A

C U V Â N T Î N A I N T E

Această lucrare este rodul eforturilor susținute și a unei îndelungate colaborări cu o seamă de specialiști competenți, mărinimoși și sufletești care au fost alături de mine în momentele grele și care au constituit o sursă nesecată de energie pentru mine, încurajându-mă permanent.

Afirmând cele de mai sus, mă refer în primul rând la conducătorul științific al acestei teze, Dl. Prof.univ.consult.dr.ing. **Ștefan Gârlaşu**, care mi-a călăuzit pașii și mi-a fost alături ori de câte ori a fost necesar, m-a sfătuit, îndrumat, învățat, încurajat și susținut în permanență. Mulțumesc din suflet pentru tot ce a făcut pentru mine și doresc să aibă o activitate cât mai lungă, încununată de succese.

Exprim întreaga mea gratitudine distinșilor referenți științifici: Dl. Prof.univ.dr.ing. Mircea Ivănescu, Dl. Prof.univ.dr.ing. Tiberiu Coloși și Dl. Prof.univ.dr.ing. Octavian Proștean, care au avut răbdarea să analizeze prezenta lucrare și să contribuie cu generozitate la creșterea valorii sale științifice.

Un aport esențial în finisarea conținutului științific al tezei și-a adus și dl. Prof.univ.dr.ing. Toma-Leonida Dragomir, șeful Catedrei de Automatică a Politehnicii timișorene, căruia îi exprim pe această cale, alesele mele mulțumiri.

Mulțumesc pe această cale tuturor domnilor profesori de la Universitatea Politehnica Timișoara, Facultatea de Automatică și Calculatoare, pentru îndrumările, ajutorul și sfaturile pertinente acordate: Prof.univ.consult.dr.ing. Nicolae Budișan, Prof.univ.dr.ing. Ștefan Holban, Prof.dr.ing. Ioan Mureșan, Prof.univ.dr.ing. Ionel Sabin, Prof.univ.dr.ing. Popa Mircea, Prof.univ.dr.ing. Mihai Crețu, Conf.dr.ing. Daniel Curiac,

Ș.I.dr.ing. Ioan Filip și mulți alții care mi-au sprijinit eforturile în activitatea de autoperfecționare.

De asemenea țin să mulțumesc colegilor de la Universitatea "Eftimie Murgu" Reșița: Prof.univ.dr.ing. Ioan Ruja, Prof.univ.dr. Constantin Popp, Conf.dr.ing.Eugen Răduca, care au participat la unele comisii de examinare în perioada de pregătire a tezei.

Nu pot omite sprijinul și înțelegerea ce am găsit-o la conducerea Sucursalei CEC Reșița, creând un climat favorabil activității de cercetare științifică.

Doamna Elena Grădinaru a fost trup și suflet alături de mine încă de la început, m-a sprijinit și ajutat când am avut nevoie de suport.

Părinții mei au fost alături de mine pe tot parcursul vieții și mai cu seamă, în momentele dificile pe care a trebuit să le depășesc, m-au sprijinit neobosit cu loialitate și perseverență atunci când eu refuzam ajutor exterior.

Cornelia-Victoria ANGHEL

REȘIȚA, la 21.11.2000

CUPRINS

	Pag.
INTRODUCERE	6
CAPITOLUL 1. TRANSFORMĂRI ORTOGONALE	10
1.1. Utilitatea transformărilor ortogonale în prelucrarea informației	10
1.2. Proprietatea de ortogonalitate	11
1.3. Reprezentarea datelor prin funcții ortogonale.	12
1.4 Inegalitatea lui Bessel. Teorema lui Parseval.	13
1.5. Sensul fizic al teoremei lui Parseval.	14
CAPITOLUL 2. IDENTIFICAREA CU SPECTRE FOURIER	16
2.1. Generalități.	16
2.2. Spectre de amplitudine	18
2.2.1. Spectrul discret unilateral al dezvoltării Fourier.	18
2.2.2. Spectrul bilateral discret al funcțiilor semnal analogice periodice.	20
2.2.3. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice și analogice.	21
2.2.4. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice eșantionate.	23
2.2.5. Transformata discretă Fourier.	24
2.2.6. Relații între diverse forme de spectre Fourier de amplitudine.	25
2.2.7. Concluzii.	28
2.3. Spectre Fourier de putere și energetice.	29
2.3.1. Introducere.	29
2.3.2. Funcțiile de corelație.	29
2.3.3. Proprietatea de multiplicare și teorema lui Parseval.	32
2.3.4. Definierea funcțiilor de densitate spectrale energetice și de putere.	34
2.3.5. Definierea spectrelor energetice și de putere propriu-zise.	35
2.3.6. Teoremele WIENER-HINCIN.	35
2.3.7. Unele proprietăți ale funcțiilor de densitate spectrală.	37
2.3.8. Clasificarea spectrelor Fourier	39

2.3.9. Efectul troncaturii funcției semnal.	40
2.4. Transferul liniar.	43
2.4.1. Generalități.	43
2.4.2. Răspunsul caracteristic al sistemelor fizice.	43
2.4.3. Ecuația de convoluție, teorema lui Plancherel.	44
2.4.4. Transferul liniar exprimat prin funcțiile de corelație.	46
2.4.5. Transferul liniar în domeniul frecvențial.	46
2.4.6. Funcția de coerență.	49
2.4.7. Relații dintre funcțiile analogice și discrete ale corelațiilor și spectrelor.	51
2.4.8. Operatorul densității spectrale.	53
2.5. Transformata Fourier. Algoritm FFT	55
2.6. Metode frecvențiale de identificare.	61
2.6.1. Determinarea experimentală a curbei indiciale.	61
2.6.2. Identificarea sistemelor cu transferometrul.	62
2.6.3. Metoda corelației.	63
2.6.4. Metodă de optimizare a unui sistem utilizând corelatorul și analizorul armonic.	64
2.6.5. O identificare analitică utilizând operatorul D.	66
2.6.6. Identificarea unui proces instabil prin metoda experimentului cu releu.	68
2.6.7. Identificarea armonică numerică.	76
CAPITOLUL 3. FUNCȚII ORTOGONALE WALSH	82
3.1. Tipuri de funcții Walsh.	82
3.2. Transformata rapidă Walsh.	91
3.3. Utilizarea funcțiilor Walsh pentru identificarea sistemelor ortogonale Walsh.	95
3.4. Elaborarea matricei P. Identificarea cu funcții Walsh.	96
3.5. Program pentru transformata rapidă Walsh.	99

CAPITOLUL 4. FUNCȚII ORTOGONALE LAGUERRE	101
4.1. Definirea funcțiilor ortogonale Laguerre. Proprietăți.	102
4.2. Modulatoare Laguerre.	103
4.3. Algoritm de identificare a proceselor cu funcții Laguerre.	114
CAPITOLUL 5. FUNCȚII ORTOGONALE HAAR	122
5.1. Definirea funcțiilor ortogonale Haar. Proprietăți.	122
5.2. Definirea matricei Haar $H(m)$.	125
5.3. Matricea integralelor funcțiilor Haar.	126
5.4. Determinarea integralelor aferente matricii P .	127
5.5. Identificarea unui sistem MIMO prin intermediul funcțiilor Haar.	130
CAPITOLUL 6. CONCLUZII GENERALE ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE	138
ANEXA 1. PROGRAM DE TESTARE A TRANSFORMATEI RAPIDE FOURIER	146
ANEXA 2. PROGRAM DE CALCUL PENTRU TRANSFORMATA RAPIDĂ FOURIER (FFT) ȘI TRANSFORMATA RAPIDĂ INVERSĂ FOURIER (IFFT).	151
ANEXA 3. EVALUAREA VIBRAȚIILOR COMPRESOARELOR INDUSTRIALE DE AER DE 50 ȘI 100 M³/MIN CU AJUTORUL COMPUTERULUI.	160
ANEXA 4. PROGRAM C++ PENTRU DETERMINAREA COEFICIENȚILOR WALSH CU ORDONARE DUPĂ PALEY	174
Subrutine MATLAB utilizate.	182
Tabel de abrevieri.	183
B I B L I O G R A F I E	184

INTRODUCERE

Un domeniu de mare actualitate și interes în tehnica modernă îl constituie identificarea on-line a evoluției parametrilor sistemelor, din punct de vedere statistic, temporal și frecvențial [1], [2], [41], [42]. Cunoașterea acestora este necesară nu numai datorită dinamicii sistemelor, ci și a progreselor științifice deosebite de aplicare a tehnicilor de identificare oferite de calculatoarele numerice, atât prin partea hardware, cât și prin software-ul acestora.

Identificarea se poate defini, într-o formă simplificată, ca fiind determinarea pe baza unei intrări sau a unei ieșiri, a unui sistem, aparținând unei anume clase date de sisteme, echivalent într-un anume sens cu sistemul testat [23], [63], [43], [128].

Așadar, pentru a reuși realizarea unei identificări a sistemului considerat, sunt necesare trei elemente principale: clasa modelelor, clasa intrărilor și criteriul de concordanță (care determină clasa abordărilor) [50], [108], [115], [130].

Construirea modelului reprezintă o etapă principală și importantă, modelul constituind aspectele esențiale ale sistemului existent (sau care urmează a fi construit). Modelele pot fi conceptuale, fizice sau matematice. [51], [52], [53].

O clasificare a acestora le-ar putea împărți în modele parametrice-neparametrice: continue-discrete; deterministe-stohastice; monovariabile-multivariabile; caracterizări de intrare-ieșire-caracterizări de stare; variabile în timp: neliniare; cu parametrii distribuiți; caracterizate de hardware (echipamente) și software (pachete de programe), etc [60], [111], [116].

Se subliniază faptul că, în prezenta abordare, identificarea se efectuează cu serii ale funcțiilor temporale, care nu trebuie confundate cu succesiunile eşantioanelor de semnale temporale.[20], [21], [22], [97].

Odată ce tipul de model a fost definitivat se trece la a doua etapă, cea a determinării parametrilor acestuia. Această problemă poate fi soluționată utilizând două abordări:

- optimizarea parametrică;
- estimarea parametrilor.

Prima abordare constă în definirea euristică a unui criteriu (funcție de cost) și optimizarea acestuia în raport cu parametrii modelului, iar cea de-a doua cale conduce în mod frecvent tot la problema optimizării unui anumit criteriu.

Funcțiile de cost ce apar în problema de identificare sunt în general neliniare în parametrii modelului și deci pentru extremizarea lor trebuie utilizate metodele de programare neliniară [29], [45], [54], [61], [90], [114].

Semnalele de intrare, alături de modelul ales și de abordarea utilizată, condiționează în mod esențial rezultatele oricărui experiment de identificare [63].

Pentru obținerea unor rezultate cât mai corecte în identificarea proceselor, a fost absolut necesară utilizarea unor semnale de intrare speciale, prin intermediul cărora să se obțină anumite informații direct utilizabile, despre proces [89], [90], [95].

Astfel, utilizarea semnalului de probă treaptă produce imediat factorul de amplificare, timpul mort și constanta de timp principală a procesului testat. Totuși, datorită spectrului rapid descrescător al treptei, determinarea directă din răspunsul indicial a constantelor de timp mici este dificilă, deoarece răspunsul indicial nu va conține informații despre dinamica procesului în domeniul frecvențelor înalte [106], [108].

Acest dezavantaj poate fi depășit utilizând pentru testarea procesului un semnal de probă sinusoidal. Astfel, se poate obține întreaga caracteristică de frecvență, dar timpul de experimentare necesar, este destul de mare [97].

Soluția reducerii acestui timp mare, ar fi combinarea unor semnale sinusoidale de anumite amplitudini și pulsații, într-un singur semnal de test. Generarea acestui semnal determină obținerea mai multor puncte ale caracteristicii de frecvență, dar este mai dificil de realizat. Pentru a ușura generarea unui astfel de semnal există posibilitatea de a proiecta un semnal binar având un spectru de impuls.

Modelele de identificare utilizând semnale de probă treaptă, sinusoidal sau binar cu spectru predeterminat se complică mult dacă în prelucrarea experimentală se iau în considerare perturbațiile care acționează asupra sistemului.

Pentru eliminarea zgomotelor s-au introdus tehnicile de corelație, în cadrul cărora intrarea este un zgomot alb sau o aproximație a acestuia (de exemplu un semnal pseudo-aleator-binar) [72], [73].

Abordarea în identificarea sistemelor poate fi diferită, de la caz la caz și anume:

- **identificare statică sau dinamică;** statică dacă se urmărește descrierea funcționării sistemului, presupus stabil, pentru intrări constante, iar dinamică în cazul în care se urmărește determinarea relațiilor dintre evoluția în timp a ieșirilor sistemului și cea a intrărilor sale.

- **identificarea continuă sau discretă:** continuă pentru evoluția continuă în timp a intrărilor și ieșirilor sistemului și discretă pentru evoluția discretă în timp a acestora, rezultând în acest caz un model discret.
- **identificarea monovariabilă sau multivariabilă:** monovariabil când sistemul este caracterizat de o singură intrare și o singură ieșire, iar multivariabilă pentru mai multe intrări și mai multe ieșiri.
- **identificarea utilizând un model liniar sau unul neliniar:** modelul este liniar dacă evoluția în timp a ieșirilor sistemului, în funcție de cea a intrărilor sale, poate fi reprezentată printr-un sistem liniar de ecuații diferențiale (cazul continuu) sau cu diferențe (cazul discret), caz în care se poate aplica principiul superpoziției, iar modelul este neliniar dacă sistemul de ecuații diferențiale sau cu diferențe este neliniar.
- **identificarea parametrică sau neparametrică:** modelul se numește parametric dacă este descris de ecuații diferențiale sau prin ecuații cu diferențe (modele cu parametri concentrați) și prin ecuații cu derivate parțiale (modele cu parametri distribuiți), iar modelul este de natură neparametrică dacă clasa de modele este reprezentată prin seturi de curbe sau tabele de valori. Funcția pondere și caracteristicile de frecvență ale unui sistem se înscriu în această categorie de modele.
- **identificarea deterministică sau statistică:** reprezentarea sistemului este deterministă în situația în care perturbațiile nu sunt considerate drept funcții aleatoare, ci semnale deterministe, măsurabile sau nu, identificarea este statistică, dacă reprezentarea sistemului este stohastică, deci modelul include elemente aleatoare.

În aplicațiile practice de identificare și optimizare a proceselor tehnologice se utilizează în prezent clase de **funcții ortogonale** (Fourier, Walsh, Haar, Laguerre, Hartley, Legendre, Chebîshew, etc) [3], [29]. Principala caracteristică a tehnicilor bazate pe funcțiile ortogonale constă în convertirea ecuațiilor diferențiale, ce descriu comportarea dinamică a procesului, în ecuații algebrice. Aceasta se realizează cu succes prin calculul operațional Laplace, Fourier și Walsh pentru sisteme SISO sau MEMO de ordin redus [45].

Așadar, în cadrul prezentei teze de doctorat, privind identificarea și optimizarea cu ajutorul funcțiilor ortogonale, am abordat în afară de funcțiile Laguerre care sunt într-o anumită măsură dificil de utilizat și alte funcții ortogonale, dintre care am ales funcțiile Walsh și Haar. Această alegere se justifică prin faptul că abordarea acestor funcții este mai simplă.

În cazul sistemelor MIMO de ordin superior, la care se utilizează reprezentarea cu mărimi de stare, calculul clasic devine dificil sau chiar imposibil de efectuat. Chen și Hsiao [44], pornind de la integrala unui vector $\underline{V}(t)$, având ca elemente funcții ortogonale, într-un interval dat, au exprimat-o sub formă de produs $P\underline{V}(t)$, în care P este o matrice care poate fi determinată univoc pentru funcții ortogonale particulare.

Obiectivele tezei

Utilitatea transformărilor ortogonale în prelucrarea informației, cu posibilitatea reducerii timpului de calcul de cel puțin 100 de ori, față de metodele matematice clasice, sunt prezentate la începutul acestei teze, (capitolul 1).

Teza se dorește a fi un studiu de identificare a parametrilor sistemelor automate utilizând serii temporale uzuale: Fourier, (capitolul 2), Walsh cu ordonare după Walsh, Hadamard și respectiv Paley, (capitolul 3), Laguerre, (capitolul 4) și Haar, (capitolul 5).

În final, luând în considerare avantajele și dezavantajele utilizării acestora, se decide care dintre aceste funcții ortogonale reduce numărul de operații prin creșterea vitezei de lucru și ușurarea calculului în identificare.

Seriile de funcții temporale sunt cele ale funcțiilor ortogonale, care prin proprietățile lor conferă un quantum informativ important, ceea ce justifică utilizarea lor în prelucrarea informației și respectiv, în procesul de identificare a sistemelor.

În cadrul celor 5 capitole din prezenta teză sunt abordate aspectele teoretice fundamentale care sunt urmate de exemple edificatoare și de aplicații imediate (subparagrafele 2.4.5, 2.4.6, 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5, 2.6.6, 2.6.7, 3.2.1, 4.2, 4.3, 5.4, 5.5).

Relațiile matematice exacte, în număr de 439 numerotate, cele 82 de figuri, cele 13 tabele și o organigramă, atestă rigurozitatea afirmațiilor din lucrare.

În cele 4 Anexe ale tezei sunt cuprinse un program de testare a transformatei rapide Fourier la generarea unui semnal de timp constând dintr-o undă de lărgime de 200 Hz la care se adaugă o undă cosinus de 2000 Hz, care se reprezintă grafic pe monitorul calculatorului și se evidențiază performanțele transformatei rapide Fourier. (Anexa 1); un program de calcul a coeficienților pentru transformatele rapide directe și inverse Fourier. (Anexa 2); procedeele de evaluare, prelucrare și culegere a datelor experimentale pentru compresoarele industriale de aer performante fabricate la U.C.M.Reșița S.A. de 50 și 100 m³/min, cu ajutorul computerului. (Anexa 3); și un program C++ pentru determinarea rapidă și exactă a coeficienților Walsh cu ordonare după Paley. (Anexa 4).

Ca o concluzie se reliefează în finalul capitolului 5 superioritatea utilizării funcțiilor ortogonale Haar în identificarea on-line a sistemelor, în special a celor de tip MIMO. Sunt prezentate o serie de exemple cu reprezentări grafice prin aplicarea subrutinelor din MatLab *Bessel* (α, x), paragraful 5.5, care confirmă eficiența metodei Haar, aplicabilă sistemelor cu parametri distribuiți și aplicația funcției *expm*(\cdot) care permit determinarea curbelor pentru soluții Haar și Fourier corespunzătoare tensiunii și curentului la transmisia prin cablu.

Aceste considerente crează premise certe în aprofundarea studierii și cercetării în viitorul apropiat, a avantajelor utilizării metodelor de identificare on-line a sistemelor automate cu seriile de funcții temporale.

CAPITOLUL 1.

TRANSFORMĂRI ORTOGONALE

1.1. Utilitatea transformărilor ortogonale în prelucrarea informației

În analiza proceselor și sistemelor în evoluție, prin prelucrarea frecvențială și secvențială a semnalelor obținute de la aceste procese și sisteme, se utilizează proprietatea de ortogonalitate a unor clase de funcții algebrice, dintre care cele mai cunoscute sunt funcțiile trigonometrice (armonice) $\cos q\alpha$ și $\sin q\alpha$, care constituie împreună cu unitatea *sistemul trigonometric fundamental* $\{1, \cos q\alpha, \sin q\alpha\}$, [3], [67], [72], [77].

În general, pe lângă perfecționarea continuă a echipamentelor de calcul, în special prin creșterea vitezei de lucru, se urmărește reducerea timpului de calcul pe calculator, prin elaborarea unor rutine de program rapide, care conduc în final la micșorarea numărului de operații standard pe același echipament.

Transformările ortogonale pe care matematica ni le pune la dispoziție ne oferă posibilitatea elaborării unor programe și subrutine de scurtare a timpului de calcul de cel puțin 100 de ori comparativ cu metodele matematice clasice, [4], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [14], [27]

Sistemul trigonometric fundamental constituie un ansamblu de funcții ortogonale la care este asociată dezvoltarea în serie Fourier, respectiv transformata Fourier, cu aplicații în domeniul științifico-tehnic, constituind obiectul analizei armonice sau secvențiale [66].

Transformata Fourier, sub formă analogică sau discretă s-a impus în acustică, vibrații, hidromecanică, aerodinamică, electrotehnică, electronică, optică, structura materiei, teoria sistemelor, cibernetică și alte domenii în care s-a cerut analiza frecvențială în prelucrarea semnalelor provenite de la sistemele în evoluție, în scopul extragerii informației din acestea.

În anul 1965 Cooley și Tukey [57] au elaborat prima procedură rapidă ortogonală, denumită *Transformata Rapidă Fourier*, procedura FFT [Fast Fourier Transform].

În afară de funcțiile ortogonale trigonometrice în analiza semnalelor se utilizează cu rezultate remarcabile funcțiile ortogonale Laguerre, Walsh, Hartley, Haar, Legendre, [31], [33], [36], [37], [38], [40], [49], [64], [75], [76], [81], [83], [84], [85], [86], [94], [97], [98], [100], [103], [105], [128].

1.2. Proprietatea de ortogonalitate

Sistemul de funcții $\{u_n(t)\} = \{u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), u_n(t), \dots\}$ de variabilă reală și aproape peste tot diferite de zero, se numește *ortogonal* pe intervalul $[a, b]$, cu $(a < b)$, dacă [29]:

$$\int_a^b u_m(t)u_n(t)dt = \begin{cases} e_n, & \text{daca, } m = n; n = 0,1,2,\dots \\ 0, & \text{daca, } m \neq n; m = 0,1,2,\dots \end{cases} \quad (1.1)$$

în care variabila independentă t reprezintă fie valoarea momentană a timpului, fie o deplasare de translație l, o deplasarea unghiulară β , sau orice altă variabilă în funcție de care se exprimă mărimile u_n . În multe aplicații tehnice și științifice variabila t exprimă o mărime raportată t/T ; l/L ; $\beta/(2\pi)$; etc. în care T este perioada, L lungimea de undă și 2π perioada exprimată în radiani.

Vom presupune că pătratul integrabil al oricărei funcții $u_n(t)$ din mulțimea $\{u_n(t)\}$ este diferit de zero și de valoarea finită:

$$\int_a^b u_n^2(t)dt > 0; \quad \int_a^b u_n^2(t)dt < \infty \quad (1.2)$$

Condiția (1.1) exprimă faptul că funcțiile mulțimii $\{u_n(t)\}$ sunt ortogonale două câte două, iar condiția (1.2) exprimă faptul că nici una dintre funcțiile mulțimii sau sistemului ortogonal nu este identic nulă.

Sistemul $\{u_n(t)\}$ se numește *normat* dacă $e_n=1$, adică:

$$\int_a^b u_n^2(t)dt = 1; (n = 0,1,2,\dots) \quad (1.3)$$

Se poate arăta că orice sistem ortogonal se poate norma, observând că:

$$\frac{1}{c_n} \int_a^b u_n^2(t)dt = 1; (n = 0,1,2,\dots) \quad (1.4)$$

Rezultă că din sistemul ortogonal oarecare (1.1) se poate obține sistemul ortonormat $\{v_n(t)\}$, în care

$$v_n(t) = C_n^{-1/2} u_n(t); (n = 0,1,2,\dots) \quad (1.5)$$

Mărimea $+ \sqrt{c_n}$ se numește *norma funcției* $u_n(t)$ și se notează prin simbolul $\|u_n\|$, astfel că:

$$\|u_n\| = \sqrt{\int_a^b u_n^2(t)dt}; (n = 0,1,2,\dots) \quad (1.6)$$

Dacă $\{u_n(t)\}$ sistemul este ortonormat

$$\|u_n\| = 1; (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

1.3. Reprezentarea datelor prin funcții ortogonale.

Considerăm un semnal $x(t)$, real și nu peste tot egal cu 0 pe intervalul $[a:b]$, reprezentat sub formă de serie [30]:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t) \quad (1.8)$$

unde a_n constituie al n -lea coeficient al dezvoltării (1.8). Pentru a găsi pe a_n este suficient să multiplicăm cu $u_m(t)$ ambele părți ale relației (1.8) și să integrăm pe intervalul $[a:b]$:

$$\int_a^b x(t) u_m(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t) u_m(t) dt \quad (1.9)$$

În baza relației (1.1) în ipoteza că toți coeficienții $C_n=1$, rezultă

$$a_m = \int_a^b x(t) u_m(t) dt; (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

Mulțimea ortogonală $\{u_n(t)\}$, care satisface la condițiile (1.2) se numește *completă* sau *închisă*, dacă sunt adevărate fiecare din următoarele aserțiuni:

Nu există un semnal $x(t)$, care îndeplinind condiția:

$$\int_a^b x^2(t) dt < \infty \quad (1.11)$$

să conducă la egalitatea

$$\int_a^b x(t) u_n(t) dt = 0; (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

Pentru orice semnal $x(t)$, continuu pe porțiuni, care îndeplinește condiția (1.11), se poate evalua un număr oricât de mic $\varepsilon > 0$, astfel încât să existe un indice $n=N$ cu care să se realizeze o dezvoltare finită în serie [123]:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n u_n(t) \quad (1.13)$$

astfel încât:

$$\int_a^b \left[x(t) - \hat{x}(t) \right]^2 dt < \varepsilon \quad (1.14)$$

Din raționamentele de mai sus rezultă că dezvoltarea după funcțiile ortogonale permite să se reprezinte semnalul $x(t)$ sub formă de mulțime de coeficienți $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ în număr infinit. În cazul în care mulțimea ortogonală $\{u_n(t)\}$ este completă, reprezentarea se efectuează cu o mulțime finită de coeficienți $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$.

1.4 Inegalitatea lui Bessel. Teorema lui Parseval.

Se pune întrebarea: cât de bună este reprezentarea lui $x(t)$ în serie prin intermediul funcțiilor ortogonale (1.8), în cazul în care coeficienții a_n sunt evaluați prin relația (1.10)? Presupunem că seria $\sum b_n u_n(t)$ conținând N termeni oferă o mai bună reprezentare a lui $x(t)$. Criteriul "o mai bună" înseamnă că eroarea medie pătratică a funcției $x(t)$ și dezvoltarea sa în serie finită este cea mai mică [28]:

$$\varepsilon = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot u_n(t) \right]^2 dt$$

Dacă ținem seama relația (1.10) și de ortogonalitatea funcției $u_n(t)$, eroarea medie pătratică devine:

$$\varepsilon = \int_a^b x^2(t) dt - \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 - \sum_{n=0}^{N-1} [b_n - a_n]^2 \quad (1.15)$$

Dacă $a_n = b_n$ ultimul termen se anulează și eroarea medie pătratică ε realizează valoarea minimă.

Din (1.15) derivă așa numita *inegalitate a lui Bessel* [28]:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b x^2(t) dt \quad (1.16)$$

Limita superioară a sumei poate fi luată ∞ , în loc de $N-1$, deoarece intervalul $[a, b]$ nu depinde de N și oricare ar fi valoarea acestuia este același.

Sistemul $\{u_n(t)\}$ se numește ortogonal, normal și complet, dacă valoarea medie pătratică ε tinde spre 0, cu majorarea lui N , pentru orice pătrat integrabil al lui $x(t)$ pe intervalul $[a, b]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left[x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot u_n(t) \right]^2 dx = 0 \quad (1.17)$$

În acest caz (1.16), inegalitatea lui Bessel devine:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b x^2(t) dt, \quad (1.18)$$

care constituie teorema completudinii sau *teorema lui Parseval* [28].

La această teoremă se putea ajunge și ocolind relația care exprimă inegalitatea lui Bessel, ridicând la pătrat relația (1.8), iar apoi integrând ambele părți, pentru care se aplică proprietatea de ortogonalitate, conform relației (1.1).

1.5. Sensul fizic al teoremei lui Parseval

Teorema lui Parseval, prin care se exprimă proprietatea de sistem ortogonal complet, evidențiază și o legătură structurală între funcția semnal originală $x(t)$ și coeficienții a_n ai dezvoltării în serie după sistemul ortogonal $\{u_n(t)\}$, [68].

Asociind funcția semnal $x(t)$ cu curentul electric care traversează o rezistență de 1Ω și considerând limitele $a=t_0$ și $b=t_0+T$, relația (1.18) se scrie:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \quad (1.18')$$

și dacă se împart ambii membri cu durata T a intervalului temporal:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{T}, \quad (1.19)$$

Interpretarea fizică a relațiilor (1.18) și (1.19), ar fi că, integrala din membru stâng al ecuației (1.18') exprimă energia disipată în rezistență de 1Ω , egală cu suma energiilor reprezentate prin pătratele coeficienților dezvoltării în serie după funcțiile sistemului $\{u_n(t)\}$. În relația (1.19) integrala din membrul întâi reprezintă puterea disipată de semnalul $x(t)$, care este egală cu suma puterilor a_n^2/T aferente coeficienților a_n ai dezvoltării. În timp ce în membrul stâng funcția semnal de sub semnul integrală este continuă (analogică), în membrul drept, energiile, respectiv puterile aferente indicilor $n=0, 1, 2, \dots$ ai coeficienților dezvoltării, au caracter discret, după șirul natural al numerelor pozitive.

Reprezentarea grafică în sistemul cartezian de coordonate a coeficienților a_n în funcție de rangul n se numește *spectru generalizat*, iar valoarea lui a_n pentru un n dat se numește *linie spectrală* [68].

Teorema lui Parseval evidențiază așadar, egalitatea dintre energia sau puterea semnalului și suma energiilor sau puterilor aferente liniilor spectrale ale coeficienților dezvoltării după sistemul ortogonal considerat. Astfel, Teorema lui Parseval apare ca o formă particulară a principiului conservării energiei.

Spectrul generalizat al oricărei transformări ortogonale se poate exprima printr-o funcție discretizată după variabila independentă temporală, utilizând funcția impuls unitar a lui Dirac:

$$S(q) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \cdot \delta(n-q); \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad q=0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

Funcția spectrală energetică este:

$$W(q) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q^2 \cdot \delta(n-q); \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad q=0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

și respectiv de putere

$$P(q) = \frac{1}{T} \sum_{q=0}^{\infty} a_q^2 \cdot \delta(n-q); \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad q=0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

pentru orice tip de transformare ortogonală.

CAPITOLUL 2.

IDENTIFICAREA CU SPECTRE FOURIER

2.1 Generalități

Semnalele fizice se clasifică în *deterministe* și respectiv *aleatoare* sau *stohastice*. Amplitudinea în funcție de timp a unui semnal determinist poate fi stabilită aprioric pentru orice moment trecut sau viitor, în timp ce în cazul semnalului aleator evaluarea exactă a amplitudinii nu este posibilă din cauza caracterului său imprevizibil, de hazard [41], [42], [51].

Semnalele deterministe se clasifică în *periodice* și respectiv *aperiodice*. Cele periodice prezintă proprietatea de repetitivitate a unui tronson temporal, denumit perioadă. Semnalele aperiodice nu posedă această proprietate, putându-se considera că sunt constituite dintr-o singură perioadă pe întreaga sa durată de existență. Sub aspectul periodicității se poate considera că semnalele aleatoare sunt aperiodice [123].

Atât semnalele periodice cât și cele aperiodice se pot dezvolta în serie după orice sistem de funcții ortogonale. În particular dacă sistemul de funcții ortogonale este sistemul trigonometric fundamental, se realizează dezvoltarea în serie trigonometrică, sau în serie Fourier, această dezvoltare constituind obiectul analizei armonice.

Sistemul ortogonal trigonometric fundamental este definit prin ansamblul de funcții [67]:

$$\{1; \cos q\alpha; \sin q\alpha\} = \{1, \cos \alpha, \sin \alpha, \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \dots, \cos q\alpha, \sin q\alpha, \dots\} \quad (2.1)$$

Dezvoltarea în serie trigonometrică, după acest sistem de funcții ortogonale, a unui semnal fizic oarecare periodic sau aperiodic, a adus importante contribuții în diverse domenii ale științei: acustică, vibrații, optică, energetică, termodinamică și în ceea ce interesează tema prezentată, în analiza dinamică a sistemelor în evoluție, în particular în identificarea și conducerea optimală a acestora [110], [111], [115], [130], [135], [137].

Generalizarea dezvoltării în serie trigonometrică a condus la definirea transformatei operaționale Fourier, și la asocierea acesteia cu transformata operațională Laplace, ambele transformate constituind un instrument matematic deosebit de util sub aspect teoretic și practic [28], [126].

Seriile trigonometrice, exprimate prin unde sinusoidale și cosinusoidale, în formă condensată se exprimă prin linii spectrale de anumite frecvențe, ansamblul acestora

constituind ceea ce numim spectre armonice. Ca și funcțiile semnal, ansamblurile spectrale pot fi analogice și discrete, respectiv periodice sau aperiodice.

Sub aspectul formelor spectrelor Fourier, rezumativ se disting următoarele cazuri:

- a. Dezvoltarea în serie Fourier a semnalelor periodice, obținându-se un spectru unilateral, discret, aferent frecvențelor reale pozitive.
- b. Dezvoltarea în serie Fourier a semnalelor periodice, utilizând variabilele complexe, obținându-se un spectru bilateral, discret, utilizând noțiunea de frecvență negativă.
- c. Transformata integrală Fourier, aferentă funcțiilor aperiodice și analogice, cu spectru continuu și aperiodic.
- d. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice eșantionate continuu și periodic.
- e. Transformata discretă Fourier, la care atât semnalul cât și spectrul aferent sunt discrete și periodice.

Spectrele obținute direct din semnal se numesc spectre de amplitudine, spre deosebire de cele derivate din funcțiile de corelație, care se numesc spectre energetice sau de putere.

Cunoașterea legăturilor dintre diferitele spectre de amplitudine pe de-o parte și cele de putere pe de altă parte este absolut necesară pentru analist, pentru evitarea unor erori grosolane în interpretarea rezultatelor oferite de analiza Fourier.

Funcțiile spectrale de putere, asociate cu funcțiile de corelație sunt intens utilizate în procedurile de identificare și optimizare a sistemelor liniare [131]. Evaluarea lor se efectuează cu ajutorul transformatei discrete Fourier (TDF), prin coeficienții Fourier $C_x(q)$. Pentru diferitele genuri de spectre de putere Fourier se va prezenta o schemă cu relații ale acestora în funcție de coeficienții transformatei discrete Fourier, coeficienți obținuți de calculator cu subrutine rapide Fourier. (Anexele 1 și 2).

Trebuie menționat că în afara procesului de eșantionare a semnalelor pentru introducerea acestora în calculator din cauză că semnalele sunt definite pe o durată finită T , la prelucrarea numerică intervine efectul trunchierii prin modificarea substanțială a succesiunii spectrale, apărând necesară înlăturarea acestui efect prin operația de netezire spectrală [95].

Având la îndemână acest instrument operațional furnizat de seriile trigonometrice Fourier, utilizând metode analitice sau echipamente specializate, corelatoare și analizoare spectrale numerice, respectiv calculatoare performante care realizează funcțiile acestora, se poate evalua funcția de transfer a sistemelor liniare și acordarea respectiv optimizarea conducerii automate a acestora [134], [136].

2.2 Spectre de amplitudine

2.2.1 Spectrul discret unilateral al dezvoltării Fourier

Un semnal $x(t)$ este periodic dacă există un tronson de durată T care se repetă indefinit în traseul său temporal analogic, adică [68]:

$$x(t) = x(t \pm kT), \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

În fig.2.1.a. este prezentată forma de undă a unui semnal analogic periodic, în funcție de variabila independentă temporală t . După, cum este cunoscut, același semnal se poate exprima în funcție de variabila independentă unghiulară $\alpha = \omega(t)$ în care ω este pulsația sau în funcție de frecvența ν , care exprimă numărul de perioade în unitatea de timp, într-o secundă, cu $\omega = 2\pi \nu$, astfel că între T , ω , ν , aferente semnalului periodic există relațiile:

$$\nu_1 = \frac{1}{T}; \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}; \quad \alpha = 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} \quad (2.3)$$

iar pentru variabila temporală independentă, frecvența primei armonici, denumită și frecvența undei fundamentale, rezultă:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2 \cdot \pi \cdot \nu_1} = \frac{T}{2 \cdot \pi} \cdot \alpha \quad (2.4)$$

Se demonstrează ușor că o funcție semnal periodică și analogică este integrabilă pe orice segment temporal de lungime T , astfel că aplicând proprietățile funcțiilor ortogonale, semnalul se poate dezvolta în serie trigonometrică.

Un semnal analogic periodic $x(t)$ de perioadă T , care satisface condițiile Dirichlet, se poate dezvolta după sistemul ortogonal trigonometric fundamental de funcții, sub forma unei serii [69], [70]:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left[A_q \cos 2 \cdot \pi \cdot q \cdot \nu_1 \cdot t + B_q \sin 2 \cdot \pi \cdot q \cdot \nu_1 \cdot t \right]; \quad q \in Z. \quad (2.5)$$

q fiind un număr întreg, real și pozitiv.

Aceeași expresie se poate scrie în funcție de variabila t sau $\alpha = \omega t$:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left[A_q \cos \frac{2\pi}{T} \cdot q \cdot t + B_q \sin \frac{2\pi}{T} \cdot q \cdot t \right]; \quad (2.6)$$

respectiv:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left[A_q \cos q\alpha + B_q \sin q\alpha \right]. \quad (2.7)$$

În aceste expresii s-a notat

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt, A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\alpha) d\alpha, \quad (2.8)$$

$$A_q = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos 2 \cdot \pi \cdot q \cdot \nu_1 \cdot t \cdot dt, A_q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\alpha) \cos q\alpha \cdot d\alpha; \quad (2.9)$$

$$B_q = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin 2 \cdot \pi \cdot q \cdot \nu_1 \cdot t \cdot dt, A_q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\alpha) \sin q\alpha \cdot d\alpha; \quad (2.10)$$

Relațiile (2.6) și (2.7) se pot scrie sub o formă condensată:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} M_q \cos(2 \cdot \pi \cdot q \cdot \nu_1 \cdot t + \varphi_q); \quad (2.11)$$

$$x(\alpha) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} M_q \cos(q\alpha + \varphi_q); \quad (2.12)$$

în care M_q este modulul liniei spectrale:

$$M_q = \sqrt{A_q^2 + B_q^2}, q = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

iar faza inițială a fiecărei armonici, de un ordin oarecare q :

$$\operatorname{tg} \varphi_q = \frac{-B_q}{A_q}; \varphi_q = \operatorname{arctg} \frac{-B_q}{A_q}. \quad (2.14)$$

Dacă variabila frecvențială $\nu = q\nu_1$ se va exprima în funcție de rangul q al liniei spectrale, spectrul semnalului se va situa în partea dreaptă a șirului natural al numerelor (pozitive), corespunzând frecvențelor reale $\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \dots$.

Linii spectrale de modul M_q vor apare echidistante cu valoarea ν_1 a armonicii fundamentale [74].

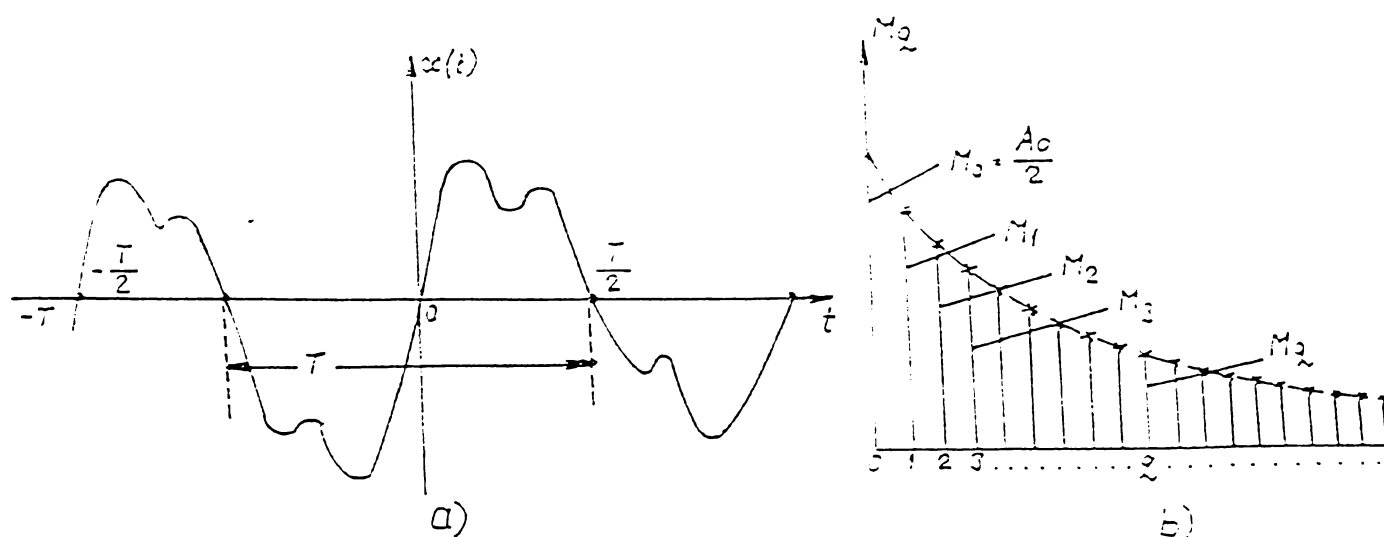


Fig. 2.1. Dezvoltarea în serie trigonometrică : a) Semnalul analog periodic;
b) Spectrul unilateral și discret.

În concluzie unui semnal periodic și analogic, prin dezvoltarea naturală în serie Fourier îi corespunde un spectru discret natural și aperiodic.

2.2.2 Spectrul bilateral discret al funcțiilor semnal analogice periodice

Dezavantajul major al spectrului unilateral discret constă în faptul că acest spectru nu se poate evalua analitic pentru orice linie q , fiind necesară evaluarea separată a coeficienților A_q și B_q și determinarea modulului M_q , cu pierderea informației despre defazajul φ_q . Totuși formal spectrul unilateral se poate exprima prin intermediul funcției Dirac, astfel [28]:

$$F(\nu) = M_q = \frac{A_0}{2} \delta(0) + \sum_{q=1}^{\infty} M_q \delta(\nu - \nu_q) \quad (2.15)$$

Pentru a înlătura aceste inconveniente se apelează la introducerea spectrului bilateral discret al semnalului periodic analogic. În acest scop se folosesc variabilele complexe prin exprimarea funcției $\cos \alpha$ prin relația lui Euler $\cos \alpha = e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}$. Prin calcule elementare, din semnalul analogic periodic $x(t)$ se obține funcția analitică spectrală $X(q\nu_1)$, care este o formă a transformatei directe discrete Fourier (TDDF) [133]:

$$c(q) = X(q\nu_1) = X_q = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi q\nu_1 t} dt; q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.16)$$

Datorită utilizării numerelor complexe în această transformare s-a impus introducerea noțiunii fictive de frecvență negativă, astfel încât spectrul \underline{X}_q este repartizat simetric pe ambele părți, pozitive și negative a variabilei q ce reprezintă ordinul liniei spectrale. În plus, se arată că amplitudinea X_q este jumătate din modulul M_q aferent spectrului unilateral. Funcția analitică spectrală $X(jq\nu_1) = \underline{X}_q e^{j\varphi_q}$ conține și informația despre faza inițială a armoniciei de ordinul q . De asemenea se arată că semnalul $x(t)$ poate fi reconstituit din liniile spectrale $X(q\nu_1)$ prin relația:

$$x(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X(q\nu_1) e^{j2\pi q\nu_1 t}; X_q = \frac{1}{2} M_q. \quad (2.17)$$

Se menționează că \underline{X}_q este un fazor, în sensul cunoscut din electrotehnică, caracterizat prin modulul X_q , cu faza inițială φ_q , se rotește în planul complex în sens trigonometric cu viteza unghiulară $\omega_q = 2\pi q\nu_1$. Relația (2.17) exprimă o formă a transformatei inverse Fourier.

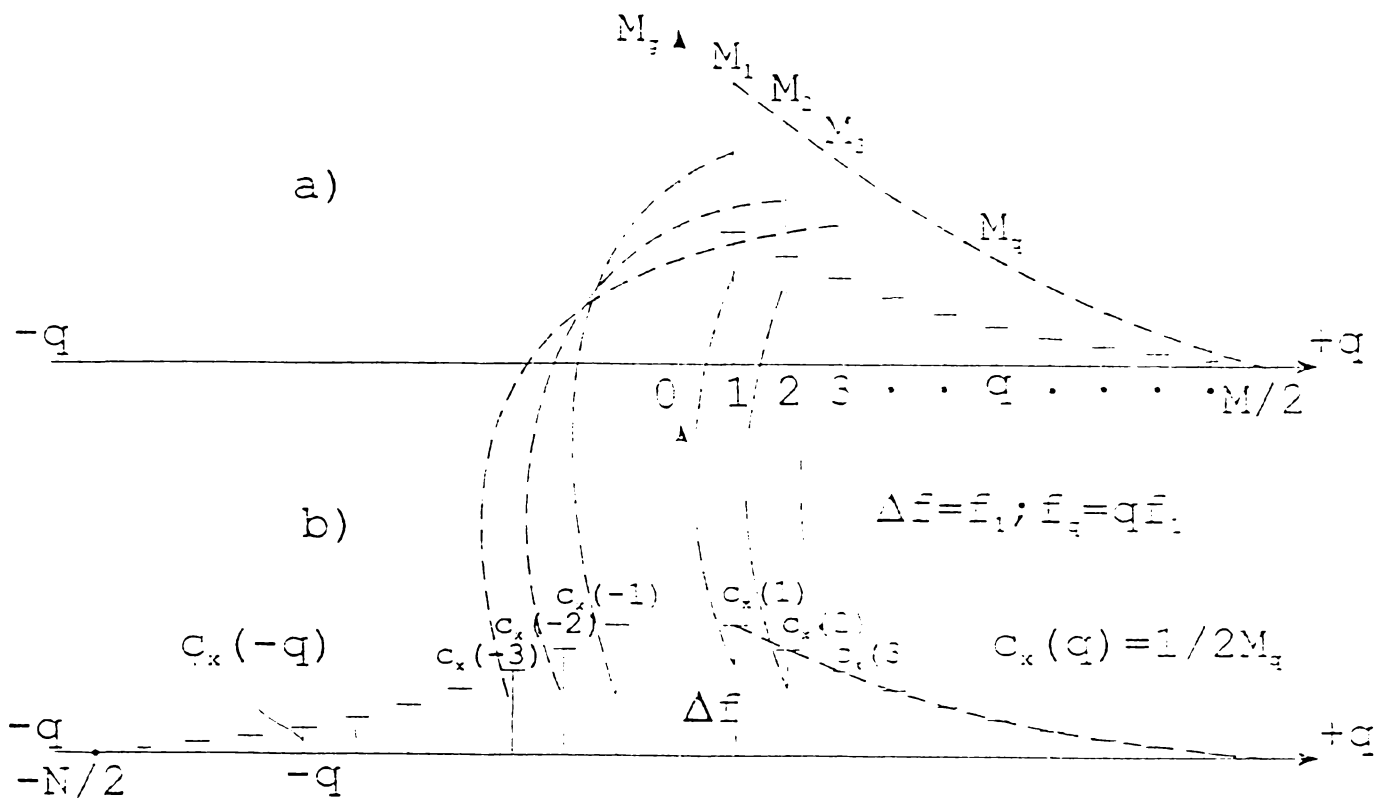


Fig.2.2. Tranziția de la spectrul unilateral discret M_q , aferent transformării naturale Fourier, la spectrul bilateral discret $c_x(q)$, aferent semnalelor periodice continue.

În fig.2.2 este ilustrată trecerea de la spectrul unilateral discret la cel bilateral discret, prin înjumătățirea liniilor spectrale ale spectrului unilateral M_q și amplasarea unei jumătăți în semiplanul stâng, la frecvențele respective negative marcate cu $-q$.

Din cele prezentate relativ la spectrul discret bilateral aferent funcțiilor analogice periodice, se menționează faptul că acest spectru se poate calcula analitic, grație introducerii exprimării prin variabile complexe și prin utilizarea frecvențelor fictive negative. În concluzie semnalului analogic periodic îi corespunde un spectru discret bilateral aperiodic.

2.2.3. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice și analogice

O funcție $x(t)$ continuă pe intervalul $t \in [-T/2; T/2]$ și care satisface condițiile lui Dirichlet, se poate dezvolta în serie Fourier printr-un proces de trecere la limită cu $T \rightarrow \infty$ și făcând ca rezoluția spectrală $\Delta v \rightarrow 0$, astfel că spectrul se transformă din discret într-un spectru continuu, pe baza expresiei:

$$S(j\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (2.18)$$

indicând faptul că la cunoașterea funcției semnal aperiodice și analogice $x(t)$ se poate determina analitic în mod univoc funcția spectrală $S(j\nu)$. Această expresie corespunde transformării directe Fourier (TDF), funcție spectrală continuă în planul complex al lui Gauss.

Reconstituirea semnalului $x(t)$ din spectrul $S(j\nu)$ se efectuează pe baza expresiei:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\nu)e^{+j2\pi\nu t} d\nu, \quad (2.19)$$

care constituie transformata inversă Fourier (TIF). Funcțiile $x(t)$ și $S(j\nu)$ constituie o pereche Fourier, adică:

$$x(t) \leftrightarrow S(j\nu) \quad (2.20)$$

Pentru exemplificare se consideră fereastra temporală cosinusoidală, definită prin:

$$d(t) = A \cos(\pi t/T); t \in [-T/2; +T/2]; \quad (2.21)$$

la care corespunde funcția spectrală analogică:

$$D(j\nu) = \frac{2}{\pi} AT \frac{\cos(\pi\nu T)}{1 - (2\nu T)^2} \quad (2.22)$$

Cele două funcții, semnal, respectiv cea spectrală, sunt indicate în fig.2.3.

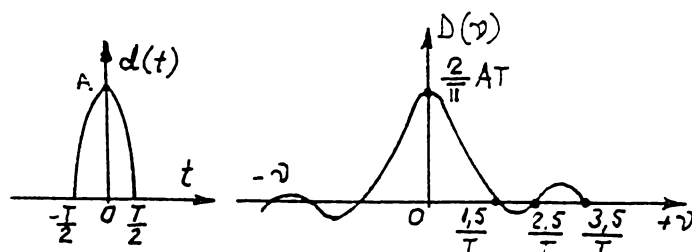


Fig.2.3. Exemplu de transformare Fourier aferentă unui semnal aperiodic analogic

Din cele prezentate rezultă că transformata Fourier a unui semnal analogic și aperiodic este o funcție infinită și continuă [35], [49].

Transformata Fourier posedă proprietățile de liniaritate este derivabilă și integrabilă, prezintă proprietățile de dualitate, paritate, de deplasare, similitudine, de multiplicare, și de corelație [127].

În fig.2.4. este indicată operația de transformare Fourier, constatându-se de ce este necesară cunoașterea întregii evoluții în timp a funcției semnal.

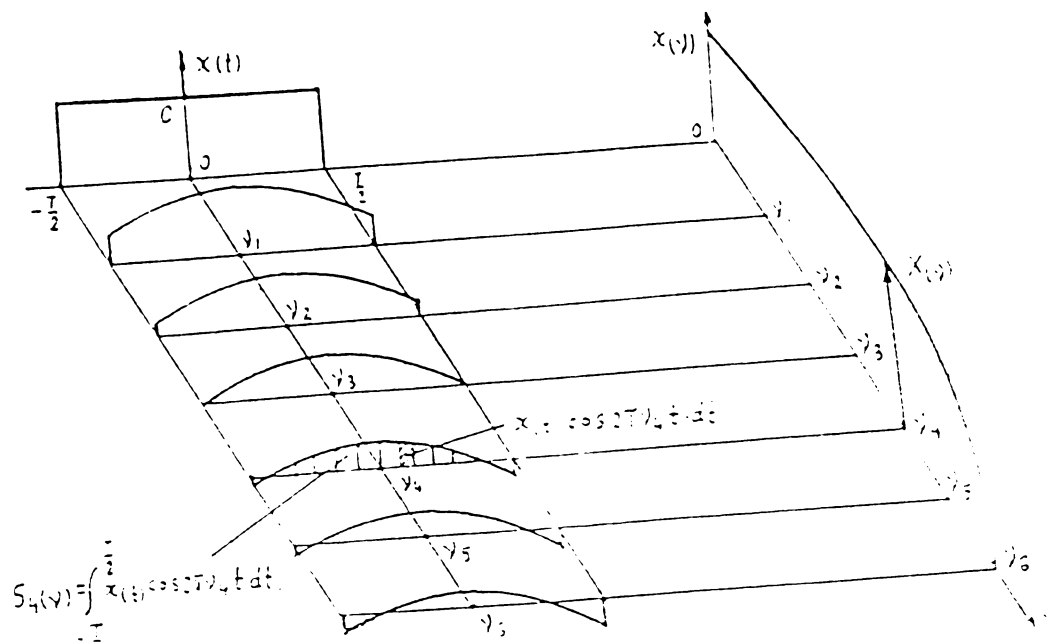


Fig.2.4. Interpretarea operației de transformare Fourier pentru o funcție pară.

2.2.4. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice eșantionate.

În cazul unei funcții $x(t)$ eșantionate cu durata de eșantionare T_e , există relația [70]:

$$x^*(nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e) \quad (2.23)$$

$$S_{x^*}(jv) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(nT_e)e^{-j2\pi nT_e v} \quad (2.24)$$

iar eșantioanele se reconstituie din spectrul semnalului discretizat prin relația:

$$x^*(nT_e) = \frac{1}{F_e} \int_{\frac{-F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}} S_{x^*}(jv)e^{-j2\pi nT_e v} dv, \quad (2.25)$$

în care $F_e = 1/T_e$ este frecvența de eșantionare iar $n \in \mathbb{Z}$ și $v \in [-\infty; +\infty]$. Relațiile (2.24) și (2.25) se demonstrează fie prin metoda reziduurilor, fie prin proprietatea de dualitate a transformatei Fourier.

Spectrul $S_{x^*}(jv)$ se exprimă în funcție de spectrul original al semnalului neeșantionat $S_x(jv) = X(jv)$, prin relația:

$$S_{x^*}(jv) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X(jv \pm jmF_e), m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

ceea ce indică faptul că aspectul semnalului eșantionat este periodic cu frecvența F_e și este format dintr-un lob principal pentru $m = 0$ și o serie de lobi secundari amplasați simetric față de acesta, pentru $m = 1, 2, 3, \dots$. Pentru lobul central cu $m = 0$ există relația:

$$S_{x^*}(j\nu) = \frac{1}{T_c} S_x(j\nu) = \frac{1}{T_c} X(j\nu), \quad (2.27)$$

care se obține din spectrul original ponderat cu $1/T_c$ pe intervalul $\nu \in [-F_c/2; +F_c/2]$. În fig.2.5 este indicat spectrul periodic și analogic al semnalului eșantionat, ceea ce confirmă proprietatea de dualitate, în sensul că la un semnal continuu aperiodic corespunde un spectru discret aperiodic și respectiv la un semnal discretizat și aperiodic corespunde un spectru analogic și periodic.

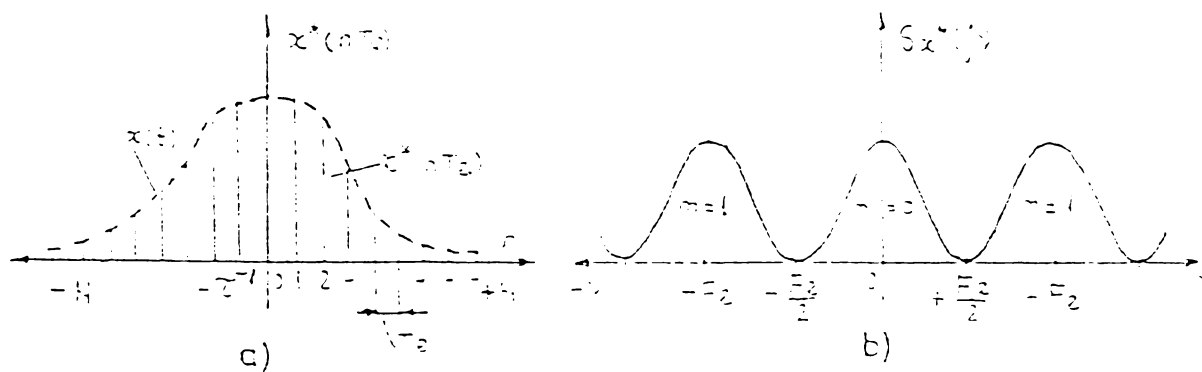


Fig.2.5. Spectrul Fourier al funcției aperiodice eșantionate: a) Semnalul eșantionat;

b) Spectrul continuu și periodic.

Din fig.2.5 rezultă o consecință care reprezintă condiția ce trebuie îndeplinită de lobiile adiacenți ai spectrului $S_{x^*}(j\nu)$ de a nu interfera, ceea ce ar conduce la erori importante la reconstituirea semnalului eșantionat din spectrul aferent. Această condiție este formulată de teorema lui Shannon, care spune că frecvența de eșantionare F_c trebuie să fie mai mare sau cel mult egală cu dublul frecvenței maxime F_m a spectrului $X(j\nu)$, adică $F_c \geq 2F_m$, sau $N \geq 2BT$, în care $B=F_m$ este lărgimea de bandă a semnalului [70].

2.2.5. Transformata discretă Fourier

Dacă $X(n)$ sunt eșantioanele funcției continue $x(t)$ pe durata T_1 , sub formă de șir cu $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, atunci [35]:

$$\{X(n)\} = \{X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1)\}, \quad (2.28)$$

iar coeficienții transformatei discrete Fourier (TDF) se scriu sub formă de șir:

$$\{C_x(q)\} = \{C_x(0), C_x(1), C_x(2), \dots, C_x(N-1)\}, \quad (2.29)$$

care se determină prin transformata discretă directă Fourier (TDDF) cu expresia:

$$C_x(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(-j2\pi qn/N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot W^{qn} \quad (2.30)$$

în care

$$W = \exp(-j2\pi/N); N = T/T_c. \quad (2.31)$$

Eșantioanele $X(n)$ se determină prin transformata discretă inversă Fourier (TDIF) cu relația:

$$X(n) = \sum_{q=0}^{N-1} C_x(q) \exp(j2\pi qn/N) = \sum_{q=0}^{N-1} C_x(q) W^{-jqn}. \quad (2.32)$$

Pe baza observației că $C_x(q)$ este periodică, având $C_x(q) = C_x(q \pm mN)$, se trece de la reprezentarea bilaterală având $q \in [-(N/2-1); (N/2-1)]$, la cea unilaterală, prin deplasarea liniilor de frecvențe negative de la $q = -1$ până la $q = -(N/2-1)$, în semiplanul drept, la dreapta liniei spectrale $+N/2$, rezultând un spectru cu N linii spectrale cu $n \in [0; N-1]$. Procedeu este indicat în fig. 2.6.

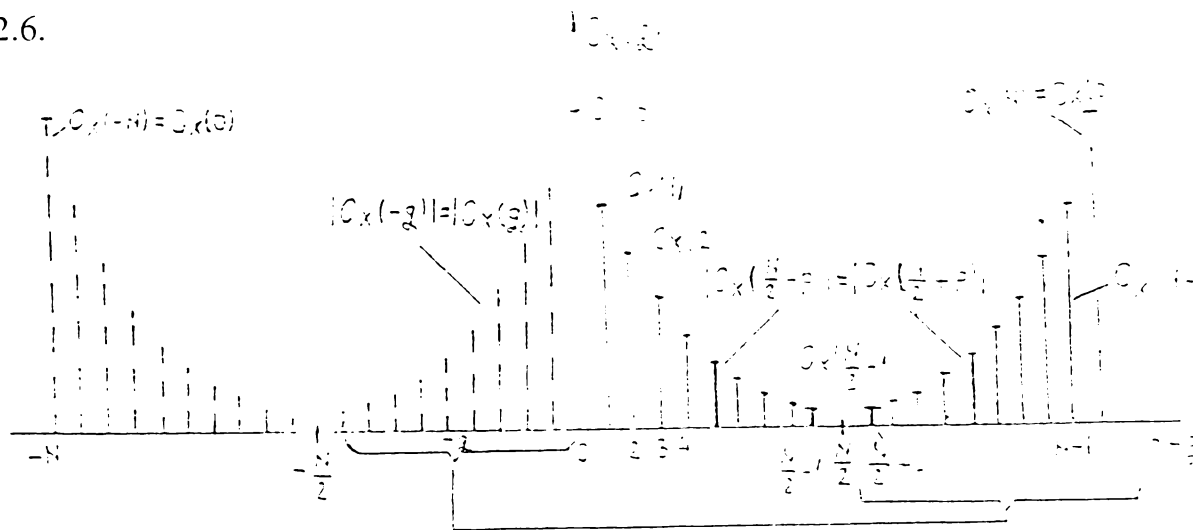


Fig.2.6. Spectrul TDDF în reprezentarea bilaterală și transpoziția în reprezentarea unilaterală, cu evidențierea simetriei complex conjugate în jurul frecvenței aferente lui $q=N/2$.

Transformatele TDDF și TDIF sunt utilizate prin subrutine specifice de prelucrare a semnalelor fizice cu ajutorul calculatorului. (Anexele 1 și 2).

2.2.6 Relații între diverse forme de spectre Fourier de amplitudine.

În tabelul 2.1 sunt prezentate relațiile dintre cele cinci forme de spectre:

- spectrul natural obținut prin dezvoltare în serie Fourier de tip unilateral și care corespunde sensului fizic al proceselor reale;
- spectrul bilateral al semnalului analogic periodic;
- spectrul aferent integralei Fourier pentru semnalul aperiodic analogic;
- spectrul analogic și periodic aferent semnalului aperiodic eșantionat;
- spectrul exprimat prin coeficienții Fourier rezultați prin transformata directă discretă Fourier.

Aceste relații se obțin relativ simplu, observând că $c_x(q) = C_x(q) = M_q/2$, iar $dv = 1/T$, deci:

$$X(jq) \cdot \frac{1}{T} = C_x(q) = c_x(q). \quad (2.33)$$

Trebuie precizat că în cazul spectrelor riglate (discretizate) la care liniile spectrale sunt nominalizate prin ordinul lor q , rezoluția, respectiv distanța dintre două linii adiacente este $\Delta v = v_1 = 1/T$. Pe de altă parte spectrele de formă continuă, analogică, sunt spectre de densitate de amplitudine, în sensul că dimensional, din (2.19.) rezultă $[x(t)] = [S_x(v) \cdot dv]$, astfel că dacă $x(t)$ reprezintă o tensiune măsurată în volt, spectrul Fourier $S_x(v) = X(v)$ va fi exprimat în volt/Hz.

Cunoașterea relațiilor dintre diferite spectre de amplitudine este necesară în interpretarea informației, cunoscând faptul că numai dezvoltarea în serie Fourier (prima coloană din tabelul 2.1) este cea care are suport fizic, în realitate. Așa cum s-a spus, dacă nu se ține seama de aceste raporturi se pot efectua mari erori în interpretarea rezultatelor analizei armonice.

