

**UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA**

**FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ**

**CONTRIBUȚII PRIVIND ANALIZA ȘI  
SINTEZA CÂMPULUI MAGNETIC  
STAȚIONAR ÎN MEDII NELINIARE**

Teza de doctorat

**Ing. Gheorghe Mîndru**

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

366 622.5  
7  
Conducător științific

**Prof. dr. ing. Ioan De Sabata**

1998



# CUPRINS

<b>Introducere</b>	1
<b>1. Campul magnetic stationar in medii liniare si neliniare</b>	7
1.1. Influenta parametrilor geometrici si de material asupra comportarii unei bobine comandate	8
1.2. Teorema superpozitiei punctuale a campurilor electrice si magnetice in medii neliniare	16
1.3. Concluzii	23
<b>2. Analiza numerica a campului magnetic stationar in medii neliniare prin metoda elementului finit (MEF)</b>	25
2.1. Formularea variationala a unei probleme de campuri magnetice stationare	26
2.2. Ecuatiile caracteristice MEF pentru campuri magnetice stationare	31
2.3. Aplicarea MEF pentru determinarea distributiei campului magnetic stationar cu simetrie plan-meridiana intr-un dispozitiv magnetic neliniar, comandat ortogonal	38
2.3.1. Implementarea programului de analiza numerica pe baza algoritmului MEF	40
2.3.2. Descrierea algoritmului MEF utilizat si a programului FORTRAN de implementare	43
2.4. Analiza numerica a campului magnetic prin MEF utilizand programul ANSYS	55
2.5. Concluzii	58
<b>3. Sinteza optima a campului magnetic stationar in medii neliniare</b>	61
3.1. Modelul matematic diferential de camp magnetic stationar	61
3.1.1. Exprimarea in diferente finite a operatorilor diferentiali din ecuatiile de potential magnetic vector	63
3.1.2. Ecuatiile in diferente finite pentru subdomenii de continuitate	66
3.1.3. Ecuatiile in diferente finite pentru suprafetele de trecere orizontale si verticale	69
3.1.4. Ecuatiile in diferente finite pentru nodurile de frontiera	71
3.1.5. Ecuatiile in diferente finite pentru conditiile de frontiera Neumann	73
3.1.6. Ecuatiile de trecere in diferente finite pentru nodurile de colt	74
3.2. Algoritmul de rezolvare numerica a problemei prin diferente finite	77
3.2.1. Descrierea programului de analiza si sinteza numerica	77
3.2.2. Optimizarea geometriei domeniului de camp	81
3.3. Optimizarea geometriei domeniului de camp magnetic in regim stationar	86
3.3.1. Formularea variationala a problemei (MEF)	86
3.3.2. Optimizarea geometriei in cadrul programelor MagNet si ANSYS	88
3.3.3. Optimizarea parametrice pe baza programului OPERA-2d	102
3.4. Concluzii	112
<b>4. Analiza numerica a campurilor magnetice stationare in medii neliniare prin metoda tubului de flux elementar (MTFE)</b>	115
4.1. Principiul metodei tubului de flux elementar	115
4.2. Distributia campului magnetic intr-un dispozitiv neliniar comandat, de forma toroidala, prin MTFE	117
4.3. Distributia campului magnetic intr-o bobina toroidala cu sectiune circulara, necomandata, prin MTFE	126
4.4. Determinarea distributiei campului magnetic intr-o bobina toroidala cu sectiune dreptunghiulara, prin MTFE	129
4.5. Distributia campului magnetic in interiorul unui miez cu sectiune dreptunghiulara, prin MTFE	131
4.6. Concluzii	132

<b>5. Simularea analogica (hibrida) a comportarii bobinelor neliniare pentru diferite modalitati de comanda ale acestora</b>	133
5.1. Simularea neliniaritatilor	134
5.1.1. Simularea neliniaritatilor univoce	134
5.1.2. Simularea ciclurilor histerezis	136
5.1.3. Algoritm de identificare a parametrilor necesari simularii unui histerezis	139
5.2. Simularea comportarii bobinelor neliniare comandate	143
5.2.1. Bobine neliniare comandate prin camp $H_{\perp}$ (solenatie de comanda)	145
5.2.1.1. Bobina alimentata in curent sinusoidal si comandata prin camp $H_{\perp}$	145
5.2.1.2. Influenta comenzii asupra unei neliniaritati tip saturatie	153
5.2.1.3. Bobina alimentata cu tensiune sinusoidala si comandata prin camp $H_{\perp}$	154
5.2.2. Comanda prin inductie $B_{\perp}$ (flux de comanda)	155
5.2.2.1. Bobina alimentata cu tensiune sinusoidala si comandata prin inductie $B_{\perp}$	155
5.3. Verificarea experimentală a rezultatelor simulării	160
5.4. Concluzii	161
<b>6. Concluzii finale</b>	165
<b>7. Bibliografie</b>	169
<b>8. Anexe</b>	
Anexa I Programul de analiza numerica prin MEF	179
Anexa II Programul de analiza numerica ANSYS	183
Anexa III Programul de analiza numerica prin MEF (varianta a doua)	187
Anexa IV Programul de analiza numerica prin MDF	189

# CONTENTS

<b>Introduction</b>	1
<b>1. Stationary magnetic field in linear and non-linear environments</b>	7
1.1. Influence of geometric and material parameters on a controlled coil behavior	8
1.2. Theorem of punctual superposition of the electric and magnetic field in non-linear environments	16
1.3. Conclusions	23
<b>2. Numerical analysis of the stationary magnetic field in non-linear environments using the Finite Element Method (FEM)</b>	25
2.1. Variational formulation of a stationary magnetic field problem	26
2.2. FEM characteristic equations for stationary magnetic fields	31
2.3. FEM application for the computation of axis-symmetric stationary magnetic field distribution in a non-linear magnetic device ortogonally controlled	38
2.3.1. Implementation of the numerical analysis program using FEM algorithm	40
2.3.2. Description of FEM algorithm used and FORTRAN implementation	43
2.4. Magnetic field numerical analysis using FEM with ANSYS program	55
2.5. Conclusions	58
<b>3. Optimal synthesis of stationary magnetic field in non-linear environments</b>	61
3.1. Differential mathematical model for stationary magnetic field	61
3.1.1. Finite differences formulation of differential operators from vector magnetic potential equations	63
3.1.2. Finite difference equations for interface between sub-regions	66
3.1.3. Finite difference equations for horizontal and vertical interface surfaces	69
3.1.4. Finite difference equations for the boundary nodes	71
3.1.5. Finite difference equations for Neumann boundary conditions	73
3.1.6. Interface equations in finite difference for the corner nodes	74
3.2. Numerical solving algorithm using finite difference	77
3.2.1. Description of numerical analysis and synthesis program	77
3.2.2. Optimization of field domain geometry	81
3.3. Numerical solving algorithm using finite difference	86
3.3.1. Variational formulation of the problem (FEM)	86
3.3.2. Geometry optimisation using MagNet and ANSYS program	88
3.3.3. Parametrical optimization using OPERA-2d	102
3.4. Conclusions	112
<b>4. Numerical analysis of stationary magnetic fields in non-linear environments using Elementary Flux Tube Method (EFTM)</b>	115
4.1. Elementary flux tube method	115
4.2. Distribution of magnetic field in a non-linear controlled device with toroidal form. using EFTM	117
4.3. Distribution of magnetic field in a non-linear toroidal coil with circular section, not controlled, using EFTM	126
4.4. Determination of magnetic field distribution in a toroidal coil with rectangular section using EFTM	129
4.5. Distribution of magnetic field inside of a core with rectangular section controlled. using EFTM	131
4.6. Conclusions	132

<b>5. Analogic simulation (hybrid) of non-linear coil behavior for different types of control</b>	133
5.1. Non-linearities simulation	134
5.1.1. Univocal non-linearities simulation	134
5.1.2. Hysterezis cycles simulation	136
5.1.3. Algorithm for identification of parameters used in hysterezis simulation	139
5.2. Simulation of non-linear controlled coils behavior	143
5.2.1. Non-linear coils controlled in $H_{\perp}$ field (controlled solenation)	145
5.2.1.1. Coil fed in sinusoidal current and controlled in field $H_{\perp}$	145
5.2.1.2. Influence of control on saturation type non-linearities	153
5.2.1.3. Coil fed in sinusoidal voltage and controlled in field $H_{\perp}$	154
5.2.2. Controlled though induction $B_{\perp}$ (controlled flux)	155
5.2.2.1. Coil fed in sinusoidal current and controlled in induction $B_{\perp}$	155
5.3. Experimental testing of simulation results	160
5.4. Conclusions	161
<b>6. Final conclusions</b>	165
<b>7. References</b>	169
<b>8. Annex</b>	
Annex I FEM program	179
Annex II ANSYS program	183
Annex III FEM program (version 2)	187
Annex IV MDF program	189

## Introducere

Tehnica informațională s-a afirmat printre cele mai dinamice domenii de cercetare aplicativă și sub aspectul valorificării rezultatelor obținute (concepte, metode, produse software) a direcționat cercetarea teoretică și aplicativă în domenii moderne și utile cum ar fi domeniul electrotehnic: analiza numerică a câmpurilor electromagnetice, sinteza și sinteza optimală a câmpurilor, proiectarea dispozitivelor electromagnetice asistată de calculator CAD (Computer Aided Design).

Câmpul electromagnetic macroscopic în medii corporale oarecare și a cărui viteză de variație în timp este suficient de lentă, respectiv cu frecvență joasă, definește *regimul cvasistaționar* de tip magnetic (anelectric). Studiul acestui regim ca și cel al regimului *staționar* (în medii imobile și cu mărimi de stare invariabile în timp) se justifică pentru majoritatea aplicațiilor tehnice actuale, mai ales dacă nu se impun limitări asupra geometriei domeniului de câmp și nici asupra caracteristicilor neliniare ale mediului corporal.

Abordarea studiului unui astfel de câmp în regim magnetic staționar (cvasistaționar) se poate face clasic, prin *metode analitice* [D6, I1, M8, N3, P5, R1, S12], prin *metode numerice* [B3, C4, H1, S8, S15, Z1, Mi2] și permit obținerea soluției de câmp  $\overline{B}(\overline{r})$  sau a unor mărimi globale asociate acestuia (inductivitate, pierderi, forțe, energii, etc) în *condiții de unicitate* date [H3, R3, T1, T5], care să definească “complet” o problemă de câmp electromagnetic.

Problema de *analiză* a câmpului magnetic staționar presupune a determina analitic (sau discret, prin puncte) distribuția locală a câmpului  $\overline{B}(\overline{r})$  în domeniul de existență  $D$  în condiții de unicitate date.

Problema de *sinteză* a câmpului presupune cunoscut efectul (repartiția câmpului  $\overline{B}(\overline{r})$ ) și se cere determinare cauzelor care l-au produs (geometria corpurilor, distribuția surselor  $\overline{J}(\overline{r})$ , condiții la limită, caracteristici de material  $B(H)$ , etc).

Cum problema sintezei, dacă are soluție, nu este unică [A5, M10, P1, P9], se pune în completare problema *sintezelor optimale* [B2, B8, B9, F2, P8, T9, V2, Mi13, Mi15), care îmbină alternativ o problemă de analiză a câmpului cu o problemă de optimizare.

Oricare dintre aceste probleme presupune o formulare corectă privind fenomenologia de bază (*modelul fizic*), reflectat apoi printr-o corespondență biunivocă într-un *model matematic* de

câmp electromagnetic. Reuniunea dintre modelul matematic și o metodă numerică de rezolvare a acestuia definește *modelul numeric* de câmp electromagnetic.

Atât problemele de *analiză numerică* a câmpului electromagnetic cât și cele de *sinteză optimală*, presupun proceduri iterative și algoritmi bazați pe metoda diferențelor finite MDF, a elementelor finite MEF, a elementelor de frontieră (MEFR sau BEM), respectiv metode hibride MEF/BEM.

Într-o problemă practică din domeniul ingineriei electrice, se dorește fie evaluarea performanțelor unui dispozitiv pe baza unei *analize numerice de câmp*, fie determinarea dimensiunilor geometrice, a caracteristicilor de material  $\nu(B)$  sau a surselor  $\bar{J}(\bar{r})$ , care să producă o anumită performanță, pe baza unei *sinteze optimale de câmp*.

Metodele de analiză numerică a câmpului s-au dezvoltat la ora actuală sub formele consacrate:

- *metoda diferențelor finite*, detaliată în lucrări [G4, M7, Z3, Mi2, Mi14] dar fără expansiunea sa în programe comerciale.
- *metoda elementelor finite*, dezvoltată în lucrări [B5, D5, H1, H9, Z1 Mi2] dar și într-un număr mare de aspecte studiate în lucrările COMPUMAG, INERMAG, ICEM, etc și care constituie suportul programelor comerciale de analiză numerică.

Tehnicile de optimizare au cunoscut și ele o dezvoltare paralelă sau împreună cu algoritmi numerici [B2, B8, B9, F2, K2, P6, P8, P11, S9, T9, V2, Mi13, Mi15].

Studii aprofundate [B3, B7, H1, H9, V2], teze de doctorat [A1, C8, G2, M10, P2, S2, S6, S10, T9], programe comerciale [A8, M4, O2], toate au adus contribuții de seamă la dezvoltarea cercetării electrotehnice în domeniile de analiză/sinteză a câmpului electromagnetic.

