

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ

EA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA

Nr. inv. 631.911

Dulap 369 Lit. B

atea de Electronică și Telecomunicații

ASZTALOS M. Tibor

**Contribuții la compresia, în domeniul transformatelor
Wavelet, a semnalelor audio.**

Teză de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ
Nr. volum 631.911
Dulap 369 B

Conducător științific:

Prof.dr.ing. Miranda Naforniță

2001

Ajungând în stadiul final al elaborării manuscrisului tezei mele, pe această cale, doresc să mulțumesc tuturor celor care au contribuit la bucuria mea de a pune punct în realizarea acestei lucrări.

Datorez această satisfacție, în primul rând, domnului prof. Ioan Naforniță de a cărui gândire academică am beneficiat. Domnia sa m-a inițiat în activitatea de cercetarea în domeniul dificil, dar extrem de frumos al “prelucrării semnalelor”. Îi mulțumesc, de asemenea, pentru nenumăratele sugestii și observații ce m-au ajutat de multe ori să depășesc momentele dificile ivite pe parcurs.

Doamnei prof. Miranda Naforniță, conducătorul tezei, îi mulțumesc pentru competența îndrumare, pentru discuțiile constructive avute pe parcursul realizării lucrării, discuții ce au contribuit la cristalizarea unor idei, la întregirea unor soluții și, la eliminarea unor deficiențe ale unor soluții.

Mulțumirile mele se adresează, de altfel, întregii echipe de “prelucrări de semnale” pentru susținerea morală neîntreruptă, pentru nenumăratele discuții purtate pe probleme tehnice, ce au avut darul de a-mi influența benefic cercetările în direcția propusă. Doresc să mulțumesc în mod deosebit domnului prof. Isar Alexandru pentru nenumăratele idei sugerate, pentru disponibilitatea sa de a colabora în mod constructiv în rezolvarea unor probleme, colaborare ce s-a materializat într-o serie de lucrări, ce au fost prezentate la diferite conferințe internaționale prestigioase.

Doresc să mulțumesc, de asemenea, doamnei Prof. Adelaida Mateescu și d-lui Prof. Lucian Stanciu pentru faptul că au acceptat să parcurgă lucrarea cu ochiul critic al unui expert în domeniu, pentru observațiile încurajatoare precum și sugestiile domniilor lor ce au contribuit la clarificarea unor idei abordate.

Această lucrare a fost susținută, din punct de vedere material, de către ANSTI (Agenția Națională pentru Știință, Tehnologie și Inovare), prin acordarea autorului lucrării, în anul 2000, a grantului nr. 6153/2000, tema nr. B36, intitulat “Metode eficiente de compresie a semnalelor audio”.

În final, dar nu ultimul rând, doresc să mulțumesc familiei mele pentru răbdarea manifestată și încurajările permanente de pe parcursul anilor de cercetare folosiți pentru realizarea tezei.

Tibor Asztalos, Timișoara, 15.11.2001

CUPRINS

Capitolul I. Introducere.....	1
1.1 Componentele sistemelor de compresie.....	1
1.2 Compresie fără pierdere.....	2
1.3 Compresie cu pierdere.....	5
1.4 Descompunerea semnalului prin transformări ale spațiului de reprezentare.....	7
1.5 Compresie adaptivă și compresie universală.....	9
1.6 Reprezentarea optimă a semnalului.....	9
1.7 Conținutul lucrării.....	10
1.8 Funcția rată-distorsiune $b(D)$ și funcția distorsiune-rată $D(b)$	12
Capitolul II. Cuantizarea.....	16
2.1 Cuantizarea scalară.....	17
2.1.1. Modelarea statistică a intrării și a zgomotului de cuantizare.....	19
2.1.2. Cuantizarea scalară uniformă.....	22
2.1.3. Cuantizarea scalară neuniformă.....	23
2.1.4. Cuantizare scalară optimală.....	25
2.1.5 Cuantizare scalară robustă.....	28
2.2 Cuantizarea vectorială.....	29
2.2.1. Cuantizarea vectorială optimală.....	30
Capitolul III. Descompunerea eficientă în serii de funcții a semnalelor în timp continuu.....	32
3.1 Descompunerea semnalelor în baze de funcții Wavelet.....	36
3.1.1 Descompuneri Wavelet ortogonale.....	39
3.1.1.1. Construcția funcției de scară $\varphi(t)$	44
3.1.1.2. Construcția funcției Wavelet $\psi(t)$	46
3.1.1.3. Calculul coeficienților de proiecție ai unui semnal pe subspațiile V_j	47
3.1.1.4. Calculul coeficienților de proiecție ai unui semnal pe subspațiile W_j	48
3.1.1.5. Transformarea Wavelet Rapidă.....	50
3.1.1.6. Analogia algoritmului FWT cu filtrarea în subbenzi.....	52
3.1.1.7. Proprietățile de regularitate și de moment ale funcțiilor de scară și funcțiilor Wavelet.....	54
3.1.1.8. Funcții Wavelet cu suport compact.....	58
3.1.1.9. Localizarea timp-frecvență a descompunerilor în baze de funcții Wavelet.....	68
3.1.2. Descompuneri Wavelet biortogonale.....	78
3.2 Descompunerea semnalelor în pachete de funcții Wavelet.....	82
3.2.1. Descompuneri în pachete de funcții Wavelet ortogonale.....	83
3.2.2. Algoritmul transformării rapide în pachete de funcții Wavelet.....	84
3.2.3. Obținerea pachetelor de funcții Wavelet.....	86
3.2.4. Analogia algoritmului FWPT cu filtrarea în subbenzi.....	89
3.2.5. Localizarea timp-frecvență a descompunerilor în baze de pachete de funcții Wavelet.....	91
3.3 Transformări trigonometrice locale.....	96
3.3.1. Descompunerea semnalului în baze de atomi timp-frecvență.....	97
3.3.2. Structuri oblice (frames).....	99
3.3.3. Proprietăți ale atomilor timp-frecvență.....	100
3.3.4. Aspecte ale discretizării reprezentărilor STFT și CWT.....	101
3.3.5. Construcția bazelor trigonometrice locale ortogonale.....	103

Capitolul IV. Compresie de semnal prin transformări ortogonale	109
4.1. Transformarea Karhunen-Löeve	112
4.2. Transformarea FFT	113
4.3. Transformările DCT și DST	113
4.4. Transformarea Cosinus Discretă Locală, DLCT (Discrete Local Cosine Transform)	115
4.5. Procedură de alocare de bit optimă	117
Capitolul V. Compresie de semnal prin codare în subbenzi	121
5.1. Caracterizarea băncilor de filtre de tip PR	124
5.1.1. Subeșantionarea	124
5.1.2. Interpolarea	125
5.1.3. Reprezentarea polifază a secvențelor numerice	125
5.1.4. Echivalențe remarcabile de sisteme	126
5.1.4.1. Filtrare-subeșantionare	126
5.1.4.2. Subeșantionare-filtrare	127
5.1.4.3. Filtrare-interpolare	127
5.1.4.4. Interpolare-filtrare	128
5.1.5. Bănci de filtre de tip PR unitare	128
5.1.6. Bănci de filtre pe M căi neuniforme	135
5.2. Construcția băncilor de filtre cu reconstrucție perfectă pe două căi	136
5.3. Sisteme de codare în subbenzi (SBC) optime	141
5.3.1. Analogia SBC pe M căi uniforme cu sistemele de codare prin transformări ortogonale	141
5.3.2. Procedură de alocare de bit optimă	143
5.3.3. SBC uniforme optime. Filtre de compactare optime	145
5.3.4. SBC neuniforme optime	146
Capitolul VI. Compresie adaptivă de semnal	149
6.1. Sisteme optime de compresie cu pierdere	149
6.2. Sisteme adaptive de compresie prin descompunere în baze de funcții Wavelet	153
6.2.1. Sistem eficient de compresie Wavelet adaptivă	153
6.2.2. Compresia Wavelet adaptivă a unor semnale regulate	157
Capitolul VII. Compresie transparentă de semnal audio	163
7.1. Metode standardizate de codare a semnalului audio	163
7.2. Codare transparentă de semnal audio	165
7.2.1. Modelarea proprietăților psiho-acustice ale sistemului auditoriu uman	165
7.2.2. Codare perceptivă de semnal audio	166
7.3. Sistemul de codare MPEG-Audio	170
7.3.1. Nivelele 1, 2 și 3 ale codării MPEG-1 Audio	170
7.3.2. Modelul psiho-acustic utilizat în codările MPEG	172
7.4. Compresie de semnal audio prin descompuneri în baze de funcții Wavelet	174
7.4.1. Compresie de semnal audio prin transformări Wavelet	176
7.4.2. Compresie de semnal audio prin dezvoltare în pachete de funcții Wavelet	181
7.5. Compresie de semnal audio prin descompuneri în baze de funcții trigonometrice locale	192
Concluzii	196
Bibliografie	202

Lista de simboluri utilizate

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produs scalar
$\ \cdot \ $: norma unui vector
\oplus	: suma directă
\otimes	: produsul direct
δ_j	: simbolul lui Kronecker
$\varphi(t)$: funcția de scalare
$\psi(t)$: funcția Wavelet
$\tilde{\varphi}(t)$: funcția de scalare duală
$\tilde{\psi}(t)$: funcția Wavelet duală
\mathbb{C}	: spațiul vectorial al numerelor complexe
$C^\alpha(\mathfrak{R})$: spațiul semnalelor cu regularitate Holder egală cu α
d_j	: secvența coeficienților descompunerii Wavelet (detaliile)
h	: răspunsul la impuls al filtrului trece-jos
$H(z)$: transformata Z al secvenței h
g	: răspunsul la impuls al filtrului trece-sus
$G(z)$: transformata Z al secvenței g
\tilde{h}	: răspunsul la impuls al filtrului trece-jos dual
\tilde{g}	: răspunsul la impuls al filtrului trece-jos dual
$H_{k,p}(\mathfrak{R})$: spațiul Sobolev omogen
$L_p(\mathfrak{R})$: spațiul Lebesque al funcțiilor p -integrabile
$L_2(\mathfrak{R})$: spațiul vectorial al funcțiilor continue pătrat integrabile (de energie finită)
$l_2(Z)$: spațiul vectorial al secvențelor numerice pătrat sumabile
N	: spațiul vectorial al numerelor naturale
O	: simbolul "O" mare cu semnificația "ordinul lui ..."
$P(\cdot)$: operator de proiecție
$Q(\cdot)$: operator de cuatizare
\mathfrak{R}	: spațiul vectorial al numerelor reale
\mathcal{S}	: clasa lui Schwartz
s_j	: secvența coeficienților de proiecție Wavelet
U, U^*	: operatorul "de pliere" direct și adjunctul său
V_j	: subspațiul vectorial închis generat de funcția de scalare la nivelul de rezoluție j
W_j	: subspațiul vectorial închis generat de funcția "wavelet" la nivelul de rezoluție j
Z	: spațiul vectorial al numerelor întregi

Prescurtări utilizate

1D	: unidimensional
2D	: bidimensional
AAC	: Advanced Audio Coder
ADPCM	: Adaptive Differential Pulse Code Modulation
Bps	: bit / secundă
CPT	: transformarea în pachete de funcții trigonometrice locale (pachete de funcții cosinusoidale)
CWT	: transformarea Wavelet continuă
DCT	: transformarea Cosinus discretă (Discrete Cosine Transform)
DST	: transformarea Sinus discretă (Discrete Sine Transform)
DLCT	: transformarea Cosinus Locală Discretă (Discrete Local Cosine Transform)
DLCPT	: transformarea în Pachete de funcții Cosinusoidale Locale Discretă (Discrete Local Cosine Packet Transform)
DWT	: transformarea Wavelet discretă (Discrete Wavelet Transform)
FFT	: transformarea Fourier rapidă (Fast Fourier Transform)

FIR	: filtru cu răspuns finit la impuls (Finite Impulse Response)
FWT	: transformarea Wavelet rapidă (Fast Wavelet Transform)
HP	: tip trece sus (High Pass)
IIR	: filtru cu răspuns infinit la impuls (Infinite Impulse Response)
JND	: distorsiune de abia sesizabilă (Just Noticeable Distortion)
JPEG	: Joint Photographic Experts Group
LPC	: codare predictivă liniară (Linear Predictive Coding)
KLT	: transformarea Karhunen-Löve
MB	: Mega Byte
MPEG	: Moving Pictures Experts Group
MP3	: MPEG audio layer 3
MSE	: eroarea medie pătratică (Mean Square Error)
PR	: cu reconstrucție perfectă (Perfect Reconstruction)
QMF	: filtre oglindite în cuadratură (Quadrature Mirror Filter)
SNR	: raport semnal pe zgomot (Signal to Noise Ratio)
SMR	: raport semnal pe nivel de mascare (Signal to Mask Ratio)
WPT	: transformarea în pachete de funcții Wavelet (Wavelet Packet Transform)

Alte notații, convenții și definiții

În această lucrare în mod obișnuit se vor utiliza simbolurile j, k, l, m și n pentru numerele întregi. În general un simbol k sub semnul de însumare este echivalent cu $k \in \mathbf{Z}$. În mod similar, simbolurile t, u, v desemnează variabile continue. Astfel $x(t)$ este un semnal continuu, în timp ce $x[n]$ este o secvență de numere (un semnal în timp discret).

Prin definiție un *spațiu Banach* este un spațiu vectorial complet și normat iar *spațiul Hilbert* este un spațiu Banach a cărei normă este indusă de un produs scalar. Două subspații A și B ale unui spațiu S formează o descompunere directă a spațiului S dacă orice element al lui S poate fi scris în mod unic ca o sumă dintre un element al lui A și un element al lui B . Se scrie atunci $S = A \oplus B$.

1. Funcții și spații de funcții

Vom lucra, în mod curent cu funcții definite pe mulțimea numerelor reale, \mathfrak{R} , și cu valori din mulțimea numerelor complexe, \mathbf{C} . Pe axa reală folosim numai măsura *Lebesgue*. O funcție cu valori reale $f(t)$ este măsurabilă dacă domeniul său de definiție este măsurabil și dacă elementele mulțimii $\{t | f(t) < A\}$ sunt măsurabile pentru orice valoare $A \in \mathfrak{R}$.

Despre o proprietate se spune că este valabilă *aproape peste tot* dacă mulțimea punctelor în care ea nu este valabilă este de măsură nulă. O mulțime numărabilă este un exemplu tipic de mulțime cu măsură nulă. Notația folosită pentru această calitate este *a.p.t.* însă în anumite situații, unde nu va apărea nici o ambiguitate, ea va fi omisă. O funcție măsurabilă aparține spațiului *Lebesgue* $L_p(\mathfrak{R})$, $1 \leq p < \infty$, dacă:

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

și lui $L_\infty(\mathfrak{R})$, dacă:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathfrak{R}} |f(t)| < \infty$$

Orice spațiu Lebesgue este un spațiu Banach. Spațiul $L_2(\mathfrak{R})$ este spațiul Hilbert indus de produsul scalar definit prin:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{g}(t) \cdot dt$$

Două funcții f și g sunt *ortogonale* dacă produsul lor scalar este zero. Vom lucra, deasemenea, cu spații Lebesgue definite pe submulțimi ale axei reale. În aceste cazuri vom folosi simbolul ce identifică submulțimea respectivă în loc de simbolul mulțimii numerelor reale, \mathfrak{R} .

O secvență numerică este o funcție definită pe mulțimea numerelor întregi și se va nota în general sub forma $x[n]$ dacă se va dori punerea în evidență a unui semnal cu o variabilă temporală discretă (fără a indica însă în mod explicit domeniul variabilei n) sau, pur și simplu prin simbolul x (fără indicarea variabilei). O secvență $x[n] \in \mathbf{C}$ aparține spațiului Hilbert $l_2(\mathbf{Z})$ a secvențelor numerice pătrat sumabile (cu energie finită), dacă:

$$\sum_n |x[n]|^2 < \infty$$

Vom folosi "forma indexată" $\{x_n\}$ în cazul în care calitatea unei funcții, continue sau discrete, x de element al unei mulțimi numărabile trebuie remarcat sau dacă ne vom referi la o submulțime de funcții indexate după variabila discretă n .

O submulțime numărabilă $\{f_k\}$ a unui spațiu Hilbert este o *bază Riesz* în acest spațiu dacă orice element f al spațiului respectiv poate fi scrisă în mod unic sub forma $f = \sum_k c_k \cdot f_k$, și dacă există două constante pozitive A și B astfel încât:

$$A \cdot \|f\|^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B \cdot \|f\|^2$$

O bază Riesz este o bază *ortogonală* dacă funcțiile f_k sunt mutual ortogonale. În acest caz $A=B=1$.

O funcție f este continuă de ordinul α ($0 < \alpha \leq 1$) în sensul lui *Hölder*, în punctul t dacă:

$$|f(t) - f(t+h)| = O(h^\alpha)$$

O funcție f satisface *condiția Lipschitz* de ordin α ($0 < \alpha \leq 1$) într-o mulțime S dacă:

$$\sup_{x,y \in S, |x-y| < h} |f(x) - f(y)| = O(h^\alpha)$$

În acest caz vom spune că funcția aparține spațiului $Lip^\alpha(S)$. Regularitatea Hölder respectiv Lipschitz de ordin superior a unei funcții f poate fi definită într-o manieră similară folosind în loc de funcția derivatele (sau diferențele) de ordin superior ale ei.

Spațiul C^k este spațiul funcțiilor de k ori diferențiabile (k derivate continue). Vom nota prin Δ^k operatorul de diferențiere de ordin k . Putem defini spațiul Sobolev omogen ca:

$$H_{k,p}(\mathcal{R}) = \left\{ f \mid \Delta^k f \in L_p \right\}$$

unde derivarea se consideră în sensul distribuțiilor. În acest spațiu seminorma unei funcții se definește prin:

$$|f|_{k,p} = \left\| f^{(k)} \right\|_p.$$

Vom nota cu D^k spațiul funcțiilor mărginite cu descreștere mai rapidă decât cea polinomială inversă:

$$D^k = \left\{ f \mid |f(t)| \leq C(1+|t|)^{-(k+1+\epsilon)}, \forall \epsilon > 0 \right\}$$

Versiunea *T-periodică* a unei funcții $f \in D^0$, este definită prin:

$$\sum_k f(t + T \cdot k)$$

Suportul unei funcții are definiția: $\text{supp } f = \text{clos } \{t \mid f(t) \neq 0\}$

Capitolul I. Introducere

Creșterea exponențială a producției de “informație” ce caracterizează cei ultimii 20-30 de ani a impus necesitatea căutării unor noi metode de reprezentare a ei, care să fie cât mai compacte și să reprezinte cât mai fidel informația sursă. Această cerință pentru tehnici de compresie a fost impusă atât din dorința transmiterii (comunicării) cât mai rapide a informației cât și din dorința de a “ocupa” un spațiu cât mai redus pentru depozitarea sa. Ca și informație sursă poate fi privit orice produs al unui echipament sau proces, ce oferă ca rezultat un semnal analogic, sau în timp discret, ce prezintă, dintr-un anumit punct de vedere, o oarecare importanță, altfel spus poartă în el o anumită cantitate de informație utilă. Astfel, de exemplu, constituie sursă de informație datele științifice oferite de un senzor sau un traductor, semnalul vocal sau cel audio, imaginile analogice sau numerice furnizate de o cameră de luat vederi sau de un tomograf medical, șirul de date transmis de un aparat fax sau un modem etc. În toate aceste cazuri tehnicile de compresie sunt cerute în vederea utilizării cât mai eficiente a resurselor de înmagazinare sau de comunicare simplificând totodată, în anumite cazuri, anumite operații de post-procesare ale acestor date.

Metodele de compresie pot fi grupate în două mari clase:

- compresie fără pierdere: oferă o reprezentare exactă dar mai compactă a informației sursă. Este o operație perfect reversibilă. De exemplu, compresia unui fișier ce conține un text obișnuit bazată pe avantajul oferit de diferitele frecvențe de apariție ale unor simboluri diferite.

- compresie cu pierdere: permite neglijarea unei anumite părți din informația sursă în vederea obținerii unei reprezentări mai compacte însă permite doar o reconstrucție aproximativă. Există o serie de aplicații în care această aproximare poate fi tolerată (fiind uneori chiar imperceptibilă), ca de exemplu, compresia semnalului vocal în sistemele de telefonie celulară.

1.1 Componentele sistemelor de compresie

Un sistem tipic de compresie include unul sau mai multe dintre următoarele operații:

- eșantionare: operație ce realizează conversia unui semnal în timp continuu într-unul în timp discret prin reținerea valorilor semnalului continuu doar la anumite momente de timp. Prin aceasta se realizează, de fapt, o corespondență dintre un spațiu al semnalelor în timp continuu și un spațiu de semnale în timp discret. Este de dorit ca această operație să fie una reversibilă, adică să permită reconstrucția exactă a unui semnal continuu (analogic) din eșantioanele sale. Teorema WKS afirmă că există semnale (de bandă limitată) care eșantionate în mod corespunzător (frecvența de eșantionare egală cu cel puțin dublul frecvenței maxime din spectrul semnalului de eșantionat) pot fi reconstruite perfect din eșantioanele lor. Această operație nu se mai cere dacă semnalul de intrare considerat este unul achiziționat printr-o procedură de sondare la anumite momente de timp. De exemplu: senzor cu eșantionare, senzor CCD, aparat tomograf etc;

- cuantizare: operație ce realizează o corespondență între un spațiu de valori continue (valorile eșantioanelor semnalului) sau un spațiu de valori discrete dar de o dimensiune semnificativă, sau chiar infinită (un spațiu discret), și un spațiu de valori discrete cu o dimensiune mult mai redusă (evident, finită). Prin ea se realizează implicit o compresie cu pierdere a semnalului deoarece implică reducerea cantității de informație purtată în semnal. Deoarece mulțimea valorilor de la ieșirea cuantizorului este de dimensiune finită, elementele acestei mulțimi pot fi reprezentate printr-o secvență finită de numere binare (biți). Această ultimă operație poartă denumirea de *codare binară*. Astfel, o măsură de performanță a oricărui sistem de compresie o reprezintă numărul mediu de biți utilizați pentru reprezentarea unui simbol al acestei mulțimi de valori (unitate de măsură:

bit/simbol). Uneori, ținând cont de dimensiunea temporală a semnalului din care provin eșantioanele cuantizate, această măsură se exprimă sub forma unei rate de simboluri binare pe secundă, ce corespunde vitezei de transfer necesare comunicării la distanță a semnalului, definită prin numărul de biți necesari reprezentării eșantioanelor cuantizate ale semnalului în timp continuu pe unitate de timp (unitate de măsură: bit/secundă).

- descompunerea semnalului: implică găsirea unei reprezentări echivalente a semnalului, ce pune în evidență anumite structuri sau componente (de exemplu: descompunerea în diferite benzi de frecvențe sau într-o bază de funcții cu anumite proprietăți), componente ce apoi pot fi cuantizate eficient și, în general, în mod independent una de cealaltă.

- codarea de canal: implementată prin tehnici adiționale menite să minimizeze efectul unor erori de bit ce pot să intervină în cazul comunicării semnalului comprimat printr-un canal cu perturbații. Scopul lor este să evite o reconstrucție mult sub performanțele așteptate (este posibil ca eroarea de reconstrucție să depășească mult eroarea prevăzută de metoda de compresie).

Un sistem care transformă un semnal analogic într-o reprezentare binară a sa prin eșantionare, cuantizare și codare binară, este numit convertor analog-numeric, iar procesul, conversie analog-numerică (CAN). Procesul invers, de generare a unui semnal analogic prin decodarea unui semnal numeric poartă denumirea de conversie numeric-analogic (CNA). Aceste procese sunt caracteristice sistemelor de compresie ce lucrează cu semnale de intrare și/sau ieșire analogice. Procesul CAN este, prin natura lui, unul cu pierdere de informație deoarece, reprezentarea binară obținută poartă în ea întotdeauna o cantitate de informație finită, în timp ce orice semnal analogic poartă în el, teoretic, o cantitate infinită de informație. Pe parcursul lucrării ne vom referi la această reprezentare binară asociată semnalului prin termenul de reprezentare sursă. Operația de compresie efectivă are loc, în general, în acest spațiu discret, motiv pentru care se mai vorbește și despre compresie numerică și implică, de fapt, găsirea unei reprezentări alternative a semnalului, astfel încât noua reprezentare obținută să fie una echivalentă cu reprezentarea sursă dar care să permită reconstrucția semnalului inițial folosind un număr mai redus de biți decât cel al reprezentării inițiale. Acest lucru va permite ca semnalul, în această reprezentare a sa, să poată fi înmagazinat în fișiere de dimensiuni mai mici sau să poată fi comunicat mai repede și/sau folosind o lărgime de bandă a canalului mai îngustă. Raportul dintre numărul mediu de biți/simbol al reprezentării sursă și cel al reprezentării rezultate se numește *raport de compresie*. El poate fi definit în mod similar și în termenii ratelor de transfer asociate celor două reprezentări.

În funcție de măsura în care această reprezentare echivalentă permite refacerea reprezentării sursă vom vorbi despre cele două metode de compresie:

- a) compresie fără pierdere (reconstrucție exactă) și,
- b) compresie cu pierdere (reconstrucție aproximativă).

1.2 Compresie fără pierdere

Este metoda de compresie ce oferă o reprezentare exactă dar mai compactă a informației sursă. Ea permite o reconstrucție exactă a reprezentării sursă, ce este o reprezentare în timp discret și cu valori discrete. O astfel de reprezentare sursă se poate obține, după cum am văzut în paragraful anterior, printr-o conversie analog/numerică a unui semnal în timp continuu sau printr-o cuantizare și codare binară a unui semnal în timp discret. Spațiul valorilor reprezentării sursă are o dimensiune finită. Notând cu L această dimensiune și cu $x_i, i=1, 2, \dots, L$ elementele acestui spațiu, vom privi reprezentarea sursă ca fiind un semnal în timp discret $x[n]$ cu valorile în mulțimea $\{x_i\}_{i=1, 2, \dots, L}$.

O componentă x_i a reprezentării sursă, ținând cont de faptul că aceasta se exprimă sub forma unui șir finit de simboluri binare, poartă numele de mesaj sursă. Mulțimea mesajelor sursă $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,L}$ definește alfabetul reprezentării sursă. O componentă a reprezentării finale (cea comprimată), deoarece aceasta codifică un mesaj sursă, poartă denumirea de cuvânt de cod. În mod similar, mulțimea cuvintelor de cod definește alfabetul de ieșire al sistemului de compresie. Astfel compresia numerică poate fi privită ca o funcțională (o corespondență) dintre spațiul mesajelor sursă (alfabetul sursă) și cel al cuvintelor de cod (alfabetul de ieșire). Este obligatoriu, deoarece se dorește o codare fără pierdere, ca dimensiunea alfabetului de ieșire să fie egală cu cea a alfabetului sursei (egală cu L). Dacă această corespondență este fixă pe tot parcursul procesului de compresie, procedura se numește codare statică, în caz contrar, dacă aceste corespondențe se modifică pe parcurs (de obicei în funcție de statistica curentă a reprezentării sursă), vorbim de codare dinamică sau codare adaptivă. Codările statice sunt utile în cazurile în care statisticile de intrare rămân invariabile, deoarece ele prezintă o complexitate de implementare mai redusă față de cele adaptive (deci implicit timp de codare mai scurt).

De cele mai multe ori reprezentarea sursă este modelată printr-un proces aleator, de tip independent și identic distribuit (i.i.d.), discret $X[n]$, astfel încât $x[n]$ este o realizare particulară a sa. Conform terminologiei din Teoria Informației vom vorbi despre sursă fără memorie. Notând cu p_i probabilitatea de apariție a mesajului sursă x_i , $i=1,2,\dots,L$ cantitatea de informație a reprezentării sursă poate fi apreciată pe baza entropiei sursei:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^L p_i \log_2 p_i \quad (1.1)$$

Ea este o măsură a incertitudinii asociate sursei și reprezintă de fapt cantitatea medie de informație oferită de o realizare a procesului aleator X . Ea se exprimă în biți/simbol și indică numărul mediu de simboluri binare necesare codificării în mod univoc a unui simbol al reprezentării sursă. În cazul unei dimensiuni L finite entropia $H(X)$ verifică:

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 L \quad (1.2)$$

Performanțele sistemului de compresie fără pierdere depind în foarte mare măsură de statistica sursei.

Rezultate ale Teoriei Informației arată, [Sha.49], că nu este posibilă obținerea, prin metode de compresie fără pierdere, a unei reprezentări echivalente (finale) ce să fie caracterizată printr-un număr mediu de biți/simbol mai mic decât entropia (1.1) semnalului sursă (entropia Shannon), ceea ce statuează existența unei limite a raportului de compresie obținabile. Ținând cont de definiția raportului de compresie, aceea de raport dintre numărul mediu de biți/simbol al reprezentării sursă și cel al reprezentării finale, și având în vedere că reprezentarea sursă se caracterizează, de obicei, printr-un număr mediu de $b = \log_2 L$ biți/simbol, observația anterioară este evidentă. Cu cât diferența dintre b și entropia sursei $H(X)$ este mai mare cu atât este posibilă obținerea unui raport de compresie mai mare. Această diferență definește redundanța sursei:

$$R(X) = \log_2 L - H(X) \quad (1.3)$$

Notând cu $c_i, i=1,2,\dots,L$ elementele alfabetului de ieșire (cuvintele de cod) și cu l_i lungimile acestora, aceeași teorie ne asigură, [Sha.49], că există cel puțin un cod fizic realizabil caracterizat printr-o lungime medie a cuvintelor de cod, $\bar{l} = \sum_{i=1}^L (p_i \cdot l_i)$, ce verifică inegalitatea:

$$H(X) \leq \bar{l} \leq H(X) + 1 \quad (1.4)$$

Ultima relație indică faptul că este posibilă construcția unor coduri “bune”, deci a unor coduri ce oferă un raport de compresie aproape de limita teoretică, ale căror performanțe însă depind în mare măsură de reprezentarea sursă.

Această lungime medie definește rata de bit a sistemului de compresie, și reprezintă o măsură a gradului de încărcare cu informație a fiecărui eșantion codificat binar în scopul transmisiei, prelucrării sau stocării sale numerice.

Cum compresia fără pierdere asociază un cuvânt de cod c_i în mod univoc unui simbol x_i rezultă că, la ieșirea sistemului de compresie, probabilitatea de apariție a cuvântului de cod c_i va fi tot p_i , ceea ce ne indică faptul că entropia reprezentării finale este egală cu cea a sursei. Deci, compresia fără pierdere conservă entropia sursei.

Se poate arăta, [Sha.49], că rezoluția de aproximare de un bit, dată de relația (1.4) poate fi îmbunătățită. Astfel, de exemplu, dacă se grupează un număr M de simboluri succesive ale reprezentării sursă căruia i se asociază un cuvânt de cod c_i de lungime l_i atunci lungimea medie \bar{l} verifică:

$$H(X) \leq \frac{\bar{l}}{M} \leq H(X) + \frac{1}{M} \quad (1.5)$$

În multe situații practice ipoteza de proces staționar i.i.d. a sursei nu este verificată. Frecvent simbolurile succesive ale reprezentării sursă sunt corelate între ele. Această corelație va permite obținerea unui factor de compresie mai mare decât cel ce se poate obține în cazul unei surse i.i.d. Astfel, de exemplu, pentru cazul codării pe grupuri de M simboluri, construind vectorul aleator $\bar{X} = [X_1, X_2, \dots, X_M]$ și considerând probabilitatea compusă:

$$p(\bar{x}) = Pr\{X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge \dots \wedge X_M = x_M\}, \quad (1.6)$$

se poate defini entropia vectorului \bar{X} ca fiind:

$$H(\bar{X}) = - \sum_{x_1, x_2, \dots, x_M} p(\bar{x}) \log_2 p(\bar{x}) \quad (1.7)$$

Pe baza definiției (1.7) se poate defini debitul entropic al sursei X cu formula:

$$\bar{H}(X) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} H(\bar{X}), \quad (1.8)$$

care verifică, [Mor.95]:

$$0 \leq \bar{H}(X) \leq H(X), \quad (1.9)$$

cu $\bar{H}(X) = H(X)$ în cazul unei surse staționare i.i.d.

În [Mor.95] se arată că de fapt acest debit entropic $\bar{H}(X)$ oferă limita inferioară a ratei de bit a unui sistem de compresie cu reconstrucție exactă, și că el este identic cu entropia Shannon doar în cazul unui proces aleator de intrare X independent.

Având în vedere faptul că entropia sursei se conservă, în sensul că reprezentarea alternativă va avea o entropie cel puțin egală cu cea a sursei, aceste metode de compresie mai sunt denumite și codări entropice sau codări fără zgomot.

În funcție de natura mesajelor sursă și a cuvintelor de cod obținute tehnicile de codare se clasifică în:

- codări bloc-bloc, caracterizate prin faptul că atât mesajele sursă cât și cuvintele de cod au lungimi egale, raportul de compresie fiind dat de raportul celor două lungimi caracteristice;
- codări bloc-variabil, caracterizate prin faptul că mesajele sursă au lungimi egale în timp ce cuvintele de cod au lungimi diferite, permițând o mai bună aproximare a limitei teoretice;

- codări variabil-bloc, caracterizate prin mesaje sursă de lungime variabilă și cuvinte de cod de lungimi egale;
- codări variabil-variabil, caracterizate atât prin mesaje sursă cât și cuvinte de cod de lungime variabile.

Compresia fără pierdere cunoaște două paradigme majore:

- a) codare statistică, ce presupune estimarea statisticilor de intrare și înlocuirea unor structuri repetitive cu anumite coduri scurte; de exemplu: codarea aritmetică, codarea Huffman;
- b) metode bazate pe un dicționar de combinații de simboluri posibile (un *codebook*), ce codifică o anumită structură de cod prin referirea la o apariție anterioară a sa; de exemplu: codarea Lempel-Ziv. Această ultimă categorie oferă metode ce sunt mai rapide atât din punct de vedere software cât și hardware, avantaj ce este vizibil mai ales pentru lungimi semnificative ale mesajelor sursă. Astfel, de exemplu, se poate implementa foarte ușor paralelizarea căutărilor în cadrul bibliotecii ameliorând foarte mult performanțele metodei.

Metodele de codare cele mai eficiente sunt cele adaptive, prezente în implementări cu aplicabilitate universală. Astfel de exemplu metoda Huffman adaptivă a fost implementată în programele de compresie *DOS-arc* și *pkarc*, *Unix-compact*, în sistemele de compresie MPEG, variante adaptive ale algoritmului Lempel-Ziv sunt utilizate în programele *Unix-compress (LZ78)*, *gzip (LZW)*, *DOS-zip*, *arj*, *lha (LZ77)*.

1.3 Compresie cu pierdere

După cum s-a văzut, compresia cu pierdere permite neglijarea unei anumite părți din informația sursă în vederea obținerii unei reprezentări mai compacte, însă permite doar o reconstrucție aproximativă. Metoda este eficientă dacă diferențele dintre semnalul sursă și cel reconstruit vor fi imperceptibile sau vor avea efect redus (sau chiar neglijabil) din punct de vedere al aplicației semnalului reconstruit. Există însă aplicații în care sunt tolerate chiar și degradări substanțiale, perceptibile la reconstrucție, aplicații ce permit astfel obținerea unui raport de compresie semnificativ mai mare. Aceste considerente indică însă faptul că, de fapt, nu există nici măcar un criteriu unic de evaluare a performanțelor acestor metode.

Cea mai veche și cea mai simplă metodă de codare cu pierdere o reprezintă sistemul PCM (Pulse Coded Modulation), brevetat în 1939 [Ger.78]. Acest sistem asociază fiecărui semnal o reprezentare cu un număr de biți/simbol constant, obținuți printr-o eșantionare și o cuantizare uniformă a acestor eșantioane. Cu cât acest număr de biți este mai mare cantitatea de informație pierdută este mai mică iar reprezentarea găsită este mai bună. De exemplu, reprezentarea semnalului audio, eșantionat cu frecvența de 44.1 kHz și cuantizat cu 16 biți/eșantion, a devenit un standard “de facto” pentru semnalul audio numeric de înaltă fidelitate. Acest lucru se datorează faptului că reprezentarea de mai sus implică pierderi de informație imperceptibile sistemului auditiv uman. Însă, neglijarea unei cantități mai mici de informație este echivalentă cu un factor de compresie mai redus. Din acest motiv utilizatorul trebuie să se decidă asupra raportului distorsiune/număr de biți de reprezentare, în funcție de aplicația concretă. O evaluare a cantității de informație pierdută într-un proces de cuantizare uniformă poate fi făcută conform propunerii lui Renyi din 1959, [Gra.98]. El a arătat că dacă sursa X este un proces aleator staționar, caracterizat de o funcție densitate de probabilitate continuă $p_X(x)$, iar cuantizorul Q este un cuantizor uniform cu un număr L de nivele ce tinde la infinit, notând cu Δ pasul de cuantizare, entropia $H(Y)$ a procesului $Y=Q(X)$ de la ieșirea cuantizorului se poate aproxima, conform cu:

$$H(Y) = H(Q(X)) \cong h(X) - \log_2 \Delta \quad (1.10)$$

$$\text{unde: } h(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot \log_2 p_X(x) \cdot dx \quad (1.11)$$

reprezintă entropia diferențială de ordin întâi a procesului de intrare.

Avantajul oferit de o astfel de reprezentare cuantizată a unui semnal constă în faptul că ea este una în timp discret; prelucrările ulterioare ale ei implică sisteme numerice. Evaluările practice ale lor arată că sistemele numerice ce operează cu astfel de semnale sunt mai robuste, mai insensibile la perturbații de mediu și mai fiabile decât cele analogice. Astfel de exemplu, nici un semnal analogic nu poate fi transmis fără distorsiuni printr-un canal de comunicații zgomotos în timp ce semnalele numerice pot fi reconstruite, în anumite condiții, cu exactitate [Sha.49]. Astfel, performanțele superioare ale transmisiunilor numerice stau la baza popularității sistemului ISDN în domeniul telefoniei (semnalul vocal este limitat în bandă la frecvența de 4 kHz, eșantionat Nyquist, cu 8 kHz, eșantioanele sunt codate PCM cu 8 biți/eșantion și se transmite, printr-un canal telefonic obișnuit, semnalul numeric obținut printr-o codare de linie obișnuită (codul AMI) a eșantioanelor codate).

Calitatea unui sistem de compresie cu pierdere poate fi măsurată prin intermediul erorii cu care semnalul reconstruit din cel comprimat aproximează semnalul original. O cale de evaluare a acestei calități constă în definirea unei măsuri a distorsiunii, adică a unei distanțe dintre cele două semnale. Notând cu x semnalul de intrare și cu \hat{x} cel reconstruit, se poate defini o distanță $d(x, \hat{x})$ ce reflectă diferențele dintre cele două semnale. Ea permite definirea unei distorsiunii medii D , ca o măsură de calitate a sistemului. În mod obișnuit distanța $d(x, \hat{x})$ este evaluată prin eroarea pătratică de aproximare:

$$d(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}|^2 \quad (1.12)$$

caz în care distorsiunea D nu este altceva decât eroarea medie pătratică de aproximare, MSE (Mean Square Error).

Distorsiunea D este evaluată prin simpla mediere, dacă se cunoaște semnalul x de la intrarea sistemului de compresie, sau ca și o distanță medie ponderată, în cazul general:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} d(x, \hat{x}) \cdot w(x) \cdot dx \quad (1.13)$$

unde funcția de ponderare $w(x)$ este o funcție continuă, mărginită, cu valori pozitive și care verifică condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1 \quad (1.14)$$

În cazul în care semnalul de intrare x este o realizare particulară a unui proces aleator staționar X , cu funcția densitate de probabilitate $p_X(x)$, funcția de ponderare optimă $w(x)$ se găsește ca fiind chiar $p_X(x)$, caz în care distorsiunea sistemului se calculează conform:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} d(x, \hat{x}) \cdot p_X(x) \cdot dx \quad (1.15)$$

Este de dorit ca distorsiunea D să fie cât mai mică posibil. Acest lucru implică însă și un factor de compresie mai redus.

Performanțele sistemului de compresie pot fi îmbunătățite recurgând, alături de cuantizare, la procedee suplimentare de compresie, cu sau fără pierdere. Aceste metode caută să realizeze un

optim din punct de vedere al *raportului de compresie/distorsiune*. Proiectantul este cel care decide dacă câștigul în performanță astfel obținut justifică sau nu creșterea în complexitate a sistemului.

O serie de tehnici de compresie combină cu succes metodele simple de cuantizare cu o serie de metode de prelucrări de semnale menite să reducă informația nerelevantă din semnal sau să descompună semnalul în componente care pot fi codate (comprimate) în mod eficient. Exemple de astfel de codări sunt: codările predictive (PCM diferențial - DPCM, DPCM adaptiv - ADPCM, codări cu predicție liniară - LPC, predicție liniară cu excitare în cod - CELP) și codările prin transformare (algoritmul transformării Fourier rapide - FFT, transformarea Karhunen-Loeve - KLT, transformarea cosinus discretă - DCT, transformarea sinus discretă - DST, transformarea Haar, Hadamard, Walsh, Hartley, Wavelet etc.), [Sto.88], [Mor.95].

1.4 Descompunerea semnalului prin transformări ale spațiului de reprezentare

Cele mai utilizate proceduri de compresie sunt cele cu descompunerea semnalului, ce se realizează, de obicei, prin găsirea unei reprezentări echivalente ce pune în evidență anumite structuri caracteristice de date. Această operație poate fi privită ca o fază de preprocesare a semnalului, ce precede faza de compresie efectivă. Există o serie de proceduri menite să ducă la o reprezentare mai eficientă a semnalului. Astfel, unele proceduri își propun reducerea sau eliminarea corelației existente în reprezentarea inițială. Este cazul atât a procedurilor predictive mai sus amintite (DPCM, ADPCM, LPC, CELP), cât și a unor transformări ortogonale sau neortogonale (Karhunen-Loeve, Wavelet ortogonal și biortogonal, etc.). Scopul urmărit este, în general, concentrarea unei cantități de informație cât mai mare pe un număr de coeficienți ai descompunerii cât mai redus astfel încât prin reținerea doar a acestor coeficienți să se obțină un factor de compresie mare fără a degrada în mod semnificativ calitatea semnalului reconstruit.

Urmărind o complexitate a implementării cât mai redusă se lucrează de preferință cu transformări liniare reversibile sau care oferă o reconstrucție aproximativă rapidă. Sunt preferate transformările liniare ortogonale.

Se preferă, de asemenea, acele transformări care oferă reprezentări cu caracteristici similare pentru semnale de intrare cu caracteristici statistice diferite, oferind astfel un anumit grad de universalitate în utilizarea lor. De obicei, coeficienții de ordin inferior din domeniul transformat concentrează mai multă energie și astfel sunt mai importanți din punct de vedere al reconstrucției. La cuantizare, alocând un număr de biți mai mare acestor coeficienți vom realiza o alocare de bit optimală.

Printr-o transformare ortogonală liniară semnalul este exprimat ca o combinație liniară de funcții ce formează o bază ortonormală în spațiul de semnale considerat. Se spune că semnalul a fost descompus într-o bază de funcții ortonormale. Calitatea reprezentării depinde în mod direct atât de calitățile funcțiilor bazei cât și de cele ale semnalului analizat.

Exemple de astfel de baze sunt:

- exponențialele complexe în cazul transformării Fourier,
- undele cosinusoidale în cazul transformării Cosinus,
- versiunile deplasate și scalate ale unei singure funcții, în cazul transformării Wavelet, etc.

Exponențialele complexe sunt funcții de clasă C^∞ , regulate, infinit derivabile, și cu suport infinit. Ele sunt adecvate analizei unor semnale foarte regulate, cu caracteristici staționare sau repetitive. Performanțele lor sunt însă slabe în cazul unui semnal care este regulat pe porțiuni, și care prezintă salturi finite într-o mulțime numărabilă de puncte. Se cunoaște faptul că un singur salt brusc în semnalul analizat are efect asupra tuturor componentelor descompunerii; coeficienții

descompunerii vor fi cu o descreștere proporțională cu inversul frecvenței, $1/\xi$, ceea ce, din punct de vedere al scopului urmărit, s-ar putea să fie nesatisfăcător. Astfel și caracteristicile semnalului de prelucrat influențează într-o mare măsură calitatea sistemului de compresie. Din acest motiv s-au dezvoltat o serie de sisteme bazate pe ipoteze cu privire la semnalul de intrare, ipoteze ce stau la baza alegerii unei transformări adecvate.

Alternative la codările prin transformări ortogonale liniare sunt:

- transformările semiortogonale sau biortogonale,
- codarea în subbenzi,
- codarea prin segmentare,
- codările multirezoluție (ierarhice).

Codarea în subbenzi este o metodă foarte apropiată celei prin transformări liniare. Ea transformă reprezentarea temporală sau spațială, într-una frecvențială, prin descompunerea sa în benzi de frecvențe diferite. Rezultatul este subeșantionat (în vederea păstrării numărului total de eșantioane) și cuantizat, acordând o atenție deosebită procesului de alocare de bit. Sistemul poate fi privit ca fiind format dintr-o bancă de filtre în care fiecare filtrare este urmată de un proces de subeșantionare. Reconstrucția se face într-o manieră similară descompunerii, cu o bancă de filtre ce filtrează versiunile expandate ale semnalelor subeșantionate.

Codarea prin segmentare se realizează prin împărțirea semnalului de intrare în segmente de semnal în care semnalul are un comportament staționar, urmată de aplicarea unor proceduri de prelucrare și cuantizare ulterioare, adaptate la caracteristicile segmentului. Este o metodă foarte eficientă de codare a acelor semnale nestaționare care pot fi approximate prin semnale staționare pe porțiuni. De exemplu, un semnal cu variație polinomială pe porțiuni poate fi segmentat în conformitate cu aceste intervale, segmente ce pot fi codate aplicând transformări ortogonale adaptate acestor caracteristici.

Codarea multirezoluție construiește o reprezentare a semnalului de intrare pe mai multe nivele ierarhice de rezoluție. Nivelele succesive corespund unor reprezentări ce permit reconstrucției cu o rezoluție din ce în ce mai bună. Sunt proceduri ce se folosesc cu precădere în aplicații sensibile la întârzierile de decodare. Astfel, în funcție de performanțele echipamentului disponibil, orice aplicație va putea beneficia de un semnal reconstruit cu o anumită precizie nedepășind o durată de timp a reconstrucției maximă, impusă. Este cazul acelor aplicații în timp real unde obținerea unei valori reconstruite la timp este mai importantă decât precizia de reconstrucție. Astfel, de exemplu, în cazul unui semnal vocal eșantionat cu 8 kHz, avem la dispoziție 125 μ s pentru decodarea unui eșantion, după care valoarea acestuia nu mai prezintă interes.

Metodele de descompunere prin transformări sunt:

- transformările pe blocuri - secvența de eșantioane de la intrare se fragmentează în blocuri disjuncte de N eșantioane, iar fiecare bloc este tratat separat printr-o transformare de obicei ortogonală.

- transformările pe blocuri parțial suprapuse - sunt similare cu metoda anterioară, au ca și scop eliminarea sau atenuarea efectelor de margine ce apare deseori la prelucrări pe blocuri.

- transformările cu fereastră alunecătoare. Imaginea cea mai clară este cea a unei bănci de filtre cu subeșantionare.

- transformările redundante - oferă o reprezentare redundantă a semnalului. Est cazul reprezentărilor obținute prin discretizarea reprezentărilor continue. În aceste cazuri se poate obține un câștig prin cerințe de cuantizare mai puțin restrictive (cuantizare mai grosolană).

1.5 Compresia adaptivă și compresia universală

O serie de sisteme de compresie se bazează pe ipoteze despre statistica semnalului de intrare. Acest lucru permite sistemului de compresie să beneficieze de avantajele oferite de anumite structuri particulare ale surselor de date. De asemenea ea permite să se efectueze studii teoretice de evaluare a performanțelor sistemului optimal. O problemă reprezintă evaluarea limitelor acestor performanțe în cazurile în care statistica de intrare este incomplet cunoscută.

Există două direcții de dezvoltare:

- compresia adaptivă,
- compresia universală.

Codările adaptive “*învață*” în mod continuu parametrii structurali ai semnalului de intrare și modifică parametrii de codare în sensul adaptării la cerințele intrării.

Codările universale construiesc o colecție de algoritmi de compresie, diferiți pentru diferite șiruri de semnale și apoi se decide asupra unuia dintre ei, cel cu performanțele cele mai bune. Trebuie observat faptul că deși ambele metode își propun aceleași obiective, ele conduc la implementări mult diferite.

În concluzie, nu există metodă de compresie cu pierdere care să fie universală, care să fie cea mai bună în toate aplicațiile posibile, adecvată tuturor semnalelor. Au fost elaborate o serie de propuneri noi, unele standardizate, însă care pot fi, și chiar și sunt, îmbunătățite prin cercetări curente. Scopul urmărit, și anume obținerea unei reprezentări foarte compacte (reprezentare pe un număr redus de biți) care să ofere o reconstrucție foarte bună și, pe măsura posibilităților, să aibă o complexitate cât mai redusă atât din punct de vedere al efortului de calcul cât și din cel al hardware-ului implicat, n-a fost încă atins și nici nu poate fi atins deoarece, deseori, optimizarea anumitor cerințe presupune măsuri ce vin în contradicție cu alte măsuri necesar a fi luate în vederea satisfacerii celorlalte cerințe.

1.6 Reprezentarea optimală a semnalului

Din expunerea anterioară rezultă că o semnificație majoră o are reprezentarea adecvată a semnalului ce urmează a fi comprimat. Există o serie de metode menite să ducă la o reprezentare optimă (din punct de vedere al compresiei) a semnalului. Sunt considerate reprezentări “bune” acele reprezentări care reușesc să capteze “informația esențială” a semnalului. O problemă majoră rămâne însă faptul că această “informație esențială” depinde atât de semnalul considerat cât și de aplicația propriu-zisă în care acesta apare. Metodele tradiționale de analiză/sinteză de semnal folosesc baze ortogonale. Reprezentarea este neredundantă, însă s-a dovedit a fi dificilă alegerea acelei baze care ar putea să asigure acea optimalitate în reprezentarea semnalului, în cazurile în care aplicația considerată implică semnale cu caracteristici diferite sau semnale nestaționare. Ca și alternativă, sunt propuse o serie de reprezentări noi, care descompun semnalul în funcții (componente) elementare ce nu sunt neapărat ortogonale. Asemenea familii de funcții nu formează baze ortogonale, deseori sunt redundante, permițând însă o anumită flexibilitate în ceea ce privește posibilitatea de reprezentare. Reprezentările posibile nu sunt unice, astfel încât se poate impune un

criteriu de selecție, pe baza căruia se găsește reprezentarea optimală. Asemenea mulțimi de funcții sunt de exemplu structurile oblice (de “*cadru*” sau “*frame*” în limba engleză), care pot fi utilizate cu succes la descompunerea unor semnale.

1.7 Conținutul lucrării

În această lucrare este făcută o analiză comparativă a performanțelor unor sisteme adaptive de compresie cu pierdere în ipoteza unor semnale de intrare cu diferite caracteristici (de bandă limitată, cu variație polinomială sau polinomială pe porțiuni, de clasă C^∞ sau C^N , cu N finit, pe toată axa reală sau pe porțiuni, semnale aleatoare staționare (cu diverse caracteristici statistice) sau nestaționare dar cu caracteristici staționare pe porțiuni etc.), sisteme ce, în vederea adaptării la aceste caracteristici de intrare, utilizează diferite metode de transformare a spațiului de reprezentare a informației sursă. Se caută descompuneri optimale, baze de funcții “bune”, ce oferă cele mai bune performanțe în condițiile date. Astfel, se arată că printre candidate se numără bazele de funcții cu localizare bună atât în timp cât și în frecvență, de exemplu, funcțiile trigonometrice locale, sau bazele de funcții “Wavelet” (ce ocupă chiar un loc privilegiat în această expunere), ortogonale sau biortogonale, pachetele de funcții “Wavelet”. Se pun în evidență legăturile inerente ce există între proprietățile funcțiilor bazei și cele ale semnalului de analizat ce se doresc a fi evidențiate. Vor fi indicate câteva modalități de căutare sau de construcție a unor asemenea baze. Sunt studiate și evaluate metode adaptive de cuantizare a coeficienților transformării. Studiul fiind făcut atât pentru semnale în timp continuu cât și pentru cele în timp discret, se face o investigație a legăturii dintre cele două spații, și se propun noi metode de reconstrucție a semnalelor analogice.

În cele ce urmează, în acest capitol, se introduc funcțiile rată-distorsiune și distorsiune-rată, două măsuri de performanță ale unor sisteme de compresie cu pierdere. Importanța lor rezidă în faptul că ele ne pot indica anumite limite teoretice a performanțelor unor sisteme de compresie, limite ale căror cunoaștere se poate dovedi a fi utilă în construcția efectivă a acestor sisteme. Ele oferă măsuri care permit realizarea unor comparații efective între sisteme de compresie cu structuri și principii de funcționare diferite.

Următoarele capitole ale acestei lucrări sunt dedicate prezentării unor aspecte teoretice și practice ale structurii unor sisteme de compresie bazate pe transformarea spațiului de reprezentare a semnalului sursă.

În cel de al doilea capitol se prezintă o serie de rezultate teoretice clasice privind performanțele obținabile ale unor tehnici diferite de cuantizare. Sunt trecute în revistă procedeele de cuantizare scalară uniformă și neuniformă, procedee de cuantizare vectorială, indicându-se performanțele limită obținabile. Sunt prezentate, de asemenea, algoritmi eficienți de construcție a unor cuantizări scalare sau vectoriale optimale, în condițiile în care se cunosc statisticile procesului de intrare (algoritmul Lloyd-Max pentru cazul scalar și respectiv algoritmul LBG în cazul vectorial).

Cel de al treilea capitol este dedicat găsirii unor reprezentări alternative eficiente ale procesului sursă. Este vorba despre studiul unei serii întregi de transformări ce, aplicate semnalului de intrare, duc la reprezentări ce se dovedesc a fi utile din punct de vedere al compresiei acestuia. Din acest motiv aceste proceduri reprezintă faze de preprocesare a semnalului înainte de compresia sa efectivă. Sunt studiate calitățile unor baze de spații de semnale construite din funcții cu proprietăți bune de regularitate, de moment, de localizare în planul timp frecvență etc. Sunt avute în vedere reprezentările bazate pe funcții de tip Wavelet diferite (ortogonale, semiortogonale, biortogonale, cu suport compact, cu regularități diferite) precum și reprezentări derivate, cum sunt cele de descompunere în baze de pachete de funcții Wavelet. Se indică principalele motive din care

aceste transformări se pot dovedi utile în aplicații de compresie, se prezintă o serie modalități efective de utilizarea lor eficientă, prin implementări de algoritmi rapizi de calcul al coeficienților descompunerii. Sunt abordate, de asemenea, și alte tipuri de reprezentări timp-frecvență cum sunt cele oferite de descompunerile în baze de funcții trigonometrice locale (unde cosinusoidale și/sau sinusoidale locale), precum și cele de pachete de funcții trigonometrice locale.

Următorul capitol, dedicat compresiei de semnal prin transformări ortogonale, abordează cazul compresiei semnalelor în timp discret, de lungime finită. Sunt analizate performanțele unor transformări clasice, cum sunt Transformarea Fourier Discretă (TFD), DCT sau DST în comparație cu cele ale unor transformări mai recente cum sunt cele bazate pe funcții Wavelet, funcții trigonometrice locale, pachete de funcții Wavelet și pachete de funcții trigonometrice locale. Sunt prezentate proceduri rapide de calcul, implementate sub forma unor algoritmi numerice eficienți, cum sunt FFT, DCT, DST, FWT (Transformarea Wavelet Rapidă, Fast Wavelet Transform), FWPT (Fast Wavelet Packet Transform), DLCT (Discrete Local Cosine Transform). Se prezintă, de asemenea, o procedură de alocare de bit optimală utilizabilă în construcția sistemelor de compresie bazate pe aceste transformări ortogonale.

Al cincilea capitol are ca subiect sistemele de codare în subbenzi. Sunt abordate proprietățile unor bănci de filtre cu reconstrucție perfectă într-un context de paralelism cu teoria Wavelet. Sunt indicate proceduri de construcție a unor bănci de filtre ce corespund unor descompuneri Wavelet în baze de funcții Wavelet cu anumite proprietăți impuse (de suport compact, regularitate, număr de momente nule etc.). Sunt studiate structuri de bănci de filtre cu căi multiple uniforme și respectiv neuniforme. Se prezintă, de asemenea, o procedură de alocare de bit optimală utilizabilă în construcția sistemelor de compresie incluzând structuri de bănci de filtre cu reconstrucție exactă precum și cuantizoare dimensionate în mod adaptiv în funcție de caracteristicilor semnalelor din subbenzile frecvențiale.

Cel de al șaselea capitol, rezervat verificărilor și propunerilor practice prezintă o serie de soluții de sisteme de compresie universală sau adaptivă, utilizabile pentru compresia unor tipuri diferite de semnale. Sunt avute în vedere sisteme de compresie de semnale monodimensionale. Sunt indicate implementări efective de sisteme de compresie, bazate pe funcții Wavelet, testate cu ajutorul unor semnale test (de formă sinusoidală, dreptunghiulară și de tip "Chirp"). Sunt prezentate câteva soluții posibile pentru rezolvarea unor probleme tehnice cum sunt cele legate de problemele de margine din cauza prelucrărilor pe blocuri de date de lungimi finite. Aceste propuneri au în vedere prelungirea prin periodicitate, oglindirea la margine, prelungirea prin extrapolare polinomială precum și prelucrarea pe blocuri parțial suprapuse. Se prezintă proceduri adaptive de compresie prin metode Wavelet a unor semnale de un anumit grad de regularitate. Se indică o soluție de sistem adaptiv care este capabil de a efectua o compresie bazată pe o segmentare adaptivă și găsirea bazei de funcții Wavelet optimale de reprezentare a fiecărui segment. În acest sens este făcută o demonstrație a optimalității unor funcții Wavelet cu suport compact în contextul prelucrării pe blocuri finite a unor semnale cu o anumită regularitate (cu variație polinomială) pe porțiuni.

Ultimul capitol, cel de al șaptelea, începe cu prezentarea unui exemplu concret de implementare a unor sisteme de codare în subbenzi frecvențiale, și-anume sistemul MPEG Audio, de compresie transparentă a semnalului audio de înaltă calitate. Sunt prezentate apoi structuri similare de sisteme (de compresie de semnal audio) folosind funcții Wavelet ortogonale. Rezultatele experimentării acestor sisteme sunt comparate cu cele ale sistemelor MPEG. Experimentul este repetat apoi în contextul unor descompuneri în pachete de funcții Wavelet, aplicând proceduri adaptive de căutare a celei mai bune baze. Sunt indicate și soluții în care acest proces adaptiv de selecție a celei mai bune baze este ghidat de proprietățile psiho-acustice ale sistemului auditiv uman (soluții apropiate de sistemul MPEG-Audio). Experimente de compresie a unor semnale test precum

și semnale audio sunt efectuate și folosind descompuneri în baze de funcții trigonometrice locale precum și în baze de pachete de funcții trigonometrice locale. Sunt verificate și în acest caz eficacitatea tehnicilor de corecție utilizate în cazul aplicării funcțiilor Wavelet în vederea rezolvării unor probleme practice de sistem. Rezultatele sunt evaluate prin prisma performanțelor ale sistemelor obținute. Sunt avute în vedere măsuri de performanță cum sunt raportul de compresie, distorsiunea de reconstrucție, viteza de codare și/sau de decodare, complexitatea sistemului. La sfârșitul acestui capitol se trag o serie de concluzii privind tematica abordată pe parcursul celor șapte capitole.

1.8 Funcția rată-distorsiune $b(D)$ și funcția distorsiune-rată $D(b)$

În §1.3 s-a definit distorsiunea medie de aproximare ca fiind o măsură a calității sistemului. S-a menționat faptul că se obține un factor de compresie mai redus dacă această distorsiune este mai redusă. Ținând cont de definiția dată în §1.2 a raportului de compresie, rezultă că aceasta se raportează la lungimea medie (în biți) a cuvintelor de cod ale reprezentării finale. S-a specificat, de asemenea, că această lungime medie definește rata de bit, b , a sistemului de compresie. Având în vedere faptul că și în cazul compresiei cu pierderi reprezentarea finală urmărită conține, în mod similar compresiei fără pierdere, un număr finit de cuvinte de cod, măsura rata de bit, definită ca fiind lungimea medie a cuvintelor de cod (a alfabetului de ieșire), poate fi extinsă și pentru acest caz. În acest caz însă în evaluarea performanțelor sistemului apare problema interdependenței dintre cele două măsuri de bază, distorsiunea D și rata de bit b . În construcția sistemelor de compresie se pune frecvent problema găsirii acelu sistem care oferă distorsiunea minimă D pentru o rată de bit maximă impusă b (se dorește, spre exemplu, comunicarea semnalului comprimat printr-un canal cu capacitate finită). Alături se pune problema inversă: care este rata de bit minimă obținabilă b astfel încât sistemul de compresie construit să ofere o distorsiune maximă egală cu o valoare D impusă. Se poate pune problema existenței unei limite a tuturor combinațiilor $D(b)$ și respectiv, în mod similar, $b(D)$ posibile. Răspunsul la această ultimă problemă este dat de Teoria Comunicațiilor a lui Shannon, [Sha.49], prin aplicarea unor rezultate cu privire la canalele de comunicații cu perturbații pentru sistemele de compresie. Astfel, să considerăm un proces aleator i.i.d. X la intrarea unui canal cu perturbații. Notăm cu Y semnalul recepționat la celălalt capăt al canalului. Notând, de asemenea cu $p_X(x)$ și, respectiv, $p_Y(y)$, funcțiile densitate de probabilitate ale celor două procese, se pune problema evaluării distorsiunii minime D obținabile dacă transmisia se face cu o rată de bit cel mult egală cu b . Soluția lui Shannon se poate pune sub forma:

$$D(b) = \arg \min_{p_{Y|X}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^2 p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \cdot dx \cdot dy \quad (1.16)$$

unde minimul se caută peste toate densitățile de probabilitate condiționale $p_{Y|X}(y|x)$ posibile, cu condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left[\frac{p_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) \cdot p_{Y|X}(y|u) \cdot du} \right] p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \cdot dx \cdot dy \leq b \quad (1.17)$$

În expresia (1.17) recunoaștem, de fapt, definiția informației mutuale dintre X și Y . Notată cu $I(X;Y)$, această mărime indică gradul de asemănare a celor două procese. Ea este egală cu zero dacă cele două procese sunt independente și are valoare maximă dacă cele două procese sunt funcțional

dependente (în sensul că X este o funcție de Y și vice-versa). Recunoscând, de asemenea, eroarea medie pătratică de aproximare $E\{(X - Y)^2\}$ în expresia (1.16), se poate scrie:

$$D(b) = \min\{E\{(X - Y)^2\} : I(X; Y) \leq b\} \quad (1.18)$$

o expresie ce, în majoritatea cazurilor, nu poate fi explicitată. Excepția o constituie sursa i.i.d. gaussiană cu medie nulă și dispersie σ_X^2 . În acest caz se găsește [Sha.49]:

$$D(b) = \sigma_X^2 2^{-2b} \quad (1.19)$$

În termenii sistemului de compresie funcția distorsiune-rată, $D(b)$, indică distorsiunea minimă obținabilă la ieșirea unui canal de comunicații fără pierdere dacă semnalul prelucrat de un sistem de compresie a fost transmis prin canal cu o rată de bit maxim egală cu b .

Funcția rată-distorsiune $b(D)$ este duala funcției distorsiune-rată. Ea indică rata minimă de informație (biți/simbol) cu care semnalul prelucrat de un sistem de compresie poate fi transmis printr-un canal fără perturbații și reconstruit la recepție în limitele unei distorsiuni posibile (D).

Se arată, de asemenea, [Sha.49], [Mor.95], [Gra.98], că rezultatul (1.19), obținut pentru sursă i.i.d. gaussiană, este o limită superioară dacă ne raportăm la natura sursei (gaussiană în acest caz). Se arată că dacă sursa este i.i.d. dar cu o distribuție diferită de cea gaussiană, cu medie nulă și cu aceeași dispersie σ_X^2 , atunci :

$$b(D) \leq \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_X^2}{D}, \text{ pentru } 0 \leq D \leq \sigma_X^2 \quad (1.20)$$

egalitatea apare, bineînțeles, conform relației (1.19), doar în cazul gaussian.

Această ultimă observație are un impact major în construcția sistemelor de compresie optimale și suboptimale în sensul că ea garantează că un sistem construit pe baza ipotezei unei surse i.i.d. gaussiene va oferi o distorsiune în reconstrucție mai mică decât cea dată de (1.19), la aceeași rată de bit b , pentru o altă sursă i.i.d. negaussiană. Altfel spus, notând această funcție limită, corespunzătoare cazului gaussian, cu $b_G(D)$, pentru orice rată de informație $b > b_G(D)$ sistemele care sunt proiectate să atingă o distorsiune D , pentru o sursă i.i.d. gaussiană cu dispersie σ_X^2 , vor asigura o distorsiune care nu depășește această valoare D pentru orice altă sursă staționară având aceeași dispersie. Astfel, în cazurile în care nu se cunoaște exact natura stohastică a sursei, se recomandă, ca în proiectarea sistemului de compresie, să se lucreze cu ipoteza unei surse i.i.d. gaussiană.

Pentru compresia semnalului generat de sursă un interes practic deosebit prezintă valorile limită inferioare ale funcției $b(D)$, valori ce stabilesc informația medie minimă pe simbol transmis, limită sub care, refacerea semnalului la utilizator nu mai este posibilă decât cu o distorsiune superioară celei prestabilite (D). Pentru cazul unei surse continue și a utilizării unei metrici de distanță pătratică ($d(x, y) = \|x - y\|^2$), Shannon a determinat următoarea limită inferioară:

$$b_{lim}(D) = h(X) - \frac{1}{2} \log(2\pi e D) \text{ biți/simbol} \quad (1.21)$$

unde $h(X)$ reprezintă entropia diferențială de ordin întâi a procesului de intrare, definită conform relației (1.11). Câteva exemple de entropii diferențiale $h(X)$, calculate pentru cazul unor surse gaussiene, laplaciene (model de semnal folosit în codarea predictivă a imaginilor) și, respectiv, cu distribuția gamma (model folosit în codarea predictivă a semnalului vocal), sunt, [Boi.97]:

$$h_G(X) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma_X^2) \quad (1.22a)$$

$$h_L(X) = \frac{1}{2} \log(2e^2 \sigma_X^2) \quad (1.22b)$$

$$h_\gamma(X) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\pi e \sigma_X^2}{3\lambda} \right) \quad (1.22c)$$

unde $e = 2.718$ și $\lambda = 1.781$ este constanta lui Euler.

În multe situații practice însă ipoteza de proces staționar i.i.d. a sursei nu este verificată. Sursele reale reprezintă în marea lor majoritate surse cu memorie, simbolurile generate fiind dependente statistic. Utilizând această dependență statistică existentă între simbolurile generate de sursă, pentru același nivel de distorsiune D , funcția rată-distorsiune, $b(D)$, corespunzătoare unei surse cu memorie este mai mică decât funcția $b(D)$ corespunzătoare unei surse fără memorie având aceeași distribuție de probabilitate de ordin unu și doi. Acest lucru este o consecință directă a inegalității (1.9) cu privire la raportul dintre debitul entropic $\bar{H}(X)$ și entropia $H(X)$ a unei surse X . Considerând o sursă cu memorie de ordin M , se poate scrie:

$$b_M(D) \leq b_I^{ind}(D), \quad (1.23)$$

unde $b_M(D)$ reprezintă funcția rată-distorsiune a sursei cu memorie iar $b_I^{ind}(D)$ reprezintă funcția rată-distorsiune a unei surse cu aceleași caracteristici probabilistice dar fără memorie. Importante sunt însă, și în acest caz, valorile limită inferioare ale acestei funcții $b_M(D)$.

O asemenea limită, dată în [Sto.88], se scrie sub forma:

$$b_M(D) \geq b_I^{ind}(D) + h_M(X) - h(X), \quad (1.24)$$

$$\text{unde: } h_M(X) = - \int_{x_1, x_2, \dots, x_M} p(\bar{x}) \log_2 p(\bar{x}) \quad (1.25)$$

reprezintă entropia diferențială de ordin M a procesului de intrare, caracterizat de o densitate de probabilitate compusă de ordin M de forma (1.6).

Această limită poate fi evaluată considerând funcția rată-distorsiune $b_I^{ind}(D)$ a unei surse fără memorie și ținând cont de corelația dintre valorile sursei prin intermediul diferenței de entropii diferențiale $h_M(X) - h(X)$. Cu toate acestea evaluarea efectivă este dificilă, atât a funcției $b_I^{ind}(D)$ cât și a entropiilor diferențiale ale unor procese staționare negausiene. Spre deosebire, caracteristicile evaluate în ipoteza de proces sursă gaussian reprezintă expresii limită ale tuturor cazurilor negausiene. Mai mult, aceste caracteristici pot fi evaluate analitic.

Astfel, de exemplu, să considerăm o sursă staționară discretă X , gaussiană de medie nulă și dispersie σ_X^2 , cu memorie de ordin M . Funcția densitate de probabilitate compusă de ordin M este de forma:

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |C_M|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \bar{x} C_M^{-1} \bar{x}^T} \quad (1.26)$$

unde C_M reprezintă matricea de covarianță M -dimensională a sursei. Sursa fiind staționară, această matrice rezultă pozitiv definită. Notăm cu $\lambda_i, i = 1 \dots M$, valorile proprii ai acestei matrici. Observația anterioară este echivalentă cu faptul că valorile λ_i sunt strict pozitive și verifică egalitatea:

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i = M \cdot \sigma_X^2 \quad (1.27)$$

În vederea evaluării $b_I^{ind}(D) = b_G^{ind}(D)$ se poate aplica o transformare ortogonală (ce păstrează norma) în vederea decorelării componentelor sursei. Se găsește că această transformare, care decorelează total eşantioanele sursei, este transformarea Karhunen-Löeve, ce dezvoltă procesul sursă în baza ortogonală a vectorii proprii asociați valorilor proprii λ_i . Fiecare componentă a

procesului de ieșire, notată Y , este o variabilă aleatoare cu distribuție gaussiană și cu disperse λ_i . Astfel, funcția densitate de probabilitate compusă a procesului de ieșire rezultă de forma:

$$p(\vec{y}) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{(2\pi\lambda_i)^{1/2}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}} \quad (1.28)$$

iar, în urma unor calcule, se obține [Sto.88]:

$$b_G^{ind}(D) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M \log_2 \frac{\lambda_i}{D} \text{ biți/simbol.} \quad (1.29)$$

Limita inferioară a cazului gaussian, ce poate fi obținută înlocuind (1.29) în (1.24), are o utilitate practică deosebită datorită locului privilegiat pe care-l ocupă acest caz. Astfel, este valabilă o observație similară (1.20), în sensul că orice funcție $b_i^{ind}(D)$, pentru oricare altă sursă i.i.d. negaussiană, va lua valori inferioare sau cel mult egale funcției $b_G^{ind}(D)$, dată de (1.29), pentru orice valoare a distorsiunii D .

Aceste limite teoretice calculate sunt utile în cazurile în care se cunosc proprietățile statistice staționare ale sursei. Sursele reale sunt însă, în general, nestaționare. Aceste cazuri pot fi abordate prin folosirea rezultatelor pentru cele staționare prin raportarea nestaționarității sursei la aceste caracteristici staționare (evaluând totodată o măsură, o distanță, a nestaționarității față de cazul staționar). Acest lucru însă cere proceduri adaptive, ce urmăresc în permanență comportamentul sursei și pe care-l raportează apoi la anumite cazuri staționare.

Se pot trage următoarele concluzii:

- a) prin folosirea unor sisteme de compresie, care să asigure reprezentarea minimală, din punct de vedere informațional, a semnalului generat de sursa primară, se urmărește asigurarea transmisiei cu o rată de informație cât mai apropiată de valoarea limită inferioară, dată de funcția rată-distorsiune $b(D)$;
- b) deoarece semnalele reale sunt în general surse de informație nestaționare, performanțe optime (asigurarea transmisiei cu o rată de informație cât mai apropiată de valoarea $b(D)$) se pot obține cu sisteme de compresie care folosesc tehnici de compresie adaptive.

Capitolul II. Cuantizarea

Se cunoaște faptul că majoritatea semnalelor purtătoare de informație (semnal de imagine, vocal, audio, seismic etc.) sunt prin natura lor semnale analogice. În capitolul precedent a fost indicat faptul că pentru prelucrarea, stocarea sau comunicarea lor eficientă se recurge frecvent la procedee numerice, procedee ce presupun o conversie numerică prealabilă a acestora. Este vorba de procesul de conversie analog-numerică a cărui operație de bază este reprezentată de cuantizare. Am văzut (§1.3), de asemenea, că și în cazul sistemului PCM, bazat pe doar o simplă cuantizare, se obține o reducere a cantității informaționale a semnalului analizat. Din acest punct de vedere cuantizarea poate fi privită ca fiind cea mai simplă procedură de compresie.

Astfel, schema bloc a unui sistem de compresie simplu este schițată în figura 2.1.

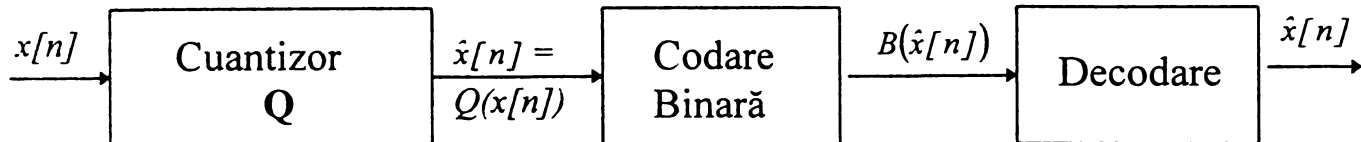


Figura 2.1. Schema bloc a unui sistem de compresie/decompresie bazat pe cuantizare și codare binară

Scopul cuantizării este găsirea unei reprezentări alternative $\hat{x}[n]$ a semnalului $x[n]$, reprezentare ce să fie definită pe un spațiu de valori discrete de o dimensiune finită și, în general, mult mai redusă decât cea a reprezentării sursă. Semnalul de prelucrat $x[n]$ din figura 2.1. este, în majoritatea cazurilor, o secvență de eșantioane analogice cu valori reale însă care, teoretic, acoperă o plajă de la $-\infty$ la ∞ și, de asemenea, este considerată ca fiind cu suport infinit, $n \in Z$. Însă sistemele de compresie practice nu dispun, la un moment dat, de toate aceste valori și, de asemenea presupun că semnalele de la intrare sunt mărginite (cu valoare maximă finită). Altfel spus, ele operează prin considerarea și prelucrarea, la un moment dat, doar a unei cantități finite de valori ale secvenței $x[n]$. Din acest motiv vom considera că la intrarea sistemului din figura 2.1 avem de-a face, la un moment de timp n , cu un vector format din ultimele N valori ale secvenței $x[n]$, notat prin:

$$\bar{x} = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-N+1]]$$

Dacă eșantioanele sunt cu valori reale, $x[n] \in \mathfrak{R}, \forall n \in Z$, se poate scrie $\bar{x} \in \mathfrak{R}^N$.

Cuantizorul poate prelucra acest vector în mod secvențial, eșantion cu eșantion, caz în care vorbim de *cuantizare scalară*, sau pe blocuri de M eșantioane în mod simultan ($N = l \cdot M, l \neq N$), caz în care vom vorbi despre *cuantizare vectorială* (de ordin M). În acest din urmă caz este utilă folosirea unei notații echivalente a vectorului de intrare \bar{x} , de forma $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$, prin considerarea $N = M, l = 1$, și notând cu $x_k = x[n-k+1]$.

Folosind aceste notații se poate spune că scopul cuantizorului Q este furnizarea unui vector $\hat{\bar{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_N]$ ce corespunde vectorului \bar{x} și care aparține unei mulțimi finite $C \subset \mathfrak{R}^N$, de vectori N dimensional, subspațiu ce nu depășește ca dimensiune valoarea 2^{Nb} , unde b reprezintă rata de bit dorită, exprimată în biți/eșantion. Submulțimea C se numește dicționar de simboluri (codebook) a cuantizorului Q . O măsură a erorii cuantizorului poate fi definită pe baza asemănării dintre vectorii \bar{x} și respectiv $\hat{\bar{x}}$. Definiția distanței d dată în (1.12) pentru mărimi scalare poate fi extinsă pentru cazul vectorial. Ea are o definiție similară, și este dată de:

$$d(\bar{x}, \hat{\bar{x}}) = \frac{1}{N} \|\bar{x} - \hat{\bar{x}}\|^2 \quad (2.1)$$

Definiția (2.1) este o expresia pătratică, o măsură energetică a asemănării, ce se mai numește și eroarea medie pătratică de aproximare. Distorsiunea D a cuantizorului se poate defini ca fiind chiar această eroare. Aceasta este de fapt o măsură a performanței cuantizorului. În cazul cuantizării vectorului $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$, ea se poate explicita, astfel:

$$D = \frac{1}{N} \left[(x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \dots + (x_N - \hat{x}_N)^2 \right]$$

Scopurile urmărite în construcția cuantizorului Q sunt:

- complexitate scăzută în descrierea cuantizorului - cuantizorul trebuie să poată fi descris cât mai compact astfel încât cantitatea de informație suplimentară necesară identificării metodei de cuantizare la decodare, exprimat în biți, să fie mult mai mică decât produsul $N \cdot b$;

- complexitate scăzută din punct de vedere al calculelor - materializată prin impunerea cerinței ca regula de cuantizare să permită o implementare rapidă;

- distorsiune scăzută - în mod ideal distorsiunea introdusă de cuantizorul proiectat ar trebui să fie cel puțin la fel de redusă ca și cea introdusă de un alt cuantizor de aceeași complexitate și ce oferă aceeași rată de bit în cazul aceluiași semnal (să ofere același factor de compresie).

Acest din urmă deziderat poate fi evaluat din prisma compromisului dintre distorsiunea D oferită de sistem și rata de bit b ce-l caracterizează. Limita teoretică a acestui compromis a fost prezentată în §1.7 prin definirea funcțiilor distorsiune-rată $D(b)$ și rată-distorsiune $b(D)$.

2.1. Cuantizarea scalară

Cuantizarea scalară este metoda de cuantizare preferată în majoritatea sistemelor de compresie deoarece oferă simplitate în implementare. Ea prelucrează secvența de intrare eșantion cu eșantion. Notând cu L dimensiunea spațiu secundar, cel al valorilor $\hat{x}[n]$, rezultă un număr mediu de $b = \log_2 L$ simboluri binare necesare codificării (fără pierdere) a unui element al acestui spațiu. Dezavantajul metodei constă în faptul că ea oferă, de obicei, performanțe mai scăzute decât cea vectorială din punct de vedere al distorsiunilor oferite la aceeași rată de bit.

Formal, a construi un cuantizor scalar cu L nivele înseamnă:

- găsirea unui subinterval $[a, b]$ al axei reale astfel încât toate valorile x_k să fie incluse în el, $x_k \in [a, b], \forall k = 1 \dots N$;

- găsirea unei partiții a lui $[a, b]$ în L subintervale I_1, I_2, \dots, I_L ;

- găsirea nivelelor de cuantizare y_1, y_2, \dots, y_L astfel încât $y_j \in I_j, \forall j = 1, 2, \dots, L$.

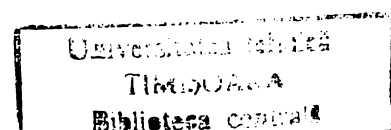
Odată ce mărimile $L, a, b, I_1, I_2, \dots, I_L, y_1, y_2, \dots, y_L$ au fost stabilite, cuantizorul Q cu L nivele a fost determinat în mod univoc. Cuantizorul acceptă la intrare orice număr real x din intervalul $[a, b]$. Ieșirea $Q(x)$ a cuantizorului (răspunsul la excitația x) este un nivel de cuantizare y_j asociat subintervalului $I_j \subset [a, b]$ ce conține numărul x .

Având la dispoziție un număr de $2L+3$ parametri ai cuantizorului există, din punct de vedere teoretic, un număr foarte mare de modalități posibile de implementare a lui. Ca și măsură de performanță a unui cuantizor poate fi aleasă eroarea medie pătratică de aproximare (distorsiunea cuantizorului) definită de relația (2.1).

Codarea binară, realizată de blocul de codare binară ce urmează cuantizorului din figura 2.1, poate fi caracterizată printr-o funcțională bijectivă definită pe mulțimea nivelelor de cuantizare $\{y_j\}_{j=1,2,\dots,L}$ și cu valori în mulțimea cuvintelor de cod, $\{c_j\}_{j=1,2,\dots,L}$ (o mulțime cu L elemente).

Acest proces de asociere, de "codare" a unui element y_i printr-un cuvânt de cod c_i , poartă denumirea de *alocare de bit*. În funcție de modul în care acest bloc realizează alocarea de bit, cuantizoarele pot fi:

631.311
369 B



- a) cuantizare cu rată de bit fixă,
- b) cuantizare cu rată de bit variabilă.

a) Cuantizarea cu rată de bit fixă presupune ca fiecare eşantion de intrare să fie reprezentat pe un număr constant de biți, $b = \text{const}$. În acest caz mulțimea cuvintelor de cod se găsește ca fiind mulțimea reprezentărilor binare, cu un număr b de biți, ale numerelor $1, 2, \dots, L$, unde trebuie să avem $L = 2^b$. În acest caz, b va reprezenta chiar rata de bit a cuantizorului (în biți/eşantion). Astfel se poate scrie: $B: \{y_j\}_{j=1,2,\dots,L} \rightarrow \{1,2,\dots,L\}$. Procedura este simplă, constând dintr-o procedură de indexare a nivelelor de cuantizare. Este procedura utilizată, cu precădere, în cazul sistemelor de cuantizare uniformă. Dezavantajul constă în faptul că numărul b trebuie să fie neapărat un număr întreg, condiție ce reprezintă o restricție suplimentară în cazul proiectării cuantizoarelor optime.

b) Cuantizarea cu rată de bit variabilă permite o codare mai flexibilă a eşantioanelor cuantizate. Astfel, nu mai este obligatoriu ca orice valoare să fie codată cu același număr de biți. Unele eşantioane vor putea avea alocat un număr mai mare de biți decât altele. Evident, având impusă o rată medie de b biți/eşantion unele coduri c_i vor fi mai lungi decât b iar altele vor fi mai scurte decât această rată. Metoda are avantajul major că permite obținerea unor rate b ce nu sunt neapărat numere întregi. Un exemplu de construcție a unui cuantizor cu rată de bit variabilă folosind k cuantizoare uniforme este obținut aplicând regulile următoare:

- împărțirea celor N eşantioane de la intrare în k mulțimi, $\{P_i\}_{i=1,2,\dots,k}$, cu dimensiunile n_1, n_2, \dots, n_k astfel încât $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$,
- căutarea a k numere b_1, b_2, \dots, b_k astfel încât $(n_1/N)b_1 + (n_2/N)b_2 + \dots + (n_k/N)b_k = b$,
- construirea unui cuantizor scalar uniform cu rata b_i pentru fiecare mulțime $P_i, i=1, 2, \dots, k$.

De fapt, orice algoritm de compresie fără pierdere, (§1.2), poate fi privit ca o procedură de alocare de bit cu rată de bit variabilă.

Un cuantizor Q^* cu L nivele de cuantizare se numește *cuantizor optimal* pentru un vector de intrare \vec{x} dacă:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - Q^*(x_i))^2 = \min_Q \left\{ \sum_{i=1}^N (x_i - Q(x_i))^2 \right\} \quad (2.2)$$

unde minimul se consideră pe mulțimea tuturor cuantizoarelor cu L nivele de cuantizare.

Având în vedere numărul mare de parametri al cuantizorului precum și restricția impusă de cunoașterea vectorului de intrare \vec{x} , această problemă de optimizare nu este deloc ușoară, pe de o parte, iar pe de altă parte, construirea unui cuantizor optimal pentru un anumit vector de intrare nu garantează această optimalitate și pentru alți vectori de intrare.

Din acest motiv construcția cuantizoarelor este bazată, în general, pe anumite ipoteze privind natura semnalului de intrare. Intrarea este frecvent modelată ca o realizare particulară a unui proces aleator staționar cu parametri statistici cunoscuți sau estimați (pe baza semnalului curent de la intrare). În unele din aceste cazuri este posibilă deducerea expresiilor analitice ale unor măsuri de performanță pentru categorii diverse de cuantizoare. Ipotezele cele mai frecvente, amintite și în §1.2, presupun procese i.i.d. la intrare, cu valori ale realizărilor distribuite conform unor legi de probabilitate cunoscute (cu distribuție uniformă, laplaciană sau gaussiană). Bineînțeles, aceste ipoteze permit evaluarea performanțelor doar pentru aceste tipuri de surse, evaluările pot fi neconcludente dacă una sau mai multe dintre aceste ipoteze nu sunt verificate (de exemplu procesul de intrare este staționar dar nu este independent sau este nestaționar). Se procedează, frecvent, și la

introducerea unor ipoteze simplificatoare, atât privind partiția intervalului de valori $[a, b]$, cât și nivelele de cuantizare y_1, y_2, \dots, y_L .

2.1.1. Modelarea statistică a intrării și a zgomotului de cuantizare

În cele ce urmează, vom considera că semnalul de intrare $x[n]$ este o realizare particulară a unui proces aleator staționar și ergodic $X[n]$, caracterizat printr-o funcție densitate de probabilitate notată cu $p_X(x)$ și cu eșantioanele decorelate, deci presupunem o sursă de semnal staționară și fără memorie. Presupunem, de asemenea, că procesul de intrare este de medie nulă și vom nota cu σ_X^2 puterea finită a acestuia. Rezultă, în mod corespunzător, că avem la intrarea sistemului un vector $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$ ce este o realizare particulară a unui vector aleator $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$, format din N variabile aleatoare ce aparțin acestui proces $X[n]$.

Măsura (2.1) a distorsiunii introduse de cuantizor, se exprimă ca:

$$D = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Q(x_i))^2\right) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{x}_i)^2\right) \quad (2.3)$$

unde operatorul E este cel de mediere statistică.

Cu toate că este aplicabilă, măsura (2.3) nu prea e utilizată deoarece ea este redundantă (presupune medierea temporală a N componente succesive iar procesul X a fost presupus staționar - deci cele N componente ale sumei de mai sus vor avea comportamente similare din punct de vedere statistic).

În evaluarea performanțelor sistemelor de cuantizare se lucrează frecvent cu următoarele patru mărimi:

i) Eroarea medie pătratică, definită conform cu (1.15), prin relația:

$$D = E\left((X - Q(x))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 \cdot p_X(x) \cdot dx \quad (2.4)$$

Ea este o măsură obiectivă a distorsiunii introduse de cuantizor.

Observație: măsura (2.1) poate fi privită ca un estimator a măsurii (2.4) pentru cazul unei distribuții uniforme a intrării.

ii) Raportul semnal pe zgomot de cuantizare, SQNR (Signal to Quantization Noise Ratio) definit prin:

$$SQNR = \frac{E\{X^2\}}{D} = \frac{\sigma_X^2}{D} \quad (2.5)$$

sau, exprimat în decibeli:

$$SQNR[dB] = 10 \log_{10} \frac{E\{X^2\}}{D} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{D} \quad (2.6)$$

iii) Entropia semnalului de ieșire:

$$H\{Q(X)\} = - \sum_{i=1}^L p(y_i) \cdot \log(p(y_i)) \text{ [biți/eșantion]} \quad (2.7)$$

unde s-a notat cu $p(y_i)$ probabilitatea de apariție a valorii cuantizate y_i , ce este egală cu probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia o valoare $x \in I_i$, care se poate calcula cu:

$$p(y_i) = \int_{x \in I_i} p_X(x) \cdot dx \quad (2.8)$$

Această entropie reprezintă valoarea limită pentru rata medie de informație cu care se poate transmite un eșantion cuantizat fără distorsiuni suplimentare.

iv) Evaluări subiective prin teste de inteligibilitate, teste de vizibilitate etc.

Cantitatea $\varepsilon = X - Q(x)$, identifică zgomotul de cuantizare, și este un proces aleator. Distorsiunea D definită în (2.4) nu este altceva decât puterea acestui proces. Expresiile (2.4), (2.5) ne indică faptul că evaluarea obiectivă a performanțelor cuantizatorului (de fapt a întregului sistem de compresie) presupune o modelare cât mai fidelă a acestui proces al erorii. Notând cu $p_\varepsilon(u)$ funcția densitate de probabilitate a acestui proces, eroarea medie pătratică de aproximare a cuantizatorului (deci, distorsiunea D definită pe baza distanței (2.1)) se poate scrie:

$$D = E(\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot p_\varepsilon(u) \cdot du \quad (2.9)$$

Aceasta este o expresie greu de evaluat deoarece nu se cunoaște forma explicită a lui $p_\varepsilon(u)$. Expresia (2.9) poate fi rescrisă astfel:

$$D = \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^L \int_{u+y_i \in I_i} u^2 p_\varepsilon(u) \cdot du \quad (2.10)$$

Ținând cont de transformarea funcțională $\varepsilon = X - Q(x)$, se poate face schimbarea de variabilă $u = x - y_i$:

$$D = \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^L \int_{x \in I_i} (x - y_i)^2 p_\varepsilon(x - y_i) \cdot du \quad (2.11)$$

Cum însă pentru

$$x \in I_i, \Rightarrow p_\varepsilon(x - y_i) = p_X(x). \quad (2.12)$$

Rezultă:

$$D = \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^L \int_{x \in I_i} (x - y_i)^2 p_X(x) \cdot dx \quad (2.13)$$

Expresia (2.13) indică faptul că distorsiunea D a unui cuantizor Q poate fi evaluată cunoscând parametrii cuantizatorului (parametrii $L, a, b, I_1, I_2, \dots, I_L, y_1, y_2, \dots, y_L$) și legea de probabilitate a sursei $p_X(x)$. Această expresie poate sta la baza proiectării cuantizoarelor optimale însă, pentru anumite legi $p_X(x)$, volumul de calcul implicat poate fi prohibitiv. Din acest motiv este utilă introducerea unor ipoteze suplimentare privind atât natura procesului eroare cât și parametrii cuantizatorului. Astfel, de exemplu, expresia (2.13) se simplifică considerabil dacă se presupune că numărul de nivele L al cuantizatorului este "suficient de mare" iar nivelele de cuantizare y_i sunt foarte apropiate de punctele de mijloc ale subintervalelor de cuantizare $I_i, i=1, 2, \dots, L$. Această ipoteză, denumită "ipoteza de rezoluție fină" sau de "rată de bit mare", se regăsește în numeroase lucrări de

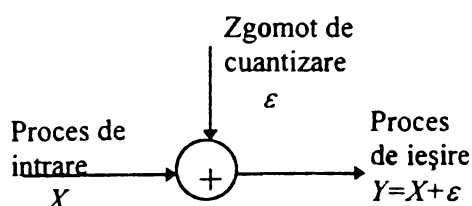


Figura 2.2. Modelul statistic aditiv al procesului de cuantizare

referință. Se remarcă lucrarea lui Bennett, [Ben.48], sau cele ale lui Widrow, [Wid.56], [Wid.60].

Este foarte util, de asemenea, ca procesul de cuantizare să fi modelat ca un proces obținut prin însumarea a două componente aleatoare staționare, conform figurii 2.2. Însă, spre deosebire de modelul

semnal+zgomot obișnuit din teoria comunicațiilor, în acest model zgomotul nu este independent de procesul de intrare X .

Această independență dintre procesul de intrare și zgomotul de cuantizare este însă un deziderat major ce ar permite o abordare mult simplificată a procesului de cuantizare. Benett, [Ben.48], a arătat că în anumite condiții acest lucru poate fi asigurat. Una dintre aceste condiții o reprezintă ipoteza de rezoluție fină mai sus amintită. El arată că, presupunând o funcție densitate de probabilitate $p_X(x)$ continuă și un număr L de nivele de cuantizare suficient de mare (astfel încât funcția $p_X(x)$ să fie aproximativ constantă într-un subinterval de cuantizare I_i), iar nivele de cuantizare y_i sunt centrele de greutate ale subintervalurilor de cuantizare, zgomotul de cuantizare se va comporta similar unui zgomot alb (proces i.i.d) ce este independent de procesul de intrare dacă intrarea este slab corelată sau necorelată.

În modelarea zgomotului de cuantizare ca o sursă de zgomot aditiv, este foarte convenabilă utilizarea ipotezei conform căreia această componentă are o distribuție uniformă și este independentă de procesul de intrare X . Această ipoteză a fost folosită de Widrow [Wid.56], pentru cazul unui cuantizor uniform cu un număr foarte mare de nivele de cuantizare. Mai mult, în [Wid.60] se deduce o formulă exactă a funcției caracteristice a procesului de ieșire Y , și se arată că dacă procesul intrare X este “de bandă limitată” atunci momentele statistice ale procesului de ieșire vor putea fi calculate pe baza celor ale procesului de intrare, iar zgomotul aditiv va fi un proces i.i.d. (zgomot alb), independent de procesul de intrare X , și cu o distribuție uniformă. Această condiție de bandă limitată impune funcției caracteristice a procesului de intrare este foarte restrictivă, neverificându-se în practică. Acest fapt însă a generat o nouă problemă și anume, dacă există vreo procedură de prelucrare prin care să se poată remodela procesul de eroare astfel încât acesta să rezulte cu distribuție uniformă, indiferent de legea de probabilitate a procesului de intrare. Soluția găsită poartă denumirea de “*dithering*”, procedură ce presupune generarea unui proces aleator de referință ε_r , i.i.d. cu distribuție uniformă, și cuantizarea realizărilor procesului sumă $X + \varepsilon_r$. Utilizând un cuantizor uniform cu verificarea ipotezei de rezoluție fină, rezultă o eroare de cuantizare ε cu o distribuție uniformă [Ger.78], [Sto.88], [Goy.98], [Kir.98], [Gra.98]. Metoda prezintă însă dezavantajul creșterii puterii erorii de reconstrucție, cu puterea procesului de referință ε_r .

Având în vedere faptul că, în general, chiar și pentru o putere σ_X^2 finită a procesului X , probabilitatea ca el să ia o valoare x , (cu $|x|$ foarte mare ce tinde la infinit), este diferită de zero, vor apărea probleme în dimensionarea unui cuantizor Q optimal cu un număr L finit (impus prin proiectare - de exemplu din condiția de rată de bit constantă) de nivele de cuantizare. În aceste cazuri zgomotul de cuantizare va avea două componente. Prima componentă este dată de acele valori $x - Q(x)$ pentru care $x \in [a, b]$. Această componentă se numește *zgomot granular*. A doua componentă este dată de valorile $x \notin [a, b]$ și se numește *zgomot în exces*. Este util să se modeleze zgomotul de cuantizare, în mod artificial, ca fiind o sumă a celor două componente, zgomotul granular plus zgomotul în exces. Zgomotul granular are o valoare maximă limitată de lungimea maximă a intervalurilor $I_j, j = 1, 2, \dots, L$. Valoarea zgomotului în exces (zgomot de depășire) este (teoretic) nelimitată. Din acest motiv, în dimensionările practice ale cuantizoarelor se aleg valorile limită ale intervalului de interes $[a, b]$ astfel încât el să cuprindă cu probabilitate aproape de unu toate valorile posibile. Astfel, conform măsurii (2.4), distorsiunea cauzată de cele câteva valori ce nu se vor încadra în acest interval va avea o energie redusă, neglijabilă față de energia componentei de zgomot granular. În cele ce urmează vom presupune întotdeauna această condiție satisfăcută, caz în care prin termenul de zgomot de cuantizare vom înțelege implicit zgomotul granular.

2.1.2. Cuantizarea scalară uniformă

Este cea mai simplă metodă de cuantizare. Se asociază de obicei cu o procedură de codare de bit cu rată de bit constantă, b . Procesul de intrare X fiind presupus de medie nulă, intervalul de interes $[a, b]$ este de obicei unul simetric, $[-A, A]$. Având impusă rata de bit dorită, b , se alege $L=2^b$, iar partiția I_1, I_2, \dots, I_L se obține prin împărțirea intervalului $[-A, A]$ în L subintervale de lungimi egale $\Delta = \frac{2A}{2^b}$. Rămâne să fie stabilite nivelele de cuantizare $\{y_j\}_{j=1,2,\dots,L}$. În cazul în care nu se cunoaște distribuția procesului de intrare, aceste nivele sunt considerate ca fiind punctele de mijloc ale subintervalurilor de lungimi egale $I_j, j=1 \dots L$.

Se poate arăta ușor că, de fapt, acest cuantizor este optimal doar dacă procesul aleator de intrare X este staționar cu distribuție uniformă pe intervalul $[-A, A]$, [Ger.78]. În acest caz procesul aleator $\varepsilon, \varepsilon = X - Q(x)$, va fi unul cu distribuție uniformă pe intervalul $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$. Funcția densitate de probabilitate a procesului ε este:

$$p_\varepsilon(u) = \frac{1}{\Delta} \cdot \chi_{\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]}(u), \quad \chi_{[-\alpha, \alpha]}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & u \notin [-\alpha, \alpha] \end{cases} \quad (2.14)$$

În acest caz dispersia procesului ε , ce definește puterea zgomotului de cuantizare, este:

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\{\varepsilon^2\} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2A}{2^b}\right)^2 = \frac{A^2}{3} \cdot 2^{-2b} \quad (2.15)$$

Ținând cont de faptul că procesul de intrare s-a presupus ca fiind cu distribuție uniformă pe intervalul $[-A, A]$, puterea acestuia este:

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} = \int_{-A}^A u^2 \frac{1}{2A} du = \frac{A^2}{3} \quad (2.16)$$

rezultând expresia:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_X^2 \cdot 2^{-2b} \quad (2.17)$$

Rezultă: $SQNR = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\varepsilon^2} = 2^{2b}$, sau, în decibeli, $SQNR[dB] = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\varepsilon^2} = 10 \log_{10} 2^{2b} \approx 6,02 \cdot b$.

Rezultatul indică faptul că un cuantizor scalar uniform, în cazul unui proces aleator de intrare cu o distribuție uniformă, se caracterizează printr-o sensibilitate, a raportului semnal pe zgomot de cuantizare, de aproximativ 6 dB pe bit. Însă, această ipoteză de distribuție uniformă a procesului X este o ipoteză foarte rar verificată în practică.

După cum s-a văzut în §2.1.1 problema modelării zgomotului de cuantizare în ipoteza unui proces aleator i.i.d. X , de medie nulă, caracterizat printr-o funcție densitate de probabilitate oarecare, notată $p_X(x)$, nu mai este la fel de simplă. O primă observație privind componenta de zgomot în exces este că o valoare $A = 4\sigma_X$ asigură reducerea (minimizarea) ei în majoritatea ipotezelor curente făcute cu privire la funcția densitate de probabilitate $p_X(x)$. Admițând, de asemenea, că ipoteza de "rezoluție fină" este verificată, distribuția zgomotului de cuantizare poate fi considerată ca fiind tot cea dată de ec. (2.14), deci puterea lui se poate calcula tot conform ec. (2.15) în care se introduce ipoteza $A = 4\sigma_X$:

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\{\varepsilon^2\} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2A}{2^b}\right)^2 = \frac{A^2}{3} \cdot 2^{-2b} = \frac{16\sigma_X^2}{3} \cdot 2^{-2b} \quad (2.18)$$

în care puterea procesului aleator X este σ_X^2 ;

Rezultă raportul SQNR:

$$SQNR = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{3}{16} 2^{2b} \quad (2.19)$$

$$\text{în decibeli } SQNR[dB] = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\epsilon^2} = -20 \log_{10} 2 \cdot b + 10 \log_{10} \frac{3}{16} \approx 6,02b - 7,3 \quad (2.20)$$

Raportul $\frac{A}{\sigma_X}$ poartă denumirea de *factor de încărcare*. Se observă că orice modificare a acestuia nu schimbă altceva decât termenul liber din relația (2.20), (calculat pentru valoarea 4 a acestuia), în sensul creșterii sau descreșterii. Descreștere obținem pentru valori mai mici ale acestui raport caz în care însă, scapă de sub control puterea zgomotului în exces, componentă necuprinsă în ec. (2.18). De asemenea rezultatul (2.19) pune în evidență o diferență de 7.3 decibeli față de limita teoretică obținabilă dată de relația (1.19).

2.1.3. Cuantizarea scalară neuniformă

Concluzia paragrafului precedent indică faptul că nu cuantizarea scalară uniformă reprezintă calea efectivă de obținere a unor bune performanțe. Pentru un număr L de nivele de cuantizare fixat, ținând cont de forma funcției densitate de probabilitate a intrării, repartizarea neuniformă a nivelelor de decizie, deci considerarea unor subintervale I_1, I_2, \dots, I_L cu lungimi diferite, poate duce la un zgomot de cuantizare de o putere mai redusă și/sau la senzitivitate mai redusă a distorsiunilor în raport cu legea de probabilitate a sursei [Ben.48], [Ger.78], [Sto.88], [Goy.98]. Astfel, alocându-se pași de cuantizare de dimensiune mare pentru valori ale semnalului cu probabilitate mică de apariție și pași de cuantizare de valoare mică pentru valorile semnalului cu probabilitate mare se va obține o distorsiune D mai mică și un raport SQNR mai mare decât valorile optime corespunzătoare din cazul cuantizorului uniform date de (2.20).

Notând cu $t_i, i=0,1,2,\dots,L$ capetele intervalelor $I_i, i=1,2,\dots,L$, deci $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, expresia distorsiunii D , definită prin ec.(2.4) și dezvoltată în (2.13), devine:

$$D = \sum_{i=1}^L \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - Q(x))^2 p_X(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^L \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 p_X(x) \cdot dx \quad (2.21)$$

Problema dimensionării unui cuantizor Q , care să ofere o distorsiune D minimă sau aproape de acest minim, cunoscând statisticile sursei și având impusă o rată de bit maximă dorită b , nu este deloc ușoară.

Am văzut în §2.1.1. că expresia (2.21) a distorsiunii poate fi simplificată introducând anumite ipoteze simplificatoare care însă nu trebuie să fie prea restrictive. Astfel, impunând verificarea ipotezei de “*rezoluție fină*” sau “*cu rată de bit înaltă*” (ce presupune ca numărul de nivele L să fie suficient de mare astfel încât funcția densitate de probabilitate $p_X(x)$ a sursei pe un interval $[t_{i-1}, t_i], i=1,2,\dots,L$, să poată fi aproximată cu o constantă), se va putea scrie,

$$p_X(x) \approx p_X(y_i), \text{ pentru } x \in [t_{i-1}, t_i], i=1,2,\dots,L \quad (2.22)$$

Notând cu $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ lungimea intervalului de decizie I_i , se poate scrie:

$$D = \sum_{i=1}^L \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 p_X(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^L p_X(y_i) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 dx \quad (2.23)$$

Termenul de sub integrală este componenta de zgomot datorată valorilor x din intervalul I_i , ce sunt cuantizate în punctul y_i , componentă modelată în continuare conform ipotezelor din §2.1.1 (nivelele

de cuantizare y_i sunt foarte apropiate de punctele de mijloc ale subintervalelor de cuantizare I_i), deci se va putea scrie:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 dx \cong \int_{-\Delta_i/2}^{\Delta_i/2} x^2 dx = \frac{\Delta_i^3}{12} \quad (2.24)$$

Înlocuind (2.19) în (2.18) se obține:

$$D = \sum_{i=1}^L p_X(y_i) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 dx = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^L p_X(y_i) \cdot \Delta_i^3 \quad (2.25)$$

evident, cu $y_i \approx \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$

Se observă, că formula (2.25) poate fi privită ca o generalizare a ec. (2.15) stabilită pentru cuantizorul scalar uniform. Înlocuind $p_X(y_i) = \frac{1}{2A}$ și $\Delta_i = \Delta = \frac{2A}{L}$, verificarea rezultatului este imediată.

Se arată că pentru anumite legi de probabilitate distorsiunea D atât conform (2.21) cât și conform (2.25) admite un minim unic, ce corespunde cuantizorului optimal [Ben48], [Ger.78], [Sto.88].

O aproximare diferită a problematicii cuantizorului neuniform dar care oferă rezultate similare în cea ce privește cuantizorul optimal a fost făcută de Bennett în [Ben.48]. Conform acestei tehnici, cuantizarea uniformă poate fi echivalată cu transformarea semnalului prin intermediul unei funcții neliniare $F(x)$, care are ca efect compandarea semnalului generat de sursă, compandorul fiind urmat de un cuantizor uniform. Această situație se prezintă în figura 2.3.

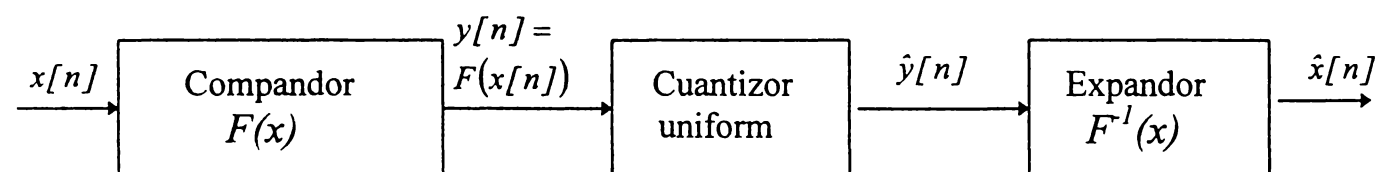


Figura 2.3. Modelarea procesului de cuantizare neuniformă

Asupra semnalului, obținut la ieșirea cuantizorului uniform, se aplică funcția inversă $F^{-1}(x)$, echivalentă cu expandarea semnalului, obținându-se astfel aproximarea semnalului de intrare. Funcția $F(x)$, al cărei grafic reprezintă caracteristica de compandare, trebuie să fie o funcție bijectivă, continuă și derivabilă, care să satisfacă condițiile:

- este mărginită, $|F(x)| < A$, $\pm A$ fiind valoarea maximă a semnalului,
- este cu simetrie impară, $F(x) = -F(-x)$,
- este monoton crescătoare, $F'(x) > 0, \forall x \in [-A, A]$.