Tabelul 2.1. Relații între spectrele Fourier de amplitudine

Spectrul în funcție	Dezvoltare a în serie Fourier	Semnal periodic analogic	Integrala Fourier	Semnal aperiodic eșantionat	TDF
Dezvoltare Fourier	M_q	$2c_x(q)$	$\frac{2X(q)}{T}$	$\frac{2}{N} S_x(q)$	$2C_x(q)$
Semnal periodic	$\frac{M_q}{2}$	$c_x(q)$	$\frac{X(q)}{T}$	$\frac{1}{N} S_x(q)$	$C_x(q)$
Integrala Fourier	$\frac{M_q}{2T}$	$T c_x(q)$	$X(q)$	$T e S_x(q)$	$T C_x(q)$
Semnal eșantionat	$\frac{N}{2} M_q$	$N c_x(q)$	$\frac{X(q)}{T e}$	$S_x(q)$	$N C_x(q)$
Transformate discrete Fourier	$\frac{M_q}{2}$	$c_x(q)$	$\frac{X(q)}{T}$	$\frac{1}{N} S_x(q)$	$C_x(q)$

Tabelul 2.2. Diverse forme ale spectrelor Fourier

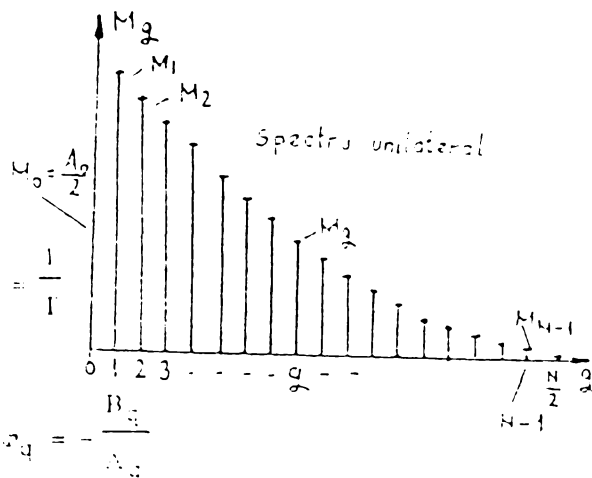
a. Dezvoltarea în serie Fourier $x(t) = x(t \pm pT)$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} [A_q \cos 2\pi q \nu_1 t + B_q \sin 2\pi q \nu_1 t] =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} M_q \cos(2\pi q \nu_1 t + \varphi_q)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt; A_q = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos 2\pi q \nu_1 t dt; \nu_1 = \frac{1}{T}$$

$$B_q = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin 2\pi q \nu_1 t dt; M_q = \sqrt{A_q^2 + B_q^2}; \varphi_q = -\arctan \frac{B_q}{A_q}$$



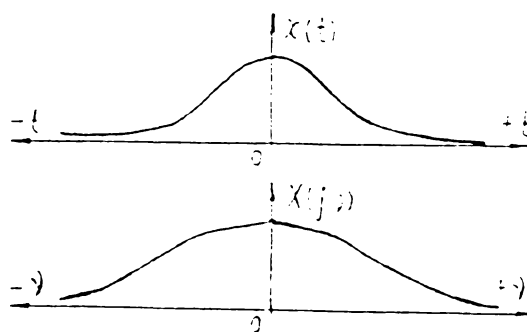
Periodică și continuă în domeniul temporal.
Aperiodică și discretă în cel frecvențial.

b. Transformata integrală Fourier

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi \nu t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\nu) e^{+j2\pi \nu t} d\nu$$

Infinite, aperiodice și continue în domeniile timp și frecvență

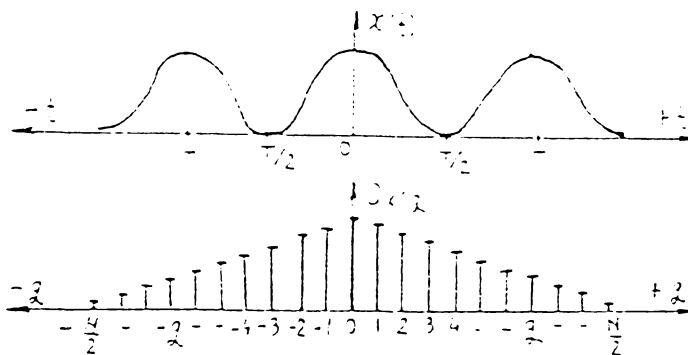


c. Spectrul Fourier bilateral a semnalului periodic analogic.

$$c_x(q) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi q \nu_1 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_x(q) e^{+j2\pi q \nu_1 t}$$

Analogică și periodică în domeniul temporal; discretă și aperiodică în cel frecvențial.

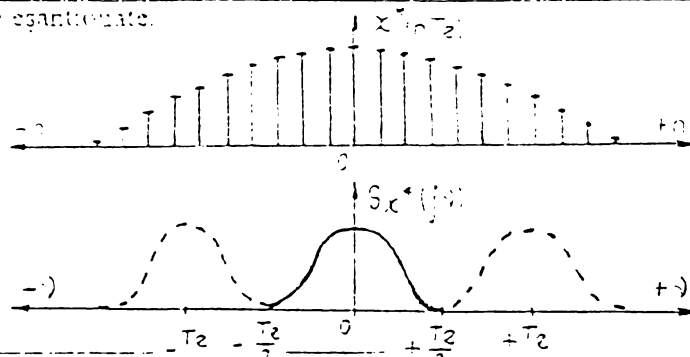


d. Spectrul Fourier al semnalelor aperiodice eșantionate.

$$S_x^*(j\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(nT_e) e^{-j2\pi n \nu T_e}$$

$$x^*(nT_e) = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} S_x^*(j\nu) e^{+j2\pi n \nu T_e} d\nu$$

Aperiodică și discretă în domeniul timp
Continuă și periodică în cel frecvențial.



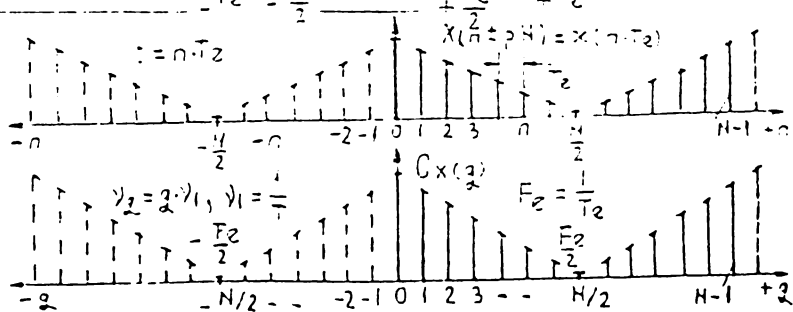
e. Transformata discretă Fourier

$$C_x(q) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W^{qn}$$

$$X(n) = \sum_{q=0}^{N-1} C_x(q) W^{-qn}$$

$$W = \exp(-j2\pi / N)$$

Discrete și periodică în ambele domenii



În tabelul 2.1. se prezintă într-o formă condensată cele cinci tipuri de spectre de amplitudine, prezentate mai sus, cu indicarea funcției semnal și a spectrului de amplitudine aferent.

2.2.7. Concluzii

În acest paragraf s-au prezentat spectrele de amplitudine aferente analizei armonice pentru obținerea informațiilor conținute în semnalele de la procesele fizice în evoluție.

S-au prezentat pe rând cinci genuri de spectre de amplitudine, pentru semnale aperiodice și periodice, eșantionate sau neeșantionate, indicându-se relațiile care există între ele. S-a elaborat un tabel din care oricare dintre cele cinci tipuri se poate exprima în funcție de celelalte spectre.

Evaluarea coeficienților $C_x(q)$ din cele N eșantioane $X(n)$ se efectuează în prezent prin subrutine rapide Fourier (FFT=Fast Fourier Transformation), bazate pe algoritmul Cooley-Tukey [57]. În determinarea spectrelor de amplitudine, în cadrul acestei lucrări s-au utilizat programele FFT-Singleton [122] și Werz [140], caracterizate prin cel mai redus număr de operații (adunări și multiplicări) pe calculator, având avantajul că acestea permit un calcul iterativ de la un rang intermediar la următorul. Această proprietate asigură o implementare simplă, ceea ce permite inserarea subrutinelor în programe mai complexe, care au drept scop evaluarea spectrelor de putere, a funcțiilor de transfer și a coeficienților de coerență, parametrul care indică gradul de linearitate al procesului examinat.

2.3. Spectre Fourier de putere și energetice

2.3.1. Introducere.

Spectrele de putere și energetice se introduc prin intermediul proprietăților de multiplicare și de corelație ale transformatei integrale Fourier, aferentă semnalelor analogice și aperiodice. Ca și spectrele de amplitudine, aceste spectre se prezintă în forma unilaterală, definite numai în domeniul frecvențelor reale pozitive și în formă bilaterală, incluzând și frecvențele negative fictive [70], [136].

Spectrele de putere și energetice se vor prezenta sub formă de densități de putere respectiv de energie, cu variație continuă, analogică, respectiv sub formă de spectre propriu-zise de putere sau energetice în cazul spectrelor riglate sau discretizate.

Întrucât toate aceste aspecte vor trebui elaborate prin tehnica numerică de calcul electronic, se vor exprima în funcție de coeficienții transformatei discrete Fourier (TDF).

În problemele de transfer liniar și de identificare a sistemelor și proceselor fizice se va avea în vedere legătura funcțională dintre spectrele de putere și energetice cu funcțiile de corelație, cu care se formează perechi Fourier. Din acest motiv, înainte de a examina spectrele de putere și energetice se va face o scurtă prezentare a funcțiilor de corelație, privite sub aspect statistic și temporal. După prezentarea acestor spectre, cu indicarea unora dintre proprietățile acestora se va elabora o clasificare a tuturor spectrelor Fourier, de amplitudine, putere și energetice și exprimarea acestora prin coeficienții TDF.

2.3.2. Funcțiile de corelație

Omițând cu bună știință prezentarea și definițiile funcțiilor de corelație din domeniul statistic, ne vom concentra atenția asupra funcțiilor de corelație definite în domeniul temporal, aferente semnalelor aleatoare staționare și deterministe. Funcțiile de corelație în domeniul temporal se definesc prin relațiile [70]:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) dt; \quad R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t + \tau) dt; \quad (2.34)$$

în care $R_{xx}(\tau)$ este funcția de autocorelație aferentă semnatului $x(t)$, iar $R_{xy}(\tau)$ este funcția de intercorelație dintre semnalele $x(t)$ și $y(t)$ cu evoluție concomitentă.

În cazul în care se consideră înregistrarea semnalelor de la $t = 0$ la o valoare T suficient de mare, se poate scrie:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt; \quad R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} y(t) \cdot y(t + \tau) dt; \quad (2.35)$$

În cazul semnalului temporal analogic $x(t)$, pe durata de înregistrare T , se determină valoarea medie teoretică μ_x , semnalul centrat $x_0(t)$ și dispersia σ_x^2 prin relațiile:

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad x_0(t) = x(t) - \mu_x; \quad D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x_0^2(t) dt; \quad (2.36)$$

iar dacă semnalul este eșantionat, prin relațiile:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n); \quad x_0(n) = X(n) - \mu_x; \quad D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N x_0^2(n) \quad (2.37)$$

Cu aceste precizări se definește funcția de autocovarianță, respectiv cea de intercovarianță prin expresiile:

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x_0(t) \cdot x_0(t + \tau) dt; \quad C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x_0(t) \cdot y_0(t + \tau) dt; \quad (2.38)$$

în care valorile centrate ale lui $y_0(t) = y(t) - \mu_y$ în care μ_y este valoarea medie teoretică a semnalului $y(t)$ și $x_0(t) = x(t) - \mu_x$.

Legătura dintre funcțiile de corelație și cele de covarianță se exprimă prin relațiile:

$$R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2; \quad R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) + \mu_x \cdot \mu_y \quad (2.39)$$

În fine coeficienții de autocorelație și intercorelație se definesc prin:

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}; \quad \rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)}}; \quad (2.40)$$

în care τ este fixat. Este ușor de arătat că:

$$C_{xx}(0) = \sigma_x^2; \quad C_{yy}(0) = \sigma_y^2, \quad (2.41)$$

adică ordonata de origine a funcției de autocovarianță coincide cu dispersia sau varianța semnalului aferent. În fig. 2.7. sunt prezentate formele funcțiilor de corelație și covarianță.

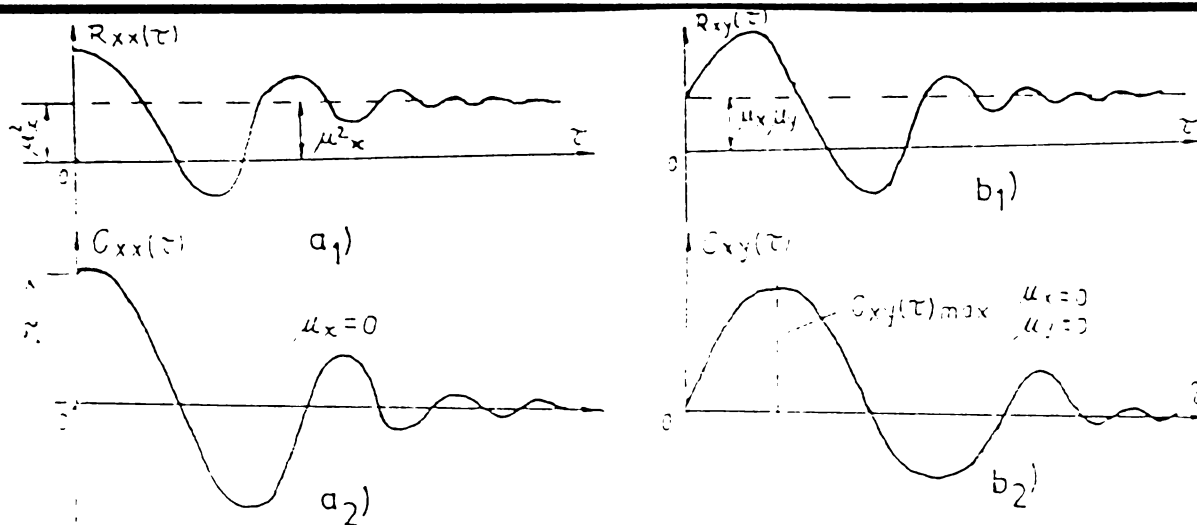


Fig. 2.7. Funcțiile de corelație: a₁) funcția de autocorelație; a₂) funcția de autocovarianță; b₁) funcția de intercorelație; b₂) funcția de intercovarianță

Dintre proprietățile funcțiilor de corelație se menționează în primul rând proprietatea de inegalitate a intercorelației exprimată prin relațiile [70]:

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0); |C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0) \quad (2.42)$$

Funcțiile de autocorelație și autocovarianță sunt pare, adică

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau); C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau) \quad (2.43)$$

Când τ crește nemărginit funcțiile de covarianță tind spre zero:

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} C_{xx}(\tau) = 0; \lim_{T \rightarrow \pm\infty} C_{xy}(\tau) = 0 \quad (2.44)$$

iar o consecință a teoremei inegalității conduce la $R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0); C_{xx}(\tau) \leq C_{xx}(0)$.

În fine, se demonstrează că $\rho_{xy}(\tau) \in [-1; +1]$.

Funcția de autocorelație, prin produsele $x(t) \cdot x(t + \tau)$, exprimă cantitativ interdependența sau legătura dintre ordonatele aceleiași realizări $x(t)$, la două momente distanțate cu intervalul temporal τ . Sensul fizic al autocorelației și autocovarianței trebuie căutat în influența valorilor trecute ale procesului asupra valorilor de la un moment dat, influență exprimată printr-o legătură internă, intrinsecă a procesului însuși și care în final se reduce la aspectul energetic.

Funcțiile de corelație și de covarianță a două procese aleatoare, care au o evoluție în paralel și se influențează reciproc, sunt legate de energia mutuală de interacțiune dintre cele două procese. Astfel, funcția de intercorelație $R_{xy}(\tau)$ exprimă prin produsul $x(t) \cdot y(t')$, unde $t' = t + \tau$, puterea instantanee dintre procesul în evoluție X la momentul t și procesul Y în evoluție la momentul $t' = t + \tau$ mai întârziat. Funcția de intercorelație exprimă media pe durata T a acestor puteri instantanee de interacțiune, această medie putând fi, pentru un τ dat,

pozitivă sau negativă. Astfel dacă procesul X transferă energie către procesul Y , $R_{xx}(\tau) > 0$, iar dacă primește energie de la procesul Y , atunci $R_{yy}(\tau) < 0$. Aspectul energetic al desfășurării fenomenelor a permis, prin funcțiile de corelație, evaluarea schimbului energetic, prin definirea acestor funcții prin intermediul produselor elementare ale amplitudinilor $x(t), y(t + \tau)$, produs care include în sine aspectul energetic, în locul de exemplu a sumei care nu este susceptibilă de o interpretare fizică în conținut ca produsul.

În cazul în care la evaluarea corelațiilor nu se face medierea pe durata T a realizărilor $x(t)$ și $y(t)$, se obțin funcțiile de corelație și covarianță energetice:

$$K_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt; K_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot y(t + \tau) dt; \quad (2.45)$$

respectiv:

$$L_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} x_0(t) \cdot x_0(t + \tau) dt; L_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} y_0(t) \cdot y_0(t + \tau) dt \quad (2.46)$$

După cum se va arăta în continuare, funcțiile de corelație energetice sunt legate de aspectele energetice Fourier.

2.3.3. Proprietatea de multiplicare și teorema lui Parseval

Mai întâi se face precizarea că, prin definiție, conjugata unei funcții de variabilă complexă $F(j\nu)$, notată $F^*(j\nu)$, se caracterizează, pentru ambele, de același modul $|F(j\nu)|$, dar de argument opus, $\varphi^*(\nu) = -\varphi(\nu)$; $F^*(j\nu) = F(-j\nu)$

În cazul a două funcții semnal care evidențiază evoluția în paralel a două procese $x_1(t)$ și $x_2(t)$, pentru care există perechile Fourier: $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(j\nu)$; $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(j\nu)$, există egalitatea [73]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\nu) \cdot X_2^*(j\nu) d\nu \quad (2.47)$$

care arată proprietatea de multiplicare și în esență exprimă faptul că energia din domeniul temporal este identic egală cu energia din domeniul frecvențial. Este evident că teorema de multiplicare este valabilă și pentru funcțiile semnal periodice, în care caz:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t) \cdot x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_1(jk) \cdot S_2^*(-jk) \quad (2.48)$$

Teorema lui Parseval este o proprietate general valabilă pentru toate sistemele de funcții ortogonale, este o consecință a proprietății de multiplicare și se referă la cazul

particular în care $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, având $x(t) \Leftrightarrow X(j\nu)$, astfel încât în baza teoremei de multiplicare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\nu) \cdot X(j\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{xx}(\nu) d\nu, \quad (2.49)$$

Teorema lui Parseval exprimă faptul că integrala pătratului funcției semnal pe întregul domeniu al timpului este numeric egală cu integrala pătratului modulului funcției spectrale aferente pe întreg domeniul de frecvență. Faptul că energia este aceeași în ambele reprezentări este firesc, deoarece unul și același fenomen este exprimat în două moduri diferite. Prin definiție:

$$W_{xx}(\nu) = X^*(j\nu) \cdot X(j\nu) = |X(\nu)|^2 \quad (2.50)$$

se numește spectrul de densitate energetică a semnalului $x(t)$, exprimându-se prin produsul dintre spectrul Fourier $X(j\nu)$, cu conjugata sa $X^*(j\nu)$. Dacă $x^2(t)$ se asociază cu energia electrică disipată pe o rezistență $R=1 \Omega$, în unitatea de timp, după modelul $p(t) = u^2 \cdot \frac{1}{R} = Ri^2$, rezultă că $x^2(t) = p(t)$ reprezintă puterea sau densitatea temporală de energie și evident se va măsura în Watt, iar integrala $\int x^2(t) dt$ va exprima energia măsurată în Watt · sec., adică în Joule. Sub aspect energetic relația (2.49) se va scrie :

$$E_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{xx}(\nu) d\nu \quad (2.51)$$

în care densitatea de energie $W_{xx}(\nu)$ se va exprima în V^2 / Hz , după cum puterea $p(t)$ se va exprima în $V^2 \cdot sec$, evident având identitatea $1V^2 \cdot sec = 1V^2 \cdot \frac{1}{Hz}$.

În cazul a două procese $x(t)$ și $y(t)$ cu evoluții paralele, proprietatea de multiplicare conduce la egalitatea:

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\nu) \cdot Y(j\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{xy}(j\nu) d\nu \quad (2.52)$$

care exprimă energia de interacțiune dintre procesele X și Y . În acest caz $W_{xy}(j\nu)$ reprezintă densitatea mutuală de energie aferentă proceselor X și Y , exprimate prin funcțiile semnal $x(t)$ și $y(t)$. Se constată că în timp ce $W_{xx}(\nu)$ este funcție de variabilă reală, $W_{xy}(j\nu)$ este o funcție de variabilă complexă.

2.3.4. Definierea funcțiilor de densitate spectrale energetice și de putere

În baza egalității (2.49), rezultă că funcția de densitate proprie de energie se definește prin expresia [32], [69]:

$$W_{xx}(v) = X^*(jv) \cdot X(jv) = X^2(v) \quad (2.53)$$

iar în baza relației (2.49) se definește spectrul de densitate mutuală de energie:

$$W_{xy}(jv) = X^*(jv) \cdot Y(jv) \quad (2.54)$$

În cazul în care relația (2.47) este raportată la intervalul finit T, sub forma:

$$P_{xy} = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(jv) \cdot X_2(jv) dv$$

sau dacă, ne referim la ecuația echivalentă (2.52):

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(jv) \cdot Y(jv) dv = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(jv) \cdot Y(jv) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} W_{xy}(jv) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(jv) \cdot dv \end{aligned}$$

se va defini spectrul de densitate mutuală de putere:

$$S_{xy}(jv) = \frac{1}{T} X^*(jv) \cdot Y(jv) \quad (2.55)$$

În mod analog, în cazul $x(t) = y(t)$, se definește spectrul de densitate proprie de putere, ținând seama și de (2.53), prin relația:

$$S_{xx}(jv) = S_{xx}(v) = \frac{1}{T} X^*(jv) \cdot X(jv) = X^2(v) \cdot \frac{1}{T} \quad (2.56)$$

Dacă funcțiile semnal $x(t)$ și $y(t)$ se măsoară în volți, atunci funcțiile spectrale de densitate de putere $S_{xy}(jv)$ și $S_{xx}(v)$ se măsoară în Watt/Hz.

Trebuie precizat, așa cum s-a arătat și la spectrele de amplitudine, că și la spectrele energetice și de putere, care se exprimă prin funcții continue de frecvență, o linie spectrală oarecare reprezintă o densitate de energie, respectiv o densitate de putere [32].

2.3.5. Definierea spectrelor energetice și de putere propriu-zise

În cazul în care funcțiile semnal sunt periodice, spectrul de energie este riglat sau discretizat, astfel că în baza relației (2.53) se va defini funcția spectrală propriu-zisă mutuală de energie prin relația [65]:

$$E_{xy}(jk) = S_x(k) \cdot S_y(-k) e^{j(\varphi_x - \varphi_y)} \quad (2.57)$$

În cazul funcției spectrale propriu-zise, proprii, de energie, cu $x(t)=y(t)$, va rezulta:

$$E_{xx}(k) = S_x(k) \cdot S_x(-k) = S_x^2(k) \quad (2.58)$$

Trecând la funcțiile propriu-zise spectrale de putere, rezultă pentru cel mutual:

$$P_{xy}(jk) = \frac{1}{T} E_{xy}(jk) = \frac{1}{T} S_x(k) \cdot S_y(-k) e^{j(\varphi_x - \varphi_y)} \quad (2.59)$$

iar cel de densitate propriu-zisă proprie de putere:

$$P_{xx}(k) = \frac{1}{T} E_{xx}(k) = \frac{1}{T} S_x(k) \cdot S_x(-k) = \frac{1}{T} S_x^2(k) \quad (2.60)$$

în baza faptului că $E_{xx}(k)$ este o funcție pară.

2.3.6. Teoremele Wiener-Hincin

Aceste teoreme arată că funcțiile de corelație energetice cu funcțiile de densitate de energie, pe de-o parte și funcțiile obișnuite de corelație cu funcțiile de densitate de putere, aferente spectrelor continue, formează perechi Fourier [141], [142]:

$$K_{xx}(\tau) \Leftrightarrow W_{xx}(\nu); K_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt; W_{xx}(\nu) = |X(\nu)|^2 \quad (2.61)$$

$$K_{xy}(\tau) \Leftrightarrow W_{xy}(j\nu); K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt; W_{xy}(j\nu) = X^*(j\nu) \cdot Y(j\nu) \quad (2.62)$$

pentru spectrele energetice și respectiv, pentru cele de putere :

$$R_{xx}(\tau) \Leftrightarrow S_{xx}(\nu); R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt; S_{xx}(\nu) = \frac{1}{T} |X(j\nu)|^2 = \frac{1}{T} X^2(\nu). \quad (2.63)$$

$$R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{xy}(j\nu); R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt; S_{xy} = \frac{1}{T} X^*(j\nu) \cdot Y(j\nu). \quad (2.64)$$

La aceste rezultate se ajunge relativ ușor ținând cont de teorema deplasării și cea a multiplicării, proprietăți pe care le posedă transformata integrală Fourier.

În formă explicită, relațiile $R_{xx}(\tau) \Leftrightarrow S_{xx}(\nu)$ și $R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{xy}(j\nu)$ se pot scrie astfel:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu; S_{xx}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.65)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(j\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu; S_{xy}(j\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.66).$$

Aceste ultime două relații vor fi utilizate în identificarea proceselor, utilizând așa numita metodă indirectă, în sensul că din semnale se vor determina mai întâi funcțiile de corelație și apoi din acestea se vor evalua funcțiile de densitate spectrală de putere $S_{xx}(\nu)$ și $S_{xy}(j\nu)$, cu ajutorul cărora se va determina funcția de transfer a sistemului examinat.

Ținând cont că $R_{xx}(\tau)$ și $\cos 2\pi\nu\tau$ sunt funcții pare, iar $S_{xx}(\nu)$ este o funcție întotdeauna reală, din (2.63) rezultă:

$$S_{xx}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos 2\pi\nu\tau d\tau = 2 \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos \pi\nu\tau d\tau \quad (2.67)$$

astfel că se constată că și $S_{xx}(\nu)$ este pară și deci:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) \cdot \cos 2\pi\nu\tau d\nu = 2 \int_0^{+\infty} S_{xx}(\nu) \cdot \cos \pi\nu\tau d\nu \quad (2.68)$$

Având în vedere că $S_{xx}(\nu)$ este transformata Fourier bilaterală a funcției temporale $R_{xx}(\tau)$ și este o mărime teoretică, de calcul, în practică se va utiliza densitatea mutuală unilaterală de putere $G_{xx}(\nu)$. Trebuie subliniat că și funcția spectrală $S(\nu)$, ca modul, aferentă semnalului $x(t)$ este simetrică, adică bilaterală, ca și funcția spectrală de densitate mutuală de putere $S_{xx}(\nu)$. Prin transferarea liniilor spectrale din zona frecvențelor negative fictive, în partea frecvențelor reale pozitive, se obțin spectrele $G(\nu)$, respectiv $G_{xx}(\nu)$, care vor avea amplitudinile la o frecvență dată, duble față de cele aferente spectrelor $S(\nu)$ și $S_{xx}(\nu)$.

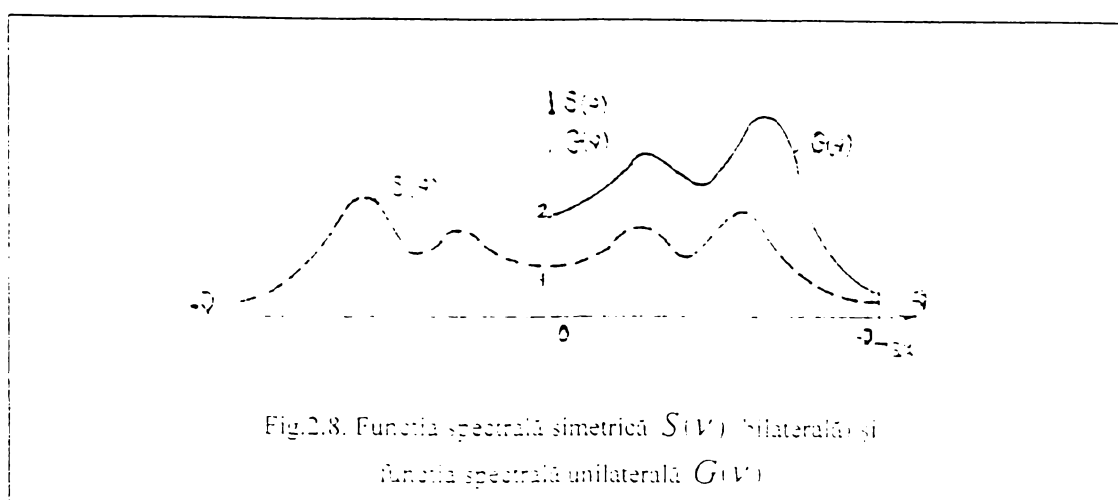


Fig.2.8. Funcția spectrală simetrică $S(\nu)$ (bilaterală) și funcția spectrală unilaterală $G(\nu)$

În aceste condiții se poate scrie:

$$\begin{aligned} G(\nu) &= 2S(\nu); G_{xx}(\nu) = 2S_{xx}(\nu), \nu \in [0; +\infty], \\ G(\nu) &= 0; G_{xx}(\nu) = 0, \nu \in [-\infty; 0] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Utilizând funcția $G_{xx}(\nu)$, spectrul de densitate de putere proprie, în relațiile (2.67) și (2.68) se poate scrie:

$$G_{xx}(\nu) = 4 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau, \nu \in [0; +\infty] \quad (2.70)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xx}(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu \quad (2.71)$$

Aceste ultime două relații sunt utilizate în practica prelucrării semnalelor fizice.

2.3.7. Unele proprietăți ale funcțiilor de densitate spectrală

Ținând cont de proprietățile de paritate ale funcțiilor de corelație, se poate scrie [71]:

$$S_{xx}(-\nu) = S_{xx}(\nu); S_{xy}(-j\nu) = S_{xy}^*(j\nu) = S_{yx}(j\nu) \quad (2.72)$$

Ținând seama de relația (2.66), rezultă :

$$G_{xy}(\nu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau = P_{xy}(\nu) - jQ_{xy}(\nu) \quad (2.73)$$

în care $P_{xy}(\nu)$ se numește cospectru, iar Q_{xy} cuadspectru (spectrul cuadratură). În acest caz $R_{xy}(\tau)$, fiind o mărime reală, rezultă:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} [P_{xy}(\nu) \cos 2\pi\nu\tau + Q_{xy}(\nu) \sin 2\pi\nu\tau] d\nu \quad (2.74)$$

Se observă că:

$$P_{xy}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] \cos 2\pi\nu\tau d\tau = P_{yx}(-\nu), \quad (2.75)$$

$$Q_{xy}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} [R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau)] \sin 2\pi\nu\tau d\tau = -Q_{yx}(-\nu) \quad (2.76)$$

din care se observă că $P_{xy}(\nu)$ este o funcție reală pară de ν , iar $Q_{xy}(\nu)$ este o funcție reală impară de ν . Cu acestea se poate scrie:

$$P_{xy}(\nu) = \frac{1}{2} [G_{xy}(\nu) + G_{yx}(\nu)]; Q_{xy}(\nu) = \frac{1}{2} [G_{yx}(\nu) - G_{xy}(\nu)] \quad (2.77)$$

Modulul și faza lui $G_{xy}(j\nu)$ vor fi:

$$|G_{xy}(j\nu)| = M_{xy}(\nu) = \sqrt{P_{xy}^2(\nu) + Q_{xy}^2(\nu)}; \tan g\varphi = -\frac{Q_{xy}(\nu)}{P_{xy}(\nu)} \quad (2.78)$$

Alte proprietăți derivă din teorema inegalității corelațiilor:

$$|S_{xy}(\nu)|^2 \leq S_{xx}(\nu) \cdot S_{yy}(\nu); |G_{xy}(\nu)|^2 \leq G_{xx}(\nu) \cdot G_{yy}(\nu) \quad (2.79)$$

Aceste relații vor fi utilizate la definirea factorului de coerență pentru evaluarea gradului de linearitate a sistemelor.

Un caz particular remarcabil apare când $\tau = 0$ și atunci când din (2.65) rezultă:

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) d\nu; R_{xx}(\nu) = \int_0^{\infty} G_{xx}(\nu) d\nu \quad (2.80)$$

În cazul când funcțiile semnal sunt centrate, $x_0(t) = x(t) - \mu \cdot x$, $R_{xx}(0) \rightarrow C_{xx}(0) = D_x = \sigma_x^2$:

$$D_x = \sigma_x^2 = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} G_{xx}(\nu) d\nu \quad (2.81)$$

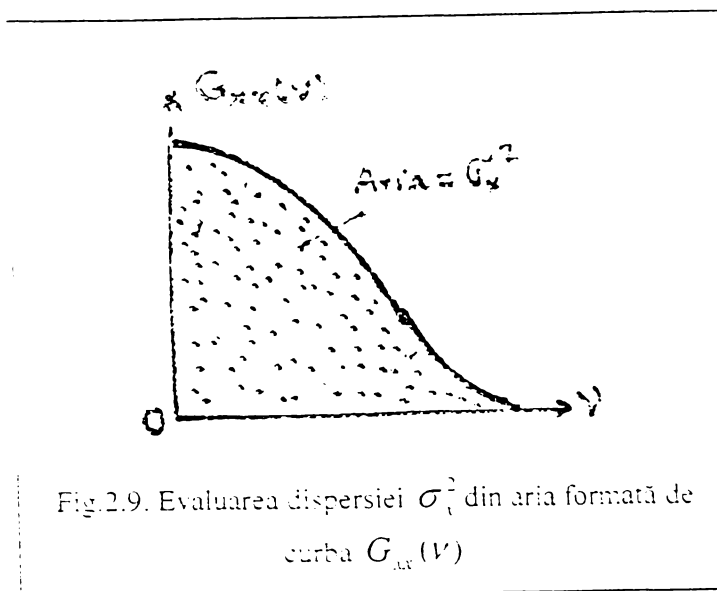


Fig. 2.9. Evaluarea dispersiei σ_x^2 din aria formată de curba $G_{xx}(\nu)$

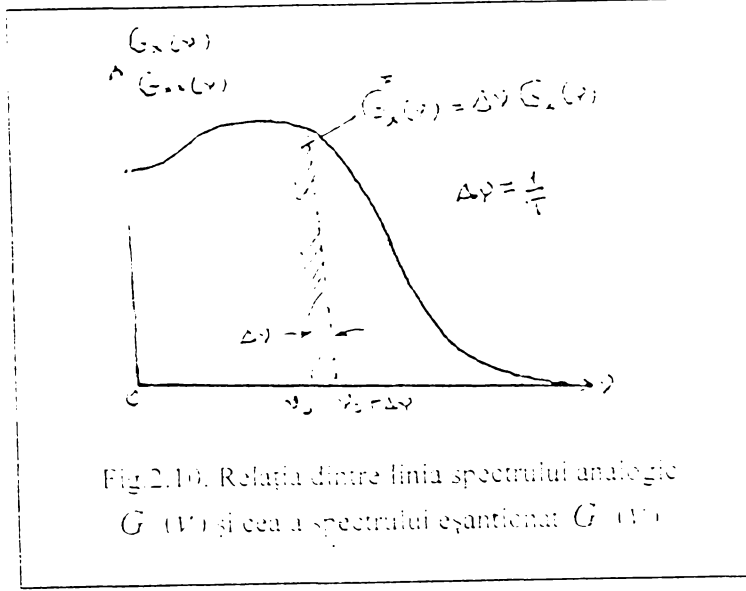


Fig. 2.10. Relația dintre linia spectrală analogică $G_x(\nu)$ și cea a spectralului eșantionat $G_x^*(\nu)$

Din cele de mai sus rezultă că planimetrând aria de sub curba $G_{xx}(\nu)$ se obține valoarea dispersiei σ_x^2 , după cum este indicat în fig. 2.9. În fig. 2.10 este indicată relația dintre linia spectrală a spectralului analogic $G_x(\nu)$ sau $G_{xx}(\nu)$ și liniile spectrale ale acestor spectre eșantionate. Întrucât conținutul informațional dintre două linii spectrale nu trebuie pierdut, rezultă că există relațiile:

$$G_x^*(\nu) = G_x^*(q) = \Delta\nu G_x(\nu); G_{xx}^*(\nu) = G_{xx}^*(q) = \Delta\nu G_{xx}(\nu) \quad (2.82)$$

Este evident că și în cazul spectrelor bilaterale $S_x(q)$ și $S_{xx}(q)$ ale semnalelor analogice, în cazul eșantionării lor, dacă au fost inițial determinate, au loc următoarele relații similare:

$$S_x^*(\nu) = S_x^*(q) = \Delta\nu S_x(\nu); S_{xx}^*(\nu) = S_{xx}^*(q) = \Delta\nu S_{xx}(\nu) \quad (2.83)$$

Având în vedere că $\Delta\nu = 1/T$, în care $\Delta\nu$ este rezoluția spectralului eșantionat, iar T este perioada semnalului analogic periodic, sau durata semnalului aperiodic, spectrele originale se obțin din cele eșantionate prin relațiile:

$$S_x(\nu) = \frac{S_x^*(\nu)}{\Delta\nu} = S_x^*(q)T; S_{xx}(\nu) = S_{xx}^*(q)T \quad (2.84)$$

Întrucât spectrul eșantionat, de amplitudine și de putere se determină prin transformata discretă Fourier, care furnizează spectrul discret bilateral prin coeficienții $C_x(q)$ rezultă că $S_x^*(q) = C_x(q)$.

În aceste condiții există relațiile:

$$S_x(q) = TC_x(q); S_{xx}(q) = TC_x^2(q) \quad (2.85)$$

2.3.8. Clasificarea spectrelor Fourier

Conform celor precizate anterior, spectrele Fourier sunt de amplitudine, energetice și de putere. La rândul lor, fiecare din aceste spectre sunt de densitate și propriu zise și pot fi exprimate în formă unilaterală și/sau bilaterală. În fig.2.11. este indicată clasificarea spectrelor Fourier, în baza acestor criterii, fiecare din aceste spectre fiind exprimat prin intermediul coeficienților TDF, $C_x(q)$ și $C_y(q)$.

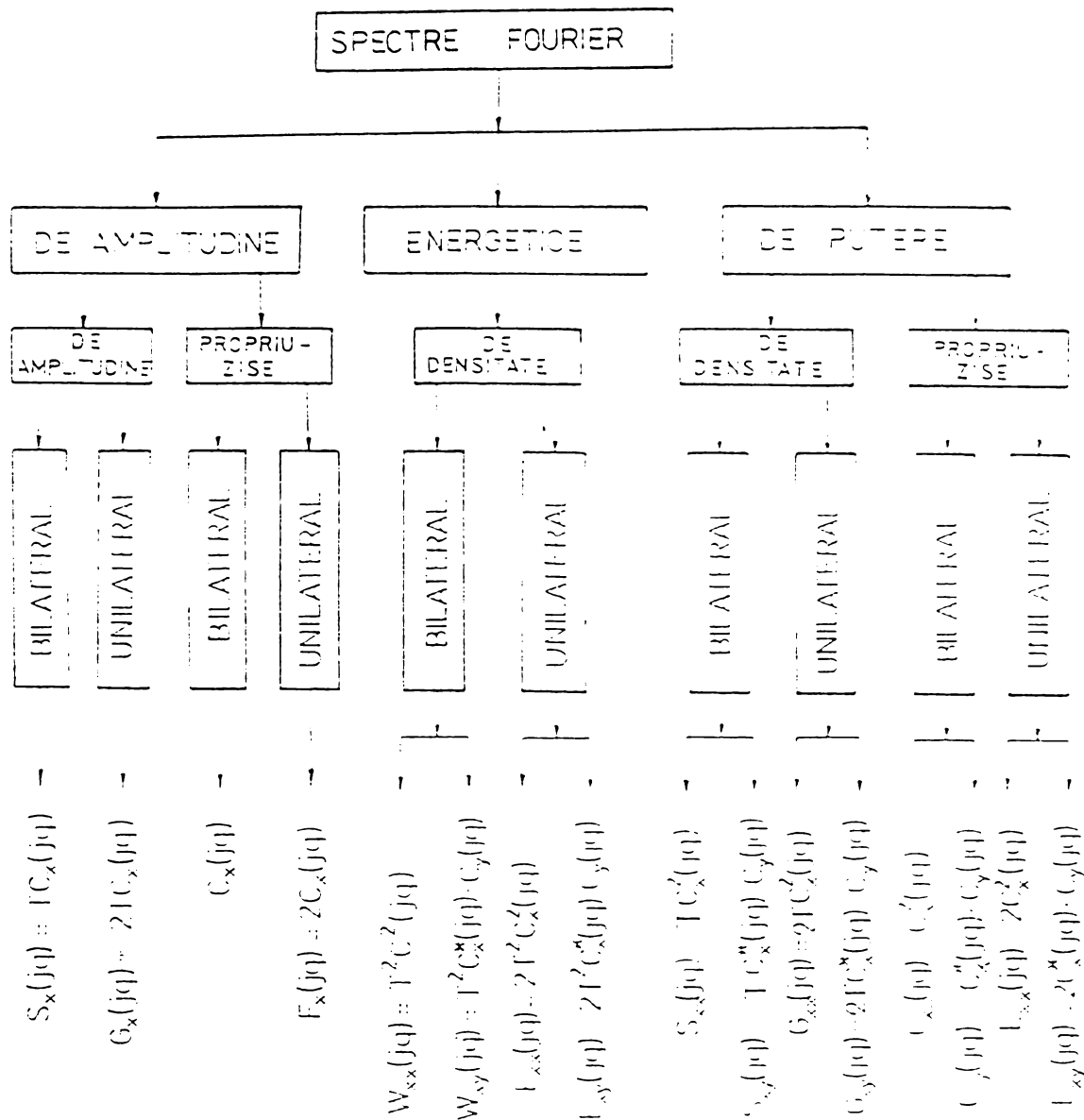


Fig. 2.11. Clasificarea spectrelor Fourier și exprimarea acestora în funcție de coeficienții $C_x(q)$ și $C_y(q)$ ai transformatei discrete Fourier (DFT).

2.3.9. Efectul troncaturii funcției semnal

Ca urmare a limitării în domeniul temporal al traseului funcției semnal care indică evoluția în timp a procesului examinat, în spectrul Fourier obținut, în baza transformatei directe Fourier, apar distorsiuni, care evident determină o reprezentare eronată, în raport cu spectrul adevărat al funcției semnal considerate [68]. Astfel pentru o fereastră dreptunghiulară $d_j(t)$, indicată în fig. 2.12 la poziția b), căreia îi corespunde un spectru $Q_j(\nu)$, ca urmare a acestei trunchieri, spectrul original va fi modificat prin prezența acestui spectru adițional, care deformează spectrul util. Ca exemplu se consideră funcția temporală $x(t) = A \sin \omega t$, de la poziția a. o undă sinusoidală, căreia în spectru îi corespund două linii spectrale, care

combinate cu spectrul $Q_0(\nu)$ al ferestrei dreptunghiulare conduc la spectrul semnalului sinusoidal trunchiat de la poziția c), la spectrul combinat aferent $\hat{X}(\nu)$.

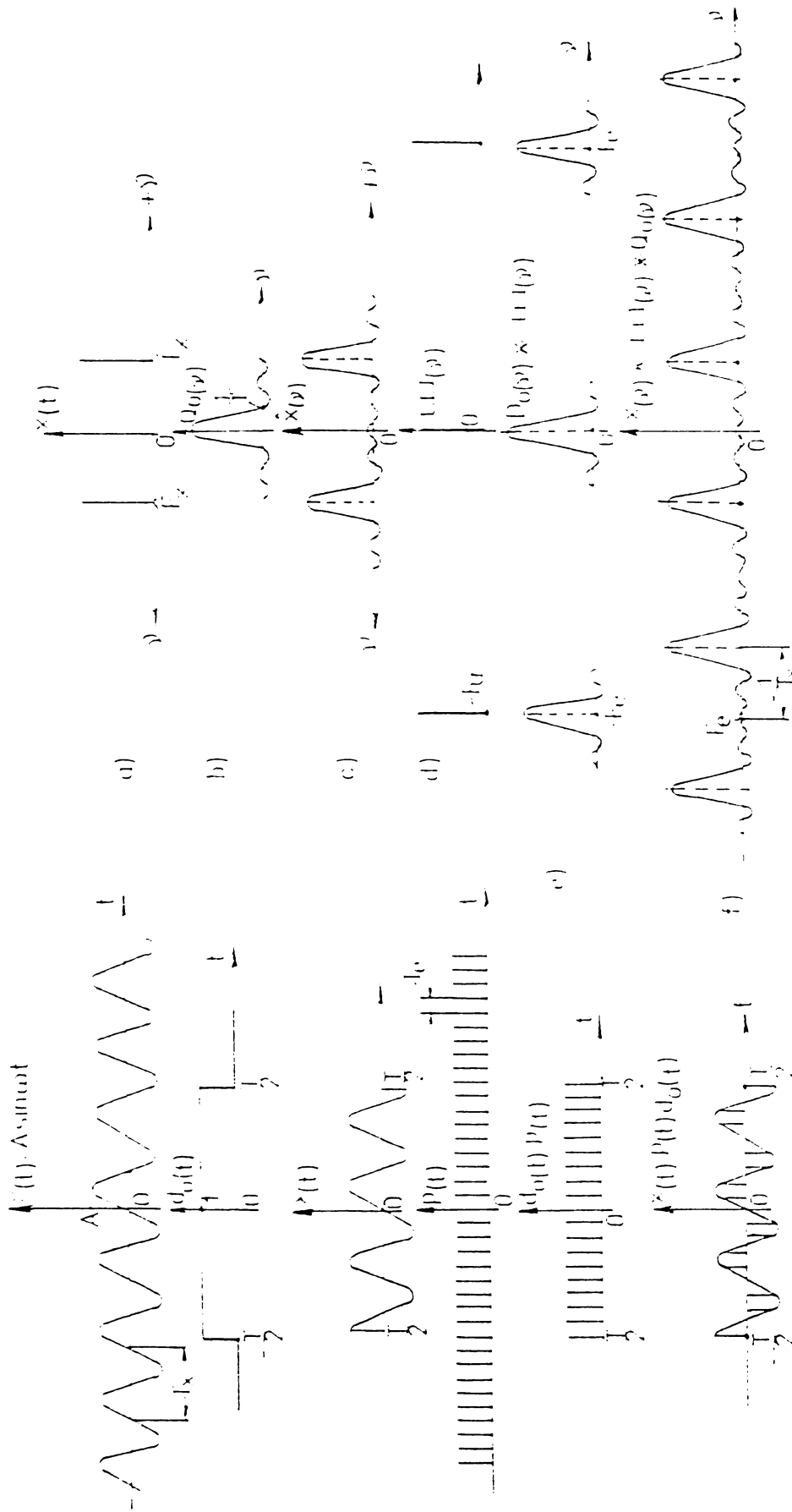


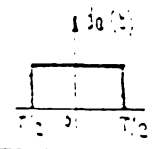
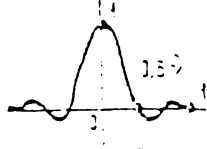

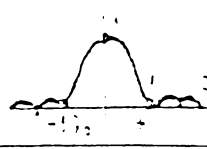
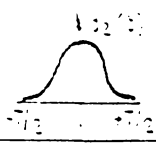
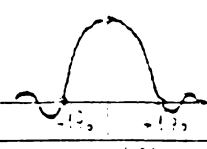
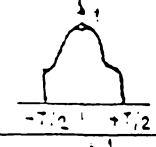
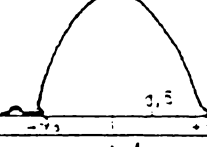
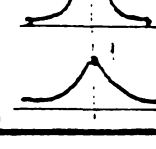
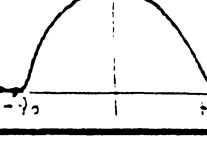
Fig. 2.12. Efectul fenomenului de troncatură a semnalului asupra spectrului aferent.

Efectul trunchierii se evidențiază și în cazul funcției semnal eșantionate, indicate la poziția d), la care prin limitarea dată de $d_0(t).P(t)$, va corespunde un spectru repetitiv de forma $Q_0(f)$, indicat în poziția e).

În cazul unui semnal armonic trunchiat și eșantionat, se va obține un spectru repetitiv bilateral indicat la poziția f), în care $X^*(\nu) = X(\nu) \otimes (\nu) \otimes Q_0(\nu)$, în care este așa numita funcție pieptene [77].

Pentru înlăturarea efectului trunchierii se apelează la așa numita operație de curățire sau netezire, prin utilizarea unor funcții de ponderare, care aduc într-o măsură mai mare sau mai mică spectrul calculat cât mai aproape de cel adevărat. În acest caz, dacă se notează cu $d(t)$ funcția pondere, se pornește de la semnalul $\hat{x}(t) = x(t)d(t)$ sau dacă este eșantionat $\hat{X}(n) = X(n)D(n)$, care prin transformata discretă Fourier determină coeficienții $C_k(q)$. În tabelul 2.3. sunt indicate principalele tipuri de ferestre temporale ponderale, cele mai utilizate fiind funcțiile Hanning și Hamming.

Tabelul 2.3. Ferestre temporale ponderale

Funcția ponderală					
Denumirea	Ecuația	Forma	$\nu_0 = 1/T$ Spectrul	Lungimea de bandă	Raport lob principal / 100 sec
Poartă	$d_0(t) = \begin{cases} 1 & t \leq T/2 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$			$0.45 \nu_0$	-18 dB
Bartlett	$d_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{T} & t \leq T/2 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$			$1.25 \nu_0$	-26 dB
Hanning	$d_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right)$			$1.5 \nu_0$	-32 dB
Hamming	$d_3(t) = 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi t}{T}$			$1.36 \nu_0$	-43 dB
Triplet	$d_4(t) = \frac{9}{8} \frac{2t}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$			$1.5 \nu_0$	nu are ($\gg -100$ dB)

2.4. Transferul liniar

2.4.1. Generalități

În vederea analizei frecvențiale a funcțiilor semnal provenite de la sistemele și procesele fizice în evoluție este necesar să se ia în considerație unele fenomene ce intervin în procedurile de achiziție, pregătire, prelucrare și interpretare a datelor. Aceste fenomene au un rol important în evaluarea parametrilor ce caracterizează informațiile de natură statistică, temporală și frecvențială, conținute în aceste semnale [51], [60], [132].

În acest scop se vor prezenta într-o formă succintă procesele de convoluție temporală și frecvențială, transferul liniar și efectul trunchierii semnalelor pe durată finită, efect reflectat, după cum s-a arătat în paragraful 2.3, în spectrul semnalului, precum și în procesul de filtrație frecvențială [120]. Se va evidenția spectrul frecvențial al funcției de transfer, relațiile dintre mărimile de intrare și cele de ieșire al unui element de sistem prin intermediul funcțiilor de corelație și al celor spectrale aferente [110].

Prin intermediul operatorului densității spectrale se abordează simplu și eficient procesul transferului liniar în procesele SISO și-n unele cazuri în procesele MIMO [69]. În vederea aprecierii cantitative a gradului de linearitate a elementelor de sistem și a sistemelor în ansamblu, sunt indicate funcțiile de coerență și se prezintă procedee de identificare utilizând funcțiile de corelație și de densitate spectrală de putere. În continuare se prezintă unele aspecte ale procesului de eșantionare și metoda de evitare a suprapunerii lobilor spectrali adiacenți.

2.4.2. Răspunsul caracteristic al sistemelor fizice

Un aspect important al desfășurării proceselor fizice în evoluție îl constituie comportarea dinamică în funcție de timp. Din punct de vedere al dependenței dintre mărimea de ieșire și cea de intrare, sistemele sau elementele acestora se împart în liniare și neliniare. În realitate majoritatea sistemelor fizice sunt neliniare, comportarea liniară este o idealizare și este valabilă pentru variații mici ale semnalelor de intrare și de ieșire [59].

La un sistem fizic, mărimea de intrare are caracter de excitație, iar cea de ieșire constituie răspunsul sistemului la excitație. Un sistem este caracterizat prin parametri constanți dacă proprietățile fundamentale ale sistemului sunt independente în raport cu timpul.

Sistemul este liniar dacă răspunsul său satisface proprietatea de aditivitate, cunoscut și sub denumirea de principiul superpoziției, în sensul că la o sumă de semnale distincte de intrare, răspunsul total este egal cu suma răspunsurilor individuale aferente semnalelor de intrare.

Transferul semnalelor prin sistemul fizic se exprimă printr-o relație funcțională dintre mărimile de ieșire și cele de intrare, precum și cu derivatele sau integralele acestora în raport cu timpul. Pentru obținerea acestora se apelează la legile cele mai generale care guvernează producerea și desfășurarea procesului fizic: principiile conservării materiei și energiei, legile fundamentale ale mecanicii, termodinamicii, electrotehnicii, precum și alte legi specifice naturii procesului.

Caracteristicile dinamice ale sistemelor cu parametri constanți pot fi descrise prin răspunsul sistemului la semnalul impuls unitar $\delta(t)$, denumit semnalul Dirac, aplicat la intrare [28]. Răspunsul sistemului, denumit funcție pondere, sau răspunsul ponderal, constituie o apreciere, o caracterizare dinamică a sistemului fizic. În baza principiului superpoziției, cunoscând răspunsul la un singur impuls se poate determina răspunsul sistemului pentru orice semnal de intrare care poate fi descompus într-o succesiune de impulsuri. Legătura dintre semnalul de intrare $x(t)$, răspunsul ponderal $h(t)$ și semnalul de ieșire $y(t)$, se exprimă printr-o relație, ecuația de convoluție, care în sine este un fenomen fizic și ca atare este susceptibilă de o interpretare. Dacă la intrare se aplică o excitație intensă, dar de foarte scurtă durată, la ieșire va rezulta un răspuns care va dura și după ce excitația de intrare a încetat.

2.4.3. Ecuația de convoluție, teorema lui Plancherel

Fiind date două funcții semnal și perechile lor Fourier $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$; $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$ se efectuează produsele $X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$ și $x_1(t) \cdot x_2(t)$. În cazul produsului $X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$ se cere funcția $x(t)$, exprimată prin $x_1(t)$ și $x_2(t)$, adică există perechea Fourier $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$. Răspunsul este dat de proprietatea de convoluție temporală din analiza Fourier [66]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau; \quad x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t), \quad (2.86)$$

în care \otimes este simbolul operației de convoluție. Astfel dacă există produsul în domeniul operațional frecvențial Fourier sau Laplace, există relațiile:

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega); \text{ sau } X(s) = X_1(s) \cdot X_2(s), \quad (2.87)$$

atunci între funcțiile semnal existente există relația de convoluție (sau produsul de convoluție) dat de relația (2.86).

În cazul convoluției în domeniul operațional frecvențial, având produsul $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$, între transformatele Fourier există relația:

$$X(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\mu) \cdot X_2[j(v - \mu)] d\mu, \quad (2.88)$$

care constituie expresia proprietății de convoluție în domeniul frecvențial.

Teorema convoluției temporale este utilizată în problemele de transfer a semnalelor fizice prin elemente de sisteme automate, la definirea funcției de transfer, în procesele de filtrare frecvențială. Convoluția frecvențială este aplicată în cazurile de filtrație temporală, de evaluare a efectului trunchierii semnalelor.

Dacă ne referim la transferul liniar printr-un sistem fizic, caracterizat prin mărimea de intrare $x(t)$, funcția pondere $h(t)$ proprie sistemului considerat și $y(t)$ mărimea de ieșire, acest transfer liniar este exprimat prin ecuația sau integrala de convoluție:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau; \quad y(t) = h(t) \otimes x(t), \quad (2.89)$$

În aceste condiții, integrala de convoluție reflectă procesul transferului liniar al unui semnal printr-un sistem caracterizat prin răspunsul ponderal $h(t)$. Deoarece forma integrală a dependenței dintre funcțiile semnal este dificil de utilizat în calcule, în locul acesteia se utilizează produsul algebric al spectrelor aferente, ceea ce simplifică calculele, procedurile de analiză. În acest caz, relativ la elementul de sistem se poate scrie:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s); \quad Y(jv) = H(jv) \cdot X(jv) \quad (2.90)$$

Integrala de convoluție, la care produsului algebric al funcțiilor semnal îi corespunde produsul de convoluție al spectrelor celor două semnale, evidențiază modul în care spectrele celor două semnale se combină în spectrul rezultat.

Teorema lui Plancherel sintetizează proprietatea fundamentală a convoluției, în sensul că unui produs algebric de două funcții temporale îi corespunde un produs de convoluție al spectrelor aferente și viceversa, unui produs de două funcții spectrale îi corespunde un produs de convoluție a funcțiilor semnal aferente. Teorema lui Plancherel se rezumă în mod simbolic prin:

$$\cdot \leftrightarrow \otimes \quad (\text{produs} \leftrightarrow \text{convoluție}), \quad (2.91)$$

Ecuația sau integrala de convoluție (2.89) se demonstrează și euristic, în sensul că i se poate atașa o interpretare ca fenomen fizic. Trebuie precizat că în cazul în care semnalul de intrare este un semnal treaptă unitate $x(t) = u(t) = 1$, la care răspunsul sistemului este exprimat prin funcția indicială $a(t) = y(t)$, pentru $t \geq 1$, rezultând o legătură directă dintre funcția indicială $a(t)$ și funcția pondere $h(t)$ următoarele expresii:

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau; h(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad (2.92)$$

adică funcția indicială $a(t)$ este definită ca integrala în raport cu timpul a funcției pondere, iar aceasta din urmă este egală cu derivata în raport cu timpul a funcției indiciale.

2.4.4. Transferul liniar exprimat prin funcțiile de corelație

Pentru un element liniar cu coeficienți constanți, cu răspunsul ponderal $h(t)$, legătura dintre funcția de autocorelație $R_{yy}(\tau)$ a semnalului de ieșire și funcția de autocorelație $R_{xx}(\tau)$ a semnalului aplicat la intrarea elementului există relația [68]:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) R_{xx}(\tau + \lambda - \eta) d\eta. \quad (2.93)$$

sau utilizând simbolul de convoluție:

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau). \quad (2.94)$$

Evaluarea funcției de convoluție dintre intrare și ieșire este valabilă expresia:

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau); R_{xx}(\tau) = R_{yy}(\tau) \otimes h(\tau) \quad (2.95)$$

Relații similare se obțin și pentru funcțiile de covarianță relativ la transferul liniar printr-un sistem liniar:

$$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau); C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau); C_{xx}(\tau) = C_{yy}(\tau) \otimes h(\tau). \quad (2.96)$$

2.4.5. Transferul liniar în domeniul frecvențial

În baza teoremei lui Plancherel și a perechilor Fourier definite, relația (2.89) conduce la:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s); Y(j2\pi\nu) = H(j2\pi\nu) \cdot X(j2\pi\nu); Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega); \quad (2.97)$$

din care rezultă una din definițiile funcției de transfer, scrisă în trei forme:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}; H(j\nu) = \frac{Y(j\nu)}{X(j\nu)}; H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \quad (2.98)$$

care arată că funcția de transfer este raportul dintre transformata operațională (Laplace sau Fourier) a mărării de ieșire și transformata operațională a mărării de intrare.

La același rezultat se ajunge dacă în ecuația diferențială liniară ce caracterizează un sistem liniar se aplică transpunerea în domeniul operațional pe baza proprietății de derivare:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i Y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j X(t)}{dt^j} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i S^{-i} Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j S^{-j} X(s), \quad (2.99)$$

care conduce ca și (2.98) la:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j S^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i S^{-i}}, \text{ cu } i \geq j. \quad (2.100)$$

Condiția $i \geq j$ exprimă realizabilitatea fizică a sistemului.

Relația (2.100), față de (2.98) arată tocmai legătura funcției de transfer cu coeficienții ecuației diferențiale care guvernează procesul considerat.

O altă interpretare a funcției de transfer îl constituie răspunsul raportat al sistemului la un semnal armonic aplicat la intrare, definiție care are suport experimental fizic, dar care nu poate fi utilizată în calculele pentru evaluarea tipurilor de sistem. În fine, a treia interpretare este legată de faptul că funcția pondere și funcția de transfer formează pereche operațională Laplace sau Fourier:

$$h(t) \leftrightarrow H(s); h(t) \leftrightarrow H(j\omega); h(t) \leftrightarrow H(j\nu). \quad (2.101)$$

O altă modalitate de exprima transferul liniar îl constituie relațiile dintre funcțiile de corelație și cele de densitate de putere, funcții relativ la un sistem fizic linear. Pornind de la relațiile exprimate prin funcțiile de corelație:

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau); R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau); R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(-\tau) \otimes h(\tau), \quad (2.102)$$

apoi se ține seama de perechile Fourier:

$$h(\tau) \leftrightarrow H(j\nu); h(-\tau) \leftrightarrow H^*(j\nu); R_{xx}(\tau) \leftrightarrow S_{xx}(j\nu); R_{yy}(\tau) \leftrightarrow S_{yy}(j\nu);$$

$$R_{xy}(\tau) \leftrightarrow S_{xy}(j\nu); R_{yx}(\tau) \leftrightarrow S_{yx}(j\nu)$$

și ținând seama de teoremele lui Plancherel, pentru un element sau un sistem au loc următoarele relații importante:

$$S_{yy}(j\nu) = S_{xx}(j\nu) \cdot H(j\nu); S_{yx}(j\nu) = S_{xx}(j\nu) \cdot H^*(j\nu), \quad (2.103)$$

$$S_{yy}(j\nu) = S_{xx}(j\nu) \cdot H(j\nu) \cdot H^*(j\nu) = S_{xx}(\nu) \cdot H^2(\nu), \quad (2.104)$$

$$S_{yx}(j\nu) = S_{xx}(j\nu) \cdot H(j\nu). \quad (2.105)$$

Relația (2.104) este cunoscută sub denumirea de teorema fundamentală a densității spectrale relativ la transferul liniar al unui element de sistem și exprimă legătura dintre autospectrul de putere $S_{yy}(\nu)$ al semnalului de la ieșire cu autospectrul $S_{xx}(\nu)$ al semnalului de la intrare prin intermediul pătratului modulului funcției de transfer al elementului considerat.

În cazul în care se utilizează funcțiile de densitate de putere unilaterale rezultă:

$$G_{yy}(j\nu) = G_{yy}(\nu) \cdot H^*(j\nu); G_{yy}(\nu) = G_{xx}(\nu) \cdot H^*(\nu); G_{yy}(\nu) = G_{yy}(j\nu) \cdot H(j\nu). \quad (2.106)$$

Aceste relații stau la baza unor metode eficiente în studiul identificării și optimizării proceselor automate.

În prezent există metodologii de evaluare directă a spectrelor de putere prin mijloace electronice de calcul, analizoare spectrale sau calculatoare cu programe speciale aferente, care permit relativ ușor să se determine funcția de transfer, utilizând oricare dintre relațiile (2.106).

Totuși, dacă semnalul de intrare este perturbat, ca și sistemul sau semnalul de ieșire, utilizarea directă nu înlătură aspectul disturbant al semnalelor perturbatoare, fapt ce se va reflecta în forma spectrului în funcție de frecvență. Pentru a înlătura în cea mai mare măsură, prezența sau aspectul perturbațiilor în spectru, se utilizează determinarea în prealabil a funcțiilor de corelație.

Drept exemplu se consideră determinarea spectrului aferent unui semnal electroencefalografic (EEG), care prin natura sa este stohastic, utilizând un corelator numeric, urmat de un transformator Fourier. În fig.2.13 este prezentată schema de evaluare a spectrului prin determinarea prealabilă a funcțiilor de corelație. Curățirea spectrului de efectul aleator se datorește faptului că funcțiile de corelație se exprimă prin mediere temporală [121].

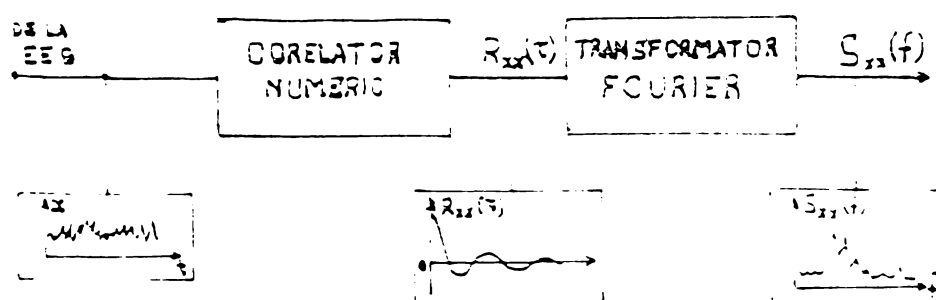


Fig.2.13. Evaluarea spectrului de putere prin intermediul funcțiilor de corelație, în cazul semnalelor EEG.

Ca exemplu se face o comparație între spectrul obținut direct din semnal, fiind afectat de efectul perturbațiilor, (fig.2.14a), și spectrul curățat, obținut prin intermediul corelațiilor, (fig.2.14b).

Înlăturarea perturbațiilor este evidentă și în transferul funcției de autocovarianță a semnalului EEG, ca în fig.2.15.

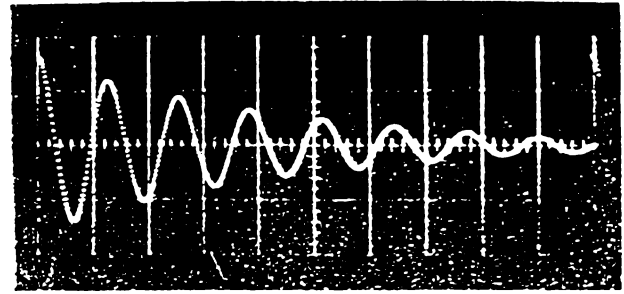
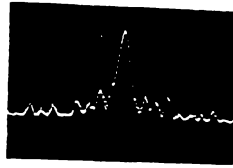
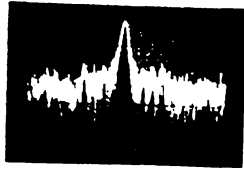


Fig.2.14. Spectrul EEG obținut direct din funcția semnal a) și cel obținut prin intermediul corelațiilor b).

