

TEZĂ DE DOCTORAT

**CONTRIBUȚII LA MODELAREA ARCULUI ELECTRIC ȘI A
CÂMPULUI TERMIC LA PROCEDEELE DE SUDARE PRIN TOPIRE ÎN
MEDII DE GAZE PROTECTOARE**

**Conducător științific
Prof.dr.doc.d.hc.ing. AUREL NANU**

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

**Candidat
ing. TĂTUCU IANCU**

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ
Nr. volum <u>631.907</u>
Dulap <u>369</u> <u>B</u>

CUVÂNT ÎNAINTE

Sudarea prin topire cu arcul electric, în mediu de gaz protector, MIG/MAG, este larg răspândită în practică. Însă, literatura de specialitate din țară și străinătate, la care am avut acces, nu cuprinde lucrări care să studieze toate procesele ce au loc în cursul unei astfel de operații de sudare, privite ca un singur tot, și, mai ales, interacțiunile dintre ele. De asemenea, nici una dintre lucrările consultate nu prezintă un model matematic complet al proceselor respective. Totodată, în ceea ce privește simularea proceselor de sudare, se au în vedere doar componentele ce se îmbină, iar arcul electric este caracterizat doar prin densitatea de volum a căldurii generată în unitatea de timp. Nu se analizează posibilitatea ce o oferă simularea pentru optimizarea proceselor de sudare cu arc electric.

Prezenta lucrare își propune să fie o contribuție la modelarea și simularea proceselor de sudare cu arc electric în mediu de gaz protector și vizează rezolvarea aspectelor menționate mai sus.

Astfel, deoarece calitatea unei îmbinări sudate depinde de curentul de sudare și de tensiunea arcului electric, un prim obiectiv al lucrării constă în măsurarea celor doi parametri tehnologici. Însă, chiar și în cazul sudării în curent continuu, datorită transferului de metal lichid prin coloana arcului electric, cei doi parametri sunt variabili în timp, cu viteză de variație relativ ridicată. Din acest motiv, măsurarea lor revine la înregistrarea variației în timp, pentru care se folosește un instrument de tip înregistrator. Între arcul electric și bornele de intrare ale înregistratorului se intercalează un șunt sau un divizor de tensiune, ce trebuie proiectat astfel încât să aibă o calitate cât mai bună în regim dinamic. Stabilirea condițiilor ce trebuie îndeplinite pentru a satisface această cerință, a relațiilor de proiectare precum și forma constructivă, formează primele chestiuni pe care le rezolvă lucrarea.

Stabilirea unui model matematic complet pentru arcul electric constituie al doilea obiectiv al lucrării. În acest scop, spre deosebire de lucrările de specialitate, arcul electric nu va fi privit doar ca un sistem termic, ci ca unul în care se produc simultan procese electromagnetice și termice. Aceasta duce la concluzia că modelul matematic al arcului electric este același cu cel al câmpului electromagnetic. Se urmărește și obținerea unui model al arcului electric ca element de circuit electric.

Lucrarea își propune ca scop și stabilirea unui model matematic complet, care să

permiță simularea tuturor proceselor ce se produc în cursul sudării, cu o precizie cât mai mare. Pe lângă aceasta, se urmărește ca, pe baza modelului matematic, să se poată studia curgerea gazului de protecție, chiar și în regim turbulent, cu scopul de a determina coeficientul de schimb de căldură prin convecție dintre arcul electric și gazul de protecție.

Pentru rezolvarea modelelor matematice stabilite, se utilizează metoda elementelor finite. În acest scop, mai întâi, se prezintă fundamentarea matematică a metodei.

De asemenea, deducerea modelului numeric elemental, pentru fiecare model matematic, este un alt obiectiv vizat. Se urmărește ca relațiile respective să fie explicite, și să poată fi implementate pe un calculator electronic, cu orice limbaj de programare. Se vor stabili și operațiile ce trebuie efectuate pentru asamblarea modelelor numerice elementale într-un singur model numeric global.

Aplicarea metodei elementelor finite, pentru o îmbinare sudată în mediu de gaz protector și verificarea experimentală a rezultatelor, este ultimul obiectiv al lucrării. În acest scop, mai întâi, se va stabili succesiunea operațiilor ce trebuie efectuate pentru aplicarea metodei.

Pentru a putea folosi metoda elementelor finite, trebuie să se cunoască permeabilitatea magnetică relativă, rezistivitatea electrică, conductivitatea termică, căldura specifică și densitatea, pentru fiecare zonă a domeniului considerat. Unele dintre acestea se obțin din literatura de specialitate, iar altele se determină experimental. Se desemnează ca analiză aplicarea metodei elementelor finite pentru un anumit proces. Având în vedere că proprietățile de material, necesare pentru a studia un proces, sunt influențate de un altul, se impune simularea simultană a tuturor proceselor, ce se realizează cu ajutorul unei analize cuplate. Implementarea pe un calculator electronic a unor astfel de analize este o altă chestiune ce se rezolvă în lucrare.

Distribuția densității de curent și a puterii calorice specifice din toate porțiunile domeniului formează primele rezultate ale aplicării metodei. De asemenea, metoda trebuie să conducă la obținerea câmpului termic din componente. În continuare, printr-un proces de optimizare, trebuie să se poată determina căldura necesară a fi schimbată cu exteriorul pentru ca timpul de răcire de la 800 la 500 °C să aibă o valoare impusă. În mod similar, să se poată determina curentul de sudare, astfel încât adâncimea de pătrundere la o singură trecere să aibă o valoare prestabilită.

Analiza magnetică are ca scop determinarea forțelor ce acționează asupra arcului electric, iar pe baza acestora să se poată stabili valoarea curentului de sudare, încât să se

obțină un anumit mod de transfer.

Verificarea experimentală a rezultatelor se face prin compararea valorilor temperaturii, din anumite puncte ale componentelor, obținute prin aplicarea metodei cu cele măsurate cu ajutorul unor termocuple.

În încheiere, doresc să aduc mulțumiri, și să-mi exprim profunda recunoștință pentru sprijinul deosebit pe care l-am avut din partea conducătorului științific, domnul prof.doc.d.hc.ing. Aurel Nanu, la toate activitățile ce le-am desfășurat în vederea obținerii titlului științific de doctor.

Mulțumesc colectivului catedrei de Tehnologia materialelor a Facultății de mecanică din Timișoara, pentru sugestiile oferite în vederea elaborării referatelor, și pentru răbdarea de a-mi asculta expunerile.

Aduc mulțumiri conducerii Universității "Eftimie Murgu" din Reșița, domnului rector, prof.dr.ing. I. Vela, și domnului decan, prof.dr.ing. O. Crivacucea pentru sprijinul acordat în redactarea lucrării.

AUTORUL

CUPRINS

Cap.1.Conceperea și proiectarea unor dispozitive și aparate	
pentru măsurarea parametrilor arcului electric	1
1.1.Înregistrarea variațiilor în timp pentru parametrii arcului electric	1
1.2.Indicatori de calitate pentru traductoare în regim dinamic	4
1.2.1.Considerații generale.....	4
1.2.2.Funcția de transfer.....	5
1.2.3.Răspunsul indicial. Timp de răspuns	7
1.2.4.Răspunsul în frecvență. Caracteristica de frecvență	10
1.3.Șunturi pentru regim dinamic.....	12
1.3.1.Timpul de răspuns al buclei de măsurare	12
1.3.2.Șuntul bifilar	17
1.3.3.Șuntul coaxial	20
1.4.Divizoare de tensiune.....	24
1.4.1.Divizor de tensiune rezistiv	25
1.4.2.Divizor de tensiune mixt	26
1.5.Metodă și aparat pentru măsurarea diferenței pantelor curentului de sudare	30
1.5.1.Principiul metodei. Schema electrică bloc a aparatului	30
1.5.2.Implementarea și proiectarea aparatului	33
1.5.3.Testarea aparatului	36
Cap.2.Model microscopic al arcului electric	39
2.1.Densitățile curenților electrici din coloana arcului electric	39
2.2.Ecuatii de continuitate.....	42
2.3.Ecuatii de conservare	44
Cap.3.Modelele macroscopice ale arcului electric	46
3.1.Scopul modelării arcului electric.....	46
3.2.Modelul legilor teoriei macroscopice a electromagnetismului	47
3.2.1.Ecuatiile modelului	47
3.2.2.Condiții de interfață (de trecere) și de limită.....	53

3.3.Modelul potențialelor electromagnetice	57
3.3.1.Ecuțiile modelului	57
3.3.2.Condiții de interfață (de trecere) și de limită.....	62
3.4.Modelul arcului electric ca element de circuit electric.....	67
3.4.1.Considerații generale.....	67
3.4.2.Ecuțiile modelului	68
3.4.3.Integrarea ecuațiilor și interpretarea rezultatelor.....	70
Cap.4.Modelarea câmpului termic	76
4.1.Vectorul densitate de flux termic. Legile transferului de căldură.....	76
4.2.Ecuțiile modelului.....	80
4.2.1.Considerații generale.....	80
4.2.2.Ecuția conservării energiei (ecuația energiei).....	81
4.2.3.Ecuția conservării masei (ecuația de continuitate).....	86
4.2.4.Ecuțiile mișcării	88
4.2.5.Ecuția radiației termice.....	91
4.3.Condiții inițiale și de frontieră.....	92
4.4.Ecuțiile modelului pentru domeniul considerat.....	93
Cap.5.Modelarea câmpului electromagnetic și a câmpului termic cu metoda elementelor finite, asistată de calculatorul electronic	100
5.1.Considerații generale asupra metodelor numerice de rezolvare a modelelor matematice	100
5.2.Metoda elementelor finite	108
5.3.Implementarea condițiilor de frontieră	126
5.4.Alegerea funcțiilor de formă. Utilizarea elementelor finite parametriche.....	129
5.5.Stabilirea modelelor numerice elementale pentru câmpul electromagnetic și pentru câmpul termic	147
Cap.6.Modelarea câmpului electromagnetic și a câmpului termic la o îmbinare sudată	165
6.1.Metodica de lucru	165
6.2.Definirea modelului geometric.....	167
6.3.Stabilirea proprietăților de material.....	168

6.3.1. Proprietățile de material pentru componente.....	169
6.3.2. Proprietățile de material pentru aer.....	169
6.3.2. Proprietățile de material pentru bioxidul de carbon	170
6.3.2. Proprietățile de material pentru arcul electric	170
6.4. Analiza conducției electrice	172
6.5. Analiza curgerii gazului de protecție.....	178
6.6. Analize termice.....	184
6.7. Analiza magnetică.....	195
6.8. Verificări experimentale	196
Cap.7. Concluzii. Contribuții personale.....	197
7.1. Concluzii	197
7.2. Contribuții personale.....	198
7.2.1. Contribuții teoretice	198
7.2.2. Contribuții experimentale și practice.....	200
Bibliografie	202

Cap.1. CONCEPEREA ȘI PROIECTAREA UNOR DISPOZITIVE ȘI APARATE PENTRU MĂSURAREA PARAMETRILOR ARCULUI ELECTRIC

1.1. Înregistrarea variațiilor în timp pentru parametrii arcului electric

Pentru a stabili un anumit regim de sudare trebuie să se impună parametrii tehnologici de funcționare ai arcului electric, care sunt:

- curentul de sudare, notat cu i_s , prin care se înțelege intensitatea curentului electric prin arcul electric;
- tensiunea arcului electric, u_a , definită ca fiind căderea de tensiune electrică pe arcul electric;
- viteza de sudare, v_s , care este viteza cu care se deplasează arcul electric în lungul cusăturii;
- energia liniară, E_l , definită prin energia pe unitate de lungime a cusăturii, preluată de la sursa de alimentare;
- lungimea arcului electric, L_a , definită ca distanța de la vârful electrodului până la baia de sudare;
- natura și polaritatea cu care se livrează energia electrică în arc, ce poate fi: alternativă AC, continuă, cu polaritatea directă DC^+ și cu polaritate inversă DC^- .
- tensiunea de mers în gol U_0 definită ca tensiunea la bornele sursei de sudare când arcul electric nu arde.

Având în vedere tema prezentei lucrări, în cele ce urmează se ia în considerare numai curentul de sudare și tensiunea arcului electric.

Chiar și în cazul sudării în curent continuu, datorită transferului de metal lichid prin coloana arcului electric, cele două mărimi sunt variabile în timp, cu o viteză de variație mare. Ca urmare, cunoașterea lor revine la a determina dependența de timp a acestora, adică a funcțiilor $i_s(t)$, respectiv $u_a(t)$.

În acest scop sunt necesare aparate de măsură capabile să memoreze variațiile în timp ale acestor mărimi, și să le redea sub forma unor imagini statice, apte de a fi

analizate și interpretate de un operator uman sau de către echipamente de calcul și automatizare.

Metodele și aparatele utilizate în măsurările dinamice sunt diversificate în raport de modul și viteza de variație în timp ale mărimilor măsurate.

Astfel, mărimile periodice, dat fiind caracterul lor repetitiv pe intervale de timp bine determinate, pot fi mai ușor convertite într-o imagine statică, chiar și la frecvențe foarte mari, prin suprapunerea sincronizată în timp a variației lor din cursul unei perioade. Această particularitate permite ca măsurarea unei mărimi periodice să se poată face cu un osciloscop catodic.

Tabel 1.1

Denumirea aparatului	Caracteristici	Bandă de frecvență [Hz]	Precizia (eroarea tolerată) [%]	Principiul de funcționare
1) Osciloscopae				
1a) Osciloscop catodic de uz general		≤ 100 MHz max. 300 MHz	2...5 %	-afișarea pe ecranul unui tub catodic prin devierea unui fascicul de electroni - numai pentru semnale periodice
1b) Osciloscop cu eșantionare		18...20 GHz	5...10 %	-aceleași ca la punctul 1a, cu deosebire că afișează o singură valoare (eșantion) pe perioadă
1c) Osciloscop cu memorie		≤ 100 MHz	3...5 %	-aceleași ca la punctul 1a, folosind un tub special cu grilă de memorare -pentru orice tip de semnal
2) Înregistratoare grafice				
2a) cu acțiune directă - cu peniță pe hârtie obișnuită - cu inscripator termic sau electric pe hârtie specială - cu inscripator optic pe hârtie fotosensibilă		≤1...2 Hz ≤100 Hz ≤10 KHz	1...2,5	- afișarea deviației unui aparat magnetoelectric pe o diagramă cu linie continuă sau prin puncte
2b) cu compensare automată - tip Y-t - tip X-Y		≤1...2 Hz ≤10 Hz	0,25...0,5 0,1... 0,5	- afișarea deplasării unui servo motor inclus într-un sistem de urmărire, ce efectuează compensarea automată - înscriere pe o diagramă, similar ca la punctul 2.a
3) Înregistratoare magnetice				
3a) cu înregistrare directă		100 Hz...500kHz	5...10	- memorarea pe bandă magnetică, la fel ca înregistrările acustice - redarea sub formă de semnale electrice
3b) cu înregistrare prin modulație de frecvență		0...50 Hz	1	- aceleași ca la punctul 3a, dar prin conversia tensiune-frecvență a semnalului

Situația este mai complicată în cazul mărimilor neperiodice, tranzitorii și aleatoare, ale căror variații nerepetându-se, implică determinarea pe durate ce nu pot fi

prestabilite și care pot diferi de la o măsurătoare la alta. Aparatele destinate măsurării unor astfel de mărimi comportă în mod necesar elemente de memorare, care pot realiza concomitent și operația de redare sau aceasta se poate face cu ajutorul unor elemente distincte, într-o etapă ulterioară procesului de măsurare și de memorare. Ele fac parte categoria aparatelor înregistratoare, caracterizate prin faptul că memorarea și redarea se face prin transpunerea variației în timp a mărimii de măsurat pe un suport, ce poate fi hârtie obișnuită, sau hârtie sensibilă la radiația luminoasă, pe care înscrierea sa face prin impresionarea hârtiei.

Prin cuplarea cu un aparat de fotografiat sau de filmat, cu funcționare sincronă, apare posibilitatea folosirii osciloscopelor catodice, pentru măsurarea mărimilor neperiodice, rapid variabile.

În vederea obținerii unor performanțe superioare, pentru măsurarea unor mărimi cu viteze de variație în timp ridicată, se folosește înregistrarea pe bandă magnetică sau pe CD-uri.

În cazul unor mărimi neperiodice de bandă largă și care necesită durate foarte mici de înregistrare, se folosește osciloscopul catodic cu memorare, a cărui funcționare nu mai implică ca mărimea de măsurat să fie repetitivă.

Sintetizând cele de mai sus în tabelul 1.1 se prezintă aparatele folosite în măsurări dinamice, și câteva din caracteristicile lor.

Toate aparatele de măsurare, prezentate în tabelul de mai sus, au ca mărime de intrare o tensiune electrică, ceea ce înseamnă că, în cazul măsurării curentului de sudare este necesară folosirea unui traductor curent tensiune, adică a unui șunt.

De asemenea, de obicei, tensiunea arcului electric are valoarea de vârf mai mare decât cea prescrisă pentru aparatul utilizat, motiv pentru care, la măsurarea tensiunii arcului electric, trebuie să se folosească un divizor de tensiune. Utilizarea unui astfel de traductor se impune și atunci când valoarea de vârf a tensiunii arcului electric este mai mică decât cea a tensiunii de intrare a aparatului, cu scopul realizării unei adaptări a aparatului la arcul electric.

Din aceste motive, în paragraful următor se analizează funcționarea în regim dinamic a celor două tipuri de traductoare, și se stabilesc variantele constructive și metodele de proiectare, astfel încât mărimile de ieșire ale aparatelor folosite să redea cât mai fidel mărimile de măsurat (curentul de sudare și tensiunea arcului electric).

1.2. Indicatori de calitate pentru traductoare în regim dinamic

1.2.1. Considerații generale

În general, un traductor este un sistem ce realizează dependența

$$y=f(x) \quad (1.1)$$

unde:

-x-mărimea de intrare a traductorului, care în cazul de față, poate fi curentul de sudare i_s , sau tensiunea arcului electric u_a ;

-y-mărimea de ieșirea a traductorului, care este tensiunea de intrare u_i a aparatului de măsurare folosit;

-f(x)-funcția de transformare a traductorului.

În regim dinamic, mărimea de intrare (mărimea de măsurat) este variabilă în timp, fiind o funcție $x(t)$, care înlocuită în relația (1.1) conduce la:

$$y=f[x(t)]=g(t) \quad (1.2)$$

Deci, în regim dinamic, atât mărimea de intrare cât și cea de ieșire ale unui traductor sunt funcție de timp, ce se notează $x(t)$, respectiv $y(t)$. În "Teoria sistemelor", funcțiile $x(t)$, $y(t)$ se numesc "excitație", respectiv "răspuns", denumiri ce vor fi folosite și în cele ce urmează.

Evident că un traductor trebuie astfel realizat încât răspunsul să reproducă cât mai fidel excitația. Se va numi traductor ideal acela pentru care răspunsul reproduce întocmai excitația, ceea ce se obține atunci când funcția $y(t)$ are aceeași formă ca și funcția $x(t)$. Această condiție este îndeplinită atunci când funcția de transformare are forma:

$$y=kx \quad (1.3)$$

unde k este o constantă.

În acest caz se obține:

$$y(t)=kx(t) \quad (1.4)$$

După cum se observă din relația (1.4), la ieșirea unui traductor ideal se obține chiar mărimea de măsurat, amplificată sau atenuată cu k , însă fără ca traductorul să producă o modificare a formei de variație în timp a acesteia.

În general, funcția de transformare a unui traductor real are o formă ce diferă de cea dată de relația (1.3), ceea ce face ca între răspuns și excitație să nu mai existe o proporționalitate directă. Ca urmare, la un traductor real, răspunsul nu mai reproduce

exact excitația, și deci intervin erori de măsurare, determinate de traductorul utilizat.

Rezultă că este necesar să se stabilească condițiile, ce trebuie să le satisfacă un traductor, pentru ca erorile de măsurare, introduse de acesta, să nu depășească anumite limite impuse. Aceste condiții trebuie exprimate prin relații matematice, ce se vor utiliza la proiectarea traductorului. Însă aceste condiții nu se obțin direct, ci pe baza unor caracteristici ce privesc comportarea traductorului în regim dinamic, și care se numesc indicatori de calitate ai traductorului respectiv.

Un astfel de indicator ar putea fi chiar funcția de transformare a traductorului și condiția ce ar trebui să o satisfacă traductorul s-ar exprima sub forma ca, abaterea maximă procentuală a lui $f(x)$ față de cea a unui traductor ideal, raportată, de exemplu, la valoarea de vârf a lui $x(t)$, să nu depășească o anumită limită impusă.

Însă, determinarea funcției de transformare înseamnă aflarea mărimii de ieșire y , când se admite cunoscută mărimea de intrare x , pentru orice formă de variație a lui x .

De exemplu, în cazul unui șunt, admis de forma unui conductor cilindric, determinarea funcției de transformare revine la a exprima căderea de tensiune u , în lungul conductorului, în funcție de intensitatea i a curentului prin acesta.

După cum se va arăta, într-un paragraf ulterior, această dependență se determină prin folosirea ecuațiilor lui Maxwell și a legilor de legătură, însă numai în anumite ipoteze simplificatoare.

Pentru a obține rezultate cât mai apropiate de cele reale, ar trebui folosite formele locale ale legii circuitului magnetic și a inducției electromagnetice, pentru un regim nestaționar, iar în legile de legătură trebuie ținut cont de caracterul neliniar al materialelor din care este realizat traductorul.

Dezavantajul este că se poate ajunge la un volum foarte mare de calcul, sau chiar la situația când ecuațiile obținute nu pot fi rezolvate decât prin admiterea unor ipoteze simplificatoare, care sunt surse de erori.

Din acest motiv, pentru studiul comportării în regim dinamic ai unui traductor, se folosesc alți indicatori, ce se prezintă în cele ce urmează.

1.2.2. Funcția de transfer

Funcția de transfer se definește în contextul în care rezolvarea ecuațiilor de funcționare ale unui traductor de face cu metoda transformatei Laplace. Aceste ecuații se obțin considerând cunoscută excitația $x(t)$ și apoi se aplică legile și teoremele teoriei

macroscopice ale electromagnetismului, rezultând ecuația de forma generală:

$$F[y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), x^{(m)}(t), x^{(m-1)}(t), \dots, x(t)] = 0 \quad (1.5)$$

unde F este o funcție, în general neliniară, și s-au notat:

$$y^{(j)}(t) = \frac{d^j y(t)}{dt^j} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (1.7)$$

Întotdeauna $n > m$, și ca urmare, relația (1.5) este o ecuație diferențială de ordinul n , neliniară.

Însă, utilizarea transformării Laplace este posibilă numai dacă atât excitația $x(t)$ cât și răspunsul $y(t)$ îndeplinesc anumite condiții, când se numesc funcții original.

Deoarece excitația este arbitrară, aceasta poate fi aleasă încât să îndeplinească condițiile menționate și deci se poate face asocierea:

$$x(t) \rightarrow X(s) \quad (1.8)$$

unde $X(s)$ este o funcție de variabilă complexă s , numită transformata (imaginea) Laplace a excitației $x(t)$.

De asemenea, pentru traductoarele la care se referă prezenta lucrare, se poate admite că și răspunsul $y(t)$ este o funcție original, și deci se poate face asocierea:

$$y(t) = Y(s) \quad (1.9)$$

unde s are aceeași semnificație, iar $Y(s)$ este imaginea Laplace a răspunsului $y(t)$.

Pentru orice traductor, în condiții inițiale nule, imaginea Laplace a răspunsului poate fi exprimată sub forma:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (1.10)$$

unde $H(s)$ este o funcție de variabilă complexă s , și se numește funcția de transfer a traductorului., deoarece prin intermediul său se stabilește legătura între ieșirea și intrarea traductorului.

Transformata Laplace inversă a funcției de transfer $H(s)$ se numește funcția pondere a traductorului, se notează cu $h(t)$ și este dată de relația:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s) e^{st} ds \quad (1.11)$$

unde j este unitatea imaginară iar c se numește abscisa de convergență a funcției complexe $H(s)$.

Aplicând relației (1.10) teorema de convoluție se obține:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (1.12)$$

sau:

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (1.13)$$

Deci, dacă se cunoaște funcția de transfer a traductorului, $H(s)$, cu relația (1.11) se calculează funcția pondere $h(t)$ și cu relația (1.12) sau (1.13) se poate determina răspunsul $y(t)$ al traductorului, pentru orice excitație $x(t)$.

Având determinat răspunsul $y(t)$, acesta se compară cu excitația $x(t)$ și se pot trage concluzii cu privire la comportarea traductorului pentru excitația dată, iar din acestea se pot stabili condițiile ce trebuie să le îndeplinească traductorul, pentru a avea o comportare cât mai apropiată de a celui ideal.

Însă, de obicei, nu se cunoaște forma de variație în timp a mărimii de măsurat sau este posibil ca un traductor dat să se utilizeze pentru mărimi de măsurat, cu diverse forme de variație în timp. Rezultă că, în general, nu se cunoaște excitația $x(t)$ și deci nu se poate aplica metoda menționată mai sus.

Din acest motiv, studiul comportării în regim dinamic se face aplicând la intrarea acestuia excitații standard numite și semnale test, care se prezintă în cele ce urmează.

1.2.3. Răspunsul indicial. Timp de răspuns

Răspunsul indicial al unui traductor se definește ca fiind funcția $f(t)$, numită funcție indicială, ce se obține la ieșirea traductorului, atunci când la intrarea sa se aplică un semnal treaptă unitară, notat cu $\Phi(t)$, descris de ecuația:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{pt. } t < 0 \\ 1, & \text{pt. } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Se observă că $\Phi(t)$ are transformata Laplace $\Phi(s)=1/s$.

Deci, dacă se notează cu $F(s)$ transformata Laplace a funcției indicial $f(t)$, atunci, pe baza relației (1.10) se obține:

$$F(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} \quad (1.15)$$

Se definește răspunsul indicial stabilizat, notat cu f_{st} , prin relația:

$$f_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (1.16)$$

Funcția $g(t)$, definită prin relația:

$$g(t) = \frac{1}{f_s} f(t) \quad (1.17)$$

se numește răspuns indicial normat al traductorului respectiv.

Răspunsul indicial al unui traductor poate avea una dintre formele din figura 1.1

Răspunsul indicial al unui traductor este util îndeosebi pentru a aprecia comportarea acestuia în regim tranzitoriu, care intervine din momentul în care la intrarea traductorului se aplică mărimea de măsurat, sau din momentul în care aceasta are o variație bruscă și până când se obține un răspuns stabilizat.

Desigur că, în acest scop, ar trebui aplicată la intrarea traductorului chiar mărimea de măsurat, însă, având în vedere cele menționate mai sus, se obțin rezultate acoperitoare, dacă se folosește o mărime de intrare ce are, în momentul inițial, o viteză de variație în timp mai mare decât cea pe care o poate avea oricare mărime de măsurat, condiție ce este îndeplinită de excitația treaptă unitară $\Phi(t)$.

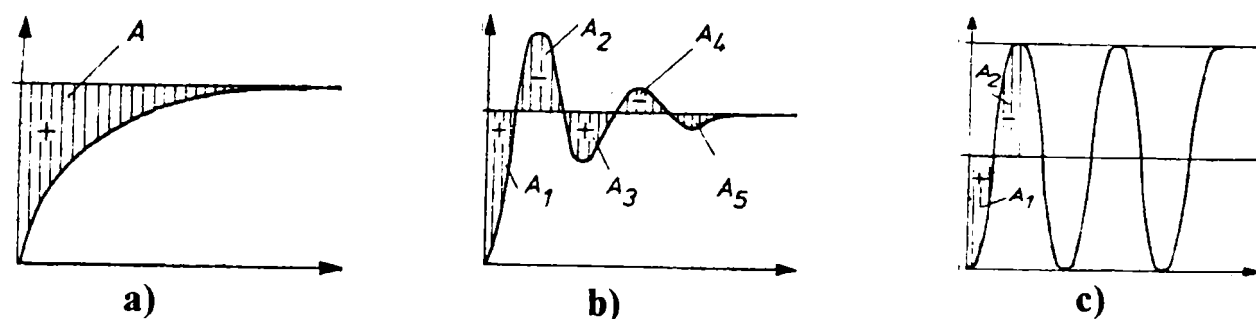


Fig.1.1

Evident că o comportare ideală a unui traductor în regim tranzitoriu s-ar obține atunci când nu ar exista un astfel de regim, ceea ce ar fi posibil numai dacă răspunsul indicial ar avea aceeași formă de variație în timp ca și excitația, adică forma unui semnal treaptă, descris de ecuația:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pt. } t < 0 \\ f_{st}, & \text{pt. } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Deoarece, în general, răspunsul indicial $f(t)$ a unui traductor real nu are această formă, traductorul este de o calitate cu atât mai bună cu cât $f(t)$ se apropie de forma ideală menționată. Aceasta implică ca răspunsul indicial să se amortizeze într-un timp cât mai scurt, condiție ce este îndeplinită dacă $f(t)$ are forma din fig.1.1.a. Regimul tranzitoriu se amortizează și dacă răspunsul indicial are forma din fig.1.1.b., însă durata amortizării este mai mare și deci traductorul este de o calitate inferioară celui din cazul

precedent. Dacă răspunsul indicial are forma din figura 1.1.c, adică este oscilatoriu neamortizat, traductorul nu ajunge niciodată în regim stabilizat, și în plus, la ieșire se obține un semnal puternic deformat față de cel aplicat la intrare, și deci nu poate fi utilizat pentru măsurări în regim dinamic.

În concluzie, proiectarea unui traductor pentru funcționarea în regim dinamic trebuie astfel făcută, încât să aibă un răspuns indicial amortizat, de forma din fig.1.1.a, iar dacă răspunsul indicial este neamortizat, traductorul nu poate fi utilizat pentru măsurarea mărimilor rapid variabile în timp.

Pentru a stabili relații matematice pe baza cărora proiectarea unui traductor să se facă astfel încât să îndeplinească această cerință, mai întâi se definesc anumite caracteristici ale regimului tranzitoriu.

O astfel de caracteristică este eroarea dinamică raportată, care, pentru un moment oarecare t , se notează cu $\gamma_d(t)$ și se definește prin relația:

$$\gamma_d(t) = \frac{f_{st} - f(t)}{f_{st}} = 1 - \frac{f(t)}{f_{st}}$$

sau:

$$\gamma_d(t) = 1 - g(t) \quad (1.19)$$

unde s-a avut în vedere relația 1.17.

O relație de proiectare ar putea fi condiția ca valoarea maximă a lui $\gamma_d(t)$ să nu depășească o anumită limită preimpusă. Însă, prin aceasta nu se impune nici o condiție asupra duratei regimului tranzitoriu, fiind posibilă situația ca valoarea maximă a lui $\gamma_d(t)$ să nu depășească limita impusă, chiar și în cazul când răspunsul indicial este neamortizat.

Din acest motiv se folosește o altă caracteristică, numită timp de răspuns, notat cu T_r și definit prin relația:

$$T_r = \int_0^{\infty} \gamma_d(t) dt \quad (1.20)$$

sau, având în vedere relația (1.19), se obține:

$$T_r = \int_0^{\infty} [1 - g(t)] dt \quad (1.21)$$

Din punct de vedere geometric, pentru cazul din fig.1.1.a, T_r este aria hașurată A. Este evident că durata regimului tranzitoriu este cu atât mai redusă cu cât aria A este mai

mică, deci cu cât T_r are o valoare mai mică.

Pentru cazul din fig.1.1.b, $T_r=A_1-A_2+A_3-A_4+\dots$, unde A_1, A_2, A_3, A_4 sunt ariile reprezentate hașurat în figură. Aceste arii, deci și T_r , au o valoare finită, diferită de zero, cu atât mai mică cu cât durata regimului tranzitoriu este mai redusă, însă ea poate fi folosită pentru aprecierea regimului tranzitoriu, numai dacă valoarea maximă a lui γ_d nu depășește o anumită limită, de exemplu 5%.

Un caz deosebit este cel din fig.1.1.c, când T_2 este o sumă de perechi $A_1+A_2=0$, ceea ce ar însemna că $T_r=0$. Însă, după cum s-a menționat, traductorul nu ajunge niciodată în regim stabilizat și deci nu are sens să se folosească T_r ca bază de proiectare.

În cadrul prezentei lucrări, proiectarea unor traductoare se face pe baza timpului de răspuns și se impune condiția ca acesta să fie minim.

Determinarea timpului de răspuns T_r se face pe baza relației (1.21), ceea ce implică cunoașterea răspunsului indicial $f(t)$ al traductorului.

În acest scop, mai întâi, se stabilește ecuația de funcționare (1.5) pentru traductorul respectiv, considerând că excitația $x(t)$ este un impuls treaptă. Apoi se determină $f(x)$, fie prin integrarea directă a acesteia, fie pe baza relației (1.15), se determină $F(s)$ căreia i se aplică transformata Laplace inversă.

Se menționează faptul că toate operațiile menționate mai sus se realizează cu un soft matematic corespunzător.

1.2.4.Răspunsul în frecvență. Caracteristica de frecvență

Se numește răspuns în frecvență a unui traductor, funcția $y(t)$, ce se obține la ieșirea acestuia, dacă la intrare se aplică un semnal sinusoidal:

$$x(t)=X_m \sin \omega t \quad (1.22)$$

În general, răspunsul are atât o componentă tranzitorie $y_{tr}(t)$, cât și una stabilizată $y_{st}(t)$, adică:

$$y(t)=y_{tr}(t)+y_{st}(t) \quad (1.23)$$

Se arată că, dacă răspunsul indicial este amortizat, atunci $y_{tr}(t)$ se amortizează foarte rapid, și deci se poate neglija față de $y_{st}(t)$. Din acest motiv, ca răspuns în frecvență se consideră doar componenta stabilizată $y_{st}(t)$, care, pentru un traductor cu parametri concentrați și constanți în timp, are expresia:

$$y_{st}(t) = \frac{X_m}{2} j \left[H(-j\omega) e^{-j\omega t} - H(j\omega) e^{j\omega t} \right] \quad (1.24)$$

Relația (2.24) permite să se definească ca și caracteristică de frecvență a unui

traductor funcția $H(j\omega)$, obținută din funcția de transfer $H(s)$ prin înlocuirea variabilei s cu variabila $j\omega$.

În general, caracteristică de frecvență $\underline{H}(j\omega)$ este o funcție complexă, în care se consideră ca variabilă ω . Înseamnă că atât modulul cât și argumentul său sunt funcții de ω , ce se vor nota cu $H(\omega)$, respectiv $\varphi(\omega)$, adică :

$$\underline{H}(\omega) = |H(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$$

Cu acestea, funcția de frecvență se scrie sub forma trigonometrică :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.25)$$

Deoarece $H(-j\omega)$ este complex conjugata funcției de transfer, se obține :

$$\underline{H}(-j\omega) = H(\omega)e^{-j\varphi(\omega)} \quad (1.26)$$

Relațiile (1.25), (1.26) se înlocuiesc în relația (1.24) și după efectuarea calculelor se obține :

$$Y_{st}(t) = H(\omega)X_m \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (1.27)$$

Relația (1.27) arată că răspunsul în frecvență al unui traductor liniar este tot o mărime sinusoidală de aceeași frecvență ca și excitația, însă având modulul amplificat cu modulul caracteristicii de frecvență și defazat față de excitație cu un unghi egal cu argumentul caracteristicii de frecvență a traductorului. Din acest motiv, $H(\omega)$ se numește câștigul traductorului. El este în general funcție de frecvență, ceea ce poate introduce distorsiuni ale mărimii de ieșire a traductorului, în cazul că mărimea de ieșire este periodică, dar nesinusoidală.

Într-adevăr, dacă semnalul de intrare $x(t)$ este nesinusoidal, el se descompune în serie Fourier de forma :

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(k\omega t + l_k)$$

Procedând la fel ca mai înainte, se arată că răspunsul stabilizat este de forma :

$$y_{st}(t) = X_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} H(k\omega) X_k \sin[k\omega t + \varphi_k + \Psi_k(k\omega)] \quad (1.28)$$

Se observă că $y_{st}(t)$ diferă de $x(t)$ prin faptul că $H(k\omega)$, $\Psi(k\omega)$ depind de k , adică unele armonici vor fi amplificate și defazate mai mult, iar altele mai puțin.

Dacă se dorește să se elimine armonicile de un ordin k , traductorul trebuie să fie astfel realizat încât pentru acele armonici să se obțină $H(k\omega) = 0$.

1.3. Șunturi pentru regimuri dinamice

1.3.1. Timpul de răspuns al buclei de măsurare

Determinarea răspunsului indicial al unui șunt revine la a obține dependența de t a tensiunii electrice la bornele șuntului, adică o funcție $u(t)$, când prin șunt trece un curent electric a cărui intensitate $i(t)$ are forma unui semnal treaptă unitară de valoare $I=1A$, începând de la un moment inițial $t_0=0$.

Pentru orice moment $t>t_0$, i are valoare constantă, la fel ca în curent continuu, ceea ce înseamnă că și densitatea de curent are, pe orice secțiune S , valoare constantă $J_c=I/S$.

De asemenea, admitând că se atinge un regim stabilizat, tensiunea u ajunge la valoarea stabilizată $U_{st}=J_c \cdot \rho \cdot l$, unde ρ este rezistivitatea materialului șuntului, iar l este lungimea unei linii de curent.

Însă, tensiunea u nu ajunge instantaneu la valoarea stabilizată U_{st} , ci după epuizarea unui regim tranzitoriu, caracterizat printr-un timp de răspuns, definit așa cum s-a arătat, notat cu T_r .

Existența regimului tranzitoriu, deci a unui $T_r \neq 0$, este determinată de două cauze.

În primul rând, câmpul magnetic fiind variabil, apare un câmp electric indus, care se suprapune peste cel de intensitate i , astfel încât densitatea de curent are o valoare $J \neq J_c$. Egalitatea se obține atunci când se anulează câmpul electric indus, care nu se face instantaneu, ci după un regim tranzitoriu determinat de însuși șuntul respectiv, ce se va numi regim tranzitoriu propriu (intrinsec) al șuntului, iar timpul de răspuns corespunzător se va numi timp de răspuns propriu (intrinsec) al șuntului.

O a doua cauză o constituie inductivitățile electrice introduse de legăturile dintre bornele șuntului și cele ale instrumentului de măsurare, care introduc o inerție electromagnetică, ce se opune variației în timp a mărimilor, și deci un regim tranzitoriu căruia îi corespunde un timp de răspuns al buclei de măsurare.

În acest paragraf se ca determina numai timpul de răspuns al buclei de măsurare și se face abstracție de timpul de răspuns propriu al șuntului, adică se va considera că acest timp de răspuns este egal cu zero. Aceasta echivalează cu a considera că șuntul intervine în circuit cu o constantă, care este tocmai rezistența sa electrică în curent continuu, notată cu R .

În principiu, schema de măsurare este cea prezentată în figura 1.2.a.

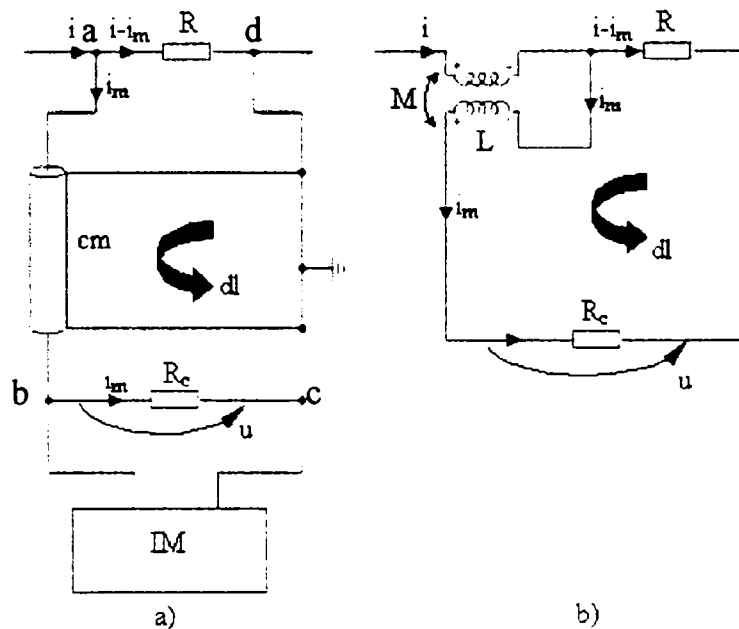


Fig.1.2

Se observă că o bornă de tensiune a șuntului este conectată cu o bornă a instrumentului de măsură, notat cu IM, prin intermediul firului central al cablului coaxial, notat cm, ce are tresa legată la masă pentru a reduce la minim inductivitatea proprie a buclei de măsurare.

Pentru a evita reflexia undelor electromagnetice este nevoie de o adaptare a tuturor elementelor folosite, care trebuie să prezinte aceeași impedanță de undă. În acest scop, în paralel cu IM, se conectează o rezistență R_c egală cu impedanța caracteristică Z_c a cablului de măsurare.

Dacă se notează cu i_m intensitatea curentului electric prin cablul de măsurare, atunci prin șunt va trece curentul de intensitate $i-i_m$.

Bucula de măsurat este constituită din traseul închis abcda, care formează o curbă închisă Γ , pe care se definește integrala intensității câmpului electric \vec{E} , sensul de integrare (sensul elementului de linie \vec{dl}) alegându-se ca în figură. Această integrală se definește în două moduri. Primul mod constă în a utiliza forma integrală dezvoltată a legii conducției electrice, obținând:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = u - (i - i_m)R \quad (1.29)$$

Al doilea mod constă în utilizarea formei integrale nedezvoltate a legii inducției electromagnetice, obținând:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.30)$$

unde Φ este fluxul magnetic prin suprafața S , mărginită de bucla de măsurare Γ .

Folosind principiul superpoziției, se descompune Φ în:

- o componentă Φ_1 corespunzătoare câmpului magnetic determinat de curentul din bucla de măsurare, de intensitate i_m ;
- o componentă Φ_2 corespunzătoare câmpului magnetic determinat de curentul de măsurat, de intensitate i .

$$\text{Înseamnă că:} \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (1.31)$$

Dacă se notează cu L inductivitatea proprie a buclei de măsurare, având în vedere că sensul de integrare coincide cu sensul lui i_m , se obține:

$$\Phi_1 = L \cdot i_m \quad (1.32)$$

Curentul de intensitate i fiind exterior buclei de măsurare, intervine în aceasta prin cuplaj magnetic, caracterizat prin inductivitatea mutuală, de valoare absolută M . Deoarece sensul de integrare este opus celui al lui i , se obține:

$$\Phi_2 = -M \cdot i_m \quad (1.33)$$

Din relațiile scrise se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -L \frac{di_m}{dt} + M \frac{di}{dt} \quad (1.34)$$

în care, deoarece mediul este aer, s-a considerat că inductivitățile L și M sunt constante în timp.

Din relațiile (1.29) și (1.34) rezultă:

$$\begin{aligned} u - (i - i_m)R &= -L \frac{di_m}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ u &= (i - i_m)R - L \frac{di_m}{dt} + M \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pe baza relației (1.35) s-a obținut schema electrică reprezentată în figura 1.2..b.

Impedanța Z_c și deci R_c nu are valori mai mari de 100Ω , iar impedanța de intrare a lui IM are valori mult mai mari, de exemplu, în jur de $1M\Omega$, dacă se utilizează un osciloscop catodic. Pe această bază s-a neglijat curentul prin IM față de i_m și se poate adăuga relația:

$$u = i_m R_c \quad (1.36)$$

Din relația (1.36) se explicitează i_m , care înlocuit în (2.64) conduce la:

$$(R + R_c)u + L \frac{du}{dt} = RR_c i + R_c i + R_c M \frac{di}{dt} \quad (1.37)$$

Se notează cu $U(s)$, $I(s)$ transformatele Laplace ale mărimilor $u(t)$, respectiv $i(t)$ și, ținând cont că R , R_c , L , M sunt admise constante, prin aplicarea transformatei Laplace termenilor din relația (1.37) se obține:

$$U(s) = \frac{RR_c + MR_c s}{R + R_c + L \cdot s} I(s) \quad (1.38)$$

Considerând cazul mai general, când prin șunt se trece o treaptă de curent de valoare I , se obține:

$$U(s) = \frac{(RR_c + R_c Ms)I}{s(R + R_c + Ls)} \quad (1.39)$$

Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{(RR_c + R_c Ms)I}{R + R_c + Ls} \quad (1.40)$$

În relația (1.39), $U(s)$ este transformata Laplace a răspunsului indicial $u(t)$ al șuntului, ce are valoarea stabilizată:

$$u_{st} = H(0) = \frac{IRR_c}{R + R_c} \quad (1.41)$$

Numitorul $B(s) = s(R + R_c + Ls)$ are soluțiile $s_1 = 0$; $s_2 = -(R + R_c)/L$ și derivata $B'(s) = (R + R_c + Ls) + Ls$.

Cu acestea se obține:

$$u(t) = I \left[\frac{RR_c}{R + R_c} - \left(\frac{RR_c}{R + R_c} - \frac{R_c M}{L} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (1.42)$$

unde:

$$\tau = \frac{L}{R + R_c}, \quad (1.43)$$

sau:

$$u(t) = \frac{IRR_c}{R + R_c} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{M(R + R_c)}{LR} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \quad (1.44)$$

Notând cu $u(t)$ răspunsul indicial normat, se obține:

$$u(t) = 1 - \left[1 - \frac{M(R + R_c)}{LR} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.45)$$

În relația (1.21) se înlocuiește $g(t)$ cu $u(t)$ și se obține timpul de răspuns:

$$T_r = \left[1 - \frac{M(R + R_c)}{LR} \right] \tau \quad (1.46)$$

Componenta tranzitorie este:

$$u_{tr}(t) = \left[1 - \frac{M(R + R_c)}{LR} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.47)$$

care, la $t=0$, are valoarea:

$$u_{tr}(0) = 1 - \frac{M(R + R_c)}{LR} \quad (1.48)$$

Se observă că, dacă:

- este îndeplinită condiția :

$$\frac{M(R + R_c)}{LR} < 1,$$

atunci, $T_2 > 0$, $u_{tr}(0) > 0$, $u(0) < 1$, adică, în momentul $t=0$, răspunsul indicial normat are o valoare mai mică decât cea stabilizată, egală cu 1, și se spune că șuntul este subcompensat;

- este îndeplinită condiția:

$$\frac{M(R + R_c)}{LR} > 1,$$

atunci, $T_2 < 0$, $u_{tr}(0) < 0$, $u(0) > 1$, adică, în momentul $t=0$, răspunsul indicial normat are o valoare mai mare decât cea stabilizată, și se spune că șuntul este supracompensat;

Dacă este îndeplinită condiția $M=0$, atunci:

$$u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ și} \\ T_r = \tau = \frac{L}{R + R_c} \quad (1.49)$$

Se observă $u_{tr}(0)=1$; $u(0)=0$, adică în momentul inițial $t=0$, răspunsul are valoarea zero, ca și excitația, ceea ce înseamnă că răspunsul reproduce excitația, mult mai fidel decât în cazurile precedente.

Însă, pentru îndeplinirea acestei condiții este necesar ca să nu existe cuplaj magnetic între conductorul parcurs de curentul de măsurat și bucla de măsurare, sau ca aceasta să fie cât mai redus. Această condiție este îndeplinită de o construcție specială, numit șunt coaxial.

De asemenea, pentru ca T_r , dat de relația (1.49), să aibă valori cât mai mici, se iau două măsuri:

- inductivitatea proprie L să fie cât mai redusă, ceea ce se realizează de însuși cablul coaxial;

- R_c să aibă valori cât mai mari, prin folosirea unor cabluri coaxiale care să aibă impedanța caracteristică mare, de exemplu de 80Ω , în loc de 30Ω .

Un caz deosebit este acela când este îndeplinită condiția:

$$M = \frac{LR}{R + R_c} \quad (1.50)$$

când $T_r = 0$, $u_r(t) = 0$, pentru orice t , iar răspunsul este dat tot un semnal treaptă, adică răspunsul reproduce identic excitația.

Pentru a obține acest caz, se realizează, în mod voit, un cuplaj magnetic, astfel încât M să îndeplinească condiția (1.50).

Însă, indiferent care ar fi valoarea celorlalți parametri, dacă inductivitatea proprie a buclei de măsurare are valori foarte mici, adică $L \rightarrow 0$, atunci $T_r \rightarrow 0$ și deci se pot obține timpi de răspuns de valori extrem de scăzute. Această cerință este îndeplinită de altă construcție specială, numită șunt bifilar.

Se poate verifica, că șuntul obișnuit nu îndeplinește aceste condiții.

În continuare se va determina timpul de răspuns propriu al șuntului, și se vor stabili cele două construcții speciale, menționate mai sus.

1.3.2. Șuntul bifilar

Pentru a stabili construcția unui astfel de șunt, mai întâi se determină timpul de răspuns al unui conductor cilindric de rază a , alimentat axial cu un curent electric de intensitate i , de forma unei trepte de valoare I , ca în figura 1.3:

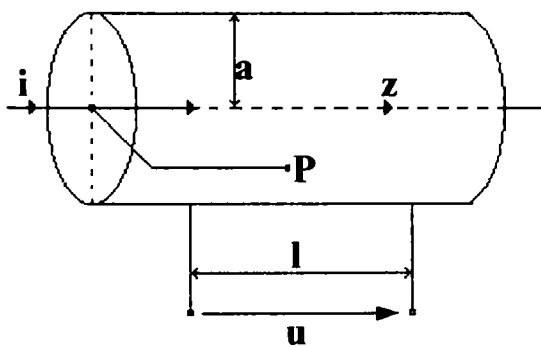


Fig.1.3

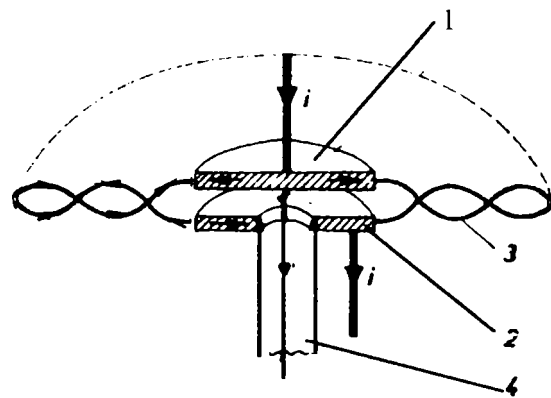
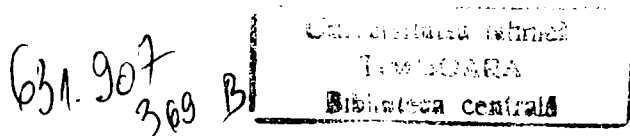


Fig.1.4

Bornele de tensiune, între care se definește răspunsul u , sunt lipite pe suprafața laterală a cilindrului, așa că:



$$u = \int_l \bar{E}_a \cdot d\bar{l} \quad (1.51)$$

unde \bar{E}_a este intensitatea câmpului electric într-un punct oarecare de pe suprafața laterală.

Se arată că timpul de răspuns al conductorului de rază a este dat de relația:

$$T_r = \tau \mu a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \quad (1.52)$$

unde:

- τ , μ sunt conductivitatea electrică, respectiv permeabilitatea magnetică a materialului șuntului;

- β_k sunt soluțiile ecuației $J_1(x)=0$, unde $J_1(x)$ este funcția Bessel de prima speță și ordinul 1.

Pentru cazul unui conductor electric, relația (1.52) devine:

$$T_r = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\rho} a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \quad (1.53)$$

unde s-a avut în vedere că, la un conductor electric $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m], iar ρ este rezistivitatea electrică a materialului.

Relația (1.53) arată că se obține un timp de răspuns cu atât mai mic cu cât se folosește un material cu rezistivitatea mai mare. Din acest motiv, și având în vedere că este necesar un coeficient termic al rezistivității cât mai mic, șuntul se confecționează din manganină la care $\rho = 45 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

Deci, dacă materialul folosit este manganină și notând cu r raza conductorului, exprimată în milimetri, se obține:

$$T_r = \frac{4\pi \cdot 10^{-5} r^2}{45} S \quad (1.54)$$

unde:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \quad (1.55)$$

Folosind o secvență de program prezentată mai jos, s-au calculat un număr de 100 soluții β_k ale ecuației $J_1(x)=0$, care au fost folosite pentru a calcula S , din relația (2.106), iar cu aceasta s-a aflat T_r , din relația (1.55), pentru diferite valori ale razei r .

În tabelul 1.2 sunt prezentate valorile timpului de răspuns T_r , exprimat în microsecunde (μs), pentru diferite valori ale razei, exprimată în milimetri.

Tabelul 1.2

r [mm]	10^{-2}	10^{-1}	$1,5 \cdot 10^{-1}$	1	2	5	10	20	30
T_r [μ s]	$3,48 \cdot 10^{-5}$	$3,48 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	0,384	1,4	8,69	35	139	313

După cum se observă, T_r crește exponențial cu raza r a conductorului. Pentru a obține un timp de răspuns de ordinul nanosecundelor ar trebui utilizat un conductor cu rază de ordinul zecimilor de mm, de exemplu, dacă raza este de o zecime de mm, se obține un timp de răspuns de aproximativ 3,5 ns, iar dacă raza este de 1mm, timpul de răspuns crește la 350 ns. Pentru raze de ordinul zecilor de mm, timpul de răspuns devine de ordinul sutelor de mii de ns, ceea ce este inacceptabil.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} & := \begin{array}{l} \mathbf{b}_0 \leftarrow 3 \\ \mathbf{k} \leftarrow 1 \\ \text{while } \mathbf{k} \leq 201 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{b}_{\mathbf{k}-1} + 2 \\ \mathbf{b}_{\mathbf{k}} \leftarrow \text{root}(J1(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \\ \mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + 1 \end{array} \right. \\ \mathbf{b} \end{array} \\
 S & = \sum_{\mathbf{k}=1}^{201} \frac{1}{(\mathbf{b}_{\mathbf{k}})^2} \quad S = 1.24486 \cdot 10^{-1} \quad \frac{1}{8} = 1.25 \cdot 10^{-1} \\
 T(\mathbf{a}) & := \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot S \cdot 10^{-7}}{45 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot \mathbf{a}^2
 \end{aligned}$$

Din acest motiv, pentru a putea înregistra cât mai fidel curentul de sudare în regim dinamic, astfel încât să nu intervină complicații constructive, se admite un timp de răspuns de ordinul sutelor de ns, care impune să se folosească fir de manganină cu diametrul egal cu 1mm.

Curentul de sudare având valori efective de ordinul sutelor de amperi, un astfel de fir s-ar topi aproape instantaneu. Din acest motiv se conectează în paralel un număr n de fire de manganină cu diametrul de 1 mm, rezultând construcția prezentată în figura 1.4.

Șuntul constă din două plăci colectoare 1 și 2 care reprezintă bornele de curent ale șuntului. Șuntul propriu-zis este format din două mănunchiuri, de câte n fire de manganină, având extremitățile lipite pe cele două plăci. Pentru a reduce inductivitatea electrică proprie, fiecare fir este răsucit încât formează un număr cât mai mare de bucle, prin care curenții au sensuri opuse, rezultând un câmp magnetic foarte redus. Bornele de tensiune sunt constituite de firul central și tresa ale unui cablu coaxial, având firul central, parcurs de curentul i_m , lipit de placa 1 și tresa lipită de placa 2.

Admițând o densitate de curent admisibilă J_{ad} , secțiunea necesară S_{nec} se află din prima relație (1.56), iar numărul n de fire se află din a doua relație, unde $S = \pi r^2$:

$$S_{nec} = I/J_{ad}; \quad n = S_{nec}/S \quad (1.56)$$

Deci, cunoscând I , și luând, de exemplu $J_{ad} = 10 \text{ A/mm}^2$, din relațiile precedente se află numărul n de fire.

• Șuntul bifilar nu elimină complet cuplajul magnetic. Această cerință este satisfăcută de șuntul coaxial, ce se va prezenta în continuare.

1.3.3. Șuntul coaxial

Se consideră un conductor cilindric gol, de rază interioară r_i , rază exterioară r_e , având peretele confecționat dintr-un material conductor electric, de caracteristici μ , ρ .

Se arată că timpul de răspuns este:

$$T_r = \frac{\mu(m^2 - 1)r_i^2}{\rho m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x_k^2} \quad (1.57)$$

unde:

$$- m = \frac{r_e}{r_i};$$

- x_k sunt rădăcinile ecuației:

$$J_1(x)N_1(mx) = J_1(mx)N_1(x), \quad (1.58)$$

în care N_1 este funcția Bessel de a doua speță, de ordinul 1.

$$C_k = \frac{J_1(x_k)N_0(x_k) - N_1(x_k)J_0(x_k)}{J_1(mx_k)N_0(x_k) - N_1(mx_k)J_0(x_k) + mN_1(x_k)J_0(mx_k) - J_1(x_k)N_0(mx_k)} \quad (1.59)$$

în care J_0 , N_0 sunt funcțiile Bessel de prima speță, respectiv de a doua speță, ordinul zero.

Relația (1.57) se scrie sub forma:

$$T_r = \frac{\mu(m^2 - 1)r^2}{\rho m} S, \quad (1.60)$$

unde r este raza interioară a conductorului, iar:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x_k^2} \quad (1.61)$$

Alegând ca material tot manganina și exprimând raza interioară r în mm și timpul de răspuns în μs se obține:

$$T_r = \frac{40\pi(m^2 - 1)r^2}{45m} S \quad (1.62)$$

Pentru diferite valori ale lui m , s-au obținut 100 de soluții ale ecuației (2.110), notate cu b_k , folosind secvența de program prezentată mai jos:

$$m := 1.1$$

$$f(x) := J1(x) \cdot Y1(m \cdot x) - Y1(x) \cdot J1(m \cdot x)$$

```

b := | b0 ← 30
      | k ← 1
      | while k ≤ 101
      |   | x ← b_{k-1} + 25
      |   | b_k ← root(f(x), x)
      |   | k ← k + 1
      | b

```

$$k := 1 .. 101$$

$$C_k := \frac{J1(b_k) \cdot Y0(b_k) - J0(b_k) \cdot Y1(b_k)}{J1(m \cdot b_k) \cdot Y0(b_k) - Y1(m \cdot b_k) \cdot J0(b_k) + m \cdot Y1(b_k) \cdot J0(m \cdot b_k) - J1(b_k) \cdot Y0(m \cdot b_k)}$$

$$S := \sum_{k=1}^{101} \frac{C_k}{(b_k)^2}$$

Pentru cele 100 de soluții ($k=101$) s-a calculat suma S .

Din motive constructive, raza interioară r nu poate fi sub câțiva centimetri. Din acest motiv, pentru fiecare valoare a lui m , cu relația (1.62) s-au calculat timpii de răspuns pentru $r=30, 40, 60, 80$ mm. Rezultatele sunt trecute în tabelul 1.3.

Tabelul 1.3.

m	1,1	1,2	1,32	1,4	1,45	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
T_r	30	-0,8	-5	-6,6	-2,3	-112,4	8,9	736	10,6	118	-345
μs	40	-1,4	-8,9	-11,7	-4	-200	15,9	$1,3 \cdot 10^3$	18,8	210	-614
	60	-3,1	-20,2	-26,4	-9	-450	30,7	$2,9 \cdot 10^3$	42,4	473	$1,4 \cdot 10^3$
	80	-5,5	-35,6	-46,9	-16	-710	63,5	$5,2 \cdot 10^3$	75,4	841	$2,8 \cdot 10^3$

Este de observat că pentru $m < 1,5$ șuntul este supracompensat, putând apărea vârfuri de tensiune în momentul inițial, iar pentru $m > 1,5$ șuntul este subcompensat, însă timpul de răspuns este mult mai mare.

Dacă se dorește să se obțină timpi de răspuns de ordinul microsecundelor se alege $m=1,1 \div 1,3$, timpii de răspuns cei mai mici obținându-se pentru $m=1,1$.

Construcția unui astfel de șunt este prezentată în figura 1.5.

Șuntul propriu-zis constă din cilindrul de manganină 1 de grosime foarte mică, care, pentru a reduce efectele de capăt este încadrat de cilindrii 2 și 3, de grosime mai mare, realizate dintr-un material de conductivitate sporită, de exemplu cupru. O bornă de curent A este prevăzută pe cilindrul 3, iar cealaltă, B pe cilindrul 2 și se conectează la masă. Tensiunea de ieșire se obține de la extremitățile circulare m și n , ale lui 1, prin intermediul discurilor conductoare 4 și 5.

Bornele de tensiune sunt constituite din firul central al cablului coaxial 6, lipit pe discul 5 și tresa acestuia lipită pe cilindrul 4.

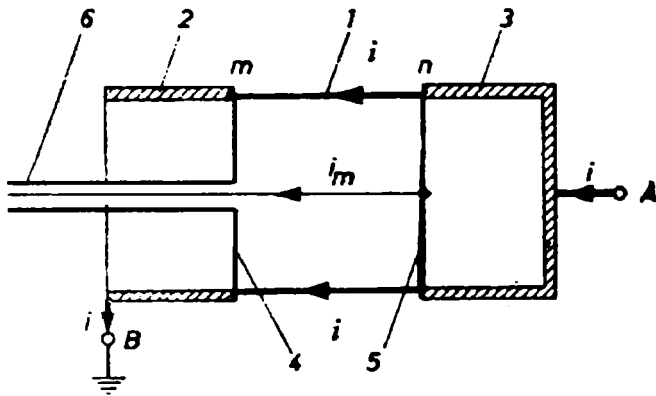


Fig.1.5

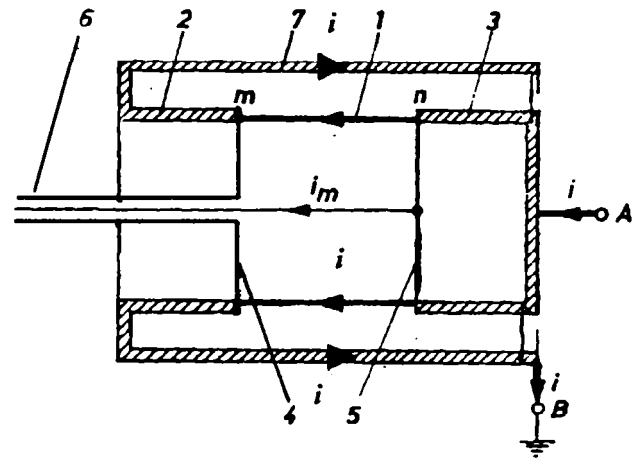


Fig.1.6

În interiorul cilindrului, unde se află bucla de măsurare, curentul de măsurat i produce un câmp magnetic, teoretic nul, ceea ce înseamnă că, practic, inductivitatea mutuală M are valoarea egală cu zero, când timpul de răspuns al buclei de măsurare este cel mai mic.

Pentru a asigura o protecție contra câmpurilor magnetice exterioare se folosește șuntul coaxial ecranat, prezentat în figura 1.6. Acesta are în plus un ecran, 7, care este un cilindru metalic legat la masa, împiedicând astfel pătrunderea câmpurilor magnetice exterioare intense în interiorul buclei de măsurare.

Pentru dimensionarea unui șunt coaxial trebuie avut în vedere că secțiunea necesară, ce se va nota cu s este:

$$s = \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi(m^2 - 1)r^2 \quad (1.63)$$

care înlocuită în relația (1.59), conduce la:

$$T_r = \frac{\mu s S}{\pi \rho m} \quad (1.64)$$

iar pentru manganină:

$$T_r = \frac{40 s S}{45 m} \quad (1.65)$$

Secțiunea necesară s se calculează cu relația:

$$s = \frac{I}{J_{ad}} \quad (1.66)$$

Cunoscând pe s , impunând pe T_r din (1.64) s-ar putea calcula m , însă suma S depinde și de m .

Ca urmare, având în vedere cele precizate, se impune m , iar din (1.63) se obține raza interioară:

$$r = \sqrt{\frac{s}{\pi(m^2 - 1)}} \quad (1.67)$$

iar raza exterioară r_e și deci grosimea δ se află din relația:

$$r_e = mr, \quad \delta = (m-1)r \quad (1.68)$$

În final, timpul de răspuns se calculează folosind relațiile (1.64) respectiv (1.65).

Se dimensionează un șunt coaxial, ce urmează a fi folosit pentru înregistrarea unui curent de sudare de valoare efectivă $I=500A$.

Considerând un șunt coaxial cu ecran, la care condițiile de răcire a cilindrului interior sunt mai dificile, se alege $J_d=5 A/m^2$. Din (1.66) se obține $s=100 mm^2$. Se impune $m=1,1$ și din relația (1.67) se obține $r=12,3 mm$, $r_e=13,5$, deci o grosime $\delta=1,2 mm$. Cu relația (1.65) se calculează $T_r=-0,3 \mu s$, care se apropie de valoarea dată în tabelul 1.2.

Evident că valoarea obținută pentru r trebuie privită ca fiind cea minim necesară, valoarea constructivă putând fi aleasă mai mare decât cea calculată.

Pentru ca în interiorul tubului să se poată introduce cablul coaxial r trebuie să fie mai mare decât raza acestuia. Astfel în cazul considerat se alege $r=30mm$, și se recalculază m din relația (1.63):

$$m = \sqrt{1 + \frac{s}{\pi r^2}}$$

Se obține $m=1,03$ și poate fi ales tot $m=1,1$. Deci $r_e=34mm$ și $\delta=4mm$.

La un șunt este foarte important ca variația rezistenței cu temperatura să fie cât mai redusă. În acest scop se definește raportul:

$$\beta = \Delta\rho/\rho \quad (1.69)$$

unde ρ este rezistivitatea materialului la temperatura mediului ambiant, iar $\Delta\rho$ este variația maximă admisă a acesteia.

Se arată că densitatea maximă admisibilă este dată de relația:

$$J_{ad} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot l \cdot \beta}{\rho \cdot s \cdot \alpha_2}} \quad (1.70)$$

unde

- α este transmisivitatea căldurii la suprafața periferică a conductorului

- α_2 este coeficientul termic al rezistivității materialului

- l este distanța dintre bornele de tensiune ale șuntului, deci, în cazul șuntului coaxial l este distanța dintre cele două discuri 3 și 4.

Pentru manganină $\alpha_2=10^{-5}$ 1/grad. Se admite că șuntul este răcit natural, caz în care $\alpha \approx 12$ W/m²grad. Ca să se asigure o stabilitate cât mai bună a șuntului la variații de temperatură, se alege pentru β o valoare cât mai redusă, cuprinsă între 0.01 și 0,02.

În cazul considerat se alege $\beta=0.02$ și se presupune că $l=10$ cm.

Cu aceste valori din relația (1.70) se obține $J_d=5,164$ A/m².

Se observă că valoarea calculată este foarte aproape de cea admisă.

1.4. Divizoare de tensiune

Divizoarele de tensiune se folosesc pentru măsurarea tensiunii la bornele sursei de alimentare sau a căderii de tensiune pe arcul electric, cu scopul de a reduce valoarea de vârf a tensiunii de măsurat la cea corespunzătoare instrumentului de măsurare.

În principiu, un divizor de tensiune constă din înserierea a două sau mai multe elemente de circuit. La extremitățile lanțului astfel format se aplică tensiunea de măsurat, una din extremități fiind conectată la masă. Tensiunea de ieșire se obține între masă și unul dintre punctele dintre două elemente consecutive, rezultând un divizor de tensiune în una sau mai multe trepte.

În funcție de parametrul de bază al elementelor folosite, mai des utilizate sunt trei tipuri de divizoare de tensiune: rezistive, capacitive și mixte.

În continuare se va considera separat fiecare dintre acestea și se urmărește determinarea timpului de răspuns și a caracteristicii de frecvență, ceea ce implică stabilirea schemei electrice a divizorului și deci a parametrilor corespunzători.