Restricția funcțiilor $F(x)$ la clasa funcțiilor bijective asigură existența funcției inverse $F^{-1}(x)$. În aceste condiții, compandarea urmată de cuantizarea uniformă este echivalentă cu un cuantizor, ale cărui niveluri de decizie t_i și niveluri de ieșire y_i sunt determinate de panta caracteristicii de compandare, deci de derivata funcției $F(x)$. Pentru un număr mare de nivele L , funcția $F(x)$ se poate aproxima în intervalul $[t_{i-1}, t_i]$ printr-o dreaptă de pantă $F'(y_i)$,

$$F'(y_i) = \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{\Delta_i} \quad (2.26)$$

Notând $F'(y_i) = g(y_i)$, se obține:

$$\Delta_i = \frac{2A}{L \cdot g(y_i)} \quad (2.27)$$

Distorsiunea medie D rezultă în acest caz:

$$D = \frac{A^2}{3L} \int_{-A}^A \frac{p_X(x)}{[g(x)]^2} dx \quad (2.28)$$

Problema optimizării, deci a găsirii cuantizorului neuniform ce minimizează distorsiunea medie D dată de ecuația de mai sus revine la găsirea acelei funcții $F(x)$ care, pentru o lege de probabilitate dată, asigură această minimizare.

2.1.4. Cuantizare scalară optimală

Cuantizarea scalară uniformă este optimală doar pentru cazul unei distribuții uniforme a procesului aleator de intrare X . Căutăm, în continuare, cuantizorul optim pentru cazul în care funcția densitate de probabilitate $p_X(x)$ a procesului staționar X este o funcție oarecare cunoscută dar care nu este proporțională cu funcția indicator a intervalului $[-A, A]$, (deci X nu este cu distribuție uniformă).

$$p_X(x) \neq \frac{1}{2A} \cdot \chi_{[-A, A]}(x), \quad (2.29)$$

Căutarea cuantizorului optim are la bază un criteriu de optimalitate. Acest criteriu este, în general, minimizarea erorii medii pătratice de aproximare. Impunând numărul de nivele al cuantizorului, L , precum și domeniul cuantizorului (de exemplu $A=4\sigma$), și folosind expresia (2.21) a erorii medii pătratice D , problema optimizării revine la găsirea valorilor nivelelor de decizie $t_i, i=0, 1, 2, \dots, L$ precum și a celor de cuantizare $y_i, i=1, 2, \dots, L$ astfel încât să obținem o valoare minimă a distorsiunii. Soluționarea problemei se poate face prin anularea derivatelor parțiale ale distorsiunii D în raport cu variabilele t_i și y_i mai sus menționate.

Astfel, impunând condițiile:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} D = 0, i = 1, \dots, L-1 \quad (2.30)$$

ecuației (2.21), rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 p_X(x) \cdot dx + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x - y_{i+1})^2 p_X(x) \cdot dx \right] = 0 \quad (2.31)$$

ecuație ce are soluția:

$$(t_i - y_i)^2 p_X(t_i) - (t_i - y_{i+1})^2 p_X(t_i) = 0 \quad (2.32)$$

de unde rezultă:

$$t_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}, i = 1, 2, \dots, L-1 \quad (2.33)$$

Condiția (2.33) reprezintă o primă condiție necesară ce trebuie să fie verificată de cuantizorul optimal. Ea se numește “*condiția celui mai apropiat vecin*” deoarece impune ca pragul de decizie să se găsească la jumătate dintre două nivele de cuantizare succesive.

Impunând condițiile:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} D = 0, i = 1, \dots, L \quad (2.34)$$

ecuației (2.21), rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - y_i)^2 p_X(x) \cdot dx \right] = 0 \quad (2.35)$$

formă echivalentă cu:

$$\left[-2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} x \cdot p_X(x) \cdot dx + 2y_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} p_X(x) \cdot dx \right] = 0 \quad (2.36)$$

Din ecuația precedentă rezultă:

$$y_i = \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} x \cdot p_X(x) \cdot dx}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} p_X(x) \cdot dx}, i = 1, 2, \dots, L \quad (2.37)$$

Condiția (2.37) reprezintă o a doua condiție necesară ce trebuie să fie verificată de un cuantizor optimal. Ea se numește “*condiția de centroid*” deoarece impune ca nivelele de decizie y_i să fie centrele de greutate ale valorilor x cuantizate în intervalul I_i , $i=1, 2, \dots, L$.

Cele două condiții (2.33) și (2.37) nu oferă în mod explicit valorile optime, datorită faptului că ele exprimă pragul de decizie t_j în funcție de nivelele de cuantizare y_j și vice-versa, y_j în funcție de t_j . Mai mult, se poate arăta că cele două condiții enunțate sunt doar condiții necesare, dar nu și suficiente, pentru un cuantizor optimal. Astfel, verificarea celor două condiții restrânge doar clasa cuantizoarelor posibile candidate la calitatea de cuantizor optimal. Aceste cuantizoare sunt numite, în mod obișnuit, cuantizoare Lloyd-Max [Mor.95].

Se arată, [Ben.48], [Ger.78], [Sto.88], că dacă:

$$\frac{d^2}{dx^2} \{ \log(p(x)) \} < 0, \forall x \quad (2.38)$$

deci, funcția $\log(p(x))$ este concavă, există doar un singur cuantizor ce verifică condițiile Lloyd-Max (2.33), (2.37), și acela este cel optimal. Astfel condiția (2.38) reprezintă condiția suficientă pentru ca un cuantizor, ce verifică cele două condiții necesare enunțate anterior, să fie un cuantizor optimal. Condiția (2.38) este validă pentru un număr mare de funcții de densitate de probabilitate $p(x)$, printre care se numără și funcția cea mai răspândită și anume cea gaussiană.

Cele două relații, (2.33) și (2.37), stau la baza unui algoritm iterativ de căutare a cuantizorului optimal, cu un număr de nivel L impus și un vector de valori $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$ de intrare. Cunoscând valorile vectorului de intrare $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$ se găsește un estimator al funcției de densitate de probabilitate $p_X(x)$ și, pornind de la cuantizorul uniform cu L nivele, se aplică, alternativ, cele două relații (2.33) și (2.37) până ce variația procentuală a distorsiunii D de la o iterație la alta nu va scădea sub un anumit prag impus. În cazul în care $p_X(x)$ verifică (2.38) convergența algoritmului este asigurată, având ca limită parametrii cuantizorului optimal.

În ipoteza de “*rezoluție fină*”, deci pentru cazul cuantizoarelor cu un număr L mare de nivele de cuantizare este posibilă o evaluare analitică aproximativă a performanțelor cuantizorului optimal în funcție de densitatea de probabilitate a intrării $p_X(x)$. Astfel, pornind de la expresia (2.25) a distorsiunii D și notând:

$$\alpha_i^3 = p_X(y_i) \Delta_i^3$$

problema minimizării distorsiunii D revine la găsirea valorilor $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots,L}$, pentru care se minimizează suma $\sum_{i=1}^L \alpha_i^3$, cu restricția $\sum_{i=1}^L \alpha_i = \text{const.}$. Această problemă admite o soluție unică:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_L = \alpha = \text{const.} \quad (\text{condiția de contribuție egală})$$

$$\text{caz în care: } D = \frac{L}{12} \alpha^3$$

Cum însă:

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i = L \cdot \alpha = \sum_{i=1}^L [p_X(y_i)]^{1/3} \Delta_i \approx \int_{-\infty}^{\infty} [p_X(x)]^{1/3} dx$$

folosind notația $L=2^b$ se poate scrie:

$$D = \frac{1}{12} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (p_X(x))^{1/3} dx \right]^3 2^{-2b}. \quad (2.39)$$

Pentru o sursă gaussiană,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (2.40)$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cdot \sigma_X^2 \cdot 2^{-2b} \quad (2.41)$$

rezultând un raport semnal pe zgomot de cuantizare:

$$SQNR = \frac{\sigma_X^2}{D} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} 2^{2b} \text{ sau, în decibeli, } SQNR[dB] \approx 6,02b - 4,34 \quad (2.42)$$

cu cel puțin 3 dB mai bun decât cel obținabil în cazul unui cuantizor uniform cu un factor de încărcare egal cu $A=4$, ec. (2.20).

O expresie similară cu (2.39) se obține și conform tehnicii lui Bennett de modelare a cuantizării neuniforme printr-o lege de expandare urmată de o cuantizare uniformă.

Expresia (2.28) pune în evidență dependența distorsiunii medii D introduse de cuantizor de panta funcției de expandare $F(x)$, notată $g(x)$. Problema optimizării, deci a găririi cuantizorului neuniform ce minimizează distorsiunea medie D dată de ecuația (2.28) revine la găsirea acelei funcții $F^*(x)$ care, pentru o lege de probabilitate dată $p_X(x)$, asigură această minimizare. Din această condiție rezultă, [Ger.78], [Sto.88], că panta acestei funcții trebuie să fie de forma:

$$g^*(x) = C_1 \cdot [p_X(x)]^{1/3} \quad (2.43)$$

ceea ce corespunde unei caracteristici de compandare:

$$F^*(x) = C_1 \int_0^x [p_X(u)]^{1/3} du, x > 0 \quad (2.44)$$

unde C_1 trebuie să îndeplinească condiția $F^*(A) = A$.

Introducând expresia pantei (2.43) în (2.28), rezultă valoarea medie minimă a distorsiunii datorate zgomotului granular în cuantizarea neuniformă a unui semnal de distribuție $p_X(x)$ și dispersie σ_X^2 , ca fiind:

$$D = \frac{\sigma_X^2}{12L^2} \left[\int_{-A}^A (p_{0X}(x))^{1/3} dx \right]^3, \quad (2.45)$$

unde cu $p_{0X}(x)$ s-a notat funcția densitate de probabilitate $p_X(x)$ normată cu σ_X^2 .

Se observă asemănarea dintre cele două rezultate, (2.39) și (2.45), în ipoteza de “înalță rezoluție” și, respectiv, din modelarea lui Bennett. Funcția de compandare optimă rezultă de forma [Ger.78]:

$$F(x) = \frac{A(1 - e^{-mx})}{1 - e^{-mA}}, x > 0$$

$$\text{iar pentru valori negative } F(x) = -F(-x), x < 0 \quad (2.46)$$

lege ce poartă denumirea de “*legea-m de compandare*”.

2.1.5 Cuantizare scalară robustă

În anumite aplicații, de exemplu codarea semnalului audio, semnalul de intrare este imposibil de modelat printr-un proces staționar. Astfel, cuantizorul folosit trebuie să facă față unui semnal cu caracteristici statistice variabile. Acesta se caracterizează și printr-o variație mare a puterii sale instantanee în timp. Astfel, este imposibilă căutarea și implementarea cuantizorului optimal în acest caz. O cerință esențială ce se poate impune cuantizorului “cel mai bun” este ca el să fie puțin sensibil la variațiile funcției densitate de probabilitate a intrării. Astfel, construirea cuantizorului robust capătă o importanță practică deosebită. Acest lucru presupune găsirea celui cuantizor care să ofere un raport SQNR independent (în cazul ideal) de funcția densitate de probabilitate a intrării. Având în vedere modelul echivalent din figura 2.3 al cuantizorului neuniform și alegând o pantă a funcției de compandare de forma, [Ger.78]:

$$g(x) = \frac{A}{b \cdot |x|}, \quad |x| < A \quad (2.47)$$

atunci (2.28) se reduce la:

$$D = \frac{b^2}{3L^2} \sigma_X^2 \quad (2.48)$$

astfel încât raportul SQNR se reduce la constanta $\frac{3L^2}{b^2}$, o expresie independentă de funcția $p_X(x)$.

Integrând (2.47), se obține:

$$F(x) = A + c \cdot \log \frac{x}{A}, x > 0 \quad (2.49)$$

unde c este o constantă. Rezultatul (2.49) arată că o compandare logaritmică ar trebui să asigure caracteristici robuste cuantizorului. Bineînțeles, expresia (2.48) neglijează componenta zgomotului în exces, astfel încât acest raport SQNR nu se va menține constant dacă puterea semnalului de intrare crește mult. De asemenea, curba (2.49) nu este fizic realizabilă deoarece valoarea sa în origine $F(0)$ nu este finită. Din acest motiv ea este frecvent aproximată în aplicațiile practice. Astfel, în cuantizarea semnalului vocal se lucrează des cu curba de compandare denumită “*legea- μ de compandare*”:

$$F(x) = A \frac{\log(1 + \mu x / A)}{\log(1 + \mu)}, x > 0 \quad (2.50)$$

sau, alternativa “*legea-A de compandare*”:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x}{1 + \log \alpha} & 0 \leq x \leq A / \alpha \\ \frac{A + A \log(\alpha x / A)}{1 + \log \alpha} & A / \alpha \leq x \leq A \end{cases} \quad (2.51)$$

În practică aceste legi de compandare sunt implementate prin funcții obținute prin aproximarea pe porțiuni a lor, permițând dezvoltarea unor algoritmi rapizi.

2.2 Cuantizarea vectorială

Cuantizarea vectorială este procedura de cuantizare prin care se asigură prelucrarea simultană a unui grup de eșantioane ale intrării $x[n]$. Folosind notația făcută la începutul acestui capitol, să considerăm că se dispune, la un moment dat, la intrarea cuantizorului Q de un vector de valori reale \vec{x} . Scopul cuantizorului Q este furnizarea unui vector $\hat{\vec{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_N]$ ce corespunde vectorului \vec{x} și care aparține unei mulțimi de $C = \{\vec{c}_i\}_{i=1,2,\dots,L} \subset \mathfrak{R}^N$, de vectori N dimensional, subspațiu ce nu depășește ca dimensiune valoarea $L=2^{Nb}$, unde b reprezintă rata de bit dorită exprimată în biți/eșantion. Submulțimea C se numește dicționar de coduri (codebook) a cuantizorului Q . Distorsiunea cuantizorului poate fi calculată conform distanței (2.1). Construcția cuantizorului poate fi bazată, similar cuantizoarelor scalare, pe compromisul dintre rata de bit dorită b și distorsiunea obținută D .

Printre avantajele utilizării cuantizoarelor vectoriale în comparație cu performanțele obținabile cu cele scalare, se numără:

- distorsiunea obținută la aceeași rată de bit poate fi mai redusă,
- decodare mai rapidă,
- se implementează cu succes și pentru rate de bit reduse.

Printre dezavantajele lor se numără:

- complexitate mare (mai ales a codorului),
- codarea poate fi o procedură lentă,
- apariția efectului de margine între blocurile de date succesive.

O abordare a construcției cuantizoarelor vectoriale se poate face trecând la generalizarea cuantizorului scalar prezentat în §2.1. Astfel spațiul \mathfrak{R}^N este partiționat în L regiuni P^i , denumite celule, astfel încât fiecare celulă să includă toți vectorii \vec{x} cuantizați în $\hat{\vec{x}} = \vec{c}_i$. Se poate scrie, deci:

$$P^i = \left\{ \vec{x} \in \mathfrak{R}^N \mid Q(\vec{x}) = \vec{c}_i \right\}_{i=1,2,\dots,L} \quad (2.52)$$

În ipoteza unui semnal de intrare $x[n]$ ce este o realizare particulară a unui proces aleator staționar și ergodic $X[n]$ caracterizat printr-o funcție densitate de probabilitate compusă de ordin N notată cu $p_X(\vec{x}) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_N)$, rezultă, în mod corespunzător, că avem la intrarea sistemului un vector $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$ ce este o realizare particulară a unui vector aleator $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$, format din N variabile aleatoare ce aparțin procesului $X[n]$.

Folosind distanța euclidiană:

$$d(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) = \frac{1}{N} \|\vec{x} - \hat{\vec{x}}\|^2$$

o măsură a distorsiunii D poate fi definită conform:

$$D = E\left\{d(\vec{X}, \hat{\vec{x}})\right\} = \int_{\mathfrak{R}^N} d(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) \cdot p_X(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (2.53)$$

Expresia (2.53) admite scrierea:

$$D = E\left\{d(\vec{X}, \hat{\vec{x}})\right\} = \sigma_\epsilon^2 = \sum_{i=1}^L \int_{P^i} d(\vec{x}, \vec{c}_i) \cdot p_X(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (2.54)$$

2.2.1. Cuantizarea vectorială optimală

Construcția cuantizorului vectorial optimal constă în găsirea acelui cunatizor Q de ordin N , cu un dicționar de coduri $C = \{\bar{c}_i\}_{i=1,2,\dots,L} \subset \mathfrak{R}^N$ de dimensiune $L=2^{Nb}$, pentru care distorsiunea (2.54) are valoare minimă. Problema este foarte dificilă, chiar imposibil de rezolvat în timp rezonabil datorită varietății foarte mari a dicționarelor C posibile. Ea nu se simplifică mult prea mult nici dacă statisticile intrării sunt cunoscute cel puțin până la ordinul N . Din acest motiv, de cele mai multe ori, în rezolvarea problemei de mai sus se caută soluții local optimale sau se introduc ipoteze suplimentare (de exemplu ipoteze privind structura cuantizorului, algoritmul de calcul al distanțelor, alocarea de bit etc.).

În mod similar cazului cuantizării scalare, nu este posibilă determinarea simultană atât a celei mai bune partiții $P^i, i=1,2,\dots,L$ cât și a punctelor de reproducere $\{\bar{c}_i\}_{i=1,2,\dots,L}$, dar rămân valabile, [Mor.95], cele două condiții necesare optimalității. Astfel:

i) fiind dat un dicționar $C = \{\bar{c}_i\}_{i=1,2,\dots,L}$, partiția cea mai bună este aceea care verifică condiția,

$$P^i = \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^N \mid d(\bar{x}, \bar{c}_i) \leq d(\bar{x}, \bar{c}_j) \forall j = 1, 2, \dots, L \right\}_{i=1,2,\dots,L} \quad (2.55)$$

ce definește “regula celui mai apropiat vecin”. Partiția $P^i, i=1,2,\dots,L$ în acest caz poartă denumirea de partiție Voronoi;

ii) fiind dată o partiție $P^i, i=1,2,\dots,L$, cele mai bune reprezentante $\{\bar{c}_i\}_{i=1,2,\dots,L}$ sunt obținute pe baza “condiției de centroid”:

$$\bar{c}_i = \frac{\int_{P^i} \bar{x} \cdot p_X(\bar{x}) \cdot d\bar{x}}{\int_{P^i} p_X(\bar{x}) \cdot d\bar{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (2.56)$$

Linde, Buzo și Gray au dezvoltat un algoritm similar algoritmului Lloyd-Max de construcție a cuantizoarelor scalare optimale, pentru acest caz multidimensional, denumit algoritmul LBG, [Mor.95], [Gra.98]. Principiul algoritmului Lloyd-Max a fost păstrat, astfel:

- se inițializează dicționarul C ,
- se aplică în mod succesiv (alternativ) cele două reguli date de ecuațiile (2.55), (2.56).

În acest caz însă rămâne o problemă dificilă inițializarea dicționarului C , de ale cărei proprietăți depinde foarte mult convergența algoritmului LBG.

Performanțele cuantizorului vectorial optimal, similar cazului scalar, sunt greu de evaluat pentru cazul general. Pentru o rată de b bit/simbol impusă, o măsură de performanță rămâne distorsiunea D a cuantizorului, definit conform (2.53) sau (2.54). O expresie explicită a acestei distorsiuni D , în ipoteza de “rezoluție fină”, deci în cazul unui număr L mare, (ce permite ca funcția densitate de probabilitate $p_X(\bar{x}) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_N)$ să poată fi aproximată printr-o constantă în interiorul unei celule Voronoi), este [Mor.95]:

$$D = \sigma_\epsilon^2(N) = C(N) \left[\int_{\mathfrak{R}^N} [p_X(\bar{x})]^{N/N+2} d\bar{x} \right]^{N+2/N} 2^{-2b} \quad (2.57)$$

unde $C(N)$ este o constantă ce depinde doar de N . Punând $N=1$ în (2.57) regăsim relația (2.41), definită pentru cazul cuantizării optimale scalare a unei surse gaussiene.

În cazul unui proces de intrare gaussian cu puterea σ_X^2 și cu o matrice de autocorelație normală de ordin N notată cu $R_X(N)$, distorsiunea (2.57) devine:

$$D = \sigma_\varepsilon^2 = C(N) \cdot \sigma_X^2 [\det(\mathbf{R}_X(N))]^{1/N} 2^{-2b} \quad (2.58)$$

Se poate arăta, [Mor.95], că $C(N)$ este o funcție monoton descrescătoare de N cu:

$$C(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi, \quad C(\infty) = 1$$

Această comparație “optimal vectorial” - “optimal scalar” poate fi făcută pentru orice tip de densitate de probabilitate $p_X(\vec{x})$. Astfel, pornind de la expresia (2.57), se poate defini câștigul cuantizării vectoriale față de cuantizarea scalară prin raportul:

$$G_v = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1)}{\sigma_\varepsilon^2(N)} \quad (2.59)$$

Notând:

$$\|p_X(\vec{x})\|_\alpha = \left[\int_{\mathfrak{R}^N} [p_X(\vec{x})]^\alpha d\vec{x} \right]^{1/\alpha}, \quad (2.60)$$

unde $\tilde{p}_X(x)$ este densitatea de probabilitate marginală de ordin întâi a procesului \vec{X} , iar $\bar{p}_X(\vec{x}) = \bar{p}_X(x_1, x_2, \dots, x_N)$ este densitatea de probabilitate a vectorului \vec{X} , cu componente independente, vom putea scrie:

$$\bar{p}_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{p}_X(x_i), \quad (2.61)$$

iar câștigul de cuantizare este:

$$G_v(N) = \frac{C(1) \cdot \|\tilde{p}_X(x)\|_{1/3}}{C(N) \cdot \|p_X(\vec{x})\|_{N/(N+2)}} \quad (2.62)$$

$$G_v(N) = \frac{C(1)}{C(N)} \frac{\|\tilde{p}_X(x)\|_{1/3}}{\|\bar{p}_X(\vec{x})\|_{N/(N+2)}} \cdot \frac{\|\bar{p}_X(\vec{x})\|_{N/(N+2)}}{\|p_X(\vec{x})\|_{N/(N+2)}}$$

$$G_v(N) = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

Expresia (2.62) pune în evidență trei factori ai câștigului de cuantizare G_v . Primul factor G_1 fiind un raport de două constante, pune în evidență un câștig “dimensional”, indicând avantajul utilizării cuantizării vectoriale de ordin N față de cuantizarea scalară. Cel de al doilea factor, G_2 , ține cont de forma densității marginale $\tilde{p}_X(x)$, ce depinde, bineînțeles, de natura procesului de intrare \vec{X} . Astfel se obține [Mor.95], pentru o lege de probabilitate uniformă $G_2(N) = 1, \forall N$, în timp ce pentru o lege

de probabilitate gaussiană $G_2(N) = \frac{3^{3/2}}{((N+2)/N)^{(N+2)/2}}$. Cel de al treilea factor este cel mai

interesant deoarece el ține cont de corelația existentă între diferitele componente ale vectorului \vec{X} .

În cazul unui proces \vec{X} gaussian cu puterea σ_X^2 și cu matricea de autocorelație normală $R_X(N)$, rezultă $G_3 = [\det(\mathbf{R}_X(N))]^{-1/N}$.

Capitolul III. Descompunerea eficientă în serii de funcții a semnalelor în timp continuu

Reprezentarea adecvată a unui semnal, în vederea compresiei, este foarte importantă din punctul de vedere al obținerii unor performanțe bune. În primul capitol s-a arătat faptul că noțiunea de compresie este asociată cu o reprezentare discretă a semnalului ce urmează a fi prelucrat. Astfel, performanțele diferitelor sisteme de compresie sunt evaluate pe baza eficienței metodei folosite în găsirea unor reprezentări discrete alternative ce corespund reprezentării discrete sursă. S-a arătat, de asemenea, faptul că majoritatea sistemelor practice operează cu semnale de intrare în timp continuu, de energie finită, limitate în bandă, astfel încât reprezentarea sursă poate fi obținută, cel mai simplu, printr-un proces de conversie analog-numerică. Acest proces presupune, de cele mai multe ori, o eșantionare urmată de o cuantizare fină (de obicei cuantizare scalară uniformă), astfel încât să fie posibilă o reconstrucție aproape perfectă a semnalului de intrare. În cele ce urmează vom avea în vedere, cu preponderență, operația de discretizare a variabilei temporale, punând accent pe eficiența diverselor reprezentări posibile în cazul unor categorii diferite de semnale. De fapt, teorema eșantionării (teorema WKS) ne asigură de faptul că orice semnal de bandă limitată, eșantionat corespunzător, poate fi reconstruit exact din eșantioanele sale. Însă, din păcate, această clasă de semnale este una foarte restrânsă și, conform proprietăților transformării Fourier, ele sunt cu suport temporal infinit. Din acest motiv semnalele întâlnite în mod curent în practică nu pot face parte din această clasă (fiind cauzale și, în general, cu suport temporal finit).

Fie semnalul $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$. Se pune problema găsirii unei reprezentări discrete echivalente a sa, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, astfel încât semnalul continuu $x(t)$ să poată fi reconstruit exact, sau cu erori de aproximare foarte mici, pe baza cunoașterii valorilor secvenței x_k . În cazul general, valorile x_k pot fi privite ca și coeficienți ai unei descompunerii liniare a semnalului $x(t)$ într-o bază de funcții a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \varphi_k(t) \quad (3.1)$$

unde $\varphi_k(t)$ reprezintă funcțiile bazei descompunerii. Din punctul de vedere al compresiei sunt utile acele reprezentări (3.1) care reușesc să concentreze toată energia semnalului pe un număr redus de coeficienți x_k . Prin păstrarea și prelucrarea (cuantizarea și codarea) doar a acestor coeficienți se obține eficiența maximă în "compresia" semnalului.

De fapt, atât expresia $x(t)$ cât și a transformatei Fourier a sa, $\hat{x}(\xi)$, pot fi privite ca și dezvoltări în baze de funcții speciale ale spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Astfel se poate scrie:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

și, respectiv,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\xi) \cdot e^{j\xi t} d\xi \quad (3.3)$$

În ambele cazuri însă, baza de funcții este cu indexare continuă (distribuții Dirac în (3.2) și exponențiale complexe în (3.3)) neoferind deci, o reprezentare de forma (3.1). Ele prezintă importanță, totuși, deoarece pot fi considerate ca fiind reprezentări extreme ale semnalului x . Astfel, relația (3.2) oferă reprezentarea cu rezoluție maximă în domeniu timp, dar fără nici o localizare frecvențială (calitate datorată funcțiilor descompunerii - distribuții Dirac translatate), în timp ce (3.3) este reprezentarea cu localizare perfectă în frecvență dar fără nici o localizare temporală

(calitate dată de natura funcțiilor bazei - exponențiale complexe). Acest al doilea tip de analiză, numită și analiză Fourier, oferă o unealtă puternică ce permite caracterizarea unui semnal în domeniul frecvență. Ea stă la baza analizei spectrale, specificând o relație univocă între domeniul timp și domeniul frecvență.

Eficiența reprezentării unui semnal într-una din bazele mai sus menționate depinde de natura semnalului. Astfel, de exemplu, dacă semnalul prezintă un număr relativ redus de variații bruște (salturi finite), este preferată reprezentarea (3.2), deoarece (3.3) va oferi o imagine cu un număr foarte mare de coeficienți semnificativi. Însă reprezentarea (3.3) este eficientă în cazul unor semnale periodice. Un semnal armonic, de exemplu, va fi reprezentat cu ajutorul a maxim doi coeficienți nenuli. Este de remarcat faptul că reprezentarea (3.3) a majorității semnalelor periodice implică o mulțime numărabilă de funcții ale bazei, deci va fi o expresie de forma (3.1). Este vorba despre seriile Fourier asociate acestor semnale. Semnalele întâlnite în practică pot fi încadrate, în general, între cele două categorii amintite, prezentând atât variații bruște cât și evoluții periodice sau cvasi-periodice. Acest fapt ne sugerează ideea căutării celei mai bune baze pentru aceste semnale, printre funcțiile cu caracteristici similare atât funcțiilor Dirac (localizare perfectă în timp) cât și exponențialelor complexe (localizare perfectă în frecvență). Având în vedere cele două "dimensiuni" vizate ale funcțiilor bazei, ele sunt denumite în mod curent baze timp-frecvență. Dezvoltarea semnalului într-o astfel de bază reprezintă o extensie particulară a tehnicilor de analiză de semnal. Ea constituie un caz particular de reprezentare timp-frecvență, TFR (Time Frequency Representation), ce asociază unui semnal unidimensional (de obicei după variabila timp) o funcție bidimensională având ca și variabile timpul și frecvența. Astfel se pot elimina diversele neajunsuri ale reprezentărilor (3.2) și (3.3) prezentate până acum. Noua reprezentare este în aparentă contradicție cu o imagine de forma (3.1) însă, în fond, acest lucru nu înseamnă altceva decât o schimbare a convenției de indexare folosite, în sensul trecerii la o indexare după două variabile independente, urmată de o eventuală discretizare a acestor variabile.

Există mai multe clase de reprezentări timp-frecvență. O categorie de reprezentări TFR o constituie cele liniare, reprezentări ce urmăresc o descompunere liniară a semnalului de analizat după o mulțime de funcții (mulțime ce formează o bază într-un spațiu sau subspațiu de semnale), [Lan.62], [Dau.88], [Coi.89], [Hla.89], [Hla.91], [Coi.91], [Dau.91], [Aus.92], [Chu.92c], [Gop.92c], [Gop.92d], [Dau.92], [Ald.93], [Dau.93], [Fla.93], [Uns.93b], [Uns.93c], [Wes.93], [Wic.93], [Che.94], [Che.95], [Gir.95], [Fei.96a], [Fei.96b], [Str.97]. Caracterizarea proprietăților semnalului în acest caz se face în termenii proprietăților acestor funcții pe baza coeficienților descompunerii obținute. Astfel, de exemplu, proprietățile de localizare în planul timp-frecvență ale unui semnal vor putea fi stabilite având în vedere cele ale funcțiilor bazei descompunerii. De exemplu, un coeficient mare al descompunerii semnalului în baza considerată, detectabil pe baza măsurii lui, va marca poziția în planul timp-frecvență a elementului corespunzător al bazei, contribuind astfel semnificativ la imaginea timp-frecvență a semnalului analizat. Problema tehnică fundamentală constă în faptul că se atribuie o anumită poziție unei funcții, care este nenulă într-o regiune largă (sau chiar regiune infinită), respectiv în faptul că se asignează o anumită frecvență unor componente diferite de cele armonice.

O altă categorie de reprezentări timp-frecvență o constituie cele care "transformă" semnalul $x(t)$ într-o funcție bidimensională $T_x(t, \xi)$ având ca argumente variabilele timp și frecvență, [Hla.89], [Hla.92], [Fla.93]. Multe dintre aceste reprezentări timp-frecvență descriu o evoluție spectrală în funcție de timp (util în studiul semnalelor netaționare). Valorile funcției $T_x(t, \xi)$ oferă informații de genul: "ce componente spectrale sunt prezente și la ce momente de timp".

Se poate observa faptul că, orice semnal poate fi reprezentat în planul timp-frecvență în moduri variate, alegerea reprezentării celei mai adecvate rămânând pe seama scopului urmărit, a contextului în care ea se folosește.

În cele ce urmează ne vom ocupa mai cu seamă de reprezentările timp-frecvență liniare, cele care pot oferi o analiză de formă (3.1) - o dezvoltare liniară, a unui semnal.

Prin definiție o bază timp-frecvență este o bază "bună" a unui spațiu de funcții S (un spațiu Hilbert) dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții:

i) funcțiile $\varphi_k(t)$ ale bazei formează o bază "stabilă" de reprezentare a oricărei funcții a spațiului S . Prin "stabilă" înțelegem faptul că pentru orice funcție $x(t) \in S$ există o singură secvență $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ astfel încât seria dată de (3.1) să fie convergentă în norma spațiului S . Este de dorit o convergență necondiționată (ordinea de însumare este nerelevantă);

ii) funcțiile bazei sunt cu localizare bună în timp și în frecvență. Această condiție este asigurată dacă funcțiile $\varphi_k(t)$ și $\hat{\varphi}_k(\xi)$ sunt concentrate într-un interval din jurul centrelor lor de greutate (valorile medii ale lor) și sunt cu descreștere invers polinomială sau exponențială în afara acestuia, sau sunt cu suport compact;

iii) baza de funcții $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ permite o implementare ușoară pe calculator a dezvoltării în serie. Trebuie să avem metode rapide de calcul a coeficienților x_k pentru o analiză eficientă. De asemenea, funcțiile $\varphi_k(t)$ trebuie să se genereze ușor în vederea unui proces rapid de sinteză a funcției $x(t)$ atunci când se cunosc coeficienții x_k .

Prima condiție este asigurată dacă mulțimea de funcții $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a spațiului Hilbert S . Este de preferat ca această bază să fie una ortogonală, caz în care se simplifică atât procedurile de analiză și, respectiv, de sinteză, cât și evaluarea performanțelor sistemelor în care aceasta apare (de exemplu evaluarea erorii de aproximare la reconstrucție). Astfel, prin definiție, dacă funcțiile $\varphi_k(t)$ verifică:

$$i) \langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = \delta_{kl}$$

$$ii) \text{ orice funcție } x(t) \text{ din spațiul de semnale } S \text{ poate fi pusă sub forma (3.1)}$$

$$iii) \|\varphi_k\|_S = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$$

atunci mulțimea $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormală a spațiului S .

Media (centrul de greutate temporal) și, respectiv, întinderea temporală a unei funcții $\varphi(t)$ pot fi evaluate pe baza definițiilor:

$$t_0 = \frac{1}{\|\varphi\|_S^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot |\varphi(t)|^2 dt$$

$$\Delta t^2 = \frac{1}{\|\varphi\|_S^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 \cdot |\varphi(t)|^2 dt$$
(3.4)

În mod similar, media și întinderea frecvențială poate fi evaluată conform:

$$\xi_0 = \frac{1}{\|\varphi\|_S^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\Delta \xi^2 = \frac{1}{\|\varphi\|_S^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 \cdot |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$
(3.5)

Localizarea bună atât în timp cât și în frecvență poate fi asigurată în limitele principiului incertitudinii al lui Heisenberg-Gabor. Acest principiu afirmă că nu există nici o posibilitate ca o

analiză timp-frecvență să se facă cu o precizie arbitrar de bună, simultan, atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență, [Fla.93]. Precizia ce se poate obține se numește rezoluție de localizare (temporală sau frecvențială). Cu notațiile (3.4), (3.5), aceasta se exprimă sub forma:

$$\Delta t \cdot \Delta \xi \geq \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

unde avem egalitate doar pentru un semnal gaussian de forma $\varphi(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha t^2}$, $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Alte câteva proprietăți utile ale funcțiilor bazei sunt:

- de covarianță în raport cu anumite operații elementare (translație, modulare, scalare);
- de continuitate și diferențiabilitate;
- proprietăți de moment.

Importanța majoră a unei bune localizări a funcțiilor bazei descompunerii rezidă în faptul că de ea depinde în ce măsură va fi “dispersată” informația oferită de un eveniment local (în timp sau în frecvență) pe coeficienții descompunerii. Astfel, de exemplu, un salt brusc în semnalul analizat (un eveniment local în timp) va influența un număr de coeficienți x_k cu atât mai puțin numeroși cu cât întinderea temporală a funcțiilor bazei este mai redusă. În mod similar, o componentă repetitivă în structura semnalului de intrare se va reflecta doar în coeficienții corespunzători acelor funcții ale bazei care au valoare nenulă a spectrului lor pe frecvența (frecvențele) caracteristică evenimentului repetitiv. Astfel, aceste baze timp-frecvență pot oferi o descompunere de forma (3.1) “bună” a unui semnal $x(t)$ cu un anumit comportament local, o reprezentare caracterizată printr-un număr redus de coeficienți x_k cu valori semnificative.

Exemple de astfel de baze sunt date de:

- funcțiile sinus-cardinal, ce formează o bază în spațiul semnalelor de bandă limitată,
- funcțiile trigonometrice locale,
- funcțiile Wavelet,
- pachetele de funcții trigonometrice locale,
- pachetele de funcții Wavelet.

Numeroase alte exemple de baze timp-frecvență speciale se găsesc în unele din lucrările mai sus citate. Astfel, sunt abordate, în [Lan.62], funcțiile sferoidale aplatizate, ce pot forma o bază ortogonală optimală a spațiului semnalelor de bandă limitată, în [Dau.88] - bazele de funcții Wavelet de suport compact, în [Coi.89] - bazele de funcții similare sistemelor Walsh, în [Dau.91] - anumite tipuri de baze Wilson, în [Gop.92c], [Gop.92d] - bazele de funcții Wavelet modulate, în [Che.94] sunt analizate familiile de funcții cardinale de tip spline, în [Fei.96a] și [Fei.96b] sunt studiate proprietățile unor descompuneri atomice de tip Gabor, etc.

De o atenție deosebită se bucură, în aplicațiile practice curente, funcțiile Wavelet deoarece:

- pot forma o bază Riesz a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$;
- această bază se poate construi pornind de la o singură funcție. Funcțiile bazei sunt de fapt variantele deplasate și rescalate ale acestei funcții, denumită *funcție de scară*;
- coeficienții x_k sunt produsele scalare ale funcției $x(t)$ cu funcțiile Wavelet duale funcțiilor bazei;
- sunt funcții cu o localizare bună în timp și în frecvență,
- realizează o structurare atractivă a spațiului de semnale $L_2(\mathfrak{R})$,
- se bucură de proprietăți matematice “bune” ce facilitează implementarea rapidă atât a analizei cât și a sintezei unui semnal.

3.1 Descompunerea semnalelor în baze de funcții Wavelet

Funcțiile Wavelet sunt unelte relativ noi în domeniul prelucrărilor de semnale. La ora actuală interesul față de aceste funcții este mare atât din partea teoreticienilor cât și din partea inginerilor care investighează posibilele utilizări eficiente ale lor în domenii foarte variate. Teoria funcțiilor Wavelet caută, în general, reprezentarea eficientă a unor funcții (semnale), de diferite categorii cu caracteristici foarte diferite, în termenii unor componente de bază, cu caracterizare simplă, cu caracteristici de localizare timp-frecvență bune. Impactul major al acestei teorii s-a cristalizat în urma unor lucrări de referință din domeniul analizei armonice semnale Grossmann, Morlet sau Meyer, cu mai mult de un deceniu în urmă [Gro.84], [Mey.90]. De atunci acest subiect a constituit tema unei activități de cercetare vaste în mai toate domeniile de interes. Aplicabilitatea acestora în diverse faze de prelucrare a semnalelor a fost analizată atât de matematicieni cât și de ingineri. S-au analizat proprietățile unor clase foarte variate de funcții Wavelet [Des.87], [Dau.88], [Coi.89], [Chu.91], [Dau.91], [Chu.92c], [Aus.92], [Coh.92], [Dau.92], [Che.94], [Ald.93], [Uns.93b], [Swe.94b], [She.98], s-au implementat algoritmi eficienți de calcul, [Hei.89], [Mal.89b], [Bey.91], [Wic.91], [Rio.92], [She.92], [Bou.94], [Pre.93], [Wic.94], [Swe.95a], [Swe.95b], și s-au propus căi alternative de soluționare a unor probleme matematice complexe (cum ar fi soluționarea numerică a ecuațiilor diferențiale etc.), [Swe.94a]. De asemenea, au fost dezvoltate noi metode de filtrare în subbenzi [Vai.88], [Vai.89], [Vet.89], [Coh.90], [Gop.92a], [Gop.92d], [Vet.92], [Gop.93], [Her.93], [Vet.95], au fost concepute scheme piramidale deosebit de eficiente în prelucrarea imaginilor [Mal.89a], [Rio.93a], [Uns.93a], [Wal.95], au fost concepute metode noi de îmbunătățire a raportului semnal/zgomot din diverse domenii (radar, sonar, ecografie, tomografie, geologie, astronomie etc) [Don.93], [Don.95a], [Isa.95a], [Isa.95b], au fost propuși noi algoritmi de compresie [Wic.89], [Sin.93], [Pan.93], [Rio.93a], [Sha.93] etc. Unele dintre avantajele majore oferite de aceste funcții au fost amintite în paragraful anterior.

În cele ce urmează vom considera că funcțiile analizate aparțin spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, situațiile specifice vor fi indicate în mod explicit. Una dintre proprietățile de bază a funcțiilor Wavelet o reprezintă faptul că ele se asociază cu o structurare bună a spațiului de semnale $L_2(\mathfrak{R})$. Astfel, Mallat și Meyer au introdus noțiunea de *analiză multirezoluție* ce oferă un cadru general de studiu pentru dezvoltarea semnalelor în baze de funcții Wavelet ortogonale și neortogonale [Mal.89b], [Mey.90]. Ei au făcut, de asemenea, conexiunea acestor tehnici cu metodele de filtrare în cuadratură și de filtrare în subbenzi. Daubechies a propus metode eficiente de construcție a unor funcții Wavelet cu suport compact și cu o regularitate arbitrară, impusă [Dau.88], [Dau.91], [Dau.92].

Definiția 3.1. [Swe.93]

Analiza multirezoluție a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ este definită ca o secvență de subspații închise $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset L_2(\mathfrak{R})$, ce verifică următoarele proprietăți :

- i) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$,
- ii) $x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2t) \in V_{j+1}$,
- iii) $x(t) \in V_0 \Leftrightarrow x(t+1) \in V_0, \forall t \in \mathfrak{R}$,
- iv) $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ este densă în $L_2(\mathfrak{R})$ iar $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$,

v) există o funcție $\varphi(t) \in V_0$, denumită funcție de scară, cu $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \neq 0$, astfel încât mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a subspațiului V_0 .

Observație: deoarece $\varphi(t) \in V_0 \subset V_1$, există o secvență $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ astfel încât funcția de scară să se poată scrie sub forma:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \varphi(2t+k) \quad (3.7)$$

Prin integrarea ecuației (3.7) rezultă condiția de normare

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k = \sqrt{2} \quad (3.8)$$

Dacă funcția de scară $\varphi(t)$ aparține spațiului de semnale $L_1(\mathfrak{R})$ ea este în mod univoc definită de ecuația (3.7) și de condiția de normare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1 \quad (3.9)$$

Dacă se notează:

$$b(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \quad (3.10)$$

faptul că mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a subspațiului V_0 corespunde faptului că există două constante pozitive $A, B > 0$ astfel încât:

$$0 < A \leq b(\xi) \leq B < \infty, \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.11)$$

[Swe.94a].

Exemple de funcții de scară $\varphi(t)$ și de spații V_0 :

a) $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \notin [0,1) \end{cases}$. Un semnal $x(t) \in V_0$ este constant pe orice interval de forma $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$;

b) $\varphi(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$. Un semnal $x(t) \in V_0$ este de forma $x(t) = a_k t + b_k$ cu a_k și b_k constante pe

orice interval $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, deci V_0 este spațiul semnalelor cu variații liniare pe porțiuni;

c) $\varphi(t) = \theta(t) * \theta(t)$, cu $\theta(t)$ anterior definit. Funcția de scară $\varphi(t) \in C^2(\mathfrak{R})$, este o funcție B-spline cubică. Un semnal $x(t) \in V_0$ este un polinom de grad maxim trei, pe orice interval $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, deci V_0 este spațiul semnalelor cu variații polinomiale pe porțiuni;

d) $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$. Un semnal $x(t) \in V_0$ este de bandă limitată, cu o transformată Fourier ce verifică $\hat{x}(\xi) = 0$, $|\xi| \geq \pi$. În acest caz mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormală a lui V_0 , coeficienții descompunerii semnalului $x(t)$ în această bază sunt chiar eșantioanele $x(k)$ ale lui.

În multe cazuri găsirea explicită a expresiei analitice a funcției $\varphi(t)$ se dovedește a fi o problemă dificilă. Există însă algoritmi rapizi de calcul ce permit, pe baza ecuației (3.7), o evaluare rapidă a acestor funcții în punctele diadice de forma $t_k = 2^{-j} k$, $j, k \in \mathbb{Z}$, [Dau.88], [Bou.94].

Există numeroase aplicații în care nici nu se cere expresia explicită a acestor funcții de scară, fiind suficientă cunoașterea doar a valorilor secvenței h_k .

Din definiția 3.1 a analizei multirezoluție se poate deduce, [Dau.88], [Mey.90], [Dau.92], că mulțimea de funcții $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, cu

$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \cdot \varphi(2^j t - k) \quad (3.12)$$

este o bază Riesz a subspațiului V_j .

Definiția 3.1 a analizei multirezoluție ne permite caracterizarea semnalelor $L_2(\mathfrak{R})$ în termenii apartenenței la unele subspații V_j sau în termenii proiecției acestora pe aceste subspații. Deoarece reuniunea subspațiilor V_j este densă în $L_2(\mathfrak{R})$ (proprietatea *iv*) din definiția 3.1) avem certitudinea că orice funcție $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ poate fi aproximată, cu o precizie oricât de bună, prin proiecțiile sale în aceste subspații. Se notează cu W_j complementul lui V_j în spațiul V_{j+1} , astfel încât se poate scrie:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \forall j \quad (3.13)$$

Proprietăți similare proprietăților *ii*) și *iii*) din definiția 3.1 sunt verificate și de aceste spații [Mey.90]. Astfel, se poate scrie,

$$\begin{aligned} x(t) \in W_j &\Leftrightarrow x(2t) \in W_{j+1} \\ x(t) \in W_0 &\Leftrightarrow x(t+1) \in W_0, \forall t \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Rezultă că spațiul $L_2(\mathfrak{R})$ poate fi pus sub forma unei sume directe de subspații W_j :

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L_2(\mathfrak{R}) \quad (3.15)$$

Mai mult, există o funcție $\psi(t) \in W_0$, denumită funcția Wavelet mamă, cu $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, astfel încât mulțimea $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a subspațiului W_0 , [Mey.90].

Deoarece funcția $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$, există o secvență $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ astfel încât funcția Wavelet mamă verifică relația:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(2t+k) \quad (3.16)$$

În mod similar, se poate deduce imediat că mulțimea de funcții $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, cu

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \cdot \psi(2^j t - k) \quad (3.17)$$

este o bază Riesz a subspațiului W_j .

De interes practic sunt cazurile în care reuniunea bazelor Riesz $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, sau cele în care bazele Riesz $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sunt ortogonale (rezultând baze ortogonale ale lui $L_2(\mathfrak{R})$).

Sunt prezentate numeroase exemple de analiză multirezoluție în [Mey.90], [Dau.88], [Dau.91], [Dau.92], [Mal.89b], [Mal.93], [Sav.94]. Numeroase exemple de funcții de scară se găsesc în lucrările deja citate. Este posibilă însă ortogonalizarea oricărei baze Riesz, conform [Mey.90], [Dau.88]. Astfel, orice bază Riesz poate fi transformată, printr-o procedură *Gram-Schmidt* de ortogonalizare, într-o bază ortonormală. Conform acestei proceduri, dacă mulțimea $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a unui subspațiu V_j , atunci funcțiile definite conform relației :

$$\hat{\varphi}_{ortho}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\sqrt{b(\xi)}} \quad (3.18)$$

formează o bază ortonormală a acestui subspațiu. Proprietatea (3.11) a funcției $b(\xi)$, definită conform (3.10), ne asigură că numitorul nu se va anula pentru nici o valoare $\xi \in \mathfrak{R}$.

3.1.1 Descompuneri Wavelet ortogonale

Se va considera în continuare că mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală a spațiului V_0 . Astfel, aceste funcții ale bazei verifică proprietatea:

$$\langle \varphi(t), \varphi(t-k) \rangle = \delta_k, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

Prin aplicarea formulei de însumare a lui Poisson se găsește că (3.19) este echivalentă condiției:

$$b(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.20)$$

Aceasta este verificată, conform definiției (3.7), dacă:

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 2 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.21)$$

unde $H(\xi)$ reprezintă transformata Fourier în timp discret a secvenței numerice h_k .

În domeniul timp condiția (3.21) se poate scrie sub forma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot h_{k-2l} = \delta_l \quad \forall l \in \mathbb{Z} \quad (3.22a)$$

De asemenea, deoarece condiția (3.8) este echivalentă cu $H(0) = \sqrt{2}$, rezultă:

$$H(\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k (-1)^k h_k = 0 \quad (3.22b)$$

TEOREMA 3.1.

În ipoteza că $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală a spațiului V_0 , mulțimea $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală a spațiului V_j .

Demonstrație: În primul rând se demonstrează că funcțiile $\varphi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt ortonormale. În acest scop se calculează produsul scalar :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k) \sqrt{2^j} \varphi^*(2^j t - l) dt = \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \varphi^*(2^j t - l) dt \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă :

$$2^j t = u$$

se obține :

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-k) \cdot \varphi^*(u-l) 2^{-j} du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-k) \cdot \varphi^*(u-l) du$$

Ținând seama de ortogonalitatea mulțimii $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, (ea verifică (3.18)), rezultă că :

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \delta_{kl}$$

și prin urmare mulțimea $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este ortonormală.

Se demonstrează completitudinea mulțimii $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. În acest scop se consideră o funcție oarecare $x(t)$ din V_0 . Descompunerea acesteia în baza ortonormală $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este :

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \varphi(t-k) \rangle \cdot \varphi(t-k) \quad (3.23)$$

Dar funcția $x(2^j t) \in V_j$ conform proprietății ii) a analizei multirezoluție (definiția 3.1). De aceea, făcând în (3.23) schimbarea de variabilă :

$$t = 2^j u$$

se obține :

$$x(2^j u) = \sum_k \langle x(2^j u), \varphi(2^j u - k) \rangle \cdot \varphi(2^j u - k) \quad (3.24)$$

Această relație arată că orice element din V_j (fiind de forma $x(2^j t)$ unde $x(t)$ este în V_0) se poate exprima ca o combinație liniară de elemente ale mulțimii $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Deci această mulțime este completă. Rezultă că ea este o bază ortonormală a spațiului V_j .

Legătura dintre funcțiile bazelor subspațiilor V_j succesive poate fi stabilită pe baza definiției 3.1 a analizei multirezoluție, a proprietății (3.7) precum și a definiției (3.12).

Să considerăm baza $\{\varphi_{-l,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a spațiului V_{-l} . Cum acesta este inclus în V_0 (conform definiției 3.1 avem $V_{-l} \subset V_0$), funcțiile $\{\varphi_{-l,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pot fi descompuse în baza $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a lui V_0 . Această descompunere poate fi scrisă :

$$\varphi_{-l,n}(t) = \sum_k \langle \varphi_{-l,n}(t), \varphi(t-k) \rangle \cdot \varphi(t-k) \quad (3.25)$$

Însă :

$$\langle \varphi_{-l,n}(t), \varphi(t-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2^{-l} t - n) \varphi^*(t-k) dt$$

Cu schimbarea de variabilă $2^{-l} t - n = 2^{-l} v$ se obține :

$$\langle \varphi_{-l,n}(t), \varphi(t-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2^{-l} v) \cdot \varphi^*(v + 2n - k) dv \quad (3.26)$$

Ținând seama de ortogonalitatea mulțimii $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și introducând (3.7) în (3.26) obținem:

$$\langle \varphi_{-l,n}(t), \varphi(t-k) \rangle = h_{2n-k}^* \quad (3.27)$$

și revenind la relația (3.25) avem :

$$\varphi_{-l,n}(t) = \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi(t-k) \quad (3.28)$$

Procedând analog se poate demonstra că pentru orice j negativ este valabilă relația :

$$\varphi_{j,n}(t) = \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi_{j+1,k}(t) \quad (3.29)$$

În [Rio.93a] se prezintă conceptul de analiză multirezoluție pentru spațiul Hilbert al semnalelor în timp discret de energie finită, $l_2(\mathbb{Z})$. Alte generalizări sunt prezentate în [Lew.94], [Isa.93a], [Isa.93b], [Isa.97], [Jaw.94], [Mal.91], [Mal.93].

Definiția 3.2.

O analiză multirezoluție, ce verifică proprietățile i)-v) din definiția 3.1, se numește analiză multirezoluție ortogonală dacă subspațiile W_j , construite conform (3.13), verifică :

$$W_j \perp V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Cu alte cuvinte, într-o analiză multirezoluție ortogonală, pentru orice nivel de rezoluție j , subspațiul W_j este complementul ortogonal al lui V_j în V_{j+1} . Astfel, în acest caz, (3.13) poate fi rescris sub forma:

$$V_{j+1} = V_j \oplus^\perp W_j, \forall j \quad (3.30)$$

Se poate demonstra ușor, [Dau.88], [Swe.93], că o condiție suficientă ca o analiză multirezoluție să fie una ortogonală este ca:

$$W_0 \perp V_0 \quad (3.31)$$

În legătură cu analiza multirezoluție ortogonală, introdusă prin definiția 3.2, se poate arăta că șirul de subspații $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ definit conform (3.30) reprezintă o descompunere ortogonală a spațiului Hilbert al semnalelor de energie finită $L_2(\mathfrak{R})$, [Dau.88].

Definiția 3.3.

Șirul de subspații Hilbert închise $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ este o descompunere ortogonală a lui $L_2(\mathfrak{R})$ dacă sunt îndeplinite condițiile, [Cri.65]:

$$i) m \neq p \Rightarrow W_m \perp W_p$$

$$ii) \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L_2(\mathfrak{R})$$

Deoarece subspațiile $W_j, j \in \mathbb{Z}$, sunt mutual ortogonale iar reuniunea lor este densă în $L_2(\mathfrak{R})$ proprietatea (3.15) poate fi rescrisă sub forma:

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^\perp W_j = L_2(\mathfrak{R})$$

În legătură cu descompunerile ortogonale ale lui $L_2(\mathfrak{R})$ se poate demonstra următoarea teoremă :

TEOREMA 3.2.

Există o funcție $\psi(t) \in W_0$ astfel încât :

$$i) \text{ mulțimea } \{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ formează o bază ortonormală a subspațiului } W_0,$$

$$ii) \text{ mulțimea } \left\{ \psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ formează o bază ortonormală a lui } W_j \text{ pentru orice } j$$

din \mathbb{Z} .

Demonstrație :

Deoarece funcția Wavelet $\psi(t) \in W_0$, condiția (3.31) se poate pune sub forma:

$$\langle \psi(t), \psi(t-k) \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.32)$$

Aplicând formula de însumare a lui Poisson, rezultă o condiție echivalentă (3.32) în termenii transformatorilor Fourier ale celor două funcții:

$$\sum_k \hat{\psi}(\xi + 2k\pi) \cdot \hat{\psi}^*(\xi + 2k\pi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.33)$$

O bază ortonormală a lui V_1 este mulțimea $\{\varphi_{1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, conform teoremei 3.1. Introducând notațiile (3.7) și (3.16) în (3.32) și ținând cont de ortogonalitatea acestor funcții ale bazei spațiului V_1 , rezultă o a treia expresie echivalentă condiției de ortogonalitate (3.31):

$$G(\xi) \cdot H^*(\xi) + G(\xi + \pi) \cdot H^*(\xi + \pi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.34)$$

unde $H(\xi)$ și $G(\xi)$ reprezintă transformatele Fourier în timp discret ale celor două secvențe numerice h_k și, respectiv, g_k .

Ea implică o expresie a lui $G(\xi)$ de forma:

$$G(\xi) = a(\xi) \cdot H^*(\xi + \pi) \quad (3.35)$$

unde $a(\xi)$ este o funcție 2π -periodică ce verifică:

$$a(\xi + \pi) = -a(\xi) \text{ și } |a(\xi)| = 1, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.36)$$

Condițiile (3.35) și (3.36) indică o legătură dintre cele două secvențe h_k și g_k . Cea mai simplă legătură posibilă, ce asigură ortogonalitatea (3.31), este dată de:

$$a(\xi) = e^{-j\xi d}$$

ce implică:

$$g_k = (-1)^{d-k} h_{d-k} \quad (3.37)$$

unde d este un număr întreg impar oarecare.

Pe de altă parte, spațiul V_1 , conform (3.30), este o sumă directă a subspațiilor ortogonale V_0 și W_0 :

$$V_1 = V_0 \oplus^\perp W_0$$

Astfel, o bază a acestuia trebuie să se poată obține prin concatenarea bazei ortonormale $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a lui V_0 cu o bază ortonormală din W_0 .

Oricare ar fi semnalul $x(t)$ din V_1 el se poate exprima în forma:

$$x(t) = x_0(t) + e_0(t)$$

unde $x_0(t)$ reprezintă proiecția ortogonală a lui $x(t)$ pe V_0 iar $e_0(t)$ proiecția lui $x(t)$ pe W_0 (eroarea de aproximare a lui $x(t)$ prin $x_0(t)$).

În continuare se construiește funcția $\psi(t) \in W_0$. Pentru $j=0$ relația (3.29) devine:

$$\varphi_{0,n}(t) = \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi_{1,k}(t) \quad (3.38)$$

Deoarece funcția $\psi(t) \in W_0$ ($W_0 \subset V_1$), și ea trebuie să se poată exprima ca și o combinație liniară a elementelor mulțimii $\{\varphi_{1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Prin analogie cu (3.38), se poate stabili că:

$$\psi_{0,n}(t) = \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi_{1,k}(t) \quad (3.39)$$

unde g_k reprezintă secvența numerică cu definiția dată de relația (3.16). În mod similar relației (3.28) și această relație poate fi generalizată. Astfel, se verifică ușor, prin inducție, că are loc egalitatea:

$$\psi_{j,n}(t) = \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi_{j+1,k}(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Se calculează produsul scalar:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,n}(t), \psi_{0,m}(t) \rangle &= \left\langle \sum_k g_{2n-k}^* \varphi_{1,k}(t), \sum_l g_{2m-l}^* \varphi_{1,l}(t) \right\rangle = \\ &= \sum_k g_{2n-k}^* \sum_l g_{2m-l} \langle \varphi_{1,k}(t), \varphi_{1,l}(t) \rangle = \sum_k g_{2n-k}^* g_{2m-k} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Introducând expresia (3.37), relația (3.40) devine:

$$\langle \psi_{0,n}(t), \psi_{0,m}(t) \rangle = \sum_k h_{d-2n+k}^* h_{d-2m+k} \quad (3.41)$$

Se cunoaște că:

$$\langle \varphi_{0,n}(t), \varphi_{0,m}(t) \rangle = \delta_{nm} \quad (3.42)$$

și calculând membrul stâng al acestei relații, pe baza lui (3.38), se obține :

$$\langle \varphi_{0,n}(t), \varphi_{0,m}(t) \rangle = \sum_k h_{2n-k}^* h_{2m-k} \quad (3.43)$$

Folosind relațiile (3.41), (3.42) și (3.43) rezultă că :

$$\langle \psi_{0,n}(t), \psi_{0,m}(t) \rangle = \delta_{nm} \quad (3.44)$$

S-a demonstrat așadar că mulțimea $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este ortonormală.

În continuare se verifică faptul că funcțiile $\psi_{0,n}(t)$ construite astfel nu aparțin lui V_0 . Pentru aceasta se calculează produsul scalar :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,n}(t), \varphi_{0,m}(t) \rangle &= \langle \sum_k g_{2n-k}^* \varphi_{1,k}(t), \sum_l h_{2m-l}^* \varphi_{1,l}(t) \rangle = \\ &= \sum_k g_{2n-k}^* \sum_l h_{2m-l} \langle \varphi_{1,k}(t), \varphi_{1,l}(t) \rangle = \sum_k g_{2n-k}^* \sum_l h_{2m-l} \cdot \delta_{k-l} = \\ &= \left(\sum_k g_{2n-k} \cdot h_{2m-k}^* \right)^* \end{aligned}$$

unde am folosit relațiile (3.38) și (3.39). Se calculează suma din membrul drept după schimbarea de variabilă $2m-k=p$ și avem :

$$\sum_k g_{2n-k}^* h_{2m-k}^* = \sum_p h_p^* g_{2(n-m)+p} = r_{h^*g} [2(n-m)]$$

unde cu $r_{h^*g} [n]$ s-a notat intercorelația secvențelor h^* și g . Dar pentru $r_{h^*g} [n]$ putem scrie :

$$r_{h^*g} [n] \leftrightarrow H(\xi)G^*(\xi) \quad (3.45)$$

$$r_{h^*g} [2n] \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[H\left(\frac{\xi}{2}\right)G^*\left(\frac{\xi}{2}\right) + H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)G^*\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right] \quad (3.46)$$

Ținând seama de relația (3.34) :

$$r_{h^*g} [2n] \leftrightarrow 0$$

și astfel va rezulta :

$$\langle \psi_{0,n}(t), \varphi_{0,m}(t) \rangle = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Deci funcțiile $\psi_{0,n}(t)$ sunt ortogonale pe V_0 . S-a demonstrat că mulțimea $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este ortonormală în spațiul W_0 .

Completitudinea mulțimii $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este demonstrată în [Mey.90]. Se poate deci afirma că mulțimea $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală a spațiului W_0 . Afirmatia *i)* a teoremei 3.2 este deci verificată. Demonstrația pentru verificarea afirmației *ii)* este practic identică cu demonstrația teoremei 3.1.

Exemple de funcții Wavelet ortogonale:

$$a) \psi(t) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & t \notin [0,1) \end{cases}$$

Este cunoscută sub denumirea de funcția *Haar*. Generează, conform teoremei 3.2, o bază ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Prezintă dezavantajul unei regularități scăzute, fiind astfel cu localizare slabă în domeniul frecvență (având un spectru cu o descreștere slabă, proporțional $1/|\xi|$);

b) $\psi(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}$, cunoscută sub denumirea de funcția Wavelet a lui Shannon.

Prezintă proprietăți duale celor ale funcțiilor Haar. Este o funcție cu localizare bună în frecvență dar slabă în domeniul timp;

c) Funcțiile Wavelet Battle-Lemarié, construite prin ortogonalizarea funcțiilor B-spline conform procedurii Gram-Schmidt, dată de relația (3.18). Baza Wavelet generată de funcția Wavelet cu N momente nule, $\psi(t) \in C^{N-2}(\mathfrak{R})$, poate caracteriza orice funcție polinomială pe porțiuni, de grad maxim $N-1$.

d) Funcția Wavelet a lui Meyer. Funcția Wavelet mamă $\psi(t)$ este o funcție regulată, de clasă $C^\infty(\mathfrak{R})$, cu descreștere mai rapidă decât cea polinomială. Are transformată Fourier cu suport compact și se caracterizează printr-un număr infinit de momente nule.

e) Funcțiile Wavelet ale lui Daubechies, pe care le vom nota cu $DAU-N$, unde N indică numărul de momente nule ale lor. Sunt funcții cu suport compact, de lungime $2N-1$, și sunt asimetrice. Au regularitate Hölder $\approx 0.2075N$, pentru N suficient de mare.

Observații:

a) Având în vedere faptul că șirul de subspații $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ reprezintă o descompunere ortogonală a spațiului Hilbert al semnalelor de energie finită $L_2(\mathfrak{R})$, conform teoremei 3.2 o bază Wavelet ortonormală a acestui spațiu poate fi găsită prin concatenarea bazelor ortonormale $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ale acestor subspații. Astfel, mulțimea $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$.

b) Ținând cont de (3.30) se poate deduce că, în mod similar cazului anterior, orice șir de subspații de forma $V_J, \{W_j\}_{j > J, j \in \mathbb{Z}}$ formează, pentru orice $J \in \mathbb{Z}$, o descompunere ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Conform teoremelor 3.1 și 3.2 rezultă că, în acest caz, mulțimea $\{\varphi_{J,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ concatenată cu mulțimea $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j > J, k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormală a lui $L_2(\mathfrak{R})$.

c) Existența unor baze Wavelet ortonormale ale spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ completează paleta de baze ortonormale deja cunoscute ale acestui spațiu oferind flexibilitate în reprezentarea semnalelor. Însă ele vor fi utile doar dacă reprezentările astfel obținute sunt mai eficiente decât cele obținute cu metodele tradiționale.

3.1.1.1. Construcția funcției de scară $\varphi(t)$

Expresia (3.7) pune în evidență o legătură strânsă dintre ponderile h_k ale filtrului numeric și funcția de scară $\varphi(t)$. Se poate arăta, [Dau.92], [Rio.93a], [Bou.94], că expresia funcției $\varphi(t)$ determină în mod univoc coeficienții h_k ai filtrului numeric și invers, cunoașterea valorilor h_k ne permite evaluarea funcției de scară $\varphi(t)$ în orice punct t .

Astfel, calculând transformata Fourier în cei doi membri ai relației (3.28) rezultă:

$$\mathfrak{F}\{\varphi_{-l,n}(t)\} = \hat{\varphi}_{-l,n}(\xi) = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2^{-l}t - n)\right\}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-l}t - n) e^{-j\xi t} dt$$

Făcând schimbarea de variabilă $2^{-l}t - n = u$ se obține :

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}\{\varphi_{-1,n}(t)\} &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-j\xi 2(u+n)} du = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-2j\xi u} e^{-2j\xi n} du = \\ &= \sqrt{2} e^{-2j\xi n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-2j\xi u} du = \sqrt{2} e^{-2j\xi n} \hat{\varphi}(2\xi)\end{aligned}$$

Deci :

$$\hat{\varphi}_{1,n}(\xi) = \sqrt{2} e^{-2j\xi n} \hat{\varphi}(2\xi)$$

și relația (3.28) devine :

$$\sqrt{2} \hat{\varphi}(2\xi) = \left(\sum_k (h_{2n-k}^* e^{-j\xi(k-2n)}) \right) \hat{\varphi}(\xi)$$

adică :

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (h_{k-2n}^{v*} e^{-j\xi(k-2n)}) \right) \hat{\varphi}(\xi) \quad (3.47)$$

unde am făcut notația :

$$h_k^v = h_{-k}$$

Se face schimbarea de variabilă $k-2n=p$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_{k-2n}^{v*} e^{-j\xi(k-2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p h_p^{v*} e^{-j\xi p} \quad (3.48)$$

În continuare, dacă facem notația :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p h_p^{v*} e^{-j\xi p} = m_0(\xi) \quad (3.49)$$

relația (3.47) devine :

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \quad (3.50)$$

Se observă că $m_0(\xi)$ are semnificația de transformată Fourier în timp discret a secvenței h_p^{v*} , de variabilă ξ .

În relația (3.50) se face schimbarea de variabilă $2\xi = u$ și avem :

$$\hat{\varphi}(u) = m_0\left(\frac{u}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{u}{2}\right) \quad (3.51)$$

Folosind relațiile (3.50) și (3.51) se obține :

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.52)$$

Procedând iterativ se poate demonstra că :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^p}\right) \hat{\varphi}(0) \quad (3.53)$$

Dar, condițiile (3.8), (3.9) implică :

$$\hat{\varphi}(0) = 1, \quad m_0(0) = 1$$

și relația (3.53) devine :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^p}\right) \quad (3.54)$$

În consecință, în ipoteza că produsul din membrul drept converge, rezultă că ultima relație poate fi folosită pentru construcția unei funcții de scară pornind de la un anumit răspuns de tipul h_k .

Convergența produsului din membrul drept este asigurată de satisfacerea anumitor condiții de existență și/sau regularitate, (cum sunt condițiile (3.8), (3.22a), (3.22b), cu privire la coeficienții h_k), [Rio.93a].

Verificarea de către răspunsul la impuls h_k a condiției (3.22b) implică, conform definiției (3.49) și a expresiei (3.54):

$$\hat{\phi}(2k\pi) = \delta_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ceea ce este echivalentă cu condiția:

$$\sum_k \varphi(t-k) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.55)$$

o proprietate foarte utilă în reconstrucția, prin interpolare, a semnalelor din proiecțiile lor pe diferitele subspații V_j .

Relația (3.54) oferă mecanismul de construcție al unei funcții de scară. El este următorul :

- a) se alege un răspuns la impuls de filtru trece jos h_k ,
- b) se construiește secvența h_k^{v*} ,
- c) se calculează $m_0(\xi)$ pe baza relației (3.49),
- d) se calculează $\varphi(\xi)$ pe baza relației (3.54), [Bou.94], [Gop.92].

3.1.1.2. Construcția funcției Wavelet $\psi(t)$

Se determină legătura în domeniul frecvență corespunzătoare relației (3.39). În acest scop se calculează transformatele Fourier ale celor doi membri ai relației (3.39), introducând definițiile (3.16) și (3.17):

$$\mathfrak{T}\{\psi(t-n)\} = \sum_k g_{2n-k}^* \mathfrak{T}\{\sqrt{2}\varphi(2t-k)\}$$

sau :

$$e^{-j\xi n} \hat{\psi}(\xi) = \sum_k g_{2n-k}^* \sqrt{2} \mathfrak{T}\{\varphi(2t-k)\}$$

unde, făcând schimbarea de variabilă $2t-k=u$, se obține :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{\varphi(2t-k)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t-k) e^{-j\xi t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-j\xi \frac{u+k}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\xi}{2}k} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

și revenind la relația anterioară :

$$e^{-j\xi n} \hat{\psi}(\xi) = \left(\sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g_{2n-k}^* e^{-j\frac{\xi}{2}k} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

de unde rezultă relația pentru transformata Fourier a lui $\psi(t)$:

$$\hat{\psi}(\xi) = \left(\sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g_{2n-k}^* e^{-j\frac{\xi}{2}(k-2n)} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Cu notația :

$$m_I\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g_p^{v*} e^{-j\frac{\xi}{2}p} \quad (3.56)$$

$$g_k^v = g_{-k}$$

ultima relație devine :

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) \hat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right) \quad (3.57)$$

care este o relație analogă celei notate (3.51).

Ținând seama de relația (3.54), (3.57) devine :

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1 \left(\frac{\xi}{2} \right) \prod_{p=2}^{\infty} m_0 \left(\frac{\xi}{2^p} \right) \quad (3.58)$$

Această relație permite construcția unei funcții Wavelet pornind de la un anumit răspuns de tipul h_k .

3.1.1.3. Calculul coeficienților de proiecție ai unui semnal pe subspațiile V_j

În continuare se determină proiecțiile unei funcții $x_0(t)$ din V_0 pe spațiile $V_{-1}, V_{-2}, \dots, V_J$, adică funcțiile $x_{-1}(t), \dots, x_J(t)$:

$$x_{-1}(t) = \sum_k \langle x_0(t), \varphi_{-1,k}(t) \rangle \varphi_{-1,k}(t) \quad (3.59)$$

Coeficienții acestei dezvoltări se notează cu $s_1[n]$ și sunt dați de :

$$\begin{aligned} s_1[n] &= \langle x_0(t), \varphi_{-1,n}(t) \rangle = \langle x_0(t), \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi(t-k) \rangle = \\ &= \sum_k h_{2n-k} \langle x_0(t), \varphi(t-k) \rangle \end{aligned}$$

Folosind notația :

$$\langle x_0(t), \varphi(t-k) \rangle = s_0[k] \quad (3.60)$$

se obține :

$$s_1[n] = \sum_k h_{2n-k} \cdot s_0[k] \quad (3.61)$$

În mod similar, se poate calcula proiecția lui $x_0(t)$ din V_0 pe spațiul V_{-2} . Coeficienții acestei dezvoltări se notează cu $s_2[n]$ și sunt dați de :

$$s_2[n] = \langle x_0(t), \varphi_{-2,n}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) \varphi_{-2,n}^*(t) dt \quad (3.62)$$

Dar, revenind la definiția (3.12), pentru $j = -2$, avem :

$$\begin{aligned} \varphi_{-2,n}(t) &= 2^{-1} \varphi(2^{-2}t - n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2^{-1}(2^{-1}t) - n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,n}(2^{-1}t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Făcând în relația (3.28) schimbarea de variabilă :

$$t = 2^{-1}u$$

se obține :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,n}(2^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi(2^{-1}u - k)$$

sau, pe baza relației (3.29) :

$$\varphi_{-2,n}(u) = \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi_{-1,k}(u) \quad (3.64)$$

Înlocuind relația (3.64) în relația (3.62) se obține :

$$s_2[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) \cdot \left(\sum_k h_{2n-k}^* \varphi_{-1,k}(t) \right)^* dt = \sum_k h_{2n-k} \langle x_0(x), \varphi_{-1,k}(t) \rangle \quad (3.65)$$

și astfel se poate scrie :

$$s_2[n] = \sum_k h_{2n-k} \cdot s_1[k] \quad (3.66)$$

Se poate demonstra prin recurență că :

$$s_j[n] = \sum_k h_{2n-k} \cdot s_{j-1}[k] \quad (3.67)$$

pentru orice j pozitiv.

Analizând membrul drept al relației (3.67) se constată că :

$$s_j[n] = s_{j-1}[p] * h_p \Big|_{p=2n} \quad (3.68)$$

Cu alte cuvinte coeficienții dezvoltărilor proiecțiilor semnalului $x_0(t)$ pe două subspații succesive V_{j+1} și V_j , adică $s_{j-1}[n]$ și $s_j[n]$ se pot determina prin filtrare liniară cu filtrul cu răspuns la impuls h_k și prin decimare.

Ecuția (3.68) pune în evidență un algoritm recursiv de calcul al coeficienților proiecției unui semnal pe diferitele subspații V_j , algoritm ce nu implică cunoașterea explicită a funcțiilor bazelor din aceste spații. Ea presupune însă ca fiind cunoscuți coeficienții $s_0[n]$, ai descompunerii semnalului în baza spațiului V_0 . Deoarece aceștia pot fi calculați destul de greu, conform definiției (3.60), de cele mai multe ori, ei se consideră ca fiind eșantioane ale semnalului analizat:

$$s_0[n] = x_0(nT_e)$$

unde T_e reprezintă pasul de eșantionare ce permite o reconstrucție exactă a semnalului $x_0(t)$. De această problemă a inițializării algoritmului ne vom ocupa mai în detaliu într-un paragraf ulterior.

Rezultă, conform ecuației recursive (3.68), că secvențele $s_j[n]$, $j=1 \dots M$ pot fi obținute printr-o succesiune de filtrări numerice și operații de decimare pornind de la secvența cunoscută $s_0[n]$.

3.1.1.4. Calculul coeficienților de proiecție ai unui semnal pe subspațiile W_j

În continuare se stabilește legătura între proiecțiile unui semnal $x(t)$ din V_0 pe subspații succesive V_j , W_j , $j < 0$. În acest scop se calculează produsul scalar :

$$\langle \psi_{-1,n}(t), \varphi(t-l) \rangle \quad (3.69)$$

Conform relației (3.32) se poate scrie :

$$\psi_{-1,n}(t) = \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi_{0,k}(t)$$

și astfel produsul scalar (3.69) va fi:

$$\langle \psi_{-1,n}(t), \varphi(t-l) \rangle = \langle \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi_{0,k}(t), \varphi_{0,l}(t) \rangle = g_{2n-l}^*$$

Vom putea scrie astfel :

$$\psi_{-1,n}(t) = \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi(t-k)$$

Fie:

$$e_l(t) = \sum_n \langle e_l(t), \psi_{-1,n}(t) \rangle \cdot \psi_{-1,n}(t)$$

proiecția semnalului $x(t)$ pe spațiul W_{-1} .

Aplicând teorema proiecției (Riesz), obținem :

$$\begin{aligned} \langle e_1(t), \psi_{-1,n}(t) \rangle &= \langle x(t), \psi_{-1,n}(t) \rangle = \left\langle \sum_k s_0[k] \varphi(t-k), \psi_{-1,n}(t) \right\rangle = \\ &= \sum_k s_0[k] \cdot \langle \psi_{-1,n}(t), \varphi(t-k) \rangle^* = \sum_k g_{2n-k} \cdot s_0[k] \end{aligned}$$

Deci coeficienții dezvoltării semnalului $e_1(t)$ în baza $\{\psi_{-1,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sunt :

$$d_1[n] = \sum_k g_{2n-k} \cdot s_0[k]$$

Notând $d_j[n]$ coeficienții proiecției semnalului $x(t)$ pe un subspațiu W_j , $j > 0$, oarecare, procedând prin recurență, se poate demonstra că :

$$d_j[n] = \sum_k g_{2n-k} \cdot s_{j-1}[k] = \langle x(t), \psi_{-j,n}(t) \rangle \quad (3.70)$$

Cu alte cuvinte coeficienții dezvoltărilor proiecțiilor semnalului $x(t)$ din V_0 pe subspațiile succesive W_j , $d_j[n]$, $j=1,2,\dots$ se pot determina prin filtrare cu un filtru cu răspunsul la impuls g_k urmată de o operație de decimare, a coeficienților de proiecție $s_{j-1}[n]$ pe subspațiile V_{j-1} ale aceleiași semnal.

Se poate observa faptul că expresiile (3.67) și (3.70) permit calculul iterativ al coeficienților de proiecție $s_j[n]$ și $d_j[n]$, $j=1,2,\dots$ ai unui semnal $x(t)$, în condițiile în care sunt cunoscute coeficienții $s_0[n]$, ai descompunerii semnalului în baza spațiului V_0 . Cele două relații definesc o transformare a spațiului de reprezentare al unui semnal extrem de eficientă, cunoscută în literatură sub denumirea de *Transformarea Wavelet Discretă*, *DWT (Discrete Wavelet Transform)*, [Mal.89b]. Această denumire se datorează faptului că valorile secvențelor $d_j[n]$, definite conform (3.70), într-o analiză multirezoluție ortogonală, reprezintă produsele scalare ale funcției analizate $x(t)$ cu funcțiile bazelor ortonormale ale spațiilor W_j . Această definiție poate fi extinsă pentru orice valoare întregă a lui j ,

$$d_j[n] = \langle x(t), \psi_{-j,n}(t) \rangle \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (3.71)$$

ce poate fi privită ca o discretizare a unei reprezentări continue a semnalului $x(t)$, denumită *Transformarea Wavelet Continuă - CWT (Continuous Wavelet Transform)*, de forma:

$$CWT_x(a,b) = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (3.72)$$

$$\text{unde: } \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.73)$$

cu funcția $\psi(t) \in W_0$, funcția Wavelet mamă definită în teorema 3.2. Evident, reprezentarea (3.72) este o reprezentare redundantă a semnalului $x(t)$, deci inutilă din punct de vedere al scopului urmărit - compresia semnalului. Se constată, de asemenea, că versiunea discretizată, de forma (3.71), datorită faptului că mulțimea de funcții

$$\left\{ \psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \quad (3.74)$$

formează o bază ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, este una neredundantă, ce implică astfel o transformare ortogonală a semnalului considerat. Comparând expresiile (3.73) și (3.74), se observă că discretizarea amintită presupune evaluarea (3.72) în punctele de forma:

$$a = 2^{-j}, \quad b = 2^{-j} k \quad (3.75)$$

Cum variabila a implică o rescalare a funcției Wavelet în timp ce b implică o translație în timp a ei, se observă că, discretizarea (3.75) implică pași de discretizare diferiți pentru diferitele valori ale factorului de scalare.

3.1.1.5. Transformarea Wavelet Rapidă

În cele două paragrafe anterioare (§3.1.1.3. și §3.1.1.4.) au fost stabilite legăturile dintre proiecțiile succesive ale unui semnal $x(t)$ din spațiul V_0 pe subspațiile $V_j, W_j, j < 0$. Rezultatul (3.67) indică modul în care pot fi obținuți coeficienții de proiecție ai semnalului $x(t)$ pe subspațiile $V_j, j < 0$, succesive. Astfel, cunoscând coeficienții dezvoltării semnalului $x(t)$ în baza lui $V_0, s_0[n]$, este posibil calculul coeficienților de proiecție a acestui semnal pe orice subspațiu $V_j, j < 0$, notați $s_{-j}[n]$, prin recurență, conform cu:

$$s_{-j}[n] = \sum_k h_{2n-k} \cdot s_{-j-1}[k] \quad (3.76)$$

relație ce pune în evidență o filtrare, cu un filtru cu răspuns la impuls h_k definit conform (3.7), urmată de o operație de decimare. În mod similar pot fi obținuți și coeficienții notați $d_{-j}[n]$, de proiecție pe subspațiile $W_j, j < 0$, conform (3.70):

$$d_{-j}[n] = \sum_k g_{2n-k} \cdot s_{-j-1}[k] \quad (3.77)$$

ce implică filtrarea coeficienților de proiecție pe spațiul V_{j+1} cu filtrul definit conform (3.16), urmată de o decimare.

Analizând descompunerea semnalului $x(t) \in V_0$ pe două nivele succesive, de exemplu pentru $j=0$ și $j=1$, se poate stabili:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \varphi_{0,k}(t) \rangle \cdot \varphi_{0,k}(t) = \sum_k s_0[k] \cdot \varphi_{0,k}(t) \quad (3.78)$$

și, respectiv:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k \langle x(t), \varphi_{-1,k}(t) \rangle \cdot \varphi_{-1,k}(t) + \sum_k \langle x(t), \psi_{-1,k}(t) \rangle \cdot \psi_{-1,k}(t) = \\ &= \sum_k s_1[k] \cdot \varphi_{-1,k}(t) + \sum_k d_1[k] \cdot \psi_{-1,k}(t) \end{aligned} \quad (3.79)$$

De fapt, în expresiile (3.78) și (3.79) recunoaștem două descompuneri diferite ale semnalului $x(t)$, una în baza ortonormală $\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a lui V_0 , având asociați coeficienții $s_0[n]$, iar cealaltă în bazele ortonormale $\{\varphi_{-1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și $\{\psi_{-1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ale celor două subspații ortogonale V_{-1} și W_{-1} ce-l compun pe V_0 (conform (3.30)), având asociați coeficienții $s_1[n]$ și respectiv $d_1[n]$. Deoarece aceste descompuneri sunt valabile pentru orice funcție $x(t) \in V_0$ ele sunt valide și pentru o funcție $\varphi(t-k) \in V_0$. Se poate scrie:

$$\varphi(t-k) = \sum_n \langle \varphi(t-k), \varphi_{-1,n}(t) \rangle \cdot \varphi_{-1,n}(t) + \sum_n \langle \varphi(t-k), \psi_{-1,n}(t) \rangle \cdot \psi_{-1,n}(t) \quad (3.80)$$

Înlocuind în această expresie cele două produse scalare evaluate conform (3.27) și (3.69), se obține:

$$\varphi(t-k) = \sum_n h_{2n-k}^* \cdot \varphi_{-1,n}(t) + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot \psi_{-1,n}(t) \quad (3.81)$$

Ținând cont de această dezvoltare se poate evalua produsul scalar (3.60) conform cu:

$$\begin{aligned} \langle x(t), \varphi(t-k) \rangle &= s_0[k] = \\ &= \sum_n h_{2n-k}^* \cdot \langle x(t), \varphi_{-1,n}(t) \rangle + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot \langle x(t), \psi_{-1,n}(t) \rangle = \\ &= \sum_n h_{2n-k}^* \cdot s_1[n] + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot d_1[n] \end{aligned} \quad (3.82)$$

Relația (3.82) ne indică modul în care se poate reconstrui imaginea (3.78) a unui semnal $x(t)$ dacă este cunoscută dezvoltarea (3.79) a sa. Ea permite, de fapt, calculul coeficienților descompunerii (3.78) dacă sunt cunoscuți coeficienții descompunerii (3.79). Astfel, ea nu este altceva decât

operația inversă a dezvoltărilor (3.76) și (3.77) pentru $j = -1$. Ecuația (3.82) poate fi ușor generalizată. Astfel, vom avea:

$$s_j[k] = \sum_n h_{2n-k}^* \cdot s_{j+1}[n] + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot d_{j+1}[n] \quad (3.83)$$

Ecuația (3.83) pune în evidență un algoritm recursiv de calcul ce permite sinteza unui semnal $x(t) \in V_0$ dacă sunt cunoscuți coeficienții de proiecție a acestui semnal pe un subspațiu V_J și cei ai proiecțiilor pe spațiile $W_J, W_{J+1}, \dots, W_{-1}$, pentru orice $J < 0$.

Relațiile (3.76) și (3.77) aplicate în mod recursiv definesc un algoritm cunoscut sub denumirea de *Transformarea Wavelet Rapidă (directă) - FWT (Fast Wavelet Transform)*, în timp ce (3.83) aplicată în mod recursiv definește algoritmul *Transformării Wavelet Rapidă Inversă - IFWT (Inverse Fast Wavelet Transform)*. De fapt algoritmul FWT reprezintă procedura de calcul ce poate fi utilizată în vederea obținerii DWT a unui semnal $x(t)$, în condițiile în care sunt cunoscuți coeficienții $s_0[n]$, ai descompunerii semnalului în baza spațiului V_0 , în timp ce IFWT este procedura ce poate fi utilizată pentru inversarea acestei DWT.

Figura 3.1 indică modul în care algoritmul FWT direct este folosit pentru descompunerea unei secvențe $s_0[n]$ de lungime $N=8$.

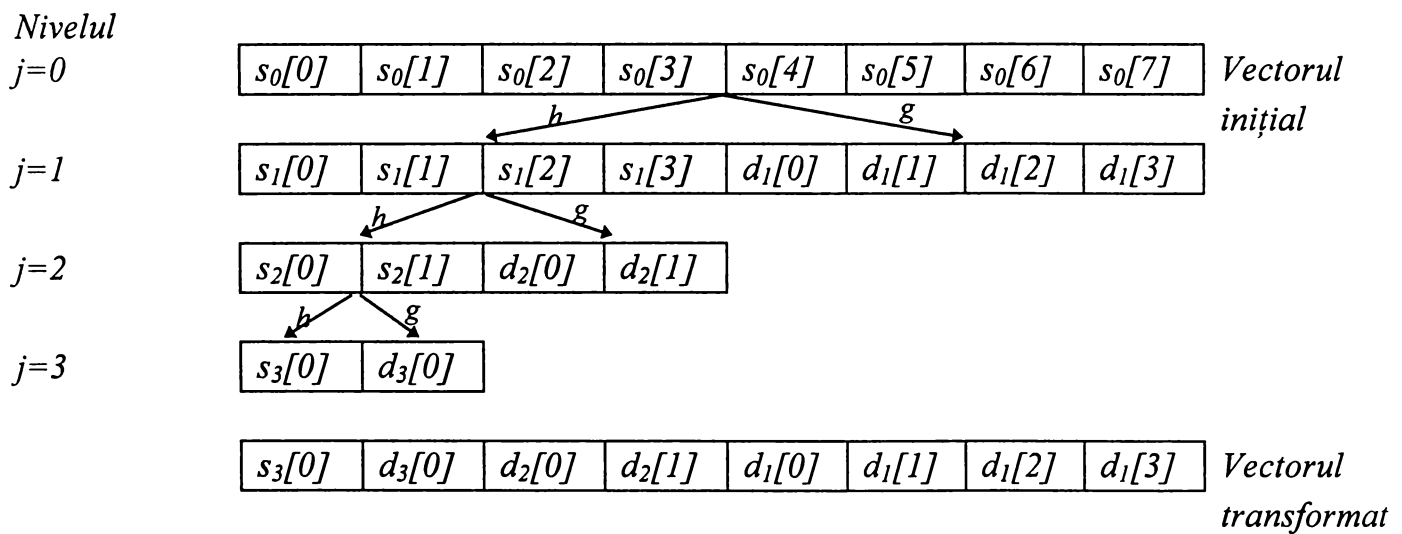


Figura 3.1. Algoritmul FWT.

Figura 3.2 se referă la cazul de mai sus și indică modul în care algoritmul IFWT recombina elementele vectorului transformat pentru a obține vectorul inițial.

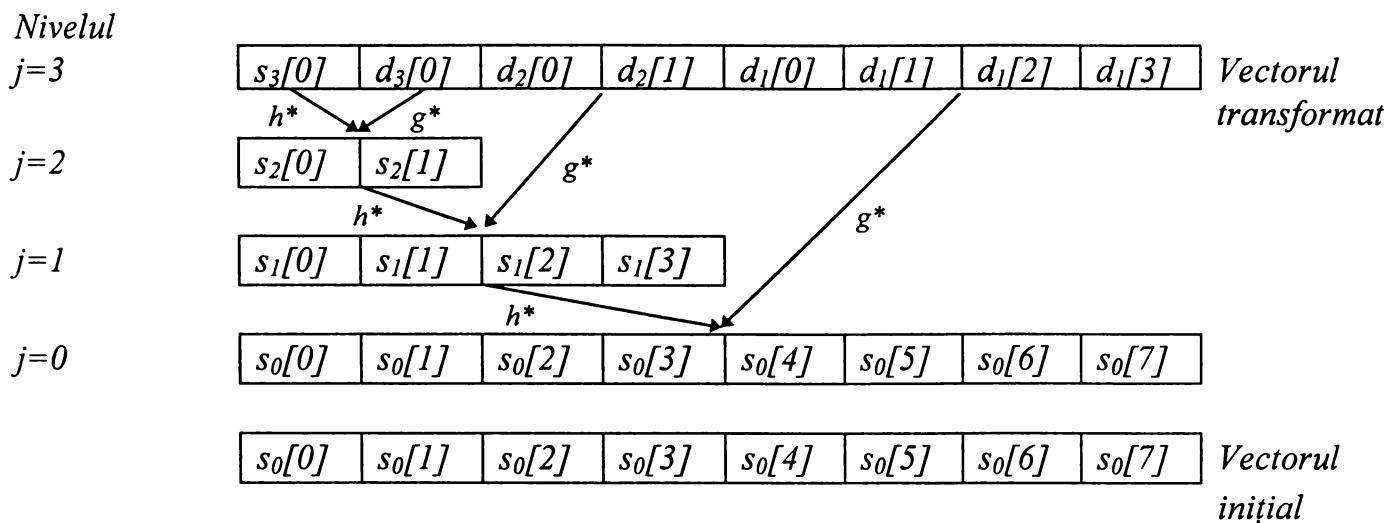


Figura 3.2. Algoritmul IFWT.

3.1.1.6. Analogia algoritmului FWT cu filtrarea în subbenzi

În paragraful precedent am văzut modul în care o analiză multirezoluție ortogonală ne poate conduce la algoritmi iterativi de calcul ai proiecțiilor succesive ale unui semnal $x(t)$ din spațiul V_0 pe subspațiile $V_j, W_j, j < 0$. Expresiile (3.78) și (3.79) din paragraful precedent pun în evidență două descompuneri ortogonale succesive ale acestui semnal. Prima este dată de (3.78) și corespunde descompunerii semnalului $x(t)$, în baza ortonormală $\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a lui V_0 , având asociați coeficienții $s_0[n]$, presupuși cunoscuți. A doua, cea dată de (3.79), corespunde descompunerii acestui semnal în bazele ortonormale $\{\varphi_{-1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și $\{\psi_{-1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ale celor două subspații ortogonale V_{-1} și W_{-1} ce-l compun pe V_0 , având asociate coeficienții $s_1[n]$ și respectiv $d_1[n]$. Relațiile (3.76) și (3.77) ne indică modul în care pot fi calculați coeficienții $s_1[n]$ și respectiv $d_1[n]$ pornind de la secvența de coeficienți $s_0[n]$. Astfel, conform (3.76), coeficienții de proiecție $s_1[n]$ ai semnalului $x(t)$ pe subspațiul V_{-1} pot fi calculați prin filtrarea numerică a secvenței $s_0[n]$ cu un filtru numeric cu răspunsul la impuls dat de secvența h_k urmată de o decimare cu un factor 2. În mod similar pot fi calculați și coeficienții $d_1[n]$, conform (3.77), folosind un filtru numeric cu un răspuns la impuls dat de secvența g_k . Schematic, procesul amintit, poate fi reprezentat sub forma sistemului din figura 3.3.

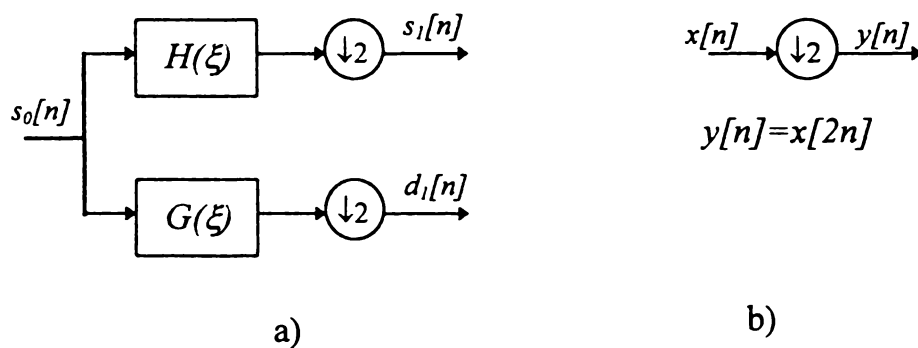


Figura 3.3. Schema de principiu a: a) descompunerii Wavelet; b) decimării.

Figura 3.3.a prezintă, de fapt, schema de principiu a algoritmului FWT aplicat pe un singur nivel în termenii a două filtrări numerice urmate fiecare de operația de decimare. Cerințele (3.8), (3.21) și (3.22a) impuse secvenței h_k indică faptul că filtru $H(\xi)$ este unul de tip trece-jos în timp ce definiția (3.37), pe baza cerinței (3.35), a secvenței g_k indică un filtru $G(\xi)$ de tip trece-sus. Astfel, figura 3.3.a prezintă o situație clasică de codare în subbenzi, un sistem cu două căi - una de tip trece-jos iar cealaltă de tip trece-sus. Operația de decimare a ieșirilor este necesară în vederea reducerii redundanței din reprezentarea astfel obținută (practic ea fiind o măsură de conservare a numărului total de eșantioane avute la intrare). Condiția frecvențială (3.34) indică faptul că cele două filtre implicate trebuie să fie astfel construite încât să acopere “eficient” plaja $[0, \pi]$ a frecvențelor. În literatură asemenea perechi de filtre, ce verifică (3.34), sunt denumite *filtre oglindite în cuadratură - QMF (Quadrature Mirror Filters)* [Mal.89b], [Vet.89]. În stabilirea legăturii dintre teoria Wavelet și cea a filtrelor QMF o importanță deosebită capătă izometria ce se poate stabili între spațiul $l_2(\mathbb{Z})$, al semnalelor în timp discret de energie finită, și spațiul semnalelor în timp continuu de bandă limitată (în sensul că orice secvență numerică de energie finită poate fi privită ca și o secvență formată din eșantioanele unui semnal continuu de energie finită și de bandă limitată eșantionată la frecvența Nyquist). Bazată pe acest izomorfism și folosind teorema eșantionării Ingrid Daubechies, în lucrarea sa [Dau.92], arată că este posibilă reconstrucția exactă, în anumite condiții, a unei secvențe $s_0[n]$ din secvențele filtrate și decimate $s_1[n]$ și $d_1[n]$ (cu notațiile conform figurii 3.3). Ea

exemplifică acest lucru folosind filtre QMF $H(\xi)$ și $G(\xi)$ ideale. Formula de reconstrucție găsită este similară cu relația (3.83) ce caracterizează algoritmul IFWT. Prin definiție un astfel de sistem de codare în subbenzi se numește cu reconstrucție perfectă. Condiția generală ca un sistem format dintr-un număr oarecare de filtre, o bancă de filtre, să fie cu reconstrucție perfectă va fi analizată mai în detaliu într-un capitol ulterior, destinat sistemelor de codare în subbenzi.

Considerând o iterație a algoritmului IFWT, conform (3.83), aplicat descompunerii obținute conform figurii 3.3., regăsim secvența inițială $s_0[n]$. Reconstrucția este exactă, conform expresiei (3.82), reamintim,

$$s_0[k] = \sum_n h_{2n-k}^* \cdot s_1[n] + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot d_1[n],$$

ce pune în evidență un proces de inserare de zerouri între valorile succesive ale celor două secvențe $s_1[n]$ și $d_1[n]$ urmat de filtrare cu filtrele $h_k^* = h_{-k}^*$ și, respectiv, $g_k^* = g_{-k}^*$ (cele anterioare inversate și conjugate). Schematic acest lucru poate fi reprezentat sub forma sistemului din figura 3.4.

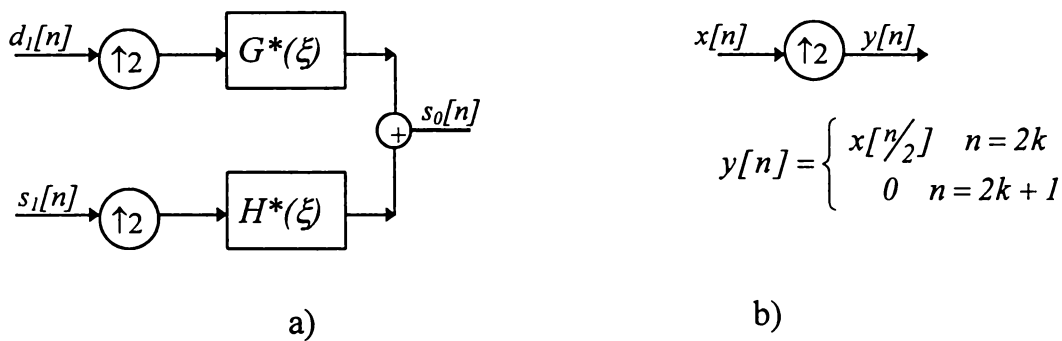


Figura 3.4. Principiul a) reconstrucției Wavelet; b) interpolării.

În termenii filtrării în subbenzi sistemele din figura 3.3.a și, respectiv, 3.4.a efectuează analiza și, respectiv, sinteza unei secvențe numerice $s_0[n]$ prin codarea, respectiv decodarea, în/din subbenzi. Deoarece sistemul de reconstrucție din figura 3.4.a permite reconstrucția exactă a secvenței de intrare, proprietate garantată prin modul de construcție a sistemului Wavelet, rezultă că orice analiză multirezoluție ortogonală poate fi caracterizată printr-un sistem de codare în subbandă pe două căi cu reconstrucție exactă. Inversa în general nu este adevărată, în sensul că nu orice sistem QMF poate genera analiză multirezoluție, deoarece există astfel de sisteme ce nu verifică condiția (3.8) impusă secvenței h_k , [Vai.88], [Vai.89], [Vet.92], [Vet.95].

Iterarea, pe mai multe nivele de rezoluție j , a descompunerii Wavelet, conform (3.76) și (3.77) este echivalentă cu conectarea în cascadă, pe ramura filtrului trece-jos, $H(\xi)$, a mai multor sisteme identice celui din figura 3.3.a. Astfel, în figura 3.6 se prezintă structura unei bănci de filtre de analiză ce descompune secvența $s_0[n]$ pe trei nivele succesive:

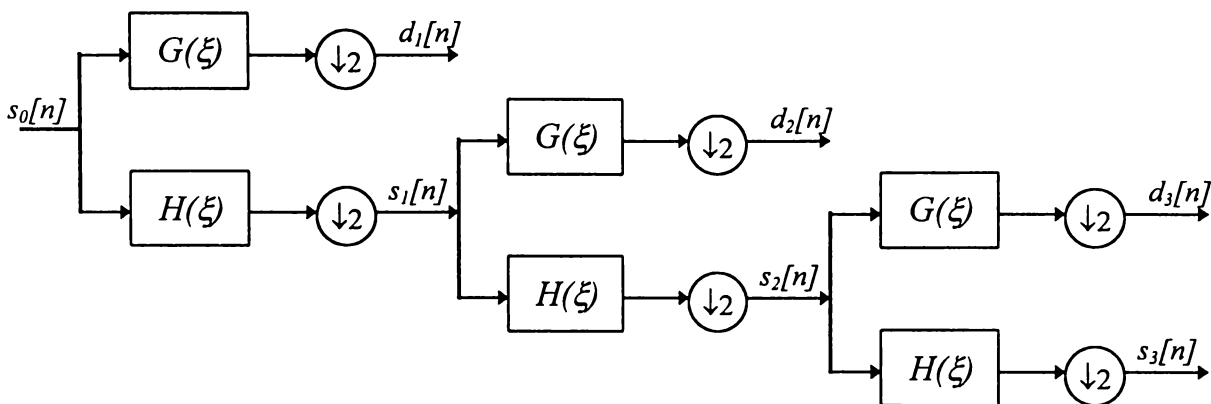


Figura 3.5. Algoritmul FWT pe trei nivele.

Se observă că la ieșirile sistemului din figura 3.5 se dispune de secvențele $s_3[n]$, $d_3[n]$, $d_2[n]$ și, respectiv, $d_1[n]$ ce, în ipoteza că $s_0[n]$ este secvența coeficienților de descompunere a unui semnal continuu $x(t)$, în baza ortonormală $\{\varphi_{0,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a lui V_0 , vor fi secvențele coeficienților de proiecție a acestui semnal pe spațiile V_{-3}, W_{-3}, W_{-2} , și respectiv W_{-1} . Se poate observa, de asemenea, faptul că această situație este cea din cazul prezentat în figura 3.1., cele două scheme, din acest punct de vedere, pot fi considerate ca fiind echivalente. Ceea ce nu pune în evidență sistemul din figura 3.5.a este faptul că, datorită decimărilor reiterate, vor rezulta lungimi diferite ale secvențelor obținute (ceea ce se observă foarte clar în figura 3.1., ce prezintă, de fapt, modul în care sunt structurate aceste secvențe). Acest lucru corespunde unor eșantionări cu rate diferite ale diferitelor secvențe. Din acest motiv filtrele echivalente, corespunzătoare diferitelor ramuri ale sistemului din figura 3.5.a vor avea răspunsuri în frecvență ce acoperă benzi de frecvențe de lățimi diferite. Este motivul pentru care aceste sisteme sunt cunoscute sub denumirea de sisteme de codare în subbenzi neuniforme [Bou.94].

În mod similar, ecuația (3.83) ne permite construirea unei bănci de filtre de sinteză de forma celei din figura 3.6:

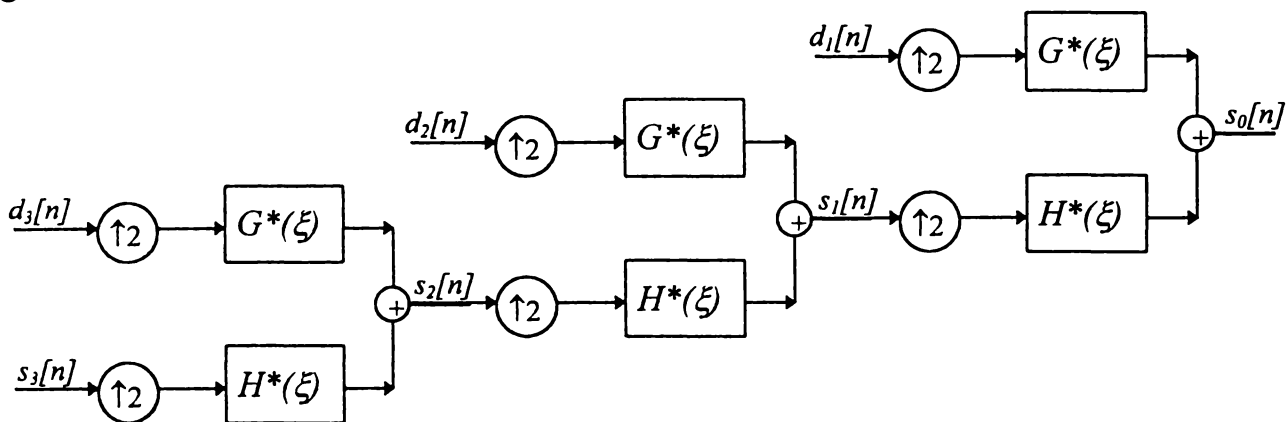


Figura 3.6. Algoritmul IFFT pe trei nivele.

În structura sistemului din figura 3.6. recunoaștem mecanismul IFFT prezentat în figura 3.2.

3.1.1.7. Proprietățile de regularitate și de moment ale funcțiilor de scară și funcțiilor Wavelet

Până acum au fost stabilite calitățile strict necesare ce trebuie avute de către funcția de scară $\varphi(t)$ și, respectiv, funcția Wavelet mamă $\psi(t)$, pentru ca ele să poată genera analiză multirezoluție și să poată genera baze ale diverselor subspații ale acesteia. Putem remarca faptul că toate funcțiile Wavelet date ca și exemple se bucură de o serie de proprietăți suplimentare, proprietăți ce le fac atractive în utilizarea unor serii întregi de aplicații. Cele mai importante sunt cele legate de regularitate, număr de momente nule, proprietăți de localizare în domeniul timp și în cel de frecvență, suport compact etc. Importanța acestor proprietăți rezidă în faptul că ele vor determina proprietăți similare ale tuturor funcțiilor bazelor generate, deci a întregii analize multirezoluție determinată. Ele se vor reflecta și în analiza de semnal efectuată prin descompunerea în aceste baze a unor semnale cu anumite proprietăți. Astfel, unele dintre aceste proprietăți permit caracterizarea unor serii întregi de spații de semnale diferite în termenii ratei de convergență a șirurilor de coeficienți ai descompunerii, [Coh.93].

Prin definiție, o analiză multirezoluție este numită “cu localizare bună” dacă și numai dacă funcția de scară $\varphi(t)$ satisface condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^m |\varphi(t)|^2 dt < \infty \quad \forall m \in N$$

Acest lucru este echivalent cu faptul că funcția $\hat{\varphi}(\xi)$ aparține tuturor spațiilor Sobolev, $H^m(\mathfrak{R})$, $m \in N$. Aproape toate funcțiile Wavelet utilizate în mod curent în practică verifică această proprietate, ele fiind sau cu descreștere rapidă sau cu suport compact.

O consecință directă a acestei proprietăți este, [Coh.93], verificarea de către secvența de coeficienți h_k a inegalității:

$$|h_k| \leq C_m (1+|k|)^{-m}, \quad \forall m \in N$$

unde C_m este o constantă. Această calitate denotă o secvență cu descreștere rapidă la infinit.

Această proprietate de regularitate a funcției de scară va conferi proprietăți de regularitate similare analizei multirezoluție definită de aceasta. Astfel, prin definiție, o analiză multirezoluție este numită *r-regulată* dacă funcția de scară verifică următoarele trei condiții:

- este derivabilă și cu derivate continue de $r-1$ -ori,
- este derivabilă de r -ori a.p.t.
- pentru $\forall n, 0 \leq n \leq r$ ea verifică

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^m \left| \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right|^2 dt < \infty \quad \forall m \in N$$

Această definiție implică ca toate derivatele funcției de scară $\varphi(t)$, până la un ordin r , să fie cu proprietăți de localizare bune.

