

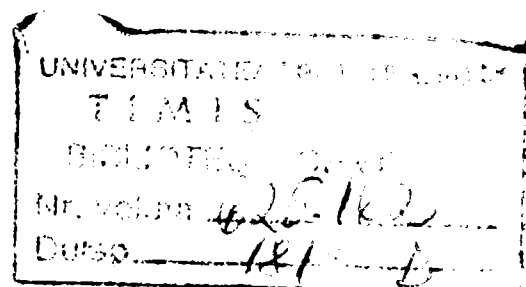
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA
Facultatea de Construcții și Arhitectură

Ing. Adrian IVAN

Contribuții la studiul stabilității structurilor reticulate

TEZĂ DE DOCTORAT

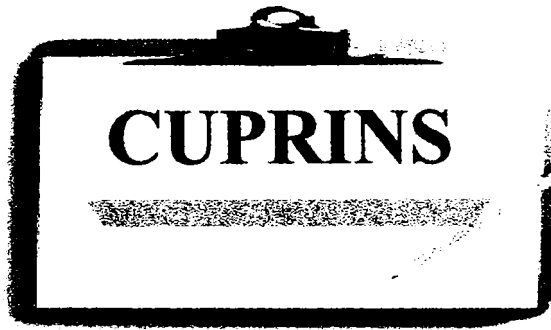
BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA



Conducător Științific

Prof. Dr. Ing. Victor GIONCU

1999



Cuprins

1 INTRODUCERE	1-1
1.1. Sisteme structurale reticulate.....	1-1
1.2. Tipuri de cupole reticulate simplu strat.....	1-7
1.2.1. Cupolele cu arce și inele.....	1-7
1.2.2. Cupolele Schwedler.....	1-12
1.2.3. Cupole lamelare.....	1-13
1.2.3.1. Cupola cu diagonale pe două direcții	1-13
1.2.3.2. Cupolele Kiewitt	1-15
1.2.4. Cupole cu rețea de bare paralele	1-18
1.2.5. Cupole geodezice	1-19
1.2.5.1. Cupole geodezice cu rețea icosaedrală.....	1-19
1.2.5.2. Cupole geodezice cu rețea dodecaedrală.....	1-21
1.2.5.3. Cupole geodezice cu rețea icosododecaedrală	1-22
1.2.5.4. Cupole geodezice cu rețea icosaedrală turtită	1-23
1.2.5.5. Cupole geodezice cu rețea dodecaedrală teșită	1-23
1.3. Particularități ale comportării structurilor curbe reticulate din încărcările exterioare	1-24
1.4. Colapsul acoperișului sălii de expoziție din București.....	1-26
1.5. Stadiul actual al calculului stabilității cupolelor reticulate simplu strat.....	1-30
1.5.1. Factorii care influențează instabilitatea structurilor reticulate	1-30
1.5.1.1 Modurile de instabilitate.....	1-30
1.5.1.2 Comportarea neliniară	1-30
1.5.1.3 Influența imperfecțiunilor.....	1-31
1.5.1.4 Instabilitatea generală.....	1-33
1.5.1.5 Propagarea instabilității locale în colapsul cupolei	1-34
1.5.2. Pașii necesari în analiza instabilității cupolelor reticulate.....	1-35
1.6. Probleme nerezolvate	1-35
1.7. Scopul tezei de doctorat	1-36
BIBLIOGRAFIE	1-38

2. CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR ALCĂTUIATE DIN BARE

.....	2-1
2.1 Probleme generale	2-1
2.2 Tensorul deformațiilor specifice	2-2
2.3 Ecuația constitutivă	2-6
2.4 Ecuațiile de echilibru static neliniare pentru bară	2-7
2.5 Ecuația de continuitate	2-9
2.6 Relații între eforturi și deformații.....	2-9
2.7 Ecuația de echilibru fundamentală	2-10
2.8 Matricea tangentă a rigidității barei sollicitate spațial cu imperfecțiuni geometrice de bară și nod.....	2-13
2.8.1 Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale	2-15
2.8.2 Efectul forței axiale asupra rigidității din încovoiere în planul 1-2	2-17
2.8.3 Efectul forței axiale asupra rigidității din încovoiere în planul 1-3	2-18
2.8.4 Efectul forței axiale asupra rigidităților produse de deplasările liniare ale nodurilor ...	2-18
2.8.5 Influența forței axiale asupra rigidității la torsiune	2-22
2.8.6 Imperfecțiuni geometrice de bară.....	2-22
2.8.7 Imperfecțiuni de nod	2-27
2.8.7.1 Influența rigidității conexiunilor asupra elementelor rigidității barei	2-27
2.8.7.2 Influența conexiunilor cu dimensiuni finite	2-30
2.8.8 Influența imperfecțiunilor de bară asupra rigidității axiale	2-32
2.8.9 Conexiuni cu rigiditate axială.....	2-32
2.8.10 Conexiuni cu rigiditate la torsiune	2-33
2.9 Matricea rotației nodului	2-34
2.10 Matricea orientării elementului și deformații relative.....	2-36
2.11 Metoda incrementală a rigidității secante.....	2-39
2.12 Matricea incrementală a rigidității tangentă.....	2-40
2.13 Procedul de calcul.....	2-43
2.14 Concluzii	2-45
BIBLIOGRAFIE	2-46

3. METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR	3-1
3.1 Probleme generale	3-1
3.2 Ecuațiile de echilibru în metoda elementului finit	3-4
3.3 Tehnici de rezolvare iterative	3-5
3.4 Strategii iterative	3-8
3.4.1 Iterarea considerând încărcarea constantă	3-8
3.4.2 Iterarea cu deplasări constante	3-8
3.4.3 Iterarea cu arce de lungime constantă	3-9
3.4.4 Iterarea cu menținerea lucrului mecanic exterior constant	3-10
3.4.5 Iterarea cu parametrul de control minimul normei deplasării neechilibrate	3-10
3.4.6 Iterarea cu parametru de control norma minimă a forței neechilibrate	3-11
3.4.7 Iterarea cu un răspuns ponderat constant	3-12
3.5 Metodele pentru aplicarea automată a incrementului de încărcare	3-14
3.5.1 Metode de incrementare a încărcării bazate pe raportul J_d/J_{i-1}	3-15
3.5.1.1 Incrementarea directă a parametrului de încărcare	3-15
3.5.2 Incrementarea lungimii arcului	3-16
3.5.2.1 Incrementarea lucrului mecanic exterior	3-16
3.5.3 Metode de incrementare bazate pe parametrul curent al rigidității S_λ	3-17
3.5.4 Metodă incrementală bazată pe o aproximație parabolică a curbei încărcare deplasare	3-19
3.5.5 Semnul incrementului inițial de încărcare	3-20
3.6 Concluzii	3-21
BIBLIOGRAFIE	3-22
4. ANALIZA NUMERICĂ A STABILITĂȚII ECHILIBRULUI CUPOLELOR METALICE SIMPLU STRAT	4-1
4.1 Probleme generale	4-1
4.1.1 Dificultăți în determinarea încărcării de colaps	4-1
4.1.2 Calculul neliniar și stabilitatea plăcilor curbe reticulate	4-19
4.2 Ecuațiile de echilibru în metoda elementului finit	4-22

4.3 Cupole metalice analizate.....	4-23
4.4 Determinarea încărcărilor pentru modelele analizate.....	4-24
4.4.1 Modelul 1. Cupola cu un nod și șase bare.....	4-24
4.4.1.1 Instabilitatea de bară.....	4-26
4.4.1.2 Instabilitatea de nod	4-27
4.4.1.3 Prezentarea comparativă a rezultatelor.....	4-32
4.4.2 Cupola cu 24 de bare și 13 noduri.....	4-33
4.4.2.1 Instabilitate de bară	4-36
4.4.2.2 Instabilitatea de nod	4-38
4.4.2.3 Instabilitatea de inel.....	4-39
4.4.2.4 Instabilitatea generală.....	4-40
4.4.2.5 Prezentarea comparativă a rezultatelor.....	4-48
4.4.3 Modelul 3. Cupola alcătuită din 72 bare și 37 noduri	4-50
4.4.3.1 Instabilitatea de bară.....	4-52
4.4.3.2 Instabilitatea de nod	4-54
4.4.3.3 Instabilitatea de inel.....	4-55
4.4.3.4 Instabilitatea generală.....	4-56
4.4.3.5 Prezentarea comparativă a rezultatelor.....	4-64
4.5 Influența imperfecțiunilor.....	4-66
4.5.1 Imperfecțiuni de element.....	4-68
4.5.2 Imperfecțiuni structurale	4-68
4.5.3 Cupola cu un nod și șase bare	4-69
4.5.4 Cupola cu 24 de bare și 13 noduri.....	4-70
4.5.5 Cupola cu 72 de bare și 37 de noduri	4-75
4.6 Concluzii	4-78
BIBLIOGRAFIE	4-81
5. PROPAGAREA INSTABILITĂȚII LOCALE LA CUPOLELE	
RETICULATE SIMPLU STRAT	5-1
5.1 Introducere	5-1
5.2 Instabilitatea structurilor tratată ca fenomen dinamic	5-1
5.3 Fenomenul de propagare a instabilității locale.....	5-3
5.4 Saltul echilibrului	5-19

5.4.1 Parametri inițiali ai saltului echilibrului	5-20
5.5 Analiza dinamică a propagării flambajului	5-22
5.5.1 Ecuația de mișcare.....	5-22
5.5.2 Discretizarea structurii	5-22
5.5.3 Calculul elementelor din matricile [M], [C], [Kt].....	5-22
5.5.3.1 Matricea maselor structurii.....	5-22
5.5.3.2 Matricea de amortizare	5-24
5.5.3.3 Matricea rigidității tangentă	5-24
5.5.4 Procedura numerică de rezolvare	5-25
5.6 Testări numerice.....	5-28
5.6.1 Cupola cu 24 de bare	5-28
5.6.1.1 Cupola perfectă încărcată cu o forță concentrată	5-29
5.6.1.2 Cupola perfectă încărcată cu 7 forțe concentrate	5-34
5.6.1.3 Cupola perfectă încărcată cu o forță mărită în nodul central și forțe egale în celelalte noduri	5-36
5.6.1.4 Influența imperfecțiunilor geometrice de nod central	5-38
5.6.2 Cupola cu 72 de bare	5-40
5.6.2.1 Cupola perfectă încărcată cu o forță concentrată	5-40
5.6.2.2 Cupola perfectă încărcată cu 19 forțe concentrate	5-41
5.6.2.3 Cupola perfectă încărcată cu $P_c = 1,32P$ și $18P$	5-42
5.6.2.4 Influența imperfecțiunilor geometrice de nod central	5-45
5.7 Concluzii	5-47
BIBLIOGRAFIE	5-49

6. MĂSURI CONSTRUCTIVE PENTRU EVITAREA PROPAGĂRII INSTABILITĂȚII LOCALE ÎN INSTABILITATE GENERALĂ.....

6.1 Introducere	6-1
6.2 Cupola cu 24 de bare.....	6-2
6.2.1 Cupola imperfectă cu încărcare uniformă	6-2
6.2.2 Cupola perfectă cu încărcare majorată în nodul central	6-7
6.2.3 Cupola perfectă cu încărcare uniformă	6-12
6.3 Cupola cu 72 de bare.....	6-13
6.3.1 Cupola imperfectă cu încărcare uniformă	6-13
6.3.2 Cupola perfectă cu forța majorată în nodul central	6-22

6.4 Concluzii	6-29
6.5 Propuneri și recomandări	6-31
BIBLIOGRAFIE	6-32

7. CONCLUZII FINALE 7-1

7.1 Considerații finale	7-1
7.2 Contribuții originale	7-3
7.3 Direcții propuse pentru cercetări viitoare.....	7-6

ANEXA A - Rezultatele testărilor numerice pentru cupola cu 24 de bare

ANEXA B - Rezultatele testărilor numerice pentru cupola cu 72 de bare

CAPITOLUL 1



INTRODUCERE

1. INTRODUCERE

Evoluția în timp a cupolelor, a fost determinată de apariția și dezvoltarea materialelor de construcții. În antichitate cupolele au fost construite din piatră naturală, apoi zidăria și ceramica au înlocuit treptat piatra naturală. Lemnul s-a folosit frecvent la realizarea cupolelor în Germania, Franța, Italia, Rusia și în Scandinavia. Betonul armat a contribuit și el la dezvoltarea cupolelor cu deschideri mici și medii.

Apariția oțelului a deschis o nouă perspectivă în dezvoltarea cupolelor. Oțelul este un material cu rezistențe mari, ceea ce permite realizarea de structuri ușoare.

În ultimii 50 de ani se folosesc din ce în ce mai mult structurile metalice reticulate spațiale datorită avantajelor lor:

- aspect arhitectonic foarte reușit;
- acoperă deschideri mari fără reazeme intermediare;
- au un consum redus de material;
- sunt alcătuite din bare cu aceleași dimensiuni și sunt prinse în noduri cu același tip de îmbinare;
- grad de siguranță ridicat prin execuția în uzină și controlul de calitate;
- necesită utilizarea unor programe de calcul performante la proiectarea lor;
- tipizarea barelor și subansamblurilor în uzină;
- montaj rapid și ușor pe șantier.

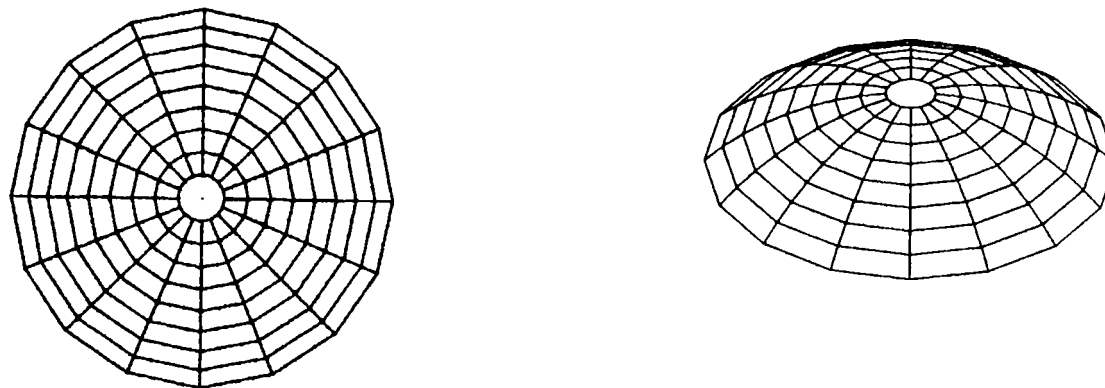
Se utilizează două tipuri de structuri reticulate: simplu strat și dublu strat. Distribuția barelor la structurile reticulate se alege astfel încât să rezulte o structură cu distribuție regulată. Această distribuție prezintă avantaje atât în calculul structurii cât și la execuție. În ingineria structurilor se cunosc mai multe tipuri de împărțire a cupolelor sferice pentru a se obține cupole reticulate simplu strat.

1.1 Sisteme structurale reticulate

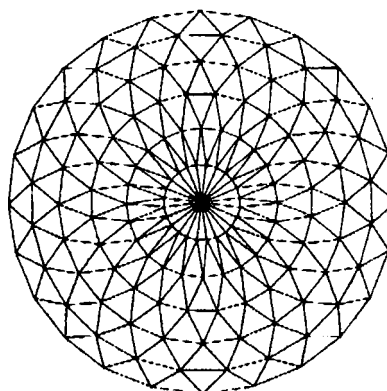
Plăcile curbe reticulate sunt structuri spațiale. Conlucrarea spațială a acestor structuri se realizează prin: interacțiunea elementelor componente (Fig. 1.1a) când structurile sunt alcătuite din elemente liniare (grinzi, arce), legate între ele în noduri astfel încât să poată prelua încărcările din exploatare.

La structura din figura 1.1a încărcarea se preia prin pane și arce și este transmisă la grinda inelară pe care reazemă cupola.

Spațialitatea dată de formă (Fig.1.1.b) apare la structurile alcătuite dintr-o rețea de elemente liniare cu noduri dispuse pe o suprafață curbă. Asemenea structuri nu pot fi descompuse în elemente simple fără să fie afectată calitativ maniera în care ele preiau încărcarea. Toate elementele structurale, participă în același mod la preluarea încărcării. Analiza plăcilor curbe reticulate se poate efectua considerând interacțiunea tuturor elementelor structurale, ceea ce determină spațialitatea de formă.



a) Cupole cu arce și inele



b) Cupole reticulate

Fig.1.1 Tipuri de cupole

La analiza comportării stabilității structurilor curbe reticulate, patru factori au importanță fundamentală:

- forma** (Fig. 1.2) - se referă la clasificarea plăcilor curbe reticulate pe baza curburii Gauss: pozitivă (sfera, cupola, paraboloidul eliptic), zero (cilindrul și conul) și negativă (paraboloidul hiperbolic și hiperboloidul);
- structura internă** (Fig. 1.3) precizează dispoziția zăbrelelor și poate fi o rețea triunghiulară (triunghi isoscel sau dreptunghic) sau o rețea ortogonală;
- unitatea structurii** depinde de tipul elementelor care intervin în alcătuirea structurii : bare și grinzi dispuse într-un singur strat sau în dublu strat (Fig. 1.4.);

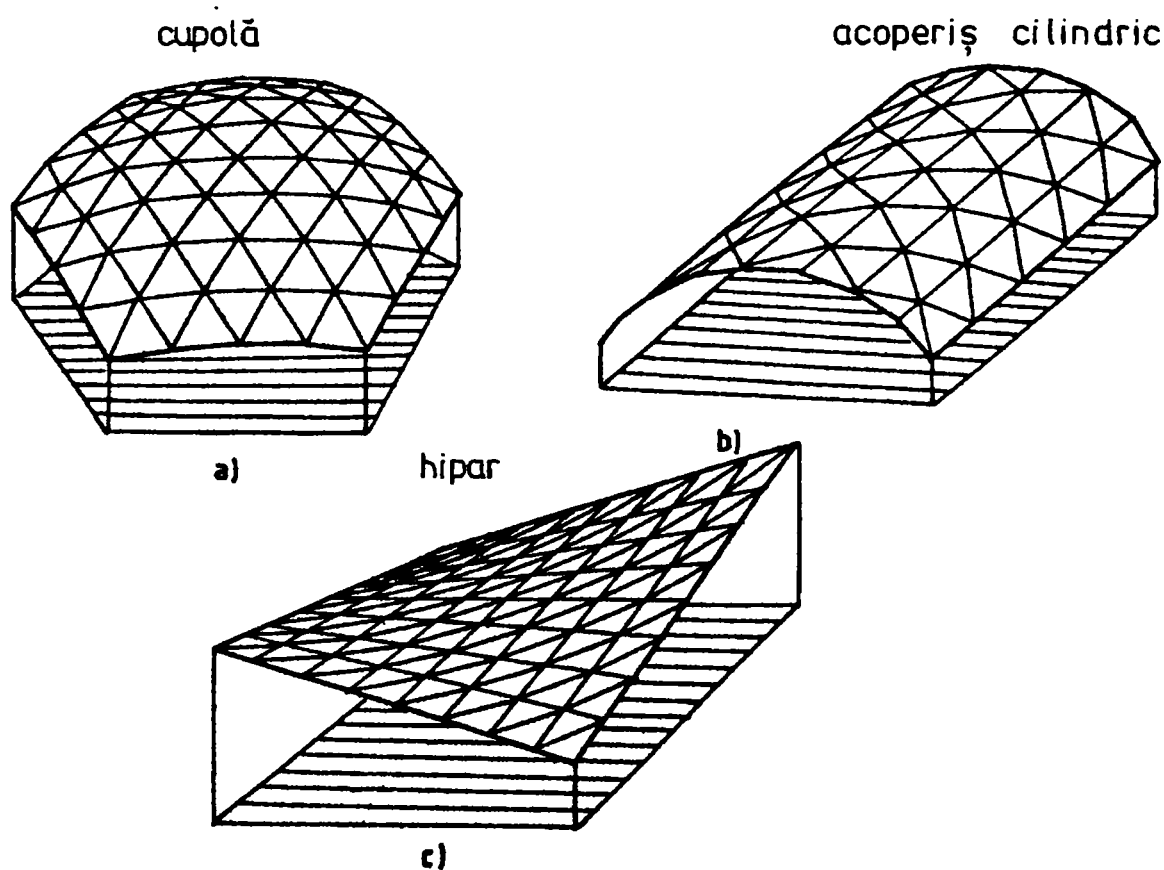


Fig. 1.2 Structuri reticulate

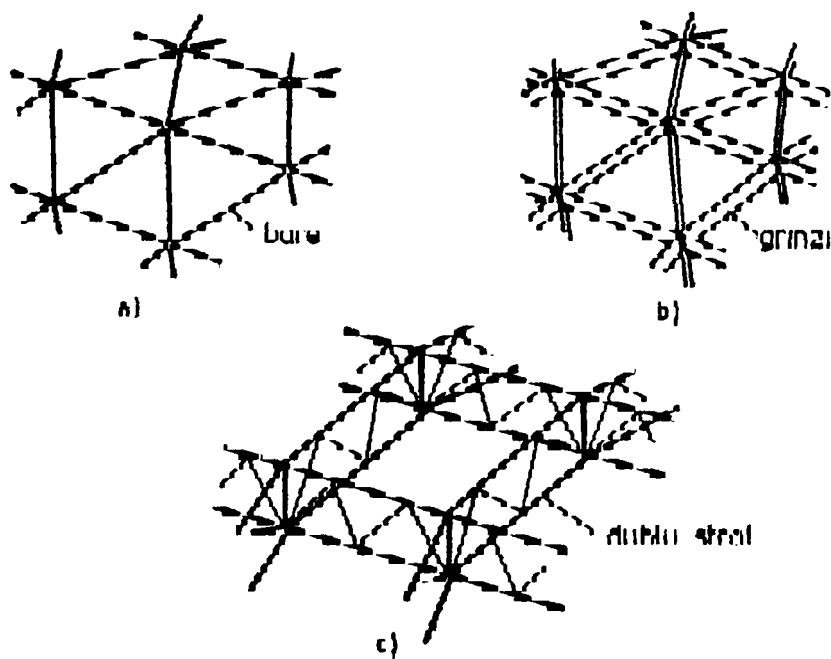
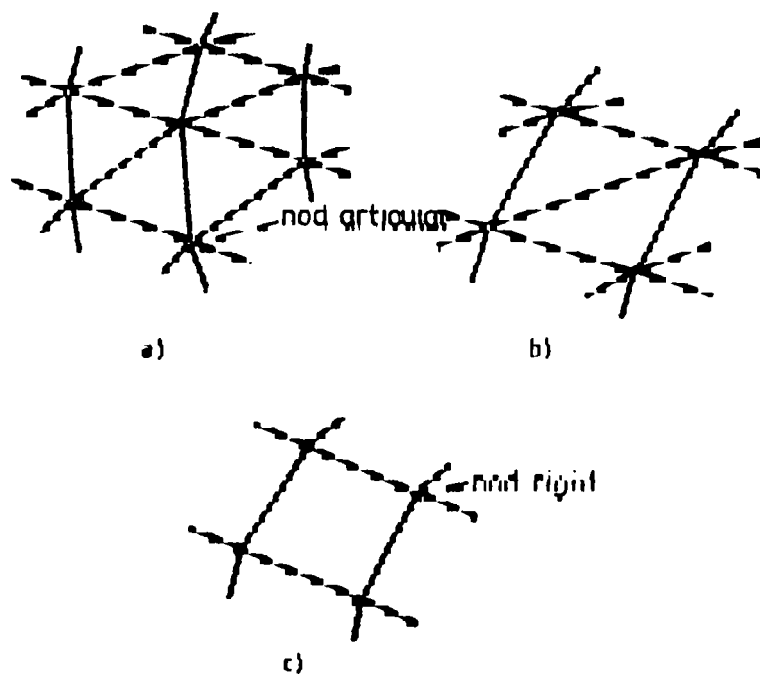
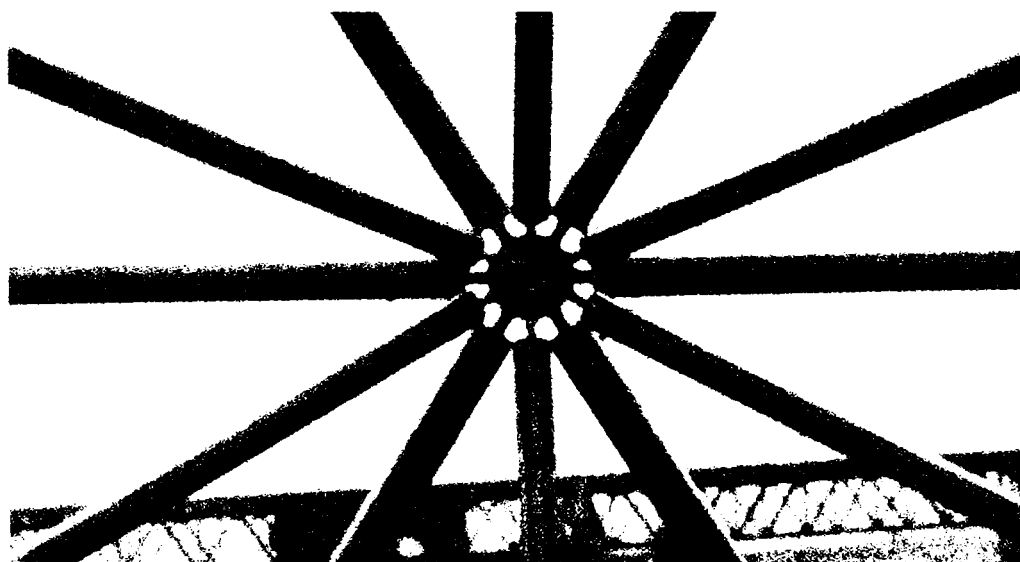


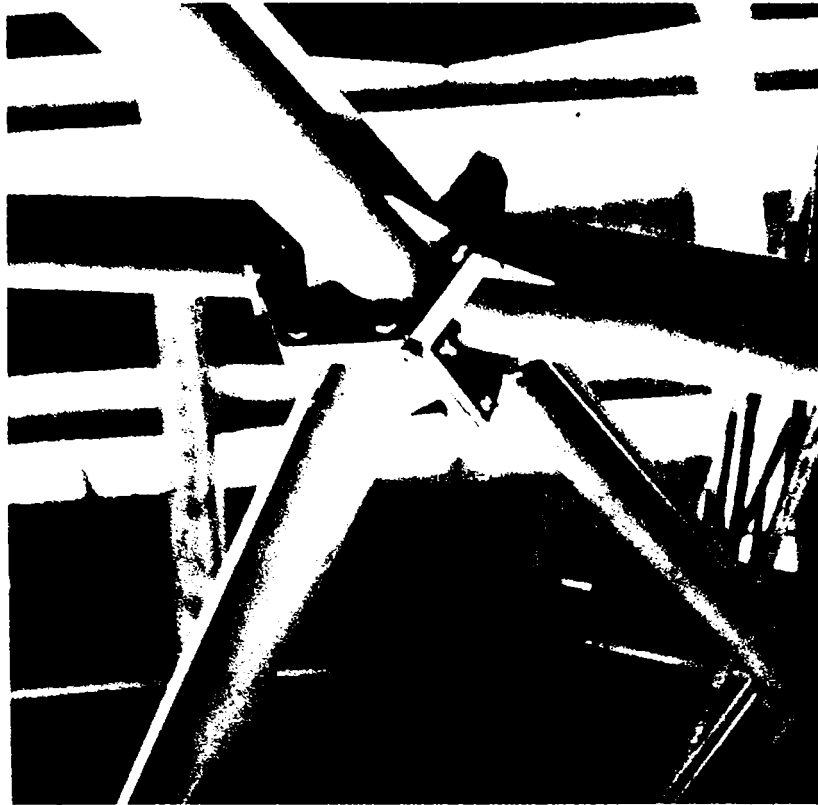
Fig. 1.4 Tipuri de elemente structurale în rețea

- a) bare
- b) grinzi
- c) rețea dublu strat

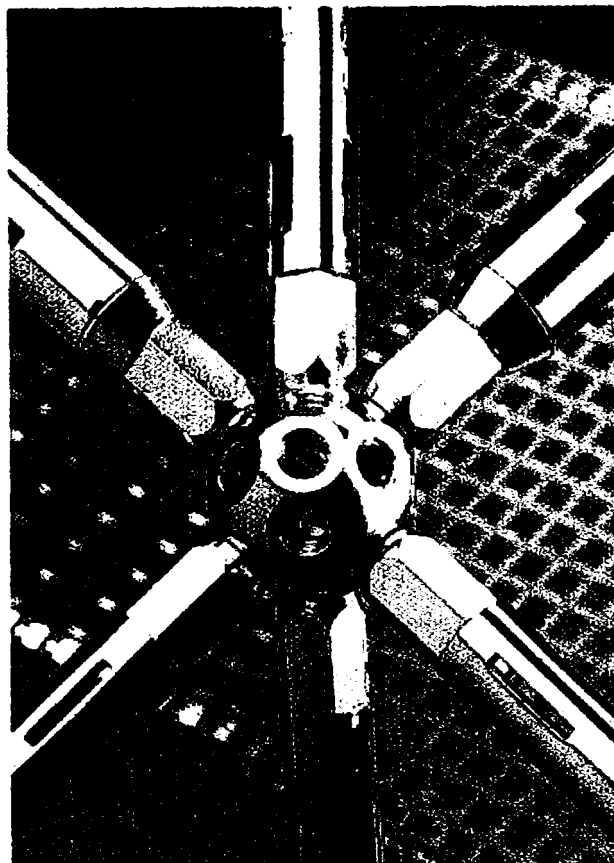
d) tipul de îmbinări utilizat la prinderea barelor în noduri, care poate fi clasificat în funcție de tehnica de îmbinare cu șuruburi, sudură sau conectori speciali (Fig.1.5).



a) sudat



b) cu șuruburi



c) cu conectori mecanici

Fig. 1.5 Prinderea barelor în nod

1.2 Tipuri de cupole reticulate simplu strat

1.2.1 Cupolele cu arce și inele

Cupolele cu arce și inele (Fig. 1.6. și 1.7.) sunt cele mai vechi structuri care au fost construite. Ele sunt alcătuite din arce care reazemă la cheie pe un inel central, iar la bază pe un alt inel. Secțiunea transversală a arcelor este cu inimă plină sau cu zăbrele (plane sau spațiale) în funcție de mărimea deschiderii. Spațialitatea structurii se asigură prin pane prinse rigid, sau articulat și contravântuiri (fig. 1.8). În figura 1.6 se prezintă vederea interioară a cupolei Cox executată la Blackpool, iar in fig. 1.7 se prezintă cupola executată în Grecia pentru hotelul Palace Rodos. Cupola are deschiderea de 60,96 m și a fost executată în 1973. Cupola cu diametrul de 32 m care acoperă centrul de întruniri a clinicii Rhon din Bad Neustadt se prezintă în figura 1.8.

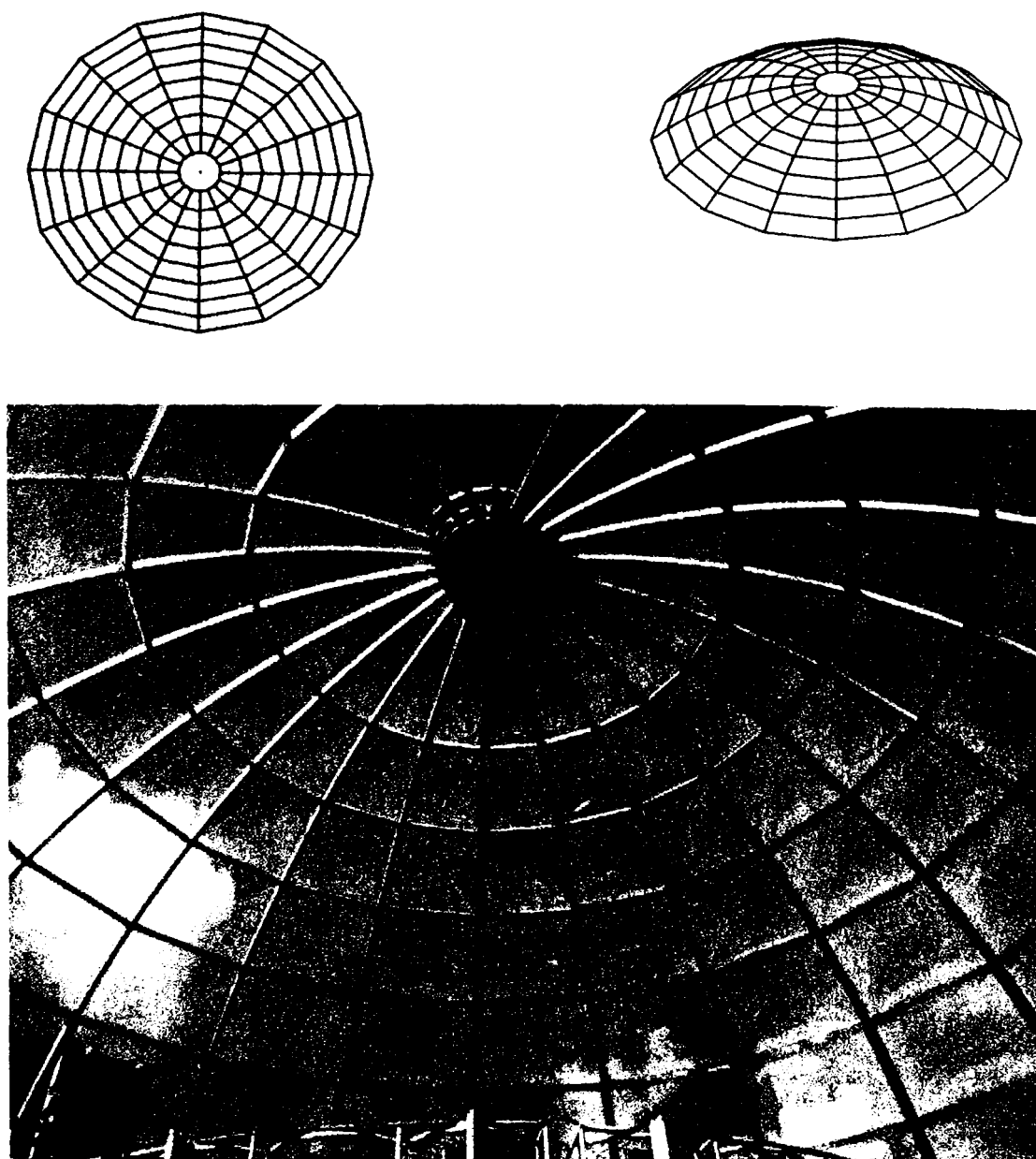


Fig. 1.6 Cupole cu arce și inele

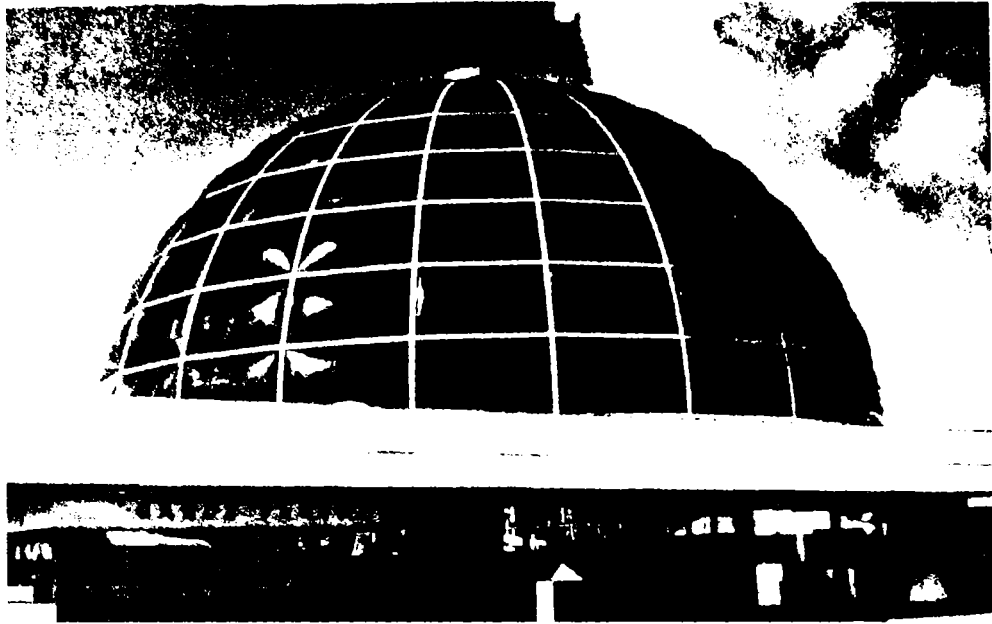


Fig. 1.7 Cupolă executată în Grecia pentru hotelul Palace Rodos

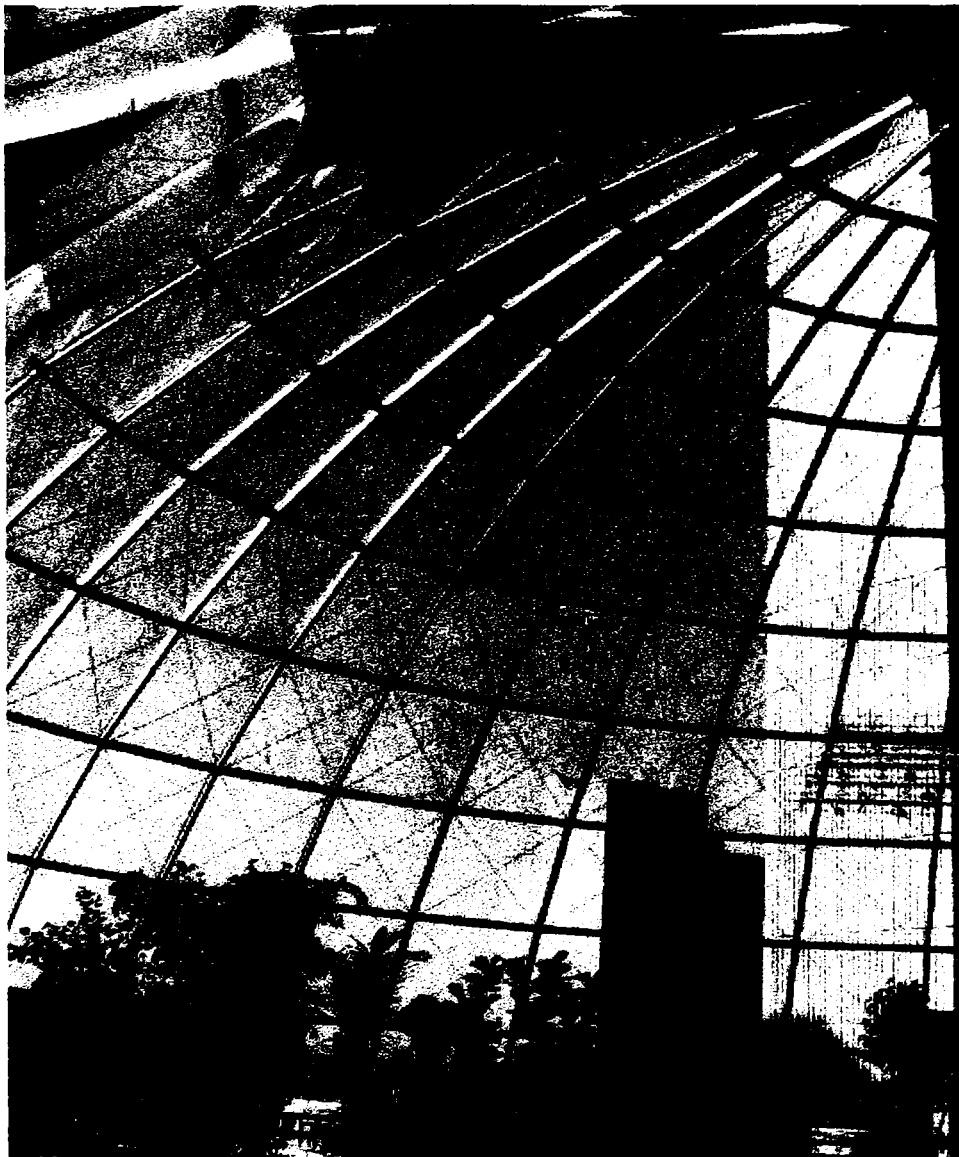


Fig. 1.8 Cupola centrului de întruniri al clinicii Rhon din Bad Neustadt

Cupola peste holul central de la Banca Agricolă din Arad [1.17] este o structură metalică cu diametrul de 14,4 m și săgeata de 7,2 m. Structura de rezistență este alcătuită din 24 semiarce cu inima plină, care se întâlnesc la cheie într-un nod central cu diametru de 1,5 m. Între arce au fost dispuse pane și contravântuiri din oțel beton.

În figura 1.9 a și b se prezintă două vederi ale cupolei în timpul montajului pe șantier.

a) Vedere exterioară



b) Vedere interioară



Fig.1.9 Cupolă cu arce și inele executată în Arad la Banca Agricolă

Cupola din București a pavilionului ROMEXPO [1.25] are o structură metalică alcătuită din 32 de semiarce rezemate pe un inel central cu inimă plină și la naștere pe un inel din beton armat. Arcele au secțiunea transversală de formă triunghiulară și sunt confecționate din țevi cu secțiunea circulară. La naștere și intermediar sunt amplasate încă două inele spațiale, care leagă între ele semiarcele (Fig. 1.10).

Peste arce sunt rezemate paneele care au formă circulară și sunt executate din țevi. Învelitoarea cupolei este realizată din chesoane de aluminiu cu izolație termică. Deschiderea cupolei este de 93,5 m, săgeata cupolei este de 19,1 m și raza sferei de 70 m. La partea superioară este prevăzut un lanternou și luminător, la partea inferioară a cupolei. În figura 1.10 se prezintă o vedere din timpul execuției. Alte detalii se observă în figura 1.11 a, b și c.

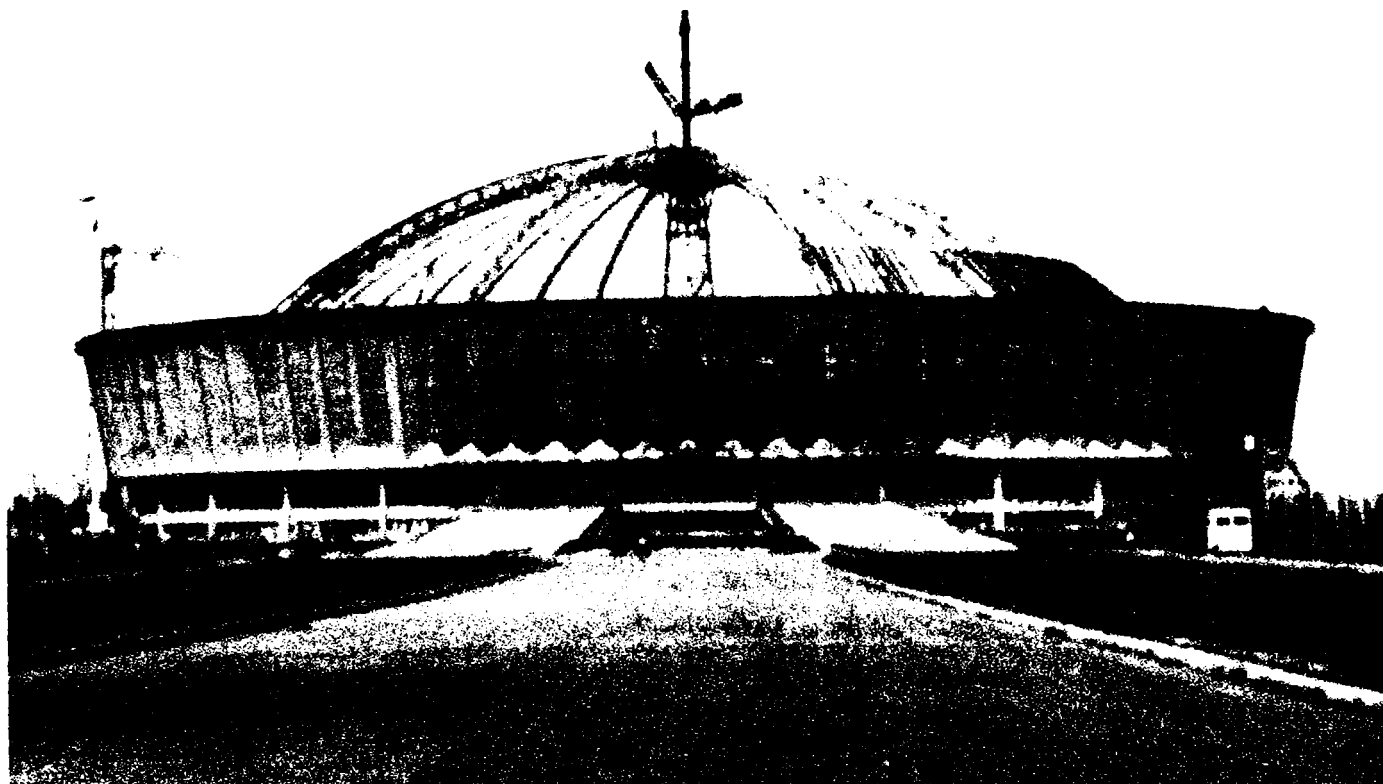
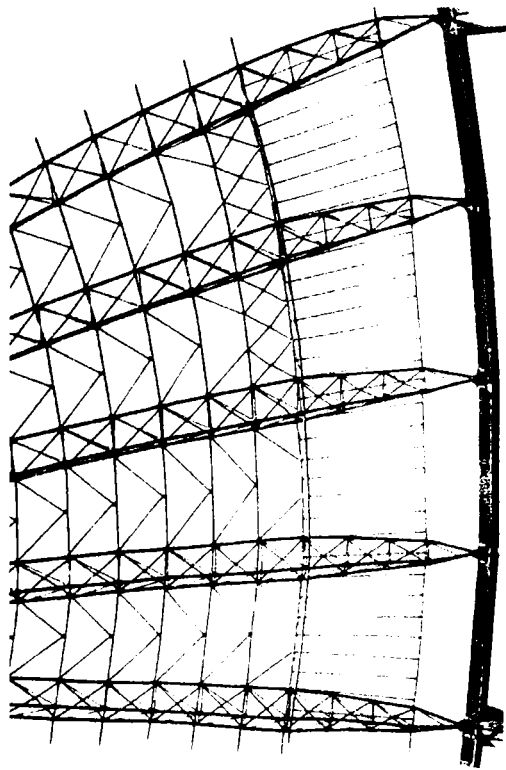
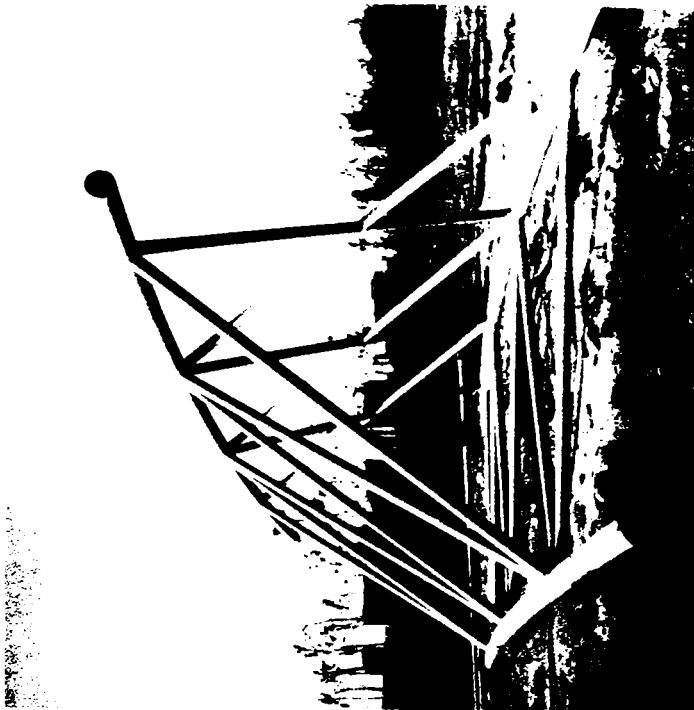


Fig. 1.10 Cupola cu arce spațiale și inele din București la pavilionul ROMEXPO

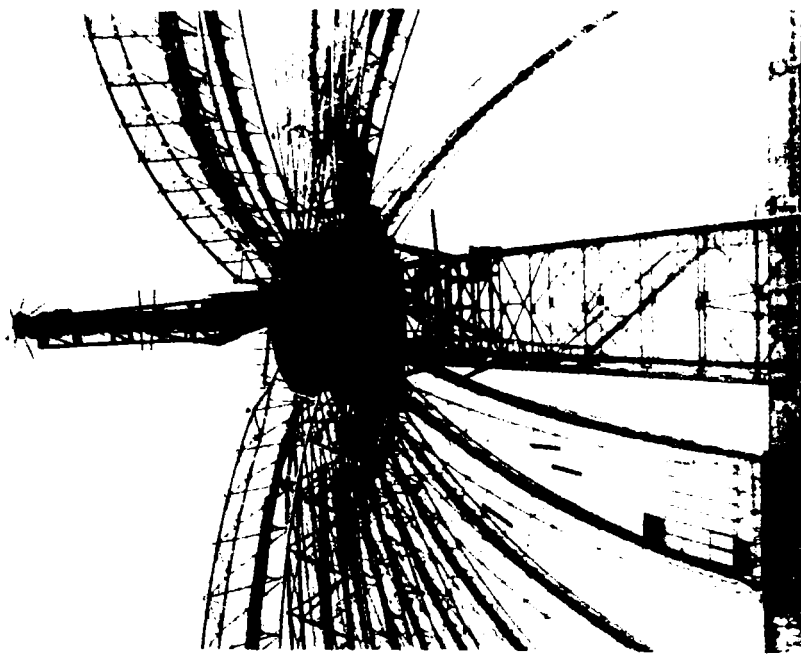
a)



b)



c)



1-11

Fig. 1.11 a) Intradosul cupolei ROMEXPO din București în timpul montajului
b) Secțiunea transversală a arcului
c) Vedere din timpul montajului cupolei

1.2.2 Cupolele Schwedler

Sunt cele mai răspândite cupole care au fost construite (Fig.1.12. și 1.13.). Structura de rezistență a acestor cupole este alcătuită din arce meridionale, legate cu inele după direcția paralelelor și rigidizate cu o diagonală sau două în fiecare panou. Acest tip de cupole a fost introdus de inginerul german J.W. Schwedler în 1863. În figura 1.13. se prezintă cupola care acoperă Coliseum Charlotte din Carolina de Nord din SUA.

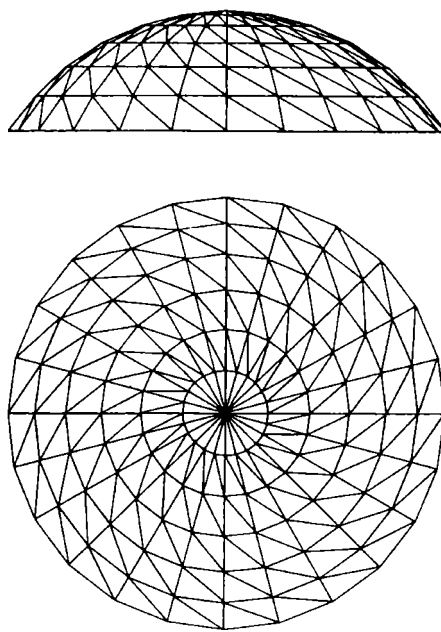


Fig. 1.12 Cupolă Schwedler

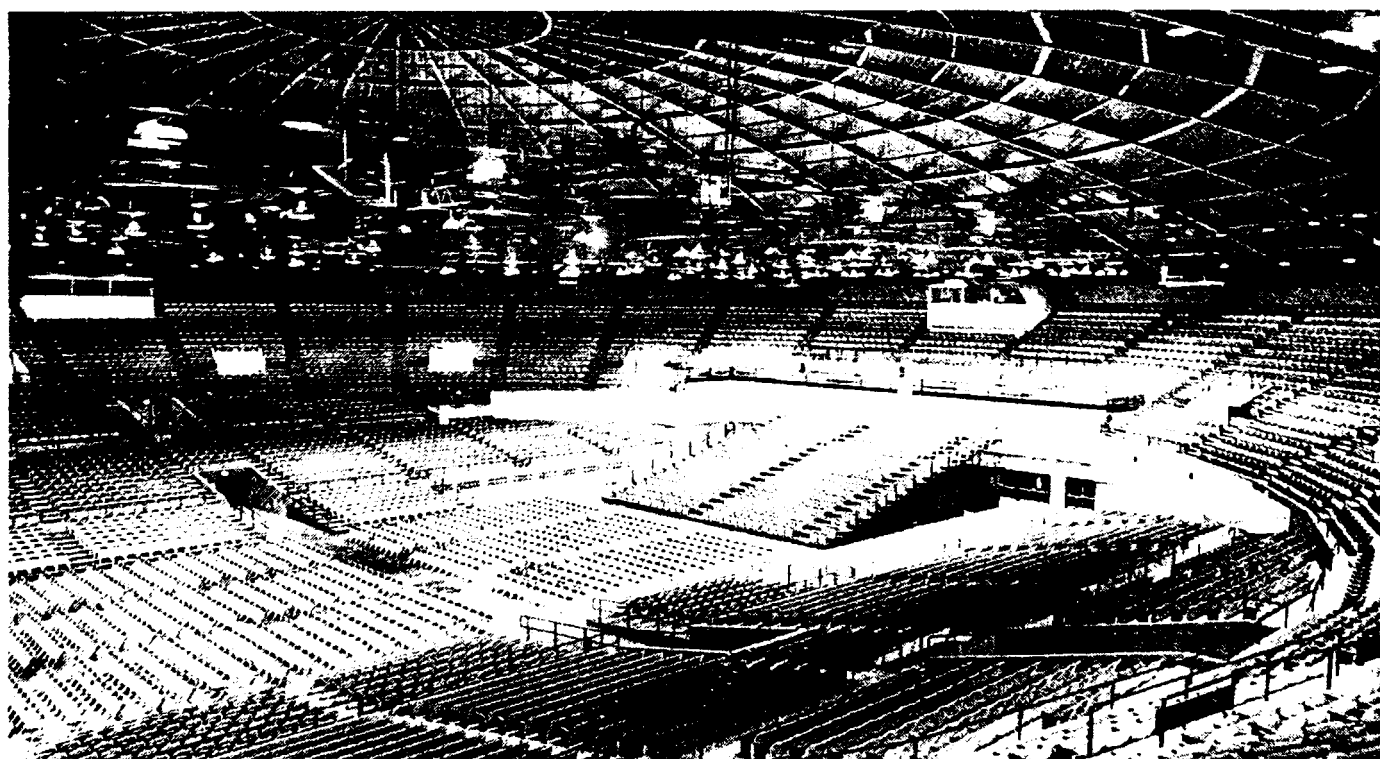


Fig. 1.13 Cupola de tip Schwedler care acoperă Coliseum Charlotte din Carolina de Nord din S.U.A.

1.2.3 Cupole lamelare

Cupolele lamelare sunt alcătuite din inele și diagonale care formează un sistem romboidal. Aceste cupole se realizează în principal în două variante. În prima variantă diagonalele sunt dispuse de-a lungul liniilor radiale crescând treptat din centrul cupolei și în a doua variantă cupola este împărțită în mai multe sectoare, fiecare sector fiind format din romburi de aceeași mărime (Kiewitt).

1.2.3.1 Cupola cu diagonale pe două direcții

Cupola cu diagonale pe două direcții (Fig.1.14 și 1.15) este soluția adoptată în sistemul japonez “Cupola Diamond” de către firma Tomoeguni Iron Works. Exemple de cupole executate după această soluție se prezintă în figura 1.15 a, pentru acoperirea unui bazin de înot din Franța. Cupola are deschiderea de 30,3 m și a fost asamblată la sol și apoi montată cu două macarale pe pneuri. Pozițiile intermediare de montaj se prezintă în figurile 1.15 a și b.

În figura 1.16 se prezintă vederea în plan, elevația și două vederi ale unei cupole de același tip care acoperă Centrul Sportiv din Opole, Polonia. Cupola are un diametru de 70 m și un consum de oțel de 37 kg/m².

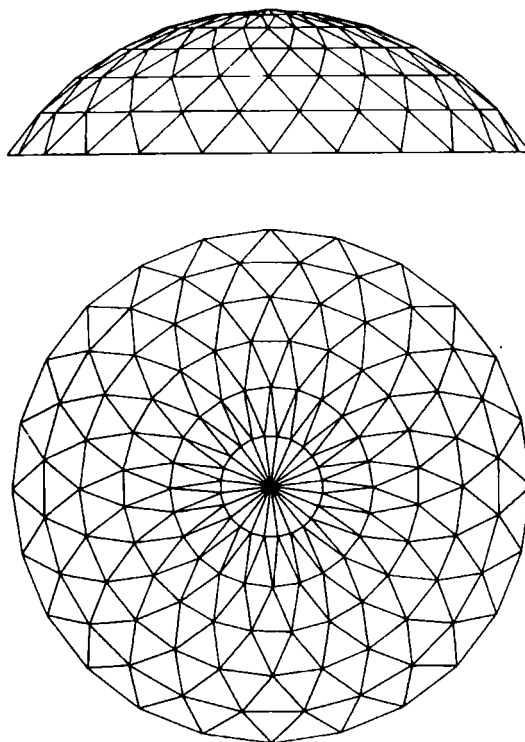


Fig. 1.14 Cupolă cu diagonale pe două direcții

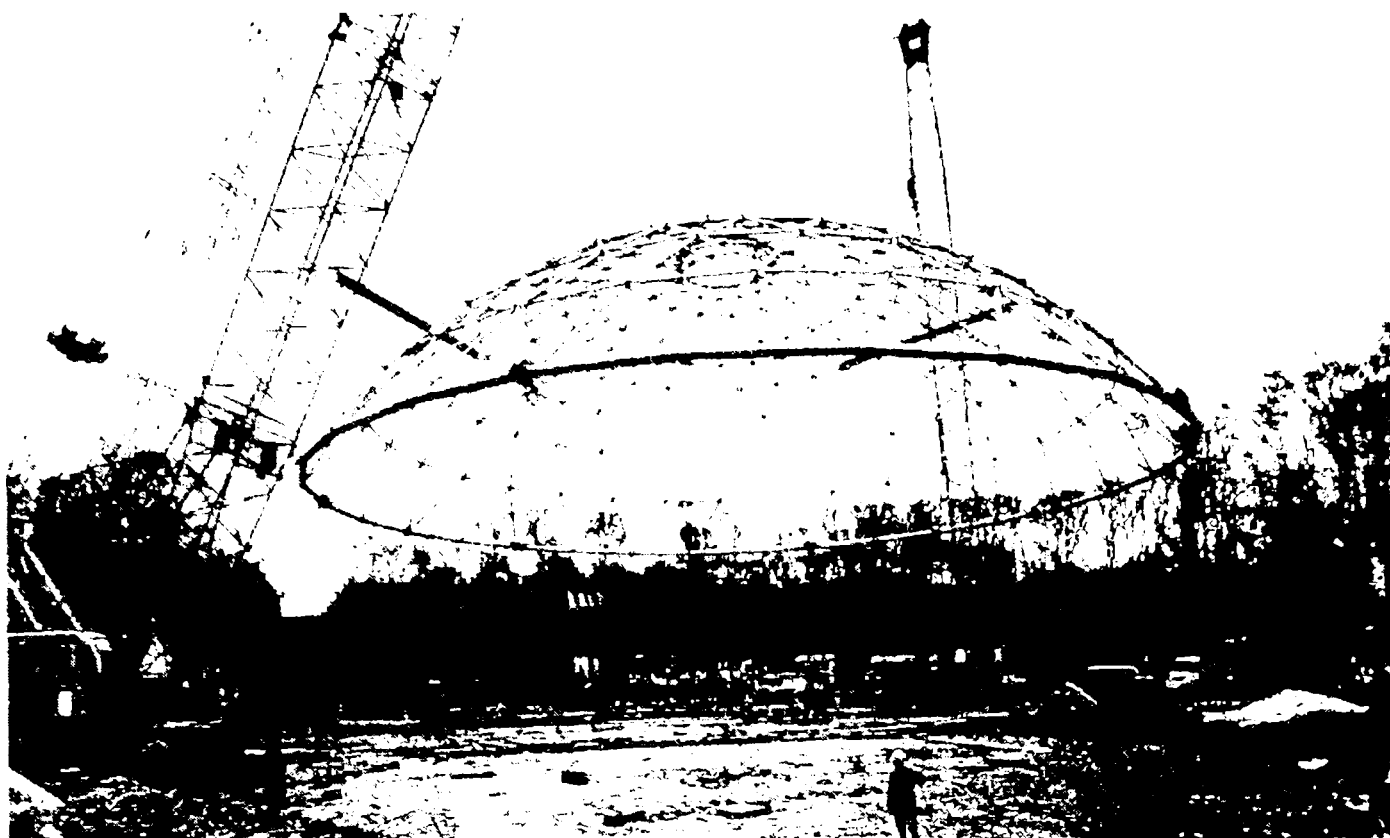


Fig.1.15 a Vedere din timpul montajului cupolei reticulate care acoperă un bazin de înot din Franța



Fig. 1.15 b Montaj la sol al cupolei

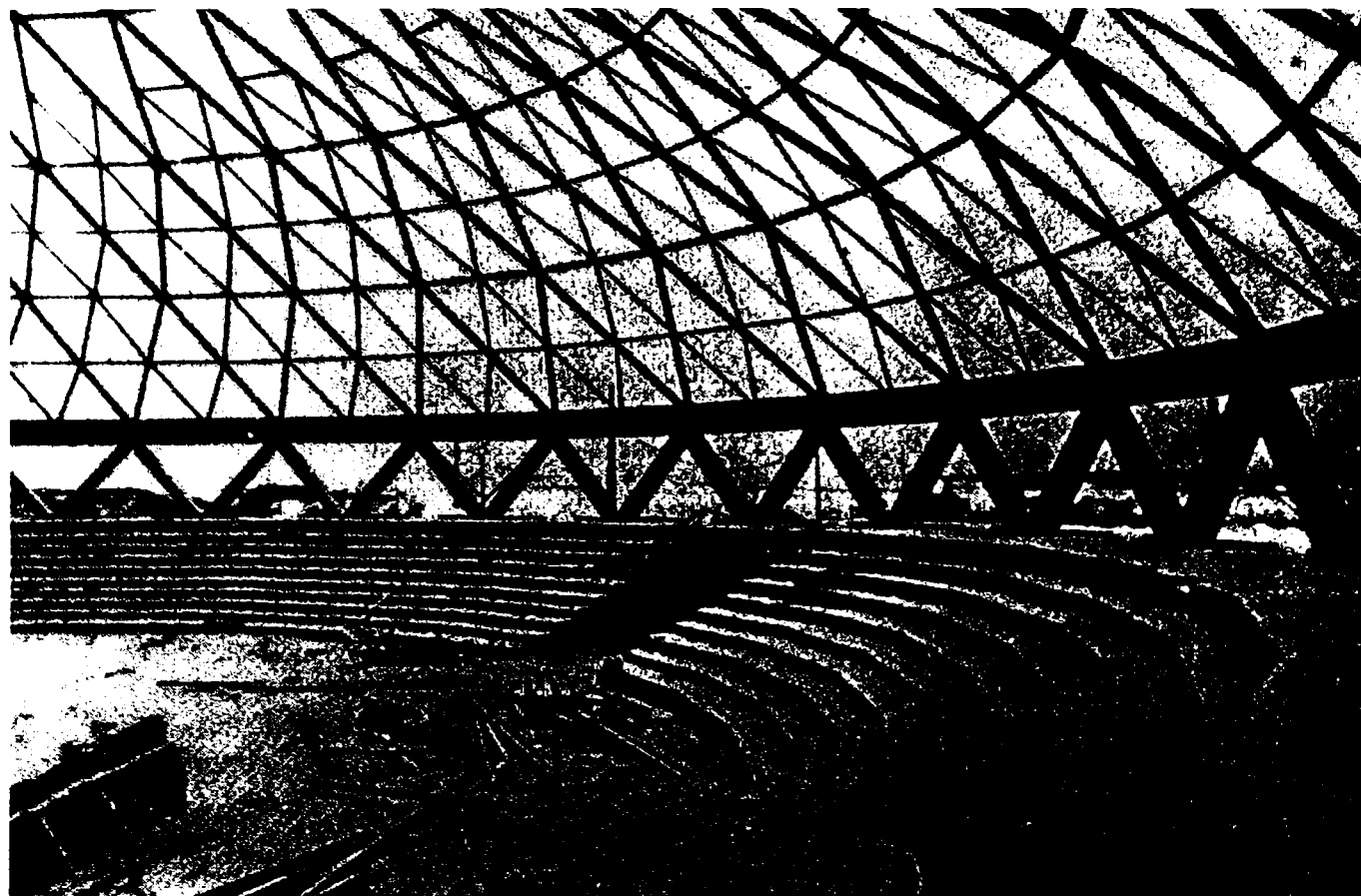


Fig. 1.16 Cupola de tip lamelar care acoperă centrul sportiv de la Opole din Polonia

1.2.3.2 Cupolele Kiewitt

Cupolele Kiewitt reprezintă o variantă a cupolelor lamelare. La acest tip de structură cercul de bază se împarte în șase sau opt sectoare (Fig.1.17).

În figura 1.18 se prezintă cupola lamelară - paralelă care acoperă construcția ARMORY, Little Rock în Arkansas SUA. Un alt exemplu îl constituie cupola de tip Diamond care acoperă arena olimpică din Sapiro din Japonia și are deschiderea de 105 m (Fig. 1.19).

În figura 1.20 se prezintă cupola Nagoya din Japonia care acoperă un stadion multifuncțional, ce poate să permită accesul a 40500 spectatori. Cupola este reticulată simplu strat și are deschiderea de 187,2 m și săgeata de 36,2 m. Se pare că este cupola cu cea mai mare deschidere din lume. Rezemarea cupolei se face pe o structură din beton armat cu deschiderea la sol de 229,6 m și înălțimea de 36 m.

În figura 1.20 se prezintă vederea exterioară a cupolei, care are suprafața de 29000 m² și are în partea centrală o suprafață de 5000 m² acoperită cu material transparent.

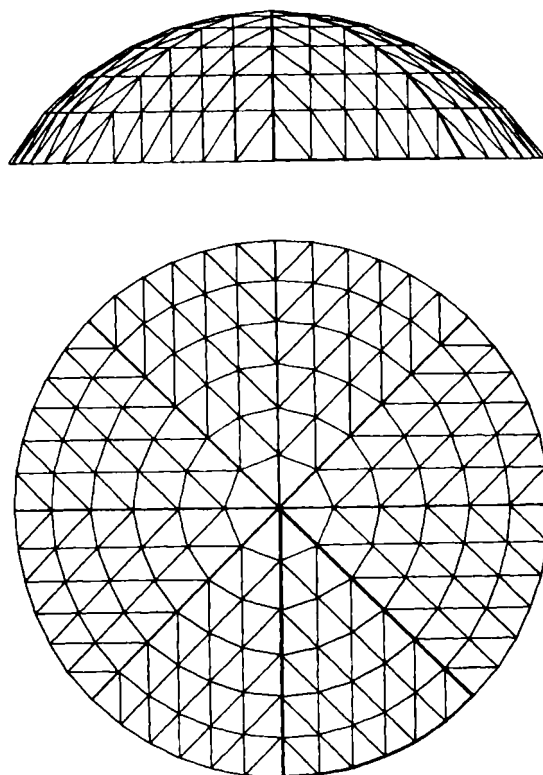


Fig. 1.17 Cupolă Kiewitt

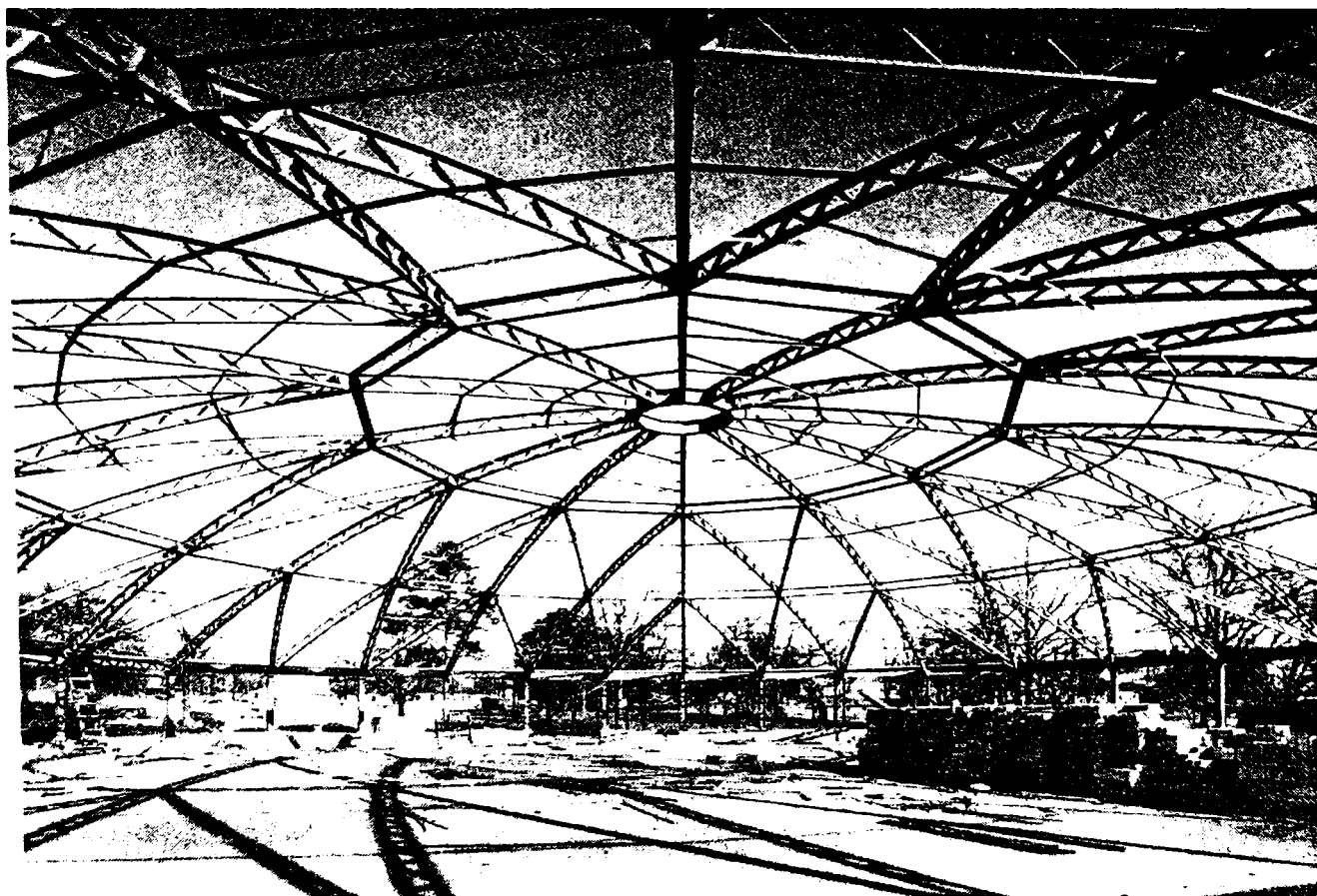


Fig. 1.18 Cupola lamelară paralelă de tip Kiewit care acoperă construcția Armory, Little Rock, Arkansas din S.U.A.

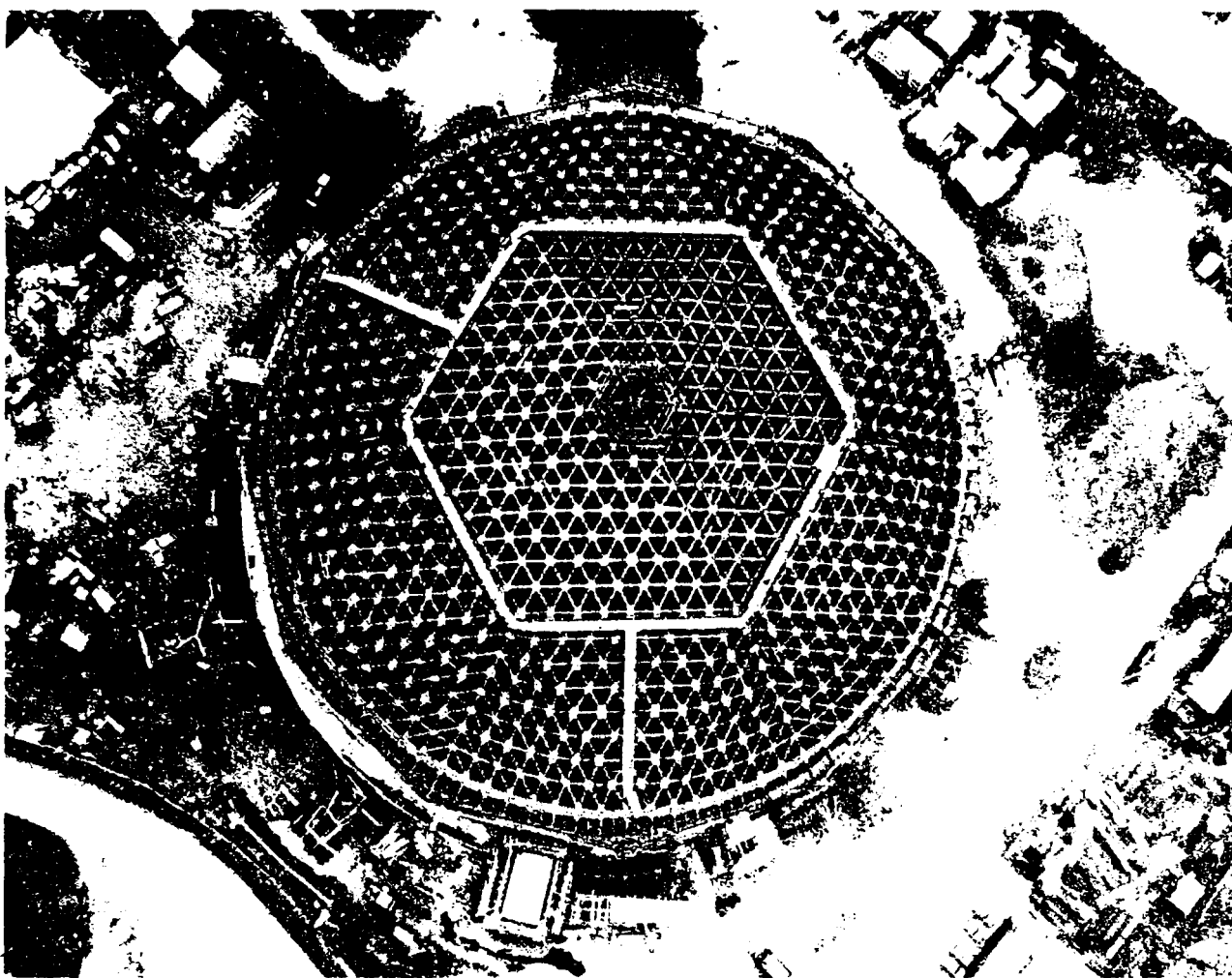


Fig. 1.19 Cupola de tip Kiewitt care acoperă Arena Olimpică de la Sapporo din Japonia

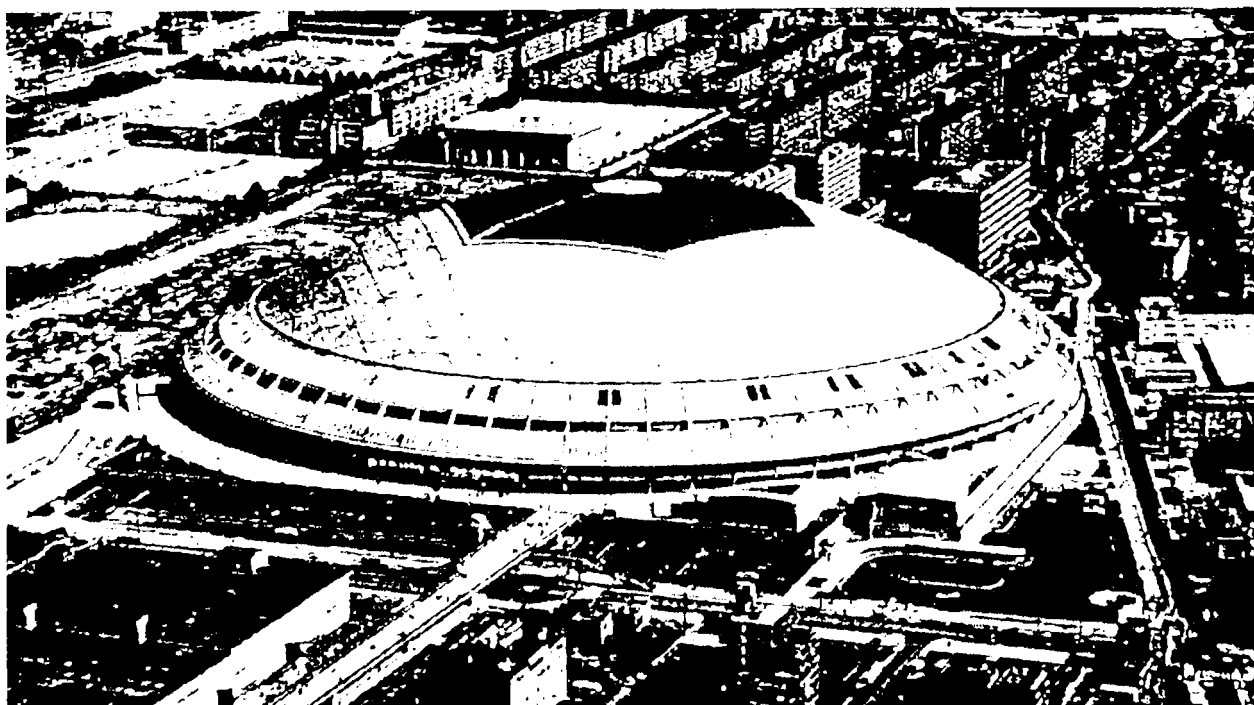


Fig. 1.20 Cupola lamelară cu rețea paralelă care acoperă stadionul multifuncțional Nagoya din Japonia

Japonia

DE. 162/181A

1.2.4 Cupole cu rețea de bare paralele

Acestea se folosesc pentru cupolele pleoștite. La acest tip de cupole (Fig.1.21) barele formează o rețea de trei familii paralele între ele.

Centrul expozițional din Chorzow din Polonia este acoperit cu o cupolă cu diametrul de 30 m, săgeată de 5 m și raza sferei de 25 m. Toate barele sunt executate din țevi de oțel cu secțiunea circulară, diametrul țevii este de 32 mm și grosimea peretelui 2,5 mm (Fig. 1.22).

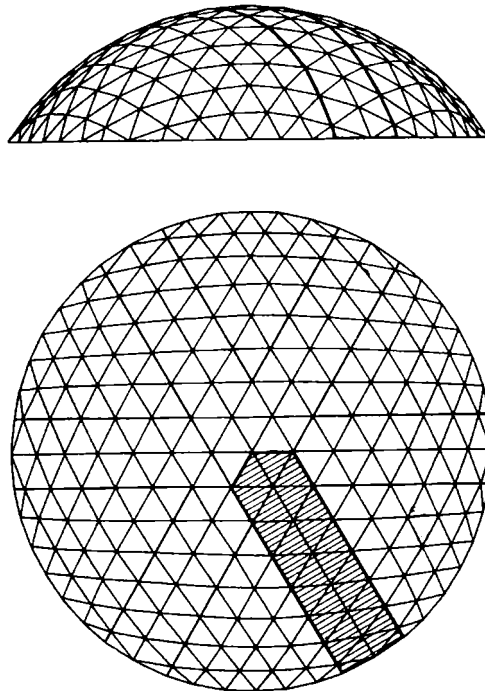


Fig. 1.21 Cupolă cu rețea de bare paralele

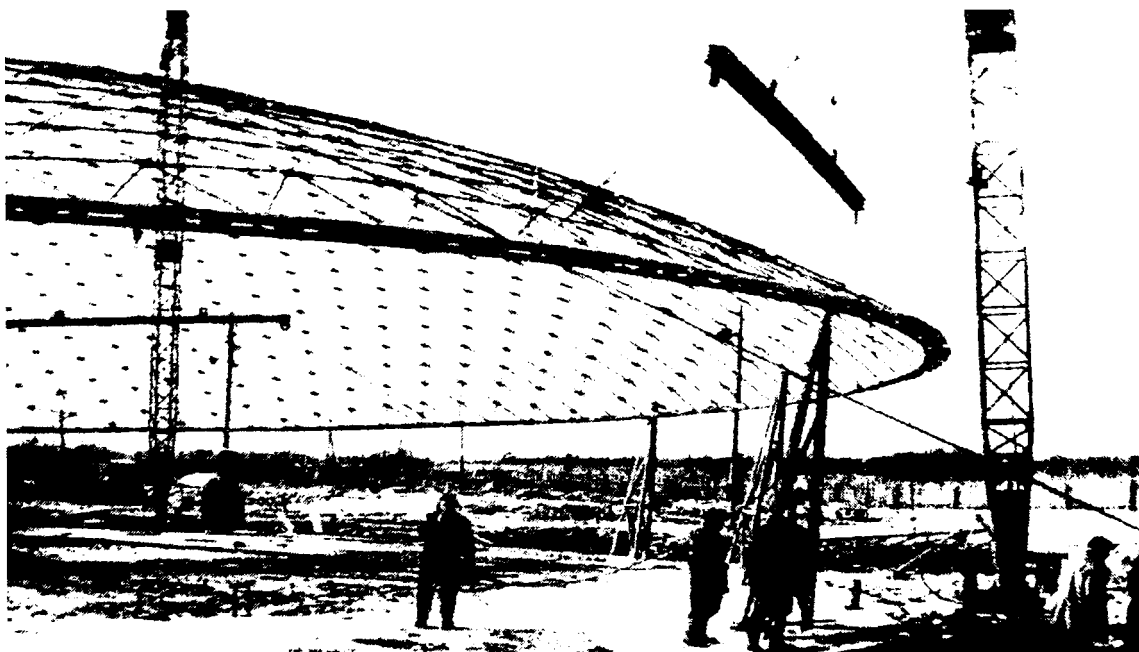


Fig. 1.22 Montajul cupolei reticulate care acoperă Centrul Expozițional din Chorzow din Polonia

1.2.5 Cupole geodezice

Aceste cupole au fost introduse de proiectantul american Buckminster Fuller, care a propus să se țină seama la alegerea rețelei cupolelor de poliedrele regulate și semiregulate .

1.2.5.1 Cupole geodezice cu rețea icosaedrală

Fuller folosește la obținerea cupolei geodezice un icosaedru ca bază pentru împărțirea geodezică a sferei. Triunghiurile sferice se obțin prin proiectarea fețelor icosaedrului pe suprafața sferică (Fig. 1.23).

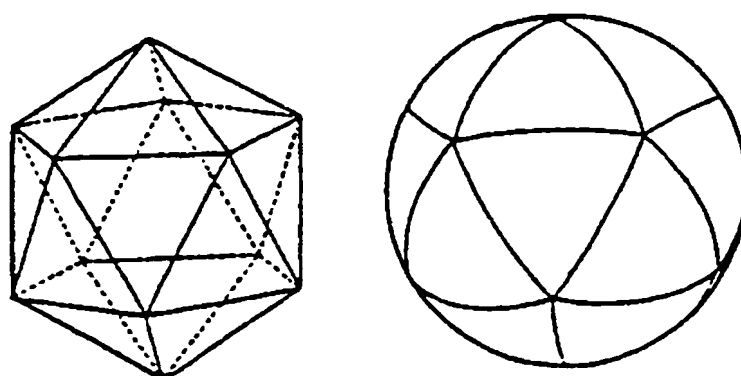


Fig.1.23 Icosaedrul folosit de Fuller pentru cupola sa geodezică

Această soluție a fost aplicată prima dată de Fuller pentru o cupolă dublu strat ce a acoperit pavilionul american de la Montreal. Această cupolă este executată din țevi sudate având diametrul bazei de 61 m iar înălțimea de aproximativ 55 m (Fig. 1.24)

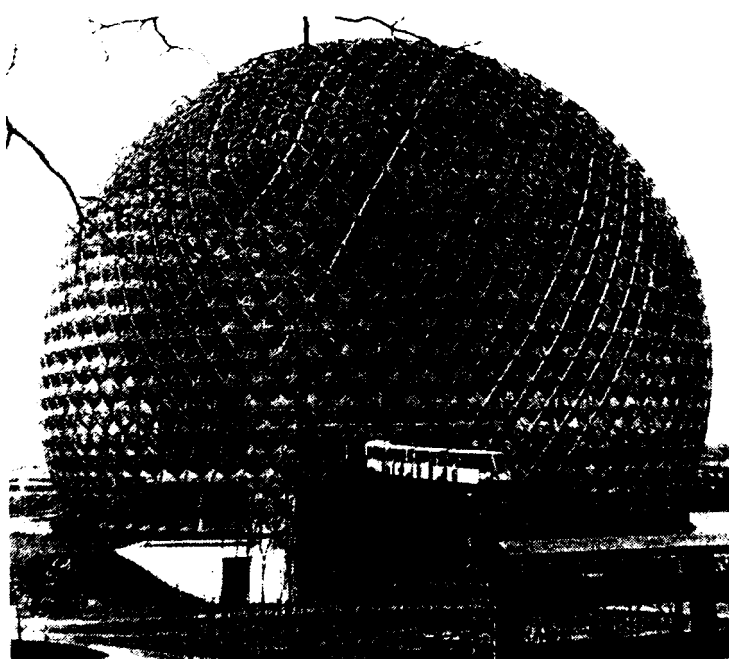


Fig. 1.24 Cupola ce acoperă pavilionul american de la Montreal

O rețea icosaedrală se obține prin împărțirea laturilor triunghiului sferic în 2, 4, 6, 8, 16 părți egale (Fig. 1.24). Astfel rezultă o rețea de triunghiuri apropiate de cele echilaterale, care pot fi la rândul lor cuplate sau subîmpărțite pentru a forma o subrețea hexagonală. În figura 1.25 se prezintă cupola icosaedrală construită la Universitatea din Düsseldorf, cupola având deschiderea de 36 m.

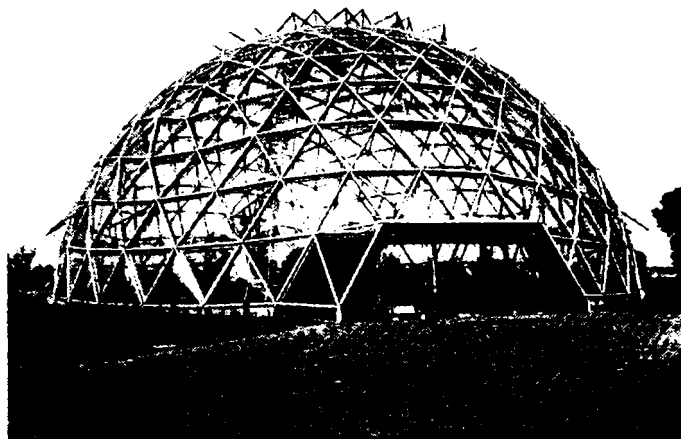
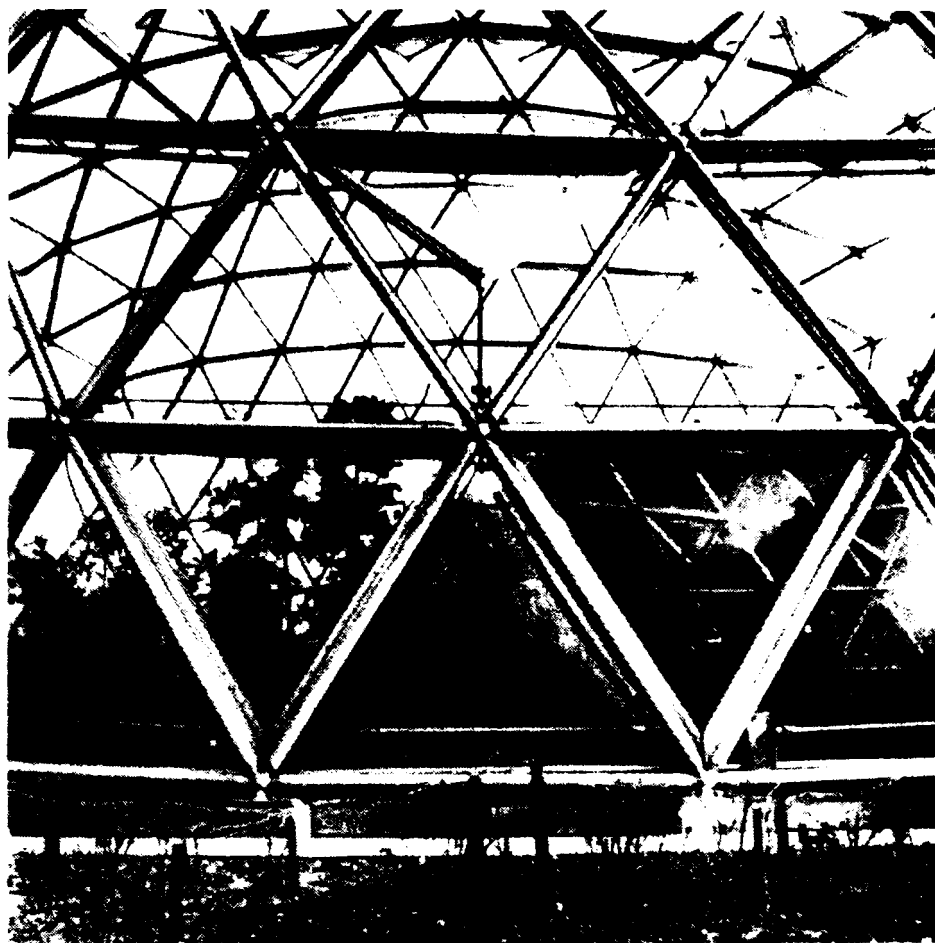


Fig.1.25 a Vedere exterioară a cupolei icosaedrale a Universității din Düsseldorf



Fig. 1.25 b Vedere din interiorul cupolei Universității din Düsseldorf



- Fig. 1.25 c Vedere exterioară cu detalii a cupolei Universității din Düsseldorf

1.2.5.2 Cupole geodezice cu rețea dodecaedrală

Se obțin prin piramidarea unui dodecaedru (Fig.1.26). Triunghiurile se pot subîmpărți în triunghiuri mai mici pentru a reduce lungimea barelor.

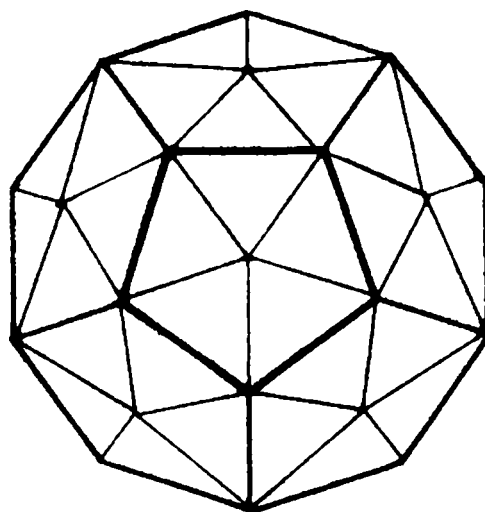


Fig. 1.26 Rețea dodecaedrală

1.2.5.3 Cupole geodezice cu rețea icosododecaedrală

Se obțin prin piramidarea fețelor pentagonale ale unui icosododecaedru (Fig.1.27). În vederea reducerii lungimii barelor se împart laturile în mai multe părți. În figura 1.28 se prezintă cupola executată în Stocholm, care folosește rețeaua icosododecaedrală.

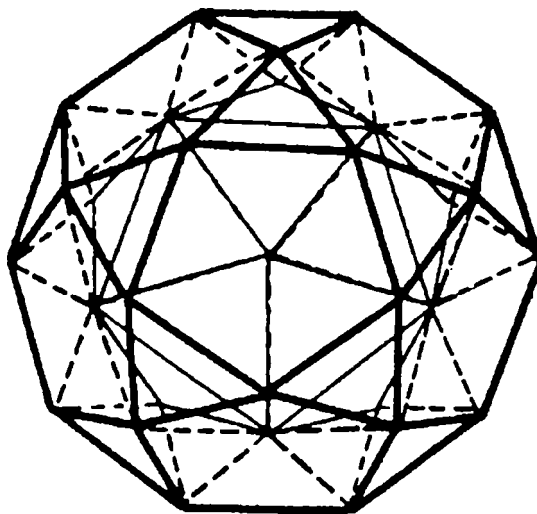


Fig. 1.27 Rețea icosododecaedrală

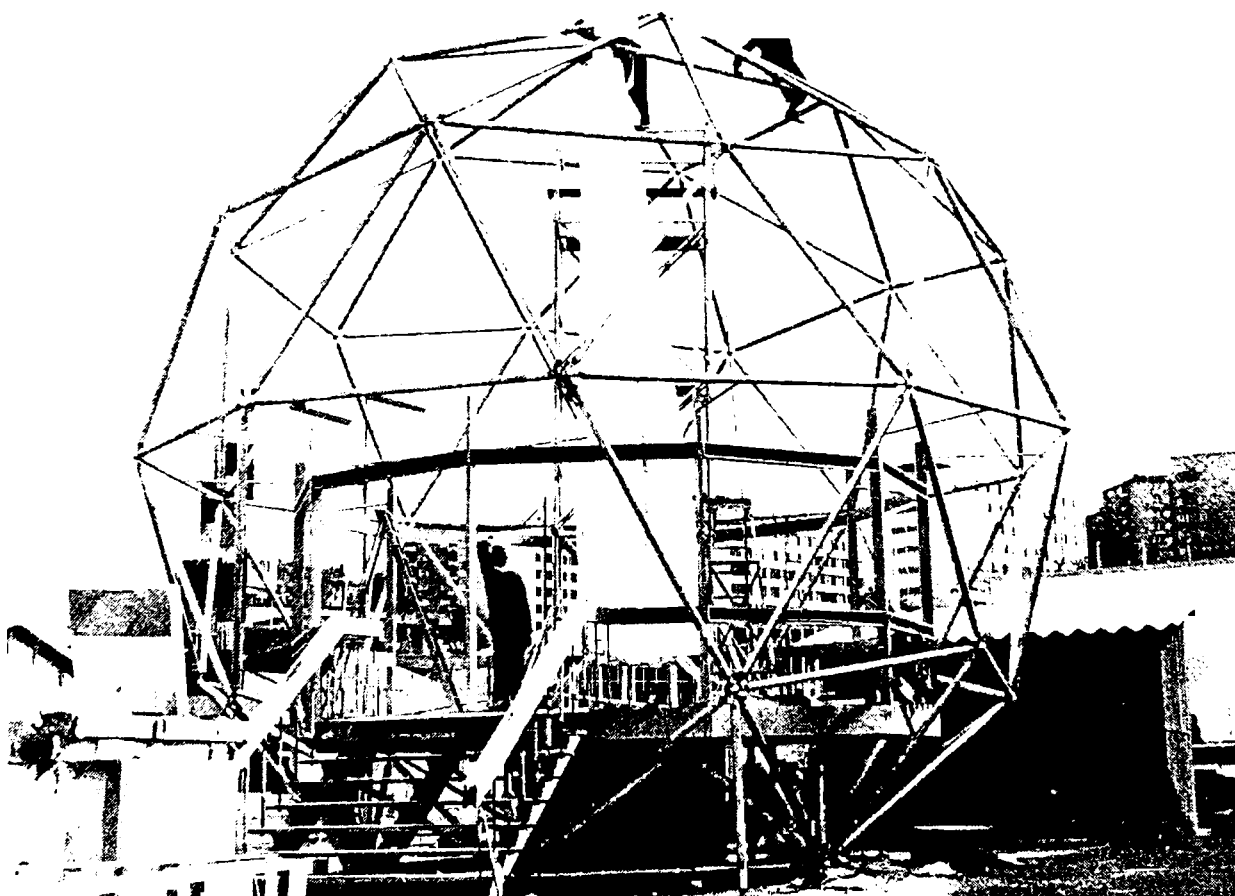


Fig. 1.28 Cupolă icosododecaedrală construită în Stocholm

1.2.5.4 Cupole geodezice cu rețea icosaedrală turtită

Se obțin printr-o piramidare a poliedrului semiregulat și o împărțire succesivă a acestuia

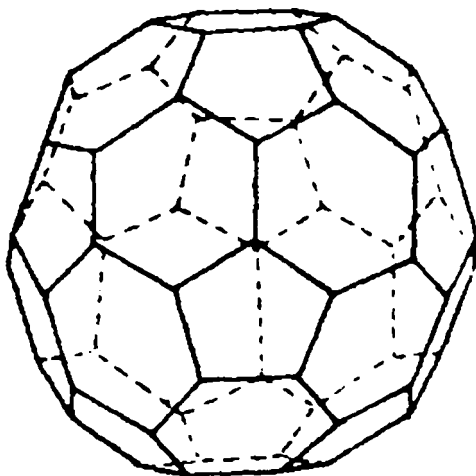


Fig. 1.29 Rețea icosaedrală turtită

1.2.5.5 Cupole geodezice cu rețea dodecaedrală teșită

Se obțin analog cu celelalte rețele (Fig.1.30).

Folosirea rețelelor de mai sus în ingineria structurilor reticulate depinde de raza cupolei și are drept scop să conducă la cupole cu un număr redus de bare și cu lungimi apropiate.

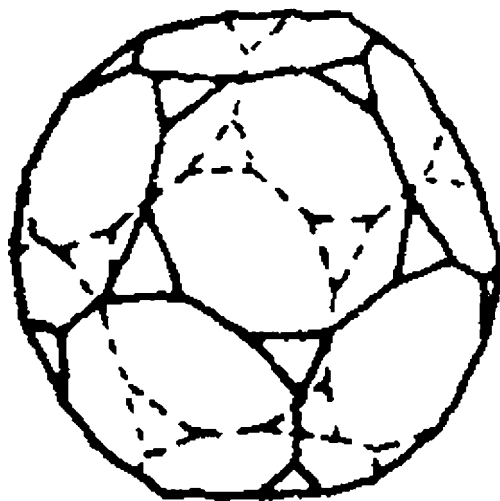


Fig. 1.30 Rețea dodecaedrală teșită



1.3 Particularități ale comportării structurilor curbe reticulate din încărcările exterioare

Structurile curbe reticulate prezintă o serie de avantaje care se referă la:

- aspect arhitectonic reușit care nu poluează mediul înconjurător din punct de vedere estetic;
- montaj rapid și ușor pe șantier datorită tipizării și prefabricării ansamblurilor în uzină;
- consum redus de material, ceea ce conduce la costuri reduse pentru structura de rezistență;
- grad de siguranță ridicat datorită folosirii unor programe de calcul performante la

proiectarea lor.

În afara acestor avantaje există și o serie de dificultăți specifice structurilor curbe reticulate. Acestea se prezintă în cele ce urmează:

(I) Datorită utilizării la execuția structurilor curbe reticulate a unor materiale cu calități fizico - mecanice superioare, rezultă secțiuni transversale de bare cu dimensiuni reduse. Sub încărcările de exploatare, datorită deschiderilor mari și secțiunii barelor reduse, crește importanța calculului neliniar și a fenomenului de pierdere a stabilității echilibrului la aceste tipuri de structuri.

Starea de eforturi și deplasări din structurile reticulate trebuie să fie determinată ținând seamă de modelarea discretă a elementelor structurale componente. Structurile au spațialitate de formă și la preluarea încărcărilor participă toate elementele structurale. Rigiditatea redusă a structurilor reticulate simplu strat conduce la comportare neliniară puternică. Metoda de calcul care se folosește trebuie să permită analiza neliniară și să utilizeze programe de calcul specializate.

(II) Imperfecțiunile geometrice și de material joacă un rol deosebit de important în comportarea structurilor reticulate simplu strat. Aceste imperfecțiuni pot fi imperfecțiuni de bară (curburi inițiale, torsiuni și inexactități de execuție a lungimii barelor) și de structură. Imperfecțiunile structurale provin din abateri ale nodurilor cupolei executate față de cupola proiectată. Mărimea acestor imperfecțiuni depinde de tehnologia de execuție, tipul îmbinărilor din noduri, atenția acordată la montaj și la debitarea elementelor structurale. Comportarea plastică a oțelului și tensiunile reziduale influențează capacitatea structurilor reticulate. Din acest motiv este foarte important pentru aprecierea siguranței cupolelor reticulate, să se cerceteze influența acestor imperfecțiuni. Imperfecțiunile geometrice și de material reduc încărcarea de limitare la unele cupole cu 10...60% față de încărcarea de cedare a cupolei perfecte.

(III) Pierderea stabilității echilibrului structurilor curbe reticulate este un fenomen complex, care depinde de mulți parametri și nu este încă lămurit. La ora actuală se impun încă multe cercetări teoretice și experimentale pentru elucidarea completă a problemei. Plăcile curbe reticulate prezintă o serie de particularități față de plăcile curbe solide. Existența unghiurilor mici între elementele structurale face ca scurtările axiale ale barelor să fie mai mari ca la alte structuri și în consecință apar modificări importante în geometria inițială. Din acest motiv calculul neliniar este absolut

obligatoriu, iar instabilitatea se produce în zonele cu neliniarități geometrice și de material foarte mari.

(IV) Colapsul cupolelor reticulate simplu strat se poate produce ca urmare a mai multor moduri de flambaj: flambajul de bară, flambajul de nod, flambajul de inel și flambajul general. Apariția acestor moduri de flambaj depinde de parametri specifici ai cupolelor: prinderea barelor în noduri (articulată, încastrată sau semirigidă), prinderea barelor în nodurile de rezemare, distribuția încărcărilor din nodurile interioare, de influența imperfecțiunilor geometrice și de material. Alt fenomen caracteristic cupolelor reticulate îl constituie cuplarea a două moduri de flambaj când încărcările de flambaj sunt apropiate. Structura poate să cedeze ușor la încărcări critice mai mici din cauza imperfecțiunilor geometrice și a deformațiilor plastice.

(V) Modul de prindere a barelor în noduri influențează în mod deosebit comportarea cupolelor reticulate simplu strat. Barele în noduri pot să fie prinse articulat, parțial încastrate (semirigide) și încastrate complet. La fixarea barelor în noduri se folosesc mai multe sisteme de îmbinare. În general se folosește o sferă în nod de care se prind barele cu sudură, șuruburi sau conectori mecanici. Nodurile încastrate conduc la cea mai mare încărcare critică în toate modurile de flambaj, iar pentru nodurile articulate se obține cea mai mică încărcare critică. Încărcarea critică pentru nodurile semirigide ocupă o poziție intermediară între încărcarea critică pentru nodurile articulate și încărcarea critică pentru nodurile încastrate. Încercările experimentale efectuate în literatura de specialitate pe noduri semirigide arată că semirigiditatea nodurilor afectează remarcabil capacitatea ultimă a cupolelor [1.32] și [1.44].

(VI) Evaluarea corectă a capacității portante a cupolelor se determină după stabilirea pe bază de încercări experimentale a semirigidității nodurilor. În vederea verificării rezultatelor teoretice se proiectează și se execută modele la scară redusă a cupolelor, care se încearcă experimental. Din compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale se trag concluzii referitoare la justetea ipotezelor admise în calcul și a metodei de calcul. Rezultatele experimentale obținute pe modelele la scară mică diferă de rezultatele ce se obțin prin încercări pe cupolele reale. Din acest motiv este de dorit să se efectueze încercări pe cupolele reale pentru a verifica gradul de exactitate al rezultatelor teoretice, comportarea cupolelor reale fiind puternic influențată de imperfecțiunile geometrice, fizice și de tehnologia de execuție și de montaj.

(VII) Alt fenomen deosebit de periculos pentru cupolele reticulate simplu strat se referă la cedarea cupolei prin propagarea instabilității locale. Acest fenomen se produce brusc, are caracter dinamic și introduce în structură forțe de inerție. Cupola oscilează în jurul poziției de echilibru inițiale după care prin salt dinamic trece în altă poziție de echilibru inversată față de cupola inițială.

Saltul cupolei se produce sub încărcarea cupolei cu forțele aplicate inițial și este inițializat de instabilitatea locală. O astfel de instabilitate nu se poate accepta în practică, întrucât produce

colapsul cupolei și trebuie evitată la proiectarea structurii. Cercetările în acest domeniu sunt puține și elucidarea fenomenului mai necesită încă studii teoretice și experimentale.

(VIII) La studiul stabilității cupolelor reticulate încărcările se consideră cunoscute. Ele provin din încărcarea permanentă care este redusă, încărcarea din vânt și din zăpadă. Precizarea intensității și distribuției încărcărilor din vânt și din zăpadă se stabilește pe criterii statistice. În proiectarea concretă ele se determină în conformitate cu normele europene și normele specifice fiecărei țări în parte. O atenție deosebită trebuie acordată evaluării corecte a încărcării din zăpadă, care poate produce încărcări nesimetrice, respectiv aglomerări cu zăpadă în zonele protejate de construcțiile vecine. Dacă sunt posibile încărcări suplimentare în nodul central prin suspendarea unor exponate, atunci în calculul tehnic să se considere și astfel de încărcări.

1.4 Colapsul acoperișului sălii de expoziție din București

La cupola reticulată din București [1.3], [1.4] și [1.37] nu s-a ținut seamă de posibilitatea producerii aglomerării cu zăpadă în zona nașterii cupolei. Cupola reazemă pe un inel din beton armat, care face parte din construcția sub formă de tor, dispusă exterior (Fig.1.31). Structura din beton armat are înălțimea mai mică decât cupola și o suprafață în plan mare.

Cupola a fost construită în anul 1961 ca o cupolă reticulată simplu strat, adaptându-se la condițiile din România, cupola proiectată și executată la Brno de profesorul F. Lederer.

Dimensiunile geometrice ale cupolei (Fig. 1.32) sunt următoarele:

- deschiderea cupolei 93,5 m;
- săgeata cupolei 19,107 m.

Cupola și lanternoul au fost executate din țevi de oțel cu diametrul de 38 mm la 102 mm, curbate și dispuse după paralele și două familii de curbe diagonale, care formează o rețea triunghiulară. Barele au fost dispuse după trei suprafețe concentrice și în noduri au fost prinse cu bride elastice (Fig.1.31).

Pe suprafața adiacentă nașterii cupolei s-a depus zăpadă, iar datorită vântului s-a format o aglomerare de zăpadă pe o suprafață de circa 1000 m². Înălțimea stratului de zăpadă în dreptul nașterii cupolei a fost de circa 5 m. Încărcarea locală din aglomerarea cu zăpadă a depășit cu mult încărcarea considerată la proiectarea cupolei și datorită ei s-a produs pierderea locală a stabilității cupolei. Instabilitatea locală a produs la rândul ei flambajul barelor, lunecarea nodurilor și torsionarea inelelor în zona cu aglomerare cu zăpadă. Instabilitatea locală s-a propagat în continuare prin salt dinamic în toată structura cupolei.

În figurile 1.32 și 1.33 se prezintă propagarea instabilității locale în toată structura cupolei până la stadiul final de instabilitate generală. Studiile efectuate ulterior pe model [1.3, 1.4, 1.37] au confirmat mecanismul de cedare observat în urma colapsului cupolei.

În urma prăbușirii, cupola a ocupat poziția de echilibru inversată față de situația inițială (Fig. 1.33). Inelele de rigidizare au rămas în poziția inițială, dar prezentau torsiuni accentuate. Cupola prăbușită avea 5 direcții înclinate care corespundeau undelor de flambaj (Fig. 1.34).

Se remarcă faptul că la proiectarea cupolelor reticulate trebuie să se ia în considerare și să fie analizate cu atenție combinațiile posibile de încărcări ce intervin în exploatare precum și distribuția acestor încărcări.

Colapsul cupolei a impulsinat puternic cercetările în domeniul stabilității plăcilor curbe reticulate simplu strat.

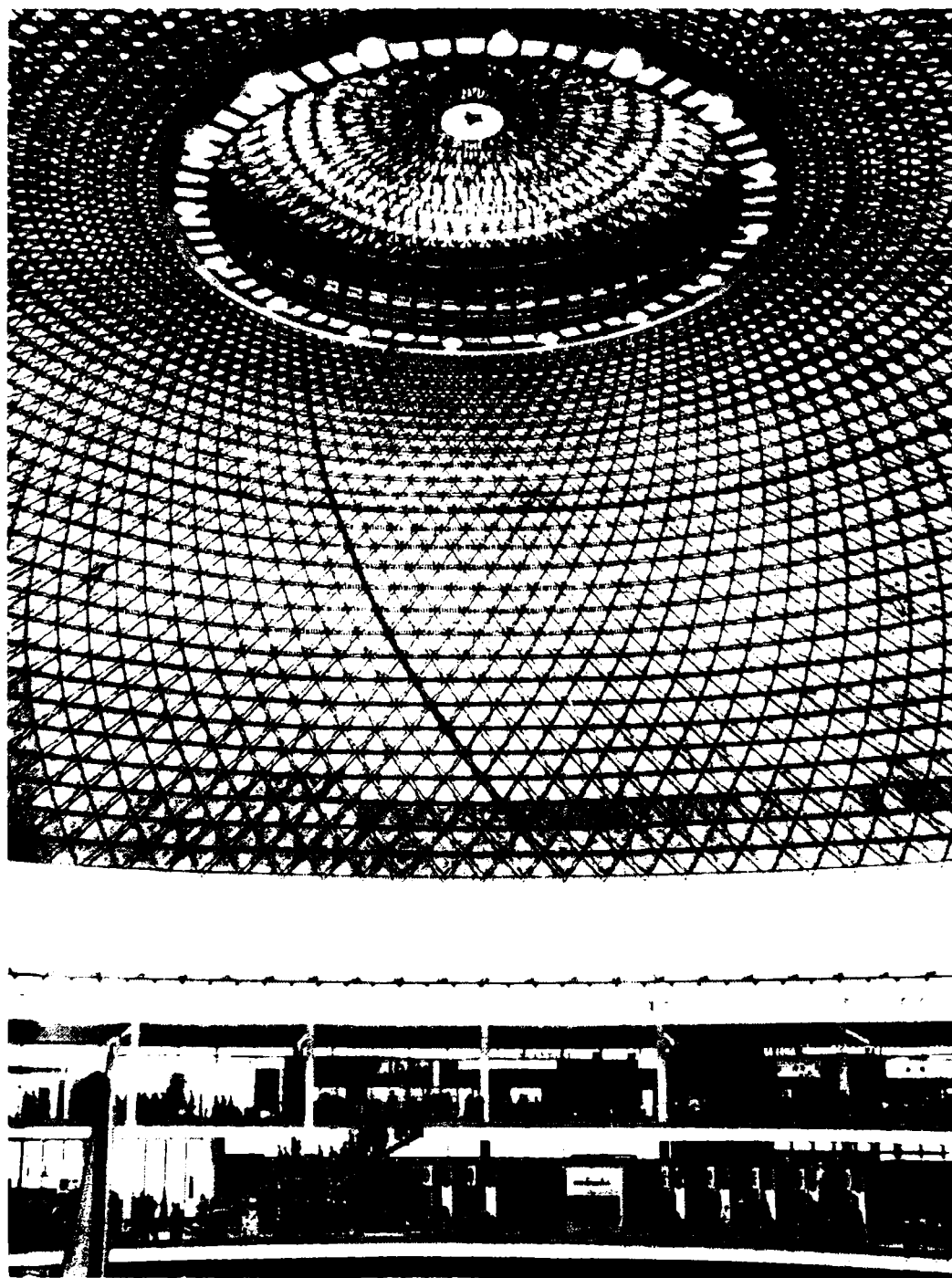


Fig. 1.31 Cupola reticulată a pavilionului ROMEXPO din București

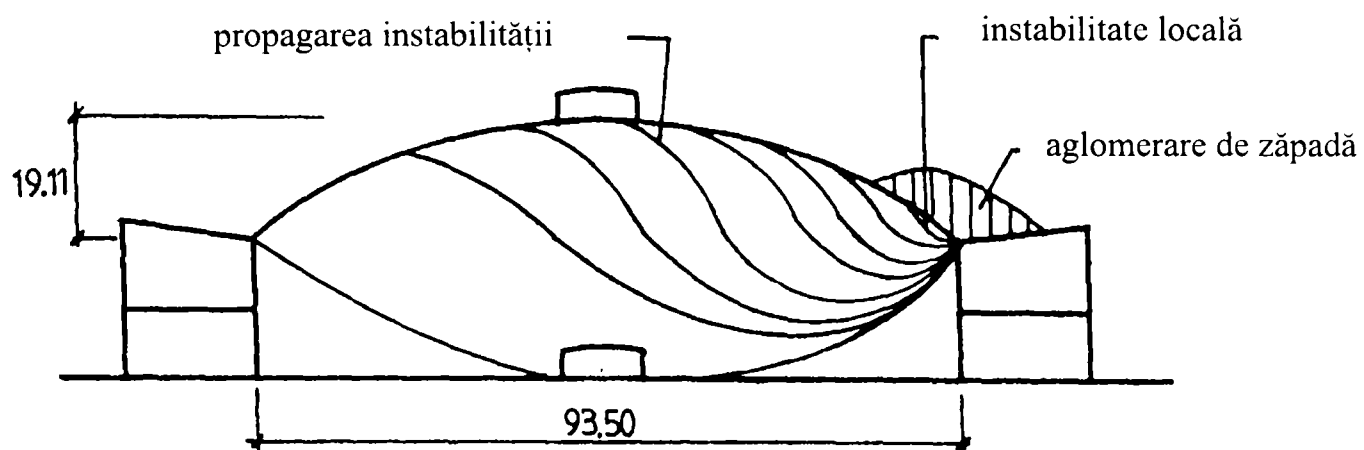


Fig. 1.32 Propagarea instabilității locale în cazul cupolei pavilionului ROMEXPO din București

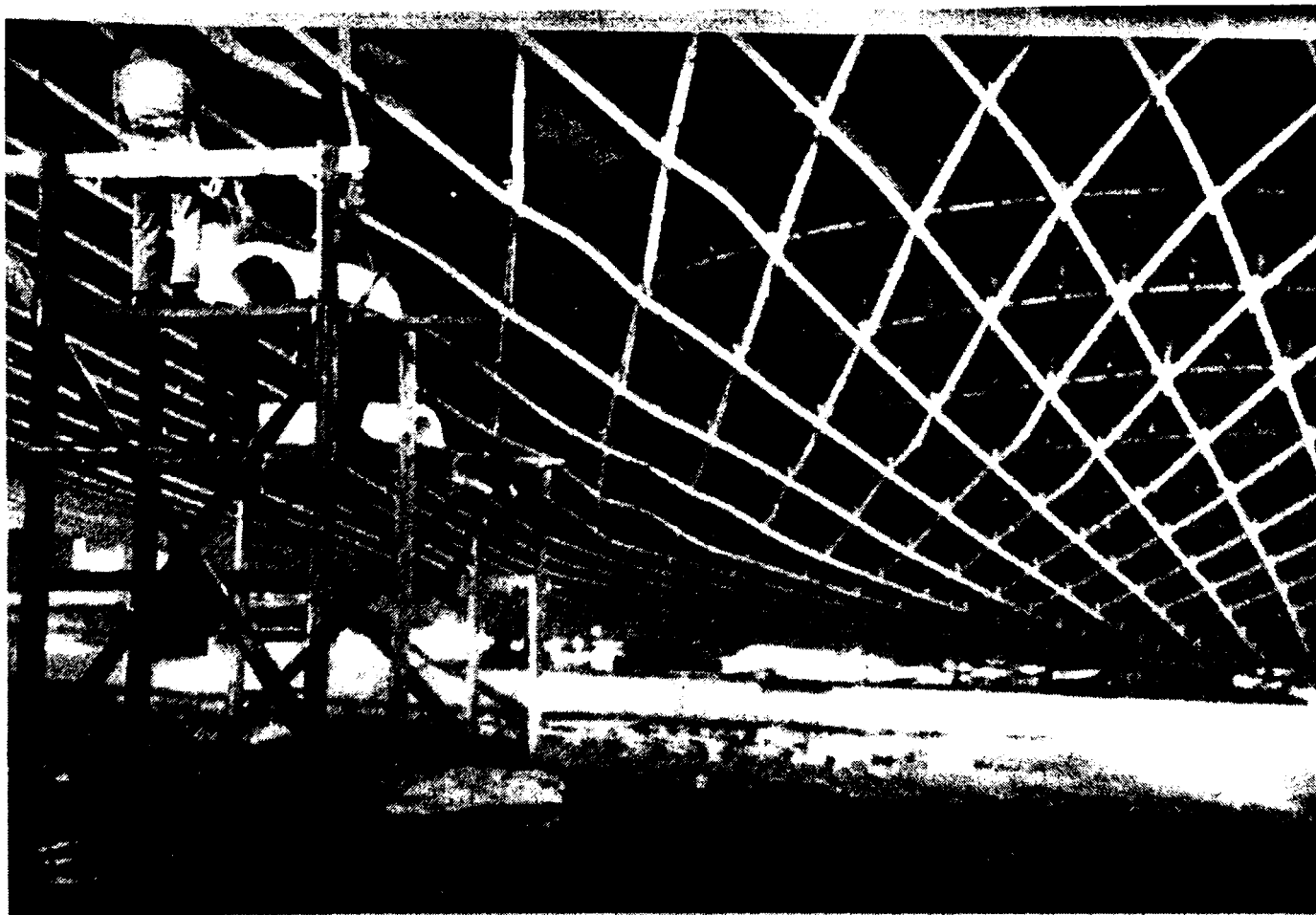


Fig.1.33 a Vedere interioară a cupolei reticulate ROMEXPO din București în urma colapsului din aglomerarea cu zăpadă

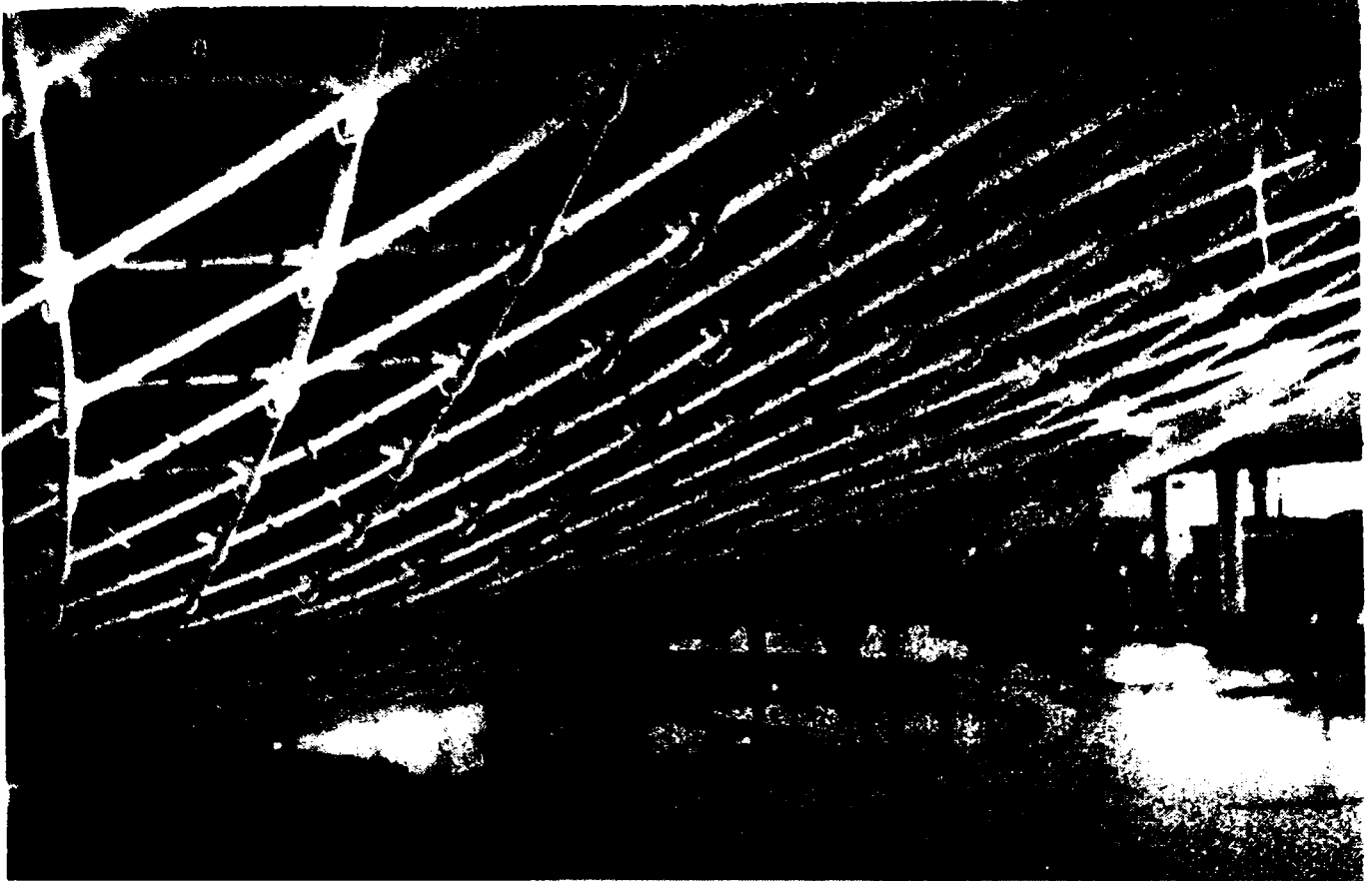


Fig.1.33 b Vedere interioară a cupolei ROMEXPO din București după cedare

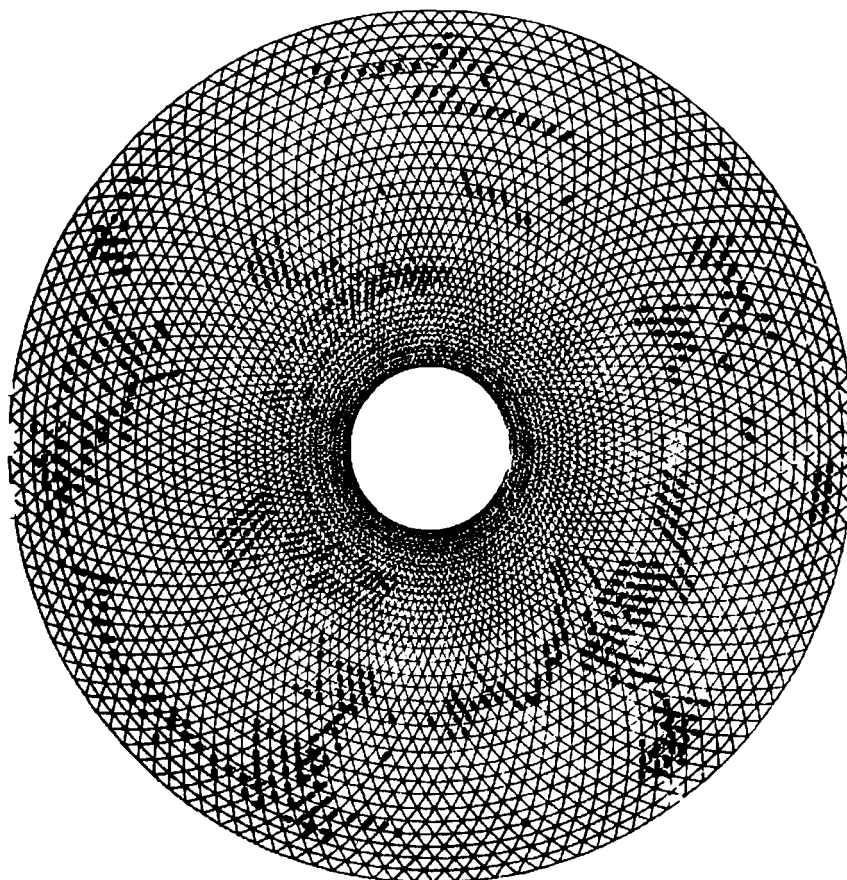


Fig.1.34 Poziția barelor deformat, a nodurilor și bridelor

1.5 Stadiul actual al calculului stabilității cupolelor reticulate simplu strat

Cercetarea stabilității echilibrului structurilor curbe trebuie să ia în considerare factorii de care depinde acest fenomen. Analiza atentă a tuturor modurilor de instabilitate constituie o problemă importantă la fel ca alegerea modelului de calcul cel mai adecvat. Structurile reticulate simplu strat sunt sensibile la imperfecțiuni și au o comportare puternic neliniară. Un mod de instabilitate locală se poate transforma ușor și rapid în instabilitate generală. În prezent ținând seama de existența unor programe de calcul specializate și a calculatoarelor puternice se apreciază că modelul discret este cel mai indicat în analiza structurilor reticulate.