Fig.2.15. Funcția de autocovarianță a semnalului AEG.

Este evident că dacă nu există perturbații însemnate asupra semnalelor sau parametrilor sistemului este preferabilă utilizarea evaluării spectrelor de putere din semnale, pentru determinarea funcției de transfer a sistemului.

2.4.6. Funcția de coerență

Având funcția semnal $x(t)$ de intrare și respectiv $y(t)$ de ieșire a unui semnal sau sistem liniar, se definește funcția de coerență ca mărime reală și pozitivă de frecvență [30]:

$$\gamma^2_{xy}(\nu) = \frac{|S_{xy}(j\nu)|^2}{S_{xx}(\nu) \cdot S_{yy}(\nu)} = \frac{|G_{xy}(j\nu)|^2}{G_{xx}(\nu) \cdot G_{yy}(\nu)} \quad (2.107)$$

și ținând cont de teorema inegalității funcțiilor densităților spectrale:

$$|S_{xy}(j\nu)|^2 \leq S_{xx}(\nu) \cdot S_{yy}(\nu); |G_{xy}(j\nu)|^2 \leq G_{xx}(\nu) \cdot G_{yy}(\nu); \quad (2.108)$$

din care rezultă:

$$\gamma^2_{xy}(\nu) \in [0;1]. \quad (2.109)$$

Astfel, funcția de coerență, pentru orice ν , este un număr pozitiv adimensional cuprins între 0 și 1. Rădăcina pătrată a funcției de coerență, luată cu semnul (+), respectiv $\gamma_{xy}(\nu)$, corespunde cu coeficientul de intercorelație $\rho_{xy}(\nu)$.

Pentru un sistem liniar cu parametri constanți, caracterizat prin funcția de transfer $H(j\nu)$ și pentru care sunt adevărate relațiile (2.106), ținând seama de relația de definiție (2.107), se obține:

$$\gamma^2_{xy}(\nu) = \frac{|G_{xy}(j\nu)|^2}{G_{xx}(\nu) \cdot G_{yy}(\nu)} = \frac{G^2_{xx}(\nu) \cdot |H(j\nu)|^2}{G_{xx}(\nu) G_{xx}(\nu) \cdot |H(j\nu)|^2} = 1. \quad (2.110)$$

Relația (2.110) exprimă că un sistem liniar, cu parametri constanți, de tip SISO, cu valori definite pentru funcțiile semnal de intrare și ieșire, funcția de transfer este egală cu unitatea. În cazul în care semnalele $x(t)$ și $y(t)$ sunt necorelate, funcția de coerență este nulă.

Dacă funcția de coerență este mai mare ca zero și mai mică decât unitatea, pot să apară trei situații:

- Existența unor zgomote externe prezente în măsurători;
- Sistemul sau elementul de sistem este neliniar;
- Ieșirea $y(t)$ este condiționată nu numai de intrarea $x(t)$, ci și de alte intrări necunoscute și neluate în considerare.

Funcția de coerență constituie un criteriu pentru aprecierea gradului de liniaritate sau neliniaritate a unui sistem.

Coerența se determină ca raport a două măsurători [30]:

$$a) |H(j\nu)|_I^2 = \frac{G_{yy}(\nu)}{G_{xx}(\nu)}; \quad b) |H(j\nu)|_{II}^2 = \frac{|G_{xy}(j\nu)|^2}{G_{xx}(\nu)} \quad (2.111)$$

Aceste relații reprezintă pătratul modulului funcției de transfer, exprimat în două maniere și din care rezultă:

$$\frac{|H(j\nu)|_{II}^2}{|H(j\nu)|_I^2} = \gamma^2_{xy}(\nu), \quad (2.112)$$

adică raportul modulului la pătrat, determinat în cele două maniere reprezintă tocmai funcția de coerență. Trebuie precizat că relațiile (2.111) reprezintă două metode de evaluare a funcției de transfer, numai ca modul, cu pierderea informației despre fază.

În cazul în care funcția de coerență se va determina prin intermediul spectrelor de densitate de putere, direct din semnale, se va utiliza un program conform cu ordinograma din fig.2.16.

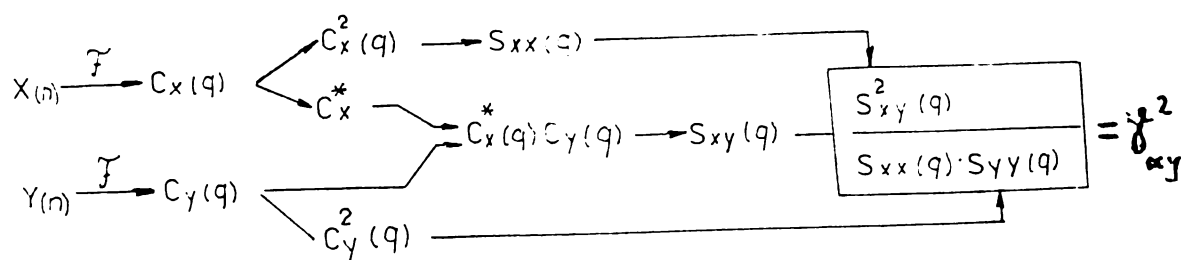


Fig.2.16. Schema pentru ordinograma evaluării funcției de coerență

2.4.7. Relații dintre funcțiile analogice și discrete ale corelațiilor și spectrelor

Pentru evaluarea pe calculator a funcțiilor de corelație și a celor spectrale este necesară eșantionarea funcțiilor semnal, ca de altfel și eșantionarea funcțiilor de corelație la intrarea transformatorului numeric Fourier. În aceste cazuri există următoarele relații:

a. Relații între funcțiile de corelație

a₁. Funcțiile de corelație eșantionate au aceleași valori ca și funcțiile de corelație analogice, pentru aceeași valoare a decalajului $\tau = k T_e$:

$$R'_{xx}(k T_e) = R_{xx}(k T_e); R'_{xy}(k T_e) = R_{xy}(k T_e); R'_{yy}(k T_e) = R_{yy}(k T_e). \quad (2.113)$$

Aceleași relații există evident și între funcțiile de covarianță $R'_{xx}(k)$, $R'_{xy}(k)$ și $R'_{yy}(k)$, fiind obținute prin eșantionarea cu durata de eșantionare T_e a funcțiilor analogice $R'_{xx}(\tau)$, $R'_{xy}(\tau)$ și $R'_{yy}(\tau)$.

a₂. Funcțiile de corelație, obținute din semnalele eșantionate $x^*(t) = x(t) \cdot \delta(t - nT_e)$, respectiv $y^*(t) = y(t) \cdot \delta(t - nT_e)$ sunt egale cu raportul dintre funcțiile de corelație analogice sau eșantionate prin durata T_e de eșantionare:

$$R_{xx'}(k) = \frac{1}{T_e} R'_{xx}(k) = \frac{1}{T_e} R_{xx}(k); R_{xy'}(k) = \frac{1}{T_e} R'_{xy}(k) = \frac{1}{T_e} R_{xy}(k); \quad (2.114)$$

În fig.2.17 sunt prezentate funcțiile de autocovarianță și de intercovarianță analogice sau eșantionate, între care există relații de forma (2.113), adică:

$$C'_{xx}(k) = C_{xx}(k); C'_{xy}(k) = C_{xy}(k); R'_{yy}(k) = R_{yy}(k). \quad (2.115)$$

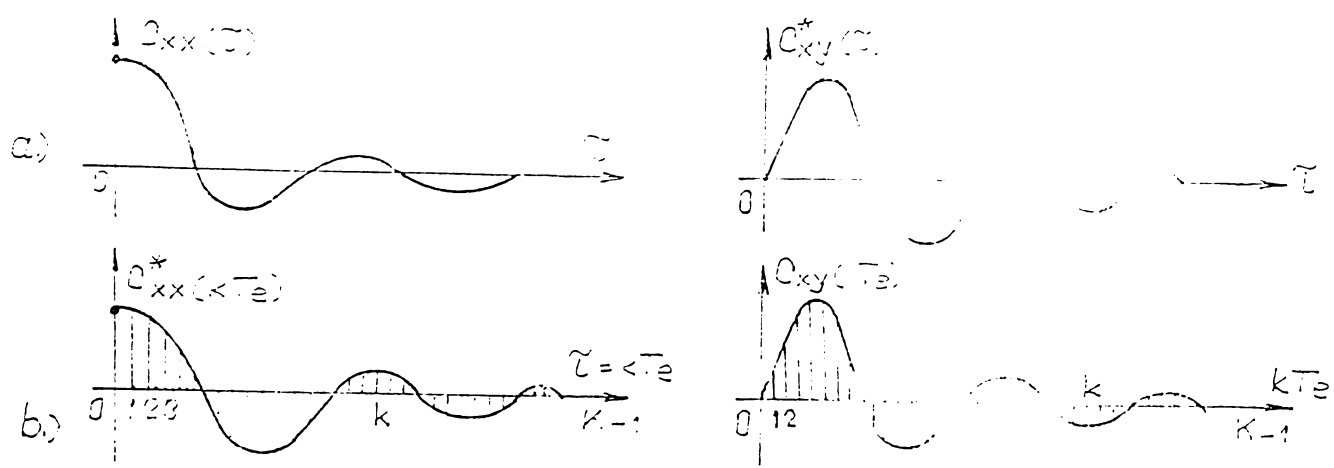


Fig.2.17. a) Funcțiile de autocovarianță; b) Funcțiile de intercovarianță, analogice și eșantionate.

b. Relații între funcțiile analogice și eșantionate

b₁. Relațiile dintre spectrele de densitate de putere și de putere propriu-zise, exprimate în funcție de coeficienții Fourier, spectre provenite din spectrul analogic furnizat de integrala Fourier, au fost prezentate în schema din fig.2.11.

b₂. Relațiile dintre spectrele eșantionate de densitate și propriu-zise de putere au la bază relația evidentă [123]:

$$S'_{xx}(q) = \Delta v \cdot S_{xx}(q) = F_e \cdot S_{xx}(q); \quad \Delta v = F_e; \quad v = qF_e; \quad F_e = \frac{1}{T_e} \quad (2.116)$$

în care F_e este frecvența de eșantionare a spectrului care, care nu trebuie confundată cu frecvența lui Shannon $F_s = \lambda/T_e$.

În fig.2.18 se prezintă autospectrul de putere analogic și discretizat.

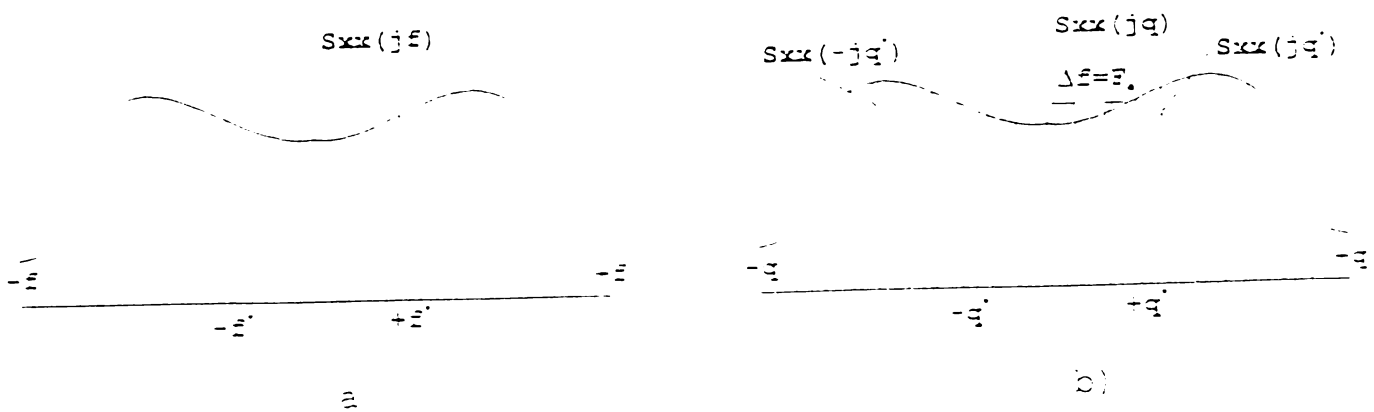


Fig.2.18. Autospectrul de putere. a) analogic b) discretizat.

Dacă frecvența maximă F_M este jumătate din frecvența Shannon $F_M = F_s/2$ și prin eșantionarea spectrului cu frecvența F_e , pe întreaga bandă $B = F_M$ se realizează M eșantioane, adică $F_M = M \cdot F_e$, rezultă:

$$F_M = F_s/2 = M \cdot F_e; \quad F_e = F_s/2M = B/M. \quad (2.117)$$

Din relația (2.116) rezultă:

$$S'_{xx}(q) = \frac{B}{M} \cdot S_{xx}(q). \quad (2.118)$$

b₃. Relațiile dintre spectrele de putere și cel rezultat din semnalele eșantionate.

Spectrul analogic $S_x(q)$, obținut din semnalul eșantionat, referitor numai la lobul principal:

$$S_x(jv) = \frac{1}{T_e} S_x(jv); \quad S_x(q) = \frac{1}{T_e} S_x(q). \quad (2.119)$$

Spectrul analogic de densitate de putere al semnalului $x(t)$ discretizat este:

$$S_{x'}(q) = \frac{1}{T} S_{x'}^2(q) = \frac{1}{T_e^2} \cdot \frac{S_x^2}{T} = \frac{1}{T_e^2} S_{xx}(q). \quad (2.120)$$

Dacă acest spectru se discretizează cu rezoluția spectrală F_e , rezultă:

$$S'_{x'}(q) = F_e \cdot S_{x'}(q) = \frac{F_e}{T_e^2} S_{xx}(q) = \frac{F_s}{2M} \cdot \frac{1}{T_e^2} S_{xx}(q) = \frac{1}{2MT_e} S_{xx}(q), \quad (2.121)$$

unde s-a ținut cont de expresia frecvenței Shannon $F_s = 1/T_e$ pentru $\lambda=1$.

Programele pentru calculator trebuie să țină seama de relațiile dintre spectrul de densitate de putere $S_{xx}(v)$, cu spectrul eșantionat din acesta $S'_{xx}(q)$, relația (2.118), cu spectrul provenit din eșantionare semnalului $x(t)$, $S_{x'}(q)$, relația (2.120), în care $S_{x'}(q)$ este analoagă și-n fine cu spectrul eșantionat $S'_{x'}(q)$, provenit din $S_{x'}(q)$, prin relația (2.121).

Aceste precizări sunt foarte importante în acțiunea de evaluare a spectrelor prin intermediul calcului numeric pe calculatoare sau analizoare spectrale numerice.

În fig.2.19 se prezintă spectrul eșantionat $S'_{x'}(q)$, eșantionat din spectrul analogic $S_{x'}(q)$, cu respectarea condiției lui Shannon, ca cele două spectre adiacente să nu se intersecteze. Se observă din figură că $F_M = B$ este notată cu F_N , denumită frecvența Nyquist [123].

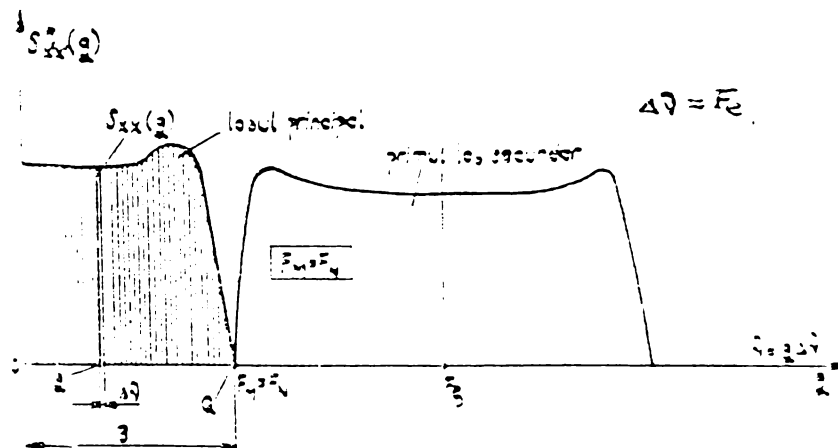


Fig.2.19. Eșantionarea spectrului $S'_{x'}(q)$, aferent spectrului de densitate de putere provenit din semnalul eșantionat $x'(n) = x(n) \cdot \delta(t-n)$.

2.4.8. Operatorul densității spectrale

În cazul sistemelor liniare, cu unul sau mai multe terminale, se introduce o metodă de analiză care exprimă legătura dintre densitățile spectrale de putere ale semnalelor la diferite terminale, sau din interiorul sistemului, împreună cu transmitanțele parțiale ale sistemului. Pentru aceasta s-a introdus de către Ș. Gârlașu [71] operatorul de densitate spectrală de putere.

Pentru cazul a două procese aleatoare $X(t)$ și $Y(t)$ cu evoluție simultană și între care există o interacțiune energetică, pentru câte o realizare din fiecare, obținută prin înregistrarea pe o durată finită T , corespunde câte o pereche Fourier:

$$x_T^{(i)} \leftrightarrow X_T^{(i)}(j\nu); y_T^{(i)} \leftrightarrow Y_T^{(i)}(j\nu), \quad (2.122)$$

în care T indică faptul că $x(t)$ și $y(t)$ sunt nule în afara intervalului $[-T; +T]$, iar i este ordinul realizărilor.

Densitățile spectrale proprii și mutuale se definesc astfel:

$$S_{xx}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X^{(i)*}(j\nu) \cdot X^{(i)}(j\nu)]; S_{yy}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[Y^{(i)*}(j\nu) \cdot Y^{(i)}(j\nu)]. \quad (2.123)$$

Aceste relații se pot pune sub o formă condensată:

$$S_{xx}(\nu) = D[X^*(j\nu) \cdot X(j\nu)]; S_{yy}(\nu) = D[Y^*(j\nu) \cdot Y(j\nu)], \quad (2.124)$$

unde operatorul \mathbf{D} presupune operația de transformare Fourier a funcțiilor semnal, operația de trecere la limită, medierea statistică E asupra ansamblului de produse a transformatorilor Fourier și diviziunea cu $2T$.

După cum va rezulta mai departe operatorul \mathbf{D} va facilita calculele în care intervin combinații liniare de funcții semnal, pentru care se solicită funcțiile de densitate proprie și reciproce de putere, aferente unui sistem liniar, fără a mai apela la integralele Fourier, relațiile Wiener-Hincin, sau la integralele de convoluție. Calculele se reduc la operații algebrice simple în domeniul frecvenței. Trebuie subliniat că operatorul \mathbf{D} se aplică funcțiilor spectrale și nu operează asupra transmitanțelor (funcțiilor de transfer) din sistem [69].

Ca exemplu de eficiență a operatorului \mathbf{D} , se va demonstra expresia transferului liniar în domeniul frecvențial, utilizând spectrele de putere. Pentru elementul SISO liniar, caracterizat prin intrarea $x(t)$, funcția pondere $h(t)$ și semnalul de ieșire $y(t)$, prin funcțiile de amplitudine transferul liniar se exprimă prin relația cunoscută:

$$Y(j\nu) = H(j\nu) \cdot X(j\nu). \quad (2.125)$$

Dacă se trece la spectrele conjugate:

$$Y^*(j\nu) = H^*(j\nu) \cdot X^*(j\nu). \quad (2.126)$$

Înmulțind termen cu termen relațiile de mai sus și aplicând operatorul \mathbf{D} , se obține

$$D[Y^*(j\nu) \cdot Y(j\nu)] = H^*(j\nu) \cdot H(j\nu) D[X^*(j\nu) \cdot X(j\nu)], \quad (2.127)$$

iar în conformitate cu definițiile din (2.124), rezultă:

$$S_{yy}(\nu) = H^*(j\nu) \cdot H(j\nu) \cdot S_{xx}(\nu) = S_{xx}(\nu) \cdot H^2(\nu). \quad (2.128)$$

Această demonstrație elegantă, imediată și destul de simplă, contrastează cu demonstrațiile clasice, care izează de teoremele de convoluție, prezentate sub formă integrală și care au un grad ridicat de dificultate.

2.5. Transformata Fourier. Algoritm FFT

Transformata rapidă Fourier [Fast Fourier Transform] este un instrument de calcul eficient în prelucrarea automată a semnalelor de la sistemele fizice în evoluție, în scopul analizei spectrale de amplitudine și putere a problemelor de filtrație, de recunoaștere a configurației în domeniul sistemelor automate și altele [33], [56].

Pentru efectuarea calculelor de determinare a coeficienților Fourier sunt necesare $N \times N$ operații de multiplicare-mediere, iar în cazul procedurilor rapide FFT, numărul de operații se reduce în mod substanțial fiind de ordinul $2N \log_2 N$ [55], [58].

Astfel, pentru $N=2^{10}=1024$ eșantioane $X(n)$, calculul coeficienților necesită $N \times N=1.048.576$ operații utilizând transformata discretă Fourier (TDF), în timp ce aplicând o procedură FFT, rezultă $N \log_2 N=10.240$, adică o reducere de circa 100 de ori a numărului de operații.

Algoritmul Cooley-Tukey

Numărul de eșantioane și linii spectrale N se exprimă sub forma: $N=2^p$ și permite evaluarea rezultatelor parțiale ale iterațiilor succesive cu ajutorul calculatorului. În aceste caz, $u_1=u_2=u_3=\dots=u_p=2$ [57].

Coeficienții $C(q)$ se transformă într-o sumă de p termeni, fiecare termen implicând un număr de $N/2$ transformări intermediare Fourier care necesită 4 operații elementare pentru fiecare transformare. Deci, pentru N coeficienți $C(q)$ sunt necesare în total $2N_p$ operații complexe de multiplicare-sumare.

Indicii q și n se pot scrie:

$$q = q_0 - 2q_1 - 2^2q_2 - \dots - 2^{p-1}q_{p-1}, \quad (2.129)$$

$$n = n_0 - 2n_1 - 2^2n_2 - \dots - 2^{p-1}n_{p-1}, \quad (2.130)$$

În aceste relații indicii q_i și n_i pot lua numai valori 0 sau 1, așa cum se transcrie în binar orice număr întreg în baza zece.

Exponențiala W pentru orice $r=1, 2, \dots, p$ și având $u_r=2$, devine:

$$W\left(\frac{q_{r-1}n_{p-r}N}{u_r}\right) = \exp(-j \cdot \pi \cdot q_{r-1} \cdot n_{p-1}). \quad (2.131)$$

Cum q_{r-1} și n_{p-r} pot lua numai valorile 0 și 1, rezultă că exponențiala poate lua numai valorile 1 și -1 .

Ecuatiile T definite, vor fi.

$$T(q_0, q_1, \dots, q_{r-2})=1, \text{ pentru } r=1 \quad (2.132)$$

și $T(q_0, q_1, \dots, q_{r-2})=W[(q_0 - 2q_1 - 2^2q_2 - \dots - 2^{r-2}q_{r-2})2^{r-1}n_{p-r}]$, pentru $r=2,3,\dots,p$.

Cu aceste relații transformata Fourier rapidă sub formă iterativă și în exprimare binară, se scrie:

$$C(q_0, q_1, \dots, q_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{p-1}=0}^1 X(n_0, n_1, \dots, n_{p-1}) \cdot W(q, n) \quad (2.133)$$

unde

$$W(q, n) = \prod_{r=1}^p T(q_0, q_1, \dots, q_{r-2}) \cdot \exp(-j \cdot \pi \cdot q_{r-1} \cdot n_{p-r}) \quad (2.134)$$

În aceste condiții, prima treaptă iterativă conduce la:

$$A_1(q_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-1}=0}^1 X(n_0, n_1, \dots, n_{p-1}) \cdot \exp(-j \cdot \pi \cdot q_0 \cdot n_{p-1}) \quad (2.135)$$

Iar pentru a iterația r, avem:

$$\begin{aligned} A_r(q_0, q_1, \dots, q_{r-2}, n_0, n_1, \dots, n_{p-r}) &= \\ &= \sum_{n_{p-r}=0}^1 A_{r-1}(q_0, q_1, \dots, q_{r-2}, n_0, n_1, \dots, n_{p-r}) \cdot T(q_0, q_1, \dots, q_{r-2}) \cdot \exp(-j \cdot \pi \cdot q_{r-1} \cdot n_{p-r}) \end{aligned} \quad (2.136)$$

Relația (2.136) poartă denumirea de *algoritmul Cooley-Tukey* de transformare rapidă Fourier.

Ultima treaptă de iterație este:

$$\begin{aligned} C(q_0, q_1, \dots, q_{p-1}) &\equiv A_p(q_0, q_1, \dots, q_{p-1}) = \\ &= \sum_{n_0=0}^1 A_{p-1}(q_0, q_1, \dots, q_{p-2}, n_0) \cdot T(q_0, q_1, \dots, q_{p-2}) \cdot \exp(-j \cdot \pi \cdot q_{p-1} \cdot n_0) \end{aligned} \quad (2.137)$$

Deci putem determina coeficienții, ca fiind

$$C_x(q) = \frac{1}{N} \cdot A_p(q_0, q_1, \dots, q_{p-1}) \quad (2.138)$$

Pentru prima iterație, conform algoritmului putem reprezenta fig.220:

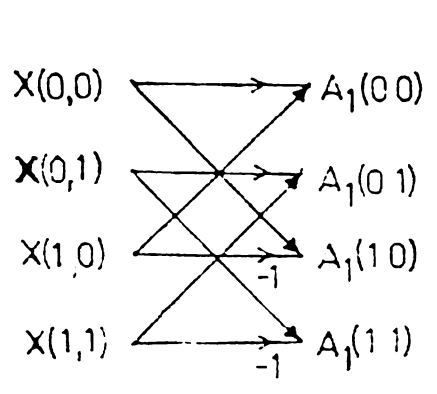


Fig.2.20. Graficul pentru prima iterație FFT în cazul N=4.

Pentru întreg calculul care comportă două iterații se întocmește graficul din fig.2.21:

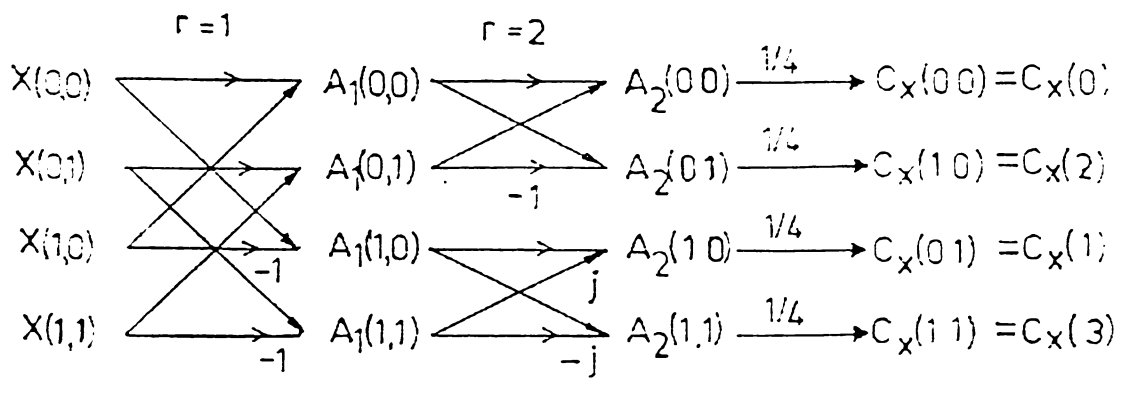


Fig.2.21. Graficul pentru efectuarea completă a FFT în cazul N=4.

În baza celor arătate mai sus, pentru N=8 se construiește graficul din fig.2.22:

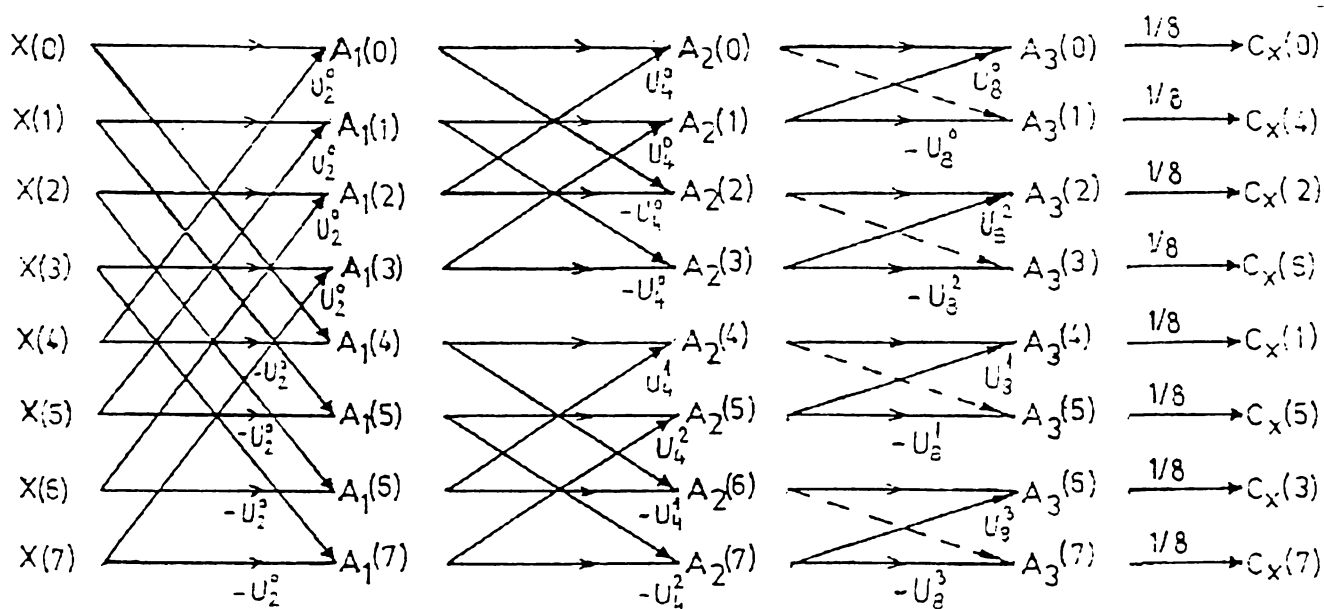


Fig.2.22. Graficul pentru efectuarea FFT în cazul N=8,

Algoritmul WERZ

Pentru evaluarea transformatei discrete directe Fourier (DDFT) se scrie ecuația matricială [140]:

$$C_X = \frac{1}{N} \cdot F \cdot X \quad (2.139)$$

unde: F este matricea DFT (transformatei discrete Fourier), C_X reprezintă vectorul coeficienților Fourier, iar X este vectorul mărimii de intrare a semnalului temporal.

Matricea F este de dimensiune $N \cdot N$, unde N este numărul de eșantioane care satisfac condiția $N = 2^p$, cu p întreg și pozitiv. Din acest motiv Werz utilizează notația $F^{(N)}$ pentru F . Astfel, factorizând:

$$F^{(N)} = F_0^{(N)} \cdot F_1^{(N)} \cdot F_2^{(N)} \cdot \dots \cdot F_{p-1}^{(N)} \quad (2.140)$$

Coeficienții Fourier $C_x(q)$, $q = 0, 1, \dots, N-1$ și eșantioanele $X(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ sunt reprezentate în baza 2 în forma $q = (q_{p-1}, q_{p-2}, \dots, q_2, q_1, q_0)$ și respectiv $n = (n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_2, n_1, n_0)$.

Calculul iterativ se simplifică considerabil dacă componentele matricii conduc la aceeași structură:

$$F_r^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & d_0^{(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1^{(r)} & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{2^{r-1}-1}^{(r)} \\ 1 & -d_0^{(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1^{(r)} & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d_{2^{r-1}-1}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Elementele $d_k^{(r)}$, $k=0, 1, \dots, 2^{p-1}$, cu $r = 0, 1, \dots, p-1$ au forma exponențială W^s , unde $W = e^{-j2\pi/N}$, adică

$$d_{2^r}^{(r)} = d_{2^r+1}^{(r)} = \dots = d_{2^{r+1}-1}^{(r)} = W^{2^r} \quad (2.142)$$

Bazându-ne pe structura matricii $F_r^{(N)}$ putem deduce termenii iterației cu relațiile:

$$A_{i+1} = A_i \left(\frac{q}{2} \right) + A_i \left(\frac{N}{2} + \frac{q}{2} \right) W^s ; \quad q = 0, 2, 4, \dots, N-2; \quad (2.143)$$

$$A_{i+1} = A_i \left(\frac{q-1}{2} \right) W^{N^i} - A_i \left(\frac{N}{2} + \frac{q-1}{2} \right) W^s ; \quad q = 1, 3, 5, \dots, N-1; \quad (2.144)$$

Repartiția exponenților W^s pentru algoritmul Werz este dată după indexul r , iar pentru algoritmul Singleton după indexul i .

Tabelul 2.4.

$F_r^{(N)}$	r	$i = p-r$	Exponenții W^s
$F_{p-1}^{(N)}$	$p-1$	1	W^{11}
$F_{p-2}^{(N)}$	$p-2$	2	$W^0, W^{N/4}$
$F_{p-3}^{(N)}$	$p-3$	3	$W^0, W^{N/8}, W^{2N/8}, W^{3N/8}$
.....
$F_r^{(N)}$	$p-r$	1	$W^0, W^{N/2^i}, W^{2N/2^i}, \dots, W^{(2^{i-1}-2)N/2^i}, W^{(2^{i-1}-1)N/2^i}$
.....
$F_3^{(N)}$	3	$p-3$	$W^0, W^8, W^{16}, W^{32}, \dots, W^{N/2-2^2}$
$F_2^{(N)}$	2	$p-2$	$W^0, W^4, W^8, W^{16}, W^{32}, \dots, W^{N/2-2^2}$
$F_2^{(N)}$	1	$p-1$	$W^0, W^2, W^4, W^8, W^{16}, \dots, W^{N/2-2}$
$F_0^{(N)}$	0	P	$W^0, W^1, W^2, W^3, W^4, \dots, W^{N/2-1}$

Având în vedere că numărul exponențialelor este același ($N/2$) pentru toate iterațiile, rezultă că factorul de repetiție a exponențialelor pentru iterația i este:

$$n = \frac{N/2}{2^{i-1}} \quad (2.145)$$

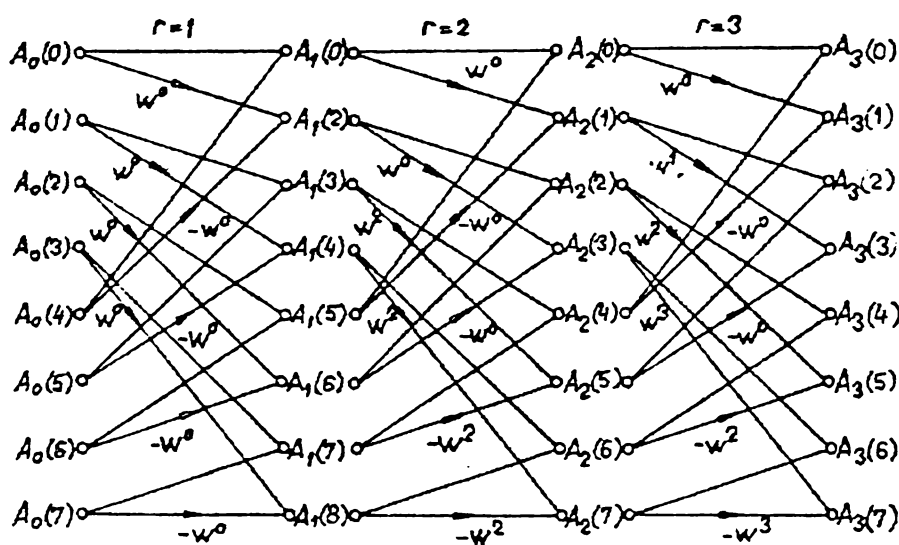


Fig.2.23.Graficul pentru algoritmul WERZ în cazul $N=8$, pentru implementarea transformatei rapide directe discretă Fourier (FFT-W) [139].

Algoritmul Singleton

Acest algoritm este un algoritm canonic derivat din algoritmul Cooley-Tukey, care au aceeași structură pe toate iterațiile și a căror coeficienți ponderali W^s se pot determina din tabelul 2.4. [122].

Pentru algoritmul Singleton se pot scrie relațiile de determinare a termenilor iteației::

$$A_{i-1} = A_i(2q) + A_i(2q+1)W^s ; q = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1; \quad (2.146)$$

$$A_{i-1} = A_i(2q) - A_i(2q+1)W^s ; q = 1, 3, 5, \dots, \frac{N}{2} - 1; \quad (2.147)$$

Pe baza acestora se poate construi graficul din fig.2.24:

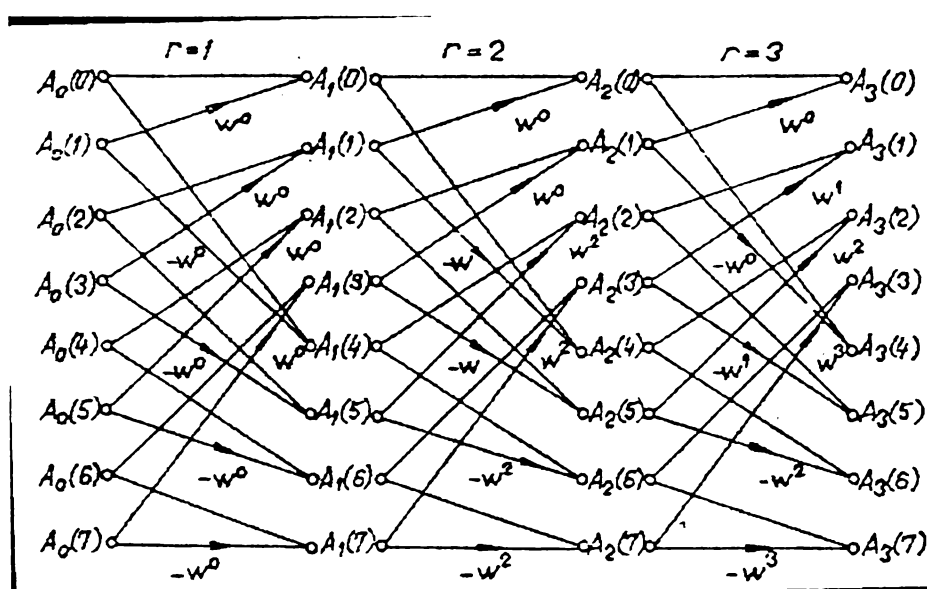


Fig.2.24 Graficul pentru algoritmul Singleton în cazul $N=8$ pentru implementarea FFT-S.

Comparație între algoritmul Werz și Singleton

În continuare se prezintă o paralelă între procedurile Werz și Singleton FFT, care au o structură unică pe toate iterațiile și a căror coeficienți (factori ponderali), pot fi în comun determinați.

- Ambele proceduri Werz și Singleton au o structură unică pe toate iterațiile. Cu algoritmul Werz punctele de intersecție ale graficului sunt situate în pasul A_i , iar pentru procedura Singleton în A_{i-1} .
- Ambele proceduri necesită amestecarea termenilor primei serii în prima iterație, prin inversarea binară a indicilor: $A_0(q) = X[\langle n \rangle]$; $n, q = 0, 1, \dots, N-1$ și ordonarea valorilor

$A_0(q)$ după seria naturală q . Uzual aceste operații se realizează prin subrutine de ordonare a seriilor după inversarea binară a indicilor.

- Factorii ponderali sunt determinați în ambele cazuri din același tabel.2.4. dar repartițiile lor la liniile fluxului sunt diferite așa cum se poate observa și din fig.2.23 și fig.2.24. pentru cazul particular $N=8$. Pentru fiecare iterație obținem exponenții $N/2$ pozitiv și $N/2$ negativi, numărul diferiților exponenți crește odată cu numărul de iterații pentru ambele proceduri.
- În cazul procedurii Werz, două fluxuri de linie pornesc din același punct al primei serii de iterații și sosirea termenilor din seria finală se face în ordinea naturală a indicilor.
- În cazul procedurii Singleton situația este inversă, comparativ cu procedura Werz: două fluxuri de linie sosesc în același punct al seriei finale, în ordinea naturală a indicelui q .
- Deoarece din relațiile (2.143), (2.144) și (2.146), (2.147) nu se pot generaliza pentru obținerea punctului final din punctul inițial pentru același indice, procedurile nu permit calculul “în punct”.

2.6. Metode frecvențiale de identificare

2.6.1. Determinarea experimentală a curbei indiciale

Acest experiment s-a realizat în domeniul timpului, când la intrarea unui proces lent, de presiune, s-a aplicat un semnal treaptă, iar la ieșire s-a înregistrat funcția indicială. S-a modificat brusc mărimea de intrare m cu un salt Δm și cu un înregistrator s-a obținut funcția indicială $a(t)$. Procesul de tip PT1 a rezultat din interpretarea curbei indiciale, cursa ventilului s-a modificat de la gradația 2,9 mm la 4,25 mm, iar presiunea a variat de la 1,4 la 3,6 bar, în decurs de cca 8 s. Din fig.2.25d) prin construcția subtangentei prin punctul de inflexiune, s-a obținut valoarea constantei de timp de întârziere $T = 1,6$ s. și constanta de timp mort $\tau = 0,83$ s. Factorul de amplificare, aferent regimului staționar a fost:

$$K = \frac{Y_s}{\Delta m} = \frac{A_s}{\Delta m} = \frac{3,6 - 1,4}{4,25 - 2,9} = \frac{2,2}{1,35} = 1,63 \text{ bar/mm.}$$

Rezultă că funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{K}{1 + Ts} \cdot e^{-\tau} = \frac{1,63}{1 + 1,6s} \cdot e^{-0,83s}$$

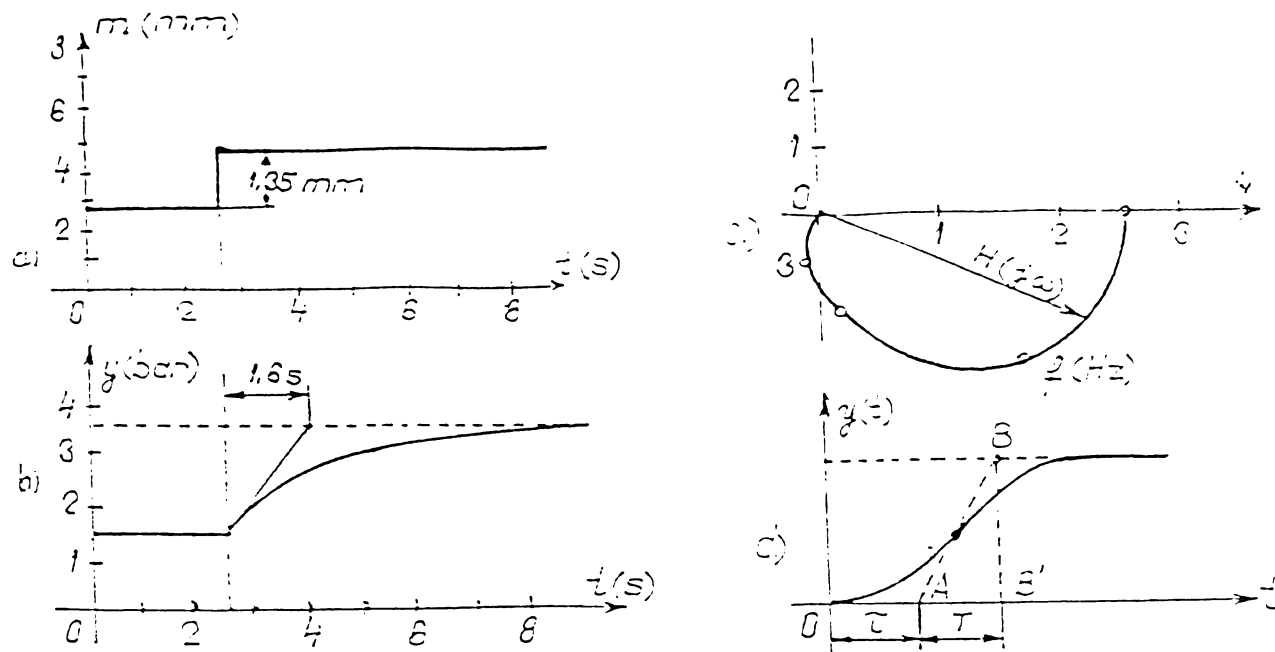


Fig.2.25. Interpretarea funcției indiciale înregistrate. a) semnal treaptă de intrare; b) răspunsul indicial înregistrat; c) locul de transfer; d) funcția indicială cu timp mort. În mod similar se examinează procese lente cu mai multe constante de timp de

întârziere, în general constantele de timp de ordin superior fiind neglijabile față de constantele T_1 și T_2 de ordinul unu și respectiv doi.

Dacă sunt mai multe elemente PT1 conectate în serie, blocul de sistem echivalent este un singur element PT1, având constanta de timp:

$$T = \sqrt{T_1 \cdot T_2 \dots T_n} \quad (2.148)$$

2.6.2. Identificarea sistemelor cu transferometrul

Transferometrul este un echipament de calcul complex, care în esență este un analizor ce furnizează răspunsul la frecvență după principiul dezvoltării sau transformării Fourier. Un generator de oscilații armonice produce o oscilație sinusoidală și alta cosinusoidală, ultima revenind la excitația procesului. Funcția de transfer cu componenta reală $P(\omega)$ și cea imaginară $Q(\omega)$ este:

$$H(j\omega) = P(\omega) + j Q(\omega), \quad (2.149)$$

în care $P(\omega)$ și $Q(\omega)$ sunt evaluate direct de aparat, sub forma:

$$P(\omega) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos \omega t dt; Q(\omega) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin \omega t dt. \quad (2.150)$$

în care $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$, iar timpul de măsurare $T_0 = n \frac{2\pi}{\omega}$ este un multiplu al perioadei de oscilație. Aparatul are schema indicată în fig.2.26, iar valorile $P(\omega)$ și $Q(\omega)$ determină modulul și argumentul funcției de transfer pentru fiecare frecvență $\omega = 2\pi\nu$:

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \text{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2.151)$$

Această metodă frecvențială este mai completă, oferind mai multe elemente informaționale decât metoda indicială, dar necesită un echipament mai sofisticat.

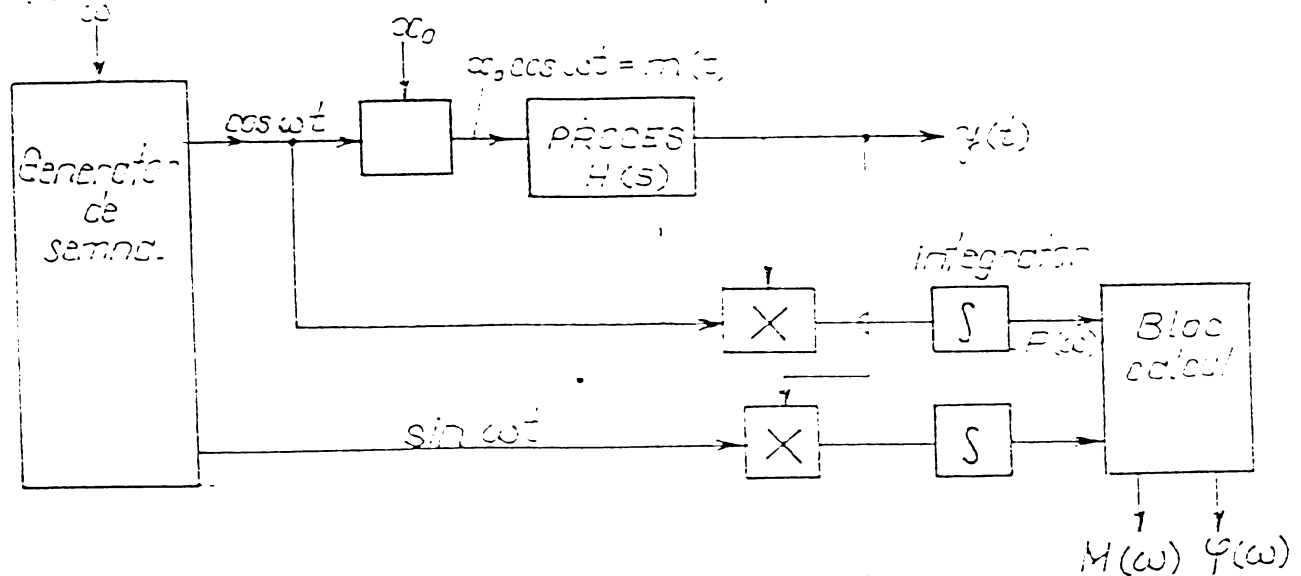


Fig.2.26. Schema transferometrului. X - bloc multiplicator; ∫ - bloc integrator.

2.6.3. Metoda corelației

Această metodă utilizează semnale aleatoare de testare, furnizate de un generator de zgomot analogic sau binar pseudo - aleator, cu ajutorul cărora se determină funcțiile de autocorelație și intercorelație, relativ la terminalele procesului considerat monovariabil, conform schemei din fig.2.27.

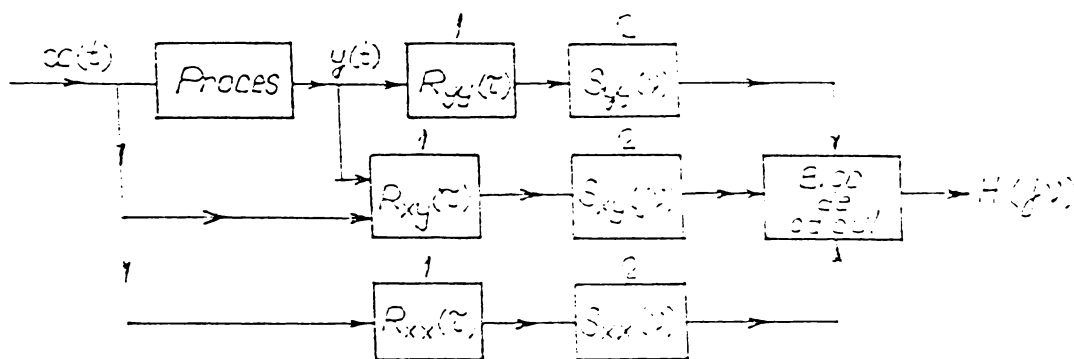


Fig.2.27. Schema identificării prin metoda corelației.

Cu ajutorul corelatoarelor (1) se determină funcțiile de autocorelație $R_{xx}(\tau)$, $R_{yy}(\tau)$ și de intercorelație $R_{xy}(\tau)$ ale procesului:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t - \tau) dt; R_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t - \tau) dt; \quad (2.152)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t - \tau) dt; \quad (2.153)$$

Cu ajutorul transformatoarelor Fourier (2) se determină funcțiile de densitate spectrală $S_{xx}(v)$, $S_{yy}(v)$ și $S_{xy}(jv)$ care pe baza teoremelor de transfer îndeplinesc expresiile:

$$S_{yy}(v) = |H(jv)|^2 \cdot S_{xx}(v) \quad (2.154)$$

$$S_{xy}(jv) = H^*(jv) \cdot S_{xx}(v). \quad (2.155)$$

Din aceste relații se deduc relațiile pentru funcția de transfer:

$$|H(j\omega)| = |H(jv)| = \left| \frac{S_{yy}(v)}{S_{xx}(v)} \right|^{\frac{1}{2}}; H(jv) = \frac{S_{xy}(jv)}{S_{xx}(v)} = \frac{S_{xy}(v)}{S_{xx}(v)} \cdot e^{-jv\tau} \quad (2.156)$$

Dacă în aceste relații se face $S_{xx}(v) = 1$, adică la intrare se aplică un semnal aleator zgomot alb, rezultă:

$$M(\omega) = \sqrt{S_{xx}(v)}; H(v) = S_{xy}(jv); H(jv) = S_{xy}(jv). \quad (2.157)$$

În acest caz particular $y(t) = h(t)$ este răspunsul ponderal.

Metoda de testare cu corelatorul și analizorul spectral este precisă, având avantajul că poate fi aplicată fără întreruperea procesului tehnologic, deoarece zgomotul alb având valoare medie nulă, nu deranjează funcționarea instalației.

2.6.4. Metodă de optimizare a unui sistem utilizând corelatorul și analizorul armonic

Această metodă presupune identificarea și reglarea optimală în același timp. Ea se bazează pe legătura dintre valoarea medie patrată (VMP) și densitatea proprie de putere a unui semnal:

$$\bar{x}^2 = \psi_x^2 = R_{xx}(0) = \int_0^{F_M} G_{xx}(v) dv, \quad (2.158)$$

în care $G_{xx}(v)$ este densitatea spectrală proprie unilaterală, cu $v \in [0; F_M]$, F_M fiind frecvența maximă a spectrului.

Se consideră un sistem de reglare automată (SRA) buclat, cu mai multe intrări, dintre care una este semnalul de intrare $i(t)$, iar $z_1(t)$ și $z_2(t)$ sunt perturbații, cele trei semnale fiind necorelate. Exprimând abaterea sub formă complexă:

$$\varepsilon(jv) = I(j\omega)J(v) + Z_1(jv) - Z_2(jv)H_2(jv)J(jv) \quad (2.159)$$

unde s-a notat:

$$J(\nu) = \frac{1}{1 + H_1(j\nu) \cdot H_2(j\nu)} \quad (2.160)$$

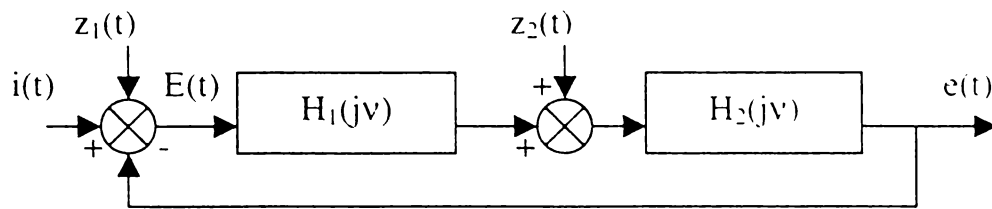


Fig.2.28. Sistem de reglare automată cu o intrare și două perturbații.

Aplicând operatorul de densitate spectrală **D** [71] relației (2.140), adică evaluând:

$$G_{\epsilon\epsilon}(j\nu) = D[\epsilon(j\nu) \cdot \epsilon^*(j\nu)],$$

se obține:

$$G_{\epsilon\epsilon}(j\nu) = G_{ii}(j\nu) \cdot |J(j\nu)|^2 + G_{z_1 z_1}(j\nu) \cdot |J(j\nu)|^2 + G_{z_2 z_2}(j\nu) \cdot |H_2(j\nu) \cdot J(j\nu)|^2. \quad (2.161)$$

Integrând această relație pe intervalul benzii de frecvență B cu $\nu \in [0; F_M]$ se obține, pe baza aditivității patratelor valorilor medii, din (2.158):

$$\bar{\epsilon}^2 = \bar{\epsilon}_i^2 + \epsilon_{z_1}^2 + \epsilon_{z_2}^2 \quad (2.162)$$

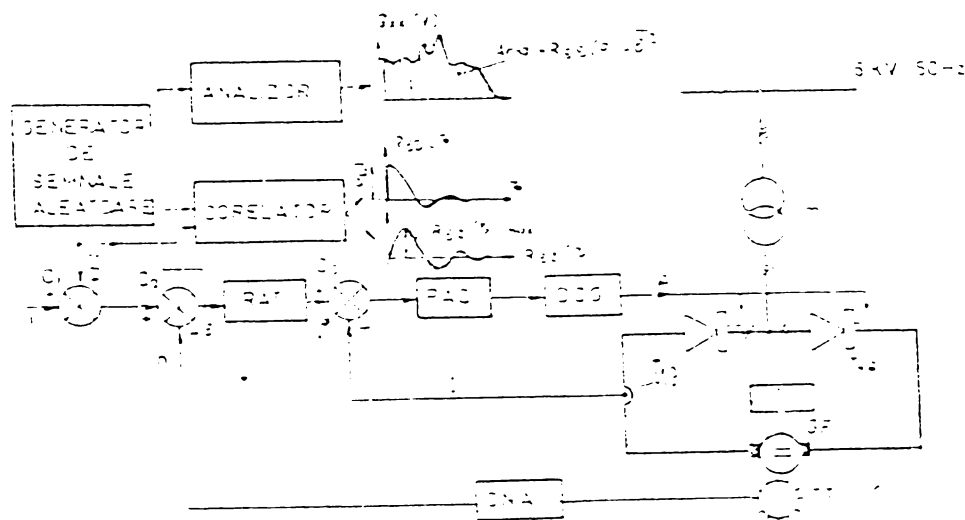


Fig.2.29. Reglarea turației generatorului frână. Optimizarea SRA cu analizorul și corelatorul în timp real: RAT - regulator automat de turație; RAC - regulator automat de curent; DCG - dispozitiv de comandă pe grilă; T - turbină; GF - generator frână; CNA - convertor numeric - analogic; TT - traductor de turație.

În cazul în care $\epsilon(t)$ este centrat, adică valoarea medie teoretică $\mu_\epsilon=0$, rezultă $R_{\epsilon\epsilon}(\tau) = C_{\epsilon\epsilon}(\tau)$, adică funcția de autocorelație devine de autocovarianță și în aceste condiții:

$$C_{\epsilon\epsilon}(0) = \overline{\sigma_\epsilon^2}, \quad (2.163)$$

astfel că valoarea ariei de sub funcția de densitate spectrală este numeric egală cu dispersia semnalului $\varepsilon(t)$. Componentele valorii $\bar{\varepsilon}^2$, ale erorii totale a SRA, sunt:

$$\bar{\varepsilon}_1^2 = \int_0^{F_v} G_{\varepsilon_1}(\nu) |J(\nu)|^2 d\nu, \quad (2.164)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varepsilon_2}^2 = \int_0^{F_v} G_{\varepsilon_2}(\nu) |J(\nu)|^2 d\nu, \quad (2.165)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varepsilon_3}^2 = \int_0^{F_v} G_{\varepsilon_3}(\nu) |H_2(j\nu) \cdot J(j\nu)|^2 d\nu. \quad (2.166)$$

Relația (2.162) arată că valoarea medie a patratului abaterii SRA este formată din atâtea componente câte semnale exterioare intră în sistem. Eroarea globală a sistemului, $\bar{\varepsilon}^2$, se poate determina pe două căi:

- utilizând un corelator automat și pentru $\tau=0$ se determină valoarea $R_{xx}(0)$ sau $C_{xx}(0)$;
- utilizând un analizor spectral care furnizează spectrul $G_{\varepsilon\varepsilon}(\nu)$ și planimetrând aria de sub această curbă se determină $\bar{\varepsilon}^2$.

Eroarea globală se poate determina și analitic dacă se evaluează erorile parțiale cu relațiile (2.164), (2.165) și (2.166), în cazul în care se cunosc transmitanțele $H_1(j\nu)$, $H_2(j\nu)$ și $J(j\nu)$.

Optimizarea SRA presupune minimizarea erorii $\bar{\varepsilon}^2$, respectiv micșorarea ariei $A = \int_0^{F_v} G(\nu) d\nu$, prin modificarea unui element reglabil al compensatorului sau regulatorului $H_1(j\nu)$. În fig.2.29 este indicată schema de reglare a unui generator frână, sistemul fiind constituit din circuitul de forță realizat dintr-un redresor, turbină și un generator frână, iar circuitul de reglare printr-o reglare în cascadă, realizată dintr-un regulator de turație, un regulator de curent și un dispozitiv de comandă pe grilă pentru deschiderea tiristoarelor din puntea trifazată, complet comandată.

2.6.5. O identificare analitică utilizând operatorul D

Se consideră un sistem de urmărire, la care mărimea de intrare $i(t)$, este formată din transmitanța directă $F_1(j\nu)$ și transmitanța pe cale de reacție $F_2(j\nu)$. Asupra sistemului acționează și o perturbație $n(t)$. Se cere să se determine, prin măsurători pe sistem, transmitanțele $F_1(j\nu)$, $F_2(j\nu)$, care constituie obiectul identificării. Din fig.2.30., exprimând sub formă complexă mărimile din locurile indicate cu 1, 2 și 3, după mărimile care intră în sistem rezultă:

$$E(j\nu) = E_1(j\nu) + N(j\nu), \quad (2.167)$$

$$R(j\nu) = E(j\nu) \cdot F_2(j\nu), \quad (2.168)$$

$$\varepsilon(j\nu) = I(j\nu) - R(j\nu), \quad (2.169)$$

$$E_1(j\nu) = \varepsilon(j\nu) \cdot F_1(j\nu). \quad (2.170)$$

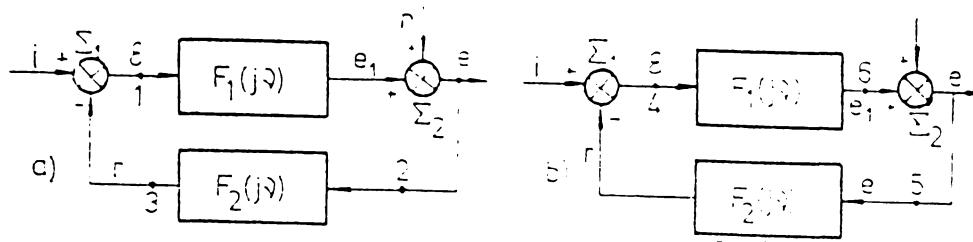


Fig.2.30. Sistem automat de urmărire. a) locurile de măsurare pentru $F_1(j\nu)$; idem pentru $F_2(j\nu)$.

Din relațiile de mai sus se deduc funcțiile operaționale ale semnalelor $\varepsilon(t)$, $e(t)$, $r(t)$, măsurate în punctele 1, 2 și 3, după mărimile care intră în sistem rezultă:

$$\begin{aligned} E(j\nu) &= \varepsilon(j\nu) \cdot F_1(j\nu) + N(j\nu) = [I(j\nu) - R(j\nu)] F_1(j\nu) + N(j\nu); \\ E(j\nu) &= I(j\nu) \cdot F_1(j\nu) - E(j\nu) \cdot F_2(j\nu) \cdot F_1(j\nu) + N(j\nu); \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$E(j\nu) = \frac{I(j\nu) \cdot F_1(j\nu)}{1 + F_1(j\nu) \cdot F_2(j\nu)} + \frac{N(j\nu)}{1 + F_1(j\nu) \cdot F_2(j\nu)}.$$

Dacă se notează $J = \frac{1}{1 + F_1(j\nu) \cdot F_2(j\nu)}$ (2.172)

pentru punctul 2 rezultă:

$$E(j\nu) = F_1(j\nu) \cdot J(j\nu) \cdot I(j\nu) + J(j\nu) \cdot N(j\nu). \quad (2.173)$$

Procedând similar, pentru punctele 1 și 3, rezultă:

$$\varepsilon(j\nu) = J(j\nu) \cdot I(j\nu) - F_2(j\nu) \cdot N(j\nu). \quad (2.174)$$

$$R(j\nu) = J(j\nu) \cdot F_1(j\nu) \cdot F_2(j\nu) \cdot I(j\nu) + J(j\nu) \cdot F_2(j\nu) \cdot N(j\nu). \quad (2.175)$$

Dacă funcțiile operaționale din ultimile trei relații se înlocuiesc cu conjugatele lor și se aplică operatorul densității spectrale, care operează asupra semnalelor și nu asupra transmitanțelor, se determină funcțiile spectrale de densitate de putere $S_{\varepsilon\varepsilon}(j\nu)$, $S_{ee}(j\nu)$, $S_{re}(j\nu)$, date de relațiile:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(j\nu) = J^2(\nu) \cdot S_{ii}(\nu) + F_2^{*2}(\nu) \cdot J^2(\nu) \cdot S_{nn}(\nu); \quad (2.176)$$

$$S_{ee} = F_1(j\nu) \cdot J^2(\nu) \cdot S_{ii}(\nu) - F_2^*(j\nu) \cdot J^2(\nu) \cdot S_{nn}(\nu); \quad (2.177)$$

$$S_{re}(j\nu) = J^2(\nu) \cdot F_1^*(j\nu) \cdot F_2^*(j\nu) \cdot S_{ii}(\nu) - J^2(\nu) \cdot F_2^2(\nu) \cdot S_{nn}(\nu). \quad (2.178)$$

Din aceste ultime trei relații prin eliminări și substituții se determină transmitanța $F_1(j\nu)$:

$$F_1(j\nu) = \frac{S_{ec}(j\nu) + S_{e\varepsilon}(j\nu)}{S_{\varepsilon\varepsilon}(j\nu) + S_{\varepsilon e}(j\nu)}. \quad (2.179)$$

Dacă se măsoară cu analizorul spectral în punctele 4, 5 și 6 din fig.2.30, prin același procedeu se determină densitățile spectrale $S_{\varepsilon\varepsilon}(j\nu), S_{e\varepsilon}(j\nu), S_{e1\varepsilon}(j\nu), S_{ee}(j\nu)$, iar cu acestea transmitanța de reacție:

$$F_2(j\nu) = \frac{S_{e1\varepsilon}(j\nu) - S_{e\varepsilon}(j\nu)}{S_{ee}(j\nu) - S_{e1e}(j\nu)}. \quad (2.180)$$

În cazul sistemului automat de urmărire dat, relațiile precedente rezolvă problema identificării transmitanțelor de pe calea directă și pe cea de reacție inversă, măsurând corelațiile sau direct funcțiile de densitate spectrală în punctele indicate în fig.2.30, care se introduc apoi în expresiile (2.179) și (2.180). [69].