O categorie aparte studiată, cea a bobinelor neliniare simple sau comandate, de diferite configurații, au fost abordate teoretic și experimental [A4, B1, D9, G6, H5, M1, S3, S4, S14, Mi7, Mi8] sau au fost simulate prin diferite procedee [D9, L2, L3, P10, S13, V1, Mi6, Mi7] și prin aceasta au permis realizarea multor dispozitive electromagnetice performante.

Nu în ultimul rând, materialele magnetice ale căror caracteristici neliniare au fost approximate prin funcții analitice, metode grafo-analitice, respectiv numerice [A6, A7, C7, H4, L6, M5, O1, Mi5] în scopul de a putea fi introduse în cadrul programelor de analiză numerică de câmp, cât mai aproape de realitatea lor fizică.

Ca o ilustrare a evoluției preocupărilor actuale a cercetărilor din domeniul electrotehnic, în "Tabela A" se prezintă statistic evoluția lucrărilor prezentate la Conferințele internaționale COMPUMAG, de la inițierea lor în 1976 și până în prezent.

O scurtă analiză a acestor date face remarcate câteva observații:



- creșterea treptată a numărului de participanți, a numărului de lucrări publicate în Proceedings-uri, ceea ce a făcut ca majoritatea lor să fie prezentate sub formă de postere.
- ca subdomenii abordate, câmpurile statice au scăzut ca pondere de preocupări în detrimentul regimurilor variabile, al aplicațiilor tehnice.
- s-au menținut ca pondere problemele de modelarea materialelor și cele de metode numerice.
- s-au dezvoltat domenii noi: optimizări, unde electromagnetice, compatibilitate electromagnetică.

**Tabela A - Statistica Conferințelor internaționale COMPUMAG**

Data	Locul	Lucr. Prezentate oral	Postere	Lucr. publicate	Nr. Particip.	A	B	C	D	E	F	G	H
Apr.'76	Oxford, UK	65	-	67	213	4	22	31	6	-	2	-	-
Sept'78	Grenoble, France	45	-	60	181	7	19	22	2	2	8	-	-
Sept'81	Chicago, USA	83	-	76	153	14	17	26	7	2	9	-	-
Mai'83	Genoa, Italy	64	44	98	174	20	18	30	7	-	20	-	-
Jun'85	Ft.Collins, USA	72	62	106	172	27	15	33	6	-	23	-	-
Aug'87	Graz, Austria	58	103	143	232	37	13	35	6	6	33	-	-
Sept'89	Tokio, Japan	59	162	177	306	52	16	26	5	9	57	-	-
Jul'91	Sorrento, Italy	46	178	193	322	52	17	33	5	20	51	-	-
Nov'93	Miami, USA	29	273	225	357	36	27	34	11	16	37	29	-
Jul'95	Berlin, Germany	25	332	258	385	64	38	69	16	36	56	11	-
Nov'97	Rio de Janeiro, Brasil	24	367	381	424	69	43	88	20	53	61	21	12

**A:** Aplicații (Devices and Applications)

**B:** Câmpuri statice (Static Fields)

**C:** Câmpuri variabile (Quasistatic Fields, Coupled Problems)

**D:** Modelare materiale (Material Modelling)

**E:** Optimizări (Optimization)

**F:** Metode numerice (Software Methodology, Numerical Techniques)

**G:** Propagarea undelor (Wave Propagation)

**H:** Compatibilitate electromagnetică (Electromagnetic Compatibility)

Lucrarea de față organizată pe șase capitole, patru anexe și o listă bibliografică cu 152 titluri, dezvoltă obiectivele precizate prin titlu "Contribuții privind analiza și sinteza câmpului magnetic staționar în medii neliniare"

- În *capitolul întâi* se propun doi algoritmi care generalizează în medii neliniare două proceduri aplicabile în medii liniare. Primul, propune un algoritm de calcul al inductivităților unei bobine neliniare (eventual și comandată) plecând de la aproximarea analitică a caracteristicii neliniare  $B(H)$  a miezului și de la parametrii geometrici ai acestui. Al doilea, generalizează teorema superpoziției din medii liniare, pentru câmpul  $\vec{B}$  creat de mai multe surse  $\vec{J}_k$  într-un mediu neliniar, printr-o superpoziție punctuală și iterativă, cu aplicabilitate în cazul problemelor spațiale de câmp.

- În *capitolul al doilea* se stabilesc formele funcționalei energetice de extremizat și teorema de unicitate în model integral, prin corelarea lor cu modelul diferențial de câmp și teorema de unicitate asociată. Astfel, în regim magnetic staționar se stabilesc funcționalele energetice atât pentru problema spațială cât și pentru cea bidimensională plan-paralelă sau axial-simetrică.

Se deduc ecuațiile caracteristice MEF pentru câmpuri magnetice staționare și se demonstrează că se pot genera după același algoritmi (indiferent de simetria lor) pe baza unei corespondențe a variabilelor.

Algoritmul MEF a fost implementat printr-un program propriu în cazul unui câmp plan-meridian dintr-un dispozitiv comandat ortogonal. Programul principal apelează alte subprograme de: discretizare, inițializare, superpoziții punctuale de câmpuri, interpolare, etc., în total 30 de subprograme scrise în FORTRAN. Rezultatele obținute se compară cu cele ce-au rezultat implementând aceeași problemă într-un program comercial ANSYS.

- În *capitolul al treilea* de "sinteză optimală" a geometriei de câmp, s-a creat un model matematic diferențial de câmp magnetic în variabila potențial magnetic  $\vec{A}$ , transpus în diferențe finite. S-a stabilit un program propriu de analiză numerică a câmpului prin metoda diferențelor finite; discretizarea cu pași variabili a făcut să nu se modifice tipul de ecuații folosite la rezolvarea numerică, atunci când parametrii geometrici se modifică în procesul de optimizare asociat. Valoarea optimă a parametrilor geometrici obținuți prin programul propriu s-au comparat cu cei obținuți prin programele MagNet și ANSYS cărora li s-a asociat același program de optimizare, respectiv s-a comparat cu rezultatul obținut la o optimizare parametrică cu programul OPERA-2d.

- În *capitolul al patrulea* se definește o metodă numerică originală (metoda tubului de flux elementar MTFE) destinată a determina câmpul magnetic util dintr-un miez neliniar cu o geometrie dată. Ca timp de calcul, necesar memorie, pas de discretizare, MTFE este comparabilă cu oricare dintre metodele numerice cunoscute.

• În *capitolul al cincilea* se realizează în primul rând o simulare a caracteristicilor neliniare univoce sau de tip histerezis prin două modele originale propuse. În al doilea rând s-au realizat mai multe simulări ale caracteristicilor funcționale ale bobinelor comandate, pentru diverse moduri de alimentare ale acestora și pentru diferite câmpuri de comandă. S-a pus în evidență, în acest fel, modificarea caracteristicilor funcționale și distorsiunea semnalelor în funcție de mărimea de comandă.

Ajuns la sfârșitul unui drum marcat de întreruperi, întârzieri justificate sau nu, reluări dintr-o altă optică și cu alte procedee de abordare (deci în contact direct cu evoluția problemelor din domeniul studiat), autorul se bucură că reușește, în sfârșit, să mulțumească celor care, în această încercare, l-au întărit voința și l-au sprijinit finalizarea:

- ◆ în primul rând **Domnului Prof.dr.ing. Ioan De Sabata**, conducătorul științific al întregii activități de pregătire a doctoratului pentru încrederea statornică, îndemnuri perseverente și pasiunea sa pentru tot ce este nou și performant.
- ◆ **laboratoarelor CAD** din cadrul Univ.tehnice Chemnitz (Germania) și Univ.Catolice Leuven (Belgia) care mi-au pus la dispoziție experiența Dâșșilor, hardul și softul aferent studiului, în perioada cât am beneficiat de mobilități TEMPUS.
- ◆ **catedrei de Electrotehnică** care prin dezbateri și sugestii au contribuit la îmbunătățirea soluțiilor
- ◆ **copiilor mei** - Florica și Adrian- care m-au ajutat la rularea unor programe și la tehnoredactarea finală.
- ◆ **tuturor** celor care au văzut în terminarea acestei lucrări un folos direct pentru activitatea de cercetare și didactică.



## Cap. 1      Campul magnetic stationar in medii liniare si neliniare

Campul magnetic stationar creat de curentii electrici de conductie (continui sau lent variabili in timp) satisface ecuatiile date de legile acestui regim.

Problema de baza a *analizei* unei probleme de camp magnetic stationar este de a determina, in conditii de unicitate date [H3,T5], distributia campului  $(\vec{B}, \vec{H})$  in domeniul dat ca functie analitica sau discreta, prin puncte, in functie de metoda adoptata (analitica sau numerica). Problema se poate formula direct in marimile de stare ale campului  $(\vec{B}, \vec{H})$  sau indirect in variabila auxiliara – potentialul magnetic vector  $\vec{A}$ .

In medii neliniare cu caracteristica reluctivitatii  $\nu(\vec{B})$  cunoscuta, determinarea analitica a distributiei campului magnetic devine o problema dificila, daca nu imposibila.

De interes tehnic este nu atat a calcula distributia locala a unui camp magnetic, cat a unor marimi globale : fluxuri magnetice, inductivitati, energii, forte, etc. Dintre acestea evaluarea inductivitatii unui dispozitiv magnetic neliniar apare cu o frecventa mai mare. In principiu daca s-ar cunoaste distributia campului  $\vec{B}(\vec{r})$  atunci algoritmul este cel clasic :

$$\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow \Phi = \int_{S_{rc}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \rightarrow L = \frac{N\Phi}{i}$$

Daca analiza campului s-a efectuat numeric, atunci in functie de metoda (MDF – diferente finite, MEF – elemente finite), evaluarea fluxului magnetic devine o sumare de fluxuri elementare prin partiile domeniului (cap. 2 si cap. 3).

In modulul de Post-Procesare al oricarui program comercial Software : MagNet[M4], ANSYS [A8], OPERA-2d [O2] exista facilitati create pentru a evalua toate aceste marimi globale.

In cele ce urmeaza, ca o granita intre metodele analitice si cele numerice, ne propunem sa aratam care ar fi limitele pana la care s-ar putea evalua inductivitatea unui dispozitiv neliniar simplu sau comandat, plecand de la o geometrie cunoscuta si o caracteristica neliniara a materialului de asemenea cunoscuta.

## 1.1 Influenta parametrilor geometrici si de material asupra comportarii unei bobine comandate

In literatura [B1], [P3], [S3] se indica modul de determinare a inductivitatii bobinelor neliniare comandate plecand de la caracteristica materialului feromagnetic  $B(H)$  sau a caracteristicii functionale flux – curent  $\Psi(i)$  sau flux – solenatie, aratand cum se modifica forma acestei caracteristici in functie de forma si valoarea semnalului de comanda: problema este pusa in evidenta si prin simularea analogica a functionarii unui astfel de dispozitiv (cap. 5).

In acest paragraf dorim sa punem in evidenta influenta altor factori asupra comportarii bobinei comandate cum ar fi : parametrii geometrici (forma si dimensiunile miezului, numar de spire, etc.), respectiv factori de material (caracteristica  $B(H)$  sau  $H(B)$  a miezului feromagnetic). In acest mod formulata, problema comporta doua aspecte :

1) In cazul bobinelor neliniare *comandate in curent* (sau in general *in solenatie de comanda* [S3.B1]) se utilizeaza aproximarea  $B(H)$  care pentru miezul comandat devine in fond, o familie de caracteristici  $B = B(H, H_c)$ ,  $H_c$  este intensitatea campului magnetic de comanda. In marimi raportate aceste caracteristici se exprima prin :

$$\frac{B}{B_m} = \frac{B}{B_m} \left( \frac{H}{H_m}, \frac{H_c}{H_m} \right) \quad (1.1)$$

$$\text{sau } y = y(x, x_c) = f(x, x_c) \quad (1.2)$$

unde  $B_m$  si  $H_m$  sunt amplitudinile inducției magnetice, respectiv a intensității campului magnetic de lucru iar  $y, x$  si  $x_c$  sunt marimile raportate. Fluxul magnetic total prin sectiunea miezului este

$$\Psi = N\Phi = N \int_{S_{fc}} \bar{B} ds = N \int_{S_{fc}} \left[ B_m \cdot f \left( \frac{H}{H_m}, \frac{H_c}{H_m} \right) \right] ds \quad (1.3)$$

sau scris in valori raportate :

$$\Psi = NB_m \int_{S_{fc}} f(x, x_c) ds \quad (1.4)$$

Pentru o bobina cu miez toroidal, admitand forma circulara a liniilor lui  $\bar{H}$  prin miez, legea circuitului magnetic, aplicata pe o linie intermediara  $\Gamma$  de raza  $r$ , ne da  $H = \frac{Ni}{2\pi r}$ .

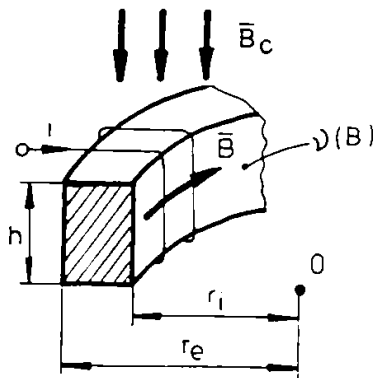


Fig. 1.1 Bobina cu miez toroidal

Valoarea maxima a campului de lucru se obtine pentru  $r = r_i$  (raza interioara):  $H_m = \frac{Ni}{2\pi r_i}$ .