1.5.1 Factorii care influențează instabilitatea structurilor reticulate

1.5.1.1 Modurile de instabilitate

Gioncu [1.11], Gioncu și Băluț [1.12] prezintă factorii de care depinde comportarea structurilor reticulate curbe simplu strat. Acești factori sunt clasificați în factori geometrici (geometria structurii reticulate și densitatea ochiurilor rețelei) și factori de comportare (neliniarități geometrice și de material, tipuri de instabilitate, rigiditatea nodurilor, distribuția încărcării). Influența acestor factori se discută în corelare cu proiectarea acestor tipuri de structuri.

1.5.1.2 Comportarea neliniară

Comportarea neliniară a structurii și stabilitatea echilibrului se analizează cu ajutorul metodei energetice, metodei vectorului și metodei rigidității tangentă a structurii.

Procedeele care se bazează pe metoda energetică pentru studiul comportării neliniare a structurii și a tipului de instabilitate. Aceste metode utilizează cercetarea variației primei și a celei de a doua derivate a energiei potențiale totale [1.40]. Rezultatele care se obțin cu aceste metode sunt în concordanță cu rezultatele experimentale obținute pe modele simple [1.7] și [1.9]. Metodele energetice sunt indicate pentru structurile cu un număr redus de grade de libertate.

În metoda precizată în [1.28] se utilizează iterația vectorilor sau relaxarea dinamică [1.9] la studiul comportării structurilor spațiale. Deplasările nodale se calculează din forțele nodale neechilibrate.

În metodele rigidității tangente se stabilește matricea structurii în fiecare pas de încărcare. Structura reticulată curbă are o comportare neliniară în domeniul elastic sub acțiunea forțelor exterioare care sunt majoritatea în trepte. Se stabilește matricea rigidității tangentă a structurii folosind metoda elementului finit.

See [1.35] a folosit modelul analitic și metoda rigidității pentru a studia stabilitatea unei cupole reticulate simplu strat. See a folosit formularea lui Oran [1.26], pentru analiza geometric neliniară. În algoritm a folosit teoria de bază a lui Timoshenko [1.41] și a considerat că deformațiile relative sunt mici în fiecare element. Programul ia în considerare translații și rotații mari ale nodurilor structurii. Influența forței axiale asupra rigidității a fost considerată sub forma propusă de Livesley și Chandler [1.22] și extinsă la structurile spațiale de Renton [1.30]. Se ia în considerare modificarea lungimii barelor date de încovoiere, așa cum s-a propus de Safaan [1.33].

See a prezentat o metodă concisă pentru determinarea stabilității unui sistem discret, care se bazează pe matricea rigidității tangentă. Cu această metodă se identifică tipul de instabilitate care poate să apară (limitare sau bifurcare).

Se pare că Mallet și Marcal [1.24] au fost primii care au folosit metoda elementului finit la calculul neliniar al cadrelor. Mai târziu Yamada și alții [1.44] au folosit-o pentru determinarea comportării unor modele de cupole reticulate, care au fost și încercate experimental. Saitoh și alții [1.34] au folosit metoda elementului finit la elaborarea unui program pentru studiul comportării geometrice neliniare, propusă de Rashel și alții [1.29] la stabilirea încărcării de flambaj pentru cupole simplu strat cu diferite deschideri și săgeți.

1.5.1.3 Influența imperfecțiunilor

Kani [1.18] folosind metoda elementului finit a dezvoltat un program de calcul care permite determinarea instabilității și a modurilor de deformație predominante. Cercetătorii precizați mai sus au arătat că imperfecțiunile mici afectează considerabil capacitatea portantă de cedare a plăcilor curbe reticulate.

See [1.35] și Kani [1.18] precizează că pentru cupolele reticulate simplu strat, observațiile experimentale pot fi considerate corespunzătoare dacă acestea au fost efectuate după execuția cupolei.

Cercetările ulterioare au urmărit să stabilească mai corect efectul imperfecțiunilor asupra stabilității structurilor curbe reticulate.

Suzuki, Ogawa și Ikarashi [1.38] au cercetat efectul imperfecțiunilor asupra încărcării de flambaj a cupolelor reticulate simplu strat. Ca moduri de flambaj, s-au analizat flambajul general, flambajul de nod și flambajul unui element. La stabilirea încărcărilor de flambaj s-a utilizat criteriul corespunzător mediului continuu echivalent. Evaluarea încărcării critice s-a efectuat ca pentru o sferă continuă cu comportare elastică, ținând seamă de rigiditățile efective ale structurii reticulate. Încărcările critice pentru flambajul de nod și de element au fost exprimate în funcție de parametrul geometric caracteristic al cupolei S . Parametrul S , reprezintă raportul între lungimea elementului și

radicalul de ordinul doi din raza cupolei, multiplicat cu rădăcina de ordinul patru a rigidității axiale și din încovoierea cupolei.

Valoarea maximă a imperfecțiunii geometrice inițiale a fost considerată variabila aleatoare normală și se compune din modul propriu al cupolei reticulate.

Încărcarea critică a fost determinată folosind analiza liniară cu vectori proprii și analiza geometric neliniară combinată cu vectori proprii care se repetă în fiecare pas de încărcare.

Din cercetările efectuate se precizează că sensibilitatea cupolelor reticulate la imperfecțiuni inițiale geometrice depinde de factorul de zveltețe S și este mare pentru $S = 2,73$. La această valoare flambajul de nod trece în flambaj de bară. Coeficientul de variație al încărcării de flambaj este mic în comparație cu cel al imperfecțiunii inițiale și are o variație liniară. În încheiere se precizează că este dificil de stabilit încărcarea de flambaj a cupolelor reticulate și că mai sunt necesare multe cercetări în domeniu, însă analiza statistică este importantă în acest scop.

Bori și Chiostrini [1.5] au studiat o procedură pentru determinarea comportării la flambaj în domeniul postflambat, ținând seamă de influența imperfecțiunilor la structurile reticulate simplu strat. În lucrare se prezintă o metodologie de introducere în calcul a imperfecțiunilor inițiale ale structurii, prin intermediul unei încărcări echivalente, care se aplică pe structura inițială. Aceste încărcări echivalente se aplică simultan asupra structurii inițiale. În pasul al doilea se detectează și trasează curbele încărcare - deplasare pentru cupolele perfecte și cupolele reale afectate de imperfecțiuni, folosind o analiză neliniară. Schema iterativă a lui Riks - Wempner sub forma modificată de Wessels [1.43], este utilizată la fiecare increment de încărcare să adapteze vectorul deplasare și încărcarea multiplicată până când noua configurație este atinsă. Exemplele numerice arată modul de calcul al încărcării echivalente și influența imperfecțiunilor cu diferite distribuții asupra comportării neliniare a structurilor reticulate.

Rothert H. și Gebbken [1.32] prezintă o serie de rezultate care se referă la comportarea neliniară a structurilor reticulate. Pentru a ține seamă de proiectarea economică, se ia în considerare neliniaritatea de material și matricea rigidității elementelor se stabilește în consecință. Neliniaritatea de material se consideră atunci când încărcarea permanentă este predominantă. În lucrare se prezintă exemple numerice pentru verificarea rezultatelor teoretice și determinarea curbei de comportare postcritică a structurilor reticulate.

Suzuki, Ogawa și Ikarashi [1.38] cercetează flambajul elastico - plastic al cupolei reticulate simplu strat cu noduri rigide supusă la încărcare statică, care este aplicată în nodul central. Se utilizează metoda elementului finit cu luarea în considerare a imperfecțiunilor geometrice și neliniarității de material. Stabilitatea structurii este analizată ținând seamă de geometria plăcii curbe, de proprietățile barelor și materialul de construcție.

Cupola analizată nu a fost afectată de imperfecțiuni inițiale. Condițiile de rezemare pe contur sunt modelate ca reazeme simple cu deplasări orizontale libere pe orice direcție în planul orizontal, respectiv reazeme fixe la deplasări verticale. În grafice se arată variația încărcării adimensionale în funcție de coeficientul de zveltețe pentru cupola cu diferite densități ale nodurilor rețelei.

Pandy și Barai [1.27] se ocupă de o definiție nouă a nedeterminării structurii, care să depindă de eforturile și răspunsul structurii într-un anumit stadiu al exploatării. Răspunsul sensibil al unui element component în interpretarea autorilor precizează răspunsul când o substructură sau un element al structurii a suferit o degradare. Se analizează o cupolă geodezică cu deschiderea de 240 cm și săgeata de 60 cm, alcătuită din 132 elemente spațiale. Încărcarea este o forță unitară în nodul central pe direcția verticală. În lucrare se precizează influența nedeterminării generalizate normalizată.

Kashani și Croll [1.19] au studiat flambajul elastic al cupolei sferice, supusă la încărcarea cu presiune. În analiza efectuată s-a utilizat modelul matricei de rigiditate redusă. Prin modelare numerică s-a determinat influența imperfecțiunilor geometrice de diferite mărimi asupra încărcărilor critice minime din diferitele moduri de flambaj. S-a demonstrat că în problema flambajului plăcilor curbe subțiri, utilizarea metodei matricei de rigiditate redusă precizează efectul reducerii încărcării datorită neliniarității și comportarea în domeniul postcritic. Analiza este suficient de simplă și poate fi adoptată în proiectare.

Croll [1.8] prezintă conceptul de metoda rigidității reduse, dedusă pe baza cercetărilor proprii și a încercărilor experimentale, efectuate pe plăci curbe subțiri. Metoda rigidității reduse, ca o extindere a teoriei clasice a stabilității, permite stabilirea încărcării critice minime din imperfecțiunile sensibile. Din compararea rezultatelor teoretice, care au fost obținute prin testări numerice cu rezultatele experimentale se precizează că metoda propusă se poate folosi în proiectare la verificarea siguranței plăcilor curbe subțiri continue.

1.5.1.4 Instabilitatea generală

La Tegola [1.20] prezintă o metodologie de analiză a stadiului limită a structurilor spațiale realizate din bare cu imperfecțiuni haotice. Se utilizează drept criterii de optimizare minimizarea volumului barelor care în colaps transformă structura în mecanism. În articol se prezintă modul de determinare a încărcării de limitare a structurii cu imperfecțiuni. Ca imperfecțiuni, se consideră abateri medii ale diametrului barelor și curburi ale axei barelor. Ambele sunt imperfecțiuni geometrice și pentru prima imperfecțiune se consideră o distribuție Gauss, iar pentru a doua imperfecțiune se presupune distribuția de tip gama.

Determinarea stadiului ultim este efectuată pentru fiecare analiză prin evaluarea multiplicatorului de colaps. Se propune o funcție posibilă pentru multiplicatorul de colaps și apoi se determină intervalul în care multiplicatorul de colaps al structurii este conținut, pentru o probabilitate de colaps dată. Rezultatele numerice pe o structură reticulată cilindrică se prezintă sub formă grafică, care arată variația multiplicatorului de încărcare la structura cu imperfecțiuni, în funcție de riscul considerat pentru diferite probabilități de cedare.

Influența imperfecțiunilor asupra încărcării ultime a structurii spațiale reticulate este considerabilă. Reducerea multiplicatorului de colaps este mare cu excepția cazurilor în care apariția mecanismului local de colaps are influență asupra imperfecțiunilor.

1.5.1.5 Propagarea instabilității locale în colapsul cupolei

Lenza [1.21] analizează capacitatea elastică a acoperișurilor cu dublă curbura, simplu strat. Se studiază instabilitatea prin bifurcare, respectiv prin limitare.

Folosind ecuația de echilibru și ca grade de libertate dinamică, componentele deplasărilor nodale, se analizează cu metoda lui Newmark, comportarea dinamică a unui acoperiș cilindric - reticulat cu luarea în considerare a amortizării și fără influența amortizării.

Se precizează că instabilitatea acoperișurilor cu dublă curbura este o problemă deschisă, deoarece multe surprize pot să apară în utilizarea modelelor analitice. Instabilitatea de nod prin saltul echilibrului poate constitui un factor care să conducă la colapsul structurii în cazul unor imperfecțiuni aleatoare. Efectul acestui tip de instabilitate a fost observat în experiențele efectuate și soluțiile analitice.

Gioncu și Lenza [1.14] au studiat la o placă curbă cu dublă curbura efectele dinamice produse prin saltul instabilității de nod. Analiza dinamică a fost efectuată sub acțiunea unui impuls aplicat modelului. Din cercetările efectuate a rezultat că instabilitatea locală poate genera colapsul structurii. Eventualele imperfecțiuni geometrice reduc încărcarea de limitare și inițiază propagarea instabilității locale.

Abedi și Parke [1.1], [1.2] analizează propagarea dinamică a saltului echilibrului într-o cupolă reticulată simplu strat. Folosind metoda elementului finit se prezintă o metodologie de modelare a fenomenului saltului local al echilibrului, precum și condițiile de încărcare. Efectul dinamic al saltului echilibrului reprezintă considerarea unor viteze inițiale la nodurile la care a apărut saltul.

Procedura este testată pe o cupolă simplu strat și se evaluează colapsul progresiv. Cupolele reticulate simplu strat cu nodurile articulate sunt mai sensibile la fenomenul de saltul echilibrului decât cupolele cu noduri rigide.

1.5.2 Pași necesari în analiza instabilității cupolelor reticulate

Analiza instabilității cupolelor reticulate necesită parcurgerea mai multor pași importanți.

1. Alegerea tipului de cupolă care se studiază.
2. Precizarea tipului de prindere a barelor în nodurile interioare și de rezemare.
3. Determinarea experimentală a caracteristicilor care definesc rigiditatea nodurilor interioare.
4. Alegerea materialului din care se execută barele și nodurile cupolei.
5. Alegerea modelului fizic pentru material elastic și elasto - plastic.
6. Selectarea tipurilor de elemente finite.
7. Stabilirea ecuațiilor de echilibru și de mișcare neliniare pentru structură.
8. Selectarea procedurii numerice de rezolvare a ecuațiilor de echilibru și de mișcare.
9. Determinarea ordinii de apariție a diferitelor moduri de flambaj și a modurilor cuplate.
10. Studiarea factorilor care influențează capacitatea portantă a cupolei: deformațiile plastice, influența imperfecțiunilor, densitatea rețelei, raportul între săgeata cupolei și deschidere, secțiunea transversală a barelor.
11. Cercetarea modului de propagare a flambajului local în structură.
12. Analiza posibilităților de consolidare a barelor cupolei pentru a evita colapsul prin propagarea dinamică a flambajului local.
13. Studiul influenței semirigidității nodurilor asupra capacității portante a cupolei.
14. Încercări experimentale pe modele de cupole și pe cupole reale pentru verificarea rezultatelor teoretice.
15. Stabilirea concluziilor practice de care trebuie să se țină seama la proiectarea acestor structuri.

După parcurgerea pașilor precizați mai sus, este posibil să fie analizată siguranța în exploatare și în timpul montajului, a cupolelor reticulate simplu strat.

1.6 Probleme nerezolvate

Din analiza literaturii de specialitate referitoare la stabilitatea cupolelor metalice reticulate simplu strat s-au depistat problemele rezolvate în prezent și direcțiile care mai necesită cercetări teoretice și experimentale în viitor.

Obiectivele nerezolvate sau parțial rezolvate în prezent se referă la studiul unor aspecte teoretice, formulări și proceduri numerice de rezolvare și cercetări experimentale pe noduri, modele de cuplare și cupole reale. Detaliind aceste obiective rezultă că mai sunt necesare cercetări în următoarele direcții:

- stabilirea modului de cedare prin instabilitate de bară, instabilitate de nod, instabilitate de inel și instabilitate generală;
- identificarea modurilor cuplate de instabilitate, care pot conduce la încărcări critice mai mici decât în cazul flambajului separat;
- prezentarea comparativă a încărcărilor critice pentru diferitele moduri de instabilitate;
- influența comportării elastice - perfect plastice a oțelului asupra încărcărilor critice (în perspectivă se va studia și influența unei comportări biliniare a oțelului);
- studiul influenței raportului între săgeata cupolei și deschiderea cupolei asupra încărcării critice;
- influența densității nodurilor structurii asupra încărcărilor critice;
- influența modului de prindere a barelor în nodurile cupolei;
- precizarea reducerii încărcării critice produsă de imperfecțiunile geometrice de bară, de nod și de structură;
- propagarea instabilității locale și cedarea cupolelor în urma saltului dinamic;
- analiza modalităților constructive de consolidare a cupolelor pentru a împiedica propagarea flambajului local în flambaj general al cupolei;
- testarea numerică a unor programe de calcul performante pentru calculul neliniar;
- compararea rezultatelor numerice cu rezultate experimentale existente în literatura de specialitate.

1.7 Scopul tezei de doctorat

Teza de doctorat are ca scop să elucideze o parte din obiectivele nerezolvate sau parțial rezolvate, în prezent, referitoare la stabilitatea cupolelor metalice - reticulate simplu strat. Aceste obiective au fost precizate în detaliu în paragraful 1.6. Sub formă restrânsă se poate defini scopul tezei de doctorat ca fiind o contribuție la cercetarea stabilității cupolelor metalice - reticulate simplu strat, ținând seamă de complexitatea fenomenului și de factorii care îl influențează. Direcțiile de cercetare abordate în teza de doctorat se referă la:

- analiza mecanismelor de cedare prin diferite moduri de instabilitate;
- studiul comparativ al variației încărcărilor din noduri pentru toate modurile de instabilitate și diferite secțiuni transversale ale barelor;
- influența deformațiilor plastice asupra încărcărilor critice;
- reducerea încărcărilor datorită imperfecțiunilor geometrice de bară, nod, inel și structură;
- analiza variației încărcărilor la cupolele perfecte și imperfecte în funcție de raportul între săgeată și deschiderea cupolei;

- propagarea instabilității locale în instabilitate generală și studiul parametrilor de care depinde aceasta;
- stabilirea măsurilor constructive de consolidare a barelor pentru a evita propagarea instabilității locale în instabilitate generală;
- precizarea direcțiilor viitoare de cercetare.

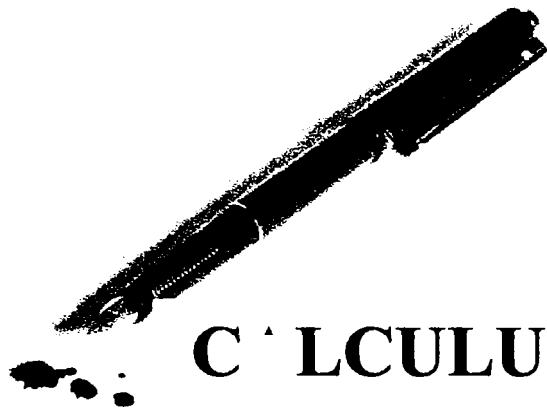
BIBLIOGRAFIE

- [1.1] **Abedi K. și Parke R.A.G.**, *Progressive Collapse of Single - Layer Braced Domes*. Int.J.of Space Structures.Vol.11, No.2, pp 291 - 306, 1996.
- [1.2] **Abedi K. și Parke R.A.G.**, *Effects of Initial Imperfections on the propagation of Local Instability in Single Layer Braced Domes*. Stability end Ductility of Steel Structures, SDSS '97, 29-31 July pp 449-457, Nagoya, Japan. 1997.
- [1.3] **Beleş A. A. și Soare M.**, *Discuție la articolul lui Wright D. T. Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells* J. Str. Div. Am. Soc. Civ.Engs, 91(ST 5). pp 376 - 378, 1965.
- [1.4] **Beleş A. A. și Soare M.**, *Some Observations on the Failure of a Dome of Great Span Space Structures*. Int.Conf. on Space Structures. Ed.by R.M.Davies Univ.of Surrey, pp 419 - 423, Blackwell Sci.Publ. Oxford and Edimburg, 1967.
- [1.5] **Bori C. și Chiostrini S.**, *Numerical Aproach to the Nonlinear Stability Analysis of Single Layer Reticulated and Gird - Shell Structures*. Int. J. of Space Structures, vol. 7, No. 4, pp 285 - 297, 1992.
- [1.6] **Chateau Du S.**, *Architectural Aspects of Braced Barrel Vaults*. Analysis Design and Construction of Braced Barrel Vaults, pp 223 - 237. Ed.Z.S.Makowski El.Appl. Sci .Publ. London, 1985.
- [1.7] **Croll J.G.A. și Walker A.C.**, *Elements of Structural Stability*. Macmillan, London, 1972
- [1.8] **Croll A.G.J.**, *Towards of Rationally Based Elastic - Plastic Shell Buckling Design* Methology Thin Walled Structures, nr. 23, pp 67-84, 1995.
- [1.9] **Day S. A.**, *An Introduction to Dynamic Relaxation*. Engineer 219, pp 218 - 221, 1965
- [1.10] **Fujimoto M., Saka T., Iman K. și Morita T.**, *Experimental and Numerical Analysis of the Buckling of a Single - Layer Dome*. Space Structures 4, pp 396 - 405, London, 1993
- [1.11] **Gioncu V.**, *Buckling of Reticulated Shells: State of Art, International Journal of Space Structures*, vol. 10, no. 1, pp 1- 46, 1995
- [1.12] **Gioncu V. și Băluț N.**, *Instability Behaviour of Single Layer of Reticulated Shells* Int.J. of Space Structures, vol.7, No.4, pp 243 - 252, 1992.
- [1.13] **Gioncu V. și Ivan M.**, *Instabilitatea structurilor din plăci curbe subțiri*. Editura Academiei Române, București, 1984.
- [1.14] **Gioncu V. și Lenza P.**, *Propagation of local buckling in reticulated shells*, Space Structures 4, Vol. 1, pp 147 – 155, Edited by G.A.R. Parke and C.M. Howard, Thomas Telford Services ltd, London, 1993

- [1.15] **Gioncu V. și Petcu D.,** *Corrugated hypar structures.* Int.Conf.on Lightweight Struct.in Civ.Eng. pp 637 - 644, Edited by Jan B.Obrebski, Warsaw, Poland, 1995.
- [1.16] **Gioncu V., Băluț N., Porumb D și Rennon N.,** *Recent Examples of Prefabricated Steel Barrel Vaults from Romania. Their Analysis Design an Construction of Braced Vaults,* pp 354 - 366, Ed. by Z.S.Makowski Appl. Sci.Publ., London, 1985.
- [1.17] **Ivan M. și Ivan A.,** - *Cupola metalică cu arce și inele la Banca Agricolă din Arad.* A VIII-a Conferință Internațională de Constr. Metalice, pp 420 - 426, Timișoara, România, 1997.
- [1.18] **Kani I.M.,** *A Theoretical and Experimental Integration of the Collapse of Shallow Reticulated Domes.* Thesis submitted at the Univ.of Cambridge for the Degree of Doctor of Philosophy, 1986.
- [1.19] **J.Kashani M. și Croll A.G.J.,** *Lower Bounds for Overall Buckling of Spherical Space Domes.* J of Eng.Mech. vol.120, No.5, May pp 949 - 970, 1994.
- [1.20] **La Tegola A.,** *Ultimate Limit States of Space Reticular Structures with Randon Behaviour Elements.* Int. J.of Space Structures, vol. 7, No.4, pp 345 - 352, 1992
- [1.21] **Lenza P.,** *Instability of Single Layer Doubly Curved Vaults.* Int.J. of Space Structures, vol.7, No 4, pp 253 - 264, 1992.
- [1.22] **Livesley R.K. și Chandler D.B.,** *Stability Functions for Structural Frameworks.* Manchester Univ.Press, Manchester, England, 1956.
- [1.23] **Makowski Z.S. (editor)** *Analysis, Design and Construction of Braced Domes.* Publishing Ltd. Granada Nicolls Publishing Co, London and New York, pp 1 - 95, 1984.
- [1.24] **Mallet R.H. și Marcal P.V.,** *Finite Element Analysis pf Nonlinear Structures.* J.Str.Div. ASCE, vol.94, No ST 9, pp 2081 - 2105, 1968.
- [1.25] **Mateescu D., Appeltauer I., Ivan M.,** *Considerații teoretice privind calculul static și verificarea stabilității cupolelor metalice cu nervuri și inele.* Bul. Institut PolitehnicTimișoara, Tom9(23) Fasc.2., 1964.
- [1.26] **Oran C.,** *Tangent Stiffness in Space Frames.* J. Str.Div. ASCE, vol.99, No ST 6, pp 987 - 1001, 1973.
- [1.27] **Pandy C.P. și Berai V.S.,** *Structural Sensitivity as a Measure of Redundarcy.* J. Str. Eng., p.p. 360 - 364, 1997
- [1.28] **Papadrakaskis M.,** *Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration methods.* Comp.Struct., vol. 14, No. 5 - 6 pp 393 - 402, 1981.
- [1.29] **Rashel S.M., Katawaya M., Isha H., Toda J., Oda K., și Washizaki K.,** *Analysis of Nonlinear and Collapse Behaviour of the TM Space Trusses.* Proc. of the 3rd Intern.Conf.of Space Struct. pp 480 - 485 Guildford, England, 1984.

- [1.30] **Renton J.D.**, *Stability of Space Frames by Computer Analysis*. J. Str. Div. ASCE, vol. 88, No. ST 4, 1962.
- [1.31] **Roorda J.**, *Stability of Structures with Small Imperfections*. J. Eng. Mech. Div. ASCE, vol. 19, No. EM 1, 1965.
- [1.32] **Rothert H. și Gebbexken N.**, *On Numerical Results of Reticulated Shell Buckling*. Int.J. Space Structures, Vol.7, No.4, pp 299-319, 1992.
- [1.33] **Saafan S.A.**, *Nonlinear Behaviour of Structural Plane Frames*. J. Str. Div. ASCE, vol. 89, No. ST 4, p.p. 557 - 579, 1963
- [1.34] **Saitoh H., Hangai Y., Toda I., Yamagiwa T. și Okuhara T.**, *Buckling Loads of Reticulated Frames*. Proc. IASS Symp. Osaka, vol. 3, pp 121 - 128, 1986
- [1.35] **See T.**, *Large Displacement Elastic Buckling of Space Structures*. Thesis submitted at the Univ. of Cambridge for the Degree of Doctor of Philosophy, 1983
- [1.36] **Shibata R., Kato S., Yamada S.**, *Experimental Study on Ultimate Strength of Single Layer Reticular Dome*. Space Structures 4, pp 387 - 405, Thomas Telford, London, 1993.
- [1.37] **Soare M.**, *Investigation of the Collapse of a Large Span Braced Dome. Course on the Analysis, Design and Construction of Braced Domes*. Organised by the Space Structures Research Centre by Prof. Z.S. Makowski, Vol.I, Univ.of Surrey, 1980.
- [1.38] **Suzuki T., Ogawa T. și Ikarashi K.**, *Elasto - Plastic Buckling Analysis of Rigidly Jointed Single Layer Reticulated Domes*. Int. J. of Space Structures, vol. 7, No 4, pp 363 - 368, 1992.
- [1.39] **Suzuki T., Ogawa T. și Ikarashi K.**, *Elastic Buckling Analysis Rigidly Jointed Single Layer Reticulated Domes with Random Initial Imperfections*. Int.J. of Space Structures, vol. 7, No. 4, pp 265 - 273, 1992.
- [1.40] **Thompson J.M.T. și Hunt G. W.**, *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley and Sons, 1973
- [1.41] **Timoshenko S.P. și Gere T.M.**, *Theory of Elastic Stability*. Mc. Graw - Hill, New York, 1964
- [1.42] **Ueki T., Matsushita F.**, *Design Procedure for Large Single - Layer Latticed Domes*. Space Structures 4, pp 237 - 246, Thomas Telford, London, 1993.
- [1.43] **Wessels M.**, *Das statische und dynamische durchschlagsproblem der imperfekten flachen kugelshale bei elastischer rotation - symmetrischer verformung*. Diss. Inst. fur Statik, T. U. Hanover, No. 23, 1977.
- [1.44] **Yamada M., Uchiama K., Yamada S. și Ishikawa T.**, *Theoretical and Experimental Study on the Buckling of Rigidity Jointed Single Layer Latticed Spherical Shell Under External Pressure*. Membrane Structures and Space Frames, Proc. IASS Symp.Osaka, vol. 3, pp 113 - 120, 1986.

CAPITOLUL 2



CĂLCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR ALCĂTUIATE DIN BARE

2. CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR ALCĂTUIE DIN BARE

2.1 Probleme generale

Reducerea greutateii construcțiilor și utilizarea unor materiale cu calități fizico-mecanice superioare la construcțiile cu deschideri mari, constituie o preocupare actuală în știința construcțiilor.

Calculul liniar al construcțiilor se conduce considerând că deformațiile elementelor structurale sunt mici și ecuațiile de echilibru static se scriu pe structura nedeformată.

Analiza riguroasă a comportării structurilor sub acțiunea forțelor din exploatare necesită un calcul neliniar. Neliniaritatea poate să provină din comportarea neliniară a materialelor de construcții, din neliniarități geometrice sau din ambele cauze.

Prin cunoașterea mai bună a comportării materialelor de construcții, adoptarea unor noi tipuri de structuri și optimizarea celor existente se ajunge la reducerea dimensiunilor elementelor de construcții și greutateii lor. În aceste condiții structurile au o comportare puternic neliniară și prezintă un pericol mai mare de pierdere a stabilității echilibrului.

Stabilirea răspunsului real al structurii necesită scrierea condiției de echilibru static pe structura deformată (ASN), luarea în considerare a neliniarității materialelor de construcții (AFN) și a relațiilor neliniare din aspectul geometric neliniar (AGN). Prin considerarea acestor aspecte neliniare se obțin ecuații diferențiale neliniare, care se pot rezolva numai pe cale numerică cu ajutorul calculatorului.

Structurile ușoare ca barele cu pereți subțiri, stâlpii rigidizați, plăcile rigidizate, plăcile sandwich, plăcile curbe reticulate sau continue, constituie exemple de structuri cu o puternică comportare neliniară.

Calculul neliniar al structurilor formate din bare, plăci plane și plăci curbe în domeniul deplasărilor și rotațiilor mari este foarte interesant în ingineria civilă, mecanică și aeronautică.

Neliniaritățile geometrice provin din deformațiile mari pe care le suferă structura din forțele exterioare. Acest fenomen intervine la construcțiile cu deschideri mari, la construcțiile înalte și în special la structurile suspendate pe cabluri. La toate aceste tipuri de construcții este obligatoriu să se țină seama de efectul neliniarităților geometrice asupra stării de eforturi și deplasări din structură.

Studiul problemelor de stabilitate a echilibrului prin încovoiere, încovoiere-răsucire, voalare se studiază folosind calculul neliniar al structurilor.

O problemă relativ nouă în care intervine calculul neliniar al structurilor se referă la influența nodurilor semirigide asupra încărcării de colaps a cadrelor metalice. Nodul semirigid contribuie la creșterea efectelor de ordinul doi, ceea ce influențează creșterea deplasărilor orizontale din încărcările de exploatare. La rezolvarea acestor probleme trebuie să se formuleze matematic calculul neliniar care se ia în considerare, chiar pentru materialul elastic, efectele produse de forțele axiale din bare, încovoierea barelor și deformațiile finite ale barelor.

Teza de doctorat își propune să facă o analiză a stărilor de eforturi și deplasări care iau naștere în structurile metalice reticulate ținând seama de comportarea spațială a structurii în ansamblu, de imperfecțiunile geometrice și fizice, să analizeze mecanismul de pierdere a stabilității echilibrului, să testeze programele existente în literatura de specialitate pentru analiza statică și dinamică neliniară a structurilor metalice reticulate simplu strat.

Mai mulți cercetători au depus și depun eforturi în ultimii ani la dezvoltarea metodei elementului finit, care să genereze o formulare numerică destul de exactă la un cost rezonabil de calcul.

2.2 Tensorul deformațiilor specifice

Se consideră punctele A și B din configurația inițială a structurii (fig. 2.1.) care sunt definite în sistemul de coordonate x_i , $i = 1, 2, 3$. Coordonatele punctului A sunt x_1, x_2, x_3 iar ale punctului B sunt $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3$. Coordonatele în configurația deformată se notează cu X_1, X_2, X_3 respectiv X_i , $i = 1, 2, 3$ sub formă restrânsă. Deplasările corespunzătoare punctului A se notează cu u_i , $i = 1, 2, 3$, respectiv deplasările punctului B sunt $u_i + \Delta u_i$, $i = 1, 2, 3$ în lungul axelor de coordonate carteziane.

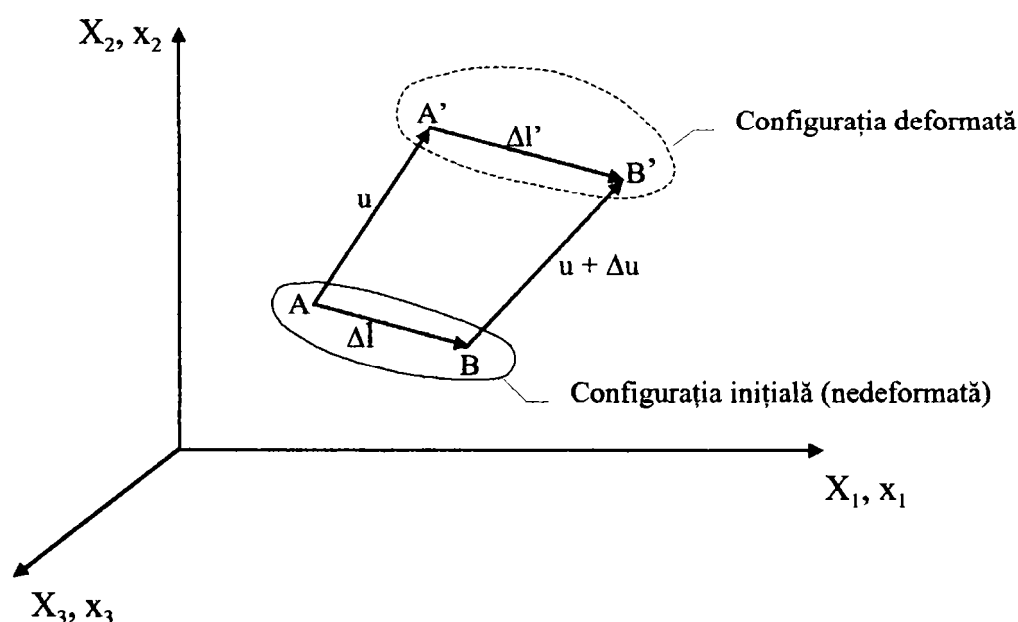


Fig. 2.1 Sistemele de coordonate pentru definirea configurației inițiale și a celei deformată

Tensorul lui Green pentru deformațiile specifice în coordonate carteziene are elementele de forma [2.17]

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{kj} \quad (2.1)$$

Prin permutarea indicilor se pot scrie cele nouă deformații specifice axiale și unghiulare, care intervin într-o problemă spațială de elasticitate. Spre exemplu două dintre acestea au forma

$$\varepsilon_{x_1 x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (2.2a)$$

$$\varepsilon_{x_1 x_2} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)}_{\substack{\text{termen liniar} \\ \text{teoria liniară}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]}_{\text{termen neliniar}} \quad (2.2b)$$

teoria neliniară

în care u_1 , u_2 și u_3 sunt componentele deplasărilor și $\varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{1}{2} \gamma_{x_1 x_2}$ sunt deformațiile specifice de lunecare.

Tensorul deformațiilor specifice finite al lui Almansi are forma

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) = \eta_{kj} \quad (2.3)$$

în care \dot{x}_i sunt coordonatele în poziția definită.

În cazul în care componentele deplasărilor ca și derivatele de ordinul întâi ale acestora sunt mici în comparație cu unitatea, pătratele și produsele derivatelor parțiale ale lui u_i sunt neglijabile și η_{jk} se reduce la tensorul lui Cauchy:

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (2.4)$$

valabil în cazul deplasărilor infinitezimale.

În calculul neliniar relațiile între deformațiile specifice și deplasări sunt neliniare și în formulare matricială se scriu astfel

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Pentru bara dreaptă deformațiile specifice neliniare au expresia

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Pentru simplificarea scrierii s-au folosit și notațiile:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$$

Condensat relațiile (2.5) se mai scriu

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} = ([B_L] + [B_{NL}(d)])\{d\} \quad (2.7)$$

în care s-a notat:

$[B_L]$ - operator diferențial liniar;

$[B_{NL}]$ - operator diferențial neliniar;

$\{d\}^T = [u \ v \ w]$ - componentele vectorului deplasare.

Relația (2.7) se mai poate scrie în așa fel încât să evidențieze matricea pantelor totale [A]

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \frac{1}{2}[A]\{\theta\} \quad (2.8)$$

în care s-au utilizat notațiile

$$\{\theta\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (2.9)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Tensorul deformațiilor specifice pentru o poziție deformată a structurii $\Gamma + \Delta\Gamma$ apropiată de poziția deformată Γ are expresia

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

Scăzând din (2.11) relația (2.1) se obține creșterea deformațiilor specifice (incrementul lui ε_{ij})

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.12)$$

Creșterea deformațiilor specifice (2.12) se poate scrie în formulare matricială astfel

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_L\} + [A]\{\Delta\theta\} + \frac{1}{2}[\Delta A]\{\Delta\theta\} \quad (2.12a)$$

în care s-au introdus notațiile:

$$\{\Delta\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \partial\Delta u / \partial x \\ \partial\Delta v / \partial y \\ \partial\Delta w / \partial z \\ \partial\Delta u / \partial y + \partial\Delta v / \partial x \\ \partial\Delta v / \partial z + \partial\Delta w / \partial y \\ \partial\Delta w / \partial x + \partial\Delta u / \partial z \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta\theta\} = \begin{Bmatrix} \partial\Delta u / \partial x \\ \partial\Delta v / \partial x \\ \partial\Delta w / \partial x \\ \partial\Delta u / \partial y \\ \partial\Delta v / \partial y \\ \partial\Delta w / \partial y \\ \partial\Delta u / \partial z \\ \partial\Delta v / \partial z \\ \partial\Delta w / \partial z \end{Bmatrix} \quad (2.13, 14)$$

$$[\Delta A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta u}{\partial x} & \frac{\partial\Delta v}{\partial x} & \frac{\partial\Delta w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Delta u}{\partial y} & \frac{\partial\Delta v}{\partial y} & \frac{\partial\Delta w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Delta u}{\partial z} & \frac{\partial\Delta v}{\partial z} & \frac{\partial\Delta w}{\partial z} \\ \frac{\partial\Delta u}{\partial y} & \frac{\partial\Delta v}{\partial y} & \frac{\partial\Delta w}{\partial y} & \frac{\partial\Delta u}{\partial x} & \frac{\partial\Delta v}{\partial x} & \frac{\partial\Delta w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Delta u}{\partial z} & \frac{\partial\Delta v}{\partial z} & \frac{\partial\Delta w}{\partial z} & \frac{\partial\Delta u}{\partial y} & \frac{\partial\Delta v}{\partial y} & \frac{\partial\Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial\Delta u}{\partial z} & \frac{\partial\Delta v}{\partial z} & \frac{\partial\Delta w}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Delta u}{\partial x} & \frac{\partial\Delta v}{\partial x} & \frac{\partial\Delta w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3 Ecuația constitutivă

Tensiunile se exprimă în funcție de deformațiile specifice prin ecuația constitutivă

$$\{\sigma\} = [E(\sigma)]\{\varepsilon\} \quad (2.16)$$

în care $[E(\sigma)]$ este modulul tangențial elasto-plastic care este funcție de nivelul curent al tensiunilor în materialul cu comportare neliniară, iar $\{\varepsilon\}$ este vectorul deformațiilor specifice din sistemul local de referință.

Sub formă incrementală relația (2.16) se scrie

$$\{\Delta\sigma\} = [E(\sigma)]\{\Delta\varepsilon\} \quad (2.17)$$

Pentru un material liniar-elastic ca oțelul în domeniul elastic $[E(\sigma)]$ are expresia

$$[E(\sigma)] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2k} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

în care E este modulul de elasticitate, μ coeficientul lui Poisson și k este un factor pentru a ține seamă de influența deplasărilor din tăiere.

Dacă distribuția tensiunilor tangențiale este parabolică $k = 1, 2$ dă o reprezentare corectă pentru energia de deformație. Modulul de elasticitate transversal se exprimă în funcție de modulul de elasticitate longitudinal cu relația

$$G = \frac{E}{2(1+\mu) \cdot 1,2} = \frac{E}{2,4(1+\mu)} \quad (2.19)$$

Ecuția (2.16) ținând seama de relația (2.7) devine

$$\{\sigma\} = [E(\sigma)]([B_L] + [B_{NL}(d)])\{d\} = [D][B]\{d\} = [\bar{B}_{NL}]\{d\} \quad (2.20)$$

2.4 Ecuțiile de echilibru static neliniare pentru bară

Dacă se scriu ecuațiile de echilibru static pentru un element structural în poziția deformată (fig.2.2) rezultă după neglijarea infiniților mici de ordin superior

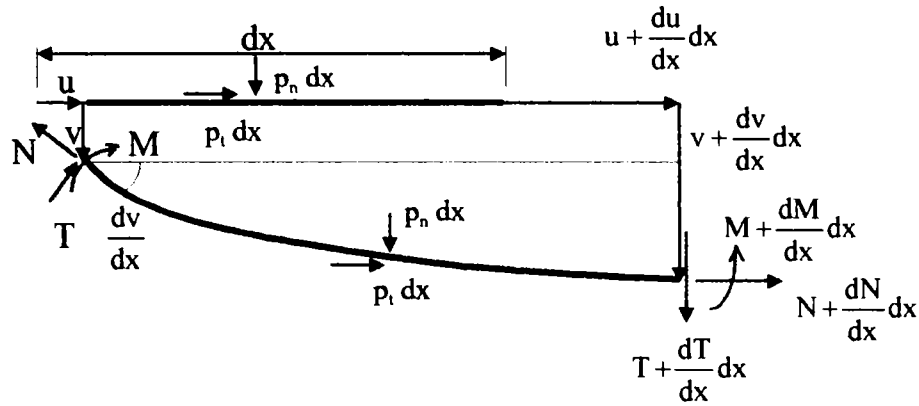


Fig 2.2 Element diferențial de bară în poziția nedeformată și deformată

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} + \frac{dv^2}{dx^2}\right) & 0 \\ \left(\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} p_t \\ p_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

sau condensat

$$([E_L] + [E_{NL}(d)]) \{\mathcal{E}\} = -\{p\} \quad (2.21a)$$

în care $[E_L]$ este un operator diferențial liniar, iar $[E_{NL}(d)]$ operator diferențial neliniar care depinde de deplasări și derivatele lor.

Vectorul eforturilor s-a notat cu

$$\{\mathcal{E}\} = [N \ M \ T] \quad (2.22)$$

iar vectorul forțelor exterioare cu

$$\{p\}^T = [p_t \ p_n \ 0] \quad (2.23)$$

2.5 Ecuația de continuitate

Dacă se elimină deplasările din relația (2.5) se obține ecuația de continuitate care are forma

$$\{\mathcal{L}\} \{\varepsilon\} = 0 \quad (2.24)$$

2.6 Relații între eforturi și deformații

Eforturile $\{\mathcal{E}\}$ se exprimă în funcție de deformațiile specifice prin integrarea relațiilor de echivalență statică și rezultă

$$\begin{aligned} N_x &= R_a(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}); \\ N_y &= R_a(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}); \\ N_{xy} &= R_a(1 - \mu)\varepsilon_{xy}; \\ M_x &= -K(\chi_{xx} + \mu\chi_{yy}); \\ M_y &= -K(\chi_{yy} + \mu\chi_{xx}); \\ M_{xy} = M_{yz} &= -K(1 - \mu)\chi_{xy}; \end{aligned} \quad (2.25a, \dots, f)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$R_a = \frac{Et}{1 - \mu^2} \quad - \text{rigiditatea la forță axială}; \quad (2.26a)$$

$$K = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \quad - \text{rigiditatea la încovoiere}; \quad (2.26b)$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.26c, \dots, e)$$

Matricial relațiile (2.25a, ..., f) se scriu

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{12} & -\frac{\mu t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu t^2}{12} & -\frac{t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\mu)\frac{t^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

sau condensat

$$\{\mathcal{E}\} = [\chi]\{\varepsilon\} \quad (2.27a)$$

Cu deformațiile specifice din relația (2.6) rezultă

$$\{\mathcal{E}\} = [\chi]([B_L] + [B_{NL}])\{d\} \quad (2.28)$$

Expresia (2.27a) conține comportarea materialului, relațiile cinematice și satisface ecuația de continuitate (2.24)

2.7 Ecuația de echilibru fundamentală

Introducând eforturile din (2.27a) în ecuația de echilibru static (2.21a) rezultă

$$([E_L]) + [E_{NL}(d)][\chi]\{\varepsilon\} = -\{p\} \quad (2.29)$$

respectiv

$$([E_L] + [E_{NL}(d)])([\chi]([B_L] + [B_{NL}]))\{d\} = -\{p\} \quad (2.30)$$

Ecuația de echilibru (2.30) este o ecuație diferențială neliniară, care ține seamă de comportarea materialului, relațiile cinematice, ecuația de continuitate și condițiile de limită.

Sub formă restrânsă ecuația (2.30) se scrie

$$[K_s]\{d_n\} = \{P\} \quad (2.31)$$

sau

$$[K_t]\{d_n\} = \{P\} \quad (2.32)$$

în care $[K_s]$ este rigiditatea secantă a elementului structural;

$[K_t]$ este rigiditatea tangentă a elementului structural;

$\{d_n\}$ este vectorul deplasărilor nodale;

$\{P\}$ este vectorul forțelor exterioare corespunzătoare deplasărilor nodale $\{d_n\}$

Ecuațiile de echilibru pe structura deformată (2.31) și (2.32) se pot obține și utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru deplasări mici și forțe concentrate aplicate pe structură principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel

$$\delta W = \delta L_e \quad \text{sau} \quad \delta W - \delta L_e = 0 \quad (2.33)$$

care ținând seama de expresia energia de deformație δW și a lucrului mecanic al forțelor exterioare δL_e devine

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{\delta d_n\}^T \{P\} = 0 \quad (2.33a)$$

în care $\{\sigma\}$ este vectorul tensiunilor, $\{\delta \varepsilon\}$ deplasările specifice virtuale corespunzătoare tensiunilor $\{\sigma\}$ produse de deplasarea virtuală $\{\delta d\}$, V este volumul elementului.

Câmpul deplasărilor din elementul structural se exprimă în funcție de deplasările nodale prin relația

$$\{\Phi\} = [N]\{d_n\} \quad (2.34)$$

Deformațiile specifice $\{\varepsilon\}$ se calculează în funcție de deplasările (2.7) astfel

$$\{\varepsilon\} = \{H(\Phi)\} = \{H(Nd_n)\} = [B(d_n)]\{d_n\} = ([B_L] + [B_{NL}])\{d_n\} \quad (2.35)$$

în care $[B_{NL}]$ depinde de deplasările $\{d_n\}$ și este un termen neliniar.

Deformațiile specifice virtuale se exprimă în funcție de deplasările nodale prin relația liniară

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta d_n\} = ([B_L] + [B_{NL}])\{\delta d_n\} \quad (2.36)$$

Tensiunile pentru un material cu elasticitate liniară se determină din ecuația constitutivă

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D]([B_L] + [B_{NL}])\{\delta d_n\} \quad (2.37)$$

Introducând relațiile (2.36) și (2.37) în expresia (2.33a) rezultă

$$\{\delta d_n\}^T \int_V ([B_L] + [B_{NL}])^T [D] ([B_L] + [B_{NL}]) \{d_n\} - \{\delta d_n\}^T \{P\} = 0 \quad (2.38)$$

care ținând seamă că $\{\delta d_n\}^T$ este o deplasare arbitrară devine

$$\left(\int_V [B_L]^T [D] [B_L] dV + \int_V [B_L]^T [D] [B_{NL}] dV + \int_V [B_{NL}]^T [D] [B_L] dV + \int_V [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] dV \right) \{d_n\} = \{P\} \quad (2.39)$$

Ultimul termen fiind neliniar de ordin superior se neglijează. Relația (2.39) în formă condensată se scrie

$$[K_S]\{d_n\} = ([K_L] + [K_{NLS}])\{d_n\} = \{P\} \quad (2.40)$$

în care s-a notat cu $[K_S]$ matricea secantă a rigidităților, $[K_L]$ matricea rigidității în calculul liniar și are expresia

$$[K_L] = \int_V [B_L]^T [D] [B_L] dV \quad (2.41)$$

$[K_L]$ matricea rigidității care ține seamă de influența neliniarității geometrice

$$[K_{NLS}] = \int_V \left([B_L]^T [D] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] \right) dV \quad (2.42)$$

Relația [2.40] reprezintă ecuația de echilibru static în formulare matriceală pentru elementul finit

Procedând în mod analog, însă efectuând liniarizarea ecuației (2.38) în concordanță cu metoda tangentelor, se obține ecuația de echilibru pentru elementul finit sub forma

$$[K_T] \{ \delta d_n \} = \{ \delta P \} \quad (2.43)$$

în care $[K_T]$ este matricea tangentă a rigidităților

$$[K_T] = [K_L] + [K_{NT}] + [K_{GT}] \quad (2.44)$$

Matricea $[K_L]$ este matricea rigidității în calculul liniar, matricea $[K_{NT}(d_n)]$ ține seamă de deplasările inițiale, $[K_{GT}(\sigma/d_n)]$ matricea rigidității geometrice în varianta tangentă

$$[K_L] = \int_V [B_L]^T [D] [B_L] dV \quad (2.45a)$$

$$[K_{NT}] = \int_V \left([B_L]^T [D] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] \right) dV \quad (2.45b)$$

$$[K_{GT}] = \int_V [B_{NL}]^T \{ \sigma \} dV \quad (2.45c)$$

2.8 Matricea tangentă a rigidității barei solificate spațial cu imperfecțiuni geometrice de bară și nod

Barele solificate spațial intervin la cadrele spațiale și la structurile reticulate. În aceste cazuri în bară apar solicitări spațiale, iar forța axială are un efect important. Forța axială multiplicată cu săgețile barei din încovoiere produce momente încovoietoare suplimentare în bară. Momentele încovoietoare produc scurtarea axială a barei.

Comportarea neliniară a barei când deformațiile sunt mari necesită interacțiunea dintre momentele încovoietoare și forța axială. Influența semirigidității nodurilor, a imperfecțiunilor geometrice pe lungimea barei, a erorilor de fabricație și execuție, precum și eforturile suplimentare date în structură datorită montajului forțat, constituie factori care necesită comportarea neliniară a structurilor reticulate.

Este cunoscut faptul că imperfecțiunile geometrice de bară și structura afectează semnificativ siguranța structurilor reticulate. Comportarea nodurilor joacă un rol deosebit în comportarea structurii întregi și constituie în numeroase cazuri factorul critic care în multe situații a produs cedarea structurilor.

În continuare se discută stabilirea matricei de rigiditate tangentă a barei în calculul nelinier cu influența forțelor axiale, a imperfecțiunilor geometrice de bară și de nod.

Se neglijează în continuare influența forțelor axiale asupra rigidității de torsiune, respectiv a momentului de răsucire asupra rigidității axiale.

Matricea rigidității barei în calculul nelinier se utilizează folosind matricea geometrică a rigidității stabilită de Yang și McGuire [2.39] sau introducând funcțiile de stabilitate propuse de Fleming [2.9], Harrison [2.11] și Horne și Merchant [2.13]. Matricea rigidității geometrice incluzând efectul torsiunii neuniforme a fost stabilită de Yang și McGuire [2.39]. Funcțiile de stabilitate pentru bara din structura plană sunt date de Flemming [2.9] și Harrison [2.11]. Papadrakakis [2.30] a trecut în revistă rezultatele cercetărilor pentru matricea rigidității neliniare a barei din structura spațială până în 1986. Studii mai recente au fost efectuate de See și McConnel [2.36], Shi și Atluri [2.37, 2.38], Chandra și alții [2.5]. Diferența între studiul structurilor spațiale și al structurilor plane este sesizată de Oran [2.28], care a introdus matricea de orientare a nodului pentru structurile spațiale. Formularea lui Oran a fost utilizată în studii recente de Meek și Tan [2.27], See și McConnel [2.36], Chandra și alții [2.5].

Formularea lui Oran este teoretic consistentă, dar ipoteza că incrementele rotațiilor de noduri sunt infinitezimale, conduce la neortogonalitatea nodului și matricea de orientare a nodului. Această ipoteză într-o procedură de rezolvare incrementală liniarizată, când configurația structurii din incrementul încărcării este mică dar finită poate conduce la erori care se cumulează.

Bara din structura spațială se definește în sistemul global de referință \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$ (Fig.2.3). Sistemul local de referință pentru bară este x_i , $i = 1, 2, 3$ (Fig. 2.3). Axa x_1 trece prin centrele de greutate ale secțiunilor transversale de la extremități, iar axele x_2 și x_3 sunt paralele cu axele principale ale secțiunii transversale.

Funcțiile de stabilitate se exprimă în funcție de lungimea barei, caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale, forța axială și momentele încovoietoare de la extremitate, amplitudinea

imperfecțiunilor geometrice ale barei, imperfecțiunile geometrice ale nodului și dimensiunea finită a conexiunilor.

În continuare se prezintă stabilirea matricei de rigiditate neliniară a barei drepte din structura spațială cu secțiune constantă sub formă explicită.

2.8.1 Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale

Rigiditatea axială a barei cu secțiune constantă supusă la forța axială constantă P este EA/l , iar deformația este $u = Pl/EA$.

Dacă la extremitățile barei există momente încovoietoare, rigiditatea axială a barei se modifică ca urmare a deformației axiale produse de momentele încovoietoare.

Analiza se va efectua separat pentru momentele încovoietoare în planul $x_1 - x_2$, respectiv $x_1 - x_3$ (Fig. 2.3.a și b)

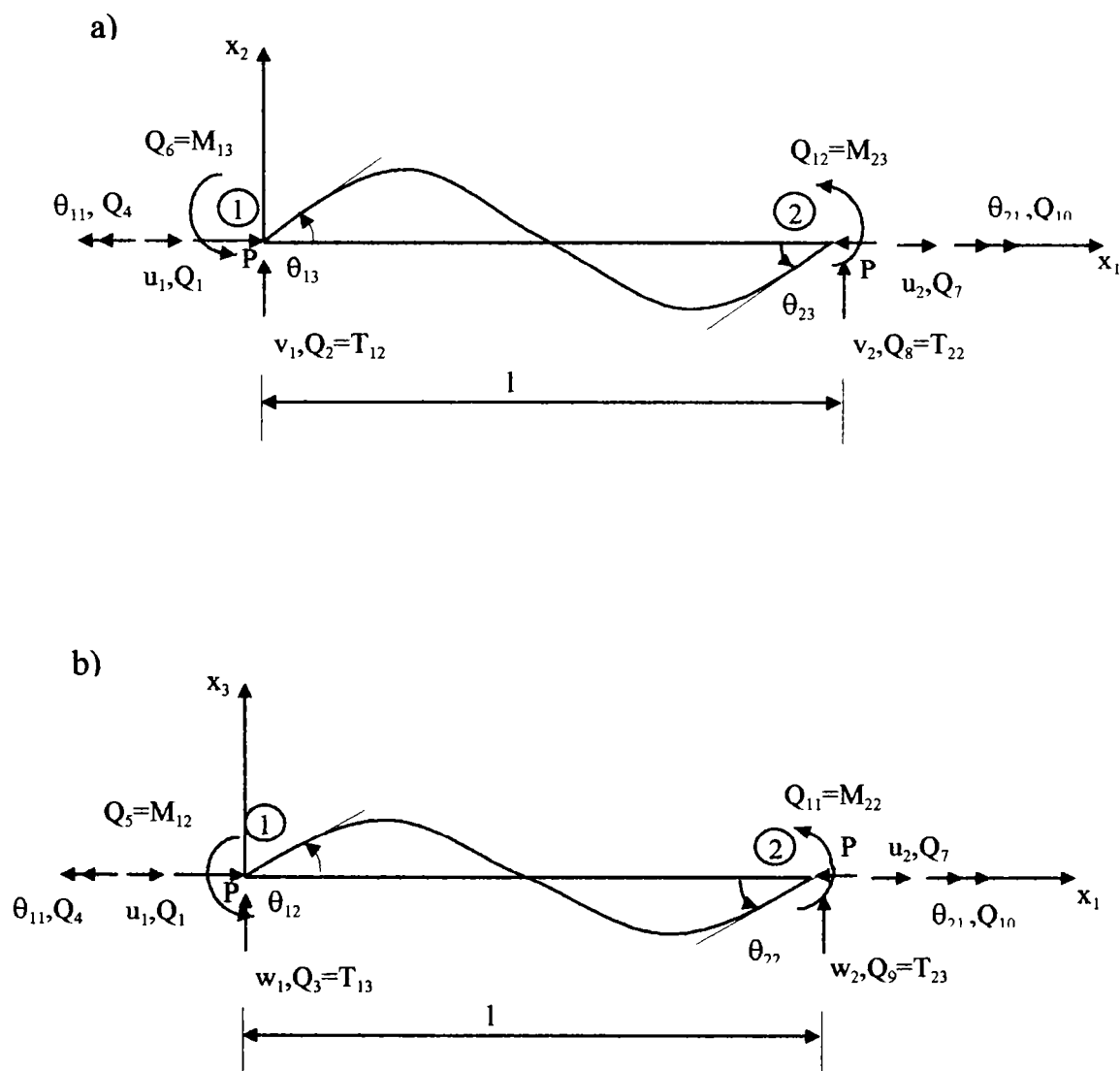


Fig. 2.3. Forțele și deplasările nodale pentru elementul finit de bară

Scurtarea barei din încovoiere este

$$u_{11} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.46)$$

iar forța axială devine

$$P = \frac{EA}{1 + \frac{EA}{2Pl} \int_0^l \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]} u = \frac{EA}{1} f_1 u \quad (2.47)$$

în care s-a notat cu f_1 funcția de stabilitate pentru efectul încovoierii asupra rigidității axiale.

După evaluarea expresiilor săgeților y și z din relația (2.47) se determină funcția de stabilitate f_1 cu relația

$$f_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3 l^2} (C_y + C_z)} \quad (2.48)$$

în care

$$C_y = \beta l \left(M_{12}^2 + M_{22}^2 \right) \left(\operatorname{ctg} \beta l + \beta l \operatorname{cosec}^2 \beta l \right) - 2 \left(M_{12} + M_{22} \right)^2 + 2 \beta l M_{12} M_{22} \operatorname{cosec} \beta l \left(1 + \beta l \operatorname{ctg} \beta l \right) \quad (2.49a)$$

$$C_z = \alpha l \left(M_{13} + M_{23} \right)^2 \left(\operatorname{ctg} \alpha l + \alpha l \operatorname{cosec}^2 \alpha l \right) - 2 \left(M_{13} + M_{23} \right)^2 + 2 \alpha l M_{13} M_{23} \operatorname{cosec} \alpha l \left(1 + \alpha l \operatorname{ctg} \alpha l \right) \quad (2.49b)$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI_3}; \quad \beta^2 = \frac{P}{EI_2} \quad (2.50a,b)$$

Pentru momente încovoietoare nule la extremitate se obține $f_1 = 1$.

Dacă forța axială este de întindere atunci funcția de stabilitate devine

$$f_1' = \frac{1}{1 - \frac{EA}{4P^3 l^2} (C_y' + C_z')} \quad (2.51)$$

cu notațiile:

$$C_y' = \beta l (M_{12}^2 + M_{22}^2) (\operatorname{ctgh} \beta l + \beta l \operatorname{cosech}^2 \beta l) - 2(M_{12} + M_{22})^2 + 2\beta l M_{12} M_{22} \operatorname{cosech} \beta l (1 + \beta l \operatorname{ctgh} \beta l) \quad (2.52a)$$

$$C_z' = \alpha l (M_{13}^2 + M_{23}^2) (\operatorname{ctgh} \alpha l + \alpha l \operatorname{cosech}^2 \alpha l) - 2(M_{13} + M_{23})^2 + 2\alpha l M_{13} M_{23} \operatorname{cosech} \alpha l (1 + \alpha l \operatorname{ctgh} \alpha l) \quad (2.52b)$$

2.8.2 Efectul forței axiale asupra rigidității din încovoiere în planul 1-2

Folosind ecuația deformației barei în care se introduc condițiile de margine se stabilesc expresiile momentelor încovoietoare de la extremitățile barei (Fig. 2.3a)

$$\begin{Bmatrix} Q_6 = M_{13} \\ Q_{12} = M_{23} \end{Bmatrix} = \frac{El_3}{1} \begin{bmatrix} 4f_2 & 2f_3 \\ 2f_3 & 4f_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Dacă forța axială este de compresiune atunci funcțiile de stabilitate au expresiile

$$f_2 = \frac{\alpha l}{4} \frac{(\sin \alpha l - \alpha \cos \alpha l)}{(2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l)} \quad (2.54a)$$

$$f_3 = \frac{\alpha l}{2} \frac{(\alpha l - \sin \alpha l)}{(2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l)} \quad (2.54b)$$

iar pentru forța axială de întindere f_2 și f_3 devin

$$f_2' = \frac{\alpha l}{4} \frac{(\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)}{(2 - 2 \operatorname{ch} \alpha l + \alpha l \operatorname{sh} \alpha l)} \quad (2.54c)$$

$$f_3' = \frac{\alpha l}{2} \frac{(\operatorname{sh} \alpha l - \alpha l)}{(2 - 2 \operatorname{ch} \alpha l + \alpha l \operatorname{sh} \alpha l)} \quad (2.54d)$$

2.8.3 Efectul forței axiale asupra rigidității din încovoiere în planul 1-3

Momentele încovoietoare de la extremitățile barei i-j se exprimă în funcție de rotirile θ_{12} și θ_{22} cu relația

$$\begin{Bmatrix} Q_5 \\ Q_{11} \end{Bmatrix} = \frac{EI_2}{l} \begin{bmatrix} 4f_4 & 2f_5 \\ 2f_5 & 4f_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

în care funcțiile de stabilitate au expresiile

- forța axială de compresiune

$$f_4 = \frac{\beta l}{4} \frac{(\sin \beta l - \beta l \cos \beta l)}{(2 - 2 \cos \beta l - \beta l \sin \beta l)} \quad (2.56a)$$

$$f_5 = \frac{\beta l}{2} \frac{(\beta l - \sin \beta l)}{(2 - 2 \cos \beta l - \beta l \sin \beta l)} \quad (2.56b)$$

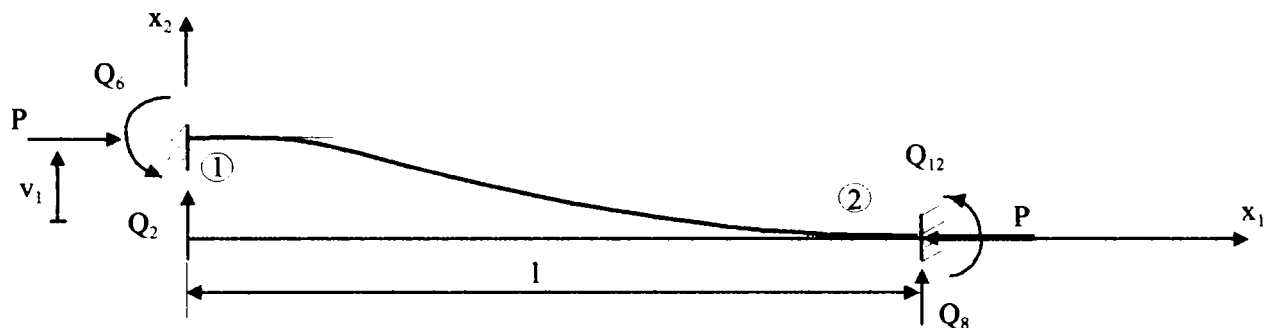
- forța axială de întindere

$$f_4' = \frac{\beta l}{4} \frac{(\beta l \operatorname{ch} \beta l - \operatorname{sh} \beta l)}{(2 - 2 \operatorname{ch} \beta l - \beta l \operatorname{sh} \beta l)} \quad (2.57a)$$

$$f_5' = \frac{\beta l}{2} \frac{(\operatorname{sh} \beta l - \beta l)}{(2 - 2 \operatorname{ch} \beta l + \beta l \operatorname{sh} \beta l)} \quad (2.57b)$$

2.8.4 Efectul forței axiale asupra rigidităților produse de deplasările liniare ale nodurilor

În bara 1-2 din deplasarea relativă v_1 (Fig. 2.4) iau naștere momentele încovoietoare și forțele tăietoare de la extremități


 Fig 2.4. Deformata barei din deplasarea nodală v_1 și forțele nodale corespunzătoare

$$Q_6 = Q_{12} = \frac{6EI_3}{l^2} f_6 v_1, \quad Q_2 = \frac{12EI_3}{l^3} f_7 v_1 = -Q_8 \quad (2.58a,b)$$

Din deplasarea după axa 3 în capătul 1, notată cu w_1 se obțin forțele nodale

$$Q_5 = Q_{11} = \frac{6EI_2}{l^2} f_8 w_1, \quad Q_3 = -Q_9 = \frac{12EI_2}{l^3} f_9 w_1 \quad (2.59a,b)$$

Funcțiile de stabilitate au expresiile:

- forța axială P de compresiune

$$f_6 = \frac{\alpha^2 l^2 (1 - \cos \alpha l)}{6(2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l)} \quad (2.60a)$$

$$f_7 = \frac{\alpha^2 l^2 (1 - \cos \alpha l)}{6(2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l)} - \frac{\alpha^2 l^2}{12} \quad (2.60b)$$

$$f_8 = \frac{\beta^2 l^2 (1 - \cos \beta l)}{6(2 - 2 \cos \beta l - \beta l \sin \beta l)} \quad (2.60c)$$

$$f_9 = \frac{\beta^2 l^2 (1 - \cos \beta l)}{6(2 - 2 \cos \beta l - \beta l \sin \beta l)} - \frac{\beta^2 l^2}{12} \quad (2.60d)$$

- pentru forța axială de întindere rezultă

$$f_6' = \frac{\alpha^2 l^2 (\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{6(2 - 2\operatorname{ch} \alpha l + \alpha l \operatorname{sh} \alpha l)} \quad (2.60e)$$

$$f_7' = \frac{\alpha^2 l^2 (\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{6(2 - 2\operatorname{ch} \alpha l + \alpha l \operatorname{sh} \alpha l)} + \frac{\alpha^2 l^2}{12} \quad (2.60f)$$

$$f_8' = \frac{\beta^2 l^2 (\operatorname{ch} \beta l - 1)}{6(2 - 2\operatorname{ch} \beta l + \beta l \operatorname{sh} \beta l)} \quad (2.60g)$$

$$f_9' = \frac{\beta^2 l^2 (\operatorname{ch} \beta l - 1)}{6(2 - 2\operatorname{ch} \beta l + \beta l \operatorname{sh} \beta l)} + \frac{\beta^2 l^2}{12} \quad (2.60h)$$

Funcțiile de stabilitate f_2, \dots, f_9 , respectiv f_2', \dots, f_9' sunt identice cu cele precizate în literatura de specialitate [2.12, 2.19].

Noțiunile Φ_2 și Φ_3 sunt cele precizate de Przemieniecki [2.32] și au expresiile

$$\Phi_2 = \frac{12EI_3}{GA_{s_2} l^2} = 24(1 + \mu) \frac{A}{A_{s_2}} \left(\frac{r_3}{l} \right)^2 \quad (2.62a)$$

$$\Phi_3 = \frac{12EI_2}{GA_{s_3}} = 24(1 + \mu) \frac{A}{A_{s_3}} \left(\frac{r_2}{l} \right)^2 \quad (2.62b)$$

și reprezintă parametrii deformației din forța tăietoare.

Matricea neliniară a rigidității barei 1-2 cu secțiune constantă, considerând și influența forței tăietoare se prezintă în relația (2.61) Dacă rapoartele între razele de rotație r_2/l și r_3/l și lungimea barei este mic în raport cu unitatea, atunci Φ_2 și Φ_3 pot fi considerate egale cu zero în relația (2.61). Această ipoteză conduce la neglijarea influenței forței tăietoare în relația forțe-deplasări.

$$\left[\begin{matrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8 \\
 Q_9 \\
 Q_{10} \\
 Q_{11} \\
 Q_{12}
 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix}
 \frac{EA}{l} f_3 & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{12EI_3}{l^3(1+\Phi_2)} f_7 & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{6EI_3}{l^2(1+\Phi_2)} f_6 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_2)EI_3}{l(1+\Phi_2)} f_2 & & & & & & & \\
 -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} f_1 & & & & & & \\
 0 & -\frac{12EI_3}{l^3(1+\Phi_2)} f_7 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2(1+\Phi_2)} f_6 & 0 & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2(1+\Phi_3)} f_8 & 0 & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l^3(1+\Phi_3)} f_9 & 0 & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l^2(1+\Phi_3)} f_8 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & & & & \\
 0 & \frac{6EI_3}{l^2(1+\Phi_2)} f_6 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_3)EI_2}{l(1+\Phi_3)} f_5 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_3)EI_2}{l(1+\Phi_3)} f_4 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_2)EI_3}{l(1+\Phi_2)} f_2 &
 \end{matrix} \right]$$

Simetric

$$\left[\begin{matrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 \theta_{11} \\
 \theta_{12} \\
 \theta_{13} \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2 \\
 \theta_{21} \\
 \theta_{22} \\
 \theta_{23}
 \end{matrix} \right]$$

$u_1 = 1 \quad v_1 = 1 \quad w_1 = 1 \quad \theta_{11} = 1 \quad \theta_{12} = 1 \quad \theta_{13} = 1 \quad u_2 = 1 \quad v_2 = 1 \quad w_2 = 1 \quad \theta_{21} = 1 \quad \theta_{22} = 1 \quad \theta_{23} = 1$

2.8.5 Influența forței axiale asupra rigidității la torsiune

Renton [2.34] ia în considerare influența forței axiale asupra rigidității la torsiune sub forma

$$c_t = \frac{GJ - Nr_o^{-2}}{1 - \frac{2}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}} \quad \text{pentru } c_{\varpi} \neq 0 \text{ și } GJ - Pr_o^{-2} > 0 \quad (2.62)$$

$$\text{cu } k = \sqrt{\frac{1}{Ec_{\varpi}} (GJ - Pr_o^{-2})} \quad (2.63)$$

respectiv

$$c_t = \frac{GJ - Nr_o^{-2}}{1 - \frac{2}{kl} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}} \quad \text{pentru } c_{\varpi} \neq 0 \text{ și } GJ - Pr_o^{-2} < 0 \quad (2.64)$$

$$\text{cu } k = \sqrt{\frac{1}{Ec_{\varpi}} (Nr_o^{-2} - GJ)} \quad (2.65)$$

Dacă $c_{\varpi} = 0$

$$c_t = GJ - Nr_o^{-2} \quad (2.66)$$

unde GJ reprezintă rigiditatea la torsiune, r_o raza polară de rotație și c_{ϖ} constanta strâmbării secțiunii transversale.

2.8.6 Imperfecțiuni geometrice de bară

La structurile spațiale imperfecțiunile geometrice de bară sunt determinate de curbura inițială ale barei, respectiv de torsiuni inițiale. Imperfecțiunile din torsiunea barei au influență numai la barele cu secțiunea transversală deschisă.

Hatzis [2.12] consideră imperfecțiunile geometrice de bară ca o sumă de semiunde sinusoidale pe lungimea barei

$$v_0 = \sum_{i=1}^m e_i \sin \frac{i\pi x_1}{l} \quad (2.67)$$

în care e_i sunt amplitudinile imperfecțiunilor inițiale

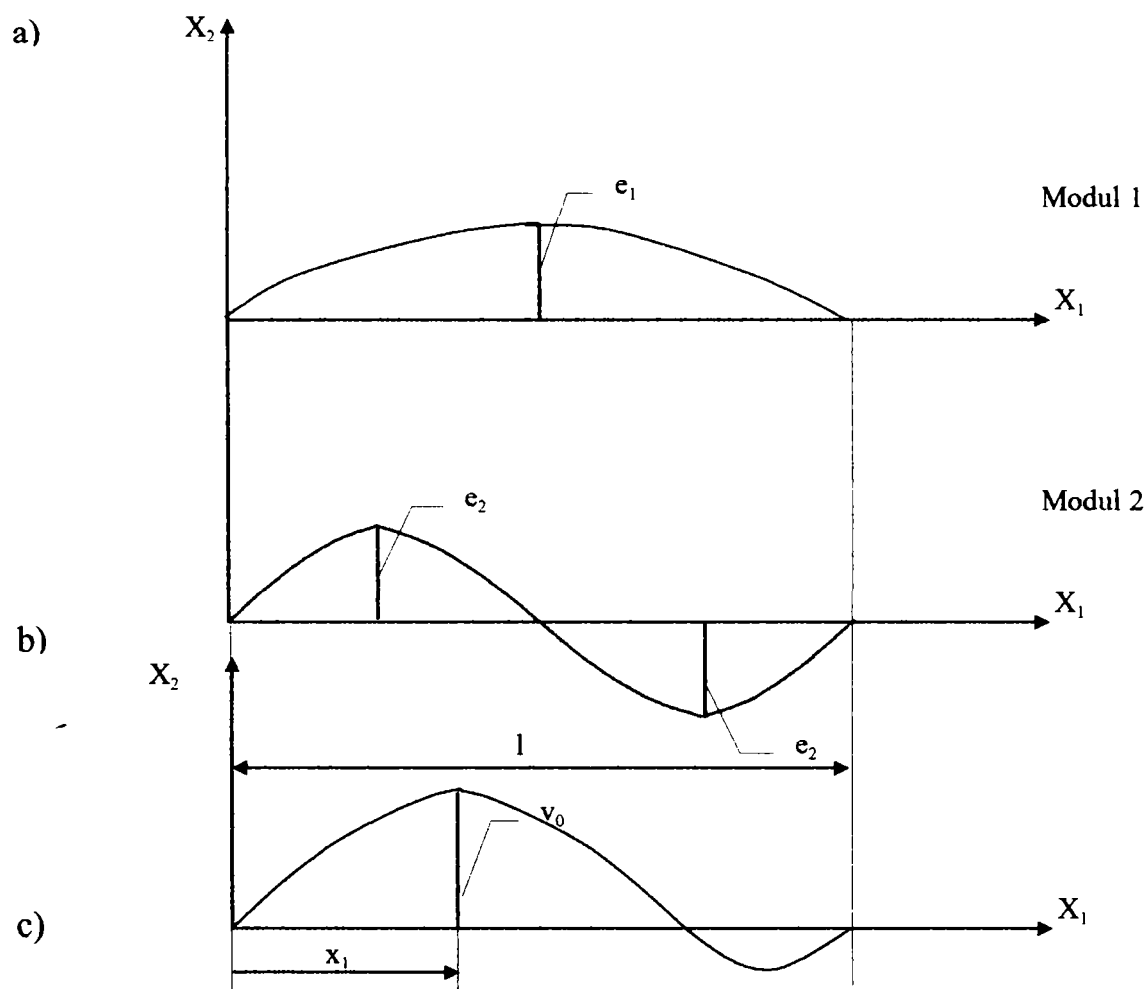


Fig. 2.5. Tipuri de imperfecțiuni de bară

Încărcarea critică minimă pentru bară se obține atunci când bara flambează pe lungimea ei cu o semiundă [2.18] [2.14]. Pentru a analiza dacă concluzia este valabilă și pentru bara din structura reticulată se consideră și imperfecțiunea cu două semiunde pe lungimea barei (Fig. 2.5b). Imperfecțiunea geometrică a barei se consideră ca sumă a celor două moduri (Fig. 2.5c).

$$v_0 = e_1 \sin \frac{\pi x_1}{l} + e_2 \sin \frac{2\pi x_2}{l} \quad (2.68)$$

Momentele încovoietoare de la extremitățile barei pentru bara încovoiată, cu momente nodale, comprimată axial cu forța P și cu imperfecțiunea geometrică cu amplitudinile e_1 și e_2 au expresiile [2.12]

$$Q_6 = \frac{EI_3}{l} (4f_2\theta_{13} + 2f_3\theta_{23}) - \frac{EI_3}{l^2} (A_{13}e_1 + A_{23}e_2) \quad (2.69a)$$

$$Q_{12} = \frac{EI_3}{l} (2f_3\theta_{13} + 4f_3\theta_{23}) + \frac{EI_3}{l^2} (A_{13}e_1 - A_{23}e_2) \quad (2.69b)$$

$$Q_5 = \frac{EI_2}{l} (4f_4\theta_{12} + 2f_5\theta_{22}) + \frac{EI_2}{l^2} (A_{12}e_3 + A_{22}e_4) \quad (2.69c)$$

$$Q_6 = \frac{EI_2}{l} (2f_5\theta_{12} + 4f_4\theta_{22}) + \frac{EI_2}{l} (-A_{12}e_3 + A_{22}e_4) \quad (2.69d)$$

în care au fost introduse notațiile

$$\beta_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_a}{EI_i}} \quad (2.70a)$$

$$P_a = EA \left[\frac{u}{l_o} - c_{b3} - c_{b2} + \frac{\pi^2}{l_o^2} \left(\frac{e_1^2}{4} + e_2^2 + \frac{e_3^2}{4} + e_4^2 \right) \right] \quad (2.70b)$$

$$A_{1i} = \frac{2\pi^3\beta_n}{(\pi^2 - 4\beta_n^2)\operatorname{tg}\beta_n} \quad (2.70c)$$

$$A_{2i} = \frac{4\pi^3\beta_n^2}{(\pi^2 - \beta_n^2)(1 - \beta_n \operatorname{ctg}\beta_n)} \quad (2.70d)$$

$$A_{3i} = \frac{2}{\beta_n} \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} \quad (2.70e)$$

$$A_{4i} = \frac{3}{\beta_n^2} (1 - \beta_n \operatorname{ctg}\beta_n) \quad (2.70f)$$

$$Q_4 = M_t = \frac{GJ_t}{l} \Phi_t \quad (2.70g)$$

Factorul de corecție a lungimii barei datorită încovoierii în raport cu axa x_i s-a notat cu

$$c_{bi} = b_{1i}(\theta_{1i} + \theta_{2i})^2 + b_{2i}(\theta_{1i} - \theta_{2i})^2, i = 2,3 \quad (2.71)$$

respectiv

$$b_{11} = \frac{(f_2 + f_3)(f_3 - f_2)}{8\pi\rho_1} \quad (2.72a)$$

$$b_{12} = \frac{(f_4 + f_5)(f_5 - 2)}{8\pi\rho_2} \quad (2.72b)$$

$$b_{21} = \frac{f_3}{8(f_2 + f_3)} \quad (2.72c)$$

$$b_{22} = \frac{f_5}{8(f_4 + f_5)} \quad (2.72d)$$

$$\rho_i = \frac{P}{P_E} = \frac{Pl}{\pi^2 EI_i}, i = 2,3 \quad (2.72e)$$

- P_E - forța critică a lui Euler pentru bara dublu articulată la capete,
 u - este scurtarea axială a barei, iar Φ_i răsucirea barei în lungul ei,
 E, θ - modulul de elasticitate longitudinal, respectiv transversal,
 A - aria secțiunii transversale,
 I_2, I_3 - momentele de inerție în raport cu axele 2 respectiv 3,
 I_t - momentul de inerție la torsiune.

După Eurocodul 3 la calculul structurilor se ia în considerare efectul imperfecțiunilor structurale și al imperfecțiunilor geometrice. Aceste imperfecțiuni sunt legate în calcul sub forma unei imperfecțiuni geometrice echivalente, care se presupune ca o înclinare a barei sau structurii cu unghiul φ față de poziția inițială.

Mărimea imperfecțiunii geometrice echivalentă rezultă din relația

$$\Phi = k_o k_s \Phi_o \quad (2.73)$$

în care

$$\Phi_o = 1/200; \quad k_c = \sqrt{0,5 + 1/n_c} \text{ pentru } k_o \leq 1 \quad (2.74)$$

$$\text{și } k_s = \sqrt{0,2 + 1/n_s} \text{ pentru } k_s \leq 1 \quad (2.75)$$

n_c este numărul stâlpilor în plan și n_s este numărul etajelor.

Imperfecțiunile elementelor se neglijează în analiza globală a sistemelor rigide. Structura este considerată rigidă dacă

$$N_{sd} / N_{crE} \leq 1 \quad (2.76)$$

în care

N_{sd} - efortul de calcul din încovoierea verticală totală;

N_{crE} - efortul critic elastic din încărcarea verticală totală pentru structura cu noduri deplasabile

Clădirile înalte se consideră structuri rigide, dacă pentru o ipoteză de încărcare dată deplasările orizontale la fiecare etaj δ , din forțele verticale și orizontale cu luare în considerare a imperfecțiunii echivalente (înlocuită cu forțe orizontale ΦF_i) satisface condiția

$$\frac{\delta \sum N}{h \sum H} \leq 1 \quad (2.77)$$

unde h este înălțimea de etaj, $\sum N$ suma forțelor verticale la etajul respectiv, $\sum H$ suma forțelor orizontale la etajul respectiv.

Imperfecțiunile de bară e_{od} se precizează în funcție de tipul secțiunii, de metoda de analiză globală, de metoda de verificare a secțiunii transversale (elastică sau plastică). Imperfecțiunea de bară e_{od} se poate înlocui cu o încărcare uniform distribuită pe lungimea barei cu intensitatea

$$q = 8N \frac{e_{od}}{l^2} \quad (2.78)$$

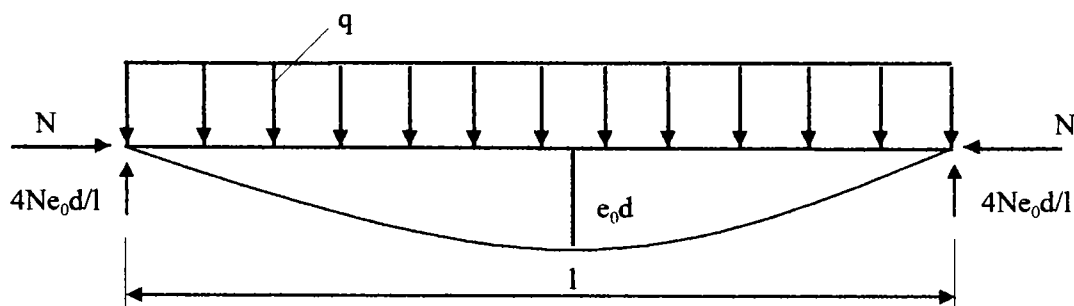


Fig 2.6 Încărcarea obținută din imperfecțiunea de bară

2.8.7 Imperfecțiuni de nod

Se analizează efectul semirigidității conexiunii, influența dimensiunilor finite ale conexiunii asupra rigidității barei în calculul neliniar.

2.8.7.1 Influența rigidității conexiunilor asupra elementelor rigidității barei

Conexiunea din fiecare nod este modelată ca un resort rotațional în relația moment- rotație de forma [2.24]

$$\frac{m}{(1-m^2)^{1/n}} \text{ pentru } \theta > 0 \text{ și } m > 0 \quad (2.79)$$

care depinde de următorii parametrii

$$m = \frac{M}{M_u}; \theta = \frac{\theta_r}{\theta_o}; \quad (2.80a,b)$$

$$\theta_o = \frac{M_u}{R_{ki}} \text{ - rotația plastică de referință;} \quad (2.80c)$$

M_u - momentul capabil ultim al conexiunii;

R_{ki} - rigiditatea inițială a conexiunii;

n - parametru de formă

Rigiditatea tangentă a conexiunii R_{ki} la o rotație arbitrară $|\theta_r|$ se determină prin derivarea momentului M în raport cu $|\theta_r|$

$$R_{ki} = \frac{dM}{d|\theta_r|} = \frac{M_u}{\theta_o (1-\theta^n)^{1+1/n}} \quad (2.81)$$

când conexiunea este încărcată și

$$R_{ki} = \frac{dM}{d|\theta_r|} = \frac{M_u}{\theta_o} \quad , \quad |\theta_r = 0| \quad (2.82)$$

când conexiunea este neîncărcată.

Se consideră bara 1-2 supusă la momentele încovoietoare M_{13} și M_{23} , forța axială de compresiune P , imperfecțiunea v_0 și conexiunile de la extremități (Fig. 2.7).

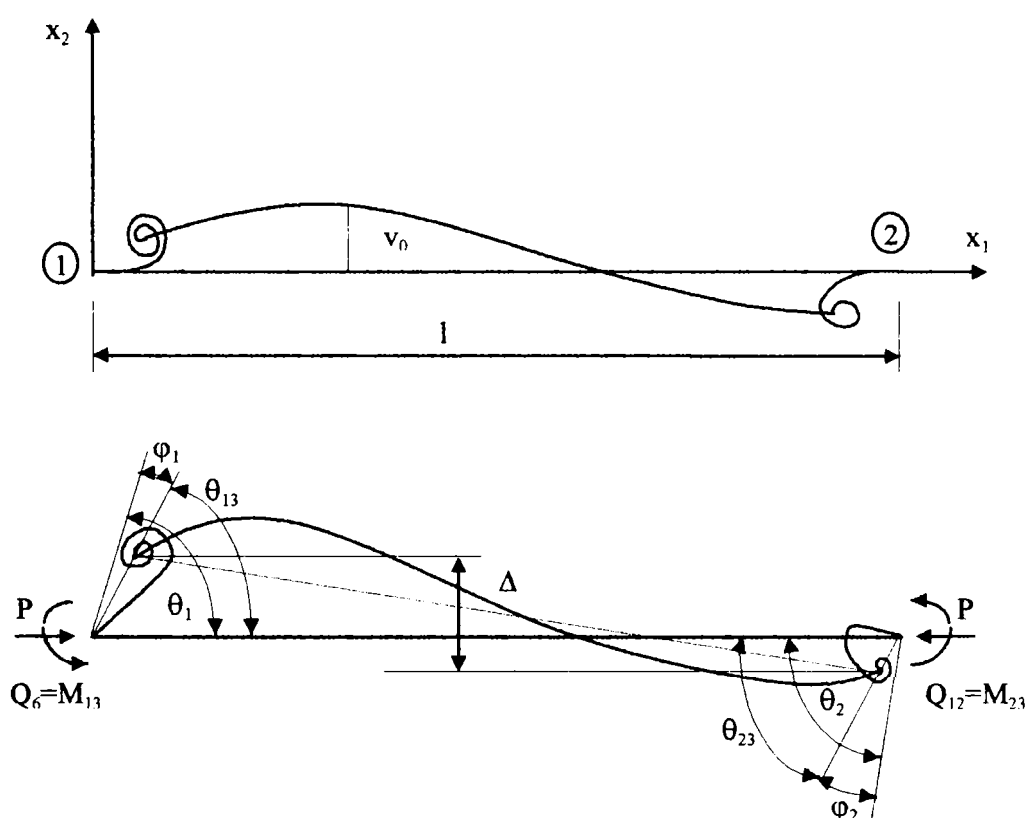


Fig 2.7. Forțele și deplasările nodale pentru bara cu conexiuni de lungime finită

Conexiunile introduc incrementele rotirilor φ_1 și φ_2 la capetele 1 și 2. Se notează cu R_{k1} și R_{k2} rigiditățile tangente ale conexiunilor din nodurile 1, respectiv 2. Rotirile au expresiile

$$\varphi_1 = \frac{M_{13}}{R_{k1}}; \varphi_2 = \frac{M_{23}}{R_{k2}} \quad (2.83)$$

Rotirile totale din nodurile 1 și 2 au expresiile

$$\theta_1 = \theta_{13} + \varphi_1; \theta_2 = \theta_{23} + \varphi_2 \quad (2.84)$$

Momentele încovoietoare de la extremitate se scriu

$$M_{13} = \frac{EI_3}{1} \left[4f_2 \left(\theta_1 - \frac{M_{13}}{R_{k1}} \right) + 2f_3 \left(\theta_2 - \frac{M_{23}}{R_{k2}} \right) \right] - \frac{EI_3}{l^2} (A_{13}e_1 + A_{23}e_2) \quad (2.85a)$$

$$M_{23} = \frac{EI_3}{1} \left[4f_3 \left(\theta_1 - \frac{M_{13}}{R_{k1}} \right) + 4f_2 \left(\theta_2 - \frac{M_{23}}{R_{k2}} \right) \right] + \frac{EI_3}{l^2} (A_{13}e_1 - A_{23}e_2) \quad (2.85b)$$

Se rezolvă sistemul de ecuații (2.85a,b) în funcție de momentele M_{13} și M_{23}

$$M_{13} = \frac{EI_3}{1} (S_{11}^* \theta_1 + S_{12}^* \theta_2) + A_1 \quad (2.86a)$$

$$M_{23} = \frac{EI_3}{1} (S_{12}^* \theta_1 + S_{22}^* \theta_2) + A_2 \quad (2.86b)$$

în care

$$S_{11}^* = \left(4f_2 + \frac{EI_3}{1} \frac{16f_2^2}{R_{k2}} - \frac{EI_3}{1} \frac{4f_3^2}{R_{k2}} \right) / R^* \quad (2.87a)$$

$$S_{12}^* = 2f_3 / R^* \quad (2.87b)$$

$$S_{22}^* = \left(4f_2 + \frac{EI_3}{1} \frac{16f_2^2}{R_{k1}} - \frac{EI_3}{1} \frac{4f_3^2}{R_{k1}} \right) / R^* \quad (2.87c)$$

$$R^* = \left(1 + \frac{4EI_3}{lR_{k1}} f_2 \right) \left(1 + \frac{4EI_3}{lR_{k2}} f_2 \right) - \left(\frac{EI_3}{1} \right)^2 \left(\frac{2f_3}{R_{k1}} \right) \left(\frac{2f_3}{R_{k2}} \right) \quad (2.87d)$$

$$A_1 = -\frac{EI_3}{l^2} \left[\frac{2f_3}{R_{k2}} \frac{EI_3}{1} (A_{13}e_1 - A_{23}e_2) - \left(1 + \frac{4f_2}{R_{k2}} \frac{EI_3}{1} \right) \cdot (A_{13}e_1 + A_{23}e_2) \right] / R^* \quad (2.87e)$$

$$A_2 = \frac{EI_3}{l^2} \left[\frac{EI_3}{1} \frac{2f_3}{R_{k1}} (A_{13}e_1 + A_{23}e_2) + \left(1 + \frac{4f_2}{R_{k1}} \frac{EI_3}{1} \right) \cdot (A_{13}e_1 - A_{23}e_2) \right] / R^* \quad (2.87f)$$

2.8.7.2 Influența conexiunilor cu dimensiuni finite

Se consideră o bară imperfectă care la extremități are două conexiuni rigide cu dimensiuni finite. Lungimea barei între centrele nodurilor este l , iar a conexiunilor este $\lambda_1 l$ pentru nodul 1 și $\lambda_2 l$ pentru nodul 2. Lungimea barei între conexiuni se consideră egală cu λl (Fig. 2.8).

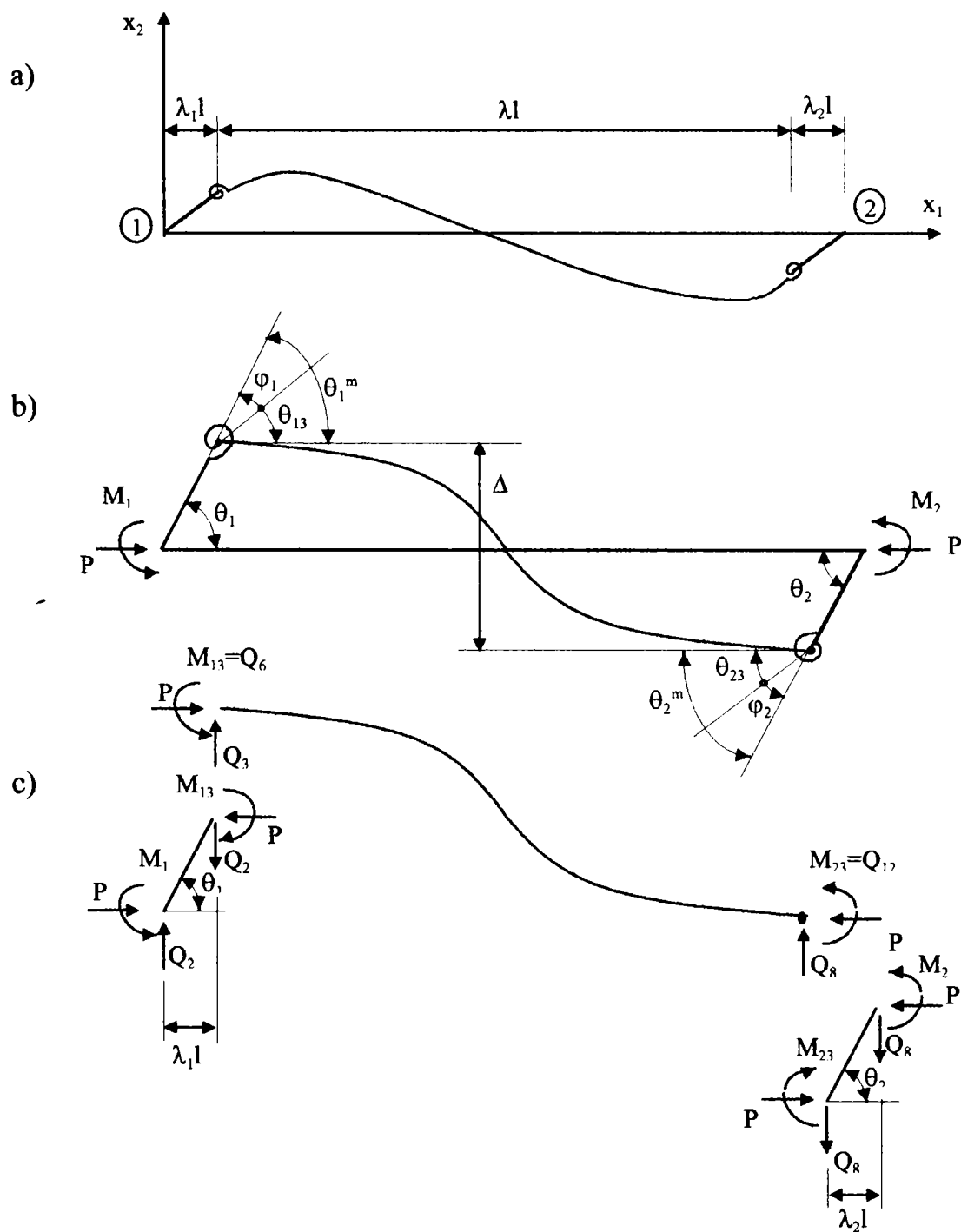


Fig.2.8. Descompunerea în elemente finite a barei cu conexiuni finite. Forțele și deplasările nodale corespunzătoare

Forțele de legătură între bară și conexiunile cu dimensiuni finite se prezintă în figura 2.8c. Din condiția de echilibru a conexiunilor finite rezultă

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{13} + \lambda_1 l Q_2 - P \lambda_1 l \theta_1; \\ M_2 &= M_{23} - Q_2 \lambda_2 l - P \lambda_2 l \theta_2 \end{aligned} \quad (2.88a,b)$$

Momentele încovoietoare M_{13} și M_{23} au expresiile date de relațiile (2.86 a,b) cu înlocuirea lungimii l cu λl . Rotirile de la extremitățile barei elastice sunt egale cu

$$\begin{aligned} \theta_1^m &= \theta_1 - \frac{\Delta}{\lambda l}; \\ \theta_2^m &= \theta_2 - \frac{\Delta}{\lambda l}; \end{aligned} \quad (2.89a,b)$$

Forța tăietoare are expresia:

$$Q_2 = \frac{M_{13} + M_{23} + P}{\lambda l} \quad (2.90)$$

Din figura 2.5b se poate scrie

$$\Delta - (\lambda_1 l \theta_1 + \lambda_2 l \theta_2) = 0 \quad (2.91)$$

Introducând expresiile momentelor încovoietoare M_{13} și M_{23} (2.86 a,b), forța tăietoare Q_2 (2.90) și deplasarea relativă Δ (2.91) în relațiile (2.88 a,b) se obține

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{EI_3}{\gamma l} \left[\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) S_{11}^* + \frac{\lambda_1}{\lambda} S_{12}^* - \frac{Pl^2 \lambda_1^2}{EI_3 \lambda} \right] \theta_1 + \\ &+ \frac{EI_3}{\gamma l} \left[\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) S_{12}^* + \frac{\lambda_1}{\lambda} S_{22}^* - \frac{Pl^2 \lambda_1 \lambda_2}{EI_3 \lambda} \right] \theta_2 \end{aligned} \quad (2.92a)$$

$$\begin{aligned} M_{23} &= \frac{EI_3}{\gamma l} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda} S_{11}^* + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} \right) S_{12}^* - \frac{Pl^2 \lambda_1 \lambda_2}{EI_3 \lambda} \right] \theta_1 + \\ &+ \frac{EI_3}{\gamma l} \left[\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} \right) S_{22}^* + \frac{\lambda_2}{\lambda} S_{12}^* - \frac{Pl^2 \lambda_1 \lambda_2}{EI_3 \lambda} \right] \theta_2 \end{aligned} \quad (2.92b)$$

unde s-au folosit notațiile

$$\gamma = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} \quad (2.93)$$

Dacă se neglijează mărimea conexiunilor din noduri $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ relațiile (2.92 a,b) devin identice cu (2.86). Dacă bara nu are imperfecțiuni geometrice $e_1 = e_2 = 0$ și relațiile (2.86 a,b) se simplifică în consecință.

2.8.8 Influența imperfecțiunilor de bară asupra rigidității axiale

Imperfecțiunile inițiale cu amplitudinile e_{1i} și e_{2i} dacă axele $i = 2, 3$ produc scurtarea axială precizată de ultimul termen din relația (2.70 b).

2.8.9 Conexiuni cu rigiditate axială

Dacă conexiunile din nodurile 1 și 2 au rigiditatea axială k_1 și k_2 atunci deformata barei este influențată de acestea. Relația (2.70 b) devine

$$P_a = EA \varepsilon \left[\frac{u}{l_0} - c_{b_3} - c_{b_2} + \frac{\pi^2}{h^2} \left(\frac{e_1^2}{4} + e_2^2 + \frac{e_3^2}{4} + e_4^2 \right) \right] \quad (2.94)$$

unde

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \varepsilon_1 = \frac{EA}{lk_1}; \varepsilon_2 = \frac{EA}{lk_2} \quad (2.95a, \dots, c)$$

Fathelbab [2.8] a modificat relația (2.94) pentru a conține și efectul dimensiunii finite a conexiunilor sub forma:

$$q_i = \frac{P}{P_{E_i}} = \frac{s_i^2 \varepsilon_i}{\pi^2} \left(\frac{Pl}{EA} + \sum_{i=2,3} c_{bi} - c_{b2}^* - c_{b3}^* + c_{01} - c_{03} \right) \quad (2.96)$$

unde

$$c_{bi}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} (\theta_{1i}^2 + \theta_{2i}^2) \right) + \lambda \left\{ b_{1i} \left[\left(1 + 2 \frac{\lambda_1}{\lambda} \right) \theta_{1i} + \left(1 + 2 \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) \theta_{2i} - \varphi_{1i} - \varphi_{2i} \right] + b_{2i} (\theta_{1i} - \theta_{2i} - \varphi_{1i} - \varphi_{2i})^2 + \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda} \theta_{1i} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \theta_{2i}}{(2 - B_i^m)} \right\} \quad (2.97)$$

cu

$$B_i^m = b_{1i} (\theta_{1i}^m + \theta_{2i}^m) + b_{2i} (\theta_{1i}^m - \theta_{2i}^m)^2 \quad (2.98)$$

$$c_{0i} = \frac{\pi^2}{(\lambda l)^2} \sum_{i=2,3} \left(\frac{e_{1i}^2}{4} + e_{2i}^2 \right) \quad (2.99)$$

$$s_i = \lambda l \sqrt{I_i A} \quad (2.100)$$

și P_{Ei} este forța critică a lui Euler corespunzătoare axei i

Relația (2.96) ținând seama de (2.100) devine

$$P_I = \frac{EI}{l} \left(\frac{\pi^2 q}{\lambda^2} \right) \quad (2.101)$$

în care I este momentul de inerție de referință al secțiunii transversale, iar q este un parametru axial adimensional referitor la această inerție.

2.8.10 Conexiuni cu rigiditate la torsiune

Dacă conexiunea are rigiditate la torsiune k_{1z} și k_{2z} la nodurile 1 și 2, relația moment de torsiune - răsucire relativă se scrie:

$$M_t = \frac{GI_t}{l} \varepsilon_t \theta_{11} \quad (2.102)$$

în care G este modulul de elasticitate transversal, I_t momentul de torsiune al secțiunii transversale și

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{\lambda(1 + \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t})}; \\ \varepsilon_{1t} &= \frac{GI_t}{lk_{1t}}; \varepsilon_{2t} = \frac{GI_t}{lk_{2t}}; \end{aligned} \quad (2.103a,b)$$

2.9 Matricea rotației nodului

Oran [2.28] a precizat că orientarea unui nod la un cadru spațial poate fi reprezentată printr-o matrice de orientare a nodului $[\alpha]$. Coloanele acestei matrici conțin cosinuzii directori cu referire la sistemul global de referință al structurii. Sistemul local al nodului se presupune atașat rigid nodului și ca urmare se mișcă odată cu nodul. În mod convențional acest sistem local se presupune paralel cu sistemul global de axe de coordonate în configurație inițială nedeformată a structurii.

$$[\alpha]_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Aplicarea încărcării pe structură produce o deformată care generează translații și rotații ale nodurilor. Noua matrice de orientare a nodului atașată rigid la nod poate fi exprimată ca (Fig. 2.9).

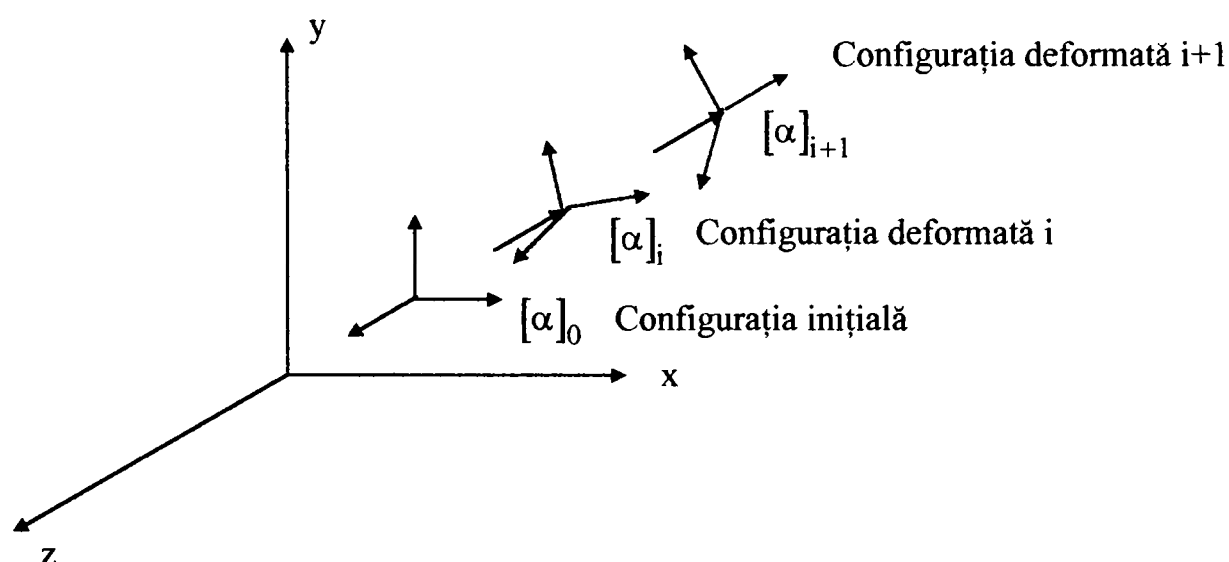


Fig. 2.9 Matricele de orientare pentru nodul din structura spațială

$$[\alpha]_{i+1} = [\Delta\omega][\alpha]_i \quad (2.105)$$

în care $[\Delta\omega]$ este matricea incrementală obținută din rotațiile nodului

$$[\Delta\omega] = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\omega_3 & \Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_3 & 1 & -\Delta\omega_2 \\ -\Delta\omega_2 & \Delta\omega_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

în care $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$ și $\Delta\omega_3$ sunt componentele rotației nodului date la sfârșitul pasului 1.

$$\Delta\omega_1 = \Delta\theta_{x1}, \Delta\omega_2 = \Delta\theta_{y1}, \Delta\omega_3 = \Delta\theta_{z1} \quad (2.107a, \dots, c)$$

În pasul 2

$$\Delta\omega_1 = \Delta\theta_{x2}, \Delta\omega_2 = \Delta\theta_{y2}, \Delta\omega_3 = \Delta\theta_{z2} \quad (2.108a, \dots, c)$$

în care $\Delta\theta_{x1}, \Delta\theta_{y1}, \Delta\theta_{z1}, \Delta\theta_{x2}, \Delta\theta_{y2}, \Delta\theta_{z2}$ sunt incrementele rotațiilor nodurilor referitoare la axele globale.

Matricea de rotație $[\omega]$ dedusă de Kassimali [2.21] pentru un nod care se rotește cu unghiul γ în jurul unei axe care are cosinuși directori n_1, n_2, n_3 .

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -n_3 \sin\gamma & n_2 \sin\gamma \\ n_1^2(1-\cos\gamma) & n_1 n_2(1-\cos\gamma) & n_1 n_3(1-\cos\gamma) \\ n_3 \sin\gamma & \cos\gamma & -n_1 \sin\gamma \\ n_1 n_2(1-\cos\gamma) & n_2^2(1-\cos\gamma) & n_2 n_3(1-\cos\gamma) \\ -n_2 \sin\gamma & n_1 \sin\gamma & \cos\gamma \\ n_1 n_3(1-\cos\gamma) & n_2 n_3(1-\cos\gamma) & n_3^2(1-\cos\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Matricea de orientare a nodului $[\omega]$ și $[\alpha]_{i+1}$ sunt valabile pentru rotații mari. Dacă γ este infinit mic $\cos\gamma \approx 1$ iar $\sin\gamma = \gamma$

$$[\alpha]_{i+1} = [\omega][\alpha]_i \quad (2.110)$$

și matricea $[\omega]$ se reduce la Oran [2.28]

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 & -\gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

unde $\gamma_1 = \gamma n_1, \gamma_2 = \gamma n_2, \gamma_3 = \gamma n_3$

2.10 Matricea orientării elementului și deformații relative

Dacă se cunosc poziția deformată și orientările a două noduri adiacente se poate stabili orientarea deformației și deformațiile relative ale elementului legat de cele două noduri.

Matricile de orientare ale secțiunilor de capăt sunt rigid atașate la axele principale ale secțiunilor transversale ale elementului și pot fi determinate din transformarea

$$[P]_{i+1}^{(1)} = [\alpha]_{i+1}^{(1)} [r], [P]_{i+1}^{(2)} = [\alpha]_{i+1}^{(2)} [r]_0 \quad (2.112a,b)$$

în care $[P]_{i+1}^{(1)}, [P]_{i+1}^{(2)}$ sunt două matrici ale secțiunilor de capăt ale elementului în configurația deformată ($i + 1$). Coloanele acestor matrici conțin cosinuși directori ai normalei și direcțiilor principale ale secțiunilor de capăt.

$[\alpha]_{i+1}^{(1)}, [\alpha]_{i+1}^{(2)}$ sunt matricile de orientare ale nodurilor la care secțiunile (1) și (2) sunt rigid conectate.

$[r]_0$ este matricea cosinușilor directori ai axei elementului înainte de deformație. Coloanele acestei matrici reprezintă cosinușii directori ai axei trecând prin nodurile de capăt ale elementului și ai celor două axe principale ale secțiunii de capăt.

Matricea de orientare a elementului $[r]$ poate fi stabilită continuu din relația

$$[r]_{i+1} = [r]_i [\Delta \bar{\gamma}] \quad (2.113)$$

în care $[\Delta \bar{\gamma}]$ este matricea incrementală în sistemul local de axe dată de

$$[\Delta \bar{\gamma}] = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \bar{\gamma}_3 & \Delta \bar{\gamma}_2 \\ \Delta \bar{\gamma}_3 & 1 & -\Delta \bar{\gamma}_1 \\ -\Delta \bar{\gamma}_2 & \Delta \bar{\gamma}_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

în care

$$\overline{\Delta\gamma_1} = \frac{\Delta\theta_{x1} + \Delta\theta_{x2}}{2}; \overline{\Delta\gamma_2} = \frac{-(\Delta w_2 - \Delta w_1)}{2}; \overline{\Delta\gamma_3} = \frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{2} \quad (2.115a, \dots, c)$$

Rotirile relative din încovoiere se pot calcula prin produsele vectorului obținut din prima coloană a matricii de orientare (2.113) și matricile secțiunilor de capăt date de relațiile (2.112 a și b)

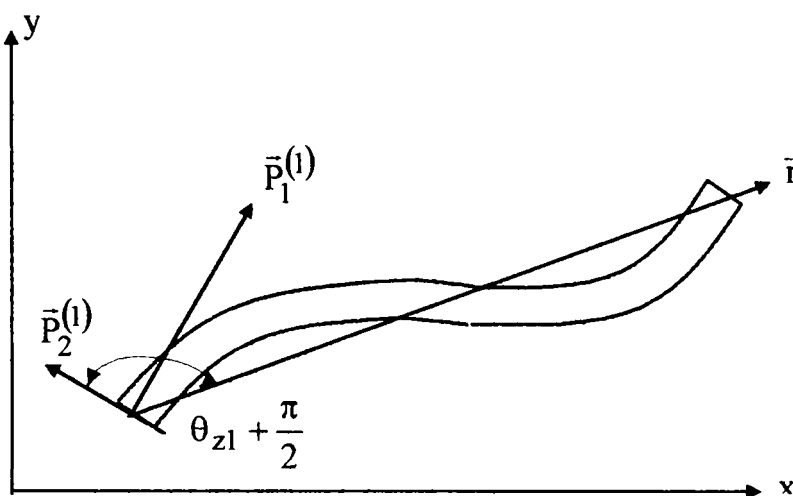


Fig. 2.10 Mărimi care servesc la calculul rotirii relative

Referitor la figura 2.10. rotația relativă θ_{x1} este dată de produsul vectorilor r_1 și $P_2^{(1)}$, în care $P_2^{(1)}$ este cosinusul director al axei principale y a secțiunii de capăt.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{z1}\right) = P_2^{(1)} \cdot r_1 \quad (2.116)$$

sau

$$\sin \theta_{z1} = -P_2^{(1)} \cdot r_1 \quad (2.117)$$

Oran și Kasimali [2.29], Meck și alții [2.27, 2.26], introduc simplificări în (2.117) prin aproximarea unui unghi mic cu

$$\theta_{z1} = -P_2^{(1)} \cdot r_1 \quad (2.118)$$

Fără a pierde generalitatea, alte rotații relative la cele două capete ale elementului pot fi obținute în aceeași manieră

$$[P^{(1)}]^T [r_1] = \begin{Bmatrix} 1 \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix}; [P^{(2)}]^T [r_2] = \begin{Bmatrix} 1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.119a,b)$$

Două componente ale celor 6 deformații interne ale elementului se pot obține prin considerarea modificării lungimii ca în relația de mai jos. Modificarea lungimii axiale a elementului se calculează ca diferență între noua și vechea lungime.

$$u_x = \left[(\bar{x}_{2,1} - \bar{x}_{1,1})^2 + (\bar{x}_{2,2} - \bar{x}_{2,1})^2 + (\bar{x}_{3,2} - \bar{x}_{1,1})^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{30} \left[2\theta_{y1}^2 - \theta_{y1}\theta_{y2} + 2\theta_{y2}^2 \right] + \frac{1}{30} \left[2\theta_{z1}^2 - \theta_{z1}\theta_{z2} + 2\theta_{z3}^2 \right] - L_0 \quad (2.120)$$

în care L_0 este lungimea inițială nedeformată

Termenii conținând rotațiile din (2.120) sunt obținuți din efectul de încovoiere care se scriu

$$u_b = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.121)$$

Aproximația unghiului mic dată de relațiile (2.118) și (2.119a,b) este valabilă când unghiurile sunt mai mici de 5° , depinzând de exactitatea presupusă în calcule. Această eroare se reduce când se consideră mai multe elemente finite pentru modelarea structurii.

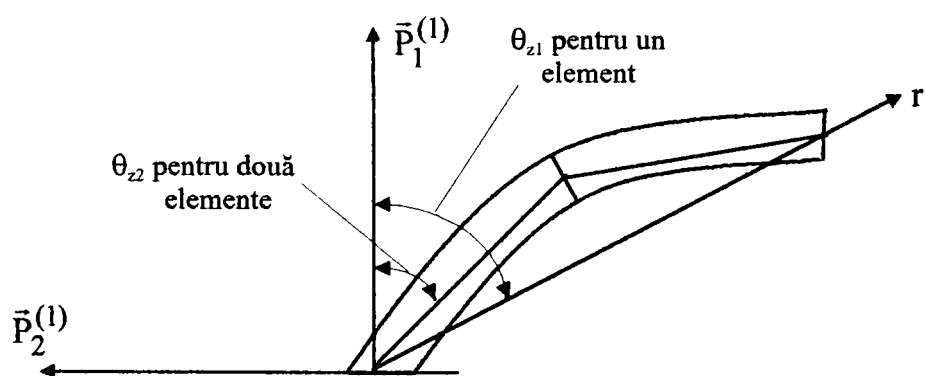


Fig.2.11 Modelarea barei cu unul și două elemente finite pentru calculul rotirii relative

2.11 Metoda incrementală a rigidității secante

Pentru stabilirea modificărilor forțelor și momentelor din element prima dată este necesar să fie calculate creșterile incrementale ale deformației elementului.

Geometria elementului poate fi adoptată continuu prin

$$[r]_i = \sum_{j=1}^i [r]_0 [\Delta\bar{\gamma}]_i \quad (2.122)$$

în care $[\Delta\bar{\gamma}]$ este o matrice de transformare obținută prin transformări anterioare în jurul axelor x, y și z din configurația anterioară și este dată de

$$[\Delta\bar{\gamma}] = \begin{bmatrix} C_x & -\frac{C_y \cos\varphi}{Q} + \frac{C_x C_z \sin\varphi}{Q} & -\frac{C_y \sin\varphi}{Q} + \frac{C_x C_z \cos\varphi}{Q} \\ C_y & \frac{C_x \cos\varphi}{Q} - \frac{C_y C_z \sin\varphi}{Q} & -\frac{C_x \sin\varphi}{Q} - \frac{C_y C_z \cos\varphi}{Q} \\ C_z & (\sin\varphi) \cdot Q & (\cos\varphi) \cdot Q \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

în care C_x, C_y, C_z sunt cosinuşii directori ai elementului deformat măsurați în ultima configurație și sunt dați de expresiile

$$C_x = \frac{\left[L^2 - (\Delta v_1 - \Delta v_2)^2 - (\Delta w_1 - \Delta w_2)^2 \right]^{1/2}}{L} \quad (2.123a)$$

$$C_y = \frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{L} \quad (2.123b)$$

$$C_z = \frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{L} \quad (2.123c)$$

iar Q are expresia:

$$Q = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad (2.124)$$

Notăm că modificarea incrementală a poziției elementului este mică și atunci transformarea matriceală $[\Delta\bar{\gamma}]$ în (2.123) se poate simplifica cu expresia (2.114).

Incrementările rotațiilor cauzând deformații specifice în element pot fi scrise ca

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{y1} &= \Delta\alpha_{y1} + \Delta\mu_y; \Delta\theta_{y2} = \Delta\alpha_{y2} + \Delta\mu_y \\ \Delta\theta_{z1} &= \Delta\alpha_{z1} - \Delta\mu_z; \Delta\theta_{z2} = \Delta\alpha_{z2} - \Delta\mu_z \end{aligned} \quad (2.125a, \dots, d)$$

în care $\Delta\alpha_{y1}, \Delta\alpha_{y2}, \Delta\alpha_{z1}, \Delta\alpha_{z2}$ sunt incrementele rotațiilor în jurul ultimei poziții a axelor de coordonate iar $\Delta\mu_y$ și $\Delta\mu_z$ sunt rotațiile rigide incrementale date de relațiile

$$\Delta\mu_y = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta w_2 - \Delta w_1}{L}\right); \Delta\mu_z = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{L}\right) \quad (2.126a, b)$$

Incrementul relativ al mișcării în jurul centrului de tăiere poate fi simplu determinat ca

$$\Delta\theta_x = \Delta\theta_{x2} - \Delta\theta_{x1} \quad (2.127)$$

Alungirea incrementală în direcția axială a elementului este egală cu suma modificării în coordonata nodală Δu_0 și alungirea dată de încovoierea elementului Δu_b astfel

$$\Delta u_x = \Delta u_0 + \Delta u_b \quad (2.128)$$

în care

$$\Delta u_0 = l_{i+1} - l_i \quad (2.129)$$

2.12 Matricea incrementală a rigidității tangentă

Sistemul local de referință se definește prin matricea de orientare a elementului $[R]$ care conține cosinuşii directori ai axei barei cu sistemul global x, y, z .

Forțele nodale \bar{Q} din sistemul global de referință se exprimă în funcție de forțele nodale Q din sistemul local cu relația

$$\{Q\} = [R]\{\bar{Q}\} \quad (2.130)$$

în care matricea $[R]$ este o matrice 12 x12 de transformare și are forma

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [r] \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Matricea $[r]$ se referă la configurația deformată a elementului finit.

Forțele nodale $\{\bar{Q}\}$ se exprimă în funcție de forțele nodale asociate, prin deplasările relative.

$$\{\bar{Q}\} = [A]\{\bar{S}\} \quad (2.132)$$

l și $(l + \delta)$ reprezintă lungimea corzii barei în poziția nedeformată și deformată.

