

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ

PANTELE CHELU

**CONTRIBUȚII LA STUDIUL
DINAMICII PLĂCII
TERMOELASTICE/
VÂSCOELASTICE**

TEZĂ DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA”
TIMIȘOARA

ISLH
vol: 620.903
366 104

Conducător științific: Prof. dr. ing. IONEL DOBRE

TIMIȘOARA
1998

CUPRINS

PREFAȚĂ	6
CAPITOLUL I	9
DINAMICA PLĂCII SUBȚIRI TERMOELASTIC LAMINATĂ	9
1.1. Stadiul actual al problemei	9
1.2. Ecuațiile dinamicii termoelasticității neliniare	11
1.3. Ecuațiile dinamicii termoelasticității liniare	12
1.4. Considerații generale privind placa subțire termoelastic laminată	14
1.5. Caracterizarea problemei mixte a dinamicii plăcii subțiri termoelastic laminată cu ajutorul deplasărilor și a temperaturii	29
1.6. Formularea problemei dinamice cu ajutorul produsului de convoluție	31
1.7. Caracterizarea problemei mixte a dinamicii plăcii subțiri liniar termoelastic laminată cu ajutorul tensiunii și a fluxului de căldură	33
1.8. Formularea variațională cu ajutorul produsului de convoluție	35
1.9. Existență și unicitate în dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată	41
1.10. Principii de minimum în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	51
1.10.1. Introducere	51
1.10.2. Problema mixtă a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	52
1.10.3. Principiul de staționaritate și principiul de minim în transformata Laplace	53
1.10.4. Principii de minim via funcții de pondere în domeniul timpului	57
CAPITOLUL II	62
PROPAGAREA UNDELOR ÎNTR-O PLACĂ SUBȚIRE TERMOELASTIC LAMINATĂ	62
2.1. Stadiul actual al problemei	62
2.2. Propagarea undelor de șoc într-o placă subțire liniar termoelastic laminată	64

2.2.1. Unda de șoc. Condiția de compatibilitate cinematică. Condiția de propagare	64
2.2.2. Variația intensității saltului undei de șoc	67
2.3. Propagarea undelor de accelerație într-o placă subțire liniar termoelastic laminată	72
2.3.1. Unda de accelerație. Condiția de propagare	72
2.3.2. Variația intensității saltului undei de accelerație	74
2.4. Propagarea undelor armonice plane într-o placă subțire liniar termoelastic laminată	78
CAPITOLUL III	82
DINAMICA PLĂCII SUBȚIRI LINIAR VÂSCOELASTIC LAMINATĂ	82
3.1. Stadiul actual al problemei	82
3.2. Ecuațiile de bază ale dinamicii vâscoelasticității liniare	84
3.3. Considerații generale privind placa subțire vâscoelastic liniar laminată	86
3.4. Formularea în deplasări a problemei dinamice a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	93
3.5. Teoreme de reciprocitate în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	94
3.6. Formularea variațională cu ajutorul produsului de convoluție	97
3.6.1. Stadiul actual al problemei	97
3.6.2. Formularea variațională	97
3.7. Existență și unicitate a soluției în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	100
3.7.1. Stadiul actual al problemei	100
3.7.2. Ecuații de bază	101
3.7.3. Formularea variațională	102
3.7.4. Teorema de existență și unicitate	105
3.8. Principii de minimum în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	121
3.8.1. Stadiul actual al problemei	121
3.8.2. Problema mixtă a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată	121
3.8.3. Principiul de staționaritate și principiul de minim în transformata Laplace	122

3.8.4. Principii de minim via funcții pondere în domeniul timpului	125
3.9. Răspunsul dinamic al unei plăci vâscoelastice utilizând transformatele integrale "EC" și "ES"	128
3.9.1. Stadiul actual al problemei	128
3.9.2. Transformatele integrale "EC" și "ES"	128
3.9.3. Ecuațiile de mișcare	130
3.9.4. Utilizarea transformatelor integrale "EC" și "ES" pentru aflarea răspunsului dinamic al plăcii	134
CAPITOLUL IV	141
PROPAGAREA UNDELOR ÎNTR-O PLACĂ SUBȚIRE VÂSCO-ELASTIC LAMINATĂ	141
4.1. Stadiul actual al problemei	141
4.2. Propagarea undelor de șoc într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată	143
4.2.1. Unda de șoc. Condiția de propagare	143
4.2.2. Variația intensității saltului undei de șoc	145
4.3. Propagarea undelor de accelerație într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată	149
4.3.1. Unda de accelerație. Condiția de propagare	149
4.3.2. Variația intensității saltului undei de accelerație	151
CAPITOLUL V	155
REZULTATE NUMERICE ȘI DISCUȚII	155
CAPITOLUL VI	179
OBSERVAȚII. CONTRIBUȚII. CONCLUZII	179
BIBLIOGRAFIE	183

PREFAȚĂ

Necesități de ordin practic au condus la înlocuirea diferitelor materiale clasice cu materiale moderne care posedă caracteristici tehnico-funcționale și economice superioare, având o largă întrebuințare în domeniile construcțiilor de mașini, civile, industriale, marine, aerospațiale, sportive, etc.

Aceste materiale trebuie să aibă unele trăsături definitorii cum ar fi : durată mare de funcționare, ușoare din punct de vedere ale greutateii specifice, rezistente din punct de vedere mecanic, ușor de prelucrat, anticorozive, neinflamabile și cu rezistență mare la agenții atmosferici și biologici. O astfel de clasă de materiale o reprezintă **materialele compozite**.

Domeniul materialelor compozite a cunoscut în ultimii ani o adevărată revoluție, iar competiția care opune materialele compozite materialelor tradiționale are deja o vechime apreciabilă.

Un material compozit este definit ca un material compus din unul sau mai mulți constituenți, combinați într-un astfel de mod încât să producă una sau mai multe proprietăți superioare celor ale fiecăruia dintre constituenți.

Anizotropia mare a materialelor compozite, le permite să fie utilizate optimal în diferite structuri.

Materialele compozite se împart în următoarele tipuri:

a) cu particule (whiskersuri ceramice, whiskersuri metalice)

b) cu fibre (sticlă, kelvar, carbon, bor) $\left\{ \begin{array}{l} \text{-lungi} \\ \text{-scurte} \end{array} \right.$

Fibrele au diametre cuprinse între 5 și 15 micrometri. După modul de orientare a fibrelor materialele compozite pot fi:

- unidirecționale (fibre orientate având aceeași direcție în spațiu)
- bidimensionale (țesătură)
- tridimensionale (fibre orientate după mai multe direcții în spațiu)

Fibrele care intră în componența unui material compozit pot fi:

- fibre organice : in, cânepă, bumbac, paie, lemn;
- fibre minerale : de sticlă, carbon sau grafit;
- fibre sintetice : poliesteri (trevira, diolen), polietilenă (fabrene), poliamide (pealon, nylon), poliacrilitril (dralon), aramide (kelvar);
- fibre de azbest : crisotil (silicați de magneziu hidrați), crocidolitul (silicați de sodiu și fier), arnositul (silicați de magneziu și de fier) - rezistente la temperaturi mari.

Matricea reprezintă materialul care leagă fibrele într-un mediu continuu numit material compozit. Matricea are rolul de a fixa fibrele în cadrul materialului compozit. Principalele materiale folosite ca matrice sunt rășiniile și aliajele metalice cum ar fi:

- rășini epoxidice {
 - convenționale (tip glicidil)
 - epoxi - fenol - novolac
 - cicloalifatic
- rășini fenolice
- rășini poliesterice
- rășini siliconice
- poliamidele

Această lucrare conține noi rezultate în dinamica materialelor compozite și în particular a plăcilor subțiri laminate.

Pentru materialele compozite, influența temperaturii asupra comportamentului acestora este adesea spectaculoasă.

Studiul dinamicii plăcii subțiri elastic laminată ținând cont de influența temperaturii este realizat în capitolele I și II.

Adesea, materialele compozite și în particular cele compuse dintr-o matrice organică, prezintă un comportament vâscoelastic mai mult sau mai puțin pronunțat. Când structura este făcută dintr-un material vâscoelastic, problema devine mult mai complicată întrucât ecuația de mișcare se transformă într-o ecuație integro-diferențială față de o ecuație diferențială în cazul elastic.

Studiul dinamicii plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată considerând că răspunsul global al fiecărei lamine ascultă de o lege liniar vâscoelastică de tip Boltzman este prezentat în cuprinsul capitolelor III și IV.

Pornind de la aceste considerații globale, am structurat teza pe șase capitole principale.

În capitolul I, s-a efectuat un studiu asupra dinamicii plăcii subțiri termoelastic laminată. S-au stabilit ecuațiile care guvernează dinamica plăcii, s-au dat formulări variaționale, s-a stabilit o teoremă de existență și unicitate, precum și principii de extremum dinamic atât în domeniul transformatei Laplace cât și în domeniul timpului.

Capitolul II este în totalitate dedicat propagării undelor într-o placă subțire liniar termoelastic laminată de extindere infinită. Sunt studiate undele de șoc, undele de accelerație și undele armonice.

În capitolul III este realizat un studiu privind dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată. Considerând că laminele sunt omogene și ortotrope, iar legea constitutivă este de tip Boltzmann se construiește o teorie de ordinul întâi a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată. Și aici sunt obținute ecuațiile care guvernează mișcarea plăcii, sunt date anumite formulări variaționale, se studiază existența și unicitatea soluției și sunt stabilite principii de extremum dinamic atât în domeniul transformatei Laplace cât și în domeniul timpului. Utilizând transformatele integrale "EC" și "ES" introduse de autor se prezintă modul de aflare a răspunsului dinamic al unei plăci subțiri liniar vâscoelastică.

Capitolul IV este de asemenea dedicat în totalitate propagării undelor, dar de această dată într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată. Și aici sunt studiate atât undele de șoc, cât și cele de accelerație.

Capitolul V este consacrat prezentării unor rezultate numerice.

Capitolul VI este destinat expunerii și comentării principalelor rezultate obținute în cadrul prezentei teze de doctorat.

DINAMICA PLĂCII SUBȚIRI TERMOELASTIC LAMINATĂ

1.1. Stadiul actual al problemei.

În contrast cu abundența de literatură asupra problemelor dinamice pur mecanice ale plăcilor compozite, se pare că teorii dinamice în care efectele termice să fie incluse sunt mult mai puține.

Teoria dinamică a plăcii subțiri liniar termoelastic laminată se bazează pe cuplarea câmpurilor de deformație și temperatură.

O serie de studii, au utilizat teorii bidimensionale ale plăcii pentru predicția răspunsului dinamic termo-mecanic. Dintre autorii acestor studii amintim: Zorski și Lyons [1962], Anderso și Mowbray [1969], McQuillen și Brull [1970], Inan [1972], Deresiewici [1975], Ibănescu [1982], etc.

Unul dintre primele studii privind vibrațiile induse termic, este lucrarea lui Boley și Barber [1957], în care s-a examinat răspunsul dinamic al barelor și plăcilor simplu rezemate cărora le sunt aplicate diferite șocuri de încărcare termică. Se pune în evidență importanța inerției de rotație în cazul încălzirii rapide a structurilor cu pereți subțiri.

Studii privind vibrațiile induse de temperatură în plăci și învelișuri izotrope pot fi găsite în lucrările lui Stroud și Mayers [1971], Čukič [1972], Jadejda și Loo [1974], Zak și Drysdale [1976], Biswas [1977,1978], Irie și Yamada [1978], Massalas, Dalamangas și Tzivanidis [1982], Das [1983], Chebotarevșchii și Yagubova [1985], Krys'ko, Guba și Fomin [1986], etc.

Deși puțin studiat, în ultimul timp o atenție specială îi este acordată răspunsului dinamic indus prin șoc termic, al plăcilor și învelișurilor anizotrope. Șocurile termice tranzitorii pot schimba caracteristicile vibratorii și este posibil ca o structură care este stabilă sub o încărcare dată să poată deveni instabilă datorită prezenței tensiunilor termice tranzitorii.

Astfel, Kao și Pao [1976] au studiat comportarea la deflexie a unei plăci compozit transversal laminată simetrică și simplu rezemată supusă la șoc termic. Zak și Drysdale [1976] au studiat efectul asupra tensiunilor termice induse printr-o încărcare sinusoidală staționară. Bisvas [1977] a investigat vibrațiile unei plăci ortotrope transversal laminată simetrică așezată pe o fundație elastică, căreia i se aplică un șoc termic.

Tratând temperatura în placă ca un câmp variabil în timp și spațiu stocastic-dependent de spațiu, Tauchert [1987] a investigat vibrațiile termice în plăci laminate. De asemenea, Tauchert [1989, 1990] a examinat comportarea la șoc termic a plăcilor ortotrope transversal laminate simetrice având două margini paralele simplu rezemate, iar Huang și Tauchert [1991] au studiat comportarea vibrațională a plăcilor dublu curbate transversal laminate simetrice și antisimetrice, simplu rezemate și supuse la șoc termic. Liu și Huang [1996] au prezentat un studiu privind analiza vibrațiilor plăcilor compozite laminate supuse la schimbări de temperatură utilizând teoria deformațiilor de forfecare de ordinul întâi. În deformații sunt considerați termenii neliniari din teoria von Kármán; astfel pe baza elementului finit se obțin ecuații neliniare cuplate conținând deplasările în plan, deflexia, precum și unghiurile de rotație. Sunt calculate frecvențele de vibrație ale unei plăci transversal laminată simetrică. Negishi și Hirashima [1997] au formulat o teorie aproximativă de ordin superior pentru analiza comportării statice și dinamice a structurilor laminate cu alunecare interlaminară.

Determinarea răspunsului dinamic al învelișurilor cilindrice armate, la o încărcare termică (șoc termic), a fost studiată de Birman [1990].

Alte studii au fost axate pe problema propagării undelor în plăci termoelastice (de exemplu referințele: Chadwick [1962], Deresiewich [1975], Massalas [1986], Massalas și Kalpakidis [1987], etc.).

Analiza comportării termo-mecanice în dinamica plăcii subțiri poate fi importantă în multe probleme de inginerie mecanică multidisciplinară.

În acest capitol va fi studiată dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată. Se stabilesc mai întâi ecuațiile de mișcare, condițiile la limită și condițiile inițiale. Apoi, se dau diferite formulări variaționale, teoreme de existență și unicitate, precum și teoreme de minim.

1.2. Ecuațiile dinamicii termoelasticității neliniare.

Fie \mathcal{B} un corp continuu elastic care în configurația de referință este un subdomeniu \mathcal{B}_0 al spațiului euclidian tridimensional \mathbf{R}^3 . Prin \mathcal{B}_0 exprimăm interiorul acestui domeniu a cărui frontieră este $\partial\mathcal{B}_0$. Se consideră de asemenea un sistem de axe carteziane rectangulare Ox_i ($i=1,2,3$).

Ecuațiile fundamentale ale dinamicii termoelasticității neliniare folosind descrierea lagrangeiană a deformării (vezi Ieșan [1979]) sunt:

– ecuațiile de mișcare

$$(1.2.1) \quad T_{K_i,K} + \rho_0 f_i = \rho_0 \ddot{u}_i \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

– ecuația energiei

$$(1.2.2) \quad \rho_0 T \dot{\eta} = Q_{L,L} + \rho_0 r \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

– ecuațiile constitutive

$$(1.2.3) \quad \sigma = \sigma(E_{ij}, T, X_s) \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.2.4) \quad T_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,s} + \delta_{i,s}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial E_{js}} + \frac{\partial \sigma}{\partial E_{sj}} \right) \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.2.5) \quad \eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.2.6) \quad Q_i = Q_i(E_{mn}, T, T_j, X_s) \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

– ecuațiile geometrice

$$(1.2.7) \quad 2E_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{s,i}u_{s,j} \quad \text{pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

unde au fost utilizate notațiile: X_K – coordonate materiale; t – timpul; $u_i(X_j, t)$ – componentele vectorului deplasare; $E_{ij}(X_s, t)$ – componentele vectorului de deformare lagrangeian; $T_{ij}(X_s, t)$ – componentele tensorului Piola – Kirchhoff de prima specie; $Q_i(X_s, t)$ – vectorul flux de căldură măsurat pe unitatea de arie din corpul nedeformat, față de reperul considerat; σ – energia liberă pe unitatea de volum inițial; $\rho_0(X)$ – densitatea de masă în configurația de referință; f_i – componentele forțelor de volum pe unitatea

de masă; $\eta(X, t)$ – entropia pe unitatea de masă; $r(X, t)$ – debitul surselor de căldură pe unitatea de masă; T – temperatura absolută.

La ecuațiile fundamentale (1.2.1)–(1.2.8) se adaugă condiții inițiale și condiții frontieră ale corpului considerat.

– Condițiile inițiale:

$$(1.2.8) \quad u_i(X, 0) = u_i^0(X), \quad \dot{u}_i^0(X, 0) = v_i^0(X), \quad \eta(X, 0) = \eta_0(X), \quad X \in \bar{B}_0,$$

unde u_i^0, v_i^0 și η_0 sunt funcții prescrise, continue pe \bar{B}_0 .

– Condițiile pe frontieră:

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \text{ pe } \partial B_{ou} \times [0, t_0), \quad T_{ij}n_j = \bar{T} \text{ pe } \partial B_{o\sigma} \times [0, t_0); \\ T &= \bar{T} \text{ pe } \partial B_{o\theta} \times [0, t_0), \quad Q_i n_i = \bar{Q} \text{ pe } \partial B_{oq} \times [0, t_0), \end{aligned}$$

unde

$$(1.2.10) \quad \partial B_{ou} \cup \partial B_{o\sigma} = \partial B_{o\theta} \cup \partial B_{oq} = \partial B_0, \quad \partial B_{ou} \cap \partial B_{o\sigma} = \partial B_{o\theta} \cap \partial B_{oq} = \Phi$$

și cu Φ mulțimea vidă.

Condiția de convecție are forma

$$(1.2.11) \quad Q_i n_i = \bar{h}(T - T_e) \text{ pe } \partial B_0 \times [0, t_0),$$

unde T_e este temperatura mediului înconjurător, iar $\bar{h}(\geq 0)$ este coeficientul de transfer de căldură.

1.3. Ecuațiile dinamicii termoelasticității liniare.

Teoria dinamică a termoelasticității liniare este caracterizată de ecuațiile (Ieșan [1979]):

– ecuațiile de mișcare

$$(1.3.1) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \text{ pe } B_0 \times [0, t_0),$$

– ecuația energiei

$$(1.3.2) \quad \rho T_0 \dot{\eta} = q_{i,i} + \rho r, \text{ pe } B_0 \times [0, t_0),$$

– ecuațiile constitutive

$$(1.3.3) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \text{ pe } B_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.3.4) \quad \rho\eta = \beta_{ij}\epsilon_{ij} + a\theta, \text{ pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.3.5) \quad q_i = k_{ij}\theta_{,j}, \text{ pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

– relațiile cinematice

$$(1.3.6) \quad 2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \text{ pe } \mathcal{B}_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.3.7) \quad \theta = T - T_0,$$

unde au fost utilizate următoarele notații: ρ – densitate de masă constantă; T_0 – temperatura absolută constantă a corpului în starea lui de referință; T – temperatura absolută; θ – variația temperaturii măsurată de la temperatura stării de referință; u_i – componentele vectorului deplasare; ϵ_{ij} – componentele vectorului deformație; σ_{ij} – componentele tensorului tensiune ale lui Cauchy; q_i – componentele vectorului flux de căldură; f_i – componentele forțelor de volum; r – radiația căldurii pe unitatea de masă a volumului inițial; C_{ijkl} , β_{ij} , a , k_{ij} – funcții de material; ele satisfac relațiile de simetrie

$$(1.3.8) \quad C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}.$$

Inegalitatea entropiei implică

$$(1.3.9) \quad k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j} \geq 0,$$

unde k_{ij} sunt componentele tensorului conductivității termice.

La ecuațiile (1.3.1)–(1.3.7) sunt adăugate:

– condițiile inițiale

$$(1.3.10) \quad u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(x, 0) = v_i^0(x), \quad \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad x \in \bar{\mathcal{B}}_0$$

și

– condițiile pe frontieră

$$(1.3.11) \quad u_i = \bar{u}_i \text{ pe } \partial\mathcal{B}_{ou} \times [0, t_0),$$

$$(1.3.12) \quad \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \text{ pe } \partial\mathcal{B}_{o\sigma} \times [0, t_0),$$

$$(1.3.13) \quad \theta = \bar{\theta} \text{ pe } \partial\mathcal{B}_{o\theta} \times [0, t_0).$$

$$(1.3.14) \quad q_i n_i = \bar{q} \text{ pe } \partial B_{oq} \times [0, t_0).$$

În relațiile anterioare $u_i^0, v_i^0, \eta_0, \bar{u}_i, \bar{p}_i, \bar{\theta}$ și \bar{q} sunt funcții prescrise, iar $\partial B_{ou}, \partial B_{o\sigma}, \partial B_{o\theta}$ și ∂B_{oq} sunt submulțimi ale lui ∂B_0 – frontiera lui B_0 , astfel că

$$(1.3.15) \quad \begin{aligned} \partial B_{ou} \cup \partial B_{o\sigma} &= \partial B_{o\theta} \cup \partial B_{oq} = \partial B_0, \\ \partial B_{ou} \cap \partial B_{o\sigma} &= \partial B_{o\theta} \cap \partial B_{oq} = \Phi. \end{aligned}$$

Se mai fac următoarele presupuneri asupra proprietăților materialului

$$(1.3.16) \quad \rho > 0, \quad T_0 > 0, \quad a > 0,$$

$$(1.3.17) \quad C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq \alpha \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}, \quad \alpha > 0, \quad \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji},$$

$$(1.3.18) \quad k_{ij} \eta_i \eta_j \geq \gamma \eta_i \eta_i, \quad \gamma > 0, \quad \forall \eta_i.$$

1.4. Considerații privind placa subțire termoelastic laminată.

Aici, vom prezenta unele considerații privind placa subțire termoelastic laminată, în general urmând lucrarea lui Chelu [1995a].

Vom considera o placă formată din N lamine astfel că la scară microscopică, global fiecare lamină are o comportare termoelastică.

Laminele le presupunem perfect lipite, astfel că nu este posibilă alunecarea uneia față de alta.

Placa laminată este considerată un corp continuu cu răspuns global la solicitările exterioare, ceea ce presupune continuitatea deplasărilor. Facem de asemenea presupunerile (vezi Cristescu [1983]):

–placa compozit este subțire și de grosime h în timpul procesului de deformare;

–laminele sunt unidirecțional orientate;

–laminele au o comportare termoelastic ortotropă, cu axe naturale distincte de la o lamină la alta a plăcii;

–legătura între lamine este suficient de subțire astfel ca geometria plăcii să nu fie alterată și inerția legăturii să poată fi neglijată;

-deplasările u, v, w după direcțiile x, y, z sunt mici comparativ cu h și sunt funcții liniare de coordonata z ;

-deformațiile specifice $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ sunt mici comparativ cu unitatea;

-termenii neliniari în ecuațiile fundamentale sunt neglijați cu excepția produselor între tensiuni și panta plăcii;

-normala la suprafața medie a plăcii nu trebuie să rămână perpendiculară pe planul mediu deformat ca în cazul teoriei Love-Kirchhoff (proprietățile de material distincte ale straturilor constituente dau microrotații distincte în straturi cu materiale diferite și în consecință presupunerea că suprafața plană rămâne plană după deformare, nu este valabilă (vezi Sun, Gilmore și Koh [1972])).

Adoptarea presupunerii cinematice Love-Kirchhoff din teoria clasică a plăcii elastic laminată cu neglijarea efectelor deformației de forfecare și a inerției de rotație conduce la o teorie inadecvată a plăcii compozit (conform Ashton și Whitney [1970]).

În plus la încărcările mecanice, placa este supusă la o distribuție de temperatură $\theta(x, y, z, t)$ care este măsurată dintr-o stare de referință a unui câmp de temperatură uniformă T_0 în care placa nu are nici o tensiune sau deformație.

Pentru câmpul deplasărilor plăcii adoptăm relațiile:

$$(1.4.1) \quad \begin{aligned} u &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ v &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ w &= w(x, y, t). \end{aligned}$$

Într-un sistem natural de coordonate, ecuațiile constitutive pentru o lamină corespunzând termoelasticității liniar ortotrope sunt

$$(1.4.2) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \theta.$$

unde notațiile contractate sunt utilizate astfel: $\{11\} \rightarrow \{1\}$, $\{22\} \rightarrow \{2\}$, $\{33\} \rightarrow \{3\}$, $\{23\} \rightarrow \{4\}$, $\{31\} \rightarrow \{5\}$, $\{12\} \rightarrow \{6\}$.

Deoarece placa este presupusă subțire, putem utiliza ipoteza standard că tensiunea normală σ_3 este nulă, iar tensiunile de forfecare transversală se anulează pe suprafața superioară și inferioară a plăcii.

Considerând $\sigma_3 = 0$, din relația (1.4.2) obținem pentru ϵ_3 expresia

$$(1.4.3) \quad \epsilon_3 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\epsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\epsilon_2 + \frac{\beta_3}{C_{33}}\theta,$$

care substituită în relațiile (1.3.2) conduce la scrierea acestora astfel

$$(1.4.4) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \theta,$$

unde $Q_{ij} = C_{ij} - (C_{i3}C_{j3}/C_{33})$ reprezintă rigiditățile reduse, iar $\tilde{\beta}_i = \beta_i - (C_{i3}/C_{33})\beta_3$ dacă $i = 1, 2$.

În raport cu un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$ având planul xOy coincidând cu planul mediu al plăcii și axa Oz perpendiculară pe aceasta, ecuațiile constitutive pentru o lamină au forma

$$(1.4.5) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 2\bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 2\bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 2\bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{44} & 2\bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{45} & 2\bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \theta,$$

unde \bar{Q}_{ij} sunt componentele tensorului rigidităților transformate \bar{Q} . Expresia lui \bar{Q} este dată de relația

$$(1.4.6) \quad \{\bar{Q}\} = [T]^{-1}[Q][T],$$

unde $[T]$ este matricea de transformare, iar $\bar{\beta}_i$ sunt elemente ale vectorului $\{\bar{\beta}\} = \{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_6 0 0\}^T$ obținut din relația

$$(1.4.7) \quad \{\bar{\beta}\} = [T]^{-1}\{\tilde{\beta}\}.$$

În relațiile (1.4.6) și (1.4.7), $[T]$ reprezintă matricea transformării de la sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ la sistemul de coordonate $Oxyz$ și are forma

$$(1.4.8) \quad [T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn & 0 & 0 \\ n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ -mn & mn & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix},$$

cu $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$ și θ unghiul dintre orientarea fibrei și axa Ox .

Teoria gradientilor mici ai deplasării și teoria lui Von Kármán pentru plăci pot fi unificate utilizând următoarele relații deformație-deplasare:

$$(1.4.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\chi\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \chi\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{aligned}$$

unde χ ia valorile „0” pentru teoria gradientilor mici ai deplasării și „1” pentru teoria lui Von Kármán.

Relațiile (1.4.1) se mai pot scrie

$$(1.4.10) \quad \{u\} = \{u^0\} + z\{u^1\},$$

unde

$$(1.4.11) \quad \{u\} = [u \ v \ w]^T, \quad \{u^0\} = [u^0 \ v^0 \ w]^T, \quad \{u^1\} = [\psi_x \ \psi_y \ 0]^T,$$

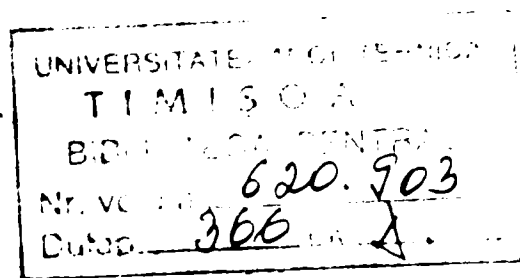
u^0 , v^0 și w – componentele deplasării planului mediu al plăcii, ψ_x și ψ_y – unghiurile rotațiilor respectiv față de axele Oy și Ox .

Ținând cont de relațiile (1.4.10) și (1.4.11), relațiile (1.4.9) devin

$$(1.4.12) \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T.$$



$$\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 \gamma_{xy}^0 \gamma_{yz}^0 \gamma_{zx}^0\}^T,$$

$$\{k\} = \{k_x k_y k_{xy} 0 0\}^T,$$

$$(1.4.13) \quad \{\varepsilon^0\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right\}^T +$$

$$+ \chi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} 0 0 \right\}^T,$$

$$\{k\} = \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} 0 0 \right\}^T,$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}.$$

Notăm cu $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{R})$ mulțimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente reale și considerăm operatorul $L: \mathcal{M}_{31}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{83}(\mathbf{R})$ definit prin relația

$$(1.4.14) \quad L(\{a\}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

unde $\{a\} = \{a_1 a_2 a_3\}^T$, $a_i \in \mathbf{R}$. Se observă că relațiile (1.4.13)₄ și (1.4.13)₅ se pot scrie condensat sub forma

$$(1.4.15) \quad \{e\} = ([D] + [S])\{U\} + \chi L([F]\{U\})[G]\{U\},$$

unde

$$(1.4.16) \quad \{e\} = \{\varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 \gamma_{xy}^0 \gamma_{yz}^0 \gamma_{zx}^0 k_x k_y k_z\}^T,$$

$$(1.4.17) \quad \{U\} = \{u_0 v_0 w \psi_x \psi_y\}^T,$$

iar $[D]$, $[S]$, $[F]$, și $[G]$ sunt operatori matriceali definiți astfel:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T.$$

$$(1.4.18) \quad [S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$[\mathcal{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propoziția 1.4.1. Pentru oricare doi vectori $\{a\}, \{b\} \in C_1(\mathbf{R})$ are loc relația

$$(1.4.19) \quad L([\mathcal{F}]\{a\})[\mathcal{G}]\{b\} = L([\mathcal{G}]\{b\})[\mathcal{F}]\{a\}.$$

Demonstrație. Propoziția rezultă imediată dacă se efectuează calculele în cei doi membri ai lui (1.4.19). ■

Cum ecuația constitutivă (1.4.5) pentru lamina k se mai poate scrie

$$(1.4.20) \quad \{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k - \{\bar{\beta}\}_k \theta_k,$$

unde $\{\sigma\}_k = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}\}_k^T$, $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx}\}_k^T$ și $\{\bar{\beta}\}_k = \{\bar{\beta}_1 \ \bar{\beta}_2 \ \bar{\beta}_6 \ 0 \ 0\}_k^T$, atunci forțele rezultante de membrană N_x, N_y, N_{xy} , momentele rezultante de încovoiere M_x, M_y, M_{xy} și forțele de forfecare transversale rezultante Q_y și Q_x corespunzătoare ale plăcii sunt date de relațiile

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 2\bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 2\bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 2\bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \times \right. \\ &\quad \left. \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_k - \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_6 \end{Bmatrix}_k \theta_k \right) dz, \end{aligned}$$

$$(1.4.21) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 2\bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 2\bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 2\bar{Q}_{22} \end{bmatrix}_k \times \right.$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\}_k - \left\{ \begin{array}{c} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_6 \end{array} \right\}_k \theta_k) dz,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} Q_y \\ Q_x \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{array} \right\} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\begin{array}{cc} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}_k dz.$$

Introducând notațiile

$$(1.4.22) \quad \{\Sigma\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ Q_y \ Q_x \ M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T;$$

$$(1.4.23) \quad (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1, z, z^2) (\bar{Q}_{ij})_k dz;$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}; \quad [H] = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix};$$

$$(1.4.24) \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix};$$

$$[O_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad [A_1] = \begin{bmatrix} [A] & [O_1] \\ [O_1]^T & [H] \end{bmatrix};$$

$$[B_1] = [[B] \ [O_1]]^T; \quad [C] = \begin{bmatrix} [A_1] & [B_1] \\ [B_1]^T & [D] \end{bmatrix},$$

considerând pentru temperatura relativă θ dezvoltarea

$$(1.4.25) \quad \theta(x, y, z, t) = \theta^0(x, y, t) + z\theta^1(x, y, t)$$

și utilizând notațiile

$$\{\theta\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta^0 \\ \theta^1 \end{array} \right\}; \quad b_i^0 = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{\beta}_i)_k dz \quad (i = 1, 2, 6);$$

$$(1.4.26) \quad \begin{aligned} b_i^1 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z (\bar{\beta}_i)_k dz \quad (i = 1, 2, 6); \\ b_i^2 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 (\bar{\beta}_i)_k dz \quad (i = 1, 2, 6); \end{aligned}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} b_1^0 & b_2^0 & b_6^0 & 0 & b_1^1 & b_2^1 & b_6^1 \\ b_1^1 & b_2^1 & b_6^1 & 0 & b_1^2 & b_2^2 & b_6^2 \end{bmatrix},$$

obținem următoarea ecuație constitutivă pentru placa subțire termoelastic laminată:

$$(1.4.27) \quad \{\Sigma\} = [C]\{e\} - [b]\{\theta\}.$$

Vom considera acum η ca fiind dat de relația

$$(1.4.28) \quad \eta(x, y, z, t) = \eta^0(x, y, t) + z\eta^1(x, y, t)$$

și vom introduce notațiile:

$$(1.4.29) \quad a^i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i a dz = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} z^i a_k dz \quad (i = 0, 1, 2);$$

$$(1.4.30) \quad \bar{\rho}_i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i \rho dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^i \rho_k dz \quad (i = 0, 1, 2);$$

$$(1.4.31) \quad \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{Bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 \\ a^1 & a^2 \end{bmatrix}; \quad [R_1] = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_0 & \bar{\rho}_1 \\ \bar{\rho}_1 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix}.$$

Integrând ecuația (1.4.4) în raport cu z de la $-h/2$ la $h/2$, apoi înmulțind aceeași ecuație cu z și integrând după z între aceleași limite ecuația ce rezultă, obținem a doua ecuație constitutivă matricială

$$(1.4.32) \quad [R_1]\{\eta\} = [b]^T\{e\} + [a]\{\theta\}.$$

Ținând cont că trecând de la coordonatele naturale (x_1, x_2, x_3) la coordonatele globale (x, y, z) pentru vectorul flux de căldură \mathbf{q} și gradientul temperaturii avem relațiile

(1.4.33)

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \theta_{,x} \\ \theta_{,y} \\ \theta_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta_{,1} \\ \theta_{,2} \\ \theta_{,3} \end{Bmatrix}.$$

Pentru cazul ortotrop (conform lui Borș [1970], p. 27), tensorul conductivității într-un sistem de coordonate natural $Ox_1x_2x_3$ este dat de

$$(1.4.34) \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Între tensorul conductivității transformate $[\bar{k}]$ și tensorul conductivității $[k]$ există relația

$$(1.4.35) \quad [\bar{k}] = [r_\theta]^T [k] [r_\theta],$$

unde:

$$(1.4.36) \quad [\bar{k}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & 0 \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} \end{bmatrix}; \quad [r_\theta]^T = \begin{bmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pe baza relațiilor (1.4.35) și (1.4.36) se obțin elementele \bar{k}_{ij} ale tensorului conductivității transformate \bar{k} :

$$(1.4.37) \quad \begin{aligned} \bar{k}_{11} &= m^2 k_{11} + n^2 k_{22}; & \bar{k}_{22} &= n^2 k_{11} + m^2 k_{22}; \\ \bar{k}_{33} &= k_{33}; & \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = mn(k_{22} - k_{11}). \end{aligned}$$

Ecuatiile constitutive (1.3.5) se exprimă în coordonate globale sub forma

$$(1.4.38) \quad \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & 0 \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{,x} \\ \theta_{,y} \\ \theta_{,z} \end{Bmatrix}.$$

Utilizând notațiile

$$(1.4.39) \quad q_x^i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i q_x dz, \quad q_y^i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i q_y dz, \quad q_z^i = \int_{-h/2}^{h/2} z^i q_z dz \quad (i = 0, 1);$$

$$(1.4.40) \quad \{q\} = \{q_x^0 \quad q_y^0 \quad q_z^0 \quad q_x^1 \quad q_y^1 \quad q_z^1\}^T;$$

$$(1.4.41) \quad K_{ij}^l = \int_{-h/2}^{h/2} z^l \bar{k}_{ij} dz \quad (l = 0, 1, 2);$$

$$(1.4.42) \quad [K] = \begin{bmatrix} [K^0] & [K^1] \\ [K^1] & [K^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^0 & K_{12}^0 & 0 & K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^0 & K_{22}^0 & 0 & K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^0 & 0 & 0 & K_{33}^1 \\ K_{11}^1 & K_{21}^1 & 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^1 & 0 & 0 & K_{33}^2 \end{bmatrix};$$

$$(1.4.43) \quad [\mathcal{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}^T; \quad [S_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

integrând în raport cu z de la $-h/2$ la $h/2$ ecuația (1.4.38), apoi înmulțind cu z aceeași ecuație și integrând după aceeași variabilă și între aceleași limite ecuația rezultată, obținem și cea de-a treia ecuație constitutivă

$$(1.4.44) \quad \{q\} = [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}.$$

Integrând în raport cu z ecuațiile (1.3.1) de la $-h/2$ la $h/2$, apoi înmulțind cu z primele două ecuații din (1.3.1) și integrând din nou în raport cu aceeași variabilă și între aceleași limite, obținem forma matricială a ecuațiilor de mișcare

$$(1.4.45) \quad ([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}]^T(L^T([G]\{U\}))\{\Sigma\}) + [G]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\}))\{\Sigma\}) + \{P\} = [R]\{\ddot{U}\},$$

unde

$$(1.4.46) \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y \\ \tilde{q}_z \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} + \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ x f_x \\ y f_y \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{matrix} \tilde{q}_x = q_1^+ + q_1^- \\ \tilde{q}_y = q_2^+ + q_2^- \\ \tilde{q}_z = q_3^+ + q_3^- \\ m_x = h/2(q_1^+ - q_1^-) \\ m_y = h/2(q_2^+ - q_2^-) \end{matrix};$$

$$(1.4.47) \quad [R] = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_1 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_0 & 0 & 0 \\ \bar{\rho}_1 & 0 & 0 & \bar{\rho}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_1 & 0 & 0 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix},$$

cu q_i^+ , q_i^- ($i=1,2,3$) componentele vectorului încărcare respectiv pe fețele superioară și inferioară ale plăcii, iar f_x , f_y și f_z sunt componentele forței volumice a acesteia.

Acum, pe baza relațiilor

$$(1.4.48) \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} r^0 \\ r^1 \end{Bmatrix}$$

și

$$(1.4.49) \quad \{\hat{q}\} = \begin{Bmatrix} q_z(h/2) - q_z(-h/2) \\ h/2(q_z(h/2) - q_z(-h/2)) \end{Bmatrix},$$

integrând după z de la $-h/2$ la $h/2$ ecuația (1.2.2) apoi înmulțind cu z aceeași ecuație și integrând din nou după z între aceleași limite, obținem următoarea ecuație a energiei scrisă sub formă matricială:

$$(1.4.50) \quad T_0[R_1]\{\dot{\eta}\} = ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\} + \{\hat{q}\} + [R_1]\{r\}.$$

Din inegalitatea (1.3.9), în același mod obținem condiția:

$$(1.4.51) \quad (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K] ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} \geq 0.$$

Condițiile inițiale.

Condițiile inițiale (1.2.8) (sau (1.3.10)), în cazul plăcii devin:

$$(1.4.52a) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}, \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V^0(x, y)\},$$

$$(1.4.52b) \quad \{\eta(x, y, 0)\} = \{\eta_0(x, y)\}$$

sau echivalent

$$(1.4.53a) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}, \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V^0(x, y)\},$$

$$(1.4.53a) \quad \{\theta(x, y, 0)\} = \{\theta_0(x, y)\},$$

unde $\{U^0\} = \{u_0^0 \ v_0^0 \ w^0 \ \psi_x^0 \ \psi_y^0\}^T$, $\{V^0\} = \{\dot{u}_0^0 \ \dot{v}_0^0 \ \dot{w}^0 \ \dot{\psi}_x^0 \ \dot{\psi}_y^0\}^T$, $\{\eta^0\} = \{\eta_0^0 \ \eta_0^1\}^T$, și $\{\theta_0\} = \{\theta_0^0 \ \theta_0^1\}^T$ funcții prescrise.

Condițiile pe frontieră.

În continuare notăm prin $[\mathcal{D}_n]$ și $[\mathcal{H}_n]$ matricea obținută respectiv din $[\mathcal{D}]$ și $[\mathcal{H}]$ punând n_1 și n_2 în locul lui $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$. Introducând de asemenea notațiile

$$(1.4.54) \quad \begin{aligned} \{P_n\} &= \{N_{nx} \ N_{ny} \ Q_{n3} \ M_{nx} \ M_{ny}\}^T = [\mathcal{D}_n]^T \{\Sigma\} + \\ &+ \chi([\mathcal{F}_n]^T (L([\mathcal{G}]\{U\})))^T \{\Sigma\} + [\mathcal{G}_n]^T (L([\mathcal{F}]\{U\}))^T \{\Sigma\}; \end{aligned}$$

$$N_{nx} = N_x n_1 + N_{xy} n_2,$$

$$N_{ny} = N_{xy} n_1 + N_y n_2,$$

$$(1.4.55) \quad Q_{n3} = Q_x n_1 + Q_y n_2 + \chi(N_{nx} w_{,x} + N_{ny} w_{,y}),$$

$$M_{nx} = M_x n_1 + M_{xy} n_2,$$

$$M_{ny} = M_{xy} n_1 + M_y n_2;$$

$$(1.4.56) \quad \{\bar{U}\} = [\bar{u}^0 \ \bar{v}^0 \ \bar{w} \ \bar{\psi}_x \ \bar{\psi}_y]^T; \quad \{\bar{P}_n\} = [\bar{N}_{n1} \ \bar{N}_{n2} \ \bar{Q}_{n3} \ \bar{M}_{n1} \ \bar{M}_{n2}]^T;$$

$$(1.4.57a) \quad \bar{N}_{n\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}_\alpha dz \quad (\alpha = 1, 2); \quad \bar{Q}_{n3} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}_3 dz;$$

$$(1.4.57b) \quad \bar{M}_{n\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{p}_\alpha dz \quad (\alpha = 1, 2);$$

$$(1.4.58) \quad \{\bar{\theta}\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}^0 \\ \bar{\theta}^1 \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right\} \bar{\theta} dz;$$

$$(1.4.59) \quad \{q_n\} = \{q_{nx} \ q_{ny}\}^T = [\mathcal{H}]^T \{q\};$$

$$(1.4.60) \quad \{\bar{q}_n\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_{nx} \\ \bar{q}_{ny} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \bar{q} dz,$$

condițiile pe frontieră sunt

$$(1.4.61) \quad [I_u]\{U\} = [I_u]\{\bar{U}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0u} \times [0, t_0),$$

$$(1.4.62) \quad [I_\sigma]\{P_n\} = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0),$$

$$(1.4.63) \quad [I_\theta]\{\theta\} = [I_\theta]\{\bar{\theta}_0\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\theta} \times [0, t_0),$$

$$(1.4.64) \quad [I_q]\{q_n\} = [I_q]\{\bar{q}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0q} \times [0, t_0),$$

unde:

$$[I_u] = \varphi_{\partial\Omega_u^*}(x, y)[I^*] + \sum_{i=1}^{M^*} \varphi_{\partial\Omega_i^*}(x, y)[I_{iu}^*] \quad \text{pentru } (x, y) \in \partial\Omega_{0u},$$

$$[I_\sigma] = \varphi_{\partial\Omega_\sigma^*}(x, y)[I^*] + \sum_{i=1}^{M^*} \varphi_{\partial\Omega_i^*}(x, y)[I_{i\sigma}^*] \quad \text{pentru } (x, y) \in \partial\Omega_{0\sigma},$$

$$[I_\theta] = \varphi_{\partial\Omega_\theta^{**}}(x, y)[I^{**}] + \sum_{i=1}^{M^{**}} \varphi_{\partial\Omega_i^{**}}(x, y)[I_{i\theta}^{**}] \quad \text{pentru } (x, y) \in \partial\Omega_{0\theta},$$

$$[I_q] = \varphi_{\partial\Omega_q^{**}}(x, y)[I^{**}] + \sum_{i=1}^{M^{**}} \varphi_{\partial\Omega_i^{**}}(x, y)[I_{iq}^{**}] \quad \text{pentru } (x, y) \in \partial\Omega_{0q};$$

$[I^*]$ —matrice unitate de dimensiune 5×5 ;

$[I^{**}]$ —matrice unitate de dimensiune 2×2 ;

$[I_{iu}^*], [I_{i\sigma}^*]$ —matrice pătrate de dimensiune 5×5 având toate elementele nule cu excepția unora de pe diagonala principală care pot fi egale cu 1;

$[I_{j\theta}^{**}], [I_{jq}^{**}]$ —matrice pătrate de dimensiune 2×2 având toate elementele nule cu excepția unora de pe diagonala principală care pot fi egale cu 1:

$$[I_{iu}^*] + [I_{i\sigma}^*] = [I^*] \quad (i = \overline{1, M^*});$$

$$[I_{i\theta}^{**}] + [I_{iq}^{**}] = [I^{**}] \quad (i = \overline{1, M^{**}});$$

$\varphi_{\partial\Omega_u}, \varphi_{\partial\Omega_\sigma}, \varphi_{\partial\Omega_\theta}, \varphi_{\partial\Omega_q}, \varphi_{\partial\Omega_i}, \varphi_{\partial\Omega_i^*}$ – funcții caracteristice;

$$\partial\Omega_{0u} = (\partial\Omega_u^*) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{M^*} \partial\Omega_i^* \right), \quad \partial\Omega_{0\sigma} = (\partial\Omega_\sigma^*) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{M^*} \partial\Omega_i^* \right),$$

$$(\partial\Omega_{0u}) \cup (\partial\Omega_{0\sigma}) = \partial\Omega_0, \quad (\partial\Omega_u^*) \cap (\partial\Omega_\sigma^*) = \Phi,$$

$$(\partial\Omega_i^*) \cap (\partial\Omega_j^*) = \Phi \text{ pentru } i \neq j;$$

$$\partial\Omega_{0\theta} = (\partial\Omega_\theta^{**}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{M^{**}} \partial\Omega_i^{**} \right), \quad \partial\Omega_{0q} = (\partial\Omega_q^*) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{M^{**}} \partial\Omega_i^{**} \right),$$

$$(\partial\Omega_{0\theta}) \cup (\partial\Omega_{0q}) = \partial\Omega_0, \quad (\partial\Omega_\theta^{**}) \cap (\partial\Omega_q^*) = \Phi,$$

$$(\partial\Omega_i^{**}) \cap (\partial\Omega_j^{**}) = \Phi \text{ pentru } i \neq j.$$

Matricele $[C], [R], [B], [K]$ și $[a]$ caracterizează proprietățile plăcii subțiri termoelastice laminată, dată.

Facem în plus presupunerile

(a) $\{P\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^5; \quad \{\bar{r}\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^2;$

(b) $\{P\}, \{\bar{r}\} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0));$

(c) $\{U^0\}, \{V^0\} : \bar{\Omega}_0 \rightarrow R^5; \quad \{\eta_0\} : \bar{\Omega}_0 \rightarrow R^2;$

(d) $\{U^0\}, \{V^0\}, \{\eta_0\} \in C^0(\bar{\Omega});$

(e) $\{\bar{U}\} : \partial\Omega_{0u} \times [0, t_0) \rightarrow R^5;$

(f) $\{\bar{U}\} \in C^0(\partial\Omega_{0u} \times [0, t_0));$

(g) $\{\bar{P}_n\} : \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0) \rightarrow R^5;$

(h) $\{\bar{P}_n\} \in C^0(\partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0));$

(i) $\{\bar{\theta}\} : \partial\Omega_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^2;$

$$(j) \quad \{\bar{\theta}\} \in C^0(\partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0));$$

$$(k) \quad \{\bar{q}\} : \partial\Omega_{0q} \times [0, t_0) \rightarrow R^2;$$

$$(l) \quad \{\bar{q}\} \in C^0(\partial\Omega_{0q} \times [0, t_0)).$$

Definiția 1.4.1. *Se numește cauză externă pentru placa subțire termoelastice laminată, funcțiile $\{P\}$ și $\{r\}$ având proprietățile (a) și (b).*

Vom introduce acum conceptul de proces admisibil pentru placa subțire termoelastice laminată.

Definiția 1.4.2. *Prin proces admisibil pentru placa subțire termoelastice laminată, vom înțelege un ansamblu ordonat de funcții*

$$\Pi = (\{U\}^T, \{e\}^T, \{\Sigma\}^t, \{\theta\}^T, \{\eta\}^T, \{q\}^T)$$

îndeplinind următoarele proprietăți:

$$(i) \quad \{U\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^5;$$

$$(ii) \quad \{U\} \in C^2(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{U\}, \{\dot{U}\}, \{\ddot{U}\}, \{U\}_{,x}, \{U\}_{,y}, \{\dot{U}\}_{,x}, \{\dot{U}\}_{,y} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0));$$

$$(iii) \quad \{e\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^8;$$

$$(iv) \quad \{e\} : C^0(\Omega_0 \times [0, t_0));$$

$$(v) \quad \{\Sigma\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^8;$$

$$(vi) \quad \{\Sigma\} \in C^{1,0}(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{\Sigma\}, \{\Sigma\}_{,x}, \{\Sigma\}_{,y} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0));$$

$$(vii) \quad \{\theta\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^2;$$

$$(viii) \quad \{\theta\} \in C^{2,1}(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{\theta\}, \{\theta\}_{,x}, \{\theta\}_{,y}, \{\dot{\theta}\} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0));$$

$$(ix) \quad \{\eta\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^2;$$

$$(x) \quad \{\eta\} \in C^{0,1}(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{\eta\}, \{\dot{\eta}\} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0));$$

$$(xi) \quad \{q\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^6;$$

$$(xii) \quad \{q\} \in C^{1,0}(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{q\}, \{q\}_{,x}, \{q\}_{,y} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0)).$$

Dacă definim adunarea proceselor admisibile și înmulțirea cu un scalar prin

$$(1.4.65) \quad \Pi + \tilde{\Pi} = (\{U\}^T + \{\tilde{U}\}^T, \{e\}^T + \{\tilde{e}\}^T, \{\Sigma\}^T + \{\tilde{\Sigma}\}^T, \\ \{\theta\}^T + \{\tilde{\theta}\}^T, \{\eta\}^T + \{\tilde{\eta}\}^T, \{q\}^T + \{\tilde{q}\}^T);$$

$$(1.4.66) \quad \lambda\Pi = (\lambda\{U\}^T, \lambda\{e\}^T, \lambda\{\Sigma\}^T, \lambda\{\theta\}^T, \lambda\{\eta\}^T, \lambda\{q\}^T),$$

atunci mulțimea proceselor admisibile este un spațiu liniar.

Definiția 1.4.3. *Numim soluție a problemei mixte a plăcii subțiri termoelastice laminată un proces admisibil care satisface ecuațiile (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.45), (1.4.50), condițiile pe frontieră (1.4.61)-(1.4.64) și condițiile inițiale (1.4.52).*

Definiția 1.4.4. *Numim câmp deplasare - temperatură admisibil pentru placa subțire termoelastice laminată, ansamblul ordonat de funcții $\mathcal{U} = (\{U\}^T, \{\theta\}^T)$ în care $\{U\}$ satisface condițiile (i) și (ii), iar $\{\theta\}$ satisface condițiile (vi) și (viii).*

Mulțimea câmpurilor deplasare - temperatură admisibile pentru placa subțire termoelastice laminată formează un spațiu liniar față de operațiile de adunarea câmpurilor și înmulțirea cu scalari.

Definiția 1.4.5. *Câmpul deplasare - temperatură admisibil pentru placa subțire termoelastice laminată care satisface condițiile frontieră (1.4.61) și (1.4.63) în deplasări și temperatură se numește câmpul deplasare - temperatură cinematic admisibil pentru placa subțire termoelastice laminată.*

1.5. Caracterizarea problemei mixte a plăcii subțiri termoelastice laminată cu ajutorul deplasărilor și temperaturii.

Vom arăta că problema deformării termoelastice a unei plăci subțiri termoelastice laminată se reduce la determinarea componentelor vectorilor deplasare $\{U\}$ și temperatură $\{\theta\}$.

Ecuatiile (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.45) și (1.4.50), condițiile pe frontieră (1.4.61) – (1.4.64) și condițiile inițiale (1.4.53) pot fi formulate cu ajutorul necunoscutelor $\{U(x, y, t)\}$ și $\{\theta(x, y, t)\}$.

Utilizând relațiile (1.4.15), ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44) devin respectiv

$$(1.5.1) \quad \{\Sigma\} = [C](([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U\}))[\mathcal{G}]\{U\} - [b]\{\theta\},$$

$$(1.5.2) \quad [R_1]\{\eta\} = [b]^T(([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U\})) + [a]\{\theta\},$$

$$(1.5.3) \quad \{q\} = [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}.$$

Înlocuind expresiile (1.5.1) – (1.5.3) ale funcțiilor $\{\Sigma\}$, $\{\eta\}$ și $\{q\}$ în ecuațiile (1.4.45) și (1.4.50) se obțin respectiv ecuațiile

$$(1.5.4) \quad ([\mathcal{D}]^T - [S]^T)([C](([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U\}))[\mathcal{G}]\{U\} - [b]\{\theta\}) + \\ + \chi(([\mathcal{F}]^T(L^T([\mathcal{G}]\{U\}))([C](([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U\}))[\mathcal{G}]\{U\}) - \\ - [b]\{\theta\})) + [\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\}))([C](([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \\ + \chi L([\mathcal{F}]\{U\}))[\mathcal{G}]\{U\}) - [b]\{\theta\})) + \{P\} = [R]\{\ddot{U}\}$$

și

$$(1.5.5) \quad T_0([b]^T(([\mathcal{D}] + [S])\{\dot{U}\} + \chi(L[\mathcal{F}]\{U\}))[\mathcal{G}]\{\dot{U}\} + L([\mathcal{G}]\{U\})[\mathcal{F}]\{\dot{U}\}) + \\ + [a]\{\dot{\theta}\}) - ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)([K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) - \{\hat{q}\} = [R_1]\{r\}.$$

Condițiile inițiale pot fi scrise astfel:

$$(1.5.6) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}, \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V^0(x, y)\}, \\ \{\theta(x, y, 0)\} = \{\theta_0(x, y)\}, \quad (x, y) \in \overline{\Omega_0}$$

unde

$$(1.5.7) \quad \{\theta_0\} = [a]^{-1}([R_1]\{\eta_0\} - [b]^T(([\mathcal{D}] + [S])\{U^0\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U^0\}))[\mathcal{G}]\{U^0\})).$$

Ținând cont de relațiile (1.4.15), (1.4.27) și (1.4.44), condițiile pe frontieră (1.4.61) – (1.4.64) devin:

$$(1.5.8) \quad [I_u]\{U\} = [I_u]\{\bar{U}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0u} \times [0, t_0),$$

$$[I_\sigma][\mathcal{D}_n]^T[C](([\mathcal{D}] + [S])\{U\} + \chi L([\mathcal{F}]\{U}))[\mathcal{G}]\{U\} -$$

$$(1.5.9) \quad -[b]\{\theta\}) = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0),$$

$$(1.5.10) \quad [I_\theta]\{\theta\} = [I_\theta]\{\bar{\theta}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\theta} \times [0, t_0),$$

$$(1.5.11) \quad [I_q][\mathcal{H}_n]^T[K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} = [I_q]\{\bar{q}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0q} \times [0, t_0).$$

1.6. Formularea problemei cu ajutorul produsului de convoluție.

În acest paragraf vom da o nouă formulare care îmi aparține, a problemei plăcii subțiri termoelastic laminată cu ajutorul produsului de convoluție. În formulare sunt încorporate ecuațiile de bază și condițiile inițiale.

Teorema 1.6.1. *Funcțiile $\{U\}$, $\{\Sigma\}$ și $\{\eta\}$ satsifac ecuațiile (1.4.45), (1.4.50) și condițiile inițiale (1.4.52) dacă și numai dacă*

$$(1.6.1) \quad -g * ([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}]^T(L^T([\mathcal{G}]\{U}))\{\Sigma\} +$$

$$+[\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U}))\{\Sigma\})) + [R]\{U\} = \{F\} \quad \text{pe } \Omega_0 \times [0, t_0),$$

$$(1.6.2) \quad [R_1]\{\eta\} = \frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + \{W\} \quad \text{pe } \Omega_0 \times [0, t_0),$$

unde

$$(1.6.3) \quad g(t) = t, \quad t \in [0, t_0)$$

$$(1.6.4) \quad \{F\} = g * \{\bar{P}\} + [R](t\{V^0\} + \{U^0\}).$$

$$(1.6.5) \quad \{W\} = \frac{1}{T_0} \dot{g} * ([R_1]\{r\} + \{\hat{q}\}) + [R_1]\{\eta_0\}.$$

Demonstrație. Necesitate. Trebuie remarcat că

$$(1.6.6) \quad g * \{\ddot{U}\} = \int_0^t (t-\tau) \{\ddot{U}(x, y, \tau)\} d\tau = \{U(x, y, t)\} - t\{\dot{U}(x, y, 0)\} - \{U(x, y, 0)\}.$$

$$(1.6.7) \quad g * \{\dot{\eta}\} = \int_0^t \{\dot{\eta}\}(x, y, \tau) d\tau = \{\eta(x, y, t)\} - \{\eta(x, y, 0)\}.$$

Dacă funcțiile $\{U\}$, $\{\Sigma\}$ și $\{\eta\}$ satisfac ecuațiile (1.4.45), (1.4.50) și condițiile inițiale (1.4.52), atunci se obțin ecuațiile

$$(1.6.8) \quad g * ([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}]^T(L^T([\mathcal{G}]\{U\}))\{\Sigma\} + [\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\}))\{\Sigma\})) + g * \{P\} = g * ([R]\{\ddot{U}\}),$$

$$(1.6.9) \quad \frac{1}{T_0} \dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\} + \frac{1}{T_0} \dot{g} * \{r\}) = [R_1](\{\eta\} - \{\eta_0\}).$$

Pe baza relațiilor (1.6.6) și (1.6.7), ținând cont de notațiile (1.6.4), (1.6.5) din ecuațiile (1.6.8) și (1.6.9), rezultă ecuațiile (1.6.1) și (1.6.2).

Suficiența. Dacă funcțiile $\{U\}$, $\{\Sigma\}$ și $\{\eta\}$ satisfac ecuațiile (1.6.1) și (1.6.2), atunci ținând cont de (1.6.4) – (1.6.7), putem scrie

$$(1.6.10) \quad g * (([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}]^T(L^T[\mathcal{G}]\{U\}))\{\Sigma\} + [\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\}))\{\Sigma\})) + g * \{P\} + [R](t\{V^0\} + \{U^0\}) = g * ([R]\{\ddot{U}\}) + t\{\dot{U}(x, y, 0)\} + \{U(x, y, 0)\},$$

$$(1.6.11) \quad \frac{1}{T_0} \dot{g} * ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\} + \frac{1}{T_0} \dot{g} * ([R_1]\{r\} + \{\hat{q}\}) + [R_1]\{\eta_0\} = [R_1](\dot{g} * \{\dot{\eta}\} + \{\eta(x, y, 0)\}).$$

Făcând $t = 0$ în relațiile (1.6.10) și (1.6.11), obținem

$$(1.6.12) \quad \{U^0\} = \{U(x, y, 0)\}, \quad \{\eta_0\} = \{\eta(x, y, 0)\},$$

iar dacă derivăm în raport cu timpul ecuației (1.6.10) și apoi considerăm $t = 0$, rezultă

$$(1.6.13) \quad \{V^0\} = \{\dot{U}(x, y, 0)\}.$$

Ținând cont de aceste rezultate, ecuațiile (1.6.10) și (1.6.11) se reduc la

$$(1.6.14) \quad g * (([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \chi([F]^T(L^T([G]\{U\}))\{\Sigma\} + [G]^T(L^T([F]\{U\}))\{\Sigma\})) + \{P\} - [R]\{\ddot{U}\}) = \{0\},$$

și

$$(1.6.15) \quad \frac{1}{T_0} \dot{g} * (([H]^T - [S_1]^T)\{q\} + \{\hat{q}\} - T_0[R_1]\{\dot{\eta}\}) = \{0\}.$$

Pe baza unei proprietăți a produsului de convoluție (proprietatea (27.2)₃ din Ieșan [1979]), rezultă că funcțiile $\{U\}$, $\{\Sigma\}$ și $\{\eta\}$ satisfac ecuațiile (1.4.45) și (1.4.50). ■

Ca o consecință imediată avem

Teorema 1.6.2. *Un proces $\Pi = (\{U\}^T, \{e\}^T, \{\Sigma\}^T, \{\theta\}^T, \{\eta\}^T, \{q\}^T)$ este o soluție a problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.45), (1.4.52), (1.4.61) – (1.4.64) dacă și numai dacă satisface ecuațiile (1.6.1), (1.6.2), (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44) și condițiile pe frontieră (1.4.61) – (1.4.64).*

1.7. Caracterizarea problemei mixte a plăcii subțiri liniar termoelastic laminată cu ajutorul tensiunii și a fluxului de căldură.

Având în vedere că se consideră cazul liniar peste tot în acest paragraf va trebui luat $\chi = 0$.

Ecuația de mișcare (1.4.45), când $\chi = 0$, mai poate fi scrisă astfel:

$$(1.7.1) \quad [R]^{-1}(g * (([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\})) + \{F\} = \{U\}.$$

Aplicând ecuației (1.7.1) operatorul $[D] + [S]$, obținem

$$(1.7.2) \quad ([D] + [S])([R]^{-1}(g * (([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\})) + \{F\}) = ([D] + [S])\{U\}.$$

Ținând cont de relația (1.4.15) când $\chi = 0$, ecuația (1.7.2) devine

$$(1.7.3) \quad ([\mathcal{D}] + [S])([R]^{-1}(g * (([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\}))) + \{F\} = \{e\}.$$

Din relațiile (1.4.32) și (1.4.50) rezultă

$$(1.7.4) \quad [b]^T\{e\} + [a]\{\theta\} = \frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + [R_1]\{r\},$$

care pe baza ecuației constitutive (1.4.27) mai poate fi scrisă

$$(1.7.5) \quad ([C] + [b][a]^{-1}[b]^T)\{e\} = \{\Sigma\} + [b][a]^{-1}\left(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + [R_1]\{r\}\right)$$

sau

$$(1.7.6) \quad \{e\} = ([C] + [b][a]^{-1}[b]^T)^{-1}(\{\Sigma\} + [b][a]^{-1}\left(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + [R_1]\{r\}\right)).$$

Substituind (1.7.6) în ecuația (1.7.3) vom avea

$$(1.7.7) \quad ([\mathcal{D}] + [S])([R]^{-1}(g * (([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\}))) + \{F\} = ([C] + [b][a]^{-1}[b]^T)^{-1}(\{\Sigma\} + [b][a]^{-1}\left(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + [R_1]\{r\}\right)).$$

Din ecuațiile (1.4.27) și (1.7.5) rezultă ecuația

$$(1.7.8) \quad [b]^T[C]^{-1}\{\Sigma\} + ([b]^T[C]^{-1}[b] + [a])\{\theta\} = \frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1])\{q\}) + [R_1]\{r\}$$

sau

$$(1.7.9) \quad \{\theta\} = ([b]^T[C]^{-1}[b] + [a])^{-1}\left(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1])\{q\}) + [R_1]\{r\} - [b]^T[C]^{-1}\{\Sigma\}\right).$$

Aplicând operatorul $[K]([\mathcal{H}] + [S_1])$ lui (1.7.9) și utilizând ecuația (1.4.44), vom obține

$$(1.7.10) \quad \{q\} = [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\left([b]^T[C]^{-1}[b] + [a]\right)^{-1}\left(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + [R_1]\{r\} - [b]^T[C]^{-1}\{\Sigma\}\right).$$

Ecuatiile (1.7.7) și (1.7.10) exprimă formularea cu ajutorul tensiunii și fluxului de căldură.

Condițiile pe frontieră sunt:

$$(1.7.11) \quad [I_u][R]^{-1}(g*(([\mathcal{D}]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \{F\})) = [I_u]\{\bar{U}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0u} \times [0, t_0),$$

$$(1.7.12) \quad [I_\sigma]\{P_n\} = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0),$$

$$(1.7.13) \quad [I_\theta]((([b]^T[C]^{-1}[b] + [a])^{-1}(\frac{1}{T_0}\dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\} + [R_1]\{r\} - [b]^T[C]^{-1}\{\Sigma\}))) = [I_\theta]\{\bar{\theta}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\theta} \times [0, t_0),$$

$$(1.7.14) \quad [I_q]\{q_n\} = [I_q]\{\bar{q}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0q} \times [0, t_0).$$

Condițiile inițiale:

$$(1.7.15) \quad \begin{aligned} \{\Sigma(x, y, 0)\} &= \{\Sigma^0(x, y)\} \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \\ \{\dot{\Sigma}(x, y, 0)\} &= \{\Sigma^1(x, y)\} \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \\ \{q(x, y, 0)\} &= \{q^0(x, y)\} \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_0. \end{aligned}$$

1.8. Formularea variațională cu ajutorul produsului de convoluție.

Formulări variaționale în cadrul teoriei termoelasticității pot fi găsite în cadrul lucrărilor lui Biot [1956], Ionescu [1966], Rafalski [1968], Belli și Morosi [1974], etc.

Ieșan [1964] a dat un procedeu general de deducere a principiilor variaționale în dinamica liniară a mecanicii continuului având la bază principii variaționale de tip Gurtin [1964]. De asemenea Ieșan [1966, 1967, 1979], a stabilit teoreme de acest tip pentru dinamica termoelasticității liniare cuplate și micropolare.

Nickel și Sackmann [1968] au dedus câteva principii variaționale în dinamica termoelasticității cuplate bazate pe produsul de convoluție extinzând rezultatele obținute de Gurtin în dinamica elasticității liniare.

Aici, autorul formulează și demonstrează două principii variaționale pentru dinamica plăcii subțiri termoelastic laminată cu neliniarități geometrice, utilizând produsul de convoluție ca în metoda lui Gurtin.

Teorema 1.8.1. *Fie \mathcal{K} mulțimea câmpurilor deplasare-temperatură cinematic admisibile $\{\mathcal{U}\} = (\{U\}, \{\theta\})$, adică satisfac condițiile pe frontieră (1.4.61) și (1.4.63). Pentru $t \in [0, t_0)$ definim funcționala $J_t(\cdot)$ pe \mathcal{K} prin*

$$(1.8.1) \quad \begin{aligned} J_t(\{\mathcal{U}\}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} ((g * (\{e(\{U\})\})^T [C] \{e(\{U\})\} - 2\{e(\{U\})\})^T \times \\ & \times [b]\{\theta\} - \{\theta\}^T [a]\{\theta\}) + \{U\}^T [R]\{U\} - \frac{1}{T_0} g * \dot{g} * ((([\mathcal{H}] + [S_1]) \times \\ & \cdot \{\theta\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) - 2\{F\}^T \{U\} - 2g * (\{W\}^T \{\theta\})) ds - \\ & - \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} g * ([I_\sigma]\{\bar{P}_n\})^T \{U\} dl + \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{\sigma q}} g * \dot{g} * ([I_q]\{\bar{q}_n\})^T \{\theta\} dl \end{aligned}$$

oricare ar fi $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{K}$, unde $\{e(\{U\})\}$ este definit de (1.4.15). Atunci $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{K}$ este câmp de deplasare temperatură corespunzând soluției problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) - (1.4.55) și (1.4.52), dacă și numai dacă

$$(1.8.2) \quad \delta J_t(\{\mathcal{U}\}) = 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Demonstrație. Necesitate. Fie $\{\mathcal{U}\}, \{\tilde{\mathcal{U}}\} \in \mathcal{K}$, unde vectorul $\{\tilde{\mathcal{U}}\}$ este nul pe $\Omega_{ou} \times [0, t_0)$ și nu depinde de timpul t . Rezultă că $\{\mathcal{U}\} + \xi\{\tilde{\mathcal{U}}\} \in \mathcal{K}$ pentru orice scalar $\xi \in \mathbf{R}$.