În general, parametrii ar trebui considerați distribuiți în lungul fiecărui element, ceea ce ar conduce la relații complicate. Însă tensiunea de măsurat nu depășește câteva sute de volți, ceea ce face ca lungimea fiecărui element să fie mult mai mică decât lungimea de undă a undelor electromagnetice și deci parametrii se pot considera concentrați.

Însă, trebuie avut în vedere că, pentru fiecare element, pe lângă parametrul de bază intervin și parametrii paraziți, care au o influență foarte mare asupra comportării divizorului și deci trebuie luați în considerare.

1.4.1. Divizor de tensiune rezistiv

Acesta constă din două sau mai multe rezistoare electrice conectate în serie. Pentru simplitate se consideră un divizor în două trepte, format din două rezistoare, de rezistențe electrice R_1 , R_2 conectate în serie. Având în vedere toți parametrii paraziți ce ar putea interveni, schema electrică este prezentată în figura 1.7.a..

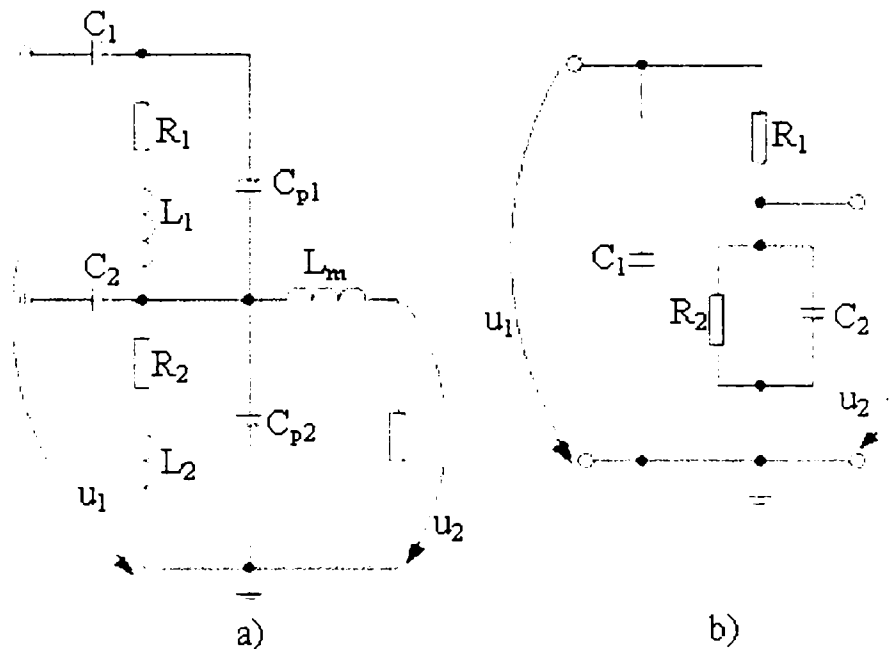


Fig.1.7

Cu L_1 , L_2 s-au notat inductivitățile proprii ale elementelor, cu C_{p1} , C_{p2} capacitățile proprii ale acestora, iar C_1 , C_2 reprezintă capacitățile elementelor față de masă. De asemenea, L_m este inductivitatea buclei de măsurare, iar R_s este rezistența de sarcină.

Dacă fiecare element se realizează din fir de manganină înfășurat bifilar, atunci scade influența ce o au L_1 , L_2 , C_{p1} , C_{p2} și deci se pot neglija acești parametri. Realizând legătura cu instrumentul de măsurare prin intermediul unui cablu coaxial se poate neglija și influența pe care o are L_m . Totodată, dacă instrumentul de măsurare este un osciloscop sau un înregistrator, R_s este rezistența de intrare a acestora, care este mult mai mare decât rezistența echivalentă a divizorului și astfel se poate admite că ieșirea divizorului este în pol.

Pe această bază se obține schema electrică simplificată din figura 1.7.b, ce se va analiza în continuare. Mărimea de intrare este $u_1(t)$ cu transformata Laplace $U_1(s)$, iar mărimea de ieșire este $u_2(t)$ cu transformata Laplace $U_2(s)$.

Se poate verifica ușor că este valabilă relația operațională:

$$U_2(s) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + sR_1R_2C_2} U_1(s) \quad (1.71)$$

cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + sR_1R_2C_2} \quad (1.72)$$

Dacă $u_1(t)$ este un semnal treaptă, în general, de valoare U_1 , atunci $U_1(s) = U_1/s$ și relația (1.71) devine:

$$U_2(s) = \frac{U_1R_2}{s(R_1 + R_2 + sR_1R_2C_2)} \quad (1.73)$$

Aplicând transformata Laplace inversă, se obține răspunsul indicial:

$$u_2(t) = \frac{U_1R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (1.74)$$

unde:

$$T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_2 \quad (1.75)$$

Ca urmare timpul de răspuns este:

$$T_r = T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_2 \quad (1.76)$$

Din relația (1.76) rezultă că, pentru a avea un timp de răspuns cât mai redus este necesar ca R_1 , R_2 să aibă valori cât mai mici. Însă, în felul acesta divizorul are o rezistență electrică echivalentă comparabilă cu cea a arcului electric, cu care este conectată în paralel și prin aceasta modifică condițiile de ardere și de stabilitate ale arcului electric.

Din acest motiv, divizoarele de tensiune rezistive nu se folosesc pentru măsurarea caracteristicilor surselor de sudare și ale arcului electric.

1.4.2. Divizor de tensiune mixt

Un astfel de divizor se obține prin inserierea unor grupuri constituite din rezistoare și condensatoare. De obicei fiecare grup conține un rezistor și un condensator, care, la rândul lor, pot fi conectate în serie sau în paralel.

Ca aplicație se consideră un divizor de tensiune mixt, cu o singură treaptă, ce are două grupuri, unul având parametrii R_1 , C_1 , iar celălalt parametrii R_2 , C_2 .

Mai întâi se analizează un divizor mixt serie, când rezistorul și condensatorul din fiecare grup sunt conectate în serie, așa cum se arată în figura 1.8.a.

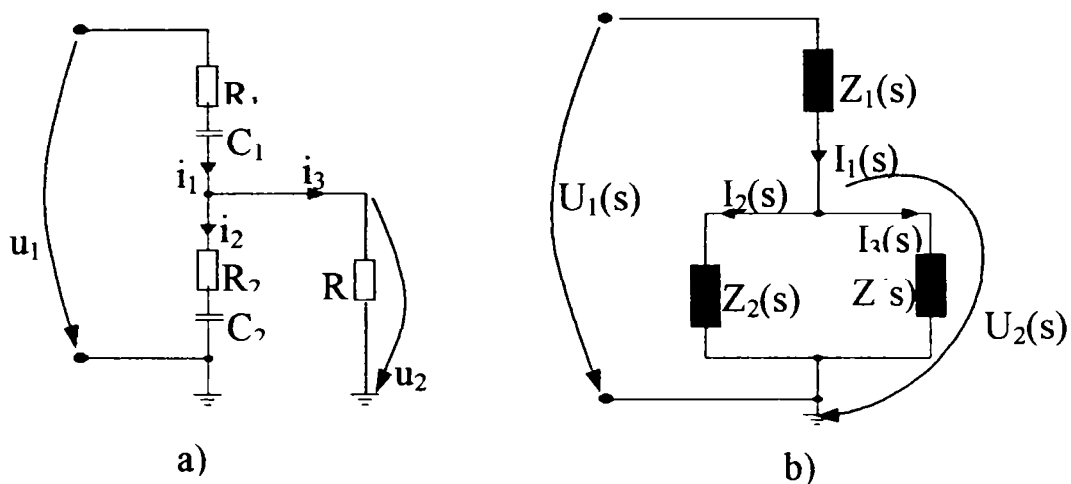


Fig.1.8

În cazul că instrumentul de măsurare este un oscilograf, la ieșirea divizorului se conectează o rezistență de sarcină R , cu valori cuprinse între $1\text{M}\Omega$ și $10\text{M}\Omega$.

Analiza divizorului de tensiune se face cu metoda operațională de rezolvare a circuitelor electrice în regim tranzitoriu. În figura 1.8.b s-a reprezentat schema electrică operațională a divizorului formată din impedanțele operaționale:

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{C_1 s}, \quad Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s}, \quad Z_3(s) = R$$

Mărimile folosite sunt transformatele Laplace notate cu $U_1(s)$, $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$, $U_2(s)$ ale mărimilor reale, respectiv $u_1(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_2(t)$. Pentru stabilirea relațiilor necesare s-a folosit un soft matematic adecvat și în continuare se prezintă secvențele de program utilizate.

Se arată că funcția de transfer are expresia:

$$H(s) = \frac{(R_2 C_2 s + 1) R C_1 s}{(R_1 C_1 C_2 R + R_1 C_1 R_2 C_2 + R C_1 R_2 C_2) D^2 + (R C_2 + R_2 C_2 + R_1 C_1) s + 1} \quad (1.77)$$

Pentru a obține relații mai condensate se introduc notațiile:

$$X = R_1 C_1, \quad Y = R_2 C_2$$

Cu acestea, funcția de transfer devine:

$$H(s) = \frac{(Ys + 1) R C_1 s}{(R C_2 X + X Y + R C_1 Y) s^2 + (Y + R C_2 + X + R C_1) s + 1} \quad (1.78)$$

Se demonstrează că cea mai bună comportare a traductorului în regim dinamic se

obține atunci când $Y=X$, caz în care:

$$H(s) = \frac{RC_1 s}{(X + RC_2 + RC_1)s + 1} \quad (1.79)$$

Transformata Laplace a răspunsului indicial devine:

$$F(s) = \frac{RC_1}{(X + RC_2 + RC_1)s + 1} \quad (1.80)$$

Folosind transformata Laplace inversă, răspunsul indicial este:

$$u_2(t) = \frac{RC_1}{X + RC_2 + RC_1} e^{-\frac{t}{X + RC_2 + RC_1}} \quad (1.81)$$

Se observă că răspunsul indicial este exponențial neamortizat și dacă se calculează timpul de răspuns se obține că aceasta este infinit. Aceasta confirmă faptul că se poate folosi timpul de răspuns numai dacă răspunsul indicial este amortizat. De fapt, datorită conectării în serie a celor două conductoare, în regim stabilizat (curent continuu) tensiunea de ieșire este nulă.

Din acest motiv, pentru dimensionarea traductorului se folosește caracteristica de frecvență, ce se obține din $H(s)$ în care se face substituția $s=j\omega$.

Se obține o funcție complexă a cărei modul este factorul de atenuare, definit ca funcție de frecvența f , prin relația:

$$A(f) = 2\pi f RC_1 \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 f^2 (X^2 + 2XRC_2 + 2XRC_1 + R^2 C_2^2 + 2R^2 C_1 C_2 + R^2 C_1^2) + 1}} \quad (1.82)$$

În continuare se examinează comportarea divizorului la un semnal sinusoidal de amplitudine U_1 și frecvență f . Având în vedere transformata Laplace a unui semnal sinusoidal se obține:

$$U_2(s, X, Y, C_1, C_2, U_1) \text{ substitute, } U_1 = \frac{U_1 \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \rightarrow U_1 \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot (X \cdot s + 1) \cdot \frac{C_1}{((Y \cdot X \cdot C_2 + X \cdot Y \cdot C_1) \cdot s + X \cdot C_2 + Y \cdot C_1)}$$

$$U_2(s, \omega, X, Y, C_1, C_2, U_1) := (1 + X \cdot s) \cdot U_1 \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{C_1}{((X \cdot Y \cdot C_2 + X \cdot Y \cdot C_1) \cdot s + X \cdot C_2 + Y \cdot C_1)}$$

Aplicând transformata Laplace inversă și revenind la parametrii elementelor, se obține răspunsul sinusoidal al divizorului

$$U_2(s, R, R_1, C_1, U_1, f) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot U_1 \cdot R \cdot C_1 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\left[2 \cdot C_1 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) - \exp\left[\frac{-t}{(C_1 \cdot (R_1 + 2 \cdot R))}\right] + 4 \cdot C_1 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \right]}{(4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R_1^2 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R_1 \cdot R + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R^2 + 1)}$$

$$u_2(t, R, R_1, C_1, U_1, f) := 2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot R \cdot U_1 \cdot \frac{\left[2 \cdot C_1 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + 4 \cdot C_1 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) - \exp\left[\frac{-t}{(C_1 \cdot (R_1 + 2 \cdot R))}\right] \right]}{(4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R_1^2 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R_1 \cdot R + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C_1^2 \cdot R^2 + 1)}$$

Dimensionarea divizorului s-a făcut pentru regim sinusoidal urmărindu-se determinarea amplitudinii curentului total și a tensiunii de ieșire.

În acest scop s-a folosit constarea că imaginile în complex simplificat se obțin din imaginile Laplace prin înlocuirea variabilei complexe s cu numărul pur imaginar $j\omega$.

Mersul calculelor se prezintă mai jos

$$U2(s, X, C1, C2, R, U1) \text{ substitute } s=j\omega \rightarrow i \cdot U1 \cdot R \cdot C1 \cdot \frac{\omega}{(i \cdot (X + R \cdot C2 + R \cdot C1) \cdot \omega + 1)}$$

$$U2(\omega, X, C1, C2, R, U1) \text{ complex} \rightarrow -U1 \cdot R \cdot C1 \cdot \omega \cdot \frac{(-\omega \cdot X - \omega \cdot R \cdot C2 - \omega \cdot R \cdot C1)}{[1 + (\omega \cdot X + \omega \cdot R \cdot C2 + \omega \cdot R \cdot C1)^2]} + i \cdot U1 \cdot R \cdot C1 \cdot \frac{\omega}{[1 + (\omega \cdot X + \omega \cdot R \cdot C2 + \omega \cdot R \cdot C1)^2]}$$

$$a(\omega, X, C1, C2, R, U1) := \text{Re}(U2(\omega, X, C1, C2, R, U1))$$

$$b(\omega, X, C1, C2, R, U1) := \frac{\text{Im}(U2(\omega, X, C1, C2, R, U1))}{i}$$

$$a(\omega, X, C1, C2, R, U1) := U1 \cdot R \cdot C1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{(X + R \cdot C2 + R \cdot C1)}{[(X + R \cdot C2 + R \cdot C1)^2 \cdot \omega^2 + 1]}$$

$$b(\omega, X, C1, C2, R, U1) := U1 \cdot R \cdot C1 \cdot \frac{\omega}{[(X + R \cdot C2 + R \cdot C1)^2 \cdot \omega^2 + 1]}$$

Cu acestea s-a calculat amplitudinea tensiunii de ieșire.

$$M(\omega, X, C1, C2, R, U1) := (a(\omega, X, C1, C2, R, U1))^2 + (b(\omega, X, C1, C2, R, U1))^2$$

$$M(\omega, X, C1, C2, R, U1) \text{ collect } \omega \rightarrow U1^2 \cdot R^2 \cdot C1^2 \cdot \frac{\omega^2}{[X^2 + 2 \cdot X \cdot C2 \cdot R + 2 \cdot R \cdot C1 \cdot X + R^2 \cdot C2^2 + 2 \cdot R^2 \cdot C2 \cdot C1 + R^2 \cdot C1^2 \cdot \omega^2 + 1]}$$

$$MU(\omega, X, C1, C2, R, U1) := \sqrt{M(\omega, X, C1, C2, R, U1)}$$

$$MU(\omega, X, C1, C2, R, U1) := \sqrt{U1^2 \cdot R^2 \cdot C1^2 \cdot \frac{\omega^2}{[X^2 + 2 \cdot X \cdot C2 \cdot R + R^2 \cdot C2^2 + 2 \cdot R^2 \cdot C2 \cdot C1 + R^2 \cdot C1^2 + 2 \cdot R \cdot C1 \cdot X \cdot \omega^2 + 1]}}$$

La fel s-a procedat și pentru curentul total

$$I(s, X, Y, C1, C2, U1) \begin{cases} \text{substitute } s=j\omega \\ \text{simplify} \end{cases} \rightarrow U1 \cdot (1 + i \cdot X \cdot \omega) \cdot (1 + i \cdot Y \cdot \omega) \cdot C1 \cdot \frac{C2}{(i \cdot \omega \cdot X \cdot Y \cdot C2 + i \cdot \omega \cdot Y \cdot X \cdot C1 + X \cdot C2 + Y \cdot C1)}$$

$$I(\omega, X, Y, C1, C2, U1) := U1 \cdot (1 + i \cdot X \cdot \omega) \cdot (1 + i \cdot Y \cdot \omega) \cdot C1 \cdot \frac{C2}{(i \cdot \omega \cdot X \cdot Y \cdot C2 + i \cdot \omega \cdot X \cdot Y \cdot C1 + X \cdot C2 + Y \cdot C1)}$$

$$MI(\omega, X, Y, C1, C2, U1) := \sqrt{U1^2 \cdot C1^2 \cdot C2^2 \cdot \frac{[X^2 \cdot Y^2 \cdot \omega^4 + (X^2 + Y^2) \cdot \omega^2 + 1]}{[(X^2 \cdot Y^2 \cdot C2^2 + 2 \cdot X^2 \cdot Y^2 \cdot C2 \cdot C1 + X^2 \cdot Y^2 \cdot C1^2) \cdot \omega^2 + X^2 \cdot C2^2 + 2 \cdot X \cdot C2 \cdot Y \cdot C1 + Y^2 \cdot C1^2]}}$$

Proiectarea s-a făcut pentru o amplitudinea a tensiunii de ieșire de 5V și o amplitudine a curentului total de 100mA.

Mai întâi s-au ales valori estimative ca mai jos.

$$\begin{aligned} f &:= 50 & R &:= 10^6 \\ \omega &:= 2 \cdot \pi \cdot f & U_1 &:= 60 \\ \omega &= 314.159 & C_2 &:= 10^{-6} \\ X &:= 10^{-8} & C_1 &:= 10^{-8} \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații este cel de mai jos:

$$Y_0 = 3.192 \cdot 10^{-3} \quad Y_1 = 9.12 \cdot 10^{-8} \quad X := Y_0 \quad X = 3.192 \cdot 10^{-3} \quad C_1 := Y_1 \quad C_1 = 9.12 \cdot 10^{-8}$$

Given

$$MI(\omega, X, C_1, C_2, R, U_1) = 10^{-1}$$

$$MU(\omega, X, C_1, C_2, R, U_1) = 5$$

$$Y := \text{Find}(X, C_1)$$

Rezolvând s-au obținut:

$$R_1 := \frac{X}{C_1} \quad R_2 := \frac{X}{C_2}$$

$$R_1 = 3.5 \cdot 10^4 \quad C_1 = 9.12 \cdot 10^{-8} \quad R_2 = 3.192 \cdot 10^3 \quad C_2 = 1 \cdot 10^{-6}$$

Aceste valori pot fi realizate practic.

1.5. Metodă și aparat pentru măsurarea diferenței pantelor curentului de sudare

1.5.1. Principiul metodei. Schema electrică bloc a aparatului

Calitatea unei surse de sudare cu arc electric în regim dinamic se stabilește prin analiza curbei de variație în timp a curentului de sudare. Un criteriu frecvent utilizat constă în determinarea raportului:

$$A = \frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha} \quad (1.83)$$

unde $\text{tg}\alpha$, $\text{tg}\beta$ sunt pantele curentului de sudare din momentul imediat anterior, respectiv imediat posterior momentului când curentul de sudare trece prin zero.

Este de notat că la toate sursele de sudare, întâlnite în practică, $\text{tg}\alpha \geq \text{tg}\beta$, așa că întotdeauna $A \leq 1$ și sursa are o calitate cu atât mai bună cu cât A are o valoare mai

apropiată de unitate.

Metoda propune ca în locul raportului să se determine diferența:

$$A = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \quad (1.84.)$$

În acest fel crește precizia de măsurare, deoarece la sursele de sudare realizate în mod corespunzător, pantele $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ au valori foarte apropiate, așa că diferența A , definită prin relația (1.84), are valori foarte apropiate de zero, ce pot fi măsurate cu erori mici, folosind un indicator de nul foarte sensibil.

Sursa de sudare analizată va fi de cea mai bună performanță, când indicatorul de nul are deviație nulă și cu cât se obțin deviații mai mari, calitatea sursei este mai redusă.

Evident că pentru aceasta este necesar ca la intrarea indicatorului de nul să se aplice o tensiune electrică egală sau direct proporțională cu diferența celor două pante.

Pentru aceasta, la fiecare trecere prin zero a curentului de sudare, din curba de variație în timp a acestuia, se rețin numai porțiuni dintr-un interval de timp Δt , de dinaintea, respectiv de după momentul trecerii prin zero, așa cum se arată în figura 1.9.a, unde, pentru simplitatea reprezentării, s-a admis un curent de sudare sinusoidal.

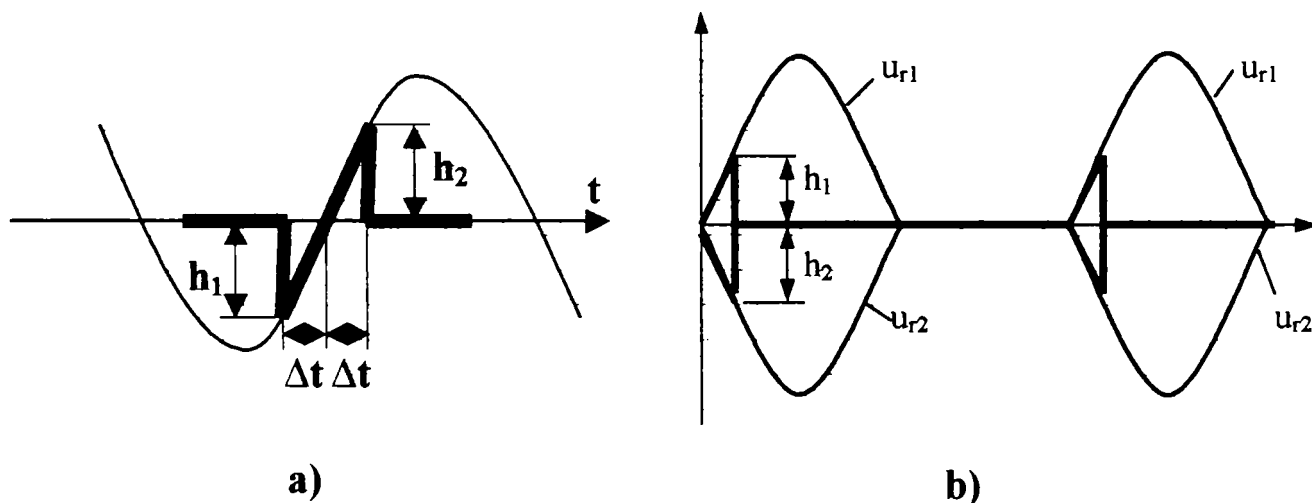


Fig.1.9

Deci, din curentul de sudare se obține o succesiune de impulsuri ce sunt diferite de zero numai în intervalele de timp Δt din vecinătatea fiecărui moment când curentul de sudare trece prin zero, de aceeași perioadă cu acesta. Dacă Δt se alege suficient de mic, atunci impulsurile sunt triunghiulare, cu înălțimile h_1 , h_2 , direct proporționale cu $\operatorname{tg}\alpha$, respectiv cu $\operatorname{tg}\beta$.

Însă, pentru a putea face diferența lor trebuie ca cele două impulsuri să intervină în aceleași momente. În acest scop, din curentul de sudare se obțin două tensiuni

electrice u_1 , u_2 , de aceeași formă ca și curentul de sudare, însă una, de exemplu u_1 , în fază cu acesta, iar cealaltă, u_2 , defazată cu π radiani față de curentul de sudare. În continuare se redresează alternanțele pozitive ale lui u_1 și alternanțele negative ale lui u_2 , obținând tensiunile u_{r1} , u_{r2} reprezentate în fig.1.9.b. Aceste impulsuri intervenind în aceleași momente, prin însumarea lor se obține un impuls triunghiular de înălțime:

$$h = h_1 - h_2 = (tg\alpha - tg\beta)\Delta t = A\Delta t \quad (1.85)$$

Deci, dacă Δt este menținut constant, atunci înălțimea impulsului rezultat este direct proporțională cu mărimea de măsurat A .

În scopul de a realiza cele menționate până acum, se propune un aparat cu schema electrică bloc prezentată în fig.1.10.

Cu ajutorul șuntului S , curentul de sudare I este convertit în tensiunea electrică u , ce trebuie să aibă aceeași formă de variație în timp ca și i .

Blocul D permite obținerea tensiunilor u_1 și u_2 menționate mai sus. Cu redresorul R_1 se redresează numai alternanțele pozitive ale lui u_1 , iar cu R_2 se redresează numai alternanțele negative ale lui u_2 , obținând tensiunile u_{r1} , u_{r2} din fig.1.9.b.

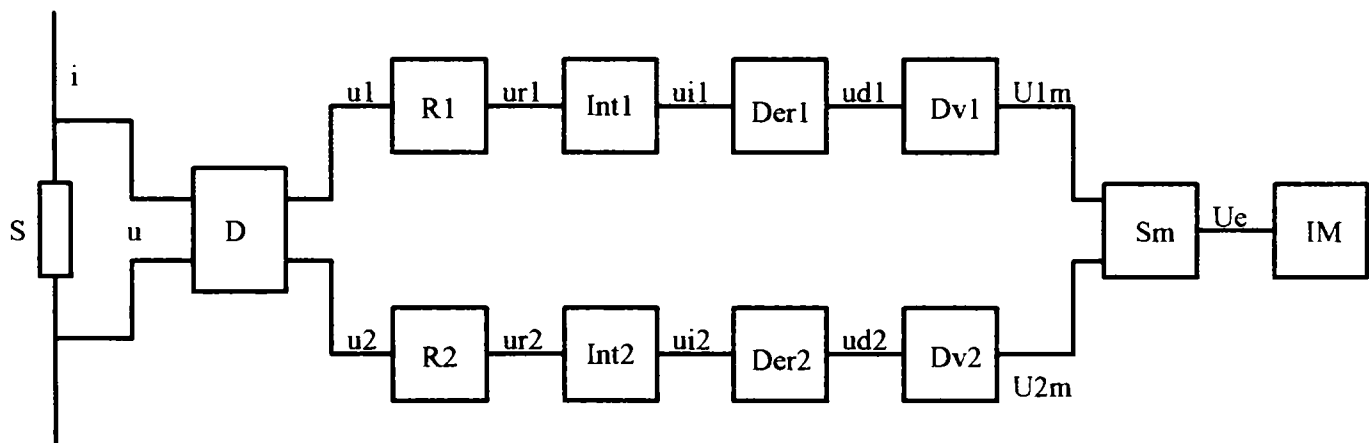


Fig.1.10

Circuitele de integrare Int_1 , Int_2 permit ca, pentru fiecare dintre cele două tensiuni, să se rețină numai câte o porțiune, corespunzătoare intervalului de timp Δt din vecinătatea fiecărui moment când curentul de sudare trece prin zero. Astfel tensiunile u_{i1} , u_{i2} , de la ieșirea circuitelor de integrare, au forma unor impulsuri cu duratele Δt , însă cu o variație în timp neliniară, parabolică. Aducerea lor la forma liniară se realizează cu ajutorul circuitelor de derivare Der_1 , Der_2 și astfel, la ieșirea acestora se obțin impulsuri triunghiulare u_{d1} , respectiv u_{d2} .

Dacă acestea s-ar aplica direct la intrarea sumatorului S_m , atunci la ieșirea acestuia

s-ar obține tensiunea electrică $u_e = u_{d1} - u_{d2}$. Dacă vârfurile lui u_{d1} , u_{d2} ar interveni în același moment, atunci u_e ar avea forma unui impuls dreptunghiular a cărui înălțime ar fi chiar diferența înălțimilor lui u_{d1} , respectiv u_{d2} , deci direct proporțională cu $h_1 - h_2$.

Însă, dacă curentul de sudare nu este alternativ simetric și din cauza erorilor introduse de circuitele de integrare și de derivare, cele două vârfuri nu vor interveni riguros în aceleași momente.

Pentru a elimina acest neajuns, între fiecare circuit de derivare și circuitul de sumare este intercalat câte un circuit de memorare, ce trebuie astfel proiectat încât la ieșire să se obțină câte o tensiune continuă U_{1m} , respectiv U_{2m} , egale cu înălțimea (vârful) lui u_{d1} , respectiv înălțimea (vârful) lui u_{d2} . Practic, cele două circuite de memorare sunt realizate cu detectoare de vârf D_{v1} , respectiv D_{v2} .

1.5.2. Implementarea și proiectarea aparatului

Funcția fiecărui bloc, descrisă mai sus, este realizată prin schema electrică prezentată în fig. 1.11.

Blocul D este realizat cu un transformator electric cu priză mediană T_r . Pentru ca acesta să nu producă deformarea curentului de sudare, miezul se confecționează dintr-un material feromagnetic de înaltă calitate și pentru inducția magnetică se aleg valori mai mici decât la transformatoarele obișnuite, de exemplu 1T.

Blocurile R_1 , R_2 constau din diodele D_{r1} , D_{r2} alese de tipul 1N4048, cărora li s-au prevăzut rezistențe de sarcină de 100Ω .

Celelalte blocuri au la bază amplificatoare operaționale de tip A741, pentru care $U_A = 12V$.

Circuitele de integrare se implementează prin amplificatoarele operaționale U_1 , respectiv U_2 . Dimensionarea lor constă în calculul valorilor rezistențelor electrice și ale capacităților electrice ce intervin în schema electrică.

Dacă se notează cu $U_{in}(\Delta t)$ tensiunea electrică de la intrarea fiecărui amplificator operațional după un timp Δt din momentul trecerii prin zero a curentului de sudare, atunci se arată [12] că este valabilă relația:

$$RC = \frac{U_{in}(\Delta t) \cdot \Delta t}{2U_A} \quad (1.86)$$

Din motivele menționate, pentru Δt trebuie aleasă o valoare cât mai mică, de exemplu a n-a parte din perioada T a curentului de sudare și se obține:

$$RC = \frac{U_{in}(\Delta t) \cdot T}{2nU_A} \quad (1.87)$$

S-a ales $n=40$, care, pentru un curent de sudare cu frecvența industrială $f=50$ Hz, conduce la $\Delta t=50$ μ s.

Prin alegerea unui șunt și a unui transformator în mod corespunzător, în cazul cel mai defavorabil, când curentul de sudare are cea mai mare valoare, se poate considera $U_{in}(\Delta t)=2$ V. Cu aceasta, din relația (1.87) se obține $RC=5 \cdot 10^{-8}$ s.

Pentru a nu obține o valoare exagerat de mică a lui C, ar trebui ca R să aibă o valoare relativ redusă, ceea ce ar conduce la o valoare mare a curentului de intrare al amplificatorului. Punând condiția ca aceasta să nu depășească 40 mA, se obține $R=1$ k Ω , iar $C=40$ nF.

Rezultă că, pentru schema electrică prezentată se aleg: $R_1=R_2=1$ k Ω , $C_1=C_2=40$ nF.

După cum se arată în lucrarea [12], rezistențele R_0 au rolul de a preveni "agățarea" sau "zăvorârea" amplificatorului, ca urmare a tensiunii de decalaj de la intrare, iar rezistențele R_p reduc influența pe care o are decalajul dintre curenții de polarizare asupra tensiunii de ieșire a amplificatorului. De asemenea, valorile acestora se stabilesc pe baza relațiilor:

$$R_0 \gg R; \quad R_p = \frac{RR_0}{R + R_0} \quad (1.88)$$

Tot în aceeași lucrare, cu ajutorul unui program de simulare a circuitelor electrice s-a stabilit valoarea optimă $R_0=500$ k Ω , iar din relația (1.87) a rezultat $R_p=1,34$ k Ω . Deci s-au ales:

$$R_{01}=R_{02}=500 \text{ k}\Omega; \quad R_{p1}=R_{p2}=1,34 \text{ k}\Omega.$$

Circuitele de derivare sunt realizate cu amplificatoarele operaționale U_3 , respectiv U_4 . Rezistențele R_0 au rolul de a preveni intrarea în oscilație a amplificatorului ca urmare a benzii de frecvență limitate, iar rezistențele R_p au același rol ca în cazul circuitelor de integrare.

Pentru ca circuitele de derivare să-și îndeplinească funcționarea menționată, produsul RC trebuie să aibă aceeași valoare ca și în cazul circuitelor de integrare. Ca urmare, s-au ales $R_3=R_4=1$ k Ω , $C_3=C_4=40$ nF.

Deoarece rezistențele R_0 influențează asupra formei tensiunii de ieșire, pentru a

reduce această influență trebuie satisfăcută relația $R_0 \ll R$, ceea ce a condus la valoarea $R_0 = 200 \Omega$, și deci $R_{03} = R_{04} = 200 \Omega$.

Rezistențele R_p satisfac relația (1.87) din care s-a obținut $R_p = 16 \Omega$. Însă, folosind simularea menționată, s-a stabilit valoarea optimă $R_p = 500 \Omega$, și deci $R_{p3} = R_{p4} = 500 \Omega$.

Celelalte două amplificatoare, din fiecare ramură, servesc la realizarea detectoarelor de vârf D_{v1} , respectiv D_{v2} . Proiectarea lor s-a făcut pe baza relațiilor din literatura de specialitate, menționate în lucrarea [12], rezultând valorile rezistențelor și capacităților înscrise în schema electrică.

Circuitul de sumare este realizată cu amplificatorul operațional U_9 , la ieșirea căruia este conectată o rezistență de sarcină de $10 \text{ k}\Omega$, prin care se simulează instrumentul de măsurare. În lucrarea menționată se arată că proiectarea acestui circuit se face pe baza relațiilor:

$$U_e = \frac{R}{R_{in}} U_{in} (\Delta t) \quad (1.89)$$

$$R = \frac{U_e}{I_{in}} \quad (1.90)$$

$$R_p = \frac{R \cdot R_{in}}{2R + R_{in}} \quad (1.91)$$

unde:

- U_e este tensiunea de ieșire a aparatului;

- R_{in} este valoarea comună a celor două rezistențe de intrare R_{in1} , R_{in2} ;

- I_{in} este curentul de intrare al amplificatorului operațional.

Impunând valorile $U_e = 10 \text{ V}$, $I_{in} = 1 \text{ mA}$, din relațiile de mai sus se obțin: $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{in1} = R_{in2} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_p = 900 \Omega$, precizate și în schema electrică.

Este de observat că, dacă s-ar fi utilizat intrarea neinversoare a sumatorului s-ar fi obținut diferența $h_2 - h_1$, însă utilizându-se intrarea inversoare se obține diferența $h_1 - h_2$.

1.5.3. Testarea aparatului

Testarea aparatului s-a făcut cu programul de simulare și analiză a circuitelor electrice menționate anterior.

Programul dispune de un modul, numit Schematics, cu ajutorul căruia s-a reprezentat grafic schema electrică prezentată. Arcul electric, șuntul și transformatorul s-au înlocuit cu două surse de tensiune sinusoidală, care furnizează cele două tensiuni

electrice u_1 , u_2 , ce se aplică la intrările aparatului.

Având în vedere cele precizate mai sus, în fiecare moment de trecere prin zero a celor două tensiuni, panta lui u reprezintă pe $\operatorname{tg}\beta$, iar panta lui u_2 este $\operatorname{tg}\alpha$.

În scopul de a realiza mai multe cazuri de măsurare, pentru amplitudinea lui u_2 s-a ales o singură valoare de 3V, iar pentru amplitudinea lui u_1 s-a folosit o listă de patru valori: 3V, 6V, 9V, 12V, bazându-se pe capacitatea programului de a realiza o analiză secvențială (în pași) pe bază de listă de valori.

În felul acesta, $\operatorname{tg}\beta$ va avea o singură valoare, iar $\operatorname{tg}\alpha$ obține patru valori distincte, și deci se obțin 4 cazuri de măsurare, fiecare constând din valoarea respectivă a lui $\operatorname{tg}\beta$, și câte una dintre cele patru valori ale lui $\operatorname{tg}\alpha$.

Folosind modul SPICE al programului se obțin instrucțiunile programului de simulare, și apoi s-a declanșat simulatorul programului pentru cazul unei analize în timp.

În final, cu modulul PROBE se obțin reprezentările grafice prezentate în fig.12.

Prima imagine prezintă variația în timp a lui u_2 și a lui u_1 pentru cele 4 cazuri.

În a doua imagine, pentru a nu complica desenul, s-a considerat un singur caz, și s-au reprezentat cele două tensiuni redresate u_{r1} , u_{r2} , precum și tensiunile u_{d1} , u_{d2} , obținute la ieșirile celor două circuite de derivare. Este de observat forma de impulsuri triunghiulare a acestora, ceea ce dovedește că proiectarea circuitelor de integrare și derivare s-a realizat în mod corespunzător.

În a treia imagine sunt prezentate tensiunile ce se aplică la intrările sumatorului, iar în ultima imagine apar tensiunea de ieșire a aparatului pentru cele patru cazuri. Făcând abstracție de regimul tranzitoriu, ce apare după conectarea aparatului este de remarcat că cele patru tensiuni cresc pe măsură ce crește $\operatorname{tg}\alpha$, și deci proiectarea aparatului este corespunzătoare scopului.

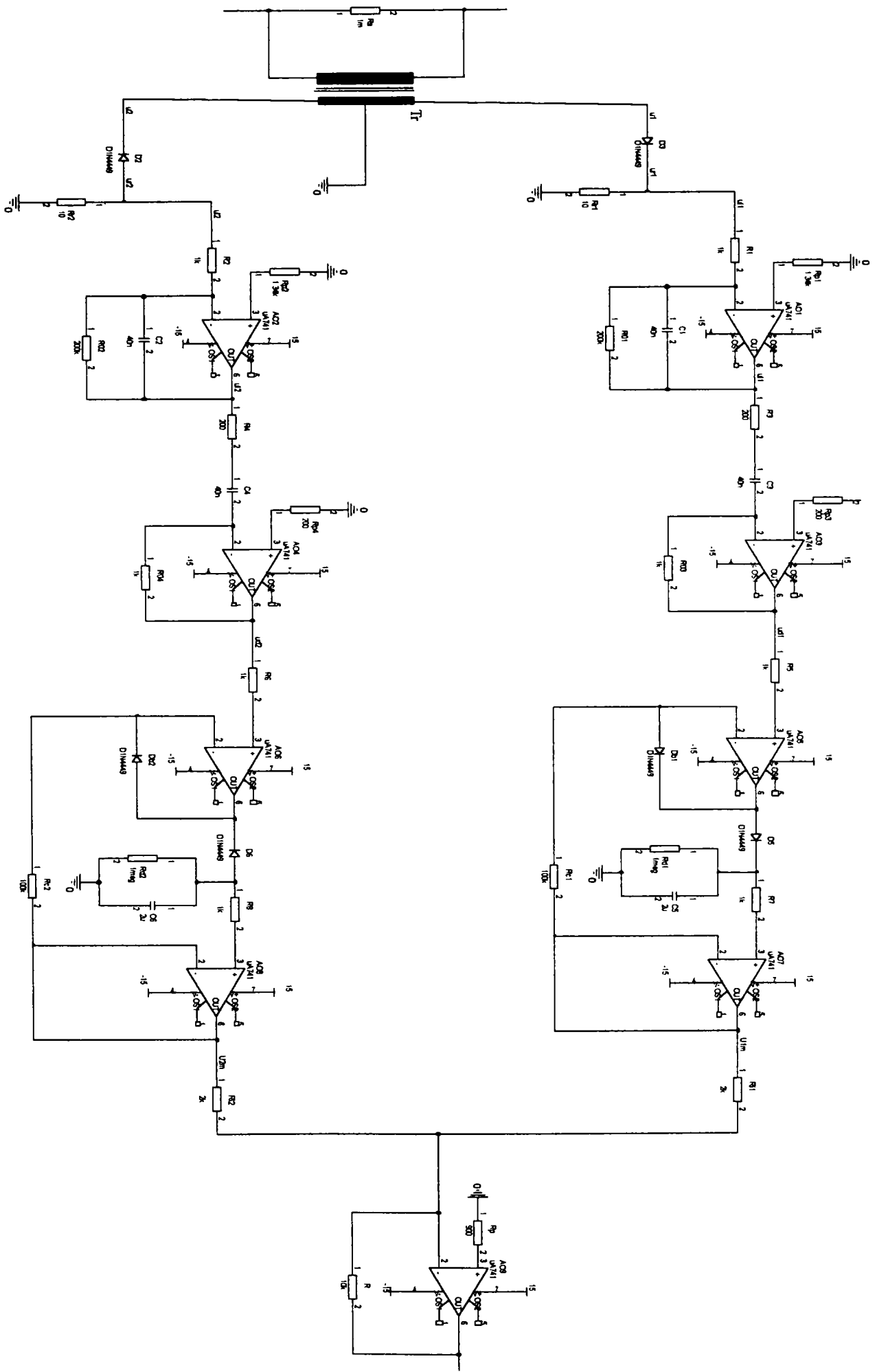


Fig.1.11

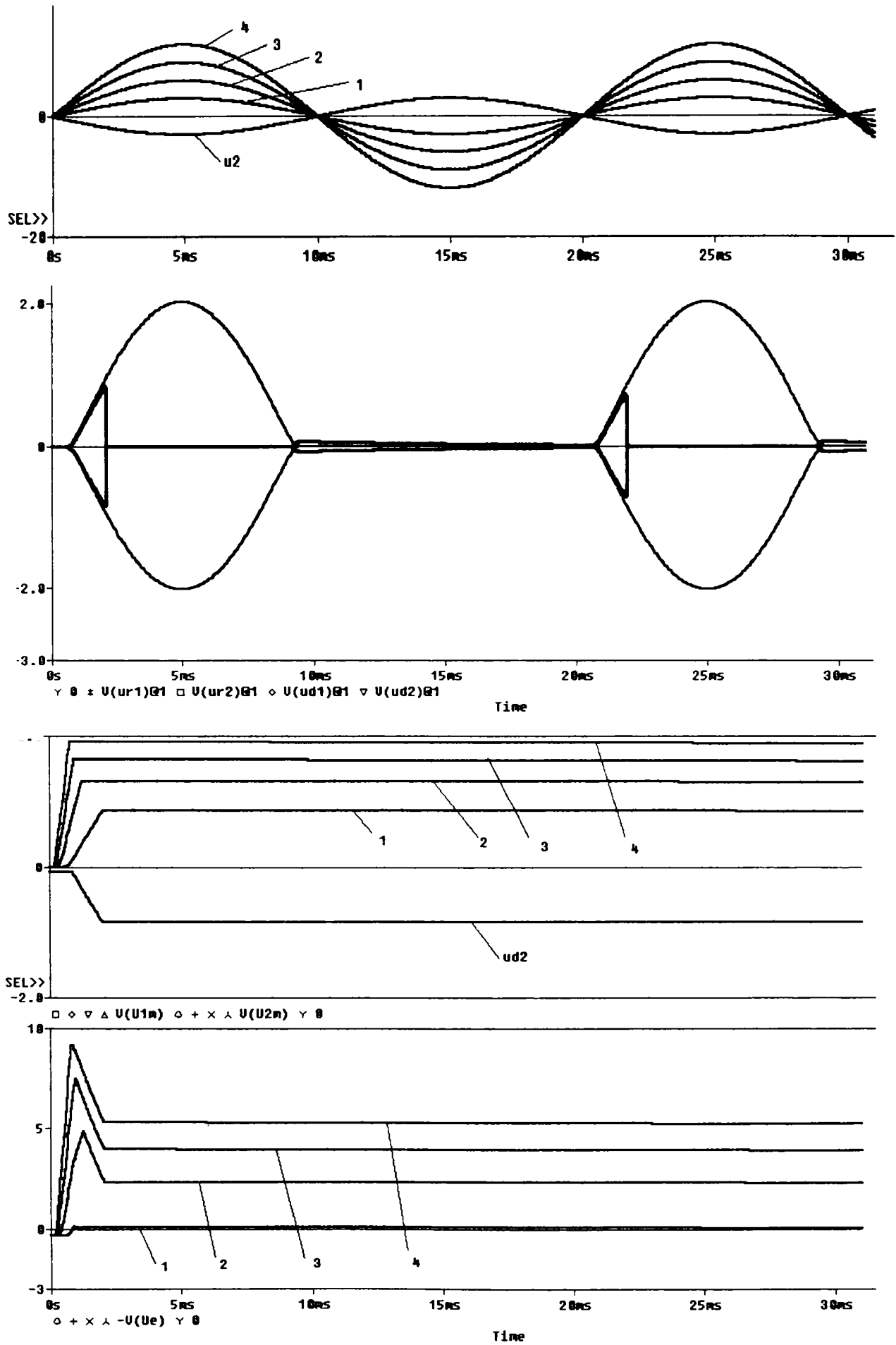


Fig.1.12

Cap.2. MODEL MICROSCOPIC AL ARCULUI ELECTRIC

2.1. Densitățile curenților electrici din coloana arcului electric

În coloana arcului electric purtătorii liberi de sarcină electrică sunt:

- electronii, având sarcina electrică $q_e = -e$ și concentrația n_e ,
- ionii pozitivi sau negativi, de obicei monovalenți, având sarcina electrică $q_i = e$ și concentrația n_i .

Surse de purtători liberi de sarcină electrică sunt următoarele procese ce se produc în coloana arcului electric:

- emisia termică și emisia datorată câmpului electric a unui electrod;
- fotoionizarea și ionizarea peste nivelul metastabil, ce are loc în coloană.

Considerând o ionizare completă cu coloana arcului electric se obține: $n_e = n_i = n$.

De asemenea, dacă q este densitatea de volum a sarcini electrice dintr-un punct oarecare din coloană, atunci $q = q_0 + q_e$, însă din punct de vedere macroscopic coloana arcului electric este neutră, din punct de vedere electric, ceea ce înseamnă ca $q = 0$, deci $q_i = -q_e = e$.

Se arată că, dependența concentrației n , de electroni sau ioni, de temperatura T , dintr-un punct oarecare al coloanei este dată de relația:

$$n = \frac{2p^{1/2}(kT)^{1/4}(2\pi m_e)^{3/4}}{h^{3/2}} \exp\left(\frac{-eU}{2kT}\right), \quad (2.1)$$

unde:

p - presiunea;

k - constanta Boltzman;

h - constanta lui Planck;

m_e, e – masa electronului respectiv sarcina electrică elementară;

U_i – tensiunea (potentialul) de ionizare a mediului din coloana arcului electric;

Un calcul mai exact al concentrației n se poate face cu ajutorul relației lui Saha, care se scrie sub forma:

$$\frac{p\chi^2}{1-\chi^2} = \frac{(4kT)^{5/2}(2Tm_e)^{3/2}}{h^3} \cdot \exp\left(-\frac{eU_i}{kT}\right), \quad (2.2)$$

unde χ este gradul de ionizare al mediului din coloana arcului electric, definit prin relația:

$$\chi = \frac{n}{n_a}, \quad (2.3)$$

în care n_a concentrația atomilor din coloană.

Mișcarea ordonată a purtătorilor liberi de sarcină electrică, deci curentul electric din coloana unui arc electric, poate avea două cauze.

O primă cauză o constituie forțele electrice, pe care le exercită câmpul electric, de intensitate \overline{E} , asupra electronilor, respectiv ionilor din coloana arcului electric.

Pe lângă mișcarea de agitație termică, dezordonată, sub acțiunea forțelor electrice, electronii și ionii vor primi și o mișcare ordonată, numită mișcare de drift, cu viteze medii, \overline{v}_e , respectiv \overline{v}_i , date de relația:

$$\overline{v}_e = \mu_e \overline{E}_1 \quad \overline{v}_i = \mu_i \overline{E}_1, \quad (2.4)$$

unde μ_e , μ_i sunt mobilitățile electronilor, respectiv ionilor.

În urma mișcării de drift ia naștere un curent electric de electroni, cu densitatea \overline{J}_{eE} , și un curent electric de ioni, cu densitatea \overline{J}_{iE} , date de relațiile:

$$\overline{J}_{eE} = n \cdot e \cdot \overline{v}_e \quad \overline{J}_{iE} = n \cdot e \cdot \overline{v}_i \quad (2.5)$$

În relațiile (2.5) se înlocuiesc relațiile (2.4) și se obține:

$$\overline{J}_{eE} = n \cdot e \cdot \mu_e \overline{E}_1 \quad \overline{J}_{iE} = n \cdot e \cdot \mu_i \overline{E}_1 \quad (2.6)$$

O a doua cauză o constituie distribuția neuniformă a purtătorilor liberi de sarcină electrică în coloana arcului electric, ceea ce face să existe o variație spațială a concentrațiilor electronilor n_e , respectiv ionilor n_i .

Conform tendinței naturale a oricărui sistem de a evolua spre o stare de echilibru, apare o deplasare atât a electronilor cât și a ionilor în volumul coloanei arcului electric din zonele în care n_e , respectiv n_i au valori mai mari, spre cele în care acestea au valori mai reduse, cu tendințe de a realiza o egalizare a concentrațiilor electronilor, respectiv ionilor, în tot spațiul ocupat de coloana arcului electric.

În felul acesta, în coloana arcului electric apare un curent de electroni, respectiv ioni, care se numește difuzia electronilor, respectiv difuzia ionilor în volumul coloanei.

Difuzia fiind o mișcare ordonată, în coloana arcului electric apare un curent electric de difuzie de electroni de densitate \bar{J}_{De} și un curent de difuzie de ioni, cu densitatea \bar{J}_{Di} .

Ca mărime caracteristică pentru difuzie, în fiecare punct al coloanei arcului electric, se definește densitatea fluxului de electroni, notat cu \bar{j}_e , respectiv densitatea fluxului de ioni, \bar{j}_i , ca fiind numărul de particule care, în unitatea de timp, trec prin unitatea de suprafață, considerată în jurul aceluși punct, într-o direcție bine precizată.

Având în vedere definițiile mărimilor, rezultă:

$$\bar{J}_{De} = q_e \bar{j}_e = e \bar{j}_e \quad \bar{J}_{Di} = q_i \bar{j}_i = e \bar{j}_i \quad (2.7)$$

La aceste relații se adaugă legea lui Fick:

$$\bar{j}_e = \text{grad}(D_e n_e) \quad \bar{j}_i = \text{grad}(D_i n_i) \quad (2.8)$$

unde D_e , D_i sunt coeficienții de difuzie a electronilor, respectiv a ionilor.

Înlocuind relațiile (2.8) în relațiile (2.7) rezultă:

$$\bar{J}_e = e \cdot D_e \text{grad}(n_e) \quad \bar{J}_i = e \cdot \text{grad}(D_i n_i) \quad (2.9)$$

sau, dacă se admite că D_e , D_i sunt uniform repartizați în spațiu:

$$\bar{J}_{De} = e \cdot D_e \text{grad}(n_e) \quad \bar{J}_{Di} = e \cdot D_i \text{grad}(n_i) \quad (2.10)$$

În ipoteza unei ionizări complete a spațiului ocupat de arcul electric, relațiile (2.10) devin:

$$\bar{J}_{De} = e \cdot D_e \text{grad}(n) \quad \bar{J}_{Di} = -e \cdot D_i \text{grad}(n) \quad (2.11)$$

Pentru calculul coeficienților de difuzie se pot folosi relațiile lui Einstein:

$$D_e = \frac{V_T}{\mu_e} \quad D_i = \frac{V_T}{\mu_i} \quad (2.12)$$

unde $V_T = kT/e$, poartă numele de potențialul termic la temperatura T , care pentru $T=300$ K, are valoarea $V_T = 0,025$ V.

În concluzie, în general, în cazul unui regim nestaționar, în coloana arcului electric, există un curent de electroni, cu densitatea \bar{J}_e și un curent de ioni, cu densitatea \bar{J}_i , ce sunt date de relațiile:

$$\bar{J}_e = \bar{J}_{eE} + \bar{J}_{De} \quad \bar{J}_i = \bar{J}_{iE} + \bar{J}_{Di} \quad (2.13)$$

sau înlocuind relațiile (2.6) respectiv (2.10), rezultă:

$$\bar{J}_e = n_e \mu_e \bar{E} + e D_e \text{grad}(n_e) \quad \bar{J}_i = n_i \mu_i \bar{E} + e D_i \text{grad}(n_i) \quad (2.14)$$

sau, în ipoteza unei ionizări complete:

$$\bar{J}_e = n_e e \mu_e \bar{E} + e \bar{D} \text{grad}(n_e) \quad \bar{J}_i = n_i e \mu_i \bar{E} - e \bar{D} \text{grad}(n_i) \quad (2.15)$$

Densitatea curentului electric va fi:

$$\bar{J} = \bar{J}_e + \bar{J}_i \quad (2.16)$$

În cele ce urmează se prezintă alte ecuații ale arcului electric, însă forma pe care o au acestea depinde de sistemul de referință ales.

Chiar dacă nu se va mai preciza, trebuie subînțeles că se utilizează un sistem de referință legat unul dintre electronii arcului electric și se admite că acesta este inerțial.

Față de un astfel de sistem de referință coloana arcului electric, în ansamblul său, este în repaus, prin care trebuie înțeles că centrul de masă al acestuia este imobil.

Consecința este că, în acest caz, în derivatele în raport cu timpul ale mărimilor nu intervin componentele convective, ce ar apărea, dacă ecuațiile respective s-ar scrie față de un sistem de referință în raport cu care coloana arcului, în ansamblul său, ar fi în mișcare, adică centrul de masă al acestuia s-ar deplasa cu o anumită viteză.

În concluzie, derivata în raport cu timpul a oricărei mărimi de stare se reduce la derivată, în general parțială, a acelei mărimi în raport cu momentul oarecare t .

Mai trebuie precizat faptul că toate ecuațiile se stabilesc pentru un volum material din coloana arcului electric, ce se va nota cu Ω^* , coincide cu volumul de control, notat cu Ω , care este fix în raport cu sistemul de referință ales. Din acest motiv, toate ecuațiile se vor stabili pentru volumul de control Ω , al cărui element de volum se va nota cu $d\Omega$.

2.2. Ecuații de continuitate

O primă ecuație de continuitate se obține prin aplicarea legii conservării sarcinii electrice libere, pentru volumul de control, care, sub formă globală, se exprimă prin relația:

$$\int_{\Omega} \text{div} \bar{J} d\Omega = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} q d\Omega \quad (2.17)$$

Având în vedere cele precizate, forma locală a legii se va exprima prin relația:

$$\text{div} \bar{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

Însă în ansamblul său, coloana arcului este neutră din punct de vedere electric, adică $q=0$ și relația (2.18) devine:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = 0$$

sau

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{J}}_i + \bar{\mathbf{J}}_e) = 0 \quad (2.19)$$

O a doua ecuație de continuitate se obține prin aplicarea legii conservării masei pentru volumul de control Ω .

Mai întâi se definește densitatea de masă, dintr-un punct oarecare al coloanei arcului electric, notat cu ρ_d , prin relația:

$$\rho_d = n_e m_e + n_i m_i, \quad (2.20)$$

unde m_e , m_i sunt masa unui electron respectiv ion.

Se mai definește viteza de transport a masei, notată cu \bar{v}_m , prin relația:

$$\bar{v}_m = \frac{n_e m_e \bar{v}_e + n_i m_i \bar{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i}, \quad (2.21)$$

unde \bar{v}_e , \bar{v}_i sunt vitezele electronilor, respectiv ionilor.

Cu aceasta, legea conservării masei, pentru un punct oarecare, din coloana arcului electric, se scrie:

$$\operatorname{div}(\rho_d \bar{v}_m) + \frac{\partial \rho_d}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

A treia ecuație de continuitate se obține prin aplicarea legii conservării numărului de particule de electroni, respectiv de ioni, pentru volumul de control considerat.

Se arată că, pentru un punct oarecare din coloana arcului electric, această lege de conservare se scrie:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\operatorname{div}(D_e \operatorname{grad} n_e) + G_e - R_e \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(D_i \operatorname{grad} n_i) + G_i - R_i,$$

unde:

G_i , G_e densitățile de volum ale vitezelor de generare ale electronilor, respectiv ionilor și reprezintă numărul de electroni, respectiv ioni generați în unitatea de timp și în unitatea de volum din jurul punctului considerat;

R_e , R_i sunt densitățile de volum ale vitezelor de recombinare ale electronilor, respectiv ionilor și reprezintă numărul de electroni, respectiv de ioni, care se recombina, în unitatea de timp, în unitatea de volum, din jurul punctului considerat.

Admițând că D_e , D_i sunt uniform repartizați în spațiu, relațiile devin:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -D_e \nabla^2 n_e + G_e - R_e \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -D_i \nabla^2 n_i + G_i - R_i$$

2.3. Ecuatii de conservare

O primă ecuație de conservare se obține prin aplicarea principiului conservării energiei pentru volumul de control, conform căreia, energia dezvoltată în unitatea de timp în volumul de control Ω , acoperă variația în unitatea de timp a energiei interne din Ω , energie care, în unitatea de timp, se transferă, prin suprafața ce mărginește pe Ω , la mediu din jurul arcului electric.

Se are în vedere că astfel de transformări de energie au loc: prin conducție termică însă și prin radiație ca urmare a radiațiilor ce le emit atomii aflați într-o stare de excitație metastabilă, când revin din starea energetică, fundamentală. De asemenea, au loc transformări de energie în procesul de ionizare, ce se produce în coloana arcului electric.

Pe baza celor arătate mai sus, pentru un punct oarecare din coloana arcului, se obține ecuația:

$$(\bar{J}_e + \bar{J}_i) \cdot \bar{E} = \rho_d c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{grad} T) + P_R + e U_i \frac{\partial n}{\partial t} - \text{div}(U_i \bar{J}_e), \quad (2.25)$$

unde P_R este puterea radiată de unitatea de volum din jurul punctului considerat, c este căldura specifică, iar celelalte mărimi au semnificațiile precizate până acum.

O ultimă ecuație se obține prin aplicarea principiului al doilea al dinamicii pentru volumul de control considerat.

Considerând cazul mai general când, în coloana arcului electric, pe lângă câmpul electric de intensitate \bar{E}_1 există și un câmp magnetic de intensitate \bar{B} și neglijând forțele gravitaționale, pentru un punct oarecare din coloana arcului electric, se obține:

$$n_e m_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} = -n_e e (\bar{E} + \bar{v}_e \times \bar{B}) - \nabla p + \bar{P}_{ei} \quad (2.26)$$

$$n_i m_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = -n_i e (\bar{E} + \bar{v}_i \times \bar{B}) - \nabla p + \bar{P}_{ie}, \quad (2.27)$$

unde p este presiunea din punctul considerat, iar $\bar{P}_{ei}, \bar{P}_{ie}$ sunt impulsurile câștigate de un electron în urma ciocnirii cu un ion, respectiv de un ion în urma ciocnirii cu un electron.

Pentru ciocnirile elastice $\bar{P}_{ei} = 0; \bar{P}_{ie} = 0$.

Setul complet de ecuații ale arcului electric este construit din relațiile (2.9), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27).

Cu ajutorul acestor ecuații se poate calcula exact toate mărimile și cu acestea se descrie complet funcționarea arcului electric, dacă se cunosc valorile limită și valorile unora dintre mărimi. Cum aceste valori, care, în general, depind de temperatura T , presiunea p , intensitatea câmpului electric \bar{E} , sunt imprecis cunoscute, soluționarea acestui sistem nu este în general posibilă.

Din acest motiv, în continuare, se prezintă modele macroscopice ale arcului electric.

Cap.3. MODELE MACROSCOPICE ALE ARCULUI ELECTRIC

3.1. Scopul modelării arcului electric

În cadrul acestei lucrări, arcul electric, ca element component al unei instalații de sudare electrică prin topire în mediu de gaz protector, este examinat doar sub aspect energetic, ca având rolul de a furniza energia necesară procesului de sudare considerat.

Ca urmare, nu interesează procesele ce se produc în coloana arcului electric și în vecinătatea electrozilor, ci arcul electric este considerat ca un conductor electric parcurs de curentul de sudare, care este impus. Energia necesară procesului de sudare apare ca urmare a efectului termic ce se manifestă în interiorul acestui conductor electric.

În concluzie, arcul electric se modelează printr-un conductor electric, de o anumită formă și anumite dimensiuni și se urmărește determinarea căldurii dezvoltată în unitatea de timp și în unitatea de volum, dintr-un punct oarecare al conductorului, ce se va numi puterea dezvoltată specifică. Deoarece dezvoltarea de căldură apare ca urmare a unui proces de natură electromagnetică, se impune realizarea unui studiu a câmpului electromagnetic generat de curentul electric ce străbate acest conductor electric. Din acest motiv, în continuare se prezintă modelele matematice ale câmpului electromagnetic, din care să se poată determina puterea dezvoltată specifică, precum și alte mărimi, cum ar fi căderea de tensiune electric pe arcul electric și intensitatea câmpului electric din acesta. În acest scop, trebuie să se cunoască permeabilitatea magnetică relativă μ_r și rezistivitatea electrică ρ a arcului electric. Se face ipoteza că arcul electric este un mediu omogen și izotrop, ceea ce înseamnă că cele două caracteristici de material sunt aceleași pentru orice punct din coloana arcului electric. Însă, nu se poate neglija dependența lor de temperatura T a arcului electric, și deci trebuie să se cunoască $\mu_r(T)$ și $\rho(T)$.

Pentru a examina anumite chestiuni legate de funcționarea sistemului format de sursa de alimentare și arcul electric, în ultimul paragraf al acestui capitol se prezintă un model al arcului electric ca element de circuit electric. Astfel de chestiuni se referă la stabilitatea sistemului, arderea continuă a arcului electric, sau supratensiunile ce apar în regim dinamic. Modelul urmărește determinarea dependenței dintre tensiunea arcului electric u_a și intensitatea curentului de sudare i_s , adică a funcției $u_a(i_s)$. Din aceasta, impunând o anumită formă de variație în timp a uneia, se poate determina variația în timp a

celorlalte.

3.2. Modelul legilor teoriei macroscopice a electromagnetismului

3.2.1. Ecuațiile modelului

Acest model se obține, prin exprimarea locală a legilor de evoluție a câmpului electromagnetic.

Legea circuitului magnetic și legea inducției electromagnetice se referă la o linie închisă Γ și la o suprafață deschisă ce se sprijină pe Γ , ce va fi notată cu S_Γ .

Considerând cazul mai general când cele două legi se scriu față de un sistem de referință în raport de care Γ și S_Γ se află în mișcare, matematic, cele două legi, se exprimă prin relațiile:

$$\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \int_{S_\Gamma} \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{s}} + \int_{S_\Gamma} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} + \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{v}}) \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (3.1)$$

$$\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{s}} + \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot d\bar{\mathbf{l}}, \quad (3.2)$$

unde notațiile au semnificațiile cunoscute din literatura de specialitate, iar $\bar{\mathbf{v}}$ este viteza unui punct oarecare de pe Γ , respectiv de pe S_Γ , față de sistemul de referință considerat.

Termenii din membrul drept al relației (3.1) au, respectiv, semnificațiile de: curent de conducție, curent de deplasare, curent de convecție, curent Röntgen teoretic.

De asemenea, cei doi termeni din membrul drept al relației (3.2), reprezintă tensiunea electromotoare indusă prin pulsații, respectiv prin mișcare.

Legea fluxului magnetic, se referă la o suprafață închisă, ce se va nota cu S_I și se exprimă prin relația:

$$\oint_{S_I} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0 \quad (3.3)$$

Legea fluxului electric și legea conservării sarcinii electrice libere se referă tot la o suprafață închisă S_I și la domeniul (volumul) Ω mărginit de acesta. Față de același sistem de referință, menționat mai sus, expresiile matematice ale celor două legi sunt:

$$\oint_{S_I} \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \int_{\Omega} \rho \cdot d\Omega \quad (3.4)$$

$$\oint_{S_I} \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) d\Omega \quad (3.5)$$

unde $d\Omega$ este un element de volum a lui Ω . Aplicând transformări de integrare corespun-

zătoare, se obțin următoarele forme locale ale legilor:

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \rho\bar{\mathbf{v}} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{v}}) \quad (3.6)$$

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.8)$$

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{D}} = \rho \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}), \quad (3.10)$$

unde prin rot, div se înțeleg operatorii diferențiali rotor, respectiv, divergență.

Dacă la relațiile de mai sus se adaugă ecuațiile constitutive ale mediului respectiv, se obține sistemul complet al ecuațiilor câmpului electromagnetic.

Este de observat că, aceste ecuații nu sunt independente una de alta.

Într-adevăr, dacă se aplică operatorul div ambilor membri ai relației (3.6) și se ține cont că divergența rotorului oricărui câmp vectorial este nulă, și se are în vedere relația (3.9), se obține egalitatea (3.10).

În același mod, din relația (3.7) se obține relația (3.8), dacă se face abstracție de o constantă aditivă independentă de timp.

Rezultă că între cele cinci ecuații de mai sus există două relații de legătură, ceea ce înseamnă că numai trei dintre ele sunt independente.

Pentru majoritatea aplicațiilor practice se folosește următorul sistem complet de ecuații independente:

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{D}}}{\partial t} + \rho\bar{\mathbf{v}} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{v}}) \quad (3.11)$$

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.13)$$

De asemenea, în cele mai multe aplicații industriale, se pot neglija densitățile curenților de convecție și Röntgen teoretic, față de cele ale curenților de convecție și de deplasare, rezultând sistemul:

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.16)$$

În prezenta lucrare, se presupune că se studiază câmpul electromagnetic dintr-un domeniu Ω , față de un sistem de referință, în raport de care punctele domeniului sunt fixe.

De asemenea, se admite că în punctele domeniului se poate neglija densitatea curentului de deplasare față de cea a curentului de conducție, adică se face ipoteza că fenomenele electromagnetice ce se produc în domeniul studiat, se află într-un regim quasistaționar anamagnetic.

Ce urmare, sistemul de ecuații folosit va avea forma:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}_a + \bar{\mathbf{J}} \quad (3.17)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3.18)$$

În membrul drept al relației (3.17) s-a ținut cont de faptul că, în general, în mediile conductoare ale domeniului considerat, pot exista două categorii de curenți electrici de conducție.

O primă categorie o formează curenții electrici de aducție, de densitate $\bar{\mathbf{J}}_a$, care sunt independenți de fenomenele electromagnetice, ce au loc în domeniul considerat. Acești curenți pot fi impuși prin enunțul problemei, când se dă densitatea lor $\bar{\mathbf{J}}_a$, sau sunt determinați de cauze exterioare cum ar fi existența, în porțiunile electrice conductoare respectiv, a unui câmp electric coulombian, determinat de tensiuni electrice aplicate acestor porțiuni. În unele lucrări, se spune că $\bar{\mathbf{J}}_a$ reprezintă densitatea curentului electric de excitație.

A doua categorie o formează curenții electrici induși, de densitate $\bar{\mathbf{J}}$, determinați de fenomenul de inducție electromagnetică, ce are loc în domeniul considerat, care, în ipotezele menționate apare ca urmare a variației în timp a inducției magnetice $\bar{\mathbf{B}}$.

De asemenea, în ecuația (3.18) prin $\bar{\mathbf{E}}$ trebuie înțeleasă intensitatea câmpului electric indus deci nu a celui coulombian. Aceasta deoarece câmpul electric coulombian este potențial și rotorul sau este nul.

Evident că nu trebuiesc pierdute din vedere formele locale ale legii fluxului electric și legii conservării sarcinii electrice libere, care, în ipotezele menționate, au forma:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{D}} = \rho \quad (3.19)$$

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{J}}_a + \bar{\mathbf{J}}) = 0 \quad (3.20)$$

Ecuția (3.19) va fi utilizată în cazul problemelor de câmp electric, iar (3.20) poate fi utilizată ca ecuație de verificare, sau ca ecuație a sistemului, în locul ecuației (3.18).