Această proprietate de regularitate implică proprietăți similare de moment a funcției Wavelet mamă $\psi(t)$.

Prin definiție momentul de ordin p al funcției de scară $\varphi(t)$ și, respectiv, al funcției Wavelet mamă $\psi(t)$, este:

$$\begin{aligned} M_p &= \int_{-\infty}^{\infty} t^p \varphi(t) dt \\ N_p &= \int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt \end{aligned} \quad p \geq 0 \quad (3.84)$$

Bineînțeles, aceste definiții au utilitate doar în condițiile în care integralele sunt finite, ceea ce implică o descreștere temporală într-o măsură suficientă a celor două funcții. Condiția (3.9) este echivalentă cu $M_0=1$ în timp ce alegerea (3.37) implică $N_0=0$. Cu alte cuvinte, orice funcție Wavelet se caracterizează prin moment de ordin zero nul.

Se poate arăta ușor, [Coh.93], [Rio.93a], că o funcție de scară $\varphi(t)$, ce definește o analiză multirezoluție *r-regulată* implică o funcție Wavelet mamă a cărei transformată Fourier verifică:

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \hat{\psi}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad (3.85)$$

pentru $\forall n, 0 \leq n \leq r$.

Altfel spus o regularitate de ordin r implică anularea primelor $r+1$ momente ale funcției Wavelet mamă $\psi(t)$. Inversa acestei proprietăți nu este adevărată în sensul că nu toate funcțiile Wavelet care se bucură de $r+1$ momente nule vor fi cu o regularitate Hölder de ordin r .

În aplicațiile de compresie a semnalelor sunt utile descompunerile de semnale în baze de funcții Wavelet construite pornind de la o funcție Wavelet cu câteva momente de ordin superior nule. Acest lucru se datorează faptului că majoritatea semnalelor prelucrate prezintă o oarecare regularitate, sunt frecvent continue și cu derivate continue până la un anumit ordin, sau aparțin

anumitor subclase specifice ale spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Astfel, considerând o funcție continuă $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ cu $N-1$ derivate continue iar cu derivata de ordin N finită în jurul punctului $t=0$, și ea va admite dezvoltarea în serie Taylor în jurul acestui punct, de forma:

$$x(t) = x(0) + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + \frac{x^{(N)}(t_1)}{N!} t^N$$

unde t_1 este un punct din vecinătatea originii ($t=0$). În condițiile în care derivata de ordin N nu are o valoare foarte mare în vecinătatea lui 0 , termenul $r(t) = \frac{x^{(N)}(t_1)}{N!} t^N$ (restul) va fi de valoare neglijabilă. În ipoteza în care funcția Wavelet de analiză se caracterizează printr-un număr de N momente nule, deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0 \quad 0 \leq p < N \quad (3.86)$$

produsul scalar:

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi^*(t) dt \quad (3.87)$$

va fi de valoare neglijabilă.

Acest lucru se verifică imediat deoarece, înlocuind seria Taylor asociată lui $x(t)$ în (3.87) și folosind (3.86), c_0 devine:

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot \psi^*(t) dt \cong 0 \quad (3.88)$$

Dacă $x(t)$ este o funcție polinomială, de grad mai mic decât N , atunci produsul scalar (3.88) este zero. Acest lucru înseamnă că proiecția acestor semnale pe subspațiile W_j generate de funcția Wavelet $\psi(t)$ va fi nulă. Astfel, se verifică imediat că aceste semnale aparțin subspațiilor V_j , generate de funcția de scară $\varphi(t)$. Această proprietate este foarte utilă în compresia acestor semnale. Din cerința ca funcția Wavelet să aibă cel puțin atâtea momente nule cât este gradul polinomului analizat rezultă că putem obține eficiență în această analiză doar dacă corelăm proprietățile semnalului de analizat cu proprietățile funcțiilor Wavelet analizante. Din acest motiv acest tip de analiză va fi utilizat în cele ce urmează, cu precădere, într-un context de sistem adaptiv.

Condițiile de momente superioare nule implică însă restricții suplimentare în construcția funcției Wavelet. Această construcție are la bază ecuația (3.58) și implică, în fond, alegerea unei secvențe h_k corespunzătoare. Astfel, condițiile (3.86) pot fi rescrise, sub forma:

$$\hat{\psi}^{(p)}(0) = 0 \quad 0 \leq p < N \quad (3.89)$$

Deoarece $\hat{\phi}(0) \neq 0$ rezultă, conform (3.57):

$$m_1^{(p)}(0) = \sum_k k^p g_k = 0 \quad 0 \leq p < N \quad (3.90)$$

Importanța condițiilor (3.90) rezidă în faptul că ele se referă la ponderile unui filtru numeric ce permite construirea unei funcții Wavelet cu proprietatea (3.86), conform (3.58). Aceste condiții impuse filtrului $m_1(\xi)$ implică restricții similare ale filtrului $m_0(\xi)$.

Astfel, pe baza definiției (3.37), se deduc condițiile:

$$m_0^{(p)}(\pi) = 0 \quad 0 \leq p < N \quad (3.91)$$

Condițiile (3.91) presupun o factorizare a funcției $m_0(\xi)$, de forma:

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-j\xi}}{2} \right)^N Q(\xi) \quad (3.92)$$

unde $Q(\xi)$ este o funcție 2π -periodică aparținând spațiului $C^\infty(\mathfrak{R})$, ce verifică $Q(0)=1$ și $Q(\pi) \neq 0$. Relația (3.91) implică, de asemenea, [Swe.94b], o funcție de scară $\varphi(t)$ ce verifică:

$$j^p \hat{\varphi}^{(p)}(2k\pi) = \delta_k \cdot M_p \quad 0 \leq p < N \quad (3.93)$$

sau, conform formulei de însumare a lui Poisson:

$$\sum_k (t-k)^p \varphi(t-k) = M_p \quad 0 \leq p < N \quad (3.94)$$

Această ultimă expresie indică faptul deja menționat, conform căruia orice polinom de grad mai mic decât N poate fi exprimat ca și o combinație liniară de funcții $\varphi(t-k)$. Mai mult, se poate arăta că acești coeficienți sunt polinoame în variabila discretă k , [Swe.94a]. Astfel, notând cu $A(t)$ un polinom de grad maxim $N-1$ atunci există un polinom $B(t)$, de același grad cu $A(t)$, astfel încât:

$$A(t) = \sum_k B(k) \cdot \varphi(t-k) \quad (3.95)$$

$$\text{cu } B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot \varphi^*(t-k) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t+k) \cdot \varphi^*(t) dt.$$

Se poate scrie, de asemenea:

$$A(t) = \sum_k B(t-k) \cdot \varphi(k) \quad (3.96)$$

deci, orice polinom $A(t)$ poate fi văzut ca și o combinație liniară de polinoame ce sunt versiuni translatale ale unui singur polinom $B(t)$. Rezultă astfel că gradul polinomului $B(t)$ este egal cu cel al polinomului $A(t)$.

O altă consecință remarcabilă a proprietății de momente nule ale funcțiilor Wavelet constă în faptul că ea permite caracterizarea unor funcții de o anumită regularitate. Astfel, cu N momente nule ale acestor funcții Wavelet se pot caracteriza funcții cu o regularitate (în sensul lui Hölder) de ordin $\alpha < N$. Astfel, de exemplu, notând cu P_j operatorul de proiecție ortogonală pe un nivel de rezoluție j , eroarea de aproximare a unei funcții $x(t) \in C^N$ prin proiecția sa pe un spațiu V_j , $P_j x(t)$, verifică [Swe.93]:

$$\|P_j x - x\| = O\{2^{-jN}\} \quad (3.97)$$

Această relație ne permite analiza unor funcții regulate doar prin proiecțiile în anumite subspații V_j , posibilitate foarte utilă în aplicațiile de compresie. Astfel dezvoltând semnalul $x(t)$ în baza ortonormală formată prin concatenarea bazelor ortonormale ale subspațiilor de forma V_j , $\{W_{jj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, ce formează, pentru orice $J \in \mathbb{Z}$, o descompunere ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, verificarea relației (3.97) ne permite eliminarea tuturor coeficienților de proiecție pe spațiile $\{W_{jj}\}_{j > J, j \in \mathbb{Z}}$, cu garantarea unei limite maxime a erorii de aproximare. Astfel, ea permite o reducere semnificativă a numărului de coeficienți ce trebuiesc păstrați în vederea unei reconstrucții “rezonabile”.

Exponentul N în factorizarea (3.92) a funcției $m_0(\xi)$ joacă un rol important în caracterizarea regularității atât a funcției de scară $\varphi(t)$ cât și a funcției Wavelet $\psi(t)$. Regularitatea Hölder maximă a acestora este $N-1$, dar în majoritatea cazurilor aceasta este mai redusă datorită influenței termenului $Q(\xi)$ din (3.92).

Astfel, pentru $j \geq 0$ se poate defini secvența de măsuri:

$$B_j = \sup_{\xi \in \mathfrak{R}} \left| \prod_{k=1}^j Q(2^k \xi) \right|,$$

cu $B_0 = 1$.

Notând, pentru $j > 0$,

$$b_j = \frac{1}{j \log 2} \log B_j$$

se poate spune că există o constantă C astfel încât pentru $\forall \xi \in \mathfrak{R}$ să avem:

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k} \xi) \right| \leq C(1 + |\xi|)^{-N+b_j}$$

Această proprietate indică clar o regularitate Hölder a funcției de scară $\varphi(t)$ mai mică de $N-1-b_j$.

Cum însă seria b_j este una convergentă către un exponent b numit exponent critic, ($b = \inf_{j>0} b_j$),

proprietatea de mai sus poate fi rescrisă într-o formă mai compactă.

Astfel, se poate spune că pentru $\forall \varepsilon > 0$ există o constantă C_ε astfel încât:

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_\varepsilon (1 + |\xi|)^{-N+b+\varepsilon}.$$

Evaluarea exponentului critic b este destul de dificilă în majoritatea cazurilor de funcții Wavelet, expresii analitice existând în literatură doar pentru cazuri extreme sau pentru valori limită. Spre exemplu, regularitate Hölder a funcțiilor Wavelet de tip Daubechies crește cu creșterea lui N după o lege aproape liniară de forma $\approx 0.2075N$, pentru N suficient de mare.

Condițiile (3.93) sunt denumite în literatură condițiile lui Strang și Fix și constituie punctul de plecare în construcția bazelor de funcții Wavelet cu o anumită regularitate impusă.

3.1.1.8. Funcții Wavelet cu suport compact

Într-o procedură de analiză Wavelet a unui semnal continuu $x(t)$ apare frecvent cerința ca, pe lângă anumite proprietăți specifice impuse funcțiilor analizante (cum sunt proprietățile de moment (3.86)), această analiză să poată fi efectuată cât mai repede posibil cu o cantitate minimă de resurse implicate. Cum însă această analiză presupune, în fond, calculul unor produse scalare de forma (3.71) prin utilizarea algoritmului FWT, cerința de mai sus este echivalentă cu o implementare eficientă a filtrărilor numerice implicate conform figurii 3.3.a. Cea mai rapidă cale de filtrare este asigurată de utilizarea unor filtre cu răspuns finit la impuls, deci folosirea unor filtre de tip FIR (*Finite Impulse Response*). Astfel, se pune problema existenței unor filtre $m_0(\xi)$ și $m_1(\xi)$ ce implică un număr finit de coeficienți h_k și respectiv g_k . Acest lucru implică, conform construcțiilor (3.54) și (3.58), funcții de scară și respectiv funcții Wavelet de suport compact. Un avantaj imediat oferit de o astfel de analiză, este acela de bună localizare a evenimentelor temporale ale semnalului. Însă, trebuie avut grijă ca această îmbunătățire în localizarea temporală să nu deterioreze prea mult pe cea din domeniul frecvență (bineînțeles, în limitele incertitudinii lui Heisenberg). Să analizăm deci prima problemă, și anume cea de existență a unor sisteme Wavelet cu suport compact sau, echivalent, sisteme QMF cu reconstrucție perfectă, construite folosind filtre de tip FIR. Un exemplu de funcție Wavelet cu suport compact, ce poate genera un sistem Wavelet ortonormal, am mai întâlnit în această expunere, și anume funcția Wavelet de tip Haar. Însă s-a văzut, de asemenea, că această funcție are o descreștere spectrală invers proporțională cu frecvența (deci foarte slabă), fiind caracterizată doar de un moment nul (cel de ordin zero).

La începutul paragrafului 3.1. am stabilit faptul că mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală a spațiului V_0 dacă este verificată condiția (3.19). Această condiție implică verificarea relației (3.21) de către secvența de coeficienți h_k , ceea ce, conform definiției (3.49) a filtrului $m_0(\xi)$, se exprimă sub forma:

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.98)$$

Faptul că acest filtru este un filtru cu răspuns finit la impuls este echivalent cu faptul că $m_0(\xi)$ este un polinom trigonometric, deci este un polinom în variabila $e^{j\xi}$.

În paragraful precedent am văzut că este util ca funcțiile Wavelet analizante să verifice anumite proprietăți de regularitate sau de moment. S-a stabilit faptul că o funcție Wavelet cu N momente nule impune o serie de restricții filtrelor $m_0(\xi)$ și $m_1(\xi)$ și, implicit, funcției de scară ce permite construcția acestui sistem Wavelet. De remarcat sunt condițiile (3.92), de factorizare a funcției $m_0(\xi)$ și (3.94), cu privire la funcția de scară, ce ne asigură faptul că orice polinom de grad mai mic decât N va aparține spațiului V_0 . Revenind la expresia (3.92), faptul că acest filtru este un filtru cu răspuns finit la impuls este echivalent cu faptul că și funcția $Q(\xi)$ este un polinom trigonometric, deci și aceasta este un polinom în variabila $e^{j\xi}$. În continuare se caută expresiile $m_0(\xi)$ care corespund unor filtre de tip FIR și care generează funcții Wavelet cu N momente nule. Conform (3.92) și observației anterioare se poate scrie:

$$|m_0(\xi)|^2 = \left| \frac{1 + e^{-j\xi}}{2} \right|^{2N} |Q(e^{j\xi})|^2 \quad (3.99)$$

$$\text{Dar: } \left| \frac{1 + e^{-j\xi}}{2} \right|^2 = \left| \frac{e^{-j\xi/2}(e^{j\xi/2} + e^{-j\xi/2})}{2} \right|^2 = \left| \cos \frac{\xi}{2} \right|^2 = \frac{1 + \cos \xi}{2}$$

$$\text{Deci: } |m_0(\xi)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^N |Q(e^{j\xi})|^2$$

Cum $Q^*(e^{j\xi}) = Q(e^{-j\xi})$ rezultă că $|Q(e^{j\xi})|^2$ va fi un polinom în variabila $\cos \xi$ sau, în mod echivalent, în $\sin^2 \frac{\xi}{2}$.

Se poate scrie, deci,

$$|Q(e^{j\xi})|^2 = P\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) \quad (3.100)$$

Notând $y = \cos^2 \frac{\xi}{2}$, condiția (3.98) devine:

$$y^N P(1-y) + (1-y)^N P(y) = 1 \quad (3.101)$$

Se impune, de asemenea, condiția:

$$P(y) \geq 0, \quad \forall y \in [0, 1] \quad (3.102)$$

În concluzie, orice polinom P ce satisface (3.101) și (3.102) va oferi o soluție pentru polinomul $Q(e^{j\xi})$, conform (3.100), și deci o soluție pentru filtrul $m_0(\xi)$.

În legătură cu această problemă Ingrid Daubechies în [Dau.88] enunță următoarea propoziție:

Propoziția 3.1.

Orice polinom trigonometric $m_0(\xi)$ ce verifică condiția (3.98) este de forma:

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-j\xi}}{2} \right)^N Q(e^{j\xi})$$

cu $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$, și unde Q este un polinom cu coeficienți reali astfel încât:

$$\left| Q(e^{j\xi}) \right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k \sin^{2k} \frac{\xi}{2} + \left(\sin^{2N} \frac{\xi}{2} \right) \cdot R\left(\frac{1}{2} \cos \xi \right) \quad (3.103)$$

unde R este un polinom impar.

Această propoziție ne indică, de asemenea, care sunt soluțiile posibile ale polinomului trigonometric $m_0(\xi)$.

Ne interesează însă polinomul $Q(e^{j\xi})$ și dispunem doar de modulul său $\left| Q(e^{j\xi}) \right|$. Problema poate fi soluționată utilizând o metodă denumită tehnica factorizării spectrale [Dau.88], [Tas.95b], [She.96], [Str.96a], [Tas.97], [Tas.98a], [Tas.98b]. Aceasta presupune calculul zerourilor polinomului complex :

$$P_N(z) + z^N R(z - 1/2) \quad (3.104)$$

$$\text{unde s-a notat: } P_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k z^k, \quad (3.105)$$

un polinom de grad maxim $N-1$.

În concluzie, construcția unui filtru $m_0(\xi)$ presupune:

- alegerea lui N ,
- alegerea unui polinom impar R ,
- găsirea polinomului $Q(e^{j\xi})$ prin metoda mai sus menționată.

Funcțiile Wavelet ale lui Daubechies, $DAU-N$, deja menționate în paragrafele anterioare, cu diverse ocazii, sunt funcții cu N momente nule și cu suport temporal de lungime minimă. Cu alte cuvinte, ele corespund la cele mai scurte filtre $m_0(\xi)$ care asigură numărul N de momente nule ale funcțiilor Wavelet impuse. Din acest considerent precum și conform observațiilor din paragraful precedent, ele se pretează la utilizarea lor în aplicațiile de compresie a unei clase largi de semnale, ce prezintă o anumită regularitate, deoarece, pe lângă faptul că permit o aproximare bună a semnalului pe baza unui număr redus de coeficienți ai descompunerii, ele oferă și o implementare eficientă a dezvoltării (folosind algoritmul FWT). Conform (3.92) și (3.103) filtru scurt înseamnă un polinom trigonometric $m_0(\xi)$ de grad minim. Cum N este de obicei impus rămâne ca polinomul $Q(e^{j\xi})$ să fie ales de grad minim. Acest lucru se asigură, conform (3.103), prin alegerea unui polinom $R \equiv 0$. Se obțin astfel diversele filtre Daubechies ortogonale. Pentru o regularitate N va rezulta un filtru de lungime (minimă) $2N$.

O expresie alternativă a polinoamelor trigonometrice $m_0(\xi)$ ce verifică (3.98) precum și condițiile de existență $m_0(0) = 1, m_0(\pi) = 0$, echivalente condițiilor (3.8) și (3.22b), este dată în [Naf.95]. Astfel aceste condiții sunt verificate de polinoame de forma:

$$\begin{aligned} \left| m_0(\xi) \right|^2 &= \frac{1 + \cos \xi}{2} + \alpha_1 \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right) \cdot \cos \xi + \dots + \\ &+ \alpha_n \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \cos \xi + \dots \end{aligned} \quad (3.106)$$

unde șirul $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ trebuie să fie astfel încât $|m_0(\xi)|^2 \geq 0, \forall \xi$.

Într-adevăr condiția $m_0(0) = 1$ este satisfăcută deoarece:

$$\left. \frac{1 + \cos \xi}{2} \right|_{\xi=0} = 1$$

iar ceilalți termeni se anulează, deoarece: $\left. \frac{1 - \cos \xi}{2} \right|_{\xi=0} = 0$,

în timp ce condiția $m_0(\pi) = 0$ este satisfăcută deoarece $\left. \frac{1 + \cos \xi}{2} \right|_{\xi=\pi} = 0$.

De asemenea, avem:

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= \frac{1 + \cos \xi}{2} + \alpha_1 \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right) \cdot \cos \xi + \dots + \\ &+ \alpha_n \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \cos \xi + \dots + \frac{1 - \cos \xi}{2} - \alpha_1 \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right) \cdot \cos \xi + \dots - \\ &- \alpha_n \cdot \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^n \cdot \cos \xi + \dots = 1 \end{aligned}$$

deci (3.106) verifică și condiția (3.98).

Exemple:

a) Pentru $\alpha_k = 0, k \in \mathbb{Z}^+$ se obține:

$$|m_0(\xi)|^2 = \frac{1 + \cos \xi}{2}$$

Se poate scrie însă: $|m_0(\xi)|^2 = m_0(\xi) \cdot m_0(-\xi)$. Astfel, avem:

$$|m_0(\xi)|^2 = m_0(\xi) \cdot m_0(-\xi) = \frac{1 + \frac{e^{j\xi} + e^{-j\xi}}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j\xi} + e^{-j\xi})$$

Presupunând că $m_0(\xi)$ este de forma:

$$m_0(\xi) = \alpha + \beta e^{-j\xi}$$

prin identificare, rezultă:

$$m_0(\xi) = \frac{1 + e^{-j\xi}}{2}$$

Conform definiției (3.49) a lui $m_0(\xi)$ rezultă:

$$h_0 = h_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

iar relația (3.7) devine:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \varphi(2t + k) = \frac{1}{2} \varphi(2t) + \frac{1}{2} \varphi(2t - 1)$$

verificată de funcția $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$.

S-a obținut deci filtrul asociat funcției de scară corespunzătoare bazei Haar.

b) Notând $x = \frac{1 + \cos \xi}{2}$, (3.106) se poate scrie sub forma unui polinom P în variabila x :

$$P(x) = x \cdot \left(1 + \alpha_1(1-x) \cdot (2x-1) + \alpha_2(1-x)^2 \cdot (2x-1) \cdot x + \dots + \alpha_n(1-x)^n \cdot (2x-1) \cdot x^{n-1} + \dots \right)$$

deoarece:

$$\cos \xi = 2x - 1 \text{ și } \frac{1 - \cos \xi}{2} = 1 - x$$

Pentru $\alpha_1 = 1$ se obține:

$$P(x) = x^2 \cdot (3 - 2x + \alpha_2(1-x)^2 \cdot (2x-1) \cdot x + \dots + \alpha_n(1-x)^n \cdot (2x-1) \cdot x^{n-1} + \dots)$$

Pentru $\alpha_k = 0, k \geq 2$, se obține:

$$P(x) = x^2 \cdot (3 - 2x)$$

Este vorba despre o funcție Wavelet cu două momente nule. În această expresie recunoaștem filtrul de lungime minimă, deci expresia de mai sus corespunde filtrului denumit DAU-2. Într-adevăr, înlocuind notația x expresia devine:

$$|m_0(\xi)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^2 \cdot (2 - \cos \xi)$$

expresie ce se obține și conform propoziției 3.1. cu $N=2$ și polinom $R \equiv 0$.

Prin procedura de factorizare spectrală se găsește:

$$m_0(\xi) = \frac{1 + e^{-j\xi}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-j\xi}}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-j\xi} \right)$$

Se găsesc coeficienții filtrului ca fiind:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_{-1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_{-2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_{-3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_k = 0 \quad k \in Z \setminus \{-3, -2, -1, 0\}$$

Se observă că acest filtru are doar 4 ($2N$) coeficienți nenuli.

Funcția de scalare $\varphi(t)$, cu suport compact, obținută prin folosirea algoritmului în cascadă ce implementează (3.54), se prezintă în figura (3.8).

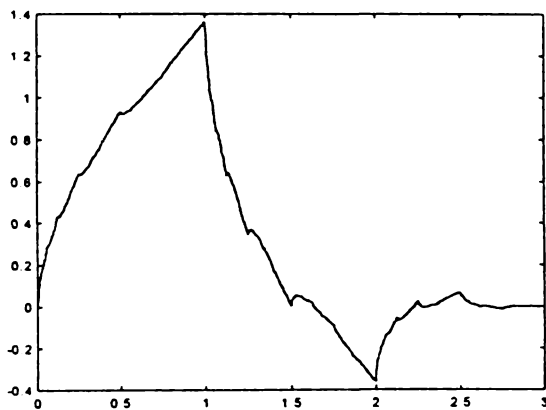


Figura 3.8. Funcția de scară DAU-2.

Observație: procedura mai sus menționată poate fi continuată prin recurență. Astfel se poate pune condiția ca, admitând un parametru $\alpha_2 \neq 0$, să se obțină expresia x^3 ca factor comun. Bineînțeles, astfel se va obține filtrul Daubechies ce implică o funcție Wavelet cu trei momente nule, filtrul DAU-3. Condiția impusă cere să se anuleze termenul liber al polinomului:

$$3 - 2x + \alpha_2(1-x)^2(2x-1)$$

Se obține $\alpha_2 = 3$, și un polinom $P(x)$ de forma:

$$P(x) = x^3 \cdot (10 - 15x + 6x^2)$$

$$\text{Deci: } |m_0(\xi)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^3 \cdot \left(10 - 15 \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right) + 6 \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^2 \right)$$

Prin factorizare spectrală se obține expresia lui $m_0(\xi)$, deci coeficienții filtrului DAU-3.

Funcția de scară $\varphi(t)$ (denumită DAU-3), corespunzătoare acestei situații, se prezintă în figura (3.9).

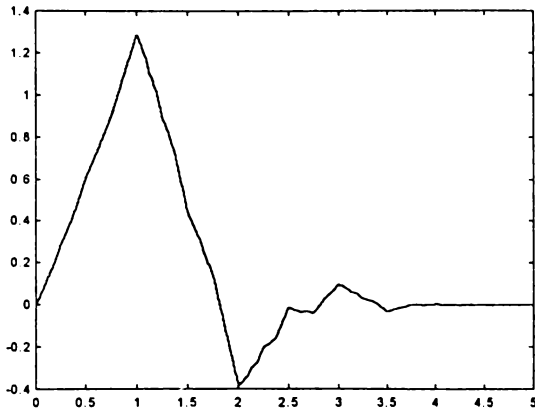


Figura 3.9. Funcția de scară DAU-3.

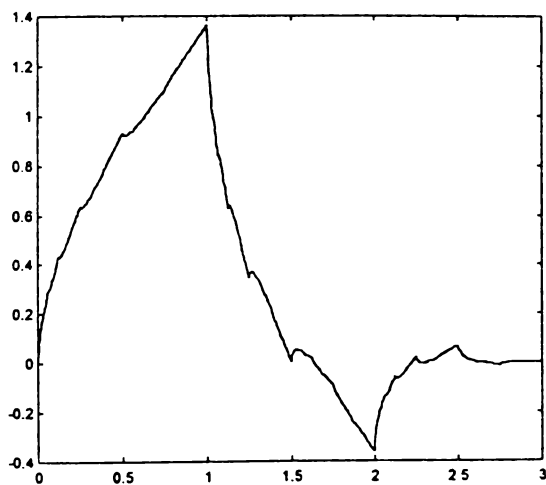
În mod similar, prin continuarea procedurii mai sus prezentate, se pot obține toate filtrele lui Daubechies, DAU- N . În literatura de specialitate sunt descrise algoritmi de calcul ai coeficienților acestor filtre, ce implementează factorizarea spectrală implicată [Bou.94], [Tas.95b], [Tas.98b]. Tabelul 3.1 prezintă coeficienții calculați ai filtrelor DAU- N pentru N până la 11. În figura (3.10) se prezintă câteva exemple de funcții de scară și funcții Wavelet Daubechies. Se observă o creștere a regularității acestor funcții cu creșterea ordinului N .

Tabelul 3.1. Coeficienții filtrelor DAU- N ($N=2\dots 11$)

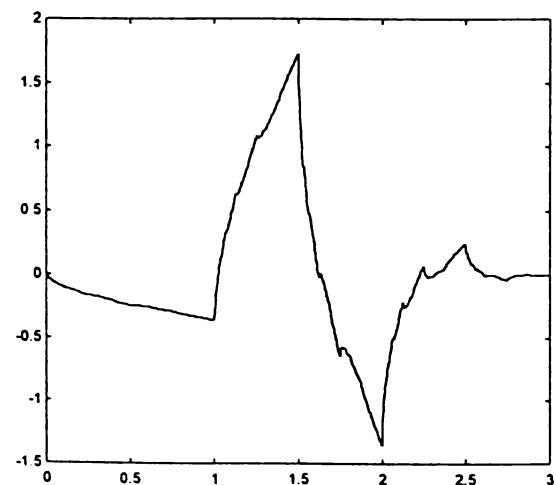
N	k	h_k	N	k	h_k
2	0	0.482962913144	9	0	0.038077947364
	1	0.836516303737		1	0.243834674613
	2	0.224143868042		2	0.604823123690
	3	-0.129409522551		3	0.657288078051
3	0	0.332670552950		4	0.133197385825
	1	0.806891509311		5	-0.293273783279
	2	0.459877502118		6	-0.096840783223
	3	-0.135011020010		7	0.148540749338
	4	-0.085441273882		8	0.030725681479
4	5	0.035226291882		9	-0.067632829061
	0	0.230377813309		10	0.000250947115
	1	0.714846570553		11	0.022361662124
	2	0.630880767930		12	-0.004723204758
	3	-0.027983769417		13	-0.004281503682
	4	-0.187034811719		14	0.001847646883
	5	0.030841381836		15	0.000230385764
6	0.032883011667	16		-0.000251963189	
5	7	-0.010597401785	17	0.000039347320	
	0	0.160102397974	10	0	0.026670057901
	1	0.603829269797		1	0.188176800078
	2	0.724308528438		2	0.527201188932
	3	0.138428145901		3	0.688459039454
	4	-0.242294887066		4	0.281172343661
	5	-0.032244869585		5	-0.249846424327
	6	0.077571493840		6	-0.195946274377
	7	-0.006241490213		7	0.127369340336
8	-0.012580751999	8		0.093057364604	
6	9	0.003335725285		9	-0.071394147166
	0	0.111540743350		10	-0.029457536822
	1	0.494623890398		11	0.033212674059
	2	0.751133908021		12	0.003606553567
	3	0.315250351709		13	-0.010733175483
	4	-0.226264693965		14	0.001395351747
	5	-0.129766867567		15	0.001992405295
	6	0.097501605587		16	-0.000685856695
	7	0.027522865530		17	-0.000116466855
	8	-0.031582039318		18	0.000093588670
	9	0.000553842201	19	-0.000013264203	
10	0.004777257511				
11	-0.001077301085				

Tabelul 3.1. Coeficienții filtrelor DAU-N ($N=2\dots 11$)

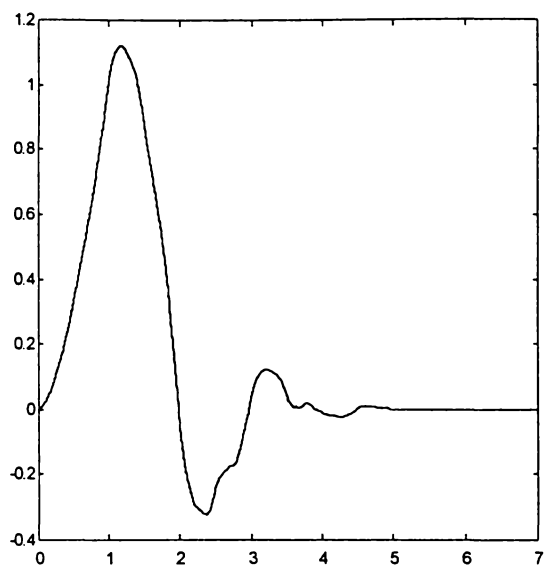
N	k	h_k	N	k	h_k
7	0	0.077852054085	11	0	0.01869429776147
	1	0.396539319482		1	0.14406702115062
	2	0.729132090846		2	0.44989976435604
	3	0.469782287405		3	0.68568677491620
	4	-0.143906003929		4	0.41196436894791
	5	-0.224036184994		5	-0.16227524502749
	6	0.071309219267		6	-0.27423084681795
	7	0.080612609151		7	0.06604358819668
	8	-0.038029936935		8	0.14981201246638
	9	-0.016574541631		9	-0.04647995511668
	10	0.012550998556		10	-0.06643878569502
	11	0.000429577973		11	0.03133509021904
	12	-0.001801640704		12	0.02084090436018
13	0.000353713800	13		-0.01536482090620	
8	0	0.054415842243		14	-0.00334085887301
	1	0.312871590914		15	0.00492841765606
	2	0.675630736297		16	-0.00030859285882
	3	0.585354683654		17	-0.00089302325067
	4	-0.015829105256		18	0.00024915252355
	5	-0.284015542962		19	0.00005443907470
	6	0.000472484574		20	-0.00003463498419
	7	0.128747426620	21	0.00000449427428	
	8	-0.017369301002			
	9	-0.044088253931			
	10	0.013981027917			
	11	0.008746094047			
	12	-0.004870352993			
	13	-0.000391740373			
	14	0.000675449406			
15	-0.000117476784				



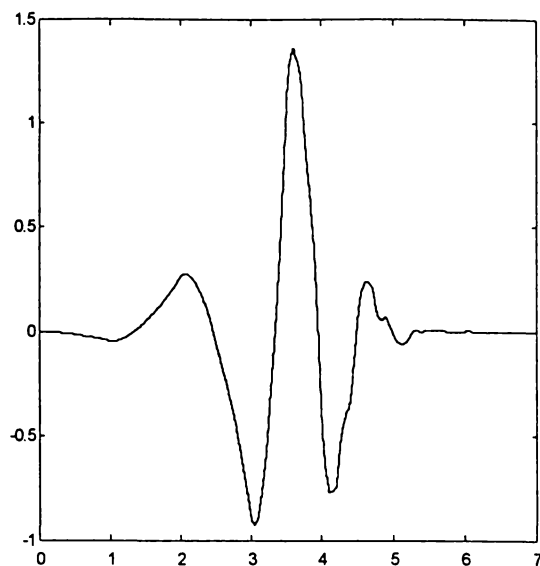
a) Funcția scară DAU-2



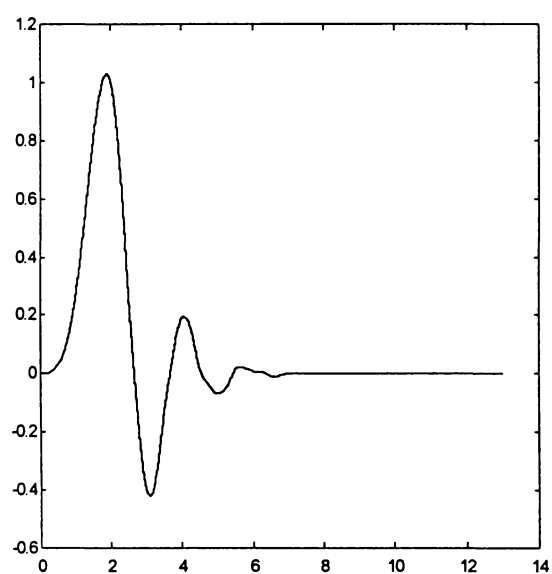
b) Funcția Wavelet DAU-2



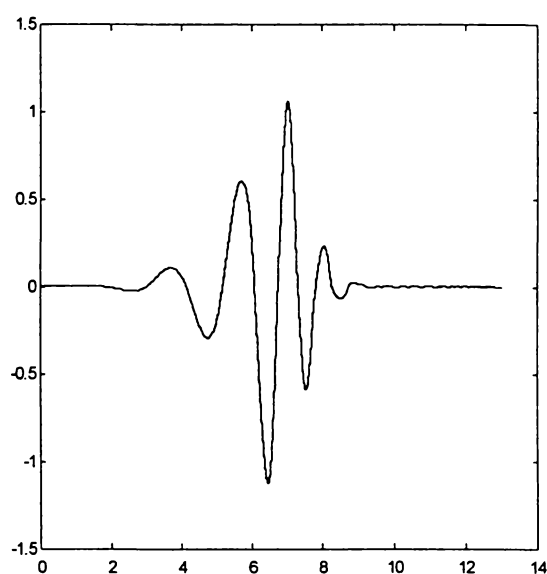
c) Funcția scară DAU-4



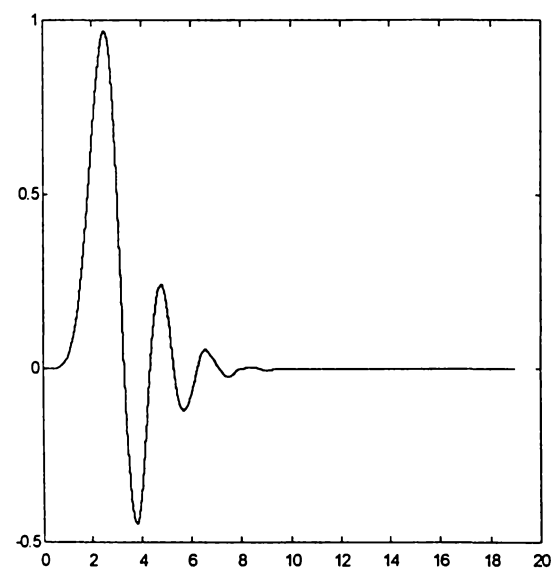
d) Funcția Wavelet DAU-4



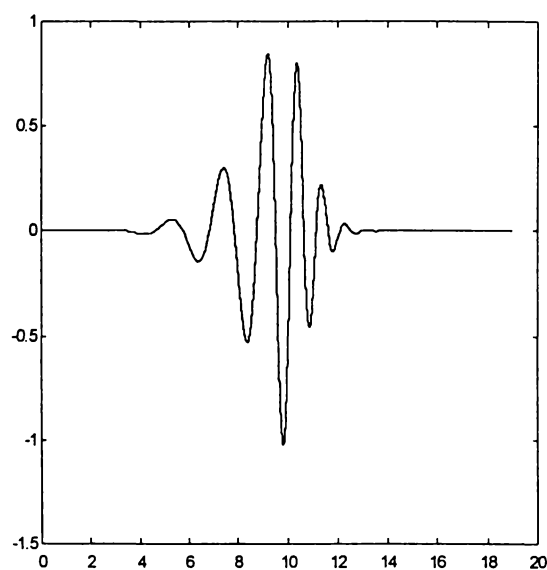
e) Funcția scară DAU-7



f) Funcția Wavelet DAU-7



g) Funcția scară DAU-10



h) Funcția Wavelet DAU-10

Figura 3.10 Exemple de funcții de scară și funcții Wavelet DAU-N, a),b): $N=2$, c),d): $N=4$, e),f): $N=7$, g),h): $N=10$.

În paragraful 3.1.1.6 a fost prezentată analogia dintre algoritmul FWT indus de o analiză multirezoluție ortogonală și codarea în subbenzi folosind filtre QMF cu reconstrucție perfectă. Acest lucru ne permite tragerea unor concluzii, cu privire la funcțiile Wavelet cu suport compact, bazate pe anumite rezultate remarcabile obținute în studiul filtrelor de tip FIR QMF cu reconstrucție perfectă. Astfel Vaidyanathan prezintă, într-o serie de lucrări ale sale, dintre care amintim [Vai.87] și [Vai.88], o parametrizare a băncilor de filtre pe două căi cu reconstrucție perfectă realizate cu filtre de tip FIR. Această parametrizare, prin analogia mai sus amintită, poate fi extinsă la toate sistemele Wavelet ortonormale ce implică funcții Wavelet cu suport compact. În această prezentare am mai întâlnit două asemenea parametrizări, una dată de propoziția 3.1, cea a lui Daubechies și o a doua dată de expresia (3.106). Propunerea lui Vaidyanathan se referă la filtre de analiză de lungime pară arbitrară (dar finită), notată $2M$. Notând cu $H(z)$ transformata Z a secvenței coeficienților filtrului h_k

$$H(z) = \sum_{k=0}^{2M-1} h_k z^{-k} \quad (3.107)$$

se poate scrie:

$$H(z) = H_0(z^2) + z^{-1} H_1(z^2)$$

cu:

$$H_0 = \sum_{k=0}^{M-1} h_{2k} z^{-k} \quad (3.108a)$$

$$H_1 = \sum_{k=0}^{M-1} h_{2k+1} z^{-k} \quad (3.108b)$$

Considerând definiții similare relațiilor (3.108a) și (3.108b) ale unor funcții $G_0(z)$ și $G_1(z)$, însă pe baza secvenței g_k construite conform (3.37), și formând matricea, denumită *matricea polifază* :

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ G_0(z) & G_1(z) \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Vaidyanathan demonstrează că aceasta poate fi factorizată conform:

$$\begin{aligned} H_p(z) &= \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ G_0(z) & G_1(z) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_0 & s_0 \\ -s_0 & c_0 \end{bmatrix} \cdot \prod_{i=1}^{M-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.110)$$

unde:

$$c_i = \cos \alpha_i \quad s_i = \sin \alpha_i \quad (3.111)$$

O factorizare de forma (3.110) generează toate băncile de filtre ortogonale cu reconstrucție perfectă pe două căi construite cu filtre de tip FIR cu lungime $2M$. Cu alte cuvinte, toate sistemele QMF cu reconstrucție perfectă, construite cu filtre de tip FIR cu lungime $2M$, pot fi caracterizate în termenii a M parametri α_i cu valori cuprinse în domeniu $[0, 2\pi)$. Conform concluziilor paragrafului 3.1.1.6, un sistem QMF cu reconstrucție perfectă corespunde unui sistem Wavelet ortonormal dacă este verificată condiția (3.8). Acest lucru implică o restricție de forma, [Vet.92], [She.98]:

$$\sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i = \frac{\pi}{4} \quad (3.112)$$

Astfel spațiul sistemelor Wavelet ortonormale cu suport compact, ce corespund unor filtre de lungime $2M$ poate fi parametrizat printr-un număr de $M-1$ parametri unghiulari α_i , cel al M -lea rezultând din condiția (3.112).

Cele două parametrizări anterioare, cea a lui Daubechies și cea dată de (3.106), prezintă dezavantajul că presupun o metodă de identificare a coeficienților filtrului ce implică o procedură de factorizare spectrală. Această procedură presupune însă găsirea rădăcinilor unor polinoame și sinteza altora, operații ce implică un volum mare de calcul, pe de o parte, iar pe de altă parte factorizarea nu este unică, pentru un N mare există un număr destul de mare de variante posibile de sinteză (prin asignarea corespunzătoare a rădăcinilor găsite), lucru ce îngreunează găsirea unei soluții adecvate. Sherlock și Monro, în [She.98], prezintă un algoritm rapid de calcul a coeficienților filtrului $H(z)$ bazat pe factorizarea (3.110). Reconsiderând expresia (3.110) sub forma:

$$H_p^{(k+1)}(z) = H_p^{(k)}(z) \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{bmatrix} \right) \quad (3.113)$$

ei deduc un algoritm recursiv de calcul ce permite calculul rapid al coeficienților unui filtru de lungime $2(k+1)$ dacă sunt cunoscuți coeficienții unui filtru de lungime $2k$. Astfel, pornind cu $k=1$, prin recursie, se calculează coeficienții unor filtre cu lungimi superioare, prin introducerea, la fiecare pas, a câte unui nou parametru unghiular α_i . Dacă se dorește obținerea unui filtru de lungime $2M$ corespunzător unui sistem Wavelet ortonormal, în ultima iterație a algoritmului se va introduce un parametru α_{M-1} ce verifică (3.112). Tot ei arată că, de fapt, parametrizarea amintită este redundantă, deoarece acest spațiu al sistemelor Wavelet ortonormale cu suport compact, ce corespund unor filtre de lungime $2M$, cu parametri α_i cu valori cuprinse în domeniu $[0, 2\pi)$, prezintă anumite simetrii. Astfel, de exemplu, dacă pentru orice sistem (3.110) un număr par de coeficienți α_i se schimbă în $\alpha_i + \pi$ filtrele obținute vor fi aceleași. În cazul sistemelor Wavelet, deci care verifică și (3.112), acest lucru va avea loc la orice schimbare de parametru din α_i în $\alpha_i + \pi$. Astfel, cei $M-1$ parametri ai unui sistem Wavelet trebuie să fie din domeniul $[0, \pi)$. De multe ori, versiunile oglindite ale unor funcții Wavelet, ce prezintă aceleași proprietăți ca și cele originale, sunt privite ca fiind similare. Este util deci, ca astfel de sisteme să fie excluse din acest spațiu. Acest lucru este asigurat de considerarea unui parametru $\alpha_{M-2} \in [0, \pi/2)$.

În concluzie, spațiul sistemelor Wavelet ortonormale cu suport compact, ce corespund unor filtre de lungime $2M$ poate fi parametrizat printr-un număr de $M-1$ parametri unghiulari α_i , cu $\alpha_i \in [0, \pi)$, $i=0 \dots M-3$ și $\alpha_{M-2} \in [0, \pi/2)$.

Exemple

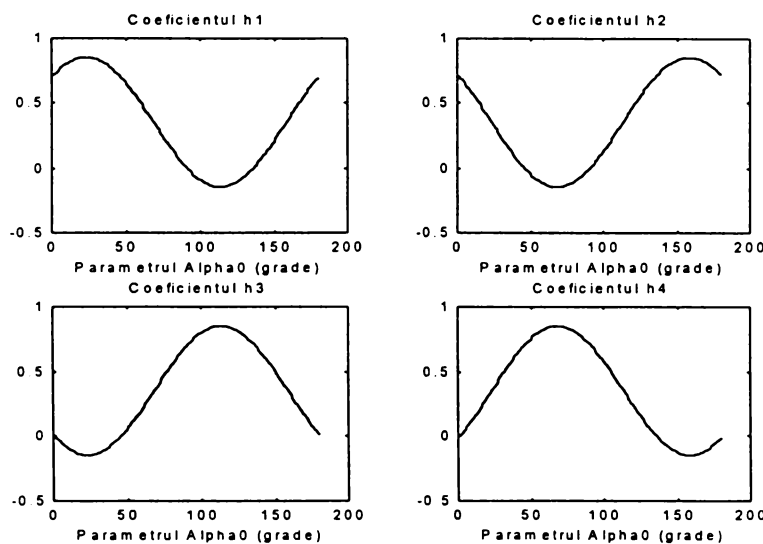


Figura 3.11. Spațiul coeficienților filtrelor generatoare de sisteme Wavelet ortonormale, de tip FIR, de lungime $L=4$.

a) În figura 3.11 se prezintă valorile coeficienților filtrelor generatoare de spații Wavelet ortonormale, parametrizate prin intermediul unui singur parametru independent, $\alpha_0 \in [0, \pi)$. Rezultă filtre de lungime $2M=4$. (figura a fost obținută prin implementarea *Matlab* a algoritmului propus de Sherlock și Monro în [She.98]).

b) În figura 3.12 se prezintă valorile coeficienților filtrelor generatoare de spații Wavelet ortonormale, spații parametrizate prin doi parametri independenți, $\alpha_0 \in [0, \pi)$ și $\alpha_1 \in [0, \pi/2)$. Rezultă filtre ce au o lungime de $2M=6$.

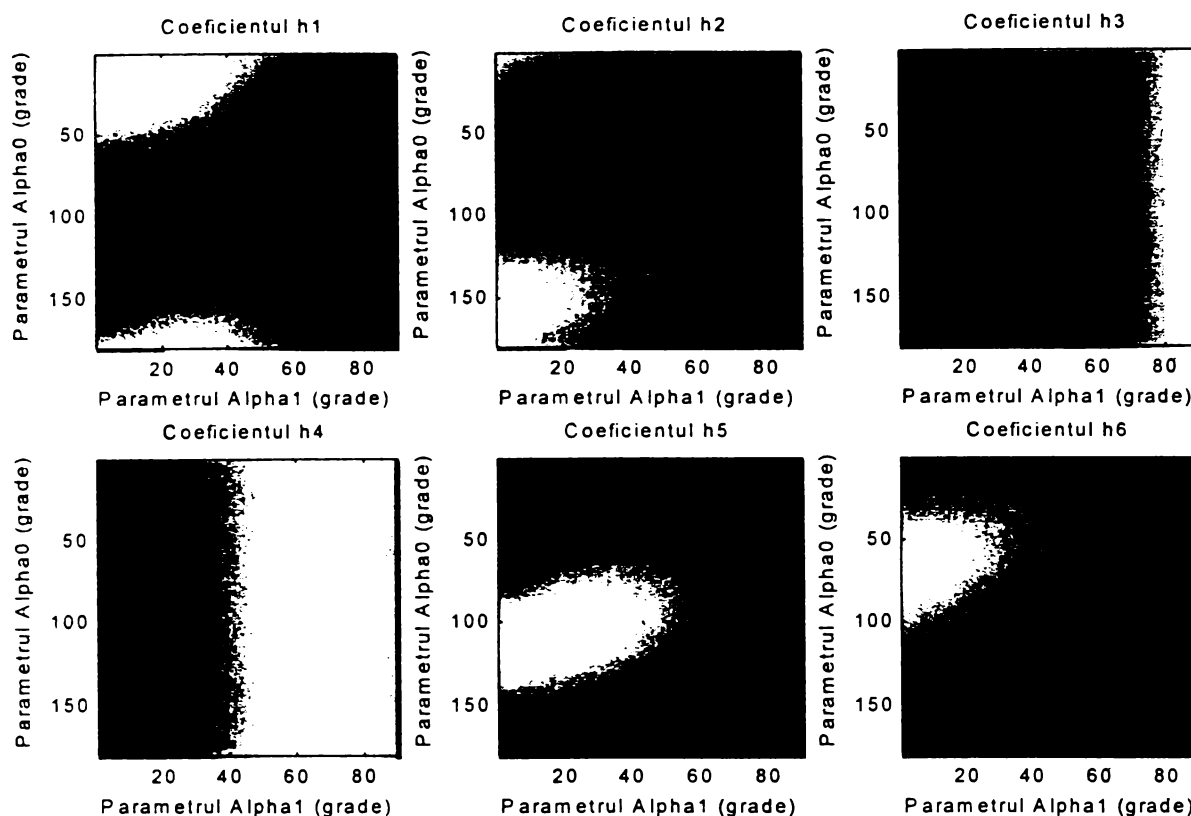


Figura 3.12. Spațiul coeficienților filtrelor de tip FIR cu $L=6$, generatoare de sisteme Wavelet ortonormale.

Un exemplu de implementare *Maple* a algoritmului propus de Sherlock și Monro se găsește descris de către Selesnik în [Sel.97].

3.1.1.9. Localizarea timp-frecvență a descompunerilor în baze de funcții Wavelet

În prezentul paragraf se va introduce noțiunea de *localizare timp-frecvență* a unei funcții, se va indica modul în care aceste proprietăți se implică în analiza eficientă a unor clase larg de semnale și vor fi prezentate metode de construcție de sisteme Wavelet a căror construcție este ghidată de aceste proprietăți. De fapt, această noțiune de localizare timp-frecvență acoperă proprietatea unor funcții de a fi cu localizare bună atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. Această idee a fost introdusă deja la începutul acestui capitol, în momentul definirii bazelor timp-frecvență. Justificarea căutării în mod special a unor asemenea baze, sau cel puțin a scoaterii în evidență a acestor proprietăți la anumite baze deja construite, este făcută pe baza celor afirmate despre sistemele Wavelet în paragrafele anterioare. Astfel, la începutul acestui capitol s-a argumentat în favoarea unor baze care permit localizarea, cu o oarecare precizie, atât a unor evenimente temporale cât și a celor din domeniul frecvență în mod simultan. Apoi, construind sisteme Wavelet ortonormale, bazate pe definiția 3.1 a analizei multirezoluție, s-a ajuns la algoritmul FWT, o metodă eficientă de calcul iterativ a coeficienților descompunerii unui semnal într-o bază Wavelet. În §3.1.1.6 s-a arătat că acest algoritm este echivalent cu un sistem de codare în subbenzi cu reconstrucție perfectă. Această imagine ne sugerează faptul că sistemul Wavelet astfel construit este capabil de o localizare frecvențială, în limitele subbenzilor caracteristice echivalente, a semnalului analizat. Apoi, în §3.1.1.8, motivat de obținerea unui algoritm cât mai rapid și mai eficient, s-au construit funcții Wavelet cu suport compact, mai mult, s-au prezentat metode diferite de

caracterizare (parametrizare) a spațiului de sisteme Wavelet cu suport compact. S-a văzut, de asemenea, că acest spațiu include un număr foarte mare de sisteme Wavelet, unele verificând anumite proprietăți suplimentare de regularitate sau momente nule (introduse în §3.1.1.7). Această imagine a sistemelor Wavelet scoate în evidență, în mod inerent, anumite proprietăți de localizare temporală ale lor (verificate cu siguranță de funcțiile Wavelet cu suport compact dar și de altele cu descreștere temporală rapidă). Este utilă, deci, încercarea de a caracteriza sistemele Wavelet printr-o imagine combinată, una ce ține cont în același timp de proprietatea de localizare frecvențială și de cea de localizare temporală. Această imagine, prin modul ei de construcție, ține cont de cele două variabile implicate: variabila timp și variabila frecvență. Ea se stabilește astfel într-un plan, denumit planul timp-frecvență. În cele ce urmează vor fi introduse diferite măsuri ale localizării timp-frecvență ale unor funcții, vor fi studiate efectele unor operatori (cum sunt cei de translație în timp și respectiv în frecvență sau cel de rescalare), se va introduce noțiunea de *rezoluție de acoperire timp-frecvență* a unei baze de funcții, exemplificată, pentru cazul special al funcțiilor Wavelet cu proprietăți bune de localizare timp-frecvență. De asemenea, vor fi indicate, prin exemple simple, metode eficiente de analiză Wavelet bazate pe aceste proprietăți de localizare timp-frecvență bună, va fi indicată o procedură de construcție a sistemelor Wavelet impunând restricția verificării unor asemenea proprietăți.

Să considerăm cazul unei descompuneri liniare a unui semnal după o bază. Proprietățile de localizare ale semnalului analizat se pot stabili cu rezoluția oferită de funcțiile bazei. Deci, o întrebare esențială ce se poate pune este: ce proprietăți de localizare au funcțiile bazei în planul timp-frecvență? De exemplu, descompunerea Fourier este o descompunere liniară după o familie de funcții armonice. Aceste funcții permit o localizare perfectă în frecvență dar nu oferă nici un fel de localizare în domeniul timp (fiind unde cu suport temporal infinit). Proprietățile transformării Fourier nu permit ca un semnal să fie cu suport compact atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. Acest lucru înseamnă că, practic, întinderea semnalului în planul timp-frecvență este (cel puțin după una din cele două variabile) nelimitată. Există mai multe căi de a defini localizarea oferită de o anumită funcție. În general toate aceste căi presupun definirea unei măsuri a întinderii în timp sau în frecvență a acelei funcții. De exemplu, am putea defini ca și măsuri ale întinderii temporale respectiv frecvențiale intervalele I_t și I_ξ care conțin 90% din energia semnalului în cele două domenii vizate, intervale ce sunt centrate în jurul centrelor de greutate ale semnalelor $x(t)^2$ și $\hat{x}(\xi)^2$.

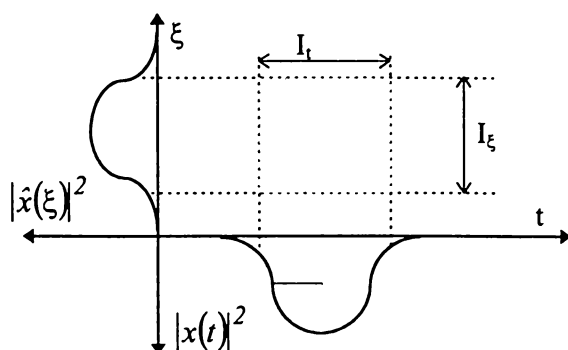


Figura 3.13 Acoperirea timp-frecvență a unui semnal $x(t)$

Figura 3.13 prezintă "acoperirea" oferită de semnalul $x(t)$ în planul timp-frecvență utilizând măsurile definite mai sus. Pentru simplitate am presupus că funcția este una analitică (ne-considerând frecvențele negative).

În multe cazuri practice semnalul suferă anumite modificări în urma acțiunii unor operatori asupra sa. De cele mai multe ori aceste operații sunt operații simple de translație, modulare sau scalare. Se constată că o translație în timp a semnalului cu t_0 va rezulta în deplasarea acoperirii

timp-frecvență de-a lungul axei timp cu cantitatea t_0 . În mod similar o modulare a semnalului, deci înmulțirea sa cu $e^{j\xi_0 t}$, va deplasa suportul timp-frecvență cu cantitatea ξ_0 de-a lungul axei frecvență. O operație de scalare cu un factor a , deci considerarea unei funcții $x'(t)=x(at)$, va rezulta în rescalarea întinderilor temporale respectiv frecvențiale ale semnalului, astfel:

$$I'_t = \frac{1}{a} I_t \quad I'_\xi = a \cdot I_\xi \quad (3.114)$$

În acest caz se schimbă atât forma cât și localizarea acoperirii timp-frecvență.

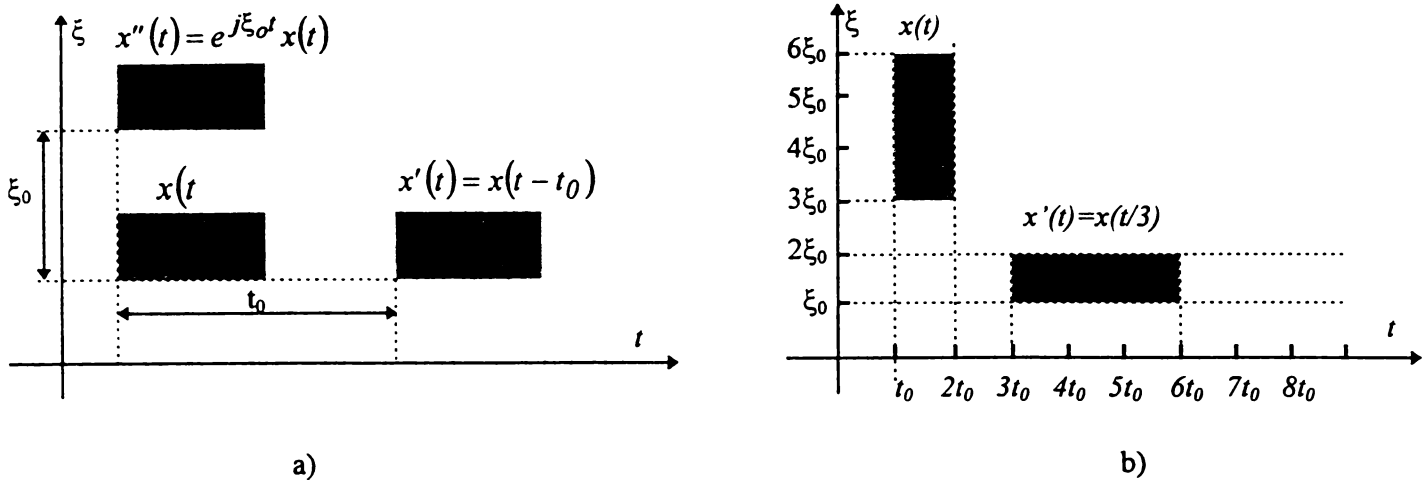


Figura 3.14 Efectul unor operații elementare asupra acoperirii timp-frecvență a unui semnal $x(t)$, a) translație și modulare b) scalare ($a=1/3$)

Observații:

a) Conform figurii 3.12.b, pentru valori mici ale variabilei de scalare a vom avea funcții cu suport frecvențial îngust (suport temporal întins) și invers.

b) Toate operațiile elementare puse în discuție conservă aria suportului timp-frecvență al semnalului (zonele hașurate au arii egale).

Aria acoperirii timp-frecvență definește *rezoluția de localizare timp-frecvență* oferită de funcția respectivă. Având în vedere restricțiile impuse de dualitatea Fourier este interesant să analizăm condițiile unei rezoluții maxime de localizare, deci a unei acoperiri minime.

Un răspuns la această problemă a fost indicat la începutul acestui capitol. Astfel, principiul Heisenberg-Gabor, definit conform ecuației (3.6) pune în evidență o limită inferioară caracteristică unei funcții, în termenii măsurilor (3.4) și (3.5). Măsurile Δt și $\Delta \xi$ implicate în inegalitatea (3.6) nu sunt identice cu mărimile I_t și respectiv I_ξ definite mai sus. Însă și aceste măsurii se bucură de proprietățile de invarianță în raport cu operațiile de translație, modulare și respectiv de rescalare a semnalului (conform figurii 3.13 și a relațiilor 3.114).

Am văzut, de asemenea, că funcțiile Wavelet pot genera descompuneri ortogonale ale spațiului $L_2(\mathcal{R})$. Funcția Wavelet mamă poate fi construită, conform (3.58), pornind de la o funcție de scară. Funcțiile Wavelet ale bazei se definesc conform (3.17). Rezoluția oferită în analiza timp-frecvență a unui semnal de către aceste funcții presupune caracterizarea acoperirii lor timp-frecvență. Pentru generalitate, este util să fie considerată mulțimea redundantă de funcții (3.73), deci elementele unei baze Wavelet continue. Aceste funcții, fiind versiuni rescalate și translatale ale funcției Wavelet mamă, sunt indexate după două variabile continue: a - variabila de scară și b - variabila de translație temporală. Evident, elementele bazei Wavelet ortogonale sunt date de funcțiile $\psi_{j,k}(t)$ obținute prin discretizarea de forma (3.75) a acestor variabile.

În acest caz, datorită rescalării, acoperirea oferită în planul timp-frecvență de funcțiile bazei Wavelet va fi variabilă - dependentă de factorul de scară a . Astfel pentru valori a mici funcțiile $\psi_{a,b}(t)$ vor fi mai scurte și de frecvențe ridicate în timp ce pentru valori a mari aceste funcții vor fi

lungi și de joasă frecvență (conform figurii 3.14, cu observația că în acest caz rescalarea se face cu factorul a^{-1}).

În cazul unei funcții wavelet centrată în jurul unei frecvențe ξ_0 , introducând notația $a = \xi_0/\xi$, se obține varianta timp-frecvență a acestei funcții:

$$\psi_{\xi,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi_0/\xi}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{\xi_0} \cdot \xi\right) \quad (3.115)$$

Introducând expresia obținută în (3.72) se obține reprezentarea timp-frecvență asociată transformării Wavelet continue a unui semnal $x(t)$:

$$CWT_x(b, \xi) = \langle x(t), \psi_{\xi,b}(t) \rangle \quad (3.116)$$

Relația de incertitudine Heisenberg-Gabor, (3.6), se impune și în acest caz, dar ea devine parametrizată. Astfel, notând cu Δt_ψ și $\Delta \xi_\psi$ întinderile temporală și, respectiv frecvențială ale funcției Wavelet mamă $\psi(t)$, definite conform (3.4) și (3.5), cele ale funcțiilor Wavelet $\psi_{\xi,b}(t)$ derivate vor fi:

$$\Delta t_{\psi_{\xi,b}}(\xi) = \frac{\xi_0}{\xi} \Delta t_\psi \quad (3.117)$$

$$\Delta \xi_{\psi_{\xi,b}}(\xi) = \frac{\xi}{\xi_0} \Delta \xi_\psi \quad (3.118)$$

Relația de incertitudine Heisenberg-Gabor a unei funcții $\psi_{\xi,b}(t)$ se scrie sub forma:

$$\Delta t_{\psi_{\xi,b}}(\xi) \cdot \Delta \xi_{\psi_{\xi,b}}(\xi) = \Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (3.119)$$

Acest lucru se datorează faptului că transformarea Wavelet presupune operația de rescalare cu factorul $a = \xi_0/\xi$, operație ce modifică atât lungimea efectivă cât și banda efectivă a funcției Wavelet implicată. Considerând semnalul de test $x(t)$ de forma:

$$x(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + e^{j\xi_1 t} + e^{j\xi_2 t} \quad (3.120)$$

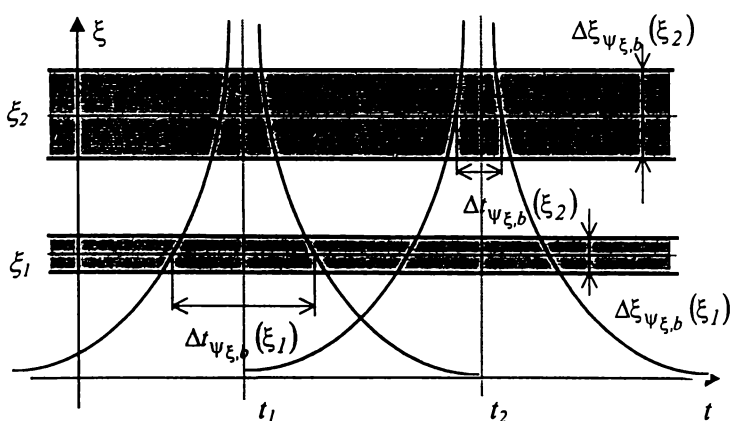


Figura 3.15. Suportul reprezentării CWT al semnalului test (3.120)

vom constata, (figura 3.15), acest efect al rescalării în planul timp-frecvență. Se observă că localizarea în timp se îmbunătățește cu creșterea lui ξ iar localizarea în frecvență scade pe măsură.

De fapt, considerând impulsul Dirac $\delta(t - t_0)$ trasformată sa CWT este:

$$CWT_\delta(b, \xi) = \langle \delta(t - t_0), \psi_{\xi,b}(t) \rangle = \psi_{\xi,b}^*(t_0) = \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \cdot \psi^*\left(\frac{t_0 - b}{\xi_0} \cdot \xi\right) \quad (3.121)$$

- o versiune rescalată și normată a funcției Wavelet, oglindită și centrată în momentul t_0 .

În privința localizării în frecvență să considerăm funcția Wavelet a lui Shannon, corespunzătoare funcției de scară sinus-cardinal, $Sinc(t)$, (ce corespunde unui filtru trece-jos ideal). Acest caz este prezentat în figura 3.16. Modulul transformării Fourier a acesteia este unitar pentru $\frac{\pi}{2} \leq |\xi| \leq \pi$. Considerând un semnal de forma $e^{j\xi_0 t}$, funcția Wavelet de frecvențe ridicate care încă

“lasă să treacă” semnalul corespunde unui factor de scară $a_{min} = \frac{1}{2\xi_0}$, în timp ce funcția Wavelet de

joasă frecvență care permite “trecerea” semnalului are factor de scară $a_{max} = \frac{1}{\xi_0}$.

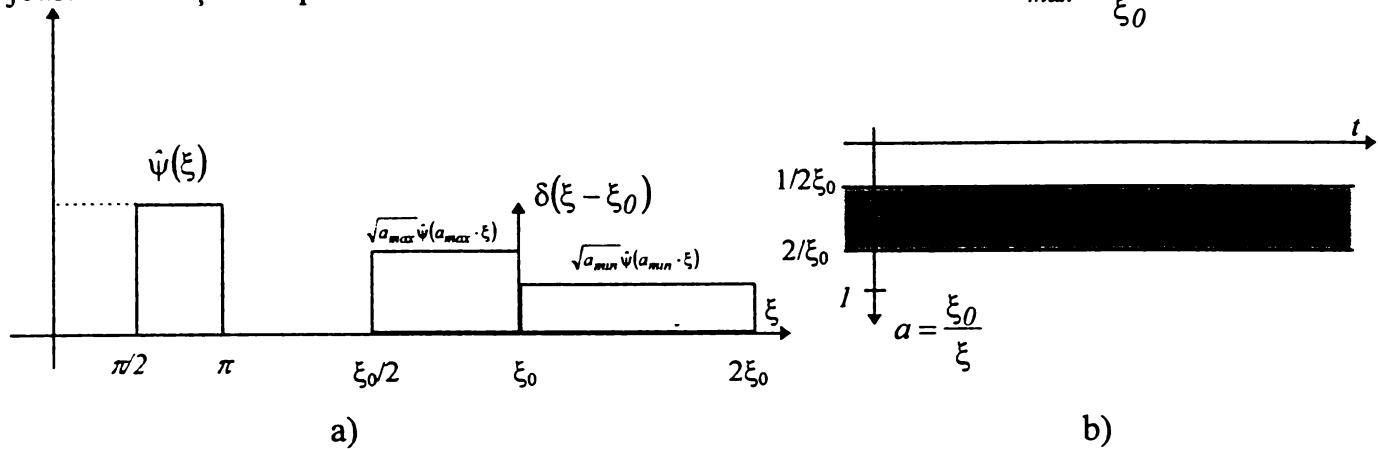


Figura 3.16. Localizarea în frecvență a funcției Wavelet de tip Shannon.

Observație: Localizarea în frecvență se deteriorează cu creșterea frecvenței ξ .

Figura 3.15 pune în evidență o proprietate foarte importantă a transformării Wavelet, și anume proprietatea de a permite o localizare temporală arbitrar de bună (bineînțeles pe seama localizării frecvențiale). Aceasta permite o caracterizare a regularității locale a semnalului supus analizei. Trebuie să menționăm faptul că descreșterea în domeniul transformatei Fourier a unui semnal oferă o măsură a regularității globale a acestui semnal și nu spune mai nimic despre comportamentul local al acestuia. De exemplu, o singură discontinuitate a unui semnal continuu în celelalte puncte va crea o descreștere de ordin $1/|\xi|$ în spectru. Transformarea Wavelet Continuă, în schimb, datorită proprietății mai sus amintite, va izola discontinuitatea de restul funcției, iar comportamentul din domeniul transformat într-o vecinătate a acesteia, o va caracteriza. Acest lucru, este foarte important din punct de vedere al compresiei unui semnal nestaționar. Se poate găsi un nivel de rezoluție al analizei astfel încât o nestaționaritate (temporală sau frecvențială) să influențeze un număr minim de coeficienți ai descompunerii din vecinătatea punctului de nestaționaritate considerat.

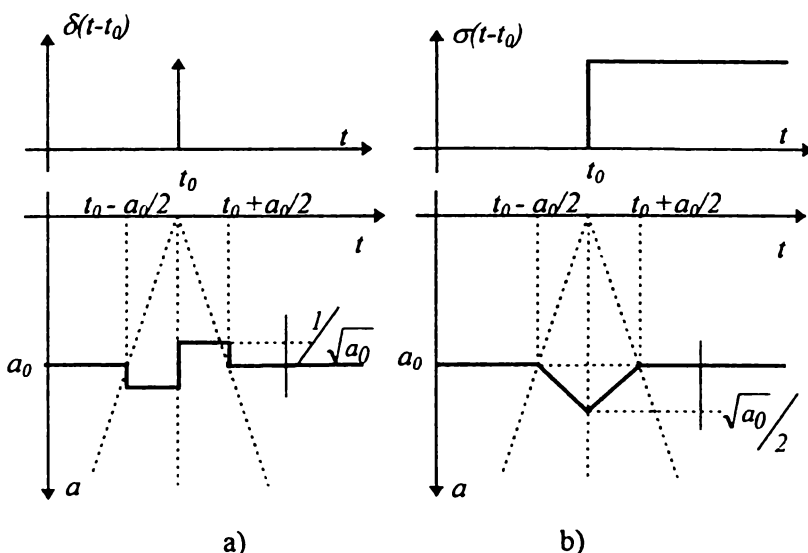


Figura 3.17. Proprietățile de localizare temporală ale funcției Haar descreșterii coeficienților în domeniul transformat.

Se arată, [Vet.95], că această proprietate de caracterizare a regularității locale se poate generaliza la caracterizarea regularității locale de ordin superior. Acest lucru impune însă, conform

concluziilor paragrafului 3.1.1.7, ca gradul de regularitate al funcției Wavelet utilizat să fie corelat cu cel al semnalului de analizat.

Considerând descompunerea unui semnal $x(t)$ într-o bază Wavelet ortogonală, de forma:

$$x(t) = \sum_j \sum_k \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (3.122)$$

imaginea timp-frecvență asociată poate fi cea din figura 3.18.

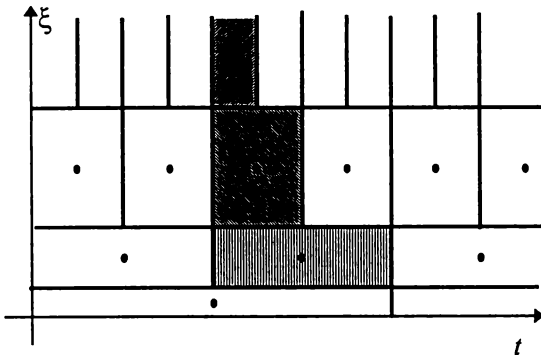


Figura 3.18. Poziția timp-frecvență a coeficienților unei descompuneri Wavelet

indică localizarea timp-frecvență a valorilor reprezentării, deci localizarea coeficienților $\langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ ai descompunerii. Similar cazului continuu și această figură pune în evidență o îmbunătățire a localizării temporale cu creșterea frecvenței ξ și o scădere pe măsură în localizarea frecvențială. Deosebirea față de cazul continuu constă în faptul că aceste proprietăți de localizare sunt “cuantificate”, indexabile după variabila discretă j ce indică nivelul de rezoluție. Astfel, de exemplu, în cazul distribuției Dirac $\delta(t - t_0)$ obținem o reprezentare timp-frecvență cu coeficienți nenuli în zonele (celulele) hașurate din figura 3.18.

Să analizăm mai în detaliu aceste proprietăți de localizare ale funcțiilor unei baze ortogonale Wavelet.

Dacă funcția Wavelet mamă $\psi(t)$ este centrată în jurul momentului de timp $t=0$, în domeniul timp, și în jurul frecvenței ξ_0 , în domeniul frecvență, atunci funcțiile Wavelet derivate $\psi_{j,k}$ vor fi centrate în jurul momentelor de timp $t = k \cdot 2^{-j}$ și în jurul frecvențelor $\xi = \pm 2^j \cdot \xi_0$. Acest lucru înseamnă că produsul scalar $\langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ va reprezenta conținutul informațional al semnalului $x(t)$ în jurul punctului $(t, \xi) = (k \cdot 2^{-j}, 2^j \xi_0)$ din acest plan. Dacă funcția $x(t)$ este bine localizată în planul timp-frecvență (dacă își concentrează energia în mare măsură) în domeniul $[-T, T] \times ([-\xi_2, -\xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2])$, atunci pentru o aproximare foarte bună a semnalului ajunge să considerăm doar valorile $\langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ pentru care punctele $(t, \xi) = (k \cdot 2^{-j}, 2^j \xi_0)$ sunt incluse sau sunt foarte aproape de acest domeniu.

Ne interesează comportamentul unui semnal $x(t)$ în jurul punctului $t=t_0$, analiza făcându-se la o scară j . Se pune întrebarea ce valori $\langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ vor conține informații despre semnal în acest punct t_0 , deci ce domeniu (j, k) constituie suportul informațional al comportamentului semnalului $x(t)$ în jurul acestui punct. Presupunând că funcția wavelet $\psi(t)$ este cu suport compact inclus în intervalul $[-n_1, n_2]$, rezultă un suport $[-n_1 2^j, n_2 2^j]$ al funcțiilor Wavelet $\psi_{j,0}(t)$ iar suporturile

funcțiilor $\psi_{j,k}(t)$ vor fi de forma $[(-n_1+k)2^{-j}, (n_2+k)2^{-j}]$. Astfel la o scară j coeficienții wavelet (indexați după k) ce verifică:

$$(-n_1+k)2^{-j} \leq t_0 \leq (n_2+k)2^{-j} \quad (3.123)$$

vor fi influențați de valoarea lui $x(t)$ în punctul t_0 . Inegalitatea (3.123) se poate rescrie ca:

$$2^j t_0 - n_2 \leq k \leq 2^j t_0 + n_1 \quad (3.124)$$

Regiunea de influență din relația (3.124) este pusă în evidență în figura 3.19.

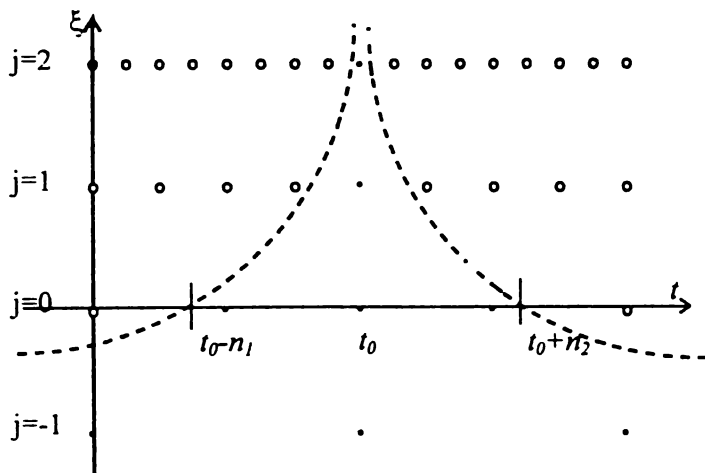


Figura 3.19. Regiunea de influență în planul timp-frecvență a unei valori $x(t_0)$

O problemă similară ce ne-ar putea interesa se poate formula în următorul mod: considerând un coeficient al descompunerii Wavelet într-un punct indexat (j_0, k_0) al planului timp-frecvență asociat să vedem ce regiune a semnalului contribuie la valoarea coeficientului considerat. Considerând din nou cazul de mai sus, al funcțiilor Wavelet cu suport compact, se deduce că această regiune de influență are expresia:

$$(-n_1 + k_0)2^{-j_0} \leq t \leq (n_2 + k_0)2^{-j_0} \quad (3.125)$$

Se observă faptul că este posibilă o punere în evidență a unui fenomen local, rezoluția de localizare depinzând de scara j la care se face analiza. Bineînțeles, având în vedere inegalitatea Heisenberg-Gabor, această facilitate de localizare din ce în ce mai bună în domeniul timp se asociază cu o localizare frecvențială din ce în ce mai slabă. Să analizăm aceste proprietăți de localizare în domeniul frecvență.

Presupunând că funcția Wavelet $\psi(t)$ se anulează în domeniul frecvență în afara unui interval $[\xi_{min}, \xi_{max}]$, la o scară j suportul frecvențial al semnalului $\psi_{j,k}(t)$ este $[\xi_{min} \cdot 2^j, \xi_{max} \cdot 2^j]$. Astfel, o componentă frecvențială de frecvență ξ_0 va influența descompunerea Wavelet la scara j dacă:

$$\xi_{min} \cdot 2^j \leq \xi_0 \leq \xi_{max} \cdot 2^j \quad (3.126)$$

deci vor fi influențate scările:

$$-\log_2 \frac{\xi_{min}}{\xi_0} \leq j \leq -\log_2 \frac{\xi_{max}}{\xi_0} \quad (3.127)$$

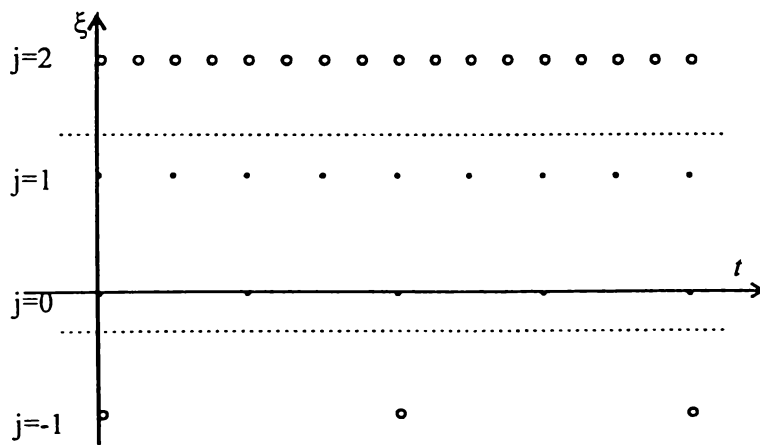


Figura 3.20. Regiunea de influență în planul timp-frecvență a unei componentă frecvențială ξ_0 .

Acest lucru se pune în evidență în figura 3.20. Din (3.126) rezultă că la o scară $j = j_0$ valorile descompunerii Wavelet sunt influențate de componentele frecvențiale ce se încadrează în intervalul:

$$\xi_{min} \cdot 2^{j_0} \leq \xi \leq \xi_{max} \cdot 2^{j_0}$$

În concluzie se poate observa că proprietățile de localizare în domeniul timp, respectiv frecvență sunt dependente de factorul de scară la care se face analiza, o îmbunătățire a localizării temporale

implicând în mod obligatoriu o scădere a rezoluției de localizare frecvențială.

O altă problemă, enunțată la începutul acestui paragraf, este considerarea anumitor proprietăți de localizare timp-frecvență ale unui sistem Wavelet în faza de proiectare, deci la construcția acestuia. Impunerea unei anumite “forme” a acoperirii în planul timp-frecvență a unei funcții Wavelet $\psi(t)$ poate fi utilă deoarece aceasta determină selectivitatea atât temporală cât și frecvențială a unei descompunerii Wavelet. O asemenea proprietate poate fi utilă în analiza unor semnale foarte variate, în special în cazul semnalelor nestaționare. Este și cazul semnalelor audio, a căror prelucrare (compresie) este unul dintre scopurile acestei lucrări. Este așa deoarece sistemul auditiv uman se caracterizează, la rândul său, prin aceste proprietăți de selectivitate. El este sensibil atât la decalaje temporale (selectivitate temporală) cât și la tonalități diferite (selectivitate frecvențială). În plus și acest sistem poate fi caracterizat printr-o limită inferioară a celor două selectivități. Aceste caracteristici par să justifice utilizarea unei reprezentări timp frecvență în prelucrarea (deci și compresia) acestui tip de semnal, de exemplu, reprezentări de tip Wavelet sau reprezentări cu proprietăți similare acestora. În aceste cazuri eroarea de aproximare a reprezentării (de exemplu, eroarea de cuantizare a coeficienților) va fi legată, într-o manieră mai directă, de eroarea percepută de urechea umană (o măsură subiectivă, nemăsurabilă). Revenind la problema construcției sistemelor Wavelet, în §3.1.1.8 a fost prezentată o parametrizare a spațiului sistemelor Wavelet cu suport compact. S-a dedus faptul că acest spațiu poate fi caracterizat mai simplu în termenii filtrelor numerice implicate, deci în funcție de valorile posibile ale secvenței h_k din ecuația (3.7). S-a ajuns la concluzia că parametrizarea acestui spațiu a sistemelor Wavelet cu suport compact poate fi făcută în funcție de lungimea $2M$ a filtrelor numerice implicate, prin considerarea unui număr de $M-1$ parametri unghiulari α_i independenți, cu $\alpha_i \in [0, \pi), i = 0 \dots M-3$ și $\alpha_{M-2} \in [0, \pi/2)$. Numărul combinațiilor posibile este infinit, fiind implicate intervale de valori continue. Ne propunem să găsim o cale de a introduce o cerință (o restricție) de verificare de către funcția Wavelet obținută a unor proprietăți de localizare timp-frecvență. Impunerea unor asemenea proprietăți este aproape echivalentă cu cerința unui produs $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$ cât mai aproape de limita inferioară dată de criteriul de incertitudine Heisenberg-Gabor, conform inegalității (3.6). Însă această cerință, după expresia implicată, are în vedere doar aria acoperirii timp-frecvență ce poate fi obținută pentru un număr foarte mare de combinații de valori ale celor două măsuri implicate. În figura 3.18 se prezintă acest caz pentru trei combinații posibile.

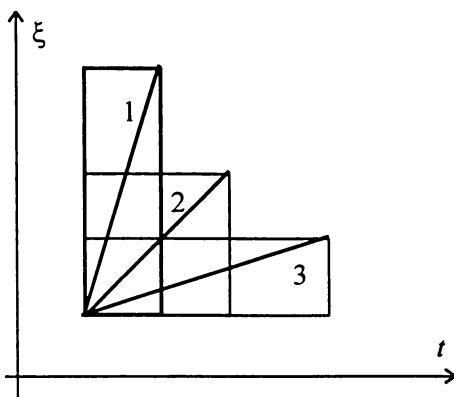


Figura 3.21. Acoperirea a trei funcții Wavelet cu același produs Heisenberg-Gabor

Pentru unicitatea soluției, în [Mon.96] se propune verificarea, pe lângă un produs $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$ cât mai mic, și a unei restricții suplimentare impuse funcției Wavelet, și anume minimizarea, pentru o valoare impusă a parametrului k , a expresiei:

$$v(k) = \Delta \xi_\psi^2 + k^2 \Delta t_\psi^2 \quad (3.128)$$

Expresia (3.128) este o măsură asociată produsului de incertitudine Heisenberg $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$, fiind de fapt o măsură a unei incertitudini echilibrate. Acest lucru este asigurat

de faptul că ea implică un anumit raport a celor două măsuri implicate. Parametrul liber k specifică importanța relativă a celor două măsuri (rezoluția temporală Δt_ψ și respectiv rezoluția frecvențială $\Delta \xi_\psi$). Măsura (3.128) este de fapt diagonala ponderată a celulei de rezoluție timp-frecvență asociată

funcției Wavelet. Mai rămâne o problemă de rezolvat, și anume, introducerea celor două restricții în proiectarea sistemului Wavelet, având în vedere faptul că se construiește, într-o primă fază, filtrul numeric asociat. În [Mon.96] se arată că este posibil calculul direct al măsurilor Δt_ψ și $\Delta \xi_\psi$ pe baza coeficienților h_k ai filtrului numeric. Astfel, se poate scrie:

$$\Delta \xi_\psi^2 = \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=0}^{L-2} \sum_{m=n+1}^{L-1} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)^2} h_m h_n \quad (3.129)$$

unde $L=2M$ este lungimea filtrului, iar

$$\Delta t_\psi^2 = \sum_{n=0}^{L-1} (n-t_0)^2 h_n^2 \quad (3.130)$$

cu:

$$t_0 = \frac{\sum_n n \cdot h_n}{\sum_n h_n} \quad (3.131)$$

Exemple

a) Pentru $M=1$, funcțiile Haar sunt singurele pentru care produsul de incertitudine este $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi = 0.568$. În mod similar, minimizarea lui Δt_ψ pentru orice lungime de filtru duce tot la funcțiile Haar, deci cu doi coeficienți adiacenți nenuli.

b) Pentru $M=2$, avem un singur parametru liber iar minimizarea (3.128) se poate face ușor. Minimizând (3.128) cu $k=0$ se obține funcția Wavelet DAU-2, deci DAU-2 este și funcția care minimizează $\Delta \xi_\psi$, pentru o lungime $L=4$ impusă, indiferent de valoarea lui Δt_ψ . Luând valori diferite pentru parametrul k vom obține funcții Wavelet diferite. Notăm cu O4 clasa de funcții ce conține funcțiile astfel obținute.

c) Pentru $M=3$, avem doi parametri independenți. Minimizând (3.128) cu $k=0$ se obține, similar cazului anterior, funcția Wavelet DAU-3. Notăm cu O6 clasa funcțiilor Wavelet ce minimizează (3.128) pentru diferitele valori ale parametrului k având lungimea impusă a filtrului $L=6$.

Tabelul 3.2 conține valorile calculate ale măsurilor Δt_ψ , $\Delta \xi_\psi$ și a produsului $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$ pentru șapte sisteme Wavelet diferite. S-au notat cu UMin4 respectiv UMin6 sistemele Wavelet de lungime impusă, $L=4$ și respectiv $L=6$, cu produsul Heisenberg-Gabor minim.

Tabelul 3.2 Exemple de măsuri Δt_ψ , $\Delta \xi_\psi$ și produse de incertitudine $\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$ ale unor funcții Wavelet

Numele	k^2	$\Delta \xi_\psi$	Δt_ψ	$\Delta t_\psi \cdot \Delta \xi_\psi$
Haar (DAU-1)	∞	1.136	0.500	0.568
DAU-2	0	1.033	0.612	0.633
O4	0.4	1.035	0.597	0.618
UMin4	-	1.103	0.506	0.559
DAU-3	≈ 0	0.988	0.650	0.641
O6	0.4	0.995	0.686	0.682
UMin6	-	0.963	0.635	0.611

Expunerea făcută în cele trei ultime paragrafe, §3.1.1.7, §3.1.1.8 și §3.1.1.9, ne permite să tragem o serie de concluzii. Astfel, au fost puse în evidență o serie de proprietăți esențiale ale unor funcții Wavelet cum sunt număr de momente nule, regularitate, suport compact, localizare în planul timp-frecvență. S-a remarcat a fi foarte important, din punct de vedere al unei aplicații efective, observația conform căreia este posibilă caracterizarea unor serii de proprietăți ale unui semnal de analizat $x(t)$ pe baza analizei seriei coeficienților de descompunere $\langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$. Astfel, proprietăților de regularitate ale semnalului pot fi caracterizate dacă se impune condiția ca funcțiile Wavelet de analiză să fie funcții mai regulate decât gradul de regularitate estimat al acestui semnal. Similar acționează și proprietățile de moment ale funcțiilor Wavelet. S-a remarcat faptul că aceste proprietăți ale funcțiilor Wavelet mamă, care au fost puse în discuție în paragraful §3.1.1.7, rămân valabile și pentru funcțiile Wavelet $\psi_{j,k}(t)$, conform calităților de conservare de proprietăți a procedurilor de translație și rescalare, subiect abordat în §3.1.1.9. Astfel este posibilă, de exemplu, caracterizarea simplă a semnalelor cu variație polinomială. Proprietățile de suport compact precum și cele de localizare în planul timp-frecvență sunt utile din punctul de vedere al localizării unor evenimente (temporale sau frecvențiale) a semnalului. Aceste proprietăți ne pot garanta o “împrăștiere” limitată, pe un număr de coeficienți mai restrâns și bine localizați în acest plan a acestor evenimente.

Tabelul 3.3. conține o statistică comparativă a proprietăților de regularitate, momente nule și celor de localizare pentru cazul a câtorva funcții Wavelet mai des întâlnite.

Tabelul 3.3 Gradul de regularitate și proprietățile de localizare ale unor funcții Wavelet

Funcția wavelet	Momente nule de ordin	Regularitate Hölder de ordin	Descreștere sau suport temporal	Descreștere sau suport frecvențial
Haar	1	0	$[0, 1]$	$1/\xi$
Sinc	∞	∞	$1/t$	$[1/2, 1]$
Meyer	∞	∞	$1/\text{polinomial}$	$[1/3, 4/3]$
Battle-Lemarié	N	N	exponential	$1/\xi^N$
Daubechies-N	N	(N)	$[0, 2N-1]$	$1/\xi^{(N)}$

unde (N) este o funcție cu creștere liniară cu N ce aproximează $0.2075 \cdot N$ pentru valori N mari. Funcțiile Wavelet Battle-Lemarie de ordin N se bazează pe funcții B-spline de ordin $N-1$.

3.1.2. Descompuneri Wavelet biortogonale

Descompunerea unui semnal într-o bază de funcții Wavelet ortogonală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, subiect abordat în §3.1.1, prezintă o serie de avantaje dintre care cele mai importante sunt, din punct de vedere al unei aplicații de compresie a semnalului prelucrat, ușurința cu care pot fi calculate coeficienții descompunerii respectiv ușurința cu care pot fi evaluate erorile de aproximare a semnalului printr-o proiecție a sa pe unul din subspațiile V_j ale lui $L_2(\mathfrak{R})$, precum și eficiența algoritmului rapid de calcul numeric al transformării Wavelet, prezentat în §3.1.1.5. La aceste proprietăți poate fi adăugată și cea de control facil al proprietăților funcției Wavelet, cum sunt cele de localizare timp-frecvență, grad de regularitate, numărul de momente nule etc. Cu toate acestea proprietatea de ortogonalitate impune restricții severe funcției Wavelet. Astfel, se cunoaște faptul că, [Dau.88], singura funcție Wavelet simetrică, cu suport compact și care generează o bază ortogonală este funcția Haar, cunoscută și ca fiind una dintre funcțiile Wavelet cu un grad redus de regularitate. Există o serie de descrieri, prezentări, de aplicații de compresie de imagini, [Coi.92b], [She.93], autorii cărora ajung la concluzia că în aceste cazuri speciale este mai bine să se renunțe la proprietatea de ortogonalitate în favoarea celei de simetrie a funcției Wavelet păstrând totodată un anumit grad minim de regularitate.

Reamintim faptul că, la începutul prezentului capitol, funcțiile Wavelet ortogonale au fost introduse plecând de la noțiunea de analiză multirezoluție a spațiului semnalelor de energie finită. Definiția acesteia implică existența unei funcții de scară $\varphi(t) \in V_0 \subset L_2(\mathfrak{R})$, astfel încât mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a subspațiului V_0 . S-a constatat de asemenea că, în cazul sistemelor Wavelet ortogonale, funcția $b(\xi)$, definită conform (3.10) pe baza funcției de scară $\varphi(t)$, este constantă și egală cu unu pentru orice valoare $\xi \in \mathfrak{R}$. A fost subliniat, de asemenea, că în cazul general, această funcție verifică dubla inegalitate dată de relația (3.11), unde A și B sunt două constante pozitive oarecare, iar cazul ortogonal implică egalitatea $A=B=1$. Dacă se consideră o funcție oarecare $x(t)$ din V_0 , descompunerea acesteia în baza ortonormală $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este de forma:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \varphi(t-k) \rangle \cdot \varphi(t-k) \quad (3.132)$$

În cazul general, când mulțimea $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază Riesz a lui V_0 , dar care nu este ortogonală, dezvoltarea (3.132) nu mai este adevărată pentru orice funcție $x(t)$, însă există o funcție, notată $\tilde{\varphi}(t)$, denumită funcție de scară duală astfel încât, pentru orice funcție $x(t)$ din V_0 , să fie adevărată relația, [Dau.92]:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \tilde{\varphi}(t-k) \rangle \cdot \varphi(t-k) \quad (3.133)$$

Cele două funcții $\varphi(t)$ și $\tilde{\varphi}(t)$ sunt diferite, în general, și identice în cazul ortogonal. Funcția de scară duală verifică proprietățile de ortogonalitate:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(t), \varphi(t-k) \rangle &= \delta_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ și} \\ \langle \tilde{\varphi}(t), \psi(t-k) \rangle &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Similar funcției de scară $\varphi(t)$, ce induce o analiză multirezoluție a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, caracterizată prin cele două șiruri de subspații, V_j și W_j , $j \in \mathbb{Z}$, și funcția de scară duală $\tilde{\varphi}(t)$ induce, la rândul său o analiză multirezoluție, denumită analiză multirezoluție duală. Ea poate fi definită conform definiției 3.1. a unei analize multirezoluție. Pot fi stabilite relații similare cu (3.13) și (3.15), care rămân valabile. Vom nota cu \tilde{V}_j subspațiile $L_2(\mathfrak{R})$ implicate în această analiză multirezoluție. În mod similar vom nota cu \tilde{W}_j subspațiile $L_2(\mathfrak{R})$ complementare subspațiilor \tilde{V}_j în \tilde{V}_{j+1} .

Evident, cele două analize multirezoluție nu sunt identice exceptând cazul ortogonal, când cele două funcții de scară sunt și ele identice. Se constată faptul că, similar funcției de scară $\varphi(t)$, ale cărei

versiuni deplasate formează o bază Riesz a lui V_0 , și mulțimea $\{\tilde{\varphi}(t-k)\}_{k \in Z}$ formează o bază Riesz a subspațiului \tilde{V}_0 . În mod similar, funcțiile $\{\tilde{\varphi}_{j,k}(t)\}_{k \in Z}$, definite conform:

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \cdot \tilde{\varphi}(2^j t - k) \quad (3.135)$$

formează o bază Riesz a subspațiilor \tilde{V}_j , $j \in Z$.

Observație: deoarece $\tilde{\varphi}(t) \in \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1$, există o secvență $\{\tilde{h}_k\}_{k \in Z} \in l_2(Z)$ astfel încât funcția de scară duală să se poată scrie sub forma:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t+k) \quad (3.136)$$

o proprietate similară cu (3.7), verificată de funcția scară $\varphi(t)$.

Există și o funcție $\tilde{\psi}(t)$, denumită funcție Wavelet mamă duală, ce induce o bază Riesz de forma $\{\tilde{\psi}(t-k)\}_{k \in Z}$ a spațiului \tilde{W}_0 . Deoarece funcția $\tilde{\psi}(t) \in \tilde{W}_0 \subset \tilde{V}_1$, există o secvență $\{\tilde{g}_k\}_{k \in Z} \in l_2(Z)$ astfel încât funcția Wavelet mamă duală verifică relația:

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t+k) \quad (3.137)$$

În mod similar, se poate deduce imediat că mulțimea de funcții $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{k \in Z}$, cu

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \cdot \tilde{\psi}(2^j t - k) \quad (3.138)$$

este o bază Riesz a subspațiului \tilde{W}_j .

Proprietăți similare cu (1.134) sunt verificate și de funcțiile Wavelet duale $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$, în sensul că ele verifică:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}(t), \varphi(t-k) \rangle &= 0, \quad \forall k \in Z \\ \langle \tilde{\psi}_{j,k}(t), \psi_{j',k'} \rangle &= \delta_{jj'} \cdot \delta_{kk'}, \quad \forall j, j', k, k' \in Z \end{aligned} \quad (3.139)$$

Funcția Wavelet mamă $\psi(t)$, definită conform (3.16), oferă punctul de plecare în formarea unei baze Riesz a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Aceasta este reprezentată de mulțimea de funcții $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$, definită conform,

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \cdot \psi(2^j t - k) \quad (3.140)$$

Teorema 3.2. din §3.1.1. ne asigură de faptul că în cazul în care funcția Wavelet este definită pe baza unei funcții de scară ortogonală, baza Riesz dată de relația (3.139) va fi una ortogonală. În acest caz, orice semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ admite o descompunere în această bază, de forma:

$$x(t) = \sum_j \sum_k \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (3.141)$$

expresie care din nou nu este adevărată în cazul general. Ea poate fi rescrisă, în mod similar cu (3.133), sub forma, [Coh.92a]:

$$x(t) = \sum_j \sum_k \langle x(t), \tilde{\psi}_{j,k}(t) \rangle \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (3.142)$$

implicând funcțiile Wavelet duale, definite conform cu (3.138).

Cele două proprietăți, (1.133) și (1.142) sunt consecințe directe ale proprietăților avute de cele două analize multirezoluție. Astfel, se constată, că în general subspațiul V_j nu este ortogonal pe W_j , pentru orice valoare întreagă posibilă a lui j . Această proprietate este verificată și de către subspațiile duale \tilde{V}_j și \tilde{W}_j . Astfel se explică motivul din care expresia (1.133) nu este adevărată în cazul general. Însă, din modul în care aceste analize multirezoluții sunt definite, bazate pe cele două

funcții duale (funcția de scară duală și respectiv funcția Wavelet mamă duală), ce verifică proprietățile (3.134) și (3.139), rezultă că sunt verificate proprietățile :

$$V_j \perp \tilde{W}_j, \quad \tilde{V}_j \perp W_j, \quad \forall j \in Z \quad (3.143)$$

$$\text{și respectiv: } W_j \perp \tilde{W}_{j'}, \quad \forall j \neq j' \quad (3.144)$$

Având în vedere aceste proprietăți de ortogonalitate se spune că cele două baze, $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ și $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$, deși nu sunt în general baze ortogonale ale spațiului hilbert $L_2(\mathfrak{R})$, sunt baze *biortogonale*, iar o descompunere a unui semnal $x(t)$ de forma (3.142) poartă denumirea de *descompunere Wavelet biortogonală*. Ea reprezintă, similar unei descompuneri Wavelet ortogonale, o altă imagine a semnalului $x(t)$, de forma (3.1), în care coeficienții descompunerii x_k sunt chiar produsele scalare ale semnalului cu funcțiile Wavelet duale. Evident, performanțele unui sistem de compresie bazat pe o astfel de transformare depind, după cum s-a specificat la începutul acestui capitol, atât de proprietățile semnalului analizat cât și de cele ale funcțiilor bazei descompunerii. Din acest motiv, în cazul descompunerilor Wavelet biortogonale, spre deosebire de cele ortogonale, numărul parametrilor transformării este mai mare. Astfel trebuiesc avute în vedere atât proprietățile funcțiilor de scară și respectiv Wavelet directe cât și cele ale funcțiilor de scară și respectiv Wavelet duale rezultate.

Condițiile de biortogonalitate (3.134) și (3.139) pot fi scrise în domeniul frecvență sub forma:

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) \cdot \hat{\phi}^*(\xi + 2k\pi) &= 1, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \sum_k \hat{\psi}(\xi + 2k\pi) \cdot \hat{\psi}^*(\xi + 2k\pi) &= 1, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \sum_k \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) \cdot \hat{\psi}^*(\xi + 2k\pi) &= 0, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \sum_k \hat{\psi}(\xi + 2k\pi) \cdot \hat{\phi}^*(\xi + 2k\pi) &= 0, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Evident ele se reduc la condițiile (3.20) și respectiv (3.32) în cazul ortogonal.

Aceste condiții, în termenii răspunsurilor la impuls ale filtrelor numerice h_k, g_k, \tilde{h}_k și \tilde{g}_k implicate în definițiile (3.7), (3.16), (3.136) și (3.137), pot fi scrise, [Coh.92a]:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_0(\xi) \cdot m_0^*(\xi) + \tilde{m}_0(\xi + \pi) \cdot m_0^*(\xi + \pi) &= 1 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \tilde{m}_1(\xi) \cdot m_1^*(\xi) + \tilde{m}_1(\xi + \pi) \cdot m_1^*(\xi + \pi) &= 1 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \tilde{m}_0(\xi) \cdot m_1^*(\xi) + \tilde{m}_0(\xi + \pi) \cdot m_1^*(\xi + \pi) &= 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \\ \tilde{m}_1(\xi) \cdot m_0^*(\xi) + \tilde{m}_1(\xi + \pi) \cdot m_0^*(\xi + \pi) &= 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3.146)$$

unde $m_0(\xi)$ se definește conform relației (3.49) iar $m_1(\xi)$ conform (3.56). Funcțiile $\tilde{m}_0(\xi)$ și $\tilde{m}_1(\xi)$ au definiții similare cu cele ale lui $m_0(\xi)$ și $m_1(\xi)$ cu deosebirea că acestea implică, în loc de secvențele h_k și g_k , răspunsurile la impuls \tilde{h}_k și \tilde{g}_k ale filtrelor duale.

Condițiile (3.146) pot fi exprimate sintetic, sub forma:

$$\tilde{M}(\xi) \cdot M^{T*}(\xi) = I \quad (3.147)$$

$$\text{unde } M(\xi) = \begin{bmatrix} m_0(\xi) & m_0(\xi + \pi) \\ m_1(\xi) & m_1(\xi + \pi) \end{bmatrix} \text{ și } \tilde{M}(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\xi) & \tilde{m}_0(\xi + \pi) \\ \tilde{m}_1(\xi) & \tilde{m}_1(\xi + \pi) \end{bmatrix}.$$

Verificarea acestor condiții este asigurată de o soluție de forma:

$$\tilde{m}_0(\xi) = \frac{1}{\det M(\xi)} m_1^*(\xi + \pi), \quad \tilde{m}_1(\xi) = -\frac{1}{\det M(\xi)} m_0^*(\xi + \pi) \quad (3.148)$$

ce indică o legătură directă dintre filtrele Wavelet directe și cele duale. Pe baza ei, cunoscând răspunsurile la impuls h_k și g_k ale filtrelor Wavelet directe, pot fi dimensionate filtrele Wavelet duale cu răspunsurile la impuls \tilde{h}_k și respectiv \tilde{g}_k .

3.1.2.1. Transformarea Wavelet Biortogonală Rapidă

Presupunând că se cunoaște o dezvoltare de forma (3.133) a unui semnal $x(t)$ din subspațiul V_0 , ne interesează proiecțiile succesive ale acestuia pe subspațiile V_j , W_j , $j < 0$.

Analizând descompunerea semnalului $x(t)$ pe două nivele succesive, de exemplu pentru $j=0$ și $j=-1$, se poate stabili:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \rangle \cdot \varphi_{0,k}(t) = \sum_k s_0[k] \cdot \varphi_{0,k}(t) \quad (3.149)$$

și, respectiv:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k \langle x(t), \tilde{\varphi}_{-1,k}(t) \rangle \cdot \varphi_{-1,k}(t) + \sum_k \langle x(t), \tilde{\psi}_{-1,k}(t) \rangle \cdot \psi_{-1,k}(t) = \\ &= \sum_k s_1[k] \cdot \varphi_{-1,k}(t) + \sum_k d_1[k] \cdot \psi_{-1,k}(t) \end{aligned} \quad (3.150)$$

unde:

$$\varphi_{0,k}(t) = \varphi(t-k), \quad \varphi_{-1,n}(t) = \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \varphi_{0,k}(t), \quad \psi_{-1,n}(t) = \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \varphi_{0,k}(t) \quad (3.151)$$

$$\text{și} \quad \tilde{\varphi}_{0,k}(t) = \tilde{\varphi}(t-k), \quad \tilde{\varphi}_{-1,n}(t) = \sum_k \tilde{h}_{2n-k}^* \cdot \tilde{\varphi}_{0,k}(t), \quad \tilde{\psi}_{-1,n}(t) = \sum_k \tilde{g}_{2n-k}^* \cdot \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \quad (3.152)$$

Ținând cont de relațiile (3.151) și (3.152) precum și de cele două imagini, (3.149) și (3.150), ale semnalului $x(t)$ rezultă:

$$s_1[n] = \langle x(t), \tilde{\varphi}_{-1,n}(t) \rangle = \left\langle x(t), \sum_k \tilde{h}_{2n-k}^* \cdot \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \right\rangle = \sum_k \tilde{h}_{2n-k} \cdot \langle x(t), \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \rangle = \sum_k \tilde{h}_{2n-k} \cdot s_0[k] \quad (3.153)$$

$$d_1[n] = \langle x(t), \tilde{\psi}_{-1,n}(t) \rangle = \left\langle x(t), \sum_k \tilde{g}_{2n-k}^* \cdot \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \right\rangle = \sum_k \tilde{h}_{2n-k} \cdot \langle x(t), \tilde{\varphi}_{0,k}(t) \rangle = \sum_k \tilde{g}_{2n-k} \cdot s_0[k] \quad (3.154)$$

și respectiv:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_l s_0[l] \cdot \varphi_{0,l}(t) = \sum_k s_1[k] \cdot \varphi_{-1,k}(t) + \sum_k d_1[k] \cdot \psi_{-1,k}(t) = \\ &= \sum_k s_1[k] \cdot \left(\sum_l h_{2k-l}^* \cdot \varphi_{0,l}(t) \right) + \sum_k d_1[k] \cdot \left(\sum_l g_{2k-l}^* \cdot \varphi_{0,l}(t) \right) = \\ &= \sum_l \left(\sum_k s_1[k] \cdot h_{2k-l}^* + \sum_k d_1[k] \cdot g_{2k-l}^* \right) \cdot \varphi_{0,l}(t) \end{aligned} \quad (3.155)$$

de unde rezultă:

$$s_0[n] = \sum_k s_1[k] \cdot h_{2k-n}^* + \sum_k d_1[k] \cdot g_{2k-n}^* \quad (3.156)$$

Relațiile (3.153), (3.154) au expresii similare cu (3.61) și (3.70) cu deosebirea că sunt implicate nu filtrele numerice cu răspunsurile la impuls h_k și g_k ci filtrele duale, cele caracterizate prin răspunsurile \tilde{h}_k și \tilde{g}_k . Cele două relații ne indică faptul că, similar cazului ortogonal, și în cazul biortogonal este posibil calculul iterativ al coeficienților de proiecție pe subspațiile succesive ale analizei multirezoluție. Se cere să fie cunoscută o dezvoltare de forma (3.149) a unui semnal $x(t)$ de la care pornind pot fi calculate alte descompuneri ale lui.