Deci 
$$x = \frac{H}{H_m} = \frac{r_i}{r} \quad (1.5)$$

este noua variabila ce defineste intensitatea campului magnetic raportat. Pentru o grosime  $h$  a miezului, elementul de arie este de forma :

$$ds = h dr = -hr_i \frac{dx}{x^2} \quad (1.6)$$

Notand  $\lambda = \frac{r_c}{r_i}$ , variabila adimensionala, aria devine  $S_{Fe} = h_i(r_e - r_i) = hr_i(\lambda - 1)$  (1.7)

Cu aceste notatii, fluxul magnetic total se poate scrie sub forma

$$\Psi = -NB_m hr_i \int_1^{\frac{r_c}{r_i}} f(x) x^{-2} dx \quad (1.8)$$

Daca torul are un canal interior (in care se plaseaza infasurarea de comanda) cu razele :

$$r_{i_1} < r_{e_1} < r_{i_2} < r_{e_2}$$

notand  $\lambda_1 = \frac{r_{e_1}}{r_{i_1}}$  si  $\lambda_2 = \frac{r_{e_2}}{r_{i_2}}$  variabilele geometrice adimensionale, atunci fluxul magnetic total in

lungul torului, pentru un astfel de miez, se poate scrie :

$$\Psi = -NB_m h \left[ r_{i_1} \int_1^{\lambda_1} f(x, x_c) \cdot x^{-2} \cdot dx + r_{i_2} \int_1^{\lambda_2} f(x, x_c) \cdot x^{-2} \cdot dx \right] \quad (1.9)$$

Se admite pentru inductia magnetica de lucru o valoare medie pe sectiunea miezului  $B_{med}$ , iar fluxul total se poate scrie ca functie de aceasta valoare :

$$\Psi = NS_{Fe} B_{med} = NB_{med} h [r_{i_1} (\lambda_1 - 1) + r_{i_2} (\lambda_2 - 1)] \quad (1.10)$$

Comparand expresiile (1.8), (1.9), (1.10) rezulta valoarea medie a inductiei magnetice de lucru in cazul bobinelor neliniare comandate ca fiind de forma :

$$B_{med} = -\frac{B_m}{(\lambda - 1)} \int_1^{\lambda} f(x, x_c) \cdot x^{-2} \cdot dx \quad (1.11)$$

respectiv, pentru miezul cu canal interior :

$$B_{med} = -\frac{B_m}{r_{i_1} (\lambda_1 - 1) + r_{i_2}} \left[ r_{i_1} \int_1^{\lambda_1} f(x, x_c) \cdot x^{-2} \cdot dx + r_{i_2} \int_1^{\lambda_2} f(x, x_c) \cdot x^{-2} \cdot dx \right] \quad (1.12)$$

Cunoscand  $B_{med}$  de forma (1.11) sau (1.12) si expresia de aproximare (1.2) a caracteristicii neliniare, se rezolva ecuatia in general neliniara :

$$B_{med} = f(H, H_c) \quad (1.13)$$

si se determina valoarea  $H_{med}$  utilizand caracteristica  $B(H)$  a materialului. Dar

$$H_{med} = \frac{Ni}{2\pi r_{med}} = \frac{Ni}{l_{med}}, \text{ respectiv } H_m = \frac{Ni}{2\pi r_i} = \frac{Ni}{l_{min}} \quad (1.14).$$

Din (1.14) rezulta raza (lungimea) curbei medii, respectiv pozitia liniei mijlocii de flux in interiorul miezului :

$$r_{med} = \frac{H_m}{r_i H_{med}}; l_{med} = l_{min} \frac{H_m}{H_{med}} \quad (1.15)$$

Odata aflate valorile medii ( $B_{med}$ ,  $H_{med}$ ,  $r_{med}$ ) se pot determina parametrii bobinei neliniare asemanator ca si in cazul bobinelor liniare in care se lucreaza cu linia mijlocie de camp. Determinarea liniei medii de camp nu se face pe considerente pur geometrice (ca in cazul bobinelor liniare), ea tine seama de neliniaritatea miezului (1.1), de parametrul de comanda prin functia  $f(x, x_c)$  si de geometria miezului ( $r_i$ ,  $l_{min}$ ,  $\lambda$ ); parametrul constant (invariabil) fiind fluxul magnetic total  $\Psi$ .

In particular, pentru un miez necomandat ( $x_c = 0$ ) si magnetizat linear, vom avea o caracteristica  $B(H)$  liniara, respectiv  $f(x) = x$ .

Expresia (1.11) devine in acest caz de forma :

$$B_{med} = -\frac{B_m}{\lambda-1} \int_1^{\lambda} \frac{dx}{x} = \frac{B_m}{\lambda-1} \ln \lambda \quad (1.16)$$

unde valoarea maxima a inductiei este  $B_m = \frac{\mu Ni}{2\pi(r_e - r_i)} \ln \frac{r_e}{r_i}$ , respectiv

$$B_{med} = \frac{B_m r_i}{r_e - r_i} \ln \frac{r_e}{r_i} = \frac{\mu Ni}{2\pi(r_e - r_i)} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad (1.17)$$

aceasta fiind expresia cunoscuta a inductiei medii intr-o bobina liniara toroidala.

2) Pentru bobina neliniara comandata in curent (solenatie) valoarea inductiei medii (1.11), (1.12) se poate pune sub forma :

$$B_{med} = F(\lambda, x_c) \cdot B_m \quad (1.18)$$

Functia  $F(\lambda, x_c)$  depinde de geometria miezului, de neliniaritatea materialului  $y = f(x)$

si de intensitatea campului magnetic de comanda  $H_c$ , respectiv  $x_c = \frac{H_c}{H_m}$ .



Pentru diferite functii de aproximare  $f(x)$  ale caracteristicii miezului, rezulta expresii diferite pentru  $F(\lambda, x_c)$ . Daca parametrul de comanda este sinusoidal de forma  $x_c = X_{c_m} \sin(\omega t + \varphi_c)$ , atunci el influenteaza comportarea bobinei atat prin amplitudinea sa  $X_{c_m}$  cat si prin faza sa  $\varphi_c$ , aspect ce va fi pus in evidenta in cap.5.

Daca bobina neliniara este comandata in flux [B1, S3] (sau in general in inductie de comanda  $B_c$ ), vom utiliza aproximarea neliniaritatii  $H(B)$  care pentru bobina comandata este in fond o familie de caracteristici  $H = H(B, B_c)$ , care in marimi raportate insemna

$$\frac{H}{H_m} = f\left(\frac{B}{B_m}, \frac{B_c}{B_m}\right)$$

respectiv 
$$x = f(y, y_c) \quad (1.19)$$

Fluxul magnetic total prin miez este exprimabil prin :

$$\Psi = N\phi = N \int_{S_{Fe}} \bar{B} \, ds = NB_m \int_{S_{Fe}} y \, ds \quad (1.20)$$

Tinand seama de (1.5) si (1.6) vom exprima elementul de arie

$$ds = h \, dr = hr_i \, d\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1.21)$$

Dependenta  $x = f(y, y_c)$  este o functie (familii de functii pentru diversi  $y_c$ ) monoton crescatoare. Deci pentru  $x = 1$  corespunde  $H = H_m$  si din  $H(B)$  corespunde  $B = B_m$ , respectiv  $y = 1$ .

Pentru limita superioara a integralei (1.8) vom observa ca  $x = \frac{r_i}{r_c}$  implica

$$x = \frac{H_{ext}}{H_m} = \frac{H_{min}}{H_m} \text{ si careia ii corespunde } y = \frac{B_{min}}{B_m}.$$

Limita superioara  $\frac{1}{\lambda}$  corespunde in fond lui  $x_{min}$  iar functia  $x = f(y)$  fiind monoton crescatoare va corespunde lui  $y_{min}$ . Valorile minime sunt situate in jurul originii :

$$x_{min} = y_{min} \cdot f'(y) \Big|_{y=0} = y_{min} \cdot f'(0). \text{ Deci}$$

$$y_{min} = \frac{x_{min}}{f'(0)} = \frac{1}{\lambda f'(0)} = \frac{r_i}{r_c f'(0)} \quad (1.22)$$

Asadar, fluxul total se poate scrie :

$$\Psi = NB_m h r_i \int_1^{\lambda} y d\left(\frac{1}{x}\right) = -NB_m h r_i \int_1^{\frac{1}{\lambda f'(0)}} \frac{y}{f^2(y)} f'(y) dy \quad (1.23)$$

Prin analogie cu (1.16) putem defini si in acest caz inductia medie :

$$B_{med} = \frac{B_m}{\lambda - 1} \int_1^{\frac{1}{\lambda f'(0)}} \frac{y \cdot f'(y)}{f^2(y)} dy \quad (1.24)$$

sau facand o integrare prin parti, expresia se poate aduce la o forma mai simpla :

$$B_{med} = \frac{B_m}{\lambda - 1} \left[ 1 - \frac{1}{f'(0)} - \int_1^{\frac{1}{\lambda f'(0)}} \frac{dy}{f(y)} \right] \quad (1.25)$$

Avand determinata valoarea medie a inductiei de lucru se poate determina

$$H_{med} = f(B_{med}, B_c) = \frac{Ni}{2\pi r_{med}} = \frac{Ni}{l_{med}} \quad (1.26)$$

Algoritmul prezentat in acest paragraf poate constitui o *metoda de calcul analitico-numeric* a fluxului magnetic, a valorilor medii ale campului ( $B_{med}, H_{med}$ ), a pozitiei "liniei medii de camp" si in consecinta determinarea inductivitatii pentru diferite valori ale parametrilor de comanda.

Pentru forme geometrice (regulate) ale miezului, calculele se pot face analitic sau numai numeric in raport cu forma functiei de aproximare a caracteristicii neliniare  $y = f(x, x_c)$  sau  $x = f(y, y_c)$ . Pentru geometrii complexe ale miezului sau aproximari nu printr-o functie transcendentă a caracteristicii neliniare  $B(H)$ , algoritmul se complica si metoda isi pierde din eficacitate.

### Exemplu de aplicare a metodei :

Presupunem o bobina toroidala comandata ortogonal (Fig. 1.1) in inductie de comanda  $B_c$  pe care o presupunem constanta (in general  $B_c = B_c(r, t)$ , dar in problema considerata admitem ca inductia de comanda este un parametru constant), iar infasurarea de lucru este alimentata in curent sinusoidal  $i = I_m \sin \omega t$ . Vom utiliza o aproximare a caracteristicii neliniare printr-o functie polinomiala de forma :

$$H = \alpha_1 B + \beta_1 B^9 \quad (1.27)$$

respectiv scrisa in valori totale ale campului si inductiei magnetice. In orice punct din miez vom avea :

$$H = \alpha_1 \sqrt{B^2 + B_c^2} + \beta_1 \left( \sqrt{B^2 + B_c^2} \right)^9 \quad (1.28)$$

relatie care transpusa in marimile raportate  $x = \frac{H}{H_m}$ ,  $y = \frac{B}{B_m}$ ,  $y_c = \frac{B_c}{B_m}$ ,  $\alpha = \alpha_1 \frac{B_m}{H_m}$ ,

$\beta = \beta_1 \frac{B_m^9}{H_m}$  devine :

$$x = \alpha \sqrt{y^2 + y_c^2} + \beta \left( \sqrt{y^2 + y_c^2} \right)^9 \quad (1.29)$$

Daca notam cu  $H_1 = H_{\max} = H|_{r=r_1}$  si  $H_2 = H_{\min} = H|_{r=r_2}$  valorile extreme ale intensitatii campului pe sectiunea miezului , din relatia (1.29) se determina valorile corespunzatoare  $y_1$  si  $y_2$ , respectiv  $B_1 = y_1 B_m$  si  $B_2 = y_2 B_m$  vor fi valorile inductiei magnetice corespunzatoare acestor extreme.

Fluxul magnetic total prin miez. conform (1.23) se exprima succesiv sub forma :

$$\Psi = N\phi = N \int_S B ds = NB_m \frac{NI_m}{2\pi H_m} h \int_{y_1}^{y_2} y d\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1.30)$$

Integrala  $I = \int_{y_1}^{y_2} y d\left(\frac{1}{x}\right)$  cu dependenta  $x(y)$  data de (1.29) se poate aduce sub forma :

$$I = \frac{y_1}{x(y_1)} - \frac{y_2}{x(y_2)} - \frac{1}{\beta y_c^8} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3) \quad (1.31)$$

unde o integrala curenta este de forma :

$$I_s = \frac{1}{4k^7 \sqrt{\rho_s}} [F_s(n_2) - F_s(n_1)] \quad (1.32)$$

respectiv, functia  $F_s(n)$  este data de expresia (1.33) :

$$F_s(n) = \frac{1}{2} \sin(\alpha_s - \theta_s) \ln \frac{(n - k \cos \alpha_s + \sqrt{\rho_s} \sin \theta_s)^2 + (k \sin \alpha_s + \sqrt{\rho_s} \cos \alpha_s)^2}{(n - k \cos \alpha_s - \sqrt{\rho_s} \sin \theta_s)^2 + (\sqrt{\rho_s} \cos \theta_s - k \sin \alpha_s)^2} + \\ + \cos(\alpha_s - \theta_s) \left[ \arctg \frac{n - k \cos \alpha_s + \sqrt{\rho_s} \sin \theta_s}{k \sin \alpha_s + \sqrt{\rho_s} \cos \alpha_s} - \arctg \frac{n - k \cos \alpha_s - \sqrt{\rho_s} \sin \theta_s}{\sqrt{\rho_s} \cos \theta_s - k \sin \alpha_s} \right] \quad (1.33)$$

In aceasta relatie notatiile au urmatoarele semnificatii

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \frac{1}{y_c} \left( y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_c^2} \right) ; \quad n_2 = \frac{1}{y_2} \left( y_2 + \sqrt{y_2^2 + y_c^2} \right) \\ \alpha_s = (2s+1) \frac{\pi}{8} \quad , \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \\ k = \frac{1}{y_c} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \rho_s = \sqrt{1 - 2k^2 \cos 2\alpha_s + k^4} \\ \theta_s = \arg \left\{ 1 - k^2 e^{j(2s+1)\frac{\pi}{4}} \right\} \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Inlocuind valoarea integralei (1.31) in expresia (1.30) se obtine valoarea fluxului total  $\Psi$  prin miez. deci si valoarea inductivitatii bobinei.