În ceea ce privește ecuațiile constitutive, se face ipoteza că în domeniul considerat se află un mediu izotrop, omogen pe porțiuni și cel mult neliniar din punct de vedere magnetic.

Ca urmare, din punct de vedere al câmpului magnetic, se obține ecuația constitutivă corespunzătoare:

$$\bar{H} = v\bar{B} - \frac{v}{v_0}\bar{M}_p, \quad (3.21)$$

unde prin v trebuie înțeleasă, în general, funcția $v(B)$.

De asemenea, se admite că, în domeniul considerat, nu există câmp electric imprimat și, din punct de vedere electrocinetic, mediul este izotrop, omogen pe porțiuni și cel mult neliniar, când se adaugă ecuația constitutivă:

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}, \quad (3.22)$$

unde, în general, prin σ , trebuie înțeleasă funcția $\sigma(E)$.

Din cele prezentate mai sus, rezultă că, atât membrul drept al relației (3.13) cât și ecuația constitutivă (3.21), depind de mediul în care se află punctul considerat.

În general, domeniul considerat Ω , poate fi constituit din trei porțiuni distincte din punct de vedere al proprietăților față de câmpul electromagnetic, prezentate în fig.3.1.

Partea notată cu Ω_0 este formată din regiuni ce au permeabilitatea magnetică egală cu cea a vidului μ_0 sau foarte apropiată de aceasta, adică la care $\mu_r \approx 1$. Se spune că zonele respective sunt nepermeabile din punct de vedere magnetic. De obicei, aceste regiuni se referă la spațiul liber din jurul celorlalte părți, în care se admite că se află aer, pentru care se poate considera că $\mu = \mu_0$ și este neconductor electric, adică $\sigma = 0$.

De asemenea, tot din Ω_0 fac parte și regiunile Ω_a în care există curenți electrici de aducție, cu densitatea \bar{J}_a , numite și surse de curent sau excitații ale câmpului magnetic. Acestea constau din conductori de cupru sau aluminiu, pentru care $\mu \approx \mu_0$, presupuși a fi filiformi, astfel încât se poate neglija curenții electrici induși față de cei de aducție. De exemplu, o astfel de regiune poate fi o bobină de excitație filiformă.

Porțiunea Ω_1 cuprinde regiunile de materiale ce au $\mu \gg \mu_0$, adică $\mu_r \gg 1$, care se numesc regiuni permeabile, în care nu există nici un fel de curenți electrici, însă au o magnetizare permanentă, caracterizată local prin \bar{M}_p . Aceste regiuni se referă la magneți permanenți conținuți în domeniul Ω .

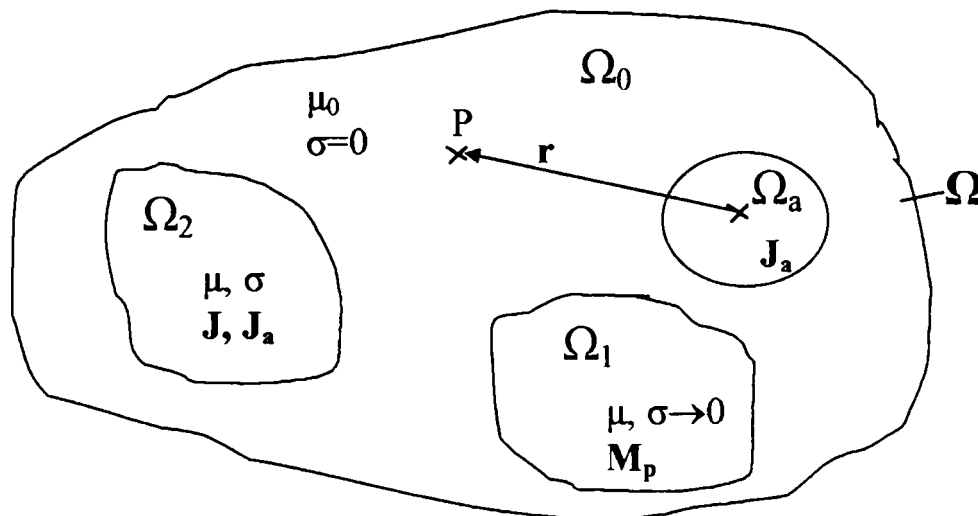


Fig.3.1

Porțiunea Ω_2 cuprinde toate regiunile conductoare electric, deci din materiale cu conductivitate electrică $\sigma \neq 0$ și finită, care nu pot fi considerate filiforme. De asemenea, cel puțin o parte dintre aceste regiuni pot fi permeabile din punct de vedere magnetic, adică sunt realizate din materiale ce au $\mu \gg \mu_0$, $\mu_r \gg 1$, cum sunt materialele feromagnetice.

Important este faptul că doar în astfel de regiuni intervin curenții induși (turbionari) cu densitatea \bar{J} , însă, pot exista și curenți de aducție cu densitatea \bar{J}_a . Ele sunt reprezentate de conductorii masivi și de miezurile din material feromagnetic aflat în domeniul Ω .

Pentru porțiunea Ω_2 , se rezolvă așa numita problemă a curenților turbionari.

Pentru porțiunea Ω_0 , deoarece nu intersectează câmpul electric indus, se scrie doar ecuația (3.17) sub forma:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}_a, \quad (3.23)$$

la care se adaugă ecuația constitutivă:

$$\bar{H} = \nu_0 \bar{B} \quad (3.24)$$

Din ecuațiile (1.52), (1.53) se obține:

$$\text{rot}(\nu_0 \bar{B}) = \bar{J}_a \quad (3.25)$$

Rezolvarea ecuației (3.21) se poate face cu relația Biot – Savart – Laplace:

$$\bar{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_a} \frac{\bar{J}_a \times \bar{r}}{r^3} d\Omega, \quad (3.26)$$

unde \bar{H} este intensitatea câmpului magnetic dintr-un punct oarecare P a lui Ω_0 , iar integrala se referă la domeniul Ω_0 , în care există curenți de aducție și \bar{r} este vectorul de poziție a lui P față de un punct oarecare a lui Ω_0 .

Evident că \bar{J}_a trebuie să satisfacă ecuația (1.49) adică:

$$\operatorname{div} \bar{J}_a = 0 \quad (3.27)$$

Satisfacerea ecuației (3.27) trebuie avută în vedere atunci când se impune \bar{J}_a prin enunțul problemei. Însă, dacă se impune tensiunile aplicate porțiunilor în care există curenți de aducție, cum ar fi cele aplicate la bornele bobinelor de excitație filiforme, mai întâi, pentru aceste porțiuni se rezolvă o problemă de conducție electrică, din care se determină \bar{J}_a , care se folosește ca mărime de intrare pentru problema de câmp magnetic.

Pentru regiunea Ω_1 se scrie:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= 0 \\ \bar{H} &= \nu \bar{B} - \frac{1}{\nu_0} \nu \bar{M}_p, \end{aligned}$$

din care se obține:

$$\operatorname{rot}(\nu \bar{B}) = \frac{1}{\nu_0} \operatorname{rot}(\nu \bar{M}_p) \quad (3.28)$$

Dacă se consideră domeniul obținut prin reuniunea părților Ω_0 și Ω_1 , notat cu $\Omega_0 + \Omega_1$, se obține:

$$\operatorname{rot}(\nu \bar{B}) = \bar{J}_a + \frac{1}{\nu_0} \operatorname{rot}(\nu \bar{M}_p), \quad (3.29)$$

la care se adaugă ecuația constitutivă:

$$\bar{H} = \nu \bar{B} - \frac{1}{\nu_0} \nu \bar{M}_p \quad (3.30)$$

Cunoscând \bar{J}_a , \bar{M}_p din (3.29) se poate afla \bar{B} , iar din (3.30) rezultă \bar{H} .

Pentru porțiunea Ω_2 , presupunând că nu există curenți de aducție se scrie:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} \quad (3.31)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (3.32)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = 0, \quad (3.33)$$

la care se adaugă ecuațiile constitutive:

$$\bar{\mathbf{H}} = \nu \bar{\mathbf{B}} \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}} \quad (3.35)$$

Folosind ecuațiile constitutive, se obține:

$$\operatorname{rot}(\nu \bar{\mathbf{B}}) = \sigma \bar{\mathbf{E}} \quad (3.36)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3.37)$$

În principiu, relațiile (3.36), (3.37) formează un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute și prin rezolvarea acestora se pot afla mărimile $\bar{\mathbf{B}}$ și $\bar{\mathbf{E}}$, iar din (3.34), (3.35) se află $\bar{\mathbf{H}}$ și $\bar{\mathbf{J}}$.

3.2.2. Condițiile de interfață (de trecere) și de limită

Așa cum se observă din paragraful precedent, fiecare mărime necunoscută intervine într-o ecuație cu derivate parțiale și prin integrarea acesteia se introduc constante de integrare, iar pentru determinarea acestora trebuie stabilite relații suplimentare, pe care să le satisfacă mărimea necunoscută.

De asemenea, relațiile suplimentare sunt necesare pentru ca soluția găsită să fie unică.

Astfel de relații suplimentare se obțin pe baza condițiilor de interfață (de trecere) și de limită, care fac obiectul prezentului paragraf.

Condiții de interfață se referă la relațiile dintre valorile mărimilor necunoscute în punctele aflate în imediata vecinătate suprafeței de separație dintre două medii cu proprietăți diferite, situate de o parte și de cealaltă a acesteia. Astfel de suprafețe sunt acelea care se referă la porțiunile menționate ($\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$).

În fig. 3.2 s-au notat cu 1, 2 cele două medii, iar cu S_{12} o porțiune din suprafața de separație dintre acestea:

Pe suprafața S_{12} se alege un punct curent P, în care se reprezintă versorul $\bar{\mathbf{n}}$ al normalei duse în P la S_{12} și versorul $\bar{\mathbf{t}}$ al tangentei, obținută prin intersecția planului tangent, dus în P la S_{12} , cu planul determinat de $\bar{\mathbf{n}}$ și de mărimea ce se analizează. Dacă cu $\bar{\mathbf{b}}$ se notează versorul binormalei, atunci: $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{t}} \times \bar{\mathbf{n}}$

În general, sensul lui $\bar{\mathbf{n}}$ se poate alege arbitrar, însă este bine să se aleagă ca fiind același cu sensul de referință al câmpului analizat, de exemplu, de la mediul 1 înspre

mediul 2, ca în fig.3.2.

Pe normală se alege punctele P_1, P_2 , situate în imediata vecinătate a lui P , cu P_1 pe fața lui S_{12} dinspre mediul 1, iar P_2 pe fața lui S_{12} dinspre mediul 2.

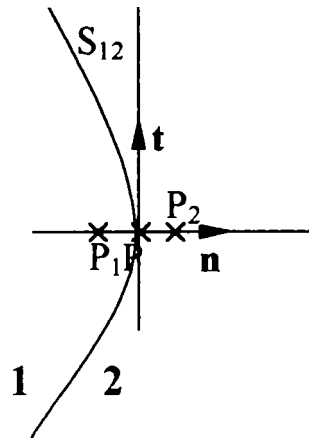


Fig.3.2

Valorile mărimilor în cele două puncte se notează adăugând la simbolul acelei mărimi indicele 1, pentru P_1 , respectiv indicele 2 pentru P_2 . Condițiile de interfață (de trecere) se referă tocmai la egalitățile pe care le satisfac aceste valori și se obțin, prin scrierea în punctul P a relațiilor prezentate în paragraful precedent.

Însă, întrucât prin aplicarea operatorilor volumetrici rot , div se obțin nedeterminări, se folosesc operatorii superficiali (de suprafață) rot_s , div_s , care, în general, pentru o mărime \bar{X} au expresiile:

$$\text{div}_s \bar{X} = X_{2n} - X_{1n} = \bar{X}_2 \cdot \bar{n} - \bar{X}_1 \cdot \bar{n} \quad (3.38)$$

$$\text{rot}_s \bar{X} = X_{2t} - X_{1t} = \bar{n} \times \bar{X}_2 - \bar{n} \times \bar{X}_1, \quad (3.39)$$

unde X_{1n} , X_{2n} sunt valorile componentelor după normală ale valorii \bar{X}_1 a mărimii \bar{X} în P_1 , respectiv valorii \bar{X}_2 a mărimii \bar{X} în P_2 , iar X_{1t} , X_{2t} sunt componentele după tangentă ale aceleiași valori.

Aplicând legea fluxului magnetic pentru P , se obține $\text{div}_s \bar{B} = 0$ și, ținând cont de relația (1.67) se obține: $B_{2n} = B_{1n}$, adică pentru orice suprafață de separație componentele normale ale inducției magnetice se conservă.

În cazul particular când mediul 1 este dintr-un material perfect conductor electric ($\rho_1 = 0$), aplicând legea conducției electrice $\bar{E}_1 = \rho_1 \bar{J}_1$, întrucât $\bar{J}_1 \neq 0$, $\rho_1 = 0$, se obține $\bar{E}_1 = 0$, iar din legea inducției electromagnetice $\partial \bar{B} / \partial t = \text{rot} \bar{E}_1 = 0$, se obține $\bar{B}_1 = \text{constant}$ și dacă în momentul $t_0 = 0$, $B_1 = 0$, atunci, pentru orice moment, $B_1 = 0$, deci $B_{1n} = 0$ și, din relația precedentă $B_{2n} = 0$.

Înseamnă că liniile de câmp ale inducției magnetice sunt întotdeauna tangente la suprafața zonelor din materiale perfect conductoare electric, sau, practic, care au rezistivitate electrică foarte mică, așa cum se arată în prima dintre figurile 3.3.

Dacă în punctul P se aplică legea inducției electromagnetice se obține $\text{rot}_s \bar{E} = 0$, din care, conform relației (1.68), se obține: $\bar{E}_{2t} = \bar{E}_{1t}$. Deci, pe orice suprafață de separație componentele tangente ale intensității câmpului electric se conservă. Dacă mediul 1 este perfect conductor electric, așa cum s-a arătat mai sus, $\bar{E}_{1t} = 0$, deci $\bar{E}_{2t} = 0$.

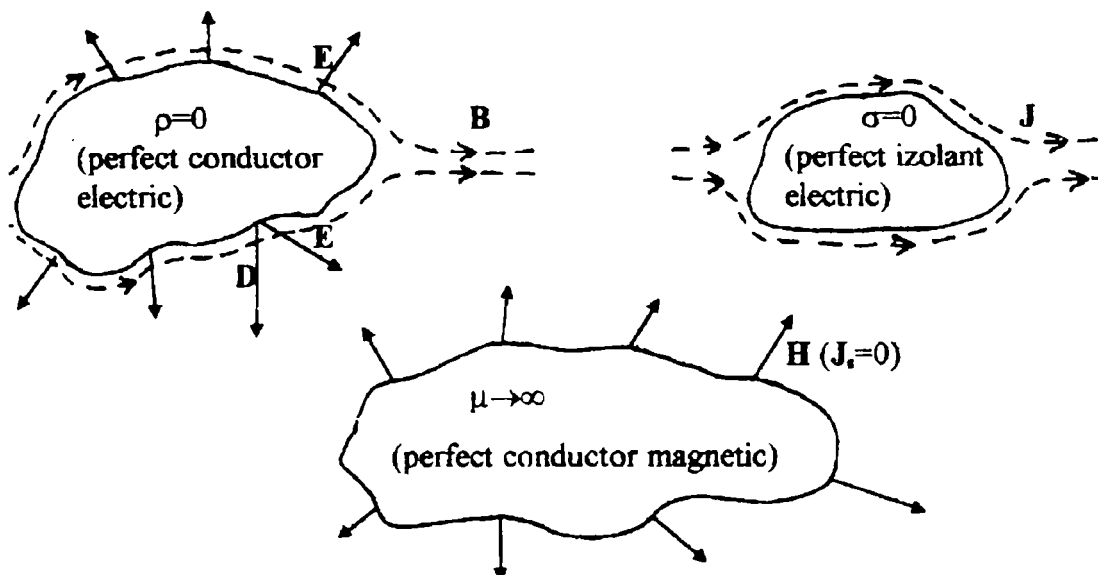


Fig.3.3

Deci, liniile de câmp al intensității câmpului electric sunt întotdeauna normale la suprafețele din materialele ce au rezistivitatea electrică foarte mică, așa cum se observă din aceeași figură, menționată mai sus.

Din legea conservării sarcinii electrice libere, aplicată în P, se obține $\text{div}_s \bar{J} = 0$, din care cauză $J_{2n} = J_{1n}$. Deci, componentele normale ale densității de curent se conservă în punctele oricărei suprafețe de separație. Dacă mediul este un conductor electric, iar mediul 2 este perfect izolat electric, fiind, de exemplu, izolația conductorului, atunci $\bar{J}_2 = 0$, $J_{2n} = 0$ și deci relația precedentă $J_{1n} = 0$.

Rezultă că liniile de curent sunt tangente la suprafața mediilor perfect izolate electric, așa cum se arată în a doua dintre figurile 3.3.

Dacă, în punctul P, se aplică legea circuitului magnetic, se obține $\text{rot}_s \bar{H} = \bar{J}_s$, unde \bar{J}_s este densitatea curenților de suprafață de pe S_{12} . În caz că nu există astfel de curenți, se obține $\text{rot}_s \bar{H} = 0$, din care rezultă $\bar{H}_{2t} = \bar{H}_{1t}$.

Deci, componentele tangente ale intensității câmpului magnetic se conservă în

punctele oricărei suprafețe de separație pe care nu există curenți electrici superficiali.

Daca, pentru o astfel de suprafață, mediul 1 este dintr-un material perfect conductor magnetic, adică la care $\mu_1 \rightarrow \infty$, din ecuația constitutivă $\bar{H}_1 = \bar{B}_1 / \mu$, se obține $\bar{H}_1 = 0$, $\bar{H}_{1t} = 0$ și din relația precedentă rezultă $\bar{H}_{2t} = 0$.

Deci, liniile de câmp ale intensității câmpului magnetic sunt întotdeauna normale în punctele suprafeței mediilor perfect conductoare magnetic, așa cum s-a arătat în a treia dintre figurile 3.3. Practic, se pot considera ca medii perfect conductoare magnetic, miezurile din materiale feromagnetice aflate în spațiu liber.

Condițiile de limită includ atât condițiile inițiale cât și cele de frontieră.

Condițiile inițiale constau în cunoașterea valorilor mărimilor în toate punctele domeniului în momentul inițial $t_0 = 0$, adică, în general, a unor funcții de variabile (t, \bar{r}) . Având în vedere ecuațiile constitutive, este suficient să se impună condițiile inițiale numai pentru două mărimi, de exemplu, $\bar{E}(t, \bar{r})$, $\bar{B}(t, \bar{r})$, adică:

$$\bar{E}(t, \bar{r}) = \bar{f}(\bar{r}) \quad \bar{B}(t, \bar{r}) = \bar{\varphi}(\bar{r}), \quad (3.40)$$

unde $\bar{f}(\bar{r})$ și $\bar{\varphi}(\bar{r})$ sunt funcții vectoriale ce trebuiesc cunoscute.

Condițiile de frontieră se referă la valorile ce trebuie să le aibă mărimile în punctele frontierei S , a domeniului considerat și pot fi de două tipuri:

Condiții de frontieră transversale care constau în:

- pe o parte S' a lui S se dă componenta tangență a intensității câmpului magnetic, adică:

$$\bar{H}_t(t, \bar{r}) = \bar{h}(t, \bar{r}),$$

unde $\bar{h}(t, \bar{r})$ este o funcție cunoscută;

- pe cealaltă parte S'' a lui S se dă componenta tangențială a intensității câmpului electric, adică:

$$\bar{E}_t(t, \bar{r}) = \bar{e}(t, \bar{r}),$$

unde $\bar{e}(t, \bar{r})$ este o funcție cunoscută.

Condiții de frontieră longitudinale, care constau în:

- pe S' se dă:

$$\bar{H}_n(t, \bar{r}) = \bar{h}(t, \bar{r})$$

- pe S'' se dă valoarea componentei normale a inducției magnetice, adică se dă:

$$B_n(t, \vec{r}) = b(t, \vec{r}),$$

unde $b(t, \vec{r})$ este o funcție scalară cunoscută.

Se poate arăta că, fiind date condițiile de interfață și de frontieră, menționate, oricare dintre sistemele de ecuații prezentate au o soluție unică definește un câmp magnetic (\vec{B}, \vec{H}) unic în Ω .

3.3. Modelul potențialelor electromagnetice

3.3.1. Ecuațiile modelului

Rezolvarea directă a sistemelor de ecuații, prezentate în paragraful anterior, este, în general, dificilă. Dacă, însă, se efectuează o schimbare de variabile, prin introducerea unor funcții auxiliare, în general, spațio-temporale, denumite potențiale electromagnetice, atunci ecuațiile se reduc ca număr și se pot integra mai simplu. Această rezolvare indirectă a problemelor de analiză a câmpului electromagnetic se dovedește comodă și lucrativă, îndeosebi în cazul problemelor bidimensionale.

Până în prezent, două cupluri de potențiale electromagnetice s-au impus în rezolvarea problemelor de câmp electromagnetic, în regim staționar și cvasistaționar magnetic:

- a) potențialul vector magnetic \vec{A} asociat cu potențialul electric scalar V ;
- b) potențialul vector electric \vec{T} asociat cu potențialul scalar magnetic V_m .

Deoarece este mai des folosit în softurile specializate, în acest paragraf se prezintă primul cuplu.

Stabilirea modelului pornește de la constatarea că, întrucât $\text{div} \vec{B} = 0$, inducția magnetică \vec{B} definește un câmp vectorial solenoidal, și poate fi exprimată ca rotorul unei alte funcții vectoriale \vec{A} , adică:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (3.41)$$

unde $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{r})$ se numește potențial vector magnetic sau potențial magnetic vector.

Deoarece divergența unui rotor este nulă, se verifică că vectorul \vec{B} , dat de relația (1.70) verifică ecuația $\text{div} \vec{B} = 0$.

Cu aceasta forma locală a legii inducției electromagnetice devine:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.42)$$

unde s-a admis comutativitatea operatorilor “rot” și “ $\frac{\partial}{\partial t}$ ”.

Relația (1.71) arată că vectorul $\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ este irațional și poate fi exprimat prin gradientul unei funcții scalare V_e , adică:

$$\begin{aligned}\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} &= -\text{grad}V_e \\ \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad}V_e,\end{aligned}\quad (3.43)$$

unde $V_e = V_e(t, \bar{r})$ se numește potențial electrodinamic scalar sau potențial scalar electrodinamic.

Relațiile (3.41), (3.43) permit determinarea univocă a vectorilor câmp \bar{E} , \bar{B} dacă se cunosc mărimile \bar{A} , V_e .

Se presupune că, pentru un câmp electromagnetic dat, când mărimile \bar{E} , \bar{B} sunt unice, s-au determinat potențialele \bar{A} , V_e , care satisfac relațiile (3.41), respectiv (3.42). Însă, acestea nu sunt unice, ci se obțin aceeași vectori câmp \bar{B} , \bar{E} , pentru orice alte potențiale \bar{A}' , V_e' , date de relațiile:

$$\bar{A}' = \bar{A} + \text{grad}e \quad (3.44)$$

$$V_e' = V_e - \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.45)$$

unde $e = e(t, \bar{r})$ este o funcție scalară arbitrară.

Într-adevăr, făcând ipoteza că, potențialelor \bar{A}' , V_e' le-ar corespunde \bar{B}' , \bar{E}' relațiile (3.41), (3.43), devin:

$$\bar{B}' = \text{rot}A' \quad (3.46)$$

$$\bar{E}' = -\frac{\partial A'}{\partial t} - \text{grad}V_e \quad (3.47)$$

Dacă din relația (3.47) se înlocuiește \bar{A}' cu expresia dată de relația (3.44) și are în vedere că rotorul gradientului oricărei funcții scalare este nul, se obține:

$$\bar{B}' = \text{rot}(\bar{A} + \text{grad}e) = \text{rot}\bar{A} = \bar{B} \quad (3.48)$$

Din relațiile (3.47) și 3.45) se obține:

$$\bar{E}' = -\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}e) - \text{grad}V_e + \text{grad}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right);$$

sau, admițând comutativitatea operatorului $\frac{\partial}{\partial t}$ și grad, rezultă:

$$\begin{aligned}\bar{E}' &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}V_e - \text{grad}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) + \text{grad}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) \\ \bar{E}' &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}V_e \quad \bar{E}' = \bar{E}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Relațiile (3.48), (3.49) confirmă cele menționate mai sus.

Evident că potențialele \bar{A} , V_e se determină prin rezolvarea ecuațiilor modelului, ce se vor stabili ulterior în acest paragraf, însă, așa cum s-a arătat mai sus, acestea nu sunt unice. Din acest motiv, pentru a se asigura univocitatea determinării potențialelor \bar{A} , V_e , este necesar să se impună două condiții:

a) În punctele domeniului Ω să se cunoască divergența de volum a potențialului vector magnetic, adică:

$$\text{div}\bar{A} = \bar{f}(t, \bar{r}), \quad \bar{r} \in \Omega \quad (3.50)$$

unde $\bar{f}(t, \bar{r})$ este o funcție vectorială cunoscută.

Relația (1.79) se numește *condiție de etalonare* a potențialului vector magnetic.

b) Pe frontiera S a lui Ω să se impună o condiție de frontieră, de exemplu, componenta normală a lui \bar{A} să fie cunoscută, adică:

$$\bar{A} \cdot \bar{n} = g(t, \bar{r}), \quad \bar{r} \in S, \quad (3.51)$$

unde $g(t, \bar{r})$ este o funcție scalară ce se de dă, iar \bar{n} este vectorul normalei într-un punct oarecare a lui S , orientat spre exteriorul domeniului Ω , deoarece S este o suprafață închisă.

Condițiile (3.50), (3.51) trebuie să fie satisfăcute de orice potențial care satisface ecuația (1.70), deci și de unde \bar{A}' , adică:

$$\text{div}\bar{A}' = \bar{f}(t, \bar{r}), \quad \bar{r} \in \Omega \quad (3.52)$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{n} = g(t, \bar{r}), \quad \bar{r} \in S \quad (3.53)$$

Din relațiile (3.50), (3.52), (3.44) rezultă:

$$\begin{aligned}\text{div}(\bar{A} - \bar{A}') &= 0; \quad \text{div}(\text{grade}) = 0 \\ \Delta e(t, \bar{r}) &= 0 \quad \bar{r} \in \Omega.\end{aligned}\quad (3.54)$$

unde Δ este operatorul Laplace (sau laplacianul).

În mod similar, din relațiile (3.53), (3.51), (3.44) se obține:

$$\begin{aligned}(\bar{A} - \bar{A}') \cdot \bar{n} &= 0; \quad (\text{grade}) \cdot \bar{n} = 0 \\ \frac{\partial e(t, \bar{r})}{\partial n} &= 0 \quad \bar{r} \in S\end{aligned}\quad (3.55)$$

Se arată că, dacă funcția scalară e satisface egalitățile (3.54), (3.55), ea se reduce la o constantă reală în $\Omega \cup S$, adică:

$$e(t, \bar{r}) = \lambda \quad \bar{r} \in \Omega \cup S, \quad (3.56)$$

unde λ este un număr real.

În relațiile (3.44), (3.45), se înlocuiește e cu relația (3.56) și, derivatele unei constante fiind nule, se obține $\bar{A} = \bar{A}'$, $V_e' = V_e$, adică potențialele determinate sunt unice, dacă se impun condițiile menționate.

Forma funcției $\bar{f}(t, \bar{r})$ se alege astfel încât, ecuațiile din care se determină potențialele \bar{A} , V_e , să fie cât mai simple. Uzual, în cazul unui regim staționar sau cvasistaționar, se alege $\bar{f}(t, \bar{r}) = 0$, și condiția (3.50) devine:

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad \bar{r} \in \Omega, \quad (3.57)$$

care se numește *condiția de etalonare a lui Coulomb*.

Dacă se impune că \bar{A} să satisfacă condiția (3.57), atunci reprezintă un câmp vectorial solenoidal și va avea numai componenta solenoidală \bar{A}_s , iar relația (3.42) devine:

$$\bar{E} = \frac{\partial \bar{A}_s}{\partial t} - \operatorname{grad} V_e, \quad (3.58)$$

din care se deduce că, cele două componente solenoidală \bar{E}_s și potențială \bar{E}_p ale lui \bar{E} sunt date de relațiile:

$$\bar{E}_s = -\frac{\partial \bar{A}_s}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (3.59)$$

$$\bar{E}_p = -\operatorname{grad} V_e \quad (3.60)$$

Însă, dacă se notează cu V potențialul electric, atunci, prin definiție:

$$\bar{E}_p = -\operatorname{grad} V \quad (3.61)$$

Din relațiile (3.60), (3.61) se obține $V_e = V + C$, unde C este o constantă de integrare. Dacă într-un punct al domeniului se impune potențialul electric de referință $V_0 = 0$, atunci $C = 0$ și $V_e = V$.

În concluzie, dacă se impune ca potențialul vector magnetic să satisfacă condiția de etalonare a lui Coulomb, atunci potențialul scalare electrodinamic este egal cu potențialul scalar electric și relația (3.43) se scrie sub forma:

$$\bar{E} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \quad (3.62)$$

Înseamnă că, dacă se impune condiția de etalonare a lui Coulomb, câmpul electric

are o componentă solenoidală, reprezentată de câmpul electric indus prin pulsații de inducția magnetică și o componentă potențială, reprezentată de câmpul electric coulombian, ce apare ca urmare a existenței în domeniu a unei variații a potențialului electric. De exemplu, o astfel de variație se obține, dacă, din exterior, se aplică o tensiune electrică între două porțiuni ale domeniului.

Ecuțiile modelului sunt egalitățile pe care trebuie să le satisfacă cele două potențiale, \bar{A} , V și se obțin, din ecuațiile modelului prezentat în capitolul precedent, care nu au fost încă folosite pentru definirea celor două potențiale. Acestea sunt:

$$\text{rot}\bar{H} = \bar{J} \quad (3.63)$$

$$\text{div}\bar{J} = 0, \quad (3.64)$$

la care se adaugă ecuațiile constitutive:

$$\bar{H} = v\bar{B} - \frac{1}{v_0} v\bar{M}_p \quad (3.65)$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \quad (3.66)$$

Mai întâi, în ecuația (3.66) se înlocuiește \bar{E} cu expresia dată de relația (3.62) obținând:

$$\bar{J} = -\sigma\text{grad}V - \sigma\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}, \quad (3.67)$$

Primul termen din membrul drept al relației (3.66) este densitatea \bar{J}_a a curentului electric de aducție, iar al doilea este densitatea curentului electric indus prin pulsații ale câmpul magnetic.

Ca urmare, relația (3.67) se scrie sub forma:

$$\bar{J} = \bar{J}_a - \sigma\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (3.68)$$

$$\bar{J}_a = -\sigma\text{grad}V \quad (3.69)$$

Se menționează faptul că intervine \bar{J}_a numai dacă în domeniul considerat există câmp electric coulombian, determinat de sursele exterioare, deci de excitațiile câmpului magnetic.

În relațiile (3.63), (3.64) se înlocuiesc \bar{H} și \bar{J} cu expresii date de relațiile (3.65), respectiv (3.68) și se obțin:

$$\text{rot}(v\text{rot}\bar{A}) + \sigma\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \bar{J}_a - \frac{1}{v_0}\text{rot}(v\bar{M}_p) \quad (3.70)$$

$$\operatorname{div}\left(\bar{J}_s - \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (3.71)$$

$$\bar{J}_s = -\sigma \operatorname{grad} V, \quad (3.72)$$

la care se adaugă ecuația de etalonare a lui Coulomb:

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad (3.73)$$

Pentru cele trei porțiuni din fig.3.2. se obține:

a. Pentru $\Omega_0 + \Omega$:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{vrot} \bar{A}) + \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \bar{J}_s - \frac{1}{v_0} \operatorname{rot}(\operatorname{v} \bar{M}_p) \quad (3.74)$$

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad (3.75)$$

$$\bar{J}_s = -\sigma \operatorname{grad} V \quad (3.76)$$

$$\operatorname{div} \bar{J}_s = 0 \quad (3.77)$$

Deci, dacă se impune \bar{J}_s și \bar{M}_p , ecuațiile (3.74), (3.75), ale potențialului magnetic vector, împreună cu condițiile de limită, ce se vor prezenta ulterior, sunt suficiente pentru a rezolva problema de câmp magnetic cvasistaționar în $\Omega_0 + \Omega_1$.

Relația (3.77) este folosită pentru a verifica pe \bar{J}_s , iar relația (3.76) se utilizează atunci când se dă distribuția de potențial electric, cum este cazul unei bobine de excitație filiformă alimentată cu tensiune la borne cunoscută.

b. Pentru Ω_2 , admițând că mai există curenți electrici de conducție, se obține:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{vrot} \bar{A}) + \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \quad (3.78)$$

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad (3.79)$$

Ecuațiile (3.78), (3.79), împreună cu condițiile de unicitate aferente sunt suficiente pentru a rezolva problema de curenți turbionari din conductorii masivi sau din miez.

3.3.2. Condiții de interfață (de trecere) și de limită

Condițiile de interfață (de trecere) constau în relațiile pe care trebuie să le satisfacă cele două potențiale dacă în domeniul Ω intervin medii cu proprietăți diferite, așa cum este suprafața S_{12} din fig.3.3.

Având în vedere relația (3.79) în punctul P al lui S_{12} , se obțin $\operatorname{div}_s \bar{A} = 0$ sau:

$$A_{1n} = A_{2n} \quad (3.80)$$

Deci, oricare ar fi suprafața de separație, componentele normale ale potențialului

vector magnetic se conservă.

Pentru a stabili relația dintre componentele tangente \bar{A}_{1t} , \bar{A}_{2t} , în jurul punctului P se consideră un contur dreptunghiular elementar Γ , cu bazele paralele cu S_{12} , de lungime Δl și de înălțime neglijabilă, prin definiție:

$$\operatorname{div}_s \bar{A} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta l} \quad (3.81)$$

Folosind transformarea de integrală Stokes, se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot} \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{B} \cdot d\bar{s} = \phi, \quad (3.82)$$

unde S_{Γ} este o suprafață de sprijin pe Γ iar ϕ este fluxul magnetic prin aceasta.

Cu aceasta relația (3.81) devine:

$$\operatorname{rot}_s \bar{A} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\phi}{\Delta l} = 0, \quad (3.83)$$

deoarece când $\Delta l \rightarrow 0$, și $\phi \rightarrow 0$.

Pe de altă parte:

$$\operatorname{rot}_s \bar{A} = \bar{A}_{2t} - \bar{A}_{1t} \quad (3.84)$$

și din (3.83), (3.84), se obține:

$$\bar{A}_{2t} = \bar{A}_{1t} \quad (3.85)$$

sau:

$$\bar{n} \times \bar{A}_{2t} = \bar{n} \times \bar{A}_{1t} \quad (3.86)$$

Deci, componentele tangente ale potențialului vector magnetic se conservă pe orice suprafață de separație.

Din relațiile (3.80) și (3.85) se obține:

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_1 \quad (3.87)$$

În concluzie, potențialul vector magnetic este continuu la traversarea oricărei suprafețe de separație, ca urmare \bar{A} este o funcție continuă în domeniul Ω . Această proprietate constituie un avantaj al folosirii potențialului vector magnetic.

Evident că pentru celelalte mărimi rămân valabile condițiile de trecere precizate în paragraful anterior, însă acestea se vor exprima în funcție de cele două potențiale.

Astfel din $\bar{n} \times \bar{E}_2 = \bar{n} \times \bar{E}_1$, având în vedere relația (3.62) se obține:

$$\bar{n} \times \left(\operatorname{grad} V + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)_2 = \bar{n} \times \left(\operatorname{grad} V + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)_1 \quad (3.88)$$

Însă, atât în P_1 cât și în P_2 , $\text{grad}V$ este coliniar cu \bar{n} și din relația (3.87) se obține:

$$\begin{aligned}\bar{n} \times \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)_2 &= \bar{n} \times \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{n} \times \bar{A}_2) &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{n} \times \bar{A}_1), \\ (\bar{n} \times \bar{A}_2) &= (\bar{n} \times \bar{A}_1),\end{aligned}$$

unde s-a ținut cont de faptul că \bar{n} este un vector constant.

Se observă că se obține tocmai relația (3.88), deci din condiția conservării componentelor tangente ale potențialului vector magnetic, rezultă satisfacerea condiției de conservare a componentelor tangente ale intensității câmpului electric.

Se aplică operatorul divergență ambilor membri ai relației (3.86), și având în vedere relația:

$$\text{div}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \text{rot} \bar{u} - \bar{u} \text{rot} \bar{v}$$

se obține:

$$\bar{n} \cdot \text{rot} \bar{A}_2 = \bar{n} \cdot \text{rot} \bar{A}_1$$

sau:

$$\bar{n} \cdot \bar{B}_2 = \bar{n} \cdot \bar{B}_1, \quad (3.89)$$

unde s-a folosit observația că \bar{n} este un vector constant în $\text{rot} \bar{n} = 0$.

Însă, relația (3.89) reprezintă tocmai conservarea componentelor normale ale inducției magnetice și, deci, dacă se impune conservarea componentelor tangente ale potențialului vector magnetic, rezultă și conservarea componentelor normale ale inducției magnetice.

Dacă pe suprafața de separație S_{12} , nu există curenți superficiali, din conservarea componentelor tangente ale lui \bar{H} , adică din egalitatea $\bar{H}_{2t} = \bar{H}_{1t}$, sau:

$$\bar{n} \times \bar{H}_2 = \bar{n} \times \bar{H}_1,$$

având în vedere ecuația constitutivă (3.65) se obține:

$$\bar{n} \times \left[\left(\nu_2 \text{rot} \bar{A}_2 - \nu_1 \text{rot} \bar{A}_1 \right) - \frac{1}{\nu_0} \left(\nu_2 \text{rot} M_{p2} - \nu_1 \text{rot} M_{p1} \right) \right] = 0,$$

sau, dacă nu intervin magnetii permanenți:

$$\bar{n} \times \left(\nu_2 \text{rot} \bar{A}_2 - \nu_1 \text{rot} \bar{A}_1 \right) = 0 \quad (3.90)$$

Condițiile inițiale, în general nule constau în a impune:

$$\bar{A}(0, \bar{r}) = \bar{a}(\bar{r}), \quad V(\bar{r}, 0) = v(\bar{r}), \quad \bar{r} \in \Omega, \quad (3.91)$$

unde $\bar{a}(\bar{r})$, $\bar{v}(\bar{r})$ sunt funcții cunoscute.

În ceea ce privește condițiile de frontieră, în primul rând, pentru a asigura unicitatea determinării lui \bar{A} , se impune condiții ca pe frontiera S a lui Ω să fie cunoscută componenta normală a lui \bar{A} , adică să se cunoască:

$$\bar{n} \cdot \bar{A} = h(\bar{r}), \quad \bar{r} \in S, \quad (3.92)$$

unde $h(\bar{r})$ trebuie să fie o funcție scalară cunoscută, de obicei nulă, adică:

$$\bar{n} \cdot \bar{A} = 0, \quad \bar{r} \in S \quad (3.93)$$

La aceasta se mai adaugă:

- o condiție de frontieră de tip Dirichlet sau de primă speță, care cere cunoașterea componentei tangențiale a potențialului magnetic vector, pe cel puțin o porțiune S' a lui S , adică:

$$\bar{n} \times \bar{A} = \bar{g}(\bar{r}), \quad \bar{r} \in S' \quad (3.94)$$

unde $\bar{g}(\bar{r})$ trebuie să fie o funcție cunoscută.

- o condiție de frontieră de tip Neuman sau de a doua speță, care cere ca, pe cealaltă porțiune S'' a lui S se să cunoască componenta tangentă a lui $\text{vrot}\bar{A}$, adică:

$$\bar{n} \times (\text{vrot}\bar{A}) = \bar{b}(\bar{r}), \quad \bar{r} \in S'', \quad (3.95)$$

unde $\bar{b}(\bar{r})$ este o funcție vectorială cunoscută.

Dacă, ambilor membri ai relației (3.94) li se aplică operatorul divergență, se obține:

$$\text{div}(\bar{n} \times \bar{A}) = d(\bar{r}), \quad (3.96)$$

unde:

$$d(\bar{r}) = \text{div}(\bar{g}(\bar{r}))$$

La fel ca mai înainte se obține:

$$\bar{n} \cdot \text{rot}\bar{A} = d(\bar{r}) \quad (3.97)$$

sau

$$\bar{n} \cdot \bar{B} = d(\bar{r})$$

Deci, impunerea condiției de frontieră asupra componentei tangențiale a potențialului vector magnetic este echivalentă cu impunerea condiției de frontieră asupra componentei normale a inducției magnetice.

Astfel, dacă se impune condiția:

$$\bar{n} \times \bar{A} = 0,$$

rezultă că:

$$\bar{n} \cdot \bar{B} = 0$$

Deci, condiția ca cel puțin pe o porțiune a frontierei domeniului, componenta tangențială a lui \bar{A} să fie nulă este echivalentă cu a impune că pe acea porțiune componenta normală a lui \bar{B} să fie nulă, adică *liniile de câmp magnetic să fie paralele cu porțiunea respectivă*.

Din acest motiv, în unele programe de modelare și simulare a câmpului electromagnetic, condiția ca potențialul magnetic vector să aibă componenta tangențială nulă, pe o anumită porțiune a frontierei domeniului problemei, se exprimă sub forma “flux paralel” cu porțiunea respectivă.

De asemenea, presupunem că s-ar impune condiția:

$$\bar{n} \times \bar{B} = \bar{e}(\bar{r}), \quad (3.98)$$

adică componenta normală a inducției magnetice să fie cunoscută.

La fel ca mai înainte, se obține:

$$\bar{n} \cdot \bar{A} = h(\bar{r}),$$

unde $h(\bar{r}) = \text{div}(\bar{e}(\bar{r}))$

Deci din condiția (3.98) se obține condiția (3.93).

Lucrurile fiind valabile și invers, rezultă că impunerea condiției de frontieră pentru componenta normală a potențialului vector magnetic este echivalentă cu impunerea condiției de frontieră pentru componenta tangențială a inducției magnetice.

Astfel dacă se impune condiția:

$$\bar{n} \cdot \bar{A} = 0,$$

rezultă:

$$\bar{n} \times \bar{B} = 0$$

Deci, condiția ca, cel puțin pe o porțiune a frontierei, componenta normală a lui \bar{A} să fie nulă, este echivalentă cu a impune ca pe acea porțiune componenta normală a inducției magnetice să fie nulă, adică *liniile de câmp magnetic să fie normale la porțiunea respectivă*.

Pe această bază în programele menționate mai sus, condiția ca potențialul vector magnetic să aibă componentă normală nulă, pe cel puțin o porțiune a frontierei domeniului, se exprimă sub forma “flux normal” cu acea porțiune.

3.4. Modelul arcului electric ca element de circuit electric

3.4.1. Considerații generale

Un model dinamic trebuie astfel conceput încât să permită urmărirea evoluției în timp a proceselor ce au loc în arcul electric, prin determinarea dependenței de momentul oarecare t a mărimilor de stare corespunzătoare.

Evident că în acest scop se impune ca, în ecuațiile generale ale arcului electric să se ia în considerare și termenii ce conțin derivatele în raport cu t ale mărimilor respective.

De exemplu, chiar în cazul ipotezelor simplificatoare ce se fac pentru modelul cilindric, prezentate în capitolul precedent, în regim dinamic ecuația conservării energiei se scrie sub forma:

$$\rho_d \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) + \sigma \cdot E^2, \quad (3.99)$$

unde ρ_d , c , σ sunt, respectiv densitatea, căldura specifică, conductivitatea electrică ale mediului din coloana arcului electric, iar T , E sunt temperatura, respectiv intensitatea câmpului electric dintr-un punct oarecare al acesteia.

Însă, în general, integrarea ecuației (3.99) conduce la calcule laborioase și în plus impune să se cunoască analitic sau grafic dependența de T a mărimilor σ , λ , adică să se cunoască funcțiile $\sigma(T)$, $\lambda(T)$.

Din acest motiv, în cele ce urmează se construiește un model dinamic simplificat, global, cu ajutorul căruia să se poată urmări evoluția în timp a unor mărimi de stare, cu scopul de a determina condițiile în care se poate produce întreruperea arcului electric și deci, de a stabili măsurile ce trebuie luate pentru a preveni un astfel de fenomen.

Scopul, menționat mai sus, se realizează dacă se cunosc evoluțiile în timp ale intensității curentului electric din coloana arcului și căderi de tensiune electrică pe aceasta.

Însă, dacă se cunoaște sau se impune evoluția în timp a uneia dintre cele două mărimi, dependența de t a celeilalte se află dacă se cunoaște dependența de t a conductanței electrice a coloanei arcului electric, care pentru momentul oarecare t , se notează cu G și se definește prin relația:

$$G = \frac{i}{u}, \quad (3.100)$$

unde i , u sunt valorile instantanee ale intensității curentului din coloana arcului electric, respectiv căderea de tensiune electrică pe aceasta.

În concluzie, în acest paragraf se va stabili ecuația pe care o satisface conductanța electrică G a coloanei arcului electric, astfel încât prin integrarea sa să se determine funcția $G(t)$, în care să intervină numai mărimi ce se cunosc sau se pot determina experimental.

Cunoscând funcția $G(t)$, impunând forma de variație în timp a uneia dintre cele două mărimi, din relația (3.99) se determină dependența de t a celeilalte mărimi.

3.4.2. Ecuațiile modelului

Pe lângă notațiile u , i , G , a căror semnificație s-a menționat în paragraful precedent, pentru momentul oarecare t , se mai notează cu Q conținutul de energie (energie internă) din coloana arcului și cu p puterea disipată în aceasta.

Ecuația modelului se obține prin aplicarea, sub formă globală, a principiului conservării energiei pentru coloana arcului electric, conform căruia, puterea dezvoltată în coloana arcului electric, notată cu p_d , acoperă variația în unitatea de timp a energiei interne Q a coloanei și puterea p disipată în aceasta, adică:

$$p_d = \frac{dQ}{dt} + p \quad (3.101)$$

Însă, în coloana unui arc electric se dezvoltă numai putere electrică. Ca urmare, $p_d = u \cdot i$ și înlocuind în relația (3.101) se obține:

$$\frac{dQ}{dt} = u \cdot i - p \quad (3.102)$$

Din relația (3.102) rezultă:

$$dQ = u \cdot i \cdot dt - p \cdot dt \quad (3.103)$$

Se interpretează ecuația (3.103) între un moment inițial t_0 , pentru care energia internă se notează cu Q_0 și momentul oarecare t , pentru care energia internă este Q , și se obține:

$$Q = Q_0 + \int_{t_0}^t u \cdot i \cdot dt - \int_{t_0}^t p \cdot dt \quad (3.104)$$

Conductanța electrică este o funcție de gradul de ionizare din coloana arcului electric, care, la rândul său este o funcție de temperatura T și deci se poate trage concluzia că G este o funcție de T , $G(T)$. De asemenea, energia internă Q este și ea o funcție de T , $Q(T)$. Dacă, se imaginează că se elimină T , între funcțiile $G(T)$, $Q(T)$, se ajunge la $Q = Q(G)$.

Considerând că în relația (3.104) Q este o funcție implicită de t prin intermediul

funcției $G(t)$, prin derivare în raport cu t se obține:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dG} \cdot \frac{dG}{dt} \quad (3.105)$$

Înlocuind relația (3.105) în relația (3.102) rezultă:

$$\frac{dQ}{dG} \cdot \frac{dG}{dt} = u \cdot i - p \quad (3.106)$$

Relația (3.100) definește implicita:

$$G(t) = G[u(t), i(t)] \quad (3.107)$$

Derivând această relație în raport cu t rezultă:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial G}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} \quad (3.108)$$

Însă, având în vedere relația (3.99) rezultă:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{i}{u^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial i} = \frac{1}{u} \quad (3.109)$$

Înlocuind relațiile (3.109) în relația (3.108) se obține:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{u} \cdot \frac{di}{dt} - \frac{i}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} \quad (3.110)$$

Se notează:

$$\tau = \frac{G}{p} \cdot \frac{dQ}{dG} \quad (3.111)$$

Se observă că mărimea τ , definită prin relația (3.111) are dimensiuni de timp și se numește constanta de timp a arcului electric.

Din relația (3.111) se obține:

$$\frac{dQ}{dG} = \frac{p}{G} \cdot \tau \quad (3.112)$$

Înlocuind relația (3.112) în relația (3.105) rezultă:

$$\frac{p \cdot \tau}{G} \cdot \frac{dG}{dt} = u \cdot i - p \quad (3.113)$$

Din care rezultă:

$$\frac{dG}{dt} = G \cdot \frac{u \cdot i}{p \cdot \tau} - p \quad (3.114)$$

sau având în vedere relația (3.100) rezultă:

$$\frac{dG}{dt} + \frac{G}{\tau} = \frac{i^2}{p \cdot \tau} \quad (3.115)$$

Dacă se cunosc p , τ și se admite o anumită formă de variații în timp a lui i , prin

integrarea relației (3.115) se află funcția $G(t)$.

Din acest motiv relația (3.115) se numește ecuația conductanței electrice a arcului electric.

Pentru a obține ecuația ce o satisfac mărimile u , i , în relația (3.112) se înlocuiește G cu expresia dată de relația (3.100) și se obține:

$$\frac{dQ}{dG} = \frac{\tau \cdot p \cdot u}{i} \quad (3.116)$$

În relația (3.106), se înlocuiesc relațiile (3.109), (3.116) și după efectuarea unor calcule elementare rezultă:

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{di}{dt} - \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{u \cdot i - p}{p} \quad (3.117)$$

Dacă se cunosc τ , p și se impune variația în timp a lui u sau i , prin integrarea ecuației (3.117) se află forma de variație în timp a celeilalte mărimi.

Din acest motiv, relația (3.117) se numește ecuație diferențială a arcului electric.

3.4.3. Integrarea ecuațiilor și interpretarea rezultatelor

În cele ce urmează se admite că mărimile τ , P au valorile constante τ_0 , P_0 , care, pentru simplificarea notațiilor se notează cu τ , P .

Valoarea constantei de timp τ se alege din literatura de specialitate sau se determină experimental. Deoarece P este puterea electrică dezvoltată în coloana arcului electric în momentul când curentul electric trece prin zero, valoarea sa se poate determina experimental sau se alege în funcție de puterea sursei de alimentare a arcului electric.

Cu alte precizări, ecuațiile ce se vor integra sunt:

$$\frac{dG}{dt} + \frac{G}{t} = \frac{i^2}{P \cdot \tau} \quad (3.118)$$

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{di}{dt} - \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{u \cdot i - P}{P \cdot \tau} \quad (3.119)$$

Relația (3.118) este o ecuație liniară de tip Bernoulli, având soluția:

$$G(t) = \left[\tau P + \frac{1}{\tau P} \int_0^t i^2 e^{\frac{t}{\tau}} dt \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.120)$$

Pentru a integra ecuația (3.119) se admite că i are o formă de variație în timp sinusoidală, de amplitudine: I_m , frecvență f , pulsația $\omega = 2\pi f$. Alegând originea timpului în momentul $t_0 = 0$, când i trece prin zero, intensitatea i , va avea expresia:

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (3.121)$$

din care se obține:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t \quad (3.122)$$

Înseamnă că, în ecuația (3.119), singura necunoscută este funcția $u(t)$, ceea ce necesită ordonarea ecuației în raport cu u , sub forma:

$$\frac{du}{dt} - \left(\frac{\omega \cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{1}{\tau} \right) u + \frac{I_m \cdot \sin \omega t}{\tau \cdot P} \cdot u^2 = 0 \quad (3.123)$$

sau:

$$\frac{du}{dt} - a \cdot u + b \cdot u^2 = 0, \quad (3.124)$$

unde:

$$a = \left(\frac{\omega \cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{1}{\tau} \right); \quad b = \frac{I_m \sin \omega t}{\tau P} \quad (3.125)$$

Deoarece relația (3.124) este o ecuație de tip Bernoulli la care $n=2$, se face schimbarea de funcție:

$$u = \frac{1}{z}, \quad (3.126)$$

din care se obține:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} \quad (3.127)$$

Cu aceste schimbări ecuația (3.124) devine:

$$\frac{dz}{dt} + az - b = 0 \quad (3.128)$$

În felul acesta s-a ajuns la integrarea unei ecuații liniare în noua funcție z , ce are coeficienți variabili și a cărei integrare se face prin metoda variației constantei de integrare.

Se arată că se obține soluția:

$$Z(t) = \frac{C}{\sin \omega t} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_m}{2P \sin \omega t} \left[1 - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \right] \quad (3.129)$$

unde φ este dat de relația:

$$\varphi = \arctg(2\omega\tau)$$

Pentru determinarea constantei C se admite că se cunoaște valoarea G_0 , ce o are conductanța electrică a coloanei arcului în momentul $t_0=0$ când i trece prin zero.

În acest scop se transformă ecuația (3.117) astfel încât să intervină funcția $G(t)$,

folosind relația evidentă $Z(t) = \frac{I}{i}G(t)$ sau:

$$Z(t) = \frac{G(t)}{I_m \sin \omega t} \quad (3.130)$$

Înlocuind relația (3.130) în relația (3.129) se obține:

$$G(t) = CI_m e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_m^2}{2P} \left[1 - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \right] \quad (3.131)$$

Pentru $t=t_0=0$, rezultă:

$$G_0 = CI_m + \frac{I_m^2}{2P} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \sin \varphi \right], \quad (3.132)$$

sau, având în vedere expresia lui φ se obține:

$$G_0 = CI_m + \frac{I_m^2}{2P} \cos^2 \varphi, \quad (3.133)$$

din care se obține:

$$C = \frac{G_0}{I_m} + \frac{I_m}{2P} \cos^2 \varphi \quad (3.134)$$

Expresia lui C, dată de relația (3.134.) se înlocuiește în relația (3.129), rezultând:

$$z(t) = \left(\frac{G_0}{I_m} + \frac{I_m}{2P} \cos^2 \varphi \right) \frac{1}{\sin \omega t} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_m}{2P \sin \omega t} \left[1 - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \right] \quad (3.135)$$

$$z(t) = \frac{I_m}{2P \sin \omega t} \left[\left(2P \frac{G_0}{I_m^2} - \cos^2 \varphi \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2\omega\tau)^2}} \right] \quad (3.136)$$

Fie Δt un interval de timp din jurul momentului t_0 , când I trece prin zero, iar I_0 , U_0 , valorile medii ale mărimilor I, u, pe intervalul Δt , adică:

$$I_0 = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} I_m \sin \omega t = \frac{I_m}{\Delta \omega t} (1 - \cos \omega \Delta t) \quad (3.137)$$

Dacă Δt se alege suficient de mic se poate considera că în acest timp mărimile u, i, sunt constante, egale cu valorile lor medii, U_0 , I_0 , și:

$$G_0 = \frac{I_0}{U_0} \quad (3.138)$$

De asemenea, în aceeași ipoteză se poate considera că în timpul Δt arcul se află în regim staționar, adică, $\frac{dQ}{dt} = 0$ și din relația (3.102) rezultă $p=u \cdot i$. Aceasta înseamnă că,

dacă prin P se înțelege valoarea medie a puterii p , disipată în coloana arcului electric, în timpul Δt , atunci: $P=U_0I_0$, din care se explicitează U_0 și înlocuind în relația (3.138) rezultă:

$$G_0 = \frac{I_0^2}{P} \quad (3.139)$$

Cu care se obține:

$$2P \frac{G_0}{I_0^2} = 2 \left(\frac{I_0}{I_m} \right)^2 = 2 \left(\frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega \Delta t} \right)^2, \quad (3.140)$$

unde s-a avut în vedere relația (3.137).

Se înlocuiește relația (3.140) în relația (3.135), rezultând:

$$z(t) = \frac{I_m}{2 \cdot P \cdot \sin \omega \cdot t} \cdot \left\{ \left[2 \cdot \left(\frac{1 - \cos \omega \cdot \beta}{\omega \cdot \beta} \right)^2 - \cos^2 \varphi \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2 \cdot \omega \cdot \tau)^2}} \right\} \quad (3.141)$$

unde s-a notat $\beta = \Delta t$.

În final, înlocuind relația (3.141) în relația (3.126), se obține funcția căutată:

$$u(Q) = \frac{2 \cdot P \cdot \sin \omega \cdot t}{I_m} \cdot \frac{1}{\left[2 \cdot \left(\frac{1 - \cos \omega \cdot \beta}{\omega \cdot \beta} \right)^2 - \cos^2 \varphi \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2 \cdot \omega \cdot \tau)^2}}} \quad (3.142)$$

la care se adaugă:

$$\varphi = \arctg(2 \cdot \omega \cdot \tau) \quad (3.143)$$

Se face ipoteza că, deoarece atât τ , cât și β au valori foarte mici, se admite că

$\tau \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, din relația (3.77) rezultând $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Cu aceste simplificări, relația (3.142) devine:

$$u(t) = \frac{2 \cdot P \cdot \sin \omega \cdot t}{I_m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi)}{\sqrt{1 + (2 \cdot \omega \cdot \tau)^2}}} \quad (3.144)$$

În cele ce urmează, pentru exemplificare, s-au ales cazul unui arc electric de curent alternativ sinusoidal cu frecvența $f=50$ Hz, iar pentru mărimile P , τ și β s-au utilizat valori ce se întâlnesc în practică.

În figura 3.4. s-a reprezentat grafic relația simplificată (3.144) având ca variabilă independentă produsul ωt , iar ca parametru produsul $\omega \tau$. Se observă că tensiunea electrică prezintă două vârfuri, unul la aprindere, pentru care $\omega t=0$ și altul la stingere, pentru care $\omega t=\pi$. Aceste vârfuri de tensiune sunt cu atât mai mari cu cât $\omega \tau$, și deci, τ are valori mai mici.

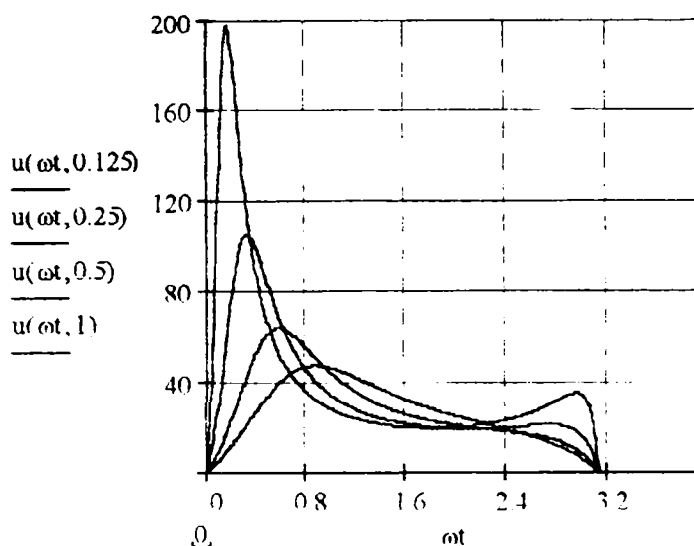


Fig.3.4

Pentru a observa vârfurile de tensiuni, în fig. 3.5. s-a reprezentat grafic dependența lui u de t pentru o valoare impusă a lui τ .

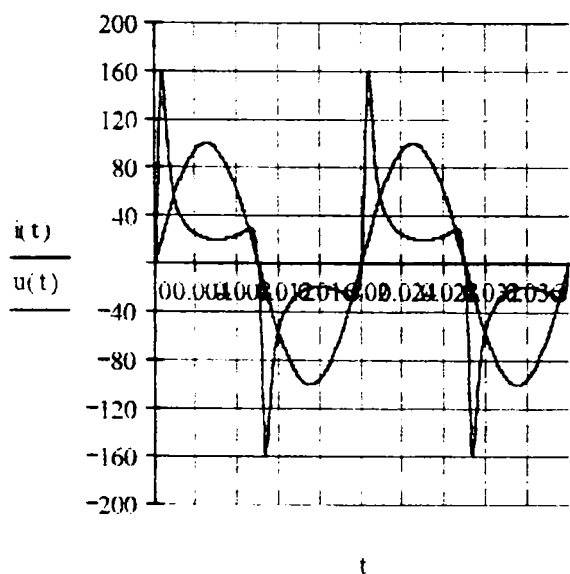


Fig.3.5

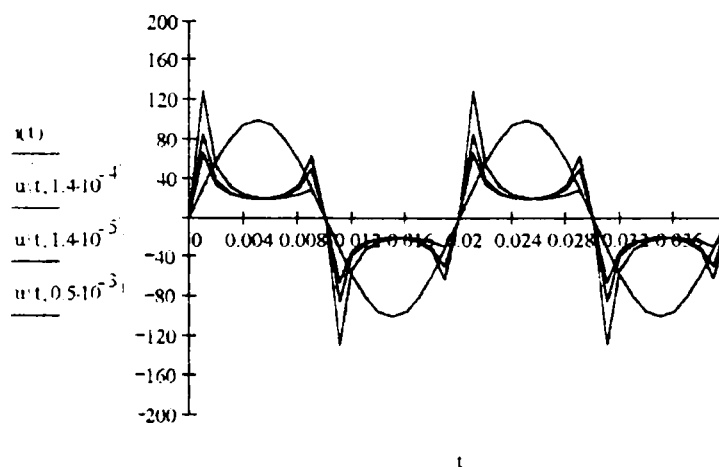


Fig.3.6

În fig. 3.6. s-a reprezentat aceeași dependență pentru diferite valori ale lui τ . Se observă și acum o dependență pronunțată a vârfurilor de tensiune și un grad de deformare al acestora ce depind de τ .

În ipoteza că tensiunea electrică oscilantă de restabilire nu este influențată de con-

ductanța de rest a arcului electric, se poate aprecia că, după trecerea prin zero a curentului electric, reaprinderea arcului electric are loc dacă valoarea conductanței electrice este în creștere adică $dG/dt > 0$, iar $u_i > P$.

Deci puterea dezvoltată în arc trebuie să depășească puterea disipată adică:

$$u^2 \cdot G > P \quad \text{sau} \quad u > \sqrt{\frac{P}{G}} \quad (3.145)$$

Deci, reaprinderea și funcționarea continuă a arcului electric, se produce dacă tensiunea între electrozii arcului satisface relația (3.145). În acest scop sursa de sudare trebuie să furnizeze o tensiune electrică oscilantă de restabilire cel puțin egală cu membrul drept al relației (3.145).

Dacă, pentru $G(t)$ se consideră o relație de forma:

$$G = G_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}} \quad (3.146)$$

relația (3.145) devine:

$$u > \sqrt{\frac{P}{G_0} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}} \quad (3.147)$$

Relația (3.147) stabilește condiția reamorsării arcului electric în momentul când curentul electric trece prin zero, în ipoteza că tensiunea oscilantă de restabilire nu este influențată de ionizarea ce produce după trecerea prin zero a curentului electric.

Cap.4. MODELAREA CÂMPULUI TERMIC

4.1. Vectorul densitate de flux termic. Legile transferului de căldură.

Se consideră un domeniu, ce poate avea orice formă geometrică, iar în acesta un punct oarecare P, localizat în spațiu prin vectorul de poziție \vec{r} , definit față de originea O, a unui sistem de coordonate.

Se admite că, în general, într-o zonă a domeniului are loc o creștere a energiei interne a acesteia, printr-o transformare ireversibilă a unei anumite forme de energie. Impropiu, se spune că în zona respectivă se dezvoltă (degajă) căldură, iar acea zonă se numește sursă (izvor) de căldură.

Pentru caracterizarea locală a unei surse de căldură, în fiecare punct al acesteia se definește căldura dezvoltată în unitatea de timp într-un element de volum din jurul aceluși punct, care se numește densitate de volum a vitezei de generare a căldurii sau densitate de volum a fluxului termic dezvoltat, însă, în această lucrare se va folosi denumirea de putere calorică specifică.

Deci, dacă se notează cu q_d puterea calorică specifică dintr-un moment oarecare t, într-un punct oarecare P, atunci căldura dezvoltată într-un timp infinit mic dt, într-un element de volum dV din jurul punctului P, este un infinit mic, de ordinul doi, notat cu d^2Q_d , dat de relația:

$$d^2Q_d = q_d dV \cdot dt \quad (4.1)$$

Pentru o instalație de sudare cu arc electric se poate considera că sursa de căldură este numai coloana arcului electric, în care se produce o transformare a energiei electromagnetice în energie internă. Ca urmare, având în vedere legea transformării energiei electromagnetice în procesul de conducție electrică se obține:

$$q_d = \vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (4.2)$$

unde \vec{J} , \vec{E} sunt densitatea curentului electric, respectiv intensitatea câmpului electric din P.

Considerând coloana arcului electric un mediu izotrop și omogen, pe baza formei locale a legii conducției electrice se obține:

$$q_d = \sigma E^2; \quad q_d = \rho J^2, \quad (4.3)$$

unde σ , ρ sunt conductivitatea electrică, respectiv rezistivitatea electrică a coloanei arcului electric.

Prin câmp termic al domeniului considerat se înțelege câmpul scalar, care, în general, este de forma $T=T(t, \bar{r})$, unde T se numește temperatura dintr-un moment oarecare t , și din punctul oarecare P .

Scopul acestui capitol constă în stabilirea ecuațiilor și a condițiilor de frontieră, cu ajutorul cărora să se poată determina câmpul termic din domeniul considerat.

Datorită existenței unor diferențe de temperatură, atât în interiorul domeniului, cât și între acesta și exterior, apare un schimb de energie sub formă de căldură.

În general, orice schimb de energie se definește în raport cu o suprafață și se produce între cele două zone, în care acea suprafață separă domeniul considerat. Dacă schimbul energetic este determinat de existența unor diferențe de temperatură între punctele celor două regiuni, se vorbește despre căldură transferată (transmisă) prin suprafața respectivă. Căldura transferată în unitatea de timp se va numi flux termic transmis (transferat) prin aceea suprafață.

Fluxul termic este o mărime de stare globală (extensivă) care se referă la întreaga suprafață, iar ca mărime locală (intensivă), în fiecare punct al suprafeței se definește fluxul termic transferat prin unitatea de suprafață din jurul aceluși punct, care se numește densitate de flux termic transferat, din punctul considerat.

Dacă se notează cu q_s densitatea de flux termic transferat dintr-un punct oarecare P al unei suprafețe S , atunci căldura transferată în intervalul de timp infinit mic dt , printr-un element de suprafață dS , din jurul lui P , este un infinit mic de ordinul doi, notat cu d^2Q_s , și este dat de relația:

$$d^2Q_s = q_s dS \cdot dt \quad (4.4)$$

Însă, în fiecare moment t , q_s depinde atât de poziția punctului P pe S , cât și de orientarea în spațiu a lui S , adică $q_s=q_s(t, \bar{r}, \bar{n})$, unde s-a notat cu \bar{n} versorul normalei duse în P la S .

Ca urmare, q_s nu depinde numai de diferența dintre temperatura T din P și cea din punctele vecine lui P , adică q_s nu este o caracteristică locală exclusivă a transferului de căldură din P .

Se definește vectorul densitate de flux termic, din momentul t și din punctul P , no-

tat cu \bar{q} , ca având valoarea q egală cu densitatea de flux termic prin elementul de suprafață din jurul lui P , al izotermei care, în momentul t trece prin P , direcția cea a normalei dusă în P la izotermă și sensul același cu al transferului de căldură, adică sensul în care temperatura scade.

Având în vedere că această izotermă depinde doar de t și P , rezultă că vectorul \bar{q} este o caracteristică locală a transferului de căldură din P , ce depinde doar de t și P , adică $\bar{q} = \bar{q}(t, \bar{r})$.