Relațiile (3.153) și (3.154) aplicate în mod recursiv definesc un algoritm cunoscut sub denumirea de *Transformarea Wavelet Biortogonală Rapidă (directă)*. În expresia (3.156) recunoaștem exact relația (3.82) de reconstrucție a secvenței $s_0[n]$ din proiecțiile $s_1[n]$ și $d_1[n]$. Aplicată în mod recursiv ea definește algoritmul *Transformării Wavelet Biortogonală Rapidă Inversă*. De fapt algoritmul transformării directe reprezintă procedura de calcul ce poate fi utilizată în vederea obținerii unei DWT biortogonală a unui semnal $x(t)$, în condițiile în care sunt cunoscuți

coeficienții $s_0[n]$, ai descompunerii semnalului în baza spațiului V_0 , în timp ce transformarea inversă este procedura ce poate fi utilizată pentru inversarea acestei DWT biortogonale.

În aceste condiții algoritmul FWT prezentat în figura 3.1 poate fi utilizat și pentru calculul unei transformări Wavelet biortogonale cu condiția ca să fie utilizate în calculul descompunerilor filtrele wavelet duale. În acest caz, în vederea unei reconstrucții, poate fi aplicat fără nici o modificare, algoritmul IFWT prezentat în figura 3.2.

În mod similar algoritmilor FWT și IFWT care pot fi văzuți ca fiind descompuneri și respectiv reconstrucții în/din subbenzi, conform figurilor 3.3. și 3.4., cele două transformări Wavelet biortogonale, cea directă și inversă, pot fi echivalate cu astfel de sisteme. În cazul biortogonal, modificări ale conținutului schemelor apar doar în cazul sistemului de analiză (de descompunere). Notând cu $\tilde{H}(\xi)$ și $\tilde{G}(\xi)$ transformatele Fourier în timp discret ale secvențelor numerice \tilde{h}_k și \tilde{g}_k , acest sistem de analiză va avea structura cea din figura 3.22.

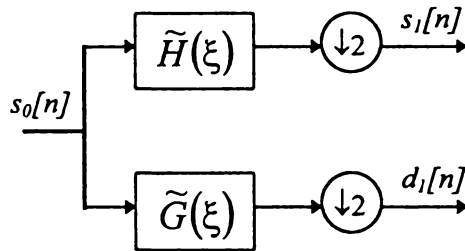


Figura 3.22. Schema de principiu a descompunerii Wavelet biortogonale;

Figura 3.22 prezintă, de fapt, principiul algoritmului descompunerii Wavelet biortogonale aplicat pe un singur nivel, în termenii a două filtrări numerice, urmată fiecare de o operație de decimare. Din modul de construcție a filtrelor duale $\tilde{H}(\xi)$ și $\tilde{G}(\xi)$, conform relației (3.148), rezultă că și aceste filtre, similar perechii $H(\xi)$ și $G(\xi)$, sunt filtre QMF, filtre oglindite în cuadratură.

Formula de reconstrucție găsită, expresia (3.156), este similară cu (3.83) ce caracterizează algoritmul IFWT. Astfel secvența $s_0[n]$ poate fi reconstruită exact din secvențele filtrate și decimate $s_1[n]$ și $d_1[n]$ folosind sistemul de sinteză cu schema de principiu din figura 3.4. Astfel sistemul de analiza din figura 3.22 împreună cu cel de sinteză din figura 3.4 formează un sistem de codare în subbenzi cu reconstrucție perfectă. Ca și în cazul ortogonal, și în cazul biortogonal este posibilă conectarea în cascadă a mai multor astfel de sisteme, obținând bănci de filtre ce implementează algoritmi *Transformării Wavelet Biortogonală Rapidă* și respectiv *Transformării Wavelet Biortogonală Rapidă Inverse*. Aceste scheme nu mai sunt reproduse aici deoarece ele sunt similare cele din figurile 3.5 și, respectiv, 3.6 din §3.1.1.6.

3.2 Descompunerea semnalelor în pachete de funcții Wavelet

Pachetele de funcții Wavelet reprezintă o generalizare a bazelor de funcții Wavelet abordate în paragraful precedent. Ele reprezintă mulțimi de funcții ale căror membri sunt funcții de tip Wavelet, derivate pornind, de obicei, tot de la o funcție de scară și/sau funcție Wavelet mamă prin proceduri de rescalare, translație și filtrare. Astfel, prin definiție, o analiză multirezoluție se compune dintr-o serie de subspații $V_j, j \in Z$, a spațiului Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$, ale căror baze Riesz se obțin printr-o simplă operație de translație cu un pas bine determinat, aplicat unor funcții ce nu sunt altceva decât versiuni scalate ale funcției de scară $\varphi(t)$. În mod similar, au fost introduse bazele de funcții Wavelet, bazele Riesz ale subspațiilor $W_j, j \in Z$, care sunt construite urmând aceleași procedee mai sus amintite aplicate însă funcției Wavelet mamă, $\psi(t)$. În paragraful precedent s-a arătat faptul că există funcții Wavelet cu proprietăți bune (ne referim aici în special la cele de localizare timp-frecvență, număr de momente nule, grad de regularitate) care prin aceste procedee (rescalare și translație) generează o bază ortonormală, biortogonală sau semiortogonală a spațiului

Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$. Pachetele de funcții Wavelet reprezintă o extensie a acestei mulțimi de funcții. Ele sunt construite prin procedee similare bazelor de funcții Wavelet. Ele formează o mulțime de funcții, o bibliotecă de funcții, redundantă, din care însă pot fi extrase diverse tipuri de baze Riesz (ortogonale, biortogonale, semiortogonale) ale diverselor subspații $V_j, W_j, j \in Z$, deci putând oferi reprezentări alternative la descompunerile Wavelet standard. În cele ce urmează, pentru simplitate, vom considera funcții de scară și respectiv funcții Wavelet mamă ortogonale. Redundanța acestei mulțimi de funcții Wavelet permite o mai mare flexibilitate în ceea ce privește optimizarea anumitor tipuri de aplicații. Funcțiile pachetelor de funcții Wavelet au proprietăți similare funcțiilor Wavelet din care derivă, [Wic.89],[Wic.94], [Isa.98]. Din acest motiv noile baze de funcții pot fi alese pe baza unor criterii specifice ale aplicației dorite. În cazul aplicațiilor de compresie de semnal asemenea criterii pot fi: concentrarea energetică maximă în domeniul transformat, distorsiune minimă la o rată de bit fixată, raport de compresie maxim pentru un nivel al distorsiunii impuse etc. Pachetele de funcții Wavelet permit o adaptare ușoară și la cerințe cum sunt viteza de operare sau gradul de complexitate a sistemului. Astfel, de exemplu, alegerea bazei optimale poate fi guvernată de cerința ca timpul mediu de codare a unui coeficient din domeniul transformat să nu depășească o anumită limită sau, de o cerință ca reconstrucția (sinteza) semnalului să fie foarte rapidă. Ambele cerințe sunt esențiale în cazul aplicațiilor în timp real.

3.2.1 Descompuneri în pachete de funcții Wavelet ortogonale

Construcția pachetelor de funcții Wavelet are la bază proprietățile (3.7) și (3.16) verificate de funcțiile de scară și respectiv Wavelet mamă:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \varphi(2t + k) \quad (3.157)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(2t + k) \quad (3.158)$$

Cele două relații implică două secvențe, notate h_k și respectiv g_k , care, după cum am văzut, pot fi văzute ca fiind răspunsuri la impuls ale unor filtre QMF, h_k al celui de tip trece-jos iar g_k al celui de tip trece-sus. Cele două filtrări caracterizează, de asemenea, procedurile de proiecție ale unui semnal oarecare din spațiul Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$, pe secvența de subspații succesive V_j , precum și în cele complementare ale acestora, W_j , ale unei analize multirezoluție definite conform definiției 3.1.

În cele ce urmează se prezintă un exemplu de procedură de construcție de pachet de funcții Wavelet. Să considerăm spațiul W_0 , complementar lui V_0 în V_1 din analiza multirezoluție generată de o funcție de scară $\varphi(t)$. Teorema 3.2 ne spune că mulțimea de funcții $\{\psi(t - k)\}_{k \in Z}$ formează o bază Riesz a acestuia. Definind funcțiile

$$\psi^1(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \cdot \psi(2t + k) \text{ și} \quad (3.159)$$

$$\psi^2(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \cdot \psi(2t + k), \quad (3.160)$$

se poate arăta ușor că mulțimea $\{1/\sqrt{2} \psi^1(t/2 - n), 1/\sqrt{2} \psi^2(t/2 - n)\}_{n \in Z}$ este o altă bază Riesz a spațiului W_0 , [Wic.89], [Isa.98]. Notând cu W_{-1}^1 și W_{-1}^2 cele două subspații definite de mulțimile de funcții $\{1/\sqrt{2} \psi^1(t/2 - n)\}_{n \in Z}$ și $\{1/\sqrt{2} \psi^2(t/2 - n)\}_{n \in Z}$, se poate spune că prin reuniunea lor se obține spațiul W_0 (orice element al acestui spațiu se poate dezvolta în mod unic în această nouă bază). Se poate observa, deasemenea, faptul că în cazul ortogonal mulțimea $\{1/\sqrt{2} \psi^1(t/2 - n)\}_{n \in Z}$ este bază ortonormală în W_{-1}^1 în timp ce mulțimea $\{1/\sqrt{2} \psi^2(t/2 - n)\}_{n \in Z}$ formează bază ortonormală în W_{-1}^2 . Cum cele două mulțimi de funcții sunt liniar independente rezultă imediat

ortogonalitatea celor două subspații W_{-1}^1 și W_{-1}^2 , [Isa.98]. Sintetic acest lucru poate fi scris sub forma:

$$\bigoplus_{i=1,2}^{\perp} W_{-1}^i = W_0 \quad (3.161)$$

Astfel, se poate spune că cele două funcții, definite conform (3.159) și (3.160), induc o partiție diadică ortogonală a spațiului W_0 . Deoarece cele două subspații W_{-1}^1 și W_{-1}^2 reprezintă o partiție diadică a spațiului W_0 vom spune că ele sunt *subspații diadice* ale lui W_0 .

În mod similar exemplului precedent, se poate demonstra că, în acest caz ortogonal, orice spațiu $W_j, j \in Z$ poate fi descompus în două subspații W_{j-1}^1 și W_{j-1}^2 ortogonale generate de bazele ortonormale:

$$\left\{ \psi_{j,n}^1 = 2^{\frac{j}{2}} \psi^1(2^j t - n) \right\}_{n \in Z} \quad \text{și} \quad \left\{ \psi_{j,n}^2 = 2^{\frac{j}{2}} \psi^2(2^j t - n) \right\}_{n \in Z} \quad (3.162)$$

Având în vedere faptul că subspațiile $W_j, j \in Z$, sunt mutual ortogonale iar reuniunea lor este densă în spațiul $L_2(\mathfrak{R})$, deci

$$\bigoplus_{j \in Z}^{\perp} W_j = L_2(\mathfrak{R}),$$

rezultatul anterior ne indică o mare flexibilitate în alegerea unei baze ortogonale a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ și a diverselor subspații $V_j, W_j, j \in Z$ ale acestuia, fie în termenii funcțiilor $\varphi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t)$, definite conform (3.12) și (3.17), fie în cele ale funcțiilor $\psi_{j,k}^1(t)$ și $\psi_{j,k}^2(t)$ definite conform (3.162).

Astfel, dacă se consideră o funcție oarecare $x(t) \in W_0$, aceasta poate fi reprezentată, în baza ortonormală $\{\psi(t-k)\}_{k \in Z}$ a acestui spațiu, sub forma:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \psi_{0,k}(t) \rangle \cdot \psi_{0,k}(t) = \sum_k d_0[k] \cdot \psi_{0,k}(t) \quad (3.163)$$

Mulțimea de funcții $\{\psi_{-1,n}^1, \psi_{-1,n}^2\}_{n \in Z}$ fiind o altă bază ortonormală a acestui spațiu, o imagine echivalentă (3.163) a semnalului $x(t)$ este:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k \langle x(t), \psi_{-1,k}^1(t) \rangle \cdot \psi_{-1,k}^1(t) + \sum_k \langle x(t), \psi_{-1,k}^2(t) \rangle \cdot \psi_{-1,k}^2(t) = \\ &= \sum_k sd_1[k] \cdot \psi_{-1,k}^1(t) + \sum_k dd_1[k] \cdot \psi_{-1,k}^2(t) \end{aligned} \quad (3.164)$$

Se poate deci afirma că cele două funcții $\psi^1(t)$ și $\psi^2(t)$, definite conform (3.159) și (3.160), sunt funcții generatoare de pachete de funcții Wavelet de forma (3.162).

3.2.2. Algoritmul transformării rapide în pachete de funcții wavelet

Să presupunem că se cunoaște o dezvoltare de forma (3.163) a unui semnal oarecare $x(t) \in W_0$. Ne propunem să evaluăm coeficienții de proiecție $sd_1[k]$ și $dd_1[k]$ ale acestui semnal pe cele două subspații W_{-1}^1 și W_{-1}^2 . Cu notațiile din (3.164) ținând cont de definițiile (3.159), (3.160) și (3.162) acești coeficienți rezultă:

$$\begin{aligned} sd_1[k] &= \langle x(t), \psi_{-1,k}^1(t) \rangle = \langle x(t), \sum_k h_{2n-k}^* \cdot \psi(t-k) \rangle = \\ &= \sum_k h_{2n-k} \langle x(t), \psi(t-k) \rangle = \sum_k h_{2n-k} \cdot d_0[k] \end{aligned} \quad (3.165)$$

și respectiv,

$$\begin{aligned}
dd_1[k] &= \langle x(t), \psi_{-1,k}^2(t) \rangle = \langle x(t), \sum_k g_{2n-k}^* \cdot \psi(t-k) \rangle = \\
&= \sum_k g_{2n-k} \langle x(t), \psi(t-k) \rangle = \sum_k g_{2n-k} \cdot d_0[k]
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Observații:

- Dacă se cunoaște secvența de coeficienți $d_0[k]$, de descompunere a semnalului $x(t) \in W_0$ în baza $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a acestuia, coeficienții de proiecție $sd_1[k]$ și $dd_1[k]$ ale acestui semnal pe cele două subspații W_{-1}^1 și W_{-1}^2 se obțin prin operații de filtrare, cu filtre numerice având răspunsurile la impuls secvențele h_k și respectiv g_k , urmate de subeșantionare cu un factor doi;
- Există o asemănare foarte mare dintre expresiile (3.165) și (3.166) și expresiile (3.76) și (3.77) ce definesc transformarea FWT. Deosebirea dintre aceste seturi de expresii constă în faptul că în cazul FWT, expresiile (3.76) și (3.77) indică procedura de descompunere a unui semnal $x(t)$ din spațiul V_0 în cele două subspații ortogonale V_{-1} și W_{-1} ce-l compun pe V_0 , având asociați coeficienții $s_1[n]$ și respectiv $d_1[n]$, în timp ce expresiile (3.165) și (3.166) indică procedura de descompunere a unui alt semnal $x(t)$, ce aparține spațiului W_0 , în cele două subspații ortogonale, W_{-1}^1 și W_{-1}^2 , ce-l compun pe acesta;
- În principiu, procedurile aplicate în descompunerile mai sus amintite sunt identice, diferă doar datele cu care se lucrează.

Conform acestei ultime observații coeficienții transformării unei funcții în pachete de funcții Wavelet pot fi calculați utilizând exact algoritmul FWT.

Procedura de reconstrucție a lui $x(t)$ din proiecțiile sale implică calculul coeficienților $d_0[k]$ pe baza coeficienților de proiecție $sd_1[k]$ și $dd_1[k]$. Ținând cont de (3.159), (3.160) și (3.162), se poate scrie:

$$\begin{aligned}
\langle x(t), \psi(t-k) \rangle &= d_0[k] = \\
&= \sum_n h_{2n-k}^* \cdot \langle x(t), \psi_{-1,n}^1(t) \rangle + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot \langle x(t), \psi_{-1,n}^2(t) \rangle = \\
&= \sum_n h_{2n-k}^* \cdot sd_1[n] + \sum_n g_{2n-k}^* \cdot dd_1[n]
\end{aligned} \tag{3.167}$$

Relația (3.167) ne indică modul în care se poate reconstrui imaginea (3.163) unui semnal $x(t)$ dacă este cunoscută dezvoltarea (3.164) a sa. Ea pune în evidență un algoritm ce permite, de fapt, calculul coeficienților descompunerii (3.163) dacă sunt cunoscuți coeficienții descompunerii (3.164). Ea nu este altceva decât operația inversă a dezvoltărilor (3.165) și (3.166). Se poate observa imediat faptul că expresia (3.167) este similară cu (3.82) ce caracterizează o iterație a Transformării Wavelet Rapidă Inverse - IFWT.

Procedura de calcul dată de relațiile (3.165) și (3.166) poate fi reiterată atât pentru secvența coeficienților de proiecție $sd_1[k]$ cât și pentru secvența $dd_1[k]$ obținând noi secvențe de coeficienți ce corespund unor proiecții în subspații ortogonale diadice ale spațiilor W_{-1}^1 și W_{-1}^2 . La rândul său și aceste secvențe de coeficienți rezultați pot fi supuse unor proceduri similare. Din punct de vedere teoretic, procedura amintită poate fi reiterată până la infinit, în practică însă, din cauza lungimilor finite ale acestor secvențe de coeficienți, numărul iterațiilor este întotdeauna finit. Ansamblul acestor proceduri definește de fapt algoritmul *transformării rapide în pachete de funcții wavelet - FWPT (Fast Wavelet Packet Transform)*. În mod similar, procedura de calcul dată de (3.167) aplicată în mod recursiv seriilor de coeficienți rezultați în faza de analiză definește algoritmul *transformării rapide inverse în pachete de funcții wavelet - IFWPT (Inverse Fast Wavelet Packet Transform)*. În cazul ortogonal el permite o reconstrucție exactă a secvenței de coeficienți de la care s-a pornit în faza de analiză.

Pentru exemplificare în figura 3.23 se indică modul în care algoritmul FWPT direct este folosit pentru descompunerea unei secvențe de coeficienți $s_0[n]$ de lungime $N=8$.

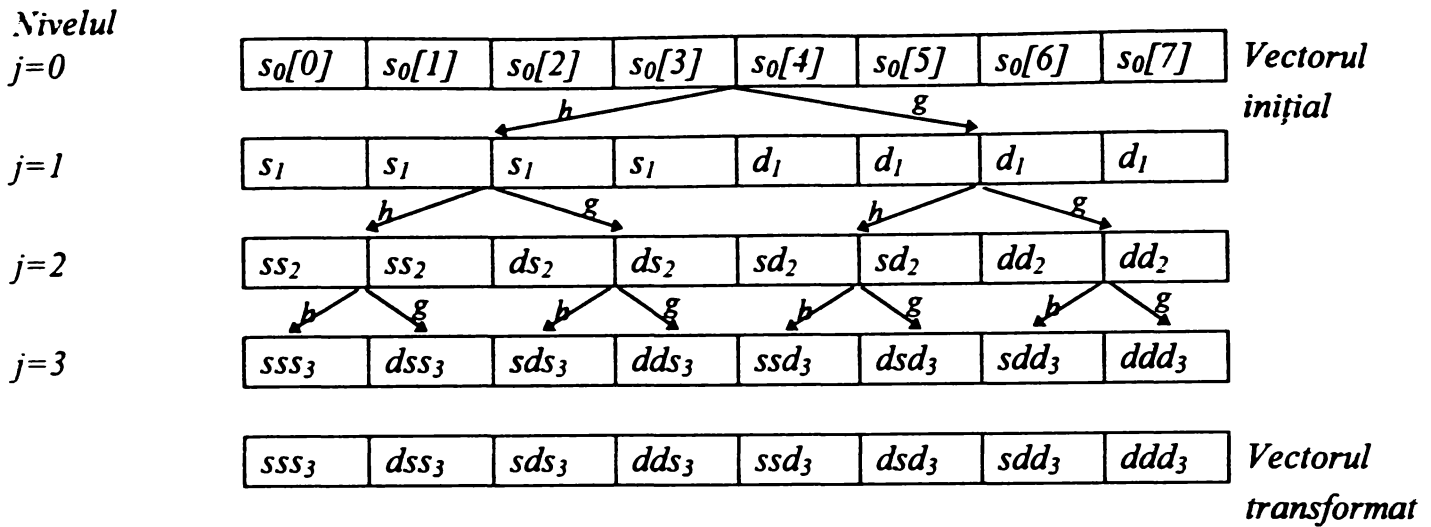


Figura 3.23. Algoritmul FWPT.

În figura 3.23 o notația de forma $d' \dots a^2 a^1$, indică o secvență de coeficienți rezultat cu semnificația:

- algoritmul FWPT s-a iterat pe un număr de j nivele;
- $d'=s$ indică o operație conform relației (3.165) în iterația j ;
- $d'=d$ indică o operație conform relației (3.166) în iterația j ;

În fiecare iterație j un vector este descompus în doi subvectori. Datorită lungimii finite a vectorului inițial precum și a subeșantionării implicate de procedură subvectorii rezultați au lungimi egale cu jumătatea lungimii vectorului inițial. În cazul ortogonal este posibilă reconstrucția exactă a vectorului inițial din cei doi subvectori conform procedurii indicate de relația (3.167).

Figura 3.24 se referă la cazul descompunerii din figura 3.23 și indică modul în care algoritmul IFWPT recombina elementele vectorului transformat pentru a obține vectorul inițial.

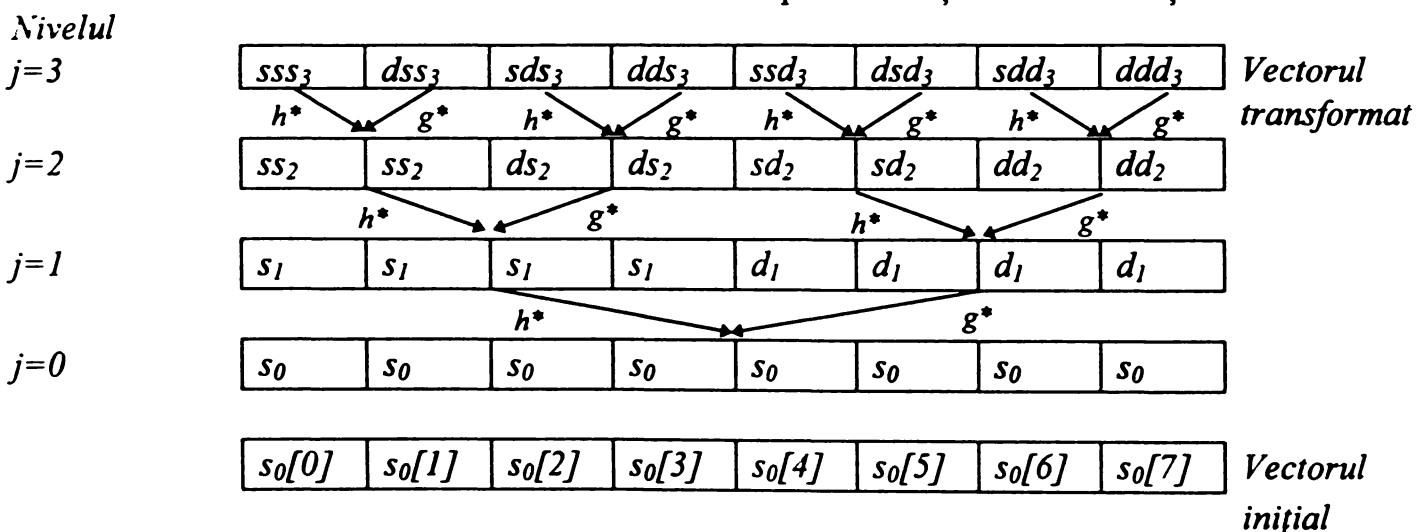


Figura 3.24. Algoritmul IFWPT.

3.2.3. Obținerea pachetelor de funcții Wavelet

Ideea de bază prezentată în §3.2.1, ce duce la obținerea unor pachete de funcții Wavelet, de căutare de noi baze ortogonale ale spațiilor W_j , de forma (3.162), printr-o procedură similară cu cea de obținere a funcțiilor Wavelet (expresia 3.17), este foarte utilă din punct de vedere al caracterizării acestor funcții obținute. Astfel în §3.1 a fost abordată utilitatea unor serii întregi de proprietăți ale unor funcții Wavelet (regularitate, număr de momente nule, suport compact, localizare timp-frecvență etc.). S-a văzut, de asemenea, faptul că operațiile de translație, rescalare și subeșantionare vizate de procedura 3.17, de derivare a funcțiilor Wavelet pornind de la o funcție Wavelet mamă $\psi(t)$, conservă sau nu modifică prea mult anumite proprietăți esențiale ale acestei funcții. Cele mai importante dintre acestea sunt cele de regularitate, de suport compact precum și cele legate de

rezoluția de localizare în planul timp-frecvență. Având în vedere faptul că și pachetele de funcții Wavelet sunt obținute pe baza unor proceduri similare funcțiilor Wavelet obișnuite, ce presupun aceleași operații cu aceleași filtre, rezultă că și aceste funcții obținute se vor bucura de aceste proprietăți “bune” moștenite de la funcțiile Wavelet din care provin. Din acest motiv, în cele ce urmează nu vor fi reluate demonstrațiile cu privire la mecanismul de moștenire de proprietăți prin aceste operații al acestor funcții. Se vor sublinia și se vor folosi însă proprietățile respective.

Trebuie observat faptul că expresia (3.162) nu permite obținerea tuturor expresiilor posibile ale unor pachete de funcții Wavelet ce au la bază o funcție de scară $\varphi(t)$ și/sau o funcție Wavelet mamă $\psi(t)$. De fapt, chiar în paragraful precedent s-a afirmat acest lucru, prin specificarea faptului că o împărțire a unui spațiu W_j oarecare în două subspații diadice ortogonale nu reprezintă neapărat faza finală a căutărilor de noi pachete de funcții Wavelet. S-a indicat faptul că acest artificiu de împărțire poate fi aplicat și noilor subspații rezultate, obținând noi subdiviziuni ale spațiului inițial și, bineînțeles, pachete noi de funcții Wavelet. Procedura aplicată este cea folosită și prezentată și în exemplul din figura 3.23 (cum ar fi descompunerea vectorului dd_2 în subvectorii sdd_3 și ddd_3), cea de filtrare QMF a subsecvențelor rezultate. În acest paragraful precedent prezentarea s-a făcut fără a mai da detalii despre, fără a mai explicita, funcțiile noilor baze ale acestor descompuneri.

De fapt, se poate spune că pachetele de funcții Wavelet rezultă în urma unei proceduri de construcție de analiză multirezoluție generalizată. Astfel, în timp ce o analiză multirezoluție clasică este obținută împărțind spațiile V_j în spațiile V_{j-1} și W_{j-1} și apoi făcând la fel, în mod recursiv, pentru spațiul V_{j-1} , pentru a obține pachete de funcții Wavelet se aplică acest artificiu de împărțire, tot în mod recursiv, și spațiilor W_j . Având în vedere similitudinea dintre expresiile (3.157), (3.158), ce guvernează procesul de subîmpărțire a spațiilor V_j , și expresiile (3.159) și (3.160), ce guvernează procesul de subîmpărțire a spațiilor W_j , se poate constata faptul că în fond nu este vorba despre altceva decât de aplicarea unei singure proceduri (de subîmpărțire) într-un cadru mai extins (atât spațiilor V_j cât și spațiilor W_j).

O procedură simplă de construcție a funcțiilor de pachete Wavelet este prezentată în [Wic.94]. Această procedură poate fi sintetizată astfel:

- se alege o funcție de scară $\varphi(t)$;
- se găsește funcția Wavelet mamă $\psi(t)$ corespunzătoare;
- se calculează, în mod iterativ, familia de funcții $f_n(t) \in L_2(\mathfrak{R})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, cu $f_0(t) = \varphi(t)$, $f_1(t) = \psi(t)$,

$$f_{2n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k f_n(2t + k) \quad (3.168)$$

$$f_{2n+1}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k f_n(2t + k) \quad (3.169)$$

Fiecare funcție $f_n(t)$ este o funcție de tip Wavelet, ale căror versiuni translatare cu un anumit pas formează, în terminologia folosită de până acum, un pachet de funcții Wavelet. În expresiile (3.168) și (3.169) recunoaștem de fapt procedura de derivare a tuturor funcțiilor Wavelet și pachete de funcții Wavelet abordate de până acum. Ele pun în evidență un proces iterativ de construcție ceea ce nu permite obținerea ușoară a expresiei analitice, în acest domeniu timp, a unei funcții pentru un anumit număr n fixat și finit. Expresii analitice mai compacte ale acestor funcții pot fi obținute în domeniul frecvență.

Definițiile (3.49) și (3.56) ale expresiilor $m_0(\xi)$ și $m_1(\xi)$, pot fi notate sintetic:

$$m_e(\xi) = m_0^e(\xi) \cdot m_1^{l-e}(\xi), \quad e = 0, 1 \quad (3.170)$$

$$\text{Se notează, deasemenea, cu } n = e^J e^{J-1} \dots e^2 e^1, \quad (3.171)$$

expresia binară a numărului n (o reprezentare a lui cu un număr de J biți).

Utilizând notațiile (3.171) și (3.172) și ținând cont de expresia (3.57) se poate scrie, [Isa.98]:

$$\mathfrak{T}\{f_n(t)\}(\xi) = \prod_{k=1}^J m_{e^k} \left(\frac{\xi}{2^k} \right) \cdot \hat{\phi} \left(\frac{\xi}{2^J} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (3.172)$$

În relația (3.172) recunoaștem o expresie generalizată a expresiilor (3.54) și (3.58). Se observă, de asemenea, faptul că numărul J , numărul de biți ai reprezentării binare a numărului n , joacă un rol important. El are semnificația nivelului de rezoluție, a numărului de iterații efectuate în această construcție. Se observă, de asemenea, faptul că pentru o valoare J fixată vom avea de-a face cu un număr 2^J de numere n diferite, astfel după un număr de J iterații avem un număr de 2^J expresii de pachete de funcții Wavelet. Evident, pentru $n=0$, și $J=1$ relația (3.172) dă transformata Fourier a funcției de scară $\phi(t)$, în timp ce pentru cazul $n=0$ dar $J \rightarrow \infty$ regăsim expresia (3.54) a transformatei Fourier. În mod similar modului în care expresia (3.54) oferă baza de pornire a unui algoritm în cascadă ce permite evaluarea funcției scară în puncte rațional-diadice (de forma $\frac{p}{2^q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$) cu o rezoluție din ce în ce mai bună, este posibilă, pornind de la expresia (3.172),

folosind același algoritm iterativ, evaluarea acestor pachete de funcții Wavelet, cu o precizie teoretic oricât de bună.

În figura 3.25 se prezintă un exemplu de familie de funcții de pachete Wavelet derivate din funcția Wavelet Daubechies-5 (DAU-5). În acest exemplu sunt considerate cele 8 funcții pentru $J=3$. Evaluarea acestor funcții cu suport compact s-a făcut într-un număr de 256 de puncte folosind algoritmul în cascadă anterior menționat.

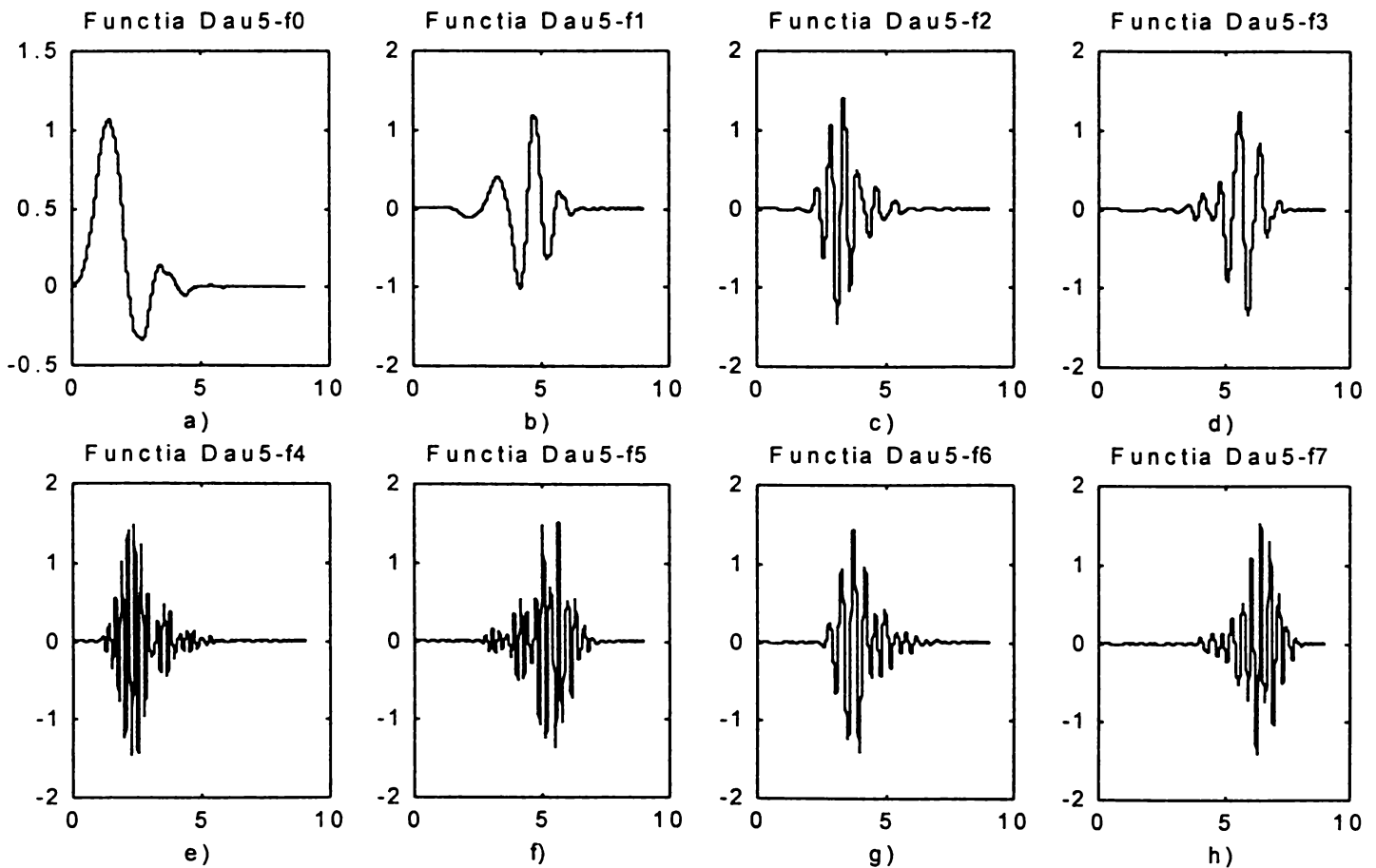


Figura 3.25. Câteva exemple de pachete de funcții Wavelet derivate din funcția Wavelet DAU5

O importanță majoră o are faptul că cele opt funcții prezentate în figura 3.25 sunt funcții generatoare de baze ortonormale în opt subspații disjuncte ale spațiului hilbert V_0 , [Wic.94]. Astfel, $J=3$ înseamnă trei nivele de subîmpărțire a acestui spațiu. Schematic procesul se prezintă în figura 3.26.

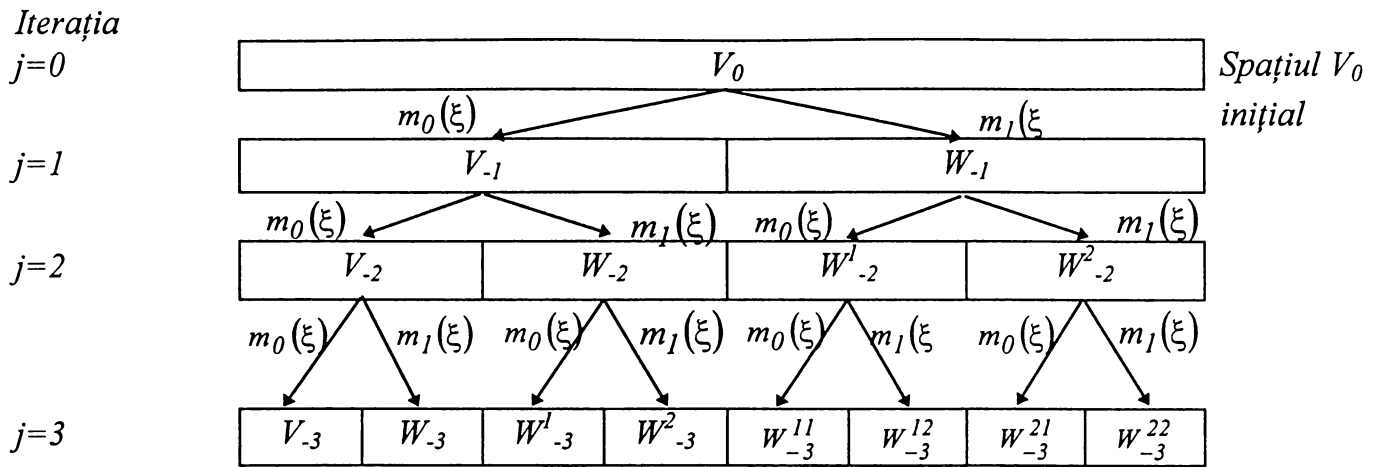


Figura 3.26. Subîmpărțirea pe trei nivele a spațiului V_0 .

În prima etapă se împarte V_0 în cele două subspații V_{-1} și W_{-1} , ale căror baze sunt date de versiunile translatare (cu pasul $t=2$) și rescalate (cu factorul $1/2$) ale funcțiilor f_0 și f_1 (figura 3.25a și 3.25b), care nu sunt altceva decât funcția de scară DAU5- $\varphi(t)$ și funcția Wavelet mamă DAU5- $\psi(t)$. În a doua etapă sunt subîmpărțite cele două spații V_{-1} și W_{-1} în câte două subspații, V_{-2} și W_{-2} și respectiv W_{-2}^1 și W_{-2}^2 . În timp ce baze ortonormale ale spațiilor V_{-2} și W_{-2} sunt derivate pornind tot de la funcțiile f_0 și f_1 (prin rescalare cu factorul $1/4$ și translatare cu pasul 4), bazele ortonormale ale spațiilor W_{-2}^1 și W_{-2}^2 sunt obținute plecând de la funcțiile f_2 și f_3 (figura 3.25c și 3.25d). Cele opt subspații mai sus amintite ale spațiului V_0 se obțin după o a treia iterație a procesului de subîmpărțire. Se obțin subspațiile notate V_{-2} , W_{-2} , W_{-2}^1 , W_{-2}^2 , W_{-3}^{11} , W_{-3}^{12} , W_{-3}^{21} și W_{-3}^{22} , ale căror baze sunt date de versiunile translatare (cu pasul 8) și rescalate (cu factorul $1/8$) ale celor opt funcții din figura 3.25.

Astfel, se poate spune că, pentru un J fixat, după un număr de j iterații de subîmpărțire mulțimile de funcții:

$$\left\{ \psi_{j,k}^n(t) = 2^{\frac{j-J}{2}} f_n(2^{j-J}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, n=0,1,\dots,2^{j-1} \quad (3.173)$$

formează baze ortonormale în cele n subspații rezultate.

3.2.4. Analogia algoritmului FWPT cu filtrarea în subbenzi

În mod similar algoritmului FWT care poate fi văzut ca o bancă de filtre construită folosind filtre QMF având răspunsurile la impuls secvențele h_k și respectiv g_k , și algoritmul FWPT poate fi echivalat cu un astfel de sistem construit folosind aceleași filtre QMF însă având o structură mai complexă. Notând cu $H(\xi)$ și $G(\xi)$ răspunsurile în frecvență ale celor două filtre implicate, reamintim faptul că, pe baza cerințelor (3.8), (3.21) și (3.22a) impuse secvenței h_k , filtrul $H(\xi)$ este unul de tip trece-jos, în timp ce definiția (3.37), pe baza cerinței (3.35), a secvenței g_k indică un filtru $G(\xi)$ de tip trece-sus. În termenii filtrării în subbenzi sistemele din figura 3.23 și, respectiv, 3.24 realizează analiza și, respectiv, sinteza unei secvențe numerice $s_0[n]$ prin codarea, respectiv decodarea, în/din subbenzi.

Iterarea, pe mai multe nivele (nivele de rezoluție) j , a descompunerii în pachete de funcții Wavelet, conform cu (3.165) și (3.166), este echivalentă cu conectarea în cascadă, atât pe ramura filtrului trece-jos, $H(\xi)$, cât și pe a celui trece-sus, $G(\xi)$, a mai multor sisteme identice celui din figura 3.3.a (filtre QMF). Astfel, în figura 3.27 se prezintă structura unei bănci de filtre de analiză ce corespunde descompunerii unei secvențe $s_0[n]$ pe trei nivele succesive, ce este echivalentă algoritmului prezentat în figura 3.23.

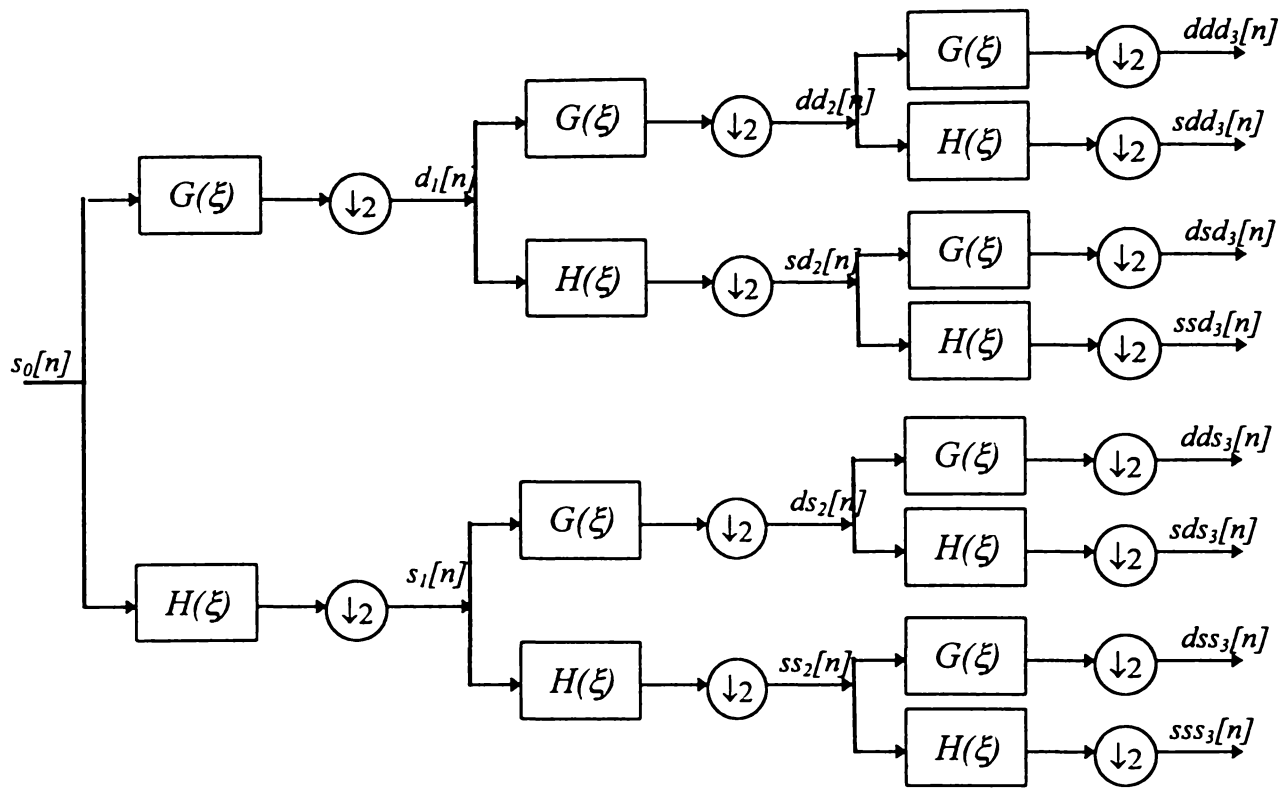


Figura 3.27. Algoritmul FWPT pe trei nivele.

Structura sistemului din figura 3.27 poate fi reprezentată schematic printr-un arbore binar în care fiecare ramură reprezintă o succesiune de operații de filtrare (cu un anumit tip de filtru) și respectiv de subeșantionare cu factorul doi. O structură schematică a sistemului din figura 3.27 este cea din figura 3.28.

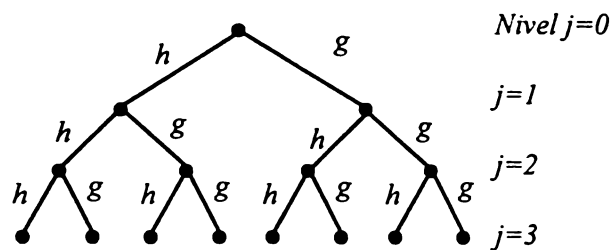


Figura 3.28. Arborele binar asociat algoritmului FWPT

Arborele din figura 3.28 are atâtea nivele cât este numărul de iterații al algoritmului. Fiecare nod este reprezentat de către un subvector marcat prin succesiunea de filtrări aplicate până în acel punct. Astfel, singurul nod de pe nivelul zero reprezintă vectorul inițial $s_0[n]$, cele două noduri de pe nivelul următor ($j=1$) reprezintă subvectorii $s_1[n]$ și respectiv $d_1[n]$, ș.a.m.d. Nodurile pot fi ușor identificate dacă se folosește o notație binar-indexată a acestora, de forma N_k^j , unde j indică nivelul ierarhic iar k este un număr, în reprezentare binară, din domeniul $0, \dots, 2^j - 1$. Evident această formă binară a lui k are o structură de forma $d^j \dots a^2 a^1$, ce indică succesiunea de filtrări aplicate până în acel nod, în felul următor:

- $d^j = s$ indică o operație conform relației (3.165) (filtrare h), în iterația j ;
- $d^j = d$ indică o operație conform relației (3.166) (filtrare g), în iterația j ;

O asemenea convenție de notație poate indica în mod direct și identificatorii subvectorilor rezultați, care sunt și ele de forma $d^j \dots a^2 a^1$. Lungimile subvectorilor de pe nivele ierarhice diferite sunt diferite din cauza subeșantionărilor succesive, însă toți subvectorii de pe același nivel au lungimi egale. Caracteristic acestui arbore binar este faptul că din orice nod pornesc exact două subramuri în jos. Astfel, nodul superior N_k^j este direct conectat de nodurile inferioare N_{2k}^{j+1} și N_{2k+1}^{j+1} . Orice componentă de nivel j poate fi reconstruit exact din cele două componente conexe de pe nivelul ierarhic $j+1$. Această ultimă observație oferă acea flexibilitate, amintită la începutul paragrafului, în reconstrucția exactă a unui vector inițial. Astfel, fiind dată mulțimea tuturor subvectorilor,

reprezențați de diferitele noduri de pe diferitele nivele ierarhice ale arborelui binar din figura 3.28, este posibil un număr destul de mare de combinații de subvectori reținuți ce permit reconstrucția exactă a vectorului inițial. Două astfel de exemple pentru cazul prezentat în figura 3.28 se arată în figura 3.29.

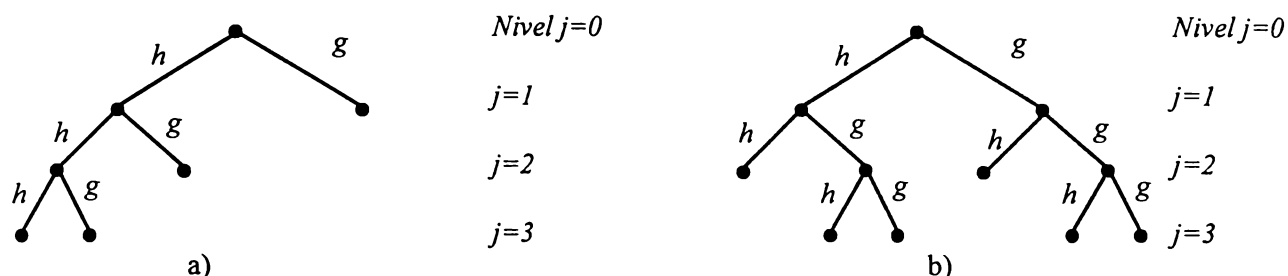


Figura 3.29 Exemple de arbori binari diferiți corespunzând unor FWPT diferite

În figura 3.29a sunt reținuți subvectorii sss_3 , dss_3 , ds_2 și d_1 , descompunere în care recunoaștem transformarea FWT a secvenței s_0 . În figura 3.29b se prezintă o altă descompunere a aceleiași secvențe. Sunt reținuți subvectorii ss_2 , sds_3 , dds_3 , sd_2 , sdd_3 și respectiv ddd_3 . Se remarcă faptul că descompunerea specificată permite și ea reconstrucția exactă a vectorului inițial, s_0 . Astfel, se poate afirma că transformarea FWT reprezintă doar un caz particular de FWPT.

3.2.5 Localizarea timp-frecvență a descompunerilor în baze de pachete de funcții Wavelet

Noțiunea de localizare timp-frecvență a unei funcții acoperă, după cum s-a specificat în §3.1.1.9, proprietatea acestora de a fi cu localizare bună atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. Tot în acest paragraf §3.1.1.9 s-a definit conceptul de *celulă de rezoluție timp-frecvență* a unei funcții. Acest concept scoate în evidență proprietățile de localizare simultane ale funcției de-a lungul celor două axe (cele două “dimensiuni”), ale planului timp-frecvență. Tot pe baza acestui concept a fost introdusă și noțiunea de acoperire timp-frecvență a unor baze de funcții dată de ansamblul celulelor de rezoluție ale funcțiilor ce-l compun. O analiză de semnal bazată pe funcții cu proprietăți bune de localizare în acest plan va beneficia și ea de aceste calități ale funcțiilor bazei. Astfel, în figura 3.18 a fost indicată localizarea timp-frecvență caracteristică unei descompuneri Wavelet ortogonale. S-a arătat faptul că această tip de bază oferă acoperire integrală a planului timp-frecvență caracterizându-se, bineînțeles, printr-o redundanță minimă. Toate celulele de rezoluție timp-frecvență ale acestei baze sunt de formă dreptunghiulară și de arii egale însă cu un raport de aspect variabil (raport lățime/înălțime). Există și alte tipuri de baze, ce nu sunt generate de funcții Wavelet și care asigură o acoperire eficientă a planului timp-frecvență însă această calitate a lor se obține de obicei pe seama altor proprietăți dorite ale funcțiilor bazei (cum ar fi regularitatea sau suport temporal compact), [Coi.91], [Fei.96a,b], [Gop.92b], [Wic.94]. Funcțiile de pachete Wavelet, după cum s-a specificat în §3.2.3, se bucură de o serie de proprietăți moștenite de la funcția de scară sau funcția Wavelet mamă generatoare. Din acest motiv, este posibilă o caracterizare timp-frecvență similară descompunerilor Wavelet și a unor descompuneri în pachete de funcții Wavelet. Astfel, localizare temporală a unei analize cu pachete de funcții Wavelet poate fi conectată direct de proprietățile de localizare temporală ale funcțiilor bazei precum și de cele ale funcției de scară și a funcției Wavelet mamă generatoare. În același timp, procedura descrisă în paragraful anterior, §3.2.4, pune în evidență mai cu seamă proprietățile de localizare frecvențiale a unei asemenea analize (prin filtrări în subbenzi). Acest aspect devine mult mai evident în cazurile în care se lucrează cu funcții Wavelet cu suport compact ce se caracterizează printr-o localizare temporală strictă (cazul tuturor funcțiilor Wavelet de tip Daubechies). Din punct de vedere al localizării frecvențiale a analizei dată de o transformare FWPT se poate spune că, pe baza răspunsurile în frecvență $H(\xi)$ și $G(\xi)$ ale filtrelor utilizate în construcția sistemului, exemplele de arbori din figurile 3.28 și 3.29 corespund unor descompuneri în benzi de frecvențe cu lățimi de bandă

variabile. Astfel, în paragrafele anterioare a fost remarcat faptul că analiza Wavelet (ce corespunde arborelui binar din figura 3.29a) realizează o descompunere în subbenzi ce au lățimile de bandă într-o progresie geometrică (figura 3.16). Se poate spune că fiecare ramură a unui arbore binar, precum este cel din figura 3.28, reprezintă o proiecție într-o subbandă frecvențială a unui vector de pe un nivel superior. Astfel, cele două subramuri ce pleacă dintr-un nod reprezintă două proiecții în subbenzi de frecvențe adiacente. Celulele de rezoluție timp-frecvență ale pachetelor de funcții Wavelet au și ele arii egale și, similar funcțiilor Wavelet, sunt cu un raport de aspect variabil.

În [Rio.93a] se prezintă conceptul de analiză multirezoluție pentru spațiul Hilbert al semnalelor în timp discret de energie finită, $l_2(\mathbb{Z})$. Introducerea acestui concept are la bază izomorfismul ce se poate stabili între spațiul V_0 al unei analize multirezoluție și spațiul semnalelor în timp discret de energie finită, $l_2(\mathbb{Z})$. Se observă faptul că, de fapt, coeficienții de proiecție ai oricărei funcții $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ reprezintă un element al acestui spațiu al semnalelor în timp discret de energie finită, $l_2(\mathbb{Z})$. O consecință firească a acestui izomorfism, [Dau.92], [Rio.93a], [Bou.94], constă în faptul că expresia funcției $\varphi(t)$ determină în mod univoc coeficienții h_k ai filtrului numeric în timp discret și invers, cunoașterea valorilor unei secvențe h_k ne permite evaluarea funcției de scară $\varphi(t)$ în orice punct t . Din punctul nostru de vedere este important faptul că pe baza acestui izomorfism procedura de subîmpărțire a spațiului V_0 , prezentată în §3.2.2, este echivalentă cu o procedură de subîmpărțire a spațiului semnalelor în timp discret de energie finită, $l_2(\mathbb{Z})$. Conform figurii 3.27, ce prezintă principiul algoritmului FWPT, această subîmpărțire se face în subspații de semnale cu benzi de frecvențe limitate. Tot pe baza acestui izomorfism imaginea timp-frecvență a unei descompuneri în funcții de pachete Wavelet are un echivalent în timp discret. Astfel, de exemplu, în figura 3.30 se prezintă localizarea timp-frecvență a seriilor de coeficienți ce corespund descompunerilor FWPT din exemplele 3.29.

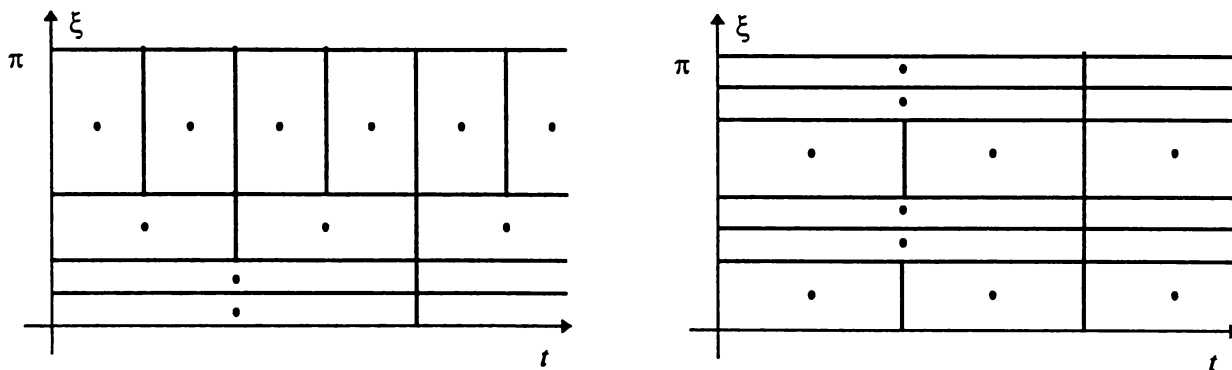


Figura 3.30. a) Poziția timp-frecvență a coeficienților descompunerii FWPT (FWT) din figura 3.29a

b) Poziția timp-frecvență a coeficienților descompunerii FWPT din figura 3.29b

În cele două exemple din figura 3.30 pe axa orizontală apare variabila timp, în timp ce axa verticală indică frecvența. Zonele dreptunghiulare marcate corespund celulelor de rezoluție timp-frecvență ale funcțiilor bazei. Evident toate au aceeași arie însă, după cum se poate observa, sunt cu rapoarte de aspect diferite. Punctele centrale ale acestor dreptunghiuri indică pozițiile coeficienților descompunerii semnalului ce corespund funcțiilor bazei ce acoperă acea zonă. O succesiune de coeficienți situați pe o aceeași linie orizontală formează secvența coeficienților de proiecție dintr-o anumită subbandă frecvențială. Din figura 3.30a, ce corespunde unei descompuneri Wavelet, se observă clar faptul că o analiză Wavelet standard (algoritmul FWT) implică un proces de descompunere în subbenzi frecvențiale ce sunt într-o progresie geometrică în timp ce exemplul din figura 3.30b indică faptul că o analiză cu funcții de pachete Wavelet permite orice combinație de lățimi ale acestor subbenzi frecvențiale. Evident, îmbunătățirea rezoluției în domeniul frecvență atrage după sine o înrăutățire a celei temporale. Acest lucru este evident dacă măsurăm ecartul temporal dintre coeficienții succesivi aparținând aceleiași subbenzi pentru două subbenzi cu benzi de frecvențe diferite.

Se poate spune că diferitelor ramuri ale sistemelor din figurile 3.28 și 3.29 le corespund filtre numerice echivalente, ce au răspunsuri în frecvență ce pot acoperi benzi de frecvențe de lățimi variabile, motiv pentru care aceste sisteme se și numesc sisteme de codare în subbenzi cu benzi de frecvențe variabile.

3.2.6 Baze optimale de pachete de funcții Wavelet ortogonale

După cum s-a putut observa din expunerea din paragrafele precedente, o descompunere de semnal într-o bază de pachete de funcții Wavelet este cu totul similară cu o descompunere într-o bază de funcții Wavelet. S-a constatat faptul că, în terminologia introdusă, și aceste funcții Wavelet obișnuite pot fi considerate ca fiind cazuri particulare de pachete de funcții Wavelet. S-a văzut, de asemenea, că pot fi derivate o serie de expresii analitice ale acestor funcții de tip Wavelet care, luate la un loc, reprezintă o mulțime redundantă de funcții, însă din care pot fi extrase o serie de baze, uneori ortonormale, ale spațiului Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$. Există un număr destul de mare de combinații posibile, în funcție de câte asemenea pachete de funcții Wavelet au fost considerate. Se observă, de asemenea, că fiind dat un semnal $x(t)$, o analiză de semnal folosind pachete de funcții Wavelet poate fi făcută cunoscând sau stabilind o serie de parametri ai acestei analize. Într-o primă fază este nevoie de alegerea familiei de funcții Wavelet. Astfel, se alege o funcție de scară $\varphi(t)$, rezultând imediat funcția Wavelet mamă $\psi(t)$. În mod echivalent, existența algoritmului rapid FWPT face posibil calculul descompunerii cunoscând secvența h_k , secvența răspuns la impuls al filtrului trecejos implicat de acest algoritm. Bineînțeles, folosirea algoritmului FWPT este posibilă doar dacă se cunoaște dezvoltarea acestui semnal $x(t)$ într-unul din subspațiile V_j ale analizei multirezoluție. Cele mai multe sistemele practice presupun că se dispune de proiecția semnalului în spațiul V_0 (prin convenție) cu coeficienții de proiecție calculați cu o precizie dependentă de obicei de tipul de aplicație. Astfel, aplicațiile nepretențioase folosesc pe post de secvență de coeficienți de proiecție pur și simplu secvența de eșantioane ale semnalului, eșantioane ce sunt prelevate respectând teorema WKS (eventual cu utilizarea unor filtre de gardă pentru limitarea benzii de frecvență a semnalului).

Un alt parametru important al acestei analize este numărul de iterații J ale algoritmului, ce va stabili în fond și numărul pachetelor de funcții Wavelet disponibile în bibliotecă. Având stabiliți parametri de mai sus este posibilă construirea arborelui binar. Această construcție este echivalentă cu dezvoltarea semnalului în diferitele baze ale bibliotecii de pachete de funcții Wavelet. Odată ce arborele binar este cunoscut se pune problema evaluării calității reprezentării obținute. O aplicație de compresie, de exemplu, cere ca orice reprezentare alternativă a semnalului să fie una neredundantă (și eventual mai bine adaptată cerințelor specifice aplicației). Din acest motiv, în aceste cazuri este recomandabilă păstrarea doar a unei singure imagini, completă și neredundantă, a semnalului. În cazul unei descompunerii de semnal în pachete de funcții Wavelet acest lucru înseamnă reținerea doar a anumitor subvectori din arborele binar, considerându-se un set de noduri ce permit o reconstrucție exactă a vectorului inițial. Acest lucru este echivalent cu păstrarea coeficienților descompunerii semnalului într-o anumită bază ortonormală de pachete de funcții Wavelet.

Având în vedere cele spuse în §3.2.3, o analiză cu pachete de funcții Wavelet ortogonale este asociată unei descompunerii într-o ierarhie de subspații ale spațiului Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$, subspații în care mulțimi de funcții $\{\psi_{j,k}^n(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, cu expresia dată de (3.173), formează baze ortonormale. În acest caz toate subspațiile de pe un același nivel ierarhic rezultă ortogonale între ele. Avantajul oferit de ortogonalitatea acestor subspații constă în faptul că se poate găsi ușor o bază ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ prin considerarea unui set complet de asemenea subspații ortogonale, (reuniunea lor densă în spațiul $L_2(\mathfrak{R})$), și concatenarea bazelor ortonormale ale acestora. Un exemplu de ierarhie de asemenea subspații a fost prezentat în figura 3.26 iar funcțiile de pachete Wavelet, generatoare de baze în aceste subspații, au fost prezentate în figura 3.25. Problema care se poate pune este: cum anume poate fi stabilită o asemenea bază ortonormală care să fie optimală din punctul de vedere al

aplicației avută în vedere ? Din acest motiv, în general, analizele de semnal prin descompunere în baze de pachete de funcții Wavelet sunt ghidate de o *funcție cost* pe baza căreia se caută componentele bazei optime. În general, odată fixată o funcție cost, aceste componente sunt stabilite prin căutarea acelor baze de subspații care minimizează această funcție. O cerință esențială față de această funcție este ca ea să fie una aditivă. Numai astfel va fi garantat faptul că reuniunea bazelor optimale ale subspațiilor ortogonale va forma o bază optimală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$. Notând cu $C(\cdot)$ această funcție cost, evaluată pe baza secvenței x_k a coeficienților descompunerii unui semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ într-o bază B ($x_k = Bx(t)$) a acestui spațiu, proprietatea de aditivitate poate fi definită conform cu:

$$C(B(x + y)) = C(Bx) + C(By) \quad (3.174)$$

Odată găsită o bază B optimală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, reținând secvența coeficienților de descompunere x_k a semnalului $x(t)$ în această bază, s-a realizat o analiză optimală semnalului. Pe de altă parte, această funcție de cost poate să țină cont de cerințele specifice ale aplicației care solicită această analiză. Evident, o cerință posibilă din partea unei aplicații de compresie poate să fie ca un număr cât mai mare de coeficienți x_k să fie cu valori neglijabile.

Exemple tipice de funcții de cost utilizate sunt:

- numărul coeficienților mai mari decât un prag $\varepsilon > 0$. Pentru un nivel de prag ε fixat se contorizează coeficienții ce depășesc în valoare absolută acest prag. Acesta va indica numărul coeficienților ce trebuiesc reținuți în vederea unei reconstrucții de semnal cu o precizie ε ;
- concentrația în norma $l_p(Z)$, $p < 2$. Se alege un număr $p < 2$ și se folosește pe post de funcție cost norma $\|\cdot\|_p$ a vectorului de coeficienți x_k . Acest lucru se bazează pe faptul binecunoscut cum că un semnal în timp discret de energie unitară cu cât are norma $l_p(Z)$, $p < 2$, mai mică cu atât are energia concentrată pe un număr mai mic de coeficienți;
- entropia. Se definește entropia unei secvențe x_k , în sensul lui Shannon-Weaver, ca fiind:

$$\eta(x) = -\sum_k p_k \cdot \log p_k \quad (3.175)$$

unde:
$$p_k = \frac{|x_k|^2}{\|x_k\|_2^2} \quad (3.176)$$

impunând totodată ca $p \cdot \log p = 0$ dacă $p = 0$.

Din nefericire, măsura (3.175) nu este una aditivă. Din acest motiv se recomandă ca în aceste cazuri să fie folosit, pe post de funcție cost, măsura dată de funcția:

$$v(x) = \sum_k |x_k|^2 \cdot \log |x_k|^2 \quad (3.177)$$

Se poate verifica imediat faptul că această funcție este una aditivă. Mai mult, legătura

$$\eta(x) = \frac{1}{\|x_k\|^2} v(x) + \log \|x_k\|^2 \quad (3.178)$$

ne asigură de faptul că minimizarea (3.177) va minimiza și costul (3.175). Importanța funcției cost $\eta(x)$ rezidă în faptul că $e^{\eta(x)}$ este proporțional cu numărul coeficienților necesari reproducerii semnalului cu o anumită eroare medie pătratică fixată;

- logaritmul energiei. Fie funcția:

$$C(x) = \sum_k \log |x_k|^2 \quad (3.179)$$

cu $\log |x_k|^2 = 0$ dacă $x_k = 0$.

În cazul unei secvențe x_k de lungime finită N , aceasta poate fi interpretată ca un proces Gauss-Markov compus din N variabile aleatoare gaussiene de varianțe $\sigma_1^2 = |x_1|^2, \dots, \sigma_N^2 = |x_N|^2$. Convenția $\log x = 0$ pentru $x=0$ este echivalent cu ignorarea tuturor componentelor procesului care rămân neschimbate. Minimizarea funcției cost (3.179) conduce la aproximarea cea mai bună a bazei Karhunen-Löeve, pentru procesul considerat (secvența x_k considerată), bază ce asigură un minim global al costului $C(\cdot)$ pentru toate grupurile ortogonale;

e) număr de biți alocați. Se alege un prag $\varepsilon > 0$ arbitrar și se numără biții termenului $\left\lceil \frac{x_k}{\varepsilon} \right\rceil$.

Însumarea după k oferă o măsură informațională aditivă a acestei secvențe. Aceasta corespunde numărului de biți necesari stocării sau transmiterii coeficienților x_k cu o precizie ε .

În prealabil s-a enunțat faptul că, prin definiție, baza optimală B a unui spațiu oarecare V pentru un semnal $x(t) \in V$ relativ la o funcție cost $C(\cdot)$ este acea bază care minimizează expresia $C(Bx)$. În cazul în care se dispune de o bibliotecă de baze formată din pachete de funcții Wavelet asociate unui arbore binar (ce corespunde unei descompunerii în pachete de funcții Wavelet a unui semnal) baza optimală poate fi găsită în mod iterativ. Să notăm cu $B_{j,k}$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ bazele de funcții ce corespund nodurilor N_k^j , $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ de pe nivelul ierarhic j al arborelui binar. Evident, pentru $j=0$ există doar o singură bază, baza $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a spațiului V_0 , spațiu de pornire în această analiză. Se presupun cunoscute toate bazele de forma $B_{j,k}$, $j = 0, \dots, J$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$, ce constituie biblioteca de baze mai sus amintită.

Algoritmul recursiv presupune construcția iterativă a unor baze de forma:

$$A_{j,k} = \begin{cases} B_{j,k} & C(B_{j,k}x) < C(A_{j+1,2k}x) + C(A_{j+1,2k+1}x) \\ A_{j+1,2k} \oplus A_{j+1,2k+1} & \text{in caz contrar} \end{cases} \quad (3.180)$$

cu pornire de pe penultimul nivel, $j = J - 1$, al descompunerii, și cu o direcție de parcurgere de jos în sus a arborelui binar (a ierarhiei de baze). Rezultă în final $A_{0,0}$, baza optimală a spațiului V_0 .

În practică sunt utilizate mai multe metode diferite pentru găsirea unor baze utile pe baza unui criteriu de cost. Astfel, cele mai răspândite metode sunt:

- metoda bazată pe descompunerea Wavelet obișnuită. Constă în selecția exclusivă doar a bazelor ce țin de algoritmul FWT. Impune reținerea bazelor subspațiilor detaliu după fiecare iterație a filtrării trece-jos a semnalului inițial. Schematic îi corespunde un arbore binar ca cel din figura 3.29a;
- metoda nivelului optim. Se parcurge arborele binar nivel cu nivel, se calculează costul total al fiecărui nivel iar apoi se evaluează expresia

$$\min_j \left\{ \sum_k C(B_{j,k}x) \right\} \quad (3.181)$$

și se găsește nivelul ierarhic j de cost minim;

- metoda celei mai bune baze. Este metoda ce aplică procedura recursivă (3.180) pentru găsirea bazei optimale. După cum se poate observa, se pornește de pe penultimul nivel al ierarhiei și sunt evaluate costurile descompunerilor din fiecare nod precum și ale celor două ramuri inferioare conexe acestora. Sunt reținute acele baze din acele noduri care oferă cost mai mic decât costul total al ramurilor inferioare. Din punct de vedere computațional este metoda cea mai complexă însă oferă baza optimală, spre deosebire de celelalte două metode mai sus amintite care în cel mai bun caz pot oferi doar soluții suboptimale.

3.3. Transformări trigonometrice locale

Prezentul capitol 3 este consacrat, așa cum am specificat la începutul lui, găsirii de reprezentări eficiente de semnal, de forma (3.1), unde funcțiile $\varphi_k(t)$ reprezintă funcțiile bazei descompunerii. În cele două paragrafe anterioare (§3.1 și §3.2) au fost abordate o serie de soluții posibile bazate pe funcții Wavelet.

Totodată, tot la începutul acestui capitol, a fost subliniat faptul că analiza Fourier a unui semnal, conform (3.3), oferă o serie de avantaje în numeroase aplicații, dar suferă de o serie de limitări, limitări ce conduc la un domeniu de aplicabilitate relativ restrâns. O primă limitare a acestei reprezentări constă în faptul că pentru calculul unei valori $\hat{x}(\xi_0)$ este necesară cunoașterea evoluției complete a semnalului, în multe cazuri cu o întindere infinită. În mod similar ecuația (3.3) implică necesitatea cunoașterii tuturor valorilor $\hat{x}(\xi)$ în vederea obținerii unei valori $x(t_0)$. Imaginea lui $x(t)$ la un anumit moment de timp oferită de ecuația (3.3) este aceea de superpoziție infinită de unde armonice, total nelocalizate în timp. Din acest motiv numeroase aplicații practice ale analizei Fourier cer "modificarea" ei. Noțiunea de frecvență introdusă de această analiză are un caracter global - ne spune cu ce aport (global) participă o undă pură în întreaga evoluție a unui semnal. Astfel această unealtă este inadecvată, de exemplu, analizei semnalului vocal sau a celui de muzică, în care conținutul frecvențial variază în mod semnificativ în timp. La orice moment de timp urechea "aude" o anumită combinație a câtorva frecvențe, iar aceste frecvențe sunt într-o permanentă schimbare. Această evoluție în timp a frecvențelor nu este reflectată de transformarea Fourier, cel puțin nu în mod direct. Pentru o caracterizare mai adecvată a acestor tipuri de semnale se impune definirea unor noi reprezentări care să fie capabile să caracterizeze un comportament local, iar imaginea oferită să fie una mai realistă și totodată mai eficientă. Obiectivul urmărit este găsirea unei descrieri mixte a unui semnal, o descriere ce are în vedere în același timp comportamentul temporal și cel frecvențial al semnalului respectiv. De multe ori se urmărește punerea în evidență a unei localizări în timp a unor fenomene tranzitorii sau prezența unei componente frecvențiale la un anumit moment dat.

S-a specificat, de asemenea, faptul că soluții posibile la această problemă sunt date de bazele timp-frecvență. Reprezentările obținute au fost denumite reprezentări timp-frecvență. Să considerăm cazul unei descompuneri liniare după o bază timp-frecvență. Proprietățile de localizare ale semnalului analizat pot fi stabilite cu rezoluția oferită de funcțiile bazei. Deci, o problemă esențială ce se poate pune este : ce proprietăți de localizare au funcțiile bazei în planul timp-frecvență. În cele două paragrafe anterioare (§3.1 și §3.2) au fost abordate o serie de baze timp-frecvență, cele de funcții Wavelet precum și cele de pachete de funcții Wavelet, ale căror proprietăți timp-frecvență au fost analizate în detaliu. În cele ce urmează vor fi introduse și alte reprezentări posibile, mai apropiate reprezentării Fourier, ce au calități poate mai bune decât cele bazate pe funcții Wavelet în ceea ce privește caracterizarea componentelor spectrale ale semnalelor supuse analizei. Din punctul de vedere al calității analizei semnalului în vederea compresiei sunt utile acele baze care se adaptează bine proprietăților semnalului. Astfel, de exemplu, în cazul analizei unor semnale nestaționare nu sunt utile acele baze care "împrăștie" o nestaționaritate temporală în domeniul transformat (un efect local temporal are o largă zonă de influență în domeniul transformat).

Câteva proprietăți ce ar trebui să fie verificate de către funcțiile unei baze "convenabile" sunt:

- funcțiile bazei să aibă o caracterizare simplă;
- proprietăți bune de localizare în cele două domenii (timp și frecvență). Acest lucru este asigurat dacă atât funcția cât și transformata sa Fourier au descreșteri rapide în raport cu variabila de referință;
- proprietăți de covarianță în raport cu anumite operații elementare (translație, modulare, scalare);
- proprietăți de continuitate și de diferențiabilitate;
- proprietăți de moment.

În cele două paragrafe anterioare (§3.1 și §3.2) am văzut că funcțiile Wavelet verifică o serie de proprietăți dintre cele mai sus amintite. Funcțiile Wavelet însă nu sunt singurele funcții care permit o construcție relativ simplă de baze timp-frecvență “bune”. De fapt, căutările de noi baze utile ale unor spații de semnale diverse a fost și rămâne în preocuparea permanentă a cercetătorilor din lumea întregă. Există o serie de propuneri, alternative analizei Fourier, printre care se numără și cele de funcții Wavelet. Primele încercări propuneau o îmbunătățire a proprietății de localizare temporală a analizei Fourier prin înlocuirea funcțiilor exponențiale complexe cu versiuni “temporal-ferestruite” ale acestora. În aceste cazuri rezoluția de localizare temporală este dată de caracteristicile ferestrei alese. Însă tot aceste caracteristici ale ferestrei contribuie la o descreșterea a rezoluției de localizare frecvențială.

Astfel a apărut o primă clasă mai largă de reprezentări timp-frecvență liniare denumite descompuneri atomice. Au apărut noi funcții ale bazei, denumiți atomi timp-frecvență, cu proprietăți de localizare atât în domeniul timp cât și în cel de frecvență. Au apărut însă noi probleme legate de proprietățile noilor baze.

3.3.1. Descompunerea semnalului în baze de atomi timp-frecvență

Atomii timp-frecvență sunt semnale obținute prin acțiunea unui grup de transformări elementare (translație, modulare, scalare) asupra unui singur semnal (atomul generator). Acesta posedă proprietăți bune de localizare în planul timp-frecvență și este (prin definiție) purtător al unei unități de informație. Ideal, rezoluția de localizare timp-frecvență a unui atom “bun” trebuie să se apropie de limita inferioară teoretică dată de inegalitatea (3.6) a lui Heisenberg. Operațiile elementare puse în discuție (translație, modulare, scalare) conservă rezoluția timp-frecvență a semnalului asupra căruia ele acționează [Fla.94], deci toți atomii timp-frecvență rezultați vor fi cu proprietăți de localizare similare atomului generator în acest plan. Se observă imediat că funcțiile Wavelet răspund cu succes acestor cerințe, deci și ele pot fi denumite atomi timp-frecvență.

Notând cu $h(t)$ un atom generator, se poate nota cu $h_{\tau\xi}(t)$ atomul localizat în punctul cu coordonatele (τ, ξ) a planului timp-frecvență. În general indexarea se face după două variabile continue, rezultând în mod corespunzător, reprezentări de semnal continue.

Exemple de asemenea descompuneri atomice:

- Transformarea Fourier Scurtă Continuă
- Transformarea Wavelet Continuă

a) Transformarea Fourier Scurtă Continuă

Ideea de bază a Transformării Fourier Scurtă - STFT (Short Time Fourier Transform) este cea mai sus enunțată, aceea de a asigura analizei Fourier o anumită localizare temporală. Acest lucru se rezolvă prin “ferestruirea” semnalului supus analizei cu ajutorul unei funcții fereastră (fereastra temporală) centrate în timp în jurul momentului de interes. Imaginea finală se obține prin analiza Fourier a semnalului “ferestruit”. Rezultatul este o reprezentare indexată după două variabile, variabila timp τ (indicând poziția ferestrei) și variabila frecvență ξ (indicând proprietățile spectrale ale semnalului ferestruit). Din punct de vedere formal, această procedură este echivalentă cu o descompunere atomică prin considerarea funcției fereastră ca atom generator și cu atomii timp-frecvență dați de versiunile translatate și modulate ale acestei ferestre. Astfel, considerând fereastra $h(t)$ rezultă atomii timp-frecvență de forma:

$$h_{\tau\xi}(t) = h(t - \tau) \cdot e^{j2\pi\xi t}, \tau, \xi \in \mathfrak{R} \quad (3.182)$$

Se recunoaște imediat acțiunea grupului de transformări translație-modulare asupra ferestrei $h(t)$ în vederea obținerii atomilor timp-frecvență $h_{\tau\xi}(t)$.

Definiția STFT Continuă rezultă:

$$STFT_x(\tau, \xi) = \left\langle x(t), h_{\tau\xi}(t) \right\rangle = \int_t x(t) \cdot h_{\tau\xi}^*(t) dt \quad (3.183)$$

Se poate lucra cu diferite tipuri de ferestre, cea mai simplă fiind cea rectangulară însă, din punct de vedere al localizării timp-frecvență, o asemenea fereastră nu este cea mai bună alegere deoarece oferă o localizare mai slabă în domeniul frecvență. Din acest punct de vedere o fereastră triunghiulară este o alegere mai bună, având în vedere faptul că prezintă o viteză a descreșterii spectrale de ordinul $1/\xi^2$. Au fost considerate ferestre mai netezite precum fereastra Hanning definită prin:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \pi t}{2} & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (3.184)$$

Având în vedere consecințele inegalității Heisenberg-Gabor, fereastra gaussiană definită prin:

$$h(t) = \beta \cdot e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3.185)$$

s-a impus datorită rezoluției timp-frecvență maxime oferite. Atomii acestei analize se mai numesc și funcții Gabor.

b) Transformarea Wavelet Continuă

În cazul Transformării Wavelet funcția Wavelet $\psi(t)$, centrată în jurul unei frecvențe ξ_0 , este pe post de atom generator. Atomii timp-frecvență se obțin conform:

$$\psi_{\tau\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi_0/\xi}} \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{\xi_0} \cdot \xi\right) \quad (3.186)$$

În acest caz se recunoaște acțiunea grupului de transformări translație-rescalare asupra atomului generator. Acest grup de transformări se mai numește grup afin sau grup ' $\alpha x + b$ '.

Reprezentarea timp-frecvență asociată rezultă de forma:

$$CWT_x(\tau, \xi) = \langle x(t), \psi_{\tau\xi}(t) \rangle \quad (3.187)$$

Ambele reprezentări mai sus amintite sunt reprezentări de semnal continue, deci redundante, inadecvate scopului urmărit: compresia semnalului analizat. Este posibilă însă considerarea unor versiuni discretizate ale acestora. Pentru cazul funcțiilor Wavelet am văzut deja, în paragraful §3.1.1.9, că există variante discretizate ce elimină total această redundanță a reprezentării continue. Este vorba evident despre reprezentarea Wavelet ortogonală. Au fost prezentate și cazuri în care în urma acestei discretizări aveam de-a face cu o reprezentare discretă dar nu ortogonală a semnalului. Era cazul reprezentării Wavelet biortogonale.

Se caută deci, baze de atomi timp-frecvență neredundante, cu indexare discretă, ce poate oferi o imagine completă și convenabilă a semnalului analizat.

Fie $h_{lk}(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ un atom timp-frecvență localizat în planul timp-frecvență în jurul unui punct indexat după l și k ($l, k \in Z$). Mulțimea $\{h_{lk}(t)\}_{l,k \in Z}$ formează o bază ortonormală a lui $L_2(\mathfrak{R})$ dacă:

$$\int_t h_{lk}(t) \cdot h_{l'k'}(t) = \delta_{ll'} \cdot \delta_{kk'}, \quad \forall l, l', k, k' \in Z \quad (3.188)$$

și orice semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ se poate scrie:

$$x(t) = \sum_l \sum_k \langle x(t), h_{lk}(t) \rangle \cdot h_{lk}(t) \quad (3.189)$$

Un coeficient al descompunerii, de forma $\langle x(t), h_{lk}(t) \rangle$, poate fi interpretat ca o măsură a energiei de interacțiune partajată de semnalul analizat cu diferiții atomi timp-frecvență. Astfel, se

poate spune că o descompunere liniară după o bază ortonormală furnizează ca și subprodus o distribuție energetică în planul timp-frecvență a semnalului considerat.

Exemplu:

O metodă de analiză derivată din dezvoltarea în serii a semnalelor periodice o constituie "*Seriile Fourier Locale*". Acestea se obțin după cum urmează: semnalul de analizat $x(t)$ (un semnal arbitrar din spațiul Hilbert $L_2(\mathfrak{R})$), se împarte în blocuri de lungime T iar fiecare semnal astfel rezultat se prelungește prin periodicitate (cu perioada T) și se dezvoltă în serie Fourier semnalul periodic obținut. În general, în punctele capăt de interval reprezentarea nu o să fie corectă din cauza discontinuităților generate de periodizare. Însă energia erorii (eroarea medie pătratică de aproximare) este nulă, reprezentarea obținută egalând semnalul a.p.t. (aproape peste tot). Funcțiile descompunerii formează o bază (un set complet, ortogonal și normat de funcții). Localizarea în timp este asigurată cu o rezoluție T (impusă) și există și o oarecare localizare în domeniul frecvență (nu prea bună însă deoarece funcțiile bazei sunt unde armonice fereștruite cu fereastră temporală rectangulară, o funcție discontinuă ce asigură o viteză de descreștere în domeniul Fourier de ordinul $1/\xi$).

Atomul generator este deci funcția:

$$h(t) = h_{00}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (3.190)$$

iar atomii $h_{lk}(t)$ se obțin pornind de la această funcție prin modulare cu $e^{j\frac{2\pi}{T}l \cdot t}$ și respectiv translație cu kT (cu pasul T). Aceasta corespunde discretizării de forma $\tau = kT, \xi = l\frac{2\pi}{T}$ a procedurii (3.182).

3.3.2 Structuri oblice (frames)

Caracterizează o reprezentare intermediară între una continuă și una ortogonală. Mulțimea de funcții $\{h_{lk}(t)\}_{l,k \in \mathbb{Z}}$ constituie o structură oblică (frame) dacă există două constante A și B cu $0 < A \leq B < \infty$ astfel încât produsele scalare $\langle x(t), h_{lk}(t) \rangle$ ale oricărui semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ să satisfacă relația:

$$A \cdot E_x \leq \sum_l \sum_k \langle x(t), h_{lk}(t) \rangle \leq B \cdot E_x \quad (3.191)$$

unde E_x reprezintă energia semnalului $x(t)$.

Se poate observa imediat că orice bază Riesz verifică definiția (3.191) a unei structuri oblice, deci orice bază Riesz este și o structură oblică.

O asemenea descompunere permite o aproximare a proiecție ortogonale. Semnalul :

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{A+B} \sum_l \sum_k \langle x(t), h_{lk}(t) \rangle \cdot h_{lk}(t) \quad (3.192)$$

aproximează semnalul $x(t)$ cu o eroare medie pătratică de ordinul $O\left\{\frac{B/A-1}{B/A+1}\right\}$.

Un caz particular îl reprezintă situația $A = B$, situație în care se vorbește despre structuri oblice înguste, "*tight frame*". În acest caz este posibilă recuperarea semnalului $x(t)$ conform:

$$x(t) = \frac{1}{A} \sum_l \sum_k \langle x(t), h_{lk}(t) \rangle \cdot h_{lk}(t) \quad (3.193)$$

Mulțimea $\{h_{lk}(t)\}_{l,k \in \mathbb{Z}}$ se comportă ca un set complet de funcții, similar unei baze ortogonale, cu diferența însă că funcțiile $h_{lk}(t)$ nu sunt ortogonale iar coeficientul A furnizează o măsură a gradului de redundanță a acestei mulțimi.

Propoziție:

Dacă $h_{lk}(t)$ formează o structură oblică cu $A=B=1$ și $\|h_{lk}(t)\|_2 = 1, \forall l, k \in Z$, atunci $\{h_{lk}(t)\}_{l,k \in Z}$ este o bază ortonormală a spațiului de semnal considerat.

În [Dau.92] se arată că există o mulțime de funcții $\{\tilde{h}_{lk}(t)\}_{l,k \in Z}$ ce formează deasemenea o structură oblică și se numește duala lui $\{h_{lk}(t)\}_{l,k \in Z}$. Ea verifică:

$$B^{-1} \cdot E_x \leq \sum_l \sum_k \langle x(t), \tilde{h}_{lk}(t) \rangle \leq A^{-1} \cdot E_x \quad (3.194)$$

Această structură oblică permite recuperarea unui semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ conform :

$$x(t) = \sum_l \sum_k \langle x(t), \tilde{h}_{lk}(t) \rangle \cdot h_{lk}(t) = \sum_l \sum_k \langle x(t), h_{lk}(t) \rangle \cdot \tilde{h}_{lk}(t) \quad (3.195)$$

Funcțiile $\{\tilde{h}_{lk}(t)\}_{l,k \in Z}$ verifică relația :

$$\int_t h_{lk}(t) \cdot \tilde{h}_{l'k'}(t) = \delta_{ll'} \cdot \delta_{kk'}, \forall l, l', k, k' \in Z \quad (3.196)$$

Exemple de structuri oblice duale au fost abordate în §3.1.2 deoarece orice bază de funcții Wavelet biortogonală verifică definiția (3.191) precum și proprietățile (3.194), (3.195).

3.3.3. Proprietățile atomilor timp-frecvență

Se pune problema cum trebuie să arate un atom timp-frecvență astfel încât baza discretă generată să posedă cât mai multe proprietăți "bune". În primul rând atomul trebuie să fie cu proprietăți de localizare timp-frecvență bune:

O funcție $h(t) \in L_2(\mathfrak{R})$ ar putea "candida" să fie atom timp-frecvență doar dacă măsura întinderilor sale temporale și respectiv frecvențiale, definite conform (3.4) și (3.5), verifică:

$$\Delta t < \infty \text{ și } \Delta \xi < \infty \quad (3.197)$$

Acest lucru înseamnă:

- Δt finit implică o descreștere temporală de ordinul $t^{-3/2}$ sau mai rapidă;
- $\Delta \xi$ finit cere ca $h(t)$ să fie continuă și derivabilă, cu derivata $h'(t) \in L_2(\mathfrak{R})$.

Se arată, [Wic.94], că toate funcțiile din clasa lui Schwartz (clasa \mathcal{S}) verifică aceste proprietăți - dar există și alte funcții ce pot fi *considerate* ca fiind "convenabile".

Vom *considera* că $h(t)$ este cu localizare bună în planul timp-frecvență dacă produsul de incertitudine $\Delta t \cdot \Delta \xi$ este suficient de mic. Limita inferioară, bineînțeles, este dată de inegalitatea lui Heisenberg-Gabor :

$$\Delta t \cdot \Delta \xi \geq \frac{1}{2} \quad (3.198)$$

Observație: nu orice funcție din clasa lui Schwartz este un atom timp-frecvență, dar fiecare poate fi dezvoltată ca fiind o combinație liniară de atomi timp-frecvență, coeficienții descompunerii formând o serie cu o descreștere rapidă.

În acest sens în [Wic.94] se enunță următoarea teoremă:

Teorema 3.3.: pentru fiecare funcție $h(t) \in \mathcal{S}$, există o secvență $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de atomi timp-frecvență și o secvență de numere $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât :

1. $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(t)$, cu convergență uniformă;
2. $\|\varphi_n\|_2 = 1, \forall n \geq 1$;
3. $\Delta t(\varphi_n) \cdot \Delta \xi(\varphi_n) < 1, \forall n \geq 1$;

4. pentru $\forall d > 0$, există o constantă M_d astfel încât $|c_n| \cdot n^d \leq M_d < \infty$, $\forall n \geq 1$;

Teorema se poate demonstra, de exemplu, construind descompunerea Littlewood-Paley a funcției $h(t)$. Aceste funcții se numesc *molecule timp-frecvență*.

Consecințe:

- toate funcțiile clasei \mathcal{S} sunt molecule timp-frecvență;
- mulțimea atomilor timp-frecvență este densă în clasa \mathcal{S} .

Deoarece clasa \mathcal{S} la rândul său aparține mai multor spații de funcții rezultă că și funcții mai puțin regulate pot fi descompuse după atomii timp-frecvență dar, în general, seria coeficienților descompunerii $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nu o să fie cu o descreștere rapidă.

Yves Meyer a descoperit faptul că o singură secvență de atomi timp-frecvență ortonormali poate fi folosită pentru descompunerea tuturor funcțiilor clasei \mathcal{S} , și nu numai. În acest sens a stabilit următoarea teoremă:

Teorema 3.4. (teorema lui Meyer): există o secvență $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ de atomi timp-frecvență cu următoarele proprietăți:

1. $\|\varphi_n\|_2 = 1$, $\forall n \geq 1$;
2. $\langle \varphi_n, \varphi_l \rangle = \delta_{nl}$
3. $\Delta t(\varphi_n) \cdot \Delta \xi(\varphi_n) < 1$, $\forall n \geq 1$;
4. Mulțimea $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ este densă în spațiul \mathcal{S} .

Deci, pentru fiecare funcție $h(t) \in \mathcal{S}$, există o secvență de numere $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(t), \text{ ce converge uniform, și pentru } \forall d > 0, \text{ există o constantă } M_d \text{ astfel încât}$$

$$|c_n| \cdot n^d \leq M_d < \infty, \forall n \geq 1.$$

Teorema lui Meyer permite caracterizarea spațiilor de funcții pe baza ratei descreșterii unei secvențe de numere.

Observație: folosirea unor atomi timp-frecvență ce aparțin clasei \mathcal{S} asigură anumite proprietăți convenabile ale reprezentării rezultate. Însă, renunțând la unele dintre aceste proprietăți putem considera și alte funcții ca atomi timp-frecvență. A fost cazul considerat și în exemplul din paragraful precedent, unde "atomul" descompunerii era funcția indicială a intervalului $[-T/2, T/2]$, funcție ce nu aparține clasei \mathcal{S} . Această ipoteză avea însă ca efect obținerea unei localizări frecvențiale mai puțin bune, a unei convergențe mai slabe a seriei de coeficienți asociate funcției analizate, apariția fenomenului Gibbs în punctele capăt de interval etc.

O analiză mai detaliată a acestei probleme (condițiile de admisibilitate ale atomilor timp-frecvență și proprietățile reprezentărilor rezultate) se găsește în lucrările [Fei.96a] și [Fei.96b], lucrări care stabilesc un cadru teoretic pentru stabilirea criteriului de alegere al atomilor timp-frecvență. Se stabilesc clase admisibile de atomi timp-frecvență mult mai largi decât clasa lui Schwartz. Importanța acestor clase constă în faptul că ele (ca și clasa \mathcal{S}) constituie spații de funcții test pentru distribuții permițând astfel o analiză timp-frecvență a distribuțiilor.

3.3.4. Aspecte ale discretizării reprezentărilor STFT și CWT

Structura reprezentării STFT continue indică o redundanță clară a acesteia. Redundanța se poate reduce, sau elimina în unele cazuri, considerând doar valorile

$$STFT_x[l, k] = STFT_x(t_0, k\xi_0) \quad (3.199)$$

ale reprezentării continue. Parametrii t_0 și ξ_0 reprezintă pasul de discretizare temporal respectiv frecvențial.

Teorema 3.5. (Balian-Low)

Dacă

$$h_{lk}(t) = h(t - lt_0) \cdot e^{j2\pi k\xi_0 t}, \text{ cu } t_0 \cdot \xi_0 = 1,$$

formează o structură oblică în $L_2(\mathfrak{R})$, atunci sau $\Delta t(h) = \infty$ sau $\Delta \xi(h) = \infty$.

Deci în cazul $t_0 \cdot \xi_0 = 1$ (eșantionare critică) funcția (atomul) generatoare de structură oblică, $h(t)$, va oferi o localizare slabă sau în domeniul timp sau în domeniul frecvență. Se arată [Fei.96a] că pentru $t_0 \cdot \xi_0 > 1$ nu există nici măcar o structură oblică, reprezentarea devenind una incompletă. Astfel atomul propus de Gabor:

$$g(t) = \left(\pi t_0^2\right)^{-1/4} e^{-1/2\left(t/t_0\right)^2} \quad (3.200)$$

la $t_0 \cdot \xi_0 = 1$ nu poate genera o structură oblică (cu atât mai puțin o bază ortogonală).

Din acest motiv se lucrează, de obicei, cu $t_0 \cdot \xi_0 < 1$, admițând o anumită redundanță a reprezentării obținute.

Reconstrucția semnalului $x(t)$ presupune cunoașterea bazei duale. Din punct de vedere practic calculul explicit al funcțiilor $\{\tilde{h}_{lk}(t)\}_{l,k \in \mathbb{Z}}$ ale bazei duale pune uneori probleme, rezultând funcții care nu sunt nici măcar de energie finită și nu au o structură regulată. Se arată [Fei.96a] că acest neajuns este eliminat dacă se consideră atomi timp-frecvență din clasa lui Schwartz. În acest caz și atomul dual va aparține acestei clase.

Transformarea CWT este și ea o reprezentare foarte redundantă. Această redundanță poate fi eliminată (sau cel puțin micșorată) considerând doar anumite valori ale reprezentării. Bineînțeles, am dori ca funcția analizată $x(t)$ să fie recuperabilă pe baza acestor informații reținute și deasemenea am dori ca acest lucru să nu impună restricții prea severe funcțiilor Wavelet de analiză (vezi consecințele teoremei Balian-Low în cazul discretizării reprezentării STFT). Discretizarea CWT, în mod similar discretizării STFT, implică discretizarea parametrilor (τ, ξ) ai reprezentării, stabilind astfel pozițiile în planul timp-frecvență ale eșantioanelor reținute. Ținând cont de grupul de transformări aplicat, discretizările reprezentării CWT, definite conform (3.197), sunt de forma:

$$(\tau, \xi) = \left(k \cdot a_0^{-j} t_0, l \cdot a_0^j \xi_0\right) \quad (3.201)$$

unde j reprezintă nivelul de rezoluție a descompunerii iar a_0 este o constantă. Evident t_0 și ξ_0 reprezintă pasul de discretizare temporal și respectiv frecvențial pentru nivelul de rezoluție $j=0$.

Un exemplu de discretizare de forma $(\tau, \xi) = \left(k \cdot 2^{-j}, l \cdot 2^j \xi_0\right)$, cu $a_0 = 2$, $t_0 = 1$, a unei transformări CWT a fost prezentată în §3.1.1.9.

Restricția Balian-Low, așa cum indică teorema 3.5, vizează grupul de transformări translație-modulare, caracteristic transformării STFT. Spre deosebire de STFT, în cazul transformării CWT grupul asociat este grupul de transformări afine. Important este faptul că în acest caz nu se mai impune o restricție de forma Balian-Low. Se arată, [Dau.92], că la densitatea de acoperire critică, $t_0 \cdot \xi_0 = 1$, existe structuri oblice cu proprietăți bune (raport B/A aproape unitar și atomi cu proprietăți bune de localizare în planul timp-frecvență).

Un exemplu în acest sens este dat de funcțiile Wavelet derivate din funcția "Pălăria Mexicană" ce are expresia:

$$h(t) = (2\pi\Delta_0)^{-1/2} \left(1 - \left(\frac{t}{\Delta_0} \right)^2 \right) \cdot e^{-1/2 \left(\frac{t}{\Delta_0} \right)^2} \quad (3.202)$$

unde Δ_0 este o constantă.

Această funcție are produsul Heisenberg-Gabor de $\Delta t \cdot \Delta \xi = \frac{5}{4}$, iar o alegere de forma $a_0 = 2$ și $t_0 = \Delta_0$ duce la un raport $B/A = 1.116$.

Tabelul 3.4 Limitele A și B ale cadrelor asociate cu funcția "Pălăria Mexicană" în funcție de diferite valori ale raportului t_0 / Δ_0 (considerând $a_0 = 2$)

t_0 / Δ_0	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083
0.5	6.546	7.092	1.083
0.75	4.364	4.728	1.083
1	3.223	3.596	1.116
1.25	2.001	3.454	1.726
1.5	0.325	4.221	12.986

Observații: a) cu cât raportul B/A se apropie de valoarea 1 cu atât structura oblică rezultată se comportă mai asemănător cu un "tight frame" caz în care este posibilă utilizarea unei relații de reconstrucție de forma (3.193) (pentru o aproximare bună a funcției nefiind necesară găsirea bazei duale);

b) alegerea $a_0 = 2$ corespunde unei descompuneri în scări diadice (numai o singură serie de coeficienți pe octavă). Se arată [Fla.93] că admițând două căi pe octavă și considerând $t_0 / \Delta_0 = 0.5$ se obține un raport $B/A = 1.0002$, ceea ce conduce la o eroare practic neglijabilă într-o reconstrucție de forma (3.193).

În alte lucrări [Dau.92], [Mey.90] se arată că această discretizare a transformării Wavelet continue nu numai că se asociază cu structuri oblice "convenabile" dar, în anumite cazuri, permite existența unor baze ortonormale chiar și la o densitate de eșantionare critică. Multe dintre aceste baze asigură proprietăți bune de localizare în planul timp-frecvență.

3.3.5 Construcția bazelor trigonometrice locale ortogonale

Problemele prezentate în paragraful precedent, legate de discretizarea reprezentării STFT continue, ne arată faptul că nu este deloc o operație simplă realizare unei analize Fourier locale și eficiente. De asemenea, se pune problema ca descompunerea atomică obținută să se bucure, pe cât e posibil acest lucru, de proprietăți "bune". Astfel, proprietăți ca număr de momente nule, regularitate, suport compact, localizare în planul timp-frecvență, ale acestor atomi sunt esențiale. De fapt această concluzie a fost stabilită și în §3.1.1.9 pentru cazul funcțiilor Wavelet. Ele sunt foarte importante, din punct de vedere al unei aplicații efective ce utilizează o asemenea analiză, deoarece ele permit o caracterizare a unor serii de proprietăți ale unui semnal de analizat $x(t)$ pe baza analizei seriei coeficienților de descompunere $\langle x(t), h_{l,k}(t) \rangle$, în funcțiile $h_{l,k}(t)$ ale bazei. Astfel, proprietățile de regularitate ale semnalului pot fi caracterizate dacă se impune condiția ca funcțiile de analiză să fie funcții mai regulate decât gradul de regularitate estimat al acestui semnal. Similar acționează și

proprietățile de moment ale acestor funcții. Proprietățile de suport compact precum și cele de localizare în planul timp-frecvență sunt utile din punctul de vedere al localizării unor evenimente (temporale sau frecvențiale) ale semnalului. Aceste proprietăți ne pot garanta o “împrăștiere” limitată, pe un număr de coeficienți mai restrâns și bine localizați în acest plan a acestor evenimente. O serie de proprietăți ale acestor funcții pot fi garantate prin alegerea unui atom generator ce aparține unor clase de semnale speciale. Astfel, în §3.3.3 a fost subliniată importanța clasei lui Schwartz, din acest punct de vedere. Teorema 3.4, a lui Meyer, ne garantează faptul că există baze de atomi timp-frecvență ortogonale cu atomii aparținând acestei clase, însă nu spune nimic despre cum pot fi construite acestea. Pe de altă parte o construcție bazată pe discretizarea unei reprezentări continue se poate lovi foarte ușor de obstrucția Balian-Low. În acest paragraf va fi prezentată schematic o procedură de construcție a unor baze de funcții trigonometrice locale ortogonale construite cu atomi de un anumit grad de regularitate, procedură ce dă rezultate ce reușesc să “ocolească” această obstrucție severă a lui Balian-Low. Ea este prezentată mai în detaliu în [Wic.94]. Ideea de bază nu este deloc nouă, ea este similară construcției transformării STFT discrete, și anume: funcțiile bazei sunt unde ortogonale trigonometrice (unde sinusoidale sau cosinusoidale) “ferestruite” cu funcții fereastră speciale ce se bucură de anumite proprietăți de regularitate și localizare timp-frecvență. Ortogonalitatea acestor funcții trigonometrice locale, cu toate că ele se suprapun parțial pe axa temporală, este asigurată prin construcție. Este posibil ca aceste funcții fereastră să fie cu suport compact și cu un produs Heisenberg-Gabor redus. Acest lucru contrazice în mod evident obstrucția Balian-Low. Avantajul oferit de aceste baze constă în faptul că se poate construi o bibliotecă de asemenea baze ortogonale și pot fi aplicate proceduri de selecție a bazei optimale similare bazelor de pachete de funcții Wavelet.

Construcția unei asemenea baze începe, de obicei, cu considerarea unei baze trigonometrice (unde sinusoidale sau cosinusoidale) a spațiului $L_2([0,1])$. Funcțiile corespund de fapt restricției pe intervalul $[0,1]$ a unor unde trigonometrice foarte regulate. Această restricție are însă o influență negativă asupra proprietăților funcțiilor rezultate. Urmează aplicarea unei proceduri de netezire a fronturilor abrupte ale ferestrei rectangulare folosite. Această procedură va crește puțin suportul temporal al funcțiilor, realizând însă treceri mult mai regulate, continue, în aceste puncte de discontinuitate. Acest lucru va avea drept consecință îmbunătățirea cu mult a rezoluției de localizare frecvențială a acestor funcții. Se obține astfel o bază de funcții trigonometrice locale ortogonală a spațiului $L_2([0,1])$, construită pornind de la considerația asigurării unor anumite proprietăți de localizare bune ale funcțiilor. În vederea obținerii unei baze ortogonale a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, conform procedurii de mai sus, se procedează la efectuarea unei partiții complete de intervale I_k disjuncte, de forma $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, a axei reale \mathfrak{R} , $\mathfrak{R} = \bigcup_k I_k, k \in Z$, urmată de construcția de baze ortogonale pe

fiecare dintre aceste intervale. Acest ultim pas se poate realiza pornind de la o bază construită pe intervalul $[0,1]$, prin aplicarea operațiilor de translație și rescalare. În final, o bază de funcții trigonometrice locale ortogonală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ se găsește prin concatenarea tuturor acestor baze ortogonale, construite pe intervalele $I_k, k \in Z$. Această procedură de construcție poate fi implementată prin utilizarea unor operatori: unul pentru netezirea fronturilor abrupte ale unor ferestre neregulate, unul de translație și respectiv unul de rescalare. Primul operator amintit se numește “*de pliere*”, se notează cu U , și are ca rol netezirea fronturilor abrupte ale funcției fereastră (deoarece se pornește, de regulă, cu funcții rectangulare, cum e funcția indicatoare a unui interval). Operatorul U se bazează pe o funcție de “*tăiere*”, de netezire, a fronturilor abrupte. Astfel, notând cu $r(t)$ această funcție, ce aparține clasei $C^d(\mathfrak{R})$ cu un $0 \leq d < \infty$ oarecare, ea trebuie să verifice identitatea:

$$|r(t)|^2 + |r(-t)|^2 = 1, \quad \forall t \in \mathfrak{R} \quad (3.203)$$

$$\text{și să fie } r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.204)$$

Această funcție nu trebuie neapărat să fie o funcție monoton crescătoare sau una cu valori reale.

Se arată, [Wic.94], că orice funcție $r(t)$, ce verifică (3.203), trebuie să fie de forma:

$$r(t) = e^{j\rho(t)} \sin\theta(t) \quad (3.205)$$

cu $\rho(t)$ și $\theta(t)$ funcții cu valori reale ce satisfac condițiile:

$$\rho(t) = \begin{cases} 2n\pi & t < -1 \\ 2m\pi & t > 1 \end{cases} \quad (3.206)$$

$$\text{și: } \theta(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \pi/2 & t > 1 \end{cases} \text{ cu } \theta(t) + \theta(-t) = \frac{\pi}{2} \quad (3.207)$$

Observație: alegând o astfel de funcție $r(t)$, funcția $\frac{d}{dt}|r(t)|^2$ va fi o funcție simetrică, continuă și cu suport compact în intervalul $[-1, 1]$.