Se observa ca o tratare analitica a problemei pentru o bobina neliniara (chiar la o aproximare a caracteristicii printr-un polinom cu doi termeni) devine laborioasa, practic nelucrative. Nu se pot obtine rezultate analitice compacte, o parte a calculului ramane a fi efectuata prin integrari numerice.

Pentru o bobina neliniara, cunoscand valoarea fluxului magnetic total  $\Psi$ , se poate determina ineluctabil valoarea magnetica medie a intensitatii campului pe aceeasi sectiune sub forma :

$$B_{m_s} = \frac{\Psi}{h(r_2 - r_1)} ; \quad H_{m_s} = \alpha_1 B_{m_s} + \beta_1 B_{m_s}^9 \quad (1.35)$$

Lungimea liniei mijlocii de flux va fi  $l_{med} = \frac{NI_{m_s}}{H_{m_s}}$ , iar "reluctivitatea medie", definita in raport cu valorile medii  $(B_{m_s}, H_{m_s})$  pe sectiunea transversala ale marimilor magnetice de stare, va fi :

$$\nu_{med} = \frac{H_{m_s}}{B_{m_s}} = \alpha_1 + \beta_1 B_{m_s}^8 = \frac{1}{\mu_{med}} \quad (1.36)$$

Cu valorile (1.35), (1.36) se poate determina permeanta medie a miezului raportata la "linia mijlocie de flux" ca fiind

$$\Lambda_{med} = \frac{\mu_{med}}{l_{med}} h(r_2 - r_1) \quad (1.37)$$

Inductivitatea (statica) a infasurarii de lucru se evalueaza prin relatia clasica de definitie :

$$L = \frac{\Psi}{i} \text{ sau } L = N^2 \Lambda_{med} \quad (1.38)$$

Daca intereseaza comportarea dinamica a bobinei de lucru intr-un circuit, poate fi determinata permeabilitatea dinamica, respectiv inductivitatea dinamica a acestei bobinei sub forma :

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = \frac{B_m}{H_m} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{B_m}{H_m} \left[ \alpha \frac{y}{\sqrt{y^2 + y_c^2}} + 9\beta \left( \sqrt{y^2 + y_c^2} \right)^{7/2} \cdot y \right]^{-1} \quad (1.39)$$

respectiv inductivitatea dinamica  $L_d = N^2(\Lambda_{med})_d$ .

In general, utilizand o aproximare a caracteristicii neliniare univoce a miezului prin functii (de obicei transcendente) de forma

$$\begin{aligned} B &= B(H) = f(H(r,t)) \\ H &= H(B) = g(B(r,t)) \end{aligned} \quad (1.40)$$

se pot determina fluxul total, inductivitatea sau chiar forma curentului  $i(t)$  discretizata, la alimentarea bobinei de lucru cu tensiune sinusoidala. Dificultatea calculului este data in primul rand de clasa de functii  $f$  si  $g$  utilizate in aproximare.

Fluxul magnetic prin miez se scrie succesiv :

$$\phi = \int_S B ds = h \int_{r_1}^{r_2} B(r) dr = h \int_{r_1}^{r_2} \mu(H) \cdot H(r) dr = h \int_{r_1}^{r_2} \frac{B_t}{H_t} \cdot H(r) dr = \frac{NIh}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{B_c^2 + f^2(H)}}{g\left(\sqrt{B_c^2 + f^2(H)}\right)} \cdot \frac{dr}{r} \quad (1.41)$$

Cand functiile asociate aproximarii sunt de forma transcendentă, de exemplu :

$$\begin{cases} B(H) = f(H) = \alpha \operatorname{arg sh} \beta H & ; \quad \alpha = 0.26 : \beta = 10 \\ H(B) = g(B) = \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \frac{B}{\alpha} \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\text{sau } \begin{cases} f(H) = \alpha \operatorname{arctg} \beta H \\ g(B) = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{B}{\alpha} \end{cases} \quad (1.43)$$

expresia fluxului magnetic (1.41) devine de forma :

$$\phi = \frac{NIh}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{B_c^2 + (\alpha \operatorname{arg sh} \beta H)^2}}{\frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} \sqrt{B_c^2 + (\alpha \operatorname{arg sh} \beta H)^2}} \cdot \frac{dr}{r} \Big|_{H_i=0.0.2...} \quad (1.44)$$

Valoarea fluxului se poate obtine integrand numeric expresia (1.44) pentru diferite valori ale inductiei de comanda  $B_c$ .

Optiunea este intre un astfel de algoritm si cel al transpunerii problemei integral in cadrul unei metode numerice de analiza a campului.

## 1.2 Teorema superpozitiei punctuale a campurilor electrice si magnetice in medii neliniare

Superpozitia campurilor electrice si magnetice intr-un anumit domeniu pune in evidenta cauzalitatea si proprietatea intrinseca a unui sistem fizic ca la o suma de cauze sa corespunda o suma de efecte. Pentru medii liniare si solutii analitice teorema superpozitiei este tratata detaliat [D6], [H3], [M8].

### Superpozitia in medii liniare

In medii liniare si omogene teorema superpozitiei este o consecinta a caracterului liniar al ecuatiilor lui Poisson si Laplace in astfel de medii.

Potentialul electrostatic  $V(\vec{r}), \vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma$  dintr-un domeniu de camp  $\mathcal{D}_\Sigma$  este solutie a unei ecuatii de tipul :  $\text{div}(\epsilon \text{grad} V) = -\rho_v$ . Functia  $V(\vec{r})$  este solutie unica pentru probleme Dirichlet, respectiv  $V(\vec{r})$  este definit pana la o constanta in probleme Neumann.

Potentialul  $V(\vec{r})$  definit in domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$  ( $\vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma$ ), cu conditiile la limita de tip Dirichlet :  $V(\vec{r})$  sau de tip Neumann :  $\vec{n} \cdot \nabla V(\vec{r})$  pentru  $\vec{r} \in \Sigma$  si care este stabilit de o distributie de sarcina echivalenta :  $\rho_v = \alpha_1 \rho_{v_1} + \alpha_2 \rho_{v_2} + \dots$ , este egal cu suma potentialelor  $\alpha_1 V_1(\vec{r}), \alpha_2 V_2(\vec{r}), \dots$  (cu conditii la limita asociate  $\alpha_1 V_1(\vec{r}), \alpha_2 V_2(\vec{r}), \dots$  sau  $\alpha_1 \vec{n} \cdot \nabla V_1(\vec{r}), \alpha_2 \vec{n} \cdot \nabla V_2(\vec{r}), \dots, \vec{r} \in \Sigma$ ) pe care le-ar stabili separat repartitiile de sarcina  $\alpha_1 \rho_{v_1}, \alpha_2 \rho_{v_2}, \dots$ .

In medii liniare, omogene si izotrope, potentialul magnetic vector  $\vec{A}(\vec{r}), \vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma$ , solutie a unei ecuatii Poisson vectoriale :  $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$ , cu conditii la limita cunoscute :  $\vec{A}(\vec{r})$  si  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}(\vec{r}), \vec{r} \in \Sigma$ , care este stabilit de o densitate de curent echivalenta  $\vec{J}(\vec{r}) = \alpha_1 \vec{J}_1(\vec{r}) + \alpha_2 \vec{J}_2(\vec{r}) + \dots$ , este egal cu suma vectoriala a solutiilor  $\alpha_1 \vec{A}_1(\vec{r}), \alpha_2 \vec{A}_2(\vec{r}), \dots$  (cu conditii la limita  $\alpha_1 \vec{A}_1(\vec{r}), \alpha_2 \vec{A}_2(\vec{r}), \dots$  sau  $\alpha_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n}(\vec{r}), \alpha_2 \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n}(\vec{r}), \dots, \vec{r} \in \Sigma$ ) pe care le-ar stabili separat densitatile de curent  $\alpha_1 \vec{J}_1(\vec{r}), \alpha_2 \vec{J}_2(\vec{r}), \dots, \vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma$  [Mi16].

In general, presupunem un camp electromagnetic variabil  $\vec{E}(t)$  si  $\vec{H}(t)$ , definit intr-un domeniu de camp  $\mathcal{D}_\Sigma$  in care exista medii liniare si izotrope in repaus, specificate prin functiile

$\varepsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r}), \sigma(\vec{r})$  care redau valorile locale ale parametrilor constitutivi. Teorema superpozitiei a doua astfel de campuri sub forma electrica :  $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ , respectiv magnetica :  $\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}''$ , cu conditii initiale distincte :  $\vec{E}'(\vec{r}, t_0), \vec{E}''(\vec{r}, t_0)$ , respectiv  $\vec{H}'(\vec{r}, t_0), \vec{H}''(\vec{r}, t_0), \vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma$  si cu conditii la limita distincte  $\vec{E}'_t(\vec{r}, t), \vec{E}''_t(\vec{r}, t)$ , respectiv  $\vec{H}'_t(\vec{r}, t), \vec{H}''_t(\vec{r}, t), \vec{r} \in \Sigma, t > t_0$ , pune in evidenta [P5] ca pentru campurile rezultante se admit conditiile initiale :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t_0) &= \vec{E}'(\vec{r}, t_0) + \vec{E}''(\vec{r}, t_0) ; \\ \vec{H}(\vec{r}, t_0) &= \vec{H}'(\vec{r}, t_0) + \vec{H}''(\vec{r}, t_0), \vec{r} \in \mathcal{D}_\Sigma\end{aligned}\quad (1.45)$$

respectiv conditiile la limita :

$$\begin{aligned}\vec{E}_t(\vec{r}, t) &= \vec{E}'_t(\vec{r}, t) + \vec{E}''_t(\vec{r}, t) ; \\ \vec{H}_t(\vec{r}, t) &= \vec{H}'_t(\vec{r}, t) + \vec{H}''_t(\vec{r}, t), \vec{r} \in \Sigma, t > t_0\end{aligned}\quad (1.46)$$

respectiv, suma efectelor  $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ ,  $\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}''$  corespunde sumei cauzelor (conditii initiale si la limita).

### Superpozitia in medii neliniare

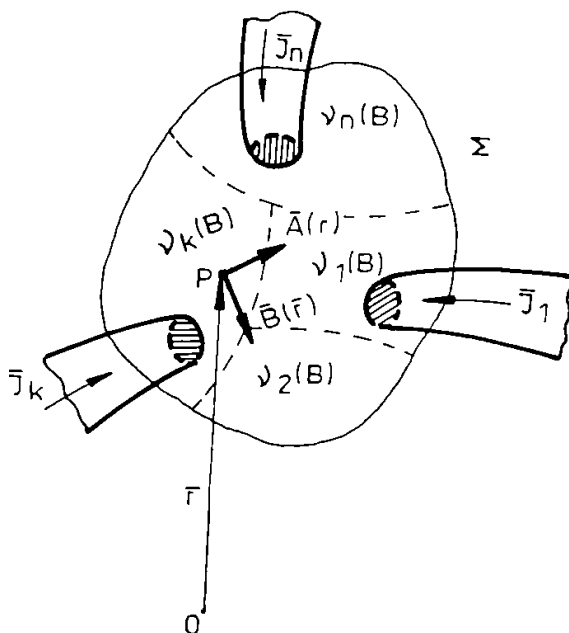


Fig. 1.2 Superpozitia campurilor intr-un domeniu neliniar si heterogen

In medii neliniare, izotrope si neomogene valorile parametrilor constitutivi  $\varepsilon(E, \vec{r})$  si  $\nu(B, \vec{r})$  difera de la un punct la altul si in acelasi punct  $\vec{r}$  din domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$  depind de valoarea campului  $E$  sau  $B$  in punctul respectiv. Ecuatiile satisfacute de potentialele  $V$ , respectiv  $\vec{A}$  in astfel de medii sunt de forma :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [\varepsilon(E, \vec{r}) \cdot \operatorname{grad} V(\vec{r})] &= -\rho_V(\vec{r}) \\ \operatorname{rot} [\nu(B, \vec{r}) \cdot \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})] &= \vec{J}(\vec{r})\end{aligned}\quad (1.47)$$

deci nu mai sunt ecuatii liniare care

6.2.2. 535/206A

sa admita o teorema de superpozitie a solutiilor pentru tot domeniul de camp  $\mathcal{D}_\Sigma$ .