Se arată [12] că:

$$q_s = \pm \bar{q} \cdot \bar{n}, \quad (4.5)$$

în care se ia semnul $+$ dacă \bar{n} se orientează în sensul transferului de căldură prin S , și sensul invers în caz contrar.

Dacă S este o suprafață închisă, atunci \bar{n} se orientează spre exteriorul volumului mărginit de aceasta și se numește versorul normalei exterioare la suprafața S .

De asemenea, dacă se face convenția ca sensul de referință al transferului de căldură să se aleagă spre volumul mărginit de S , adică se presupune că în acest volum intră căldură, atunci:

$$q_s = -\bar{q} \cdot \bar{n} \quad (4.6)$$

În concluzie, dacă se cunoaște vectorul \bar{q} , din relația (4.5) se poate determina q_s , iar cu relația 4.6 se poate determina căldura transmisă prin S în orice interval de timp.

Din acest motiv studiul transferului de căldură urmărește determinarea câmpului vectorial $\bar{q} = \bar{q}(t, \bar{r})$.

În acest scop se folosesc anumite legi, specifice fiecărui mod de transfer al căldurii.

În cazul transferului de căldură prin conducție termică, se folosește legea lui Fourier, care, matematic, se scrie sub forma:

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad}T; \quad \bar{q} = -\lambda \nabla T \quad (4.7)$$

unde λ se numește conductivitate termică a mediului din punctul P .

În cazul unui mediu izotrop și omogen, λ este o caracteristică locală a mediului respectiv, și nu depinde de direcția considerată.

În cazul unui mediu omogen, dar anizotrop, T depinde de direcția aleasă, și vecto-

rul \bar{q} se descompune după trei direcții ce trec prin P, care depinde de gradul de anizotropie.

Dacă mediul este admis ortotrop, cele trei direcții sunt reciproc perpendiculare. Dacă acestea se aleg ca fiind chiar axele x, y, z ale unui sistem de coordonate carteziene, atunci:

$$\bar{q} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \bar{i} - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \bar{j} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \bar{k}, \quad (4.8)$$

unde \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} sunt versorii axelor, iar λ_x , λ_y , λ_z , sunt conductivitățile termice ale mediului după cele trei axe.

Transferul de căldură prin convecție se referă la schimbul de căldură dintre un domeniu solid și unul fluid, aflate în contact fizic, când fluidul se află în mișcare față de solid.

Caracterizarea unui astfel de transfer se face cu ajutorul densității fluxului termic dintr-un punct oarecare al suprafeței S de contact dintre solid și fluid, ce se admite că are sensul de la solid spre fluid. Valoarea q a acestei densități de flux termic este dată de legea lui Newton:

$$q = \alpha(T_s - T_f), \quad (4.9)$$

unde: T_s este temperatura dintr-un punct oarecare al lui S, T_f este temperatura dintr-un punct oarecare al fluidului, aflat la o distanță suficient de mare de S, iar α se numește coeficient de schimb de căldură prin convecție.

Transferul de căldură prin radiație are loc prin intermediul undelor electromagnetice, cu lungimi de undă cuprinse între 0,1 μm și 100 μm , care sunt emise, absorbite, reflectate sau transmise de orice corp ce are o temperatură $T > 0$ K. În cazul corpurilor solide sau lichide, aceste procese se produc numai într-un strat foarte subțire de la suprafața corpurilor, iar în cazul unui gaz, procesele au loc în tot volumul acestuia.

Din acest motiv, în cazul unui corp solid sau lichid, se vorbește despre radiația termică la suprafața corpului. Ca și caracteristică se folosește densitatea de flux termic radiant q, dintr-un punct oarecare al suprafeței S a corpului respectiv, care se exprimă cu legea Stefan-Boltzman, sub forma:

$$q = \epsilon c T^4, \quad (4.10)$$

unde:

-c este coeficientul de radiație al corpului absolut negru, numit constanta Stefan-

Boltzman, care în S.I. are valoarea $c=5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$;

ε este emisivitatea sau coeficientul de emisie sau coeficientul de negreală al suprafeței corpului respectiv și este o caracteristică a acestuia. Emisivitatea este o mărime adimensională, și are valori subunitare, $\varepsilon < 1$.

În practică, relația (4.10) se scrie sub forma:

$$q = \varepsilon c \left(\frac{T}{100} \right)^2 \quad (4.11)$$

în care $c=5,67 \text{ W/m}^2\text{K}^4$.

4.2. Ecuațiile modelului

4.2.1. Considerații generale

Studiul termic al unei îmbinări sudate urmărește determinarea evoluției în timp a temperaturii din punctele componentelor ce se sudează, deoarece de această evoluție depinde atât calitatea îmbinării, cât și structura metalografică a cusăturii.

Ca urmare, scopul final al studiului termic, la care se referă prezentul capitol, constă în aflarea câmpului scalar nestaționar $T(t, \bar{r})$.

Arcul electric este privit ca fiind sursa de căldură, ce determină încălzirea componentelor de sudat.

Din acest motiv, studiul termic al arcului electric nu este un scop în sine. Se impune totuși cunoașterea câmpului termic din punctele arcului electric, pentru a putea calcula căldura transmisă de la acesta la componentele ce se sudează.

Însă câmpul termic al arcului electric este influențat de gazul de protecție și studiul acestuia se face pentru a putea determina căldura pierdută prin convecție de arcul electric.

În concluzie, domeniul ce se analizează este constituit din componentele de sudat, arcul electric și gazul de protecție utilizat.

Având în vedere că gazul de protecție este în mișcare, se va considera cazul cel mai general al unui fluid, privit ca un mediu continuu, aflat în mișcare față de un sistem de referință ce se admite ca fiind imobil.

Ecuațiile modelului trebuie astfel stabilite încât să permită determinarea câmpului termic, dintr-un punct oarecare P al domeniului ocupat de fluid, adică a câmpului scalar nestaționar $T=T(t, \bar{r})$, unde \bar{r} este vectorul de poziție al lui P față de originea unui sistem

de coordonate, al \bar{e} s astfel încât să fie fix față de sistemul de referință respectiv.

Pentru studiul fluidului se utilizează metoda Euler, ceea ce înseamnă că, în domeniul fluidului, sunt definite următoarele câmpuri:

- un câmp vectorial al vitezelor $\bar{v} = \bar{v}(t, \bar{r})$, unde \bar{v} este viteza din P;
- un câmp scalar al temperaturilor $T = T(t, \bar{r})$, unde T este temperatura din P.

Fluidul se admite a fi un mediu izotrop, cu proprietățile definite prin câmpurile scalare, în general nestaționare: al densității $\rho = \rho(t, \bar{r})$; al căldurii specifice $c = c(t, \bar{r})$; al conductivității termice $\lambda = \lambda(t, \bar{r})$.

Pentru a realiza un studiu mai exact al transferului de căldură prin convecție, de la arcul electric la gazul de protecție, fluidul considerat se presupune a fi vâscos, proprietate caracterizată prin câmpul scalar al coeficientului de vâscozitate dinamică: $\eta = \eta(t, \bar{r})$.

În domeniul ocupat de fluid se alege un volum de material V^* , care, la un moment oarecare t, coincide cu un volum de control V, mărginit de o suprafață închisă S, iar P se presupune a fi un punct oarecare al volumului de control.

Ecuțiile modelului se obțin prin aplicarea, pentru volumul de material considerat, a unor legi de conservare, ce se prezintă în cele ce urmează.

4.2.2. Ecuția conservării energiei (ecuația energiei)

Acest principiu se aplică între un moment oarecare t, și un moment infinit apropiat $t' = t + dt$, sub forma generală:

$$dU + dE_c = dQ + dL \quad (4.12)$$

unde:

- dU , dE_c sunt variații infinit mici, în timpul infinit mic dt ale energiei interne, respectiv energiei cinetice ale volumului material considerat;

- dQ este căldura infinit mică, primită în timpul dt de volumul material considerat;

- dL este lucrul mecanic infinit mic, efectuat de toate forțele ce acționează asupra volumului material, ca urmare a deplasărilor ce le au punctele lor de aplicații, în timpul infinit mic dt .

Este mai avantajos dacă scriem relația (4.12) pentru un moment oarecare t, ceea ce se obține împărțind fiecare termen cu dt , rezultând ecuația:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dL}{dt} \quad (4.13)$$

Energia internă U și energia cinetică E_c ale volumului material V^* sunt date de re-

lațiile:

$$U = \int_V \rho c T dV; \quad E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (4.14)$$

În general, căldura dQ pe care volumul considerat o primește în timpul dt , are două componente:

a) Căldura dQ_d pe care o dezvoltă sursele termice în timpul dt , dată de relația:

$$dQ_d = \int_V q_d dV \quad (4.15)$$

b) Căldura dQ_c , pe care, în timpul dt , o primește volumul respectiv datorită transferului de căldură prin conducție, care se exprimă prin relația:

$$dQ_c = -dt \oint_S \bar{q}_c \cdot \bar{ds}, \quad (4.16)$$

unde q_c este vectorul densitate de flux termic conductiv dintr-un punct oarecare a lui S , iar semnul minus intervine deoarece sensul elementului de suprafață \bar{ds} este ales spre exteriorul volumului, iar sensul de referință al transferului de căldură s-a admis spre interiorul acestuia. Folosind transformata Gauss-Ostrogradski și legea lui Fourier se obține:

$$dQ_c = dt \int_V \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV \quad (4.17)$$

Având în vedere relațiile (4.16) și (4.17), se obține:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V [\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_d] dV \quad (4.18)$$

În ceea ce privește ultimul termen din membrul drept al relației (4.13), presupunând fluidul compresibil, se obține:

$$\frac{dL}{dt} = \int_V \bar{f} \cdot \bar{v} dV + \oint_S \bar{T}_n \cdot \bar{v} \cdot ds, \quad (4.19)$$

unde:

- \bar{f} este, în general, suma vectorială a densităților de volum pentru toate forțele exterioare ce acționează în punctele volumului considerat;

- \bar{T}_n este vectorul tensiune dintr-un punct oarecare M al frontierei S a volumului de control considerat.

Notăția \bar{T}_n pune în evidență faptul că vectorul depinde de orientarea suprafeței, deci de poziția normalei \bar{n} în M la S . Ca urmare, \bar{T}_n nu este o caracteristică exclusivă a

stării tensiunii din punctul M.

Se arată că starea de tensiune din orice punct al oricărui mediu continuu este complet caracterizată de trei vectori tensiune, fiecare acționând pe câte o suprafață plană elementară, ce trece prin punctul respectiv, iar cele trei suprafețe, plane elementare, sunt reciproc perpendiculare și formează un triedru drept.

Dacă normalele la cele trei suprafețe elementare se aleg axele x, y, z ale unui sistem de coordonate cartezian, cei trei vectori tensiune se notează cu $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$, și este valabilă relația:

$$\bar{T}_x = \bar{T}_x n_x + \bar{T}_y n_y + \bar{T}_z n_z, \quad (4.20)$$

unde n_x, n_y, n_z sunt componentele după cele trei axe ale normalei \bar{n} dusă în M la S.

În general, $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ nu au direcțiile axelor respective, și fiecare se descompune în componente după direcțiile celor trei axe, iar valorile acelor componente se notează cu τ_{ij} , unde i este indicele vectorului respectiv, adică notația axei normală pe suprafața elementară pe care acționează acea tensiune, iar j este notația axei pe care se face descompunerea. Înseamnă că:

$$\begin{aligned} \bar{T}_x &= \tau_{xx} \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k} \\ \bar{T}_y &= \tau_{yx} \bar{i} + \tau_{yy} \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k} \\ \bar{T}_z &= \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + \tau_{zz} \bar{k} \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor.

Înlocuind relațiile (4.21) în (4.20) rezultă componentele T_{nx}, T_{ny}, T_{nz} ale vectorului tensiune \bar{T}_n după axele sistemului de coordonate, ele având expresiile:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \tau_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ T_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \\ T_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \tau_{zz} n_z \end{aligned} \quad (4.22)$$

Se arată că:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (4.23)$$

Cu ajutorul relației (4.20) se obține:

$$\oint_S \bar{T}_n \cdot \bar{v} ds = \oint_S \bar{T}_x \cdot \bar{v} n_x ds + \oint_S \bar{T}_y \cdot \bar{v} n_y ds + \oint_S \bar{T}_z \cdot \bar{v} n_z ds \quad (4.24)$$

Însă:

$$n_x = \bar{n} \cdot \bar{i}; \quad n_y = \bar{n} \cdot \bar{j}; \quad n_z = \bar{n} \cdot \bar{k};$$

și:

$$\oint_S \overline{T}_n \cdot \overline{v} n_x ds = \oint_S (\overline{T}_n \cdot \overline{v}) \cdot \overline{n} ds = \oint_V \operatorname{div}(\overline{T}_n \cdot \overline{v}) \cdot \overline{n} dv,$$

unde s-a utilizat transformata Gauss-Ostrogradski.

De asemenea:

$$\operatorname{div}[(\overline{T}_x \cdot \overline{v}) \cdot \overline{i}] = \overline{i} \cdot \operatorname{grad}(\overline{T}_x \cdot \overline{v}) = \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial x}, \quad (4.24)$$

unde s-a avut în vedere că \overline{i} este un vector constant, și $\operatorname{div} \overline{i} = 0$, iar:

$$\operatorname{grad}(\overline{T}_x \cdot \overline{v}) = \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial z} \overline{k}$$

Ca urmare:

$$\oint_S \overline{T}_x \cdot \overline{v} \cdot n_x ds = \int_V \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial x} dv \quad (4.25)$$

În mod similar se obține:

$$\oint_S \overline{T}_y \cdot \overline{v} \cdot n_y ds = \int_V \frac{\partial(\overline{T}_y \cdot \overline{v})}{\partial y} dv; \quad \oint_S \overline{T}_z \cdot \overline{v} \cdot n_z ds = \int_V \frac{\partial(\overline{T}_z \cdot \overline{v})}{\partial z} dv \quad (4.26)$$

Pe baza relațiilor (4.25), (4.26), relația (4.24) devine:

$$\oint_S \overline{T}_n \cdot \overline{v} ds = \int_V \left[\frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{T}_y \cdot \overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{T}_z \cdot \overline{v})}{\partial z} \right] dv \quad (4.27)$$

Ținând cont de relațiile (4.14) se obține:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dE_c}{dT} = \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho c \left(T + \frac{\rho v^2}{2c} \right) dv \right] \quad (4.28)$$

Se definește o temperatură totală T' , prin relația:

$$T' = T + \frac{\rho v^2}{2c} \quad (4.29)$$

Înlocuind relația (4.29) în relația (4.28) și folosind teorema transportului, rezultă:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial(\rho c T')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c T' \overline{v}) \right] dv \quad (4.30)$$

În relația (4.13) se înlocuiesc relațiile (4.30), (4.18), (4.19), (4.27) și după utilizarea teoremei integrale reale rezultă:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c T' \overline{v}) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_d + \rho \overline{g} \cdot \overline{v} + \frac{\partial(\overline{T}_x \cdot \overline{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{T}_y \cdot \overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{T}_z \cdot \overline{v})}{\partial z}, \quad (4.31)$$

unde s-a considerat că singura forță exterioară este forța de greutate.

Din relația (4.29) se explicitază T , și se obține:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T') - \operatorname{div} \left[\lambda \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2c} \right) \right] \quad (4.32)$$

Al doilea termen din membrul drept al relației (4.31) pune în evidență căldura care iese din volumul considerat, datorită mișcării fluidului.

Notând cu v_x, v_y, v_z componentele vitezei după axele sistemului de coordonate și având în vedere relațiile (4.21) și (4.32), relația (4.31) devine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho c T')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c T' \bar{v}) = q_d + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T') - \operatorname{div} \left[\lambda \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2c} \right) \right] + \rho \bar{g} \cdot \bar{v} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \end{aligned} \quad (4.33)$$

unde s-a ținut cont de relațiile (4.23).

Relațiile (4.33) reprezintă forma completă a legii conservării energiei exprimată în eforturi unitare, pentru cazul general al unui mediu continuu vâscos și deformabil.

Însă, pe lângă temperatură și viteză sunt necunoscute și componentele vectorului tensiune, ceea ce impune exprimarea acestora în funcție de mărimi caracteristice ale fluidului respectiv.

În acest scop este necesar ca să se aleagă un model pentru fluidul considerat. Astfel, folosind ipoteza lui Newton asupra forțelor de viscozitate, se obține modelul de fluid newtonian, pentru care se obțin următoarele relații constitutive:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \eta' \operatorname{div}(\bar{v}) \\ \tau_{yy} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \eta' \operatorname{div}(\bar{v}) \\ \tau_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \eta' \operatorname{div}(\bar{v}) \\ \tau_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

unde p este presiunea, iar η' este al doilea coeficient de viscozitate, care se exprimă în funcție de η în raport de ipoteza admisă. Astfel, utilizând ipoteza lui Stokes, se obține:

$$\eta' = -\frac{2}{3}\eta \quad (4.35)$$

Însă, pentru multe fluide se poate considera $\eta' = 0$, chiar în ipoteza că fluidul respectiv este compresibil.

Relațiile (4.34) se înlocuiesc în relația (4.33) și după efectuarea derivărilor și aranjarea termenilor se obține:

$$\frac{\partial(\rho c T^i)}{\partial t} + \text{div}(\rho c T^i \bar{v}) = q_d + \text{div}(\lambda \text{grad} T) - \text{div} \left[\lambda \text{grad} \left(\frac{v^2}{2c} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v} \cdot \mu \Delta \bar{v} + \quad (4.36)$$

$$+ \bar{v}(\mu + \mu') \text{grad}(\text{div} \bar{v}) + \Phi$$

unde:

$$\Delta \bar{v} = \bar{i} \Delta v_x + \bar{j} \Delta v_y + \bar{k} \Delta v_z,$$

în care Δv_x , Δv_y , Δv_z sunt operatorii Laplace ai componentelor vitezelor

Cu Φ s-a notat funcția de disipație, dată de relația:

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta' (\text{div} \bar{v})^2 \quad (4.37)$$

Se observă că al cincilea și al șaselea termen din membrul al relației (4.36) reprezintă densitatea de volum a puterii dezvoltată de forțele de vâscozitate. De asemenea, se poate arăta că Φ reprezintă densitatea de volum a energiei care, în unitatea de timp, se transformă ireversibil în căldură, ca urmare a frecărilor interne cauzate de forțele de vâscozitate.

Se subliniază faptul că relația (4.36) este forma completă, general valabilă, a ecuației energiei și este foarte rar întâlnită în literatura de specialitate, iar deducerea sa este o contribuție proprie.

4.2.3. Ecuația conservării masei (ecuația de continuitate)

Ecuația de continuitate se obține pe baza ipotezei că frontiera oricărui volum material este impermeabilă, adică orice volum material rămâne tot timpul format din aceleași particule materiale.

Fie un volum material V^* de volum Ω , și masă m , date de relațiile

$$\Omega = \int_{V^*} dV, \quad m = \int_{V^*} \rho dV \quad (4.38)$$

Folosind teorema transportului se obține:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{V^*} \operatorname{div} \bar{v} \, dv; \quad \frac{dm}{dt} = \int_{V^*} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) \right] dv \quad (4.39)$$

Pe baza ipotezei menționate se obține:

$$\int_{V^*} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) \right] dv = 0 \quad (4.40)$$

și folosind teorema integralei nule se rezultă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (4.41)$$

sau:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (4.42)$$

unde $\frac{D\rho}{Dt}$ este derivata substanțială a densității.

Relația (4.40) este forma locală a legii continuității, iar relația (4.41) sau (4.42) reprezintă forma locală a legii.

Un mediu continuu este incompresibil, dacă valoarea volumului oricărui domeniu material nu variază în timpul mișcării, adică $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, și din relația (4.39) se obține:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (4.43)$$

iar din relația (4.42) rezultă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.44)$$

Se atrage atenția că atributul de incompresibil se referă la valoarea volumului și nu la forma volumului material, adică un mediu continuu poate fi incompresibil și deformabil.

De asemenea, relațiile (4.43) sau (4.44) sunt valabile oricare ar fi regimul curgerii fluidului.

Relația (4.44) se scrie dezvoltat sub forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (4.45)$$

Dacă mediul continuu este considerat incompresibil și omogen, atunci $\operatorname{grad} \rho = 0$, și din (4.45) se obține $\rho = \text{constant}$, adică la un mediu incompresibil și omogen, densitatea este constantă atât în spațiu cât și în timp și se spune că acel mediu este izodens.

Dacă se face ipoteza că densitatea fluidului este constantă în timp, din relația

(4.41) se obține:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (4.46)$$

Dacă, în plus, se admite că fluidul este omogen, rezultă:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (4.47)$$

Se subliniază faptul că relațiile (4.46) sau (4.47) sunt valabile indiferent dacă mediul continuu este compresibil sau incompresibil; singura ipoteză care se face constă în a considera că densitatea fluidului este constantă în timp, respectiv că mediul este omogen, ipoteze ce se folosesc în multe aplicații practice.

De asemenea, dacă se impune condiția ca mediul continuu să fie incompresibil, este valabilă relația (4.43), indiferent de faptul că densitatea acestuia variază în timp și spațiu.

4.2.4. Ecuațiile mișcării

Ecuațiile mișcării unui mediu continuu se obțin prin aplicarea teoremei impulsului pentru volumul material considerat, care se exprimă sub forma:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \int_V \bar{f} dV + \oint_S \bar{T}_n ds, \quad (4.48)$$

unde \bar{f} , \bar{T}_n au semnificațiile precizate, iar \bar{H} este impulsul volumului material, definit prin relația:

$$\bar{H} = \int_V \rho \bar{v} dV \quad (4.49)$$

Componentele impulsului după axele sistemului de coordonate considerat au valorile:

$$H_x = \int_V \rho v_x dv; \quad H_y = \int_V \rho v_y dv; \quad H_z = \int_V \rho v_z dv$$

Deci:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{i} \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho v_x dv \right] + \bar{j} \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho v_y dv \right] + \bar{k} \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho v_z dv \right] \quad (4.50)$$

Se înlocuiește relația (4.50) în relația (4.48). Având în vedere teorema transportului și procedând la fel ca în cazul precedent se obține:

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \bar{i} \operatorname{div}(\rho v_x \bar{v}) + \bar{j} \operatorname{div}(\rho v_y \bar{v}) + \bar{k} \operatorname{div}(\rho v_z \bar{v}) = \rho \bar{g} + \frac{\partial \bar{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{T}_z}{\partial z} \quad (4.51)$$

Dacă în relația (4.51) se înlocuiesc \bar{T}_x , \bar{T}_y , \bar{T}_z cu expresiile lor date de relațiile (4.21), se obțin ecuațiile lui Cauchy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_x \bar{v}) &= \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_y \bar{v}) &= \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\
\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_z \bar{v}) &= \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Considerând fluidul newtonian, și având în vedere ecuațiile constitutive (4.34), relațiile (4.52) devin:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_x \bar{v}) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} v_x) + S_x + \frac{\partial}{\partial x}(\eta' \operatorname{div} \bar{v}) \\
\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_y \bar{v}) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} v_y) + S_y + \frac{\partial}{\partial y}(\eta' \operatorname{div} \bar{v}) \\
\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_z \bar{v}) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} v_z) + S_z + \frac{\partial}{\partial z}(\eta' \operatorname{div} \bar{v})
\end{aligned} \tag{4.53}$$

unde S_x , S_y , S_z sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
S_y &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\
S_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Condensat, relațiile (4.54) se pot exprima prin:

$$S_x = \operatorname{div} \left(\eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right); \quad S_y = \operatorname{div} \left(\eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right); \quad S_z = \operatorname{div} \left(\eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \tag{4.55}$$

Din relațiile (4.55) rezultă că termenii S_x , S_y , S_z reprezintă pierderi de viteză datorate vâscozității fluidului.

Se menționează faptul că ecuațiile (4.53), (4.54) sunt valabile pentru cazul cel mai general, al unui mediu continuu compresibil, ale cărui proprietăți variază atât în timp cât și în spațiu.

Mai mult, se poate arăta că, dacă se folosește o mediere în timp de tip Favre [12], ecuațiile sunt valabile și pentru cazul când fluidul are o mișcare turbulentă, cu deosebirea că, în ecuațiile (4.53) în locul lui η trebuie considerat un coeficient efectiv de vâscozitate dinamică echivalent, notat cu η_e , definit prin relația:

$$\eta_e = \eta + \eta_t \tag{4.56}$$

unde η_t se numește coeficientul turbulent de vâscozitate.

În literatura de specialitate [10] se prezintă mai multe modele pe baza cărora se poate determina coeficientul turbulent de vâscozitate, pe baza unei relații de forma:

$$\eta_t = C_\eta \frac{\rho k^2}{\varepsilon}, \quad (4.57)$$

unde: ε , k se numesc energia cinetică turbulentă respectiv viteza de disipare a energiei cinetice turbulente, iar C_η este un coeficient al turbulenței.

Mărimile ε , k se află prin rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale specifice fiecărui model, iar C_η are fie o valoare constantă, fie se determină dintr-o relație specifică fiecărui model.

Astfel, în cazul modelului standard $C_\eta=0,09$, iar k și ε se obțin prin rezolvarea următoarelor ecuații:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{v}) = \left(\frac{\mu_t}{C_k} \text{grad } k \right) + \mu_t \Phi - \rho \varepsilon + \mu_t \Phi - \rho \varepsilon + \frac{C_4 \beta \mu_t}{C_t} \bar{g} \cdot \text{grad } T \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \bar{v}) = \text{div} \left(\frac{\mu_t}{C_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \Phi - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{C_3 (1 - C_3) \beta \rho k}{C_t} \bar{g} \cdot \text{grad } T \quad (4.59)$$

unde Φ este funcția de disipație, dată de relația (4.30), iar restul notațiilor sunt coeficienți, pentru care se dau următoarele valori implicite:

$$C_k=1; C_4=0; \beta=0; C_t=1; C_\varepsilon=1,3; C_{1\varepsilon}=1,44; C_2=1,12; C_3=1.$$

În cazul particular al unei curgeri laminare, dacă se face ipoteza că η este constant în spațiu și având în vedere ecuația de continuitate, ecuațiile (4.53), (4.54) conduc la ecuațiile lui Navier-Stokes, care se exprimă vectorial prin relația:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \bar{v} + (\eta + \eta') \text{grad}(\text{div } \bar{v}), \quad (4.60)$$

unde $\frac{D\bar{v}}{Dt}$ este derivata substanțială a vitezei, ce va avea componentele:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \bar{v} \text{grad } v_x \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \bar{v} \text{grad } v_y \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \bar{v} \text{grad } v_z \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dacă se admite fluidul incompresibil, se obține:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \bar{v} \quad (4.62)$$

Ecuatiile mișcării sub formă generală (4.53) se vor folosi pentru studiul mișcării gazului de protecție.

4.2.5. Ecuatia radiației termice

Prin radiație termică se realizează un schimb de căldură între oricare două domenii aflate la temperaturi diferite, prin intermediul undelor electromagnetice. Deci, un astfel de schimb de căldură intervine și când cele două domenii nu sunt în contact fizic.

Se consideră un domeniu, 1, mărginit de suprafața închisă S_1 , aflată la o temperatură T_1 , și având o emisivitate ε_1 , și un al doilea domeniu 2, mărginit de o suprafață închisă S_2 , aflată la o temperatură T_2 , și având o emisivitate ε_2 .

Dacă $T_1 > T_2$, atunci schimbul de căldură se produce de la domeniul 1 la domeniul 2 și se notează cu q densitatea fluxului termic dintr-un punct oarecare al lui S_1 transmis prin radiație termică de la domeniul 1 la domeniul 2.

Considerând cele două domenii ca și corpuri cenușii, se arată că este valabilă relația:

$$q = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{12}, \quad (4.63)$$

unde C_0 este constanta lui Boltzman, iar φ_{12} se numește coeficientul unghiular mediu al radiației dintre domeniul 1 și domeniul 2 și este dat de relația:

$$\varphi_{12} = \frac{\iint_{S_1 S_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} ds_1 ds_2}{S_1} \quad (4.64)$$

În relația (4.64) prin r se înțelege distanța dintre un punct oarecare M_1 de pe S_1 și un punct oarecare M_2 de pe S_2 , iar φ_1 , φ_2 sunt unghiurile ce le face segmentul de dreaptă ce unește cele două puncte cu normalele duse în M_1 , respectiv M_2 .

În unele lucrări, φ_{12} se numește factor de vizibilitate al suprafeței S_2 de pe suprafața S_1 .

Utilizarea practică a relației (4.64) este restrânsă doar la forme particulare ale celor două suprafețe, pentru care este posibilă calcularea celor două integrale de suprafață, ce intervin în relația (4.64), ceea ce restrânge foarte mult aria de folosire a relației (4.65).

Însă, la ora actuală există softuri matematice care permit calculul factorului de

vizibilitate, oricare ar fi forma celor două suprafețe, prin utilizarea unor metode numerice iterative de integrare.

4.3. Condiții inițiale și de frontieră

Considerând cunoscute proprietățile fizice ale mediului din domeniul considerat, cele 5 ecuații ale modelului, prezentate până acum, permit determinarea a 5 necunoscute:

- valorile componentelor vitezei, adică $v_x=v_x(t, \bar{r})$, $v_y=v_y(t, \bar{r})$, $v_z=v_z(t, \bar{r})$;
- presiunea, adică $p=p(t, \bar{r})$;
- temperatura, adică $T=T(t, \bar{r})$.

În cazul unui fluid, dacă se cunoaște ecuația barometrică, adică funcția scalară $\rho=\rho(p)$, atunci se poate determina și densitatea fluidului, adică $\rho=\rho(t, \bar{r})$.

Însă, în general, toate ecuațiile modelului se exprimă cu ajutorul unor derivate parțiale, ceea ce necesită ca, pentru rezolvarea acestor ecuații, să se efectueze integrarea lor în timp și spațiu, ceea ce determină apariția unor constante de integrare.

Pentru determinarea constantelor de integrare și deci obținerea unor soluții unice, trebuie impuse anumite condiții inițiale și de frontieră.

Condițiile inițiale se referă la valorile mărimilor în momentul inițial $t_0=0$, și în general se exprimă sub forma:

$$\bar{v}(t, \bar{r}) = \bar{v}_0(\bar{r}) = \bar{F}_v(\bar{r}); \quad p(t, \bar{r}) = p(\bar{r}) = F_p(\bar{r}); \quad T(t, \bar{r}) = T(\bar{r}) = F_T(\bar{r}).$$

unde $\bar{F}_v(\bar{r})$, $F_p(\bar{r})$, $F_T(\bar{r})$ trebuie să fie funcții cunoscute.

Condițiile de frontieră constă în a impune ca fiecare mărime să aibă o anumită distribuție în punctele frontierei S a domeniului considerat.

De obicei, pentru viteză și presiune, condițiile de frontieră sunt de tip Dirichlet, care, în general, se exprimă prin:

$$\bar{v}(t, \bar{r})\Big|_S = \bar{v}_s(t, \bar{r}); \quad p(t, \bar{r})\Big|_S = p_s(t, \bar{r}), \quad (4.65)$$

unde $\bar{v}_s(t, \bar{r})$, $p_s(t, \bar{r})$ trebuie să fie funcții cunoscute.

Pentru temperatură, condiția de frontieră poate fi:

a) De primul tip, când se exprimă sub forma:

$$T(t, \bar{r})\Big|_S = T_s(t, \bar{r}), \quad (4.66)$$

unde $T_s(t, \bar{r})$ trebuie să fie o funcție cunoscută.

b) De al doilea tip, când se impune distribuția densității fluxului termic, transmis prin conducție prin frontiera S , sub forma:

$$-\bar{n} \cdot \mathbf{q}(t, \bar{r}) \Big|_s = q_s(t, \bar{r}), \quad (4.67)$$

unde $q_s(t, \bar{r})$ trebuie să fie o funcție cunoscută.

Folosind legea lui Fourier, relația (4.67) devine:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s = q_s(t, \bar{r}) \quad (4.68)$$

c) De al treilea tip, care se impune când intervine un schimb de căldură prin convecție, între domeniul considerat și exteriorul său. În acest caz, conform legii lui Newton:

$$q_s(t, \bar{r}) = \alpha [T_s(t, \bar{r}) - T_f] \quad (4.69)$$

unde α și T_f au semnificațiile precizate.

4.4. Ecuațiile modelului pentru domeniul studiat

După cum s-a precizat, domeniul de studiu este constituit din: electrod, arcul electric, componentele ce se sudează și gazul de protecție. Pentru a reduce volumul de calcul, și având în vedere scopul prezentei lucrări, se fac anumite ipoteze simplificatoare, ce se prezintă în cele ce urmează.

Se presupune că electrodul este în stare solidă, pe tot parcursul procesului de sudare, ceea ce înseamnă că se face abstracție de starea lichidă a metalului din baia de sudare și de picăturile de metal lichid ce se formează în vârful electrodului, și care se transferă în baia de sudare prin coloana arcului electric.

De asemenea, arcul electric este privit ca un conductor electric perfect flexibil, de formă cilindrică, cu diametrul egal cu cel al electrodului, iar procesele microscopice ce se produc în coloana arcului electric se iau în considerare prin intermediul proprietăților de material.

Ca urmare, considerând un sistem de referință legat de una dintre componente și presupunând arcul electric fix, într-o poziție oarecare din cursul procesului de sudare, pentru cele trei regiuni (electrod, arc electric, componente), ecuațiile modelului se reduc la ecuația energiei, ce obține forma:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_s \quad (4.70)$$

Se poate considera că mediul fiecăreia din cele trei regiuni este izotrop și omogen, iar ecuația (4.70) devine:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + q_d \quad (4.71)$$

Deoarece toate cele trei regiuni sunt parcurse de curentul electric de sudare, puterea calorică specifică $q_d \neq 0$, pentru orice punct al fiecăreia regiuni. Distribuția spațială precum și variația în timp a lui q_d se determină pe baza modelului potențialelor electromagnetice al câmpului electromagnetic menționat, aplicat pentru ansamblul celor trei regiuni.

Gazul de protecție este considerat ca un fluid izotrop și omogen, aflat în mișcare față de sistemul de referință menționat. Studiul gazului de protecție urmărește determinarea coeficientului de transmisie a căldurii prin convecție de la coloana arcului electric la mediul ambiant. În acest scop, pentru regiunea ocupată de gazul de protecție se folosesc toate ecuațiile modelului, prezentate în paragraful anterior. Însă, la un procedeu de sudare în mediu de gaz protector, amorsarea arcului electric se face după ce gazul de protecție ajunge într-un regim de curgere laminară. Pe această bază, și neglijând regimul tranzitoriu, ce intervine imediat după amorsarea arcului electric, ecuațiile modelului se vor particulariza pentru cazul unei curgeri laminare.

Întrucât gazul de protecție are o curgere exterioară, se va considera cazul general al unui corp solid, aflat într-un curent de fluid. Se notează cu S suprafața închisă ce mărginește corpul solid, care se va numi perete, și cu T_p temperatura într-un punct oarecare M al lui S , ce se va numi temperatura peretelui.

Se definește regim liber al fluidului situația în care acesta ocupă întregul domeniu studiat, adică când se imaginează că nu ar exista corpul solid.

Având în vedere cele precizate mai sus, se poate admite că regimul liber al fluidului este un regim staționar și că mișcarea fluidului este laminară.

În aceste ipoteze, ecuația de continuitate se reduce la:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (4.72)$$

Se atrage atenția că relația (4.72) este valabilă și dacă fluidul este compresibil.

De asemenea, considerând fluidul izotrop și omogen, ecuațiile mișcării libere devin:

$$\rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \rho \bar{g} - \nabla p + \eta \Delta \bar{v} \quad (4.73)$$

În aceleași ipoteze, ecuația energiei devine:

$$\rho c \bar{v} \operatorname{grad} T = \lambda \Delta T - \frac{\lambda}{2c} \Delta v^2, \quad (4.74)$$

în care s-a presupus că fluidul nu conține surse de căldură.

Impunând condițiile de frontieră menționate, prin rezolvarea sistemului format de ecuațiile (4.71), (4.72), (4.73) se află câmpurile $p_f = p_f(\bar{r})$, $\bar{v}_f = \bar{v}_f(\bar{r})$, $T_f = T_f(\bar{r})$, unde p_f , \bar{v}_f , T_f sunt presiunea, viteza, respectiv temperatura dintr-un punct oarecare al domeniului studiat, pentru regimul liber sau presiune, viteză, respectiv temperatura de regim liber.

În situația reală, prezența corpului solid produce modificări ale câmpurilor menționate, care, în general, devin nestaționare, și pentru același punct oarecare se vor nota cu $p = p(t, \bar{r})$, $\bar{v} = \bar{v}(t, \bar{r})$, $T = T(t, \bar{r})$, numindu-se respectiv presiunea reală, viteza reală, temperatura reală a fluidului.

În primul rând, datorită aderenței, particulele de fluid aflate pe S vor fi în repaus față de corpul solid, și cum acesta este admis fix, față de sistemul de referință considerat, rezultă că:

$$\bar{v}(t, \bar{r})_S = 0 \quad (4.75)$$

De asemenea, datorită vâscozității fluidului apar forțe tangențiale între straturile de fluid care fac ca, în lungul normalei în M la S , valoarea vitezei să crească. Prandtl a emis ipoteza că vâscozitatea fluidului se manifestă numai într-o zonă din jurul punctului S , pe care a numit-o strat limită hidrodinamic, în rest fluidul poate fi considerat ideal (fără vâscozitate) și având o mișcare laminară, izostaționară (potențială). Ca urmare, prezența corpului face ca $\bar{v} \neq \bar{v}_f$.

Deci, în lungul normalei în M la S , viteza crește de la valoarea zero, în M la valoarea corespunzătoare câmpului $\bar{v}_f(\bar{r})$ dintr-un punct M' , iar în restul punctelor de pe normală viteza are valoarea câmpului \bar{v}_f din punctele respective. Se notează cu δ_h distanța dintre M și M' , care se numește grosime oarecare a stratului limită hidrodinamic. Mulțimea punctelor M' determină o suprafață S_h , care este frontiera stratului limită hidrodinamic și este valabilă condiția:

$$\bar{v}(t, \bar{r})_{S_h} = \bar{v}_f, \quad (4.76)$$

unde s-a notat cu \bar{v}_f valoarea câmpului $\bar{v}_f(\bar{r})$ într-un punct oarecare M' de pe S_h .

În al doilea rând, prezența solidului face ca particulele de fluid aflate pe S să aibă temperatura T_p , adică să fie îndeplinită condiția:

$$T(t, \vec{r})|_S = T_p \quad (4.77)$$

De asemenea, apare un schimb de căldură între solid și fluid, care, în ipoteza că fluidul nu conține surse de căldură și că $T_p > T_f$, are sensul de la solid la fluid. Acest schimb de căldură face să crească temperatura fluidului, astfel că într-un punct oarecare al fluidului temperatura T este mai mare decât valoarea corespunzătoare câmpului $T_f(\vec{r})$ din acel punct.

Prin analogie cu stratul limită hidrodinamic, se face ipoteza că prezența solidului modifică temperatura fluidului numai într-o porțiune din jurul solidului, numită strat limită termic, iar în restul fluidului se poate face abstracție de existența solidului.

Ca urmare, în lungul normalei dusă în M la S , temperatura scade de la valoarea T_p în M la valoarea corespunzătoare câmpului $T_f(\vec{r})$ dintr-un punct M'' , iar în restul punctelor de pe normală temperatura are valoarea corespunzătoare câmpului $T_f(\vec{r})$ din punctele respective. Distanța δ_t dintre M și M'' se numește grosime oarecare a stratului limită termic. Mulțimea punctelor M'' definește o suprafață S_t numită frontiera stratului limită termic, pentru care este valabilă condiția:

$$T(t, \vec{r})|_{S_t} = T_f, \quad (4.78)$$

unde s-a notat cu T_f valoarea câmpului $T_f(\vec{r})$ într-un punct oarecare al lui S_t .

Conform legii lui Newton, densitatea de suprafață q_s a fluxului termic transmis prin convecție de la solid la fluid este:

$$q_s = \alpha(T_p - T_f) \quad (4.79)$$

Particulele de fluid de pe S sunt în repaus față de solid, și deci prin stratul de fluid din imediata vecinătate a lui S căldura se transmite prin conducție termică. Deci, dacă se notează cu \vec{q} vectorul densitate de suprafață al fluxului termic transmis prin conducție, atunci:

$$q_s = \vec{q} \cdot \vec{n}|_S, \quad (4.80)$$

unde \vec{n} este versorul normalei dusă în M la S , orientată spre interiorul solidului, deci spre fluid, ceea ce justifică semnul plus din membrul drept al relației (4.80).

Întrucât este vorba despre un transfer de căldură prin conducție, este valabilă le-

gea lui Fourier și relația (4.80) devine:

$$q_s = -\lambda \text{grad} T_m|_s = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s \quad (4.81)$$

Din egalarea relațiilor (4.79) și (4.81) se obține:

$$\alpha = \frac{-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s}{T_p - T_f} \quad (4.82)$$

Relația (4.82) este folosită pentru calculul lui α .

Mai întâi se impune o anumită valoare pentru T_p , sau, în prealabil, se face un studiu termic al solidului, folosind ecuația energiei sub forma (4.71), iar ca și condiție de frontieră se impune valoarea lui α pe S , care se poate determina din relația:

$$\alpha = \frac{\lambda}{l} N_u, \quad (4.83)$$

unde l este lungimea caracteristică, N_u este criteriul Nusselt, iar λ este conductivitatea termică a fluidului.

În cazul considerat, corpul solid este arcul electric, ce s-a admis de forma unui cilindru drept, iar curgerea gazului de protecție are direcția axei de simetrie, ceea ce înseamnă că l este lungimea arcului electric.

În general, pe baza analizei dimensionale se stabilește relația:

$$N_u = C R_e^b P_r^f, \quad (4.84)$$

unde R_e , P_r sunt criteriile Reynolds, respectiv Prandtl, date de relațiile:

$$R_e = \frac{\rho v l}{\eta}; \quad P_r = \frac{c \eta}{\lambda}, \quad (4.85)$$

în care ρ , c , η , λ exprimă proprietățile fluidelor iar v este viteza medie a fluidului, pentru care se poate considera media valorilor câmpului $\overline{v_r(\bar{r})}$ din punctele lui S .

Notațiile C , b , f din relația (4.84) sunt constante, care trebuie determinate experimental, însă, într-o primă aproximație se poate considera că, pentru un gaz, în cazul unei convecții forțate:

-pentru $R_e \in [1; 10^3]$

$$N_u = 0,5 R_e^{0,5} \cdot P_r^{0,38} \left(\frac{P_r}{P_n} \right)^{0,25} \quad (4.86)$$

-pentru $R_e \in [10^3; 2 \cdot 10^6]$:

$$N_u = 0,25R_e^{0,6} \cdot P_r^{0,38} \left(\frac{P_r}{P_n} \right)^{0,25}, \quad (4.87)$$

unde P_{rs} este criteriul Prandtl pentru solid, dat de relația:

$$P_n = \frac{c_s \eta_s}{\lambda_s}, \quad (4.88)$$

în care c_s , η_s , λ_s reprezintă proprietăți ale solidului.

Deci, cunoscând proprietățile de material ale fluidului și solidului, cu relațiile (4.85) se calculează R_e , P_r , iar cu relația (4.88) se determină P_{rs} . În funcție de valoarea obținută pentru R_e cu relația (4.86) sau (4.87) se determină N_u și din relația (4.83) se obține valoarea lui α .

Prin rezolvarea ecuației energetice se obține câmpul $T_s(t, \bar{r})$ și valoarea acestuia într-un punct oarecare a lui S este T_p .

Practic pentru T_f se alege valoarea temperaturii fluidului la o distanță suficient de mare de solid, de exemplu temperatura mediului ambiant.

Pentru determinarea expresiei de la numărătorul relației (4.82) trebuie cunoscut câmpul termic $T=T(t, \bar{r})$ din stratul limită termic. În acest scop se folosește ecuația energiei, a cărei expresie depinde de modul în care se produce transmisia căldurii în stratul limită termic, iar acesta depinde de mișcarea ce o are fluidul din stratul limită hidrodinamic.

Astfel, în cazul unei curgeri turbulente transferul de căldură se face prin convecție în stratul limită termic și prin transfer de masă și amestec de fluid în restul fluidului. În cazul unei mișcări laminare transferul de căldură este preponderent prin conducție termică, aportul mișcării de amestec fiind foarte redus.

Gazele de protecție folosite au $P_r > 1$, ceea ce face ca $\delta_T > \delta_n$, adică stratul limită termic este mai gros decât cel hidrodinamic și deci modul de transfer al căldurii și forma ecuației energiei depind de mișcarea fluidului în stratul limită hidrodinamic.

Însă, având în vedere cele precizate, se poate considera că în stratul limită hidrodinamic fluidul are o mișcare laminară, ceea ce permite ca ecuația energiei să se scrie sub forma prezentată în paragraful anterior, relația (4.74). Deoarece în această relație intervine câmpul vitezei $\bar{v} = \bar{v}(t, \bar{r})$ va trebui să se adauge ecuația de continuitate și ecuațiile mișcării fluidului, care, în ipoteza menționată se scriu sub formele (4.72), respectiv (4.73).

Ca și condiții de frontieră pentru câmpul vitezei se folosesc relațiile (4.75), (4.76), iar pentru câmpul temperaturii se utilizează relațiile (4.77), (4.78).

De asemenea, se mai adaugă ca și condiție de frontieră valoarea presiunii în punctele suprafeței de ieșire a fluidului din domeniul considerat, care se poate considera egală cu presiunea atmosferică.

Cu aceste condiții de frontieră, prin rezolvarea ecuațiilor menționate se determină câmpul $T=T(t, \bar{r})$, din care se poate calcula $\frac{\partial T}{\partial n}$ în punctul S, și din relația (4.82) se află

α .

Cap.5. MODELAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ȘI A CÂMPULUI TERMIC CU METODA ELEMENTELOR FINITE, ASISTATĂ DE CALCULATORUL ELECTRONIC

5.1. Considerații generale asupra metodelor numerice de rezolvare a modelelor matematice

Metoda elementelor finite face parte din categoria metodelor numerice, care se bazează pe procedeul aproximării prin discretizare. În principiu, acest procedeu constă în a înlocui variațiile în timp și în spațiu, în general, continue, ale fiecărei mărimi, ce intervine în modelul matematic al procesului studiat, cu variații discrete, formate din mulțimea valorilor mărimii respective, la anumite intervale de timp, respectiv în anumite entități geometrice ale domeniului considerat.

Având în vedere această discretizare, în continuare se urmărește transformarea modelului matematic într-un model numeric, astfel încât acesta să conducă la obținerea unui sistem de ecuații, în care necunoscute sunt tocmai valorile discrete, menționate mai sus, ale fiecărei mărimi ce intervine în modelul matematic. În acest scop, s-au dezvoltat independent, dar nu exclusiv, două direcții de abordare: metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite. Cele două metode se deosebesc una de alta atât din punct de vedere al entităților geometrice, folosite pentru discretizare, cât și din punct de vedere al modului în care se obține modelul matematic al procesului studiat.

În cazul metodei diferențelor finite, discretizarea în timp a fiecărei mărimi se realizează prin valorile acesteia în anumite momente din cursul duratei, în care se analizează evoluția temporală a procesului studiat, diferența dintre două momente consecutive numindu-se pas de timp. Discretizarea în spațiu se realizează prin valorile mărimii respective, în anumite puncte ce sunt dispuse în vârfurile unei rețele de discretizare, definite în domeniul considerat.

Diferența dintre coordonatele punctelor vecine, de-a lungul fiecărei axe a sistemului de coordonate folosit, se numește pas al rețelei în lungul acelei axe.

Pentru a putea folosi metoda diferențelor finite trebuie să se dispună de un model matematic diferențial al procesului studiat, care, în general conține una sau mai multe

mărimi de stare, ce sunt necunoscutele problemei, precum și derivate parțiale, în timp și în spațiu, până la un anumit ordin al mărimilor respective. Pentru obținerea modelului numeric, mai întâi se aplică modelul diferențial pentru fiecare nod al rețelei de discretizare, considerând, deocamdată, pentru derivatele parțiale în raport cu timpul, valorile dintr-un moment oarecare.

Fiecare mărime se înlocuiește cu valoarea sa din punctul considerat, iar valoarea în acest punct a fiecărei derivate parțiale a oricărei mărimi, în raport cu fiecare coordonată spațială, se înlocuiește cu o diferență finită. Cea mai simplă diferență finită se exprimă prin raportul dintre diferența valorilor mărimii din punctul considerat, și dintr-un punct vecin și pasul rețelei în lungul axei respective.

Pentru a crește precizia metodei, se folosesc diferențe finite mai complicate, în care intervin valorile mărimii respective, din mai multe puncte vecine punctului considerat, iar pasul rețelei, în lungul rețelei este variabil de la un punct la altul. În final, fiecare derivată temporară se înlocuiește tot cu o diferență finită, care, pentru fiecare moment de divizare se exprimă ca diferența dintre valoarea mărimii din momentul considerat și valorile acesteia, în unul sau mai multe momente anterioare sau posterioare momentului respectiv, raportate la pasul de timp.

În cazul metodei elementelor finite, mai întâi domeniul considerat se divide în mai multe porțiuni, numite elemente finite, fiecare element finit având aceleași dimensiuni ca și domeniul respectiv. Discretizarea în spațiu se face pentru fiecare element finit și constă în a înlocui valoarea fiecărei mărimi, dintr-un punct oarecare al elementului finit considerat, cu suma produselor dintre valoarea mărimii în câte un punct al elementului, numit nod, și o funcție de interpolare, definită în jurul nodului respectiv. De obicei, nodurile oricărui element finit sunt vârfurile formei geometrice a acestuia, însă, pentru creșterea preciziei metodei se definesc ca noduri și puncte dispuse pe laturile sau muchiile formei geometrice respective. Folosirea metodei elementelor finite implică existența unui model matematic integral al procesului studiat, care, în general, conține integrale, pe domeniul considerat și pe frontiera acestuia, a unor expresii ce au forma menționată mai sus, pentru modelul diferențial. În continuare, folosind proprietățile integralelor se obțin ecuațiile modelului pentru fiecare element finit, de aceeași formă cu cea a modelului matematic integral, valabilă pentru întreg domeniul considerat. În final, în modelul fiecărui element finit, valoarea oricărei mărimi, definită într-un punct oarecare al ele-

mentului, se înlocuiește cu expresia menționată. Oricare mărime de stare are o singură valoare spațială în fiecare nod al elementului, ceea ce înseamnă că este o constantă, pentru operațiile de derivare în spațiu, și deci în aceste operații vor interveni numai funcțiile de interpolare. Aceasta permite ca valorile mărimilor din nodurile elementului să poată fi scrise în fața integralelor, iar integralele fiind definite vor conduce la câte o valoare numerică, obținându-se modelul numeric pentru elementul finit respectiv.

Din cele prezentate până acum rezultă că, în cazul metodei diferențelor finite discretizarea în spațiu a fiecărei mărimi se realizează prin valorile acesteia în punctele rețelei de discretizare, definită pentru întregul domeniu considerat, iar în cazul metodei elementelor finite această discretizare se face pentru fiecare element finit, ce este doar o porțiune a domeniului considerat. Rezultă că, pentru o aceeași densitate a rețelei de divizare, discretizarea în spațiu se face cu o eroare mai mică, în cazul folosirii metodei elementelor finite, față de cazul că s-ar folosi metoda diferențelor finite

De asemenea, la metoda diferențelor finite, regiunile din care este formată rețeaua de divizare nu pot avea decât laturi sau muchii rectilinii. Ca urmare, apar dificultăți de realizare a rețelei de divizare dacă frontiera domeniului considerat are forme curbe, ce pot fi înlăturate cu ajutorul unor artificii de calcul, care însă sunt valabile numai pentru o anumită formă a frontierei.

Astfel de artificii nu mai sunt necesare dacă se folosește metoda elementelor finite, deoarece se pot defini elemente finite cu laturi sau muchii curbe.

Totodată, dacă se folosește metoda diferențelor finite, pot apărea numeroase probleme de convergență și de stabilitate a soluțiilor modelului numeric, ceea ce impune determinarea condițiilor în care intervin astfel de probleme și a posibilităților de a le evita, care însă sunt valabile numai pentru o anumită problemă concretă.

Din aceste motive, în această lucrare se va folosi metoda elementelor finite. Însă așa cum rezultă din cele de mai sus, această metodă se folosește doar pentru discretizare în spațiu. Ca urmare, atunci când procesul studiat este nestaționar, pentru derivata în raport cu timpul a fiecărei mărimi, ce intervine în modelul matematic, definită pentru un moment oarecare t , într-un punct oarecare al fiecărui element finit, se folosește o discretizare cu diferențe finite.

Fie T o mărime scalară, sau valoarea unei componente a unei mărimi vectoriale, folosită pentru a descrie procesul studiat. În general, determinarea unei mărimi revine la

aflarea câmpului scalar nestaționar $T=T(t, x, y, z)$, definit în domeniul în care se desfășoară procesul respectiv. Acest domeniu se notează cu D , și poate fi tridimensional, bi-dimensional sau unidimensional, în funcție de modul de desfășurare în spațiu a procesului studiat.

Se presupune că s-au scris ecuațiile modelului matematic al procesului studiat, iar pentru ușurința exprimării și simplificarea expresiilor se admite că există o ecuație în care singura necunoscută este mărimea T . Concentrat, ecuația se poate scrie sub forma operatorie:

$$LT=f \quad (5.1)$$

În relația (5.1), cu L s-a notat un operator ce se aplică mărimii T , iar f este o funcție cunoscută, ce se obține pe baza încărcărilor (sarcinilor), la care este supus sistemul fizic respectiv, și care se impun prin enunțul problemei; în general $f=f(t, x, y, z)$.

După cum rezultă din capitolele precedente, L este un operator diferențial care, în general, constă dintr-o combinație a operatorilor: gradient, divergență și rotor, aplicate mărimii T , multiplicată cu mărimi ce exprimă proprietățile fizice ale mediului din D .

Ca urmare:

$$LT = F \left(c, T, \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial y_j} \right), \quad (5.2)$$

unde cu $\frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial y_j}$ s-au notat derivatele parțiale de ordinul întâi, respectiv de ordinul doi ale lui T în raport cu coordonatele x, y, z , iar c reprezintă proprietățile de material, și în general $c=c(x, y, z)$.

La ecuația (5.2) se adaugă condițiile inițiale și cele de frontieră, ce pot fi:

- de tip Dirichlet, de forma:

$$T|_{S_D} = g(t, x, y, z) \quad (5.3)$$

- de tip Neumann, de forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big|_{S_N} = h(t, x, y, z), \quad (5.4)$$

unde S_D, S_N sunt porțiuni ale frontierei S a lui D , iar g, h sunt funcții cunoscute.

Ideea aproximării mărimii T pornește de la descompunerea unui vector după anumite direcții, folosită în calculul vectorial.

Se face ipoteza că toate funcțiile, ce intervin în modelul matematic sunt funcții

continue în D , și au derivatele parțiale până la cel puțin ordinul doi, de asemenea continuu în D . Această ipoteză permite ca domeniul D să se considere ca fiind un subspațiu al spațiului vectorial real al funcțiilor continue de clasă 2, notat cu $C^2(D)$. Ca urmare, considerând că spațiul vectorial are dimensiunea n , se poate găsi un șir de n funcții continue, liniar independente, ce formează o bază a spațiului respectiv, și care se notează cu N_1, N_2, \dots, N_n , unde $N_i = N_i(t, x, y, z)$, $i = \overline{1, n}$.

În raport cu această bază, mărimea T se aproximează printr-o combinație a celor n funcții care se notează cu \hat{T} , adică în locul lui T se consideră mărimea \hat{T} , exprimată prin relația:

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i, \quad (5.5)$$

unde α_i ($i = \overline{1, n}$) se numesc coordonatele mărimi T în raport cu baza aleasă.

Ca bază se pot alege orice funcții, care să fie liniar independente, și care să îndeplinească condițiile de frontieră menționate.

Mărimea \hat{T} se numește aproximare a mărimii reale T . Pentru a nu complica scrierea, în cele ce urmează, când se va face referire la o mărime se subînțelege că este vorba de aproximarea acesteia, ce se notează așa cum este notată mărimea respectivă în modelul matematic.

Deci, mărimea considerată se va căuta de forma:

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i, \quad (5.6)$$

Presupunând că s-au ales funcțiile N_i , $i = \overline{1, n}$, determinarea mărimii T revine la calculul coordonatelor α_i , $i = \overline{1, n}$, în raport cu baza aleasă.

Pentru realizarea acestui calcul, este necesar ca mai întâi să se construiască un model integral, exprimat, în general, printr-o integrală pe domeniul D și o integrală pe frontiera S a acestuia.

În principiu, modelul integral se poate obține și direct, pornind de la modelul diferențial, exprimat prin ecuația (5.1) și utilizând anumite funcții speciale, cum ar fi funcțiile Green. Însă, pe lângă complicațiile matematice, obținerea modelului integral prin acest procedeu se face pentru fiecare problemă în parte, și deci nu este posibilă o generalizare a procedurii.

Din aceste motive, de obicei modelul integral se obține printr-o metodă variațio-

nală, sau prin metoda reziduiului ponderat, în varianta Galerkin.

În cazul metodelor variaționale se urmărește obținerea unei funcționale $J(T)$, în general de forma:

$$J(T) = \int_D G dD, \quad (5.7)$$

unde G este o funcție de mărimea T și de derivatele sale parțiale.

Funcția G trebuie astfel determinată încât prin anularea primei variații a funcționalei $J(T)$, deci prin impunerea condiției

$$\delta J(T) = 0 \quad (5.8)$$

să se obțină ecuația diferențială dată și să fie îndeplinite condițiile de frontieră de tip Neumann.

Relația (5.8) se numește condiția de staționaritate a funcționalei $J(T)$ și despre o funcție T care o îndeplinește se spune că realizează staționarizarea funcționalei.

Rezultă că o soluție T , ce staționarizează funcționala $J(T)$ este și o soluție a ecuației diferențiale (5.1). Această soluție satisface în mod automat condițiile de frontieră de tip Neumann și se numește soluție slabă a ecuației diferențiale, iar o soluție obținută prin rezolvarea directă a ecuației diferențiale (5.1) se numește soluție tare, sau în sens clasic a acesteia.

Se poate arăta că aproximarea de forma (5.6) este soluția slabă ecuației diferențiale, ceea ce înseamnă că funcțiile N_i , $i = \overline{1, n}$ îndeplinesc condiția de frontieră de tip Neumann, și se numesc funcții trial, sau funcții test. Trebuie să se impună ca aceste funcții să îndeplinească condiția de frontieră de tip Dirichlet. Din acest motiv, condițiile de frontieră de tip Neumann se numesc condiții naturale, iar condițiile de frontieră de tip Dirichlet se numesc condiții impuse.

După ce s-a stabilit funcționala $J(T)$, așa cum s-a precizat, și s-au ales funcțiile trial (test) în funcțională, se întocmește T cu aproximarea (5.6). Se ajunge la o integrală de volum definită în spațiul real, în care coordonatele α_i , $i = \overline{1, n}$ sunt considerate ca și constante. După efectuarea calculelor, funcționala devine o funcție de aceste coordonate $J = J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, care se vor numi parametri variaționali. Condiția de staționaritate (5.8) se transformă în condiția de minim a funcției J , de variabilele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, care este satisfăcută atunci când:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.9)$$

După calculul derivatelor parțiale se obține un sistem liniar de n ecuații în n necunoscute, care, matricial se scrie sub forma:

$$[K][\alpha]=[F], \quad (5.10)$$

unde $[K]$ este matricea coeficienților necunoscutelor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ și se numește matricea de rigiditate a problemei.

Dacă $[K]$ este o matrice nesingulară, din rezolvarea sistemului se află $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, care înlocuite în (5.6) conduc la aproximația T a soluției ecuației diferențiale date.

Pentru determinarea funcționalei $J(T)$ se folosesc metode variaționale cum ar fi metoda Ritz, sau metoda Rayleigh-Ritz, ori metode energetice.

De exemplu, în [4] se arată că pentru modelul potențialelor electromagnetice al câmpului electromagnetic, prezentat în capitolul 3 al lucrării, funcționala energetică este de forma:

$$J(\bar{A}, \bar{V}) = \int_D \left[\left(\int_0^{\bar{E}} \bar{D} d\bar{E} - \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} \right) + (\bar{J} \cdot \bar{A} - \rho V) \right] dD, \quad (5.11)$$

unde notațiile au semnificațiile precizate în capitolul 3.

Metoda reziduurilor ponderate pornește de la ideea că aproximarea (5.6) nu satisface ecuația dată (5.1) și deci va apărea o eroare $E=LT-f$, care se numește reziduu. Evident că reziduu E este o funcție definită în același subspațiu vectorial și trebuie stabilite condițiile ca reziduu să fie minim.

Stabilirea acestor condiții se bazează tot pe "Calculul vectorial", conform căruia un vector este nul atunci când proiecțiile sale pe trei direcții necoplanare sunt nule, adică când vectorul este ortogonal pe fiecare din aceste trei direcții.

În subspațiul vectorial menționat, produsul scalar dintre două funcții f, g , notat cu (f, g) , se definește prin relația:

$$(f, g) = \int_D fg \, dD \quad (5.12)$$

Funcția f este ortogonală pe funcția g atunci când $(f, g)=0$, adică:

$$\int_D f \cdot g \, dD = 0 \quad (5.13)$$

Spațiul vectorial considerat având dimensiunea n , se poate găsi o bază formată cu funcțiile liniar independente e_1, e_2, \dots, e_n .

Reziduu E va fi minim atunci când este ortogonal pe fiecare dintre aceste funcții, deci când sunt îndeplinite condițiile:

$$\int_D e_j \cdot E dD = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.14)$$

În varianta Galerkin a metodei reziduiului ponderat, baza, pe care se proiectează reziduul, se alege aceeași cu cea folosită pentru exprimarea aproximării, adică $e_i = N_i$, $i = \overline{1, n}$ și relația (5.14) devine:

$$\int_D N_j (LT) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.15)$$

unde reziduiul E s-a înlocuit cu expresia sa și s-a folosit o proprietate a integralelor de volum.

În relația (5.15) se înlocuiește T cu aproximarea (5.6) și se obține:

$$\int_D N_j \cdot L \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \right) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.16)$$

Admițând că operatorul L este liniar, relația (5.16) devine:

$$\int_D N_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot L \cdot N_i \right) dD = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.17)$$

unde s-a avut în vedere că pentru operatorul L coordonatele α_i sunt considerate ca și constante.

Pentru fiecare valoare a lui i , indicele j este același pentru suma din relația (5.17) și deci se obține:

$$\int_D \sum_{i=1}^n \alpha_i N_j g_i dD = \int_D N_j f dD, \quad (5.18)$$

unde s-au notat $g_i = LN_i$, $i = \overline{1, n}$.

Folosind proprietatea unei integrale de volum, referitoare la integrarea unei sume și având în vedere că α_i sunt constante, se obține:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_D N_j g_i dD = \int_D N_j f dD \quad (5.19)$$

După calculul integralelor de volum, pentru o valoare arbitrară a lui j se obțin numerele reale:

$$K_{ji} = \int_D N_j g_i dD, \quad i = \overline{1, n}, \quad F_j = \int_D N_j f dD, \quad j = \overline{1, n}$$

Cu aceasta, relația (5.19) devine:

$$K_{j1}\alpha_1 + K_{j2}\alpha_2 + \dots + K_{jn}\alpha_n = F_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.20)$$

Se obține un sistem de tip Cramer, care se exprimă matricial:

$$[K][\alpha] = [F], \quad (5.21)$$

unde $[K]$ este matricea de rigiditate a problemei.

Până acum nu s-a făcut nici o mențiune referitoare la existența și unicitatea aproximării (5.6)

Se arată că, în cazul metodei Galerkin, există o singură soluție aproximativă, dacă matricea de rigiditate este nesingulară, iar în cazul metodei Rayleigh-Ritz, dacă operatorul L este simetric și pozitiv definit, atunci matricea de rigiditate este nesingulară, simetrică și pozitiv definită, iar aproximarea (5.6) există și este unic determinată. Totodată, în aceste condiții, dacă se alege aceleași funcții N_i , cele două metode conduc la aceleași valori pentru coordonatele α_i , $i = \overline{1, n}$.

Evident că, oricare ar fi metoda folosită, soluția aproximativă diferă de cea reală și deci se pune problema convergenței soluției aproximative determinată către soluția reală. Această convergență depinde atât de numărul funcțiilor alese, cât și de forma acestora.

Se poate arăta că, folosind o aceeași bază, metodele variaționale au o convergență mai bună decât cea a metodei reziduurilor ponderale. Însă, principalul dezavantaj al metodelor variaționale constă în faptul că funcționala trebuie definită pentru fiecare model matematic în parte, pe când, așa cum rezultă din cele arătate mai sus, metoda reziduurilor ponderate este valabilă oricare ar fi modelul matematic considerat. De asemenea, se poate arăta că metoda reziduurilor ponderate se poate utiliza și atunci când L este un operator neliniar. Totodată, în cazul unui regim nestaționar, funcționala rezultă de o formă foarte complicată, încât se ajunge la calcule matematice extrem de laborioase.

Din aceste motive, în prezenta lucrare se va folosi metoda reziduurilor ponderate în varianta Galerkin.

Indiferent care ar fi metoda utilizată, convergența este cu atât mai bună cu cât se alege un număr n de funcții de aproximare mai mare. Pe de altă parte, pentru a îndeplini condiția ca funcțiile alese să fie liniar independente, cu cât numărul lor este mai mare ele devin tot mai complicate, ceea ce duce la calcule matematice tot mai dificile, și deci la o creștere a necesarului de memorie și de timp pentru calculatorul electronic, cu ajutorul căruia se efectuează aceste calcule.

Totodată, funcțiile de aproximare sunt definite pe tot domeniul D , și trebuie să fie continue pe D , ceea ce impune anumite restricții în alegerea acestor funcții.

5.2. Metoda elementelor finite

Dezavantajele menționate în paragraful precedent sunt eliminate prin folosirea

metodei elementelor finite, așa cum se va arăta în cele ce urmează.

În primul rând, dacă domeniul D se divizează într-un număr N de elemente finite, ce ocupă domeniile D_1, D_2, \dots, D_n și dacă elementele finite se aleg astfel încât să fie disjuncte, atunci:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N \quad (5.22)$$

Considerând că, indiferent de metoda utilizată, s-a obținut modelul integral, având în vedere relația (5.23) și proprietatea integralei de volum, se va obține câte un model integral pentru fiecare element finit în parte. Ca urmare, aproximarea (5.6) se face pe domeniul fiecărui element finit și nu pentru întreg domeniul. De asemenea, funcțiile de aproximare se definesc pe fiecare din domeniile $D_k, k=\overline{1, N}$ și trebuie să fie continue și să aibă derivatele parțiale continue pe fiecare dintre aceste domenii, fiind necesar ca ele să fie definite, continue, și să aibă derivatele parțiale continue pe întreg domeniul D .

În domeniul fiecărui element finit se aleg anumite puncte, numite puncte nodale sau noduri, și apoi se definește câte o funcție de aproximare pentru fiecare nod. Deoarece expresiile acestor funcții de aproximare depind de forma elementului finit, ele se vor numi funcții de formă. Înseamnă că domeniul oricărui element finit se consideră ca un subspațiu vectorial cu dimensiunea egală cu numărul de noduri ale elementului finit respectiv.

Pentru a da o semnificație fizică parametrilor variaționali, aceștia se definesc ca fiind tocmai valorile mărimii respective în nodurile elementului.