O cale posibilă de a găsi o funcție $\theta(t)$, ce verifică condițiile (3.207), este de a porni de la o funcție integrabilă simetrică $\phi(t)$, ce verifică condițiile:

$$\phi(t) = 0, \quad |t| > 1; \quad \phi(t) = \phi(-t), \quad \forall t \in \mathfrak{R}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \quad (3.208)$$

Un exemplu de funcție $r(t) \in C^1(\mathfrak{R})$, cu valori reale ($\rho(t) \equiv 0$), se obține prin alegerea:

$$\phi(t) = \begin{cases} \pi/4, & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1; \end{cases} = \frac{\pi}{4} \cdot I_{[-1,1]}$$

Rezultă: $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1+t), t \in [-1, 1]$

$$\text{și se obține: } r_{\sin}(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \sin\left[\frac{\pi}{4}(1+t)\right] & |t| \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad (3.209)$$

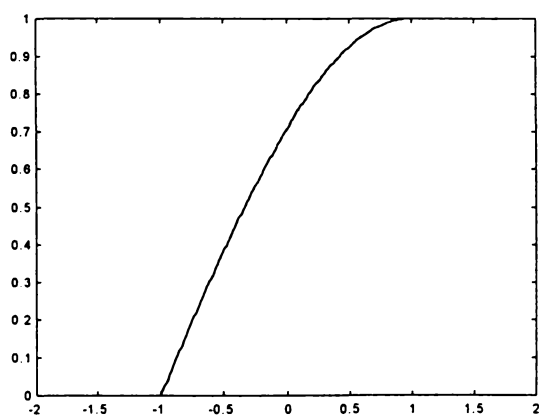


Figura 3.31 Funcția $r_{\sin}(t)$

Folosind funcția dată de (3.209) este posibilă construcția de funcții $r(t)$ mult mai regulate, aparținând clasei $C^d(\mathfrak{R})$, $d > 1$, printr-un proces iterativ, ce presupune înlocuirea repetată a variabilei

t cu expresia $\sin \frac{\pi t}{2}$. Acest proces poate fi sintetizat astfel:

- se consideră $r_{[0]}(t) = r_{\sin}(t)$ dat de (3.209);

- se construiesc funcțiile $r_{[n+1]}(t) = r_{[n]} \left(\sin \frac{\pi t}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Prin inducție se poate arăta că funcția $r_{[n]}(t)$ are $2^n - 1$ derivate nule în punctele $t = \pm 1$, deci

$$r_{[n]}(t) \in C^{2^n-1}(\mathfrak{R}).$$

Operatorul de “pliere” U se definește astfel:

$$Ux(t) = \begin{cases} r(t) \cdot x(t) + r(-t) \cdot x(-t), & t > 0 \\ r^*(-t) \cdot x(t) - r^*(t) \cdot x(-t), & t < 0 \end{cases} \quad (3.210)$$

Operatorul adjunkt, U^* , se definește conform:

$$U^*x(t) = \begin{cases} r^*(t) \cdot x(t) - r(-t) \cdot x(-t), & t > 0 \\ r(-t) \cdot x(t) + r^*(t) \cdot x(-t), & t < 0 \end{cases} \quad (3.211)$$

Se verifică imediat identitatea:

$$UU^*x(t) = U^*Ux(t) = \left(|r(t)|^2 + |r(-t)|^2 \right) \cdot x(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathfrak{R}, t \neq 0 \quad (3.212)$$

deci operatorii U și U^* definesc un izomorfism unitar al spațiului $L_2(\mathfrak{R})$.

Se observă, de asemenea că operatorii verifică:

$$Ux(t) = U^*x(t) = x(t), \quad |t| \geq 1 \quad (3.213)$$

Deci, acești operatori sunt cu o regiune de acțiune limitată, restricționată la intervalul $[-1, 1]$, din jurul punctului $t = 0$.

Operatorul de translație τ_α , de deplasare cu pasul α a unui semnal, poate fi definit astfel:

$$\tau_\alpha x(t) = x(t - \alpha), \alpha \in \mathfrak{R} \quad (3.214)$$

Adjunktul său, τ_α^* , are definiția:

$$\tau_\alpha^* x(t) = x(t + \alpha), \alpha \in \mathfrak{R} \quad (3.215)$$

Se definesc operatorii de scalare, σ_ε , de dilatare cu factorul ε , precum și adjunktul său, σ_ε^* , conform cu:

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon x(t) &= \varepsilon^{-1/2} x(t/\varepsilon), \varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \sigma_\varepsilon^* x(t) &= \varepsilon^{1/2} x(t\varepsilon), \varepsilon \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (3.216)$$

Definițiile de mai sus ne permit definirea unor operatori U și U^* cu o regiune de acțiune arbitrară. Astfel, notând cu $B_\varepsilon(\alpha) = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, “sfera” de rază ε centrat în punctul $t = \alpha$, pot fi definiții operatorii $U_r(\alpha, \varepsilon)$ și $U_r^*(\alpha, \varepsilon)$, operatorii U și U^* cu regiunea de acțiune $B_\varepsilon(\alpha)$:

$$\begin{aligned} U_r(\alpha, \varepsilon) &= \tau_\alpha \sigma_\varepsilon U \sigma_\varepsilon^* \tau_\alpha^* \\ U_r^*(\alpha, \varepsilon) &= \tau_\alpha \sigma_\varepsilon U^* \sigma_\varepsilon^* \tau_\alpha^* \end{aligned} \quad (3.217)$$

Prin definiție, doi operatori de forma (3.217) sunt numiți disjunși dacă regiunile lor de acțiune sunt disjuncte.

Acești operatori joacă un rol esențial în netezirea fronturilor ferestrelor temporale folosite în vederea obținerii funcțiilor bazelor Fourier locale.

O bază ortogonală de funcții cosinusoidale a spațiului $L_2([0, 1])$ este dată de restricția pe intervalul $[0, 1]$ a familiei de funcții $\{C_n(t)\}_{n \in N}$, [Wic.94], cu expresia dată de:

$$C_n(t) = \cos\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right), \quad n \in N \quad (3.218)$$

Astfel, funcțiile $\chi_{[0, 1]}(t) \cdot C_n(t)$ vor fi pachete de funcții cosinusoidale, ce formează bază ortogonală a spațiului $L_2([0, 1])$, fiind evident cu localizare temporală limitată în intervalul $[0, 1]$. Ele pot fi văzute ca și versiuni modulate ale ferestrei rectangulare $\chi_{[0, 1]}(t)$. Netezirea trecerii bruște a acestor semnale de la valoarea zero la o valoare diferită de zero, în punctul $t = 0$ (toate funcțiile familiei

$\chi_{[0,1]}(t) \cdot C_n(t)$ au valoarea unu în punctul $t=0$) și respectiv de la o valoare nenulă la o valoare zero în punctul $t=1$, echivalentă cu netezirea fronturilor abrupte ale acestei funcții fereastră, poate fi făcută cu ajutorul unor operatori de forma (3.217). Este necesar însă ca, în prealabil, să fie stabiliți parametrii operatorilor. În vederea păstrării ortogonalității și a regularității acestor funcții se impune ca regiunile de acțiune să fie disjuncte [Wic.94]. Evident trebuie folosite deplasări $\alpha=0$ și respectiv $\alpha=1$, în cele două puncte de capăt ale intervalului $[0,1]$. Nu se impun restricții nici cu privire la funcția $r(t)$ folosită și nici în privința razelor ε ale regiunilor de acțiune folosite. Trebuie remarcat însă faptul că proprietățile de localizare frecvențială ale funcțiilor ce rezultă sunt cu atât mai bune cu cât aceste raze sunt mai mari (echivalent cu fronturi mai bine netezite ale ferestrei).

Pentru exemplificare să considerăm că se aplică operatorii $U_r^*(0,1/3)$ și $U_r^*(1,1/2)$, folosind funcția $r(t)$ dată de (3.209). Rezultatul obținut este echivalent cu ferestruirea unor unde pur sinusoidale cu ferestre $w(t)$ de forma:

$$w(t) = r(3t) \cdot r(2-2t) \quad (3.219)$$

În figura 3.32 se prezintă forma ferestrei netezite precum și forma de undă a funcției $U_r^*\left(0, \frac{1}{3}\right) \cdot U_r^*\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \chi_{[0,1]}(t) \cdot C_4(t)$.

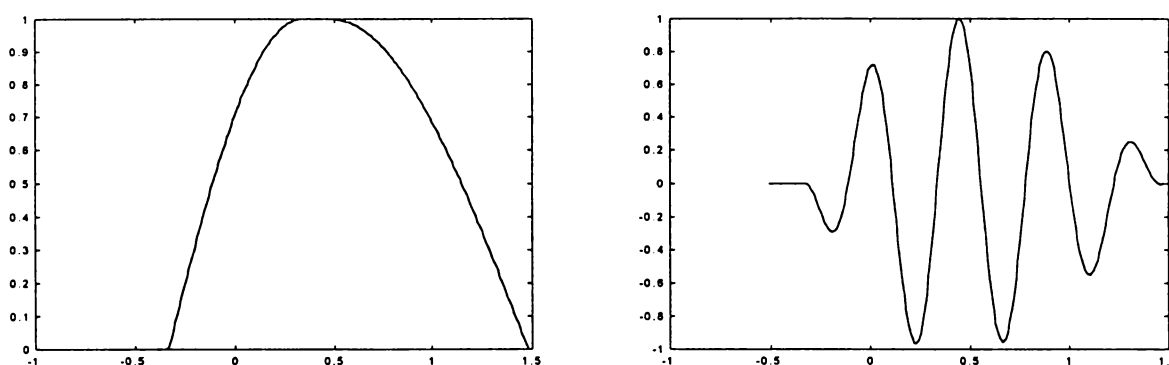


Figura 3.32 a) funcția fereastră $w(t)$, b) funcția cosinus local corespunzătoare lui $C_4(t)$

Se observă faptul că funcția fereastră $w(t)$ este o funcție continuă cu suportul compact $\left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$. De

fapt se arată, [Wic.94], că regularitate funcției fereastră $w(t)$ este dată de cea a funcției $r(t)$ folosite și determină, de asemenea, regularitatea funcțiilor bazei locale obținute. Astfel, pentru a obține o regularitate și mai mare putem folosi, de exemplu, orice funcție $r_n(t)$ construită conform procedurii mai sus amintite.

Procedura anterior menționată poate fi folosită pentru a găsi o bază ortogonală cu proprietăți de localizare bune pentru oricare interval I_k al axei reale.

Pachetele de unde sinusoidale (3.218) pot fi normate, rescalate și translate în orice interval de forma $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, al axei reale \mathfrak{R} . Se obțin astfel funcțiile:

$$C_{n,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{|I_k|}} \cdot C_n\left(\frac{t - \alpha_k}{|I_k|}\right), \quad n \in N \quad (3.220)$$

Utilizând apoi operatori de forma $U_{r_k}^*(\alpha_k, \varepsilon_k)$ și $U_{r_{k+1}}^*(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ aplicați funcțiilor $\chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}(t) \cdot C_{n,k}(t)$ se obține o bază sinusoidală locală a spațiului $L_2(I_k)$. Procedura mai sus menționată este echivalentă cu ferestruirea funcțiilor (3.220) cu o funcție fereastră de forma:

$$w_k(t) = r_k\left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon_k}\right) \cdot r_{k+1}\left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon_{k+1}}\right) \quad (3.221)$$

Funcțiile ce se obțin sunt denumite în literatura de specialitate funcții sinusoidale locale. Aceste funcții au expresia:

$$\begin{aligned}
h_{nk}(t) &= U_{r_k}^*(\alpha_k, \varepsilon_k) U_{r_{k+1}}^*(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}(t) \cdot C_{n,k}(t) = \\
&= w_k(t) \cdot C_{n,k}(t) = \\
&= r_k \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon_k} \right) \cdot r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon_{k+1}} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) (t - \alpha_k)}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \right), \quad n \in N
\end{aligned} \tag{3.222}$$

Familia de funcții $\{h_{nk}(t)\}_{n \in N}$ formează o bază trigonometrică locală, ortogonală, a spațiului $L_2(I_k)$. Construind o partiție completă de intervale I_k disjuncte, de forma $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, a axei reale \mathfrak{R} , $\mathfrak{R} = \bigcup_k I_k, k \in Z$, o bază de funcții cosinusoidale locale, ortogonală, a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$ se găsește prin concatenarea tuturor bazelor $\{h_{nk}(t)\}_{n \in N}$ ortogonale construite pe aceste intervale I_k . Se poate spune că în acest caz familia de funcții $\{h_{nk}(t)\}_{n,k \in N}$, cu expresia dată de (3.222) formează o bază ortogonală, a spațiului de semnale $L_2(\mathfrak{R})$.

Observații:

- construirea a diverse partiții $\mathfrak{R} = \bigcup_k I_k, k \in Z$ este posibilă, rezultând astfel diferite baze cosinusoidale locale ale spațiului $L_2(\mathfrak{R})$;
- orice interval I_k poate fi partiționat, fără nici o restricție, în două sau mai multe subintervale disjuncte, fiind posibilă, deasemenea, construirea unor baze trigonometrice locale pe aceste subintervale;
- subîmpărțirea și construcția mai sus menționată poate fi reiterată pentru orice subinterval obținut, rezultând astfel, în final, o colecție, o bibliotecă de baze ortogonale construite pe aceste subintervale. Orice colecție de asemenea baze, construite într-o anumită iterație, formează bază ortogonală a spațiului $L_2(I_k)$. Este posibilă utilizarea unor proceduri similare celor prezentate în §3.2.6, abordate în contextul bazelor de pachete de funcții Wavelet, în vederea găsirii unei baze optimale;
- înlocuind familia de unde cosinusoidale (3.218) cu unde sinusoidale, de forma:

$$S_n(t) = \sin \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right), \quad n \in N, \tag{3.223}$$

folosind același procedeu, pot fi construite baze ortogonale de funcții sinusoidale locale ale spațiului $L_2(\mathfrak{R})$.

Considerând un semnal $x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$, coeficienții descompunerii în baza trigonometrică locală $\{h_{nk}(t)\}_{n \in N, k \in Z}$ a acestui spațiu pot fi calculați conform cu:

$$\begin{aligned}
\langle x(t), h_{nk}(t) \rangle &= \langle x(t), U_{r_k}^*(\alpha_k, \varepsilon_k) U_{r_{k+1}}^*(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}(t) \cdot C_{n,k}(t) \rangle = \\
&= \left\langle U_{r_k}(\alpha_k, \varepsilon_k) U_{r_{k+1}}(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \cdot x(t), \chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}(t) \cdot C_{n,k}(t) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.224}$$

Identitatea (3.224) are o mare utilitate practică, deoarece ea indică o posibilitate de calcul a acestor coeficienți prin analiza Fourier rectangular ferestruită a semnalului $x(t)$ preprocesat (prin aplicarea celor doi operatori de “pliere”).

Se poate verifica ușor, [Wic.94], că funcțiile $h_{nk}(t)$, date de (3.222), sunt funcții cu localizare bună atât în domeniul timp (suport temporal compact dat de intervale de forma $[\alpha_k - \varepsilon_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon_{k+1}]$), cât și în frecvență (întindere spectrală dată de lățimea spectrului funcției fereastră $w_k(t)$, de valoare finită). Gradul de regularitate a acestor funcții este dat de cel al funcției $r_k(t)$ folosită în implementarea operatorilor de “pliere” folosiți.

Capitolul IV. Compresie de semnal prin transformări ortogonale

Codarea prin transformare implică o preprocesare liniară a semnalului de intrare. De obicei eşantioanele sursei sunt grupate în vectori de N valori succesive ale intrării, iar apoi se înmulţeşte acest vector cu o matrice unitară, matrice ce defineşte o transformare ortogonală N -dimensională. În mod obișnuit coeficienții transformării sunt cuantizați în mod separat, fiecare coeficient cu un cuantizor (scalar) diferit, în funcție de importanța fiecăruia în parte. Scopul principal al transformării ortogonale este decorelarea eşantioanelor sursei astfel încât informația semnalului să fie concentrată pe un număr minim de coeficienți din domeniul transformat. Prin reținerea și cuantizarea doar a acestor coeficienți, în cazul unor surse de semnal corelate, există speranțe că se va obține un factor de compresie mai mare decât dacă s-ar fi codat direct eşantioanele corelate ale sursei. Importanța utilizării transformărilor ortogonale rezidă în faptul că ele sunt inversabile astfel încât ele, în absența cuantizării, permit reconstrucția exactă. Mai mult, având în vedere faptul că vectorii bazei descompunerii sunt mutual ortogonali, este posibilă o evaluare ușoară a erorilor de aproximare (în cazurile în care sunt neglijați anumiți coeficienți din domeniul transformat). Transformările ortogonale cele mai uzuale sunt: Transformarea Fourier Rapidă (FFT - *Fast Fourier Transform*), Transformarea Cosinus Discretă (DCT - *Discrete Cosinus Transform*), Transformarea Sinus Discretă (DST - *Discrete Sinus Transform*), Transformarea Wavelet Rapidă (FWT - *Fast Wavelet Transform*) și Transformarea Karhunen-Löeve. Codarea prin transformări ortogonale este utilizată într-o gamă largă de aplicații curente cum sunt prelucrările de imagini, de secvențe video, de sunet și de semnale audio. Din acest punct de vedere de o popularitate remarcabilă se bucură transformarea DCT, inclusă în numeroase standarde cum ar fi H261, H263, JPEG, MPEG etc.

În esență, compresia de semnal prin transformări ortogonale constă în codarea eficientă a unui vector \vec{Y} , rezultat în urma unei transformări ortogonale a unui vector sursă \vec{X} (de obicei finit dimensional). În cazul general, vectorul sursă \vec{X} este un vector aleator format dintr-un număr finit de variabile aleatoare succesive ale unui proces aleator ce modelează sursa. Notând cu N dimensiunea vectorului \vec{X} , se urmărește o codare eficientă a vectorului $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ rezultat în urma operației :

$$\vec{Y}^T = A \cdot \vec{X}^T \quad (4.1)$$

unde A este o matrice unitară $N \times N$ dimensională.

O astfel de transformare ortogonală este definită întotdeauna prin N vectori ortogonali. Astfel, matricea transformării A poate fi scrisă sub forma:

$$A^T = [\bar{\varphi}_1 \ \bar{\varphi}_2 \ \dots \ \bar{\varphi}_N] \quad (4.2)$$

unde: $\bar{\varphi}_i^T \cdot \bar{\varphi}_j = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1 \dots N$

Se obține astfel:

$$\vec{X}^T = A^T \cdot \vec{Y}^T = [\bar{\varphi}_1 \ \bar{\varphi}_2 \ \dots \ \bar{\varphi}_N] \cdot \vec{Y}^T \quad (4.3)$$

deci:

$$\vec{X}^T = \bar{\varphi}_1 \cdot Y_1 + \bar{\varphi}_2 \cdot Y_2 + \dots + \bar{\varphi}_N \cdot Y_N \quad (4.4)$$

Expresia (4.4) pune în evidență o dezvoltare a vectorului \vec{X} într-o bază ortogonală a spațiului \mathfrak{R}^N , unde vectorii $\bar{\varphi}_j$, $j = 1, \dots, N$ (N -dimensionali) formează această bază iar coeficienții descompunerii sunt dați de valorile Y_j , $j = 1, \dots, N$.

Pentru a obține o compresie se poate opta pentru o reprezentare mai eficientă a coeficienților Y_j , sau se poate trece la reducerea dimensiunii spațiului transformat, de la N la M , cu $M < N$. În acest al doilea caz semnalul de după compresie poate fi:

$$\hat{\bar{X}}^T = \sum_{j=1}^M Y_j \cdot \bar{\varphi}_j \quad (4.5)$$

Eroarea ce apare prin neglijarea celor $N-M$ termeni este dată de relația:

$$\Delta\bar{x} = \bar{X} - \hat{\bar{X}} = \sum_{j=M+1}^N Y_j \cdot \bar{\varphi}_j \quad (4.6)$$

iar eroare medie pătratică de aproximare poate fi evaluată prin:

$$D = E\{\|\Delta\bar{x}\|^2\} = \sum_{j=M+1}^N E\{Y_j^2\} \quad (4.7)$$

unde E este operatorul de mediere statistică.

Schema de principiu a unui sistem de compresie ce utilizează o transformare ortogonală se prezintă în figura 4.1.

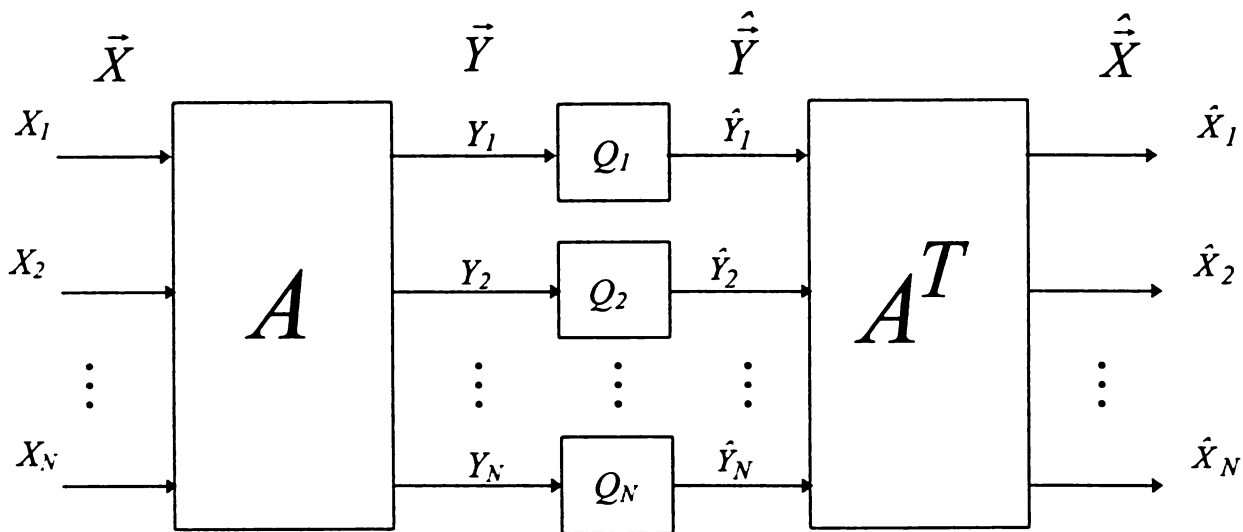


Figura 4.1. Schema de principiu a unui sistem de compresie prin transformări ortogonale.

Sistemul de compresie din figura (4.1) pune în evidență două faze majore ale acestui proces. Faza de *analiză* implică o transformare ortogonală a vectorului sursă \bar{X} , urmată de o cuantizare și codare de bit a fiecărui membru al vectorului rezultat \bar{Y} . Cea de a doua fază, denumită de *sinteză*, constă din reconstrucția componentelor vectorului sursă \bar{X} din componentele cuantizate și codate $\hat{\bar{Y}}$ ale vectorului \bar{Y} . Vectorul reconstruit, $\hat{\bar{X}}$, în absența cuantizoarelor $Q_i, i=1 \dots N$, trebuie să fie identic cu vectorul sursă \bar{X} . Matricea A , reprezentând matricea transformării ortogonale, trebuie să fie o matrice unitară, inversabilă, cu inversa $A^{-1} = A^T$. Compresie de semnal efectivă se poate obține prin dimensionarea adecvată a cuantizoarelor Q_j , astfel încât fiecare dintre ele să asigure o reducere, de o anumită măsură, a cantității de informație purtată de fiecare coeficient Y_j prelucrat. Evident, coeficienții Y_j ce urmează a fi anulați în vederea obținerii unei compresii, conform relației (4.5), vor fi cuantizați pe un număr de zero biți, fapt ce este echivalent cu neglijarea acestor valori.

Vectorul sursă $\bar{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$ este, după cum s-a specificat, un vector aleator format din N variabile aleatoare succesive ale unui proces aleator $X[n]$. Acest proces aleator modelează, în general, semnalul sursă, considerarea doar a N variabile aleatoare succesive ale lui

Avantajul major oferit de utilizarea unei transformări ortogonale constă în faptul că eroarea de reconstrucție (distorsiunea de aproximare), definită conform relației (1.15), poate fi evaluată ușor deoarece are loc egalitatea:

$$E\left\{\left\|\bar{Y} - \hat{Y}\right\|^2\right\} = E\left\{\left\|\bar{X} - \hat{X}\right\|^2\right\} \quad (4.11)$$

egalitate pe care este bazată și evaluarea (4.7) a distorsiunii de aproximare în cazul unei compresii de forma (4.5).

Astfel, măsura acestei distorsiuni de aproximare poate fi controlată direct prin dimensionarea adecvată a cuantizoarelor din partea de analiză a sistemului de compresie.

De asemenea, utilizarea unei transformări ortogonale ne asigură și de faptul că transformarea inversă nu va amplifica distorsiunile de cuantizare din domeniul transformat.

Se poate arăta că pentru o sursă staționară cu memorie, cu distribuție gaussiană, transformarea Karhunen-Löve este optimală.

4.1. Transformarea Karhunen-Löve

Fie $X[n]$ un proces aleator staționar și ergodic caracterizat printr-o funcție densitate de probabilitate gaussiană, notată $p_X(x)$, de medie nulă și cu dispersia σ_X^2 .

Fie $\bar{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$ un vector aleator staționar format din N variabile aleatoare succesive ale procesului $X[n]$. Notăm:

$$c_{ij} = E\{(X_i - m_i) \cdot (X_j - m_j)\} \quad (4.12)$$

unde $m_i = E\{X_i\} = 0, \forall i = 1, \dots, N$,

covarianța dintre variabilele aleatoare X_i și X_j . Să notăm matricea de covarianță a vectorului \bar{X} cu $C_X = \{c_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$. Notând cu T matricea vectorilor proprii ai C_X , transformarea Karhunen-Löve a vectorului \bar{X} se definește ca fiind vectorul $\bar{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ dat de :

$$\bar{Y}^T = T \cdot \bar{X}^T \quad (4.13)$$

Definiția (4.13) pune în evidență o transformare de forma (4.1) cu matricea unitară A dată de matricea T mai sus definită.

Vectorul $\bar{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ este un vector aleator cu distribuție gaussiană, cu componente necorelate, indiferent de gradul de corelare existent între diferitele componente ale vectorului \bar{X} .

În acest caz vectorii $\bar{\varphi}_j, j = 1, \dots, N$, cu definiția dată de (4.2), verifică:

$$C_X \cdot \bar{\varphi}_j = \lambda_j \bar{\varphi}_j, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

unde $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ sunt valorile proprii ai C_X .

Se poate arăta că, [Spă.67], această transformare este cea care minimizează eroarea de reconstrucție (4.7) în cazul în care se neglijează M coeficienți dintre cei N coeficienți ai transformării. De fapt eroarea (4.7) se poate scrie sub forma:

$$D = E\left\{\left\|\Delta\bar{x}\right\|^2\right\} = \sum_{j=M+1}^N E\{Y_j^2\} = \sum_{j=M+1}^N \bar{\varphi}_j^T \cdot C_X \cdot \bar{\varphi}_j = \sum_{j=M+1}^N \lambda_j \quad (4.15)$$

unde valorile proprii $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ sunt considerate ca fiind ordonate în ordinea descrescătoare a valorilor lor.

Această metodă, cu toate că este optimală pentru sursa de semnal menționată, nu este utilizată în sistemele practice de compresie deoarece calculul transformării implică un volum foarte mare de calcul (calculul valorilor și vectorilor proprii ai matricii de covarianță pentru fiecare bloc de date în parte), dependent efectiv de semnal, ce poate cauza și o eventuală instabilitate numerică pe partea de sinteză (matrice de covarianță singulară). Pe de altă parte și modelul de semnal utilizat este foarte restrictiv el neapărând în cazurile practice. Din acest motiv se preferă, în sistemele practice de compresie, utilizarea unor transformări ortogonale, cum sunt DCT, DST, FFT, FWT, FWPT, mult mai rapide, mult mai stabile, însă suboptimale chiar și în cazul unei surse staționare gaussiene.

4.2. Transformarea FFT

O transformare de forma (4.1) ce este definită prin valori A_{jk} date de:

$$A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi \frac{(j-1)(k-1)}{N}} \quad (4.16)$$

Transformarea directă este dată de:

$$Y_j = \sum_k A_{jk} \cdot X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k X_k e^{-i2\pi \frac{(j-1)(k-1)}{N}} \quad (4.17)$$

în timp ce cea inversă se calculează conform:

$$X_k = \sum_j A_{kj}^* \cdot Y_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j Y_j e^{i2\pi \frac{(j-1)(k-1)}{N}} \quad (4.18)$$

Observații:

- este o transformare complexă ce dublează numărul coeficienților rezultați dacă nu se ține cont de simetria transformării.
- există algoritmi rapizi de calcul numeric, numărul operațiilor implicate fiind de ordinul $N \cdot \log N$, [Pre.93].
- calculul numeric cere aritmetică complexă.

4.3. Transformările DCT și DST

La fel ca și transformarea FFT, DCT și DST sunt transformări ortogonale ce implică o legătură de forma (4.1) între vectorul intrare și cel de ieșire. Avantajul lor major față de FFT constă în faptul că ele sunt transformări reale, ce elimină astfel, prin definiția lor, redundanța de reprezentare implicată de aceasta din urmă în cazul analizei unor semnale reale. Și aceste transformări, ca de altfel majoritatea transformărilor discrete, pot fi obținute prin discretizarea unor reprezentări continue. În funcție de pasul de discretizare ales (ce trebuie să respecte teorema lui Shannon) precum și în funcție de cum sunt considerate punctele de eșantionare față de momentele de timp marcate prin indexare (de obicei decalate cu o cantitate ce este o subdiviziune a pasului de eșantionare), există patru variante diferite ale transformărilor DCT și respectiv DST. Le vom nota pe acestea cu DCT-I, ..., DCT-IV și, respectiv, DST-I, ..., DST-IV. Definind funcția fereastră de normare:

$$b[k] = \begin{cases} 0 & k \leq 0, k > N + 1 \\ 1/\sqrt{2} & k = 1, k = N + 1 \\ 1 & 1 < k \leq N \end{cases}$$

elementele A_{jk} ale matricii de transformare ale acestora se definesc conform cu:

DCT-I

$$A_{jk}^I = b[j] \cdot b[k] \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{(k-1)(j-1)\pi}{N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (4.19a)$$

DCT-II

$$A_{jk}^{II} = b[j] \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{(2k-1)(j-1)\pi}{2N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.19b)$$

DCT-III

$$A_{jk}^{III} = b[k] \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{(2j-1)(k-1)\pi}{2N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.19c)$$

DCT-IV

$$A_{jk}^{IV} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{(2j-1)(2k-1)\pi}{4N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.19d)$$

Se observă faptul că există două versiuni DCT simetrice DCT-I și DCT-IV, ale căror transformări inverse sunt date de aceleași matrici, și două transformări asimetrice DCT-II și DCT-III, însă foarte asemănătoare. De fapt, se poate observa faptul că cele două transformări sunt transformări inverse. Astfel, de exemplu, transformarea directă folosind DCT-II este dată de:

$$Y_j = \sum_k A_{jk}^{II} \cdot X_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k X_k & j=1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_k X_k \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)(j-1)\pi}{2N}\right) & j=2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (4.20)$$

în timp ce cea inversă se calculează conform cu:

$$X_k = \sum_j A_{kj}^{II} \cdot Y_j = \sum_j A_{jk}^{III} \cdot Y_j = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_1 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=2}^N Y_j \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)(j-1)\pi}{2N}\right) \quad (4.21)$$

Observații:

- DCT este o transformare reală ce poate fi calculată cu ajutorul algoritmului FFT (calculat în $2N$ puncte).
- prezintă proprietăți foarte bune de compactare a energiei în cazul unor valori puternic corelate.
- implementată în numeroase standarde de compresie sub varianta unidimensională sau cea bidimensională.

Transformarea DST este o transformare similară cu DCT, ce admite de asemenea patru variante diferite. Elementele A_{jk} ale matricii de transformare au forma:

DST-I

$$A_{jk}^I = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{(k-1)(j-1)\pi}{N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.22a)$$

DST-II

$$A_{jk}^{II} = b[j+1] \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{(2k-1) \cdot j \cdot \pi}{2N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.22b)$$

DST-III

$$A_{jk}^{III} = b[k+1] \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{(2j-1) \cdot k \cdot \pi}{2N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.22c)$$

DST-IV

$$A_{jk}^{IV} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{(2j-1)(2k-1)\pi}{4N}\right) \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (4.22d)$$

Sunt valabile observații similare celor făcute în legătură cu transformarea DCT, cu deosebirea faptului că DST nu se bucură de o popularitate similară DCT, nefiind recomandată în cele mai uzuale standarde de compresie.

4.4. Transformarea Cosinus Discretă Locală, DLCT (Discrete Local Cosine Transform)

Reprezintă versiunea discretizată a Transformării Cosinus Locală Continuă dată de dezvoltarea unui semnal în baze de funcții cosinusoidale locale, a căror construcție a fost dată în §3.3.5. Atunci am văzut că familia de funcții $\{h_{nk}(t)\}_{n \in N}$, definite conform (3.222), formează o bază trigonometrică locală (de funcții cosinusoidale locale), ortogonală, a spațiului $L_2(I_k)$ iar familia $\{h_{nk}(t)\}_{n \in N, k \in Z}$ formează o bază ortogonală în spațiul $L_2(\mathfrak{R})$. Definiția transformării DLCT poate fi dată folosind termenii și definițiile de funcții date în §3.3.5 cu deosebirea faptului că, în cazul discret, variabilele funcțiilor vor lua valori întregi în loc de valori reale. Ideea de bază rămâne aceeași: construind o partiție completă de intervale I_k disjuncte, de forma $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, a axei numerelor întregi Z , $Z = \bigcup_k I_k, k \in Z$, o bază de funcții cosinusoidale locale discrete, ortogonală, a spațiului $l_2(Z)$ se găsește prin concatenarea tuturor bazelor ortogonale construite pe aceste intervale I_k . Evident, marginile α_k, α_{k+1} ale acestor intervale I_k sunt numere întregi. Notând cu N diferența $N = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ se alege $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} > 0, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} \in Z$ astfel încât $\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} \leq N$ pentru a asigura regiuni de acțiune disjuncte ale operatorilor U și U^* . Funcțiile bazelor discrete pot fi obținute prin discretizarea de forma $\{h_{nk}(t_j)\}_{n \in N}$ cu $t_j = j, j \in Z$.

În aceste condiții, ținând cont de proprietatea (3.203) a funcției $r(t)$ utilizată, rezultă că eșantioanele $r_j = r(j/N)$ trebuie să satisfacă relația:

$$|r(j/N)|^2 + |r(-j/N)|^2 = 1, \quad \forall j \in Z$$

Se observă imediat faptul că alegând această funcție $r(t)$ ca fiind funcția treaptă unitate, $\sigma(t)$, discretizarea mai sus menționată a funcțiilor definite conform (3.222) ne va da exact transformarea DCT-III. Evident, o astfel de alegere nu este recomandabilă, datorită regularității foarte scăzute a funcției $\sigma(t)$. Însă, această observație ne indică rolul important jucat de transformarea DCT și în construcția bazelor de funcții cosinusoidale locale discrete. Astfel, această procedură presupune pașii:

- construirea unei partiții complete de intervale I_k disjuncte, de forma $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, a axei numerelor întregi Z , $Z = \bigcup_k I_k, k \in Z$;
- calculul versiunilor discretizate ale funcțiilor $C_{n,k}(t)$, definite conform (3.220), în punctele $t_j = j, j \in Z$;
- aplicarea operatorilor $U_{r_k}^*(\alpha_k, \varepsilon_k)$ și $U_{r_{k+1}}^*(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ funcțiilor $\chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}(t) \cdot C_{n,k}(t_j)$.

Se obține astfel, prin concatenarea tuturor bazelor ortogonale construite pe aceste intervale I_k ($Z = \bigcup_k I_k, k \in Z$), o bază de funcții cosinusoidale locale discrete, ortogonală, a spațiului $l_2(Z)$.

Transformarea asociată descompunerii în baza astfel construită rezultă una infinit dimensională. În practică însă, se pornește de la un vector de intrare $\vec{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_N]$ finit dimensional. Din acest motiv este de ajuns să se găsească N funcții ale unei asemenea baze construite pe un interval de lungime finită N . Acest interval, notat cu I_N și denumit interval rădăcină, definește spațiul de

pornire în analiză, $l_2(I_N)$. Construcția unei baze locale a acestui spațiu poate fi făcută prin considerarea bazelor de funcții cosinusoidale locale construite pe subintervalele acestuia. Conform proprietății (3.224), calculul coeficienților de proiecție \bar{Y} ai vectorului \bar{X} într-o asemenea bază se poate face prin:

- aplicarea operatorilor $U_{r_k}(\alpha_k, \varepsilon_k)$ și $U_{r_{k+1}}(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ secvenței de valori $X_{\alpha_k} \quad X_{\alpha_{k+1}} \quad X_{\alpha_{k+1}}$ (valorile secvenței de intrare dintr-un interval $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$);
- aplicarea transformării DCT-III.

Procedura mai sus menționată definește *Transformarea în funcții Cosinusoidale Locale Discretă, DLCT*.

Operația inversă, de reconstrucție a vectorului \bar{X} inițial, presupune:

- aplicarea transformării DCT-II (inversa lui DCT-III);
- aplicarea operatorilor $U_{r_k}^*(\alpha_k, \varepsilon_k)$ și $U_{r_{k+1}}^*(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ în punctele de capăt α_k, α_{k+1} ale intervalelor I_k .

În paragraful precedent, §4.4, am văzut că atât DCT-II cât și DCT-III sunt forme ale transformării DCT ce fac distincție între punctul de capăt din stânga și respectiv cel din dreapta intervalului de interes. Din acest motiv ele au fost denumite nesimetrice. Se obțin forme simetrice dacă se eșantionează în punctele intermediare, înlocuind variabila t cu expresia $t + \frac{1}{2}$ în definiția (3.222) a funcțiilor $h_{nk}(t)$, și se trece apoi la o discretizare cu pas unitar a acestora. Astfel, utilizând operatori U și U^* , decalajați și ei în mod corespunzător, se poate obține o altă bază de funcții cosinusoidale locale discrete, ortogonală. Descompunerile și reconstrucțiile de semnal în/din această bază pot fi făcute conform procedurilor mai sus menționate cu deosebirea faptului că în ambele faze se va lucra cu DCT-IV (având în vedere faptul că inversa lui DCT-IV este tot DCT-IV).

Observații:

- a) în cazurile practice intervalul rădăcină I_N are o lungime $N = 2^L$, motivat de faptul că această condiție permite utilizarea unor algoritmi rapizi de calcul, bazați pe FFT, ai DCT-ului implicat;
- b) pe baza aceluiași considerent, se procedează la subîmpărțiri diadice ale acestui interval. Subîmpărțirea mai sus menționată poate fi reiterată pentru orice subinterval obținut, rezultând astfel, în final, o ierarhie de subdiviziuni diadice ale intervalului rădăcină. Se poate obține, de asemenea, o colecție, o bibliotecă de baze ortogonale construite pe aceste subintervale, asociate acestei ierarhii. Ele sunt denumite în mod curent baze de pachete de funcții cosinusoidale locale și sunt structurate și ele într-o ierarhie de baze cosinusoidale locale. Orice colecție de asemenea baze, construite într-o anumită iterație de subîmpărțire, formează o bază ortogonală a spațiului $l_2(I_N)$;
- c) Coeficienții descompunerii unui semnal (vectorul \bar{X}) într-o astfel de bază definește *Transformarea în Pachete de funcții Cosinusoidale Locale Discretă - DLCPT (Discrete Local Cosine Packet Transform)*. Este posibilă utilizarea unor proceduri similare celor prezentate în §3.2.6, abordate în contextul bazelor de pachete de funcții Wavelet, în vederea găsirii unei baze optimale;
- d) se poate observa faptul că în cazul unei lungimi $N = 2^L$ a intervalului de rădăcină, procedura de subîmpărțire poate fi reiterată de un număr maxim de L -ori. În acest caz se spune că se

efectuează o analiză pe L nivele. Această limită este însă o limită teoretică, obținabilă doar în condițiile în care în diferitele iterații (pe diferite nivele) se lucrează cu raze $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} \in Z$ ale regiunilor de acțiune ale operatorilor $U_{r_k}(\alpha_k, \varepsilon_k)$ și $U_{r_{k+1}}(\alpha_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ ce se diminuează progresiv, tinzând către zero (valoare folosită pe nivelul L). În practică se lucrează de obicei cu o valoare fixă a acestor raze, egală de obicei cu $2^R, 0 \leq R < L$, caz în care număr maxim de iterații se limitează la valoarea $L - R$;

- e) în mod similar DLCPT, înlocuind funcțiile cosinus cu funcții sinusoidale, aplicând aceleași proceduri pot fi construite diverse ierarhii de baze de funcții sinusoidale locale ale spațiului $l_2(Z)$. Calculul coeficienților descompunerii unui semnal într-o asemenea bază definește *Transformarea în Pachete de funcții Sinusoidale Locale Discrete - DLSPT (Discrete Local Sine Packet Transform)*. Această transformare are calități similare transformării DLCPT;
- f) este posibilă construirea unor reprezentări mixte, construind, de exemplu, baze locale cosinusoidale pe intervalele de ordin impar și baze locale sinusoidale pe intervale de ordin par. Transformarea rezultată va presupune utilizare unei combinații ale transformărilor DCT și DST precum și alternări ale polarității operatorilor U și U^* aplicați, în funcție de natura funcțiilor folosite în intervalul din stânga și respectiv din dreapta punctului de aplicare ale lor, [Wic.94].

4.5. Procedură de alocare de bit optimală

În cele ce urmează se urmărește codarea unui vector, rezultat în urma unei transformări ortogonale a unui vector \bar{X} gaussian, cu eficiență maxim posibilă. Pe scurt, se dorește codarea vectorului $\bar{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ rezultat în urma operației $\bar{Y}^T = A \cdot \bar{X}^T$, unde A este o matrice unitară, folosind un număr mediu de b biți/eșantion. În cele ce urmează se indică o procedură de alocare de bit optimală, procedură ce presupune alocarea celor $N \cdot b$ biți disponibili (numărul total de biți rezervați codării vectorului \bar{Y}) diverselor componente ale acestora astfel încât să rezulte o distorsiune medie pătratică D minimă posibilă. De fapt, se caută N numere b_1, b_2, \dots, b_N astfel încât :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_N = N \cdot b \quad (4.23)$$

Prin codarea componentei Y_i pe un număr de b_i biți vom obține, la reconstrucție, folosind distanța Euclidiană, o eroare medie pătratică de aproximare $D(b_i)$. Distorsiunea medie D poate fi calculată prin simpla mediere a celor N valori $D_i(b_i)$:

$$D = \frac{1}{N} [D_1(b_1) + D_2(b_2) + \dots + D_N(b_N)] \quad (4.24)$$

Cu aceste notații, condiția de optimizare a alocării de bit revine la căutarea acelor numere b_1, b_2, \dots, b_N care minimizează valoarea distorsiunii D .

Să notăm cu $\sigma_{Y_i}^2$ dispersia variabilei aleatoare Y_i . Presupunem, de asemenea, că vectorul $\bar{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ are componentele ordonate în ordinea descrescătoare a dispersiilor. Această condiție este impusă doar din considerente de simplificare a notațiilor utilizate. Avem, deci,

$$\sigma_{Y_1}^2 \geq \sigma_{Y_2}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_i}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_N}^2 \quad (4.25)$$

Rezultate ale teoriei rată-distorsiune arată, [Sha.49], că distorsiunea minimă ce se poate obține prin codarea unei surse gaussiene de medie nulă și dispersie $\sigma_{Y_i}^2$, pe un număr de b biți, este:

$$D_i(b) = \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b} \quad (4.26)$$

Astfel, distorsiunea medie totală, ce rezultă prin codarea optimală a celor N componente gaussiene ale vectorului $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$, se poate scrie:

$$D = \frac{1}{N} \left(\sigma_{Y_1}^2 \cdot 2^{-2b_1} + \sigma_{Y_2}^2 \cdot 2^{-2b_2} + \dots + \sigma_{Y_N}^2 \cdot 2^{-2b_N} \right) \quad (4.27)$$

Se caută, deci, numere b_1, b_2, \dots, b_N ce verifică (4.23) și care minimizează valoarea distorsiunii (4.27), în ipoteza (4.25). Ipoteza (4.25) ne va asigura de fapt că valorile optime b_i vor verifica, în condițiile (4.26), inegalitatea:

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_N \quad (4.28)$$

Expresia de mai sus pune în evidență faptul că minimizarea (4.27) are loc dacă toate componentele acestei expresii sunt egale, fapt ce implică o codare neuniformă, conform (2.26), datorită dispersiilor diferite, iar o variabilă aleatoare cu o dispersie mai mare cere un număr de biți mai mare pentru aceeași distorsiune.

S-ar putea întâmpla ca pentru o valoare $j^* < N$, valorile optime b_i să verifice:

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{j^*} > b_{j^*+1} = \dots = b_N = 0 \quad (4.29)$$

Minimizarea (4.27), supusă restricției (4.23), poate fi făcută folosind tehnica multiplicatorului lui Lagrange. Se formează expresia:

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b_i} + \theta \cdot \left(\sum_{i=1}^N b_i - N \cdot b \right) \quad (4.30)$$

și se anulează derivatele parțiale, $\frac{\partial \alpha}{\partial b_i}$, $i=1, 2, \dots, j^*$. Obținem un sistem de ecuații liniare format din j^* ecuații cu tot atâtea necunoscute. Există o constantă $\theta = \theta_0$ astfel încât:

$$b_i = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_i}^2}{\theta_0}, \quad i=1, 2, \dots, j^* \quad (4.31)$$

echivalent cu:

$$b_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_i}^2}{\theta_0}, & \sigma_{Y_i}^2 > \theta_0 \\ 0 & \sigma_{Y_i}^2 \leq \theta_0 \end{cases} \quad (4.32)$$

unde θ_0 satisface condiția :

$$\sum_{\sigma_{Y_i}^2 > \theta_0} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_i}^2}{\theta_0} = Nb \quad (4.33)$$

Unicitatea lui θ_0 poate fi pusă în evidență construind funcția auxiliară $G(\theta)$, $0 < \theta < \sigma_{Y_1}^2$ de forma:

$$G(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_1}^2}{\theta} & \sigma_{Y_2}^2 \leq \theta \leq \sigma_{Y_1}^2 \\ \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_1}^2}{\theta} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_2}^2}{\theta} & \sigma_{Y_3}^2 \leq \theta \leq \sigma_{Y_2}^2 \\ \vdots & \\ \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_1}^2}{\theta} + \dots + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_N}^2}{\theta} & 0 < \theta \leq \sigma_{Y_N}^2 \end{cases} \quad (4.34)$$

Se observă faptul că funcția $G(\theta)$ este o funcție monoton descrescătoare. Astfel, poate exista doar o singură valoare θ_0 care satisface condiția $G(\theta_0) = Nb$.

Se obține deci regula de alocare de bit optimală (4.32) ce oferă o distorsiune medie optimă:

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min(\theta_0, \sigma_{Y_i}^2) \quad (4.35)$$

Valoarea lui θ_0 depinde de numărul mediu b de biți/eșantion ales. În funcție de acesta putem avea rate b_i strict pozitive pentru orice valoare $i=1,2,\dots,N$, ce verifică (4.28), sau poate apărea situația (4.29), de codare cu rate de bit nule.

Dacă ne situăm în primul caz, deci b este suficient de mare astfel încât fiecărei componente să-i fie repartizați un număr nenul de biți, ceea ce înseamnă $\sigma_{Y_i}^2 > \theta_0, \forall i = 1,2,\dots,N$, din (4.33) poate fi calculată valoarea θ_0 :

$$\theta_0 = N \sqrt{\prod_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2} \cdot 2^{-2b} \quad (4.36)$$

Înlocuind (4.36) în (4.32) rezultă regula de alocare de bit optimală:

$$b_i = b + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_i}^2}{N \sqrt{\prod_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2}}, i = 1,2,\dots,N \quad (4.37)$$

Distorsiunea minimă teoretică este în acest caz:

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b_i} = N \sqrt{\prod_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2} \cdot 2^{-2b} \quad (4.38)$$

Rezultatul de mai sus este unul general, el poate fi aplicat la orice transformare ortogonală. El a fost stabilit, reamintim, pentru cazul unei surse de semnale aleatoare staționare gaussiene. Având impusă o rată de bit medie de b biți/eșantion, dacă aceasta este suficient de mare, distorsiunea medie a sistemului poate fi apreciată conform (4.38). Această relație ne indică condiția de optimalitate din punctul de vedere al procedurii de transformare ortogonală. Astfel, transformarea ortogonală optimală este cea care minimizează, la o rată de bit b impusă, expresia:

$$N \sqrt{\prod_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2} \quad (4.39)$$

Observație: în cazul în care procedura de alocare de bit optimală descrisă mai sus se aplică direct vectorului de intrare $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$, cu componentele X_i variabile aleatoare gaussiene de medie nulă și dispersie σ_X^2 , expresia (4.39) se reduce la această dispersie iar expresia (4.38) la expresia (1.21) (reprodus (4.26)).

Se poate defini *câștigul de transformare* prin raportul distorsiunilor medii obținute, corespunzătoare celor două cazuri și anume fără și cu transformare. În cazul nostru acest câștig poate fi exprimat sub forma:

$$G_t(N) = \frac{\sigma_X^2}{N \sqrt{\prod_{i=1}^N \sigma_{Y_i}^2}} \quad (4.40)$$

iar transformarea optimă este cea care-l maximizează în condițiile unei dispersii σ_X^2 date.

Se poate arăta ușor, [Mor.95], că dintre toate transformările ortogonale posibile, transformarea Karhunen-Löve este cea care maximizează acest câștig.

Exemplu:

Să considerăm o sursă abstractă de semnale aleatoare, ce furnizează la ieșire sa secvența de variabile aleatoare X_1, X_2, X_3, \dots în care perechile $(X_1, X_2), (X_3, X_4), \dots$ sunt independente din punct

de vedere statistic, cu distribuție gaussiană, de medie nulă și cu aceeași matrice de covarianță C_X . Fie b rata de bit medie pe eșantion (pe variabilă aleatoare) dorită. Dorim să codăm această sursă cu pierdere astfel încât distorsiunea rezultată să fie aproape de cea optimă (indicată de funcția distorsiune-rată teoretică). Teoria rată-distorsiune ne spune că distorsiunea optimă $D(b)$ se poate exprima sub forma:

$$D(b) = \frac{1}{2} \min \left\{ E \left\{ (X_1 - \hat{X}_1)^2 + (X_2 - \hat{X}_2)^2 \right\} : I((X_1, X_2); (\hat{X}_1, \hat{X}_2)) \leq 2b \right\} \quad (4.41)$$

Aplicând transformarea Karhunen-Löeve secvenței X_i se obține secvența aleatoare Y_i . Deoarece transformarea Karhunen-Löeve este o transformare unitară, minimul din (4.41) se conservă dacă înlocuim perechea (X_1, X_2) cu coeficienții corespunzători (Y_1, Y_2) . Secvența de coeficienți rezultată în urma transformării, Y_1, Y_2, Y_3, \dots , poate fi reorganizată în două secvențe de variabile aleatoare gaussiene necorelate. Astfel secvența coeficienților de ordin impar,

$$Y_1, Y_3, Y_5, \dots \quad (4.42)$$

va fi o secvență aleatoare de variabile aleatoare independente, gaussiene, de medie nulă și dispersie constantă $\sigma_1^2 = \lambda_1$.

În mod similar secvența coeficienților de ordin par,

$$Y_2, Y_4, Y_6, \dots \quad (4.43)$$

va fi o secvență aleatoare de variabile aleatoare independente, gaussiene, de medie nulă și dispersie constantă $\sigma_2^2 = \lambda_2$. În expresiile de mai sus s-au notat cu λ_1, λ_2 valorile proprii, ($\lambda_1 > \lambda_2$), ale matricii de covarianță a sursei C_X .

Fiind impusă rata de bit medie b , codarea de bit optimă implică găsirea ratelor de bit $b_1, b_2 > 0$, cu $b_1 + b_2 = b$ și care minimizează distorsiunea:

$$D = \frac{1}{2} \left(\sigma_1^2 2^{-2b_1} + \sigma_2^2 2^{-2b_2} \right) \quad (4.44)$$

Altfel spus, distorsiunea optimă $D(b)$ poate fi scrisă:

$$D(b) = \frac{1}{2} \min \left\{ \sigma_1^2 2^{-2b_1} + \sigma_2^2 2^{-2b_2} : b_1, b_2 > 0, b_1 + b_2 = b \right\} \quad (4.45)$$

Rezultă soluțiile (în funcție de valoarea ratei de bit b):

$$\begin{cases} b_1 = b + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ b_2 = b - \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \end{cases}, b \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (4.46)$$

și, respectiv,

$$\begin{cases} b_1 = 2b \\ b_2 = 0 \end{cases}, 0 < b < \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (4.47)$$

cu distorsiunea minimă:

$$D(b) = \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 2^{-2b} & b \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\ \frac{1}{2} \left(\sigma_1^2 2^{-4b} + \sigma_2^2 \right) & 0 < b < \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \end{cases} \quad (4.48)$$

Astfel, procedura de codare optimă a secvenței aleatoare X_1, X_2, X_3, \dots considerate presupune:

- aplicarea transformării Karhunen-Löeve și formarea secvențelor (4.42), (4.43),
- codarea de bit optimă cu rate de bit date de ecuația (4.46) sau (4.47).

Capitolul V. Compresie de semnal prin codare în subbenzi

Împărțirea spectrului unui semnal, în vederea unei analize, în benzi de frecvențe diferite, este una dintre cele mai bine cunoscute modalități de a descompune un semnal pe componente. În acest capitol, similar capitolului precedent, semnalul supus analizei (prelucrării în vederea compresiei), se va presupune a fi un semnal în timp discret, $x[n]$, ce poate fi considerat ca fiind o realizare particulară a unui proces aleator. Transformările ortogonale, prezentate în capitolul precedent, sunt metode eficiente în cazul unei clase largi de semnale însă, după cum s-a văzut, ele nu scot în evidență anumite proprietăți specifice ale funcțiilor bazei descompunerii, cum ar fi de exemplu cele de localizare timp-frecvență. Descompunerea unui semnal în benzi de frecvențe diferite pune în evidență o localizare frecvențială bună a funcțiilor bazei descompunerii. Din punct de vedere al modului de implementare, este cel mai convenabil ca acest proces să fie privit ca fiind format dintr-un set finit de operații de filtrare aplicate semnalului în mod simultan, folosind filtre selective în frecvență. Filtrele utilizate sunt, în general, filtre liniare și invariante în timp discret. Ele pot fi caracterizate complet prin secvența răspuns la impuls a lor. După cum s-a văzut, într-o aplicație de compresie este important ca procedura de schimbare a spațiului de reprezentare a semnalului ce urmează a fi comprimat să nu implice o reprezentare redundantă, cu alte cuvinte, cantitatea de date (numărul total de eșantioane) obținută în urma acestei operații să nu fie mai mare decât cea a reprezentării sursă. Acest lucru presupune, în termenii ratei de bit asociată, o conservare a ratei totale de bit. Cum orice operație de filtrare conservă rata de bit a semnalului prelucrat, folosirea a M filtrări paralele ar duce la multiplicarea cu același factor a ratei totale de bit (fiecare filtru "producând" rata de bit a semnalului de intrare). Evitarea acestei multiplicări a cantității de date se poate asigura prin considerarea doar a anumitor valori ale secvențelor rezultate. În mod obișnuit acest lucru este făcut printr-o eșantionare uniformă a acestor secvențe, deci păstrarea doar tot a celui al K -lea eșantion al lor. Operația poartă denumirea și de subeșantionare sau decimare cu factorul K , deoarece se eșantionează, în general, o secvență de eșantioane filtrate. Trecerea semnalului prin banca de filtre este doar o operație prin care se schimbă spațiul reprezentării semnalului. Este de dorit, deci, ca această subeșantionare să nu ducă la pierdere de informație. Astfel, rezultă că factorul de subeșantionare K nu poate lua orice valoare. Pentru valori reduse avem de-a face cu redundanța mai sus menționată, iar pentru valori prea mari vom avea pierderi. Păstrarea constantă a ratei totale de bit a semnalului, înainte și după filtrare, implică un factor $K=M$, dacă se folosesc M filtre uniforme. Această situație este indicată frecvent prin termenul de subeșantionare (decimare) critică. În §3.1.1.6 am văzut că orice transformarea Wavelet ortogonală calculată pe un singur nivel se asociază cu o bancă de filtre pe două căi cu reconstrucție perfectă. Această analogie ne-a demonstrat că există bănci de filtre care pot oferi reconstrucție exactă chiar pentru cazul critic $K=M$, cu $M=2$. Justificarea o găsim într-o serie de lucrări cum sunt [Vai.87], [Vai.88], [Dau.88], [Vet.89], [Vet.92], [Gop.92a], [Her.93], etc. Bineînțeles, în aplicațiile de compresie cazul critic este cazul cel mai potrivit, dacă proprietatea de reconstrucție perfectă a băncii de filtre este asigurată. Structura generală a unei bănci de filtre cu M căi se prezintă în figura 5.1.

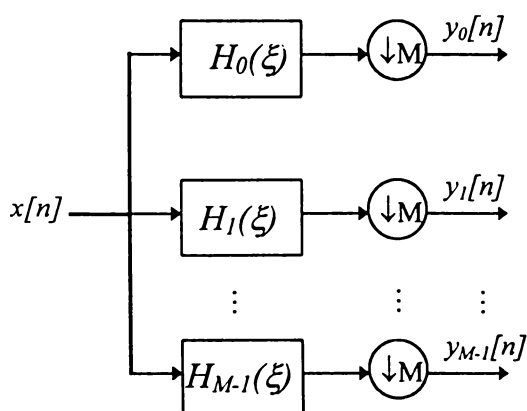


Figura 5.1. Bancă de filtre uniformă pe M căi

De fapt, vom vedea, că acest caz, prezentat în figura 5.1 este un caz particular, și-anume cazul în care pe fiecare cale avem același factor de subeșantionare, M . Vom vedea, de asemenea, că nu este obligatoriu ca toate căile să fie subeșantionate la fel, un exemplu deja prezentat fiind chiar algoritmul FWT reiterat, care am văzut că este echivalent cu o cascadă de bănci de filtre pe două căi cu reconstrucție perfectă (figura 3.6), și despre care vom arăta că poate fi pus sub forma unei bănci de filtre cu M căi (similar celei din figura 5.1), dar cu rate de subeșantionare diferite pe diferitele căi.

Schema din figura 5.1 caracterizează, în general, băncile de filtre formate din filtre cu lățimi egale ale benzilor de trecere. Aceste bănci de filtre poartă denumirea de bănci de filtre pe M căi uniforme. Dacă benzile de frecvențe ale acestor filtre au lățimi diferite avem de-a face cu o bancă de filtre neuniforme. Am văzut deja că aceste filtre trebuie să fie selective în frecvență, cu acoperiri spectrale pe cât se poate disjuncte (pentru a nu avea redundanță), motiv pentru care ele sunt, în marea lor majoritate, de tip trece-bandă. Excepție face primul filtru, $H_0(\xi)$, ce trebuie să acopere domeniul spectral pornind de la frecvența zero, motiv din care acesta este de tip trece-jos. Acoperirea spectrală ideală a unei bănci de filtre uniforme cu M căi se prezintă în figura 5.2.

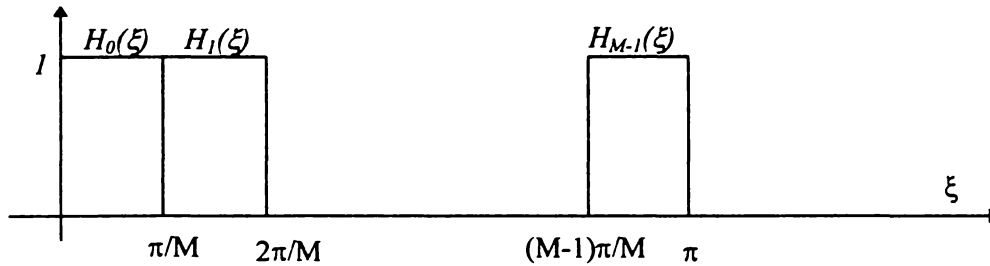


Figura 5.2. Răspunsul în frecvență ideal al filtrelor $H_j(\xi)$

Conform figurii 5.2. obținem o acoperire perfectă și neredundantă a domeniului spectral $[0, \pi]$, ce poate asigura, în anumite situații, o sinteză perfectă de semnal prin simpla însumare a componentelor $y_j[n]$, $j=0, \dots, M-1$. Vom vedea, de fapt, că această sinteză perfectă doar prin simplă însumare este greu de asigurat din cauza subeșantionărilor. Benzile de trecere ale filtrelor au lățimi egale, filtrele fiind cu localizare perfectă în frecvență. Însă ele prezintă dezavantajul major că sunt filtre necauzale și deci, nerealizabile. Din acest motiv toate băncile de filtre uniforme practice sunt implementări ce aproximează, într-o măsură mai bună sau mai puțin bună această caracteristică ideală.

Sistemele de codare în subbandă, sistemele *SBC* (*Subband Coding Scheme*), sunt poate cele mai importante aplicații ale băncilor de filtre. O schemă tipică de codare în subbenzi se prezintă în figura 5.3.

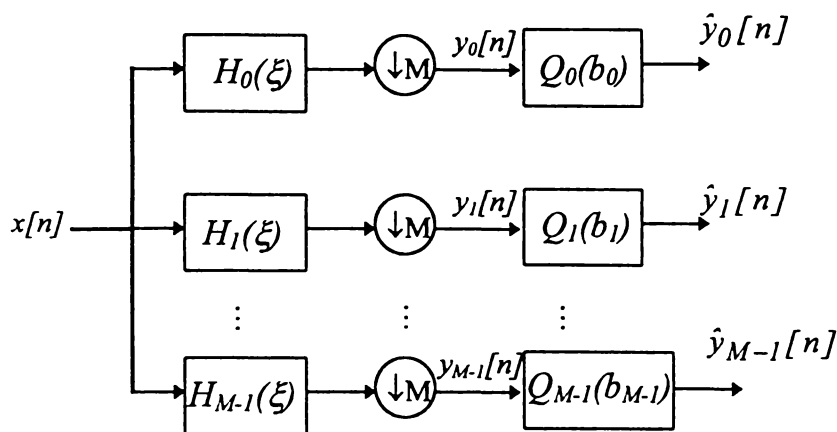


Figura 5.3. SBC uniformă pe M căi

Sistemul de codare în subbenzi din figura 5.3 este construit folosind o bancă de filtre pe M căi, similară celei din figura 5.1, și M cuantizoare, ce cuantizează valorile secvențelor subeșantionate obținute la ieșirile celor M filtre. De obicei aceste cuantizoare sunt cuantizoare scalare uniforme. Avantajul oferit de un astfel de sistem este că el poate fi caracterizat în mod similar sistemelor de codare cu transformări ortogonale. Astfel, conform celor spuse în capitolul precedent, câștigul de transformare a fost dat de faptul că diferiții coeficienți Y_k din domeniul transformat aveau, dacă valorile X_k proveneau dintr-un proces aleator staționar corelat, dispersii diferite, fapt ce ne-a permis folosirea unor cuantizoare diferite pentru codarea de bit a diferiților coeficienți Y_k , împărțind astfel

într-un mod mai eficient numărul total de biți disponibili pentru codarea a N eșantioane succesive. Și în cazul sistemului 5.3. putem folosi o argumentare similară. Presupunând că secvența $x[n]$ este o realizare particulară a unui proces aleator staționar și presupunând că densitatea spectrală de putere a acestuia prezintă o oarecare descreștere (așa cum se întâmplă de obicei în practică), ceea ce este echivalent cu a spune că procesul de intrare nu este un zgomot alb, dispunând de un număr mediu de biți b pentru codarea unui eșantion, vom putea alocă un număr mai mare de biți subbenzilor în care puterea semnalului este mai mare și un număr mai mic de biți subbenzilor cu puteri mai mici ale semnalului de prelucrat. Această situație este ilustrată, în mod intuitiv, în figura 5.4. Dacă densitatea spectrală de putere a semnalului de intrare, $DSP_x(\xi)$, este o funcție strict descrescătoare atunci alocarea de biți optimă va rezulta într-o secvență de biți alocați diferitelor subbenzi b_0, b_1, \dots, b_{M-1} tot descrescătoare cu o medie b impusă.

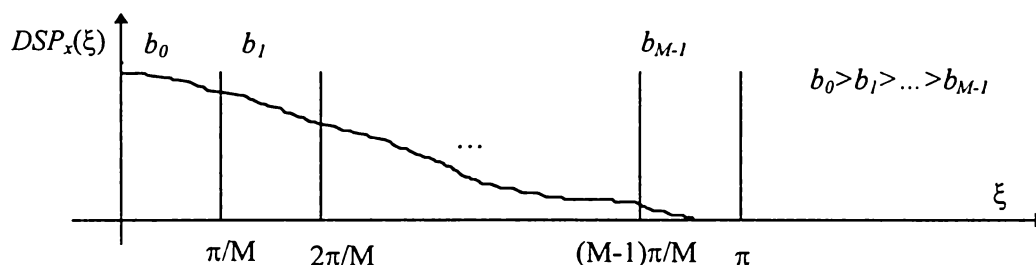


Figura 5.4. Alocare de biți optimă în cazul unui SBC

Se observă faptul că există o analogie în ceea ce privește caracterizarea optimalității sistemelor de codare în subbenzi și a celor cu transformări ortogonale, motiv pentru care pot fi folosite unele rezultate (adaptate situației curente) obținute în capitolul precedent, și-anume, algoritmul de alocare optimă a biților prezentat în §4.5. Deosebirea constă în faptul că acea procedură prevede un număr de biți de cuantizare diferit pentru fiecare coeficient al transformării în timp ce în cazul SBC alocarea de bit se face pentru fiecare subbandă (eșantioanele succesive din fiecare subbandă vor fi cuantizate pe același număr de biți). Se observă deci, că avantajul major al sistemelor de codare în subbenzi rezidă în faptul că ele permit prelucrarea în mod diferențiat a semnalelor din diferitele subbenzi. Acest avantaj poate fi combinat cu posibilitatea prelucrării adaptive în domeniul timp a secvenței de intrare $x[n]$ în sensul îmbunătățirii procedurii de alocare de bit mai sus menționată prin alocarea unui număr mediu de bit pe eșantion mai mare în intervalele de timp în care energia semnalului este mai semnificativă și invers, alocarea unui număr de biți mai mic în intervalele în care energia semnalului este mai mică sau nesemnificativă. Acest lucru este echivalent, de fapt, cu renunțarea la cuantizoare fixe și folosirea unor cuantizoare adaptive, cu pasul de cuantizare variabil în timp.

Reconstrucția unui semnal codat în subbenzi conform procedurii mai sus menționate se poate face cu un sistem similar celui de codare, folosind și de această dată tot M filtre. Schema de principiu a decodurului se prezintă în figura 5.5.

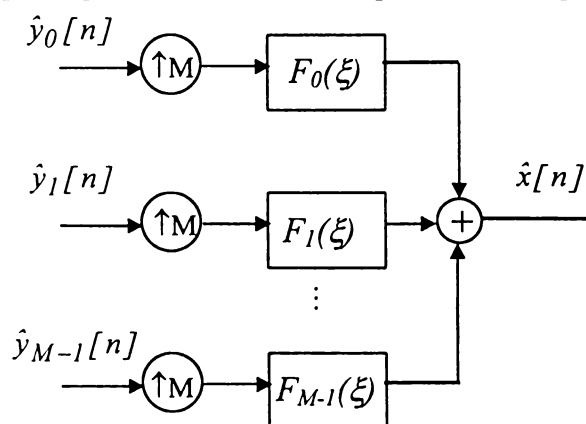


Figura 5.5. SBC de reconstrucție

Sistemul din figura 5.5. realizează reconstrucția (sinteza) unui semnal codat în subbenzi. Figura 5.5 pune în evidență o reconstrucție printr-o însumare ponderată a M semnale. Aceste semnale sunt obținute pornind de la cele M secvențe de cod $\hat{y}_j[n], j=0, \dots, M-1$, prin interpolare cu un factor M . Interpolarea presupune inserarea a $M-1$ zerouri între două valori succesive ale secvenței de intrare. Se obțin astfel secvențe interpolate cu un număr de eșantioane egal cu cel al secvenței inițiale, $x[n]$. Ponderarea acestor secvențe se realizează cu ajutorul al celor M filtre de reconstrucție $F_j(\xi), j=1, \dots, M-1$, filtre ce sunt denumite și filtre de sinteză.

În cele ce urmează vor fi studiate componentele majore ale sistemelor de codare în subbenzi, cu accentul pus pe dimensionarea filtrelor de analiză și a celor de sinteză, urmărind o proiectare optimală în condițiile în care semnalul de la intrare este cunoscut. De asemenea va fi analizată legătura dintre cele două familii de filtre, căutând acele sisteme care permit, în absența cuantizoarelor, o reconstrucție perfectă a semnalului prelucrat. Având în vedere acest deziderat, ne vom interesa, cu precădere, de băncile de filtre cu reconstrucție perfectă, de tip *PR* (*Perfect Reconstruction*). Vor fi analizate legăturile existente dintre aceste sisteme și sistemele Wavelet, analogie parțial abordată în §3.1.1.6.

5.1. Caracterizarea băncilor de filtre de tip PR

În acest paragraf se urmărește stabilirea condițiilor în care o bancă de filtre este cu reconstrucție perfectă. În acest scop vor fi descrise principalele operații ale băncilor de filtre: subeșantionare, filtrare liniară, interpolare. În această caracterizare principala unealtă folosită va fi transformarea Z .

Vom nota transformata Z a unei secvențe numerice $x[n]$ cu $X(z) = Z\{x[n]\}(z) = \sum_n x[n] \cdot z^{-n}$, o funcție complexă de variabila $z \in C$. Ea se definește în mod similar și în cazul secvențelor h_k ce reprezintă răspunsul la impuls al unor filtre liniare, prin $H(z) = Z\{h_k\}(z) = \sum_k h_k \cdot z^{-k}$.

5.1.1. Subeșantionarea

Subeșantionarea cu factorul M , prezentă în băncile de filtre de analiză de forma celei din figura 5.1, este prezentată schematic în figura 5.6, și se poate descrie conform ecuației:

$$\begin{array}{c} x[n] \rightarrow \textcircled{\downarrow M} \rightarrow y[n] \end{array} \quad y[n] = (\downarrow M)x[n] = x[Mn] \quad (5.1)$$

Figura 5.6. Subeșantionare cu un factor M

Relația (5.1) pune în evidență operatorul de subeșantionare cu factorul M , $(\downarrow M)$.

Ea poate fi rescrisă, în termenii transformatelor Z asociate secvențelor $x[n]$ și $y[n]$, ca :

$$Y(z) = \sum_n y[n] z^{-n} = \sum_n x[Mn] z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z \frac{1}{M} e^{-j \frac{2\pi k}{M}}\right) \quad (5.2)$$

[Gop.93].

Caracterizarea sistemului de subeșantionare în domeniul frecvență poate fi făcută prin legătura dintre transformatele Fourier în timp discret (*DTFT*) ale secvențelor $y[n]$ și $x[n]$, $Y(\xi)$ și $X(\xi)$. Această legătură poate fi găsită prin evaluarea transformatelor Z implicate în (5.2) pe cercul unitate, $|z|=1$, din planul variabilei z . $|z|=1$ este echivalent cu $z = e^{j\xi}$, și notând:

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= DTFT\{y[n]\} = Y(z)\Big|_{z=e^{j\xi}} \\ X(\xi) &= DTFT\{x[n]\} = X(z)\Big|_{z=e^{j\xi}} \end{aligned} \quad (5.3)$$


se obține:

$$Y(\xi) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{1}{M}(\xi - 2\pi k)\right) \quad (5.4)$$

Ecuția (5.4) pune în evidență fenomenul de aliere spectrală cauzată de eșantionare în cazul în care secvența eșantionată $x[n]$ nu este de bandă limitată.

5.1.2. Interpolarea

Procedura de interpolare cu un factor M , prezentă în băncile de filtre de sinteză, este prezentată schematic în figura 5.7. Ea poate fi descrisă de ecuația:



$$y[n] = (\uparrow M)x[n] = \begin{cases} x[n/M] & n = kM \\ 0 & n \neq kM \end{cases} \quad (5.5)$$

$k \in \mathbb{Z}$

Figura 5.7. Interpolare cu un factor M

Caracterizarea operației de interpolare (5.5) în termenii transformatei Z se poate face conform cu:

$$Y(z) = \sum_n y[n]z^{-n} = \sum_n x[n]z^{-Mn} = X(z^M) \quad (5.6)$$

Caracterizarea sistemului de interpolare din figura 5.7 în domeniul frecvență, folosind notațiile (5.3) se poate face conform cu:

$$Y(\xi) = \sum_n y[n]e^{-j\xi n} = \sum_n x[n]e^{-j\xi Mn} = X(M\xi) \quad (5.7)$$

Caracterizarea băncilor de filtre de analiză și sinteză în a căror componență intră sisteme de subeșantionare și respectiv de interpolare poate fi simplificată prin considerarea reprezentărilor polifază ale secvențelor numerice.

5.1.3. Reprezentarea polifază a secvențelor numerice

Fie $x[n]$ o secvență numerică (un semnal în timp discret) și $X(z)$ transformata sa Z . Prin definiție, reprezentarea polifază directă asociată secvenței $x[n]$ este secvența vectorială:

$$\bar{x}_M[n] = [x_0[n] \quad x_1[n] \quad \dots \quad x_{M-1}[n]]^T$$

$$\text{cu: } x_k[n] = x[Mn - k] = (\downarrow M)x[n - k], \quad k=0, \dots, M-1 \quad (5.8)$$

În mod similar, prin definiție reprezentarea polifază duală a secvenței $x[n]$ este secvența vectorială:

$$\tilde{x}_M[n] = [\tilde{x}_0[n] \quad \tilde{x}_1[n] \quad \dots \quad \tilde{x}_{M-1}[n]]^T$$

$$\text{cu: } \tilde{x}_k[n] = x[Mn + k] = (\downarrow M)x[n + k], \quad k=0, \dots, M-1 \quad (5.9)$$

Notând cu:

$$X_k^p(z) = Z\{x_k[n]\} \quad (5.10)$$

transformata Z a unei secvențe $x_k[n]$, se poate scrie:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^k X_k^p(z^M) \quad (5.11)$$

Observații: a) definiția (5.8) pune în evidență construcția a M secvențe prin aplicarea operației de subeșantionare versiunilor decalate ale secvenței de intrare $x[n]$;

b) relația (5.11) indică o sinteză a secvenței $x[n]$ din cele M secvențe anterior construite prin însumarea versiunilor interpolate și adecvat decalate ale lor.

Cele două observații pot fi puse sub forma identității din figura 5.8.

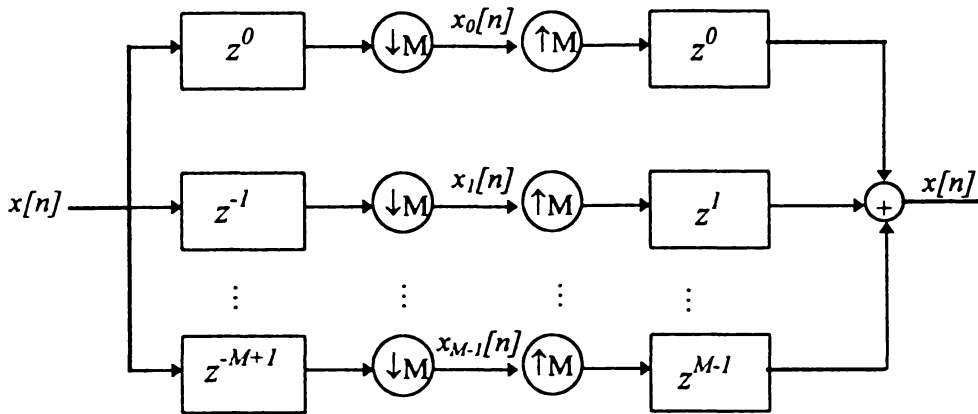


Figura 5.8. Legătura dintre o secvență $x[n]$ și reprezentarea sa polifază, $\bar{x}_M[n]$

5.1.4. Echivalențe remarcabile de sisteme

5.1.4.1. Filtrare-subșantionare

Fie sistemul din figura 5.9 în care:

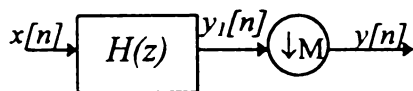


Figura 5.9. Filtrare-subșantionare

$H(z)$ este un filtru liniar și invariant în timp discret. Notând cu $h[n]$ răspunsul la impuls al acestuia, se poate scrie:

$$\begin{aligned} y[n] &= (\downarrow M)y_1[n] = (\downarrow M)(x[n] * h[n]) = \\ &= \sum_k h[k] \cdot x[Mn - k] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Făcând schimbarea de variabilă $k = Mp + l$ această ecuație poate fi scrisă sub forma:

$$y[n] = (\downarrow M)y_1[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{M-1} h[Mp + l] \cdot x[M(n - p) - l] \quad (5.13)$$

Aplicând transformarea Z ecuației (5.13), rezultă:

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{M-1} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} h[Mp + l] z^{-p} X_l^p(z) \right) = \sum_{l=0}^{M-1} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} h[Mp + l] z^{-p} \right) X_l^p(z) \quad (5.14)$$

unde s-a folosit definiția (5.8) și notația (5.10).

În expresia din paranteză recunoaștem transformata Z, $\tilde{H}_l^p(z)$, a reprezentării polifază duale a secvenței $h[n]$, $\tilde{h}_l^p[n] = h[Mn + l] = (\downarrow M)h[n + l]$ (indicele superior p a fost introdus din dorința evitării confuziilor dintre aceste componente polifază ale unui singur filtru și diferitele filtre H ale unei bănci de filtre ca cea din figura 5.1).

Cu aceste notații (5.14) devine:

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{M-1} \tilde{H}_l^p(z) \cdot X_l^p(z) \quad (5.15)$$

Relația (5.15) arată că sistemul din figura (5.9) este echivalent cu cel din figura (5.10).

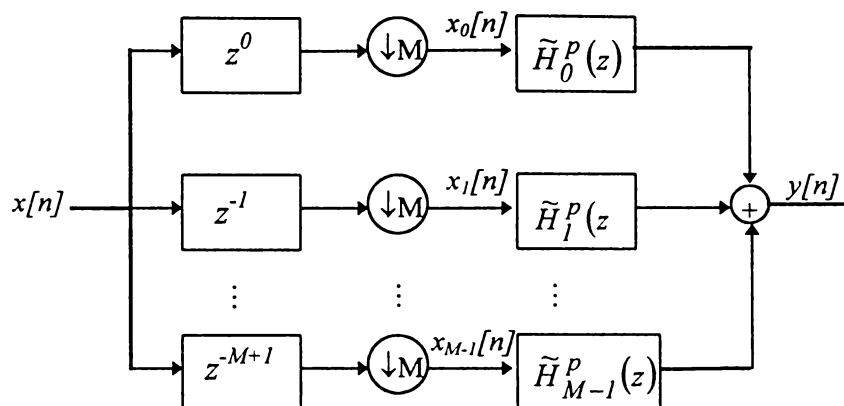


Figura 5.10. Sistem echivalent de filtrare subeșantionare

5.1.4.2. Subeșantionare-filtrare

Fie sistemul din figura 5.11.

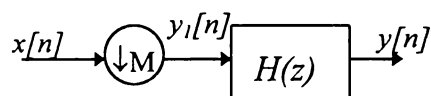


Figura 5.11. Subeșantionare-filtrare

Presupunând că filtrul $H(z)$ este un filtru liniar și invariant în timp discret și notând cu $h[n]$ răspunsul la impuls al acestuia, se poate scrie:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * ((\downarrow M)x[n]) = \sum_k h[k] \cdot x[M(n-k)] = \\ &= \sum_k h[M^{-1}Mk] \cdot x[Mn - Mk] = \sum_{k'} h[M^{-1}k'] x[Mn - k'] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Relația (5.17) poate fi scrisă sub forma:

$$y[n] = (\downarrow M)((\uparrow M)h[n] * x[n]) \quad (5.18)$$

Rezultă sistemul echivalent al celui din figura 5.11 de forma arătată în figura 5.12.

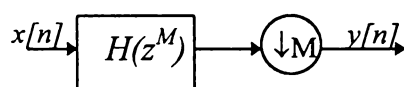


Figura 5.12. Sistem echivalent
Subeșantionare-filtrare

Această echivalență este utilă deoarece ea ne permite să schimbăm ordinea a două operații, una variantă în timp (subeșantionarea) și una liniară și invariantă în timp (filtrarea).

5.1.4.3. Filtrare-interpolare

Fie sistemul din figura 5.13

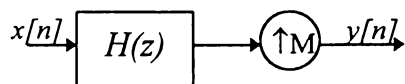


Figura 5.13. Sistem filtrare-interpolare

unde filtrul $H(z)$ este un filtru liniar și invariant în timp discret cu răspunsul la impuls notat $h[n]$.

Se poate scrie:

$$y[n] = (\uparrow M)(h[n] * x[n]) = (\uparrow M)\sum_k h[k] \cdot x[n-k] \quad (5.19)$$

Aplicând transformarea Z ecuației (5.19) ea devine:

$$Y(z) = H(z^M) \cdot X(z^M) \quad (5.20)$$

Aceasta sugerează un sistem echivalent celui din figura 5.13 de forma arătată în fig. 5.14

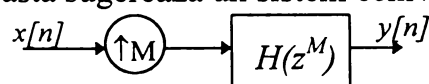


Figura 5.14. Sistem echivalent filtrare-
interpolare

Această echivalență este utilă deoarece și ea ne permite să schimbăm ordinea a două operații, una variantă în timp (interpolarea) și una liniară și invariantă în timp (filtrarea).

5.1.4.4. Interpolare-filtrare

Să considerăm sistemul din figura 5.15.

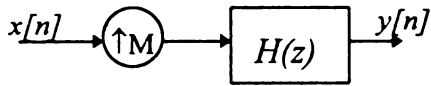


Figura 5.15. Sistem interpolare-filtrare

Notând cu $h[n]$ răspunsul la impuls al filtrului liniar $H(z)$, se poate scrie:

$$y[n] = ((\uparrow M)x[n]) * h[n] \quad (5.21)$$

Aplicând transformarea Z ecuației (5.21), rezultă:

$$Y(z) = X(z^M) \cdot H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^l H_l^p(z^M) X(z^M) \quad (5.22)$$

unde s-a folosit definiția (5.8) și rezultatul (5.11). Reamintim, $H_l^p(z)$ reprezintă transformata Z a componentei l din reprezentarea polifază directă a secvenței $h[n]$, $h_l[n] = h[Mn - l]$.

Relația (5.22) arată că sistemul din figura 5.15 este echivalent cu cel din figura 5.16.

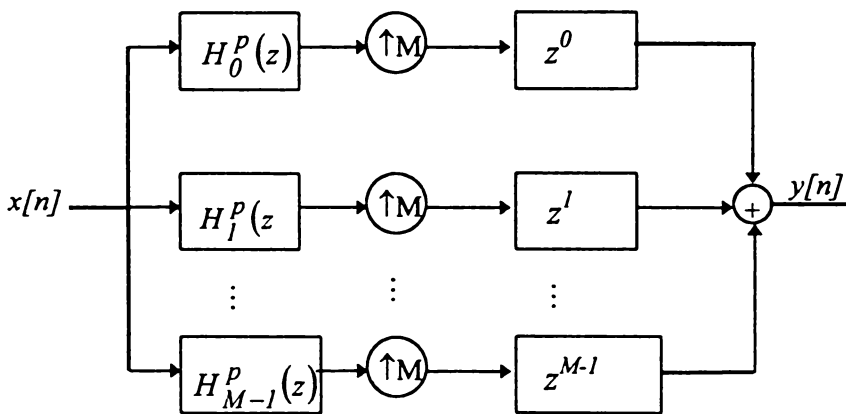


Figura 5.16. Sistem echivalent de interpolare-filtrare

5.1.5. Bănci de filtre de tip PR unitare

Să considerăm o bancă de filtre uniformă pe M căi cu structura prezentată în figura 5.17.

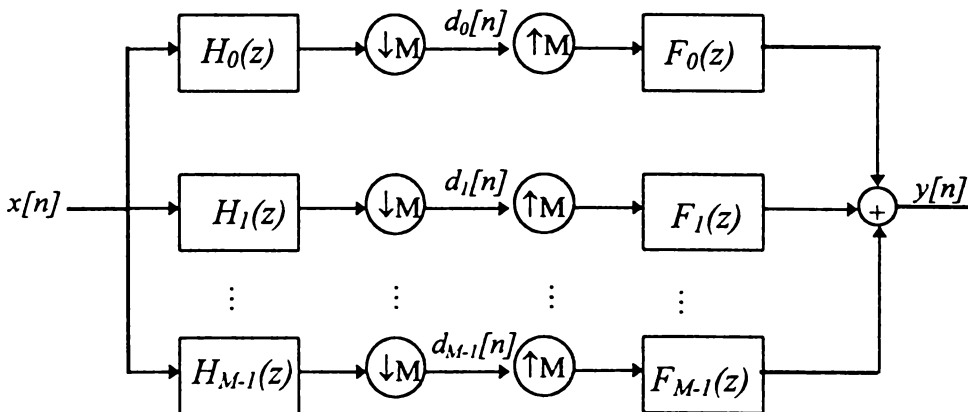


Figura 5.17. Bancă de filtre uniformă pe M căi

Semnalul de intrare $x[n]$ este trecut prin cele M filtre de analiză, notate $H_i(z), i = 0, \dots, M - 1$ (unde, spre deosebire de notația din paragraful anterior, indicele i indexează diferitele filtre din structura

sistemului). Este de dorit ca răspunsul în frecvență al acestor filtre să fie cel ideal, conform figurii 5.3. Ieșirile acestor filtre sunt denumite semnale subbandă. Semnalele subbandă sunt apoi subeșantionate cu un factor M obținând secvențele $d_i[n], i=1, \dots, M-1$. Reamintim, în cadrul unei aplicații de compresie (un sistem SBC), valorile acestor secvențe urmează să fie codate. În partea de sinteză a băncii de filtre secvențele sunt interpolate iar versiunile lor filtrate sunt însumate. Filtrele folosite, notate $F_i(z), i=0, \dots, M-1$, poartă denumirea de filtre de sinteză. O problemă majoră în construcția băncilor de filtre o reprezintă dimensionarea (construcția) adecvată a celor două familii de filtre (cele de analiză și cele de sinteză). În general se urmărește ca secvența $y[n]$ de la ieșirea sistemului din figura 5.17 să aproximeze foarte bine semnalul de intrare $x[n]$. De multe ori se cere ca aceasta să fie de forma:

$$y[n] = a \cdot x[n - n_0], \quad n_0 \in \mathbb{Z}, a = ct. \quad (5.23)$$

deci, semnalul $y[n]$ să fie o versiune atenuată (sau amplificată) și întârziată a celui de la intrare, $x[n]$. Notând cu $f_j[n]$ răspunsurile la impuls ale filtrelor de sinteză, condiția (5.23) impusă sistemului considerat va putea fi rescrisă sub forma:

$$y[n] = x[n] \quad (5.24)$$

dacă în loc de secvențele $f_j[n]$ sunt folosite secvențele de forma $a^{-1} f_j[n + n_0]$ ca și răspunsuri la impuls ale filtrelor de sinteză. Condiția (5.24) poartă denumirea de condiția de reconstrucție perfectă, iar sistemele ce o verifică sunt denumite și ele cu reconstrucție perfectă deci, de tip *PR*. Cu toate că forma (5.24) a acestei condiții este cea ce corespunde exact denumirii date, expresia (5.23) este mult mai des întâlnită în cazul sistemelor practice deoarece ea permite ca atât filtrele de analiză cât și cele de sinteză să fie sisteme cauzale. Acest deziderat, precum și cerința de tip *PR* și aproximarea răspunsului în frecvență ideal al filtrelor (cel din figura 5.3) constituie punctul de plecare în dimensionarea practică a unor serii largi de bănci de filtre, [Dau.88], [Vai.88], [Vet.92].

În cele ce urmează vom analiza modul în care se reflectă cerința de tip *PR* în construcția filtrelor de analiză și sinteză utilizate. Se observă faptul că în structura sistemului din figura 5.17 pe fiecare cale sunt implicate secvențe similare de operații: filtrare-subeșantionare-interpolare-filtrare. Folosind echivalențele filtrare-subeșantionare și interpolare-filtrare, prezentate în paragrafele anterioare (§5.1.4.2., §5.1.4.4.), se poate schimba ordinea operațiilor din secvența mai sus menționată. Astfel, conform schemelor echivalente din figurile 5.10 și 5.16, noua ordine a acestor operații va fi: subeșantionare-filtrare-filtrare-interpolare. S-a obținut astfel ca cele două sisteme de filtrare, care sunt liniare și invariante în timp, să fie conectate în cascadă. Acest lucru ne permite caracterizarea ansamblului format din cele două operații de filtrare prin intermediul unei sigure filtrări echivalente. Se observă, de asemenea, că schemele echivalente din figurile 5.10 și 5.16 implică abordarea acestor operații în termenii reprezentărilor polifază asociate atât semnalelor cât și filtrelor ce apar. Folosind notația (5.10) pentru transformatele Z ale componentelor polifază implicate, caracterizarea unei căi j a sistemului din figura 5.17 poate fi făcută în termenii funcțiilor complexe notate prin $X_k^p(z), Y_k^p(z), F_{j,k}^p(z)$ și $\tilde{H}_{j,k}^p(z)$. Aceste funcții verifică, conform (5.10):

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} z^k X_k^p(z^M) \\ Y(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} z^k Y_k^p(z^M) \\ F_j(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} z^k F_{j,k}^p(z^M), \quad j=0,1,\dots,M-1 \end{aligned}$$

$$H_j(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \tilde{H}_{j,k}^P(z^M), j=0,1,\dots,M-1 \quad (5.25)$$

Se observă faptul că în timp ce sunt implicate reprezentările polifază directe asociate semnalelor de intrare $x[n]$ și $y[n]$ și filtrelor de sinteză $F_j(z)$, $j=0,\dots,M-1$ filtrele de analiză $H_j(z)$, $j=0,\dots,M-1$ implică reprezentările polifază duale corespunzătoare. Schema echivalentă a unei căi j a sistemului din figura 5.17 este prezentată în figura 5.18.

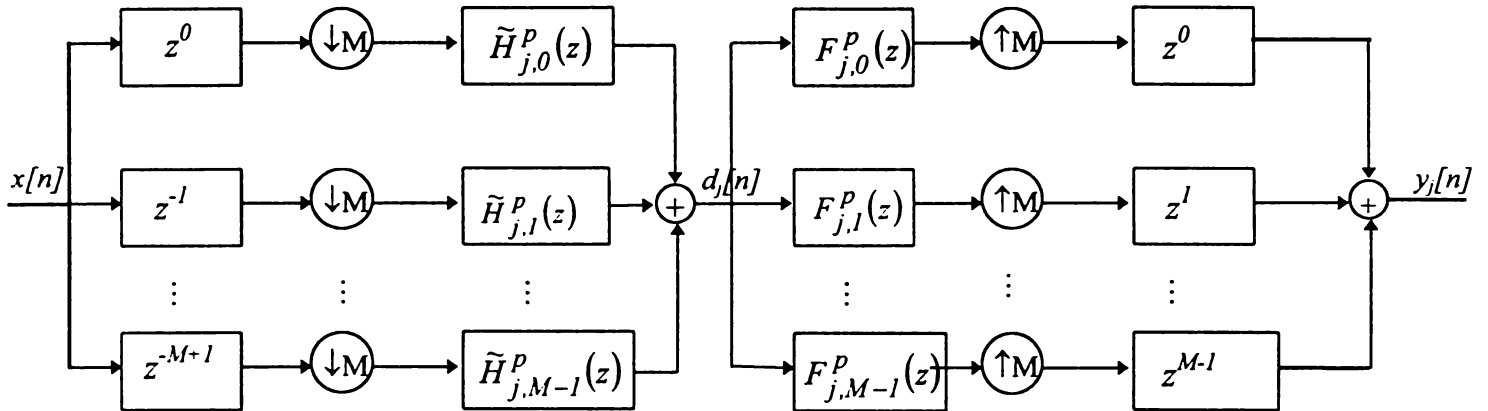


Figura 5.18. Sistemul echivalent căii j a unei bănci de filtre

Partea centrală a schemei echivalente din figura 5.18 poate fi privită ca un sistem multiport liniar și invariant în timp, un sistem cu M intrări și M ieșiri. Intrările sistemului sunt componentele polifază ale semnalului $x[n]$ iar ieșirile sunt componentele similare ale semnalului $y[n]$. Aplicând rezultatele (5.15), se obține:

$$D_j(z) = \sum_{l=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,l}^P(z) \cdot X_l^P(z), j=0,\dots,M-1 \quad (5.26)$$

Considerând cele M rezultate (5.26) obținute pentru diferitele valori j , și aplicând rezultatului (5.20) sistemului din figura (5.17), se obține:

$$Y_k^P(z) = \sum_{j=0}^{M-1} F_{j,k}^P(z) \cdot D_j(z) \quad (5.27)$$

Ecuțiile (5.26) și (5.27) pot fi rescrise sub o formă mai compactă, folosind o notație matricială. Astfel, fie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_M(z) &= [D_0(z) \ D_1(z) \ \dots \ D_{M-1}(z)]^T \\ \bar{\mathbf{X}}_M(z) &= [X_0^P(z) \ X_1^P(z) \ \dots \ X_{M-1}^P(z)]^T \\ \bar{\mathbf{Y}}_M(z) &= [Y_0^P(z) \ Y_1^P(z) \ \dots \ Y_{M-1}^P(z)]^T \end{aligned} \quad (5.28)$$

vectorii coloană ai funcțiilor $D_j(z)$, $X_j^P(z)$ și respectiv $Y_j^P(z)$, $j=0, \dots, M-1$;

$$\mathbf{H}_M(z) := \left\{ (\mathbf{H}_M)_{j,k}(z) = \tilde{H}_{j,k}^P(z) \right\}_{j,k=0,\dots,M-1} \quad (5.29)$$

matricea polifază de analiză, și

$$\mathbf{F}_M(z) := \left\{ (\mathbf{F}_M)_{j,k}(z) = F_{j,k}^P(z) \right\}_{j,k=0,\dots,M-1} \quad (5.30)$$

matricea polifază de sinteză.

Cu notațiile (5.28), (5.29) și (5.30) ecuațiile (5.26) și (5.27) se rescriu sub forma compactă:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_M(z) &= \mathbf{H}_M(z) \cdot \bar{\mathbf{X}}_M(z) \\ \bar{\mathbf{Y}}_M(z) &= \mathbf{F}_M^T(z) \cdot \bar{\mathbf{D}}_M(z) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Din cele două ecuații vectoriale rezultă:

$$\bar{Y}_M(z) = F_M^T(z) \cdot H_M(z) \cdot \bar{X}_M(z) \quad (5.32)$$

În expresia (5.32) recunoaștem o caracterizare a multiportului liniar mai sus amintit.

Condiția de reconstrucție perfectă (5.24) în termenii notațiilor (5.28) este echivalent cu:

$$\bar{Y}_M(z) = \bar{X}_M(z) \quad (5.33)$$

cea ce implică, conform rezultatului (5.32), condiția necesară:

$$F_M^T(z) \cdot H_M(z) = I_M \quad (5.34)$$

De fapt, condiția (5.34) este și o condiție suficientă pentru ca banca de filtre din figura 5.17 să fie cu reconstrucție perfectă [Gop.93].

În construcția băncilor de filtre sunt utile următoarele echivalențe, date sub forma unor teoreme, ale acestei condiții de reconstrucție perfectă a lor:

Teorema 5.1.

$\{H_i(z), F_i(z)\}_{i=0, \dots, M-1}$ formează filtrele de analiză și respectiv de sinteză ale unei bănci de filtre de tip PR dacă:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \sum_n h_j[Mn+k] \cdot f_j[-Mn-l] = \delta_{kl} \quad (5.35)$$

Demonstrație:

Transpunând identitatea vectorială (5.34) se obține:

$$H_M^T(z) \cdot F_M(z) = I_M \quad (5.36)$$

Această identitate vectorială, (5.36), poate fi rescrisă sub forma unei mulțimi de identități scalare:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^p(z) \cdot F_{j,l}^p(z) = \delta_{kl}, \quad \forall k, l = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.37)$$

Considerăm funcția:

$$g[k, l] = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_n h_j[Mn+k] \cdot f_j[-Mn-l]$$

pentru $\forall n \in Z$ se verifică imediat proprietatea:

$$g[k+Mn, l+Mn] = g[k, l]$$

pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, M-1\}, l \in Z$.

Fie $l = -Mr + m, m \in \{0, 1, \dots, M-1\}, r \in Z$, atunci $g[k, l]$ va avea forma:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \sum_n h_j[Mn+k] \cdot f_j[M(r-n)-m] = \alpha_{k,m}[r]$$

Aplicând transformata Z expresiei de mai sus, după variabila independentă r , se obține:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^p(z) \cdot F_{j,m}^p(z) = \Lambda_{k,m}(z)$$

identitatea (5.37) ne arată faptul că funcția $\Lambda_{k,m}(z)$ este identic nulă, cu excepția cazului $m = k$.

Rezultă, aplicând transformata Z inversă, $\alpha_{k,m}[r] = 0$ pentru $m \neq k$. Pentru $m = k$ avem

$\Lambda_{k,k}(z) = 1, \forall z \in C$, deci $\alpha_{k,k}[r] = \delta_r$. Astfel, rezultă că această secvență $\alpha_{k,k}[r]$ este identic nulă cu

excepția punctului $r=0$. Însă $r=0$ implică $l = m$, caz în care se poate scrie $g[k, l] = \alpha_{k,l}[0]$. Rezultă

imediat identitatea cerută:

$$g[k, l] = \delta_{kl}$$

Teorema 5.2.

$\{H_i(z), F_i(z)\}_{i=0, \dots, M-1}$ formează filtrele de analiză și respectiv de sinteză ale unei bănci de filtre de tip PR dacă:

$$\sum_k h_i[k] \cdot f_j[Mn - k] = \delta_n \cdot \delta_{ij} \quad (5.38)$$

Demonstrație:

Definim funcția auxiliară $\alpha[r] = \sum_k h_i[k] \cdot f_j[Mr - k]$. Transformata Z a acestei secvențe rezultă de

$$\text{forma: } Z\{\alpha[r]\} = (\downarrow M)H_i(z)F_j(z)$$

Folosind reprezentările polifază (5.25) ale celor două funcții, expresia de mai sus poate fi scrisă sub forma:

$$(\downarrow M)H_i(z)F_j(z) = (\downarrow M) \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} z^{-k} \tilde{H}_{i,k}^P(z^M) \cdot z^l F_{j,l}^P(z^M)$$

Ținând cont de identitatea:

$$(\downarrow M)z^k = \begin{cases} z^m & k = Mm \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (5.39)$$

și cum $k - l$ nu poate să fie multiplu întreg al lui M , pentru nici o valoare $k, l = 0, 1, \dots, M - 1$, rezultă:

$$(\downarrow M)H_i(z)F_j(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{H}_{i,k}^P(z) \cdot F_{j,k}^P(z)$$

Înlocuind în această relație expresia scalară a identității (5.34) găsim:

$$\sum_{k=0}^{M-1} \tilde{H}_{i,k}^P(z) \cdot F_{j,k}^P(z) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (5.40)$$

și aplicând transformata Z inversă rezultatului obținut, se obține identitatea (5.38).

Observație:

Teoremele 5.1 și respectiv 5.2 deduc condiții temporale, ce implică direct secvențele răspuns la impuls ale filtrelor de analiză și sinteză, echivalente condițiilor necesare și suficiente (5.34) sau (5.36) date în termenii unor transformate Z.

Rezultatele obținute permit obținerea, prin particularizare, a unor expresii de condiții necesare, exprimate sub diverse forme, dintre care cele mai utile sunt cele exprimate în domeniul frecvență.

Folosind reprezentările polifază (5.25) ale funcțiilor $H_j(z)$ și respectiv $F_j(z)$, produsul acestora rezultă de forma:

$$H_j(z) \cdot F_j(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^P(z^M) \cdot F_{j,k}^P(z^M), \quad \forall j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (5.41)$$

Pe de altă parte, condiția (5.37) trebuie să fie satisfăcută pentru orice valoare a variabilei z , rezultă că ea trebuie să fie satisfăcută și pentru orice valoare a lui z^M . Astfel, ea poate fi scrisă:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^P(z^M) \cdot F_{j,l}^P(z^M) = \delta_{kl}, \quad \forall k, l = 0, 1, \dots, M - 1$$

Însumând expresia (5.41) după variabila j , și ținând cont de identitatea de mai sus, se obține:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{M-1} H_j(z) \cdot F_j(z) &= \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^P(z^M) \cdot F_{j,k}^P(z^M) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{j=0}^{M-1} \tilde{H}_{j,k}^P(z^M) \cdot F_{j,k}^P(z^M) \right) = \sum_{k=0}^{M-1} 1 = M \end{aligned}$$

Rezultă, deci:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} H_j(z) \cdot F_j(z) = 1 \quad (5.42)$$

o condiție necesară ca sistemul să poată să fie de tip “cu reconstrucție perfectă”. Se observă faptul că această condiție este una ce implică în mod direct filtrele de analiză și respectiv de sinteză din structura sistemului din figura 5.17.

Restricția pe cercul unitate din planul complex a identității (5.42) implică:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_j(\xi) \cdot F_j(\xi) = 1 \quad (5.43)$$

În mod similar, echivalentul din domeniul frecvență a condiției (5.38) poate fi exprimată sub forma:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_i \left(\frac{1}{M} (\xi - 2\pi k) \right) \cdot F_j \left(\frac{1}{M} (\xi - 2\pi k) \right) = \delta_{ij} \quad (5.44)$$

În concluzie, condițiile frecvențiale ce trebuie să fie verificate de către o bancă de filtre cu reconstrucție perfectă sunt cele date de relațiile (5.43) și (5.44).

Definiția 5.1

Prin definiție o bancă de filtre cu structura din figura 5.17 este *unitară* dacă:

$$\mathbf{H}_M^T(z^{-1}) \cdot \mathbf{H}_M(z) = \mathbf{I}_M \text{ sau, echivalent } \mathbf{H}_M(z) \cdot \mathbf{H}_M^T(z^{-1}) = \mathbf{I}_M \quad (5.45)$$

Definiția 5.1 implică, în cazul sistemelor cu reconstrucție perfectă și unitare, egalitatea:

$$\mathbf{F}_M(z) = \mathbf{H}_M(z^{-1}) \quad (5.46)$$

condiție verificată dacă se aleg răspunsuri la impuls de forma:

$$f_j[n] = h_j[-n] \quad (5.47)$$

Înlocuind această condiție suficientă în identitățile (5.35) și (5.38) se obțin expresii ale unor condiții necesare și suficiente ca o bancă de filtre de tip PR să fie unitară. Astfel, se poate spune că o bancă de filtre cu reconstrucție perfectă este unitară dacă sunt verificate condițiile:

$$\sum_{j=0}^{M-1} \sum_n h_j[Mn+k] \cdot h_j[Mn+l] = \delta_{kl} \quad (5.48)$$

și, respectiv:

$$\sum_n h_i[n] \cdot h_j[Mk+n] = \delta_k \cdot \delta_{ij} \quad (5.49)$$

În mod similar, condițiile frecvențiale (5.43) și (5.44) se pot scrie în acest caz sub forma:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |H_j(\xi)|^2 = 1 \quad (5.50)$$

și, respectiv:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_i \left(\frac{1}{M} (\xi - 2\pi k) \right) \cdot H_j^* \left(\frac{1}{M} (\xi - 2\pi k) \right) = \delta_{ij} \quad (5.51)$$

Observații:

- a) conform (5.47) un filtru de analiză $H_j(z)$ cauzal implică un filtru de sinteză $F_j(z)$ anticauzal;
- b) având în vedere cele două expresii similare (5.23) și (5.24) ale condiției de reconstrucție perfectă, observația de mai sus implică faptul că singurele sisteme unitare realizabile implică filtre cu răspuns finit la impuls, de tip FIR, caz în care filtrele de sinteză vor putea fi făcute cauzale printr-o operație de translație (conform (5.47) ele rezultând de tipul finit-necauzal);
- c) conform concluziilor de mai sus, notând cu L lungimea maximă a filtrelor de analiză, rezultă că orice sistem unitar cu reconstrucție perfectă realizabil va introduce o întârziere minimă în reconstrucție de $L-1$;
- d) considerând $M=2$, deci un sistem pe două căi, în expresiile (5.48), (5.49), (5.50) și (5.51) recunoaștem condițiile necesare și suficiente, prezentate în §3.1.1, ca filtrele $H_0(z)$ și $H_1(z)$ să genereze un sistem Wavelet ortonormal. Conform notațiilor din capitolul III, H_0 se identifică cu filtrul trece-jos H , în timp ce filtrul H_1 este filtrul trece-sus, notat G .

În concluzie, dacă filtrele de analiză sunt filtre de tip FIR, rezultă filtre de sinteză tot de tip FIR, iar sistemul este realizabil. Filtre de analiză de tip FIR înseamnă expresii polinomiale $H_j(z)$ în variabila z^{-1} . Polinomul $H_j(z)$ de grad maxim va corespunde filtrului de lungime maximă. Notând cu $L-1$ acest grad maxim rezultă lungimea maximă L a filtrului corespunzător. Faptul că expresiile $H_j(z)$ sunt polinoame implică o matrice polifază $\mathbf{H}_M(z)$, definită conform (5.23), cu componente ce sunt tot polinoame. Notând cu $K-1$ gradul maxim al acestor polinoame, trebuie să avem:

$$M(K-1) \leq L \leq MK \quad (5.52)$$

Relația (5.52) ne indică faptul că, pentru K cunoscut, lungimea maximă a filtrelor sistemului asociat matricii $\mathbf{H}_M(z)$ nu poate fi mai mare decât MK .