Ținând cont de formula lui Green și de simetria matricelor $[C], [a], [K]$ și $[R]$ obținem:

$$(1.8.3) \quad \begin{aligned} \delta_{\{\mathcal{U}\}} J_t(\{\mathcal{U}\}) = & \int_{\Omega_0} (g * ((([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{U}\} + \chi(L([\mathcal{F}]\{\tilde{U}\}))][\mathcal{G}]\{U\} + \\ & + L([\mathcal{F}]\{U\})[\mathcal{G}]\{\tilde{U}\}))^T ([C]\{e(\{U\})\} - [b]\{\theta\}) - \{e(\{U\})\}^T [b]\{\tilde{\theta}\} - \\ & - \{\tilde{\theta}\}^T [a]\{\theta\}) + \{\tilde{U}\}^T [R]\{U\} - \frac{1}{T_0} g * \dot{g} * ((([\mathcal{H}] + [S_1])\{\tilde{\theta}\})^T [K] \times \\ & \times ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) - \{\tilde{U}\}^T \{F\} - g * (\{\tilde{\theta}\}^T \{W\})) ds - \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} g * \end{aligned}$$

$$*([I_\sigma]\{\tilde{U}\}^T\{\bar{P}_n\})dl + \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{oq}} g * \dot{g} * ([I_q]\{\theta\}^T\{\bar{q}_n\})dl.$$

Pe baza relațiilor (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44), aplicând formula lui Green și ținând cont de relația (1.4.19), relația (1.8.3) se mai scrie:

$$\begin{aligned} \delta_{\{\tilde{U}\}} J_t(\{\mathcal{U}\}) &= \int_{\Omega_0} \{\tilde{U}\}^T ([R]\{U\} - g * ([\mathcal{D}]^T\{\Sigma\} - [S]^T\{\Sigma\} + \\ &+ \chi([\mathcal{F}]^T(L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\}))) - \{F\}) + \\ &+ \{\tilde{\theta}\}^T (g * (-[R_1]\{\eta\} + \frac{1}{T_0} \dot{g} * (([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)\{q\}) + \{W\})) + \\ (1.8.4) \quad &+ \int_{\partial\Omega_{o\sigma}} [I_\sigma]\{\tilde{U}\} (g * ([\mathcal{D}_n]^T\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}_n]^T L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}_n]^T \times \\ &\times L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\}) - \{\bar{P}_n\})) dl + \int_{\partial\Omega_{ou}} [I_u]\{\tilde{U}\} (g * ([\mathcal{D}_n]^T\{\Sigma\} + \\ &+ \chi([\mathcal{F}_n]^T L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}_n]^T L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\})) dl - \frac{1}{T_0} \times \\ &\times \int_{\partial\Omega_{oq}} [I_q]\{\tilde{\theta}\}^T (g * l * ([\mathcal{H}_n]^T\{q\} - \{\bar{q}\}) dl - \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{o\theta}} [I_\theta]\{\tilde{\theta}\}^T (g * \\ &* \dot{g} * ([\mathcal{H}_n]^T\{q\})) dl. \end{aligned}$$

Fie $\Pi = (\{U\}^T, \{e\}^T, \{\Sigma\}^T, \{\theta\}^T, \{\eta\}^T, \{q\}^T)$ o soluție a problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) – (1.4.55), (1.4.52). Atunci în acord cu faptul că $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{K}$ este câmp al deplasărilor – temperatură cinematic admisibile corespunzător soluției problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) – (1.4.55), (1.4.52) și ținând cont de presupunerea că $\{\tilde{U}\}$ și $\{\tilde{\theta}\}$ sunt vectori nuli respectiv pe $\Omega_{ou} \times [0, t_0)$ și $\Omega_{o\theta} \times [0, t_0)$, din relația (1.8.4) obținem relația

$$\delta_{\{\tilde{U}\}} J_t(\{\mathcal{U}\}) = 0 \quad \text{pentru } t \in [0, t_0).$$

Suficiență. Presupunem că (1.8.2) are loc pentru $\{\mathcal{U}\} \in \mathcal{K}$. Definim $\{\Sigma\}$ prin (1.4.15), $\{\eta\}$ prin (1.4.32) și $\{q\}$ prin (1.4.44), astfel că există relația (1.8.4) pentru $\{\tilde{U}\} \in \mathcal{K}$.

Considerând că vectorul $\{\tilde{U}\}$ este vector nul pe frontiera $\partial\Omega_0$, din ecuația (1.8.2) și relația (1.8.4), pe baza lemei calculului variațional rezultă ecuațiile

(1.6.1) și (1.6.2). Presupunând $\{U\}$ vector nul pe Ω_0 , iar $\{\tilde{U}\}$ și $\{\tilde{\theta}\}$ de asemenea vectori nuli respectiv pe $\partial\Omega_{ou}$ și $\partial\Omega_{o\theta}$, atunci ecuația (1.8.2) și relația (1.8.4), în baza lemei calculului variațional implică

$$(1.8.5) \quad [I_\sigma]g * ([D_n]^T\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}_n]^T L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}_n]^T L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\})) - [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} = \{0\} \text{ pe } \partial\Omega_{o\sigma} \times [0, t_0]$$

și

$$(1.8.6) \quad [I_q]g * \dot{g} * ([\mathcal{H}_n]^T\{q\} - \{\bar{q}\})dl \text{ pe } \partial\Omega_{oq} \times [0, t_0].$$

Derivând în raport cu timpul de două ori ecuația (1.8.5) și de trei ori ecuația (1.8.6) se obțin condițiile pe frontieră (1.4.54) și (1.4.55).

Am arătat astfel că $\{U\} \in \mathcal{K}$ este câmp al deplasărilor temperatură corespunzând soluției problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) – (1.4.55), (1.4.52) și demonstrația este încheiată. ■

Teorema 1.8.2. *Fie \mathcal{P} mulțimea proceselor admisibile. Pentru orice $t \in [0, t_0]$ definim funcționala $I_t(\cdot)$ pe \mathcal{P} prin*

$$(1.8.7) \quad I_t(\Pi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (g * (\{e\}^T [C] \{e\} - 2\{\Sigma\}^T - 2\{\Sigma\}^T (\{e\} - ([D] + [S])\{U\} - \chi L([\mathcal{F}]\{U\})[\mathcal{G}]\{U\})) - 2\{F\}^T \{U\} + \{U\}^T [R] \{U\} + g * (([R_1]\{\eta\} - [b]^T \{e\})^T [a]^{-1} ([R_1]\{\eta\} - [b]^T \{e\}) + \dot{g} * (\frac{1}{T_0} \{q\}^T \times [K]^{-1} \{q\}) - \frac{1}{T_0} \dot{g} * (\{q\}^T ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) + 2\{\theta\}^T (\{W\} - [R_1] \times \{\eta\})) ds - \int_{\partial\Omega_{o\sigma}} g * ([I_\sigma]\{\bar{P}_n\}^T \{U\}) dl - \int_{\partial\Omega_{ou}} g * ([I_u] (\{U\}^T - \{\bar{U}\}^T) \times ([D_n]^T \{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}_n]^T L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}_n]^T L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\}))) dl + \frac{1}{T_0} \times \int_{\partial\Omega_{o\theta}} g * \dot{g} * (\{q\}^T [\mathcal{H}_n] [I_\theta] (\{\theta\} - \{\bar{\theta}\})) dl + \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{oq}} g * \dot{g} * (\{\theta\}^T [I_q] \{q_n\}) dl$$

oricare ar fi $\Pi = (\{U\}^T, \{e\}^T, \{\Sigma\}^T, \{\theta\}^T, \{\eta\}^T, \{q\}^T) \in \mathcal{P}$. Atunci $\Pi \in \mathcal{P}$ este soluție a problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) - (1.4.55), (1.4.52) dacă și numai dacă

$$(1.8.8) \quad \delta_{\tilde{\Pi}} I_t(\pi) = 0 \text{ pentru orice } t \in [0, t_0].$$

(Variația $\tilde{\Pi} = (\{\tilde{U}\}^T, \{\tilde{e}\}^T, \{\tilde{\Sigma}\}^T, \{\tilde{\theta}\}^T, \{\tilde{\eta}\}^T, \{\tilde{q}\}^T)$ este independentă de timp)

Demonstrație. Necesitate. Fie Π și $\tilde{\Pi} \in \mathcal{P}$ ($\tilde{\Pi}$ independentă de timp). Rezultă că $\Pi + \xi \tilde{\Pi} \in \mathcal{P}$ oricare ar fi scalarul $\xi \in \mathcal{R}$. Utilizând simetria matricelor $[C], [K]^{-1}, [R]$ și $[R_1]$, formula lui Green și formula (1.4.19), obținem

$$(1.8.9) \quad \begin{aligned} \delta_{\tilde{\Pi}} I_t(\Pi) = & \int_{\Omega_0} (\{\tilde{U}\}^T (-g * (([D]^T - [S]^T) \{\Sigma\} + \chi([F]^T \times \\ & \times (L^T([G]\{U\})\{\Sigma\}) + [G]^T(L^T([F]\{U\})\{\Sigma\}))) - \{F\} + \\ & + [R]\{U\}) + \{\tilde{e}\}^T (g * ([C]\{e\} - \{\Sigma\} - [b][a]^{-1}([R_1]\{\eta\} - [b]^T\{e\})) + \\ & + \{\tilde{\Sigma}\}^T (g * (\{e\} - ([D] + [S])\{U\} - \chi L([F]\{U\})[G]\{U\})) + \\ & + \{\tilde{\theta}\} (g * (\{W\} + \dot{g} * (\frac{1}{T_0}([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T\{q\}) - [R_1]\{\eta\})) + \{\tilde{\eta}\})) + \\ & + \{\tilde{\eta}\} (g * (-[R_1]\{\theta\} + [R_1][a]^{-1}([R_1]\{\eta\} - [b]^T\{e\}))) + \{\tilde{q}\} (g * \\ & * \dot{g} * (\frac{1}{T_0}([K]^{-1}\{q\} - ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}))) ds + \int_{\partial\Omega_{oo}} g * (\{\tilde{U}\}^T [I_\sigma] \times \\ & \times ([D_n]^T \{\Sigma\} + \chi([F_n]^T L^T([G]\{U\})\{\Sigma\} + [G_n]^T L^T([F]\{U\})\{\Sigma\}) - \\ & - \{\bar{P}_n\}) dl - \int_{\Omega_{ou}} g * (\{\tilde{\Sigma}\}^T ([D_n] + \chi(L([G]\{U\})[F_n] + L([F]\{U\}) \times \\ & \times [G_n]) (\{U\} - \{\bar{U}\}) + \chi(\{U\}^T - \{\bar{U}\}^T) ([F_n]^T L^T([G]\{\tilde{U}\})\{\Sigma\} + \\ & + [G_n]^T L^T([F]\{\tilde{U}\})\{\Sigma\})) dl + \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{oo}} g * \dot{g} * (\{\tilde{q}\}^T [\mathcal{H}_n] [I_\theta] (\{\theta\} - \\ & - \{\bar{\theta}\})) dl - \frac{1}{T_0} \int_{\partial\Omega_{oq}} g * \dot{g} * (\{\tilde{\theta}\}^T [I_q] ([\mathcal{H}_n]^T \{q\} - \{\bar{q}\})) dl. \end{aligned}$$

Dacă Π este o soluție a problemei mixte (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.50), (1.4.54) – (1.4.55), (1.4.52), pe baza teoremei 1.6.2, rezultă

$$\delta_{\Pi} I_t(\Pi) = 0, \quad t \in [0, t_0),$$

pentru orice $\Pi \in \mathcal{P}$ și deci (1.8.8) are loc.

Suficiența. Presupunem că (1.8.8) are loc. Considerăm $\tilde{\Pi} = (\{\tilde{U}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$, unde vectorii $\{\tilde{U}\}$, $[\mathcal{F}]\{\tilde{U}\}$ și $[\mathcal{G}]\{\tilde{U}\}$ sunt nuli pe frontiera $\partial\Omega_0$ și nu depind de t . Din relația (1.8.9) și ecuația (1.8.8) rezultă

$$(1.8.10) \quad \int_{\Omega_0} \{\tilde{U}\}([\mathcal{R}]\{U\} - \{F\} - g * (([\mathcal{D}]^T - [\mathcal{S}]^T)\{\Sigma\} + \chi([\mathcal{F}]^T \times \\ \times (L^T([\mathcal{G}]\{U\})\{\Sigma\} + [\mathcal{G}]^T(L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\})))ds = 0.$$

Pe baza lemei calculului variațional, din ecuația (1.8.10) rezultă ecuația (1.6.1).

Analog, presupunând pe rând $\Pi = (\{0\}^T, \{\tilde{e}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$ și $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{\Sigma}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$, dar cu vectorul $\{\tilde{\Sigma}\}$ nul pe frontiera $\partial\Omega_0$, rezultă respectiv ecuațiile

$$(1.8.11) \quad g * (\{\Sigma\} - [\mathcal{C}]\{e\} + [b][a]^{-1}([\mathcal{R}_1]\{\eta\} - [b]^T\{e\})) = \{0\}$$

și

$$(1.8.12) \quad g * (\{e\} - ([\mathcal{D}] + [\mathcal{S}])\{U\} - \chi L([\mathcal{F}]\{U\})[\mathcal{G}]\{U\}) = \{0\}.$$

Dacă se derivează de două ori în raport cu t ecuațiile (1.8.11) și (1.8.12), se obțin respectiv ecuațiile

$$(1.8.13) \quad \{\Sigma\} = [\mathcal{C}]\{e\} - [b][a]^{-1}([\mathcal{R}_1]\{\eta\} - [b]^T\{e\})$$

și (1.4.15).

Considerând acum pe rând $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{\theta}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$, $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{\eta}\}^T, \{0\}^T)$ și $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{q}\})$, dar cu vectorul $\{\tilde{q}\}$ nul pe frontiera $\partial\Omega_0$, în mod analog cum s-a ținut ecuația (1.4.15) se obțin respectiv ecuațiile (1.6.2), (1.4.32) și

$$(1.8.14) \quad l * \left(\frac{1}{T_0}([\mathcal{K}]^{-1}\{q\} - ([\mathcal{H}] + [\mathcal{S}_1])\{\theta\})\right) = \{0\}.$$

Derivând în raport cu t ecuația (1.8.14), iar ecuația obținută înmulțită la stânga cu $T_0[K]$, conduce la (1.4.44). Ținând cont de (1.4.32) în (1.8.13), rezultă relația (1.4.27).

Fie acum $\tilde{\Pi} = (\{\tilde{U}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$ cu vectorul $\{\tilde{U}\}$ nul pe $\Omega_0 \times [0, t_0)$ și pe $\partial\Omega_{ou}$. Din relația (1.8.9) și ecuația (1.8.8) se obține

$$(1.8.15) \quad \int_{\partial\Omega_{oo}} g * (\{\tilde{U}\}^T [I_\sigma] ([D_n]\{\Sigma\} + \chi([F_n]^T L^T([G]\{U\}))\{\Sigma\} + [G_n]^T L^T([\mathcal{F}]\{U\})\{\Sigma\}) - \{\bar{P}_n\}) dl = 0.$$

În virtutea lemei generalizate a calculului variațional (conform Gurtin [1964]), rezultă condiția pe frontieră (1.4.54)₂.

Considerând $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{\Sigma}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$ cu vectorul $\{\tilde{\Sigma}\}$ nul pe $\Omega_0 \times [0, t_0)$ se obține în mod analog condiția pe frontieră (1.4.54)₁.

Luând acum pe rând $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{q}\}^T)$ cu $\{\tilde{q}\}$ vector independent de timp, nul pe $\Omega_0 \times [0, t_0)$ și $\tilde{\Pi} = (\{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, \{\tilde{\theta}\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T)$ cu $\{\tilde{\theta}\}$ vector independent de timp, nul pe $\Omega_0 \times [0, t_0)$, atunci în virtutea lemei calculului variațional (conform Gurtin [1964]), rezultă respectiv ecuațiile

$$(1.8.16) \quad [I_\theta]l * ([\mathcal{H}_n]\{\theta\} - \{\bar{\theta}\}) = \{0\}$$

și

$$(1.8.17) \quad [I_q]l * ([\mathcal{H}_n]^T\{q\} - \{\bar{q}\}) = \{0\}.$$

Derivând în raport cu timpul ecuațiile (1.8.16) și (1.8.17), rezultă respectiv condițiile pe frontieră (1.4.55)₁ și (1.4.55)₂. ■

1.9. Existență și unicitate în dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată.

Dintre lucrările în care s-a studiat existența soluțiilor problemelor termoelasticității, putem menționa pe cele datorate lui Dafermos [1968], Duvaut și Lions [1969], Kuprazde [1968], Nistor [1973], Liolios [1991], Rusu [1987], Figueiredo și Trabucho [1995], etc.

Principalul rezultat al acestei secțiuni îl constituie stabilirea și demonstrarea unei teoreme de existență și unicitate în dinamica plăcii subțiri

liniar termoelastic laminată ($\chi = 0$), încastrată pe marginea laterală și cu diferența de temperatură θ nulă pe aceasta. Cazul mai general, cu condiții neomogene pe frontieră poate fi obținut fără dificultate urmând un procedeu analog cu cel ce v-a fi prezentat în paragraful 7 al capitolului al III - lea.

Pentru stabilirea teoremei de existență și unicitate sunt utilizate unele rezultate din teoria semigrupurilor de operatori (Barbu [1974], Goldstein [1985], Pazy[1972]). A fost necesar ca o serie de rezultate (propozițiile 1.9.1 - 1.9.3 și lemele 1.9.1 - 1.9.4) să fie demonstrate în prealabil.

Vom considera spațiul

$$(1.9.1) \quad \mathbf{X} = \{ \{W\} \mid \{W\} = (\{U\}^T \ \{V\}^T \ \{\theta\}^T)^T, \ \{U\}^T \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0), \\ \{V\} \in \mathbf{H}^0(\Omega_0), \ \{\theta\} \in (H^0(\Omega_0))^2 \},$$

unde $\{U\} = \{u^0 \ v^0 \ w \ \psi_x \ \psi_y\}^T$, $\{V\} = \{\dot{u}^0 \ \dot{v}^0 \ \dot{w} \ \dot{\psi}_x \ \dot{\psi}_y\}^T$, $\{\theta\} = \{\theta^0 \ \theta^1\}^T$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega_0) = (H_0^1(\Omega_0))^5$, $\mathbf{H}^0(\Omega_0) = (H^0(\Omega_0))^5$, iar $H_0^1(\Omega_0)$ și $H^0(\Omega_0)$ sunt spații Sobolev uzuale.

Vom transforma problema valorii proprii inițiale și frontieră într-o ecuație de evoluție omogenă temporală în spațiul Hilbert \mathbf{X} .

Pentru aceasta definim operatorii $\tilde{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{H}^0(\Omega_0)$, $\tilde{B} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)$ și $\tilde{C} : \mathbf{X} \rightarrow (H^0(\Omega_0))^2$ astfel:

$$(1.9.2) \quad \tilde{A}\{W\} = \{V\},$$

$$(1.9.3) \quad \tilde{B}\{W\} = [R]^{-1}([D]^T - [S]^T)([C](D) + [S])\{U\} - [b]\{\theta\},$$

$$(1.9.4) \quad \tilde{C}\{W\} = \frac{1}{T}[a]^{-1}([\mathcal{H}]^T - [S_1])([K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) - \\ - [a]^{-1}[b]^T([D] + [S])\{V\}.$$

Introducem de asemenea operatorul $\mathcal{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ prin

$$(1.9.5) \quad \mathcal{A}\{W\} = \begin{Bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{Bmatrix} \{W\} = \begin{Bmatrix} \tilde{A}\{W\} \\ \tilde{B}\{W\} \\ \tilde{C}\{W\} \end{Bmatrix},$$

cu domeniul

$$(1.9.6) \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ \{W\} \mid \{W\} \in \mathbf{X}, \ \mathcal{A}\{W\} \in \mathbf{X}, \ \{V\} = 0 \text{ pe } \partial\Omega_0 \}.$$

Închiderea lui $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ este evident spațiul \mathbf{X} și rezultă că el este dens în X . Domeniul $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ nu este vid, el conține cel puțin pe $(C_0^\infty(\Omega_0))^{12}$.

Astfel, problema valorii inițial frontieră se reduce la următoarea problemă a valorii inițial abstractă pe \mathbf{X} :

$$(1.9.7) \quad \frac{d\{W\}}{dt} = \mathcal{A}\{W\} + \{\mathcal{F}_2\}, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$(1.9.8) \quad \{W(0)\} = \{W_0\},$$

$$(1.9.9) \quad \{\mathcal{F}\} = \{\{0\}^T \quad ([R]^{-1}\{P\})^T, \quad \frac{1}{T_0}([a]^{-1})\{\hat{q}\} + [R_1]\{r\})\}^T$$

și

$$(1.9.10) \quad \{W_0\} = \{\{U^0\}^T \quad \{V^0\}^T \quad \{\theta_0\}^T\}^T.$$

Fie \mathbf{X}^* spațiul Hilbert X echipat cu norma indusă de următorul produs scalar

$$(1.9.11) \quad \langle \{W\}, \{\tilde{W}\} \rangle_{\mathbf{X}^*} = \int_{\Omega_0} (\{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{\tilde{U}\})\} + \{V\}^T [R] \{\tilde{V}\} + \{\theta\}^T [a] \{\tilde{\theta}\}) d\Omega.$$

Propoziția 1.9.1 *Există constantele pozitive c_1 și c_2 astfel că*

$$(1.9.12) \quad c_1 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}^0(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} \{V\}^T [R] \{V\} d\Omega \leq c_2 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}^0(\Omega_0)}^2,$$

unde

$$(1.9.13) \quad c_1 = \tilde{\rho}\tilde{c}, \quad \tilde{\rho} = \inf_{(x,y,z) \in \Omega_0 \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]} \rho(x, y, z), \quad \tilde{c} = \min(h, \frac{h^3}{12}),$$

$$c_2 = \max(\bar{\rho}_0 + |\bar{\rho}_1|, \bar{\rho}_0, |\bar{\rho}_1| + \bar{\rho}_2).$$

Demonstrație. Prima inegalitate (1.9.12), rezultă imediat astfel:

$$(1.9.14) \quad \int_{\Omega_0} \{V\}^T [R] \{V\} d\Omega = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega dz \geq$$

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [(\dot{u}_\alpha^0 + z\dot{\psi}_\alpha)(\dot{u}_\alpha^0 + z\dot{\psi}_\alpha) + (\dot{u}_3^0)^2] d\Omega dz = \\ & \bar{\rho} \int_{\Omega_0} [h(\dot{u}_\alpha^0)^2 + h(\dot{u}_3^0)^2 + \frac{h^3}{12}(\dot{\psi}_\alpha)^2] d\Omega \geq c_1 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}^0(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

A doua inegalitate (1.9.12) se obține după cum urmează:

$$(1.9.15) \quad \int_{\Omega_0} \{V\}^T [R] \{V\} d\Omega = \int_{\Omega_0} [\bar{\rho}(\dot{u}_\alpha^0)^2 + \bar{\rho}_0(\dot{u}_3^0)^2 + \bar{\rho}_2(\dot{\psi}_\alpha)^2 + \\ + 2\bar{\rho}_1\dot{u}_\alpha^0\dot{\psi}_\alpha] d\Omega \leq c_2 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}^0(\Omega_0)}^2.$$

unde s-a ținut cont că

$$(1.9.16) \quad 2\bar{\rho}_1\dot{u}_\alpha^0\dot{\psi}_\alpha \leq 2|\bar{\rho}_1\dot{u}_\alpha^0\dot{\psi}_\alpha| \leq |\bar{\rho}_1|((\dot{u}_\alpha^0)^2 + (\dot{\psi}_\alpha)^2). \blacksquare$$

Propoziția 1.9.2. *Există constantele pozitive λ_1 și λ_2 astfel că au loc inegalitățile*

$$(1.9.17) \quad \lambda_1 \|\{U\}\|_{\mathbf{X}}^2 \leq \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \leq \lambda_2 \|\{U\}\|_{\mathbf{X}}^2.$$

Demonstrație Vom demonstra mai întâi prima inegalitate (1.9.17). Pentru fiecare lamină avem condiția de elipticitate

$$(1.9.18) \quad C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \geq \alpha_m(\epsilon_{ij})^2 \quad (\alpha_m > 0, \quad m - \text{rangul laminei})$$

sau

$$(1.9.19) \quad \int_{B_0} C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} d\mathbf{x} \geq \alpha \int_{B_0} (\epsilon_{ij})^2 d\mathbf{x},$$

unde $\alpha = \min_m \alpha_m$.

Prima inegalitate a lui Korn se poate scrie

$$(1.9.20) \quad \int_{B_0} (\epsilon_{ij})^2 d\mathbf{x} \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(B_0)}^2$$

cu $\mathbf{u} = (u, v, w)$ și

$$(1.9.21) \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(B_0)}^2 = \int_{B_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla \mathbf{u})) dx.$$

Cum

$$(1.9.22) \quad \int_{B_0} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dx = \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega$$

și

$$(1.9.23) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(B_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} [h(u_0^2 + v_0^2 + w^2) + \frac{h^3}{12}(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \\ &+ h(u_{0,x}^2 + v_{0,x}^2 + w_{,x}^2) + \frac{h^3}{12}(\psi_{x,x}^2 + \psi_{y,x}^2) + \\ &+ h(u_{0,y}^2 + v_{0,y}^2 + w_{,y}^2) + \frac{h^3}{12}(\psi_{x,y}^2 + \psi_{y,y}^2)] d\Omega \geq \\ &\geq \tilde{c} \int_{\Omega_0} [(u_0^2 + v_0^2 + w^2 + \psi_x^2 + \psi_y^2) + (u_{0,x}^2 + v_{0,x}^2 + w_{,x}^2 + \\ &+ \psi_{x,x}^2 + \psi_{y,x}^2) + (u_{0,y}^2 + v_{0,y}^2 + w_{,y}^2 + \psi_{x,y}^2 + \psi_{y,y}^2)] d\Omega = \\ &= \tilde{c} \|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2, \end{aligned}$$

din relațiile (1.9.19), (1.9.20), (1.9.22) și (1.9.23) rezultă

$$(1.9.24) \quad \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \geq \tilde{\alpha} \|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2$$

cu $\tilde{\alpha} = \alpha c \tilde{c}$.

Să demonstrăm acum a doua inegalitate (1.9.17).

Dacă $\|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)} = 0$, rezultă $\{U\} = \{0\}$. Aceasta are drept consecință $\{e(\{U\})\} = \{0\}$ și deci

$$(1.9.25) \quad \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega = 0.$$

Putem astfel scrie

$$(1.9.26) \quad \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \leq c_2 \|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2.$$

Dacă $\|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2 > 0$, cum $\int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \geq 0$ conform lui (1.9.24), există $c'_2 > 0$ astfel că

$$(1.9.27) \quad \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \leq c'_2 \|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2.$$

unde $\lambda_2 = \max\{c_2, c'_2\}$. ■

Lema 1.9.1. *Există constantele pozitive μ_1 și μ_2 astfel că*

$$(1.9.28) \quad \mu_1 \|\{W\}\|_{\mathbf{X}}^2 \leq \|\{W\}\|_{\mathbf{X}^*} \leq \mu_2 \|\{W\}\|_{\mathbf{X}}^2.$$

(Norma $\|\cdot\|_{\mathbf{X}^*}$ este echivalentă cu norma originală $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$).

Demonstrație. Vom arăta mai întâi că există numerele pozitive d_1 și d_2 astfel că

$$(1.9.29) \quad d_1 \|\{\theta\}\|_{(H^0(\Omega_0))^2}^2 \leq \int_{\Omega_0} \{\theta\}^T [a] \{\theta\} d\Omega_0 \leq d_2 \|\{\theta\}\|_{(H^0(\Omega))^2}^2.$$

Prima inegalitate (1.9.29) rezultă astfel

$$(1.9.30) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_0} \{\theta\}^T [a] \{\theta\} d\Omega &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} a \theta^2 d\Omega dz \geq \tilde{a} \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\theta^0 + z\theta^1)^2 d\Omega dz = \\ &= \tilde{a} \int_{\Omega_0} (h(\theta^0)^2 + \frac{h^3}{12}(\theta^1)^2) d\Omega \geq d_1 \|\{\theta\}\|_{(H^0(\Omega))^2}^2 \end{aligned}$$

unde $\tilde{a} = \inf_{(x,y,z) \in \Omega \times [-h/2, h/2]} a(x, y, z)$ și $d_1 = \min(\tilde{a}h; \tilde{a}\frac{h^3}{12})$.

A doua inegalitate (1.9.29) se obține după cum urmează

$$(1.9.31) \quad \int_{\Omega_0} \{\theta\}^T [a] \{\theta\} d\Omega = \int_{\Omega_0} (a^0(\theta^0)^2 + a^2(\theta^1)^2 + 2a^1\theta^0\theta^1) d\Omega \leq d_2 \|\{\theta\}\|_{(H^0(\Omega_0))^2}^2,$$

unde $d_2 = \max(a^0, |a^1|, a^2)$ și s-a ținut cont că

$$(1.9.32) \quad 2\theta^0\theta^1 \leq (\theta^0)^2 + (\theta^1)^2.$$

Conform propoziției 1.9.1, există constantele pozitive c_1 și c_2 astfel că

$$(1.9.33) \quad c_1 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} \{V\}^T [R] \{V\} d\Omega \leq c_2 \|\{V\}\|_{\mathbf{H}^0(\Omega_0)}^2.$$

Ținând cont de relațiile (1.9.24) și (1.9.27) avem

$$(1.9.34) \quad \tilde{\alpha} \|\{U\}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} d\Omega \leq c'_2 \|\{U\}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)}^2$$

cu $\tilde{\alpha}$ și c'_2 constante pozitive.

Adunând membru cu membru inegalitățile (1.9.29), (1.9.33) și (1.9.34) și ținând cont de definiția normei $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ cu ajutorul produsului scalar (1.9.11), obținem inegalitățile (1.9.28) unde s-a utilizat notația:

$$(1.9.35) \quad \mu_1 = \min(\tilde{\alpha}; c_1; d_1); \quad \mu_2 = \max(c'_2, c_2, d_2) \quad \blacksquare$$

Lema 1.9.2. *Operatorul \mathcal{A} este disipativ, adică*

$$(1.9.36) \quad \langle \{W\}, \mathcal{A}\{W\} \rangle_{\mathbf{X}} \leq 0, \quad \forall \{W\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Demonstrație. Inegalitatea (1.9.36) rezultă imediat utilizând produsul scalar (1.9.11), definițiile operatorilor $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}$ date de relațiile (1.9.2)–(1.9.4) și formula lui Green, după cum urmează:

$$(1.9.37) \quad \begin{aligned} \langle \{W\}, \mathcal{A}\{W\} \rangle_{\mathbf{X}} &= \int_{\Omega_0} (\{e(\{U\})\})^T [C] \{e(\tilde{\mathcal{A}}\{W\})\} + \\ &+ \{V\}^T [R] (\tilde{\mathcal{B}}\{W\}) + \{\theta\}^T [a] (\tilde{\mathcal{C}}\{W\}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_0} (\{e(\{U\})\})^T [C] \{e(\{V\})\} + \{V\}^T ([\mathcal{D}]^T - [S]^T) ([C]([\mathcal{D}] + \\ &+ [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) + \{\theta\}^T (\frac{1}{T_0}([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T) ([K]([\mathcal{H}] + \\ &+ [S_1])\{\theta\}) - [b]^T([\mathcal{D}] + [S])\{V\})) d\Omega = \\ &= -\frac{1}{T_0} \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} d\Omega \leq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 1.9.3. *Există numerele pozitive α_1 și α_2 astfel încât*

$$(1.9.38) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \|\{\theta\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^2}^2 &\leq \int_{\Omega_0} (\{\theta\}^T [a] \{\theta\} + \\ &+ (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) d\Omega \leq \alpha_2 \|\{\theta\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^2}^2. \end{aligned}$$

Demonstrație. Din inegalitatea (1.3.18) presupunând că aceasta este valabilă pentru orice lamină, rezultă

$$(1.9.39) \quad \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} d\Omega dz \geq \bar{\gamma} \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_{,i} \theta_{,i} d\Omega dz,$$

unde $\bar{\gamma} = \inf_{(x,y,z) \in \Omega \times [-h/2, h/2]} \gamma(x, y, z)$.

Inegalitatea (1.9.39) se mai poate scrie

$$(1.9.40) \quad \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K] ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} d\Omega \geq \bar{\gamma} \int_{\Omega_0} (h((\theta_{,x}^0)^2 + (\theta_{,y}^0)^2) + \frac{h^3}{12}((\theta_{,x}^1)^2 + (\theta_{,y}^1)^2) + h\theta^2) d\Omega \geq \alpha \|\{\theta\}\|_{(H_0^1(\Omega))^2}^2,$$

unde $\alpha = \min(\bar{\gamma}h; \bar{\gamma}\frac{h^3}{12})$.

Inegalitatea

$$(1.9.41) \quad \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K] ([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} d\Omega \leq \beta \|\{\theta\}\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2$$

cu $\beta > 0$, rezultă imediat.

Din (1.9.29), (1.9.30) și (1.9.41) se obține (1.9.38) dacă se folosesc notațiile $\alpha_1 = \alpha$ și $\alpha_2 = \beta + d_2$. ■

Lema 1.9.4. Operatorul \mathcal{A} satisface condiția

$$(1.9.42) \quad \mathcal{R}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathbf{X}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Demonstrație. Trebuie să arătăm că pentru orice $\{\hat{W}\} \in \mathbf{X}$, ecuația

$$(1.9.43) \quad (\lambda I - \mathcal{A})\{W\} = \{\hat{W}\}$$

are cel puțin o soluție $\{W\}$ în $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

În (1.9.43) prin eliminarea funcției $\{V\}$, obținem următorul sistem de ecuații în $\{U\}$

$$(1.9.44) \quad \lambda^2\{U\} - [R]^{-1}([D]^T - [S]^T)([C]([D] + [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) = \{\hat{g}\},$$

$$(1.9.45) \quad \lambda\{\theta\} - \frac{1}{T_0}[a]^{-1}([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)([K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) + \lambda[a]^{-1}[b]^T([D] + [S])\{U\} = \{\hat{h}\}.$$

unde

$$(1.9.46) \quad \{\hat{g}\} = \lambda\{\hat{U}\} + \{\hat{V}\}$$

și

$$(1.9.47) \quad \{\hat{h}\} = \{\hat{\theta}\} + [a]^{-1}[b]^T([\mathcal{D}] + [S])\{\hat{U}\}.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}_1\{\xi\}$ și $\mathcal{L}_2\{\xi\}$ respectiv membrii stângi ai ecuațiilor (1.9.46) și (1.9.45) și cu $\mathcal{L}\{\xi\} = \{(\mathcal{L}_1\{\xi\})^T, (\mathcal{L}_2\{\xi\})^T\}^T$, unde $\{\xi\} = \{\{U\}^T, \{\theta\}^T\}^T$.

Fie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega_0)}$ produsul scalar ponderat în $L_2(\Omega_0) = (L_2(\Omega_0))^7$ și forma biliniară

$$(1.9.48) \quad B(\{\tilde{\xi}\}, \{\xi\}) = \langle \{\tilde{\xi}\}, \mathcal{L}\{\xi\} \rangle_{L_2(\Omega_0)} = \int_{\Omega_0} (\{\tilde{U}\}^T [R] (\mathcal{L}_1\{\xi\} + \frac{1}{\lambda} \{\theta\}^T [a] \mathcal{L}_2\{\xi\})) d\Omega.$$

Utilizând formula lui Green, ecuația (1.4.15) când $\chi = 0$, (1.9.46) – (1.9.47) și condițiile pe frontieră nule ($\{U\} = \{0\}$, $\{\theta\} = \{0\}$ pe $\partial\Omega_0$), obținem

$$(1.9.49) \quad \begin{aligned} B(\{\xi\}, \{\xi\}) &= \int_{\Omega_0} (\lambda^2 \{U\}^T [R] \{U\} - \{U\}^T ([\mathcal{D}] - [S]^T) ([C]([\mathcal{D}] + \\ &+ [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) + \{\theta\}^T [a]^T \{\theta\} - \{\theta\}^T (\frac{1}{\lambda T_0} ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T) ([K]([\mathcal{H}] + \\ &+ [S_1])\{\theta\})) + \{\theta\}^T [b]^T ([\mathcal{D}] + [S])\{U\}) d\Omega = \int_{\Omega_0} (\lambda^2 \{U\}^T [R] \{U\} + \\ &+ \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\} + \{\theta\}^T [a] \{\theta\} + \frac{1}{\lambda T_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\})^T [K] ([\mathcal{H}] + \\ &+ [S_1])\{\theta\}) d\Omega, \end{aligned}$$

pentru orice $\{\xi\} = \{\{U\}^T, \{\theta\}^T\}^T \in (H_0^1(\Omega_0))^7$.

Avem în continuare nevoie de următorul rezultat:

Proprietatea 1.9.3. Pentru orice $\{\xi\} \in (H_0^1(\Omega_0))^7$, există constantele pozitive $\bar{\mu}_1$ și $\bar{\mu}_2$ astfel că

$$(1.9.50) \quad \bar{\mu}_1 \|\{\xi\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^7}^2 \leq B(\{\xi\}, \{\xi\}) \leq \bar{\mu}_2 \|\{\xi\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^7}^2.$$

Demonstrație. Se poate arăta cu ușurință că pentru orice $\{U\} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)$, există $\mu_1, \mu_2 > 0$ astfel că

$$(1.9.51) \quad \begin{aligned} \mu_1 \|\{U\}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)}^2 &\leq \int_{\Omega_0} (\lambda^2 \{U\} [R] \{U\} + \\ &+ \{e(\{U\})\}^T [C] \{e(\{U\})\}) d\Omega \leq \mu_2 \|\{U\}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru inegalitățile (1.9.38) și (1.9.51), notând cu $\bar{\mu}_1 = \min(\mu_1; \alpha_1)$ și $\bar{\mu}_2 = \max(\mu_2; \alpha_2)$, pe baza expresiei lui $B(\{\xi\}, \{\xi\})$ dată de (1.9.49) rezultă (1.9.50). \square

Forma biliniară $B(\{\xi\}, \{\tilde{\xi}\})$ este continuă în $(H^1(\Omega_0))^7 \times (H_0^1(\Omega_0))^7$ și există transformarea linear mărginită $T : (H_0^1(\Omega_0))^7 \rightarrow (H_0^1(\Omega_0))^7$ astfel că

$$B(\{\xi\}, \{\tilde{\xi}\}) = \langle \{\xi\}, T\{\tilde{\xi}\} \rangle_{(H_0^1(\Omega_0))^7}, \text{ pentru } \forall \{\xi\}, \{\tilde{\xi}\} \in (H_0^1(\Omega_0))^7.$$

Putem dovedi că T este o transformare liniară biunivocă în spațiul $(H_0^1(\Omega_0))^7$ și domeniul $\mathcal{R}(T)$ este mulțime densă în $(H_0^1(\Omega_0))^7$.

Astfel, putem defini $T^{-1} : (H_0^1(\Omega_0))^7 \rightarrow (H_0^1(\Omega_0))^7$ și din (1.9.52) urmează $\|T^{-1}\| \leq c_1^{-1}$.

Fie $\{z\}$ în $\mathcal{R}(T)$ și $\{\xi\}$ funcția unică în $(H_0^1(\Omega_0))^7$ astfel că $\{z\} = T\{\xi\}$. Definim acum funcționala

$$(1.9.53) \quad \varphi(\{z\}) = \langle \{g\}, \{\xi\} \rangle_{L_2(\Omega_0)},$$

unde $\{g\} = \{ \{\hat{g}\}^T \quad \{\hat{h}\}^T \}^T$. Evident

$$(1.9.54) \quad \begin{aligned} \|\varphi(\{z\})\| &\leq \|\{g\}\|_{(H_0^{-1}(\Omega_0))^7} \|\{\xi\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^7} \leq \\ &\leq c_1^{-1} \|\{g\}\|_{(H_0^{-1}(\Omega_0))^7} \|\{z\}\|_{(H_0^1(\Omega_0))^7} \end{aligned}$$

și conchidem că φ este o funcțională linear mărginită definită peste $\mathcal{R}(T)$, astfel că

$$(1.9.55) \quad \|\varphi\| \leq c_1^{-1} \|\{g\}\|_{(H_0^{-1}(\Omega_0))^7}$$

și putem prelungi prin continuitate pe φ în întreg spațiul $(H_0^1(\Omega_0))^7$, într-un astfel de mod că funcționala prelungită Φ va avea aceeași normă. Teorema lui Riesz arată că există un unic $\{\xi\} \in (H_0^1(\Omega_0))^7$, astfel că

$$(1.9.56) \quad \Phi(\{\tilde{\xi}\}) = \langle \{\xi\}, \{\tilde{\xi}\} \rangle_{L_2(\Omega_0)}, \text{ pentru } \forall \{\tilde{\xi}\} \in (H_0^1(\Omega_0))^7,$$

$$(1.9.57) \quad \| \{\xi\} \|_{(H_0^1(\Omega_0))^7} = \| \Phi \| \leq c_1^{-1} \| \{g\} \|_{(H_0^{-1}(\Omega_0))^7}.$$

Dacă alegem $\{\tilde{\xi}\} = T\{\bar{\xi}\}$, urmează că

$$(1.9.58) \quad B(\{\xi\}, \{\bar{\xi}\}) = \langle \{g\}, \{\bar{\xi}\} \rangle_{L_2(\Omega_0)} \text{ pentru } \forall \{\bar{\xi}\} \in (H_0^1(\Omega_0))^7.$$

Din relațiile $\lambda\{U\} - \{\hat{U}\} = \{V\}$, urmează că $\{W\} = \{\{U\}^T \{V\}^T \{\theta\}^T\}^T \in \mathcal{D}(A)$. Demonstrația este completă. ■

În continuare avem nevoie de următoarea teoremă (vezi Popescu [1988]):

Teorema 1.9.1 (Lumer - Phillips). *Fie $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operator liniar, dens definit.*

i). Dacă A este disipativ și există $\lambda > 0$ astfel încât $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$, atunci A este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții de clasă C_0 pe X .

ii). Dacă A este generatorul unui semigrup de contracții de clasă C_0 pe X , atunci A este disipativ (și mai mult, $\langle Ax, x^ \rangle \leq 0$ pentru orice $x \in \mathcal{D}(A)$, $x^* \in F(x)$ și $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ pentru orice $\lambda > 0$, cu $F : X \rightarrow 2^{X^*}$, $F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}$ aplicația de dualitate).*

Teorema 1.9.2. *Operatorul A definit prin relațiile (1.9.5) generează un C_0 -semigrup de contracții pe X .*

Demonstrație. Rezultă ca o consecință a lemelor 1.9.2, 1.9.4 și a teoremei 1.9.1 (Lumer-Phillips). ■

Existența și unicitatea se obțin pe baza teoremei următoare (conform Pazy [1972]):

Teorema 1.9.3. *Fie A generatorul infinitezimal al unui C_0 -semigrup de contracție pe X , $T(t)$. Dacă $\{\mathcal{F}\}$ este continuu diferențiabilă pe $[0, t_0]$ atunci problema valorii inițiale (1.9.7) - (1.9.10) are pentru orice $\{W_0\} \in \mathcal{D}(A)$ soluția unică*

$$(1.9.59) \quad \{W(t)\} = T(t)\{W_0\} + \int_0^t T(t-s)\{\mathcal{F}_1(s)\}ds, \quad t \in [0, t_0]$$

astfel că

$$(1.9.60) \quad \{W(t)\} = C^1([0, t_0]; X) \cap C^0([0, t_0]; \mathcal{D}(A)).$$

1.10. Principii de minimum în dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată.

1.10.1. Stadiul actual al problemei.

Principii variaționale pentru problema valorii inițial frontieră în dinamica termoelasticității liniare au fost elaborate pentru prima dată de Nickel și Sackman [1968], pe baza produsului de convoluție. Trebuie remarcat că principiile variaționale stabilite în această lucrare sunt de tip staționar, în timp ce principiile de extremum dual în dinamica termoelasticității liniare pentru un mediu continuu neomogen și anizotrop, sunt introduse de Lilius [1991], pe baza transformatei Laplace, metodei hipercercului și utilizând anumite funcții pondere continue și pozitive pe intervalul $[0, \infty)$. În foarte multe cazuri, principiile de extremum sunt mult mai utile decât principiile de staționaritate atât în dezvoltările teoretice, cât și în determinarea soluțiilor aproximative. Plecând de la o serie de rezultate obținute de Fabrizio, Giorgi și Morro [1989], în dinamica vâscoelasticității, în acest paragraf este prezentat un procedeu prin care un principiu de extremum este formulat pentru problema valorii inițial-frontieră în dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată cu condiții pe frontieră mixte. Este construită o familie de funcționale în domeniul transformatei Laplace pentru care este prezentată o teoremă de minim și pas cu pas este construită o funcțională biliniară cu o funcție pondere de timp și este arătat că soluția problemei mixte dă un minim pentru această funcțională.

1.10.2. Problema mixtă a plăcii subțiri termoelastic laminată.

Cum se analizează cazul liniar, se consideră $\chi = 0$ peste tot în acest paragraf. Vom numi problemă \mathcal{P} , problema mixtă (1.4.15), (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), (1.4.45), (1.4.61) – (1.4.64), (1.4.52).

Definiția 1.10.1. *O soluție a problemei \mathcal{P} va fi un câmp $\{U\} = (\{U\}, \{\theta\})$, $\{U\} \in \mathcal{K}$, astfel încât satisface ecuațiile*

$$(1.10.1) \quad \begin{aligned} & ([D]^T - [S]^T)([C]([D] + [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) + \{P\} = \\ & = [R]\{\ddot{U}\} \text{ pe } \Omega_0 \times [0, \infty), \end{aligned}$$

$$(1.10.2) \quad T_0([b]^T([D] + [S])\{\dot{U}\} + [a]\{\dot{\theta}\}) - ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)([K] \times \\ \times ([\mathcal{H}] + [S])\{\theta\}) = [R_1]\{r\} + \{\hat{q}\} \quad pe \quad \Omega_0 \times [0, \infty),$$

condițiile frontieră

$$(1.10.3) \quad [I_\sigma][D_n]^T([C]([D] + [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad pe \quad \partial\Omega_{o\sigma} \times [0, \infty),$$

$$(1.10.4) \quad [I_q][\mathcal{H}_n]^T[K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\} = [I_q]\{\bar{q}_n\} \quad pe \quad \partial\Omega_{oq} \times [0, \infty)$$

și condițiile inițiale (1.4.53).

1.10.3. Principiul de staționaritate și principiul de minim în transformata Laplace.

Fie $\{\tilde{U}(s)\}_L$ mulțimea proceselor deplasare - temperatură admisibile $\{U\} \in \{\tilde{U}(s)\}$ care posedă transformată Laplace $\{\tilde{U}\}$ în raport cu timpul t în semiplanul C_d . Presupunem că $\{P\}, \{r\}, \{\hat{q}\}, \{\bar{U}\}, \{\bar{\theta}\}, \{\bar{P}_n\}$ și $\{\bar{q}_n\}$ posedă transformată Laplace în C_a .

Funcțiile $\{\tilde{U}\}$ și $\{\tilde{\theta}\}$ satisfac respectiv condițiile frontieră

$$(1.10.5) \quad [I_u]\{\tilde{U}(x, y, s)\} = [I_u]\{\tilde{\bar{U}}(x, y, s)\}, \quad (x, y, s) \in \partial\Omega_{ou} \times C_d,$$

și

$$(1.10.6) \quad [I_\theta]\{\tilde{\theta}(x, y, s)\} = [I_\theta]\{\tilde{\bar{\theta}}(x, y, s)\}, \quad (x, y, s) \in \partial\Omega_{o\theta} \times C_d.$$

Pentru problema \mathcal{P} , aplicând operatorul transformată Laplace ecuațiilor (1.10.1) și (1.10.2) și ținând cont de condițiile inițiale (1.4.53), obținem

$$(1.10.7a) \quad L_s(\{\tilde{U}\}) := s^2[R]\{\tilde{U}\} - ([D]^T - [S]^T)([C]([D] + [S])\{\tilde{U}\} - \\ - [b]\{\tilde{\theta}\}) = \{\tilde{f}\},$$

$$(1.10.8a) \quad G_s(\{\tilde{U}\}) := sT_0([b]^T([D] + [S])\{\tilde{U}\} + [a]\{\tilde{\theta}\}) - \\ - ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)([\mathcal{H}] + [S_1])\{\tilde{\theta}\}) = \{\tilde{g}\}.$$

unde

$$(1.10.7b) \quad \{\tilde{f}\} = \{\tilde{P}\} + [R](s\{U^0\} - \{V^0\}),$$

$$(1.10.8b) \quad \{\tilde{g}\} = [R_1]\{\tilde{r}\} + \{\tilde{q}\} + T_0([b]^T([\mathcal{D}] + [S])\{U^0\} + [a]\{\ell^0\}).$$

Corespondenta problemei \mathcal{P} , în contextul transformatei Laplace și notată cu $\tilde{\mathcal{P}}$, este dată de ecuațiile

$$(1.10.9) \quad \bar{L}_s(\{W\}) = \{\tilde{f}\}, \quad (x, y, s) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}_d,$$

$$(1.10.10) \quad G_s(\{W\}) = \{\tilde{g}\}, \quad (x, y, s) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}_d,$$

împreună cu condițiile frontieră (1.10.5), (1.10.6),

$$(1.10.11) \quad [I_\sigma][\mathcal{D}_n]^T([C]([\mathcal{D}] + [S])\{W_1\} - [b]\{W_2\}) = [I_\sigma]\{\tilde{P}_n\} \text{ pe } \partial\Omega_{o\sigma} \times \mathbf{C}_d$$

și

$$(1.10.12) \quad [I_q][\mathcal{H}_n]^T[K](\{\mathcal{H}\} + [S_1])\{W_2\} = [I_q]\{\tilde{q}_n\} \text{ pe } \partial\Omega_{oq} \times \mathbf{C}_d,$$

unde $\{\bar{W}\} = (\{W_1\}, \{W_2\})$.

Soluția $\{W^*(s)\}$ a problemei $\tilde{\mathcal{P}}$ este evident un punct de staționaritate al funcționalei

$$(1.10.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_s(\{W(s)\}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (s^2\{W_1(s)\}^T [R]\{W_1(s)\} + (([\mathcal{D}] + \\ &+ [S])\{W_1(s)\})^T [C]([\mathcal{D}] + [S])\{W_1(s)\} + \{W_2(s)\}^T [a]\{W_1(s)\} + \\ &+ \frac{1}{sT_0} ((\{\mathcal{H}\} + [S_1])\{W_2(s)\})^T [K](\{\mathcal{H}\} + [S_1])\{W_2(s)\} - 2\{\tilde{f}(s)\}^T \times \\ &\times \{\tilde{W}_1(s)\} - \frac{2}{sT_0} \{\tilde{g}(s)\}\{W_2(s)\})d\Omega - \int_{\partial\Omega_{o\sigma}} [I_\sigma]\{\tilde{P}_n(s)\}^T \{\tilde{W}_1(s)\}dl - \\ &- \frac{1}{sT_0} \int_{\partial\Omega_{oq}} [I_q]\{\tilde{q}_n(s)\}^T \{W_2(s)\}dl, \quad (x, y, s) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}_d. \end{aligned}$$

Punând

$$(1.10.14) \quad \Lambda_s(\{\mathcal{U}\}) = \mathcal{L}_s(\{\mathcal{U}(s)\}).$$

funcționala (1.10.14) poate fi considerată ca o funcțională parametrizată prin numărul complex s .

Deci, o soluție $\{\mathcal{U}^*\} \in \mathcal{U}_L$ a problemei \mathcal{P} dă un punct de staționaritate pentru orice $s \in \mathbb{C}_d$.

Teorema care urmează acum, arată că punctul de staționaritate este chiar un punct de minim.

Teorema 1.10.1. *Dacă o funcție $\{\mathcal{U}^*\} \in \mathcal{U}_L$ este o soluție a problemei \mathcal{P} , atunci pentru orice număr real $\xi > 0$, Λ_ξ are un minim strict în $\{\mathcal{U}^*\}$ pe \mathcal{U}_L .*

Demonstrație. Fie $\{\mathcal{U}^*\} \in \{\tilde{\mathcal{U}}(s)\}_L$ o soluție a problemei \mathcal{P} . Atunci, pentru orice $Re\ s > 0$, $\{\tilde{\mathcal{U}}^*(s)\}$ satisface ecuațiile (1.10.5), (1.10.6), (1.10.9) – (1.10.12) și este un punct de staționaritate pentru funcționala (1.10.13). În plus, considerând $\{\mathcal{U}^*\} + \alpha\{h\} \in \{\tilde{\mathcal{U}}(s)\}_L$ cu $\alpha \in I_\alpha$, pentru $s \in \mathbb{C}_d$ ($\{h\} = \{\{h_1\}^T\{h_2\}^T\}^T$ având $\{h_1\}$ și $\{h_2\}$ vectori de dimensiune 5, respectiv 2) se obține

$$(1.10.15) \quad \begin{aligned} d^2\mathcal{L}_s(\{\mathcal{U}^*(s)|\{\tilde{h}(s)\}) &= \int_{\Omega_0} (s^2\{\tilde{h}_1(s)\})^T[R]\{\tilde{h}_1(s)\} + ([\mathcal{D}] + \\ &+ [S])\{\tilde{h}_1(s)\})^T[C]([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(s)\} + \{\tilde{h}_2\}^T[a]\{\tilde{h}_2(s)\} + \\ &+ \frac{1}{sT_0}([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(s)\})^T[K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(s)\})d\Omega, \end{aligned}$$

unde $d^2\mathcal{L}_s(\{\tilde{\mathcal{U}}^*(s)|\{\tilde{h}(s)\})$ reprezintă derivata Gâteaux de ordinul al doilea.

Considerând s real, atunci $\{\tilde{h}_1(s)\}$, $\{\tilde{h}_2(s)\}$, $([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(s)\}$, și $([\mathcal{H}] + [S_1])\{\tilde{h}(s)\}$ sunt vectori ale căror elemente au valori reale ca și \mathcal{L}_ξ . Pentru $\xi > 0$ și pentru orice $\{\tilde{h}\}$ admisibil nenul avem

$$(1.10.16) \quad d^2\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)|\{\tilde{h}(\xi)\}) > 0,$$

ca o consecință a faptului că matricele $[R]$, $[C]$ și $[K]$ sunt pozitiv definite, ceea ce rezultă pe baza inegalităților (1.9.17)₁, (1.9.18)₁ și (1.9.24). Se observă că anularea lui $\{\tilde{h}\}$ pe $[0, \infty)$ implică $\{h\} \equiv 0$.

Prin intermediul lui (1.10.14) urmează că $d^2\Lambda_\xi(\{\mathcal{U}^*|\{h\}) > 0$ pentru orice $\{h\}$ admisibil nenul și $\xi > 0$. ■

Utilizând notația $\overline{\mathbf{H}}^1(\Omega_0) = (H^1(\Omega_0))^2$, putem enunța teorema următoare:

Teorema 1.10.2. Fie $\Pi = \{\{\mathcal{U}\} \in \{\tilde{\mathcal{U}}(s)\}_L \mid \{\tilde{\mathcal{U}}(s) \in \mathbf{H}^1(\Omega_0) \times \overline{\mathbf{H}}^1(\Omega_0)\}\}$. Dacă pentru orice $\xi \in (0, \infty)$, funcționala Λ_ξ are un minim strict în $\{\mathcal{U}^*\}$ pe Π , atunci $\{\mathcal{U}^*\}$ este soluție unică a problemei \mathcal{P} .

Demonstrație. Presupunem că $\{\mathcal{U}^*(\xi)\}$ este un punct de minim strict al lui Λ_ξ . Atunci, ținând cont de (1.10.14) pentru orice $\xi \in (0, \infty)$ trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$(1.10.17) \quad d\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} \mid \{\tilde{h}(\xi)\}) = 0$$

și

$$(1.10.18) \quad d^2\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} \mid \{\tilde{h}(\xi)\}) > 0.$$

Ținând cont de formula lui Green și de faptul că $\{\tilde{h}_1(s)\}|_{\partial\Omega_{ou}} = 0$ și $\{\tilde{h}_2(s)\}|_{\partial\Omega_{oo}} = 0$, avem

$$(1.10.19) \quad \begin{aligned} d\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} \mid \{\tilde{h}(\xi)\}) &= \int_{\Omega_0} (\{\tilde{h}_1(\xi)\})^T (\xi[R]\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} - \\ &\quad - ([\mathcal{D}]^T - [S]^T)([C]([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} - [b]\{\tilde{\theta}^*(\xi)\} - \\ &\quad - \{\tilde{f}(\xi)\}) + \{\tilde{h}_2(\xi)\})^T ([b]^T([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{\mathcal{U}}(\xi)\} + [a]\{\tilde{\theta}^*(\xi)\} - \\ &\quad - \frac{1}{\xi T_0}([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)(\mathcal{H} + [S_1])\{\tilde{\theta}(\xi)\} - \frac{1}{\xi T_0}\{\tilde{g}(\xi)\})d\Omega + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{oo}} [I_\sigma]\{\tilde{h}_1(\xi)\})^T ([\mathcal{D}_n]^T([C]([\mathcal{D}] + [S_1])\{\tilde{\mathcal{U}}^*(\xi)\} - [b]\{\tilde{\theta}^*(\xi)\}) - \\ &\quad - \{\tilde{P}_n(\xi)\})dl + \frac{1}{\xi T_0} \int_{\partial\Omega_{oq}} [I_q]\{h_2(\xi)\})^T ([\mathcal{H}_n]^T[K]([\mathcal{H}] + \\ &\quad + [S_1])\{\tilde{\theta}^*(\xi)\} - \{\tilde{q}_n(\xi)\})dl, \end{aligned}$$

pentru orice $\{h\}$ admisibil. Pe de altă parte

$$(1.10.20) \quad \begin{aligned} d^2\mathcal{L}_\xi(\{\mathcal{U}^*(\xi)\} \mid \{\tilde{h}(\xi)\}) &= \int_{\Omega_0} (\xi^2\{\tilde{h}_1(\xi)\})^T [R]\{\tilde{h}_1(\xi)\} + \\ &\quad + (([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(\xi)\})^T [C]([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(\xi)\} + \\ &\quad + \frac{1}{\xi T_0}([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(\xi)\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(\xi)\}d\Omega. \end{aligned}$$

pentru orice $\{\tilde{h}\}$ admisibil și nenul.

Cum condiția (1.10.17) are loc pentru orice $\xi > 0$, pe baza relației (1.10.19), funcțiile $\{\tilde{U}^*(\xi)\}$ și $\{\tilde{\theta}^*(\xi)\}$ satisfac ecuațiile (1.10.9) – (1.10.12) în Ω_0 , adică $\{\tilde{U}^*(s)\}$ este o soluție a lui $\tilde{\mathcal{P}}$ pentru valorile reale ale lui s . Mai mult, ea este o soluție a acestei probleme datorită faptului că $[R]$, $[C]$ și $[K]$ sunt matrice pozitiv definite.

Dar în virtutea faptului că $[R]$, $[C]$ și $[K]$ sunt matrice pozitiv definite, operatorul L_s este tare eliptic pentru orice $s \in \mathbb{C}_d$. Astfel problema $\tilde{\mathcal{P}}$ are o soluție unică $\{\tilde{W}^*(s)\} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0) \times \overline{\mathbf{H}}^1(\Omega_0)$ care este analitică în s pe \mathbb{C}_d și egală cu $\{\tilde{U}^*(s)\}$ pe semidreapta real pozitivă. Urmează că $\{\tilde{W}^*(s)\}$ și $\{\tilde{U}^*(s)\}$ vor coincide pe întreg semiplanul complex \mathbb{C}_d . Din unicitatea transformatei Laplace urmează că $\{U^*\}$ trebuie să fie soluție unică a problemei \mathcal{P} în Π . ■

1.10.4. Principii de minim via funcții pondere în domeniul timpului.

Vom considera spațiile

(1.10.21a)

$$\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{V}) := \{\{U\} \in \mathbf{L}_{loc}^2([0, \infty); \mathbf{V}) \mid \{\tilde{U}(s)\} \in \{\mathbf{V}\}, \forall s \in \mathbb{C}_d\},$$

$$(1.10.21b) \quad \overline{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \overline{\mathbf{V}}) := \{\{\theta\} \in \overline{\mathbf{L}}_{loc}^2([0, \infty); \overline{\mathbf{V}}) \mid \{\tilde{\theta}(s)\} \in \overline{\mathbf{V}}, \forall s \in \mathbb{C}_d\}$$

(1.10.22a)

$$\mathbf{H}_L^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0)) := \{\{U\} \in \mathbf{H}_{loc}^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0)) \mid \{\tilde{U}(s)\} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall s \in \mathbb{C}_d\},$$

(1.10.22b)

$$\overline{\mathbf{H}}_L^1([0, \infty); \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0)) := \{\{\theta\} \in \overline{\mathbf{H}}_{loc}^1([0, \infty); \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0)) \mid \{\tilde{\theta}(s)\} \in \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0), \forall s \in \mathbb{C}\},$$

unde

$\mathbf{V}, \overline{\mathbf{V}}$ - spații Hilbert convenabil alese;

$$\mathbf{L}^2(\Omega_0) := (L^2(\Omega_0))^5; \quad \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0) := (L^2(\Omega_0))^2;$$

$\mathbf{L}_{loc}^2([0, \infty); \mathbf{V}) := \{\{U\} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{V} \mid \{U\} - \text{măsurabilă și } \{U\} \in \mathbf{L}^2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset [0, \infty)\}$;

$\overline{\mathbf{L}}_{loc}^2([0, \infty); \overline{\mathbf{V}}) := \{ \{\theta\} : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbf{V}} \mid \{\theta\} - \text{măsurabilă și } \{\theta\} \in \overline{\mathbf{L}}^2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset [0, \infty) \}$,

$\mathbf{H}_{loc}^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0)) := \{ \{\dot{U}\} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_0) \mid \{\dot{U}\} - \text{măsurabilă și } \{\dot{U}\}, \{U\} \in \mathbf{L}^2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset [0, \infty) \}$.

$\overline{\mathbf{H}}_{loc}^1([0, \infty); \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0)) := \{ \{\theta\} : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0) \mid \{\theta\} - \text{măsurabilă și } \{\theta\} \in \overline{\mathbf{L}}^2(J) \text{ pentru orice interval compact } J \subset [0, \infty) \}$.

În contextul teoriei lui Reiss [1978] și Reiss și Haug [1978], fie funcția $\Gamma \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ a cărei transformată Laplace reală este dată de *funcția pondere admisibilă* γ definită prin

$$(1.10.23) \quad \gamma(t) = \int_0^\infty \Gamma(s) e^{-st} ds.$$

În termeni de γ vom defini acum forma biliniară $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ pe spațiul \mathcal{S} prin relația

$$(1.10.24) \quad \langle \{\alpha\}, \{\beta\} \rangle_\gamma = \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t + \tau) \int_{\Omega_0} \{\alpha(x, y, t)\}^T \{\beta(x, y, \tau)\} dt d\tau d\Omega,$$

unde spațiul \mathcal{S} poate fi unul din spațiile $\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))$ sau $\overline{\mathbf{L}}^2([0, \infty); \overline{\mathbf{L}}^2(\Omega_0))$, iar $\{\alpha\}$ și $\{\beta\}$ sunt vectori, ambii de dimensiune 5 sau ambii de dimensiune 2.

Pentru $\{\alpha\}$ și $\{\beta\}$ din definiția lui γ avem

$$(1.10.25) \quad \langle \{\alpha\}, \{\beta\} \rangle_\gamma = \int_0^\infty \Gamma(s) \int_{\Omega_0} \{\tilde{\alpha}(x, y, s)\}^T \{\tilde{\beta}(x, y, s)\} ds d\Omega.$$

Vom arăta că problemei \mathcal{P} îi putem da o formulare variațională în termeni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$.

Considerăm funcționala

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma(\{U\}) &:= \int_0^\infty \Gamma(s) \mathcal{L}_s(\{\tilde{U}(s)\}) ds = \frac{1}{2} \langle \{\dot{U}\}, [R]\{\dot{U}\} \rangle_\gamma + \\ &+ \frac{1}{2} \langle ([\mathcal{D}] + [S])\{U\}, [C]([\mathcal{D}] + [S])\{U\} \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle \{\theta\}, [a]\{\theta\} \rangle_\gamma + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta(t)\})^T [K]([\mathcal{H}] + \\
& \quad + [S_1])\{\theta(\tau)\} dt d\tau d\alpha d\Omega - \langle \{U\}, \{P\} \rangle_\gamma - \\
& - \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} \{\theta(t)\}^T (\{r(\tau)\} + \{\hat{q}(\tau)\}) dt d\tau d\alpha d\Omega - \\
(1.10.26) \quad & - \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t+\tau) \int_{\partial\Omega_{ou}} [I_\sigma]\{U(t)\}^T \{\bar{P}_n(\tau)\} dt d\tau dl - \\
& - \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\partial\Omega_{og}} [I_g]\{\theta(t)\}^T \{\bar{q}_n(\tau)\} dt d\tau d\alpha dl + \\
& + \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} (\{\dot{U}(t)\})^T [R](\{U(0)\} - \{U^0\} - \\
& - \{U(t)\})^T [R]\{V^0\}) dt d\Omega + \int_0^\infty \int_t^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} \{\theta(t)\}^T ([b]([D] + \\
& + [S])\{U^0\} + [a]\{\theta^0\}) dt d\alpha d\Omega + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{U(0)\}^T [R]\{U(0)\} d\Omega,
\end{aligned}$$

unde $\{P\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))$; $\{\bar{P}_n\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\partial\Omega_0))$; $\{r\}, \{\hat{q}\} \in \bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\Omega_0))$; $\{\bar{q}_n\} \in \bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\partial\Omega_0))$.