2.6.6. Identificarea unui proces instabil prin metoda experimentului cu releu

Prin această metodă se efectuează un test folosind un releu în buclă cu un compensator de linie, pentru a identifica parametrii unui proces instabil de primul ordin și cu timp mort, în cazul în care există un ciclu limită. După cum se va vedea în continuare, rezultatul este favorabil numai dacă raportul dintre timpul mort și constanta de timp instabilă este mai mică decât 0,693. Dacă se adaugă în buclă cu procesul un controller P, este posibil ca acest raport să crească. Se consideră structura de identificare și conducere din fig.2.31, în care procesul cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-\theta s}}{T_1 \cdot s - 1} \quad (2.181)$$

indică faptul că procesul este instabil, având un pol în semiplanul drept și posedă un timp mort cu constanta θ și un factor de câștig k .

Ecuatiile de stare ale procesului sunt:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad y(t) = cx(t) \quad (2.182)$$

în care A este o matrice $n \times n$, b este un vector coloană $n \times 1$, c este un vector linie $1 \times n$. Presupunând că există un ciclu limită simetric cu jumătate de perioadă egală cu T , care este obținut cu datele inițiale ale stării $x(0)$, releul comută de la $-h$ la $+h$ la momentul $t=0$ și

furnizează două semnale diferite de intrare, constante, pe durata unei jumătăți de perioadă a ieșirii procesului. Soluția pentru starea $x(t)$ este:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - \tau) \quad x(t) = e^{At} x(0) + A^{-1}(e^{At} - I) b h \quad (2.183)$$

în care $u(t) = -h$, I este matricea unitate de ordinul lui A . La durata $\theta < t \leq T$, când semnalul de intrare este $u(t) = h$, expresia stării devine:

$$x(t) = e^{A(t-\theta)} x(\theta) + A^{-1}(e^{A(t-\theta)} - I) b h \quad (2.184)$$

Întrucât ciclul limită este simetric, rezultă că $x(T) = -x(0)$, astfel că prin substituție $t = T$, valoarea inițială a stării devine:

$$x(0) = (I + e^{AT})^{-1} A^{-1}(2e^{A(T-\theta)} - e^{AT} - I) b h \quad (2.185)$$

iar condiția pentru ciclul limită este

$$c(x) = 0; \quad c \cdot \dot{x}(0) > 0 \quad (2.186)$$

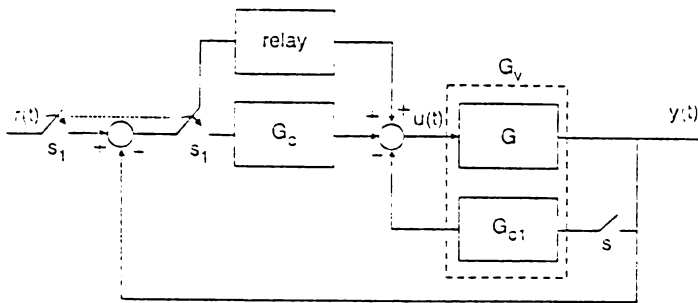


Fig.2.31. Structura pentru identificare și control.

Dinamica pentru un proces instabil FOPDT (First Order Plus Delay Time = de prim ordin plus timp mort) este descris de funcția de transfer [99]:

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-\theta s}}{T_1 \cdot s - 1} = \frac{k \cdot e^{-\theta_n s}}{s - 1} \quad (2.187)$$

în care s-a notat cu $\theta_n = \theta / T_1$ timpul mort normalizat. Semiperioada normalizată va fi $T_n = T / T_1$ și notând cu A_p vârful de amplitudine la ieșire, se definește vârful normalizat prin expresia:

$$K = \frac{A_p}{k \cdot h} \quad (2.188)$$

În cazul acestui proces, caracterizat prin mărimi de stare, rezultă $A = 1$, $b = 1$, $c = k$ și $x(0) = 0$. Vârful de amplitudine apare la momentul $t = \theta_n$, astfel că din (2.183), obținem:

$$A_p = c x(\theta_n) = k(e^{\theta_n} - 1)h; \quad \theta_n = \ln(1+k). \quad (2.189)$$

Substituind această valoare în (2.185), se obține:

$$c x(0) = k(1 + e^{T_n}) \cdot (2e^{(T_n - \theta_n)} - e^{T_n} - 1) \cdot h = 0 \Rightarrow e^{T_n}(2e^{-\theta_n} - 1) = 1 \quad (2.190)$$

Prin substituția lui e^{θ_n} din (2.189), se obține:

$$T_n = 2 \tan h^{-1} k. \quad (2.191)$$

Această expresie indică faptul că valoarea k trebuie să fie mai mică decât 1 pentru a se obține o soluție, ceea ce înseamnă $e^{\theta_n} < 2$, cu valoarea $k = 1$ rezultă $\theta_n = 0,653$, valoarea

maximă pentru constanta de timp mort normalizată pentru care mai poate exista un ciclu limită.

Se constată că prin simpla măsurare a vârfului de amplitudine A_p se pot determina parametrii procesului θ și T_1 . semiperioada T fiind de asemenea cunoscută. Factorul de proporționalitate se determină în regim staționar prin măsurarea ariei aferente semnalului de ieșire, care se reprezintă la o jumătate de perioadă ca arie a semnalului de intrare.

Spre deosebire de situațiile obișnuite ca în cazul instalațiilor cu funcție de transfer stabilă, procesul instabil FOPDT nu are întotdeauna ciclu limită. S-a arătat că aceasta se poate întâmpla numai în cazul în care $\theta_n < 0.693$. Pentru a obține ciclu limită prin experimentul cu releu ideal, în proces se încorporează un controller G_{c1} în paralel cu procesul, cu un comutator închis. Presupunând că factorul k este cunoscut și utilizând o aproximație Pade de ordinul 2/2, rezonabilă deoarece $\theta_n < 1$, funcția de transfer se poate scrie astfel:

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-\theta_n s}}{s-1} \cong \frac{k \left(\frac{\theta_n^2}{12} \cdot s^2 - \frac{\theta_n}{2} \cdot s + 1 \right)}{(s-1) \cdot \left(\frac{\theta_n^2}{12} \cdot s^2 + \frac{\theta_n}{2} \cdot s + 1 \right)}. \quad (2.192)$$

Funcția de transfer a procesului cu controllerul P în paralel, de amplificare $K_f = 1/k$, va fi:

$$G_v(s) = \frac{k \left(\frac{\theta_n^2}{12} \cdot s^2 - \frac{\theta_n}{2} \cdot s + 1 \right)}{s \cdot \left(\frac{\theta_n^2}{12} \cdot s^2 + \frac{\theta_n}{2} \cdot s + 1 - \theta_n \right)}. \quad (2.193)$$

Funcția de transfer virtuală de mai sus, este capabilă să permită o oscilație întreținută pentru $\theta_n < 1$. Pentru acest proces modificat, elementele caracterizării prin funcții de stare sunt:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = \frac{k}{1-\theta_n} [f_1 \quad f_2 \quad 1] \quad (2.194)$$

în care valorile proprii sunt λ_1 , λ_2 și 0 (pe diagonala principală) cu

$$\lambda_{1,2} = -3/\theta_n \mp \sqrt{12/\theta_n - 3/\theta_n^2}$$

$$f_1 = \frac{\lambda_1 \cdot \theta_n^2 - 6\theta_n - 12}{2\lambda_1 \cdot \theta_n + 6}; \quad f_2 = \frac{\lambda_2 \cdot \theta_n^2 - 6\theta_n - 12}{2\lambda_2 \cdot \theta_n + 6} \quad (2.195)$$

Din condițiile limită (2.186), înlocuind în (2.195), obținem:

$$f_1 \cdot \frac{\tanh(\lambda_1 T_n / 2)}{\lambda_1} + f_2 \cdot \frac{\tanh(\lambda_2 T_n / 2)}{\lambda_2} + \frac{T_n}{2} = 0 \quad (2.196)$$

Pentru a obține valorile parametrilor θ și T_1 se măsoară amplitudinea de la ieșire și timpul t_p al vârfului acestei amplitudini, rezultând:

$$\dot{y}(t_p) = c\dot{x}(t_p) = f_1 e^{\lambda_1 t_p} (\tanh(\lambda_1 T_n / 2) - 1) + f_2 e^{\lambda_2 t_p} (\tanh(\lambda_2 T_n / 2) - 1) - 1 = 0 \quad (2.197)$$

$$k = \left(\frac{f_1 + 1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2} + (T_n / 2 - t_p) + f_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} e^{\lambda_2 t_p} (\tanh(\lambda_2 T_n / 2) - 1) \right) / (1 - \theta_n) \quad (2.198)$$

Din aceste ecuații se pot obține simultan valorile pentru t_p , T_1 și θ :

$$\theta_n = \frac{k + 0.0682}{k + 0.9946} ; \quad \frac{\theta_n}{T_n} = \frac{\theta}{T} = \frac{0.0474(k + 34.5538)}{k + 4.1530} \quad (2.199)$$

Întrucât un compensator de linie $G_c(s)$, de tip P, PI sau PID, împreună cu instalația FOPDT nu pot realiza rezultate bune în conducere, inclusiv privind stabilitatea ansamblului, este necesară stabilizarea cu un compensator derivație $G_{c1}(s)$ de tip P sau PD.

Dependența la k și T_1/T_1 de timpul mort θ sunt date în graficele alăturate pentru ansamblul PI-PD.

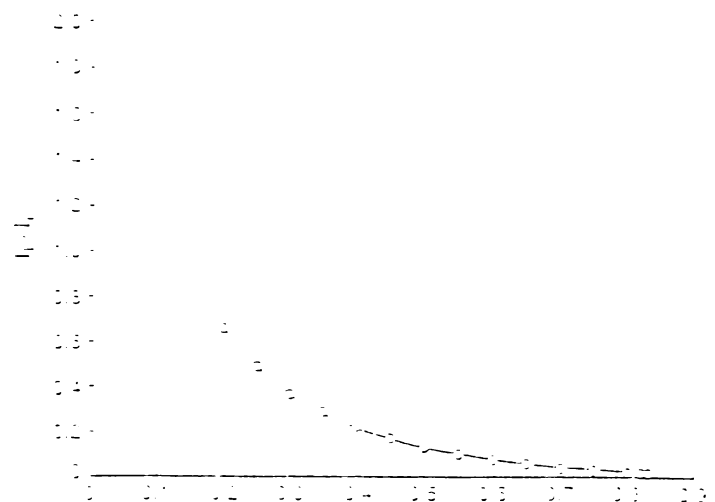
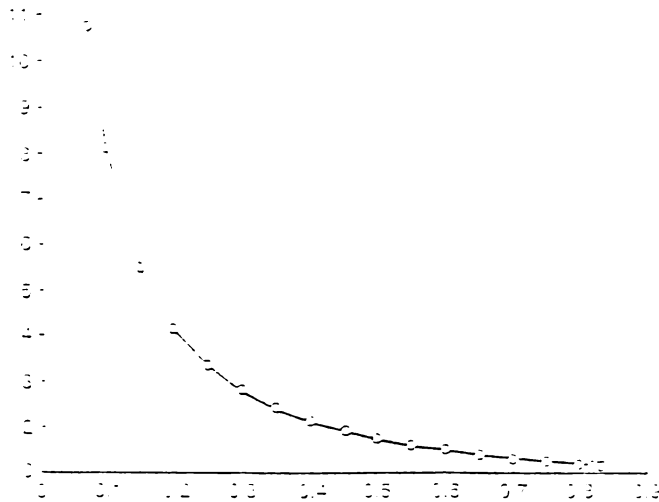


Fig.2.32. Relația $kK_p = F_1(\theta_n)$.

Fig.2.33. Relația $T_1 / T_1 = F_2(\theta_n)$.

Pentru compensatorul G_c se adoptă o structură PI cu funcția de transfer $G_c(s) = K_p (1 + 1/T_i S)$. Utilizând metoda celor mai mici patrate și ținând seama de expresia timpul mort normal se obțin următoarele relații, cu care se determină și parametrii de acord ai compensatorului serie:

$$kK_p = 0,889 + \frac{e^{-\theta_n} - 0,064}{e^{\theta_n} - 0,990} = 0,889 + \frac{1}{K(1+K)},$$

$$T_i / T_f = 0,380 \cdot \frac{e^{-\theta_n} - 0,377}{e^{\theta_n} - 0,966} = \frac{0,5(1 - 0,6382K) \tanh^{-1} K}{K(1+K)}. \quad (2.200)$$

În acest caz sistemul complet cu procesul $G(s)$ și cele două compensatoare $G_c(s)$ și $G_{c1}(s)$, din care ultimul de tip P, asigură un ciclu limită pentru $\theta_n < 0,693$.

Pentru a mări domeniul de compatibilitate până la $\theta_n = 0,9$, în derivație se montează un compensator PD, iar T_d se determină din condiția de stabilitate.

Dacă funcția de transfer a controlerului derivație este

$$G_{c1}(s) = K_f \left(\frac{T_d}{T_i} s + 1 \right) = K_f (T_f s + 1), \quad \text{cu } T_f = \frac{T_d}{T_i}, \quad (2.201)$$

având rolul de a schimba regimul instabil al buclei deschise a procesului $G(s)$ într-un proces stabil $G_v(s)$. Utilizând din nou aproximația Pade pentru timpul normalizat θ_n , adică:

$$e^{-\theta_n s} = \frac{2 - \theta_n s}{2 + \theta_n s}, \quad (2.202)$$

valabilă pentru $\theta_n < 1$ și luând $T_f = \theta_n/2$, rezultă funcția de transfer a întregului sistem

$$G_v(s) = \frac{ke^{-\theta_n s}}{(1 - kK_f \theta_n / 2)s + (kK_f - 1)}, \quad (2.203)$$

care are evident doi poli situați în semipanelul stâng și satisface și criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz având

$$\frac{1}{k} < K_f < \frac{2}{k\theta_n}. \quad (2.204)$$

Cu aceste valori factorul de amplificare al regulatorului intern $G_{c1}(s)$ satisface condiția marginii de câștig, având valoarea

$$K_f = \sqrt{\frac{1}{k} \frac{2}{k\theta_n}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\theta_n}} \quad (2.205)$$

astfel că funcția de transfer a regulatorului $G_{c1}(s)$ din bucla de reacție inversă a procesului devine:

$$G_{c1}(s) = \sqrt{(2/\theta_n)} [(\theta_n/2)s + 1]$$

Ansamblul $G(s)$ și $G_{c1}(s)$, cu funcția de transfer a sistemului deschis $G_v(s) = G(s) \cdot G_{c1}(s)$:

$$G_v(s) = \frac{ke^{-\theta_n s}}{(\sqrt{2/\theta_n} - 1)(\sqrt{\theta_n/2}s + 1)} \quad (2.206)$$

este o linie deschisă stabilă dacă îndeplinește condiția $\theta_n < 1,234$.

Utilizând criteriul integral ITSTSE se obțin următoarele relații pentru ansamblul PI-PD:

$$kK_p = \frac{0,8011(1 - 0,9358\sqrt{\theta_n})}{\theta_n} \quad (2.207)$$

$$T_1 / T_i = 1 / (0,1227 + 1,4550\theta_n - 1,2711\theta_n^2) \quad (2.208)$$

relații care conduc la formula de acordare online. Înlocuind pe θ_n cu K :

$$kK_p = \frac{0,8011(1 - 0,9358\sqrt{\ln(1+k)})}{\ln(1+k)}, \quad T_d / T = \frac{\ln(1+k)}{4 \tanh^{-1} k} \quad (2.209)$$

$$T / T_i = \frac{2 \tanh^{-1} k}{0,1227 + 1,4550 \ln(1+k) - 1,2711 [\ln(1+k)]^2}; \quad kK_f = \sqrt{\frac{2(k+0,9946)}{(k+0,0682)}} \quad (2.210)$$

Aceste relații dau rezultate satisfăcătoare pentru $\theta_n < 0,693$. În graficele din figurile alăturate sunt indicate dependențele kK_p și T_1/T_i în funcție de timpul mort θ pentru ansamblul de controlere PI-PD.

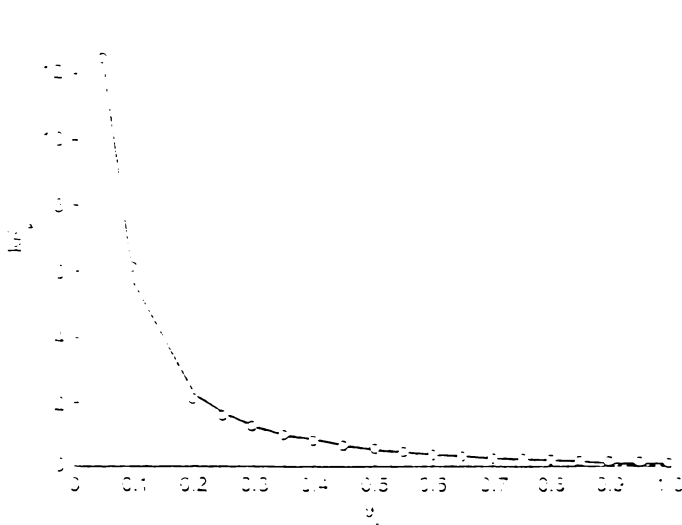


Fig.2.34. Dependenta $kK_p = F_3(\theta)$

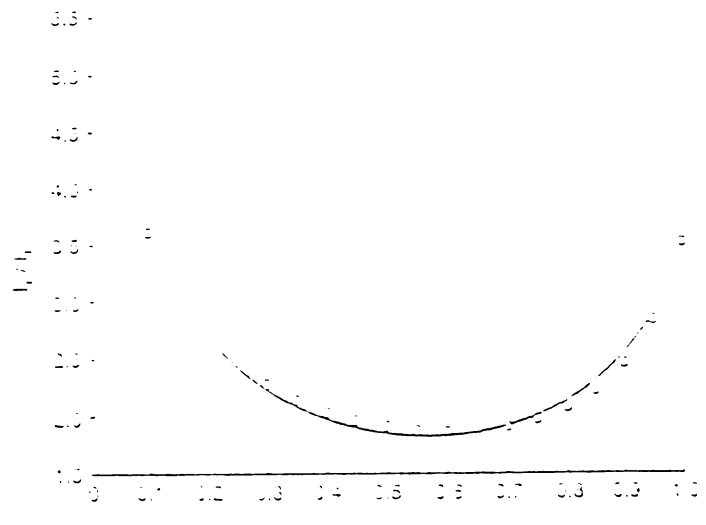


Fig.2.35. Dependenta $T_1/T_i = F_4(\theta)$

În cazul extinderii domeniului ciclului limită peste valoarea critică 0,693, din relațiile de mai sus derivă următoarele formule pentru parametrii ansamblului PI-PD:

$$kK_p = \frac{0,8011(k+0,9946)}{(k+0,0682)} - \frac{0,7497\sqrt{(k+0,9946)}}{\sqrt{(k+0,0682)}}; \quad (2.211)$$

$$T/T_i = \frac{k^3 + 5,2158k^2 + 4,48k + 0,2817}{0,0145k^3 + 0,5773k^2 + 2,6554k + 0,3488}; \quad (2.212)$$

$$T_d / T = \frac{0,0237(k+34,5338)}{(k+4,1530)}; \quad kK_f = \sqrt{\frac{2(k+0,9946)}{(k+0,0682)}} \quad (2.213)$$

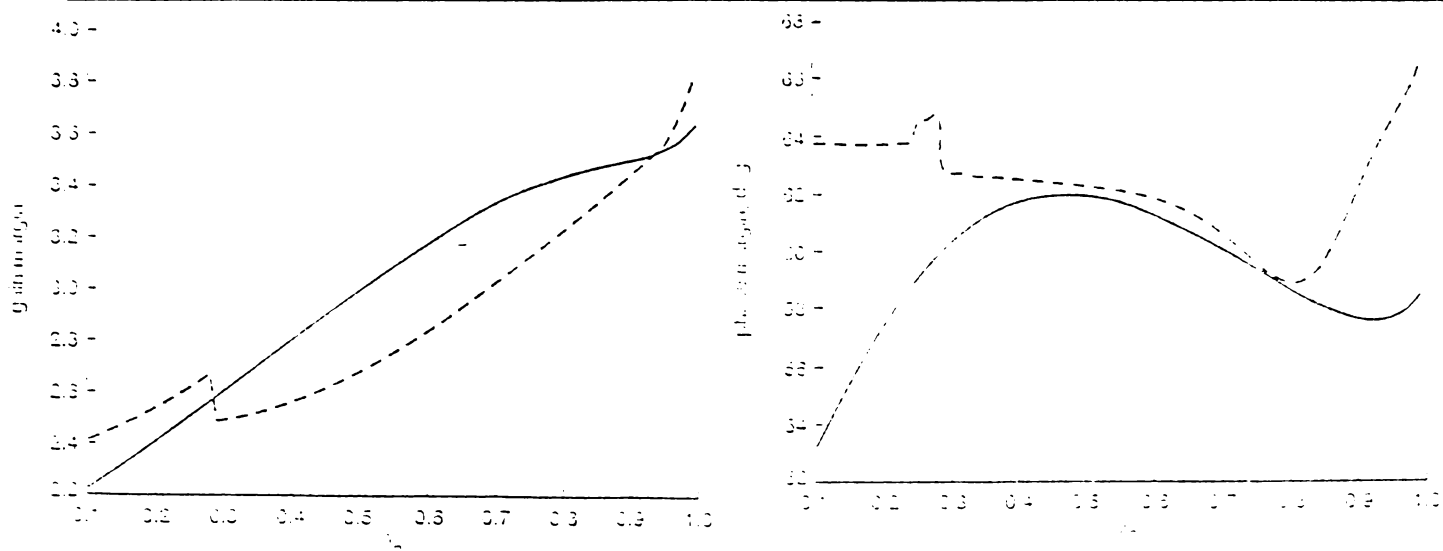


Fig.2.36. Dependenta mării de câștig M_p (a) și a marginii de fază γ (b), de timpul mort normalizat θ_n .

Exemplul 1. Pentru un FOPDT cu funcția de transfer $H(s) = ke^{-\theta s} / (T_1 s + 1)$, în care $k = 1$, $\theta = 0.4$, $T_1 = 1$, prin simulare s-au determinat valorile experimentale $A_p = 0.4918$ și $T = 1.077$ cu releul simplu având $h = 1$. Pentru o combinație PI-P, cu relațiile respective s-au obținut valorile: $K_p = 2.243$, $T_I = 4.627$.

În cazul în care se adoptă o structură PI-PD, unghiul limită poate fi împins până la $\theta_n = 0.9$. Răspunsul la semnalul treaptă este indicat în fig.2.37

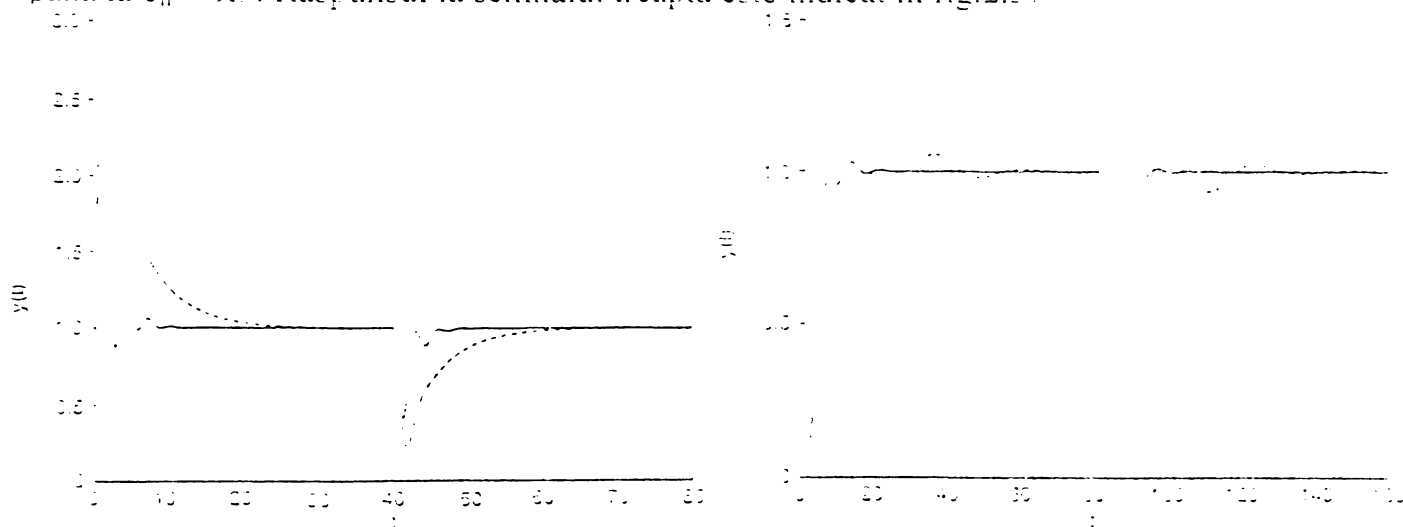


Fig.2.37. Răspunsul indicial în cazul exemplului 1. Fig.2.38. Răspunsul răbust în cazul exemplului 2.

Exemplul 2. Având funcția de transfer $G(s) = 4e^{-2s} / (4s + 1)$, parametrii modelului sunt estimați la $\theta = 2.001$ și $T_1 = 4.009$ prin măsurare cu ajutorul releului ideal, cu $A_p = 2.589$ și $T = 6.1821$, cu $h = 1$, în cazul ansamblului PI-PD se obțin parametrii de acord $K_p = 0.131$; $T_I = 2$; $k_f = 0.5$ și $T_D = 1$. Aceste valori furnizează un răspuns indicial indicat cu linie continuă în fig.2.38, în comparație cu rezultatele furnizate de De Park și colaboratorii pentru o structură PI-P.

Exemplul 3. Se consideră funcția de transfer $G(s) = e^{-1.25s} / (1.5s + 1)$ având prin simulare valorile $A_p = K = 3.658$ și $T = 5.230$, măsurate cu un releu ideal având $h = 1$. Cu $k > 1$, se va utiliza un factor proporțional $k_f = 1$ pentru a obține un ciclu limită. În acest caz, la o structură PI-PD care se impune, parametrii de acord pentru autoacordare prin măsurători sunt: $k_p = 0.1625$; $T_I = 0.7144$; $k_f = 1.5803$ și $T_D = 0.6061$. Aplicând criteriul IS se obține răspunsul indicial di fig.2.39.

Exemplul 4. Se consideră un proces având un pol în semiplanul stâng și altul în cel drept, cu funcția de transfer:

$$G(s) = e^{-0.5s} / [(0.55s + 1)(2s - 1)] \quad (2.214)$$

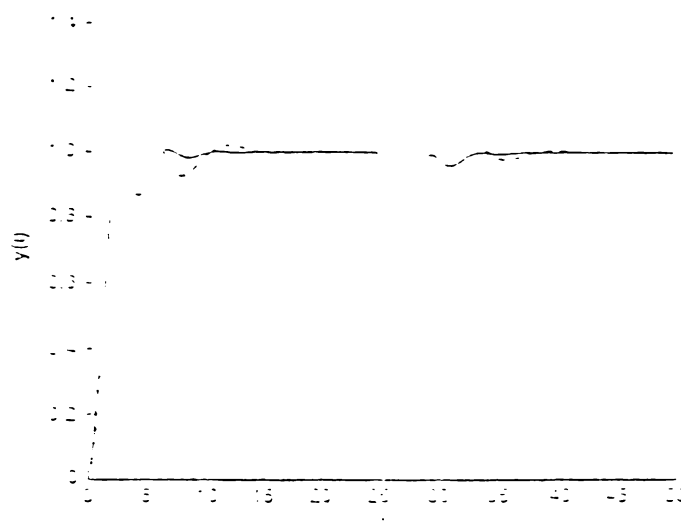
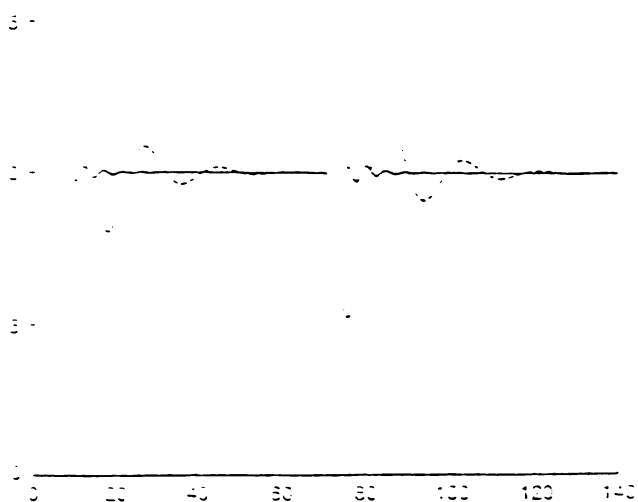


Fig.2.39. Răspunsul indicial pentru exemplul 3 (linie continuă) comparativ cu metoda Park (linie punctată).

Fig.2.40. Răspunsul indicial pentru exemplul 4 (linie continuă) comparativ cu metoda lui Park (linie punctată).

Identificând acest proces printr-un model instabil cu $k = 1$, $T_1 = 2.347$ și $\theta = 1.067$ și admițând o structură PID-P, cu parametrii de acord $k_p = 0.561$; $T_i = 1.165$; $T_d = 1.478$ și $k_f = 1.687$. Dacă se utilizează un model propus FOPDT cu $k = 1$; $T_1 = 2.875$; $\theta = 1.061$ și o structură de controlare PI-Pd, se vor obține următoarele valori ai parametrilor de acord: $k_p = 0,937$; $T_i = 1,399$; $k_f = 2,328$; $T_d = 0,530$. În fig.2.40 este prezentat răspunsul indicial cu linie continuă și comparativ cu cel obținut cu metoda lui Park trasat cu linie punctată.

În acest paragraf s-a indicat o metodă de estimare exactă a parametrilor unui proces de ordinul întâi plus timp mort (FOPDT), elaborată de S. Majhi și D.P. Atherton [99]. Cu ajutorul experimentului cu releul ideal, având parametrii procesului determinați, în ipoteza că factorul de proporționalitate k este cunoscut apriori, se determină parametrii de acord în structura PI-P și PI-PD utilizând relații în funcție de parametrii procesului. Se evidențiază faptul că structura PI-PD furnizează o conducere mai bună decât structura PI-D și incomparabil mai bună decât metoda lui Park și colaboratorii, după cum rezultă din graficele cu funcțiile indiciale prezentate anterior.

2.6.7. Identificarea armonică numerică

În esență această metodă este o transpunere în domeniul digital al metodei de identificare cu transferometrul, metodă prezentată mai înainte și care este de factură analogică. După cum s-a arătat în paragraful precedent, experimentul cu releu determină frecvența la unghiul $-\pi$ și această informație este suficientă pentru a determina parametrii de acord ai unui regulator PID, care să asigure performanțe statice și dinamice. [135]. [136], [137].

Totuși, experimentul cu releu nu asigură estimări curate în toate împrejurările la determinarea fazei de intersecție, principalele cauze fiind: a) utilizarea metodei funcției de descriere a releului; b) prezența perturbațiilor furnizate de sarcină c) prezența perturbațiilor în răspunsul de la ieșire al sistemului. Ca urmare, s-au efectuat eforturi pentru a înlătura aceste deficiențe, utilizând un generator de semnale armonice de frecvență variabilă și realizând structuri care să îmbunătățească precizia în prezența perturbațiilor.

O alternativă la metoda releului o constituie abordarea bazată pe conceptul de buclă închisă de fază, metodă prezentată în figura 2.41, în varianta analogică constând dintr-un sistem la care este faza de referință ϕ^{ref} , după comparator eroarea fiind $\phi^e(t) = \phi^{ref}(t) - \phi(t)$. Urmează un bloc integrator care asigură că faza de referință este momentan atinsă, iar multiplicatorul satisface la ieșire condiția:

$$v_4(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \phi) = \sin(2\omega t + \phi) - \sin\phi. \quad (2.215)$$

Acest semnal este filtrat prin blocul S_F , după care urmează operația de inversiune INV, pentru evaluarea fazei ϕ la pulsația ω (prin operația "arc sin c.").

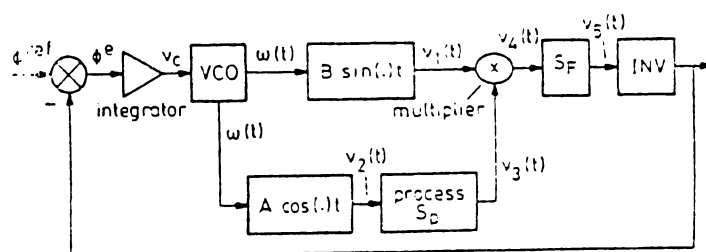


Fig.2.41. Identificatorul "buclă închisă de fază" varianta analogică.

O reconsiderare a conceptului de circuit analogic conduce la adoptarea unui circuit de identificare digital, cu buclă închisă, utilizând un comparator de intrare pentru fază, respectiv pentru modul, un bloc integrator digital, un generator armonic numeric și de semnal, atașate la procesul care trebuie identificat și condus (figura 2.42).

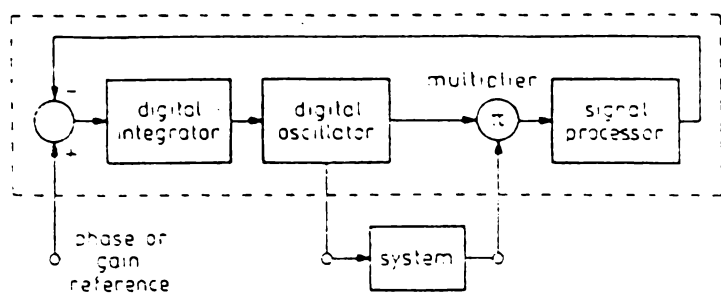


Fig. 2.42. Schema identificatorului numeric.

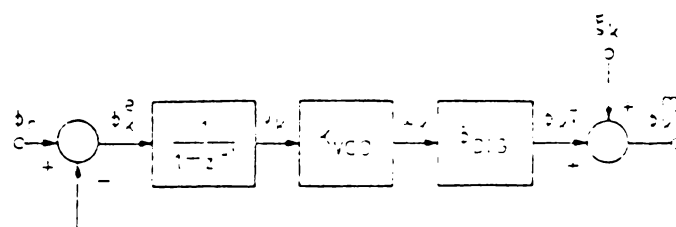


Fig. 2.43. Schema procesului de analiză a zgomotului

Analizorul de proces conține o structură internă care constă dintr-un sistem de testare armonic, care utilizează tehnica "max-min", pentru a extrage faza și modulul, precum și o structură externă, prin buclă închisă, de la ieșire spre intrare (fig. 2.43) pentru ca ansamblul să convergă la faza sau modulul dorit.

Pentru cazul estimării fazei φ_k , dacă estimăția se face la un moment $\tilde{t} < \infty$, sistemul furnizează faza $\varphi_{k\tilde{t}}$, care evident este afectată de perturbația ξ_k .

a. Programul pentru identificarea fazei φ_k . Dacă se consideră un zgomot necorelat, cu valoare medie nulă $E\{\varphi_k\} = 0$ și dispersie σ^2 , având eroarea $\varphi_k^e = \varphi_r - \varphi_{k\tilde{t}}^m$, în blocul integrator, la pasul următor $v_{k+1} = v_k - \varphi_k^e$, semnalul integrat acționează oscilatorul care furnizează frecvența $\omega_k = K_{VCO} \cdot v_k$, în care vco = Voltage-Controlled-Oscilator). În continuare acest semnal intră în procesorul digital ϕ_{DIG} , care furnizează faza $\varphi_{k\tilde{t}}$, care la rândul ei este influențată de zgomotul extern $\xi(t)$, producând faza modificată $\varphi_{k\tilde{t}}^m = \varphi_{k\tilde{t}} + \xi_n$. Rezultă:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + K_{VCO} (\varphi_r - \varphi_k). \quad (2.216)$$

Soluția acestei ecuații este notată cu ω^* , care satisface condiția $\varphi_k(\omega^*) = \varphi_r$.

Relația de convergență are expresia:

$$\omega^* - \omega_{k+1} = \omega^* - \omega_k - K_{VCO} (\varphi_r - \varphi_{k\tilde{t}}) + K_{VCO} \xi_k = (\omega^* - \omega_k) - K_{VCO} \eta_{k\tilde{t}} (\varphi_r - \varphi_k) + K_{VCO} \xi_k. \quad (2.217)$$

unde $\eta_{k\tilde{t}} = [1 - (\varphi_{k\tilde{t}} - \varphi_k)] / (\varphi_r - \varphi_k)$.

Aplicând teorema valorii medii

$\varphi_r - \varphi_k = \phi^1(\omega^*)(\omega^* - \omega_k)$, cu $\omega_k < \omega_{k+1} < \omega^*$ se obține:

$$\omega^* - \omega_{k+1} = L_k(\omega^* - \omega_k) + K_{VCO} \xi_k; \quad L_k = 1 - K_{VCO} \eta_{k\tilde{t}} (\varphi_r - \varphi_k) - \phi^1(\omega_k). \quad (2.218)$$

Prin mediere de la $j=0$ la treapta curentă k , din relația de mai sus se obține:

$$\omega^* - \omega_{k+1} = \prod_{j=0}^k L_j (\omega^* - \omega_0) + K_{VCO} \sum_{j=0}^k \left[\prod_{i=j+1}^k L_i \right] \xi_j. \quad (2.219)$$

O condiție eficientă pentru convergență este $|L_j| < 1$, pentru orice $j > j_{\min}$, în produsul $\prod_{l=j+1}^k L_l$ se micșorează, diminuând astfel contribuția perturbațiilor trecute la evaluarea pulsației ω^* .

Pentru activarea procesului de convergență unde terminarea fazei $\hat{\omega}_k = \Phi_{DIG}(\omega_k)$ se utilizează o filtrație Kalman în care funcția $\Phi_{DIG}(\omega_k, k_i + 1) = \phi(k_i + 1) + \xi(k_i + 1)$ în care zgomotul procesului interior are valoare medie teoretică nulă $E\{\xi_x\} = 0$ și varianța R_k .

Implementarea filtrului Kalman presupune următoarele trepte [24], [120]:

Pas 1. Se inițializează $k_i = 0$; $\Phi(k_i) = 0$; $P(k_i) = 0$.

Pas 2. Se calculează factorul de proporționalitate $K_{k_i+1} = \frac{P(k_i)}{(P(k_i) + R(k_i + 1))}$.

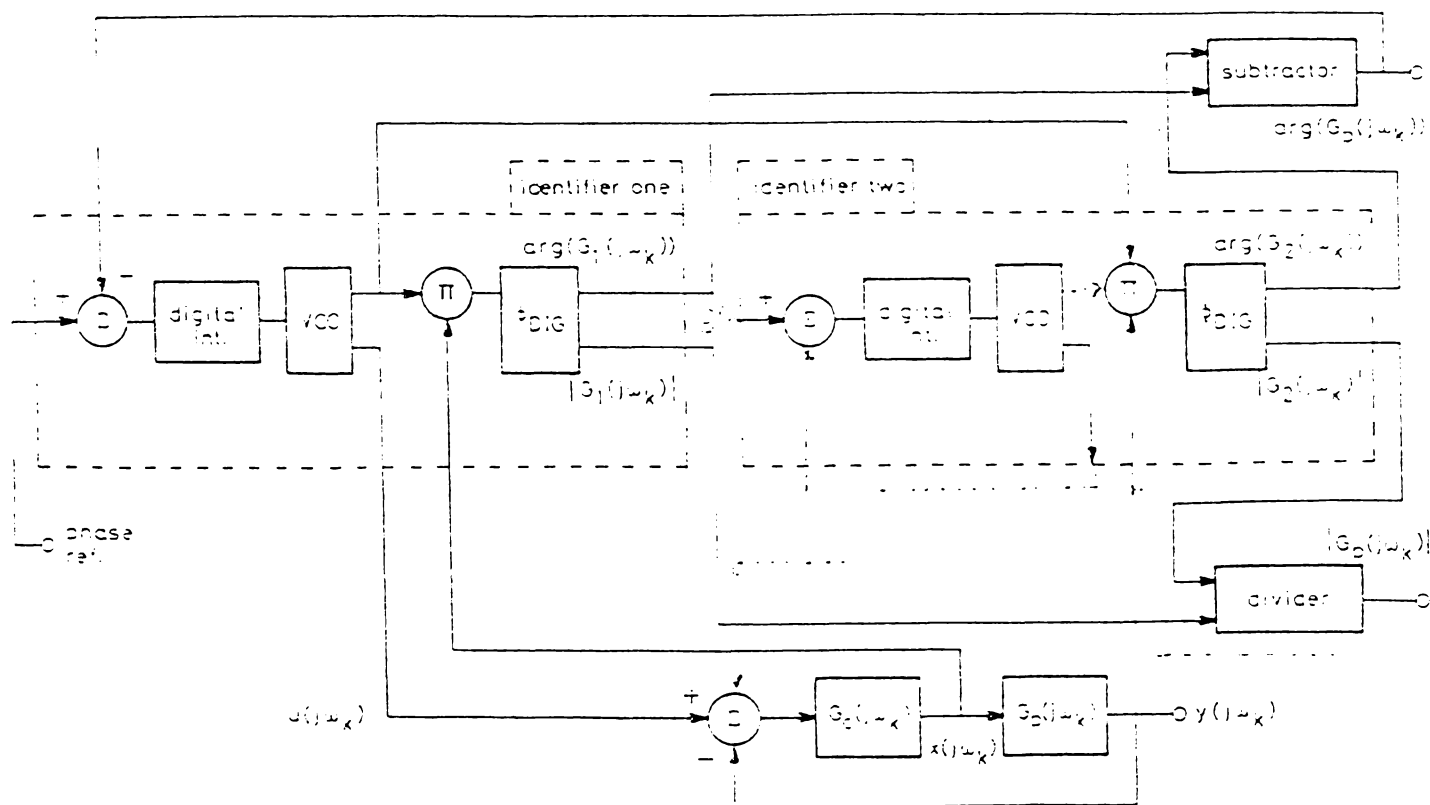


Fig.2.44. Identificarea în buclă închisă în cazul regulator necunoscut, proces necunoscut. (După Crowe și Johanson, 2000 modificat, [53]).

Pas 3. Se evaluează faza estimată $\hat{\phi}_k(k_i + 1) = \hat{\phi}_k(k_i) + K_{k_i+1} (\Phi_{DIG}(\omega_k, k_i + 1) - \hat{\phi}_k(k_i))$.

Pas 4. Se determină varianța estimată: $P(k_i + 1) = \frac{P(k_i) \cdot R(k_i + 1)}{(P(k_i) + R(k_i + 1))}$.

Pas 5. Se reactualizează indicii de iterație $k_i = k_i + 1$.

Pas 6. Se testează dacă faza estimată converge și dacă nu, se revine la pasul 2.

END.

În acest algoritm există și doi parametri de acord: P_k este varianța erorii $\phi^e(t) = \phi_r(t) - \phi(t)$, când aceasta se inițializează, indică incertitudinea asociată cu valoarea estimată curentă $\phi(0)$. $R(k_i)$ este varianța măsurării zgomotului ξ_k , astfel dacă zgomotul este mare și varianța este mare și viceversa.

Similar cu evaluarea fazei se utilizează al doilea identificator pentru magnitudine (gain) la care bucla de reacție inversă se începe de la modulul $|G_p(j\omega_k)|$.

b. Regulator necunoscut, proces necunoscut.

În ansamblu de sistem automat cu reacție inversă totală având funcția de transfer a controllerului $G_c(s)$ și a procesului $G_p(s)$ rezultă pentru argument și modul (magnitudine):

$$\arg\left(\frac{y(j\omega)}{u(j\omega)}\right) - \arg\left(\frac{x(j\omega)}{u(j\omega)}\right) = \arg G_p(j\omega) : \left|\frac{y(j\omega)}{u(j\omega)}\right| \cdot \left|\frac{x(j\omega)}{u(j\omega)}\right| = |G_p(j\omega)| \quad (2.220)$$

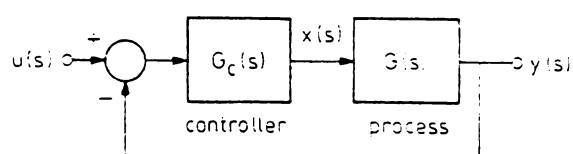


Fig.2.45. Configurația sistemului cu reacție totală.

Astfel, realizând o identificare dintre mărimea de referință și ieșirea controllerului și apoi o identificare dintre mărimea de referință și ieșirea procesului în buclă închisă, este posibil să se opereze identificarea în configurația buclă închisă.

În fig.2.44. se arată cum cei doi identificatori (pentru frecvență și modul) sunt configurați pentru a realiza identificarea la frecvență ridicată. Primul identificator, prezentat în figură în forma completă, estimează modulul și faza pentru $G_1(j\omega_k) = x(j\omega_k) / u(j\omega_k)$, care

furnizează semnalul de excitație $x(j\omega_k)$ pentru blocul de proces. Al doilea identificator utilizează același semnal de detecție pentru multiplicator Π ca și primul identificator, fiind utilizat pentru determinarea amplitudinii și fazei întregului sistem prin relația

$$G_2(j\omega_k) = y(j\omega_k) / u(j\omega_k).$$

După cum se poate observa, argumentul întregului sistem se obține prin scăderea fazelor lui G_2 și G_1 (prima relație din (2..220), iar prin raportul modulelor celor două funcții de transfer G_2 / G_1 se obține magnitudinea întregului sistem la frecvența critică.

Metoda prezentată realizează procesul de identificare prin doi identificatori care funcționează simultan. În cazul identificării de fază valoarea de referință este întotdeauna $\alpha = -\pi$ și în acest caz se determină frecvența și modulul la punctul de intersecție al locului de transfer închis cu axa negativă din planul funcției $P(\omega) + jQ(\omega)$.

Exemplu. Se utilizează metoda sistemului cu buclă închisă pentru a identifica procesul:

$$G_p(s) = \frac{10}{(1+0,2s)(1+0,7s)(1+s)}$$

în buclă închisă cu regulatorul PID:

$$G_c(s) = 0,79 \left(1 + \frac{1}{0,85s} + 0,21s \right)$$

la punctul de intersecție ($\alpha = -\pi$). Rezultatul identificării este indicat în tabelul 2.5 .

Tabel 2.5. Rezultatul identificării regulator necunoscut, proces necunoscut.

	Valori teoretice	Rezultate numerice
$\omega_{-\pi}$	3,641 rad · s ⁻¹	3,6405 rad · s ⁻¹
$ G_p(j\omega_{-\pi}) $	0,7625	0,78920

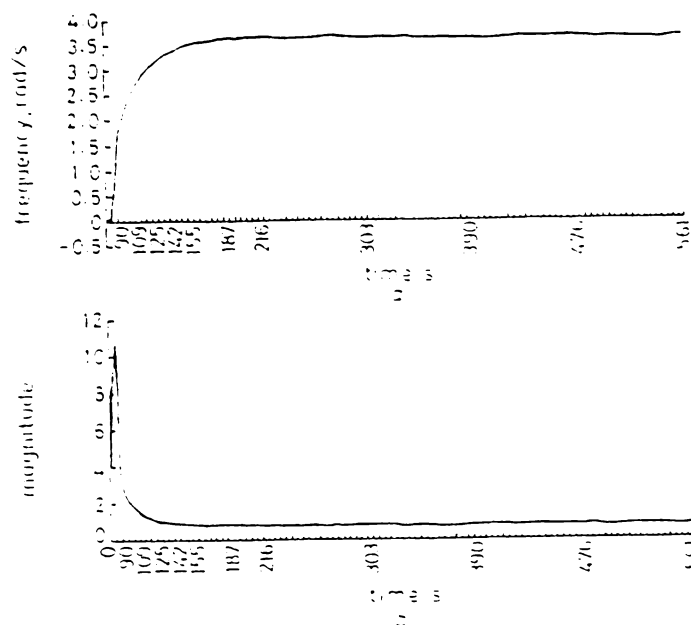


Fig. 2.46. Estimația în timp a) frecvența critică; b) modulul de frecvență critică în funcție.

Durata până la convergență a fost evaluată până la 250 s. Erorile procentuale ale estimărilor sunt de -1,18 % și respectiv 3,51% pentru frecvență și respectiv modul la ω_{π} . Programul s-a efectuat pe software LabVIEW.

Din cele prezentate se poate constata că metoda de identificare a sistemului în buclă închisă elaborată de J. Crowe și M.A. Johnson [59], de dată recentă permite să se evalueze cu o foarte bună precizie frecvența și modulul de intersecție (la $\alpha = -\pi$), prin utilizarea a două blocuri de identificare cu generatorul de semnal armonic, care funcționează concomitent, permițând să se determine funcția de transfer a controllerului și funcția de transfer a întregului sistem automat cu reacție totală.

CAPITOLUL 3

FUNCTII WALSH

3.1. Tipuri de funcții Walsh după criteriul ordonării

În 1923 Walsh J.L. a obținut un sistem complet ortonormat de funcții ortogonale care formează un sistem de funcții Rademacher și sunt cunoscute acum ca sisteme de funcții Walsh [138].

Majoritatea funcțiilor Walsh se împart în 3 grupe care se deosebesc prin modul de ordonare al funcțiilor componente în cadrul sistemului. De regulă, se acceptă următoarele ordonări [96]:

1. Ordonare după frecvențialitate (sau după Walsh)
2. Ordonare diadică (sau după Paley)
3. Ordonare naturală (sau după Hadamard).

În continuare se dezvoltă separat fiecare din aceste ordonări.

1. Ordonare după Walsh. Această ordonare a fost dezvoltată de Walsh. Vom deosebi o mulțime de funcții Walsh pentru ordonare exprimate prin astfel de expresii:

$$S_w = \{ wal_w(i, t), i = 0, 1, \dots, N-1 \}, \quad (3.1)$$

în care $N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$;

indicele w exprima ordonarea după Walsh, iar indicele i corespunde celui de-al i -lea element din funcția S_w .

Dacă prin s_i se exprimă frecvențele Walsh $wal_w(i, t)$, atunci s_i se exprimă prin relația:

$$s_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ i/2, & \text{pentru } i - \text{par} \\ (i+1)/2, & \text{pentru } i - \text{impar} \end{cases} \quad (3.2)$$

Funcția *cal* și *sal* corespunzătoare funcției $wal_w(i, t)$, se scriu sub următoarele forme:

$$\begin{aligned} cal(s_i, t) &= wal_w(i, t) \quad \text{dacă } i - \text{par;} \\ sal(s_i, t) &= wal_w(i, t) \quad \text{dacă } i - \text{impar.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

În *fig.3.1a* sunt redată primele 8 funcții Walsh în ordonările exprimate mai sus, din care reiese că frecvența următoarei funcții Walsh este mai mare sau egalează frecvența funcției Walsh precedente și au precizia în locul de intersecție a nivelului zero mai mult în intervalele de intersecție deschise când $t \in (0, 1)$. De aici rezultă denumirea de ordonare după frecvențe. Elementul S_w se obține din mulțimea funcțiilor Rademacher prin utilizarea **codului Gray** [143].

Cazul discret

Funcția discretizată Walsh este redată în *fig.5.5a* în 8 puncte de precizie care conduce la matricea (8 * 8) exprimată în *fig.3.1b*.

În cazul general se obține matricea (N * N).

Asemenea matrici le putem exprima sub forma $H_w(n)$, unde $n = \log_2 N$, astfel încât ele se obțin ca rezultat al rearanjării șirului matricii Hadamard.

Fie u_i și v_i numerele de ordinul i ale șirului:

$$u_{10} = (u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0)_2 \quad \text{și} \quad v_{10} = (v_{n-1} v_{n-2} \dots v_1 v_0)_2$$

Atunci elementele $h_{uv}^{(w)}$ ale matricei $H_w(n)$ au forma:

$$h_{uv}^{(w)} = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} r_i(u)v_i} ; u, v = 0, 1, \dots, N-1 \tag{3.4}$$

unde:

$$r_0(u) = u_{n-1}; \quad r_1(u) = u_{n-1} + u_{n-2}; \quad r_2(u) = u_{n-2} + u_{n-3}, \dots ; \quad r_{n-1} = u_1 + u_n.$$

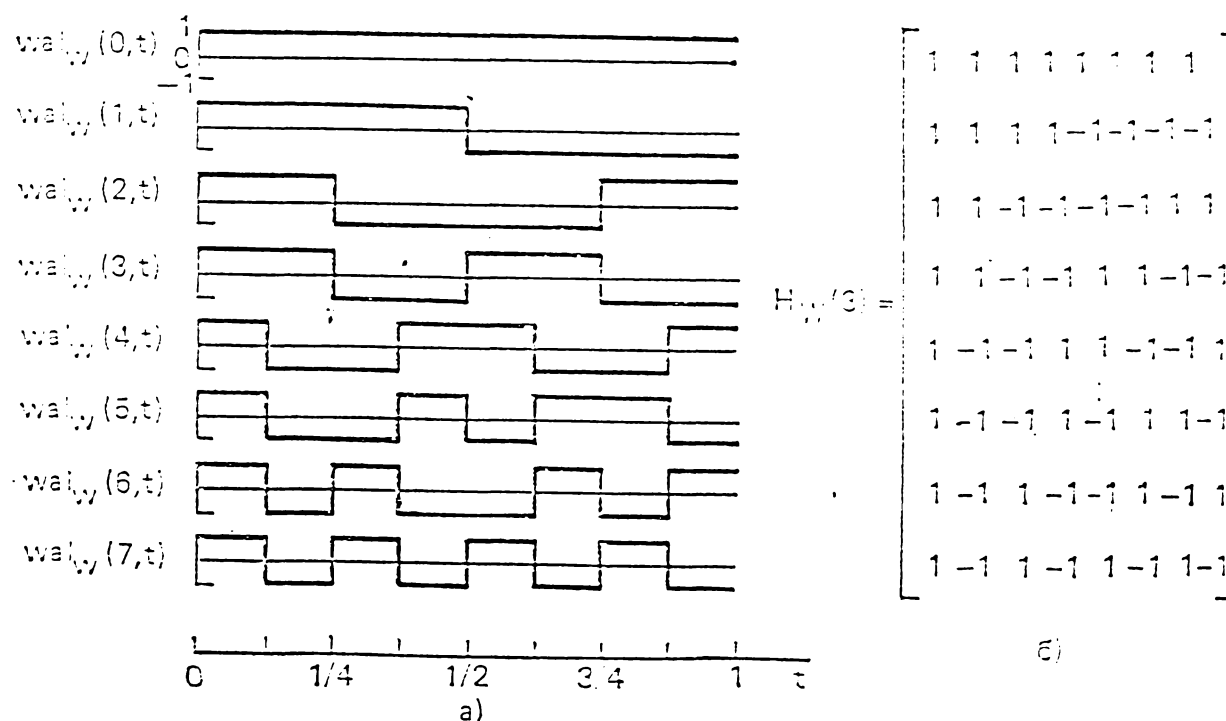


Fig.3.1. Funcțiile Walsh ordonate după Walsh pentru $N = 8$

- a - continue;
- b - discrete.

2. Ordonare diadică (după Paley)

Această ordonare a fost introdusă de PALEY [105]. Funcțiile Walsh constituie elemente pentru grupele de două elemente și pot fi ordonate cu ajutorul codului Gray.

Se dau o multime de funcții Walsh exprimate ca:

$$S_p = \{wal_p(i, t), i = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad (3.5)$$

unde indicele p reprezintă ordonarea după Paley, iar i elementul de ordinul i al lui S_p .

Mulțimea S_p este multiplu legată cu S_w . Ordonarea după Walsh a ecuației:

$$wal_p(i, t) = wal_w(b(i), t), \quad (3.6)$$

unde $b(i)$ este saltul (trecerea) de la codul Gray la codul diadic, indicele i .

Se scriu ecuațiile (3.6) pentru exemplul $N = 8$, rezultatele corespunzătoare trecându-se în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1. Corespondența între funcțiile Walsh, ordonate după Walsh și ordonate după Paley

i_{10}	i_2	$b(i)_2$	$b(i)_{10}$	Ordonarea
0	000	000	0	$wal_p(0, t) = wal_w(0, t)$
1	001	001	1	$wal_p(1, t) = wal_w(1, t)$
2	010	011	3	$wal_p(2, t) = wal_w(3, t)$
3	011	010	2	$wal_p(3, t) = wal_w(2, t)$
4	100	111	7	$wal_p(4, t) = wal_w(7, t)$
5	101	110	6	$wal_p(5, t) = wal_w(6, t)$
6	110	100	4	$wal_p(6, t) = wal_w(4, t)$
7	111	101	5	$wal_p(7, t) = wal_w(5, t)$

Rezultatele date în tabelul de mai sus corespund funcțiilor Walsh, cu ordonare după Walsh, $wal_w(i, t)$, pentru $i = 0, 1, \dots, 7$, arătate în fig.3.1a., iar cele 8 funcții corespunzătoare funcțiilor Walsh cu ordonare după Paley $wal_p(i, t)$, sunt ilustrate în fig.3.2a.

Cazul discret

Trecând la funcțiile discretizate Walsh cu ordonare după Paley din fig.3.2a se deduce matricea de dimensiune (8*8) așa cum este redată în fig.3.2b.

Această matrice se poate obține, de asemenea, prin transformata matricii lui Hadamard (8*8). Matricile corelate cu funcțiile Walsh ordonate după Paley le vom nota $H_p(n)$, unde $n = \log_2 N$. Elementele $h_{uv}^{(p)}$ ale matricii $H_p(n)$ se pot obține din următoarele relații:

$$h_{uv}^{(p)} = (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} u_i v_i} \quad ; u, v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

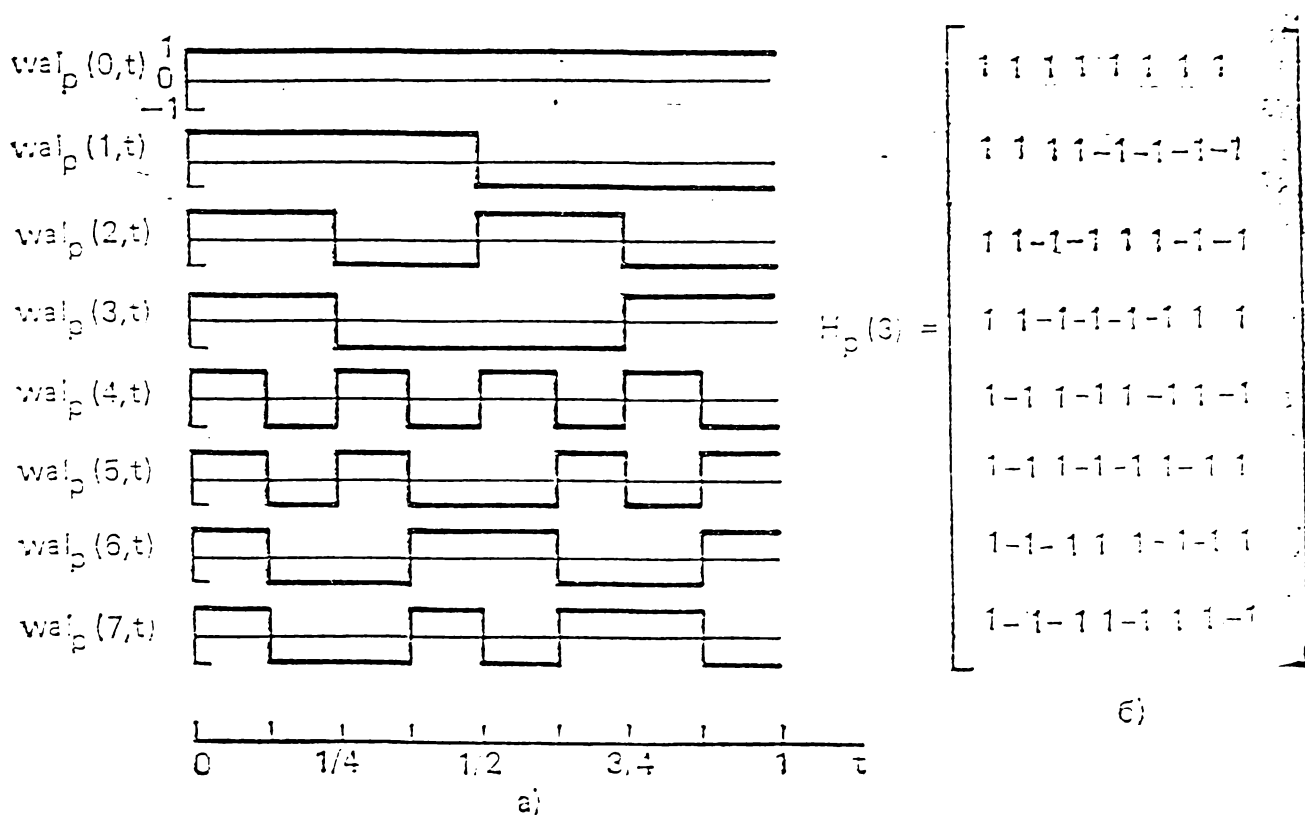


Fig.3.2. Funcțiile Walsh ordonate după Paley pentru N = 8

- a - continue;
- b - discrete.

3. Ordonare naturală (după Hadamard)

Funcțiile Walsh cu ordonare după Hadamard se exprimă prin relația [82]:

$$S_n = \{wal_h(i, t), i = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad (3.8)$$

unde indicele h exprimă ordonarea după Hadamard, iar i elementul de ordinul i a lui S_h . Funcțiile din dezvoltarea S_h sunt legate cu funcțiile din dezvoltarea lui Walsh prin ecuația (3.9):

$$\text{wal}_h(i, t) = \text{wal}_w[b(\langle i \rangle), t], \quad (3.9)$$

unde $\langle i \rangle$ este notația dublu inversată a lui i , iar $b(\langle i \rangle)$ transformata de cod Gray în raport cu codul $\langle i \rangle$ dublu inversat. Pentru ilustrarea acestei treceri descrisă de ecuația (3.9) pentru $N=8$ rezultatele calcului se trec în tabelul 3.2, [112].

Tabelul 3.2. Corespondența între funcțiile Walsh, ordonate după Walsh și ordonate după Hadamard

I	i_2	$\langle i \rangle_2$	$b(\langle i \rangle)_2$	$b(\langle i \rangle)_{10}$	Ordonarea
0	000	000	000	0	$\text{wal}_p(0, t) = \text{wal}_w(0, t)$
1	001	100	111	7	$\text{wal}_p(1, t) = \text{wal}_w(7, t)$
2	010	010	011	3	$\text{wal}_p(2, t) = \text{wal}_w(3, t)$
3	011	110	100	4	$\text{wal}_p(3, t) = \text{wal}_w(4, t)$
4	100	001	001	1	$\text{wal}_p(4, t) = \text{wal}_w(1, t)$
	101	101	110	6	$\text{wal}_p(5, t) = \text{wal}_w(6, t)$
6	110	011	010	2	$\text{wal}_p(6, t) = \text{wal}_w(2, t)$
7	111	111	101	5	$\text{wal}_p(7, t) = \text{wal}_w(5, t)$

Folosind datele din tabelul 3.2. și funcțiile $\text{wal}_w(i, t)$, pentru $i=1, \dots, 7$, se obțin cele 8 funcții Walsh cu ordonare după Hadamard ca în *fig.3.3a*.

Cazul discret

Funcțiile discretizate Walsh (v. *fig.3.3a*) conduc la matricea Hadamard de dimensiune $8*8$ reprezentată în *fig.3.3b*.