Într-o anumită ordine, elementele finite se notează cu $1, 2, 3, \dots, N$. Dintre acestea, se alege un element finit arbitrar, notat cu e , a cărui domeniu se notează cu $D_e, e=\overline{1, N}$. De asemenea, dacă p este numărul de noduri ale elementului finit, într-o anumită ordine, acestea se notează cu $1, 2, 3, \dots, p$.

Notăției fiecărei entități, definită pentru elementul finit e , i se adaugă e ca indice superior.

Deci, considerând că $P(x, y, z)$ este un punct oarecare al domeniului D_e , iar j este un nod arbitrar, din D_e se notează cu T^e aproximarea mărimii T pentru elementul finit considerat, care se exprimă prin relația:

$$T^e = \sum_{j=1}^p N_j^e T_j^e, \quad (5.23)$$

unde $N_j^e = N_j^e(x, y, z)$ este funcția de formă atașată nodului j al elementului finit e , iar T_j^e

este valoarea mărimii T în acest nod.

Se notează cu $[N^e]$, $[T^e]$ vectorii coloană ai funcțiilor de formă, respectiv al valorilor mărimilor pentru cele p noduri ale elementului finit e , care vor avea dimensiunea $p \times 1$. Cu aceasta, aproximarea (5.23) se scrie matriceal sub forma:

$$T^e = [N^e]^T [T^e], \quad (5.24)$$

unde $[N^e]^T$ este transpusul vectorului $[N^e]$, ce va fi un vector linie cu dimensiunea $1 \times p$.

Pentru un punct arbitrar, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ din D_e , relația (5.23) devine:

$$T^e(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^p N_j^e(x_i, y_i, z_i) T_j^e \quad (5.25)$$

Se presupune că P_i coincide, pe rând, cu câte unul dintre nodurile elementului finit. Deoarece, evident că $T^e(x_i, y_i, z_i) = T_i^e$, adică valoarea aproximării în fiecare nod este egală cu valoarea mărimii în acel nod, rezultă că, funcțiile de formă trebuie astfel definite încât să îndeplinească condiția:

$$N_j^e(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij}, \quad (5.26)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kroneker.

Ca urmare, funcția de formă, atașată fiecărui nod, se definește astfel încât să aibă valoarea unu în nodul respectiv și valoarea zero în celelalte noduri ale elementului, considerat precum și în orice punct din exteriorul acestuia. Se spune că astfel de funcții de formă constituie o bază Lagrange în domeniul D .

Prin aceasta se asigură că, atunci când nodurile se află pe frontiera S a lui D , sunt îndeplinite condițiile de frontieră de tip Dirichlet. Totodată, apare posibilitatea ca funcțiile de formă să se aleagă ca polinoame de interpolare, definite pe porțiuni, constituite din domeniile elementelor finite, de exemplu polinoame Lagrange sau polinoame Hermite, de grad relativ mic (cel mult cinci).

În ipoteza că se folosește metoda reziduurilor ponderate a lui Galerkin, pentru elementul finit e considerat se scrie ecuația:

$$\int_{D_e} N_i^e L T^e dD = \int_{D_e} N_i^e f dD, \quad i = \overline{1, p} \quad (5.27)$$

Se înlocuiește T^e cu aproximarea (5.23), rezultând:

$$\int_{D_e} N_i^e L \left(\sum_{j=1}^p N_j^e T_j^e \right) dD = \int_{D_e} N_i^e f dD, \quad i = \overline{1, p} \quad (5.28)$$

Având în vedere cele menționate mai înainte, pentru nodul i al elementului finit e

se obține ecuația:

$$K_{i1}^e T_1^e + K_{i2}^e T_2^e + \dots + K_{ip}^e T_p^e = F_i^e, \quad (5.29)$$

unde:

$$K_{ij}^e = \int_{D_e} N_i^e L N_j^e dD, \quad j = \overline{1, p} \quad (5.30)$$

$$F_i^e = \int_{D_e} N_i^e f dD \quad (5.31)$$

Pe rând, pentru fiecare nod al elementului finit se atribuie lui i o valoare egală cu numărul nodului respectiv, și cu relațiile (3.30), (3.31) se calculează coeficienții K_{ij}^e , $j = \overline{1, p}$, respectiv termenii liberi F_i^e . Va rezulta un sistem de p ecuații, cu p necunoscute $T_1^e, T_2^e, \dots, T_p^e$, care matricial se scrie sub forma:

$$[K^e] \cdot [T^e] = [F^e], \quad (5.32)$$

unde:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{1p}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{2p}^e \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{p1}^e & k_{p2}^e & k_{pp}^e \end{bmatrix}; \quad [T^e] = \begin{bmatrix} T_1^e \\ k_2^e \\ \vdots \\ T_p^e \end{bmatrix}; \quad [F^e] = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ \vdots \\ F_p^e \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Sistemul de ecuații (5.32) se numește modelul numeric elemental, iar $[K^e]$, $[T^e]$, $[F^e]$ se numesc, respectiv, matricea de rigiditate, vectorul valorilor mărimii din noduri, vectorul termenilor liberi pentru elementul finit e .

Este important să se rețină că fiecare linie a matricei de rigiditate, respectiv a vectorului termenilor liberi, se obține pentru câte un nod al elementului finit considerat, și se va numi contribuția aceluia nod la modelul numeric elemental.

Deci, K_{ii}^e reprezintă contribuția proprie a nodului considerat, la matricea de rigiditate elementară, și se înscrie în linia i și coloana i , iar K_{ij}^e , $j \neq i$, $j = \overline{1, p}$ reprezintă contribuțiile nodului considerat, i , la celelalte noduri ale elementului e , și se înscrie în linia i și coloanele j ale matricei de rigiditate.

Se procedează ca mai sus pentru fiecare element finit, în care s-a divizat domeniul D , și se obține un număr de modele numerice elementale egal cu numărul N de elemente finite. Fiecare model numeric elemental este definit printr-o matrice de rigiditate elementală și un vector al termenilor liberi elementali.

În final se urmărește ca, prin îmbinarea modelelor numerice elementale, să se ob-

țină un singur model numeric, valabil pentru întregul domeniu D , care se va numi model numeric global. Acest proces de îmbinare se numește asamblare a modelelor numerice elementale, sau, simplu, asamblare și pentru realizarea sa se au în vedere cele ce se prezintă mai jos.

În primul rând, deoarece se presupune că elementele finite sunt conectate între ele doar prin intermediul nodurilor, rețeaua de discretizare este privită ca fiind o rețea de puncte numite noduri globale, ce sunt conectate între ele prin intermediul unor linii, drepte sau curbe.

În general, într-un nod global se pot găsi noduri ce aparțin la mai multe elemente finite și pentru a le deosebi între ele, nodurile ce aparțin fiecărui element finit se numesc noduri locale ale acestuia.

Localizarea în spațiu și numerotarea nodurilor globale, numită numerotare (indexare) globală, se face în raport cu sistemul de coordonate folosit pentru studiul proceselor respective. Este foarte important ca indexarea globală a nodurilor să se facă într-o anumită ordine, de exemplu după direcțiile axelor sistemului de coordonate și în sensul acestora.

Localizarea și numerotarea nodurilor fiecărui element finit, numită numerotare (indexare) locală a acestuia, se face în raport cu însuși elementul finit respectiv. În unele lucrări de specialitate, pentru indexarea locală a fiecărui element finit se folosesc literele I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, ..., însă, în această lucrare se păstrează convenția folosită până în acest moment. Deci indexarea locală a unui nod arbitrar, a oricărui element finit se face cu i , $i = \overline{1, p}$ și se vorbește despre nodul local i al elementului finit respectiv. Pentru a face o legătură cu indexarea locală menționată, nodului local i al oricărui element finit se înlocuiește cu cifra care ocupă poziția i în șirul de litere precizat. De exemplu, nodul local 3 al oricărui element finit se înlocuiește cu litera K.

Pentru indexarea globală a unui nod arbitrar al rețelei de discretizare se va folosi notația \bar{i} $i = \overline{1, n}$, și se vorbește despre nodul global \bar{i} .

Este foarte important să se stabilească o ordine de indexare locală, adică o ordine în care se numerotează nodurile elementelor finite și această ordine trebuie să fie respectată, oricare ar fi elementul finit considerat. Pentru aceasta, se alege un element finit de referință, de exemplu acela care este situat cel mai aproape de originea sistemului de coordonate, sau nodul situat în partea stângă jos. Unul dintre nodurile acestuia se alege

ca nod de referință, de exemplu acela care situat în partea stângă jos, sau nodul care este situat cel mai aproape de origine. Nodul de referință se notează cu 1, și, într-un anumit sens, de exemplu cel antiorar, restul nodurilor se notează cu 2, 3, 4, ..., p. În continuare, pentru fiecare element finit, alegerea nodului de referință și ordinea numerotării nodurilor se face la fel ca pentru elementul de referință.

De asemenea, dacă intervin elemente finite, ce au diferite forme geometrice, pentru fiecare formă geometrică se procedează așa cum s-a arătat mai sus.

Numerotarea unui element finit arbitrar se face cu (i), $i = \overline{1, n}$, iar ordinea numerotării poate fi aleasă arbitrar.

Pentru exemplificare, în figura 5.1 s-a considerat cazul unui domeniu plan, divizat așa cum se observă în cele două figuri.

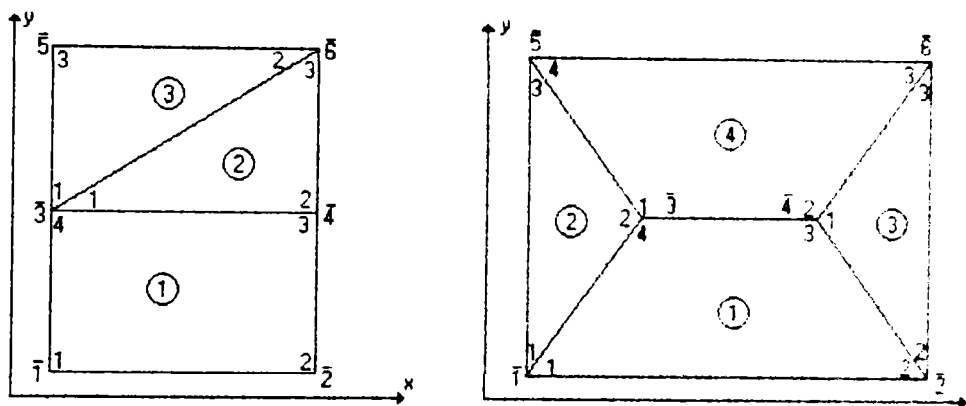


Fig.5.1

Se observă că, atât pentru numerotarea elementelor, cât și pentru numerotarea globală, s-au ales direcțiile și sensurile axelor de coordonate.

Numerotarea locală a nodurilor fiecărui element finit s-a făcut așa cum s-a menționat, iar cifrele respective sunt înscrise în domeniul elementului finit respectiv.

În al doilea rând, într-un punct dat al domeniului D, orice mărime de stare are o singură valoare concretă, și numai una. Ca urmare, în fiecare nod global mărimea considerată are o singură valoare, ce se numește valoarea globală. În continuare, valoarea globală a mărimii din nodul global \bar{i} se notează cu $T_{\bar{i}}$, $i = \overline{1, n}$. Valoarea mărimii într-un nod local i al unui element finit e se va nota conform convenției folosită până în acest moment, adică cu T_i^e , și se va numi valoarea locală a mărimii, din nodul i al elementului e.

Rezultă că, valoarea locală a mărimii din nodul fiecărui element finit, ce se află într-un nod global, este egală cu valoarea globală respectivă.

De exemplu, pentru elementul finit (3) din fig.5.1.a, se obțin

$T_1^3 = T_3$; $T_2^3 = T_3$; $T_3^3 = T_3$. În general, $T_j^e = T_i$, dacă j se află în nodul global (i).

În matricea de rigiditate a unui element finit e , pentru fiecare coloană j , elementele K_{ij} , $j = \overline{1, n}$ multiplică valoarea locală T_j^e , în modelul numeric elemental și se vor numi contribuțiile celorlalte noduri la nodul local j al elementului finit respectiv.

Deci, pentru toate elementele finite, ce au un nod local situat într-un nod global (i), contribuțiile celorlalte noduri la nodul local respectiv multiplică aceeași valoare T_i în modele numerice elementale ale acestor elemente finite.

Pe aceeași bază, se rescriu modelele numerice elementale, așa cum se arată mai jos, pentru elementele finite (2) și (3) din fig.5.1.a.

$$\begin{array}{ll} K_{11}^2 T_3 + K_{12}^2 T_4 + K_{13}^2 T_6 = F_1^2 & K_{11}^3 T_3 + K_{12}^3 T_6 + K_{13}^3 T_5 = F_1^3 \\ K_{21}^2 T_3 + K_{22}^2 T_4 + K_{23}^2 T_6 = F_2^2 & K_{21}^3 T_3 + K_{22}^3 T_6 + K_{23}^3 T_5 = F_2^3 \\ K_{31}^2 T_3 + K_{32}^2 T_4 + K_{33}^2 T_6 = F_3^2 & K_{31}^3 T_3 + K_{32}^3 T_6 + K_{33}^3 T_5 = F_3^3 \end{array}$$

În concluzie, modelul numeric global trebuie astfel dedus astfel încât să conțină ca necunoscute cele n valori globale ale mărimii T , care, matricial, se scriu sub forma unui vector coloană, notat cu $[T]$, ce se va numi vectorul coloană al necunoscutelor problemei. Ca urmare, modelul numeric global se va exprima printr-un sistem de tip Cramer, de n ecuații cu n necunoscute, și matricial se scrie sub forma:

$$[K][T]=[F], \quad (5.34)$$

unde:

$[K]$ este matricea coeficienților și se va numi matricea de rigiditate globală:

$[F]$ este vectorul coloană al termenilor liberi și se va numi vectorul termenilor liberi global.

Procesul de asamblare urmărește tocmai determinarea matricei $[K]$ și a vectorului coloană $[F]$.

În acest scop se imaginează că nu ar exista elementele finite, și că în domeniul D s-a ales un număr de n puncte, ce sunt chiar nodurile globale.

În continuare se procedează așa cum s-a arătat în paginile anterioare, înainte de a trece la expunerea metodei elementelor finite, adică se are în vedere relația (5.15), care se scrie sub forma:

$$\int_D N_i(LT) dD = \int_D N_i f dD, \quad i = \overline{1, 2, \dots, n}, \quad (5.35)$$

unde cu N_i , $i = \overline{1, 2, \dots, n}$ s-a notat o bază de funcții definite în D , iar T este o aproximare

arbitrară a mărimii considerate.

Având în vedere relația (5.22), relația (5.35) devine:

$$\sum_{i=1}^N \int_{D_e} N_i(LT) dD = \sum_{i=1}^N N_i f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (5.36)$$

Evident că pentru fiecare element finit, N_i este funcția de formă atașată nodului acestuia care se află în nodul global \bar{i} , iar T este aproximarea mărimii T pentru elementul finit respectiv.

Deci, dacă se notează cu λ nodul local al unui element finit arbitrar e , care se află în nodul global considerat \bar{i} , atunci relația (5.36) se scrie sub forma:

$$\sum_{e=1}^N \int_{D_e} N_\lambda^e(LT^e) dD = \sum_{i=1}^N N_\lambda^e f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (5.37)$$

unde T^e este dată de relația (5.23).

Însă, funcția de formă, atașată fiecărui nod local al fiecărui element finit, este nulă în orice punct din exteriorul domeniului acesteia.

Ca urmare, în ambele sume din relația (5.37) intervin numai elementele finite ce au un nod local situat în nodul global considerat \bar{i} , adică acelea ce sunt amplasate de jur împrejurul aceluia nod global.

Pentru fiecare nod global \bar{i} , se notează cu M_i șirul format cu notațiile elementelor finite ce au un nod local situat în nodul global \bar{i} (ce înconjoară nodul global \bar{i}). În continuare notația unui element finit se va numi indexul acestuia, și deci M_i este șirul indexurilor elementelor finite ce înconjoară nodul global \bar{i} .

Cu această convenție, simbolic, relația (5.37) se scrie sub forma:

$$\sum_{e \in M_i D_e} N_\lambda^e(LT^e) dD = \sum_{e \in M_i} N_\lambda^e f dD, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (5.38)$$

unde prin $e \in M_i$ trebuie înțeles faptul că, pe rând, lui e i se atribuie o valoare egală cu indexul unui element finit, ce înconjoară nodul global \bar{i} , iar λ este nodul local al elementului finit respectiv, ce este situat în nodul global \bar{i} .

Însă, având în vedere relațiile (5.30) și (5.31) se obțin:

$$\int_{D_i} N_\lambda^e(LT^e) dD = K_{\lambda 1}^e T_1^e + K_{\lambda 2}^e T_2^e + \dots + K_{\lambda p}^e T_p^e \quad (5.39)$$

$$\int_{D_i} N_\lambda^e f dD = F_i^e \quad (5.40)$$

unde s-a notat cu p numărul de noduri al unui element finit arbitrar din șirul menționat.

Folosind relațiile (5.39) și (5.40) relația (5.38) devine:

$$\sum_{e \in M_i} (K_{\lambda 1}^e T_1^e + K_{\lambda 2}^e T_2^e + \dots + K_{\lambda p}^e T_p^e) = \sum_{e \in M_i} F_{\lambda}^e; \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (5.41)$$

sau concentrat:

$$\sum_{e \in M_i} \left(\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}^e T_j^e \right) = \sum_{e \in M_i} F_{\lambda}^e \quad (5.42)$$

Se observă că $\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}^e T_j^e$ este linia λ a modelului numeric elemental al elementului

finit e , iar F_{λ}^e este linia λ a vectorului termenilor liberi ai aceluiași model numeric elemental. De asemenea $\sum_{j=1}^p K_{\lambda j}$ este linia λ a matricei de rigiditate elementară a elementului finit respectiv.

Deci, pentru fiecare element finit, ce înconjoară nodul global considerat \bar{i} , în suma din membrul stâng al relației (5.42) se scrie linia modelului elemental corespunzătoare nodului local ce este situat în nodul global considerat, iar în suma din membrul drept se scrie aceeași linie a vectorului termenilor liberi din modelul elemental al acelui element finit. Cu alte cuvinte, în membrul stâng se înscrie contribuția nodului local respectiv, la modelul elemental, iar în membrul drept se scrie contribuția aceluiași nod la vectorul termenilor liberi.

De asemenea, pentru fiecare nod local al oricărui element finit, T_j^e se înlocuiește cu valoarea globală din nodul global cu care coincide nodul local respectiv.

Pentru a nu scrie un număr prea mare de ecuații, ca exemplu, în figura 5.2 s-a presupus că domeniul D are forma unui triunghi, care s-a divizat în trei elemente finite triunghiulare, notate cu 1, 2, 3.

Numerotarea elementelor, nodurilor globale și a nodurilor locale ale fiecărui element finit s-a făcut așa cum s-a precizat.

Pentru $\bar{1}$ șirul este format din elementele finite 1 și 3, fiecare având în $\bar{1}$ nodul local 1. Se obține:

$$K_{11}^1 T_1^1 + K_{12}^1 T_2^1 + K_{13}^1 T_3^1 + K_{11}^3 T_1^3 + K_{12}^3 T_2^3 + K_{13}^3 T_3^3 = F_1^1 + F_1^3 \quad (5.43)$$

Pentru $\bar{2}$ șirul este format din elementele finite 1 și 2, fiecare având în $\bar{2}$ nodul local 2. Se obține:

$$K_{21}^1 T_1^1 + K_{22}^1 T_2^1 + K_{23}^1 T_3^1 + K_{21}^2 T_1^2 + K_{22}^2 T_2^2 + K_{23}^2 T_3^2 = F_2^1 + F_2^2 \quad (5.44)$$

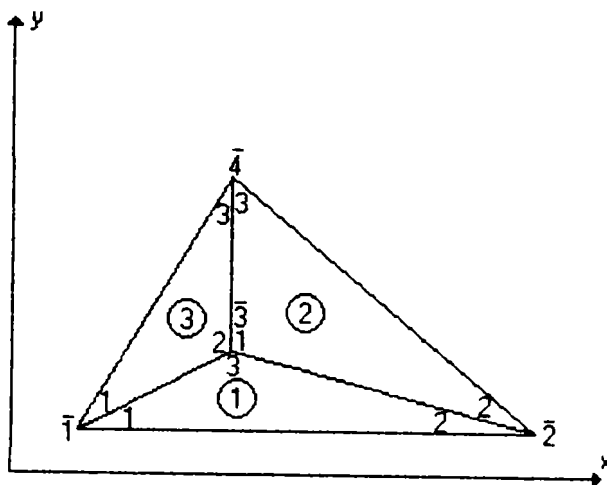


Fig.5.2

Pentru $\bar{3}$ șirul este format din elementele finite 1, 2 și 3, ce au în $\bar{3}$ nodurile locale 3, respectiv 1, respectiv 2. Se obține:

$$K_{31}^1 T_1^1 + K_{32}^1 T_2^1 + K_{33}^1 T_3^1 + K_{11}^2 T_1^2 + K_{12}^2 T_2^2 + K_{13}^2 T_3^2 + K_{21}^3 T_1^3 + K_{22}^3 T_2^3 + K_{23}^3 T_3^3 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3 \quad (5.45)$$

Pentru $\bar{4}$ șirul este format din elementele 2 și 3, ce au în $\bar{4}$ nodurile locale 3. Se obține:

$$K_{31}^2 T_1^2 + K_{32}^2 T_2^2 + K_{33}^2 T_3^2 + K_{31}^3 T_1^3 + K_{32}^3 T_2^3 + K_{33}^3 T_3^3 = F_3^2 + F_3^3 \quad (5.46)$$

Se au în vedere relațiile:

$$T_1^1 = T_1^3 = T_1; \quad T_2^1 = T_2^2 = T_2; \quad T_3^1 = T_1^2 = T_2^3 = T_3; \quad T_3^2 = T_3^3 = T_4 \quad (5.47)$$

Cu acestea, relațiile precedente devin:

$$\begin{aligned} K_{11}^1 T_1 + K_{12}^1 T_2 + K_{13}^1 T_3 + K_{11}^3 T_1 + K_{12}^3 T_2 + K_{13}^3 T_4 &= F_1^1 + F_1^3 \\ K_{21}^1 T_1 + K_{22}^1 T_2 + K_{23}^1 T_3 + K_{21}^2 T_3 + K_{22}^2 T_2 + K_{23}^2 T_4 &= F_2^1 + F_2^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$K_{31}^1 T_1 + K_{32}^1 T_2 + K_{33}^1 T_3 + K_{11}^2 T_3 + K_{12}^2 T_2 + K_{13}^2 T_4 + K_{21}^3 T_1 + K_{22}^3 T_3 + K_{23}^3 T_4 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3$$

$$K_{31}^2 T_3 + K_{32}^2 T_2 + K_{33}^2 T_4 + K_{31}^3 T_1 + K_{32}^3 T_3 + K_{33}^3 T_4 = F_3^2 + F_3^3$$

Ecuatiile sistemului (5.48) se ordonează după valorile globale ale lui T și se obțin:

$$\begin{aligned} (K_{11}^1 + K_{11}^3) T_1 + K_{12}^1 T_2 + (K_{13}^1 + K_{12}^3) T_3 + K_{13}^3 T_4 &= F_1^1 + F_1^3 \\ K_{21}^1 T_1 + (K_{22}^1 + K_{22}^2) T_2 + (K_{23}^1 + K_{21}^2) T_3 + K_{23}^2 T_4 &= F_2^1 + F_2^2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$(K_{31}^1 + K_{21}^3) T_1 + (K_{32}^1 + K_{12}^2) T_2 + (K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3) T_3 + (K_{13}^2 + K_{23}^3) T_4 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3$$

$$K_{31}^2 T_1 + K_{32}^2 T_2 + (K_{31}^2 + K_{33}^3) T_3 + (K_{33}^2 + K_{33}^3) T_4 = F_3^2 + F_3^3$$

Relațiile (5.49) reprezintă un sistem de patru ecuații ce are ca necunoscute chiar

valorile mărimii T în cele patru noduri globale ale domeniului considerat. Înseamnă că (5.49) este chiar modelul numeric global ce s-a urmărit să se obțină.

Matricea globală, și vectorul termenilor liberi global vor fi:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 & K_{13}^1 + K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^1 + K_{21}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 + K_{31}^3 & K_{32}^1 + K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{33}^3 & K_{13}^2 + K_{23}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^2 & K_{31}^2 + K_{32}^3 & K_{33}^2 + K_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1^1 + F_1^3 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^1 + F_1^2 + F_2^3 \\ F_3^2 + F_3^3 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Obținerea practică, cu ajutorul calculatorului electronic, a matricei $[K]$ și a vectorului coloană $[F]$ se poate face prin două metode, denumite asamblare după noduri, respectiv asamblare după elemente.

Asamblarea după noduri se bazează pe observația că, așa cum rezultă din sistemul (5.49), fiecare linie a modelului numeric global s-a obținut pentru câte un nod global. Ca urmare, fiecare linie a matricei de rigiditate globală și a vectorului termenilor liberi global, se obține pentru câte un nod global, și din acest motiv asamblarea după noduri se mai numește metoda generării linie după linie (linie de linie) a matricei $[K]$ și a vectorului $[F]$. Nu se mai calculează separat matricile de rigiditate elementale și vectorii termenilor liberi elementali, ci se pornește de la nodul global indexat 1, și se baleiază rețeaua de discretizare, în ordinea crescătoare a indexării nodurilor globale. Pentru fiecare nod global \bar{i} , se aplică relațiile (5.39) și (5.40) și se obține linia i a lui $[K]$ și a lui $[F]$, având în vedere cele menționate până acum.

Mai întâi se definește un tabel de conexiuni după noduri, care, în prima coloană, conține nodurile globale în ordinea crescătoare a indexurilor.

Pentru a înțelege ce trebuie să conțină celelalte coloane ale tabelului se face convenția ca liniile și coloanele matricei $[K]$ să se noteze cu 1, 2, ..., n , unde 1 corespunde nodului global cu indexul \bar{i} , iar coloanele lui $[F]$ se vor afla la fel. Deci, un element arbitrar al matricei $[K]$ și al vectorului $[F]$ se vor nota cu K_{ij} , respectiv cu F_{ij} , unde i, j corespund nodurilor globale cu indexările i , respectiv j .

Se reamintește că, în cazul matricei de rigiditate elementele $K_{11}^e, K_{12}^e, \dots, K_{33}^e$ reprezintă contribuțiile la nodul local i al elementului finit e , ale tuturor celorlalte noduri ale

acestui, iar K_{ii}^e se numește contribuție proprie nodului local i . Deci, K_{ij}^e este contribuția la nodul local i a nodului local j .

După cum se observă din matricea din relația (4.50), linia i este constituită din contribuțiile la nodul local al fiecărui element finit, ce este situat în nodul global i , ale tuturor celorlalte noduri ale elementului finit respectiv.

Înseamnă că, următoarea coloană a tabelului este constituită din mai multe subcoloane, în care se înscriu, în ordine, elementele finite ce înconjoară nodul global corespunzător din prima coloană. Urmează a treia coloană a tabelului, cu mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare element finit din coloana precedentă, se înscrie indexul nodului local ce se află în nodul global din prima coloană. Este foarte important de reținut că, în fiecare linie i , pentru fiecare element finit înscris în a doua coloană, intervin contribuțiile la nodul local înscris în a treia coloană, ale tuturor celorlalte noduri locale ale aceluși element finit. Din acest motiv, nodul local înscris în a treia coloană se va numi nod local principal al elementului finit respectiv, pentru linia i .

Tot din relația 50 se observă că fiecare coloană j a liniei i se obține, în general, însumând contribuțiile la nodul principal din linia i , al fiecărui element a nodului local ce se află în nodul global cu indexul j .

Din acest motiv, în a patra coloană se înscriu celelalte noduri locale ale fiecărui element finit din a doua coloană, și după ce s-au scris nodurile locale ale unui element finit se inserează un separator, de exemplu, punct și virgulă. Ultima coloană a tabelului are mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare nod local din coloana precedentă, se înscrie indexul nodului global în care este situat acel nod local, și acest mod global desemnează coloana j în care se înscrie contribuția nodului local respectiv.

Pe baza celor de mai sus s-a obținut tabelul 5.1.

Tabelul 5.1. Conexiuni după noduri

Nod global	Elemente finite			Noduri locale principale			Celelalte noduri locale						Noduri locale corespunzătoare									
													2	3	...	3	4	...				
1	1	3		1	1		2	3	;	2	3	;		2	3	;	3	4	;			
2	1	2		2	2		1	3	;	1	3	;		1	3	;	3	4	;			
3	1	2	3	3	1	2	1	2	;	2	3	;	1	3	1	2	;	2	4	;	1	4
4	2	3		3	3		1	2	;	1	2	;		3	2	;	1	3	;			

După ce s-a întocmit tabelul de conexiuni după noduri, pentru calculul elementelor matricei de rigiditate se folosește relația:

$$K_{ij} = \sum_e \left(\int_{D_e} N_i^e LN_a dD \right), \quad (5.52)$$

unde e este, pe rând, câte unul din elementele finite din a doua coloană. λ este nodul local principal al acestuia, iar α este acel nod local, inclusiv nodul local principal al elementului finit respectiv, ce se află în nodul global indexat cu j .

În scopul de a implementa relația (5.52) pe un calculator electronic, se introduce operatorul $D_{\beta j}^1$, definit prin relația:

$$D_{\beta j}^e = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \beta = j \\ 0 & \text{dacă } \beta \neq j \end{cases} \quad (5.53)$$

unde, pentru fiecare element finit e , β este pe rând, câte unul dintre nodurile globale, în care sunt situate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

Folosind acest operator, relația (5.52) devine:

$$K_{ij} = \sum_e \left(D_{\beta j}^e \int_{D_e} N_{\lambda}^e L N_{\alpha}^e dD \right) \quad (5.54)$$

Implementarea operatorului $D_{\beta j}^e$, definit mai sus, se face folosind instrucțiunea IF, ce este definită pentru orice limbaj de programare.

Se atrage atenția că, în relația (5.54), pentru fiecare element finit e , prin α trebuie înțeles nodul local ce se află în nodul global β pentru cazul că $\beta=j$.

Elementul din linia i al vectorului termenilor liberi se calculează cu relația.

$$F_i = \sum_e \left(\int_{D_e} N_{\lambda}^e f dD \right), \quad (5.55)$$

unde e și λ se aleg așa cum s-a precizat mai înainte.

Pentru a verifica dacă relațiile precedente sunt corecte, adică dacă pe baza lor se obțin relațiile (5.50), respectiv (5.51), se are în vedere că, în matricea de rigiditate elementală și în vectorul termenilor liberi elemental, elementele sunt date de relațiile:

$$K_{\lambda\alpha}^e = \int_{D_e} N_{\lambda}^e L N_{\alpha}^e dD, \quad F_{\lambda}^e = \int_{D_e} N_{\lambda}^e f dD \quad (5.56)$$

Ca urmare, în funcție de elementele matricei elementale, și ale vectorului coloană, pentru un element finit arbitrar notat cu e , se obțin relațiile:

$$K_{ij} = \sum_e \left(D_{\beta j}^e K_{\lambda\alpha}^e \right), \quad F_i = \sum_e F_{\lambda}^e, \quad (5.57)$$

în care se subliniază din nou că prin α trebuie înțeles nodul local al fiecărui element finit e , ce se află în nodul global β , pentru care $\beta=j$.

Pentru aplicarea relației, pe rând, se face i egal cu câte un nod global din prima

coloană și se obține linia lui [K], respectiv a lui [F].

Pentru fiecare linie i , din a doua coloană a tabelului se stabilesc valorile lui e , și pentru fiecare, din a treia coloană se află valoarea lui λ . Se calculează imediat T_i , cu a doua relație din (5.51).

Spre exemplificare, se consideră doar linia 3, deci $i=3$. Din tabel se obțin perechile de valori: $e=1, \lambda=3$; $e=2, \lambda=1$; $e=3, \lambda=1$ și deci:

$$F_3 = F_3^1 + F_1^2 + F_2^3,$$

adică linia 3 din (5.52).

Pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate din linia i , pe lângă cele menționate mai sus, trebuie ca, pentru fiecare element finit stabilit, să se determine nodul global ce corespunde fiecărui nod local, inclusiv nodului principal al elementului finit respectiv.

Conform tabelului se obțin următoarele corespondențe:

$$e=1, \lambda=3; 3 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 2;$$

$$e=2, \lambda=1; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 4;$$

$$e=3, \lambda=2; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 4,$$

unde, pentru fiecare relație de corespondență, prima cifră reprezintă nodul local al elementului respectiv, iar a doua este nodul global în care acesta este situat.

Pe baza acestor corespondențe, pentru fiecare valoare a lui j se aplică operatorul $D_{\beta j}$, adică în coloana j intervine contribuția la nodul λ al fiecărui element finit, numai dacă acesta are un nod local, inclusiv nodul local principal, care corespunde la un nod global, indexat cu j . În prima relație din (5.57), pentru valoarea considerată a lui j , se va înlocui α cu nodul local astfel stabilit, pentru elementul e respectiv.

Astfel, pentru $j=1$, intervine nodul global 1, pentru elementele $e=1, e=3$, care corespunde la nodurile locale 1, respectiv 3, elementul $e=1$ având $\lambda=3$, iar $e=3$, având $\lambda=2$.

$$K_{31} = K_{31}^1 + K_{21}^3$$

Pentru $j=2$, intervine nodul global 3, pentru $e=1, 2 \rightarrow 2$ și $e=2, 2 \rightarrow 2$ și deci:

$$K_{32} = K_{32}^1 + K_{12}^2$$

Pentru $j=3$, se obțin:

$$e=1, \lambda=3; 3 \rightarrow 3;$$

$$e=2, \lambda=1; 1 \rightarrow 3;$$

$$e=3, \lambda=2; 2 \rightarrow 3.$$

Deci:

$$K_{33} = K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{22}^3$$

Pentru $j=4$:

$$e=2, \lambda=1; 3 \rightarrow 4;$$

$$e=3, \lambda=2; 3 \rightarrow 4;$$

Deci:

$$K_{34} = K_{13}^2 + K_{23}^3$$

Se observă că expresiile de mai sus, pentru K_{31} , K_{32} , K_{33} , K_{34} , sunt cele care intervin în linia 3 a matricei $[K]$ din relația (5.50).

Pentru a stabili metodologia asamblării după elemente finite, din sistemul (5.49) se extrag numai ecuațiile care se referă la câte un element finit, ce se identifică după indicele superior al coeficienților și al termenilor liberi.

Se obțin:

pentru $e=1$

$$K_{11}^1 T_1 + K_{12}^1 T_2 + K_{13}^1 T_3 = F_1^1$$

$$K_{21}^1 T_1 + K_{22}^1 T_2 + K_{23}^1 T_3 = F_2^1$$

$$K_{31}^1 T_1 + K_{32}^1 T_2 + K_{33}^1 T_3 = F_3^1$$

pentru $e=2$

$$K_{22}^2 T_2 + K_{21}^2 T_3 + K_{23}^2 T_4 = F_2^2$$

$$K_{12}^2 T_2 + K_{11}^2 T_3 + K_{13}^2 T_4 = F_1^2$$

$$K_{32}^2 T_2 + K_{31}^2 T_3 + K_{33}^2 T_4 = F_3^2$$

pentru $e=3$

$$K_{11}^3 T_1 + K_{12}^3 T_3 + K_{13}^3 T_4 = F_1^3$$

$$K_{21}^3 T_1 + K_{22}^3 T_3 + K_{23}^3 T_4 = F_2^3$$

$$K_{31}^3 T_1 + K_{32}^3 T_3 + K_{33}^3 T_4 = F_3^3$$

Fiecare dintre sistemele de ecuații de mai sus se expandează la dimensiunile modelului numeric global, adică, în general, la un sistem de n ecuații, cu n necunoscute T_1, T_2, \dots, T_n , iar în cazul considerat, la un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute T_1, T_2, T_3, T_4 , prin completarea termenilor ce lipsesc cu necunoscutele respectiv înmulțite cu zero.

În felul acesta, matricea de rigiditate elementală a fiecărui element finit va avea dimensiunile matricei de rigiditate globale $[K]$, și se va numi matricea de rigiditate ex-

pandată a acestui element finit. De asemenea, vectorul termenilor liberi elemental va avea dimensiunea vectorului termenilor liberi global $[F]$ și se va numi vectorul termenilor liberi expandat, pentru acel element finit.

Se reamintește că, în matricea de rigiditate elementele $K_{\alpha\beta}^e$ se referă la nodul local α , iar β este câte unul dintre celelalte noduri. În vectorul termenilor elemental, elementul F_{α}^e se referă la nodul local α .

De asemenea, în matricea $[K]$, numerotarea liniilor și coloanelor se face în ordinea crescătoare a indexurilor nodurilor globale și elementul K_{ij} se află în linia corespunzătoare nodului global cu indexul i și în coloana corespunzătoare nodului global j . În vectorul $[F]$ numerotarea liniilor se face în ordinea crescătoare a indexurilor nodurilor globale, iar elementul F_i se află în linia corespunzătoare nodului global cu indexul i .

Având în vedere acestea, este ușor de observat că, în matricea de rigiditate expandată a fiecărui element finit, elementul $K_{\alpha\beta}^e$ se află în linia corespunzătoare nodului global în care se află nodul local α , și în coloana corespunzătoare nodului global în care se află nodul local β .

Rezultă că, pentru a putea obține matricile de rigiditate expandate și vectorul termenilor liberi expandat ale elementelor finite trebuie să se întocmească un tabel de corespondență dintre nodurile locale ale fiecărui element și nodurile globale în care acestea sunt situate, ce se numește tabel de conexiuni după elemente

În prima coloană a tabelului se înscriu, în ordine crescătoare, indexurile elementelor finite.

A doua coloană va avea mai multe subcoloane, în care, pentru fiecare element finit din prima coloană, se înscriu indexurile nodurilor locale ale acestuia, în general într-o ordine arbitrară, însă este bine ca înscrierea nodurilor locale să se facă în ordinea crescătoare a indexurilor lor.

Ultima coloană a tabelului are același număr de subcoloane în care, pentru fiecare nod local dintr-o subcoloană a coloanei precedente, se înscrie nodul global în care nodul respectiv este situat.

Ca urmare, tabelul de conexiuni după elemente finite pentru exemplul din fig. 5.2 are forma de mai jos.

Tabel 5.2. Conexiuni după elemente finite

Elemente finite	Noduri locale			Noduri globale		
	1	2	3	1	2	3
1	1	2	3	1	2	3
2	1	2	3	3	2	4
3	1	2	3	1	3	4

Matricile de rigiditate expandată se notează cu $[K^{(1)}]$, $[K^{(2)}]$, $[K^{(3)}]$, iar vectorii coloană expandați se notează cu $[F^{(1)}]$, $[F^{(2)}]$, $[F^{(3)}]$.

Conform celor precizate anterior, amplasarea elementelor matricei de rigiditate elementale în matricea de rigiditate expandată și amplasarea elementelor vectorului termenilor liberi elemental în vectorul termenilor liberi expandat, pentru fiecare element finit, se face pe baza următoarelor corespondente:

$$K_{\alpha\beta}^e = K_{ij}^{(e)}, \quad F_{\alpha}^e = F_j^{(e)}, \quad (5.58)$$

unde i este nodul global care corespunde la nodul local α , iar j este nodul global ce corespunde la nodul global β .

Fiecare matrice de rigiditate expandată are dimensiunile 4×4 , și elementele matricei de rigiditate elementală vor ocupa, în matricea de rigiditate expandată, liniile și coloanele ce corespund nodurilor globale, în care sunt situate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

De exemplu, pentru $e=2$, K_{11}^2 se plasează ca element $K_{33}^{(2)}$, deci în linia 3, coloana 3, iar K_{32}^2 se plasează ca element $K_{42}^{(2)}$ deci în linia 4, coloana 2 ale matricei de rigiditate expandate. De asemenea, F_1^2 se plasează ca element $F_3^{(2)}$, deci în linia 3, iar F_3^2 se plasează ca element $F_4^{(2)}$, deci în linia 4 a vectorului coloană expandat.

Pe această bază se obțin:

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^2 & K_{21}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{12}^2 & K_{11}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{31}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{(3)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & 0 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ K_{31}^3 & 0 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix}$$

$$[F^{(1)}] = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [F^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^2 \\ F_1^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix}; \quad [F^{(3)}] = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ 0 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \end{bmatrix}$$

Se verifică că, prin însumarea matricilor de rigiditate expandate, se obține chiar matricea de rigiditate globală, iar prin însumarea vectorilor termenilor liberi expandați se obține vectorul termenilor liberi global, adică:

$$[K] = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] + [K^{(3)}] \quad (5.59)$$

$$[F] = [F^{(1)}] + [F^{(2)}] + [F^{(3)}] \quad (5.60)$$

Pentru determinarea matricei de rigiditate globale și a vectorului termenilor liberi cu ajutorul calculatorului electronic se parcurg mai multe faze (secvențe), de unde și denumirea de asamblare secvențială a metodei.

Mai întâi se definesc: o matrice $[K]$ de dimensiuni $n \times n$ și un vector coloană $[F]$ cu dimensiunile $1 \times n$, unde n este numărul total de noduri al rețelei de discretizare.

Se baleiază elementele finite în ordinea indexării lor și pentru fiecare se aplică următorul algoritm:

1. Se calculează elementele matricei de rigiditate elementale și ale vectorilor termenilor liberi elementali folosind indexarea locală a nodurilor elementului finit respectiv. Adoptând convenția de notații anterioară înseamnă că se calculează elementele $K_{\alpha\beta}^e$, respectiv F_{α}^e cu relațiile (5.30), (5.31), care primesc forma:

$$K_{\alpha\beta}^e = \int_{D_e} N_{\alpha}^e L N_{\beta}^e dD, \quad F_{\alpha}^e = \int_{D_e} N_{\alpha}^e f dl,$$

unde α se înlocuiește pe rând cu indexul local al fiecărui nod și pentru fiecare valoare a lui α , β parcurge toate nodurile locale ale elementului finit respectiv.

2. Pentru fiecare nod local α se identifică nodul global i în care acesta este situat, adică se stabilește corespondența $\alpha \rightarrow i$, ceea ce înseamnă că se definește tabelul de conexiuni după elemente finite, pentru elementul finit respectiv.

3. Pe baza acestor corespondențe, indicii elementelor folosiți în indexarea locală se înlocuiesc cu indexurile nodurilor globale stabiliți prin corespondența respectivă. În felul acesta, fiecare element $K_{\alpha\beta}^e$ al matricei elementale $[K^e]$ devine un element K_{ij} al matricei globale $[K]$, și se înscrie în locația (i, j) a matricei $[K]$. De asemenea, fiecare element F_{α}^e , al vectorului $[F^e]$ devine un element F_i al vectorului $[F]$ și se înscrie în loca-

ția i a acestuia.

În ambele cazuri, dacă într-o locație există deja elemente, obținute pentru un element finit anterior, noul element se adună cu conținutul locației respective.

Se observă că, în acest caz se construiește matricea de rigiditate expandată și vectorul termenilor liberi expandat, pentru elementul finit respectiv. Totodată se realizează însumarea acestora cu cele ale elementelor finite precedente.

Pașii de mai sus se parcurg până când s-au baleiat toate elementele finite.

Când s-a ajuns la ultimul element finit s-a obținut chiar matricea de rigiditate $[K]$ și vectorul $[F]$.

În finalul acestui paragraf se face observația că, ambele metode de asamblare au o aceeași bază matematică, constituită din relațiile (5.42). Ceea ce le deosebește este modul în care se aplică aceste relații pentru a obține matricea $[K]$ și vectorul $[F]$.

Astfel, în cazul asamblării după noduri, calculele nu se mai fac la nivelul fiecărui element, ci la nivelul nodurilor globale, pentru fiecare obținându-se direct câte o linie a matricei $[K]$, respectiv a vectorului $[F]$, pe baza relațiilor (5.54) respectiv (5.55).

În cazul asamblării după elemente finite, calculele se fac la nivelul fiecărui element finit și asamblarea constă în rearanjarea elementelor în matricea $[K]$, respectiv în vectorul $[F]$, urmată de o însumare a elementelor ce se află într-o aceeași locație.

Se poate arăta că, printr-o indexare globală a nodurilor, făcută într-un mod judicios, se poate obține o matrice $[K]$ de tip bandă, ceea ce duce la reducerea volumului de calcul necesar pentru rezolvarea modelului numeric global (al sistemului de n ecuații cu n necunoscute) față de cazul că $[K]$ ar fi o matrice obișnuită.

5.3. Implementarea condițiilor de frontieră

Se consideră cazul mai general, când pe o porțiune S_D a frontierei S a domeniului considerat D , se impun condiții de frontieră de tip Dirichlet, iar pe o altă porțiune S_N se impun condiții de frontieră de tip Neumann.

Se consideră mai întâi condițiile de frontieră de tip Neumann, care, în general, se exprimă sub forma:

$$L_1 T|_{S_N} = f_N, \quad (5.61)$$

unde $f_N = f_N(x, y, z)$ este o funcție cunoscută, impusă prin enunțul problemei, iar L_1 este un operator aplicat mărimii T . De obicei, L_1 este derivata după normala dintr-un punct

oarecare a lui S_N , adică (5.61) are forma:

$$a \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_N} = f_N \quad (5.62)$$

sau:

$$a \text{grad} T \cdot \bar{n} \Big|_{S_N} = f_N, \quad (5.63)$$

unde a este mărime de material, iar cu \bar{n} s-a notat versorul normalei exterioare la S_N .

Condițiile de frontieră de tip Neumann nu se pot impune după ce s-a obținut modelul numeric global, ci ele trebuie să fie incluse în acesta.

Ca urmare, modelul matematic integral trebuie astfel derivat încât în el să fie înglobate și condițiile de frontieră de tip Neumann, ceea ce, în concret, înseamnă că modelul integral trebuie să conțină și integrala pe porțiunea S_N a funcției f_N .

Pentru a arăta cum se îndeplinește această cerință, se presupune că modelul matematic inițial este de tip diferențial, exprimat sub forma (5.1). De asemenea, admitând că se folosește metoda reziduurilor ponderate în varianta Galerkin, mai întâi se scrie modelul integral pentru întreg domeniul D sub forma:

$$\int_D N_i L T dD = \int_D N_i f dD, \quad (5.64)$$

unde N_i , T sunt funcțiile de formă dintr-un nod arbitrar al oricărui element finit, iar T este aproximarea mărimii considerate pentru acesta, însă, pentru a ușura scrierea nu s-a mai prevăzut indicele superior e .

Se caută un alt operator diferențial, astfel încât:

$$L_2(N_i L T) = N_i L T + L T L_3 N_i, \quad (5.65)$$

unde L_3 este tot un operator diferențial.

Înlocuind, se obține:

$$\int_D N_i L T dD = \int_D L_2(N_i L T) dD - \int_D L T L_3 N_i dD$$

Operatorul L_2 trebuie astfel ales încât:

$$\int_D L_2(N_i L T) dD = \int_S N_i L_1 T dS, \quad (5.66)$$

adică integrala pe D a operatorului L_2 trebuie să fie egală cu integrala pe S a operatorului ce intervine în condiția de frontieră de tip Neumann, înmulțit cu funcția de formă N_i .

Însă, condiția (5.61) fiind impusă doar pe porțiunea S_N , înseamnă că pe restul din S funcția $f_N=0$ și deci relația (5.65) devine:

$$\int_D L_2(N_i LT) dD = \int_{S_N} N_i f_N dS, \quad (5.67)$$

unde s-a ținut cont de condiția (5.61).

Relațiile precedente conduc la modelul integral:

$$\int_D LTL_3 N_i dD = \int_{S_N} N_i f_N dS - \int_D N_i f dD, \quad (5.68)$$

Deoarece f_N este dată, la fel ca și f , integrala pe S_N a fost trecută în membrul drept al modelului integral și împreună cu cealaltă integrală conduce la obținerea vectorului coloană al termenilor liberi în modelul numeric elemental, deci și în modelul numeric global.

Întrucât f_N este dată numai pe frontiera S_N , modelul integral (5.68) se aplică numai pentru elementele finite ce au cel puțin un nod pe S_N , iar pentru restul elementelor finite se utilizează forma obișnuită (5.64).

Ca exemplu, se consideră ecuația transmisiei căldurii prin convecție termică, pentru care, relația (5.61) este de forma:

$$\lambda \text{grad} T \cdot \vec{n}|_{S_N} = q, \quad (5.69)$$

unde q este densitatea de suprafață a fluxului termic schimbat de domeniul D cu exteriorul, sau, conform legii lui Newton $q = \alpha(T_p - T_f)$, unde notațiile au semnificațiile precizate în capitolul 4.

Modelul integral (5.64) conține termenul:

$$A = \int_D N_i \text{div}(\lambda \text{grad} T) dD \quad (5.70)$$

Având în vedere formulele lui Gauss-Ostrogradski, operatorul L_2 se alege ca fiind tot operatorul div și se obține:

$$\text{div}[N_i (\lambda \text{grad} T)] = N_i \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i,$$

deci L_3 este operatorul grad .

Înlocuind (5.70) se obține:

$$A = - \int_D \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i dD + \int_{S_N} N_i \cdot \lambda \text{grad} T \vec{n} dS,$$

unde s-a utilizat formula de transformare menționată.

Ținând cont de condiția de frontieră (5.69) rezultă:

$$A = - \int_D \lambda \text{grad} T \cdot \text{grad} N_i dD + \int_{S_N} N_i \cdot q dS$$

După cum se observă, s-a reușit includerea condiției de frontieră de tip Neumann

în modelul integral.

În general, condiția de frontieră de tip Dirichlet se exprimă sub forma

$$T|_{S_D} = f_D, \quad (5.71)$$

unde $f_D = f_D(x, y, z)$ este impusă prin enunțul problemei.

Astfel de condiții de frontieră se implementează după ce s-a obținut modelul numeric global, și de obicei constau în a impune valorile mărimii T în nodurile de pe porțiunea S_D . Dacă se impune distribuția lui T pe S_D , de exemplu, dându-se funcția $f_D(x, y, z)$ atunci, se calculează valorile acesteia în nodurile de pe S_D .

Deci, dacă se notează cu n_D numărul de noduri globale de pe S_D din cele n necunoscute, un număr n_D sunt cunoscute, și deci numărul total de necunoscute devine $n - n_D$.

În principiu, este posibilă implementarea condițiilor de frontieră de acest tip prin înlocuirea în modelul numeric global, a valorilor lui T din nodurile n_D cu valorile impuse, și apoi rescrierea modelului numeric prin trecerea în membrul drept a termenilor ce conțin valorile respective. Însă, aceasta ar însemna modificarea completă atât a matricei de rigiditate cât și a vectorului termenilor, ceea ce ar conduce practic la reluarea operației de asamblare.

Din acest motiv, s-au căutat metode care să necesite un număr cât mai mic de modificări, care să poată fi implementate pe un calculator electronic.

În acest scop se utilizează două metode ce sunt prezentate în literatura de specialitate și nu prezintă dificultăți în ceea ce privește înțelegerea și implementarea lor, nu se mai prezintă în această lucrare.

5.4. Alegerea funcțiilor de formă. Utilizarea elementelor finite parametriche.

Pentru a înțelege cele ce urmează, se subliniază faptul că, orice element finit trebuie privit ca fiind o mulțime de puncte, ce constituie nodurile acestuia, iar forma geometrică a elementului finit, deci a domeniului acestuia, este descrisă cu ajutorul unor funcții matematice, ce sunt atașate elementului finit respectiv.

Deci, ceea ce are o existență fizică reală, sunt nodurile oricărui element finit, iar forma geometrică a domeniului acestuia trebuie privită ca o chestiune abstractă. Deși cu ajutorul unui soft de reprezentare grafică, se poate vizualiza forma geometrică respectivă.

Descrierea formei geometrice se face analitic, cu ajutorul unor funcții, ce trebuie alese încât, dacă s-ar face o reprezentare grafică a acestor funcții, să se obțină forma geometrică dorită, ce trebuie neapărat să treacă prin punctele alese ca noduri, iar domeniilor elementelor finite disjuncte să fie disjuncte.

Ca urmare, pentru a putea stabili funcțiile de formă, mai întâi trebuie realizată rețeaua de puncte de discretizare și cunoscute coordonatele acestora. De fapt, prin expresia "existență fizică" a nodurilor trebuie înțeleasă existența coordonatelor acestora, adică localizarea lor în spațiu, față de un sistem de coordonate, ales pentru a studia procesele respective, ce va fi numit sistem de coordonate global.

În continuare, se realizează grupuri de puncte, fiecare grup fiind considerate noduri ale unui element finit, precum și a tuturor celorlalte elemente finite din jurul său.

Se vor considera ca având aceeași formă geometrică toate elementele finite ce au același număr de noduri, și cărora le sunt atașate aceleași funcții de formă, indiferent care ar fi poziția în spațiu a punctelor respective. Se observă că expresia "aceeași formă geometrică", nu trebuie înțeleasă în mod riguros geometric. De exemplu, toate grupurile constituite din trei puncte, cărora le sunt atașate aceleași funcții de formă, vor fi considerate ca fiind elemente finite triunghiulare, deși, fizic, triunghiurile respective au latură și orientări diferite.

Din aceste motive, în cele ce urmează, prin element finit arbitrar se va înțelege un grup de p puncte, ce se vor nota cu $1, 2, \dots, p$, cărora li se cunosc coordonatele, de exemplu, față de un sistem de referință global cartezian, și un punct arbitrar j , $j = 1, p$ se va numi nod j , iar coordonatele sale se notează cu (x_j, y_j, z_j) .

Funcțiile analitice, cu ajutorul cărora se descrie forma geometrică a domeniului elementar finit considerat, se vor prezenta spre finele acestui paragraf. Este de reținut că, pentru un același număr p de puncte, se pot obține forme geometrice diferite.

Pentru simplificarea desenelor, se va considera forma geometrică obținută prin unirea punctelor, două câte două, printr-un segment de linie dreaptă.

Pasul următor constă în a alege o funcție, cu ajutorul căreia să se aproximeze mărimea considerată T , dintr-un punct oarecare $P(x, y, z)$ al domeniului format de grupul de puncte obținut așa cum s-a precizat mai sus. Deci, se scrie:

$$T = g(x, y, z),$$

unde $g(x, y, z)$ este o funcție ce trebuie precizată.

Prin valoare a mărimii T într-un nod j , notată cu T_j , trebuie înțeleasă valoarea funcției g în punctul (x_j, y_j, z_j) , adică:

$$T_j = g(x_j, y_j, z_j), \quad j = \overline{1, p} \quad (5.73)$$

Presupunând că s-a ales expresia analitică a funcției g , aceasta va conține constante, sub forma unor coeficienți, exponenți, etc., care se determină impunând condițiile (5.73). Constantele astfel determinate se înlocuiesc în expresia funcției, care se ordonează după valorile T_1, T_2, \dots, T_p . Expresia ce multiplică o valoare T_j va fi funcția de formă N_j , atașată nodului j .

De obicei g se alege ca o combinație liniară de funcții liniar independente, de o clasă h , adică:

$$g = \sum_{i=1}^n c_i h_i, \quad (5.74)$$

unde $h_i = h_i(x, y, z)$ este o funcție arbitrară din clasa respectivă, iar c_i sunt coeficienți, ce se determină așa cum s-a precizat.

Având în vedere că, în modelul matematic intervin o serie de operații, ce se efectuează asupra funcției g , și cum acestea se fac cu un volum de calcul mai redus în cazul polinoamelor, în cele mai multe softuri specializate, funcțiile h_i se aleg ca monoame, și deci g va avea forma unui polinom.

Se observă că lucrurile se prezintă la fel ca în cazul interpolării matematice, când se cunosc valorile T_j și trebuie aflată funcția g , care, în fiecare punct dat (x_j, y_j, z_j) să aibă valoarea dată de T_j . Din acest motiv, g se mai numește polinom de interpolare. Deosebirea este că acum, nu se cunosc valorile T_j , ci doar punctele respective. Acestea se determină punând condiția ca funcția aleasă g să satisfacă modelul matematic al procesului studiat, obținând în final un sistem de ecuații în necunoscutele T_j , care formează modelul numeric global, prezentat în capitolul precedent.

Rezultă că precizia metodei elementelor finite depinde fundamental de polinomul de integrare ales.

Deși valorile T_j sunt necunoscute, pentru alegerea polinomului de interpolare, acestea se presupun impuse.

Baza teoretică a interpolării o constituie teorema de aproximare a lui Weierstrass, conform căreia orice funcție continuă poate fi aproximată, pe un interval închis, cu o precizie oricât de bună, printr-un polinom de interpolare, însă teorema nu precizează cri-

teriuil practic de alegere a acestuia.

Cu alte cuvinte, impunând ca o funcție $f(x)$ să aibă anumite valori într-un anumit număr de puncte, ce formează baza de puncte, există un singur polinom de interpolare, care să reproducă valorile funcției în baza de puncte. Se subliniază aceasta deoarece sunt posibile diverse formulări ale polinomului de interpolare, însă se poate arăta că, prin transformări corespunzătoare ele pot fi aduse la o aceeași formă.

În această lucrare se folosesc două forme de prezentare, denumite polinoame de interpolare Pascal, respectiv polinoame de interpolare Lagrange.

Polinoamele de interpolare Pascal au forma algebrică obișnuită a unui polinom, în general de trei variabile, de un anumit grad n . Denumirea provine din faptul că, pentru $n=2$, termenii pot fi dispuși sub forma triunghiului Pascal. În acest caz, pentru determinarea funcțiilor de formă atașate nodurilor se procedează așa cum s-a arătat mai sus.

În cazul folosirii polinoamelor de interpolare Lagrange, pentru o funcție de o singură variabilă $T(x)$, dacă se impune ca aceasta să aibă valorile T_j , $j = \overline{1, p}$, într-un număr de p puncte, de coordonate x_j , $j = \overline{1, p}$, adică $T(x_j) = T_j$, $j = \overline{1, p}$, atunci aproximarea funcției se face prin relația:

$$T = \sum_{j=1}^p L_j(x) T_j, \quad (5.75)$$

unde $L_j(x)$ este polinomul Lagrange atașat punctului j , dat de relația:

$$L_j(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}, \quad j = \overline{1, p} \quad (5.76)$$

Se observă că funcția de interpolare a nodului j , notată cu N_j , este chiar polinomul Lagrange din punctul j , adică se determină direct:

$$N_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \frac{(x - x_j)}{(x_j - x_k)}, \quad j = \overline{1, p} \quad (5.77)$$

Se verifică că $N_j(x_i) = \delta_{ji}$, adică funcția de formă îndeplinește condiția menționată.

Însă, fiecare funcție de formă $N_j(x)$ este un polinom de gradul $(p-1)$ și deci, dacă se impune ca funcțiile de formă să fie de un grad n , atunci $p = n + 1$.

Evident că, pentru a obține o aproximare cât mai bună pentru funcția T , trebuie să se folosească un polinom de un grad n cât mai mare. În cazul că $p = n + 1$ depășește numărul de puncte ale grupului respectiv de puncte alese ca noduri, trebuie să se aleagă puncte din interiorul domeniului elementului finit, care, nefiind conectate cu nodurile elemente-

lor vecine, trebuie suprimate, atunci când se assemblează modelele numerice elementale, pentru a obține modelul numeric global.

În cazul folosirii polinoamelor de integrare Pascal, procedând așa cum s-a arătat, se poate obține ca toate punctele să fie, în extremitățile, respectiv vârfurile forme geometrice precum și în lungul elementului finit ori pe laturile, respectiv muchiile acestuia, și deci toate nodurile vor fi conectate cu cele ale elementelor finite vecine.

Acesta este argumentul pe baza căruia în această lucrare se consideră doar forme de interpolare Pascal.

Se consideră cazul cel mai simplu a unui grup de două noduri, 1, 2, unite printr-un segment de dreaptă, obținând un element finit unidimensional. De obicei, acest tip de elemente finite se folosesc atunci când domeniul considerat D este unidimensional, deci are forma unei linii drepte, ce se alege ca axă, ca în fig. 5.3.

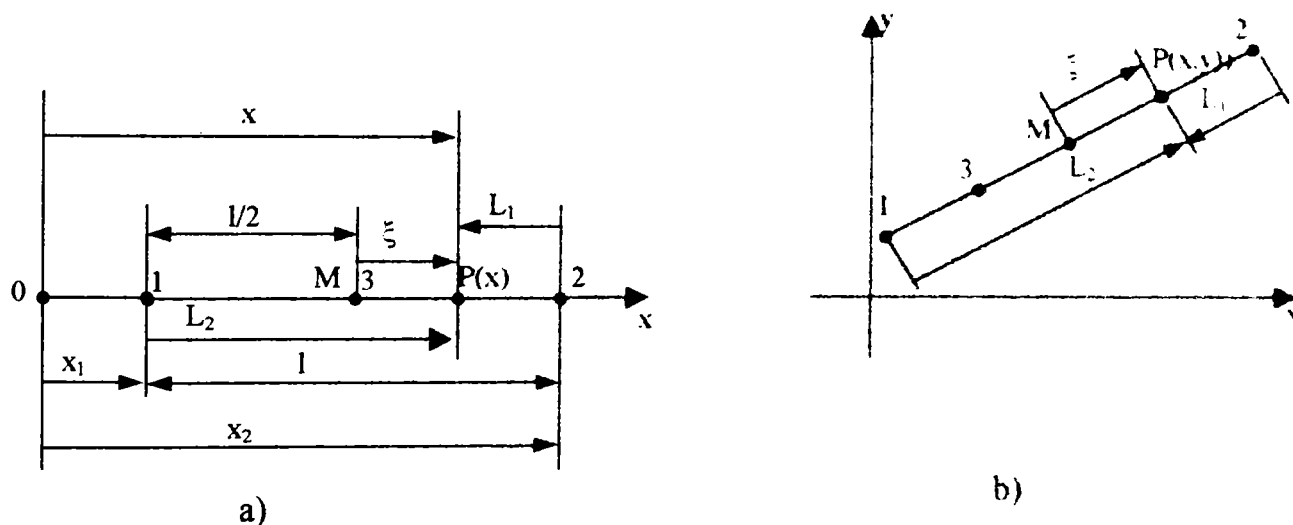


Fig.5.3

Pentru cazul din fig.5.3.a, intervine un polinom de interpolare într-o singură variabilă x . În general, dacă se alege un polinom Pascal de gradul n , acesta se caută de forma:

$$T = \sum_{i=p}^n a_i x_i, \quad (5.78)$$

unde $T_j = T(x_j)$.

Evident că (5.78) trebuie să conducă la un sistem de ecuații egal cu numărul de coeficienți a_i , care este egal cu $n+1$.

Deci, dacă se impune gradul n al polinomului, atunci grupul trebuie să aibă un număr $p=n+1$ de puncte (noduri). Invers, dacă s-a ales un număr un număr p de puncte, ce reprezintă nodurile, atunci polinomul trebuie să fie de grad $n=p-1$.

În cazul considerat, elementul finit are două noduri, deci $p=2$, și $n=1$, adică mărimea T se aproximează prin polinomul:

$$T=ax+b \quad (5.79)$$

Impunând condițiile (5.76) se obține:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} x + \frac{T_1 x_2 - T_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.80)$$

Ordonând după T_1 și T_2 se obține:

$$T = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T_2 \quad (5.81)$$

Dacă se notează cu l lungimea elementului finit, atunci:

$$T = \frac{x_2 - x}{l} T_1 + \frac{x - x_1}{l} T_2 \quad (5.82)$$

Deci:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{l}; \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{l}; \quad T = N_1 T_1 + N_2 T_2$$

Fie M punctul situat în mijlocul elementului finit, și se notează cu ξ distanța orientată de la M la un punct curent $P(x)$, raportată la jumătate din lungimea l a acestuia. Se obțin:

$$\xi = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)} \quad (5.84)$$

Explicitând pe x se obține:

$$x = \frac{(x_2 - x_1)\xi + x_1 + x_2}{2} \quad (5.85)$$

Înlocuind în (5.78), rezultă:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (5.86)$$

Deci, mărimea T , exprimată în ξ va fi:

$$T(\xi) = \frac{1-\xi}{2} T_1 + \frac{1+\xi}{2} T_2 \quad (5.87)$$

Din relația (5.84) se observă că, pentru $x=x_1$ se obține $\xi=-1$, iar pentru $x=x_2$, rezultă $\xi=1$, ceea ce înseamnă că ξ variază de la valoarea $\xi=-1$, ce o are într-o extremitate, la valoarea $\xi=1$, în cealaltă extremitate, adică ξ are valori normate.

Se mai menționează că, funcțiile de formă (5.86) se pot obține direct, dacă funcția de aproximare a mărimii T se alege de la început ca un polinom de gradul întâi, în varia-

bila ξ , deci de forma:

$$T=a\xi+b \quad (5.88)$$

Având în vedere valorile lui ξ în nodurile elementului, relațiile 5.78 devin:

$$T(-1)=T_1; \quad T(1)=T_2$$

Procedând ca mai înainte, rezultă N_1, N_2 de forma (5.86).

Pentru a obține alte expresii ale funcțiilor de formă, localizarea punctului curent P se face prin două variabile, definite în raport cu fiecare dintre cele două noduri, ca fiind egale cu distanța de la celălalt nod la punctul P. Acestea se numesc variabile L și dacă se notează cu L_1 pentru nodul 1, respectiv cu L_2 pentru nodul 2, conform definiției de mai înainte se obține:

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.89)$$

Relațiile (5.83) devin:

$$N_1=L_1, \quad N_2=L_2, \quad (5.90)$$

și T exprimată în variabilele L_1, L_2 va fi:

$$T=L_1T_1+L_2T_2 \quad (5.91)$$

Din relațiile (5.89) rezultă că, pentru $x=x_1$ se obțin $L_1=1, L_2=0$, iar pentru $x=x_2$ se obțin $L_1=0, L_2=1$, adică variabila L atașată fiecărui nod are valoarea egală cu 1 în nodul respectiv și valoarea egală cu zero în nodul opus. Din acest motiv, L_1, L_2 se reprezintă orientate de la nodul opus spre nodul căruia îi este asociată variabila L respectivă. De asemenea, cu relațiile (5.89) se specifică că:

$$L_1+L_2=1, \quad (5.92)$$

lucru ce era de așteptat, având în vedere definiția dată acestor variabile.

La fel ca în cazul precedent, dacă T se consideră ca o funcție de două variabile L_1, L_2 , atunci ea se va aproxima ca un polinom de gradul întâi, omogen, în aceste variabile, deci de forma:

$$T=aL_1+bL_2 \quad (5.93)$$

Având în vedere valorile variabilelor L_1, L_2 în nodurile elementului și notând $T=T(L_1, L_2)$ se obțin:

$$T(1, 0)=T_1; \quad T(0, 1)=T_2$$

Aceasta conduce la $a=L_1, b=L_2$ și înlocuind în (5.93) se obține chiar relația (5.91).

Dacă se compară relațiile (5.87), (5.93) cu relația (5.82) respectiv relațiile (5.86),

(5.90) cu relația (5.83) se observă că, dacă se folosește coordonata ξ sau coordonatele L_1, L_2 , atât polinomul de aproximare cât și funcțiile de formă au expresii mult mai simple în ultimele două cazuri, ceea ce conduce la o scădere considerabilă a volumului de calcule, atunci când se determină modelul numeric elemental.

De asemenea, sunt posibile situațiile în care intervin elemente finite unidimensionale, chiar dacă domeniul D este o suprafață plană, sau este tridimensional. De exemplu, dacă domeniul D este o suprafață de revoluție, de pildă, tronconică, din motive de simetrie, studiul se poate face într-un plan ce trece prin axa de revoluție, rezultând astfel un element unidimensional dirijat după direcția generatoarei din planul considerat, adică un element finit unidimensional, ce nu mai este paralel cu nici una dintre axele sistemului de coordonate utilizat, așa cum se vede în fig.5.3,b.