La doua (sau in general la "n") surse de camp  $\rho_{i_1}(\vec{r}), \rho_{i_2}(\vec{r}), \dots$  in camp electric, respectiv  $\vec{J}_1(\vec{r}), \vec{J}_2(\vec{r}), \dots$  in camp magnetic (Fig. 1.2), determinarea solutiei  $V(\vec{r})$  si  $\vec{E}(\vec{r})$ , respectiv  $\vec{A}(\vec{r})$  si  $\vec{B}(\vec{r})$  se poate realiza doar in cadrul metodelor numerice de analiza a campurilor electrice si magnetice sub forma *punctuala* si *iterativa*, prin procesarea paralela a mai multor subprobleme ale aceluiasi domeniu de camp  $\mathcal{D}_\Sigma$ , corespunzatoare fiecărei surse de camp cu conditiile la limita asociate.

In figura 1.3 se exemplifica aplicarea "superpozitiei punctuale" si iterative pentru o problema de camp magnetic in medii neliniare.

Fiecare subproblema are sursa proprie de camp reprezentata prin distributia de curent  $\vec{J}_k(\vec{r})$ , conditia la limita proprie pentru potentialul sau  $\vec{A}_k$  si in acest caz se poate determina (in cadrul unui algoritm numeric) solutia proprie  $\vec{A}_k$  in punctele interioare ale domeniului, respectiv valoarea inductiei magnetice asociate acestui potential  $\vec{B}_k$ , pentru orice nod interior  $\vec{r}_i \in \mathcal{D}_\Sigma$ .

Comun pentru toti algoritmii paraleli de calcul a potentialelor  $\vec{A}_k$  si a campurilor fizice  $\vec{B}_k$  este mediul neliniar cu caracteristica sa  $\nu(B)$  cunoscuta pentru orice punct din domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$  (sau numai pentru o parte din domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$  unde exista proprietati neliniare) sau mai multe caracteristici neliniare  $\nu_1(B), \nu_2(B), \dots$  pentru diverse medii neliniare care compun domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$ .

Intr-un punct interior  $\vec{r}_i$ , inductia magnetica rezultanta este superpozitia vectoriala a inductiilor  $\vec{B}_k(\vec{r}_i)$  create de fiecare sursa in parte, respectiv :

$$\vec{B}_i(\vec{r}_i) = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k(\vec{r}_i) \quad (1.48)$$

Din caracteristica neliniara si univoca a mediului,  $\nu(B)$ , se poate determina valoarea reluctivitatii fiecarui punct  $\vec{r}_i$  din domeniu :

$$\nu_i = \nu_i(\vec{r}_i) = \nu(B_i, \vec{r}_i) = \nu[B_i(\vec{r}_i)] \quad (1.49)$$

ca fiind data de valoarea inductiei rezultante in acel punct de vector  $\vec{r}_i$

Cu noile valori ale reluctivitatii  $\nu_i$  (Fig. 1.3) se reia in mod iterativ calculul potentialelor  $\vec{A}_k(\vec{r}_i)$  din fiecare subproblema  $k = \overline{1, n}$ , a inductiilor partiale  $\vec{B}_k(\vec{r}_i)$  si a celei rezultante date de (1.48). Procesul se considera incheiat atunci cand in orice punct din interiorul zonei neliniare,



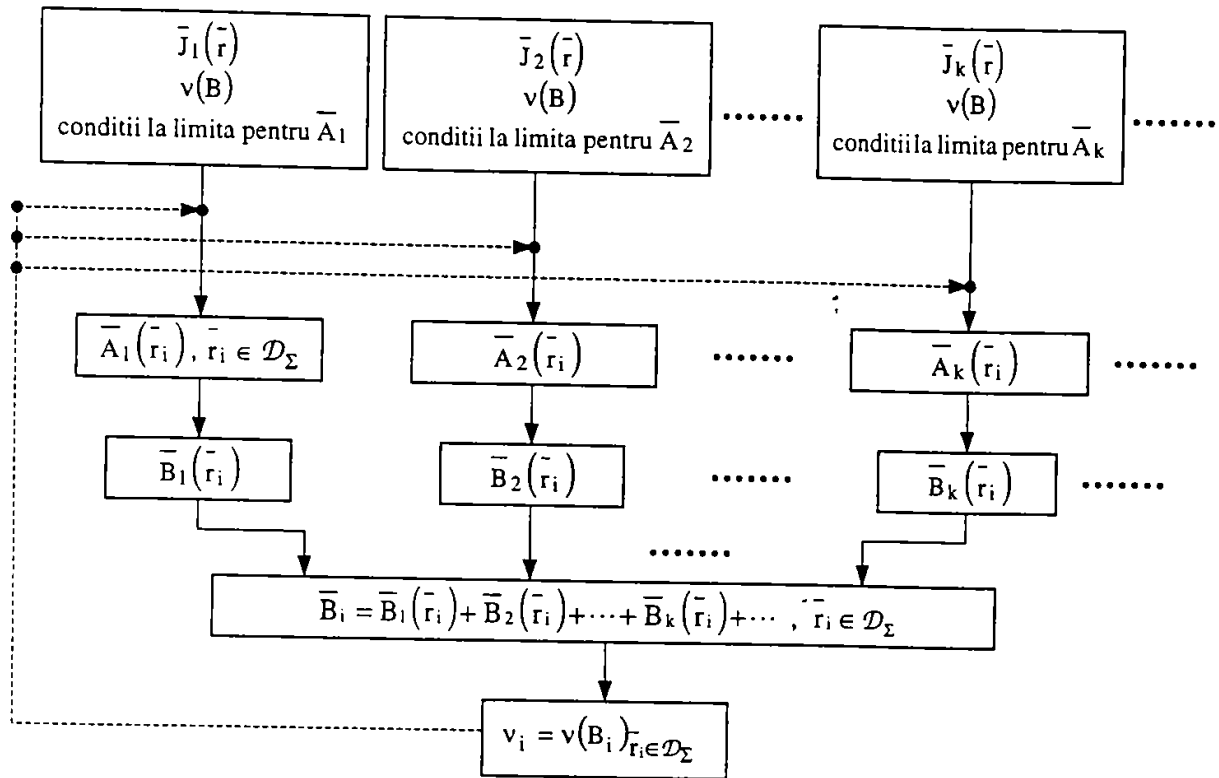


Fig. 1.3 Diagrama aplicării “superpoziției punctuale” și iterative pentru o problema de câmp magnetic în medii neliniare

diferența dintre două valori consecutive la iterațiile “s” și “s-1” ale reluctivității sunt mai mici decât o eroare “e” impusă :

$$v_i^{(s)}(\bar{r}_i) - v_i^{(s-1)}(\bar{r}_i) \leq e \text{ pentru orice } \bar{r}_i \in \mathcal{D}_\Sigma. \quad (1.50)$$

Problema iterațiilor după valorile reluctivității  $v(B)$  (sau în câmpuri electrice a permitivității  $\varepsilon(E)$ ) se rezolvă în mod diferit în funcție de metoda numerică utilizată.

#### a). Metoda diferentelor finite (MDF)

În câmpuri plane (plan-paralele xOy sau axial-simetrice zOr), într-un nod interior  $(i, j)$  al rețelei de discretizare, valoarea reluctivității  $v_j$  depinde de valoarea inducției rezultante  $B_j$  din acel nod, dată de superpoziția punctuală :

$$\bar{B}_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{B}_{ij})_k \quad (1.51)$$

Inducțiile parțiale  $(\bar{B}_{ij})_k$  din nodul  $(i, j)$  pot avea direcții oarecare (Fig. 1.4-a), aceeași direcție (Fig. 1.4-b) sau direcții ortogonale (Fig. 1.4-c) compunerea

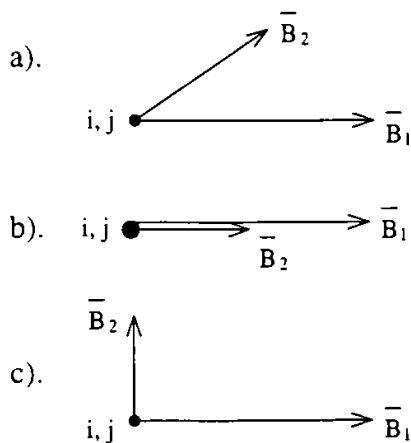


Fig. 1.4 Compunerea vectoriala a inductiilor, partiale in functie de directiile acestora

vectoriala (1.48) si (1.51) facandu-se in mod corespunzator. Daca e problema in spatiu (3D), in nodul  $(i, j, k)$  se suprapun inductiile partiale  $(\bar{B}_k)_{ijk}$ .

Valoarea reluctivitatii din nodul  $(i, j)$  la iteratia "s-1",  $\nu_{ij}^{(s-1)}$ , se va utiliza in procesul de recalculare a potentialelor  $(\bar{A}_{ij})_k$  din cele  $k = \overline{1, n}$  subprobleme la noua iteratie "s", eventual cu o subrelaxare care sa asigure o viteza de convergenta sporita :

$$\nu_{ij}^{(s)} = \nu_{ij}^{(s-1)} - \omega_\nu (\nu_{ij,c}^{(s)} - \nu_{ij}^{(s-1)}), \quad \omega_\nu \in (0,1) \quad (1.52)$$

iar valoarea reluctivitatii de calcul  $\nu_{ij,c}^{(s)}$  [Mi5] este cea dedusa din caracteristica neliniara  $\nu(B)$ . Cu aceleasi valori ale reluctivitatii actualizate  $\nu_{ij}^{(s)}$  se vor recalcula si inductiile partiale  $(\bar{B}_{ij}^{(s)})_k$ .

### b). Metoda elementului finit (MEF)

Pentru campuri plane, utilizand o discretizare prin elemente finite triunghiulare de ordinul I (Fig. 1.5), se lucreaza cu valorile potentialelor  $\bar{A}$  in nodurile  $(i, j, k)$  ale triunghiurilor si cu valorile campului  $\bar{B}$  intr-un nod interior N (de obicei ortocentrul elementului).

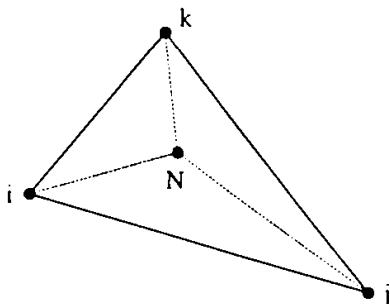


Fig.1.5 Element finit triunghiular de ordinul I

In acest caz., din caracteristica neliniara  $\nu(B)$  se pot actualiza valorile lui  $\nu$  in nodurile N,  $N \in \overline{1, m}$ ,  $m$  fiind numarul de elemente finite, iar prin interpolare valorile lui  $\nu$  in varfurile elementului finit  $(i, j, k)$ . Cu valorile lui  $\nu$  din varfuri se reiau iteratiile de calcul ale potentialelor  $\bar{A}$  in noduri, iar cu valorile lui  $\nu$  din centrele N se apreciaza, conform (1.52), convergenta problemei.

Daca, in cadrul MEF, se lucreaza cu

elemente finite de ordinul 2 (Fig. 1.6), atunci potențialele  $\bar{A}$  se definesc în nodurile 1, 2, 3, 4, 5, 6 iar valorile câmpului  $\bar{B}$  în nodurile I, II, III interioare fiecărui element.

În acest caz se memorează lista nodurilor în care este definit  $\bar{A}$  cu valoarea reluctivității fiecărui nod la iteratia "s-1". Separat se memorează lista nodurilor interioare fiecărui element (I,II,III) în care este definită inducția  $\bar{B}$  cu valoarea reluctivității sale, dedusă din caracteristica neliniară  $\nu(B)$ .

Valorile din nodurile  $\bar{1},\bar{6}$  se obțin prin interpolare în funcție de valorile lui  $\nu$  în nodurile interioare la iteratia precedentă. Aceste facilități sunt posibile [M4,B7] în cadrul etapei de Postprocessing al fiecărui program de calcul prin MEF. Subrelaxarea (1.52) se aplică în acest caz asupra valorilor reluctivității din nodurile interioare.