În cazul general se obține matricea $H_h(n)$ de dimensiune $(N*N)$, unde $n=\log_2 N$. Pentru aceasta clasă de submatrici se prelucrează submatrici de forma:

$$H_h(n) = \begin{bmatrix} H_h(n-1) & H_h(n-1) \\ H_h(n-1) & -H_h(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Asemenea matrici corespund ordonării matriciale Hadamard. Elementele $h_m^{(h)}$ ale matricii $H_h(n)$ se obțin din următoarele relații:

$$h_{uv}^{(h)} = (-1)^{\sum_{i=0}^{u-1} v_i} ; u, v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

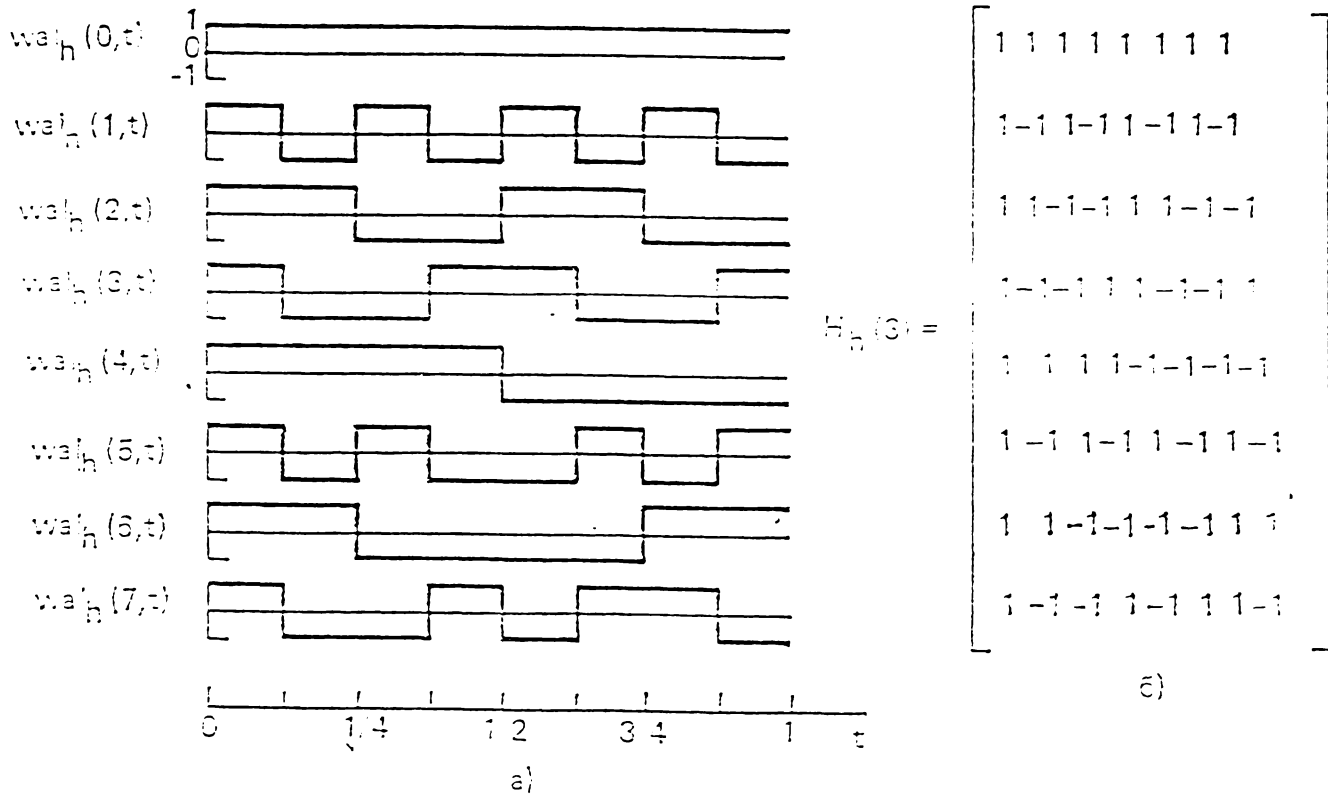


Fig.3.3. Funcțiile Walsh ordonate după Hadamard pentru $N = 8$
 a - continue;
 b - discrete.

Aplicatia 1.

Codul Gray. In câteva aplicații practice, de exemplu în transformările analog-digitale, este de dorit să se folosească coduri la care toate urmează unul după altul. Codurile ce au asemenea însușiri se numesc *ciclice*. Cel mai important cod ciclic este codul Gray [143].

In tabelul 3.3 sunt prezentate codurile de ordinul 4.

Tabelul 3.3. Ordonarea de ordinul 4 a codului Gray.

	Codul GRAY				Codul dublu			
	G_3	g_2	g_1	g_0	b_3	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	0	0	1	1	1
8	1	1	0	0	1	0	0	0
9	1	1	0	1	1	0	0	1
10	1	1	1	1	1	0	1	0
11	1	1	1	0	1	0	1	1
12	1	0	1	0	1	1	0	0
13	1	0	1	1	1	1	0	1
14	1	0	0	1	1	1	1	0
15	1	0	0	0	1	1	1	1

Acest cod arată acele însușiri principale, că reprezentarea cu numere duble poate fi ușor transformată în cod Gray cu ajutorul semisumatorului.

Transformarea codului binar în cod Gray

Fie $g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_1, g_0$ cuvântul cod în ordinul n al codului binar Gray, corespunzător numerelor binare $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$.

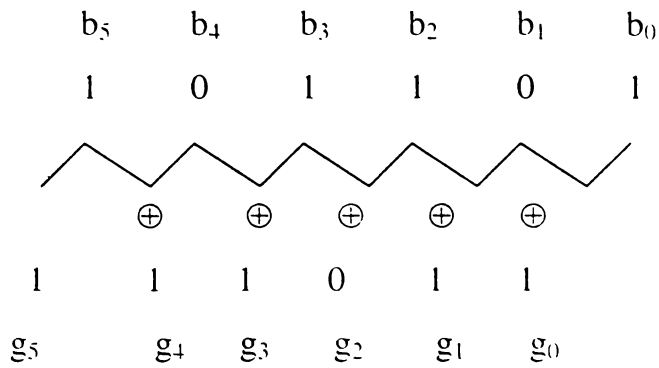
Atunci g_i poate fi obținut ca $g_i = b_i \oplus b_{i+1}$, $0 \leq i \leq n - 2$.

$$g_{n-i} = b_{n-i}$$

Simbolul \oplus înseamnă însumare pe modul 2 care se exprimă ca:

$$0 \oplus 0 = 0 ; 1 \oplus 0 = 1 ; 0 \oplus 1 = 1 ; 1 \oplus 1 = 0.$$

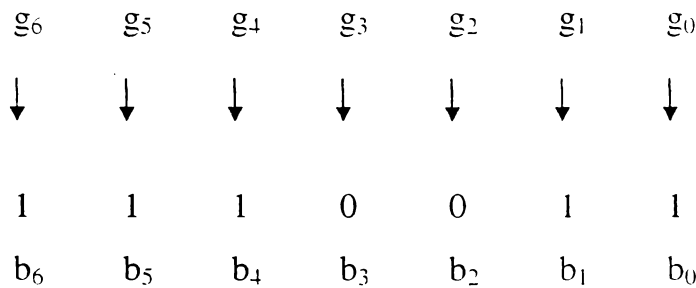
De exemplu, codul Gray corespunzător numărului binar 101101, poate fi reprezentat sub următoarea formă:



Transformarea codului Gray în binar

Transformarea codului Gray în binar duce la găsirea cifrelor aceleași în stânga șirului și deplasându-ne la dreapta obținem $b_i = g_i$ dacă numărul unităților care depășesc g_i este par și $b_i = \bar{g}_i$ (adică complementarul lui g_i) dacă numărul unităților care depășesc g_i este impar. La acestea, numerele unitare nule se socotesc pare.

De exemplu, cifrele binare corespunzătoare codului Gray pentru numărul 10010011 au forma 1110010 și poate fi obținut conform regulii enunțate mai sus, astfel:



Aplicații

3.1. Se consideră numărul i scris în cod binar și codul Gray:

$$i_B = b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1$$

$$i_{\text{gray}} = g_n, g_{n-1}, \dots, g_2, g_1$$

atunci funcția Walsh $wal(i, t)$ se poate scrie cu ajutorul funcției Hadamard în forma următoare:

$$wal_w(i, t) = \prod_{k=1}^n [rad(k, t)]^{g_k} \cdot Wal_w(i, t) = \prod_{k=1}^n [Rad(k, t)]^{g_k} \quad (3.12)$$

iar conform fig.3.3 în care sunt prezentate funcțiile Walsh cu ordonare după Hadamard se pot utiliza notațiile:

$$Rad(1, t) = + + + + + + + - - - - -$$

$$Rad(2, t) = + + + + - - - - + + + + - - - -$$

$$Rad(3, t) = + + - - + + - - + + - - + + - -$$

$$Rad(4, t) = + - + - + - + - + - + - + -$$

unde semnul + și - reprezintă +1 și -1.

Folosind notația introdusă mai sus se arată că

$$\begin{aligned} \text{Wal}_w(13, t) &= \text{Rad}(1, t)\text{Rad}(2, t)\text{Rad}(4, t) = \\ &= + - + - - + - + - + - + - + - : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wal}_w(9, t) &= \text{Rad}(1, t)\text{Rad}(3, t)\text{Rad}(4, t) = \\ &= + - - + + - - + - + + - - + + - : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wal}_w(8, t) &= \text{Rad}(3, t)\text{Rad}(4, t) = \\ &= + - - + + - - + + - - + + - - + . \end{aligned}$$

3.2. Se poate arăta că transformarea dublă a funcției Walsh dă din nou funcția Walsh:

$$\text{wal}_w(h, t)\text{wal}_w(k, t) = \text{wal}_w(h \oplus k, t) ;$$

$$\text{Wal}_w(h, t)\text{Wal}_w(k, t) = \text{Wal}_w(h \oplus k, t).$$

unde semnul \oplus înseamnă însumare de modul 2. Din fig.3.5b deducem că:

$$\text{Wal}_w(1, t) = + + + + - - - - ;$$

$$\text{Wal}_w(2, t) = + + - - - - + + ;$$

$$\text{Wal}_w(3, t) = + + - - + + - - ;$$

$$\text{Wal}_w(4, t) = + - - + + - - + ;$$

$$\text{Wal}_w(5, t) = + - - + - + + - ;$$

$$\text{Wal}_w(6, t) = + - + - - + - + ;$$

$$\text{Wal}_w(7, t) = + - + - + - + - .$$

Aplicând relațiile specificate mai sus se deduce:

Tabelul 3.4.

u	u ₂	u ₁	u ₀	u ₀	u ₁	U ₂	τ ₀ (u)	τ ₁ (u)	τ ₂ (u)	V	v ₂	v ₁	V ₀	v ₀	V ₁	v ₂
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	1	1	0	0	1	0	3	0	1	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1	1	1	0	4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0	1	1	1	1	5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	0	0	1	1	1	0	1	6	1	1	0	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	7	1	1	1	1	1	1

3.3. În fig.3.4. sunt reprezentate primele 8 funcții Hadamard. Se folosește ecuația (3.3.2) care reprezintă următoarele 8 funcții Hadamard și obține $H^*(4)$.

$u \backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	-	-	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	-	-	+	-	+	+	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	-	+	-	+	-	+	-

Fig.3.4. Primele 8 funcții Hadamard

3.2. Transformata Walsh - Hadamard (TWH)

Cel mai cunoscut mijloc pentru transformările ortogonale nesinusoidale TWH este larg acceptată la prelucrarea semnalelor digitale astfel că ele pot fi calculate numai prin folosirea însumării și scăderii [139].

Urmare a acestora și aparatura care realizează TWH este foarte simplă.

Prin aplicarea algoritmului pentru calculul rapid Walsh-Hadamard și prin introducerea spectrului în sens invers Walsh se introduc proprietățile spectrelor Walsh și interpretările sale fizice [86].

3.2.1. Reprezentarea semnalelor sub forma șirului Walsh

Înainte de a trece la introducerea diferiților algoritmi de realizare a TWH este necesar să prezentăm câteva aspecte legate de reprezentarea semnalului de intrare $x(t)$ în forma șirului Walsh. Astfel, se presupune ca $x(t)$ se exprimă pe intervalul unitar deschis $t \in [0, 1)$.

Așa cum s-a arătat mulțimea funcțiilor Walsh $\{wal_w(i, t)\}$ este închisă. Aceasta înseamnă că oricare semnal $x(t)$ care se intergrează absolut (adică, există $\int_0^1 |x(t)| \cdot dt$, finită) la $t \in [0, 1)$ poate fi pus sub forma șirului Walsh .

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot wal_w(k, t) \quad (3.13)$$

Astfel, că mulțimea funcțiilor $\{wal_w(k, t)\}$ formează un sistem ortonormat în intervalul $t \in [0, 1)$, atunci coeficientul d_k se exprimă ca în relația:

$$d_k = \int_0^1 x(t) \cdot wal_w(k, t) \cdot dt \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Reținem că:

$$wal_w(k, t) = cal(s_k, t) \quad ; k - \text{par}$$

$$wal_w(k, t) = sal(s_k, t) \quad ; k - \text{impar}$$

unde s_k este eșantionul funcției $wal_w(k, t)$ care se exprimă:

$$s_k = \begin{cases} 0; & k = 0 \\ k/2; & k - \text{par} \\ (k+1)/2; & k - \text{impar} \end{cases}$$

Dacă $wal_w(k, t)$ se exprimă prin compunerile sal și cal atunci ecuația (1) devine

$$x(t) = a_0 \cdot wal_w(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot cal(k, t) + b_k \cdot sal(k, t)] \quad (3.15)$$

unde $a_0 = d_0$; $a_k = d_{2k}$; $b_k = d_{2k-1}$.

Pentru a obține șirul finit care conține $N = 2^n$ intervale introdus în șirul de mai sus obținem:

$$x(t) \approx a_0 \cdot wal_w(0, t) + \sum_{k=1}^{N/2-1} [a_k \cdot cal(k, t) + b_k \cdot sal(k, t)] + b_{N/2} sal(N/2, t). \quad (3.16)$$

Condițiile de convergență ale șirului din relația (3.16) au fost puse de Walsh, Paley și Fainom:

i) Dacă $x(t)$ continuu la $t \in [0, 1)$, atunci șirul converge uniform către $x(t)$, adică

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{a_k, b_k\} = 0. \quad (3.17)$$

În acest mod se realizează câteva eșantioane $k = N_0$ la care toate a_k și b_k pentru $k > N_0$ sunt mai mici decât oricare infinit mic dat $\varepsilon > 0$. Dacă nu se ia în considerare acești coeficienți la dezvoltările $x(t)$ în șirul Walsh atunci se pierde o oarecare informație semnificativă.

ii) În punctele de intersecție $x(t)$ iau valori în intervalul $t \in [0, 1)$ și irul conduce la valoarea medie pătratică. Funcțiile Walsh care decurg din reprezentarea semnalelor analogice sub forma șirurilor Fourier și din convergențele puternice între funcțiile sinusoidale și Walsh, precum și armonicile Fourier pentru cazul $N=8$ sunt redată în fig.3.5.

Se obține astfel TWH care este analoagă TDF (transformata discretă Fourier).

TWH se utilizează pentru stabilirea consecințelor. La acestea funcțiile de bază reprezentate ca funcții Walsh discrete pot fi exprimate cu ajutorul matricii Hadamard $H_h(N)$. Aceste matrici pot fi obținute prin următoarele reguli de recurență [112]:

$$H_h(k) = \begin{bmatrix} H_h(k-1) \cdot H_h(k-1) \\ H_h(k-1) - H_h(k-1) \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

unde $H_h(0) = 1$ și $n = \log_2 n$.

Exemplu

Pentru $k=1$ și $k=2$ ecuația (3.18) devine:

$$H_h(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_h(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Fără alte artificii se poate arăta că matricea $H_h(k)$ manifestă următoarele proprietăți:

i) $H_h(k)$ este o *matrice simetrică*

$$H_h(k)' = H_h(k) \quad (3.20)$$

unde accentul exprimă transformata matricii.

ii) $H_h(k)$ este o *matrice ortogonală*, adică:

$$H_h(k)' \cdot H_h(k) = 2^h I(k) \quad (3.21)$$

unde $I(k)$ este matricea unitară de dimensiune $(2^h \times 2^h)$;

iii) Matricea prelucrată $H_h(k)$ este o *matrice proporțională*:

$$[H_h(k)]^{-1} = \frac{1}{2^h} \cdot H_h(k) \quad (3.22)$$

unde $[H_h(k)]^{-1}$ este matricea inversă lui $H_h(k)$.

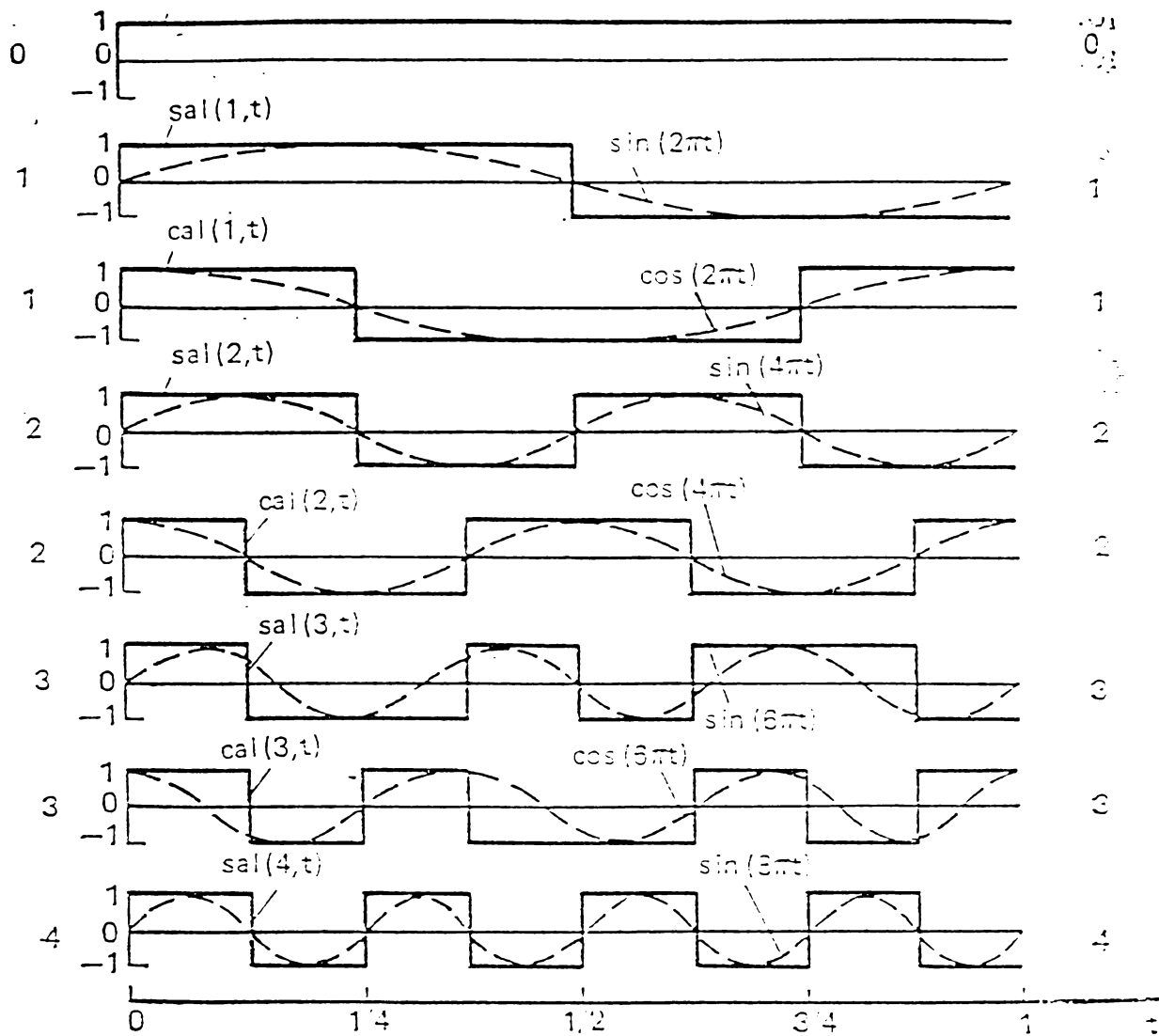


Fig.3.5. Funcția Walsh cu ordonare după Hadamard și armonicile Fourier.

3.2.2. Transformarea Walsh-Hadamard $(WHT)_h$

Această transformare se numește BEFORE [BENary FOURier REpresent] introdusă de Osnorg.

Transformata $(WHT)_h$ poate fi scrisă în ecuații matriciale sau în ecuații exponențiale.

Exprimarea matricială. Fie mulțimea $\{X(t)\}$ compusă din numerele N finite de perioadă $m = 0, 1, \dots, N-1$, care se scriu [6]:

$$\{X(m)\} = \{X(0) X(1) \dots X(N-1)\} \quad (3.23)$$

Succesiv $\{X(m)\}$ se scrie în forma:

$$X'(n) = [X(0) X(1)$$

unde N vector de măsură $X(n)$.

3.3. Utilizarea funcției Walsh pentru identificarea sistemelor prin integralele aferente

Un sistem liniar cu parametri concentrați cu n stări $x(t)$, j intrări $u(t)$ și cu m ieșiri $y(t)$ este descris de ecuațiile intrare-stare-ieșire și de ieșire, prin intermediul matricilor aferente A , B , C , D :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ; y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.24)$$

Soluția sistemului constă în găsirea stărilor $x(t)$ și a ieșirilor $y(t)$, prin diverse metode, dintre care se menționează utilizarea dezvoltării semnalelor $x(t)$, $u(t)$ și $y(t)$ în serii temporale utilizând serii ortogonale. Dintre toate funcțiile ortogonale teoria și experiența au arătat că numărul cel mai mic de operații elementare (adunări și multiplicări) pe calculator la dezvoltarea în serie a funcțiilor semnal se efectuează prin funcțiile Walsh, definite după Walsh prin:

$$S_w = \{wal_w(i, t), i = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad (3.25)$$

în care: $N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$; indicele w exprimă ordonarea după Walsh, iar indicele i corespunde celui de-al i -lea element din funcții S_w .

Dacă prin s_i se exprimă frecvențele Walsh $wal_w(i, t)$, atunci s_i se exprimă prin relația:

$$s_i = \begin{cases} 0, i = 0 \\ i/2, pt. i - par \\ (i+1)/2, i - impar \end{cases} \quad (3.26)$$

Introducând în relația (3.24) ecuațiile:

$$x(t) = R w(t) ; u(t) = S w(t) ; \dot{x}(t) = F w(t) ;$$

$$\text{și} \quad \int_0^t w(\tau) \cdot d\tau = P \cdot w(t) \quad (3.27)$$

decî $x(t) = c_0 + c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t) + \dots$

iar $u(t) = c'_0 + c'_1 w_1(t) + c'_2 w_2(t) + \dots$

unde $R = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_n]^T$

$$S = [c'_0, c'_1, c'_2, \dots, c'_n]^T$$

$$F = [c''_0, c''_1, c''_2, \dots, c''_n]^T$$

Înlocuind în relația (3.24), avem:

$$Fw(t) = APRw(t) + Ax_0 + BSw(t)$$

$$F - APR + BS = G$$

$$F = [1 - A \otimes P^T] \cdot [G] \quad (3.28)$$

în care \otimes este simbolul de multiplicare Kronecker.

3.4. Elaborarea matricii P

Definirea matricii W(m) Utilizarea funcțiilor Walsh prin calculul numeric, necesită eșantionarea lor, astfel că acolo unde acestea sunt diferite de zero, vor fi exprimate prin eșantioane de amplitudine +1 și -1. Pentru a se înlătura ambiguitățile la momentele în care undele fac salturi de la 0 la 1, de la +1 la -1 și de la -1 la 0, pentru un ansamblu de m funcții, exprimate pe intervalul [0;1] divizat în N subintervale egale, cu $N=2m$, salturile efectuându-se la valori pare ale subintervalelor $s=0,1,2,\dots,N-1$, eșantioanele se vor conta la numerele impare ale subintervalelor $i=0, 1, 2, 3, 5, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-5, 2m-3, 2m-1$. [12], [24].

Pentru ilustrare se consideră intervalul [0;1] format din $N=16$ subintervale, cu $m=N/2=8$, cu evidențierea funcțiilor eșantionate $w_n(t)$, $n=0,1,2,\dots,7$ și cu definirea matricii $W(8)$.

$$\text{wal}(2j + p, \theta) = (-1)^{\text{int}[j/2]+p} \{ \text{wal}[j, 2(\theta + 1/4)] + (-1)^{j-p} \text{wal}[j, 2(\theta - 1/4)] \}, \quad (3.29)$$

în care $p = 0$ sau 1 și $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{wal}(0, \theta) = \begin{cases} 1; & \text{pentru } -1/2 \leq \theta < 1/2 \\ 0; & \text{pentru } \theta < -1/2; \theta \geq +1/2 \end{cases} \quad (3.30)$$

În acest caz se definește matricea $W(8)$:

$$W_8(8) = \begin{bmatrix} w_0(i) \\ w_1(i) \\ w_2(i) \\ w_3(i) \\ w_4(i) \\ w_5(i) \\ w_6(i) \\ w_7(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pentru matrici $W(m)$ de ordin inferior lui $W(8)$ este evident că avem:

$$W(1)=1 : W(2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; W(4)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

În cazul general cu $N=2m$, matricea $W(m)$ este definită astfel:

$$W(m)=\begin{matrix} m \backslash i & 1 & 3 & 5 & 7 & m-7 & m-5 & m-3 & m-1 & m+1 & m+3 & m+5 & m+7 & 2m-7 & 2m-5 & 2m-3 & 2m-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \frac{m}{2} & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \frac{m}{2}+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m}{2}+2 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 2m-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad (3.33)$$

În acest fel matricea $W(t)$ din membrul drept al ecuației (8) este perfect definită.

Definirea matricei $W_i(m)$. Matricea $W_i(m)$ se determină în baza inducției, pornind de la un caz particular $m=8$, $N=2m$. Cu datele de mai sus se construiește matricea $W_i(m)$ pentru $m=8$:

$$W_i(8) = \begin{bmatrix} \int w_0(\tau) d\tau \\ \int w_1(\tau) d\tau \\ \int w_2(\tau) d\tau \\ \int w_3(\tau) d\tau \\ \int w_4(\tau) d\tau \\ \int w_5(\tau) d\tau \\ \int w_6(\tau) d\tau \\ \int w_7(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Având determinate matricele $W(m)$ și $W_i(m)$, matricea specifică P aferentă funcțiilor ortogonale Walsh se determină din (3.24) cu relația matriceală :

$$P=W_i(m)*W^{-1}(m) \quad (3.35)$$

în care matricea $W^{-1}(m)$ este inversa matricei $W(m)$.

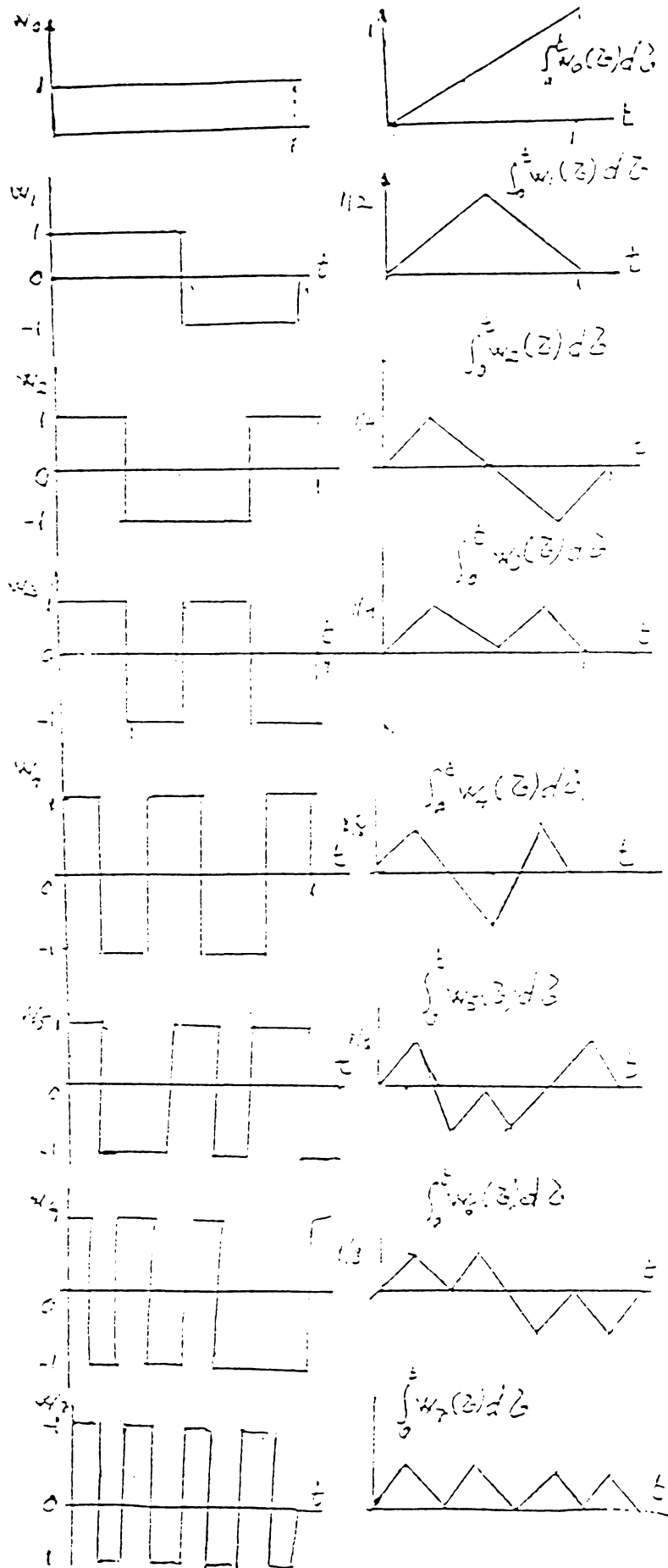


Fig.3.6. Reprezentarea primelor opt funcții Walsh și integralele aferente [24].

3.5. Program pentru transformata rapidă Walsh

Prezentăm în continuare două rutine pentru transformata rapidă inversă Walsh cu ordonare după Hadamard [86] și transformata rapidă inversă Walsh aferentă [101]. Utilizând o rutină de inversiune binară a indecșilor $X(n)$ și $B(n)$ se obțin vectorii aferenți transformatei Walsh cu ordonare după Walsh. În baza identității matricei fundamentale a celor două transformate se elaborează un program comun pentru cele două transformate, notate cu TDWH și TIWH.

Cele două transformate TDWH și TIWH sunt definite prin relațiile matriciale:

$$B_x(n) = \frac{1}{N} \cdot H \cdot X(n) ; \quad X(n) = H \cdot B_x(n), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.36)$$

unde H este o matrice, cu elemente $+1$ și -1 , construită pe baza matricei elementare:

$$H(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

În baza algoritmului general Cooley-Tukey pentru transformata rapidă Fourier (FFT), observând că exponențialele W^s iau valori de $+1$ și -1 la TDWH și TIWH, se elaborează pentru aceste rutine, comasate într-una.

La TDWH se dă succesiunea temporală

$$\{X(n)\} = \{X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1)\}$$

unde $N=2^p$, p întreg și pozitiv; și se cere succesiunea

$$\{B_x(n)\} = \{B_x(0), B_x(1), B_x(2), \dots, B_x(N-1)\},$$

care exprimă coeficienții Walsh-Hadamard. [86], [87].

Analog ca la FFT, numărul de iterații este p , în ordinea $c=1, 2, \dots, p$. După fiecare iterație se determină șirurile $X_r(n)$, șirul de la ultima iterație prin diviziune cu N :

$$B_x(n) = X_p \cdot 1/N \quad (3.38)$$

Numărul de blocuri pe iterație, ca și la FFT, este:

$$N_{\text{bloc}} = 2^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (3.39)$$

Astfel că iterația $r = 1$ este un bloc, pentru $r = 2$ două blocuri, așa încât, la ultima iterație vor fi $N/2$ blocuri.

În graful din *fig.3.7* este redat modul de obținere a șirului $X_r(n)$ din șirul $X_{r-1}(n)$, observând că numai liniile orizontale din a doua jumătate a fiecărui bloc sunt afectate de semnul minus.

În cazul TIWH se utilizează același algoritm de calcul cu observația că în blocul lui $X(n)$ se va introduce șirul de coeficienți $B_x(q)$, iar după fiecare iterație se va obține șirul intermediar $B_r(q)$.

După ultima iterație se va pune:

$$X(n) = B_r(q), \quad q=n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.40)$$

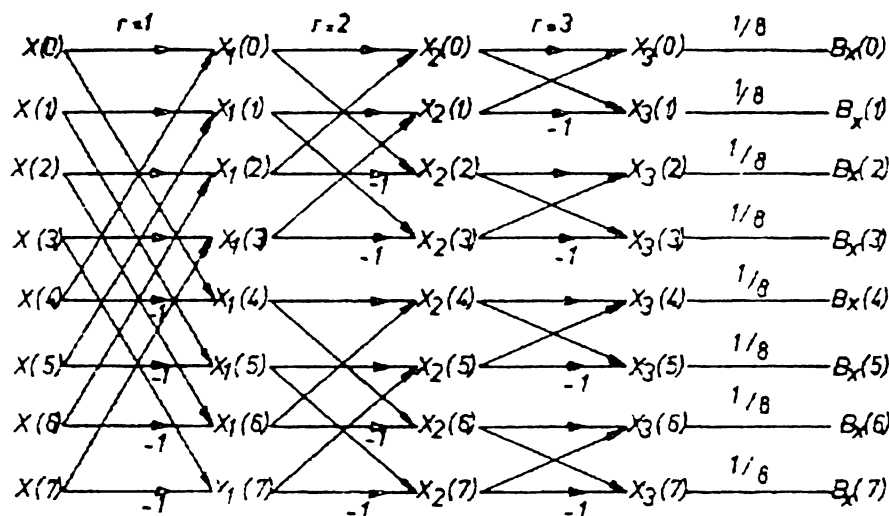


Fig.3.7. Graficul obținerii spectrului Walsh cu ordonare după Walsh.

Pentru a obține spectrul Walsh cu ordonare după Walsh, $W_x(q)$ din $B_x(q)$ se utilizează relația:

$$B_x(q) = W_x [b < q >] \quad (3.41)$$

în care $< q >$ exprimă inversia binară a indexului q , iar b operația de transpoziție din codul Gray în cod binar.

Pentru inversiunea binară, transpoziția din codul Gray în cel binar al numerelor s-au elaborat rutine, care sunt utilizate, după caz în programul principal.

Identificarea cu serii Walsh a fost abordată încă din anul 1965 de Chen și Hsiao, iar în prezent nu se mai utilizează, întrucât teoremele lui Plancherel din domeniul frecvențial nu sunt valabile în domeniul Walsh. Din motive de spațiu nu sunt prezentate în aici, dar se pot consulta în lucrările [46] și [47].

În principiu, identificarea prin serii Walsh este perfect similară cu cea prin utilizarea funcțiilor ortogonale Haar, prezentată în capitolul 5, cu observația că pentru matricea specifică P , se va utiliza relația (3.35) cu matricile W_i și W , în locul matricilor H_i și H din relația (5.17).

CAPITOLUL 4

IDENTIFICAREA ON-LINE UTILIZÂND SERII LAGUERRE

4.1. Definierea funcțiilor ortogonale Laguerre

Printre polinoamele ortogonale care au mare importanță în aplicațiile tehnice se numără și polinoamele Laguerre, notate $L_n^\alpha(t)$, care pentru oricare $\alpha > -1$ se definesc prin relația [15]:

$$L_n^\alpha(t) = e^t \cdot \frac{t^{-\alpha}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} \cdot t^{n+\alpha}) \quad n=0,1,\dots \quad (4.1)$$

Polinoamele Laguerre $L_n^\alpha(t)$ sunt ortogonale de pondere

$$p(t) = t^\alpha e^{-t} \quad (4.2)$$

Funcția generatoare a polinoamelor Laguerre este de forma [17]:

$$W(x,t) = (1-t)^{-\alpha-1} \cdot e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) t^n \quad (4.3)$$

unde

$$C_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1-t)^{-\alpha-1} \cdot e^{-\frac{xt}{1-t}} t^{-n-1} dt \quad (4.4)$$

C fiind un contur închis care cuprinde punctul $t=0$ și este situat în interiorul cercului " $|t| < 1$ ".

Dacă se alege acest contur de rază suficient de mică și se face schimbarea de variabilă

$$u = \frac{x}{1-t}$$

și se alege un contur C' suficient de mic, atunci:

$$C_n^\alpha(x) = \frac{e^x \cdot x^{-\alpha}}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{C'} \frac{e^{-u} \cdot u^{n+\alpha}}{(u-x)^{n+1}} du \quad (4.4')$$

C' conține punctul $u=x$, ce este un pol de ordinul $(n+1)$.

Dacă se calculează integrala cu ajutorul **teoremei reziduurilor** găsim [16]:

$$C_n^\alpha(x) = \frac{e^x \cdot x^{-\alpha}}{n!} \left[\frac{d^n}{du^n} (e^{-u} \cdot u^{n+\alpha}) \right] = L_n^\alpha(x) \quad (4.4'')$$

Pentru a demonstra ortogonalitatea polinoamelor Laguerre se consideră funcția:

$$u_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}} \cdot L_n^\alpha(x) \quad (4.5)$$

și folosind o proprietate a polinoamelor Laguerre, avem:

$$\begin{aligned} (x \cdot u_n)' + \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_n &= 0 \quad / \bullet u_m \\ (x \cdot u_m)' + \left(m + \frac{\alpha + 1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_m &= 0 \quad / \bullet u_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

și se integrează pe $(0, \infty)$:

$$x(u_n \cdot u_m - u_n \cdot u_m) + (n - m) \int_0^\infty u_m u_n dx = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{Pt. } m \neq n \quad \int_0^\infty u_m u_n dx = 0 \text{ sau } \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot L_m^\alpha(x) \cdot L_n^\alpha(x) dx = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Pt. } m = n \quad \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot [L_n^\alpha]^2 dx &= \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \dots = \\ &= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + \alpha)}{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2} \cdot \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot [L_n^\alpha(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

echivalentă cu:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \quad n=2,3,\dots \quad (4.10)$$

Dacă $\alpha=0$ polinoamele Laguerre devin:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad n=0,1,\dots \quad (4.11)$$

Proprietatea de ortogonalitate devine:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad \text{pt. } m \neq n. \quad (4.12)$$

Rezultă deci, că polinoamele Laguerre sunt ortogonale pe $(0, \infty)$ și de pondere

$$p(x) = e^{-x}.$$

Norma polinoamelor Laguerre se scrie [23]:

$$\|L_n(x)\|^2 = \int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2. \quad (4.13)$$

4.2. Modele Laguerre

Polinoamele ortogonale Laguerre integrabile în domeniul $(0, \infty)$ se pot reprezenta prin intermediul funcției [24]:

$$\phi_k(t) = \frac{e^{-t}}{k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^k \cdot e^{-t}) \quad (4.14)$$

ca fiind

$$L_k(t) = \sqrt{2p} \cdot e^{-pt} \cdot \phi_k(2pt) \quad (4.15)$$

Funcțiile Laguerre sunt un set de funcții ortonormate definite pe un interval de timp $L_2(0, \infty)$ integrabile pe acest interval. Ortonormalitatea este evidentă prin relația

$$(f, g)_t = \int_0^{\infty} f(t) \cdot g(t) \cdot dt \quad (4.16)$$

Transformata Laplace a funcțiilor raționale Laguerre $L_k(t)$ pentru $k \geq 0$ în domeniul frecvențial sunt:

$$L_k(s) = \sqrt{2p} \cdot \frac{(s-p)^k}{(s+p)^{k+1}} = \frac{\sqrt{2p}}{s+p} \cdot \left(\frac{s-p}{s+p} \right)^k \quad (4.17)$$

Teorema lui PARSEVAL realizează trecerea din domeniul timp în domeniul frecvențial [30]

$$(f, g)_t = (F, G)_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot G(-j\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot G(s) \cdot ds \quad (4.18)$$

unde F și G sunt transformatele Laplace ale funcțiilor f și g .

A). Se consideră un sistem liniar invariant în timp asupra căruia acționează la intrare semnalul $u(t)$. Ieșirea sistemului liniar $y(t)$ va fi dată de relația:

$$y(t) = h(t) \otimes u(t) \quad (4.19)$$

în care $h(t)$ reprezintă funcția de pondere a sistemului, iar semnul \otimes reprezintă produsul de convoluție. Funcția de pondere are expresia:

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot L_i(t) \quad (4.20)$$

unde c_i sunt coeficienții seriei Laguerre, iar $L_i(t)$ funcțiile Laguerre definite în intervalul $L_2(0, \infty)$, integrabile pe acest interval.

Înlocuind relația (4.20) în relația (4.19) se obține:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot [L_i(t) \otimes u(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot W_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \quad (4.21)$$

Produsul de convoluție se exprimă:

$$W_i(t) = L_i(t) \otimes u(t) = \int_0^t L_i(t) \cdot u(t - \tau) \cdot d\tau \quad (4.22)$$

Dacă considerăm semnalul de la intrarea sistemului ca fiind impulsul unitar $u(t) = 1$, vom avea că:

$$W_i(t) = \int_0^t L_i(t) \cdot d\tau \quad (4.23)$$

Interpretarea fizică a convoluției

La un semnal de intrare oarecare $u(t)$ la intrarea unui element de sistem cu funcția pondere cunoscută $h(t)$ se realizează graficul $h(t-\tau)$ prin răsturnarea figurii $h(t)$ cu valoarea inițială la momentul t^* în origine (fig.4.1 a) pentru care se calculează ieșirea $y(t^*)$. [68].

Se formează produsul $h(t^*-\tau) \cdot u(\tau) = z(\tau)$, punct cu punct, obținându-se $z(\tau)$ ca în fig.4.1 c.

Se planimetrează această arie față de axa τ , arie care reprezintă valoarea mărimii de ieșire la momentul t^* . Se procedează similar pentru alte valori ale variabilei temporale t și se obține răspunsul final $y(t)$ al sistemului (fig.4.1 d).

Din cele prezentate rezultă că la trecerea unui semnal oarecare printr-un sistem linear, semnalul la ieșire la momentul t nu depinde numai de valoarea funcției pondere la momentul t , $h(t)$ și de valoarea semnalului de intrare $u_i(t)$ la același moment t , ci depinde de întreaga evoluție a semnalului $u_i(t)$, pâna la momentul t considerat. Adică, la intrarea sistemului fizic trebuie să se ia în considerare semnalul $u_i(\tau)$, unde $\tau \in [0 : t]$.

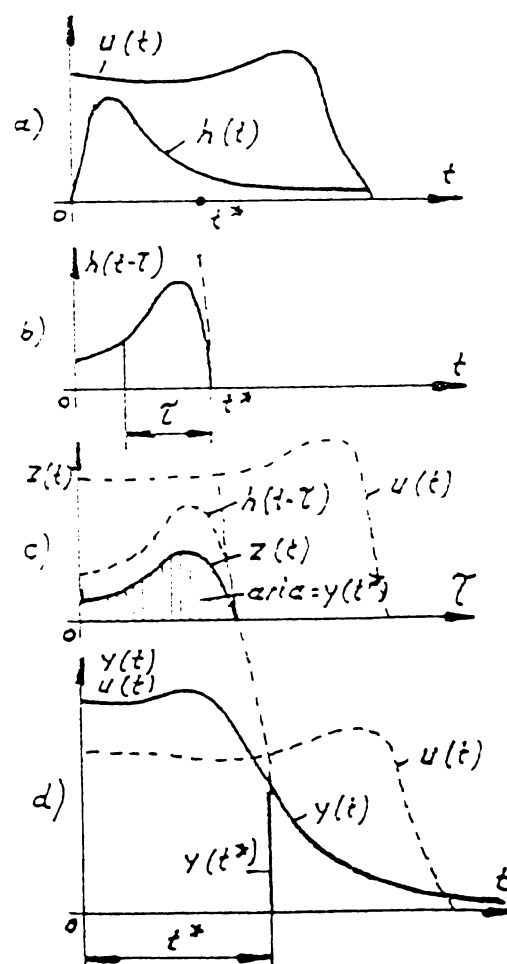


Fig.4.1. Interpretarea convoluției.

În domeniul frecvențial avem [48]:

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot [L_i(s) \cdot U(s)] = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot W_i(s) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(s) \quad (4.24)$$

În relațiile (4.22) și (4.24) am notat cu $W_i(t)$ respectiv $W_i(s)$ produsul de convoluție în domeniul temporal, respectiv în domeniul frecvențial, care depinde doar de semnalul de la intrare $u(t)$, nu și de valorile parametrilor sistemului.

Ieșirea asociată pentru funcția i Laguerre este:

$$Y_i(s) = c_i L_i(s) U(s) = c_i W_i(s). \quad (4.25)$$

Din calcule se determină relația de recurență între funcțiile Laguerre, ca fiind:

$$L_i(s) = L_{i-1}(s) \cdot \frac{s-p}{s+p} \quad (4.26)$$

Ca urmare a celor precizate mai sus, relația (4.17) se ilustrează astfel:

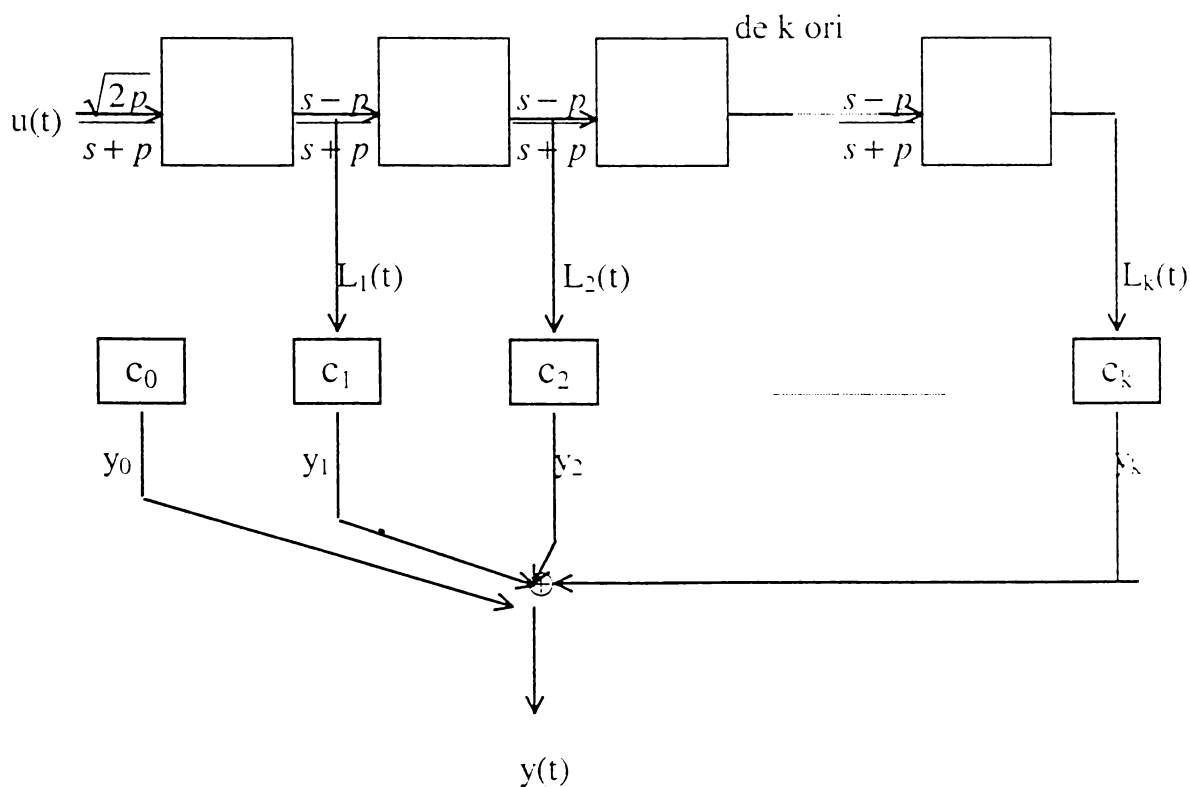


Fig.4.2. Reprezentarea funcțiilor Laguerre $L_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Parametrii modelului care sunt conținuți în coloana vectorului c_i sunt redați liniar la ieșirea măsurabilă Y și linia vectorului $W(t)$.

$$\sum_{i=0}^k Y_i = \sum_{i=0}^k L_i(s) \cdot U_i(s) \cdot c_i \quad (4.27)$$

ceea ce în general se poate scrie

$$Y = W \cdot c \quad / \cdot W^{-1} \Rightarrow c = Y \cdot W^{-1} = \frac{Y}{W} \quad (4.28)$$

Relatia (4.28) se scrie matricial astfel:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \dots & & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & w_{2n} \\ \dots & & \dots \\ w_{m1} & w_{m2} & w_{mn} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.29)$$

Starea 0 a sistemului poate fi realizată de ecuația diferențială

$$\frac{d}{dt} z_0(t) = -p \cdot z_0 + \sqrt{2p} \cdot u(t) ; \quad W_0(t) = z_0(t) \quad (4.30)$$

Pentru $i \geq 1$ starea i a sistemului se scrie cu ajutorul ecuației diferențiale:

$$\frac{d}{dt} z_i(t) = -p \cdot z_i - 2p \cdot W_{i-1}(t) ; \quad W_i(t) = z_i(t) + W_{i-1}(t) \quad (4.31)$$

Forma ecuației de stare este estimată ca fiind:

$$\dot{z} = A \cdot z + B \cdot u \quad (4.32)$$

în care A și B sunt matrici definite ca:

$$A = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ -2p & -p & 0 & 0 \\ -2p & -2p & -p & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \\ -2p & -2p & -2p & -p \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2p} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Varianta acestei ecuații diferențiale discretizată în timp este necesară, deoarece virtual toate procedurile de estimare a parametrilor sunt implementate numai pe calculatoarele digitale.

Pentru un eșantion $t_k < t < t_{k+1}$ intrarea sistemului este un impuls treaptă unitară

$$u(t) = u(t_k) = u_k = 1 \quad (4.34)$$

În acest caz, soluția ecuației diferențiale în timp discret, are forma:

$$\begin{aligned} z(t_k + \delta) &= e^{A \cdot \delta} \cdot z(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + \delta} e^{A(t_k + \delta - \tau)} B \cdot u(\tau) d\tau = \\ &= e^{A \cdot \delta} \cdot z(t_k) + \int_0^{\delta} e^{A \cdot \tau} \cdot B \cdot d\tau \cdot u_k \end{aligned} \quad (4.35)$$

sau

$$z_{k-1} = e^{A \cdot \delta} \cdot z_k + \Gamma \cdot u_k \quad (4.36)$$

Matricile $e^{A\delta}$ și Γ se determină cu ajutorul calculatorului:

$$e^{A\delta} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & m_1 & m_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1} & m_{n-2} & m_{n-3} & m_0 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

unde:

$$m_0(t) = \frac{L_0(t)}{\sqrt{2p}}$$

$$m_i(t) = \frac{L_i(t) - L_{i-1}(t)}{\sqrt{2p}} \quad \text{pentru } i \geq 1$$

Pentru a verifica forma matricii $e^{A\delta}$ considerăm $N = sI - A$, care este o matrice inferior triunghiulară cu

$$\Gamma_0 = \sqrt{2p} \cdot \int_0^\delta m_0(\tau) \cdot d\tau = \frac{1 - e^{-p\delta}}{\sqrt{2p}} \quad (4.38)$$

iar

$$\Gamma_i = \sqrt{2p} \cdot \int_0^\delta m_i(\tau) \cdot d\tau \approx 0.5\sqrt{2p} \cdot \delta \cdot m_i(\delta) \quad (4.39)$$

Elementele

$$n_{i,i} = s + p \quad \text{pentru } i = j$$

$$n_{i,j} = 2p \quad \text{pentru } i \neq j \text{ și } j < i$$

$$n_{i,j} = 0 \quad \text{pentru } i \neq j \text{ și } j > i$$

Inversa matricii N este tot o matrice inferior triunghiulară N^{-1} ce se poate scrie:

$$[N^{-1}]_{i,j} = \frac{L_0(s)}{\sqrt{2p}} = M_0(s) \quad \text{pentru } i = j \quad (4.40)$$

și

$$[N^{-1}]_{i,j} = \frac{L_{i-j}(s) - L_{i-j-1}(s)}{\sqrt{2p}} = M_{i-j}(s) \quad \text{pentru } i > j \quad (4.41)$$

Transformata inversă Laplace a lui $N^{-1}(s)$ este chiar matricea de tranziție e^{At} .

Transformata inversă Laplace a lui $m_i(t)$ este $M_i(s)$.

Dacă se consideră semnalul aplicat la intrarea sistemului ca fiind **impulsul treaptă unitară**, deci $u(t) = 1$, atunci ieșirea $y(t) = W \cdot c$ rezultând $c = y(t) \cdot W^{-1}$.

În acest fel identificarea a fost realizată prin determinarea mărimilor de stare ale sistemului.

Realizarea operației de optimizare. Gradientul estimator

Aceasta este o formă care necesită aplicarea predicției erorii în tehnica estimării parametrilor. Pentru aceasta se utilizează un gradient estimator. [125].

Se fac următoarele notații:

- $\hat{c}(t)$ reprezintă cea mai bună estimare a vectorului parametrilor la timpul t ;
- $y_c(t)$ este ieșirea calculată bazându-ne pe cea mai bună estimare a parametrilor, la timpul t ;
- $y_m(t)$ este ieșirea măsurată la momentul t .

Cu notațiile de mai sus se poate scrie:

$$y_c(t) = W(t) \cdot \hat{c} \quad (4.42)$$

$$y_m(t) = W(t) \cdot c \quad (4.43)$$

Predicția erorii va fi

$$e_1 = y_c(t) - y_m(t) = W(t) \cdot \hat{c} - W(t) \cdot c = W(t) [\hat{c}(t) - c(t)] \quad (4.44)$$

Notăm estimarea erorii ca fiind diferența dintre vectorul parametrilor estimați calculați la momentul de timp t și vectorul parametrilor estimați măsurati la momentul t :

$$\tilde{c}(t) = \hat{c}(t) - c(t) \quad (4.45)$$

Gradientul estimator este euristic bazat pe determinarea parametrilor estimați \hat{c} ce reduc predicția erorii. Derivând parametrii estimați, în raport cu timpul, se obține:

$$\frac{d}{dt} \hat{c}(t) = -p_0 \frac{\partial}{\partial \hat{c}^T} [e_1^T \cdot e_1] = -p_0 \cdot W^T(t) \cdot e_1 \text{ unde } p_0 > 0 \quad (4.46)$$

Considerăm acum cazul când la intrarea semnalului se adaugă și semnul de zgomot pseudoaleator, notat $n(t)$, a cărui deviație standard este $\frac{\sigma}{\mu} = 0.25$ unde σ este dispersia și μ media teoretică.

Zgomotul la ieșire îl notăm cu $v(t) = \eta$.

Pentru ieșirea măsurată $y_m(t)$, produsul de convoluție $W(t)$, $W(t)=L(t) \otimes u(t)$ se va modifica cu $[W(t)+N(t)]$ unde vectorul linie $N(t)$ reprezintă zgomotul prezis la intrare și care are componenta i egală cu convoluția dintre $L_i(t)$ și $n(t)$ și se adaugă zgomotul de la ieșire $v(t)$.

Deci:

$$y_m(t) = [W(t)+N(t)]c + v(t) \quad (4.47)$$

Caz în care predicția erorii va fi:

$$e_1 = y_c(t) - y_m(t) = W(t) \cdot \hat{c} - [W(t)+N(t)] \cdot c - v(t) \quad (4.48)$$

și ținând cont de relația (22) $\tilde{c}(t) = \hat{c}(t) - c(t)$, avem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{c}(t) = -p_0 \frac{\partial}{\partial \hat{c}^T} [e_1^T \cdot e_1] = -p_0 [W^T(t) \cdot W(t) \cdot e_1(t) - \\ - W^T(t) \cdot N(t) \cdot [\hat{c}(t) - \tilde{c}(t)] - W^T(t) \cdot v(t)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Această ultimă relație demonstrează că estimarea este guvernată cel mai bine de ecuațiile diferențiale neliniare, ceea ce înseamnă că dacă analiza euristică este mai bună, teoria ecuațiilor diferențiale stohastice neliniare trebuie utilizată în orice investigație teoretică a efectului zgomotului asupra acestui sistem considerat.

Exemple

Parametrii modelelor liniare Laguerre pot fi acum determinați pentru studiul sistemelor cu întârziere de timp. Funcțiile Laguerre sunt complete pe intervalul $L_2(0, \infty)$, atât timp cât factorul p este pozitiv. Se pot întâlni cazuri în care alegerea lui p nu este critică. Oricum o bună alegere a lui p poate contribui la reducerea numărului de termeni necesari pentru o aproximare corectă.

Exemplu 1.

Fie un sistem, asupra căruia se aplică semnalul de impuls unitate, a cărui funcție de transfer este dată de expresia:

$$G(s) = \frac{1}{s + 1 - e^{-2-s}}$$

Semnalul de intrare aplicat este ales ca fiind $u(t) = \sin t + \sin 2t$, iar perioada de timp este de 50 secunde.

Se deduc primele 4 modele, se calculează gradientul estimator și eroarea produsă corespunzător.

Gradientul estimator $\hat{a} = [0,7215, -0,0494, 0,0322, 0,0126]$ produs cu o predicție a erorii de $-0,0016$.

Rezultatele sunt redată în tabelul de mai jos:

Aproximația	e_2	e_{∞}
$G_0(s) = a_0 L_0(s)$	0.0004	0.136
$G_1(s) = a_0 L_0(s) + a_1 L_1(s)$	0.0012	0.066
$G_2(s) = a_0 L_0(s) + a_1 L_1(s) + a_2 L_2(s)$	0.011	0.021
$G_3(s) = a_0 L_0(s) + a_1 L_1(s) + a_2 L_2(s) + a_3 L_3(s)$	0.01	0.039

În acest caz , putem reprezenta grafic aproximația erorii pentru $p = 1$, pentru cele 4 modele.

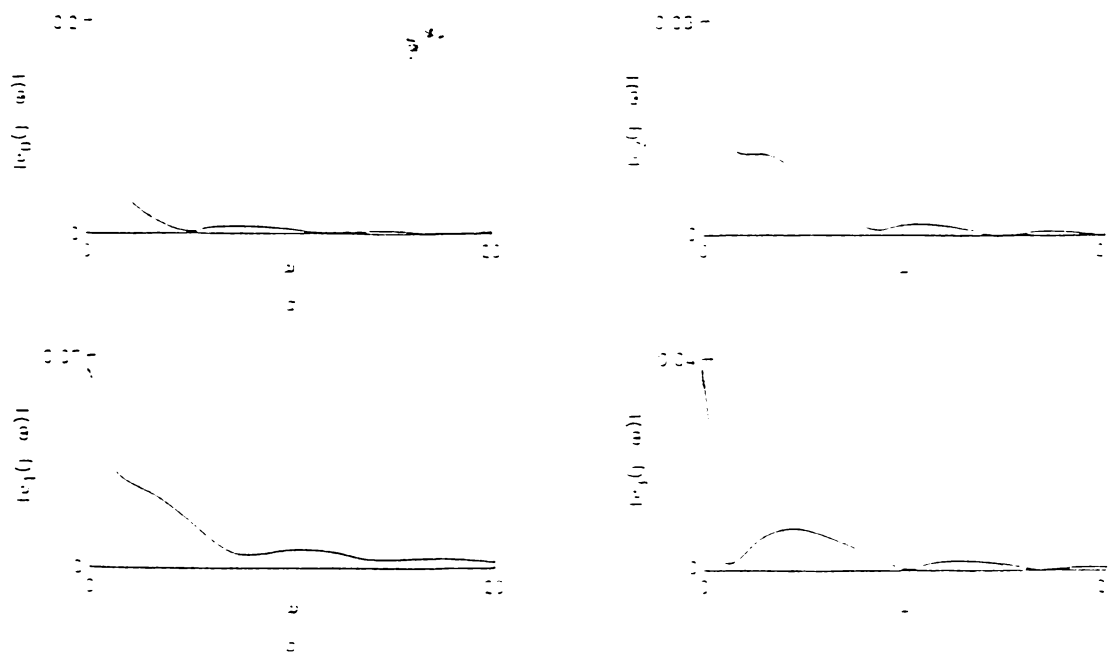


Fig.1. Aproximarea erorii pentru $p = 1$.

Exemplul 2.

În acest exemplu se evidențiază dependența aproximației de polul p . Se reprezintă grafic aproximația pentru $p = 0,722$ și $p = 4$ în comparație cu aproximația bazată pe $p = 1$.

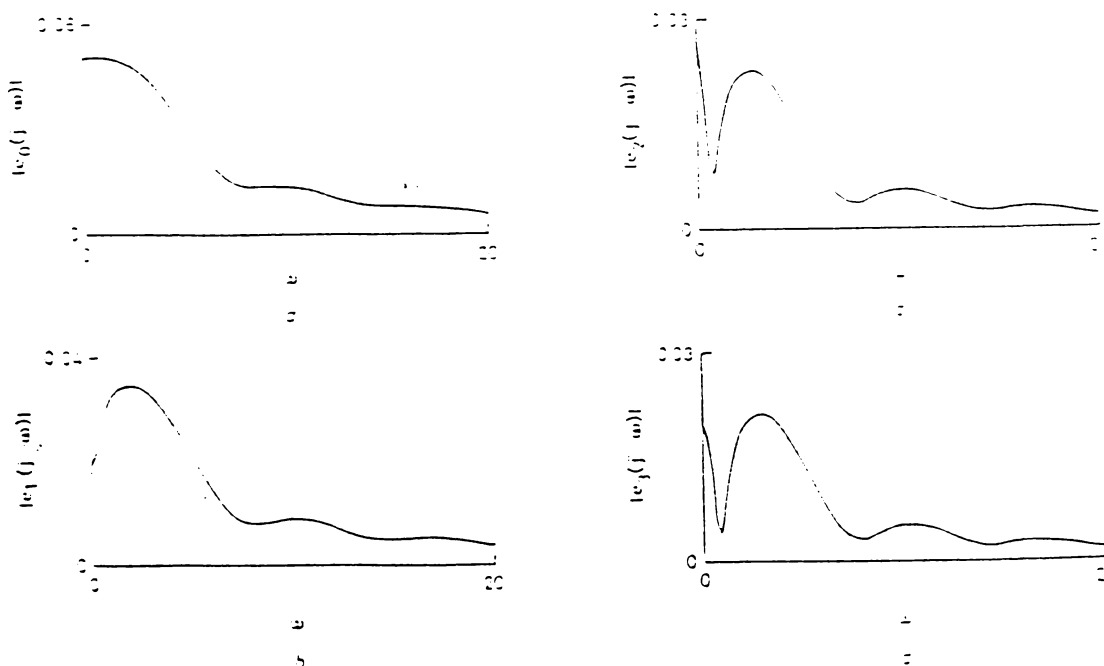


Fig.2. Aproximarea erorii pentru $p = 0,072$.

În fig.2 s-a arătat eroarea funcțiilor pentru polul $p = 0.072$, caz în care vectorul gradient are valoarea $\hat{a} = [0.7248, 0.0413, 0.0275, 0.0044]$.

Analog, fig.3 arată funcțiile de erori pentru $p = 4$, cu vectorul corespondent $\hat{a} = [0.5796, -0.3307, 0.015, -0.2964]$.

Fig.3. Aproximarea erorii pentru $p = 4$.

Comparând funcțiile erorilor, se observă că alegerea polului p are un impact deosebit de important în acuratețea aproximării. Alegând locația polului p așa încât să coincidă cu polul dominant al funcției de transfer date, obținem cea mai corectă aproximație. Alegerea polului $p = 4$, egal cu ordinul aproximației, nu este întâmplătoare, ci această valoare corespunde cu cea a semnalului de răspuns la impulsul treaptă unitară al sistemului.

Această comparație se redă în tabelul de mai jos, în care se prezintă predicția erorii cu și fără zgomot

Domeniu	e_2	$e_{z\text{z}}$	e_p
Optimal	4.597×10^{-4}	0.019	NA
Fără zgomot	5.519×10^{-4}	0.02	0.002
Intrarea și ieșirea cu zgomot	5.434×10^{-4}	0.021	0,028
Intrarea cu zgomot	6.271×10^{-4}	0,027	0,006
Ieșirea cu zgomot	7.327×10^{-4}	0.039	0,032

În fig.2 s-a arătat eroarea funcțiilor pentru polul $p = 0.072$, caz în care vectorul gradient are valoarea $\hat{a} = [0.7248, 0.0413, 0.0275, 0.0044]$.