Introducem de asemenea spațiile

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathcal{P}} := \{ \{U\} \in (\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_1^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega))) \times \\
(1.10.27a) \quad & \times (\bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{H}}(\Omega_0) \cap \mathbf{H}_L^1([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\Omega_0))) \mid \{U\}|_{\partial\Omega_{ou}} = \{\bar{U}\}, \\
& \{\theta\}|_{\partial\Omega_{og}} = \{\bar{\theta}\} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{\hat{\mathcal{P}}_0 := \{ \{h\} \in (\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega_0) \cap \mathbf{H}_L^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))) \times \\
(1.10.27b) \quad & \times (\bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{H}}(\Omega_0) \cap \mathbf{H}_L^1([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\Omega))) \mid \{h_1\}|_{\partial\Omega_{ou}} = \\
& \{0\}, \{h_2\}|_{\partial\Omega_{og}} = \{0\} \}.
\end{aligned}$$

Principiul de minim poate fi formulat astfel:

Teorema 1.10.3. Dacă $\{U^*\} \in \hat{\mathcal{P}}$ este o soluție a problemei \mathcal{P} cu $\{P\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))$, $\{\bar{P}_n\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\partial\Omega_0))$, $\{r\}, \{\hat{q}\} \in \bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\Omega_0))$ și $\{\bar{q}_n\} \in \bar{\mathbf{L}}_L^2([0, \infty); \bar{\mathbf{L}}^2(\partial\Omega_0))$, atunci pentru orice funcție $\Gamma \in C_0^\infty([0, \infty))$, funcționala $\Lambda_\gamma(\{U\})$ are un minim în $\{U^*\}$ pe $\hat{\mathcal{P}}$.

Demonstrație. Fie $\{U^*\} \in \hat{\mathcal{P}}$. Orice element $\{U\} \in \hat{\mathcal{P}}$ poate fi scris ca o sumă $\{U^*\} + \{h\}$, unde $\{h\} \in \hat{\mathcal{P}}_0$. Atunci, ținând cont de simetria lui $[R]$, $[C]$ și $[K]$, avem:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \langle \{\dot{h}_1\}, [R]\{\dot{U}^*\} \rangle_\gamma + \\
& + \frac{1}{2} \langle \{\dot{h}_1\}, [R]\{\dot{h}\} \rangle_\gamma + \langle ([D] + [S])\{h_1\}, [C]([D] + \\
& + [S])\{U^*\} \rangle_\gamma + \langle ([D] + [S])\{h_1\}, [C]([D] + [S])\{h_1\} \rangle_\gamma + \\
& + \langle \{h_2\}, [a]\{\theta^*\} \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle \{h_2\}, [a]\{h_2\} \rangle_\gamma + \\
& + \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(t)\})^T [K]([\mathcal{H}] + \\
& + [S_1])\{\theta^*(\tau)\} dt d\tau d\alpha d\Omega + \frac{1}{2T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + \\
(1.10.28) \quad & + [S_1])\{h_2(t)\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(\tau)\} dt d\tau d\alpha d\Omega - \\
& - \langle \{h_1\}, \{P\} \rangle_\gamma - \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} \{h_2(t)\}^T (\{r(\tau)\} + \\
& + \{\hat{q}(\tau)\}) dt d\tau d\alpha d\Omega - \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t + \tau) \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} [I_\sigma]\{h_1(t)\}^T \{\bar{P}_n(\tau)\} dt d\tau dl - \\
& - \frac{1}{T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} [I_\sigma]\{h_2(t)\}^T \{\bar{q}_n(\tau)\} dt d\tau d\alpha dl + \\
& + \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} (\{\dot{h}_1(t)\})^T [R](\{U^*(0)\} - \{U^0\}) - \\
& - \{h_1(t)\}^T [R]\{V^0\} dt d\Omega + \int_0^\infty \int_t^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} \{h_2(t)\}^T ([b]([D] + \\
& + [S])\{U^0\} + [a]\{\theta^0\}) dt d\alpha d\Omega + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{h_1(0)\}^T [R] \times
\end{aligned}$$

$$\times(2\{U(0)\} + \{h_1(0)\})d\Omega.$$

Întrucât $\{U^*\}$ este soluție a problemei \mathcal{P} , integrând și ținând cont de formula lui Green rezultă

$$\begin{aligned} & \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \frac{1}{2} \langle \{\dot{h}_1\}, [R]\{\dot{h}_1\} \rangle_\gamma + \\ & + \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} \{\dot{h}_1(t)\}^T [R]\{h_1(0)\} dt d\Omega + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{h(0)\}^T \times \\ (1.10.29) \quad & \times [R]\{h(0)\} d\Omega + \frac{1}{2} \langle ([\mathcal{D}] + [S])\{h_1\}, [C]([\mathcal{D}] + [S])\{h_1\} \rangle_\gamma + \\ & + \frac{1}{2} \langle \{h_2\}, [a]\{h_2\} \rangle_\gamma + \frac{1}{2T_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{t+\tau}^\infty \gamma(\alpha) \int_{\Omega_0} (([\mathcal{H}] + \\ & + [S_2])\{h_2(t)\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{h_2(\tau)\} dt d\tau d\alpha d\Omega, \end{aligned}$$

care mai poate fi scrisă

$$\begin{aligned} & \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\Omega_0} \Gamma(s)\{\tilde{h}_1(s)\}^T \times \\ (1.10.30) \quad & \times [R]\{\tilde{h}_1(s)\} ds d\Omega + \int_0^\infty \int_{\Omega_0} \Gamma(s)(([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(s)\})^T \times \\ & \times [C]([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}_1(s)\} ds d\Omega + \int_0^\infty \int_{\Omega_0} \frac{1}{s} \Gamma(s)(([\mathcal{H}] + \\ & + [S_1])\{\tilde{h}_2(s)\})^T [K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\tilde{h}_2(s)\} ds d\Omega. \end{aligned}$$

Datorită faptului că $[R]$, $[C]$ și $[K]$ sunt matrice pozitiv definite, din (1.10.30) rezultă

$$(1.10.31) \quad \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) \geq 0,$$

adică $\{U^*\}$ este minim pentru funcționala Λ_γ pe $\hat{\mathcal{P}}$ și demonstrația este încheiată. ■

PROPAGAREA UNDELOR ÎNTR-O PLACĂ SUBȚIRE
LINIAR TERMOELASTIC LAMINATĂ

2.1. Stadiul actual al problemei.

Propagarea undelor în cadrul teoriei termoelasticității clasice a fost studiată de Kaliski [1965], Boley și Hertzanski [1968], Daimaruya și Ishikawa [1974], etc. Printre cei care au studiat undele termoelastice armonice plane amintim pe Deresiewicz [1957] în cadrul teoriei termoelasticității cuplate: Gurtin și Pipkin [1968], Norwood și Warren [1969], Francis [1972], Puri [1973], Tokuoka [1973], etc., în cadrul termoelasticității generalizate.

Chawick și Powdrill [1965] au realizat o descriere detaliată a propagării suprafețelor de discontinuitate într-un solid elastic omogen și izotrop în cadrul teoriei liniare a termoelasticității, utilizând metoda lui Thomas [1961]. Sunt studiate atât undele tari (de șoc) cât și undele slabe de ordinul doi (de accelerație) și ordin superior.

Banerjee și Pao [1974] și de asemenea Sharma și Singh [1968] au investigat propagarea undelor plane într-un mediu omogen termoelastic anizotrop.

Propagarea undelor termoelastice produse de o forță punctiformă într-un mediu elastic nemărginit a fost analizată de Soós [1968].

Lord și Lopez [1970] au analizat propagarea undelor în solide termoelastice la schimbări de temperatură foarte joase.

McCarthy [1972] a studiat propagarea undelor de accelerație de formă arbitrară în termoelasticitatea generalizată. Propagarea acestor unde în materiale izotropice este tratată în detaliu și se pun în evidență patru unde principale care se pot propaga.

Propagarea undelor într-un mediu inițial termoelastic tensionat a fost studiată de Şuhubi [1974].

Efectul variabilelor de stare asupra comportării undelor de accelerație în materiale termoelastice neliniar anizotrope a fost studiat de Bowen și Chen [1972]. De asemenea, ei dau condiții suficiente care asigură existența unei unde de accelerație longitudinale și a două unde de accelerație transversale, plane cu amplitudini ortogonale. În plus, propagarea undelor de accelerație termomecanice finite și simetrice în materiale cu variabile interne de stare a fost studiată de Mihăilescu și Suliciu [1976]. În particular, pentru cazul

teoriei liniar izotropice ei au tratat atât undele de accelerație cât și pe cele de șoc.

Incluzând teoria clasică a termoelasticității liniare în teoria perturbațiilor infinitezimale suprapuse peste deformațiile finite în materialele termoelastice, Dunwoody [1977] pe baza principului redus al superpoziției deduce că undele de șoc slabe sunt izotermale.

Într-o notă, Grioli [1979a] propune o modificare a legii lui Fourier ce face legătura între fluxul de căldură și temperatură cu scopul de a elimina paradoxul vitezei infinite de propagare a căldurii și de stabilire a unui tip sigur de interacțiune între fenomenul termic și fenomenul mecanic. Într-o altă notă, Grioli [1979b] aplică aceasta la cazul fluidului nevâscos și la corpul elastic deformabil.

Torrisi [1980] explorează posibilitatea propagării undelor sub condiții de interacțiune completă între fenomenul termic și cel mecanic în corpuri hiperelastice utilizând ipoteza vectorului flux de căldură raportată de Grioli [1979a].

Nistor [1989] studiază propagarea undelor de accelerație în teoria liniară a termoelasticității stabilită de Green și Lindsay [1972], arată că undele de accelerație ce se propagă într-o regiune cu stare uniformă sunt izotermice și stabilește de asemenea condiția de propagare, iar prin intermediul metodei bicaracteristicelor obține ecuația de transport.

Sve [1971] a studiat propagarea undelor într-un mediu periodic laminat.

Propagarea undelor termoelastice într-o placă a fost studiată de mai mulți autori. Numărul acestora este totuși relativ mic. Printre aceștia amintim: Chadwick [1962] care a studiat atât propagarea undelor termoelastice în plăci cât și în bare; Deresiewicz [1975] a studiat propagarea undelor în plăci termoelastice sub stare de deformație plană în cadrul teoriei termoelasticității cuplate; Massalas [1986] a analizat propagarea undelor într-o placă subțire omogenă și izotropă; Massalas și Kalapakidis [1987] au realizat un studiu privind propagarea undelor într-o placă subțire omogenă și izotropă cu condiții la limită mixte și relaxare termică, etc.

În continuare în cadrul acestui capitol, am studiat propagarea undelor de șoc și de accelerație într-o placă subțire termoelastic laminată infinită cu lamine omogene și ortotrope. În ambele cazuri am obținut condiția de propagare și ecuația diferențială de transport care descrie variația intensității saltului. De-a lungul bicaracteristicelor, am arătat că ecuația de

transport are o formă simplificată. De asemenea, am studiat propagarea undelor armonice plane, obținând ecuația de dispersie a undelor.

2.2. Propagarea undelor de șoc într-o placă subțire liniar termoelastice laminată.

2.2.1. Unda de șoc. Condiția de compatibilitate cinematică. Condiția de propagare.

Se consideră o placă subțire termoelastice laminată infinită cu lamine omogene în care se presupune că se propagă o undă de șoc.

Definiția 2.2.1. Se spune că o curbă $C_t \subset \mathbf{R}^2$ de ecuație

$$(2.2.1) \quad f(x, y, t) \equiv t - \tau(x, y) = 0$$

care se propagă cu viteza U_n în planul mediu al plăcii subțiri compozit liniar termoelastice laminată este o curbă de discontinuitate tare (undă de șoc) dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

- a) funcțiile vectoriale $\{U\}, \{\theta\}$ sunt continue pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$;
- b) funcțiile vectoriale $\{\Sigma\}, \{e\}, \frac{\partial}{\partial x}\{U\}, \frac{\partial}{\partial y}\{U\}, \{\dot{U}\}, \{q\}, \{\eta\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\theta\}, \frac{\partial}{\partial y}\{\theta\}, \{\dot{\theta}\}$, ca și derivatele lor de ordin superior pot poseda discontinuități de salt la traversarea lui C_t , dar ele sunt continue pe $\mathbf{R}^2 - C_t$;
- c) funcțiile vectoriale $\{P\}$ și $\{r\}$ sunt funcții de clasă C^0 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

În continuare vom presupune satisfăcută condiția inițială

$$(2.2.2) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{0\} \quad \text{dacă } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Definiția 2.2.2. Fiind dat un câmp arbitrar (scalar, vectorial) $\Phi(x, y, t)$ definit pe $\Omega_0 \times \mathbf{R}$ ($\Omega_0 \subset \mathbf{R}^2$), saltul lui $\Phi(x, y, t)$ la traversarea curbei C_t este definit prin

$$(2.2.3) \quad [[\{\Phi\}]] = \Phi^+ - \Phi^-,$$

unde este presupusă existența limitelor

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} \Phi^+ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \Phi(x, y, t) \quad ((x, y) \in \Omega_0^+, (x_0, y_0) \in C_t) \\ \Phi^- &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \Phi(x, y, t) \quad ((x, y) \in \Omega_0^-, (x_0, y_0) \in C_t) \end{aligned}$$

cu Ω_0^+ și Ω_0^- regiunile din domeniul Ω_0 care sunt separate prin curba C_t și $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_0^+ \cup \bar{\Omega}_0^-$.

Condiția de compatibilitate de ordinul întâi (vezi Hadamard [1903]) este

$$(2.2.5) \quad [[\Phi]],_k = [[\Phi],_k] + [[\dot{\Phi}]]\tau_{,k},$$

unde aici k poate fi x sau y .

Dacă n_k sunt componentele vectorului unitar normal la curba C_t , atunci avem relațiile:

$$(2.2.6) \quad n_k = \frac{f_{,k}}{\sqrt{f_{,x}^2 + f_{,y}^2}} = -\frac{\tau_{,k}}{\sqrt{\tau_{,k}^2 + \tau_{,y}^2}} \quad \text{și} \quad U_n = -\frac{\dot{f}}{\sqrt{f_{,x}^2 + f_{,y}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\tau_{,x}^2 + \tau_{,y}^2}}.$$

Cu ajutorul relațiilor (2.2.6), condiția de compatibilitate cinematică (2.2.5) mai poate fi scrisă sub forma

$$(2.2.7) \quad [[\Phi]],_k = [[\Phi],_k] + (1/U_n)n_k[[\dot{\Phi}]].$$

Definiția 2.2.3. Presupunând că salturile lui $\{V\} = \{\dot{U}\}$ și $\{\theta\}$ la transversarea curbei C_t sunt date de

$$(2.2.8) \quad [\{\dot{V}\}] = -s\{d\}, \quad [\{\dot{\theta}\}] = -s\{d_1\}$$

unde $\{a\} = \{\{d\}^T\{d_1\}^T\}^T$ reprezintă un vector unitar al spațiului vectorial \mathbf{R}^7 ($\{a\}^T\{a\} = 1$), s se numește **intensitatea saltului undei de șoc**.

Considerând pe rând $\Phi = \{U\}$ și $\Phi = \{\theta\}$ în condiția de compatibilitate cinematică (2.2.7) și ținând cont de continuitatea lui $\{U\}$ și $\{\theta\}$ la traversarea curbei C_t obținem

$$(2.2.9) \quad [\{\dot{U}\}],_k = (1/U_n)sn_k\{d\}, \quad [\{\dot{\theta}\}],_k = (1/U_n)sn_k\{d_1\}.$$

Teorema 2.2.1 Într-o placă subțire compozit linear termoelastic laminată având ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44), viteza de propagare U_n a undei de șoc considerată într-un punct $(x, y, t) \in C_t$ satisface următoarea condiție de propagare

$$(2.2.10) \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0U_n[b]^T[\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{d_1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

unde $[D_n]$ și $[H_n]$ sunt matricele obținute respectiv din $[D]$ și $[H]$ punând n_1 și n_2 în loc de $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$.

Demonstrație. Ecuațiile de salt obținute din legea de bilanț a momentului linear și legea de bilanț a energiei cinetice sunt respectiv

$$(2.2.11) \quad [D_n]^T [[\{\Sigma\}]] + U_n [R] [[\{V\}]] = \{0\}$$

și

$$(2.2.12) \quad [H_n]^T [[\{q\}]] + T_0 U_n [R_1] [[\{\eta\}]] = \{0\}.$$

Considerând operatorul salt la traversarea curbei C_t în ecuațiile (1.4.27), (1.4.15), (1.4.32) și (1.4.44) obținem respectiv ecuațiile:

$$(2.2.13) \quad [[\{\Sigma\}]] = [C] [[\{e\}]],$$

$$(2.2.14) \quad [[\{e\}]] = [[D] \{U\}],$$

$$(2.2.15) \quad [R_1] [[\{\eta\}]] = [b]^T [[\{e\}]],$$

$$(2.2.16) \quad [[\{q\}]] = [K] [[H] \{\theta\}].$$

unde s-a considerat $\chi = 0$ și s-a presupus continuitatea lui $\{U\}$, $\{\theta\}$, $[S] \{\Sigma\}$, $[S_1] \{\theta\}$ și $\{r\}$ la traversarea curbei C_t .

Utilizând relațiile (2.2.9) avem

$$(2.2.17) \quad [[D] \{U\}] = (1/U_n) s [D_n] \{d\},$$

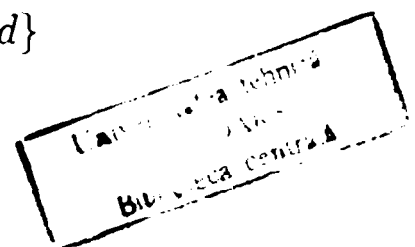
$$(2.2.18) \quad [[H] \{\theta\}] = (1/U_n) s [H_n] \{d_1\}.$$

Din relațiile (2.2.13), (2.2.14) și (2.2.17) rezultă

$$(2.2.19) \quad [[\{\Sigma\}]] = (1/U_n) s [C] [D_n] \{d\},$$

iar din relațiile (2.2.15) – (2.2.18) se obțin ecuațiile

$$(2.2.20) \quad [R_1] [[\{\eta\}]] = (1/U_n) s [b]^T [D_n] \{d\}$$



și

$$(2.2.21) \quad [\{q\}] = (1/U_n)s[K][\mathcal{H}_n]\{d_1\}.$$

Substituind $[\{\square\}]$ dat de relația (2.2.19) și $[\{V\}]$ dat de (2.2.8)₁ în ecuația (2.2.11) obținem

$$(2.2.22) \quad ((1/U_n)s[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n s[R])\{d\} = \{0\}.$$

Analog, substituind $[R_1][\{\eta\}]$ dat de (2.2.20) și $[\{q\}]$ dat de (2.2.21) în ecuația (2.2.11) rezultă

$$(2.2.23) \quad T_0 s[b]^T[\mathcal{D}_n]\{d\} + (1/U_n)s[\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n]\{d_1\} = \{0\}.$$

Ecuațiile (2.2.22) și (2.2.23) pot fi scrise

$$(2.2.24) \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0 U_n [b]^T[\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{d_1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

care reprezintă condiția de propagare a undei de șoc. ■

Pentru a avea o soluție diferită de soluția banală a ecuației (2.2.24), trebuie ca

$$(2.2.25) \quad \det \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0 U_n [b]^T[\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} = 0.$$

Observația 2.2.1. Deoarece matricea $[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n]$ este simetrică, vectorul propriu la stânga coincide abstractie făcând de un scalar ce intervine multiplicativ cu vectorul propriu la dreapta $\{d\}$.

Observația 2.2.2. Vectorul $\{\{d\}^T\{0\}_1^T\}$, cu $\{0\}_1^T = \{0 \ 0\}$, satisface în mod unic (abstractie făcând de o constantă) relația

$$(2.2.26) \quad \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{0\}_1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0 U_n [b]^T[\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\}_1 \end{Bmatrix}^T$$

2.2.2. Variația intensității saltului undei de șoc.

Teorema 2.2.2. *Intensitatea s a saltului undei de șoc propagându-se într-o placă subțire compozit liniar termoelastic laminată având ecuațiile*

constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44) satisface următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale

$$(2.2.27) \quad \begin{aligned} & \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}] (\{d\}_s) + U_n \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\}_s / U_n) + \\ & + s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [b] \{d_1\} = s \{d\}^T [S]^T [C] [\mathcal{D}_n] \{d\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Utilizând operatorul salt la traversarea curbei \mathcal{C} în ecuația de mișcare (1.4.45) când $\chi = 0$ și în ecuația energiei (1.4.50), obținem ecuațiile

$$(2.2.28) \quad [[\mathcal{D}]^T \{\Sigma\}] - [S]^T [[\Sigma]] = [R] [[\dot{V}]]$$

și

$$(1.2.29) \quad T_0 [R_1] [[\dot{\eta}]] = [[\mathcal{H}]^T \{q\}],$$

unde continuitatea lui $\{P\}$ și $\{r\}$ la traversarea curbei \mathcal{C}_t este presupusă.

Derivând în raport cu timpul relațiile (1.4.27), (1.4.15) când $\chi = 0$, (1.4.32), (1.4.44), considerând operatorul salt la traversarea curbei \mathcal{C}_t în relațiile obținute și apoi eliminând $[[\dot{e}]]$, obținem:

$$(2.2.30) \quad [[\dot{\Sigma}]] = [C] [[\mathcal{D}]\{V\}] - [b] [[\dot{\theta}]],$$

$$(2.2.31) \quad [R_1] [[\dot{\eta}]] = [b]^T [[\mathcal{D}]\{V\}] + [a] [[\dot{\theta}]],$$

$$(2.2.32) \quad [[\dot{q}]] = [K] ([[\mathcal{H}] \{ \dot{\theta} \}] + [S_1] [[\dot{\theta}]]).$$

Pe baza condiției de compabilitate cinematică (2.2.7) putem scrie

$$(2.2.33) \quad [[\mathcal{D}]^T \{\Sigma\}] = [\mathcal{D}]^T [[\Sigma]] - (1/U_n) [\mathcal{D}_n]^T [[\dot{\Sigma}]],$$

$$(2.2.34) \quad [[\mathcal{D}]\{V\}] = [\mathcal{D}][\{V\}] - (1/U_n) [\mathcal{D}_n][[\dot{V}]],$$

$$(2.2.35) \quad [[\mathcal{H}]^T \{q\}] = [\mathcal{H}]^T [[\{q\}]] - (1/U_n) [\mathcal{H}_n]^T [[\dot{q}]].$$

Substituind $[[\mathcal{D}]\{V\}]$ dat de relația (2.2.34) în (2.2.30) și (2.2.31), obținem respectiv

$$(2.2.36) \quad [[\dot{\Sigma}]] = [C] ([\mathcal{D}][\{V\}] - (1/U_n) [\mathcal{D}_n][[\dot{V}]]) - [b] [[\dot{\theta}]],$$

$$(2.2.37) \quad [R_1][\{\dot{\eta}\}] = [b]^T([D][\{V\}] - (1/U_n)[D][\{\dot{V}\}]) + [a][\{\dot{\theta}\}].$$

Pe de altă parte substituind $[\{q\}]$ dat de (2.2.16) și $[\{\dot{q}\}]$ dat de (2.2.22) în (2.2.35), rezultă

$$(2.2.38) \quad [[\mathcal{H}]^T\{q\}] = [\mathcal{H}]^T[K][[\mathcal{H}]\{\theta\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n]^T[K]([[\mathcal{H}]\{\dot{\theta}\}] + [S_1][\{\dot{\theta}\}]).$$

Pe baza condiției de compatibilitate cinematică (2.2.7) avem

$$(2.2.39) \quad [[\mathcal{H}]\{\dot{\theta}\}] = [\mathcal{H}][\{\dot{\theta}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n][\{\ddot{\theta}\}],$$

astfel că (2.2.38) devine

$$(2.2.40) \quad [[\mathcal{H}]^T\{q\}] = [\mathcal{H}]^T[K][[\mathcal{H}]\{\theta\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n]^T[K]([[\mathcal{H}][\{\dot{\theta}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n][\{\ddot{\theta}\}] + [S_1][\{\dot{\theta}\}]).$$

Înlocuind $[\{\dot{\Sigma}\}]$ dat de relația (2.2.36) în (2.2.33), rezultă

$$(2.2.41) \quad [[D]^T\{\Sigma\}] = [D]^T[\{\Sigma\}] - (1/U_n)[D_n]^T[C]([D][\{V\}] - (1/U_n)[D_n][\{\dot{V}\}]) - (1/U_n)[D_n]^T[b][\{\dot{\theta}\}].$$

Substituind $[[D]^T\{\Sigma\}]$ dat de (2.2.41) în (2.2.28), iar $[R_1][\{\dot{\eta}\}]$ dat de (2.2.40) în (2.2.29), apoi ținând cont în ecuațiile rezultate de relațiile (2.2.8), (2.2.18) și (2.2.19) rezultă două ecuații diferențiale scrise sub următoarea formă matriceală

$$(2.2.42) \quad \begin{bmatrix} [D_n]^T[C][D_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0 U_n [b]^T [D_n] & [\mathcal{H}_n]^T [K] [\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\{\dot{V}\}] \\ [\{\dot{\theta}\}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{g\} \end{Bmatrix},$$

unde

$$(2.2.43) \quad \begin{aligned} \{f\} &= -(U_n^2 [D_n] \{d\} \frac{s}{U_n}) + U_n [D_n]^T [C] \times \\ &\times [D] (\{d\} s) + s U_n [D_n]^T [b] \{d_1\} - s U_n [s]^T [C] [D_n] \{d\} s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{g\} &= -(T_0 U_n^2 [b]^T [D]) (\{d\} s) + U_n^2 [\mathcal{H}] ([K] [\mathcal{H}_n] \{d_1\} \frac{s}{U_n}) + \\ &+ s T_0 U_n^2 [b]^T [a] \{d_1\}^T + U_n [\mathcal{H}_n]^T [K] [S_1] \{d_1\}. \end{aligned}$$

Înmulțind la stânga ecuația matriceală (2.2.42) cu $\{\{d\}^T\{0\}_1^T\}$ rezultă ecuația diferențială cu derivate parțiale (2.2.27). ■

Se consideră un câmp arbitrar de vectori $\{l(x, y)\}$ din \mathbf{R}^2 , de componente $l_i(x, y)$ ($i=1,2$), legat de frontul de undă (2.2.1) și normalizat prin condiția

$$(2.2.44) \quad l_i n_i = 1.$$

Fie de asemenea derivata

$$(2.2.45) \quad \frac{\delta l(\quad)}{\delta t} = U_n l_i(\quad),_i$$

utilizată de Braun [1974] în cazul propagării undelor de accelerație în materiale hiperelastice anizotrope.

Derivata (2.2.45) este o măsură a schimbării în timp a unei mărimi observate de un observator situat pe frontul de undă și mișcându-se în direcția câmpului de vectori $\{l(x, y)\}$.

Dacă vectorii $\{l(x, y)\}$ coincid cu vectorul unitar normal $\{n\}$ la frontul de undă, derivata (2.2.45) devine derivata deplasării după Thomas [1961].

În continuare vom arăta cum ecuația cu derivate parțiale (2.2.27) poate fi transformată într-o ecuație diferențială ordinară. Acest rezultat este dat de teorema următoare.

Teorema 2.2.3. *Ecuația diferențială cu derivate parțiale (3.2.27) se transformă de-a lungul bicaracteristicilor într-o ecuație diferențială de forma*

$$(2.2.46) \quad \frac{\delta_1 s}{\delta t} + a s = 0,$$

unde

$$(2.2.47) \quad a = (\{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}]\{d\} + \{d\}^T[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}]\{d\}) + \{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[b]\{d_1\} - \{d\}^T[S]^T[C][\mathcal{D}_n]\{d\}) / (2U_n\{d\}^T[R]\{d\}).$$

Demonstrație. Urmând ideile prezentate în lucrarea lui Dobre și Chelu [1992], vom considera câmpul de vectori $\{l(x, y)\}$ din \mathbf{R}^2 , având componentele $l_i(x, y)$ ($i=1,2$) definite prin relațiile

$$(2.2.48) \quad l_1 = \frac{\{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\alpha]\{d\}}{U_n^2\{d\}^T[R]\{d\}}, \quad l_2 = \frac{\{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\beta]\{d\}}{U_n^2\{d\}^T[R]\{d\}}.$$

unde $[\alpha]$ și $[\beta]$ sunt matrice numerice obținute prin descompunerea lui $[\mathcal{D}]$ după cum urmează:

$$(2.2.49) \quad [\mathcal{D}] = [\alpha](\cdot)_{,x} + [\beta](\cdot)_{,y}.$$

Din definiția matricii $[\mathcal{D}_n]$, pe baza descompunerii (2.2.49), rezultă

$$(2.2.50) \quad [\mathcal{D}_n] = [\alpha]n_1 + [\beta]n_2.$$

Deasemenea, condiția de normalitate (2.2.44) este satisfăcută de către câmpul vectorial definit de relațiile (2.2.48) dacă se ține seama de relația

$$(2.2.51) \quad \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}_n] \{d\} - U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\} = 0,$$

obținută din multiplicarea la stânga a ecuației (2.2.22) cu vectorul $\{d\}^T$. Pe baza relațiilor (2.2.45), (2.2.48), (2.2.49) și luând în considerare că U_n nu este funcție de timp, putem scrie

$$(2.2.52) \quad \begin{aligned} \{d\}^T [\mathcal{D}_n] [C] [\mathcal{D}] (\{d\} s) &= \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] ([\alpha](\{d\} s)_{,x} + \\ &+ [\beta](\{d\} s)_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}] \{d\} + \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] \times \\ &\times ([\alpha]\{d\} s_{,x} + [\beta]\{d\} s_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}] \{d\} + \\ &+ U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\} (l_1 s_{,x} + l_2 s_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}] \{d\} + \\ &+ U_n \{d\}^T [R] \{d\} \delta_l s / \delta t \end{aligned}$$

și

$$(2.2.53) \quad \begin{aligned} U_n \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\} s / U_n) &= U_n \{d\}^T ([\alpha]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \times \\ &\times \{d\} s / U_n)_{,x} + [\beta]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\} s / U_n)_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C] \times \\ &\times [\mathcal{D}_n] \{d\}) + s \{d\}^T ([\alpha]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\})_{,x} + [\beta]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\})_{,y}) + \\ &+ U_n \{d\}^T ([\alpha]^T [C] [\mathcal{D}_n] \{d\} (s / U_n)_{,x} + [\beta]^T [C] [\mathcal{D}_n] \{d\} (s / U_n)_{,y}) = \\ &= 2s \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C] [\mathcal{D}] \{d\}) + U_n^3 \{d\}^T [R] \{d\} (l_1 (s / U_n)_{,x} + \\ &+ l_2 (s / U_n)_{,y}) = 2s \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C] [\mathcal{D}_n] \{d\}) + U_n \{d\}^T [R] \{d\} \delta_l s / \delta t. \end{aligned}$$

Ținând cont de relațiile (2.2.52) și (2.2.53) în ecuația (2.2.27), prin utilizarea notației (2.2.47), obținem ecuația (2.2.46). Astfel, teorema 2.2.3 este demonstrată. ■

2.3. Propagarea undelor de accelerație într-o placă subțire liniar termoelastic laminată.

2.3.1. Unda de accelerație. Condiția de propagare.

Se consideră o placă subțire termoelastic laminată infinită cu lamine omogene în care se presupune că se propagă o undă de accelerație.

Definiția 2.3.1. *Se spune că o curbă $\Gamma_t \subset \mathbf{R}_2$ de ecuație*

$$(2.3.1) \quad f(x, y, t) \equiv t - \tau(x, y) = 0$$

care se propagă cu viteza U_n în planul mediu al plăcii subțiri termoelastic laminată este o **curbă de discontinuitate slabă (undă de accelerație)** dacă sunt satisfăcute următoarele condiții

- a) funcțiile vectoriale $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$, $[D]\{U\}$, $\{e\}$, $\{\Sigma\}$, $\{\eta\}$, $\{q\}$, $\{\theta\}$, $\{\dot{\theta}\}$ și $[\mathcal{H}]\{\theta\}$ sunt continue pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$,
- b) funcțiile vectoriale $\{\ddot{U}\}$, $[D]\{\dot{U}\}$, $\{\dot{\Sigma}\}$, $[D]^T\{\Sigma\}$, $\{\dot{e}\}$, $\{\dot{\eta}\}$, $\{\dot{q}\}$, $[\mathcal{H}]^T\{q\}$, $\{\ddot{\theta}\}$, $[\mathcal{H}]\{\dot{\theta}\}$, precum și derivatele lor de ordin superior pot poseda discontinuități de salt la traversarea curbei Γ_t , dar ele sunt continue pe $\mathbf{R}^2 - \Gamma_t$,
- c) funcțiile vectoriale $\{P\}$ și $\{r\}$ sunt funcții de clasă C^1 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

Definiția 2.3.2. *Presupunând că salturile lui $\{\dot{V}\} = \{\ddot{U}\}$ și $\{\ddot{\theta}\}$ la traversarea curbei Γ_t sunt respectiv*

$$(2.3.2) \quad [[\{\dot{V}\}]] = U_n^2 s \{\tilde{d}\}. \quad [[\{\ddot{\theta}\}]] = U_n^2 s \{\tilde{d}_1\}$$

unde vectorul $\{a\} = \{\{\tilde{d}\}^T \{\tilde{d}_1\}^T\}^T$ este un vector unitar al spațiului \mathbf{R}^7 ($\{a\}^T \{a\} = 1$), scalarul s este numit **intensitatea undei de accelerație**.

Considerând $\Phi = \{V\}$ și apoi $\Phi = \{\dot{\theta}\}$ în condiția de compatibilitate cinematică (2.2.7), ținând cont de continuitatea lui $\{V\}$ și a lui $\{\dot{\theta}\}$ la

Considerând $\Phi = \{V\}$ și apoi $\Phi = \{\theta\}$ în condiția de compatibilitate cinematică (2.2.7), ținând cont de continuitatea lui $\{V\}$ și a lui $\{\theta\}$ la traversarea curbei Γ_t și folosind relațiile (2.3.2), obținem:

$$(2.3.3) \quad [[\{V\}.k]] = -U_n sn_k \{d\}, \quad [[\{\theta\}.k]] = U_n sn_k \{\tilde{d}_1\}.$$

Putem enunța acum teorema următoare:

Teorema 2.3.1. *Într-o placă subțire compozit liniar termoelastic laminată având ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44), viteza de propagare U_n a undei de accelerație considerată într-un punct $(x, y, t) \in \Gamma_t$ satisface următoarea condiție de propagare*

$$(2.3.4) \quad \begin{pmatrix} [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}_n] - U_n^2 [R] & [0] \\ T_0 U_n [b]^T [\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T [K] [\mathcal{H}_n] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{d}\} \\ \{\tilde{d}_1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\}_1 \end{Bmatrix}.$$

Demonstrație. Aplicând operatorul salt la traversarea curbei Γ_t ecuației de mișcare (4.45) când $\chi = 0$ și ecuației energiei (1.4.50), obținem respectiv ecuațiile

$$(2.3.5) \quad [[\mathcal{D}]^T \{\Sigma\}] = [R][\{\dot{V}\}]$$

și

$$(2.3.6) \quad T_0 [R_1][\{\dot{\eta}\}] = [[\mathcal{H}]^T \{q\}],$$

unde s-a ținut cont de continuitatea lui $\{P\}$, $\{r\}$, $[S]^T \{\Sigma\}$ și $[S_1]^T \{q\}$ la traversarea curbei Γ_t .

Derivând în raport cu timpul legile constitutive (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44) și relația deformație – deplasare (1.4.15) când $\chi = 0$ și apoi eliminând $[\{\dot{e}\}]$ obținem ecuațiile

$$(2.3.7) \quad [[\{\dot{\Sigma}\}]] = [C][[\mathcal{D}]\{V\}],$$

$$(2.3.8) \quad [R_1][\{\dot{\eta}\}] = [b]^T [[\mathcal{D}]\{V\}].$$

$$(2.3.9) \quad [[\{\dot{q}\}]] = [K][[\mathcal{H}]\{\theta\}],$$

unde continuitatea lui $[\{\dot{\theta}\}]$ la traversarea curbei Γ_t a fost considerată.

Pe baza relațiilor (2.3.3), putem scrie:

$$(2.3.10) \quad [[\mathcal{D}]\{V\}] = -U_n s[\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}, \quad [[\mathcal{H}_n]\{\dot{\theta}\}] = -U_n s[\mathcal{H}_n]\{\tilde{d}_1\}.$$

Dacă în condiția de compatibilitate cinematică (2.2.7) se consideră $\Phi = \{q\}$ și se ține cont de continuitatea lui $\{q\}$ la traversarea curbei Γ_t , se obține următoarea ecuație:

$$(2.3.11) \quad [[\mathcal{H}]^T\{q\}] = -(1/U_n)[\mathcal{H}_n]^T[\{\dot{q}\}].$$

Din ecuațiile (2.3.5) – (2.3.11) rezultă (2.3.4). ■

Observațiile 2.2.1 și 2.2.2 din paragraful precedent rămân valabile și aici, unde vectorii $\{d\}$ și $\{d_1\}$ se înlocuiesc respectiv prin vectorii $\{\tilde{d}\}$ și $\{\tilde{d}_1\}$.

2.3.2. Variația intensității saltului undei de accelerație.

Teorema 2.3.2. *Intensitatea s a saltului undei de accelerație propagându-se într-o placă subțire compozit termoelastic laminată având ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44), satisface următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale*

$$(2.3.12) \quad \begin{aligned} & \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}](\{\tilde{d}\}sU_n^2) + U_n\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T \\ & ([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}sU_n) + sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[b]\{\tilde{d}_1\} = \\ & = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[S]^T[C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Derivând în raport cu timpul ecuația de mișcare (1.4.45) când $\chi = 0$ și ecuația energiei (1.4.50) și apoi aplicând ecuațiilor obținute operatorul salt la traversarea curbei Γ_t , se obțin respectiv ecuațiile

$$(2.3.13) \quad [[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}] - [S]^T[\{\dot{\Sigma}\}] = [R][\{\ddot{V}\}],$$

$$(2.3.14) \quad T_0[R_1][\{\ddot{\eta}\}] = [[\mathcal{H}]^T\{\dot{q}\}] - [S_1]^T[\{\dot{q}\}].$$

unde continuitatea funcțiilor $\{\dot{P}\}$ și $\{\dot{r}\}$ a fost presupusă .

Derivând de două ori în raport cu timpul ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32), (1.4.44), cât și ecuația deformație – deplasare (1.4.15) când $\chi = 0$,

aplicând ecuațiilor obținute operatorul salt la traversarea curbei Γ_t și apoi eliminând $[\{\ddot{\epsilon}\}]$, rezultă:

$$(2.3.15) \quad [\{\ddot{\Sigma}\}] = [C][[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}] - [b]^T[\{\ddot{\theta}\}],$$

$$(2.3.16) \quad [R_1][\{\ddot{\eta}\}] = [b]^T[[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}] + [a][\{\ddot{\theta}\}].$$

$$(2.3.17) \quad [\{\ddot{q}\}] = [K]([\mathcal{H}]\{\ddot{\theta}\} + [S_1][\{\ddot{\theta}\}]).$$

În baza condiției de compatibilitate cinematică (2.2.7), putem scrie:

$$(2.3.18) \quad [[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}] = [\mathcal{D}]^T[\{\dot{\Sigma}\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][\{\dot{\Sigma}\}],$$

$$(2.3.19) \quad [[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}] = [\mathcal{D}][\{\dot{V}\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}][\{\ddot{V}\}],$$

$$(2.3.20) \quad [[\mathcal{H}]^T\{\dot{q}\}] = [\mathcal{H}]^T[\{\dot{q}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n]^T[\{\ddot{q}\}].$$

Substituind $[[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}]$ dat de relația (2.3.19) în (2.3.15) și (2.3.16), rezultă respectiv ecuațiile:

$$(2.3.21) \quad [\{\ddot{\Sigma}\}] = [C]([\mathcal{D}][\{\dot{V}\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][\{\ddot{V}\}]) - [b]^T[\{\ddot{\theta}\}],$$

$$(2.3.22) \quad [R_1][\{\ddot{\eta}\}] = [b]^T([\mathcal{D}][\{\dot{V}\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][\{\ddot{V}\}]) + [a][\{\ddot{\theta}\}].$$

Dacă se substituie $[\{\dot{q}\}]$ dat de (3.3.9) și $[\{\ddot{q}\}]$ dat de (2.3.17) în (2.3.20) se obține relația

$$(2.3.23) \quad [[\mathcal{H}]^T\{\dot{q}\}] = [\mathcal{H}]^T[K][[\mathcal{H}]\{\dot{\theta}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n]^T[K]([\mathcal{H}]\{\ddot{\theta}\} + [S_1][\{\ddot{\theta}\}]).$$

Pe baza condiției de compatibilitate cinematică (2.2.7) avem

$$(2.3.24) \quad [[\mathcal{H}]\{\ddot{\theta}\}] = [\mathcal{H}][\{\ddot{\theta}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n][\{\ddot{\theta}\}],$$

astfel că (2.3.23) devine

$$(2.3.25) \quad \begin{aligned} [[\mathcal{H}]^T\{\dot{q}\}] &= [\mathcal{H}]^T[K][[\mathcal{H}]\{\dot{\theta}\}] - (1/U_n)[\mathcal{H}_n][K]([\mathcal{H}][\{\ddot{\theta}\}] - \\ &\quad - (1/U_n)[\mathcal{H}_n][\{\ddot{\theta}\}] + [S_1][\{\ddot{\theta}\}]) \end{aligned}$$

Înlocuind $[\{\dot{\Sigma}\}]$ dat de relația (2.3.7) și $[\{\ddot{\Sigma}\}]$ dat de (2.3.21) în (2.3.18) rezultă

$$(2.3.26) \quad \begin{aligned} [[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}] &= [\mathcal{D}]^T([C][[\mathcal{D}]\{V\}]) - (1/U_n)[\mathcal{D}_n]^T[C][[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}] - \\ &- (1/U_n)[\mathcal{D}_n][[\{\ddot{V}\}]] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n]^T[b][[\{\ddot{\theta}\}]]. \end{aligned}$$

Substituind $[\{\dot{\Sigma}\}]$ dat de (2.3.7) și $[[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}]$ dat de (2.3.26) în (2.3.13); $[R_1][[\{\ddot{\eta}\}]]$ dat de (2.3.22), $[\{\dot{q}\}]$ dat de (2.3.9) și $[[\mathcal{H}]^T\{\dot{q}\}]$ dat de (2.3.25) în (2.3.14), apoi ținând cont în ecuațiile rezultate de relațiile (2.3.2) și (2.3.10), se vor obține două ecuații diferențiale care sunt scrise sub următoarea formă matriceală

$$(2.3.27) \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R] & [0] \\ T_0U_n[b]^T[\mathcal{D}_n] & [\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\{\ddot{V}\}] \\ [\{\ddot{\theta}\}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_1\} \\ \{g_1\} \end{Bmatrix},$$

unde

$$(2.3.28) \quad \begin{aligned} \{f_1\} &= U_n[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}](sU_n^2\{\tilde{d}\}) + U_n^2[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}sU_n) + \\ &+ sU_n^3[\mathcal{D}_n]^T[b]\{\tilde{d}_1\} - sU_n^3[S]^T[C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}; \\ \{g_1\} &= T_0U_n^2[b]^T[\mathcal{D}](sU_n^2\{\tilde{d}\}) - U_n^2[\mathcal{H}_n]^T[K][\mathcal{H}](sU_n^2\{\tilde{d}_1\}) + \\ &+ sT_0U_n^4[a]\{\tilde{d}_1\} + sU_n^3[\mathcal{H}_n]^T[K][S_1]\{d_1\} - sU_n^3[S_1]^T[K][\mathcal{H}_n]\{\tilde{d}\}. \end{aligned}$$

Înmulțind la stânga ecuația matriceală (2.3.27) cu $\{\{\tilde{d}\}^T \{0\}_1^T\}$ și ținând cont de relațiile (2.3.4) și (2.3.28) rezultă ecuația diferențială cu derivate parțiale (2.3.12). ■

Modul cum ecuația diferențială cu derivate parțiale (2.3.12) poate fi transformată într-o ecuație diferențială ordinară de-a lungul bicaracteristicilor este pus în evidență prin teorema următoare:

Teorema 2.3.3. *Ecuația diferențială cu derivate parțiale (2.3.12) se transformă de-a lungul bicaracteristicilor într-o ecuație diferențială ordinară de forma*

$$(2.3.29) \quad \frac{\delta_1 s}{\delta t} + \tilde{a}s = 0$$

unde

$$(2.3.30) \quad \begin{aligned} \tilde{a} = & (\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}]\{\tilde{d}\}^T + \{\tilde{d}\}[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) + \\ & + \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[b]\{\tilde{d}_1\} - \{d\}^T[C][\mathcal{D}_n]\{d\}) / (2U_n\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}). \end{aligned}$$

Demonstrație. Și aici se consideră un câmp de vectori $\{\mathbf{l}(x, y)\}$ din \mathbf{R}^2 de componente $l_i(x, y)$ ($i = 1, 2$), definit ca în lucrarea lui Dobre și Chelu [1992]. Fie

$$(2.3.31) \quad l_1 = \frac{\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\alpha]\{\tilde{d}\}}{U_n^2\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}} \quad \text{și} \quad l_2 = \frac{\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n][C][\beta]\{\tilde{d}\}}{U_n^2\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}}.$$

Pe baza relațiilor (2.2.45), (2.2.49), (2.3.31) și luând în considerare că U_n nu este funcție de timp putem scrie

$$(2.3.32) \quad \begin{aligned} & \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}](\{\tilde{d}\}sU_n^2) = \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C](([\alpha](\{\tilde{d}\}sU_n^2)_{,x} + \\ & + [\beta](\{\tilde{d}\}sU_n^2)_{,y}) = \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C](([\alpha]\{\tilde{d}\}_{,x} + [\beta]\{\tilde{d}\}_{,y})sU_n^2 + \\ & + \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C](([\alpha]\{\tilde{d}\}(sU_n^2)_{,x} + [\beta]\{\tilde{d}\}(sU_n^2)_{,y}) = \\ & = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}]\{\tilde{d}\} + U_n^2\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}(l_1(sU_n^2)_{,x} + \\ & l_2(sU_n^2)_{,y}) = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C]\{\tilde{d}\} + U_n\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}\delta_1(sU_n^2)/\delta t = \\ & = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C][\mathcal{D}]\{\tilde{d}\} + U_n^3\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}\delta_1s/\delta t \end{aligned}$$

și

$$(2.3.33) \quad \begin{aligned} & U_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}sU_n) = U_n\{\tilde{d}\}^T([\alpha]^T([C][\mathcal{D}_n] \times \\ & \times \{\tilde{d}\}sU_n)_{,x} + [\beta]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}sU_n)_{,y}) = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T([\alpha]^T \times \\ & \times ([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\})_{,x} + [\beta]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\})_{,y}) + U_n\{\tilde{d}\}^T([\alpha]^T \times \\ & \times [C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}(sU_n)_{,x} + [\beta]^T[C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}(sU_n)_{,y}) = sU_n^2 \times \\ & \times \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) + U_n^3\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}(l_1(sU_n)_{,x} + \\ & + l_2(sU_n)_{,y}) = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) + U_n^3\{\tilde{d}\}^T \times \\ & \times [R]\{\tilde{d}\}\delta_1(sU_n)/\delta t = sU_n^2\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) + \end{aligned}$$

$$+U_n^3 \{\bar{d}\}^T [R] \{\bar{d}\} \frac{\delta_1 s}{\delta t}.$$

Utilizând relațiile (2.3.32) și (2.3.33) în ecuația (2.3.12), se obține ecuația (2.3.29) cu a definit prin relația (2.3.30). Teorema 2.3.3 este astfel demonstrată. ■

Remarca 2.3.1. *Din forma soluției ecuației (2.3.29) (cu \tilde{a} dat de relația (2.3.30)):*

$$(2.3.34) \quad s(t) = s_0 e^{\tilde{a}t}, \quad (s_0 = s(0)),$$

se constată că pentru placa subțire compozit liniar termoelastic laminată având ecuațiile constitutive (1.4.27), (1.4.32) și (1.4.44), niciodată o undă de accelerație nu se poate transforma într-o undă de șoc.

2.4. Propagarea undelor armonice plane într-o placă subțire liniar termoelastic laminată.

Considerăm că placa este infinită. Dacă se consideră $\{\bar{P}\} = \{0\}$, $\{\hat{q}\} = \{0\}$ și $\{r\} = \{0\}$ și se ține cont că $\chi = 0$ (cazul liniar), atunci ecuațiile (5.4) și (5.5) devin respectiv

$$(2.4.1) \quad ([D]^T - [S]^T)([C]([D] + [S])\{U\} - [b]\{\theta\}) = [R]\{\ddot{U}\},$$

$$(2.4.2) \quad T_0([b]^T([D] + [S])\{\dot{U}\} + [a]\{\dot{\theta}\}) - ([\mathcal{H}]^T - [S_1]^T)([K]([\mathcal{H}] + [S_1])\{\theta\}) = \{0\}.$$

Considerăm unde armonice plane de forma

$$(2.4.3) \quad \{U\} = \{\hat{U}\} e^{ik(n_1 x + n_2 y - ct)}, \quad \{\theta\} = \{\hat{\theta}\} e^{ik(n_1 x + n_2 y - ct)}$$

unde: $\{\hat{U}\} = \{\hat{U}_0 \hat{V}_0 \hat{W} \hat{\Psi}_x \hat{\Psi}_y\}^T$, $\{\hat{\theta}\} = \{\hat{\theta}_0 \hat{\theta}_1\}^T$ – sunt vectori constanți; k – numărul de undă; c – viteza de fază; n_1, n_2 – cosinuși directori; x, y – coordonate spațiale ale punctului situat în planul mediu al plăcii și pe frontul de undă.

Înlocuind (2.4.3) în (2.4.1) și (2.4.2) obținem următorul sistem linear și omogen format din 7 ecuații cu 7 necunoscute, scris sub formă matriceală:

$$(2.4.4) \quad \begin{bmatrix} [\Lambda]_{11} & [\Lambda]_{12} \\ [\Lambda]_{21} & [\Lambda]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{U}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix},$$

unde

$$(2.4.5a) \quad [\Lambda]_{11} = k^2 c^2 [R] - k^2 [\mathcal{D}_n]^T [C] [\mathcal{D}_n] - [S]^T [C] [S] + \\ + ik([\mathcal{D}_n]^T [C] [S] - [S]^T [C] [\mathcal{D}_n]),$$

$$(2.4.5b) \quad [\Lambda]_{12} = (ik[\mathcal{D}_n]^T - [S]^T)[b],$$

$$(2.4.5c) \quad [\Lambda]_{21} = -iT_0 kc [b]^T (ik[\mathcal{D}_n] + [S]),$$

$$(2.4.5d) \quad [\Lambda]_{22} = k^2 [\mathcal{H}_n]^T [K] [\mathcal{H}_n] + [S_1]^T [K] [S_1] - ik[\mathcal{H}_n]^T [K] [S_1] + \\ + ik[S_1]^T [K] [\mathcal{H}_n] - iT_0 kc [b]^T [a].$$

Tinând cont de relațiile (2.4.5a)–(2.4.5d), ecuația matriceală (2.4.4) se mai poate scrie și sub forma:

$$(2.4.6) \quad [\Lambda] \{\hat{U}\} = \{0\},$$

cu $\{\hat{U}\} = \{\hat{u}_0 \ \hat{v}_0 \ \hat{w} \ \hat{\psi}_x \ \hat{\psi}_y \ \hat{\theta}_0 \ \hat{\theta}_1\}^T$ și $[\Lambda]$ matrice patrată de ordinul 7 având elementele

$$\alpha_{11} = k^2 (A_{11} n_1^2 + 2A_{16} n_1 n_2 + A_{66} n_2^2) - \bar{\rho}_0 k^2 c^2,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = k^2 (A_{16} n_1^2 + (A_{12} + A_{66}) n_1 n_2 + A_{26} n_2^2),$$

$$\alpha_{22} = k^2 (A_{66} n_1^2 + 2A_{26} n_1 n_2 + A_{22} n_2^2) - \bar{\rho}_0 k^2 c^2,$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 0,$$

$$\alpha_{14} = \alpha_{41} = k^2(B_{11}n_1^2 + 2B_{16}n_1n_2 + B_{66}n_2^2) - \bar{\rho}_1k^2c^2,$$

$$\alpha_{15} = \alpha_{51} = k^2(B_{16}n_1^2 + (B_{12} + B_{66})n_1n_2 + B_{26}n_2^2),$$

$$\alpha_{16} = ik(b_1^0n_1 + b_6^0n_2), \quad \alpha_{17} = ik(b_1^1n_1 + b_6^1n_2),$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 0,$$

$$\alpha_{24} = \alpha_{42} = k^2(B_{16}n_1^2 + (B_{12} + B_{66})n_1n_2 + B_{26}n_2^2),$$

$$\alpha_{25} = \alpha_{52} = k^2(B_{66}n_1^2 + 2B_{26}n_1n_2 + B_{26}n_2^2) - \bar{\rho}_1k^2c^2,$$

$$\alpha_{26} = ik(b_6^0n_1 + b_2^0n_2), \quad \alpha_{27} = ik(b_6^1n_1 + b_2^1n_2),$$

$$\alpha_{33} = k^2(A_{55}n_1^2 + 2A_{45}n_1n_2 + A_{44}n_2^2) - \bar{\rho}_0k^2c^2,$$

$$\alpha_{34} = -\alpha_{43} = ik(A_{55}n_1 + A_{45}n_2),$$

$$\alpha_{35} = -\alpha_{53} = ik(A_{45}n_1 + A_{44}n_2),$$

$$\alpha_{36} = \alpha_{63} = \alpha_{37} = \alpha_{73} = 0,$$

$$\alpha_{44} = k^2(D_{11}n_1^2 + 2D_{16}n_1n_2 + D_{66}n_2^2) - A_{55} - \bar{\rho}_2k^2c^2,$$

$$(2.4.7) \quad \alpha_{45} = \alpha_{54} = k^2(D_{16}n_1^2 + (D_{12} + D_{66})n_1n_2 + D_{26}n_2^2) - A_{45},$$

$$\alpha_{46} = ik(b_1^1n_1 + b_6^1n_2), \quad \alpha_{47} = ik(b_1^2n_1 + b_6^2n_2),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{55} &= k^2(D_{66}n_1^2 + 2D_{16}n_1n_2 + D_{22}n_2^2) - A_{44} - \bar{\rho}_2k^2c^2, \\
\alpha_{56} &= ik(b_6^1n_1 + b_2^1n_2), & \alpha_{57} &= ik(b_6^2n_1 + b_2^2n_2), \\
\alpha_{61} &= T_0k^2c^2(b_1^0n_1 + b_6^0n_2), & \alpha_{62} &= T_0k^2c^2(b_6^0n_1 + b_2^0n_2), \\
\alpha_{64} &= T_0k^2c^2(b_1^1n_1 + b_6^1n_2), & \alpha_{65} &= T_0k^2c^2(b_6^1n_1 + b_2^1n_2), \\
\alpha_{66} &= k^2(K_{11}^0n_1^2 + 2K_{12}^0n_1n_2 + K_{22}^0n_2^2) - ikca^0, \\
\alpha_{67} &= k^2(K_{11}^1n_1^2 + 2K_{12}^1n_1n_2 + K_{22}^1n_2^2) - ikca^1, \\
\alpha_{71} &= T_0k^2c^2(b_1^1n_1 + b_6^1n_2), & \alpha_{72} &= T_0k^2c^2(b_6^1n_1 + b_2^1n_2), \\
\alpha_{74} &= T_0k^2c^2(b_1^2n_1 + b_6^2n_2), & \alpha_{75} &= T_0k^2c^2(b_6^2n_1 + b_2^2n_2), \\
\alpha_{76} &= k^2(K_{11}^1n_1^2 + 2K_{12}^1n_1n_2 + K_{22}^1n_2^2) - ikca^1, \\
\alpha_{77} &= k^2(K_{11}^2n_1^2 + 2K_{12}^2n_1n_2 + K_{22}^2n_2^2) + K_{33}^0 - ikca^2.
\end{aligned}$$

Pentru a avea soluție netrivială trebuie ca determinantul sistemului (2.4.4) să fie nul, adică

$$(2.4.8) \quad \det[\Lambda] = 0.$$

Ecuția (2.4.8) este ecuația de dispersie a undelor.

DINAMICA PLĂCII SUBȚIRI LINIAR VÂSCOELASTIC
LAMINATĂ

3.1. Stadiul actual al problemei

Numeroase investigații experimentale au confirmat că teoria liniară a elasticității mediilor stratificate curent utilizată în tehnică nu întotdeauna este în acord cu acestea.

S-a demonstrat că în condițiile unei încărcări dinamice, răspunsul este neliniar în foarte multe cazuri. În urma experienței s-a constatat că anumite materiale compozite formate din straturi de fibre, manifestă proprietăți neelastice la întindere și la compresiune. Pentru anumite materiale compozite, constituenții au proprietăți vâscoelastice dependente de timp. Global, materialul compozit are o comportare vâscoelastică. Există prin urmare o nevoie crescândă privind modelarea matematică a proprietăților dinamice ale structurilor materiale compozite.

Printre primii care au realizat modelarea matematică a materialelor compozite ca mediu vâscoelastic cităm pe: Bedford și Stern [1970] care au investigat propagarea undelor vâscoelastice în compozite laminate alternante; Stern, Bedford și Yew [1971] au studiat dispersia și atenuarea caracteristicelor pentru unde longitudinale propagându-se într-un mediu laminat constând din straturi alternante din materiale elastice și vâscoelastice; Barker [1971] a arătat că propagarea undelor în compozite laminate plane poate fi caracterizată printr-un model vâscoelastic neliniar efectiv cu proprietăți complet determinate din cele ale constituenților individuali; Christensen [1973] bazându-se pe teoria dielectricului a arătat că funcția de relaxare pentru materialul vâscoelastic echivalent este o funcție oscilatorie de timp; Chen și Gurtin [1973] au investigat propagarea undelor de accelerație într-un compozit vâscoelastic cu straturi alternante presupuse omogene și izotrope; utilizând o teorie a microstructurii de ordinul al doilea Hlaváček [1979] a studiat propagarea undelor armonice plane; Ting și Mukunoki [1979] au aplicat teoria analogului vâscoelastic la compozite laminate cu straturi omogene și izotrope: efectele disipării și dispersiei asupra propagării undelor în corpuri vâscoelastic laminate au fost tratate de Ting [1980]; propagarea undelor în medii vâscoelastice cu straturi anizotrope a fost abor-

dată de Madan [1993]; propagarea undelor în plăci și învelișuri compozite vâscoelastice a fost studiată de Chelu [1985,1987], iar într-o bară compozit vâscoelastică de Dobre, Chelu și Bereteu [1985]. Diverse metode de rezolvare a problemelor care conduc la ecuații integro-diferențiale pot fi găsite în lucrările lui: Fiiatov [1971, 1974], Matveev [1979], Badalov [1983,1987], Badalov, Eșmatov, Anžiev [1985], Ogibalov și Badalov [1987], etc.

Problema răspunsului dinamic al plăcilor vâscoelastice a fost analizată într-o serie de lucrări printre care amintim: Pan [1966] care a extins teoria plăcii elastice a lui Mindlin la materiale vâscoelastice; Rashidov, Kajumov și Eshkuvotov [1979] au studiat răspunsul dinamic la șoc transversal al plăcii vâscoelastice; Cederbraum și Abudi [1989] au investigat răspunsul dinamic al plăcilor vâscoelastic laminate sub încărcări impulsive prin aplicarea transformatei Fourier, iar inversarea funcției în domeniul timpului este realizată utilizând algoritmul transformatei Fourier rapide; Chelu [1991] a prezentat un procedeu privind aflarea răspunsului unei plăci compozit vâscoelastic laminată utilizând transformatele integrale „EC” și „ES”; Dobre și Chelu [1994], Dobre, Chelu și Moțica [1994a,b] au studiat vibrațiile transversale ale unei plăci vâscoelastice izotrope și al unei plăci vâscoelastic laminată utilizând metoda medierii, iar Chelu [1995b] a aplicat metoda integralelor „EC” și „ES” la aflarea răspunsului dinamic al unei plăci vâscoelastice izotrope și omogene.

Vibrațiile plăcilor vâscoelastice au fost analizate de: Sarova [1974], Sobotka [1978]–vibrații libere ale plăcilor rectangulare vâscoelastic ortotrope, Anbarov și Gegela [1979] – vibrații ale plăcilor vâscoelastice, Phillipov [1986]–vibrații ale plăcii vâscoelastice, Aboudi și Cederbraum [1989] - vibrații ale plăcilor compozite vâscoelastic laminate.

Stabilitatea dinamică a plăcilor vâscoelastice a fost studiată de: Librescu și Chandiramani [1989] pentru plăci vâscoelastice transversal izotrope utilizând metoda transformatei Laplace și analizând zerourile ecuației caracteristice; Chandiramani, Librescu și Aboudi [1989] pentru plăci compozite vâscoelastic ortotrope și cu aceeași metodă; Aboudi, Cederbraum și Elishakoff [1990] pentru plăci liniar vâscoelastic omogene, Cederbraum, Aboudi și Elishakoff [1991] pentru plăci liniar vâscoelastic laminate, Touati și Cederbraum [1994] pentru plăci neliniar vâscoelastice, toate pe baza metodei exponenților Liapunov.

Teorii de ordin superior privind dinamica materialelor compozite vâscoe-

lastic stratificate au fost elaborate pentru: plăci de Mengi și Turhan [1984], Librescu și Chandiramani [1989], iar pentru învelișuri cilindrice de Mengi și Birlik [1989].

O serie de teste de laborator au confirmat că teoria liniară a vâscoelasticității poate servi ca o bună aproximație în vederea descrierii mai exacte a proprietăților neliniare dependente de timp. Numărul lucrărilor publicate considerând sisteme stratificate guvernate de legi constitutive liniar vâscoelastice este totuși relativ redus. Cea mai mare parte a acestora studiază sisteme formate din două sau trei straturi, iar când sunt considerate mai multe straturi, acestea sunt presupuse omogene și izotrope.

Dinamica plăcilor compozite a fost considerată într-un număr destul de mare de lucrări, studiindu-se atât vibrațiile, cât și propagarea undelor. Însă, majoritatea acestor lucrări aplică ecuațiile elasticității la fiecare lamină și țin cont de condițiile de continuitate în tensiuni și deplasări la interfața straturilor, ceea ce duce la un volum mare de calcul.

În acest capitol, autorul dezvoltă o teorie a plăcii subțiri laminate supusă la forfecare transversală pentru un mediu compozit format din straturi de fibre fixate într-o matrice. Răspunsul global al fiecărui strat este presupus că ascultă de o lege constitutivă de tip Boltzmann. Teoria este dezvoltată pentru cazul în care straturile sunt presupuse ortotrope și omogene. Evident că, în cazul straturilor omogene și izotrope, ecuațiile dinamice ale plăcii compozit laminate se simplifică. Sunt stabilite ecuațiile problemei dinamice mixte a plăcii subțiri liniar vâscoelasic laminată cu condiții pe frontiera de margine destul de generale. Se dă o formulare în deplasări a problemei dinamice mixte, se stabilesc teoreme dinamice de reciprocitate, se formulează principii variaționale de tip Gurtin, se demonstrează existența soluției problemei mixte, se stabilesc principii de minim și se analizează răspunsul dinamic al plăcii subțiri liniar vâscoelastice laminată cu ajutorul transformatelor integrale „EC” și „ES” introduse de autor.

3.2. Ecuațiile de bază ale dinamicii vâscoelasticității liniare

Considerăm un corp vâscoelastice liniar și anizotrop care la momentul $t=0$ ocupă domeniul \mathcal{B} cu frontiera $\partial\mathcal{B}$. Sistemul fundamental de ecuații care guvernează dinamica vâscoelasticității liniare anizotrope cu referire la un sistem de coordonate cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ constă din:

-ecuația bilanțului momentului liniar

$$(3.2.1) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{P}} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

-ecuația constitutivă (tip Boltzmann)

$$(3.2.2) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

-relația cinematică deformație–deplasare

$$(3.2.3) \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)),$$

unde s-au utilizat notațiile

\mathbf{x} –vectorul de poziție al particulei materiale,

ρ –densitatea de masă,

u_i –componentele vectorului deplasare \mathbf{u} ,

ε_{ij} –componentele tensorului deformație ε ,

σ_{ij} –componentele tensorului tensiune al lui Cauchy σ ,

f_i –componentele vectorului densității forței de volum \mathbf{f} ,

G_{ijkl} –componentele tensorului de relaxare \mathbf{G} ,

\mathcal{P} –domeniu arbitrar inclus în \mathcal{B} ,

$\partial\mathcal{P}$ –frontiera domeniului \mathcal{P} ,

n_i –componentele vectorului exterior unitar \mathbf{n} normal la frontiera $\partial\mathcal{P}$.

În cele ce urmează presupunem că G_{ijkl} , componentele tensorului de relaxare \mathbf{G} , satisfac următoarele relații de simetrie

$$(3.2.4) \quad G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{klij}.$$

Vom admite în continuare condiția inițială

$$(3.2.5) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B} \times (-\infty, 0).$$

Din relațiile (3.2.2) și (3.2.3) dacă ținem cont de condiția inițială (3.2.5) rezultă

$$(3.2.6) \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{și} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{pentru} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B} \times (-\infty, 0).$$

Integrând prin părți ecuația caracteristică (3.2.2) și apoi utilizând relația deformație –deplasare (3.2.3) împreună cu condiția inițială (3.2.6)₁, găsim

$$(3.2.7) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = G_{ijkl}(\mathbf{x}, 0) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \dot{G}_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

unde funcțiile $G_{ijkl}(\mathbf{x}, 0)$ sunt numite coeficienți de elasticitate inițială și descriu răspusul instantaneu al materialului.

Forma locală a legii de bilanț a momentului se scrie sub forma binecunoscută

$$(3.2.8) \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i.$$

Condițiile pe frontieră

$$(3.2.9) \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad \text{pe } \partial \mathcal{B}_\sigma \times [0, \infty),$$

$$(3.2.10) \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{pe } \partial \mathcal{B}_u \times [0, \infty),$$

unde $\partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}_\sigma \cup \partial \mathcal{B}_u$ și $\partial \mathcal{B}_\sigma \cap \partial \mathcal{B}_u = \Phi$.

Condițiile inițiale

$$(3.2.11) \quad u_i(\mathbf{x}, 0) = u_i^0, \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_i^0 \quad \text{pe } \bar{\mathcal{B}}.$$

3.3. Considerații generale privind placa subțire vâscoelastic laminată.

Vom considera o placă laminată formată din N lamine, astfel că la scară macroscopică global fiecare lamină are o comportare vâscoelastică. Se presupune de asemenea că laminele sunt perfect lipite, astfel că nu este posibilă alunecarea uneia față de alta.

Placa laminată este considerată ca un corp continuu cu răspuns global la solicitările exterioare, astfel că și continuitatea deplasărilor este presupusă. Se fac în plus următoarele presupuneri:

- placa laminată este subțire și de grosime h constantă în timpul procesului de deformare;

- laminele sunt unidirecțional orientate;

- laminele din care este confecționată placa sunt vâscoelastic ortotrope satisfăcând o lege constitutivă de tip Boltzmann și având axele naturale distincte de la o lamină la alta;

- componentele deplasării u, v, w respectiv după direcțiile x, y, z sunt mici comparativ cu grosimea h , iar componentele deplasării u și v au formă liniară după coordonata z ;

–deformațiile $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}$ și ε_{zx} sunt mici comparativ cu unitatea, iar ε_z se neglijează:

–forțele de volum se neglijează în ecuațiile de momente;

–normala la suprafața medie a plăcii nu trebuie să rămână perpendiculară pe planul mediu deformat ca în cazul teoriei Love–Kirchhoff (proprietățile de material distincte ale straturilor constituente dau rotații (microrotații) distincte în straturi cu materiale diferite și în consecință presupunerea că o secțiune plană înainte de deformare, rămâne plană după deformare nu este valabilă conform lui Sun, Gilmore și Koh [1972]).