La iteratia "s", în subproblema "k", valorile inducției magnetice din nodurile interioare

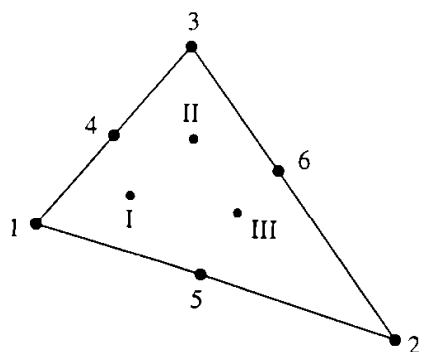


Fig. 1.6 Element finit triunghiular  
de ordinul 2

sunt :  $\bar{B}_{I,k}^{(s)}, \bar{B}_{II,k}^{(s)}, \bar{B}_{III,k}^{(s)}$  și ele participă la o superpoziție de tipul (1.51) pentru fiecare din cele trei noduri interioare elementului finit :

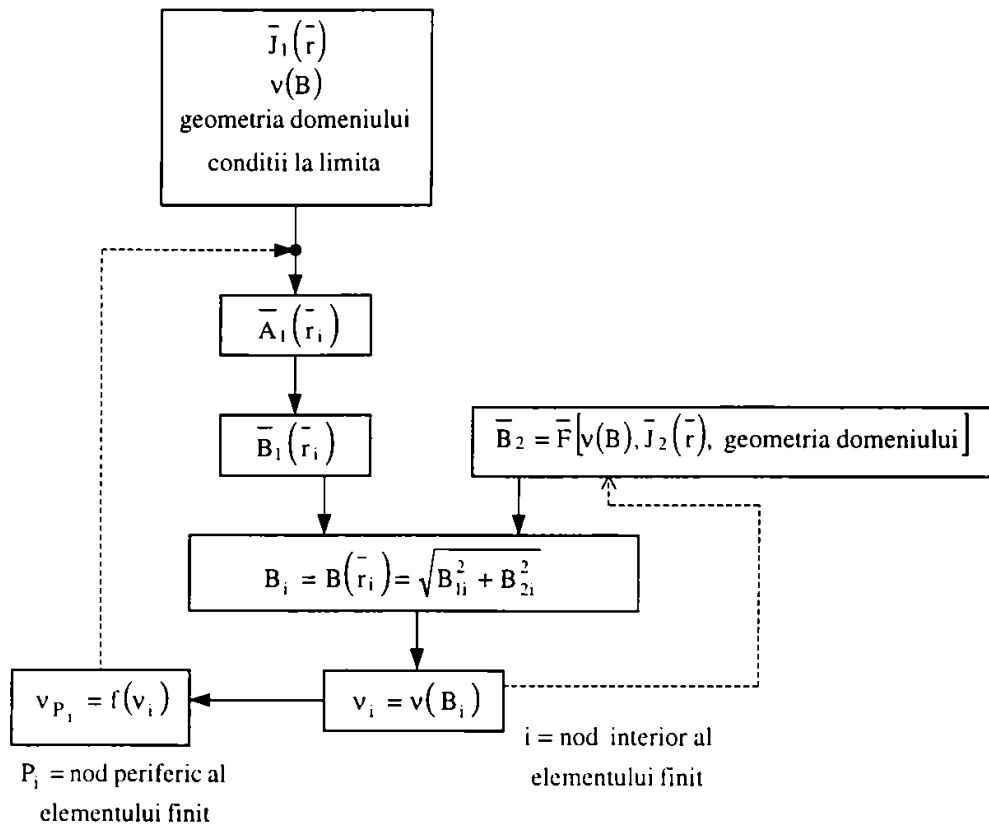
$$\bar{B}_I^{(s)} = \sum_{k=1}^n \bar{B}_{I,k}^{(s)} ; \bar{B}_{II}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \bar{B}_{II,k}^{(s)} ; \bar{B}_{III}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \bar{B}_{III,k}^{(s)} \quad (1.53)$$

respectiv, reluctivitatea de calcul în nodul I este  $\nu_{I,c}^{(s)} = \nu(\bar{B}_I^{(s)})$ , analog  $\nu_{II,c}^{(s)}$  și  $\nu_{III,c}^{(s)}$  care se vor utiliza în relații de tipul (1.52).

În situația în care unul dintre câmpurile  $\bar{B}_k$  nu trebuie dedus printr-o analiză numerică, ci se poate introduce printr-o funcție externă, care la iteratia "s" este de forma :

$$\bar{B}_k^{(s)} = \bar{F}(\nu^{(s)}, \bar{J}_k, \text{geometrie}) \quad (1.54)$$

atunci această valoare participă în superpoziția punctuală (1.48) alături de rezultatul celorlalte subprobleme, iar valoarea sa (1.54) la orice iteratie se actualizează în funcție de valoarea reluctivității la iteratia respectivă  $\nu^{(s)}$ .



**Fig. 1.7** Organigrama asociata analizei numerice a campului magnetic dintr-un dispozitiv neliniar si izotrop

Intr-un caz particular, in care unul dintre campurile  $\vec{B}_k$  nu este influentat de nivelul de magnetizare al celorlalte campuri asupra subdomeniului neliniar  $\nu(B)$ , in acest caz valoarea  $\vec{B}_k = \vec{cst}$  participa la superpozitia punctuala (1.48) mereu cu aceeasi valoare, indiferent de iteratia curenta "s" a celorlalte campuri componente.

Daca mediul component al domeniului  $\mathcal{D}_2$  este anizotrop (caz mai des intalnit in analiza prin elemente finite spatiale – 3D), atunci caracteristica constitutiva a mediului este de forma :  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{B}, \vec{r})$ , respectiv intr-un punct dat din domeniu  $\vec{r} = \vec{r}_i$  trebuie cunoscuta valoarea lui  $\nu$  pentru diverse directii ce trec prin punctul respectiv, directii ce coincid cu directiile campurilor componente  $\vec{B}_k$ , respectiv cu directia campului rezultat  $\vec{B}$ .

In [Mi12] se prezinta o varianta a teoremei de superpozitie punctuala a campurilor  $\vec{B}$  (sau  $\vec{H}$ ) aplicata in cadrul metodei tubului de flux elementar (MTFE).

In figura 1.7 se prezinta organigrama asociata analizei numerice a campului magnetic dintr-un dispozitiv neliniar si izotrop cu caracteristica  $\nu(B)$  cunoscuta si in care campurile componente se suprapun ortogonal iar unul dintre campurile componente  $(\overline{B}_2)$  este dat printr-o functie externa  $\overline{F}$ .

### 1.3 Concluzii

1. Generalizand algoritmul de calcul a inductivitatii unei bobine in medii liniare, se propune un algoritm de a evalua inductivitatea pentru o bobina neliniara (simpla sau comandata).

Ca date de plecare se considera *caracteristica neliniara*  $\nu(B)$  sau  $\mu(H)$  a miezului (aproximata analitic prin polinoame sau functii transcendente) si *geometria miezului*.

Se evalueaza analitic fluxul magnetic total prin miez, valoarea medie a inductiei magnetice pe sectiune ( $B_{med}$ ), pozitia liniei mijlocii de flux si deducerea expresiei inductivitatii.

Se evidentieaza limitele unei tratari analitice in functie de aproximarea neliniaritatii si complexitatea geometrica.

2. Plecand de la teorema superpozitiei campurilor in medii liniare, pentru campuri magnetice stationare produse de densitatile de curent  $\overline{J}_1, \overline{J}_2, \dots$  cu o orientare in spatiu oarecare, se propune o *superpozitie punctuala* a campurilor in medii neliniare printr-un procedeu iterativ.

Algoritmul de aplicare este precizat atat pentru diferente finite cat si pentru elemente finite (de ordinul I si II) si care are aplicabilitate in mod deosebit in probleme de campuri electrice si magnetice spatiale (3D).



## Cap.2 Analiza numerica a campului magnetic stationar in medii neliniare prin metoda elementului finit (MEF)

In acest capitol se formuleaza o problema de camp magnetic stationar coreland pe de o parte teorema de unicitate a determinarii unui camp magnetic sub forma clasica cu formularea variationala a problemei, iar pe de alta parte se coreleaza modelul variational (forma functionalei de extremizat) cu modelul diferential de camp [Mi1, Mi2, Mi3, R2].

Prezentarea formala a metodei cu elemente finite este atribuita lui Turner, Clough, Martin si Topp, care in 1954 [T6] au folosit ecuatiile elasticitatii pentru obtinerea unor modele numerice cu elemente finite triunghiulare. Denumirea de "elemente finite" a fost data in 1960 de Clough [C6] folosind noua metoda la solutionarea unor probleme de elasticitate plana.

Dinamica dezvoltarii acestei metode este fara precedent, din probleme de mecanica solidului a trecut la medii elastice, la fluide, la campuri electromagnetice etc.

Metoda elementului finit (MEF) este o metoda variationala de tip integral, operand la nivelul elementelor finite cu expresii integrale. Unul din avantajele MEF este acela de a putea discretiza forme geometrice complexe, incluzand cele cu laturi si fete curbilinii. Elementele finite izoparametrice folosesc aceleasi functii de interpolare pentru coordonate si pentru variabile de camp.

Aplicarea MEF la studiul campurilor electromagnetice prezentata in diferitele stadii de evolutie [C4, C8, S8, Z1, Mi1] implica probleme legate de obtinerea ecuatiilor variationale si a functionalelor specifice fiecarui regim de functionare, generarea matricilor asociate si probleme cu caracter mai general (programare, rezolvarea numerica a sistemelor de ecuatii etc.).

Functionalele cu care opereaza metodele variationale de camp contin derivate de ordin inferior celor din modelul diferential de camp, deci permite folosirea unei clase mai largi de functii pentru aproximarea solutiei.

Desi prezinta multe avantaje, metodele variationale nu pot fi folosite la orice clasa de probleme diferentiale, anumiti operatori nu admit formulari variationale [D8].

Problema determinarii potentialelor din nodurile elementale ale domeniului de camp se rezolva in cadrul MEF in diferite moduri:

- potentialele nodurilor se deduc din conditia de extrem a functionalei energetice, principiu variational de tip lagrangean sau hamiltonian numita si varianta a metodei Ritz [D5, Mi3]. Conditia de stationaritate a functionalei este echivalenta cu ecuatiile Euler-

Lagrange atasate functionalei si care sunt tocmai ecuatiile de evolutie ale sistemului fizic considerat (ecuatiile lui Maxwell);

- potentialele nodurilor se deduc din conditia de ortogonalitate a reziduului ecuatiilor de rezolvat si a functiilor de forma din MEF, numita si varianta a metodei Galerkin.

Prima metoda avand un caracter fizic si intuitiv, conferit de utilizarea functionalelor naturale de energie s-a impus mai mult.

## 2.1 Formularea variationala a unei probleme de campuri magnetice stationare

Campul magnetic stationar, definit intr-un domeniu  $D$  marginit de suprafata frontiera  $\Sigma$  satisface ecuatiile de stare a campului:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

unde  $\bar{B}$  si  $\bar{H}$  definesc vectorii camp, iar  $\bar{J}$  densitatea de volum a curentului de conductie, functie sursa cu distributie spatiala cunoscuta in  $D \cup \Sigma$ , independenta de marimile de stare ale campului magnetic.

Relatia constitutiva asociata  $\bar{B} = \bar{B}(\bar{H})$  se considera univoca, neliniara, cu magnetizatie permanenta, fara histerezis. Din ecuatiile (2.1) rezulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{J} &= 0 \\ \bar{B} &= \operatorname{rot} \bar{A} \end{aligned} \quad (2.2)$$

La interfata  $S$  din domeniul de camp  $D$ , unde variatia proprietatilor de material determina discontinuitati ale vectorilor-camp, din 2.1 se deduc ecuatiile de trecere:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_s \bar{H} &= \bar{n}_s \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{n}_s \times [\bar{H}]_s = \bar{J}_s \\ \operatorname{div}_s \bar{B} &= \bar{n}_s \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = \bar{n}_s \cdot [\bar{B}]_s = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

unde  $\bar{n}_s$  este versorul normal la  $S$ , iar  $\bar{J}_s$  densitatea panzei de curent eventual continuta in discontinuitatea  $S$ . Marimile  $\bar{H}_1, \bar{B}_1$ , respectiv  $\bar{H}_2, \bar{B}_2$  sunt valorile campului de o parte si de alta a discontinuitatii.

Pe frontiera  $\Sigma$  a domeniului de camp  $D$  sunt cunoscute conditiile la limita, in general mixte:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\tau_\Sigma} &= \bar{n}_\Sigma \times \bar{H} = \bar{f}_\Sigma(\bar{r}) & , \quad \bar{r} \in \Sigma_1 \subset \Sigma \\ \bar{A}_{\tau_\Sigma} &= \bar{n}_\Sigma \times \bar{A} = \bar{g}_\Sigma(\bar{r}) & , \quad \bar{r} \in \Sigma_2 \subset \Sigma \\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2 &= \Sigma & , \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi \end{aligned} \quad (2.4)$$



Condițiile la limita definite prin (2.4) devin omogene dacă  $\Sigma_1$  constituie o interfață cu un domeniu de permeabilitate infinită, respectiv  $\Sigma_2$  reprezintă o suprafață de câmp  $\bar{\mathbf{B}}$  sau un plan de simetrie a câmpului magnetic, în general tridimensional.

Ecuațiile de stare (2.1) cu condițiile de interfață (2.3) și de frontieră (2.4) asigură unicătatea soluției problemei tridimensionale de câmp magnetic staționar pentru vectorul inducției magnetice  $\bar{\mathbf{B}}$  [D6, R2, S8, T5, Mi1].

Aceeași problemă de câmp magnetic staționar, formulată și rezolvată în raport cu potențialul magnetic vector  $\bar{\mathbf{A}}$ , are o infinitate de soluții, întrucât vectorii  $\bar{\mathbf{A}}$  și  $\bar{\mathbf{A}} + \nabla\varphi$ , cu  $\varphi$  o funcție scalară arbitrară de poziție, dau ambii o inducție magnetică  $\bar{\mathbf{B}}$  unică, conform (2.1). Pentru înlăturarea neunivocității soluției în  $\bar{\mathbf{A}}$  a problemei de câmp magnetic staționar (operație impusă de asigurarea convergenței și stabilității unei rezolvări numerice) trebuie aplicate relații suplimentare asupra lui  $\bar{\mathbf{A}}$ . Uzual, se fixează divergența lui  $\bar{\mathbf{A}}$  prin condiția de etalonare a lui Coulomb:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad (2.5)$$

în tot domeniul de câmp  $D$ .

Teorema lui Gauss generalizată ne da condițiile la limita pentru  $\bar{\mathbf{A}}$ :

$$\int_{\Sigma} \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\Sigma} d\Sigma = \int_{\Sigma} A_{n_{\Sigma}} d\Sigma = 0 \quad (2.6)$$

respectiv o restricție impusă componentei normale a lui  $\bar{\mathbf{A}}$  în direcția normalei exterioare la frontieră  $\Sigma$ , iar sub formă locală, la traversarea interfeței  $S$  de discontinuitate:

$$\operatorname{div}_s \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{n}}_s \cdot (\bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_1) = 0 \quad \leftrightarrow \quad A_{n_1} = A_{n_2} \quad (2.7)$$

Dacă se admite continuitatea pe  $S$  a componentei tangențiale  $\bar{\mathbf{A}}_{\tau_s}$ , atunci a doua condiție

de interfață (2.3) leagă derivatele  $\frac{\partial A_{n_s}}{\partial \tau_s}$  și  $\frac{\partial A_{\tau_s}}{\partial n_s}$ .