Având în vedere analogia dintre sistemele construite folosind bănci de filtre cu reconstrucție perfectă unitare pe două căi și sistemele Wavelet ortonormale (vezi §3.1.1.6), filtrele $H_0(z)$ sunt denumite și filtre de scară în timp ce celelalte filtre $H_j(z)$, $j=1,2,\dots,M-1$, poartă și denumirea de filtre Wavelet. Însă, spre deosebire de cazul $M=2$, unde filtrul de scară $H_0(z)$ definește în mod univoc filtrul Wavelet $H_1(z)$, pe baza restricțiilor (5.48) și (5.49), în cazul $M > 2$ soluția pentru filtrele Wavelet nu este unică. Acest lucru se datorează faptului că se dispun doar de cele două restricții anterior amintite în timp ce numărul necunoscutelor (coeficienții filtrelor Wavelet) a crescut considerabil.

Trebuie menționat faptul că nu orice bancă de filtre cu reconstrucție perfectă și unitară pe două căi corespunde unui sistem Wavelet ortonormal. După cum s-a specificat și în §3.1.1.6., sistemele Wavelet ortonormale implică și o condiție de normare a coeficienților filtrelor de scară (condiția dată de relația (3.8)). Această condiție, în cazul general a M benzi se exprimă sub forma:

$$\sum_n h_0[n] = \sqrt{M} \quad (5.53)$$

În mod similar poate fi abordată și problema băncilor de filtre ce corespund unor sisteme Wavelet cu o anumită regularitate impusă.

Definiția 5.2.

Un filtru de scară al unei bănci de filtre pe M căi este N -regular dacă funcția $H_0(z)$ admite o factorizare de forma:

$$H_0(z) = \frac{1}{M^N} \left(1 + z^{-1} + \dots + z^{-(M-1)} \right)^N Q(z) \quad (5.54)$$

unde $Q(z)$ este o funcție în variabila z ce nu se anulează în punctele de forma $z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M}}$, $k = 0, \dots, M-1$.

O consecință directă a definiției 5.2 constă în faptul că dacă un filtru de scară $H_0(z)$ este N -regular atunci atât $H_0(z)$ cât și primele $N-1$ derivate ale ei se anulează în punctele $z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M}}$, $k = 0, \dots, M-1$. Acest lucru este echivalent cu impunerea a unui număr de $M \cdot (N-1)$ restricții liniare filtrului de scară. Se observă faptul că factorizarea (5.54) este o generalizare a celei date de (3.92) pentru cazul sistemelor Wavelet cu N momente nule. Evident, (3.92) se obține prin considerarea restricției (5.54) pe cercul unitate, $|z|=1$ sau $z = e^{j\xi}$, în cazul $M=2$.

5.1.6. Bănci de filtre pe M căi neuniforme

Băncile de filtre analizate în paragraful precedent au fost cele uniforme caracterizate prin faptul că atât filtrele de analiză cât și cele de sinteză sunt cu benzi de frecvențe egale și se lucrează cu același factor de subeșantionare și, respectiv, de interpolare pe fiecare cale a sistemului. Acesta are valoarea critică M pentru a nu crește cantitatea totală de informație prin trecerea unui semnal prin are sistem. Astfel de sisteme sunt structuri de bănci de filtre foarte particulare. Să considerăm un caz mai general prezentat în figura 5.19.

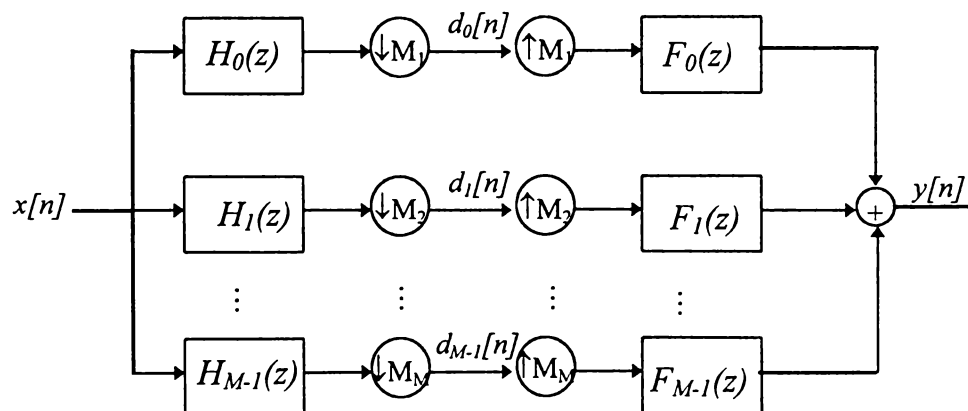


Figura 5.19. Bancă de filtre neuniformă pe M căi cu răspunsurile în frecvență al filtrelor de analiză $H_j(z)$ prezentate în figura 5.20.

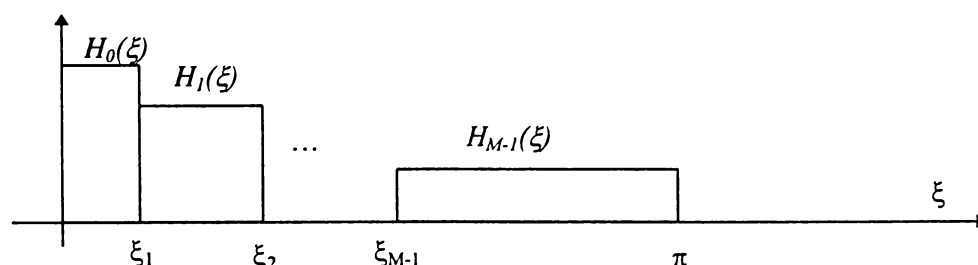


Figura 5.20. Răspunsul în frecvență ideal al filtrelor $H_j(\xi)$

Deoarece lățimile de bandă ale filtrelor de analiză nu sunt egale, rezultă că nici factorii de subeșantionare și respectiv de interpolare nu vor fi egali pentru diferitele căi ale sistemului. În

figura 5.19 aceștia au fost notați cu M_j , $j=1, \dots, M$. Valoarea critică a lui M_j este direct legată de lățimea de bandă $\xi_{j+1} - \xi_j$ a filtrului de analiză de pe calea j . Această dependență a factorului critic de subeșantionare de lățimea de bandă a filtrului a fost studiată în detaliu de către Daubechies în [Dau.88] pentru cazul filtrelor QMF (bănci de filtre de tip PR pe două căi). Importanța băncilor de filtre neuniforme rezidă în faptul că există asemenea sisteme cu reconstrucție perfectă și unitare [Vai.87], [Vai.88], [Dau.88]. Mai mult, sistemele Wavelet biortogonale și ortogonale corespund unor subclase de sisteme neuniforme. De exemplu, în §3.1.1.5. a fost prezentat algoritmul FWT și algoritmul IFWT de calcul a descompunerilor unor semnale în baze Wavelet ortonormale în timp ce în §3.1.1.6. s-a prezentat analogia dintre acești algoritmi și conectarea în cascadă a unor bănci de filtre pe două căi identice. Astfel, figura 3.6 prezintă sistemului echivalent aplicării algoritmului FWT pe trei nivele succesive în timp ce figura 3.7 prezintă sistemul de reconstrucție, echivalent aplicării algoritmului IFWT rezultatului descompunerii anterioare. Cum reconstrucția perfectă este asigurată, rezultă că cele două sisteme din figurile 3.6 și 3.7 formează împreună un sistem de tip PR. Sistemul din figura 3.6 corespunde părții de analiză în timp ce sistemul din figura 3.7 reprezintă partea de sinteză a acestui sistem echivalent. Considerând, de exemplu, partea de analiză, a acestui sistem și folosind echivalențele de sisteme prezentate în §5.1.4., se găsește că aceasta este echivalentă cu un sistem neuniform pe patru căi, cu structura din figura 5.21 unde răspunsurile în

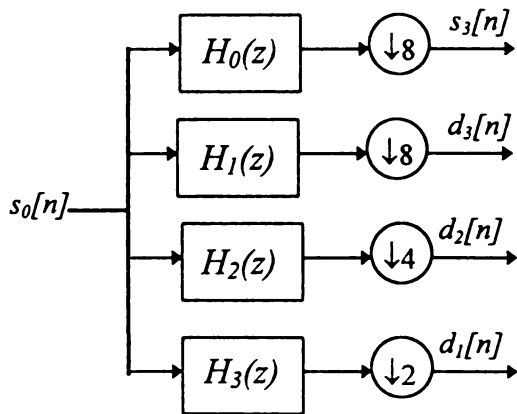


Figura 5.21. Sistem echivalent celui din figura 3.6

frecvență ale celor patru filtre se exprimă, în termenii răspunsurilor în frecvență $H(\xi)$ și $G(\xi)$, conform cu:

$$H_0(\xi) = H(4\xi) \cdot H(2\xi) \cdot H(\xi)$$

$$H_1(\xi) = G(4\xi) \cdot H(2\xi) \cdot H(\xi)$$

$$H_2(\xi) = G(2\xi) \cdot H(\xi)$$

$$H_3(\xi) = G(\xi)$$

Urmând o procedură similară, se găsește sistemul echivalent al părții de sinteză din figura 3.7 de forma celui din figura 5.22., unde:

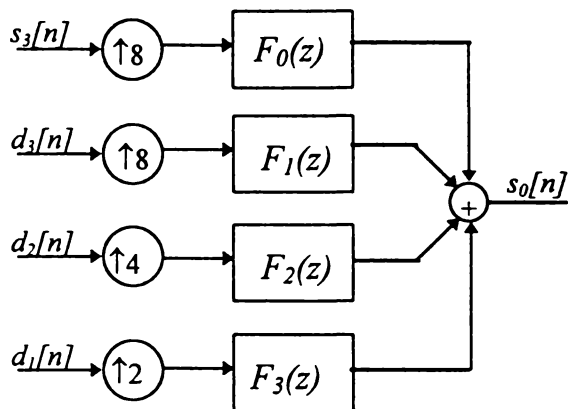


Figura 5.22. Sistem echivalent celui din figura 3.7

$$F_0(\xi) = H^*(4\xi) \cdot H^*(2\xi) \cdot H^*(\xi)$$

$$F_1(\xi) = G^*(4\xi) \cdot H^*(2\xi) \cdot H^*(\xi)$$

$$F_2(\xi) = G^*(2\xi) \cdot H^*(\xi)$$

$$F_3(\xi) = G^*(\xi)$$

5.2. Construcția băncilor de filtre cu reconstrucție perfectă pe două căi

Având în vedere importanța majoră a băncilor de filtre de tip PR (cu reconstrucție perfectă), importanță dată în special de analogia cu sistemele Wavelet, vom aborda în acest paragraf problemele legate de construcția efectivă (dimensionare) a unor asemenea sisteme. Schema de principiu a unei bănci de filtre pe două căi se prezintă în figura 5.23.

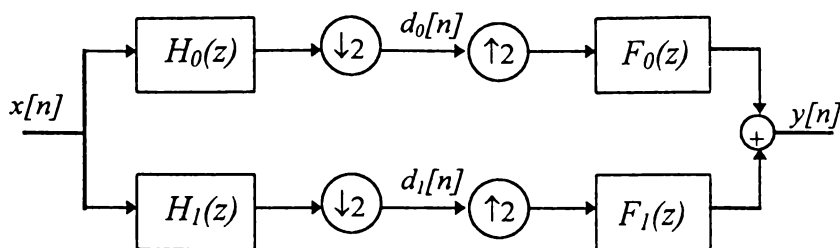


Figura 5.23. Bancă de filtre uniformă pe două căi.

Răspunsul în frecvență ideal al filtrelor de analiză $H_0(z)$ și $H_1(z)$ este prezentat în figura 5.24.

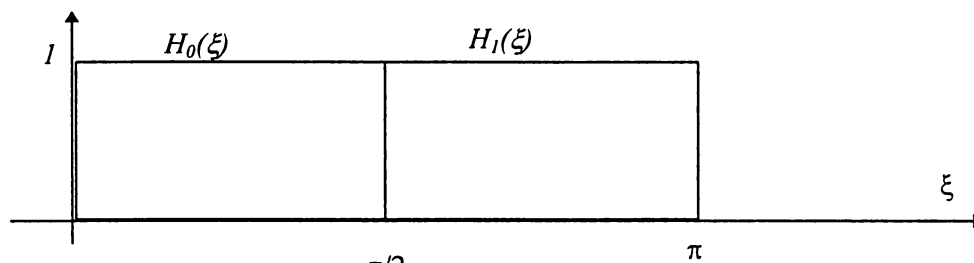


Figura 5.24. Răspunsul în frecvență ideal al filtrelor $H_j(\xi)$, $j=1,2$.

Deoarece se urmărește construcția unor bănci de filtre, se caută caracterizarea doar a celor realizabile care, conform observațiilor din paragraful anterior, dacă se dorește reconstrucție perfectă, trebuie să se folosească doar filtre de analiză și sinteză de tip FIR.

Vom nota cu $h_0[n]$ și $h_1[n]$ răspunsurile la impuls ale celor două filtre de analiză $H_0(z)$ și respectiv $H_1(z)$. Reprezentarea polifază directă a unei secvențe $x[n]$ este:

$$\bar{x}_2[n] = [x_0[n] \quad x_1[n]]^T$$

$$\text{cu: } \begin{aligned} x_0[n] &= x[2n] = (\downarrow 2)x[n] \\ x_1[n] &= x[2n-1] = (\downarrow 2)x[n-1] \end{aligned} \quad (5.55)$$

Funcțiile $H_0(z)$ și $H_1(z)$ sunt definite prin:

$$H_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0[k]z^{-k}, \quad H_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]z^{-k} \quad (5.56)$$

Reprezentările polifază duale ale celor două funcții sunt:

$$\tilde{H}_{0,0} = \sum_k h_0[2k]z^{-k}, \quad \tilde{H}_{0,1} = \sum_k h_0[2k+1]z^{-k} \quad (5.57a)$$

$$\tilde{H}_{1,0} = \sum_k h_1[2k]z^{-k}, \quad \tilde{H}_{1,1} = \sum_k h_1[2k+1]z^{-k} \quad (5.57b)$$

Bineînțeles, conform (5.25), au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \tilde{H}_{0,0}(z^2) + z^{-1}\tilde{H}_{0,1}(z^2) \\ H_1(z) &= \tilde{H}_{1,0}(z^2) + z^{-1}\tilde{H}_{1,1}(z^2) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Matricea polifază $\mathbf{H}_2(z)$ se scrie:

$$\mathbf{H}_2(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,0}(z) & \tilde{H}_{0,1}(z) \\ \tilde{H}_{1,0}(z) & \tilde{H}_{1,1}(z) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

În mod similar se definește și matricea polifază de sinteză, folosind reprezentările polifază directe ale filtrelor de sinteză:

$$\mathbf{F}_2(z) = \begin{bmatrix} F_{0,0}(z) & F_{0,1}(z) \\ F_{1,0}(z) & F_{1,1}(z) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

unde componentele polifază directe ale filtrelor de sinteză verifică:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= F_{0,0}(z^2) + z \cdot F_{0,1}(z^2) \\ F_1(z) &= F_{1,0}(z^2) + z \cdot F_{1,1}(z^2) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Definițiile (5.38) devin:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_2(z) &= [D_0(z) \quad D_1(z)]^T \\ \bar{\mathbf{X}}_2(z) &= [X_0^p(z) \quad X_1^p(z)]^T \\ \bar{\mathbf{Y}}_2(z) &= [Y_0^p(z) \quad Y_1^p(z)]^T \end{aligned} \quad (5.62)$$

Pentru sistemul din figură 5.23 se pot stabili următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_2(z) &= \mathbf{H}_2(z) \cdot \bar{\mathbf{X}}_2(z) \\ \bar{\mathbf{Y}}_2(z) &= \mathbf{F}_2^T(z) \cdot \bar{\mathbf{D}}_2(z) \end{aligned} \quad (5.63)$$

În acest caz, condiția (5.34) de reconstrucție perfectă se poate scrie:

$$\mathbf{F}_2^T(z) \mathbf{H}_2(z) = \begin{bmatrix} F_{0,0}(z) & F_{1,0}(z) \\ F_{0,1}(z) & F_{1,1}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,0}(z) & \tilde{H}_{0,1}(z) \\ \tilde{H}_{1,0}(z) & \tilde{H}_{1,1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Relația (5.64) este echivalentă cu patru condiții scalare:

$$\begin{aligned} F_{0,0}(z) \cdot \tilde{H}_{0,0}(z) + F_{1,0}(z) \cdot \tilde{H}_{1,0}(z) &= 1 \\ F_{0,0}(z) \cdot \tilde{H}_{0,1}(z) + F_{1,0}(z) \cdot \tilde{H}_{1,1}(z) &= 0 \\ F_{0,1}(z) \cdot \tilde{H}_{0,0}(z) + F_{1,1}(z) \cdot \tilde{H}_{1,0}(z) &= 0 \\ F_{0,1}(z) \cdot \tilde{H}_{0,1}(z) + F_{1,1}(z) \cdot \tilde{H}_{1,1}(z) &= 1 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Condițiile (5.35) și (5.38), în termenii răspunsurilor la impuls ale filtrelor de analiză și sinteză, deci al secvențelor $h_i[n]$ și $f_i[n]$, se rescriu sub forma:

$$\sum_n (h_0[2n+k] \cdot f_0[-2n-1] + h_1[2n+k] \cdot f_1[-2n-1]) = \delta_{kl} \quad (5.66)$$

și, respectiv:

$$\sum_n h_i[n] \cdot f_j[-2k-n] = \delta_k \cdot \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0, 1 \quad (5.67)$$

În domeniul frecvență condiția (5.51) poate fi exprimată sub forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_i \left(\frac{1}{2}(\xi - 2\pi k) \right) \cdot F_j \left(\frac{1}{2}(\xi - 2\pi k) \right) = \delta_{ij} \quad (5.68)$$

ce implică, prin dezvoltare, și prin înlocuirea variabilei ξ cu 2ξ :

$$H_0(\xi) \cdot F_1(\xi) + H_0(\xi - \pi) \cdot F_1(\xi - \pi) = 0 \quad (5.69a)$$

$$H_0(\xi) \cdot F_0(\xi) + H_1(\xi) \cdot F_1(\xi) = 2 \quad (5.69b)$$

O bancă de filtre unitară verifică, conform definiției 5.1, identitatea:

$$\mathbf{H}_2^T(z^{-1}) \mathbf{H}_2(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,0}(z^{-1}) & \tilde{H}_{1,0}(z^{-1}) \\ \tilde{H}_{0,1}(z^{-1}) & \tilde{H}_{1,1}(z^{-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,0}(z) & \tilde{H}_{0,1}(z) \\ \tilde{H}_{1,0}(z) & \tilde{H}_{1,1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

echivalentă cu condițiile scalare:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{0,0}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{0,0}(z) + \tilde{H}_{1,0}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{1,0}(z) &= 1 \\
\tilde{H}_{0,0}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{0,1}(z) + \tilde{H}_{1,0}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{1,1}(z) &= 0 \\
\tilde{H}_{0,1}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{0,0}(z) + \tilde{H}_{1,1}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{1,0}(z) &= 0 \\
\tilde{H}_{0,1}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{0,1}(z) + \tilde{H}_{1,1}(z^{-1}) \cdot \tilde{H}_{1,1}(z) &= 1
\end{aligned} \tag{5.71}$$

În unele lucrări de referință, [Gop.92a], [Gop.93], această proprietate de unitaritate apare sub denumirea de paraunitaritate sau ortogonalitate.

Punând:

$$F_2(z) = H_2(z^{-1})$$

condițiile (5.65) vor fi verificate, rezultând o bancă de filtre unitară cu reconstrucție perfectă. În acest caz, coeficienții filtrelor de sinteză se găsesc, în funcție de cei ai filtrelor de analiză, pe baza relației (5.47).

În mod similar, condițiile (5.66) și (5.67) pot fi particularizate în termenii doar a coeficienților filtrelor de analiză. Astfel, se poate spune că o bancă de filtre pe două căi de tip PR este unitară, dacă sunt verificate condițiile:

$$\sum_n (h_0[2n+k] \cdot h_0[2n+l] + h_1[2n+k] \cdot h_1[2n+l]) = \delta_{kl} \tag{5.72}$$

și, respectiv:

$$\sum_n h_i[n] \cdot h_j[2k+n] = \delta_k \cdot \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0,1 \tag{5.73}$$

În mod similar, condițiile frecvențiale (5.69a) și (5.69b) se pot scrie, în acest caz, sub forma:

$$H_0(\xi) \cdot H_1^*(\xi) + H_0(\xi - \pi) \cdot H_1^*(\xi - \pi) = 0 \tag{5.74}$$

și, respectiv:

$$|H_0(\xi)|^2 + |H_1(\xi)|^2 = 2 \tag{5.75}$$

În terminologia prelucrărilor de semnale cele două părți (de analiză și respectiv de sinteză) ale unor băncile de filtre uniforme pe două căi de tip PR și unitare sunt cunoscute și sub denumirea de filtre modulate în cuadratură, filtre QMF, iar banca de filtre sub denumirea de sisteme de tip QMF, [Vai.87], [Dau.88], [Vet.89].

Observații:

a) ținând cont de faptul că funcțiile $H_0(\xi)$ și $H_1(\xi)$ sunt funcții periodice cu perioada 2π , în expresia (5.74) se recunoaște condiția (3.34) impusă filtrelor de scară și respectiv Wavelet ce determină un sistem Wavelet. În §3.1 am văzut că o asemenea relație este verificată de o alegere de forma:

$$h_1[n] = (-1)^{d-n} h_0[d-n] \tag{5.76}$$

a legăturii dintre răspunsurile la impuls implicate, unde d este un număr întreg impar. Această alegere presupune o legătură dintre răspunsurile în frecvență ale celor două filtre de forma:

$$H_1(\xi) = e^{-jd\xi} H_0^*(\xi + \pi)$$

caz în care condiția (5.75) devine condiția (3.21) impusă filtrului de scară al unui sistem Wavelet;

b) se observă faptul că prin particularizarea $i=j$ a expresiei (5.73) se obține condiția (3.22a), versiunea în domeniul timp al condiției (3.21), impusă filtrului de scară a unui sistem Wavelet;

c) se poate trage concluzia că cerințele de reconstrucție perfectă și de sistem unitar impuse unei bănci de filtre uniforme pe două căi implică aceleași condiții (restricții) impuse sistemului ca și cele de existență a sistemelor Wavelet ortonormale cu o singură excepție, și anume, condiția de

normare (3.8), ce nu se regăsește în acest caz. Impunând această restricție, este posibilă utilizarea teoriei băncilor de filtre de tip PR unitare pentru caracterizarea sistemelor Wavelet ortonormale cu suport compact, și invers, anumite proprietăți ale sistemelor Wavelet pot fi traduse în proprietăți similare ale unor bănci de filtre;

d) cum coeficienții filtrelor Wavelet pot fi calculați, conform (5.76), dacă sunt cunoscuți cei ai filtrului de scară, rezultă că o bancă de filtre de tip PR unitar este determinată dacă se cunosc toți coeficienții ai filtrului de scară $H_0(\xi)$;

e) dacă filtrul de scară $H_0(\xi)$ este un filtru de tip FIR de lungime $L=2N$, atunci se obține filtru Wavelet $H_1(\xi)$ de tip FIR cauzal pentru $d \geq L-1$. Cele două funcții $H_0(\xi)$ și $H_1(\xi)$ sunt polinoame trigonometrice (polinoame în variabila complexă $e^{j\xi}$) de grad maxim $L-1$;

f) cerința (5.34) față de sistemul din figura 5.23 a fost dedusă pornind de la forma (5.24) a condiției de reconstrucție perfectă, ceea ce, după cum s-a constatat deja, în cazul unor filtre de analiză de tip FIR cauzale implică filtre de sinteză de tip FIR anticauzale, deci nerealizabile. Acceptând exprimarea condiția de reconstrucție perfectă sub forma (5.23), cu $a=1$, deci de forma:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

cu un n_0 egal cel puțin cu $L-1$, unde L reprezintă lungimea maximă a filtrelor utilizate, se obține o structură de sistem cu filtre cauzale, deci realizabile;

g) în §3.1.1.8 a fost prezentată o parametrizare a spațiului sistemelor Wavelet cu suport compact, propusă de Vaidyanathan, o parametrizare bazată pe cea a spațiului băncilor de filtre unitare de tip PR construite folosind filtre de tip FIR. Ea este dată de ecuația (3.110) și implică M parametri unghiulari independenți, α_i , cu valori cuprinse în domeniu $[0, 2\pi)$, asociați sistemelor QMF cu reconstrucție perfectă, construite cu filtre de tip FIR cu lungime $L=2M$.

h) Parametrizarea de mai sus indică faptul că avem de-a face cu o clasă largă de sisteme QMF, chiar și pentru o lungime a filtrelor impusă. Clasa acestor filtre poate fi restrânsă dacă se impun condiții suplimentare. De exemplu, se poate impune:

- condiția unei bune aproximări a caracteristicii ideale din figura 5.24,
- condiția de fază liniară (simetria răspunsului la impuls),
- condiția de lungime minimă a răspunsului la impuls cu un anumit grad de regularitate impus,
- condiția ca expresiile eșantioanelor răspunsului la impuls să fie cât mai simple.

Toate aceste condiții sunt foarte importante atunci când se pune problema codării în mai multe subbenzi deoarece favorizează stabilitatea numerică a algoritmilor care implementează sistemele din figurile 3.6 și 3.7. Această stabilitate este asigurată dacă filtrele îndeplinesc o anumită condiție de regularitate [Rio.93], [Dau.88], [Dau.92]. Condiția de regularitate este partea care leagă teoria sistemelor de codare subbandă de teoria funcțiilor Wavelet.

Prin particularizarea definiției 5.2 pentru $M=2$ se obține condiția de N -regularitate a unui filtru de scară $H_0(z)$. Astfel, în acest caz, funcția $H_0(z)$ poate fi factorizată sub forma:

$$H_0(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^N Q(z)$$

unde $Q(z)$ este o funcție în variabila z ce nu se anulează în punctele de forma $z_k = e^{j\pi k}$, $k = 0, 1$.

Se observă faptul că pentru $z = e^{j\xi}$ expresia (5.76) se reduce la condiția (3.92) de regularitate a unui sistem Wavelet ortonormal. Acest lucru permite abordarea regularității băncilor de filtre în termenii regularității unor funcții Wavelet asociate. Abordarea regularității a unor sisteme Wavelet a fost făcută în §3.1.1.7. Astfel, concluziile din acel paragraf sunt aplicabile în mod direct și în cazul

băncilor de filtre. Acest lucru ne permite, de exemplu, construirea unor sisteme de codare în subbenzi optimale sau suboptimale în codarea unor clase largi de semnale cu un anumit grad de regularitate. Mai mult, sunt aplicabile procedurile de construcție a unor filtre regulate cu suport compact prezentate în §3.1.1.8.

5.3. Sisteme de codare în subbenzi (SBC) optimale

5.3.1. Analogia SBC pe M căi uniforme cu sistemele de codare prin transformări ortogonale

Fie sistemul de codare în subbenzi din figura 5.25.

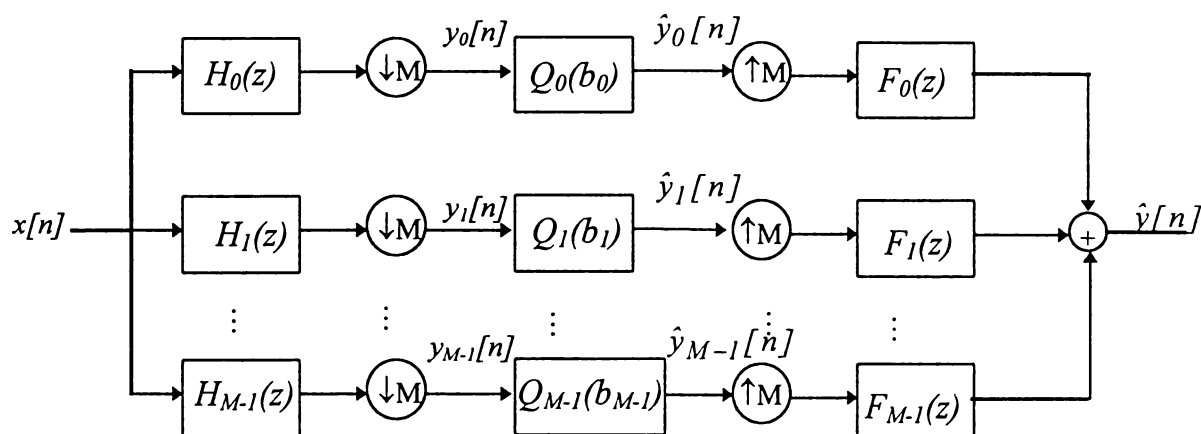


Figura 5.25. SBC uniform pe M căi.

Sistemul de codare în subbenzi, SBC, din figura 5.25 este construit folosind o bancă de filtre uniformă pe M căi, similar celei din figura 5.17, în care au fost incluse, în partea de codare, un număr de M cuantizoare, ce cuantizează valorile secvențelor subeșantionate, $y_j[n], j = 0, \dots, M - 1$, obținute la ieșirile celor M filtre de analiză. Partea de reconstrucție (de sinteză) a sistemului este identic cu cel prezentat în figura 5.5. Răspunsurile în frecvență ideale ale filtrelor de analiză sunt prezentate în figura 5.2. În paragrafele anterioare am văzut că, în ipoteza absenței celor M cuantizoare, este posibilă construirea sistemului din figura 5.25 astfel încât la ieșirea sa să se obțină $y[n] = x[n - n_0]$ folosind filtre de analiză și sinteză de tip FIR cauzale (realizabile). Dezideratul de mai sus nu se mai poate obține dacă se introduc în schemă cele M cuantizoare. Aceste blocuri, după cum s-a văzut în capitolul 2, realizează compresia efectivă de semnal, în timp ce banca de filtre din structura SBC este folosită pentru schimbarea spațiului de reprezentare a semnalului ce urmează a fi codat. Cuantizoarele sunt blocuri neliniare, ce presupun pierderea unei cantități de informație a semnalului prelucrat, introducând astfel, în mod inerent, erori la reconstrucția semnalului. Cu alte cuvinte, secvențele $\hat{y}_j[n]$ obținute la ieșirea cuantizoarelor nu sunt identice cu secvențele $y_j[n], j = 0, \dots, M - 1$. Cele mai des utilizate măsuri de evaluare ale acestor erori de reconstrucție (distorsiuni) sunt eroarea medie pătratică, definită conform (2.4), și raportul semnal pe zgomot de cuantizare, SQNR, cu definiția dată de relația (2.5). În contextul existenței unor constrângeri de tipul rată de bit medie impusă sau limită maximă a nivelului distorsiunii de reconstrucție, o caracterizare eficientă a cuantizoarelor se poate face în termenii funcțiilor rată-distorsiune și distorsiune-rată. Aceste noțiuni au fost introduse în §1.7 și explicitate pentru anumite cazuri particulare de cuantizoare în capitolul 2. În condiția în care se cunoaște structura cuantizoarelor folosite ne vom referi la funcția rată-distorsiune (distorsiune-rată) operațională, ce caracterizează de

fapt o clasă de cuantizoare de același tip (cu parametri de construcție similari). În absența acestor specificații ne vom referi la limita teoretică ale acestor funcții, prezentate în §1.7.

Se presupune că se urmărește codarea unei secvențe $x[n]$, o realizare particulară a unui proces aleator staționar, X , gaussian de medie nulă, prin metoda codării în subbenzi, având specificat un număr mediu de biți, b , utilizabili pentru codarea unui eșantion (rată de bit medie). Dacă funcția densitate spectrală de putere a procesului de intrare, DSP_X , este o funcție descrescătoare în variabila frecvență ξ , este firesc să încercăm să redistribuim biții disponibili codării diferitelor subbenzi în funcție de puterea procesului aleator din acestea. Această problemă seamănă foarte mult cu cea pusă în cazul codării prin transformări ortogonale în §4.5. În acest paragraf vom arăta că rezultatele din §4.5 cu privire la soluția alocării de bit optimale pot fi folosite, cu mici modificări, soluționării problemei alocării de bit optimale în cazul sistemelor SBC de tipul celui din figura 5.25. Similitudinile dintre cele două cazuri, cel al codărilor prin transformărilor ortogonale și cel al codărilor în subbenzi frecvențiale sunt sugerate chiar de analogia sistemelor Wavelet ortonormale cu bănci de filtre de tip PR unitare. Astfel, transformarea FWT reiterat, pe un număr finit de nivele, pe lângă faptul că reprezintă o transformare ortogonală a unui semnal, este echivalentă cu o bancă de filtre neuniformă pe un număr finit de căi. Exemple au fost date în figurile 5.21 și 5.22. Similitudinea dintre cele două cazuri poate fi pusă în evidență, pentru sistemul SBC din figura 5.25, dacă considerăm o schemă echivalentă a acestuia, prezentată în figura 5.26

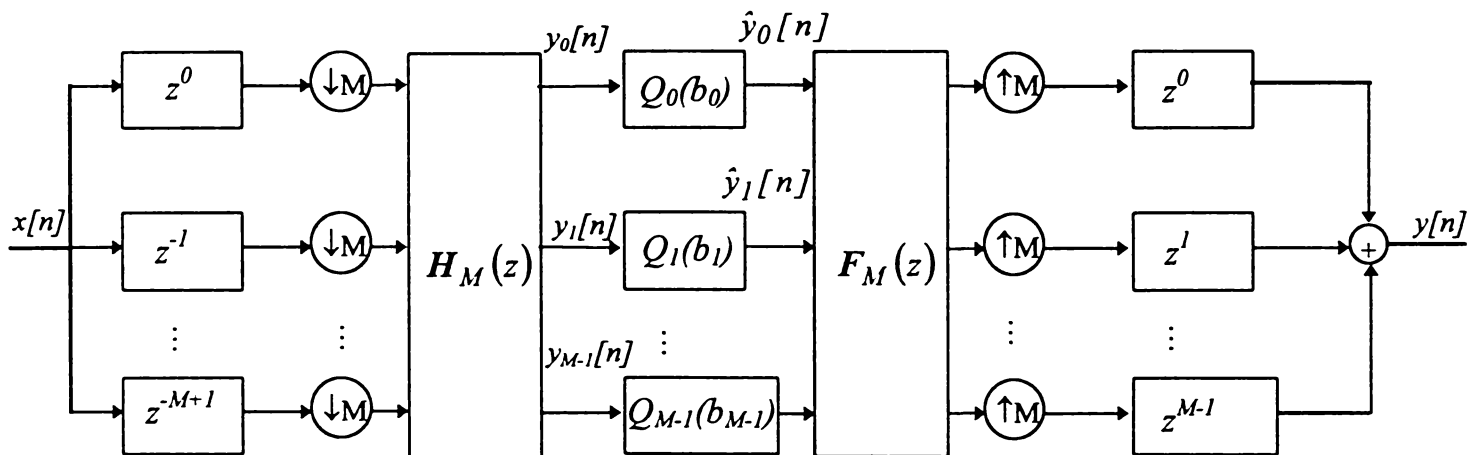


Figura 5.26. Sistemul echivalent sistemului SBC din figura 5.25

unde $H_M(z)$ și $F_M(z)$ reprezintă matricile polifază de analiză și respectiv de sinteză, definite conform (5.29) și (5.30). În cazul în care sistemul din figura 5.25 este construit folosind o bancă de filtre de tip PR unitară rezultă, conform definiției 5.2 a proprietății de unitaritate, că matricile $H_M(z)$ și respectiv $F_M(z)$ vor fi matricile unor transformări ortogonale. Semnalele de intrare ale blocului de transformare $H_M(z)$ sunt diferitele componente polifază, $x_j[n], j=0,1,\dots,M-1$, ale secvenței de intrare $x[n]$, cu definiția dată de relația (5.8). Ieșirile acestui bloc, secvențele $y_j[n], j=0,1,\dots,M-1$ pot considerate și ele ca fiind componentele polifază ale unui semnal, care însă nu este cel notat cu $y[n]$ în figura 5.26. Aceste secvențe au însă proprietatea că se încadrează fiecare în câte o subbandă definită de către un filtru de analiză $H_j(z)$. Blocul de transformare $F_M(z)$, realizează și el o transformare ortogonală a vectorului de valori de la intrarea sa, matricea $F_M(z)$ reprezentând matricea transformării ce verifică, conform proprietății de reconstrucție perfectă, relația (5.44). Bineînțeles, în absența cuantizatoarelor sistemul din figura 5.26 este o bancă de filtre de tip PR unitară, deci oferă reconstrucție exactă.

5.3.2. Procedură de alocare de bit optimală

Analogia SBC cu transformările ortogonale este deci clarificată. Procesul de codare în subbenzi a secvenței $x[n]$, ce este o realizare particulară a unui proces aleator staționar X , gaussian și de medie nulă poate fi privită ca și o codare printr-o transformare ortogonală, cu matricea $H_M(z)$ a unui vector $\vec{x}_M[n] = [x_0[n] \ x_1[n] \ \dots \ x_{M-1}[n]]^T$ gaussian, cu elementele date de componentele polifază $x_j[n], j=0,1,\dots,M-1$ ale secvenței de intrare. Se caută procedura de alocare de bit cea mai eficientă, ce corespunde unei codări a vectorului $\vec{y}_M[n] = [y_0[n] \ y_1[n] \ \dots \ y_{M-1}[n]]^T$, rezultat în urma unei transformări ortogonale a vectorului $\vec{x}_M[n]$, și care, în condițiile unui număr mediu de biți pe simbol disponibil impus, oferă eroarea de reconstrucție minimă. Pe scurt, se dorește codarea optimă a unui vector de forma $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_M]$, rezultat în urma unei operații de forma $\vec{Y}^T = A \cdot \vec{X}^T$, unde A este o matrice unitară, folosind un număr mediu de b biți/eșantion. O asemenea procedură de alocare de bit a fost prezentată în §4.5. În vederea codării a vectorului \vec{Y} de lungime M se dispune de un număr total de $M \cdot b$ biți. Biții sunt alocați neuniform diverselor componente ale acestora astfel încât să rezulte o distorsiune medie pătratică D minim posibilă. De fapt, se caută M numere b_1, b_2, \dots, b_M astfel încât :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_M = M \cdot b \quad (5.77)$$

Prin codarea componentei Y_i pe un număr de b_i biți vom obține, la reconstrucție, folosind distanța Euclidiană, o eroare medie pătratică de aproximare dată de valoarea $D(b_i)$ a funcției distorsiune-rată. Distorsiunea medie D poate fi calculată prin simpla mediere a celor M valori $D_i(b_i)$:

$$D = \frac{1}{M} (D_1(b_1) + D_2(b_2) + \dots + D_M(b_M)) \quad (5.79)$$

Cu aceste notații, condiția de optimizare a alocării de bit revine la căutarea acelor numere b_1, b_2, \dots, b_M care minimizează valoarea distorsiunii D .

Să notăm cu $\sigma_{Y_i}^2$ dispersia variabilei aleatoare Y_i . Presupunem, de asemenea, că vectorul $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_M]$ are componentele ordonate în ordinea descrescătoare a dispersiilor, cum este în cazul prezentat în figura 5.4. Această condiție este impusă doar din considerente de simplificare a notațiilor utilizate. Avem, deci,

$$\sigma_{Y_1}^2 \geq \sigma_{Y_2}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_i}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_M}^2 \quad (5.79)$$

Rezultate ale teoriei rată-distorsiune arată, [Sha.49], că distorsiunea minimă ce se poate obține prin codarea unei surse gaussiene de medie nulă și dispersie $\sigma_{Y_i}^2$, pe un număr de biți b , este:

$$D_i(b) = \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b} \quad (5.80)$$

Astfel, distorsiunea medie totală, ce rezultă prin codarea optimală a celor M componente gaussiene ale vectorului $\vec{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_M]$, se poate scrie:

$$D = \frac{1}{M} \left(\sigma_{Y_1}^2 \cdot 2^{-2b_1} + \sigma_{Y_2}^2 \cdot 2^{-2b_2} + \dots + \sigma_{Y_M}^2 \cdot 2^{-2b_M} \right) \quad (5.81)$$

Se caută, deci, numere b_1, b_2, \dots, b_M ce verifică (5.77) și care minimizează valoarea distorsiunii (5.81) în ipoteza (5.79). Ipoteza (5.79) ne va asigura de fapt că valorile optime b_i vor verifica, în condițiile (5.80), inegalitatea:

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_M \quad (5.82)$$

Expresia de mai sus pune în evidență faptul că minimizarea (5.81) are loc dacă toate componentele acestei expresii sunt egale fapt ce implică o codare neuniformă, datorită dispersiilor diferite (o variabilă aleatoare cu o dispersie mai mare cere un număr de biți mai mare pentru aceeași distorsiune). Minimizarea (5.81) supusă restricției (5.77) poate fi făcută folosind tehnica multiplicatorului lui Lagrange. Calculul explicit a expresiilor b_i în funcție de dispersiile diferitelor componente ale vectorului \bar{Y} a fost făcut în §4.5. Rezultă, pentru cazul în care numărul de biți b este suficient de mare astfel încât fiecărei componente să fie repartizate un număr nenul de biți (ipoteza de rată de bit înaltă), expresii de forma:

$$b_i = b + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{Y_i}^2}{\sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2}}, i = 1, 2, \dots, M \quad (5.83)$$

Distorsiunea minimă teoretică este egală, în acest caz:

$$D = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b_i} = \sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2} \cdot 2^{-2b} \quad (5.84)$$

Se poate defini, în mod similar câștigului de transformare, definit conform (4.20) pentru codările prin transformare, *câștigul de codare în subbenzi* prin raportul distorsiunilor medii obținute corespunzătoare cazurilor cu și respectiv fără codare. În cazul unui proces gaussian de intrare X , de medie nulă și dispersie σ_X^2 , acest câștig poate fi exprimat sub forma:

$$G_{SBC}(M) = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2}} \quad (5.85)$$

Definiția (5.85) a câștigului de codare în subbenzi ne permite definirea SBC optimal pentru anumite semnale de intrare (cunoscute). Astfel SBC optimal este cel care maximizează (5.85) în condițiile unei dispersii σ_X^2 date.

Observații: a) și în aceste cazuri s-ar putea întâmpla ca pentru o valoare $j^* < M$, valorile optime b_i să verifice:

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{j^*} > b_{j^*+1} = \dots = b_M = 0 \quad (5.86)$$

Și în acest caz, minimizarea (5.81) supusă restricției (5.77) poate fi făcută folosind tehnica multiplicatorului lui Lagrange, obținând rezultate similare (4.31);

b) funcția distorsiune-rată $D(b_i)$ este o caracteristică a unui cuantizor scalar Q_i ideal, ea oferind o limită teoretică a distorsiunii obținabile folosind cea mai bună metodă de codare în condițiile în care se cunoaște statistica semnalului de intrare;

c) expresia (5.80) a funcției distorsiune-rată $D(b_i)$ este una ideală ce corespunde codării unei surse gaussiene i.i.d. cu cea mai bună metodă de codare în ipoteza de rată de bit înaltă. În cazurile practice cuantizoarele din cadrul SBC sunt alese sau impuse mai mult pe baza unor considerente constructive sau economice, ce nu oferă, în general, cea mai bună metodă de codare. În aceste cazuri se impune utilizarea funcțiilor distorsiune-rată operaționale. Anumite rezultate, prezentate în capitolul 2, ne arată că aceste sisteme practice pot aproxima performanța (5.80) în limita unei constante $c \geq 1$. Astfel, în aceste cazuri (5.80) se poate rescrie sub forma:

$$D_i(b) = c \cdot \sigma_{Y_i}^2 \cdot 2^{-2b} \quad (5.87)$$

cu $c = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$ - pentru o sursă gaussiană și un cuatizor neuniform optimal, $c = \frac{\pi \cdot e}{6}$ - în cazul unei surse gaussiane, un cuantizor uniform și o codare entropică ideală;

d) optimalitatea SBC, ce se leagă de maximizarea câștigului de codare (5.85), depinde și de calitatea băncii de filtre utilizate, prin abilitatea acesteia de a concentra energia semnalului de intrare, integral sau preponderent, pe un număr redus de componente din aceste subbenzi;

e) optimalitatea SBC poate fi asigurată prin utilizarea, în mod simultan, a unei bănci de filtre optimală și a unei proceduri de alocare de bit optimală. Rezultă deci, că abordarea optimalității unui SBC poate fi realizată printr-o abordare independentă a optimalității subsistemelor ce-l compun.

5.3.3. SBC uniforme optimale. Filtre de compactare optimale.

Să considerăm sistemul de codare în subbenzi din figura 5.25. Ultima observație din paragraful anterior ne permite să abordăm optimalitatea lui printr-o abordare independentă a optimalității băncii de filtre și a cuantizoarelor Q_i utilizate. În expresia (5.85), a fost specificat un indicator de performanță a întregului SBC. S-a specificat, de asemenea, faptul că maximizarea acestuia depinde în mod direct de calitatea băncii de filtre utilizate, prin abilitatea acesteia de a concentra energia semnalului de intrare, integral sau preponderent, pe un număr redus de componente din aceste subbenzi.

În cazul în care sistemul din figura 5.25 este construit folosind o bancă de filtre de tip PR unitară se poate scrie (conform principiului de conservare a energiei):

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2 \quad (5.88)$$

În [Kir.98b], [Kir.98c], sunt abordate o serie de soluții de sisteme SBC ce răspund unor criterii diverse de optimalitate. Criteriul de optimalitate cel mai des folosit se bazează pe observația faptului că o serie de SBC utilizate în practică se bazează pe principiul codării doar a semnalelor din $K < M$ subbenzi. Astfel, se poate impune ca banca de filtre să fie astfel construită încât, pentru semnalul de intrare cunoscut, orice sumă parțială, de forma:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^P \sigma_{Y_i}^2, \quad P = 1, 2, \dots, M \quad (5.89)$$

să fie maximă. Se observă faptul că, de fapt, cantitatea:

$$\varepsilon_P = \frac{1}{M} \sum_{i=P+1}^M \sigma_{Y_i}^2 \quad (5.90)$$

nu reprezintă altceva decât eroarea medie pătratică de reconstrucție în ipoteza neglijării a $M-P$ componente. Acest lucru ne va asigura că pentru $\forall K < M$, codând doar primele K componente, se va obține o eroare medie pătratică de reconstrucție minimă. Aceste sisteme au fost denumite în [Kir.98c] bănci de filtre de componentă principală, PCFB (*Principal Component Filter Bank*). De fapt, lucrarea în cauză este dedicată studiului condițiilor de existență și/sau de unicitate a unor astfel de sisteme, fie că este vorba de sisteme uniforme fie de cele neuniforme. Sunt avute în vedere atât soluțiile ortogonale cât și cele biortogonale. Avantajul major oferite de PCFB constă în faptul că ele permit construirea unor sisteme SBC optimale. Acest lucru se datorează faptului că băncile de filtre de tip PCFB asigură, dintre toate băncile de filtre cu aceeași structură, compactarea de energie maximă în diferitele subbenzi frecvențiale. Se realizează întotdeauna o ordonare de forma

$$\sigma_{Y_1}^2 \geq \sigma_{Y_2}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_i}^2 \geq \dots \geq \sigma_{Y_M}^2$$

a varianțelor din aceste subbenzi. Evident, această mulțime a dispersiilor $\{\sigma_{Y_i}^2\}_{i=1,\dots,M}$, supusă restricției (5.88), verifică proprietatea (5.89). În aceste condiții se poate verifica ușor faptul că, un sistem ce verifică definiția PCFB va asigura o valoare minimă a expresiei

$$\sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \sigma_{Y_i}^2} \quad (5.91)$$

fapt ce este echivalent cu maximizarea expresia (5.81) a câștigului de codare în subbenzi. Din acest motiv, filtrele care intră în componența unei PCFB sunt denumite filtre de compactare optimale. Astfel, folosind asemenea filtre, pot fi găsite bănci de filtre ce permit construirea unor SBC optimale. Kirac, în lucrarea sa [Kir.98c], demonstrează unicitatea soluției în cazul utilizării băncilor de filtre pe M căi uniforme. O cu totul altă problemă o reprezintă găsirea soluțiilor fizic realizabile sau a celor care răspund unor restricții suplimentare cum ar fi cele de suport a filtrelor (filtre FIR sau IIR), de regularitate a băncii de filtre etc. Ele reprezintă, de fapt, soluții suboptimale, însă cele mai bune din clasa soluțiilor avute în vedere.

Abordarea lui Kirac are câteva merite remarcabile, dintre care amintim:

- utilizarea unui model general de cuantizor, introducând o funcție de cuantizare monotonă $f(\cdot)$, ce implică o distorsiune de cuantizare în funcție de rată de bit (funcție distorsiune-rată de bit operațională) de forma:

$$D(b) = f(b) \cdot \sigma_X^2 \quad (5.92)$$

Acest lucru conferă generalitate abordării, concluziile fiind valabile în condițiile unei rate de bit arbitrare. Evident $f(b) = c \cdot 2^{-2b}$ în ipoteza de rezoluție înaltă;

- a arătat că optimalitatea băncii de filtre poate fi tratată în mod independent de optimalitatea algoritmului de alocare de bit, putându-se dimensiona un anumit PCFB independent de algoritmul de alocare de bit prevăzut;

- a făcut o caracterizare completă a PCFB uniforme și neuniforme;
- a indicat un mod de construcție a unor SBC optimale.

Cu toate acestea, existența PCFB și posibilitatea de construcție a unor SBC uniforme nu prea are utilitate practică, din cauza imposibilității unor implementări eficiente, optimalitatea ei fiind similară cu cea a transformării Karhunen-Löve în raport cu celelalte transformări ortogonale. În termenii analogiei SBC cu transformările ortogonale, prezentată în §5.3.1, această ultimă observație este echivalentă cu faptul că, conform figurii 5.26, un PCFB realizează o decorelare totală a diferitelor componente polifază, $x_j[n]$, $j = 0, 1, \dots, M-1$, ale secvenței de intrare $x[n]$.

5.3.4. SBC neuniforme optimale.

Să considerăm sistemul de codare în subbenzi din figura 5.27.

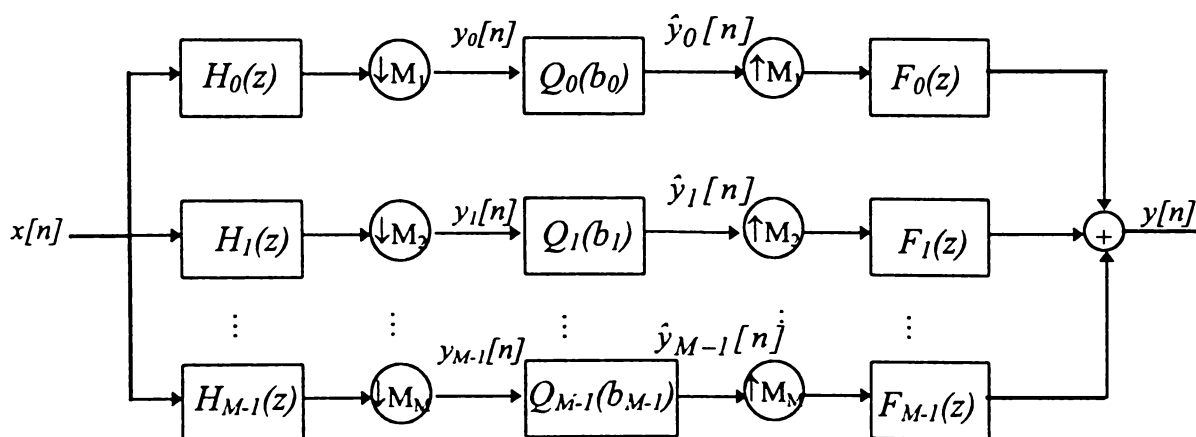


Figura 5.27. SBC neuniform pe M căi.

El este construit folosind o bancă de filtre neuniformă pe M căi, similar celei din figura 5.19, în care au fost incluse, în partea de codare, un număr de M cuantizoare, ce cuantizează valorile secvențelor subeșantionate, $y_j[n], j=0, \dots, M-1$, obținute la ieșirile celor M filtre de analiză. Nici factorii de subeșantionare și respectiv de interpolare nu vor fi egali pentru diferitele căi ale sistemului. Banca de filtre din figura 5.27 lucrează cu factori de subeșantionare și respectiv de interpolare nu neapărat egale pe diferitele căi ale sistemului. În figură aceștia au fost notați cu $M_j, j=1, \dots, M$. În §5.1.6. au fost indicate câteva dintre motivele utilizării unor valori M_j inegale. O aplicație de codare cere ca acești factori de subeșantionare (decimare) să fie astfel aleși încât să nu ducă la creșterea ratei de bit totale. Valorile critice ale lui M_j trebuie să verifice identitatea:

$$\sum_{j=1}^M 1/M_j = 1 \quad (5.93)$$

O mulțime de factori de decimare $\{M_j\}_{j=1, \dots, M}$, ce verifică (5.93), se numește admisibilă. Un sistem ce lucrează cu o mulțime admisibilă de factori de decimare $\{M_j\}_{j=1, \dots, M}$ se numește sistem cu decimare maximă. Pentru orice mulțime admisibilă de factori de decimare poate fi construită o bancă de filtre ortogonală de tip PR, dacă se admite utilizarea unor filtre ideale. Se observă faptul că toate băncile de filtre Wavelet sunt asemenea sisteme, ce sunt de tip PR, mai mult, multe dintre ele sunt realizabile. Exemple explicite de asemenea sisteme au fost date în figurile 5.21, 5.22 din §5.1.6.

Folosind aceleași notații $\sigma_{Y_j}^2, j=1, \dots, M$ pentru dispersiile secvențelor $y_j[n], j=0, \dots, M-1$, în cazul unor bănci de filtre PR unitare, se poate scrie:

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{Y_j}^2}{M_j} \quad (5.94)$$

Conform observațiilor făcute în paragraful precedent, optimalitatea băncii de filtre utilizate poate fi tratată în mod independent de optimalitate algoritmului de alocare de bit.

Similar modului de punere a problemei din paragraful precedent, se poate impune ca banca de filtre să fie astfel construită încât, pentru un semnal de intrare cunoscut, orice sumă parțială, de forma:

$$\sum_{j=1}^P \frac{\sigma_{Y_j}^2}{M_j}, \quad P=1, 2, \dots, M \quad (5.95)$$

să fie maximă. Verificarea acestor condiții este asigurată de băncile de filtre neuniforme de valoare componentă, (PCFB neuniforme).

Și în acest caz, cantitatea:

$$\varepsilon_P = \sum_{j=P+1}^M \frac{\sigma_{Y_j}^2}{M_j} \quad (5.96)$$

reprezintă eroarea medie pătratică de reconstrucție în ipoteza neglijării a $M-P$ componente. Verificarea (5.95) ne va asigura că pentru $\forall K < M$, codând doar primele K componente (semnalele din primele K subbenzi), se va obține o eroare medie pătratică de reconstrucție minimă. Astfel, rezultă că și aceste PCFB neuniforme sunt sisteme optimale.

Se poate arăta că, [Kir.98c], având un set admisibil de factori de decimare $\{M_j\}_{j=1, \dots, M}$ impus, există mai multe PCFB posibile. Numărul acestora este egal cu $M!$, numărul total al permutărilor celor M factori de decimare.

Folosind un astfel de PCFB unitar de tip PR și o procedură de alocare de bit optimală, similară celei din paragraful §5.3.2. se poate construi un SBC optimal.

Distorsiunea medie D a acestui SBC poate fi calculată prin medierea ponderată a celor M valori $D_j(b_j)$:

$$D = \sum_{j=1}^M \frac{D_j(b_j)}{M_j} \quad (5.97)$$

unde b_j reprezintă numărul de biți alocați codării unui eșantion de pe canalul j .

Rata medie de bit b rezultă:

$$b = \sum_{j=1}^M \frac{b_j}{M_j} \quad (5.98)$$

În acest caz însă utilizarea modelului general de cuantizor, cel conform (5.92), nu va mai asigura, pentru orice funcție $f(\cdot)$, și maximizarea câștigului de codare, $G_{SBC}(M)$, care în acest caz are expresia, [Kir.98c]:

$$G_{SBC}(M) = \frac{\sigma_X^2}{\prod_{j=1}^M (\sigma_{Y_j}^2)^{1/M_j}} \quad (5.99)$$

Se observă însă faptul că expresia (5.99) este maximizată în cazul ipotezei de rezoluție înaltă ($f(b) = c \cdot 2^{-2b}$).

Capitolul VI. Compresie adaptivă de semnal

În primul capitol a fost introdusă tematica compresiei de semnal indicând faptul că, în fond, aceasta nu reprezintă altceva decât căutarea unor reprezentări alternative de semnal mai eficiente și mai compacte în ceea ce privește concentrarea conținutului informațional al semnalului prelucrat. S-a specificat, de asemenea, faptul că proiectarea unui sistem de compresie optimal este posibilă doar în contextul cunoașterii statisticilor semnalului de intrare. Acesta (semnalul de intrare) poate fi un proces aleator staționar și ergodic cu funcțiile densitate de probabilitate și, respectiv, densitate spectrală de putere, cunoscute. S-a arătat faptul că, dacă acest proces este unul în timp continuu sau unul în timp discret dar cu valori continue, compresia fără pierdere de informație a acestuia este imposibilă. În cazul unui proces în timp discret cu valori discretizate ale realizărilor (de exemplu un semnal obținut prin cuantizare) este posibilă o compresie fără pierdere de informație în limita debitului entropic al sursei, a cărui valoare poate fi evaluată pe baza relației (1.8). Însă această limită nu spune nimic despre realizabilitatea sistemului cu aceste performanțe, în ce condiții sunt ele optime, și cu atât mai puțin despre structura sau complexitatea unui asemenea sistem. Structura implementărilor curente de asemenea sisteme reflectă, de cele mai multe ori, un compromis bun dintre performanțele optime dorite și complexitatea de implementare, ele fiind, de fapt, doar soluții suboptimale ce aproximează, cu o acuratețe mai bună sau mai puțin bună, aceste performanțe optime.

6.1. Sisteme optimale de compresie cu pierdere

Compresie fără pierdere se obține dacă se neglijează informația redundantă conținută de semnalul prelucrat. Aceasta va permite o reconstrucție exactă a acestuia. Neglijând o cantitate de informație mai mare decât cea redundantă, este posibilă obținerea unui factor de compresie mai mare. (observație valabilă și pentru cazul surselor staționare discrete). Din acest motiv aceste sisteme au fost denumite sisteme de compresie cu pierdere. Evident, prin definiție, aceste sisteme nu mai permit o reconstrucție exactă a semnalului de prelucrat, indiferent de natura procesului sursă. Relațiile (1.12), (1.13) și (1.15) indică câteva măsuri obiective, folosite în mod curent pentru evaluarea calității aproximării prin reconstrucție a semnalului sursă. Ele reprezintă modalități diferite de evaluare a erorii de aproximare prin reconstrucție, numită și distorsiune de aproximare. În paragraful §1.7 s-a arătat faptul că măsura distorsiunii D , de aproximare prin reconstrucție, este într-o strânsă legătură cu lungimea medie a cuvintelor de cod ale reprezentării finale, valoare ce definește rata de bit, b , a sistemului de compresie. Această valoare este un indicator direct al factorului de compresie obținabil prin utilizarea sistemului. Această dependență definește funcția distorsiune-rată, $D(b)$, și respectiv rată-distorsiune, $b(D)$, abordate în §1.7. Expresia (1.16) dată de Shannon pentru funcția distorsiune-rată, $D(b)$, (ce se evaluează în ipoteza (1.17)), oferă o limită teoretică de care orice proiectant de sisteme de compresie performante ar trebui să țină cont, sau la care se poate raporta ca referință. Aceasta este și va rămâne însă o limită teoretică atâta timp cât ea se referă la cea mai bună performanță obținabilă pe ansamblul tuturor sistemelor de compresie posibile. În cazurile practice există întotdeauna criterii suplimentare de proiectare impuse modului de implementare ce vor reduce clasa sistemelor posibile a fi realizate. Sistemele din cadrul acestor clase sunt caracterizate prin funcțiile distorsiune-rată, $D_{op}(b)$, și rată-distorsiune, $b_{op}(D)$, numite operaționale. O concluzie remarcabilă rămâne însă faptul că oricare ar fi alura acestor funcții, ele nu vor putea depăși limita de performanță indicată de funcțiile (1.16), indicate de Shannon. Acestea indică un compromis inevitabil de realizat dintre valoarea maximă a distorsiunii D obținabilă în condițiile unei rate de bit b fixate sau, în mod echivalent, o limită inferioară a ratei de bit necesare

codării în condițiile unei distorsiuni de reconstrucție impusă. Expresii analitice ale acestor funcții nu se cunosc, în general, motiv din care ele sunt evaluate, folosind anumiți algoritmi de calcul. Evaluarea are loc doar în anumite puncte de interes. Excepție fac funcțiile $b(D)$ și $D(b)$ ale unui proces de intrare i.i.d. gaussian. Expresia funcției $b(D)$ pentru cazul gaussian este dată de relația (1.20). S-a afirmat, de asemenea, faptul că acest caz oferă o limită superioară a valorilor tuturor funcțiilor rată-distorsiune $b(D)$, și distorsiune-rată $D(b)$, aferente unor diferite tipuri de surse. Astfel, de exemplu, se poate spune că, la o rată de bit b impusă, dintre toate sursele staționare posibile sursa gaussiană oferă distorsiunea limită maximă, limită ce este dată evident de valoarea corespunzătoare a funcției $D(b)$ gaussian.

În vederea verificării acestei concluzii să considerăm trei realizări (fiecare cu o lungime de 100000 de eșantioane) ale unor tipuri diferite de procese aleatoare discrete. Prima, notată $x_g[n]$, are o distribuție gaussiană, a doua, notată $x_l[n]$, are distribuție laplaciană iar cea de-a treia, $x_u[n]$, are o distribuție uniformă. Procesele aleatoare din care provin cele trei realizări sunt procese i.i.d. de medie nulă și dispersie unitară. În figura 6.1. se prezintă histogramele, realizate în 64 de intervale, ale acestor realizări.

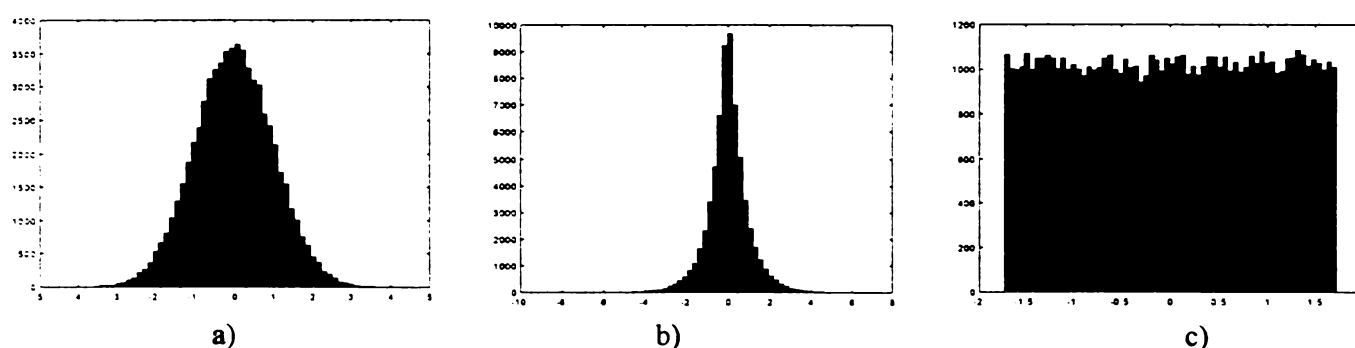


Figura 6.1. Histograma realizării semnalului a) gaussian, b) laplacian, c) cu distribuție uniformă

Există un algoritm de calcul, denumit algoritmul lui Blahut, [Gra.98], ce permite estimarea, prin puncte, a funcțiilor distorsiune-rată teoretice $D_x(b)$, pe baza unei realizări disponibile a procesului aleator de intrare. În figura 6.2. sunt indicate cele trei curbe ale acestor funcții $D_x(b)$, evaluate pentru cele trei realizări considerate.

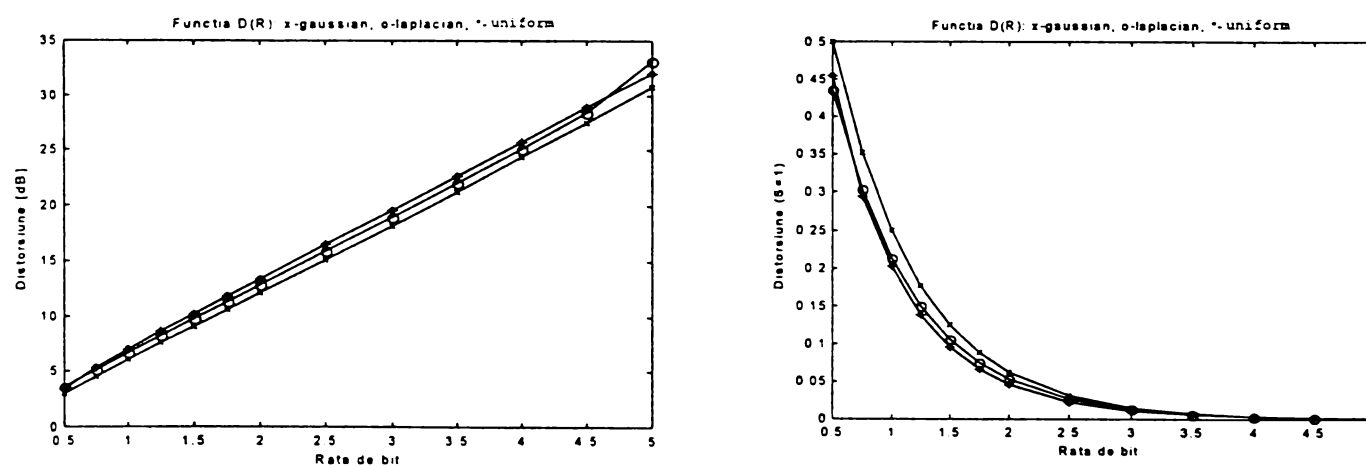


Figura 6.2. Curbele distorsiune-rată estimate ale proceselor de tip gaussian, laplacian și cu distribuție uniformă , a) distorsiunea în [dB], b) în valori efective

Punctele de evaluare ale curbelor sunt marcate cu semne diferite pentru fiecare caz în parte, astfel s-a notat:

- cu simbolul x - funcția $D_{xg}(b)$ a cazului gaussian,
- cu simbolul o - funcția $D_{xl}(b)$ a cazului laplacian,
- cu simbolul $*$ - funcția $D_{xu}(b)$ a cazului cu distribuție uniformă.

În figura 6.2 s-a reprezentat, de asemenea, și curba $D_g(b)$ teoretică a procesului gaussian (cu linie întreruptă), care însă se confundă (în limita unei erori relative de ordinul a 10^{-4}) cu cea estimată a acestui proces.

Se poate observa imediat faptul că funcția corespunzătoare semnalului gaussian, $D_{xg}(b)$, are valori efective ușor mai ridicate decât celelalte două, pentru orice valoare a ratei de bit considerată. Această ultimă observație are un impact major în construcția sistemelor de compresie optimale și suboptimale în sensul că ea garantează că un sistem construit pe baza ipotezei unei surse i.i.d. gaussiene va oferi o distorsiune de reconstrucție mai mică, la aceeași rată de bit b , decât orice altă sursă i.i.d. negausiană. Tabelul 6.1. indică valorile estimate ale celor trei funcții din diferitele puncte (valori ale ratei de bit) de evaluare.

Tabelul 6.1. Valori evaluate ale funcției distorsiune-rată a celor trei procese aleatoare

Rata de bit b	$D_{xg}(b)$ [dB]	$D_{xl}(b)$ [dB]	$D_{xu}(b)$ [dB]
0.5000	3.0149	3.6158	3.4219
0.7500	4.5279	5.1785	5.3165
1.0000	6.0419	6.7177	6.9289
1.2500	7.5569	8.2400	8.6068
1.5000	9.0680	9.7658	10.1852
1.7500	10.5779	11.2862	11.7809
2.0000	12.0878	12.8113	13.3723
2.5000	15.1182	15.8805	16.4897
3.0000	18.1812	18.9480	19.6041
3.5000	21.2765	22.0560	22.6757
4.0000	24.3891	25.1832	25.7680
4.5000	27.5028	28.4372	28.9037
5.0000	30.7477	33.1821	32.0077

Un sistem de compresie ce se dorește a fi de bună calitate trebuie să ofere, pentru o rată de bit b fixată, o valoare apropiată de limita teoretică D a distorsiunii de reconstrucție, altfel spus el trebuie să opereze în puncte (ale planului distorsiune-rată, D - b) apropiate de curba distorsiune-rată teoretică. Locul geometric al acestor puncte în funcție de variabila independentă rata de bit (b) definește curba distorsiune-rată operațională a sistemului, $D_{op}(b)$. Evident, și expresia acesteia depinde de natura procesului de intrare.

În paragraful §2.1.4 s-a subliniat faptul că orice sistem, ce își propune atingerea acestor performanțe limită, trebuie să conțină, în structura sa, componente optimale, dimensionate în conformitate cu statisticile procesului de intrare. În același paragraf au fost analizate performanțele unor cuantizoare scalare și evaluate limitele în care acestea le aproximează pe cele teoretice. S-a indicat faptul că este posibilă construcția unor cuantizoare optimale, denumite cuantizoare Lloyd-Max, în condițiile în care sunt cunoscute statisticile de intrare. Pentru cazul în care acest lucru nu este posibil, dar se cunoaște faptul că procesul de intrare este unul staționar, și se dispune de o realizare particulară a sa, este posibilă folosirea unor cuantizoare adaptive. Acestea învață din mers statisticile semnalului de intrare, modificând în acest sens, în mod iterativ, parametrii cuantizorului inițial. Astfel, algoritmul, denumit algoritmul Lloyd-Max, este capabil de găsirea cuantizorului optimal (cel mai potrivit pentru semnalul de intrare dat) din clasa cuantizoarelor scalare cu un număr finit de nivele de cuantizare (L). El verifică și ajustează valoarea nivelelor de comparație precum și a celor de cuantizare pe baza a două condiții esențiale: cea a celui mai apropiat vecin (dată de relația (2.33)) și, respectiv, cea de centroid (dată de relația (2.37)). Cunoscând valorile unui vector de intrare $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$, (o realizare particulară a unui proces aleator), algoritmul găsește un estimator al funcției de densitate de probabilitate $p_X(x)$ și, pornind de la cuantizorul

uniform cu L nivele, aplică, alternativ și în mod secvențial, cele două condiții date de relațiile (2.33) și (2.37), până ce variația procentuală a distorsiunii D oferite, de la o iterație la alta, nu va depăși un anumit prag impus. În cazul în care funcția estimată $p_X(x)$ verifică condiția de convexitate dată de relația (2.38) convergența algoritmului este asigurată, având ca limită parametrii cuantizorului optimal.

Câteva rezultate ale aplicării acestui algoritm realizărilor de procese aleatoare $x_g[n]$, $x_l[n]$, și $x_u[n]$, cu histogramele din figura 6.1, se prezintă în tabelul 6.2.

Tabelul 6.2. Evoluția raportului SQNR și a pragurilor de cuantizare prin aplicarea algoritmului Lloyd-Max

Semnalul $x_g[n]$				Semnalul $x_l[n]$				Semnalul $x_u[n]$			
SQNR	y1	y2	y3	SQNR	y1	y2	y3	SQNR	y1	y2	y3
7.9518	-1.5000	0.0000	1.5000	7.7329	-1.5000	0.0000	1.5000	7.8455	-1.5000	0.0000	1.5000
8.8552	-1.2661	0.0001	1.2785	8.2113	-1.2610	-0.0009	1.3483	10.5842	-1.1844	-0.0004	1.1823
9.2500	-1.1369	0.0013	1.1533	8.4026	-1.1366	0.0080	1.2602	11.6476	-1.0238	-0.0008	1.0206
9.3877	-1.0624	0.0025	1.0812	8.4735	-1.0623	0.0209	1.2112	11.9598	-0.9446	-0.0004	0.9416
9.4364	-1.0203	0.0042	1.0431	8.5038	-1.0177	0.0343	1.1883	12.0434	-0.9047	-0.0002	0.9016
9.4552	-0.9952	0.0059	1.0208	8.5193	-0.9884	0.0462	1.1781	12.0626	-0.8853	-0.0007	0.8809
9.4622	-0.9790	0.0076	1.0077	8.5286	-0.9672	0.0574	1.1758	12.0673	-0.8761	-0.0012	0.8710
9.4644	-0.9690	0.0091	1.0004	8.5355	-0.9508	0.0676	1.1785	12.0685	-0.8719	-0.0019	0.8658
9.4652	-0.9631	0.0106	0.9972	8.5412	-0.9376	0.0774	1.1839	12.0688	-0.8700	-0.0025	0.8630
9.4656	-0.9596	0.0118	0.9953	8.5463	-0.9260	0.0862	1.1901	12.0689	-0.8692	-0.0029	0.8616
9.4658	-0.9567	0.0127	0.9940	8.5511	-0.9157	0.0947	1.1980	12.0689	-0.8689	-0.0031	0.8608
9.4659	-0.9546	0.0136	0.9933	8.5555	-0.9063	0.1032	1.2066	12.0689	-0.8687	-0.0033	0.8603
9.4659	-0.9533	0.0143	0.9932	8.5593	-0.8982	0.1115	1.2156	12.0689	-0.8687	-0.0036	0.8599
9.4659	-0.9527	0.0147	0.9933	8.5619	-0.8907	0.1189	1.2239	12.0689	-0.8688	-0.0039	0.8596
9.4659	-0.9525	0.0149	0.9934	8.5638	-0.8853	0.1251	1.2309	12.0689	-0.8689	-0.0042	0.8592
9.4659	-0.9523	0.0152	0.9936	8.5654	-0.8804	0.1303	1.2372	12.0690	-0.8691	-0.0046	0.8589
9.4659	-0.9522	0.0153	0.9938	8.5665	-0.8758	0.1352	1.2427	12.0690	-0.8693	-0.0050	0.8584
9.4659	-0.9521	0.0154	0.9939	8.5674	-0.8722	0.1395	1.2478	12.0690	-0.8695	-0.0054	0.8580
9.4659	-0.9519	0.0155	0.9940	8.5682	-0.8692	0.1431	1.2528	12.0690	-0.8696	-0.0057	0.8577
9.4659	-0.9517	0.0156	0.9940	8.5688	-0.8666	0.1466	1.2574	12.0690	-0.8698	-0.0060	0.8576
9.4659	-0.9516	0.0157	0.9940	8.5693	-0.8641	0.1497	1.2611	12.0690	-0.8699	-0.0062	0.8574

Cuantizorul de pornire (starea inițială, de pornire, pentru aplicarea algoritmului Lloyd-Max) în toate cele trei cazuri a fost cel uniform, cu $L=4$ nivele, având intervalul de cuantizare finit, intervalul $[-A, A] = [-3 \cdot \sigma_x^2, 3 \cdot \sigma_x^2]$, și nivele de cuantizare, notate cu y_i , cu valori ce rezultă din prima linie a tabelului. Cifrele din tabelul de mai sus indică faptul deja enunțat conform căruia algoritmul converge către o valoare limită maximă a raportului semnal/zgomot de cuantizare. Se observă, de asemenea, faptul că limita teoretică, $SQNR$ de aproximativ $6,02 \cdot b[dB]$, se atinge pentru $b=2$ doar de către cuantizorul dimensionat după caracteristicile procesului cu distribuție normală, pentru care tipul de cuantizor uniform reprezintă chiar cel optimal. Evoluția și în acest caz a valorilor din tabel se datorează faptului că domeniul de cuantizare îl depășește pe cel al valorilor efective ale procesului.

În concluzie, se poate constata faptul că optimalitatea unui sistem de compresie este strâns legată de natura semnalului de intrare. Astfel, poate fi vorba despre o eventuală optimalitate doar în cazul unor semnale staționare cunoscute. Sursele reale sunt însă, în general, surse de informație nestacionare sau staționare cu statistici insuficient cunoscute. Deoarece calitatea de nestacionar este de fapt o non-calitate (fiind imposibilă o caracterizare generală a tuturor nestacionarităților posibile), în acest caz nu se poate vorbi despre construirea unui sistem optimal. Performanțe optime (asigurarea compresiei la o rată de bit cât mai apropiată de valoarea $b(D)$) se pot obține în acest caz cu sisteme de compresie care folosesc tehnici adaptive de compresie. Aceste sisteme de compresie adaptive învață în mod continuu parametrii structurali ai procesului de intrare și modifică parametrii de codare în sensul adaptării la cerințele intrării. Astfel, ele vor oferi performanțe ce se apropie din ce în ce mai mult de cele optimale.

6.2. Sisteme adaptive de compresie prin descompuneri în baze de funcții Wavelet

În acest paragraf vor fi abordate câteva soluții de sisteme adaptive de compresie de semnal cu pierdere, ce recurg la schimbarea spațiului de reprezentare al semnalului de intrare, presupus a fi nestaționar, în vederea obținerii unor reprezentări eficiente, ce permit o mai ușoară adaptare a structurii sistemului la caracteristicile curente ale semnalului prelucrat și obținerea, prin aceasta, o îmbunătățire a performanțelor sistemului. Caracterul adaptiv al acestor sisteme se asigură prin controlul direct sau indirect, de către un anumit număr de parametri ai semnalului prelucrat, al unor parametri constructivi ai sistemului. Sistemele de compresie propuse operează pe blocuri succesive de eșantioane ale intrării și folosesc descompuneri în baze de funcții timp-frecvență ale acestora, în vederea obținerii reprezentărilor secundare de semnal. Această transformare trebuie să fie una ce nu introduce redundanță suplimentară, (fiind preferate deci transformările ortogonale și/sau biortogonale), și care poate oferi o imagine mai compactă a semnalului de intrare. Cerința este asigurată de către transformările care realizează o decorelare a eșantioanelor intrării concentrând astfel o cantitate de informație mai mare pe un număr mai redus de coeficienți din domeniul transformat. Din acest punct de vedere, expunerea din capitolul patru ne indică faptul că transformarea Karhunen-Löeve este optimală în cazul proceselor de intrare staționare, gaussiene însă nu există algoritmi rapizi de calcul, de evaluare a sa, și nici procedura de calcul matematic implicată nu este întotdeauna convergentă. Din acest motiv, în practică, se preferă soluții suboptimale cum sunt DCT sau transformarea Wavelet care, la limită, sunt convergente către această transformare Karhunen-Löeve.

6.2.1. Un sistem eficient de compresie Wavelet adaptivă

Schema de principiu a unui sistem de compresie ce utilizează transformarea Wavelet ortogonală se prezintă în figura 6.3.

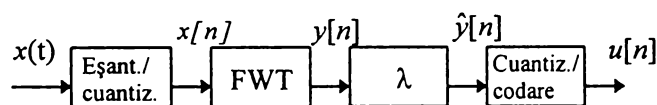


Figura 6.3. Sistem de compresie Wavelet

Tematica utilizării transformării Wavelet în domeniul compresiei de semnale, utilitatea algoritmului FWT în calculul coeficienților acestor transformări, proprietățile descompunerilor rezultate, au fost abordate în detaliu în primele capitole ale acestei lucrări. Structura de sistem de compresie din figura 6.3 a fost propusă de autor în lucrările [Asz.94], [Isa.94].

Semnalul de intrare $x(t)$ se presupune a fi unul de energie finită ($x(t) \in L_2(\mathfrak{R})$). Primul bloc din cadrul sistemului realizează o eșantionare urmată de o cuantizare uniformă fină (pe 16 biți) a semnalului. Se obține secvența numerică cu valori discrete $x[n]$. Evident reconstrucția exactă a lui $x(t)$ din secvența $x[n]$ nu mai este posibilă nici măcar în cazul în care $x(t)$ este unul de bandă limitată. Este posibilă însă obținerea, în acest caz, a unui semnal reconstruit, $\hat{x}(t)$, în limita unei distorsiuni maxime dată de cuantizorul uniform. Expunerea din cel de al doilea capitol ne asigură de faptul că raportul semnal pe zgomot de cuantizare (SQNR) obținut în urma cuantizării fine va fi în jurul valorii de 90÷96 dB. Următorul bloc, cel notat cu FWT, este cel al transformării Wavelet. Scopul urmărit este obținerea unei reprezentări alternative mai compacte a secvenței $x[n]$. Aceasta este secvența numerică $y[n]$, semnalul obținut în urma aplicării algoritmului FWT secvenței $x[n]$. Parametrii procesului de transformare sunt:

- lungimea N a blocului de eşantioane prelucrat,
- tipul funcţiei Wavelet utilizată,
- nivelul maxim, J , al descompunerii.

Sistemul propus lucrează cu o lungimea N a blocurilor de eşantioane fixă ($N = 2^n = 512$). El permite specificarea (opţională) sau selectarea adaptivă a uneia dintre primele 9 funcţii Wavelet ale lui Daubechies (notate $DAU-2 \dots DAU-10$). Valoarea nivelului maxim J , de iterare a descompunerii, se fixează automat la cea maximă posibilă, determinată de lungimea N a blocurilor de eşantioane şi de lungimea filtrelor Wavelet utilizate (obţinute în urma procesului de selecţie a funcţiei Wavelet). Transformarea efectivă se calculează folosind algoritmul FWT, conform procedurii indicate în figura 3.1 (cu $s_0[n] = x[n]$). Acesta foloseşte valori precalculate ale coeficienţilor filtrelor Wavelet, motiv pentru care această transformare este una rapidă, necesitând un număr total de operaţii proporţional cu N (fiind astfel chiar mai rapidă decât transformarea FFT). Transformarea fiind una ortogonală şi unitară, secvenţa $y[n]$ (a coeficienţilor Wavelet) permite reconstrucţia exactă a secvenţei $x[n]$. Neglijarea efectivă a unor coeficienţi $y[n]$ are loc în următoarea etapă care presupune stabilirea unui prag de comparaţie λ şi anularea coeficienţilor Wavelet cu magnitudine mai mică, ca şi valoare, decât acest prag. În literatura de specialitate acest proces poartă denumirea de “*hard-thresholding*”, [Don.92]. Opţional, se poate cere ca ea să fie completată cu o operaţie simultană de scădere a valorii pragului din valoarea magnitudinii coeficienţilor rămaşi nenuli, proces cunoscut sub denumire de “*soft-thresholding*”. Rezultatul, semnalul $\hat{y}[n]$, este o secvenţă cu un număr semnificativ de valori nule ceea ce permite realizarea unei compresii efective prin reţinerea şi transmiterea doar a valorilor nenule din secvenţă. Criteriul de evaluare a calităţii sistemului este cel de eroare medie pătratică dată de media erorii pătratice de reconstrucţie, definită conform (1.12). Sistemul este unul adaptiv şi în sensul că el stabileşte în mod adaptiv pragul de comparaţie λ , astfel încât SQNR de reconstrucţie să nu scadă sub o anumită limită. Se poate specifica, de exemplu, limita maximă admisibilă a distorsiunii de reconstrucţie D în termeni procentuali ai energiei secvenţei $x[n]$, E_x . Astfel, de exemplu, un raport $E_x / D = 100$ corespunde la un SQNR minim de 20 dB.

Având în vedere faptul că transformările Wavelet propuse sunt unitare se poate scrie:

$$E_x = \sum_n |x[n]|^2 = \sum_n |y[n]|^2 \quad (6.1)$$

De asemenea, distorsiunea de reconstrucţie este:

$$D = \sum_n |x[n] - \hat{x}[n]|^2 = \sum_n |y[n] - \hat{y}[n]|^2 \quad (6.2)$$

unde $\hat{x}[n]$ este semnalul reconstruit, iar:

$$\hat{y}[n] = \begin{cases} y[n] & |y[n]| \geq \lambda \\ 0 & |y[n]| < \lambda \end{cases} \quad (6.3)$$

este secvenţa de coeficienţi Wavelet reţinuţi. Această ultimă operaţie va rezulta în anularea, şi deci neglijarea, a unui număr K de coeficienţi Wavelet ($K \leq N$).

Se poate uşor demonstra că distorsiunea D dată de relaţia (6.2) este egală cu:

$$D = \sum_{k=1}^K |y[n_k]|^2 \quad (6.4)$$

unde n_k reprezintă indicele coeficienţilor anulaţi, deci care verifică relaţia $|y[n_k]| < \lambda$.

Având impusă o valoare limită inferioară a SQNR de reconstrucţie, pragul optim de comparaţie λ este găsit conform criteriului:

$$\lambda = \max_{k_0} |y[n_{k_0} J]| \text{ ce asigură verificarea } \sum_k |y[n_k J]|^2 \leq D \text{ de către valorile } |y[n_k J]| < |y[n_{k_0} J]| \quad (6.5)$$

Un indicator de performanță al sistemului, ce permite o estimare rapidă a factorului de compresie obținabil, poate fi în acest caz raportul dintre numărul total de coeficienți prelucrați (N) și numărul coeficienților reținuți ($N-K$).

Metoda propusă este eficientă, rapidă și adaptivă atât în ceea ce privește alegerea funcției Wavelet, cât și din punct de vedere al căutării pragului optim de comparație, ce permite o reconstrucție în limita unei distorsiuni de reconstrucție impusă.

Soluția propusă suferă însă de o serie de probleme, specifice sistemelor de compresie ce operează pe blocuri de eşantioane și realizează o schimbare a spațiului de reprezentare înainte de compresia efectivă. În această categorie intră atât sistemele ce folosesc diverse tipuri de transformări ortogonale cât și cele bazate pe bănci de filtre cu diverse structuri de implementare. Este vorba despre apariția efectului de margine, ce se manifestă, în general, prin distorsionarea neuniformă a semnalului prin compresie, cu un grad de distorsionare mai ridicat pe la marginile blocurilor de eşantioane prelucrate. Sistemele de compresie curent utilizate recurg la o serie de artificii în vederea atenuării și/sau evitării acestui efect. Astfel se cunoaște faptul că, [Coi.91], [Bra.92], [Iso.92], [Ger.94], aproape toate sistemele de compresie (multe dintre ele standardizate) bazate pe algoritmi FFT, DCT, DST, MDCT, precum și o serie de structuri cu bănci de filtre, procedează prin:

- completarea cu zerouri sau cu valorile oglindite ale eşantioanelor marginale,
- prelungirea prin periodicitate a secvenței de eşantioane (de lungime finită),
- considerarea unor tipuri diferite de funcții fereastră, de netezire a marginilor,
- prelucrarea pe blocuri de eşantioane parțial suprapuse,
- combinarea a mai multor proceduri din cele mai sus menționate.

Toate aceste proceduri au însă calitatea de a introduce erori de aproximare suplimentare sau de a crește complexitatea sistemului, ce se reflectă printr-o scădere a performanțelor sistemului (scăderea factorului de compresie, creșterea distorsiunilor de reconstrucție, creșterea numărului total de operații de calcul și implicit a timpului calcul etc.).

Aceste probleme au fost abordate de către autor, în contextul compresiei prin descompuneri Wavelet, în cadrul lucrării [Asz.96].

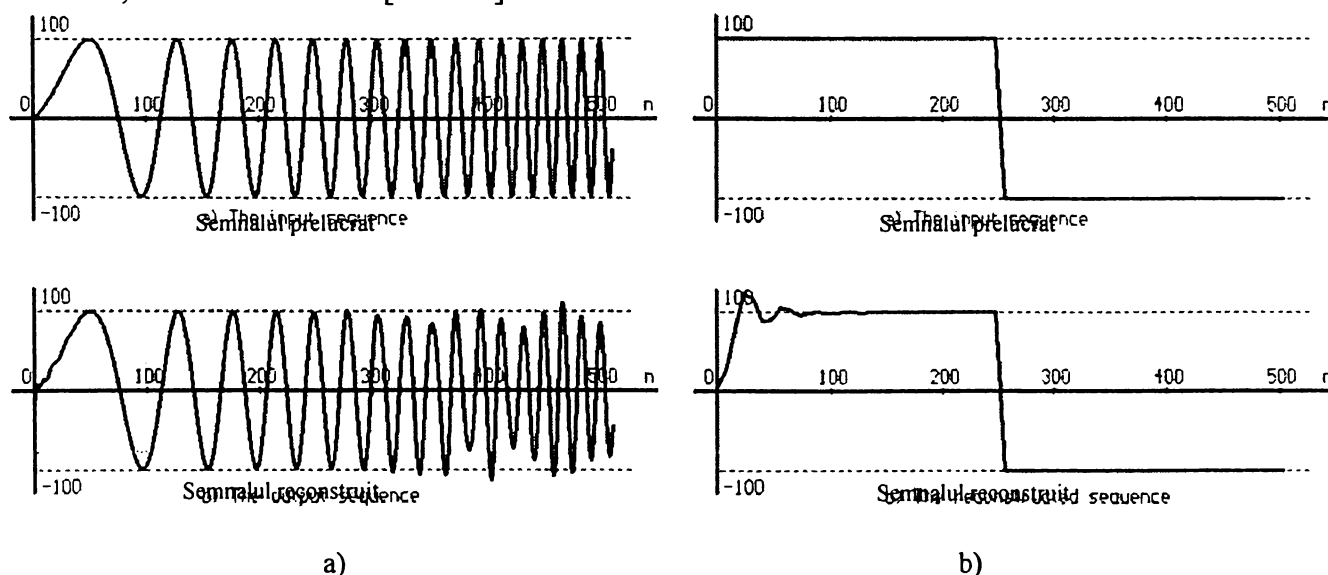


Figura 6.4. a) Prelucrarea prin periodizare a unui semnal de tip “chirp”; b) prelucrarea prin completare cu zerouri a unui semnal dreptunghiular

În figura 6.4.a. se prezintă un exemplu de compresie a unui semnal de tip “Chirp linear” (un purtător armonic modulat în frecvență cu un semnal tip “rampă”), folosind o procedură de calcul pe

blocuri de $N=512$ eşantioane, o transformare Wavelet bazată pe funcția Wavelet de tip $DAU-10$ și o limită inferioară a SQNR de reconstrucție de 20 dB. Procedura de calcul prevede o periodizare a semnalului prelucrat, tehnică ce duce la efectul de margine observabil din figură. Se poate constata o corelare clară (datorită filtrării Wavelet) a coeficienților de la începutul și respectiv sfârșitul blocului prelucrat. Erori semnificative se obțin și în cazul în care se alege o procedură de completare cu zerouri, în cazul în care primele sau ultimele valori din secvență sunt mari. Acest caz este prezentat în figura 6.4.b, unde s-a efectuat o reconstrucție dintr-un număr de 256 de coeficienți Wavelet a unui semnal dreptunghiular. Eroarea de la începutul secvenței, ușor sesizabilă, se datorează pierderilor de informație cauzate de timpul de propagare prin filtrele Wavelet a secvenței și reținerea doar a unui număr de coeficienți Wavelet egal cu cel al celor de la intrare. În cazul nostru, soluția cea mai bună, care permite eliminarea efectivă a acestor fenomene, este cea de prelucrare pe blocuri de eşantioane parțial suprapuse. Acest lucru duce însă, în mod inevitabil, la creșterea numărului de operații de calcul necesare și implicit a timpului consumat cu compresia semnalului. Principiul prelucrării unei secvențe de lungime M pe un număr de P blocuri parțial suprapuse, se prezintă în figura 6.5.

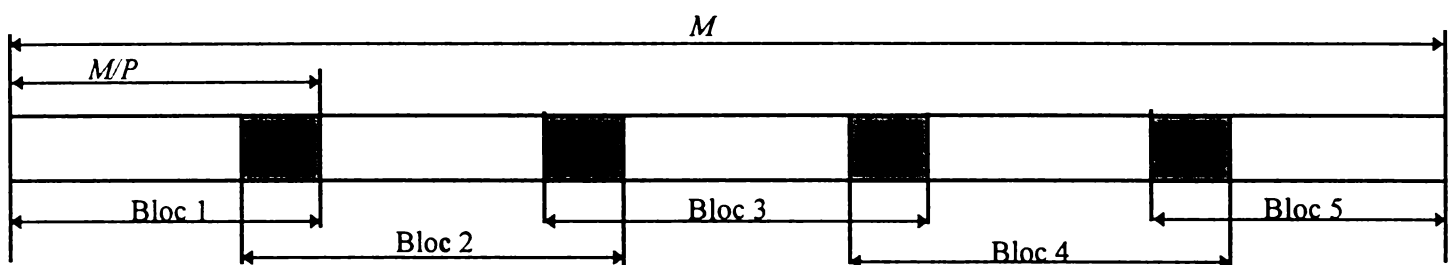


Figura 6.5. Principiul prelucrării pe blocuri parțial suprapuse în cazul FWT

Faptul că este posibilă o eliminare totală a efectelor de margine este un mare avantaj oferit de orice descompunere timp-frecvență față de soluțiile clasice bazate pe FFT, DCT, DST etc. Astfel, procedurile de compresie bazate pe transformările FFT sau DCT, ce operează cu blocuri de eşantioane parțial suprapuse, netezite în prealabil folosind diverse funcții fereastră, reușesc doar să atenueze acest efect chiar și cu prețul unui grad mai mare de suprapunere (ce scade mult eficiența codării). Spre deosebire de aceste cazuri, o bază de funcții timp-frecvență cu o localizare bună în timp va permite întotdeauna o atenuare mult mai puternică, cu un grad de suprapunere mai mic sau, eliminarea totală a acestor efecte, cu un grad de suprapunere adecvat. Am arătat, [Asz.96], că în cazul sistemelor Wavelet bazate pe funcții Wavelet cu suport compact (cum sunt toate funcțiile $DAU-N$), ce implică filtre Wavelet, cu răspuns finit la impuls (de lungime $2N$ în cazul funcțiilor $DAU-N$), implică o suprapunere minimă de:

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{J-1})(2N - 1) = (2^J - 1) \cdot (2N - 1) \quad (6.6)$$

eșantioane a blocurilor succesive, în vederea eliminării totale a acestor efecte, unde J reprezintă nivelul maxim de rezoluție al analizei Wavelet. Astfel, de exemplu, având $M/P=1024$, $J=3$ și lucrând cu $DAU-5$, $2N=10$, rezultă necesitatea unei suprapuneri parțiale de $63/1024=6.15\%$, mult mai mică decât cele utilizate de exemplu în MPEG -Audio.

Un astfel de rezultat este ilustrat în figura 6.6. unde se prezintă reconstrucția, din descompunerea Wavelet, a unui semnal dreptunghiular periodic.

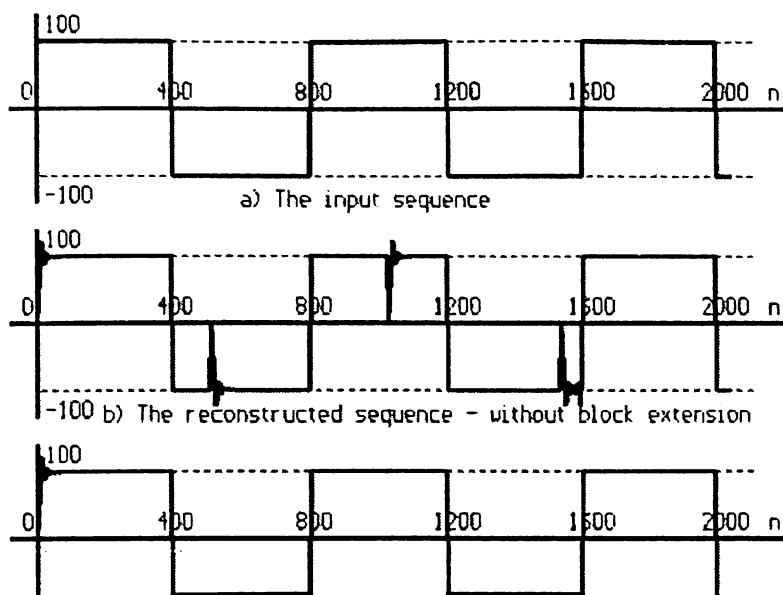


Figura 6.6. Compresia unui semnal dreptunghiular; a) semnalul de intrare; b) semnalul prelucrat fără extensie de bloc; c) semnalul prelucrat pe blocuri parțial suprapuse

6.2.2. Compresia Wavelet adaptivă a unor semnale regulate

În paragraful precedent a fost prezentat un sistem adaptiv de compresie Wavelet, ce permite o selecție adaptivă a funcției Wavelet utilizată, precum și o stabilire adaptivă a pragului de comparare în vederea asigurării unui raport semnal pe zgomot de reconstrucție minim. Am putut constata, de asemenea, faptul că în timp ce stabilirea pragului de comparație, conform algoritmului (6.5), este o procedură foarte eficientă, ce elimină practic etapa de sinteză, în procesul de estimare a distorsiunilor de reconstrucție, cea de selecție a funcției Wavelet este una de tip “prin încercări”, ce implică multiplicarea efectivă a timpul total de codare. În acest paragraf vor fi prezentate propuneri noi ale autorului ce vizează eficientizarea procesului de selecție a funcțiilor Wavelet. Ideea de bază a acestor propuneri se referă la o mai bună corelare a proprietăților de regularitate ale semnalelor de prelucrat cu cele ale funcțiilor Wavelet utilizate. Această idee pornește din dorința de a exploata mai eficient proprietățile de regularitate și de momente nule ale funcțiilor Wavelet. O expunere mai amplă a acestui subiect se găsește în §3.1.1.7. În acest paragraf a fost lansată (recomandată) ideea conform căreia în aplicații de compresie de semnal pot să fie foarte utile descompunerile semnalelor în baze de funcții Wavelet, construite pornind de la funcții Wavelet cu câteva momente de ordin superior nule. Acest lucru se datorează faptului că majoritatea semnalelor prelucrate în mod curent prezintă o oarecare regularitate, fiind frecvent semnale continue și cu derivate continue până la un anumit ordin, sau aparțin anumitor subclase specifice ale spațiului $L_2(\mathbb{R})$. Astfel, s-a arătat faptul că, dacă semnalul prelucrat $x(t)$ este unul cu o variație polinomială, de grad mai mic decât un număr N , și dacă se alege o funcție Wavelet $\psi(t)$, de analiză, ce se caracterizează printr-un număr de cel puțin N momente superioare nule, atunci produsul scalar (3.88) este zero. Acest lucru implică proiecții nule ale acestui semnal pe subspațiile W_j , ale analizei multirezoluție generată de funcția Wavelet $\psi(t)$. Se verifică imediat faptul că aceste semnale aparțin subspațiilor V_j , generate de funcția de scară $\varphi(t)$. Proprietatea este foarte utilă în compresia acestor semnale. Impunând ca funcția Wavelet să aibă cel puțin atâtea momente nule cât este gradul polinomului ce modelează semnalul analizat, vom putea obține eficiență maximă în această analiză. O altă consecință remarcabilă a acestei proprietăți de momente nule a funcțiilor Wavelet constă în faptul că ea permite caracterizarea unor funcții de o anumită regularitate. Astfel, cu N momente nule ale acestor funcții Wavelet se pot caracteriza funcții cu o regularitate (în sensul lui Hölder) de ordin $\alpha < N$. Notând, de

exemplu, cu P_j operatorul de proiecție ortogonală pe un nivel de rezoluție j , eroarea de aproximare a unei funcții $x(t) \in C^N$ prin proiecția sa pe un spațiu V_j , $P_j x(t)$, verifică [Swe.93]:

$$\|P_j x - x\| = O\{2^{-jN}\} \quad (6.7)$$

Această relație ne permite efectuarea analizei unor funcții regulate doar prin considerarea proiecțiilor în anumite subspații V_j , posibilitate ce contribuie la creșterea eficienței în aplicațiile de compresie. Astfel, dezvoltând semnalul $x(t)$ în baza ortonormală formată prin concatenarea bazelor ortonormale ale subspațiilor de forma V_j , $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, ce formează, pentru orice $J \in \mathbb{Z}$, o descompunere ortonormală a spațiului $L_2(\mathfrak{R})$, verificarea relației (6.7) ne permite eliminarea tuturor coeficienților de proiecție pe spațiile $\{W_j\}_{j > J, j \in \mathbb{Z}}$, cu garantarea unei limite maxime a erorii de aproximare. Acest lucru permite o reducere semnificativă a numărului de coeficienți ce trebuie păstrați în vederea unei reconstrucții “rezonabile”.

Propuneri concrete de sisteme adaptive de compresie Wavelet, ale autorului, ce țin cont de observațiile anterioare au fost prezentate în lucrările [Asz.99c] și [Asz.99d].

Schema de principiu a sistemului de compresie se prezintă în figura 6.7.

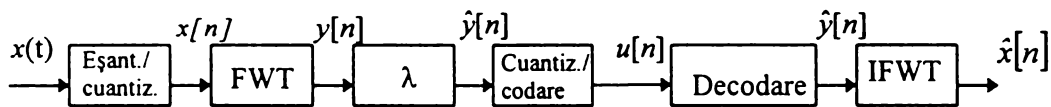


Figura 6.7. Sistem adaptiv de compresie Wavelet

Schema din figura 6.7. pune în evidență o structură similară cu cea din figura 6.3. Metoda de lucru, funcțiile diferitelor blocuri precum și procedurile de prelucrare sunt însă mai mult sau mai puțin diferite. Aceste diferențe se referă la includerea unei proceduri de estimare a regularității semnalului prelucrat și alegerea sistemului Wavelet în funcție de rezultatul obținut. Procedura de estimare a regularității semnalului oferă două rezultate importante:

- realizează o estimare a gradului polinomului cel mai apropiat de semnalul $x(t)$,
- realizează o segmentare a semnalului de prelucrat în segmente de o anumită regularitate.

Rezultatele au la bază observația faptului că orice semnal $x(t)$, de energie finită, poate fi aproximat prin polinoame $P_{P_i}(t)$, de un anumit ordin P_i , pe intervale disjuncte I_i . Această posibilitate are la bază expresia dezvoltării în serie Taylor a semnalului $x(t)$ în jurul unui anumit punct t_i , de forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{P_i} \frac{1}{k!} x^{(k)}(t_i) (t - t_i)^k + R_{P_i+1}(t) \quad (6.8)$$

Primul termen al dezvoltării (6.8) este un polinom de grad P_i , ce reprezintă o bună aproximare a semnalului $x(t)$ într-un interval I_i din jurul punctului t_i considerat. Astfel, se poate scrie:

$$x(t) \cong \begin{cases} P_{P_0}(t), & t \in I_0 \\ P_{P_1}(t), & t \in I_1 \\ \dots \\ P_{P_i}(t), & t \in I_i \\ \dots \end{cases} \quad (6.9)$$

unde I_i reprezintă intervale disjuncte ale axei reale ($\bigcup_i I_i = \mathfrak{R}$).

Această posibilitate de reprezentare a semnalului analizat oferă deci posibilitatea segmentării semnalului, pe fiecare dintre aceste segmente semnalul fiind cu o formă de variație polinomială (de un anumit grad).

Însă, conform observațiilor de mai sus, orice polinom de un anumit grad P_i aparține spațiului V_i al unei analize multirezoluție generată de o funcție Wavelet $\psi(t)$, cu un număr de cel puțin P_i+1 momente nule.

În cele ce urmează vom demonstra următoarea propoziție originală:

Propoziția 6.1.

Un număr maxim de valori nule ale coeficienților Wavelet ai unor segmente I_i de semnal cu variație polinomială de grad maxim P_i , se obține dacă transformarea Wavelet este calculată cu rezoluția maximă, și dacă sunt folosite funcții Wavelet mamă, $\psi(t)$, cu un număr de P_i+1 momente nule.

Demonstrație:

În cadrul sistemului de compresie din figura 6.7 transformarea Wavelet este calculată aplicând algoritmul FWT, prezentat în §3.1.1.5. Aceasta, pornind de la coeficienții dezvoltării semnalului $x(t)$ în baza spațiului V_0 , ($s_0[n]=x[n]$), evaluează coeficienții de proiecție ai secvenței pe orice subspațiu V_j , $j=1,2,\dots,J$, ce formează secvențele notate $s_j[n]$, precum și cei de proiecție pe subspațiile W_j , $j=1,2,\dots,J$, numiți coeficienți detaliu, secvențele $d_j[n]$. Evaluarea are la bază relațiile (3.76) și (3.77). Relațiile pun în evidență o operație de filtrare, cu filtre Wavelet de lungime finită, urmată de o operație de decimare cu factorul doi. Se cunoaște faptul că semnalul prelucrat are o variație polinomială de grad P_i pe intervalul I_i , ce reprezintă și suportul finit al secvenței prelucrate $x[n]$. Ne interesează să alegem o funcție Wavelet mamă $\psi(t)$, astfel încât să obținem un număr minim de coeficienți Wavelet. Observațiile anterioare ne sugerează faptul că aceasta ar trebui să fie cu un număr de cel puțin P_i+1 momente nule. Iterarea descompunerii Wavelet pe un număr maxim posibil de nivele de rezoluție, $J=J_{max}$, ne asigură de faptul că vom obține un număr minim de coeficienți de proiecție $s_j[n]$. Acest lucru este asigurat de faptul că la fiecare iterație are loc și o operație de decimare, iar secvența de intrare (cea prelucrată) este de lungime finită (cu suportul în intervalul I_i) obținându-se astfel secvențe de coeficienți din ce în ce mai scurte.

Pe intervalul I_i semnalul de intrare poate fi modelat prin:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{P_i} a_k t^k \quad (6.10)$$

Dacă se calculează coeficienții detaliu (secvențele $d_j[n]$) ai descompunerii semnalului $x(t)$, se obține:

$$d_j[n] = \sum_{k=0}^{P_i} a_k \left\langle t^k, 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n) \right\rangle \quad (6.11)$$

Notând cu $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$, intervalul de definiție a semnalului $x(t)$, produsul scalar din expresia (6.11) poate fi scris:

$$\begin{aligned} \left\langle t^k, 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n) \right\rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} t^k \psi(2^j t - n) dt = \\ &= \frac{2^{-\frac{j}{2}}}{2^{kj}} \int_{2^j \alpha_i - n}^{2^j \beta_i - n} (v + n)^k \psi(v) dv = \sum_{l=0}^k C_k^l \cdot \left(\int_{2^j \alpha_i - n}^{2^j \beta_i - n} v^l \psi(v) dv \right) \cdot n^{k-l} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Având în vedere faptul că, prin definiție, un număr de r de momente nule ale funcției Wavelet mamă $\psi(t)$ înseamnă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0; k = \overline{0, r-1} \quad (6.13)$$

în evaluarea (6.12), și deci în cea a expresiei (6.11), vom putea distinge trei cazuri, în funcție de variabila n :

Cazul I.