Pentru deplasări se adoptă relații de tipul (1.4.1).

Într-un sistem de coordonate normale corespunzător laminei de rang k , ecuațiile constitutive în cazul vâscoelasticității liniare ortotrope sunt de forma

$$(3.3.1) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^* & C_{23}^* & C_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}_k.$$

unde este utilizată notația contractată introdusă în §1.4. σ_i, ε_i ($i=\overline{1,6}$) respectiv pentru tensiuni și deformații, iar prin C_{ij}^* se notează operatorii integrali

$$(3.3.2) \quad C_{ij}^*(\varepsilon(\mathbf{r}, t)) = G_{ij}(\mathbf{r}, 0)\varepsilon(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \dot{G}_{ij}(\mathbf{r}, t - \tau)\varepsilon(\mathbf{r}, \tau)d\tau,$$

cu precizarea că $G_{ij}(\mathbf{r}, t)$ se obțin din $G_{klrs}(\mathbf{r}, t)$ considerând că $kl \rightarrow i$ și $rs \rightarrow j$ după regula $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5$ și $12 \rightarrow 6$, iar $\mathbf{r}=(x,y,z)$.

Funcțiile de relaxare $G_{ij}(\mathbf{r}, t)$ pot fi determinate analitic ținând cont de funcțiile de relaxare ale constituentilor folosind de exemplu metoda omogenizării sau prin metode experimentale.

Tensiunile σ_{ij} reprezintă componentele tensorului tensiune simetric al lui Cauchy.

Datorită faptului că placa este subțire se poate aproxima tensiunea σ_3 ca fiind nulă, iar pentru tensiunile de forfecare transversale se admite că ele se anulează pe suprafețele superioară și inferioară ale plăcii.

Considerând $\sigma_3 \simeq 0$, din relația (3.3.1) urmează că

$$(3.3.3) \quad \varepsilon_3 = -((C_{33}^*)^{-1}C_{13}^*)\varepsilon_1 - ((C_{33}^*)^{-1}C_{23}^*)\varepsilon_2,$$

unde $(C_{33}^*)^{-1}$ este inversul operatorului C_{33}^* .

Substituind (3.3.3) în (3.3.1) se obțin următoarele ecuații constitutive ale laminei k:

$$(3.3.4) \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{ccccc} Q_{11}^* & Q_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^* \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{array} \right\}_k,$$

unde Q_{ij}^* sunt operatori ale căror expresii sunt date de

$$(3.3.5) \quad Q_{ij}^* = C_{ij}^* - C_{i3}^*(C_{33}^*)^{-1}C_{j3}^*$$

pentru $i, j=1, 2$ și

$$(3.3.6) \quad Q_{ij}^* = C_{ij}^*$$

dacă $i, j = 3, 4, 5$. În raport cu un sistem de coordonate carteziene ortogonale nenaturale Ox₁Ox₂Ox₃, ecuațiile constitutive pentru lamina k au forma

$$(3.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{ccccc} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{12}^* & 2\bar{Q}_{16}^* & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}^* & \bar{Q}_{22}^* & 2\bar{Q}_{26}^* & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{26}^* & 2\bar{Q}_{66}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{44}^* & 2\bar{Q}_{45}^* \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{45}^* & 2\bar{Q}_{55}^* \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{array} \right\}_k,$$

unde $\bar{Q}_{ij}^*(\mathbf{r}, t)$ reprezintă operatorii transformați, componente ale matricii $[\bar{Q}^*] = [T]^{-1}[Q^*][T]$ obținută pe baza matricii $[T]$ definită prin relația (2.4.8), iar $[Q^*]$ este matricea ale cărei elemente sunt operatorii $Q_{ij}^*(\mathbf{r}, t)$.

Introducând notațiile:

$$(3.3.8) \quad \begin{aligned} A_{ij}(\mathbf{p}, t) &= \sum_{i=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}^*(\mathbf{r}, t))_k dz, \\ B_{ij}(\mathbf{p}, t) &= \sum_{i=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z (\bar{Q}_{ij}^*(\mathbf{r}, t))_k dz. \end{aligned}$$

$$D_{ij}(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 (\bar{Q}_{ij}^*(\mathbf{r}, t))_k dz,$$

cu $\mathbf{p} = (x, y)$, putem defini operatorii

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} A_{ij}^*(\xi) &= (A_{ij}^0 + \dot{A}_{ij}^*) (\xi), \\ B_{ij}^*(\xi) &= (B_{ij}^0 + \dot{B}_{ij}^*) (\xi), \\ D_{ij}^*(\xi) &= (D_{ij}^0 + \dot{D}_{ij}^*) (\xi), \end{aligned}$$

unde

$$(3.3.10) \quad A_{ij}^0 = A_{ij}(\mathbf{p}, 0), \quad B_{ij}^0 = B_{ij}(\mathbf{p}, 0), \quad D_{ij}^0 = D_{ij}(\mathbf{p}, 0).$$

Luând în considerare că forțele rezultante N_x, N_y, N_{xy} , forțele rezultante transversale Q_x, Q_y și momentele rezultante M_x, M_y, M_{xy} sunt date de relațiile

$$(3.3.11) \quad \begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_y, Q_x) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}) dz = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})_k dz, \end{aligned}$$

$$(3.3.12) \quad (M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})_k dz,$$

și introducând de asemenea notațiile

$$(3.3.13.a) \quad \{\Sigma\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_y \ Q_x\}^T,$$

$$(3.3.13.b) \quad \{e\} = \{\varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0 \ \gamma_{yz}^0 \ \gamma_{zx}^0 \ k_x \ k_y \ k_{xy}\}^T,$$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix}, \quad [H^*] = \begin{bmatrix} A_{44}^* & A_{45}^* \\ A_{45}^* & A_{55}^* \end{bmatrix},$$

$$(3.3.14) \quad [B^*] = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \end{bmatrix}, \quad [D^*] = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{26}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix},$$

$$[O_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad [A_1^*] = \begin{bmatrix} [A^*] & [O_1] \\ [O_1]^T & [H^*] \end{bmatrix},$$

$$[B_1^*] = [[B^*] \quad [O]]^T, \quad [C^*] = \begin{bmatrix} [A_1^*] & [B_1^*] \\ [B_1^*]^T & [D^*] \end{bmatrix},$$

atunci pe baza acestor notații, ecuațiile constitutive (3.3.9) se scriu condensat sub forma

$$(3.3.15) \quad \{\Sigma\} = [C^*]\{e\},$$

care exprimă legea constitutivă a plăcii laminate liniar vâscoelastice cu

$$(3.3.16) \quad [C^*] = [C^0] + [\dot{C}] * .$$

Trebuie remarcat că relația deformație–deplasare se obține la fel ca și (1.4.15) cu condiția $\chi = 0$ (cazul liniar), adică rezultă:

$$(3.3.17) \quad \{e\} = ([D] + [S])\{U\}$$

cu $\{U\}$, $\{e\}$, $[D]$ și $[S]$ matrice definite în capitolul I.

Procedând ca în capitolul I, din forma locală a legii de bilanț a momentului (3.2.8) se obține ecuația de mișcare sub formă matricială

$$(3.3.18) \quad ([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\} + \{P\} = [R]\{\ddot{U}\}.$$

Condițiile inițiale sunt exprimate astfel:

$$(3.3.19) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}, \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V^0(x, y)\}.$$

Condițiile pe frontieră sunt:

$$(3.3.20.a) \quad [I_u]\{U\} = [I_u]\{\bar{U}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0u} \times [0, t_0),$$

$$(3.3.20.b) \quad [I_\sigma]\{P_n\} = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0),$$

cu $[I_u]$, $[I_\sigma]$, $\{P_n\}$ (aici $\chi=0$) și $\{\bar{P}_n\}$ matrice definite în paragraful 1.4.

Propoziția 3.3.1. *Dacă $\{e\} = \{\varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0 \ \gamma_{yz}^0 \ \gamma_{zx}^0 \ k_x \ k_y \ k_{xy}\}^T$ și $\{\tilde{e}\} = \{\tilde{\varepsilon}_x^0 \ \tilde{\varepsilon}_y^0 \ \tilde{\gamma}_{xy}^0 \ \tilde{\gamma}_{yz}^0 \ \tilde{\gamma}_{zx}^0 \ \tilde{k}_x \ \tilde{k}_y \ \tilde{k}_{xy}\}^T$, iar $[C^*]$ este definită prin relația (3.3.15) atunci are loc egalitatea*

$$(3.3.21) \quad \{e\}^T * ([C^*]\{\tilde{e}\}) = \{\tilde{e}\}^T * ([C^*]\{e\}).$$

Demonstrație. Ținând cont că matricea $[C^*]$ este definită prin relația (3.3.16) avem evident relațiile

$$(3.3.22) \quad [C^*]\{e\} = [C^0]\{e\} + [\dot{C}] * \{e\}$$

și

$$(3.3.23) \quad [C^*]\{\tilde{e}\} = [C^0]\{\tilde{e}\} + [\dot{C}] * \{\tilde{e}\}.$$

Având în vedere că produsul de convoluție este comutativ și asociativ, dacă se utilizează faptul că $[C]$ și $[\dot{C}]$ sunt matrice simetrice, rezultă

$$\begin{aligned} \{e\}^T * ([C^*]\{\tilde{e}\}) &= \{e\}^T ([C^0]\{\tilde{e}\} + [\dot{C}] * \{\tilde{e}\}) = \\ &= \{e\}^T * ([C^0]\{\tilde{e}\}) + \{e\}^T * ([\dot{C}] * \{\tilde{e}\}) = ([C^0]\{\tilde{e}\})^T * \{e\} + \\ &+ ([\dot{C}] * \{\tilde{e}\})^T * \{e\} = (\{\tilde{e}\}^T [C^0]) * \{e\} + (\{\tilde{e}\}^T * [\dot{C}]) * \{e\} = \\ &= \{\tilde{e}\}^T * ([C^0]\{e\}) + \{\tilde{e}\}^T * ([\dot{C}] * \{e\}) = \{\tilde{e}\}^T * ([C^0]\{e\} + \end{aligned}$$

$$(3.3.24) \quad +[\dot{C}] * \{e\}) = \{\tilde{e}\}^T * ([C^*]\{e\}),$$

adică relația (3.3.21). ■

Matricele $[C]$, $[R]$ caracterizează proprietățile date ale plăcii subțiri vâsco-elastic laminată.

Facem în plus presupunerile

$$(a) \quad \{P\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^5,$$

$$(b) \quad \{P\} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0)),$$

$$(c) \quad \{U^0\}, \{V^0\} : \bar{\Omega}_0 \rightarrow R^5,$$

$$(d) \quad \{U^0\}, \{V^0\}, \in C^0(\bar{\Omega}),$$

$$(e) \quad \{\bar{U}\} : \partial\Omega_{0n} \times [0, t_0) \rightarrow R^5,$$

$$(f) \quad \{\bar{U}\} \in C^0(\partial\Omega_{0u} \times [0, t_0]),$$

$$(g) \quad \{\bar{P}_n\} : \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0) \rightarrow R^5,$$

$$(h) \quad \{\bar{P}_n\} \in C^0(\partial\Omega_{0\sigma} \times [0, t_0)).$$

Definiția 3.3.1. *Se numește cauză externă pentru placa subțire vâscoelastic laminată, funcția $\{P\}$ având proprietățile (a) și (b).*

Vom introduce acum conceptul de proces admisibil pentru placa subțire vâscoelastic laminată.

Definiția 3.3.2. *Prin proces admisibil pentru placa subțire vâscoelastic laminată, vom înțelege un ansamblu ordonat de funcții*

$$\Pi = (\{U\}^T, \{e\}^T, \{\Sigma\}^T)$$

îndeplinind următoarele proprietăți:

$$(i) \quad \{U\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^5,$$

$$(ii) \quad \{U\} \in C^2(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{U\}, \{\dot{U}\}, \{\ddot{U}\}, \{U\}_{,x}, \{U\}_{,y}, \{\dot{U}\}_{,x}, \{\dot{U}\}_{,y} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0)),$$

$$(iii) \quad \{e\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^8,$$

$$(iv) \quad \{e\} : C^0(\Omega_0 \times [0, t_0)),$$

$$(v) \quad \{\Sigma\} : \bar{\Omega}_0 \times [0, t_0) \rightarrow R^8,$$

$$(vi) \quad \{\Sigma\} \in C^{1,0}(\Omega_0 \times [0, t_0)); \quad \{\Sigma\}, \{\Sigma\}_{,x}, \{\Sigma\}_{,y} \in C^0(\bar{\Omega}_0 \times [0, t_0)).$$

Dacă definim adunarea proceselor admisibile și înmulțirea cu un scalar prin

$$(3.3.25) \quad \Pi + \tilde{\Pi} = (\{U\}^T + \{\tilde{U}\}^T, \{e\}^T + \{\tilde{e}\}^T, \{\Sigma\}^T + \{\tilde{\Sigma}\}^T),$$

$$(3.3.26) \quad \lambda\Pi = (\lambda\{U\}^T, \lambda\{e\}^T, \lambda\{\Sigma\}^T),$$

atunci mulțimea proceselor admisibile este un spațiu liniar.

Definiția 3.3.3. Numim soluție a problemei mixte a plăcii subțiri vâscoelastic laminată, un proces admisibil care satisface ecuațiile (3.3.15), (3.3.17), (3.3.18), condițiile pe frontieră (3.3.20) și condițiile inițiale (3.3.19).

Definiția 3.3.4. Numim câmp deplasare admisibil pentru placa subțire vâscoelastic laminată, funcțiile $\{U\}$ care satisfac condițiile (i) și (ii).

Mulțimea câmpurilor deplasare admisibile pentru placa subțire vâscoelastic laminată formează un spațiu liniar față de operațiile de adunarea câmpurilor și înmulțirea cu scalari.

Definiția 3.3.5. Câmpul deplasare admisibil pentru placa subțire vâscoelastic laminată care satisface condițiile pe frontieră (3.3.20.a) în deplasări se numește câmpul deplasare cinematic admisibil pentru placa subțire vâscoelastic laminată.

3.4. Formularea în deplasări a problemei dinamice a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată.

Eliminând $\{e\}$ între ecuația cinematică deformație-deplasare (3.3.17) și ecuația de mișcare (1.3.18) obținem

$$(3.4.1) \quad ([D]^T - [S]^T)([C^*]([D] + [S])\{U\}) + \{P\} = [R]\{\ddot{U}\}.$$

La ecuația de mișcare (3.4.1) se adaugă condițiile inițiale

$$(3.4.2) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}, \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V^0(x, y)\}$$

și condițiile pe frontieră

$$(3.4.3.a) \quad [I_u]\{U\} = [I_u]\{\bar{U}\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{ou} \times [0, \infty),$$

$$(3.4.3.b) \quad [I_\sigma]\{[D_n]^T([C^*]([D] + [S])\{U\})\} = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{os} \times [0, \infty),$$

ultima condiție obținută în urma eliminării lui $\{P_n\}$ dat de relația $\{P_n\} = [D_n]^T\{\Sigma\}$, prin intermediul relațiilor (3.3.15), (3.3.17) în (3.3.20.b).

3.5. Teoreme de reciprocitate în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată.

Analog ca în paragraful 1.6. se pot formula și demonstra următoarele două teoreme:

Teorema 3.5.1. *Funcțiile $\{U\}$ și $\{\Sigma\}$ satisfac ecuația (3.3.18) și condițiile inițiale (3.3.19) dacă și numai dacă*

$$(3.5.1) \quad -g * (([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\}) + [R]\{U\} = \{F\},$$

unde

$$(3.5.2) \quad g(t) = t \quad (t \in [0, \infty)) \quad \text{și} \quad \{F\} = g * \{P\} + [R](t\{V^0\} + \{U^0\}).$$

Teorema 3.5.2. *Un proces admisibil $\Pi = (\{U\}^T \{e\}^T \{\Sigma\}^T)$ este o soluție a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17)-(3.3.20) dacă și numai dacă satisface ecuațiile (3.5.1), (3.3.15), (3.3.17) și condițiile pe frontieră (3.3.20).*

Considerăm o placă subțire liniar vâscoelastic laminată supusă la două sisteme diferite de încărcări vâscoelastice

$$(3.5.3) \quad L^{(\beta)} = (\{P\}^{(\beta)}, \{\bar{U}\}^{(\beta)}, \{\bar{P}_n\}^{(\beta)}, \{U^0\}^{(\beta)}, \{V^0\}^{(\beta)}) \quad (\beta = 1, 2)$$

și două stări corespunzătoare $\phi^{(\beta)} = \{U\}^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2$) reprezentând soluțiile în deplasări a problemei (3.4.1)-(3.4.3.a,b) corespunzătoare sistemului de încărcări $L^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2$).

Vom folosi notația

$$(3.5.4) \quad \{F\}^{(\beta)} = g * \{P\}^{(\beta)} [R](t\{V^0\}^{(\beta)} + \{U^0\}^{(\beta)}),$$

unde g este definită prin (3.5.2)₁.

Teorema 3.5.3. *Dacă o placă subțire liniar vâscoelastic laminată este supusă la două sisteme diferite de încărcări $L^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2$), atunci între configurațiile corespunzătoare $\phi^{(\beta)}$ are loc următoarea relație de reciprocitate:*

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \{F\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} g * \{P_n\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} dl = \\ & = \int_{\Omega_0} \{F\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} g * \{P_n\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} dl, \end{aligned}$$

unde $\{F\}^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2$) se obțin din (3.5.2)₂.

Demonstrație. Pe baza simetricii matricii $[C^*]$, comutativității produsului de convoluție și a legii constitutive (3.3.15), deducem

$$(3.5.6) \quad \{\Sigma\}^{(1)T} * \{e\}^{(2)} = \{\Sigma\}^{(2)T} * \{e\}^{(1)}.$$

Introducând notația

$$(3.5.7) \quad I_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_0} g * \{\Sigma\}^{(\alpha)T} * \{e\}^{(\beta)} d\Omega,$$

pe baza lui (3.5.6), rezultă

$$(3.5.8) \quad I_{12} = I_{21}.$$

Având în vedere comutativitatea și asociativitatea produsului de convoluție, ecuațiile (3.3.15), (3.3.17), (3.5.1) și utilizând formula lui Green pe baza notației

$$(3.5.9) \quad \{P_n\}^{(\beta)} = [D_n]^T \{\Sigma\}^{(\beta)} \quad (\beta = 1, 2),$$

putem scrie

$$(3.5.10) \quad \begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_0} g * \{\Sigma\}^{(\alpha)T} * \{e\}^{(\beta)} d\Omega = \int_{\Omega_0} g * \{e\}^{(\beta)T} * \{\Sigma\} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_0} g * (([D] + [S])\{U\}^{(\beta)T} * \{\Sigma\}^{(\alpha)} d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} g([D_n]\{U\}^{(\beta)T} * \\ &\quad * \{\Sigma\}^{(\alpha)} dl - \int_{\Omega_0} g * \{U\}^{(\beta)T} * (([D]^T - [S]^T)\{\Sigma\}^{(\alpha)}) d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega_0} g * \{U\}^{(\beta)T} * ([D_n]^T \{\Sigma\}^{(\alpha)} dl + \int_{\Omega_0} \{U\}^{(\beta)T} * (-g * ([D]^T - \\ &\quad - [S]^T)\{\Sigma\}^{(\alpha)}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} g * \{U\}^{(\beta)T} * \{P_n\}^{(\alpha)} dl + \\ &+ \int_{\Omega_0} \{U\}^{(\beta)T} * (\{F\}^{(\alpha)} - [R]\{U\}^{(\alpha)}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} g * \{P_n\}^{(\alpha)T} * \\ &\quad * \{U\}^{(\beta)} dl + \int_{\Omega_0} \{F\}^{(\alpha)T} * \{U\}^{(\beta)} d\Omega - \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega_0} \{U\}^{(\alpha)T} * ([R]\{U\})^{(\beta)} d\Omega.$$

Ținând cont de relația (3.5.10) și de simetria lui $[R]$ rezultă relația de reciprocitate (3.5.5). ■

Dacă condițiile inițiale sunt nule, atunci

$$(3.5.11) \quad \{F\}^{(\alpha)} = g * \{P\}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2),$$

iar relația (3.5.5) devine

$$(3.5.12) \quad g * \left(\int_{\Omega_0} \{P\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} dl - \right. \\ \left. - \int_{\Omega_0} \{P\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} d\Omega - \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} dl \right) = 0.$$

iar pe baza proprietății produsului de convoluție

$$(3.5.13) \quad a * b = 0 \quad \implies \quad a = 0 \quad \text{sau} \quad b = 0,$$

avem

$$(3.5.14) \quad \int_{\Omega_0} \{P\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(1)T} * \{U\}^{(2)} dl = \\ = \int_{\Omega_0} \{P\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(2)T} * \{U\}^{(1)} dl.$$

Ținând cont că

$$(3.5.15) \quad \{U\} = \dot{g} * \{\dot{U}\},$$

relația (3.5.14) poate fi scrisă

$$(3.5.16) \quad \int_{\Omega_0} \{P\}^{(1)T} * \{\dot{U}\}^{(2)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(1)T} * \{\dot{U}\}^{(2)} dl = \\ = \int_{\Omega_0} \{P\}^{(2)T} * \{\dot{U}\}^{(1)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \{P_n\}^{(2)T} * \{\dot{U}\}^{(1)} dl.$$

3.6. Formularea variațională cu ajutorul produsului de convoluție.

3.6.1. Stadiul actual al problemei.

Formularea variațională a dinamicii vâscoelasticității liniare a fost realizată pentru prima dată de Leitman [1966], extinzând principiile variaționale ale elastodinamicii expuse de Gurtin [1964].

Reddy [1976] a formulat un principiu variațional modificat al lui Gurtin în teoria dinamică a vâscoelasticității. De asemenea, principii variaționale de tip Gurtin în dinamica vâscoelasticității liniare, au fost stabilite de Senchenkov și Karnauhov [1978]. Ei dau și principii variaționale pentru vibrațiile mediului liniar vâscoelastic.

Hlaváček [1979], utilizând teorema 4.1 din Leitman [1966], a dat o formulare variațională pentru corpuri vâscoelastice armate cu fibre. În plus, utilizând metoda rigidității efective pe baza formulării variaționale date, el a obținut ecuațiile de mișcare în cazul când constituenții sunt presupuși izotropi și a studiat propagarea undelor armonice.

Remarcabile sunt și rezultatele lui Manole [1980,1992], exprimate prin teoreme variaționale în teoria vâscoelasticității asimetrice, respectiv în teoria liniară a vâscoelasticității micropolare.

Formulări variaționale ale mișcării perturbate pentru un corp vâscoelastic utilizând produsul de convoluție au fost date de Dall'Asta și Menditto [1994].

În continuare, vom formula și demonstra principii variaționale care vor caracteriza soluția problemei mixte corespunzător dinamicii plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată, în contextul teoriei formulate de autor.

3.6.2. Formularea variațională.

Teorema 3.6.1. *Fie \mathcal{R} mulțimea proceselor admisibile. Pentru orice $t \in [0, \infty)$ definim funcționala $J_t(\cdot)$ pe \mathcal{R} prin*

$$\begin{aligned}
 J_t(\Pi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * (\{e\}^T * ([C^*]\{e\}) - 2\{\Sigma\}^T * (\{e\} - ([D] + \\
 (3.6.1) & + [S])\{U\})) - 2\{F\}^T * \{U\} + \{U\}^T * ([R]\{U\})) ds - \int_{\partial\Omega_{\dots}} g * \{P_n\}^T * \\
 & * ([I_u](\{U\} - \{\bar{U}\}))) dl - \int_{\partial\Omega_{\dots}} g * \{U\}^T * ([I_{\sigma}]\{\bar{P}_n\}) dl,
 \end{aligned}$$

oricare ar fi $\Pi = (\{U\}^T \{e\}^T \{\Sigma\}^T) \in \mathcal{R}$. Atunci $\Pi \in \mathcal{R}$ este o soluție a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17)-(3.3.20) dacă și numai dacă

$$(3.6.2) \quad \delta J_t(\Pi) = 0 \quad \text{pentru orice } t \in [0, \infty).$$

Demonstrație. Necesitate. Fie Π și $\tilde{\Pi} \in \mathcal{R}$ ($\tilde{\Pi}$ nu depinde de t). Rezultă că $\Pi + \xi \tilde{\Pi} \in \mathcal{R}$ oricare ar fi scalarul ξ . Utilizând formula lui Green și ținând cont de simetria matricelor $[C^*]$ și $[R]$, precum și de asociativitatea și comutativitatea produsului de convoluție obținem

$$(3.6.3) \quad \begin{aligned} \delta J_t(\Pi) = & \int_{\Omega_0} (\{\tilde{U}\}^T * ([R]\{U\} - \{F\} - g * ([D]^T - \\ & - [S]^T)\{\Sigma\}) + g * (\{\tilde{U}\}^T * ([C^*] * \{e\} - \{\Sigma\}) + g * \{\tilde{\Sigma}\}^T * ([D] + \\ & + [S])\{U\} - \{e\})) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{0u}} g * (\{\tilde{P}_n\} * ([I_u](\{\bar{U}\} - \{U\}))) dl + \\ & + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} g * (\{U\}^T * ([I_\sigma]([D_n]\{\Sigma\} - \{\bar{P}_n\)))) dl. \end{aligned}$$

Dacă Π este o soluție a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17) (3.3.20), atunci folosind teorema 3.5.1. și ținând cont că $\{P_n\} = [D_n]^T \{\Sigma\}$, rezultă

$$(3.6.4) \quad \delta_{\tilde{\Pi}} J_t(\Pi) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

pentru orice $\Pi \in \mathcal{R}$ și deci (3.6.2) are loc.

Suficiența. Presupunem că (3.6.2) are loc. Considerăm $\tilde{\Pi} = (\{\tilde{U}\}^T \{0\}^T \{0\}^T)$, unde $\{\tilde{U}\}$ este vector nul pe $\partial\Omega_0$. Din relațiile (4.6.2) și (4.6.3) obținem

$$(3.6.5) \quad \int_{\Omega_0} \{\tilde{U}\}^T * (g * ([D]^T - [S]^T)\{U\}) + \{F\} - [R]\{U\}) d\Omega = 0.$$

Pe baza lemei generalizate din calculul variațional, din (3.6.5) rezultă ecuația (3.5.1).

Analog, se arată că Π satisface ecuațiile (3.3.15), (3.3.17) și condițiile pe frontieră (3.3.20). În baza teoremei 3.5.2 rezultă că Π este soluție a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17)–(3.3.20). ■

Fie \mathcal{K}_0 —câmpul deplasărilor admisibile ale plăcii subțiri liniar vâscolelastic laminată.

Teorema 3.6.2. Pentru fiecare $t \in [0, \infty)$ definim funcționala $\mathcal{H}_t(\cdot)$ pe \mathcal{K}_0 prin

$$(3.6.6) \quad \mathcal{H}_t(\{U\}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (g * \{e(\{U\})\})^T * ([C^*]\{e(\{U\})\}) + \{U\}^T * \\ * ([R]\{U\}) - 2\{F\}^T * \{U\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} g * \{U\}^T * ([I_\sigma]\{\bar{P}_n\}) dl,$$

unde $\{e(\{U\})\}$ este definit de (3.3.17). Atunci $\{U\} \in \mathcal{K}_0$ aparține la soluția \mathcal{P} a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17)–(3.3.20) dacă și numai dacă

$$(3.6.7) \quad \delta\mathcal{H}_t(\{U\}) = 0 \quad \text{pentru orice } t \in [0, \infty)$$

(Variațiile $\{\tilde{U}\}$ sunt funcții numai de x și y , ele nu depind de timpul t).

Demonstrație. Necesitate. Fie $\{U\}$ și $\{\tilde{U}\} \in \mathcal{K}_0$, unde $\{\tilde{U}\}$ este un vector nul pe $\partial\Omega_{0u} \times [0, \infty)$ care nu depinde de t . Rezultă că $\{U\} + \xi\{\tilde{U}\} \in \mathcal{K}_0$ pentru orice scalar ξ . Ținând cont de relația (3.3.17) și de simetria matricelor $[C^*]$ și $[R]$ obținem:

$$(3.6.8) \quad \delta_{\{\tilde{U}\}}\mathcal{H}_t(\{U\}) = \int_{\Omega_0} (g * (([D] + [S])\{\tilde{U}\}))^T * [C^*] * \\ * \{e(\{U\})\} + \{\tilde{U}\}^T * ([R]\{U\}) - \{\tilde{U}\}^T * \{F\} d\Omega - \\ - \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} g * \{\tilde{U}\}^T * ([I_\sigma]\{\bar{P}_n\}) dl.$$

Pe baza relațiilor (3.4.2), utilizând notația $\{P_n\} = [D_n]^T\{S\}$ și aplicând formula lui Green, relația (3.6.8) devine

$$\delta_{\{\tilde{U}\}}\mathcal{H}_t(\{U\}) = \int_{\Omega_0} \{\tilde{U}\}^T * ([R]\{\tilde{U}\} - \{F\} + g * ([D]^T -$$

$$(3.6.9) \quad -[S]^T\{\Sigma\})d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma\sigma}} \{\tilde{U}\}^T * g * ([I_\sigma]([\mathcal{D}_n]^T\{\Sigma\} - \{\bar{P}_n\}))dl + \\ + \int_{\partial\Omega_{ou}} \{\tilde{U}\}^T * g * ([I_u]([\mathcal{D}_n]\{\Sigma\}))dl.$$

Fie $\Pi = (\{U\}^T \{e\}^T \{\Sigma\}^T)$ o soluție a problemei mixte (3.3.15), (3.3.17)-(3.3.20). În acord cu faptul că $\{U\} \in \mathcal{K}_0$ este câmp al deplasărilor cinematic admisibile corespunzător soluției problemei mixte (3.3.15), (3.3.17) (3.3.20) și ținând cont de presupunerea că $\{\tilde{U}\}$ este vector nul pe $\partial\Omega_{ou} \times [0, \infty)$, din relația (3.6.11) obținem (3.6.8).

Suficiența. Presupunem că (3.6.6) are loc pentru $\{U\} \in \mathcal{K}_0$. Definim $\{\Sigma\}$ prin (3.3.15) și $\{e\}$ prin (3.3.17), astfel că există relația (3.6.9) pentru $\{\tilde{U}\} \in \mathcal{K}_0$.

Considerând $\{\tilde{U}\}$ un vector nul pe frontiera $\partial\Omega_0$, din ecuația (3.6.8) și relația (3.6.9) pe baza lemei calculului variațional, rezultă ecuația (3.5.1). Presupunând acum $\{\tilde{U}\}$ un vector nul pe Ω_0 și pe $\partial\Omega_{ou}$, atunci ecuația (3.6.8) și relația (3.6.9), în baza lemei calculului variațional implică

$$(3.6.10) \quad g * ([I_\sigma]([\mathcal{D}_n]^T\{\Sigma\} - \{\bar{P}_n\})) = \{0\}.$$

Derivând ecuația (4.6.10) de două ori în raport cu t se obține condiția pe frontieră (3.3.20.b).

S-a demonstrat astfel că $\{U\} \in \mathcal{K}_0$ este câmp al deplasărilor cinematic admisibile corespunzând soluției mixte (3.4.1)-(3.4.6). ■

3.7. Existență și unicitate a soluției în dinamica plăcii subțiri compozit liniar vâscoelastic laminată.

3.7.1. Stadiul problemei.

Teoreme de unicitate au fost stabilite: în teoria dinamică a solidelor vâscoelastice anizotrope de Edelman și Gurtin [1964]; în teoria dinamicii materialelor liniar termovâscoelastice cu variabile interne de stare de Chiriță [1982] și în vâscoelasticitatea cvasi-statică de Fabrizio [1989].

Existența și unicitatea soluțiilor problemelor vâscoelasticității liniare este tratată în diverse lucrări. Astfel, teoreme de existență și unicitate sunt prezentate în teoria dinamicii vâscoelasticității liniare de Duvaut și Lions [1972] și

de asemenea de Lazzari și Vuk [1987]; în teoria dinamicii vâscoelasticității liniare micropolare de Manole [1982]; în teoria dinamicii vâscoelasticității incrementale de Quintanilla și Williams [1985], iar în cazul problemei valorii frontieră mixte a dinamicii termovâscoelasticității liniare de Chełminski [1987].

Teoreme de reciprocitate și de dependență continuă în teoria liniară a vâscoelasticității au fost stabilite Rionero și Chiriță [1989].

Principalul rezultat al acestui paragraf îl reprezintă stabilirea și demonstrarea unei teoreme de existență și unicitate în dinamica plăcii compozit subțiri linear vâscoelastic laminată în condiții pe frontieră mixte destul de generale.

3.7.2. Ecuații de bază.

Introducând operatorul matriceal $[A]$ definit astfel

$$(3.7.1) \quad [A]\{U(t)\} = -[R]^{-1}([D]^T - [S]^T)([C^*]([D] + [S])\{U(t)\})$$

și făcând notația

$$(3.7.2) \quad \{f(t)\} = [R]^{-1}\{P(t)\},$$

ecuația de mișcare (3.4.1) se mai poate scrie sub forma

$$(3.7.3) \quad \{\ddot{U}(t)\} + [A]\{U(t)\} = \{f(t)\} \quad \text{pentru } (x, y, t) \in \Omega_0 \times [0, T],$$

unde s-a luat $T = t_0$ ca moment final.

Condițiile pe frontieră în cazul problemei mixte sunt

$$(3.7.4a) \quad [I_u]\{U(t)\} = [I_u]\{\bar{U}(t)\} \quad \text{pentru } (x, y, t) \in \partial\Omega_{0u} \times [0, T],$$

$$(3.7.4b) \quad [I_\sigma][P_n(t)] = [I_\sigma]\{\bar{P}_n(t)\} \quad \text{pentru } (x, y, t) \in \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, T],$$

unde $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_{0u} \cup \partial\Omega_{0\sigma}$.

Condițiile inițiale sunt de forma

$$(3.7.5a) \quad \{U(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\} \quad \text{pentru } (x, y) \in \Omega_0,$$

$$(3.7.5b) \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{U^1(x, y)\} \quad \text{pentru } (x, y) \in \Omega_0.$$

3.7.3. Formularea variațională.

Pentru orice pereche de funcții vectoriale $\{U\}^1$ și $\{U\}^2$ de dimensiune 5×1 , definim formele biliniare

$$(3.7.6) \quad a(\{U\}^1, \{U\}^2) = \int_{\Omega_0} \{e(\{U\}^1)\}^T [C^0] \{e(\{U\}^2)\} d\Omega$$

și

$$(3.7.7) \quad b(t; \{U\}^1, \{U\}^2) = \int_{\Omega_0} \{e(\{U\}^1)\}^T [\dot{C}(t)] \{e(\{U\}^2)\} d\Omega.$$

Ținând cont că $[C^0]$ și $[\dot{C}]$ sunt matrice simetrice, rezultă

$$(3.7.8) \quad a(\{U\}^1, \{U\}^2) = a(\{U\}^2, \{U\}^1)$$

și

$$(3.7.9) \quad b(t; \{U\}^1, \{U\}^2) = b(t; \{U\}^2, \{U\}^1).$$

Vom presupune că există o constantă $c > 0$, astfel că

$$(3.7.10) \quad \{e(\{U\})\}^T [C^0] \{e(\{U\})\} \geq c \{e(\{U\})\}^T \{e(\{U\})\},$$

de unde rezultă imediat pe baza lui (3.7.6) inegalitatea

$$(3.7.11) \quad a(\{U\}, \{U\}) \geq c \int_{\Omega_0} \{e(\{U\})\}^T \{e(\{U\})\} d\Omega.$$

Introducem acum spațiile

$$(3.7.12a) \quad \mathbf{V} = (H^1(\Omega_0))^5, \quad \mathbf{H} = (L^2(\Omega_0))^5,$$

$$(3.7.12b) \quad \mathbf{V}_0 = \{\{U\} \mid \{U\} \in \mathbf{V}, [I_u]\{U\} = \{0\} \text{ pe } \partial\Omega_{0u}\}$$

și definim produsul scalar al funcțiilor $\{U\}, \{V\} \in \mathbf{H}$, astfel:

$$(3.7.13) \quad \langle \{U\}, \{V\} \rangle = \int_{\Omega_0} \{U\}^T [R] \{V\} d\Omega.$$

Analog ca în §1.9 se demonstrează că $\int_{\Omega_0} \{U\}^T [R] \{U\} d\Omega \geq 0$ și deci (3.7.13) verifică proprietățile produsului scalar.

Utilizând legea constitutivă (3.3.15) și relațiile (3.7.6)–(3.7.7) putem scrie

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0} \{e(\{V\})\}^T \{\Sigma(t)\} d\Omega = \int_{\Omega_0} \{e(\{V\})\}^T [C^0] \times \\
 & \times \{e(\{U(t)\})\} d\Omega + \int_{\Omega_0} \{e(\{V\})\}^T \int_0^t [\dot{C}(t-\tau)] \times \\
 (3.7.14) \quad & \times \{e(\{U(\tau)\})\} d\tau d\Omega = a(\{U(t)\}, \{V\}) + \\
 & + \int_0^t \int_{\Omega_0} \{e(\{V\})\}^T [\dot{C}(t-\tau)] \{e(\{U(\tau)\})\} d\Omega d\tau = \\
 & = a(\{U(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t-\tau; \{U(\tau)\}, \{V\}) d\tau.
 \end{aligned}$$

Pe baza legii deformație–deplasare (3.3.17), utilizând formula lui Green și ținând cont de (3.7.1) și (3.7.13) avem:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0} \{e(\{V\})\}^T \{\Sigma(t)\} d\Omega = \int_{\Omega_0} \{\Sigma(t)\}^T \{e(\{V\})\} d\Omega = \\
 & = \int_{\Omega_0} \{\Sigma(t)\}^T ([D] + [S]) \{V\} d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [D_n]^T \{\Sigma(t)\} dl - \\
 (3.7.15) \quad & - \int_{\Omega_0} \{V\}^T [D]^T \{\Sigma(t)\} d\Omega + \int_{\Omega_0} \{\Sigma(t)\}^T [S] \{V\} d\Omega = \\
 & = \int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [D_n]^T \{\Sigma(t)\} dl - \int_{\Omega_0} \{V\}^T ([D]^T - [S]^T) \{\Sigma(t)\} d\Omega = \\
 & = \int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [D_n]^T \{\Sigma(t)\} dl + \int_{\Omega_0} \{V\}^T [R] [A] \{U(t)\} d\Omega = \\
 & = \int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [D_n]^T \{\Sigma(t)\} dl + \langle [A] \{U(t)\}, \{V\} \rangle.
 \end{aligned}$$

Comparând relațiile (3.7.14) și (3.7.15), rezultă

$$\int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [D_n]^T \{\Sigma(t)\} dl + \langle [A] \{U(t)\}, \{V\} \rangle =$$

$$(3.7.16) \quad = a(\{U(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t - \tau; \{U(\tau)\}, \{V\})d\tau.$$

Făcând produsul scalar dintre ecuația (3.7.1) și $\{V\} \in \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{H}$, obținem

$$(3.7.17) \quad \langle \{\ddot{U}(t)\}, \{V\} \rangle + \langle [\mathcal{A}]\{U(t)\}, \{V\} \rangle = \langle \{f(t)\}, \{V\} \rangle.$$

Din ecuațiile (3.7.16) și (3.7.17), rezultă

$$(3.7.18) \quad \langle \{\ddot{U}(t)\}, \{V\} \rangle + a(\{U(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t - \tau; \{U(\tau)\}, \{V\})d\tau = \langle \{f(t)\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_0} \{V\}^T [\mathcal{D}_n]^T \{\Sigma(t)\} dl.$$

Deoarece $\{V\} = \{0\}$ pe $\partial\Omega_{0u}$, ținând cont că $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_{0u} \cup \partial\Omega_{0\sigma}$, ecuația (3.7.18) se mai poate scrie

$$(3.7.19) \quad \langle \{\ddot{U}(t)\}, \{V\} \rangle + a(\{U(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t - \tau; \{U(\tau)\}, \{V\})d\tau = \langle \{f(t)\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma][\mathcal{D}_n]^T \{\Sigma(t)\} dl.$$

Dacă se fac transformările

$$(3.7.21) \quad \{Z(x, y, t)\} = \{U(x, y, t)\} - \{\Phi(x, y, t)\},$$

$$(3.7.22) \quad \{Z(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\} - \{\Phi(x, y, 0)\} (= \{Z^0(x, y)\}),$$

$$(3.7.23) \quad \{\dot{Z}(x, y, 0)\} = \{U^1(x, y)\} - \{\Phi(x, y, 0)\} (= \{\dot{Z}^1(x, y)\}),$$

cu $\{\Phi(x, y, t)\} \in \mathbf{V}$ astfel că

$$(3.7.24) \quad \{\Phi(x, y, t)\} = \{U(x, y, t)\} \text{ pe } \partial\Omega_{0u}$$

și ($\{Z^0\}, \{\dot{Z}^1\} \in \mathbf{V}_0$), atunci ecuația (3.7.19) devine

$$(3.7.25) \quad \langle \{\ddot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle + a(\{Z(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t - \tau; \{Z(\tau)\}, \{V\})d\tau = \langle \{f(t)\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma][\mathcal{D}_n]^T \{\Sigma(t)\} dl.$$

$$; \{Z(\tau)\}, \{V\} d\tau = \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle,$$

unde

$$(3.7.26) \quad \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle = \langle \{f(t)\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma] \{P_n(t)\} dl - \\ - \langle \{\ddot{\Phi}(t)\}, \{V\} \rangle - a(\{\Phi(t)\}, \{V\}) - \int_0^t b(t-\tau; \{\Phi(\tau)\}, \\ , \{V\}) d\tau - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma] [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\mathcal{D}] + [S]) (\{\Phi(t)\}) dl,$$

Presupunând că \mathbf{V}_0 este dens și continuu scufundat în \mathbf{H} , identificând \mathbf{H} cu propriul său dual și notând cu \mathbf{V}'_0 dualul lui \mathbf{V}_0 , atunci avem $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{V}'_0$.

Vom utiliza în continuare notațiile: $|\cdot|$ norma în \mathbf{H} , $\|\cdot\|$ norma în \mathbf{V}_0 și $\|\cdot\|_*$ norma în \mathbf{V}'_0 .

Datorită faptului că forma $\{V\} \rightarrow b(t; \{U\}, \{V\})$ este continuă în \mathbf{V}_0 , avem

$$(3.7.27) \quad b(t; \{U\}, \{V\}) = \langle \{B(t)\{U\}\}, \{V\} \rangle,$$

unde

$$(3.7.28) \quad \{B(t)\{U\}\} \in \mathbf{V}'_0, \quad \{B(t)\{U\}\} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}'_0).$$

3.7.4. Teorema de existență și unicitate.

Putem acum să formulăm următoarea problemă:

Problemă. Să se găsească $t \rightarrow \{Z(x, y, t)$ a lui $[0, T] \rightarrow \mathbf{V}_0$ verificând ecuația

$$(3.7.29) \quad \langle \{\ddot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle + a(\{Z(t)\}, \{V\}) + \int_0^t b(t-\tau; \\ ; \{Z(\tau)\}, \{V\}) d\tau = \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle, \quad \forall \{V\} \in \mathbf{V}_0,$$

cu condițiile inițiale

$$(3.7.30) \quad \{Z(x, y, 0)\} = \{Z^0\}, \quad \{\dot{Z}(x, y, 0)\} = \{Z^1\}.$$

Teorema 3.7.1. *Se presupune că*

$$(3.7.31) \quad \{f\}, \{\dot{f}\}, \{\ddot{f}\} \in (L^2(\Gamma))^5, \quad \text{unde } \Gamma = \Omega_0 \times (0, T);$$

$$(3.7.32) \quad \{\bar{P}_n\}, \{\dot{\bar{P}}_n\}, \{\ddot{\bar{P}}_n\} \in (L^2(\gamma))^5, \quad \text{unde } \gamma = \partial\Omega_0 \times (0, T);$$

$$(3.7.33) \quad \{\Phi\}, \{\dot{\Phi}\}, \{\ddot{\Phi}\} \in L^2(0, T; \mathbf{V}),$$

$$\{\ddot{\Phi}\}, \{\ddot{\Phi}\} \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \{\Phi(0)\} \in \mathbf{V};$$

$$(3.7.34) \quad \langle \{\mathcal{L}(0)\}, \{V\} \rangle = \langle \{Z^2\}, \{V\} \rangle, \quad \text{cu } \{Z^2\} \in \mathbf{H} \text{ și } (\forall)\{V\} \in \mathbf{V}_0.$$

Atunci există o funcție $\{Z(x, y, t)\}$ și numai una pentru care

$$(3.7.35) \quad \{Z\}, \{\dot{Z}\} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$$

$$(3.7.36) \quad \{\ddot{Z}\} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H})$$

și verifică ecuația (3.7.29) și condițiile inițiale (3.7.30).

Demonstrație. a). **Unicitate.** Fie $\{Z\}$ și $\{\tilde{Z}\} \in \mathbf{V}_0$ două soluții posibile ale problemei (3.7.29), (3.7.30).

Dacă în ecuația (3.7.29) punem mai întâi ($\{Z\} \rightarrow \{Z\}$, $\{V\} \rightarrow \{\dot{Z}\}$, $\{\ddot{Z}\}$) și apoi ($\{Z\} \rightarrow \{\tilde{Z}\}$, $\{V\} \rightarrow \{\tilde{Z}\} - \{\dot{Z}\}$) și adunăm ecuațiile obținute atunci făcând notația $\{W\} = \{Z\} - \{\tilde{Z}\}$ și ținând cont de (3.7.27), obținem

$$(3.7.37) \quad \langle \{\ddot{W}(t)\}, \{\dot{W}(t)\} \rangle + a(\{W(t)\}, \{\dot{W}(t)\}) +$$

$$+ \langle \int_0^t \{B(t - \tau)\{W(\tau)\}\} d\tau, \{\dot{W}(t)\} \rangle = 0,$$

de unde

$$(3.7.38) \quad \frac{d}{dt} (|\{\dot{W}(t)\}|^2 + a(\{W(t)\}, \{W(t)\})) =$$

$$= -2 \langle \int_0^t \{B(t - \tau)\{W(\tau)\}\} d\tau, \{\dot{W}(t)\} \rangle$$

și prin urmare

$$(3.7.39) \quad \begin{aligned} & | \{ \dot{W}(t) \} |^2 + a(\{W(t)\}, \{W(t)\}) = \\ & = -2 \int_0^t \langle \int_0^\tau \{B(t - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\} d\tau_1, \{ \dot{W}(\tau) \} \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Pe de altă parte avem

$$(3.7.40) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \langle \int_0^\tau \{B(\tau - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\} d\tau_1, \{ \dot{W}(\tau) \} \rangle d\tau = \\ & = \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \langle \{B(\tau - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\}, \{ \dot{W}(\tau) \} \rangle d\tau \right) d\tau_1 = \\ & = \int_0^t \left(\langle \{B(t - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(t)\} \rangle - \right. \\ & \quad \left. - \langle \{B(0)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau_1)\} \rangle \right) d\tau_1 - \\ & \quad - \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \langle \{ \dot{B}(t - \tau)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau)\} \rangle d\tau \right) d\tau_1, \end{aligned}$$

ultima egalitate obținându-se integrând prin părți după variabila τ pe intervalul $[\tau_1, t]$.

Vom evalua acum ultimii trei termeni din (3.7.40). Astfel, utilizând inegalitățile, de tip Schwartz

$$(3.7.41) \quad | \langle a, b \rangle | \leq \|a\| \|b\|$$

și de tip Young

$$(3.7.42) \quad 2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \quad (\varepsilon > 0),$$

avem:

$$(3.7.43) \quad \begin{aligned} & \left| \int_0^t \langle \{B(t - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(t)\} \rangle d\tau_1 \right| \leq \\ & \leq \int_0^t | \langle \{B(t - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(t)\} \rangle | d\tau_1 \leq \\ & \leq \int_0^t \| \{B(t - \tau_1)\{W(\tau_1)\}\} \| \| \{W(t)\} \| d\tau_1 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq c_1 \|\{W(t)\}\|^2 + c_2 \int_0^t \|\{W(\tau)\}\|^2 d\tau; \\
& \left| \int_0^t \langle \{B(0)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau_1)\} \rangle d\tau_1 \right| \leq \\
(3.7.44) \quad & \leq \int_0^t \left| \langle \{B(0)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau_1)\} \rangle \right| d\tau_1 \leq \\
& \leq c_3 \int_0^t \|\{W(\tau_1)\}\|^2 d\tau_1; \\
& \left| \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \langle \{\dot{B}(t-\tau)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau)\} \rangle d\tau \right) d\tau_1 \right| \leq \\
& \leq \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \left| \langle \{\dot{B}(t-\tau)\{W(\tau_1)\}\}, \{W(\tau)\} \rangle \right| d\tau \right) d\tau_1 \leq \\
(3.7.45) \quad & \leq \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t \|\langle \{\dot{B}(t-\tau)\{W(\tau_1)\}\}\| \|\{W(\tau)\}\| d\tau \right) d\tau_1 \leq \\
& \leq \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t (\|\{\dot{B}(t-\tau)\{W(\tau_1)\}\}\|^2 + \|\{W(\tau)\}\|^2) d\tau \right) d\tau_1 \leq \\
& \leq c_4 \|\{W(t)\}\|^2 + c_5 \int_0^t \|\{W(\tau)\}\|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Ținând cont de (3.7.40), (3.7.43) - (3.7.45), rezultă

$$\begin{aligned}
(3.7.46) \quad & 2 \left| \int_0^t \left\langle \int_0^\tau \{B(\tau-\tau_1)\{W(\tau_1)\}\} d\tau_1, \{\dot{W}(\tau)\} \right\rangle d\tau \right| \leq \\
& \leq c_6 (\|\{W(t)\}\|^2 + \int_0^t \|\{W(\tau)\}\|^2 d\tau).
\end{aligned}$$

Analog cum s-a demonstrat (1.9.39), se poate arăta că pentru $\lambda > 0$ există $c > 0$ astfel că

$$(3.7.47) \quad a(\{W\}, \{W\}) + \lambda \|\{W\}\|^2 \geq c \|\{W\}\|^2,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$(3.7.48) \quad c \|\{W(t)\}\|^2 - \lambda \|\{W(t)\}\|^2 \leq a(\{W(t)\}, \{W(t)\}).$$

Din ecuația (3.7.39) și inegalitățile (3.7.46) și (3.7.48), obținem

$$(3.7.49) \quad |\{\dot{W}(t)\}|^2 + c\|\{W(t)\}\|^2 - \lambda|\{W(t)\}|^2 \leq \\ \leq c_6(\|\{W(t)\}\|^2 + \int_0^t \|\{W(\tau)\}\|^2 d\tau).$$

Ținând cont că pentru orice funcție derivabilă $\{W\} : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$, din existența relației

$$(3.7.50) \quad \{W(t)\} = \{W(0)\} + \int_0^t \{\dot{W}(\tau)\} d\tau,$$

rezultă că există constata $c > 0$ astfel încât să aibă loc inegalitatea (vezi Lions și Duvaut [1972]):

$$(3.7.51) \quad |\{W(t)\}|^2 \leq 2|\{W(0)\}|^2 + c \int_0^t |\{\dot{W}(\tau)\}|^2 d\tau.$$

Din faptul că

$$(3.7.52) \quad \{W(0)\} = \{\dot{W}(0)\} = \{0\},$$

avem

$$(3.7.53) \quad |\{W(t)\}|^2 \leq c \int_0^t |\{\dot{W}(\tau)\}|^2 d\tau.$$

Pe baza inegalității (3.7.53), inegalitatea (3.7.49) implică

$$(3.7.55) \quad |\{\dot{W}(t)\}|^2 + \|\{W(t)\}\|^2 \leq c_7 \int_0^t (|\{\dot{W}(\tau)\}|^2 + \|\{W(\tau)\}\|^2) d\tau,$$

de unde în virtutea unui caz particular al inegalității lui Gronwall obținem

$$(3.7.55) \quad |\{\dot{W}(t)\}|^2 + \|\{W(t)\}\|^2 = 0,$$

ceea ce implică $\{W(t)\} = \{0\}$, adică $\{Z(t)\} = \{\tilde{Z}(t)\}$ și unicitatea soluției este demonstrată.

b). **Existență.** Vom demonstra existența soluției problemei (3.7.29),(3.7.30) utilizând metoda Faedo Galerkin. Demonstrația este divizată în trei pași:

1) construcția soluțiilor aproximative ale lui $\{Z\}$ prin șirul $\{Z\}_m$ ($m=1,2,\dots$) așa numitele aproximări Galerkin;

2) estimările a priori ale aproximațiilor Galerkin $\{Z\}_m$ ($m=1,2,\dots$);

3) convergența șirului $\{Z\}_m$ ($m=1,2,\dots$) la soluția problemei valorii inițial-frontieră (3.7.29),(3.7.30) pe $\Omega_0 \times [0, T)$.

Pasul 1). Fie $\{W^*\}_i$ ($i=1,2,\dots$) un șir de funcții care constituie o bază în V , astfel că

$$(3.7.56) \quad \begin{cases} \{W^*\}_i, & \forall i, \\ \{W^*\}_1, \{W^*\}_2, \dots, \{W^*\}_m & \text{sunt linear independente } \forall m \\ V = \overline{\cup V_m} & V_m \text{ subspațiu al lui } V, \end{cases}$$

unde $V_m = [\{W^*\}_1, \{W^*\}_2, \dots, \{W^*\}_m]$ este subspațiu al lui V generat de primii m vectori $\{W^*\}_1, \{W^*\}_2, \dots, \{W^*\}_m$. Combinațiile liniare finite de $\{W^*\}_i$ sunt dense în V_0 .

Aproximația Faedo-Galerkin a soluției problemei (3.7.29),(3.7.30) constă în găsirea lui $\{Z\} \in V$, $\{Z\}_m : \Omega_0 \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^5$ de forma

$$(3.7.57) \quad \{Z(x, y, t)\}_m = \sum_{j=1}^m z_{jm}(t) \{W^*(x, y)\}_j,$$

cu $z_{im} \in C^2([0, T]; \mathbf{R})$ (z_{im} - funcții necunoscute), astfel încât să satisfacă sistemul de ecuații integro-diferențiale

$$(3.7.58) \quad \begin{aligned} & \langle \{\ddot{Z}(t)\}_m, \{V\} \rangle + a(\{Z(t)\}_m, \{V\}) + \int_0^t b(t - \tau; \\ & ; \{Z(\tau)\}_m, \{V\}) d\tau = \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle, \quad \forall \{V\} \in V_m, \end{aligned}$$

supusă la condițiile inițiale

$$(3.7.59a) \quad \{Z(0)\}_m = \{Z^0\}_m, \quad \{Z^0\}_m \in V_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \{Z^0\}_m = \{Z^0\} \text{ în } V_0.$$

$$(3.7.59b) \quad \{\dot{Z}(0)\}_m = \{Z^1\}_m, \quad \{Z^1\}_m \in V_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \{Z^1\}_m = \{Z^1\} \text{ în } H.$$

Dacă în (3.7.58) se înlocuiește (3.7.57) și se consideră $V = \{W^*\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), se obține sistemul:

$$(3.7.60) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} \ddot{z}_{jm}(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij} z_{jm}(t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t c_{ij}(t - \tau) z_{jm}(\tau) d\tau = d_i(t)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

unde

$$(3.7.61) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= \langle \{W^*\}_i, \{W^*\}_j \rangle, & b_{ij} &= a(\{W^*\}_i, \{W^*\}_j), \\ c_{ij}(t) &= b(t; \{W^*\}_i, \{W^*\}_j), & d_i(t) &= \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{W^*\}_i \rangle. \end{aligned}$$

Cum $\{Z^0\} \in \mathbf{V}_0$ și $\{\mathbf{V}\}_m$ este dens în \mathbf{V}_0 , atunci

$$(3.7.62) \quad \{Z^0\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m z_{im}^0 \{W^*\}_i.$$

Introducând notația

$$(3.7.63) \quad \{Z^0\}_m = \sum_{i=1}^m z_{im}^0 \{W^*\}_i,$$

unde $\{Z\}_m \in \mathbf{V}$ și ținând cont de (3.7.57), se deduce că (3.7.59a) este echivalentă cu

$$(3.5.64) \quad z_{im}(0) = z_{im}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

În mod analog, cum \mathbf{V}_0 este dens în \mathbf{H} , funcțiile din \mathbf{H} de asemenea sunt approximate prin combinații liniare finite de $\{W^*\}_i$. Deci, introducând notația

$$(3.7.65) \quad \{Z^1\}_m = \sum_{i=1}^m z_{im}^1 \{W^*\}_i,$$

condiția (3.7.59b) este echivalentă cu

$$(3.7.66) \quad \dot{z}_{im}(0) = z_{im}^1 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Din teoria sistemelor de ecuații integro-diferențiale este cunoscut că o soluție unic determinată pentru sistemul de tipul (3.7.60), (3.7.64), (3.7.66) există în intervalul $[0, t_m]$. Estimări apriori, ce urmează, vor dovedi că $t_m = T$.

Pasul 2). Punând $\{V\} = \{\dot{Z}(t)\}_m$ în (3.7.58) și ținând cont de (3.7.27), obținem:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{Z(t)\}_m, \{Z(t)\}_m)) = \langle \{\mathcal{L}(t)\} \rangle.$$

$$(3.7.67) \quad , \{\dot{Z}(t)\}_m > - < \int_0^t \{B(t-\tau)\{Z(\tau)\}_m\}d\tau, \{\dot{Z}(t)\}_m > .$$

Integrând în raport cu timpul de la 0 la t ecuația (3.7.67), obținem

$$(3.5.68) \quad |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{Z(t)\}_m, \{Z(t)\}_m) = |\{Z^1\}_m|^2 + \\ + a(\{Z^0\}_m, \{Z^0\}_m) + 2 \int_0^t < \{\mathcal{L}(\tau)\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > - \\ - 2 \int_0^t < \int_0^\tau \{B(\tau-\tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\}d\tau_1, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau.$$

Ținând cont de relația

$$(3.7.69) \quad \int_0^t < \{\mathcal{L}(\tau)\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau = < \{\mathcal{L}(t)\}, \{Z(t)\}_m > - \\ - < \{\mathcal{L}(0)\}, \{Z^0\}_m > - \int_0^t < \{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{Z(\tau)\}_m > d\tau$$

(obținută integrând prin părți), ecuația (3.7.69) devine

$$(3.5.70) \quad |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{Z(t)\}_m, \{Z(t)\}_m) = |\{Z^1\}_m|^2 + \\ + a(\{Z^0\}_m, \{Z^0\}_m) + 2 < \{\mathcal{L}(t)\}, \{Z(t)\}_m > - \\ - 2 < \{\mathcal{L}(0)\}, \{Z^0\}_m > - 2 \int_0^t < \{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{Z(\tau)\}_m > d\tau - \\ - 2 \int_0^t < \int_0^\tau \{B(\tau-\tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\}d\tau_1, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau.$$

Pe de altă parte, ținând cont de inegalitățile

$$(3.7.71) \quad a(\{Z(t)\}_m, \{Z(t)\}_m) + \lambda |\{Z(t)\}_m|^2 \geq c |\{Z(t)\}_m|^2;$$

$$(3.7.72) \quad \left| \int_0^t < \int_0^\tau \{B(\tau-\tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\}d\tau_1, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau \right| \leq \\ \leq c_8 \|\{Z(t)\}_m\|^2 + c_9 \int_0^t \|\{Z(\tau)\}_m\|^2 d\tau;$$

$$(3.7.73) \quad \left| \int_0^t \langle \{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{Z(\tau)\}_m \rangle d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|\{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}\|^2 + \|\{Z(\tau)\}_m\|^2) d\tau \leq c_{10} + c_{11} \int_0^t \|\{Z(\tau)\}_m\|^2 d\tau,$$

din (3.7.70) se obține inegalitatea

$$(3.7.74) \quad |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 + \|\{Z(t)\}_m\|^2 \leq c_{12}(1 + \int_0^t (|\{\dot{Z}(\tau)\}_m|^2 + \|\{Z(\tau)\}_m\|^2) d\tau).$$

Utilizând inegalitatea lui Gronwall, din (3.7.74) rezultă

$$(3.7.75) \quad |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 + \|\{Z(t)\}_m\|^2 < const,$$

și prin urmare

$$(3.7.76) \quad \|\{Z(t)\}_m\| \leq const; \quad |\{\dot{Z}(t)\}_m| \leq const.$$

Derivând în raport cu t ecuația (3.7.59), obținem

$$(3.7.77) \quad \langle \{\ddot{Z}(t)\}_m, \{V\} \rangle + a(\{\dot{Z}(t)\}_m, \{V\}) + \langle \{B(0)\{Z(t)\}_m\}, \{V\} \rangle + \langle \int_0^t \{\dot{B}(t-\tau)\{Z(\tau)\}_m\} d\tau, \{V\} \rangle = \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{V\} \rangle.$$

Punând $\{V\} = \{\ddot{Z}(t)\}$ în (3.7.77), avem ecuația

$$(3.7.78) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\{\ddot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{\dot{Z}(t)\}_m, \{\dot{Z}(t)\}_m)) = \\ = \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{\ddot{Z}(t)\}_m \rangle - \langle \{B(0)\{Z(t)\}_m\}, \{\ddot{Z}(t)\}_m \rangle - \\ - \langle \int_0^t \{\dot{B}(t-\tau)\{Z(\tau)\}_m\} d\tau, \{\ddot{Z}(t)\}_m \rangle.$$

Integrând în raport cu timpul ecuația (3.7.78), obținem

$$|\{\ddot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{\dot{Z}(t)\}_m, \{\dot{Z}(t)\}_m) = |\{\ddot{Z}(0)\}_m|^2 +$$

$$(3.7.79) \quad +a(\{Z^1\}_m, \{Z^1\}_m) + 2 \int_0^t \langle \{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau - \\ -2 \int_0^t \langle \{B(0)\{Z(\tau)\}_m\}, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau - 2 \int_0^t \langle \int_0^\tau \{\dot{B}(\tau - \tau_1)\} \times \\ \times \{Z(\tau_1)\}_m d\tau_1, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau.$$

În plus avem

$$(3.7.80) \quad \int_0^t \langle \{\dot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau = \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{\dot{Z}(t)\}_m \rangle - \\ - \langle \{\dot{\mathcal{L}}(0)\}, \{Z^1\}_m \rangle - \int_0^t \langle \{\ddot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau$$

(obținută integrând prin părți)

$$\int_0^t \langle \{B(0)\{Z(\tau)\}_m\}, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau =$$

$$(3.7.81) \quad = \langle \{B(0)\{Z(t)\}_m\}, \{\dot{Z}(t)\}_m \rangle - \langle \{B(0)\{Z^0\}_m\}, \\ , \{Z^0\} \rangle + \int_0^t \langle \{B(0)\{\dot{Z}(\tau)\}_m\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau.$$

(obținută integrând prin părți).