Matricea A are elementele precizate în relația (2.133)

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+\delta} & -\frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\delta} & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Ecuția de echilibru pentru elementul finit este dată de relația (2.32). Matricea rigidității tangentă în sistemul global de referință are expresia dată de Oran [2.28].

$$[K_t] = [R][A][K_t^{(e)}][A]^T[R]^T + \sum_{k=1}^6 \{\bar{Q}\}_k [R][g]^{(k)} [R]^T \quad (2.134)$$

Matricile $[K_t^{(e)}]$ și $[g^{(k)}]$ se scriu în continuare în detaliu

$$[K_t] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{13}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{13}}{H} \\ \varepsilon_3 c_{23} + \frac{G_{13} G_{23}}{\pi^2 H} & \varepsilon_3 c_{13} + \frac{G_{23}^2}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{23}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{12}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{12}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12}^2}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{12}}{H} \\ \frac{G_{13} G_{22}}{\pi^2 H} & \frac{G_{23} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{22} + \frac{G_{12} G_{22}}{\pi^2 H} & \varepsilon_2 c_{21} + \frac{G_{22}^2}{\pi^2 H} & 0 & \frac{G_{22}}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_t}{EI} & 0 \\ \frac{G_{13}}{H} & \frac{G_{23}}{H} & \frac{G_{12}}{H} & \frac{G_{22}}{H} & 0 & \frac{\pi^2}{H} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

în care după Oran [2.28]

$$G_{1j} = c'_{1j} \theta_{1j} + c'_{2j} \theta_{2j} \quad (2.136)$$

$$G_{2j} = c'_{2j} \theta_{1j} + c'_{1j} \theta_{2j} \quad (2.137)$$

$$H = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=3,2} \frac{1}{\varepsilon_j} \left[b'_{1j} (\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b'_{2j} (\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 \right] \quad (2.138)$$

În aceste relații au fost folosite notațiile

$$\varepsilon_j = \frac{I_j}{I}; \quad \lambda = \frac{l}{\sqrt{A}} \quad (2.139a,b)$$

în care I este un moment de inerție de referință, iar notația cu prim precizează diferențierea în raport cu q . Derivatele funcțiilor de stabilitate și funcțiilor de încovoiere se obțin din Kassimali [2.23].

Matricile geometrice $\begin{bmatrix} - \\ \mathbf{g}^{(k)} \end{bmatrix}$ au expresiile:

$$\begin{bmatrix} - \\ \mathbf{g}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(k)} & -\mathbf{f}^{(k)} \\ -\mathbf{f}^{(k)} & \mathbf{f}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

în care $\mathbf{f}^{(k)}$ sunt matrici simetrice 6 x 6 definite astfel:

$$\text{Pentru } k = 1,2, \mathbf{f}_{ij}^{(k)} = 0, \text{ exceptie } \mathbf{f}_{12}^{(k)} = \mathbf{f}_{21}^{(k)} = \frac{1}{(1+\delta)^2} \quad (2.141 \text{ a})$$

$$\text{Pentru } k = 3,4, \mathbf{f}_{ij}^{(k)} = 0, \text{ exceptie } \mathbf{f}_{13}^{(k)} = \mathbf{f}_{31}^{(k)} = \frac{1}{(1+\delta)^2} \quad (2.142 \text{ b})$$

$$\text{Pentru } k = 5, \mathbf{f}_{ij}^{(k)} = 0 \quad (2.141 \text{ c})$$

$$\text{Pentru } k = 6, \mathbf{f}_{ij}^{(k)} = 0, \text{ exceptie } \mathbf{f}_{22}^{(k)} = \mathbf{f}_{33}^{(k)} = -\frac{1}{1+\delta} \quad (2.141 \text{ d})$$

Se menționează faptul că matricea $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^{(e)} \end{bmatrix}$ este similară cu cea descrisă de Oran, însă acum ea include și efectul forței axiale asupra elementului. Produsele $G_{13}G_{12}$, $G_{23}G_{12}$, $G_{13}G_{22}$ și $G_{23}G_{22}$ nu au fost luate în considerare de Oran, în expresia lui $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^{(e)} \end{bmatrix}$, dar ele sunt cuprinse în noua expresie (2.135).

Matricea de transformare $[A]$ (2.133) și matricile geometrice $\begin{bmatrix} - \\ \mathbf{g}^{(k)} \end{bmatrix}$ din (2.140) și (2.141) sunt similare cu cele dezvoltate de Oran, cu excepția termenului δ care a fost neglijat în lucrarea originală a lui Oran.

2.13 Procedeele de calcul

Răspunsul neliniar se obține folosind iterația de tip Newton - Raphson asigurând satisfacerea ecuațiilor de echilibru la noduri în fiecare ciclu. Pașii de calcul pentru fiecare increment de încărcare sunt următorii:

1. Se determină pentru fiecare element matricea tangentă a rigidității $[K_t^{(e)}]$ în sistemul global de referință, folosind ultimele informații referitoare la geometrie și forțe. Se assemblează matricile rigidității tangente și se obține $[K_t]$;
2. Se substituie $[K_t]$ și $\{\Delta P\}$ în (2.32) și rezultă $\{\Delta D\}$;
3. Se determină noua configurație geometrică a structurii
 - a. Se determină noile coordonate ale nodurilor din relația:

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \{\Delta x\}$$
 Componentele de translație $x^{(i+1)}$ determină noile locații ale tuturor nodurilor structurii.
 - b. Se determină noua matrice de orientare pentru fiecare nod din (2.110,...,2.114)
4. Se determină geometria elementului, apoi se determină pentru fiecare element deplasările relative \bar{u} și matricea de orientare r , folosind (2.115,..., 2.123);
5. Se determină forțele nodale pentru elementul $\{Q\}$ din relațiile (2.32,...,2.43) și apoi forțele nodale în sistemul global de coordonate;
6. Soluția obținută este o configurație aproximativă în sensul că ecuațiile de echilibru (34) și (35) nu sunt satisfăcute în pasul P_{i+1} . Această aproximație este cercetată printr-o iterație de tip Newton-Raphson când ecuațiile de echilibru sunt satisfăcute cu o eroare prescrisă, în ciclul de iterație i când P este constant la $P^{(i+1)}$.

Forțele neechilibrate $\{\Delta P\}$ se determină din:

$$\{\Delta P_j\} = \{P\} - [K_t(D_{j-1})]\{\Delta D_{j-1}\} \quad (2.142)$$

7. Utilizând ultimele valori ale cantităților geometrice și statice se determină $[K_t^{(e)}]$ pentru fiecare element. Se assemblează matricile $[K_t^{(e)}]$ și se obține matricea tangentă $[K_t]$;
8. Tratănd forțele neechilibrate ca o încărcare incrementală se determină corecția vectorului Δx din relația incrementală:

$$[K_t(D_{j-1})]\{\Delta D_j\} = \{\Delta P_j\} \quad (2.143)$$
9. Dacă vectorul corecțiilor deplasărilor nu este mic, se calculează noi locații $\{x_{j+1}\} = \{x_j\} + \{\Delta x\}$, noi matrice de orientare și se repetă pașii de la 4 la 9 până când Δx este suficient de mic în concordanță cu un criteriu prescris;
10. Se consideră un nou increment ΔP și se revine la pasul 1.

Criteriul de convergență folosit este:

$$\left[\frac{\sum_i (\Delta x_i)^2}{\sum_i (x_i)^2} \right]^{1/2} \leq e \quad (2.144)$$

în care e reprezintă eroarea prescrisă.

La aplicarea criteriului, translațiile și rotațiile lui x sunt tratate separat și convergența este satisfăcută când criteriul este satisfăcut simultan și independent pentru fiecare grup de componente ale deplasărilor.

2.14 Concluzii

Cercetările efectuate în teza de doctorat permit evidențierea următoarelor concluzii:

- *comportarea neliniară a structurilor reticulate se poate efectua prin scrierea ecuațiilor de echilibru static pe structura deformată;*
- *deplasările elementelor structurale și ale structurii sunt finite dar deformațiile specifice trebuie exprimate prin ecuații diferențiale neliniare;*
- *ecuația constitutivă considerată de regulă trebuie să fie neliniară;*
- *ecuația generală de echilibru este neliniară în cazul structurilor reticulate și poate fi rezolvată folosind metoda elementului finit;*
- *matricea rigidității structurii trebuie să conțină efectul deformațiilor axiale, efectul deplasărilor finite, al comportării neliniare a materialului și eventual al semirigidității nodurilor;*
- *la rezolvarea ecuației neliniare de echilibru se vor alege metodele iterative care asigură convergența și exactitatea dorite;*
- *criteriul de convergență ar trebui să fie verificat simultan atât pentru deplasări cât și pentru încărcări;*
- *se recomandă ca rezultatele obținute să fie verificate cu cel puțin două programe de calcul.*

BIBLIOGRAFIE

- [2.1.] **Batoz J.L. și Dhat G.**, *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*, Int J.Numer Methods Eng. 14. 1262 -1267, 1979
- [2.2.] **Bîrsan M.G.**, *Dinamica și stabilitatea construcțiilor*, Editura Didactică și Pedagogică, 1979.
- [2.3.] **Chan L.S.**, *Geometric and material non-linear analysis of beam - columns and frames using the minimum residual displacement method*, Int J .Methods Eng.26,2657 - 2699, 1988
- [2.4.] **Chan L.S.**, *Large deflection kinematic formulation for three - dimensional framed structures*, Comput Meth in Appl.Mech and Engrg 95, pp 17 - 36,1992
- [2.5.] **Chandra C. Trikha D.N. și Krishna P.**, *Nonlinear analysis of steel space structures*, J.Engrg, ASCE, 116(4), pp 898-909, 1990
- [2.6.] **Crisfield A.M.**, *A first incremental - interactive solution procedure that handles snap through*, Computers and Structures, vol.13, pp 55-62 ,1981.
- [2.7.] **Ekhande G. S., Selvappalam M., Maduguala S.K.** *Stability functions for three - dimensional beam columns*, J. of str.Eng.Vol.15, No.2, p.p 467-479, 1989.
- [2.8.] **Fathelbab F. A. ,** *The effect of joints on the stability of shallow singler lattice domes*, Thesis submitted at the Univ. of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy, Sept.1987.
- [2.9.] **Fleming J. F.**, *Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures*, Comp.and Struct,vol.10, Pergamon Press, Inc, New York, N.Y and London England, pp 621 -635, 1979.
- [2.10.] **Gioncu V., Ivan M.**, *Bazele calculului structurilor la stabilitate*. Editura Facla,Timișoara, 1983.
- [2.11.] **Harrison H. B.**, *Computer methods in structural analysis*, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J.,1973.
- [2.12.] **Hatzis T. D.**, *The influence of imperfections on the behaviour of shallow single layer lattice domes*, Dissertation submitted to Univ.Cambridge for the Degree of Doctor of Philosophy, 1987.
- [2.13.] **Horne M.R. și Merchant W.**, *The stability of frames*, Pergamm Press Ltd, London, England, 1965
- [2.14.] **Ivan M., Gioncu V.**, *Considerații privind comportarea neliniară a structurilor*, Sesiune științifică a Inst. Politehnic Cluj - Napoca, 28 - 29. X. 1978. Secția Metode de calcul ale construcțiilor C.II. p. 235.

- [2.15.] **Ivan M.**, *Formulara matriceală a teoriei neliniare*, Al.VI-lea Simpozion Național de Informatică în construcții (SNIC), vol.2, 26 - 27.V, p.147, 1988.
- [2.16.] **Ivan M.**, *Bazele calculului liniar al structurilor*, Editare Facla, Timișoara, 1985
- [2.17] **Ivan M.**, *Teoria elasticității*, Institutul Politehnic Timișoara. 1983.
- [2.18.] **Ivan M., Vulpe A și Bănuț V.**, *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*, Editura Didactică și Pedagogică, 1984.
- [2.19.] **Ivan M., Botici Al., Dogariu E., Ivan A., Balekics G.**, *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*, Editura tehnică, 1997
- [2.20.] **Ivan M., Grecea D.**, *Caracteristica de calcul ale unor îmbinări semi-rigide la structuri metalice*, A VII -a Conferință de construcții metalice. Timișoara 29 - 30.XI, vol.1, pag.69, 1994
- [2.21.] **Kassinalli A.**, *Nonlinear static and dynamic analysis of frames*, Thesis presented to the Univ. of Missouri, 1976.
- [2.22.] **Kassinalli A.**, *Large deflection analysis of elasto – plastic*, J.Struct Eng, ASCE, 109(8), pp1869-1886, 1983
- [2.23.] **Kassinalli A.**, *Large deformation analysis of elastic space frames*, J of Struct. Eng.Vol.117,V.7, pp. 2069-2087, 1991.
- [2.24.] **Kish N. și Chen W. F.**, *Moment rotation relations os semi - rigid connections with angles*, J.Struct.Eng. 116(7), pp 1813 - 1834, 1990.
- [2.25.] **Livesley R. K., Chandler D. B.**, *Stability functions for structural framework*. Manchester Univ Prers, Manchester, England, 1956.
- [2.26.] **Meek L.J. și Logomathan S.**, *Geometrically nonlinear behaviour of space frame structures*, Comput and Structures 31(1), pp 35 - 45, 1989.
- [2.27.] **Meek L.J. și Tam S. H.**, *Geometrically nonlinear analysis of space frames by incremental iterative technique*, Comput Methods, Appl. Mech. Energ 47, pp 261-282, 1984.
- [2.28.] **Oran C.**, *Tangent stiffness in space frames*, J. Struct. Div.ASCE, 99(6), pp 987 - 1001,1973.
- [2.29.] **Oran C și Kassimali A.**, *Large deformations of framed structures under static and dynamic loads*, Comput. and Structures 6, pp 539 - 547, 1976.
- [2.30.] **Papadrakakis M.**, *Inelastic post buckling analysis of space frames*, Civ. Eng.Pract 1/Structures , pp 557 - 579, 1987.
- [2.31.] **Powell G. și Simons J.**, *Improved iteration strategy for nonlinear structures* Int. J.Numer.Struct.Eng.,pp 1455 - 1467, 1981

- [2.32.] **Przemieniecki S.J.**, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw - Hill Book Company, 1968.
- [2.33.] **Ramm E.**, *Strategies for tracing nonlinear response near limit points*, Workshop: Nonlinear finite element analysis in structural mechanics - Bochum, Springer - Verlag, 1980.
- [2.34.] **Renton J.D.**, *Stability of space frames by computer analysis*, J.Struct Div. ASCE, 88(8), pp 81 - 103, 1962.
- [2.35.] **Saafan S. A.**, *Nonlinear behaviour of structural plane frames*. J.Struct Div., ASCE, 89 (4), pp 557 - 579, 1963.
- [2.36.] **See T. și McConnel R.E.**, *Large displacement elastic buckling of space structures*, J.Struct.Engng ASCE, 112(5), pp 1052 - 1069, 1986
- [2.37.] **Shi G. și Atluri S.N.**, *Elasto - plastic large deformation analysis of space frames. A plastic hinge and stress - based explicit derivation a tangent stiffness*, J.Numer Methods Engrg 26(3), pp 589 - 615, 1988.
- [2.38.] **Shi G. și Atluri S.N.**, *Static and dynamic analysis of space frames with non - linear flexible connections*, Int.J.Numer Methods Engrg , 28(11), pp 2635 - 2650, 1989.
- [2.39.] **Yang Y.B. și Mc Guire W.**, *Stiffness matrix for geometric non - linear analysis*. J.Struct Engrg, ASCE, 112(4), pp 853 - 877, 1986.
- [2.40.] **Wessels M.**, *Das statische und dynamische durchschlagproblem der imperfekten flachen kugelaschale bei elastischer rotations – symmetrischer*, Verforming Diss.Tu Hannover, 1980.

CAPITOLUL 3



METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR

3. METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR

3.1 Probleme generale

În ultimii ani au fost depuse eforturi susținute pentru dezvoltarea unor metode numerice, care să permită rezolvarea problemelor neliniare din calculul structurilor. Trasarea curbei caracteristice forță - deplasare în domeniul precritic și postcritic este necesară pentru a defini comportarea structurii reale. Stabilirea răspunsului structurii în domeniul postcritic este necesară pentru studiul influenței imperfecțiunilor. Metodele numerice sunt diferite pentru trasarea curbei forță - deplasare în domeniul precritic, respectiv în domeniul postcritic.

Comportarea neliniară se studiază cu ajutorul metodei elementelor finite utilizând diferiți algoritmi de calcul. La stabilirea curbelor P - D care prezintă ramuri crescătoare și descrescătoare se utilizează metode incrementale, care prezintă anumite particularități.

În acest capitol se analizează metodele numerice care sunt utilizate în literatura de specialitate pentru determinarea încărcării limită la plăcile curbe reticulate.

Dubină [3.14] prezintă formularea modelului de calcul pentru o structură ținând seama de modelul fizic și modelul matematic. Metodele de calcul pot să fie exacte sau aproximative, iar algoritmi și procedurile numerice sunt și ele analitice sau numerice. În figura 3.1 se prezintă schematic această modelare precizându-se și creșterea gradului de exactitate al tehnicilor de calcul.

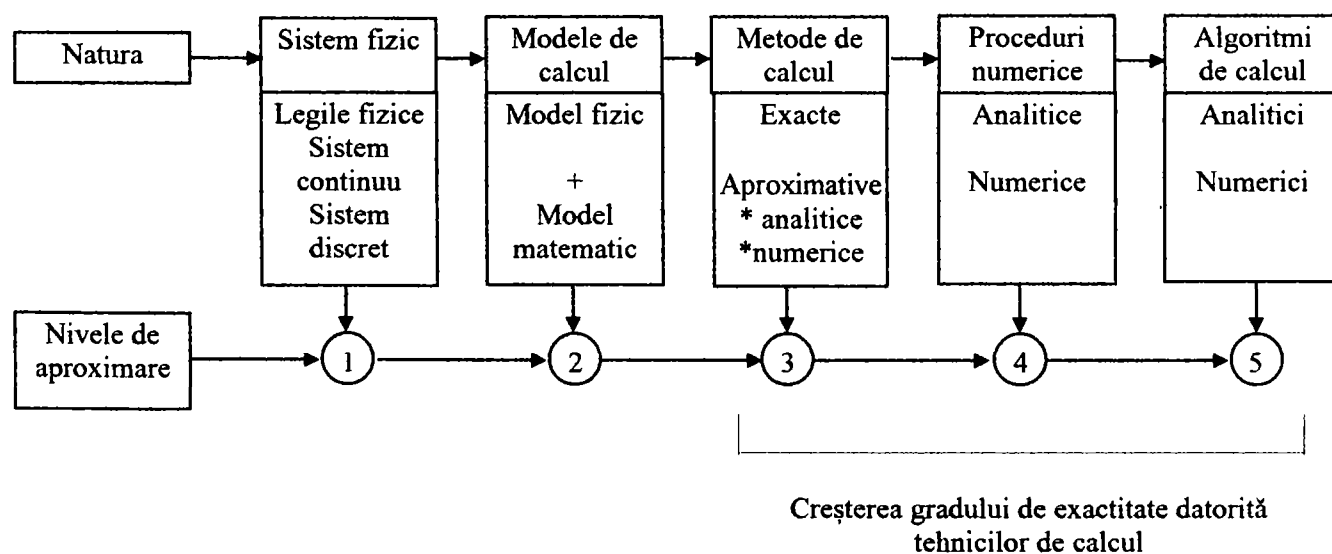


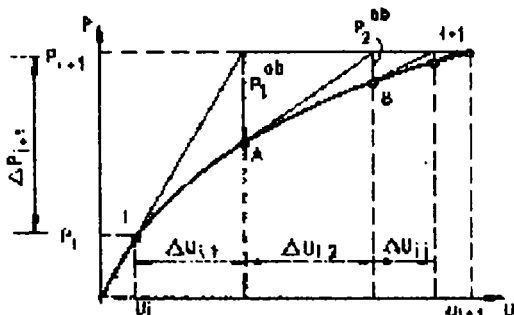
Fig. 3.1 Procedee de rezolvare a problemelor din mecanica structurilor

Analizând literatura de specialitate autorul ilustrează cele mai utilizate elemente finite utilizate în calculul neliniar al structurilor plane formate din bare.

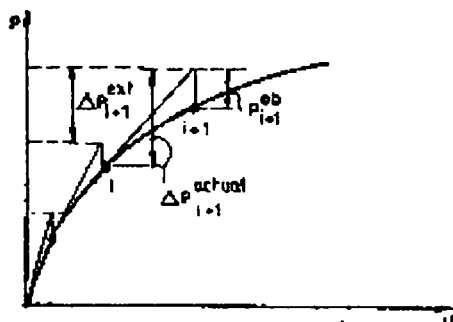
Metodele iterative care se utilizează pentru trasarea curbei încărcare - deplasare sunt analizate pentru domeniul precritic și postcritic (Fig. 3.2).

1. Metode iterative și incrementale pentru domeniul precritic

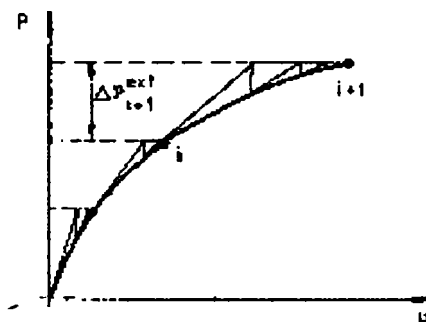
1.1.Principiul metodei lui Newton – Raphson



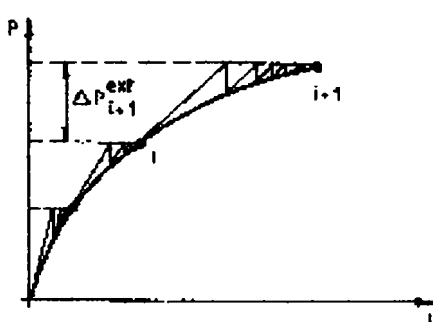
1.2 Metoda incrementală pură



1.3 Metoda incrementală Newton-Raphson

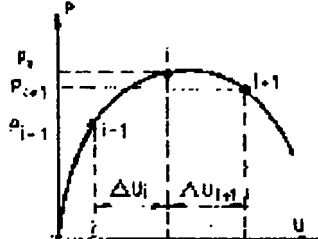


1.4 Metoda incrementală Newton-Raphson modificată

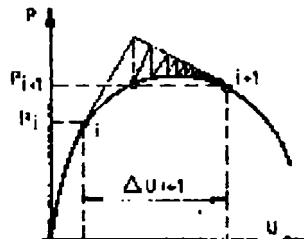


2. Metode incrementale și iterative pentru domeniul postcritic

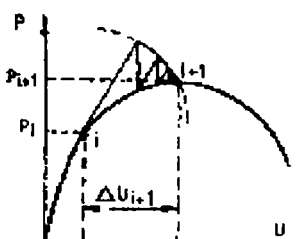
2.1 Metoda deplasărilor



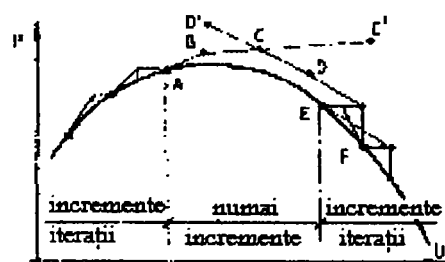
2.2 Metoda Riks-Wempner



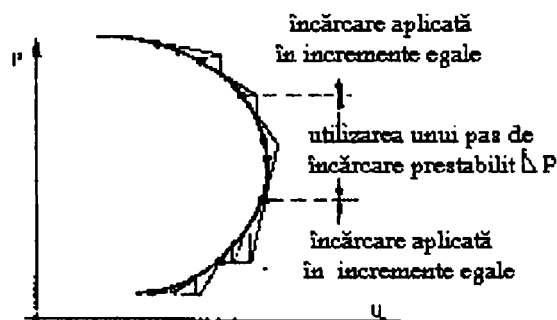
2.3 Metoda Crisfield



3. Depășirea punctelor limită



3.1 Punct limită al încărcării



3.2 Punct limită al deplasării

Fig. 3.2 Metode iterative pentru trasarea curbelor încărcare – deplasare în domeniul precritic și postcritic

De asemenea se prezintă criteriile de convergență care se utilizează în calculul nelinier și valoarea acceptată de 10^{-2} la 10^{-6} în funcție de gradul de exactitate dorit.

În final sunt reprezentate curbele încărcare - deplasare pentru o bară cotită, un nod cu șase bare și o cupolă cu 24 de bare obținute folosind programul de calcul ASEF - N.

În figura 3.3 se prezintă aceste curbe pentru cupola cu 24 de bare, obținându-se o concordanță bună între rezultatele numerice obținute de autor și alți cercetători.

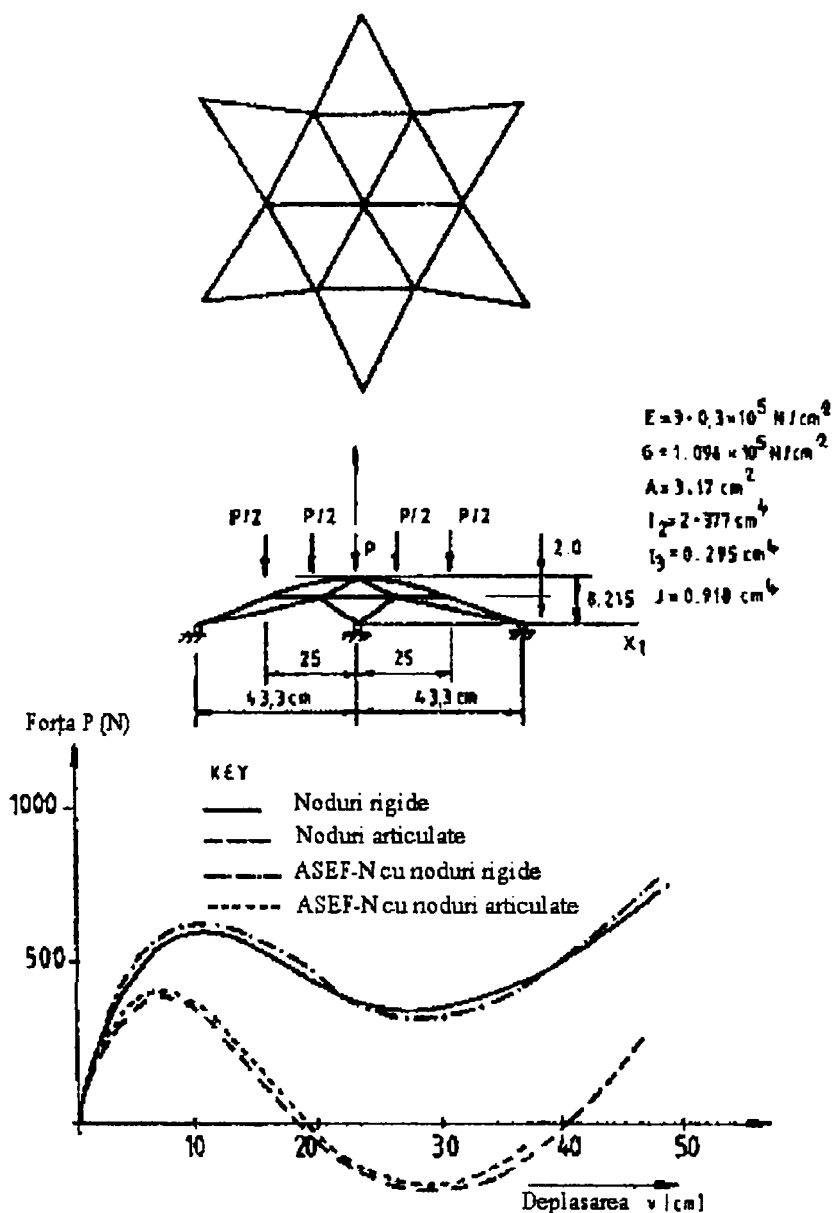


Fig. 3.3 Curbe încărcare – deplasare pentru o cupolă cu 24 de bare

3.2 Ecuațiile de echilibru în metoda elementului finit

Se presupune o curbă de încărcare - deplasare neliniară care prezintă puncte limită de tipul celui prezentat în figura 3.4. și se discută în metode teoretice care permit trasarea acestor curbe.

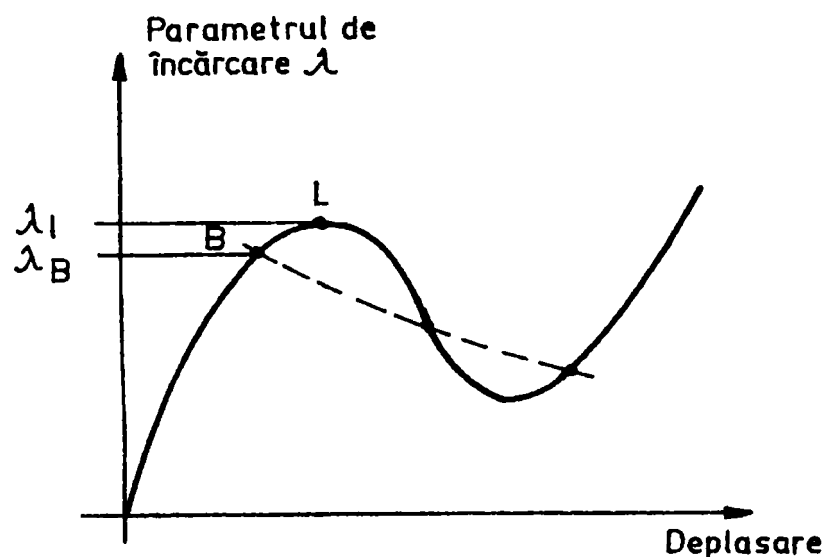


Fig. 3.4 Curba încărcare – deplasare pentru structura cu comportare neliniară

Ecuațiile de echilibru în metoda elementului finit pentru o structură cu comportare neliniară, au forma

$$[K_t(D)]\{D\} = \{P\} \quad (3.1)$$

în care $[K_t(D)]$ este matricea rigidității tangentă a structurii, $\{D\}$ deplasările nodale și $\{P\}$ vectorul forțelor nodale corespunzătoare deplasărilor nodale $\{D\}$.

În calculul neliniar al structurilor, relația P - D este neliniară și stabilirea ei se asigură prin aproximații succesive. Metodele sunt diferite pentru stabilirea curbei P - D în domeniul postcritic și precritic.

Relația (3.1) în formă incrementală se scrie

$$[K_t(D_{i-1})]\{\Delta D_i\} = \{\Delta P_i\} \quad (3.2)$$

în care $K_t(D_{i+1})$ este matricea rigidității în pasul i de calcul, iar $\{\Delta D_i\}$ și $\{\Delta P_i\}$ sunt vectorii deplasărilor și forțelor în pasul de calcul i.

Din ecuația (3.2) se obțin deplasările $\{\Delta D_i\}$

$$\{\Delta D_i\} = [K_t(D_{i-1})]^{-1} \{\Delta P_i\} \quad (3.3)$$

și deplasările totale în pasul i de calcul devin

$$\{D_i\} = \{D_{i-1}\} + \{\Delta D_i\} \quad (3.4)$$

Forța nodală reziduală în pasul de calcul i are expresia

$$\{\Delta F_i\} = \{P_i\} - [K_t(D_{i-1})]\{D_{i-1}\} \quad (3.5)$$

și calculul continuă până se obține în doi pași consecutivi o valoare neglijabilă.

3.3 Tehnici de rezolvare iterative

Stabilirea răspunsului neliniar al structurii se obține ușor cu tehnicile de rezolvare incrementală pe cale iterativă. Încărcarea exterioară se împarte în pași incrementali și în cadrul fiecărui pas de încărcare se rezolvă ecuațiile de echilibru cu toleranță acceptată.

Se notează cu i numărul pasului de încărcare, iar cu j se notează ciclul de iterație.

Într-o schemă iterativă cu un singur pas de încărcare se procedează astfel:

- se selectează un increment al încărcării exterioare $\Delta \lambda_i^1$ în primul ciclu de iterație, care se numește incrementul inițial de încărcare.

Se selectează o strategie de alegere a pașilor următori de încărcare pentru a restabili echilibrul cât mai rapid. Pentru parametrul de încărcare $\Delta \lambda_i^j$ se obține corecția parametrului de încărcare $\Delta \lambda_i^j$.

În continuare se prezintă tehnica de iterație pentru un pas de încărcare i (Fig.3.5).

Se presupune că în pasul $i - 1$ de încărcare este satisfăcută ecuația de echilibru și se cunosc λ_{i-1}, D_{i-1} .

Primul ciclu $j = 1$ de iterație

Se aplică un nou pas de încărcare $\Delta \lambda_i^1$. Se calculează matricea tangentă a rigidității $[K_t]$ din pasul anterior deplasările din ecuația

$$[K_t]_i \{D_1\}_i = \{F_t\}_i \quad (3.6)$$

în care $\{F_t\}_i$ vectorul forțelor exterioare de referință.

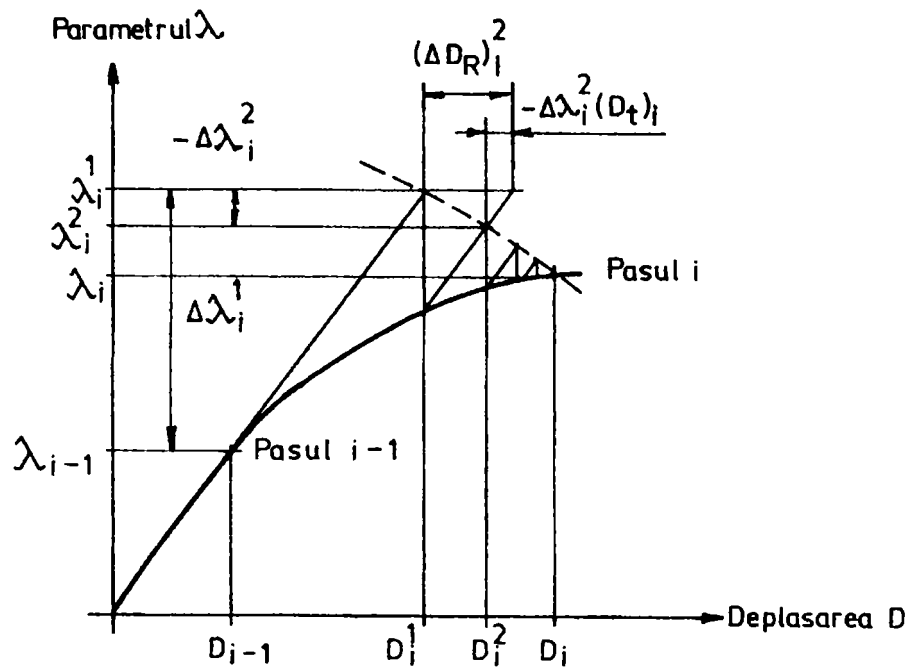


Fig.3.5 Schema iterativă pentru un pas de încărcare

Se alege valoarea inițială a incrementului încărcării $\Delta\lambda_i^1$ ca o cotă parte (20 - 40 %) din valoarea măximă care se anticipează pentru încărcare. Incrementul deplasărilor se determină din relația

$$\{\Delta D\}_i^1 = \Delta\lambda_i^1 \{D_t\}_i \quad (3.7)$$

Deplasările totale se calculează prin însumare

$$\{D\}_i^1 = \{D\}_{i-1} + \{\Delta D\}_i^1 \quad (3.8)$$

respectiv parametrul de încărcare

$$\lambda_i^1 = \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i^1 \quad (3.9)$$

În acest pas de iterație ecuațiile de echilibru nu sunt satisfăcute și sunt necesare iterații suplimentare pentru a restabili echilibrul.

Ciclurile de iterație $j \geq 2$

Metoda Newton - Raphson sau metoda Newton - Raphson modificată nu sunt capabile să depășească punctul limită, deoarece nivelul de încărcare este menținut constant în timpul iterării.

Parametrul de încărcare λ_i^j trebuie să poată varia pentru a se putea depăși punctul limită. Incrementul deplasărilor în ciclurile $j \geq 2$, dacă pasul de încărcare variază, se determină ca fiind soluția ecuației

$$[K_t]_i \{\Delta D\}_i^j = \Delta \lambda_i^j \{F_t\}_i - \{\psi\}_i^{j-1} \quad (3.10)$$

în care forța neechilibrată (reziduală) aplicată pe structură în iterația $j - 1$ are expresia

$$\{\psi\}_i^{j-1} = \{F_{int}\}_i^{j-1} - \{F_{ext}\}_i^{j-1} \quad (3.11)$$

Vectorul forțelor interioare $\{F_{int}\}_i^{j-1}$ se determină prin integrarea tensiunilor generalizate pe volumul fiecărui element și apoi însumându-se rezultatele.

$$\{F_{int}\}_i^{j-1} = \int_V [B]_i^{j-1 T} \{\sigma\}_i^{j-1} dV \quad (3.12)$$

în care $[B]_i^{j-1}$ este matricea deformațiilor specifice care conține și termenii neliniari, iar $\{\sigma\}_i^{j-1}$ este vectorul tensiunilor generalizate. Forțele exterioare proporționale se pot exprima

$$\{F_{ext}\}_i^{j-1} = \lambda_i^{j-1} \{F_t\}_i \quad (3.13)$$

Membrul drept al ecuației (3.10) este liniar în $\Delta \lambda_i^j$ și soluția finală se mai scrie

$$\{\Delta D\}_i^j = \Delta \lambda_i^j \{\Delta D_t\}_i + \{\Delta D_R\}_i^j \quad (3.14)$$

unde $\{D_t\}_i$ sunt deplasările calculate în pasul $j = 1$, iar $\{\Delta D_R\}_i^j$ sunt deplasările reziduale obținute din ecuația

$$[K_t]_i \{\Delta D_R\}_i^j = -\{\psi\}_i^{j-1} \quad (3.15)$$

Din ecuația (3.15) se obțin $\{\Delta D_R\}_i^j$ care se introduc în relația (3.14) și se determină incrementele deplasărilor $\{\Delta D\}_i^j$. Deplasările totale și parametrul încărcării se calculează din iterația anterioară astfel

$$\{D\}_i^j = \{D\}_i^{j-1} + \{\Delta D\}_i^j \quad (3.16)$$

$$\lambda_i^j = \lambda_i^{j-1} + \Delta \lambda_i^j \quad (3.17)$$

Se continuă iterația până când criteriul de convergență pentru toate forțele sau deplasările este satisfăcut.

3.4 Strategii iterative

Considerând modificarea factorului de încărcare $\Delta\lambda_i^j$ și a vectorului deplasărilor reziduale $\{\Delta D_R\}_i^j$ ca variabile adiționale se pot formula mai multe ecuații restrictive pentru a calcula pe $\Delta\lambda_i^j$.

3.4.1 Iterarea considerând încărcarea constantă

Parametrul de încărcare este ținut constant pentru toate iterațiile $j \geq 2$ și iterarea se efectuează numai pentru deplasările nodale. Ecuația de constrângere se reduce la

$$\Delta\lambda_i^j = 0 \quad (3.18)$$

Iterarea cu parametrul de încărcare constant este cea folosită în metoda de tip Newton - Raphson modificată. Această iterație nu permite trecerea peste punctul de limitare.

3.4.2 Iterarea cu deplasări constante

Acest tip de iterare este o aplicație mai generală și a fost prezentată de Powell și Simons [3.19], respectiv un caz special al metodei hiperplanului cu deplasări de control propusă de Bergan și Mollestad [3.4], Simons și alții [3.26].

În prima iterație $j = 1$, o componentă cheie a deplasării este incrementată cu o mărime prescrisă. Această componentă este considerată constantă în iterațiile ulterioare $j \geq 2$. Dacă se notează componenta cheie a deplasării cu D_n , a n-a componentă a vectorului deplasărilor nodale, incrementul lui D_n se scrie

$$\Delta D_n = \{b_n\}^T \{\Delta D_R\}_i^j \quad (3.19)$$

în care $\{b_n\}$ este un vector zero cu excepția termenului din rândul n care este egal cu unitatea, Din ecuația (3.14) se obține

$$\Delta D_n = \Delta\lambda_i^j \{b_n\}^T \{D_t\}_i + \{b_n\}^T \{\Delta D_R\}_i^j \quad (3.20)$$

Dacă D_n este nemodificat în iterațiile de echilibru, atunci $\Delta D_n = 0$, se obține modificarea iterativă a pasului de încărcare.

$$\Delta \lambda_i^j = - \frac{\{b_n\}^T \{\Delta D_R\}_i^j}{\{b_n\}^T \{D_t\}_i} \quad (3.21)$$

3.4.3 Iterarea cu arce de lungime constantă

Conceptul folosirii lungimii arcului în ecuația de constrângere a parametrului inițial de încărcare $\Delta \lambda_i^1$ a fost introdus de Riks [3.21] și Wempner [3.27]. Ei limitează pasul inițial de încărcare $\Delta \lambda_i^1$ prin ecuația

$$\{\Delta D\}_i^{1T} \{\Delta D\}_i^1 + (\Delta \lambda_i^1)^2 \{F_t\}_i^T \{F_t\}_i = l_i^2 \quad (3.22)$$

în care l_i este lungimea generalizată a arcului pe tangentă în stadiul $(i - 1)$ în spațiul încărcare - deplasare. Ca urmare curba iterativă adoptată de Riks și Wempner este cuprinsă într-un plan normal pe tangentă.

Metoda descrisă mai sus a fost modificată de Crisfield [3.6] și îmbunătățită pentru metoda elementului finit. Metoda propusă de Crisfield înlocuiește ecuația (3.22) cu

$$\{\Delta D_a\}_i^j T \{\Delta D_a\}_i^j = l_i^2 \quad (3.23)$$

pentru toate iterațiile j , în care $\{\Delta D_a\}_i^j$ sunt deplasările acumulate în pasul i de încărcare

$$\{\Delta D_a\}_i^j = \{D\}_i^j - \{D\}_{i-1} \quad (3.24)$$

Ecuația (3.23) corespunde iterării pe o sferă centrată în ultimul stadiu de echilibru și de rază l_i spre deosebire de iterarea într-un plan considerată Riks și Wempner.

Introducând relațiile (3.24), (3.16) și (3.14) în ecuația (3.23) rezultă

$$\left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \Delta \lambda_i^j \{D_t\}_i + \{\Delta D_R\}_i^j \right]^T \left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \Delta \lambda_i^j \{D_t\}_i + \{\Delta D_R\}_i^j \right] - l_i^2 = 0 \quad (3.25)$$

care se scrie ca o ecuație de gradul doi

$$A (\Delta \lambda_i^j)^2 + B \Delta \lambda_i^j + C = 0 \quad (3.26)$$

în care

$$A = \{D_t\}_i^T \{D_t\}_i \quad (3.27)$$

$$B = 2 \left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \{\Delta D_R\}_i^j \right]^T \{D_t\}_i \quad (3.28)$$

$$C = \left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \{\Delta D_R\}_i^j \right]^T \left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \{\Delta D_R\}_i^j \right] - I_i^2 \quad (3.29)$$

Se notează cu $(\Delta \lambda_i^j)_1$ și $(\Delta \lambda_i^j)_2$ două soluții ale ecuației (3.26)

Variația corectă a rădăcinilor este una la care se evită întoarcerea dublă a curbei de răspuns încărcare - deformație. Unghiul dintre vectorul deplasării incrementale înainte de iterație și vectorul deplasării incrementale după deformație trebuie să fie pozitiv. Pentru două rădăcini posibile, unghiurile corespunzătoare sunt definite de

$$\theta_{1,2} = \left[\{\Delta D_a\}_i^{j-1} + (\Delta \lambda_i^j)_{1,2} \{D_t\}_i + \{\Delta D_R\}_i^j \right]^T \{\Delta D_a\}_i^{j-1} \quad (3.30)$$

Alegerea corectă a rădăcinii $\Delta \lambda_i^j$ este cea care dă un unghi θ_1 pozitiv. Dacă ambele unghiuri sunt pozitive atunci rădăcina corectă este cea care este cea mai apropiată ecuației (3.26).

Ecuația (3.26) va avea rădăcini imaginare atunci când $B^2 - 4AC < 0$. Această situație apare atunci când incrementul inițial al încărcării este prea mare și structura are multiple direcții de instabilitate într-un punct.

3.4.4 Iterarea cu menținerea lucrului mecanic exterior constant

Și această iterare este o aplicație a metodei descrisă de Powell și Simons [3.19]. Pentru un increment $\Delta \lambda_i^j \{F_t\}_i$ al forței exterioare, cantitatea

$$\Delta W_i = \Delta \lambda_i^j \{F_t\}_i^T \{\Delta D\}_i^j \quad (3.31)$$

este un termen incremental al lucrului mecanic. Dacă lucrul mecanic exterior rămâne nemodificat în timpul iterării, atunci $\Delta W_i = 0$. Expresia pentru modificarea iterativă a parametrului $\Delta \lambda_i^j$ este

$$\Delta \lambda_i^j = - \frac{\{F_t\}_i^T \{\Delta D_R\}_i^j}{\{F_t\}_i^T \{D_t\}_i} \quad (3.32)$$

3.4.5 Iterarea cu parametrul de control minimul normei deplasării neechilibrate

Această metodă de iterare a fost prezentată de Chan [3.5] ca metoda deplasării reziduale minime și poate fi privită ca un caz special al tehnicii generale a lui Powell și Simons [3.26].

Ecuația pentru calculul lui $\Delta \lambda_i^j$ este

$$\frac{\delta}{\delta \Delta \lambda_i^j} \left[\{\Delta D\}_i^{jT} \{\Delta D\}_i^j \right] = 0 \quad (3.33)$$

care asigură valoarea minimă pentru norma deplasării neechilibrate în fiecare iterație.

Introducând $\{\Delta D\}_i^j$ din (3.14) și efectuând calculele din (3.33) rezultă

$$\Delta \lambda_i^j = - \frac{\{D_t\}_i^T \{\Delta D_R\}_i^j}{\{D_t\}_i^T \{D_t\}_i} \quad (3.34)$$

3.4.6 Iterarea cu parametru de control norma minimă a forței neechilibrate

Această strategie a fost prezentată de Bergan [3.2]. Ideea de bază constă în ajustarea intensității sistemului de forțe astfel încât să fie cât mai apropiate de forțele interioare calculate la începutul fiecărei iterații. Strategia garantează că distanța, exprimată ca norma euclidiană dintre stadiul curent de echilibru dat de forțele interne și cel dat de încărcările reale va fi minimizată.

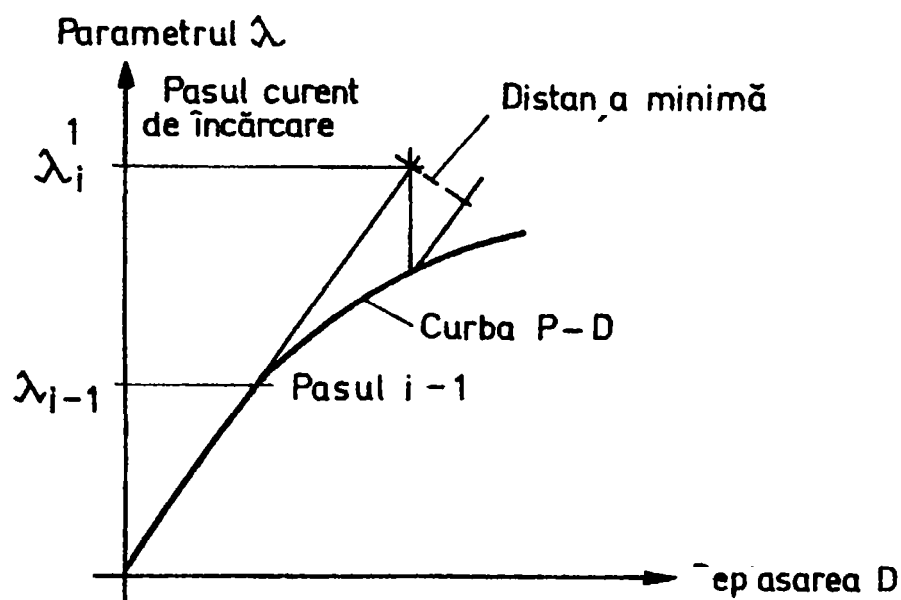


Fig.3.6 Schema iterativă pentru parametrul de control. Norma minimă a forței neechilibrate

La început ciclul de iterație j forțele interioare se pot calcula din ecuația (3.12). Orice punct de pe curba forțelor exterioare poate fi exprimat ca $\lambda_i^j \{F_t\}_i$. Pătratul Normei euclidiene dintre stadiul curent dat de forțele interioare și cel dat de încărcările reale efective este

$$f = \{\phi\}_i^{jT} \{\phi\}_i^j \quad (3.35)$$

în care

$$\{\phi\}_i^j = \{F_{int}\}_i^{j-1} - \lambda_i^j \{F_t\}_i \quad (3.36)$$

Pentru minimizarea acestei distanțe, ecuația de constrângere este

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \lambda_i^j} = 0 \quad (3.37)$$

din care se obține

$$\lambda_i^j = \frac{\{F_t\}_i^T \{F_{int}\}_i^{j-1}}{\{F_t\}_i^T \{F_t\}_i} \quad (3.38)$$

iar

$$\Delta \lambda_i^j = \lambda_i^j - \lambda_i^{j-1} \quad (3.39)$$

Bergan [3.1, 3.2] a sugerat ca să fie folosiți factori de pondere diferiți pentru componentele translațiilor și rotațiilor.

3.4.7 Iterarea cu un răspuns ponderat constant

Gierlinski și Smith Grave [3.15] au descris o strategie iterativă generală controlată prin criteriul de răspuns ponderat, care este avantajoasă pentru structurile cu comportare critică. Ei au demonstrat că iterația Newton - Raphson modificată și tehnicile iterative ale lui Crisfield [3.6], Powell și Simons [3.19] și Riks [3.21] pot fi privite ca niște cazuri speciale ale formulării lor generale.

Lungimea vectorului răspuns ponderat este definită de

$$(L_i^j)^2 = \{D\}_i^{jT} [G]_i \{D\}_i^j + (\lambda_i^j)^2 \{F_t\}_i^T [H]_i \{F_t\}_i \quad (3.40)$$

în care L_i^j este numit măsura ponderată.

În ecuația (3.40), $[G]_i$ și $[H]_i$ sunt matrice diagonale având dimensiunile rigidității, respectiv flexibilității. Diferitele forme ale măsurii ponderate L_i^j sunt generate de alegerea diferită a matricelor $[G]_i$ și $[H]_i$. În acest capitol vectorii deplasărilor și încărcărilor sunt ponderați cu termenii de pe diagonala principală a matricei rigidității tangente $[K_t]_i$ astfel

$$g_{mm} = k_{mm}; h_{mm} = \frac{1}{k_{mm}}$$

în care g_{mm} , h_{mm} și k_{mm} sunt termenii din poziția (m,n) ai matricelor $[G]_i$, $[H]_i$ și $[K]_i$.

Pentru ciclul iterativ j în cadrul pasului i , incrementul măsurii ponderate ΔL_i^j se poate exprima astfel

$$\Delta L_i^j = \{\Delta D_a\}_i^{jT} [G]_i \{\Delta D_a\}_i^j + \left(\Delta \lambda_{ai}^j\right)^2 \{F_t\}_i^T [H]_i \{F_t\}_i \quad (3.41)$$

în care vectorul deplasărilor acumulate $\{\Delta D_a\}_i^j$ pentru acest increment este definit de ecuația (3.24) și parametrul de încărcare acumulat de

$$\Delta \lambda_{ai}^j = \lambda_i^j - \lambda_{i-1} \quad (3.42)$$

Strategia “răspunsului ponderat constant” se poate aplica dacă modificarea în L_i^j din fiecare ciclu de iterație este egală cu zero, care matematic se exprimă prin ecuația de constrângere

$$\tilde{\Delta L}_i^j - \Delta L_i^{j-1} = 0 \quad (3.43)$$

Folosind ecuația (3.43) și identitățile

$$\{\Delta D_a\}_i^j = \{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \Delta \lambda_{ai}^j \{D_t\}_i + \{\Delta D_R\}_i^j$$

$$\Delta \lambda_{ai}^{j-1} = \Delta \lambda_{ai}^{j-2} + \Delta \lambda_{ai}^{j-1}$$

Ecuația (3.43) poate fi scrisă ca o ecuație de gradul doi.

$$A(\Delta \lambda_{ai}^j)^2 + B(\Delta \lambda_{ai}^j) + C = 0 \quad (3.44)$$

în care coeficienții A , B și C sunt dați de

$$A = \{D_t\}_i^T [G]_i \{D_t\}_i + \{F_t\}_i^T [H]_i \{F_t\}_i \quad (3.45)$$

$$B = 2 \left[\{D_a\}_i^{j-1} + \{\Delta D_R\}_i^j \right]^T [G]_i \{D_t\}_i + 2 \Delta \lambda_{ai}^{j-1} \{F_t\}_i^T [H]_i \{F_t\}_i \quad (3.46)$$

$$C = \left[2 \{D_a\}_i^{j-1} + \{\Delta D_R\}_i^{j-1} \right]^T [G]_i \{\Delta D_R\}_i^j \quad (3.47)$$

Alegerea rădăcinii corecte $\Delta\lambda_i^j$ a ecuației (3.44) se face așa cum s-a prezentat la punctul 3.4.3.

Gierlinski și Smith Graves [3.15] au obținut o metodă modificată pentru calculul lui $\Delta\lambda_i^j$ care este mai simplă și mai eficientă decât ecuația (3.44). În această metodă modificată se obține o formulă explicită pentru $\Delta\lambda_i^j$

$$\Delta\lambda_i^j = \frac{\{\Delta D_R\}_i^{jT} [G]_i \{\Delta D_a\}_i^{j-1}}{\{D_t\}_i^T [G]_i \{\Delta D_a\}_i^{j-1} + \Delta\lambda_{ai}^{j-1} \{F_t\}_i^T \{H\}_i \{F_t\}_i} \quad (3.48)$$

În majoritatea situațiilor, metoda este mai simplă și are soluții aproape identice cu cele ale ecuației (3.44) cu excepția intervalelor cu curbură mare din diagramele încărcare-deplasare unde este mai puțin probabil să se obțină convergența.

3.5 Metodele pentru aplicarea automată a incrementului de încărcare

Când se trece dintr-un stadiu de echilibru (i-1) spre un nou stadiu i, trebuie ales un nou increment inițial de încărcare $\Delta\lambda_i^j$. Alegerea mărimii incrementului este importantă și poate reflecta gradul de neliniaritate. Dacă pasul inițial de încărcare este prea mare, convergența va fi lentă sau nu apare deloc. Dacă pasul inițial de încărcare este prea mic, eficacitatea rezolvării suferă fiind necesare prea multe iterații pentru a obține răspunsul dorit. Alegerea automată a incrementului încărcării trebuie să se facă cu semnul corect, fiind necesare măsuri capabile de a detecta, când au fost depășite punctele de maxim și minim ale curbei încărcare - deplasare.

Metodele pentru aplicarea automată a incrementului de încărcare, presupun stabilirea următorilor parametri inițiali

- $\Delta\lambda_i^1$ se alege normal între 20 și 40 % din încărcarea maximă anticipată
- J_d - numărul de iterații pentru convergență, se alege între 3 și 5;
- exponentul γ - vezi punctul 3.5.1.
- ξ_c toleranța acceptată pentru convergență și se alege în domeniul 10^{-2} la 10^{-5} depinzând de exactitatea dorită și de neliniaritatea caracteristică în problema ce se analizează.

În literatură se cunosc un număr important de metode pentru controlul mărimii incrementului.

Bergan și alții [3.2] definesc un parametru de rigiditate curent ca o măsură a gradului de neliniaritate. Crisfield [3.6] și Ramm [3.20] folosesc următorul raport pentru a controla incrementarea automată.

$$\left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right) \quad (3.49)$$

în care J_d este un număr definit de iterații pentru convergență aleasă de utilizator și J_{i-1} este numărul real de iterații pentru convergență rezultată în pasul anterior.

3.5.1 Metode de incrementare a încărcării bazate pe raportul J_d/J_{i-1}

3.5.1.1 Incrementarea directă a parametrului de încărcare

Crisfield [3.6] utilizând metoda Newton - Raphson modificată a adoptat următorul procedeu pentru calculul mărimii incrementului.

$$\Delta\lambda_i^1 = \Delta\lambda_{i-1}^1 \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right) \quad (3.50)$$

Ramm [3.20] a utilizat rădăcina patrată a raportului J_d/J_{i-1} obținând o curbă încărcare - deplasare mai netedă. Dacă se adoptă o metodă care permite iterarea atât a parametrului de încărcare λ_i^1 cât și a deplasărilor prin aceasta făcând posibilă trecerea peste punctul limită, atunci pentru incrementarea automată a încărcării, se folosește expresia

$$\Delta\lambda_i^1 = \pm \Delta\lambda_{i-1}^1 \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^\gamma \quad (3.51)$$

în care exponentul γ se afla în domeniul 0.5 la 1.0. Semnul corect în relația (3.51) se analizează în paragraful 3.5.4.

3.5.1.2. Incrementarea unei componente a deplasării

Incrementul inițial al încărcării este ales astfel ca să limiteze deplasarea cheie D_n a structurii. Incrementul deplasării selectate pentru pasul curent se calculează cu relația

$$(\Delta D_n)_i = (\Delta D_n)_{i-1} \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^\gamma \quad (3.52)$$

în care γ este uzual situat în intervalul 0.5 la 1.0. Dacă convergența se admite că a fost obținută perfect în pasul anterior, incrementul deplasării $(\Delta D_n)_i$ poate fi exprimat

$$(D_n)_i = \Delta\lambda_i^1 \{b_n\}^T \{D_t\}_i \quad (3.53)$$

în care $\{b_n\}$ este un vector care este egal cu unitatea în al n-lea rând și zero în rest.

$$\Delta\lambda_i^1 = \frac{(\Delta D_n)_i}{\{b_n\}^T \{D_t\}_i} \quad (3.54)$$

Dacă în locul lui (ΔD_n) la începutul procesului de iterare este precizat nivelul de încărcare inițial $\Delta\lambda_i^1$ atunci incrementul componente deplasării selectate pentru primul pas de încărcare poate fi calculat din ecuația (3.54)

3.5.2 Incrementarea lungimii arcului

Fie lungimea arcului l_i pentru pasul de încărcare i definit de

$$l_i^2 = (\Delta\lambda_i^1)^2 \{D_t\}_i^T \{D_t\}_i \quad (3.55)$$

Lungimea arcului pentru incrementul curent poate fi calculat folosind lungimea arcului din incrementul anterior prin

$$l_i = l_{i-1} \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^\gamma \quad (3.56)$$

Ecuația (3.55) poate fi rezolvată pentru incrementul corect al încărcării.

Din ecuația (3.55) se obține incrementul inițial al încărcării necesar în primul pas

$$\Delta\lambda_i^1 = \pm \frac{l_i}{\sqrt{\{D_t\}_i^T \{D_t\}_i}} \quad (3.57)$$

în care semnul corect este ales în conformitate cu criteriul din paragraful 3.5.4. Procedura se începe cu evaluarea lui l_i din relația (3.55) considerând nivelul inițial de încărcare $\Delta\lambda_i^1$.

3.5.2.1 Incrementarea lucrului mecanic exterior

Incrementul inițial de încărcare este astfel ales încât să limiteze incrementul lucrului mecanic produs de forțele exterioare ΔW_i . Incrementul lucrului mecanic în pasul i de încărcare este calculat din

$$\Delta W_i = \Delta W_{i-1} \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^\gamma \quad (3.58)$$

și

$\Delta\lambda_i^1$ rezultă din

$$\Delta\lambda_i^1 = \frac{\Delta W_i}{\{F_t\}_i^T \{D_t\}_i} \quad (3.59)$$

Procedeeul începe prin calculul lui ΔW_i din ecuația (3.59) folosind nivelul de încărcare inițial precizat $\Delta\lambda_1^1$.

3.5.3 Metode de incrementare bazate pe parametrul curent al rigidității S_λ

Bergan și alții [3.2] au introdus o cantitate scalară numită “parametrul curent al rigidității”, ca o măsură ce caracterizează comportarea neliniară a structurilor cu mai multe grade de libertate.

Parametrul curent al rigidității definit de Bergan [3.3] este

$$S_\lambda = \frac{\left(\frac{d}{d\lambda} \{D\}_0^T\right) \{\tilde{F}\}}{\left(\frac{d}{d\lambda} \{D\}\right)^T \{\tilde{F}\}} \quad (3.60)$$

în care $(d\{D\}/d\lambda)_0$ este rata inițială a modificării raportată la parametrul încărcării, $(d\{D\}/d\lambda)$ este rata curentă de modificare a deplasărilor raportată la parametrul de încărcare și $\{\tilde{F}\}$ este o caracteristică a vectorului încărcare de referință.

În mod normal $\{\tilde{F}\}$ se alege ca vectorul forțelor exterioare de referință $\{F_t\}$ pentru încărcări proporționale. Când $\{\tilde{F}\} = \{F_1\}$, $(d\{D\}/d\lambda)_0$ sunt deplasările tangente $\{D_t\}_1$ pentru primul increment al încărcării și parametrul rigidității curente în pasul i se evaluează din relația

$$S_{\lambda,i} = \frac{\{D_t\}_1^T \{F_t\}_i}{\{D_t\}_i^T \{F_t\}_i} \quad (3.61)$$

S_λ are valoarea inițială 1 pentru orice structură neliniară. Valorile lui S_λ mai mici sau mai mari decât unitatea, indică slăbirea sau rigidizarea structurii.

Bergan [3.3] discută o metodă pentru folosirea parametrului curent de rigiditate pentru incrementarea automată a încărcării. Ideea strategiei de incrementare a încărcării constă în menținerea aceluiași ordin de trunchiere τ în fiecare pas de încărcare (Fig. 3.7). Când eroarea de

trunchiere τ este ținută aproximativ constantă, rezultă aproximativ același număr de iterații pentru convergența în fiecare pas de încărcare. Expresia pentru incrementarea automată a încărcării este

$$\Delta\lambda_i^1 = \pm\Delta\lambda_{i-1}^1 \left| \frac{\Delta S_\lambda}{\Delta S_{\lambda,i}} \right| \quad (3.62)$$

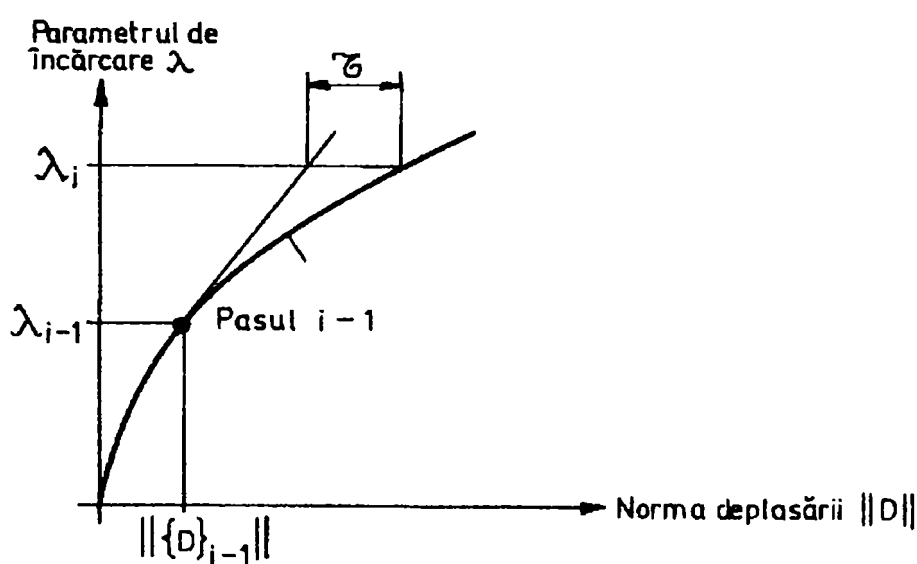


Fig.3.7 Schema iterativă pentru menținerea aceleiași erori de trunchiere τ în fiecare pas de încărcare

în care ΔS_λ este o constantă scalară prescrisă, care poate fi introdusă ca o dată de intrare în program sau calculată folosind valorile parametrilor curenti de rigiditate pentru primii doi pași de încărcare, de exemplu $\Delta S_\lambda = S_{\lambda,2} - S_{\lambda,1}$ și $\Delta S_{\lambda,i}$ este modificarea parametrului curent de rigiditate din pasul anterior în pasul curent de încărcare $\Delta S_{\lambda,i} = S_{\lambda,i} - S_{\lambda,i-1}$.

În regiunile în care curba încărcare - deplasare este aproape liniară, $\Delta S_{\lambda,i}$ poate fi mic și atunci din ecuația(3.62) se va obține o valoare inițială mare pentru parametrul $\Delta\lambda_{\lambda,i}$.

De aceea este de dorit să se specifice o valoare absolută maximă pentru incrementul inițial al încărcării calculat din ecuația (3.62).

Chan [3.5] folosește o aplicație mai simplă a parametrului rigidității curente pentru incrementarea încărcării. Incrementele inițiale sunt alese astfel

$$\Delta\lambda_i^1 = \pm\Delta\lambda_1^1 |S_{\lambda,i}|^{\gamma} \quad (3.63)$$

în care exponentul γ uzual se consideră egal cu 1. În vecinătatea punctelor limită, $S_{\lambda,i}$ poate deveni mare (> 1) și este de dorit să se specifice valoarea maximă a lui $|S_{\lambda}|$ pentru a limita mărimea pasului de încărcare.

3.5.4 Metodă incrementală bazată pe o aproximație parabolică a curbei încărcare - deplasare

Bergan și Sreide [3.1] au presupus că incremente optime de încărcare se obțin când eroarea de trunchiere τ rămâne constantă pentru toți pașii de încărcare. Un număr aproximativ constant de cicluri de iterație sunt necesare în fiecare pas de încărcare pentru obținerea echilibrului. Se folosește o parabolă pentru a aproxima relația între norma euclidiană a deplasării $\|\{D\}\|$ și parametrul de încărcare λ . Parametrul inițial de încărcare pentru pasul i se calculează folosind parabola care trece prin $(\|\{D\}_{i-2}\|, \lambda_{i-2})$ și $(\|\{D\}_{i-1}\|, \lambda_{i-1})$ și având același gradient ca la λ_{i-1} (Fig.3.8).

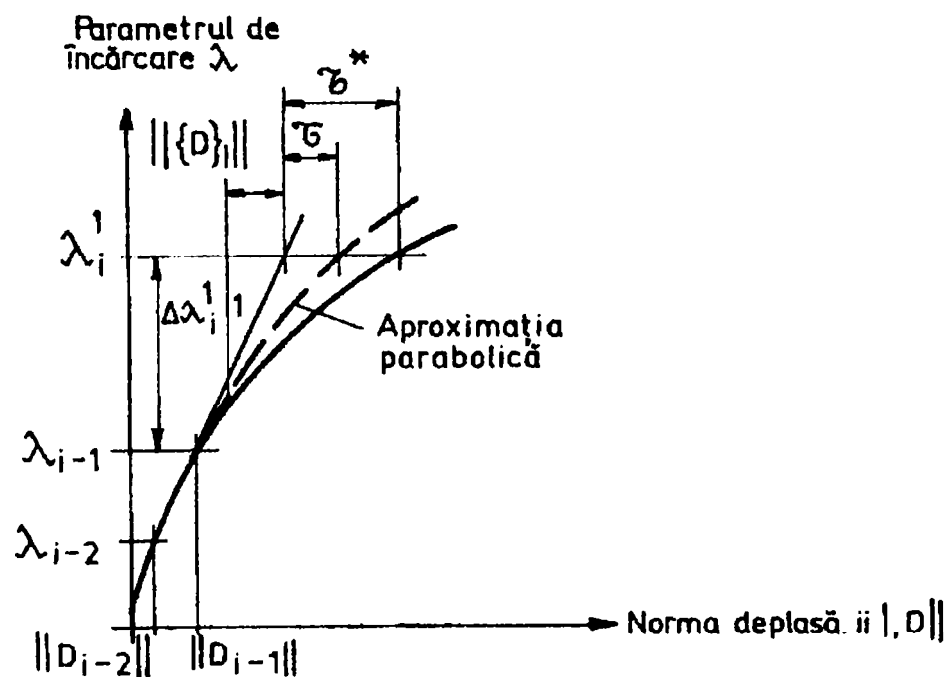


Fig.3.8 Schema iterativă pentru aproximarea cu o parabolă a curbei încărcare - deplasare

Eroarea de trunchiere τ pentru acest pas de încărcare este calculată ca distanța dintre tangentă și parabola interpolată. Considerând că τ este predefinit, noul increment este

$$\Delta\lambda_i^1 = \pm\Delta\lambda_{i-1}^1 \sqrt{\frac{\tau}{\|\{D_t\}_i\| |\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}| - \|\{D\}_{i-1} - \{D\}_{i-2}\|}} \quad (3.64)$$

Eroarea de trunchiere τ poate fi specificată ca dată de intrare sau calculată după terminarea primului pas de încărcare, spre exemplu

$$\tau = \|\{D\}_1 - \Delta\lambda_1 \{D_t\}_1\| \quad (3.65)$$

Bergan și alții [3.4] arată că primii doi pași de încărcare pot fi specificați ca date de intrare și atunci τ poate fi calculat după al doilea pas de încărcare.

3.5.5 Semnul incrementului inițial de încărcare

În ecuațiile (3.51), (3.57) și (3.62-3.64) semnul incrementului inițial de încărcare poate fi pozitiv sau negativ.

Crisfield [3.7] și Ramm [3.20] arată că semnul lui $\Delta\lambda_i^1$ ar trebui să rămână la fel ca în incrementul anterior în afară de cazul când se modifică semnul determinantului matricei tangente de rigiditate. Determinantul matricei rigidității tangente este ușor calculat ca produsul tuturor termenilor de pe diagonala principală a matricei triunghiulare superioare.

Bergan și alții [3.2] detectează când un maxim sau un minim al curbei de încărcare-deplasare a fost depășit prin schimbarea de semn a incrementului lucrului mecanic

$$\Delta W_i = \Delta\lambda_i^1 \{D_t\}_i^T \{F_t\}_i \quad (3.66)$$

Schimbarea de semn a incrementului lucrului mecanic este analoagă cu schimbarea semnului parametrului rigidității curente definit de ecuația (3.61). Bergan și alții [3.2] arată că o modificare a semnului parametrului inițial de încărcare ar apare la inversarea sensului incrementului lucrului mecanic Meek și Tan [3.18] precizează că atunci când structura prezintă o comportare cu multiple valori proprii negative, criteriul schimării semnului determinantului nu poate fi aplicat întotdeauna și este mai bine să se verifice schimbarea semnului incrementului lucrului mecanic.

3.6 Concluzii

Din datele analizate din literatura de specialitate se desprind o serie de concluzii referitoare la diferite scheme de rezolvare numerică a problemelor neliniare.

(I) Metoda Newton - Raphson modificată cu strategia iterativă a parametrului de încărcare constant nu poate fi aplicată dincolo de punctul limită.

(II) Strategia iterativă cu deplasările controlate a lui Powell și Simons [3.19] este o metodă stabilă, dar nu poate fi aplicată dincolo de punctul unde deplasarea “cheie” de control devine staționară.

(III) Iterarea cu arce de lungime constantă, iterarea cu parametrul de control minimul normei deplasării neechilibrate și iterarea cu răspunsul ponderat constant arată performanțe identice și sunt cele mai recomandate tehnici iterative. Nici una din aceste trei metode nu pare să necesite eliminarea iterațiilor pentru echilibru în vecinătatea punctelor limită ale încărcării sau deplasării. Expresia simplificată pentru $\Delta\lambda_i^j$ în metoda iterativă cu răspuns ponderat constant (ecuația 3.48) dă aproape performanțe identice cu metoda mult mai riguroasă de rezolvare a ecuației patratice (ecuația 3.44), cu excepția zonelor cu curbură mare ale curbei încărcare - deplasare unde metoda ultimă are o probabilitate mai mare de reușită în a converge spre soluția corectă.

(IV) Iterarea normei minime a forțelor neechilibrate nu a putut depăși punctul limită când iterarea cu parametrul de control, echilibrul a fost menținut. Metoda este utilă pentru obținerea întregului răspuns static numai pe o schemă incrementală funcționând în vecinătatea punctelor limită. În vecinătatea punctelor limită însă iterațiile trebuie sistate și trebuie aplicată o metodă pur incrementală.

(V) Metodele de incrementare bazate pe raportul (J_d/J_{i-1}) par mai eficiente decât alte scheme bazate pe parametrul curent al rigidității sau pe aproximarea parabolică a răspunsului încărcare - deplasare. Ultimele metode au dat valori mari ale incrementelor inițiale ale încărcărilor inițiale în zonele mai liniare ale curbelor încărcare - deplasare.

Metodele bazate pe (J_d/J_{i-1}) dau performanțe superioare în sensul menținerii unei iterații necesare pentru convergență aproximativ constant.

(VI) Strategia de monitorizare a semnului determinantului matricei rigidității tangente pentru a stabili când incrementul inițial al încărcării ar trebui să își schimbe semnul, este cea mai recomandată. Urmărirea semnului incrementului lucrului mecanic sau parametrului curent al rigidității pentru a determina când parametrul inițial de încărcare ar trebui să își schimbe semnul, nu a permis depășirea primului punct limită al deplasărilor.

BIBLIOGRAFIE

- [3.1.] **Bergan G.P. and Sreide**, *A comparative study of different numerical solution techniques as applied to nonlinear structural problem* Comp. methods Appl. Mech. Eng. 2, pp. 185 -m 201, 1973.
- [3.2.] **Bergan G.P., Horrigmoe G., Krakeland B. and Sreide H.T.**, *Solution techniques for non - linear finite element problems*. Int. Numer. Methods Eng., 12 pp 1677 - 1969, 1978.
- [3.3.] **Bergan G.P.**, *Solution algorithms for nonlinear structural problems*. Comp. Struct., 12 pp. 497 - 509, 1980.
- [3.4.] **Bergan G.P., and Mollestad**, *Static and dynamic solution strategies in nonlinear analysis*. Taylor C. et al. (eds) Numerical Method for Nonlinear Problems Pineridge Press, Swansea, pp. 3-17, 1984.
- [3.5.] **Chan L. S.**, *Geometric and material analysis at beam - column and frames using the minimum residual displacement method*. Int. J. Num. Methods. Eng. 26, pp. 2657-2669, 1988
- [3.6.] **Crisfield A. M.**, *A fast incremental iterative solution procedure that handles “snap - through”*. Compt. Struct. 13, pp. 55 - 623, 1981.
- [3.7.] **Crisfield M. A.**, *Numerical analysis of structures*. J. Rhodes and A.C. Walker (eds.). Developments in Thin-Walled Structures - I. Applied Science, London, pp.235 - 284.
- [3.8.] **Crisfield M. A.**, *A faster modified Newton – Raphson iteration*. Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., vol. 20, pp 267 – 278, 1979
- [3.9.] **Crisfield M. A.**, *Incremental/iterative solution procedures for nonlinear structural analysis*. Proc. Conf. Numerical Methods for Nonlinear Problems, Univ. Swansea, 1980
- [3.10.] **Crisfield M. A.**, *A fast incremental/iterative solution that handles snap – through*. Comp and Struct., vol. 13, pp 55 - 62
- [3.11.] **Crisfield M. A.**, *An arc-length method including line searches and accelerations*. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 19, pp 1269 – 1289, 1983
- [3.12.] **Crisfield M. A.**, *Accelerating and damping the modified Newton – Raphson method*. Comp. Struct., vol. 18, pp 395 – 407, 1984
- [3.13.] **Crisfield M. A., Duxbury P. G., Hunt G. W.**, *Benchmark tests for solution procedures for geometrically nonlinearity*. Rep. For Nat. Agency for FEM and Standards, 1987

- [3.14] **Dubină D.**, *Computation models and numerical solution procedures for nonlinear analysis of single-layer lattice shells*. Int. J. Space Structures, vol. 7, no. 4, 1992
- [3.15.] **Gierlinski T.J. and Smith Grave R.T.**, *A variable load iteration procedure for thin-walled structures*. Conv. Struct. 21, pp. 1085 - 1094, 1985.
- [3.16.] **Ivan A.**, *Metode numerice pentru calculul neliniar al structurilor cu metoda elementului finit*. Volumul Sesiunii de comunicări științifice Univ. Aurel Vlaicu, 7 – 8 V, Arad, 1992.
- [3.17.] **Ivan A.**, *A study of numerical methods used for overcoming the critical points of the equilibrium path*. Proceedings of the fifth symposium of mathematics and its applications 29-30.X, Timișoara, 1993.
- [3.18.] **Meek L. J. and Tan S. H.**, *Geometrically nonlinear analysis of beam - columns and frames by an incremental iterative technique*. Comp. Methods Appl. MECH. Eng. 47, pp. 261 - 282, 1984.
- [3.19.] **Powell G. and Simons J.**, *Improved iteration strategy for nonlinear structures*. Int. J. Numer. Methods Eng. 17, pp. 1455-1467, 1981
- [3.20.] **Ramm E.**, *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. W.Wunderlich et al (eds), Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer Verlag, Berlin, pp. 63-89.
- [3.21.] **Riks E.**, *An incremental approach to the solution at snapping and buckling problems*. Int. J. Solids Struct. 15, pp. 529 - 551, 1979.
- [3.22] **Riks E.**, *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*. J. Appl. Mech., vol. 39, pp 1060 – 1066, 1972
- [3.23] **Risks E.**, *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*. Compl. Meths. Appl. Mech. Eng., vol. 47, pp 219 – 259, 1984
- [3.24] **Riks E.**, *Bifurcations and stability, a numerical aproach*. In Innovative Methods of Nonlinear Problems Proc. of WAM SYMP., New Orleans, 1984
- [3.25] **Riks E.**, *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*. Comp. Meths. In Appl. Mech. and Eng., vol. 47, pp 219 – 259, 1984
- [3.26.] **Simons F. J., Bergan G.F. and Nygard K.M.**, *Hyperplane displacement central methods in nonlinear analysis*. Lin K.W. et al (eds) Proc. Int. Conf. in Innovative Methods for Nonlinear Problems, Pineridge Press Swansea, pp. 345 - 364, 1984.
- [3.27.] **Wempner A. G.**, *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids*. J. Solids Struct., pp. 1581-1599, 1971.

CAPITOLUL 4

ANALIZA NUMERICĂ A STABILITĂȚII ECHILIBRULUI CUPOLELOR METALICE SIMPLU STRAT



4. ANALIZA NUMERICĂ A STABILITĂȚII ECHILIBRULUI CUPOLELOR METALICE SIMPLU STRAT

4.1 Probleme generale

4.1.1 Dificultăți în determinarea încărcării de colaps

Determinarea încărcării sub care o structură spațială cedează, datorită pierderii stabilității, rămâne încă una din cele mai dificile probleme din mecanica structurilor.

Dificultățile cresc la plăcile curbe reticulate deoarece atât flambajul elementelor cât și al plăcii curbe sunt incluse în determinarea colapsului.

Plăcile curbe reticulate prezintă anumite particularități în comparație cu plăcile curbe solide.

Astfel, având unghiuri mici între elementele structurale, scurtările axiale sunt considerabil mai mari față de alte structuri și în consecință apar modificări importante în geometria inițială. De aceea analiza neliniară este indispensabilă.

Mai multe moduri de instabilitate pot produce colapsul: flambajul elementelor, instabilitatea nodului, instabilitatea de linie sau de inel și instabilitatea generală, apariția lor depinzând de parametrii plăcii.

(I) Primul mod de instabilitate se referă la **instabilitatea de bară**, care intervine atunci când o bară din structură flambează, iar celelalte bare nu sunt afectate. Acest tip de instabilitate reprezintă modul cel mai simplu de pierdere a stabilității și a fost studiat de foarte mulți cercetători [4.19, 4.24, 4.76, 4.84, 4.4.88].

Încărcarea critică pentru o bară cu lungimea l și secțiune prismatică, supusă la compresiune uniformă se scrie în general astfel :

$$P_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 E_e I}{l^2}, \quad \alpha = \alpha(c_i, c_j, w_e, e, m) \quad (4.1)$$

în care:

- E_e este modulul efectiv de elasticitate (coincide cu modulul de elasticitate longitudinal pentru un material elastic),
- I este momentul de inerție al secțiunii transversale în direcția respectivă,

- coeficienții c_i și c_j reprezintă rigiditățile la rotire ale nodurilor i și j de la extremitățile barei,
- w_e imperfecțiunea inițială a barei la mijlocul ei,
- e excentricitatea forței de compresiune P ,
- m conține efectul forței tăietoare și al momentelor de torsiune de la extremitățile barei.

Tensiunea critică în domeniul elastic se calculează cu relația

$$\sigma_{cr} = \alpha \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.2)$$

în care

- $\lambda = \frac{l}{r}$ este zveltețea barei,
- r raza de girație a secțiunii transversale
- A aria secțiunii transversale.
- $\alpha = 1$ pentru barele dublu articulate la extremități și
- $\alpha = 4$ pentru barele încastrate în nod

Văloarea practică, care se consideră în proiectare, pentru α variază între 1,5 și 2,5.

Pentru bara din structura reticulată este mai corect să se determine încărcarea critică ținând seamă de prinderea barei în noduri și de influența celorlalte bare din rețea.

Ueki și alții [4.91,4.92] au determinat tensiunile de cedare pentru barele din material elasto-plastic ale unei cupole reticulate simplu strat, folosind simularea numerică. Tensiunile de cedare, raportate la limita de curgere, se prezintă în funcție de coeficientul de zveltețe normalizat în figura 4.1 b, considerând barele prinse articulat în nodurile interioare și cupola articulată în nodurile de reazem, respectiv simplu rezemată pe contur (mai puțin în colțuri). S-au reprezentat curbele corespunzătoare flambajului liniar (LB), formulei lui Dunkerly modificate (MDF) și formulei modificate a lui Dunkerly cu coeficienți de siguranță (SMDF).

Formula lui Dunkerly modificată are forma

$$\text{MDF} \quad \lambda^2 \frac{N_{cr}}{N_y} + \left(\frac{N_{cr}}{N_y} \right)^2 = 1 \quad (4.3)$$

și formula lui Dunkerly modificată cu coeficienți de siguranță

$$\text{SMDF} \quad \lambda^2 S_e \frac{N_{cr}}{N_y} + \left(\frac{S_p N_{cr}}{N_y} \right)^2 = 1 \quad (4.4)$$

$$\text{cu} \quad \lambda = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}^{lim}}} \quad (4.5)$$

Ca factori de siguranță au fost considerați $S_e = 2,3$ pentru instabilitate și $S_p = 1,55$ pentru colapsul plastic. Rezultatele obținute pentru nodurile de reazem articulate sunt cuprinse între SMDF și MDF, iar pentru cele simplu rezemate între MDF și LB.

(II) **Instabilitatea de nod** intervine când toate barele legate într-un nod își pierd stabilitatea la aceeași încărcare.

Modelul cu 12 bare a fost studiat de mai mulți cercetători [4.5, 4.6, 4.8, 4.9, 4.11, 4.18, 4.21, 4.23, 4.65, 4.67, 4.68, 4.69, 4.78], la fel cupola cu 24 de bare de cercetătorii [4.2, 4.15, 4.16, 4.28, 4.30, 4.31, 4.55, 4.57, 4.74, 4.76].

Încărcarea exterioară a fost aplicată prima dată sub forma unei singure forțe concentrate în nodul central, apoi ca o forță concentrată P_c în nodul central împreună cu forțe egale în celelalte noduri, iar în ultima variantă sub forma unor forțe egale în toate nodurile cupolei.

Gioncu [4.24] prezintă variația încărcării din nodul central P_c în funcție de mărimea forței P din restul nodurilor (Fig. 4.1).

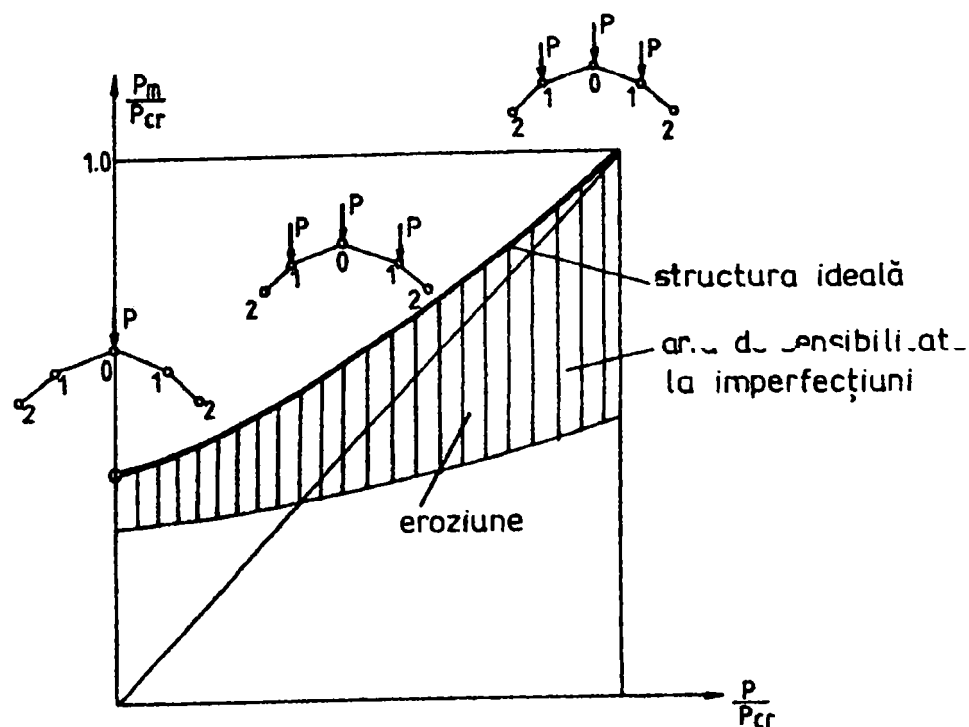


Fig. 4.1 Curbe de interacțiune

Se remarcă faptul că cea mai mare încărcare critică se obține când pe cupolă se aplică forțe egale în toate nodurile. Creșterea forței din nodul central P_c față de restul forțelor reduce încărcarea de flambaj.

(III) **Instabilitatea prin torsiune a nodului** (Fig. 4.2) apare când mărimea nodului este mare și rigiditatea la încovoiere este redusă.

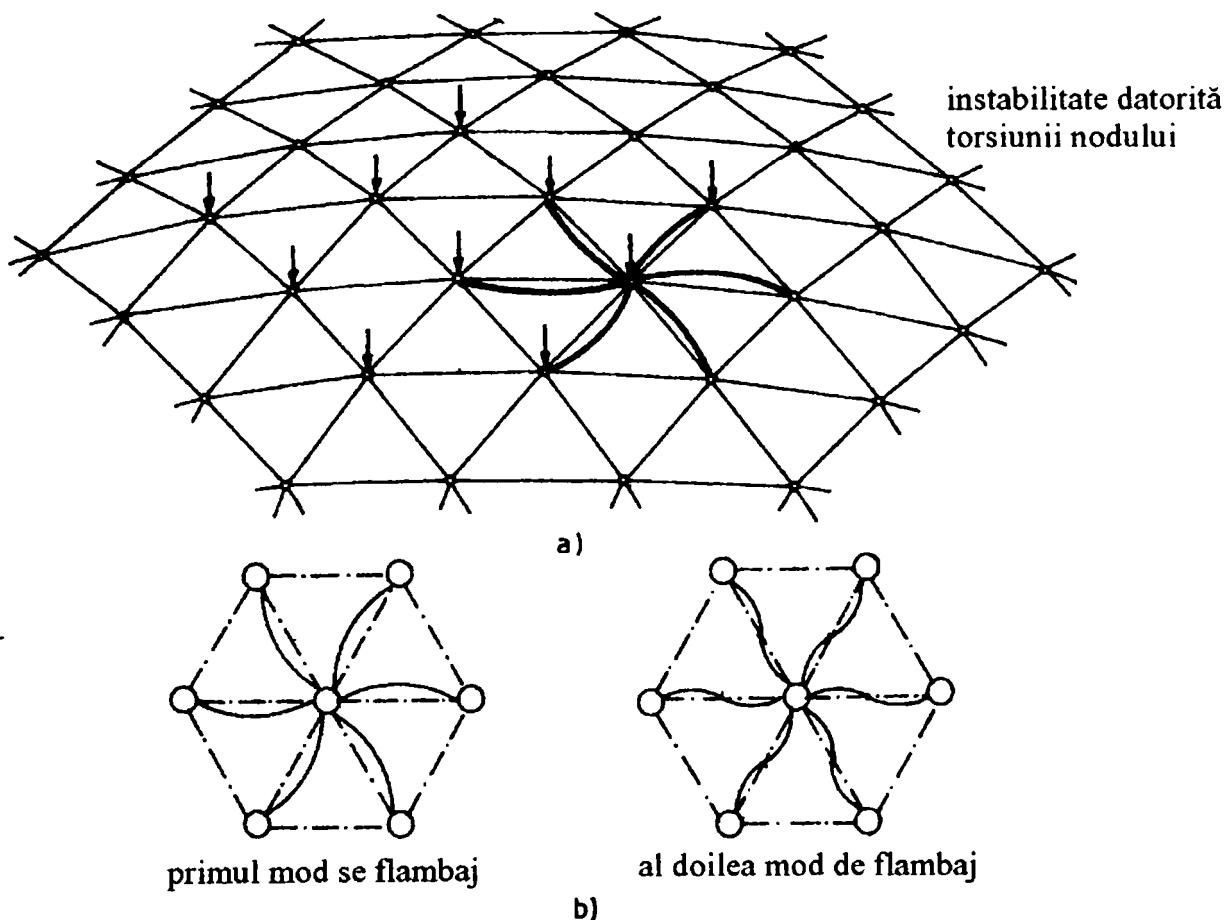


Fig. 4.2 Instabilitate prin torsiunea nodului

Acest mod de instabilitate intervine la plăcile curbe reticulate metalice sau la cele din lemn cu gusee verticale, cum sunt cele studiate în lucrările [4.72, 4.73, 4.83].

(IV) **Instabilitatea de inel (linie)** apare atunci când toate nodurile unui inel (sau generatoare) și barele conectate în ele sunt implicate în pierderea stabilității. Acest fenomen a fost studiat pentru o cupolă (Fig. 4.3) de Stuzuki [4.82], iar pentru acoperișurile cilindrice de Gioncu și alții [4.18].

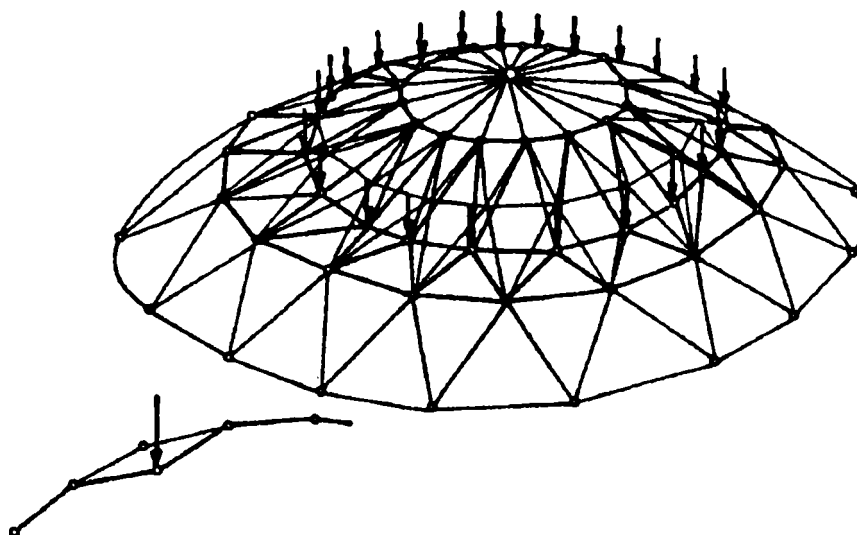


Fig. 4.3 Instabilitate de inel

Concluziile ce se desprind sunt similare cu cele stabilite la instabilitatea de nod. Instabilitatea prin torsiunea nodului este mai periculoasă, deoarece dispare efectul favorabil al barelor orizontale și stabilizarea instabilității de nod prin saltul echilibrului.

(V) **Instabilitatea generală** se produce atunci când toate nodurile și barele unei zone mari din suprafața plăcii curbe sunt implicate în fenomenul de instabilitate (Fig. 4.4)

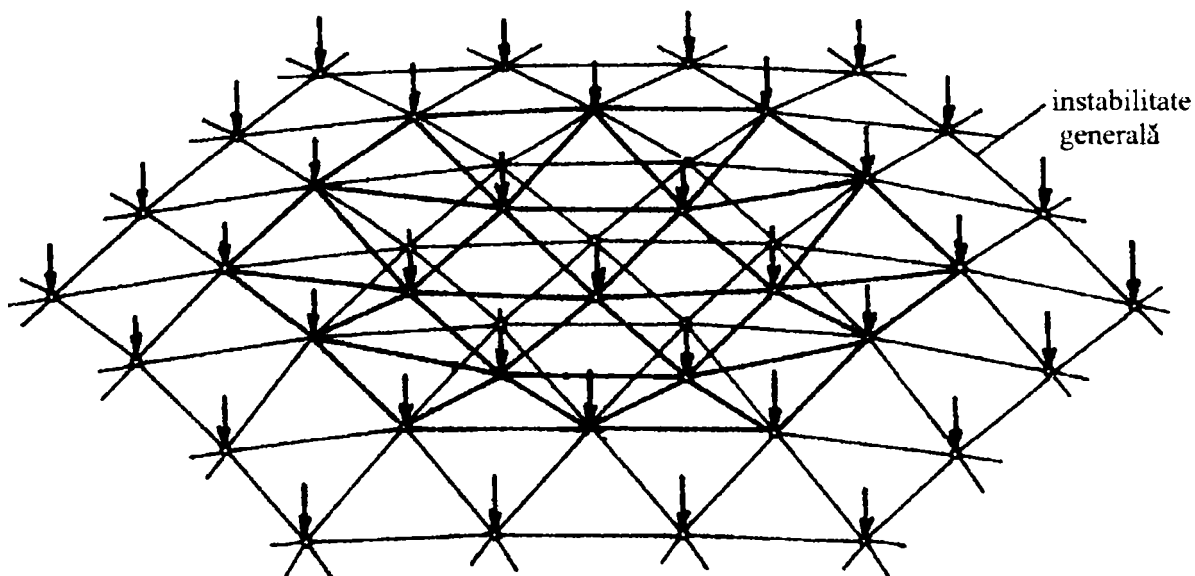


Fig. 4.4 Instabilitate generală

Fenomenul se produce atunci când lungimea undei de flambaj este semnificativ mai mare decât lungimea barelor.

(VI) Cuplarea a două moduri poate apare când încărcările critice sunt de valori apropiate (Fig. 4.5). În acest caz structura devine foarte sensibilă la imperfecțiuni geometrice și încărcarea critică poate descrește dramatic. Este una din cele mai periculoase comportări de instabilitate care pot apare în domeniul structurilor.

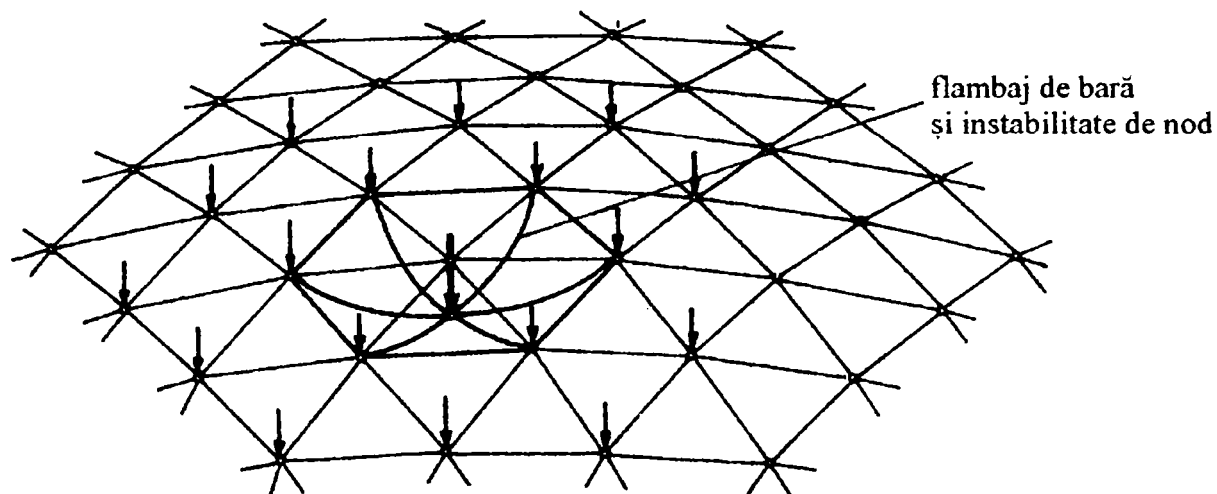


Fig. 4.5 Instabilități cuplate

Interacțiunea dintre flambajul de bară și instabilitatea de nod are o importanță deosebită [4.23]. Această interacțiune produce creșterea neliniarității fenomenului (Fig. 4.6 a) și reduce încărcarea din instabilitatea de nod (Fig. 4.6 b).

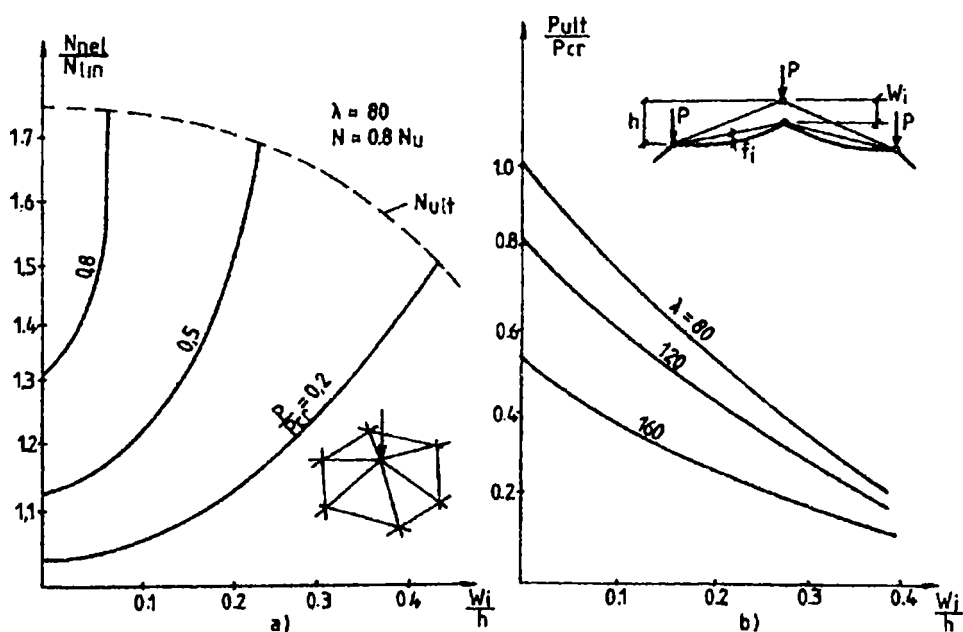


Fig. 4.6 Efectele instabilităților cuplate ale nodului și barei

Gioncu [4.25, 4.26] a propus o clasificare a clasei de interacțiune în cazul interacțiunilor cuplate: interacțiune slabă dacă reducerea încărcării critice este mai mică de 10 %, interacțiune moderată dacă reducerea încărcării critice este mai mică de 30 %, interacțiune puternică când reducerea încărcării este mai mică de 50 % și interacțiune foarte puternică când reducerea încărcării critice este mai mare de 50 %. Gioncu [4.18] și Pagano au propus pentru interacțiunea între instabilitatea de bară și de nod o relație liniară.

(VII) Relații de **interacțiune între instabilitatea de bară și instabilitatea generală** nu au fost stabilite după cunoștințele autorului.

Interacțiunea între diferitele moduri de instabilitate la plăcile curbe reticulate pare să constituie un fenomen foarte periculos. Toader și Gioncu [4.90] precizează că încărcarea critică a nodului sau pentru instabilitatea generală să fie de 4÷5 ori mai mare ca încărcarea critică pentru bară. În acest caz reducerea încărcării din interacțiunea modului de instabilitate nu depășește 20 – 25 %.

Instabilitatea plăcilor curbe reticulate se produce brusc fără semne vizibile, care să anunțe catastrofa. În cazul plăcilor curbe reticulate flambajul unei bare sau al unui nod, care apare brusc, poate propaga instabilitatea pe o arie mare datorită forțelor de inerție. În particular acest fenomen este foarte important pentru plăcile curbe reticulate cu curbura pozitivă.

Deși încărcarea permanentă este foarte mică, încărcarea din vânt și încărcarea din zăpadă, cu efecte locale și nesimetrice, sunt încărcările principale la plăcile curbe reticulate. Pentru acest tip de încărcări este foarte greu să precizăm intensitatea și distribuția lor. Efectul încărcărilor mai puțin cunoscute și verificabile este cel mai important, deoarece reprezintă un mare pericol pentru o bună comportare în condiții extreme de încărcare.

(VIII) Kani [4.55] a studiat **influența modului de încărcare** simetric și nesimetric asupra încărcării de flambaj. Pe o cupolă cu 72 de bare a aplicat întâi o încărcare uniformă P în toate nodurile interioare, apoi o altă schemă de încărcare cu forțe egale pe o jumătate de cupolă, respectiv forțe mai mari $2P$ și $1,5 P$ pe cealaltă jumătate a cupolei. Rezultatele se prezintă în figura 4.7.

Încărcarea critică în cazul forțelor neuniforme este mai mică cu 16 % decât cea obținută din forțe uniform aplicate.

Efectul forței distribuite asupra încărcării critice a cupolei a fost analizat de Ueki și alții [4.91]. Pe cupolă s-au aplicat trei tipuri de încărcări: primul tip a fost o forță uniform distribuită pe toată suprafața cupolei, cel de al doilea tip a fost cu o forță uniform distribuită mai mare pe jumătate din suprafața cupolei, iar cel de al treilea tip corespunde unei încărcări majorate în nodul central.

Rezultatele se prezintă în figura 4.8.

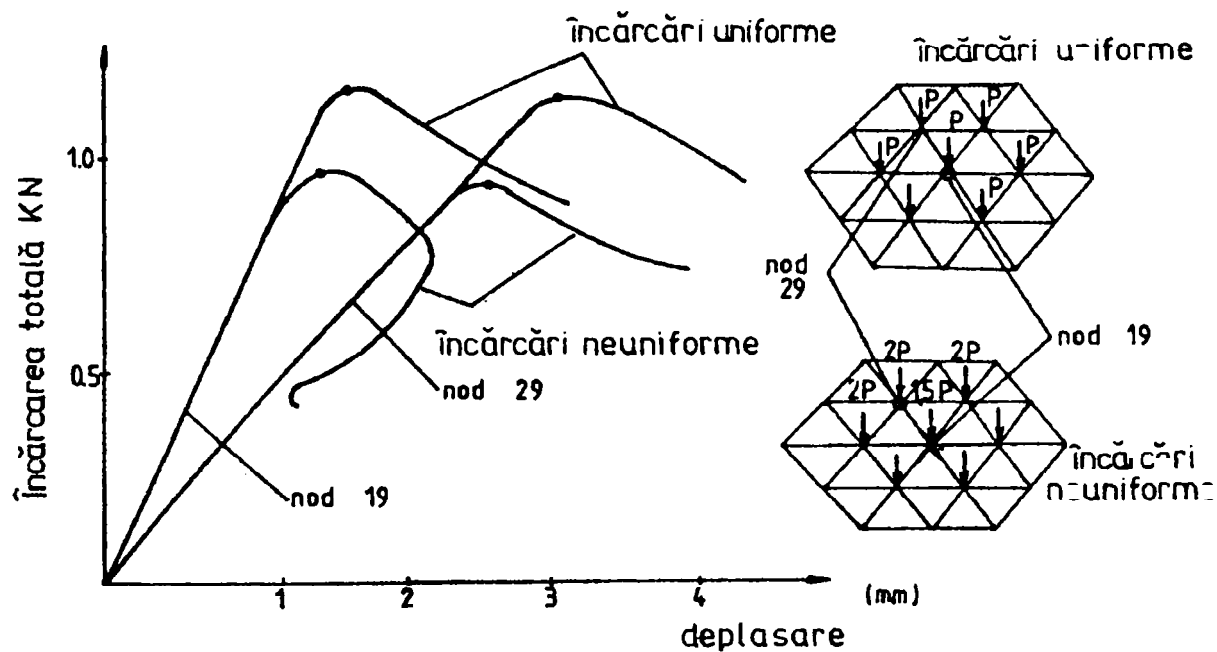


Fig. 4.7 Efectele încărcărilor neuniforme

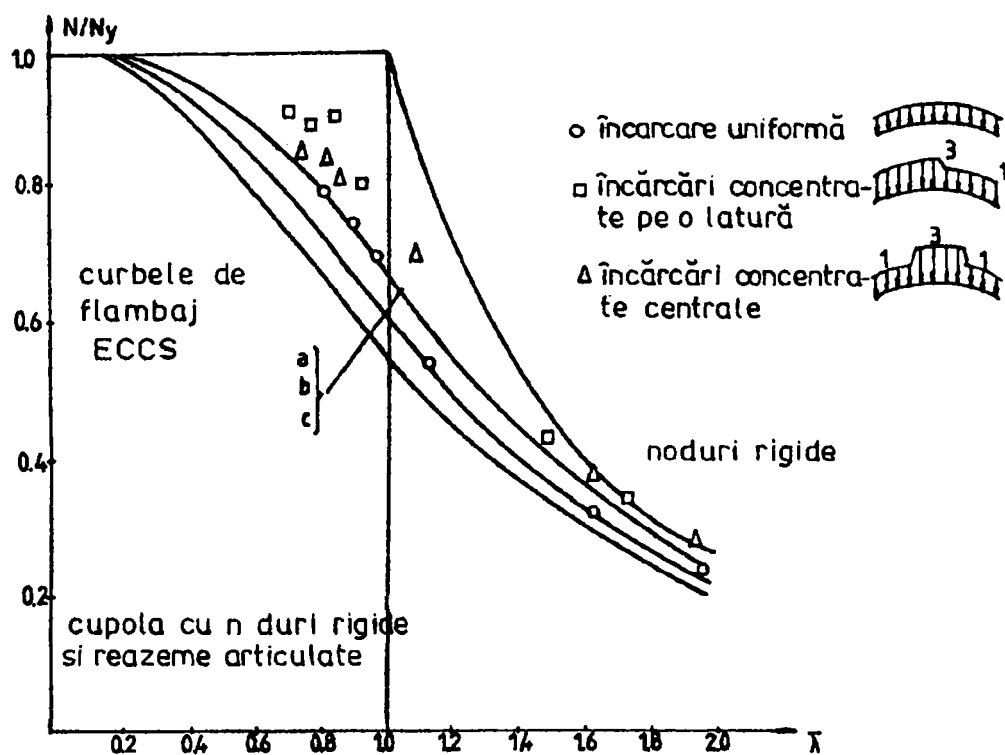


Fig. 4.8 Reprezentare comparativă a diferitelor moduri de încărcare

Se observă că încărcările critice pentru flambajul barei din încărcarea neuniformă sunt puțin mai mari decât cele din încărcarea uniformă.

În figura 4.9 se prezintă variația încărcării critice în funcție de coeficientul de zveltețe $\bar{\lambda}$ pentru două tipuri de încărcări aplicate, uniform distribuite pe toată suprafața sau distribuite numai în zona centrală și pentru două moduri de rezemare a structurii, articulată respectiv simplu rezemată. Se observă că încărcarea critică este mai mare în cazul simplei rezemări decât în cazul nodurilor de reazem articulate, indiferent de modul în care se aplică încărcarea pe cupolă. Încărcările de flambaj cele mai mici se obțin dacă se aplică încărcarea distribuită în zona centrală și nodurile de reazem sunt articulate. Valorile acestor încărcări sunt sub valorile prevăzute de curbele ECCS chiar fără a considera efectul imperfecțiunilor.

Deci curbele de flambaj ECCS nu acoperă influența încărcărilor neuniforme și a condițiilor de margine.

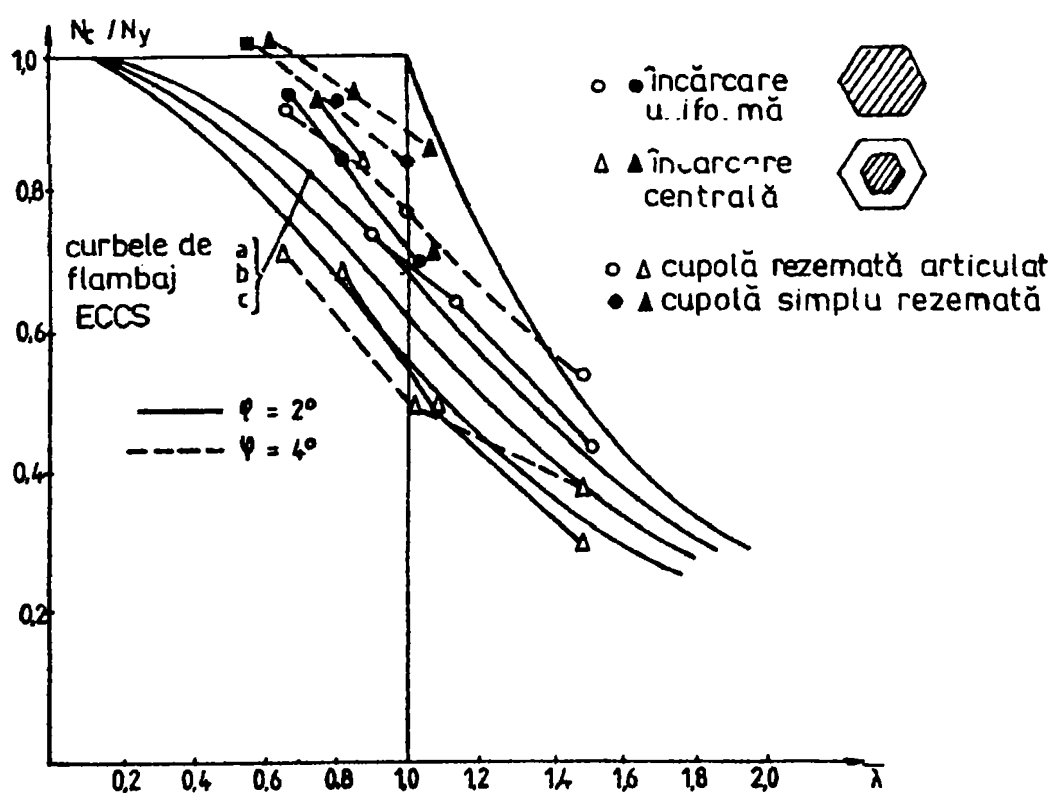


Fig. 4.9 Efectul încărcărilor distribuite

Comportarea plăcilor curbe reticulate, în special la flambaj, este influențată de sistemul nodurilor. Elementele pot fi considerate cu noduri articulate, parțial încastrate sau cu noduri rigide, aceste posibilități depinzând de rigiditatea conectorilor nodali.

(IX) Rigiditatea nodurilor are o influență mare asupra comportării plăcilor curbe reticulate. În figura 4.10 se prezintă curba încărcare – deplasare pentru nodul articulată și încastrat la structura perfectă și imperfectă. O determinare corectă a încărcării de flambaj nu poate fi făcută fără cunoașterea acestor rigidități

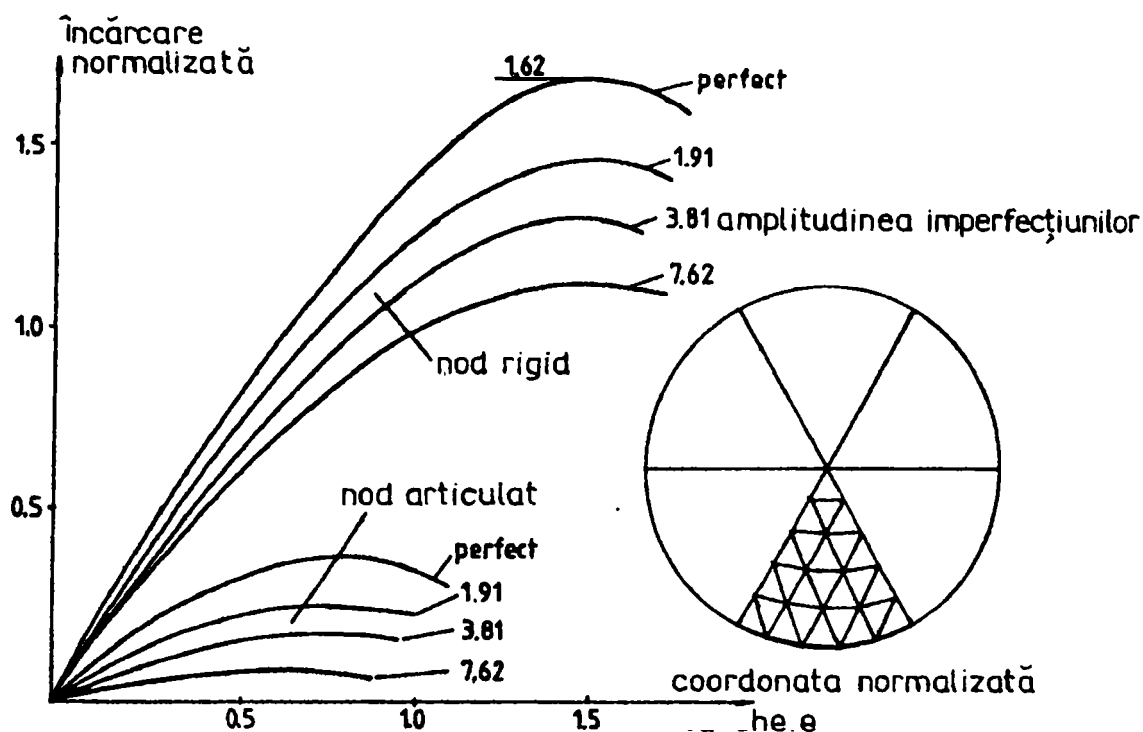


Fig. 4.10 Variația încărcărilor critice în funcție de tipul nodului

Dacă nodurile sunt încastrate rezultă încărcări critice mai mari decât atunci când nodurile sunt articulate.

Nodurile structurilor reticulate reale sunt semirigide. Cercetările actuale sunt concentrate asupra studierii influenței semirigidității nodurilor, deoarece sunt puține rezultatele obținute pentru acest tip de noduri. În figura 4.11 se prezintă comparativ rezultatele obținute pentru modelul cu 6 bare. Prinderea barelor în nodul central s-a considerat prima dată încastrată, apoi articulată, respectiv semirigidă în sistemul MERO.

Cele mai mici încărcări se obțin în ipoteza nodului articulată. Acestea ar trebui acceptate în proiectare atunci când nu se cunosc caracteristicile de semirigiditate ale nodului.

See [4.79] și Fathelbab [4.15] au cercetat influența neuniformității rigidității nodului datorită variației gradului de strângere al barelor dintr-un nod de tip MERO (Fig. 4.12). Variația neuniformității rigidității poate iniția cedarea structurii și de aceea constituie o imperfecțiune care poate fi mai importantă chiar decât imperfecțiunile geometrice.

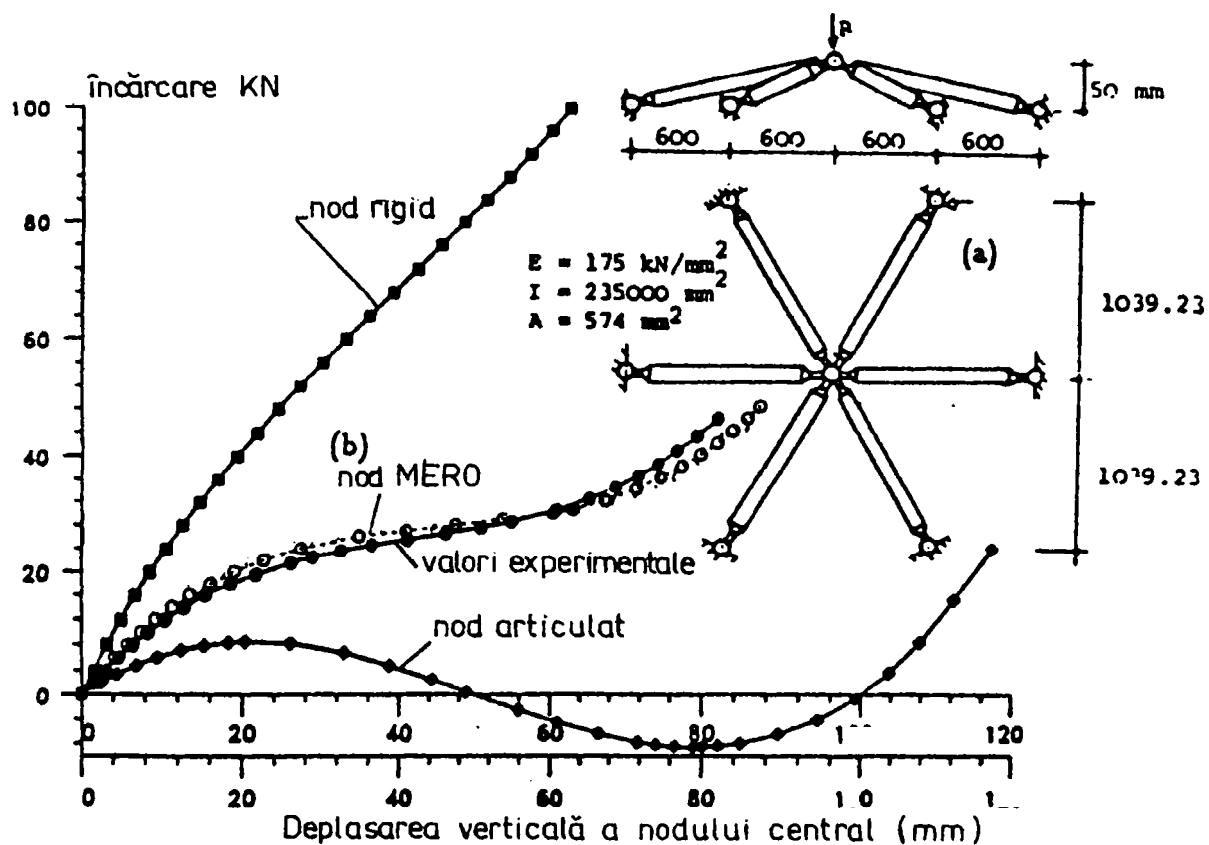


Fig. 4.11 Efectul rigidității nodului

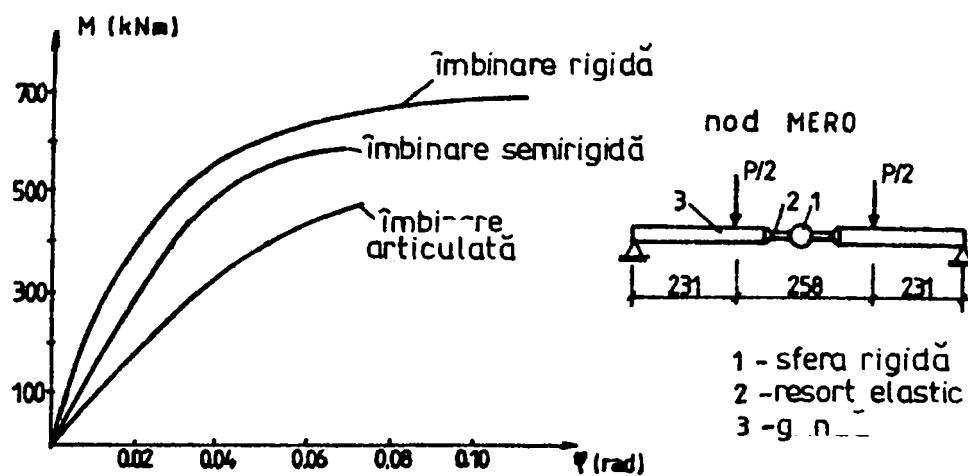


Fig. 4.12 Efectul neuniformității rigidității nodului

În prezent se depun eforturi pentru determinarea pe cale experimentală a unor relații între forța axială și deformațiile axiale, respectiv între momentele încovoietoare și rotirile corespunzătoare, pentru diferite tipuri de noduri semirigide, introducerea acestor relații în

programele de calcul. Cercetări în acest domeniu au fost efectuate la Universitatea din Cambridge de către See [4.79] și Fathelbab [4.13, 4.14, 4.15]. Alți cercetători cu preocupări în acest domeniu sunt Ueki și alții [4.92], Shibata și alții [4.80], Fujimoto și alții [4.17].

În figura 4.13 se prezintă rezultatele analitice și experimentale obținute pentru o cupolă rezemată pe un contur hexagonal executată cu noduri MERO.