Analog, fig.3 arată funcțiile de erori pentru $p = 4$, cu vectorul corespondent $\hat{a} = [0.5796, -0.3307, 0.015, -0.2964]$.

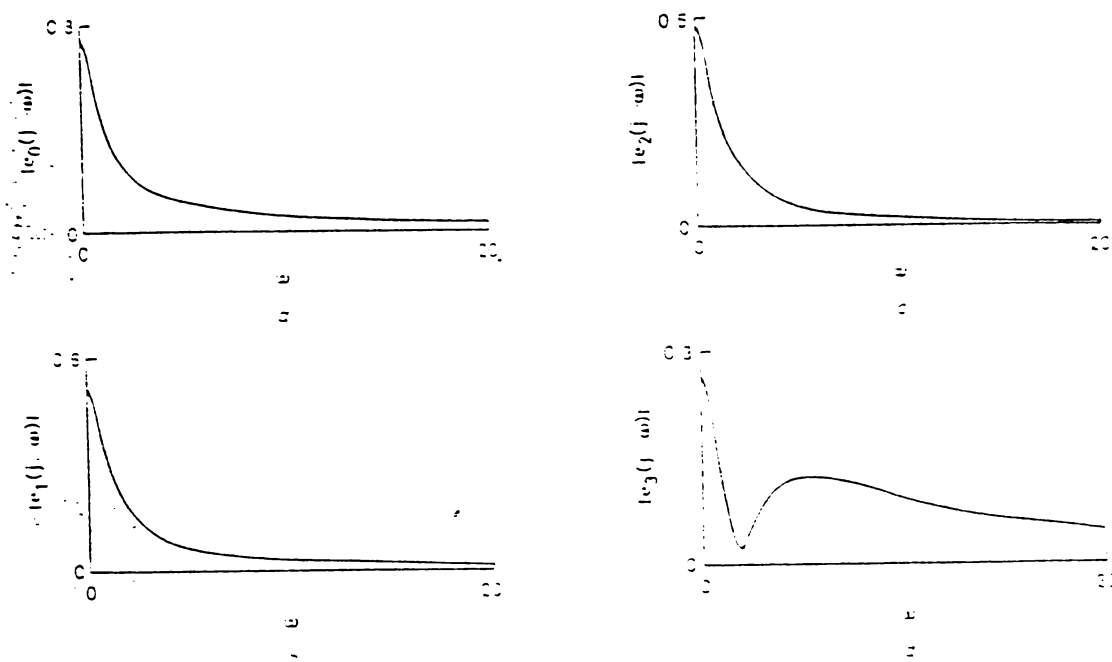


Fig.3. Aproximarea erorii pentru $p = 4$.

Comparând funcțiile erorilor, se observă că alegerea polului p are un impact deosebit de important în acuratețea aproximării. Alegând locația polului p așa încât să coincidă cu polul dominant al funcției de transfer date, obținem cea mai corectă aproximatie. Alegerea polului $p = 4$, egal cu ordinul aproximatiei, nu este întâmplătoare, ci această valoare corespunde cu cea a semnalului de răspuns la impulsul treaptă unitară al sistemului.

Această comparație se redă în tabelul de mai jos, în care se prezintă predicția erorii cu și fără zgomot

Domeniu	e_2	e	e_p
Optimal	4.597×10^{-7}	0.019	NA
Fără zgomot	5.519×10^{-7}	0.02	0.002
Intrarea și ieșirea cu zgomot	5.434×10^{-7}	0.021	0.028
Intrarea cu zgomot	6.271×10^{-7}	0.027	0.006
Ieșirea cu zgomot	7.327×10^{-7}	0.039	0.032

Cele prezentate mai sus demonstrează că modelele liniare Laguerre pot fi utilizate cu succes în identificarea on-line a parametrilor sistemelor automate. De fapt, identificarea parametrilor bazată pe modele Laguerre este utilizată în mod special în controlul adaptiv al proceselor automate.

Modelele Laguerre sunt uzuale, deoarece cunoașterea polului p nu este neapărat necesară, dar constituie un substanțial ajutor.

Un alt avantaj al folosirii modelelor Laguerre ar fi faptul că acestea prezintă o stare care nu depinde de parametrii ce urmează a fi identificați.

B). În cazul unui sistem neliniar se realizează un model WIENER, prima componentă fiind un sistem liniar cu memorie, adică se realizează convoluția, iar a doua componentă este un sistem neliniar fără memorie, dar a cărui coeficienți sunt ponderi (factori multiplicativi), care depind de neliniaritatea sistemului [124].

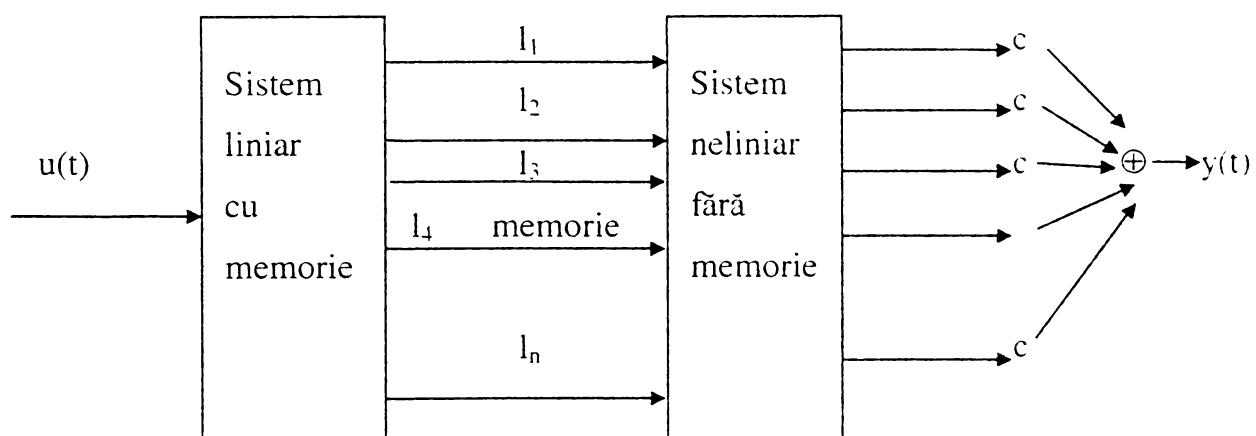


Fig.4.3. Model WIENER

În modelul clasic WIENER ieșirea sistemului se poate descrie astfel:

$$y(t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1, k_2, \dots, k_n} \cdot H_{k_1}(l_1(t)), \dots, H_{k_n}(l_n(t)) \quad (4.50)$$

unde:

c_k sunt coeficienți;

H_k sunt polinoame ortogonale (aici tip HERMITE);

l_k reprezintă ieșirile filtrelor Laguerre, $l(t) = [l_1(t), \dots, l_n(t)]^T$.

În general, sistemele neliniare pot fi reprezentate printr-o funcție neliniară F sub forma:

$$y(t) = F(l_1(t), \dots, l_n(t)) \quad (4.51)$$

scriind funcția ponderată:

$$\hat{F}_j(l) = c_{j0} + c_{j1} l_1 + c_{jn} l_n \quad (4.52)$$

unde c_j sunt parametrii pentru al - j - lea model local.

Cu aceste notații funcția F poate fi aproximată ca:

$$F(l) = \sum_{j=1}^m \hat{F}_j(l) \cdot \omega_j(l) \quad (4.53)$$

unde funcțiile pozitiv definite $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ dau o ponderare relativă pentru diferite modele locale liniare.

În cele ce urmează, presupunem că ω_j este o funcție a unui vector de dimensiune mică Φ care depinde direct de starea vectorului l , de vectorul intrare u și de altă variabilă externă α .

În general, există operatorul cauzal ϕ , definit ca:

$$\phi(t) = \phi(l, u, \alpha)(t) \quad (4.54)$$

Regimurile de operare sunt selectate pentru a cerceta comportarea sistemelor neliniare în interiorul domeniului de operare. Cu alte cuvinte, dacă impulsul răspuns scurt al sistemului se schimbă semnificativ între două condiții de operare, atunci va aparține altor regimuri de operare.

Ieșirea sistemului va fi o sumă:

$$y(t) = \sum_{j=1}^m \hat{F}_j(l(t)) \cdot \omega_j(\phi(t)) \quad (4.55)$$

unde funcția pondere \hat{F} este definită ca în relația (4.53) și $\phi(t)$ de ecuația (4.54) și starea $l(t)$ prin relația (4.51).

Reprezentarea ieșirii pentru fiecare bloc Laguerre ca o convoluție între baza Laguerre și intrarea sistemului este:

$$y(t) = \sum_{j=1}^m \left(c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot l_i(t) \right) \cdot \omega_j(\phi(t)) \quad (4.56)$$

$$= \sum_{j=1}^m c_{j0} \cdot \omega_j(\phi(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot \omega_j(\phi(t)) \cdot l_i(t) \quad (4.57)$$

și definind parametri de operare:

$$c_i(\phi) = \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot \omega_j(\phi) \quad \text{avem:}$$

$$y(t) = c_0(\phi(t)) + \sum_{i=1}^n c_i(\phi(t)) \cdot l_i(t) \quad (4.58)$$

similar cu dependența de stare pentru clasa modelelor introdusă de relația (4.53).

Structura diagramei bloc este redată în figura 4.4.

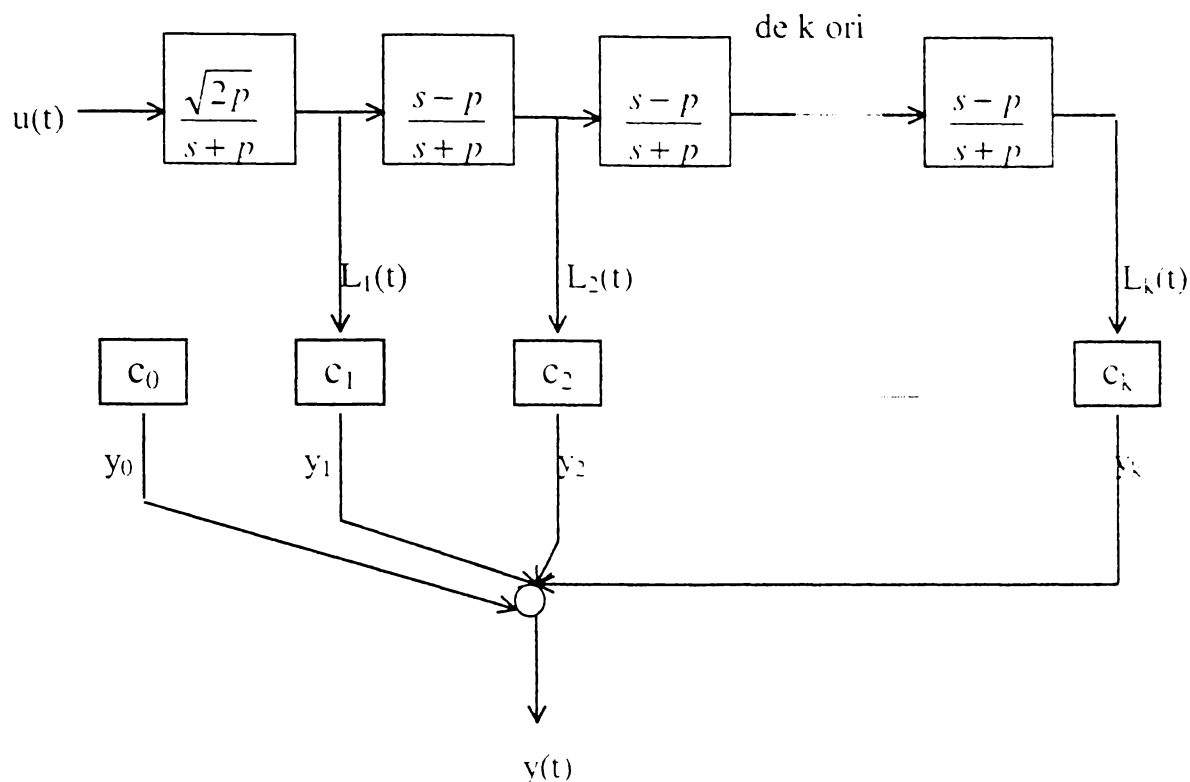


Fig.4.4. Reprezentarea rețelei locale Laguerre.

Această reprezentare bazată pe modelele neliniare Laguerre prezintă o serie de proprietăți care aduc unele **avantaje** față de tehnicile tradiționale de identificare a sistemelor neliniare.

4.3. Algoritm de identificare a proceselor cu funcții Laguerre

Considerând $\theta_{j+mi} = c_{ij}$, $\Psi_{j+mi} = l_i(t) \omega_j(o(t))$ pentru $i \geq 1$ și

$\Psi_j(t) = \omega_j(\phi(t))$ ecuația (4.24) conduce la predicția [110]:

$$\hat{y}(t; \theta) = \sum_{j=1}^{m(n+1)} \theta_j \cdot \Psi_j(t) \quad (4.59)$$

care în formă matricială devine:

$$\hat{y}(t; \theta) = \theta^t \Psi(t) \quad (4.60)$$

Această ecuație este valabilă pentru forma de identificare a parametrilor din momentul în care parametrizarea este liniară.

Pornind de la secvența de date pentru k eșantioane $(y(1), u(1)), (y(2), u(2)), \dots, (y(k), u(k))$, definim pătratul ultimei funcții de cost:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^k (y(t) - \hat{y}(t; \theta))^2 \cdot \rho(t) \quad (4.61)$$

Funcția de ponderare ρ este definită prin $\rho(t) = \sqrt{1 - e^{-\alpha t}}$ cu $\alpha > 0$.

Inițial erorile sunt ponderate până în jurul valorii date de condițiile inițiale și semnalele de subsecvență de erori urcă ponderate până la valoarea 1.

Minimizând ecuația (4.61) cu respectarea vectorului parametrilor θ , coeficientul de estimare este dat de :

$$\hat{\theta} = (\Psi' \cdot \Psi)^{-1} \cdot \Psi \cdot Y \quad (4.62)$$

unde:

$$Y = [y(1)\rho(1), y(2)\rho(2), \dots, y(k)\rho(k)]$$

și

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi(1) \cdot \rho(1) \\ \Psi(2) \cdot \rho(2) \\ \vdots \\ \Psi(k) \cdot \rho(k) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Din ecuația (4.62) se observă că există soluții dacă $\Psi' \cdot \Psi$ admit inversă. Din acest motiv, pentru reprezentarea unui număr mare de parametri trebuie condiționat produsul matricial $\Psi' \cdot \Psi$.

Criteriul de reglare corespunzător este dat de funcția:

$$E^T(\theta) = E(\theta) + \lambda_1 \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^2 + \lambda_2 \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m (c_{ij} - c_{il})^2 \cdot \omega_{j,l} \quad (4.64)$$

unde:

$\omega_{jl} = 1$, dacă indicii j și l corespund unor regimuri de operare învecinate și $\omega_{jl} = 0$, în rest;

- constantele pozitive λ_1 și λ_2 se numesc constante de reglare.

În ipoteza că primul termen este un impuls răspuns nesemnificativ, coeficienții tind la zero, mai degrabă decât dacă luăm riscul de adaptare al zgomotului în date.

De asemenea, scopul celei de-al-2-lea termen este de a impune un filtru de netezire obligatoriu a modelului în sensul că parametrii modelelor locale învecinate să fie similari.

Minimizând ecuația (4.64), avem:

$$E^T(\theta) = (Y - \theta' \Psi)' (Y - \theta' \Psi) + \lambda_1 \theta' \theta + \lambda_2 (\Omega \theta)' (\Omega \theta) \quad (4.65)$$

unde Ω este matricea ce conține informații despre regimurile de operare învecinate.

Minimizând această funcție de cost, cu respectarea parametrilor θ , se obțin următorii estimatori:

$$\hat{\theta}(\lambda_1, \lambda_2) = (\Psi^T \cdot \Psi + \lambda_1 \cdot \Omega^T \cdot \Omega)^{-1} \Psi^T \cdot Y \quad (4.66)$$

unde se impune condiția ca produsul matricial $\Psi^T \cdot \Psi$ să fie o matrice singulară.

Alegerea parametrilor de reglare λ_1 și λ_2 au o importanță crucială pentru identificarea cât mai bună a parametrilor modelului. Acești parametri de reglare pot fi selectați subiectiv sau empiric în scopul de a da modelul cu cea mai bună așteptată predicție performantă.

Predicția performantă așteptată poate fi estimată utilizând, de exemplu o secvență separată de date sau o versiune a criteriului de predicție finală a erorii [FPER - *Final Prediction Error*], [104].

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \arg \min FPER(\lambda_1, \lambda_2) \quad (4.67)$$

$$FPER(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1 + d(\lambda_1, \lambda_2) |k|}{1 - d(\lambda_1, \lambda_2) |k|} E(\hat{\theta}(\lambda_1, \lambda_2)) \quad (4.68)$$

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \text{trace}(S(\lambda_1, \lambda_2) S(\lambda_1, \lambda_2)) \quad (4.69)$$

$$S(\lambda_1, \lambda_2) = (\Psi^T \cdot \Psi + \lambda_1 \cdot \Omega^T \cdot \Omega)^{-1} \Psi^T \cdot Y \quad (4.70)$$

unde $d(\lambda_1, \lambda_2)$ reprezintă numărul efectiv de parametri ai modelului (grad de libertate).

Exemple

Pentru a ilustra proprietățile acestei metode de identificare a parametrilor sistemelor automate bazându-ne pe modele neliniare Laguerre, se prezintă în continuare câteva exemple care demonstrează că rețelele Laguerre nu necesită o estimare precisă a ordinului și întârzierii de timp a sistemului și o alegere exactă a intervalului de eșantionare.

1. Se consideră așadar un râu a cărui curgere variază în funcție de întârzierea de timp a valului. Fie u mărimea de intrare a ratei valului, iar y mărimea de ieșire la un curent de viteză 109 km/h, de unde se măsoară u . La simularea acestui model se obține un model real, cvasi-liniar al râului a cărui funcție de transfer se exprimă prin relația:

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \cdot z^{-r(u_m)} \quad (4.71)$$

unde parametrii au valorile: $a_1 = 1,1692$; $a_2 = -0,4102$; $b_0 = 0,1081$; $b_1 = 0,1318$.

Termenul $r(u_m)$ reprezintă întârzierea calculată ca:

$$r(u_m) = \text{round}(\alpha \cdot u_m^\beta \cdot l) - 77 \quad (4.72)$$

unde expresia $round(x)$ ia partea întreagă a lui x . $\alpha = 0.55$; $\beta = -0.288$; $l = 109$ km este distanța între punctul cel mai de sus și cel mai de jos al valului râului, iar mărimea u_m este media valului râului:

$$u_m = \frac{\sum_{j=1}^{50} u(t-j)}{100} + \frac{y(t-1) + y(t-2)}{4} \quad (4.73)$$

Măsurarea zgomotului se adaugă de asemenea la ieșirea y .

Zgomotul n este generat de filtrul de ordinul întâi și este definit astfel:

$$n = \frac{0.2}{1 - 0.8 \cdot z^{-1}} \cdot \eta \quad (4.74)$$

și un zgomot Gaussian η , care înseamnă o valoare medie zero și o deviație de 0.25.

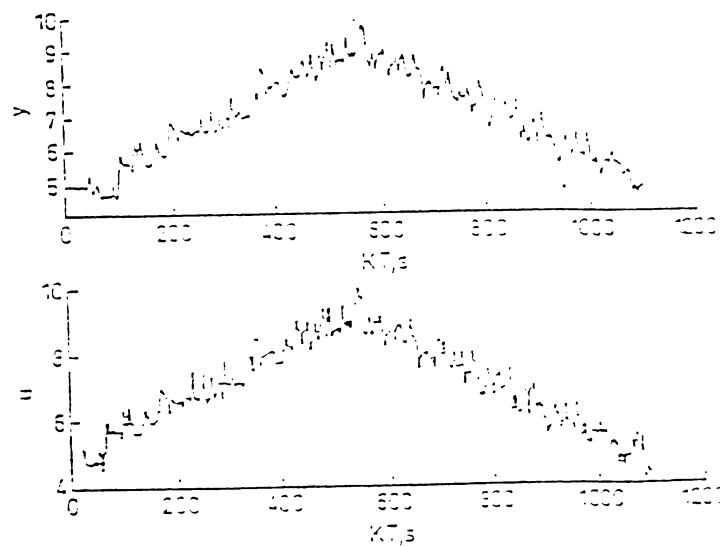


Fig.4.3.1. Reprezentarea grafică a setului de date de identificare.

Rata valului variază între 5 și 10 [m^3 s], timpul de succedere este de 75 de secunde, iar aproximarea constantei de timp este aproximativ 262,5 secunde. Se generează două seturi de date (v.fig.4.3.1.), unul pentru identificarea presupusă și al doilea pentru validare (v.fig.4.3.2.).

Testul de validare consideră că predicția erorii ε trebuie să satisfacă următoarele condiții:

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon\varepsilon}(k) &= \text{impuls} \\ \Phi_{u\varepsilon}(k) &= 0 \quad \forall k \\ \Phi_{\varepsilon(u\varepsilon)}(k) &= 0 \quad 0 \leq k \\ \Phi_{u^2, \varepsilon}(k) &= 0 \quad \forall k \\ \Phi_{u^2, \varepsilon^2}(k) &= 0 \quad \forall k \end{aligned} \quad (4.75)$$

unde $\phi_{x,y}(k)$ reprezintă produsul de corelație între $x(t)$ și $y(t)$, $\varepsilon \cdot u = \varepsilon(t) \cdot u(t)$,

$u^{2*} = u^2(t) - u^{-2}(t)$ și $u^{-2}(t)$ este media pătrată de timp al $u^2(t)$. Dacă aceste corelații sunt în intervalul (95%) de confidență, atunci $1.96\sqrt{N}$ din model se consideră adecvat. Dacă aceste condiții nu sunt satisfăcute, atunci acestea pot fi folosite la decizia dacă este necesară o incrementare în numărul de modele locale.

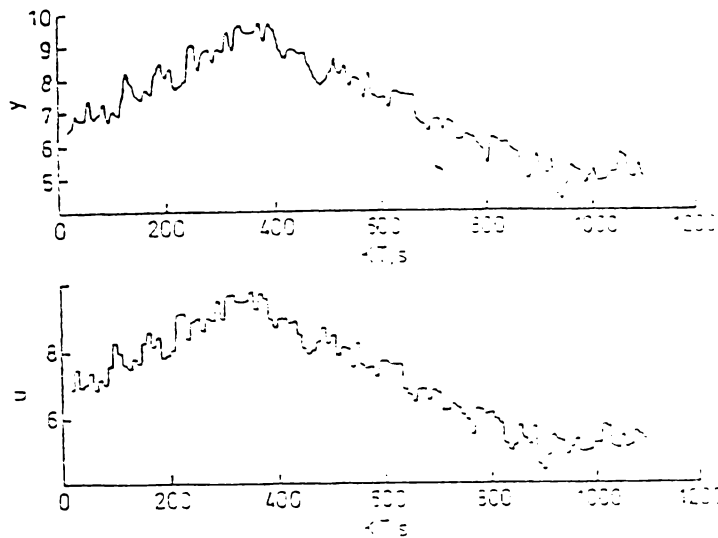


Fig.4.3.2. Setul de date pentru validare

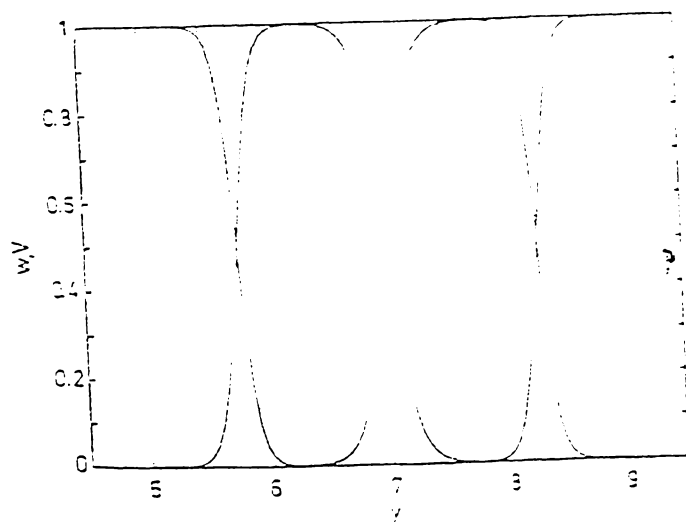


Fig.4.3.3. Validarea funcțiilor

2. Fie un model neliniar, compus din patru modele ARX pentru care se identifică patru regimuri de operare. Regimurile de operare de unde funcțiile ilustrate în fig.4.3.3., unde $\phi(t)=u(t-d)$, în acest caz cea mai mică întârziere de timp fiind considerată ca $\phi(t)$.

Structura unui model ARX liniar este dată de relația:

$$y(t+1) = a_1 \cdot y(t) + a_2 \cdot y(t-1) + \sum_{i=0}^N b_i \cdot u(t-d-i) + c \quad (4.76)$$

În tabelul 1 sunt conținute rezultatele obținute pentru diferite valori ale întârzierii d și ale constantelor de reglare N , λ_1 și λ_2 care au fost obținute prin minimizarea criteriului final de predicție al erorii, iar SSE este suma finală a predicției erorilor obținută prin validarea setului de date.

Table 1. Rezultatele obținute pentru cele patru modele ARX

D	N	λ_1	λ_2	SSE
22	7	0	0	5,39
20	7	0	0,3	5,73
24	7	0	0,3	5,78
22	1	0	0,1	6,69
20	1	0	1,5	7,73
24	1	0	1,8	8,4

Din tabelul de mai sus se deduce că o întârziere de timp mai mică sau mai mare decât cea estimată are un efect negativ pentru rezultatele finale.

Modelele de ordin mai mic necesită o regularizare mai înaltă a parametrilor pentru compensarea deficiențelor structurii modelului.

În fig.4.3.4. se arată predicția erorii și funcțiile de corelație pentru primul model pentru $d=22$ și $N=7$. În acest caz modelul poate descrie sistemul foarte bine la o rată de transfer mare, dar insuficient pentru o rată de transfer mică.

Testul de corelație $\phi\omega^2 \varepsilon(k)$ arată, de asemenea, deficiențele acestui model, mai ales în partea neliniară.

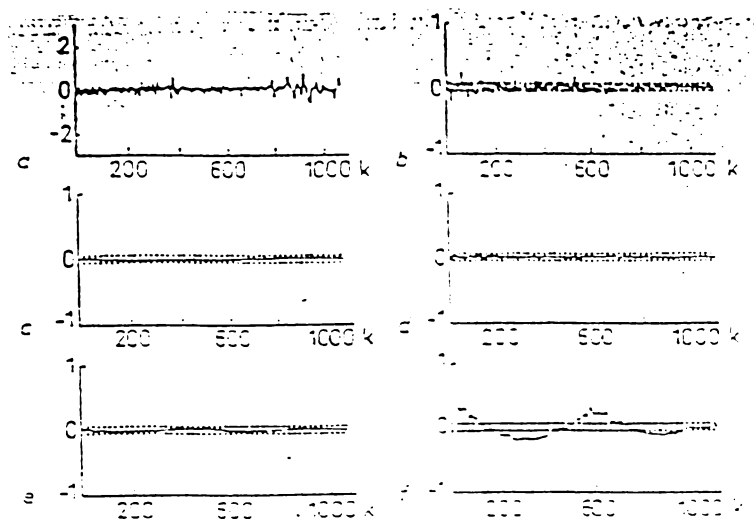


Fig.4.3.4. Validarea pentru modele locale ARX

În continuare, înlocuim modelul ARX cu un model local Laguerre. Alegem modelul Laguerre de ordinul 10. Ordinul cel mai mare provoacă diferența cea mai mare dintre întârzierea de timp și constanta de timp dominantă. Parametrul p s-a ales ca fiind inversa constantei de timp dominante $p = 4,07 \cdot 10^{-3}$. Rezultatele se sistematizează în tabelul 2.

Tabelul 2. Rezultatele obținute pentru patru modele Laguerre.

d	λ_1	λ_2	SSE
22	0,4	0	4.60
20	0,4	0	4.59
24	0,4	0	4.50

Comparând rezultatele obținute pentru cele două tipuri de modele, putem afirma că modelele Laguerre par a avea performanțe mai bune și sunt mai puțin sensibile la alegerea lui d . Rezultate mai bune s-au obținut și pentru ilustrarea fig.4.3.5 a variației pentru întârzierea de timp, fără a mai fi necesară cunoașterea structurii ca la modelele ARX.

Din moment ce modelele performante au același număr de parametri, metoda de calcul și estimare a parametrilor este aceeași, în ambele cazuri.

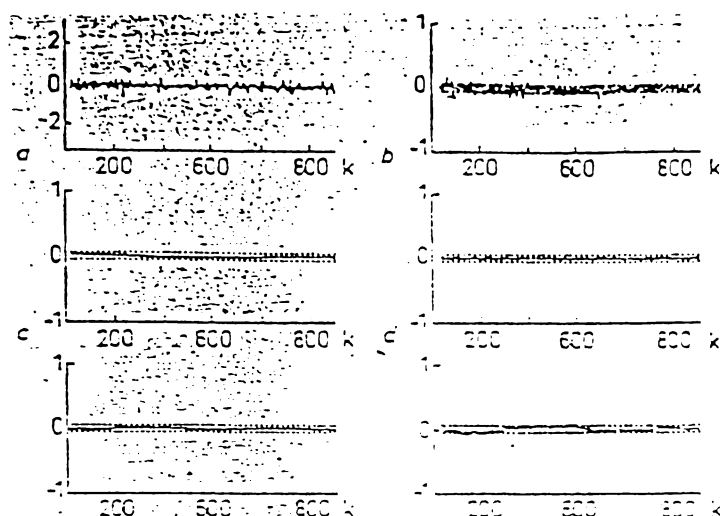


Fig.4.3.5. Validarea modelelor locale Laguerre

Concluzii

S-a prezentat o nouă parametrizare a modelelor Wiener și s-au arătat versatilitatea pentru modelare și identificare a stabilității sistemelor neliniare dinamice [124].

Rețelele Laguerre nu necesită o estimare precisă a ordinului și întârzierii de timp a sistemului și o alegere exactă a intervalului de eșantionare, care sunt condiții importante, atât pentru identificarea parametrilor sistemelor liniare, cât și a sistemelor neliniare.

Utilizând rețelele Laguerre ca o reprezentare de stare în spațiu a semnalului de intrare, acestea aproximează estimarea ordinului și întârzierea de timp a sistemului. Chiar și așa este necesară alegerea constantei de timp și a numărului de filtre a rețelei Laguerre, parametrizarea fiind mai puțin sensibilă la acești parametri.

Neliniaritatea este prezentată în termenii regimului de operare a sistemului.

Testul de validare se folosește pentru a decide dacă mai este necesar un model auxiliar. Această reprezentare respectă transparența, flexibilitatea și robustețea parametrizării identificării.

CAPITOLUL 5

FUNCTIILE ORTOGONALE HAAR

În analiza sistemelor fizice cu parametri concentrați sau distribuiți se utilizează matrici operaționale ale unor funcții ortogonale sub forma de serii temporale. În scopul reducerii timpului de calcul se preferă acele funcții care conduc la matrici cu elemente reale, printre care cele mai eficiente sunt funcțiile Haar. Prin inducție, pornind de la cazuri particulare se prezintă o generalizare în obținerea acestor matrici, pentru orice ordin al funcțiilor Haar.

5.1. Definirea funcțiilor ortogonale HAAR

A. Haar, în anul 1910, a definit funcțiile care-i poartă numele $har(r,m,t)$ astfel. [81]:

$$har(r,m,t) = \left\{ \begin{array}{l} 2^{r/2}; \frac{m-1}{2^r} \leq t < \frac{m-1/2}{2^r}; r \in [0; \log_2 N - 1]; \\ -2^{r/2}; \frac{m-1/2}{2^r} \leq t < \frac{m}{2^r}; m \in [1, 2^r]. \\ 0; t \in [0; 1]. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

În **fig.5.1** sunt indicate undele dreptunghiulare pentru $r = 0, 1, 2$ și $N = 8$, precum și integralele aferente acestora.

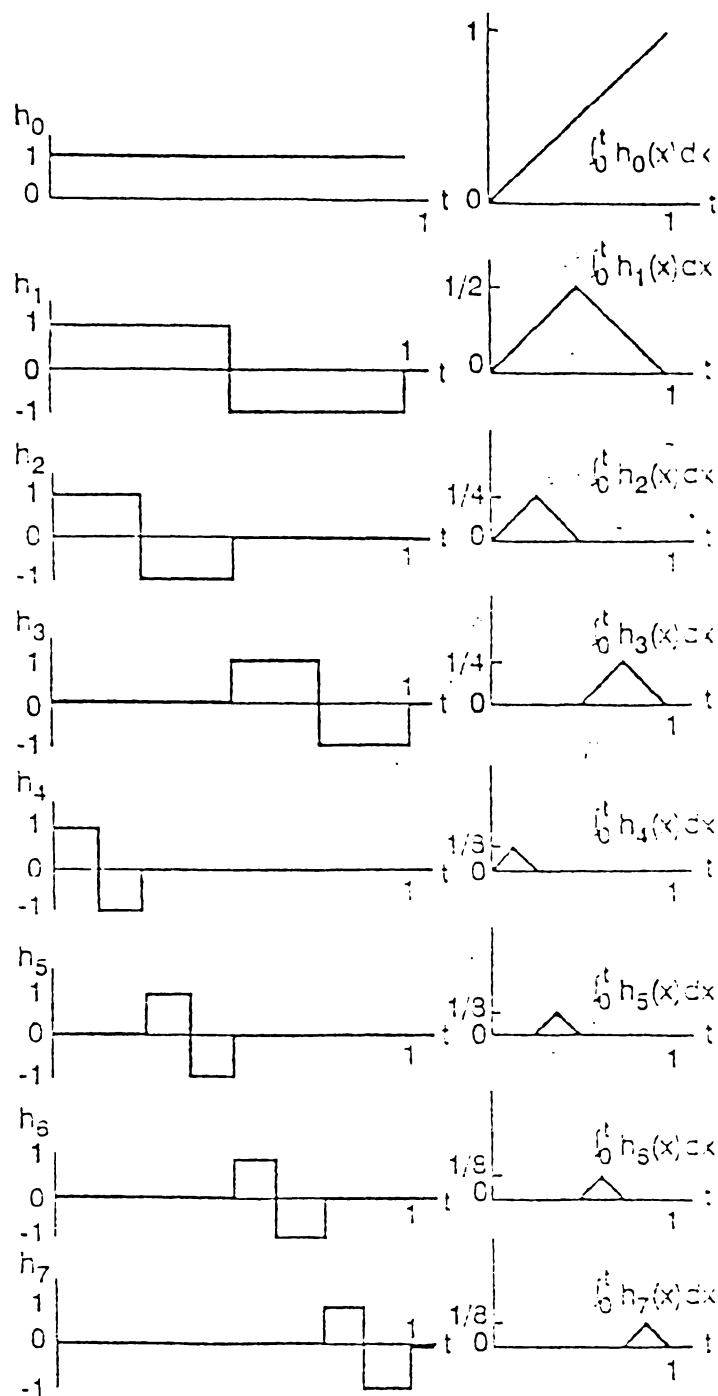


Fig. 5.1. Primele 8 funcții Haar și integralele aferente acestora.

Din relațiile de definiție (5.1) și din fig.5.1 se constată că pentru un $r \geq 1$ dat, funcțiile Haar se obțin prin dilatare în amplitudine și comprimare temporală, cu deplasare pentru funcțiile cu același r , [23], [78]. Pentru înlăturarea factorului $\sqrt{2}$, Chen și Hsiao [49] au introdus o modificare în definirea funcțiilor Haar. Inițial, cei doi autori, pentru înlăturarea rădăcinii pătrate la evaluarea amplitudinilor, au propus creșterea amplitudinilor, în procesul de comprimare, cu factorul 2^j , $j=0,1,2,\dots$. În scopul formării de matrici cu funcțiile Haar, ulterior s-a renunțat la amplificarea pe verticală ca efect al comprimării, astfel că toate funcțiile, indiferent de ordinul lor au amplitudinile undelor dreptunghiulare $+1, -1$ și zero.

Un sistem linear cu parametri concentrați cu n stări $x(t)$ și j intrări $u(t)$, cu m ieșiri $y(t)$ este descris de ecuațiile intrare-stare-ieșire și de ieșire, prin intermediul matricilor aferente A, B, C, D :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ; y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (5.2)$$

Soluția sistemului constă în găsirea stărilor $x(t)$ și a ieșirilor $y(t)$, prin diverse metode, dintre care se menționează utilizarea dezvoltării semnalelor $x(t)$, $u(t)$ și $y(t)$ în serii temporale folosind serii ortogonale. Dintre toate funcțiile ortogonale teoria și experiența au arătat că numărul cel mai mic de operații elementare (adunări și multiplicări) pe calculator la dezvoltarea în serie a funcțiilor semnal se efectuează prin funcțiile Haar, definite prin:

$$h_m(t) = h_n(2^j \cdot t - k) ; m = 2^j + k; j \geq 0; k \in [0, 2^j] \quad (5.3)$$

în care funcțiile $h_m(t)$ satisfac condiția de ortogonalitate:

$$\int_0^1 h_r(t) h_s(t) dt = 2^{-j} \delta_{r,s} = \begin{cases} 2^{-j}; r = s = 2^j + k \\ 0; r \neq s \end{cases} \quad (5.4)$$

Prin intermediul funcțiilor Haar, semnalele de ieșire $y(t)$ și cele de intrare $u(t)$ se exprimă prin expresiile:

$$y(t) = c_0 h_0(t) + c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \dots ; u(t) = c'_0 h_0(t) + c'_1 h_1(t) + c'_2 h_2(t) + \dots \quad (5.5)$$

$$c_i = 2^j \int_0^1 y(t) \cdot h_i(t) dt ; \quad c'_i = 2^j \int_0^1 u(t) \cdot h_i(t) dt \quad (5.6)$$

$$\dot{x}(t) = c''_0 h_0(t) + c''_1 h_1(t) + c''_2 h_2(t) + \dots ; c''_i = 2^j \int_0^1 \dot{x}(t) \cdot h_i(t) dt \quad (5.7)$$

Pentru început se definesc vectorii:

$$F = [c''_0, c''_1, c''_2, \dots] ; G = [c'_0, c'_1, c'_2, \dots] \quad (5.8)$$

Pe de altă parte utilizând exprimarea matricială propusă de Chen și Hsiao [44]:

$$H_i(m) = \int_0^1 h(\tau) d\tau \approx P \cdot h(t) = P \cdot H(m) \quad (5.9)$$

în care P , denumită matricea specifică este de forma pătratică $m \times n$, iar relația fundamentală (5.1) devine, pentru stările inițiale $x_0=0$:

$$F h(t) = APF h(t) + BG h(t) \quad (5.10)$$

Care conduce în final la:

$$F = [I - A \otimes P^t]^{-1} G \quad (5.11)$$

în care \otimes este simbolul de multiplicare Kronecker. În cazul acestei exprimări care utilizează matrici de ordin ridicat, autorii citați au elaborat o rutină recursivă pentru evaluarea vectorului F .

5.2. Definierea matricii $H(m)$

Utilizarea funcțiilor Haar prin calculul numeric, necesită eșantionarea lor, astfel că acolo unde acestea sunt diferite de zero, vor fi exprimate prin eșantioane de amplitudine $+1$ și -1 . Pentru a se înlătura ambiguitățile la momentele în care undele fac salturi de la 0 la 1, de la $+1$ la -1 și de la -1 la 0, pentru un ansamblu de m funcții, exprimate pe intervalul $[0;1]$ divizat în N subintervale egale, cu $N=2m$, salturile efectuându-se la valori pare ale subintervalelor $s=0,1,2,\dots,N-1$, eșantioanele se vor conta la numerele impare ale subintervalelor $I=0,1,2,3,5,\dots,m-1,m+1,\dots,2m-5,2m-3, 2m-1$. Astfel pentru un ansamblu de unde Haar definite pe intervalul $[0;1]$ respectiv $[0;N]$, poziția undei pe interval este stabilită de factorul de deplasare $k=0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{p}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}$, în care $r=m/2$. Factorul $k=0$ indică situația în care unda Haar este fixată chiar în originea temporală, iar factorul $k=p/r$ indică situația în care unda este deplasată la dreapta față de origine, începând de la secvența p/r cu $p=1,2,\dots,r-1$. Pentru un grup de unde Haar, $r=2^j$ cu $j=0,1,2,\dots,\log_2 m$. Cu aceste precizări se poate efectua o numerotare a undelor Haar după numărul natural $n=0,1,2,\dots,m-1$, în care $n=r+p$, [26], [27].

Pentru ilustrare se consideră intervalul $[0;1]$ format din $N=16$ subintervale, cu $m=N/2=8$, cu evidențierea funcțiilor eșantionate $h_n(t)$, $n=0,1,2,\dots,7$ și cu definierea matricii $H(8)$, [79].

$$\begin{aligned}
 j=0 & \left\{ \begin{array}{l} r=0; p=0, Har(0,0,t) \Rightarrow h_0(i) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \\ r=0; p=1, Har(0,1,t) \Rightarrow h_1(i) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1] \end{array} \right\} \\
 j=1 & \left\{ \begin{array}{l} r=2; p=0, Har(2,0,t) \Rightarrow h_2(i) = [1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ r=2; p=1, Har(2,1,t) \Rightarrow h_3(i) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1] \end{array} \right\} \quad (5.12) \\
 j=2 & \left\{ \begin{array}{l} r=4; p=0, Har(4,0,t) \Rightarrow h_4(i) = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ r=4; p=1, Har(4,1,t) \Rightarrow h_5(i) = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ r=4; p=2, Har(4,2,t) \Rightarrow h_6(i) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0] \\ r=4; p=3, Har(4,3,t) \Rightarrow h_7(i) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1] \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

În acest caz se definește matricea $H(8)$:

$$H(8) = \begin{bmatrix} h_0(i) \\ h_1(i) \\ h_2(i) \\ h_3(i) \\ h_4(i) \\ h_5(i) \\ h_6(i) \\ h_7(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Pentru matrici $H(m)$ de ordin inferior lui $H(8)$ este evident că avem:

$$H(1) = 1 \quad ; \quad H(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad H(4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

În cazul general cu $N=2m$, matricea $H(m)$ este definită astfel, [79]:

$$H(m) = \begin{matrix} m \setminus i & & 1 & 3 & 5 & 7 & m-7 & m-5 & m-3 & m-1 & m+1 & m+3 & m+5 & m+7 & 2m-7 & 2m-5 & 2m-3 & 2m-1 \\ \hline 0 & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \frac{m}{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m}{2}+1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ m-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ m-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (5.15)$$

5.3. Matricea integralelor funcțiilor Haar

Matricea $H_l(m)$ se determină în baza inducției, pornind de la un caz particular $m=8$, $N=2m$.

Cu datele de mai sus se construiește matricea $H_l(m)$ pentru $m=8$:

$$H_i(8) = \begin{bmatrix} \int h_0(\tau)d\tau \\ \int h_1(\tau)d\tau \\ \int h_2(\tau)d\tau \\ \int h_3(\tau)d\tau \\ \int h_4(\tau)d\tau \\ \int h_5(\tau)d\tau \\ \int h_6(\tau)d\tau \\ \int h_7(\tau)d\tau \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

5.4. Elaborarea matricei caracteristice funcțiilor Haar

Având determinate matricele $H(m)$ și $H_i(m)$, matricea specifică P aferentă funcțiilor ortogonale Haar se determină din (5.1) cu relația matriceală :

$$P = H_i(m) * H^{-1}(m) \quad (5.17)$$

în care matricea $H^{-1}(m)$ este inversa matricei $H(m)$.

O altă cale de a evalua matricea specifică P_m este metoda iterativă, existentă în literatură, introdusă de Chen și Hsiao [44]:

$$P_m = \begin{bmatrix} 2m \frac{P_m}{2} & -\frac{H_m}{2} \\ \frac{H_m^{-1}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17')$$

în care este ușor de arătat că :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P_3 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & +2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$P_s = \begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & 8 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

care introduse succesiv în (5.17) pot evalua matricea P , pentru orice ordin m :

$$P_m = \begin{bmatrix} P_{ma} & P_{mb} \\ P_{mc} & P_{md} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Ecuția (5.20) conține următoarele patru ecuații:

$$P_{ma} = P_{m/2} \quad (5.21)$$

$$P_{mb} = -\frac{1}{2m} \cdot H_{m/2} \quad (5.22)$$

$$P_{mc} = \frac{1}{2m} \cdot H_{m/2}^{-1} \quad (5.23)$$

$$P_{md} = \text{matricea nulă} \quad (5.24)$$

Pentru a dovedi că ecuațiile de mai sus sunt adevărate se consideră câteva exemple.

Exemplu 1.

Se alege $m = 4$ pentru ilustrare. Prin definiție matricea P_{4a} este transformarea primelor două integrale Haar în primele două funcții Haar $h_0(t)$ și $h_1(t)$.

Deci putem scrie $P_{4a} = P_{4/2} = P_2$, ceea ce demonstrează ecuația (5.21).

Exemplu 2.

Prin definiție P_{4b} este transformarea primelor două integrale Haar, $h_0(t)$ și $h_1(t)$ în seriile $h_2(t)$ și $h_3(t)$

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 h_0(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^1 h_1(\tau) \cdot d\tau \end{bmatrix} \cong \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

ceea ce arată că integrala $h_0(t)$ este o funcție rampă, iar integrala $h_1(t)$ este o funcție triunghiulară, obținută dintr-o rampă în urcare și una în coborâre. Valorile absolute ale acestor două rampe sunt egale. Rezultă:

$$P_{4b} = \begin{bmatrix} \int_0^1 h_0(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^1 h_1(\tau) \cdot d\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \quad (5.26)$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} h_0(t) \\ h_1(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot H_2$$

ceea ce demonstrează că ecuația (5.22) este adevărată.

Exemplu 3.

Când integralele $h_2(t)$ și $h_3(t)$ sunt multiplicare de primele două coloane ale matricii H_4^{-1} se obține P_{4c} , aceasta înseamnă că matricea P_{4c} este transformarea integralelor $h_2(t)$ și $h_3(t)$ în seriile $h_0(t)$ și $h_1(t)$. Adică putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 h_0(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^1 h_1(\tau) \cdot d\tau \end{bmatrix} \cong \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Deci

$$P_{4c} \cong \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot H_2^{-1}$$

ceea ce demonstrează că ecuația (5.23) este corectă.

Exemplu 4.

Prin definiție P_{4d} este transformarea integralelor $h_2(t)$ și $h_3(t)$, așa cum se observă și din ecuația (5.27) fiecare rând al matricii conține două intrări egale pozitive, în timp ce fiecare coloană a ultimei jumătăți din inversa matricii H_4^{-1} conține două intrări egale cu 2. Deci aceste rânduri și coloane sunt ortogonale între ele, ceea ce arată că matricea P_{4d} este o matrice nulă. S-a demonstrat astfel și exactitatea ecuației (5.24).

5.5. Identificarea unui sistem MIMO prin intermediul funcțiilor Haar.

Se consideră un sistem liniar, cu n stări $x(t)$, p intrări $u(t)$ și q ieșiri $y(t)$, descris de ecuația caracteristică de stare și de ecuația semnalului de ieșire cu ajutorul matricilor A , B , C , D , [93].

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.28)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad (5.29)$$

Considerând că $u(t)$ este un semnal integrabil în intervalul $0 \leq t < 1$. Expresia utilizând seriile Haar se scrie:

$$u(t) = G \cdot H(t) \quad (5.30)$$

unde G este matricea de dimensiunea $p \times m$.

De asemenea,

$$\dot{x}(t) = F \cdot H(t) \quad (5.31)$$

Integrând, avem:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) + x_0 = F \cdot \int_0^t H(\tau) \cdot d\tau + x_0 = F \cdot P \cdot H(t) + x_0 \quad (5.32)$$

Înlocuind relațiile (5.30), (5.31) și (5.32) în (5.28), obținem:

$$F \cdot H(t) = A \cdot F \cdot P \cdot H(t) + A \cdot x_0 + B \cdot G \cdot H(t) \quad (5.33)$$

$$F(1 - A \cdot P) \cdot H(t) = \{[A \cdot x_0, 0, 0, \dots, 0] + B \cdot G\} \cdot H(t) \quad (5.34)$$

Ceea ce poate fi scris matricial

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} = [I - A \otimes P^t]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Produsul Kronecker $A \otimes P^t$ este definit astfel:

$$A \otimes P^t = \begin{bmatrix} P_{11}A & P_{21}A & P_{m1}A \\ P_{12}A & P_{22}A & P_{m2}A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{1m}A & P_{2m}A & P_{mm}A \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Pentru obținerea lui F cu A și G dați, se folosește subrutina `lyap(A-1, -P, A-1G)` din MATLAB, sau subrutina `srhw`, aplicată direct funcției F .

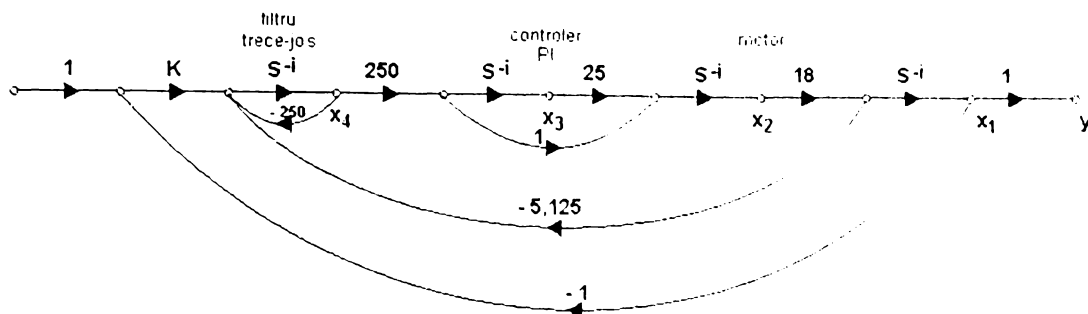


Fig.5.2. Reprezentarea grafică a poziției semnalului sistemului

Exemplu 1.

Graficul semnalului unui sistem practic este ilustrat în figura 5.2. Expresia acestui semnal poate fi exprimată astfel:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 250 \\ -k & -92.25 & 0 & -250 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (5.37)$$

Prin metoda Haar se obțin două seturi de soluții:

- pentru $k = 168$ (rata dumping $\tau = 0,5$), cu $m = 16$
- pentru $k = 390$ (rata $\tau = 0,2$), cu $m = 64$.

În figurile 5.3 și 5.4 curbele reprezentate prin linie continuă și întreruptă ilustrează cele două cazuri.

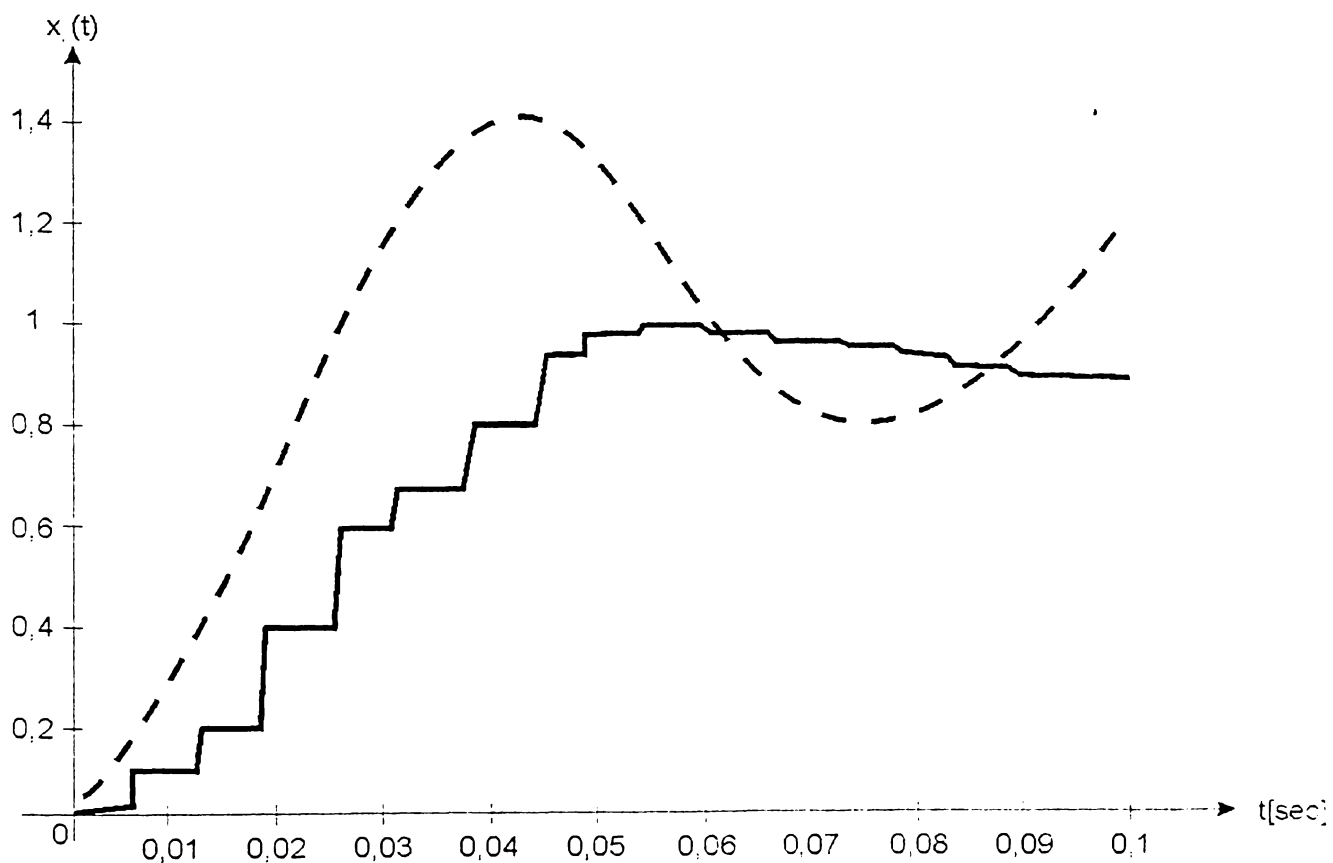


Fig.5.3. Soluții Haar pentru sisteme de ordinul 4: — $x_1(t)$ cu $\tau = 0,5$ și $m = 16$;
 - - - $x_2(t)$ cu $\tau = 0,2$ și $m = 64$.

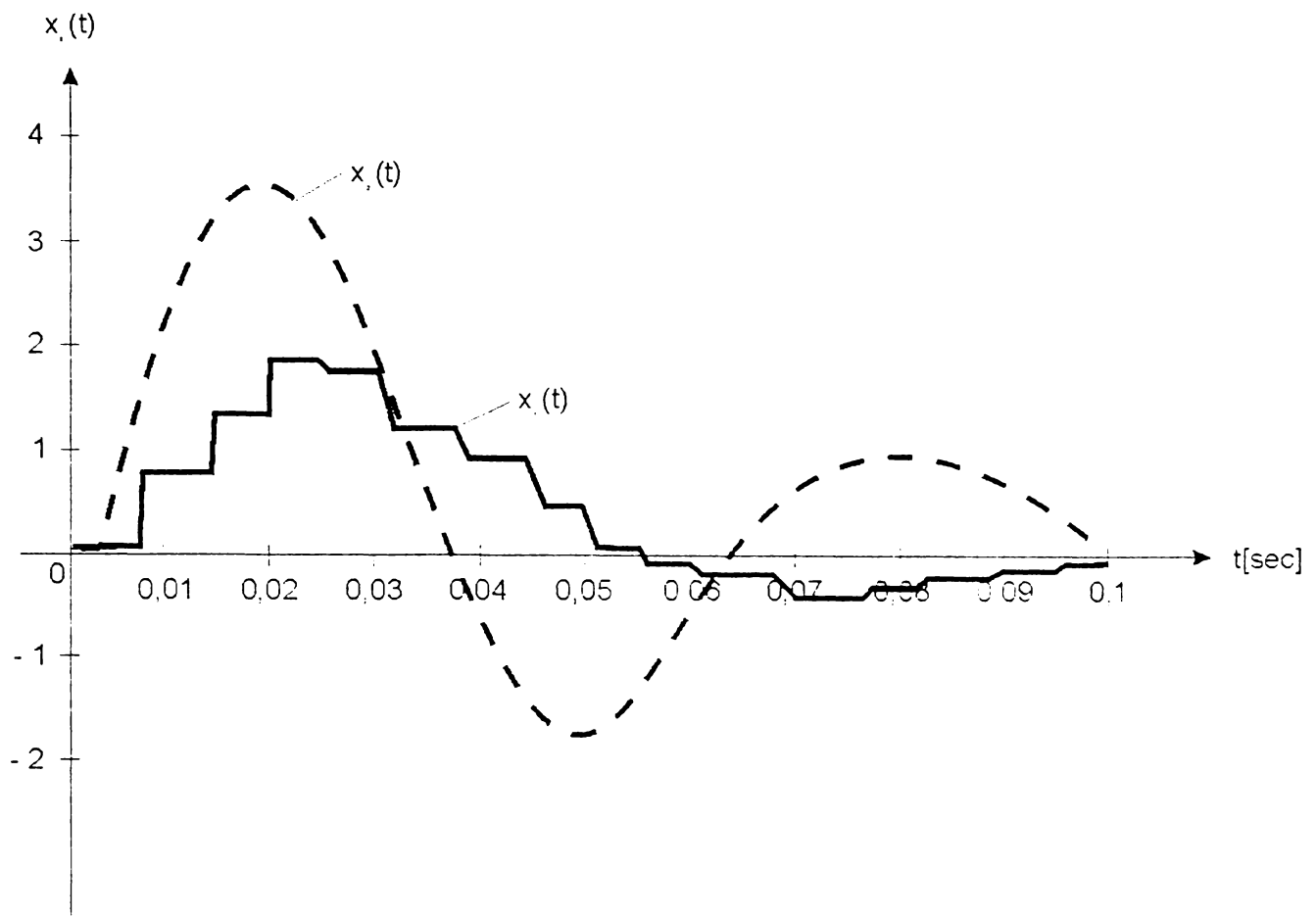


Fig 5.4. Soluții Haar pentru un sistem de gradul 4

legenda: ——— $x_1(t)$ cu $\tau = 0,5$ și $m = 16$
 - - - - - $x_2(t)$ cu $\tau = 0,2$ și $m = 64$

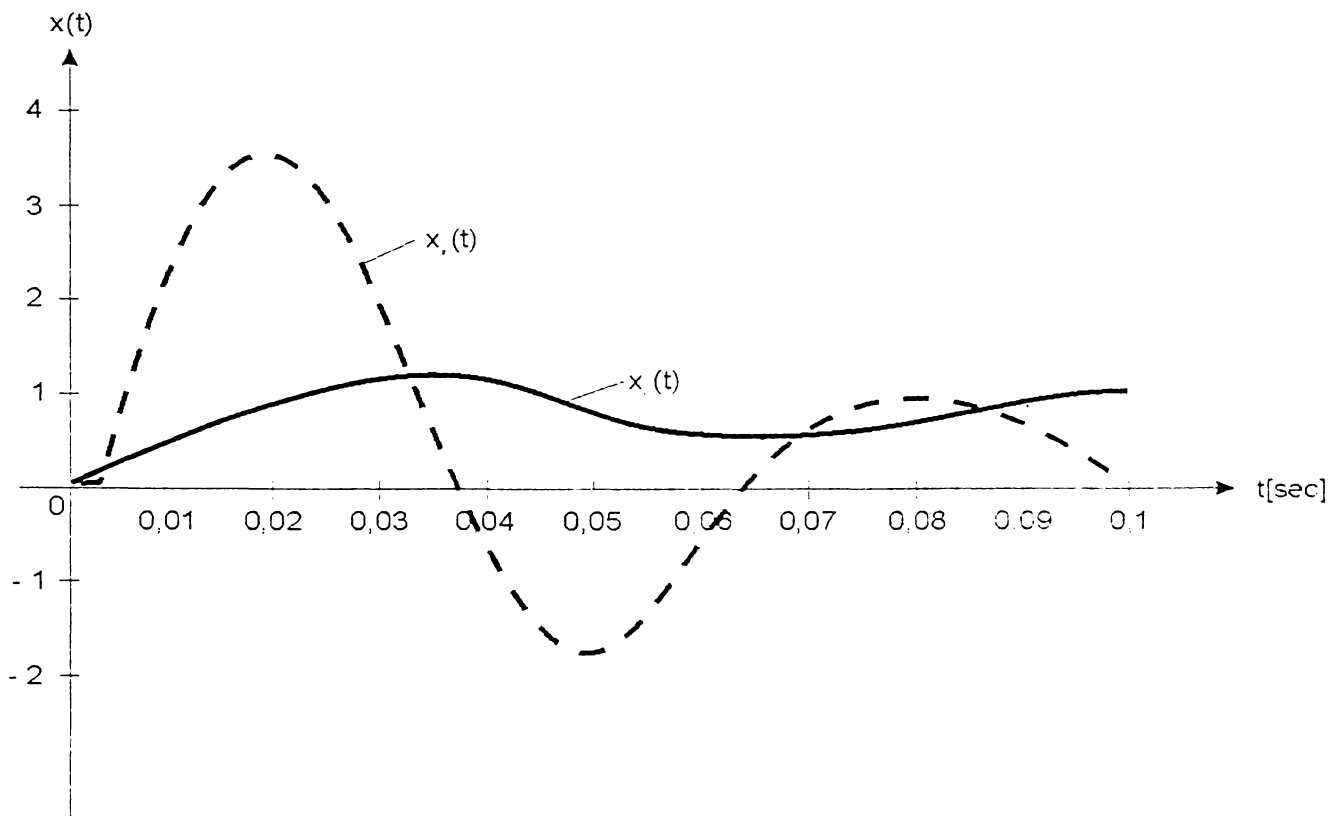


Fig.5.5. Soluții Haar cu punctele din mijloc conectat.

legenda: ——— $x_1(t)$ cu $\tau = 0,2$, $m = 64$, $k = 390$
 - - - - - $x_2(t)$ cu $\tau = 0,2$, $m = 64$, $k = 390$.

Vom analiza parametrii distribuți a unui sistem prin metoda Haar. Comparativ cu celelalte metode prezentate, ce utilizau transformatele Fourier, Walsh, Laguerre, metoda Haar este mult mai elegantă, mai convenabilă în calculul numeric și mult mai rapidă în procesarea datelor. Pentru a ilustra cele menționate anterior, se consideră o linie de transmisie (fig.5.6.) cu rezistența R , inductanța L , conductanța G și capacitatea C pe unitatea de lungime.

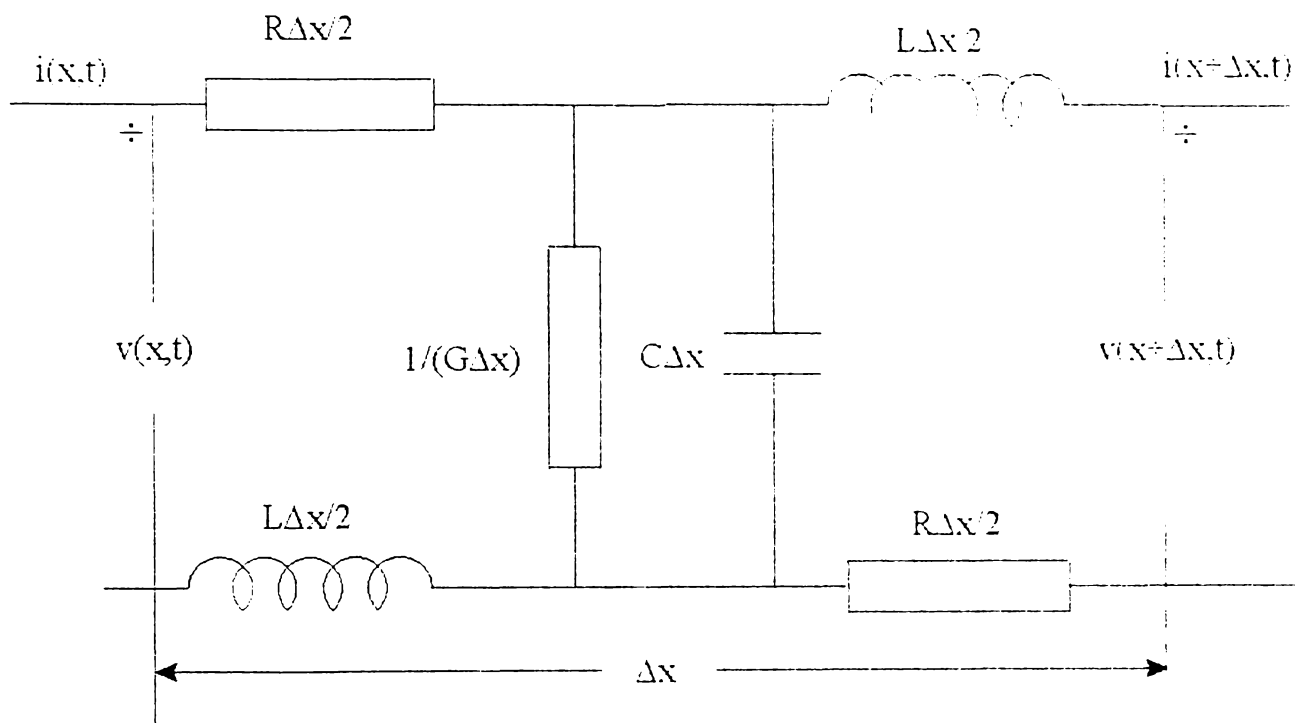


Fig.5.6. Lungimea elementară a liniei de transmisie.