Astfel, ținând cont de relațiile (3.7.80),(3.7.81), ecuația (3.7.79) devine:

$$|\{\ddot{Z}(t)\}_m|^2 + a(\{\dot{Z}(t)\}_m, \{\dot{Z}(t)\}_m) = |\{\ddot{Z}(0)\}_m|^2 + \\ + a(\{Z^1\}_m, \{Z^1\}_m) + 2 \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{\dot{Z}(t)\}_m \rangle - \\ -2 \langle \{\dot{\mathcal{L}}(0)\}, \{Z^1\}_m \rangle - 2 \int_0^t \langle \{\ddot{\mathcal{L}}(\tau)\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau -$$

$$(3.7.82) \quad -2 \langle \{B(0)\{Z(t)\}_m\}, \{\dot{Z}(t)\}_m \rangle + 2 \langle \{B(0)\{Z^0\}_m\}, \\ , \{Z^1\} \rangle + 2 \int_0^t \langle \{B(0)\{\dot{Z}(\tau)\}_m\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau - \\ -2 \int_0^t \langle \int_0^\tau \{\dot{B}(\tau - \tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\} d\tau_1, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m \rangle d\tau.$$

Analog cu (3.7.40), avem:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t < \int_0^\tau \{\dot{B}(\tau - \tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\} d\tau_1, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m > d\tau = \\
 (3.7.83) \quad & = \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^\tau < \{\dot{B}(\tau - \tau_1)\{Z(\tau)\}_m\}, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m > d\tau \right) d\tau_1 = \\
 & = \int_0^t \left(< \{\dot{B}(t - \tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\}, \{\dot{Z}(t)\}_m > - < \{\dot{B}(0)\{Z(\tau_1)\}_m\}, \right. \\
 & \left. , \{\dot{Z}(\tau_1)\}_m > \right) d\tau_1 - \int_0^t \left(\int_{\tau_1}^t < \{\ddot{B}(\tau - \tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\}, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau \right) d\tau_1;
 \end{aligned}$$

În plus avem estimările:

$$\begin{aligned}
 (3.7.84) \quad & \left| \int_0^t < \int_0^\tau \{\dot{B}(\tau - \tau_1)\{Z(\tau_1)\}_m\} d\tau_1, \{\ddot{Z}(\tau)\}_m > d\tau \right| < \\
 & < c_{20} + c_{21} \|\{\dot{Z}(t)\}_m\| + c_{22} \int_0^t \|\{\dot{Z}(\tau)\}_m\| d\tau;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.7.85) \quad & 2 \int_0^t < \{\ddot{L}(\tau)\}, \{\dot{Z}(t)\}_m > d\tau \leq \frac{c_{24}}{2} \int_0^t (\|\{\ddot{L}(\tau)\}\|^2 + \\
 & + \|\{\dot{Z}(\tau)\}_m\|^2) d\tau \leq c_{25} + c_{26} \int_0^t \|\{\dot{Z}(\tau)\}_m\|^2 d\tau;
 \end{aligned}$$

$$(3.7.86) \quad 2 \int_0^t < \{B(0)\{\dot{Z}(\tau)\}_m, \{\dot{Z}(\tau)\}_m > d\tau \leq c_{27} \int_0^t \|\{\dot{Z}(\tau)\}\|^2 d\tau;$$

$$(3.7.87) \quad a(\{\dot{Z}(t)\}_m, \{\dot{Z}(t)\}_m) + \lambda |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2 \geq c |\{\dot{Z}(t)\}_m|^2.$$

Dacă se consideră $t = 0$ în ecuația (3.7.58), atunci rezultă

$$(3.7.88) \quad < \{\ddot{Z}(0)\}_m, \{V\} > + a(\{Z^0\}_m, \{Z^0\}_m) = < \{\mathcal{L}(0), \{V\} > .$$

Făcând $t = 0$ în (3.7.29) și apoi ținând cont de (3.7.88), obținem

$$< \{\dot{Z}(0)\}, \{V\} > = < \{f(0)\}, \{V\} > + \int_{\partial\Omega_{\sigma_0}} \{V\}^T [I_\sigma] \{\bar{P}_n(0)\} dl -$$

$$(3.7.89) \quad - \langle \{\ddot{\Phi}(0)\}, \{V\} \rangle - a(\{\Phi(0)\}, \{V\}) - \\ - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma] [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\mathcal{D}] + [S]) \{\Phi(0)\} dl - a(\{Z^0\}, \{V\}).$$

Cum

$$(3.7.90) \quad a(\{Z^0\}, \{V\}) = \langle \mathcal{A}\{Z^0\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T [I_\sigma] \{\bar{P}_n(0)\} dl$$

și

$$(3.7.91) \quad a(\{\Phi^0\}, \{V\}) = \langle \mathcal{A}\{\Phi(0)\}, \{V\} \rangle + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \{V\}^T \times \\ \times [I_\sigma] [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\mathcal{D}] + [S]) \{\Phi(0)\} dl.$$

atunci (3.7.89) devine

$$(3.7.92) \quad \langle \{\ddot{Z}(0)\}, \{V\} \rangle = \langle \{f(0)\}, \{V\} \rangle - \langle \{\ddot{\Phi}(0)\}, \{V\} \rangle - \\ - \langle \mathcal{A}\{Z^0\}, \{V\} \rangle - \langle \mathcal{A}\{\Phi(0)\}, \{V\} \rangle,$$

de unde

$$(3.7.93) \quad \{\ddot{Z}(0)\} = \{f(0)\} - \{\ddot{\Phi}(0)\} - \mathcal{A}\{Z^0\} - \mathcal{A}\{\Phi(0)\}$$

și în consecință

$$(3.7.94) \quad |\{\ddot{Z}(0)\}| < const.$$

Utilizând inegalitățile (3.7.84) - (3.7.87) și (3.7.94) în ecuația (3.7.82), se obține inegalitatea

$$(3.7.95) \quad |\{\ddot{Z}(t)\}_m|^2 + \|\{\dot{Z}(t)\}_m\|^2 \leq c(1 + \\ + \int_0^t (|\{\ddot{Z}(\tau)\}_m|^2 + \|\{\dot{Z}(\tau)\}_m\|^2) d\tau),$$

și conform inegalității lui Gronwall, rezultă

$$(3.7.96) \quad |\{\ddot{Z}(t)\}_m|^2 + \|\{\dot{Z}(t)\}_m\|^2 < const.,$$

de unde

$$(3.7.97) \quad \|\{\dot{Z}(t)\}_m\|^2 < c; \quad |\{\ddot{Z}(t)\}_m| < c.$$

În baza inegalităților (3.7.76) și (3.7.97) suntem conduși la concluzia că:

$$(3.7.98a) \quad \{Z\}_{m=1}^{\infty} \in \text{submulț marg. a lui } L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_0),$$

$$(3.7.98b) \quad \{\dot{Z}\}_{m=1}^{\infty} \in \begin{cases} \text{submulț marg. a lui } L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_0) \\ \text{submulț marg. a lui } L^2(0, T; \mathbf{V}_0). \end{cases}$$

$$(3.7.98c) \quad \{\ddot{Z}\}_{m=1}^{\infty} \in \text{submulț marg. a lui } L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}),$$

Pasul 3). Astfel, (3.7.98a,b,c) implică existența subșirului $\{Z\}_{\nu}$, cu proprietățile:

$$(3.7.99a) \quad \{Z\}_{\nu} \rightarrow \{Z\} \text{ slab star în } L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_0);$$

$$(3.7.99b) \quad \{\dot{Z}\}_{\nu} \rightarrow \{\dot{Z}\} \text{ slab star în } L^{\infty}(0, T; \mathbf{V}_0);$$

$$(3.7.99c) \quad \{\ddot{Z}\}_{\nu} \rightarrow \{\ddot{Z}\} \text{ slab star în } L^{\infty}(0, T; \mathbf{H}).$$

Dacă în (3.7.29) se înlocuiește $\{Z\}$ prin $\{Z(t)\}_{\nu}$ și se presupune că $\{V\} = \{V(t)\}$ cu $\{V(\cdot)\} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$, apoi se integrează în raport cu timpul pe intervalul $[0, T)$, urmând un procedeu standard de trecere la limită pentru $\nu \rightarrow \infty$ se obține

$$(3.7.100) \quad \langle \{\ddot{Z}(t)\}, \{V\} - \{\dot{Z}(t)\} \rangle + a(\{Z, \}, \{V\} - \{\dot{Z}(t)\}) + \\ - \int_0^t b(t - \tau; \{Z(\tau), \{V\} - \{\dot{Z}(t)\})d\tau = \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle .$$

Verificarea condițiilor inițiale.

Din estimările pentru $\{Z\}_m$ și $\{\dot{Z}\}_m$ concluzionăm că șirul $\{Z\}_m$ ($m = 1, 2, \dots$) este mărginit în \mathbf{V} . Același lucru este valabil pentru șirul $\{\dot{Z}\}_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Cum scufundarea lui $L^2(0, T; \mathbf{V})$ este compact în $L^2(0, T; \mathbf{H})$, se poate garanta că subșirurile ($\{Z\}_{\nu}$) și ($\{\dot{Z}\}_{\nu}$) converg tare respectiv spre

$\{Z\}$ și $\{\dot{Z}\}$ în $L^2(0, T; \mathbf{H})$, deci slab în același spațiu. Rezultă că există $\theta \in C^1([0, T]; \mathbf{R})$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$, astfel că

$$(3.7.101) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \{Z(t)\}_\nu, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt = \int_0^T \langle \{Z(t)\}, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt.$$

$$(3.7.102) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \{\dot{Z}(t)\}_\nu, \{V\} \rangle \theta(t) dt = \int_0^T \langle \{\dot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt.$$

Integrând prin părți în ambii membrii ai lui (3.7.101), unde $\{Z\} \in C^0([0, T]; \mathbf{H})$, se obține:

$$(3.7.103) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[- \int_0^T \langle \{\dot{Z}(t)\}_\nu, \{V\} \rangle \theta(t) dt - \langle \{Z(0)\}_\nu, \{V\} \rangle \right] = \\ - \int_0^T \langle \{\dot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt - \langle \{Z(0)\}, \{V\} \rangle .$$

Din (3.7.102) și (3.7.103), rezultă

$$(3.7.104) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \{Z(0)\}_\nu, \{V\} \rangle = \langle \{Z(0)\}, \{V\} \rangle$$

pentru orice $\{V\} \in \mathbf{V}_0$. Din convergența tare a lui $\{Z(0)\}_\nu$ spre $\{Z^0\}$ în \mathbf{V}_0 , rezultă și convergența tare în \mathbf{H} , deci slabă, astfel că

$$(3.7.105) \quad \langle \{Z(0)\}, \{V\} \rangle = \langle \{Z^0\}, \{V\} \rangle \quad \forall \{V\} \in \mathbf{V}_0,$$

dovedind că $\{Z(0)\} = \{Z^0\}$, deoarece \mathbf{V}_0 este dens în \mathbf{H} .

Pentru a calcula $\{\dot{Z}(0)\}$, ne întoarcem la ecuația aproximativă (3.7.54). Fie $\theta \in C^1([0, T]; \mathbf{R})$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$. Multiplicând (3.7.54) prin θ și integrând prin părți, se obține:

$$(3.7.106) \quad - \langle \{\dot{Z}(0)\}_\nu, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \{\dot{Z}(t)\}_\nu, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt + \\ + \int_0^T a(\{Z(t)\}_\nu, \{V\}) \theta(t) dt + \int_0^T \left(\int_0^t b(t - \tau; \{Z(\tau)\}_\nu, \{V\}) d\tau \right) \theta(t) dt = \int_0^T \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \{V\} \in \{\mathbf{V}\}_\nu.$$

Trecând la limită pentru $\nu \rightarrow \infty$, ținând cont de (3.7.59b) și (3.7.105), se obține

$$(3.7.107) \quad - \langle \{Z^1\}, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \dot{Z}(t), \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt + \int_0^T a(\{Z(t)\}, \{V\}) \theta(t) dt + \int_0^T \left(\int_0^t b(t-\tau; \{Z(\tau)\}_\nu, \{V\}) d\tau \right) \theta(t) dt = \\ = \int_0^T \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt.$$

Integrând prin părți, și ținând cont că $\{Z\}$ este soluție a lui (3.7.29), rezultă că $\{\dot{Z}(0)\} = \{Z^1\}$.

Pentru calculul lui $\{\ddot{Z}(0)\}$, revenim la ecuația aproximativă (3.7.77). Considerând de asemenea $\theta \in C^1([0, T]; \mathbf{R})$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$, multiplicând cu $\theta(t)$ ecuația (3.7.77) și apoi integrând prin părți, se obține:

$$(3.7.108) \quad - \langle \{\ddot{Z}(0)\}_\nu, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \{\ddot{Z}(t)\}_\nu, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt + \\ + \int_0^T a(\{\dot{Z}(t)\}_\nu, \{V\}) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \{B(0)\{Z(t)\}_\nu\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt + \int_0^T \left\langle \int_0^t \{\dot{B}(t-\tau)\{Z(\tau)\}_\nu\} d\tau, \{V\} \right\rangle \theta(t) dt = \\ = \int_0^T \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \{V\} \in \mathbf{V}_\nu.$$

Trecând la limită în (3.7.108) pentru $\nu \rightarrow \infty$, rezultă

$$(3.7.109) \quad - \langle \{\ddot{Z}(0)\}, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \{\ddot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt + \\ + \int_0^T a(\{\dot{Z}(t)\}, \{V\}) \theta(t) dt + \int_0^T \left(\langle \{B(0)\{Z(t)\}\}, \{V\} \rangle + \left\langle \int_0^t \{\dot{B}(t-\tau)\{Z(\tau)\}\} d\tau, \{V\} \right\rangle \right) \theta(t) dt =$$

$$= \int_0^T \langle \{\dot{\mathcal{L}}(t)\}, \{V\} \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \{V\} \in \mathbf{V}_0.$$

Ținând cont că

$$(3.7.110) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t \{B(t-\tau)\{Z(\tau)\}\} d\tau = \{B(0)\{z(t)\}\} + \\ + \langle \int_0^t \{\dot{B}(t-\tau)\{Z(\tau)\}\} d\tau, \{V\} \rangle,$$

și integrând prin părți în ecuația (3.7.110) vom avea

$$(3.7.111) \quad - \langle \{\ddot{Z}(0)\}, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \{\ddot{Z}(t)\}, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt - \\ - a(\{Z(0)\}, \{V\}) - \int_0^T a(\{Z(t)\}, \{V\}) \dot{\theta}(t) dt + \\ + \int_0^T \langle \int_0^t \{B(t-\tau)\{Z(\tau)\}\} d\tau, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt = \\ = - \langle \{\mathcal{L}(0)\}, \{V\} \rangle - \int_0^T \langle \{\mathcal{L}(t)\}, \{V\} \rangle \dot{\theta}(t) dt, \quad \forall \{V\} \in \mathbf{V}_0.$$

Ținând cont că $\{Z\}$ este soluție a ecuației (3.7.77), obținem

$$(3.7.112) \quad \langle \{\ddot{Z}(0)\}, \{V\} \rangle + a(\{Z^0\}, \{V\}) = \langle \{\mathcal{L}(0)\}, \{V\} \rangle,$$

$\forall \{V\} \in \mathbf{V}_0$, iar în urma utilizării notației $\{Z^2\} = \{\ddot{Z}(0)\}$, relația (3.7.111) devine (3.7.34). ■

3.8. Principii de minim în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată.

3.8.1. Stadiul actual al problemei.

Senchenkov [1979] a stabilit un principiu de minim în dinamica termostaticității liniar cuplate utilizând transformata Laplace.

Ciarleta și Pasquino [1980] au studiat condițiile care garantează principiul de minim în dinamica materialelor vâscoelastice descrise de o lege constitutivă de tip Boltzmann.

Li și Zhang [1988] pentru trei principii variaționale de minim propuse în teoria dinamică liniară a vâscoelasticității stabilesc corespondența cu principiul de minim din dinamica elasticității liniare. Se formulează și se demonstrează teorema de corespondență.

Plecând de la o serie de rezultate obținute de Fabrizio, Giorgi și Morro [1989], în dinamica vâscoelasticității, în acest paragraf voi prezenta un procedeu prin care un principiu de extremum este formulat pentru problema valorii inițial-frontieră în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată cu condiții pe frontieră mixte. În acest scop este construită o familie de funcționale în domeniul transformatei Laplace, pentru care este prezentată o teoremă de minim și pas cu pas construind o funcțională biliniară cu o funcție pondere de timp este arătat că soluția problemei mixte dă un minim pentru această funcțională.

3.8.2. Problema mixtă a plăcii subțiri vâscoelastic laminată.

Fie \mathcal{K} mulțimea câmpurilor deplasare cinematic admisibile. Vom numi problemă \mathcal{P}_M , problema mixtă (3.3.15), (3.3.17)-(3.3.20).

Definiția 3.8.1. *O soluție a problemei \mathcal{P}_M va fi un câmp $\{U\} \in \mathcal{K}$, astfel încât satisface ecuațiile*

$$(3.8.1) \quad ([D]^T - [S]^T)(([C^0] + [\dot{C}]^*)([D] + [S])\{U\}) + \{P\} = [R]\{\ddot{U}\} \quad \text{pe } \Omega_0 \times [0, \infty),$$

condiția pe frontieră

$$(3.8.2) \quad [L_\sigma][D_n]([C] + [\dot{C}])^*([D] + [S])\{U\} = [I_\sigma]\{\bar{P}_n\} \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times [0, \infty),$$

și condițiile inițiale (3.3.19).

3.8.3. Principiul de staționaritate și principiul de minim în transformata Laplace.

Fie \mathcal{U}_L mulțimea proceselor deplasărilor admisibile $\{U\} \in \mathcal{U}$ care posedă transformata Laplace $\{\tilde{U}\}$ în raport cu timpul t în semiplanul complex $\mathbf{C}_d = \{s \in \mathbf{C} : \text{Re } s > 0\}$, unde \mathbf{C} este mulțimea numerelor complexe. Presupunem că $\{P\}$, $\{\bar{U}\}$ și $\{\bar{P}_n\}$ posedă transformată Laplace în \mathbf{C}_d . Este evident că $\{\tilde{U}\}$ satisface condiția

$$(3.8.3) \quad [I_u]\{\tilde{U}(x, y, s)\} = [I_u]\{\tilde{\bar{U}}(x, y, s)\}, \quad (x, y, s) \in \partial\Omega_{0u} \times \mathbf{C}_d.$$

Legat de problema \mathcal{P}_M , aplicând operatorul transformată Laplace ecuației de mișcare (3.8.1) și ținând cont de condițiile inițiale (3.3.19) rezultă

$$(3.8.4) \quad L_s(\{\tilde{U}\}) := s^2[R]\{\tilde{U}\} - ([D]^T - [S]^T)(([C^0] + [\dot{C}(s)])([D] + [S])\{\tilde{U}\}) = \{\tilde{f}\}, \quad \text{pe } \Omega_0 \times \mathbf{C}_d,$$

unde

$$(3.8.5) \quad \{\tilde{f}\} = \{\tilde{P}\} + [R](s\{U^0\} - \{V^0\}).$$

Corespondența problemei \mathcal{P}_M , în contextul transformatei Laplace și notată cu $\tilde{\mathcal{P}}_M$, este dată de ecuația

$$(3.8.6) \quad L_s(\{W\}) = \{\tilde{f}\}, \quad \text{pe } \Omega_0 \times \mathbf{C}_d$$

împreună cu condițiile pe frontieră (3.8.3) și

$$(3.8.7) \quad [I_\sigma][D_n]^T([C^0] + [\dot{C}(s)])([D] + [S])\{W\} = [I_\sigma]\{\tilde{P}_n\}, \quad \text{pe } \partial\Omega_{0\sigma} \times \mathbf{C}_d.$$

Este evident că, soluția $\{W^*(s)\}$ a problemei $\tilde{\mathcal{P}}_M$ este un punct de staționaritate al funcționalei

$$(3.8.8) \quad \mathcal{L}_s(\{W(s)\}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (s^2\{W(s)\}^T [R]\{W(s)\} + (([D] + [S])\{W(s)\})^T ([C^0] + [\dot{C}(s)])([D] + [S])\{W(s)\} - 2\{\tilde{f}(s)\}^T \{W(s)\}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} [I_\sigma]\{\tilde{P}_n(s)\}^T \{W(s)\} dl \quad \text{pe } \Omega_0 \times \mathbf{C}_d.$$

$$(3.8.9) \quad \Lambda_s(\{U\}) := \mathcal{L}_s(\{\tilde{U}(s)\})$$

funcționala (3.8.8) poate fi considerată ca o funcțională pe \mathcal{U}_L , parametrizată prin numărul complex s . Deci, o soluție $\{U^*\} \in \mathcal{U}_L$ a problemei \mathcal{P}_M dă un punct de staționaritate al lui Λ_s pentru orice $s \in \mathbf{C}_d$.

Dacă matricea simetrică $[C(t)]$ satisface condiția

$$(3.8.10) \quad [C^0] + [\tilde{C}'(s)] > 0, \quad s > 0,$$

atunci matricea $[C^0] + [\tilde{C}'(s)]$ este pozitiv definită.

Teorema următoare arată că punctul de staționaritate este un punct de minim.

Teorema 3.8.1. *Fie $[C]$ satisfăcând inegalitatea (3.8.10). Dacă o funcție $\{U^*\} \in \mathcal{U}_L$ este o soluție a problemei \mathcal{P}_M , atunci pentru orice număr real $\xi > 0$, Λ_ξ are un minim strict în $\{U^*\}$ pe mulțimea \mathcal{U}_L .*

Demonstrație. Fie $\{U^*\} \in \mathcal{U}_L$ o soluție a problemei \mathcal{P}_M . Atunci, pentru orice $Re \ s > 0$, $\{\tilde{U}^*(s)\}$ satisface ecuațiile (3.8.3), (3.8.6) (3.8.7a) și (3.8.7b) și este un punct de staționaritate pentru funcționala (3.8.8). Mai mult, considerând $\{U^*\} + \alpha\{h\} \in \mathcal{U}_L$ cu $\alpha \in I_\alpha \subset \mathbf{R}$, pentru $s \in \mathbf{C}_d$ avem

$$(3.8.11) \quad d^2 \mathcal{L}_s(\{\tilde{U}^*(s)\}|\{\tilde{h}(s)\}) = \int_{\Omega_0} (s^2 \{\tilde{h}(s)\}^T [R] \{\tilde{h}(s)\} +$$

$$+ (([D] + [S])\{\tilde{h}(s)\})^T ([C^0] + [\tilde{C}'(s)]) ([D] + [S])\{\tilde{h}(s)\}) d\Omega,$$

unde $d^2 \mathcal{L}_s(\{\tilde{U}^*(s)\}|\{\tilde{h}(s)\})$ reprezintă derivata Gâteaux de ordinul al doilea.

Fie s real. Atunci $\{\tilde{h}(s)\}$ și $([D] + [S])\{\tilde{h}(s)\}$ sunt vectori ale căror elemente au valori reale ca și \mathcal{L}_ξ . Pentru orice $\xi > 0$ și pentru orice $\{\tilde{h}\}$ admisibil nemul, avem

$$(3.8.12) \quad d^2 \mathcal{L}_\xi(\{\tilde{U}^*(\xi)\}|\{\tilde{h}(\xi)\}) > 0$$

în baza faptului că $[R]$ și $[C^0] + [\tilde{C}'(s)]$ sunt matrice pozitiv definite conform lui (3.7.8) și (3.7.10). Se poate observa că anularea lui $\{\tilde{h}\}$ pe $(0, \infty)$, implică

$\{h\} \equiv 0$. Prin intermediul lui (3.8.9), urmează $d^2\Lambda_\xi(\{U^*\}|\{h\}) > 0$ pentru orice $\{h\}$ admisibil nenul și $\xi > 0$. ■

Teorema 2.8.2. *Fie $[C]$ satisfăcând [3.8.10] și $\Pi = \{\{U\} \in \mathcal{U}_L | \{\tilde{U}(s)\} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0), \forall s \in \mathbf{C}_d\}$, cu $\mathbf{H}^1(\Omega_0) = (H^1(\Omega_0))^5$. Dacă pentru orice $\xi \in (0, \infty)$, funcționala Λ_ξ are un minim strict în $\{U^*\} \in \Pi$, atunci $\{U^*\}$ este soluție unică a problemei \mathcal{P}_M .*

Demonstrație. Presupunem că $\{\tilde{U}^*(\xi)\}$ este un minim strict al lui Λ_ξ . Atunci, ținând cont de (3.8.9), pentru orice $\xi \in (0, \infty)$ trebuie să fie îndeplinite condițiile:

$$(3.8.13) \quad d\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{U}^*(\xi)\}|\{\tilde{h}(\xi)\}) = 0$$

și

$$(3.8.14) \quad d^2\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{U}^*(\xi)\}|\{\tilde{h}(\xi)\}) \geq 0.$$

Ținând cont de formula lui Green și de faptul că $\{\tilde{h}(s)\}|_{\partial\Omega_{0u}} = \{0\}$, avem

$$(3.8.15) \quad d\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{U}^*(\xi)\}|\{\tilde{h}(\xi)\}) = \int_{\Omega_0} \{\tilde{h}(\xi)\}^T (\xi^R [R] \{\tilde{U}^*(\xi)\} -$$

$$- ([D]^T - [S]^T) ([C^0] + [\dot{C}(s)]) (([D] + [S]) \{\tilde{U}^*(\xi)\}) - \{\tilde{f}(\xi)\}) d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_{0v}} [L_n] \{\tilde{h}(\xi)\}^T ([D_n]^T ([C^0] + [\dot{C}(s)]) (([D] + [S]) \{\tilde{U}^*(\xi)\}) - \{\tilde{P}_n(\xi)\}) dl$$

pentru orice $\{h\}$ admisibil. Pe de altă parte

$$(3.8.16) \quad d^2\mathcal{L}_\xi(\{\tilde{U}^*(\xi)\}|\{\tilde{h}(\xi)\}) = \int_{\Omega_0} (\xi^2 \{\tilde{h}(\xi)\}^T [R] \{\tilde{h}(\xi)\} +$$

$$+ (([D] + [S]) \{\tilde{h}(\xi)\})^T ([C^0] + [\dot{C}(s)]) (([D] + [S]) \{\tilde{h}(\xi)\})) d\Omega$$

pentru orice $\{h\}$ admisibil și nenul. Cum, condiția (3.8.13) are loc pentru orice $\xi > 0$, pe baza relației (3.8.15), funcția $\{\tilde{U}^*(\xi)\}$ satisface ecuațiile (3.8.6) și (3.8.7) în Ω_0 , adică este o soluție a problemei $\tilde{\mathcal{P}}_M$ pentru valorile reale ale lui s .

Mai mult, ea este o soluție unică a acestei probleme ca o consecință că matricile $[R]$ și $[C^0] + [\dot{C}(s)]$ sunt pozitiv definite.

Pe de altă parte în virtutea faptului că matricele $[R]$ și $[C^0] + [\tilde{C}(s)]$ sunt pozitiv definite, operatorul L_s este tare eliptic pentru orice $s \in \mathbf{C}_d$. Deci problema $\tilde{\mathcal{P}}_M$ are o soluție unică $\{W^*(s)\} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)$ care este analitică în s pe \mathbf{C}_d și egală cu $\{\tilde{U}^*(s)\}$ pe semidreapta reală pozitivă (conform lui Lions [1955]). Urmează că $\{W^*(s)\}$ și $\{\tilde{U}^*(s)\}$ vor coincide pe întreg semiplanul complex \mathbf{C}_d .

Unicitatea transformatei lui Laplace, implică prin urmare că $\{U^*\}$ trebuie să fie soluție unică a problemei \mathcal{P}_M în Π . ■

3.8.4. Principii de minim via funcții pondere în domeniul timpului.

Vom considera spațiile

(3.8.17)

$$\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{V}) := \{ \{U\} \in \mathbf{L}_{loc}^2([0, \infty); \mathbf{V}) \mid \{\tilde{U}(s)\} \in \{\mathbf{V}\}, \forall s \in \mathbf{C}_d \},$$

(3.8.18)

$$\mathbf{H}_L^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0)) := \{ \{U\} \in \mathbf{H}_{loc}^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega)) \mid \{\tilde{U}(s)\} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall s \in \mathbf{C}_d \},$$

unde

\mathbf{V} - spațiu Hilbert convenabil ales; $\mathbf{L}^2(\Omega_0) := (L^2(\Omega_0))^5$;

$\mathbf{L}_{loc}^2([0, \infty); \mathbf{V}) := \{ \{U\} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{V} \mid \{U\} - \text{măsurabilă și } \{U\} \in \mathbf{L}^2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset [0, \infty) \}$;

$\mathbf{H}_{loc}^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0)) := \{ \{U\} : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_0) \mid \{U\} - \text{măsurabilă și } \{U\}, \{\dot{U}\} \in \mathbf{L}^2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset [0, \infty) \}$.

Fie funcția $\Gamma \in C^0([0, \infty))$ a cărei transformată Laplace reală este dată de

$$(3.8.19) \quad \gamma(t) = \int_0^\infty \Gamma(s)e^{-st} ds.$$

În termeni de γ putem defini forma biliniară $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ pe $\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))$ prin relația

(3.8.20)

$$\langle \{U\}, \{V\} \rangle_\gamma = \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t + \tau) \int_{\Omega_0} \{U(x, y, t)\}^T \{V(x, y, \tau)\} dt d\tau d\Omega,$$

cu $\{U\}$ și $\{V\}$ vectori de dimensiune 5.

Din definiția lui γ avem și

$$(3.3.21) \quad \langle \{U\}, \{V\} \rangle_\gamma = \int_0^\infty \Gamma(s) \int_{\Omega_0} \{\tilde{U}(x, y, s)\}^T \{\tilde{V}(x, y, s)\} ds d\Omega.$$

Este evident că această formă biliniară este bine definită pe \mathbf{L}_L^2 când $\Gamma \in C_0^\infty([0, \infty))$.

Putem acum să arătăm că problemei mixte \mathcal{P}_M , i se poate da o formulare variațională în termeni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$.

Considerăm funcționala

$$(3.8.22) \quad \begin{aligned} \Lambda_\gamma(\{U\}) := & \frac{1}{2} \langle \{\dot{U}\}, [R]\{\dot{U}\} \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle ([\mathcal{D}] + \\ & + [S])\{U\}, ([C^0] + [\dot{C}]^*)(([\mathcal{D}] + [S])\{U\}) \rangle_\gamma - \langle \{U\}, \{P\} \rangle_\gamma - \\ & - \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t + \tau) \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} [I_\sigma]\{U(t)\}^T \{\bar{P}_n(\tau)\} dt d\tau dl + \\ & + \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} (\{\dot{U}(t)\}^T [R] (\{U(0) - \{U^0\}) - \{U(t)\}^T [R] \{V^0\}) dt d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{U(0)\}^T [R] \{U(0)\} d\Omega, \end{aligned}$$

unde vectorii $\{P\}$ și $\{\bar{P}_n\}$ sunt presupuși că aparțin respectiv la spațiile $\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))$ și $\mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\partial\Omega_0))$.

Introducem deasemenea spațiile :

$$(3.8.23) \quad \hat{\mathcal{P}} := \{ \{U\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega_0) \cap \mathbf{H}_L^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))) : \{U\}|_{\partial\Omega_{0u}} = \{\bar{U}\} \},$$

$$(3.8.24) \quad \hat{\mathcal{P}}_0 := \{ \{h\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega_0) \cap \mathbf{H}_L^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega_0))) : \{h\}|_{\partial\Omega_{0u}} = \{0\} \},$$

unde $\mathbf{H}^1(\Omega_0) = (H^1(\Omega_0))^5$.

În aceste condiții principiul de minim poate fi formulat astfel:

Teorema 3.8.3. *Fie $[C]$ satisfăcând inegalitatea (3.8.10). Dacă $\{U^*\} \in \hat{\mathcal{P}}$ este o soluție a problemei \mathcal{P}_M cu $\{P\} \in \mathbf{L}_L^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega))$ și $\{\bar{P}_n\} \in \mathbf{L}^2([0, \infty); \mathbf{L}^2(\partial\Omega))$; atunci pentru orice funcție $\Gamma \in C_0^\infty([0, \infty))$, funcționala $\Lambda_\gamma(\{U\})$ are un minim în $\{U^*\} \in \hat{\mathcal{P}}$.*

Demonstrație . Fie $\{U^*\} \in \hat{\mathcal{P}}$. Orice element $\{U\} \in \hat{\mathcal{P}}$ poate fi scris ca o sumă $\{U^*\} + \{h\}$, unde $\{h\} \in \hat{\mathcal{P}}_0$. Atunci, ținând cont de simetria lui Λ_γ avem :

$$(3.8.25) \quad \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \langle \{\dot{h}\}, [R]\{\dot{U}^*\} \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle \{\dot{h}\}, [R]\{\dot{h}\} \rangle_\gamma + \langle ([\mathcal{D}] + [S])\{h\}, ([C^0] + [\dot{C}]^*)(([\mathcal{D}] + [S])\{U^*\}) \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle ([\mathcal{D}] + [S])\{h\}, ([C^0] + [\dot{C}]^*)(([\mathcal{D}] + [S])\{h\}) \rangle_\gamma - \langle \{h\}, \{P\} \rangle - \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t + \tau) \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} [I_\sigma]\{h(t)\}^T \{\bar{P}_n(\tau)\} dt d\tau dl + \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} (\{h(0)\}^T [R](\{\dot{U}^*(t)\}) + \{\dot{h}(t)\} + \{\dot{h}(t)\}^T [R](\{U^*(0)\} - \{U^0\}) - \{h(t)\}^T [R]\{V^0\}) dt d\Omega + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{h(0)\}^T ([R]\{h(0)\} + 2[R]\{U^*(0)\}) d\Omega.$$

Întrucât $\{U^*\}$ este soluție a problemei \mathcal{P}_M , pe baza formulei lui Green și ținând cont de (3.8.20) și (3.8.21) se obține

$$(3.8.26) \quad \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \frac{1}{2} \langle \{\dot{h}\}, [R]\{\dot{h}\} \rangle_\gamma - \int_0^\infty \gamma(t) \int_{\Omega_0} (\{\dot{h}(t)\}^T [R]\{h(0)\} d\Omega + \frac{1}{2} \gamma(0) \int_{\Omega_0} \{h(0)\}^T [R]\{h(0)\} d\Omega + \frac{1}{2} \langle ([\mathcal{D}] + [S])\{h\}, ([C^0] + [\dot{C}]^*)(([\mathcal{D}] + [S])\{h\}) \rangle_\gamma,$$

care se mai poate scrie

$$(3.8.27) \quad \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\Omega_0} \Gamma(s) (s^2 \{\tilde{h}(s)\}^T [R]\{\tilde{h}(s)\} + (([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}(s)\})^T ([C^0] + [\tilde{C}(s)]) ([\mathcal{D}] + [S])\{\tilde{h}(s)\}) ds d\Omega.$$

Datorită faptului că $[R]$ și $[C^0] + [\tilde{C}(s)]$ sunt matrice pozitiv definite, din (3.8.27) rezultă

$$(3.8.28) \quad \Lambda_\gamma(\{U^*\} + \{h\}) - \Lambda_\gamma(\{U^*\}) \geq 0,$$

adică $\{U^*\}$ este minim pentru Λ_γ pe $\hat{\mathcal{P}}$ și demonstrația este completă. ■

3.9. Răspunsul dinamic al unei plăci vâscoelastice utilizând transformatele integrale "EC" și "ES".

3.9.1. Stadiul actual al problemei.

În vederea analizei tensiunilor vâscoelastice, Schapery [1962] a utilizat metoda cologației pentru a putea aplica transformata Laplace inversă. Cost și Dobrescu [2] au folosit aceeași metodă în aproximarea transformatei Laplace inverse și au dat o recomandare privind modul de alegere a punctelor de cologație.

Utilizând o versiune modificată a metodei lui Schapery, Novotný și Hanuška [1976] au realizat un studiu numeric privind răspunsul vâscoelastic al unui sistem multistrat.

În continuare se va arăta cum utilizarea transformatelor integrale "EC" și "ES" introduse de Chelu [1991], combinată cu metoda cologației, permite aflarea răspunsului dinamic aproximativ al unei plăci subțiri vâscoelastic izotropă și omogenă. Modul cum se poate obține răspunsul dinamic al unei bare vâscoelastice omogene drepte, respectiv curbe utilizând aceeași metodă a fost prezentat în lucrările lui Dobrescu și Chelu [1995a,c].

3.9.2. Transformatele integrale "EC" și "ES".

Vom nota cu \mathbf{R} mulțimea numerelor reale. Fie dată funcția $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$, integrabilă Lebesgue pe intervalul $(0,a)\subset\mathbf{R}$ și un număr complex $s=\sigma+i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbf{R}$), expresia

$$(3.9.1) \quad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t)),$$

după cum este bine cunoscut se numește integrală Laplace, iar funcția $\bar{f}(s)$ transformata Laplace a funcției $f(t)$.

Dacă notăm cu $\sigma = p$ și $\tau = -\omega$, atunci

$$(3.9.2) \quad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t} f(t) dt = \bar{f}_{EC}(p, \omega) + i \bar{f}_{ES}(p, \omega),$$

unde

$$(3.9.3) \quad \bar{f}_{EC}(p, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \cos \omega t dt = \mathcal{L}_{EC}(f(t))$$

și

$$(3.9.4) \quad \bar{f}_{ES}(p, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \sin \omega t dt = \mathcal{L}_{ES}(f(t)).$$

Expresiile (3.9.3) și (3.9.4) le vom numi respectiv integrale "EC" și "ES", iar $\bar{f}_{EC}(p, \omega)$ și $\bar{f}_{ES}(p, \omega)$ transformate "EC" și "ES".

Ținând cont că

$$(3.9.5) \quad \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} \cos \omega t dt = p \bar{f}_{EC}(p, \omega) + \omega \bar{f}_{ES}(p, \omega) - f(0)$$

și

$$(3.9.6) \quad \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} \sin \omega t dt = p \bar{f}_{ES}(p, \omega) - \omega \bar{f}_{EC}(p, \omega),$$

trecând la limită pentru $p \rightarrow 0$ și $\omega \rightarrow 0$ obținem respectiv:

$$(3.9.7) \quad f(\infty) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (p \bar{f}_{EC}(p, \omega)) + \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (\omega \bar{f}_{ES}(p, \omega))$$

și

$$(3.9.8) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (p \bar{f}_{ES}(p, \omega)) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (\omega \bar{f}_{EC}(p, \omega)).$$

Pe de altă parte trecând la limită pentru $p \rightarrow \infty$ și $\omega \rightarrow \infty$ în relațiile (3.9.5) și (3.9.6), obținem respectiv

$$(3.9.9) \quad f(0) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty}} (p \bar{f}_{EC}(p, \omega)) + \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty}} (\omega \bar{f}_{ES}(p, \omega))$$

și

$$(3.9.10) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty}} (p \bar{f}_{ES}(p, \omega)) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty}} (\omega \bar{f}_{EC}(p, \omega)).$$

() proprietate importantă în cele ce urmează este următoarea:

Proprietatea 3.9.1. *Au loc relațiile:*

$$(3.9.11) \quad \mathcal{L}_{EC}(f * g) = \bar{f}_{EC}(p, \omega) \bar{g}_{EC}(p, \omega) - \bar{f}_{ES}(p, \omega) \bar{g}_{ES}(p, \omega),$$

$$(3.9.12) \quad \mathcal{L}_{ES}(f * g) = \bar{f}_{ES}(p, \omega) \bar{g}_{EC}(p, \omega) + \bar{f}_{EC}(p, \omega) \bar{g}_{ES}(p, \omega).$$

unde $*$ reprezintă produsul de convoluție.

Demonstrație. Rezultă imediat că

$$\mathcal{L}(f * g) = \bar{f}(p - i\omega) \bar{g}(p - i\omega) = (\bar{f}_{EC}(p, \omega) + i \bar{f}_{ES}(p, \omega)) \times$$

$$(3.9.13) \quad \times (\bar{f}_{EC}(p, \omega) + i \bar{f}_{ES}(p, \omega)) = (\bar{f}_{EC}(p, \omega) \bar{g}_{EC}(p, \omega) - \bar{f}_{ES}(p, \omega) \bar{g}_{ES}(p, \omega)) + \\ + i(\bar{f}_{ES}(p, \omega) \bar{g}_{EC}(p, \omega) + \bar{f}_{EC}(p, \omega) \bar{g}_{ES}(p, \omega)).$$

Ținând cont că

$$(3.9.14) \quad \mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}_{EC}(f * g) + i \mathcal{L}_{ES}(f * g),$$

din relațiile (3.9.13) și (3.9.14) rezultă (3.9.11) și (3.9.12).

Dacă definim operatorul $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{EC} & \mathcal{L}_{ES} \end{bmatrix}^T$, atunci exprimările (3.9.11) și (3.9.12) se pot scrie condensat astfel:

$$(3.9.15) \quad \mathcal{L}(f * g) = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}_{EC} \\ \mathcal{L}_{ES} \end{Bmatrix} (f * g) = \begin{bmatrix} \bar{f}_{EC}(p, \omega) & -\bar{f}_{ES}(p, \omega) \\ \bar{f}_{ES}(p, \omega) & \bar{f}_{EC}(p, \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{g}_{EC}(p, \omega) \\ \bar{g}_{ES}(p, \omega) \end{Bmatrix}.$$

3.9.3. Ecuațiile de mișcare.

Vom examina vibrațiile transversale ale unei plăci subțiri plane dreptunghiulare de dimensiuni a, b și grosime h , corespunzător cazurilor

1⁰). simplu rezemată pe margini;

2⁰). simplu rezemată pe marginile opuse de lățime b și încastrată pe celelalte două, care este confecționată dintr-un material liniar vâscoelastic omogen și izotrop. Acest caz a fost considerat într-un alt context de Dobre, Chelu și Moțica [1994] prin utilizarea metodei medierii.

Ecuațiile de mișcare în deplasări se exprimă matriceal prin ecuația

$$(3.9.16) \quad [L]\{U\} + \{q\} = [R]\{\ddot{U}\},$$

unde: $\{U\} = [u^0 \ v^0 \ w \ \psi_x \ \psi_y]^T$, $\{q\} = [0 \ 0 \ q \ 0 \ 0]^T$ (q -încărcarea transversală); $[R]$ este o matrice pătrată de dimensiuni 5×5 definită astfel

$$(3.9.17) \quad [R] = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix},$$

cu

$$(3.9.18) \quad (\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho dz = \left(\rho h, \frac{\rho h^3}{12} \right)$$

și ρ densitatea de masă; $[L]$ este o matrice pătrată de dimensiuni 5×5 cu elementele L_{ij} operatori integro-diferențiali de forma

$$(3.9.19) \quad \begin{aligned} L_{11} &= A_{11}(\)_{,xx} + A_{66}(\)_{,yy}, \\ L_{12} &= L_{21} = (A_{12} + A_{26})(\)_{,xy}, \\ L_{22} &= A_{66}(\)_{,xx} + A_{22}(\)_{,yy}, \\ L_{33} &= \tilde{k}[A_{55}(\)_{,xx} + A_{44}(\)_{,yy}], \\ L_{34} &= -L_{43} = \tilde{k}A_{55}(\)_{,x}, \\ L_{35} &= -L_{53} = \tilde{k}A_{44}(\)_{,y}, \\ L_{44} &= D_{11}(\)_{,xx} + D_{66}(\)_{,yy} - \tilde{k}A_{55}(\), \\ L_{55} &= D_{66}(\)_{,xx} + D_{22}(\)_{,yy} - \tilde{k}A_{44}(\), \\ L_{13} &= L_{31} = L_{14} = L_{41} = L_{15} = L_{51} = L_{23} = \\ L_{32} &= L_{24} = L_{42} = L_{25} = L_{52} = L_{45} = L_{54} = 0 \end{aligned}$$

cu $\tilde{k} = \pi^2/12$ - factor de corecție și virgula urmată de indici reprezentând derivata parțială în raport cu acei indici. În relațiile (3.9.19), operatorii A_{ij} și D_{ij} sunt definiți astfel:

$$A_{ij} = A_{ij}^0 + \tilde{A}_{ij} \quad \text{cu} \quad A_{ij}^0 = h(\lambda_0 \Delta_{ij} + 2\mu_0 \delta_{ij}) \quad \text{și}$$

$$(3.9.20) \quad \tilde{A}_{ij}^0(\xi(t)) = h(\lambda_0 \Delta_{ij} + 2\mu_0 \delta_{ij}) \int_0^t \Gamma(t - \tau) \xi(\tau) d\tau$$

$$(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$D_{ij} = D_{ij}^0 + \tilde{D}_{ij} \text{ cu } D_{ij}^0 = (h^3/12)(\lambda_0\Delta_{ij} + 2\mu_0\delta_{ij}) \text{ și}$$

$$(3.9.21) \quad \tilde{D}_{ij}^0(\xi(t)) = (h^3/12)(\lambda_0\Delta_{ij} + 2\mu_0\delta_{ij}) \int_0^t \Gamma(t - \tau)\xi(\tau)d\tau$$

$$(i, j = 1, 2, 6)$$

unde: λ_0 și μ_0 sunt constante de material; Γ este funcția de relaxare, δ_{ij} este simbolul lui Kronecker și Δ_{ij} care poate lua valorile 1 dacă simultan indicii i și j sunt mai mici sau egali cu 2, respectiv 0 dacă cel puțin unul dintre indicii i și j este mai mare strict decât 2.

Condițiile la limită pentru cele două cazuri considerate sunt:

1⁰). placă simplu rezemată pe contur

$$(3.9.22.a) \quad v^0 = w = \psi_y = u_{,x}^0 = \psi_{x,x} = 0 \text{ dacă } x = 0, a \text{ (} 0 \leq y \leq b \text{)}$$

$$(3.9.22.a) \quad u^0 = w = \psi_x = v_{,y}^0 = \psi_{y,y} = 0 \text{ dacă } y = 0, b \text{ (} 0 \leq x \leq a \text{)}$$

2⁰). placă simplu rezemată + încastrată pe contur

$$(3.9.23 a) \quad v^0 = w = \psi_y = u_{,x}^0 = \psi_{x,x} = 0 \text{ dacă } x = 0, a \text{ (} 0 \leq y \leq b \text{)}$$

$$(3.9.23 b) \quad u^0 = v^0 = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ dacă } y = 0, b \text{ (} 0 \leq x \leq a \text{)}$$

Condițiile inițiale se consideră de forma:

$$(3.9.24) \quad \{U^0(x, y, 0)\} = \{U^0(x, y)\}; \quad \{\dot{U}(x, y, 0)\} = \{V(x, y)\},$$

unde $\{U^0\} = [u_0^0 \ v_0^0 \ w^0 \ \psi_x^0 \ \psi_y^0]^T$ și $\{V^0\} = [\dot{u}_0^0 \ \dot{v}_0^0 \ \dot{w}^0 \ \dot{\psi}_x^0 \ \dot{\psi}_y^0]^T$ sunt vectori dați având elementele depinzând de coordonatele spațiale x și y .

Soluția ecuației (3.9.16) se caută sub formă de serie:

$$(3.9.25) \quad \{U(x, y, t)\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [X(x, y)]_{mn} \{T(t)\}_{mn},$$

unde

(3.9.26)

$$[X(x, y)] = \begin{bmatrix} X_{mn}^{(1)}(x, y) & X_{mn}^{(2)}(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{mn}^{(3)}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{mn}^{(1)}(x, y) & X_{mn}^{(2)}(x, y) \end{bmatrix}^T,$$

1⁰). placă simplu rezemată pe contur

$$(3.9.27.a) \quad X_{mn}^{(1)}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$(3.9.27.b) \quad X_{mn}^{(2)}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$(3.9.27.c) \quad X_{mn}^{(3)}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

2⁰). placă simplu rezemată + încastrată pe contur

$$(3.9.28.a) \quad X_{mn}^{(1)}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$(3.9.28.b) \quad X_{mn}^{(2)}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$(3.9.28.c) \quad X_{mn}^{(3)}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$(3.9.29) \quad \{T(t)\} = [T_{mn}^{(1)}(t) \ T_{mn}^{(2)}(t) \ T_{mn}^{(3)}(t)]^T.$$

Substituind soluția (3.9.25) în ecuația de mișcare (3.9.16), luând în considerare relațiile (3.9.17), (3.9.19), (3.9.26), (3.9.27) (respectiv (3.9.28)) și (3.9.29), multiplicând la stânga cu $[X(x, y)]_{mn}^T$ și apoi integrând pe domeniul $[0, a] \times [0, b]$ în raport cu x și y , obținem următorul sistem de ecuații de mișcare scris sub formă matriceală:

(3.9.30)

$$[\bar{R}]\{\ddot{T}(t)\}_{mn} + [C]_{mn}\{T(t)\}_{mn} = \{Q(t)\}_{mn} + \lambda[C]_{mn} \int_0^t \Gamma(t - \tau)\{T(\tau)\}_{mn} d\tau,$$

unde

$$(3.9.31) \quad [\bar{R}] = \begin{Bmatrix} 2\bar{\rho}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{\rho}_2 \end{Bmatrix};$$

iar cu $[C]_{mn}$ s-a notat matricea de dimensiuni 3×3 având elementele

$$(3.9.32) \quad C_{11}^{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 (A_{11}^0 + A_{66}^0) + \left(\frac{n}{b} \right)^2 (A_{22}^0 + A_{66}^0) \right],$$

$$C_{22}^{mn} = \tilde{k} \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 A_{55}^0 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 A_{44}^0 \right],$$

$$C_{33}^{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 (D_{11}^0 + D_{66}^0) + \left(\frac{n}{b} \right)^2 (D_{22}^0 + D_{66}^0) \right] + \tilde{k} (A_{11}^0 + A_{55}^0),$$

$$C_{12}^{mn} = C_{21}^{mn} = C_{13}^{mn} = C_{31}^{mn} = 0,$$

$$C_{23}^{mn} = C_{32}^{mn} = \tilde{k} \pi \left(\frac{m}{a} \right) A_{55}^0,$$

$$\{Q(t)\}_{mn} = [0 \ Q_{mn}(t) \ 0]^T$$

cu

$$(3.9.33) \quad Q_{mn}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

și λ un parametru mic dacă presupunem o vâscozitate mică corespunzând la $0 < \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau < 1$.

Condițiile inițiale (3.9.24) devin:

$$(3.9.34.a) \quad \{T(0)\}_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^t \int_0^t [X(x, y)]_{mn}^T \{U(x, y, 0)\} dx dy,$$

$$(3.9.34.b) \quad \{\dot{T}(0)\}_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^t \int_0^t [X(x, y)]_{mn}^T \{\dot{U}(x, y, 0)\} dx dy.$$

3.9.4. Utilizarea transformatelor integrale "EC" și "ES" pentru aflarea răspunsului dinamic al plăcii.

Vom prezenta aici o metodă de soluționare numerică a problemei utilizând transformata integrală $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{EC} & \mathcal{L}_{ES} \end{bmatrix}^T$.

Pentru a nu îngreuna scrierea indicială ne vom referi numai la componenta mn. Astfel, pentru $\{T(t)\}_{mn}$ folosim aproximarea

$$\{T(t)\}_{mn} = \{T(\infty)\}_{mn} + \sum_{k=1}^{M_{mn}} e^{-\alpha_k t} (\{C\}_{2k-1} \cos k\omega t +$$

$$(3.9.35) \quad + \{C\}_{2k} \sin k\omega t) + \{C\}_{2M_{mn}+1} f_{2M_{mn}+1}(t),$$

unde: $\{C\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2M_{mn} + 1$) sunt constante necunoscute; α_k ($k = 1, 2, \dots, 2M_{mn} + 1$) și ω sunt parametri specificați ai aproximației; $f_{2M_{mn}+1}(t)$ este o funcție aleasă convenabil astfel încât

$$(3.9.36) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_{2M_{mn}+1}(t) = 0.$$

Constantele $\{C\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2M_{mn} + 1$) se determină din condiția ca eroarea medie pătratică între $\{T(t)\}_{mn}$ și aproximația (3.9.35) să fie minimă, ceea ce implică relațiile:

$$(3.9.37) \quad \frac{\partial}{\partial \{C\}_{2k-1}} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{r(t)\}_{mn}^T \{r(t)\}_{mn} dt \right) \quad (k = 1, 2, \dots, M_{mn})$$

și

$$(3.9.38) \quad \frac{\partial}{\partial \{C\}_{2k}} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{r(t)\}_{mn}^T \{r(t)\}_{mn} dt \right) \quad (k = 1, 2, \dots, M_{mn}),$$

unde

$$\{r(t)\}_{mn} = \{T(t)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn} - \sum_{k=1}^{M_{mn}} e^{-\alpha_k t} [\{C\}_{2k-1} \cos(k\omega t) +$$

$$(3.9.39) \quad + \{C\}_{2k} \sin(k\omega t)] - \{C\}_{2M_{mn}+1} f_{2M_{mn}+1}(t)$$

este rezidul și $\{0\} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times M_{mn}}^T$.

Din ecuațiile (3.9.39) și (3.9.38) urmează, respectiv

$$\int_0^{\infty} [\{T(t)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn} - \{C\}_{2M_{mn}+1} f_{2M_{mn}+1}(t)] e^{\alpha_j t} \cos(j\omega t) dt =$$

$$(3.9.40) = \sum_{k=1}^{M_{mn}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_j + \alpha_k)t} \cos(j\omega t) [\{C\}_{2k-1} \cos(k\omega t) + \{C\}_{2k} \sin(k\omega t)] dt$$

$$(j = 1, 2, \dots, M_{mn})$$

și

$$\int_0^{\infty} [\{T(t)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn} - \{C\}_{2M_{mn}+1} f_{2M_{mn}+1}(t)] e^{\alpha_j t} \sin(j\omega t) dt =$$

$$(3.9.41) = \sum_{k=1}^{M_{mn}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha_j + \alpha_k)t} \sin(j\omega t) [\{C\}_{2k-1} \cos(k\omega t) + \{C\}_{2k} \sin(k\omega t)] dt$$

$$(j = 1, 2, \dots, M_{mn}).$$

Ecuațiile (3.9.40) și (3.9.41) se mai pot exprima respectiv prin

$$\{\bar{T}_{EC}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn} \bar{1}_{EC}(\alpha_j, j\omega) - \{C\}_{2M_{mn}+1} \bar{f}_{EC}^{2M_{mn}+1}(\alpha_j, j\omega) =$$

$$(3.9.42) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M_{mn}} [\{C\}_{2k-1} (\bar{1}_{EC}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(j+k)) + \bar{1}_{EC}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(k-j))) +$$

$$+ \{C\}_{2k} (\bar{1}_{ES}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(j+k)) + \bar{1}_{ES}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(k-j)))] \quad (j = 1, 2, \dots, M_{mn})$$

și

$$\{\bar{T}_{ES}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn} \bar{1}_{ES}(\alpha_j, j\omega) - \{C\}_{2M_{mn}+1} \bar{f}_{ES}^{2M_{mn}+1}(\alpha_j, j\omega) =$$

$$(3.9.43) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M_{mn}} [\{C\}_{2k-1} (\bar{1}_{ES}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(j+k)) + \bar{1}_{ES}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(j-k))) +$$

$$+ \{C\}_{2k} (\bar{1}_{EC}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(k-j)) - \bar{1}_{EC}(\alpha_j + \alpha_k, \omega(j+k)))] \quad (j = 1, 2, \dots, M_{mn}),$$

unde prin $\bar{1}_{EC}$ și $\bar{1}_{ES}$ s-au notat transformatele integrale "EC" și "ES" ale funcției $f(t)=1$.

Ținând cont că

$$(3.9.44) \quad \bar{1}_{EC}(p, \omega) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad \bar{1}_{ES}(p, \omega) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

ecuațiile (3.9.42) și (3.9.43) devin respectiv

$$(3.9.45) \quad \sum_{k=1}^{M_{mn}} (a_{2j-1,2k-1} \{C\}_{2k-1} + a_{2j-1,2k} \{C\}_{2k}) + a_{2j-1,2M_{mn}+1} \{C\}_{2M_{mn}+1} = \\ = \{b\}_{2j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, M_{mn}),$$

$$(3.9.46) \quad \sum_{k=1}^{M_{mn}} (a_{2j,2k-1} \{C\}_{2k-1} + a_{2j,2k} \{C\}_{2k}) + a_{2j,2M_{mn}+1} \{C\}_{2M_{mn}+1} = \\ = \{b\}_{2j} \quad (j = 1, 2, \dots, M_{mn}),$$

unde

$$(3.9.47.a) \quad a_{2j-1,2k-1} = \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_k)(u_{jk} + v_{jk}),$$

$$(3.9.47.b) \quad a_{2j-1,2k} = \frac{\omega}{2}[(j+k)u_{jk} - (j-k)v_{jk}],$$

$$(3.9.47.c) \quad a_{2j,2k-1} = \frac{\omega}{2}[(j+k)u_{jk} + (j-k)v_{jk}],$$

$$(3.9.47.d) \quad a_{2j,2k} = \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_k)(v_{jk} - u_{jk}),$$

$$(3.9.47.e) \quad a_{2j-1,2M_{mn}+1} = \bar{f}_{EC}^{2M_{mn}+1}(\alpha_j, j\omega),$$

$$(3.9.47.f) \quad a_{2j,2M_{mn}+1} = \bar{f}_{ES}^{2M_{mn}+1}(\alpha_j, j\omega),$$

$$(3.9.47.g) \quad u_{jk} = \frac{1}{(\alpha_j + \alpha_k)^2 + \omega^2(j+k)^2},$$

$$(3.9.47.l) \quad v_{jk} = \frac{1}{(\alpha_j + \alpha_k)^2 + \omega^2(j-k)^2},$$

$$(3.9.47.i) \quad \{b\}_{2j-1} = \{\bar{T}_{EC}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn} - d_{2j-1}\{T(\infty)\}_{mn},$$

$$(3.9.47.j) \quad \{b\}_{2j} = \{\bar{T}_{ES}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn} - d_{2j}\{T(\infty)\}_{mn},$$

$$(3.9.47.k) \quad d_{2j-1} = \frac{\alpha_j}{\alpha_j^2 + (j\omega)^2}, \quad d_{2j} = \frac{j\omega}{\alpha_j^2 + (j\omega)^2},$$

$$(3.9.47.l) \quad \{T(\infty)\} = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} [p\{\bar{T}_{EC}(p, \omega)\}_n + \omega\{\bar{T}_{ES}(p, \omega)\}].$$

Considerând $t=0$ în (3.9.35), obținem:

$$(3.9.48) \quad \sum_{k=1}^{M_{mn}} (a_{2M_{mn}+1, 2k-1}\{C\}_{2k-1} + a_{2M_{mn}+1, 2k}\{C\}_{2k}) + a_{2M_{mn}+1, 2M_{mn}+1}\{C\}_{2M_{mn}+1} = \{b\}_{2M_{mn}+1},$$

unde:

$$(3.9.49.a) \quad a_{2M_{mn}+1, 2k-1} = 1, \quad a_{2M_{mn}+1, 2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M_{mn});$$

$$(3.9.49.b) \quad a_{2M_{mn}+1, 2k-1} = f_{2M_{mn}+1}(0); \quad \{b\}_{2M_{mn}+1} = \{T(0)\}_{mn} - \{T(\infty)\}_{mn}.$$

Introducând notația

$$(3.9.50) \quad [A]_{ij} = a_{ij}[I],$$

cu $[I]$ matricea unitate de ordinul 3×3 , sistemul format din ecuațiile (3.9.45), (3.9.46) și (3.9.48) se mai poate scrie sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} [A]_{11} & [A]_{12} & [A]_{1, 2M_{mn}+1} \\ [A]_{21} & [A]_{22} & [A]_{2, 2M_{mn}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [A]_{2M_{mn}+1, 1} & [A]_{2M_{mn}+1, 2} & [A]_{2M_{mn}+1, 2M_{mn}+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{C\}_1 \\ \{C\}_2 \\ \vdots \\ \{C\}_{2M_{mn}+1} \end{Bmatrix} =$$

$$(3.9.51) \quad = \begin{Bmatrix} \{b\}_1 \\ \{b\}_2 \\ \vdots \\ \{b\}_{2M_{mn}+1} \end{Bmatrix},$$

de unde se determină vectorii $\{C\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2M_{mn} + 1$).

Acum, vom arăta cum se obțin $\{\bar{T}_{EC}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn}$, $\{\bar{T}_{ES}(\alpha_j, j\omega)\}_{mn}$ ($j = 1, 2, \dots, M_{mn}$) și $\{T(\infty)\}_{mn}$, care intervin în expresiile termenilor liberi $\{b\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2M_{mn} + 1$).

Ecuția (3.9.30) se mai poate scrie:

$$(3.9.52) \quad [R]\{\ddot{T}\}_{mn} + [C]_{mn}(1 - \lambda\Gamma^*)\{T\}_{mn} = \{Q\}_{mn},$$

având condițiile inițiale date de relațiile (3.9.34.a,b).

Există următoarele relații evidente:

$$(3.9.53) \quad \mathcal{L}(\{\ddot{T}(t)\}_{mn}) = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}_{EC} \\ \mathcal{L}_{ES} \end{Bmatrix} (\{\ddot{T}(t)\}_{mn}) = \begin{bmatrix} (p^2 - \omega^2)[I] & 2p\omega[I] \\ -2p\omega[I] & (p^2 - \omega^2)[I] \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} \{\bar{T}_{EC}(p, \omega)\}_{mn} \\ \{\bar{T}_{ES}(p, \omega)\}_{mn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [I] \\ [0] \end{bmatrix} \{\dot{T}(0)\}_{mn} - \begin{bmatrix} p[I] \\ -\omega[I] \end{bmatrix} \{T(0)\}_{mn},$$

$$(3.9.54) \quad \mathcal{L}((\Gamma^* \{T\}_{mn})(t)) = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{EC}(p, \omega)[I] & -\bar{\Gamma}_{ES}(p, \omega)[I] \\ \bar{\Gamma}_{ES}(p, \omega)[I] & \bar{\Gamma}_{EC}(p, \omega)[I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{T}_{EC}(p, \omega)\}_{mn} \\ \{\bar{T}_{ES}(p, \omega)\}_{mn} \end{Bmatrix}.$$

Aplicând operatorul $\mathcal{L} = [\mathcal{L}_{EC} \ \mathcal{L}_{ES}]^T$ ecuației (3.9.52), pe baza relațiilor (3.9.53) și (3.9.54), obținem

$$(3.9.55) \quad \begin{Bmatrix} [\beta(p, \omega)]_{mn} & -[\gamma(p, \omega)]_{mn} \\ [\gamma(p, \omega)]_{mn} & [\beta(p, \omega)]_{mn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{T}_{EC}(p, \omega)\}_{mn} \\ \{\bar{T}_{ES}(p, \omega)\}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{g}_{EC}(p, \omega)\}_{mn} \\ \{\bar{g}_{ES}(p, \omega)\}_{mn} \end{Bmatrix},$$

unde

$$(3.9.56.a) \quad [\beta(p, \omega)]_{mn} = (p^2 - \omega^2)[\bar{R}] + (1 - \lambda\bar{\Gamma}_{EC}(p, \omega))[C]_{mn},$$

$$(3.9.56.b) \quad [\gamma(p, \omega)]_{mn} = -2p\omega[\bar{R}] - \bar{\Gamma}_{ES}(p, \omega)[C]_{mn},$$

$$(3.9.56.c) \quad \left\{ \bar{g}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} = \left\{ \bar{Q}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} + [\bar{R}] (\{T(0)\}_{mn} + p\{T(0)\}_{mn}),$$

$$(3.9.56.d) \quad \left\{ \bar{g}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} = \left\{ \bar{Q}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} - \omega[C]_{mn} \{T(0)\}_{mn}.$$

Considerând pe rând înlocuirea $p \rightarrow \alpha_j$, $\omega \rightarrow j\omega$ pentru ($j = 1, 2, \dots, M_{mn}$) în ecuația matriceală (3.9.55), utilizând relațiile (3.9.56.a-d) și condițiile inițiale (3.9.34.a,b), prin rezolvare se obțin $\left\{ \bar{T}_{EC}(\alpha_j, j\omega) \right\}_{mn}$ și $\left\{ \bar{T}_{ES}(\alpha_j, j\omega) \right\}_{mn}$ ($j = 1, 2, \dots, M_{mn}$) care intervin în expresiile lui $\{b\}_{2j-1}$ și $\{b\}_{2j}$ ($j = 1, 2, \dots, M_{mn}$).

Pentru a determina $\{T(\infty)\}_{mn}$, este necesar să se evalueze limitele

$$(3.9.57.a) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left\{ \begin{array}{l} p \left\{ \bar{T}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} \\ p \left\{ \bar{T}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} \end{array} \right\} = \left(\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left[\begin{array}{cc} [\beta(p, \omega)]_{mn} & -[\gamma(p, \omega)]_{mn} \\ [\gamma(p, \omega)]_{mn} & [\beta(p, \omega)]_{mn} \end{array} \right]^{-1} \right) \times \\ \times \left(\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left\{ \begin{array}{l} p \left\{ \bar{g}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} \\ p \left\{ \bar{g}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} \end{array} \right\} \right),$$

$$(3.9.57.b) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left\{ \begin{array}{l} \omega \left\{ \bar{T}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} \\ \omega \left\{ \bar{T}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} \end{array} \right\} = \left(\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left[\begin{array}{cc} [\beta(p, \omega)]_{mn} & -[\gamma(p, \omega)]_{mn} \\ [\gamma(p, \omega)]_{mn} & [\beta(p, \omega)]_{mn} \end{array} \right]^{-1} \right) \times \\ \times \left(\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \left\{ \begin{array}{l} \omega \left\{ \bar{g}_{EC}(p, \omega) \right\}_{mn} \\ \omega \left\{ \bar{g}_{ES}(p, \omega) \right\}_{mn} \end{array} \right\} \right),$$

care se obțin multiplicând (3.9.55) respectiv prin p și ω , iar apoi trecând la limită pentru $p \rightarrow 0$ și $\omega \rightarrow 0$. Ținând cont de limitele (3.9.57.a,b) în relația (3.9.47.1), rezultă $\{T(\infty)\}_{mn}$.

PROPAGAREA UNDELOR ÎNTR-O PLACĂ SUBȚIRE VÂSCOELASTIC LAMINATĂ

4.1. Stadiul actual al problemei.

Majoritatea studiilor privind propagarea undelor în medii vâscoelastice a fost focalizată asupra cazului unidimensional, cazul tridimensional fiind considerat într-un număr mult mai mic de lucrări. Coleman și Gurtin [1965] au studiat propagarea frontului de undă într-un mediu vâscoelastic tridimensional obținând viteza de propagare a undelor de accelerație și de ordin superior. Varley [1965] a obținut o ecuație neliniară de transport pentru undele de accelerație în care frontul de undă are o formă arbitrară. Propagarea și atenuarea undelor în solide liniar vâscoelastice a fost studiată de Valanis [1965]. Herrera și Gurtin [1965] cu ajutorul unui principiu de corespondență au extins rezultatele asupra propagării undelor de accelerație în materiale elastice neomogene și anizotrope la materiale vâscoelastice neomogene și anizotrope, dar nu au stabilit și ecuația care descrie creșterea amplitudinei undei. Fisher și Gurtin [1965] au studiat apoi atât problema propagării undelor de șoc, cât și a undelor de accelerație și de ordin superior în materiale vâscoelastice, neomogene și anizotrope și au arătat că viteza de propagare este dată de aceeași ecuație pentru undele de șoc, de accelerație și cele de ordin superior. Hayes și Rivlin [1972] au studiat propagarea undelor plane sinusoidale de amplitudine mică într-un material viscoelastic neliniar izotrop supus la o stare pură de deformație omogenă. Undele sunt polarizate de-a lungul direcțiilor principale pentru deformația omogenă pură. De asemenea, Hayes și Rivlin [1974] au studiat propagarea undelor plane sinusoidale în materiale liniar vâscoelastice, izotrope și anizotrope. Ei au presupus că părțile imaginare ale modulilor complexi sunt mici comparativ cu părțile reale și că mărimea corespunzătoare a părții imaginare a vectorului slowness este mică comparativ cu partea reală. În plus, au arătat că în cazul anizotrop există trei unde - una longitudinală și două transversale - care se propagă, fiecare din ele fiind ușor polarizată eliptic, iar în cazul izotrop una din aceste unde este longitudinală, iar celelate două sunt unde transversale identice, de asemenea ușor polarizate eliptic. Ting [1976] utilizând tehnica dezvoltării în serie în jurul frontului de undă (tehnică

inițiată de Friedlander [1958] și aplicată pentru unde acustice liniare) a studiat propagarea discontinuităților de ordinul întâi, cât și a celor de ordin superior pentru un mediu vâscoelastic neliniar. El a obținut viteza normală a frontului de undă, viteza de rază și ecuațiile de transport pentru unde de orice ordin. De asemenea, el a arătat că ecuațiile de transport pentru undele de accelerație sunt neliniare, în schimb pentru undele de ordin superior aceste ecuații sunt liniare. McCarthy și Eringen [1969] au studiat propagarea undelor în materiale micropolare vâscoelastice, determinând vitezele de propagare a undelor de șoc. Ei au găsit că ele nu sunt influențate de funcțiile de microrelaxare ale materialului. De asemenea au fost deduse condițiile de propagare și ecuațiile de creștere a amplitudinii undei. Maugin [1974] a investigat propagarea undelor în materiale micropolare simple și liniar vâscoelastice.

Unde de accelerație în medii vâscoelastice de tip Maxwell–Zampera au fost analizate de Dunwoody și Dunwoody [1977].

Așa cum s-a arătat în §3.1, propagarea undelor în materiale compozite modelate ca medii vâscoelastice a fost studiată de: Bedford și Stern [1970]; Stern, Bedford și Yew [1971]; Baker [1971]; Chen și Gurtin [1973]; Christensen [1973]; Hlaváček [1979]; Ting și Mukunoki [1979]; Ting [1980], Madan [1993], etc.

Relațiile de dispersie și forma modurilor pentru unde în materiale compozite vâscoelastic laminate, a fost studiată prin metode diferență și metode variaționale de Mukherjee și Lee [1975,1978].

Chelu și Marinca [1984] au studiat propagarea undelor de șoc având formă arbitrară, într-un mediu liniar vâscoelastic neomogen și anizotrop în cazul tridimensional. S-au stabilit atât condiția de propagare, cât și ecuația care descrie intensitatea undei.

Caviglia și Morro [1995] au investigat propagarea undelor armonice în raport cu timpul în solide liniar vâscoelastice omogene și anizotrope. Propagarea undelor într-un solid transversal izotrop este examinată în detaliu.

Demiray și Eringen [1977] au studiat propagarea undelor în materiale compozite vâscoelastice armate cu straturi de fibre ortogonale.

Chelu [1985] a studiat propagarea undelor într-o placă vâscoelastic laminată. Propagarea undelor de accelerație într-un cilindru subțire vâscoelastic laminat a fost studiată de Chelu [1987] pentru cazul circular și de Chelu și Drăgănescu [1995] pentru cazul necircular.