Evident că aproximarea mărimii T trebuie făcută printr-un polinom de două variabile, x, y care în forma Pascal este dat de relația:

$$T(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} x^{i-j} y^j, \quad (5.94)$$

care va fi un polinom de gradul n .

Dacă polinomul de interpolare se alege astfel încât toți coeficienții să fie nenuli, când se spune că se folosește o formă completă a polinomului de interpolare, atunci numărul total de coeficienți este egal cu $(n+1)(n+2)/2$.

Pentru a determina acești coeficienți cu relațiile (5.78), numărul de noduri ale elementului finit, deci numărul de puncte p al grupului respectiv se alege pe baza relației:

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (5.95)$$

Invers, impunând numărul p de noduri, gradul maxim al polinomului de interpolare se află din relația:

$$n = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8(p-1)}}{2} \quad (5.96)$$

Se observă că întotdeauna $n > 0$, și dacă pentru n se obține un număr natural, atunci se alege un polinom de interpolare în formă completă. Dacă pentru n nu se obține un număr natural, atunci n se alege ca fiind numărul natural imediat superior și se folosește o formă incompletă astfel încât numărul termenilor liberi să fie egal cu p . Forma incompletă se alege astfel încât să se asigure simetria polinomului de interpolare, de exemplu să fie de gradul n în una dintre variabile.

În cazul considerat $p=1$, se obține $n=1$, însă fiind vorba numai de două puncte se alege forma incompletă:

$$T(x,y)=ax+by$$

Se pun condițiile $T(x_1,y_1)=T_1$; $T(x_2,y_2)=T_2$, și procedând cum s-a arătat se obține

$$T(x,y) = \frac{x_2y - y_2x}{x_2y_1 - x_1y_2} T_1 + \frac{y_1x - x_1y}{x_2y_1 - x_1y_2} T_2 \quad (5.97)$$

și:

$$N_1(x,y) = \frac{x_2y - y_2x}{x_2y_1 - x_1y_2}; \quad N_2(x,y) = \frac{y_1x - x_1y}{x_2y_1 - x_1y_2} \quad (5.98)$$

Este de observat că, dacă elementul finit este paralel cu axa x , aflându-se la o distanță d de această axă, atunci $y_1=y_2=y=d$, și din (5.97), (5.98) se obțin tocmai relațiile (5.21), (5.83). De asemenea, dacă elementul finit este paralel cu axa y și se află la o distanță d de aceasta, atunci $x_2=x_1=x=d$, și se obțin aceleași relații, doar că variabila x se înlocuiește cu variabila y .

În concluzie, funcțiile de formă (5.83) sunt valabile pentru orice element finit ce are direcția uneia dintre axele de coordonate.

Însă, cele două puncte fiind pe aceeași linie dreaptă, se arată ușor că relațiile (5.98) se reduc la relațiile (5.83), adică funcțiile de formă se exprimă cu o singură variabilă, x . Aceasta era de așteptat, deoarece y este dependent de x prin ecuația dreptei respective, ceea ce face ca polinomul $T(x,y)$ să fie de fapt un polinom doar în variabila x .

În concluzie, oricare ar fi poziția unui element finit unidimensional, el nu poate fi aproximat decât printr-un polinom de o singură variabilă.

Se are în vedere că atât coordonata ξ , cât și coordonatele L_1, L_2 s-au definit în raport cu însuși elementul finit respectiv, motiv ce face ca să se numească coordonate locale naturale.

Ca urmare, dacă pentru elementul finit unidimensional se folosesc coordonatele locale naturale, funcțiile de formă se exprimă prin relațiile (5.87), respectiv (5.90), indiferent de poziția spațială a elementului finit. Trecerea de la sistemul de coordonate local la cel global se face printr-o transformare de coordonate, ce se va prezenta ulterior.

Fie acum un grup de trei puncte, notate cu 1, 2, 3, de coordonate cunoscute. Folosind un sistem de referință global, definit în planul determinat de cele trei puncte, aproximarea se face printr-un polinom de două variabile, x, y . Deoarece $p=3$, din (5.96) se obține $n=1$, și deci:

$$T=ax+by+c \quad (5.99)$$

Aplicând metodologia utilizată până în prezent, se obține:

$$T=N_1T_1+N_2T_2+N_3T_3 \quad (5.100)$$

unde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ N_2 &= \frac{(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + x_3y_1 - x_1y_3}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ N_3 &= \frac{(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Aceste relații se pot scrie sub forma:

$$N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad N_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (5.102)$$

unde:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Dacă cele trei puncte sunt colineare, atunci ele definesc un element finit unidimensional cu trei noduri, de exemplu punctele 1, 2 sunt nodurile din extremități, iar 3 este un nod intermediar (fig.5.3.b).

Coordonatele celor trei puncte sunt legate între ele prin ecuația dreptei pe care se află și se obțin $\Delta=0$; $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$, adică funcțiile de formă sunt nedeterminate.

Prin alegerea corespunzătoare a unor mixuri de ordinul doi, se obțin funcțiile de formă similare celor date de relația (5.83), pentru două elemente finite, cu câte două noduri, constituite din câte un punct extern, și un punct intermediar, iar funcția de formă a acestuia este identică pentru ambele elemente finite. De asemenea, prin îmbinarea acestora se obțin funcții de formă doar pentru punctele extreme, iar punctul intermediar nu are nici o influență.

Deci, cu trei puncte colineare se poate forma un singur element finit unidimensional, având ca noduri cele două puncte extreme, indiferent care ar fi punctul intermediar. Aceasta decurge și din faptul că o linie dreaptă este perfect determinată prin două puncte, și nu depinde de alte puncte alese pe ea. S-a făcut această precizare, deoarece în unele lucrări se vorbește de elemente finite unidimensionale cu trei noduri. De fapt, un astfel de element finit se definește față de un sistem de referință local, caracterizat prin axa ξ .

menționată mai înainte, iar funcția de aproximare se alege ca un polinom de gradul doi în variabila ξ , și apoi printr-o transformare de coordonate se revine la sistemul de referință global. Dacă cele trei puncte nu sunt colineare, se obține un element finit curb. de forma unei parabole ce trece prin acele puncte.

Dacă cele trei puncte nu sunt colineare, se definește un element finit bidimensional triunghiular (fig.5.4).

Prin analogie cu cazul unui element finit unidimensional, fiecărui nod i se atașează o coordonată L_i , definită ca raportul dintre aria triunghiului format de un punct curent $P(x,y)$ și celelalte două noduri și aria întregului triunghi.

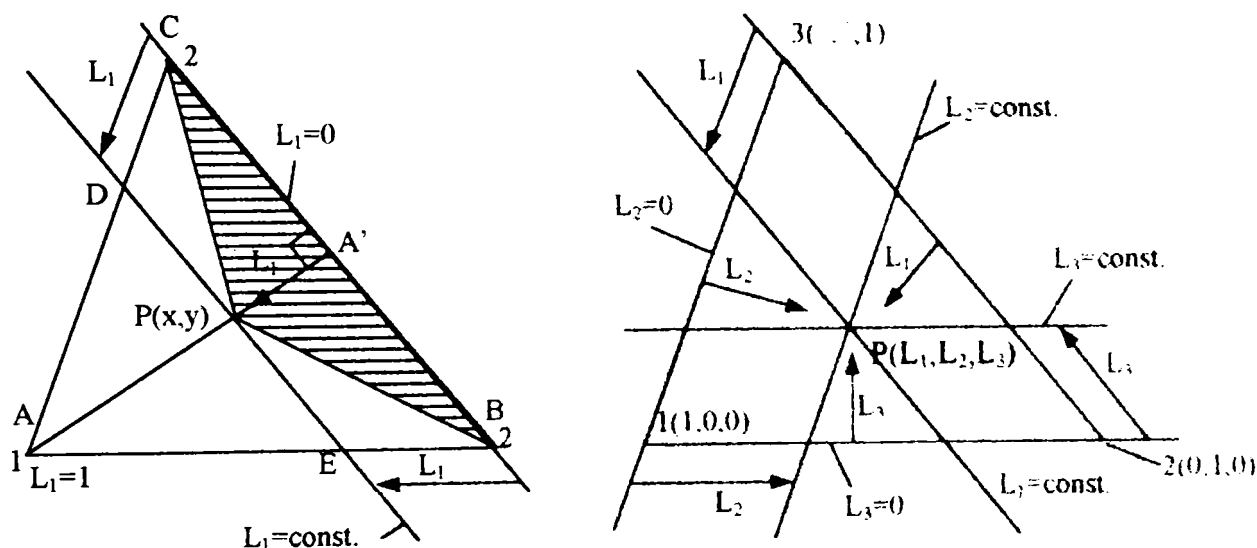


Fig.5.4

Deci, dacă se notează cu L_i coordonata L asociată nodului i , atunci conform definiției de mai sus se obține:

$$L_1 = \frac{\text{aria}(PBC)}{\text{aria}(ABC)} \quad (5.104)$$

Exprimând ariile celor două triunghiuri în funcție de coordonatele varfurilor și având în vedere relațiile (5.102), (5.103) se obține că $L_1=N_1$. Notând cu L_2, L_3 coordonatele L ale celorlalte noduri, în mod similar se obține $L_2=N_2, L_3=N_3$, adică:

$$L_1=N_1; \quad L_2=N_2; \quad L_3=N_3 \quad (5.105)$$

De asemenea, rezultă că:

$$L_1+L_2+L_3=1 \quad (5.106)$$

În continuare se prezintă câteva proprietăți ale coordonatelor L , mai puțin evidențiate în lucrările de specialitate, însă foarte utile:

Aceste proprietăți se stabilesc pentru coordonata L_1 , și apoi se extind la celelalte

două.

Dacă prin P se duce o paralelă la latura opusă nodului 1 (fig.5.4,a), atunci, oricare ar fi poziția lui P pe aceasta, triunghiul PBC va avea aceeași bază BC, și aceeași înălțime, și deci va avea aceeași arie, iar din relația (5.104) se obține $L_1 = \text{const}$.

Deci, coordonata L, atașată fiecărui nod, are valoarea constantă pe orice dreaptă paralelă cu latura opusă nodului respectiv.

Ca urmare, punctul P poate fi ales chiar pe înălțimea AA' din A. Din acest motiv, se obișnuiește ca pentru L_1, L_2, L_3 să se aleagă ca direcție perpendiculara dusă pe latura opusă.

În acest caz, din relația (5.104) se obține:

$$L_1 = \frac{AP}{AA'} \quad (5.107)$$

Folosind asemănarea triunghiului ADE, ABC relația (5.107) devine:

$$L_1 = \frac{CD}{AB}, \quad L_1 = \frac{BE}{AB} \quad (5.108)$$

Deci valorile coordonatelor L ale unui punct sunt egale cu raportul dintre lungimea segmentului, pe care o paralelă cu latura opusă nodului căruia i se atașează acea coordonată, îl taie pe câte una dintre laturile ce se întâlnesc în acel nod și lungimea laturii respective.

Pe această bază, în fig.5.4,a s-a reprezentat coordonata L_1 a lui P, orientată din nodurile laturii opusă vârfului 1, de-a lungul laturilor ce se întâlnesc în 1, și trebuie subînțeles că este vorba despre raportul dintre lungimea segmentului respectiv și lungimea laturii după care este definit.

Folosind coordonatele L pentru localizarea punctului P, acesta devine $P(L_1, L_2, L_3)$ și pentru determinarea valorilor ce le are L_1, L_2, L_3 se procedează așa cum se arată în fig.5.4,b.

Prin P se duce câte o paralelă la fiecare latură a triunghiului ce reprezintă direcții după care coordonata asociată vârfului opus are valoare constantă. Fiecare coordonată s-a reprezentat prin câte un segment orientat de la unul dintre nodurile laturii opuse vârfului căruia îi este atașată acea coordonată, după latura ce unește acel nod cu vârful respectiv.

Pe această bază se verifică ușor că oricare dintre coordonatele L va avea valoarea zero în orice punct de pe latura opusă nodului căruia i se asociază și valoarea unu în no-

dul respectiv. Deci, coordonatele L ale nodurilor vor fi $1(1, 0, 0)$; $2(0, 1, 0)$, $3(0, 0, 1)$.

Folosind coordonatele L , funcția de aproximare (5.100) devine:

$$T=L_1T_1+L_2T_2+L_3T_3 \quad (5.109)$$

Este de reținut că, dacă se folosesc coordonatele L , funcția de aproximare pentru un element finit triunghiular este un polinom de gradul întâi în variabilele (L_1, L_2, L_3) ceea ce conduce la o simplificare remarcabilă a calculelor.

Cu un grup de patru puncte necoliniare se definește un element finit bidimensional de tip patrulater, în general, de o formă oarecare, având cele patru puncte ca noduri dispuse în vârfurile patrulaterului.

În acest caz, relația (5.96) conduce la $n=2$, iar din (5.95) se obține $p=6$. Deoarece $p=4$ se va folosi un polinom de interpolare în variabilele x, y de gradul 2, însă de o formă incompletă. Cea mai obișnuită formă este cea a unui polinom de gradul întâi în raport cu fiecare variabilă, motiv pentru care se vorbește despre un element finit patrulater linear. Deci funcția de aproximare se alege de forma:

$$T=axy+bx+cy+d \quad (5.110)$$

Procedând ca în cazurile precedente se obține un sistem de patru ecuații în necunoscutele a, b, c, d . Însă, deoarece se obțin expresii complicate, se preferă folosirea unui element finit parametric, ce se va prezenta în cele ce urmează.

Utilizarea elementelor finite parametrice s-a impus din mai multe motive.

După cum s-a subliniat la începutul acestui paragraf, pentru fiecare element finit, trebuie stabilite funcțiile analitice cu ajutorul cărora să se descrie domeniul elementului finit, care vor interveni în calculul integralei pe acest domeniu.

Chiar și în cazul unui element finit unidimensional, care nu este paralel cu axele sistemului de coordonate, aceste funcții sunt relativ complicate și ele devin și mai complicate, de exemplu, în cazul unui element finit patrulater, de o formă arbitrară. Cu atât mai mult se complică lucrurile în cazul elementelor finite tridimensionale

De asemenea, dacă frontiera domeniului este curbă, pentru a obține erori cât mai mici, trebuie să se folosească elemente finite curbe, respectiv cu laturile curbe, respectiv cu muchiile și fețele curbe, iar descrierea unor astfel de domenii este practic imposibilă.

Lucrurile devin foarte simple dacă s-ar folosi elemente unidimensionale, ce are direcția unei axe, respectiv elemente finite bidimensionale cu laturile paralele cu axele, respectiv elemente finite tridimensionale ce au muchiile și fețele paralele cu axele. Deoa-

rece astfel de elemente finite se descriu în general prin funcții de transformare $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, $z \in [e, f]$ ele se vor numi elemente finite de tip interval. Evident că acestea ar implica rețele de discretizare rectangulare, ceea ce ar reduce considerabil cazurile în care se poate aplica metoda elementelor finite, cu precizii satisfăcătoare.

Ideea este că, pentru fiecare grup de noduri ce este dat, trebuie să se definească un sistem de coordonate local, cu axele notate, în general, cu x_1, x_2, x_3 .

Mai întâi, în raport cu sistemul de referință local, se definește un element finit, ce se va numi element finit părinte, care să aibă un număr de noduri egal cu numărul de puncte din grupul considerat, însă să fie cu element finit de tip interval.

Elementul finit ce urmează a se defini, cu acel grup de puncte, se va numi element finit real, iar punctele vor fi nodurile acestuia.

Fiecare nod al elementului finit părinte se pune în corespondență cu un nod al elementului finit real și este foarte important ca aceste corespondențe să se stabilească corect. În acest scop se imaginează, cel puțin aproximativ, forma ce se dorește să o aibă elementul finit real. Elementul finit părinte va avea aceeași configurație geometrică, doar că laturile, respectiv muchiile sunt după axele sistemului de coordonate local ori paralele cu acestea. Cu alte cuvinte, elementul finit părinte va fi elementul finit real imaginat că ar avea nodurile astfel dispuse încât laturile sale să aibă direcțiile axelor sistemului de coordonate global. Pe această bază corespondența nodurilor se stabilește relativ ușor.

După ce s-a reprezentat elementul finit părinte, fiecare nod al său se notează la fel cu nodul elementului finit real pus în corespondență cu nodul respectiv. Se stabilesc coordonatele nodurilor elementului finit părinte față de sistemul de coordonate local.

Se procedează la fel ca în cazurile prezentate până acum, doar că mărimea T se aproximează printr-un polinom în variabile locale, adică T se caută de forma:

$$T = T(x_1, x_2, x_3) \quad (5.111)$$

Notând cu (x_1^i, x_2^i, x_3^i) coordonatele unui nod arbitrar al elementului părinte, coeficienții polinomului de interpolare se află impunând condițiile:

$$T(x_1^i, x_2^i, x_3^i) = T_i, \quad i = \overline{1, p} \quad (5.112)$$

Coeficienții astfel determinați se înlocuiesc în (5.111), care se grupează după valorile T_1, T_2, \dots, T_p , obținând:

$$T = \sum_{i=1}^p N_i T_i, \quad (5.113)$$

unde $N_i = N_i(x_1, x_2, x_3)$ sunt funcțiile de formă ale elementului finit părinte, exprimate în coordonate locale.

Trecerea de la elementul finit părinte la cel real se realizează printr-o transformare de coordonate, ce se obține exprimând fiecare coordonată globală ca o funcție de coordonate locale, deci de forma:

$$\begin{cases} x = x(x_1, x_2, x_3) \\ y = y(x_1, x_2, x_3) \\ z = z(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (5.114)$$

Se observă că transformarea (5.114) descrie domeniul elementului finit real sub formă parametrică, parametrii fiind coordonatele locale, de unde provine și denumirea de elemente finite parametrice.

Transformarea (5.114) se obține exprimând fiecare coordonată globală printr-o relație similară celei stabilite pentru exprimarea mărimii T , deci de forma (5.113), doar că în locul valorilor mărimii intervin valorile acelei coordonate, pentru nodurile (punctele) respective ale elementului finit real, adică:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^p N_i x'_i \\ y = \sum_{i=1}^p N_i x'_i \\ z = \sum_{i=1}^p N_i x'_i \end{cases} \quad (5.115)$$

unde $N_i = N_i(x_1, x_2, x_3)$ sunt chiar funcțiile de formă stabilite anterior. Deci, valoarea coordonatei respective a fiecărui nod, față de sistemul de referință global, se multiplică cu funcția de formă atașată nodului respectiv, exprimată în coordonate locale.

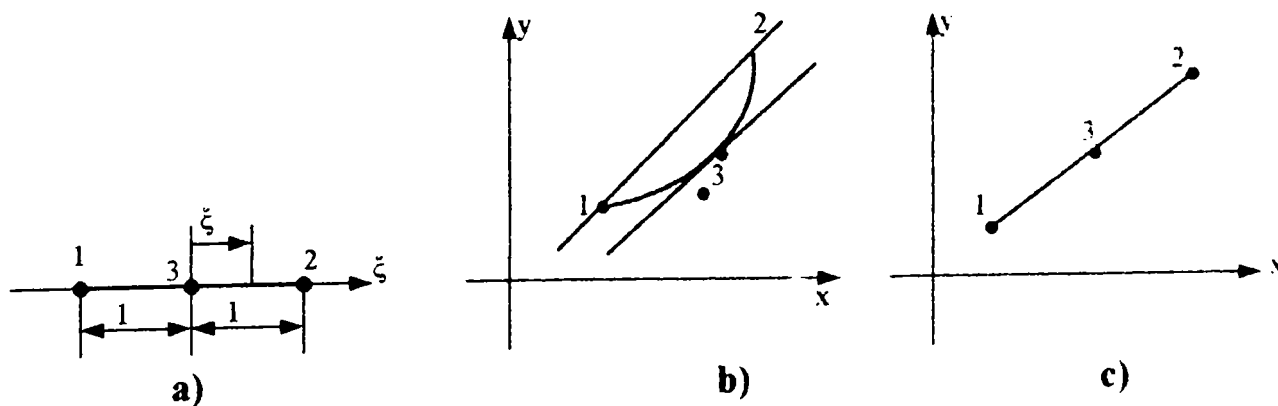


Fig.5.5

Ca prim exemplu, se va defini un element finit unidimensional curb. Pentru aceasta trebuie ales un grup de trei puncte necolineare, așa cum se arată în fig.5.5.b.

Se presupun cunoscute coordonatele globale a celor trei puncte, adică se cunosc (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$.

Coordonata locală este coordonata ξ , prezentată în paginile precedente și deci sistemul de coordonate local are o singură axă, axa ξ . Elementul finit părinte este tot unidimensional, cu lungimea egală cu două unități și dispus simetric față de originea axei ξ , așa cum se arată în fig.5.5.a. Deci elementul finit părinte este descris de funcția $-1 \leq \xi \leq 1$.

Correspondența nodurilor se stabilește așa cum se arată în fig.5.5.

În unele lucrări se spune că se utilizează un element finit unidimensional rectiliniu cu trei noduri, două fiind plasate în extremități, iar al treilea în centrul de greutate și se numește nod median. Însă, așa cum se observă din figură, elementul finit real nu este nici măcar rectiliniu, iar nodul 3 poate fi orice nod necolinar cu celelalte două, și amplasat între acestea. De fapt, afirmațiile respective se referă la elementul finit părinte, care, într-adevăr, este rectiliniu, și are nodul trei ca nod median.

Aproximarea mărimii T , față de sistemul referința local, deci în raport cu axa ξ se face printr-un polinom în variabila ξ , care trebuie să fie de gradul doi, deoarece $p=3$, și $n=p-1=2$. Deci:

$$T = a\xi^2 + b\xi + c \quad (5.116)$$

Coordonatele nodurilor elementului finit părinte sunt $1(-1)$; $3(0)$; $2(1)$.

Condițiile (5.112) devin $T(-1)=T_1$, $T(1)=T_2$, $T(0)=T_3$. Impunând ca $T(\xi)$, dată de (5.116), să satisfacă aceste condiții, și după ce se grupează în raport cu T_1 , T_2 , T_3 , se obține:

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3, \quad (5.117)$$

unde:

$$N_1 = N_1(\xi) = \frac{\xi^2 - \xi}{2}; \quad N_2 = N_2(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi}{2}; \quad N_3 = N_3(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (5.118)$$

Se verifică că:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

Transformarea (trecerea) de la sistemul de referință local la cel global este dată de:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{cases} \quad (5.119)$$

sau, dezvoltat:

$$\begin{cases} x = \frac{\xi^2 - \xi}{2} x_1 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} x_2 + (1 - \xi^2) x_3 \\ y = \frac{\xi^2 - \xi}{2} y_1 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} y_2 + (1 - \xi^2) y_3 \end{cases} \quad (5.120)$$

Se poate verifica că, dacă ξ variază între -1 și 1 , atunci un punct curent $P(x,y)$, ale cărui coordonate sunt date de relațiile (5.120), descrie o parabolă ce trece prin cele trei puncte (fig.5.5.b). De asemenea, panta acesteia în punctul trei are direcția segmentului ce unește punctele 1 și 2, adică tangenta dusă la parabolă în punctul 3 are direcția acestui segment. Ca urmare, dacă punctul 3 se alege pe mediatoarea segmentului format din punctele 1 și 2, atunci parabola va avea vârful în punctul 3.

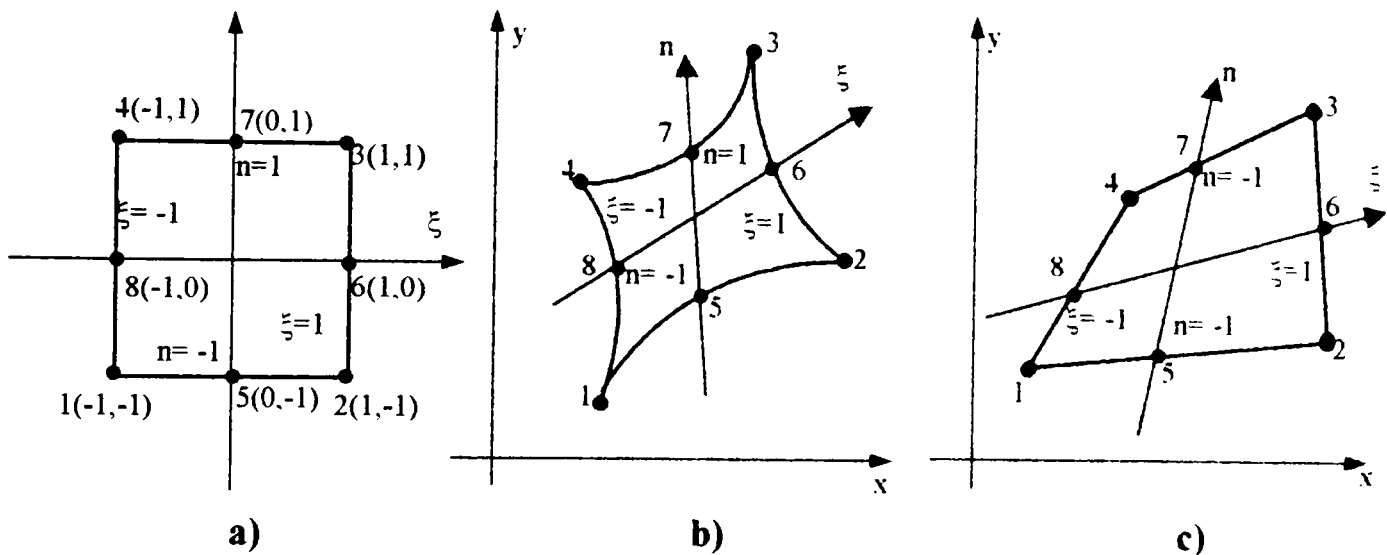


Fig.5.6

De asemenea, dacă punctele sunt alese colineare, atunci $P(x,y)$ va descrie chiar segmentul ce le unește și se obține un element finit unidimensional rectiliniu, prezentat în fig.5.5.c.

Următorul exemplu va ilustra modul în care se definește un element finit bidimensional patrulater cu laturi curbe. În acest scop se alege un grup de 8 puncte, ce trebuiesc amplasate ca în fig.5.6.b.

Sistemul de referință local este definit ca un sistem de coordonate cartezian, cu axele ξ , η , iar elementul finit părinte este un pătrat cu latura egală cu două unități, dispus cu laturile paralele cu axele, și cu centrul de simetrie în originea sistemului de coordonate, așa cum se arată în fig.5.6.a. Presupunând că cele 8 puncte s-au notat ca în fig.5.6.b, judecând așa cum s-a arătat, s-a obținut amplasarea nodurilor elementului finit părinte ca în fig.5.6.a, în care s-au precizat și coordonatele nodurilor, față de sistemul de referință local.

Elementul finit părinte va fi descris de funcțiile $-1 \leq \xi \leq 1$; $-1 \leq \eta \leq 1$.

Se definește mărimea T ca o funcție de coordonatele locale, adică $T=T(\xi, \eta)$.

Făcând $p=8$, din relația (5.96) se află $n=3$, însă având numai 8 puncte, se va folosi un polinom de interpolare sub formă incompletă, astfel încât să fie de gradul doi în raport cu fiecare variabilă, de unde provine și denumirea de element finit patrulater, pătratic, sau de ordinul doi.

Deci, exprimarea mărimii se face prin funcția:

$$T=a_1\xi^2+a_2\eta^2+a_3\xi^2\eta+a_4\xi\eta^2+a_5\xi\eta+a_6\xi+a_7\eta+a_8 \quad (5.121)$$

Prin același procedeu se obține:

$$T=N_1T_1+N_2T_2+N_3T_3+N_4T_4+N_5T_5+N_6T_6+N_7T_7+N_8T_8 \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{-(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(\xi+\eta-1)}{4} & N_4 &= \frac{-(1-\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)}{4} \\ N_5 &= \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2} & N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2} \\ N_7 &= \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2} & N_8 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2} \end{aligned} \quad (5.123)$$

Transformarea de coordonate este definită de relațiile:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \end{cases}$$

unde N_i , $i = \overline{1,8}$ sunt funcțiile de formă date de relațiile (5.123)

Se poate verifica că, pentru fiecare trei puncte de pe o aceeași latură a elementului finit părinte, se obțin relații de transformare similare cu relațiile (5.120). Laturile trebuie parcurse în sensul axelor de coordonate, iar pentru fiecare latură se impune condiția ca una dintre coordonatele locale să aibă valoarea constantă 1 sau -1 .

Ca exemplu, să considerăm latura superioară, ale cărei nouri se parcurg în sensul $4 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Deoarece în lungul acestei laturi $\eta=1$, relațiile (5.123) devin:

$$N_1=0; \quad N_2=0; \quad N_3 = \frac{\xi^2 + \xi}{2}; \quad N_4 = \frac{\xi^2 - \xi}{2}; \quad N_5=0; \quad N_6=0 \quad N_7=1-\xi^2; \quad N_8=0.$$

Relațiile de transformare se reduc la:

$$\begin{cases} x = \frac{\xi^2 - \xi}{2} x_4 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} x_3 + (1 - \xi^2) x_7, \\ y = \frac{\xi^2 - \xi}{2} y_4 + \frac{\xi^2 + \xi}{2} y_3 + (1 - \xi^2) y_7 \end{cases} \quad (5.124)$$

Se observă că se obțin tocmai relațiile (5.120) doar că punctele 1, 2, 3 se înlocuiesc cu punctele, respectiv, 4, 3, 7 ale laturii considerate, parcursă în sensul menționat.

Deci, când ξ variază între -1 și 1 , față de sistemul de referință global, punctul curent $P(x,y)$ va descrie o parabolă, ce trece prin nodurile 4, 7, 3 ale elementului finit real, așa cum se observă din fig.5.6.b.

La fel și pentru celelalte laturi ale elementului finit părinte, impunând condiția ca una dintre cele două coordonate locale să aibă valoarea constantă respectivă (-1 sau 1), pentru valori ale celeilalte coordonate locale, din intervalul $[-1, 1]$, față de sistemul de referință global, punctul curent descrie o parabolă ce trece prin nodurile corespunzătoare ale elementului finit real. Se obține în final un element finit patrulater cu laturi curbe.

De obicei, nu se mai reprezintă elementul finit părinte, ci se scrie direct transformarea de coordonate (5.123). Pentru fiecare grup de trei puncte consecutive, alese ca să formeze nodurile elementului finit real, se înscrie valoarea constantă -1 sau 1 a coordonatei locale respective, așa cum se arată în fig.5.6. În acest scop, peste elementul finit real se suprapune sistemul de referință local cu originea în centrul de simetrie al acestuia, iar direcțiile axelor pot fi alese arbitrar, însă axa ξ orientată în sensul axei x , iar axa η orientată în sensul axei y . De obicei, direcția axelor se alege astfel încât să treacă prin unul din punctele intermediare ale laturii pe care o intersectează. Se imaginează că elementul finit ar avea forma unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele astfel desenate, cu latura egală cu două unități, și că fiecare axă trece prin mijlocul laturii pe care le intersectează, unde s-ar afla punctul intermediar de pe acea latură. Procedând astfel, se stabilește cu ușurință care coordonată locală rămâne constantă și valoarea acesteia.

Dacă, cele trei puncte ale fiecărui grup sunt colineare, se poate arăta că elementul finit patrulater are laturile rectilinii, însă de o formă arbitrară (fig.5.6.c).

5.5. Stabilirea modelelor numerice elementale pentru câmpul electromagnetic și pentru câmpul termic

În acest paragraf se urmărește determinarea expresiilor elementelor matricii de rigiditate elementale, și ale componentelor vectorului termenilor liberi elementali, pentru

un element finit arbitrar, însă pentru ușurința notațiilor nu s-a mai prevăzut indicele superior, e. De asemenea, nu se mai precizează expresiile funcțiilor de formă și numărul lor, și acestea se vor alege, în funcție de tipul de element finit utilizat, așa cum s-a arătat în paragraful anterior.

Studiul arcului electric revine la studiul câmpului electromagnetic produs de curentul de sudare. În acest scop ar trebui folosit modelul matematic al potențialelor electromagnetice prezentat în capitolul 4.

Însă, modelul geometric utilizat constă dintr-un conductor cilindric, parcurs de curentul de sudare și înconjurat de gazul de protecție, deci de un mediu nemagnetic, de permeabilitate magnetică relativă $\mu_r=1$. De asemenea, deoarece coloana arcului electric are secțiunea redusă, și având în vedere că frecvența curentului de sudare este frecvența industrială, deci de valoare redusă, se poate neglija curentul electric indus, ce intervine atunci când curentul de sudare este alternativ.

Ca urmare, pentru studiul arcului electric se folosește modelul matematic.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{A}) = \mu_0 \bar{J}_s, \quad (5.125)$$

unde \bar{A} , \bar{J}_s sunt potențialul magnetic vector, respectiv densitatea curentului de sudare dintr-un punct curent $P(x,y,z)$ al domeniului elementului finit respectiv

Ecuția (5.125) se mai scrie sub forma:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{A}) - \Delta\bar{A} = \bar{J}, \quad (5.126)$$

Pentru rezolvarea unei ecuații vectoriale, în care intervine ca necunoscută o mărime vectorială, se folosește metoda descompunerii pe componente. Se obțin trei ecuații scalare, în care necunoscute sunt valorile componentelor mărimii vectoriale respective după axele sistemului de coordonate folosit. Fiecare componentă se aproximează printr-o relație prezentată în capitolul precedent pentru mărimea scalară T .

Deci valoarea fiecărei componente se va aproxima prin suma produselor dintre funcția de formă atașată fiecărui nod al elementului finit și valoarea componentei după axa respectivă a valorii vectoriale a mărimii vectoriale în acel nod, cu observația că funcția de formă atașată unui nod este aceeași în fiecare aproximare.

În continuare, pentru fiecare ecuație scalară se procedează ca în capitolul precedent, și se obține câte un model numeric elemental.

În ecuația (5.126) se presupune cunoscută \bar{J}_s , iar necunoscută va fi mărimea \bar{A} . Admițând că se folosește un sistem de coordonate carteziene, se notează cu A_x , A_y , A_z

J_{sx} , J_{sy} , J_{sz} valorile componentelor după axe ale mărimii \bar{A} , respectiv ale mărimii \bar{J} .
Evident că:

$$\bar{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}, \quad (5.127)$$

unde $A_x \bar{i}$, $A_y \bar{j}$, $A_z \bar{k}$ sunt componentele mărimii vectoriale \bar{A} după axe, iar A_x , A_y , A_z reprezintă valorile acestor componente.

Se notează cu \bar{A}_λ valoarea vectorială a mărimii \bar{A} într-un nod arbitrar λ , iar $A_{\lambda x}$, $A_{\lambda y}$, $A_{\lambda z}$ reprezintă valorile componentelor acesteia după axele respective. Evident că

$$\bar{A}_\lambda = A_{\lambda x} \bar{i} + A_{\lambda y} \bar{j} + A_{\lambda z} \bar{k} \quad (5.128)$$

Conform celor precizate anterior, se definesc aproximările:

$$A_x = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda x}; \quad A_y = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda y}; \quad A_z = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda z} \quad (5.129)$$

Se exprimă, în coordonate carteziene, operatorii ce intervin în relația (5.126) și apoi se grupează termenii ce multiplică câte unul dintre vectorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , care se egalează cu valoarea corespunzătoare a componentei lui \bar{J} . Se obțin astfel cele trei ecuații scalare menționate, în care A_x , A_y , A_z se înlocuiesc cu aproximările (5.129)

Admițând că se folosește metoda reziduurilor ponderate a lui Galerkin, se procedează ca în capitolul precedent și se obțin trei modele numerice elementale, în care necunoscutele sunt $A_{\lambda x}$, $A_{\lambda y}$, $A_{\lambda z}$, $\lambda = \overline{1, p}$, care se obțin prin rezolvarea modelelor numerice elementale. În final, se determină valoarea vectorială \bar{A}_λ , $\lambda = \overline{1, p}$, pe baza relației (5.128).

Însă, în scopul de a obține modele elementale cât mai simple, se fac anumite transformări ale ecuației vectoriale date.

În relația (5.121), se înlocuiesc relațiile (5.129) și se obține:

$$\bar{A} = \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda x} \right) \bar{i} + \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda y} \right) \bar{j} + \left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda A_{\lambda z} \right) \bar{k} \quad (5.130)$$

Versorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , fiind constanți se pot introduce în sumă, și având în vedere relațiile (5.128) rezultă:

$$\bar{A} = \sum_{\lambda=1}^p N_\lambda \bar{A}_\lambda \quad (5.131)$$

În ecuația vectorială (5.125), mărimea \bar{A} se înlocuiește cu expresia (5.131) și se

are în vedere că, întrucât \bar{A}_λ este un vector constant, orice operator diferențial, aplicat lui \bar{A}_λ va da un rezultat nul.

Se consideră ecuația (5.125) și se obține:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{A} &= \text{rot}\left(\sum_{\lambda=1}^p N_\lambda \bar{A}_\lambda\right) = \sum_{\lambda=1}^p \text{rot}(N_\lambda \bar{A}_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^p (\text{grad}N_\lambda \times \bar{A}_\lambda + N_\lambda \text{rot}\bar{A}_\lambda) \\ \text{rot}\bar{A} &= \sum_{\lambda=1}^p \text{grad}N_\lambda \times \bar{A}_\lambda, \end{aligned} \quad (5.132)$$

unde s-a ținut cont de cele menționate mai sus și, deci $\text{rot}\bar{A}_\lambda = 0$.

Deci:

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{A}) = \text{rot}\left(\sum_{\lambda=1}^p \text{grad}N_\lambda \times \bar{A}_\lambda\right) = \sum_{\lambda=1}^p \text{rot}(\text{grad}N_\lambda \times \bar{A}_\lambda)$$

Se folosește relația:

$$\text{rot}(\bar{u} \times \bar{v}) = -\bar{v} \text{div}\bar{u} + (\bar{v}\nabla)\bar{u} + \bar{u} \text{div}\bar{v} + (\bar{u}\nabla)\bar{v}$$

Alegând $\bar{u} = \text{grad}N_\lambda$, $\bar{v} = \bar{A}_\lambda$, se obține:

$$\text{rot}(\text{grad}N_\lambda \times \bar{A}_\lambda) = -\bar{A}_\lambda \text{div}(\text{grad}N_\lambda) + (\bar{A}_\lambda \nabla)\text{grad}N_\lambda + \text{grad}N_\lambda \text{div}\bar{A}_\lambda + (\text{grad}N_\lambda \nabla)\bar{A}_\lambda$$

Pe baza celor precizate mai sus, și deoarece $\text{div}(\text{grad}N_\lambda) = \Delta N_\lambda$ se obține:

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{A}) = \sum_{\lambda=1}^p [(\bar{A}_\lambda \nabla)\text{grad}N_\lambda - \bar{A}_\lambda \Delta N_\lambda] \quad (5.133)$$

Se notează $\bar{v} = \text{rot}(\text{rot}\bar{A})$ și se obține:

$$\bar{v} = \sum_{\lambda=1}^p [(\bar{A}_\lambda \cdot \nabla)\text{grad}N_\lambda - \bar{A}_\lambda \Delta N_\lambda], \quad (5.134)$$

iar ecuația (5.125) devine:

$$\bar{v} = \mu_0 \bar{I}_s \quad (5.135)$$

Cele trei ecuații scalare vor fi:

$$v_x = \mu_0 I_{sx}; \quad v_y = \mu_0 I_{sy}; \quad v_z = \mu_0 I_{sz} \quad (5.136)$$

Pentru aflarea expresiilor lui v_x , v_y , v_z , se exprimă $\text{grad}N_\lambda$ în coordonate carteziene, iar vectorului astfel obținut i se aplică operatorul $\bar{A}_\lambda \nabla$ exprimat tot în coordonate carteziene. Grupând termenii, așa cum s-a menționat, și schimbând ordinea de derivare în anumiți termeni se obține:

$$v_x = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) A_{\lambda y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) A_{\lambda z} \right\}$$

$$v_y = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) A_{\lambda x} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) A_{\lambda z} \right\} \quad (5.137)$$

$$v_z = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x} \right) A_{\lambda x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial y} \right) A_{\lambda y} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial z} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda z} \right\}$$

Implementarea pe calculatorul electronic implică, ca ecuațiile respective să fie scrise sub formă condensată și în acest scop se fac schimbări de notații. Astfel axele se notează cu x_1, x_2, x_3 și deci se fac următoarele înlocuiri: $x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3$. Valoarea oricărei componente se notează cu un același indice ca și axa respectivă, adică se fac schimbările de notație: $A_{\lambda x} \rightarrow A_{\lambda 1}, A_{\lambda y} \rightarrow A_{\lambda 2}, A_{\lambda z} \rightarrow A_{\lambda 3}; I_{sx} \rightarrow I_{s1}, I_{sy} \rightarrow I_{s2}, I_{sz} \rightarrow I_{s3}$.

Ecuțiile (5.136) devin:

$$v_1 = \mu_0 I_{s1}; \quad v_2 = \mu_0 I_{s2}; \quad v_3 = \mu_0 I_{s3} \quad (5.138)$$

Relațiile (5.138) se transformă în:

$$v_1 = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) A_{\lambda 2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) A_{\lambda 3} \right\}$$

$$v_2 = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) A_{\lambda 1} + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) A_{\lambda 3} \right\} \quad (5.139)$$

$$v_3 = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_1} \right) A_{\lambda 1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_2} \right) A_{\lambda 2} + \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_3} \right) - \Delta N_\lambda \right] A_{\lambda 3} \right\}$$

Pentru fiecare valoare a lui λ , necunoscute sunt $A_{\lambda 1}, A_{\lambda 2}, A_{\lambda 3}$, iar coeficienții lor, din cele trei relații (5.139), se notează cu C_{ij}^λ și se obțin cu relațiile:

$$C_{ij}^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij} \Delta N_\lambda, \quad i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}, \quad (5.140)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kroneker.

Cu ajutorul acestor coeficienți relațiile (5.139) devin:

$$v_1 = \sum_{\lambda=1}^p (C_{11}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{12}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{13}^\lambda A_{\lambda 3})$$

$$v_2 = \sum_{\lambda=1}^p (C_{21}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{22}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{23}^\lambda A_{\lambda 3}) \quad (5.141)$$

$$v_3 = \sum_{\lambda=1}^p (C_{31}^\lambda A_{\lambda 1} + C_{32}^\lambda A_{\lambda 2} + C_{33}^\lambda A_{\lambda 3})$$

sau condensat:

$$v_i = \sum_{\lambda=1}^p \left(\sum_{j=1}^3 C_{ij}^{\lambda} A_{\lambda j} \right), \quad i = \overline{1,3} \quad (5.142)$$

În această relație, pe rând λ ia valorile $1, 2, \dots, p$ și pentru fiecare dintre aceste valori, mai întâi indicele i obține câte una dintre valorile $1, 2, 3$ și pentru fiecare dintre ele se face succesiv $j=1, 2, 3$.

De exemplu, pentru elementul finit cel mai simplu, cu două noduri se obține:

$$v_i = C_{i1}^1 A_{11} + C_{i2}^1 A_{12} + C_{i3}^1 A_{13} + C_{i1}^2 A_{21} + C_{i2}^2 A_{22} + C_{i3}^2 A_{23}, \quad i = \overline{1,3}$$

În calculul matricial fiecărui vector i se asociază un vector coloană, ale cărui componente sunt valorile componentelor vectorului respectiv.

Deci, dacă pentru vectorii $\bar{v}, \bar{A}_{\lambda}, \bar{J}_s$, vectorii coloană asociați se notează cu $[v]$, $[A_{\lambda}]$, $[J_s]$, fiecare are dimensiunea 3×1 și expresiile:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{\lambda}] = \begin{bmatrix} A_{\lambda 1} \\ A_{\lambda 2} \\ A_{\lambda 3} \end{bmatrix}, \quad [J_s] = \begin{bmatrix} J_{s1} \\ J_{s2} \\ J_{s3} \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

Aceasta permite ca ecuațiile (5.138) să se scrie condensat sub forma matricială:

$$[v] = \mu_0 [J_s] \quad (5.144)$$

Vectorul $[A_{\lambda}]$ se definește cu cele trei necunoscute din nodul λ și pentru toate cele p noduri va rezulta un număr de $3p$ necunoscute. Pentru ca modelul numeric elementul să aibă forma unui sistem de tip Cramer, cele $3p$ necunoscute trebuie să fie componentele unui vector coloană cu dimensiunile $3p \times 1$. Acesta se numește vectorul coloană al necunoscutelor problemei, ce se notează cu $[A]$ și se obține prin concatenarea după coloane a vectorilor coloană $[A_{\lambda}]$, $\lambda = \overline{1, p}$, adică:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ \vdots \\ [A_p] \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] \\ [A_{12}] \\ [A_{13}] \\ [A_{21}] \\ [A_{22}] \\ [A_{23}] \\ \vdots \\ [A_{p1}] \\ [A_{p2}] \\ [A_{p3}] \end{bmatrix} \quad (5.145)$$

Pentru fiecare dintre relațiile (5.141) și pentru fiecare vector $[A_\lambda]$, $\lambda = \overline{1, p}$, se definește câte un vector linie, ce are ca și componente coeficienții necunoscutelor care intervin în vectorul $[A_\lambda]$. Acești vectori vor avea dimensiunile 1×3 , se notează cu $[C_i^\lambda]$ și au expresiile:

$$[C_i^\lambda] = [C_{i1}^\lambda C_{i2}^\lambda C_{i3}^\lambda], \quad i = \overline{1, 3}, \quad \lambda = \overline{1, p} \quad (5.146)$$

Se observă că elementele vectorilor $[C_i^\lambda]$ sunt tocmai coeficienții $[C_{ij}^\lambda]$, dați de relațiile (5.146)

Se notează cu $[C_i]$, $i = \overline{1, 3}$, vectorul linie obținut prin concatenare după linii a vectorilor $[C_{ij}^\lambda]$, $\lambda = \overline{1, p}$, adică:

$$[C_i] = [C_i^1 + C_i^2 + \dots + C_i^p], \quad i = \overline{1, 3} \quad (5.147)$$

Având în vedere relațiile (5.146), dezvoltat se obține:

$$[C_i] = [C_{i1}^1 C_{i2}^1 C_{i3}^1 C_{i1}^2 C_{i2}^2 C_{i3}^2 \dots C_{i1}^p C_{i2}^p C_{i3}^p], \quad i = \overline{1, 3}$$

Fiecare dintre vectorii $[C_i]$ are dimensiunea $1 \times 3p$ și conține toți coeficienții ce intervin în expresia lui v_i din relațiile (5.141).

Cu ajutorul vectorului coloană $[A]$, definit prin relația (5.145) și al vectorilor $[C_i]$, definiți prin relațiile (5.147), matricial, relațiile (5.141) se scriu sub forma:

$$v_1 = [C_1][A]; \quad v_2 = [C_2][A]; \quad v_3 = [C_3][A] \quad (5.148)$$

Pentru obținerea matricei $[v]$, se notează cu $[C]$ matricea obținută prin concatenarea după coloane a vectorilor $[C_i]$, $i = \overline{1, 3}$, adică:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{bmatrix} \quad (5.149)$$

Având în vedere relațiile (5.147), matricea $[C]$ este:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^1 C_{12}^1 C_{13}^1 C_{11}^2 C_{12}^2 C_{13}^2 \dots C_{11}^p C_{12}^p C_{13}^p \\ C_{21}^1 C_{22}^1 C_{23}^1 C_{21}^2 C_{22}^2 C_{23}^2 \dots C_{21}^p C_{22}^p C_{23}^p \\ C_{31}^1 C_{32}^1 C_{33}^1 C_{31}^2 C_{32}^2 C_{33}^2 \dots C_{31}^p C_{32}^p C_{33}^p \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

Matricea $[C]$ are dimensiunile $3 \times 3p$ și conține toți coeficienții din relațiile (5.141).

Ținând cont de relațiile (5.148), (5.149) se observă, că matricial, relațiile (5.141) se scriu sub forma:

$$[v]=[C][A] \quad (5.151)$$

Conform procedurii menționate pentru metoda elementelor finite a lui Galerkin, pe rând, pentru fiecare nod, în ordinea crescătoare a indicelui, ecuația (5.144) se înmulțește cu funcția de formă a nodului respectiv și se integrează pe domeniul D al elementului finit.

Pentru un nod arbitrar α se obține:

$$\int_D N_\alpha [v] dD = \int_D \mu_0 N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (5.152)$$

Se înlocuiește $[v]$ cu expresia dată de (5.151) și ținând cont că elementele matricei $[A]$ sunt constante, se obține:

$$\left(\int_D N_\alpha [C] dD \right) [A] = \int_D \mu_0 N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (5.153)$$

Se introduc notațiile:

$$[K_\alpha] = \int_D N_\alpha [C] dD; \quad [F_\alpha] = \int_D \mu_0 N_\alpha [J_s] dD \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (5.154)$$

Ecuațiile (5.153) se scriu sub forma:

$$[K_\alpha] \cdot [A] = [F_\alpha] \quad \alpha = \overline{1, p} \quad (5.155)$$

Elementele matricei $[K_\alpha]$ se obțin înmulțind fiecare element al matricei $[C]$ cu N_α și apoi fiecare element astfel stabilit, se integrează pe domeniul D. Evident că $[K_\alpha]$ are aceleași dimensiuni ca și $[C]$, adică $3 \times 3p$.

Pentru deducerea vectorului coloană $[F_\alpha]$, fiecare element al vectorului coloană $[J_s]$ se înmulțește cu $\mu_0 N_\alpha$ și apoi, fiecare element astfel obținut, se integrează pe domeniul D. Vectorul $[F_\alpha]$ va avea aceleași dimensiuni ca și $[J_s]$, adică 3×1 .

Se notează cu $[K]$ matricea obținută prin concatenarea după linii a matricelor $[K_\alpha]$, $\alpha = \overline{1, p}$ și cu $[F]$ vectorul coloană obținut prin concatenarea după linii a vectorilor $[F_\alpha]$, $\alpha = \overline{1, p}$, adică:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] \\ [K_2] \\ \vdots \\ [K_p] \end{bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ \vdots \\ [F_p] \end{bmatrix} \quad (5.156)$$

Ecuatiile (5.155) obțin forma matricială:

$$[K][A]=[F] \quad (5.157)$$

Matricea $[K]$ are dimensiunile $3p \times 3p$ și va fi tocmai matricea de rigiditate elementală, iar $[F]$ are dimensiunile $3p \times 1$ și va fi vectorul termenilor liberi elementali.

Pentru implementarea pe un calculator electronic elementele matricei $[C]$ trebuie notate în mod obișnuit, adică:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{13p} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{23p} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{33p} \end{bmatrix} \quad (5.158)$$

Notând cu $C_{\alpha\beta}$ un element arbitrar al matricei $[C]$ în relația (5.158) se pune problema de a stabili valorile lui i, j, λ pentru ca elementul $C_{\alpha\beta}$ să poată fi calculat cu relația (5.140).

Se notează cu $\beta \bmod 3$ (β modulo 3) restul împărțirii lui β la 3.

Comparând expresia (5.158) cu expresia (5.150) se obțin:

$$i = \alpha$$

$$j = \begin{cases} \beta & \text{dacă } \beta \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \beta \bmod 3 = 0 \\ \beta \bmod 3 & \text{dacă } \beta \bmod 3 \neq 0 \end{cases} \quad (5.159)$$

$$\lambda = \text{ceilling}\left(\frac{\beta}{3}\right),$$

unde $\text{ceilling}\left(\frac{\beta}{3}\right)$ este o funcție de rotunjire superioară și dacă, $\frac{\beta}{3}$ este un întreg, are valoarea egală cu acel întreg, iar în caz contrar valoarea este egală cu a întregului imediat superior.

Valorile lui i se implementează printr-o instrucțiune de atribuire, valorile lui j cu instrucțiunea IF, THEN, ELSE, iar pentru valorile lui λ se folosește funcțiunea $\text{ceilling}(x)$ pe care o posedă orice limbaj de programare.

Pentru a stabili o relație, cu ajutorul căreia să se poată calcula direct elementele matricei $[K]$, mai întâi, se definește o matrice $[B]$ cu dimensiunile $3p \times 3p$, la care, fiecare grup de câte trei linii consecutive se obțin înmulțind elementele matricei $[C]$ cu N_1 , respectiv cu N_2 , respectiv cu N_3, \dots , respectiv cu N_p , adică:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1 C_{11} & N_1 C_{12} & N_1 C_{13} & N_1 C_{14} & N_1 C_{15} & N_1 C_{16} & N_1 C_{13p} \\ N_1 C_{21} & N_1 C_{22} & N_1 C_{23} & N_1 C_{24} & N_1 C_{25} & N_1 C_{26} & N_1 C_{23p} \\ N_1 C_{31} & N_1 C_{32} & N_1 C_{33} & N_1 C_{34} & N_1 C_{35} & N_1 C_{36} & N_1 C_{33p} \\ N_2 C_{11} & N_2 C_{12} & N_2 C_{13} & N_2 C_{14} & N_2 C_{15} & N_2 C_{16} & N_2 C_{31p} \\ N_2 C_{21} & N_2 C_{22} & N_2 C_{23} & N_2 C_{24} & N_2 C_{25} & N_2 C_{26} & N_2 C_{23p} \\ N_2 C_{31} & N_2 C_{32} & N_2 C_{33} & N_2 C_{34} & N_2 C_{35} & N_2 C_{36} & N_2 C_{33p} \\ N_3 C_{11} & N_3 C_{12} & N_3 C_{13} & N_3 C_{14} & N_3 C_{15} & N_3 C_{16} & N_3 C_{13p} \\ N_3 C_{21} & N_3 C_{22} & N_3 C_{23} & N_3 C_{24} & N_3 C_{25} & N_3 C_{26} & N_3 C_{23p} \\ N_3 C_{31} & N_3 C_{32} & N_3 C_{33} & N_3 C_{34} & N_3 C_{35} & N_3 C_{36} & N_3 C_{33p} \end{bmatrix} \quad (5.160)$$

Folosind notația obișnuită, se obține:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{13p} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{23p} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{33p} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & B_{43p} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} & B_{53p} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} & B_{63p} \\ B_{71} & B_{72} & B_{73} & B_{74} & B_{75} & B_{76} & B_{73p} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} & B_{84} & B_{85} & B_{86} & B_{83p} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} & B_{94} & B_{95} & B_{96} & B_{93p} \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

Comparând relațiile de mai sus, rezultă că un element arbitrar al matricei $[B]$, notat cu $B_{\gamma\delta}$, se obține dintr-un element arbitrar $C_{\alpha\beta}$ al matricei $[C]$, cu relația: $B_{\gamma\delta} = N_k C_{\alpha\beta}$, în care:

$$\beta = \delta$$

$$\alpha = \begin{cases} \gamma & \text{dacă } \gamma \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \gamma \bmod 3 = 0 \\ \gamma \bmod 3 & \text{dacă } \gamma \bmod 3 \neq 0 \end{cases} \quad (5.162)$$

$$k = \text{round}\left(\frac{\gamma}{3}\right)$$

Pe baza celor precizate, rezultă că un element arbitrar al matricei de rigiditate elementală, notat cu $K_{\gamma\delta}$, se calculează cu relația:

$$K_{\gamma\delta} = \int_{\gamma} N_k C_{\alpha\beta} dD, \quad (5.163)$$

unde valorile lui α, β se stabilesc conform relațiilor (5.162). Pentru calculul valorilor lui $C_{\alpha\beta}$, se determină mai întâi i, j, λ cu relațiile (5.159), și apoi:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial N_\lambda}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij} N_\lambda \quad (5.164)$$

Notând cu F_α , $\alpha = 1, \overline{3p}$ un element al vectorului [F] acesta se calculează cu relația:

$$F_\alpha = N_\lambda F_i, \quad (5.165)$$

unde:

$$i = \begin{cases} \alpha & \text{dacă } \alpha \leq 3 \\ 3 & \text{dacă } \alpha \bmod 3 = 0 \\ \alpha \bmod 3 & \text{dacă } \alpha \bmod 3 \neq 0 \end{cases} \quad (5.166)$$

$$\lambda = \text{ceilling}\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

În felul acesta se calculează direct toate elementele matricei de rigiditate elementale și ale vectorului coloană elemental.

În general, modelul matematic, folosit pentru studiul câmpului termic, este alcătuit din ecuația scalară a conservării energiei, ecuația vectorială a mișcării și ecuația scalară a conservării masei.

Primele două ecuații se pot scrie sub forma generală:

$$\frac{\partial(c\Phi)}{\partial t} + \text{div}(c\bar{v}\Phi) = \text{div}(k\text{grad}\Phi) + S, \quad (5.167)$$

unde:

Φ este mărimea necunoscută principală și anume temperatura pentru ecuația energiei, respectiv valoarea unei componente a vitezei \bar{v} ;

S reprezintă densitatea de volum a surselor, ce este cunoscută pentru fiecare ecuație;

c, k sunt mărimi de material și anume: pentru ecuația energiei, c este produsul dintre densitate și căldura specifică, iar k este conductivitatea termică, respectiv densitatea și coeficientul de viscozitate dinamică echivalent, pentru ecuația mișcării.

Se consideră cazul mai general când toate mărimile sunt variabile atât în spațiu cât și în timp, adică:

$$c=c(t,x,y,z); \quad \Phi=\Phi(t,x,y,z); \quad \bar{v}=\bar{v}(t,x,y,z); \quad k=k(t,x,y,z); \quad S=S(t,x,y,z);$$

Funcția S este dată prin enunțul problemei.

Aceasta impune ca fiecare mărime să fie discretizată, atât în timp cât și în spațiu.

Mai întâi se face o discretizare în spațiu, presupunând că mărimea respectivă rămâne constantă în timp, egală cu valoarea sa dintr-un moment oarecare t.

Discretizarea în spațiu înseamnă definirea aproximărilor:

$$c = \sum_{j=1}^p N_j c_j; \quad \Phi = \sum_{j=1}^p N_j \Phi_j; \quad \bar{v} = \sum_{j=1}^p N_j \bar{v}_j; \quad k = \sum_{j=1}^p N_j k_j, \quad (5.168)$$

unde:

$N_j = N_j(x, y, z)$ este funcția de formă atașată nodului j

$c_j = c_j(t); \quad \Phi_j = \Phi_j(t); \quad \bar{v}_j = \bar{v}_j(t); \quad k_j = k_j(t);$ sunt valorile mărimilor respective dintru-un moment oarecare t .

Pentru un produs, cum este cazul lui ρc , acesta se definește ca reprezentând o singură funcție $\Psi = c\Phi$, care se aproximează la fel ca orice funcție, adică:

$$\Psi = \sum_{j=1}^p N_j \Psi_j$$

Evident că:

$$\Psi_j = \Psi(t, x_j, y_j, z_j) = c(t, x_j, y_j, z_j) \cdot \Phi(t, x_j, y_j, z_j) = c_j \Phi_j$$

și deci:

$$c\Phi = \sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j \quad (5.169)$$

Se presupune că, în ecuația (5.167), fiecare mărime este înlocuită cu aproximarea respectivă și aplicând metoda reziduurilor ponderate se obține:

$$\int_D N_i \frac{\partial(c\Phi)}{\partial t} dD + \int_D N_i \operatorname{div}(c\Phi \bar{v}) dD - \int_D N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \Phi) dD = \int_D N_i S dD \quad i = \overline{1, p} \quad (5.170)$$

În continuare se consideră separat fiecare termen, ce se notează cu B_1, B_2, B_3, B_4 și mărimile respective se înlocuiesc cu aproximările, date de relațiile (5.168).

Se obține:

$$B_1 = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j \right) dD = \sum_{j=1}^p \left(\int_D N_i N_j dD \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} (c_j \Phi_j) \right] \quad j = \overline{1, p}, \quad (5.171)$$

unde s-a avut în vedere faptul că N_j nu sunt funcții de timp și că, pentru un nod dat, j , $c_j \Phi_j$ sunt constante în raport cu integrala pe domeniul D .

Matricial, se obține:

$$B_1 = [K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c\Phi]), \quad (5.172)$$

unde $[K^1]$ este matricea de rigiditate corespunzătoare primului termen, iar

$$\frac{\partial}{\partial t}([\mathbf{c}\Phi]) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(c_1\Phi_1) \\ \frac{\partial}{\partial t}(c_2\Phi_2) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}(c_p\Phi_p) \end{bmatrix} \quad (5.173)$$

Al treilea termen, notat cu B_3 , are o formă ce este dificil de exprimat matricial. Din acest motiv se aduce la o formă mai simplă, folosind relația:

$$\operatorname{div}(N_i k \operatorname{grad}\Phi) = N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad}\Phi) + k \operatorname{grad}\Phi \operatorname{grad}N_i,$$

din care se obține:

$$N_i \operatorname{div}(k \operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div}(N_i k \operatorname{grad}\Phi) - k \operatorname{grad}\Phi \operatorname{grad}N_i$$

Înlocuind și folosind formula lui Gauss – Ostrogradski

$$B_3 = \oint_S N_i k \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \int_D (\operatorname{grad}N_i) k \operatorname{grad}\Phi dD, \quad (5.174)$$

unde S este frontiera lui D , iar $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ este derivata după direcția normalei într-un punct oarecare a lui S .

Primul termen din membrul drept intervine numai pentru elementele finite de pe frontiera S , unde, prin condiții de frontieră de tip Neumann, se cunoaște $k \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ și deci acest termen reprezintă o cunoscută a problemei și se trece în membrul drept al ecuației (5.176).

Rezultă că în membrul stâng rămâne doar termenul:

$$-B_3 = \int_D (\operatorname{grad}N_i) k \operatorname{grad}\Phi dD \quad i = \overline{1, p}$$

Se înlocuiesc k și Φ cu aproximările lor și se obține:

$$-B_3 = \int_D (\operatorname{grad}N_i) \left(\sum_{j=1}^p N_j k_j \right) \operatorname{grad} \left(\sum_{j=1}^p N_j \Phi_j \right) dD$$

Se notează cu $[N]$, $[k]$ vectorii coloană formați cu funcțiile de formă, respectiv cu valorile mărimii k , adică:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix} \quad (5.175)$$

Cu aceasta:

$$\sum_{j=1}^p N_j k_j = [N]^T [k] \quad (5.176)$$

Folosind proprietățile operatorului gradient și ținând cont că Φ_j , $j = \overline{1, p}$ sunt constante, se obține:

$$\text{grad} \left(\sum_{j=1}^p N_j k_j \right) = \sum_{j=1}^p (\text{grad} N_j) \Phi_j \quad (5.177)$$

Se înlocuiesc relațiile (5.176) și (5.177) cu relația (5.175) rezultând:

$$-B_3 = \int_D \left[(\text{grad} N_i) [N]^T [k] \sum_{j=1}^p (\text{grad} N_j) \Phi_j \right] dD$$

Factorul $(\text{grad} N_i) [N]^T [k]$ este o constantă față de însumarea în raport cu indicele j și deci pot fi introduși sub sumă. De asemenea, având în proprietățile unei integrale referitoare la o sumă și deoarece în fiecare integrală Φ_j este o constantă se obține:

$$-B_3 = \sum_{j=1}^p \left\{ \int_D (\text{grad} N_i) [N]^T [k] \text{grad} N_j \right\} \Phi_j \quad i = \overline{1, p}$$

Se notează:

$$K_{ij}^3 = \int_D (\text{grad} N_i) [N]^T [k] \text{grad} N_j \quad (5.178)$$

și se obține:

$$-B_3 = \sum_{j=1}^p K_{ij}^3 \Phi_j \quad i = \overline{1, p} \quad (5.179)$$

Se dau indicelui i toate valorile de la 1 la p și matricial, se obține:

$$-B_3 = [K^3] \cdot [\Phi], \quad (5.180)$$

unde $[K^3]$ este matricea de rigiditate corespunzătoare celui de-al treilea termen, având elementele date de relația (5.178), iar $[\Phi]$ este vectorul coloană al valorilor mărimii Φ .

Membrul drept al ecuației (5.170) se scrie matricial sub forma:

$$\int_D N_i S dD = [F] \quad (5.181)$$

unde $[F]$ este un vector coloană cu dimensiunile $p \times 1$, ale cărui elemente sunt date de relațiile:

$$F_i = \int_D N_i S dD \quad i = \overline{1, p} \quad (5.182)$$

Al doilea termen se descompune într-o serie de trei termeni:

$$B_2 = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial x} (c \Phi v_x) dD + \int_D N_i \frac{\partial}{\partial y} (c \Phi v_y) dD + \int_D N_i \frac{\partial}{\partial z} (c \Phi v_z) dD \quad i = \overline{1, p} \quad (5.183)$$

Pentru primul termen, având în vedere cele precizate cu privire la discretizarea unui produs, se obține:

$$B_{2x} = \int_D N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^p N_j c_j \Phi_j v_{xj} \right) dD$$

$$B_{2x} = \sum_{j=1}^p \left[\int_D \left(N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dD c_j \Phi_j v_{xj} \right] \quad i = \overline{1, p}$$

Se introduc notațiile:

$$K_{ij}^{2x} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dD \quad (5.184)$$

Matricial se obține:

$$B_{2x} = [K^{2x}] \cdot [c v_x \Phi], \quad (5.185)$$

unde $[K^{2x}]$ este o matrice cu dimensiunile $p \times p$ ce are elementele date de relațiile (5.184), iar:

$$[c v_x \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{x1} \Phi_1 \\ c_2 v_{x2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{xp} \Phi_p \end{bmatrix} \quad (5.186)$$

În mod similar se obțin:

$$B_{2y} = [K^{2y}] \cdot [c v_y \Phi] \quad (5.187)$$

$$B_{2z} = [K^{2z}] \cdot [c v_z \Phi],$$

unde matricile $[K^{2y}]$, $[K^{2z}]$ au elementele date de relațiile:

$$K_{ij}^{2y} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dD; \quad K_{ij}^{2z} = \int_D N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} dD, \quad (5.188)$$

iar:

$$[c v_y \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{y1} \Phi_1 \\ c_2 v_{y2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{yp} \Phi_p \end{bmatrix}; \quad [c v_z \Phi] = \begin{bmatrix} c_1 v_{z1} \Phi_1 \\ c_2 v_{z2} \Phi_2 \\ \vdots \\ c_p v_{zp} \Phi_p \end{bmatrix} \quad (5.189)$$

Deci:

$$B_2 = [K^{2x}] \cdot [c v_x \Phi] + [K^{2y}] \cdot [c v_y \Phi] + [K^{2z}] \cdot [c v_z \Phi] \quad (5.190)$$

Însă, după cum se observă din relațiile (5.173), (5.186), (5.189), în expresiile lui B_1 , respectiv B_3 , nu intervine doar vectorul coloană al valorilor mărimii Φ ci și valorile unor mărimi ce se consideră cunoscute, pentru fiecare dintre ecuațiile menționate.