Aceeași problemă de câmp magnetic staționar admite și o formulare echivalentă, de tip variațional, necesitând staționarizarea unei funcționale energetice scalare stabilită în [Mi1, Mi3].

Funcționala energetică numită acțiune are un integrand  $L$  care are semnificația unui lagrangean al sistemului fizic compus din mediul material, în general neomogen (neliniar), aflat în prezența câmpului magnetic staționar definit în domeniul  $D$ :

$$F = \int_D L dD = \int_D \left( w_m - \int_0^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{J}} d\bar{\mathbf{A}} \right) dD = \int_D \left[ \int_0^{\bar{\mathbf{B}}} \bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{B}}) d\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{A}} \right] dD \quad (2.8)$$

Lagrangeanul reprezinta, prin definitie, diferenta dintre densitatea de volum  $w_m$  a energiei inmagazinate in campul magnetic (o energie specifica de tip cinetic) si densitatea  $\bar{J}\bar{A}$  a energiei de interactiune dintre densitatea de curent  $\bar{J}$  si campul magnetic stationar (interactiunea dintre camp si mediul corporal, adica o energie de tip potential, determinata de lucrul mecanic efectuat de fortele campului pentru a aduce pe  $\bar{J}$  de la infinit ( $\bar{A} = 0$ ) in starea actuala, caracterizata prin potentialul  $\bar{A}$  al campului).

Intrucat sistemul fizic se admite, in general, neizolat si/sau incomplet, conditiile neomogene la limita trebuie incorporate in functionala de tip lagrangean (2.8) prin adaugarea unor termeni energetici integrali de suprafata. De asemenea, conditia de etalonare pentru  $\bar{A}$  (2.5) se poate impune in functionala (2.8) conform metodei functiei de penalitate [Mi1, C8, Z2]. Pe scurt aceasta metoda consta in: daca  $F(\psi)$  definita in  $D \cup \Sigma$  reprezinta functionala de stationarizat conform unui principiu variational conventional (al actiunii stationare) si daca se pretinde suplimentar, satisfacerea restrictiei data prin  $h(\psi) = 0$  in  $D$ , atunci se poate adopta ca functionala modificata, corespunzator principiului variational contrans, expresia:  $F(\psi) = F(\psi) + \alpha \int_D [h(\psi)]^2 dD$ , unde  $\alpha$  este un numar real, pozitiv, suficient de mare pentru ca restrictia impusa sa fie cat mai bine indeplinita. In cazul campului magnetic stationar, parametrul de penalitate  $\alpha = \frac{1}{2} v'$  se admite cu dimensiunea unei reluctivitati si dependent de starea fizica a mediului de camp [C8, R2].

Consideratiile anterioare conduc la urmatoarea expresie generala a functionalei energetice asociate campului magnetic stationar tridimensional:

$$F(\bar{A}) = \int_D \left\{ \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} - \bar{J}\bar{A} + \frac{v'}{2} (\text{div } \bar{A})^2 \right\} dD + \int_{\Sigma_1} (\bar{H}_{\tau_\Sigma} \times \bar{A}_{\tau_\Sigma}) \cdot \bar{n}_\Sigma d\Sigma - \int_S \bar{J}_s \bar{A}_{\tau_s} ds \quad (2.9)$$

S-a aratat in [R3] ca din conditia necesara de stationaritate a functionalei (2.9) se obtin tocmai ecuatiile diferentiale de stare a campului (2.1, 2.2) cu conditiile la limita naturale (2.3-2.4) si, in plus, se satisface conditia de etalonare (2.5).

Stationaritatea lui  $F(\bar{A})$  inseamna anulara primei sale variatii la perturbatii arbitrare mici  $\delta\bar{A}$  in raport cu solutia reala de potential. Respectiv:

$$\begin{aligned} \delta F(\delta\bar{A}) = & \int_D \left[ \text{rot } \bar{H} - \bar{J} - \text{grad}(v' \text{div } \bar{A}) \right] \cdot \delta\bar{A} dD + \int_\Sigma v' \text{div } \bar{A} \cdot \delta\bar{A} \cdot \bar{n}_\Sigma d\Sigma + \\ & + \int_{\Sigma_1} \left[ \delta\bar{A}_{\tau_\Sigma} \times (\bar{H}_{\tau_\Sigma} - \bar{f}_\Sigma) \right] \cdot \bar{n}_\Sigma d\Sigma + \int_{\Sigma_2} (\delta\bar{A}_{\tau_\Sigma} \times \bar{H}_{\tau_\Sigma}) \cdot \bar{n}_\Sigma d\Sigma - \\ & - \int_S \delta\bar{A}_{\tau_s} \cdot \left[ (\bar{n}_s \times [\bar{H}]_s) - \bar{J}_s \right] ds = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

unde s-a tinut seama de identitatile vectoriale:

$$\delta w_m = \int_{\bar{B}}^{\bar{B}+\delta\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} = \bar{H} \delta\bar{B} = \bar{H} \operatorname{rot} \delta\bar{A} = \operatorname{div}(\delta\bar{A} \times \bar{H}) + \delta\bar{A} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} \quad (2.11)$$

$$v' \operatorname{div} \bar{A} \cdot \operatorname{div} \delta\bar{A} = \operatorname{div}(\delta\bar{A} \cdot v' \operatorname{div} \bar{A}) - \delta\bar{A} \cdot \operatorname{grad}(v' \operatorname{div} \bar{A}) \quad (2.12)$$

respectiv de teorema lui Gauss generalizata:

$$\int_D \operatorname{div}(\delta\bar{A} \times \bar{H}) dD = \int_{\Sigma} (\delta\bar{A}_{\tau\Sigma} \times \bar{H}_{\tau\Sigma}) \cdot \bar{n}_{\Sigma} d\Sigma - \int_S [\delta\bar{A}_{\tau S} \times \bar{H}_{\tau S}]_S \cdot \bar{n}_S ds \quad (2.13)$$

si de continuitatea componentei tangentiale a lui  $\bar{A}$  la interfata S din D (de fapt conditia de interfata (2.3)).

Pentru ca ecuatia (2.10) sa aiba loc pentru orice variatii  $\delta\bar{A}$  arbitrare si independente, trebuie ca:

$$\operatorname{rot} \bar{H} - \bar{J} - \operatorname{grad}(v' \operatorname{div} \bar{A}) = 0 \quad , \quad \text{in } D \quad (2.14)$$

$$v' \operatorname{div} \bar{A} = 0 \quad , \quad \text{pe } \Sigma \quad (2.15)$$

$$\delta\bar{A}_{\tau\Sigma} = 0 \quad , \quad \text{pe } \Sigma_2 \subset \Sigma \quad , \quad (2.16)$$

deoarece pe portiunea de frontiera  $\Sigma_1$  si pe interfata S rezulta tocmai conditiile neomogene la limita (2.4) respectiv (2.3), conditii la limita naturale in procesul de stationarizare a functionalei (2.9).

Conform (2.16), conditia Dirichlet din (2.4) pe portiunea de frontiera  $\Sigma_2$  defineste o conditie la limita esentiala in stationarizarea functionalei (2.9) si, ca atare, solutia de potential  $\bar{A}$ , care realizeaza valoarea stationara a functionalei (2.9) trebuie sa apartina clasei de functii ce satisfac (2.4) pe frontiera  $\Sigma_2$ .

Aplicand operatorul divergenta relatiei (2.14) se obtine:

$$\Delta(v' \operatorname{div} \bar{A}) = 0 \quad , \quad \text{in domeniul } D \quad (2.17)$$

tinand seama ca  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{H}) = 0$  si de relatia (2.2). Din ecuatiile (2.17) si (2.15) rezulta ca functia  $v' \operatorname{div} \bar{A}$  este armonica in D si nula pe intreaga frontiera  $\Sigma$ , respectiv este identic nula in  $D \cup \Sigma$ . Conditia de etalonare (2.5) fiind satisfacuta, relatia (2.14) ramane chiar ecuatia de stare (2.1) a campului magnetic stationar, functionala energetica din modelul variational este astfel justificata prin corelarea sa cu modelul diferential, mult mai cunoscut.

Integrala pe suprafata limita  $\Sigma_1$  din (2.9) pune in evidenta, in cadrul functionalei, conditiile la limita pe frontiera  $\Sigma_1$  a domeniului D:

$$\bar{H}_{\tau\Sigma} = \bar{n}_{\Sigma} \times \bar{H} = \bar{n}_{\Sigma} \times v(\operatorname{rot} \bar{A} - \bar{B}_{rem}) \text{ sau } \bar{n}_{\Sigma} \times v \operatorname{rot} \bar{A} \quad (2.18)$$

$$\bar{A}_{\tau_\Sigma} = \bar{n}_\Sigma \times \bar{A} \quad (2.19)$$

Integrala pe  $\Sigma_1$  in relatia (2.9) reprezinta energia magnetica ce traverseaza suprafata, iar  $(\bar{A}_{\tau_\Sigma} \times \bar{H}_{\tau_\Sigma})$  densitatea fluxului de energie.

Pentru conditii la limita omogene  $\bar{A}_{\tau_\Sigma} = 0, \bar{H}_{\tau_\Sigma} = 0$  produsul  $(\bar{H} \times \bar{A})$  este normal pe  $\bar{n}_\Sigma$ , transferul de energie prin  $\Sigma_1$  se anuleaza, respectiv conditiile la limita omogene reprezinta conditii pe frontiera naturale in procesul de extremizare a functionalei energetice.

In cazul problemelor de camp magnetic stationar bidimensional, plan-paralel, lucrind cu variabile de stare potentialul magnetic vector  $\bar{A} = \bar{k} A_z$ , functionala de stationarizat (2.9) se va particulariza sub forma:

$$F(A_z) = \int_D \left[ \sum_{\lambda=x,y} \left( \int_0^{B_\lambda} v_\lambda (B_\lambda - B_{rem_\lambda}) \cdot dB_\lambda \right) - J_z A_z \right] dx dy - \int_{\Sigma_N} f_N A_z d\Sigma_N - \int_S J_{S_z} A_z ds \quad (2.20)$$

unde mediul s-a considerat neliniar, ortotrop magnetic cu axele de magnetizare  $\lambda = x, y$ , neomogen si magnetizat permanent.

Funcția  $f_N = \bar{u}_z \cdot (\bar{n}_{\Sigma_N} \times \bar{H})$  corespunde conditiei Neumann neomogene pentru curba frontiera  $\Sigma_N \subset \Sigma$ , conditie care impreuna cu conditia de interfata  $(A_z)_1 = (A_z)_2$  constituie conditiile la limita naturale in procesul de stationare a functionalei (2.20).

Si, in fine, in cazul problemelor de campuri magnetice stationare bidimensionale, plan-meridiane (axial-simetrice in raport cu Oz), functionala energetica (2.9) transcrisa in raport cu potentialul magnetic modificat  $U = r \cdot A_\theta(z, r)$ , devine:

$$F(U) = 2\pi \int_D \left[ \sum_{\lambda=z,r} \left( \int_0^{rB_\lambda} \frac{1}{r} v_\lambda (r B_\lambda - r B_{rem_\lambda}) d(r B_\lambda) \right) - J_\theta U \right] dz dr - 2\pi \int_{\Sigma_N} f_N(z, r) U d\Sigma_N - 2\pi \int_S J_{S_\theta} U ds \quad (2.21)$$

unde:

$$f_N(z, r) = \frac{v_z}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial r} - r B_{rem_z} \right) \cos(\bar{n}_{\Sigma_N}, \bar{u}_r) + \frac{v_r}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + r B_{rem_r} \right) \cos(\bar{n}_{\Sigma_N}, \bar{u}_z) \quad (2.22)$$

si in care reluctivitatea  $v_\lambda = v_\lambda(B_\lambda)$  este functie univoca de valoarea locala a campului.

Pentru medii neliniare dar izotrope ( $v_z = v_r = v = v(B)$ ) si nemagnetizate permanent ( $\bar{B}_{rem} = 0$ ), functionalele anterioare obtin formele adecvate unor astfel de domenii de camp [Mi1].

## 2.2 Ecuatiile caracteristice MEF pentru campuri magnetice stationare

Principiul MEF consta in discretizarea domeniului de camp  $D$  in subdomenii disjuncte, numite elemente finite si in specificarea functiilor triale pentru fiecare element finit in parte [Mi1, Mi2, R2].

Discretizarea domeniului  $D$  in “ $m$ ” elemente finite permite inlocuirea functionalei energetice  $F(A)$  sau  $F(U)$  cu suma contributiilor  $F^e(A^e)$  ale fiecarui element finit “ $e$ ” al partitiei:

$$F(A) = \sum_{e=1}^m F^e(A^e) \quad (2.23)$$

Oricare dintre cele  $m$  triunghiuri “ $e$ ” ale discretizarii este definit prin varfurile (nodurile) sale indexate local  $i, j, k$ , iar varfurile tuturor triunghiurilor incluse in domeniu se indexeaza global printr-un sir ordonat  $i = \overline{1, n}$ , ele putand fi noduri interioare sau de frontiera.