În acest capitol noi prezentăm propagarea undelor de șoc și de accelerație având formă arbitrară, într-o placă subțire omogenă liniar vâscoelastic laminată. În fiecare caz am stabilit atât condiția de propagare, cât și ecuația de transport. Utilizând tehnica datorată lui Braun [1974] am stabilit apoi ecuația de transport de-a lungul bicaracteristicelor. Am arătat că vitezele undelor de șoc și de accelerație sunt date de aceeași ecuație corespunzătoare problemei de valori proprii și vectori proprii. Punctul esențial în această afirmație îl reprezintă faptul că vitezele undelor vâscoelastice sunt dictate de răspunsul *elastic* al materialului. Acest lucru este important pentru că având aceeași condiție de propagare ca la elasticitatea liniară, o serie de rezultate privind propagarea undelor în placa liniar vâscoelastică au analog în placa liniar elastică. De asemenea, am arătat că într-o placă liniar vâscoelastică laminată omogenă și ortotropă, o undă de accelerație niciodată nu se poate transforma într-o undă de șoc.

4.2. Propagarea undelor de șoc într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată.

4.2.1. Unde de șoc. Condiția de propagare.

Se consideră o placă subțire liniar vâscoelastic laminată infinită cu lamine omogene în care se presupune că se propagă o undă de șoc.

Lema 4.2.1. (Fisher și Gurtin [1965]). *Dacă g și k sunt două funcții definite pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ cu următoarele proprietăți:*

- (i) *g este funcție continuă pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$,*
- (ii) *k este funcție continuă și cu derivate continue pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} - \Sigma_t$,*
- (iii) *k este funcție mărginită pe orice compact închis, inclus în $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$,*
- (iii) *mulțimea $\omega_x = \{t | x \in \Sigma_t \subset \mathbf{R}^2, 0 \leq t < \infty\}$ are măsură nulă, atunci funcția A definită prin $A(x, y, t) = \int_0^t g(x, y, t - s)k(x, y, s)ds$ este continuă pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.*

Definiția 4.2.1. *Se spune că o curbă $C_t \subset \mathbf{R}^2$ de ecuație*

$$(4.2.1) \quad f(x, y, t) = t - \tau(x, y) = 0$$

care se propagă cu viteza U_n în planul mediu al plăcii subțiri liniar vâscoelastic

laminată este o curbă de discontinuitate tare (undă de șoc) dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

a) funcția $\{U\}$ este continuă pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$;

b) funcțiile $\{\Sigma\}$, $\{e\}$, $\frac{\partial}{\partial x}\{U\}$, $\frac{\partial}{\partial x}\{U\}$, $\{\dot{U}\}$ ca și derivatele lor de ordin superior pot poseda discontinuități de salt la traversarea lui \mathcal{C}_t , dar ele sunt continue pe $\mathbf{R}^2 - \mathcal{C}_t$;

c) funcția vectorială $\{P\}$ este funcție de clasă C^0 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$;

d) funcția matriceală $[C]$ este funcție de clasă C^2 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

Definiția 4.2.2. *Presupunând că saltul lui $\{V\} = \{\dot{U}\}$ la traversarea curbei \mathcal{C}_t este dat de*

$$(4.2.2) \quad \llbracket \{V\} \rrbracket = -s\{d\},$$

unde $\{d\}$ este un vector unitar al spațiului vectorial \mathbf{R}^5 ($\{d\}^T\{d\} = 1$), s se numește **intensitatea saltului undei de șoc**.

Considerând $\Phi = \{V\}$ în condiția de compatibilitate cinematică (2.2.7) și luând în considerare continuitatea lui $\{U\}$ la traversarea curbei \mathcal{C}_t obținem

$$(4.2.3) \quad \llbracket \{U\}_{,k} \rrbracket = (1/U_n)sn_k\{d\}.$$

Teorema 4.2.1 *Într-o placă subțire compozit liniar vâscoelastic laminată având ecuația constitutivă (3.3.15), viteza de propagare U_n a undei de șoc considerată într-un punct $(x, y, z) \in \mathcal{C}_t$ satisface următoarea problemă de vectori proprii și valori proprii numită condiția de propagare:*

$$(4.2.4) \quad ([D_n]^T[C^0][D_n] - U_n^2[R])\{d\} = \{0\}.$$

Demonstrație. Ecuația de salt obținută din legea de bilanț a momentului liniar are forma

$$(4.2.5) \quad [D]^T\llbracket \{\Sigma\} \rrbracket + U_n[R]\llbracket \{V\} \rrbracket = \{0\},$$

unde s-a ținut cont de continuitatea lui $[S]^T\{\Sigma\}$, $\{P\}$ și $[R]$ la traversarea curbei \mathcal{C}_t .

Considerând operatorul salt la traversarea curbei \mathcal{C}_t în legea constitutivă (3.3.15) și ținând cont de relația (3.3.16) și de lema lui Fisher și Gurtin [1965], avem

$$(4.2.6) \quad \llbracket \{\Sigma(x, y, t)\} \rrbracket = [C(x, y, 0)]\llbracket \{e(x, y, t)\} \rrbracket.$$

Aplicând operatorul salt la traversarea curbei C_t relației (3.3.15), rezultă

$$(4.2.7) \quad \llbracket \{e\} \rrbracket = \llbracket [\mathcal{D}]\{U\} \rrbracket,$$

unde continuitatea lui $\{U\}$ la traversarea curbei C_t a fost considerată.

Utilizând relația (4.2.3) avem

$$(4.2.8) \quad \llbracket [\mathcal{D}]\{U\} \rrbracket = (1/U_n)s[\mathcal{D}_n]\{d\},$$

iar din relațiile (4.2.6)–(4.2.8) se obține

$$(4.2.9) \quad \llbracket \{\Sigma(x, y, t)\} \rrbracket = (1/U_n)[C(x, y, 0)]\{d(x, y)\}.$$

Substituind $\llbracket \{\Sigma(x, y, t)\} \rrbracket$ dat de (4.2.9) în ecuația (4.2.5), luând în considerare relația (4.2.2) și utilizând notația $[C^0] = [C(x, y, 0)]$, obținem condiția de propagare (4.2.4). ■

Ecuația (4.2.4) admite o soluție netrivială pentru vectorul propriu $\{d\}$ dacă și numai dacă

$$(4.2.10) \quad \det([\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R]) = 0.$$

Remarca 4.2.1. *Vitezele de propagare ale undelor de șoc într-o placă subțire liniar vâscoelatic laminată nu depind de timpul t , dar sunt funcții de elementele matricelor $[C]$, $[R]$ și $[\mathcal{D}_n]$.*

4.2.2. Variația intensității saltului undei de șoc.

Vom examina acum variația intensității saltului undei de șoc ce se propagă într-o placă subțire compozit liniar vâscoelatic laminată.

Se poate astfel enunța teorema:

Teorema 4.2.2. *Intensitatea s a saltului unei unde de șoc propagându-se într-o placă subțire compozit liniar vâscoelatic laminată având ecuația constitutivă (3.3.15), satisface următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale:*

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} & \{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}]\{d\} + U_n\{d\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\})s/U_n = \\ & = s(\{d\}^T[S]^T[C^0][\mathcal{D}_n]\{d\} + (1/U_n)\{d\}^T[\mathcal{D}_n]^T[\dot{C}^0][\mathcal{D}_n]\{d\}). \end{aligned}$$

Demonstrație. Utilizând operatorul salt la traversarea curbei C_t în ecuația de mișcare (3.3.18), obținem ecuația

$$(4.2.12) \quad [[D]^T\{\Sigma\}] - [S]^T[[\{\Sigma\}]] = [R][\{\dot{V}\}],$$

unde continuitatea lui $\{P\}$ și a lui $[R]$ la traversarea curbei C_t a fost considerată.

Derivând în raport cu timpul legea constitutivă (3.3.15), rezultă

$$(4.2.13) \quad \begin{aligned} \{\dot{\Sigma}(x, y, t)\} &= [C(x, y, 0)]\{\dot{e}(x, y, t)\} + [\dot{C}(x, y, 0)]\{e(x, y, t)\} + \\ &+ \int_0^t [\ddot{C}(x, y, t - \tau)]\{e(x, y, \tau)\}d\tau. \end{aligned}$$

Considerând operatorul salt la traversarea curbei C_t în (4.2.13) și ținând cont de lema lui Fisher și Gurtin [1965], se obține

$$(4.2.14) \quad [[\{\dot{\Sigma}(x, y, t)\}]] = [C(x, y, 0)][\{\dot{e}(x, y, t)\}] + [\dot{C}(x, y, 0)][\{e(x, y, t)\}],$$

unde continuitatea lui $[C]$ și $[\dot{C}]$ a fost considerată.

Derivând în raport cu timpul t ecuația (3.3.17) și apoi aplicând operatorul salt la traversarea curbei C_t ecuației rezultate, ecuația obținută este

$$(4.2.15) \quad [\{\dot{e}\}] = [[D]\{V\}].$$

Luând $\Phi = \{\Sigma\}$ și $\Phi = \{V\}$ în condiția de compatibilitate cinematică (2.9.7), rezultă respectiv relațiile

$$(4.2.16) \quad [[D]^T\{\Sigma\}] = [D]^T[[\{\Sigma\}]] - (1/U_n)[D_n][[\{\dot{\Sigma}\}]]$$

și

$$(4.2.17) \quad [[D]\{V\}] = [D][[\{V\}]] - (1/U_n)[D_n][[\{\dot{V}\}]].$$

Din relațiile (4.2.15) și (4.2.17) rezultă

$$(4.2.18) \quad [\{\dot{e}\}] = [D][[\{V\}]] - (1/U_n)[D_n][[\{\dot{V}\}]].$$

Eliminând $[\{e\}]$, $[\{\dot{e}\}]$ și $[[\{\dot{\Sigma}\}]]$ între relațiile (4.2.7), (4.2.16) și (4.2.18) obținem

$$[[D]^T\{\Sigma\}] = [D]^T[[\{\Sigma\}]] - (1/U_n)[D_n]^T([C^0] \times$$

$$(4.2.19) \quad \times([\mathcal{D}][\{V\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][\{\dot{V}\}] + [\dot{C}^0])[[\mathcal{D}]\{U\}],$$

unde au fost utilizate notațiile $[C^0] = [C(x, y, 0)]$ și $[\dot{C}^0] = [\dot{C}(x, y, 0)]$.

Din nou, eliminând $[[\mathcal{D}]^T\{\Sigma\}]$ între ecuațiile (4.2.12) și (4.2.19) obținem ecuația:

$$(4.2.20) \quad \begin{aligned} &([\mathcal{D}_n]^T[C^0[\mathcal{D}_n] - U_n^2[R]]\{\dot{V}\}] = -U_n^2([\mathcal{D}]^T - [S]^T)[\{\Sigma\}] + \\ &+ U_n[\mathcal{D}_n]^T([C^0][\mathcal{D}][\{V\}] + [\dot{C}^0][[\mathcal{D}]\{U\}]). \end{aligned}$$

Multiplicând la stânga ambii membri ai ecuației (4.2.20) prin $[[\{V\}]]^T$ și luând în considerare forma echivalentă a condiției de propagare (4.2.4) care se exprimă astfel

$$(4.2.21) \quad ([\mathcal{D}_n]^T[C^0[\mathcal{D}_n] - U_n^2[R]]\{\dot{V}\}) = \{0\},$$

împreună cu faptul că $[C^0]$ și $[R]$ sunt matrice simetrice, rezultă ecuația

$$(4.2.22) \quad \begin{aligned} &-U_n[[\{V\}]]^T([\mathcal{D}]^T - [S]^T)[\{\Sigma\}] + U_n[[\{V\}]]^T[\mathcal{D}_n]^T \times \\ &\times([C^0][\mathcal{D}][\{V\}] + [\dot{C}^0][[\mathcal{D}]\{U\}]). \end{aligned}$$

Utilizând relațiile (4.2.2), (4.2.8) și (4.2.9) în ecuația (4.2.22) se obține ecuația (4.2.11). ■

Acum, arătăm cum ecuația cu derivate parțiale (4.2.11) poate fi transformată într-o ecuație diferențială ordinară.

La fel ca în capitolul II și aici se consideră un câmp de vectori arbitraii din \mathbf{R}^2 de componente $l_i(x, y)$ ($i=1,2$) legat de frontul de undă (4.2.1), normalizat prin condiția

$$(4.2.23) \quad l_i n_i = 1,$$

și se utilizează derivata

$$(4.2.24) \quad \frac{\delta_l(\)}{\delta t} = U_n(l_1(\)_{,x} + l_2(\)_{,y}).$$

Teorema 4.2.3. *Ecuația diferențială cu derivate parțiale (4.2.11) se transformă de-a lungul bicaracteristicilor într-o ecuație diferențială ordinară de forma*

$$(4.2.25) \quad \frac{\delta_l s}{\delta t} + a s = 0,$$

unde

$$(4.2.26) \quad a = (\{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{d\} + 2\{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{d\}) - (\{d\}^T [S]^T \times \\ \times [C^0] [\mathcal{D}_n] \{d\} + (1/U_n) \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [\dot{C}^0] [\mathcal{D}_n] \{d\})) / (2U_n \{d\}^T [R] \{d\})$$

Demonstrație. Vom considera câmpul de vectori $\{\mathbf{l}(x, y)\}$ din \mathbf{R}^2 , având componentele $l_i(x, y)$ ($i=1,2$) definite prin relațiile

$$(4.2.27) \quad l_1 = \frac{\{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\alpha] \{d\}}{U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\}}, \quad l_2 = \frac{\{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\beta] \{d\}}{U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\}},$$

unde $[\alpha]$ și $[\beta]$ sunt matrice numerice obținute prin descompunerea lui $[\mathcal{D}]$ după cum urmează:

$$(4.2.28) \quad [\mathcal{D}] = [\alpha] (\quad)_{,x} + [\beta] (\quad)_{,y}.$$

Din definiția matricei $[\mathcal{D}_n]$ pe baza descompunerii (4.2.28), rezultă

$$(4.2.29) \quad [\mathcal{D}_n] = [\alpha] n_1 + [\beta] n_2.$$

De asemenea, condiția de normalitate (4.2.23) este satisfăcută de către câmpul vectorial definit de relațiile (4.2.27) dacă se ține seama de relația

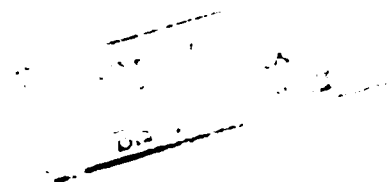
$$(4.2.30) \quad \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}_n] \{d\} - U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\} = 0,$$

obținută din multiplicarea la stânga a condiției de propagare (4.2.4) cu vectorul $\{d\}^T$. Pe baza relațiilor (4.2.24), (4.2.27), (4.2.28) și luând în considerare că U_n nu este funcție de timp, putem scrie

$$(4.2.31) \quad \{d\}^T [\mathcal{D}_n] [C^0] [\mathcal{D}] (\{d\} s) = \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\alpha] (\{d\} s)_{,x} + \\ + [\beta] (\{d\} s)_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{d\} + \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] \times \\ \times ([\alpha] \{d\} s_{,x} + [\beta] \{d\} s_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{d\} + \\ + U_n^2 \{d\}^T [R] \{d\} (l_1 s_{,x} + l_2 s_{,y}) = s \{d\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{d\} + \\ + U_n \{d\}^T [R] \{d\} \delta_l s / \delta t$$

și

$$U_n \{d\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{d\} s / U_n) = U_n \{d\}^T ([\alpha]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{d\} s / U_n)_{,x} +$$



$$\begin{aligned}
& +[\beta]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}_{s/U_n},y) = s\{d\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\})+ \\
(4.2.32) \quad & +s\{d\}^T([\alpha]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}),x + [\beta]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}),y)+ \\
& +U_n\{d\}^T([\alpha]^T[C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}(s/U_n),x + [\beta]^T[C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}(s/U_n),y) = \\
& = 2s\{d\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}]\{d\}) + U_n^3\{d\}^T[R]\{d\}(l_1(s/U_n),x+ \\
& +l_2(s/U_n),y) = 2s\{d\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{d\}) + U_n\{d\}^T[R]\{d\}\delta_l s/\delta t.
\end{aligned}$$

Ținând cont de relațiile (4.2.31) și (4.2.32) în ecuația (4.2.11), prin utilizarea notației (4.2.26) obținem ecuația (4.2.25). Astfel, teorema 4.2.3 este demonstrată. ■

4.3. Propagarea undelor de accelerație într-o placă subțire compozit linear vâscoelastic laminată.

4.3.1. Unda de accelerație. Condiția de propagare.

Se consideră o placă subțire linear vâscoelastic laminată infinită cu lamine omogene în care se presupune că se propagă o undă de accelerație.

Definiția 4.3.1. *Se spune că o curbă netedă $\Gamma_t \subset \mathbf{R}^2$ de ecuație*

$$(4.3.1) \quad f(x, y, t) \equiv t - \tau(x, y) = 0$$

care se propagă cu viteza U_n în planul mediu al unei plăci subțiri compozit linear vâscoelastic laminată este o curbă de discontinuitate slabă (undă de accelerație) dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

- funcțiile vectoriale $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$, $[\mathcal{D}]\{U\}$, $\{e\}$ și $\{\Sigma\}$ sunt funcții continue pe $\Omega_0 \times \mathbf{R}$ ($\Omega_0 \subset \mathbf{R}^2$);*
- funcțiile vectoriale $\{\ddot{U}\}$, $[\mathcal{D}]\{\dot{U}\}$, $\{\dot{\Sigma}\}$, $[\mathcal{D}]^T\{\Sigma\}$ și $\{\dot{e}\}$, precum și derivatele lor de ordin superior pot suferi discontinuități de salt la traversarea curbei Γ_t dar sunt continue pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} - \Gamma_t$;*
- Funcția vectorială $\{P\}$ și funcția matriceală $[R]$ sunt respectiv funcții de clasă C^1 și C^0 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$;*
- Funcția matriceală $[C]$ este funcție de clasă C^3 pe $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.*

Definiția 4.3.2. Presupunând că saltul lui $\{\dot{V}\} = \{\ddot{U}\}$ la traversarea curbei Γ_t este dat de

$$(4.3.2) \quad \llbracket \{\dot{V}\} \rrbracket = U_n^2 s \{\tilde{d}\},$$

unde $\{\tilde{d}\}$ reprezintă un vector unitar al spațiului vectorial \mathbf{R}^5 ($\{\tilde{d}\}^T \{\tilde{d}\} = 1$), scalarul s este numit **intensitatea unei de accelerație**.

Considerând $\Phi = \{V\}$ în condiția de compabilitate cinematică (2.9.7), ținând cont de continuitatea lui $\{V\}$ la traversarea curbei Γ_t și folosind relația (4.3.2) obținem

$$(4.3.3) \quad \llbracket \{V\}_{,k} \rrbracket = -U_n s n_k \{\tilde{d}\}.$$

Teorema 4.3.1. Într-o placă subțire compozit liniar vâscoelastic laminată având ecuația constitutivă (3.3.15), viteza de propagare U_n a unei de accelerație într-un punct $(x, y, t) \in \Gamma_t$ satisface următoarea problemă de vectori proprii și valori proprii numită condiție de propagare:

$$(4.3.4) \quad ([\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}_n] - U_n^2 [R]) \{\tilde{d}\} = \{0\}.$$

Demonstrație. Aplicând operatorul salt la traversarea curbei Γ_t , ecuației de mișcare (3.3.18), obținem ecuația

$$(4.3.5) \quad \llbracket [\mathcal{D}]^T \{\Sigma\} \rrbracket = [R] \llbracket \{\dot{V}\} \rrbracket,$$

unde s-a ținut cont de continuitatea lui $\{\Sigma\}$, $\{P\}$ și $[R]$ la traversarea curbei Γ_t .

Derivând în raport cu timpul legea constitutivă (3.3.15) și relația deformație-deplasare (3.3.17), iar apoi aplicând operatorul salt la traversarea curbei Γ_t în relațiile găsite, pe baza lemei lui Fisher și Gurtin [1965], obținem respectiv

$$(4.3.6) \quad \llbracket \{\dot{\Sigma}\} \rrbracket = [C^0] \llbracket \{\dot{e}\} \rrbracket$$

și

$$(4.3.7) \quad \llbracket \{\dot{e}\} \rrbracket = \llbracket [\mathcal{D}] \{V\} \rrbracket,$$

unde s-a ținut cont de continuitatea lui $[\dot{C}]$ și $\{V\}$ la traversarea curbei Γ_t .

Utilizând relația (4.3.3), avem

$$(4.3.8) \quad \llbracket [\mathcal{D}]\{V\} \rrbracket = -U_n s[\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\},$$

iar din relațiile (4.3.6)–(4.3.8), rezultă

$$(4.3.9) \quad \llbracket \{\dot{\Sigma}\} \rrbracket = -U_n s[C^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}.$$

Pe baza condiției de compatibilitate cinematică (2.9.7), considerând $\Phi = \{\Sigma\}$ se obține

$$(4.3.10) \quad \llbracket [\mathcal{D}]^T\{\Sigma\} \rrbracket = -(1/U_n)[\mathcal{D}_n]^T \llbracket \{\dot{\Sigma}\} \rrbracket,$$

unde s-a ținut cont de continuitatea lui $\{\Sigma\}$ la traversarea curbei Γ_t .

Substituind $\llbracket \{\Sigma\} \rrbracket$ din (4.3.9) în relația (4.4.10), obținem

$$(4.3.11) \quad \llbracket [\mathcal{D}]^T\{\Sigma\} \rrbracket = s[\mathcal{D}_n]^T[C^0]\{\tilde{d}\}.$$

Ținând cont de relațiile (4.3.2) și (4.3.11) în ecuația (4.3.5) obținem condiția de propagare (4.3.4). ■

Condiția de propagare (4.3.4) mai poate fi scrisă și astfel:

$$(4.3.12) \quad ([\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R])\llbracket \{\dot{V}\} \rrbracket = \{0\}.$$

Ecuația (4.3.4) (sau (4.3.12)) admite o soluție netrivială pentru vectorul propriu $\{\tilde{d}\}$ dacă și numai dacă are loc relația (4.2.10).

Dei și în cazul undelor de accelerație, vitezele de propagare satisfac ecuația undelor (4.2.10) obținută pentru vitezele undelor de șoc.

4.3.2. Variația intensității saltului undelor de accelerație.

Vom examina acum variația intensității saltului undelor de accelerație ce se propagă într-o placă subțire compozit liniar vâscoelastic laminată.

Teorema 4.3.2. *Intensitatea s a saltului undei de accelerație propagându-se într-o placă subțire compozit liniar vâscoelastic laminată având ecuația constitutivă (3.3.15) satisface următoarea ecuație cu derivate parțiale*

$$(4.3.13) \quad \begin{aligned} \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}](\{\tilde{d}\}sU_n^2) + U_n\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}sU_n) = \\ = sU_n\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[\dot{C}^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Derivând în raport cu timpul ecuația de mișcare (3.3.18) și aplicând apoi în ecuația obținută operatorul salt la traversarea curbei Γ_t , se obține ecuația

$$(4.3.14) \quad [[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}] - [S]^T[[\{\dot{\Sigma}\}]] = [R][[\{\ddot{V}\}]],$$

unde continuitatea lui $\{\dot{P}\}$ la traversarea curbei Γ_t a fost presupusă.

Derivând de două ori în raport cu timpul atât ecuația constitutivă (3.3.15), rezultă

$$(4.3.15) \quad \{\ddot{\Sigma}(x, y, t)\} = [C(x, y, 0)]\{\ddot{e}(x, y, t)\} + [\dot{C}(x, y, 0)]\{\dot{e}(x, y, t)\} + \\ + [\ddot{C}(x, y, 0)]\{e(x, y, t)\} + \int_0^t [\ddot{G}(x, y, t - \tau)]\{e(x, y, \tau)\}d\tau.$$

Aplicând operatorul salt la traversarea curbei Γ_t , ținând cont continuitatea lui $\{e\}$ și $[\ddot{G}]$ la traversarea acesteia și utilizând lema lui Fisher și Gurtin [1965], obținem

$$(4.3.16) \quad [[\{\ddot{\Sigma}\}]] = [C^0][[\{\ddot{e}\}]] + [\dot{C}^0][[\{\dot{e}\}]].$$

Derivând de două ori ecuația deformație - deplasare (3.3.17) și aplicând operatorul salt la traversarea curbei Γ_t , rezultă

$$(4.3.17) \quad [[\{\ddot{e}\}]] = [[[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}]] + [S][[\{\dot{V}\}]].$$

Pe baza condiției cinematice de compabilitate (4.3.7) putem scrie

$$(2.10.18) \quad [[[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}]] = [\mathcal{D}][[\{\dot{V}\}]] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][[\{\ddot{V}\}]].$$

Din relațiile (4.3.7) și (4.3.16) - (4.3.18), rezultă

$$(4.3.19) \quad [[\{\ddot{\Sigma}\}]] = [C^0]([[\{[\mathcal{D}]\{\dot{V}\}\}] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n][[\{\ddot{V}\}]]]) + [\dot{C}^0][[\{\mathcal{D}\{V\}\}]].$$

Tot pe baza condiției cinematice de compabilitate (2.9.7) putem scrie relația

$$(4.3.20) \quad [[[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}]] = [\mathcal{D}]^T[[\{\dot{\Sigma}\}]] - (1/U_n)[\mathcal{D}_n]^T[[\{\ddot{\Sigma}\}]].$$

Eliminând $[[\{\ddot{\Sigma}\}]]$ între relațiile (4.3.19) și (4.3.20), iar apoi pe $[[[\mathcal{D}]^T\{\dot{\Sigma}\}]]$ între relația obținută și ecuația (4.3.14), se obține astfel ecuația

$$(4.3.21) \quad ([\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}_n] - U_n^2[R])[[\{\dot{V}\}]] = U_n[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}][[\{\dot{V}\}]] + U_n[\mathcal{D}_n]^T \times \\ \times [C^0][S][[\{\dot{V}\}]] + U_n[\mathcal{D}_n]^T[\dot{C}^0][[\{\mathcal{D}\{V\}\}]] - U_n^2([\mathcal{D}]^T - [S]^T)[[\{\dot{\Sigma}\}]].$$

Înmulțind la stânga cu $[\{\dot{V}\}]$ ecuația (4.3.21) și ținând cont de condiția de propagare (4.3.12) și de simetria matricelor $[C]$ și $[R]$ obținem

$$(4.3.22) \quad U_n[\{\dot{V}\}]^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}][\{\dot{V}\}] + U_n[\{\dot{V}\}]^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][S][\{\dot{V}\}] + \\ + U_n[\{\dot{V}\}]^T[\mathcal{D}_n]^T[\dot{C}^0][[\mathcal{D}]\{V\}] = U_n^2[\{\dot{V}\}]^T([\mathcal{D}]^T - [S]^T)[\{\dot{\Sigma}\}].$$

Folosind relațiile (4.3.2), (4.3.8) și (4.3.9), ecuația (4.3.22) se transformă în ecuația (4.3.13), unde s-a mai ținut că

$$(4.3.23) \quad \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][S]\{\tilde{d}\} = \{\tilde{d}\}^T[S]^T[C^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}.$$

Teorema 4.3.2 este astfel demonstrată. ■

Vom arăta acum cum ecuația cu derivate parțiale (4.3.13) poate fi transformată într-o ecuație diferențială ordinară.

Teorema 4.3.3. *Ecuația diferențială cu derivate parțiale (4.3.13) se transformă de-a lungul bicaracteristicilor sale într-o ecuație diferențială ordinară de forma*

$$(4.3.24) \quad \frac{\delta l s}{\delta t} + \tilde{a} s = 0,$$

unde

$$(4.3.25) \quad \tilde{a} = (\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\mathcal{D}]\{\tilde{d}\} + \{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}]^T([C^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) - \\ - (1/U_n)\{\tilde{d}\}[\mathcal{D}_n]^T[\dot{C}^0][\mathcal{D}_n]\{\tilde{d}\}) / (2U_n\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}).$$

Demonstrație. Vom presupune câmpul de vectori $\{l(x, y)\}$ din \mathbf{R}^2 având componentele $l_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) definite prin relațiile

$$(4.3.26) \quad l_1 = \frac{\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n]^T[C^0][\alpha]\{\tilde{d}\}}{U_n^2\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}}, \quad \text{și} \quad l_2 = \frac{\{\tilde{d}\}^T[\mathcal{D}_n][C^0][\beta]\{\tilde{d}\}}{U_n^2\{\tilde{d}\}^T[R]\{\tilde{d}\}}.$$

Pe baza relațiilor (4.2.23), (4.3.26), (4.2.27) și luând în considerare că U_n

nu este funcție de timp putem scrie

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] (\{\tilde{d}\} s U_n^2) &= \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\alpha] (\{\tilde{d}\} s U_n^2)_{,x} + \\
 &+ [\beta] (\{\tilde{d}\} s U_n^2)_{,y}) = \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\alpha] \{\tilde{d}\}_{,x} + [\beta] \{\tilde{d}\}_{,y}) s U_n^2 + \\
 &+ \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] ([\alpha] \{\tilde{d}\} (s U_n^2)_{,x} + [\beta] \{\tilde{d}\} (s U_n^2)_{,y}) = \\
 (4.3.27) \quad &= s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{\tilde{d}\} + U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} (l_1 (s U_n^2)_{,x} + \\
 &l_2 (s U_n^2)_{,y}) = s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] \{\tilde{d}\} + U_n \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} \delta_1 (s U_n^2) / \delta t = \\
 &= s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}_n]^T [C^0] [\mathcal{D}] \{\tilde{d}\} + U_n^3 \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} \delta_1 s / \delta t
 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
 U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\} s U_n) &= U_n \{\tilde{d}\}^T ([\alpha]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\} s U_n)_{,x} + \\
 &+ [\beta]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\} s U_n)_{,y}) = s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T ([\alpha]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\})_{,x} + \\
 &+ [\beta]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\})_{,y}) + U_n \{\tilde{d}\}^T ([\alpha]^T [C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\} (s U_n)_{,x} + \\
 (4.3.28) \quad &+ [\beta]^T [C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\} (s U_n)_{,y}) = s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\}) + \\
 &+ U_n^3 \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} (l_1 (s U_n)_{,x} + l_2 (s U_n)_{,y}) = s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\}) + \\
 &+ U_n^3 \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} \delta_1 (s U_n) / \delta t = s U_n^2 \{\tilde{d}\}^T [\mathcal{D}]^T ([C^0] [\mathcal{D}_n] \{\tilde{d}\}) + \\
 &+ U_n^3 \{\tilde{d}\}^T [R] \{\tilde{d}\} \delta_1 s / \delta t.
 \end{aligned}$$

Utilizând relațiile (4.3.27) și (4.3.28) în ecuația (4.3.13), se obține ecuația (4.3.24) cu \tilde{a} definit prin relația (4.3.25). Teorema 4.3.3 este astfel demonstrată. ■

Remarca 4.3.1. *Din forma soluției ecuației (4.3.24) (cu \tilde{a} dat de relația (4.3.25)):*

$$(4.3.29) \quad s(t) = s_0 e^{\tilde{a}t}, \quad (s_0 = s(0)),$$

se constată că pentru placa subțire compozit liniar vâscoelastic laminată având ecuația constitutivă (3.3.15), niciodată o undă de accelerație nu se poate transforma într-o undă de șoc.

REZULTATE NUMERICE ȘI DISCUȚII.

Problemele tratate în capitolele precedente ar necesita neapărat o validare experimentală; în condițiile de dotare ale laboratoarelor noastre, existența unei aparaturi adecvate face imposibilă desfășurarea unui program experimental adecvat.

În aceste condiții, singura posibilitate de a testa corectitudinea teoriei concepute este cea numerică. Existența calculatoarelor puternice permit rularea de programe performante care să prezinte grafic evoluția unor fenomene dinamice cum sunt cele cercetate de mine în capitolele precedente.

În această ordine de idei, am întocmit un program de calcul în limbaj basic pe care l-am denumit DINPLTEL și care are drept scop, studiul dinamicii plăcii subțiri termolelastică laminată. Cu ajutorul acestui program am studiat istoriile (evoluțiile în raport cu timpul) deflexiei (deplasării transversale) w , unghiurilor de rotație ψ_x , ψ_y , precum și a tensiunilor σ_x , σ_{xy} , σ_y , σ_{yz} și σ_{zx} . Programul este aplicabil pentru plăci dreptunghiulare de grosime uniformă.

Plăcile considerate în exemplele numerice prezentate în continuare sunt compuse dintr-o lamină sau din trei lamine (de tipul $[0^0 \ 90^0 \ 0^0]$), toate laminele având aceeași grosime.

Se consideră o placă pătrată cu lungimile marginilor laterale a , b respectiv în direcțiile x și y și de grosime h . Placa este simplu rezemată.

Proprietățile termoelastice ale fiecărei lamine grafit-aluminiu (G/AL) sunt:

-module de elasticitate longitudinale:

$$E_1 = 190GPa; \quad E_2 = 48,3GPa;$$

-module de elasticitate de forfecare:

$$G_{12} = G_{13} = 17,3GPa; \quad G_{23} = 2,39GPa;$$

-coeficientul de contracție transversală :

$$\nu_{12} = 0,28;$$

-coeficienți de dilatare termică:

$$\alpha_1 = 3,34 \times 10^{-6}/^{\circ}C; \quad \alpha_2 = 26,1 \times 10^{-6}/^{\circ}C;$$

-densitatea de masă:

$$\rho = 2400 \text{ kg/m}^3;$$

-coeficient de difuzie termică:

$$k = 4,84 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s},$$

unde indicele "1" indică direcția fibrei.

Grosimea unei lamine este $h_l = 0,00125 \text{ m}$.

În figurile 5.1. și 5.2. sunt prezentate istoriile deflexiei w în centrul plăcii pătrate ($a = b = 0,25 \text{ m}$) cu o singură lamină, respectiv cu trei lamine, pentru trei temperaturi de șoc diferite și anume 50°C , 75°C și 100°C .

Figurile 5.3 și 5.4 prezintă suprafețele deflexiei w în centrul plăcilor dreptunghiulare cu dimensiunile $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,2 \text{ m}$ dar formate dintr-o singură lamină, respectiv din trei lamine, ambele la temperatura de șoc de 100°C și după $t = 0,004 \text{ s}$ de la aplicarea șocului.

Figurile 5.5 și 5.6 prezintă suprafețele deflexiei w în centrul plăcii dreptunghiulare cu dimensiunile $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,2 \text{ m}$, dar formate dintr-o singură lamină respectiv trei lamine, ambele la temperatura de șoc de 100°C și după $t = 0,00825 \text{ s}$ de la aplicarea șocului.

Figurile 5.7 și 5.8 prezintă suprafețele deflexiei w în centrul plăcii dreptunghiulare cu dimensiunile $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,2 \text{ m}$, dar formate dintr-o singură lamină respectiv trei lamine, ambele la temperatura de șoc de 100°C și după $t = 0,001125 \text{ s}$ de la aplicarea șocului.

Figurile 5.9 și 5.10 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_x în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25 \text{ m}$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de 50°C .

Figurile 5.11 și 5.12 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25 \text{ m}$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de 50°C .

Figurile 5.13 și 5.14 prezintă detalii pe intervalul de timp $[0; 0,01]$, respectiv a unghiurilor de rotație ψ_x și ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25 \text{ m}$) supuse la temperatura de șoc de 50°C , comparativ pentru placile cu o lamină și cu trei lamine.

Figurile 5.15 și 5.16 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_x în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25 \text{ m}$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de 75°C .

Figurile 5.17 și 5.18 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de $75^{\circ}C$.

Figurile 5.19 și 5.20 prezintă detalii pe intervalul de timp $[0; 0,01]$, respectiv a unghiurilor de rotație ψ_x și ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) supuse la temperatura de șoc de $75^{\circ}C$, comparativ pentru placile cu o lamină și cu trei lamine.

Figurile 5.21 și 5.22 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_x în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de $100^{\circ}C$.

Figurile 5.23 și 5.24 prezintă istoriile unghiului de rotire ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele plăci la temperatura de șoc de $100^{\circ}C$.

Figurile 5.25 și 5.26 prezintă detalii pe intervalul de timp $[0; 0,01]$, respectiv a unghiurilor de rotație ψ_x și ψ_y în centrul plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) supuse la temperatura de șoc de $100^{\circ}C$, comparativ pentru plăci cu o lamină și cu trei lamine.

Figurile 5.27 și 5.28 prezintă detalii pe intervalul de timp $[0; 0,01]$, a unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii pătrate ($a = b = 0,25m$) comparativ pentru trei temperaturi de șoc $50^{\circ}C$, $75^{\circ}C$ și $100^{\circ}C$, respectiv pentru plăci cu o lamină și cu trei lamine.

Figurile 5.29 și 5.30 prezintă detalii pe intervalul de timp $[0; 0,01]$, a unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii pătrate ($a = b = 0,25m$) comparativ pentru trei temperaturi de șoc $50^{\circ}C$, $75^{\circ}C$ și $100^{\circ}C$, respectiv pentru plăci cu o lamină și cu trei lamine.

Figurile 5.31 și 5.32 prezintă istoriile tensiunii σ_x corespunzător plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină și cu trei lamine la o temperatură de șoc $\theta = 100^{\circ}C$, în centrul feței inferioare opusă celei a șocului termic, respectiv pe intervalele $[0; 0,05]$ și $[0; 0,01]$ (detaliu).

Figurile 5.33 și 5.34 prezintă istoriile tensiunii σ_{xy} corespunzător plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină și cu trei lamine la o temperatură de șoc $\theta = 100^{\circ}C$, în centrul feței inferioare opusă celei a șocului termic, respectiv pe intervalele $[0; 0,05]$ și $[0; 0,01]$ (detaliu).

Figurile 5.35 și 5.36 prezintă istoriile tensiunii σ_y corespunzător plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină și cu trei lamine la o temperatură de șoc $\theta = 100^{\circ}C$, în centrul feței inferioare opusă celei a șocului termic,

respectiv pe intervalele $[0; 0,05]$ și $[0; 0,01]$ (detaliu).

Figurile 5.37 și 5.38 prezintă istoriile tensiunii σ_{yz} corespunzător plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină și cu trei lamine la o temperatură de șoc $\theta = 100^{\circ}C$, în centrul feței inferioare opusă celei a șocului termic, respectiv pe intervalele $[0; 0,05]$ și $[0; 0,01]$ (detaliu).

Figurile 5.39 și 5.40 prezintă istoriile tensiunii σ_{zx} corespunzător plăcilor pătrate ($a = b = 0,25m$) cu o lamină și cu trei lamine la o temperatură de șoc $\theta = 100^{\circ}C$, în centrul feței inferioare opusă celei a șocului termic, respectiv pe intervalele $[0; 0,05]$ și $[0; 0,01]$ (detaliu).

Din examinarea diagramelor, reese o concluzie evidentă și anume că atât deflexia w , cât și unghiurile de rotație ψ_x și ψ_y sunt proporționale cu temperatura în orice moment al timpului.

Comparând diagramele realizate pentru placile cu o lamină, respectiv cu trei lamine, ambele la aceeași temperatură de șoc se constată că forma curbelor și comportarea în timp este diferită atât pentru deflexia w , cât și pentru unghiurile de rotație (ψ_x, ψ_y) și tensiuni ($\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$).

De asemenea, examinând diagramele din figurile 5.31, 5.33, 5.35, 5.37 și 5.39 se constată că pe intervalul $[0; 0,05]$ tensiunea cea mai semnificativă este σ_{zx} , urmată în ordine descrescătoare a importanței de σ_{yz} , σ_x , σ_y și σ_{xy} .

Se observă că pe direcția unde rigiditatea este mai mare, modulul tensiunii atinge un maxim de asemenea mai mare.

Metoda care stă la baza programului conceput, folosește tehnica modală combinată cu aproximarea printr-o serie trunchiată a temperaturii.

S-a constatat o foarte bună convergență și rezultatele obținute pentru deflecția w sunt apropiate de cele ale lui Huang și Tauchert [1992] pentru cazul plăcii plane.

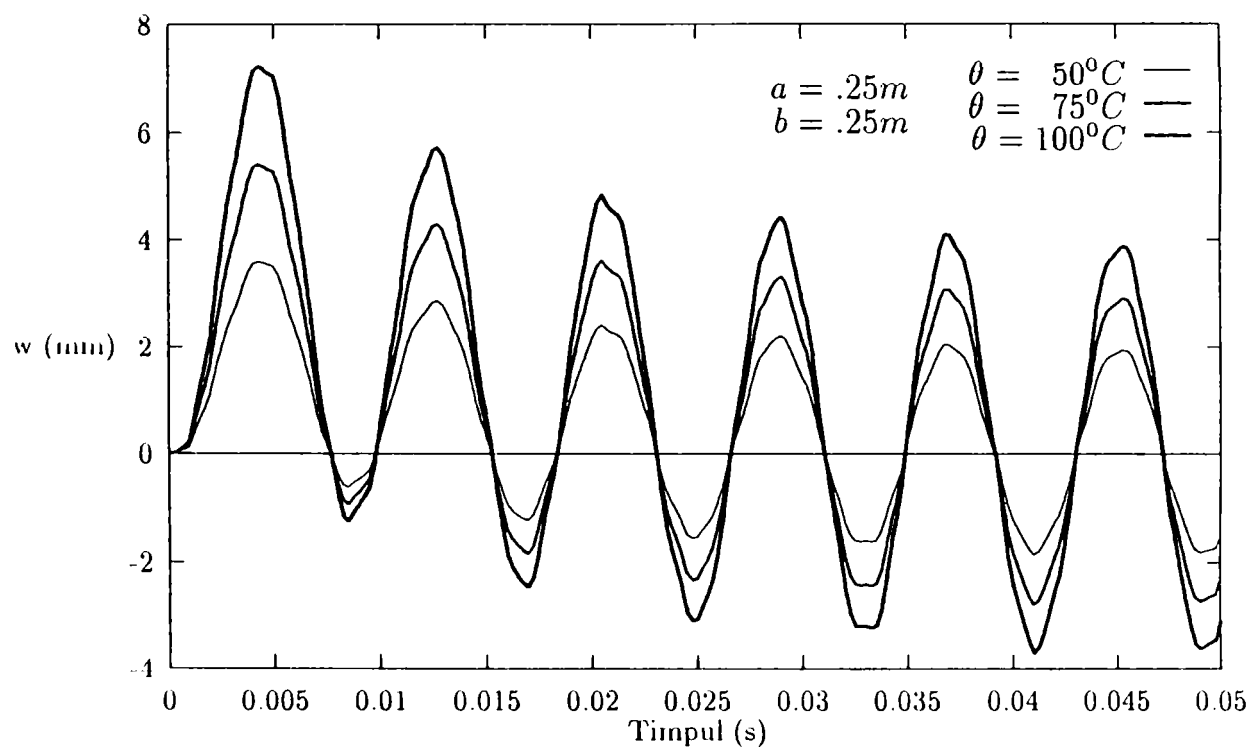


Fig. 5.1 Istoriile deflexiei w în centrul plăcii cu o singură lamină, pentru trei temperaturi de șoc diferite.

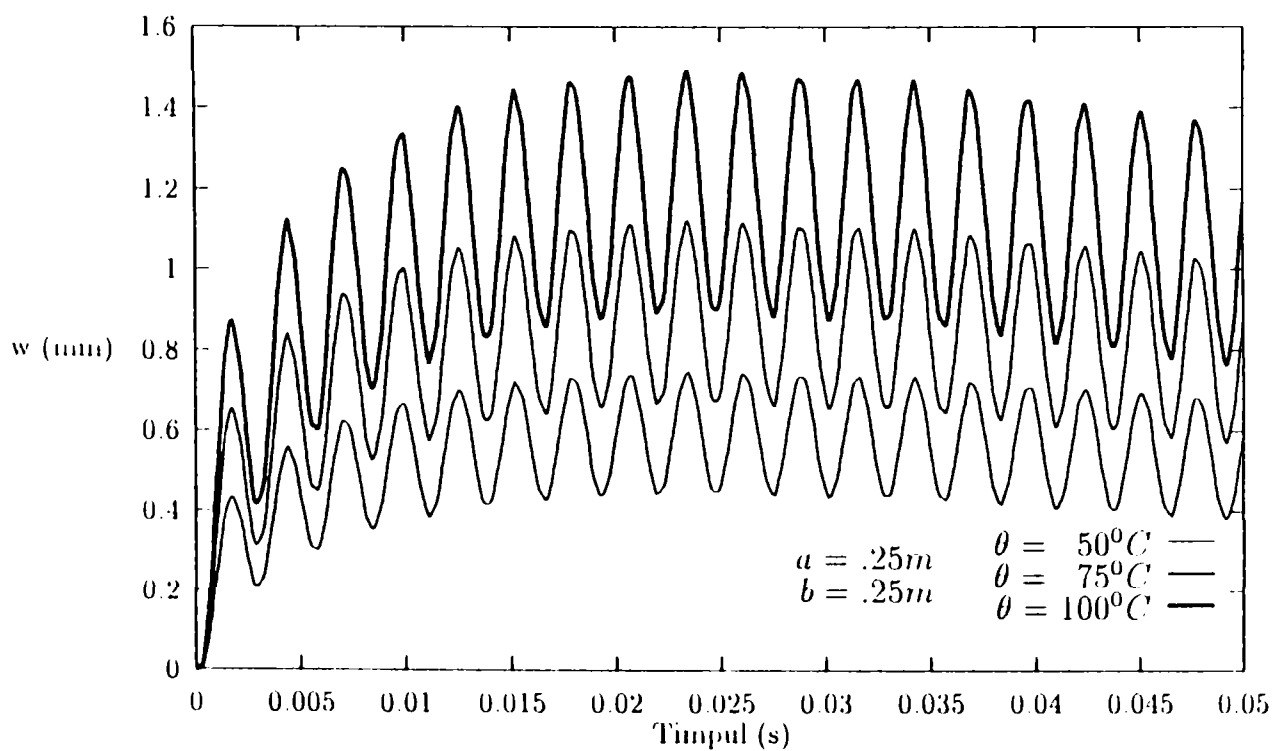


Fig. 5.2 Istoriile deflexiei w în centrul plăcii cu trei lamine, pentru trei temperaturi de șoc diferite.

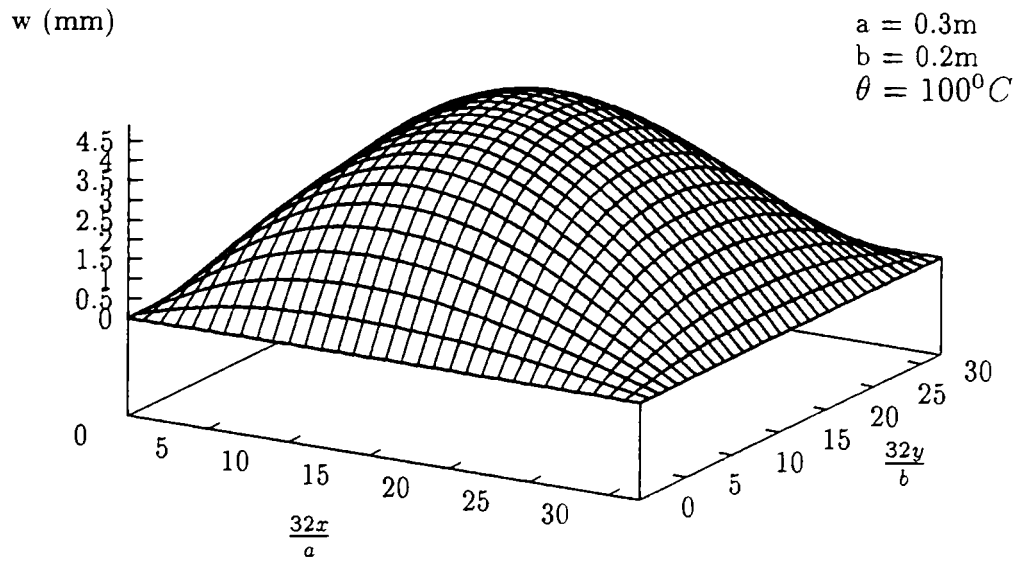


Fig. 5.3. Suprafața deflexiei w a plăcii cu o lamină la momentul $t = .004$ s.

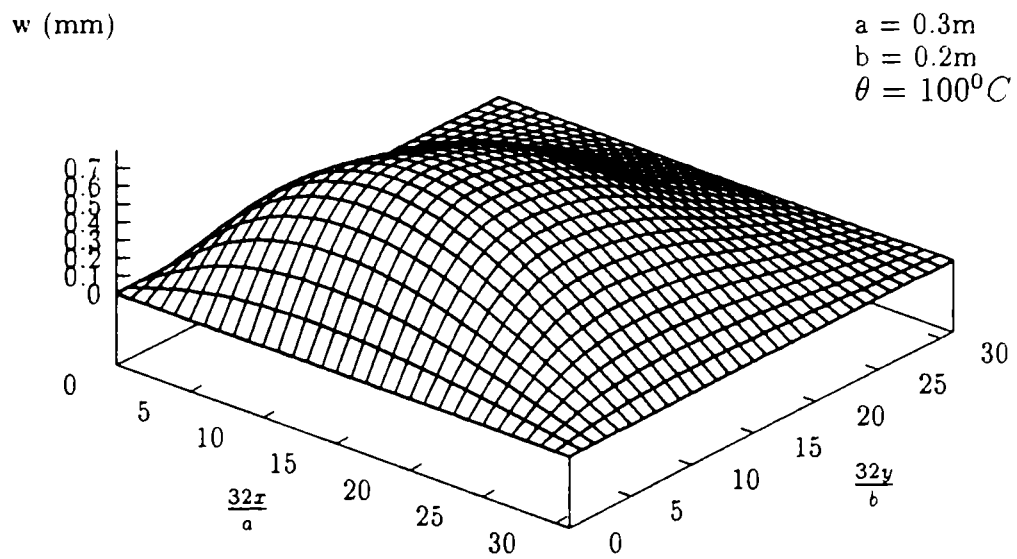


Fig 5.4. Suprafața deflexiei w a plăcii cu trei lamine la momentul $t = 0.004$ s.

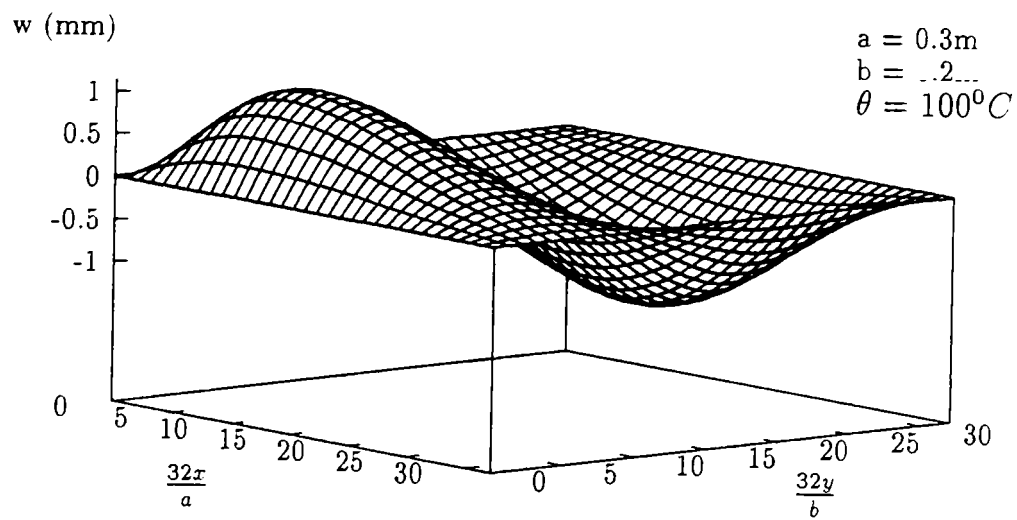


Fig. 5.5. Suprafața deflexiei w a plăcii cu o lamină la momentul $t = .00825$ s.

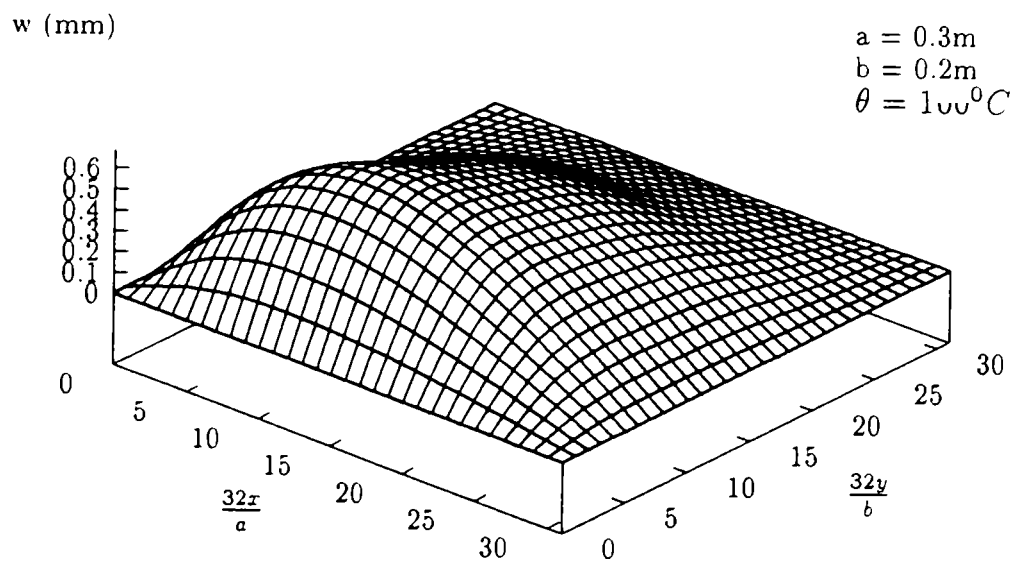


Fig. 5.6. Suprafața deflexiei w a plăcii cu trei lamine la momentul $t = 0.00825$ s.

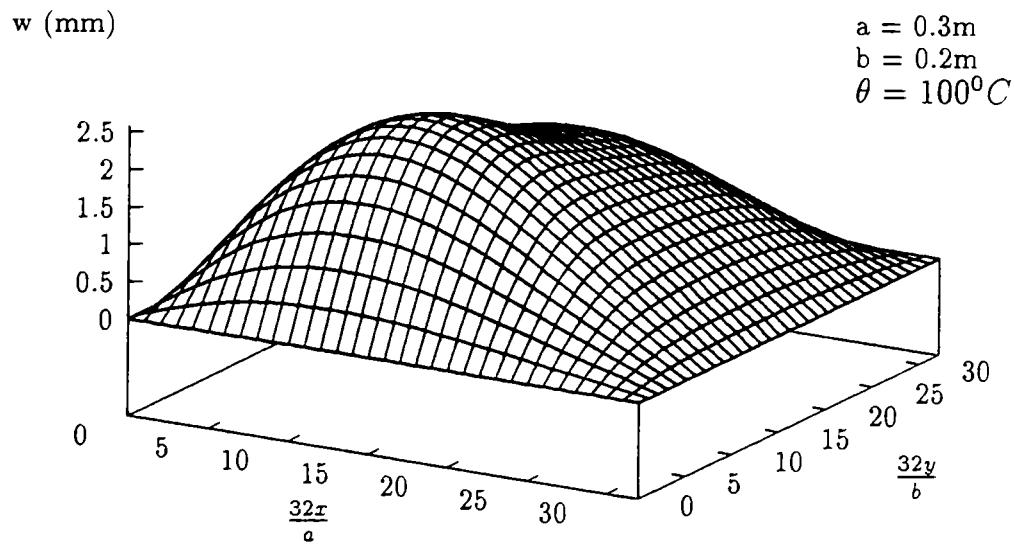


Fig. 5.7. Suprafața deflexiei w a plăcii cu o lamină la momentul $t = .01125$ s.

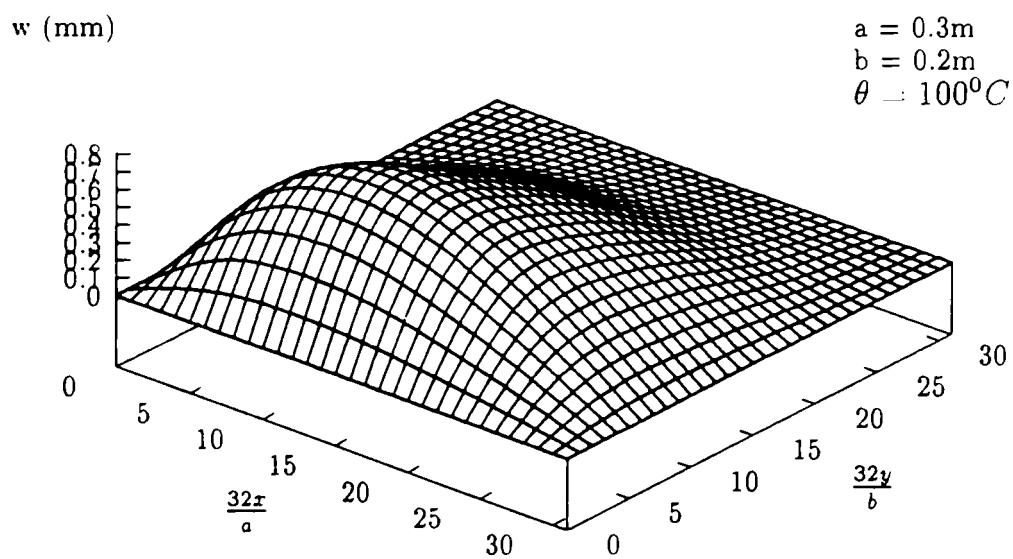


Fig. 5.8. Suprafața deflexiei w a plăcii cu trei lamine la momentul $t = 0.01125$ s.

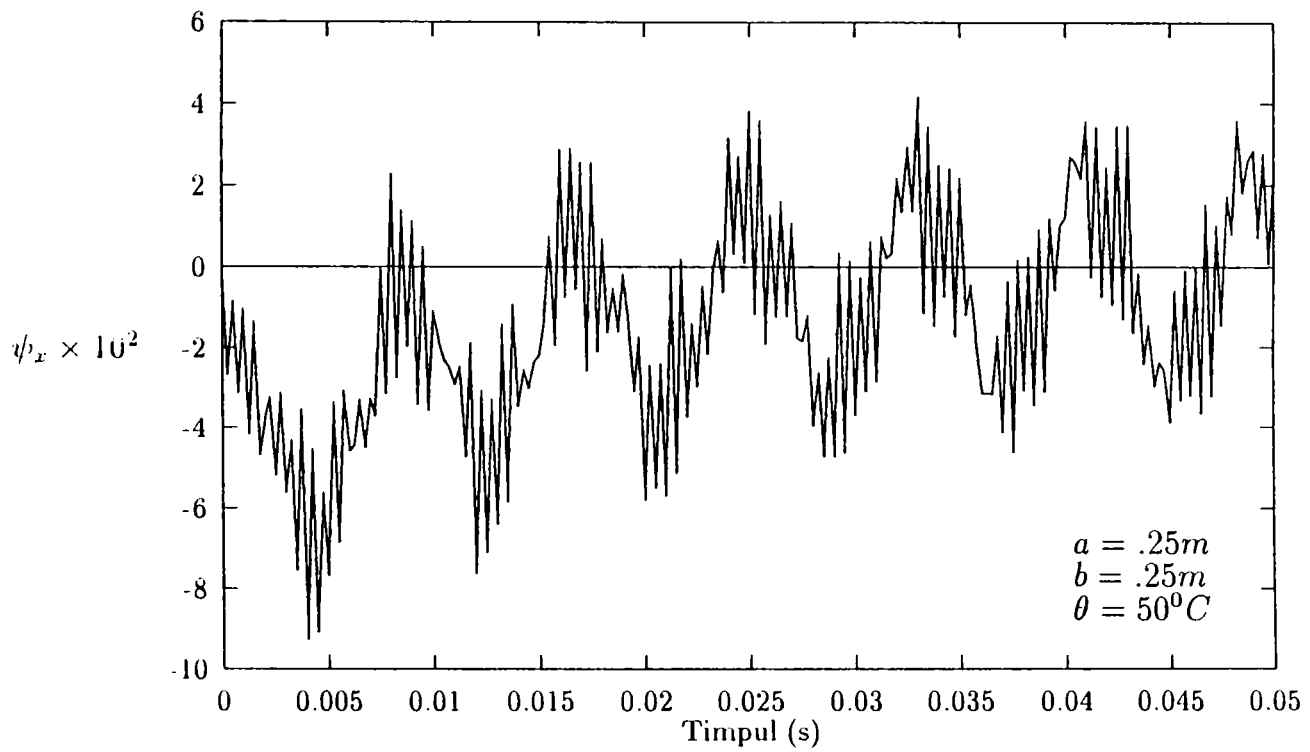


Fig. 5.9. Istoria unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu o lamină.

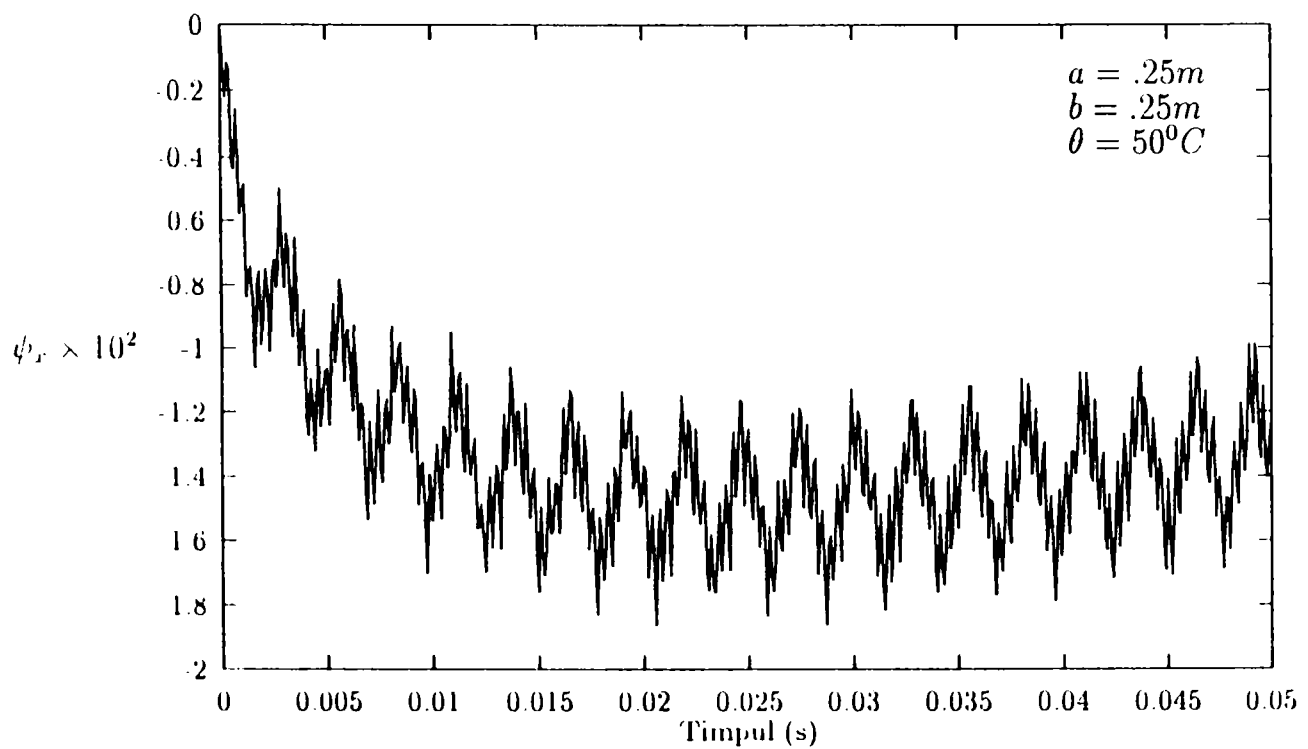


Fig. 5.10. Istoria unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu trei lamine.

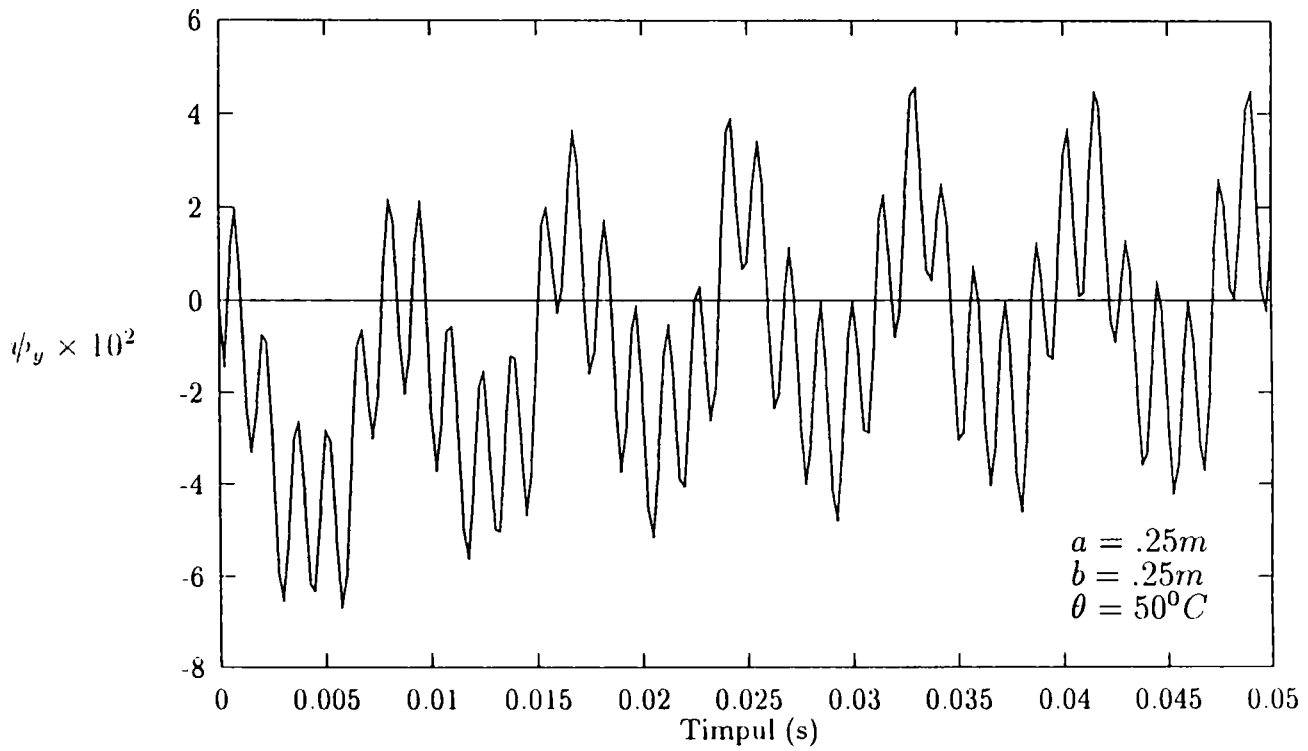


Fig. 5.11. Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu o lamină.