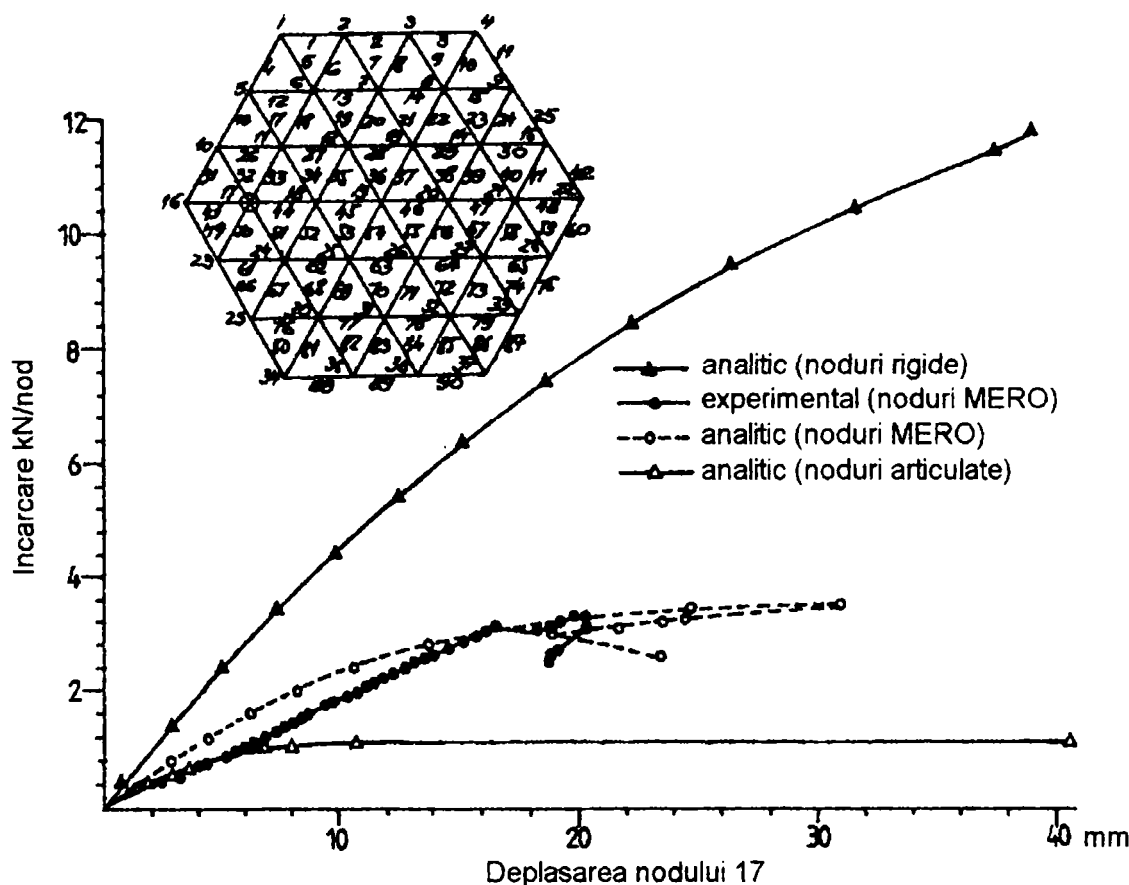


Fig. 4.13 Efectul rigidității nodului asupra instabilității generale

Se observă că încărcarea de limitare cea mai mare se obține pentru nodurile încastrate și cea mai mică pentru nodurile articulate. Nodurile de tip MERO se pot considera semirigide cu comportare neliniară.

Fiecare tip de îmbinare are o comportare particulară, care poate fi determinată prin experiențe pe nod la scară reală.

(X) **Densitatea nodurilor** are influență asupra instabilității plăcilor curbe reticulate. Proiectantul trebuie să știe dacă alege o rețea rară sau una deasă (Fig. 4.14). La o rețea rară prima dată intervine instabilitatea de bară, iar la o rețea densă instabilitatea generală este mai defavorabilă. Raportul între săgeata f și pasul rețelei este parametrul principal care definește rigiditatea rețelei și încărcarea critică. La o rețea rară raportul f/a scade și rigiditatea se reduce. Relațiile pentru calculul încărcării critice pentru rețele simple și rețele duble sunt:

$$P_{cr,s} = \frac{k_s}{4\sqrt{3}} \frac{EA\varphi}{R^2} \quad (4.6)$$

$$P_{cr,d} = \frac{k_d}{8\sqrt{3}} \frac{EA\varphi}{R^2} \quad (4.7)$$

în care k_s și k_d sunt coeficienții de rigiditate ai rețelei înconjurătoare, raportați la rigiditatea unei celule. Se poate observa că încărcarea critică în cazul rețelei simple este mai mare decât încărcarea critică pentru placa curbă cu rețea dublă. Deși concluzia este neobișnuită, adăugarea de materialul prin dublarea rețelei crește instabilitatea plăcii curbe și încărcarea critică scade.

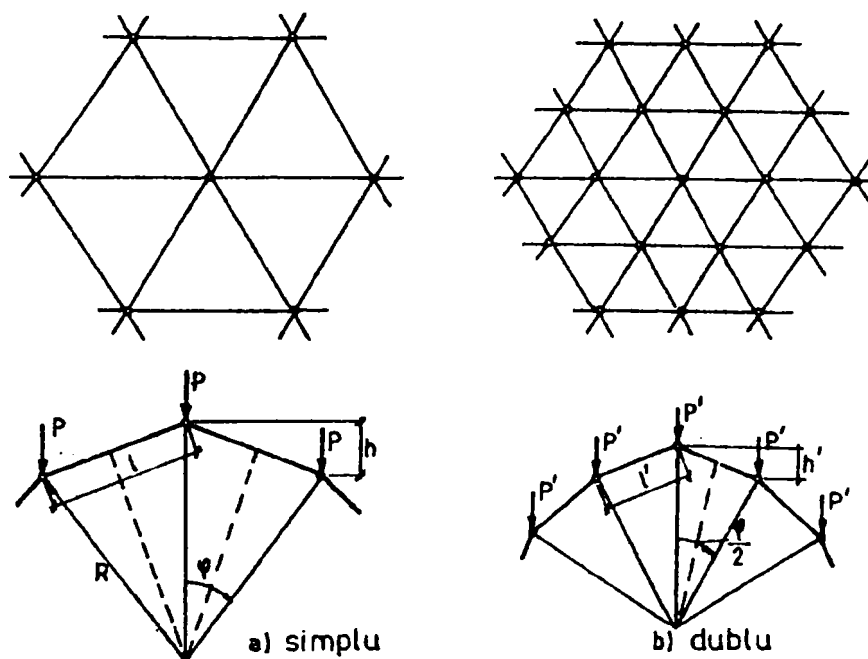


Fig. 4.14 Rețea simplă și dublă pentru o placă reticulată

Prin natura lor structurile reale sunt afectate de imperfecțiuni.

(XI) Unele din cele mai importante **imperfecțiuni structurale** sunt devierile nodurilor de la geometria teoretică datorită prelucrărilor manuale sau/și montajului cu deficiențe. Acestea pot produce o “aplatizare” într-o anumită zonă a plăcii

Un alt tip de imperfecțiuni sunt cele de element . Acestea au o influență directă asupra flambajului de element. Aceste imperfecțiuni produc o scădere a rigidității axiale a elementelor crescând caracterul neliniar al comportării lor (Fig. 4.15). Acest efect nefavorabil influențează

indirect apariția altor fenomene de instabilitate cum ar fi: instabilitatea de nod, de linie sau cea generală.

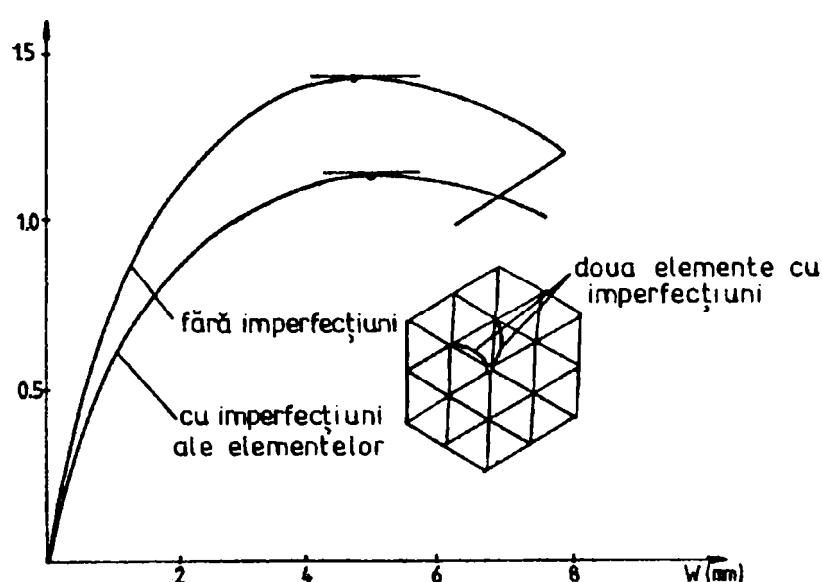


Fig. 4.15 Efectul imperfecțiunilor de bară asupra încărcării critice

Kato și alții [4.62] folosind aproximarea SMDF au studiat influența imperfecțiunilor pentru condițiile de rezemare articulată. Ca imperfecțiune s-au considerat imperfecțiunile geometrice de nod $w_1 = 0,2 t_e$, unde t_e este grosimea efectivă a plăcii curbe. Rezultatele se prezintă sub forma unui grafic σ_{cr} / σ_y în funcție de λ pentru bara perfectă și flambaj liniar, respectiv pentru barele din cupola imperfectă cu $\gamma = 0,55$ și $0,43$. Rezultatele pentru barele imperfecte se situează între curbele de flambaj liniar LB și curbele SMDF.

Se remarcă faptul că tensiunile de flambaj pot fi descrise de parametrul zvelteții λ (Fig. 4.16)

Imperfecțiunile geometrice în jos pe direcția verticală reduc încărcarea critică a cupolelor reticulate. Abedi și Parke [1.2] au studiat influența imperfecțiunilor geometrice ale nodului central pe direcția verticală înspre exterior și înspre interior cu diferite mărimi. Cupola are 91 de noduri, 120 de bare și este încărcată cu o forță concentrată în nodul central. Nodurile intermediare sunt încastrate, iar nodurile de reazem sunt articulate. Reducerea încărcării cu creșterea mărimii imperfecțiunilor din nodul central pentru modul de instabilitate simetric se prezintă în figura 4.17 iar în figura 4.18 pentru modul de instabilitate antisimetric.

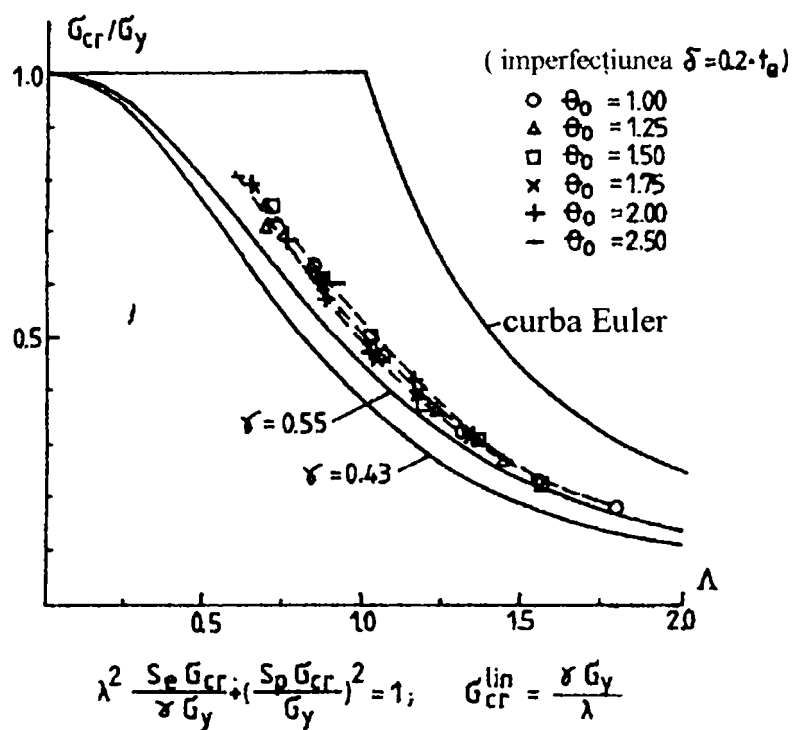


Fig. 4.16 Instabilitate de bară în prezența imperfecțiunilor geometrice ale nodurilor

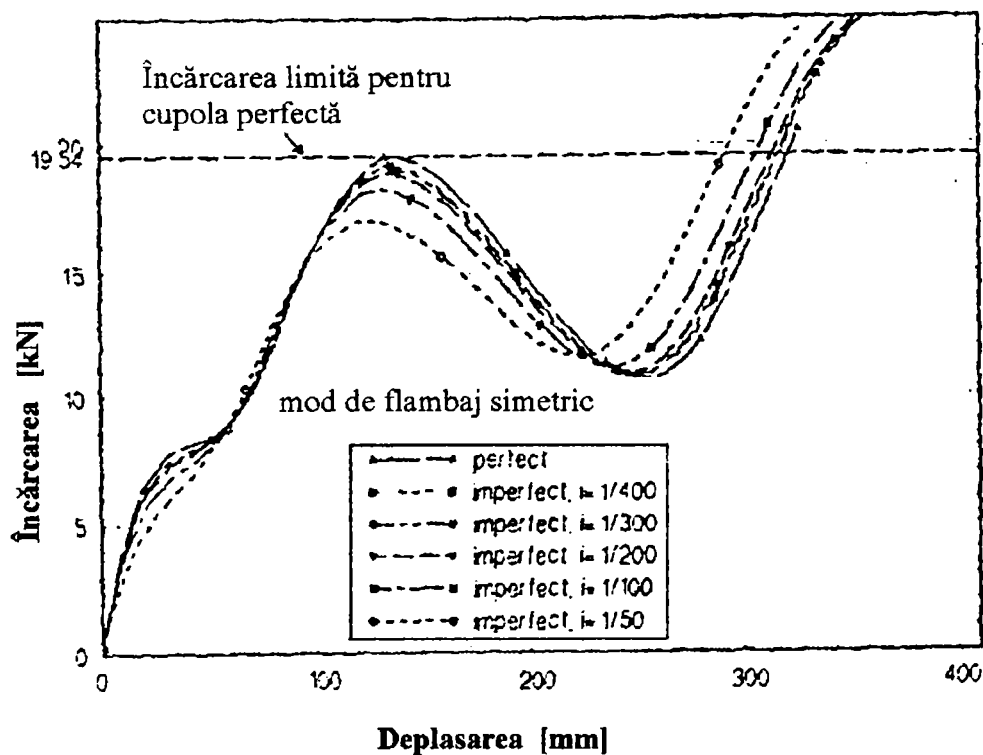


Fig.4.17 Influența imperfecțiunilor geometrice a ale nodurilor asupra încărcării critice în cazul flambajului simetric

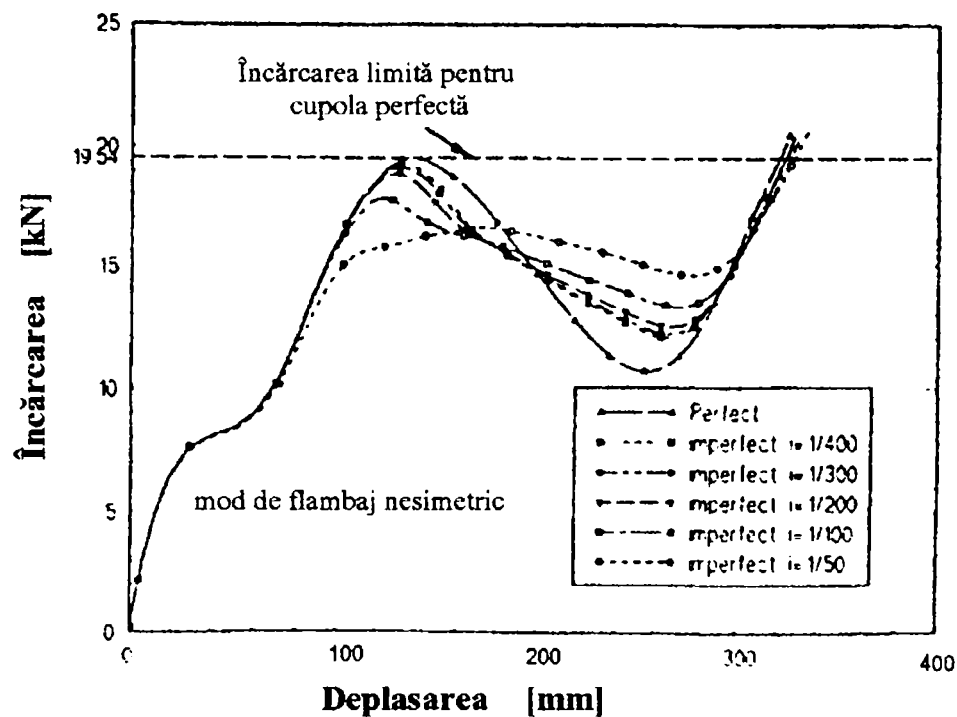


Fig. 4.18 Influența imperfecțiunilor geometrice a ale nodurilor asupra încărcării critice în cazul flambajului nesimetric

Se remarcă faptul că încărcarea de limitare pentru modul antisimetric, este mai mare decât încărcarea corespunzătoare modului simetric.

Influența imperfecțiunilor de bară asupra instabilității de nod a fost studiată de Gioncu și alții [4.18] pentru un acoperiș cilindric reticulat. În figura 4.19 se prezintă rezultatele cercetării. Se observă o reducere semnificativă a încărcării de bifurcare a nodului ca urmare a flambajului barei.

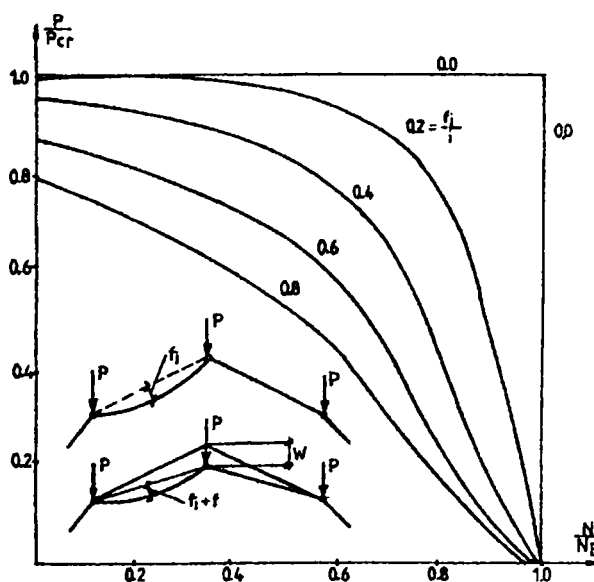


Fig.4.19 Fenomenul de cuplare în prezența imperfecțiunilor de bară

În figurile 4.20 și 4.21 se prezintă variația încărcării pentru cupola cu imperfecțiune de nod și imperfecțiune de bară obținute de Kato și alții [4.63], respectiv de Ueki și colaboratori [4.91]. Se observă că imperfecțiunile au o influență semnificativă.

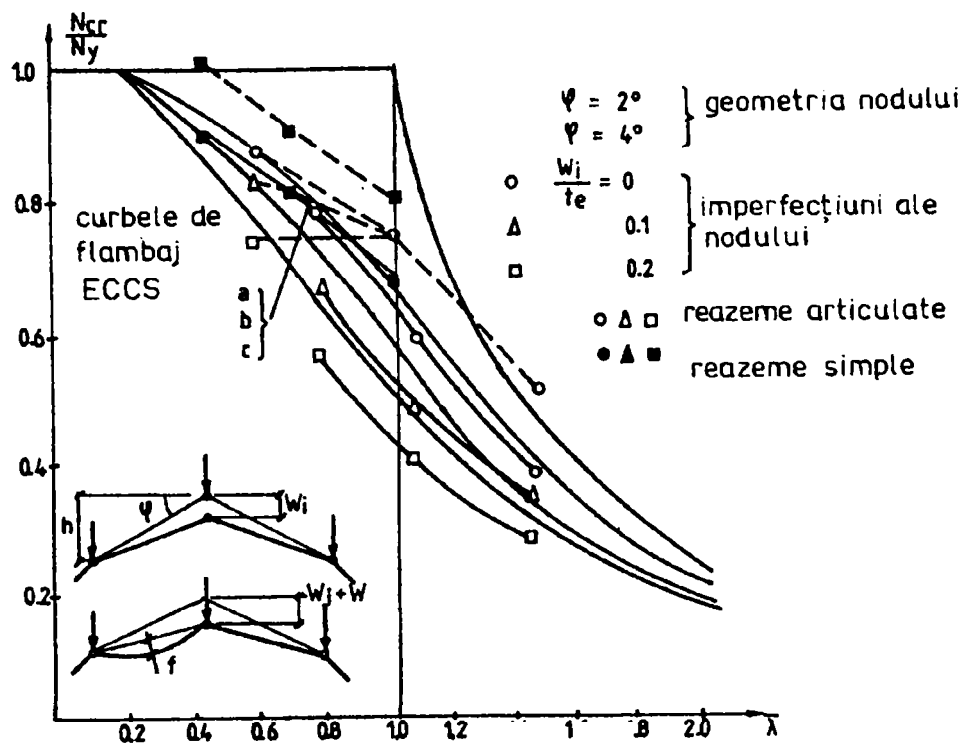


Fig. 4.20 Fenomenul de cuplare în prezența imperfecțiunilor de nod

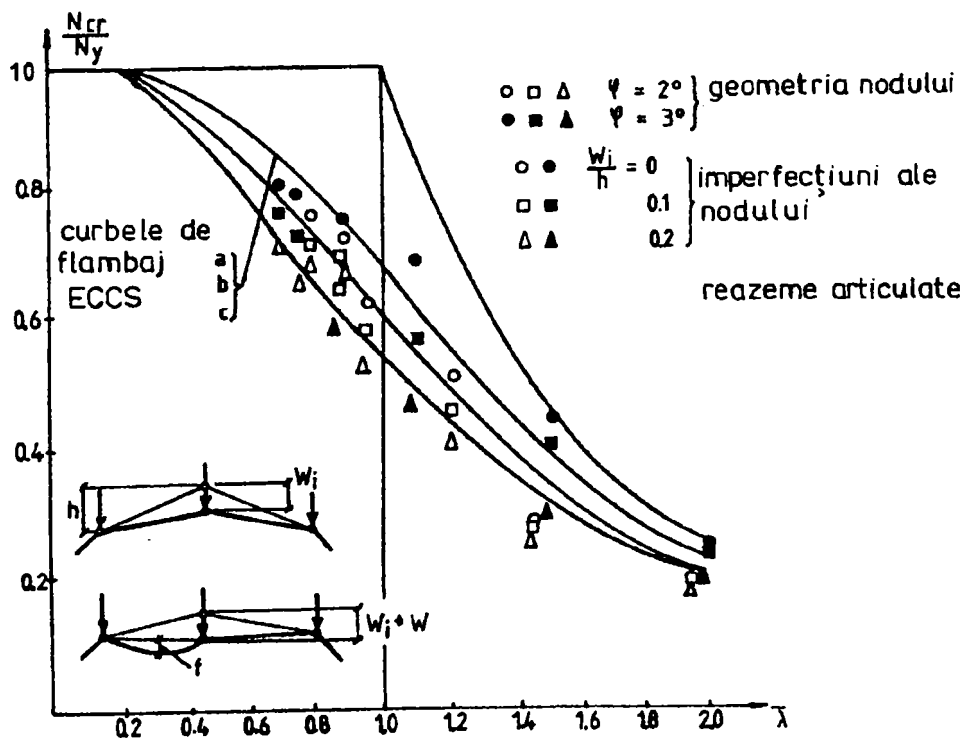


Fig. 4.21 Comparație între curbele de flambaj ECCS și rezultatele cercetărilor

Curbele de flambaj ECCS au fost reprezentate și ele în aceste figuri. Se constată că influența imperfecțiunilor de nod nu este acoperită de aceste curbe. De aceea se impun precizări speciale pentru a lua în considerare aceste imperfecțiuni.

(XI) **Influența deformațiilor plastice** asupra încărcărilor critice este cercetată mai puțin în literatura de specialitate. În ultimii ani s-a dezvoltat analiza comportării elasto-plastice folosind integrarea numerică și metoda elementului finit. Această abordare este folosită de Kani și Mc Connel [4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.60], S4.8uzuki și alții [4.86, 4.87, 4.85].

Curbele încărcare deplasare pentru diferite valori ale zvelteții [4.86] sau rigidității nodurilor [4.85] se prezintă în figura 4.22 pentru cupola cu 19 noduri și 72 de bare, încărcată cu o forță în nodul central. Triunghiul alb reprezintă încărcarea critică corespunzătoare atingerii limitei de curgere în fibra extremă, iar triunghiul negru corespunde încărcării maxime ce poate fi definită ca încărcare de flambaj. La zvelteți de bară mici încărcarea de flambaj este mare și posibilitatea pierderii stabilității prin “snap through” este mică. La zvelteți mari ale barelor apar fenomene de instabilitate locală care au tendința de a se propaga în întreaga structură.

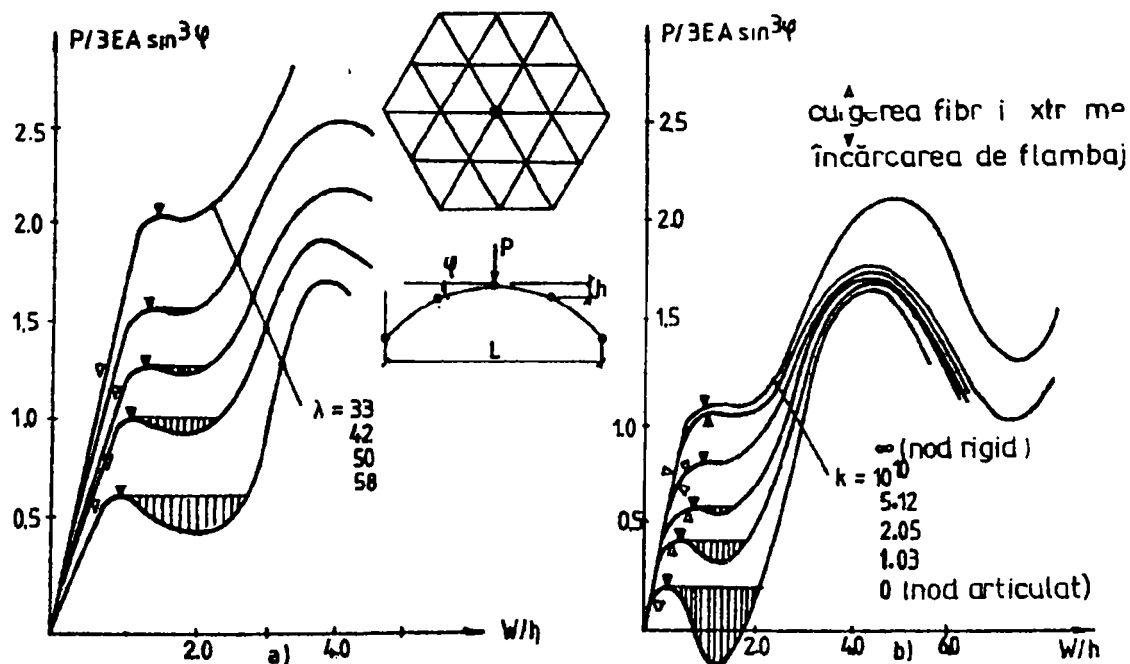


Fig. 4.22 Efectele deformațiilor plastice

Propagarea instabilității locale este un fenomen puternic în cazul nodurilor articulate și ajunge să dispară pentru nodurile încastrate.

Încercări experimentale pe modele la scară mică pentru verificarea stabilității plăcilor curbe sunt nerelevante. Motivul constă în faptul că nu pot fi modelate: dimensiunile elementelor, rigiditatea nodurilor, imperfecțiunile geometrice ale barelor și nodurilor. Confecționarea modelelor

și prinderea barelor în noduri introduce diferite tipuri de imperfecțiuni, care nu corespund cu cele reale.

Cercetări experimentale pe modele de plăci curbe se prezintă în lucrările [4.15, 4.17, 4.29, 4.30, 4.55, 4.65, 4.66, 4.70, 4.71, 4.77, 4.79, 4.80, 4.86, 4.93].

Pentru verificarea valabilității valorilor teoretice se recomandă deci încercarea unor modele experimentale la o scară cât mai apropiată de cea reală.

4.1.2 Calculul neliniar și stabilitatea plăcilor curbe reticulate

Analiza liniară este folosită pentru majoritatea structurilor de construcții. Dar există structuri care au rigiditatea descrescătoare cu creșterea încărcării. Pentru acestea analiza liniară nu este sigură.

Plăcile curbe reticulate (în special cele simplu strat) prezintă o foarte importantă comportare neliniară cu considerabile scăderi de rigiditate. Luarea în considerare a modificărilor geometrice în analiza stabilității unei cupole simplu strat nu este un lux ci o necesitate, impusă de natura rezolvării instabilității.

Sursele de modificare a geometriei structurii sunt:

- scurtarea elementelor dată de forța axială (Fig. 4.23 a)
- modificarea lungimii elementelor datorită încovoierii (Fig. 4.23 b), când imperfecțiunile geometrice joacă un rol important;
- rotația nodurilor datorită sistemului de prindere (Fig. 4.23 c);
- scurtarea lungimii elementelor datorită sistemului de prindere (Fig. 4.23 d);
- modificarea rigidității elementelor din cauza proprietăților neliniare ale materialului.

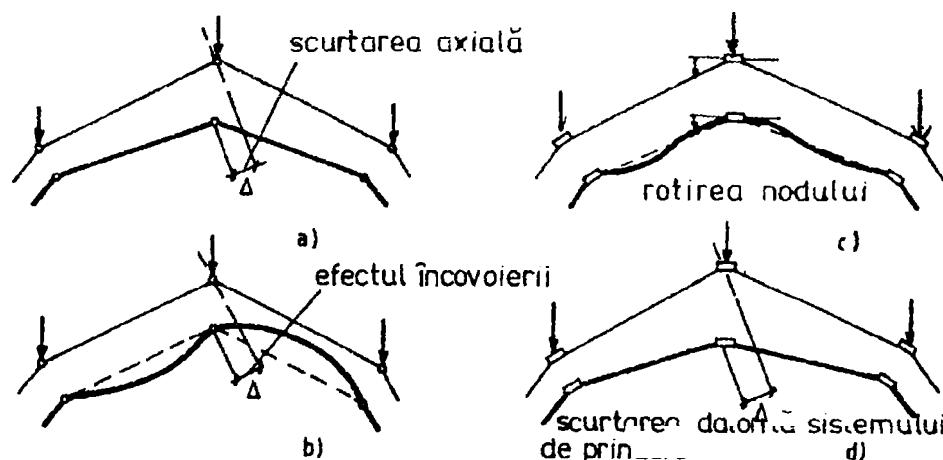


Fig. 4.23 Cauzele modificării geometriei structurii

Primele patru aspecte se referă la neliniarități geometrice, în timp ce ultima este neliniaritate de material.

O analiză corectă a flambajului este posibilă numai prin considerarea ambelor neliniarități, dar această analiză este foarte scumpă.

Pentru o placă curbă simplu strat influența neliniarității geometrice este mult mai puternică decât influența neliniarității de material.

Pentru cea dublu strat plană neliniaritatea de material este mai importantă decât cea geometrică. În cazul plăcilor curbe dublu strat trebuie considerate ambele neliniarități (Fig. 4.24).

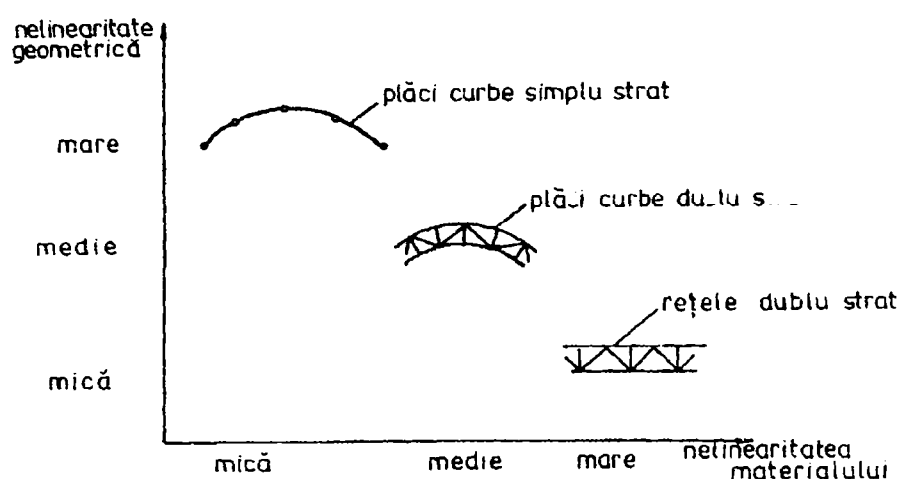


Fig. 4.24 Influența neliniarității geometrice și de material asupra comportării diferitelor plăci reticulate

La plăcile curbe simplu strat considerarea neliniarității geometrice este obligatorie.

Efectul neliniarității geometrice și de material depinde de deschiderea plăcii curbe (Fig. 4.25).

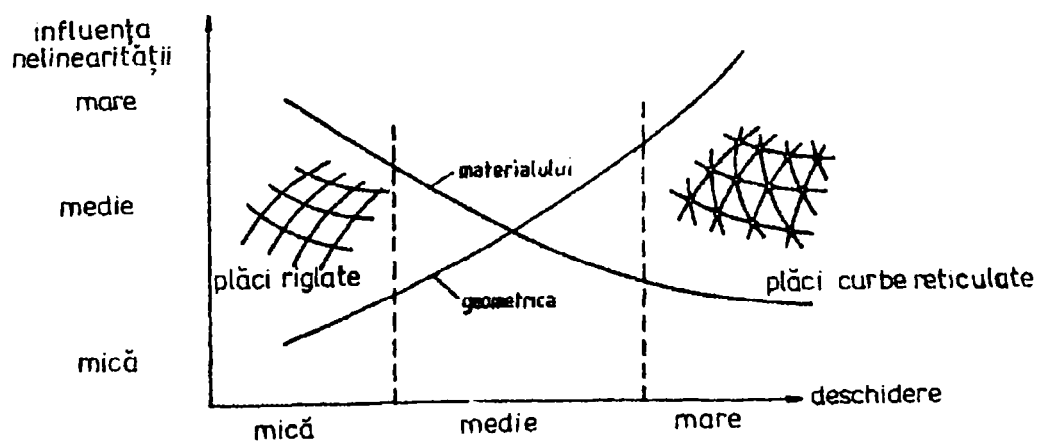


Fig. 4.25 Variația influenței neliniarităților geometrice și de material asupra comportării plăcilor reticulate în funcție de deschiderea acestora

Pentru deschideri mari neliniaritatea geometrică este uzual mai importantă decât neliniaritatea de material. Invers se întâmplă pentru deschideri mici care sunt specifice plăcilor plane. Pentru deschideri medii trebuie considerate ambele efecte.

Diferența între analiza liniară și cea neliniară pentru cupolele reticulate în funcție de parametrul S este ilustrată în figura 4.26.

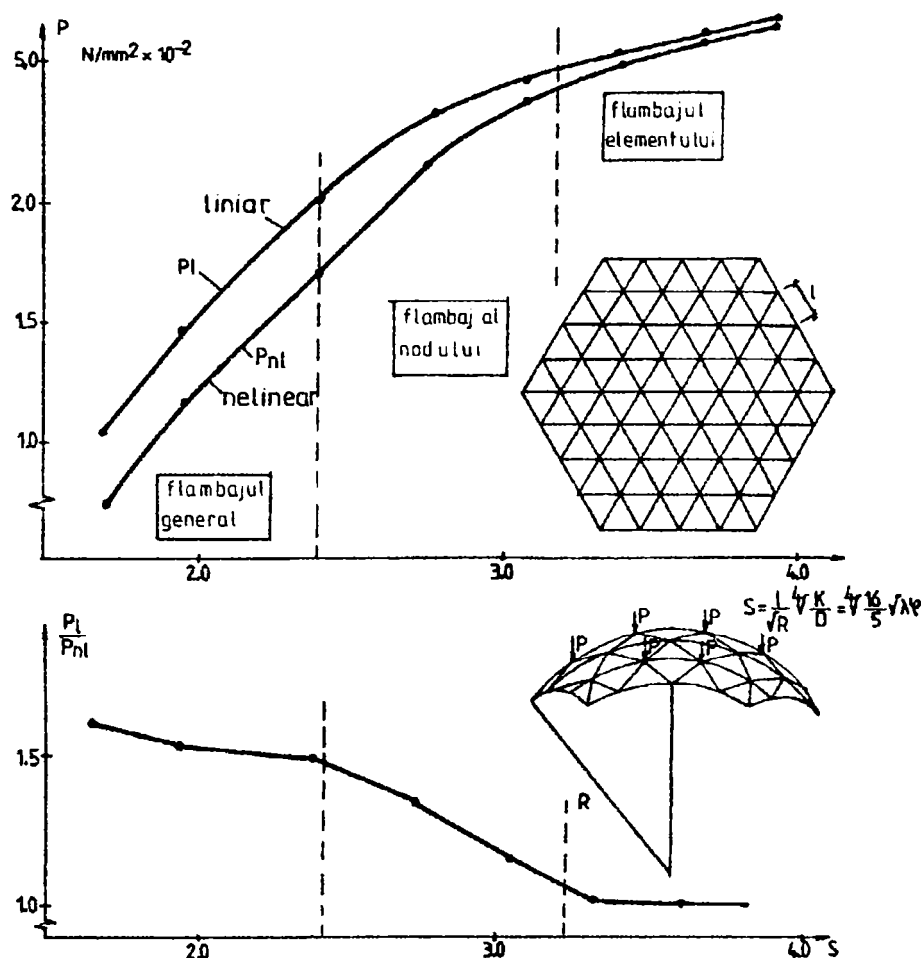


Fig. 4.26 Efectul neliniarității geometrice

$$S = \frac{l}{\sqrt{R}} \sqrt[4]{\frac{K}{D}} \tag{4.8}$$

unde

l reprezintă lungimea elementului

R reprezintă raza de curbură a plăcii curbe

D și K rigiditatea axială și de încovoiere.

Încărcarea critică în cazul analizei liniare este de 1,3 până la 1,6 ori mai mare decât cea rezultată dintr-o analiză neliniară pentru cupola cu $S < 3$. La aceste cupole apare instabilitatea de nod sau cea generală.

Pentru $S > 3$ încărcarea liniară de flambaj este o bună estimare în cazul când colapsul plăcii curbe se produce prin flambajul elementelor [4.84].

4.2 Ecuațiile de echilibru în metoda elementului finit

Determinarea încărcărilor critice pentru cupolele reticulate simplu strat s-a efectuat cu ajutorul metodei elementului finit în formularea matriceală din metoda deplasărilor. În formularea incrementală ecuațiile de echilibru static se scriu:

$$[K_{NL}]_{i-1} \{\Delta D_n\}_i = \{\Delta P\}_i - \{\Delta F\}_{i-1} \quad (4.9)$$

în care:

$[K_{NL}]_{i-1}$ - este matricea tangentă a rigidității în calculul neliniar în iterația i ;

$\{\Delta D_n\}_i$ - vectorul deplasărilor nodale în pasul de iterație i ;

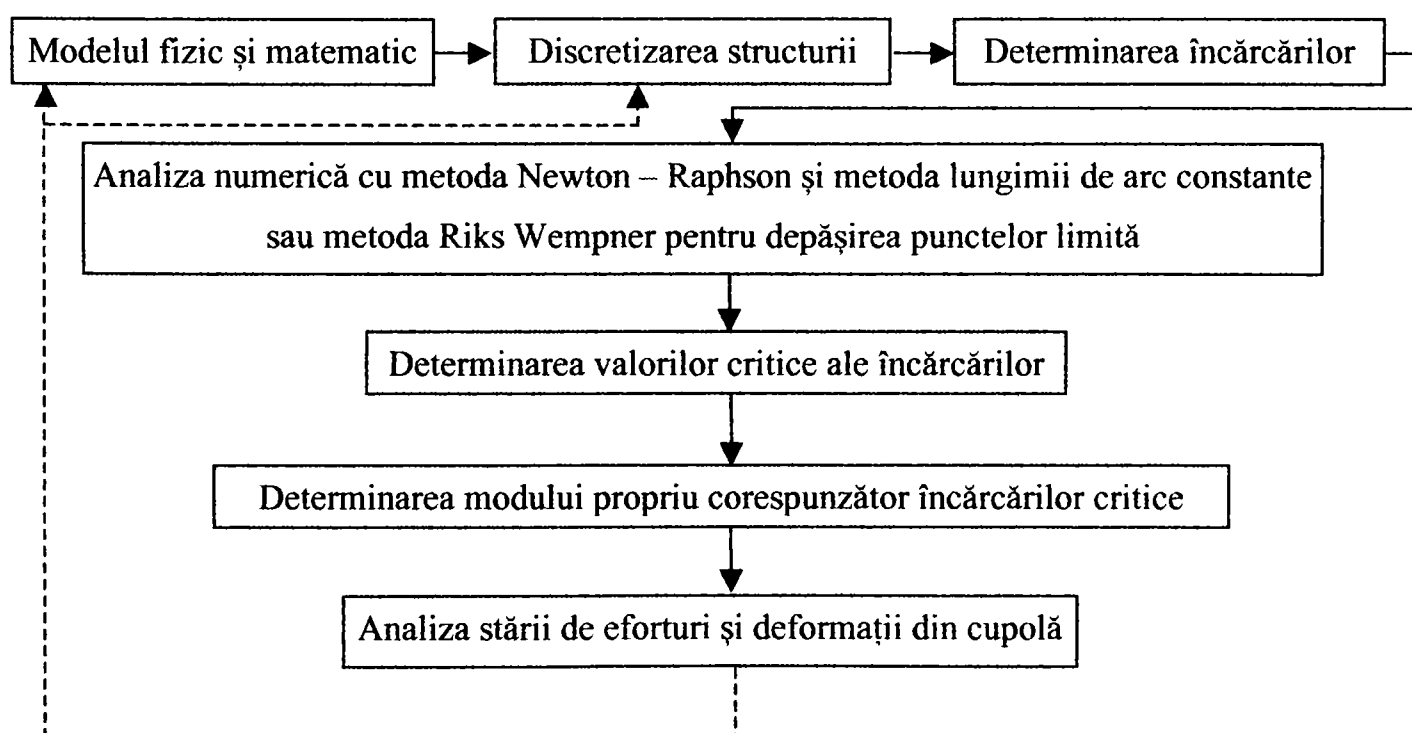
$\{\Delta P\}_i$ - vectorul deplasărilor nodale în pasul de iterație i ;

$\{\Delta F\}_{i-1}$ - vectorul forțelor elastice bazat pe deplasările din iterația $i-1$.

Deplasările totale din iterația i se calculează din relația

$$\{D\}_i = \{D\}_{i-1} + \{\Delta D\}_i \quad (4.10)$$

La calculul neliniar al structurilor se cunosc diferite proceduri de rezolvare. În capitolul 2 din teză au fost discutate aceste proceduri în detaliu. Metoda Newton - Raphson se utilizează când curba de încărcare - deplasare are puncte de bifurcare, iar metoda arcului de lungime constantă este indicată pentru toată lungimea curbei încărcare - deplasare, însă necesită timp mai lung de lucru pentru efectuarea calculelor și la pași de încărcare mari, devine neconvergentă. Rezultă că alegerea metodei iterative depinde de răspunsul neliniar al structurii prin curba încărcare - deplasare.



4.3 Cupole metalice analizate

În vederea cercetării fenomenului de pierdere a stabilității echilibrului cupolelor metalice, reticulate simplu strat au fost analizate următoarele modele de cupole:

- **modelul 1** - nod legat cu șase bare articulate (Fig. 4.27 a) cu deschiderea 5989 mm și săgeata de 180 mm;

- **modelul 2** - cupolă formată din 24 de bare și 13 noduri articulate cu deschideri și săgeți variabile (Fig. 4.27 b);

- **modelul 3** - cupolă obținută din 72 de bare și 37 noduri articulate cu deschideri și săgeți variabile (Fig. 4.27 c).

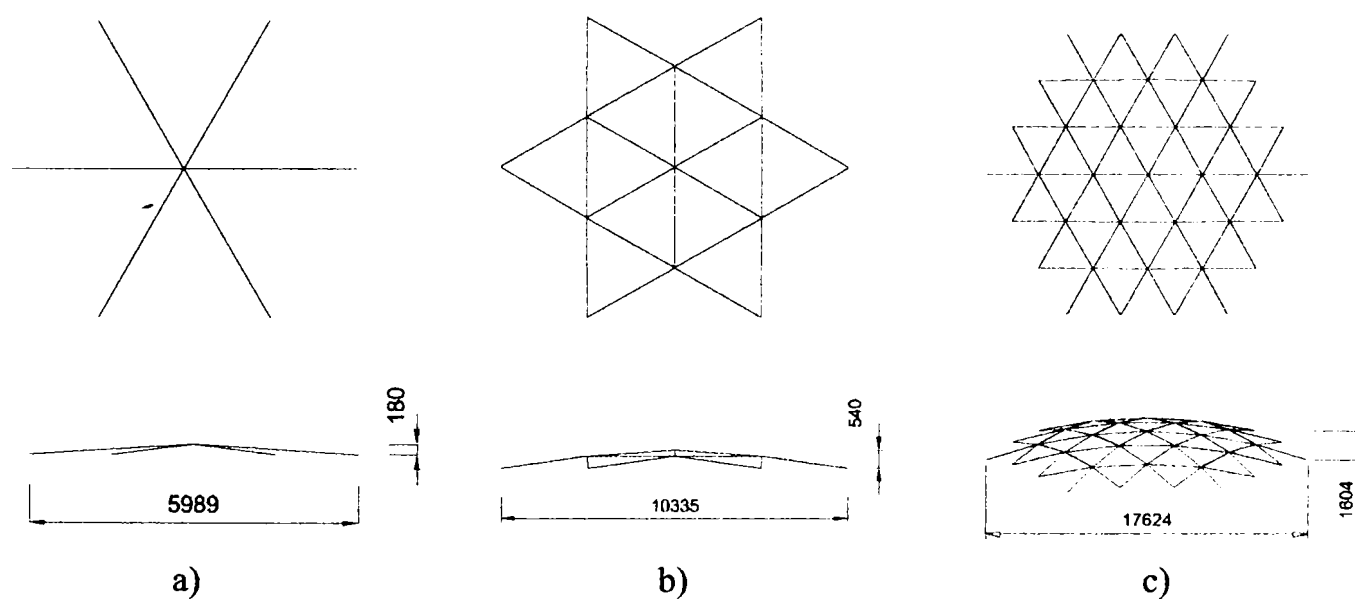


Fig. 4.27 Tipurile de cupole analizate

Pentru fiecare model s-au studiat numeric încărcările critice pentru modurile de instabilitate care pot interveni în exploatare și anume: instabilitate de bară, instabilitate de nod, instabilitate de inel și instabilitate generală. De asemenea, a fost analizată și influența diferiților factori care influențează comportarea cupolelor reticulate simplu strat cum sunt: distribuția încărcărilor, influența deformațiilor plastice, influența imperfecțiunilor geometrice și influența prinderii barelor în noduri.

4.4 Determinarea încărcărilor pentru modelele analizate

4.4.1 Modelul 1. Cupola cu un nod și șase bare

În teza de doctorat s-a studiat instabilitatea unui nod legat cu șase bare articulate. Barele au lungimea identică $l = 3000$ mm, secțiunea transversală inelară și sunt executate din oțel OL 37 cu $\sigma_c = 2400$ daN/cm² și modulul de elasticitate $E = 2,1 \times 10^6$ daN/cm².

Numerotarea nodurilor, vederea laterală și numerotarea barelor modelului se prezintă în figurile 4.28 a, b și c. Pe model s-a aplicat o forță concentrată P în nodul central (Fig.4.29). Studiile au fost efectuate considerând constantă geometria modelului, lungimea barelor și proprietățile materialului. Ca parametru variabil s-a considerat diametrul țevii din care sunt executate barele.

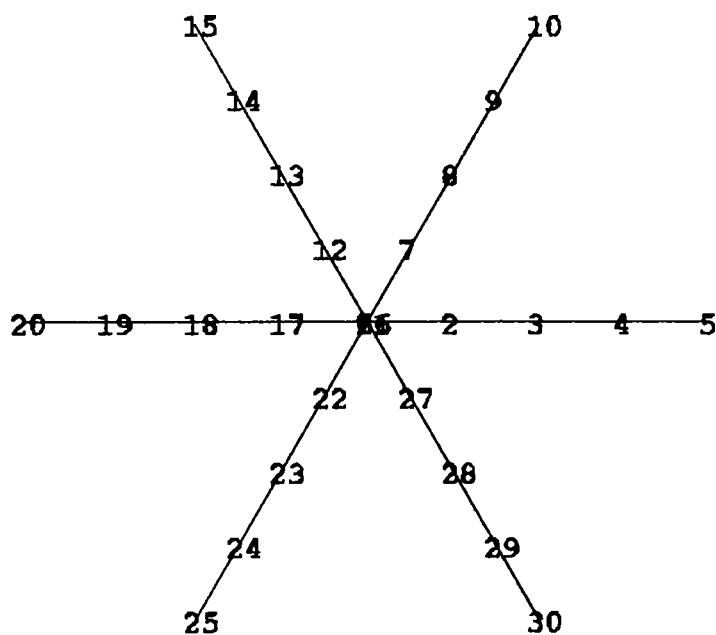


Fig 4.28 a Structura cu 6 bare numerotarea nodurilor



Fig 4.28 b Structura cu 6 bare vedere laterală

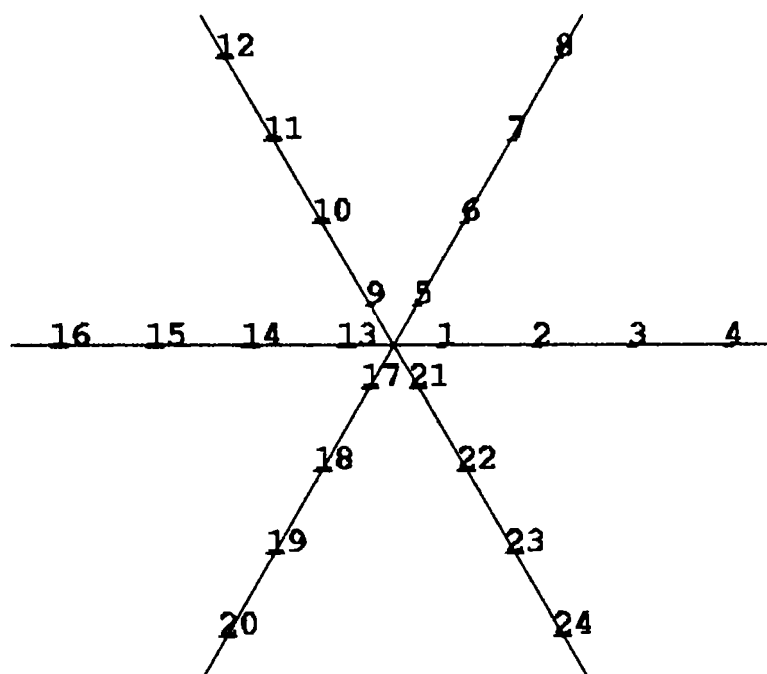


Fig 4.28 c Structura cu 6 bare numerotarea elementelor

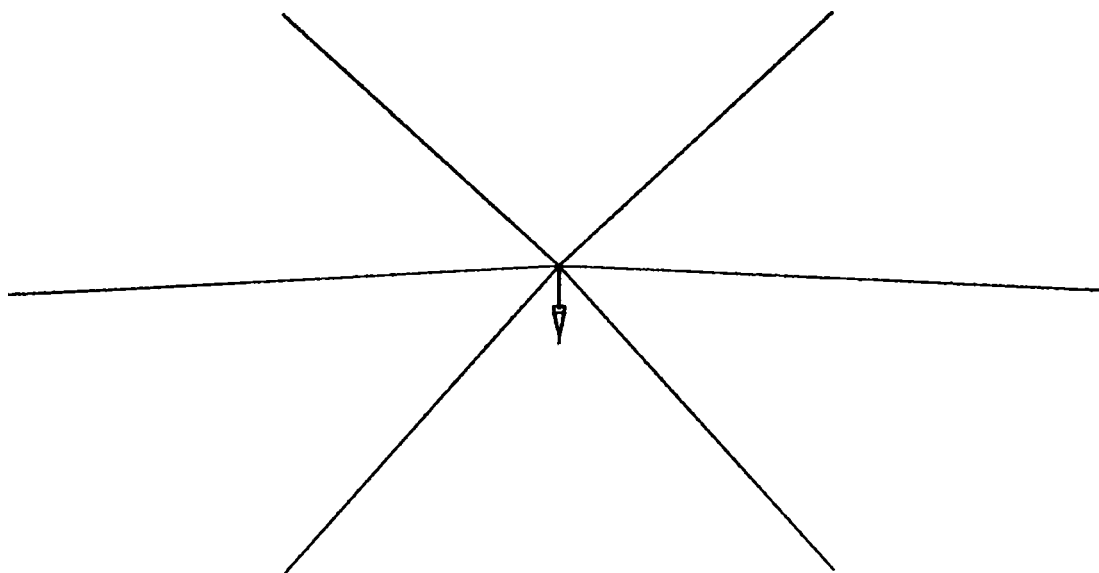


Fig 4.29 Modul de încărcare la structura cu 6 bare

Modelul format din 6 bare a fost analizat ca un nod fără imperfecțiuni geometrice și cu imperfecțiuni geometrice în următoarele situații:

- a) structură perfectă și material elastic;
- b) structură perfectă și material plastic;
- c) structură imperfectă cu imperfecțiuni de bară (curburi inițiale);
- d) structură imperfectă și material elastic.

Imperfecțiunea geometrică a fost considerată ca o curbă inițială de formă sinusoidală cu săgeata $L/1500$ la mijlocul barei.

Încărcările de flambaj au fost determinate folosind analiza geometric neliniară, combinată cu analiza repetitivă a vectorilor proprii pentru diferite nivele de încărcare.

4.4.1.1 Instabilitatea de bară

Modul propriu corespunzător acestui mod de instabilitate, se prezintă în figura 4.30. Acest tip de instabilitate apare când flambează numai o bară, celelalte bare nefiind afectate. Instabilitatea de bară este cea mai simplă formă de instabilitate.

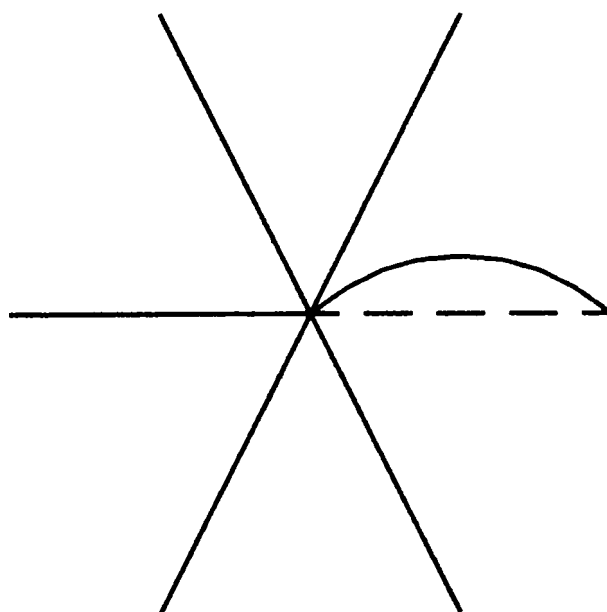


Fig. 4.30 Flambajul barei la structura cu 6 bare

Cu toate că un număr mare de studii se ocupă de acest tip de instabilitate, comportarea critică și post critică a barei nu a fost studiată suficient. În tabelul 4.1. se prezintă încărcarea concentrată în nod care produce flambajul barei modelului, când materialul se comportă elastic, elastic perfect plastic și pentru cupola cu imperfecțiuni geometrice de bară.

Tabelul 4.1.

Dimensiunile modelului l, f, f/l Material	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Încărcările din nod care produc flambajul barei [daN]		
		Modelul perfect		Modelul imperfect
		Material elastic	Material elastic perfect plastic	Material elastic
l = 5989 mm f = 180 mm f/l = 0,03 OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	1697	1697	1486
	54x6	2031	2031	1780
	57x6	2401	2401	2106
	60x6	2804	2804	2461
	63,5x6	3317	3317	2914
	70x6	4375	4375	3854
	73x6	4903	4903	4326
	83x6	6754	6754	6021
	89x6	7834	7834	7070
	92x6	8325	8325	7583
	95x6	8757	8757	8079
	98x6	9104		8550

Se observă că încărcarea din nod care produce flambajul barei crește odată cu diametrul barei în toate situațiile analizate (fig. 4.36).

4.4.1.2 Instabilitatea de nod

Modul propriu corespunzător acestui tip de instabilitate se prezintă în figura 4.31. Se observă că instabilitatea de nod produce flambajul tuturor barelor care concură în nodul respectiv. Acest tip de instabilitate este cel mai studiat în literatura de specialitate și aproape toate programele de calcul neliniar au fost testate pe flambajul nodului.

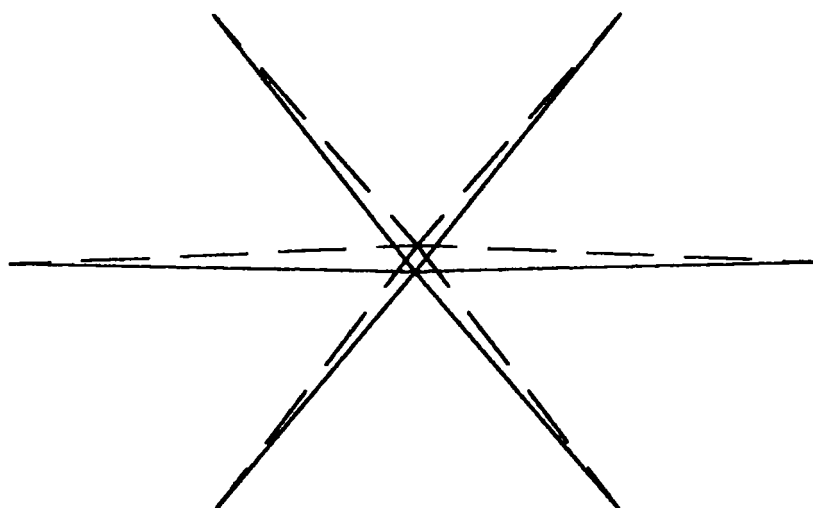


Fig. 4.31 Flambajul nodului la structura cu 6 bare

Variația încărcării P în funcție de deplasarea verticală din nodul 1 pentru diferite diametre de bară se prezintă în figura 4.32 pentru structura perfectă și material elastic, iar pentru modelul imperfect în figurile 4.33 și 4.35. Comportarea modelului perfect cu material elastic – perfect plastic se prezintă în figura 4.34.

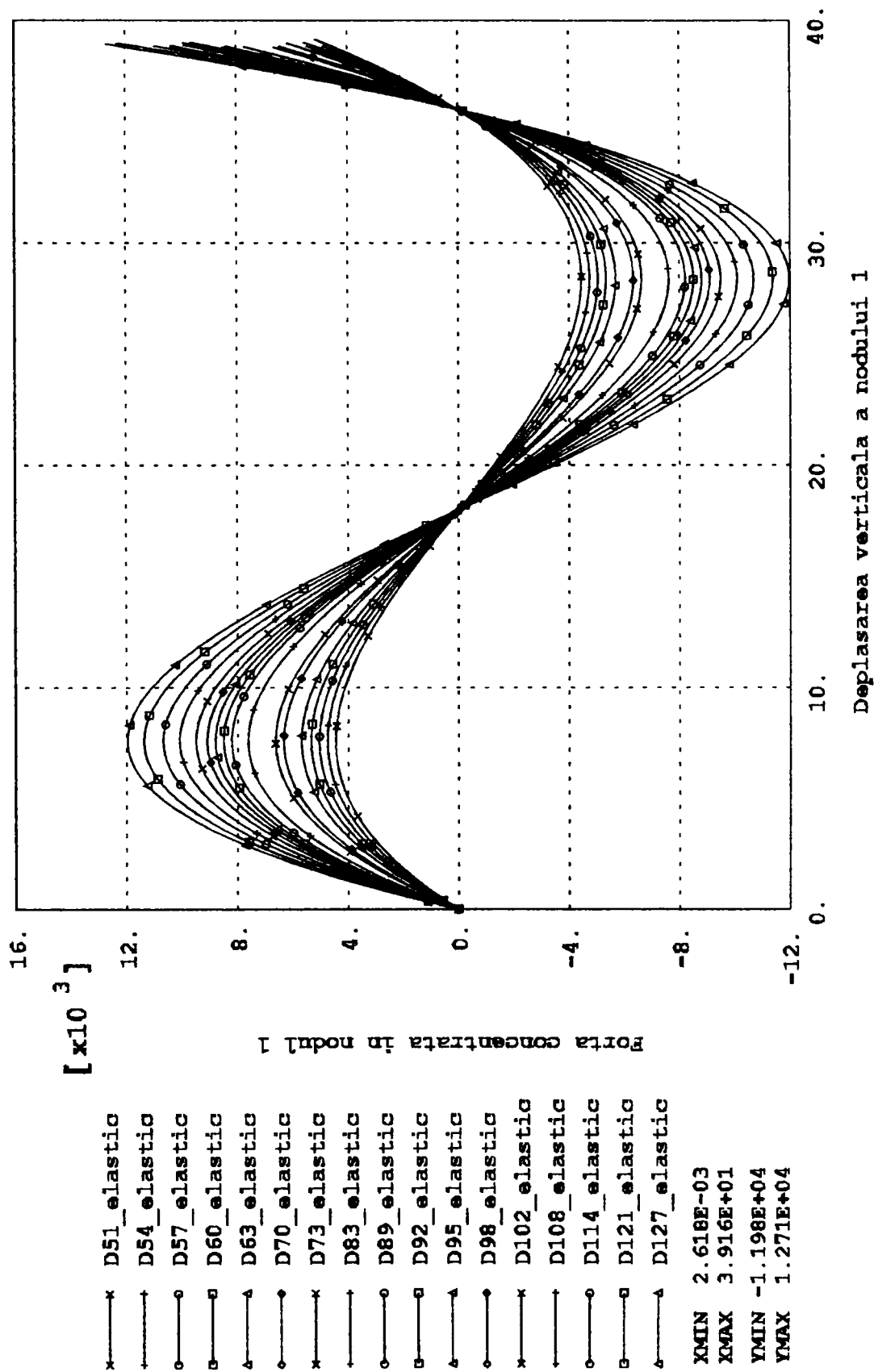


Fig. 4.32 Curbele încărcare – deplasare din nodul 1 pentru modelul perfect cu 6 bare și material elastic

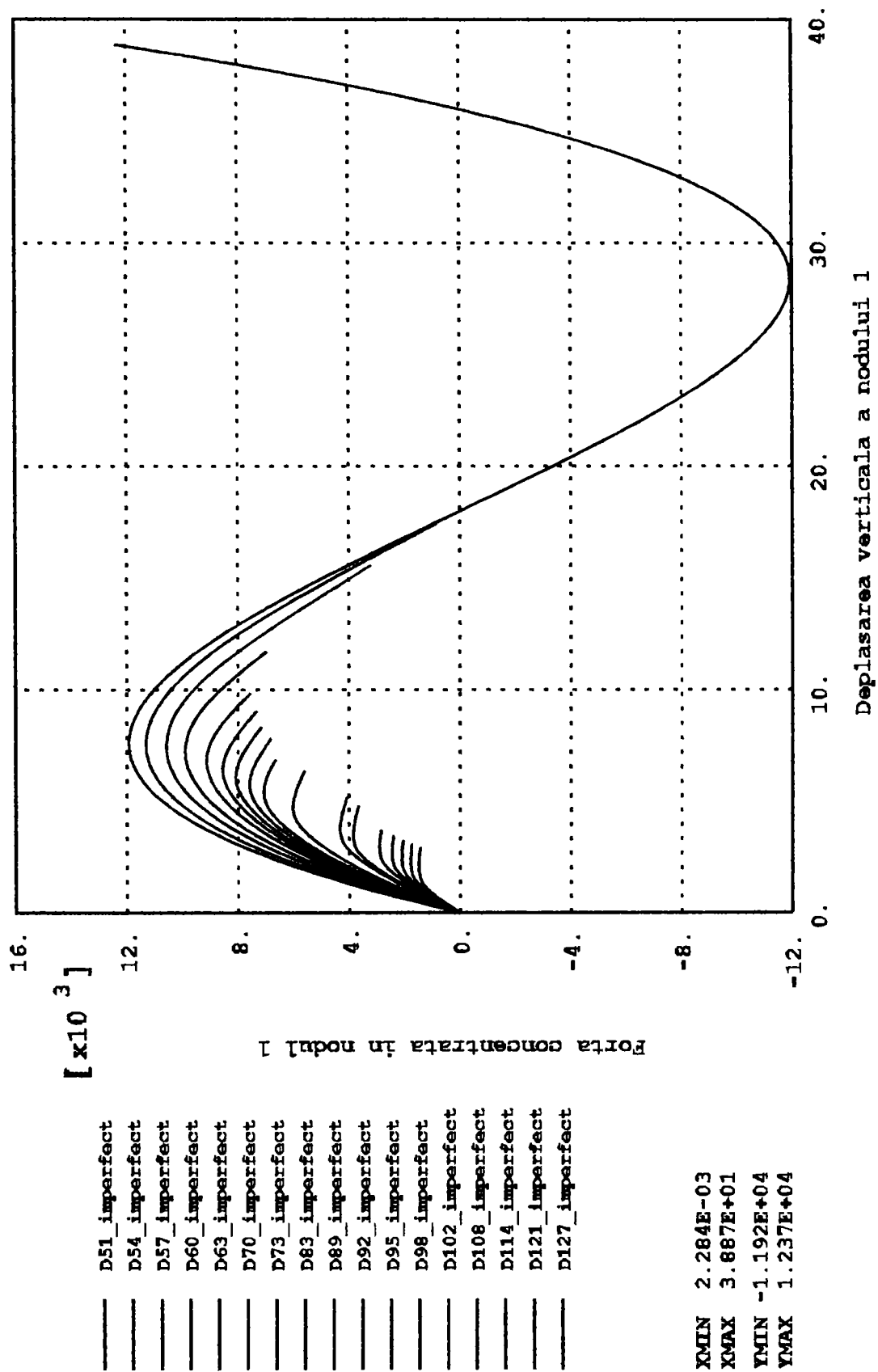


Fig. 4.33 Curbele încărcare – deplasare din nodul 1 pentru modelul imperfect cu 6 bare și material elastic

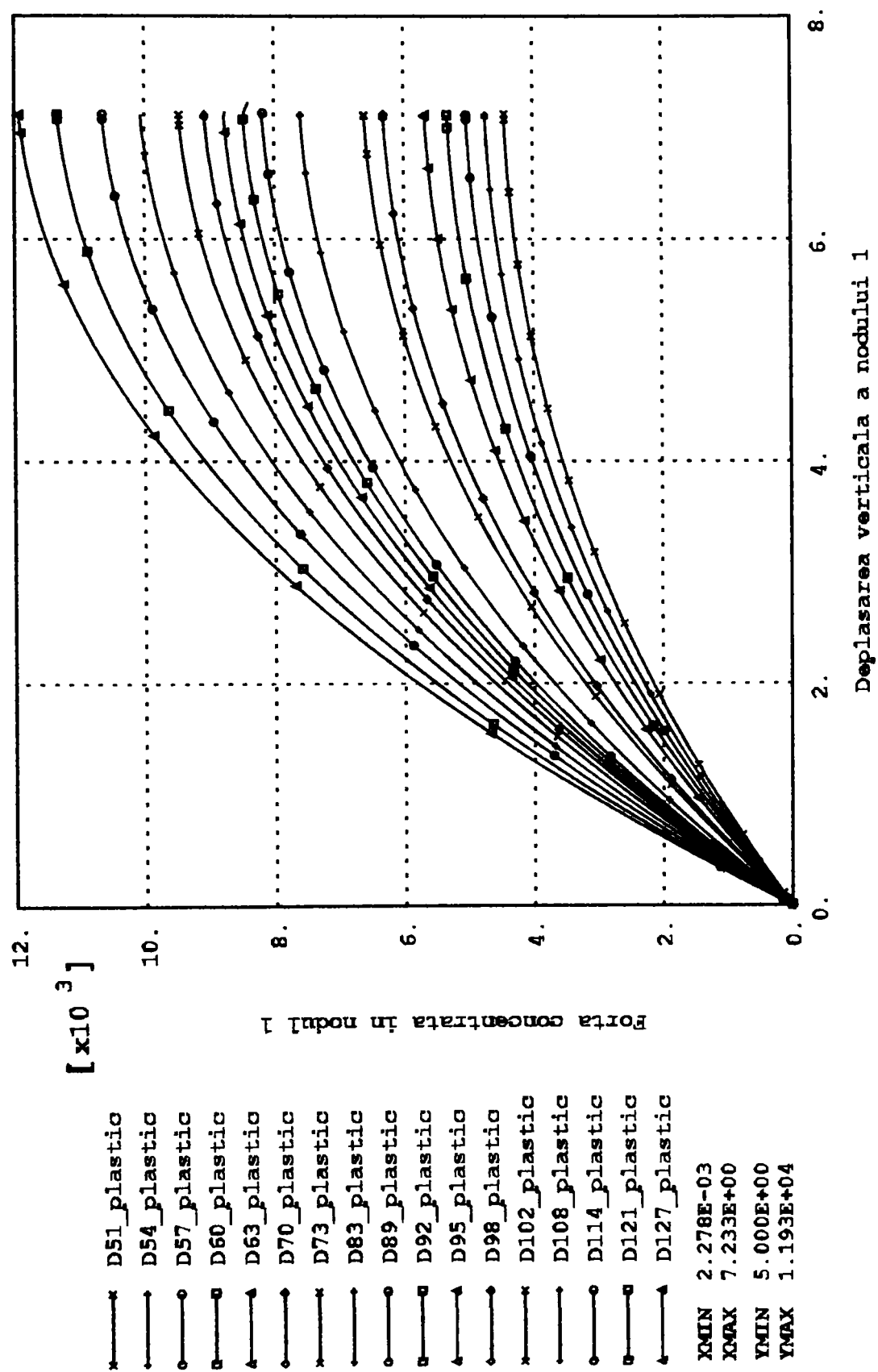


Fig. 4.34 Curbele încărcare – deplasare din nodul 1 pentru modelul perfect cu 6 bare și material elastic-perfect plastic

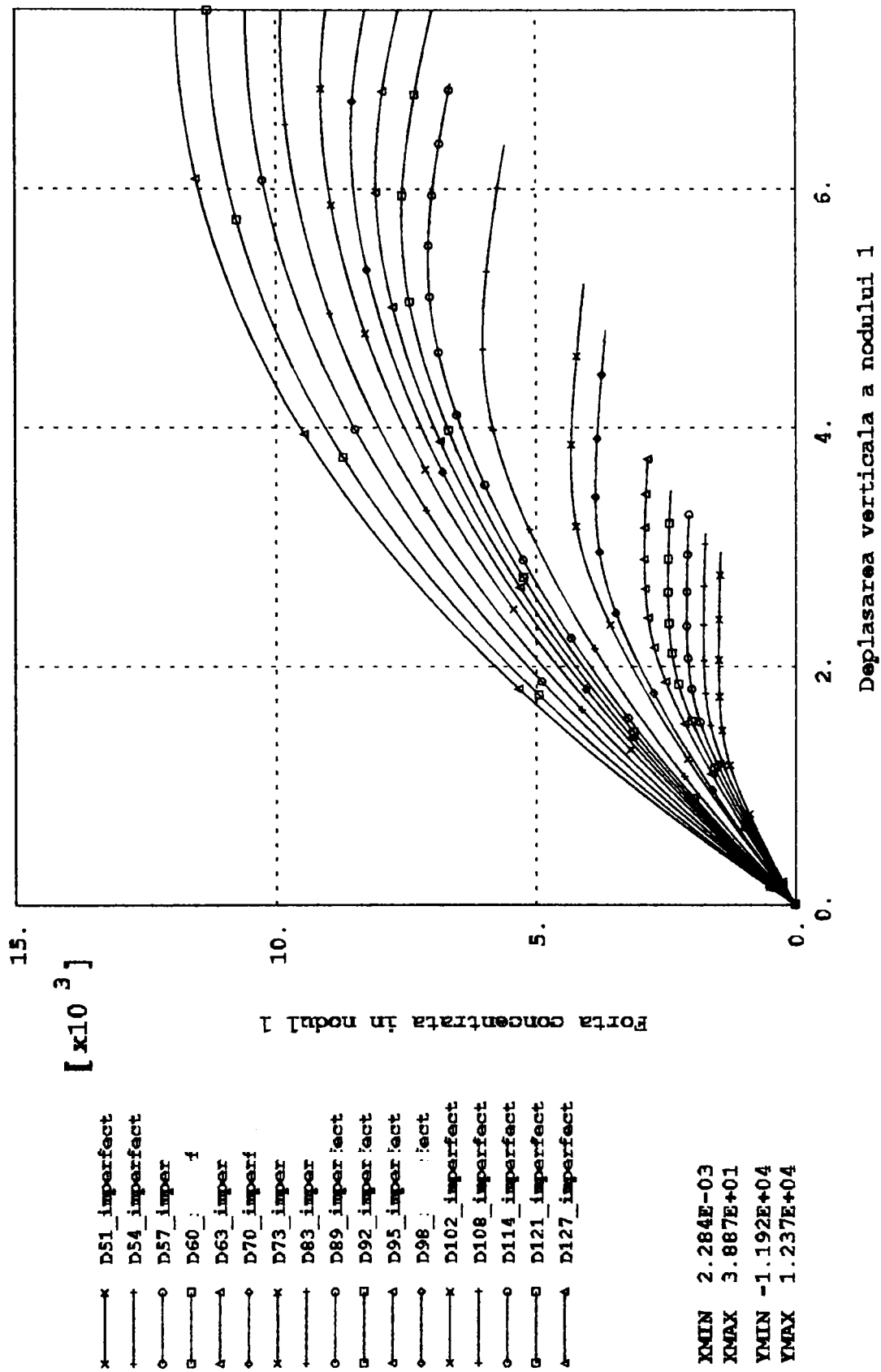


Fig. 4.35 Curbele încărcare – deplasare din nodul 1 pentru modelul imperfect cu 6 bare și material elastic

În tabelul 4.2. se prezintă forța concentrată aplicată în nodul 1, care produce instabilitatea de nod pentru modelul perfect și imperfect executat din material elastic și elastic - perfect plastic.

Tabelul 4.2.

Dimensiunile modelului l, f, f/l Material	Parametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Încărcarea din nod care produce instabilitatea nodului [daN]		
		Model perfect		Model imperfect
		Material elastic	Material elastic perfect plastic	Material elastic
l = 5989mm f = 180 mm f/l = 0,03 OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	4453	4437	Flambaj de bară
	54x6	4750	4733	
	57x6	5047	5029	
	60x6	5344	5325	
	63,5x6	5690	5670	
	70x6	6334	6311	
	73x6	6631	6607	
	83x6	7620	7593	
	89x6	8214	8185	
	95x6	8808	8774	
	92x6	8510	8476	
	98x6	9104	9072	
	102x6	9501	9467	9132
	108x6	10095	10056	9901
	114x6	10687	10647	10575
	121x6	11381	11341	11311
127x6	11972	11932	11924	

Se observă creșterea încărcării din nod, odată cu creșterea diametrului barei. Comportarea elastic - perfect plastică a oțelului, conduce la reducerea nesemnificativă a încărcării din nod 0,36 % pentru bara 51 x 6 mm și de 0,33% pentru bara 121 x 6 mm.

4.4.1.3 Prezentarea comparativă a rezultatelor

În figura 4.36 se prezintă variația încărcării din nodul central pentru cele două moduri de flambaj în funcție de diametrul barelor.

Din această figură și tabelele 4.1 și 4.2 se observă că flambajul barei perfecte cu diametrul de 98 mm este cuplat cu instabilitatea de nod. Același fenomen se observă pentru instabilitatea de nod și flambajul barei cu diametrul de 127 mm. Încărcarea din nodul central care produce flambajul barei perfecte este cu 14% - 6 % mai mare decât încărcarea din nod care produce flambajul barei cu imperfecțiuni pentru diametre cuprinse între 51 și 98 mm.

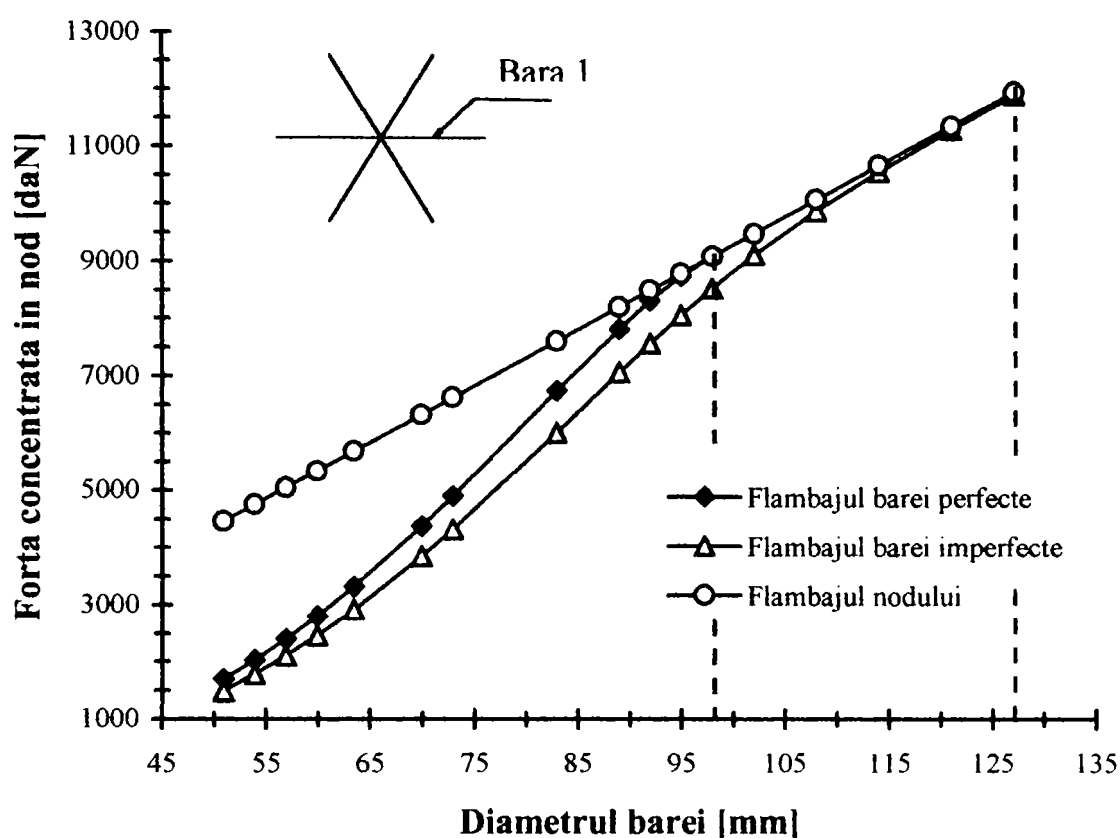


Fig. 4.36 Încărcările critice pentru flambajul de bară și de nod în funcție de diametrul barei

În cazul unui model real cu imperfecțiuni geometrice de bară, pierderea stabilității echilibrului se produce prin flambajul barei (Fig. 4.72.)

4.4.2 Cupola cu 24 de bare și 13 noduri

A doua cupolă cercetată este alcătuită din 24 de bare prinse articulat în 13 noduri. Nodurile sunt dispuse pe o sferă. Lungimea barelor este de 300 cm și au secțiunea inelară. Cupola a fost considerată că se realizează din oțel OL 37 și OL 52, care lucrează în stadiul elastic și în stadiul elastic - perfect plastic.

Numerotarea barelor și nodurilor cupolei se prezintă în figurile 4.37 și 4.38.

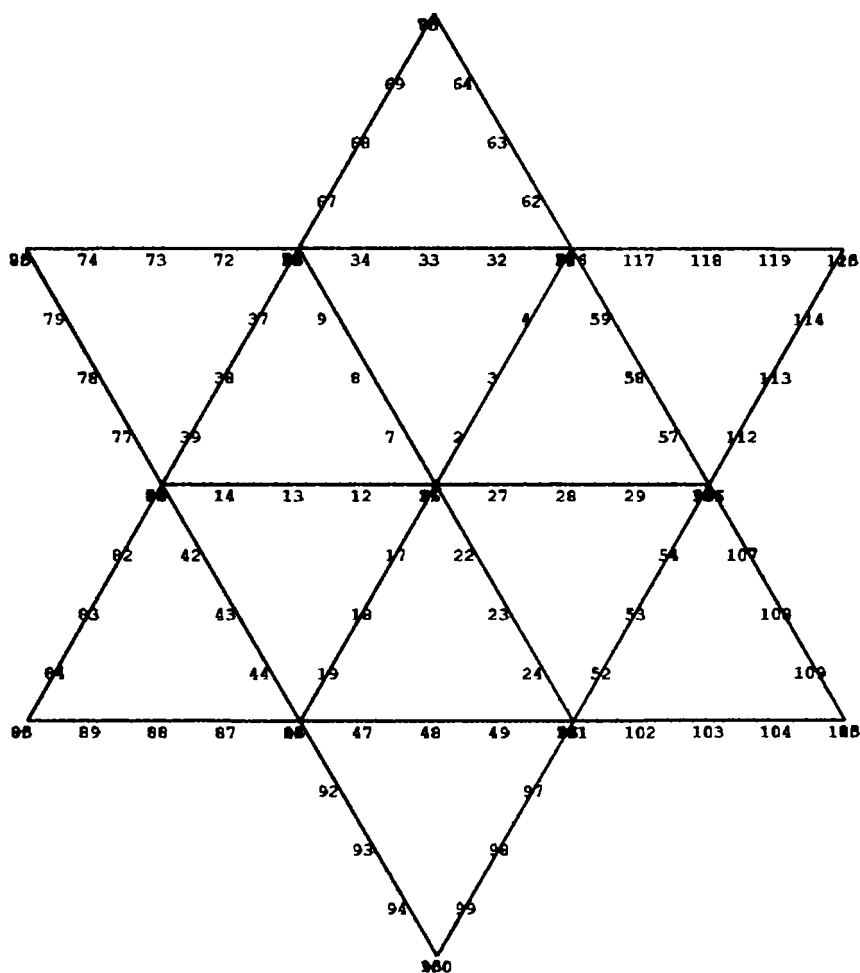


Fig. 4.37 Numerotarea nodurilor la cupola cu 24 de bare

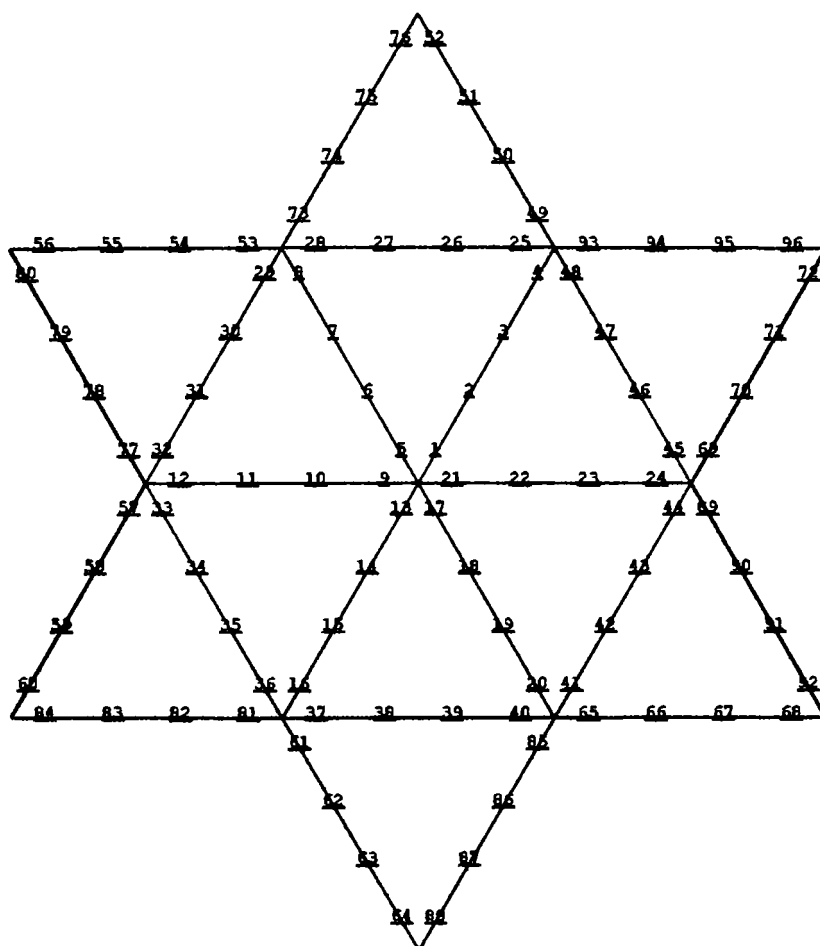


Fig. 4.38 Numerotarea elementelor la cupola cu 24 de bare

Curbele încărcare - deplasare au fost analizate cu programul ANSYS 5.3, pentru cupole cu diferite rapoarte între săgeată și deschidere $f/l = 0,052 \div 0,25$ două cazuri de încărcare. În tabelul 4.3 se prezintă dimensiunile geometrice ale cupolelor studiate. Încărcarea exterioară a fost aplicată ca o forță concentrată în nodul central (Fig. 4.39) și sub formă de șapte forțe în nodurile interioare ale cupolei (Fig. 4.40)

Tabelul 4.3.

Deschiderea cupolei l [cm]	Săgeata cupolei [cm]	Lungimea barei [cm]	Raportul f/l	Calitatea oțelului. Limita de curgere [daN/cm ²]
1833,600	54,000	300	0,052	OL52 $\sigma_c = 3500 \text{ daN/cm}^2$
1025,400	84,368		0,082	
1003,300	134,930		0,134	
964,100	192,430		0,200	
927,470	131,641		0,250	

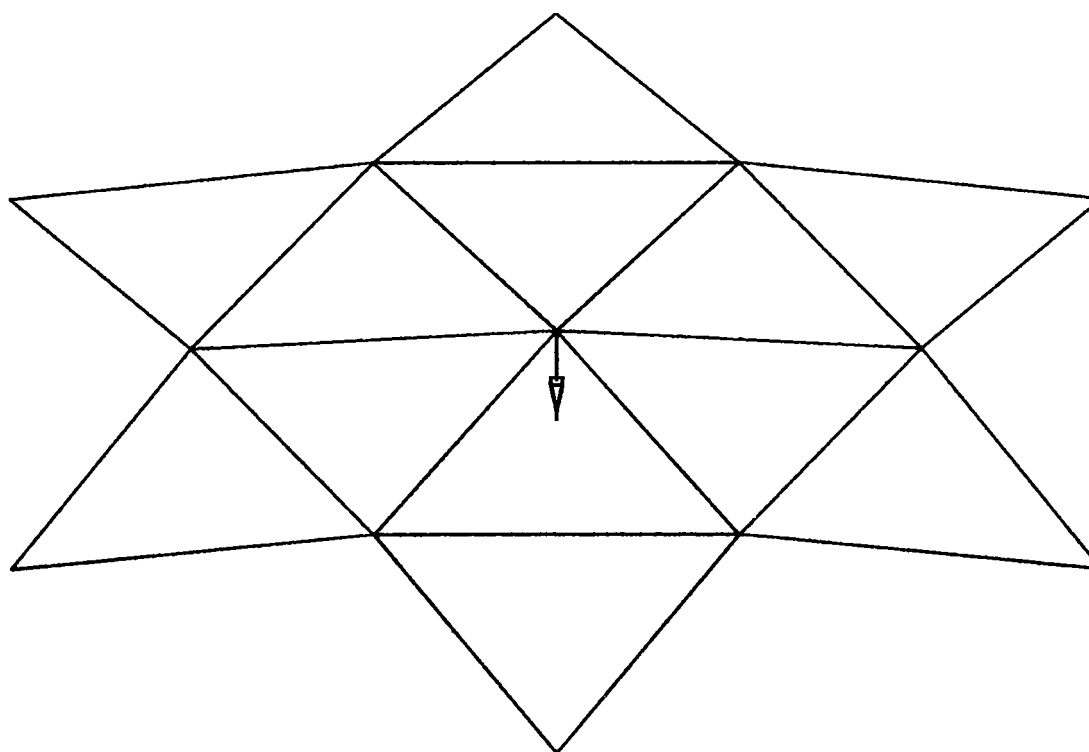


Fig. 4.39 Încărcarea cu o forță concentrată a cupolei cu 24 de bare

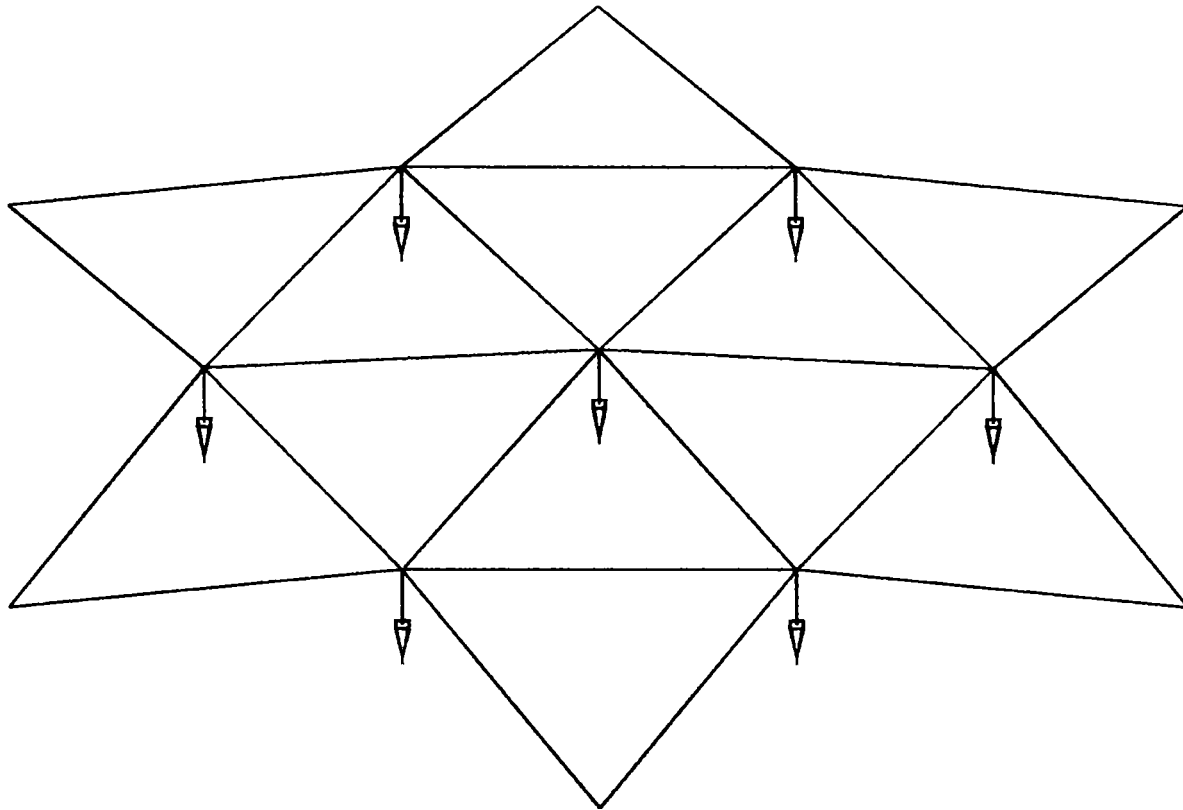


Fig. 4.40 Încărcarea cu șapte forțe concentrate a cupolei cu 24 de bare

4.4.2.1 Instabilitate de bară

Modul propriu corespunzător flambajului de bară din încărcările studiate se prezintă în figurile 4.41 și 4.42.

Din încărcarea cu o forță concentrată în nodul central și cu 7 forțe concentrate în nodurile interioare s-au calculat forțele critice pentru care se produce flambajul barei.

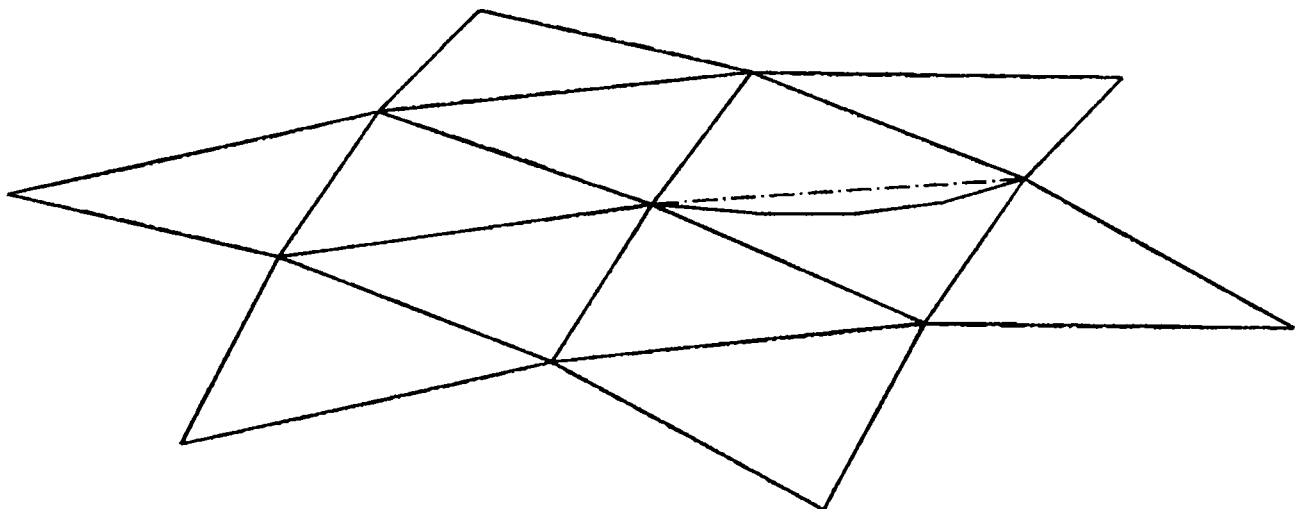


Fig. 4.41 Flambajul unei bare la cupola cu 24 de bare

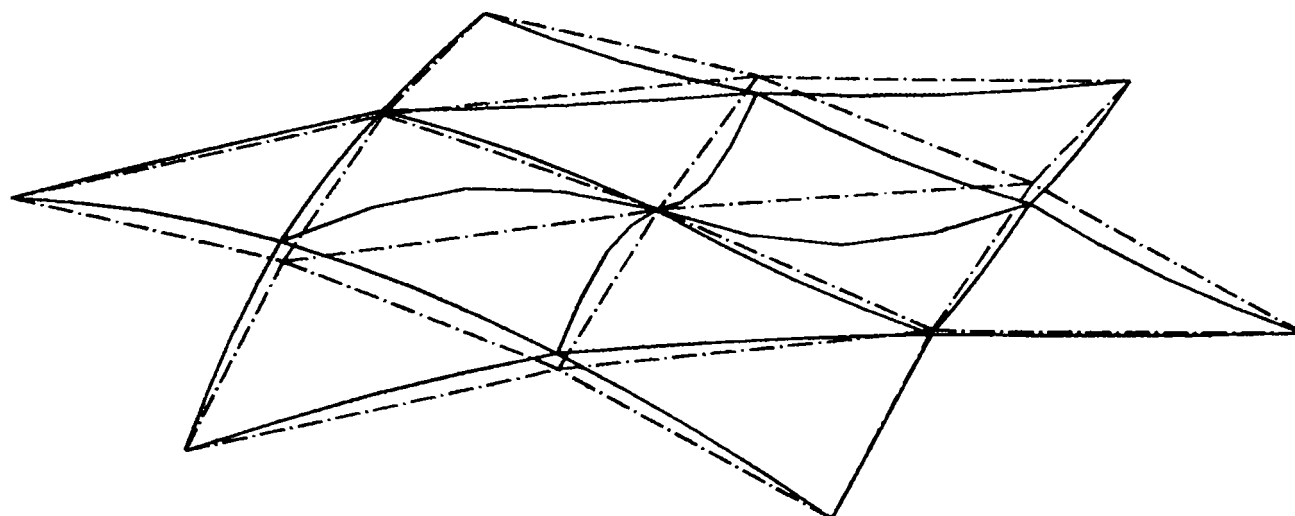


Fig. 4.42 Flambaj nesimetric al barelor cupolei cu 24 de bare

În tabelul 4.4 se prezintă valorile acestor forțe pentru diferite secțiuni ale barelor.

Tabelul 4.4.

Dimensiunile cupolei l, f f/l Materialul	Diametrul și grosimea țevii barei [mm]	Încărcarea din nod care produce flambajul barei [daN]			
		1 forță concentrată	7 forțe concentrate		
		Flambajul barei 2	Flambajul barei 1	Flambajul barei 2	Flambajul barelor din inelul 1
l = 1762,28 mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	1564	1033	1818	2279
	54x6	1843	1248	2202	2781
	57x6	2137	1491	2637	3199
	60x6	2441	1763	3217	3270
	63,5x6	2795	2117	3773	4734
	70x6	3382	2887	5219	5706
	73x6	3570	3294	6017	6364
	83x6		4893	9769	8701
	89x6		6048		10176
	95x6		7339		11687
	102x6		9019		13475
	108x6		10600		15011
	114x6		12297		16531
	121x6		14397		18248
127x6		16269		19635	

Din tabelul 4.4. se observă ordinea în care flambează barele cupolei. Încărcarea ce produce flambajul barelor crește odată cu secțiunea transversală a acestora. Creșterea capacității portante a cupolei din încărcarea cu șapte forțe se obține prin mărirea secțiunii transversale a barei de tip 1, respectiv a barei de tip 2.

4.4.2.2 Instabilitatea de nod

Modul propriu corespunzător instabilității de nod pentru încărcarea cu o forță concentrată se prezintă în figura 4.43.

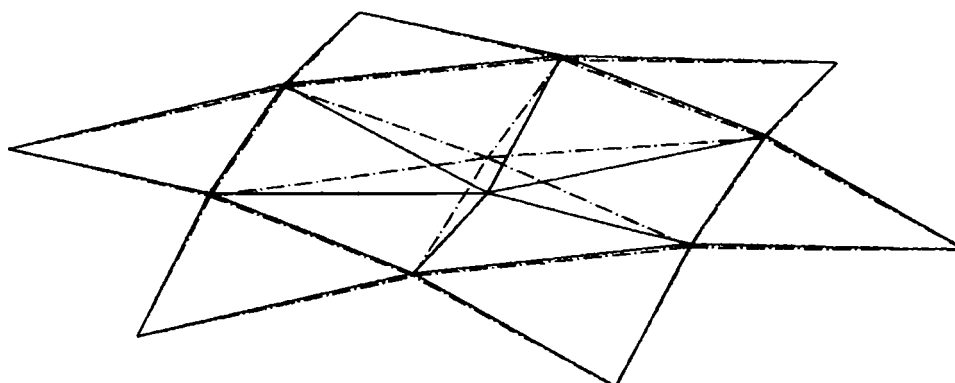


Fig. 4.43 Instabilitatea nodului central la cupola cu 24 de bare

Valoarea forței din nod care produce instabilitatea de nod se prezintă în tabelul 4.5.

Tabelul 4 .5.

Dimensiunile cupolei l,f, f/l, Materialul	Diametrul și grosimea peretelui țevii barei [mm]	Încărcarea din nod care produce instabilitatea nodului [daN]
		1 forță concentrată
l = 1762,38 mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	2398
	54x6	2558
	57x6	2718
	60x6	2878
	63,5x6	3064
	70x6	3411
	73x6	3570
	76x6	3731
	80x6	3944
	83x6	4103
	89x6	4423
	95x6	4743

Se observă creșterea încărcării odată cu diametrul barei.

4.4.2.3 Instabilitatea de inel

Modul propriu pentru instabilitatea de inel a cupolei încărcate cu șapte forțe concentrate în nodurile interioare se prezintă în figurile 4.44 și 4.45.

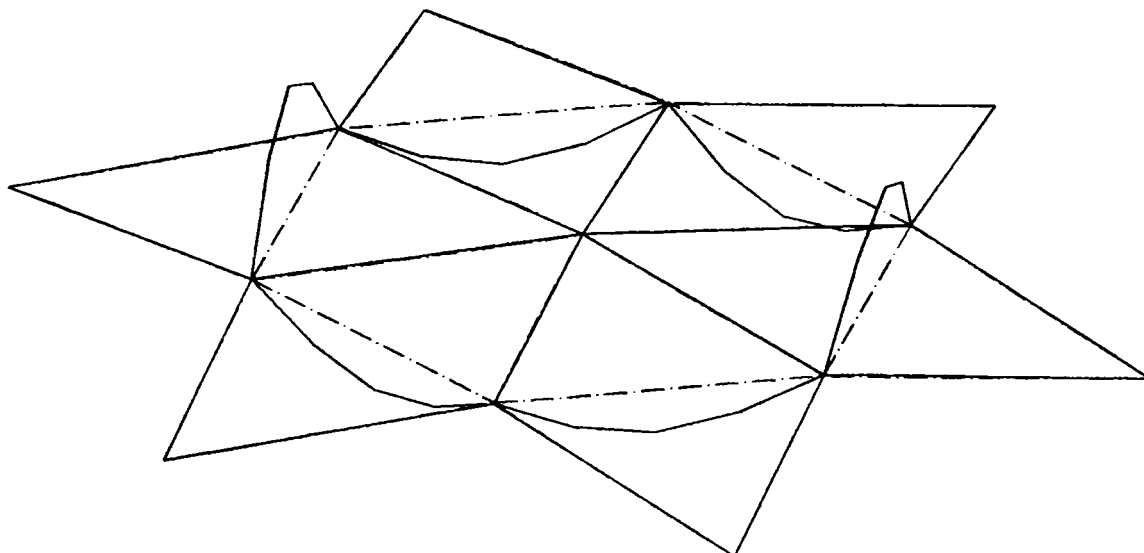


Fig. 4.44 Flambajul barelor inelului cupolei cu 24 de bare

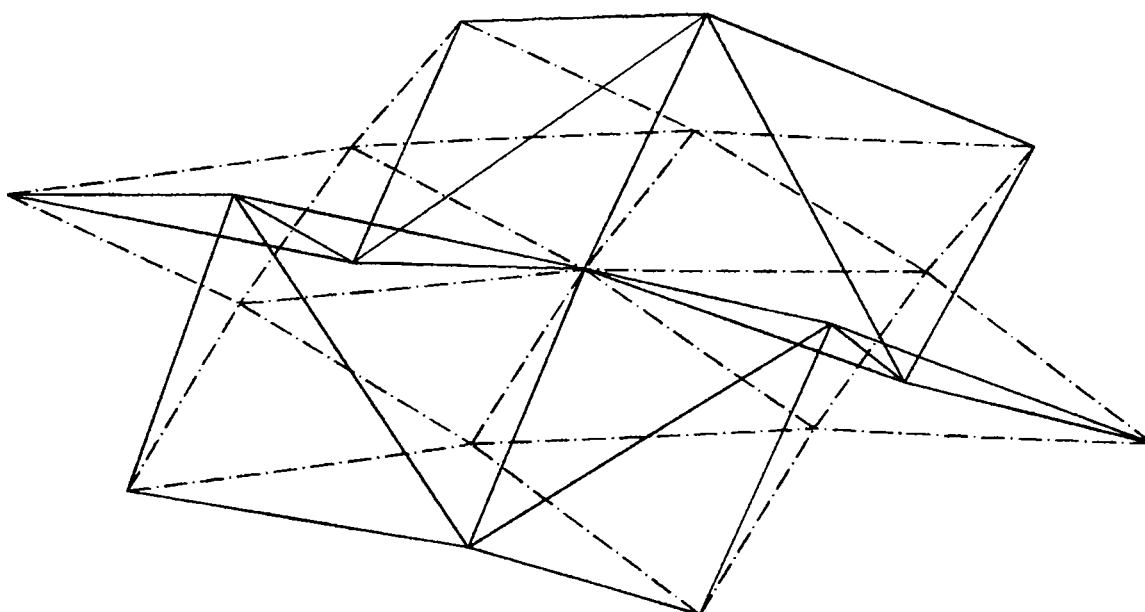


Fig. 4.45 Instabilitatea inelului la cupola cu 24 de bare

Valorile încărcărilor concentrate din noduri care produc instabilitatea inelului se prezintă în tabelul 4.6.

Tabelul 4.6

Dimensiunile cupolei l,f, f/l Materialul	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Încărcarea din nod care produce instabilitatea de inel
l = 1762,38mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	54x6	5197
	57x6	5522
	60x6	5841
	63,5x6	6226
	70x6	6929
	73x6	7254
	83x6	8337
	89x6	8986
	95x6	9635
	102x6	10393
	108x6	11043
	114x6	11692
	121x6	12450
127x6	13099	

Încărcarea din nod care produce instabilitatea de inel crește odată cu diametrul barelor din care este executată cupola.

4.4.2.4 Instabilitatea generală

Modul propriu pentru instabilitatea generală a cupolei din încărcarea cu 7 forțe aplicate în nodurile interioare se prezintă în figura 4.46 Valorile forțelor concentrate din nod care produc instabilitatea generală se prezintă în tabelul 4.7.

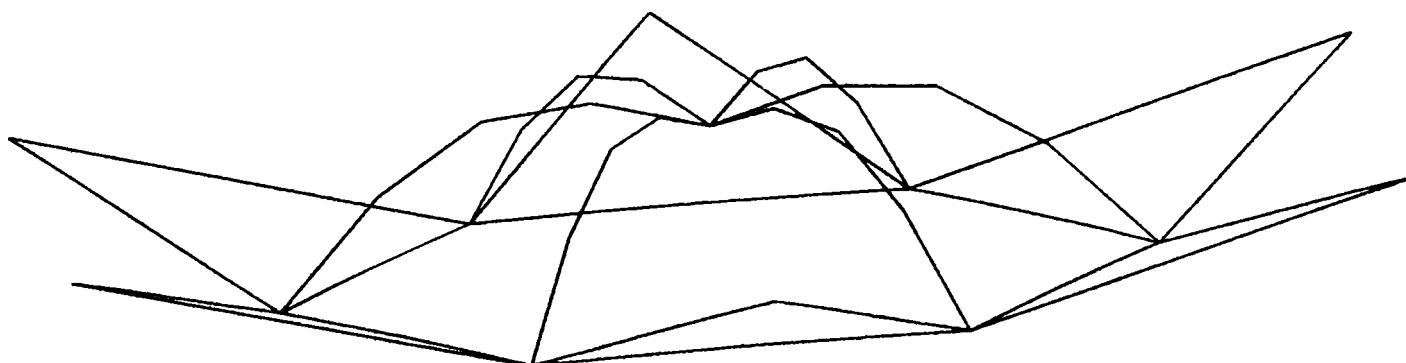


Fig. 4.46 Instabilitate generală al cupolei cu 24 de bare

Tabelul 4 .7.

Dimensiunile cupolei l,f,f/l	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Încărcările din nod care produc instabilitatea generală [daN]	
		1 forță concentrată	7 forțe concentrate
l=1762,38 mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 OL37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	2398	7440
	54x6	2558	7936
	57x6	2718	8432
	60x6	2878	8928
	63,5x6	3064	9506
	70x6	3411	10581
	73x6	3570	11077
	83x6	3731	12730
	89x6	3944	13722
	95x6	4103	14714
	102x6	4423	15872
	108x6	4743	16864
	114x6		17856
	121x6		19012
127x6		20004	

Curbele încărcare - deplasare verticală din nodul central și de pe inel pentru cele două situații de încărcare analizate se prezintă în figurile 4. 47, 4.48 și 4.49 pentru barele luate în studiu. Se remarcă comportarea neliniară a cupolei și posibilitatea ca structura să-și piardă stabilitatea și prin saltul echilibrului cu deplasări mari și efecte dinamice induse în structură.

În ambele ipoteze de încărcare rezultă creșterea forțelor din nodurile cupolei odată cu creșterea diametrului barei din care se execută cupola. Se remarcă faptul că încărcarea de limitare are cele mai mari valori (Fig.4.53) față de încărcările critice corespunzătoare celorlalte moduri de flambaj.

Curbele de încărcare - deplasare verticală din nodul central, raportate la săgeata f pentru cupolele cu dimensiunile din tabelul 4.3 din încărcarea cu o forță concentrată se prezintă în figura 4.50 pentru bara cu secțiunea de 89 x 6 mm, executată din OL 52 cu comportare elastică.

La cupolele cu $f/l > 0,134$ materialul se comportă elastic - perfect plastic și curbele încărcare – deplasare se prezintă în figura 4.51 pentru încărcarea cu o forță concentrată .

Încărcarea de limitare se micșorează la cupolele la care materialul lucrează în stadiul elastic - perfect plastic. Deplasările corespunzătoare încărcării de limitare sunt mai mici în cazul materialului elastic - perfect plastic, față de deplasările maxime corespunzătoare materialului elastic. Variația deplasării verticale din nodul central raportată la săgeata f în cazul încărcării cu șapte forțe concentrate și material elastic perfect - plastic se prezintă în figura 4.52 pentru bara cu diametrul de 89 mm, grosimea peretelui de 6 mm și din oțel OL 52.

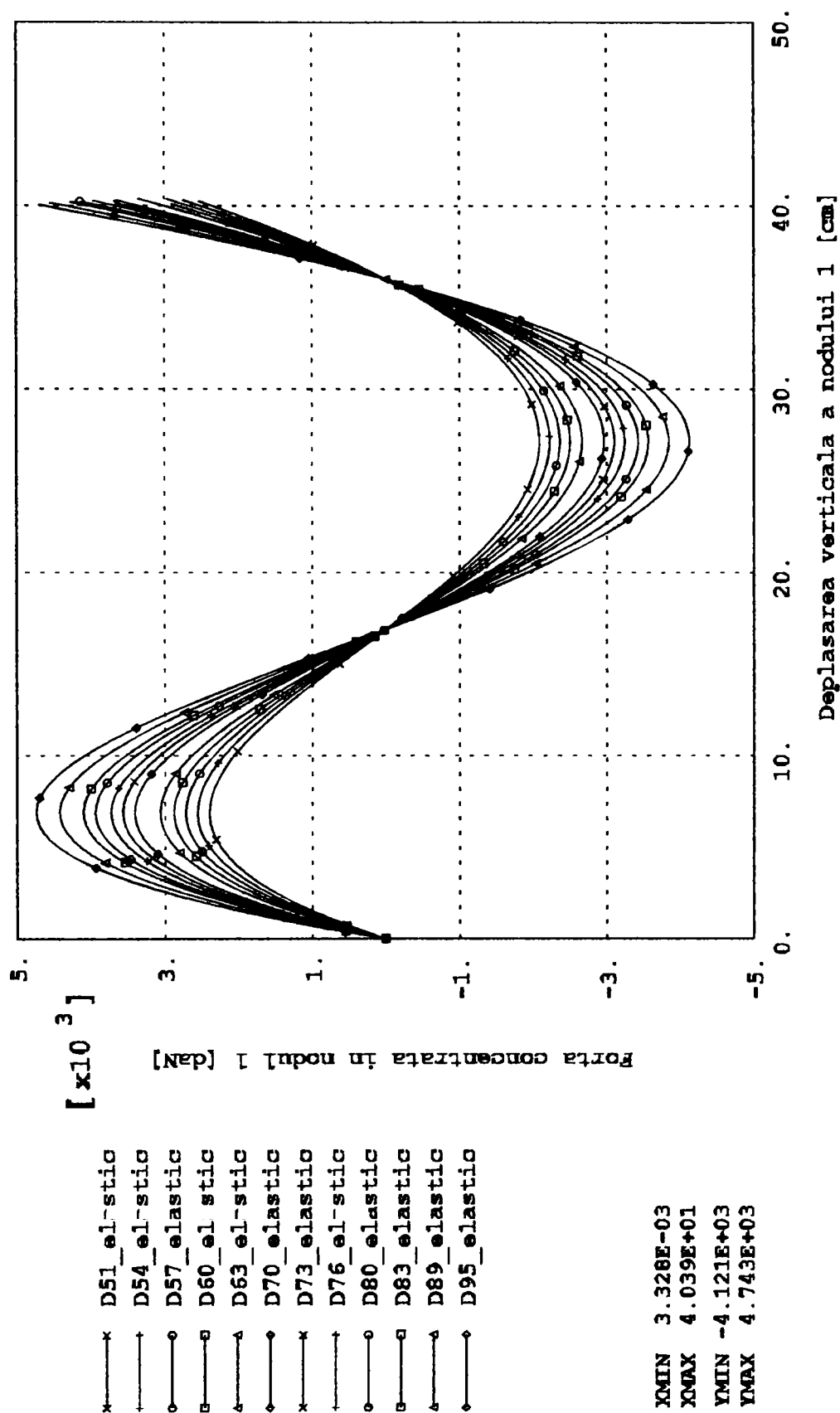


Fig. 4.47 Curbele încărcare - deplasare corespunzătoare nodului 1 al cupolei perfecte cu 24 de bare sub o încărcare cu o forță concentrată și material elastic

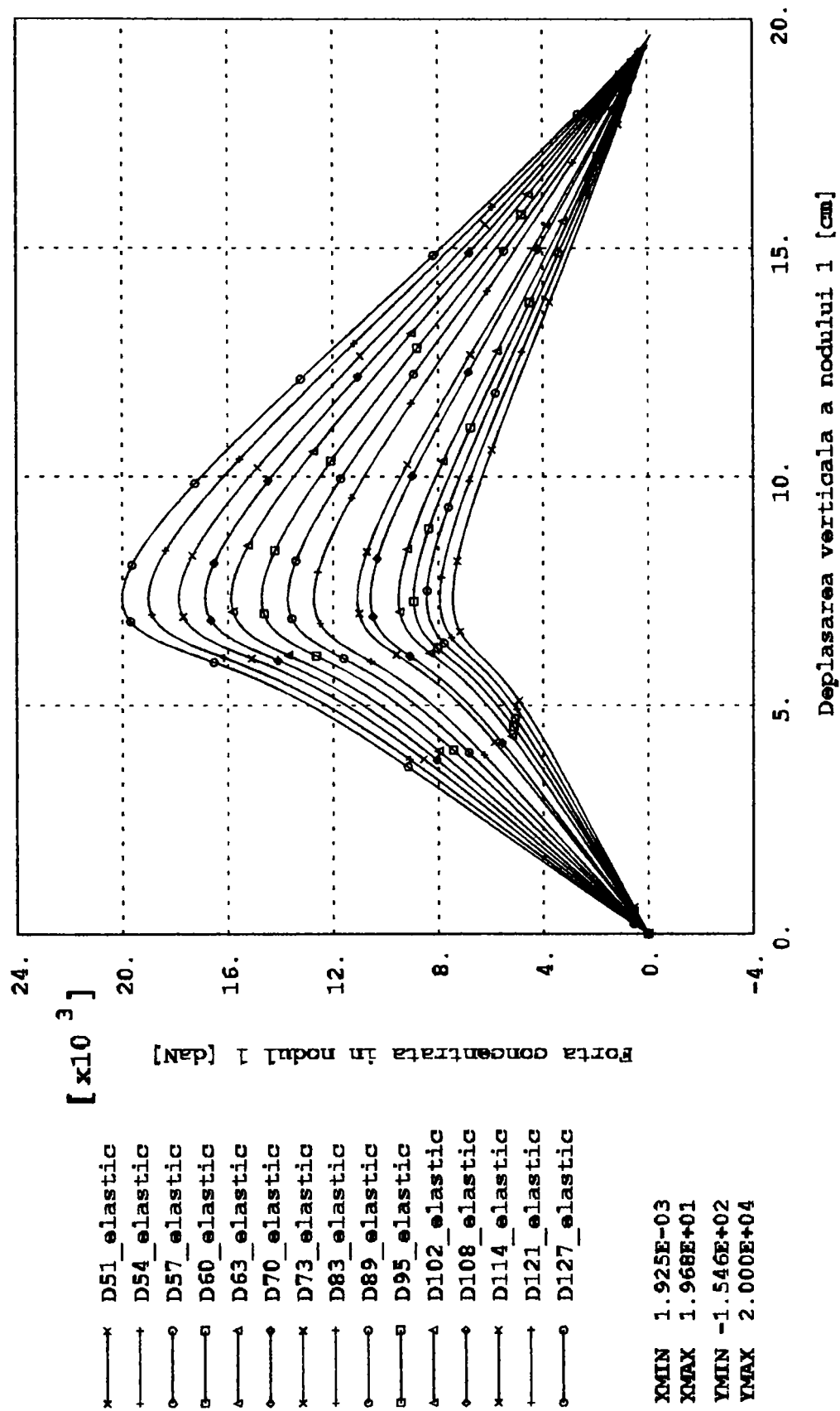


Fig. 4.48 Curbele încărcare - deplasare corespunzătoare nodului 1 al cupolei perfecte cu 24 de bare sub o încărcare cu șapte forțe concentrate și material elastic

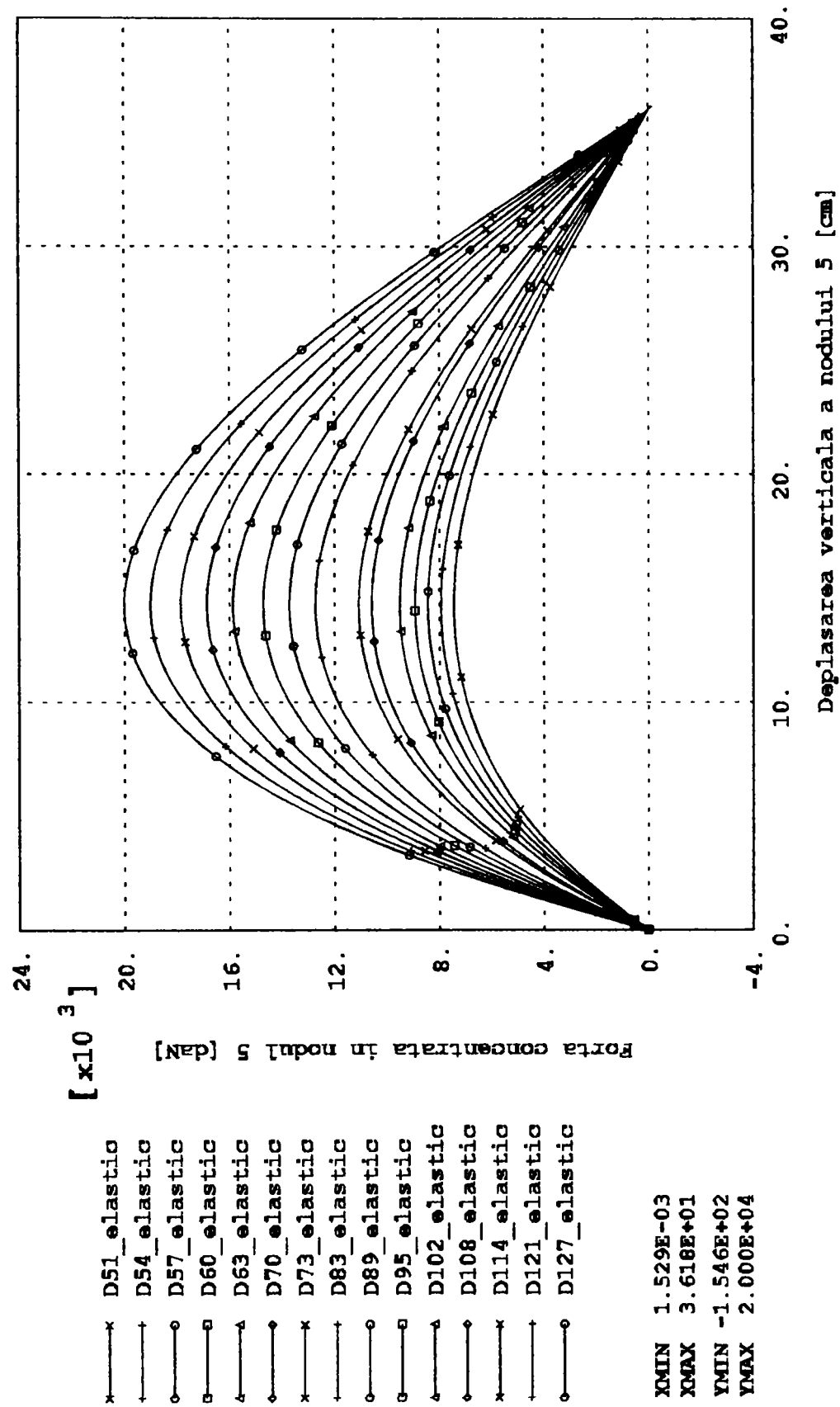


Fig. 4.49 Curbele încărcare - deplasare corespunzătoare nodului 5 al inelului cupolei perfecte cu 24 de bare sub o încărcare cu șapte forțe concentrate și material elastic

Material elastic, $D=89 \times 6$ mm

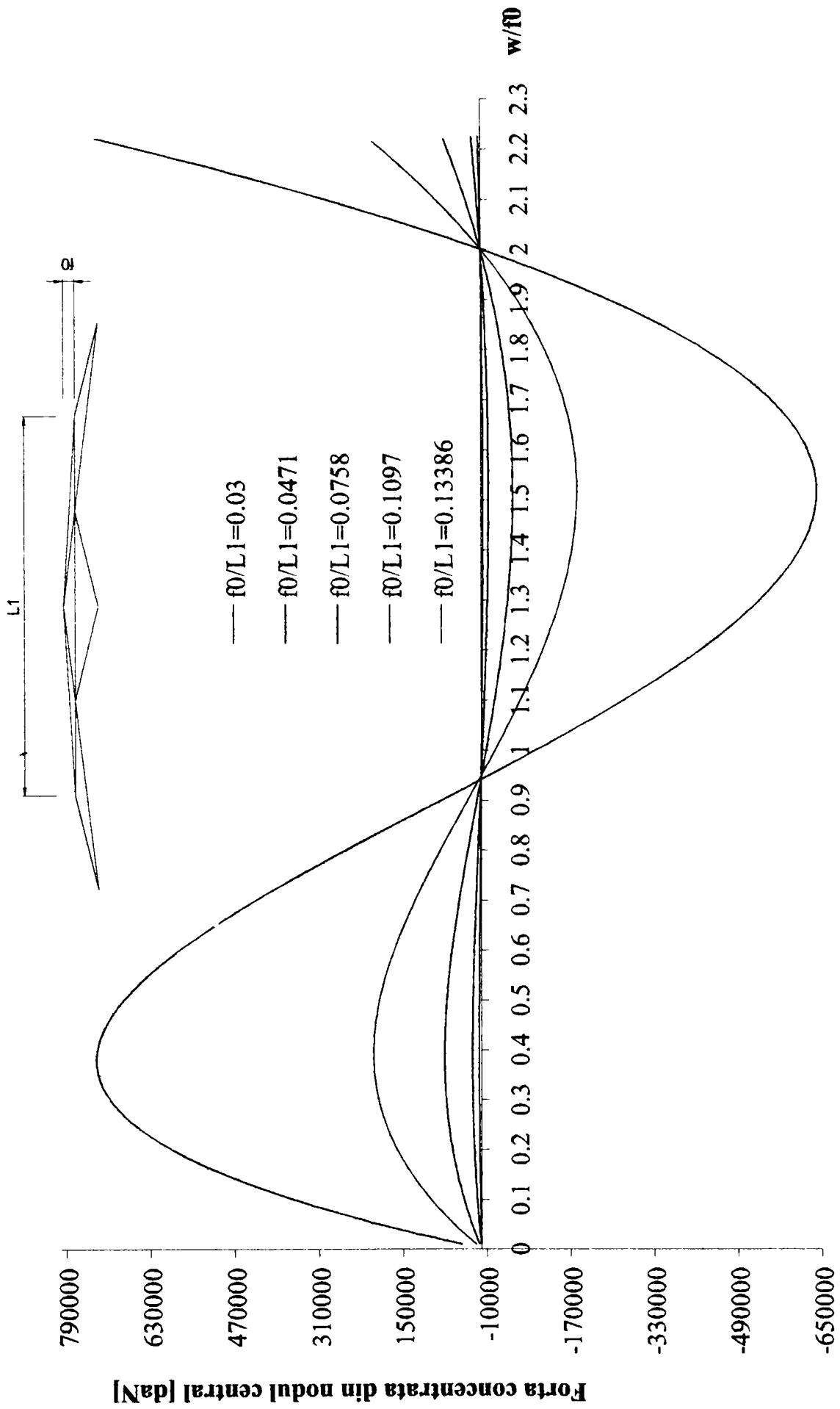


Fig. 4.50 Curbele incarcare -- deplasare la diferite cupole perfecte cu 24 de bare din incarcarea cu o forta concentrata in nodul central

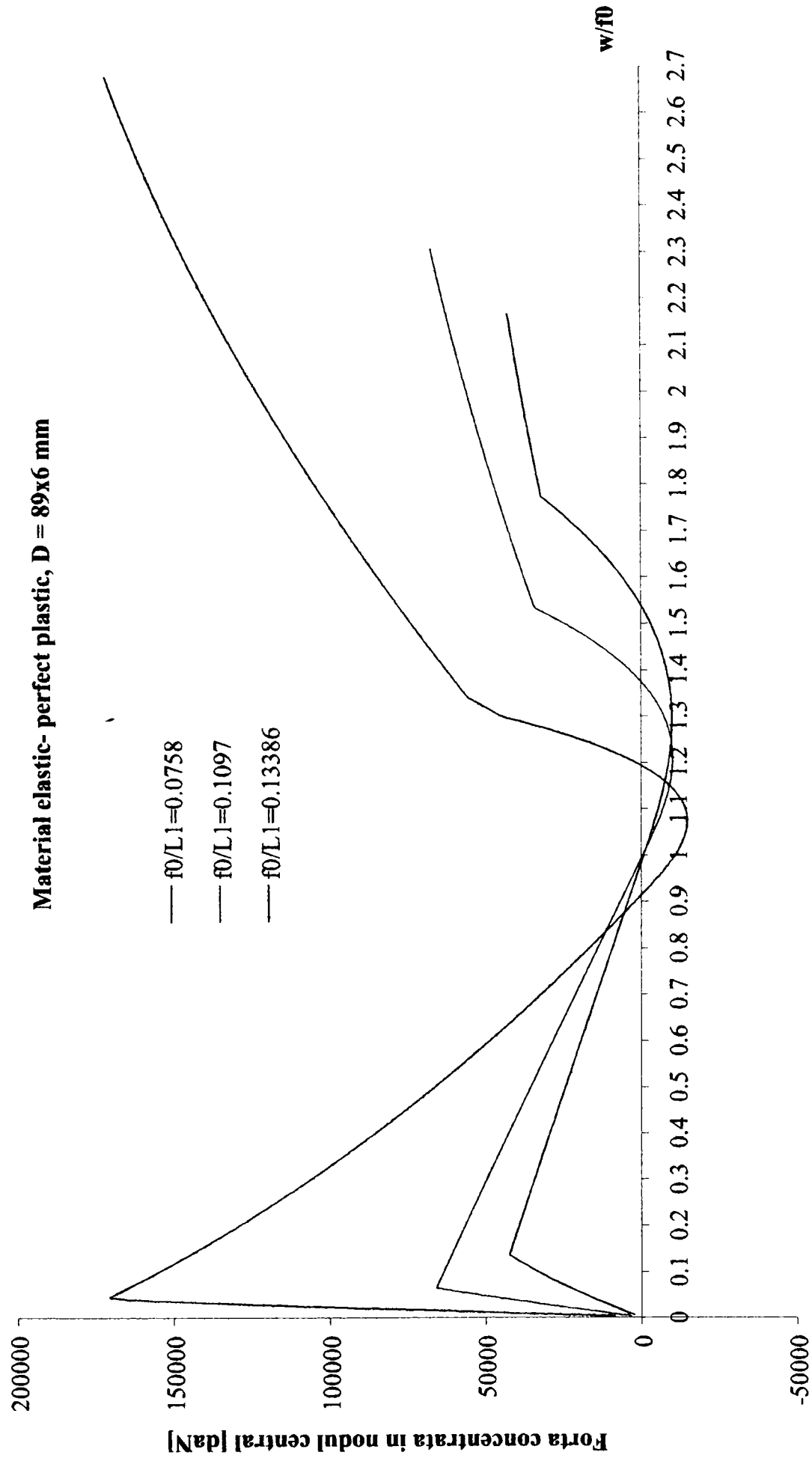


Fig. 4.51 Curbele incarcare – deplasare la diferite cupole perfecte cu 24 de bare din incarcarea cu o forta concentrata in nodul central

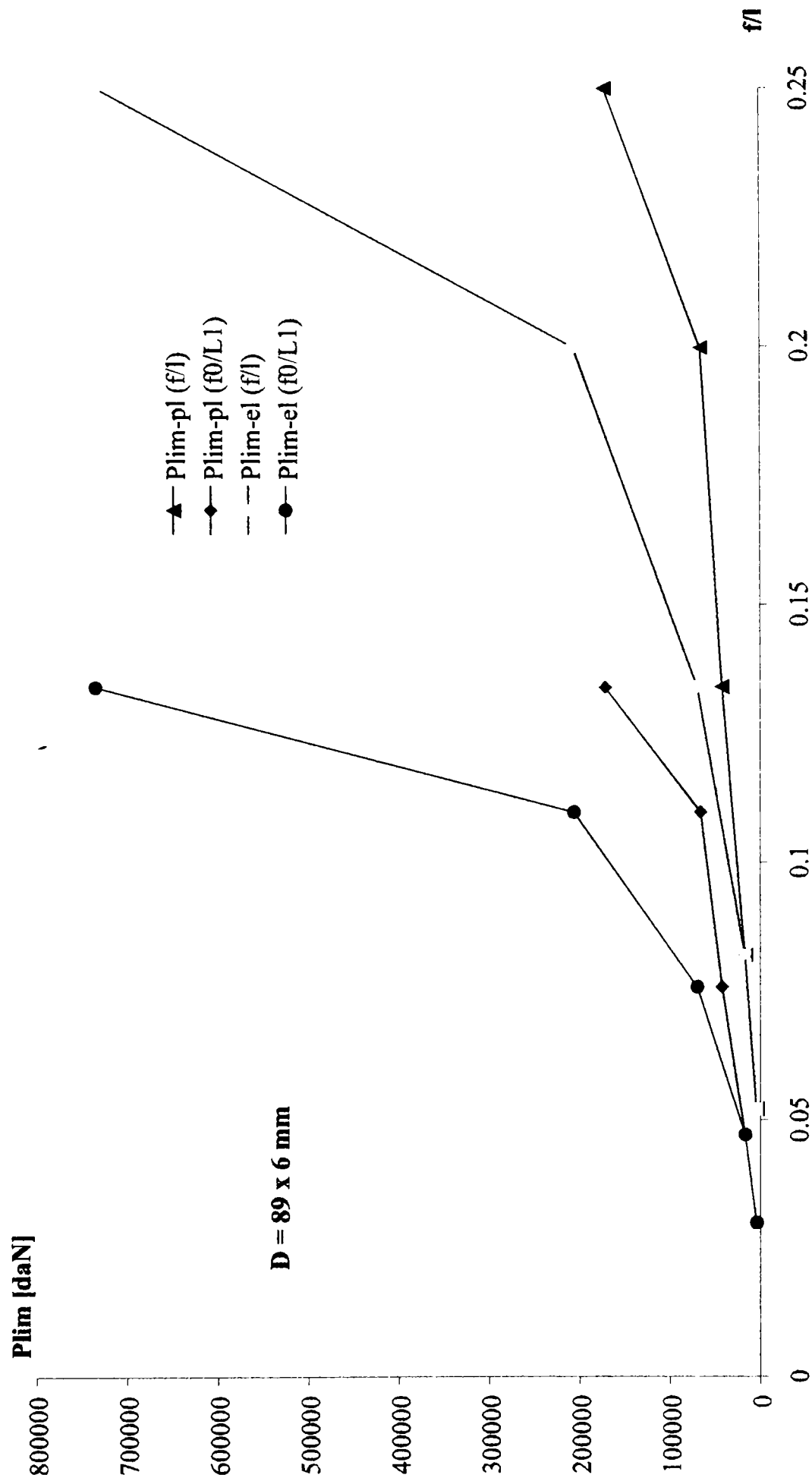


Fig. 4.52 Incarcarea de limitare pentru cupola perfecta cu 24 de bare din incarcarea cu o forta concentrata in nodul central

În tabelul 4.8. se prezintă încărcarea de limitare pentru cupolele cu 24 bare încărcate cu o forță concentrată având barele cu diametrul de 89 mm, grosimea peretelui de 6 mm și din oțel OL 52 respectiv încărcate cu 7 forțe concentrate când secțiunea barelor este de 121 x 6 mm, pentru diferite rapoarte f/l.