- valori n_m pentru care suportul funcției $\psi(2^j t - n_m)$ este inclus în intervalul $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$.

În acest caz o alegere de $r \geq P_i + 1$ a numărului de momente nule va asigura anularea coeficienților $d_j[n_m]$. Evident, condiția de suport implică o valoare $j \geq J_{min}$, unde J_{min} asigură verificarea condiției $supp \psi(2^{J_{min}} t) \subset I_i$.

Deci, în acest caz obținem $d_j[n_m] = 0$.

Cazul II.

- valori n_m pentru care suportul funcției $\psi(2^j t - n_m)$ nu este inclus în intervalul $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ dar intersecția lor nu este nulă.

În acest caz integralele din (6.12) vor fi nenule rezultând deci:

$$d_j[n_m] \neq 0$$

Cazul III.

- valori n_m pentru care suportul funcției $\psi(2^j t - n_m)$ nu este inclus în intervalul $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ iar intersecția lor este nulă.

Evident acești coeficienți vor fi nuli:

$$d_j[n_m] = 0$$

Scopul urmărit este minimizarea numărului coeficienților Wavelet cu valori nenule. Alegerea $J = J_{max}$ (unde J_{max} este dependent de lungimea secvenței de coeficienți $x[n]$) asigură minimizarea numărului coeficienților de proiecție, $s_J[n]$.

Din analiza de mai sus rezultă faptul că, alegând o valoare $r < P_i + 1$, pentru $J = J_{max} > J_{min}$ vom avea coeficienți detaliu nenuli atât în cazul I cât și în cazul II. Însă, alegând $r \geq P_i + 1$, numai cel de al doilea caz produce coeficienți detaliu cu valori diferite de zero. Numărul acestora depinde de numărul valorilor n_m pentru care intersecția dintre suportul funcției $\psi(2^{J_{max}} t - n_m)$ și intervalul $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ nu este nulă. Însă, conform expunerii făcute în capitolul trei, un număr mai mare de momente nule ale funcțiilor Wavelet implică o lungime mai mare a filtrelor Wavelet. Astfel, minimizarea coeficienților detaliu nenuli ai cazului II este asigurată de filtrele Wavelet cele mai scurte posibile ce asigură verificarea $r \geq P_i + 1$. Evident această cerință impune alegerea valorii minime posibile a lui r , deci $r = P_i + 1$.

Propoziția 6.1. este astfel demonstrată.

Propoziția 6.1. are o mare utilitate practică, deoarece ne indică modul în care poate fi aleasă cea mai bună funcție Wavelet, și deci cele mai adecvate filtre Wavelet, care permit o analiză eficientă a unor semnale cu variație polinomială sau aproape polinomială pe porțiuni. Problema stabilirii corecte a marginilor de intervale, deci a segmentelor disjuncte I_i , precum și cea a găsirii a celei mai potrivite măsuri a distanței (în scopul evaluării erorii de aproximare) nu sunt încă rezolvate.

Sistemul cu schema bloc din figură a fost proiectat pentru un bun compromis performanță-complexitate. Astfel, semnalul de prelucrat $x[n]$ (eșantioane ale lui $x(t)$) este împărțit în blocuri de eșantioane de lungimi egale ($L=2048$). Procedura de segmentare pornește de la acest nivel al blocurilor de eșantioane. De asemenea, sistemul poate lucra cu un număr finit de funcții Wavelet, cele ale lui Daubechies, cu un număr de momente nule între 2 și 10 (cele notate cu DAU-2, ..., DAU-10). În acest mod, sunt verificate doar regularități ale semnalului de intrare până la ordinul 10. Procedura de segmentare, într-o primă fază, prevede verificarea regularității semnalului din blocul curent de eșantioane. Aceasta are la bază algoritmul de interpolare polinomială rapidă descris în [Pre.93]. Criteriul erorii de aproximare folosit este cel al erorii absolute. Astfel, folosind un număr de P de eșantioane, pe cât posibil echidistante, algoritmul de interpolare evaluează valorile a N de eșantioane ale unui polinom de grad $P-1$. Dacă aceste valori le aproximează pe cele ale semnalului, în limita unei erori absolute prestabilite (care este un anumit procent din valoarea maximă a eșantioanelor din blocul respectiv), se reține valoarea $P-1$, deci a gradului polinomului verificat, ce este asociată apoi blocului curent de eșantioane. În caz contrar, dacă este depășită eroarea limită maximă admisă, se trece la verificarea unui polinom cu un grad mai mare (P în cazul nostru). Dacă nici aceasta nu dă rezultatul așteptat se reiterează procesul, incrementând din nou gradul polinomului. Procesul se continuă până ce se ajunge la un grad maxim de $P=9$ al polinomului investigat, după care blocul curent de eșantioane este împărțit în două blocuri de lungimi aproximativ egale și se reiterează procesul de aproximare polinomială pentru fiecare bloc de eșantioane în parte, pornind din nou cu $P=2$. Procesul de segmentare este repetat, dacă este nevoie, și pentru aceste blocuri. El este oprit în condițiile în care lungimea segmentelor obținute scade sub o anumită limită inferioară impusă. În cazul sistemului propus această limită este de 64 de eșantioane. Rezultatul procedurii constă dintr-o segmentare adaptivă, pe segmente de eșantioane de lungimi mai mari decât limita inferioară stabilită, și cu valori ale gradului polinoamelor, ce oferă cele mai bune aproximări, asociate. În conformitate cu aceste rezultate, urmează o procedură de transformare Wavelet ortogonală, aplicată fiecărui segment în parte, folosind funcția Wavelet cea mai potrivită din mulțimea de funcții Wavelet disponibile.

Urmează o etapă de "hard-thresholding", ce presupune stabilirea adaptivă a unui prag de comparație λ și anularea coeficienților Wavelet cu magnitudine mai mică decât acest prag. El poate fi stabilit, de exemplu, prin aplicarea procedurii (6.5). Dacă se dorește obținerea unei viteze sporite în procesul de compresie, pragul poate fi stabilit alegând o valoare limită superioară, ce asigură distorsiuni de reconstrucție mai mici decât cea impusă. Astfel, datorită faptului că întotdeauna are loc inegalitatea:

$$D = \sum_{k=1}^K |y[n_k]|^2 \leq (N - K) \cdot \lambda^2 < N \cdot \lambda^2 \quad (6.14)$$

o limită superioară a acestui prag poate fi stabilită printr-o alegere de forma:

$$\lambda = \sqrt{\frac{D}{N}} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot E_x}{N}} \quad (6.15)$$

ce va asigura astfel o reconstrucție în limita distorsiunii D prestabilite.

Un exemplu de compresie, obținut prin aplicarea programului elaborat (scris în limbaj C) unui semnal test, este dat în figura (6.8).

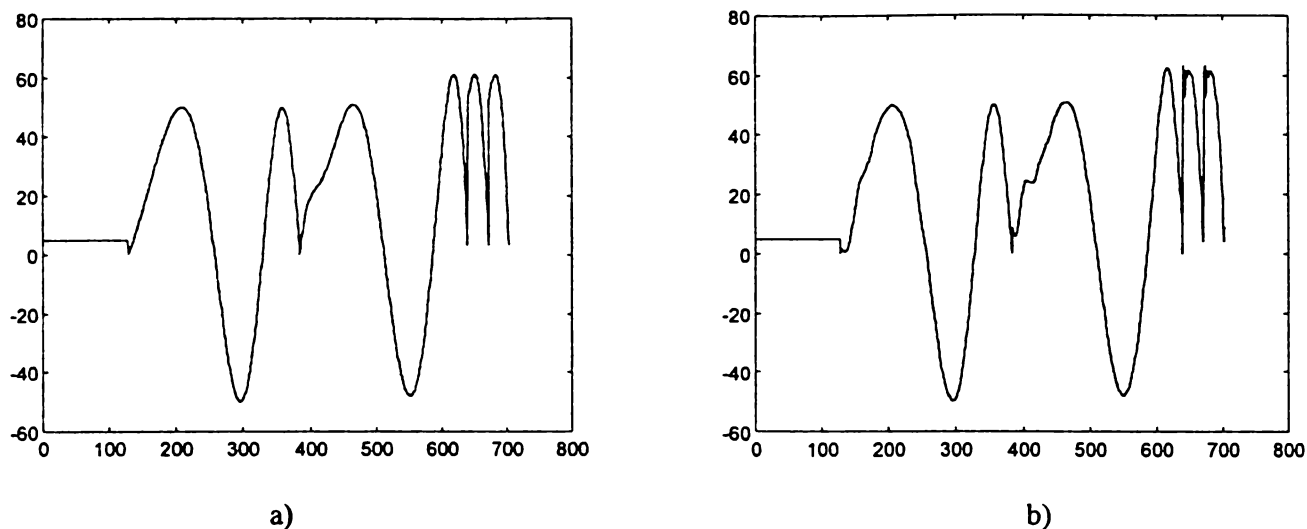


Figura 6.8. a) semnalul test de prelucrat; b) semnalul test reconstruit din cel adaptiv comprimat

Rezultatul etapei de segmentare adaptivă este prezentat sintetic în tabelul 6.3.

Tabelul 6.3. Diferitele segmente de regularitate ale semnalului test din figura 6.8.a

Numărul de ordine al segmentului	Gradul polinomului asociat	Lungimea segmentului [număr de eșantioane]
1	0	128
2	5	128
3	6	128
4	7	256
5	9	64

Constanta α din relația (6.15) ia valoarea 0.005 (0.5%), ceea ce reprezintă o distorsiune maxim admisibilă de 1/200 din energia totală a segmentului de eșantioane. Factorul de compresie obținut, în urma cuantizării pe 8 biți și memorarea în format [poziție, valoare] a valorilor nenule, este de 7.65.

Capitolul VII. Compresie transparentă de semnal audio

7.1. Metode standardizate de codare a semnalului audio

Cercetările din domeniul compresiei de voce și de semnal audio au dus, de-a lungul timpului, la apariția unei serii de standarde naționale și internaționale. Astfel, în domeniul compresiei semnalului vocal pot fi menționate metodele de compresie: CELP (Code-Excited Linear Prediction - inclus în standarde naționale sau internaționale cum sunt US FS 1016, ITU-T G.728, ITU-T G.729), APC (Adaptive Predictive Coding - Inmarsat-B), MP-LPC (MultiPulse Linear Predictive Coding - utilizat în sistemul BTI Skyphone), RPE-LPC (Regular Pulse Excitation Linear Predictive Coding - inclus în standardul de telefonie celulară GSM), ADPCM (Adaptive Differential Pulse Code Modulation - ITU-T G721, ITU-T G722), LPC (Linear Predictive Coding - standardul LPC-10), MBE (MultiBand Excitation coding - utilizat în sistemul INMARSAT-M), VSELP (Vector Sum Excited Linear Predictive coding - IS54). Problema compresiei semnalului de voce este de fapt o preocupare mai veche a unui număr mare de cercetători de pretutindeni din lume. Există o serie de lucrări de referință, foarte multe mai recente, semnate de M.R. Schroeder, A. Gersho, J.P. Campbell, P. Barnwell, R.J. McAulay, T.F. Quatieri, etc. care abordează cu succes anumite aspecte ale acestui domeniu al compresiei de voce. De-a lungul timpului s-au conturat clar două direcții în cadrul acestui domeniu, și-anume cea a metodelor de codare a formei de undă (mai puțin eficiente dar cu o fidelitate mai bună), și cea a codărilor prin sinteză de semnal, metode ce presupun o parametrizare a semnalului vocal original și reținerea doar a valorilor acestor parametri, urmată de o sinteză de semnal pe baza acestor valori (sunt metode foarte eficiente dar oferă fidelitate de reproducere mai scăzută). Spre deosebire de metodele de codare de semnal vocal, anterior amintite, noțiunea de codare audio se asociază, încă de la început, cu metodele de compresie cu o fidelitate de reproducere remarcabilă, deci de calitate, cu aplicații în transmisiuni audio numerice de înalte fidelitate, calitate Hi-Fi, (de exemplu, sistemele DAB - Digital Audio Broadcast), sau în televiziunea numerică de înaltă definiție (de exemplu, sistemele Grand Alliance HDTV - High Definition Television, sau sistemele europene DVB - Digital Video Broadcast), precum și în alte sisteme multimedia. Caracteristica comună a acestor semnale este banda de frecvență ocupată mai mare (de până la 24 kHz) decât cea a semnalelor de voce vizate de metodele anterior amintite. O deosebire esențială dintre cele două categorii de metode constă în faptul că în timp ce metodele de codare a vocii sunt, cu precădere, metode predictive, cele de codare audio de bandă largă sunt, în general, codări prin transformări ortogonale sau prin filtrări în subbenzi. Și în acest domeniu au fost elaborate o serie de metode care, ulterior, au fost standarde. Astfel, pot fi amintite metodele: NICAM (Nearly Instantaneous Companding Audio Multiplex, standardizat ITU-R Rec.660) al firmei BBC, ASPEC (Adaptive Spectral Perceptual Entropy Coding of high quality music signals) elaborată de firma AT&T în colaborare cu institutul Fraunhofer și Universitatea din Erlangen, Germania, metoda MUSICAM (Masking pattern adapted Universal Subband Integrated Coding And Multiplexing), MASCAM (Masking pattern Adapted Subband Coding And Multiplexing) și nu ultimul rând standardele ISO/MPEG-audio inițiate de firmele Philips (Olanda), IRT (Germania) precum și de organizația CCETT (Centre Commun d'Etudes des Telediffusion et Telecommunications, Franța). Metoda MPEG-1 audio prevede trei nivele de codare a semnalului audio, cu o complexitate de implementare din ce în ce mai ridicată dar și cu o fidelitate de reproducere din ce în ce mai bună în aceleași condiții de lucru. Nivelele 1 și 2 de codare sunt similare cu cele din metoda MUSICAM, primul nivel fiind însă mai simplu. Nivelul 3 de codare oferă calitatea cea mai bună dar este și cu o complexitate de implementare ridicată. Acest nivel

combină codarea prin transformare ortogonală a metodei ASPEC cu filtrarea subbandă utilizată în sistemul MUSICAM. MPEG-1 permite codarea transparentă a semnalului audio stereofonic (în limita unei rate de bit medie impusă). MPEG-2 a apărut ca și o continuare a seriilor de standarde MPEG-1 de codare a semnalelor video-audio, incluzând facilități suplimentare cum este cea de a lucra și cu rate de bit mai scăzute. Partea audio MPEG-2 aduce și o componentă nouă, denumită MPEG-2 AAC (MPEG-2 Advanced Audio Coder, standardizat ISO/MPEG 13818-7), ce este o metodă de codare similară codărilor MPEG-1, dar care permite codare audio multicanal (5.1 canale, 5 canale audio plus un canal de rezervă de bandă îngustă de 200 Hz) cu opțiuni noi cum ar fi utilizarea unor tehnici predictive în vederea cuantizării și codării eşantioanelor subbandă. Se remarcă, de asemenea, existența în acest domeniu a unor serii de alte standarde, de obicei standarde de firmă, cum ar fi metoda PASC (Precision Adaptive Subband Coding) incluse în sistemele DCC (Digital Compact Cassette) ale firmei Philips sau metoda ATRAC (Adaptive TRansform Acoustic Coding for minidisc) incluse în sistemele Minidisc ale firmei Sony. De fapt, metoda PASC este foarte asemănătoare cu Nivelul 2 de codare audio ISO MPEG-1. O serie de alte firme, în special japoneze (NEC, Matsushita, Sony etc.), și-au propus realizarea unor circuite integrate ce implementează codarea și respectiv decodarea MPEG audio în timp real. Publicațiile de referință în acest domeniu poartă semnătura unor cercetători renumiți cum sunt Gerard Lohhoff (metoda PASC), K. Brandenburg (ASPEC, ISO MPEG-audio), [Bra.90], [Bra.91a], D. Seitzer, M. Iwadara, Y.F. Dehery (metoda MUSICAM), N. Moreau, K. Tsutsui, H. Suzuki (metoda ATRAC), G. Theile, G. Stoll (metoda MASCAM), J.D. Johnstone etc. Aceste metode de codare de semnal audio de bandă largă au la bază, aproape în exclusivitate, codarea caracteristicilor frecvențiale ale semnalului analizat, un rol important jucând în toate aceste cazuri diversele variante ale transformării DCT. Compresia efectivă are la bază, în majoritatea cazurilor, o reducere a unor componente de semnal, ce sunt imperceptibile de către sistemul auditiv uman. În acest mod se poate obține o compresie a semnalului audio ce oferă erori de reconstrucție imperceptibile la decodare. Componentele nesemnificative, deci cele imperceptibile, sunt identificate de către fiecare metodă folosind un model psiho-acustic (ce modelează funcționarea sistemului auditiv uman). Această analiză vizează, în general, atât caracteristicilor frecvențiale (componente spectrale), cât cele temporale ale semnalului audio. Această din urmă observație deschide direcții noi de cercetare în domeniul compresiei audio, având în vedere faptul că identificarea simultană, atât frecvențială cât și temporală, a componentelor neglijabile (care dau erori de reconstrucție imperceptibile), poate oferi rezultate mai bune, algoritmi mai eficienți decât cele mai sus amintite. Printre aceste noi direcții una de importanță majoră pare să fie cea de compresie audio de bandă largă utilizând descompuneri de semnal în baze de funcții timp-frecvență, (în special în cele de funcții Wavelet sau pachete de funcții Wavelet). Principalul argument în favoarea acestor funcții constă în faptul că, spre deosebire de funcțiile de descompunere implicate de transformarea DCT, aceste funcții se bucură de proprietăți remarcabile de localizare simultană atât în domeniul timp cât și în cel de frecvență. În capitolul trei au fost caracterizate o serie de asemenea baze incluzând baze Wavelet ortogonale, biortogonale, baze de pachete de funcții Wavelet, baze de funcții trigonometrice locale, de pachete de funcții trigonometrice locale. A fost subliniat faptul că transformarea Wavelet discretă, DWT, permite o implementare chiar mai eficientă decât cea a DCT. Acest fapt îl recomandă ca un posibil puternic contracandidat al DCT într-o serie de domenii de aplicație. Această recunoaștere este foarte recentă, motiv din care subiectul este unul de mare actualitate. Importanța utilizării funcțiilor Wavelet în aplicațiile de compresie audio s-a conturat de abia în urma apariției unor lucrări de referință în domeniu semnate de Y. Meyer, [Mey.90], R.R. Coifman, [Coi.90], [Coi.92a,b], M. V. Wickerhauser, [Wic.94], R. A. Gopinath, [Gop.92a,b,c,d], G. Evangelista, [Eva.93], S.G. Mallat, [Mal.89b], [Mal.93], A.H. Tewfik, [Ali.95], C. Taswell, [Tas.94], [Tas.95a,b], D. Sinha, [Sin.93],

M. Vetterli, [Vet.89], [Vet.92], J. Kovacevic, [Vet.95], V. K. Goyal, [Goy.98], R. Arean, [Are.00], M. Ali, [Ali.96], etc. Noile procedee, prezentate în aceste lucrări, permit efectuarea unei analize mai eficiente a semnalului audio, o mai bună adaptare la caracteristicile sistemului auditiv uman, ce permit astfel obținerea de performanțe similare cu cele ale metodelor clasice dar cu o complexitate mai redusă sau, performanțe mai bune la o aceeași complexitate. Este și motivul pentru care transformarea Wavelet urmează să fie inclusă în standardul de compresie MPEG 2000, ce dorește a fi un succesor al standardelor actuale MPEG-1,2,4,7 audio și video.

7.2. Codare transparentă de semnal audio

7.2.1. Modelarea proprietăților psiho-acustice ale sistemului auditiv uman

Auzul uman, mecanismul de percepție a sunetelor de către sistemul auditiv uman este un proces complex și foarte greu de modelat cu o acuratețe bună. Însă, de această acuratețe a modelului stabilit depinde abilitatea unui anumit algoritm de codare a semnalelor de voce și audio de a oferi o codare transparentă. Elementele componente ale acestui proces țin atât de anatomia urechii umane, de mecanismul de transmisie a impulsurilor nervoase precum și de abilități interpretative la nivelul creierului. Un model bun al acestui proces trebuie să abordeze cel puțin fenomenele care țin de principalele componente ale acestui proces. Acestea sunt:

- transformarea semnalului acustic în semnal electric;
- analiză spectrală cu un set de filtre trece-bandă, cu caracteristici asemănătoare proprietăților de transmisie ale rezonatorilor Helmholtz din urechea internă;
- transmisia impulsurilor cuantificate la nivel auditiv;
- repartiția impulsurilor nervoase (fibrele nervoase se pot grupa și lega în vederea transmiterii unui impuls nervos “insuportabil” de transmis de către oricare dintre ele);
- integrarea neurologică a datelor auditive (aproximativ la fiecare 1/16 secunde se face o evaluare, la nivelul creierului, a ceea ce s-a transmis de-a lungul nervului auditiv în acel interval sub forma unui spectru curent de putere);
- autocorelarea fenomenului (datele auditive nu se rezumă doar la un flux de senzații succesive, există un mecanism de autocorelare a “recepției” curente cu cele precedente, ce permite o apreciere a coerenței desfășurării sonore înregistrată în memoria de timp scurt);
- recunoașterea - o ultimă integrare ce duce la recunoașterea unui eveniment sonor prin corelarea informației transmise cu conținutul memoriei permanente.

Considerentele de mai sus sugerează complexitatea amintită a procesului de percepție, multitudinea nivelelor la care acesta se realizează precum și cerințe aproape imposibil de satisfăcut în construcția efectivă a unui model bun al acestuia. De fapt, chiar și cele mai răspândite modele existente sunt axate doar pe câteva dintre considerentele mai sus enumerate. Astfel, aceste modele utilizate în mod curent prevăd o structură de bancă de filtre neuniformă, formată din 25 de filtre trece-bandă (cu 25 de canale), ce acoperă domeniul de frecvențe $0 \div 24 \text{ kHz}$.

Într-un sistem de codare de semnal vocal sau audio, acest model, cunoscut sub denumirea de model psiho-acustic, este folosit pentru eliminarea părții nerelevante din cantitatea de informație totală a semnalului de codat. Mai precis, se urmărește identificarea și eliminarea acelor componente de semnal care duc la distorsiuni de reconstrucție imperceptibile la decodare. Din acest motiv, cu toate că aceste metode sunt metode de codare cu pierdere, ele sunt denumite metode de codare transparente.

7.2.2. Codare perceptivă de semnal audio

Procesul de modelare a sistemului auditiv uman implică o serie de concepte noi cum sunt: prag de audibilitate, benzi critice, mascare audio, prag de mascare, raport semnal pe nivel de mascare, SMR (Signal to Mask Ratio), etc., [Mor.95]. Pragul de audibilitate reprezintă puterea minimă a unui semnal acustic pentru care acest semnal devine audibil (este detectat de auzul uman). Această definiție este însă una imprecisă și incompletă. Modelele psiho-acustice curente țin cont de faptul că urechea umană nu este la fel de sensibilă pentru toate frecvențele din plaja domeniului de frecvențe audio. Astfel, două componente frecvențiale pure de aceeași putere dar de frecvențe diferite sunt percepute ca având nivele diferite. Pragul absolut de audibilitate se definește ca o funcție $T_a(\xi)$, de variabila frecvență ξ , și indică puterea minimă a unei componente frecvențiale pure pentru care aceasta devine audibilă. În mod similar pot fi definite curbele de audibilitate de nivel constant, $T_\lambda(\xi)$, prin considerarea nivelelor de putere ale unor componente frecvențiale pure pentru care percepția este uniformă, de un anumit nivel constant, λ . Nu există o expresie analitică exactă a acestor curbe, se cunosc însă diverse expresii aproximative. Astfel, pragul absolut de audibilitate poate fi modelat prin expresia neliniară, [Ber.98]:

$$T_a(\xi)[dB] = 3.64 \cdot \left(\frac{\xi}{1000}\right)^{-0.8} - 6.5 \cdot e^{-0.6\left(\frac{\xi}{1000}\right)^2} + 10^{-3} \cdot \left(\frac{\xi}{1000}\right)^4 \quad (7.1)$$

unde variabila frecvențială ξ este exprimată în Hz, iar rezultatul $T_a(\xi)$ în decibeli.

În figura 7.1 se prezintă această curbă a pragului absolut de audibilitate.

Importanța acestei curbe rezidă în faptul că orice componentă spectrală, din spectrul unui semnal audio, ce are un nivel de putere mai mic decât valoarea pragului de audibilitate în acel punct frecvențial, poate fi neglijată într-un proces de codare a semnalului, distorsiunile de reconstrucție rămânând imperceptibile. Acest fapt pare să explice de ce cuantizarea uniformă pe 16 biți a semnalului audio poate oferi o reproducere de calitate, de înaltă fidelitate (în acest caz raportul semnal pe zgomot al semnalului reconstruit este în jurul valorii de 96 dB).

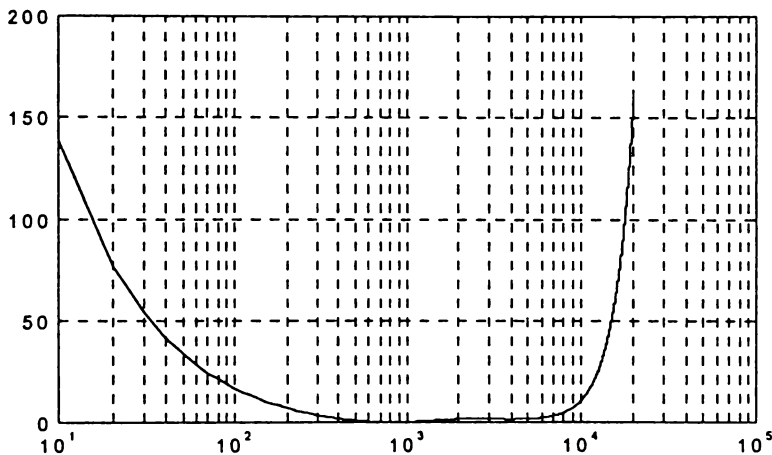


Figura 7.1. Curba pragului absolut de audibilitate (în dB)

Modelul psiho-acustic bazat pe o structură de bancă de filtre neuniformă dorește să pună în evidență comportamentul urechii interioare în procesul de recepție a undelor acustice. Benzile de trecere ale filtrelor trece-bandă, denumite benzi critice, nu sunt egale. Acestea pot fi stabilite pe baza unor considerente perceptivă (deci subiective). Astfel, considerând un semnal acustic format din două componente de semnal pur sinusoidale (componente tonale), cu puteri stabilite (cunoscute) și de frecvențe diferite, s-a constatat faptul că nivelul percepției (puterea sesizată) depinde foarte mult de distanța frecvențială dintre aceste componente. S-a observat faptul că, în cazul în care cele

două componente sunt cu frecvențe apropiate, nivelul percepției este mai mic decât în cazul în care această diferență de frecvență este mai mare, în aceleași condiții de putere ale celor două componente. Noțiunea de bandă critică este folosită pentru denumirea unei benzi de frecvențe definită de diferența minimă de frecvență dintre două componente tonale la care se observă această creștere a nivelului de percepție. În tabelul 7.1 sunt trecute principalele frecvențe de identificare a celor 25 de benzi critice (frecvențele de tăiere - inferioară și superioară, precum și cea centrală a benzii), stabilite experimental pentru acest model al sistemului auditiv uman.

Tabelul 7.1. Benzile critice ale modelului sistemului auditiv uman

Numărul benzii	Frecvența de tăiere inferioară (ξ_{min}), [Hz]	Frecvența centrală a benzii (ξ_0), [Hz]	Frecvența de tăiere superioară (ξ_{max}), [Hz]
1	0	50	100
2	100	150	200
3	200	250	300
4	300	350	400
5	400	450	510
6	510	570	630
7	630	700	770
8	770	840	920
9	920	1000	1080
10	1080	1170	1270
11	1270	1370	1480
12	1480	1600	1720
13	1720	1850	2000
14	2000	2150	2320
15	2320	2500	2700
16	2700	2900	3150
17	3150	3400	3700
18	3700	4000	4400
19	4400	4800	5300
20	5300	5800	6400
21	6400	7000	7700
22	7700	8500	9500
23	9500	10500	12000
24	12000	13500	15500
25	15500	19500	24000

Se poate observa faptul că definirea acestor benzi critice este dată în termenii unor măsuri subiective, motiv din care limitele de frecvență indicate în tabelul de mai sus reprezintă doar valori recomandate, de care se poate ține cont în dimensionarea unei bănci de filtre ce dorește să modeleze sistemul auditiv uman. O definiție mai generală a unei benzi critice, ținând cont de fenomenul mai sus amintit, poate fi dată în felul următor: o bandă critică reprezintă un domeniu de frecvențe pentru care răspunsurile subiective sunt relativ uniforme, în timp ce răspunsul la frecvențe din benzi critice diferite tinde să fie radical diferit.

Mascarea audio este un fenomen ce se manifestă atât în domeniul timp cât și în cel de frecvență, și constă în faptul că un semnal sonor slab (de nivel mai mic) este practic imperceptibil de către urechea umană în prezența unui semnal sonor mult mai puternic ce apare în mod simultan sau aproape simultan cu cel dintâi.

Fenomenul de mascare temporală constă în mascarea, de către un semnal sonor mai puternic, cu o anumită durată de existență, a semnalelor mai slabe imediat înaintea apariției, în timpul existenței și pe o scurtă perioadă de timp după terminarea semnalului sonor puternic.

Fenomenul de mascare frecvențială constă în faptul că o componentă frecvențială puternică (de exemplu o componentă tonală) afectează puternic percepția celorlalte componente frecvențiale, indiferent de benzile critice în care se încadrează acestea. Deci, el este un fenomen ce apare în condițiile de coexistență simultană a mai multor componente spectrale în semnalul sonor. Un exemplu de mascare frecvențială de către o componentă puternică, T_1 , pe o frecvență ξ_1 , a altor două componente spectrale mai slabe, cu frecvențele ξ_2 și, respectiv, ξ_3 , se prezintă în figura 7.2.

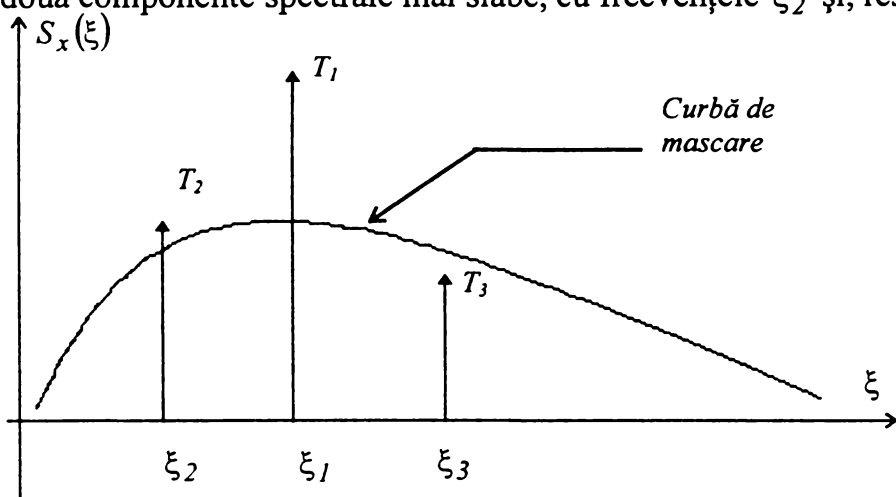


Figura 7.2. Curba de mascare a unei componente frecvențiale T_1

Gradul de mascare de către componenta frecvențială T_1 a altor componente, este dependentă atât de nivelul acesteia cât și de frecvența componentelor mascate. Componenta frecvențială T_1 poartă denumirea de componentă sau semnal de mascare. Nivelul minim de semnal a unei alte componente, cu o anumită frecvență, pentru care aceasta devine audibilă, în prezența componentei de mascare T_1 , definește pragul de mascare a componentei T_1 pe acea frecvență. Valorile pragului de mascare al unei componente de mascare, evaluate în puncte frecvențiale diferite, definesc curba de mascare a acelei componente. În figura 7.2 prin linie continuă a fost reprezentată curba de mascare a componentei T_1 . Orice componentă cu nivel mai mic decât valoarea pragului de mascare pe acea frecvență va fi inaudibilă, deci imperceptibilă auzului uman. Prezența unor asemenea componente spectrale în spectrul semnalului audio este redundantă, neglijarea lor totală poate duce la o reprezentare eficientă, cu distorsiuni de reconstrucție imperceptibile, a semnalului audio. Se poate observa că în spectrul de semnal audio din figura 7.2 componenta T_3 este o astfel de componentă redundantă. Alura acestei curbe poate fi modelată prin funcția, [Luo.95]:

$$T_{\xi_1}(\xi) = \begin{cases} T_{max}(\xi_1) \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{28} & \xi \leq \xi_1 \\ T_{max}(\xi_1) \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{-10} & \xi > \xi_1 \end{cases} \quad (7.2)$$

unde $T_{max}(\xi_1)$ reprezintă pragul de mascare a componentei T_1 pe frecvența proprie, ξ_1 , a acesteia, exprimat în valori efective. Această valoare este dependentă de natura componentei de mascare T_1 în sensul că ia valori diferite dacă această componentă este una tonală sau una netonală. Expresia (7.2) indică o funcție neliniară în variabila frecvență. În mod curent funcția $T_{\xi_1}(\xi)$ se exprimă în decibeli, caz în care aceasta va fi o expresie liniară în variabila frecvență ξ . Se poate observa faptul că panta acestei curbe de mascare este mult mai abruptă la frecvențe mai mici decât cea a componentei de

mascare, ξ_j , în comparație cu panta acesteia la frecvențele mai mari decât aceasta. În aplicațiile practice curba de mascare trebuie evaluată pentru toate componentele de semnal (tonale sau netonale) ce au nivele ce pot masca alte componente. Astfel, prin acest procedeu se poate stabili o curbă de mascare globală, utilă în dimensionarea sistemului de compresie (mai ales în cea a dimensionării cuantizoarelor). Găsirea curbei implică însă un număr mare de operații motiv pentru care, în aplicațiile practice, se folosesc procedee aproximative de evaluare. Astfel, atât curba pragului absolut de audibilitate (figura 7.1) cât și curbele de mascare (conform figurii 7.2) sunt evaluate pe o scară frecvențială modificată, mai bine adaptată la structura de benzi critice a modelului sistemului auditiv uman folosit. Unitatea de măsură pe această scară este *Bark*-ul, un Bark fiind egal cu distanța dintre două benzi critice. Cum însă benzile de frecvențe ale acestor benzi critice nu sunt egale (vezi tabelul 7.1), rezultă o funcție neliniară de transformare a variabilei independentă frecvență. Nu se cunoaște o expresie analitică exactă a acestei funcții de transformare, se lucrează însă, în mod curent, cu o serie de funcții ce o aproximează cu o acuratețe mai bună sau mai puțin bună. Un exemplu de o astfel de funcție este dată de expresia (7.3), [Mor.95].

$$\xi^b[\text{Bark}] = 13 \cdot \arctg\left(0.76 \cdot \frac{\xi[\text{Hz}]}{1000}\right) + 3.5 \cdot \arctg\left[\left(\frac{\xi[\text{Hz}]}{7500}\right)^2\right] \quad (7.3)$$

Această expresie oferă o aproximare foarte bună a legii de transformare a frecvențelor în domeniul de frecvențe $0 \div 24 \text{ kHz}$. Ea are o evoluție aproximativ liniară până pe la frecvența de 500 Hz și apoi o variație aproximativ logaritmică, la frecvențe mai mari decât aceasta.

Utilitatea folosirii unității *Bark* în evaluarea curbelor de mascare constă în absența selectivității urechii umane în interiorul unei benzi critice ceea ce ne permite ca aceste curbe să fie approximate prin segmente drepte în diferitele benzi critice, fără a introduce erori de aproximare prea mari și fără a compromite utilitatea modelului. Evident, exprimate în Bark, benzile critice au lățimi egale (unitare) și frecvențe centrale întregi. Astfel, se reduce în mod considerabil, numărul de operații necesare stabilirii curbei globale de mascare. Valoarea pragului global de mascare dintr-o subbandă permite definirea raportului semnal pe nivel de mascare, SMR, în acea subbandă. Prin codarea cu pierdere a semnalelor subbandă se introduce, în mod inevitabil, un zgomot de cuantizare peste componenta utilă. Totuși codarea este considerată ca fiind transparentă dacă raportul semnal pe zgomot, SNR, este mai mare decât raportul SMR din acea subbandă. Este așa deoarece în această situație zgomotele de cuantizare rămân imperceptibile auzului uman, ele fiind mascate în totalitate de componentele utile ale semnalului. Un sistem de compresie de semnal audio, bazat pe codarea subbandă a semnalului, poate ține cont de proprietățile psiho-acustice a sistemului auditiv uman prin evaluarea rapoartelor SMR din fiecare subbandă și folosirea acestora în dimensionarea cuantizoarelor folosite.

Calculul pragului global de mascare are la bază ipoteza conform căreia efectele de mascare sunt aditive (efectul global egal cu suma efectelor individuale de mascare). O componentă frecvențială ξ_i (de frecvență i în Bark), din spectrul unui semnal audio poate fi mascat de orice componentă ξ_j (de frecvență j în Bark), tonală sau netonală, de pe orice altă frecvență. Bineînțeles panta mare de descreștere a curbelor de mascare a acestor componente va face ca efectul lor să fie resimțit doar în câteva benzi critice vecine ale lor. Definind $T_t(i, j)$ și $T_n(i, j)$ nivelul de mascare pe frecvența i (în Bark) a unei componente tonale cu frecvența j și respectiv a unei componente netonale din banda critică j , exprimate în decibeli, nivelul global de mascare în banda critică i este:

$$M(i)[\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(10^{0.1 T_a(i)} + \sum_{j=1}^N 10^{0.1 T_t(i, j)} + \sum_{j=1}^N 10^{0.1 T_n(i, j)} \right) \quad (7.4)$$

unde N reprezintă numărul total al benzilor critice. Evident, funcțiile $T_t(i, j)$ și $T_n(i, j)$ pot fi definite folosind o expresie rescalată și evaluată în decibeli a funcției $T_{\xi_j}(\xi)$ dată de relația (7.1), unde constanta $T_{max}(\xi_j)$ ține cont de natura tonală sau netonală a componentei de mascare j .

7.3. Sistemul de codare MPEG-Audio

7.3.1. Nivelele 1,2 și 3 ale codării MPEG-1 Audio

MPEG-Audio este denumirea comună utilizată pentru referirea părții de codare audio a seriilor de standarde MPEG de codare audio-video. Astfel, MPEG-1-Audio este o recomandare ce cuprinde trei nivele de codare perceptivă a semnalului audio, cu o complexitate de implementare din ce în ce mai ridicată dar și cu o fidelitate de reproducere din ce în ce mai bună în aceleași condiții de lucru. Ele vor fi referite sub denumirile MPEG-1L.I, MPEG-1L.II și MPEG-1L.III. Toate cele trei nivele prevăd o procedură de codare bazată, într-o primă etapă, pe o schemă de filtrare în subbenzi. Este folosită, în acest scop, o bancă de filtre polifază cu 32 de subbenzi frecvențiale de lățimi egale (750Hz la o frecvență de eșantionare de 48kHz). În cazul primelor două nivele, semnalele subbandă sunt prelucrate pe blocuri parțial suprapuse (cu o lungime de 8 ms la frecvența de eșantionare mai sus menționată), folosind o procedură adaptivă de codare. Procedura prevede, în vederea realizării unei codări transparente de semnal, folosirea unuia dintre cele două modele psiho-acustice, cunoscute sub denumirile de Model Psiho-acustic I și Model Psiho-acustic II. Ambele nivele de codare permit, ca și parametru de intrare, specificare ratei de bit medie dorită în funcție de care procedura de alocare de bit adaptivă va putea sau nu să ofere transparența dorită în codare. Frecvențele de eșantionare suportate sunt 32, 44.1 și 48 kHz. Rezultate subiective, [Iso.92], indică o rată de bit medie necesară de 384 kbps (și respectiv 192 kbps) pentru o codare transparentă a unui semnal stereo folosind MPEG-1L.I (respectiv MPEG-1L.II). Ținând cont de faptul că semnalul audio stereo, eșantionat cu 48 kHz și codat PCM pe 16 biți (fiecare eșantion), implică o rată de bit efectivă de 1536 kbps, rezultă un factor de compresie de aproximativ 4 (respectiv de aproximativ 8). Schema bloc a unui codor/decodor MPEG-1 se prezintă în figura 7.3.

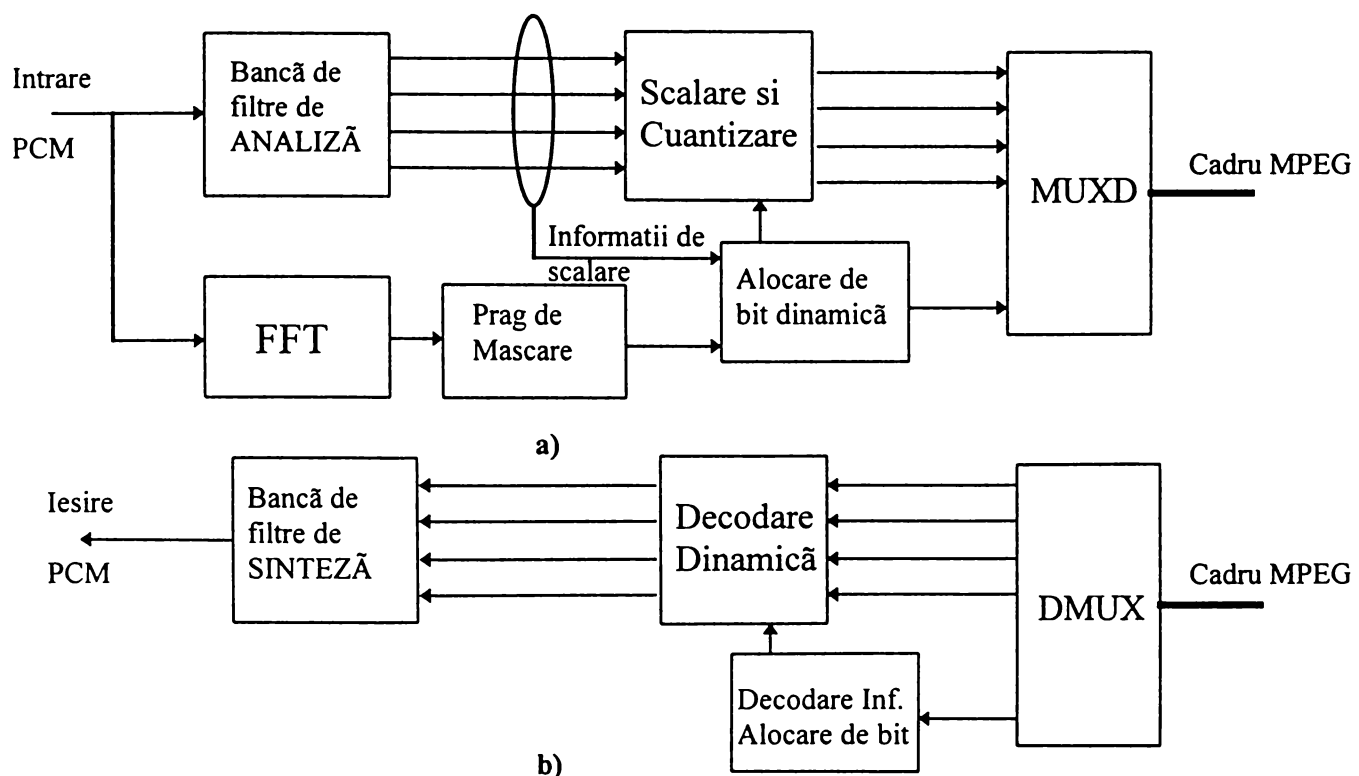


Figura 7.3. a) Codorul MPEG1 L.I, L.II; b) Decodor MPEG1 L.I, L.II

Secvența audio de la intrare, codată PCM, este trecută printr-o bancă de filtre la ieșirea căreia se regăsesc cele 32 semnale subbandă (subeșantionate corespunzător în vederea conservării ratei de bit totale). În mod simultan, semnalul este trecut și printr-un model psiho-acustic în vederea stabilirii pragurilor de mascare (rapoartele SMR), din fiecare subbandă. Componentele spectrale sunt cuantizate și codate în mod adaptiv, urmărind menținerea nivelului zgomotului de cuantizare din fiecare subbandă sub nivelul pragului de mascare. Procedura de alocare de bit încearcă rezervarea unui număr de biți de codare fiecărei subbenzi, în limita numărului total de biți disponibili, astfel încât să rezulte un raport SQNR mai mare decât cel SMR în fiecare dintre ele. Dacă acest lucru nu se reușește, codarea se va face utilizând biții de codare disponibili, permițând deci, depășirea pragului de mascare de către nivelul zgomotului de cuantizare din anumite subbenzi. Procedura de alocare de bit, precum și cel de stabilire a unui factor de scară, se aplică unor blocuri de eșantioane succesive.

În cazul MPEG-1L.I fiecare asemenea bloc conține un număr de 12 eșantioane succesive din fiecare subbandă. Totodată acesta folosește Modelul Psiho-acustic I, în vederea evaluării pragurilor de mascare. Dacă numărul de biți alocați unui astfel de grup (de $12 \times 32 = 384$ eșantioane) este diferit de zero, se caută un factor de scară (o cantă), ce maximizează rezoluția unui cuantizor uniform. Determinarea numărului de nivele de cuantizare este controlată de modelul psiho-acustic. În vederea stabilirii numărului de biți necesari menținerii zgomotului de cuantizare sub pragul de mascare codorul dispune de tabele de corespondență număr de biți - număr de nivele de cuantizare. Fiecare grup de eșantioane cuantizate primește un antet (ce conține informații auxiliare cum sunt cele de identificare metodă, nivelul cuantei, biți de sincronizare etc.) și formează un cadru MPEG (un element constructiv de bază) în structura fluxului de biți rezultat. Fiecare cadru MPEG conține toate informațiile necesare decodării unui grup de eșantioane codate. Procedura de decodare presupune parcurgerea acestor pași în sens invers. Aceasta presupune obținerea, prin demultiplexarea cadrului MPEG, a informațiilor de control necesare decodării corecte a șirului de biți, ce codifică grupul curent de eșantioane. Prin conversie CNA se reconstruiesc eșantioanele subbandă care apoi sunt trecute printr-o bancă de filtre de sinteză în vederea obținerii eșantioanelor audio codate PCM.

MPEG-1L.II, spre deosebire de MPEG-1L.I, folosește Modelul Psiho-acustic II, ce este o versiune mai complexă, dar și mai precisă, a Modelului Psiho-acustic I. De fapt, MPEG-1L.II este o versiune îmbunătățită MPEG-1L.I. El oferă și anumite facilități suplimentare în ceea ce privește codare semnalelor subbandă cuantizate. Îmbunătățește performanțele de codare printr-o procedură de codare pe blocuri mai mari. Acestea sunt formate, în principiu, din trei grupări succesive de 384 de eșantioane (în total 1152 de eșantioane). Alocarea de bit are loc la nivelul unui astfel de bloc și sunt permise trei valori diferite ale factorului de scară (fiecare subgrupă dintre cele trei poate avea propriul ei factor de scară).

Toate cele trei nivele MPEG-1 Audio utilizează aceeași structură de bancă de filtre polifază uniformă.

Cel de al treilea nivel, MPEG-1L.III, are complexitatea cea mai mare, dar oferă și performanțele de codare cele mai bune. Schema bloc codorului, și respectiv decodorului MPEG-1L.III, se prezintă în figura 7.4. Acest nivel de codare prevede utilizarea, în vederea îmbunătățirii rezoluției frecvențiale, a unor transformări MDCT, aplicate eșantioanelor subbandă. Aceste transformări sunt calculate folosind ferestre temporale dinamice, cu lungimi variabile, în vedere unui control mai eficient a fenomenului de apariție a unor ecouri anticipative (pre-ecouri). Eșantioanele de la ieșirea blocului MDCT sunt cuantizate folosind o procedură de cuantizare neuniformă. Această prevedere are la bază faptul că erori de cuantizare mai mari sunt suportabile la nivele de semnal mai mari. Partea de alocare de bit a acestuia introduce o nouă tehnică de gestionare eficientă a biților disponibili, folosind conceptul de rezervor de biți.

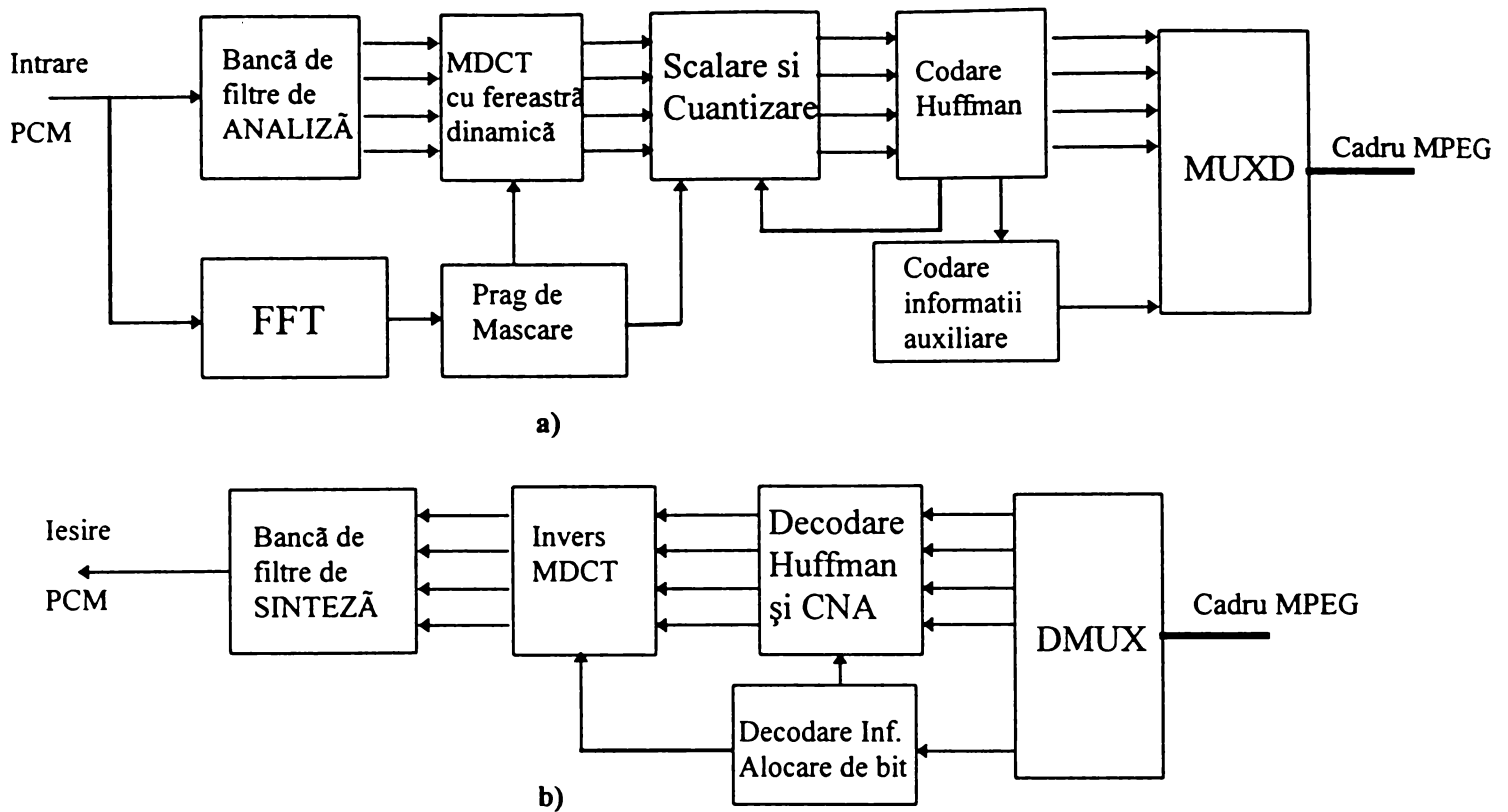


Figura 7.4. a) Codorul MPEG1 L.III; b) Decodor MPEG-1 L.III

MPEG-1L.III suportă, de asemenea, codare/decodare cu rată de bit variabilă. Ultima etapă de codare prevede o procedură de codare entropică a datelor, o codare Huffman, în timp ce informațiile auxiliare (cele de descriere a nivelelor de cuantizare, factorul de scalare etc), sunt codate folosind o procedură de tip Run-Length. O metodă iterativă de analiză prin sinteză este utilizată pentru a menține zgomotul de cuantizare sub nivelul de mascare în timp ce procesul de scalare, cuantizare și codare entropică al eşantioanelor spectrale este reiterat în buclă. Decodarea cadrului MPEG obținut, în mod similar cazurilor anterioare (L.I și L.II), se face prin simpla inversare a pașilor de codare: extragere parametri de codare, decodare Huffman, transformare MDCT inversă și trecerea prin filtrele de sinteză.

Cele trei nivele de codare MPEG-2 Audio sunt similare nivelelor corespunzătoare MPEG-1 Audio, permițând însă și frecvențe de eşantionare mai reduse (de 16kHz, 22.05kHz și respectiv 24 kHz) și evident rate de biți mai mici (ajungând de până la 64 kbps).

Componenta MPEG-2 AAC, o componentă nouă și incompatibilă cu celelalte trei nivele, aduce performanțe noi cum sunt:

- utilizează o bancă de filtre cu o rezoluție frecvențială mult îmbunătățită,
- permite folosirea unor tehnici de predicție în codarea eşantioanelor subbandă,
- permite utilizarea unor metode iterative de cuantizare și codare entropică,
- permite codare cu rată de bit variabilă.

7.3.2. Modelul psiho-acustic utilizat în codările MPEG

Modelul Psiho-acustic I și respectiv II reprezintă cele două abordări ale unui model psiho-acustic prevăzut de standardele de codare MPEG-Audio. Fenomenul de mascare audio precum și principiile care stau la baza elaborării modelelor psiho-acustice au fost introduse în §7.2.2 al prezentului capitol.

Modelul Psiho-acustic I, utilizat în codările MPEG, [Iso.92], își propune evaluarea, pe baza unui cadru curent de eşantioane audio, a pragului global de mascare. Acesta, exprimat în decibel, poate fi aproximat conform definiției (7.4), ce presupune evaluarea, în decibeli, a expresiilor pragului absolut de audibilitate $T_a(\xi)$, precum și a funcțiilor de mascare $T_t(\xi_i, \xi_j)$ și $T_n(\xi_i, \xi_j)$ (ce indică nivelele de mascare pe frecvența ξ_i a unei componente tonale, cu frecvența ξ_j , și respectiv netonală din banda critică centrată pe frecvența ξ_j). Modelul presupune faptul că un semnal audio poate fi considerat, în general, ca fiind compus din unde acustice pure - componente tonale, peste care se suprapun sunete ce nu sunt tonale și sunt modelate prin zgomote de bandă îngustă - componente netonale. În vederea unei evaluări rapide a acestor funcții, evaluarea are loc la nivelul benzilor critice ale modelului psiho-acustic. Astfel, puterile componentelor netonale sunt calculate în limita acestor benzi critice. În acest scop, toate frecvențele sunt exprimate în Bark iar valorile pragului absolut de audibilitate, din punctele frecvențiale centrale ale acestor benzi critice, sunt precalculate și tabelate. În vederea evaluării funcțiilor de mascare $T_t(\xi_i, \xi_j)$ și $T_n(\xi_i, \xi_j)$ sunt utilizate expresii liniare, aproximative. Aceste expresii țin cont de dependența curbei de mascare atât de puterea componentelor de mascare cât și de natura tonală sau netonală a acestora. Există deci patru cazuri de analiză în funcție natura componentei de mascare în raport cu cea a componentei mascate. Aceste cazuri sunt tonal/tonal (componentă tonală mascată de o altă componentă tonală), tonal/netonal, netonal/tonal și netonal/netonal. Modelul Psiho-acustic I prevede expresii similare de calcul a funcțiilor de mascare $T_t(\xi_i, \xi_j)$ și $T_n(\xi_i, \xi_j)$, aplicabile în cele patru cazuri amintite.

Acestea sunt de forma:

$$T(\xi_i, \xi_j) = T_i(\xi_i) + a(\xi_i) + b(\xi_i - \xi_j, T_i(\xi_i)) \quad (7.5)$$

unde $T_i(\xi_i)$ reprezintă nivelul, exprimat în decibel, al componentei de mascare din banda critică i , $b(\xi_i - \xi_j, T_i(\xi_i))$ o funcție ce indică pragul de mascare din banda critică j dat de componenta de mascare din banda critică i (ce depinde evident de diferența de frecvență și de puterea componentei de mascare), iar $a(\xi_i)$ este un termen de corecție ce ține cont în mod explicit de natura (tonală sau netonală) componentei de mascare. Funcția $b(\xi_i - \xi_j, T_i(\xi_i))$ are expresia:

$$b(\xi_i - \xi_j, T_i(\xi_i)) = \begin{cases} 17 \cdot (\xi_i - \xi_j + 1) - (0.4 \cdot T_i(\xi_i) + 6) & -3 \leq \xi_i - \xi_j < -1 \\ (0.4 \cdot T_i(\xi_i) + 6) \cdot (\xi_i - \xi_j) & -1 \leq \xi_i - \xi_j < 0 \\ -17 \cdot (\xi_i - \xi_j) & 0 \leq \xi_i - \xi_j < 1 \\ -(\xi_i - \xi_j - 1) \cdot (17 - 0.15 \cdot T_i(\xi_i)) - 17 & 1 \leq \xi_i - \xi_j < 8 \end{cases} \quad (7.6)$$

unde nivele sunt date în decibeli iar frecvențele în Bark.

Termenul de corecție $a(\xi_i)$ ia forma:

$$a_t(\xi_i) = -1.525 - 0.275 \cdot \xi_i - 4.5 \quad (7.7)$$

dacă este vorba despre o componentă de mascare tonală, și:

$$a_n(\xi_i) = -1.525 - 0.175 \cdot \xi_i - 0.5 \quad (7.8)$$

dacă componenta de mascare este una netonală.

Curba de mascare globală se obține identificând componentele tonale și respectiv netonale ale secvenței audio curente, $x[n]$, urmată de evaluarea, pentru fiecare dintre ele în parte, a curbelor de mascare, conform (7.5), și însumând aceste efecte, conform definiției (7.4). Primul pas este deci estimarea densității spectrale de putere $S_x(\xi)$ a semnalului de codat, $x[n]$. Aceasta trebuie evaluată cu o rezoluție frecvențială suficient de bună astfel încât comportamentul din subbenzile critice al semnalului să poată fi ușor de caracterizat. Ipoteza suplimentară, de staționaritate pe porțiuni (cel

puțin la nivelul eșantioanelor de semnal din blocul curent) a semnalului audio de prelucrat, este utilizată în mod curent. Într-o primă etapă, se consideră că orice componentă spectrală $S_x\left(\xi_k = k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$, $k=1,2,\dots,N/2$, contribuie în mod individual la stabilirea pragului global de mascare (fără a ține cont de benzile critice din care acestea fac parte). Se parcurge apoi o procedură de stabilire a naturii (tonal sau netonal) fiecăreia dintre aceste componente. În cadrul Modelului Psiho-acustic I, din standardul MPEG-Audio, o componentă spectrală $S_x(\xi_k)$ (k -fixat, $k \leq N/2 = 256$) se declară, ca fiind una tonală dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții:

$$\begin{aligned} S_x(\xi_k) &> S_x(\xi_{k-1}), \\ S_x(\xi_k) &\geq S_x(\xi_{k+1}), \\ S_x(\xi_k) - S_x(\xi_{k+j}) &\geq 7dB \end{aligned} \quad (7.9)$$

pentru:

$$\begin{aligned} j \in [-2,2] & \text{ dacă } 2 < k < 63, \\ j \in [-3,-2,2,3] & \text{ dacă } 63 < k < 127, \\ j \in [-6,\dots,-2,2,\dots,6] & \text{ dacă } 127 < k < 250. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Pentru toate componentele spectrale, care au fost găsite ca fiind tonale, se consideră nivelele curente de putere ca fiind suma puterilor componentelor în cauză (în decibeli) și a celor două vecine ale lor. Puterile celorlalte componente, declarate netonale ca atare, sunt însumate în fiecare subbandă critică în parte, furnizând puterile de calcul ale componentelor netonale din fiecare subbandă. Componentele, tonale sau nu, ale căror putere de calcul nu depășește pragul absolut de audibilitate sunt eliminate. În urma acestei proceduri sunt obținute un număr de $N_t \leq 25$ componente tonale și un număr de $N_n \leq 25$ componente netonale, ce se găsesc pe frecvențe întregi (în Bark). Pentru fiecare componentă în parte se trece la evaluarea funcțiilor de mascare $T_t(\xi_i, \xi_j)$ și $T_n(\xi_i, \xi_j)$, conform definiției (7.5), urmată apoi de calculul pragului global de mascare, conform definiției (7.4).

Modelul Psiho-acustic II are la bază aceleași principii, însă prevede expresii matematice mai exacte ale funcțiilor de mascare $T_t(\xi_i, \xi_j)$ și $T_n(\xi_i, \xi_j)$, are grijă de furnizarea unor informații de sincronizare dintre ieșirea modelului psiho-acustic și ieșirile de date ale blocului MDCT (ce intră în structura unui codor MPEG-1 L.III, MPEG-2 L.III sau MPEG-2 AAC), și prevede măsuri de control a fenomenului de mascare temporală prin evaluarea unei entropii perceptuale, [Iso.94].

7.4. Compresie de semnal audio prin descompuneri în baze de funcții Wavelet

Metodele de codare MPEG-Audio reprezintă soluții de codare a semnalului audio foarte eficiente în majoritatea cazurilor de codare audio. Sunt metode adaptive de compresie de semnal ce utilizează modele psiho-acustice variate în vederea asigurării unor compresii transparente. Evident, lipsa unui model de semnal adecvat face imposibil ca aceste sisteme să fie în același timp și cele optimale. În construirea acestora proiectanții s-au bazat pe o serie de ipoteze simplificatoare privind atât caracteristicile semnalului de analizat cât și procedurile de calcul implicate în procesele de filtrare, cuantizare, codare, conversie numeric-analogică (de-cuantizare) și filtrare inversă. Scopul urmărit era de fapt obținerea unor metode de codare cu o complexitate nu prea mare dar care să răspundă unor cerințe minime de calitate. Acest compromis complexitate-calitate se regăsește la toate nivelele standardului MPEG-Audio. Astfel, se poate constata, din cele prezentate în paragrafele precedente, faptul că aceste proceduri sunt proceduri de codare în subbenzi ale semnalelor audio (ce codează, într-un mod adaptiv, secvențe de semnal din anumite subbenzi

frecvențiale), ce folosesc o bancă de filtre polifază, cu reconstrucție aproape perfectă (eroarea de aliere se situează sub pragul de mascare), însă ale căror filtre au benzi de frecvențe ce se suprapun într-o măsură destul de mare. În vederea eliminării acestei redundanțe, urmărind o creștere a rezoluției frecvențiale în aceste subbenzi, au fost introduse, la nivelele de codare mai ridicate, transformările ortogonale MDCT și MDCT Invers. De fapt, și răspunsurile la impuls ale filtrelor din cadrul băncii de filtre au fost alese astfel încât aceste filtrări să fie calculabile prin utilizarea transformării DCT (calculată la rândul său folosind transformarea complexă FFT). De asemenea, există o neconcordanță vizibilă între cele 32 de subbenzi frecvențiale ale băncii de filtre uniforme și benzile critice ale celor două modele psiho-acustice recomandate. Acest fapt duce la proceduri de calcul mai complexe, cum este și cea prezentată în paragraful precedent, de evaluare a pragului global de mascare. Aceste observații lasă o cale deschisă cercetărilor ulterioare din domeniul codării semnalelor audio. Aceste metode noi își propun, în general, ameliorarea calității sistemului cu un grad de complexitate similar cu cel al sistemelor MPEG sau, complexitate mai redusă la aceeași calitate, [Coi.92a], [Coi.92b], [Jay.93], [Eva.93], [Sin.93], [Ben.93], [Wic.94], [Wes.95], [Ali.95], [Wei.95], [Ali.96], [Ram.96], [Ham.96], [Ham.97], [Str.97], [Goy.98]. Rămâne însă o certitudine poziția de referință a acestor standarde MPEG-Audio în domeniu. Soluțiile alternative propuse vizează mai toate componentele sistemului de codare. Există o serie de propuneri ce se referă la structuri de bănci de filtre alternative, la proceduri noi de cuantizare și alocare de bit, la diverse tipuri de codări entropice, mai bine adaptate statisticii semnalelor subbandă codate. Propunerile de bănci de filtre alternative par să fie mult mai bine adaptate la caracteristicile nestaționare ale semnalelor audio precum și la benzile critice ale modelului psiho-acustic, [Wic.94], [Ali.96], [Ali.97]. Aceste soluții au în vedere, în general, bănci de filtre cu reconstrucție perfectă (de tip PR) sau cu reconstrucție aproape perfectă, bazate pe dezvoltări în serii de funcții timp-frecvență (baze de funcții trigonometrice locale, baze de funcții Wavelet, baze de pachete de funcții trigonometrice locale sau pachete de funcții Wavelet). Aceste tehnici, precum și legătura dintre transformatele ortogonale și transformările subbandă au fost abordate în cadrul lucrării în capitolele precedente.

În cadrul prezentului paragraf vor fi abordate câteva propuneri ale autorului, de sisteme de codare de semnal audio bazate pe aceste noi tehnici. Sistemele propuse sunt sisteme adaptive, bazate pe transformări ale spațiului de reprezentare al semnalelor. Metodele propuse realizează, de cele mai multe ori, un mai bun compromis, decât procedurile MPEG, între selectivitatea temporală și cea frecvențială a analizei de semnal efectuate. Acest lucru este posibil, deoarece sistemele Wavelet, de exemplu, spre deosebire de orice variantă de transformare DCT, pot oferi rezoluții temporale bune la frecvențe ridicate și respectiv rezoluții frecvențiale mai bune la frecvențe joase. În capitolul trei a fost remarcat faptul că bazele Wavelet reprezintă una din diferitele baze timp-frecvență. Tot în acest capitol au fost investigate diferitele funcții ale acestor baze, abordate fiind, pe lângă diferitele tipuri de funcții Wavelet, pachetele de funcții Wavelet, funcțiile trigonometrice locale precum și pachetele de funcții trigonometrice locale. Această problemă, precum și cea de îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot al unor semnale afectate de perturbații (un domeniu apropiat de și cu conexiuni multiple celui abordat în această lucrare), se regăsesc într-o serie de articole mai recent publicate de autorul lucrării, [Asz.94], [Isa.94], [Asz.96], [Isa.99a], [Asz.99b], [Isa.99b], [Asz.99c], [Asz.99d].

Pentru o mai bună evidențiere a performanțelor obținute, rezultatele experimentale sunt prezentate într-o manieră comparativă, raportându-se la performanțe similare ale unor sisteme standardizate (MPEG-Audio, de exemplu), sau ale unor sisteme asemănătoare descrise în literatura de specialitate. Această comparație însă, în majoritatea cazurilor, este doar una orientativă datorită faptului că diferă, în general, atât considerentele principiale care stau la baza construirii acestor sisteme cât și cele ce vizează criteriul de evaluare a calității acestora. Astfel, de exemplu, majoritatea sistemelor de codare MPEG-Audio (cu excepția unui singur mod de lucru a nivelului

L.III) prevăd o codare cu rată de bit constantă. Ele folosesc o structură de bancă de filtre fixă dar se bazează pe utilizarea unui model psiho-acustic în vederea obținerii unui grad ridicat de transparență în codarea semnalului audio. Spre deosebire de acest lucru, propunerile autorului din acest capitol sunt sisteme de compresie de semnal audio cu o structură variabilă, în general, și care utilizează ca și principalul criteriu de calitate măsura erorii medii pătratice de reconstrucție, exprimată în termenii raportului semnal pe zgomot de cuantizare (SQNR de reconstrucție). Impunerea unui anumit nivel maxim al zgomotelor de reconstrucție îi conferă sistemelor propuse calitatea de sisteme de codare cu rată de bit variabilă. De asemenea, din cauza structurii mereu schimbătoare a acestor sisteme este practic imposibilă aplicarea unui model psiho-acustic, ce ar permite o mai corectă interpretare comparativă a performanțelor. Însă, în această situație, raportarea la nivelul erorii medii pătratice de reconstrucție obținute de codările MPEG-audio ar putea să fie nerelevantă în sensul că o măsură a SQNR de reconstrucție în cazul MPEG-audio ce poate însemna codare transparentă în cazul sistemelor propuse de autor poate însemna doar o codare aproape transparentă. Valoarea minimă a raportului SQNR de reconstrucție impusă de autor în propunerile sale este de 20 dB , valoare bazată, însă doar orientativ, pe cele raportate în cazul utilizărilor sistemelor MPEG-Audio ce se încadrează, în majoritatea cazurilor de compresie transparentă, în domeniul $18...21\text{ dB}$, [Pan.93]. Însă tot pentru acest motiv această limită inferioară de 20 dB nu este impusă cu strictețe, preferate fiind valori de ordinul $22...25\text{ dB}$ în codarea unor blocuri de eșantioane cu nivele semnificative, dar tolerând și valori mai mici, în codarea unor blocuri de eșantioane de valori foarte reduse (ce indică un nivel redus de semnal audio sau chiar absența acestuia).

O altă caracteristică importantă a propunerilor autorului, ce urmează să fie prezentate în cele ce urmează, o reprezintă faptul că performanțele raportate, spre deosebire de propunerile din capitolul anterior, vizează cele ale întregului lanț de compresie și nu doar cele obținute prin introducerea unor procedee de precodare prin transformarea spațiului de reprezentare al semnalului. Sistemele de compresie vizate presupun, în general, secvența de operații compusă din transformare (sau filtrare), cuantizare și codare entropică. Astfel, vor fi evaluate performanțele fiecărei operații în parte, ceea ce ne va permite să formăm o imagine mai clară despre importanța diferiților parametri ai sistemului de codare.

7.4.1. Compresie adaptivă de semnal audio prin transformări Wavelet

În primele capitole ale acestei lucrări au fost abordate o serie de aspecte legate de sistemele Wavelet, implicații ale utilizării lor în domeniul compresiei de semnale, utilitatea algoritmului FWT în calculul coeficienților transformării Wavelet, proprietăți remarcabile ale descompunerilor rezultate etc. În capitolul precedent au fost prezentate câteva soluții de sisteme adaptive de compresie de semnal, bazate pe transformări Wavelet ortogonale ce realizează o descompunere de semnal în aceste baze.

În acest paragraf se prezintă o propunere de aplicație de compresie de semnal audio bazată pe descompuneri Wavelet adaptive a autorului. Sistemul propus realizează compresie de semnal audio, eșantionat la frecvența Nyquist și codat PCM (pe 8 sau pe 16 biți/eșantion). Transformările Wavelet ortogonale propuse au ca scop principal realizarea unei cât mai bune decorelări ale eșantioanelor succesive din reprezentarea inițială a semnalului. Efectul de decorelare produs de transformările Wavelet a fost studiat în detaliu în lucrarea [Bor.97]. În lucrare se realizează și o comparație cu performanțele similare obținabile folosind alte tipuri de transformări ortogonale (dintre care se remarcă transformarea DCT, inclusă în mai multe standarde curențe de compresie de semnal audio și/sau video). De remarcat este concluzia acestei lucrări, conform căreia, transformările Wavelet tind, la limită (descompunere pe un număr infinit de nivele de rezoluție), către transformarea Karhunen-Löve, ce oferă performanțe optime în cazurile de semnal staționar gaussian la intrare (un caz des invocat pe parcursul prezentei lucrări ca fiind unul de referință). Ca urmare a acestui efect de decorelare, secvența coeficienților din domeniul transformat (coeficienții

Wavelet) rezultă, pentru majoritatea cazurilor de semnal audio (semnale nestaționare prin natură), cu multe valori nule sau de nivele reduse. Algoritmul transformării FWT este utilizat pentru calculul coeficienților din domeniul transformat. Compresia efectivă are loc prin cuantizarea și codarea efectivă doar a coeficienților Wavelet cu valori semnificative. Schema de principiu a sistemului de compresie propus se prezintă în figura 7.5.

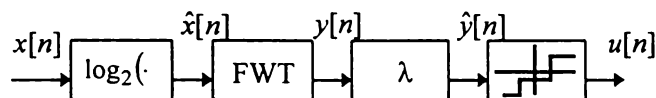


Figura 7.5. Sistem adaptiv de compresie Wavelet

Aceasta pune în evidență principalele proceduri implicate de implementarea propusă. Sistemul este o realizare software, scris în limbaj de programare C, ce acceptă ca și date de intrare fișiere în format standard “wave” (fișiere cu extensia *.wav), ce conțin semnale audio mono- sau stereofonice, eșantionate critic, și codate PCM pe 8 sau pe 16 biți/eșantion. Acest sistem, spre deosebire de sistemele MPEG, nu ține cont, de fapt, de natura mono- sau stereofonică a semnalului de prelucrat. Un semnal stereofonic este prelucrat sub forma a două proceduri de prelucrare monofonică simultane (nefolosindu-se de corelația intrinsecă existentă între cele două componente ale unui semnal stereofonic).

Prima operație implicată de sistemul din figura 7.5 în prelucrarea semnalului audio constă dintr-o rescalare neliniară a valorilor eșantioanelor audio. Legătura intrare-ieșire a acestui bloc este dată de relația:

$$\hat{x}[n] = 2^{15} \cdot (\log_2 x[n] - 15) \quad (7.11)$$

Operația realizează, de fapt, o compresie a dinamicii semnalului. Astfel, un semnal audio codat PCM cu 16 biți/eșantion permite codarea unei diferențe de nivel de aproximativ 90 dB. Operația indicată reduce această diferență de nivel dintre cele două valori limită reprezentabile. Pe de altă parte, în concordanță cu rezultatele teoretice din cel de al doilea capitol al prezentei lucrări, utilizând un cuantizor uniform, sistemul echivalent rezultat va fi unul de cuantizare neuniformă după legea logaritmică, ce îi conferă o robustețe remarcabilă (cuantizor universal suboptimal). Legea de transformare (7.11) ține cont în mod explicit de reprezentarea binară în cod complement față de doi a eșantioanelor codate PCM ale intrării. Astfel, în această reprezentare, primul bit este cel de semn (0 logic dacă e o valoare pozitivă și 1 logic în caz contrar), urmat de biții ce codifică nivelul de semnal. În vederea liniarizării scării de valori, la fiecare valoare de eșantion $x[n]$ se adună un deplasament constant de 8000_H (în hexazecimal). Astfel, nivelul nul de semnal este codificat PCM în numărul hexazecimală 8000_H . Acesta corespunde valorii decimale 2^{15} iar, deoarece $\log_2 2^{15} = 15$, s-a procedat la scăderea valorii 15 din rezultatul logaritmului. Acest lucru ne asigură de faptul că nivelul nul din secvența de intrare va corespunde tot nivelului nul din secvența compandată (logaritmată). Rezultatul compandării este reținut în memoria calculatorului sub forma unor numere flotante cu dublă precizie (4 sau 8 octeți/valoare în funcție de arhitectura sistemului de calcul folosit). Procedura de compandare este urmată de una de transformare a spațiului de reprezentare. În această etapă se folosește algoritmul transformării FWT, recomandat de Daubechies, [Dau.88]. Prelucrarea efectivă se face pe blocuri, pe grupuri succesive de un $NR = 4096$ de eșantioane ale intrării. Varianta de transformare utilizată este cea prin periodizare a valorilor intrării, una ce conservă numărul total de valori avute înaintea și după efectuarea transformării. Aceasta însă, după cum s-a arătat în capitolul precedent, poate să ducă la efecte de margine în reconstrucția semnalului din cel comprimat. Descompunerile Wavelet posibile sunt cele în bazele de funcții Wavelet ale lui Daubechies, notate $DAU-N$, unde N indică numărul de momente nule

(proporțional cu gradul de regularitate) ale funcției Wavelet mamă utilizată. Numărul, în această versiune de program, poate lua orice valoare între 2 și 10. Valoarea numărului N este unul dintre parametrii opționali, specificabil din linia de comandă de lansare a programului de compresie. Valoarea implicită a acestuia este egală cu 10. Rezultate ale experimentării indică faptul că funcții Wavelet mai regulate permit obținerea unui factor de compresie mai mare. Secvența de ieșire, $y[n]$, conține valorile coeficienților din acest domeniu transformat (deocamdată tot într-o reprezentare flotantă cu precizie dublă). Ea conține însă, de regulă, un număr foarte mare de valori reduse sau chiar nule (ca efect al decorelării eşantioanelor intrării). Secvența este trecută apoi printr-un sistem adaptiv de prelucrare neliniară, ce anulează toate valorile mai mici în modul decât o anumită valoare de prag, λ , impusă. Valoarea pragului se alege într-o manieră adaptivă. De această operație depinde, într-o mare măsură, calitatea întregului sistem de compresie. Prin anularea unor valori din domeniul transformat, oricât de mici ar fi ele, se neglijează o parte din conținutul informațional al semnalului audio prelucrat. După cum am văzut, într-o manieră similară procedează și sistemul MPEG-Audio (anulând, prin codare pe un număr de zero biți, unele eşantioane subbandă), care însă utilizează valori diferite ale pragului în diferitele subbenzi, identificate pe baza unor măsuri date de modelul psiho-acustic utilizat, și supuse restricției de rată de bit cerută. În cadrul sistemului de compresie din figura 7.5 stabilirea pragului λ se face în mod adaptiv pe baza unui criteriu obiectiv (cel utilizat de MPEG fiind unul subiectiv), dat de raportul semnal pe zgomot al semnalului audio reconstruit. Alegerea efectivă a valorii acestui prag are la bază algoritmul (6.5), prezentat în §6.2.1 al capitolului precedent. Alegerea cere însă specificarea, din partea utilizatorului, a raportului minim de semnal pe zgomot dorit. Experimentările practice indică faptul că raportul este bine să fie menținut peste valoarea 100, (20 dB), pentru a obține o codare transparentă sau aproape transparentă. Această valoare este și cea implicit utilizată în cadrul sistemului. Trebuie menționat faptul că, de fapt, nu există o măsură de calitate unanim acceptată, și la fel de eficientă pentru toate cazurile de semnal audio, nici subiectivă dar nici obiectivă. Din acest motiv s-a folosit în cadrul sistemului măsura obiectivă mai sus menționată. Pragul λ este recalculat, în aceeași manieră, pentru fiecare bloc de eşantioane în parte. Ultimul bloc, din structura sistemului din figura 7.5, este un cuantizor uniform, ce cuantizează pe un număr de 8 biți fiecare valoare nenulă rezultată în urma operației anterioare de “thresholding”. În urma cuantizării rezultă secvența $u[n]$ care este apoi codată, în vederea obținerii unui factor de compresie mai mare, folosind o metodă rapidă de codare prin indexare. Aceasta este o versiune modificată de codare de tip Run-Lenght (RL), calculată pe blocuri de biți și reiterată. Rezultă o codare de tip “cu lungime variabilă”, ce garantează respectarea anumitor cerințe calitative. Rezultatul codării în acest caz, ca de altfel în cazul oricărui sistem de compresie (a se vedea MPEG), trebuie să conțină toate informațiile necesare reconstrucției semnalului audio, în limita criteriului de performanță impus. Structura generală a unui fișier de date rezultat în urma codării este prezentată în figura 7.6.

1.	Frecvența de eşantionare	- cu o lungime de 4 octeți
2.	Antet primul Bloc	- cu o lungime de 5 octeți
3.	Vector poziție a vectorului de indexare date	- cu o lungime de 32 octeți
4.	Valorile nenule ale vectorului de indexare date	- de lungime variabilă
5.	Valorile nenule ale secvenței de date cuantizate	- de lungime variabilă
2.	Antetul celui de al doilea Bloc	- cu o lungime de 5 octeți
3.	Vector poziție a vectorului de indexare date	- cu o lungime de 32 octeți
...

Figura 7.6. Structura fișierului de date comprimat

Conform figurii 7.6, primii patru octeți din fișierul comprimat conțin specificarea frecvenței de eșantionare folosită la discretizarea semnalului audio continuu de prelucrat. Aceasta este necesară unei eventuale reconstrucții în timp real (posibilitate ce depinde de calitatea sistemului de calcul folosit la decodare), sau reconstrucției corecte a unui fișier de tip “wave” (cu extensia *.wav) de eșantioane audio în format PCM. Din motive de compatibilitate cu programele de redare audio a unor fișiere în format *.wav, s-a impus cerința unor frecvențe de eșantionare standardizate (8, 16, 22.05, 32, 44.1 și respectiv 48 kHz). Valoarea acestei frecvențe este codificată pe cei patru octeți în formatul utilizat și în antetele fișierelor standard *.wav.

Urmează patru câmpuri, ce se succed în aceeași ordine, în mod repetitiv, pentru fiecare bloc de $M=4096$ de eșantioane prelucrate. Conținutul acestor câmpuri este dat de metoda anterior amintită de codificare a eșantioanelor de valori nenule.

Astfel, câmpul numărul 2 este un antet de bloc ce conține întotdeauna informațiile de control necesare decodării blocului curent de eșantioane. Primul octet al acestui câmp (ce are o lungime fixă de 5 octeți) conține un identificator de funcție Wavelet utilizată. Este vorba despre valoarea numărului N din identificatorul $DAU-N$ al acestora. Următorii patru octeți din antet au fost rezervați specificării cuantei utilizată de cuantizorul din structura schemei de compresie. Aceasta este dată în reprezentarea, cu virgulă flotantă, a unui număr real cu precizie dublă.

Următoarele trei câmpuri conțin informații despre codurile asociate valorilor nenule din secvența $u[n]$ (coduri de lungime binară fixă, de un octet fiecare), precum și cele de localizare (poziție) a acestora în acest șir. Metoda de codare utilizată este una de tip “poziție-valoare”, cu dublă indexare. Astfel, la codare, într-o primă etapă, sunt reținute toate cele 4096 valori ale secvenței $u[n]$. Se construiește un prim vector de indexare (vectorul de indexare date) a valorilor nenule, cu o lungime de 512 octeți (4096 biți), în care fiecare bit poziționat pe 1 indică o valoare nenulă în poziția corespunzătoare a secvenței $u[n]$. Valorile nenule sunt apoi trecute, în ordinea de apariție a lor în secvență, în câmpul nr. 5 a structurii din figura 7.6. Procedura de indexare este repetată și pentru vectorul de indexare date, urmărind acum cuvintele (formate din doi octeți, deci de 16 biți) nenule din cadrul acestui vector. Noul vector de indexare, denumit vectorul de poziție a vectorului de indexare date, va avea o lungime fixă de 32 octeți, și este trecut în câmpul numărul 3 în timp ce valorile nenule de cuvinte sunt copiate, în ordinea de apariție a lor, în câmpul numărul 4. Astfel se realizează codarea unui număr de 4096 de eșantioane audio pe un număr de octeți ce nu poate scădea sub valoarea 37 (lungimea părții fixe a structurii). Această valoare limitează factorul de compresie maxim obținabil, ce este însă o limită teoretică, cu o valoare destul de mare (aproximativ 220), ce se obține doar în cazul în care câmpurile de lungime variabilă 4 și 5 sunt absente, (ceea ce este evident cazul semnalului nul, ce nu necesită codare).

Schema de principiu a sistemului de decodare se prezintă în figura 7.7.

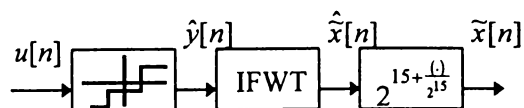


Figura 7.7. Sistemul de reconstrucție

Reconstrucția efectivă presupune parcurgerea, în ordinea inversă, a operațiilor efectuate la codare. Ea are loc, în mod similar codării, pentru fiecare bloc de 4096 de eșantioane în parte. Procesul de reconstrucție începe cu interpretarea diferitelor câmpuri ale unui fișier de date comprimate. Această etapă presupune reconstrucția corectă a secvenței valorilor cuantizate $u[n]$, bazată pe informațiile de localizare extrase din fișierul codat. Urmează un proces de de-cuantizare (primul bloc al schemei din figura 7.7.), deci de conversie CNA, folosind cuanta extrasă din antetul de Bloc, și care permite

obținerea celor 4096 de valori ale secvenței din domeniul transformat (notat cu $\hat{y}[n]$ în figură). Urmează apoi transformarea Wavelet Inversă, folosind tipul de funcție Wavelet indicat, de asemenea, în antetele de Bloc din structura fișierului comprimat. Se obține astfel secvența reconstruită a eșantioanelor audio compandate, $\hat{\tilde{x}}[n]$. Ultima operație, ce generează semnalul audio reconstruit, este cea de expandare (antilogaritmare), ce inversează efectul de compandare (7.11). Aceasta este dată de relația intrare-ieșire:

$$\tilde{x}[n] = 2^{15 + \frac{\hat{\tilde{x}}[n]}{2^{15}}} \quad (7.12)$$

Secvența audio reconstruită, $\tilde{x}[n]$, este memorată într-un fișier audio cu format standard *.wav. Bineînțeles, valoarea frecvenței de eșantionare, recuperată din fișierul comprimat, va fi trecută în antetul cu structură standard al acestui fișier.

Realizarea efectivă include două programe, scrise în limbajul de programare C, unul de compresie și unul de reconstrucție. Ambele sunt de tipul “cu lansare din linia de comandă”. Sintaxa de apel a celui de compresie este:

cmp.exe <fișier_in.wav> [N] [P_x/P_{err}]

unde: *cmp.exe* - este denumirea programului,

fișier_in.wav - numele unui fișier în format standard *.wav,

N - primul parametru opțional ce indică tipul de funcție Wavelet utilizată,

P_x/P_{err} - cel de al doilea parametru ce indică raportul minim de semnal pe zgomot dorit.

Rezultatele compresiei sunt memorate într-un fișier cu același nume (*fișier_in*) însă capătă extensia *.cmp.

Programul de reconstrucție are sintaxa de apel:

decmp.exe <fișier_in.cmp> [<fișier_out.wav>]

unde: *decmp.exe* - este denumirea programului de reconstrucție,

fișier_in.cmp - numele unui fișier audio comprimat, în format *.cmp,

fișier_out.wav - un parametru opțional, numele unui fișier în format standard *.wav în care se memorează secvența audio reconstruită.

În absența parametrului opțional (numele fișierului rezultat), rezultatele reconstrucției vor fi memorate într-un fișier cu structura standard “wave” ce are aceeași denumire cu cea a fișierul *.cmp indicat (dar cu extensia *.wav).

Câteva rezultate experimentale ale utilizării acestor programe, în vederea compresiei unei secvențe audio stereofonice de calitate CD (eșantioane prelevate cu frecvența de 44100Hz și codate PCM cu 16 biți/eșantion) și de lungime 3.58 s, se prezintă în tabelul 7.2.

Tabelul 7.2. Factorul de compresie realizat, în funcție de tipul funcției Wavelet folosite și pentru diferite valori ale raportului semnal pe zgomot

Ordin funcție Wavelet, <i>N</i>	Raport P _x /P _{err}		
	50	100	200
Raport de compresie			
2	18.28293	14.27183	11.31611
3	20.41975	16.30223	13.18288
4	21.35537	17.05412	13.95142
5	22.10908	17.65667	14.43862
6	22.57396	18.06336	14.74008
7	22.71228	18.20808	14.87317
8	23.05539	18.44322	15.06460
9	23.30215	18.65093	15.15110
10	23.33183	18.74526	15.29926

Valorile factorului de compresie din tabelul de mai sus reprezintă valori medii (ale valorilor obținute pentru diferitele blocuri ale secvenței audio de intrare) ale raportului dintre numărul total de coeficienți dintr-un bloc (4096 în cazul nostru) și număr total al coeficienților nenuli din secvența cuantizată $u[n]$. Aprecieri subiective indică un raport semnal pe zgomot (P_x/P_{er}) nu mai mic decât 100, pentru o codare transparentă. Figura 7.8.a prezintă primele 8096 de eșantioane (primele două blocuri) ale secvenței audio, în timp ce figura 7.8.b prezintă semnalul audio reconstruit, în condițiile în care codarea s-a făcut folosind funcția Wavelet DAU-10, iar limita inferioară a raportului semnal pe zgomot impus era de 100 (20 dB).

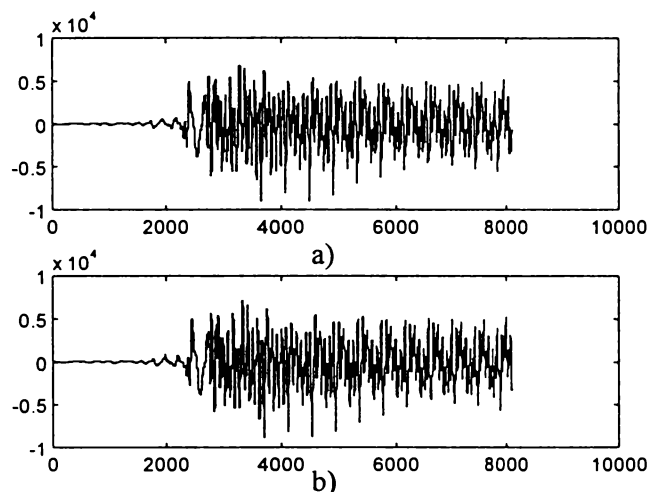


Figura 7.8. Semnalul audio prelucrat; a) secvența de intrare, b) secvența reconstruită

Rezultatele din tabelul 7.2 indică performanțe similare cu cele ale metodei MPEG, deși comparația e greu de făcut din cauza măsurilor de calitate subiective utilizate în metoda MPEG. Metoda propusă prezintă însă, cu certitudine, o complexitate a sistemului de compresie mai scăzută, ce permite o implementare mai ușoară și o procedură de calcul mai rapidă.

Metoda propusă poate fi îmbunătățită prin includerea unei strategii de selecție automată a funcției Wavelet dintr-o mulțime de funcții anterior prestabilită. O asemenea soluție, de codare universală, inspirată din [Rio.93], a fost prezentată de către autor în [Asz.98]. Dezavantajul acesteia constă în faptul că ea implică o multiplicare a numărului de operații cerute (factorul de multiplicare fiind dat de numărul funcțiilor Wavelet avute în vedere).

7.4.2. Compresie de semnal audio prin dezvoltare în pachete de funcții Wavelet

În cel de al treilea capitol al acestei lucrări a fost introdusă, pe lângă transformarea Wavelet, transformarea în pachete de funcții Wavelet. A fost prezentat algoritmul transformării rapide în pachete de funcții Wavelet - *FWPT* (*Fast Wavelet Packet Transform*) și respectiv cel invers, algoritmul invers al transformării rapide în pachete de funcții Wavelet - *IFWPT* (*Inverse Fast Wavelet Packet Transform*). S-a arătat faptul că implementarea acestor algoritmi nu implică o complexitate mai mare decât cea a algoritmului FFT (un număr de $N \log N$ operații). În §3.2.6 s-a subliniat faptul că analizele de semnal bazate pe descompuneri în baze de pachete de funcții Wavelet pot fi ghidate de o funcție cost, pe baza căreia pot fi căutate componentele unei baze ortogonale optime. În general, odată stabilită o funcție cost, aceste componente sunt identificate prin căutarea acelor baze de subspații care minimizează costul. În §3.2.6 au fost indicate o serie de propuneri de funcții cost. Unele dintre ele, cum este numărul coeficienților mai mari decât un prag, sau cea de număr de biți alocați reprezentărilor din diferitele subspații, sunt cu implicații directe în orice aplicație de compresie de semnal. Această flexibilitate, oferită de transformarea în pachete de

funcții Wavelet în reprezentarea semnalului, poate fi ușor exploatată în construcția unor sisteme de compresie de semnal. Asemenea soluții au fost propuse de către o serie de cercetători, ale căror rezultate sunt considerate, la ora actuală, de referință în domeniu. Putem aminti lucrările [Coi.90], [Coi.92a], [Coi.92b], [Jay.93], [Eva.93], [Sin.93], [Ben.93], [Wic.94], [Wes.95], [Ali.95], [Wei.95], [Ali.96], [Ram.96], [Ham.96], [Ham.97], [Str.97], [Goy.98]. Flexibilitatea oferită de aceste metode în reprezentarea semnalului de prelucrat, poate simplifica structura unor scheme de codare. Astfel, în domeniul compresiei de semnal audio, ele pot îmbunătăți performanțele unor codări perceptive, cum sunt de exemplu cele de codare MPEG-Audio. O asemenea propunere se prezintă în cele ce urmează. Structura sistemului de compresie, propus de M. Ali în [Ali.95], se arată în figura 7.9.

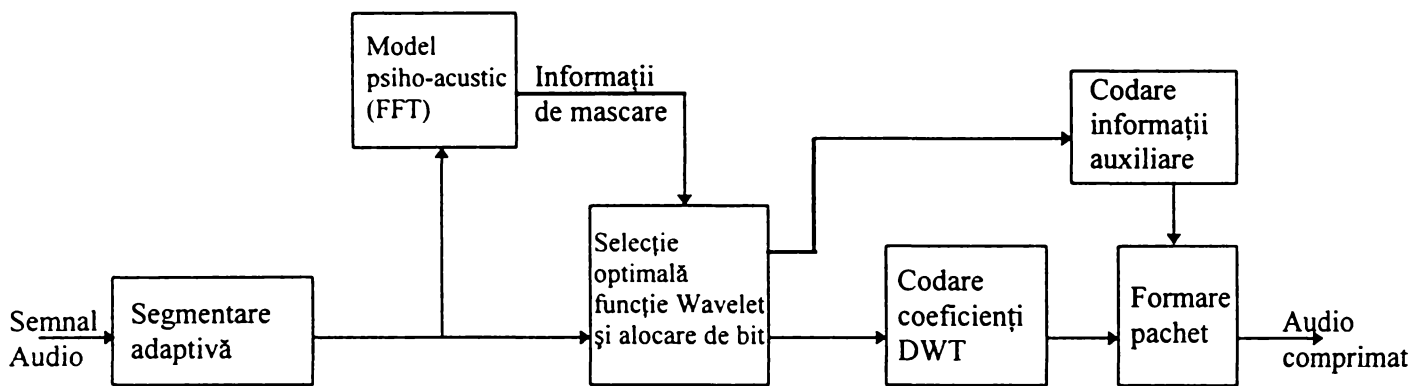


Figura 7.9. Sistem adaptiv de compresie Wavelet

Semnalul prelucrat este o secvență audio monofonică, de calitate CD (eșantioane prelevate cu frecvența de 44.1 kHz și codate PCM cu 16 biți/eșantion). Transparența în codare se obține prin utilizarea unui model psiho-acustic similar cu cel utilizat de sistemele MPEG-Audio. Noutatea schemei constă în banca de filtre utilizată. Spre deosebire de procedurile MPEG, sistemul din figura 7.9. folosește o bancă de filtre neuniformă echivalentă cu o transformare în pachete de funcții Wavelet (echivalență abordată în §3.2.4 al acestei lucrări). Banca de filtre propusă este construită folosind funcții Wavelet ortogonale cu suport compact, ce implică lungimi finite ale filtrelor Wavelet implicate. În cazul de față această lungime, a filtrelor de analiză și sinteză, este de $L=40$. Reamintim faptul că funcțiile, pot avea un număr maxim de $N=20$ de momente nule, cerință verificată doar de către funcțiile lui Daubechies, acestea fiind astfel cele mai regulate din familia respectivă. Alegerea funcției Wavelet optimale se face în mod adaptiv, din cadrul clasei, în timp ce structura băncii de filtre este fixă. A fost adoptată o structură ce aproximează foarte bine benzile critice ale modelului psiho-acustic. Arborele binar asociat transformării FWPT utilizate are forma celei din figura 7.10.

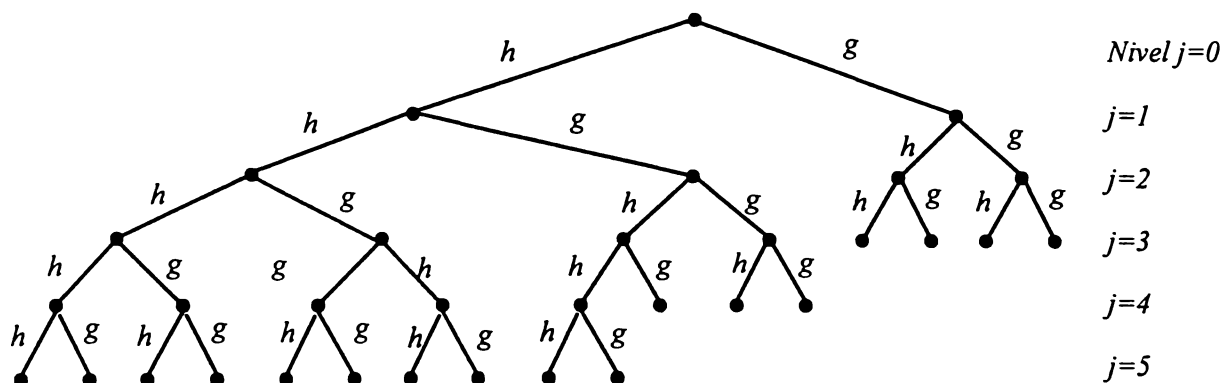


Figura 7.10. Arborele binar asociat transformării FWPT

Tabelul 7.3. indică benzile de frecvențe ale subbenzilor obținute în urma descompunerii în pachete de funcții Wavelet.

Tabelul 7.3. Aproximarea benzilor critice de către descompunerea FWPT cu arborele binar din figura 7.10

Numărul benzii critice	Domeniu de frecvență bandă critică ($\xi_{min} \div \xi_{max}$), [Hz]	Domeniu de frecvență subbandă ($\xi_{min} \div \xi_{max}$), [Hz]
1	0 - 100	0 - 688
2	100 - 200	
3	200 - 300	
4	300 - 400	
5	400 - 510	
6	510 - 630	
7	630 - 770	
8	770 - 920	688 - 1375
9	920 - 1080	
10	1080 - 1270	
11	1270 - 1480	
12	1480 - 1720	1375 - 2062
13	1720 - 2000	
14	2000 - 2320	2062 - 2750
15	2320 - 2700	
16	2700 - 3150	2750 - 3437
17	3150 - 3700	3437 - 4125
18	3700 - 4400	4125 - 4812
19	4400 - 5300	4812 - 5500
20	5300 - 6400	5500 - 6188
21	6400 - 7700	6188 - 6875
		6875 - 8250
22	7700 - 9500	8250 - 9625
23	9500 - 12000	9625 - 11000
24	12000 - 15500	11000 - 13750
		13750 - 16500
25	15500 - 22100	16500 - 19250
		19250 - 22100

Se observă faptul că, deși benzile de frecvențe ale diferitelor subbenzi sunt mult mai bine adaptate benzilor critice ale modelului psiho-acustic decât cele 32 benzi uniforme ale codărilor MPEG, există subbenzi ce acoperă mai multe benzi critice (cele de la frecvențe joase) în timp ce altele (la frecvențe mai înalte) acoperă doar o porțiune a uneia dintre acestea.

O implementare similară celei din figura 7.9, folosind o bancă de filtre neuniformă, cu un arbore binar ce prevede o împărțire a benzii de frecvențe audio ($0 \div 22050$ kHz) în 38 de subbenzi, ce elimină problema acoperirii de către o subbandă a mai multor benzi critice, este propusă de J.F. Luo și B.G. Sherlock în [Luo.95]. O astfel de diviziune a benzii de frecvențe audio prezintă avantajul simplității constructive a cuantizoarelor adaptive precum și cea a procedurii de alocare de bit optimă. Astfel, o asemenea structură necesită alocarea unui număr egal de biți tuturor eșantioanelor subbandă dintr-o anumită subbandă. Acest număr se determină, după cum am văzut în paragrafele precedente, în scopul menținerii nivelului zgomotului de cuantizare sub nivelul pragului de mascare oferit de modelul psiho-acustic, controlat, în anumite cazuri, de o eventuală restricție de rată de bit.

Sistemul de compresie, cu schema bloc din figura 7.9, operează pe blocuri de eșantioane ale secvenței audio de intrare parțial suprapuse. Lungimea implicită a unui bloc de eșantioane este de $M=2048$ (aproximativ 46 ms de semnal audio). Sistemul poate opera cu blocuri de lungime variabilă, lungimea efectivă a blocului curent de date se determină printr-o procedură de segmentare adaptivă (pornind cu lungimea implicită mai sus indicată). Aceasta, folosind un criteriu entropic, permite un control eficient al fenomenului de pre-echo (de anticipare a unei schimbări bruște ale

nivelului de semnal), prin identificarea și fragmentarea blocurilor ce conțin variații mari și rapide de nivel ale semnalului prelucrat. Blocurile de eșantioane sunt netezite, prin înmulțirea cu o funcție fereastră de tip Hanning, în vederea atenuării efectelor de margine. Modelul psiho-acustic utilizat furnizează, folosind o procedură bazată pe transformarea FFT, valorile pragului de mascare din diferitele benzi critice, valori ce, pe baza corespondenței de benzi prezentată în tabelul 7.3, sunt convertite în cele ale pragului de mascare din subbenzile Wavelet. Aceste valori controlează direct procedura de alocare de bit eșantioanelor subbandă în faza de codare.

Schema folosită permite, după cum s-a specificat, alegerea filtrului Wavelet optimal, dintr-o mulțime de filtre Wavelet ce au lungimi egale ($L=40$). Căutarea acestuia se face în mod adaptiv fiind evaluat, pentru fiecare filtru în parte, numărul total al biților alocați codării transparente a blocului curent de semnal audio. Cuantizarea propusă este una neuniformă de tip log-PCM, similară propunerii autorului din paragraful precedent. În vederea cuantizării se identifică, în fiecare subbandă, valoarea maximă a nivelului de semnal, ce este folosită pe post de factor de scară în procesul de rescalare a valorii eșantioanelor ce urmează a fi cuantizate. Cuantizarea efectivă are loc în funcție de numărul biților alocați eșantioanelor subbandă (numărul zero indicând neglijarea acelor eșantioane). Ultima etapă a procesului de compresie constă dintr-o codare entropică, de tipul Run-Length (RL) modificată. Aceasta identifică și codifică secvențe compacte de biți de 0 logic ce au ca lungimi o putere a lui 2 (limita maximă fiind de 128). Ea oferă un factor de compresie mai mic decât codarea RL standard însă prezintă avantajul faptului că este mult mai rapidă, și mai ușor de implementat. Rezultatele raportate de M. Ali, [Ali.95], indică o codare transparentă de semnal audio monofonic la rate de biți cuprinse în intervalul $55 \div 63$ kbps. Aceste valori sunt ușor mai scăzute decât cele mai bune rezultate ale codării MPEG-Audio.

De asemenea, implementări în timp real ale procedurii de compresie simplificată (ce nu prevăd o identificare adaptivă a filtrului Wavelet optimal), folosind un procesor de semnal de tip TMS320C31, ajung la performanța unei rate de bit, în aceleași condiții de semnal, cuprinsă în intervalul $64 \div 78$ kbps, [Ali.95].

Spre deosebire de această soluție, cea propusă de J.F. Luo și B.G. Sherlock în [Luo.95], pe lângă faptul că propune o bancă de filtre mai bine adaptată la structura de benzi critice a modelului psiho-acustic, bazată pe concluzia (enunțată și în [Sin.93]) conform căreia la o aceeași lungime a filtrelor Wavelet utilizate, sistemul Wavelet cel mai regulat se dovedește a fi cel mai bun pentru majoritatea cazurilor de semnal audio, aceasta prevede căutarea adaptivă a filtrului optim în clasa filtrelor Daubechies cu diferite lungimi. Sunt permise folosirea, în cadrul băncii de filtre utilizate, a diferite tipuri de filtre la diferitele nivele ale descompunerii, alegerea fiind ghidată de un criteriu suplimentar de întârziere minimă de codare. Astfel, în benzile de frecvențe joase se lucrează cu filtre Wavelet mai scurte în timp ce la frecvențe mai înalte cu filtre mai lungi. Metoda de cuantizare propusă este una adaptivă ce prevede identificarea unor factori de scară în fiecare subbandă și pentru fiecare bloc de eșantioane prelucrat. Ca și informații auxiliare sunt codate doar diferențele de valori, de la un bloc la altul, ale nivelelor acestor factori de scară. Alocarea de bit efectivă se face, într-un mod similar procedurii de codare MPEG-1 L.III, folosind o buclă de ajustare bazată pe evaluarea, prin sinteză de semnal, a nivelului actual al zgomotului de cuantizare (de reconstrucție). Această procedură mai poartă denumirea și de “modelarea zgomotului de cuantizare”, și are performanțe mai bune decât cea bazată pe tabele de corespondență, însă și o complexitate mai ridicată. Rezultatele obținute indică o codare aproape transparentă de semnal audio monofonic la rate de biți cuprinse în intervalul $48 \div 66$ kbps.

În cele ce urmează se prezintă o propunere originală a autorului, de sistem de compresie adaptivă de semnal audio, bazată pe descompunerea semnalului în pachete de funcții Wavelet. Schema de principiu a părții de codare a sistemului se prezintă în figura 7.11.