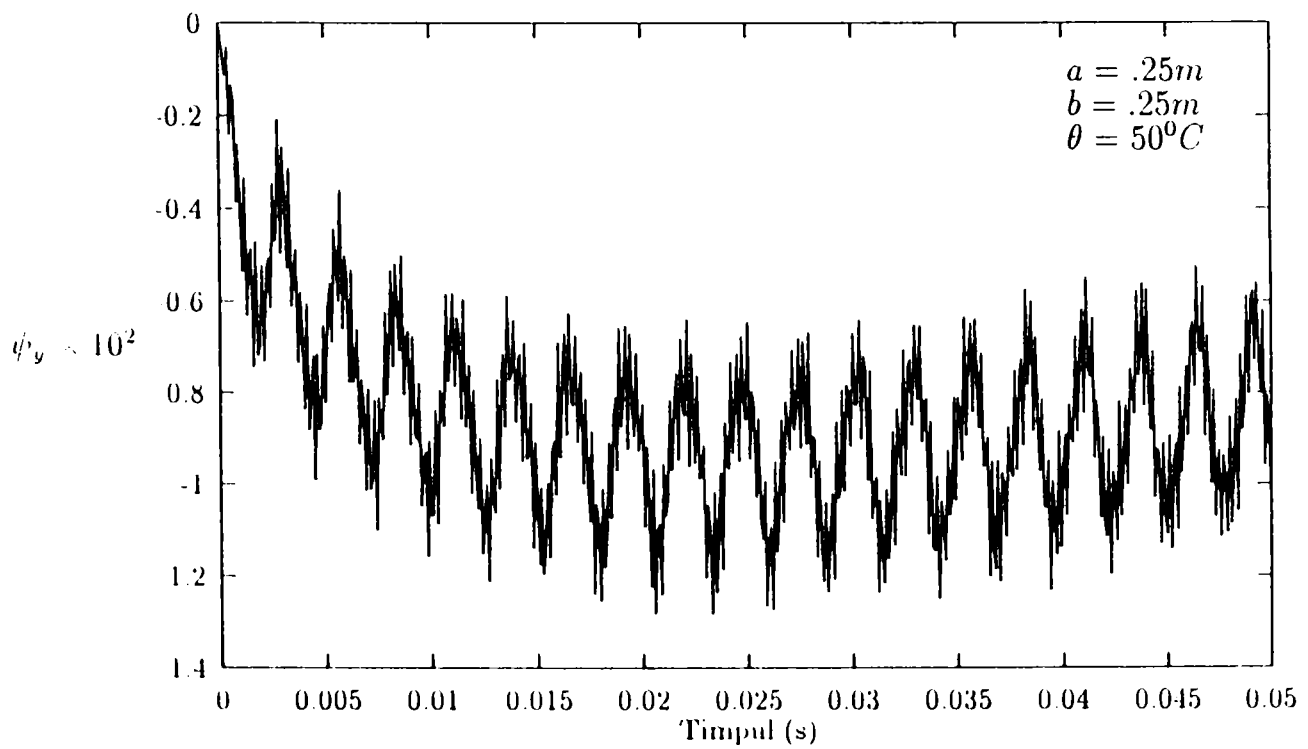


Fig. 5.12 Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu trei lamine.

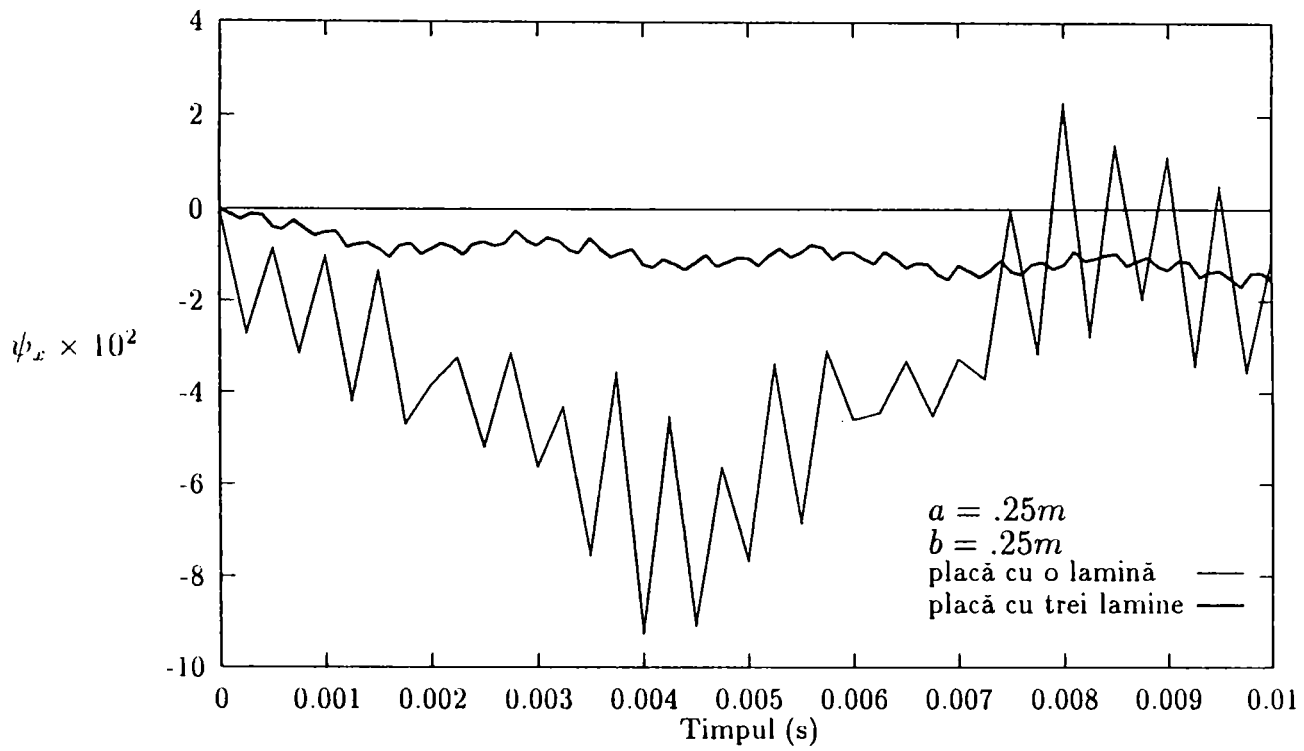


Fig. 5.13. Istoriile unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii la temperatura $\theta = 50^\circ C$.

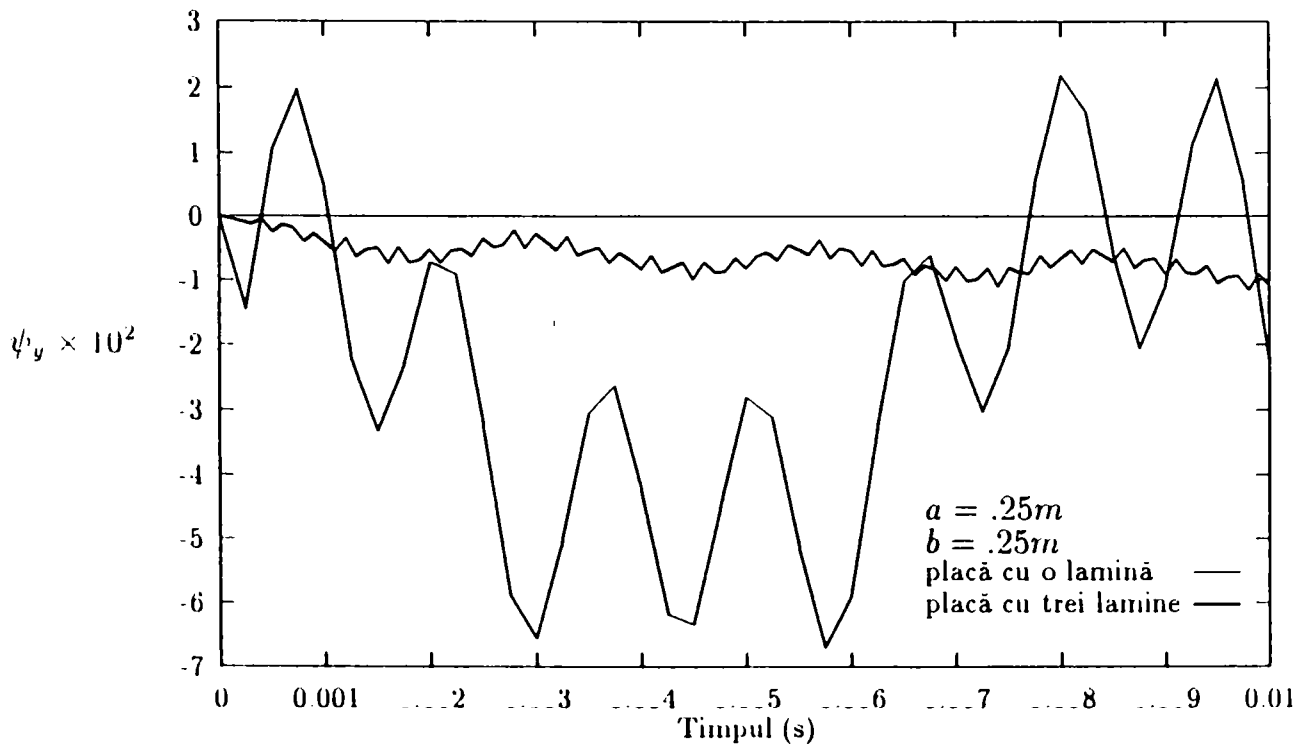


Fig. 5.14. Istoriile unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii la temperatura $\theta = 50^\circ C$.

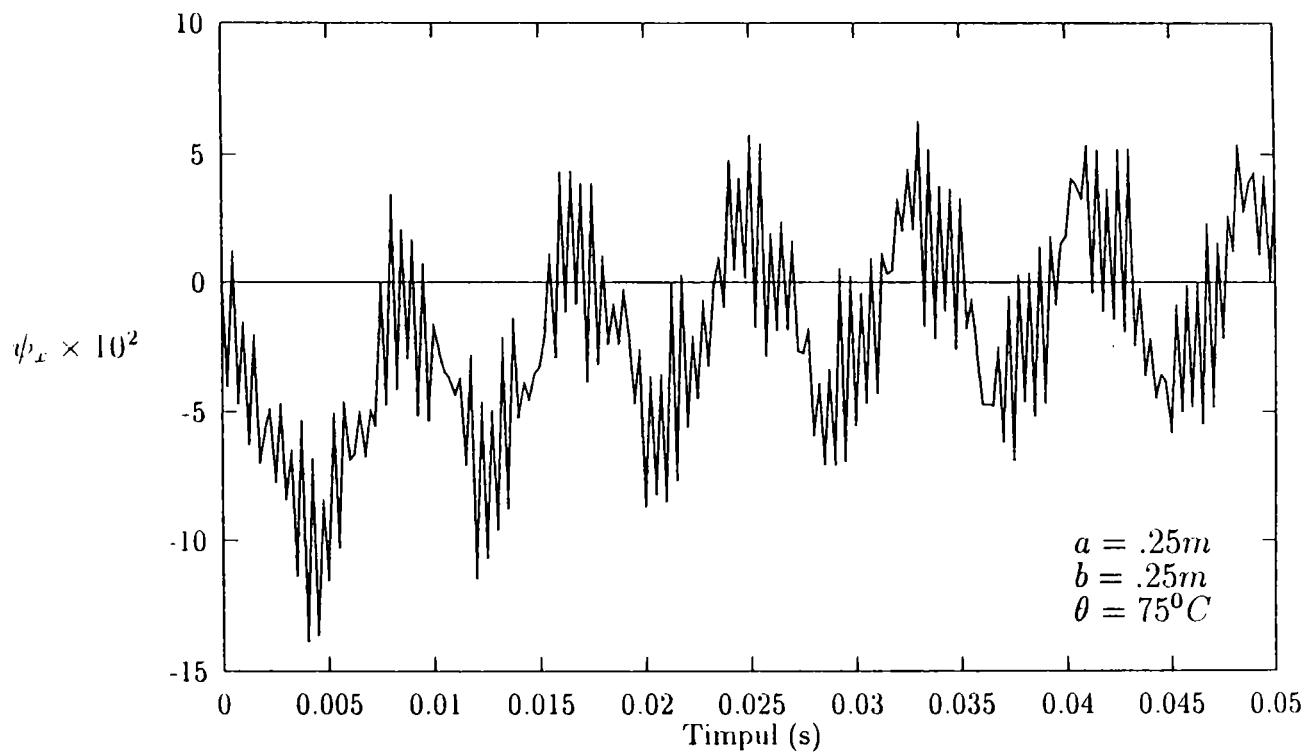


Fig. 5.15. Istoria unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu o lamină.

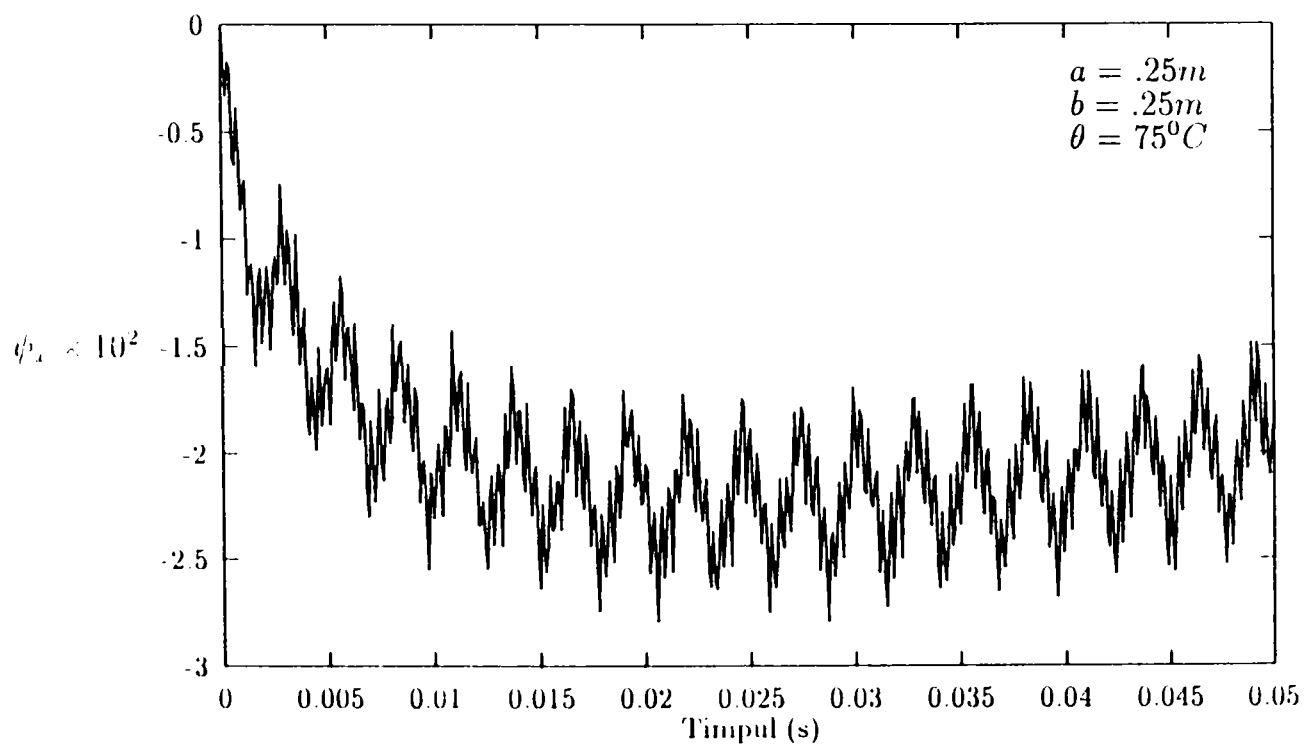


Fig. 5.16. Istoria unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu trei lamine.

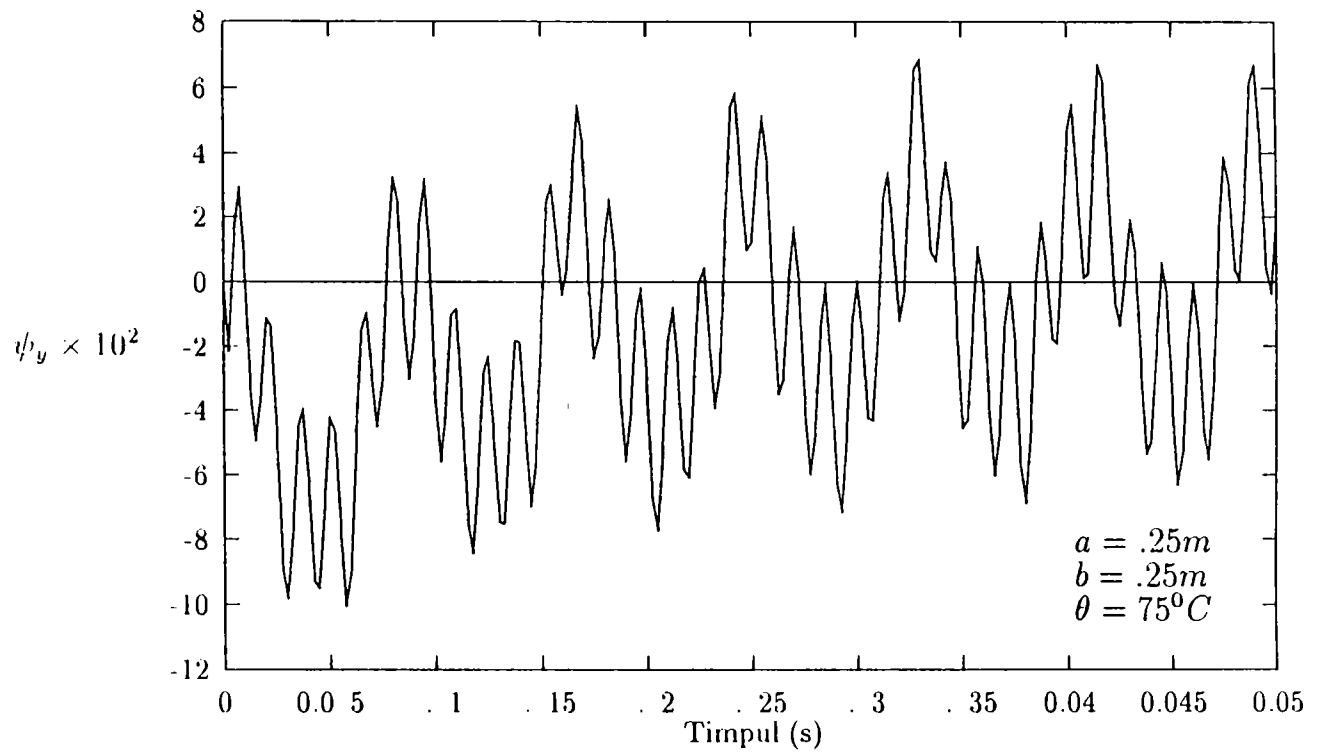


Fig. 5.17. Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu o lamină.

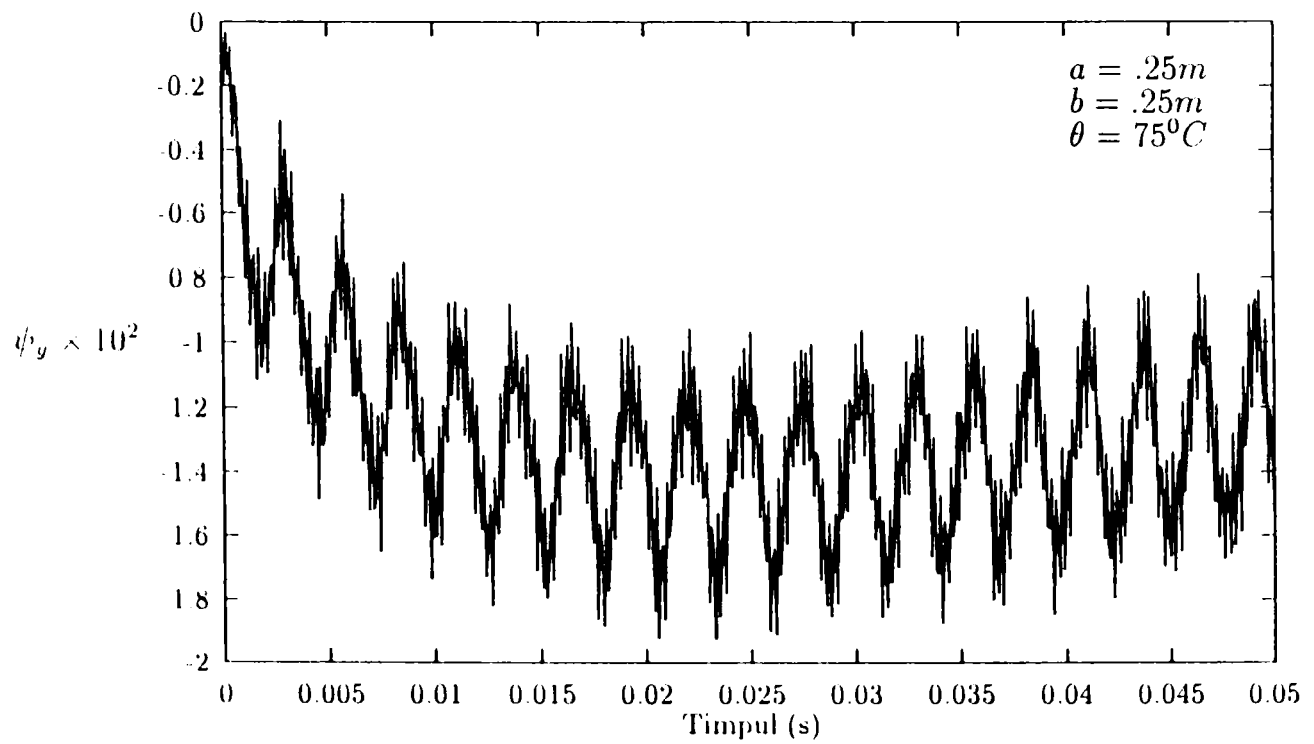


Fig. 5.18. Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu trei lamine.

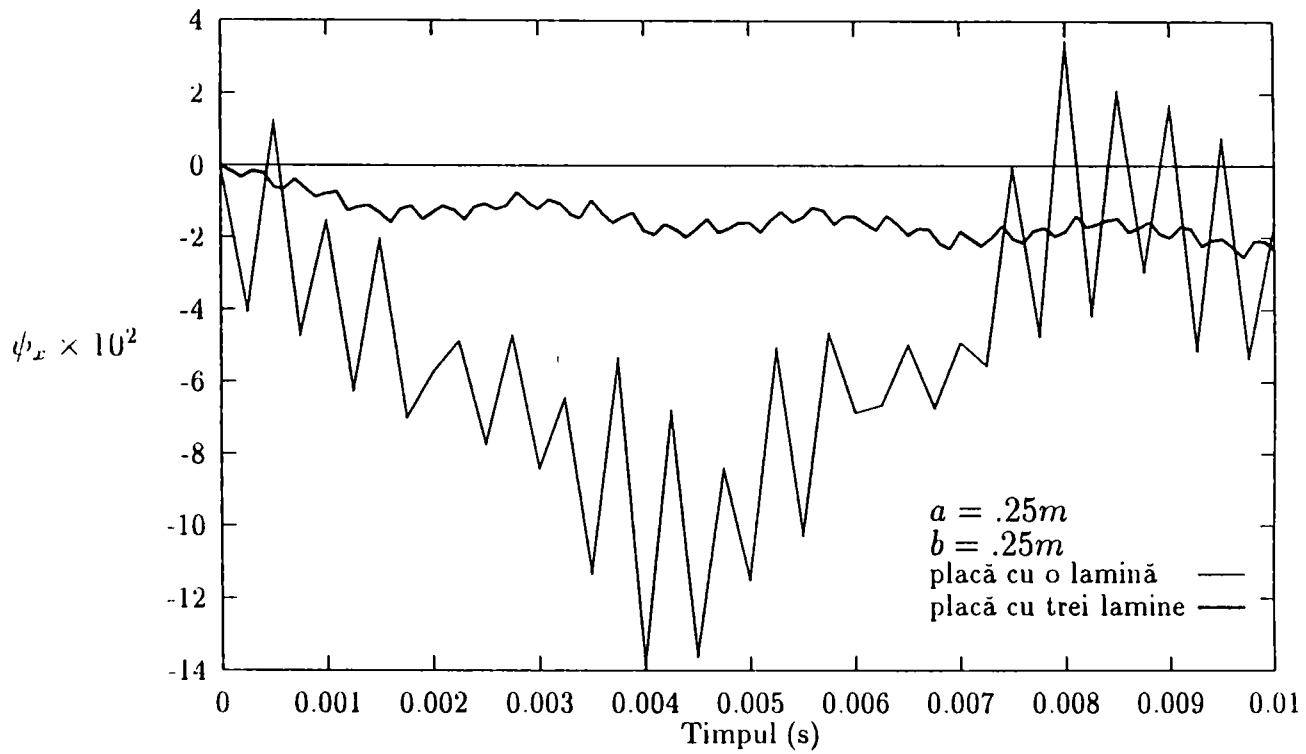


Fig. 5.19. Istoriile unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii la temperatura de șoc $\theta = 75^\circ\text{C}$.

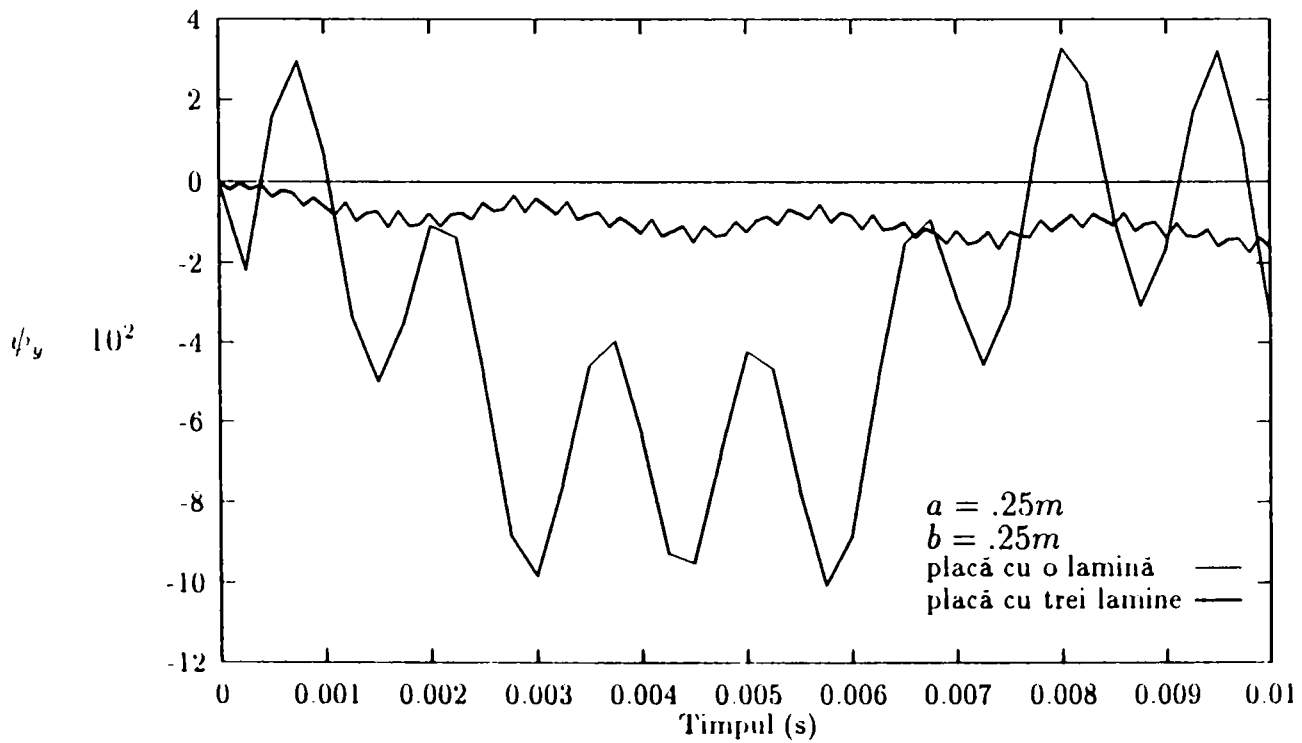


Fig. 5.20. Istoriile unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii la temperatura de șoc $\theta = 75^\circ\text{C}$.

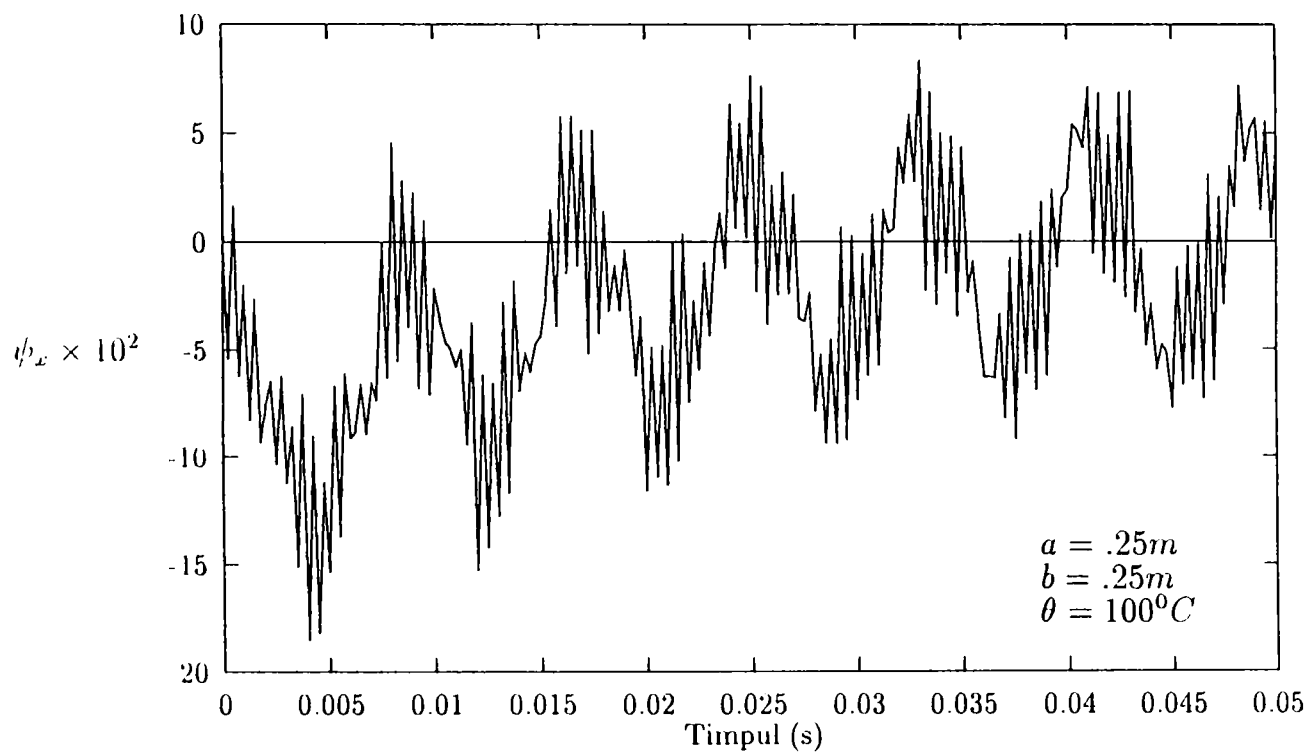


Fig. 5.21. Istoria unghiului de rotație ψ_x in centrul plăcii cu o lamină.

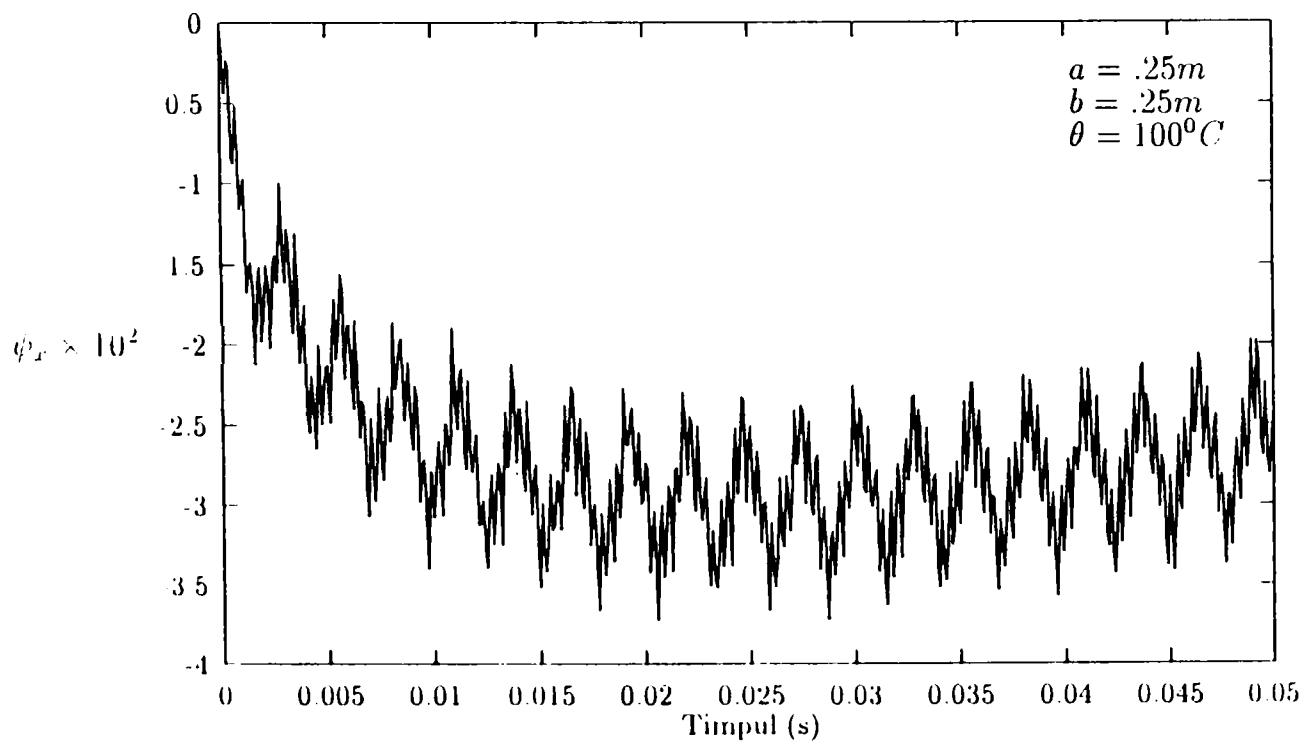


Fig. 5.22. Istoria unghiului de rotație ψ_x in centrul plăcii cu trei lamine.

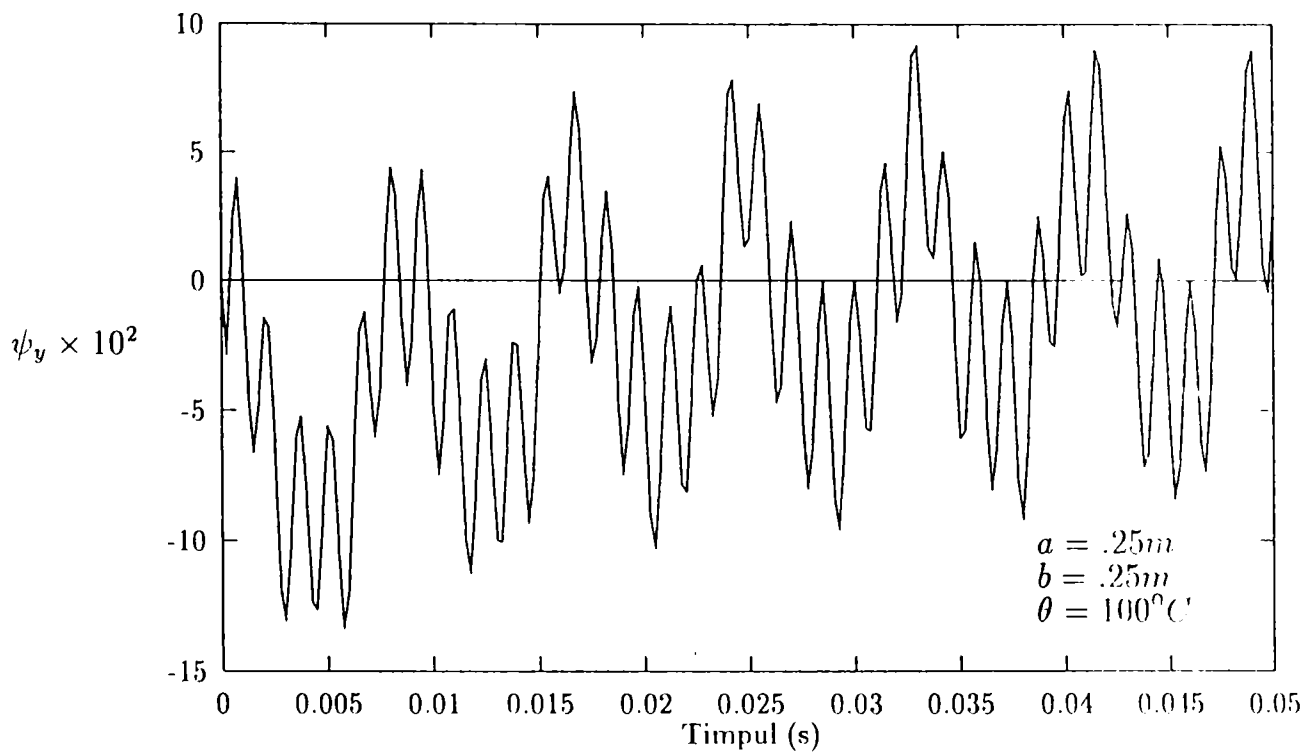


Fig. 5.23. Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu o lamină.

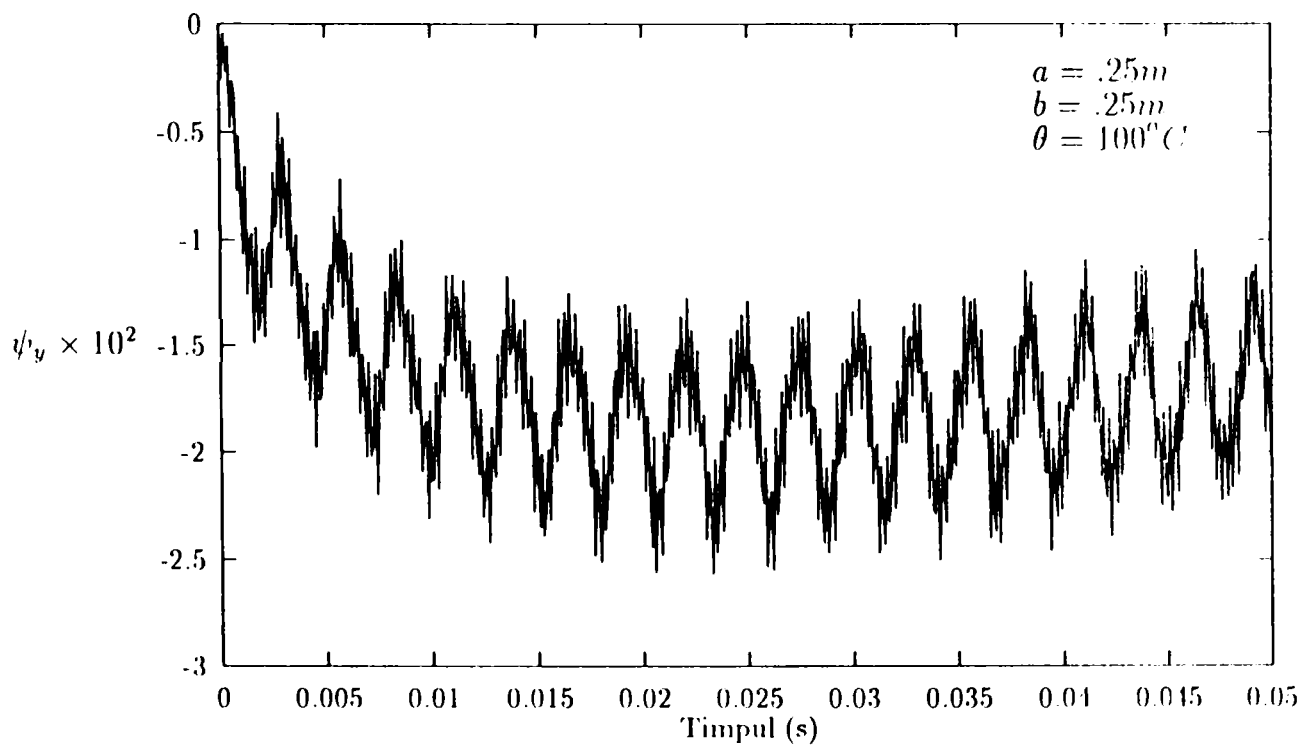


Fig. 5.24. Istoria unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu trei lamine

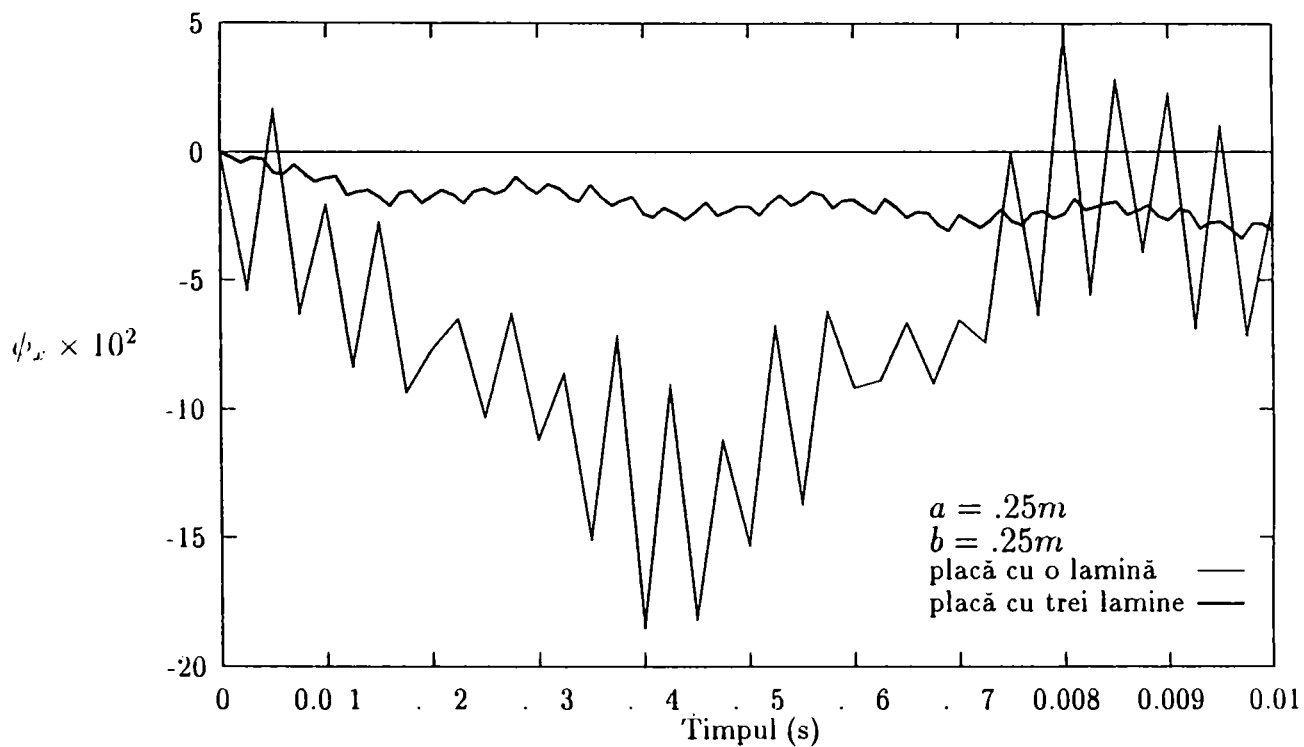


Fig. 5 25. Istoriile unghiului de rotație ψ_x în centrele a două plăci la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

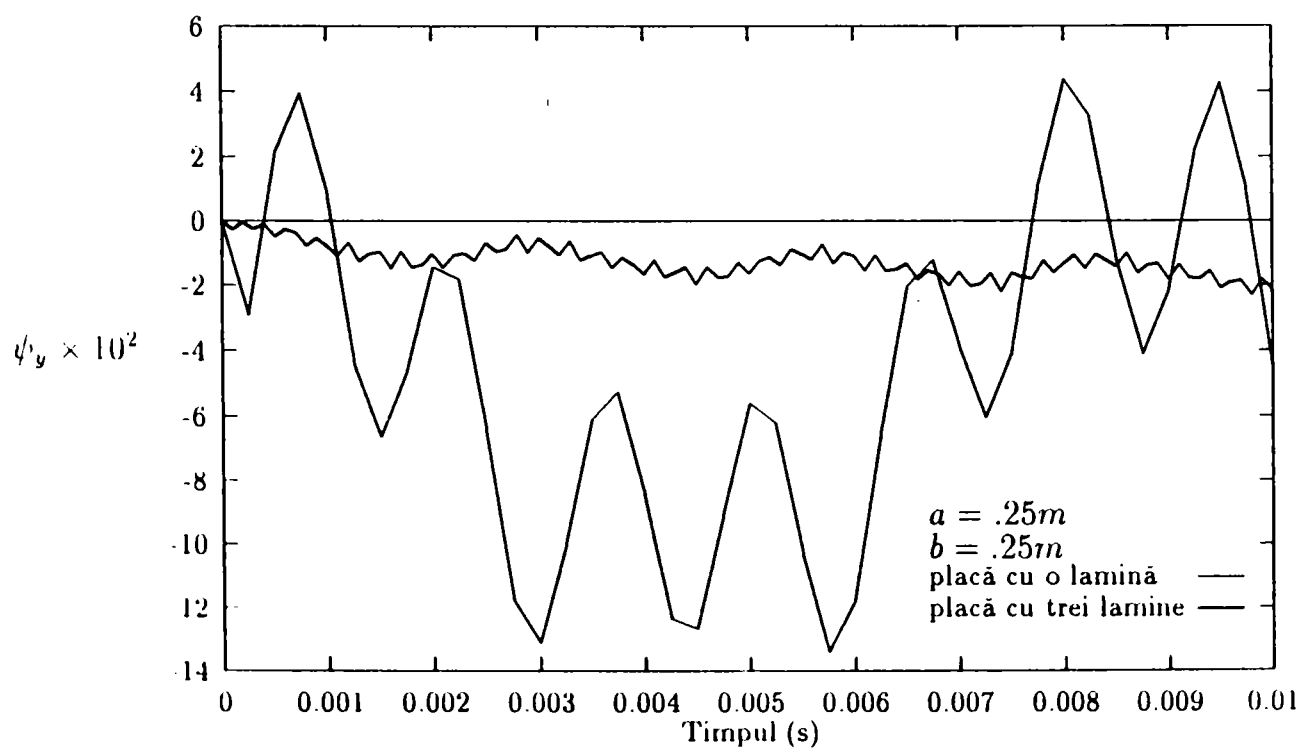


Fig. 5 26. Istoriile unghiului de rotație ψ_y în centrele a două plăci la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

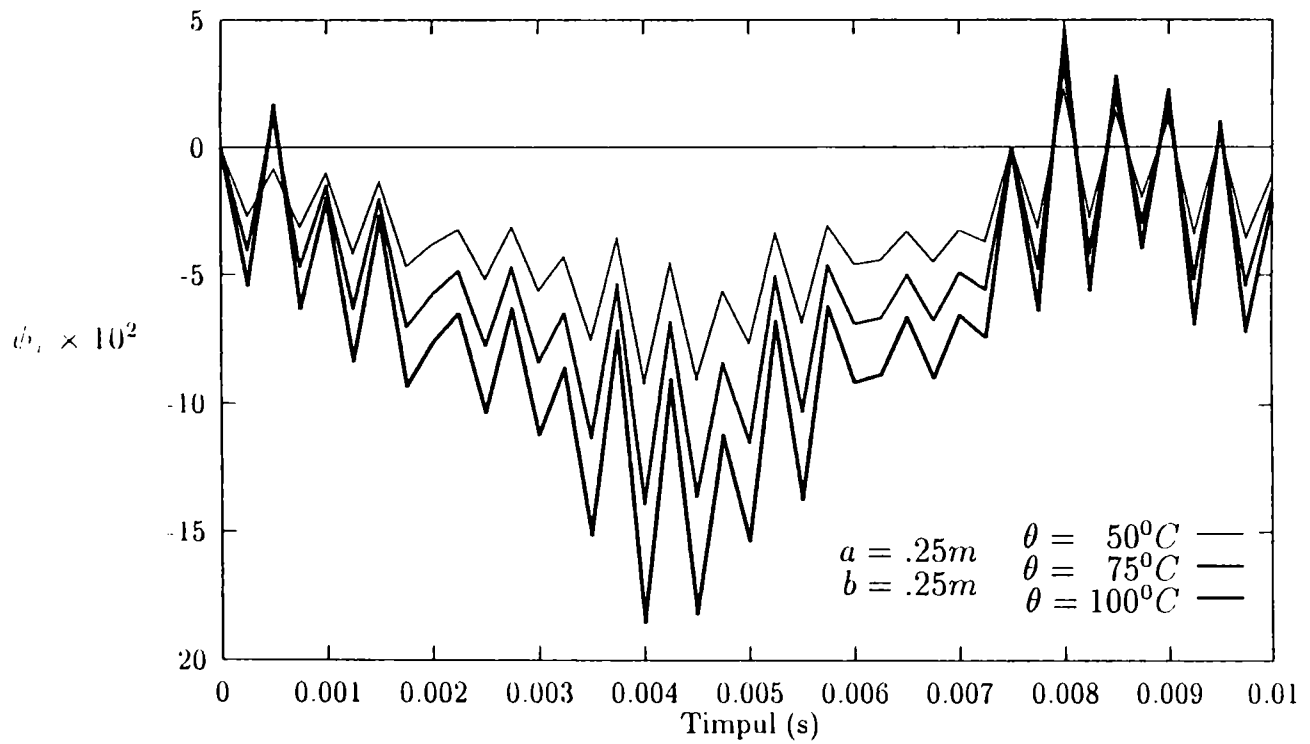


Fig. 5 27 Istoriile unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu o lamină la temperaturi de șoc diferite.

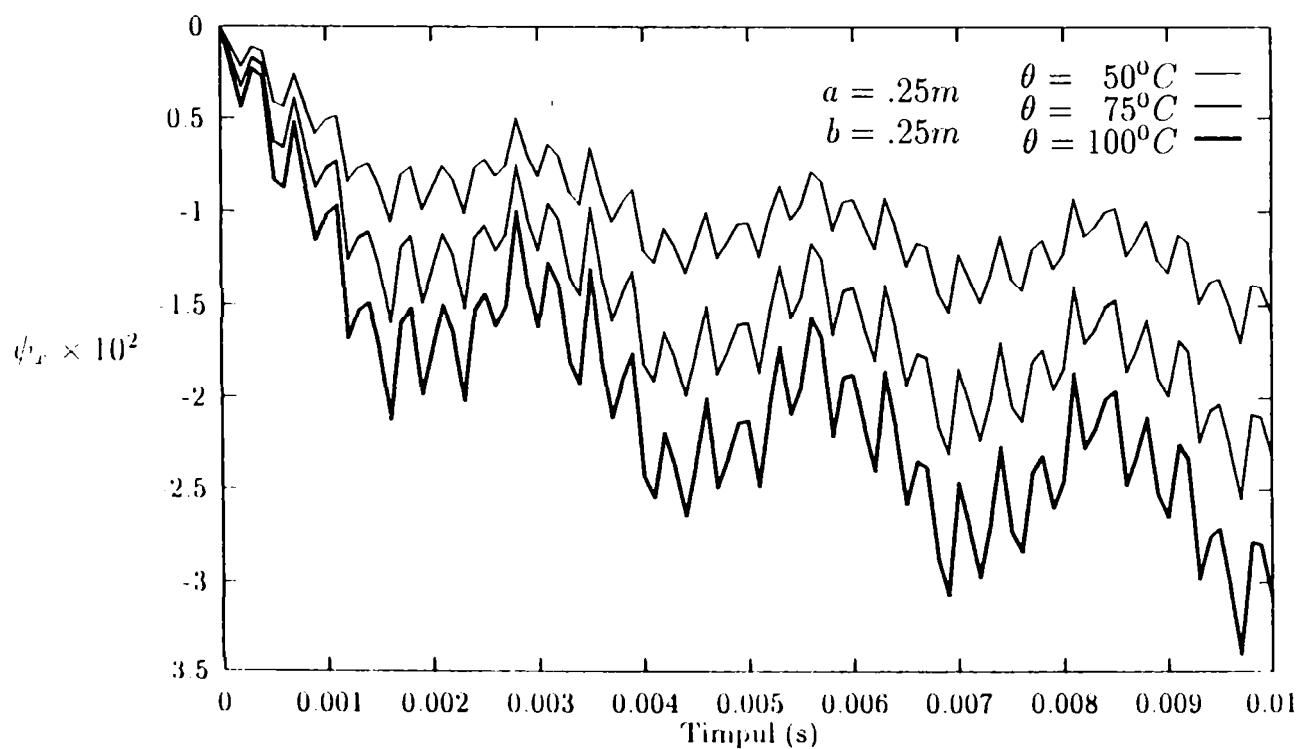


Fig. 5 28 Istoriile unghiului de rotație ψ_x în centrul plăcii cu trei lamine la temperaturi de șoc diferite.

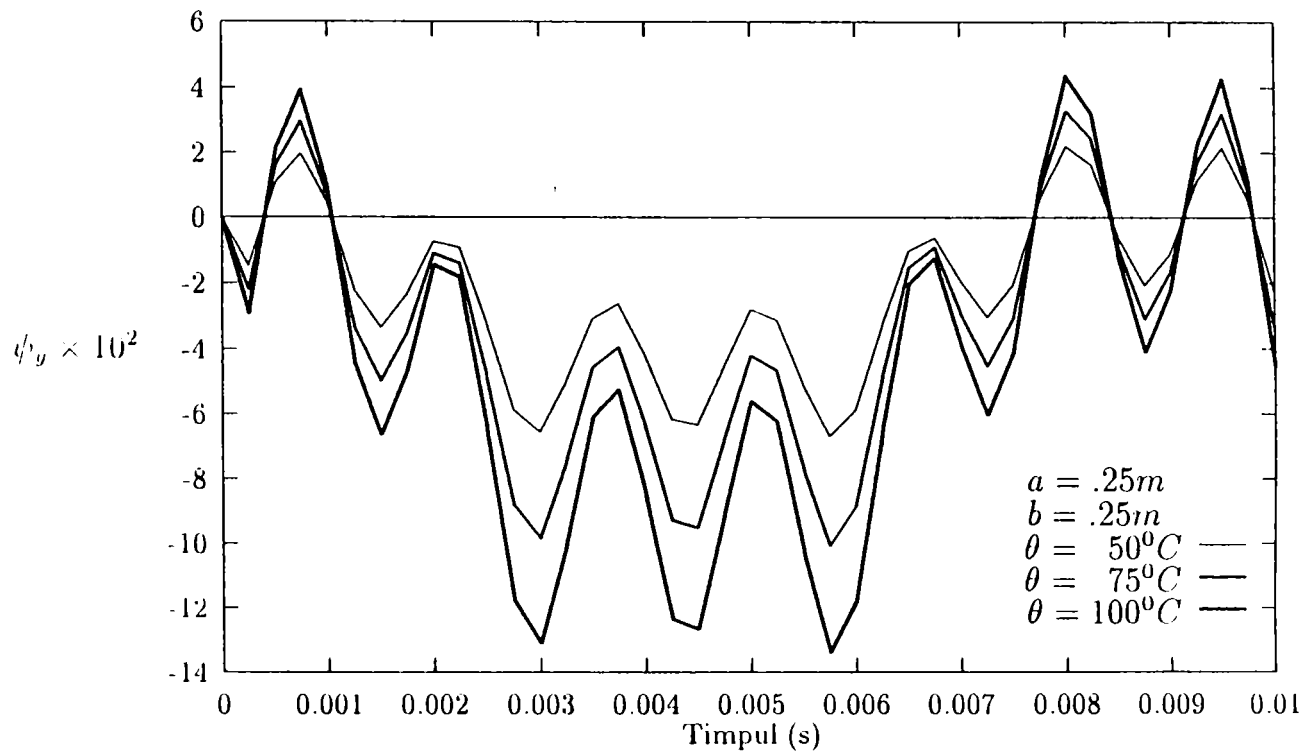


Fig. 5.29. Istoriile unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu o lamină la temperaturi de șoc diferite.

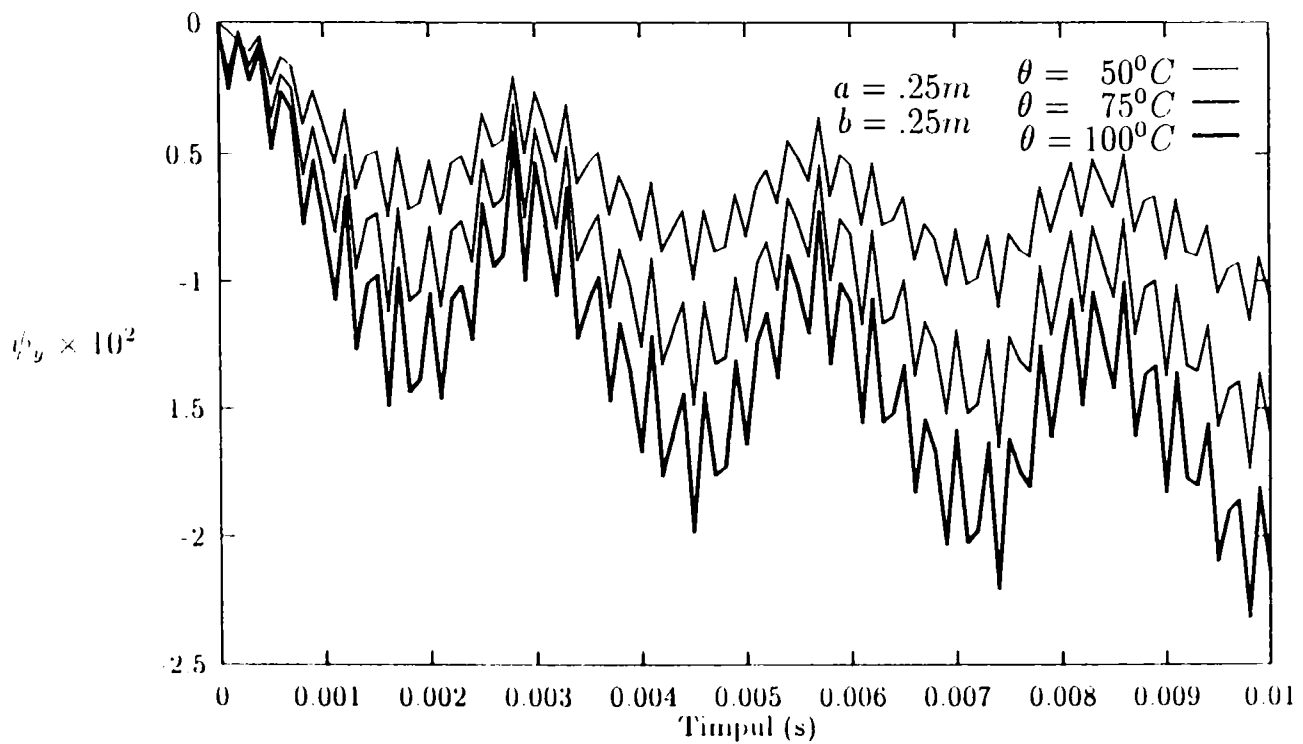


Fig. 5.30. Istoriile unghiului de rotație ψ_y în centrul plăcii cu trei lamine pentru temperaturi de șoc diferite.

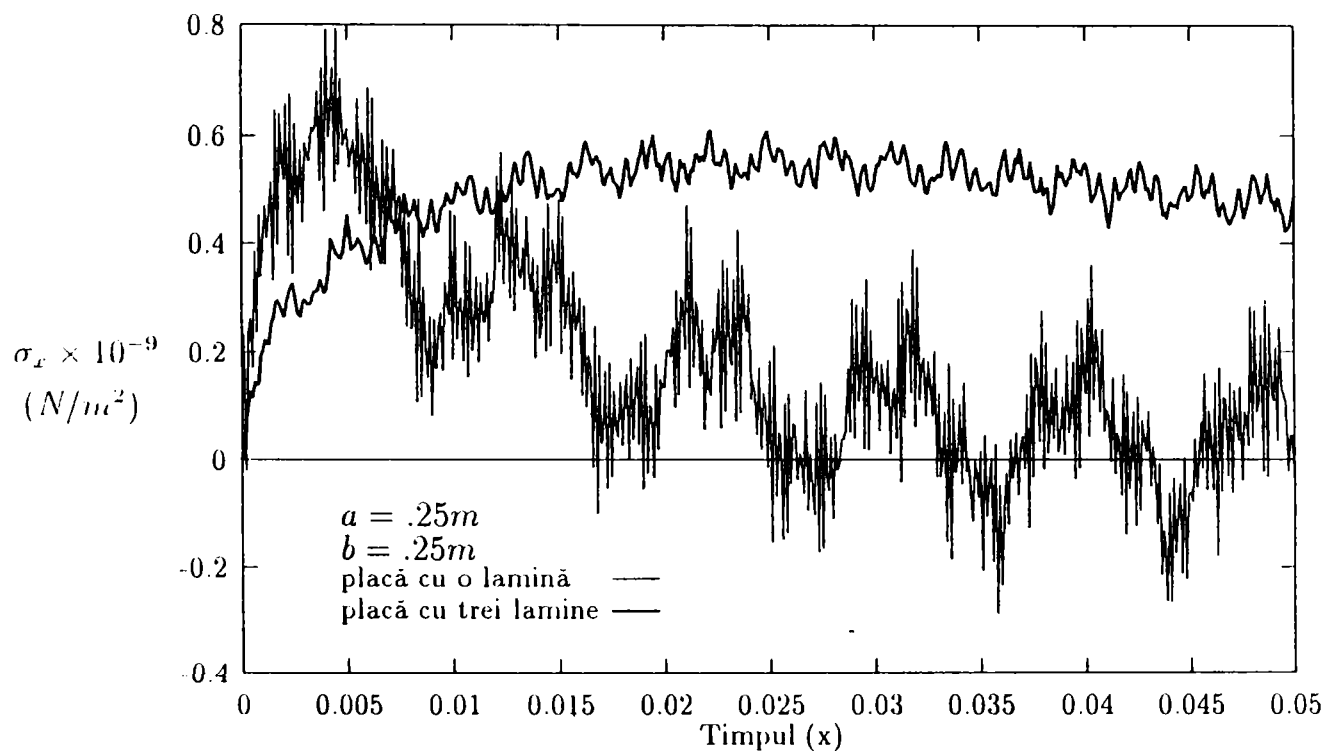


Fig 5.31. Istoriile tensiunii σ_x în centrul plăcii pe fața inferioară la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

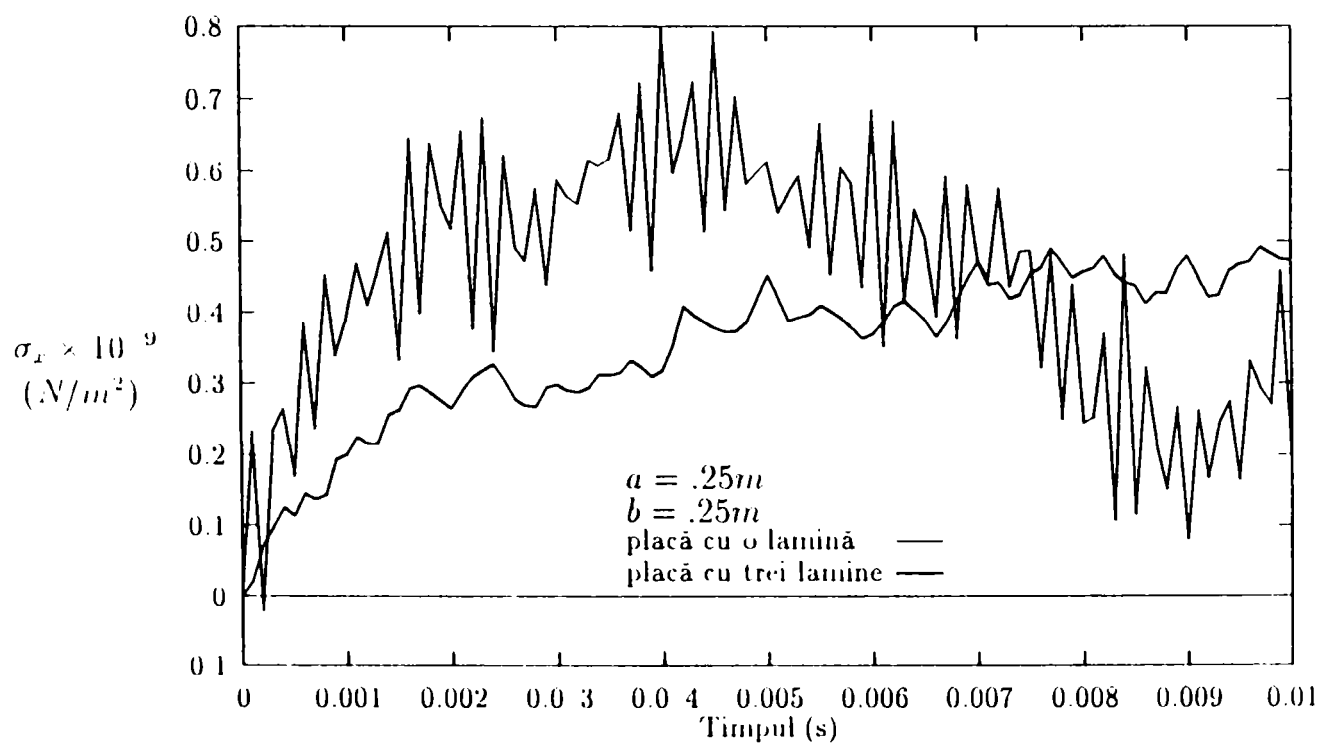


Fig 5.32. Istoriile tensiunii σ_x în centrul plăcii pe fața inferioară la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$ (detaliu).