Tabelul 4.8

Raportul f/l	Secțiunea barei [mm]	Încărcarea din nod care produce instabilitatea generală P_{lim} [daN]				
		1 forță concentrată		Secțiunea barei [mm]	7 forțe concentrate egale	
		OL 52 Elastic	OL 52 Elastic- perfect plastic		OL 52 Elastic	OL 52 Elastic - perfect plastic
0,052	89 x 6	4423	-	121 x 6	19019	13167
0,082		16914	-		-	22990
0,134		69724	42370		-	38025
0,200		20550	65820		-	55085
0,250		364230	81345		-	66450

Se observă că încărcarea de limitare pentru oțelul cu comportare elastică - perfect plastică este mai mică cu 39 % - 78% față de încărcarea de limitare a oțelului cu comportare elastică în cazul încărcării cu o forță concentrată. În cazul încărcării cu șapte forțe concentrate reducerea este de 31% pentru bara cu secțiunea 121x6 mm și cupola cu f/l = 0,052. Pentru cupolele cu f/l > 0,084 oțelul se comportă elastic - perfect plastic.

Din figurile 4.50, 4.51, și 4.52 se observă o neliniaritate puternică în cazul cupolelor care lucrează în stadiul elastic și o neliniaritate mai redusă în cazul materialului care lucrează în stadiul elastic-perfect plastic. Încărcarea de limitare crește odată cu creșterea raportului f/l.

4.4.2.5 Prezentarea comparativă a rezultatelor

Din încărcarea cu șapte forțe concentrate, aplicate în nodurile interioare, ale cupolei s-a studiat variația încărcărilor aplicate în nod în funcție de diametrul barei. Pentru toate modurile de instabilitate rezultatele sunt determinate pentru un oțel OL 37 cu limita de curgere $\sigma_c = 2400 \text{ daN} / \text{cm}^2$, barele având secțiunea inelară, lungimea de 300 cm și formând o cupolă cu $l = 10335 \text{ mm}$ și cu o săgeată $f = 540 \text{ mm}$.

Se observă că prima dată flambează barele de tip 1 din structură. Barele de tip 2 sunt legate de nodul central și au încărcarea critică mai mică decât a barelor din inelul 1. Diferențele sunt cuprinse între 5,77% și 25,36% după cum diametrul variază între 51 și 73 mm.

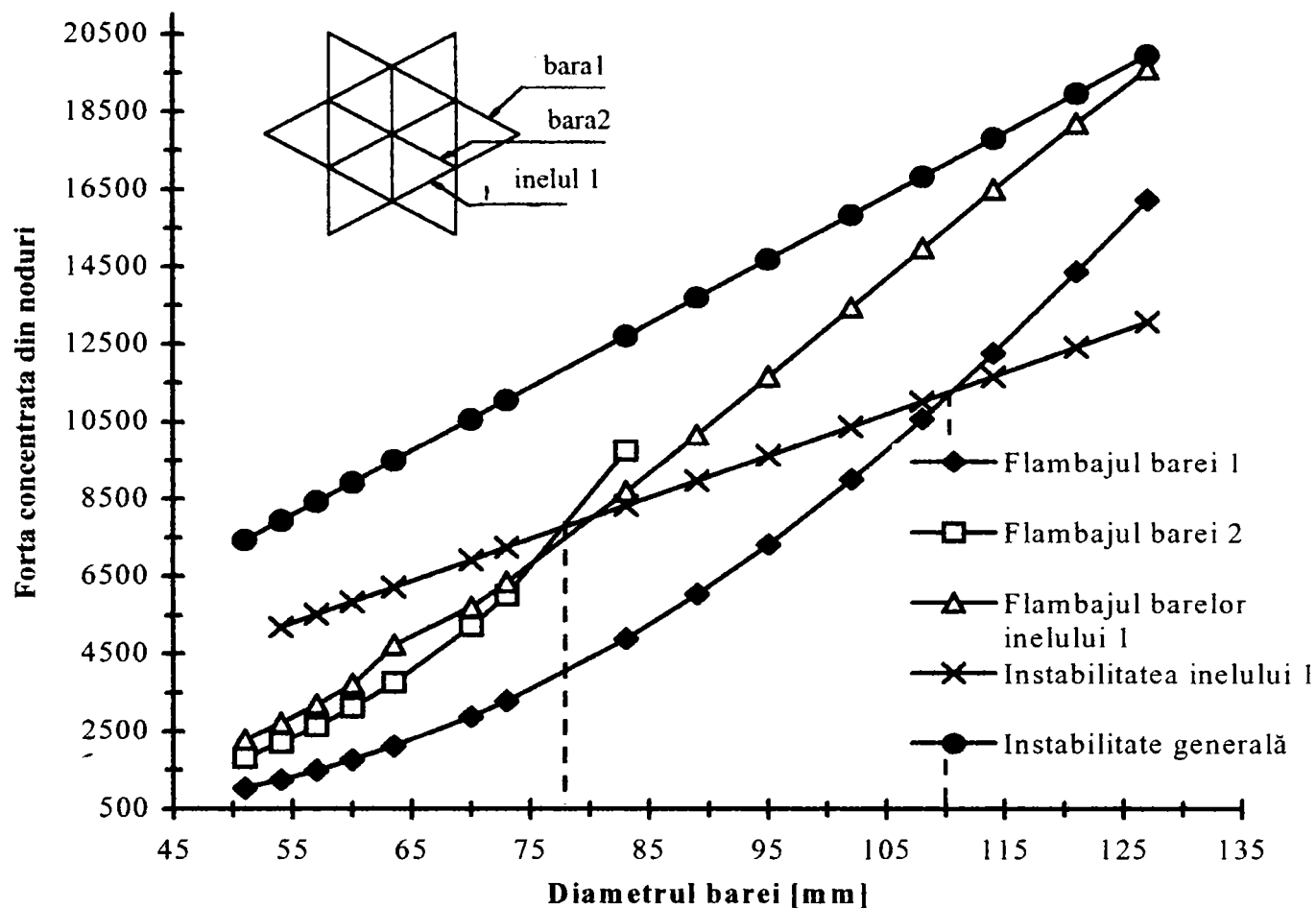


Fig. 4.53 Încărcările critice pentru diferite moduri de flambaj ale cupolei perfecte cu 24 de bare din încărcarea cu forțe egale în nodurile interioare

Pentru diametrele de bară cuprinse între 75 și 80 mm instabilitatea inelului 1 este cuplată cu flambajul barei de tip 2 și cu flambajul barelor din inelul 1. La diametrul de 110 mm instabilitatea inelului 1 este cuplată cu flambajul barei 1. În intervalul care conține diametrele mai mici de 110 mm flambajul inelului intervine înainte de pierderea stabilității generale a structurii. Structurile alcătuite din bare cu diametre mai mari de 110 mm își pierd stabilitatea prin instabilitatea inelului. Rezultatele prezentate în figura 4.53 sunt foarte importante pentru inginerul proiectant de structuri, deoarece permit identificarea imediată a tipului de instabilitate și a încărcării critice.

4.4.3 Modelul 3. Cupola alcătuită din 72 bare și 37 noduri

A treia cupolă cercetată este alcătuită din 72 de bare care sunt prinse articulat în 37 de noduri interioare și de reazem (Fig. 4.54). Nodurile sunt dispuse pe o sferă, iar barele au o lungime de 3000 mm cu secțiune inelară. Barele se consideră executate din oțel OL 37 și OL 52, care lucrează în stadiul elastic și elastic - perfect plastic. Numerotarea nodurilor și a barelor cupolei se prezintă în figurile 4.55 și 4.56.

Forțele exterioare au fost aplicate în două ipoteze:

- 1 forță concentrată în nodul central (Fig. 4.57)
- 19 forțe concentrate în nodurile interioare ale cupolei (Fig. 4.58).

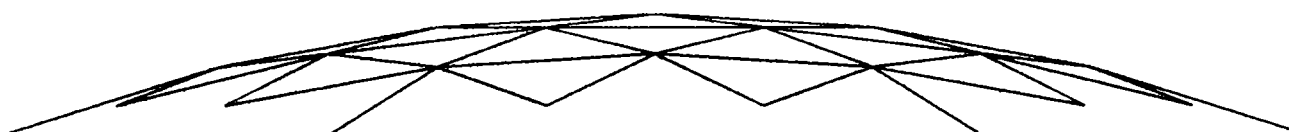


Fig. 4.54 Vedere laterală a cupolei cu 72 de bare

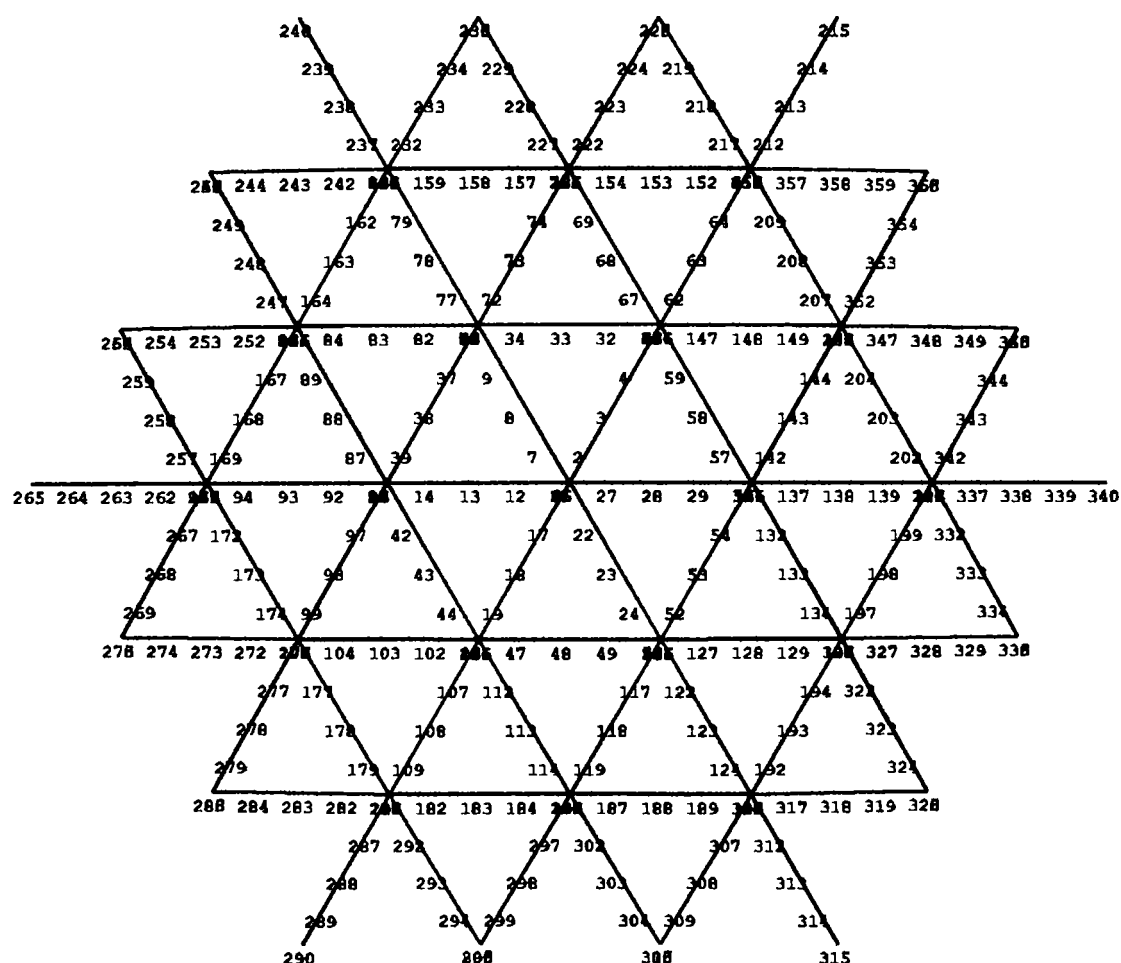


Fig. 4.55 Numerotarea nodurilor pentru cupola cu 72 de bare

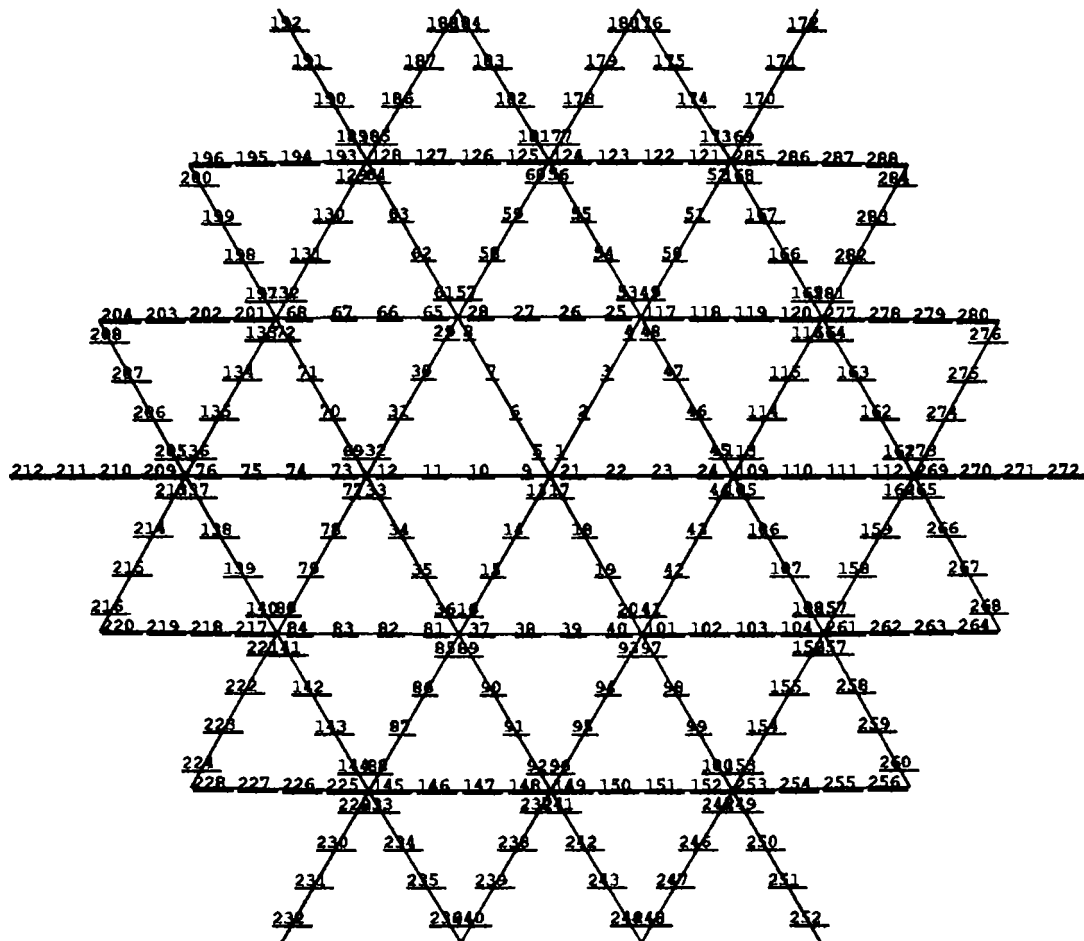


Fig. 4.56 Numerotarea elementelor pentru cupola cu 72 de bare

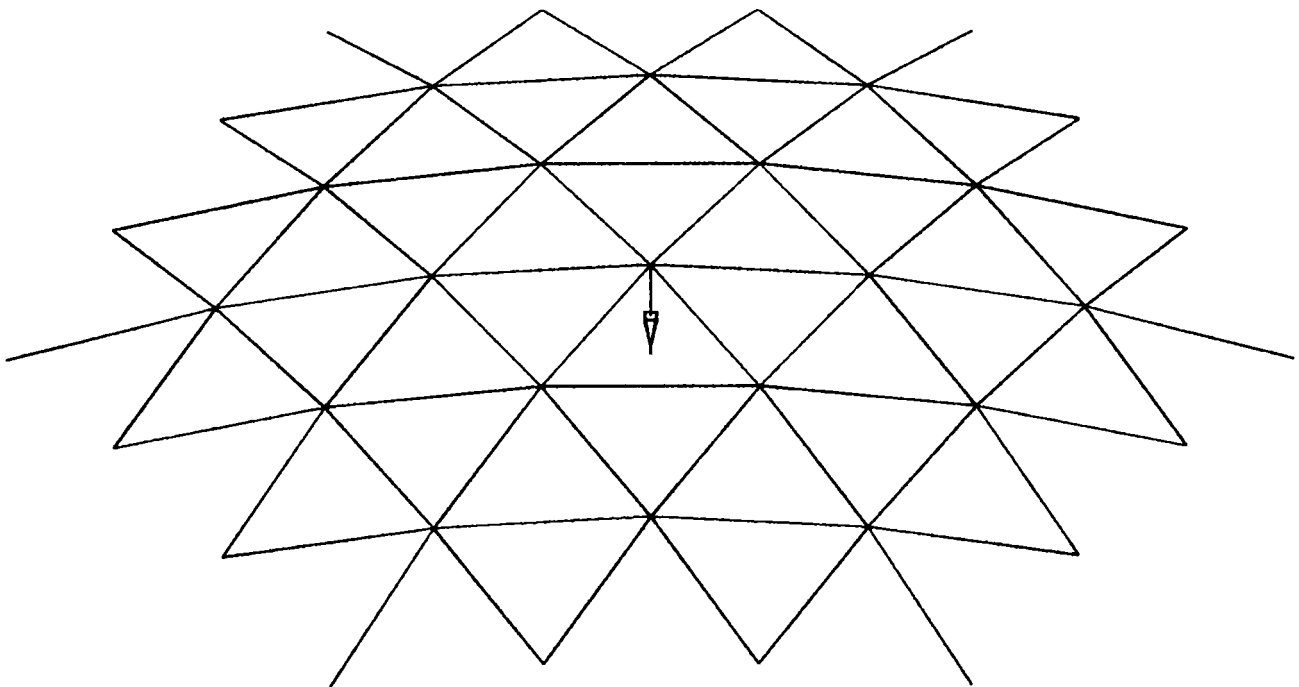


Fig. 4.57 Schema de încărcare cu o forță în nodul central pentru cupola cu 72 de bare

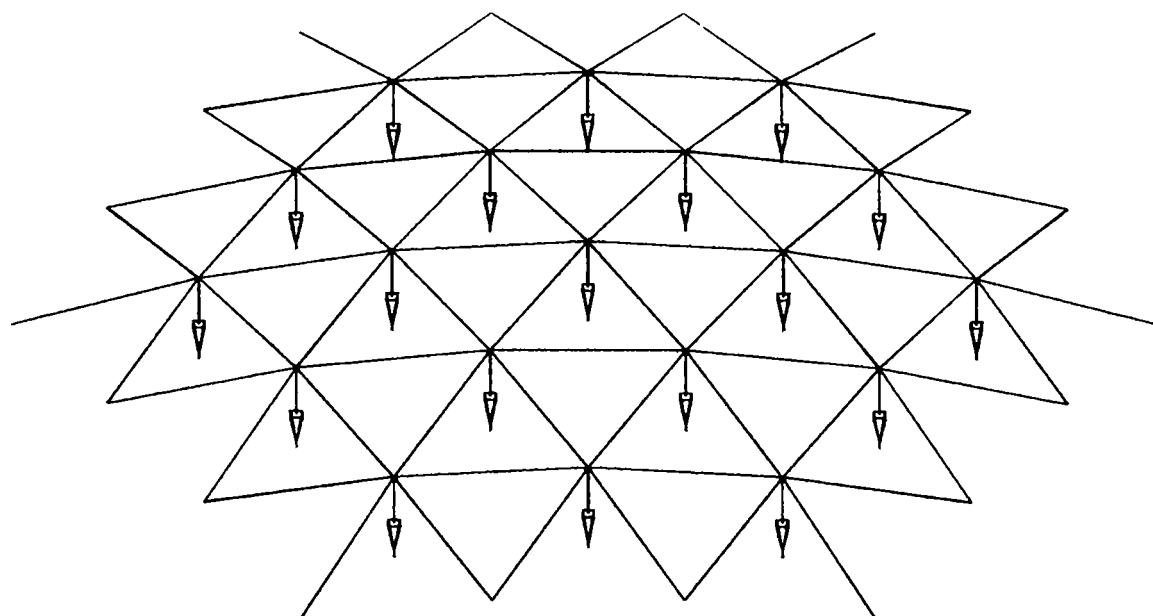


Fig. 4.58 Schema de încărcare cu 19 forțe concentrate egale în nodurile interioare pentru cupola cu 72 de bare

Pentru a evidenția ordinea de apariție a diferitelor moduri de instabilitate s-a utilizat programul ABAQUS, care permite acest studiu.

Pentru cupola analizată s-a considerat ca material de execuție oțelul OL 37 cu limita de curgere $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$. Deschiderea cupolei este de 17624 mm, săgeata $f = 1604 \text{ mm}$ și raportul $f/l = 0,091$. Din încărcarea cu o forță concentrată aplicată în nodul central, cupola lucrează în stadiul elastic. Menținând constantă geometria cupolei și modul de încărcare s-a studiat influența variației diametrului barelor (de la 45 mm până la 127,6 mm) asupra încărcării critice.

4.4.3.1 Instabilitatea de bară

Modul propriu pentru instabilitatea de bară se prezintă în figura 4.59. Din încărcarea cupolei cu o forță concentrată, respectiv cu 19 forțe concentrate, se obțin încărcările care produc forțele axiale critice din bară.

În tabelul 4.9 se prezintă forțele aplicate în nod care produc flambajul diferitelor tipuri de bare din cupolă.

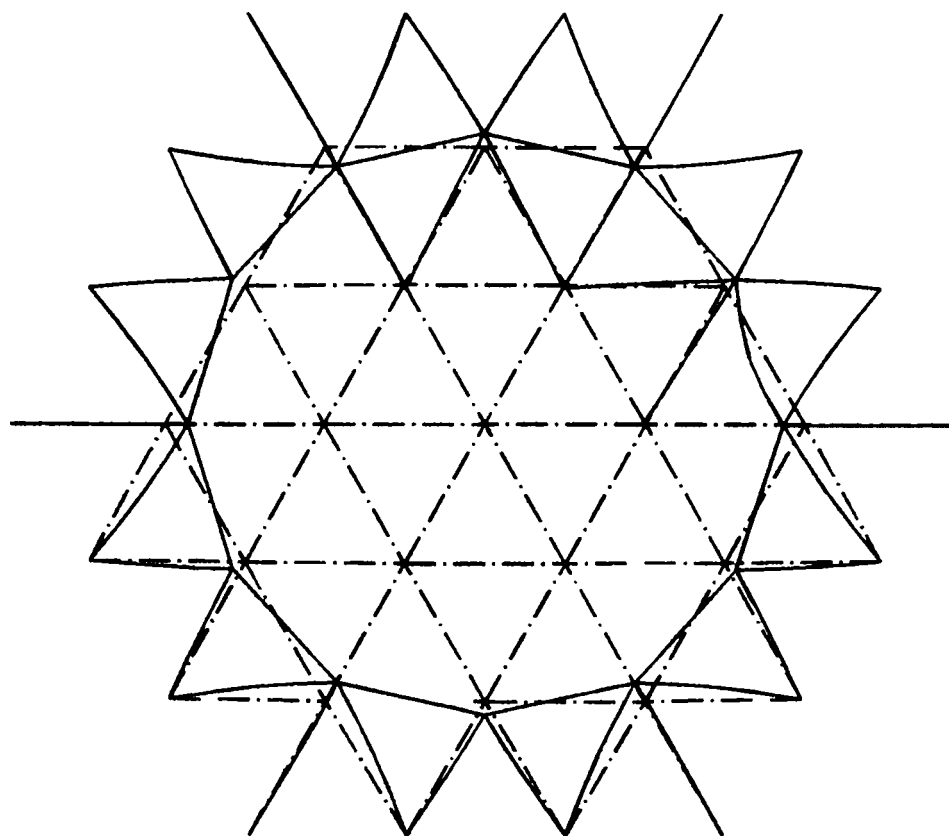


Fig. 4.59 Mod propriu corespunzător flambajului de bară din încărcarea cu 19 forțe concentrate

Tabelul 4.9

Dimensiunile cupolei l, f, f/l Materialul	Diametrul și grosimea peretelui barei	Încărcarea din nod care produce flambajul barei [daN]						
		Încărcarea cu o forță	Încărcarea cu 19 forțe					
			Bara 1	Bara 3	Bara 5	Bara 2	Bara 4	Bara 6
l = 1762,38mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 Material OL 37 $\sigma_c = 24 \text{ daN/mm}^2$	51x6	1572	1569	1805	1848	1858	1890	2087
	54x6	1855	1897	2189	2240	2254	2293	2520
	57x6	2154	2268	2624	2683	2705	2751	3008
	60x6	2463	2683	3114	3186	3214	32696	3550
	63,5 x 6	2826	3225	3756	3843	3886	3852	4254
	70x6	3435	4406	5167	5288	5387	5478	5766
	73x6	3638	5029	5915	6060	6206	6313	6556
	83x6		7477	8791	9152	9450		
	89x6		9201	10583		11993		
	95x6		11050	12068				
102x6		13046						

Din valorile prezentate în tabelul 4.9. se observă că încărcarea din nod care produce flambajul barelor crește odată cu diametrul acestora. Pentru încărcarea cupolei cu 19 forțe concentrate s-a determinat și ordinea în care flambează barele. Creșterea încărcării din nod

corespunzătoare flambajului barei de tip 6 față de cea corespunzătoare flambajului barei de tip 1 este cuprinsă între 15,6% pentru bara de 51 x 6 mm și 8,1% pentru bara cu 73 x 6 mm.

Se remarcă faptul că prin majorarea secțiunii barelor de tip 1, 2 și 6 crește încărcarea de flambaj. Bara 1 în acest caz nu mai flambează înaintea celorlalte bare din cupolă.

4.4.3.2 Instabilitatea de nod

Modul propriu pentru instabilitatea de nod se prezintă în figura 4.60. Pentru încărcarea cu o forță concentrată în nodul central, valoarea forței corespunzătoare instabilității de nod se prezintă în tabelul 4.10.

Tabelul 4.10.

Dimensiunile cupolei Material	Diametrele și grosimea pereților barei [mm]	Forța concentrată
$l = 1762,38 \text{ mm}$ $f = 160,45 \text{ mm}$ $f / l = 0,091$ OL 37 $\sigma_c = 24 \text{ daN/mm}^2$	51x6	2443
	54x6	2606
	57x6	2769
	60x6	2932
	63,5x6	3122
	70x6	3475
	76x6	3801
	80x6	4018
	83x6	4181
	89x6	4507
	95x6	4832

Se observă că încărcarea concentrată din nod crește odată cu diametrul barelor care alcătuiesc cupola.

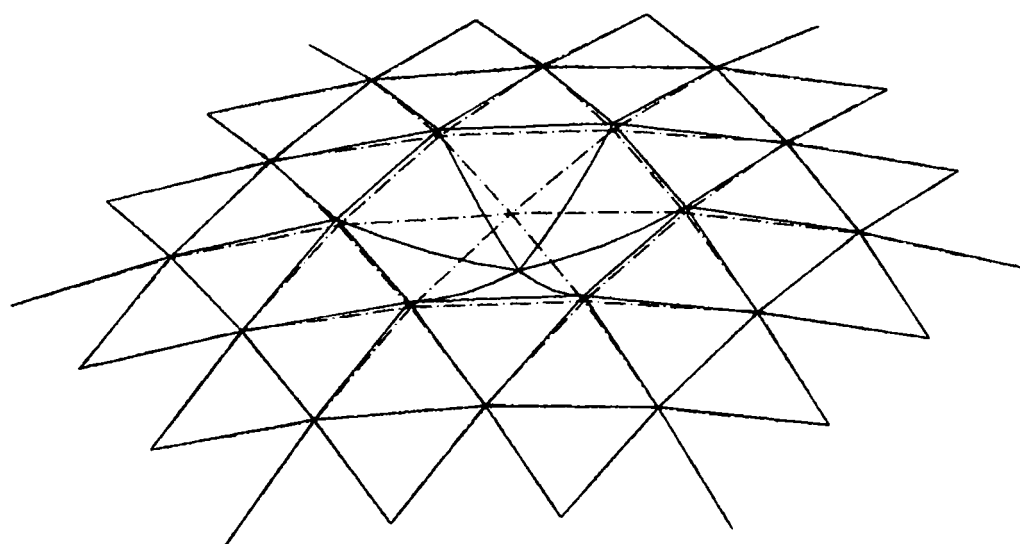


Fig. 4.60 Instabilitatea nodului central din încărcarea cu o forță concentrată

4.4.3.3 Instabilitatea de inel

Modul propriu corespunzător instabilității de inel din încărcarea cu 19 forțe concentrate aplicate în nodurile interioare ale cupolei se prezintă în figura 4.61.

Încărcarea din nod care produce instabilitatea de inel s-a determinat folosind programul ABAQUS și are valorile prezentate în tabelul 4.11.

Se observă că în acest mod de instabilitate pot să flambeze barele din inelul 1 și apoi barele din inelul 2. Din analiza acestor valori rezultă că încărcarea aplicată în noduri are practic aceeași valoare, însă deplasările sunt diferite. Deplasarea maximă se obține pentru nodul central și este aproximativ dublă față de deplasarea nodurilor de pe inel.

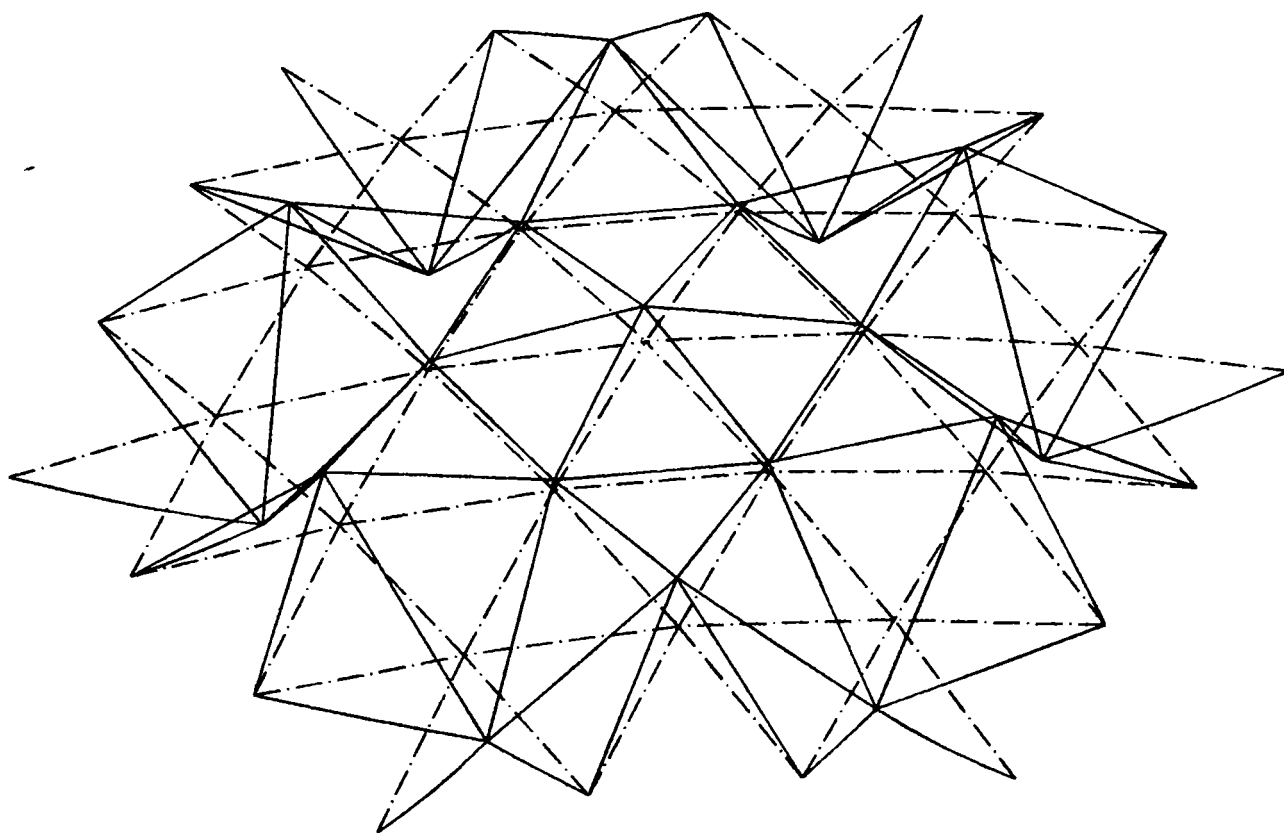


Fig. 4.61 Instabilitatea inelului cupolei din încărcarea cu 19 forțe concentrate

Tabelul 4.11

Dimensiunile cupolei l,t, f/l, Material	Diametrele și grosimea pereților barei [mm]	Încărcarea din nod care produce flambajul de inel pentru cupola cu 19 forțe egale [daN]	
		Inelul 1	Inelul 2
l = 1762,38 mm f = 160,45 mm f/l = 0,091 Material OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	1878	1895
	54x6	2260	2297
	57x6	2690	2757
	60x6	3165	3276
	63,5x6	3780	3961
	70x6	5096	5485
	73x6	5780	6308
	83x6	8395	9589
	89x6	10183	
95x6	11939		

Se observă că forțele din nodurile cupolei care produc flambajul de inel cresc cu diametrul barelor cupolei. Diferența între forțele din nod ce produc instabilitatea celor două inele este redusă. Creșterea capacității portante a cupolei se poate asigura prin mărirea secțiunii barelor primului inel al cupolei.

4.4.3.4 Instabilitatea generală

Modul propriu pentru instabilitatea generală din încărcarea cu 19 forțe concentrate în nodurile interioare ale cupolei se prezintă în figura 4.62.

Curbele de încărcare - deplasare din încărcarea cu 19 forțe concentrate pentru nodul central 1 și nodurile de pe inel 5, 65 și 75 se prezintă în figurile 4.63, 4.64, 4.65, 4.66, 4.67 și 4.68. Se remarcă și la această cupolă că încărcarea de limitare este influențată puternic de comportarea neliniară a structurii. Încărcările de limitare pentru instabilitatea generală se prezintă în tabelul 4.12.

Tabelul 4.12

Dimensiunile cupolei l, f, f/l Material	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Încărcarea de limitare [daN]	
		1 forță concentrată	19 forțe concentrate
l = 1762,38 mm f = 160,45 f/l = 0,051 Material OL 37 $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$	51x6	2443	6163
	54x6	2606	6572
	57x6	2769	6982
	60x6	2932	7395
	63,5x6	3122	7894
	70x6	3475	8765
	73x6	4181	10544
	83x6	4181	10544
	89x6	4507	11367
	95x6	4832	12188
	102x6		13147
	108x6		13968
114x6		14789	

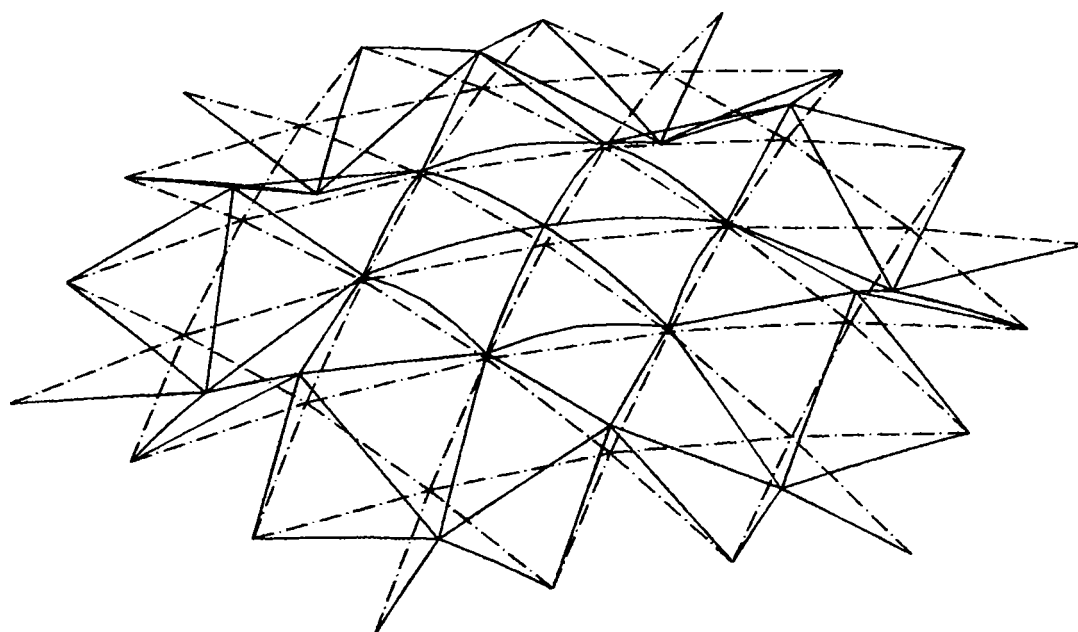


Fig. 4.62 Instabilitatea generală a cupolei din încărcarea cu 19 forțe concentrate

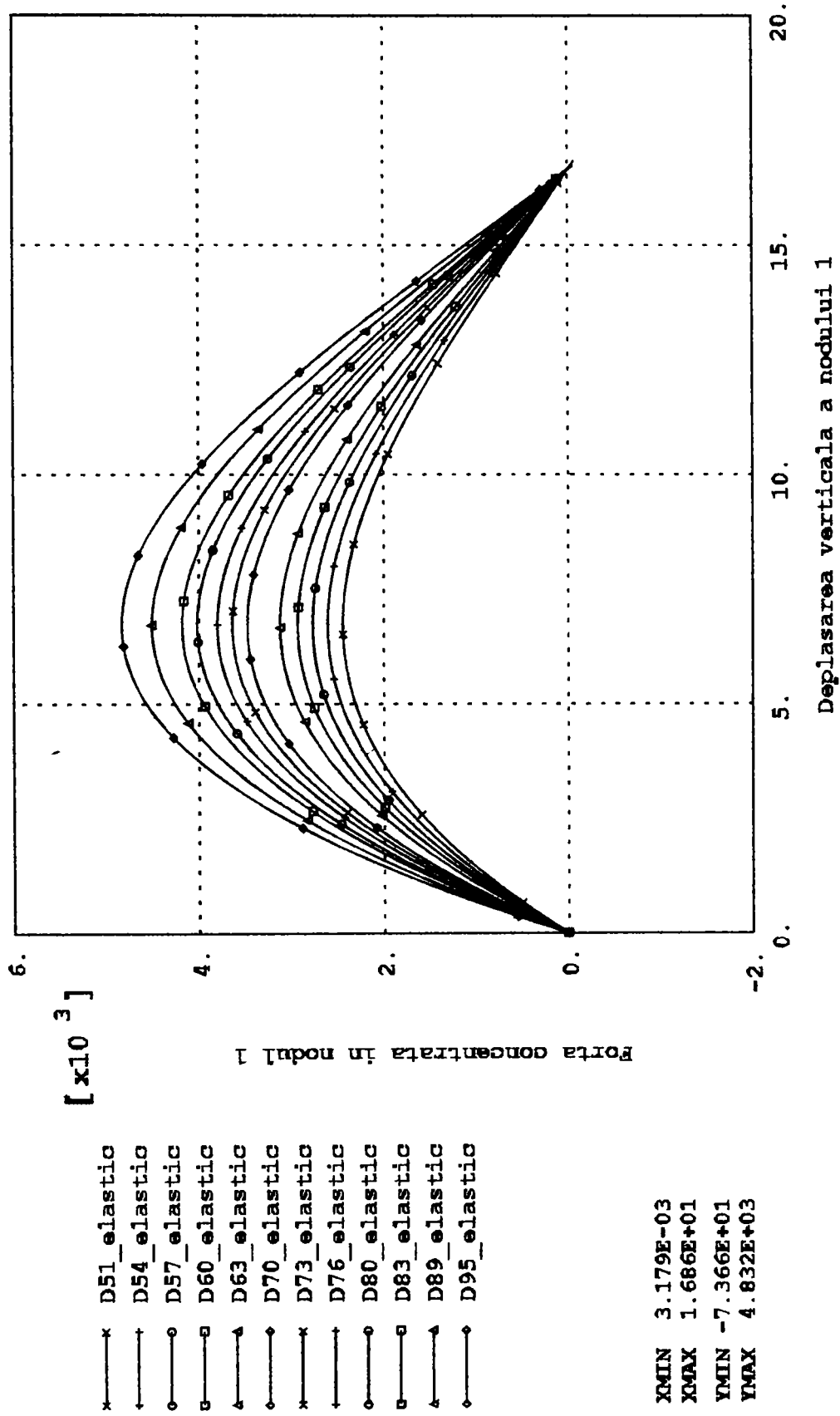


Fig. 4.63 Curbele incarcare - deplasare corespunzatoare nodului central al cupolei perfecte cu 72 de bare sub o incarcare cu o forta concentrata si material elastic

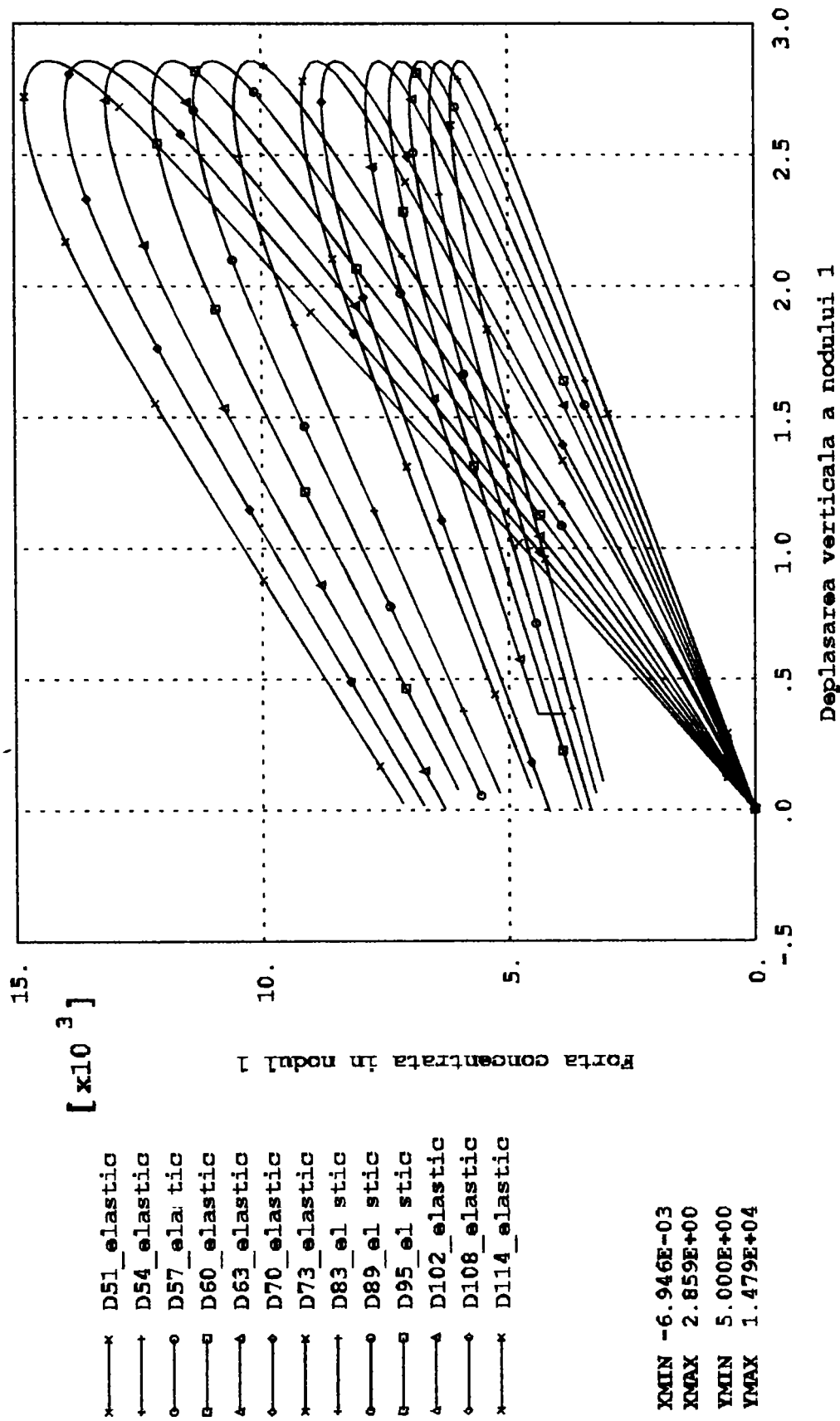


Fig. 4.64 Curbele incarcare - deplasare corespunzatoare nodului central al cupolei perfecte cu 72 de bare sub o incarcare cu 19 forte concentrate si material elastic

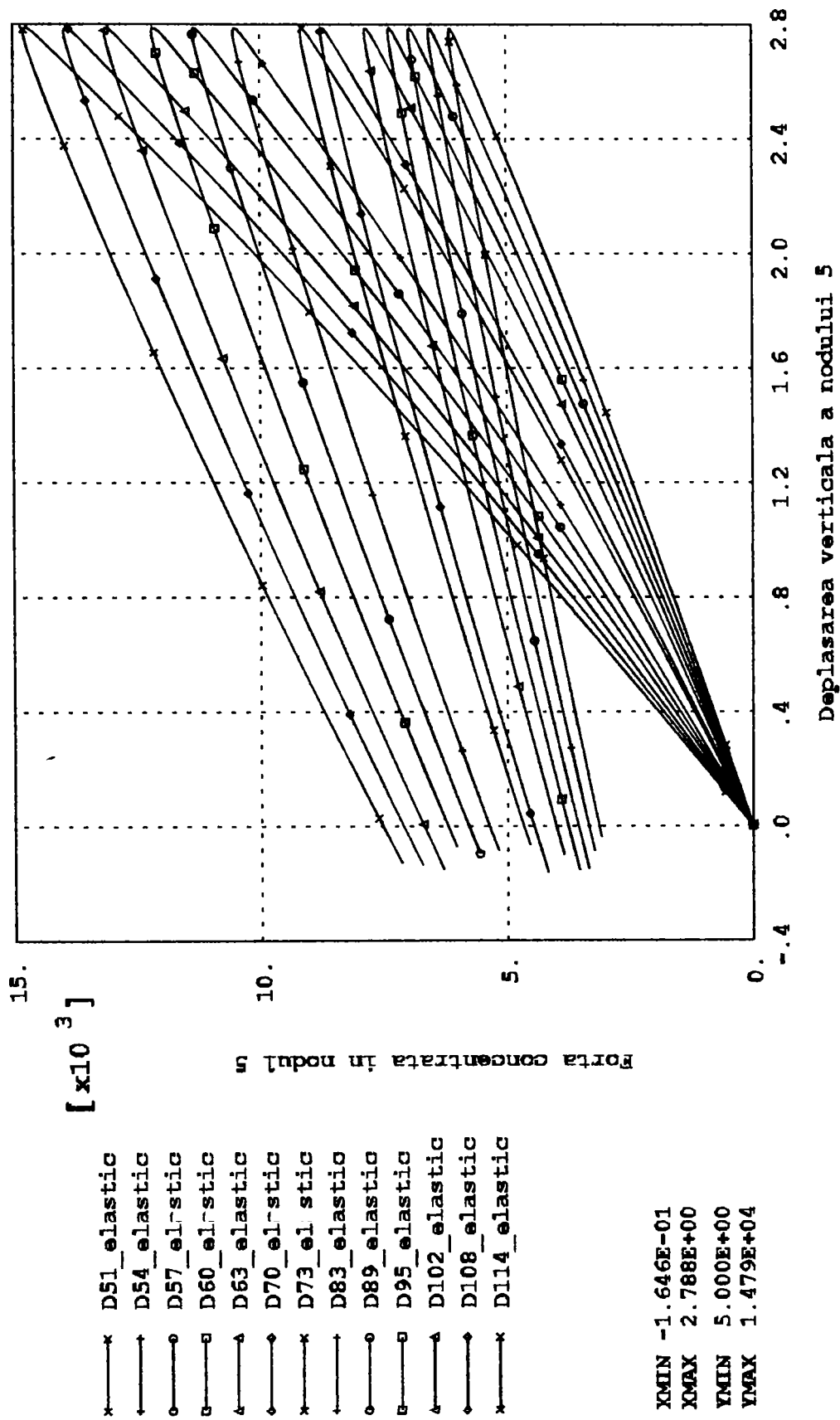


Fig. 4.65 Curbele incarcare - deplasare corespunzatoare nodului nr. 5 al cupolei perfecte cu 72 de bare sub o incarcare cu 19 forte concentrate si material elastic

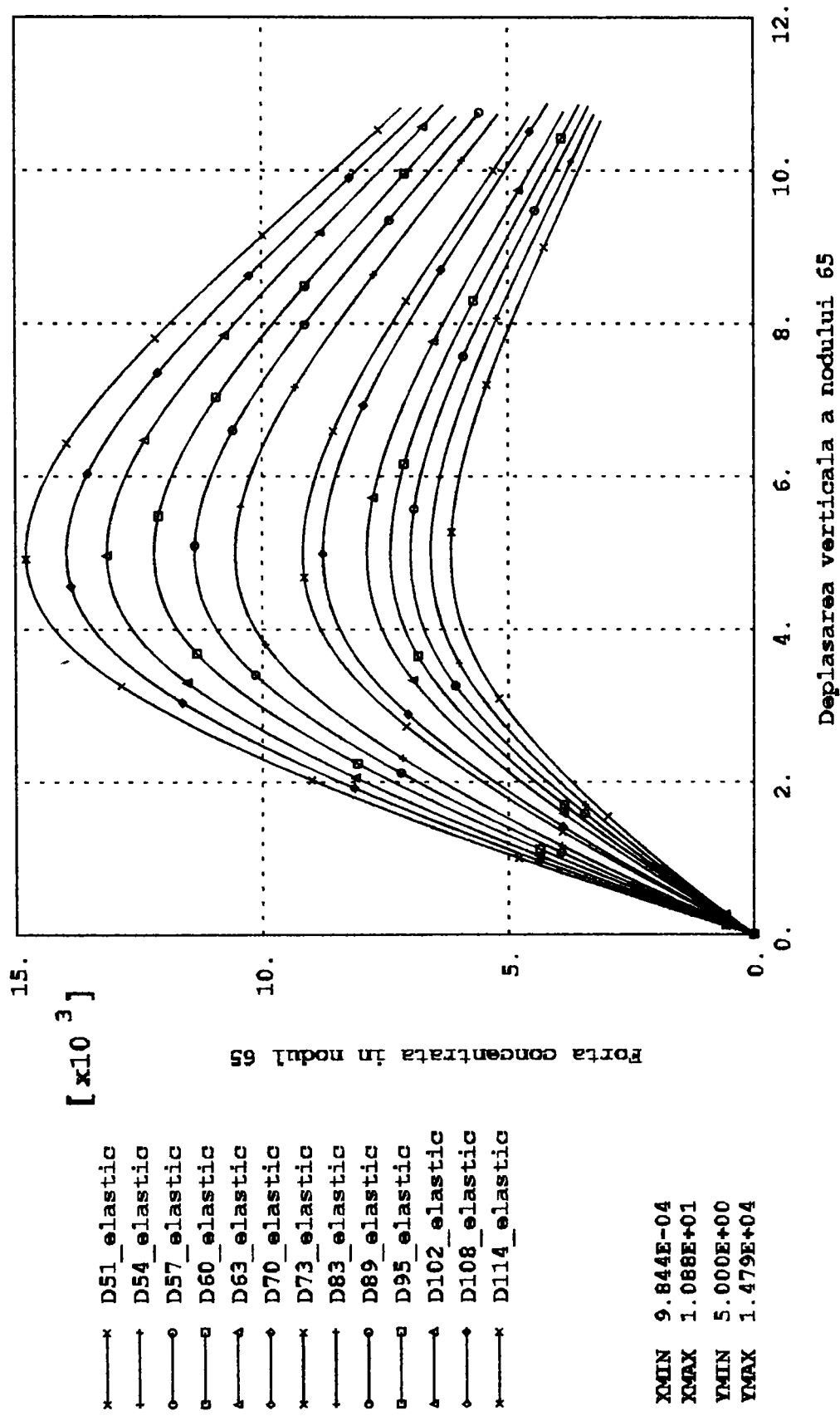


Fig. 4.66 Curbele incarcare - deplasare verticala corespunzatoare nodului nr. 65 al cupolei perfecte cu 72 de bare sub o incarcare cu 19 forte concentrate si material elastic

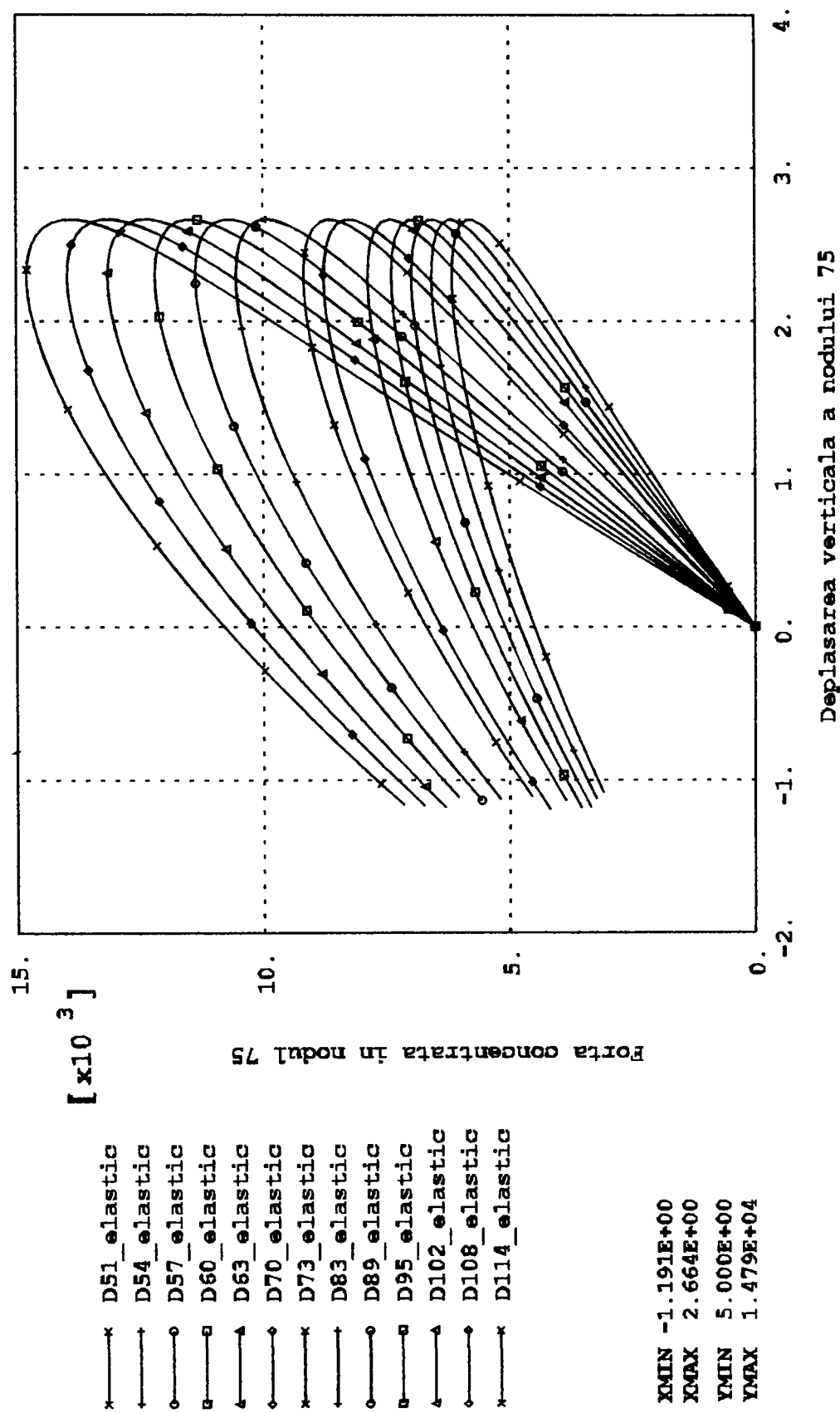


Fig. 4.67 Curbele incarcare - deplasare verticala corespunzatoare nodului nr. 75 al cupolei perfecte cu 72 de bare sub o încărcare cu 19 forțe concentrate și material elastic

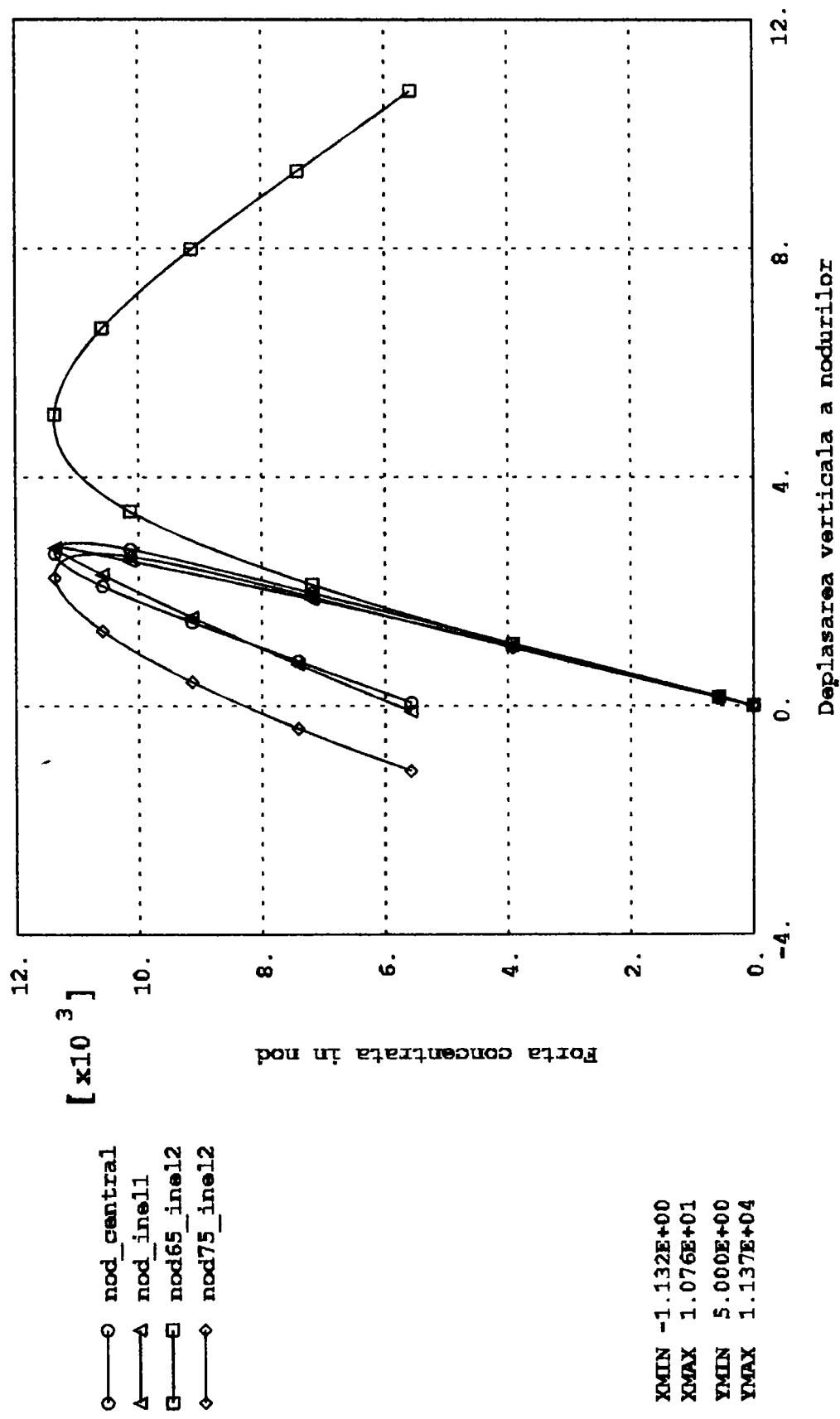


Fig. 4.68 Curbele incarcare - deplasare verticala corespunzatoare nodului central si nodurilor de pe inelele cupolei perfecte cu 72 de bare sub o incarcare cu 19 forte concentrate si material elastic

Încărcarea de limitare obținută în cazul acțiunii a 19 forțe concentrate pe cupolă este mai mare decât încărcarea de limitare dintr-o forță concentrată aplicată în nodul central. Încărcarea de limitare crește cu diametrul barelor cupolei (fig. 4.69) și conduce la cea mai mare forță care se poate aplica în nodul central al cupolei.

4.4.3.5 Prezentarea comparativă a rezultatelor

Variația forței concentrate din cele 19 noduri interioare care produce diferitele moduri de instabilitate în funcție de diametrul barelor se prezintă în figura 4.69.

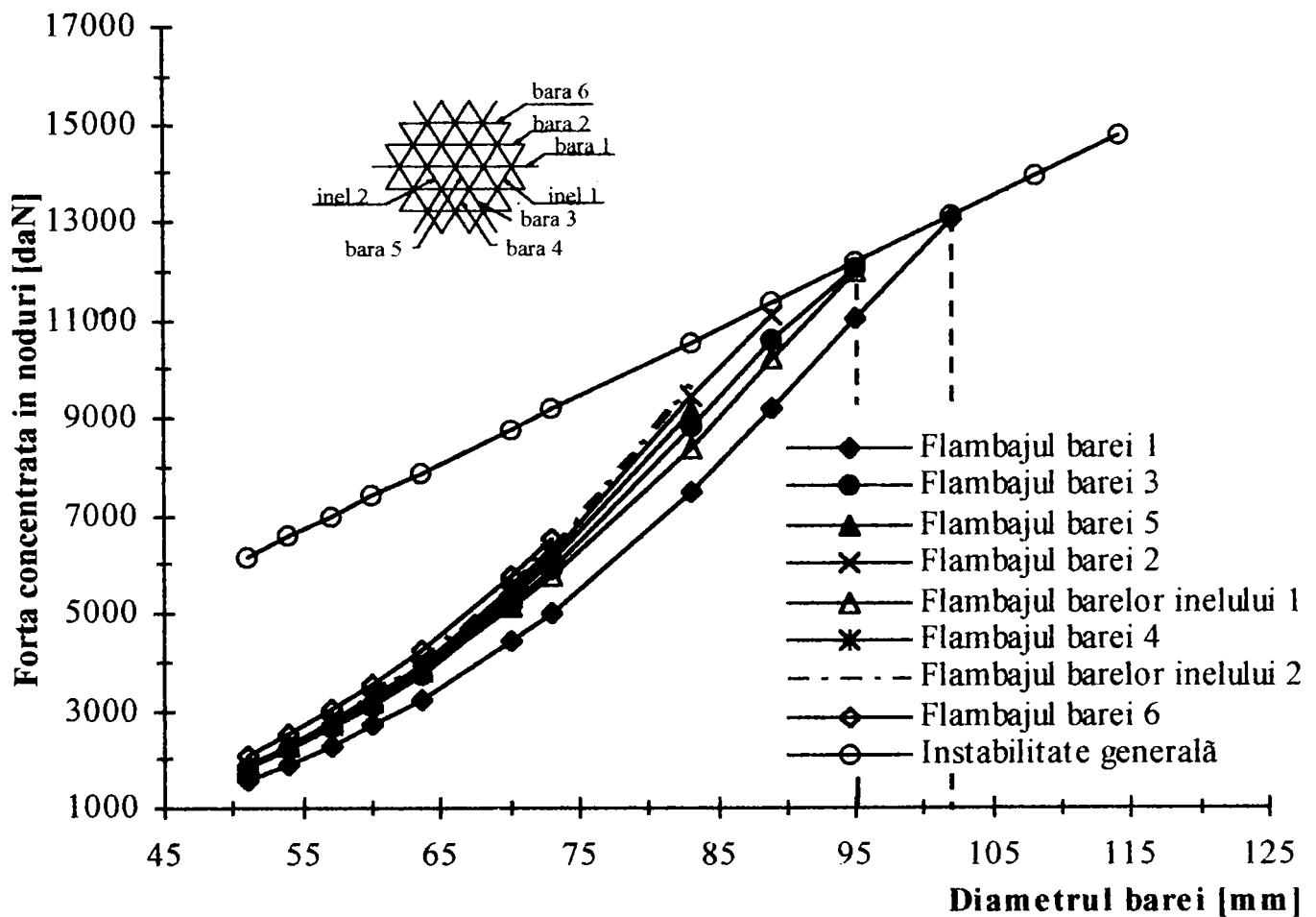


Fig. 4.69 Încărcările critice pentru diferite moduri de flambaj ale cupolei perfecte cu 72 de bare dintr-o încărcare cu 19 forțe concentrate și material elastic

Din figura 4.69 se observă că prima dată flambează barele de tip 1. Restul barelor flambează practic la aceeași încărcare. Diferența între cea mai mică încărcare și cea mai mare pentru barele cu diametru care variază între 51 mm și 73 mm este de 15,62 % până la 10,77%. Pentru diametrul de 95 mm pierderea stabilității generale este cuplată cu flambajul barei de tip 3 și cel al barelor inelului 1.

Analog, la diametrul de 102 mm apare o cuplare a pierderii stabilității generale cu flambajul barelor de tip 1. Dincolo de acest diametru intervine numai pierderea stabilității generale. În plus se observă că încărcarea de limitare variază liniar cu diametrul barelor

În figurile 4.70 și 4.71 se prezintă comparativ încărcarea de limitare prin instabilitate de nod și instabilitate generală pentru cupolele cu 24, respectiv 72 de bare. Cupolele au raza de 25000 mm iar barele au secțiuni transversale diferite. Cupolele sunt încărcate cu o forță concentrată în nodul central pentru instabilitatea de nod și cu forțe egale în toate nodurile pentru instabilitatea generală. Materialul se comportă perfect elastic.

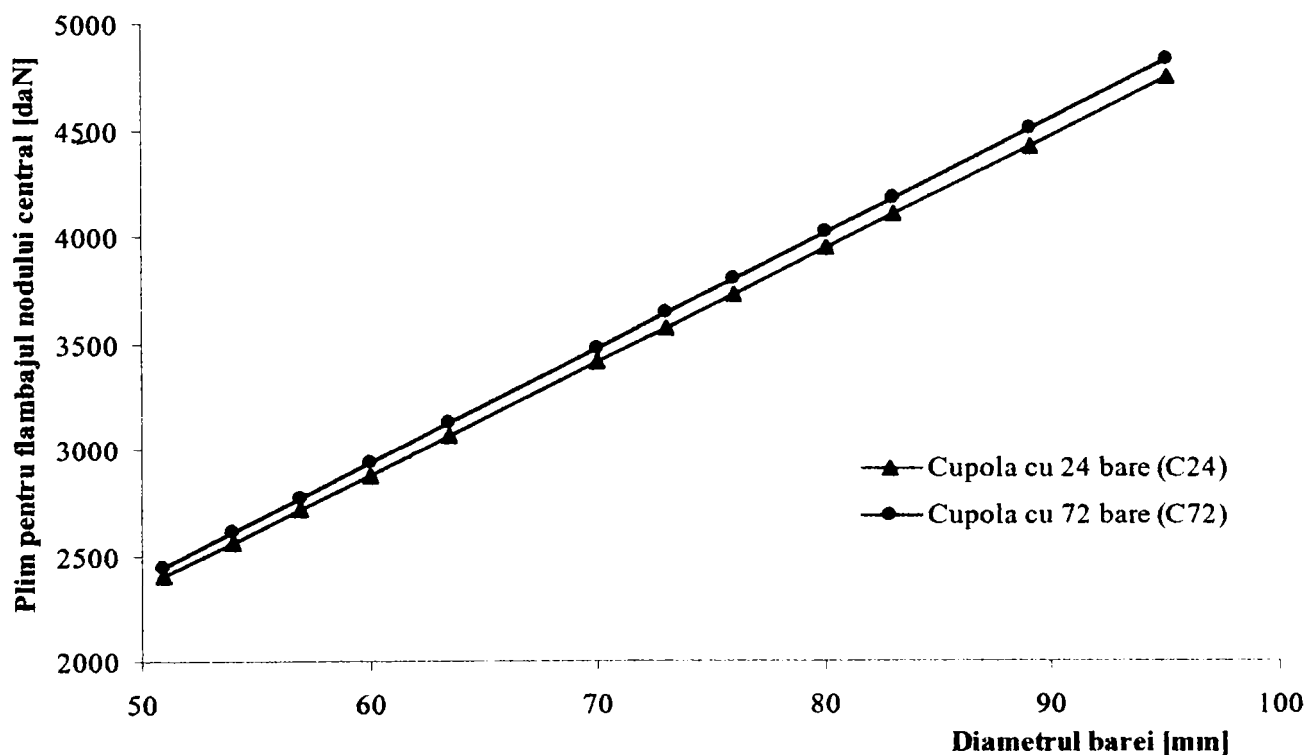


Fig. 4.70 Încărcările critice pentru instabilitatea nodului central al cupolelor perfecte sub încărcarea cu o forță concentrată și material elastic

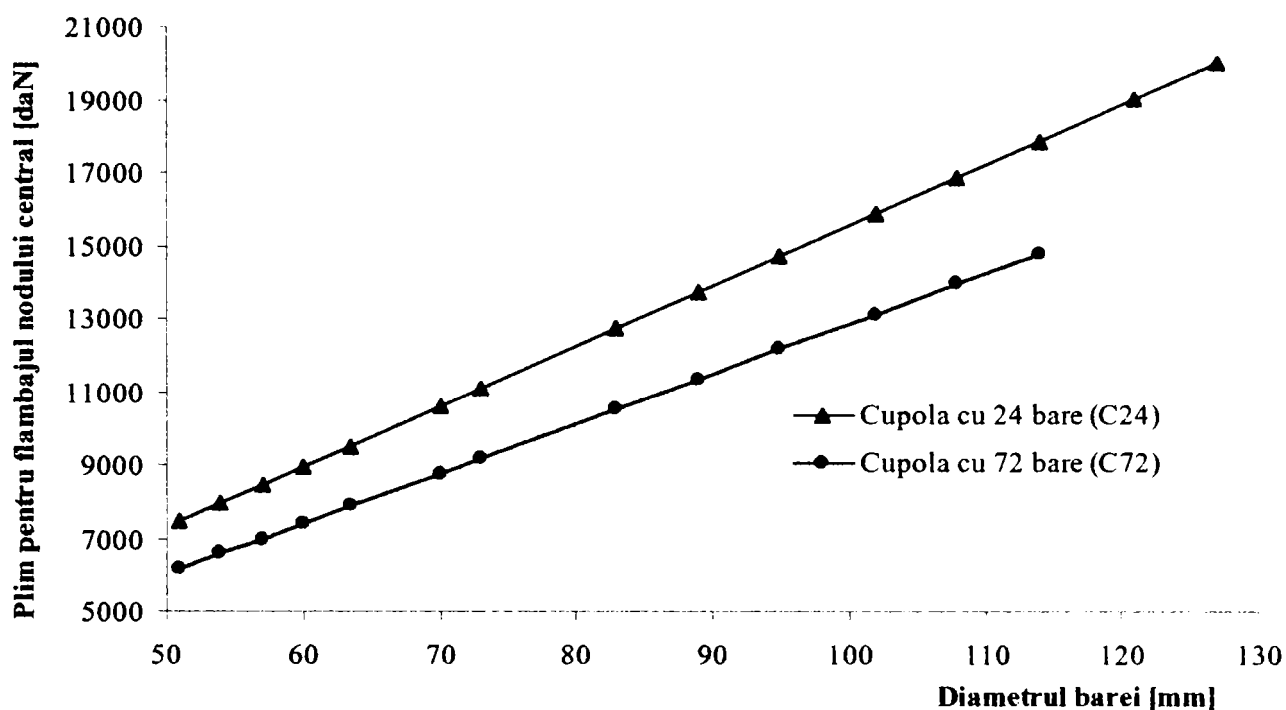


Fig. 4.71 Încărcările de limitare pentru cupolele perfecte cu forțe concentrate în toate nodurile interioare și material elastic

Se observă că în ambele cazuri încărcarea crește liniar cu diametrul barei. Instabilitatea generală se produce la o încărcare mai mică decât instabilitatea de nod pentru toate diametrele de bare analizate. Diferența dintre încărcările care produc instabilitatea de nod pentru cele două cupole este nesemnificativă. În cazul instabilității generale se obțin diferențe semnificative între încărcările de limitare pentru cupola cu 24 de bare respectiv cea cu 72 de bare.

Aceste diferențe sunt cuprinse între 16,4% pentru barele cu diametrul de 60 mm și 23,08% pentru barele cu diametrul de 120 mm. Încărcarea mai mare se obține pentru cupola sferică formată din 24 de bare.

4.5 Influența imperfecțiunilor

Structurile reale sunt afectate de imperfecțiuni geometrice, care provin în primul rând din abateri ale cupolelor executate față de cupolele proiectate. Acestea pot să provină din curburi

inițiale ale barelor cupolei, respectiv din deplasări mici ale nodurilor față de cupola proiectată (perfectă).

Mărimea imperfecțiunilor geometrice este mică și depinde de atenția cu care se execută cupola și de tehnologia de montaj. Prin măsurarea coordonatelor nodurilor cupolei după execuție se pot stabili imperfecțiunile geometrice de structură. Imperfecțiunile geometrice de bară se stabilesc măsurând curburile barelor din cupola reală. Imperfecțiunile mecanice se referă la existența unor tensiuni remanente în urma sudurii, excentricității accidentale laterale și forțe suplimentare în bare datorită inexactităților de execuție a lungimii barelor. Imperfecțiunile se pot clasifica în imperfecțiuni de element și imperfecțiuni ale structurii.

În ultimii 50 de ani stabilitatea structurilor a fost intens analizată de cercetătorii din lumea întreagă. Koiter [4.64] în teza de doctorat a fundamentat pentru prima dată din punct de vedere teoretic comportarea la stabilitate a structurilor. Cercetările ulterioare au fost puternic influențate de această lucrare și de dorința de a stabili cât mai bine siguranța structurilor la pierderea stabilității echilibrului la structurile aeronautice, din ingineria civilă, construcțiile navale, a submarinelor și a conductelor de transport pentru petrol și gaze.

Cărțile de referință care prezintă comportarea structurilor afectate de imperfecțiuni în domeniul postcritic sunt Thompson și Hunt [4.89], Gioncu și Ivan [4.21], Pignataro [4.75].

Conceptul de structură ideală (sau structură fără imperfecțiuni) a fost introdus în analiza structurilor ca o ipoteză în analiza curentă. Dar în problemele de instabilitate s-a dovedit că este o ipoteză greșită. Cele mai mari diferențe între structura reală și cea ideală se obțin pentru plăcile curbe solide. Se pune întrebarea dacă aceleași diferențe apar și în cazul plăcilor curbe reticulate. Pentru a răspunde la această întrebare, două aspecte trebuie subliniate:

- cum se includ aceste imperfecțiuni în analiza structurii;
- ce valori trebuie presupuse pentru mărimea lor.

Primul aspect este o chestiune pentru analiști, care folosesc două metode pentru calculul plăcilor curbe reticulate cu imperfecțiuni:

- **metode exacte** în care matricea de rigiditate tangentă neliniară încorporează atât efectele imperfecțiunilor de element cât și alte tipuri de imperfecțiuni;
- **metode aproximative** în care se utilizează o rigiditate redusă pentru elemente sau încărcări echivalente fictive.

Pentru a obține răspunsul la cel de al doilea aspect referitor la valoarea acestei imperfecțiuni, proiectantul are nevoie de rezultate statistice. În mod clar asemenea imperfecțiuni sunt condiționate de mulți factori: metoda de fabricație, neomogenități de material, tehnologia de montaj, etc. Din acest motiv distribuția imperfecțiunilor este statistică. Imperfecțiunile sunt

cunoscute numai pentru flambajul elementelor din studii făcute pe elemente izolate. O distribuție statistică poate fi efectivă numai pentru acest tip de imperfecțiuni. Pentru imperfecțiunile de nod sau cele generale numai o abordare deterministă este corectă. Se pot admite unele presupuneri cu condiția ca acestea să asigure siguranța cupolelor.

4.5.1 Imperfecțiuni de element

Băluț [4.7] sugerează considerarea separată a imperfecțiunilor geometrice și a imperfecțiunilor mecanice. Imperfecțiunile geometrice produc scăderea rigidității axiale a elementelor și generează caracterul neliniar al comportării structurii. Acest efect influențează apariția instabilității de nod, de linie sau a instabilității generale. Influența acestor imperfecțiuni se analizează cu ajutorul metodelor numerice și a programelor de calcul neliniar. Imperfecțiunile mecanice ale elementelor (din tensiuni reziduale) se introduc în calcul sub formă de imperfecțiuni geometrice echivalente.

În Eurocode 3 [4.12] se ia în considerare influența imperfecțiunilor geometrice de bară și a imperfecțiunilor geometrice de structură. Imperfecțiunile geometrice de bară se înlocuiesc cu o încărcare distribuită uniform cu intensitatea egală cu:

$$q = 8N \frac{e_{od}}{l^2} \quad (4.11)$$

în care: N este forța axială de compresiune din bară, l - lungimea barei și w - intensitatea forței uniform distribuite pe lungimea barei, care produce deplasarea maximă egală cu imperfecțiunea e_{od} .

Valoarea imperfecțiunii echivalente e_{od} se precizează în Eurocode 3 în funcție de modalitatea de verificare a condiției de rezistență, tipul secțiunii transversale a barei, metoda de analiză globală și curba de flambaj.

4.5.2 Imperfecțiuni structurale

Imperfecțiunile structurale se consideră sub forma unei înclinări inițiale a structurii, respectiv deviații ale nodurilor structurii față de structura precizată în proiect.

Imperfecțiunile geometrice pentru verificarea stabilității arcelor se aleg de formă simetrică pentru arcul cu trei articulații și de formă antisimetrică pentru flambajul antisimetric la toate

tipurile de arce. Săgeata inițială w_i este egală cu $s/300$, $s/250$, $s/200$, $s/150$ pentru flambajul simetric, respectiv $1/600$, $1/500$, $1/400$ și $1/300$ pentru flambajul antisimetric și curbele a, b, c și d de flambaj, în care s reprezintă lungimea arcului, iar l este deschiderea arcului.

4.5.3 Cupola cu un nod și șase bare

La cupola cu un nod și 6 bare s-a considerat o imperfecțiune geometrică sub forma unei curburi inițiale cu săgeata maximă la mijlocul barei $w_i = l/1500$, unde l este lungimea barei. Din tabelele 4.1, 4.2 și figura 4.36 se observă încărcarea aplicată în nod, care produce flambajul de bară și instabilitatea de nod pentru modelul perfect și modelul cu imperfecțiune geometrică. Reducerea încărcării din nod pentru modelul imperfect care produce flambajul barei este mai mică cu 12,4% pentru bara de 51x6 mm și de 6% pentru bara de 98x6 mm (Fig. 4.72). Instabilitatea de nod se produce la modelul imperfect la o încărcare în nod mai mică cu 2,65% pentru bara 102x6 mm și cu 0,4% pentru bara 127x6 mm. Pentru bara cu diametrul de 103,5 x 6 mm încărcarea din nod pentru modelul perfect și imperfect are aceeași valoare. Pentru diametre mai mari de 103,5 mm la modelul perfect se produce instabilitatea nodului.

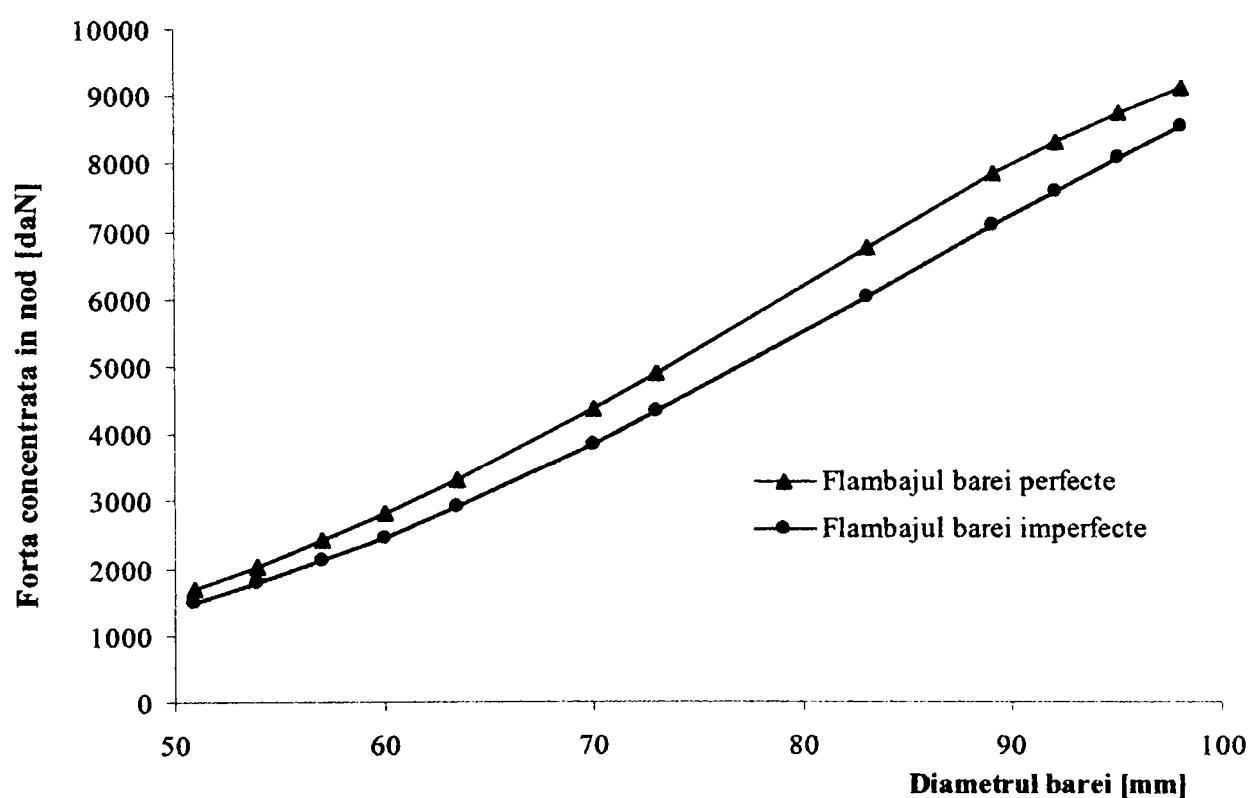


Fig. 4.72 Încărcările critice pentru flambajul barei în cazul modelului cu 6 bare și material elastic

4.5.4 Cupola cu 24 de bare și 13 noduri

Studiul influenței imperfecțiunilor geometrice asupra comportării cupolei cu 24 de bare s-a efectuat din încărcarea cu 7 forțe concentrate egale, care se aplică în nodurile interioare.

La cupola cu $f/l = 0,052$ s-a studiat influența separată a imperfecțiunilor de bară, de inel și simultană a imperfecțiunilor de bară și de inel. Imperfecțiunea de bară a fost considerată ca o curbă inițială cu amplitudinea la mijlocul barei, egală cu $w_i = 0,003 l$, unde l este lungimea barei. Imperfecțiunea de inel s-a considerat ca un mod nesimetric cu deplasarea nodului central egală cu zero și cu nodurile inelului deplasate alternativ în sus, respectiv în jos cu 1 cm pe direcția verticală.

Imperfecțiunea nodului reprezintă $1/1033$ din deschiderea cupolei, care este mai mică decât $1/600$ prevăzută în EC 3 pentru arcul dublu articulată. Studiul s-a efectuat pentru secțiunile de bare $89 \times 6 \text{ mm}$ până la $146 \times 6 \text{ mm}$. Aceste secțiuni de bare sunt în vecinătatea acelei secțiuni pentru care apare cuplarea flambajului de bară cu flambajul de inel la cupola perfectă (Fig. 4.53). Barele sunt executate din OL 52 cu $\sigma_c = 3500 \text{ daN/cm}^2$.

Reducerea forței din nodurile cupolei imperfecte, față de cupola perfectă, pentru imperfecțiunea de bară, de inel, respectiv imperfecțiuni simultane de bară și de inel, se prezintă în tabelul 4.13.

Tabelul 4.13

Caracteristicile cupolei [mm] Material	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Reducerea forței din noduri la cupola imperfectă față de cupola perfectă [%]		
		Imperfecțiunea de bară	Imperfecțiunea de inel	Imperfecțiunea de bară și de inel
$l = 10335$ $f = 540$ $f/l = 0,052$ OL 52 $\sigma_c = 35 \text{ daN/mm}^2$	89x6	10,4	18,8	25,9
	95x6	15,4	22,7	30,2
	102x6	20,7	29,3	35,2
	108x6	24,7	34,9	39,5
	111x6	26,8	37,5	41,4
	114x6	24,7	39,0	40,3
	121x6	21,7	36,4	39,1
	127x6	19,5	36,3	38,2
	133x6	17,4	36,2	37,5
	140x6	14,9	36,1	37,0
	146x6	13,0	36,0	36,8

Analizând datele din tabelul 4.13 se observă că imperfecțiunea de bară conduce la cea mai mică reducere a încărcării din nod (10,4 - 26,8%). Imperfecțiunea de inel conduce la o reducere intermediară a încărcării (18,8 - 39,0%), iar imperfecțiunile simultane de bară și de inel generează cea mai mare reducere a încărcării (25,9 - 41,4%). Coeficientul de reducere crește până atinge valoarea maximă de 26,8 % pentru bara de 111 x 6 mm din imperfecțiunea de bară și apoi scade până la 13,0% pentru bara de 146 x 6 mm. Imperfecțiunea de inel produce o reducere a încărcării de la 18,8% până la valoarea maximă de 39% pentru bara 114 x 6 mm și scade lent până la 36,0% pentru bara 146 x 6 mm. Imperfecțiunea simultană reduce încărcarea cu 25,9 % pentru bara 89 x 6 mm și reducerea crește până la valoarea maximă de 41,4%, care se obține pentru bara 111 x 6 mm. În continuare coeficientul de reducere scade mai încet până atinge valoarea de 36,8% la bara de 146 x 6 mm. Pentru bara cu diametrul de 111 x 6 mm se obține cuplarea flambajului de bară cu instabilitatea de inel și coeficientul de reducere a încărcării de la cupola imperfectă este 41,4% din încărcarea aplicată pe cupola perfectă.

Imperfecțiunea geometrică simultană de bară și de inel pentru modul de instabilitate nesimetric produce reducerea maximă a încărcării cupolei perfecte la toate diametrele de bare luate în studiu (Fig. 4.73).

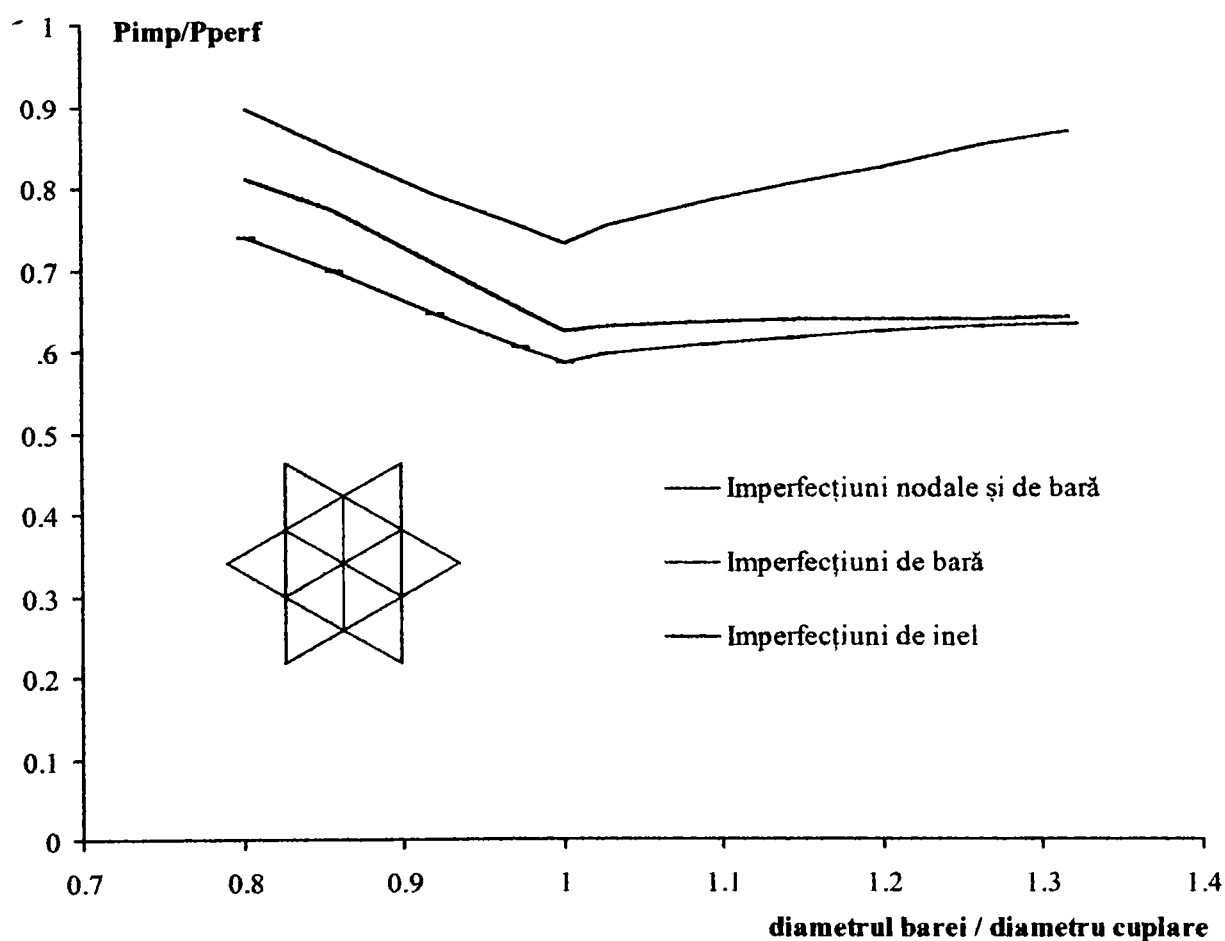


Fig. 4.73 Reducerea încărcării de limitare a cupolei cu 24 de bare în funcție de tipul imperfecțiunii geometrice

Imperfecțiunea de inel pentru barele cu diametrul mai mare de 114 mm are influența cea mai mare în reducerea încărcării.

Studii întreprinse în această ipoteză sunt justificate și de faptul că analiza modală precizează apariția prima dată a modului propriu nesimetric de instabilitate a inelului [4.64].

Folosind programul ANSYS 5.3. au fost testate numeric cupolele reticulate simplu strat cu dimensiunile geometrice prezentate în tabelul 4.14. Încărcarea din nodurile interioare care produce instabilitatea generală la cupolele imperfecte se prezintă în același tabel.

Prin compararea rezultatelor din tabelul 4.14. pentru cupola imperfectă alcătuită din 24 de bare cu rezultatele de la cupola perfectă din tabelul 4.8 se remarcă faptul că încărcarea care produce instabilitatea generală este mai mică pentru cupolele imperfecte, față de încărcarea de la cupolele perfecte. Reducerea încărcării este de 39,28 % pentru cupola cu $f/l = 0,052$, de 11,01 % pentru cupola cu $f/l = 0,082$ și de 7,21 % pentru cupola cu $f/l = 0,134$. Imperfecțiunile geometrice structurale reduc încărcarea de limitare mai mult la cupolele pleoștite (39,28%) și mai puțin la cupolele înalte (7,21%). Reducerea încărcării de limitare scade cu creșterea raportului între săgeată și deschiderea cupolei.

Tabelul 4.14

Dimensiunile cupolei					Oțel Limita de curgere σ_c [daN/cm ²]	Încărcarea cu 7 forțe concentrate în nodurile interioare P_{lim} [daN] a cupolei imperfecte. Material elastic - perfect plastic
Deschiderea l [cm]	Săgeata f [cm]	Diametrul și grosimea peretelui barei [mm]	Raportul f/l	Lungimea barei [cm]		
1033,6	54,000	121 x 6	0,052	300	OL 52	7995
1025,4	84,368		0,082		$\sigma_c = 3500$	20459
1003,3	134,930		0,134			35282

Pierderea stabilității echilibrului cupolei cu imperfecțiuni simultane de bară și inel se produce prin flambajul general al cupolei.

Analiza efectului imperfecțiunii nodului central asupra încărcării aplicate în nodurile cupolei perfecte s-a studiat numai pentru bara cu secțiunea de 121 x 6 mm. Imperfecțiunea nodului central s-a considerat egală cu 1 cm, 1,2 cm, 1,4 cm, 1,41 cm, 1,45 cm, 1,5 cm, 1,8 cm, 1,82 cm, 1,85 cm, 1,86 cm, 1,9 cm, 2 cm și 2,5 cm pe direcția verticală. Nodurile direct legate de nodul central nu prezintă imperfecțiuni. Din testările numerice a rezultat că încărcarea din noduri la

cupola imperfectă crește față de încărcarea corespunzătoare de la cupola perfectă, pentru imperfecțiuni de nod cuprinse între 1 cm și 1,41 cm (Fig. 4.74). Pentru imperfecțiuni de nod cuprinse între 1,42 cm și 1,85 cm încărcarea din nodurile cupolei imperfecte scade față de cea a cupolei perfecte. Reducerea încărcării este de 4,8 % pentru o imperfecțiune de nod de 1,45 cm, până la 41,1 % pentru o imperfecțiune de 2,5 cm (Fig. 4.74).

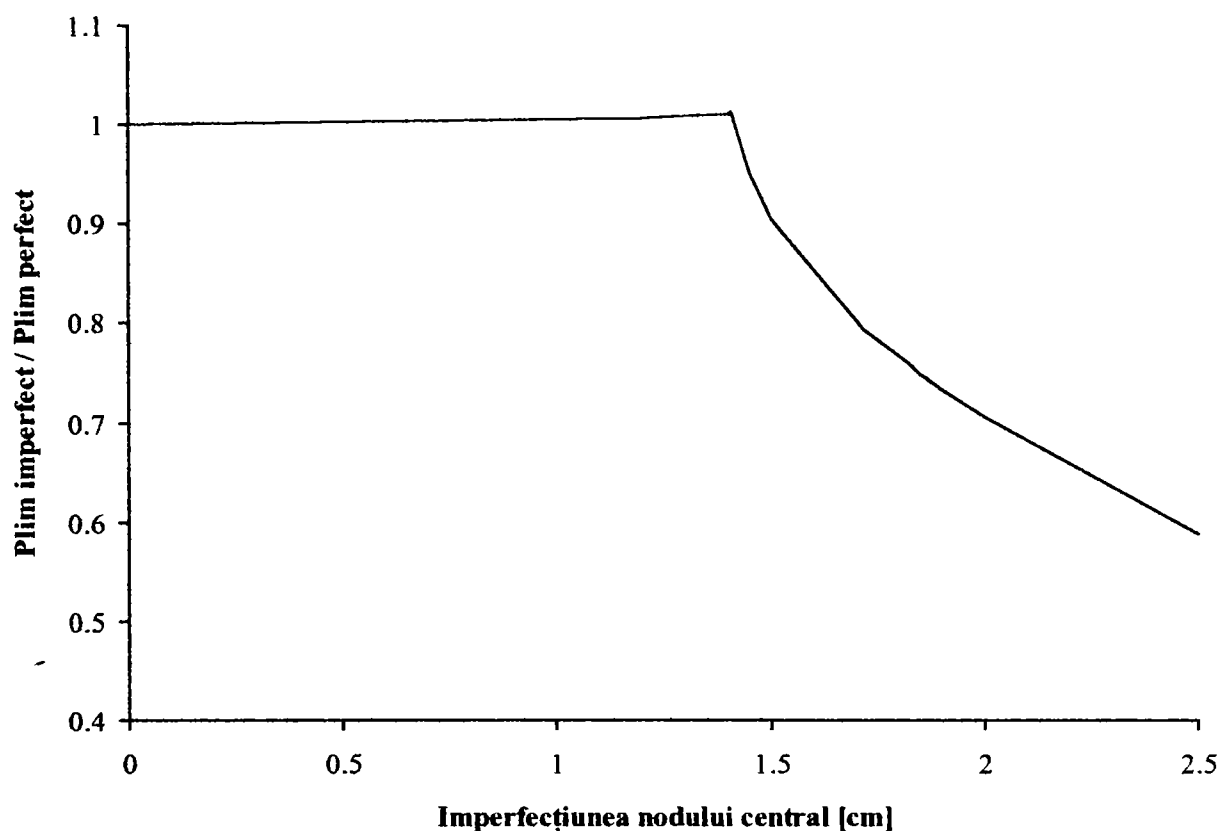


Fig 4.74 Reducerea încărcării de limitare a cupolei în funcție de imperfecțiunea din nodul central

Referitor la pierderea stabilității echilibrului cupolei se precizează faptul că pentru imperfecțiuni de nod mai mari de 1,85 cm se produce instabilitatea nodului central. La imperfecțiuni de nod mai mici de 1,84 cm se produce instabilitatea generală a cupolei din încărcări statice uniforme în toate nodurile.

Scopul tezei de doctorat este să determine parametrii și măsurile constructive care să evite propagarea instabilității locale în instabilitate generală a cupolei în urma saltului static și dinamic. Din acest motiv cercetările ulterioare din teză s-au efectuat considerând imperfecțiunea geometrică a nodului central egală cu 1,85 cm.

Instabilitatea locală a nodului central la cupolele reticulate simplu strat poate să mai apară și din cauza aplicării în acest nod a unei forțe concentrate mari. Forța suplimentară provine din suspendarea unui exponat în nodul central, respectiv din aglomerare cu zăpadă.

Comportarea cupolei alcătuită din 24 de bare s-a studiat din încărcarea cu forțe concentrate egale P în nodurile interioare ale inelului și cu o forță concentrată mai mare $P_c = nP$ ($n > 1$) aplicată în nodul central. În urma testărilor numerice a rezultat că pentru $P_c = 1,27P$ se obține instabilitatea nodului central, iar pentru $1,05P < P_c < 1,26P$ se produce instabilitatea generală a cupolei cu $f/l = 0,052$ din OL52 și barele cu secțiunea din țevă de $\Phi 121 \times 6$ mm. Rezultate similare se obțin și pentru cupola cu $f/l = 0,091$, alcătuită din OL52 și bare $\Phi 121 \times 6$ mm. Instabilitatea generală a cupolei se produce dacă încărcarea din nodul central $P \leq P_c \leq 3,5P$, iar flambajul nodului central intervine pentru forțe aplicate în nodul central $P_c \geq 3,55P$. Se menționează faptul că flambajul general al cupolei se produce din aplicarea statică a forțelor P și P_c în nodurile cupolei. Dacă forțele se aplică static în nodul central al cupolei $P_c > 1,27P$, respectiv $P_c \geq 3,55P$ și în restul nodurilor interioare forțele sunt egale cu P , instabilitatea nodului central nu se mai propagă în instabilitate generală a cupolei în urma saltului static. Propagarea instabilității locale se produce numai în urma saltului dinamic.

Rezultă că la proiectarea cupolei cu 24 de bare trebuie să se precizeze condiții restrictive referitoare la mărimea forței care se poate aplica în nodul central.

Modul de încărcare al cupolei cu $f/l = 0,052$, care produce instabilitatea nodului central constă dintr-o încărcare mai mare în nodul central $P_c = 1,27P$ și șase forțe concentrate egale în nodurile inelului ($6P$). Încărcarea limită P pentru acest mod este mai mică cu 30,9% decât încărcarea corespunzătoare cupolei perfecte în modul de încărcare cu forțe concentrate egale în toate nodurile ($7P$). Reducerea încărcării limită din noduri la cupola cu $f/l = 0,091$, încărcată conform schemei $P_c = 3,55 P$ și $6P$, este mai mică cu 62,4% față de încărcarea corespunzătoare cupolei perfecte încărcată cu forțe egale ($7P$) aplicate în nodurile cupolei. În figura 4.75 se prezintă reducerea încărcării limită în funcție de mărimea forței aplicate în nodul central.

Reducerile încărcării din nod pentru cele două situații analizate: cupolă cu imperfecțiune locală în nodul central, respectiv cupolă cu forță superioară în nodul central $P_c = nP$ și P în restul nodurilor sunt:

- imperfecțiunea locală de nod reduce încărcarea limită cu 25,1% la cupola cu $f/l = 0,052$, respectiv cu 30,7% la cupola cu $f/l = 0,091$ față de încărcarea de la cupola perfectă (Fig. 4.74);
- creșterea forței aplicate în nodul central al cupolei reduce încărcarea de limitare a cupolei perfecte cu 30,9% pentru cupola cu $f/l = 0,052$ și cu 62,4% pentru cupola cu $f/l = 0,091$

Comparând rezultatele se observă că pentru ambele cupole analizate, reducerea cea mai mare a încărcării critice din nodurile cupolei perfecte se obține atunci când se încarcă cupola cu o forță concentrată mai mare în nodul central.

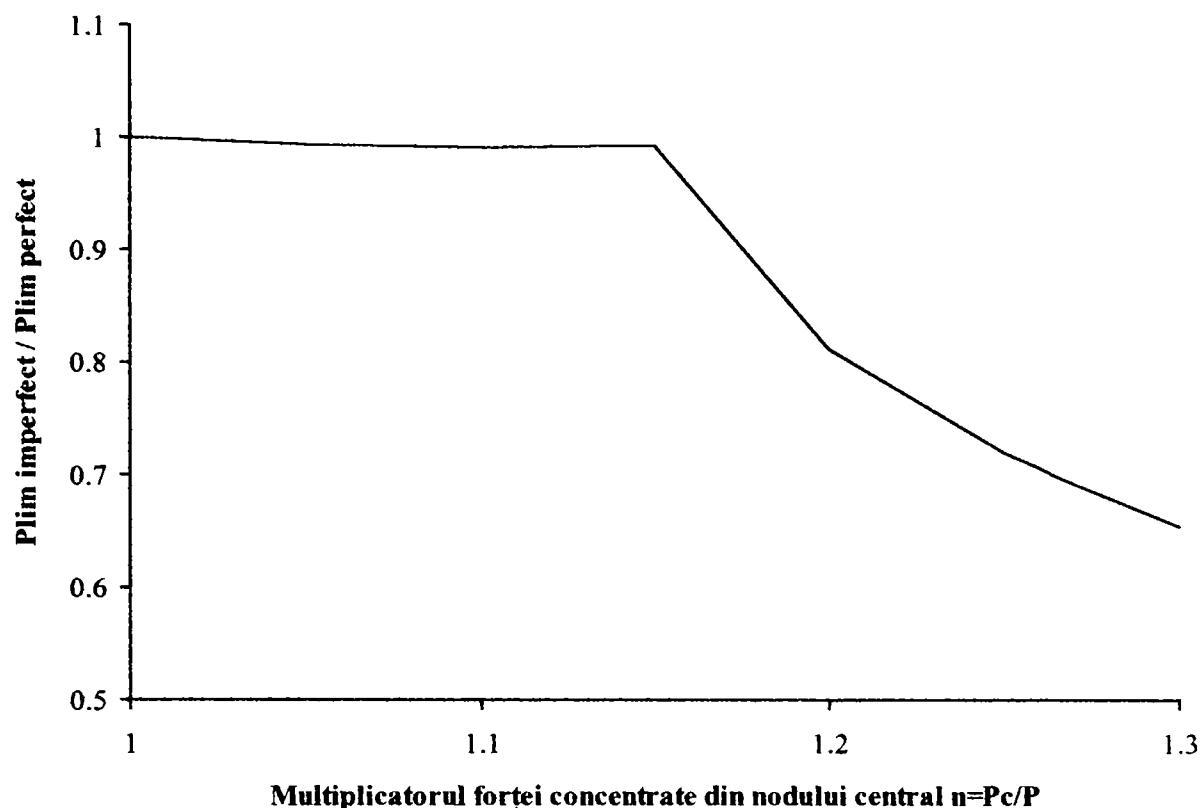


Fig. 4.75 Reducerea încărcării limită în funcție de mărimea forței aplicate în nodul central

4.5.5 Cupola cu 72 de bare și 37 de noduri

Influența imperfecțiunilor geometrice asupra comportării cupolei cu 72 de bare s-a analizat pentru o încărcare cu 19 forțe concentrate, egale, aplicate în nodurile interioare.

Pentru cupola cu $f/l = 0,091$, secțiunea barelor de 121 x 6 mm, lungimea 3000 mm executate din oțel OL52 s-a studiat influența diferitelor mărimi ale imperfecțiunilor geometrice din nodul central asupra încărcării limită a cupolei.

Imperfecțiunea nodului central s-a considerat ca o deplasare pe verticală cu valorile de 0,5; 0,6; 0,65; 0,7; 1,0; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,1 și 2,2 cm. Încărcarea din nod care produce flambajul general al cupolei imperfecte crește pentru imperfecțiuni de nod mai mici de 0,65 cm și scade pentru imperfecțiuni mai mari de 0,7 cm (Fig. 4.76).

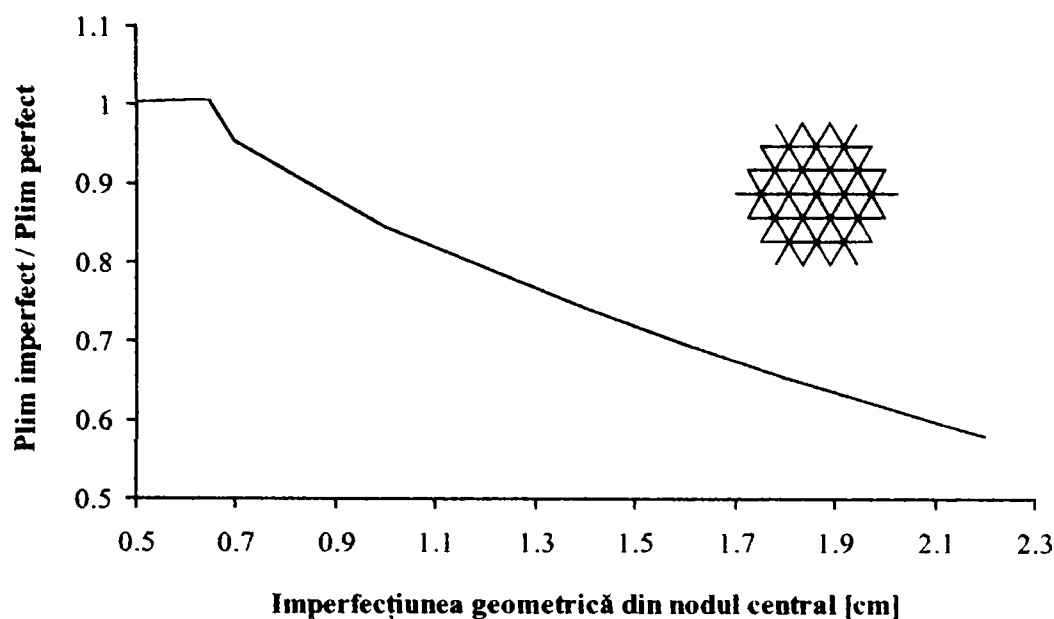


Fig 4.76 Reducerea încărcării de limitare a cupolei în funcție de imperfecțiunea din nodul central

Creșterea este de 0,7 % la imperfecțiunea de nod egală cu 0,65 cm, iar reducerea este cuprinsă între 4,6 % pentru imperfecțiunea de 0,7 cm și 42 % pentru imperfecțiunea de 2,2 cm.

Dacă imperfecțiunea nodului este mai mică decât 2,1 cm cupola își pierde stabilitatea prin instabilitatea generală, iar pentru imperfecțiuni mai mari de 2,1 cm se produce instabilitatea locală a nodului central. Instabilitatea locală nu se mai propagă în instabilitate generală în urma saltului static. Propagarea instabilității locale din nodul central se propagă în instabilitate generală numai în urma saltului dinamic.

Influența unei forțe concentrate $P_c > P$ aplicată în nodul central, împreună cu forțe egale P în celelalte noduri interioare, asupra comportării cupolei cu $f/l = 0,091$ s-a studiat numeric. Cupola este executată din oțel OL52 cu $\sigma_c = 3500 \text{ daN/cm}^2$ și are barele alcătuite din țevi circulare cu diametrul de 121 mm și grosimea peretelui de 6 mm.

Dacă forța din nodul central $P \leq P_c \leq 1,31P$ și în restul nodurilor interioare se aplică 18 forțe egale P , cupola își pierde stabilitatea prin instabilitate generală sub efectul static al forțelor. Pentru schema de încărcare $P_c = 1,32P$ și 18P aplicată static pe cupolă se produce instabilitatea nodului central. Dar în acest caz instabilitatea locală nu se propagă în instabilitate generală a cupolei numai dacă forțele sunt aplicate static ($P_c = 1,32P$ și 18P). Datorită efectului dinamic, instabilitatea locală se propagă în instabilitate generală.

Aplicarea unei forțe de $1,32P$ în nodul central conduce la reducerea încărcărilor limită din nodurile interioare cu 44,6% față de cele corespunzătoare cupolei perfecte încărcată cu 19 forțe egale în toate nodurile. Și la acest tip de cupolă se constată că aplicarea forței concentrate mai mari $P_c = nP$ în nodul central simultan cu forțe P egale în restul nodurilor interioare are efect mai defavorabil (reducerea este de 44,6%) decât imperfecțiunea locală de nod (reducerea încărcării este de 40,2%).

În figura 4.77 se prezintă reducerea încărcării de limitare ca urmare a creșterii forței exterioare aplicate în nodul central al cupolei.