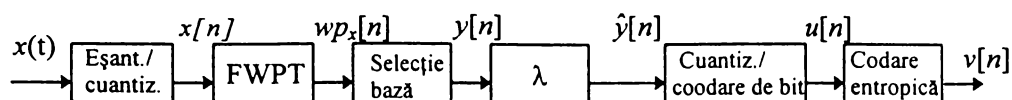


Figura 7.11. Sistem adaptiv de compresie cu pachete de funcții Wavelet

Primul bloc din cadrul acestui sistem realizează o eșantionare urmată de o cuantizare uniformă fină (pe 16 biți) a semnalului. Se obține secvența numerică cu valori discrete $x[n]$. Această secvență este considerată ca pornire în aplicarea algoritmului rapid al transformării în pachete de funcții Wavelet (FWPT) a semnalului de intrare. Această procedură prevede o descompunere pe mai multe nivele a secvenței $x[n]$ prin operații de filtrări succesive. Prelucrare se face pe blocuri de eșantioane de lungimi finite ($N=1024$ sau 2048). Metoda de prelucrare utilizată este cea pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse. Astfel, din cele 1024 (sau 2048) de eșantioane ale blocului reconstruit sunt reținute doar un număr de 1000 (sau 2000) de eșantioane, considerate utile. Filtrele utilizate sunt filtrele Wavelet corespunzătoare funcției Wavelet considerate. Alegerea funcției Wavelet are la bază observația făcută de J.F. Luo și B.G. Sherlock în [Luo.95], conform căreia sistemul Wavelet cel mai regulat se dovedește a fi cel mai bun pentru majoritatea cazurilor de semnal audio. Astfel, într-o primă etapă, a fost preferată funcția DAU-20, funcție Wavelet a lui Daubechies cu 20 de momente superioare nule. Aceasta implică și cele mai scurte filtre Wavelet posibile ($L=40$) dintre toate funcțiile Wavelet ce au același număr de momente nule. Cu costul unei complexități mai semnificative poate fi făcută o selecție optimală dintr-o mulțime de funcții Wavelet disponibile. Într-o primă variantă a sistemului de codare, numărul maxim J , al iterațiilor aplicării algoritmului FWPT, este și el fix ($J=3$ sau 5). Arborele binar asociat transformării FWPT este cel cu arborescență totală, cu J nivele. Rezultatul acestei etape constă dintr-o mulțime de coeficienți Wavelet (de J -ori mai mulți decât numărul eșantioanelor semnalului de la intrare) ce corespund dezvoltării semnalului prelucrat în diferitele pachete de funcții Wavelet. Urmează o procedură de selecție a bazei de funcții Wavelet optimale. Procesul are la bază funcția cost “maximizarea numărului de coeficienți Wavelet cu magnitudine mai mică decât un anumit prag impus”. Căutarea celei mai bune baze are loc conform algoritmului prezentat în §3.2.5. Astfel, spre deosebire de propunerea lui A.H. Tewfik și M. Ali din [Ali.95], ce prevede o structură fixă a băncii de filtre (din nevoia unei cât mai bune aproximări a benzilor critice ale unui model psiho-acustic), se poate spune că sistemul de compresie din figura 7.11 lucrează cu o bancă de filtre cu structură variabilă, optimală prelucrării blocului curent de eșantioane. Alegerea pragului de comparație folosit de funcția cost se face în mod adaptiv, în funcție de nivelul maxim al semnalului din blocul curent de eșantioane. Alegerea adaptivă a fost impusă din dorința asigurării unei anumite valori minime a raportului semnal pe zgomot de cuantizare. Această valoare minimă impusă poate fi specificată ca și parametru din linie de comandă, o reconstrucție de calitate a semnalului audio necesitând cel puțin o valoare de 20 dB a acestuia. Este posibilă implementarea unui control al pragului de comparație similar celui oferit de procedura (6.5). Aplicarea ei este însă mai dificilă datorită structurii mereu schimbătoare a sistemului. Astfel, soluția propusă prevede o evaluare a SQNR, conform procedurii (6.5), urmată de o re-evaluare a valorii pragului λ și de o re-iterare a procedurii de selecție a celei mai bune baze, folosind noua valoare a pragului.

Secvența $y[n]$, în conformitate cu notațiile din figura 7.11, reprezintă coeficienții descompunerii Wavelet, în cea mai bună bază de funcții Wavelet, a semnalului prelucrat. Conform criteriului de cost folosit acest lucru înseamnă faptul că secvența conține cei mai mulți coeficienți Wavelet de valori mai mici decât cea a pragului de comparație λ . De remarcat este faptul că această secvență are lungimea blocului de eșantioane $x[n]$, a semnalului prelucrat. Este posibilă, prin transformare inversă, o reconstrucție exactă a eșantioanelor $x[n]$. Neglijarea efectivă a unor valori

din secvență are loc în pasul următor, cel de comparare cu pragul λ . Valorile de coeficienți $y[n]$, mai mici decât pragul sunt anulați, rezultând secvența de coeficienți $\hat{y}[n]$, ce conține un număr minim de coeficienți de valori diferite de zero. În fond, această secvență reprezintă imaginea compactată a semnalului de intrare.

Următorul bloc, cel de cuantizare și codare de bit operează doar cu valorile nenule ale secvenței de coeficienți $\hat{y}[n]$. Sistemul, cu schema bloc din figura 7.11, folosește un cuantizor uniform cu 256 de nivele de cuantizare, urmat de o codare pe 8 biți a fiecărui coeficient cuantizat. Operația de cuantizare, prin natura sa, introduce erori suplimentare. Nivelul acestor erori nu introduce însă, conform experimentelor efectuate, 2-3 dB în plus față de cea introdusă de operația de "thresholding" (anularea coeficienților mai mici decât pragul λ). O cuantizare neuniformă, cu o funcție de compandare logaritmică, poate asigura o reducere, sub 1 dB, a distorsiunii suplimentare introdusă de această operație. Însă performanța este plătită cu o eficiență mai redusă a codării entropice, deci cu scădere a factorului de compresie.

În vederea obținerii unui factor de compresie maxim posibil, sistemul de compresie din figura 7.11 a fost prevăzut și cu un bloc de codare entropică. Se caută o cât mai bună reprezentare binară a secvenței $u[n]$ (de coeficienți $\hat{y}[n]$ cuantizați și codați). Ținând cont de structura generală a acestei secvențe $u[n]$ (cu multe valori nule), metoda de codare entropică cea mai potrivită, deci cea recomandată, este cea de tip Run-Length (RL). Astfel, blocul de codare entropică operează după cum urmează:

- codează Run-Length, operând pe biți, șirul de biți $u[n]$, al secvenței $\hat{y}[n]$,
- codează, pe un număr variabil de biți, codurile Run-Length ale datelor, anterior obținute,
- codează, prin metoda Lempel-Ziv (LZ), șirul de biți al codurilor Run-Length,
- codul LZ împreună cu informațiile auxiliare este asamblat în cadre de cod.

Sistemul de compresie din figura 7.11. a fost implementat sub forma unui program scris sub mediul de programare *Matlab*. Acest program are două componente majore: un modul de codare și unul de decodare. Ambele sunt funcții Matlab de tipul "cu lansare din linia de comandă". Sintaxa de apel a celei de compresie este:

WPcmp (<*fișier_in.wav*>, [N], [P_x/P_{err}])

unde: *WPcmp* - este denumirea programului,

fișier_in.wav - numele unui fișier în format standard *.wav,

N - primul parametru opțional ce indică tipul de funcție Wavelet, *DAU-N*, utilizat,

P_x/P_{err} - un al doilea parametru opțional ce indică raportul minim de semnal pe zgomot dorit.

Rezultatele compresiei sunt memorate într-un fișier cu același nume (*fișier_in*) însă ce capătă extensia *.cmp.

Valorile implicite folosite (în absența specificărilor opționale) sunt: $N=20$, $P_x/P_{err}=100$ (20 dB).

Sistemul acceptă ca și date de intrare, conținutul unor fișiere în format standard "wave". Ele conțin semnale audio mono- sau stereofonice, eșantionate critic și codate PCM pe 8 sau 16 biți/eșantion. Procedura de prelucrare este una orientată pe semnale monofonice. Un semnal stereofonic este prelucrat sub forma a două proceduri de prelucrare monofonică simultană (nefolosindu-se de corelația intrinsecă existentă între cele două componente ale unui semnal stereofonic).

Rezultatul codării, fișierul *.cmp, trebuie să conțină toate informațiile necesare reconstrucției semnalului audio, în limita criteriului de performanță impus. Structura generală a acestui fișier de date, rezultat în urma codării, este prezentată în figura 7.12.

1.	Frecvența de eșantionare, tip funcție Wavelet	- cu o lungime de 36 de biți
2.	Antet primul Bloc	- cu o lungime de 68 de biți
3.	Codurile LZ ale codurilor RL	- de lungime variabilă
4.	Vector poziție al vectorului de indexare al codurilor RL	- de lungime variabilă
2.	Antetul celui de al doilea Bloc	- cu o lungime de 68 de biți
3.	Codurile LZ ale codurilor RL	- de lungime variabilă
4.	Vector poziție al vectorului de indexare al codurilor RL	- de lungime variabilă
...

Figura 7.12. Structura fișierului de date comprimate

Primii patru octeți (32 de biți) din fișierul comprimat conțin specificarea frecvenței de eșantionare folosită la discretizarea semnalului audio continuu, de prelucrat. Aceasta este necesară unei eventuale reconstrucții în timp real, sau reconstrucției corecte a unui fișier de tip “wave” de eșantioane audio în format PCM. Primul câmp mai conține, specificat pe patru biți, un identificator de funcție Wavelet utilizată.

Urmează trei câmpuri, ce se succed în aceeași ordine, în mod repetitiv, pentru fiecare bloc de 1024 (sau 2048) de eșantioane prelucrate. Conținutul acestor câmpuri este dat de metoda anterior amintită de codificare entropică a eșantioanelor de valoare nenulă.

Astfel, câmpul numărul 2 este un antet ce conține informațiile de control necesare decodării corecte a blocului curent de eșantioane. Aceasta are o lungime fixă de 68 de biți ce conține:

- specificat, pe 16 biți, arborele binar al transformării FWPT,
- specificat, pe 32 de biți, factorul de scală utilizat de cuantizorul din structura schemei de compresie. Acesta este dat în reprezentarea cu virgulă flotantă a unui număr real cu precizie dublă,
- specificat, pe 10 biți, lungimea vectorului de poziție al vectorului de indexare al codurilor RL,
- specificat, tot pe 10 biți, lungimea efectivă a codurilor LZ ale datelor și vectorului de indexare date.

Următoarele două câmpuri (3 și 4) conțin codurile LZ, ale codurilor RL a secvenței $u[n]$ (câmpul 3), precum și cele de localizare (de poziție) a unor coduri RL (cele care au lungime diferită de cele cu frecvența maximă - în câmpul 4). Este vorba de vectorul de poziție al vectorului de indexare al codurilor RL. Acest vector este un rezultat al procedurii de codare entropică propusă. Astfel, faza de codare pe un număr variabil de biți a codurilor Run-Length (RL) ale datelor a fost introdusă din considerente de eficiență în reprezentare binară, bazată pe o statistică neuniformă a acestor coduri. Astfel, s-a observat faptul că apar coduri RL de valori mici cu frecvențe mari și coduri RL cu valori ridicate cu frecvențe foarte scăzute. Din acest motiv, se propune o procedură neuniformă de alocare de bit codurilor RL obținute. În acest sens sistemul propus lucrează cu trei nivele de codare, după cum urmează: codurile cu valori mai mici decât 8 sunt reprezentate pe 3 biți, cele cu valori mai mici decât 32, pe 6 biți, în timp ce cele cu valori mai mari sunt reprezentate pe 13 biți. Vectorului de indexare al codurilor RL este un vector binar format din vectorii de poziție ai valorilor RL codați pe 6 biți și, respectiv, ai valorilor RL codați pe 13 biți. Codurile LR ale acestui vector sunt alipite codurilor RL ale datelor (ce se codează LZ împreună), în timp ce vectorul de poziție al vectorului de indexare al codurilor RL, inclus în câmpurile 4 din structura fișierului de date comprimate, este rezultatul codării, în același mod, pe un număr variabil de biți, a codurilor RL ale vectorului de indexare. Se propune deci o metodă de codare entropică hibridă, RL cu dublă indexare combinată cu LZ.

Programul de reconstrucție are sintaxa de apel:

WPdcmp (<fisier_in.cmp>, [<fisier_out.wav>])

unde: *WPdcmp* - este denumirea programului,

fisier_in.cmp - numele unui fișier cu semnal audio comprimat, în format *.cmp,

fisier_out.wav - un parametru opțional, numele unui fișier în format standard *.wav în care se memorează secvența audio reconstruită.

În absența parametrului opțional (numele fișierului rezultat), rezultatele reconstrucției vor fi memorate într-un fișier cu structura standard "wave" ce are aceeași denumire cu cea a fișierul *.cmp indicat (dar cu extensia *.wav).

Câteva rezultate experimentale ale utilizării acestor programe, în compresia unei secvențe audio stereofonice (muzică de pian), de calitate CD (eșantioane prelevate cu frecvența de 44100Hz și codate PCM cu 16 biți/eșantion), de lungime 3.58 s, se prezintă în cele ce urmează. Secvența audio conține un număr total de 159400 de eșantioane, fiind prelucrată, în cadrul primului experiment, pe blocuri de 1024 de eșantioane din care utile sunt doar 1000 (din cauza suprapunerilor parțiale ale blocurilor de eșantioane). În figura 7.13. se prezintă câteva etape ale prelucrării a unui bloc (blocul nr. 7) de eșantioane.

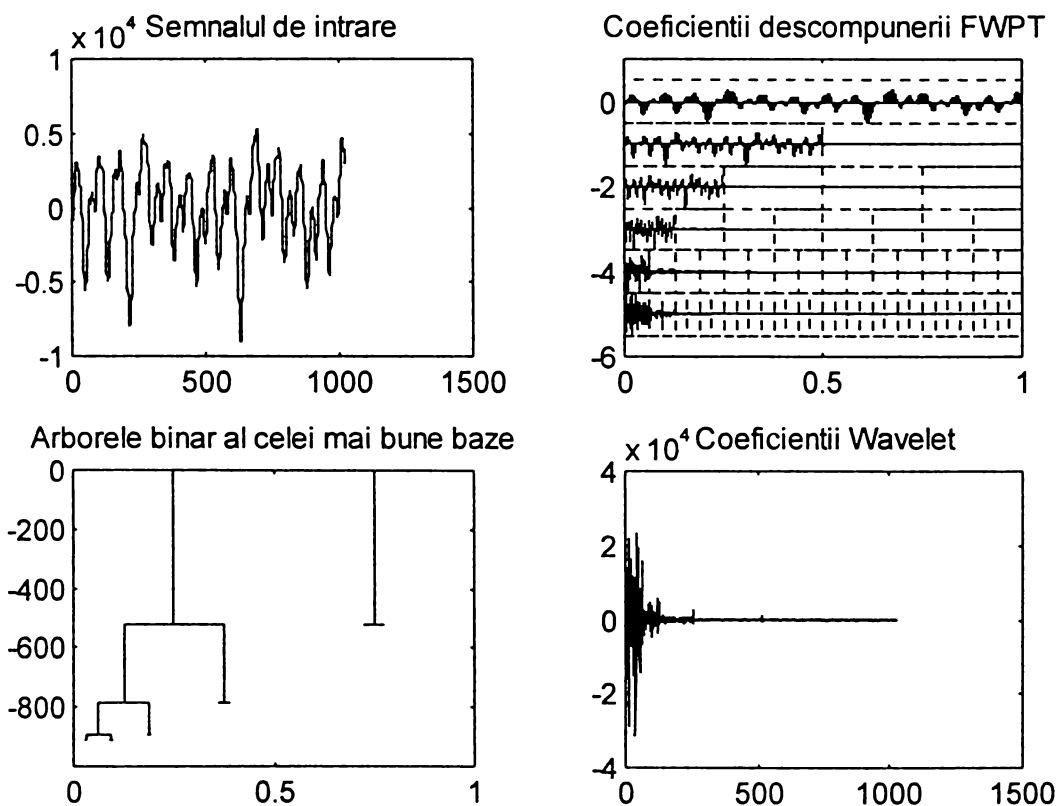


Figura 7.13. a) semnalul prelucrat, b) coeficienții descompunerilor în pachete de funcții Wavelet, c) arborele binar asociat celei mai bune baze, d) coeficienții Wavelet ai descompunerii în baza cea mai bună

Rezultate ale codării blocului de eșantioane din figura 7.13.a indică un număr de 91 coeficienți nenuli ai secvenței $\hat{y}[n]$. Aceasta indică un raport $Nr. total\ de\ coeficienți/Nr.\ coeficienți\ nenuli = 1024/91=11.25$, și permite un raport $SQNR=20.19\ dB$, după operația de "thresholding". Codarea entropică a condus la o lungime totală de 1691 biți a câmpurilor 2,3 și 4, aferente acestui bloc, din fișierul *.cmp rezultat. Aceasta este echivalentă cu o rată de compresie efectivă de 9.46 ($1000*16/1691$), în condițiile în care SQNR de reconstrucție are valoarea de 20.41 dB.

O variantă mai rapidă, dar suboptimală, a sistemului de compresie din figura 7.11 este bazată pe o alegere aproximativă, a pragului de comparație λ , în funcție de nivelul maxim al semnalului din blocul curent de eșantioane. Am constatat, prin experimentare, faptul că o valoare de

$$\lambda = \max_n(\text{abs}(x[n])) / 8 \quad (7.13)$$

asigură nivele ale raportului SQNR de ordinul $20 \div 25 \text{ dB}$ (cu cel puțin 3 dB mai bun decât nivelul raportului SQNR oferit de metodele de codare perceptivă). De asemenea, am constatat faptul că, pentru blocurile de eşantioane în care nivelul maxim al semnalului nu depășește 60 dB , o alegere de forma:

$$\lambda = \max_n(\text{abs}(x[n])) / 2 \quad (7.14)$$

conduce la zgomote de cuantizare imperceptibile, la reconstrucție.

În tabelul 7.4. se prezintă, în mod sintetic, câteva rezultate ale utilizării acestei variante a programului, aplicat semnalului audio mai sus menționat.

Tabelul 7.4. Rezultate ale codării primelor 30 de blocuri de 1024 de eşantioane ale semnalului audio prelucrat

Număr bloc	SQNR etapa I. [dB]	rata de cmpr. Huffman date	rata de cmpr. Huffman RL.	SQNR de reconstrucție [dB]	Nr.total coef/ Nr. coef. Nenuli	CR efectivă (LZ-RL)
1.	7.6604	8.1961	10.4891	7.6778	6.3210	5.0745
2.	5.7751	11.3227	25.2840	5.7476	13.4737	12.2324
3.	9.1230	12.3933	32.1886	9.1326	18.6182	15.7480
4.	12.2723	12.0559	27.1708	12.3819	16.0000	13.5708
5.	23.0788	10.0392	17.9846	23.5919	10.3434	9.3458
6.	21.0104	9.2252	14.9899	21.2274	8.6780	7.7407
7.	21.3628	9.6094	16.4829	21.6598	9.3091	8.5929
8.	23.5469	9.5813	16.2540	23.8806	9.2252	8.3770
9.	24.9298	9.1787	15.5446	25.4995	8.5333	8.3990
10.	24.5821	9.3999	16.3350	24.7699	9.1429	8.6486
11.	24.9555	9.2408	15.8147	25.5578	8.6050	8.4211
12.	24.4997	9.3837	15.4130	25.1979	8.7521	8.2136
13.	25.6690	9.7408	16.8386	25.8850	9.6604	8.7864
14.	25.0408	9.3356	15.7085	25.4843	8.7521	8.2988
15.	25.7038	9.2513	15.5005	25.9465	8.7521	8.0160
16.	27.7145	9.3945	16.8041	27.9852	9.0619	8.4388
17.	24.6291	9.6775	16.6843	25.4840	9.3091	8.9087
18.	26.1366	9.7292	16.8386	26.3646	9.6604	9.0395
19.	25.5980	9.7004	16.8733	26.5432	9.5701	9.1013
20.	27.4217	9.2933	16.0627	27.4847	8.6780	8.6533
21.	29.4111	9.1022	15.6785	30.5972	8.4628	8.4926
22.	26.9711	9.3999	15.8147	27.6868	8.8276	8.4388
23.	28.3367	9.2565	16.3840	28.3947	8.8276	8.6815
24.	27.7873	9.2565	15.6485	29.4866	8.5333	8.5424
25.	28.2192	9.4378	16.5328	28.9786	8.9043	8.8300
26.	27.6886	9.4650	16.2701	27.7320	8.9825	8.6068
27.	26.7947	9.4596	16.0943	27.7584	8.9825	8.0686
28.	27.3563	9.3303	16.5998	27.3467	8.9043	8.7960
29.	27.8201	9.2722	15.6038	28.5825	8.5333	8.3770
30.	28.4000	9.3250	16.1897	30.7570	8.6050	8.8057

În tabelul 7.4. au fost trecuți o serie de indicatori de performanță ai sistemului cum ar fi: raportul SQNR, în decibeli, după operația de “thresholding” (coloana a II-a), rata de compresie teoretică obținabilă prin codarea Huffman a secvenței $u[n]$ (coloana a III-a), exclusiv tabela de simboluri, rata de compresie teoretică obținabilă prin codarea Huffman a secvenței codurilor RL ale secvenței $u[n]$ (coloana a IV-a), exclusiv tabela de simboluri, SQNR de reconstrucție (coloana a V-a), raportul dintre numărul total de coeficienți și numărul coeficienților nenului ai secvenței $y[n]$ (coloana a VI-a), precum și raportul de compresie obținut prin codarea efectivă folosind codul Lempel-Ziv (un cod dinamic ce nu necesită transmiterea unei tabele de simboluri) aplicat secvenței codurilor Run-Length ale secvenței $u[n]$ (coloana a VII-a).

Rezultatele experimentului, evaluate pe ansamblul celor 159 de blocuri de eșantioane prelucrate, indică un factor de compresie mediu de 8.24 în condițiile unei medii a raportului SQNR de reconstrucție de 23.72 dB. Acest rezultat, de codare de semnal audio cu rată de bit variabilă, corespunde, în contextul dat (frecvență de eșantionare de 44100 Hz și codare PCM pe 16 biți a eșantioanelor), la o rată de bit echivalentă de 85.59 kbps, mai mică decât cele ale codărilor MPEG1-LI și LII însă mai mare decât cea a codării MPEG1-LIII. Distorsiunile de reconstrucție oferite de această metodă sunt însă mai mici decât cele ale codărilor MPEG, și nu este de neglijat faptul că aceste rezultate sunt obținute în condițiile unei complexități mai scăzute a sistemului.

Experimentul de mai sus a fost repetat folosind aceeași funcție Wavelet DAU-20, dar operând cu blocuri de eșantioane de lungime $L=2048$, și calculând FWPT pe un număr maxim de $J=5$ nivele de rezoluție. În figura 7.14. se prezintă câteva etape ale prelucrării a unui bloc (blocul nr. 7) de 2048 de eșantioane.

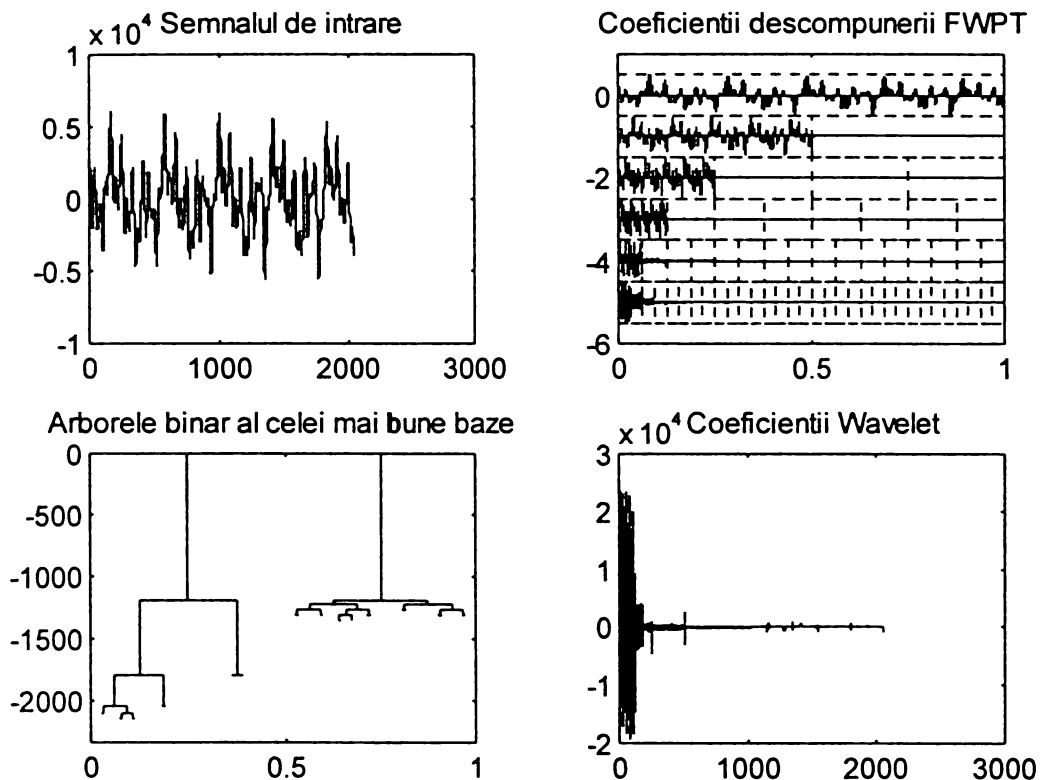


Figura 7.14. a) semnalul prelucrat, b) coeficienții descompunerilor în pachete de funcții Wavelet, c) arborele binar asociat celei mai bune baze, d) coeficienții Wavelet ai descompunerii în baza cea mai bună

Rezultate ale codării blocului de eșantioane din figura 7.14.a indică un număr de 160 coeficienți nenuli ai secvenței $y[n]$. Aceasta conduce la un raport $Nr. \text{ total de coeficienți} / Nr. \text{ coeficienți nenuli} = 1024/91 = 12.80$, și permite un raport $SQNR = 23.74 \text{ dB}$, după operația de “thresholding”. Codarea entropică a condus la o lungime totală de 2665 biți a câmpurilor 2,3 și 4, aferente acestui bloc, din fișierul *.cmp rezultat. Aceasta este echivalentă cu o rată de compresie efectivă de 12.007 ($2000 * 16 / 2665$), în condițiile în care SQNR de reconstrucție are valoarea de 24.76 dB. Se observă o îmbunătățire clară a performanțelor sistemului față de cazul anterior.

Aceeași tendință de îmbunătățire a performanțelor se observă și consultând tabelul 7.5. ce prezintă, în mod sintetic, câteva rezultate ale utilizării acestei variante a programului, aplicat semnalului audio mai sus menționat. În tabel au fost trecuți, spre comparație, aceleași indicatori de performanță ai sistemului ca și în tabelul 7.4.

Tabelul 7.5. Rezultate ale codării primelor 30 de blocuri de 2048 de eşantioane ale semnalului audio prelucrat

Număr bloc	SQNR etapa I. [dB]	rata de cmpr. Huffman date	rata de cmpr. Huffman RL.	SQNR de reconstrucție [dB]	Nr.total coef/ Nr. coef. Nenuli	CR efectivă (LZ-RL)
1.	4.1180	14.1853	66.0645	3.8142	38.6415	29.5476
2.	13.8381	14.7074	87.1489	14.2225	55.3514	36.7394
3.	19.9300	11.3620	23.1904	20.3382	14.2222	12.1627
4.	21.2719	10.3992	20.0049	21.3111	11.4413	11.0919
5.	24.1763	10.2464	20.7655	24.1439	11.6364	11.4736
6.	23.5926	10.6597	22.3215	23.9560	12.8805	12.1627
7.	23.7443	10.7190	22.3825	24.7638	12.8000	12.0075
8.	25.4918	10.5397	22.0363	25.8756	12.3373	11.4245
9.	25.4137	11.1913	24.5453	25.5530	14.3217	13.0879
10.	24.9583	10.9997	24.1830	25.1112	14.0274	12.9607
11.	24.7294	11.1570	24.5453	24.9108	13.9320	13.2396
12.	23.0535	11.3032	23.6421	23.3938	14.0274	12.6833
13.	24.5814	11.3384	24.4173	25.1461	14.4225	12.9712
14.	23.9329	11.1913	22.8987	24.0138	13.8378	12.0527
15.	24.1444	11.3581	24.9566	24.8353	14.6286	13.2615
16.	25.4559	11.2066	23.8486	25.5521	14.2222	12.8876
17.	24.9784	11.1342	23.7967	25.1049	13.8378	12.8669
18.	24.7913	11.3032	24.7680	24.7812	14.7338	13.1094
19.	25.0508	10.9629	23.9008	25.9790	13.9320	12.6532
20.	20.9566	9.5673	15.6635	20.9230	9.3945	8.8081
21.	21.9952	10.4456	22.0660	22.3553	12.5644	11.8827
22.	22.0724	10.3336	20.3275	22.2114	11.9070	10.7419
23.	20.8826	9.9327	16.5998	20.7197	10.2915	8.8520
24.	19.7224	10.3369	17.0489	19.6750	10.6667	9.1455
25.	22.0920	10.5771	18.3883	22.1364	11.2527	9.8310
26.	20.3916	11.3110	23.7967	20.5353	14.6286	12.3600
27.	19.8636	10.9372	20.5442	20.1221	12.1905	11.1073
28.	21.6215	10.3336	18.1039	21.7378	10.7789	9.7294
29.	21.8337	9.8314	16.8907	22.1075	10.1891	9.2619
30.	23.1181	9.9963	17.3467	23.2250	10.4490	9.2086

Rezultatele experimentului, evaluate pe ansamblul celor 79 de blocuri de eşantioane prelucrate, indică un factor de compresie mediu de 11.3286 în condițiile unei medii a raportului SQNR de reconstrucție de 22.0549 dB. Acest rezultat, de codare de semnal audio cu rată de bit variabilă, corespunde, în contextul dat (frecvență de eşantionare de 44100 Hz și codare PCM pe 16 biți a eşantioanelor), unei rate de bit echivalentă de 62.2848 kbps, comparabilă cu cea a codării MPEG1-LIII, oferind însă o distorsiune de reconstrucție mai mică. Semnalul reconstruit poate fi încadrat, pe baza calității de reproducere (o măsură subiectivă), în categoria “forte bună”, sistemul asigurând o codare “aproape transparentă”.

Cele mai recente propuneri din acest domeniu al codării audio propun scheme de codare hibride, [Ali.96], [Ham.96], [Ham.97]. Astfel, în [Ali.96] se propune o structură de codare ce îmbină modelul psiho-acustic utilizat, similară cu cele utilizate în implementările de sisteme de codare perceptivă deja menționate (propuse de M. Ali în [Ali.95], J.F. Luo și B.G. Sherlock, [Luo.95]), cu deosebirea faptului că în această implementare modelul psiho-acustic va furniza și informațiile de “tip de componentă” de semnal (tonală sau netonală). Astfel, se poate face o clasificare (o diferențiere clară) a acestor componente, iar codările utilizate pot fi specifice fiecărei clase în parte. Componentele tonale, fiind semnale cvasi-periodice pot fi comprimate eficient folosind metode bazate pe analiza Fourier (transformările FFT sau DCT). Prin scăderea din semnalul de prelucrat a părții tonale (reconstruită prin sinteză de semnal) se obține un semnal rezidual, cu un comportament de zgomot care se poate coda în subbenzi Wavelet. Performanțele

unui astfel de sistem depind de acuratețea modelului psiho-acustic, de filtrele Wavelet utilizate precum și de procedura de alocare de bit utilizată. M. Ali și A.H. Tewfik, autorii lucrării [Ali.96], raportează o rată de bit obținabilă de 1 bit/eșantion, în condițiile unei codări audio transparente. Această rată de bit, în condițiile unui semnal audio de calitate CD (eșantionat cu frecvența de 44100 Hz), este echivalentă cu o rată de bit de 44.100 kbps. Această valoare este evident mai redusă decât orice altă valoare minimă indicată de până acum.

7.5. Compresie de semnal audio prin descompuneri în baze de funcții trigonometrice locale

Conform rezultatelor din paragraful precedent, sistemele de compresie bazate pe descompunerea semnalului audio în baze ortogonale sau biortogonale de funcții Wavelet pot să aducă performanțe comparabile cu cele ale unor metode performante cum sunt sistemele MPEG-Audio, la o complexitate sensibil mai scăzută a sistemului. Acest lucru se datorează faptului că bazele de funcții Wavelet permit o analiză adaptivă (locală și/sau globală) a semnalului prelucrat (nestaționar prin natură). Aceste analize se adaptează ușor diferitelor tipuri de caracteristici locale sau globale ale semnalului, în sensul că pot fi ușor concepute diverse scheme adaptive de prelucrare a semnalului ce operează în moduri diferite în funcție de proprietățile avute de semnalul de intrare. Descompunerile Wavelet permit, după cum s-a văzut, obținerea unor performanțe bune, dacă sistemul de compresie conceput exploatează în mod eficient proprietățile de regularitate, număr de momente nule precum și cele de suport compact ale funcțiilor Wavelet. Rezultatele raportate de M. Ali și A.H. Tewfik, [Ali.96], ne indică faptul că în contextul unui semnal audio, semnal nestaționar, cu o serie de componente tonale (apropiate de undele armonice pure) dar și netonale (având caracteristicile unui semnal de zgomot), o analiză combinată poate oferi eficiență maximă în codare. Această analiză combinată, după cum am văzut, prevede o reprezentare adaptivă a semnalului prin separarea componentelor armonice și cvasi-armonice (cele tonale) de celelalte, și aplicarea unor procedee de codare diferite, adaptate acestor componente, bazată pe analiză Fourier pentru cele tonale și analiză Wavelet pentru cele netonale. De fapt, problema principală a celor două propuneri anterioare ale autorului tezei din paragraful precedent §7.4, (sistemele cu schemele de principiu din figurile 7.7 și 7.11), constă în faptul că, prin natura sa, o analiză Wavelet nu poate caracteriza în mod eficient o componentă spectrală pură (o componentă armonică). În cele ce urmează vom analiza performanțele unor sisteme de compresie bazate pe descompuneri în baze de funcții ce permit, de asemenea, efectuarea unei analize adaptive a semnalului prelucrat. Această dorință de a investiga și alte tipuri de funcții, în contextul compresiei de semnal audio, este bazată și pe concluzia lui Luo și Sherlock, enunțată în paragraful precedent, conform căreia la o aceeași lungime a filtrelor Wavelet utilizate, sistemul Wavelet cel mai regulat s-a dovedit a fi cel mai bun pentru majoritatea cazurilor de semnal audio, concluzie ce este în deplină concordanță cu concluziile și propunerile lui M. Ali. De asemenea, a fost observat faptul că factorul de compresie obținut, folosind sisteme Wavelet regulate, pentru semnalele audio cu mai multe componente tonale este în general mai redus decât cel obținut prin codare MPEG-Audio, în condiții similare de codare și calitate de reconstrucție. În acest paragraf se propune un sistem de compresie cu o structură și caracteristici similare celui din figura 7.11 dar care folosește descompuneri de semnal în baze de funcții trigonometrice locale. Trebuie observat faptul că aceste baze sunt baze timp-frecvență cu o serie de proprietăți similare bazelor Wavelet dar care pot fi capabile de o reprezentare mai eficientă a componentelor armonice.

Astfel, aceste baze de funcții trigonometrice locale pot oferi aceleași calități în reprezentarea de semnal ca și multe dintre bazele de funcții Wavelet abordate: permit o analiză timp-frecvență adaptivă, cu rezoluție temporală și respectiv frecvențială variabilă în funcție de evenimentele

temporale sau frecvențiale ale semnalului prelucrat, grad controlabil de regularitate, construcția unor funcții cu un anumit număr de momente nule și evident există o serie de asemenea funcții ce sunt cu suport compact. Și aceste funcții pot forma mulțimi de baze, pot fi generate pachete de asemenea funcții, care pot fi combinate în baze optimale de reprezentare a semnalului. Astfel, și aceste funcții permit abordarea cu succes a unor cerințe cum sunt cele de cea mai bună aproximare a unei diviziuni spectrale (de exemplu aproximarea benzilor critice) sau construcția celei mai bune baze (adoptând un criteriu de cost). Acest subiect al bazelor atomice de funcții trigonometrice locale precum și cel al analizelor folosind pachete de astfel de funcții a fost tratat, în cadrul prezentei lucrări, în §3.3.

În continuare, se prezintă o propunere de sistem de compresie bazat pe o descompunere a semnalului audio de prelucrat în baze optimale de funcții trigonometrice locale. Schema de principiu a sistemului se prezintă în figura 7.15.

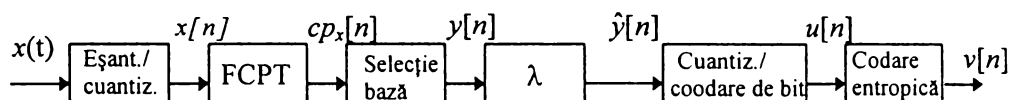


Figura 7.15. Sistem adaptiv de compresie cu pachete de funcții cosinusoidale locale

Sistemul, cu schema bloc din figura 7.15, are o structură similară cu cea a sistemului de compresie investigat în §7.4.2, cu schema de principiu din figura 7.11. Compresia de semnal are la bază aceleași principii: operare pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse, evaluarea coeficienților dezvoltării semnalului în baza de funcții cosinusoidale locale cea mai potrivită, cea care asigură un număr minim de coeficienți nenuli în urma anulării celor cu magnitudine mai mică decât valoarea unui anumit prag λ , ales în mod adaptiv pe baza unei cerințe de distorsiune minimă impusă, cuantizarea uniformă (sau neuniformă prin compandare după legea μ), codare de bit și codare entropică. Diferența dintre cele două sisteme de codare (cel din figura 7.11 și cel din figura 7.15) constă în faptul că, în timp ce primul folosea dezvoltarea semnalului în pachete de funcții Wavelet, cel din urmă îl descompune în pachete de funcții cosinusoidale locale.

Sistemul de compresie din figura 7.15. a fost implementat sub forma unui program scris sub mediul de programare *Matlab*. Și acest program are două componente: un modul de codare și unul de decodare. Ambele sunt funcții Matlab de tipul “cu lansare din linia de comandă”. Sintaxa de apel a celei de compresie este:

CPcmp (<fisier_in.wav>, [P_x/P_{err}])

unde: CPcmp - este denumirea programului,

fisier_in.wav - numele unui fișier în format standard *.wav,

P_x/P_{err} - un parametru opțional ce indică raportul minim de semnal pe zgomot dorit. Valoarea implicită a sa este $P_x/P_{err}=100$ (20 dB).

Rezultatele compresiei sunt memorate într-un fișier cu același nume (fisier_in) cu extensia *.cmp ce are o structură similară celei din figura 7.12 (cu excepția faptului că lipsește din primul câmp specificatorul N al funcției Wavelet utilizate).

Programul de reconstrucție are sintaxa de apel:

CPdcmp (<fisier_in.cmp>, [<fisier_out.wav>])

unde: CPdcmp - este denumirea programului,

fisier_in.cmp - numele unui fișier cu semnal audio comprimat, în format *.cmp,

fisier_out.wav - un argument opțional, numele unui fișier în format standard **.wav* în care se memorează secvența audio reconstruită.

În absența argumentului opțional (numele fișierului rezultat), rezultatele reconstrucției vor fi memorate într-un fișier cu structura standard “*wave*” cu aceeași denumire cu cea a fișierul **.cmp* indicat (dar cu extensia **.wav*).

În tabelul 7.6 se prezintă câteva rezultate experimentale ale utilizării acestor programe, în compresia secvenței audio stereofonice, de calitate CD (eșantioane prelevate cu frecvența de 44100Hz și codate PCM cu 16 biți/eșantion), și de lungime 3.58 s, identică cu cea folosită în experimentările din paragraful anterior.

Tabelul 7.6. Rezultate ale codării primelor 30 de blocuri de 1024 de eșantioane ale semnalului audio prelucrat

Număr bloc	SQNR etapa I. [dB]	SQNR de reconstrucție [dB]	Nr.total coef/ Nr. coef. Nenui	CR efectivă (LZ-RL)
1.	10.5405	11.0944	38.4615	25.7649
2.	11.4116	11.7753	45.4545	26.4463
3.	9.8064	9.8235	55.5556	31.5582
4.	16.0137	16.1373	50.0000	32.5866
5.	20.5486	25.6533	17.5439	13.0506
6.	22.8574	23.9503	12.6582	12.1581
7.	21.5498	23.0301	14.7059	11.2202
8.	20.9095	23.2904	15.8730	13.6054
9.	26.3431	26.9082	14.4928	13.1148
10.	26.5741	27.7015	16.1290	13.4341
11.	22.0889	25.1388	15.1515	12.1396
12.	23.0654	25.8661	15.1515	12.5490
13.	25.3452	25.9585	17.8571	16.7189
14.	24.3712	26.8213	16.3934	13.3556
15.	20.8198	25.3855	14.0845	11.4778
16.	25.2010	26.6211	16.3934	13.5478
17.	25.4195	26.7067	17.8571	14.9393
18.	24.5307	24.7013	20.8333	17.6018
19.	24.2331	26.0417	20.8333	16.0804
20.	25.9748	26.2157	17.5439	15.6250
21.	26.8377	27.7174	17.2414	13.9616
22.	23.3809	25.5846	14.9254	11.7734
23.	24.3134	25.2844	15.3846	11.7994
24.	22.9729	23.6151	18.5185	14.4014
25.	24.3787	25.7125	16.6667	14.3369
26.	24.0955	24.4569	17.8571	12.4611
27.	21.8095	25.1363	14.0845	11.6533
28.	22.7681	24.9980	13.6986	11.1421
29.	21.3169	25.9482	14.2857	13.1904
30.	24.9862	25.5231	17.2414	15.3994

În tabelul 7.6 au fost trecuți indicatori de performanță ai sistemului cum sunt: raportul SQNR, în decibeli, după operația de “thresholding” (coloana a II-a), SQNR de reconstrucție (coloana a III-a), raportul dintre numărul total de coeficienți și numărul coeficienților nenului ai secvenței $\hat{y}[n]$ (coloana a IV-a), și raportul de compresie obținut prin codarea efectivă, folosind codarea Lempel-Ziv a secvenței codurilor Run-Length ale secvenței $u[n]$ (coloana a V-a).

Aceste rezultate indicate au fost stabilite în condiții similare celor de obținere a rezultatelor din tabelul 7.4., operând pe blocuri de eșantioane de lungime $N=1024$ și calculând FCPT pe un număr $J=3$ nivele.

Rezultatele experimentului, evaluate pe ansamblul celor 159 de blocuri de eşantioane prelucrate, indică un factor de compresie mediu de 12.906 în condițiile unei medii a raportului SQNR de reconstrucție de 23.92 dB. Ambele valori indică performanțe ale acestui sistem mai bune decât cele ale sistemului Wavelet (8.24 și, respectiv, 23.72 dB). Acest rezultat, de codare de semnal audio cu rată de bit variabilă, corespunde, în contextul dat (frecvență de eşantionare de 44100 Hz și codare PCM pe 16 biți a eşantioanelor), la o rată de bit echivalentă de 54.669 kbps, mai mică decât cele ale codărilor MPEG-Audio și comparabilă cu cele raportate prin utilizarea unor codări perceptive hibride, [Ali.96]. Valoarea distorsiunilor de reconstrucție oferită de această metodă este însă mai mică decât cea a codărilor hibride, și nu este de neglijat faptul că rezultatele sunt obținute în condițiile unei complexități mai scăzute a sistemului.

Experimentul de mai sus a fost repetat folosind aceleași funcții cosinusoidale locale, dar operând pe blocuri de eşantioane de lungime $L=2048$, și calculând transformarea FCPT pe un număr maxim de $J=5$ nivele.

Rezultatele experimentului, evaluate pe ansamblul celor 79 de blocuri de eşantioane prelucrate, indică un factor de compresie mediu de 16.504 în condițiile unei medii a raportului SQNR de reconstrucție de 23.77 dB. Se observă o creștere semnificativă a factorului de compresie (față de 12.906 obținut în cazul anterior) în condițiile menținerii nivelului distorsiunii de reconstrucție (care era de 23.92 dB). Acest rezultat corespunde, în contextul dat (frecvență de eşantionare de 44100 Hz și codare PCM pe 16 biți a eşantioanelor), unei rate de bit echivalentă de 42.753 kbps, mai mică decât cele ale codărilor MPEG-Audio, comparabilă, și chiar mai bună decât cele raportate prin utilizarea unor codări perceptive hibride (1 bit pe eşantion). Semnalul reconstruit poate fi încadrat și în acest caz, pe baza calității de reproducere, în categoria “forte bună”, sistemul asigurând o codare “aproape transparentă”.

Concluzii

Subiectul abordat în lucrare este cel al compresiei de semnal bazată pe utilizarea unor reprezentări timp-frecvență. Scopul urmărit este cel de realizare a unei analize comparative a performanțelor oferite de o serie de sisteme adaptive de compresie cu pierdere, ce încorporează în structura lor dezvoltări ale semnalului de prelucrat în diferitele tipuri de baze timp-frecvență. Multe dintre sistemele de compresie prezentate sunt propuneri originale ale autorului. Problematika este abordată în ipoteza unor semnale de intrare cu diferite caracteristici (de bandă limitată, cu variație polinomială sau polinomială pe porțiuni, de clasă C^∞ sau C^N , cu N finit, pe toată axa reală sau pe porțiuni, semnale aleatoare staționare - cu diverse caracteristici statistice, sau nestaționare dar cu caracteristici staționare pe porțiuni etc.). În vederea adaptării la aceste caracteristici de intrare, sistemele de compresie propuse recurg la utilizarea unor metode diferite de transformare a spațiului de reprezentare a informației sursă. Se caută descompuneri optimale, baze de funcții “bune”, ce oferă cele mai bune sau aproape cele mai bune performanțe de analiză în condițiile date. Astfel, se arată că printre candidate se numără bazele de funcții cu localizare bună atât în domeniul timp cât și în cel de frecvență. Din acest motiv, un loc privilegiat în această expunere îl ocupă bazele de funcții timp-frecvență, cum sunt bazele de funcțiile trigonometrice locale, bazele de funcții “Wavelet”, ortogonale sau biortogonale precum și pachetele de funcții trigonometrice locale și, respectiv, de funcții “Wavelet”. Se pun în evidență legăturile inerente ce există între proprietățile funcțiilor bazei și cele ale semnalului de analizat. Se indică câteva modalități de căutare și respectiv de construcție a unor asemenea baze. Sunt studiate și evaluate metode adaptive de cuantizare a coeficienților transformării.

Lucrarea are 215 pagini și este structurată pe șapte capitole, concluzii și bibliografie.

În primul capitol este introdusă tematica compresiilor de semnal, sunt trecute în revistă principalele componente ale unor sisteme clasice de compresie. Sunt definite o serie de măsuri posibile de evaluare a calității semnalului reconstruit. Se indică o serie de clasificări posibile ale acestor sisteme bazate pe diverse criterii (criteriul erorii de reconstrucție, natura mesajelor sursă și a codurilor asociate, în funcție de tehnicile de codare folosite etc.). Sunt indicate performanțele limită teoretică obținabile de către sistemele de compresie atât a celor din clasa sistemelor de compresie fără pierdere cât și a celor din clasa sistemelor de compresie cu pierdere. Astfel, cele fără pierdere pot oferi rapoarte de compresie mai mici, în limita debitului entropic al sursei. Aceste sisteme realizează practic o reducere a redundanței existente în reprezentarea primară a semnalului sursă. Prin definiție, sistemele de compresie cu pierdere nu pot asigura o reconstrucție exactă a semnalului sursă, însă oferă rapoarte de compresie mai mari. Această performanță se datorează însă gradului mărit de flexibilitate permisă în reconstrucția semnalului. Cu cât se admite un nivel mai mare al distorsiunii de reconstrucție cu atât se pot obține rapoarte de compresie mai mari. Limitele de performanță din acest punct de vedere sunt oferite de funcțiile rată-distorsiune și distorsiune-rată, introduse în ultimul paragraf al acestui prim capitol. Ele pun în evidență, pe de o parte, imposibilitatea reducerii ratei medii de biți sub o anumită limită fără a depăși un anumit nivel al distorsiunii de reconstrucție, iar pe de altă parte imposibilitatea obținerii unor distorsiuni de reconstrucție oricât de mici dacă se fixează o rată de bit mai mică decât debitul entropic al sursei. Importanța acestor funcții rezidă în faptul că ele indică anumite limite teoretice ale performanțelor obținabile, ale căror cunoaștere se poate dovedi utilă în construcția efectivă a unor sisteme. Ele oferă, de asemenea, măsuri ce permit realizarea unor comparații efective între sisteme de compresie, cu structuri și principii de funcționare mult diferite. Tot în acest capitol se arată faptul că dependența performanțelor diferitelor sisteme de compresie de însuși caracteristicile semnalului de prelucrat face inutilă căutarea unor sisteme de compresie optimale (cele mai bune) în cazurile în

care semnalul sursă este unul nestaționar. Pentru aceste cazuri se recomandă fie utilizarea unor sisteme de compresie universale cu performanțe suboptimale fie a unor sisteme adaptive ce învață “din mers” caracteristicile de semnal tinzând astfel către performanțe optime.

Următoarele capitole ale lucrării sunt dedicate prezentării unor aspecte teoretice și practice ale realizării unor sisteme de compresie adaptive, bazate pe transformarea spațiului de reprezentare a semnalului sursă.

În cel de al doilea capitol se prezintă o serie de rezultate teoretice clasice privind performanțele obținabile ale unor tehnici de cuantizare diferite. Sunt trecute în revistă procedeele de cuantizare scalară uniformă și neuniformă, procedee de cuantizare vectorială, indicându-se performanțele limită obținabile (cuantizoare optime). Se introduc, de asemenea, algoritmi eficienți de construcție a unor cuantizoare scalare sau vectoriale optime, în condițiile în care sunt cunoscute statisticile procesului de intrare (algoritmul Lloyd-Max pentru cazul scalar și, respectiv, algoritmul LBG pentru cazul vectorial). Această optimalitate poate fi stabilită însă doar pentru cazul unor semnale sursă staționare. Pentru cele nestaționare se recomandă cuantizarea robustă.

Cel de al treilea capitol este dedicat găsirii unor reprezentări alternative eficiente ale procesului sursă. Este vorba despre studiul unei serii întregi de transformări ce, aplicate semnalului de intrare, duc la reprezentări ce se dovedesc a fi utile din punct de vedere al compresiei acestuia. Din acest motiv aceste proceduri de transformare reprezintă faze de preprocesare a semnalului, înainte de compresia sa efectivă. Sunt studiate calitățile unor baze de spații de semnale, construite din funcții cu proprietăți bune de regularitate, de moment, de localizare în planul timp frecvență etc. Sunt avute în vedere reprezentările bazate pe funcții de tip Wavelet diferite (ortogonale, semiortogonale, biortogonale, cu suport compact, cu regularități diferite) precum și reprezentări derivate, cum sunt cele de descompunere în baze de pachete de funcții Wavelet. Se indică principalele motive pentru care aceste transformări se pot dovedi utile în aplicații de compresie. Se prezintă o serie de modalități efective de utilizare eficientă a lor, prin implementări de algoritmi rapizi de calcul ai coeficienților descompunerii. Sunt abordate, de asemenea, și alte tipuri de reprezentări timp-frecvență cum sunt cele oferite de descompunerile în baze de funcții trigonometrice locale (unde cosinusoidale și/sau sinusoidale locale), precum și cele de pachete de funcții trigonometrice locale.

Următorul capitol patru, dedicat compresiei de semnal prin transformări ortogonale, abordează cazul compresiei semnalelor în timp discret. Sunt analizate performanțele unor transformări clasice, cum sunt Transformarea Fourier Discretă (TFD), DCT sau DST în comparație cu cele ale unor transformări mai recente cum sunt cele bazate pe funcții Wavelet, funcții trigonometrice locale, pachete de funcții Wavelet și pachete de funcții trigonometrice locale. Sunt indicate proceduri rapide de calcul, algoritmi numerici eficienți, cum sunt FFT, DCT, DST, FWT (Transformarea Wavelet Rapidă, Fast Wavelet Transform), FWPT (Fast Wavelet Packet Transform), DLCT (Discrete Local Cosine Transform). Aceste performanțe sunt “evaluate” în contextul efectiv al unor sisteme de compresie. Sunt evidențiate o serie de beneficii obținabile, fiind indicate modalitățile efective în care anumite calități ale transformării vizate “ajută” în dimensionarea propriu-zisă atât a cuantizoarelor cât și blocului de codare de bit. În acest sens se indică, în ultimul paragraf al acestui capitol, o procedură de alocare de bit optimală utilizabilă în construcția sistemelor de compresie bazate pe transformări ortogonale.

Cel de al cincilea capitol are ca subiect sistemele de codare în subbenzi frecvențiale. Sunt prezentate proprietățile unor bănci de filtre cu reconstrucție perfectă într-un context de paralelism cu teoria Wavelet. Sunt indicate proceduri efective de construcție a unor bănci de filtre ce corespund unor descompuneri Wavelet în baze de funcții Wavelet cu anumite proprietăți impuse (de suport compact, regularitate, număr de momente nule etc.). Sunt abordate structuri de bănci de filtre cu căi

multiple uniforme și respectiv neuniforme. Se indică, de asemenea, o procedură de alocare de bit optimală utilizabilă în construcția sistemelor de compresie incluzând structuri de bănci de filtre cu reconstrucție exactă precum și cuantizoare dimensionate în mod adaptiv în funcție de caracteristicilor semnalelor din subbenzile frecvențiale.

Cel de al șaselea capitol, rezervat verificărilor și propunerilor practice ale autorului abordează o serie de sisteme de compresie universale și adaptive, utilizabile pentru compresia unor tipuri diferite de semnale. Se au în vedere sisteme de compresie de semnale monodimensionale. Sunt indicate implementări efective de sisteme de compresie, bazate pe funcții Wavelet, investigate cu ajutorul unor tipuri diferite de semnale test (de formă sinusoidală, dreptunghiulară și de tip "Chirp"). Sunt indicate câteva soluții practice pentru rezolvarea unor probleme tehnice cum sunt cele legate de efectele de margine datorate prelucrărilor pe blocuri de eşantioane de lungimi finite. Aceste propuneri au în vedere procedee ca cea de prelungire prin periodicitate, de oglindire a valorilor de la margine, de prelungire prin extrapolare polinomială precum și cel de prelucrare pe blocuri de date parțial suprapuse. Se prezintă proceduri adaptive de compresie prin metode Wavelet a unor semnale de o anumită regularitate. Se indică o soluție originală de sistem adaptiv care este capabil de a efectua o compresie bazată pe o segmentare adaptivă urmată de găsirea bazei de funcții Wavelet optimale pentru reprezentarea fiecărui segment. În acest sens este făcută și o demonstrație originală a autorului ce vizează optimalitatea unor funcții Wavelet cu suport compact în contextul prelucrării pe blocuri finite de eşantioane ale unor semnale cu o anumită regularitate (cu variație polinomială) pe porțiuni.

În ultimul capitol, cel de al șaptelea, sunt prezentate, structuri de sisteme de compresie de semnal audio folosind funcții Wavelet ortogonale. Experimentul este repetat apoi în contextul unor descompuneri în pachete de funcții Wavelet, aplicând proceduri adaptive de căutare a celei mai bune baze. Sunt indicate și soluții în care acest proces adaptiv de selecție a celei mai bune baze este ghidat de proprietățile psiho-acustice ale sistemului auditoriu uman (soluții apropiate de sistemul MPEG-Audio). Experimente de compresie a unor semnale test precum și semnale audio sunt efectuate și folosind descompuneri în baze de funcții trigonometrice locale precum și în baze de pachete de funcții trigonometrice locale. Sunt verificate și în acest caz eficacitatea tehnicilor de corecție utilizate în cazul aplicării funcțiilor Wavelet în vederea rezolvării unor probleme practice de sistem. Rezultatele sunt evaluate prin prisma performanțelor sistemelor obținute. Sunt avute în vedere măsuri de performanță cum sunt raportul de compresie, distorsiunea de reconstrucție, viteza de codare și/sau de decodare, rata de bit obținută, complexitatea sistemului.

Contribuții remarcabile ale autorului:

- propunerea de investigare a unor clase largi de reprezentări ale semnalului de prelucrat, prin descompunere în diferite baze de funcții (diferitele tipuri de baze timp-frecvență), metode ce realizează concentrarea unei cantități de informație cât mai mare pe un număr de coeficienți ai descompunerii cât mai redus astfel încât prin reținerea doar a acestor coeficienți să se obțină un factor de compresie mare fără a degrada în mod semnificativ calitatea semnalului reconstruit;

- studiul și evaluarea performanțelor, prin prisma raportului SQNR, a unor metode diferite de cuantizare adaptivă;

- studiul performanțelor unor reprezentări timp-frecvență liniare (baze de funcții trigonometrice locale, pachete de funcții trigonometrice locale, baze funcții Wavelet, pachete de funcții Wavelet), stabilirea unor legături esențiale dintre diferitele proprietăți (de localizare, număr de momente nule, de regularitate etc.) ale funcțiilor acestor baze de descompunere și cele corespunzătoare ale semnalului de analizat;

- punerea în evidență a echivalenței algoritmilor de transformare Wavelet ortogonală rapidă directă și inversă cu unele scheme de filtrare în subbenzi de tip PR bazate pe filtre QMF, propunând o clasificare a acestor bănci de filtre bazată pe anumite proprietăți ale funcțiilor Wavelet implicate. Astfel, este indicată o parametrizare posibilă a spațiului băncilor de filtre cu reconstrucție perfectă pe două căi construite cu filtre de tip FIR cu lungime finită $2M$, ce corespund unor sisteme Wavelet, folosind un număr de $M-1$ variabile unghiulare independente;

- indicarea modului de construcție a unor baze de funcții Wavelet precum și de funcții trigonometrice locale cu anumite proprietăți impuse;

- propunerea unor criterii de selecție pentru alegerea unor baze de funcții optimale, din punctul de vedere al compresiei, pornind de la o descompunere a semnalului de analizat în pachete de funcții Wavelet și respectiv în pachete de funcții trigonometrice locale;

- propunerea unor sisteme de compresie prin transformări ortogonale respectiv, sisteme bazate pe codarea în subbenzi frecvențiale a semnalului, optimale, a căror calitate de optimalitate este dată de dimensionarea optimală a blocurilor componente;

- propunerea utilizării criteriului erorii medii pătratice ca și măsură obiectivă de evaluare a aproximării de reconstrucție obținute în cazul diferitelor implementări;

- implementarea unor sisteme adaptive de compresie eficiente bazate pe descompuneri în baze de funcții Wavelet ortogonale și biortogonale, fiind abordate și o serie de probleme tehnice cum ar fi cele de margine, generate de prelucrarea pe blocuri de eșantioane de lungimi finite ale semnalului;

- enunțarea și demonstrarea propoziției 6.1 ce vizează eficientizarea procesului de compresie adaptivă a unor semnale cu un anumit grad de regularitate,

- implementarea unor sisteme adaptive de compresie Wavelet a unor semnale cu un anumit grad de regularitate ce efectuează și o segmentare adaptivă prealabilă în vederea asigurării optimalității sistemului;

- propunerea unor noi metode alternative de codare transparentă de semnal audio ce folosesc descompuneri ale semnalului în diferite tipuri de baze de funcții timp-frecvență;

- implementarea și investigarea performanțelor unor sisteme de compresie de semnal audio de înaltă calitate, bazate pe dezvoltarea semnalului în baze de funcții Wavelet, pachete de funcții Wavelet și pachete de funcții trigonometrice locale.

Caracteristicile principale ale implementărilor practice realizate de autor sunt:

a) Sistemul eficient de compresie Wavelet adaptivă ale unor semnale monodimensionale implementat, prezentat în §6.2.1, are caracteristicile:

- este scris în limbajul de programare C,
- prelucrează pe blocuri de $L=512$ eșantioane,
- permite specificarea explicită (din linie de comandă) sau selectarea automată adaptivă (în caz contrar) a funcției Wavelet dintr-o mulțime de nouă funcții Wavelet ale lui Daubechies,
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a raportului SQNR minim (implicit 20 dB).

Au fost prezentate propuneri ale autorului de îmbunătățire a performanțelor sistemului de mai sus prin atenuarea sau chiar eliminarea totală a efectului de margine. Aceasta se poate realiza prin:

- completarea cu zerouri sau cu valorile oglindite ale eșantioanelor marginale,
- prelungirea prin periodicitate a secvenței de eșantioane (de lungime finită),
- considerarea unor tipuri diferite de funcții fereaștră, de netezire a marginilor,
- prelucrarea pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse,
- combinarea a mai multor proceduri din cele mai sus menționate.

În acest sens autorul a evaluat lungimea minimă a suprapunerilor necesare eliminării complete a efectelor de margine în contextul utilizării unor funcții Wavelet de suport compact și, dacă se cunoaște numărul maxim de iterații în aplicarea algoritmului FWT. Evaluarea făcută a fost testată folosind un program de compresie Wavelet, realizat de autor, ce implementează acest mod de lucru pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse, măsura suprapunerilor fiind stabilită pe baza considerentelor mai sus amintite. De exemplu, în cazul $L=1024$, lungimea unui bloc de eșantioane, $J=3$ nivele ale descompunerii și lucrând cu funcția Wavelet DAU-5, $2N=10$ (lungimea filtrelor), rezultă necesitatea unei suprapunerii parțiale procentuale de $63/1024=6.15\%$.

b) Caracteristicile principale ale sistemului de compresie Wavelet adaptivă a unor semnale regulate, prezentat în §6.2.2, sunt:

- este elaborat în limbajul de programare C,
- semnalul de intrare este prelucrat pe blocuri de eșantioane de lungime variabilă, lungimi ce reprezintă subdiviziuni ale unei lungimi maxime de $L=2048$,
- realizează o estimare a gradului polinomului cel mai apropiat de semnalul sursă din blocul curent, prin aplicarea unui algoritm de interpolare polinomială. Criteriul de eroare folosit este cel al erorii absolute. Gradul polinomului ce este verificat este de maximum 9,
- realizează o segmentare adaptivă a semnalului de prelucrat în segmente de o anumită regularitate prin divizarea în două a fiecărui interval care nu a putut fi clasificat și prin reiterarea procedurii de verificare a regularității. Procedura este oprită dacă eroarea absolută curentă scade sub un anumit prag (5% din valoarea eșantionului de magnitudine maximă din blocul curent) sau se ajunge la o fragmentare excesivă a blocului (lungimea blocului curent ar scădea sub valoarea $L=64$),
- alege funcția Wavelet de lucru în mod adaptiv dintr-o mulțime de nouă funcții Wavelet ale lui Daubechies, în conformitate cu propoziția 6.1. demonstrată de către autor,
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a raportului SQNR minim (implicit 20 dB),
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a erorii procentuale maximă admisă în procedura de segmentare și verificare a regularității (implicit 5%).

c) Sistem de compresie Wavelet adaptivă a unor semnale audio de înaltă calitate, prezentat în §7.4.1, are următoarele caracteristicile principale:

- este elaborat în limbajul de programare C,
- semnalul de intrare este prelucrat pe blocuri de $L=4096$ de eșantioane,
- permite specificarea explicită (din linie de comandă) sau selectarea adaptivă (în caz contrar) a funcției Wavelet dintr-o mulțime de nouă funcții Wavelet ale lui Daubechies (DAU-2, ..., DAU-10),
- realizează o compandare (respectiv expandare) după o lege logaritmică a dinamicii semnalului audio de prelucrat înaintea transformării propriu-zise (respectiv reconstrucției finale a semnalului audio),
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a raportului SQNR minim (implicit 20 dB), iar sistemul se va adapta în mod automat la această valoare, realizând astfel o codare audio cu rată de bit variabilă,
- implementează o versiune modificată de codare Run-Lenght (RL), o procedură de tip poziție-valoare ce implică construirea unui vector de indexare a valorilor nenule din secvența de date. Pentru obținerea unei eficiențe mai mari procedura este reiterată (aplicată și vectorului de indexare date).

d) Sistem de compresie adaptivă prin dezvoltarea în pachete de funcții Wavelet a unor semnale audio de înaltă calitate. Caracteristicile principale ale acestui sistem, prezentat în §7.4.2, sunt:

- este implementat sub forma unor funcții rulabile sub mediul *Matlab*,
- citește datele de intrare dintr-un fișier în format standard “*wave*” ce conține semnal audio codat PCM pe 8 sau pe 16 biți,
- permite specificarea explicită (din linie de comandă) a funcției Wavelet utilizate, din mulțimea funcțiilor Wavelet ale lui Daubechies DAU-2, ..., DAU-20 (implicit DAU-20),
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a raportului SQNR minim (implicit 20 dB), iar sistemul se va adapta în mod automat la această valoare, realizând astfel o codare audio cu rată de bit variabilă,
- lucrează pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse; lungimea unui bloc este de $L=1024$ cu o suprapunere de 24 de eșantioane,
- descompunerea în pachete de funcții Wavelet este reiterată pe un număr de $J=3$ nivele,
- utilizează funcția cost “minimizarea numărului de coeficienți Wavelet cu modulul mai mare decât un anumit prag impus”,
- folosește cuantizoare uniforme cu 256 de nivele ce permite o precodare pe 8 biți a fiecărui eșantion,
- implementează o procedură de codare entropică bazată pe codare Run-Length urmată de o codare Lempel-Ziv a codurilor RL (o soluție originală).

Variante ale acestei implementări:

- o versiune ce descompune semnalul pe un număr de $J=5$ nivele,
- versiuni ce lucrează pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse, cu lungimea unui bloc de $L=2048$, cu o suprapunere de 48 de eșantioane și cu o descompunere de semnal pe un număr de $J=3$ sau $J=5$ nivele succesive.

e) Sistem de compresie adaptivă prin dezvoltarea în pachete de funcții trigonometrice locale a unor semnale audio de înaltă calitate. Caracteristicile principale ale acestui sistem, prezentat în §7.5, sunt:

- este implementat sub forma unor funcții rulabile sub mediul *Matlab*,
- citește datele de intrare dintr-un fișier în format standard “*wave*” ce conține semnal audio codat PCM pe 8 sau pe 16 biți,
- permite specificarea opțională (din linie de comandă) a raportului SQNR minim (implicit 20 dB), iar sistemul se va adapta în mod automat la această valoare, realizând astfel o codare audio cu rată de bit variabilă,
- lucrează pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse, lungimea unui bloc fiind de $L=1024$ cu o suprapunere de 24 de eșantioane,
- descompunerea în pachete de funcții trigonometrice locale este reiterată pe un număr de $J=3$ nivele,
- utilizează funcția cost “minimizarea numărului de coeficienți cu modulul mai mare decât un anumit prag impus”,
- implementează o procedură de codare entropică bazată pe codare Run-Length urmată de o codare Lempel-Ziv a codurilor RL.

Variante ale acestei implementări:

- o versiune ce descompune semnalul pe un număr de $J=5$ nivele,
- versiuni ce operează pe blocuri de eșantioane parțial suprapuse, cu lungimea unui bloc de $L=2048$, cu o suprapunere de 48 de eșantioane și cu o descompunere de semnal pe un număr de $J=3$ sau $J=5$ nivele succesive.

Bibliografie

- [Abr.94] P. Abry, P. Flandrin, “*On the Initialization of the Discrete Wavelet transform Algorithm*”, IEEE Trans. on Signal Processing Letters, vol. I, no. 2, Feb., 1994.
- [Ald.93] A. Aldroubi and M. Unser, “*Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties*”, Numer. Funct. Anal. Optim., 14:417-446, 1993.
- [Ald.98] A. Aldroubi, M. Vrethl, “*Projection based initialization for multiwavelet transform*”, IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 46, no. 7, pp. 3088-3092, 1998.
- [Ale92] C. d'Alessandro, C. Demars : “*Représentation temp-fréquence du signal de la parole*”, Traitement du signal, volume 9, no. 2, 1992;
- [Ali.95] M. Ali, “*Adaptive Signal Representation with Application in Audio Coding*”, PhD. Thesis, University of Minnesota, 1995.
- [Ali.96] M. Ali, K.N. Hamdy, A.H. Tewfik, “*High Quality Audio Coding Using Adaptive Signal Representation*”, ICASSP-96, Atlanta, GA. (<http://www.ee.umn.edu/users/khamdy/papers.html>).
- [Ans.91] R. Ansari, C. Guillemot, and J. F. Kaiser, “*Wavelet construction using lagrange halfband filters*”, IEEE Trans. Circuits Systems, 38(9):1116-1118, 1991.
- [Are.00] R. Arean, J. Kovacevic, V.K. Goyal, “*Multiple Description Perceptual Audio Coding with Correlating Transforms*”, IEEE Trans. on Speech & Audio Processing, vol. 8, no. 2, pp. 140-145, Mar. 2000.
- [Asz.94] T. Asztalos, A. Isar, “*An Adaptive Data Compression Method Based on the Fast Wavelet Transform*”, Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications "ETC' 94", vol. III, Timișoara, Septembrie 1994, pp.37-42.
- [Asz.96] T. Asztalos, “*An Algorithm for the DWT on Block Computation*”, Buletinul științific al UPT, TOM 41 (55) Electrotehnică, Electronică și Telecomunicații, vol. II, 1996, pp.128-133.
- [Asz.98] T. Asztalos, D. Isar, A. Isar, “*Data Adaptive Compression Using Wavelets*”, Buletinul științific al UPT, TOM 43 (57) Electrotehnică, Electronică și Telecomunicații, fascicula 2, 1998, vol. I., pp. 79-82.
- [Asz.99a] T. Asztalos, D. Isar, A. Isar, “*Time-Frequency filters*”, Proceedings of the International Conference on Signal Circuits and Systems, SCS'99, 5-7 iulie, 1999, Iasi, pp. 49-53.
- [Asz.99b] T. Asztalos, A. Isar, “*Wavelets and Audio Data Compression*”, Proceedings of International Conference on Signal Circuits and Systems SCS'99, 5-7 iulie, 1999, Iasi, pp. 199-203.
- [Asz.99c] T. Asztalos, D. Isar, A. Isar, “*Adaptive Capturing transient Signals using Wavelets*”, 8-th European Conference on Power Electronics and Applications, EpE'99, 7-9 septembrie, 1999, Lausanne, Elveția.

- [Asz.99d] T. Asztalos, D. Isar, A. Isar, “*Adaptive Sampling Rate obtained using Wavelets*”, 1999 International Workshop on Sampling Theory and Applications, SampTA’99, 11-14 august, 1999, Trondheim, Norvegia.
- [Asz.00a] T. Asztalos, A. Marina, A. Isar, “*A new algorithm for the estimation of the instantaneous frequency of a signal perturbed by noise*”, International Conference on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS-2000, June 19-23, 2000, Perpignan, France, pp. 20, (proceedings on CD).
- [Asz.00b] T. Asztalos, “*Metode eficiente de compresie a semnalelor audio*”, Raport de cercetare, Grant ANSTI nr. 153/2000, tema B36.
- [Aus.92] P. Auscher, G. Weiss, and V. Wickerhauser, “*Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets*”, In C. K. Chui, editor. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, CA, 1992., pages 237-256.
- [Bay.96] M. Bayram, R. G. Baraniuk, “*Multiple Window Time-Frequency Analysis*”, Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Paris, France, June 1996.
- [Ben.48] W.R. Bennett, “*Spectrum of quantized signals*”, Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 446-472, July, 1948.
- [Ben.93] J.J. Benedetto, A. Teolis, “*A Wavelet Auditory Model and Data Compression*”, Appl. and Comp. Harmonic Analysis I, 3-28,1993.
- [Ber.98] A.P. Bernard, “*Source-Channel Coding of Speech*”, Master Thesis, University of California, Los Angeles, USA, 1998.
- [Bey.91] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin, “*Fast wavelet transforms and numerical algorithms I*”, Comm. Pure Appl. Math., 44:141-183, 1991.
- [Blu.99a] T. Blu, M. Unser, “*Quantitative Fourier Analysis of Approximation Techniques: Part I- Interpolators and Projectors.*”, accepted for publication by IEEE Trans. on Signal Processing, March, 1999.
- [Blu.99b] T. Blu, M. Unser, “*Quantitative Fourier Analysis of Approximation Techniques: Part II- Wavelets*”, accepted for publication by IEEE Trans. on Signal Processing, March, 1999.
- [Boi.97] Z. Boikovic, C.I. Toma, V. Gui, R. VasIU, “*Advanced topics in Digital Image Compression*”, Editura Politehnica, Timișoara, 1997.
- [Bor.97] M. Borda, D. Isar, “*Whitening with Wavelets*”, Proceedings of ECCTD’97, Budapest, August, 1997.
- [Bou.94] M. Bourges-Sevenier, “*Réalisation d’une bibliothèque C de fonctions ondelettes*”, Rapport de recherche no. 2362, INRIA Rennes, septembre, 1994.

- [Bra.91a] K. Brandenburg, J. Herre, J.D. Johnstone, Y. Mathieux, E. Schroeder, “*ASPEC: Adaptive Spectral Perceptual Entropy Coding of high quality music signals*”, preprint no. 3011, 90th Audio Eng. Society Convention, Paris, 1991.
- [Bra.91b] H. Bray, K. McCormik, R.O. Wells, X. Zhou, “*Wavelet Variations on the Shannon Sampling Theorem*”, Technical Report, CML 91-09, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, 1991.
- [Bra.92] K. Brandenburg, G. Stoll, “*The ISO/MPEG Audio Codec: A Generic Standard for Coding of High Quality Digital Audio*”, preprint no. 3336, 92th Audio Eng. Society Convention, Vienna, 1992.
- [Che.94] D. Chen, “*Extended families of cardinal spline wavelets*”, Appl. Comput. Harmon. Anal., 1:194-208, 1994.
- [Che.95] S.S. Chen, D.L. Donoho, M.A. Saunders, “*Atomic Decomposition by Basis Pursuit*”, Technical Report no. 479, Stanford University, May, 1995.
- [Chr.93] O. Christensen : “*Frames and the Projection Method*”, Preprint, September, 1993;
- [Chu.91] C. K. Chui and J. Z. Wang, “*A cardinal spline approach to wavelets*”, Proc. Amer. Math. Soc., 113:785-793, 1991.
- [Chu.92a] C. K. Chui, “*An Introduction to Wavelets*”, Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [Chu.92b] C. K. Chui, editor, “*Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*”, Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [Chu.92c] C. K. Chui and J. Z. Wang, “*A general framework of compactly supported splines and wavelets*”, J. Approx. Theory, 71(3):263-304, 1992.
- [Coh.90] A. Cohen, “*Ondelettes, analyses multiresolutions et filtres miroirs en quadrature*”, Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire, 7(5):439-459, 1990.
- [Coh.92a] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau, “*Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets*”, Comm. Pure Appl. Math., 45:485-560, 1992.
- [Coh.92b] A. Cohen, “*Ondelettes et traitement numerique du signal*”, Masson, Paris, 1992;
- [Coh.93] L. Cohen, “*The Scale Representation*”, IEEE Trans. Signal Process., 41(12): 3275-3293, 1993.
- [Coh.98] I. Cohen, “*Shift-Invariant Adaptive Wavelet Decompositions and Applications*”, PhD. Thesis, Israel Institute of Technology, Haifa, May, 1998.
- [Coi.89] R. R. Coifman et Yves Meyer, “*Nouvelles bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ ayant la structure du système de Walsh*”, preprint, Yale University, 1989.
- [Coi.90] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser, “*Best-adapted wavelet packet bases*”, preprint, Yale University, February, 1990.

- [Coi.91] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser, “*Remarques sur l'analyse de fourier à fenêtre*”, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I 312 (1991), 259--261.
- [Coi.92a] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser, “*Entropy-based algorithms for best basis selection*”, IEEE Trans. Inform. Theory 38 (1992), no. 2, 713-718.
- [Coi.92b] R. R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, and M. V. Wickerhauser, “*Signal processing and compression with wave packets*”, In Y. Meyer, editor, Proceedings of the International Conference on Wavelets, Marseille, 1989. Masson, Paris, 1992.
- [Com.89] J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors, “*Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space. Inverse problems and theoretical imaging*”, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Cri.65] R. Cristescu, “*Analiza funcțională*”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [Dau.88] I. Daubechies, “*Orthonormal bases of compactly supported wavelets*”, Comm. Pure Appl. Math., 41:909-996, 1988.
- [Dau.91] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.L. Journé, “*A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay*”, SIAM J. Math. Anal., 22:554-572, 1991.
- [Dau.92] I. Daubechies, “*Ten Lectures on Wavelets*”, CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [Dau.93] I. Daubechies, “*Orthonormal bases of compactly supported wavelets II: Variations on a theme*”, SIAM J. Math. Anal., 24(2):499-519, 1993.
- [Den.93] B. Deng, B. Jawerth, G. Peters, W. Sweldens, “*Wavelet probing for compression based segmentation*”, Proc. SPIE, San Diego, July, 1993.
- [Des.87] G. Deslauriers and S. Dubuc, “*Interpolation dyadique*”, In “*Fractals, dimensions non entieres et applications*”, pages 44-55, Masson, Paris, 1987.
- [Des.89] G. Deslauriers and S. Dubuc, “*Symmetric iterative interpolation processes*”, Constr. Approx., 5(1):49-68, 1989.
- [Don.92] D. L. Donoho, “*Interpolating wavelet transforms*”, Preprint, Department of Statistics, Stanford University, 1992.
- [Don.93] D. L. Donoho, “*Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data*”, Proceedings on Symp. Appl. Math. (I. Daubechies, ed.), AMS, Providence, RI, 1993, pp. 173-205.
- [Don.95a] David L. Donoho and Lain M. Johnstone, “*Ideal Denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases*”, preprint, Department of Statistics, Stanford University, 1995.
- [Don.95b] David L. Donoho, “*CART and Best-Ortho-Basis: A Connection*”, preprint, Department of Statistics, Stanford University, July, 1995.

- [Eva.93] G. Evangelista, “*Pitch-Synchronous Wavelet Representations of Speech and Music Signals*”, IEEE Trans. Signal Process., 41(12): 3313-3331, 1993.
- [Fei.96a] H.G. Feichtinger, P. Prinz, W. Kozek : “*Gabor Systems with good Time-Frequency Localization and Application to Image Processing*”, 1996 Proc. Conf. ICIP-96, Lausanne, 1996;
- [Fei.96b] H.G. Feichtinger, K. Grochenig : “*Gabor Frames and Time-Frequency Analysis of Distributions*”, Journal Funct. Anal., 1996;
- [Fla.93] P. Flandrin : “*Temps-fréquence*”, Ed. Hermes, Paris, 1993;
- [Ger.78] A. Gersho, “*Principles of Quantization*”, IEEE Trans. Circuit & Systems, vol. CAS-25, No.7, pp. 427-436, July, 1978.
- [Ger.94] A. Gersho, “*Advances in Speech and Audio Compression*”, Proc. IEEE, vol. 82, June, 1994, pp. 900-918.
- [Gir.95] M. Girardi and W. Sweldens, “*A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis for L_p on general measure spaces*”, Technical Report 1995:2, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1995. (ftp://ftp.math.sc.edu/pub/imi/95/imi95_2.ps).
- [Gop.92a] R.A. Gopinath, C.S. Burrus, “*Wavelet transforms and Filter Banks*”, In Charles K. Chui, editor, “*Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*”, pp. 603-654, Academic Press, San Diego, 1992, also Technical Report, CML 91-20, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, September, 1991.
- [Gop.92b] R.A. Gopinath, J.E. Odegard, C.S. Burrus, “*Optimal Wavelet Representation of Signals and the Wavelet Sampling Theorem*”, Technical Report, CML 92-05, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, April, 1992, also in IEEE Trans. on CAS II 41(4), April, 1994.
- [Gop.92c] R.A. Gopinath, C.S. Burrus, “*On Cosine Modulated Wavelet Orthonormal Bases*”, Technical Report, CML 92-06, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, March, 1992.
- [Gop.92d] R.A. Gopinath, C.S. Burrus, “*Theory of Modulated Filter Banks and Modulated Wavelet Tight Frames*”, Technical Report, CML 92-18, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, June, 1992.
- [Gop.93] R.A. Gopinath, “*Wavelets and Filter Banks-New Results and Applications*”, PhD thesis, Rice University, Houston, Texas, May, 1993.
- [Goy.96] V. K Goyal, J. Zhuang, M. Vetterli, and C. Chan, “*Transform Coding using Adaptive Bases and Quantization*”, Proc. IEEE Int. Conf. Image Proc.(Lausanne, Switzerland), Sept. 1996. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Papers/icip96.ps>).
- [Goy.97a] V. K Goyal and M. Vetterli, “*Computation-Distortion Characteristics of Block Transform Coding*”, Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc. 1997, vol. 4, pp. 2729-2732, April, 1997. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Papers/icassp97.ps>).

- [Goy.97b] V. K. Goyal and M. Vetterli, "*Computation-Distortion Characteristics of JPEG Encoding and Decoding*", Proc. 31st Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers, vol. 1, pp. 229-233, November, 1997. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Papers/asilomar97.ps>).
- [Goy.98a] V.K. Goyal, "*Beyond Traditional transform Coding*", PhD Thesis, Univ. California, Berkeley, 1998. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Thesis/>).
- [Goy.98b] Vivek K Goyal and Martin Vetterli "*Manipulating Rates, Complexity and Error-Resilience with Discrete Transforms*", Proc. 32nd Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers, 1998. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Papers/asilomar98.ps>).
- [Goy.00] Vivek K Goyal, "*High-Rate Transform Coding: How High is High, and Does it Matter?*", Proc. IEEE International Symposium on Information Theory 2000. (<http://cm.bell-labs/who/vivek/Papers/isit00.ps>).
- [Gra.98] R.M. Gray, D.L. Neuhoff, "*Quantization*", IEEE Trans. on Information Theory, vol. 44, No.6, October, 1998.
- [Gro.84] A. Grossmann and J. Morlet, "*Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*", SIAM J. Math. Anal., 15(4):723-736, 1984.
- [Ham.96] K.N. Hamdy, M. Ali, A.H. Tewfik, "*Low Bit Rate High Quality Audio Coding with Combined Harmonic and Wavelet Representations*", ICASSP-96, Atlanta, GA, pp. 1045-1048, (<http://www.ee.umn.edu/users/khamdy/papers.html>).
- [Ham.97] K.N. Hamdy, A.H. Tewfik, T. Chen, S. Takagi, "*Time-Scale Modification of Audio Signals With Combined Harmonic and Wavelet Representations*", ICASSP-97, Munich, Germany, (<http://www.ee.umn.edu/users/khamdy/papers.html>).
- [Hei.89] C. Heil, D.F. Walnut, "*Continuous and Discrete Wavelet Transforms*", SIAM Review, vol. 31, no. 4, pp. 628-666, dec.,1989.
- [Her.93] C. Herley and M. Vetterli, "*Wavelets and recursive Filter banks*", IEEE Trans. Signal Process., 41(8):2536-2556, 1993.
- [Her.93] C. Herley, J. Kovacevic, K. Ramchandran and M. Vetterli, "*Tilings of the Time-Frequency Plane: Construction of Arbitrary Orthogonal Bases and Fast Tiling Algorithms*", IEEE Trans. Signal Process., 41(12): 3341-3360, 1993.
- [Hla.89] F. Hlawatsch, W. Krattenthaler, "*A new Approach to Time-Frequency Signal Decomposition*", IEEE ISCAS-89, Portland, Oregon, May, 1989;
- [Hla.91] F. Hlawatsch, W. Kozek, "*Time-Frequency Analysis of Linear Signal Spaces*", IEEE ICASSP-91, Toronto, May, 1991;
- [Hla.92] F. Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels, "*Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations*", IEEE Signal Processing Magazine, April, 1992;

- [Isa.94] A. Isar, T. Asztalos, "Using the Fast Wavelet Transform for Data Compression", Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications "ETC 94", vol. III, Timișoara, Septembrie 1994, pp.31-36.
- [Isa.95a] D. Isar, T. Asztalos, A. Isar, "De-Noising with Wavelets", Proceedings of International Conference, "SCS' 95", Iași, Romania, November 1995, pp. 51-54.
- [Isa.95b] D. Isar, T. Asztalos, A. Isar, "The Enhancement of the Signal to Noise Ratio by Filtering in the Discrete Wavelet Transform Domain", Proceedings of the International Conference of the Romanian Military Academy, Bucharest, Romania, December 1995, pp.41-48.
- [Isa.97] D. Isar, "De-noising adaptatif", Seizieme Colloque GRETSI, Grenoble, 15-19 September, 1997, pp.1249-1252.
- [Isa.98] A. Isar, I. Naforniță, "Reprezentări timp-frecvență", Editura Politehnica, Timișoara, 1998.
- [Isa.99a] A. Isar, D. Isar, T. Asztalos, "Nonlinear Adaptive Filters and Wavelets: A Statistical Analysis", 6-th International Conference on Electronics, Circuits and Systems, ICECS'99, 5-8 septembrie, 1999, Paphos, Cipru;
- [Isa.99b] A. Isar, T. Asztalos, D. Isar, "Adaptive Non-linear Denoising using Wavelets", Proceedings of the IASTED International Conference, Power and Energy Systems, Nov. 8-10, 1999, Las Vegas, NV, USA.
- [Iso.92] ISO/MPEG, "Coding of moving pictures and associated audio for digital storage media up to about 1.5 Mbit/s", ISO/IECJTC1/SC29/WG11 11172-3, Draft. Int. Standard, 1992
- [Iso.94] ISO/MPEG, "Information Technology - Generic Coding of Moving Pictures and Associated Audio: Audio", ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 13818-3, International Standard, 1994.
- [Jan.88] A. J. E. M. Janssen, "The Zak transform: a signal transform for sampled time-continuous signals" Philips J. Res., 43:23-69, 1988.
- [Jan.92] A.J.E.M. Janssen : "The Zak Transform and some Counterexamples in Time-Frequency Analysis", IEEE Transactions on Information Theory, vol. 38, no. 1, January, 1992;
- [Jan.93] A. J. E. M. Janssen, "The Zak transform and sampling theorems for wavelet subspaces", IEEE Trans. Signal Process., 41(12): 3360-3365, 1993
- [Jay.93] N. Jayant, J. Johnstone, R. Safranek, "Signal Compression Based on Models of Human Perception", Proceedings of the IEEE, vol 81, No. 10, october, 1993.
- [Jaw.94] B. Jawerth and W. Sweldens, "An overview of wavelet based multiresolution analyses", SIAM Rev., 36(3):377-412, 1994.
- [Kai.94] G. Kaiser, "A friendly guide to wavelets", Birkhauser, Boston, 1994.
- [Kat.96] V. Katkovnik, "Local Polynomial Periodograms for Signals with the Time-Varying Frequency and Amplitude", Proc. of ICASSP'96, vol. III., pg. 1399-1403, 1996.

- [Kir.95] A. Kirac, P. P. Vaidyanathan, "*Dithering in lattice quantization*", Proceedings of the 29th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, Nov. 1995. (<http://www.ee.caltech.edu/dsp/students/kirac/asi95.ps>).
- [Kir.97a] A. Kirac, P. P. Vaidyanathan, "*FIR compaction filters: new design methods and properties*", Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, and Signal Proc., Munich, Germany, April 1997. (<http://www.ee.caltech.edu/dsp/students/kirac/icassp97.ps>).
- [Kir.97b] A. Kirac, P.P. Vaidyanathan, "*Analytical Method for 2-Channel Optimum FIR Orthonormal Filter Banks*", Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Hong Kong, pp. 2417-2420, June 1997. (<http://www.ee.caltech.edu/dsp/students/kirac/iscas97.ps>).
- [Kir.98a] A. Kirac, P.P. Vaidyanathan, "*Optimal Nonuniform Orthonormal Filter Banks for Subband Coding and Signal Representation*", ICIP-98, Proc. IEEE Int. Conf. Image Proc., Chicago, Oct. 1998. (<http://www.ee.caltech.edu/dsp/students/kirac/icip98.ps>).
- [Kir.98b] A. Kirac, P. P. Vaidyanathan, "*Theory and design of optimum FIR compaction filters*", IEEE Transactions on Signal Processing, Special Issue on Theory and Application of Filter Banks and Wavelet Transforms, vol. 46, pp. 903-919, April 1998, (<http://www.ee.caltech.edu/dsp/students/kirac/compact.ps>).
- [Kir.98c] A. Kirac, "*Optimal Orthonormal Subband Coding and Lattice Quantization with Vector Dithering*", PhD. Thesis, California Institute of Technology, California, July, 1998.
- [Koz.91] W. Kozek, F. Hlawatsch : "*Time-Frequency Filter Banks with Perfect Reconstruction*", IEEE ICASSP-91, Toronto, May, 1991;
- [Koz.96] W. Kozek, H. G. Feichtinger, J. Scharinger, "*Matched Multiwindow Methods for the Estimation and Filtering of Nonstationary Processes*", 1996, May ,Page 509-512 Proc. IEEE ISCAS-96, Atlanta (GA);
- [Lan.62] M. J. Landau, H. O. Pollak : "*Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - III : The Dimension of the Space of Essentially Time- and Band-Limited Signals*", The Bell System Technical Journal, July, 1962;
- [Law.91] W. M. Lawton, "*Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelets bases*", J. Math. Phys., 32(1):57-61, 1991.
- [Lem.91] P. G. Lemarie, "*Some remarks on wavelet theory and interpolation*", Technical Report 91-13, Mathematiques, Univ. Paris Sud, 1991.
- [Lem.98] D. Lemire, "*Schémas d'interpolation et ondelettes*", PhD thèse, Ecole Polytechnique de Montréal, mars, 1998.
- [Lew.94] R. M. Lewis, "*Cardinal interpolating multiresolutions*", J. Approx. Theory, 76:177-202, 1994.
- [Luo.95] J.F. Luo, B.G. Sherlock, "*High Quality Wavelet-Packet Based Audio Coder with Adaptive Quantization*", Preprint, 1995.

- [Mal.89a] S. G. Mallat, “*Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models*”, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 37(12):2091-2110, 1989.
- [Mal.89b] S. G. Mallat, “*Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* ”, Trans. Amer. Math. Soc., 315(1):69-87, 1989.
- [Mal.91a] S.G. Mallat, W.L. Hwang, “*Singularity Detection and Processing with Wavelets*”, Technical Report, New-York University, March, 1991.
- [Mal.91b] S.G. Mallat, “*Zero-crossings of a wavelet transform*”, IEEE Transaction on Information Theory, vol. 37, no. 4, July, 1991;
- [Mal.93] S.G. Mallat, Z. Zhang, “*Matching Pursuit with Time-Frequency Dictionaries*”, IEEE Trans. Signal Process., 41(12): 3397-3416, 1993.
- [Mat.01] Adelaida Mateescu, N. Dumitriu, L. Stanciu, “*Semnale și Sisteme. Aplicații în filtrarea semnalelor*”, Editura Teora, București, 2001.
- [Mey.90] Y. Meyer, “*Ondelettes et Operateurs, I: Ondelettes, II: Operateurs de Calderon-Zygmund, III: (with R. Coifman), Operateurs multilineaires*”, Hermann, Paris, 1990. English translation of first volume, Wavelets and Operators, is published by Cambridge University Press, 1993.
- [Mey.93] Y. Meyer, “*Wavelets: Algorithms and Applications*”, SIAM, Philadelphia, PA, 1993, Translated and revised by R. D. Ryan.
- [Mon.97] D. M. Monro, G.J. Dickson, “*Zerotree Coding of DCT Coefficients*”, Proceedings of IEEE ICIP-97, 1997.
- [Mor.95] N. Moreau, “*Techniques de compression des signaux*”, Ed. Masson, Paris, 1995.
- [Mur.98] A.T. Murgan, “*Principiile Teoriei Informației in Ingineria Informației și a Comunicațiilor*”, Editura Academiei Române, București, 1998.
- [Naf.95] Nafoaniță Ioan și colectivul, “*O introducere în teoria reprezentărilor timp-frecvență*”, raport tehnic nr. 1, Grant CNCSU nr. 885, 15 iulie, 1995.
- [Naf.96a] Nafoaniță Ioan și colectivul, “*Studiul reprezentărilor timp-frecvență și timp-factor de scală ale semnalelor mono și bidimensionale, cu aplicații în elaborarea unor algoritmi de analiză multirezoluție*”, raport de cercetare, contract CNCSU nr.5004 tema 323, 1996.
- [Naf.96b] Mohammed Nafie, Murtaza Ali, Ahmed Tewfik, “*Optimal Subset Selection for Adaptive Signal Representation*”, 1996 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Sig. Proc., May 7-10, Atlanta, GA. (<http://www.ee.umn.edu/users/mnafie/papers.html>).
- [Nie.96] N. Hess-Nielsen, M. V. Wickerhauser, “*Wavelets and Time-Frequency Analysis*”, Proceedings of the IEEE, vol. 84, no. 4, April, 1996;
- [Ode.91] J.E. Odegard, R.A. Gopinath, C.S. Burrus, “*Optimal Wavelets for Signal Decomposition and the Existence of Scale-limited Signals*”, Proc. ICASSP-92, vol IV:597-600, San Francisco, March, 1992 also Technical Report CML 91-07, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, 1991.

- [Pan.93] D.Y. Pan, “*Digital Audio Compression*”, Digital Technical Journal, vol. 5, No. 2, Spring, 1993.
- [Pas.99] M. Pasquier, P. Goncalves, R. G. Baraniuk, “*Hybrid Linear / Bilinear Time-Scale Analysis*”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 1, pp. 254-259, January 1999.
- [Phi.99] P. Philippe, F. Moreau de Saint-Martin, M. Lever, “*Wavelet Packet Filterbanks for Low Time Delay Audio Coding*”, IEEE Trans. on Speech and Audio Proc., vol. 7, No. 3, May, 1999, pp. 310-322.
- [Pre.93] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, “*Numerical Recipes*”, Cambridge University Press, 2nd edition, 1993.
- [Ram.96] K. Ramchaudran, M. Vetterli, C. Herley : “*Wavelets, Subband Coding, Best Bases*”, Proc. of the IEEE, vol. 84, no. 4, April, 1996;
- [Rio.91] O. Rioul and M. Vetterli, “*Wavelets and signal processing*”, IEEE Signal Proc. Mag., pages 14-38, October 1991.
- [Rio.92] O. Rioul and P. Duhamel, “*Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms*”, IEEE Trans. Inform. Theory, 38(2):569-586, 1992.
- [Rio.93a] O. Rioul, “*Ondelettes régulières : Application a la compression d’images fixes*”, thèse de doctorat, mars, 1993.
- [Rio.93b] O. Rioul, “*Regular Wavelets: A Discrete Time Approach*”, IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3572-3579, 1993
- [Sai.93] N. Saito and G. Beylkin, “*Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets*”, IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3584-3590, 1993.
- [Say.96] A. M. Sayeed, D. L. Jones, “*Generalized Joint Signal Representations and Optimum Detection*”, Proceedings IEEE ICASSP-96, Atlanta, 1996;
- [Sch.98] E.D. Scheirer, “*The MPEG-4 Structured Audio Standard*”, Proceedings IEEE ICASSP-98, 1998.
- [Sch.69] I. J. Schoenberg, “*Cardinal interpolation and spline functions*”, J. Approx. Theory, 2:167-627, 1969.
- [Sel.97] I.W. Selesnik, “*Maple and the Parametrization of Orthogonal Wavelet Bases*”, Preprint, Polytechnic University Brooklyn, NY, October, 1997.
- [Sel.98a] I.W. Selesnik, “*Cardinal Multiwavelet Bases and the Sampling Theorem*”, Preprint, Polytechnic University Brooklyn, NY, May, 1998.
- [Sel.98b] I.W. Selesnik, “*Interpolating Multiwavelet Bases and the Sampling Theorem*”, Preprint, Polytechnic University Brooklyn, NY, November, 1998.

- [Sha.49] C.E. Shannon, "*A mathematical theory of communication*", University of Illinois Press, 1949.
- [Sha.93] J.M. Shapiro, "*Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients*", IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3445-3463, 1993
- [She.96] J. Shen, G. Strang, "*The Zeros of the Daubechies Polynomials*", Proc. Amer. Math. Soc., 1996.
- [She.92] M. J. Shensa, "*Wedding the \hat{A} Trous and Mallat Algorithms*", IEEE Trans. Signal Process., 40(10):2464-2482, 1992.
- [She.98] B. G. Sherlock, D.M. Monro, "*The Space of Orthonormal Wavelets*", IEEE Trans. Signal Process., 46(6):1716-1720, 1998.
- [Sin.93] D. Sinha, A.H. Tewfik, "*Low Bit Rate Transparent Audio Compression Using Adapted Wavelets*", IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3463-3480, 1993.
- [Spă.65] Al. Spătaru, "*Teoria Transmisiunii Informației. Semnale și perturbații*", Editura Tehnică, București, 1965.
- [Spă.71] Al. Spătaru, "*Teoria Transmisiunii Informației. Coduri și decizii statistice*", Editura Tehnică, București, 1971.
- [Sri.96] P. Srinivasan, L.H. Jamieson, "*Techniques for Variable Rate Speech Coding using Wavelet Representations*", Proceedings of Int. Conf. TFTS'96, pp.109-112, Paris,1996.
- [Sto.88] R. Stoian, "*Compresie de date. Algoritmi de predicție*", Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1988.
- [Str.89] G. Strang, "*Wavelets and dilation equations: A brief introduction*", SIAM Rev., 31(4):614-627, 1989.
- [Str.94] G. Strang, V. Strela, "*Orthogonal Multiwavelets with Vanishing Moments*", Journ. Optical Eng. 33:2104-2107, 1994.
- [Str.96a] G. Strang, "*Eigenvalues of $(\downarrow 2)H$ and convergence of the cascade algorithm*", IEEE Trans. on Signal Process. 44:233-238, 1996
- [Str96b] G. Strang, "*Creating and Comparing Wavelets*", Numerical Analysis: A. R. Mitchell Birthday Volume, G. A. Watson and D. F. Griffiths, eds., World Scientific,1996.
- [Str.97] G. Strang, "*The Search for a Good Basis*", preprint, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [Swa.98] M.D. Swanson, B. Zhu, A.H. Tewfik, L. Boney, "*Robust audio watermarking using perceptual masking*", Signal Processing 66(1988): 337-355.
- [Swe.93] W. Sweldens, R. Piessen, "*Wavelet Sampling Techniques*", proc. Of the Joint Statistical Computing Section, San Francisco, august, 1993, pp. 20-29.

- [Swe.94a] W. Sweldens, “*Construction and Applications of Wavelets in Numerical Analysis*”, PhD thesis, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1994. (<http://www.cs.att.com/math/people/wim/thesis/>).
- [Swe.94b] W. Sweldens and R. Piessens, “*Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions*”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4):1240-1264, 1994.
- [Swe.95a] W. Sweldens, “*The lifting scheme: A construction of second generation wavelets*”, Technical Report 1995:6, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1995. (ftp://ftp.math.sc.edu/pub/imi_95/imi95_6.ps).
- [Swe.95b] W. Sweldens, “*The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions*”, In A. F. Laine and M. Unser, editors, “*Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*”, pages 68-79. *Proc. SPIE* 2569, 1995.
- [Swe.95c] W. Sweldens and P. Schroder, “*Building your own wavelets at home*”, Technical Report 1995:5, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1995. (ftp://ftp.math.sc.edu/pub/imi_95/imi95_5.ps).
- [Tas.94] C. Taswell, “*Top-Down and Bottom-Up Tree Search Algorithms for Selecting Bases in Wavelet Packet Transforms*”, pp. 345-359 in *Wavelets and Statistics (Proceedings of the Villard de Lans Conference November 1994)*, *Lecture Notes in Statistics* Vol. 103, edited by Antoniadis A. and Oppenheim G., Springer Verlag, 1995.
- [Tas.95a] C. Taswell, “*Satisficing Search Algorithms for Selecting Near-Best Bases in Adaptive Tree-Structured Wavelet Transform*”, Technical Report, SC-CM 95-08, June 1995, Scientific Computing and Computational Mathematics, Stanford University, Stanford CA; revision published in *IEEE Transactions on Signal Processing*, October 1996, Vol 44 No 10, pp. 2423-2438.
- [Tas.95b] C. Taswell, “*Algorithms for the generation of Daubechies orthogonal least asymmetric wavelets and the computation of their Holder regularity*”, Technical Report, Scientific Computing and Computational Mathematics, Stanford University, Stanford, CA, August, 1995.
- [Tas.96] C. Taswell, “*Speech Compression with Cosine and Wavelet Packet Near-Best Bases*”, *Proceedings ICASSP '96*, Atlanta May 1996, pp. 566-568.
- [Tas.97a] C. Taswell, “*The systematized collection of Wavelet Filters Computable by Spectral Factorization of the Daubechies Polynomial*”, *Computational Toolsmiths*, www.toolsmiths.com, August, 1997.
- [Tas.97b] C. Taswell, “*Computational Algorithms for Daubechies Least-Asymmetric, Symmetric, and Most-Symmetric Wavelets*”, *Proceedings ICSPAT'97*, San Diego, September 1997, pp.1834-1838.
- [Tas.98a] C. Taswell, “*The systematized collection of Daubechies wavelets*”, *Tech. Rep. CT-1998-08*, *Computational Toolsmiths*, www.toolsmiths.com, June, 1998.

- [Tas.98b] C. Taswell, "*A Spectral-Factorization Combinatorial-Search Algorithm Unifying the Systematized Collection of Daubechies Wavelets*", Proceedings of IAAMSAD International Conference on Systems, Signals, Control and Computers, Sept., 1998, pp.76-80.
- [Tia.95] J. Tian, R.O. Wells, "*Vanishing Moments and Wavelet Approximation*", Technical Report, CML 95-01, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, 1995.
- [Tia.96] J. Tian, R.O. Wells, "*A Remark on Vanishing Moments*", Proceedings of the 30th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, A. Singh, Editor, 983-987, IEEE Computer Society Press, Pacific Grove, CA, 1996.
- [Tia.97] J. Tian, R.O. Wells, J.E. Odegard, C.S. Burrus, "*Coifman Wavelet Systems: Approximation, Smoothness, and Computational Algorithms*", in Computational Science for the 21st Century, M-O. Bristeau, G. Etgen, W. Fitzgibbon, J.L. Lions, J. Periaux, M.F. Wheeler, Editors, 831-840, Tours, France, 1997.
- [Tol.94] L. M. G. M. Tolhuizen, I. A. Shah, and A. A. C. M. Kalkar, "*On constructing regular filter banks from domain bounded polynomials*", IEEE Trans. Signal Process., 42(2):451-456, 1994.
- [Uns.93a] M. Unser, "*Efficient dyadic wavelet transformation of images using interpolating Filters*", In Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Minneapolis, volume 5, pages 149-152, 1993.
- [Uns.93b] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "*A family of polynomial spline wavelet transforms*", Signal Process., 30:141-162,1993.
- [Uns.93c] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "*B-Spline Signal Processing: Part I-Theory, Part II- Efficient Design and Applications*", IEEE Trans. on Signal Process., vol. 41, no. 2, feb. 1993, pp. 821-848.
- [Uns.93d] M. Unser, "*On the optimality of ideal filters for pyramid and wavelet signal approximation*", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. SP-41, pp. 3591-3596
- [Uns.96] M. Unser, "*Vanishing moments and the approximation power of wavelet expansions*", Proc. IEEE Int. Conference on Image Processing, Lausanne, Switzerland, September 16-19, 1996, vol. I, pp. 629-632.
- [Uns.99] M. Unser, "*Splines: a perfect fit for signal and image processing*", IEEE Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, November 1999.
- [Vai.87] P. P. Vaidyanathan, "*Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror Filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property*", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 35(2):476-492, 1987.
- [Vai.88] P. P. Vaidyanathan and P.-Q. Hoang, "*Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-band perfect reconstruction QMF banks*", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 36:626-630, Jan. 1988.

- [Vai.89] P. P. Vaidyanathan, T. Q. Nguyen, Z. Doganata, and T. Saramaki, "*Improved technique for design of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase matrices*", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 37(7):1042-1055, 1989.
- [Vet.89] M. Vetterli and D. Le Gall, "*Perfect reconstruction FIR Filter banks: Some properties and factorizations*", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 37:1057-1071, 1989.
- [Vet.92] M. Vetterli and C. Herley, "*Wavelets and Filter banks: theory and design*", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 40(9):2207-2232, 1992.
- [Vet.95] M. Vetterli and J. Kovačević, "*Wavelets and Subband Coding*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [Wal.92] G. G. Walter, "*A sampling theorem for wavelet subspaces*", IEEE Trans. Inform. Theory, 38:881-884, 1992.
- [Wal.95] Axel van de Wale, "*Relating Fractal Image Compression to Transform Methods*", PhD thesis, Waterloo, Ontario, CA, 1995.
- [Wei.95] D. Wei, C.S. Burrus, "*Optimal Wavelet Thresholding for Various Coding Scheme*", Technical Report, CML 95-13, Computational Mathematics Laboratory, Rice University, Houston, 1995.
- [Wen.86] E. Wentzel, L. Ovcharov, "*Applied problems in Probability Theory*", Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [Wes.93a] E. Wesfreid, M. V. Wickerhauser, "*Adapted Local Trigonometric Transforms and Speech Processing*", IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3596-3601, 1993.
- [Wes.93b] E. Wesfreid, M. V. Wickerhauser, "*Un algorithme adaptatif de transformée en ondelettes de Malvar pour l'étude des signaux*", Quatorzième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, 13-16 Septembre, 1993, pp. 379-383.
- [Wes.95] E. Wesfreid, "*Segmentation de signaux sonar par ondelettes de Malvar*", Quinzième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, September, 1995;
- [Wic.89] M. V. Wickerhauser, "*Acoustic Signal Compression with Wavelet Packets*", preprint, Yale University, August, 1989.
- [Wic.91] M. V. Wickerhauser. "*INRIA Lectures on wavelet packets algorithms*", INRIA, Roquencourt, France, 1991.
- [Wic.93] M. V. Wickerhauser, "*Best-adapted Wavelet Packet Bases*", Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 47, 1993;
- [Wic.94] M. V. Wickerhauser, "*Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*", A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1994.
- [Wic.97] M. V. Wickerhauser, "*Wavelet Theory and Applications*", Technical Report, Washington University, April, 1997.

- [Wid.56] B. Widrow, "*A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theorem*", IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-3, pp. 266-276, 1956.
- [Wie.90] D. Wiese, G. Stoll, "*Bitrate Reduction of High Quality Audio Signals by Modelling the Ear's Masking Thresholds*", preprint no. 2970, 89th Audio Eng. Society Convention, Los Angeles, 1990.
- [Xia.93] X. Xia, Z. Zhang, "*On Sampling Theorem, Wavelets, and Wavelet Transforms*", IEEE Trans. Signal Process., 41(12):3524-3536, 1993
- [Zar.99] C. J. Zarowski, "*Wavelet Packet Transform Initialization for Piecewise Polynomial and Bandlimited Inputs*", IEEE Trans. Signal Process., 47(1):224-226, 1999.