Când Δx tinde la zero, curentul din linia de transmisie este dat de bine cunoscuta ecuație a telegrafistului:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.38)$$

$$G \cdot v + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + LG) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + RG \cdot v \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + RG \cdot i \quad (5.41)$$

În principiu, aplicând transformata Haar în domeniul timpului, se rezolvă problema în domeniul spațiului, prin metoda convențională.

Această idee se va ilustra prin exemplele următoare:

Exemplu 1. Presupunem că se aplică un impuls unitate pe linia aflată inițial în starea $x = 0$. Să se afle curentul $i(0, t)$.

Soluție. Se aplică transformata Haar în domeniul timpului și se expandează $\partial^2 v / \partial t^2$ într-o serie Haar:

$$\partial^2 v / \partial t^2 = a^t(x) H(t) \quad (5.42)$$

unde $a(x)$ este m -vectorul funcției x , x fiind distanța în spațiu.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \int^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = a^t \cdot P \cdot H(t) \quad (5.43)$$

$$v(x, t) = \int^t \frac{\partial v}{\partial t} + v(x, 0) = a^t \cdot P^2 \cdot H(t) \quad (5.44)$$

unde $\partial v / \partial t$ și $v(x, 0)$ au fost setate la valoarea zero în starea relaxată a liniei.

Prin înlocuiri și operații succesive se determină în final:

$$i(0, t) = \sqrt{C/L} \cdot a_0^t \cdot [(G/C)P + I]^{-\frac{1}{2}} \cdot [(R/L)P + I]^{-\frac{1}{2}} \cdot H(t) \quad (5.45)$$

Soluția analitică se scrie:

$$i(0, t) = \sqrt{C/L} \cdot \left[e^{-\alpha t} \cdot I_0(\beta \cdot t) + \frac{G}{C} \cdot \int^t e^{-\alpha \tau} \cdot I_0(\beta \cdot \tau) \cdot d\tau \right] \quad (5.46)$$

unde: I_0 este funcția Bessel modificată de speța întâi și ordinul zero:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \quad (5.47)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \quad (5.48)$$

Pentru compararea rezultatelor se dau valori numerice.

Presupunem $R=0,002\Omega \cdot m$, $C=5 \times 10^{-12} F/m$, $L=5 \times 10^{-6} H/m$, $G=0$.

Soluțiile Haar ale ecuației (5.46) sunt obținute cu transformata inversă Haar cu coeficienții vectori cunoscuți și ilustrată în fig.5.7. pentru $m=16$.

Atenuarea soluției Bessel este evaluată prin aplicarea subrutinei *Bessel(alpha, X)* din MATLAB și desenată în fig.5.7.

Diferența dintre curba soluției Bessel și curba soluției Haar este foarte mică, ceea ce confirmă că metoda Haar este aplicabilă sistemelor cu parametri distribuiți.

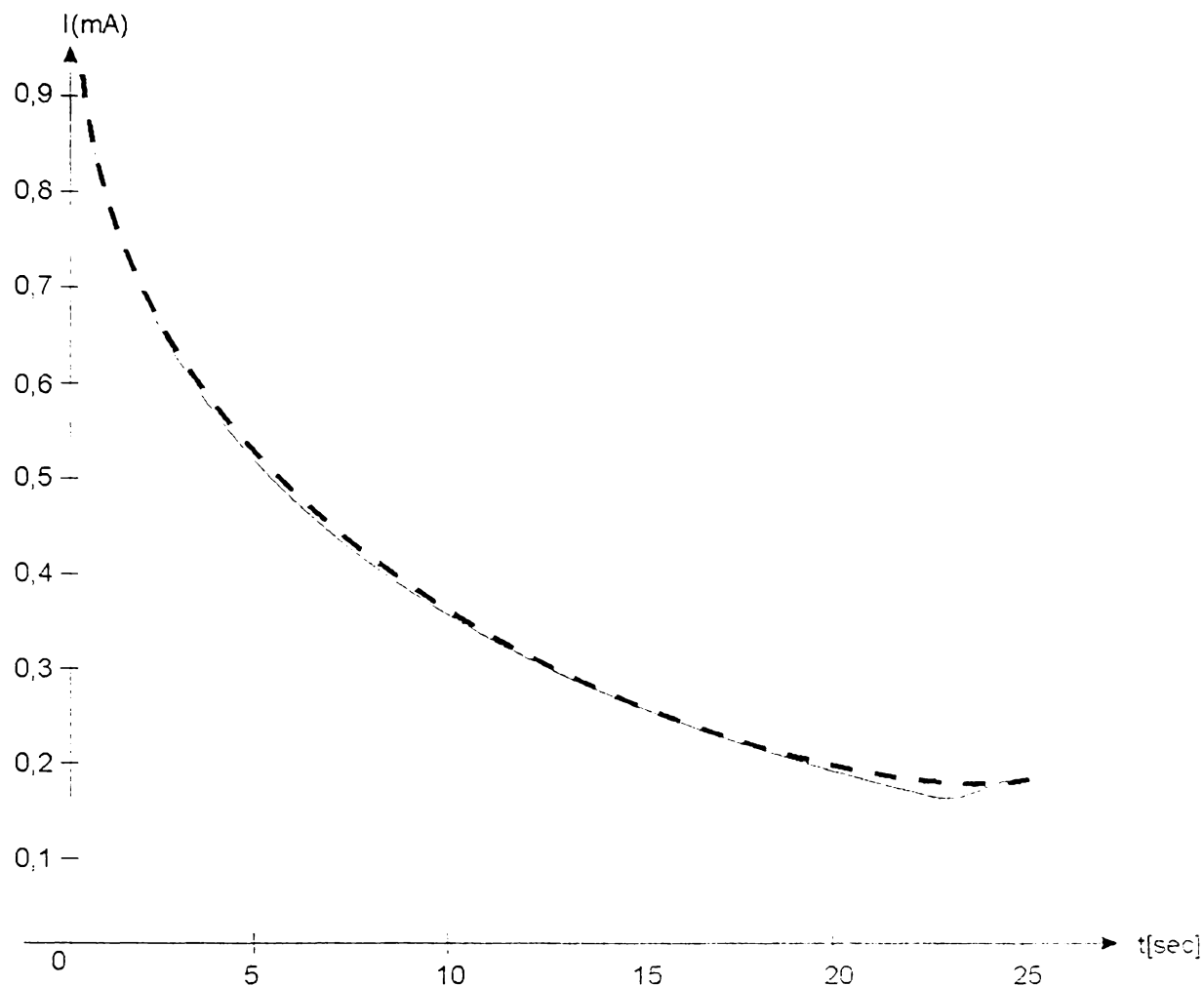


Fig.5.7. Soluțiile Haar și Bessel în transmisia liniei de curent.

Exemplu 2.

Se consideră semnalul impuls unitar aplicat asupra unui cablu fără pierderi și neinductiv. Se determină tensiunea $v(x, t)$ și curentul $i(x, t)$.

Soluție. Cablul fiind fără pierderi și neinductiv, înseamnă că $G=0$ și $L=0$, deci ecuațiile (5.38) și (5.40) vor avea forma:

$$R \cdot i = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.50)$$

Ecuția (5.50) este cunoscută sub numele de ecuația difuziei.

În domeniul Haar:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a'(x) \cdot H(t) \quad (5.51)$$

Integrând:

$$v(x, t) = a' \int H(t) \cdot dt = a' \cdot P \cdot H(t) \quad (5.52)$$

Prin operații succesive și multiplicarea matricilor, se obțin valorile finale pentru tensiunea $v(x, t)$ și curentul $i(x, t)$.

În MATLAB s-a utilizat funcția $\text{expm}(\cdot)$.

Soluțiile analitice sunt:

$$v(x, t) = \text{erfc}\left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{RC}{t}}\right) \quad (5.53)$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{R \cdot t}} \cdot e^{-x^2 \cdot RC/4t} \quad (5.54)$$

unde $\text{erfc}(\cdot)$ denotă complementara funcției eroare.

În fig.5.8. se reprezintă curbele pentru soluțiile Haar și Fourier, corespunzătoare tensiunii $v(x, t)$ și curentului $i(x, t)$.

Se poate deduce că metoda Haar furnizează rezultate excelente în evaluările numerice, chiar și pentru un număr m mic. În ambele exemple $m=16$. Evaluarea curbelor va fi și mai apropiată de valoarea reală dacă m se alege mai mare.

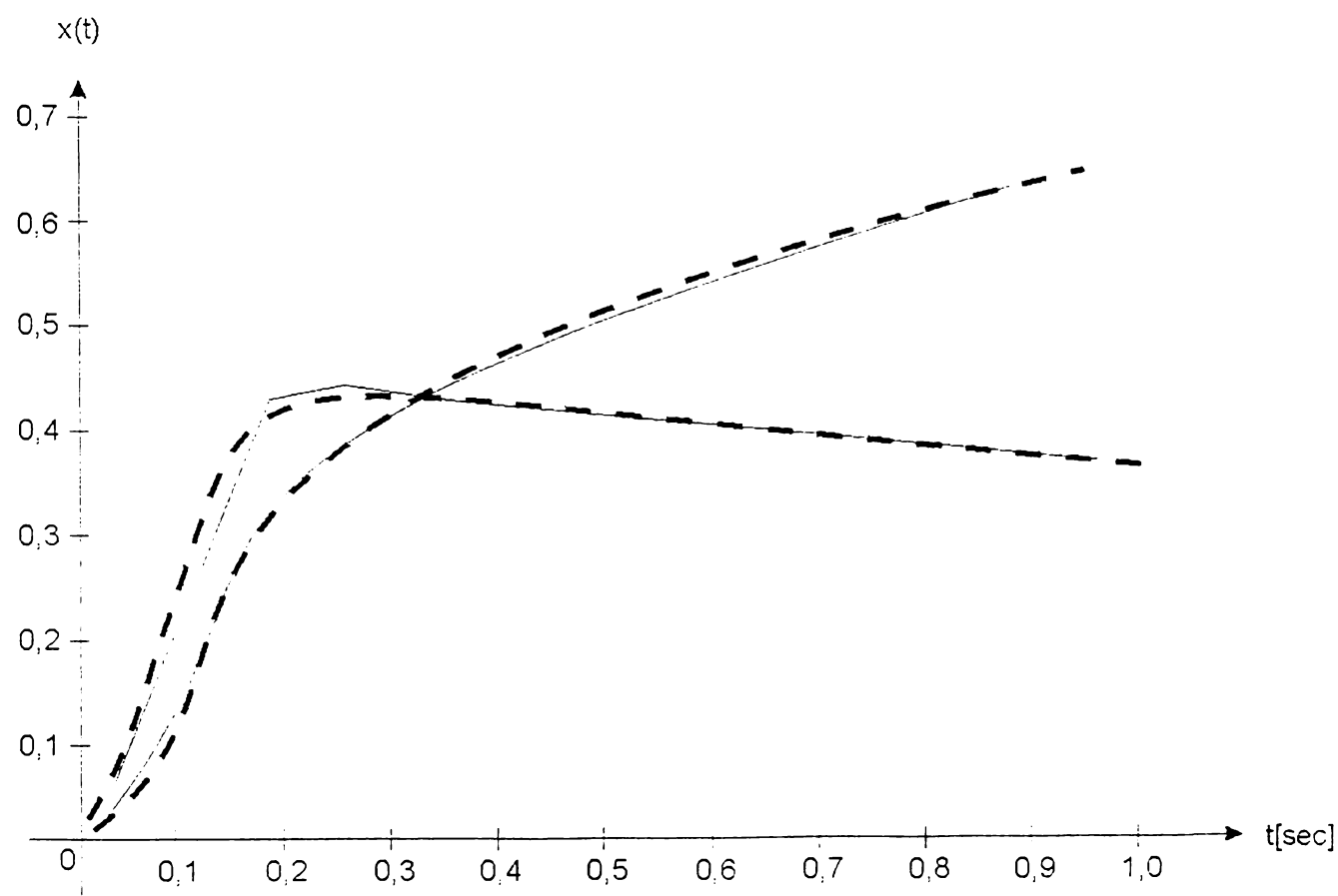


Fig.5.8. Soluții Haar și Fourier pentru transmisia prin cablu.

Concluzii

Generalizarea procesului de eșantionare a funcțiilor Haar și a integralelor acestora, s-a prezentat în scopul utilizării acestora în activitățile de identificare și conducere optimă a proceselor tehnologice.

Prin dezvoltarea funcțiilor semnal, ce intervin în controlul proceselor fizice (mărimi de intrare, stări și mărimi de ieșire), în serie Haar, ca urmare a proprietății de ortogonalitate a funcțiilor Haar, se realizează importante facilități de calcul.

Se poate concluziona că metoda Haar poate fi apreciată ca elegantă, datorită relațiilor matematice simple și a derivatelor lor compacte.

Acuratețea acestei metode s-a demonstrat prin exemple numerice simple.

Este o metodă orientată către calculator, deoarece numerele imaginare pot fi generate ușor prin computer.

CAPITOLUL 6

CONCLUZII GENERALE ȘI CONTRIBUȚII PERSONALE

6.1. Prezentare generală a tezei. Concluzii

În această teză s-a realizat un studiu, de identificare a parametrilor sistemelor automate utilizând serii temporale uzuale: Fourier, Walsh cu ordonare după Walsh, Hadamard, Paley, Laguerre și Haar.

Luând în considerare avantajele și dezavantajele descoperite, s-a decis, că funcția ortogonală Haar este cea mai eficientă și permite reducerea numărului de operații simultan cu creșterea vitezei de lucru și ușurarea calculelor în identificare.

Lucrarea conține relații matematice riguroase, demonstrate și detaliate prin exemplificări elocvente imediate.

Pentru fiecare transformare ortogonală studiată, s-au prezentat aplicații, care sugerează utilitatea acestora, avantajele și dezavantajele aplicării lor în analiza și identificarea parametrilor sistemelor automate.

În anexe se redau trei programe de calcul, scrise în limbaje de programare evoluate: Turbo Pascal 7.0 și C++, precum și o aplicație păractică, care fac posibilă realizarea practică a noțiunilor teoretice, precum și metode de identificare cu ajutorul calculatorului. Programul de testare al transformatei rapide Fourier la generarea unui semnal de timp constând dintr-o undă de lărgime de 200 Hz la care se adaugă o undă cosinus de 2000 Hz, s-a conceput cu scopul de a reprezenta grafic pe monitorul calculatorului, formele de undă generate și se evidențiază performanțele transformatei rapide Fourier, (Anexa 1); un program de calcul a coeficienților pentru transformatele rapide directe și inverse Fourier, (Anexa 2); procedeele de evaluare, prelucrare și culegere a datelor experimentale pentru compresoarele industriale de aer performante fabricate la U.C.M.Reșița S.A. de tip L-50 și 100 m³/min, cu ajutorul computerului. (Anexa 3); și un program C++ pentru determinarea rapidă și exactă a coeficienților Walsh cu ordonare după Paley. (Anexa 4). Pentru a spori performanțele acestor programe s-au introdus modificări, adăugări și îmbunătățiri pe parcursul conceperii și elaborării lor, până la prezentarea variantelor performante finale.

Lucrarea este prefațată de capitolul **Introducere**, în care se definesc noțiunile de bază dezvoltate în teză și anume: identificarea on-line a parametrilor sistemelor automate, modalitățile de abordare a modelelor construite pentru sistemele respective prin estimarea parametrilor acestuia și optimizarea parametrică, precum și principalele tipuri distincte de identificare.

Se precizează utilitatea claselor de funcții ortogonale în aplicațiile practice de identificare și optimizare a proceselor tehnologice, precum și performanțele obținute prin calculul operațional Laplace, Fourier, Walsh, pentru sisteme SISO sau MIMO de ordin redus.

Se stabilesc obiectivele tezei.

În **Capitolul 1. Transformări ortogonale**, se prezintă utilitatea acestora în prelucrarea informației în analiza proceselor și sistemelor (§1.1.), proprietatea de ortogonalitate (§ 1.2.) , reprezentarea datelor prin funcții ortogonale (§ 1.3.), inegalitatea lui Bessel, teorema lui Parseval (§ 1.4.) și sensul fizic al acesteia (§ 1.5.).

În **Capitolul 2. Identificarea cu spectre Fourier**, se abordează detaliat, dezvoltarea în serie trigonometrică (§ 2.1.), spectrele de amplitudine (§ 2.2): unilateral (§ 2.2.1) și bilateral (§ 2.2.2) ale dezvoltării Fourier, spectrul Fourier al semnalelor analogice și aperiodice (§ 2.2.3), precum și cel al semnalelor aperiodice eșantionate (§ 2.2.4).

Se prezintă apoi, transformatele Fourier (directă, discretă, rapidă) și utilitatea acestora în identificarea proceselor (§ 2.2.5) și (§ 2.2.6).

În continuare se redau noțiuni despre funcțiile de corelație (§ 2.3.2), proprietatea de multiplicare, teorema lui Parseval (§ 2.3.3), densități spectrale energetice (§ 2.3.4) și de putere (§ 2.3.5), teoremele Wiener-Hincin (§ 2.3.6), proprietățile funcțiilor de densitate spectrală (§ 2.3.7), clasificarea spectrelor Fourier (§ 2.3.8), efectul troncaturii funcției semnal (§ 2.3.9), ecuația de convoluție, teorema lui Plancherel (§ 2.4.3), transferul liniar exprimat prin funcțiile de corelație (§ 2.4.4), transferul liniar în domeniul frecvențial (§ 2.4.5), funcția de coerență (§ 2.4.6).

Subparagraful § 2.4.7 prezintă relațiile dintre funcțiile analogice și discrete ale corelațiilor și spectrelor.

În subparagraful § 2.4.8 se evidențiază utilitatea operatorului de densitate spectrală **D** [71], care permite simplificarea calculelor unor relații fundamentale în analiza Fourier a sistemelor, eliminând calculele laborioase cu ajutorul funcțiilor de corelație.

Sunt prezentate pe larg algoritmul de calcul a coeficienților seriei Fourier prin metoda Cooley-Tukey, algoritmul Werz, algoritmul Singleton, precum și o evaluare comparativă a ultimilor doi algoritmi (§ 2.5).

Paragraful § 2.6, intitulat metode frecvențiale de identificare, conține un număr de 7 aplicații referitoare la: determinarea experimentală a curbei indiciale (§ 2.6.1); identificarea sistemelor cu transferometrul (§ 2.6.2); metoda corelației (§ 2.6.3); optimizarea sistemului utilizând corelatorul și analizorul armonic (§ 2.6.4); identificarea cu operatorul densității spectrale **D**, (§ 2.6.5); metoda experimentului cu releu (§ 2.6.6); identificarea armonică numerică și exemplele aferente de aplicare ale acestora (§ 2.6.7), încheie acest vast capitol.

Capitolul 3. Funcții Walsh, descrie funcțiile și proprietățile funcțiilor ortogonale Walsh, cele trei tipuri: cu ordonare după Walsh, Hadamard și Paley (ordonări legate între ele prin **codul Gray**, § 3.1), transformata rapidă Walsh și utilitatea acesteia în identificarea parametrilor sistemelor prin integralele aferente (§ 3.2).

Au fost introduse frecvențele în formă de parametri care reprezintă diferite funcții separate care aparțin sistemelor de funcții nesinusoidale.

O serie de aplicații imediate demonstrează afirmațiile anterioare.

Prin dezvoltarea funcțiilor semnal, care intervin în controlul proceselor fizice (mărimi de intrare, stări și mărimi de ieșire), în serie Walsh, ca urmare a proprietății de ortogonalitate a funcțiilor Walsh, se realizează importante facilități de calcul.

Generalizarea procesului de eșantionare a funcțiilor Walsh și a integralelor acestora, s-a prezentat în scopul utilizării acestora în activitățile de identificare și conducere optimă a proceselor tehnologice (§ 3.3).

Discretizarea exactă a mulțimilor de funcții Haar și Walsh pe mulțimile punctelor de egală presiune conduc la transformata matricei Haar și Hadamard corespunzătoare. Liniile acestor matrici servesc ca baze ale vectorilor pentru exprimarea transformărilor Haar și Walsh - Hadamard.

Determinarea matricii P a putut fi posibilă prin exemplificarea unui caz particular pentru $N=16$ eșantioane pe care l-am putut apoi generaliza pentru $N=2m$ (§ 3.4).

Se reprezintă grafic primele opt funcții Walsh și integralele aferente acestora (fig.3.6, pag.98).

În încheierea acestui capitol se prezintă două rutine de program pentru transformata rapidă inversă Walsh cu ordonare după Hadamard și transformata rapidă inversă Walsh, care comasate într-un singur program realizează obținerea spectrului Walsh (§ 3.5). Se precizează că identificarea cu serii Walsh este similară cu cea prin intermediul seriilor Haar cu deosebirea că în locul matricilor H și H_i se utilizează matricile W și W_i obținute în (§ 3.4)

În **Capitolul 4. Funcții ortogonale Laguerre**, s-a apelat la seriile Laguerre pentru realizarea identificării on-line a sistemelor. S-au definit funcțiile ortogonale și proprietățile esențiale ale funcțiilor Laguerre (§ 4.1). s-au prezentat modele Laguerre (§ 4.2) și s-au exemplificat algoritmele de identificare, în cazul unui sistem liniar invariant în timp (§ 4.2 A), respectiv neliniar (model WIENER § 4.2 B).

Ca o particularitate s-a prezentat interpretarea fizică a convoluției, care atestă importanța cunoașterii funcției pondere și a integralei de convoluție, reușind astfel să determinăm răspunsul sistemului pentru orice mărime de intrare (fig.4.1).

S-a prezentat algoritmul de identificare a proceselor cu exemplu de identificare utilizând funcțiile ortogonale Laguerre (§ 4.2, pag.109-111).

În concluzie sunt precizate avantajele utilizării funcțiilor și modelelor Laguerre în identificare, relevându-se faptul că s-au obținut rezultate suficient de bune, cu un "timp de calculator" relativ redus.

Capitolul 5. Funcții ortogonale Haar, utilizate în analiza sistemelor fizice cu parametrii concentrați sau distribuiți, sunt definite în (§ 5.1). S-a arătat că în scopul reducerii timpului de calcul se preferă funcțiile care conduc la matrici cu elemente reale, dintre acestea cele mai eficiente fiind funcțiile Haar (§ 5.2).

Se pornește prin exemplificarea unui caz particular de obținere a matricii, apoi prin inducție, se deduce matricea aferentă pentru orice ordin al funcțiilor Haar.

Se arată determinarea integralelor aferente matricii funcțiilor Haar, pentru orice ordin (§ 5.3).

În paragraful 5.4 se elaborează matricea caracteristică funcțiilor Haar și se redau 4 exemple numerice edificatoare.

Se realizează identificare unui sistem MIMO prin intermediul funcțiilor Haar și se reprezintă grafic soluțiile (§ 5.5).

Se consideră un model de identificare cu metoda Haar sub forma unei linii de transmisie (fig.5.6) cu rezistența R , inductanța L , conductanța G și capacitatea C pe unitatea de lungime. Aplicând transformata Haar în domeniul timpului se rezolvă problema în domeniul spațiului.

Sunt prezentate apoi 2 exemple numerice pentru punerea în evidență a soluțiilor Haar și Bessel (fig.5.7), prin aplicarea subrutinei oferite de MatLab, *Besseltalpha, x*, respectiv soluțiile Haar și Fourier (fig.5.8) la transmisia prin cablu, cu subrutina *expm()*.

Prin dezvoltarea funcțiilor semnal, ce intervin în controlul proceselor fizice (mărimi de intrare, stări și mărimi de ieșire), în serie Haar, ca urmare a proprietății de ortogonalitate a funcțiilor Haar, se realizează importante facilități de calcul.

Această metodă este orientată către calculator, deoarece numerele imaginare pot fi generate ușor prin computer, prezintă facilități de calcul, relații matematice simple și derivate compacte.

În concluzie, putem afirma că, în analiza și optimizarea dinamicii sistemelor automate este indicat să aplicăm transformata Haar.

6.2. Contribuții personale

1. Evidențierea avantajelor identificării utilizând seriile de funcții temporale, prin creșterea vitezei de calcul, reducerea timpului de calcul și scăderea numărului de operații (cap.1).
2. Descrierea proprietăților esențiale ale funcțiilor ortogonale Fourier (cap.2), Walsh (cap.3), Laguerre (cap.4) și Haar (cap.5).
3. Precizarea sensului fizic al teoremei lui Parseval, pe baza egalității dintre energia sau puterea semnalului și suma energiilor sau puterilor aferente liniilor spectrale a coeficienților dezvoltării după sistemul de ortogonal considerat. Teorema lui Parseval se prezintă ca o formă particulară a principiului conservării energiei (§ 1.5)
4. S-a descris tranziția de la spectrul unilateral discret al transformării naturale Fourier, la spectrul bilateral, aferent semnalelor periodice continue (§ 2.2.2, fig.2.2).
5. S-a ilustrat un exemplu de transformare Fourier aferentă unui semnal aperiodic analogic (§ 2.2.3, fig.2.3) și s-a dat o interpretare operației de transformare Fourier pentru o funcție pară (§ 2.2.3, fig.2.4), subliniind că pentru aceasta, este necesară cunoașterea întregii evoluții în timp a funcției semnal.
6. S-a prezentat clasificarea spectrelor Fourier și exprimarea acestora în funcție de coeficienții Transformatei Discrete Fourier (§ 2.3.8, fig.2.11) cu scopul delimitării precise a tipurilor particulare de spectre Fourier.
7. Evidențierea efectului fenomenului de troncatură a semnalului asupra spectrului aferent, cu scopul evitării distorsiunilor determinate de prezentări aproximative în raport cu spectrul real al funcției considerate (§ 2.3.9, fig.2.12).
8. Evaluarea spectrului de putere prin intermediul funcțiilor de corelație, în cazul semnalelor EEG (§ 2.4.5, fig.2.14) și a funcției de autocovarianță a semnalului, AEG (§ 2.4.5, fig.2.15) pentru înlăturarea prezenței perturbațiilor în spectrul considerat.
9. Elaborarea unei ordinograme pentru evaluarea funcției de coerență, determinate prin intermediul spectrelor de densitate de putere direct din semnale, ce urmează a fi utilizată în întocmirea unui program (§ 2.4.6, fig.2.16).
10. S-a evidențiat, utilizarea operatorului densității spectrale **D**, în demonstrarea unor relații fundamentale ale dinamicii statistice, care se obțin direct plecând de la funcțiile semnal, fără a mai face apel la ecuația de convoluție și la relațiile WIENER-HINCIN, sub formă integrală. Demonstrațiile prezentate sunt scurte și imediate, față de cele clasice efectuate în domeniul timpului care sunt lungi și laborioase (§ 2.4.8).

11. S-a redat un exemplu de identificare analitică utilizând operatorul **D**, care rezolvă problema identificării transmitanțelor de pe calea directă și pe cea de reacție inversă, în cazul sistemului automat de urmărire (§ 2.6.5, fig.2.30).
12. Prezentarea algoritmului de calcul (§ 2.5) și programul de testare al transformatei FFT, în limbajul programare Turbo Pascal v.7.0, cu scopul de a reprezenta grafic pe monitorul calculatorului, formele de undă generate și a evidenția performanțele transformatei rapide Fourier (Anexa1).
13. Propunerea unui program scris în Turbo Pascal v.7.0 pentru calculul transformatei rapide Fourier și transformatei inverse Fourier. (Anexa 2).
14. Prezentarea unor metode frecvențiale de identificare: determinarea experimentală a curbei indiciale (§ 2.6.1); utilizarea transferometrului; metoda corelației (§ 2.6.2); optimizarea sistemului utilizând corelatorul și analizorul armonic (§ 2.6.3); cu operatorul densității spectrale D (§ 2.6.4); prin metoda experimentului cu releu (§ 2.6.5); identificarea armonică numerică (§ 2.6.6).
15. Reprezentarea primelor opt funcții Walsh cu ordonare după Walsh (fig.3.1). Hadamard (fig.3.2) și Paley (fig.3.3) și a integralelor aferente (§ 3.4, fig.3.6).
16. Prezentarea unui exemplu de utilizare a codului Gray, care permite rezolvarea unor probleme practice în transformările analog-digitale (§ 3.1, Aplicația 1).
17. Elaborarea matricii P aferentă funcțiilor ortogonale Walsh în formă generală, care permite identificarea sistemelor prin produs de matrici, evitând utilizarea integralelor aferente (§ 3.4 , relația.3.33).
18. Propunerea unui program pentru transformata rapidă Walsh FWT, cu două subrutine de program pentru transformata rapidă inversă Walsh cu ordonare după Hadamard și transformata rapidă inversă Walsh, care comasate într-un singur program realizează obținerea spectrului Walsh (§ 3.5).
19. Prezentarea unor exemple de model laguerian; operații de optimizare: gradient estimator (§ 4.2.A), cu scopul predicției și reducerii erorilor la estimarea parametrilor sistemelor analizate.
20. Determinarea parametrilor modelelor liniare Laguerre și modelul Wiener pentru sisteme neliniare (§ 4.2.B), cu scopul creșterii stabilității sistemelor neliniare dinamice.
21. Descrierea algoritmului de identificare a proceselor cu funcții Laguerre (§ 4.3), care relevă predicția finală a erorii.
22. Determinarea integralelor aferente primelor opt funcții Haar (§ 5.1, fig.5.1), necesare pentru obținerea matricilor pentru analiza sistemelor cu parametri concentrați sau distribuiți.

23. Obținerea matricii Haar în cazul general (§ 5.2), evitând calculele laborioase a operațiilor de integrare, prin înlocuirea lor cu produsul a două matrici H și inversa ei H_i de formă determinată.
24. Identificarea cu funcția Haar, pentru o linie de transmisie (§ 5.5, fig.5.6) cu rezistența R , inductanța L , conductanța G și capacitatea C pe unitatea de lungime și exemple de soluții grafice pentru punerea în evidență a soluțiilor Haar și Bessel la transmisia prin cablu (§ 5.5, fig.5.7), prin aplicarea subrutinei oferite de MatLab, *Bessel(alpha, x)*, respectiv soluțiile Haar și Fourier (§ 5.5, fig.5.8) la transmisia prin cablu, cu subrutina *expm()*.
25. Prezentarea evaluării vibrațiilor compresoarelor de aer de 50 și 100 m³/min cu ajutorul computerului, cu scopul reducerii amplitudinii acestora și evitarea avariilor. (Anexa 3).
26. Propunerea unui program în limbajul de programare de nivel înalt, C++, pentru determinarea coeficienților Walsh după Paley. (Anexa 4).

ANEXA 1**PROGRAM DE TESTARE A TRANSFORMATEI RAPIDE FOURIER**

Prima dată se generează un semnal de timp consistând dintr-o undă de lărgime 200 Hz, la care se adaugă o undă mică cosinus de 2000 Hz, care se reprezintă grafic pe monitor. Se apasă tasta ENTER după vizualizarea fiecărui grafic.

Apoi, se arată performanțele FFT și graficul corespunzător obținut în domeniul frecvențial.

Se filtrează ieșirea pentru toate componentele frecvenței în jurul valorii de 1000 Hz.

În final, se realizează transformata inversă pentru filtrarea semnalului de timp înapoi și graficul rezultat.

```
program TestFFT;
uses Fourier, Graph, Crt;
const PathToBGI = '.';
function f ( t: double ): double;
begin
  f := sin ( 200 * 2*PI * t ) +
    0.2 * cos ( 2000 * 2*PI * t );
end;
const
  NumSamples = 512;      { dimensiunea bufferului trebuie să fie putere a lui 2 }
  SamplingRate = 22050; { rata în Hz }
type
  Buffer = array [0 .. NumSamples-1] of double; { Buffer= memorie temporară, tampon }
var
  RealIn, ImagIn, RealOut, ImagOut: Buffer;
  OutputListingFile: text;
  i: integer;
  temp, t, dt: double;
```

```
procedure Test_CalcFrequency:
var
  yr, yi: double;
  i: integer;
begin
  { La intrarea bufferului se dau date aleatoare }
  for i := 0 to NumSamples-1 do begin
    RealIn[i] := Random(10000);
    ImagIn[i] := Random(10000);
  end;

  writeln ( OutputListingFile );
  writeln ( OutputListingFile, '*** Testare procedure CalcFrequency ***' );
  writeln ( OutputListingFile );

  fft ( NumSamples, RealIn, ImagIn, RealOut, ImagOut );
  for i := 0 to NumSamples-1 do begin
    CalcFrequency ( NumSamples, i, RealIn, ImagIn, yr, yi );
    writeln ( OutputListingFile, i:4,
      RealOut[i]:15:6, yr:15:6,
      ImagOut[i]:20:6, yi:15:6 );
  end;
end;

procedure ListData ( var RealData, ImagData: Buffer; comment: string );
var
  i, yr, yi, prev_yr, prev_yi: word;
  trash: char;
  maxAbsValue: double;
begin
  writeln ( OutputListingFile, '*** ', comment, '***' );
  writeln ( OutputListingFile );
```

```
writeln ( OutputListingFile, 'index':20, 'real':20, 'imag':20 );
for i := 1 to NumSamples do begin
  writeln ( OutputListingFile, i:20,
    RealData[i]:20:5, ImagData[i]:20:5 );
end;

writeln ( OutputListingFile );
writeln ( OutputListingFile, '-----' );
writeln ( OutputListingFile );

maxAbsValue := 0.0;
for i := 0 to NumSamples-1 do begin
  if abs(RealData[i]) > maxAbsValue then
    maxAbsValue := abs(RealData[i]);

  if abs(ImagData[i]) > maxAbsValue then
    maxAbsValue := abs(ImagData[i]);
end;

for i := 0 to NumSamples-1 do begin
  yr := Trunc ( GetMaxY * (1 - (RealData[i] / maxAbsValue + 1)/2) );
  yi := Trunc ( GetMaxY * (1 - (ImagData[i] / maxAbsValue + 1)/2) );

  if i > 0 then begin
    SetColor ( LIGHTRED );
    Line ( i-1, prev_yr, i, yr );
    SetColor ( LIGHTGREEN );
    Line ( i-1, prev_yi, i, yi );
  end;

  prev_yr := yr;
  prev_yi := yi;
end;
```

```
sound (800);
delay (100);
nosound;
trash := ReadKey; (* Pause *)
ClearDevice;
end;
var
  GraphDriver, GraphMode, StartupTextMode: integer;
  FreqIndex: word;

begin
  StartupTextMode := LastMode;
  assign ( OutputListingFile, 'fftout.txt' );
  rewrite ( OutputListingFile );

  GraphDriver := VGA;
  GraphMode := VGAHI;
  InitGraph ( GraphDriver, GraphMode, PathToBGI );

  dt := 1.0 / SamplingRate;
  t := 0.0;

  for i := 0 to NumSamples-1 do begin
    RealIn[i] := f(t);
    ImagIn[i] := 0.0;
    t := t + dt;
  end;
```



```
ListData ( RealIn, ImagIn, 'Domeniul de timp înainte de transformare' );
```

```
fft ( NumSamples, RealIn, ImagIn, RealOut, ImagOut );
```

```
ListData ( RealOut, ImagOut, 'Domeniul frecvential dupa transformare' );
```

```
(* Filtru trece-jos de iesire in jur de 1000 Hz (low-pass) *)
```

```
FreqIndex := Trunc ( 1000.0 * NumSamples / SamplingRate );
```

```
for i := 0 to NumSamples-1 do begin
```

```
  if ((i > FreqIndex) and (i < NumSamples DIV 2)) or
```

```
    ((i >= NumSamples DIV 2) and (i < NumSamples-FreqIndex)) then
```

```
  begin
```

```
    RealOut[i] := 0.0;
```

```
    ImagOut[i] := 0.0;
```

```
  end;
```

```
end;
```

```
ifft ( NumSamples, RealOut, ImagOut, RealIn, ImagIn );
```

```
ListData ( RealIn, ImagIn, 'Domeniul de timp dupa transformata inversa' );
```

```
Test_CalcFrequency;
```

```
close ( OutputListingFile );
```

```
CloseGraph;
```

```
TextMode ( StartupTextMode );
```

```
end.
```

ANEXA 2**PROGRAM DE CALCUL PENTRU TRANSFORMATA RAPIDĂ FOURIER (FFT)
ȘI TRANSFORMATA RAPIDĂ INVERSĂ FOURIER (IFFT)**

Se prezintă în Turbo Pascal 7.0 o unitate de calcul a transformatei FFT și IFFT.

Procedura `fft`, calculează FFT pentru un șir de numere complexe reprezentate prin partea reală 'RealIn' și partea imaginară 'ImagIn', producând la ieșire numere complexe în variabilele 'RealOut' și 'ImagOut'.

Analog, procedura `ifft`, calculează transformata inversă IFFT pentru șirul de numere de tip complex, obținându-se la ieșire tot numere de tip complex.

```
unit Fourier;
```

```
interface
```

```
procedure fft (
```

```
  NumSamples: word; { trebuie să fie întreg și pozitiv, putere a lui 2 }
```

```
  var RealIn: array of double;
```

```
  var ImagIn: array of double;
```

```
  var RealOut: array of double;
```

```
  var ImagOut: array of double );
```

```
procedure ifft (
```

```
  NumSamples: word; { trebuie să fie întreg și pozitiv, putere a lui 2 }
```

```
  var RealIn: array of double;
```

```
  var ImagIn: array of double;
```

```
  var RealOut: array of double;
```

```
  var ImagOut: array of double );
```

```
procedure fft_integer (  
  NumSamples: word;  
  var RealIn: array of integer;  
  var ImagIn: array of integer;  
  var RealOut: array of double;  
  var ImagOut: array of double );
```

```
procedure fft_integer_cleanup;           {pentru eliberarea locatiilor de memorie dinamice}
```

```
(*-----
```

```
  procedure CalcFrequency
```

```
    Calculează unul sau două exemple de frecvență, nu întreg spectrul
```

```
    Este utilă și în calculul transformatei discrete Fourier (DFT) pentru un număr de date care  
    nu sunt puteri a lui 2.
```

```
-----*)
```

```
procedure CalcFrequency (  
  NumSamples: word;    { poate fi orice număr pozitiv și întreg }  FrequencyIndex: word; { trebuie să fie în ordinea 0 .. NumSamples-1 }  var RealIn: array of double;  
  var ImagIn: array of double;  
  var RealOut: double;  
  var ImagOut: double );
```

```
implementation
```

```
function IsPowerOfTwo ( x: word ): boolean;
```

```
var i, y: word;
```

```
begin
```

```
  y := 2;
```

```
  for i := 1 to 15 do begin
```

```
    if x = y then begin
```

```
    IsPowerOfTwo := TRUE;
    exit;
end;
y := y SHL 1;
end;
IsPowerOfTwo := FALSE;
end;

function NumberOfBitsNeeded ( PowerOfTwo: word ): word;
var   i: word;
begin
    for i := 0 to 16 do begin
        if (PowerOfTwo AND (1 SHL i)) <> 0 then begin
            NumberOfBitsNeeded := i;
            exit;
        end;
    end;
end;

function ReverseBits ( index, NumBits: word ): word;
var   i, rev: word;
begin
    rev := 0;
    for i := 0 to NumBits-1 do begin
        rev := (rev SHL 1) OR (index AND 1);
        index := index SHR 1;
    end;
    ReverseBits := rev;
end;
```

```
procedure FourierTransform (  
  AngleNumerator: double;  
  NumSamples: word;  
  var RealIn: array of double;  
  var ImagIn: array of double;  
  var RealOut: array of double;  
  var ImagOut: array of double );  
var  
  NumBits, i, j, k, n, BlockSize, BlockEnd: word;  
  delta_angle, delta_ar: double;  
  alpha, beta: double;  
  tr, ti, ar, ai: double;  
begin  
  if not IsPowerOfTwo(NumSamples) or (NumSamples<2) then begin  
    write ( ' Error in procedure Fourier: NumSamples=', NumSamples );  
    writeln ( ' Nu este numar intreg, pozitiv putere a lui 2.' );  
    halt;  
  end;  
  NumBits := NumberOfBitsNeeded (NumSamples);  
  for i := 0 to NumSamples-1 do begin  
    j := ReverseBits ( i, NumBits );  
    RealOut[j] := RealIn[i];  
    ImagOut[j] := ImagIn[i];  
  end;  
  BlockEnd := 1;  
  BlockSize := 2;  
  while BlockSize <= NumSamples do begin  
    delta_angle := AngleNumerator / BlockSize;  
    alpha := sin ( 0.5 * delta_angle );  
    alpha := 2.0 * alpha * alpha;  
    beta := sin ( delta_angle );
```

```
i := 0;
while i < NumSamples do begin
  ar := 1.0; (* cos(0) *)
  ai := 0.0; (* sin(0) *)
  j := i;
  for n := 0 to BlockEnd-1 do begin
    k := j + BlockEnd;
    tr := ar*RealOut[k] - ai*ImagOut[k];
    ti := ar*ImagOut[k] + ai*RealOut[k];
    RealOut[k] := RealOut[j] - tr;
    ImagOut[k] := ImagOut[j] - ti;
    RealOut[j] := RealOut[j] + tr;
    ImagOut[j] := ImagOut[j] + ti;
    delta_ar := alpha*ar + beta*ai;
    ai := ai - (alpha*ai - beta*ar);
    ar := ar - delta_ar;
    INC(j);
  end;

  i := i + BlockSize;
end;
BlockEnd := BlockSize;
BlockSize := BlockSize SHL 1;
end;
end;
```

```
procedure fft (
  NumSamples: word;
  var RealIn: array of double;
  var ImagIn: array of double;
  var RealOut: array of double;
  var ImagOut: array of double );
```

```
begin
```

```
    FourierTransform ( 2*PI, NumSamples, RealIn, ImagIn, RealOut, ImagOut );
```

```
end;
```

```
procedure ifft (
```

```
    NumSamples: word;
```

```
    var RealIn: array of double;
```

```
    var ImagIn: array of double;
```

```
    var RealOut: array of double;
```

```
    var ImagOut: array of double );
```

```
var
```

```
    i: word;
```

```
begin
```

```
    FourierTransform ( -2*PI, NumSamples, RealIn, ImagIn, RealOut, ImagOut );
```

```
for i := 0 to NumSamples-1 do begin
```

```
    RealOut[i] := RealOut[i] / NumSamples;
```

```
    ImagOut[i] := ImagOut[i] / NumSamples;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
type
```

```
    doubleArray = array [0..0] of double;
```

```
var
```

```
    RealTemp, ImagTemp: ^doubleArray;
```

```
    TempArraySize: word;
```

```
procedure fft_integer (
```

```
    NumSamples: word;
```

```
    var RealIn: array of integer;
```

```
    var ImagIn: array of integer;
```

```
    var RealOut: array of double;
```

```
    var ImagOut: array of double );
```

```
var
  i: word;
begin
  if NumSamples > TempArraySize then begin
    fft_integer_cleanup; { free up memory in case we already have some. }
    GetMem ( RealTemp, NumSamples * sizeof(double) );
    GetMem ( ImagTemp, NumSamples * sizeof(double) );
    TempArraySize := NumSamples;
  end;

  for i := 0 to NumSamples-1 do begin
    RealTemp^[i] := RealIn[i];
    ImagTemp^[i] := ImagIn[i];
  end;

  FourierTransform (
    2*PI,
    NumSamples,
    RealTemp^, ImagTemp^,
    RealOut, ImagOut );
end;

procedure fft_integer_cleanup;
begin
  if TempArraySize > 0 then begin
    if RealTemp <> NIL then begin
      FreeMem ( RealTemp, TempArraySize * sizeof(double) );
      RealTemp := NIL;
    end;

    if ImagTemp <> NIL then begin
```



```
FreeMem ( ImagTemp, TempArraySize * sizeof(double) );
ImagTemp := NIL;
end;
TempArraySize := 0;
end;
end;

procedure CalcFrequency (
  NumSamples: word;    { trebuie să fie întreg. pozitiv. putere a lui 2 }
  FrequencyIndex: word; { trebuie să fie în ordinea 0 .. NumSamples-1 }
  var RealIn: array of double;
  var ImagIn: array of double;
  var RealOut: double;
  var ImagOut: double );
var
  k: word;
  cos1, cos2, cos3, theta, beta: double;
  sin1, sin2, sin3: double;
begin
  RealOut := 0.0;
  ImagOut := 0.0;
  theta := 2*PI * FrequencyIndex / NumSamples;
  sin1 := sin ( -2 * theta );
  sin2 := sin ( -theta );
  cos1 := cos ( -2 * theta );
  cos2 := cos ( -theta );
  beta := 2 * cos2;
  for k := 0 to NumSamples-1 do begin
    sin3 := beta*sin2 - sin1;
    sin1 := sin2;
    sin2 := sin3;
```

```
cos3 := beta*cos2 - cos1;
```

```
cos1 := cos2;
```

```
cos2 := cos3;
```

```
RealOut := RealOut + RealIn[k]*cos3 - ImagIn[k]*sin3;
```

```
ImagOut := ImagOut + ImagIn[k]*cos3 + RealIn[k]*sin3;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
begin { Unitate de inițializare cod }
```

```
TempArraySize := 0; {indică bufferii RealTemp. Reallmag nealocați}
```

```
RealTemp := NIL;
```

```
ImagTemp := NIL;
```

```
end.
```

Evaluarea vibrațiilor compresoarelor industriale de aer de 50 și 100 m³/min cu ajutorul computerului.

3.1 Noțiuni introductive

Compresoarele de aer tip L - 50 și L - 100, de 50 și respectiv 100 m³/min. reprezintă produse industriale performante fabricate la SC UCMR SA, începând cu mijlocul deceniului VIII al secolului XX. Ele au importanță economică deosebit de mare, deoarece constituie surse de energie pentru acționările pneumatice, servo-comenzi pneumatice, mijloace de ventilare forțată a minelor de extracție a metalelor și a cărbunilor ș.a. [80]

Construcția suplă a carcasei prototipului de compresor conduce la economii însemnate de materiale, dar la funcționare apar vibrații mecanice nedorite, care produc solicitări periculoase de oboseală, cu reducerea fiabilității unor subansamble, distrugerea prematură a rulmenților și poluarea prin zgomot a mediului ambiant.

Reducerea vibrațiilor mecanice și înlăturarea efectelor dăunătoare ale acestora, se poate face numai prin cercetări experimentale efectuate direct pe carcusele compresoarelor, care apoi se prelucrează statistic prin programare pe calculatoarele cifrice de medie și mare performanță.

Carcusele compresoarelor industriale tip L - 50 și L - 100 sunt sisteme materiale complexe de tipul mediilor continue, cu proprietăți elastice și cu o înfinitate de grade de libertate. Deci studiul vibrațiilor aleatoare ale acestor compresoare necesită folosirea unor metode specifice și elevate de determinare pentru: densitatea spectrală de putere, spectrul vibrației aleatoare, funcțiile de autocorelație, funcțiile de intercorelație, etc., pentru o evaluare calitativă de mare acuratețe a fenomenului de generare a acestora.

Rezultatele studiilor vibrațiilor mecanice conduc la soluții constructive și de izolarea vibrațiilor, adoptate de firma constructoare, pentru creșterea performanțelor calitative ale proceselor tehnologice deservite, a silențiozității și a fiabilității compresoarelor studiate.

3.2 Procedee și aparate de măsurare a vibrațiilor

Analiza vibrațiilor mecanice se poate face prin determinarea experimentală și prin calcul numeric a celor trei mărimi cinematice fundamentale:

- amplitudinea vibrației;
- viteza vibrației;
- accelerația vibrației.

Parametrii cinematici ai vibrațiilor sunt legați între ei prin operații de integrare în raport cu timpul, pornind de la accelerație spre viteză și deplasarea punctului de măsurare. Acest aspect dă posibilitatea ca măsurarea vibrațiilor să se facă cu traductoare de accelerație de mare sensibilitate, având erorile sub $\pm 5\%$, cu mase și dimensiuni de gabarit reduse, cu domeniu de frecvență mare, fabricate de firma Bruel & Kjaer (Danemarca). Aceste traductoare nu modifică masa carcaselor vibratorii și permit amplasarea pe suprafețe mici, în punctele depistate ca aflate pe zone critice. Traductoarele se fixează magnetic pe carcasa compresorului.

Procedeul de măsurare a presupus parcurgerea a două etape succesive la măsurarea vibrațiilor:

a) depistarea zonelor de maximă valoare a parametrilor cinematici, cu ajutorul unui aparat portabil de măsurare a vibrațiilor tip "Vibrationprufer V.P. 102" produs de firma R. F. T. (Germania), care este independent de frecvența vibrațiilor:

b) efectuarea măsurătorilor de înregistrare a variației în timp a parametrilor cinematici ai vibrațiilor în mai multe puncte de pe carcasa compresorului, aflate în zonele de valori maxime, depistate în etapa precedentă, folosind montaje electronice complexe, având schema bloc conform figurii 2.5 și cu traductori dinamici performanți de accelerație, de fabricație Bruel & Kjaer. Prelucrarea parametrului cinematic măsurat permite reprezentarea sa în funcție de frecvența vibrației, obținând o reprezentare spectrală ca în fig.3.1 .

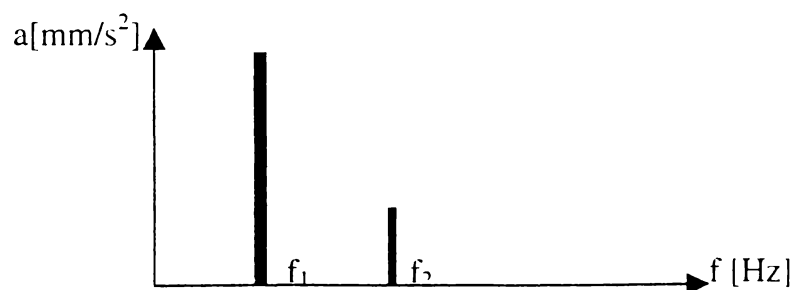


Fig.3.1. Reprezentarea spectrală a accelerației vibrației.

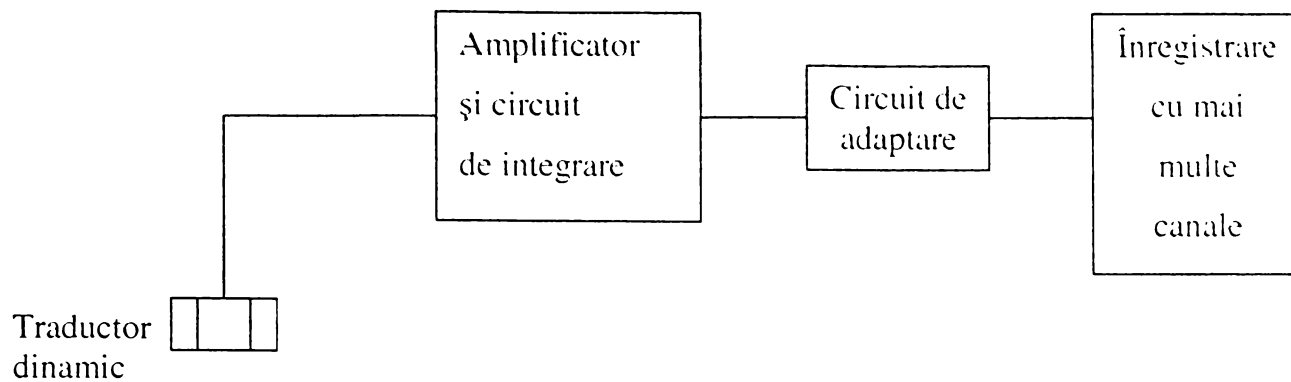


Fig.3.2. Schema bloc a montajului electronic folosit la înregistrarea variației în timp parametrilor vibrațiilor

Spectrograma vibrațiilor mecanice măsurate se poate ridica automat utilizând un set de filtre la analizorul de frecvență, conform schemei bloc din figura 3.3.a).

Spectrograma vibrațiilor obținută automat are aspectul din figura 3.3.b), care prezintă accelerațiile a [mm/s^2], date în funcție de frecvența f [Hz].

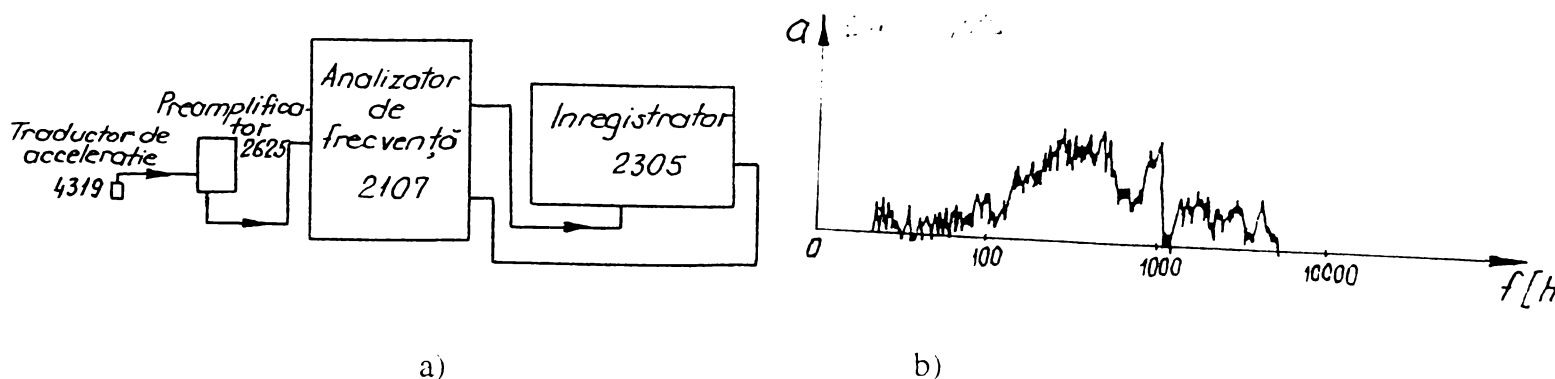


Fig.3.3 a) Schema bloc a montajului electronic folosit la ridicarea automată a spectrogramei vibrațiilor; b) Spectrograma obținută automat

Vibrațiile mecanice ale carcasei compresoarelor L - 50 și L - 100 au de regulă frecvențe joase. La analiza acestora se folosesc montaje electronice pentru transformarea frecvenței. Înregistrarea semnalelor pe o bandă magnetică de la traductorul de accelerație se face cu o viteză de înregistrare joasă, folosind schema bloc din figura 3.4.a), iar redarea semnalului și analiza automată a frecvenței - cu schema bloc din figura 3.4 b).

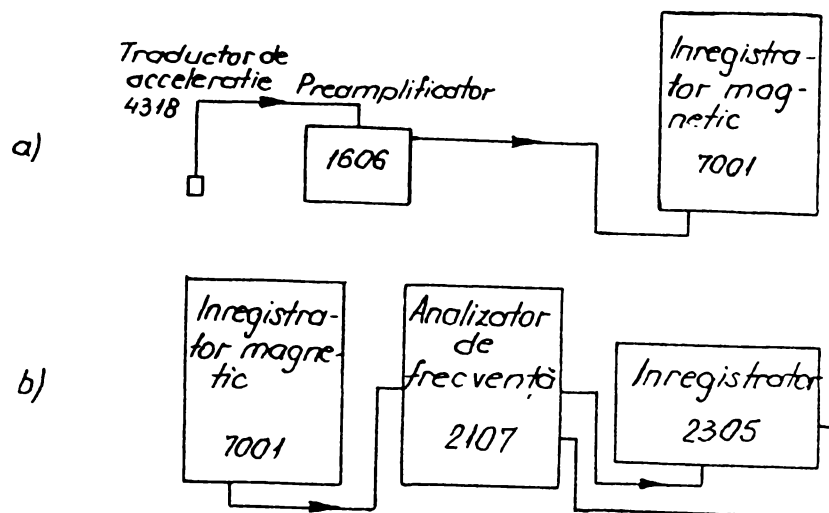


Fig.3.4. Scheme bloc pentru măsurători cu înregistrare magnetică pentru vibrații de joasă frecvență

3.3 Cerințe impuse la culegerea datelor experimentale

Pentru a oglindi fidel fenomenul real la determinarea vibrațiilor mecanice ale compresoarelor de aer tip L - 50 și L - 100 se impune respectarea unei mulțimi de cerințe, dintre care se citează câteva considerate de mare importanță:

- Etalonarea traductoarelor să se facă cu precizie ridicată, iar instalarea aparaturii de măsurare să se facă în acord cu schemele bloc concepute și cu normele de utilizare prescrise de firmele furnizoare;
- Culegerea datelor experimentale să se facă cu mare grijă, cu notarea atentă a parametrilor înregistrați, pentru ca prelucrarea ulterioară să se facă fără echivoc și fără erori;
- Numărul punctelor de măsurare a parametrilor vibrațiilor să fie suficient de mare și alese în zonele de solicitare maximă, pentru ca studiul computerizat să fie complet și edificator;
- Măsurătorile să se facă în condiții corespunzătoare, fără apariția unor vibrații parazite necunoscute, provenite de la utilaje vecine sau de la fundația clădirii;
- Culegerea datelor experimentale să se facă pentru toate regimurile de exploatare preconizate ale compresoarelor încercate, pornind de la sarcini parțiale și terminând cu sarcinile maxime prescrise de cartea tehnică a mașinii.

Aceste cerințe au fost riguros satisfăcute și se apreciază că rezultatele obținute la determinarea vibrațiilor mecanice ale compresoarelor de aer tip L - 50 și L - 100 prezintă rigurozitate științifică elevată.

3.4 Prelucrarea datelor experimentale

3.4.1 Determinarea caracteristicilor statistice elementare

Folosind computerul, în ipoteza că semnalele îndeplinesc condițiile de staționaritate și ergodicitate, se pot determina caracteristicile statistice ale vibrațiilor, [20], [21].

Semnalul temporal $x(t)$ a fost înregistrat experimental sub forma unei dependențe continue de timp (funcție analogică) a deplasării (elongației), vitezei sau accelerației punctului material aflat în vibrație. Pentru a fi introduse în calculator funcția analogică $x(t)$ este eșantionată sub formă numerică:

$$x(n) = x(t_0 + nT_e) \quad (1)$$

în care: t_0 este originea arbitrară a timpului; T_e - perioada de eșantionare; $n = 1, 2, 3, \dots, N$ număr întreg pozitiv; N - numărul maxim al intervalelor de eșantionare.

Durata de înregistrare a funcției semnal $x(t)$ are expresia:

$$T = N \cdot T_e \quad (2)$$

După eșantionare se face despuierea manuală sau cu ajutorul unui convertor analog numeric (CAN).

Se face operația de centrare cu expresia:

$$x_0(n) = x(n) - \mu_x, \quad (3)$$

unde $\mu_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x(n)$ reprezintă valorile medii teoretice.

Valoarea medie a pătratului este dată de relația:

$$\psi^2_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x^2(n) \quad (4)$$

Dispersia are expresia:

$$D_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x^2_0(n) \quad (5)$$

Valoarea medie pătratică este: $\sigma_x = +\sqrt{D_x}$. (6)

Suplimentar caracteristicilor statistice elementare, prezentate anterior, se mai poate determina funcția de densitate a probabilității care se calculează cu expresia:

$$p(x) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(\Delta x_k \leq x \leq x_k)}{\Delta x_k} \quad (7)$$

Această funcție se obține din analiza semnalului temporal după mărimea amplitudinei, prin analiza multicanal, care efectuează histograma semnalului $x(n)$.

3.4.2 Determinarea caracteristicilor statistice de ordin superior

În final se determină caracteristicile statistice de ordin superior, [13], exprimate sub formă numerică pentru a fi calculate de calculator, astfel:

a) funcția de autocovarianță

$$C_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{n=0}^{N-k} x_0(n) \cdot x_0(n+k), \quad (8)$$

$$C_{yy}(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{n=0}^{N-k} y_0(n) \cdot y_0(n+k), \quad (9)$$

b) funcția de intercovarianță

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{n=0}^{N-k} x_0(n) \cdot y_0(n+k), \quad (10)$$

c) funcția de autocorelație

$$R_{xx}(k) = C_{xx}(k) + \mu_x^2 \quad (11)$$

d) funcția de intercorelație

$$R_{xy}(k) = C_{xy}(k) + \mu_x \cdot \mu_y \quad (12)$$

Observație: Analiza armonică a vibrațiilor se poate aborda utilizând transformata Fourier.

3.4.3 Analiza armonică a vibrațiilor

Se utilizează o realizare reprezentativă a procesului aleator eșantionat $x(n)$ ca funcție semnal temporală și se determină transformata Fourier a acesteia, care exprimă reprezentarea frecvențială a semnalului considerat, adică:

$$X(q) = 2T_e \cdot \sum_{n=1}^N x_0(n) \cdot \left[\cos \frac{\pi q}{Q} - j \cdot \sin \frac{\pi q}{Q} \right], \quad (13)$$

în care $X(q)$ reprezintă linia spectrală a semnalului la frecvența curentă $f = q \cdot \Delta f$, iar Δf este finețea spectrului și q - ordinul liniei spectrale.

Dacă spectrul are în total Q linii, banda spectrului este:

$$B = q \cdot \Delta f. \quad (14)$$

Expresia transformatei Fourier se poate pune sub formă concentrată:

$$X(q) = Ax(q) - j \cdot Bx(q), \quad (15)$$

din care se determină modulul amplitudinii vibrației:

$$X(q) = \sqrt{[Ax(q)]^2 + [Bx(q)]^2} \quad (16)$$

și faza vibrației:

$$\varphi = \arctg \left(- \frac{Bx(q)}{Ax(q)} \right) \quad (17)$$

Modulul amplitudinii vibrației $X(q)$ se măsoară în aceleași unități de măsură ca și funcția semnal $x(n)$.

Transformata Fourier prezentată anterior se poate realiza cu ajutorul echipamentelor numerice denumite transformatoare Fourier, sau prin programare pe calculatorul cifric de medie sau mare performanță.

3.4.4 Determinarea funcțiilor de densitate spectrală de putere

Transformatele Fourier ale funcțiilor de covarianță reprezintă densitățile spectrale de putere. Astfel, se calculează [70]:

a) densitatea spectrală proprie de putere

$$G_{xx}(q) = 4T_e \sum_{k=0}^K Fe(k) \cdot C_{xx}(k) \cdot \cos \frac{\pi \cdot q}{Q} \quad (18)$$

în care $Fe(k)$ este fereastra de ponderare.

b) densitatea spectrală reciprocă de putere

$$G_{xy}(q) = 2T_e \sum_{k=0}^K Fe(k) \cdot C_{xy}(k) \cdot \left[\cos \frac{\pi \cdot q}{Q} - j \sin \frac{\pi \cdot q}{Q} \right], \quad (19)$$

adică

$$G_{xy}(q) = A_{xy}(q) - j \cdot B_{xy}(q), \quad (20)$$

deci modulul

$$G_{xy}(q) = M(q) = \sqrt{[A_{xy}(q)]^2 + [B_{xy}(q)]^2} \quad (21)$$

și faza

$$\varphi_{xy}(q) = \arctg \left[-\frac{B_{xy}}{A_{xy}} \right] \quad (22)$$

Fereastra de ponderare are rolul de a suprima lobii laterali ai spectrului eșantionat pentru a evita interferența acestora cu liniile spectrale ale lobului central, aflate în apropierea frecvenței de eșantionare. Dintre ferestrele frecvent utilizate se menționează [135]:

- fereastra lui Barlett, cu expresia

$$F(k) = 1 - k/K, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (23)$$

- fereastra lui Hanning, dată de expresia

$$F(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \cdot k}{K} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K. \quad (24)$$

Analiza frecvențială a semnalelor prin determinarea funcțiilor de densitate spectrală de putere au la bază calculul cu ajutorul funcțiilor de corelație și acestea au avantajul că elimină influența nefavorabilă a perturbațiilor și a zgomotelor suprapuse peste semnalul util, la operațiile de înregistrare, amplificare și transmitere prin conductorii de legătură.