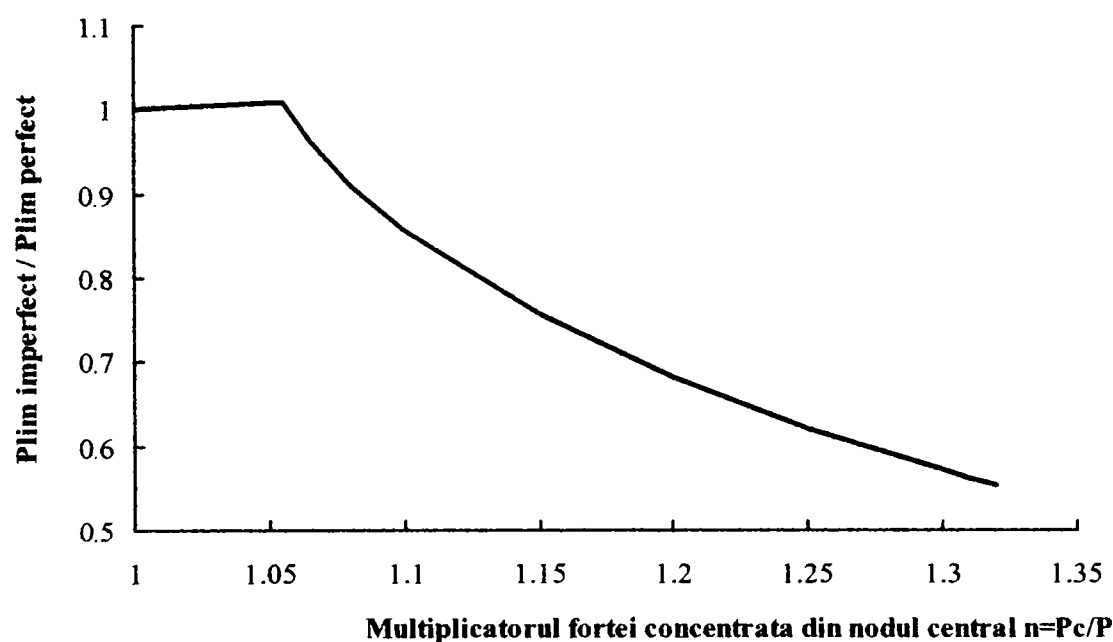


Fig. 4.77 Reducerea încărcării de limitare a cupolei perfecte în funcție de forța aplicată în nodul central P_c .

Comparând rezultatele obținute pentru cupola cu 72 de bare cu rezultatele obținute pentru cupola cu 24 de bare, pentru $f/l = 0,091$, bare cu secțiunea transversală de 121×6 mm și oțel OL52 se constată că:

- imperfecțiunea locală de nod reduce încărcarea de instabilitate a cupolei perfecte cu 30,7% în cazul cupolei cu 24 de bare și cu 40,2% pentru cupola cu 72 de bare;
- forța din nodul central care modifică tipul de instabilitate este de $1,27 P$ la cupola cu 24 de bare și de $1,32 P$ la cupola cu 72 de bare.

4.6 Concluzii

Din cercetările efectuate în cadrul tezei de doctorat se desprind o serie de concluzii importante pentru calculul cupolelor reticulate simplu strat și anume:

- eforturile și deplasările din aceste structuri se determină corect numai folosind calculul neliniar;
- pentru calculul neliniar se utilizează metoda elementului finit;
- în calculul neliniar se utilizează matricea rigidității tangente a structurii;
- parametrul de încărcare trebuie ales în așa fel încât să se obțină convergența rapidă spre poziția de echilibru;
- verificarea convergenței procesului iterativ trebuie efectuată pe tot parcursul calculului;
- alegerea metodei iterative depinde de răspunsul neliniar al structurii prin curba încărcare - deplasare;
- iterarea cu forță constantă se poate folosi în afara intervalelor cu puncte singulare;
- iterarea cu deplasare constantă se recomandă în intervalele care prezintă puncte de întoarceri;
- iterarea cu arc de lungime constantă este indicată pentru toată curba forță - deplasare, însă necesită timp mai lung pentru efectuarea calculelor iar în cazul pașilor mari de încărcare devine divergentă;
- parametrul de control la trasarea curbei forță - deplasare trebuie să caracterizeze gradul de neliniaritate și poziția de echilibru a structurii;
- utilizarea semnului determinantului matricei de rigiditate ca parametru de control determină pozițiile stabile pentru valori pozitive și pozițiile pentru valorile negative, nu se pot preciza cu acest parametru bifurcărilor multiple ale echilibrului structurii;
- alegerea ca parametru de control a numărului elementelor negative din matricea obținută în urma factorizării matricei de rigiditate tangentă joacă același rol ca semnul determinantului matricei de rigiditate tangentă;
- parametrul de rigiditate curentă, descrie cel mai bine comportarea structurii, însă nu este eficient pentru structurile care prezintă puncte de întoarcere unde parametrul este discontinuu;
- parametrul deplasării curente se poate folosi pentru determinarea sensului încărcării pe curba postcritică.

Din testările numerice efectuate pe modelele cupolelor reticulate simplu - strat se desprind următoarele concluzii:

- curba încărcare - deplasare pentru aceste structuri are un permanent caracter neliniar;
- eforturile și deplasările se pot determina corect folosind calculul neliniar al structurilor;
- încărcarea critică este diferită pentru flambajul de bară, instabilitatea de nod, instabilitatea de inel și instabilitatea generală;
- încărcarea critică crește odată cu creșterea raportului dintre săgeata și deschiderea cupolei;
- deformațiile plastice produc reducerea încărcării de limitare la toate tipurile de cupole, reducerea fiind de 39 – 78 % la cupola cu 24 de bare din încărcarea cu o forță, respectiv 31 % din încărcarea uniformă;
- imperfecțiunile geometrice de bară, de nod și simultane de bară și inel, corespunzătoare modului propriu de instabilitate, conduc la reduceri mari ale încărcării de limitare;
- imperfecțiunile simultane conduc la cea mai mare reducere a încărcării critice, care este de 41,4 % pentru cupola cu 24 de bare având secțiunea barelor de 111 x 6 mm, atunci când apare instabilitatea cuplată de bară și de inel;
- imperfecțiunea de inel produce o reducere cu 39 % a încărcării critice pentru cupola cu 24 de bare încărcată uniform;
- imperfecțiunile de nod central conduc la creșteri mici ale încărcării din nod care sunt de 1,34 % la cupola cu 24 de bare și 0,7 % la cupola cu 72 de bare;
- reducerea încărcării produsă de imperfecțiunile nodului central este importantă și are valoarea maximă de 41,1 % pentru cupola cu 24 de bare, respectiv de 40,2 % pentru cupola cu 72 de bare;
- instabilitatea locală al nodului central se propagă conducând la flambaj general pentru imperfecțiuni mai mici de 1,84 cm pentru cupola cu 24 de bare și mai mici de 2,1 cm pentru cupolele cu 72 de bare;
- instabilitatea locală a nodului central nu se mai propagă în instabilitatea generală a cupolei din încărcările statice dacă imperfecțiunea din nodul central este mai mare de 1,85 cm, respectiv pentru o forță în nodul central $P_c=1,27P$ în cazul unei cupole cu 24 de bare și un raport $f/l=0,052$;
- instabilitatea locală a nodului central nu se mai propagă în instabilitatea generală din încărcările statice dacă imperfecțiunea din nodul central este mai mare de $w_i = 0,013f$, respectiv forța din nodul central este $P_c = 1,27P$ la cupola cu 24 de bare și $f/l = 0,052$;

- propagarea instabilității locale a nodului central în instabilitate generală se va produce la ambele cupole numai în urma saltului dinamic;
- la proiectarea acestor structuri se vor preciza condițiile de execuție deosebit de îngrijite pentru a rezulta imperfecțiuni geometrice mici astfel încât să se evite propagarea instabilității locale;
- siguranța cupolelor simplu strat se va verifica după măsurarea imperfecțiunilor geometrice rezultate după execuție.

BIBLIOGRAFIE

- [4.1] **ABAQUS** *User guide*
- [4.2] **Abatan A. O., Holtzer S. M.**, *Degree of stability of geodesic domes with independent loading parameters*, *Compt. and Struct.*, vol. 9, pp 43 – 51, 1978.
- [4.3.] **ANSYS** *Theory reference. . Release 5.3.*
- [4.4] **ANSYS** *User guide*
- [4.5] **Aquilar R. J., Huang T.**, *The snap - through buckling of triangular lattice domes under the simultaneous applications of concentrated loads*, *Space Structures* (ed. R. M. Davies) Blackwell Sc. Publ., Oxford, 1967.
- [4.6] **Aquilar R. J.**, *Snap – through buckling of framed triangular domes*, *J. Struct. Div.*, 93, ST 2, pp 301-317, 1967.
- [4.7] **Băluț N.**, *A suggestion for separate of geometrical and mechanical imperfections. In stability of Steel Structures*, *Conf. Budapest*, Vol.1, pp 237 - 244, 1990.
- [4.8] **Băluț N., Pormub D., Rennon N.**, *The non linear analysis of reticulated shells (in Romanian)*, *The second Conf. On Steel Structures*, vol. 1, Timișoara, 1970.
- [4.9] **Băluț N., Porumb D., Gioncu V.**, *Some aspects concerning the behaviour and analysis of single – layer latticed roof structures*, *Stability of Metal Structures Int. Coll.*, Prelim. Raport, pp 133 – 140, Paris, 1983.
- [4.10] **Borri C și Chiostrini S.**, *Numerical approaches to nonlinear stability analysis of single layer reticulated and grid-shell structures*. *Int. J. of Space Structures*, vol.7, No.4, 1992 pp 285 - 298. Multi -Science Publishing Co.Ltd.
- [4.11] **Carpenter W. C., Ely J. F., Bramer C. R.**, *The joint instability of latticed structures under generalized load*, *Space Structures* (ed. R. M. Davies, Blackwell Sci. Publ., Oxford, 1967.
- [4.12] **Eurocode 3 - Design of Steel Structures. European Committee for Standardisation**, 1992.
- [4.13] **Fathelbab F. A., Mc Connel R. E.**, *Approximate tangent stiffness matrix includes the effects of joint proprieties for space frame member*, *Proc. of IASS Congr.*, vol. 5, Madrid, 1989.
- [4.14] **Fathelbab F. A.**, *Tangent stiffness matrix for space frame members with both member and joint imperfections*, *Space Structures 4* (eds. G. A. R. Parke, C. M. Howard), Guilford Conf., Th. Telford Publ., pp 1323 - 1333, London, 1993.

- [4.15] **Fathelbab F. A.**, *The effect of joints on the stability of shallow single layer lattice domes*, Ph. D. Thesis, Univ. of Cambridge, 1987.
- [4.16] **Freitas J. A. T., Almeida J. P. B., Virtuoso F. B. E.**, *Nonlinear analysis of elastic space trusses*, Meccanica, vol. 20, pp 144 – 150, 1985.
- [4.17] **Fujimoto M., Saka T., Imai K., Morita T.**, *Experimental and numerical analysis of the buckling of a single – layer latticed dome*, , Space Structures 4 (eds. G. A. R. Parke, C. M. Howard), Guilford Conf., Th. Telford Publ., pp 396 – 405, London, 1993.
- [4.18] **Gioncu V, Băluț N., Porumb D., Rennon N.**, *Instability behaviour of triangulated barrel vaults*, Analysis, Design and Construction of Braced Barrel Vaults (ed. Z. S. Makowski) Elsevier, pp 159 – 182, London, 1985.
- [4.19] **Gioncu V. și Băluț N.**, *Instability behaviour of single layer reticulated shells*. Int.J. of Space Structures, Vol.7, No4, 1992. Special Issue Stability of Space Structures Quest Editor, V,Gioncu, pp. 243 ...252, Multi Science Publishing Co, Ltd.
- [4.20] **Gioncu V. și Ivan M.** , *Teoria comportării critice și postcritice a structurilor elastice*. Editura Academiei Române. 1984.
- [4.21] **Gioncu V. și Ivan M.**, *Instabilitatea structurilor din plăci curbe subțiri*. Editura Academiei Române, 1978.
- [4.22] **Gioncu V. și Ivan M.**, *Bazele calculului structurilor la stabilitate*. Editura Facla Timișoara, 1983.
- [4.23] **Gioncu V., Băluț N., Rennon N.**, *Interaction between diferent instability modes of lattice roof structures*, Third Int. Coll. On Stability, pp 262 – 272, Timișoara, 1982.
- [4.24] **Gioncu V.**, *Buckling of reticulated shells. State - of - the - art.*, Int.J.Space Structures Vol.10, No.1, pp 1 - 46, 1995.
- [4.25] **Gioncu V.**, *Coupled instabilities in bar structures: phenomenon, theory, practice*. SSRC Int. Coll. on Stability of Metal Structures, pp 357 – 370, New York, 1989.
- [4.26] **Gioncu V.**, *General theory of coupled instabilities. General Report*. CIMS '92, Thin – Walled Structures, vol. 19., nos. 2 – 4, pp 81 – 127, 1994.
- [4.27] **Gioncu V.**, *Coupled instabilities in reticulated shells*, Spatial Structures Heritage, Present and Future, SG Editoriali, Padova, pp 579 - 586, 1995.
- [4.28] **Hangai Y., Kawamoto S.**, *Nonlinear analysis of space trusses and snap – through buckling of reticulated shell structures*, IASS Symp. On Tension Structures and Space Frames, Ses. 9, Tokyo – Kyoto, 1971.
- [4.29] **Hatzis .D.**, *The influence of imperfections on the behaviour of shallow single layer lattice domes* Degree of Doctor of Philosophy Univ. of Cambridge,1987.

- [4.30] **Hollaway L., Rustum A.,** *Buckling analysis of shallow dome manufactured from pultruded fibre/matrix composites*, Third Conf. On Space Structures (ed. H. Nooshin), pp 545 – 553, Elsevier, London, 1985.
- [4.31] **Holzer S. M.,** *Static and dynamic stability of reticulated shells*, Proc. of Int. Coll. On Stability of Structures under Static and Dynamic Loads, pp 27 – 39, Washington, 1977.
- [4.32] **Ivan A. și Boja N.,** *Considerations of new approach of the buckling load of beam column*. Proc.of the sixth symp. of mathem. and its applications. Editura Mirton, pp 75-80, Timișoara, România, 1995.
- [4.33] **Ivan A. și Gioncu V.,** *Dynamic interaction between local and general buckling in reticulated domes*. 5th Int. Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures SDSS'97.Nagoya, Japan, 1997.
- [4.34] **Ivan A.,** *A study of numerical methods used for overcoming the critical points of equilibrium path*. Proc. of fifth symp. of math. and its appl. Editura Mirton, pp 140 - 146, Timișoara, România, 1993.
- [4.35] **Ivan A.,** *Analiza stării de eforturi din plăci curbe subțiri cu metoda elementelor finite*. Sesiunea de comunicări tehnico - științifice a tinerilor absolvenți Timișoara, 1989.
- [4.36] **Ivan A.,** *Contribuții la studiul traversărilor suspendate pentru conducte folosind metoda elementului finit*. Sesiunea de comunicări tehnico - științifice a tinerilor ingineri, Timișoara, 1988.
- [4.37] **Ivan A.,** *Determinarea încărcării de limitare la o cupolă reticulată simplu strat*. A VII-a Conferință de Construcții Metalice, pp. 63 - 68, Timișoara, România, 1994.
- [4.38] **Ivan A., Gioncu V.,** *Coupled instabilities of single layered reticulated structures*. Proc. of Second Int.Conf.Coupled Institutes in Metal Structures CIMS'96. Edited by Rondal J., Dubină D., Gioncu V., pp 347 - 354, Liege,Belgium, 1996.
- [4.39] **Ivan A., Ivan M., Cozma D.,** *The spatial behaviour of the schaffeld used for the coal conveyance*. 6th Int. Colloq on Stabilit. and Ductility of Steel Structures. Se va ține în sept. 1999, Timișoara,România.
- [4.40] **Ivan A.,** *Metode numerice pentru calculul neliniar al structurilor cu metoda elementelor finite*. Lucrări Sesiune de Comunicări Științifice Univ. A.Vlaicu din Arad, vol.I, Matematică - Informatică pp 105 - 114, Arad, România, 1992..
- [4.41] **Ivan A.,** *Metode numerice pentru calculul neliniar al structurilor cu metoda elementului finit*. Bul. Univ. Tehnice din Timișoara, Seria Constr. Tom 38/(52) 1993.
- [4.42] **Ivan A.,** *Metode numerice pentru determinarea încărcărilor limită a structurilor reticulate*. Referat în cadrul programului de pregătire a doctoratului Univ. Politehnica din Timișoara, 1993.
- [4.43] **Ivan A.,** *Stabilirea unei matrice tangentă mai exactă pentru bara dreaptă*. Sesiunea de comunicări tehnico - științifice a tinerilor absolvenți, Timișoara, 1989.

- [4.44] **Ivan A.**, *Stabilitatea structurilor metalice reticulate*. Referat în cadrul programului de pregătire a doctoratului Univ. Politehnica Timișoara, 1992.
- [4.45] **Ivan A.**, *The effect of member strengthening and imperfections on the limit load of a single layered reticulated shell*. Lucrările celei de a VIII-a Conf.Int.de Constr.Metalice, Vol.1, pp283-288, Timișoara, România, 1997.
- [4.46] **Ivan A.**, *Utilizarea metodei elementului finit la studiul stabilității structurilor plane alcătuite din bare*. Sesiunea de comunicări tehnico - științifice a tinerilor ingineri absolvenți Timișoara, 1989.
- [4.47] **Ivan M. și Ivan A.**, *Geometrical nonlinear analysis of the bar using finite element method*. Al. IV-lea Simpozion de Matematică și Aplicații , vol.2, pp 192 - 202, Editura Mirton, 1991.
- [4.48] **Ivan M. și Ivan A.**, *Cupola metalică cu arce și inele la banca agricolă din Arad*. A VII-a Conf. de Constr.Metalice, vol.2, pp 420 - 427, U.Tehnică, Timișoara, 1994.
- [4.49] **Ivan M., Cuteanu E., Florescu D., Ivan A.**, *Nonlinear analysis of a hidrotransportation system for pyrite and copper*. Proc of the Eighth Int. Conf. of Steel Struct, Vol.1, pp 141-148, Editura Mirton, Timișoara, România, 1997.
- [4.50] **Ivan M., Cuteanu E., Ivan A., Pinteș D.**, *Nonlinear analysis of structures*. Bul. Științific al Univ. Politehnica din Timișoara, Tom 42(56) Fasc.1., pp, 8 - 15, România, 1997.
- [4.51] **Ivan M., Ivan A., Leț T.**, *Analysis of cylindrical shells using the finite element method*. Int.Colloq on Stability and Ductility of Steel Structures. Timișoara, Romania, 1999.
- [4.52] **Ivan M., Pinteș D., Ivan A.**, *Analysis of plane arches*. Lucrările celei de a 4-a Conf. Internaționale de Elemente Finite și de Frontieră. ELFİN 4, Secția 2.2., pp 83 - 91. Univ. Politehnica Gh.Asachi din Iași, România, 1997.
- [4.53] **Ivan M., Pinteș D., și Ivan A.**, *Non linear analysis of plane frames*. Lucrările celei de a 4-a Conf. Internaționale de Elemente Finite și de Frontieră ELFİN 4, Sect.2.2. pp 75 - 82, Univ.Gh.Asachi din Iași, România, 1997.
- [4.54] **Ivan M., Varga L., Ivan A.**, *Cable supported gas pipe over Timis river at Caransebeș*. Lucr.celei de a VIII-a Conf. Int.de Constr.Metalice, vol.1, pp 111 – 118, Editura Mirton Timișoara, România, 1997.
- [4.55] **Kani I. M.**, *A theoretical and experimental investigations on the collapse of shallow reticulated domes*, Ph. D. Thesis, Cambridge Univ., 1986.
- [4.56] **Kani I. M., Mc Connel R. E.**, *A simple and efficient beam element for the combined nonlinear analysis of frameworks*, Comp. and Struct. , vol. 25, no. 3, pp 457 – 462, 1987
- [4.57] **Kani I. M., Mc Connel R. E., See T.**, *The analysis and testing of a single layer shallow braced domes*, Proc. of Third Conf. On Space Structures (ed. H. Nooshin), pp 613 – 618. Elsevier, Guildford, 1984.

- [4.58] **Kani I. M., Mc Connel R. E.**, *Single – layer shallow lattice domes: analysis, general behaviour and collapse*, Int. J. of Space Struct., vol. 3, no. 2, pp 64 – 73, 1988.
- [4.59] **Kani I. M., Mc. Connel R. E.**, *Collapse and post-collapse analysis of shallow lattice domes*, Int. Symp. On Membrane Structures and Space Frames, Osaka, 1986.
- [4.60] **Kani I. M., Mc. Connel R. E.**, *Collapse of shallow lattice domes*, J. Str. Eng., Vol. 113, No. 8, pp 1806-1819, 1987.
- [4.61] **Kato S., Shibata R., Ueki T., Matushita F.**, *Buckling Load estimation for single layer domes by the concept of column strength curves*, Public Assembly Structures from Antiquity to the Present, IASS Symp., Istambul, pp 507-512, 1993.
- [4.62] **Kato S., Takashima H., Shibata R.**, *Effects of geometrical initial imperfections, relaxation at connectors and additional loads on ultimate strength of semi-rigidly jointed single – layer reticular dome*, Proc. Third Summer Coll. On Shell and Spatial Structures, pp 481 – 492, Taegu, Korea, 1990.
- [4.63] **Kato S., Yamada S., Takashima H., Shibata R.**, *Buckling stress of a member in a rigidly jointed single – layer reticular dome*, Spatial Structures at the Turn of the Millennium, Proc. IASS Sump., pp 109 – 116, Copenhagen, 1991.
- [4.64] **Koiter W.T.**, *On the stability of elastic equilibrium*. Disertation Delft, Holand, 1946.
- [4.65] **Lenza P.**, *Instability of single layer double curved vaults*. Int. Journal on Space Structures, Vol.7, No.4, pp 253-264. Multi Science Publishing, Co .Ltd.,1992.
- [4.66] **Lenza P.**, *Some developments in shells structural analysis*, Proc, IASS Congr., vol. 1, Madrid, 1989.
- [4.67] **Lind N. C.**, *Local instability analysis of triangular dome framework*, Sturct. Eng. No. 8, Vol. 47, pp 317 – 324, 1969.
- [4.68] **Lind N. C., Puranik B.**, *The stability analysis of reticulated domes with grid discontinuities*, Int. Conf. On Space Structures (ed. R. M. Davies), pp 439 – 444, 1966.
- [4.69] **Lind N. C.**, *Stability criteria for reticulated shells*, IASS Congr. Large Span Shells, vol. 1, Leningrad, 1966.
- [4.70] **Marinescu Gh.**, *Reticulated shells (in Romanian)*, Ph. D. Thesis, Bucharest.
- [4.71] **Meek J. L., Loganathan S.**, *Theoretical and experimental investigation of a shallow geodesic dome*, Int. J. Space Structures, vol. 4, no. 2, pp 89 – 105, 1989.
- [4.72] **Oda K., Hangai Y., Ohya S.**, *Loading test of torsional buckling of joint of six member unit dome*, Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures (eds. Y. Hangai et al.), IASS Symp., pp 189 – 196, Tokyo, 1993.
- [4.73] **Oda K., Hangai Y.**, *Snap – through buckling and torsional buckling of joint single layer lattice shells*, Innovative Large Span Structures (eds. N. K. Srivastava et al.), IASS Congress, pp 487 – 496, Toronto, 1992.

- [4.74] **Paradiso M., Reale E., Tempesta G.,** *Nonlinear post – buckling analysis of reticulated dome structures*, IASS Congr., Madrid, 1979.
- [4.75] **Pignataro M., Luongo A., Rizzi N.,** *Stability, bifurcation and postcritical behaviour of elastic structures*. Elsevier, 1991.
- [4.76] **Rothert H.și Gebbeken N.,** *On numerical results of reticulated shell buckling* Int.J.of Space Structures Vol.7, No.4, pp 299 - 319, 1992.
- [4.77] **Saitoh H., Hangai Y., Toda I., Yamagiwa T., Okuhara T.,** *Buckling loads of reticulated space frames*, Membrane Structures and Space Frames, IASS Symp., vol. 3, pp 121 – 128, Osaka, 1986.
- [4.78] **Savelyev V. A., Lombardo I. V.,** *Study of non – symmetrical forms of buckling in single – net domes*, Tension Structures and Space Frames, IASS Symp., Tokyo – Kyoto, 1971.
- [4.79] **See T.,** *Large displacement elastic buckling space structures*, Ph. D. Thesis Cambridge Univ., 1983.
- [4.80] **Shibata R., Kato S., Yamada S.,** *Experimental study on the ultimate strength of reticular domes*, Space Structures 4 (eds. G. A. R. Parke, C. M. Howard), Guilford Conf., Th. Telford Publ., pp 387 – 395, London, 1993.
- [4.81] **Soare M.,** *Some observation on the failure of dome of great span*. Proc. of First Int. Conf.of Space Structures Univ. of Surrey, pp 419 - 424, Davies R.M. (Editors) J.Wiley and Sons.Inc. New York, 1967.
- [4.82] **Stutzki Ch.,** *Influence of conections stiffness on the stability of lattice shells*, Int. Coll. Bolted and Special Structural Connections, Moskau, 1989.
- [4.83] **Sugizaki K., Kohmura S.,** *Experimental study on buckling behaviour of a triodetic aluminium space frame*, Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures (eds. Y. Hangai et al.), IASS Symp., pp 205 – 212, Tokyo, 1993.
- [4.84] **Suzuki T., Ogawa T și Ikarashi K.,** *Elastic buckling analysis of rigidly jointed single layer reticulated domes with random initial imperfections*. Int.J.Space Structures, Vol.7, No.4, pp 265 - 273. Multi - Science Publishing Co, Ltd., 1992.
- [4.85] **Suzuki T., Ogawa T., Ikarashi K.,** *Elasto – plastic buckling analysis of rigidly jointed single layer reticulated domes*, Int. J. Space Structures, vol. 7, no. 4, pp 363 – 368, 1992
- [4.86] **Suzuki T., Ogawa T., Kubodera I., Ikarashi K.,** *Experimental and theoretical study of a single layer reticulated dome*, Spatial Structures at the Turn of The Millennium , IASS Symp., vol. 3, pp 85 – 92, Copenhagen.
- [4.87] **Suzuki T., Ogawa T., Ozaki H.,** *Large deformation analysis of square – on – square duple – layer grids with member buckling and yielding*, Membrane Structures and Space Frames, vol. 3, Elsevier, pp 81 – 88, 1986.

- [4.88] **Takashima H. și Kato T.**, *Numerical simulation on elastic - plastic buckling behaviour of a reticular dome*. Space Structures, 4, pp 1314-1322, Thomas Telford, London, 1993.
- [4.89] **Thompson J.M.T. și Hunt G.W.**, *A general theory of elastic stability*. John W., London, 1973.
- [4.90] **Toader I. H. , Gioncu V.**, *Influence of elastically end – restrained bars on the behaviour of curved latticed structures*, Space Structures (ed. H. Nooshin), Elsevier, pp 539 – 544, Guilford, 1984.
- [4.91] **Ueki T., Kato S., Kubodera I., Mukaiyama Y.**, *Study on the elastic and elasto – plasto buckling behaviour of single – layered domes composite of members having axial and bending springs at the ends*, Spatial Structures at the Turn of the Millennium, IASS Sump. Vol. 3, pp 93 – 100, Copenhagen, 1991.
- [4.92] **Ueki T., Matsushita F., Shibata R., Kato S.**, *Design procedure for large single – layer latticed domes*, , Space Structures 4 (eds. G. A. R. Parke, C. M. Howard), Guilford Conf., Th. Telford Publ., pp 237 – 346, London, 1993.
- [4.93] **Yamada M., Uchiyama K., Yamada S., Ishikawa T.**, *Theoretical and experimental study on the buckling of rigidly jointed single layer latticed spherical shell and the external pressure*, Membrane Structures and Space Frames, IASS Symp., vol. 3, pp 113 – 120, Osaka, 1986.

CAPITOLUL 5

PROPAGAREA INSTABILITĂȚII LOCALE LA CUPOLELE RETICULATE SIMPLU STRAT



5. PROPAGAREA INSTABILITĂȚII LOCALE LA CUPOLELE RETICULATE SIMPLU STRAT

5.1 Introducere

Structurile reticulate sunt alcătuite din bare drepte legate între ele în noduri prin articulații sau încastrări. Dispunerea barelor în spațiu se face în așa fel încât structura rezultată să aibă forma dorită și să preia în condiții de siguranță încărcările care intervin în perioada de montaj și exploatare.

Încărcările exterioare sunt: greutatea permanentă, încărcările tehnologice, încărcările seismice și încărcările din zăpadă, vânt, temperatură. Încărcările permanente și din zăpadă sunt încărcări statice, iar încărcarea din vânt și seismice sunt încărcări dinamice.

Structurile reticulate acoperă deschideri mari fără a fi rezemate intermediar. Materialele din care se execută acestea au caracteristici fizico-mecanice superioare. Elementele de construcție realizate din aceste materiale au secțiuni transversale cu dimensiuni reduse. În aceste condiții crește pericolul de pierdere a stabilității echilibrului.

Sub acțiunea încărcărilor exterioare structura se află în echilibru, în poziția deformată, în stare de repaus static sau dinamic. Poziția de echilibru poate să fie stabilă sau instabilă.

5.2 Instabilitatea structurilor tratată ca fenomen dinamic

Pentru a preciza natura echilibrului în care se află structura se perturbă poziția de echilibru cu un impuls inițial. În urma perturbării structura iese din poziția de echilibru relativ și trece în stare de mișcare. Dacă după încetarea impulsului inițial structura revine la poziția inițială, echilibrul este stabil, iar dacă deplasările continuă să crească echilibrul este instabil.

Deci, analiza tipului de echilibru, a mișcării și a instabilității structurilor trebuie privită din punct de vedere dinamic.

Comportarea structurii sub acțiunea forțelor exterioare $\{P\}$ este descrisă de vectori deplasare $\{d(t)\}$. Poziția de echilibru este notată cu indicele e și este definită în spațiul $\{P_e\}$, $\{d_e\}$ de ecuația $f(P,d) = 0$ (Fig. 5.1 a), stabilită din calculul static al structurii.

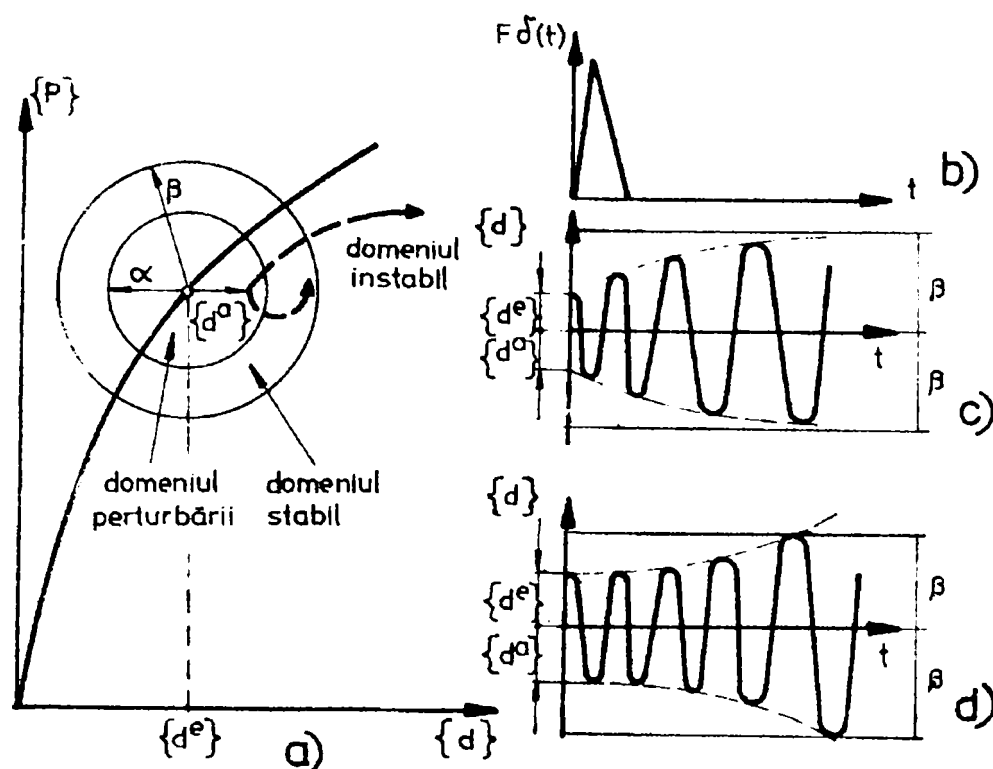


Fig. 5.1 Stări de echilibru dinamic

Pentru a stabili natura echilibrului se perturbă poziția de echilibru cu un impuls $F\delta(t)$, unde $\delta(t)$ este o funcție Dirac (Fig. 5.1 b). Structura ajunge într-o poziție adiacentă $\{d(t)\} = \{d^e\} + \{d^a\}$ pentru care $\{d^a\}$ este mai mică decât limita perturbării α (se poate alege o valoare pentru care structura rămâne în domeniul elastic). Ca efect al impulsului, structura va oscila în jurul poziției de echilibru. Dacă se poate determina o valoare $\beta = \beta(\alpha)$ în așa fel încât $\{d(t)\} < \beta$ pentru $\forall t > 0$, echilibrul este stabil (Fig. 5.1 c). Dacă această condiție nu este satisfăcută, echilibrul este instabil (Fig. 5.1 d). Acest criteriu este o măsură a gradului de stabilitate a structurii.

Aplicarea criteriului lui Liapunov la stabilirea naturii echilibrului necesită integrarea ecuațiilor diferențiale de mișcare pentru structura cu n grade de libertate dinamică. Ecuațiile diferențiale de mișcare ale structurii perturbate sunt ecuații diferențiale neliniare. Rezolvarea acestor ecuații este posibilă folosind metoda elementului finit în formulare matricială și metoda lui Newmark. Detaliile se prezintă în paragrafele următoare.

5.3 Fenomenul de propagare a instabilității locale

Fenomenul de propagare a instabilității locale este strâns legat de comportarea postcritică a barelor comprimate. Collins [5.6], Collins și Supple [5.50] au precizat că barele comprimate cu secțiune inelară prezintă o reducere bruscă a capacității portante după flambaj (tensiuni reziduale). În figura 5.2 se prezintă curbele de variație a forțelor axiale și deplasărilor corespunzătoare sub formă adimensională.

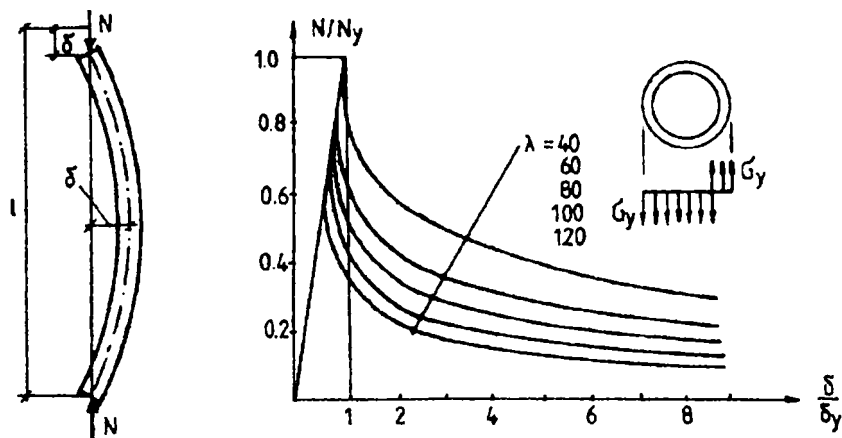


Fig. 5.2 Flambajul barelor cu secțiune inelară

Curbe similare au fost obținute de Mwakali [5.40] pentru secțiunile transversale T care arată că această reducere este specifică tuturor profilelor folosite la execuția structurilor spațiale.

Supple și Collins [5.50] au propus mai multe curbe de comportare a barelor comprimate, care iau în considerare sau nu tensiunile reziduale din bare. Madi [5.35] a studiat modul cum este influențată capacitatea portantă a unei structuri de luarea în considerare a diferitelor legi de comportare a barelor comprimate, în domeniul postcritic, (Fig. 5.3).

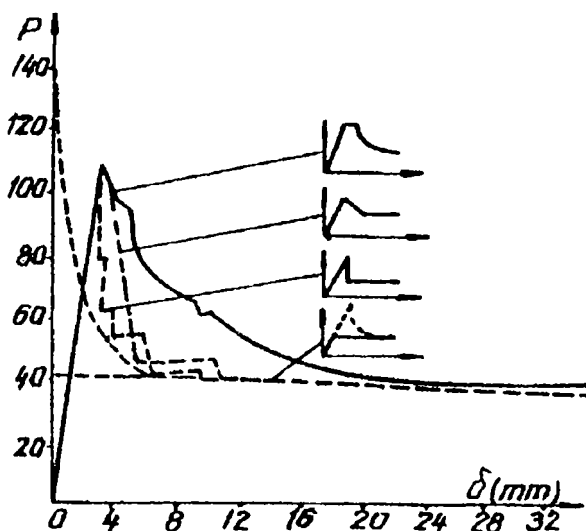


Fig. 5.3 Influența comportării postcritice a barelor asupra comportării întregii structuri

Încărcarea critică minimă se obține dacă se iau în considerare numai tensiunile reziduale. Se observă reducerea capacității portante după cedarea primului element din structură. Reducerea este diferită pentru fiecare tip de curbă de comportare postcritică a barei comprimate. Rezultă necesitatea de a considera cât se poate de corect legea de comportare postcritică a barei comprimate.

Primele studii referitoare la comportarea postcritică și propagarea instabilității la structurile reticulate dublu strat au fost efectuate de SchMidt și alții [5.46] și Hanaor și Schmidt [5.45].

Supple [5.49], Supple și Collins [5.48] pentru a studia influența flambajului unei bare asupra comportării structurii au imaginat un model simplu format din trei bare izolate din structură de pe fața superioară (Fig. 5.4 b).

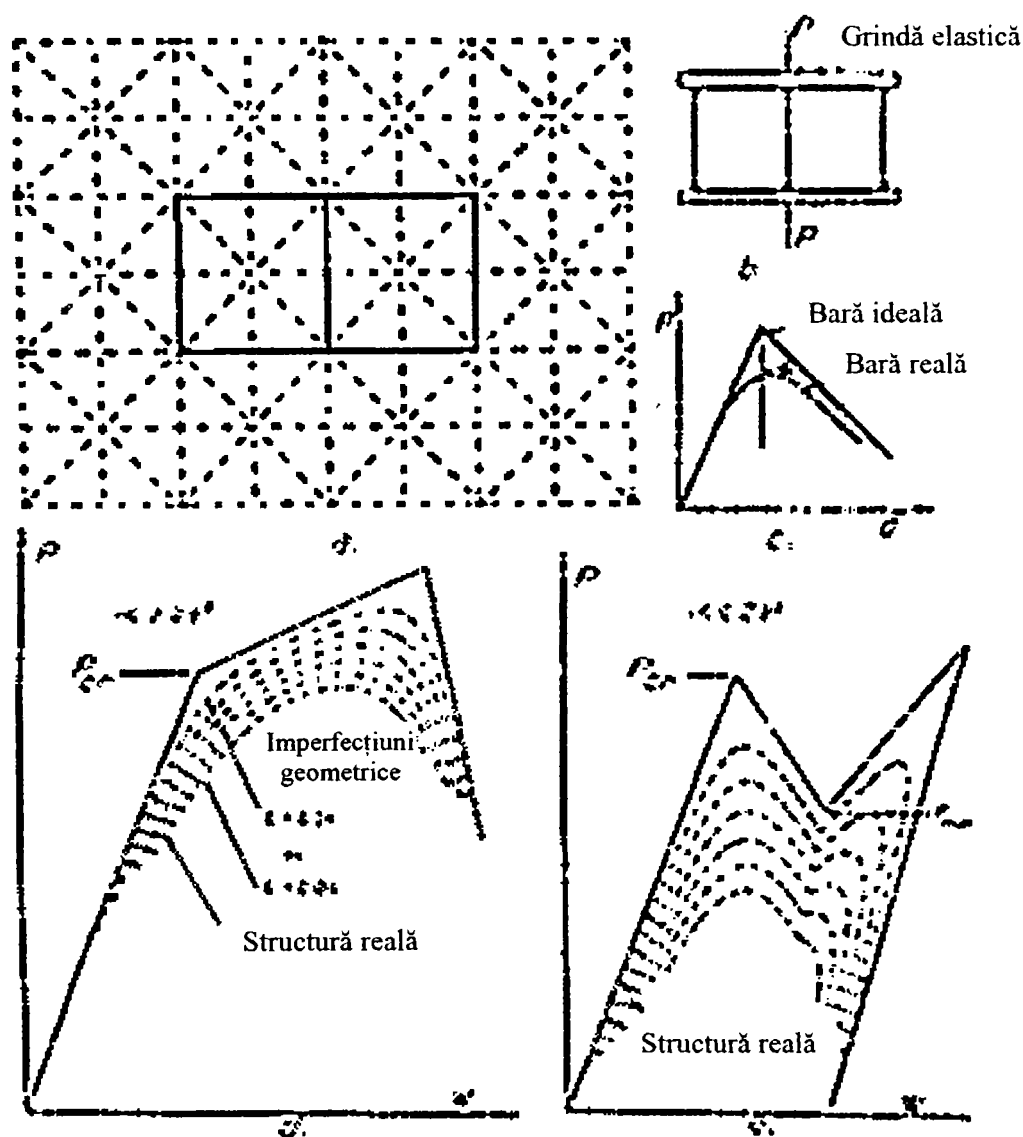


Fig. 5.4 Influența flambajului de bară asupra comportării structurii

Comportarea barelor după flambaj este caracterizată liniar de panta α . Pentru $\alpha > 24^\circ$ comportarea structurii în domeniul postcritic este stabilă, iar pentru $\alpha < 24^\circ$ comportarea este instabilă (Fig. 5.4 e)

Dacă se studiază o structură mai complexă se disting trei tipuri de comportare (Fig. 5.5):

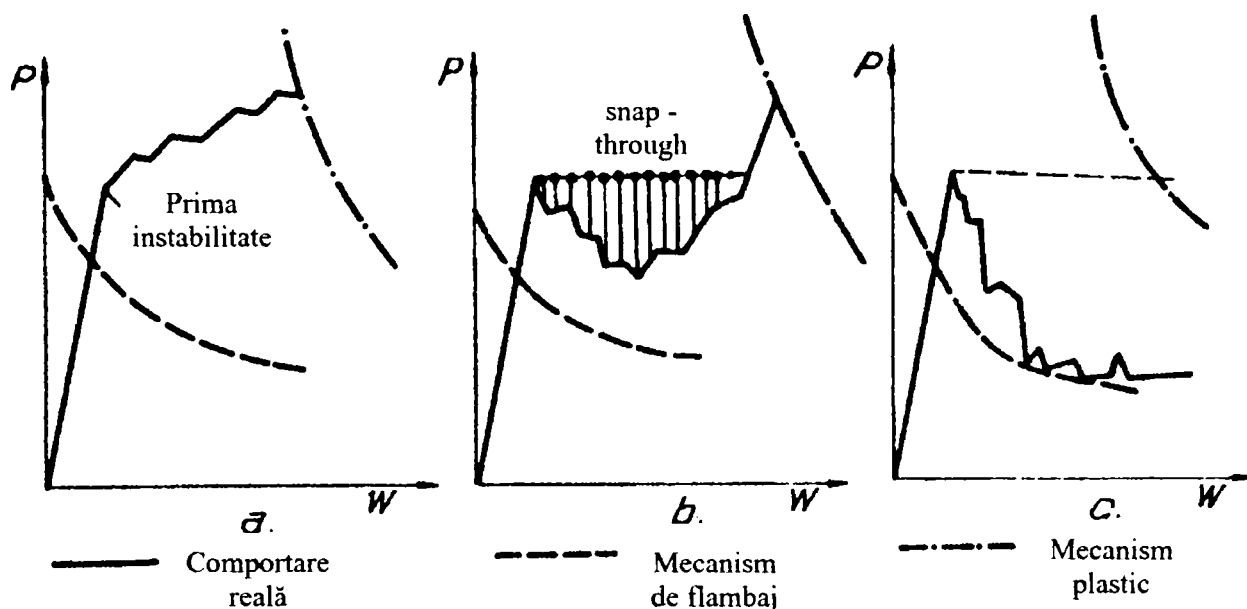


Fig. 5.5 Tipuri de comportare postcritică a structurilor

- comportare postcritică stabilă (Fig. 5.5 a)
- comportare postcritică instabilă la început și apoi devine stabilă în urma saltului (Fig. 5.5 b);
- comportarea postcritică instabilă (Fig. 5.5 c).

Structura cu comportarea din figura 5.5 a are capacitatea de redistribuire a eforturilor și ca urmare încărcările mai pot crește. Structura cu comportarea din figura 5.5 b prezintă fenomenul de salt din poziția precritică în domeniul postcritic. Fenomenul are un accentuat caracter dinamic, structura acumulând energie cinetică (egală cu suprafața hașurată) și se produce un salt al echilibrului caracterizat de viteze și accelerații mari.

În urma acestuia structura execută oscilații în jurul noii poziții de echilibru și trece pe o ramură postcritică. Dacă amortizarea este mare, structura devine stabilă și poate suporta încărcări suplimentare în poziția deformată. Dacă amortizarea este redusă, oscilațiile nu sunt amortizate și deformațiilor pot crește, structura atingând mecanismul de cedare plastică.

În ultimul caz (Fig. 5.5 c) după flambajul primei bare nu există posibilități de redistribuire a eforturilor și structura cedează prin propagarea instabilității.

Cercetările teoretice și experimentale efectuate de Collins [5.6], Supple și Collins [5.48], Mwakali [5.40], Hanaor [5.16], Tado și Wakayma [5.51] au arătat că structurile reticulate dublu strat au o comportare similară cu cea prezentată în figura 5.5 c. Ele nu au posibilități de redistribuire a eforturilor. Dacă o bară își pierde stabilitatea, structura cedează în totalitate.

În figura 5.6 se prezintă mecanismul de cedare pentru o placă plană reticulată când încărcarea este menținută constantă [5.16].

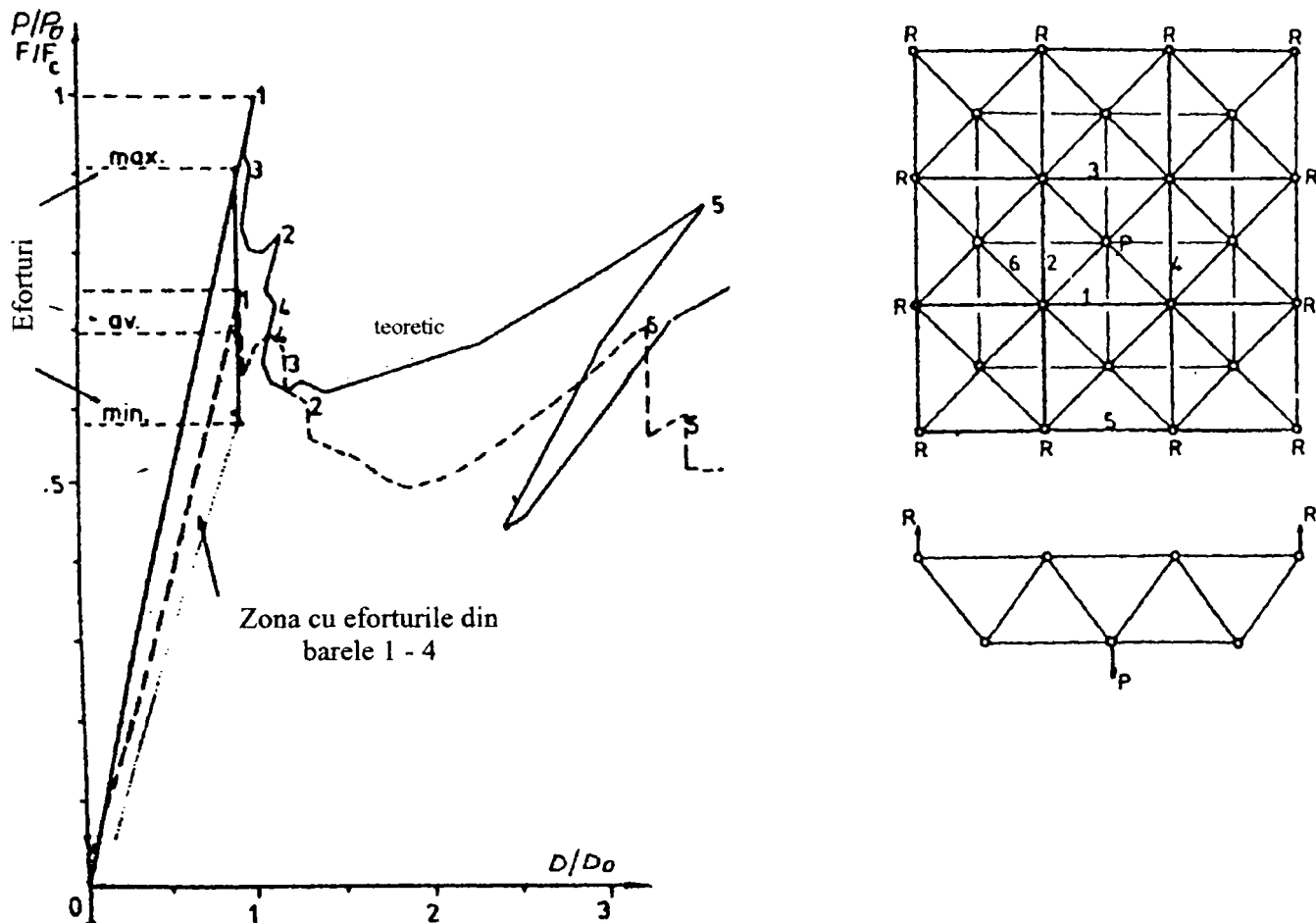


Fig. 5.6 Instabilitate generală produsă de flambajul de bară

Cercetări importante au efectuat Murtha – Smith [5.38] și Murtha – Smith și Leary [5.39] în problema analizei comportării structurii după flambajul unei bare. Metoda constă în înlocuirea barei flambate și analiza siguranței barelor adiacente. Dacă după înlocuirea barei flambate capacitatea portantă a barelor adiacente nu este depășită fenomenul are caracter local. Când capacitatea portantă a barelor adiacente este depășită se produce propagarea instabilității în vecinătatea primei bare flambate.

Din studiile efectuate rezultă că există bare a căror înlocuire nu mai produce propagarea instabilității, însă există și bare al căror flambaj are ca urmare acest fenomen. Pentru structura din figura 5.7 , cu stâlpi numai în colțuri, are barele care pot produce propagarea instabilității sunt barele puternic comprimate la mijlocul deschiderilor (Fig. 5.7 a) și diagonalele din colțuri. Flambajul unei bare din mijlocul deschiderii dintre stâlpi poate rămâne un fenomen local. Dacă structura este rezemată perimetral cele mai solicitate bare sunt cele din mijloc. Propagarea se poate limita la o zonă centrală fără colapsul structurii întregi. Rezultă că plăcile reticulate dublu strat rezemate numai în colțuri sunt cele mai sensibile la propagarea instabilității, iar rezemarea periferică micșorează pericolul acestei propagări.

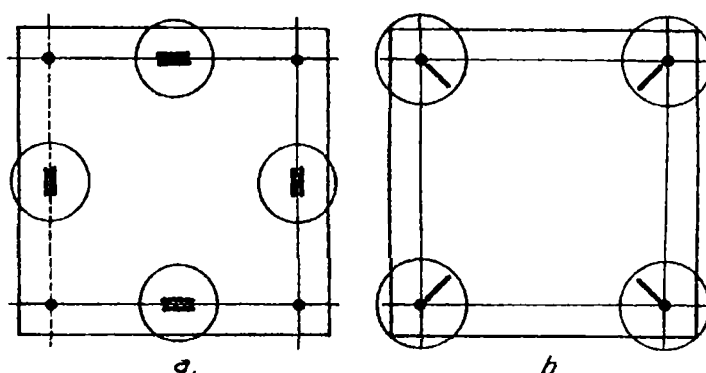


Fig. 5.7 Barele comprimate de care depinde propagarea instabilității la o placă reticulată dublu strat

Supple și Collins [5.48] au studiat pe un model comportarea unei structuri plane reticulate simplu strat (Fig. 5.8 a).

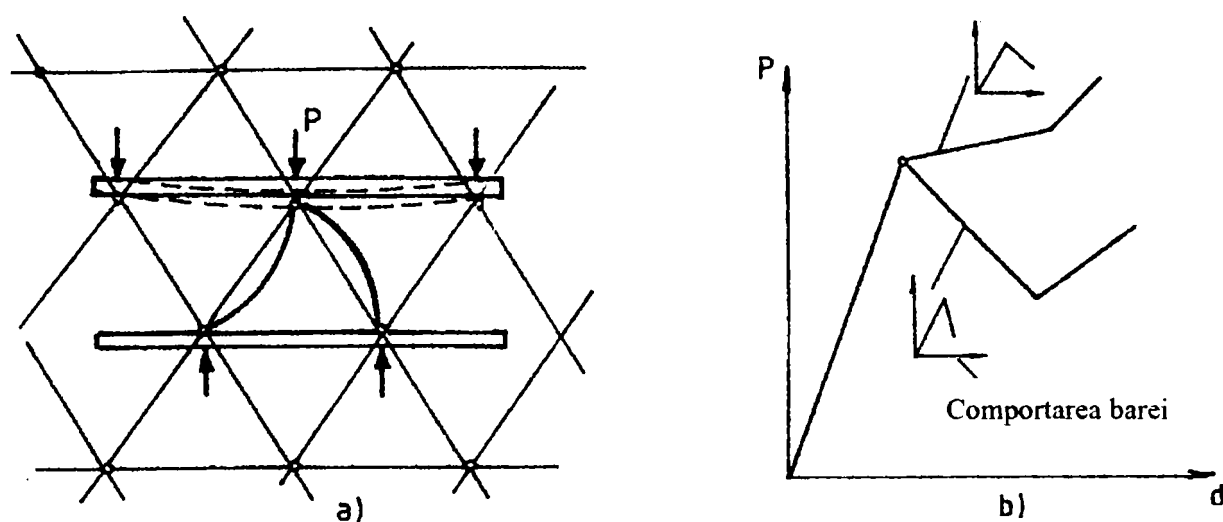


Fig. 5.8 Comportarea postcritică în cazul flambajului de bară

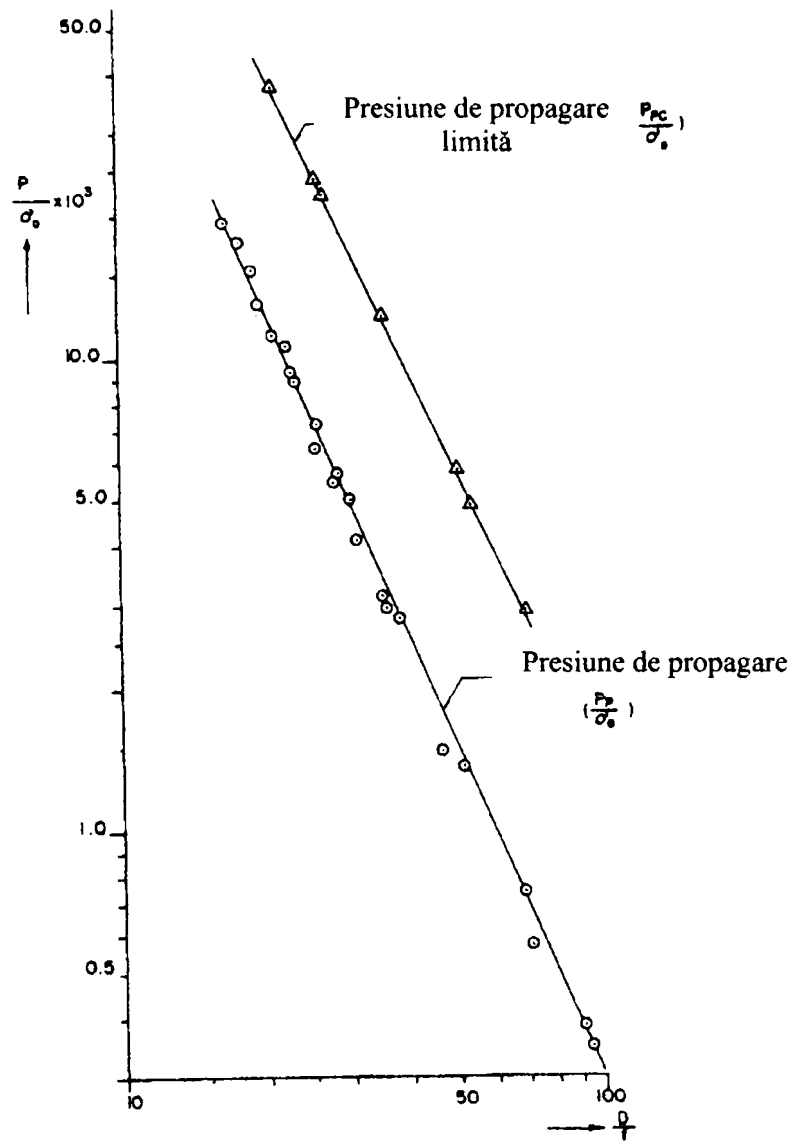


Fig. 5.9 Presiuni de propagare experimentale ca funcții de diametru/grosimea peretelui țevii

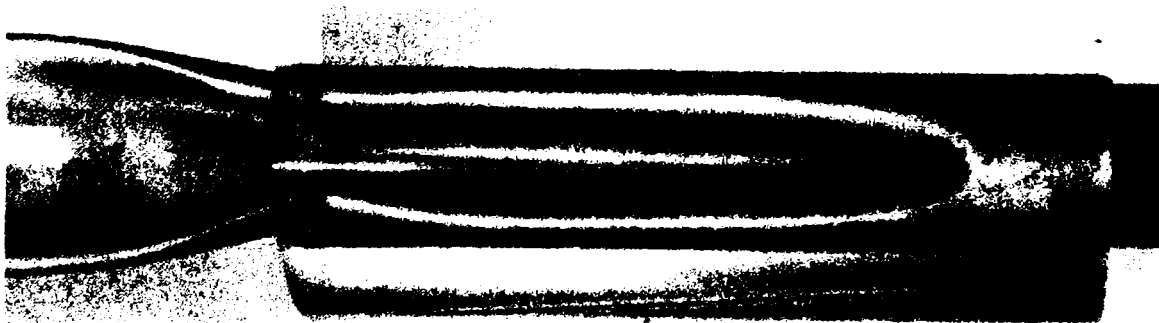


Fig. 5.10 Propagarea unei cute într-un mediu închis

Kyriakides și Babcock [5.27] pentru a lămuri mecanismul de propagare au simulat numeric comportarea unui inel confecționat din material elasto – plastic sub acțiunea presiunii exterioare.

Variația presiunii în funcție de deplasarea radială maximă se prezintă în figura 5.11.

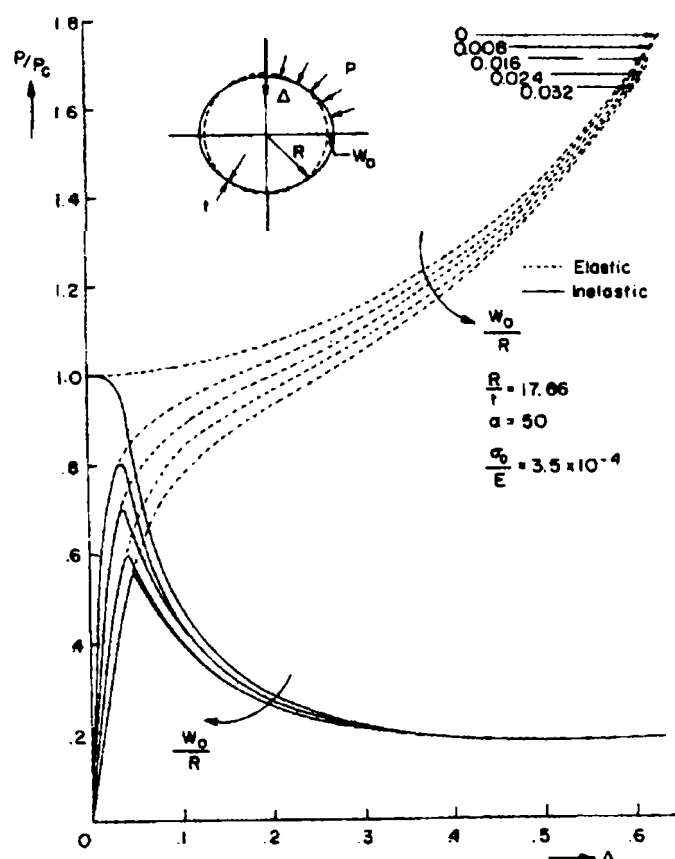


Fig. 5.11 Răspunsul postcritic al unui inel sub presiune exterioară

În domeniul postcritic, datorită deformațiilor plastice, inelul are o comportare instabilă. Se remarcă faptul că presiunea critică pentru inel scade odată cu creșterea imperfecțiunii geometrice w_0/R . Pozițiile deformate ale inelului până la cedare se prezintă în figura 5.12

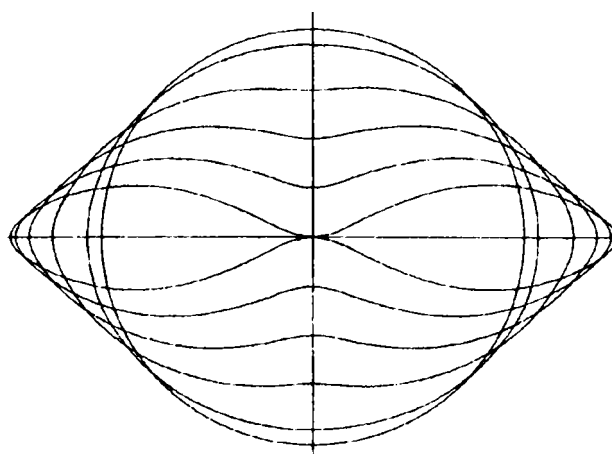


Fig. 5.12 Succesiunea pozițiilor deformate în cazul cedării unui inel circular sub acțiunea presiunii exterioare

Determinarea presiunii de propagare limită (P_{pc}) s-a efectuat experimental pe cilindrii din oțel, care au fost consolidați pe o parte din lungimea lor. În exterior aceștia au fost îmbrăcați într-un material plastic și apoi introduși într-un alt cilindru de oțel cu diametru și grosime de perete mai mari (Fig. 5.13).

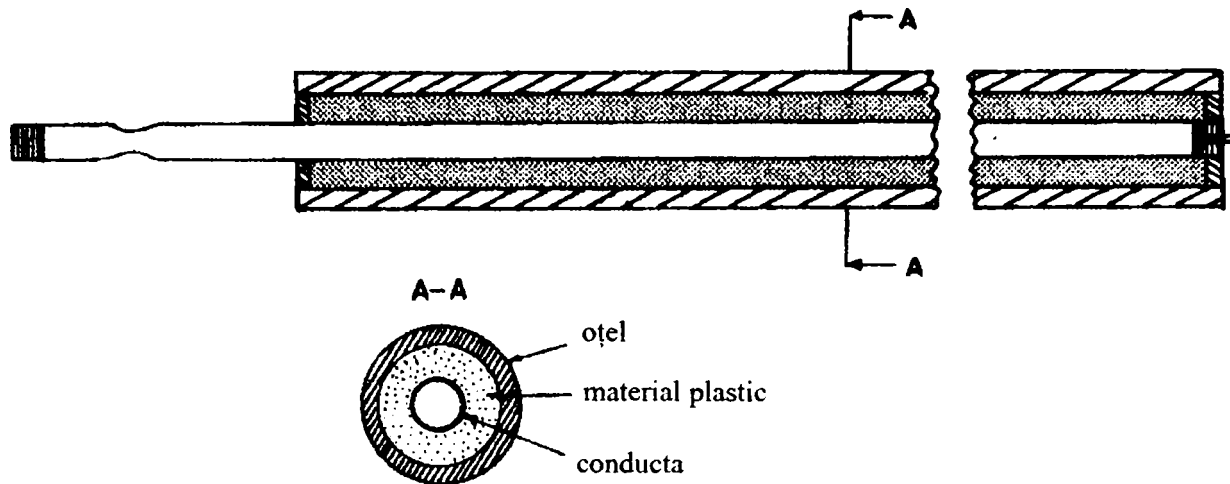


Fig. 5.13 Consolidare experimentală a țevii

Imperfecțiunea inițială a fost considerată în afara zonei consolidate. Cilindrii au fost încercați într-un vas de presiune, presurizat cu apă. Presiunea de propagare limită a fost obținută experimental prin înregistrare. Se observă propagarea cutei inițiale sub formă de U în lungul conductei (Fig. 5.14).

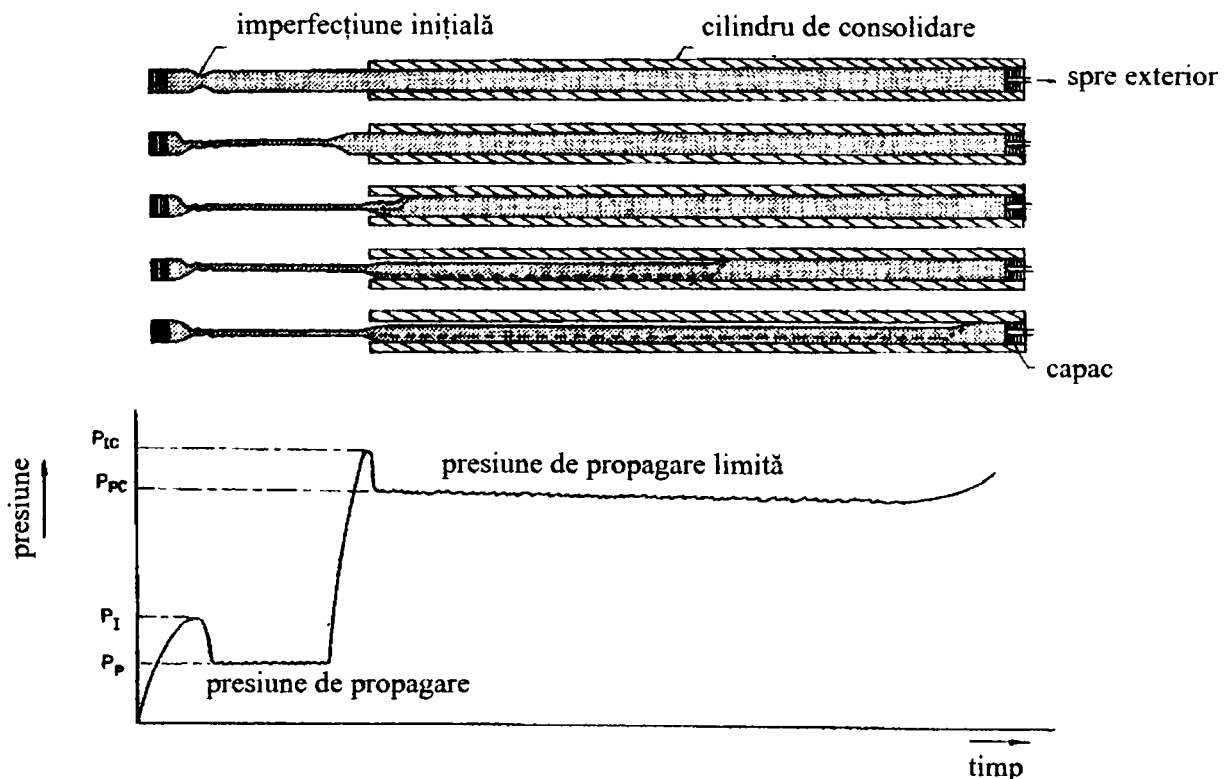


Fig. 5.14 Reprezentare schematică a unui experiment cvasistatic pentru propagare într-o țevă consolidată

În figura 5.15 se prezintă propagarea cutei inițiale pe lungimea conductei neconsolidate și consolidate.

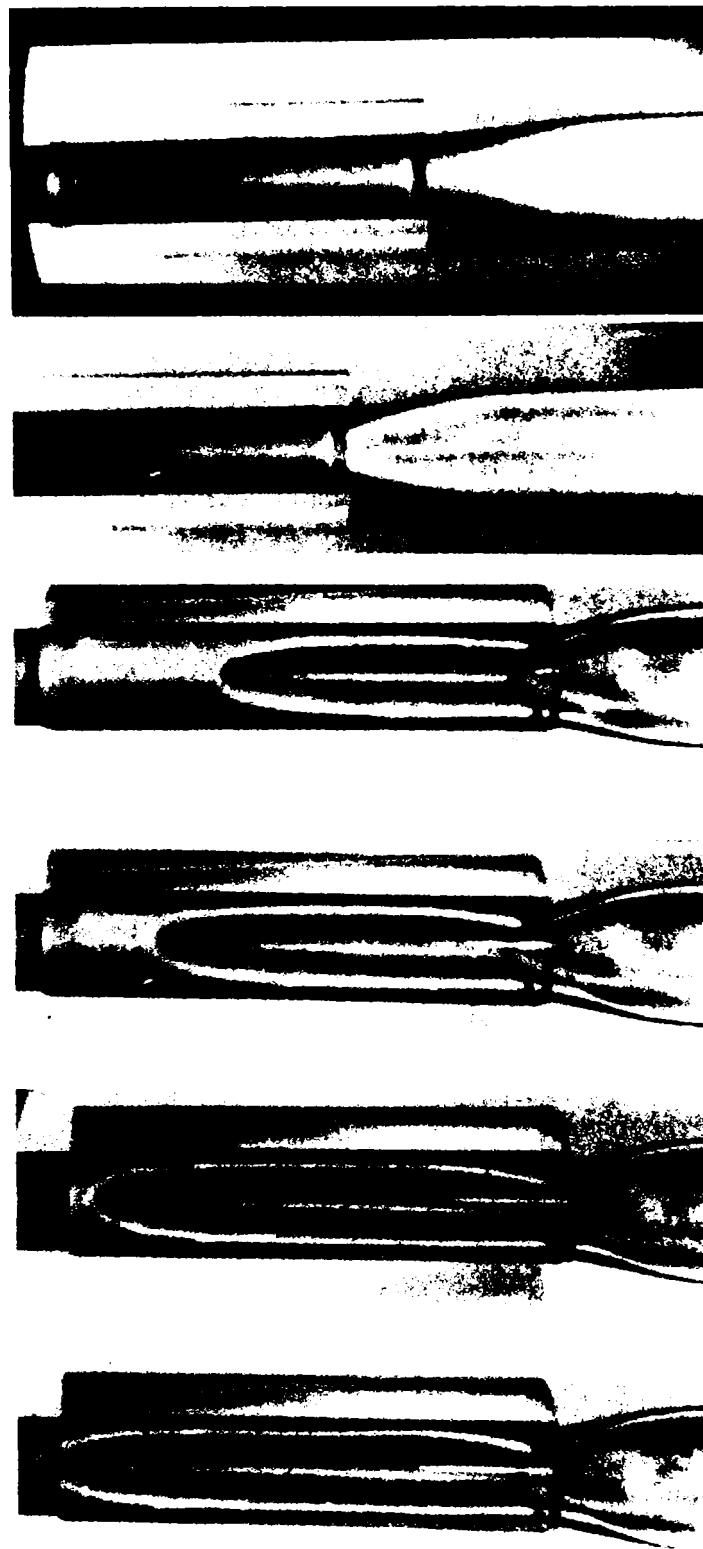


Fig. 5.15 Propagarea cutei inițiale prin penetrarea consolidării

Propagarea cutei inițiale se produce ca urmare a deformațiilor plastice care apar în conductă.

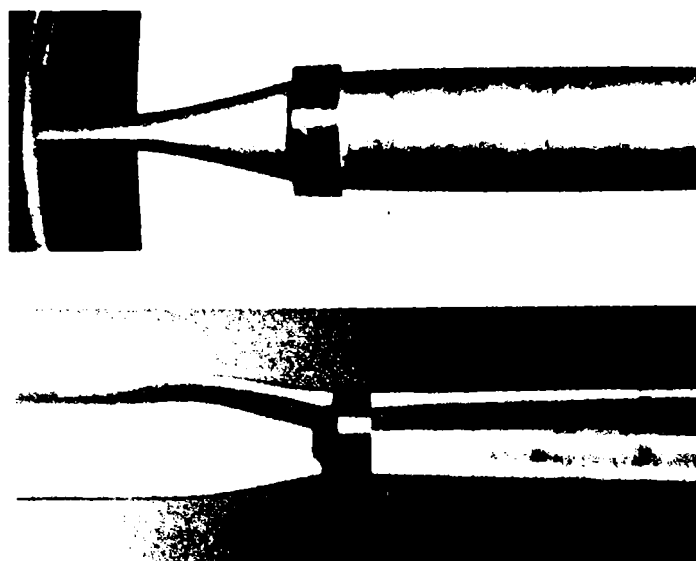


Fig. 5.16 Propagarea cutei prin penetrarea inelului de consolidare

În figura 5.16 b se prezintă propagarea flambajului sub formă de U dincolo de inelul de consolidare.

În figura 5.17 se prezintă propagarea instabilității locale la o cupolă continuă supusă unei presiuni exterioare. Instabilitatea a început prin formarea unei burdușiri locale, lângă nașterea cupolei, care s-a propagat continuu până a acoperit aproape întreaga suprafață. În final cupola a trecut într-o poziție de echilibru inversată față de cupola inițială [5.15].

Cupolele reticulate simplu strat sunt structuri caracterizate de comportare neliniară. Neliniaritățile geometrice și comportarea elasto - plastică a materialului sunt luate în considerare la stabilirea răspunsului din încărcările exterioare. Aceste neliniarități sunt luate în calcul sub formă de imperfecțiuni. Încărcarea de cedare a cupolelor cu imperfecțiuni este mai mică decât a cupolelor reticulate reale.

Problema care se cere soluționată în continuare se referă la stabilirea caracterului dinamic al fenomenului de instabilitate a cupolelor reticulate simplu strat. Fenomenul de instabilitate începe cu instabilitatea de nod, care are un pronunțat caracter dinamic. Urmează saltul echilibrului care se propagă pe o porțiune din structură sau chiar pe structura completă. Acest tip de colaps este cunoscut ca propagarea instabilității locale.

Cercetările legate de propagarea instabilității trebuie să stabilească dacă:

- instabilitatea locală afectează numai o zonă locală;
- dacă se propagă pe o zonă mai mare a structurii;
- cum poate proiectantul să țină seamă de acest fenomen.

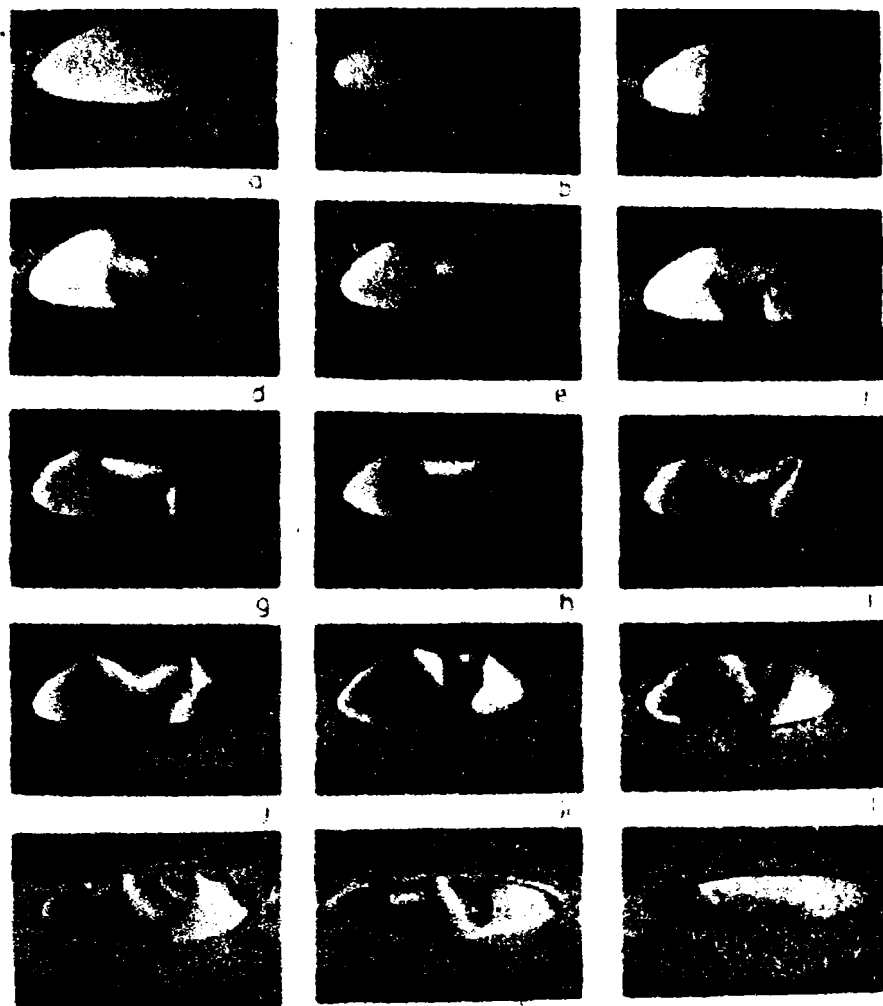


Fig. 5.17 Propagarea instabilității locale la o cupolă continuă supusă la presiune exterioară

Stabilitatea dinamică a cupolelor reticulate a fost puțin cercetată în comparație cu stabilitatea statică a acestor structuri.

Studii asupra propagării flambajului local la plăcile curbe reticulate simplu și dublu strat au fost efectuate de Lenza [5.30], Gioncu și Lenza [5.12], Gioncu [5.8], Gioncu și Dinculescu [5.14], Ivan și Gioncu [5.21], Abedi și Parke [5.1].

Lenza [] a studiat comportarea neliniară a unei bare cotite cu un resort dispus în nodul central. Pentru bara cotită cu resort de rigiditate axială k în nodul central, comportarea neliniară se prezintă în figura 5.18.

Ca parametri s-au considerat raportul α între rigiditatea resortului k și rigiditatea axială EA/h . Se observă că dacă α crește se obține o creștere a încărcării de limitare dar energia cinetică descrește. Dacă se analizează efectul dinamic al colapsului nodului în poziția deformată, când P este egal cu încărcarea de limitare, rezultă valorile deplasărilor, vitezei și accelerației. Valorile accelerației maxime în funcție de α sunt:

α	a_{max}/g
0	7,62
1×10^{-3}	7,13
1×10^{-2}	3,77
2×10^{-2}	1,58

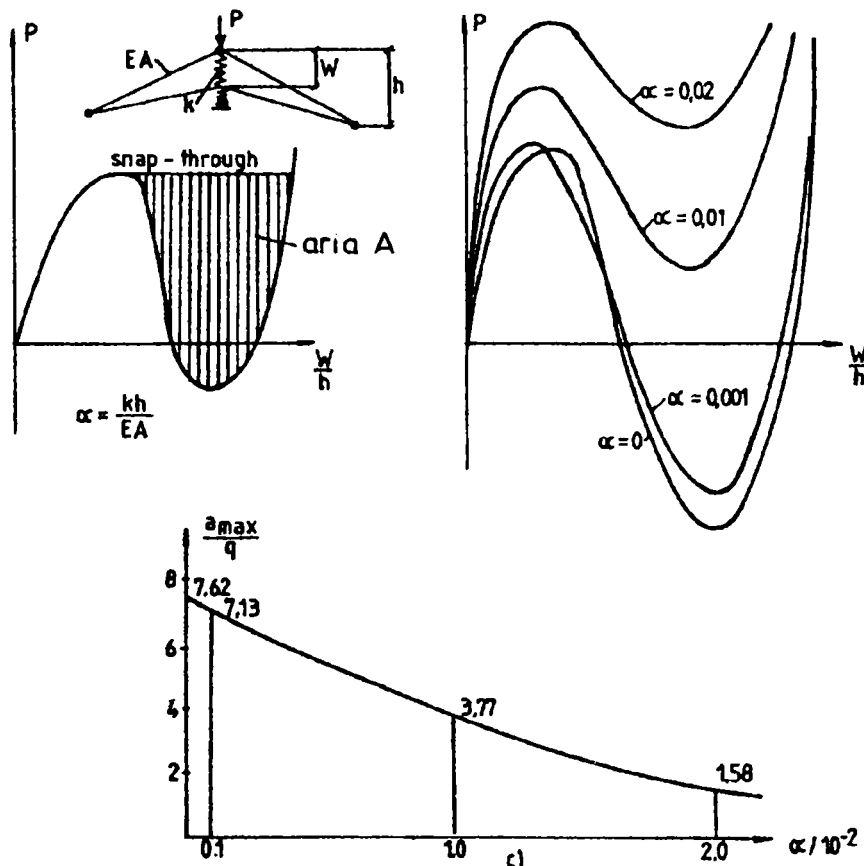


Fig. 5.18 Efectul dinamic al instabilității de nod

Se remarcă faptul că în decursul saltului se obțin accelerații mari (Fig. 5.18 c) și efectul dinamic este pronunțat.

Plăcile curbe reticulate pot fi schematizate ca un sistem compus din multe bare, ca cele de mai sus. În figura 5.19 se prezintă o celulă din placa curbă reticulată cu curbura pozitivă, curbura 0, și curbura negativă, precum și curbele încărcare - deplasare corespunzătoare.

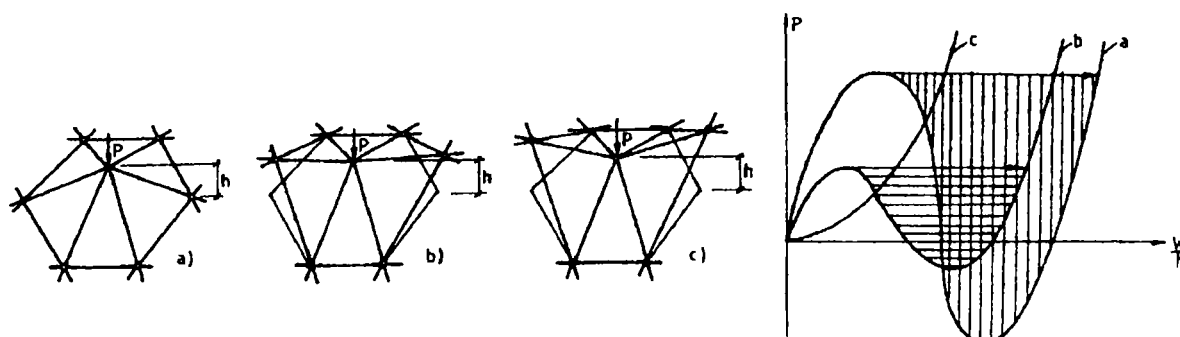


Fig. 5.19 Efectul curburii asupra comportării dinamice

Se observă că efectul maxim al instabilității prin “snap – through” se obține pentru curbura pozitivă, iar pentru curbura negativă acest efect dispare.

Lenza [5.33, 5.30], Gioncu și Lenza [5.12] au studiat comportarea unei plăci reticulate cu dublă curbură. Efectuând analiza dinamică a structurii au determinat accelerațiile care apar în timpul instabilității de nod. Accelerația maximă a fost aproximativ de 1,6 ori accelerația gravitațională g , ceea ce a produs propagarea instabilității pe o arie extinsă din suprafața plăcii curbe. În figura 5.20 se prezintă propagarea instabilității pe suprafața plăcii curbe.

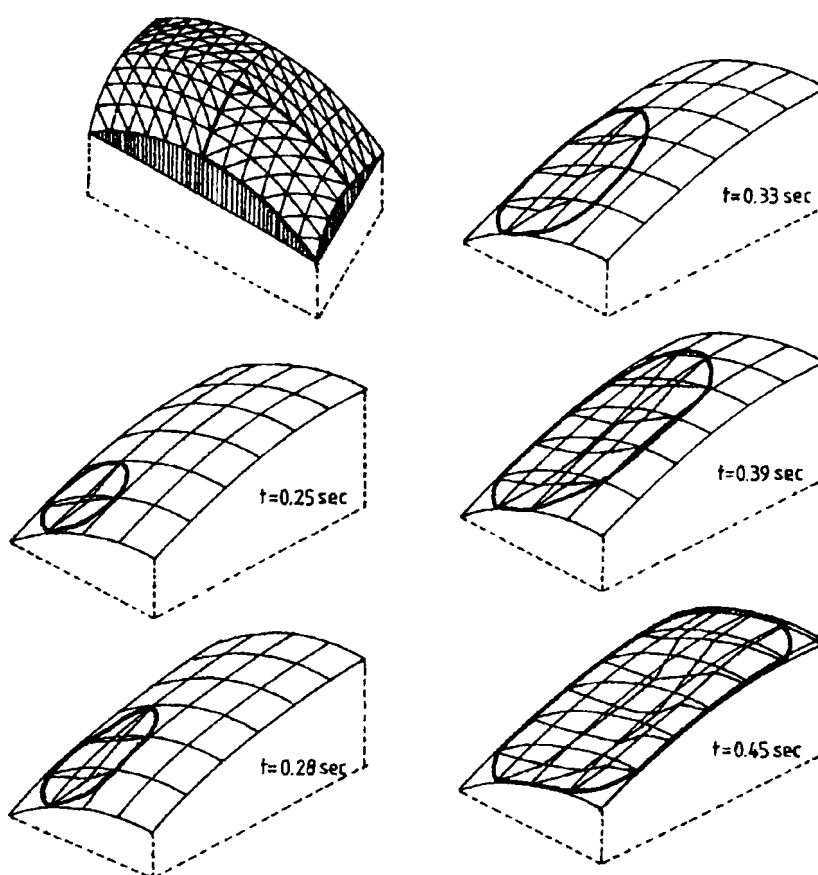


Fig. 5.20 Propagarea instabilității locale

Prima cedare de nod a fost inițializată de flambajul unei bare care a condus apoi la o cuplare cu instabilitatea de nod și ca urmare s-a produs un “snap – through” cu efecte dinamice.

Acoperișurile reticulate au fost studiate de Gioncu și Lenza [5.12, 5.34, 5.32] și efectul dinamic s-a materializat prin accelerații de aproximativ $0,6g$, mai mici decât cele obținute la plăcile curbe având curbura pozitivă. Altă observație importantă se referă la faptul că la o placă curbă reticulată având curbura pozitivă saltul apare chiar și când numai o bară este flambată. În cazul acoperișurilor reticulate cilindrice mai multe bare longitudinale au flambat înainte de a se produce colapsul nodului sau colapsul general.

Gioncu și Dinculescu [5.14] au descris mecanismul propagării instabilității la structurile reticulate dublu strat plane și curbe, la modelul format din două bare și la plăcile curbe reticulate. În cazul structurilor reticulate plane s-au analizat modalitățile de limitare a propagării instabilității locale la zone mici din structură.

Gioncu [5.9] în raportul general a subliniat numărul redus al cercetărilor în stabilitatea dinamică a structurilor și a analizat instabilitățile cuplate pentru modelul format din două bare articulate la mijloc, pentru cilindrul circular supus la șocuri dinamice constante cu durată finită.

Ivan și Gioncu [5.23] au studiat propagarea instabilității locale la o cupolă cu 24 de bare cu toate nodurile articulate (Fig.5.21).

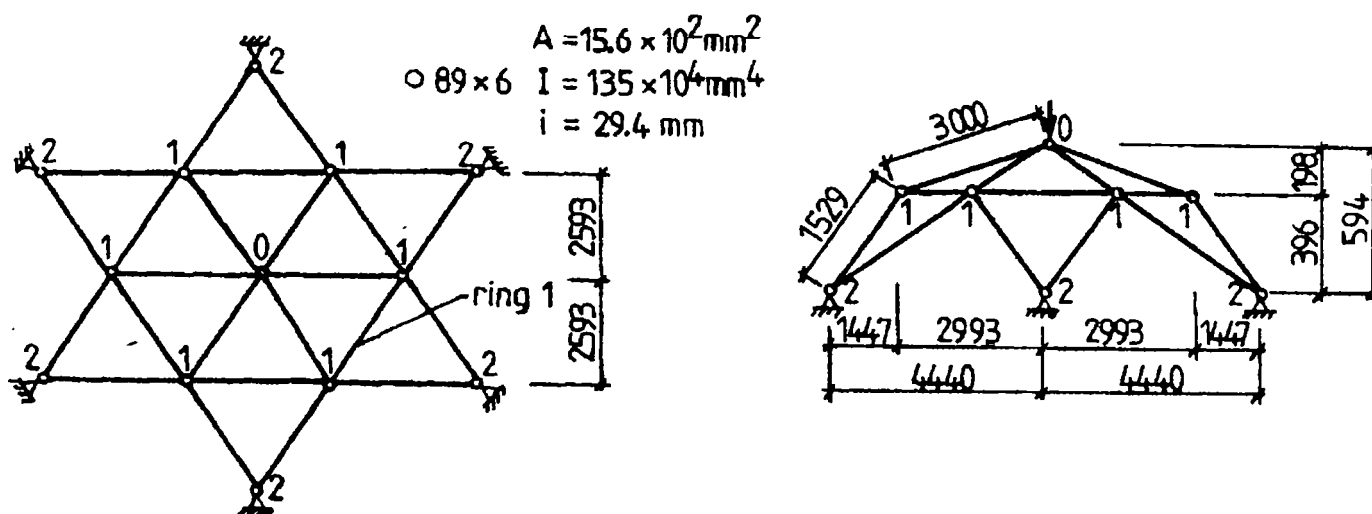


Fig. 5.21 Cupolă cu 24 de bare articulate

Din analiza neliniară a celulei din nodul superior s-a calculat încărcarea de limitare P_{\max} , care a servit la determinarea masei echivalente a structurii folosite în vederea analizei dinamice $m = P_{\max}/g$. Integrând suprafața cuprinsă între curba încărcare - deplasare și orizontala corespunzătoare saltului se calculează energia cinetică. Forțele de inerție rezultă $P_i = \alpha P_{\max}$ în care $\alpha = 1,126$ și reprezintă factorul de amplificare dinamică. Propagarea instabilității locale s-a analizat aplicând pe cupolă forța minimă P (P_{\max} sau P_{cr}) și forțele de inerție corespunzătoare.

În figura 5.22 se prezintă cupola și forțele corespunzătoare care generează propagarea instabilității.

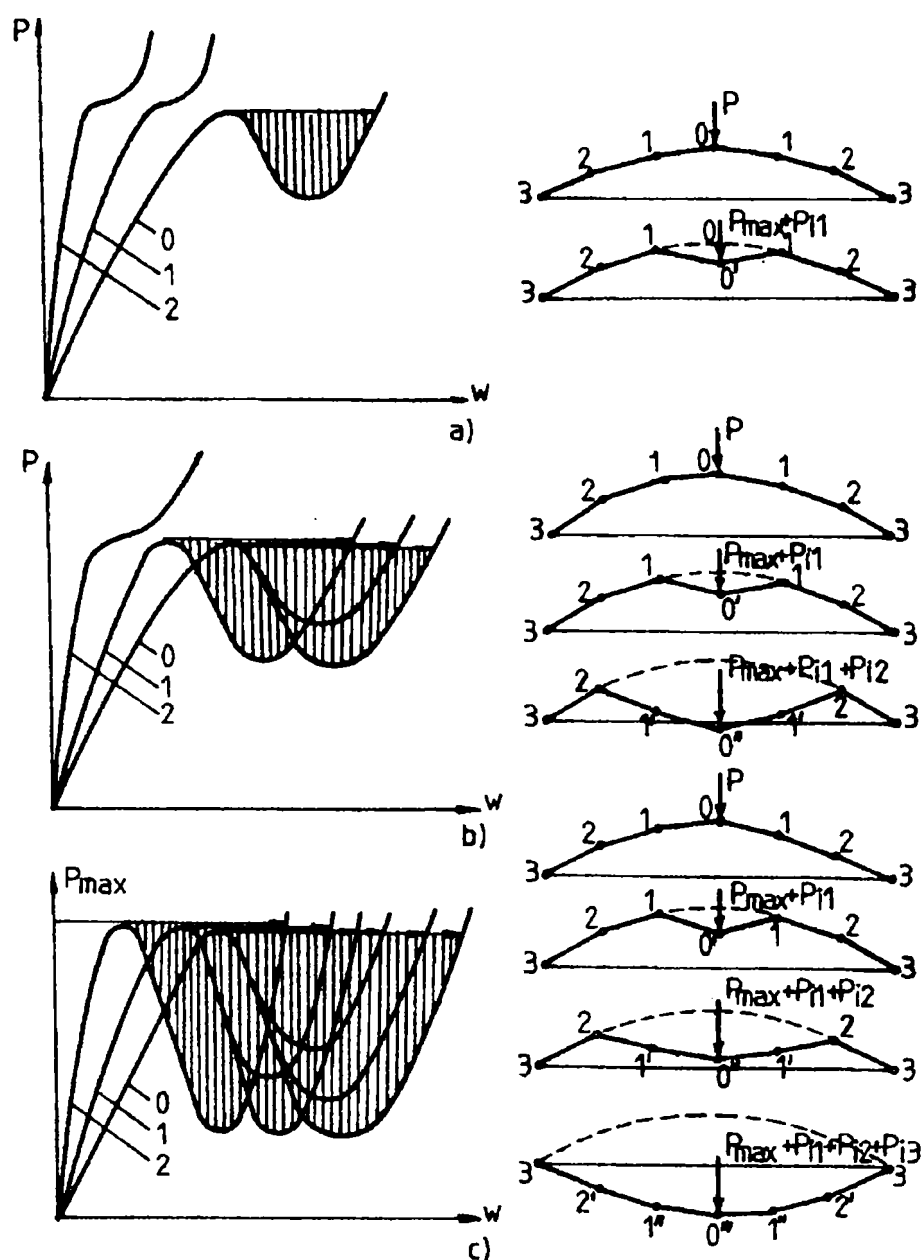


Fig. 5.22 Propagarea instabilității locale la cupola cu 24 de bare

Propagarea instabilității. se poate opri prin mărirea secțiunii barelor inelului și barelor diagonale

Determinarea încărcărilor critice pentru diferitele moduri de instabilitate a fost efectuată considerând numai celula din nodul central . Această aproximare neglijează influența deformabilității restului structurii. Din acest motiv valorile încărcărilor critice rezultă mai mari decât cele care se obțin luând în considerare structura reală.

Abedi și Parke [5.1] au propus o procedură pentru cercetarea propagării instabilității locale într-o cupolă reticulată simplu strat considerând efectul energiei cinetice eliberate în timpul saltului dinamic. Procedura constă în aplicarea unor viteze inițiale nodurilor în care se produce saltul dinamic al echilibrului. Aceste viteze rezultă din energia cinetică calculată, considerând o masă echivalentă asociată nodurilor egală cu P_{lim}/g . Efectuând un calcul neliniar se determină curba

încărcare - deplasare pentru nodurile cupolei, energia cinetică, masa echivalentă, viteza inițială și accelerația. Plecând de la acești parametri inițiali se aplică un impuls cupolei și în urma unei analize dinamice se determină răspunsul structurii. Dacă oscilațiile cupolei se amortizează în timp și amplitudinile lor nu depășesc săgeata inițială a cupolei, instabilitatea locală nu se propagă.

Abedi și Parke [5.2] folosesc procedura descrisă mai sus pentru studiul influenței imperfecțiunilor geometrice ale nodului central. Ei au arătat că imperfecțiunile în jos ale nodului central au efect mai defavorabil decât imperfecțiunile geometrice orientate în sus față de poziția inițială a cupolei perfecte.

5.4 Saltul echilibrului

Cupolele reticulate simplu strat au comportare neliniară produsă de neliniaritatea geometrică și de material. Încărcarea limită este redusă datorită deformațiilor plastice care apar în barele structurii. În capitolul 4 s-a discutat reducerea încărcării de limitare pentru cupolele reticulate simplu strat executate din material elastic - perfect plastic ținând seamă și de imperfecțiunile geometrice.

Gioncu și Băluț [5.13], au studiat la cupolele reticulate simplu strat modurile de pierdere a stabilității echilibrului. Acestea sunt: flambajul barei, flambajul nodului, flambajul de inel și instabilitatea generală. În capitolul 4 au fost studiate aceste moduri de instabilitate pentru modelul cu 6 bare, cupola cu 24 de bare și cupola cu 72 de bare.

Analiza siguranței structurilor reticulate în exploatare necesită răspuns la întrebarea: *“instabilitatea locală rămâne un fenomen local sau se propagă în structură?”*

Cupolele reticulate simplu strat au o comportare neliniară. Curbele forță - deplasare caracteristice, au fost stabilite în capitolul 4, pentru trei modele de cupole și încărcare cu o forță concentrată în nodul central, respectiv cu forțe concentrate în toate nodurile interioare ale cupolei. Încărcarea cu mai multe forțe concentrate ilustrează efectul încărcării permanente și a zăpezii pe toată suprafața cupolei. Forța din nodul central arată efectul unui exponat suspendat în acest nod sau încărcarea locală din zăpadă.

În figura 5.23 se prezintă curba încărcare - deplasare pentru o cupolă reticulată simplu strat.

Se observă că rigiditatea structurii scade pe măsură ce forța P crește. Când forța P atinge valoarea corespunzătoare maximului curbei, numită forța de limitare P_{lim} , rigiditatea structurii este nulă. Structura se află în echilibru în poziția deformată sub încărcarea de limitare. Sub influența unui impuls sau a unei creșteri mici a încărcării peste P_{lim} cupola trece într-o altă poziție de

echilibru stabilă pe ramura P - D crescătoare. Trecerea în noua poziție de echilibru este caracterizată de deplasări mari și se produce în timp scurt. Mișcarea structurii din poziția de echilibru corespunzătoare lui P_{lim} în noua poziție este cunoscută ca saltul dinamic, iar fenomenul ca instabilitate prin saltul echilibrului. Fenomenul este studiat recent și are un pronunțat caracter dinamic.

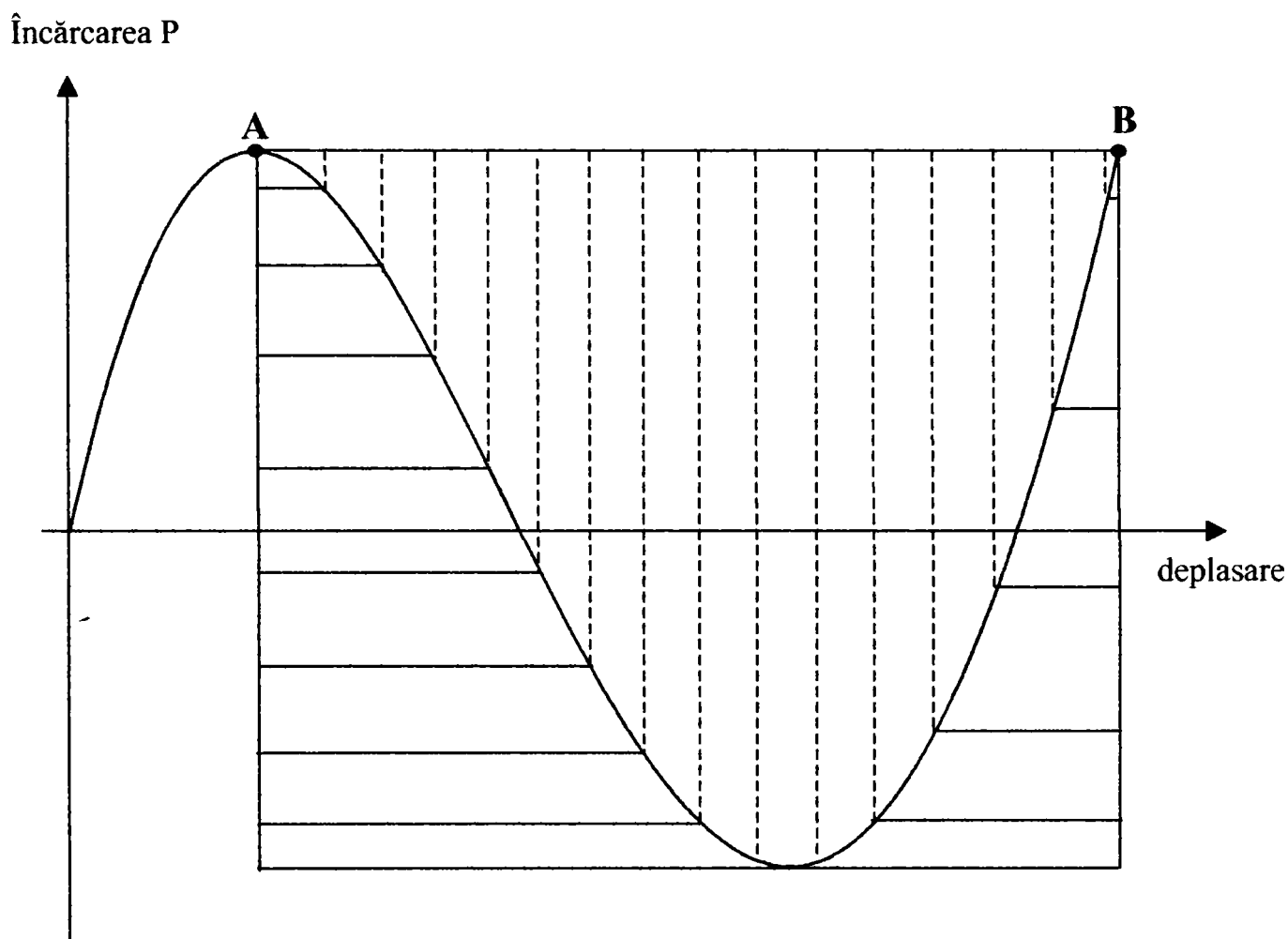


Fig. 5.23 Curba încărcare – deplasare pentru o structură cu comportare neliniară. Energia cinetică și energia de deformație

5.4.1 Parametri inițiali ai saltului echilibrului

Cu hașuri orizontale în fig. 5.23. este reprezentată energia de deformație și disiparea energiei produsă de deformațiile plastice. Suprafața hașurată vertical reprezintă energia cinetică produsă de structură în saltul dinamic. Energia cinetică constituie o acțiune dinamică de tip impuls care trebuie aplicată asupra structurii. Rezultă că energia cinetică are un rol important în studiul fenomenului de salt dinamic.

Abedi și Parke [5.2] consideră viteza mișcării în punctul A, corespunzător lui P_{lim} egală cu zero. Viteza la sfârșitul saltului în punctul B (Fig. 5.23) este v și se calculează din relația:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \quad (5.1)$$

în care: E_c este energia cinetică;

m este masa echivalentă, corespunzătoare lui P_{lim} ;

$$m = \frac{P_{lim}}{g} \quad (5.2)$$

unde cu g s-a notat accelerația gravitațională.

Introducând masa din (5.2) în relația (5.1) rezultă

$$v = \sqrt{\frac{2E_c \cdot g}{P_{lim}}} \quad (5.3)$$

Accelerația mișcării în saltul dinamic se notează cu a și are expresia

$$a = v^2 / 2L = \alpha g \quad (5.4)$$

iar forțele de inerție sunt date de relația

$$P_i = ma = \alpha P_{lim} \quad (5.5)$$

Timpul cât durează mișcarea se notează cu t și se determină din ecuația mișcării uniform accelerate fără viteză inițială

$$t = \frac{2L}{v} \quad (5.6)$$

Dacă la o cupolă reticulată cu mai multe noduri saltul dinamic al echilibrului se produce în mai multe noduri, atunci analiza dinamică se efectuează pentru fiecare nod. Durata saltului t pentru toate nodurile cupolei se consideră că este aceeași, iar vitezele pentru nodurile primului nivel v_{i1} se calculează cu relația:

$$v_{i1} = \frac{2L_{i1}}{t} \quad (5.7)$$

în care L_{i1} este lungimea saltului dinamic pentru nodurile primului nivel.

5.5 Analiza dinamică a propagării flambajului

5.5.1 Ecuația de mișcare

Ecuația de mișcare pentru o structură discretizată în elemente finite cu un număr finit de grade de libertate dinamică este

$$[M(x,t)]\{\ddot{D}(x,t)\} + [C(x,t)]\{\dot{D}(x,t)\} = [K_t(x,t)]\{P(x,t)\} \quad (5.8)$$

cu condițiile inițiale

$$D(t_0) = D_0 \text{ și } \dot{D}(t_0) = \dot{D}_0 \quad (5.9 \text{ a și b})$$

În ecuația (5.8) $[M(x,t)]$, $[C(x,t)]$, $[K_t(x,t)]$ reprezintă matricea maselor, matricea de amortizare și matricea tangentă de rigiditate a structurii discretizată în elemente finite.

$\{\ddot{D}(x,t)\}$, $\{\dot{D}(x,t)\}$, $\{D(x,t)\}$ reprezintă vectorii accelerației, vitezei și deplasărilor nodale corespunzător gradelor de libertate, iar $\{P(x,t)\}$ este vectorul forțelor dinamice.

D_0 și \dot{D}_0 reprezintă deplasarea inițială și viteza inițială la timpul $t = 0$.

5.5.2 Discretizarea structurii

Cupolele reticulate simplu strat, cercetate în teza de doctorat, au fost discretizate în elemente finite de tip bară dublu articulate la extremități. Nodurile interioare și nodurile de rezemare au fost considerate articulații. Fiecare nod interior al cupolei are șase grade de libertate dinamică.

5.5.3 Calculul elementelor din matricile $[M]$, $[C]$, $[K_t]$

La studiul dinamic al cupolelor simplu strat a fost folosit programul de calcul ANSYS 5.3.

5.5.3.1 Matricea maselor structurii

Matricea maselor structurii se determină prin însumarea matricei maselor elementelor finite, corespunzătoare gradelor de libertate considerate. În funcție de gradele de libertate considerate în fiecare nod al elementului finit se obține matricea maselor concentrate sau matricea masei

echivalentă. Matricea maselor concentrate pentru o bară se obține concentrând masa uniform distribuită în noduri. Astfel, pentru o bară cu masa \bar{m} pe unitatea de lungime și lungimea l , masele concentrate în nodurile de la extremități au expresiile

$$m_1^{(c)} = m_2^{(e)} = \frac{\bar{m}l}{2} \quad (5.10)$$

Elementele matricei maselor echivalente pentru o bară cu mai multe grade de libertate dinamică se calculează cu relația

$$m_{ij}^{(l)} = \int \bar{m}(x) \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) dx \quad (5.11)$$

și este o matrice simetrică $m_{ij} = m_{ji}$. În relația (5.11) $\bar{m}(x)$ este masa pe unitatea de lungime, $\varphi_i(x)$ și $\varphi_j(x)$ sunt funcțiile de formă corespunzătoare gradului de libertate i , respectiv j . Funcțiile de formă se consideră polinoame Hermite de gradul 3 [5.5]. Efectuând calculele din relația (5.11) pentru bara cu masa constantă pe lungime, \bar{m} , cu rotire d_1 și d_2 la extremități și deplasări normale pe axa barei d_3 și d_4 se obține matricea masei echivalente

$$[m_e] = \frac{\bar{m}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l & -13l \\ 54 & 156 & 13l & -22l \\ 22l & 13l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -22l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Matricea maselor concentrate pentru o structură cu n grade de libertate care sunt numai deplasări liniare este diagonală.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Masa concentrată m_i este egală cu forța de inerție produsă de accelerația unitară \ddot{q}_i pe direcția gradului de libertate d_i . Analog se definește și matricea diagonală a maselor de rotație când structura are numai grade de libertate de rotație.

Se remarcă faptul că utilizarea în calcule a matricei maselor echivalente, conduce la calcule mai complicate decât atunci când se folosește matricea maselor concentrate. Utilizarea masei echivalente permite luarea în considerare a gradelor de libertate liniare și de rotație.

Matricea masei structurii discretizată în elemente finite se calculează prin însumarea matricei echivalente a maselor pentru elementele finite componente

$$[M] = \sum_{(m)}^{(n)} [m_e^{(m)}] \quad (5.14)$$

5.5.3.2 Matricea de amortizare

Matricea de amortizare $[C]$ a structurii se determină considerând amortizarea proporțională cu matricea maselor $[M]$ și matricea rigidității $[K]$ prin intermediul a doi coeficienții α_m și β_s . Metoda este cunoscută sub numele de metoda amortizării a lui Rayleigh.

$$[C] = \alpha_m [M] + \beta_s [K] \quad (5.15)$$

Pentru determinarea coeficienților α_m și β_s se calculează primele cinci frecvențe naturale ale structurii. Din relațiile (5.16 a,b) [5.2]

$$\alpha_m = 2\omega_1\omega_5(\xi_1\omega_5 - \xi_5\omega_1)(\omega_5^2 - \omega_1^2) \quad (5.16 a)$$

$$\beta_s = 2(\xi_5\omega_5 - \xi_1\omega_1)(\omega_5^2 - \omega_1^2) \quad (5.16 b)$$

se calculează α_m și β_s considerând $\xi_1 = 1,5\%$ și $\xi_5 = 2,5\%$, ω_1 reprezentând prima pulsație proprie, iar ω_5 a cincea pulsație proprie a cupolei.

5.5.3.3 Matricea rigidității tangentă

Matricea tangentă a rigidității structurii $[K_t(x,t)]$ în calculul nelinier este funcție de deplasările nodale din configurația deformată anterioară. În această matrice se introduc efectul neliniarității geometrice și de material, efectul tensiunilor inițiale, efectul imperfecțiunilor și ale

semirigidității nodurilor structurii. Sub formă generală matricea $[K_t(x,t)]$ pentru un element finit se scrie sub forma (2.44) la care se adaugă matricea rigidității care ține seamă de semirigiditatea nodurilor $[K_N(x,t)]$

$$[K_t(x,t)] = [K_L] + [K_{GT}(x,t)] + [K_{NT}(\sigma,x,t)] + [K_N(x,t)] \quad (5.17)$$

Expresiile primelor trei matrici sunt date de relațiile (2.45 a,...,c).

Matricea rigidității tangentă pentru bara cu secțiune constantă are expresia dată de relația (2.61). Matricea $[K_t(x,t)]$ ținând seama și de efectul semirigidității nodurilor se determină din relația (2.135).

Funcție de tipul elementului finit în literatura de specialitate se prezintă elementele concrete ale matricelor din relația (5.16) Ivan [5.24], Bănuț [5.4], Przemieniecki [5.43], Zienkiewicz [5.52].

Calculul efectuat în teza de doctorat nu au luat în considerare efectul tensiunilor inițiale și a semirigidității nodurilor structurii.

5.5.4 Procedura numerică de rezolvare

Calculul dinamic al structurii s-a efectuat folosind programul ANSYS [5.3] și metoda lui Newmark [5.41] pentru rezolvarea ecuației de mișcare (5.8). La începutul calculului dinamic $t = 0$ se cunoaște viteza inițială v_0 și deplasarea nodului central al cupolei D_0 .

În metoda lui Newmark [5.41] pentru vectorul vitezei $\{\dot{D}\}$ și vectorul deplasărilor nodale $\{D\}$ în pasul de iterație $n+1$ se folosesc expresiile:

$$\{\dot{D}_{n+1}\} = \{\dot{D}_n\} + [(1-\delta)\{\ddot{D}_n\} + \delta\{\ddot{D}_{n+1}\}]\Delta t \quad (5.18)$$

$$\{D_{n+1}\} = \{D_n\} + \{\dot{D}_n\}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{D}_n\} + \alpha \{\ddot{D}_{n+1}\} \right] \Delta t \quad (5.19)$$

în care s-au folosit notațiile:

α și δ - parametrii lui Newmark;

$\Delta t = t_{n+1} - t_n$ - intervalul de timp;

$\{D\}$, $\{\dot{D}_n\}$ și $\{\ddot{D}_n\}$ - vectorii deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor nodale la timpul t_n ;

$\{D_{n+1}\}$, $\{\dot{D}_{n+1}\}$ și $\{\ddot{D}_{n+1}\}$ - vectorii deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor nodale la timpul t_{n+1} .

Ecuția de mișcare (5.8) se scrie sub forma

$$[M]\{\ddot{D}_{n+1}\} + [C]\{\dot{D}_{n+1}\} + [K_t]\{D_{n+1}\} = \{P\} \quad (5.20)$$

Relațiile (5.18) și (5.19) se scriu sub forma

$$\{\ddot{D}_{n+1}\} = a_0(\{D_{n+1}\} - \{D_n\}) - a_2\{\dot{D}_n\} - a_3\{\ddot{D}_n\} \quad (5.21)$$

$$\{\dot{D}_{n+1}\} = \{\dot{D}_n\} + a_6\{\ddot{D}_n\} + a_7\{\ddot{D}_{n+1}\} \quad (5.22)$$

în care au fost folosite notațiile

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right);$$

$$a_6 = \Delta t(1-\delta); a_7 = \delta\Delta t \quad (5.23a,..h)$$

După ce se introduce (5.21) în relația (5.22) rezultă că vectorii $\{\ddot{D}_{n+1}\}$ și $\{\dot{D}_{n+1}\}$ se exprimă numai în funcție de $\{D_{n+1}\}$.

Combinând ecuația (5.20) cu expresiile pentru $\{\ddot{D}_{n+1}\}$ și $\{\dot{D}_{n+1}\}$ rezultă

$$(a_0[M] + a_1[C] + [K_t])\{D_{n+1}\} = \{P\} + [M](a_0\{D_n\} + a_2\{\dot{D}_n\} + a_3\{\ddot{D}_n\}) + [C](a_1\{D_n\} + a_4\{\dot{D}_n\} + a_6\{\ddot{D}_n\}) \quad (5.24)$$

din care se determină deplasările $\{D_{n+1}\}$, iar din relațiile (5.21) și (5.22) se determină vectorii accelerațiilor și vitezelor.

Mișcarea este necondiționat stabilă în metoda lui Newmark, dacă

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta^2 \right); \delta \geq \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \delta + \alpha > 0; \quad (5.25)$$

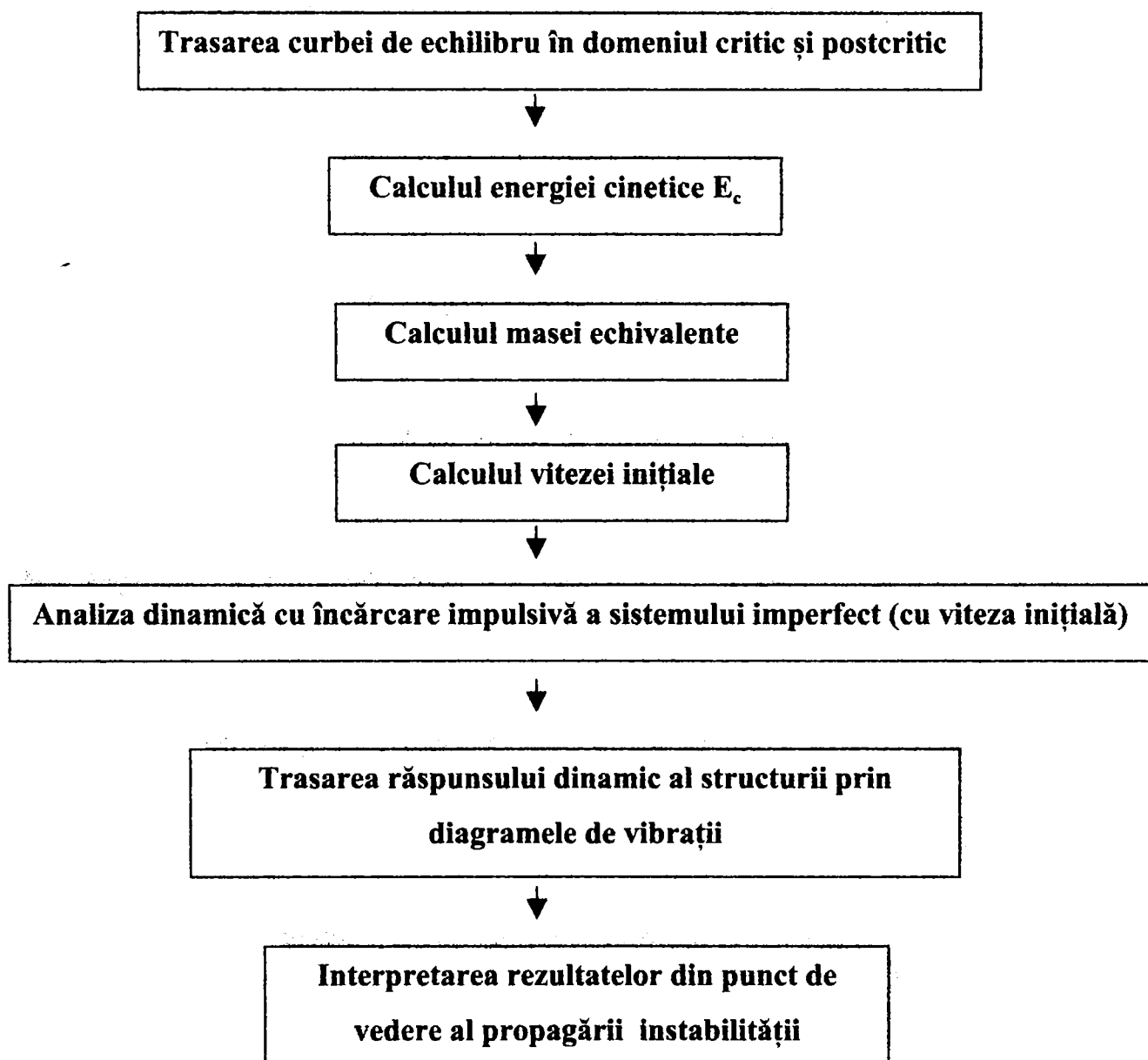
În programul ANSYS s-au utilizat următorii parametri din metoda lui Newmark.

$$\alpha \geq \frac{1}{4}(1+\gamma)^2 : \delta = \frac{1}{2} + \gamma \text{ și } \gamma \geq 0 \quad (5.26)$$

în care γ este amplitudinea factorului de amortizare. Soluțiile ecuației (5.20) sunt stabile dacă $\gamma \geq 0$. Amplitudinea lui γ ia valori mici $\gamma = 0,005$. Metoda lui Newmark devine identică cu metoda accelerației constante dacă [5.17] $\gamma = 0$; $\alpha = \frac{1}{4}$ și $\delta = \frac{1}{2}$.

Cu parametri inițiali $\{D_0\}$ și $\{\dot{D}_0\}$ din calculul static corespunzător punctului B (fig. 5.23.), s-a efectuat calculul dinamic al cupolelor. Rezultatele obținute se prezintă în paragraful 5.6.

Testările numerice efectuate pe cupolele analizate au urmărit în principiu următoarele etape:



5.6 Testări numerice

Saltul dinamic pentru cupolele reticulate simplu strat a fost cercetat pentru cupola cu 24 de bare și 7 noduri interioare, respectiv pentru cupola cu 72 bare și 19 noduri interioare. Toate nodurile cupolelor au fost considerate ca articulații.

5.6.1 Cupola cu 24 de bare

Încărcarea exterioară s-a considerat aplicată în trei moduri:

- o forță concentrată P în nodul central;
- șapte forțe concentrate egale în nodurile interioare;
- o forță mai mare în nodul central P_c și forțe concentrate egale în celelalte noduri.

Cupolele pentru care s-a studiat saltul dinamic au caracteristicile geometrice precizate în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1.

Tipul barei Suprafața s și nii transversale [cm^2]	Lungimea bar i [cm]	Deschiderea upolei l [cm]	Săgeata up l i f [cm]	Raportul între săgeată și d s hid r f/l	Calitatea oțelului Limită de rg r [daN/cm ²]
Țeavă ϕ 89 x 6 mm A = 15,645	300	1033,600	54,000	0,052	OL52 $\sigma_c=3500$
		1025,400	84,368	0,082	
		1003,300	134,930	0,134	
		964,100	192,430	0,200	
		927,470	231,648	0,250	

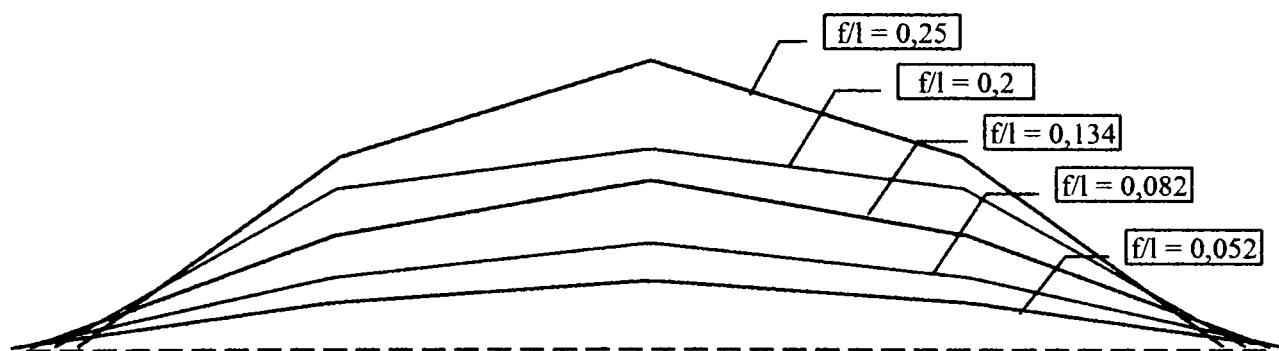


Fig. 5.24 Secțiune transversală prin cupolele cu 24 de bare studiate

5.6.1.1 Cupola perfectă încărcată cu o forță concentrată

Din curbele încărcare – deplasare (Fig. 5.25), stabilite în capitolul 4 au fost determinați parametrii inițiali pentru cupolele reticulate luate în studiu.