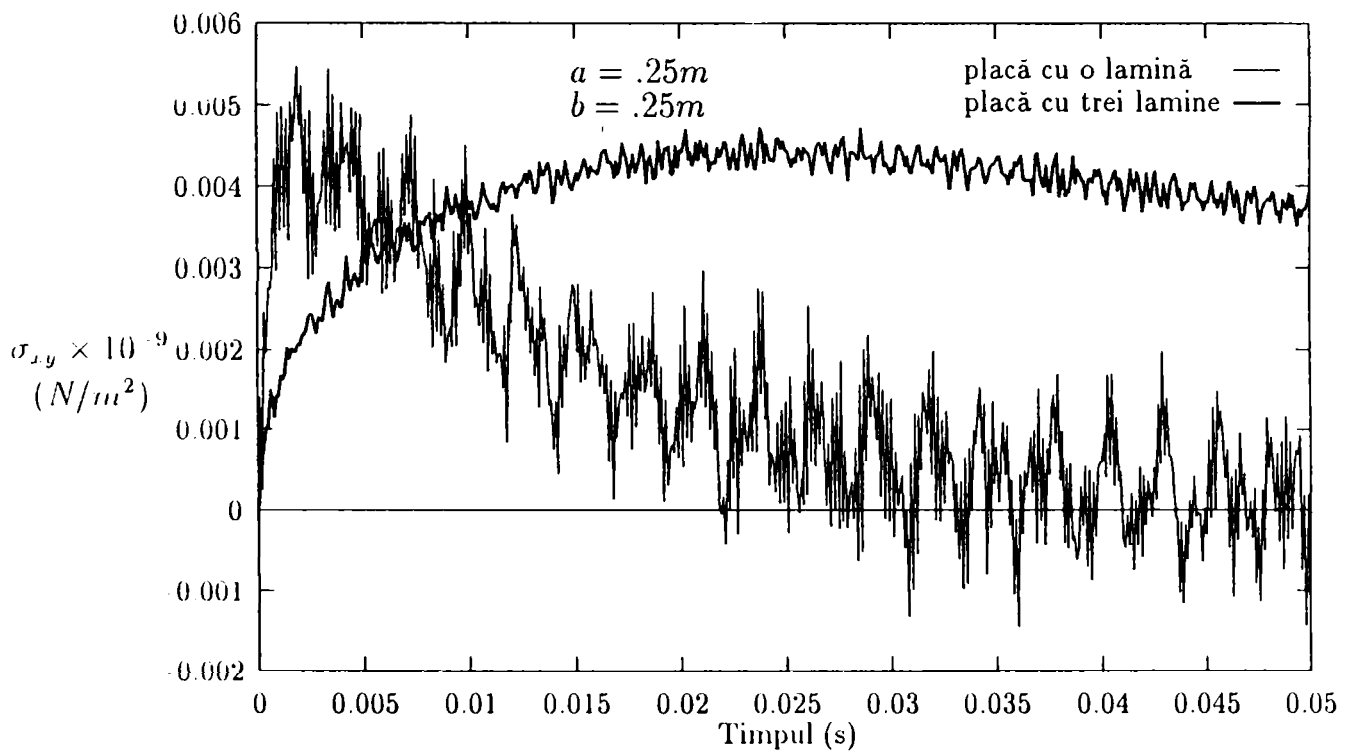


Fig. 5.33 Istoriile tensiunii σ_{xy} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

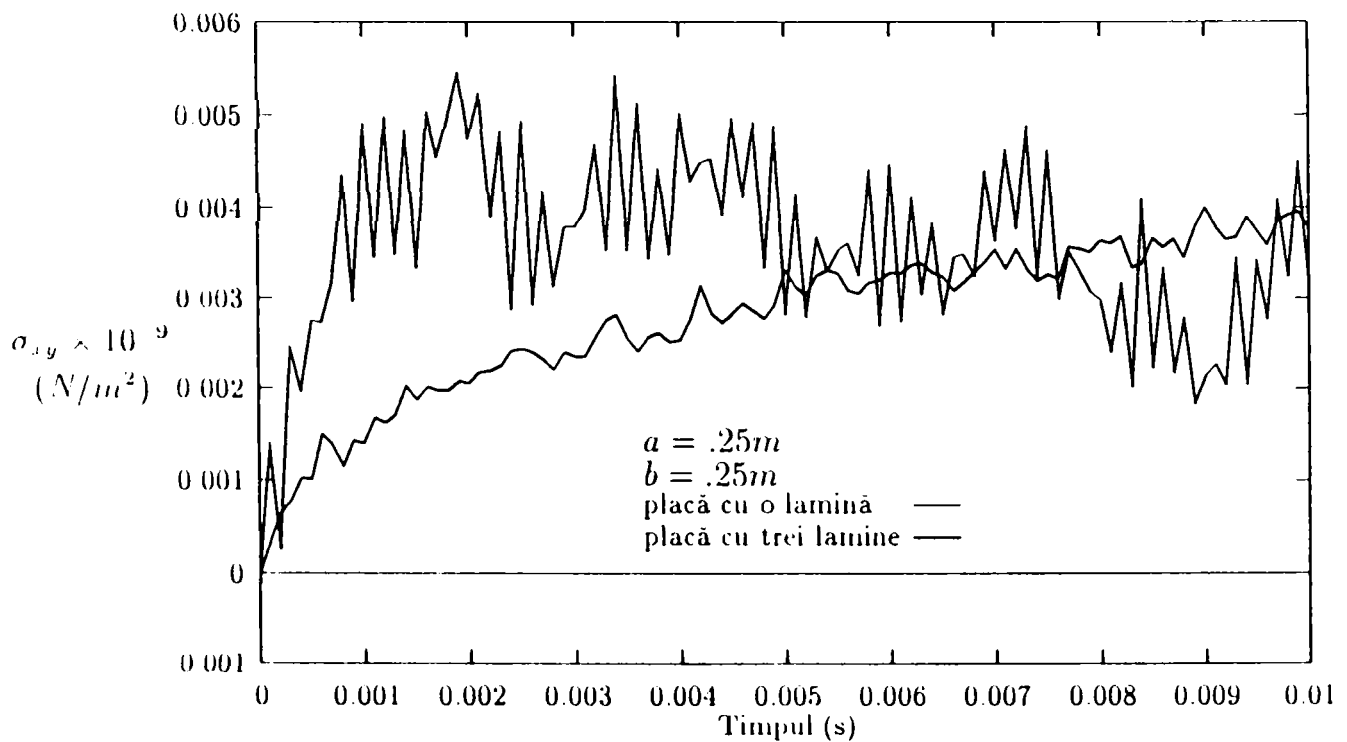


Fig. 5.31 Istoriile tensiunii σ_{xy} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$ (detaliu).

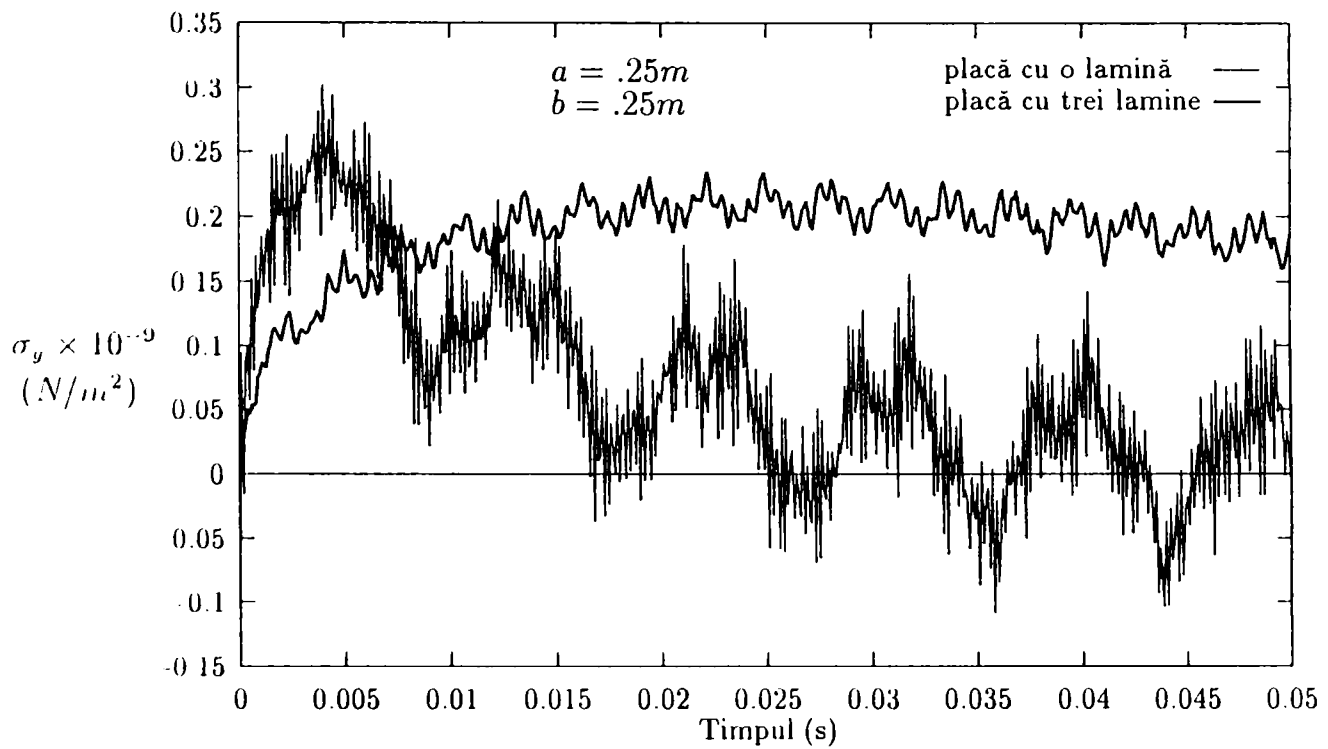


Fig. 5.35. Istoriile tensiunii σ_y în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

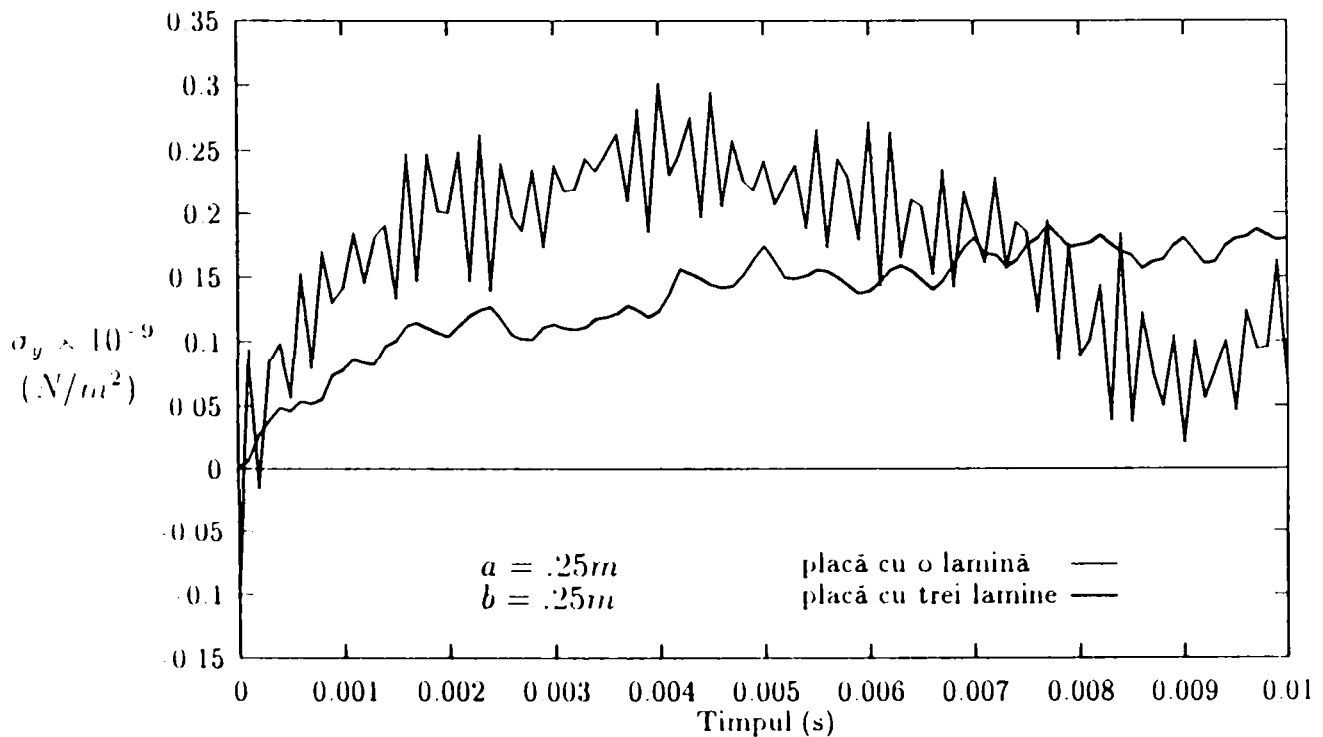


Fig. 5.36. Istoriile tensiunii σ_y în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$ (detaliu).

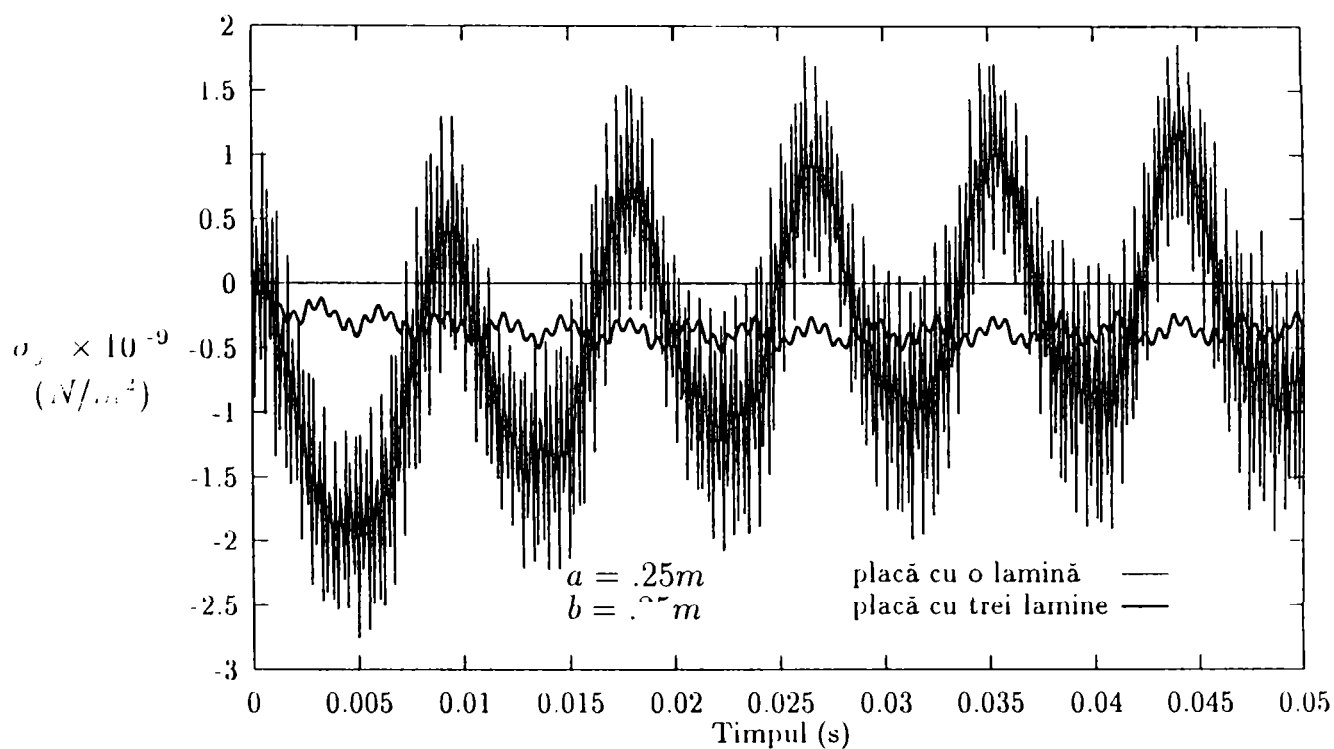


Fig. 5.37. Istoriile tensiunii σ_{yz} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

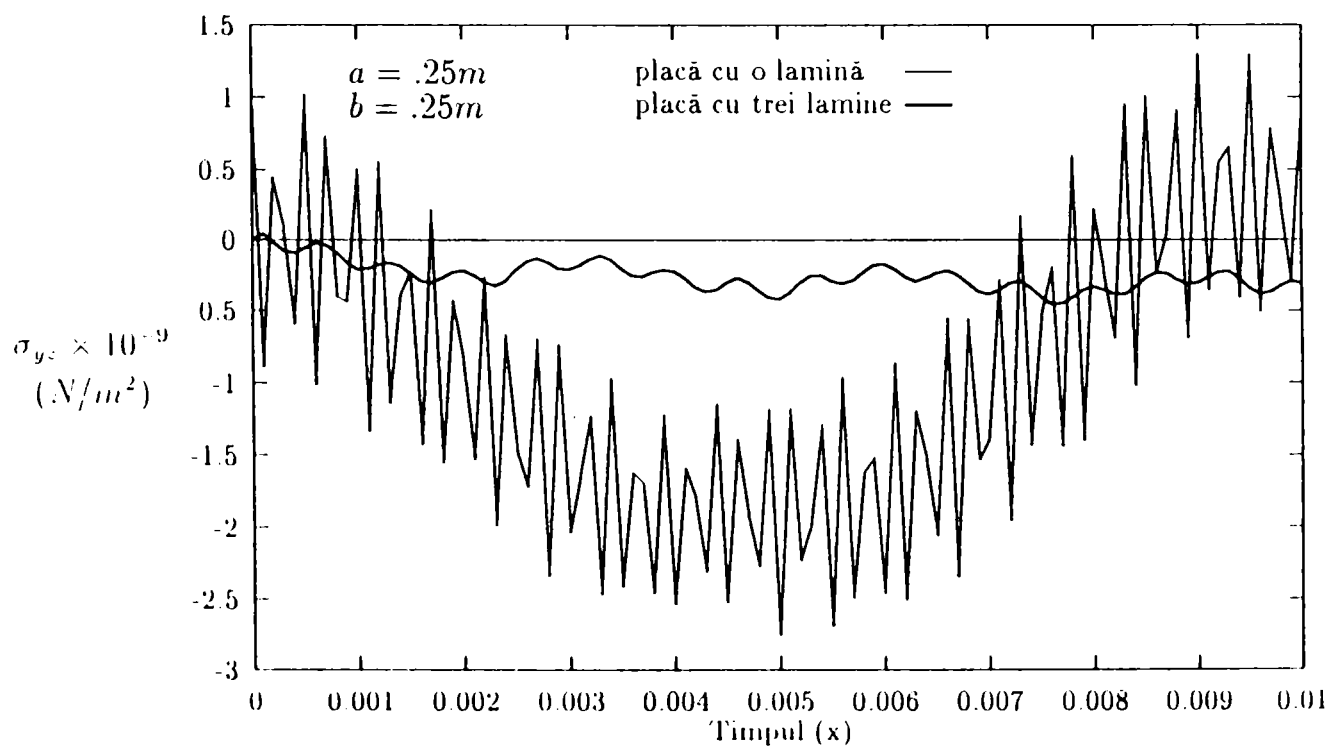


Fig. 5.38. Istoriile tensiunii σ_{yz} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$ (detaliu).

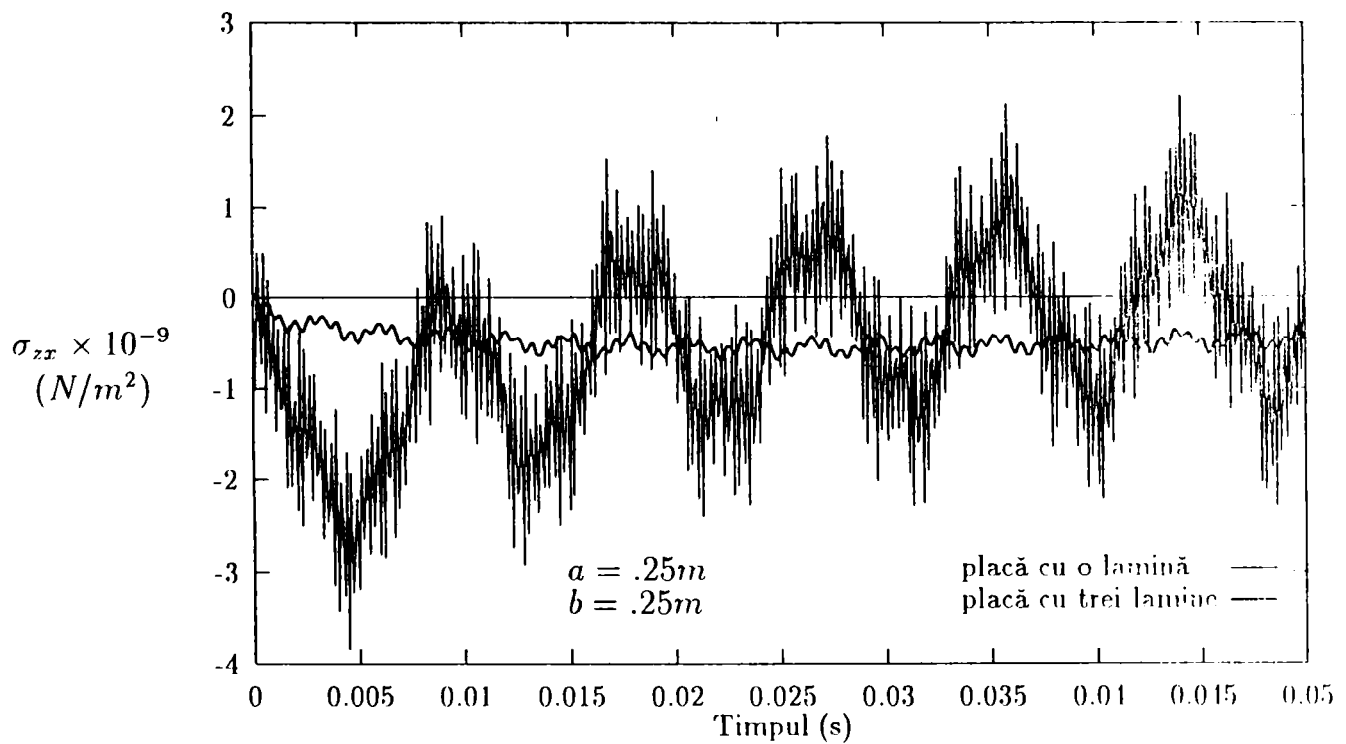


Fig. 5.39. Istoriile tensiunii σ_{zx} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$.

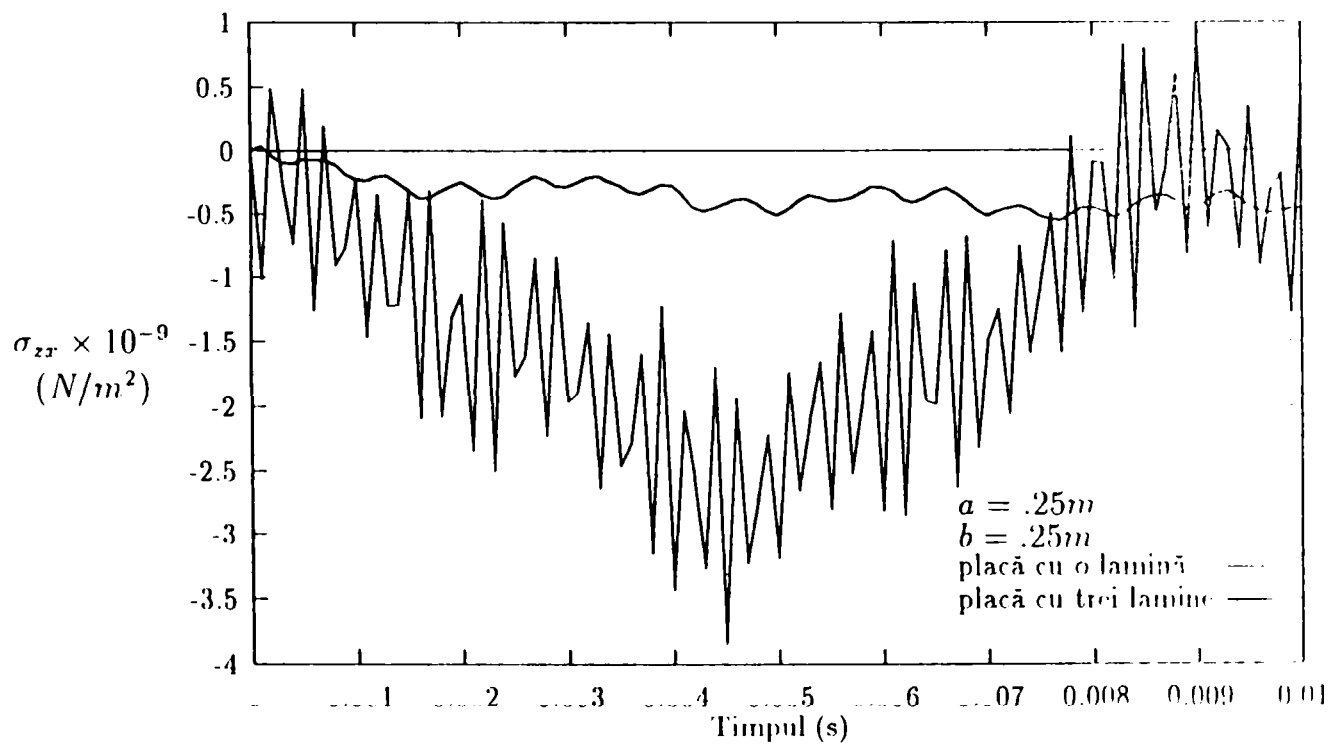


Fig. 5.40. Istoriile tensiunii σ_{zx} în centrul feței inferioare a plăcii la temperatura de șoc $\theta = 100^{\circ}C$ (a) (b).

CAPITOLUL VI

OBSERVAȚII. CONTRIBUȚII. CONCLUZII.

Studiul comportamentului dinamic al plăcilor din materiale compozite și în particular al celor stratificate cu fibre lungi este destul de complex, în condiții de șoc termic.

Această lucrare nu reprezintă decât o etapă în cercetarea realizată asupra materialelor compozite în cadrul catedrelor de Mecanică și Rezistența materialelor ale Universității „Politehnica” din Timișoara, începând cu anul 1984 de către autorul prezentei teze și conducătorul său științific.

Voi prezenta în continuare sintetic, rezultatele obținute în fiecare capitol cu sublinierea contribuțiilor mele.

Temperatura este un parametru ce poate modifica semnificativ comportamentul în timpul utilizării al structurilor realizate din materiale compozite.

Capitolele I și II sunt consacrate tocmai studierii din punct de vedere teoretic a dinamicii plăcilor subțiri elastic laminate în care se ia în considerare câmpul de temperatură.

În capitolul I consacrat dinamicii plăcii subțiri termoelastic laminată, principalele contribuții ale autorului sunt:

- deducerea ecuațiilor dinamicii termoelasticității plăcii subțiri termoelastic laminată sub formă matricială;
- scrierea condițiilor pe frontiera laterală a plăcii sub o formă destul de generală;
- introducerea noțiunilor de cauză externă, proces admisibil, câmp deplasare - temperatură și câmp deplasare - temperatură admisibil pentru placă subțire termoelastic laminată;
- caracterizarea problemei mixte a plăcii subțiri termoelastic laminată cu ajutorul deplasărilor și a temperaturii;
- formularea problemei dinamicii plăcii subțiri termoelastic laminată cu ajutorul produsului de convoluție; în ecuațiile de bază sunt încorporate și condițiile inițiale;
- caracterizarea plăcii subțiri liniar termoelastic laminată cu ajutorul tensiunii și a fluxului de căldură;
- se dă o formulare variațională cu ajutorul produsului de convoluție, teorema 1.8.1 când funcționala conține câmpul deplasare - temperatură ca

funcții independente și teorema 1.8.2 când conține întregul proces admisibil cu elementele sale ca funcții independente;

- demonstrarea unei teoreme de existență și unicitate pentru dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată, încastrată pe marginea laterală - iar ca necesitate pentru aceasta, în prealabil s-au demonstrat trei propoziții și patru leme;

- principii de minim în dinamica plăcii subțiri liniar termoelastic laminată, unde principalele rezultate obținute sunt: construirea unei funcționale în domeniul Laplace; două teoreme în domeniul transformatei Laplace, principiul de staționaritate și principiul de minim în domeniul transformatei Laplace exprimate respectiv prin teoremele 1.10.1 și 1.10.2; considerând niște spații de funcții convenabil alese și construind o funcțională în domeniul timpului s-a obținut principiul de minim în domeniul timpului exprimat prin teorema 1.10.3.

Capitolul al II-lea consacrat propagării undelor în placa subțire liniar termoelastic laminată conține următoarele contribuții principale:

- definirea curbei de discontinuitate tare (undă de șoc) care se propagă într-o placă subțire liniar termoelastic laminată;

- definirea intensității saltului undei de șoc care se propagă în placa subțire liniar termoelastic laminată;

- stabilirea condiției de propagare a undei de șoc care se propagă în placa subțire liniar termoelastic laminată exprimată prin teorema 2.2.1; variația intensității undei de șoc exprimată prin teorema 2.2.2, care de-a lungul bicaracteristicelor se exprimă printr-o ecuație diferențială foarte simplă dată în cadrul teoremei 2.2.3;

- definirea curbei de discontinuitate slabă (undă de accelerație);

- definirea intensității undei de accelerație într-o placă subțire liniar termoelastic laminată;

- stabilirea condiției de propagare a undei de accelerație care se propagă în placa subțire liniar termoelastic laminată, exprimată prin teorema 2.3.1; variația intensității undei de accelerație exprimată prin teorema 2.3.2, care de-a lungul bicaracteristicelor are aceeași formă ca și în cazul undei de șoc dar cu coeficienți diferiți (teorema 2.3.3);

- s-a studiat propagarea undelor armonice plane într-o placă subțire; s-a obținut ecuația dispersiei undelor;

Capitolul al III - lea este dedicat studierii plăcii subțiri vâscoelastic lami-

nată. Dintre principalele contribuții obținute de mine în acest capitol amintesc:

- stabilirea sub formă matriceală a ecuațiilor dinamicii plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată;
- introducerea noțiunilor de cauză externă, proces admisibil și câmp deplasare admisibil pentru placa subțire liniar vâscoelastic laminată;
- formularea în deplasări a problemei dinamice a plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată;
- stabilirea unei teoreme de reciprocitate (teorema 3.5.1) utilizând produsul de convoluție;
- formularea variațională cu ajutorul produsului de convoluție a dinamicii plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată exprimată prin teorema 3.6.1 când deplasările, deformațiile și tensiunile sunt funcții independente pentru funcționala construită și teorema 3.6.2 când numai deplasările admisibile sunt funcții independente pentru funcționala construită;
- studiul existenței și unicității soluției problemei mixte a dinamicii plăcii subțiri vâscoelastic laminată; formularea variațională a problemei în acest caz; stabilirea și demonstrarea teoremei de existență și unicitate (teorema 3.7.1);
- principii de minim în dinamica plăcii subțiri liniar vâscoelastic laminată, unde principalele rezultate obținute sunt: construirea unei funcționale în domeniul Laplace; două teoreme în domeniul transformatei Laplace, principiul de staționaritate și principiul de minim în domeniul transformatei Laplace exprimate respectiv prin teoremele 3.8.1 și 3.8.2; considerând niște spații de funcții convenabil alese, construind o funcțională în domeniul timpului s-a obținut principiul de minim în domeniul timpului exprimat prin teorema 3.8.3.
- am introdus transformatele integrale „EC” și „ES”; aceste transformate integrale au fost utilizate pentru aflarea răspunsului dinamic al plăcii vâscoelastice.

Capitolul al IV-lea consacrat propagării undelor în placa subțire liniar vâscoelastic laminată conține următoarele contribuții principale:

- definirea curbei de discontinuitate tare (undă de șoc) care se propagă într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată;
- definirea intensității saltului undei de șoc care se propagă în placa subțire liniar vâscoelastic laminată;

- stabilirea condiției de propagare a undei de șoc în placa subțire liniar vâscoelastic laminată exprimată prin teorema 4.2.1; variația intensității undei de șoc exprimată prin teorema 4.2.2, care de-a lungul bicaracteristicelor se exprimă printr-o ecuație diferențială foarte simplă dată în cadrul teoremei 4.2.3;

- definirea curbei de discontinuitate slabă (undă de accelerație) care se propagă într-o placă subțire vâscoelastic laminată;

- definirea intensității undei de accelerație într-o placă subțire liniar vâscoelastic laminată;

- stabilirea condiției de propagare a undei de accelerație în placa subțire vâscoelastic laminată, exprimată prin teorema 4.3.1; variația intensității undei de accelerație exprimată prin teorema 4.3.2, care de-a lungul bicaracteristicelor are aceeași formă ca și în cazul undei de șoc, dar coeficienți diferiți (teorema 4.3.3);

Capitolul V face o analiză numerică a plăcii subțiri elastic laminate când aceasta este supusă de exemplu pe fața superioară la șocuri termice de diferite temperaturi ($\theta = 50^{\circ}C, 75^{\circ}C, 100^{\circ}C$). În acest scop s-a elaborat programul DINPLTEL cu ajutorul căruia se pot obține în orice punct al plăcii dreptunghiulare simplu rezemate, deflexia transversală, unghiurile de rotație, precum și tensiunile, când placa este supusă la un șoc de temperatură.

În cadrul acestei teze de doctorat am încercat să aduc câteva contribuții, în special în domeniul teoretic, privind dinamica plăcilor subțiri termoeastic laminate și a plăcilor subțiri liniar vâscoelastice. Se poate vedea că redusă chiar la unele cazuri particulare, problema tratată este destul de spinoasă. Prin formulările pe care le-am dat, am deschis însă calea unor noi cercetări care să elucideze comportarea altor tipuri de structuri de rezistență, în condiții poate și mai complexe.

* * *

Bibliografie

- Aboudi J., Cederbraum G., (1989). *Analysis of viscoelastic composite laminated plates*. Composite Structures, **12**, 243–256.
- Aboudi J., Cederbraum G., Elishakoff I., (1990). *Stability of viscoelastic plates by Lyapunov exponent*. J. Sound Vibr., **139**, 459–468.
- Anbarov R., Gegela E.I., (1979). *Kolebanâ vâzkouprugoj plastinki, obtekaemoj sverkhzvukobym potokom gaza*. Mekh. tverd. tela, **14**(1), 184–188.
- Anderso G.L., Mowbray D.F. (1969). *Free vibration of infinite plate based on the linear coupled theory of thermoelasticity*. J. Acoust. Soc. Am., **56**, 1444–1454.
- Ashton J.E., Whitney J.M., (1970). *Theory of laminated plates*. Technomic Standford, N.C.
- Badalov F.B., (1983). *K rešeniû integral'nyh i integro-differencial'nyh uravnenij zadač ustoičivosti vâzkouprugih plastin i oboloček*. Trudy XIII Vsesoûznoj konferencii po teorii plastin i oboloček. Tallin, čiasti I, 151–156.
- Badalov F.B., (1987). *Metody rešeniâ integral'nyh i integro-differencialnyh uravnenij nasledstvennyj teorii vâzkouprugosti*. Taškent, "Mahnat".
- Badalov F.B., Ešmatov Kh., Anžiev B., (1985). *Issledovanie fizičeski i geometričeski nelinejnyh kolebanij vâzkouprugih plastin i oboloček metodom usredneniâ*. Prikl. mekh., **21**(3), 61–68.
- Banerjee D.K., Pao Y.H., (1974). *Thermoelastic waves in anisotropic solids*. J. Acoust. Soc. Am., **56**, 1444–1454.
- Barbu V., (1974). *Semigrupuri de contractii nelineare în spații Banach*. Ed. Acad. Române, București.
- Barker L.M., (1971). *A model for stress wave propagation in composite materials*. J. Compos. Mater., **5**, 140–162.
- Bedford A., Stern M., (1970). *On wave propagation in fiber-reinforced viscoelastic materials*. J. Appl. Mech., **37**, 1190–1192.
- Belli G., Morosi C., (1974). *A variational principle for the dynamic problem of linear coupled thermoelasticity*. Meccanica, **9**, 239–243.
- Biot M.A., (1956). *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*. J. Appl. Phys., **27**, 240–253.
- Birlik G.A., Mengi Y., (1989). *Refined dynamic theory for viscoelastic cylindrical shells and cylindrical laminated composites*. Part 1: General theory. J. Sound and Vibr., **130**(1). 55–67.
- Birman V., (1990). *Thermal dynamic problems of reinforced composite cylinders*. J. Appl. Mech., **57**, 941–947.
- Bisvas P., (1977). *Thermally induced vibrations of orthotropic rectangular plate resting on elastic foundation*. Proceedings of Indian Academy of Sciences, **85A**, 125–130.
- Bisvas P., (1978). *Thermally-induced vibrations of a triangular slab resting on elastic foundation*. J. Sound Vibr., **59**, 304–306.
- Bofill F., Quintanilla R., (1995). *Some qualitative results for the linear*

- theory of thermo-microstretch elastic solids*, Int. J. Engng. Sci., **33**, 2115–2125.
- Boley B.A., Barber A.D., (1957). *Dynamic response of beams and plates to rapid heating*. J. Appl. Mech., **79**, 413–416.
- Boley B.A., Hertenarski R.B., (1968). *Propagation of discontinuities in coupled thermoelastic problems*. J. Appl. Mech., **35**, 489–494.
- Borș C.I., (1970). *Teoria elasticității corpurilor anizotrope*. Ed. Acad. Române, București.
- Bowen R.M., Chen P.J., (1972). *Acceleration waves in anisotropic thermoelastic materials with internal state variables*. Acta Mechanica, **15**, 95–104.
- Braun M., (1974). *Beschleunigungswellen in anisotropen hyperelastischen Stoffen*, Acta Mechanica, **19**, 237–249.
- Brilla J., (1975). *Generalized variational methods in linear viscoelasticity*. Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies. J. Hult, ed., Springer-Verlag, Berlin, 215–228.
- Caviglia G., Morro A., (1995). *Wave propagation condition in linear anisotropic viscoelastic media*. Int. J. Engng. Sci., **33**, 1059–1074.
- Cederbraun G., Aboudi J., (1989). *Dynamic response of viscoelastic laminated plates*, J. Sound Vibr., **133**, 225–238.
- Cederbraun G., Aboudi J., Elishakoff I., (1991). *Dynamic stability of viscoelastic composite plates via the Lyapunov exponents*. Int. J. Solids Structures, **28**, 317–327.
- Chadwick P., (1962). *On the propagation of thermoelastic disturbances in thin plates and rods*. J. Mech. Phys. Solids, **10**, 99–109.
- Chadwick P., Powdrill B., (1965). *Singular surfaces in linear thermoelasticity*. Int. J. Eng. Sci., **3**, 561–595.
- Chandiramani N., Librescu L., Aboudi J., (1989). *The theory of orthotropic viscoelastic shear deformable composite flat panels and their dynamic stability*. Int. J. Solids Struct., **25**, 465–482.
- Chebotarevskii Y.V., Yagubova O.A., (1985). *Bending of a circular plate heated by linear internal impulse heat sources*. Soviet Applied Mechanics, **21**, 58–63.
- Chelmiński K., (1987). *A mixed boundary value problem in linear thermo-viscoelasticity*. Arch. Mech. **39**, 95–102.
- Chelu P., Dragomir T., (1978). *Procedure of deterministic identification of a vari linear systems*. Bul. Stiinț. și Teh. al I.P.T. Seria Electrotehnică, Tom 23(37), 146–148.
- Chelu P., Marinca V., (1983). *Teorie de câmp asociată dinamicii solidului elastic*. Al II-lea Simpozion de Analiză Funcțională și Aplicații, Craiova 4–5 noiembrie, 305–309.
- Chelu P., Marinca V., (1984). *On propagation of shock waves in anisotropic linear viscoelastic media*. Lucr. Conf. Naț. de Geometrie și Topologie, Timișoara, 32–39.
- Chelu P., (1985). *On propagation of acceleration waves in a viscoelastic*

composite plate. Lucr. Conf. Naț. de Mecanica Solidelor, Timișoara, 13–18.

Chelu P., (1987). *On propagation of waves in a composite circular cylindrical viscoelastic thin shell*. Bul. Univ. din Brașov. Seria C - Matematica. Fizica. Chimie, **28**, 13–18.

Chelu P., (1989). *Vibrations of a laminated plate by the using of the collocation method*. Seminarul de Mecanică, Nr. 24, Tip. Univ. Timișoara.

Chelu P., (1991). *Răspunsul dinamic al unei plăci compozit vâscoelastic laminată*. A XV-a Conferință de mecanica solidelor. Constanța 7–8 iunie, (Comunicare).

Chelu P., (1993a). *A variational theorem in the dynamics of damped linear systems*. A VII-a Conf. de vibrații mecanice, Timișoara 20–21 Mai, vol. **3**, 7–15.

Chelu P., (1993b). *Transient dynamical response of a laminated elastic thin plate*. A VII-a Conf. de vibrații mecanice, Timișoara 20–21 Mai, vol. **3**, 17–24.

Chelu P., Bacria V., (1993). *Transversal forced vibrations of a laminated composite plate with internal point supports*. 10th International FASE – Symposium 1993, Bucharest, Romania, 141–144.

Chelu P., (1995a). *A dynamic theory of linear thermoelasticity of laminated thin plate*. Bul. Stiinț. și Tehnic al Univ. Tehnice din Timișoara. Seria Mecanica. Tom **40(54)**, 45–60.

Chelu P., (1995b). *Considerații privind răspunsul dinamic al unei plăci vâscoelastice utilizând transformatele integrale "EC" și "ES" (I + II)*. Acta Universitatis CIBINIENSIS. Seria Tehnică. C. Mecanică aplicată, vol. **17**, 211–221.

Chelu P., Drăgănescu G., (1995). *Propagation of acceleration waves in a laminated noncircular cylindrical viscoelastic thin shell*. Acad. Tehnică Militară, A XXVI-a sesiune de comunicări științifice cu participare internațională, vol. **8**, Secțiunile: 17. Mecanică aplicată, 18. Tehnologie, București 16–17 noiemb. 1995, 185–192.

Chelu P., Drăgănescu G., (1996). *Vibrations of a laminated elastic plate with internal point supports excited by periodical dirac impulse*. Bul. celei de a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. **2**, 101–106.

Chen P.J., Gurtin M.E., (1973). *On propagation of one-dimensional acceleration waves in laminated composites*. J. Appl. Mech., **40**, 1055–1060.

Chiriță S., (1976). *On the existence of solutions in the linear theory of micropolar thermoelasticity*. Proc. Sci. Sess. Math. Iași. Ed. Acad. Române, București.

Chiriță S., (1982). *On the linear theory of thermo-viscoelastic materials with internal state variables*. Arch. Mech., **34**, 445–464.

Christensen R.M., (1973). *Attenuation of harmonic waves in layered media*. J. Appl. Mech., **40**, 156–160.

Ciarlet P.G., (1988). *Mathematical Elasticity, Volume I. Three-dimensional*

Elasticity. North-Holland Amsterdam.

Ciarletta M., Pasquino M., (1980). *Principio di minimo nella dinamica dei materiali viscoelastici*. Rend. Accad. Naz. Lincei, **69**, 147–153.

Coleman B., Gurtin M.E., (1965). *Wave in materials with memory, IV*. Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 317–338.

Cost T.L., Becker E.B., (1970). *A multidata method of approximate Laplace transform inversion*. Int. J. Numer. Method in Engng., **5**, 207–219.

Cristescu N., (1983). *Mecanica materialelor compozite*. Univ. București.

Čukić R., (1972). *The thermal shock on the surface of the rectangular plate*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **20**, 362–372.

Dafermos C.M., (1968). *On the existence and asymptotic stability of solutions of the equation of linear thermoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., **29**, 241–271.

Dafermos C.M., (1975). *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics*. Lectures Notes in Mathematics, vol. 503. Springer, Berlin.

Dainaruya M., Ishikawa H., (1974). *On the propagation of thermoelastic waves according to the coupled thermoelastic theory*. Bull. JSME, **17**, 991–999.

Dall'Asta A., Menditto G., (1994). *A variational formulation of the perturbed motion problem for a viscoelastic body*. Int. J. Solids Structures, **31**, 247–256.

Das S., (1983). *Vibrations of polygonal plates due to thermal shock*. J. Sound Vibr., **89**, 471–476.

Demiray H., Eringen A.C., (1977). *Wave propagation in viscoelastic composite reinforced by orthogonal fibres*. J. Sound Vibr., **55**, 509–519.

Deresiewicz H., (1957). *Plane waves in a thermoelastic solid*. J. Acoust. Soc. Am., **29**, 204–209.

Deresiewicz H., (1975). *Thermal coupled waves in a plate*. Acta Mech., **21**, 329–342.

Dobre I., Chelu P., (1982). *Asupra propagării undelor elasto-plastice în solide utili când ecuații constitutive cu variabile interne de stare*. Conf. „Vibrații în construcția de mașini”, Timișoara, vol. **2**, 87–94.

Dobre I., Chelu P., Bereteu L., (1988). *Propagation of longitudinal wave in a viscoelastic composite rod*. A VI-a Conf. de Vibr. Mecanice, Timișoara, vol. **3**, 127–136.

Dobre I., Chelu P., (1992). *On the propagation of shock waves in a composite plate*. Bul. Științ. și Tehnic al Univ. Tehnice Timișoara, Seria Mecanică, **37 (51)**, 18–27.

Dobre I., Chelu P., (1994). *Averaging method in the study of transient transversal vibrations of a homogeneous and isotropic viscoelastic plate.*, Bul. Științ. și Tehnic al Univ. Tehnice Timișoara, Seria Mecanică, **39(53)**, 38–48.

Dobre I., Chelu P., Moțica A., (1994a). *Studii privind vibrațiile transver-*

sale tranzitorii ale unei plăci vâscoelastice., A III-a Conf. naț. de tehnologii și metode de proiectare în construcția de mașini. Craiova, România, 22-23 Sept. 1994, vol. 2, p. 51-62.

Dobre I., Chelu P., Moțica A., (1994b). *Considerații asupra răspunsului dinamic tranzitoriu al unei plăci subțiri elastic laminată cu condiții la limită complexe.* Bul. Conf. Naț. de Dinamica mașinilor CDM'94, Brașov, vol. 2, 57-62.

Dobre I., Chelu P., (1995a). *Răspunsul dinamic al unei bare vâscoelastice utilizând transformatele "EC" și "ES"*, Analele Univ. din Oradea, Fasc. Mecanică, Secțiunea Mecanică, Vibrații Mecanice, Rezist. materialelor, vol. 1, 215-222.

Dobre I., Chelu P., Moțica A., (1995b). *Caracteristici statice ale răspunsului unei plăci supuse la excitații aleatoare.*, Analele Universității din Oradea, Fasc. Mecanică, Secț. Mecanică, Vibrații mecanice, Rezist. materialelor, vol. 2, 77-88.

Dobre I., Chelu P., (1995c). *New integral transforms in obtaining of dynamic response of a viscoelastic curved beam.*, Acad. Tehnică Militară, A XXVI-a sesiune de comunicări științifice cu participare internațională, vol. 8, Secțiunile: 17. Mecanică aplicată, 18. Tehnologie, București 16-17 noiembrie, 119-126.

Dobre I., Chelu P., (1996). *A method for determination of natural frequencies of a laminated elastic elliptical plate with clamped edge.*, Bul. Stiinț. al Univ. "Politehnica" din Timișoara, Seria Mecanica, 41(55), 2, p.29-38.

Drgoș I., (1983). *Principiile mecanicii mediilor continue.* Ed. Tehnică, București.

Drăgănescu Gh.E., Chelu P., (1995). *Un model reologic neliniar cu liniarități instantanee.*, Acad. Tehnică Militară, A XXVI-a sesiune de comunicări științifice cu participare internațională, vol. 8, Secțiunile: 17. Mecanică aplicată, 18. Tehnologie, București 16-17 noiembrie 1995, p.177-184.

Drăgănescu Gh., Chelu P., (1996). *Studiul unui model hiperelastic uni-dimensional.*, Buletinul celei de a VIII-a Conferințe de vibrații mecanice, Timișoara, vol. 3, 153-158.

Dunwoody J., Dunwoody S.T., (1965). *Acceleration waves in viscoelastic media of Maxwell-Zaremba type*, Int. J. Eng. Sci. 3, 417-427.

Dunwoody J., (1977). *On weak shock waves in thermoelastic solids.* Q. Jl. Mech. Appl. Math., 30, Pt. 2, 201-208.

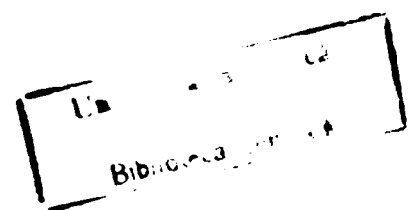
Duvaut G., Lions J.L., (1969). *Nouvelles inéquations variationnelles rencontrés en termique et en thermoelastisité.* C.R. Acad. Sci. Paris, 269, 1198-1201.

Duvaut G., Lions J.L., (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris.

Edelstein W. S., Gurtin M. E., (1964). *Uniqueness theorems in the linear dynamic theory of anisotropic viscoelastic solids.*, Arch. Rat. Mech. Anal., 17, 46-60.

- Fabrizio M., (1989). *An existence and uniqueness theorem in quasi-static viscoelasticity*. Quart. Appl. Math., **47**, 1-8.
- Fabrizio M., Giorgi C., Morro A., (1989). *Minimum principles, convexity and thermodynamics in viscoelasticity*. Continuum Mech. Thermodyn., **1**, 197-211.
- Figueiredo I., Trabucho L., (1995). *A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in thermoviscoelasticity*. Int. J. Engng. Sci., **33**, 45-66.
- Filatov A.N., (1971). *Metody usredneniâ v differencial'nyh i integro-differencial'nyh uravneniâh*. Taškent (FAN).
- Filatov A.N., (1974). *Asimptotičeskie metody v teorii differencial'nyh uravneniâh*. Taškent (FAN).
- Filippov I.G., (1986). *Utočinenie uravnenij kolebanyâ vâzkouprugih plastin, sterženii*. Prikl. Mehanika, vol. **22**(2), 71-78.
- Fisher G.M.C., Gurtin M.E., (1965). *Wave propagation in the theory of viscoelasticity*. Quart. Appl. Math., **23**(3), 257-263.
- Fisher G.M.C., Leitman M.J., (1966). *A correspondence principle for free vibrations of viscoelastic solids*, J. Appl. Mech., **33**, 924-926.
- Francis P.H., (1972). *Thermo-mechanical effects in elastic wave propagation: A survey*. J. Sound Vib., **21**, 181-192.
- Friedlander F.G., (1958). *Sound pulses*. Cambridge University Press.
- Goldstein J.A., (1985). *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford Univ. Press, New York.
- Green A.E., Lindsay K.A., (1972). *Thermoelasticity*. J. Elasticity, **2**, 1-7.
- Grioli G., (1979a). *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota I. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, **67**, 332-339.
- Grioli G., (1979b). *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota II. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, **67**, 426-432.
- Gurtin M.E., (1964). *Variational principles for linear elastodynamics*. Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 34-50.
- Gurtin M.E., Pipkin A.C., (1968). *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*. Arch. Rat. Mech. Anal., **31**, 113-126.
- Hadamard J., (1903). *Leçons sur la propagation des ondes et des équations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris.
- Hashin Z., (1970). *Complex moduli of viscoelastic composites - II. Fiber reinforced materials*, Int. J. Solid Struct., **6**, 797-807.
- Hayes M.A., Rivlin R.S., (1972). *A class of waves in a deformed viscoelastic solid*. Quart. Appl. Math., **30**, 363-367.
- Hayes M.A., Rivlin R.S., (1974). *Plane waves in linear viscoelastic materials*. Quart. Appl. Math., **32**, 113-121.
- Herrera I., Gurtin M.E., (1965). *A correspondence principle for viscoelastic wave propagation*. Quart. Appl. Math., **22**, 360-364.
- Hlaváček, M., (1979). *Wave propagation in viscoelastic fibre-reinforced composites*. Acta technica ČSAV, **24**, 47-67.

- Huang N.N., Tauchert T.R., (1992). *Thermally induced vibration of doubly curved cross-ply laminated panels*. J. Sound Vibr., **154**, 485-494.
- Ibănescu I., (1982). *A generalized theory of linear thermoelasticity of plate*. Bul. Inst. Polit. Iași. Secția I. Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică, **28(32)** (1-2), 39-45.
- Ieșan D., (1964). *On some reciprocity theorems and variational theorems in linear dynamic theories of continuum mechanics*. Memoirie dell'Acad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Serie 4-a, **17**, 1-19.
- Ieșan D., (1966). *Principes variationnelles dans la theorie de la thermoélasticité couplée*. Analele Șt. Univ. „Al. I. Cuza” Iași. Sect. I. Matematică, **12**, 439-436.
- Ieșan D., (1967). *Sur la théorie de la thermoélasticité micropolaire couplée*. C.R. Acad. Sci. Paris, **265**, 271-275.
- Ieșan D., (1979). *Teoria termoelasticității*. Ed. Acad. RSR, București.
- Inan E., (1972). *Coupled theory of thermoelastic plates*. Acta Mech., **12**, 702-729.
- Ionescu V., (1966). *Un théorème variationnel pour la problème de la thermoélasticité couplée*. Analele Univ. București, Mat.-Mec., **15**, 33-40.
- Irie T., Yamada G., (1978). *Thermally induced vibration of a circular plate*. Bulletin JSME, **21**, 1703-1709.
- Jajeda N.D., Loo T.C., (1974). *Heat induced vibrations of a rectangular plate*. J. Engng. Industry, **96**, 1015-1021.
- Kaliski S., (1965). *Wave equations in thermoelasticity*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **13**, 409-416.
- Kao W.T., Pao Y.C., (1976). *Thermally induced vibration of simply supported symmetric cross-ply plates*. Developments in Theoretical and Applied Mechanics (Proceedings of the 8th SECTAM).
- Karnauhov V.G., Senčenkov I.K., (1976). *Princip minima preobrazovannoj energii v dinamičeskijh zadačah linejnoj teorij vâskouprugosti*. Dokl. AN USSR. Ser. A, No. 8, 712-715.
- Karnauhov V.G., Senčenkov I.K., (1977). *Variacionnoj princip dlâ svâzannyh dinamičeskijh zadač linejnoj vâskouprugosti*. Prikl. meh., **13(11)**, 113-117.
- Krys'ko Y.A., Guba G.M., Fomin V.G., (1986). *Dynamic of a cylindrical shell under the action of thermal shock*. Soviet Applied Mechanics, **22(5)**, 21-28.



- Kupradze V.D., Gegelâ T.D., Bašeleišvili M.O., Burčuladze T.V., (1968). *Trehmernue zadači matematičeskoj teorii uprugosti*. Izd. Tbiliskogo Univ., Tbilisi.
- Lazzari B., Vuk E., (1987). *Un teorema di esistenza e unicità per un problema dinamico in viscoelasticità liniare*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **35**, 309.
- Leitman M.I., (1966). *Variational principles in linear dynamic theory of viscoelasticity*. Quart. Appl. Math., **24**, 37–46.
- Li Jia-Ren, Zhang Shen-Xue, (1988). *Minimum principles in linear dynamic theory of viscoelasticity*. Acta Mech. Solida Sinica, **1**, 223–233.
- Librescu L., Chandiramani N. K., (1989). *Dynamic stability of transversely isotropic viscoelastic plates*. J. Sound and Vibr. **130**, 467–486.
- Lions J.L., (1955). *Les problemes aux en théorie des distributions*. Acta Math., **94**, 13–153.
- Liolios A., (1991). *A direct derivations of dual extremum principles in dynamic anisotropic coupled thermoelasticity*. J. Theor. Appl. Mech., **22**, 47–54.
- Liu C.-F., Huang C.-H., (1996). *Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes*. Comput. Struct., **60**, 95–101
- Lord H.W., Lopez A.A., (1970). *Wave propagation in thermoelastic solids at very low temperature*. Acta Mech., **10**, 85–98.
- Luca I., (1986). *Implicații termodinamice și reversibilitate temporală în termovâscoelasticitatea liniară de tip integral*, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, 549–578.
- Luca I., (1989). *A uniqueness theorem in anisotropic viscothermoelasticity of integral type*. Arch. Mech., **41**, 535–542.
- Madan V.P., (1993). *On wave propagation in layered anisotropic viscoelastic media*. Rev. di Matem. Pura ed Applicata, No.13, 91–98.
- Manole D., (1980). *Théorèmes variationnels dans la théorie de la viscoélasticité linéaire assymétrique*. Bul. Inst. Politeh. din Iași. Secția I. Matematică. Mecanică teoretică. Fizică. **26(30)**(3-4), 101–108.
- Manole D., (1982). *Existența și unicitatea soluției în teoria dinamică a vâscoelasticității liniare micropolare*. Bul. Inst. Polit. din Iași. Secția Mecanică, **28(32)** (1–4), 47–51.
- Manole D., (1992). *Variational theorems in linear theory of micropolar viscoelasticity*. Bul. Inst. Politeh. din Iași, Secția I. Matematici Mecanică

teoretică. Fizică. Tom 38, 1-4, 75-83.

Massalas C., (1986). *Thermoelastic waves in a thin plate*. Acta Mech., 61, 51-62.

Massalas C., Dalamangas A., Tzivanidis G., (1982). *A note on the dynamics of thermoelastic thin plates*. J. Sound Vibr., 8, 123-127.

Massalas C., Kalpakidis V. K., (1987). *Thermoelastic waves in a plate with mixed boundary conditions and thermal relaxation*. Ingenieur Archiv, 57, 401-412.

Matveev P.N., (1979). *Rešenie nekatoryh dinamičeskikh zadači teorii vâzcouprugosti operatornyh metodom.*, Differencial'nye uravneniâ, 15, 1904-1906.

Maugin G.A., (1974). *Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials*. Int. J. Eng. Sci., 12, 143-157.

McCarthy M.F., (1972). *Wave propagation in generalized thermoelasticity*. Int. J. Engng. Sci., 10, 593-602.

McCarthy M.T., Eringen A.C., (1969). *Micropolar viscoelastic wave*. Int. J. Engng. Sci., 7, 447-458.

McQuillen E.J., Brull M.A. (1970). *Dynamic thermoelastic response of cylindrical shells*. J. Appl. Mech., 37, 661-670.

Mengi Y., Birlik G.A., (1989). *Refined dynamic theory for viscoelastic cylindrical shells and cylindrical laminated composites.*, Part 2: An application, J. Sound and Vibr., 130, 69-77.

Mengi Y., Turhan D., (1984). *A higher order dynamic theory for viscoelastic plates and layered composites.*, J. Sound and Vibr., 92, 311-320.

Mihăilescu M., Suliciu I., (1976). *Finite and symmetric thermomechanical waves in materials with internal state variables*. Int. J. Solids Struct., 12, 559-575.

Mukherjee S., Lee E.H., (1975). *Dispersion relations and mode shapes for waves in laminated viscoelastic composites by difference methods*. Computers and Structures, 5, 279-285.

Mukherjee S., Lee E.H., (1978). *Dispersion relations and mode shapes for waves in laminated viscoelastic composites by variational methods*. Int. J. Solids Struct., 14, 1-13.

Nedorezov P.F., (1979). *Ustanovivšiesâ poperčnyj e kolebaniâ iz vâzkouprugovo materiala*. Mehanika deformiruemyh sredy, vyp. 6. 27-31

Negishi Y., Hirashima K., (1997). *General higher-order theory for laminated composite structures with interlayer slip*. JSME Int. J., Serie A,

40(1), 75–83.

Nickell R.E., Sackman J.L., (1968). *Variational principles for linear coupled thermoelasticity*. Q. Appl. Math., **24**, 11–26.

Nistor I., (1973). *A theorem of existence, uniqueness and analyticity of the solution of the equations of nonlinear thermoelasticity*. Anal. Şt. Univ. Iaşi. Ser. Matematică, **19**, 465–476.

Nistor I., (1989). Acceleration waves in linear thermoelastic materials. Bul. Inst. Polit. din Iaşi, Secţia I. Mecanică. Matematică. Fizică, **35(39)**(3–4), 61–67.

Norwood F.R., Warren W.E., (1969). *Wave propagation in the generalized dynamical theory of thermoelasticity*. Q. J. Mech. Appl. Math., **22**, 283–290.

Novotný B., Hanuška A., (1976). *Numerical analysis of viscoelastic layered halfspace*. Acta tech. ČSAV, **21**, 33–49.

Ogibalov P.M., Badalov F.B., (1987). *Ob odnom metody i rešeniâ integro differencial'nyh uravnenij dinamičeskoj zadači linejnoj teorii vâzkouprugosti*. Mehanika kompozitnyh materialov, No.6, 113–115.

Oshima T., Kritz R.D., Naomachi S.G., (1991). *Simulation and visualization of stress wave propagation in composite laminate with interphase layer*. Nondestructive Testing Evaluation, Karnizawa, Japan 27–30 May, 5th Int. Symp. Nondestructive Characterization Mater., 391–403 (1992).

Pan H.H., (1966). *Vibrations of viscoelastic plates*. Journal de Mécanique, **5**, 355–374.

Pazy A., (1972). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, Berlin.

Pazy A., (1979). *Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behavior*. In: Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot – Watt Symposium (Edited by R.J. Knops). vol. 3. Pitman Research Notes in Mathematics.

Popescu V., (1988). *Control optimal pentru ecuații de evoluție*. Ed. Acad. RSR, Bucureşti.

Puri P., (1973). *Plane waves in generalized thermoelasticity*. Int. J. Eng. Sci., **11**, 735–744.

Qatu M.S., (1992). *In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams*. J. Sound Vibr., **159**, 327–338.

Qatu M.S., (1993). *Theories and analyses of thin and moderately laminated composite curved beams*. Int. J. Solids Structures, **30**, 2743–2756.

- Quintanilla R., Williams H.T., (1985). *An existence and uniqueness theorem for incremental viscoelasticity*. Quart. Appl. Math., **43**, 287-294.
- Rafalski P., (1968). *A variational principle for the coupled thermoelastic problem*. Int. J. Eng. Sci., **6**, 465-471.
- Rafalski P., (1979). *On extremum principles for initial - boundary value problems*. Lett. Appl. Engng. Sci., **17**, 793-795.
- Rašidov A., Kažumov E.K, Eškuvatov K., (1979). *Poperečnyj i udar po vâzkouprugoj plastinke*. Sb. nauk. Tr. Taškent politehn. in-t. No. 258, 53-59.
- Reddy N.J., (1976). *Modified Gurtin's variational principles in the linear dynamic theory of viscoelasticity*. Int. J. Solid Structures, **12**, 227-235.
- Reiss R., (1978). *Minimum principles for linear elastodynamics*. J. Elasticity, **8**, 35-45.
- Reiss R., Haug E.J., (1978). *Extremum principles for linear initial - value problems of mathematical physics*. Int. J. Engng. Sci., **16**, 231-251.
- Rionero S., Chirița S., (1989). *New reciprocal and continuous dependence theorems in linear theory of viscoelasticity*. Int. J. Engng. Sci., **27**, 1023-1036.
- Rusu Gh., (1987). *On existence and uniqueness in thermoelasticity of materials with voids*. Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci., **35**, 339-346.
- Sarova L. K., (1974). *K vâprosu o plattere vâzkouprugoj plastin*. Trudy-ordena Trudovo krasnovo Znameni Instituta Kibernetiki s B.T. AN USSR "Voprosy vičislitel'noj i prikladnoj matematiki" vypusk **23**, Taškent.
- Schapery R.A., (1962). *Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis*. Proc. 4-th U. S. Mat. Congr. Appl. Mech., ASME, vol. **2**, 1075-1085.
- Senčencov I.K, Karnauhov V.G., (1978). *Variacionye principyj linear-jzirovanoj teorij vâzkouprugosti*. Prikl. Meh., **14**(3), 14-20.
- Senčencov I.K., (1979). *Minimalnyi princip linejnoj svâzanoi termovâzkouprugosti*. Dokl. AN USSR, Ser. A, No. 12, 1018-1020.
- Sharma J.N., Singh H., (1986). *Generalized thermoelastic waves in anisotropic media*. J. Acoust. Soc. Amer., Sobotka Z., (1978). *Free vibration of viscoelastic orthotropic rectangular plates*. Acta Techn. ČSAV, **23**, 678-705.
- Soós E., (1968). *Thermoelastic waves produced by a point force in an unbounded material*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13**, 261-272.

- Stern M., Bedford A., (1970). *Propagation in fiber-reinforced viscoelastic materials*. J. Appl. Mech. **37**, 1190–1192.
- Stern M., Bedford, A., Yew, C.H., (1971). *Wave propagation in linear viscoelastic laminates*. J. Appl. Mech., **38**, 448–454.
- Stroud R.C., Mayers J. (1971). *Dynamic response of rapidly heated plates elements*. AIAA J., **9**, 76–83.
- Sun C.T., Gilmore R.T. and Koh S.L., (1972). *Large deflection microstructure theory for a composite beam*. AIAA J., **10**, 1314–1317.
- Şuhubi E.S., (1974). *Propagation of a plane wave in an initially stressed thermoelastic medium*. Bull. Techn. Univ. Istanbul, **27**, 98–107.
- Sve C., (1971). *Thermoelastic waves in a periodically laminated medium*. Int. J. Solids Struct., **7**, 1363–413.
- Tanigawa Y., Nagayama K., Kawamura R., (1996). *Analaysis of transient thermal stress and thermal deformation of an angle-ply laminated rectangular plate due to nonuniform heat supply based on higher-order shear deformation theory*. JSME Int. Journal, Series A, **39**, 582–590.
- Tatemichi A., Okazaki A., Hikuyama M., (1980). *Damping properties of curved sandwich beams with viscoelastic layer*. Bulletin Nagoya Inst., **29**, 309-317.
- Tauchert T.R., (1987). *Thermal stresses in plates - Dinamical problems*. Thermal Stresses II, R. B. Hetnarski, ed., North Holland, Amsterdam.
- Tauchert T.R., (1989). *Thermal shock of orthotropic rectangular plates*. J. Thermal Stresses, **12**, 241–258.
- Tauchert T.R., (1990). *Thermal Effects on Structures and Materials*, PVP **203**, (V. Birman and D. Hui, Editors), ASME, 15–20.
- Teodorescu P.P. (1958). *O ploskoj zadače termouprugosti*. Rev. de Méc. Appl., **3**, 333–340.
- Teodorescu P.P., (1975). *Dynamics of elastic bodies*. Edit. Acad. Române, Bucureşti, România and Abacus Press, Tunbridge Eells, Kent, England.
- Thomas T.Y., (1961). *Plastic flow and fracture in solids*. Acad. Press, New York-London.
- Ting T.C.T., (1976). *Mechanics of visco-elastic media and bodies*. Symposium Gothenburg, Sweden, Sept. 2–6.
- Ting T.C.T, Mukunoki I., (1979). *A theory of viscoelastic analogy for wave propagation normal to the layering of a layered medium*. J. Appl. Mech., **46**, 329–336.

- Ting T.C.T., (1980). *The effects of dispersion and dissipation on wave propagation in viscoelastic layered composites*. Int. J. Solids Struct. **16**, 903–911.
- Tokuoka T., (1973). *Thermo-acoustical waves in linear thermo-elastic materials*. J. Eng. Math., **7**, 115–122.
- Tonti E., (1973). *On the variational formulation for linear initial value problems*. Ann. Mat. Pura Appl., **95**, 331–360.
- Torrisi M., (1980). *Sulla velocità di propagazione e onde di discontinuità in termoelastà finita*. Lincei Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat., **69**, 154–160.
- Touati D., Cederbraun G., (1994). *Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates*. Int. J. Solids Structures, **31**, 2367–2376.
- Tsai Y.M., (1969). *Stress distribution in elastic and viscoelastic plates subjected to symmetric rigid indentations*. Quart. Appl. Math., **27**, 371–380.
- Valanis E., (1965). *Propagation and attenuation of waves in linear viscoelastic solids*. J. Math. Phys., **44**, 227–239.
- Varley E., (1965). *Acceleration fronts in viscoelastic materials*. Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 215–225.
- Warren W.E., Chen P.J., (1973). *Wave propagation in the two temperature theory of thermoelasticity*. Acta Mech., **16**, 21–33.
- Wierzbicki E., Woźniak C., Woźniak M., (1997). *Thermal stresses in elastodynamics of composite materials*. Int. J. Engng. Sci., **35**, 187–196.
- Yosida K., (1978). *Functional analysis*. Springer Verlag, Berlin.
- Zak A.R., Drysdale W.H., (1978). *Dynamically induced thermal stresses in composite material. Structural panels*. J. Aircraft, **13**, 205–209.
- Zorski H., Lyons W.C., (1965). *Dynamics of thermoelastic plates*. Arch. Mech. Stosow., **17**, 497–515.