3.4.5 Adaptarea parametrilor de analiză spectrală la măsurătorile de vibrații ale compresoarelor de aer L - 50 și L - 100

La eșantionarea semnalului măsurat s-a admis o perioadă de $T_e = 0.01$ s. deci frecvența de eșantionare are mărimea:

$$F_e = 1/T_e = 1/0,01 = 100 \text{ Hz.}$$

În condițiile de eșantionare limită, conform teoremei lui Shannon, banda semnalului are mărimea:

$$B = F_e/2 = 100/2 = 50 \text{ Hz}$$

Alegând o rezoluție convenabilă $\Delta f = 1$ Hz, numărul de linii spectrale distincte vor fi:

$$Q = B/\Delta f = 50/1 = 50 \text{ linii.}$$

Mărimea timpului de retardare maxim este:

$$\tau_m = 1/\Delta f = n \cdot 1/1 = 1 \text{ s.}$$

Funcția de corelație se calculează într-un număr de puncte:

$$K = 2 \cdot Q = 2 \cdot 50 = 100,$$

iar dacă coeficientul de prelevare se alege $x = 2$, rezultă numărul de puncte de eșantionare a funcției semnal $x(t)$:

$$N = x \cdot K = 2 \cdot 100 = 200,$$

iar durata de înregistrare a realizării caracteristice a semnalului aleator este:

$$T = N \cdot T_e = 200 \cdot 0,01 = 2 \text{ s,}$$

interval de timp redus, iar fenomenul se poate considera staționar și ergodic.

Parametri cinematici ai vibrațiilor (deplasări, viteze, accelerații) au fost măsurați pe carcasa compresorului L - 50 și L - 100, în punctele depistate cu valori maxime, prin încercări prealabile de tatonare. În figurile 3.5 și 3.6 se prezintă puntele de măsurare stabilite pentru amplasarea traductorilor de vibrații, notate cu cifre arabe: 1, 2,, 27, indicate cu săgeți, iar carcasa compresorului este raportată la un sistem triortogonal de axe xOyz.

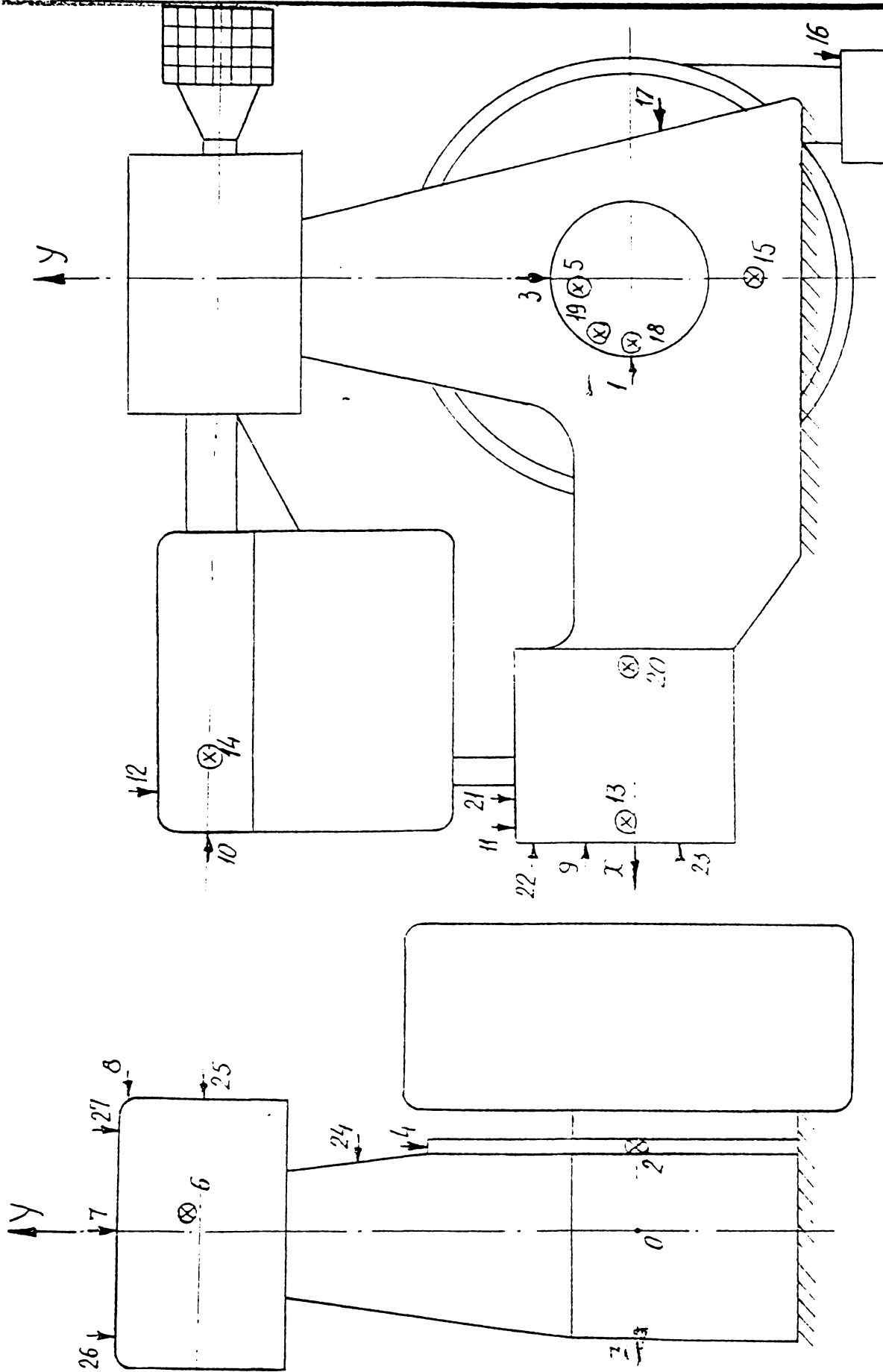


Fig.3.5. Poziția punctelor de măsurare pe vederea longitudinală și frontală a carcasei

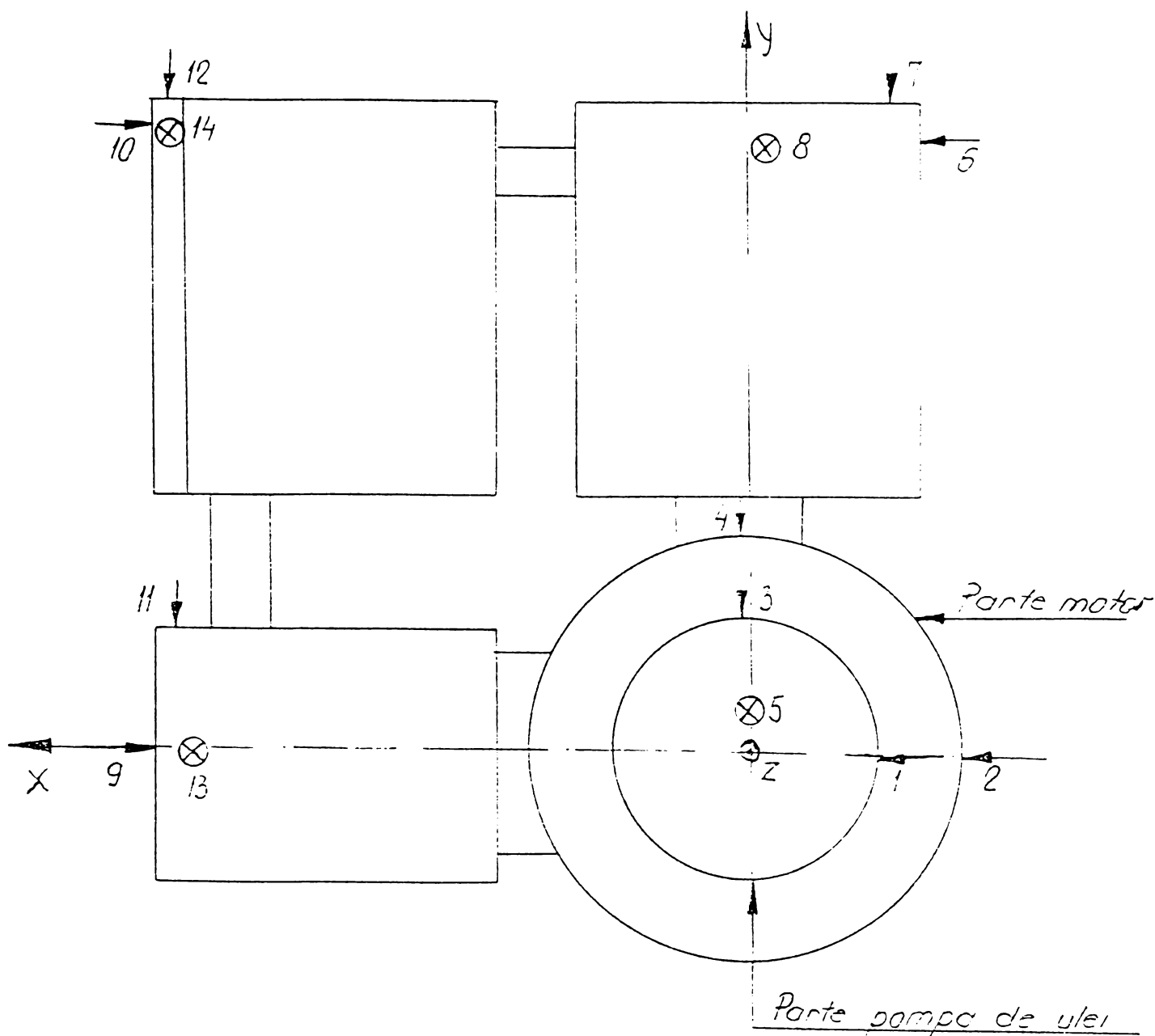


Fig.3.6. Poziția punctelor de măsurare pe vederea longitudinală a carcasei opusă celei din Fig.3.5

Înregistrarea parametrilor vibrațiilor s-a făcut automat pe cele trei axe de coordonate, diagramele fiind înregistrate pe hârtie fotosensibilă la raze ultraviolete, cu marcarea luminoasă automată a intervalelor de timp la fiecare 0.01 s. Despuieră datelor se poate face manual, necesitând un mare volum de muncă, sau automat utilizând un convertor analog numeric.

Prelucrarea datelor pe calculator s-a făcut prin elaborarea unui program de calcul, pe baza ordinogramei din figura 3.7.

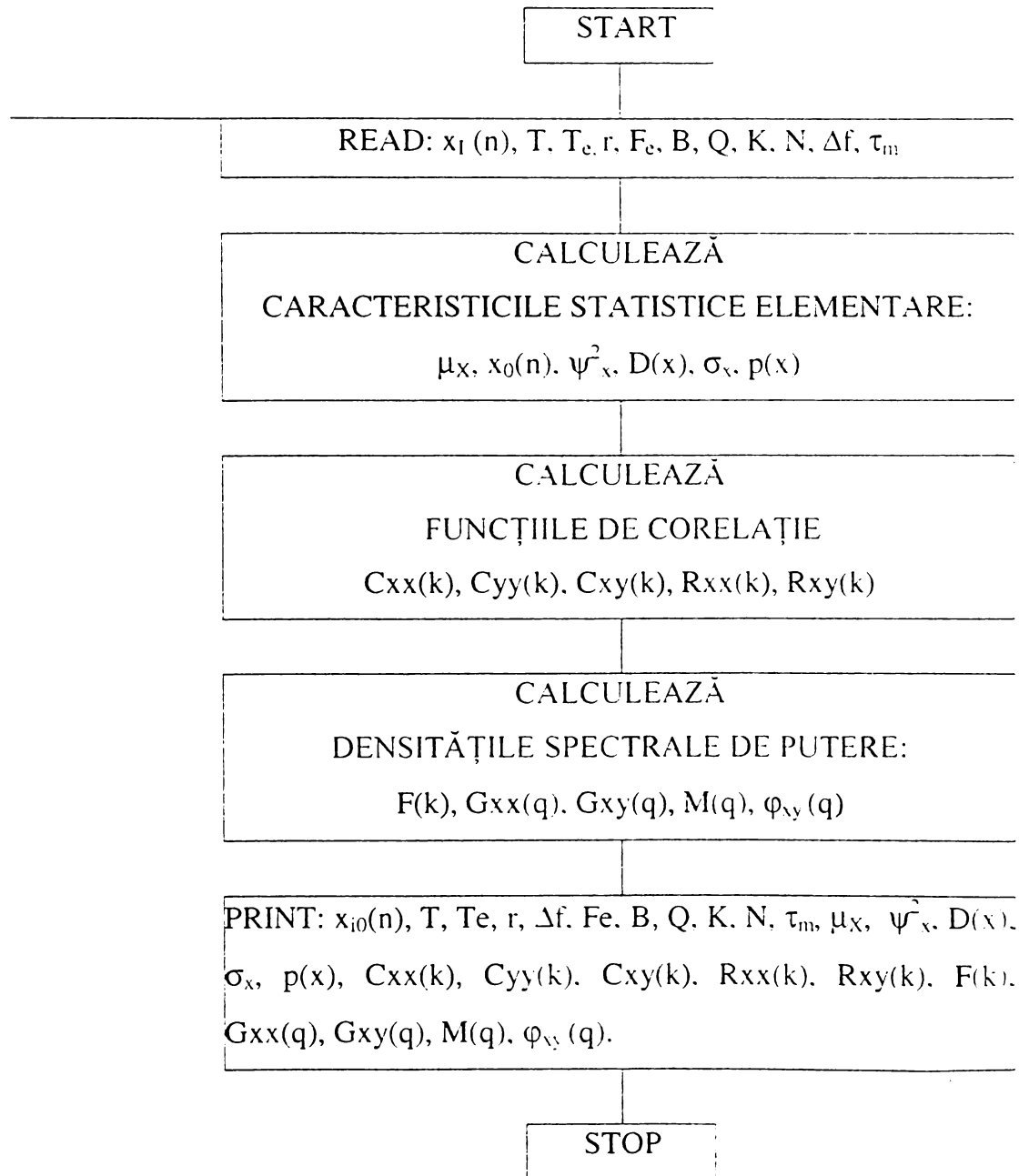


Fig.3.7. Ordinograma de calcul a caracteristicilor vibrațiilor carcaselor compresoarelor de aer L - 50 și L - 100

3.4.6 Analiza și interpretarea datelor experimentale

După rularea pe calculator a programelor întocmite conform ordinogramei prezentate anterior, sau centralizat rezultatele numeric în tabele, pentru fiecare tip de compresor, funcționând la diferite sarcini parțiale și de regim, pentru toate cele 27 de puncte de măsurare (grupate câte trei), cu valorile deplasărilor s [mm], pe cele trei axe de coordonate.

În final s-au trasat diagramele densității spectrale de putere corespunzătoare, care au evidențiat mărimea frecvențelor unde apar vârfuri și care sunt periculoase, exemplificarea se poate face prin figurile 3.8 și 3.9, trasate pentru compresorul L - 50 la o sarcină corespunzătoare comprimării aerului la presiunea $p = 8$ atm.

Analiza mărimilor funcțiilor de autocorelație și intercorelație permit stabilirea unor legături între parametri vibrațiilor unor puncte de pe carcasa compresorului studiat.

Mulțimea datelor experimentale culese, prelucrate computerizat, au permis și alte concluzii eficiente constructive de reducere a vibrațiilor și creșterea fiabilității compresoarelor de aer L - 50 și L - 100.

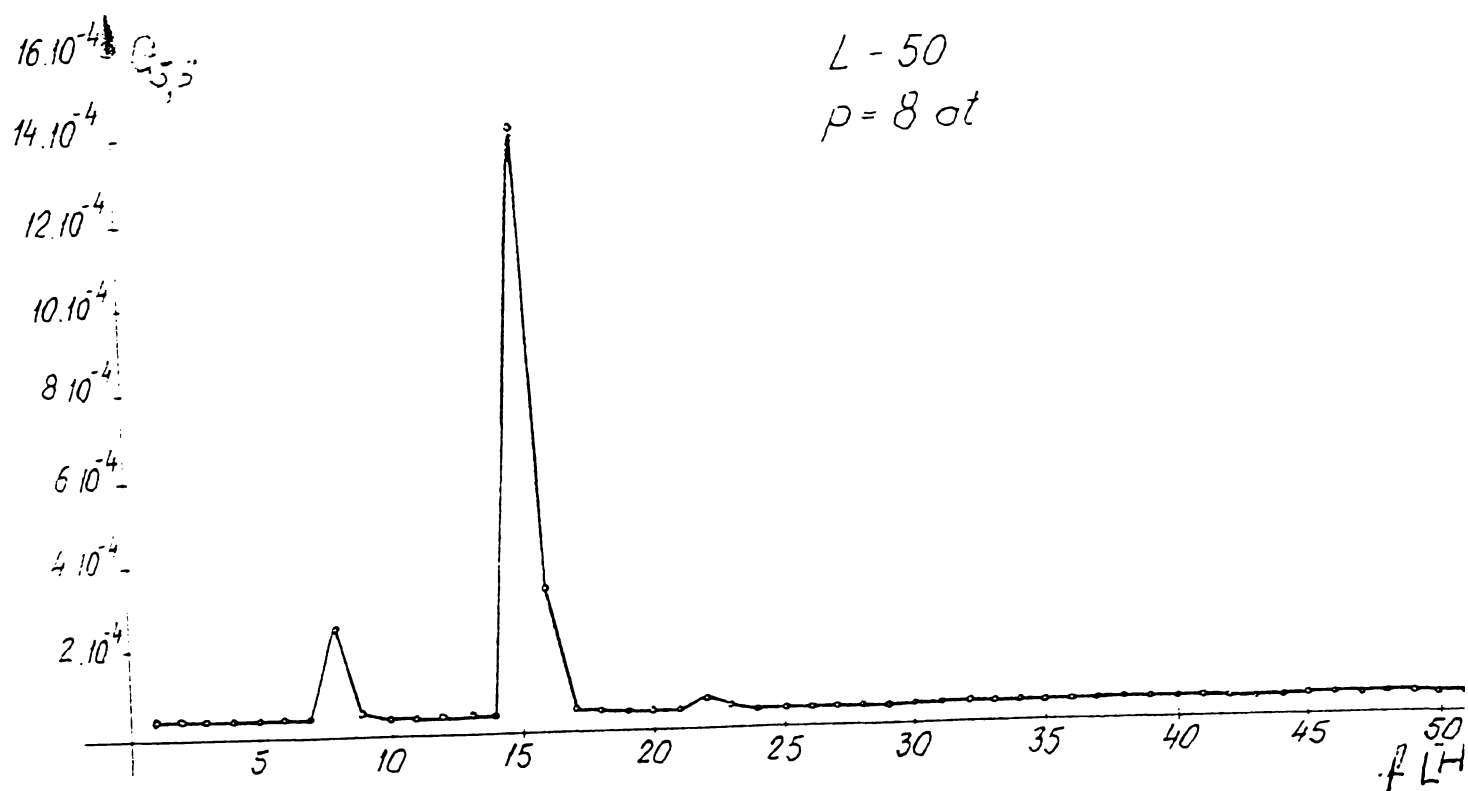


Fig.3.8 Densitatea spectrală de putere pentru compresorul L - 50, funcționând în regimul corespunzător presiunii aerului $p = 8$ at. pentru punctul 5 de măsurare

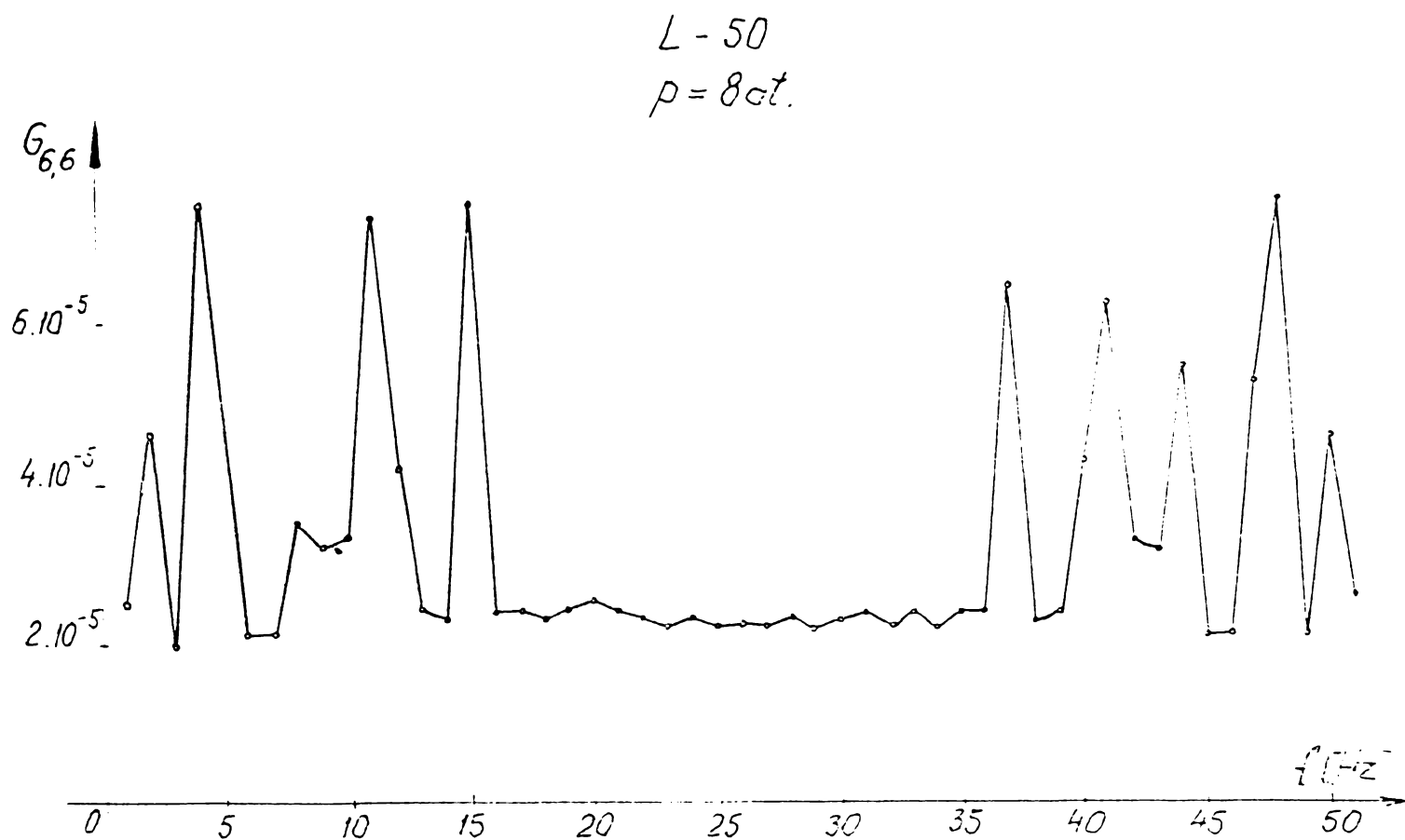


Fig.3.9 Densitatea spectrală de putere pentru compresorul L - 50, funcționând în regimul corespunzător presiunii aerului $p = 8 \text{ atm.}$ pentru punctul 6 de măsurare.

Concluzii

În urma rulării pe calculator a programelor întocmite s-a determinat densitatea spectrală de putere a vibrațiilor reprezentate grafic și care au permis evaluarea frecvențelor de funcționare, periculoase cu efecte nefavorabile asupra durabilității rulmenților de sprijin ai arborilor cotiți.

Funcțiile de autocorelație și de intercorelație au permis evidențierea legăturilor dintre vibrațiile din diferite puncte de pe carcasa compresorului și sursa producătoare de vibrații.

În final, s-au făcut evaluări referitoare la valorile centrate ale funcțiilor. autocorelația, autocovarianța, fereastra lui Hanning și autospectrul pentru grupaje de câte trei puncte semnificative de pe carcasa compresorului.

ANEXA 4.

Program C++ pentru determinarea coeficienților Walsh cu ordonare după Paley

Se consideră o dezvoltare în serie Walsh cu ordonare după Paley ca la punctul 2 al paragrafului 3.1., relațiile (3.5), (3.6) și (3.7), pentru care se determină coeficienții Walsh.

```
#ifndef CWP_H
#define CWP_H

/* INCLUDES */

#include <stdio.h>
#include <stddef.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>
#include <limits.h>
#include <float.h>

/* TYPEDEFS */

#ifndef __cplusplus /* if not C++, definește C structură
complexă */
typedef struct _complexStruct { /* număr complex */
    float r,i;
} complex;
#else /* if C++, define the C++ clasa complexă */
#include "Complex.h"
#endif /* C++ */

/* DEFINES */
/* uncomment the next block if you are installing */
/* under ultrix, but not using the GCC compiler */

/*
#ifdef ultrix
#define const
#endif
*/

#ifndef NULL
#define NULL ((void *)0)
#endif
#ifndef EXIT_FAILURE
#define EXIT_FAILURE (1)
#endif
#ifndef EXIT_SUCCESS
```

```
#define EXIT_SUCCESS (0)
#endif
#ifndef SEEK_SET
#define SEEK_SET (0)
#endif
#ifndef SEEK_CUR
#define SEEK_CUR (1)
#endif
#ifndef SEEK_END
#define SEEK_END (2)
#endif
#ifndef PI
#define PI (3.141592653589793)
#endif
#ifndef TRUE
#define TRUE (1)
#endif
#ifndef FALSE
#define FALSE (0)
#endif
#ifndef YES
#define YES (1)
#endif
#ifndef NO
#define NO (0)
#endif
#ifndef SGN
#define SGN(x) ((x) < 0 ? -1.0 : 1.0)
#endif
#ifndef ABS
#define ABS(x) ((x) < 0 ? -(x) : (x))
#endif
#ifndef MAX
#define MAX(x,y) ((x) > (y) ? (x) : (y))
#endif
#ifndef MIN
#define MIN(x,y) ((x) < (y) ? (x) : (y))
#endif
#define NINT(x) ((int)((x)>0.0?(x)+0.5:(x)-0.5))
#define CLOSETO(x, y) (ABS((x) - (y)) <= FLT_EPSILON*ABS(y))
#define ISODD(n) ((n) & 01)
#define ISIZE sizeof(int)
#define FSIZE sizeof(float)
#define DSIZE sizeof(double)
#define STREQ(s,t) (strcmp(s,t) == 0)
#define STRLT(s,t) (strcmp(s,t) < 0)
#define STRGT(s,t) (strcmp(s,t) > 0)
#define DIM(a) (sizeof(a)/sizeof(a[0]))
```

```
/* FUNCTION PROTOTYPES */

#ifdef __cplusplus /* if C++, specify external linkage to C
functions */
extern "C" {
#endif

/* allocate and free multi-dimensional arrays */
void *alloc1 (size_t n1, size_t size);
void *realloc1 (void *v, size_t n1, size_t size);
void **alloc2 (size_t n1, size_t n2, size_t size);
void ***alloc3 (size_t n1, size_t n2, size_t n3, size_t size);
void ****alloc4 (size_t n1, size_t n2, size_t n3, size_t n4,
size_t size);
void free1 (void *p);
void free2 (void **p);
void free3 (void ***p);
void free4 (void ****p);
int *alloc1int (size_t n1);
int *realloc1int (int *v, size_t n1);
int **alloc2int (size_t n1, size_t n2);
int ***alloc3int (size_t n1, size_t n2, size_t n3);
float *alloc1float (size_t n1);
float *realloc1float (float *v, size_t n1);
float **alloc2float (size_t n1, size_t n2);
float ***alloc3float (size_t n1, size_t n2, size_t n3);
double *alloc1double (size_t n1);
double *realloc1double (double *v, size_t n1);
double **alloc2double (size_t n1, size_t n2);
double ***alloc3double (size_t n1, size_t n2, size_t n3);
complex *alloc1complex (size_t n1);
complex *realloc1complex (complex *v, size_t n1);
complex **alloc2complex (size_t n1, size_t n2);
complex ***alloc3complex (size_t n1, size_t n2, size_t n3);
void free1int (int *p);
void free2int (int **p);
void free3int (int ***p);
void free1float (float *p);
void free2float (float **p);
void free3float (float ***p);
void free1double (double *p);
void free2double (double **p);
void free3double (double ***p);
void free1complex (complex *p);
void free2complex (complex **p);
void free3complex (complex ***p);

#ifdef __cplusplus
/* complex number manipulation */
complex cadd (complex a, complex b);
complex csub (complex a, complex b);

```

```
complex cmul (complex a, complex b);
complex cdiv (complex a, complex b);
float rcabs (complex z);
complex cmplx (float re, float im);
complex conjg (complex z);
complex cneg (complex z);
complex cinv (complex z);
complex csqrt (complex z);
complex cexp (complex z);
complex crmul (complex a, float x);
#endif /* C++ */

/* big matrix handler */
void *bmalloc (int nbpe, int n1, int n2);
void bmfree (void *bm);
void bmread (void *bm, int dir, int k1, int k2, int n, void
*v);
void bmwrite (void *bm, int dir, int k1, int k2, int n, void
*v);

/* interpolation */
float fsinc (float x);
double dsinc (double x);
void mksinc (float d, int lsinc, float sinc[]);
void ints8r (int nxin, float dxin, float fxin, float yin[],
float yinl, float yinr, int nxout, float xout[], float
yout[]);
void ints8c (int nxin, float dxin, float fxin, complex yin[],
complex yinl, complex yinr, int nxout, float xout[],
complex yout[]);
void intt8r (int ntable, float table[][8],
int nxin, float dxin, float fxin, float yin[],
float yinl, float yinr, int nxout, float xout[], float
yout[]);
void intt8c (int ntable, float table[][8],
int nxin, float dxin, float fxin, complex yin[],
complex yinl, complex yinr, int nxout, float xout[],
complex yout[]);
void ress8r (int nxin, float dxin, float fxin, float yin[],
float yinl, float yinr,
int nxout, float dxout, float fxout, float yout[]);
void ress8c (int nxin, float dxin, float fxin, complex yin[],
complex yinl, complex yinr,
int nxout, float dxout, float fxout, complex yout[]);
void shfs8r (float dx, int nxin, float fxin, float yin[],
float yinl, float yinr, int nxout, float fxout, float
yout[]);
void xindex (int nx, float ax[], float x, int *index);
void intl2b (int nxin, float dxin, float fxin,
int nyin, float dyin, float fyin, unsigned char *zin,
int nxout, float dxout, float fxout,
```

```
    int nyout, float dyout, float fyout, unsigned char *zout);
void intlin (int nin, float xin[], float yin[], float yinl,
float yinr,
    int nout, float xout[], float yout[]);
void intcub (int ideriv, int nin, float xin[], float
ydin[][4],
    int nout, float xout[], float yout[]);
void cakima (int n, float x[], float y[], float yd[][4] );
void cmonot (int n, float x[], float y[], float yd[][4]);
void csplin (int n, float x[], float y[], float yd[][4]);
void yxtoxy (int nx, float dx, float fx, float y[],
    int ny, float dy, float fy, float xylo, float xyhi, float
x[]);

/* Butterworth filters */
void bfhighpass (int npoles, float f3db, int n, float p[],
float q[]);
void bflowpass (int npoles, float f3db, int n, float p[],
float q[]);
void bfdesign (float fpass, float apass, float fstop, float
astop,
    int *npoles, float *f3db);

/* differentiator approximations */
void mkdiff (int n, float a, float h, int l, int m, float
d[]);
void mkhdiff (float h, int l, float d[]);
void holbergd1 (float e, int n, float d[]);

/* general signal processing */
void conv (int lx, int ifx, float *x, int ly, int ify, float
*y,
    int lz, int ifz, float *z);
void xcor (int lx, int ifx, float *x, int ly, int ify, float
*y ,
    int lz, int ifz, float *z);
void hilbert (int n, float x[], float y[]);
void antialias (float frac, int phase, int n, float p[], float
q[]);

/* Abel transformer */
void *abelalloc (int n);
void abelfree (void *at);
void abel (void *at, float f[], float g[]);

/* Hankel transformer */
void *hankelalloc (int nfft);
void hankelfree (void *ht);
void hankel0 (void *ht, float f[], float h[]);
void hankel1 (void *ht, float f[], float h[]);
```

```
/* sorting and searching */
void hpsort (int n, float a[]);
void qksort (int n, float a[]);
void qkfind (int m, int n, float a[]);
void qkisort (int n, float a[], int i[]);
void qkifind (int m, int n, float a[], int i[]);

/* statistics */
float quest (float p, int n, float x[]);
void *questalloc (float p, int n, float x[]);
float questupdate (void *q, int n, float x[]);
void questfree (void *q);

/* PC byte swapping */
void swap_short_2(short *tni2);
void swap_u_short_2(unsigned short *tni2);
void swap_int_4(int *tni4);
void swap_u_int_4(unsigned int *tni4);
void swap_long_4(long *tni4);
void swap_u_long_4(unsigned long *tni4);
void swap_float_4(float *tnf4);
void swap_double_8(double *tndd8);

/* Prime Factor FFTs */
int npfa (int nmin);
int npfao (int nmin, int nmax);
int npfar (int nmin);
int npfaro (int nmin, int nmax);
void pfacc (int isign, int n, complex z[]);
void pfarc (int isign, int n, float rz[], complex cz[]);
void pfacr (int isign, int n, complex cz[], float rz[]);
void pfa2cc (int isign, int idim, int n1, int n2, complex
z[]);
void pfa2rc (int isign, int idim, int n1, int n2, float rz[],
complex cz[]);
void pfa2cr (int isign, int idim, int n1, int n2, complex
cz[], float rz[]);
void pfamcc (int isign, int n, int nt, int k, int kt, complex
z[]);

/* BLAS (Basic Linear Algebra Subroutines adapted from LINPACK
FORTRAN) */
int isamax (int n, float *sx, int incx);
float sasum (int n, float *sx, int incx);
void saxpy (int n, float sa, float *sx, int incx, float *sy,
int incy);
void scopy (int n, float *sx, int incx, float *sy, int incy);
float sdot (int n, float *sx, int incx, float *sy, int incy);
float snrm2 (int n, float *sx, int incx);
void sscal (int n, float sa, float *sx, int incx);
void sswap (int n, float *sx, int incx, float *sy, int incy);
```

```
int idamax (int n, double *sx, int incx);
double dasum (int n, double *sx, int incx);
void daxpy (int n, double sa, double *sx, int incx, double
*sy, int incy);
void dcopy (int n, double *sx, int incx, double *sy, int
incy);
double ddot (int n, double *sx, int incx, double *sy, int
incy);
double dnrm2 (int n, double *sx, int incx);
void dscal (int n, double sa, double *sx, int incx);
void dswap (int n, double *sx, int incx, double *sy, int
incy);

/* LINPACK functions (adapted from LINPACK FORTRAN) */
void sgeco (float **a, int n, int *ipvt, float *rcond, float
*z);
void sgefa (float **a, int n, int *ipvt, int *info);
void sgesl (float **a, int n, int *ipvt, float *b, int job);
void sqrdc (float **x, int n, int p, float *qraux, int *jpvt,
float *work, int job);
void sqrs1 (float **x, int n, int k, float *qraux,
float *y, float *qy, float *qty,
float *b, float *rsd, float *xb, int job, int *info);
void sqrst (float **x, int n, int p, float *y, float tol,
float *b, float *rsd, int *k,
int *jpvt, float *qraux, float *work);
void dgeco (double **a, int n, int *ipvt, double *rcond,
double *z);
void dgefa (double **a, int n, int *ipvt, int *info);
void dgesl (double **a, int n, int *ipvt, double *b, int job);

/* other linear system solvers */
void stoepd (int n, double r[], double g[], double f[], double
a[]);
void stoepf (int n, float r[], float g[], float f[], float
a[]);
void vanded (int n, double v[], double b[], double x[]);
void vandef (int n, float v[], float b[], float x[]);
void tridif (int n, float a[], float b[], float c[], float
r[], float u[]);
void tridid (int n, double a[], double b[], double c[], double
r[], double u[]);
void tripd(float *d, float *e, float *b, int n);

/* root finding */
int mnewt (int maxiter, float ftol, float dxtol, int n, float
*x, void *aux,
void (*fdfdx)(int n, float *x, float *f, float **dfdx,
void *aux));
```

```
/* transform rectangular => polar and polar => to rectangular
coordinates */
void recttopolar ( int nx, float dx, float fx, int ny, float
dy,
    float fy, float **p, int na, float da, float fa, int nr,
float dr,
    float fr, float **q);
void polartorect ( int na, float da, float fa, int nr, float
dr,
    float fr, float **q, int nx, float dx, float fx, int ny,
float dy,
    float fy, float **p);

/* graphics utilities */
void rfwtva (int n, float z[], float zmin, float zmax, float
zbase,
    int yzmin, int yzmax, int xfirst, int xlast,
    int wiggle, int nbpr, unsigned char *bits);
void scaxis (float x1, float x2, int *nxnum, float *dxnum,
float *fxnum);
int yclip (int nx, float dx, float fx, float y[], float ymin,
float ymax,
    float xc[], float yc[]);

/* special functions */
float airya (float x);
float airyb (float x);
float airyap (float x);
float airybp (float x);

/* timers */
float cpusec (void);
float cputime (void);
float wallsec (void);
float walltime (void);

/* pseudo-random numbers */
float franuni (void);
void sranuni (int seed);
float frannor (void);
void srannor (int seed);

/* miscellaneous */
void pp1d (FILE *fp, char *title, int lx, int ifx, float x[]);
void pplot1 (FILE *fp, char *title, int nx, float ax[]);

#ifdef __cplusplus /* if C++, end external linkage
specification */
}
#endif
#endif /* CWP_H */
```


SUBROUTINE MATLAB UTILIZATE

Adunarea matricilor	$Z = X + Y$
Scăderea matricilor	$Z = X - Y$
Înmulțirea matricilor	$Z = X \cdot Y$
Împărțirea la dreapta a matricilor	$Z = X / Y$
Împărțirea la stânga a matricilor	$Z = X \setminus Y$
Ridicarea la putere	$Z = Z ^ p$
Transpunerea matricii	$Z = Y'$
Inversa matricii	$B = \text{inv} (A)$
Matrice diagonală	$Y = \text{diag} (X)$
Matrice triunghiulară	$Y = \text{triu} (X)$
Norma matricii	$n = \text{norn} (X)$
Valori proprii și vectori proprii ai unei matrici pătrate	$V = \text{eig} (A)$
Factorizarea Cholesky	$R = \text{chol} (A)$
Factorizarea LU (lower-upper)	$\{L, U\} = \text{lu} (X)$
Factorizarea QR (matrici sus și jos triunghiulare)	$\{Q, R\} = \text{qr} (X)$

A B R E V I E R I

FFT [Fast Fourier Transform] – transformata rapidă Fourier
DFT [Discrete Fourier Transform] – transformata discretă Fourier
DDFT [Directe Discrete Fourier Transform] – transformata directă discretă Fourier
TDWH – transformata directă Walsh-Hadamard
TIWH – transformata inversă Walsh-Hadamard
(WHT)_h – transformata Walsh-Hadamard după Hadamard
(WHT)_w – transformata Walsh-Hadamard după Walsh
(WHT)_p – transformata Walsh-Hadamard după Paley
HT [Haar Transform] – transformata Haar
IHT [Inverse Haar Transform] – transformata inversă Haar
PI – element integrator
PID – element integrator-derivat
VMP – valoare medie pătratică
CMMP – metoda celor mai mici pătrate
EEG – semnal electroencefalografic
AEG – autocovarianță
ITSTE – criteriul integral
VCO [Voltage Controlled Oscillator] – oscilator de comandă voltaică
FPER [Final Prediction Error] – predicția finală a erorii
FOPDT [First Order Plus Delay Time] – întârziere de timp de prim ordin
BEFORE [BEnary FOUrier REpresent] – reprezentare binară Fourier
ANN [Artificial Neural Network] – rețea neurală artificială
ARX [AutoRegresive Exogen]
ARMAX [AutoRegresive Moving Average with Exogen Input]
NARMAX [Nonlinear AutoRegresive Moving Average with Exogen Input]
SAR – sistem de reglare automată
SISO [Single Input Single Output] – sistem automat cu o singură intrare și o singură ieșire
MIMO [Multiple Input Multiple Output] – sistem automat cu mai multe intrări și mai multe ieșiri
MATLAB [MATrix LABoratory] – pachet de programe de înaltă performanță dedicat calculului numeric și reprezentărilor grafice
TURBO PASCAL – limbaj de programare performant pentru calcule matematice și reprezentări grafice
C++ limbaj de programare evoluat pentru calcule matematice și reprezentări grafice
LABVIEW – pachet de programe destinat proiectării circuitelor electronice și sistemelor automate
 F_e – frecvența de eșantionare
 T_e – durata de eșantionare
 F_S – frecvența Shannon
 F_N – criteriul lui Nyquist
B – lărgimea de bandă
 λ - lungimea de bandă
 $\delta(t)$ – semnal Dirac
D – operatorul densității spectrale

BIBLIOGRAFIE

- [1] ANDRONESCU, PL. -"Electricitate și Electrotehnică. partea I". Ed. Centr. Stud. Timișoara. 1951;
- [2] ANTONIU, I.S. -"Chestiuni speciale de Electrotehnică", Ed. Acad. București. 1956;
- [3]. AHMED, N., RAO, K.R.- "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing ", in Springer Verlag, Berlin, 1975;
- [4]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Aplicații ale calcului diferențial cu matrici la rezolvarea ecuațiilor diferențiale”.Gazeta tehnico-științifică. U.C.M. și F.I. Reșița. 1992;
- [5]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Noțiuni despre matricele elementare și aplicațiile lor”. Lucrări științifice și tehnice, F.I. Reșița, 1992;
- [6]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Unele metode de determinare a valorilor proprii și a vectorilor proprii ai unei matrici”, Lucrări științifice și tehnice. F.I. Reșița. 1992;
- [7]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Unele proprietăți și aplicații ale transformării conforme”, Lucrări științifice și tehnice, F.I. Reșița, 1992;
- [8]. ANGHEL, I, POPP, C., ANGHEL, C.V. – „Algebră liniară. Geometrie analitică. Geometrie descriptivă”, Culegere de probleme, vol.1, U.E.M. Reșița, 1993;
- [9]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Algebră. Geometrie analitică și diferențială”. Culegere de probleme, vol.II, U.E.M. Reșița, 1993;
- [10]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Funcționale biliniare pe spații numărabil normate”. Sesiunea tehnico-științifică, F.I. Reșița. 1993;
- [11]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Matematici pentru economiști”. Culegere de probleme, vol.I, U.E.M. Reșița, 1994;
- [12]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Calcularea valorilor și vectorilor proprii matricii nehermitiene prin metode algoritmice”, Analele U.E.M. Reșița, 1994;
- [13]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Matematici speciale”, Culegere de probleme, vol.I, U.E.M. Reșița, 1995;
- [14]. ANGHEL, I, ANGHEL, C.V. – „Matematici pentru economiști”, Culegere de probleme, vol.II, U.E.M. Reșița, 1995;
- [15]. ANGHEL, C.V., GÂRLAȘU, Șt., ANGHEL. I. – “Unele proprietăți și aplicații ale polinoamelor ortogonale Laguerre”, Analele U.E.M.Reșița, 1995;
- [16]. ANGHEL, C.V. – “Laguerre functions and polynoms used in on-line identification of automatic systems”, Simpozion Internațional de Optimizarea Echipamentelor Electrice și Electronice, Brașov 15-17 Mai, 1996;

- [17]. **ANGHEL, C.V.** – “Studii privind analiza spectrală ortogonală utilizând modulatoare Laguerre”, Analele U.E.M.Reșița. 1996;
- [18]. **ANGHEL, C.V.** – “Utilizarea procesoarelor în tehnica de calcul”. Analele U.E.M.Reșița. 1996;
- [19]. **ANGHEL, C.V.**, POPA M., – “Utilizarea sistemelor multimicroprocesor în echipamentele de calcul”, Simpozion jubiliar 25 Ani. U.E.M.Reșița. 24-26 octombrie, 1996;
- [20]. **ANGHEL, C.V.** – „Aspecte privind programarea în timp real. Interacțiunea între taskuri prin excludere reciprocă”. Simpozion jubiliar 25 Ani. U.E.M.Reșița, 24-26 octombrie, 1996;
- [21]. **ANGHEL, C.V.** – “Prelucrarea statistică temporală și frecvențială a parametrilor unui sistem automatizat”, Lucr. Ses. de Comunicări Șt. Univ. “Aurel Vlaicu”, Arad. 30-31 Oct., 1997;
- [22]. **ANGHEL, C.V.** – “Prelucrarea statistică temporală și frecvențială a semnalelor fizice cu aplicație la identificarea sistemelor”. Referat nr.1 al tezei de doctorat. Timisoara 1997;
- [23]. **ANGHEL, C.V.** – „Identificarea proceselor utilizând funcții ortogonale Laguerre și funcții ortogonale Haar”, Referat nr.2 al tezei de doctorat. Timisoara 1999;
- [24]. **ANGHEL, C.V.** – „Determinarea matricilor integralelor aferente funcțiilor Walsh”, Simpozion național, Hunedoara 1999;
- [25]. **ANGHEL, C.V.** – „Studii privind analiza spectrală ortogonală utilizând modulatoare Laguerre”. ANALELE U.E.M.R., Anul V, Nr.2, 1998, ISSN 1453-7397, pag. 15;
- [26]. **ANGHEL, I, ANGHEL, C.V.** – „Algoritm de calcul al valorilor și vectorilor proprii pentru matricele nehermetiene. ANALELE U.E.M.R.. Anul V, Nr.2, 1998, ISSN 1453-7397, pag. 11;
- [27]. **ANGHEL, I, ANGHEL, C.V.** – „Programarea liniară, metodă matematică de rezolvare a problemelor multidisciplinare”, Al IV-lea Simpozion Internațional România-Yugoslavia-Ungaria, U.E.M. Reșița, 2000;
- [28]. **ANGOT, A.** – „Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații”, Ed. Tehnică, București, 1966;
- [29]. **BENDAT, I.; PIERSOL, A.** – “Random Data Analysis and Measurement Procedures”. Ed. J.Willes, New York, 1971;
- [30]. **BENES, I.** – “Dynamique Statistique des Circuits de Regulation”, Paris, 1964;
- [31] **BERNARDI, A., BRACEWELL, R.N.** "Updating the Power Spectrum of Real Date by Hartley Method", Proc. IEEE, vol.75, pp.964-965, 1987;
- [32]. **BLACKMAN, R. B., TUKEY, J. W.** "The Measurement of Power Spectra", Dower, New York, 1959;
- [33]. **BOLD, G. E. J.** "Comparison of the Time Involved in Computing Fast Hartley and Fast Fourier Transforms" Proc. IEEE, vol.73, pp.1862-1863. 1985;
- [34] **BOGNER, R. E., CONSTANDINIDES, A. G.** "Introduction to Digital-Filtering", John Wiley & Sons, New York, 1975;

- [35]. BRACEWELL, R.N. "The Fourier Transforms and its Applications", MC. Graw-Hill Co. New York, 1986;
- [36]. BRACEWELL, R.N. " The Discrete Hartley Transform", J. Opt. Sol. Amer., vol.73. pp.1832-1835, 1983;
- [37]. BRACEWELL, R.N. "The Hartley Transform", Univ. Press, New York, 1986;
- [38]. BRACEWELL, R.N., BUNEMAN.O., HAO, H., VILLASENOR, J. "Fast Two-Dimensional Harley Transform". Proc. IEEE, vol.74, pp.1282-1283, 1986;
- [39]. BRACEWELL, R.N. "Aspects of the Hartley Transform", Proc. IEEE, vol.82, pp.381-390, 1994;
- [40]. BUNEMAN, O. " Multidimensional Hartley Transform", Proc. IEEE, vol.75, pp.267, 1987;
- [41]. BUDIȘAN N. - "Teoria sistemelor automate", vol.1, 2. Lito I.P.Timișoara. 1976;
- [42]. BUDIȘAN N. - "Teoria sistemelor", vol.2. Lito I.P.Timișoara. 1980;
- [43]. BUDIȘAN N., GÂRLAȘU Șt. - "Identificarea proceselor cu ajutorul calculatorului numeric", Buletin șt.-tehnic, I.P.Timișoara, Fasc I, 1973;
- [44]. CHEN, C.F., HSIAO, C.H. - "Haar wavelet method for solving lumped and distributed – parameter systems", in IEE Proc-Control Theory Appl. Vol.144, No.1., pp 87-94, 1997;
- [45]. CHEN, C., BILLINGS, S., GRANT, P. – „Nonlinear system identification using neural networks”, Int.J. Control, pp.1191-1214, 1990;
- [46]. CHEN, C.F., HSIAO, C.H. – „A state-space approach to Walsh series relation of linear szstems”, Int. J. Syst. Sci., 1965, 9, pp.833-858;
- [47]. CHEN, C.F., TSAY, Y.T., WU, T.T. – „Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems”, in J. Franklin Inst., 1977, pp.267-284;
- [48]. CLUETT, W.R. - "Frequency smoothing using Laguerre models", IEEE Proc.-Control Theory Appl, 1992;
- [49]. COCHRAN, W.T., COOLEY, J.W. – "What is the Fast Fourier Transform?", Proc. of the I.S.E.E., vol.55, no.10, 1967;
- [50]. COLOȘI, T., ISOC, D. ș.a. – „Tehnici de optimizare” vol.1, 2. Lito. Cluj, 1989;
- [51]. COLOȘI, T. – „Teoria sistemelor și reglare automată”, Cluj. 1981;
- [52]. COLOȘI, T. – „Automatizări industriale continue”, Cluj, 1983;
- [53]. COLOȘI, T., CODREANU. S. ș.a. – „Numerical modelling simulation in processes”, Ed. Tehnică, București. 1995;
- [54]. COLOȘI. T. ș.a. – „Local iterativ linearisation method for numerical modelling simulation of lumped distributed parameter processes”, Ed. Cărții de Știință, Cluj. mai 1999;
- [55]. COOLEY, J.W., MOROW, R.E. – “The Fast Fourier Transform”, IEEE Spectrum, vol.4, nr.12, pp 63-70, 1967;
- [56]. COOLEY, J.W. – “Applications of the Fast Fourier Transform Method”, Proc. IBM Scientific Computing Symp., June, 1966;

- [57]. COOLEY, J.W., TUKEY, J.W. – “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, Math.of Comput., vol. 19, pp.297-301, April, 1965;
- [58]. COOLEY, J.W., LEWIS, P.A.W; WELCH. P.O. –“Historical Notes on the Fast Fourier Transform”, IEEE Trans. Audio and Electroacustics”, vol. AU 15, June, 1967;
- [59]. Crowe J., Johnson, M.A. – “Process identifier and its application to industrial control”. IEE Proceedings, 2000;
- [60]. DRAGOMIR, T.L., PREITL ST. – „Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat”. vol.1 și 2. Lito IPT, Timișoara. 1979;
- [61]. DRAGOMIR, T.L., DRANGA O. – „About the behavior of an Automatic Control System of the speed of a Hydrogenerator using a non-linear speed Governor”, Proc.of the Int. Conf. of Technical Informatics CONTI'96, vol.2, Timișoara. 1996;
- [62]. DRAGOMIR, T.L., SILEA I – „Control Systems for the Magnetic Bearings of a Balancing Machine”, Proc. of the 7-th Int. Conf. on Optimization of Electrical and electronic Equipment, vol.III, Brasov, 11-12 mai, 2000;
- [63]. EYKHOFF, P. – “Identificarea Sistemelor”. Ed. Tehnică. București. 1977;
- [64]. FINE, N.J. ""On the Walsh Functions" Trans. Amer. Math. Soc. 69, pp.66-67, 1950;
- [65].FORMAN, M.L."A Fast Fourier Transform Technique and its Application to Fourier Spectrometry", Colloque C2 Supplement an No.3.4, Tome 28, 1967;
- [66]. FOURIER, I. – “Theorie Analytique de la Chaleur”, 1823 (Reprinted Dover, New York, 1956);
- [67]. GANEA, T. - "Serii Trigonometrice", Ed. Tehn. București, 1956;
- [68]. GÂRLAȘU Șt. - “Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice”, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1978;
- [69]. GÂRLAȘU Șt. - “Folosirea operatorului densității spectrale. Aplicații privind transferul semnalelor aleatoare”, Buletin șt-tenhic, I.P.T.V.Timișoara, 1978;
- [70]. GÂRLAȘU Șt., POPP C., SABIN I. - “Introducere în analiza spectrală și de corelație”. Ed. Facla, Timișoara, 1982;
- [71]. GÂRLAȘU Șt. - “ Definirea operatorului densității spectrale”. Buletin șt. și tehnic. IPTV Timișoara,1982;
- [72]. GÂRLAȘU Șt., SABIN I. – „Signal Processing for Control”. Springer Verlag, New York, vol.79, 1986;
- [73]. GÂRLAȘU Șt. - “Linearity Test for Systems with the Coherence Function”, Conf. on Optimisation, vol.2, Brașov, 1987;
- [74]. GÂRLAȘU Șt. - “The Error of the Systems using the Correlator and the Spectral Analyser”, Proc. of the 4th Conf on Optimisation, vol.2, Brașov, 1994;
- [75]. GÂRLAȘU Șt. - “Transformata Hartley și utilizarea ei în informatică”, Analele U.E.M.Reșița, 1995;

- [76]. GÂRLAȘU Șt. - "Comparație între transformatele Hartley și Fourier", Analele U.E.M.Reșița, 1995;
- [77]. GÂRLAȘU Șt. - "Teoria sistemelor", Curs Lito, Ed. U.E.M.R., Reșița 1998;
- [78]. GÂRLAȘU Șt., ANGHEL C.V. - "Eșantionarea integralelor Haar". Analele U.E.M.R., Reșița 1998;
- [79]. GÂRLAȘU Șt., ANGHEL C.V. - "Generalizarea matricilor integralelor aferente funcțiilor Haar", Analele Facultății de Inginerie, Hunedoara 1999;
- [80]. GÂRLAȘU Șt., ANGHEL Șt. ș.a. -, "Măsurători în vederea omologării compresoarelor de aer de 50-100 m³/min. fabricate la I.C.M.R", Reșița, 1975;
- [81]. HAAR, A. - "Zur Theorie der orthogonalen funktionen Systeme", in Math., pg. 331-371, 1910;
- [82]. HADAMARD, J. "Resolution d une Question Relative aux Determinants", Bull. Sci. Math. Ser.2, 17, pp. 240-246, 1893;
- [83]. HAO, H. "On Fast Hartley Transform Algorithms", Proc. IEEE, vol.75, pp.961-962, 1987;
- [84]. HARTLEY, R.V.L. "A More Symetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems", Poc. IRE, 30, pp.144-150, 1942;
- [85]. HOU, H. S. "The Fast Hartley Transform Algorithm", IEEE. Trans. Comp., vol. C-36, pp.147-156, 1987;
- [86]. HSU, C.Y., WU, J. L. "Walsh-Hadamard/ Discrete Hartley Transform". Int. J. Electron., vol.62, pp.747-755, 1987;
- [87]. HSU, C.Y., WU, J. L. "Fast Computation of Discrete Hartley Transform via Walsh-Hadamard", Electron. Lett., vol.23, pp.466-468, 1987;
- [88]. IVĂNESCU, M. - "Roboți industriali. Algoritmi și sisteme de conducere", Editura "Universitaria" Craiova, 1994;
- [89]. IVĂNESCU, M., Caușil, I., - "Automate industriale", Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1984;
- [90]. IVĂNESCU, M. - "Nonlinear Observer for Robot Control.", Al V-lea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, Craiova, pg. 108-114, 1988;
- [91]. IVĂNESCU, M. - "A New Manipulator Arm: A tentacule Model", Recent Trends in Robotics, North- Holland, pg. 51-56, 1986;
- [92]. IVĂNESCU, M. - "Dynamic Control for a Tentacle Manipulator, Robotics an Factories of the Future", Springer Verlag, pp.317-329, 1985;
- [93]. KAILATH, T. - "Linear systems", Prentice Hall, 1980;
- [94]. KWONG, C.P., SHIU, K.P. "Structured Fast Hartley Transform Algorithms", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process, vol. ASSP-34, pp.1000-1002, 1986;
- [95]. KUO, G. B. " Sisteme automate cu eșantioane", Ed. Tehn. București, 1967;

- [96]. LACKEY, R. B., MELTZER, D. "A Simplified Definition of Walsh Functions", IEEE Trans. Comput. C-20, pp.211-213, 1971;
- [97]. LEBEDEV, N.N - "Special functions and their applications", Dover. New-York, 1972;
- [98]. LIFERMAN, J. - "Les Methodes Rapides de Transformation du Signal: Fourier, Walsh, Hadamard, Haar" Masson, Paris, 1979;
- [99]. Majhi, S., Atherton, D.P. – "Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process", IEE Proc, vol.147, no.4. july. 2000;
- [100]. MALVAR, H.S. - "Fast Computation of Discrete Cosine Transform through Fast Hartley Transform" Electron. Lett. vol. 22, pp.352-353, 1986;
- [101]. MANZ, J.W. - "A Sequency-Ordered Fast Walsh Transform" IEEE Trans. Aud.
- [102]. MILLANE, R.P. - "Analytic Propierties of the Hartley Transform and Their Implication" Proc. IEEE, vol. 82, pp.419-428, 1994;
- [103]. MECKELBURG, H. J., LIPKA, D. - "Fast Hartley Transform", J. Opt. Soc. Amer., vol.73, pp.341-343, 1985;
- [104]. OLIVIER, P.D. - "Online system identification using Laguerre series",IEEE Proc-Control Theory, Appril 1994;
- [105]. PALEY, R.E.C. - "A Remarkable Series of Orthogonal Functions" Proc. London Math. Soc. 34, pp.241-270, 1932;
- [106]. PAPOULIS, A. - "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mc. Graw- Hill Co. New York, 1965;
- [107]. PAPOULIS, A. - "The Fourier Integral and its Applications", Mc. Graw- Hill Co. New York, 1972;
- [108]. PENESCU C. ș.a. - „Identificarea experimentală a proceselor automatizate”. Ed.Tehnică. București, 1971;
- [109]. POPA, M., ANGHEL, C.V. – „The Increase of the Interconnection Networks Flexibility”, Conferința Internațională CONTI'96, 14-16 octombrie, Timișoara, 1996;
- [110]. POPESCU Th., DEMETRU S. - “Practica modelării și predicției seriilor de timp”. Ed. Tehnică. București, 1991;
- [111]. P.P.J. Van den Bosch, A.C. Van der Klauw - “Modeling Identification and Simulation of Dynamical Systems”, C.R.C. Press Tokyo, April 1995;
- [112]. PRATT, W.K., ANDEWS, H. C. "Hadamard Transform Image Coding", Proc. IEEE , vol.73, pp.58-68, 1969;
- { 113}. PREITL, Șt. – “Teoria sistemelor și reglaj automat”, Partea I, U.T.Timișoara, 1992;
- [114]. PRISTLEY, M. - "Non linear and non stationary time series analisys", Academic Press, London 1988;

-
- [115]. PROȘTEAN O., MUREȘAN I. - "Tehnici de identificare și modelare", vol.I și II. Lito I.P.T.V.Timișoara, 1985;
- [116]. PROȘTEAN O., CURIAC, D., TUDOROIU, N. - "Automatizări complexe". Ed. Mirton, Timișoara, 1993;
- [117]. PROȘTEAN O., LUSTREA, B., CURIAC, D. - "Some Aspects Hydrogenerator Excitation Control Using an Adaptive Regulator", Buletinul Inst. Politehnic. Iași. Fasc.1-4. Secția VI. Automatică și Calculatoare, pg. 39-43, 1991;
- [118]. PROȘTEAN O., LUSTREA, B., CURIAC, D. - "Asupra estimării recursive a parametrilor generatorului sincron utilizat în reglajul autoacordabil al excitației". Lucrările celui de-al III-lea Simpozion "Structuri, algoritmi și echipamente de conducere a proceselor industriale". Iași. 25-26 oct., 1991;
- [119]. PROȘTEAN O., CURIAC, D., FILIP, I. - "Experience with Adaptive Control in a Stochastic Enviroment with Application for the Power Systems", Simpozion internațional CONTI'94, vol.3. pg.13-22, Timișoara, noiembrie 1994;
- [120]. RADU, O., SĂNDULESCU, GH. "Filtre Numerice" Ed. Tehn. București. 1979;
- [121]. ROVEGNO, J. "Sur le Traitement Automatique de l' Electro-encephalogramme" These. Universite de Province, Marseille. 1972;
- [122]. SINGLETON, R.C.; POULTER, T.C. - "Spectral Analysis of the Call of the Male Killer", IEEE Trans.Audio and Electroacustics, pp.104-113, June 1967;
- [123]. SHANNON, C.E. - "The mathematical Theorie of Communications", Univ. of Illinois Press. 1949;
- [124]. SHARBARO, D., JOHANSEN T.A. - "Multiple local Laguerre models for modelling nonlinear dynamic systems of the WIENER class", IEEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 144. No.5. Sept. 1997;
- [125]. STOICA, P. - "Metode de estimare a parametrilor sistemelor automatizate", Automatică-Management-Calculatoare, AMC 23, 1976;
- [126]. STOICA, A., STOICA, P., - "Identificarea sistemelor liniare folosind calculul numeric al transformatei Laplace", Automatică și Electronică, EEA 20, 1974;
- [127]. STRANG, G.- "Wavelet transforms versus Fourier transforms" in Res. Notes MIT, pp. 1-18, 1992;
- [128]. STORN, R. "Fast Algorithms for the Discrete Hartley Transform", Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik: Electronics and Communication; vol. 40, pp.233-240, 1986;
- [129]. STUART, R.O. "Introducere în Analiza Fourier", Ed. Tehn. București. 1971;
- [130]. TERTIȘCO M. „Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor”, Ed. Academiei Române, București, 1980;
- [131]. TERTIȘCO M. „Identificarea asistată de calculator a sistemelor”. Ed.Tehnică, București. 1987;
-

Cornelia Victoria Anghel

Date personale

locul și data nașterii: Timișoara, 21.05.1969
domiciliul actual: Reșița, Cerbului 2B, Ap. 2
număr de telefon: 055/220335
stare civilă: Necăsătorită

Date profesionale

studii: Liceul de Matematică și Fizică, Reșița - iunie 1987
Universitatea "Politehnica" din Timișoara, Facultatea de Automatică și Calculatoare, specializarea Calculatoare, direcția de aprofundare Ingineria Calculatoarelor - iunie 1993

specializări: Doctorand la Universitatea "Politehnica" Timișoara, Facultatea de Automatică și Calculatoare din mai 1995

Administrator de rețea, management, pedagogie.

locuri de muncă anterioare: S.C. CROSI S.A. Reșița (Operator calculator) - 1987-1988
(și posturi deținute) Oficiul de Calcul al Catedrei de Drumuri și Poduri, Facultatea de Construcții din cadrul Universității "Politehnica" Timișoara (Operator calculator) - 1988-1991
S.C. CROSI S.A. Reșița (Inginer de sistem) - 1993-1994
Universitatea "Eftimie Murgu" Reșița (Cadru didactic) - 1994- până în prezent
Sucursala Județeană CEC Reșița (Inginer de sistem) - 1997
Sef Birou Informatica CEC Resita - 2000 și în prezent

cunoștințe calculator: Sisteme de operare: UNIX, Windows (98, 95, NT, 2000), DOS
Limbaje de programare: FoxPro și Visual FoxPro, Pascal, C, C++, PROLOG
Soft tehnoredactare: Corel Draw, Word Perfect, Word
Soft pentru proiectare asistată: AutoCAD, OrCAD, GWBench, MathCAD, MathLAB
Soft pentru prelucrarea imaginilor grafice: Corel PhotoPaint, Adobe PhotoShop, GIMP
Alte cunoștințe: Excel, utilitare pentru sistem, programe de comunicație, etc.

Lucrări științifice publicate: Coautor la elaborarea și editarea a 5 cărți 1992- 2001
28 lucrări științifice publicate în domeniul temei tezei 1992-2001

Date diverse

limbi străine cunoscute: Engleză: scris, citit, vorbit
Germană: scris, citit, vorbit

permis de conducere: Categoria B

pasiuni: Informatica, finanțe, sport, călătorii