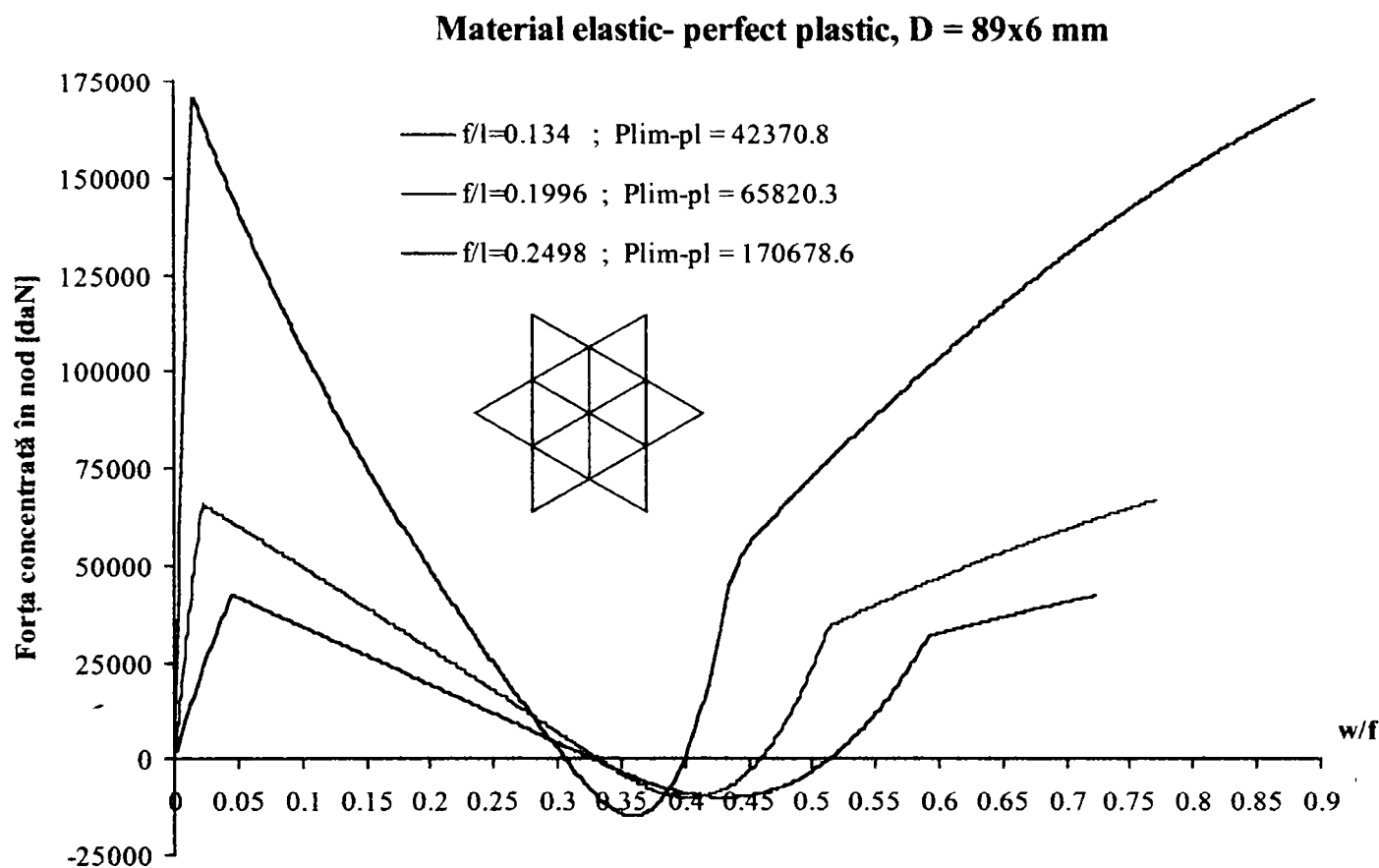


Fig. 5.25 Curbele încărcare – deplasare pentru nodul central al cupolei perfecte

Parametrii inițiali, cu care se pornește analiza dinamică, pentru cupola încărcată cu o forță concentrată în nodul central se prezintă în tabelul 5.2.

Folosind parametri inițiali de la punctul 5.4.1. și procedura numerică descrisă la punctul 5.5.4. s-a cercetat răspunsul dinamic al cupolelor cu dimensiunile precizate în tabelul 5.1.

Tabelul 5.2.

Raportul f/l	Energia cinetică E_{ci} [daNcm]	Masa [daNs ² /cm]	Viteza v [cm/s]	Lungimea saltului L [cm]
0,052	$159,096 \times 10^3$	4,510	265,630	33,184
0,082	$950,040 \times 10^3$	17,247	331,910	51,667
0,134	$2416,552 \times 10^3$	43,200	334,480	91,360
0,200	$4954,419 \times 10^3$	67,120	383,870	142,010
0,250	$7109,508 \times 10^3$	82,920	414,098	171,265

În figura 5.26 se prezintă variația energiei cinetice din nodul central pentru cupola cu 24 de bare cu secțiunea de 89 x 6 mm din încărcarea cu o forță concentrată în nodul central.

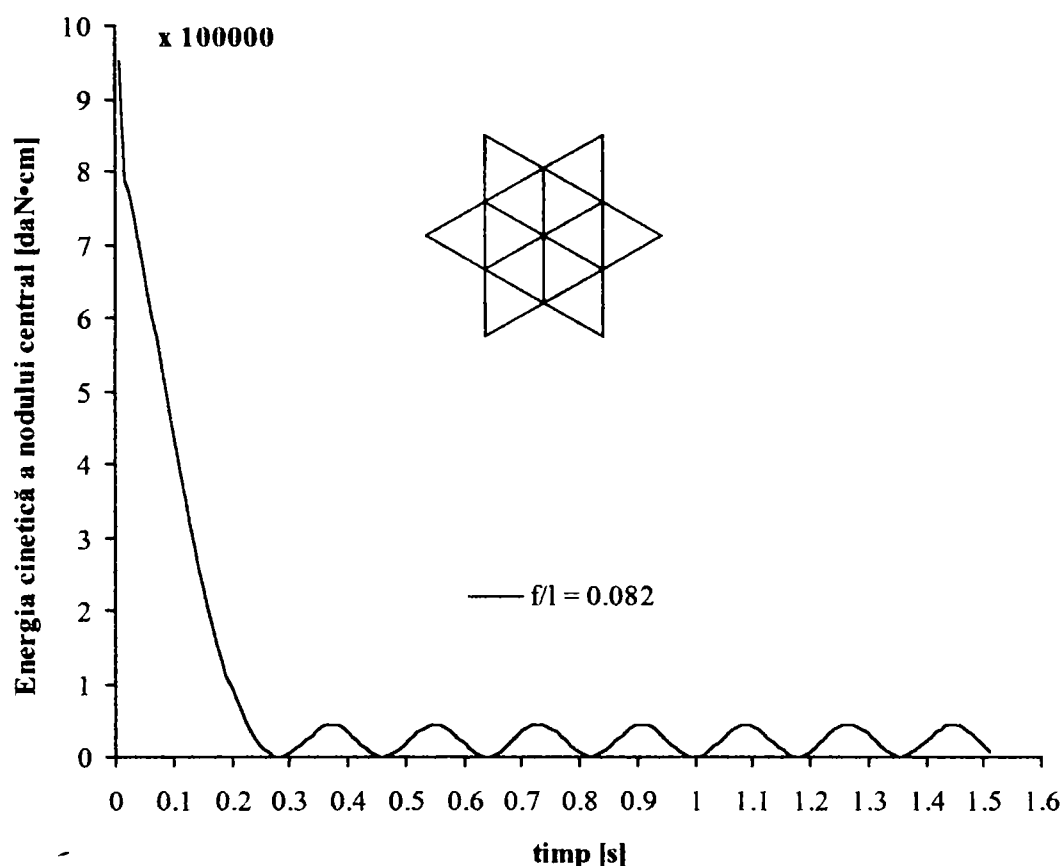


Fig. 5.26 Variația energiei cinetice

Propagarea flambajului la cupola cu 24 de bare și o forță concentrată în nodul central se observă analizând raportul dintre deplasările w ale nodului după axa z (verticală) și săgeata inițială a cupolei.

Deplasările nodului au fost considerate numai cele de pe axa z , deoarece aceste deplasări sunt deplasările dominante. În tabelul 5.3. se prezintă rezultatele testărilor numerice pentru diferite cupole. Deplasările verticale au fost notate cu:

- w_1 - deplasările nodului central corespunzătoare încărcării de limitare din stadiul elastic al cupolei;
- w_2 - deplasările nodului central corespunzătoare încărcării de limitare din stadiul elasto - plastic;
- w_3 - deplasările nodului central corespunzătoare încărcării de limitare la sfârșitul saltului static;
- w_4 - deplasările nodului central corespunzătoare încărcării de limitare la sfârșitul saltului dinamic.

Tabelul 5.3

Săgeata cupolei f [cm]	Raportul f/l	Raportul w_i/f pentru nodul central			
		w_1/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f
54,000	0,052	0,127	-	0,742	0,803
84,368	0,082	0,129	-	0,742	1,219
134,930	0,134	-	0,045	0,722	2,164
192,430	0,200	-	0,022	0,760	2,208
231,648	0,250	-	0,015	0,754	2,728

Analizând valorile din tabelul 5.3, se observă că deplasările din nodul central la sfârșitul saltului static nu depășesc săgeata inițială a cupolelor. Cupolele cu raportul $f/l = 0,134$; $0,200$ și $0,250$ lucrează în stadiul elasto - plastic.

Din încărcarea cu o forță concentrată în nodul central, instabilitatea nu s-a propagat prin saltul dinamic pentru cupola cu raportul $f/l = 0,052$. Pentru celelalte cupole studiate cu $f/l > 0,052$ a intervenit instabilitatea locală a nodului central, care s-a propagat dinamic antrenând și celelalte noduri interioare. La sfârșitul saltului dinamic rezultă deplasări care depășesc săgețile cupolelor.

Saltul dinamic începe cu o deformație locală în jurul nodului central, care se propagă în toată cupola. Sub încărcarea constantă P_{lim} datorită forțelor de inerție, cupola își modifică continuu poziția deformată, trecând prin salt dinamic într-o nouă poziție de echilibru inversată (Fig 5.28.). După câteva oscilații în jurul poziției de echilibru inversate cupola rămâne în echilibru în această nouă poziție.

Dacă se analizează comportarea cupolelor cu diferite rapoarte f/l se constată că energia cinetică, masa echivalentă, viteza și lungimea saltului, cresc odată cu creșterea raportului f/l . Deplasările cupolelor la sfârșitul saltului dinamic cresc în funcție de raportul f/l .

Răspunsul dinamic pentru nodul central și nodul de pe inel la o cupolă cu raportul $f/l = 0,134$ se prezintă în figura 5.27.

Se observă că din aplicarea statică a forței P pe cupolă în urma saltului static se produce deplasarea nodului central cu 97,4 mm. În urma considerării efectului dinamic în nodul central deplasarea ajunge la 300 mm. Instabilitatea locală se propagă și saltul dinamic conduce la inversarea completă a cupolei. În figura 5.28 se prezintă propagarea instabilității locale pentru cupola cu raportul $f/l = 0,134$ din încărcarea cu o forță concentrată aplicată în nodul central.

Pozițiile deformate ale cupolei au fost desenate la diferite intervale de la începutul saltului dinamic.

Concluzii similare rezultă și pentru celelalte cupole analizate în teza de doctorat

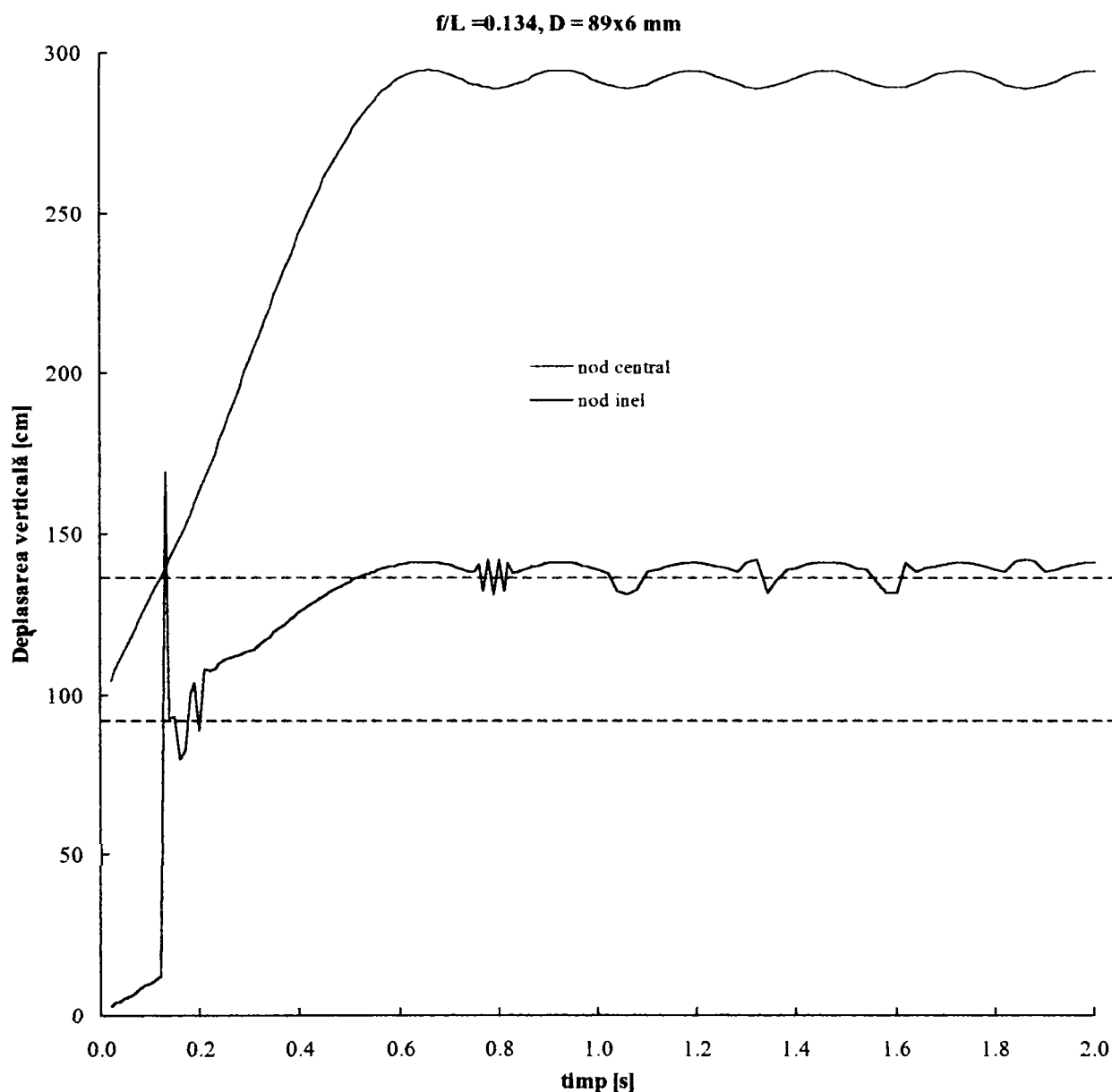


Fig. 5.27 Vibrațiile nodului central și ale nodului de pe inel în urma saltului dinamic

Modificarea poziției de echilibru a cupolei prin saltul dinamic într-o poziție inversată este o problemă care nu se poate accepta în practica inginerescă. Din acest motiv inginerii, proiectanții, trebuie să cunoască bine acest fenomen și să adopte soluții care să evite apariția saltului dinamic. Evitarea saltului dinamic se asigură când încărcarea de exploatare este inferioară încărcării de limitare pentru cupola imperfectă, ținând seamă atât de efectul imperfecțiunilor geometrice cât și a celor de material.

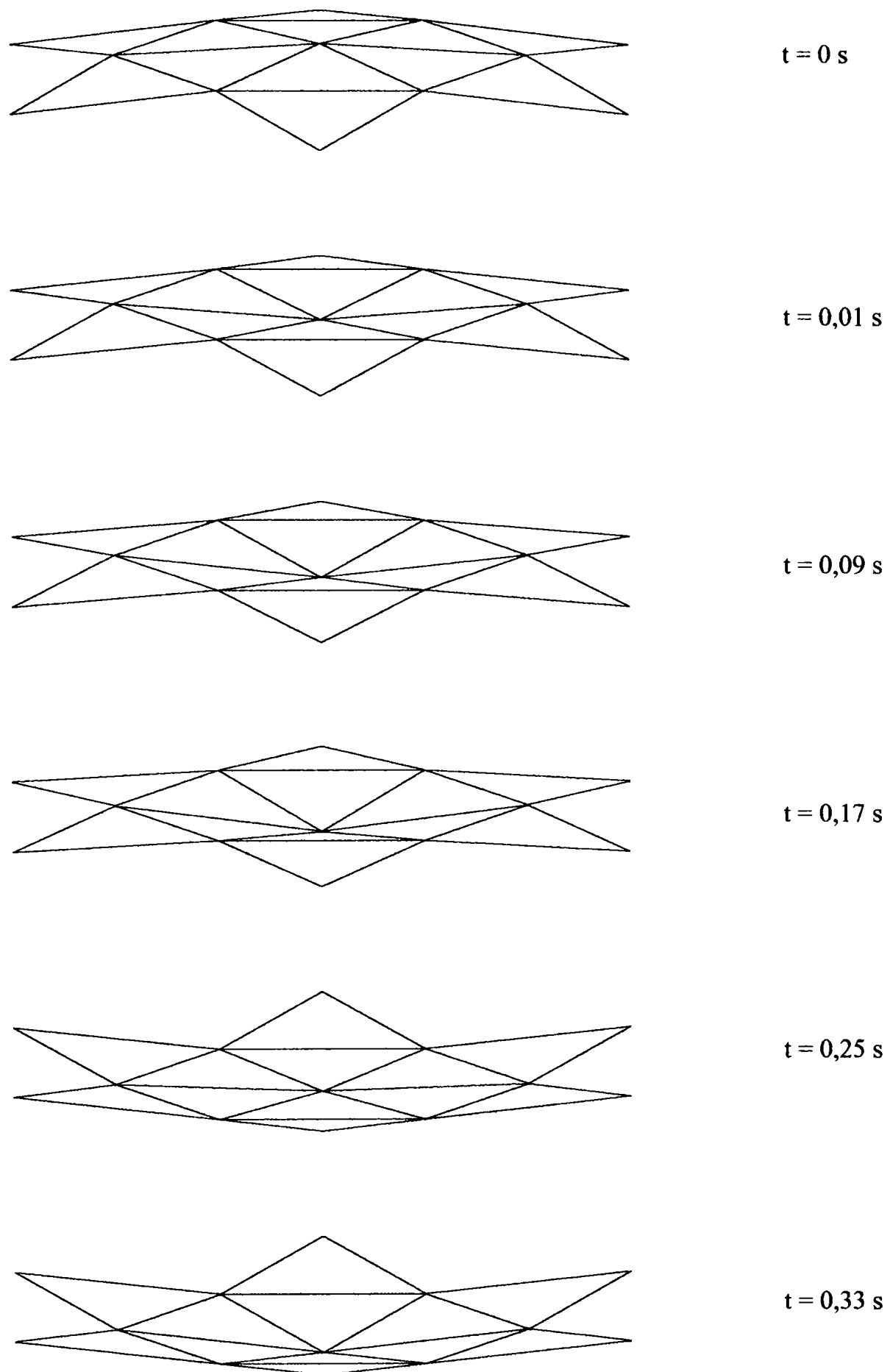


Fig. 5.28 Propagarea instabilității locale la cupola cu 24 de bare încărcată cu o forță concentrată

Evitarea saltului dinamic este foarte cu atât mai importantă cu cât în timpul saltului apar accelerații mari și ca urmare și forțe de inerție mari.

Pentru cupolele studiate au rezultat următoarele accelerații pe parcursul propagării instabilității.

f/l	a
0,052	1,084 g
0,082	1,087 g
0,134	0,624 g
0,200	0,529 g
0,250	0,510 g

unde g reprezintă accelerația gravitațională $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

5.6.1.2 Cupola perfectă încărcată cu 7 forțe concentrate

Cupolele reticulate simplu strat cu dimensiunile precizate în tabelul 5.1. au fost încărcate cu forțe concentrăte egale în cele șapte noduri interioare.

Curbele încărcare - deplasare din această încărcare statică pentru cupolele cercetate, au fost stabilite în capitolul 4. Din aceste curbe se determină deplasările verticale din nodul central după direcția axei z sub încărcarea de limitare. Pentru toate cupolele analizate materialul lucrează în stadiul elastic - perfect plastic.

În tabelul 5.4. se prezintă deplasările din nodul central pe direcția verticală, raportate la săgețile cupolelor. Deplasările verticale din nodul central sub încărcarea de limitare reprezintă 0,098 - 0,0077 din săgeata cupolelor.

Tabelul 5.4.

Săgeta cupolei f [cm]	Raportul f/l	Raportul w_i/f pentru nodul central		
		w_1/f	w_2/f	w_3/f
54,00	0,052	-	0,098	1,785
84,368	0,082	-	0,048	1,876
134,930	0,134	-	0,020	1,837
112,430	0,200	-	0,011	1,842
131,648	0,250	-	0,0077	1,841

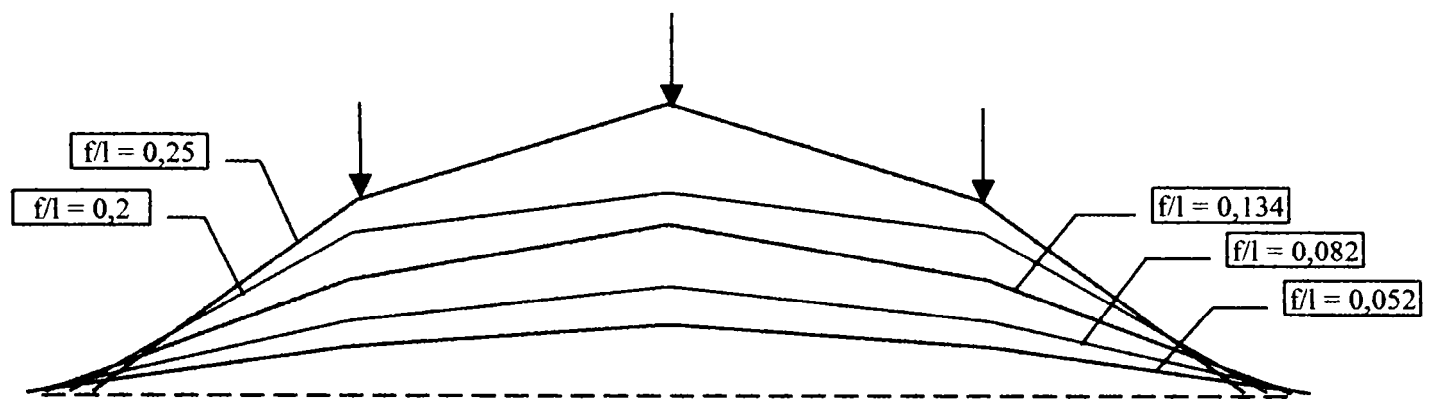


Fig. 5.29 Schema de încărcare cu 7 forțe concentrate

Aceleași deplasări la sfârșitul saltului static sunt mai mari de $1,79 \div 1,88$ ori față de săgețile inițiale. Întrucât raportul w_3/f este mai mare decât unu, cupolele la sfârșitul saltului static au trecut în poziția de echilibru inversată.

Dacă cupolei deformate cu deplasările w_3/f i se aplică un impuls se obțin deplasări $w_4/f > w_3/f$. Cupola va oscila în jurul poziției de echilibru, iar după un timp va rămâne în echilibru în poziția deformată cu deplasările $w_4 > w_3$. Din acest motiv deplasările w_4 nu au mai fost scrise în tabelul 5.4.

În cercetările ulterioare se adoptă cupole alcătuite din 24 de bare, respectiv 72 de bare, care au aceeași rază de curbură $r = 25000$ mm. Raportul între săgeata cupolei și deschiderea ei este $f/l = 0,052$ la cupola cu 24 de bare și $f/l = 0,091$ la cupola cu 72 de bare.

Barele acestor cupole se execută din oțel OL52 cu $\sigma_c = 35$ daN/mm², cu secțiunea inelară având diametrul exterior de 121 mm, grosimea peretelui de 6 mm și lungimea de 3000 mm.

Deplasările din nodul central și din nodul de pe inel raportate la săgeata cupolei pentru cupola perfectă cu 24 de bare din încărcarea cu o forță concentrată aplicată în nodul central se prezintă în tabelul 5.5, iar din încărcarea cu șapte forțe egale în tabelul 5.6.

Tabelul 5.5

Cupola f/l	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
	Nodul central			Nodul de pe inel		
	w_1/f	w_3/f	w_4/f	w_1/f	w_3/f	w_4/f
0,052	0,128	0,742	0,804	0,008	0,014	0,052

Tabelul 5.6

Cupola f/l	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f			
	Nod central		Nodul de pe inel	
	w ₂ /f	w ₃ /f	w ₂ /f	w ₃ /f
0,052	0,098	1,884	0,105	1,228

Din încărcarea cu o forță concentrată cupola nu își pierde stabilitatea generală într-o poziție inversată nici în urma saltului dinamic. Deplasările însă au valori mari. Cupola sub încărcarea statică cu șapte forțe concentrate cedează prin instabilitate generală, trecând într-o poziția de echilibru inversată față de poziția inițială. Deplasările în urma saltului dinamic nu au fost calculate în această etapă de analiză.

5.6.1.3 Cupola perfectă încărcată cu o forță mărită în nodul central și forțe egale în celelalte noduri

Cupola cu 24 de bare și raportul $f/l = 0,052$ executată din oțel OL52 cu bare inelare având diametrul 121 mm, grosimea peretelui de 6 mm și lungimea barei de 3000 mm, s-a încărcat cu forța $P_c = 1,27P$ în nodul central și șase forțe egale în nodurile interioare. Sub această încărcare se produce prima dată instabilitatea nodului central.

Deplasările verticale din nodul central din încărcarea de mai sus, raportate la săgeata inițială a cupolei, au valorile:

$$\frac{w_2}{f} = 0,144; \quad \frac{w_3}{f} = 0,926;$$

iar pentru nodul de pe inel

$$\frac{w_2}{f} = 0,057; \quad \frac{w_3}{f} = 0,100;$$

Se observă că sub încărcarea din nod care produce instabilitatea nodului central, deplasările sunt mai mici decât săgeata inițială a cupolei. Rezultă că din încărcarea statică nu se mai produce propagarea instabilității locale în instabilitate generală a cupolei. Aplicarea în nodul central a unei forțe concentrate mai mari decât în celelalte noduri are un efect favorabil asupra stabilității generale a cupolei.

Dacă se studiază comportarea cupolei în urma aplicării unui impuls cu parametrii inițiali: $P_{lim.} = 11560,94$ daN, viteza $v = 262,2$ cm/s, lungimea saltului $L = 42,23$ cm, rezultă că deplasarea nodului central depășește săgeata inițială a cupolei $w_4/f = 2,864$, respectiv 1,593 pentru nodul de pe inel.

Pozițiile deformate ale cupolei în urma saltului dinamic se prezintă în figura 5.30.

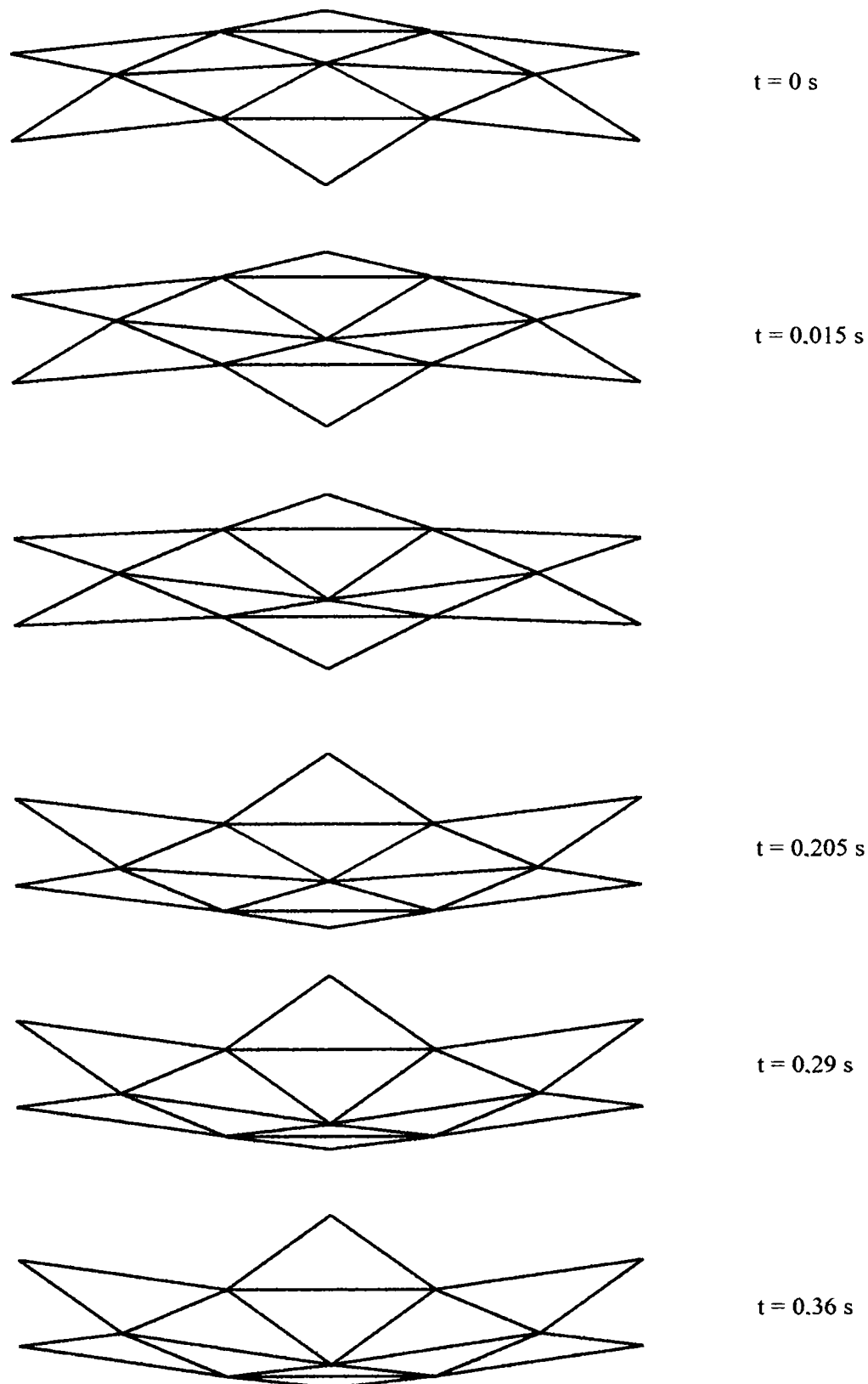


Fig. 5.30 Propagarea flambajului local pentru cupola cu 24 bare din încărcarea $P_c=1,27P$ și $6P$

Propagarea instabilității locale s-a produs cu o viteză mare și o accelerație de aproximativ $a = 0,83g$.

Problema care trebuie să fie rezolvată în continuare se referă la determinarea măsurilor constructive pentru a evita propagarea instabilității locale sub acțiunea saltului dinamic. Soluțiile practice se prezintă în capitolul 6 din teza de doctorat.

5.6.1.4 Influența imperfecțiunilor geometrice de nod central

În capitolul 4 s-a precizat că în prezența unei imperfecțiuni a nodului central mai mare de 1,85 cm din încărcarea cupolei cu 24 de bare cu 7 forțe concentrate egale se produce instabilitatea nodului central.

Comportarea cupolei cu $f/l = 0,052$, cu bare având secțiunea inelară 121 x 6 mm din oțel OL52 a fost analizată în capitolul 4. Deplasările verticale din nodul central și ale nodului de pe inel, raportate la săgeata inițială f , se prezintă în tabelul 5.7.

Tabelul 5.7

Tipul imperfecțiunii	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
	Nodul central			Nodul de pe inel		
	w_2/f	w_3/f	w_4/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f
Nod central 1,85 cm	0,164	0,904	2,335	0,038	0,138	1,411

Din tabelul 5.7 se observă că din încărcarea statică cu șapte forțe egale aplicate pe cupola cu imperfecțiunea nodului central de 1,85 cm deplasarea din nodul central la sfârșitul saltului static este $0,904f$. Instabilitatea locală s-a propagat în structură, însă cupola nu și-a pierdut stabilitatea generală.

Deplasările din nodul central și din nodurile de pe inel la sfârșitul saltului dinamic depășesc săgeata cupolei. În nodul central deplasarea este $w_4 = 2,335f$, iar în nodul de pe inel $w_4 = 1,411f$. Cupola în urma saltului dinamic s-a stabilizat în poziția de echilibru inversată față de poziția inițială. Flambajul local s-a propagat în toată cupola și a condus la instabilitatea generală datorită forțelor de inerție..

Pozițiile deformate ale cupolei în urma saltului dinamic se prezintă în figura 5.31.

Evitarea propagării instabilității locale a nodului central datorită imperfecțiunea de nod, respectiv încărcării suplimentare în nodul central, constituie preocuparea fundamentală din teză și se analizează în capitolul 6.

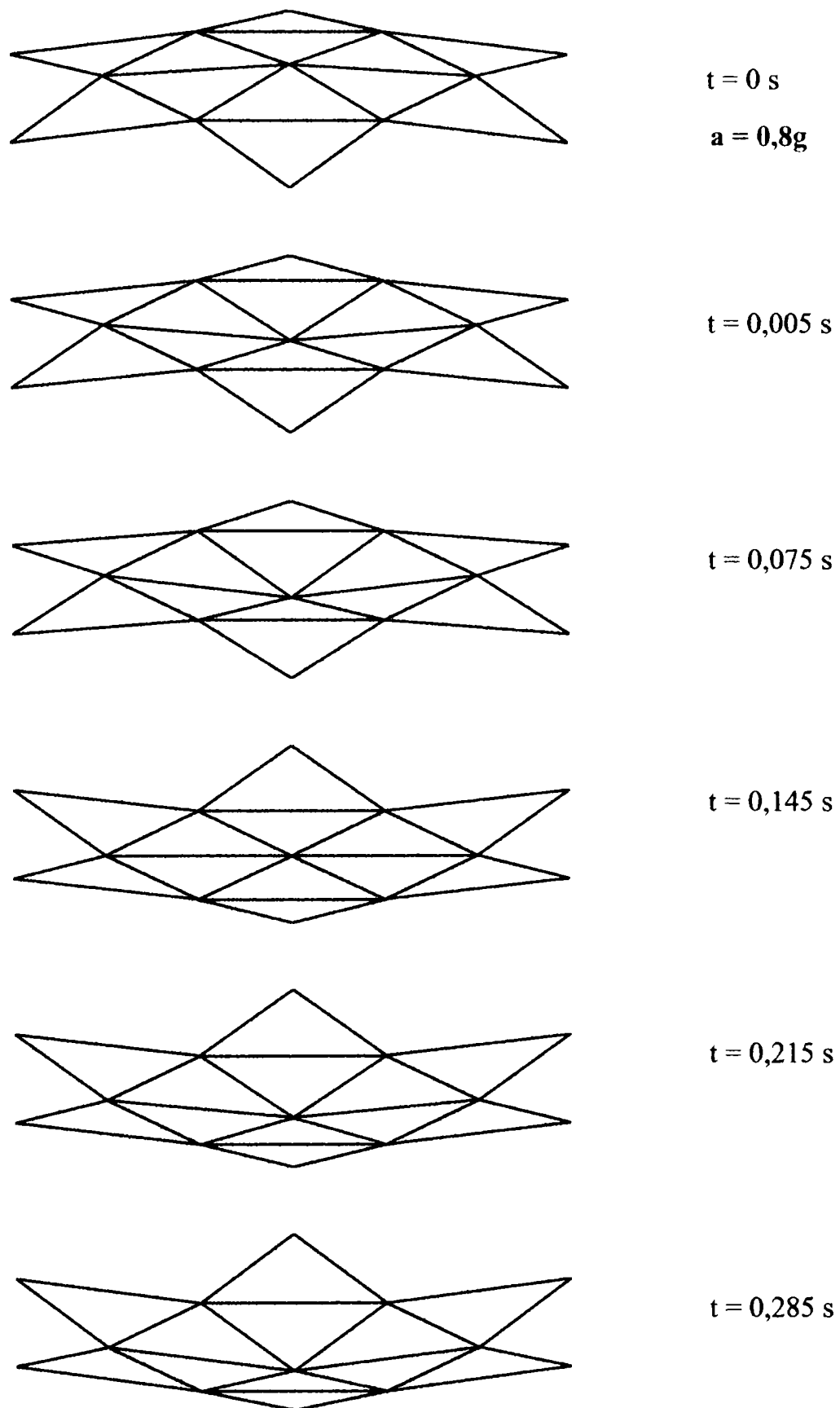


Fig. 5.31 Propagarea flambajului local pentru cupola cu 24 bare cu o imperfecțiune de 1,85 cm în nodul central

5.6.2 Cupola cu 72 de bare

Comportarea cupolei alcătuite din 72 de bare, cu secțiune inelară având diametrul de 121 mm, grosimea peretelui de 6 mm, lungimea 3000 mm, executate din oțel OL52 a fost analizată în trei ipoteze de încărcare. Prima ipoteză a fost o încărcare cu o forță în nodul central, cea de a doua o încărcare uniformă în toate nodurile interioare iar cea de a treia cu o forță mai mare $P_c = 1,32P$ în nodul central împreună cu 18 forțe egale în celelalte noduri. Caracteristicile geometrice ale acestei cupole sunt raportul între săgeată și deschidere $f/l = 0,091$, $f = 1604,48$ mm și $l = 17623,80$ mm.

5.6.2.1 Cupola perfectă încărcată cu o forță concentrată

Cupola perfectă cu dimensiunile precizate mai sus a fost încărcată static cu forța P în nodul central (Fig. 4.57). Deplasările nodului central raportate la săgeata inițială a cupolei au următoarele valori:

- sub încărcarea de limitare $w_2/f = 0,042$
- la sfârșitul saltului static $w_3/f = 0,252$

Se observă că această cupolă în urma saltului static are deplasări ale nodului central care nu depășesc săgeata inițială. Instabilitatea locală a nodului central se propagă în întreaga structură dar nu produce inversarea poziției inițiale (fig. 5.32).

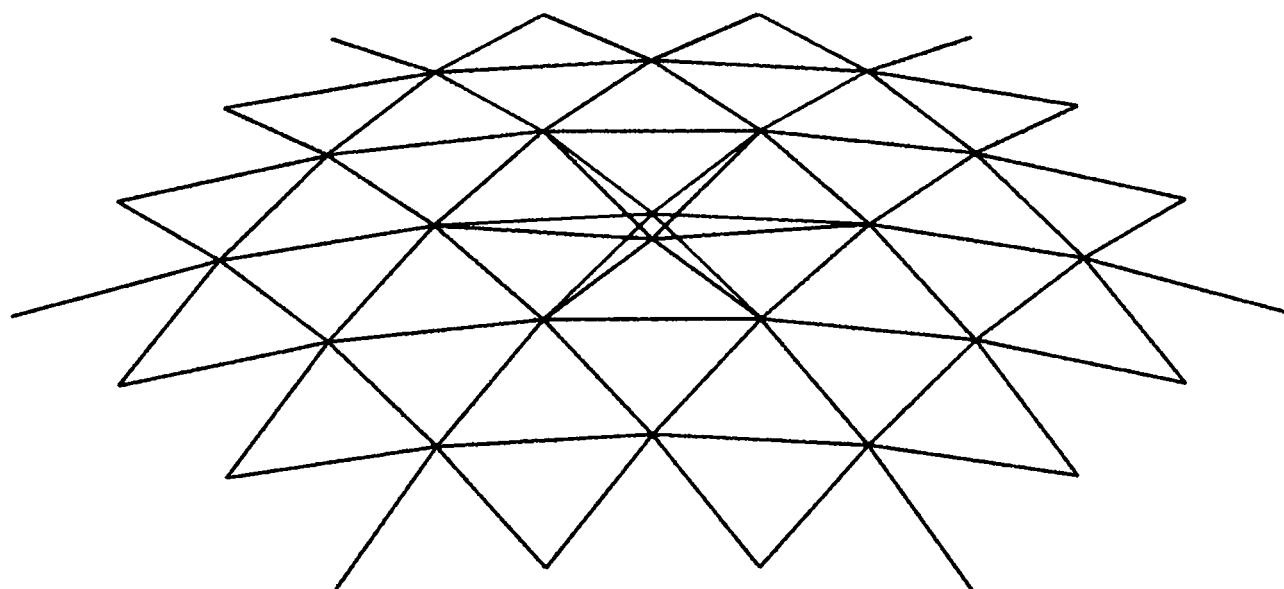


Fig. 5.32 Poziția deformată a cupolei cu 72 de bare sub acțiunea unei forțe concentrate la sfârșitul saltului static

Deplasarea nodului central în urma saltului dinamic este $w_4/f = 0,280$, a nodului de pe primul inel $w_4/f = 0,020$ și a nodului de pe inelul doi $w_4/f = 0,004$. Se observă că nici după saltul dinamic instabilitatea locală nu se transformă în instabilitate generală

Vibrațiile cupolei se produc în jurul poziției de echilibru și se prezintă în figura 5.33.

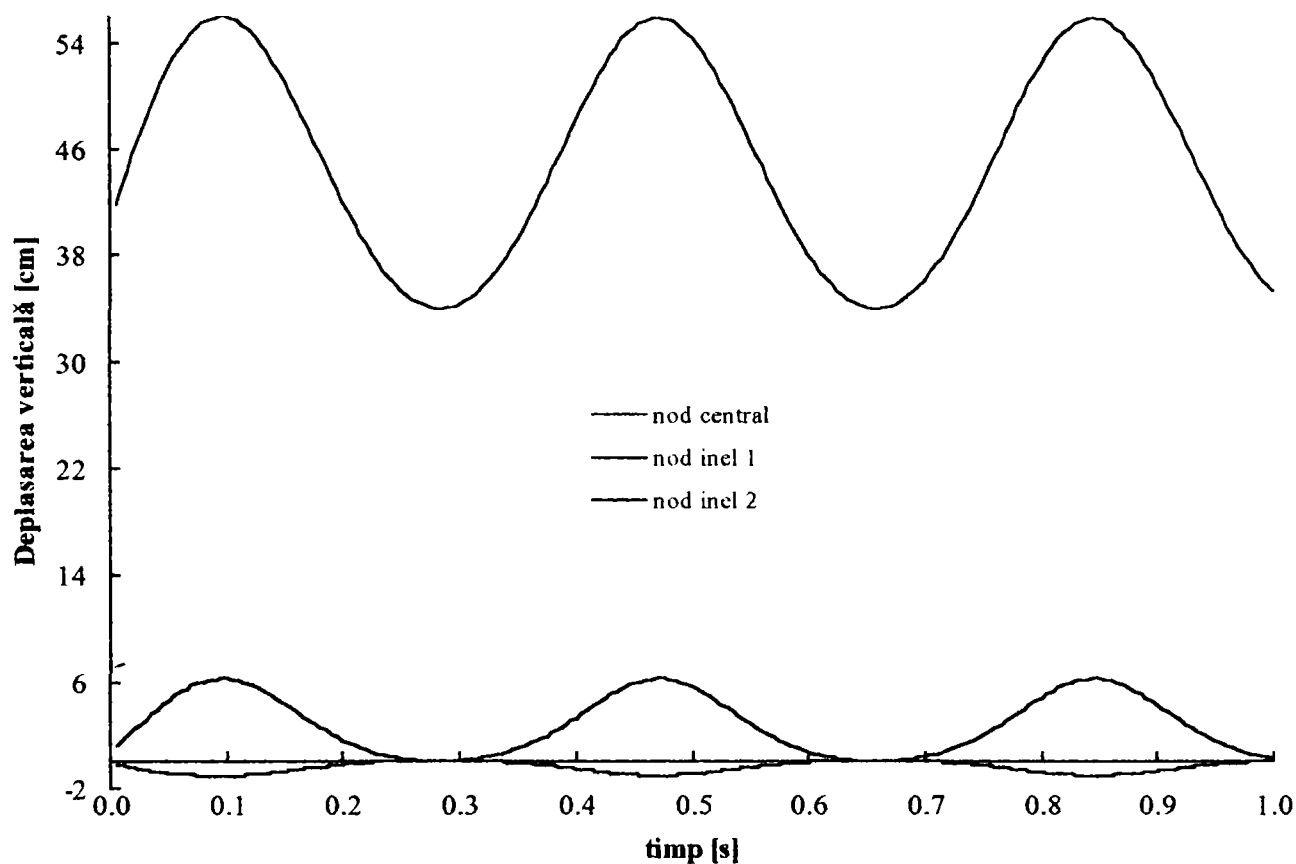


Fig. 5.33 Vibrațiile cupolei cu 72 de bare sub o încărcare cu 1 forță concentrată

Rezultă că această cupolă nu prezintă fenomenul de instabilitate generală prin propagarea instabilității nodului central din încărcarea cu o forță concentrată, aplicată în nodul central.

5.6.2.2 Cupola perfectă încărcată cu 19 forțe concentrate

Din încărcarea cupolei perfecte având $f/l = 0,091$ cu 19 forțe concentrate egale în nodurile interioare, în capitolul 4 au fost determinate curbele încărcare – deplasare (Fig. 4.69). Deplasările verticale din nodul central și nodurile de pe inel sub încărcarea statică cu 19 forțe egale, corespunzătoare încărcării de limitare și la sfârșitul saltului static se prezintă în tabelul 5.8.

Tabelul 5.8.

Cupola f/l	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
	Nodul central 1		Nodul pe inelul 1		Nodul pe inelul 2	
	w_2/f	w_3/f	w_2/f	w_3/f	w_2/f	w_3/f
0,091	0,017	1,407	0,0175	1,196	0,031	0,696

Deplasarea din nodul central la sfârșitul saltului static este $w_3 = 1,407f$. Cupola a trecut într-o poziție deformată cu deplasări mari în care nodul central este sub linia nașterilor. Nodurile de pe inelul 1 au deplasările egale cu $1,196f$. În urma aplicării unui impuls dinamic deplasările nodurilor cresc și cupola trece într-o poziție de echilibru inversată față de poziția inițială.

Deformata cupolei la sfârșitul saltului static se prezintă în figura 5.34.

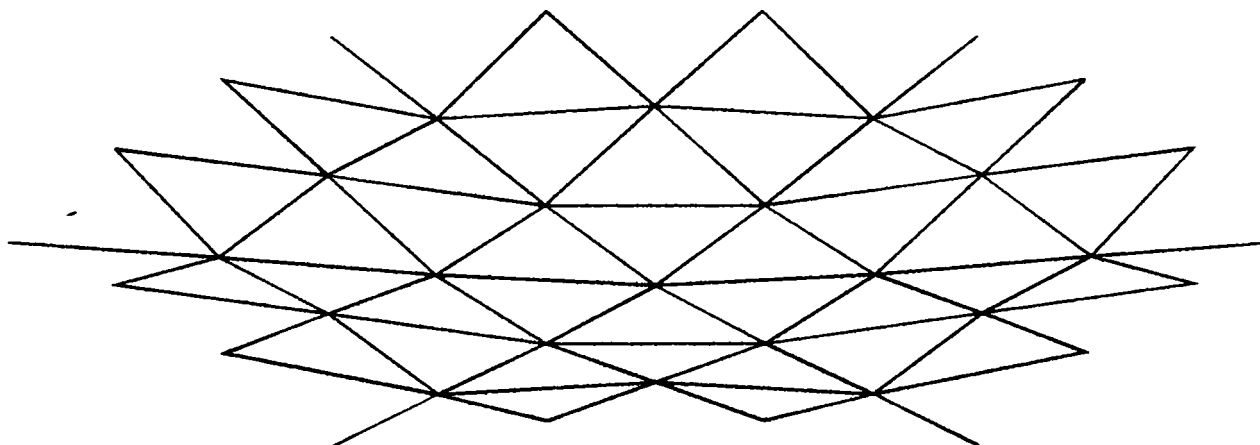
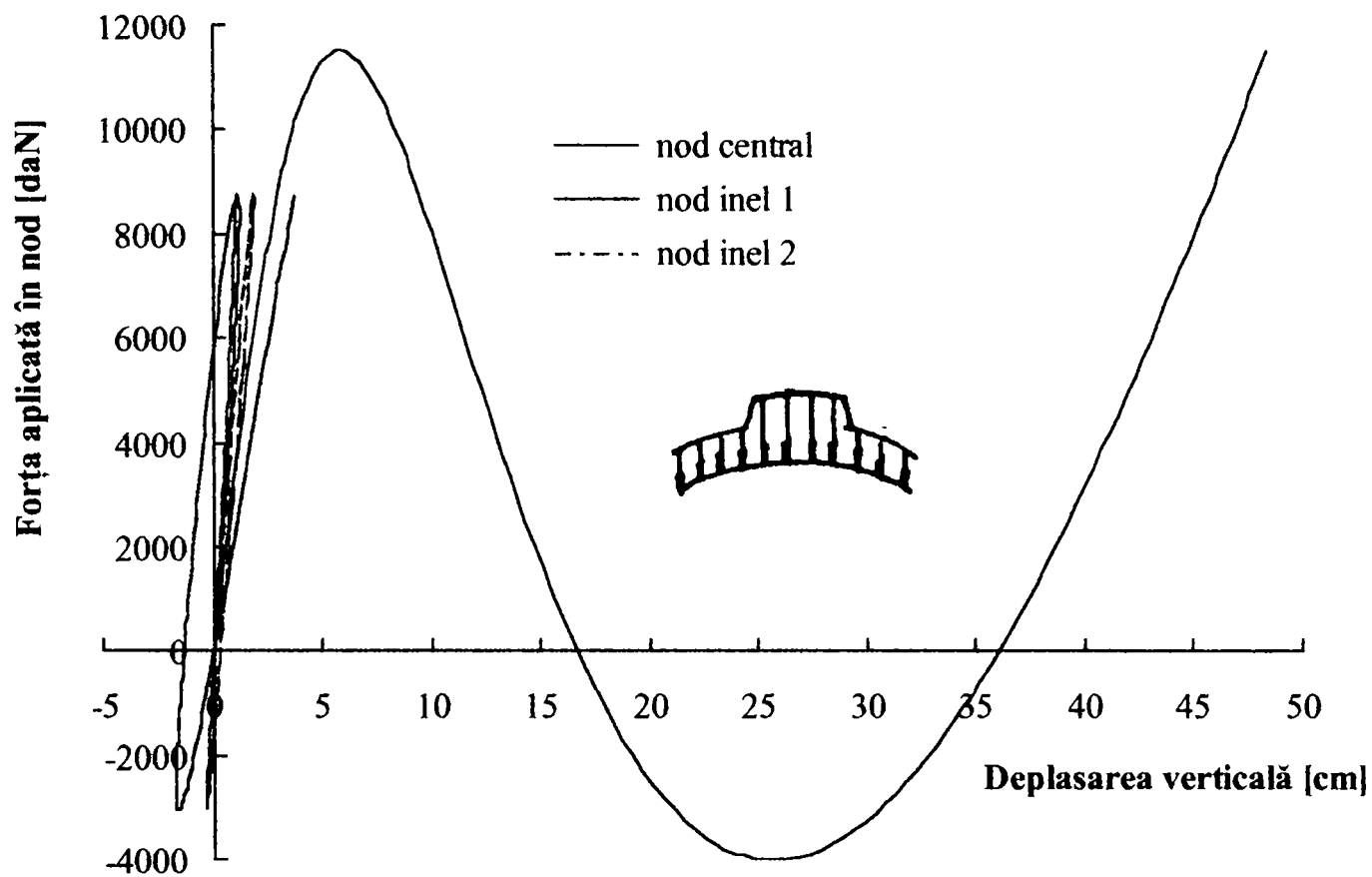


Fig. 5.34 Deformata cupolei perfecte cu 72 de bare datorită încărcării statice cu 19 forțe egale

5.6.2.3 Cupola perfectă încărcată cu $P_c = 1,32P$ și 18P

Din încărcarea cupolei perfecte cu $P_c = 1,32P$ în nodul central și 18 forțe concentrate egale (ipoteză de încărcare posibilă datorită aglomerării cu zăpadă în zona centrală a cupolei) a fost determinată curba încărcare – deplasare (Fig. 5.35). Deplasările verticale din nodul central și nodurile de pe inelele 1 și 2, raportate la săgeata inițială f , au valorile precizate în tabelul 5.9.


 Fig. 5.35 Curbele încărcare – deplasare pentru cupola perfectă cu 72 de bare încărcată cu P_c

Tabelul 5.9.

Cupola f/l	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
	Nodul central 1			Nodul pe inelul 1			Nodul pe inelul 2		
	w_2/f	w_3/f	w_4/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f
0,091	0,036	0,301	2,175	0,007	0,023	1,317	0,001	0,001	0,731

Comportarea cupolei perfecte din încărcarea cu o forță în nodul central $P_c = 1,32P$ și 18 forțe egale în celelalte noduri este diferită de a cupolei încărcate cu 19 forțe egale P în toate nodurile. Deplasările din nodul central și din nodurile interioare sunt mai mici dacă se aplică forța concentrată de $1,32P$ în nodul central, față de încărcarea cu 19 forțe egale (vezi tabelul 5.8. și 5.9.). La sfârșitul saltului static deplasarea din nodul central este $0,301f$, față de $1,407f$ din încărcarea cu 19 forțe egale.

Cupola trece în poziție de echilibru inversată numai în urma saltului dinamic. Pozițiile deformate ale cupolei în urma saltului dinamic se prezintă în figura 5.36.

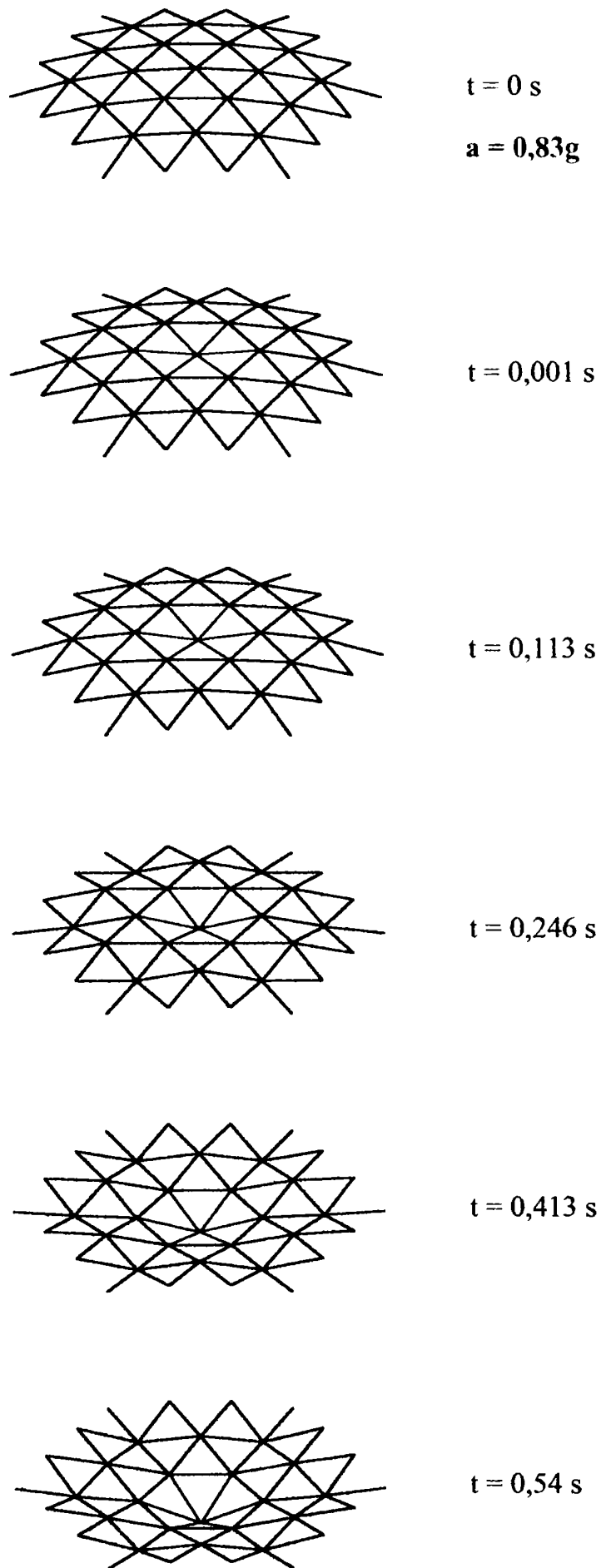


Fig. 5.36 Propagarea instabilității locale la cupola perfectă cu 72 de bare în urma saltului dinamic datorită încărcării cu $P_c = 1,32P$ și $18P$

5.6.2.4 Influența imperfecțiunilor geometrice de nod central

Cupola cu 72 de bare și dimensiunile precizate în paragraful 5.6.2 a fost afectată de imperfecțiune geometrică a nodului central egală cu 2,1 cm (0,013f). Această imperfecțiune produce apariția instabilității nodului central ca primul mod de flambaj.

Curba încărcare - deplasare pentru cupola imperfectă cu acest tip de imperfecțiune se prezintă în figura 5.37. Deplasările verticale din nodul central și ale nodurilor de pe inele, raportate la săgeata inițială, se prezintă în tabelul 5.10.

Tabelul 5.10

Imperfecțiunea	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
	Nodul central			Nodul pe inelul 1			Nodul pe inelul 2		
	w_2/f	w_3/f	w_4/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f	w_2/f	w_3/f	w_4/f
Nod central	0,043	0,290	1,847	0,021	0,036	1,279	0,025	0,0265	0,938

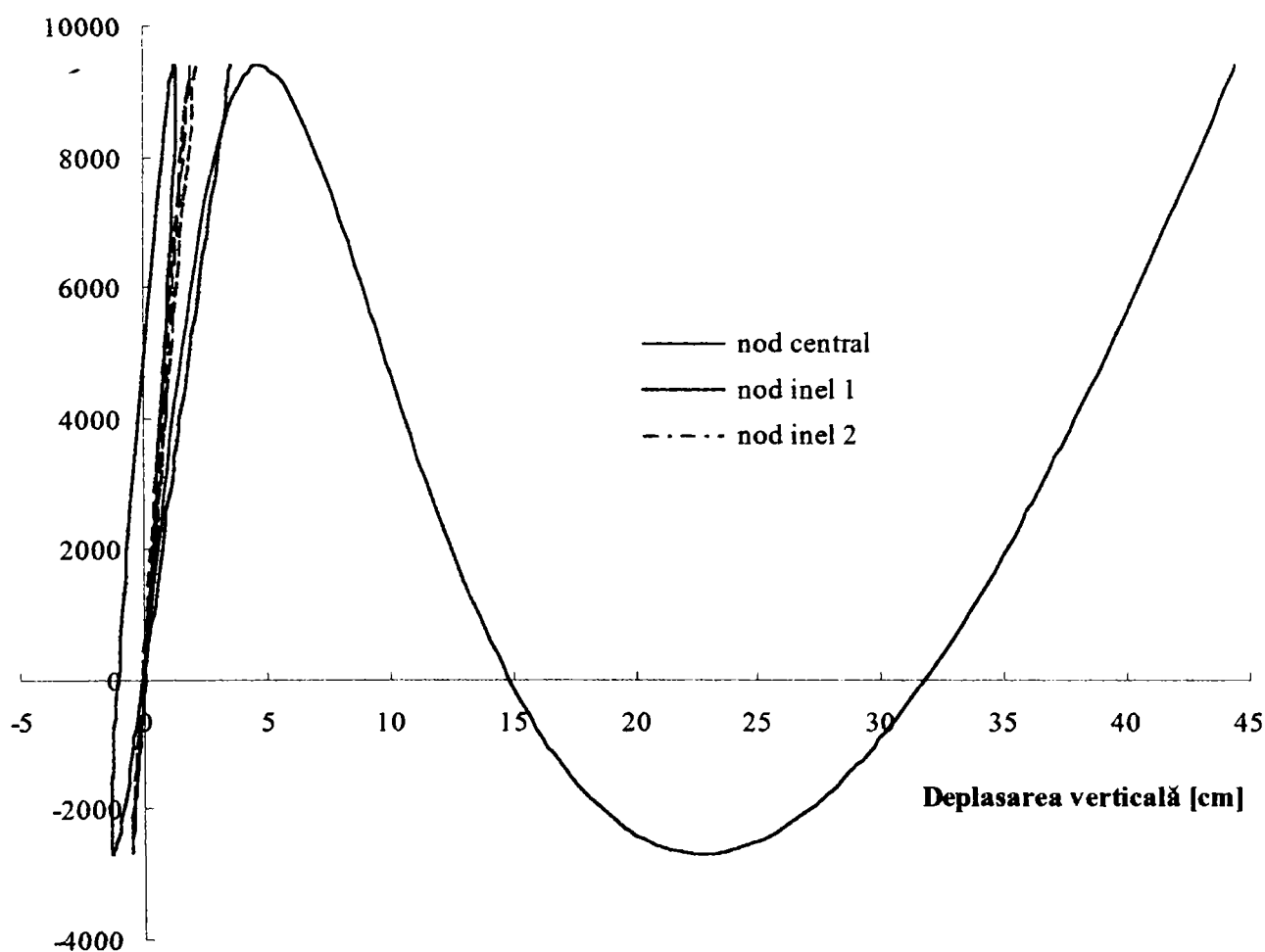


Fig. 5.37 Curbele încărcare – deplasare pentru cupola cu 72 de bare, cu o imperfecțiune de 2,1 cm în nodul central, încărcată cu 19 forțe egale

Cupola cu imperfecțiune de nod central are cele mai mici deplasări ale nodurilor din încărcarea cu 19 forțe egale în nodurile interioare. Deplasările în nodul central la sfârșitul saltului static reprezintă $w_3 = 0,290f$. La sfârșitul saltului dinamic deplasările din noduri depășesc săgeata inițială a cupolei. Imperfecțiunea nodului central reduce deplasările din nodul central și din nodul de pe primul inel, față de deplasările obținute din încărcarea cupolei cu o forță concentrată $P_c = 1,32P$ și 18 forțe egale.

Pozițiile deformate ale cupolei imperfecte în urma saltului dinamic se prezintă în figura 5.38.

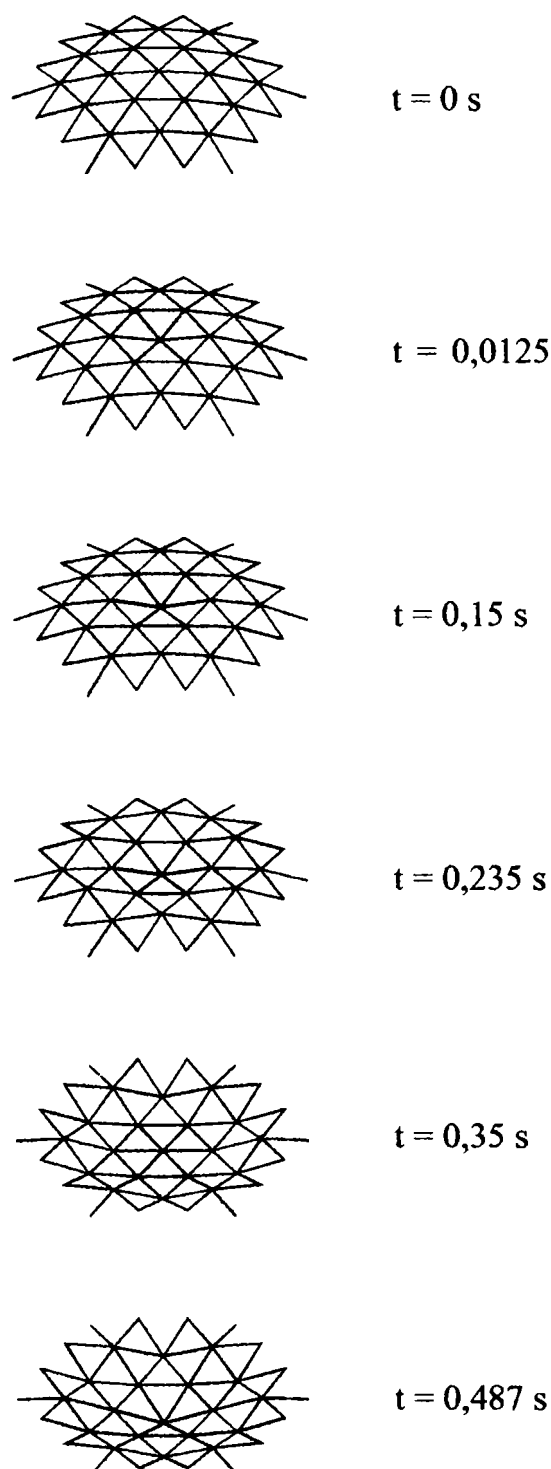


Fig. 5.38 Propagarea flambajului local la cupola imperfectă cu 72 de bare în urma saltului dinamic datorită încărcării cu 19 forțe egale

Încărcarea uniformă în prezența imperfecțiunii de nod central (mai mare sau egală cu 2,1 cm), respectiv încărcarea cu o forță de 1,32P în nodul central și 18P în restul nodurilor conduc prima dată la apariția instabilității nodului central. Din încărcarea statică a cupolei instabilitatea locală nodului nu se mai propagă structură. Propagarea instabilității locale se produce în efectului dinamic și cupola ocupă în ambele situații o poziție inversată față de poziția inițială.

Prin adoptarea măsurilor constructive, care se precizează în capitolul 7, se elimină propagarea instabilității locale în urma saltului dinamic.

5.7 Concluzii

Din cercetarea comportării cupolelor reticulate perfecte cu 24 și 72 bare încărcate în toate nodurile interioare cu forțe de mărime egală se desprind următoarele concluzii:

- cupolele au o comportare neliniară cu deformații plastice care apar sub încărcarea de limitare P_{lim} ;
- cupolele își pierd stabilitatea sub încărcarea de limitare P_{lim} corespunzătoare instabilității generale și materialului cu comportare elastică - perfect plastică;
- sub încărcarea de limitare cupolele prezintă un salt al echilibrului în domeniul postcritic care conduce la deplasări mari și inversează poziția inițială de echilibru;
- creșterea raportului f/l conduce la creșterea încărcării de limitare, a energiei cinetice și a vitezei inițiale;
- creșterea raportului f/l conduce la creșterea violenței saltului dinamic, deoarece crește energia cinetică, însă propagarea instabilității locale este întârziată de creșterea încărcării de limitare;
- deplasările nodurilor din încărcarea cu forțe statice în toate nodurile sunt mai mari decât cele produse de forța aplicată în nodul central;
- cupolele perfecte încărcate cu forțe egale în toate nodurile prezintă fenomenul de instabilitate generală în urma saltului static;
- încărcarea cupolelor perfecte cu o forță în nodul central $P_c = 1,27P$ și forțe P egale în nodurile interioare ale cupolei cu 24 de bare transformă instabilitatea generală în instabilitate locală de nod la finele saltului static;
- instabilitatea locală de mai sus se propagă în instabilitate generală numai în urma saltului dinamic;

- încărcarea uniformă în toate nodurile în prezența unor imperfecțiuni ale nodului central care depășesc 1,85 cm (0,034f) conduce la apariția instabilității de nod la cupola cu 24 de bare. Această instabilitate locală se propagă numai dacă se consideră efectul dinamic al încărcărilor;

- încărcarea cupolei perfecte cu 72 de bare cu o forță în nodul central $P_c = 1,32P$ și forțe egale în celelalte noduri produce instabilitatea locală a nodului central, care se propagă în structură numai dacă se considera efectul dinamic al încărcării;

- încărcarea uniformă în toate nodurile în prezența unor imperfecțiuni ale nodului central care depășesc 2,1 cm (0,013f) conduce la apariția instabilității nodului central la cupola cu 72 de bare. Această instabilitate locală se propagă numai dacă se consideră efectul dinamic al încărcărilor;

- din încărcarea cupolelor perfecte cu o forță concentrată în nodul central se produce instabilitatea locală a nodului central care nu se propagă nici dacă se consideră efectul dinamic al încărcării;

- siguranța structurilor reticulate simplu strat în exploatare se va determina luând în considerare distribuția reală a încărcărilor, influența imperfecțiunilor geometrice măsurate, a imperfecțiunilor de material precum și influența tipului de îmbinare.

BIBLIOGRAFIE

- [5.1.] **Abedi K., Parke R.A.G.,** *Progressive Collapse of Single - Layer Braced Domes*, Int. J. of Space Structures, Vol. 11, No. 2, pp 291 - 306, 1996.
- [5.2.] **Abedi K., Parke R.A.G.,** *Effects of initial imperfections on the propagation of local instability in single - layer braced domes*, Stability and Ductility of Steel Structures, SDSS 97, Nagoya, Japan, pp. 449 - 457, 1997
- [5.3.] **ANSYS 5.3** *Theory Manual*
- [5.4.] **Bănuț V.,** *Calculul nelinier al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1981.
- [5.5.] **Clough W.R., Penzier J.,** *Dynamic of structures*, Mc Graw Hill, Book Company, New York, 1975.
- [5.6.] **Collins I. M.,** *An investigation in to the collapse behaviour of double – layer grids*, Space Structures (ed. H. Nooshin), Elsevier, Appl. Sci., Publ., London, 1985.
- [5.7.] **Croll J., Walker A.C.,** *Elements of structural stability*, The Mac Millan Press Ltd, 1972
- [5.8.] **Gioncu V.,** *Buckling of reticulated shells: State – of – the- Art*, Int. J. of Space Structures, vol. 10, no. 1, pp 1 – 46, 1995.
- [5.9.] **Gioncu V.,** *Coupled instabilities under dynamic loading. General raport*, Proc. of Second Int. Conf. on Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS '96, pp 469 - 481. Editors J. Rondal, D.Dubină, V.Gioncu, Liege Belgium - Imperial College Press, 1996.
- [5.10] **Gioncu V.,** *Instability problems in space structures*, Int. J. Space Struct., vol. 1, no. 3, pp 169 – 183, 1985.
- [5.11] **Gioncu V., Ivan M.,** *Fundamentals of structural stability analysis (in Romanian)*, Ed. Facla, Timișoara, 1983.
- [5.12] **Gioncu V., Lenza P.,** *Propagation of local buckling in reticulated shells*. Proc. of Forth Int. Conf. on Space Structures. pp 147 - 155, Univ of Surrey Parke G.A.R. and Howard C.M.(Editors). Thomas Telford Service Ltd, 1993.
- [5.13] **Gioncu V., Băluț N.,** *Instability behaviour of single layer reticulated shells*. Int. J. of Space Structures, Vol.7, No. 4, pp 243 - 252, 1992.

- [5.14] **Gioncu V., Dinculescu M.M.,** *Progressive Buckling of Reticulated Structures. State of the Art. Proc. Stability Problem in Designing Construction and Rehabilitation of Metal Structures*, Ed. Batista C.R., Batista M.E., Pfeil S.M., pp 657 - 664, Rio de Janiero, Brasile, 1996.
- [5.15] **Gioncu V., Ivan M.,** *Instabilitatea structurilor din plăci curbe subțiri*. Editura Academiei Române, București, 1978.
- [5.16] **Hanaor A.,** *Analysis of double layer grids with material non-linearities – a practical approach*, J. of Space Structures, vol. 1, no. 1, pp 33 – 40, 1985.
- [5.17] **Ifrim M.,** *Dinamica structurilor și inginerie seismică*. E.D.P. București, 1984.
- [5.18] **Ishikawa K.,** *Dynamic buckling behaviour of single and duple layer latticed domes due to vertical earthquake motions*. Space structures (Editors Parke and Howard), Thomas Telford, vol.1, pp 466-475, 1993.
- [5.19] **Ivan A Gioncu V.,** *Coupled instabilities of single layered reticulated structures*. Proc. of Sec. Int. Conf Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS ' 96 (Edited by Rondal J., Dubină D., Gioncu V.), Liege.- Belgium pp 347 - 354, Imperial College Press, London, 1996.
- [5.20] **Ivan A.,** *The dynamic stiffeners matrix of straight bar with constant cross section*. A VI-a Conferință de Construcții Metalice. Vol. 3 pp 164., 1991.
- [5.21] **Ivan A., Gioncu V.,** *Dynamic interaction between local and general buckling in reticulated domes*, Stability and Ductility of Steel Structures, SDDS '97, Nagoya, 1997.
- [5.22] **Ivan A.,** *Numerical methods for dynamic analysis of systems*. Conferința a VII-a de vibrații mecanice, pp79 - 85, Timișoara, 1993.
- [5.23] **Ivan A., și Gioncu V.,** *Dynamic interaction between local and general buckling in reticulated domes*, 5th Int. Colloq. on Stability and Ductility of Steel Structures SDSS '97, Nagoya, Japan, 1997.
- [5.24] **Ivan M., Vulpe A., Bănuț V.,** *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*, E.D.P., București, 1982.
- [5.25] **Kuneida H.,** *Dynamic stability of spherical domes subjected to earthquakes*. Space structures (Editors Parke and Howard), Thomas Telford, Vol.1, pp 507 - 516, 1993.
- [5.26] **Kyriakides S., Babcock D. C.,** *Buckle propagation phenomena in pipelines*, Collapse: The Buckling of Structures in Theory and Practice, Edited by J. M. T. Thompson, G. W. Hunt, pp 75 – 91, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [5.27] **Kyriakides S., Babcock D. C.,** *Large deflection collapse analysis of an inelastic inextensional ring under external pressure*, International Journal of Solids and Structures, no. 17, pp 981 – 983, 1981.

- [5.28] **Kyriakides S., Babcock D. C.,** *On the initiation of a propagating bucle in offshore pipelines*, BOSS 82, Proc. of the Third Int. Conf. On the Behavior of Offshore Structures, Mass. Inst. Tech., Hemisphere 1982.
- [5.29] **Lanheng S.,** *Stability of braced domes under dynamic loads*. Space structures, Editors Parke and Howard. Thomas Telford, Vol.1, pp 323 - 330, 1993.
- [5.30] **Lenza P.,** *Instability of single layer doubly curved vaults*. *Int Journal of Spatial Structures*. Vol. 7, No.4, pp 253 - 264. Math Science Publishing Ltd, 1992.
- [5.31] **Lenza P., Malerba G., Rossi P.P.,** *Instability problems for single layer reticular shells*. Proceedings Stability. Problems in Designing. Construction and Rehabilitation of Metal Structures pp 585 - 594, Ed. by Batista C.R. și Pfeil S. M., SSRC IC /Brasil ' 96 . Rio de Janeiro, Brasil, 1996.
- [5.32] **Lenza P.,** *Non-linear behaviour of reticulated cylindrical vaults*, Spatial Structures at the Turn of the Millennium, IASS Symp., vol. 3, pp 143 – 150, Copenhagen, 1991.
- [5.33] **Lenza P.,** *Some developments in shells structural analysis*, Proc. IASS Congr., vol. 1, Madrid, 1989.
- [5.34] **Lenza P.,** *Sul comportamento non lineare volte reticulari cilindriche*, Gior. Ital. Della Costr. In Acciao, Capri, 1989.
- [5.35] **Madi V. R.,** *Idealising the member behaviour in the analysis of pin – jointed spatial structures*, Space Structures (ed. H. Nooshin), Elsevier, Appl. Sci., Publ., pp 462 – 467, London, 1985.
- [5.36] **Martha și Smith E.,** *Alternative path analysis of space trusses for progressive collapse*. J.Str. Eng. ASCE, Vol. 111 No. 9, pp 419 - 424, 1988.
- [5.37] **Michaltson T.G., Ermopoulos C.I., Sophianopoulos S.D.,** *Modeling of the nonlinear response of a spherical shell*. Proc. of Second Int. Conf. on Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS '96, pp 491-498, Editors J. Rondal, D.Dubină, Gioncu V., Liege ,Belgium, Imperial College Press, 1996.
- [5.38] **Murtha – Smith E.,** *Alternative path analysis of space trusses for progressive collapse*, J. Struct. Engineering, vol. 114, no. 9, pp 1978 – 1999, 1988.
- [5.39] **Murtha – Smith E., Leary S. F.,** *Space trusses structural integrity*, Space Structures 4 (eds. A.R. Parke, C. M. Howard), Thomas Thelford, Ltd. 1, vol. 1, pp 640 - 648, 1993.
- [5.40] **Mwakali S.A.,** *Collapse studies of the effects of eccentricity in compression T-ee section chords in double – layer space trusses*, Space Structures 4 (eds. A.R. Parke, C. M. Howard), Thomas Thelford, Ltd. 1, vol. 1, pp 16 – 27, 1993.
- [5.41] **Newmark N.M.,** *A method of computation for structural dynamic* Journal of Eng. Div., ASCE 85, pp 67, 1959.

- [5.42] **Ostrowski A.M.**, *A quantitative formulation of Sylvester's law of inertia*. Proc. Nat. Acad. Sci., V.S. 45, 740 - 744, 1959.
- [5.43] **Przemieniecki S.J.**, *Theory matrix structural analysis*. McGraw - Hill Book Company, New - York, 1968.
- [5.44] **Sanders J.L.Jr.**, *Non linear theories for thin shells*. Quart. Appl.Mech, Vol.XX1, No.1, pp 21-36, 1963
- [5.45] **Schmidt L. C., Hanaor A.**, *Force limiting devices in space trusses*, J. Struct. Div., vol. 105, ST 5, pp 939 – 951, 1979.
- [5.46] **Schmidt L. C., Morgan P. R., Clarkson S. A.**, *Space trusses with brittle type structure buckling*, J. Struct. Div., vol. 102, ST 7, pp 1479 – 1492, 1976.
- [5.47] **Soare M.**, *Some observation on the failure of dome of greats Span*. Proc. of First Int. Conf of Space Structures Univ of Surrey, Davies, pp 419 – 424, John Wiley and Sons Inc., New York, 1967.
- [5.48] **Supple W. J., Collins I.**, *Limit state analysis of double – layer grids*, Analysis and Construction of Double – Layer Grids (ed. Z. S. Makowski), Appl. Sci. Publ., pp 93 – 117, London, 1981.
- [5.49] **Supple W. S.**, *A plastic collapse model for space trusses*, Stability Problems in Engineering Structures and Groupments (eds. T. H. Richards, P. Stanley), Appl. Science Publ. Ltd., pp 217 – 231, London, 1978.
- [5.50] **Supple W. S., Collins I. M.**, *Post – critical behaviour of tubular struts*, SSRC Report, University of Surrey, 1979.
- [5.51] **Tado M., Wakayma K.**, *Load – carrying capacity of space trusses under the influence of imperfections*, Space Structures 4 (eds. A.R. Parke, C. M. Howard), Thomas Thelford, Ltd. 1, vol. 1, pp 205 - 221, 1993.
- [5.52] **Zienkiewicz C.O.**, *La methode des elements finis*, Mc.Graw - Hill, New York, 1979.

CAPITOLUL 6

**MĂSURI
CONSTRUCTIVE
PENTRU EVITAREA
PROPAGĂRII
INSTABILITĂȚII
LOCALE ÎN
INSTABILITATE
GENERALĂ**



6. MĂSURI CONSTRUCTIVE PENTRU EVITAREA PROPAGĂRII INSTABILITĂȚII LOCALE ÎN INSTABILITATE GENERALĂ

6.1 Introducere

De fenomenul opririi propagării instabilității locale în instabilitate generală s-au ocupat Martha – Smith [6.13] la structurile planare reticulate iar Kyriakides și Babcock [6.9, 6.10] la conductele folosite la transportul petrolului.

Murtha – Smith [6.13], Gioncu și Dinculescu [6.5] au demonstrat că plăcile plane reticulate dublu strat sunt cele mai sensibile la apariția propagării instabilității locale. Pentru a limita acest fenomen ei recomandă ca barele susceptibile să producă cedarea progresivă a structurii să fie supradimensionate. Pentru o structură dimensionată la capacitatea ei portantă coeficientul de siguranță este aproximativ 1,75. Acest coeficient trebuie micșorat datorită fenomenului de propagare a instabilității până la aproximativ 0,96.

O supradimensionare cu 33 % a barelor din mijlocul deschiderii dintre reazeme diminuează factorul scăderea factorului de siguranță, acesta ajungând la 1,32. Coeficientul de siguranța al structurii cu barele supradimensionate neglijând fenomenul de propagare a instabilității este de 1,83.

În capitolul 5 s-a prezentat fenomenul de propagare a instabilității locale în lungul conductelor pentru transportul petrolului [5. 26].. Oprirea propagării se realizează prin dispunerea pe conductă a unor inele de consolidare [6.9, 6.10]. Pentru conductele cu lungime mare distanța dintre inele este între 100 – 200 m. Rolul lor este de a localiza pe un tronson eventuala propagare a instabilității locale (Fig. 5.16 a).

Din studiul comportării cupolelor reticulate simplu strat efectuat în capitolele patru și cinci se cunosc următoarele:

- ordinea de apariție a diferitelor moduri de instabilitate și încărcările critice corespunzătoare lor;
- influența deformațiilor plastice asupra încărcărilor critice;
- influența imperfecțiunilor geometrice asupra încărcărilor critice corespunzătoare diferitelor moduri de instabilitate;
- influența distribuției încărcării pe cupolă;
- propagarea instabilității locale în instabilitate generală a cupolei.

Tabelele și graficele prezentate în teza de doctorat permit calculul direct al încărcărilor critice pentru cupolele cu 6 bare, 24 de bare și 72 de bare executate din bare cu secțiune inelară 89x6 mm, respectiv 121 x 6 mm și oțel OL52.

Caracteristica principală a acestor cupole constă în faptul că în urma saltului dinamic din încărcările cu forțe în toate nodurile, respectiv forță majorată în nodul central și identice în celelalte noduri, cupolele își pierd stabilitatea generală și trec în poziție de echilibru inversată.

Problema care trebuie rezolvată în continuare este să se determine măsurile constructive necesare pentru a opri propagarea instabilității locale în instabilitate generală. Soluția problemei se obține în urma analizei atente a ordinii de apariție a diferitelor moduri de instabilitate și dirijarea acestora în direcția evitării instabilității generale. Există următoarele soluții practice:

- utilizarea în structura cupolei a diferite tipuri de bare;
- alegerea și limitarea forței concentrate din nodurile cupolei astfel ca în exploatare să intervină numai instabilitatea locală a nodului central.

6.2 Cupola cu 24 de bare

6.2.1 Cupola imperfectă cu încărcare uniformă

La cupola cu 24 de bare cu secțiunea inelară de 121 x 6 mm, din oțel OL52, cu $\sigma_c = 3500 \text{ daN/cm}^2$ din încărcarea cupolei cu forțe concentrate egale în toate nodurile cu o imperfecțiune a nodului central de 1,85 cm, s-a stabilit că primul mod de instabilitate este al nodului central

În figura 6.1 se prezintă posibilitățile de mărire a secțiunilor transversale a barelor cupolei pentru a opri posibilitatea de propagare a instabilității locale în instabilitate generală.

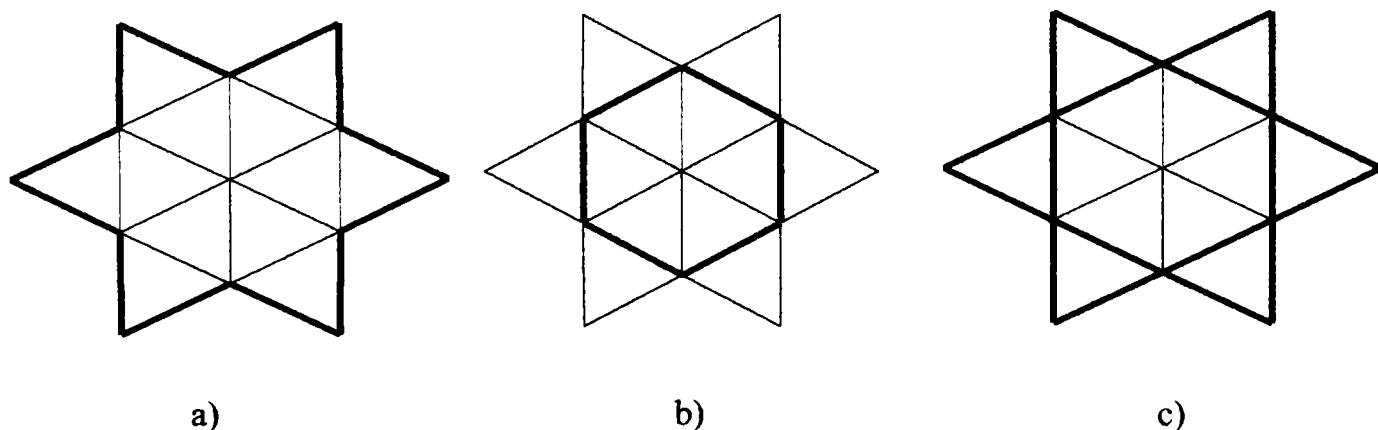


Fig. 6.1 Posibilități de majorare a secțiunii transversale a barelor cupolei

În capitolul cinci s-a analizat propagarea instabilității locale a nodului central în instabilitate generală. A rezultat că din încărcarea cu forțe egale în nodurile interioare ale cupolei cu imperfecțiunea nodului central de 1,85 cm, în urma saltului static se menține instabilitatea nodului central. După aplicarea dinamică a încărcărilor instabilitatea locală se propagă în instabilitate generală, în așa fel încât cupola își inversează curbura.

În acest capitol s-a studiat modalitatea de evitare propagării flambajului din nodul central considerând mai multe ipoteze.

(I) **O primă ipoteză** a fost cea în care nodul central prezintă o imperfecțiune geometrică de 1,85 cm, iar pe cupolă se aplică șapte forțe concentrate egale.

Ca primă etapă s-a analizat influența variației secțiunii barelor asupra încărcării de limitare și a propagării instabilității locale din nodul central. Întâi s-a studiat influența produsă de creșterea secțiunii barelor de la baza cupolei. Secțiunea transversală a celor șase bare de la bază a fost mărită la 133 x 6 mm, 152 x 6 mm și 178 x 6 mm. Creșterile procentuale au valorile 10,43 %, 26,96 % și 49,56 %. Barele cu secțiune mărită se prezintă în figura 6.2.

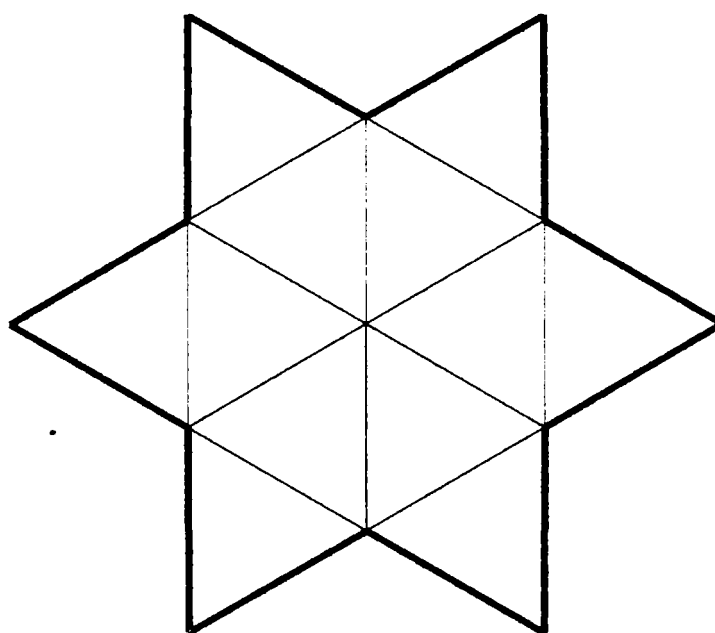


Fig. 6.2 Barele de la bază cu secțiune transversală mărită

În figura 6.3 se prezintă variația deplasărilor în funcție de timp pentru cupola cu barele de la bază cu secțiunea mărită cu 49,56%.

Încărcările de limitare și reducerile lor față de cupola perfectă, deplasările în urma saltului static și a saltului dinamic pentru cupola cu barele de la bază cu secțiunile majorate se prezintă în tabelele 6.1 și 6.2.

Tabelul 6.1

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	P _{limitare} la cupola [daN]			Reducerea % $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă [P _{ip}] Bare ϕ 121 x 6	Imperfectă 1,85 cm [P _{ii}] Bare ϕ 121 x 6	Imperfectă 1,85 cm [P _{ic}] Barele de la bază întărite	
0,052	133 x 6 23,939	13165,3	9868,5	9608,5	2,6
	152 x 6 27,520	13165,3	9868,5	9533,2	3,4
	178 x 6 32,421	13165,3	9868,5	9155,9	7,2

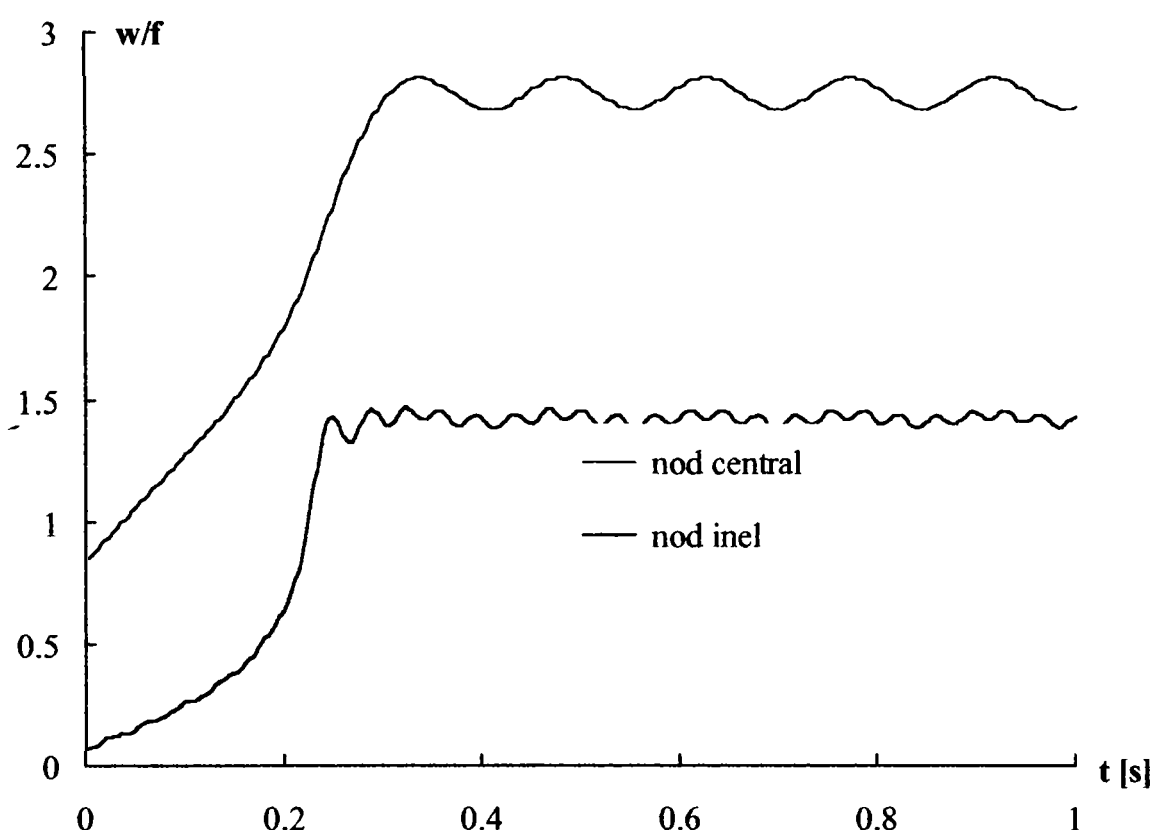


Fig. 6.3 Variația în timp a deplasărilor din nodurile cupolei cu o imperfecțiune de 1,85 cm în nodul central, cu barele de la bază mărite cu 49,56% datorită încărcării cu 7 forțe egale în noduri

Tabelul 6.2

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
		Nodul central			Nodul de pe inel		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f
0,052	133 x 6 23,939	0,157	0,889	2,625	0,095	0,151	2,483
	152 x 6 27,520	0,152	0,872	2,715	0,088	0,122	1,734
	178 x 6 32,421	0,144	0,860	2,785	0,072	0,106	1,42

Analizând influența pe care o generează majorarea secțiunii barelor de la baza cupolei se constată că acestea produc reducerea încărcării de limitare cu 2,6 % până la 7,2 %. Deplasările nodului central în urma saltului static sunt mai mici ca săgeata inițială (0,889f până la 0,860f), însă deplasările după saltul dinamic cresc de la 2,625f până la 2,785f. Concluzii similare se obțin și pentru nodul de pe inel. Rezultă că prin mărirea secțiunii barelor de la baza cupolei de 1,496 ori nu se oprește propagarea flambajului local în urma saltului dinamic.

(II) **Altă posibilitate** de îmbunătățire a comportării cupolei constă în mărirea secțiunii transversale a barelor situate pe inelul cupolei (Fig. 6.4). Barele de 121 x 6 mm au fost înlocuite cu bare de 133 x 6 mm (majorare de 10,43 %), 152 x 6 mm (majorare de 26,96 %) și 178 x 6 mm (majorare de 49,56 %), restul barelor din cupolă fiind menținute cu dimensiunile inițiale.

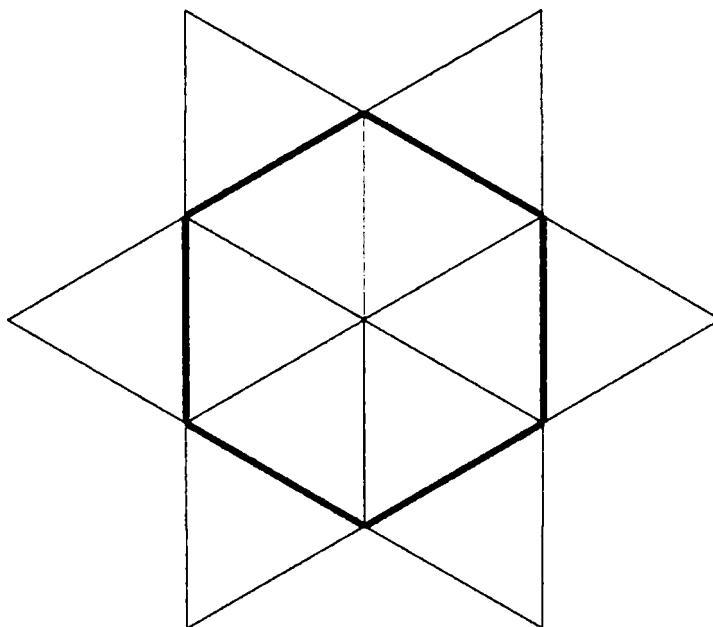


Fig. 6.4 Barele inelului cu secțiunea transversală mărită

În tabelul 6.3. se prezintă încărcarea de limitare P_{lp} pentru cupola perfectă cu bare de 121 x 6 mm, încărcarea de limitare pentru cupola imperfectă P_{li} (imperfecțiunea nodului central 1,85 cm) cu bare de 121 x 6 mm și încărcarea de limitare P_{lc} pentru cupola imperfectă cu barele inelului majorate. Încărcarea de limitare P_{lc} la cupola imperfectă cu barele inelului majorate este mai mică decât a cupolei imperfecte cu toate barele de 121 x 6 mm. Reducerea încărcării P_{lc} crește cu majorarea secțiunii barelor de la 5,4 % până la 12,5 % la bare cu aria de 1,496 aria barelor inițiale.

Tabelul 6.3

Cupola f/l	Bare întărite φ x t Aria [cm ²]	P _{limitare} la cupola [daN]			Reducerea % $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă [P _{ip}] Bare φ 121 x 6	Imperfectă 1,85 cm [P _{ii}] Bare φ 121 x 6	Imperfectă 1,85 cm [P _{ic}] Barele inelului întărite	
0,052	133 x 6 23,939	13165,3	9868,5	9332,8	5,4
	152 x 6 27,520	13165,3	9868,5	8915,5	9,6
	178 x 6 32,421	13165,3	9865,5	8637,9	12,5

În figura 6.5 se prezintă variația deplasărilor verticale din nodul central și de pe inel, raportate la săgeata inițială, pentru cupola cu 24 de bare cu barele inelului având secțiunea transversală mărită cu 26,96%.

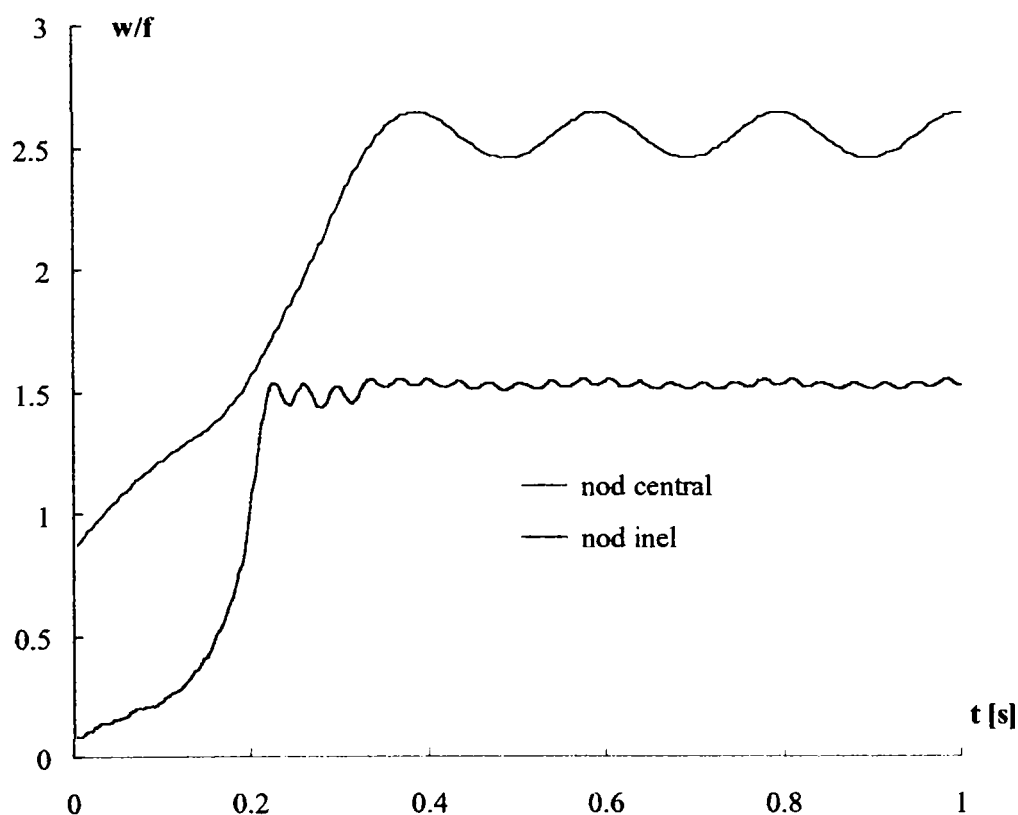


Fig. 6.5 Variația în timp a deplasărilor din nodurile cupolei cu o imperfecțiune de 1,85 cm în nodul central, cu barele de la bază mărite cu 26,96% datorită încărcării cu 7 forțe egale în noduri

Deplasările din nodul central și de pe inel pentru cupola cu barele de pe inel majorate, raportate la săgeata inițială, se prezintă în tabelul 6.4. Se observă că deplasările în nodul central în urma saltului static sunt de 0,876f până la 0,826f, iar deplasările în urma saltului dinamic scad de la 2,609f până la 1,190f. Deplasările verticale din nodul de pe inel în urma saltului dinamic scad brusc de la 2,470f până la 0,324f.

Tabelul 6.4

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
		Nodul central			Nodul de pe inel		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f
0,052	133 x 6 23,939	0,166	0,876	2,609	0,092	0,131	2,470
	152 x 6 27,520	0,170	0,848	2,550	0,087	0,116	1,570
	178 x 6 32,421	0,175	0,826	1,190	0,084	0,108	0,324

În figura 6.6 se prezintă comportarea cupolei cu barele inelului întărite cu 40,87% în urma saltului dinamic.

Analizând rezultatele prezentate se remarcă faptul că prin majorarea secțiunii barelor inelului cu 49,56 % se obțin deplasări în urma saltului static similare cu consolidarea barelor de la bază, însă deplasările în urma saltului dinamic sunt mult mai mici (1,19f față de 2,785f în nodul central și 0,324f față de 1,42f în nodul de pe inel). Consolidarea barelor inelului este mai eficientă pentru reducerea propagării instabilității locale a nodului central.

Rezultă că prin majorarea secțiunii barelor inelului cu 49,56 % instabilitatea locală în urma saltului dinamic nu se mai propagă în instabilitate generală. Deplasarea verticală din nodul central este 1,19f, iar deplasarea din nodul de pe inel este de 0,324f.

6.2.2 Cupola perfectă cu încărcare majorată în nodul central

(III) Evitarea propagării instabilității nodului central s-a studiat și în ipoteza aplicării pe cupola perfectă în nodul central a forței $P_c = 1,27P$ și în celelalte noduri forțe egale P . După analiza dinamică a comportării structurii cu barele inelului majorate au rezultat forța critică și deplasările din nodurile caracteristice prezentate în tabelele 6.5 și 6.6.

Tabelul 6.5

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	$P_{limitare}$ la cupola [daN]			Reducerea % $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă [P _{ip}] Bare ϕ 121 x 6	Încărcare 1,27P + 6P [P _{ii}] Bare ϕ 121 x 6	Încărcare 1,27P + 6P [P _{ic}] Bare inel majorate	
0,052	133 x 10 38,642	13165,3	9102	8718,9	4,2
	127 x 12 43,354	13165,3	9102	8711,9	4,3

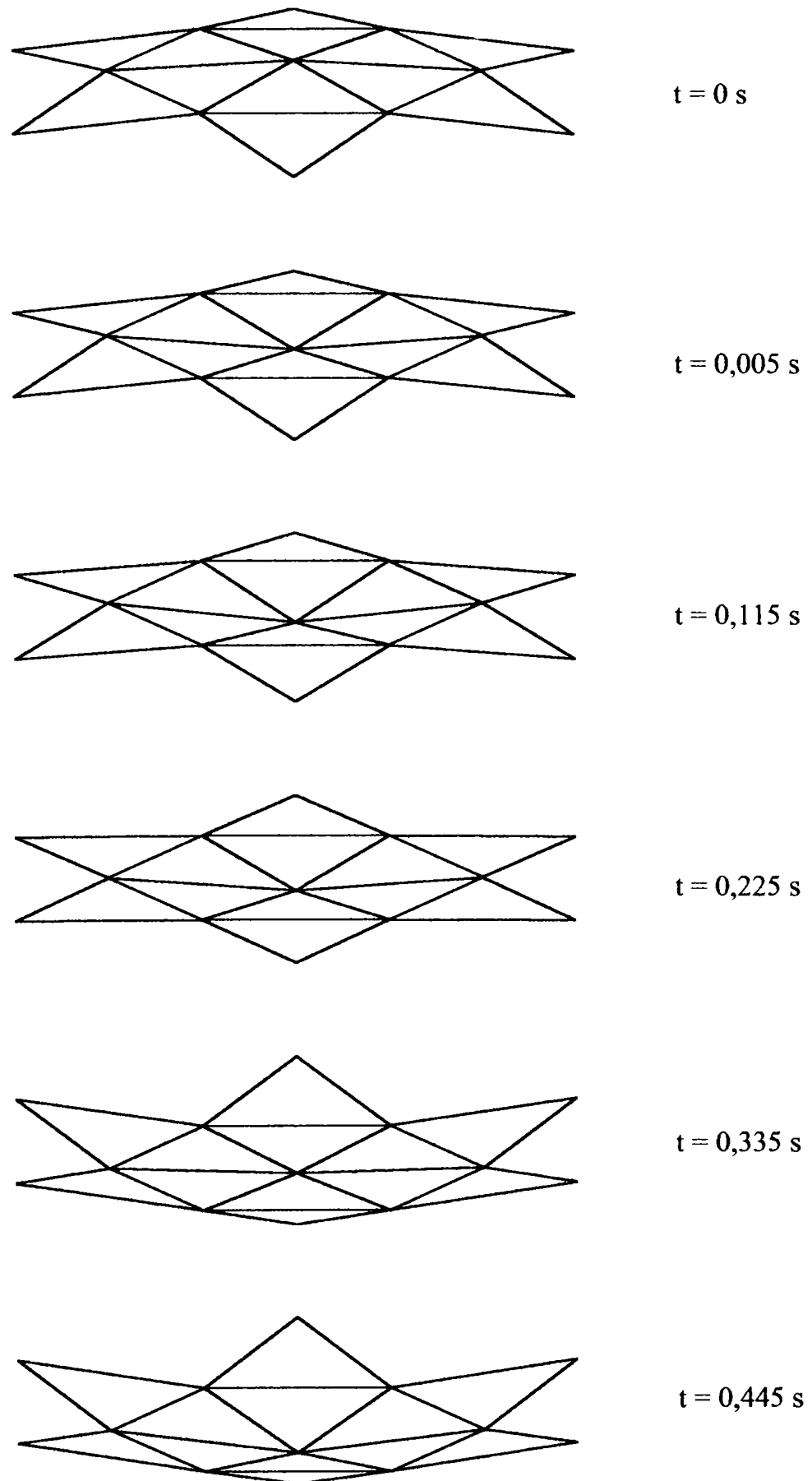


Fig. 6.6 Propagarea instabilității locale în urma saltului dinamic la cupola cu 24 de bare cu barele inelului mărite cu 40,87 %

Din tabelul 6.5 se observă că majorarea secțiunii transversale a barelor inelului cu 100 % conduce la reducerea încărcării de limitare cu 4,3 % față de cupola cu barele de 121 x 6 mm.

Deplasările din nodul central și de pe inelul cupolei raportate la săgeata inițială au valorile prezentate în tabelul 6.6.

Tabelul 6.6

Cupola f/l	Bare din inel Majorate	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
		Nodul central			Nodul de pe inel		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f
0,052	133 x 10	0,162	0,852	2,713	0,076	0,112	2,403

Se observă că deplasările din nodul central și de pe inel în urma saltului dinamic depășesc săgețile inițiale din nodurile respective. Instabilitatea locală se propagă prin salt dinamic în instabilitate generală.

(VI) Deplasările din noduri fiind foarte mari s-a încercat **majorarea simultană a barelor inelului cu 49,56 % și a barelor de reazem cu 26,96 %**, respectiv mărirea cu 50% atât a barelor inelului cât și a barelor de reazem. În figura 6.7 se prezintă barele întărite față de secțiunea inițială de 121 x 6 mm .

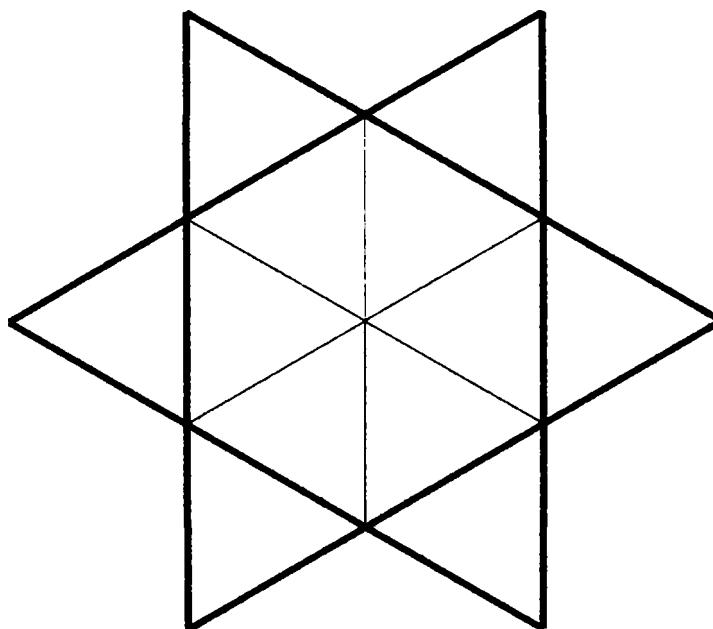


Fig. 6.7 Barele de la bază și barele inelului cu secțiunea transversală mărită

Încărcarea de limitare pentru cupola perfectă cu barele inelului și cele de reazem întărite se prezintă în tabelul 6.7.

Tabelul 6.7

Cupola f/l	Bare majorate în inel și de reazem [mm] Aria [cm ²]	P _{limitare} la cupola [daN]			Reducerea % $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă [P _{ip}] Bare φ 121 x 6	Încărcare 1,27P + 6P [P _{ii}] Bare φ 121 x 6	Încărcare 1,27P + 6P [P _{ic}] Bare majorate în inel și de reazem	
0,052	Inel 178 x 6 32,421 Reazeme 152 x 6 27,520	13165,3	9102,0	8627,0	5,2
	Inel și reazeme 78 x 6 32,421	13165,3	9102,0	8565,3	5,9

Din tabelul 6.7 se observă că majorarea secțiunii transversale a barelor inelului și a barelor diagonale de la bază contribuie la reducerea încărcării de flambaj a nodului central cu maxim 5,9 %.

Deplasările verticale din nodul central și din nodurile de pe inel pentru cupola cu 24 de bare și barele diagonalelor de bază și ale inelului majorate se prezintă în tabelul 6.8. Aceste deplasări sunt produse de forțele P_c = 1,27P și 6P aplicate în nodurile cupolei.

Tabelul 6.8

Cupola f/l	Bare Majorate inel și diagonale de bază	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
		Nodul central			Nodul de pe inel		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f ₁	w ₃ /f ₁	w ₄ /f ₁
0,052	Inel 178 x 6 Reazeme 152 x 6	0,145	0,851	1,279	0,057	0,098	0,358

Prin f_i s-a notat înălțimea inițială a nodurilor de pe inel.

Se observă că oprirea propagării instabilității locale din nodul central în urma saltului dinamic se obține atunci când secțiunile barelor inelului se majorează cu 49,56%, adică 178x6 mm, iar diagonalele de la bază cu 26,96%. Prin aceste majorări, instabilitatea cupolei se transformă în instabilitate locală a nodului central, care rămâne întotdeauna un fenomen local.

În figura 6.8 se prezintă deformată cupolei în urma saltului dinamic.

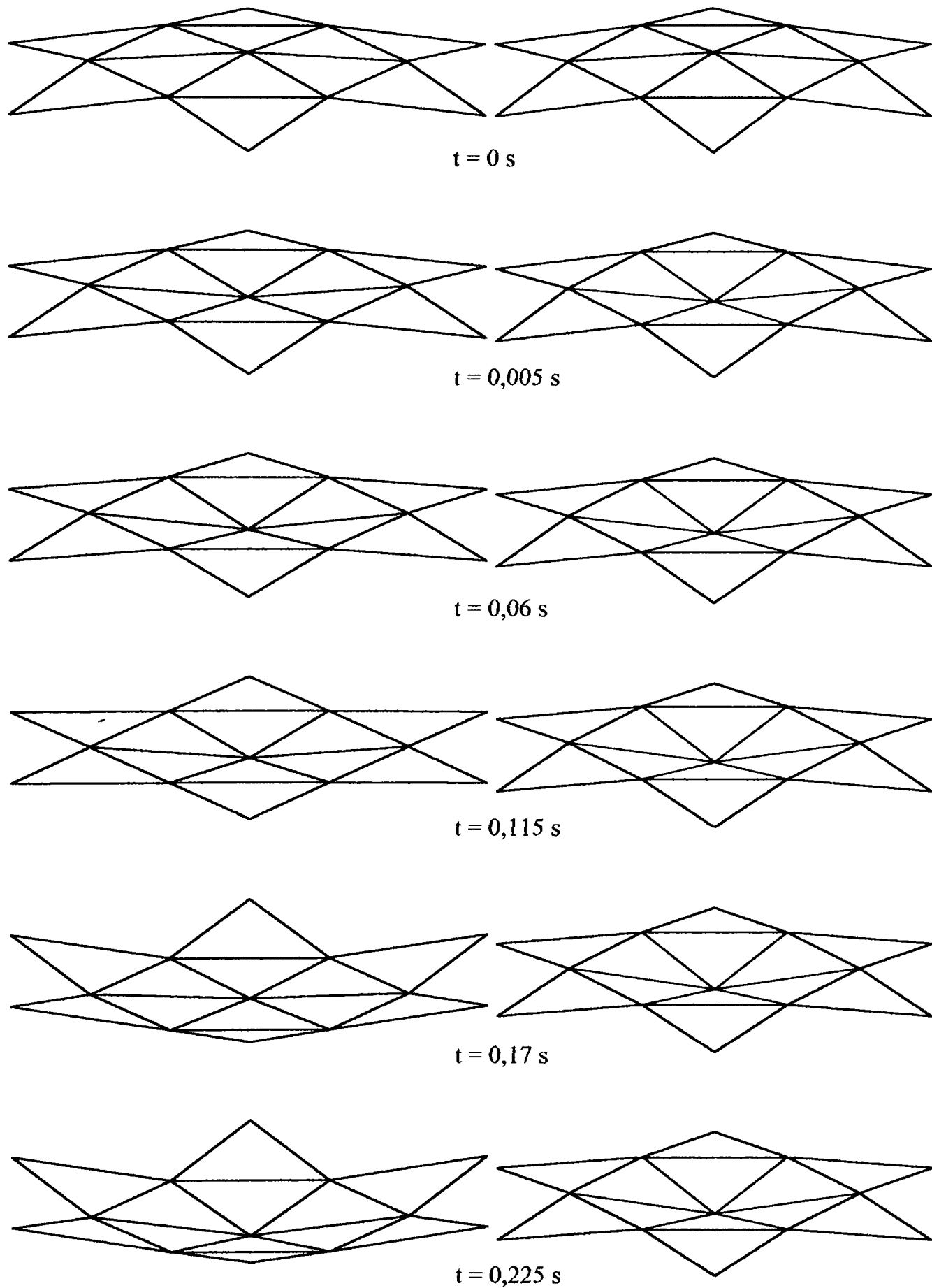


Fig. 6.8 Stabilizarea instabilității locale după saltul dinamic pentru cupola cu perfectă cu barele inelului mărite cu 49,56% și barele de reazem mărite cu 26,96%, datorită încărcării $P_c=1,27P$ și $6P$

6.2.3 Cupola perfectă cu încărcare uniformă

(V) În continuare s-a studiat posibilitatea de evitare a cedării cupolei perfecte prin instabilitate generală în ipoteza aplicării pe cupolă a șapte forțe egale în nodurile interioare. S-a încercat transformarea instabilității generale în instabilitate locală a nodului, care să nu se propage în urma saltului dinamic. Această stabilizare se poate obține numai dacă se măresc secțiunile barelor inelului cu 100%, iar ale barelor diagonale de la bază cu 78,26%. Forța critică și deplasările din nodurile caracteristice rezultate în urma analizei dinamice a comportării structurii cu barele întărite sunt prezentate în tabelele 6.9 și 6.10.

Tabelul 6.9

Cupola f/l	Bare majorate în inel și de reazem [mm] Aria [cm ²]	P _{limitare} la cupola [daN]		Reducerea [%] $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă Încărcare 7P [P _p] Bare φ 121 x 6	Încărcare 7P [P _k] Bare majorate în inel și de reazem	
0,052	Inel 127 x 12 43,354 Reazeme 133 x 10 38,642	13165,3	12371,1	6

Tabelul 6.10

Cupola f/l	Bare Majorate inel și diagonale de bază	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f					
		Nodul central			Nodul de pe inel		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f ₁	w ₃ /f ₁	w ₄ /f ₁
0,052	Inel 127 x 12 Reazeme 133 x 10	0,147	0,852	1,157	0,062	0,096	0,270

Din studiile efectuate pe cupola cu 24 de bare rezultă concluzii importante.

- Din încărcarea cu forțe egale în toate nodurile, cupola perfectă cu bare identice își pierde stabilitatea prin instabilitate generală.
- Din încărcarea cu o forță de 1,27P în nodul central și forțe identice în celelalte noduri, cupola perfectă cu bare identice își pierde stabilitatea prin instabilitate locală care se propagă în instabilitate generală numai în cazul saltului dinamic.
- Imperfecțiunea nodului central de 1,85 cm (0,034f) transformă instabilitatea generală din forțe egale în instabilitate locală a nodului central, care se propagă în instabilitate generală numai în urma saltului dinamic la cupola cu bare identice.

- Evitarea cedării prin instabilitate generală și transformarea acesteia în instabilitate locală a nodului central, stabilă în urma saltului dinamic, se realizează prin majorarea secțiunii barelor inelului cu 100% și a barelor diagonale de la bază cu 78,26%, în cazul încărcării cu forțe egale în toate nodurile.
- Pentru încărcarea din nodul central de $P_c = 1,27P$ și forțe egale în restul nodurilor instabilitatea locală nu se mai propagă în instabilitate generală dacă barele inelului se măresc cu 49,56%, iar cele de reazem cu 26,96%.
- Cupola imperfectă cu 1,85 cm în nodul central supusă la forțe egale în noduri se caracterizează numai prin instabilitatea nodului central dacă barele inelului se majorează cu 49,56 %;
- La proiectare se va preciza prin caietul de sarcini mărimea imperfecțiunilor geometrice admise și a forței majorate din nodul central.

6.3 Cupola cu 72 de bare

Din studiile efectuate în capitolul cinci a rezultat că instabilitatea nodului central apare prima dată dacă cupola este încărcată cu o forță de $P_c = 1,32P$ în nodul central și forțe egale în restul nodurilor, respectiv atunci când imperfecțiunea din nodul central este de 2,1 cm (0,013f).

6.3.1 Cupola imperfectă cu încărcare uniformă

În cele ce urmează se determină barele din cupolă care trebuie întărite pentru a evita propagarea instabilității locale a nodului central în instabilitate generală a cupolei. Posibilitățile de majorare a secțiunii transversale a barelor cupolei se prezintă în figura 6.9.

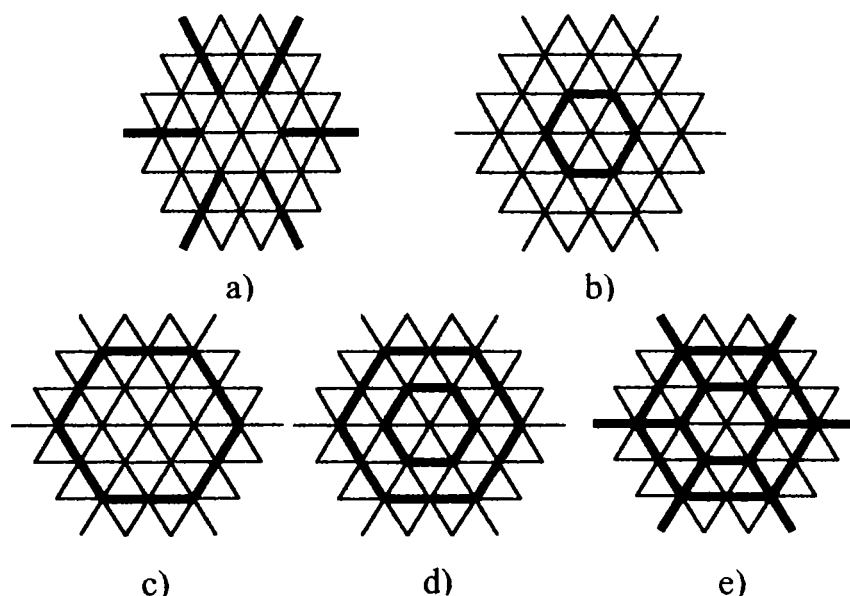


Fig. 6.9 Posibilitățile de majorare ale secțiunii barelor cupolei

(I) Prima dată s-a studiat influența majorării secțiunilor barelor de pe diagonale (Fig. 6.10). Barele cu diametrul exterior de 121 și grosimea peretelui de 6 mm au fost înlocuite cu bare cu diametrul de 133 și grosimea peretelui de 6 mm

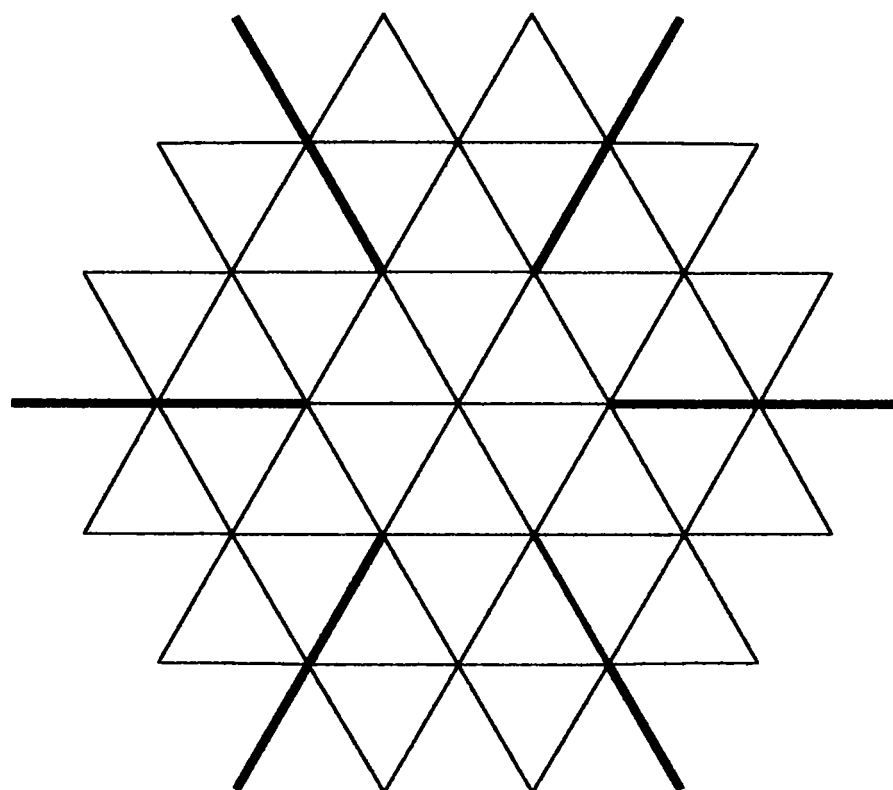


Fig. 6.10 Barele diagonale cu secțiunea transversală mărită

În tabelul 6.11 se prezintă încărcarea de limitare pentru cupola perfectă P_{lp} , cupola cu imperfecțiunea în nodul central 2,1 cm P_{li} , respectiv P_{lc} pentru cupola imperfectă și barele de pe diagonale majorate la 133 x 6 mm.