Pentru a separa vectorul coloană al valorilor mărimii Φ , cu ajutorul valorilor mărimilor c , v_x , v_y , v_z se definește câte o matrice diagonală cu dimensiunile $p \times p$, ce au pe diagonala principală ca elemente chiar valorile mărimii respective. Notând aceste matrice cu $[c]$, $[v_x]$, $[v_y]$, $[v_z]$, ele vor fi:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_p \end{bmatrix} \quad [v_x] = \begin{bmatrix} v_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{x3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{xp} \end{bmatrix}$$

$$[v_y] = \begin{bmatrix} v_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{y3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{yp} \end{bmatrix} \quad [v_z] = \begin{bmatrix} v_{z1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{z2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{z3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_{zp} \end{bmatrix}$$

Se verifică ușor că:

$$[c\Phi] = [c][\Phi]; \quad [c v_x \Phi] = [c][v_x][\Phi]; \quad [c v_y \Phi] = [c][v_y][\Phi]; \quad [c v_z \Phi] = [c][v_z][\Phi]$$

Cu acestea se obține:

$$B_1 = [K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c] \cdot [\Phi]) \quad (5.191)$$

$$B_2 = [c] ([K^{2x}] \cdot [v_x] + [K^{2y}] \cdot [v_y] + [K^{2z}] \cdot [v_z]) [\Phi] \quad (5.192)$$

Înlocuind relațiile (5.191), (5.192), (5.170), (5.171) în ecuația (5.190) se obține modelul număr elemental:

$$[K^1] \frac{\partial}{\partial t} ([c] \cdot [\Phi]) + [c] ([K^{2x}] \cdot [v_x] + [K^{2y}] \cdot [v_y] + [K^{2z}] \cdot [v_z]) [\Phi] + [K^3] \cdot [\Phi] = [F] \quad (5.193)$$

Pentru discretizarea în timp, durata în care se analizează procesul respectiv, se divide într-un anumit număr N de intervale cu o durată Δt , numită pas de timp. Momentele divizării se notează cu t_0, t_1, \dots, t_N , iar pentru un moment arbitrar se folosește notația t_n , $n = \overline{0, N}$.

Valoarea oricărei mărimi X într-un nod arbitrar j , în momentul arbitrar t_n , se notează cu X_{jn} , iar matricea $[X]$ formată cu valorile mărimii din momentul t_n se va nota cu $[X]_n$. Deoarece toate matricele de rigiditate din (5.193) conțin numai mărimi spațiale, discretizarea se referă, în general, la celelalte matrice.

Discretizarea în timp se poate realiza cu metoda diferențelor finite sau tot cu metoda elementelor finite.

În cazul folosirii metodei elementelor finite, se consideră t ca a patra variabilă și se procedează ca în cazul unei mărimi de o singură variabilă.

Un element finit temporal cu două "noduri" este câte un interval $[t_{n-1}, t_n]$, $n = \overline{1, N}$, iar extremitățile sale t_{n-1}, t_n sunt chiar nodurile sale. În acest caz, orice valoare $X_j(t)$ se asimilează printr-o funcție de gradul întâi și punând condiția $X_j(t_{n-1})=X_j$, $X_j(t_n)=X_{jn}$, după aranjarea termenilor se obține:

$$X_j = \frac{t_n - t}{\Delta t} X_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} X_n, \quad (5.194)$$

unde s-a avut în vedere că $t_n - t_{n-1} = \Delta t$.

Notând cu τ_{n-1}, τ_n "funcțiile de formă" temporale, se obține:

$$X_j = \tau_{n-1} X_{n-1} + \tau_n X_n, \quad (5.195)$$

unde:

$$\tau_{n-1} = \frac{t_n - t}{\Delta t}; \quad \tau_n = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t}$$

Un element finit cu mai multe noduri se obține grupând mai multe momente succesive, astfel încât fiecare grup să conțină același număr de momente. Momentele extreme formează nodurile extreme, iar momentele intermediare sunt nodurile intermediare. De exemplu, un element cu trei noduri se obține formând grupuri t_{n-2}, t_{n-1}, t_n

$n = \overline{1, N}$. Aproximarea se va face printr-o funcție de gradul doi în variabila t .

Deoarece prin această metodă intervin dificultăți în realizarea convergenței, de obicei, discretizarea în spațiu se realizează cu metoda diferențelor finite.

Ecuția (5.193) se scrie printr-un moment arbitrar t_n , matricele respective primind indicele n , iar pentru evaluarea derivatei în momentul t_n , se folosește o schemă cu derivate finite, dintre care, cea mai simplă, constă în:

$$\frac{\partial}{\partial t} [c] \cdot [\Phi] = \frac{[c]_n [\Phi]_n - [c]_{n-1} [\Phi]_{n-1}}{\Delta t} \quad (5.196)$$

Relația (5.196) se înlocuiește în relația (5.193) și întrucât matricele $[c]_{k(n-1)} [\Phi]_{k(n-1)}$ sunt cunoscute de la un pas anterior, ele devin cunoscute și trec în membrul drept.

Se obține:

$$\begin{aligned} [K][c]_n [\Phi]_n + [c]_n ([K^{2x}][v_x]_n + [K^{2y}][v_y]_n + [K^{2z}][v_z]_n) [\Phi]_n + [K^3][\Phi]_n = \\ = [F]_n + \frac{1}{\Delta t} [c]_{k(n-1)} [\Phi]_{k(n-1)} \end{aligned} \quad (5.197)$$

$$\begin{aligned} [[K^1][c]_n + [c]_n ([K^{2x}][v_x]_n + [K^{2y}][v_y]_n + [K^{2z}][v_z]_n) + [K^3]] [\Phi]_n = \\ = [F]_n + \frac{1}{\Delta t} [c]_{k(n-1)} [\Phi]_{k(n-1)} \end{aligned} \quad (5.198)$$

Se începe cu primul moment t_1 . Din datele inițiale se cunosc matricele $[c]_0$, $[\Phi]_0$ și se obține un sistem în care necunoscute sunt valorile mărimii Φ din toate nodurile, în momentul t_1 . Se continuă la fel și pentru celelalte momente.

Pentru creșterea preciziei, se folosesc scheme cu diferențe finite mai complicate, însă, principial nu apar lucrări noi și nu se mai prezintă.

Cap.6. MODELAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ȘI A CÂMPULUI TERMIC LA O ÎMBINARE SUDATĂ

6.1. Metodica de lucru

Orice program de proiectare asistată de calculator implică parcurgerea a trei etape numite: preprocesare, procesare (soluționare) și postprocesare.

Cu mici diferențe de la un program la altul, în fiecare dintre cele trei etape trebuie parcurși pașii ce se prezintă în cele ce urmează.

Etapă de preprocesare

1. Se alege tipul de analiză, care poate fi mecanică (structurală), termică, de curgere electromagnetică sau cuplată.

Unele programe permit ca, pentru fiecare tip de analiză sau numai pentru cea electromagnetică, să se aleagă metoda utilizată care poate fi a elementelor nodale sau a elementelor de frontieră (de muchie).

2. Se aleg tipurile de elemente, care vor fi utilizate și pentru fiecare se definesc opțiunile precum și valorile constantelor reale.

3. Se definesc proprietățile materialelor ce se vor utiliza. Dacă acestea se consideră izotrope, liniare, atunci pentru fiecare material se introduc valorile constantelor de material specifice tipului de analiză ales.

Pentru o proprietate a unui material neliniar, se stabilesc două mărimi, cu ajutorul cărora se pot determina valorile acelei proprietăți și se introduc perechi de valori pentru cele două mărimi.

Unele programe permit alegerea unui anumit material dintr-o bibliotecă de materiale.

4. Se construiește modelul geometric al domeniului problemei, fie cu ajutorul programului respectiv fie cu un alt program specializat în modelare geometrică și apoi modelul se importă în programul utilizat.

5. Atribuirea tipului de element și a materialului, pentru fiecare regiune a domeniului problemei.

Acest pas intervine atunci când domeniul problemei s-a divizat în mai multe zone, din materiale diferite sau în care se folosesc tipuri de elemente diferite.

În general în cazul unei analize electromagnetice acestea sunt:

- regiunile de aer;
- bobinele de excitație filiforme, ce pot fi alimentate cu curent sau în tensiune;
- miezurile din material feromagnetic;
- regiunile conductoare electric;
- magneții permanenți.

Fiecărui material și tip de element ales i se atribuie un indicator (pointers), care la unele programe este un număr natural.

Se selectează, pe rând, fiecare regiune și se atribuie indicatorul corespunzător materialului și al tipului de element stabilit pentru regiunea respectivă.

6. Se stabilesc parametrii rețelei de discretizare și tipul de rețea ce se va utiliza.

7. Se realizează discretizarea domeniului problemei, operația numită meshing.

Etapa de procesare

1. Se alege regimul analizei care poate fi staționar (static), sinusoidal (armonic), nestaționar (tranzitoriu).

2. Se stabilesc anumite controale, care depind de programul folosit. De obicei acestea vizează:

– alegerea unei metode numerice pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare și a celei pentru rezolvarea sistemului de ecuații neliniare, care formează modelul matematic al problemei.

- alegerea unui anumit număr de iterații (pentru problemele neliniare) și a criteriului de convergență.
- selectarea mărimilor pentru care se stochează valorile, în vederea postprocesării, precum și a numărului de valori ce se stochează.

3. Se impun condițiile de frontieră și sarcinile aplicate.

La unele programe această operație se poate face pentru elemente ale modelului geometric (linii, suprafețe, volume, puncte) sau pentru elemente ale modelului discretizat (noduri, elemente).

Deoarece înainte de a începe procesarea programul transferă condițiile de frontieră și sarcinile, aplicate pe elementele geometrice, în nodurile modelului discretizat, operații ce pot introduce erori, se recomandă ca aplicarea să se facă direct pe noduri sau pe elementele finite din regiunea respectivă, care în prealabil se selectează.

O chestiune deosebită este reprezentată de folosirea marcatorelor (flags) pentru

calculul forțelor electromagnetice folosind metoda tensiunilor maxwelliene sau metoda forțelor generalizate (Jacobi)

Ambele tipuri de forțe se determină pentru o componentă a modelului, de obicei din material feromagnetic, care trebuie să fie înconjurată complet de porțiuni de aer.

Pentru determinarea tensiunilor maxwelliene, se selectează suprafața, în punctele căreia se dorește calculul acestei tensiuni, căreia i se aplică ca sarcină de suprafață, un marcator ce are diverse denumiri, de exemplu Maxwell Surface (MXVF). Programul stochează valorile tensiunilor în elementele finite din zona de aer adiacentă suprafeței respective, iar în etape de postprocesare se poate calcula rezultanta acestora, ce poate fi utilizată într-o analiză mecanică, pentru a determina deplasarea acelei componente.

Metoda forțelor generalizate este o alternativă la metoda Maxwell și se aplică tot pentru o componentă, care trebuie să îndeplinească condițiile menționate mai sus.

6.2. Definirea modelului geometric

Pentru a verifica rezultatele obținute prin folosirea metodei prezentate în această lucrare, s-au îmbinat prin sudare cap la cap două plăci metalice cu lățimea $L=5$ cm, grosimea $S=10$ mm cu rost prelucrat în Y, iar cusătura a avut lungimea de 2m.

Având în vedere tematica lucrării, îmbinarea s-a obținut prin procedeul MAG folosind ca gaz de protecție bioxidul de carbon.

S-a folosit o sursă de alimentare de curent continuu, tip RST-400, cu polaritate inversă, DC⁺.

Ținând cont de faptul că prin procedeul MAG, în mediu protector de bioxid de carbon se pot suda fără probleme oțeluri cu conținut redus de carbon, sau slab aliate s-a folosit ca material de bază un oțel de tip OL 37 4K.

S-a ales o sârmă electrod de tip S11Mn2Si, cu diametrul $d_e=2$ mm.

Pentru a obține un arc de tip spray, curentul de sudare a avut intensitatea $I_s=395$ A, căruia îi corespunde o cădere de tensiune pe arc $U_a=33$ V.

S-a lucrat cu o lungime liberă a electrodului $L_e=12$ mm și o lungime a arcului $L_a=7$ mm, iar viteza de sudare a fost $V_s=47,3$ cm/min, la un debit de bioxid de carbon $Q=18$ l/min.

Pe baza datelor de mai sus s-a obținut modelul geometric prezentat în fig.6.1.

Deci, domeniul considerat este constituit din următoarele subdomenii (regiuni):

- 1-componente;
- 2-arc electric;
- 3-sârma electrod;
- 4-diuza pentru gaz;
- 5-spațiul ocupat de gazul de protecție.

Aceste zone formează domeniul principal al analizei, însă dacă nu se cunosc precis condițiile de frontieră se mai folosesc încă două regiuni. Cu una dintre ele se modelează aerul din jurul domeniului principal și se numește spațiu liber. Cealaltă este folosită pentru a modela scăderea la zero a inducției magnetice, respectiv scăderea temperaturii la o valoare egală cu temperatura mediului ambiant și formează spațiul infinit al analizei. Fiecare dintre aceste regiuni este aleasă de forma unui cilindru drept, coaxial cu axa de simetrie a modelului principal, de rază și înălțime suficient de mare. Pentru a nu complica desenul, cele două regiuni nu s-au mai reprezentat în fig.6.1.

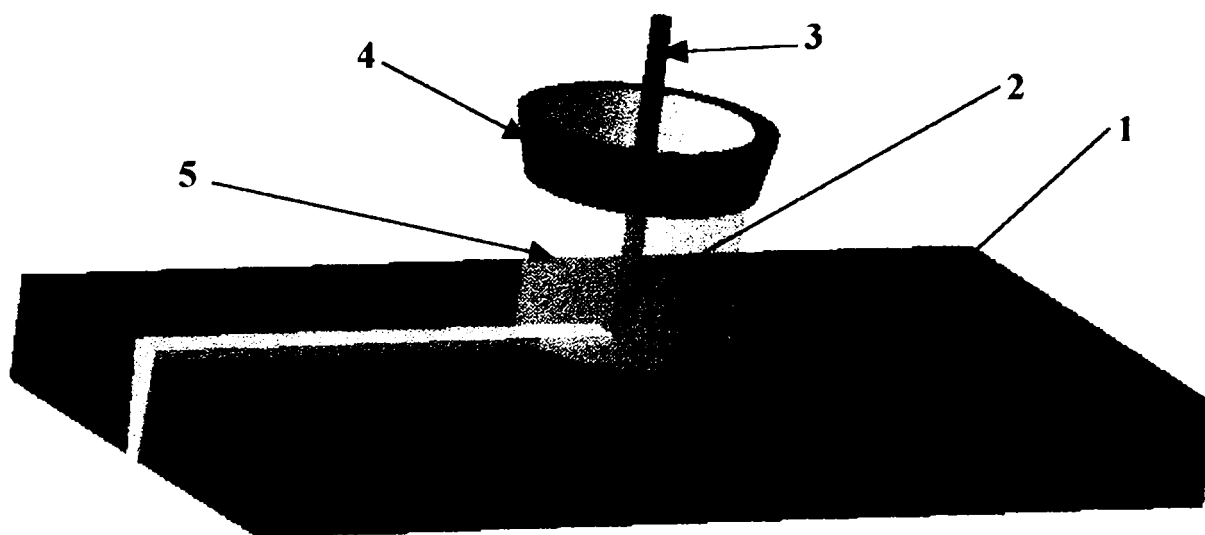


Fig.6 1

6.3.Stabilirea proprietăților de material

Analiza electromagnetică implică ca, pentru fiecare mediu ce intervine, să se cunoască: permeabilitatea magnetică relativă μ_r și rezistivitatea electrică $resv$.

Analiza termică poate fi realizată numai dacă, pentru mediul din fiecare subdomeniu, se cunoaște conductivitatea termică K , în caz că se admite un regim termic staționar. Pentru a putea studia un regim termic nestaționar mai trebuie cunoscute: densitatea, dens și căldura specifică c . De asemenea, în situația că intervin schimbări de fază, trebuie

cunoscută și entalpia ent. Pentru studiul curgerii bioxidului de carbon trebuie cunoscut coeficientul de vâscozitate dinamică η și exponentul adiabatic γ .

Se subliniază faptul că acuratețea rezultatelor obținute depinde de precizia cu care se cunosc proprietățile de material menționate. Totodată, rezultatele obținute sunt cele mai apropiate de cele reale, dacă se cunosc dependențele acestor proprietăți de temperatură, iar în cazul că intervin subdomenii ce conțin materiale feromagnetice trebuie cunoscute curba fundamentală de magnetizare a materialelor respective, cel puțin prin 5 puncte.

În paragraful următor se prezintă aceste proprietăți pentru mediile menționate. O parte din acestea a fost preluată din literatura de specialitate, iar o altă parte au fost determinate experimental de autor, în colaborare cu colegul ș.l.ing. Lucian Gruescu.

6.3.1. Proprietățile de material pentru componente

După cum s-a precizat, componentele se realizează din OL 37 4K, pentru care proprietățile de material se prezintă în tabelele de mai jos.

Tabelul 6.1

T	25,5	160	291,5	471,6	635	698	709	720,3	742	761	1000
μ_r	200	190	182	161	135	104	84	35	17	1	1

Tabelul 6.2

T	0	125	250	375	500	625	750	875	1000
Resv.10 ⁷	1,84	2,72	3,84	5,12	6,56	8,24	10,31	11,52	12

Tabelul 6.3

T	0	100	200	300	400	600	800	1000
K	50,5	47,5	44,8	42	39,4	31	29	22

Tabelul 6.4

T	20	100	200	400	600
C	465	468,9	477,35	515	569,49

Tabelul 6.5

T	20	600
dens	7820	7061

6.3.2. Proprietăți de material pentru aer

$$\mu_r=1, \sigma=0$$

Tabelul 6.6

T	0	20	40	80	100	140	180	200	250	300	350	400	500	600	700	800	1000
dens	1,293	1,247	1,128	1	0,946	0,854	0,779	0,746	0,674	0,615	0,566	0,524	0,456	0,404	0,362	0,329	0,277
c	1005	1005	1005	1009	1009	1013	1022	1026	1038	1047	1059	1068	1093	1114	1135	1156	1185
K·10 ³	24,4	25,1	25,9	30,5	32,1	34,9	37,8	39,3	42,7	46	49,1	52,1	57,4	62,2	67,1	71,8	80,7
η·10 ⁶	17,2	18,1	19,1	21,1	21,9	23,7	25,3	27,6	27,4	29,7	31,4	33	36,2	39,1	41,8	44,3	49

6.3.3. Proprietăți de material pentru bioxidul de carbon

$$\mu_r=1, \sigma=0$$

Tabelul 6.7

T	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
C	815	914	993	1057	1110	1154	1192	1223	1249	1277	1290
K·10 ³	14,7	22,8	30,9	39,1	47,2	54,9	62,1	68,8	75,1	80,9	86,3
η·10 ⁶	14	12,2	22,4	26,4	30,2	33,9	33,7	41,1	44,6	48,1	51,5

Tabelul 6.8

T	0	300	600	1000
Dens	1,9767	0,944	0,618	0,423

6.3.4. Proprietăți de material pentru arcul electric

$$\mu_r=1$$

În cazul procedurii de sudare considerat, având în vedere faptul că amorsarea arcului electric se face după ce gazul de protecție a ajuns într-un regim de curgere laminară, coloana arcului electric este constituită din plasmă de bioxid de carbon.

Deoarece determinarea directă a proprietăților de material este dificilă, se utilizează relațiile de calcul bazate pe teorii microscopice ce formează "Fizica plasmei". Se presupune că plasma este neutră și se află în echilibru termic, ceea ce înseamnă că:

- distribuția particulelor este normală
- temperatura electronică nu diferă de temperatura particulelor constituente.

Cu excepția spațiului de înconjoară capătul electrodului, coloana arcului electric îndeplinește aceste condiții și deci se pot folosi relațiile ce se prezintă în cele ce urmează.

Mai întâi se calculează gradul de ionizare α , cu relația lui Saha:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p_0} \frac{2z_t}{z} e^{-\frac{eV_t}{kT}} \quad (6.1)$$

unde:

m_e – masa electronului;

h – constanta lui Plank;

k – constanta lui Boltzmann;

z_i – funcția parțială a ionului;

z – funcția parțială a ionului neutru;

V_i – potențialul de ionizare;

p – presiunea în spațiul din jurul arcului;

p_0 – presiunea atmosferică.

Funcția parțială (de divizare) reprezintă suma energiilor posibile de stare, u_i , a particulelor respective, și se calculează cu relația:

$$z = \sum_{i=0} q_i e^{-u_i/kT} \quad (6.2)$$

unde q_i este greutatea statistică egală cu numărul particulelor ce au energia u_i .

Pentru atomii excitați electric sau ionizați, se pot considera doar primii trei termeni ai relației (6.2), adică:

$$z = q_0 + q_1 e^{-u_1/kT} + q_2 e^{-u_2/kT} \quad (6.3)$$

La temperatura arcului electric o bună aproximație este:

$$q_0 = z_i = 1 \quad (6.4)$$

Pentru cazul considerat, $V_i = 14,3$ V, iar valorile lui q_1 , q_2 sunt date în literatura de specialitate.

Densitatea se calculează cu relația:

$$\text{dens} = \frac{mp}{(1 + \alpha)kT} \quad (6.5)$$

unde m este masa atomică, care pentru bioxidul de carbon are valoarea $m=4$, iar $p=p_0$.

Căldura specifică se determină cu relația:

$$c = \frac{5}{2} R(1 + \alpha) + \frac{R\alpha}{2} (1 - \alpha^2) \left(\frac{5}{2} + \frac{Q_f}{2} \right)^2 \quad (6.6)$$

unde:

$R=8,314$ J/mol·K este constanta generală a gazelor;

Q_f este temperatura caracteristică de ionizare, ce se determină cu relația:

$$Q_f = 1,606 \cdot 10^4 V_i \quad (6.7)$$

Se determină parametrul λ al ciocnirilor cu relația:

$$\lambda = 1,25 \cdot 10^7 \frac{T^{3/2}}{z(n_e)^{1/2}} \quad (6.8)$$

unde z este nivelul de ionizare, iar n_e este concentrația electronilor. Pentru $z=1$ ionizarea

se face prin pierderea unui singur electron.

Conductivitatea electrică se poate afla cu relația:

$$\sigma = 2,632 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{z(\ln \lambda)} \quad (6.9)$$

Calculul conductivității termice se face pe baza relației:

$$K = 8,324 \cdot 10^{-22} \frac{T^{1/2}}{m^{1/2} d^2 \Omega} \quad (6.10)$$

unde:

m – masa atomică a gazului;

d – diametrul moleculelor;

Ω – este un parametru ce variază lent cu temperatura, și are valori cuprinse în 0,6 pentru $T=5.000K$ și 0,5 pentru $T=10.000K$.

În cazul temperaturii mari, se poate folosi relația:

$$K = 4,389 \cdot 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{z \cdot \ln \lambda} \quad (6.11)$$

Alegând valori pentru temperatura T, cu relațiile prezentate se pot calcula valorile corespunzătoare ale proprietăților de material pentru coloana arcului electric.

Regiunea vizibilă a arcului electric are o temperatură care crește de la 10^4 K pe suprafața exterioară, până la $2 \cdot 10^4$ la catod. La asemenea temperatură, întâlnirile dintre particulele încărcate electric sunt mult mai importante decât întâlnirile dintre electroni și atomii neutrii, ce domină la temperaturi joase. Ca urmare, valorile proprietăților de material pentru arcul electric se pot calcula cu relațiile lui Spizer.

De asemenea, proprietățile de material pentru arcul electric se stabilesc pentru temperaturi începând cu 5K și sunt date în tabelul de mai jos.

Tabelul 6.9

T Kelvin	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000
σ	1,03	$2,73 \cdot 10^3$	$7,49 \cdot 10^3$	$1,04 \cdot 10^4$	$1,02 \cdot 10^4$	$1,09 \cdot 10^4$	$1,17 \cdot 10^4$
dens	0,1	0,05	0,015	0,01	0,009	0,007	0,005
C	1000	2000	7000	5000	7000	8000	6800
K	0,144	0,625	2,417	2,644	3,961	4,936	6,498

6.4. Analiza conducției electrice

Scopul final al metodei prezentate este determinarea câmpului termic din componentele ce se sudează.

Pentru aceasta, se utilizează două variante.

În prima variantă arcul electric este privit ca un mediu, aflat la temperatură constantă, fără inerție termică, care dezvoltă căldură prin efectul termic al curentului de sudare, pe care o transmite, prin conducție termică componentelor și sârmei electrod.

În a doua variantă, se iau în considerare și inerția termică precum și dependența de temperatură a proprietăților de material, pentru arcul electric.

În cazul primei variante, procesele se studiază separat. Mai întâi se determină puterea calorică specifică, la temperatură constantă, care este folosită ca sarcină pentru analiza termică.

Analiza conducției electrice urmărește tocmai determinarea puterii calorice specifice. Modelul matematic este constituit din ecuația lui Poisson, pentru care necunoscuta principală (grad de libertate) este potențialul electric V , din care se determină densitatea de curent \bar{J} și puterea calorică specifică q , cu relația:

$$\bar{J} = -\sigma \text{grad}V; \quad q = \rho J^2 \quad (6.12)$$

Modelul geometric este constituit doar din două componente: arcul electric și sârma electrod.

Având în vedere că se poate considera că există o simetrie plană în lungul cusăturii și transversal pe aceasta, și ținând cont de posibilitățile de care a dispus autorul, se folosește modelul redus la 1/4, prezentat în fig.6.2.



Fig.6.2

Rețeaua de discretizare este realizată cu elemente finite 3D, de formă tetraedrală, cu 10 noduri, ce au forma prezentată în fig.6.3.

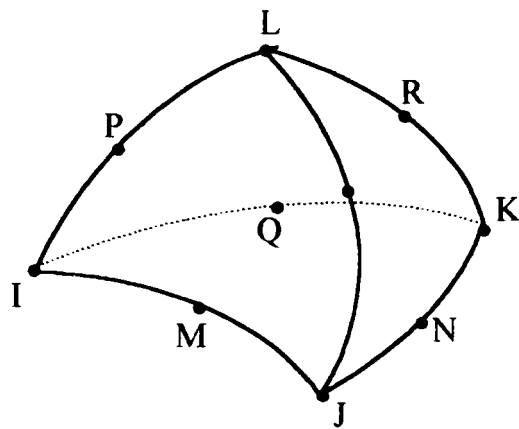


Fig.6.3

S-a obținut o rețea de discretizare de forma prezentată în fig.6.4.

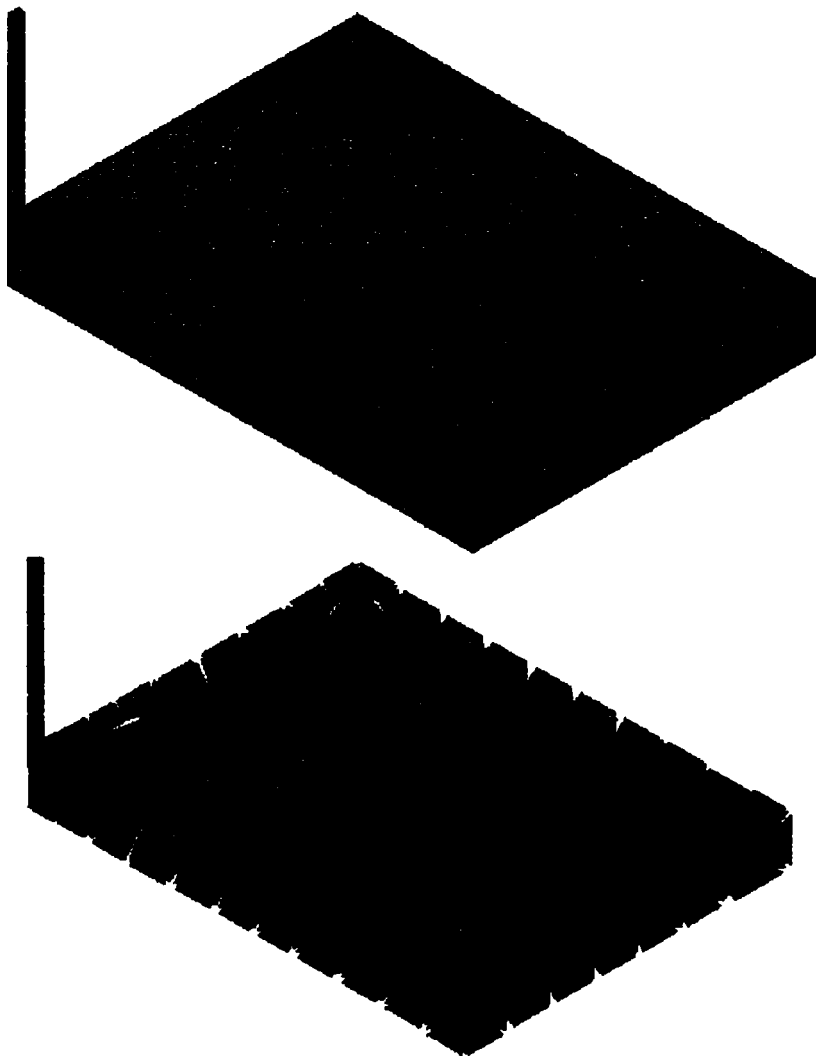


Fig.6.4

Singura proprietate de material ce interesează este rezistivitatea electrică.

Analiza s-a efectuat pentru două temperaturi ale arcului electric, de 15000K, res-

pectiv de 25000K, pentru care valorile rezistivității electrice s-au ales din tabelul anterior, $7 \cdot 10^{-5}$ respectiv, $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m$.

Având în vedere că ponderea cea mai mare o are căldura dezvoltată în arcul electric, pentru componente și sârma electrod valoarea rezistivității electrice s-a ales cea corespunzătoare temperaturii cele mai mari, pentru care se dispune de date, adică $r_{sv} = 12 \cdot 10^{-7}$.

Ca sarcină s-a definit intensitatea curentului de sudare, prin suprafața superioară a sârmei electrod, la valoarea de 98,75 A, deoarece se utilizează un model redus la 1/4.

Ca și condiție de frontieră s-a impus valoarea zero pentru potențialul electric pe suprafața inferioară a componentelor, care, de altfel, sunt conectate la masă.

Deoarece sursa de alimentare este de curent continuu, analiza conducției electrice se execută pentru un regim staționar.

Distribuția densității de curent, obținută pentru cele două cazuri este prezentată în fig.6.5.

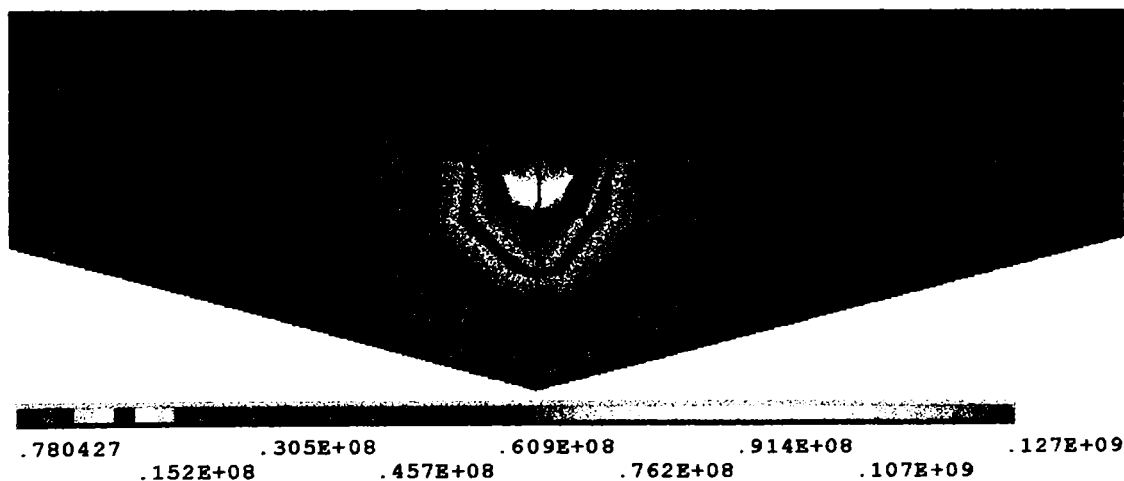


Fig.6.5

În fig.6.6 s-a reprezentat variația densității de curent după o dreaptă ce trece prin axa de simetrie a arcului electric, în funcție de distanța măsurată de la suprafața inferioa-

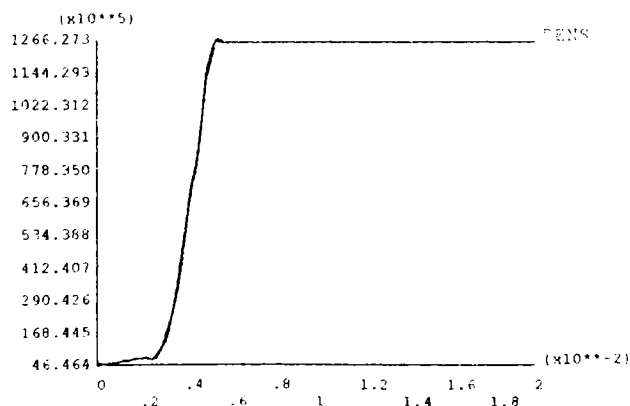


Fig.6.6

ră a componentelor.

Se observă că densitatea de curent are valoarea maximă, constantă, egală cu $1,25 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$, respectiv 125 A/mm^2 , în coloana arcului electric, valoare ce corespunde celei indicate în literatura de specialitate, precum și celei calculate.

Distribuția puterii calorice specifice în coloana arcului electric, precum și variația sa cu distanța, în lungul dreptei menționate pentru cele două cazuri, sunt redată în fig.6.7, respectiv 6.8.

Pentru $T=15000\text{K}$.

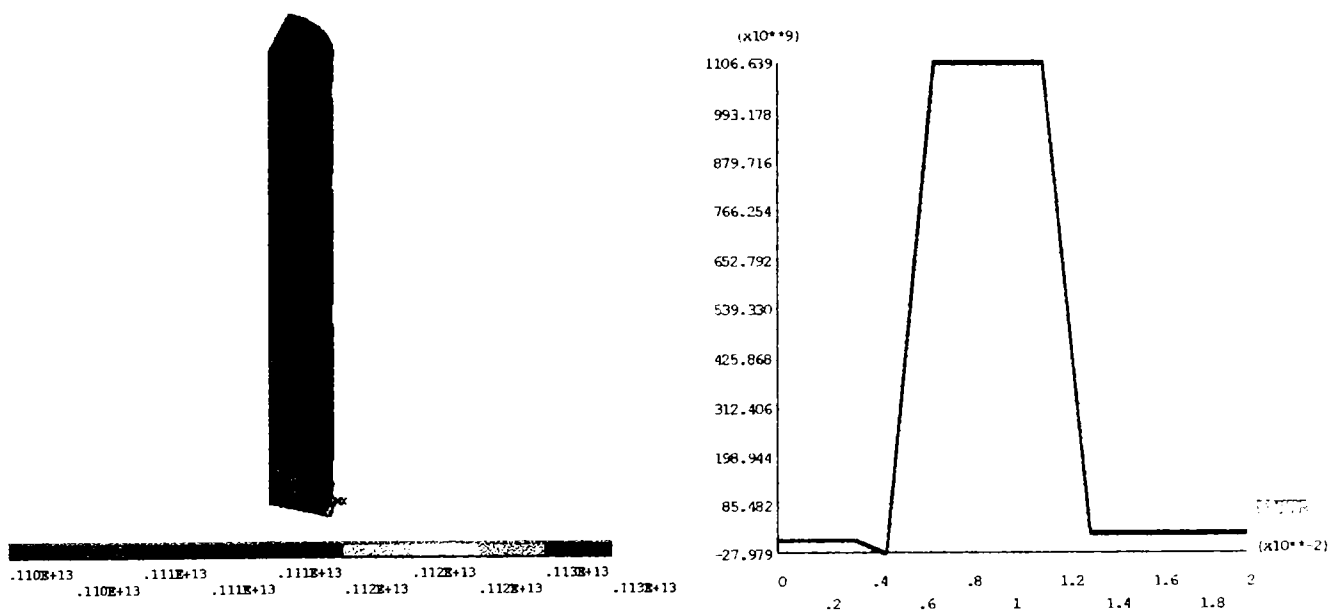


Fig.6.7

Pentru $T=25000\text{K}$.

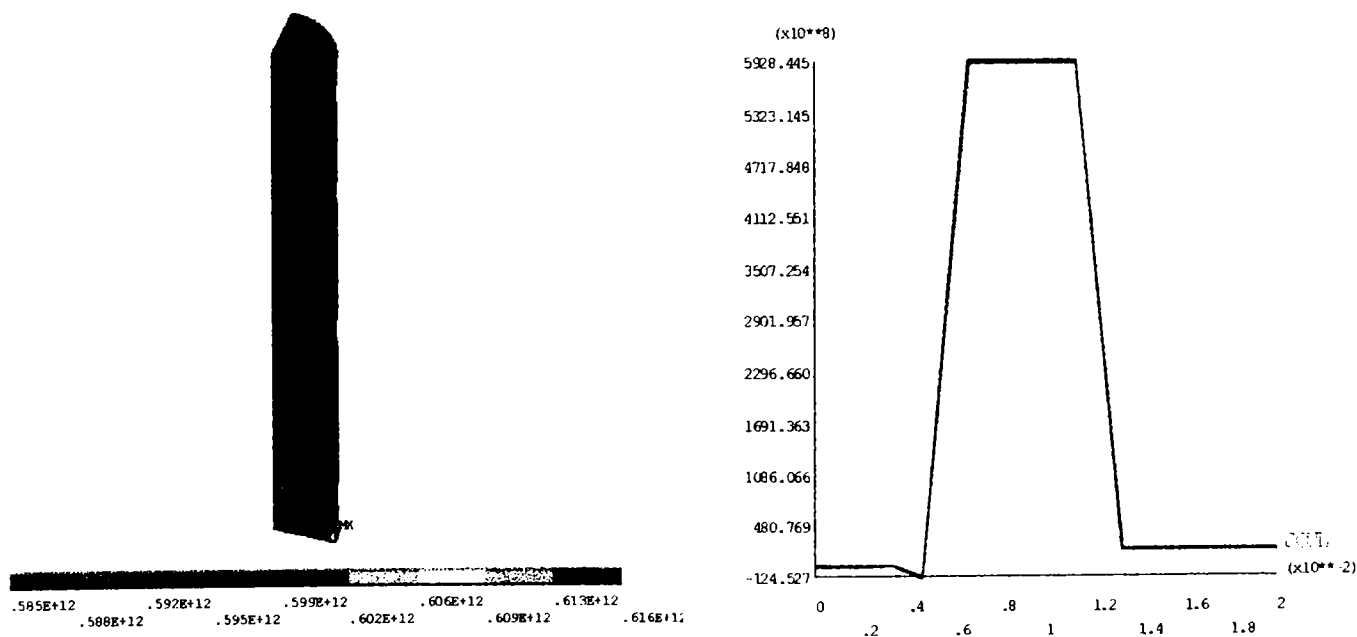


Fig.6.8

Valoarea maximă a puterii calorice specifice intervine în coloana arcului electric, și se ridică la $1,1 \cdot 10^{12}$ W/kg, pentru primul caz, respectiv la $5,9 \cdot 10^{11}$ W/kg pentru al doilea caz.

Se observă că și în ceea ce privește puterea calorică specifică, valorile cele mai apropiate de cele date în literatura de specialitate se obțin pentru al doilea caz.

Potențialul electric se repartizează pe coloana arcului electric, așa cum se prezintă în fig.6.9.

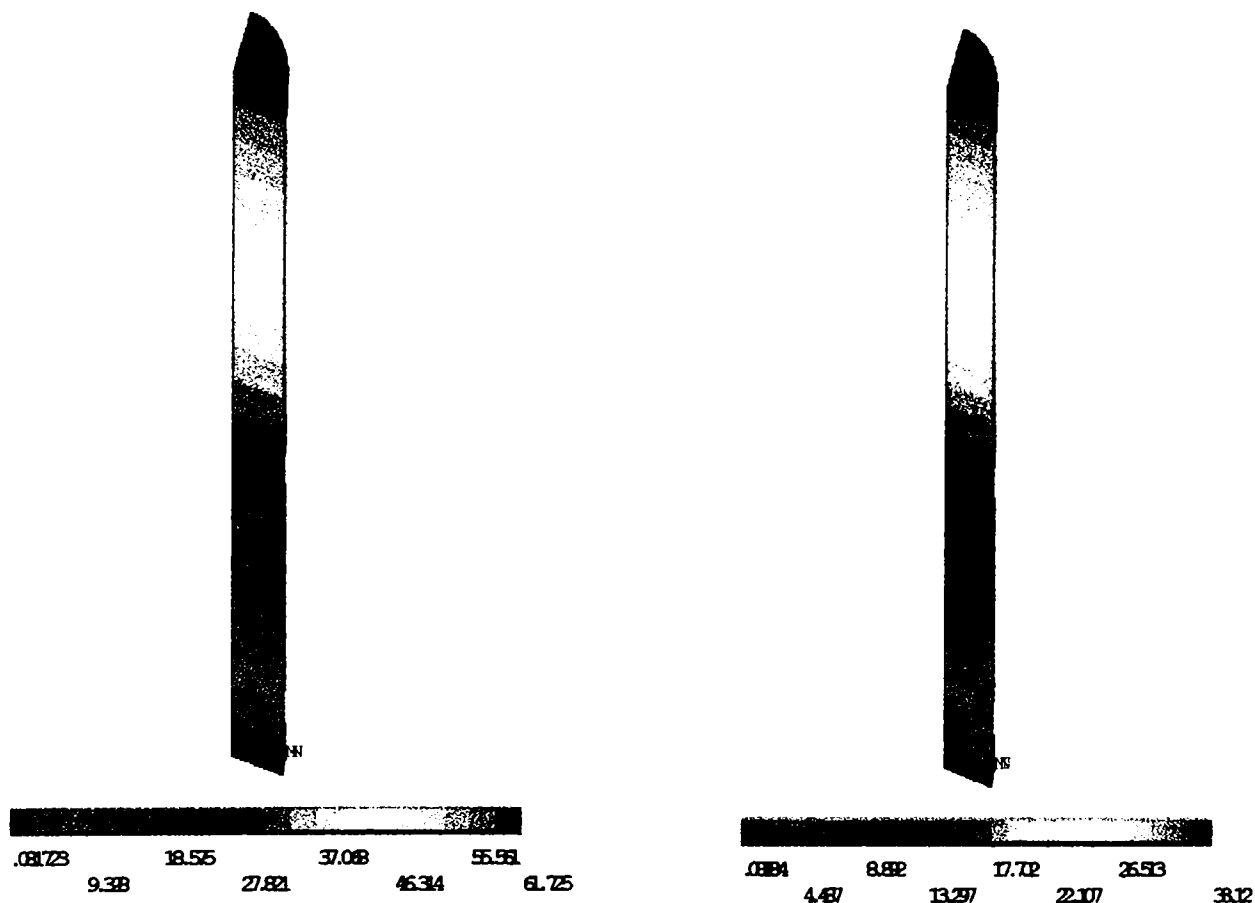


Fig.6.9

Este de remarcat că, pentru al doilea caz căderea de tensiune electrică pe coloana arcului electric are valoarea cea mai apropiată de cea impusă la proiectarea îmbinării (33V).

Toate cele de mai sus conduc la concluzia că rezultatele obținute pentru al doilea caz sunt cele mai apropiate de datele teoretice și experimentale, prezentate în literatura de specialitate.

Din acest motiv, în cele ce urmează, pentru arcul electric, se vor folosi proprietățile de material corespunzătoare temperaturii $T=25000\text{K}$, adică $\text{resv}=3,5 \cdot 10^{-5}\Omega \cdot \text{m}$; $c=7000\text{J/kg} \cdot \text{K}$; $\text{dens}=5 \cdot 10^{-2}\text{kg/m}^3$, $K=7\text{W/mK}$.

6.5. Analiza curgerii gazului de protecție

Curgerea gazului de protecție se studiază cu scopul de a determina coeficientul de schimb al căldurii prin convecție α , dintre arcul electric și stratul de bioxid de carbon din jurul acestuia.

Deoarece interesează curgerea gazului de protecție de la ieșirea din duza de gaz, limita superioară a domeniului considerat este suprafața de ieșire a duzei de gaz, considerată circulară, cu raza $RD=10\text{mm}$. Aceasta este raza de intrare (inlet) a modelului folosit pentru studiul curgerii, pentru care se impune viteza de intrare V_{in} , ce s-a calculat cu relația:

$$V_{in} = \frac{Q}{S},$$

unde Q este debitul de gaz, iar S este aria suprafeței de ieșire a duzei. Înlocuind s-a obținut $V_{in}=1 \text{ m/s}$.

În mod riguros, domeniul trebuie să conțină sârma electrod, arcul electric, componentele, precum și o anumită porțiune din spațiul din jurul acestora. Însă, deoarece interesează doar schimbul de căldură prin convecție dintre arcul electric și gazul de protecție și ținând cont de posibilitățile utilizatorului, limita superioară a domeniului s-a stabilit la extremitatea superioară a arcului electric, iar limita inferioară pe suprafața superioară a componentelor.

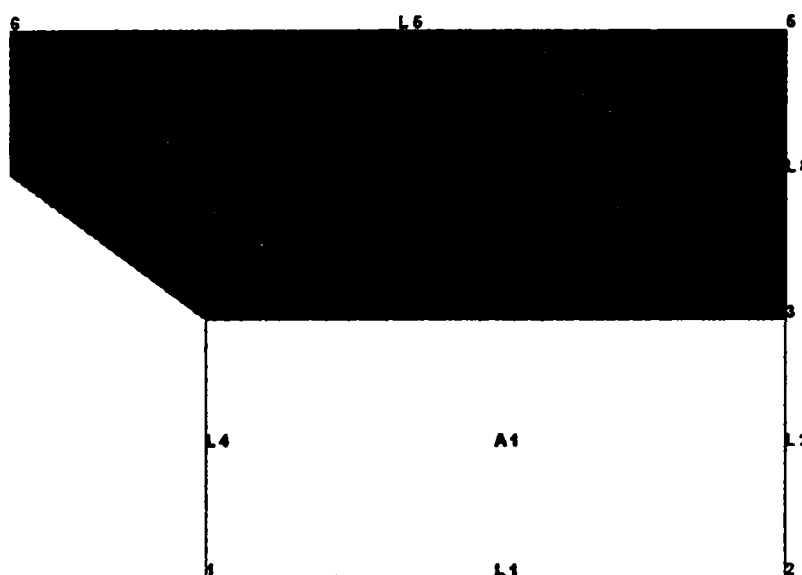


Fig.6.10

Din aceleași motive și având în vedere că amorsarea arcului electric se face după ce gazul de protecție a ajuns într-un regim de curgere staționară, stratul din jurul arcului electric s-a admis de formă cilindrică, cu raza RD , coaxial cu arcul electric.

În aceste ipoteze, se poate admite o simetrie coaxială, și deci se poate lucra într-un plan ce trece prin axa de simetrie a arcului electric, domeniul având forma prezentată în fig.6.10.

Cu L_1 este notată zona cilindrică din jurul arcului electric cu raza RD . Pentru a nu limita studiul curgerii doar la această zonă, s-a prevăzut o zonă de expansiune, de forma unui corp de revoluție ce secțiunea axială trapezoidală, notată cu A_2 .

După cum s-a precizat în capitolele precedente, studiul transferului de căldură prin convecție implică un model matematic ce conține toate ecuațiile prezentate. Aceasta necesită folosirea unei analize de curgerea fluidelor cuplată cu o analiză termică și deci folosirea unor elemente finite, ce au atașate un model elemental format din matricea de rigiditate și vectorul termenilor liberi, deduse, așa cum s-a arătat, pentru fiecare dintre următoarele ecuații: ecuația momentului cinetic, ecuația de continuitate și ecuația conservării energiei.

Se folosesc elemente plane, patrulatere, cu 4 noduri, rețeaua de discretizare având forma prezentată în fig.6.11.

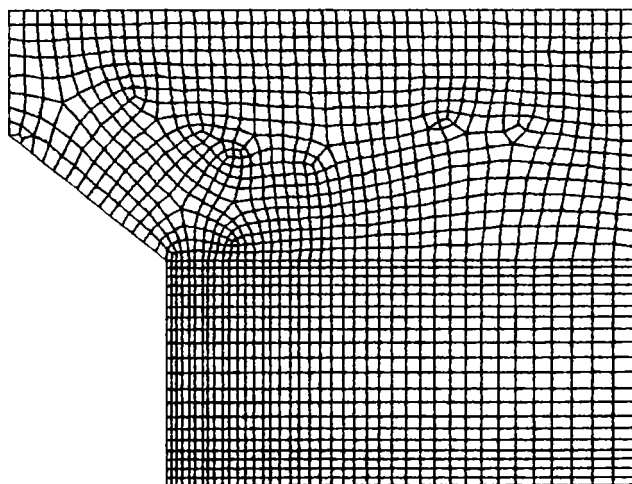


Fig.6.11

Ca sarcină se poate introduce puterea calorică specifică din zona arcului electric, determinată la analiza precedentă. Însă, pentru a putea determina pe α , trebuie să se definească temperatura pe suprafața exterioară a arcului electric, adică temperatura T_s , din relațiile prezentate. Aceasta impune ca, din domeniul considerat să se excludă zona ocupată de arcul electric și astfel suprafața exterioară a acestuia devine frontieră pentru domeniul considerat, și este reprezentată prin linia L_1 .

În ceea ce privește mediul domeniului, acesta este constituit din gazul de protecție, care inițial se admite că ocupă zona de rază RD , și aerul în restul domeniului. Însă,

având în vedere că nu există diferențe prea mari între proprietățile aerului și cele ale bi-oxidului de carbon, s-a admis că acesta din urmă ocupă tot domeniul considerat. Fiecare dintre proprietățile acestuia s-a definit printr-un tabel cu două coloane, în prima fiind înscrise valorile temperaturii, iar în a doua valorile corespunzătoare ale proprietății respective.

Ca și condiție de frontieră, impusă de studiul curgerii, se definește presiunea pe suprafața de ieșire (outlet) a domeniului curgerii, egală cu presiunea atmosferică.

Se poate admite că, la distanță suficient de mare de zona curgerii, aerul este liniștit. Pentru a fi îndeplinită această condiție, raza zonei de expansiune Re trebuie aleasă cât mai mare. Practic, condiția este îndeplinită dacă se alege $Re=2RD$. Această ipoteză permite ca, pe suprafața exterioară a zonei de expansiune să se definească, ca și condiție de frontieră presiunea egală cu presiunea atmosferică.

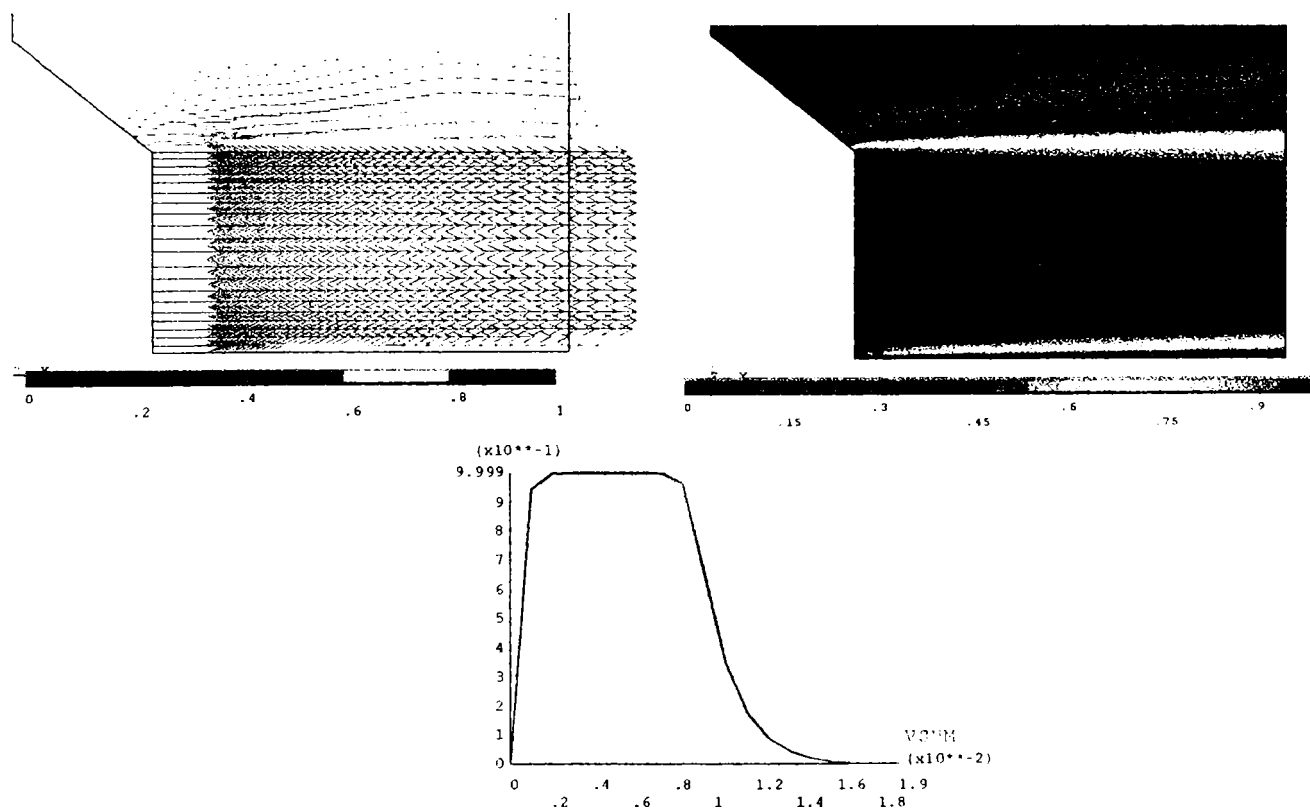


Fig.6.12

De asemenea, datorită aderenței, viteza este nulă în punctul de pe suprafața exterioară a arcului electric, care se impune ca și condiție de frontieră pe linia L_1 , ce este frontieră a domeniului curgerii.

Ca și sarcină termică se definește temperatura T_s în punctele liniei L_1 , pentru care se aleg valori egale cu temperatura din zona vizibilă a arcului electric, menționate anterior. S-au ales următoarele valori: 5.000K, 10.000K, 15.000K, 20.000K, 25.000K, 30.000K, 35.000K.

Pentru a stabili regimul curgerii, s-a ales ca stare inițială aceea când în tot domeniul considerat temperatura este egală cu cea a mediului ambiant $T_a=20^\circ\text{C}$, iar curgerea este adiabatică. În fig.6.12 s-au reprezentat rezultatele obținute pentru: distribuția vectorilor viteză, prin săgeți, distribuția valorilor vitezei, sub formă de contururi, precum și profilul vitezei în zona de ieșire, după o direcție radială, distanța fiind măsurată de la suprafața arcului electric.

Practic, curgerea se produce numai în domeniul de rază egală cu RD , în care viteza are valoarea egală cu V_{in} . Însă, din profilul vitezei, rezultă un regim turbulent, mai ales în zona de ieșire din duză, ceea ce era de așteptat, având în vedere valoarea criteriului Reynolds.

După cum s-a menționat, în cazul de mai sus curgerea s-a presupus adiabatică, adică s-a făcut ipoteza că temperatura este constantă în tot domeniul curgerii și s-a studiat doar mișcarea gazului de protecție, determinată de valoarea impusă a vitezei de intrare. S-au utilizat doar ecuațiile mișcării fluidului.

În continuare se consideră că o curgere termică, adică se are în vedere variația temperaturii în domeniul curgerii, determinată de temperatura impusă T_s , pe suprafața arcului. Pe lângă ecuațiile mișcării se folosește și ecuația conservării energiei.

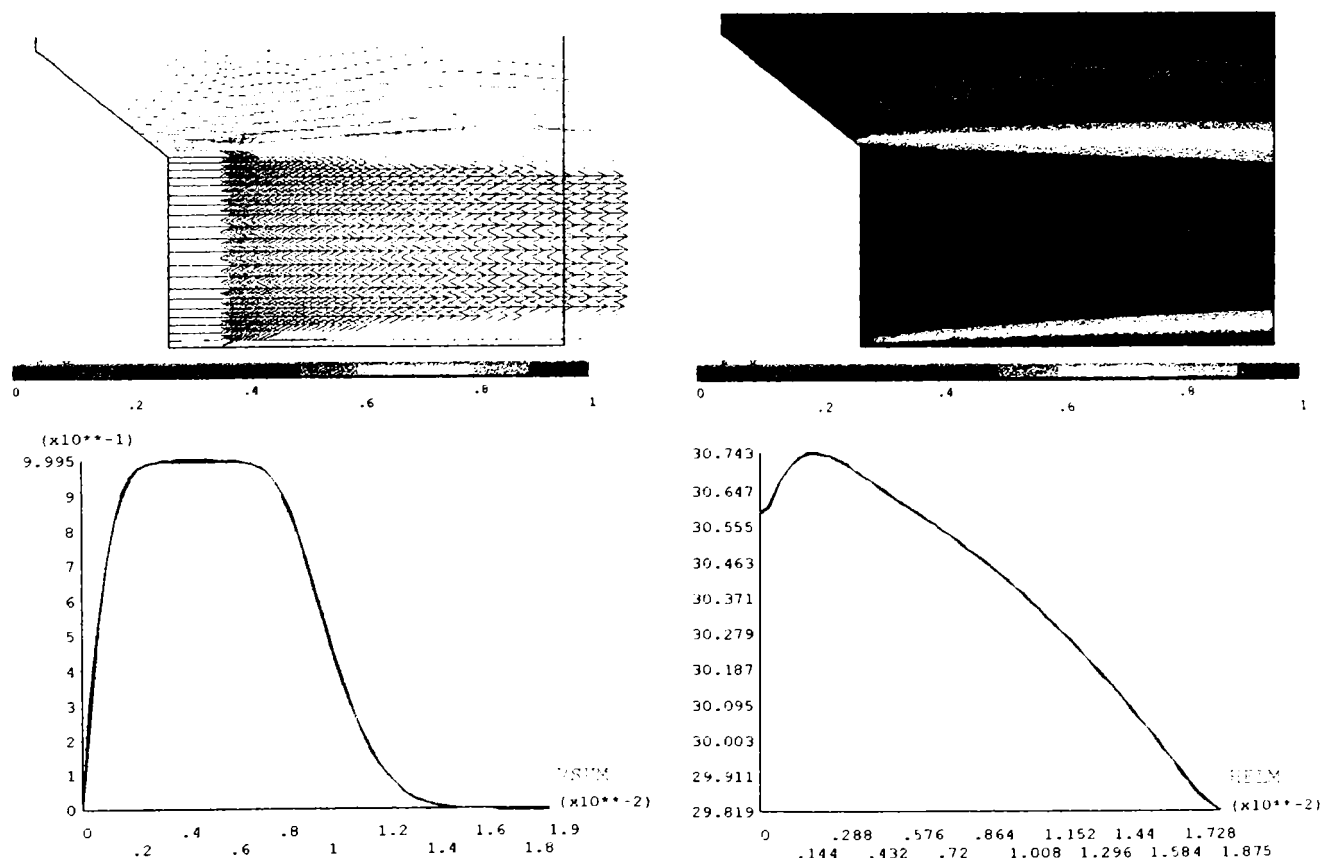


Fig.6.13

Ca referință, pentru T_s s-a ales o valoare egală cu 50°C , și, în fig.6.13, pe lângă reprezentările menționate mai sus, s-a obținut și variația coeficientului α după aceeași direcție radială.

După cum era de așteptat, se obțin aceleași rezultate ca în starea inițială.

S-au realizat mai multe analize, câte una pentru fiecare valoare a lui T_s , dintre cele menționate și s-au obținut rezultatele precizate mai sus.

Însă, pentru ca volumul lucrării să nu fie exagerat de mare, s-au ales numai acele valori ale lui T_s pentru care apar modificări semnificative ale rezultatelor.

Pentru $T_s=5.000^\circ\text{C}$

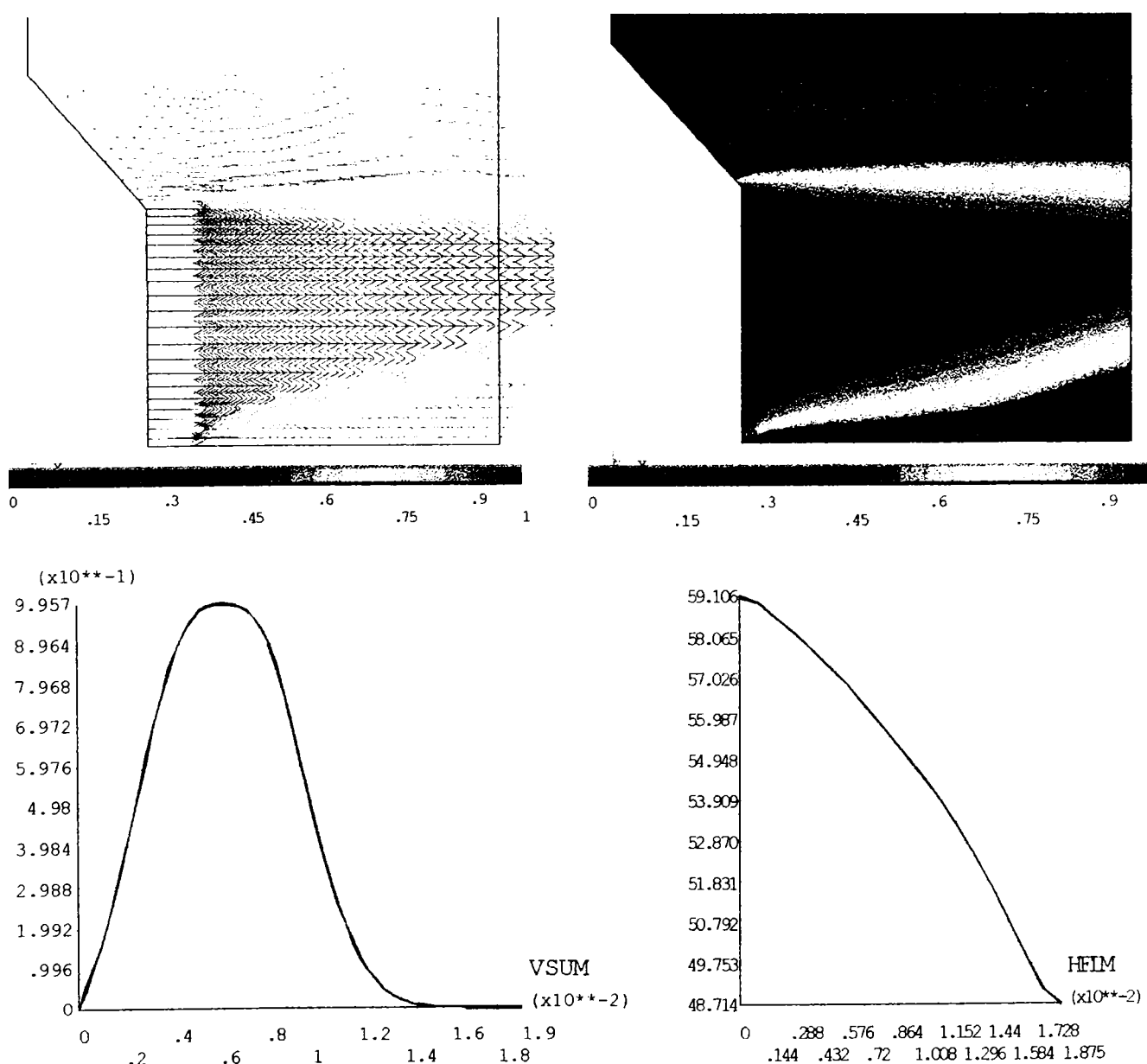


Fig.6.14

Pentru $T_s=10.000\text{ }^\circ\text{C}$

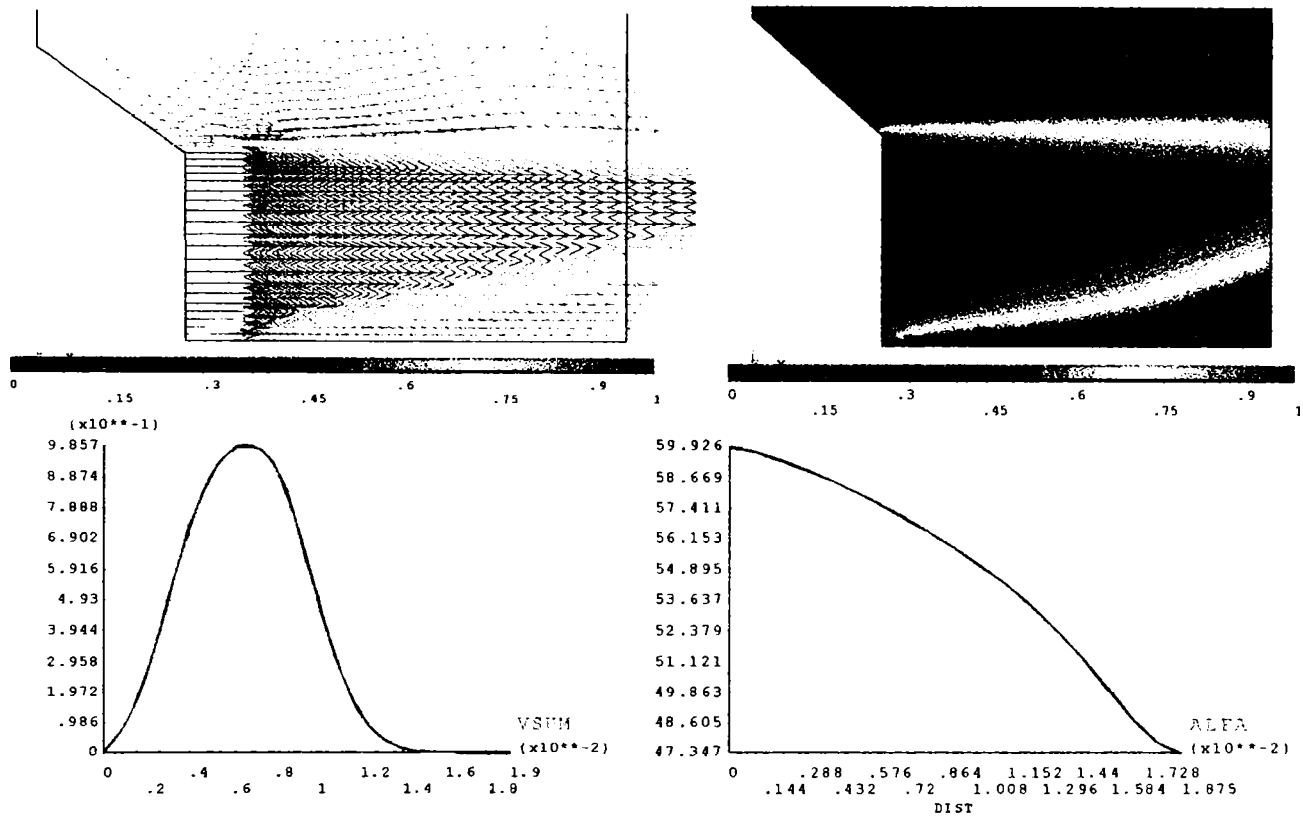


Fig.6.15

Pentru $T_s=25.000\text{ }^\circ\text{C}$

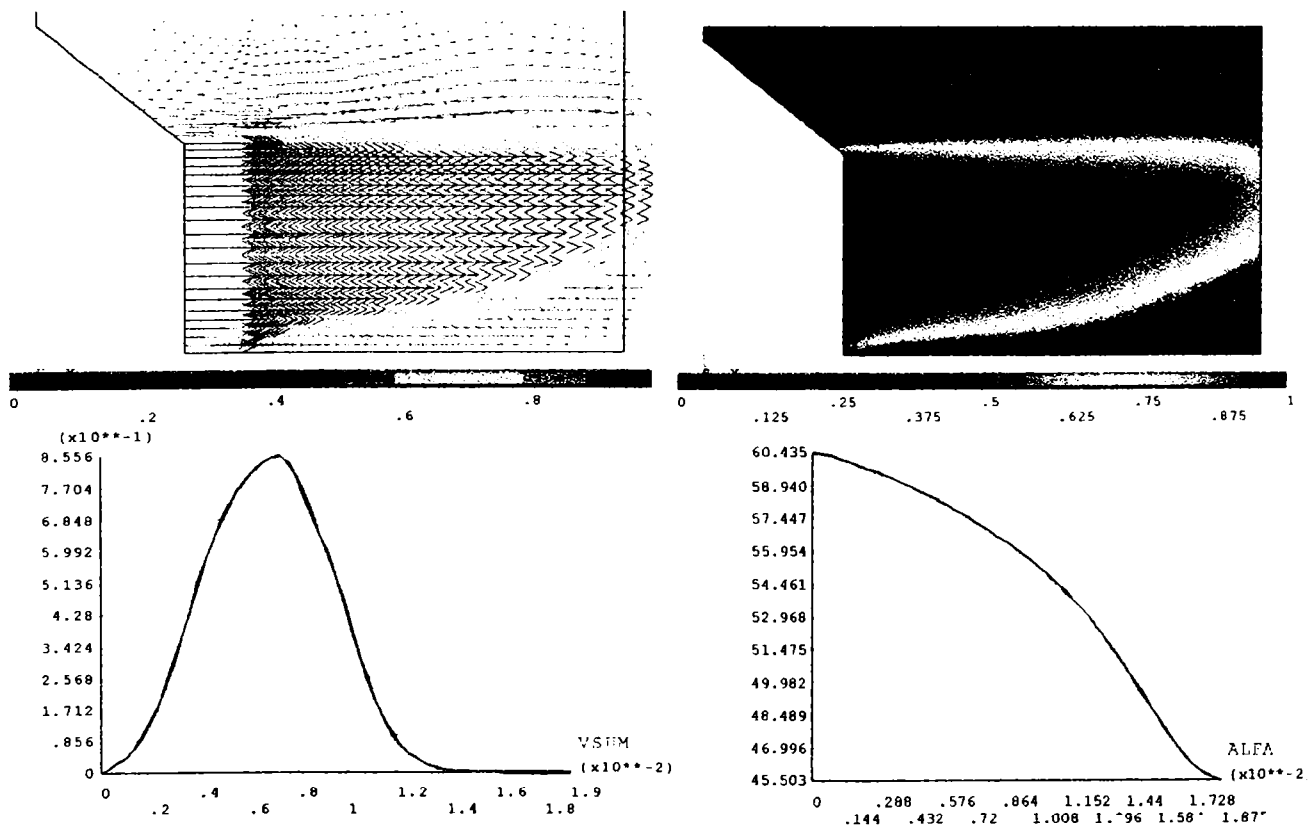


Fig.6.16

Se observă că, la temperatura de 5.000 °C, zona de curgere uniformă, cu viteză constantă egală cu cea de intrare, se restrânge spre ieșire, crește zona de lângă suprafața arcului electric în care viteza este nulă, ceea ce conduce la o creștere a densității de flux termic transmis prin convecție, având ca efect mărirea coeficientului α . De asemenea, curgerea se extinde și în afara domeniului de rază RD.