Tabelul 6.11

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	$P_{limitare}$ la cupola [daN]			Reducerea % $\left(1 - \frac{P_{lc}}{P_{li}}\right) \cdot 100$
		Perfectă [P_{lp}] Bare ϕ 121 x 6	Imperfectă [P_{li}] Bare ϕ 121 x 6	Imperfectă 2,1 cm [P_{lc}] Bare diagonale majorate	
0,091	Diagonale 133 x 6 23,939	15736,7	9405	9280,3	1,3

Din tabelul 6.11 se observă că prin majorarea secțiunii barelor de pe diagonale se reduce încărcarea de limitare a cupolei imperfecte cu 1,3 %.

Efectul întăririi barelor de pe diagonale asupra deplasărilor din nodul central și nodurile de pe inelul 1 și 2 se prezintă în tabelul 6.12.

Deplasările la sfârșitul saltului static respectiv dinamic pentru cupola încărcată cu 19 forțe egale în noduri, cu imperfecțiunea nodului central de 2,1 cm și barele de pe diagonale majorate se prezintă în tabelul 6.12.

Tabelul 6.12

Cupola f/l	Bare întărite $\phi \times t$ Aria [cm ²]	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nodul central			Nodul de pe inelul 1			Nodul de pe inelul 2		
		w_1/f	w_3/f	w_4/f	w_1/f_1	w_3/f_1	w_4/f_1	w_1/f_2	w_3/f_2	w_4/f_2
0,091	133 x 6 23,939	0,042	0,288	2,273	0,008	0,024	1,583	0,020	0,013	1,594

Săgețile inițiale au valorile $f = 160,448$ cm; $f_1 = 142,448$ cm; $f_2 = 106,840$ sau $88,708$ cm după cum nodul de pe inelul inferior (inel 2) se află sau nu pe diagonală.

Creșterea secțiunii transversale a barelor de pe diagonalele cupolei conduce la deplasări, sub încărcarea de limitare și în urma saltului static, care nu diferă de cele de la cupola imperfectă cu bare identice. Prin întărirea barelor diagonale de la baza cupolei se obțin deplasări mari în urma saltului dinamic. Se observă că acest mod de întărire a barelor nu împiedică propagarea instabilității locale din nodul central în instabilitate generală a cupolei.

(II) A doua variantă studiată pentru oprirea propagării flambajului local a constat în **majorarea secțiunii barelor inelului superior (inel 1)** (Fig. 6.11).

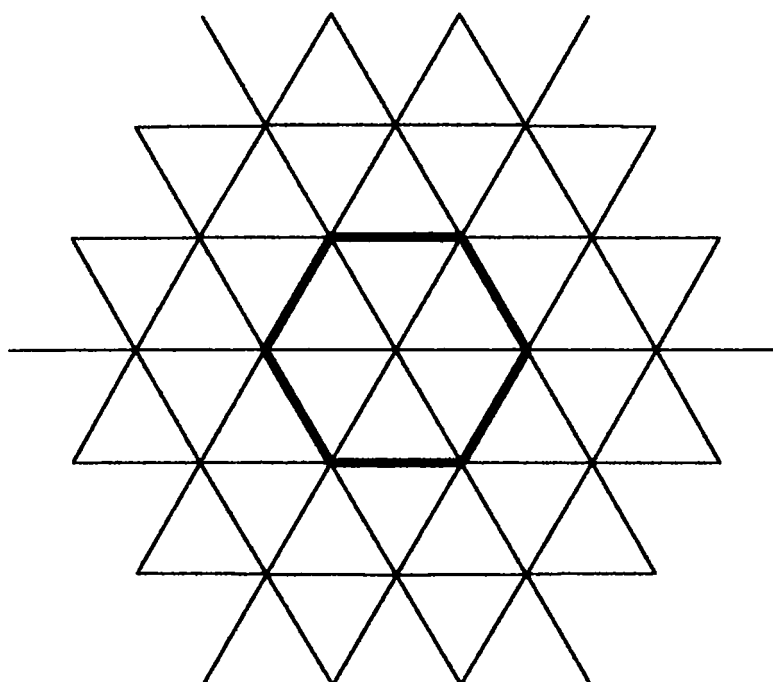


Fig. 6.11 Barele inelului superior cu secțiunea transversală mărită

Barele inelului au fost considerate de 133 x 6 mm, iar restul barelor rămân de 121 x 6 mm. Această majorare este de 10,43 % față de aria inițială a barelor cupolei.

(III) În varianta a treia au fost **majorate secțiunile barelor din inelul inferior** la 133 x 6 mm, restul barelor rămânând de 121 x 6 mm (Fig. 6.12).

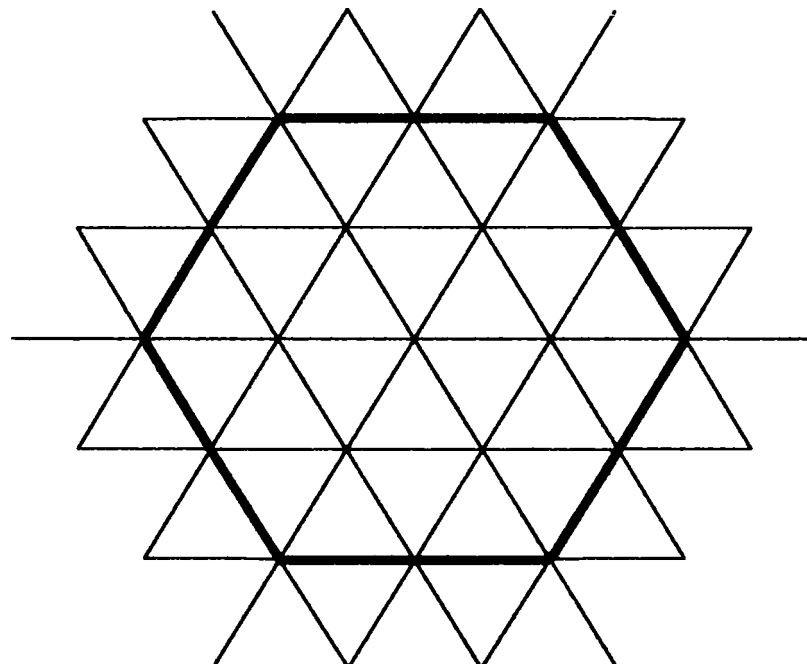


Fig. 6.12 Barele inelului inferior cu secțiunea transversală mărită

(IV) Varianta a patra de întărire a barelor constă din **majorarea secțiunii barelor pentru inelul superior și inelul inferior** (Fig. 6.13).

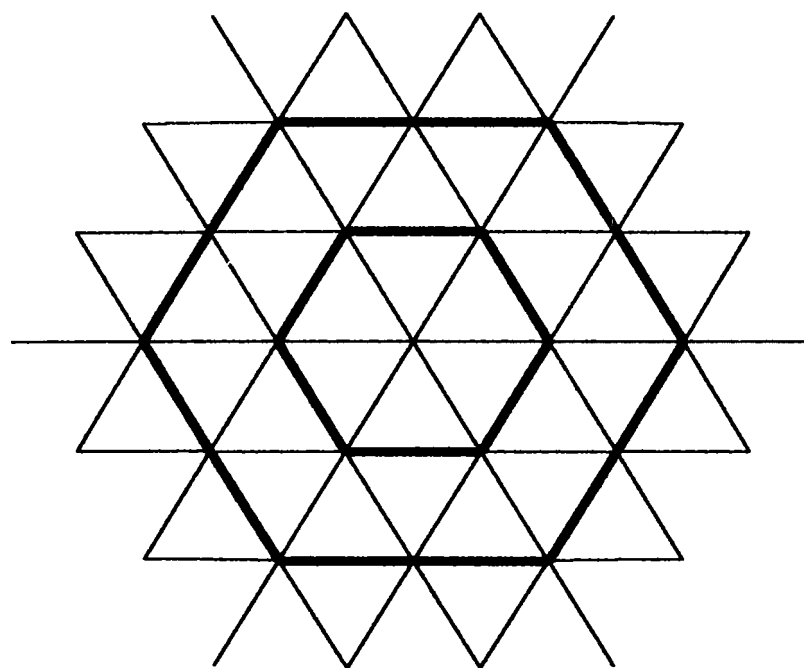


Fig. 6.13 Barele inelului superior și inferior cu secțiunea transversală mărită

Prezentarea comparativă a rezultatelor se prezintă în tabelul 6.13 pentru încărcarea de limitare și în tabelul 6.14 pentru deplasările din nodul central, respectiv nodurile de pe inelul superior și inferior.

Tabelul 6.13

Cupola f/l	Încărcarea de limitare [daN]							
	Cupola perfectă Bare identice 121 x 6 [P _{ip}]	Cupola imperfectă 2,1 cm Bare identice 121 x 6 [P _{ii}]	Bare majorate 133 x 6 mm					
			Inel superior		Inel inferior		Ambele inele	
			P _{ic}	Reducere %	P _{ic}	Creștere %	P _{ic}	Reducere %
0,091	15736,7	9405	8998,4	4,3	9545,1	1,49	9097,2	3,27

Din tabelul 6.13 se observă că prin majorarea secțiunii barelor inelului superior încărcarea de limitare se reduce cu 4,3 % față de încărcarea de limitare a cupolei cu imperfecțiunea nodului central de 2,1 cm. Majorarea secțiunii barelor inelului de jos produce o creștere a încărcării de limitare cu 1,49 %. Prin majorarea secțiunii barelor pentru ambele inele se obține reducerea încărcării de limitare cu 3,27 %. Din punct de vedere ingineresc variațiile încărcărilor de limitare sunt ne semnificative. Totuși studiile întreprinse au un rol deosebit la analiza propagării instabilității locale.

Influența modurilor în care au fost întărite barele inelelor se observă mai bine dacă se analizează deplasările nodurilor cupolei în urma saltului static și dinamic. Aceste deplasări se prezintă în tabelul 6.14.

Tabelul 6.14

Cupola f/l	Bare întărite 133 x 6	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nod central			Nod inel (1)			Nod inel (2)		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f ₁	w ₃ /f ₁	w ₄ /f ₁	w ₁ /f ₂	w ₃ /f ₂	w ₄ /f ₂
0,091	Inel superior (1)	0,044	0,282	2,139	0,008	0,022	1,476	0,020	0,023	1,495
	Inel inferior (2)	0,043	0,292	1,833	0,010	0,027	1,588	0,020	0,023	1,221
	Ambele inele	0,045	0,283	1,773	0,009	0,023	1,497	0,017	0,011	1,334

Din analiza valorilor prezentate în tabelul 6.14 se observă că sub încărcarea de limitare (w_1/f_1) la sfârșitul saltului static (w_3/f_1) se obțin deplasări care nu diferă esențial în cele trei moduri de întărire a barelor din inele.

Diferențe esențiale se obțin la deplasările care rezultă în urma saltului dinamic. Reducerea maximă se obține în nodul central de 20,6 %, pentru întărirea barelor din ambele inele față de deplasările dinamice când se întăresc numai barele inelului superior. În nodul de pe inelul (1) se obține o creștere a deplasărilor dinamice de 1,4 % și o scădere de 12,1 % în nodul de pe inelul (2). Rezultă că pentru a opri propagarea flambajului local soluția indicată constă în majorarea secțiunii barelor celor două inele ale cupolei. Se observă că pentru o majorare de 10,43% instabilitatea locală se propagă în urma saltului dinamic.

Comparând valorile deplasărilor din tabelul 6.14 cu cele din tabelul 6.12 se observă că deplasările în urma saltului dinamic sunt mai mari pentru întărirea barelor diagonale de la bază, față de întărirea barelor din ambele inele. Deplasările sub încărcarea de limitare și în urma saltului static sunt aproximativ aceleași pentru cele patru moduri de întărire a barelor din cupolă.

(V) Cercetările au continuat cu analiza influenței **majorării secțiunii barelor diagonale de la bază și a barelor inelului superior (1), a barelor diagonale și a barelor inelului inferior (2) și a barelor diagonale împreună cu barele ambelor inele.** Încărcarea de limitare corespunzătoare acestor moduri de întărire cu 25 % a barelor se prezintă în tabelul 6.15.

Tabelul 6.15

Cupola f/l	Încărcarea de limitare [daN]							
	Cupola perfectă Bare identice 121 x 6 [P _p]	Cupola imperfectă 2,1 cm Bare identice 121 x 6 [P _{ii}]	Bare majorate 152 x 6 mm					
			Diagonale și inel superior		Diagonale și inel inferior		Diagonale și ambele inele	
			P _{lc}	Reducere %	P _{lc}	Creștere %	P _{lc}	Reducere %
0,093	15736,7	9405	8495,9	9,66	9686,2		8645,9	8,07

Se observă că reducerea cea mai mică (8,07%) a încărcării de limitare se obține la întărirea barelor diagonale de la bază și a barelor din ambele inele. O creștere de 2,99% se obține atunci când se întăresc barele diagonale de la bază și barele inelului superior. Efectul creșterii secțiunii barelor cupolei asupra deplasărilor din noduri se prezintă în tabelul 6.16.

Tabelul 6.16

Cupola f/l	Bare întărite 152 x 6	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nod central			Nod inel (1)			Nod inel (2)		
		w_1/f	w_3/f	w_4/f	w_1/f_1	w_3/f_1	w_4/f_1	w_1/f_2	w_3/f_2	w_4/f_2
0,091	Bare diagonale și inel superior	0,045	0,271	1,841	0,006	0,018	1,578	0,016	0,018	0,761
	Bare diagonale și inel inferior	0,046	0,272	1,837	0,007	0,019	1,563	0,017	0,015	1,181
	Bare diagonale și barele inelelor	0,047	0,274	1,833	0,008	0,020	1,556	0,018	0,013	1,161

Deplasările din încărcarea de limitare și cele obținute din saltul static, respectiv dinamic sunt practic identice pentru cele trei moduri de întărire a barelor. Diferențe semnificative se obțin la deplasările după saltul dinamic pentru nodul de pe inelul (2). În urma saltului dinamic propagarea instabilității nodului central nu este oprită.

Analizând variantele prezentate anterior se constată că soluția indicată pentru a fi studiată în continuare este întărirea simultană a barelor din cele două inele care conduce la cea mai mică săgeată dinamică în nodul central.

(VI) În vederea studierii propagării instabilității locale a nodului central s-a analizat comportarea cupolelor cu **bare întărite în inelul superior și inelul inferior** cu diferite secțiuni de bare. Analiza s-a considerat terminată atunci când deplasările în urma saltului dinamic din nodul central, respectiv nodurile de pe inelul superior și inferior sunt mai mici decât săgețile inițiale corespunzătoare. Barele inelelor au fost majorate în trepte astfel: 133 x 6 mm, 152 x 6 mm, 140 x 7 mm, 168 x 6 mm și 178 x 6 mm. Creșterea secțiunii barelor inelelor a fost de 10,43%, 26,96%, 34,93%, 40,87% și 49,56% față de bara inițială de 121 x 6 mm cu aria de 21,677 cm².

Încărcarea de limitare pentru cupola cu imperfecțiune în nodul central de 2,1 cm și barele inelelor întărite se prezintă în tabelul 6.17.

Tabelul 6.17

Cupola f/l	Bare inelelor întărite	P_{limitare} pentru cupola [daN]			Reducere %
		Perfectă [P_{ip}] Bare 121 x 6	Imperfectă 2,1 cm [P_{il}] Bare 121 x 6	Imperfectă 2,1 cm [P_{ic}] Bare inelelor întărite	
0,091	133 x 6	14283,6	9405	9097	3,27
	152 x 6			8783	6,61
	159 x 6			8700	7,50
	140 x 7			8697	7,53
	168 x 6			8610	8,45
	178 x 6			8528	9,33

Se remarcă faptul că pe măsură ce aria barelor din inele crește încărcarea de limitare scade. Redistribuirea eforturilor din structura cupolei conduce la reducerea încărcării de limitare față de cupola imperfectă cu bare de aceeași dimensiune.

În figura 6.14 se prezintă variația în timp a deplasărilor din nodul central și nodurile de pe inele pentru cupola cu secțiunea barelor inelelor de 140 x 7 mm și a restului barelor de 121 x 6 mm.

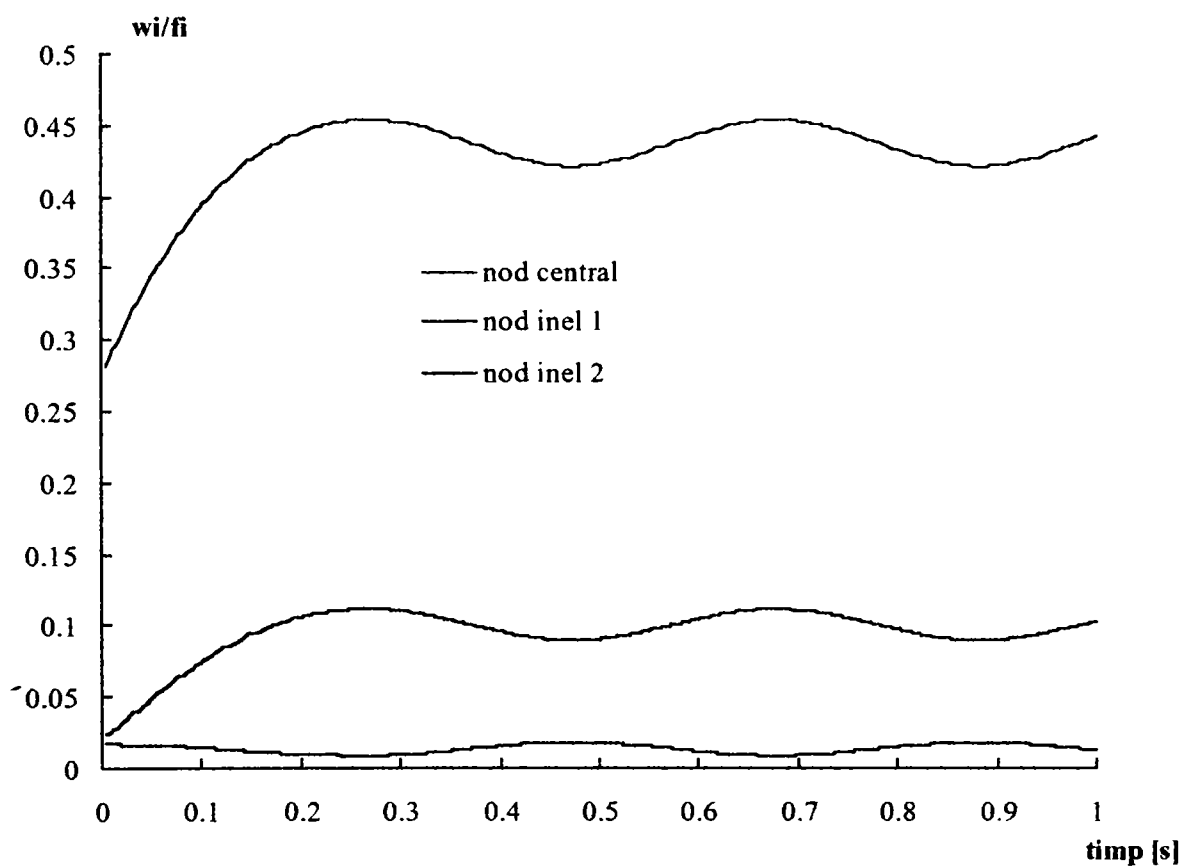


Fig. 6.14 Vibrațiile nodurilor caracteristice ale cupolei cu o imperfecțiune de 2,1 cm în nodul central și barele inelelor cu secțiunea mărită cu 34,93% (140 x 7 mm)

Deplasările din nodurile caracteristice ale cupolei cu secțiunile barelor inelelor majorate se prezintă în tabelul 6.18.

Tabelul 6.18

Cupola f/l	Barele inellelor întărite	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nod central			Nod inel (1)			Nod inel (2)		
		w_1/f	w_3/f	w_4/f	w_1/f_1	w_3/f_1	w_4/f_1	w_1/f_2	w_3/f_2	w_4/f_2
0,091	133 x 6	0,045	0,283	1,773	0,009	0,023	1,497	0,017	0,011	1,334
	152 x 6	0,048	0,276	1,773	0,009	0,021	1,555	0,015	0,010	1,168
	159 x 6	0,048	0,274	1,598	0,009	0,021	1,442	0,015	0,010	1,185
	140 x 7	0,049	0,274	0,425	0,010	0,021	0,100	0,015	0,018	0,013
	168 x 6	0,049	0,272	0,389	0,009	0,020	0,073	0,015	0,017	0,017
	178 x 6	0,050	0,270	0,343	0,009	0,020	0,037	0,014	0,016	0,017

Deformata cupolei în urma saltului dinamic se prezintă în figura 6.15b pentru barele inelelor majorate la 140 x 7 mm.

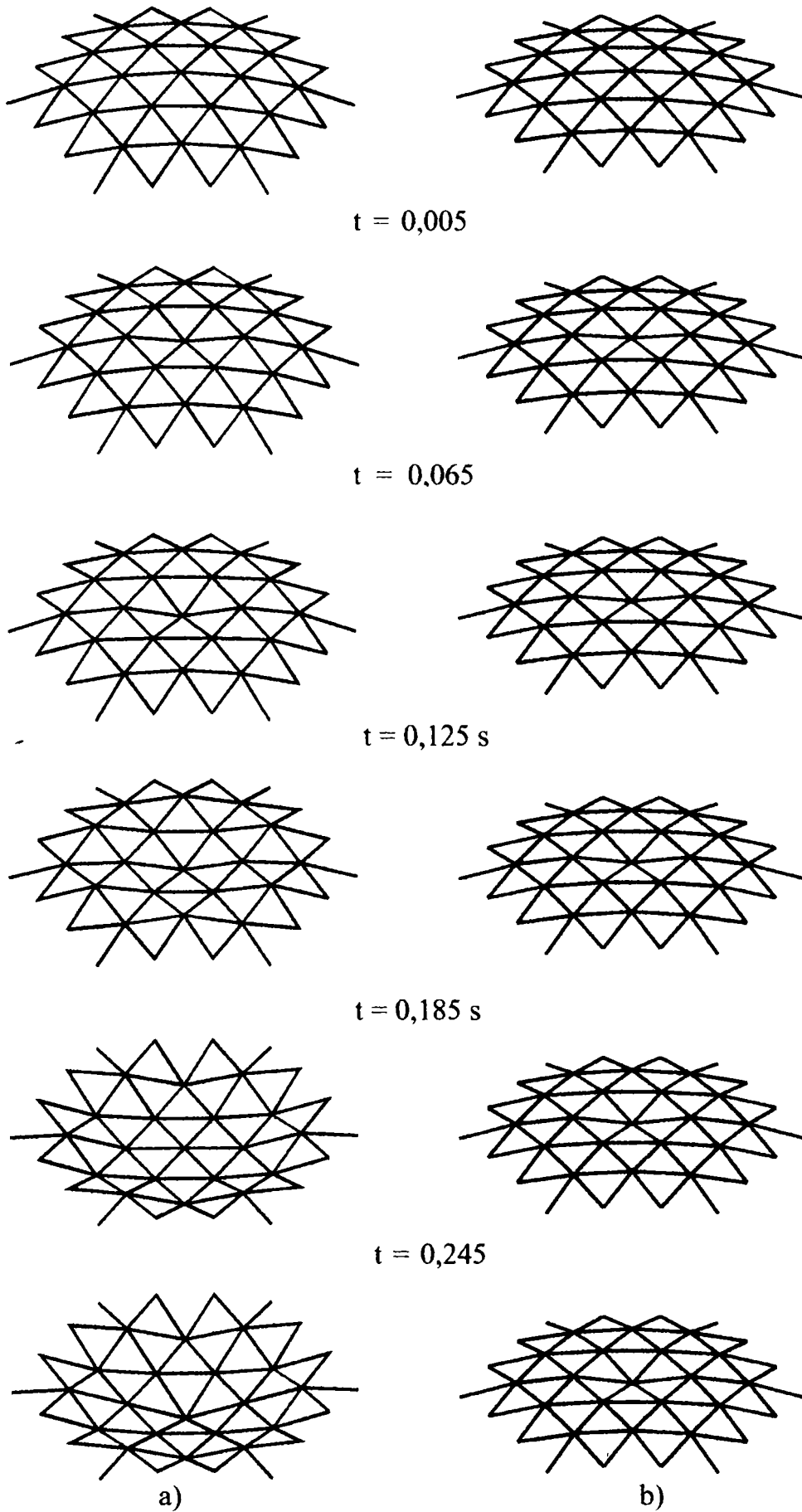


Fig. 6.15 Deformata cupolei cu imperfecțiunea de 2,1 cm în nodul central în urma saltului dinamic sub o încărcare cu 19P și cu barele inelelor întărite cu 34,93%

Din tabelul 6.18 se observă că prin majorarea secțiunii barelor inelelor cu peste 35 % din aria barelor inițiale se evită propagarea instabilității din nodul central în instabilitate generală. Deplasarea nodului central în urma saltului dinamic este 0,425f la o majorare de arie a barelor de 34,93%. Dacă barele inelelor sunt mai mari se reduc săgețile în urma saltului dinamic din toate nodurile cupolei.

Prin consolidarea barelor care definesc inelul superior și inelul inferior din structura cupolei cu 72 de bare se evită producerea instabilității locale a cupolei. Din încărcarea cu forțe concentrate egale în nodurile cupolei și cu o imperfecțiune geometrică în nodul central de 2,1 cm se va produce numai instabilitatea nodului central. Fenomenul are un caracter local și pentru acest mod de instabilitate se cunoaște încărcarea de limitare ținând seama de efectul deformațiilor plastice și a imperfecțiunilor geometrice.

În practica inginerescă încărcările din nodurile cupolei se stabilesc pe baza distribuției reale și se limitează la valori care să nu depășească încărcarea de limitare redusă cu coeficientul de siguranță ales.

6.3.2 Cupola perfectă cu forța majorată în nodul central

Evitarea propagării instabilității locale a nodului central s-a studiat și în ipoteza că încărcarea din nodul central este $P_c = 1,32P$ iar în restul nodurilor sunt 18 forțe egale P . Studiile au fost conduse pe cupola perfectă cu $f/l = 0,091$, oțel OL52 cu $\sigma_c = 3500 \text{ daN/cm}^2$ și lungimea barelor de 3000 mm. Secțiunea transversală a barelor cupolei a fost majorată inițial pentru inelul superior și cel inferior.

S-a studiat comportarea cupolei din încărcarea de mai sus cu barele inelelor majorate cu 34,93%, 49,56% și 78,26% pentru inelul superior respectiv 34,93% și 49,56% pentru inelul inferior. Rezultatele se prezintă în tabelul 6.19 pentru încărcarea de limitare și în tabelul 6.20 pentru deplasările verticale din nodurile caracteristice.

Tabelul 6.19

Cupola f/l	Barele majorate pentru ambele inele	Încărcarea de limitare din nodurile curente [daN]		
		Cupola perfectă Bare identice $\phi 121 \times 6 \text{ mm}$	Cupola cu barele inellelor majorate	Reducerea %
0,091	140 x 7	8725,5	8581,4	1,65
	178 x 6	8725,5	8554,8	1,96
	superior 133 x 10 inferior 178 x 6	8725,5	8493,7	2,66

Din tabelul 6.19 se observă că mărirea secțiunii barelor pentru cele două inele conduce la reducerea încărcării de limitare cu valori cuprinse între 1,65 % și 2,66 %.

Deplasările verticale din nodul central și de pe cele două inele, raportate la săgețile inițiale, rezultate din încărcarea de limitare în urma saltului static și a saltului dinamic au valorile prezentate în tabelul 6.20.

Tabelul 6.20

Cupola f/l	Barele majorate pentru ambele inele	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nod central			Nod inel (1)			Nod inel (2)		
		w ₁ /f	w ₃ /f	w ₄ /f	w ₁ /f ₁	w ₃ /f ₁	w ₄ /f ₁	w ₁ /f ₂	w ₃ /f ₂	w ₄ /f ₂
0,091	140 x 7	0,042	0,289	1,888	0,009	0,023	1,539	0,015	0,009	1,182
	178 x 6	0,043	0,286	1,694	0,009	0,022	1,462	0,014	0,009	1,362
	133 x 10 178 x 6	0,045	0,279	0,369	0,009	0,019	0,060	0,014	0,016	0,016

Majorarea secțiunii barelor inelului superior cu 78,26% și a barelor inelului inferior cu 49,56% a oprit propagarea instabilității locale din nodul central în urma saltului dinamic sub încărcarea $P_c=1,32P$ și forte egale cu P în restul nodurilor. Deplasarea maximă din nodul central este egală cu $0,369f$, iar deplasările din nodurile de pe inele sunt egale cu $0,060f_1$ și $0,016f_2$ (Fig.6.16).

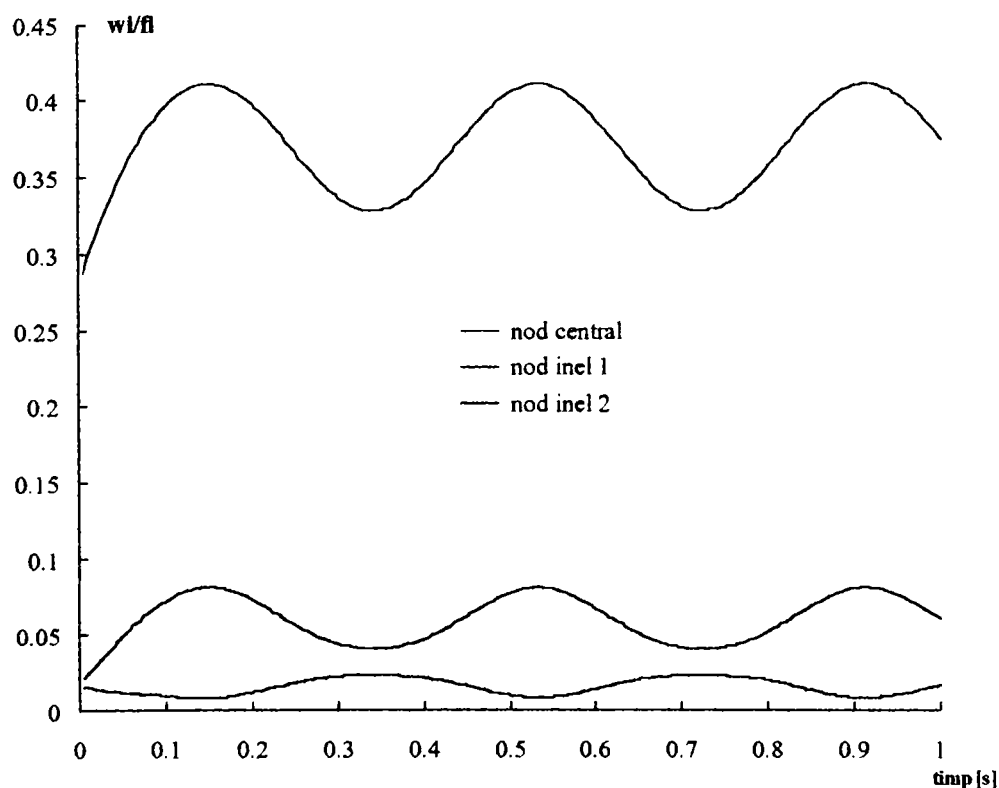


Fig. 6.16 Vibrațiile nodurilor caracteristice ale cupolei perfecte sub o încărcare $P_c = 1,32P$ și $18P$ cu barele inelului superior cu secțiunea mărită cu 78,26%, iar barele inelului inferior mărite cu 49,56%

Din tabelul 6.20 se observă că majorarea secțiunii barelor cu 34,93% și 49,56% la ambele inele ale cupolei nu a condus la oprirea instabilității locale din nodul central în urma saltului dinamic.

Majorarea secțiunii barelor inelelor cu 78,26%, respectiv 49,56% satisface și oprirea propagării instabilității locale pentru cupola imperfectă cu deplasarea verticală a nodului central cu 2,1 cm în jos având o încărcare din forțe egale în toate nodurile (majorarea pentru acest caz a rezultat de 34,93% pentru barele ambelor inele).

În figura 6.17 se prezintă deformata cupolei având barele inelului superior cu o secțiune mărită cu 78,26% și ale inelului inferior cu 49,56% în urma saltului dinamic, datorită unei încărcări $P_c=1,32P$ și $18P$.

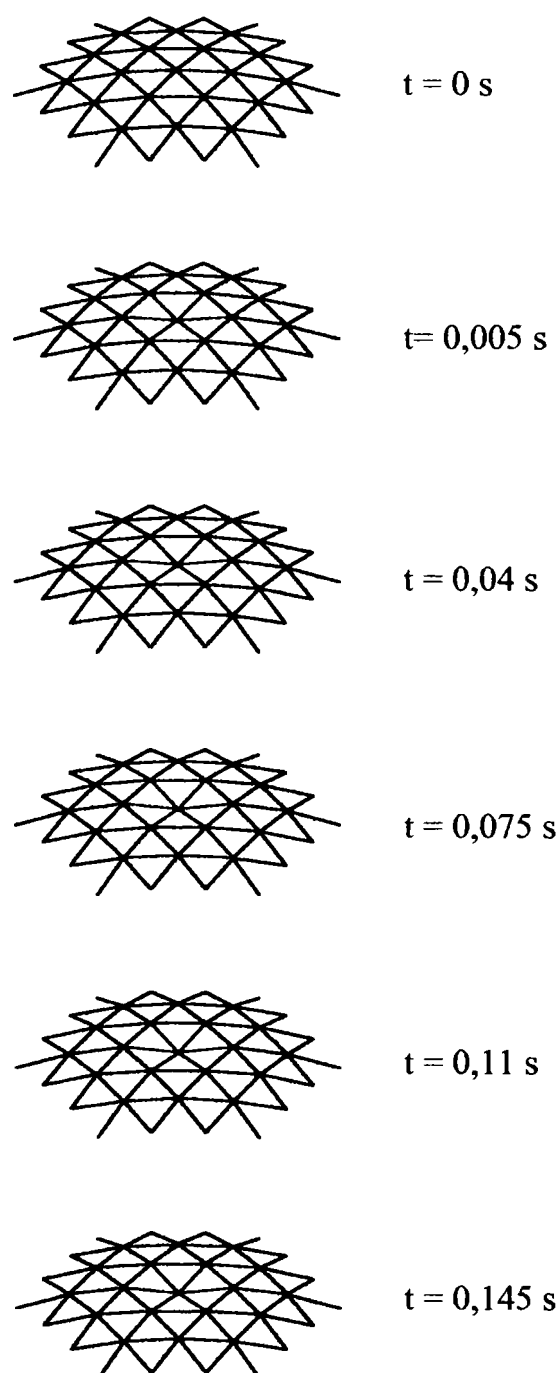


Fig. 6.17 Deformata cupolei perfecte în urma saltului dinamic sub o încărcare $P_c = 1,32P$ și $18P$ cu barele inelului superior cu secțiunea mărită cu 78,26%, iar barele inelului inferior mărite cu 49,56%

În continuare s-a studiat și posibilitatea de oprire a propagării instabilității locale pentru cupola perfectă, încărcată cu forțe egale în toate nodurile interioare. După mai multe testări numerice s-a reușit să se precizeze barele ce trebuie să aibă secțiunea mai mare și cu cât trebuie să fie majorată secțiunea acestor bare.

Încărcarea de limitare se prezintă în tabelul 6.21 pentru cupola cu $f/l = 0,091$, executată din OL52, având barele inelului superior cu secțiunea mărită cu 78,26% apoi cu 100%, respectiv barele inelului inferior cu 49,56%. Ultima încercare a condus la majorarea secțiunii barelor din inelul superior cu 100% (127 x 12 mm), a barelor din inelul inferior cu 49,56% (178 x 6 mm) și a barelor diagonale cu 26,96% (152 x 6 mm) (Fig. 6.18). Majorarea secțiunii barelor se raportează la barele inițiale de $\phi 121 \times 6$ mm cu aria $A=21,677 \text{ cm}^2$ care alcătuiesc cupola perfectă cu bare identice.

Tabelul 6.21

Cupola f/l	Bare cu secțiunea majorată	Încărcarea de limitare [daN]		
		Cupola perfectă Bare identice $\phi 121 \times 6$	Cupola cu barele majorate	Reducerea %
0,091	Inelul superior 133 x 10 Inelul inferior 178 x 6	15736,7	13337	15,26
	Inelul superior 127 x 12 Inelul inferior 178 x 6	15736,7	12941	17,77
	Inelul superior 127 x 12 Inelul inferior 178 x 6 Diagonalele de la bază 152 x 6	15736,7	12627,6	19,76

Reducerea încărcării de limitare la cupola care are în alcătuirea ei bare cu secțiunea majorată în inele și pe diagonale este de 15,26 % până la 19,76 %, față de încărcarea corespunzătoare cupolei perfecte cu barele de același tip.

Deplasările verticale din nodul central și din nodurile de pe inele, raportate la săgețile inițiale, se prezintă în tabelul 6.22. Deplasările care se produc sub încărcarea de limitare se notează cu w_1 , cele apărute la sfârșitul saltului static cu w_3 și cele obținute în urma saltului dinamic cu w_4 .

În figura 6.18 se prezintă pozițiile deformate ale cupolei cu barele inelului superior, inferior și diagonalelor având secțiunea majorată cu 100 % , 49,56 % respectiv 26,96 %.

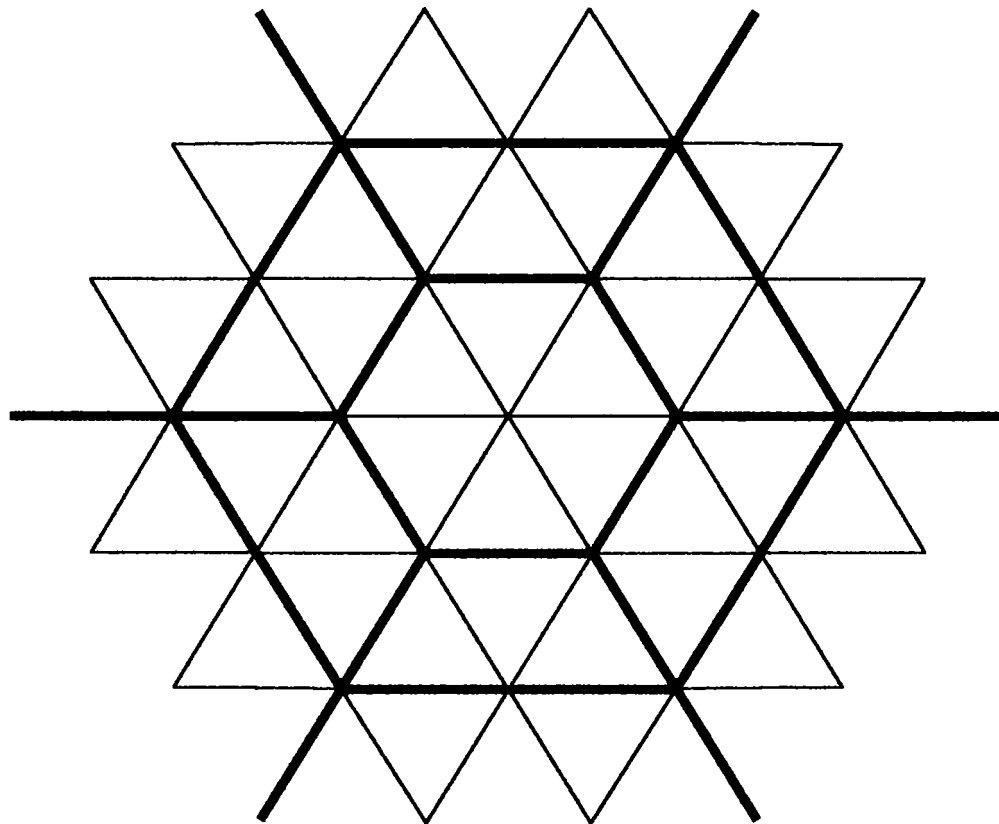


Fig. 6.18 Bărele inelului superior și inferior și barele diagonale de la bază cu secțiunea transversală mărită

Tabelul 6.22

Cupola f/l	Bare cu secțiunea majorată	Deplasarea din nodul i / săgeata inițială f								
		Nod central			Nod inel (1)			Nod inel (2)		
		w_1/f	w_3/f	w_4/f	w_1/f_1	w_3/f_1	w_4/f_1	w_1/f_2	w_3/f_2	w_4/f_2
0,091	Inel superior 133 x 10 Inel inferior 178 x 6	0,046	0,296	1,916	0,015	0,028	1,623	0,023	0,028	1,416
	Inel superior 127 x 12 Inel inferior 178 x 6	0,046	0,290	1,012	0,014	0,025	1,578	0,022	0,016	1,329
	Inel superior 127 x 12 Inel inferior 178 x 6 Diagonale 152 x 6	0,045	0,286	0,465	0,011	0,022	0,118	0,015	0,019	0,007

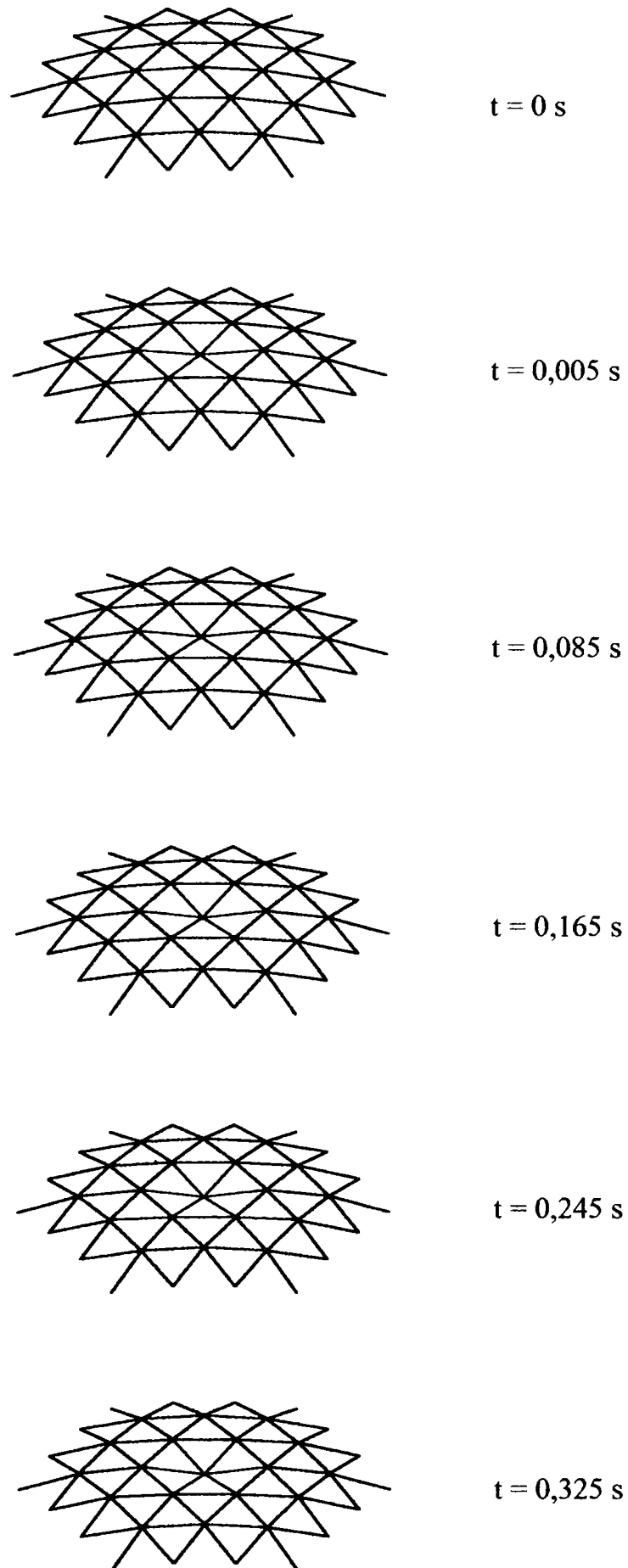


Fig. 6.19 Deformata cupolei perfecte cu barele inelului superior întărite cu 100%, cele ale inelului inferior cu 49,56% și barele diagonale de la bază cu 26,96% din încărcarea cu 19 forțe egale

Din tabelul 6.22 se observă că prin majorarea secțiunii barelor din inele nu se oprește propagarea instabilității locale chiar la o creștere cu 100 % a secțiunii barelor inelului superior și cu 49,56% a secțiunii barelor inelului inferior.

Dacă se mai majorează și secțiunea barelor diagonale, cu 26,96%, atunci se oprește propagarea instabilității locale în urma saltului dinamic. Deplasarea verticală din nodul central se reduce la $0,465f$ iar în nodurile de pe inel la $0,118f_1$ respectiv $0,007f_2$ (Fig. 6.20).

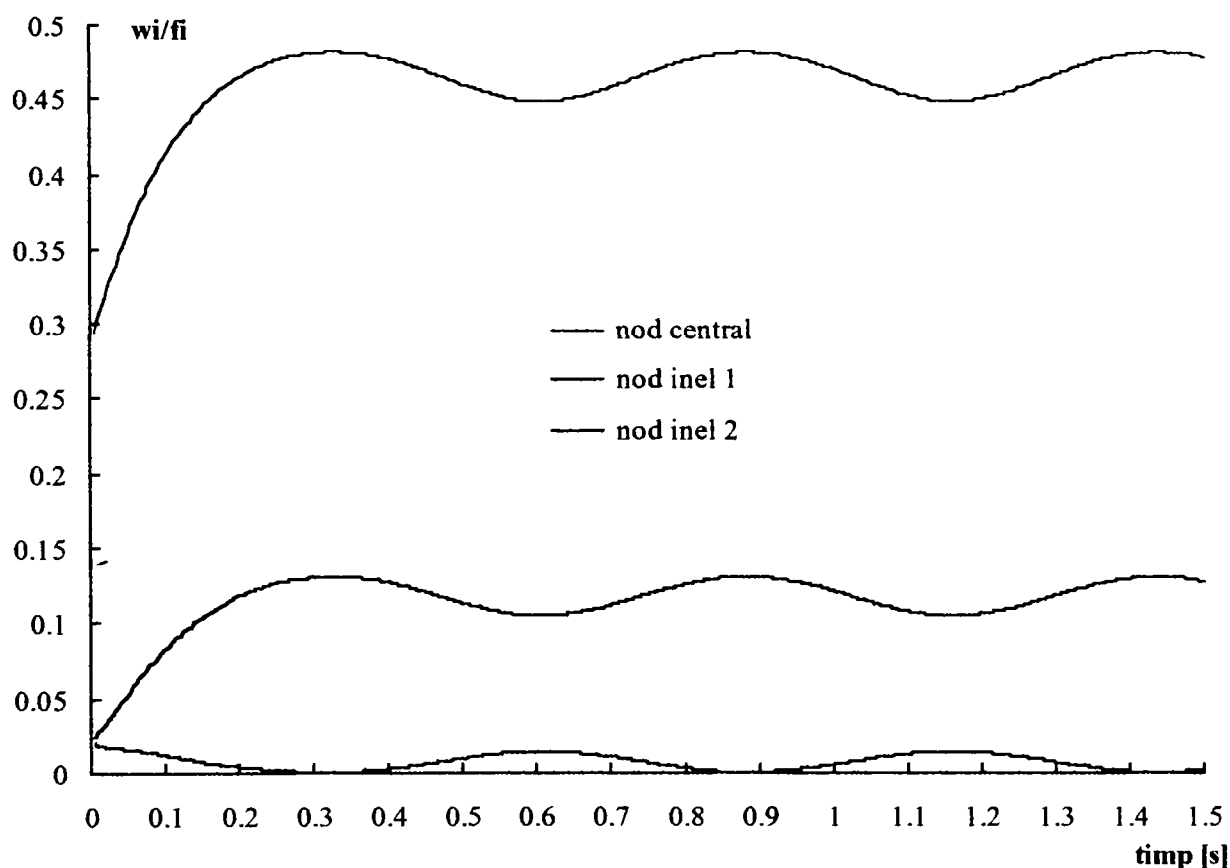


Fig. 6.20 Vibrațiile nodurilor caracteristice în urma saltului dinamic sub încărcarea cu 19 forțe P. Cupola perfectă cu barele inelului superior mărite cu 100%, cele ale inelului inferior cu 49,56% și cu barele diagonale de la bază mărite cu 26,96%

Din studiile efectuate pe cupola cu 72 de bare se desprind concluzii referitoare la producerea instabilității cupolelor reticulate simplu strat și anume:

(I) - din încărcarea cu forțe egale în toate nodurile interioare cupola perfectă cu bare identice își pierde stabilitatea prin instabilitate generală;

- din încărcarea cupolei perfecte cu forțe egale în toate nodurile se oprește propagarea instabilității locale din nodul central în urma saltului dinamic în instabilitate generală a

- cupolei dacă se majorează barele inelului superior cu 100 %, barele inelului inferior cu 50 % și diagonalele de la bază cu 27 %;
- (II) din încărcarea cu o forță de $1,32P$ în nodul central și forțe identice în celelalte noduri cupola perfectă cu bare de același tip își pierde stabilitatea prin instabilitate locală care se propagă în instabilitate generală numai în urma saltului dinamic;
 - dacă încărcarea din nodul central este de $1,32P$ și în restul nodurilor P atunci oprirea propagării instabilității locale din nodul central în instabilitate generală a cupolei în urma saltului dinamic se asigură prin majorarea secțiunii barelor inelului superior cu 78 %, iar a barelor inelului inferior cu 50 %;
 - (III) imperfecțiunea nodului central sub forma deplasării pe verticală de 2,1 cm ($0,013f$) transformă instabilitatea generală din încărcarea cu forțe identice în noduri în instabilitate locală a nodului central care se propagă în urma saltului dinamic în cazul cupolelor cu bare de același tip;
 - oprirea propagării instabilității locale din nodul central în instabilitate generală a cupolei în urma saltului dinamic se realizează prin majorarea secțiunii barelor inelelor cu 35 % pentru cupola imperfectă cu 2,1 cm ($0,013f$) în nodul central și forțe egale în toate nodurile.

La proiectarea cupolelor reticulate prin caietul de sarcini se va preciza modul de verificare a imperfecțiunilor geometrice și condițiile restrictive referitoare la acestea. Se va preciza valoarea maximă a încărcării suplimentare care se acceptă în exploatare pentru a fi aplicată în nodul central al cupolei.

6.4 Concluzii

Cupolele reticulate simplu strat sunt structuri sensibile la imperfecțiuni geometrice și de material. Ele sunt caracterizate de producerea mai multor moduri de instabilități: flambaj de bară, instabilitate de nod, instabilitate de inel, instabilități cuplate și instabilitate generală. Apariția unui mod de instabilitate poate conduce sau nu la colapsul cupolei.

Siguranța cupolelor reticulate în exploatare depinde de evaluarea corectă a încărcărilor critice pentru modurile de instabilitate posibile ținând seamă de factorii care le influențează.

O problemă deosebită a siguranței cupolelor reticulate o constituie evitarea propagării instabilității locale în instabilitate generală. Fenomenul de propagare are un pronunțat caracter dinamic, se produce într-un interval de timp scurt și generează colapsul cupolei. În urma

cercetărilor efectuate în teza de doctorat au fost stabilite măsurile constructive care opresc propagarea instabilității din nodul central în restul cupolei. Majorarea secțiunii transversale a anumitor bare din structura cupolei modifică comportarea generală a acesteia din încărcările exterioare și conduce la apariția numai a instabilității de nod central. Aceste măsuri constructive depind de geometria cupolei, de încărcările exterioare și trebuie studiate cu atenție pentru fiecare caz concret în parte.

La cupola cu 24 de bare, evitarea propagării instabilității locale se asigură prin:

- la încărcarea cupolei perfecte cu 7 forțe egale evitarea cedării prin instabilitate generală și transformarea acestuia în instabilitate locală a nodului central, stabil în urma saltului dinamic, se realizează prin majorarea secțiunii barelor inelului cu 100% și a barelor diagonale de la bază cu 78,26%.
- majorarea secțiunii transversale a barelor inelului cu 49,56 % dacă nodul central se montează cu o imperfecțiune de 1,85 cm în jos și pe cupolă se aplică forțe egale în toate nodurile;
- la încărcarea cupolei cu $P_c = 1,27P$ și $6P$ trebuie să se majoreze secțiunea barelor inelului cu 50% și cea a barelor de la bază cu 27% pentru a opri propagarea instabilității din nodul central în instabilitate generală în urma saltului dinamic;
-

La cupola cu 72 de bare evitarea propagării instabilității locale se asigură prin:

- la încărcarea cupolei cu o forță de $1,32P$ în nodul central și forțe egale P în celelalte noduri se oprește propagarea instabilității locale în instabilitate generală în urma saltului dinamic dacă barele inelului superior se majorează cu 78 % iar barele inelului inferior cu 50 %.
- majorarea secțiunii transversale a barelor inelului superior cu 100 %, a barelor inelului inferior cu 50 % și a diagonalelor de la bază cu 27 % în cazul încărcării cupolei perfecte cu 19 forțe egale în toate nodurile interioare;
- dacă se montează nodul central cu o imperfecțiune de 2,1 cm ($0,013f$) pe verticală în cazul unei încărcări cu forțe egale în noduri, propagarea instabilității din nodul central în instabilitate generală prin salt dinamic se oprește majorând secțiunea barelor celor două inele cu 35 % față de secțiunea barei având $\phi 121 \times 6$ mm.

6.5 Propuneri și recomandări

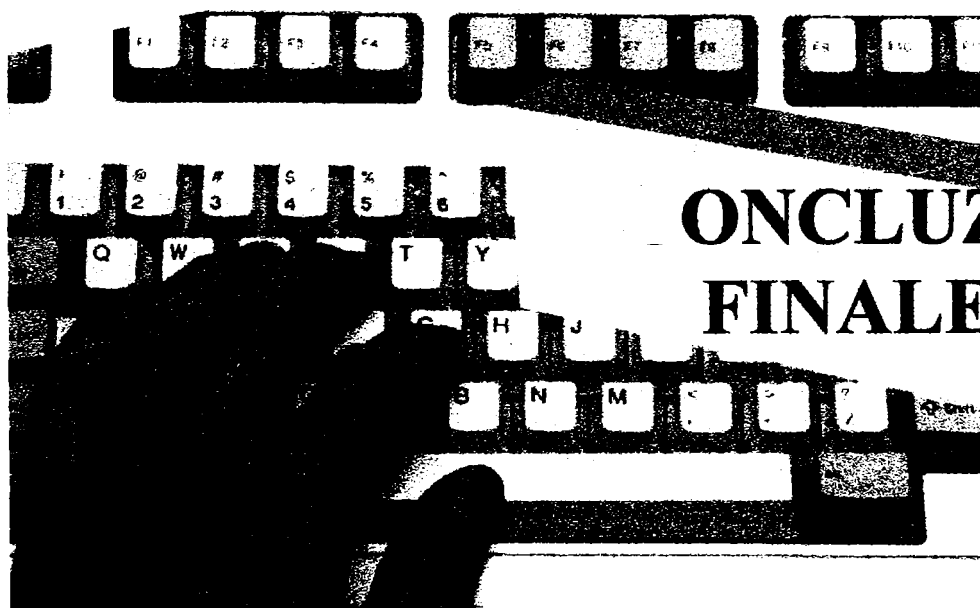
Din cercetările efectuate în teza de doctorat se desprind câteva propuneri și recomandări pentru proiectanții de structuri reticulate simplu strat. Acestea se referă la:

- oprirea propagării instabilității locale în instabilitate generală necesită analiza atentă a influenței consolidării diferitelor bare ale structurii;
- imperfecțiunile locale care apar în urma execuției și montajului cupolei reduc capacitatea portantă a structurilor;
- efectul imperfecțiunilor geometrice locale se va limita prin consolidarea barelor celulei care conține nodul cu imperfecțiune;
- caietele de sarcini trebuie să conțină în mod obligatoriu precizări privind mărimea imperfecțiunilor admise pe cupola finită;
- se va efectua verificarea geometriei structurii după finalizarea execuției;
- proiectanții și beneficiarii sunt obligați să verifice siguranța structurii prin calculul care ține seama de geometria finală a cupolei;
- se vor efectua încercări pe cupolele executate folosind aparatură și tehnici de încercare moderne.

BIBLIOGRAFIE

- [6.1] **Abedi K. și Parke R.A.G.**, *Progressive Collapse of Single - Layer Braced Domes*. Int.J.of Space Structures.Vol.11, No.2, pp 291 - 306, 1996.
- [6.2] **Gioncu V.și Băluț N.**, *Instability Behaviour of Single Layer of Reticulated Shells* Int.J. of Space Structures, vol.7, No.4, pp 243 – 252, 1992.
- [6.3] **Gioncu V. și Lenza P.**, *Propagation of Local Buckling in Reticulated Shells*, Space Structures 4, Thomas Telford Ltd., London, vol.1 pp 147-153, 1993
- [6.4] **Gioncu V.**, *Buckling of Reticulated Shells. State of Art*. Inter. Journal of Space Structures, vol. 10, No.1, pp 1-46, 1995
- [6.5] **Gioncu V. și Dinculescu M.M.**, *Progressive Buckling of Reticulated Structures. State of the Art. Procc. Stability Problems in Designing Construction and Rehabilitation of Metal Structures*, Ed. R.C. Batista, E.M. Batista și M.S. Pfeil, pp 651-664, Rio de Janeiro, 1996
- [6.6] **Gioncu V. și Ivan A.**, *Propagation of Local Buckling in Reticulated Shells*, în curs de publicare
- [6.7] **Gioncu V. și Ivan A.**, *Alternative Solutions to Avoid the Propagation of the Local Buckling*, în curs de publicare
- [6.8] **Ivan A., și Gioncu V.**, *Dynamic interaction between local and general buckling is reticulated domes*. 5th Int. Colloq. on Stability and Ductility of Steel Structures SDSS '97, Nagoya, Japan, 1997.
- [6.9] **Kyriakides S., Babcolk C. D.**, *On the “slip – on” buckle arrestor for offshore pipelines”*, J. of Pressure Vessel Technology, Trans. of the ASME, no 102, pp 188 – 193, 1980.
- [6.10] **Kyriakides S., Babcolk C. D.**, *“ The spiral arrestor” – new buckle arrestor design for offshore pipelines*, Journal of Energy Resources Thechnology Trans. of the ASME, no 103, pp 73 – 77, 1982.
- [6.11] **Lenza P.**, *Some Development in Shell Structural Analysis*, Procc. Int. IASS Congress, Vol. 1, Madrid, 1989
- [6.12] **Lenza P.**, *Instability of Single Layer Doubly Curved Vaults*. Int.J. of Space Structures, vol.7, No 4, pp 253 – 264, 1992.
- [6.13] **Murtha – Smith E.**, *Alternative path analysis of space trusses for progressive collapse*, J. Struct. Engineering, vol. 114, no 9, pp 1978 – 1999, 1988

CAPITOLUL 7



**CONCLUZII
FINALE**

7. CONCLUZII FINALE

7.1 Considerații finale

Proiectarea unei cupole reticulate simplu strat constituie o problemă importantă, care necesită cunoștințe teoretice de calculul structurilor. Siguranța acestor structuri se determină după o analiză atentă a influenței pe care o au diferiți parametri:

- (I) Capacitatea portantă a cupolelor reticulate se determină prin efectuarea calculului neliniar.
- (II) Deformațiile plastice au un rol important în reducerea încărcării de limitare. Din încărcarea cu o forță concentrată în nodul central reducerea încărcării de limitare datorită deformațiilor plastice este cuprinsă între 39 % - 78 % și este de 31 % din încărcarea cu șapte forțe. Imperfecțiunile geometrice de bară la cupola cu 24 de bare conduc la o reducere a încărcării critice cu 10,4 % în cazul barelor cu secțiunea de 89 x 6 mm și de 26,8 % pentru cele cu secțiunea de 11 x 6 mm. Dacă barele au diametru mai mare influența imperfecțiunilor de bară scade până la 13 % pentru barele cu diametru de 146 x 6 mm. Imperfecțiunea de inel conduce la o reducere intermediară a încărcării critice cuprinsă între 18,8 și 39 % iar imperfecțiunile simultane de bară și de inel conduc la cea mai mare reducere a încărcării critice cuprinsă între 25,9 % până la 41,4 %. Imperfecțiunea de inel are ca efect o reducere de 18,8 % a încărcării critice în cazul barelor cu secțiunea de 89 x 6 mm, de 39 % pentru cele cu secțiunea de 114 x 6 mm și de 38 % pentru cele cu secțiunea de 146 x 6 mm. Reducerea încărcării critice este de 39,28 % pentru cupola cu $f/l = 0,052$, de 11,01 % pentru cupola cu $f/l = 0,082$ și de 7,21 % pentru cupola cu $f/l = 0,134$. Reducerea încărcării de limitare scade cu creșterea raportului între săgeată și deschiderea cupolei. Reducerea încărcării datorită imperfecțiunii locale de nod de $0,034f$ este 30,7 % pentru cupola cu 24 de bare identice sub o încărcare uniformă, respectiv 40,2 % la cupola cu 72 de bare și o imperfecțiune de $0,013 f$.
- (III) Dacă în nodul central se aplică o forță mai mare decât în restul nodurilor prima dată se produce instabilitatea locală a nodului central ($P_c = 1,27P$ la cupola cu 24 de bare și $1,32P$ la cupola cu 72 de bare).

- (IV) Semirigiditatea nodurilor influențează comportarea structurilor și siguranța acestora.
- (V) Cupolele își pot pierde stabilitatea în mai multe moduri: flambaj de bară, instabilitate de nod, instabilitate de inel, instabilitate generală și prin instabilități cuplate. Siguranța cupolelor se poate aprecia numai după determinarea încărcărilor critice pentru toate modurile de pierdere a stabilității. Reducerea maximă de 41,4 % a încărcării de limitare se obține la cupola cu 24 de bare identice din încărcarea uniformă atunci când se cuplează instabilitatea de bară cu instabilitatea de inel pentru barele cu secțiunea de 111 x 6 mm.
- (VI) Pierderea stabilității echilibrului cupolelor se poate produce și în urma saltului echilibrului. Cupolele perfecte cu 24 și 72 de bare identice sub încărcare uniformă își pierd stabilitatea generală în urma saltului static. Din încărcarea cu o forță concentrată în nodul central al cupolelor perfecte instabilitatea generală apare în urma saltului dinamic.
- (VII) Încărcarea cupolelor perfecte având bare identice cu o forță concentrată mai mare în nodul central (1,27P la cupola cu 24 de bare și 1,32P la cupola cu 72 de bare), restul forțelor egale în celelalte noduri transformă instabilitatea generală în instabilitate locală a nodului central.
- (VIII) Încărcarea uniformă a cupolelor perfecte cu bare identice și cu imperfecțiuni geometrice de nod orientate în jos pe direcție verticală (0,034f pentru cupola cu 24 de bare și 0,013f pentru cupola cu 72 de bare) produce instabilitate locală de nod.
- (IX) Instabilitatea locală a nodului central pentru cupole perfecte din încărcarea cu forțe majorate în nodul central și egale în restul nodurilor se propagă în instabilitate generală prin salt dinamic. Același fenomen se produce și la cupolele cu o imperfecțiune geometrică a nodului central de 0,034f și 0,013f.
- (X) Oprirea propagării instabilității locale din nodul central în restul structurii se asigură prin mărirea secțiunii anumitor bare din cupolă. În cazul încărcării uniforme a cupolelor perfecte se întăresc barele inelului superior cu 100 % și barele de reazem cu 78,26 % la cupola cu 24 de bare, respectiv cu 100 % secțiunile barelor inelului superior, cu 50 % secțiunile barelor inelului inferior și cu 27 % secțiunea diagonalelor de la bază pentru cupola cu 72 de bare. În cazul cupolei cu 24 de bare, dacă nodul central prezintă o imperfecțiune egală cu 0,034f, respectiv 0,013f în cazul cupolei cu 72 de bare, instabilitatea de nod central poate fi oprită prin majorarea secțiunii barelor inelului cu 49,56 % respectiv prin majorarea secțiunii barelor celor două inele cu 35 % în cazul cupolei cu 72 de bare. Dacă în nodul central al cupolelor se aplică o forță mai mare (1,27P la cupola cu 24 de bare și

1,32P la cupola cu 72 de bare), oprirea propagării instabilității locale în instabilitate generală se obține dacă se majorează secțiunea barelor inelului cu 49,56 % și a barelor de la bază cu 26,96 % (cupola cu 24 de bare respectiv prin creșterea secțiunii barelor inelului superior cu 78 % și barelor inelului inferior cu 50 % (cupola cu 72 de bare).

- (XI) Proiectanții de structuri trebuie să precizeze în proiecte valorile maxime ale imperfecțiunilor geometrice, să verifice siguranța structurii după releveul construcției executate și să recomande încercări nedistructive pe cupole reale.
- (XII) Oprirea propagării instabilității locale va fi verificată în funcție de imperfecțiunile reale rezultate din releveul structurii adoptându-se măsurile de consolidare corespunzătoare. În nodurile cu imperfecțiuni geometrice pronunțate se vor analiza măsurile de consolidare ale celulei de care aparține nodul respectiv.

7.2 Contribuții originale

Principalele contribuții originale rezultate în urma cercetărilor efectuate în teza de doctorat sunt sistematizate în continuare.

a) Probleme teoretice

- studierea literaturii de specialitate, analiza acesteia, prezentarea în interpretare proprie a rezultatelor și concluziilor care se desprind privind calculul cupolelor reticulate simplu strat;
- scrierea în formulare matriceală a deformațiilor specifice, a ecuației constitutive, a ecuațiilor de echilibru static și a ecuației de continuitate;
- scrierea într-o formă unitară a ecuației fundamentale pentru calculul nelinier al structurilor;
- stabilirea expresiilor pentru elementele matricei rigidității tangente a barei din deplasările nodale, imperfecțiunile geometrice de nod și de bară;
- prezentarea influenței semirigidității nodurilor asupra elementelor matricei de rigiditate tangente a barei;
- cercetarea comportării cupolelor perfecte și imperfecte în urma saltului static;
- cercetarea comportării cupolelor perfecte și imperfecte în urma saltului dinamic;
- cercetarea fenomenului de propagare a instabilității locale în instabilitate generală;

- fundamentarea soluțiilor constructive de oprire a propagării a instabilității locale în instabilitate generală;
- selectarea și precizarea propunerilor pentru direcțiile viitoare de cercetare în domeniul cupolelor reticulate simplu strat;

b) Probleme de testare numerică

- discutarea procedurii de calcul numeric pentru structurile spațiale ținând seama de matricea de rotație a nodului și matricea de orientare a elementului în spațiu;
- analiza metodelor numerice folosite în calculul neliniar și precizarea domeniului de utilizare optimă a fiecărei metode;
- elaborarea unui program de calcul pentru generarea automată a geometriei cupolelor reticulate simplu strat;
- cercetarea comportării neliniare a trei tipuri de cupole reticulate având diferite rapoarte între săgeată și deschidere cu ajutorul programelor de calcul ABAQUS și ANSYS, pentru o schemă de încărcare având o forță concentrată în nodul central, o alta cu forțe egale în toate nodurile și ultima cu o forță mai mare în nodul central și forțe egale în toate celelalte noduri;
- precizarea ordinii de apariție a diferitelor moduri de instabilitate pentru cupolele studiate și a încărcărilor de critice corespunzătoare;
- studierea influenței comportării elastice perfect-plastice a oțelului asupra încărcării de limitare;
- analiza influenței modificării raportului între săgeata și deschiderea cupolei asupra încărcărilor de limitare;
- cercetarea influenței modificării secțiunii barelor cupolei asupra încărcărilor de critice corespunzătoare diferitelor moduri de instabilitate pentru cele trei tipuri de cupole reticulate;
- analiza comportării neliniare a cupolelor datorită încărcării cu o forță majorată în nodul central precum și cu încărcare uniformă aplicată pe cupolă;
- cercetarea influenței imperfecțiunilor geometrice de bară, de nod și cuplate, asupra încărcării critice la cupolele cu 24 de bare și 72 de bare;
- precizarea variației încărcării critice cu mărimea imperfecțiunilor geometrice și stabilirea tipului de imperfecțiune care are ca efect reducerea cea mai mare a încărcării critice;

- stabilirea tipului de imperfecțiune geometrică pentru care rezultă prima dată instabilitatea nodului central;
- determinarea în urma mai multor testări numerice a valorii forței din nodul central care produce cea mai mare reducere a încărcării critice pentru cupola cu 24 de bare respectiv pentru cupola cu 72 de bare;
- selectarea forței din nodul central care să conducă la apariția prima dată a instabilității locale a nodului central atât pentru cupola cu 24 de bare cât și pentru cupola cu 72 de bare;
- studiul saltului static și dinamic al cupolelor reticulate simplu strat cu programul ANSYS 5.3;
- determinarea cantitativă a parametrilor care definesc saltul dinamic: viteza inițială, masa, energia cinetică, lungimea saltului static și cea a saltului dinamic;
- elaborarea programului de calcul care permite evidențierea poziției deformate a cupolei în urma saltului dinamic într-o succesiune de timpi;
- studiul comportării neliniare a cupolelor perfecte și imperfecte cu 24 de bare și 72 de bare supuse unei încărcări cu o forță concentrată în nodul central, forțe concentrate egale în toate nodurile, respectiv o forță majorată în nodul central și forțe egale în restul nodurilor;

c) Interpretarea rezultatelor

- determinarea rezultatelor cu două programe de calcul ABAQUS și ANSYS;
- compararea rezultatelor obținute cu cele obținute în literatura de specialitate;
- redactarea de tabele și grafice care prezintă comparativ rezultatele obținute și importanța lor;
- precizarea diametrelor de bare pentru care rezultă instabilități cuplate la cupola cu 24 de bare;

d) Probleme de proiectare

- prezentarea sub formă de tabele și grafice a încărcărilor critice pentru diferite moduri de instabilitate;
- analiza posibilității de modificare a secțiunii transversale a unor bare din cupolă pentru a opri propagarea instabilității locale în instabilitate generală prin saltul static și dinamic;

- indicarea problemelor care trebuie conținute în caietele de sarcini la proiectarea cupolelor reticulate;
- prezentarea concluziilor practice de care trebuie să se țină seama la proiectarea cupolelor reticulate simplu strat pentru ca siguranța acestora să fie satisfăcută în exploatare;

7.3 Direcții propuse pentru cercetări viitoare

Ca direcții de cercetare viitoare se consideră următoarele:

- analiza influenței comportării neliniare a oțelului asupra încărcărilor critice prin considerarea unei curbe caracteristice elasto – plastice;
- studiul influenței simultane a imperfecțiunilor geometrice și de material asupra încărcărilor critice;
- influența semirigidității nodurilor asupra încărcărilor critice din diferite moduri de instabilitate;
- cercetarea modalităților de propagare a instabilității locale la cupolele reticulate cu imperfecțiuni de material și geometrice având noduri semirigide;
- măsurători de imperfecțiuni pe modele și cupole reale pentru introducerea lor în modelările numerice;
- efectuarea de încercări experimentale pe cupole cu noduri semirigide;
- elaborarea unor instrucțiuni de proiectare.

ANEXA A

Rezultatele testărilor numerice pentru
cupola cu 24 de bare

Vibrațiile cupolei perfecte, având barele inelului întărite cu 100% și barele de la bază cu 78,26% sub acțiunea unui impuls și a unei încărcări uniforme

STORAGE COMPLETE FOR 200 DATA POINTS

SUMMARY OF VARIABLES STORED THIS STEP AND EXTREME VALUES						
VARI TYPE	IDENTIFIERS	NAME	MINIMUM	AT TIME	MAXIMUM	AT TIME
2 NSOL	1 UZ	uz1	47.27	0.5000E-02	67.43	0.1650
3 NSOL	2 UZ	uz2	3.489	0.5000E-02	11.98	0.1500

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.50000E-02	47.2747	3.48904
0.10000E-01	48.5444	3.69686
0.15000E-01	49.7914	4.13105
0.20000E-01	51.0086	4.71960
0.25000E-01	52.1915	5.30187
0.30000E-01	53.3365	5.73707
0.35000E-01	54.4408	6.00212
0.40000E-01	55.5001	6.19040
0.45000E-01	56.5086	6.43711
0.50000E-01	57.4629	6.83865
0.55000E-01	58.3631	7.38866
0.60000E-01	59.2140	7.98521
0.65000E-01	60.0220	8.49530
0.70000E-01	60.7913	8.82896
0.75000E-01	61.5227	8.99221
0.80000E-01	62.2120	9.07876
0.85000E-01	62.8539	9.21669
0.90000E-01	63.4447	9.49611
0.95000E-01	63.9849	9.91388
0.10000	64.4796	10.3796

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.10500	64.9355	10.7681
0.11000	65.3574	10.9893
0.11500	65.7466	11.0369
0.12000	66.0994	10.9881
0.12500	66.4102	10.9635
0.13000	66.6745	11.0601
0.13500	66.8914	11.2966
0.14000	67.0651	11.6046
0.14500	67.2017	11.8671
0.15000	67.3067	11.9834
0.15500	67.3824	11.9220
0.16000	67.4259	11.7353
0.16500	67.4321	11.5334
0.17000	67.3954	11.4251
0.17500	67.3138	11.4587
0.18000	67.1900	11.5943
0.18500	67.0300	11.7274
0.19000	66.8406	11.7467
0.19500	66.6260	11.5945
0.20000	66.3866	11.2970

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.20500	66.1193	10.9519
0.21000	65.8205	10.6779
0.21500	65.4890	10.5493
0.22000	65.1279	10.5535
0.22500	64.7445	10.5987
0.23000	64.3469	10.5671
0.23500	63.9418	10.3815
0.24000	63.5319	10.0480
0.24500	63.1165	9.65470
0.25000	62.6937	9.32489
0.25500	62.2631	9.14743
0.26000	61.8280	9.12510
0.26500	61.3953	9.17248
0.27000	60.9732	9.16780
0.27500	60.5684	9.02325
0.28000	60.1841	8.73520
0.28500	59.8200	8.38700
0.29000	59.4742	8.10270
0.29500	59.1461	7.97594
0.30000	58.8379	8.01303

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.30500	58.5548	8.13001
0.31000	58.3034	8.20315
0.31500	58.0886	8.14197
0.32000	57.9122	7.94090
0.32500	57.7726	7.68188
0.33000	57.6667	7.48878
0.33500	57.5920	7.45401
0.34000	57.5490	7.58343
0.34500	57.5409	7.79254
0.35000	57.5716	7.95806
0.35500	57.6441	7.99092
0.36000	57.7580	7.88606
0.36500	57.9097	7.72571
0.37000	58.0939	7.63171
0.37500	58.3063	7.69456
0.38000	58.5451	7.91856
0.38500	58.8115	8.21931
0.39000	59.1077	8.47558
0.39500	59.4346	8.59953
0.40000	59.7901	8.58657

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.40500	60.1686	8.51645
0.41000	60.5627	8.50785
0.41500	60.9661	8.64905
0.42000	61.3754	8.94469
0.42500	61.7907	9.31382
0.43000	62.2132	9.63784
0.43500	62.6435	9.82899
0.44000	63.0785	9.87754

0.44500	63.5119	9.85551
0.45000	63.9355	9.87559
0.45500	64.3421	10.0262
0.46000	64.7280	10.3201
0.46500	65.0931	10.6867
0.47000	65.4399	11.0134
0.47500	65.7699	11.2084
0.48000	66.0816	11.2486
0.48500	66.3702	11.1900
0.49000	66.6285	11.1365
0.49500	66.8498	11.1825
0.50000	67.0309	11.3597

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.50500	67.1730	11.6188
0.51000	67.2799	11.8582
0.51500	67.3558	11.9794
0.52000	67.4024	11.9391
0.52500	67.4176	11.7704
0.53000	67.3966	11.5659
0.53500	67.3345	11.4284
0.54000	67.2289	11.4151
0.54500	67.0815	11.5052
0.55000	66.8979	11.6121
0.55500	66.6844	11.6322
0.56000	66.4459	11.5011
0.56500	66.1837	11.2284
0.57000	65.8958	10.8937
0.57500	65.5794	10.6055
0.58000	65.2330	10.4422
0.58500	64.8595	10.4075
0.59000	64.4649	10.4287
0.59500	64.0572	10.3988
0.60000	63.6431	10.2379

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.60500	63.2261	9.93776
0.61000	62.8064	9.56791
0.61500	62.3827	9.23888
0.62000	61.9545	9.04023
0.62500	61.5247	8.98862
0.63000	61.0993	9.01766
0.63500	60.6858	9.01820
0.64000	60.2909	8.90209
0.64500	59.9181	8.65266
0.65000	59.5679	8.33483
0.65500	59.2387	8.05899
0.66000	58.9297	7.91788
0.66500	58.6427	7.93088
0.67000	58.3820	8.03271
0.67500	58.1535	8.11303
0.68000	57.9619	8.08167
0.68500	57.8092	7.92055
0.69000	57.6943	7.69347
0.69500	57.6143	7.51039
0.70000	57.5668	7.46288

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.70500	57.5515	7.56946
0.71000	57.5707	7.76434
0.71500	57.6279	7.93752
0.72000	57.7257	8.00017
0.72500	57.8639	7.93497
0.73000	58.0395	7.80592
0.73500	58.2475	7.72138
0.74000	58.4832	7.77095
0.74500	58.7443	7.97166
0.75000	59.0312	8.25767
0.75500	59.3455	8.52067
0.76000	59.6881	8.67314
0.76500	60.0570	8.69795
0.77000	60.4472	8.65690
0.77500	60.8517	8.65509
0.78000	61.2642	8.77983
0.78500	61.6806	9.04842
0.79000	62.1002	9.39824
0.79500	62.5239	9.72390
0.80000	62.9520	9.93804

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.80500	63.3821	10.0189
0.81000	63.8087	10.0206
0.81500	64.2241	10.0418
0.82000	64.6213	10.1692
0.82500	64.9960	10.4274
0.83000	65.3477	10.7642
0.83500	65.6780	11.0811
0.84000	65.9887	11.2883
0.84500	66.2791	11.3521
0.85000	66.5451	11.3113
0.85500	66.7805	11.2546
0.86000	66.9790	11.2724
0.86500	67.1371	11.4061
0.87000	67.2551	11.6242
0.87500	67.3364	11.8407
0.88000	67.3852	11.9627
0.88500	67.4036	11.9392
0.89000	67.3906	11.7874
0.89500	67.3425	11.5838
0.90000	67.2548	11.4235

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.90500	67.1251	11.3692
0.91000	66.9546	11.4161
0.91500	66.7480	11.4947
0.92000	66.5116	11.5104
0.92500	66.2504	11.3954

0.93000	65.9665	11.1455
0.93500	65.6591	10.8235
0.94000	65.3259	10.5271
0.94500	64.9658	10.3359
0.95000	64.5808	10.2665
0.95500	64.1767	10.2634
0.96000	63.7606	10.2314
0.96500	63.3394	10.0904
0.97000	62.9171	9.82076
0.97500	62.4948	9.47542
0.98000	62.0717	9.15198
0.98500	61.6476	8.93831
0.99000	61.2246	8.86176
0.99500	60.8080	8.87285
1.0000	60.4050	8.87532

Vibrațiile cupolei perfecte cu bare identice sub acțiunea unui impuls și a unei forțe concentrate în nodul central (fig. 5.27)

STORAGE COMPLETE FOR 150 DATA POINTS

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.02000	104.174	2.84529
0.03000	107.495	3.65990
0.04000	110.800	4.50501
0.05000	114.084	5.37939
0.06000	117.346	6.28139
0.07000	120.582	7.20957
0.08000	123.789	8.16242
0.09000	126.964	9.13839
0.10000	130.106	10.1358
0.11000	133.212	11.1532
0.12000	136.280	12.1889
0.13000	139.337	169.564
0.14000	142.447	92.4183
0.15000	145.660	93.3932
0.16000	148.978	79.7770
0.17000	152.385	82.6622
0.18000	155.881	100.507
0.19000	159.482	103.430
0.20000	163.196	88.8451
0.21000	167.017	108.003

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.22000	170.939	107.301
0.23000	174.954	108.288
0.24000	179.043	109.551
0.25000	183.185	110.800
0.26000	187.357	111.437
0.27000	191.547	112.033
0.28000	195.744	112.605
0.29000	199.941	113.145
0.30000	204.128	113.663
0.31000	208.295	114.181
0.32000	212.433	115.542
0.33000	216.536	116.866
0.34000	220.596	118.197
0.35000	224.606	119.495
0.36000	228.560	120.792
0.37000	232.451	122.027
0.38000	236.273	123.271
0.39000	240.019	124.455
0.40000	243.684	125.629
0.41000	247.261	126.756

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

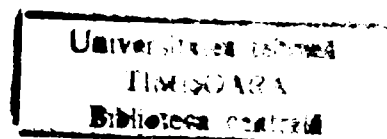
TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.42000	250.744	127.872
0.43000	254.128	128.922
0.44000	257.408	129.952
0.45000	260.577	130.935
0.46000	263.632	131.890
0.47000	266.567	132.792
0.48000	269.377	133.666
0.49000	272.059	134.483
0.50000	274.607	135.268
0.51000	277.019	135.999
0.52000	279.290	136.690
0.53000	281.416	137.332
0.54000	283.395	137.923
0.55000	285.223	138.476
0.56000	286.898	138.967
0.57000	288.417	139.429
0.58000	289.778	139.840
0.59000	290.978	140.203
0.60000	292.016	140.515
0.61000	292.890	140.779

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.62000	293.599	140.992
0.63000	294.142	141.104
0.64000	294.518	141.214
0.65000	294.726	141.266
0.66000	294.767	141.270
0.67000	294.641	141.189
0.68000	294.358	141.001
0.69000	293.936	140.719
0.70000	293.401	140.360
0.71000	292.786	139.932
0.72000	292.127	139.495
0.73000	291.466	139.024
0.74000	290.839	138.586
0.75000	290.283	138.191
0.76000	289.827	140.836
0.77000	289.488	132.597
0.78000	289.275	142.239
0.79000	289.192	131.278
0.80000	289.242	142.292
0.81000	289.423	132.292

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
0.82000	289.732	141.183
0.83000	290.160	138.115
0.84000	290.694	138.484
0.85000	291.307	138.917
0.86000	291.964	139.382
0.87000	292.626	139.832
0.88000	293.255	140.261
0.89000	293.812	140.636
0.90000	294.263	140.942



0.91000	294.581	141.149
0.92000	294.745	141.257
0.93000	294.745	141.258
0.94000	294.581	141.149
0.95000	294.264	140.932
0.96000	293.814	140.645
0.97000	293.258	140.267
0.98000	292.631	139.835
0.99000	291.970	139.379
1.00000	291.314	138.922
1.00000	291.314	138.922

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
1.04000	289.434	132.342
1.06000	289.204	131.331
1.08000	289.499	132.653
1.10000	290.293	138.199
1.12000	291.471	139.028
1.14000	292.784	139.940
1.16000	293.926	140.713
1.18000	294.624	141.178
1.20000	294.707	141.232
1.22000	294.154	140.876
1.24000	293.102	140.157
1.26000	291.806	139.265
1.28000	290.569	138.395
1.30000	289.666	141.386
1.32000	289.244	142.289
1.34000	289.345	131.935
1.36000	289.959	135.524
1.38000	291.014	138.707
1.40000	292.306	139.616
1.42000	293.540	140.453

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
1.44000	294.423	141.044
1.46000	294.740	141.254
1.48000	294.414	141.038
1.50000	293.525	140.456
1.52000	292.290	139.598
1.54000	291.002	138.699
1.56000	289.955	135.492
1.58000	289.351	131.962
1.60000	289.259	131.564
1.62000	289.688	141.324
1.64000	290.596	138.414
1.66000	291.832	139.284
1.68000	293.120	140.169
1.70000	294.157	140.880
1.72000	294.694	141.224
1.74000	294.598	141.161
1.76000	293.894	140.692
1.78000	292.755	139.921
1.80000	291.453	139.019
1.82000	290.291	138.199

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 UZ uz1	2 UZ uz2
1.84000	289.516	141.768
1.86000	289.238	142.298
1.88000	289.483	141.848
1.90000	290.227	138.157
1.92000	291.370	138.961
1.94000	292.670	139.862
1.96000	293.826	140.648
1.98000	294.563	141.137
2.00000	294.699	141.227

Curba încărcare – deplasare pentru cupola perfectă ($f_0/L_1 = 0,03$) cu bare identice sub acțiunea unei forțe concentrate în nodul central (fig. 4.50)

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uzl
0.04964	219.5956	0.15900
0.09852	435.8693	0.32025
0.14662	648.6518	0.48379
0.19389	857.7654	0.64965
0.24029	1063.025	0.81787
0.28577	1264.235	0.98850
0.33029	1461.196	1.16154
0.37380	1653.698	1.33704
0.41626	1841.524	1.51501
0.45761	2024.453	1.69546
0.49780	2202.257	1.87840
0.53678	2374.702	2.06382
0.57449	2541.555	2.25173
0.61089	2702.578	2.44209
0.64592	2857.536	2.63488
0.67952	3006.194	2.83006
0.71165	3148.324	3.02758
0.74225	3283.705	3.22737
0.77128	3412.125	3.42936
0.79869	3533.385	3.63347

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uzl
0.82444	3647.301	3.83959
0.84849	3753.709	4.04762
0.87081	3852.463	4.25744
0.89138	3943.443	4.46893
0.91016	4026.552	4.68194
0.92715	4101.721	4.89634
0.94234	4168.907	5.11198
0.95572	4228.098	5.32871
0.96729	4279.309	5.54639
0.97708	4322.584	5.76485
0.98508	4357.994	5.98397
0.99133	4385.637	6.20359
0.99585	4405.635	6.42358
0.99867	4418.132	6.6438
0.99963	4422.377	6.79079
0.99986	4423.395	6.88244
0.99968	4422.570	7.02238
0.99809	4415.554	7.24265
0.99497	4401.728	7.46275
0.99035	4381.308	7.68258

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uz1
0.98429	4354.517	7.90207
0.97685	4321.587	8.12115
0.96807	4282.751	8.33976
0.95801	4238.245	8.55785
0.94672	4188.307	8.77538
0.93426	4133.172	8.99231
0.92068	4073.072	9.20862
0.90602	4008.237	9.42429
0.89035	3938.894	9.63930
0.87370	3865.261	9.85365
0.85614	3787.555	10.0673
0.83770	3705.984	10.2804
0.81843	3620.753	10.4927
0.79839	3532.057	10.7045
0.77760	3440.088	10.9156
0.75611	3345.031	11.1261
0.73397	3247.062	11.3360
0.71120	3146.356	11.5453
0.68786	3043.076	11.7541
0.66397	2937.385	11.9623

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uz1
0.63957	2829.437	12.1701
0.61469	2719.382	12.3773
0.58937	2607.363	12.5842
0.56363	2493.521	12.7906
0.53752	2377.991	12.9967
0.51105	2260.903	13.2024
0.48426	2142.385	13.4078
0.45718	2022.559	13.6129
0.42982	1901.544	13.8177
0.40223	1779.457	14.0223
0.37441	1656.410	14.2267
0.34641	1532.514	14.4309
0.31824	1407.876	14.6350
0.28992	1282.601	14.8390
0.26148	1156.792	15.0430
0.23295	1030.550	15.2469
0.20433	903.9747	15.4507
0.17567	777.1625	15.6546
0.14697	650.2099	15.8585
0.11827	523.2116	16.0625

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uz1
0.08957	396.2615	16.2667
0.06091	269.4521	16.4709
0.03230	142.8755	16.6753
0.00376	16.62300	16.8798
-0.02469	-109.2147	17.0846
-0.05302	-234.5471	17.2896

-0.08121	-359.2840	17.4949
-0.10925	-483.3355	17.7005
-0.13712	-606.6115	17.9063
-0.16479	-729.0220	18.1125
-0.19224	-850.4766	18.3191
-0.21946	-970.8849	18.5260
-0.24642	-1090.156	18.7333
-0.27310	-1208.199	18.9410
-0.29948	-1324.921	19.1491
-0.32555	-1440.231	19.3577
-0.35127	-1554.035	19.5668
-0.37664	-1666.24	19.7764
-0.40162	-1776.752	19.9864
-0.42619	-1885.475	20.1969

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uz1
-0.45034	-1992.315	20.4080
-0.47404	-2097.174	20.6196
-0.49728	-2199.957	20.8317
-0.52002	-2300.565	21.0443
-0.54225	-2398.900	21.2576
-0.56394	-2494.864	21.4713
-0.58507	-2588.357	21.6856
-0.60562	-2679.281	21.9005
-0.62557	-2767.535	22.1159
-0.64490	-2853.021	22.3318
-0.66357	-2935.638	22.5483
-0.68157	-3015.286	22.7653
-0.69889	-3091.869	22.9829
-0.71548	-3165.286	23.2009
-0.73134	-3235.441	23.4194
-0.74644	-3302.237	23.6384
-0.76076	-3365.581	23.8578
-0.77427	-3425.378	24.0777
-0.78697	-3481.538	24.2979
-0.79882	-3533.972	24.5185

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uz1
-0.80981	-3582.594	24.7395
-0.81992	-3627.321	24.9607
-0.82913	-3668.073	25.1822
-0.83743	-3704.774	25.4040
-0.84479	-3737.351	25.6259
-0.85121	-3765.738	25.8480
-0.85666	-3789.870	26.0701
-0.86114	-3809.689	26.2923
-0.86463	-3825.142	26.5146
-0.86713	-3836.181	26.7367
-0.86862	-3842.765	26.9588
-0.86909	-3844.856	27.1807
-0.86854	-3842.425	27.4024
-0.86696	-3835.449	27.6238
-0.86436	-3823.908	27.8450
-0.86071	-3807.792	28.0657
-0.85603	-3787.097	28.2861

-0.85032	-3761.822	28.5059
-0.84358	-3731.977	28.7252
-0.83580	-3697.574	28.9440

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uzl
-0.82700	-3658.633	29.1621
-0.81717	-3615.180	29.3795
-0.80634	-3567.245	29.5962
-0.79450	-3514.866	29.8121
-0.78166	-3458.083	30.0272
-0.76784	-3396.943	30.2415
-0.75305	-3331.496	30.4548
-0.73730	-3261.797	30.6672
-0.72059	-3187.905	30.8786
-0.70296	-3109.881	31.0889
-0.68440	-3027.790	31.2983
-0.66494	-2941.700	31.5065
-0.64459	-2851.681	31.7137
-0.62337	-2757.806	31.9197
-0.60130	-2660.148	32.1246
-0.57839	-2558.782	32.3283
-0.55465	-2453.785	32.5308
-0.53012	-2345.234	32.7321
-0.50479	-2233.207	32.9322
-0.47870	-2117.782	33.1311

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uzl
-0.45186	-1999.037	33.3288
-0.42429	-1877.051	33.5252
-0.39600	-1751.901	33.7204
-0.36701	-1623.664	33.9143
-0.33735	-1492.417	34.1069
-0.30702	-1358.236	34.2984
-0.27604	-1221.196	34.4885
-0.24443	-1081.371	34.6774
-0.21221	-938.8326	34.8651
-0.17940	-793.6530	35.0516
-0.14600	-645.9024	35.2368
-0.11204	-495.6495	35.4208
-0.07752	-342.9618	35.6035
-0.04247	-187.9052	35.7851
-0.00690	-30.54420	35.9654
0.02917	129.0581	36.1446
0.06574	290.8403	36.3226
0.10279	454.7424	36.4994
0.14030	620.7059	36.6751
0.17827	788.6738	36.8496

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	1 PROD forta	2 UZ uzl
0.21668	958.5908	37.0230
0.25552	1130.403	37.1953

0.29477	1304.057	37.3664
0.33443	1479.503	37.5365
0.37448	1656.691	37.7055
0.41491	1835.572	37.8734
0.45572	2016.100	38.0403
0.49689	2198.230	38.2062
0.53841	2381.916	38.3710
0.58027	2567.117	38.5348
0.62247	2753.790	38.6976
0.66499	2941.895	38.8594
0.70782	3131.393	39.0203
0.75096	3322.246	39.1802
0.79440	3514.417	39.3392
0.83813	3707.870	39.4972
0.88214	3902.570	39.6543
0.92642	4098.483	39.8105
0.97097	4295.578	39.9659
1.00000	4424.000	40.0663

ANEXA B

Rezultatele testărilor numerice pentru
cupola cu 72 de bare

Vibrațiile cupolei perfecte, având barele întărite cu 100%, barele inelului inferior 49,56% și barele diagonale de la bază cu 26,96% sub acțiunea unui impuls și a unei încărcări uniforme

STORAGE COMPLETE FOR 300 DATA POINTS

SUMMARY OF VARIABLES STORED THIS STEP AND EXTREME VALUES						
VARI TYPE	IDENTIFIERS	NAME	MINIMUM	AT TIME	MAXIMUM	AT TIME
2 NSOL	2 UZ	uz1	0.8883	0.2800	6.183	0.8500E-01
3 NSOL	3 UZ	uz3	0.8883	0.2800	6.183	0.8500E-01
4 NSOL	9 UZ	uz9	0.4175	0.8500E-01	1.684	0.2800
5 NSOL	10 UZ	uz10	0.5875	0.8500E-01	1.280	1.125

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.50000E-02	2.32004	2.32004	1.26845	1.07046
0.10000E-01	2.60730	2.60730	1.19273	1.04026
0.15000E-01	2.90919	2.90919	1.11581	1.00346
0.20000E-01	3.22238	3.22238	1.03852	0.960321
0.25000E-01	3.54279	3.54279	0.961705	0.911422
0.30000E-01	3.86571	3.86571	0.886281	0.857697
0.35000E-01	4.18579	4.18579	0.813214	0.800417
0.40000E-01	4.49722	4.49722	0.743517	0.741153
0.45000E-01	4.79388	4.79388	0.678237	0.681714
0.50000E-01	5.06950	5.06950	0.618435	0.624069
0.55000E-01	5.34607	5.34607	0.565266	0.611942
0.60000E-01	5.58880	5.58880	0.520792	0.606048
0.65000E-01	5.79152	5.79152	0.484674	0.600368
0.70000E-01	5.95308	5.95308	0.456534	0.595361
0.75000E-01	6.07256	6.07256	0.436080	0.591388
0.80000E-01	6.14927	6.14927	0.423102	0.588719
0.85000E-01	6.18280	6.18280	0.417468	0.587524
0.90000E-01	6.17386	6.17386	0.419221	0.589624
0.95000E-01	6.12581	6.12581	0.428650	0.600891
0.10000	6.03978	6.03978	0.445567	0.620929

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.10500	5.91777	5.91777	0.469633	0.649047
0.11000	5.76257	5.76257	0.500379	0.684290
0.11500	5.57764	5.57764	0.537225	0.725487
0.12000	5.36695	5.36695	0.579505	0.771311
0.12500	5.13488	5.13488	0.626489	0.820339
0.13000	4.88601	4.88601	0.677413	0.871125
0.13500	4.62500	4.62500	0.731499	0.922261
0.14000	4.35640	4.35640	0.787976	0.972439
0.14500	4.08457	4.08457	0.846099	1.02050
0.15000	3.81356	3.81356	0.905156	1.06547
0.15500	3.54699	3.54699	0.964479	1.10659

0.16000	3.28802	3.28802	1.02345	1.14334
0.16500	3.03933	3.03933	1.08150	1.17538
0.17000	2.80306	2.80306	1.13811	1.20262
0.17500	2.58085	2.58085	1.19282	1.22513
0.18000	2.37386	2.37386	1.24522	1.24312
0.18500	2.18279	2.18279	1.29498	1.25695
0.19000	2.00794	2.00794	1.34181	1.26702
0.19500	1.84928	1.84928	1.38550	1.27380
0.20000	1.70645	1.70645	1.42589	1.27778

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.20500	1.57887	1.57887	1.46292	1.27944
0.21000	1.46579	1.46579	1.49655	1.27924
0.21500	1.36632	1.36632	1.52683	1.27760
0.22000	1.27946	1.27946	1.55384	1.27491
0.22500	1.20421	1.20421	1.57772	1.27148
0.23000	1.13953	1.13953	1.59862	1.26762
0.23500	1.08442	1.08442	1.61674	1.26357
0.24000	1.03792	1.03792	1.63225	1.25952
0.24500	0.999132	0.999132	1.64538	1.25564
0.25000	0.967250	0.967250	1.65629	1.25206
0.25500	0.941557	0.941557	1.66518	1.24889
0.26000	0.921439	0.921439	1.67220	1.24621
0.26500	0.906388	0.906388	1.67749	1.24407
0.27000	0.896010	0.896010	1.68116	1.24254
0.27500	0.890022	0.890022	1.68328	1.24162
0.28000	0.888255	0.888255	1.68391	1.24135
0.28500	0.890666	0.890666	1.68305	1.24172
0.29000	0.897327	0.897327	1.68069	1.24274
0.29500	0.908410	0.908410	1.67678	1.24437
0.30000	0.924219	0.924219	1.67123	1.24659

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.30500	0.945166	0.945166	1.66393	1.24935
0.31000	0.971776	0.971776	1.65473	1.25259
0.31500	1.00468	1.00468	1.64349	1.25622
0.32000	1.04461	1.04461	1.63001	1.26014
0.32500	1.09239	1.09239	1.61410	1.26420
0.33000	1.14891	1.14891	1.59557	1.26824
0.33500	1.21516	1.21516	1.57422	1.27205
0.34000	1.29214	1.29214	1.54986	1.27538
0.34500	1.38087	1.38087	1.52235	1.27794
0.35000	1.48238	1.48238	1.49157	1.27938
0.35500	1.59763	1.59763	1.45741	1.27932
0.36000	1.72750	1.72750	1.41987	1.27733
0.36500	1.87271	1.87271	1.37897	1.27295
0.37000	2.03382	2.03382	1.33479	1.26569
0.37500	2.21112	2.21112	1.28751	1.25508
0.38000	2.40461	2.40461	1.23734	1.24064
0.38500	2.61391	2.61391	1.18458	1.22198
0.39000	2.83826	2.83826	1.12957	1.19877
0.39500	3.07642	3.07642	1.07274	1.17082
0.40000	3.32668	3.32668	1.01456	1.13806

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.40500	3.58679	3.58679	0.955536	1.10066
0.41000	3.85403	3.85403	0.896261	1.05895
0.41500	4.12514	4.12514	0.837357	1.01351
0.42000	4.39644	4.39644	0.779500	0.965123
0.42500	4.66383	4.66383	0.723406	0.914797
0.43000	4.92292	4.92292	0.669824	0.863715
0.43500	5.16913	5.16913	0.619526	0.813202
0.44000	5.39782	5.39782	0.573288	0.764672
0.44500	5.60444	5.60444	0.531869	0.719571
0.45000	5.78469	5.78469	0.495988	0.679305
0.45500	5.93465	5.93465	0.466299	0.645179
0.46000	6.05098	6.05098	0.443362	0.618330
0.46500	6.13103	6.13103	0.427627	0.599671
0.47000	6.17292	6.17292	0.419406	0.589847
0.47500	6.17567	6.17567	0.418866	0.589200
0.48000	6.13923	6.13923	0.426016	0.597751
0.48500	6.06445	6.06445	0.440713	0.615202
0.49000	5.95307	5.95307	0.462661	0.640949
0.49500	5.80766	5.80766	0.491430	0.674113
0.50000	5.63148	5.63148	0.526472	0.713584

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.50500	5.42837	5.42837	0.567144	0.758078
0.51000	5.20258	5.20258	0.612736	0.806199
0.51500	4.95864	4.95864	0.662492	0.856503
0.52000	4.70118	4.70118	0.715637	0.907570
0.52500	4.43480	4.43480	0.771398	0.958059
0.53000	4.16393	4.16393	0.829023	1.00676
0.53500	3.89269	3.89269	0.887790	1.05266
0.54000	3.62484	3.62484	0.947018	1.09492
0.54500	3.36368	3.36368	1.00607	1.13295
0.55000	3.11202	3.11202	1.06438	1.16636
0.55500	2.87216	2.87216	1.12139	1.19499
0.56000	2.64590	2.64590	1.17664	1.21887
0.56500	2.43452	2.43452	1.22971	1.23816
0.57000	2.23886	2.23886	1.28023	1.25318
0.57500	2.05935	2.05935	1.32790	1.26433
0.58000	1.89603	1.89603	1.37250	1.27205
0.58500	1.74864	1.74864	1.41385	1.27683
0.59000	1.61668	1.61668	1.45185	1.27915
0.59500	1.49944	1.49944	1.48646	1.27948
0.60000	1.39605	1.39605	1.51771	1.27825

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.60500	1.30557	1.30557	1.54566	1.27585
0.61000	1.22699	1.22699	1.57044	1.27263
0.61500	1.15927	1.15927	1.59220	1.26890
0.62000	1.10141	1.10141	1.61112	1.26490
0.62500	1.05243	1.05243	1.62739	1.26085
0.63000	1.01143	1.01143	1.64120	1.25692

0.63500	0.977563	0.977563	1.65275	1.25326
0.64000	0.950093	0.950093	1.66222	1.24997
0.64500	0.928375	0.928375	1.66977	1.24715
0.65000	0.911871	0.911871	1.67556	1.24486
0.65500	0.900155	0.900155	1.67969	1.24316
0.66000	0.892912	0.892912	1.68226	1.24207
0.66500	0.889933	0.889933	1.68331	1.24161
0.67000	0.891167	0.891167	1.68287	1.24180
0.67500	0.896619	0.896619	1.68094	1.24263
0.68000	0.906447	0.906447	1.67747	1.24408
0.68500	0.920918	0.920918	1.67238	1.24613
0.69000	0.940412	0.940412	1.66558	1.24874
0.69500	0.965421	0.965421	1.65692	1.25184
0.70000	0.996546	0.996546	1.64626	1.25536

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.70500	1.03449	1.03449	1.63341	1.25919
0.71000	1.08005	1.08005	1.61819	1.26321
0.71500	1.13410	1.13410	1.60039	1.26726
0.72000	1.19760	1.19760	1.57984	1.27113
0.72500	1.27154	1.27154	1.55633	1.27460
0.73000	1.35695	1.35695	1.52971	1.27737
0.73500	1.45484	1.45484	1.49985	1.27913
0.74000	1.56620	1.56620	1.46665	1.27950
0.74500	1.69193	1.69193	1.43006	1.27807
0.75000	1.83280	1.83280	1.39010	1.27437
0.75500	1.98940	1.98940	1.34685	1.26793
0.76000	2.16212	2.16212	1.30045	1.25827
0.76500	2.35102	2.35102	1.25109	1.24492
0.77000	2.55585	2.55585	1.19907	1.22746
0.77500	2.77594	2.77594	1.14470	1.20554
0.78000	3.01019	3.01019	1.08840	1.17892
0.78500	3.25702	3.25702	1.03061	1.14751
0.79000	3.51434	3.51434	0.971837	1.11141
0.79500	3.77955	3.77955	0.912653	1.07089
0.80000	4.04955	4.04955	0.853667	1.02648

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.80500	4.32076	4.32076	0.795539	0.978901
0.81000	4.58921	4.58921	0.738974	0.929094
0.81500	4.85058	4.85058	0.684713	0.878198
0.82000	5.10034	5.10034	0.633522	0.827500
0.82500	5.33388	5.33388	0.586174	0.778393
0.83000	5.54659	5.54659	0.543434	0.732315
0.83500	5.73411	5.73411	0.506033	0.690687
0.84000	5.89242	5.89242	0.474644	0.654844
0.84500	6.01802	6.01802	0.449854	0.625971
0.85000	6.10803	6.10803	0.432143	0.605046
0.85500	6.16040	6.16040	0.421862	0.592787
0.86000	6.17386	6.17386	0.419220	0.589627
0.86500	6.14815	6.14815	0.424264	0.595659
0.87000	6.08384	6.08384	0.436898	0.610688
0.87500	5.98244	5.98244	0.456866	0.634188
0.88000	5.84630	5.84630	0.483773	0.665351
0.88500	5.67849	5.67849	0.517102	0.703131

0.89000	5.48268	5.48268	0.556238	0.746289
0.89500	5.26305	5.26305	0.600485	0.793455
0.90000	5.02403	5.02403	0.649100	0.843197

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.90500	4.77024	4.77024	0.701313	0.894085
0.91000	4.50629	4.50629	0.756351	0.944754
0.91500	4.23665	4.23665	0.813454	0.993961
0.92000	3.96554	3.96554	0.871893	1.04063
0.92500	3.69681	3.69681	0.930977	1.08388
0.93000	3.43389	3.43389	0.990060	1.12305
0.93500	3.17973	3.17973	1.04855	1.15770
0.94000	2.93675	2.93675	1.10589	1.18761
0.94500	2.70689	2.70689	1.16160	1.21275
0.95000	2.49158	2.49158	1.21524	1.23326
0.95500	2.29176	2.29176	1.26643	1.24941
0.96000	2.10798	2.10798	1.31486	1.26157
0.96500	1.94038	1.94038	1.36027	1.27019
0.97000	1.78878	1.78878	1.40248	1.27575
0.97500	1.65274	1.65274	1.44137	1.27871
0.98000	1.53161	1.53161	1.47688	1.27956
0.98500	1.42456	1.42456	1.50902	1.27874
0.99000	1.33067	1.33067	1.53785	1.27665
0.99500	1.24894	1.24894	1.56347	1.27365
1.0000	1.17835	1.17835	1.58603	1.27005

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
1.0050	1.11788	1.11788	1.60570	1.26612
1.0100	1.06655	1.06655	1.62267	1.26208
1.0150	1.02344	1.02344	1.63713	1.25813
1.0200	0.987688	0.987688	1.64928	1.25440
1.0250	0.958527	0.958527	1.65930	1.25101
1.0300	0.935290	0.935290	1.66736	1.24807
1.0350	0.917411	0.917411	1.67361	1.24565
1.0400	0.904433	0.904433	1.67818	1.24379
1.0450	0.896015	0.896015	1.68116	1.24254
1.0500	0.891926	0.891926	1.68260	1.24192
1.0550	0.892055	0.892055	1.68256	1.24194
1.0600	0.896404	0.896404	1.68102	1.24260
1.0650	0.905094	0.905094	1.67795	1.24389
1.0700	0.918360	0.918360	1.67328	1.24578
1.0750	0.936553	0.936553	1.66692	1.24824
1.0800	0.960135	0.960135	1.65874	1.25121
1.0850	0.989678	0.989678	1.64860	1.25461
1.0900	1.02586	1.02586	1.63632	1.25836
1.0950	1.06945	1.06945	1.62171	1.26233
1.1000	1.12130	1.12130	1.60458	1.26636

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
1.1050	1.18236	1.18236	1.58474	1.27028
1.1100	1.25359	1.25359	1.56200	1.27385

1.1150	1.33603	1.33603	1.53619	1.27681
1.1200	1.43068	1.43068	1.50716	1.27883
1.1250	1.53855	1.53855	1.47482	1.27956
1.1300	1.66054	1.66054	1.43911	1.27860
1.1350	1.79748	1.79748	1.40002	1.27549
1.1400	1.95000	1.95000	1.35763	1.26977
1.1450	2.11853	2.11853	1.31204	1.26095
1.1500	2.30323	2.30323	1.26345	1.24856
1.1550	2.50391	2.50391	1.21212	1.23217
1.1600	2.72003	2.72003	1.15837	1.21140
1.1650	2.95059	2.95059	1.10258	1.18599
1.1700	3.19414	3.19414	1.04519	1.15582
1.1750	3.44872	3.44872	0.986691	1.12092
1.1800	3.71185	3.71185	0.927636	1.08154
1.1850	3.98057	3.98057	0.868623	1.03812
1.1900	4.25142	4.25142	0.810301	0.991336
1.1950	4.52052	4.52052	0.753362	0.942083
1.2000	4.78365	4.78365	0.698538	0.891448

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
1.2050	5.03632	5.03632	0.646588	0.840681
1.2100	5.27393	5.27393	0.598283	0.791150
1.2150	5.49188	5.49188	0.554393	0.744284
1.2200	5.68575	5.68575	0.515656	0.701511
1.2250	5.85141	5.85141	0.482760	0.664189
1.2300	5.98524	5.98524	0.456315	0.633544
1.2350	6.08419	6.08419	0.436829	0.610606
1.2400	6.14601	6.14601	0.424685	0.596162
1.2450	6.16924	6.16924	0.420128	0.590712
1.2500	6.15333	6.15333	0.423248	0.594445
1.2550	6.09867	6.09867	0.433983	0.607231
1.2600	6.00654	6.00654	0.452116	0.628626
1.2650	5.87906	5.87906	0.477287	0.657893
1.2700	5.71914	5.71914	0.509010	0.694044
1.2750	5.53031	5.53031	0.546692	0.735885
1.2800	5.31661	5.31661	0.589658	0.782077
1.2850	5.08242	5.08242	0.637175	0.831202
1.2900	4.83232	4.83232	0.688479	0.881826
1.2950	4.57092	4.57092	0.742798	0.932568
1.3000	4.30274	4.30274	0.799370	0.982150

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
1.3050	4.03204	4.03204	0.857456	1.02945
1.3100	3.76278	3.76278	0.916357	1.07355
1.3150	3.49849	3.49849	0.975417	1.11372
1.3200	3.24223	3.24223	1.03403	1.14948
1.3250	2.99657	2.99657	1.09163	1.18055
1.3300	2.76356	2.76356	1.14772	1.20685
1.3350	2.54474	2.54474	1.20185	1.22848
1.3400	2.34119	2.34119	1.25363	1.24568
1.3450	2.15355	2.15355	1.30272	1.25881
1.3500	1.98204	1.98204	1.34886	1.26828
1.3550	1.82659	1.82659	1.39184	1.27457
1.3600	1.68679	1.68679	1.43154	1.27816
1.3650	1.56206	1.56206	1.46787	1.27952

1.3700	1.45162	1.45162	1.50082	1.27910
1.3750	1.35455	1.35455	1.53046	1.27731
1.3800	1.26988	1.26988	1.55686	1.27453
1.3850	1.19660	1.19660	1.58016	1.27108
1.3900	1.13369	1.13369	1.60053	1.26723
1.3950	1.08015	1.08015	1.61815	1.26322
1.4000	1.03505	1.03505	1.63322	1.25925

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
1.4050	0.997518	0.997518	1.64593	1.25546
1.4100	0.966765	0.966765	1.65646	1.25200
1.4150	0.942097	0.942097	1.66499	1.24896
1.4200	0.922926	0.922926	1.67168	1.24641
1.4250	0.908769	0.908769	1.67665	1.24442
1.4300	0.899256	0.899256	1.68001	1.24302
1.4350	0.894132	0.894132	1.68182	1.24225
1.4400	0.893255	0.893255	1.68213	1.24212
1.4450	0.896592	0.896592	1.68095	1.24263
1.4500	0.904266	0.904266	1.67824	1.24376
1.4550	0.916453	0.916453	1.67395	1.24551
1.4600	0.933486	0.933486	1.66799	1.24784
1.4650	0.955802	0.955802	1.66024	1.25068
1.4700	0.983945	0.983945	1.65056	1.25398
1.4750	1.01857	1.01857	1.63878	1.25764
1.4800	1.06042	1.06042	1.62472	1.26155
1.4850	1.11033	1.11033	1.60818	1.26557
1.4900	1.16922	1.16922	1.58898	1.26951
1.4950	1.23806	1.23806	1.56692	1.27316
1.5000	1.31786	1.31786	1.54183	1.27625

Vibrațiile cupolei perfecte cu bare identice sub acțiunea unui impuls și a unei forțe concentrate în nodul central $P_c=1,32 P$ și forțe egale în restul nodurilor (fig. 5.35)

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.0378	575.2573	0.158043	435.801	8.17E-02
0.0756	1149.108	0.318487	870.5365	0.162423
0.1132	1721.463	0.481566	1304.139	0.242214
0.1508	2292.216	0.647549	1736.527	0.320944
0.1882	2861.242	0.816747	2167.607	0.398514
0.2255	3428.390	0.989522	2597.265	0.474809
0.2626	3993.480	1.166295	3025.364	0.5497
0.2997	4556.290	1.347567	3451.735	0.623033
0.3365	5116.542	1.533933	3876.168	0.694632
0.3732	5673.889	1.726108	4298.401	0.764284
0.4096	6227.886	1.924962	4718.096	0.831734
0.4458	6777.951	2.131564	5134.811	0.896671
0.4816	7323.305	2.347251	5547.958	0.958707
0.5171	7862.883	2.573711	5956.729	1.017349
0.5521	8395.178	2.81312	6359.984	1.071955
0.5865	8917.992	3.068322	6756.055	1.121666
0.6201	9427.982	3.343095	7142.411	1.165299
0.6524	9919.841	3.642504	7515.031	1.201172
0.6830	10384.75	3.973277	7867.236	1.226823
0.7108	10807.54	4.343764	8187.532	1.238624

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.7341	11162.28	4.761892	8456.275	1.231528
0.7504	11410.27	5.227531	8644.143	1.200134
0.7558	11491.26	5.521474	8705.502	1.168767
0.7571	11511.41	5.671782	8720.767	1.149588
0.7574	11516.54	5.753743	8724.652	1.138285
0.7575	11517.72	5.809481	8725.543	1.130268
0.7572	11513.13	5.942261	8722.068	1.110132
0.7539	11463.09	6.254251	8684.155	1.057413
0.7430	11296.98	6.71383	8558.316	0.967583
0.7270	11053.67	7.143234	8373.991	0.872762
0.7076	10758.32	7.546521	8150.239	0.776104
0.6858	10427.01	7.928918	7899.252	0.679148
0.6623	10070.01	8.295022	7628.798	0.582641
0.6376	9694.058	8.648529	7343.983	0.486955
0.6119	9303.752	8.992363	7048.297	0.392275
0.5855	8902.371	9.328848	6744.221	0.298695
0.5585	8492.333	9.659862	6433.585	0.206263
0.5311	8075.480	9.986948	6117.788	0.115008
0.5034	7653.269	10.3114	5797.931	2.49E-02
0.4753	7226.881	10.63434	5474.91	-6.39E-02

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.4471	6797.307	10.95672	5149.475	-0.15151
0.4186	6365.402	11.27941	4822.274	-0.23787
0.3901	5931.922	11.60317	4493.88	-0.32293
0.3616	5497.556	11.92872	4164.815	-0.40666
0.3330	5062.951	12.25672	3835.569	-0.48901
0.3044	4628.723	12.58778	3506.608	-0.56993
0.2759	4195.476	12.92249	3178.391	-0.64934
0.2475	3763.814	13.26142	2851.374	-0.72717
0.2193	3334.348	13.60512	2526.022	-0.80333
0.1912	2907.712	13.95412	2202.812	-0.87772
0.1634	2484.564	14.30893	1882.246	-0.95023
0.1359	2065.602	14.67007	1564.85	-1.02074
0.1086	1651.565	15.03804	1251.186	-1.08911
0.0818	1243.248	15.41331	941.8547	-1.15518
0.0553	841.5032	15.79635	637.5024	-1.2188
0.0294	447.2500	16.18762	338.8257	-1.27977
0.0040	61.48097	16.58752	46.57649	-1.3379
-0.0207	-314.734	16.99645	-238.435	-1.39297
-0.0447	-680.245	17.41472	-515.337	-1.44475
-0.0680	-1033.82	17.84262	-783.198	-1.493

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
-0.0904	-1374.16	18.28034	-1041.03	-1.53746
-0.1118	-1699.87	18.72798	-1287.78	-1.57786
-0.1322	-2009.54	19.18553	-1522.38	-1.61393
-0.1514	-2301.69	19.65285	-1743.71	-1.64539
-0.1693	-2574.87	20.12964	-1950.66	-1.67199
-0.1860	-2827.63	20.61547	-2142.14	-1.69347
-0.2012	-3058.6	21.10973	-2317.12	-1.7096
-0.2148	-3266.54	21.61164	-2474.65	-1.7202
-0.2269	-3450.36	22.12027	-2613.91	-1.72511
-0.2374	-3609.2	22.63458	-2734.24	-1.72424
-0.2461	-3742.41	23.1534	-2835.16	-1.71753
-0.2532	-3849.64	23.67552	-2916.39	-1.70501
-0.2585	-3930.8	24.19971	-2977.88	-1.68673
-0.2622	-3986.08	24.72474	-3019.76	-1.66283
-0.2641	-4015.91	25.24946	-3042.36	-1.63346
-0.2645	-4020.97	25.7728	-3046.19	-1.59885
-0.2632	-4002.10	26.2938	-3031.9	-1.55922
-0.2605	-3960.30	26.81164	-3000.23	-1.51482
-0.2563	-3896.65	27.3256	-2952.01	-1.46594
-0.2507	-3812.32	27.83511	-2888.12	-1.41283

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
-0.2439	-3708.49	28.33973	-2809.46	-1.35577
-0.2359	-3586.35	28.83909	-2716.93	-1.29501

-0.2267	-3447.08	29.33296	-2611.43	-1.23082
-0.2165	-3291.82	29.82118	-2493.8	-1.16341
-0.2053	-3121.64	30.30365	-2364.88	-1.09303
-0.1932	-2937.58	30.78033	-2225.44	-1.01987
-0.1802	-2740.61	31.25126	-2076.22	-0.94412
-0.1665	-2531.66	31.71646	-1917.92	-0.86597
-0.1520	-2311.56	32.17605	-1751.18	-0.78556
-0.1369	-2081.12	32.63011	-1576.6	-0.70306
-0.1211	-1841.06	33.07877	-1394.74	-0.61859
-0.1047	-1592.07	33.52218	-1206.12	-0.53228
-0.0878	-1334.79	33.96047	-1011.2	-0.44423
-0.0704	-1069.79	34.39379	-810.447	-0.35456
-0.0525	-797.62	34.82231	-604.257	-0.26336
-0.0341	-518.779	35.24616	-393.014	-0.1707
-0.0154	-233.731	35.66552	-177.069	-7.67E-02
0.0038	57.09122	36.08052	43.25093	1.87E-02
0.0232	353.2899	36.49131	267.6439	0.11525
0.0430	654.4933	36.89805	495.8282	0.213008

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.0632	960.3558	37.30087	727.5423	0.311895
0.0836	1270.556	37.6999	962.5423	0.411863
0.1042	1584.793	38.09529	1200.601	0.512865
0.1251	1902.787	38.48716	1441.505	0.614862
0.1463	2224.275	38.87563	1685.057	0.717817
0.1676	2549.01	39.26082	1931.069	0.821694
0.1892	2876.763	39.64285	2179.366	0.926464
0.2109	3207.315	40.02182	2429.784	1.032096
0.2329	3540.462	40.39784	2682.168	1.138564
0.2549	3876.009	40.771	2936.371	1.245844
0.2771	4213.776	41.14142	3192.254	1.353914
0.2995	4553.587	41.50917	3449.687	1.462752
0.3220	4895.279	41.87435	3708.544	1.572339
0.3445	5238.695	42.23704	3968.709	1.682657
0.3672	5583.687	42.59732	4230.066	1.79369
0.3900	5930.113	42.95527	4492.51	1.905422
0.4129	6277.838	43.31097	4755.938	2.017838
0.4358	6626.73	43.66448	5020.25	2.130925
0.4589	6976.667	44.01587	5285.354	2.24467
0.4819	7327.528	44.36521	5551.158	2.359061

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UZ uz1	3 UZ uz3	9 UZ uz9	10 UZ uz10
0.5051	7679.199	44.71256	5817.575	2.474086
0.5282	8031.569	45.05797	6084.522	2.589734
0.5514	8384.532	45.4015	6351.918	2.705994
0.5747	8737.985	45.74321	6619.686	2.822857
0.5980	9091.83	46.08314	6887.75	2.94031
0.6213	9445.969	46.42134	7156.037	3.058346
0.6446	9800.31	46.75787	7424.477	3.176953
0.6679	10154.76	47.09275	7693.003	3.296121
0.6912	10509.24	47.42603	7961.548	3.415841
0.7145	10863.66	47.75774	8230.049	3.536101
0.7378	11217.95	48.08793	8498.444	3.656891
0.7576	11518.66	48.36719	8726.256	3.759886