Pe măsură ce crește temperatura, aceste efecte devin tot mai pronunțate, astfel încât la temperatura de 25.000 °C zona de curgere uniformă nu mai ajunge până la ieșire.

De asemenea, graficul vitezei de ieșire arată că, pentru toate temperaturile, curgerea este laminară, zona de viteză maximă devenind tot mai îngustă.

În tabelul 6.10 sunt date valorile lui α în nodurile de pe suprafața exterioară a arcului electric (linia L1) pentru toate valorile lui T_s . Numerotarea nodurilor s-a făcut dinspre zona de intrare.

Tabelul 6.10

Nod T	50	5.000	10.000	15.000	20.000	25.000	30.000	35.000
1	30,59	59,1	60,49	60,38	60,35	60,44	60,5	60,54
2	29,82	48,71	45,16	51,33	45,39	45,5	45,16	44,88
3	30,59	59,08	60,47	60,35	60,33	60,42	60,48	60,52
4	30,62	59,07	60,46	60,35	60,32	60,4	60,46	60,51
5	30,65	59,04	60,42	60,33	60,28	60,37	60,42	60,47
6	30,68	58,97	60,35	60,29	60,21	60,3	60,36	60,40
7	30,7	58,89	60,27	60,23	60,13	60,21	60,27	59,92
8	30,72	58,8	60,118	60,25	60,03	60,12	60,18	58,12
9	30,73	58,7	60,08	60,06	59,94	60,02	60,08	55,4
10	30,744	58,6	59,98	59,97	59,84	59,92	59,98	47,17
11	30,741	58,5	59,88	59,86	59,74	59,82	59,81	45,19

Valoarea maximă a lui α este de 60,5 W/m °C și apare la temperatura de 35.000 °C, pentru nodul 3.

În literatura de specialitate se precizează că, pentru curgerea forțată a gazelor, valorile lui α sunt cuprinse între 10 W/m °C, și 300 W/m °C, iar valorile obținute se încadrează între aceste limite.

6.6. Analize termice

În general, la o analiză termică, ca sarcină (mărime de intrare) se poate folosi puterea calorică specifică, din zonele în care se produc transformări ale unor forme de energie în energie internă, sau valori impuse ale temperaturii în anumite zone ale domeniului considerat.

În prezenta lucrare se folosește prima variantă, și deci ca sarcină se utilizează pu-

terea calorică specifică din zonele conducătoare electric, dar mai ales din coloana arcului electric. Deoarece aceasta se obține din analiza conducției electrice, prin esență orice analiză termică este o analiză cuplată.

În cadrul unei analize cuplate se studiază mai multe procese, care în principiu, pot fi din orice domeniul al fizicii. Pentru aplicațiile frecvent utilizate în practica industrială, intervin procese de natură: electrică, magnetică, termică, mecanică (structurală). Pentru fiecare proces, se definește câte o analiză, iar anumite mărimi de ieșire (rezultate) ale unei analize sunt transferate ca mărimi de intrare (sarcini) pentru o altă analiză.

În cazul proceselor menționate, succesiunea analizelor și mărimilor ce se transferă sunt prezentate în fig.6.17.

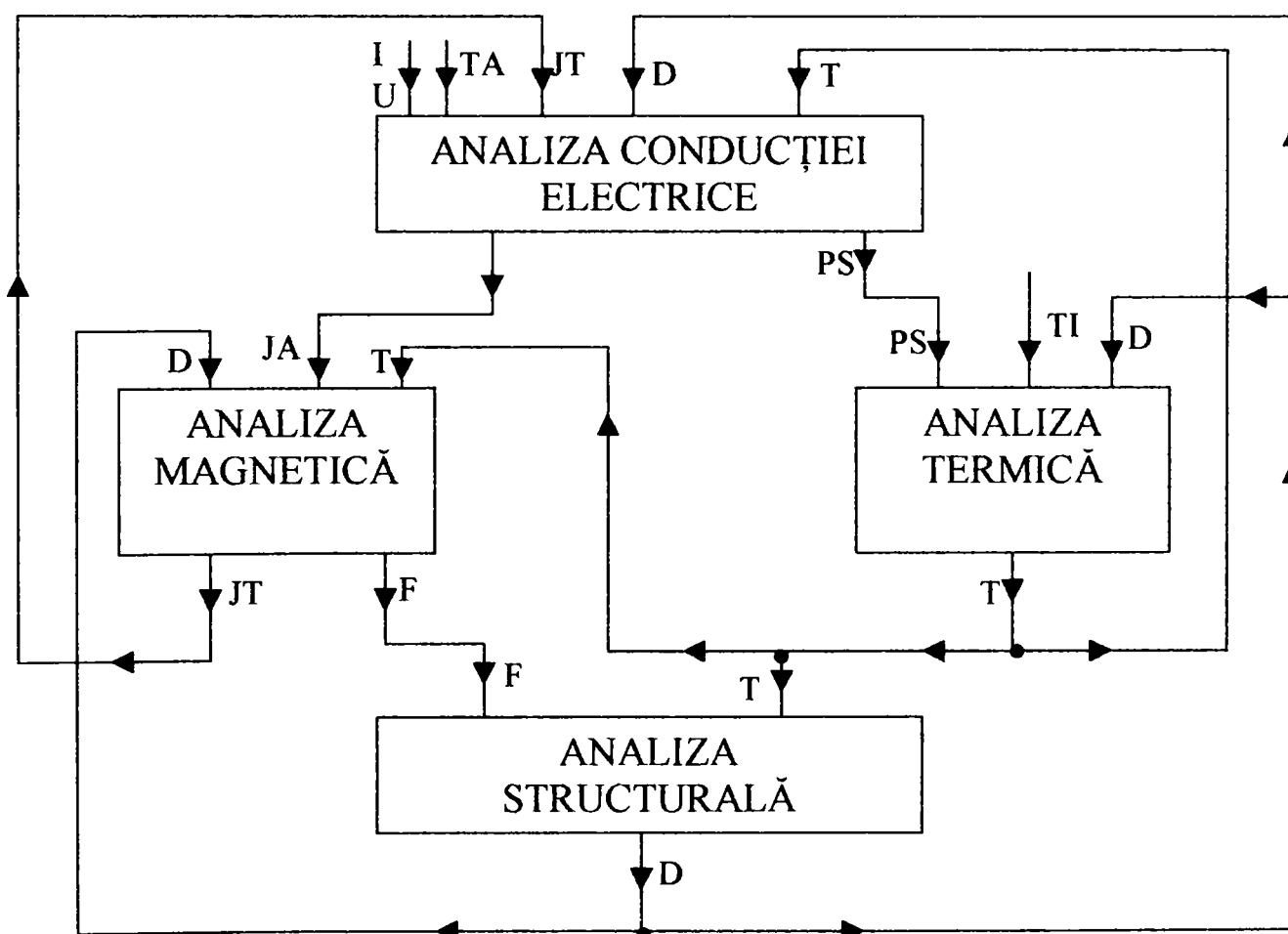


Fig.6.17

Se începe cu analiza conducției electrice, care se realizează pentru o temperatură egală cu temperatura mediului ambiant, iar ca sarcină se poate folosi fie intensitatea I a curentului electric printr-o secțiune a unei regiuni conductoare a domeniului, fie căderea de tensiune electrică U , pe una sau mai multe regiuni conductoare. Valorile obținute pentru densitatea JA a curentului de aducție (de excitație) sunt transferate ca sarcină pentru analiza magnetică.

În general, în cazul unui regim nestaționar, prin această analiză se determină densitatea curenților electrici induși, care se cumulează cu JA obținând densitatea totală JT, care este transferată ca mărime de intrare pentru analiza conducției electrice. Cu această densitate, prin analiza conducției electrice, se determină puterea calorică specifică PS, care este transferată ca sarcină pentru analiza termică, ce începe cu o temperatură inițială TI. Temperatura T în punctele domeniului, obținută în urma analizei termice, este transferată ca mărime de intrare pentru analiza conducției electrice și pentru analiza magnetică. Proprietățile de material sunt reactualizate pentru noua valoare a temperaturii, și în continuare lucrurile se repetă.

Dacă se realizează și o analiză structurală, atunci ca mărime de intrare sunt transferate: temperatura T, obținută din analiza termică și forțele magnetice F, obținute din analiza magnetică. Prin analiza structurală, se determină deformațiile D ale domeniului, care sunt transferate pentru celelalte analize.

Din punct de vedere al modelului în care se realizează transferul rezultatelor între analize, se deosebesc: analize cuplate secvențial și analize cuplate directe (simultane).

În prima variantă se execută separat fiecare analiză, în ordinea menționată. Pentru fiecare analiză se folosesc elemente finite ce au ca și necunoscute principale (grade de libertate) mărimile corespunzătoare modelului matematic, ce descrie procesul respectiv, iar matricea de rigiditate și vectorul termenilor liberi trebuie să aibă forma menționată în capitolele precedente, pentru modelul matematic considerat.

Este foarte important ca să se folosească elemente finite compatibile, adică cu aceeași geometrie de bază.

Separat, pentru fiecare analiză se definește câte un mediu fizic, constituit din: domeniul geometric, rețea de discretizare, sarcini specifice (sarcini nominale), lăsând la o parte sarcinile ce urmează a fi transferate de la o altă analiză. De asemenea, se stabilește regimul procesului ce se analizează.

O secvență constă din executarea succesivă a analizelor în ordinea: analiza conducției electrice, analiza magnetică, analiza termică, analiza structurală, precum și transferarea rezultatelor unei analize ca sarcini pentru analiza următoare, așa cum s-a precizat mai sus.

De obicei se parcurg mai multe secvențe până când o anumită mărime, de exemplu, temperatura, atinge o anumită valoare impusă, care poate fi valoarea maximă a tem-

peraturii pentru care se cunosc proprietățile de material.

Parcurgerea secvențelor se poate face manual de către utilizator, sau automat, folosind o instrucțiune de ciclare, de exemplu FOR, sau DO, la care variabilei de control i se atribuie un număr de valori egal cu numărul de secvențe ce se dorește a se obține.

În cazul unei analize cuplate directe (simultane) parcurgerea secvențelor se face automat de către însăși programul respectiv. Evident că se vor utiliza elemente finite ce au ca și necunoscute principale (grade de libertate) mărimile de stare ce intervin ca necunoscute în modelele matematice ale tuturor proceselor ce intervin. De asemenea, matricea de rigiditate elementală și vectorul termenilor liberi elemental trebuie să fie constituite din elemente calculate cu relațiile precizate în capitolele anterioare, pentru fiecare dintre modelele matematice utilizate.

În cazul de față, deoarece analiza conducției electrice se face pentru un regim staționar (curent continuu), se execută separat o analiză electro-termică și una electro-magnetică.

În concluzie, orice analiză termică ce se prezintă în cele ce urmează, este de fapt o analiză cuplată electro-termică, la care ca sarcină se folosește puterea calorică specifică obținută în urma analizei conducției electrice, prezentată în paragraful 6.4.

Modelul geometric folosit este prezentat în fig.6.18.

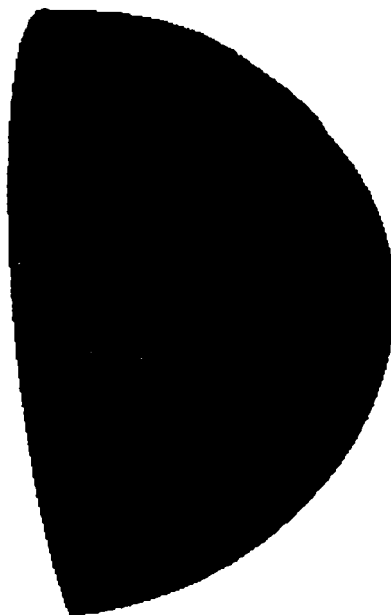


Fig.6 .18

Se observă că, pe lângă modelul geometric folosit în analiza conducției electrice, intervin încă două regiuni, prin care se modelează aerul din jurul elementelor respective,

precum și spațiul infinit. Acestea se aleg de formă sferică, cu razele RS , respectiv RI . Acuratețea rezultatelor este cu atât mai bună cu cât razele RS , RI au valori mai mari, însă aceasta duce la creșterea domeniului studiat, precum și la dificultăți în realizarea rețelei de discretizare. Din acest motiv, și având în vedere că în jurul elementelor nu intervin piese din material feromagnetic, s-a ales RS egal cu lungimea considerată a componentelor, iar $RI=2RS$.

Rețeaua de discretizare s-a realizat cu elemente de același tip cu cele folosite la analiza electrică cu restricția că, în stratul infinit, pe direcția radială, să existe un singur strat de elemente, ca în fig.6.19.

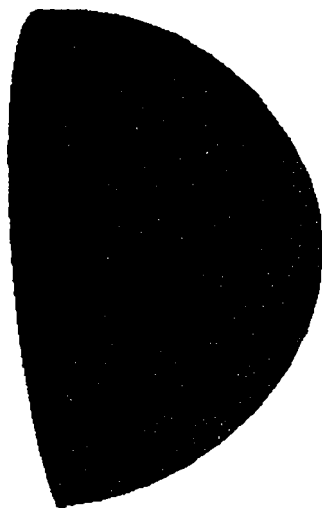


Fig.6.19

O chestiune deosebită o constituie faptul că arcul electric este o sursă de energie termică, mobilă, care se deplasează în lungul rostului cu viteza de sudare V_s .

Se va numi zonă oarecare în lungul îmbinării o poziție oarecare a arcului electric deci o suprafață circulară de rază RA , situată pe suprafața superioară a componentelor și dispusă simetric față de axa longitudinală a îmbinării. O astfel de zonă poate fi considerată ca un singur tot, deoarece, practic, în orice moment, temperatura are aceeași valoare, în toate punctele zonei, egală cu temperatura de la baza arcului electric.

O anumită porțiune din componente, din jurul fiecărei zone, participă la un ciclu termic, format dintr-o fază de încălzire, în care temperatura crește până la o valoare maximă T_{max} ca urmare a apropierii arcului electric de zona considerată, urmată de o fază de răcire, în care temperatura scade la o valoare minimă, T_{min} , datorită îndepărtării arcului electric de aceea zonă.

Se notează cu Δt_i durata fazei de încălzire și cu Δt_r cea a fazei de răcire.

Însă cu programul utilizat se pot modela uneori sisteme termice în care sursa de încălzire este fixă.

Soluția aleasă constă în presupunerea că, pentru fiecare zonă, arcul electric rămâne fix în poziția respectivă și se execută trei analize termice tranzitorii.

Pentru faza de încălzire se folosește o singură analiză cu durata Δt_i și, pentru a simula apropierea arcului electric de zona considerată, pe durata Δt_i puterea calorică specifică crește treptat de la valoarea zero la o valoare maximă egală cu cea obținută în urma analizei conducției electrice.

Faza de răcire s-a divizat în două subfaze, cu duratele Δt_{r1} , în care încă se mai face simțită influența arcului electric asupra câmpului termic din jurul zonei considerate, respectiv Δt_{r2} , în care arcul electric s-a îndepărtat suficient de mult acea zonă, pentru ca să nu mai aibă nici o influență asupra câmpului termic din jurul acestuia.

Pentru prima subfază s-a realizat o a doua analiză termică consecutivă, cu durata Δt_{r1} , în care, pentru a simula îndepărtarea arcului electric, puterea calorică specifică scade treptat de la valoarea maximă, atinsă la finele fazei de încălzire, la valoarea zero.

A treia analiză termică consecutivă s-a realizat pentru subfaza cu durata Δt_{r2} , în care, pentru a simula că arcul electric nu mai are nici o influență asupra câmpului termic din jurul zonei considerate, s-a admis că puterea calorică specifică rămâne constantă la valoarea zero.

Evident că durata Δt_{r2} este cel puțin egală cu timpul de sudare, însă o chestiune dificilă a constituit-o alegerea duratelor Δt_i , Δt_{r1} , precum și forma de variație în timp a puterii calorice specifice în cursul acestora.

Însă, pentru procedeul de sudare considerat, viteza de sudare având o valoare relativ mare, se poate considera arcul electric ca o sursă termică instantanee de mare viteză.

Aceasta înseamnă că, influența arcului electric asupra câmpului termic din jurul zonei considerate se face simțită numai într-un interval de timp Δt de valoare foarte mică, teoretic infinit mică.

Pe această bază duratele Δt_i , Δt_{r1} s-au ales egale cu $\Delta t/2$, și, în fiecare, s-a presupus că puterea calorică specifică crește, respectiv scade liniar în timp.

Pentru a stabili valoarea lui Δt , mai întâi s-a analizat numai faza de încălzire.

S-a ales zona situată la mijlocul lungimii componentelor. Deoarece, la viteza de sudare folosită, arcul electric parcurge într-o secundă în jur de 8 mm, s-a admis că influ-

ența arcului electric se face simțită începând dintr-o poziție situată la această distanță de dinainte de a ajunge în zona considerată, și până într-o poziție simetrică, de după ce arcul electric a trecut de zona respectivă. Din acest motiv s-a ales $\Delta t=0,5$ s.

S-au realizat mai multe analize cuplate, electro-termice, atât secvențiale cât și directe (simultane).

Pentru fiecare analiză s-a determinat câmpul termic din componente sub formă de contururi. S-a reprezentat numai câmpul termic pentru temperaturi mai mari decât o limită inferioară, impusă de 1300 °C, care este apropiată de temperatura de topire a componentelor. În felul acesta, linia corespunzătoare temperaturii de 1300 °C delimitează zona în care metalul este în stare topită, iar pe direcția normală pe componente reprezintă chiar adâncimea de pătrundere.

De asemenea, pentru a stabili dacă după timpul $\Delta t=0,5$ s se atinge adâncimea de pătrundere estimată, durata fiecărei analize s-a ales dublă, deci de o secundă.

S-a început cu o analiză cuplată secvențială, în care s-a neglijat inerția termică a arcului electric.

În fig.6.20 se reprezintă câmpul termic din componente, obținut după 0,5 s.

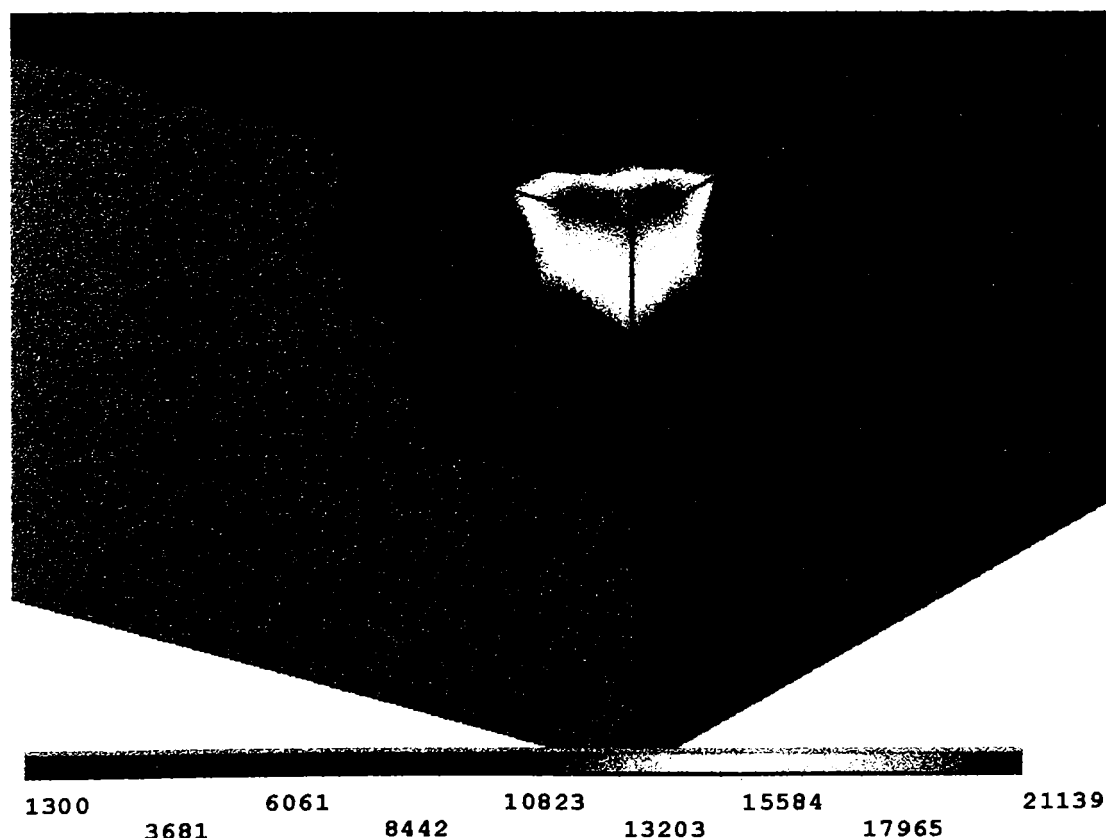


Fig.6.20

În fig.6.21 se reprezintă același câmp termic, obținut după 1s.

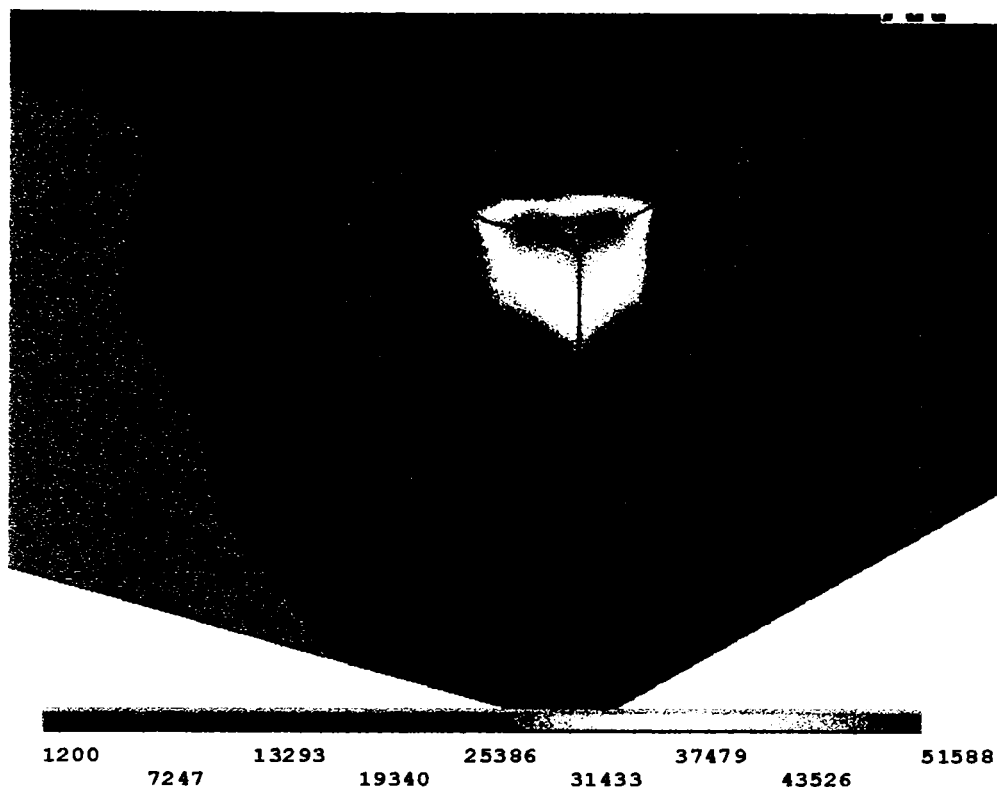


Fig.6.21

Din examinarea celor două figuri de mai sus, rezultă că după o secundă, adâncimea de pătrundere se extinde pe toată înălțimea componentelor, iar după 0,5 s aceasta se reduce la jumătate.

Deoarece îmbinarea se realizează în două treceri, înseamnă că, aproximativ, la o trecere adâncimea de pătrundere este egală cu jumătate din înălțimea componentelor, ceea ce se produce chiar după timpul $\Delta t=0,5$ s ales la început.

De asemenea, după timpul $\Delta t=0,5$ s, în zona arcului electric se atinge temperatura de aproximativ 21.000 °C, care este mai apropiată de valoarea indicată în literatura de specialitate, față de valoarea de 52.000 °C la care se ajunge după un timp dublu.

În continuare s-a executat aceeași analiză, însă luând în considerare și inerția termică a arcului electric. Deoarece constanta de timp termică a arcului electric este mult mai redusă decât a materialului componentelor, deosebirile sunt neesențiale și nu s-au mai reprezentat câmpurile termice obținute.

În fig.6.22.a s-a reprezentat variația temperaturii după înălțimea componentelor, în funcție de distanța măsurată de la suprafața superioară a acestora, după timpul $\Delta t=0,5$ s.

Pentru ca desenul să fie mai clar, s-a reprezentat variația temperaturii numai pe jumătate din înălțime, și deci punctul aflat la distanța de 5 cm este chiar cel care corespunde adâncimii de pătrundere stabilită anterior pentru $\Delta t=0,5$ s. se observă că, într-adevăr, după 0,5 s, în acest punct se atinge temperatura de topire.

În fig.6.22.b este reprezentată variația în timp a temperaturii din același punct, din care se remarcă că temperatura ajunge la cea de topire după un timp de aproximativ 0,5s.

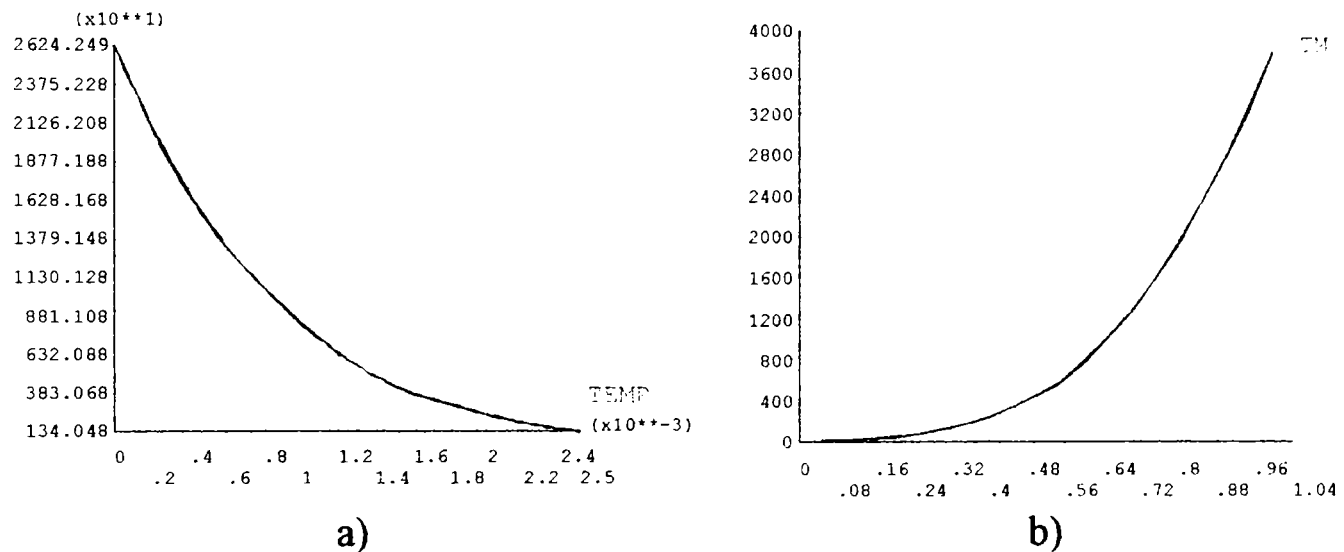


Fig.6.22

În scopul de a verifica rezultatele obținute până în acest moment, s-a realizat o analiză cuplată, electro-termică, directă.

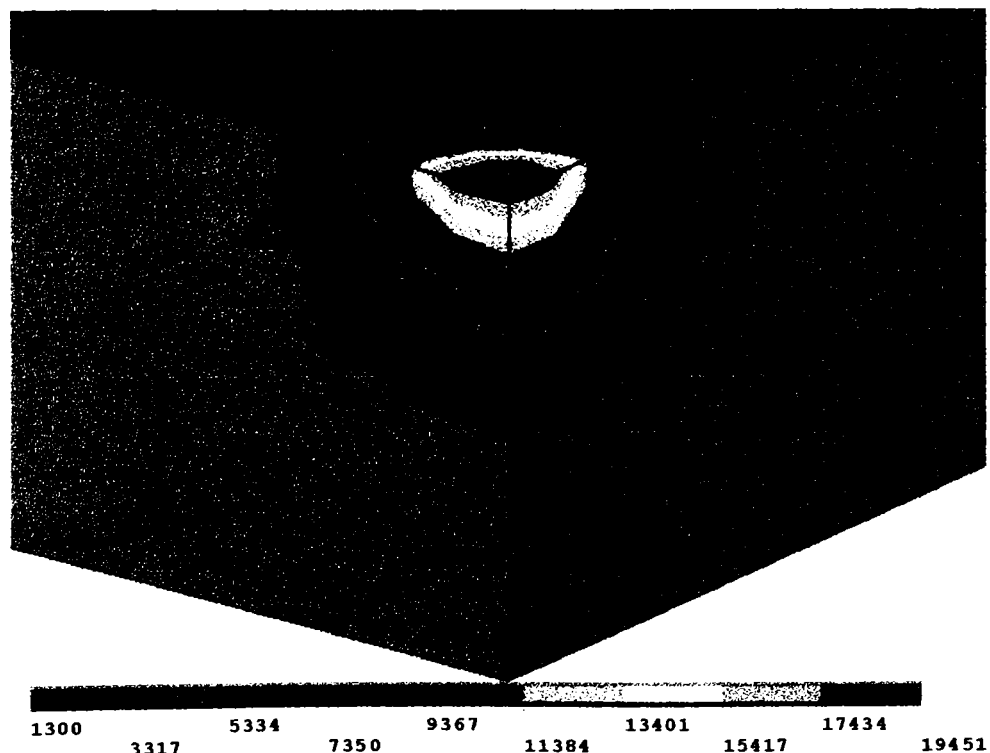


Fig.6.23

Ca sarcini se definesc: intensitatea curentului electric prin suprafața superioară a sârmei electrod, egală cu 98,75 A, temperatura inițială T_I , egală cu temperatura mediului ambiant $T_A=20\text{ }^\circ\text{C}$ și potențialul electric egal cu zero pe suprafața inferioară a componentelor.

Datorită simulării spațiului infinit, nu este necesar să se impună nici o condiție de frontieră.

După rularea analizei s-au reprezentat distribuțiile densității de curent, puterii calorice și căderii de tensiune pe arcul electric.

S-a constatat că acestea sunt foarte apropiate de cele obținute în urma analizei conducției electrice, însă, pentru a nu mări volumul lucrării nu se mai prezintă.

În fig. 6.23 se prezintă câmpul termic din componente.

Se observă că se obțin aceleași rezultate ca la analizele precedente, cu remarcă că temperatura maximă din zona arcului electric ajunge numai la aproximativ $19.000\text{ }^\circ\text{C}$, o valoare ce este mult mai apropiată de cea precizată în literatura de specialitate.

În fig.6.24, prin săgeți, s-a reprezentat vectorul densitate de flux termic, pentru întregul sistem și numai pentru componente.

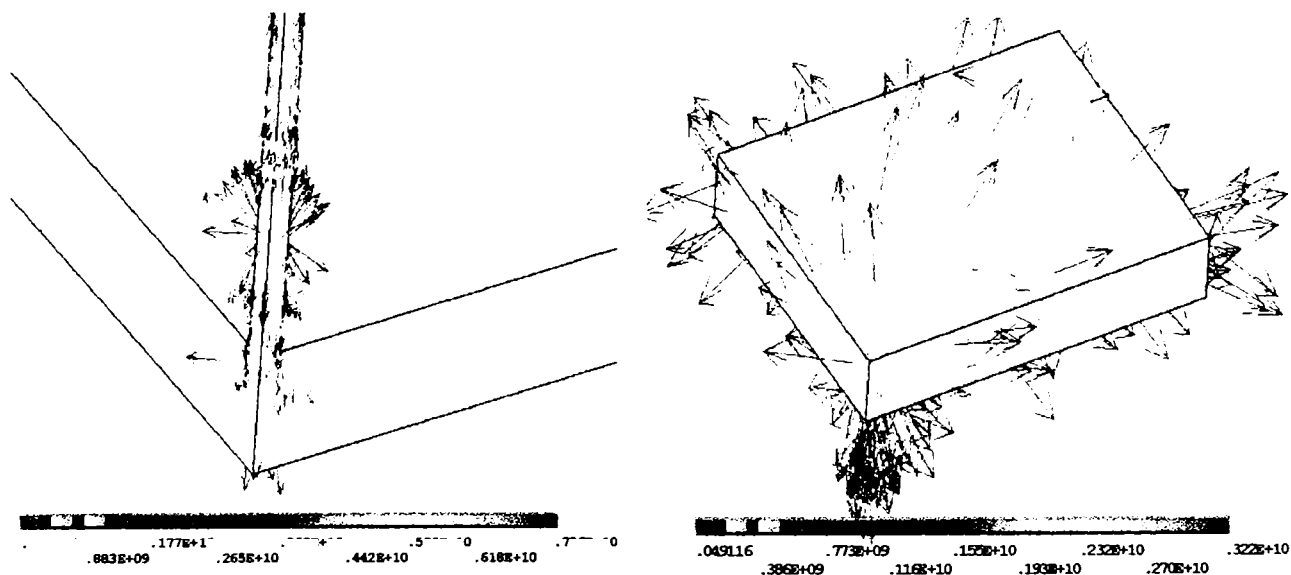


Fig.6.24

În final s-a determinat câmpul termic pentru întreg ciclul de încălzire și răcire.

S-a folosit o analiză cuplată, directă, electro-termică, care s-a executat în trei faze (pași) de încărcare consecutive.

Prima fază de încărcare este similară analizei de încălzire precedente, și s-a ales un pas de timp de 0,05 s, ceea ce permite obținerea rezultatelor în 10 momente de timp distincte.

Pentru a doua fază de încărcare ca sarcină s-a introdus valoarea zero pentru puterea calorică specifică și durata este tot $\Delta t=0,5$ s. De asemenea, s-a impus ca puterea calorică specifică să scadă liniar în timp, de la valoarea maximă atinsă la finele fazei precedente, la valoarea zero, ce s-a impus ca sarcină. S-au folosit tot 10 pași de timp. Prin această fază se realizează subfaza de răcire cu durata Δt_{r1} .

În ultima fază de încărcare, puterea calorică specifică se menține la valoarea zero și astfel se obține subfaza de răcire cu durată Δt_{r2} , care s-a ales de 3 minute.

Se subliniază faptul că nu este vorba despre 3 analize, ci de una singură, formată din 3 faze de încărcare. De la o fază la alta diferă puterea calorică specifică, modul de variație în timp al acesteia și durata.

În mod automat programul parcurge succesiv cele 3 faze, astfel încât rezultatele finale ale unei faze devin date inițiale pentru faza următoare.

Totodată, după realizarea analizei, se poate obține orice rezultat, din orice moment al oricărei faze.

Deoarece s-a constatat că, așa cum era de așteptat, rezultatele obținute în prima fază sunt similare cu cele obținute la analiza precedentă, acestea nu s-au mai reprezentat.

Ceea ce prezintă interes este variația în timp a temperaturii din punctele componentelor. S-a considerat ca reprezentativ punctul aflat la jumătatea înălțimii componentelor după zona aleasă.

Variația în timp a temperaturii din acest punct pentru întregul ciclu este prezentată în fig.6.25.a.

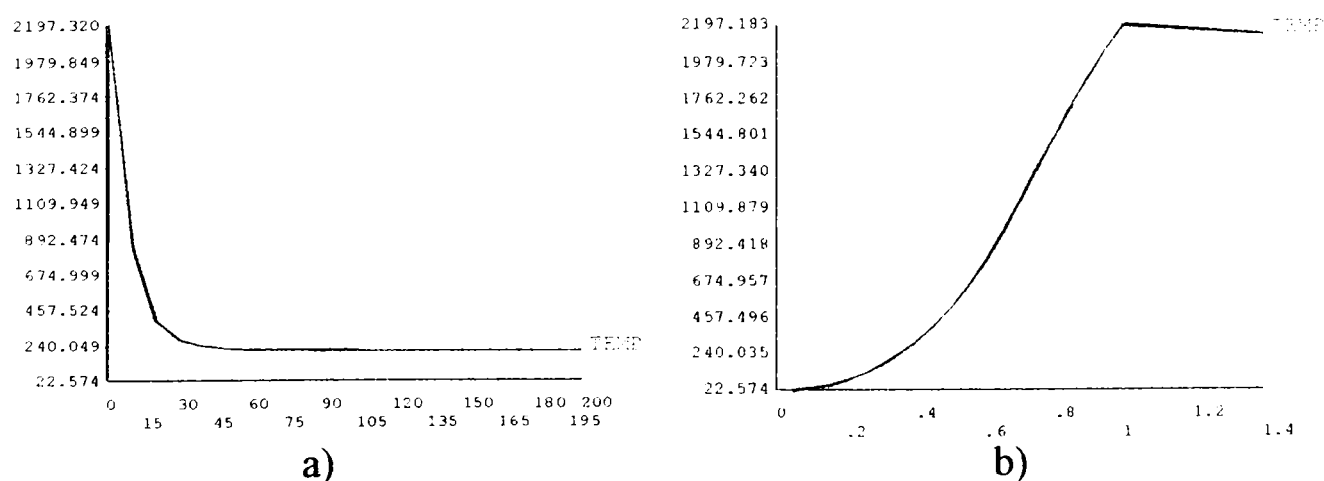


Fig.6.25

Pentru claritate, în fig.6.25.b este reprezentată variația în timp a temperaturii numai pentru primele două faze. Datorită inerției termice a componentelor, descreșterea

temperaturii nu va începe chiar în momentul inițial al primei subfaze de răcire, ci cu o anumită întârziere.

Tot în scopul clarității, în fig.6.26 se prezintă variația temperaturii pentru diferite subintervale din cursul ultimei subfaze de răcire.

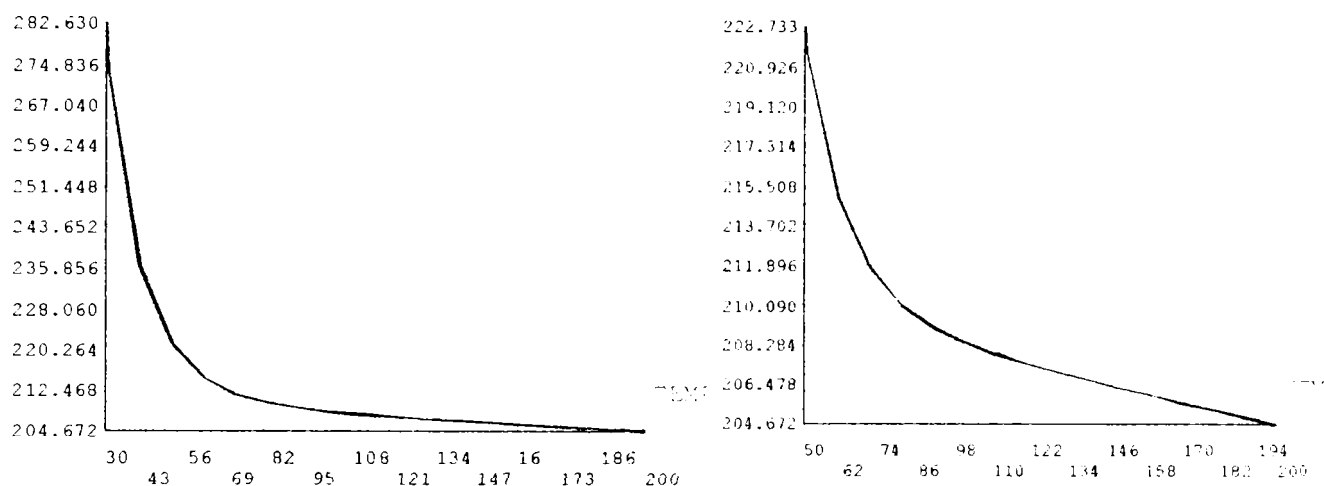


Fig.6.26

Rezultă că la sfârșitul ciclului considerat temperatura scade la 200 °C.

6.7. Analiza magnetică

În principal, prin analiza magnetică s-a urmărit obținerea forțelor magnetice ce acționează asupra sârmei electrod.

S-a folosit același model geometric ca în cazul analizei termice și elemente finite, cu aceeași formă geometrică, însă ce au ca și necunoscute principale valorile componentelor A_x , A_y , A_z , ale potențialului magnetic vector.

În fig.6.27 se prezintă prin săgeți, vectorii forțe magnetice ce acționează asupra sârmei electrod.

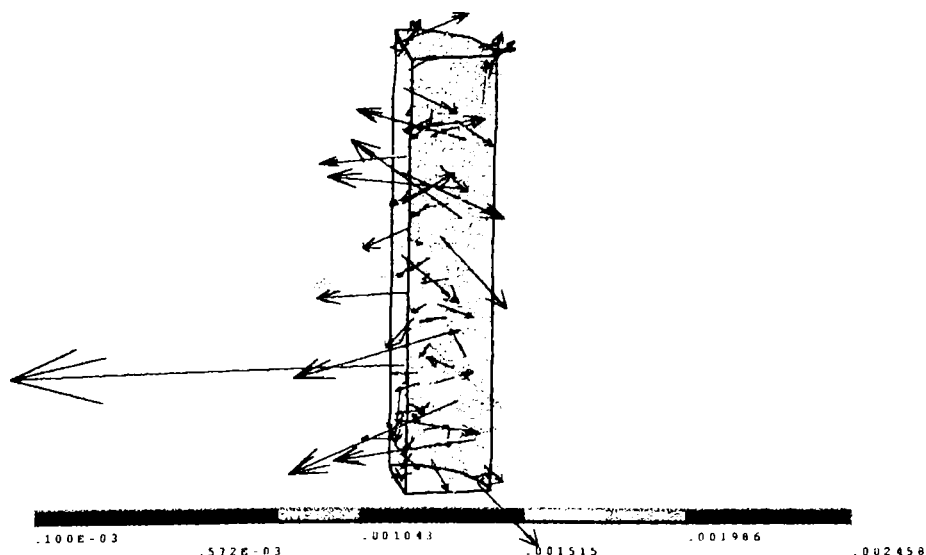


Fig.6.27

Componentele axiale fiind orientate în sensul forței de greutate, iar componentele radiale având sensul spre axa de simetrie a arcului electric, se va obține un transfer prin arc spray, așa cum s-a admis când s-a proiectat procesul de sudare.

Se mai pot reprezenta și alte mărimi de stare ale câmpului magnetic, cum ar fi inducția magnetică, însă pentru a nu extinde lucrarea, acestea nu se prezintă.

6.8. Verificări experimentale

Pentru a verifica rezultatele obținute am măsurat temperatura dintr-un punct de pe fața superioară a componentelor situat, aproximativ, la mijlocul lungimii componentelor.

Am folosit un termocuplu tip R 87%Pt-13%Rh/Pt, cu diametrul de 0,5mm, ce poate măsura temperaturi de până la 1800⁰C, pe durată scurtă.

Pentru a proteja termocuplul de acțiunea băii de sudare, l-am plasat în afara rostului, la distanța de 3cm de axa longitudinală a îmbinării.

Am început măsurările din momentul când arcul electric a ajuns în dreptul termocuplului pe o direcție normală la axa longitudinală a cusăturii, ce l-am ales ca origine a timpului. Valorile temperaturii le-am citit după intervale de timp precizate în tabelul 6.11.

Tabel 6.11

Timp(s)	0	10	20	30	40	50	60	70
TM(⁰ C)	1282	932	812	782	674	612	502	484
TR(⁰ C)	1364	1014	876	824	689	648	546	502
Abatere(%)	6,4	8,8	7,9	5,4	2,2	5,9	8,8	3,7

Valorile măsurate ale temperaturii le-am notat cu TM, iar valorile obținute prin aplicarea metodei descrise, sunt desemnate prin TR. Am calculat și abaterea procentuală a valorilor TR, față de valorile TM.

Se constată că abaterea maximă nu depășește 10%, care se înscrie în limita superioară a erorilor pentru programul folosit.

Consider că o cauză a erorilor este și faptul că proprietățile de material utilizate pentru arcul electric nu corespund întocmai realității. De asemenea, o altă sursă de erori este și neluarea în considerare a proceselor ce au loc în baia de sudare.

Cap.7. CONCLUZII. CONTRIBUȚII PERSONALE

7.1. Concluzii

1.Lucrarea prezintă modelele matematice complete ale tuturor proceselor ce intervin mai frecvent în practica industrială.

2.Metoda prezentată permite simularea, analiza și optimizarea dispozitivelor și instalațiilor de natură electromagnetică, mecanică, termică și hidraulică, utilizate în diverse ramuri industriale.

3.Spre deosebire de majoritatea lucrărilor de specialitate din domeniul sudării prin topire, în care arcul electric este studiat doar din punct de vedere termic, în lucrarea de față acesta este privit ca un sistem în care au loc simultan procese electromagnetice, termice și de curgere a fluidelor, ce se influențează reciproc.

4.După ce s-a proiectat tehnologia de sudare respectivă, prin simularea și determinarea câmpului termic cu metoda ce face obiectul acestei lucrări, apare posibilitatea unei optimizări. Astfel, se pot stabili curentul de sudare și viteza de sudare, încât să se obțină adâncimea de pătrundere dorită, la o trecere, și apoi numărul de treceri.

5.Determinarea forțelor magnetice permite stabilirea modului de transfer a picăturilor de metal lichid prin coloana arcului electric. Totodată, printr-un proces de optimizare se pot afla valorile parametrilor tehnologici astfel încât să se obțină un mod de transfer dorit.

6.Pe baza ciclului termic, din punctele componentelor ce se sudează, se poate determina timpul de răcire de la 800 °C la 500 °C, t_{815} , care este un indicator asupra calității îmbinării sudate. De asemenea, printr-un proces de optimizare se obține căldura ce trebuie schimbată cu exteriorul pentru a obține o valoare impusă pentru acest timp.

7.Prin modelarea condițiilor de frontieră de la infinit, prezentată în lucrare, se pot studia și sisteme pentru care nu se cunosc condițiile de frontieră termice sau electromagnetice cu precizie suficient de bună. Aceasta conduce la o creștere a acurateții rezultatelor obținute.

8.Analiza conducției electrice oferă posibilitatea determinării distribuțiilor densității de curent și a puterii calorice specifice în regiuni cu o formă geometrică complexă, care practic nu pot fi determinate pe altă cale.

9. Prin utilizarea analizelor cuplate se reduc datele de intrare (încărcările) doar la cele care se cunosc cu precizie, cum ar fi curentul de sudare sau căderea de tensiune pe arcul electric, în cazul de față.

Totodată, se ia în considerare și dependența de temperatură a proprietăților de material.

10. Posibilitatea de a putea determina coeficientul de schimb de căldură prin convecție este foarte utilă în studiul și optimizarea procesului de răcire a dispozitivelor și instalațiilor electromagnetice cum ar fi mașinile și aparatele electrice.

11. Metoda prezentată permite obținerea proprietăților de material, și mai ales dependența lor de temperatură, care nu pot fi determinate direct, experimental, cum ar fi cele ale arcului electric. Pentru aceasta, se realizează sistemul respectiv și se măsoară valorile unor mărimi, de exemplu, temperatura în anumite puncte. Pentru proprietățile respective se introduc valori inițiale, alese de utilizator din literatura de specialitate. Se modelează și se analizează sistemul prin metoda prezentată. Printr-un proces de optimizare se obțin valorile proprietăților astfel încât temperatura în punctele alese să aibă valorile stabilite experimental.

12. Cu ajutorul analizei electromagnetice, prezentate în lucrare, se poate analiza câmpul magnetic al oricărui dispozitiv electromagnetic, de exemplu o mașină electrică. Folosind un proces de optimizare se pot stabili unele caracteristici geometrice: forma polilor, mărimea întrefierului, astfel încât să se obțină o anumită distribuție a inducției magnetice sau a forțelor magnetice.

13. Lucrarea este utilă și programatorilor, deoarece prezintă relațiile necesare implementării pe calculatorul electronic a metodei elementelor finite.

14. Metoda prezentată în lucrare poate fi utilizată de toți cei ce au ca domeniu de activitate aplicațiile inginerești ale proceselor fizice.

15. Lucrarea va fi folosită de autor ca bază pentru studiul altor sisteme și mai ales a mașinilor electrice. De asemenea, chestiunile teoretice vor fi folosite de autor în activitatea sa didactică.

7.2. Contribuții personale

7.2.1. Contribuții teoretice

1. Determinarea expresiei timpului de răspuns al buclei de măsură și stabilirea con-

dițiilor pentru obținerea unui timp de răspuns minim.

2. Stabilirea mai exactă a timpului de răspuns a unui conductor cilindric plin și a unui conductor cilindric gol.

3. Deducerea expresiei complete a tensiunii de ieșire pentru amplificatoare operaționale utilizate ca circuite de integrare și de derivare

4. Modelarea arcului electric ca parte a unei instalații de sudare electrică, și, pe baza modelului, determinarea variației în timp a curentului de sudare.

5. Definirea mai exactă a constantei de timp a arcului electric.

6. Stabilirea condițiilor complete ce trebuie impuse pentru a asigura univocitatea soluției modelului potențialelor electromagnetice.

7. Deducerea condițiilor de frontieră ce trebuie impuse pentru rezolvarea modelului potențialelor electromagnetice cu metoda elementelor finite.

8. Deducerea formei generale a ecuației conservării energiei.

9. Obținerea formei generale a ecuațiilor mișcării unui mediu continuu, care să fie valabilă și pentru un regim de curgere turbulentă.

10. Stabilirea unui model cu ajutorul căruia să se poată determina coeficientul de schimb de căldură prin convecție.

11. Stabilirea caracteristicilor ce trebuie să le posedă elementele finite.

12. Justificarea metodelor de asamblare a modelelor numerice elementale în modelul numeric global.

13. Stabilirea relațiilor pentru calculul elementelor matricei de rigiditate și a vectorului termenilor liberi ce intervin în modelul numeric elemental.

14. Introducerea unui operator ce permite scrierea condensată a modelului numeric elemental.

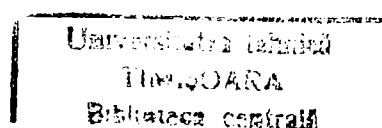
15. Deducerea modelului numeric necesar pentru realizarea unei analize cuplate.

16. Deducerea setului complet de relații pentru proiectarea circuitelor de integrare și a celor de derivare.

17. Stabilirea relațiilor de transformare pentru obținerea elementelor finite parametrice.

18. Folosirea elementelor finite parametrice pentru discretizarea porțiunilor curbe ale domeniului considerat.

19. Justificarea schemei electrice bloc a aparatului pentru măsurarea diferențelor



pantelor curentului de sudare.

20. Stabilirea etapelor de lucru cu metoda elementelor finite.

7.2.2. Contribuții experimentale și practice

1. Experimente și încercări în vederea realizării aparatului de măsurare a diferenței pantelor curentului de sudare.

2. Ajustarea parametrilor aparatului pentru măsurarea diferenței pantelor curentului de sudare.

3. Determinarea experimentală a dependenței de temperatură pentru permeabilitatea magnetică relativă a unor oțeluri.

4. Determinarea experimentală a curbei fundamentale de magnetizare pentru OL374K, cu ajutorul aparatului Epstein.

5. Determinarea experimentală a ciclului de histerezis dinamic pentru OL374K, cu ajutorul calculatorului electronic.

6. Determinarea experimentală a rezistivității electrice a arcului electric.

7. Determinarea cu precizie ridicată a timpului de răspuns în funcție de rază, pentru un conductor cilindric plin, respectiv gol.

8. Proiectarea aparatului pentru măsurarea diferenței pantelor curentului de sudare.

9. Testarea aparatului de măsurare a diferenței pantelor curentului de sudare cu ajutorul unui program de simulare a circuitelor electrice.

10. Folosirea unui program de simulare a circuitelor mixte, analog-digitale, pentru a studia modalitățile care să conducă la eliminarea "agățării" circuitelor de integrare și a intrării în oscilație a circuitelor de derivare.

11. Modelarea arcului electric și a sursei de alimentare cu un program de simulare a circuitelor electrice.

12. Proiectarea unui șunt bifilar pe baza timpului de răspuns.

13. Proiectarea unui șunt coaxial pe baza timpului de răspuns.

14. Proiectarea unui divizor de tensiune mixt pentru funcționarea în regim dinamic.

15. Determinarea experimentală a răspunsului indicial la divizorul de tensiune mixt.

16. Determinarea experimentală a răspunsului în frecvență a divizorului de tensiune mixt.

17.Determinarea coeficientului de schimb de căldură prin convecție între arcul electric și gazul de protecție.

18.Determinarea câmpului termic la o îmbinare sudată cu metoda elementelor finite.

19.Determinarea distribuției densității de curent și a puterii calorice specifice la o îmbinare sudată cu metoda elementelor finite.

20.Determinarea forțelor magnetice ce acționează asupra sârmei electrod cu metoda elementelor finite.

21.Determinarea variației în timp a temperaturii dintr-o îmbinare sudată cu metoda elementelor finite.

22.Folosirea unor analize cuplate, cu elemente finite, pentru studiul proceselor de sudare cu arc electric în mediu de gaz protector.

BIBLIOGRAFIE

Tratate. Manuale. Cursuri universitare

1. Altgausen, A.P., ș.a. – *Instalații electrotermice industriale* – E.T., București, 1965
2. Boarnă, C., ș.a. – *Procedee neconvenționale de sudare* – E.Facla, Timișoara, 1980
3. Centea, O. – *Echipamente pentru sudarea electrică* – E.Matrix Rom, București, 1998
4. Constantin, P., ș.a. – *Electronică industrială* – E.D.P., București, 1980
5. Dan, I., Moseanu, A. – *Redresoare cu semiconductoare* – E.T., București, 1975
6. Dănescu, Al., ș.a. – *Termotehnică și mașini termice* – E.D.P., București, 1985
7. Dănilă, Th., Cupcea, M. – *Amplificatoare operaționale* – E.Teora, București, 1991.
8. Dehelean, D. – *Sudarea prin topire* – E.Sudura, Timișoara, 1997
9. Dordea, T. – *Mașini electrice-Ediția a II-a* – E.D.P., București, 1977
10. Gârbea, D. – *Analiză cu elemente finite* – E.T., București, 1990
11. Hăntilă, F.I., ș.a. – *Câmpul electromagnetic staționar în medii neliniare* – E.I.C.P.E., București, 1997
12. Hortopan, Gh. – *Aparate electrice* – E.D.P., București, 1990
13. Ichim, I., Lupulescu, I. – *Tehnica sudării prin topire a metalelor și aliajelor* – E.T., București, 1983
14. Ionescu, D.Gh. – *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice* – E.D.P., București, 1983
15. Ioniță, V. – *Analiza numerică a dispozitivelor electromagnetice* – E.Matrix, București, 1998
16. Isbășoiu, E.C.Gh., Georgescu, S.C. – *Mecanica fluidelor* – E.T., București, 1995
17. Jin, I. – *The Finite Element Method in Electromagnetics* – John Wiley and Sons.Inc, New York, 1993
18. Kilyeni, Șt. – *Metode numerice-Vol.I și Vol.II* – E.Orizonturi Universitare, Timișoara, 1997.

19. Manolescu, A. – *Circuite integrate liniare* – E.D.P., București, 1983
20. Marinescu, I.N., Nanu, D., Oprean, C. – *Tehnologii neconvenționale. Dicționar de cuvinte* – E. I.N.I.D., București, 2001
21. McCalla, M.C. – *Fundamentals of Computers-Aided Circuit Simulation* – Kluwar Academic, 1988
22. Micloși, V., ș.a. – *Bazele proceselor de sudare* – E.D.P., București, 1982
23. Micloși, V., ș.a. – *Echipe pentru sudare* – E.D.P., București, 1984
24. Micloșină, V., ș.a. – *Bazele proceselor de sudare* – E.D.P., București, 1982
25. Mândru, Gh., Rădulescu, M.M. – *Analiza numerică a câmpului electromagnetic* – E.Dacia, Cluj-Napoca, 1986
26. Mocanu, C.I. – *Teoria câmpului electromagnetic* – E.D.P., București, 1970
27. Moon, T.C. – *Magneto-Solid Mechanics* – John Wiley and Sons.Inc, New York, 1993
28. Nanu, A. – *Tehnologia materialelor* – E.D.P., București, 1972
29. Nanu, A. – *Prelucrarea dimensională prin eroziune electrică în câmp magnetic* – E.Facla, Timișoara, 1977
30. Nanu, A. – *Tehnologia materialelor* – E.D.P., București, 1983
31. Olariu, V., Brătianu, C. – *Modelarea numerică cu elemente finite* – E.T., București, 1986
32. Petrila, T., Gheorghiu, I.C. – *Metode element finit și aplicații* – E.Academiei, București, 1985
33. Pomasko, M.U. – *MAG Welding "Not a sealed book"* – E.G.I. Manz, AG, Munch, 1991
34. Popovici, Vl., ș.a. – *Utilajele sudării electrice-Vol.I și Vol.II* – Lit.I.P.T.V.T., Timișoara, 1980
35. Safta, V. – *Controlul îmbinărilor și produselor sudate* – E.Facla, Timișoara, 1985
36. Sandu, D.D. – *Dispozitive și circuite electronice* – E.D.P. București, 1975
37. Sălăgean, T. – *Fenomene fizice și metalurgice la sudarea cu arcul electric a oțelurilor* – E.Academiei, București, 1963
38. Sălăgean, T. – *Sudarea cu arcul electric* – E.Facla, Timișoara, 1977
39. Sălăgean, T. – *Tehnologia proceselor de sudare cu arc electric* – E.T., Bucu-

rești, 1985

40. Stratton, I.A. – *Electromagnetic Theory* – McGraw-Hill, New-York, 1981
41. Șandru, E., ș.a. – *Termotehnică și aparate termice* – E.D.P., București, 1982
42. Șora, C. – *Bazele electrotehnicii* – E.D.P., București, 1982
43. Șora, I., Gologanov, N. – *Electrotermie și electrotehnologii-Vol.II* – E.T., București, 1990
44. Ștefănescu, D., ș.a. – *Transfer de căldură și masă* – E.D.P., București, 1983
45. Tătucu, I. – *Electrotehnică și mașini electrice* – E.U.E.M., Reșița, 1997
46. Târnovan, R., ș.a. – *Aparate electrice. Baze fizice* – E.Mediamira,
47. Văzdăuțeanu, Vl. – *Electrotermie* – Lit.I.P.T.V.T., Timișoara, 1971
48. Vladimirescu, A. – *SPICE* – E.T., București, 1999
49. Zienkiewicz, O.C. – *The Finite Element Method* – McGraw-Hill Company, London, 1997
50. *** – *Manualul inginerului termotehnician. Vol.I* – E.T., București, 1984
51. *** – *Memoratorul inginerului electrician* – E.T., București, 1971

Studii. Referate. Articole

52. Charl, M.V.K. – *Finite Element Solution of the Eddy Current Problem in Magnetic Structures* – IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. PAS – 93, 1974
53. Coloumb, J.L., Meunin, G. – *Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic Force and Torque Calculation*, – IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG – 20, no.6, 1984
54. Damjanic, F., Owen, D.R.J. – *Mapped Infinite Elements in Transcut Thermal Analysis* – Computers and Structures, vol. 18, no.4, 1984
55. David, Fl. ș.a. – *ANSYS^R numerical modeling of electromagnetic and thermal fields in a.c. electric arc furnaces* – Proceedings of Romanian Conference of ANSYS and Pro ENGINEERING Users, Sept. 22-23, 1999, Sinaia, Romania
56. Dehelean, D., Markocsan, N. – *Generarea formei prin pulverizare în jet de plasmă* – B.I.D., nr.2/2001, ISSN 1453-0392
57. Dehelean, D. – *Stadiul tăierii termice în România* – Conferința Internațională ”Tăierea termică”, Timișoara, 16-18 iunie, 1999

58. Diemendash, N.A. – *Three Dimensional Finite Element Vector Potential Formulation of Magnetic Fields in Electrical Apparatus* – IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. PAS – 10, no. 8, 1981
59. Garg V.K., Weiss J. – *Finite Element Solution of Transient Eddy Current Problems* – IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG – 22, no.6, 1986
60. Gylmesi, M., Ostergaard, D - *Mixed Shape Non-Conforming Edge Elements* –CEFC '98, Tucson, Az, 1998
61. Gylmesi, M. Ostergaard, D. – *Non-Conforming Hexahedral Edge Elements for Magnetic Analysis* – CUMPUMAG, Rio, 1997
62. Hoferkamp, N., ș.a. – *Numerical modeling of thermal plasma cutting* – Conferința Internațională ”Tăierea termică”, Timișoara, 16-18 iunie, 1999
63. Kaljević, I. – *An Infinite Boundary Element Formulation for Three Dimensional Potential Problems* – International Journal for Numerical Method in Engineering, vol. 35, no. 10, 1992
64. Kameari, A. – *Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge Elements* – IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, 1990
65. Li, Hui, Saigal, Sunil – *Mapped Infinite Elements for 3D Vector Potential Magnetic Problems* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, 1994
66. Marques, J.M.M.C. – *Infinite Element in Quasi-Static Materially Nonlinear Problems* – Computers and Structures, vol. 18, no.4, 1984
67. Mayergoyz, I.D. – *A New Scalar Potential Formulation for Three Dimensional Magnetostatic Problems* – IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG – 23, no.6, 1985
68. Micloși, V., ș.a. – *Influența aplicării câmpurilor magnetice exterioare asupra tendinței de fisurare la cald a aliajelor de aluminiu* – Sudura, an VI, nr. 4196
69. Nanu, D. – *Prelucrarea prin eroziune electrică în camp magnetic* – Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1979
70. Nedelec, J.C. – *Mixed Finite Element in R3-Numerical Methods*, vol. 55, 1990
71. Ohring, S., Lugt, N.J. – *Numerical Simulation of a Time – Dependent 3-D GMA Weld Pool Due to a Moving Arc* – Australian Welding Journal, Volume 45

72.Oprean, C. – *Contribuții privind optimizarea parametrilor fizici și tehnologici la prelucrările neconvenționale. Prelucrarea prin eroziune electrică cu electrod filiform* – Teză doctorat, București, 1985

73.Peșteanu, O. – *Schema echivalentă a jgheabului electromagnetic de transport al metalelor topite* – E.E.A. – Electrotehnică, 30 (1991), nr.1-6

74.Preis, K., ș.a. – *Different Finite Element Formulation of 3D Magnetostatic Fields* –IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, no.2, 1992

75.Sălăgean, T. – *Fenomene de transfer în arcul electric de sudare* – ISIM, Timișoara 1985

76.Scutelnicu, E., ș.a. – *Simularea câmpurilor termice din îmbinările sudate eterogene* – Conferința internațională de știința și ingineria materialelor – BRAMAT 2001, Brașov, 2001, vol.III.

77.Tătucu, I. – *Modelarea arcului electric și a câmpului electromagnetic la sudarea cu arcul electric* - Referat nr.1 – U.P.T., Facultatea de Mecanică, Timișoara 1999

78.Tătucu, I. – *Măsurarea caracteristicilor dinamice ale surselor de sudare*. Referat nr.2 – U.P.T., Timișoara, 2000

79.Tătucu, I. – *Factori de influență a calității îmbinărilor sudate cu arcul electric*.-Referat nr.3 – U.P.T., Timișoara, 2000

80.Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribution to the designing of a multiwired shunt of the basis of the response time* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000

81.Tătucu, I., Gruescu, L. – *On the response time of the measuring circuit with a shunt* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000

82.Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribution to the designing of a co-axial shunt on the basis of a response time* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000

83.Tătucu, I., Gruescu, L. – *Method and apparatus for measuring the difference of a slopes of the welding current* – Analele Facultății de Inginerie Hunedoara, Tom II, an I, fascicol 2, ISSN 1454-6531, 2000

84. Tătucu, I., Gruescu, L. – *The computer aided analysis of the electromagnetic field* – Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
85. Tătucu, I., Gruescu, L. – *On modeling of the electrical arc for electric welding* - Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
86. Tătucu, I., Gruescu, L. – *Designing and testing a numerical phasemeter*, Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an VII, nr.2, Tom I, 2000, ISSN 1453-7396
87. Tătucu, I., Gruescu, L. – *Contribuții la sistematizarea modelelor matematice ale câmpului electromagnetic folosite în metoda elementelor finite* – Analele Universității Eftimie Murgu, Reșița, an V, nr.2, 1998, ISSN 1453-7394
88. Vilarinho, L.O., Scotti, A. – *An alternative algorithm for synergic-pulsed 6MAW of aluminum* – Australian Welding Journal, Volume 45
89. Weiss, J. – *Efficient Finite Element Solution of Multipole Eddy Current Problems* – IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG – 12, no.6, 1988
90. Zienkiewicz, O.C. – *A Novel Boundary Infinite Element* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, 1983
91. Zienkiewicz, O.C., ș.a. – *Three Dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potential* – IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG – 13, no.5, 1977
92. *** – *Elemente ale fizicii sudării prin topire* – M.I.C.M., București, 1988