Rezolvarea numerica a modelului matematic variational de camp presupune aproximarea solutiei de potential  $\bar{A}$  care stationarizeaza functionala energetica  $F(A)$  in conditii de unicitate asociate.

Aproximarea solutiei de potential la nivelul fiecarui element finit “ $e$ ” revine la adoptarea functiilor triale ca polinoame de interpolare (functii de forma sau functii de interpolare) si notate cu  $N_i^e$ , iar parametrii variationali sunt valorile discrete ale solutiei  $A_i^e$ ,  $i = \overline{1, p}$  intr-un numar de  $p$  puncte ale elementului finit  $e$  (pentru elemente finite triunghiulare de ordinul 1,  $p = 3$ ), respectiv

$$A^e = \sum_{i=1}^p N_i^e A_i^e \quad (2.24)$$

Cu aceasta aproximare, functionala energetica elementala  $F^e(A^e)$  devine o functie  $\bar{F}^e$  de valorile nodale  $A_i^e$ ,  $i = \overline{1, p}$ , ale potentialului iar functionala globala  $F(A)$ , pe intregul domeniu de camp  $D$ , rezulta aproximata printr-o functie  $\bar{F}$  de valorile discrete  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ale solutiei de potential in cele  $n$  noduri ale retelei de discretizare.

Stationarizarea functionalei  $F$  in aproximarea  $\bar{F}$  conduce la sistemul de ecuatii:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{m_i} \frac{\partial \bar{F}^e}{\partial A_i^e} = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (2.25)$$

sumarea efectuandu-se numai asupra celor  $m_i < m$  elemente finite "e", care au comun nodul  $i$ , celelalte dand o contributie independenta de  $A_i^e$ . Prin rezolvarea sistemului (2.25) se obtin valorile nodale necunoscute  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ale solutiei aproximative de potential pentru problema de camp magnetic in formulare variationala.

Pentru a asigura convergenta solutiei aproximative spre solutia reala a problemei de camp, la un numar mare de elemente, functiile de interpolare trebuie sa indeplineasca conditiile [Mi1, Mi3]:

- la frontiera comuna a doua elemente vecine, functia de potential  $\bar{A}$  si toate derivatele sale partiale, pana la cea cu un ordin mai mic decat ordinul maxim al derivatelor din functionala energetica globala  $F(A)$  trebuie sa fie continue – conditia de compatibilitate.
- in interiorul fiecarui element, functia de potential  $\bar{A}$  si derivatele sale pana la cel mai mare ordin de derivata ce apare in  $F(A)$  trebuie sa fie continue – conditia de completitudine.

De altfel, larga raspandire a MEF pentru calculul campurilor este determinata de faptul ca ea permite simplificarea calculului derivatelor potentialului la limita de separare a mediilor cu proprietati diferite si pe frontiera domeniului de camp.

La granita interelementala trebuie considerate un numar de noduri egal cu cel al coeficientilor polinomului ce descrie distributia potentialului pe aceasta latura.

- pentru elemente triunghiulare cu polinoame de interpolare liniare, valorile potentialului pe latura comuna a doua elemente adiacente sunt aceleasi, deoarece in lungul laturii potentialul variaza dupa o lege liniara, iar la capete valorile sale coincid.
- la o interpolare cubica polinomul va avea 10 coeficienti, deci in afara de varfuri pe fiecare latura se vor considera cate doua noduri, iar al zecelea nod elemental se va plasa in centrul de greutate al triunghiului.

In general, pozitia nodurilor de interpolare este indicat sa se obtina [C5, S8] prin subdivizarea regulata si echidistanta a suprafetei triunghiului.

O problema esentiala este fixarea tipului si gradului polinomului de interpolare: cu cresterea gradului sau creste si precizia solutiei, la acelasi numar de elemente, dar creste si complexitatea calculului numeric, deoarece sporeste numarul de necunoscute.

Pentru elementul finit triunghiular de ordinul  $l$ , functiile de forma  $N_i^e(x, y)$ ,  $i = i, j, k$  sunt:

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) \quad (2.26)$$

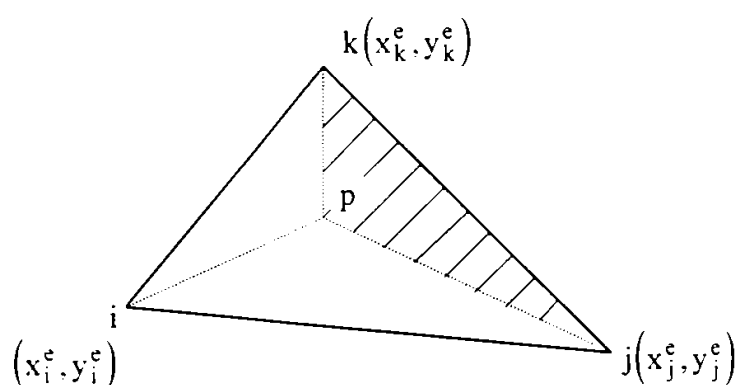
cu  $\Delta^e$  aria triunghiului "e" și au proprietățile [Mi2, S8]:

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} \text{ - simbolul lui Kronecker}$$

$$\sum_i^k N_i^e(x, y) = 1 \quad (2.27)$$

formula lui Holand - Bell

Din punct de vedere geometric, funcțiile de forma  $N_i^e$  reprezintă coordonatele baricentrice ale unui punct curent  $P(N_i, N_j, N_k)$  din interiorul triunghiului elemental "e" (fig. 2.1),



respectiv

$$N_i^e = \frac{\text{aria } \Delta_{pj k}}{\text{aria } \Delta_{ijk}} \quad (2.28)$$

și analogele.

**Fig. 2.1** Element finit triunghiular de ordinul I

Sistemul de coordonate locale  $(N_i^e, N_j^e, N_k^e)$  ale fiecărui element este legat de sistemul cartezian  $(x, y)$  prin relațiile liniare [Z1]:

$$x = \sum_i^k N_i^e x_i^e$$

$$y = \sum_i^k N_i^e y_i^e \quad (2.29)$$

Utilizarea elementelor triunghiulare de ordinul I se justifică prin câteva argumente esențiale, cum ar fi:

- număr minim de noduri caracteristice pentru fiecare element (doar varfurile sale);
- posibilitatea afinării discretizării în zonele cu gradient accentuat al funcției;
- algoritmul de generare a matricii extinse a coeficienților este relativ simplu;
- printr-o indexare globală convenabil aleasă se obține o structură de tip bandă pentru matricea extinsă a coeficienților.

Deși înlocuirea elementelor triunghiulare de ordinul I cu altele de ordin superior îmbunătățește precizia soluției (100 de noduri cu elemente finite de ordinul IV [M4] asigură o

precizie echivalenta cu cateva mii de noduri cu elemente finite de ordinul I) si asigura o reducere a necesarului de memorie. o asemenea inlocuire nu s-a generalizat in aplicarea MEF, deoarece presupune sofisticarea metodologiei de formulare si implementare, iar pentru medii neliniare devine mai putin operanta si necesita o integrare numerica a functiilor de forma pentru obtinerea matricilor elementale.

Potentialul magnetic vector pentru fiecare element finit se scrie

$$A^e(x,y) = \sum_i^k N_i^e(x,y) \cdot A_i^e = [N]^e \{A^e\} \quad (2.30)$$

iar componentele campului  $\bar{B}$  (plan-paralel) la nivelul unui element finit vor fi:

$$\begin{aligned} B_x^e &= \frac{\partial A^e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_i^k c_i^e A_i^e = \text{cst.} \\ B_y^e &= -\frac{\partial A^e}{\partial x} = -\frac{1}{2\Delta^e} \sum_i^k b_i^e A_i^e = \text{cst.} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Prin aproximarea (2.30) a lui  $A^e(x,y)$ , functionala globala (2.20) devine  $\bar{F}(A)$  functie de valorile necunoscute  $A_i$ ,  $i = \overline{1,n}$ , ale potentialului magnetic vector in nodurile triangulatiei domeniului de camp. respectiv stationarizarea ei conduce la sistemul algebric liniar:

$$\frac{\partial \bar{F}(A)}{\partial A_i} = \sum_e^{m_i} \frac{\partial \bar{F}^e(A^e)}{\partial A_i^e} = A_i \sum_e^{m_i} K_{ii}^e + \sum_e^{m_i} \sum_{\lambda=j,k} K_{i\lambda}^e A_\lambda^e + \sum_e^{m_i} G_i^e = 0 \quad i = \overline{1,n} \quad (2.32)$$

unde:

$$\begin{aligned} K_{ii}^e &= \frac{1}{4\Delta^e} \left[ v_x^e(B_x^e) c_i^e c_i^e + v_y^e(B_y^e) b_i^e b_i^e \right] \\ K_{i\lambda}^e &= \frac{1}{4\Delta^e} \left[ v_x^e(B_x^e) c_i^e c_\lambda^e + v_y^e(B_y^e) b_i^e b_\lambda^e \right], \quad \lambda = j, k \\ G_i^e &= -\frac{1}{3} \Delta^e J^e + \frac{1}{2} \left[ v_y^e(B_y^e) B_{\text{rem}_y}^e b_i^e + v_x^e(B_x^e) B_{\text{rem}_x}^e c_i^e \right] + g_i^e \end{aligned} \quad (2.33)$$

In deducerea ecuatiei nodale (2.32) s-a considerat ca  $v_\lambda^e = v_\lambda^e(B_\lambda^e)$ ,  $\lambda = x, y$ , raman invariabile cu pozitia punctului in interiorul triunghiului generic "e",  $J^e = \text{cst.}$  si  $f_N^e = \text{cst.}$  (pe latura elementului coincidenta cu curba frontiera pe care se prescrie o conditie Neumann neomogena) si  $J_S^e = \text{cst.}$  pe latura elementala coincidenta cu o interfata de camp magnetic neomogen.

Termenul generic " $g_i^e$ " din (2.33) poate lua valorile:

- i).  $g_i^e = 0$ , daca nodurile i, j, k ale elementului "e" sunt noduri interioare si nu apartin unei interfete S cu  $J_S \neq 0$  sau sunt noduri de frontiera cu conditii omogene;



ii).  $g_i^e = -\frac{1}{2} d_{i\lambda}^e f_N^e$ , respectiv  $-\frac{1}{2} d_{i\lambda}^e J_s^e$ , daca nodurile  $i, \lambda$  ( $= y$  si/sau  $k$ ) apartin frontierei

$\Sigma_1^e = \Sigma_N^e \subset \Sigma_N$  cu conditie Neumann neomogena, respectiv interfetei  $S^e \subset S$  cu panza de curent  $J_s^e$  ( $d_{i\lambda}^e$  defineste lungimea laturii triunghiului "e", delimitata de varfurile  $i$  si  $\lambda$  ( $\lambda = j, k$ )).

iii).  $g_i^e = f_D^e \cdot K_{i\lambda}^e$ ,  $\lambda = j, k$ , daca nodul interior  $i$ ,  $i \notin S$ , este vecin cu nodul de frontiera  $\lambda$  ( $\lambda = j, k$ ),  $\lambda \in \Sigma_D$  in care conditia Dirichlet neomogena se asigura prin atribuire

$$A_i \Big|_{\Sigma_D} = f_{iD}.$$

Ecuatia matriceala echivalenta sistemului global (2.32) este:

$$[K(A)] \cdot \{A\} + \{G\} = 0 \quad (2.34)$$

a carei rezolvare furnizeaza valorile nodale  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ale solutiei aproximative de potential magnetic vector pentru problema de camp magnetic stationar plan-paralel, formulata variational.

Pentru a obtine ecuatiile caracteristice MEF pentru campul magnetic stationar plan-meridian vom pleca de la functionala energetica scrisa in functie de potentialul magnetic modificat  $U = r A_\theta$  de forma (2.21) pe care o particularizam pentru medii neliniare, izotrope  $v_z = v_r = v$  si fara magnetizatie remanenta, respectiv

$$F(U) = 2\pi \int_D \left[ \int_0^{rB} v(B) \cdot B \cdot d(rB) - J_\theta U \right] dz dr - 2\pi \int_{\Sigma_N} f_N U d\Sigma_N - 2\pi \int_S J_{\theta_s} U ds \quad (2.35)$$

cu conditia la limita de forma

$$f_N(z, r) = \frac{v}{r} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} \cos(\bar{n}_\Sigma, \bar{u}_r) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\bar{n}_\Sigma, \bar{u}_z) \right] \quad (2.36)$$

Partitia domeniului de camp  $D \cup \Sigma$  (situat in planul  $z-r$ ) in elemente finite de ordinul I triunghiulare va face ca potentialul magnetic modificat sa poata fi aproximat local, pentru fiecare element, sub forma:

$$U^e(z, r) = \sum_i^k N_i^e(z, r) U_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_i^k (a_i^e + b_i^e z + c_i^e r) U_i^e \quad (2.37)$$

iar componentele inducției magnetice vor fi:

$$\begin{aligned} r B_z^e &= \frac{\partial U^e}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_i^k c_i^e U_i^e = \text{cst.} \\ r B_r^e &= -\frac{\partial U^e}{\partial z} = -\frac{1}{2\Delta^e} \sum_i^k b_i^e U_i^e = \text{cst} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Daca  $B_{\lambda,c}^e$  si  $r_c^e$  reprezinta valoarea inductiei magnetice in centrul de greutate al triunghiului "e" si, respectiv coordonata radiala a aceluasi punct, atunci:

$$v_{\lambda}^e(B_{\lambda}^e) \cong v_{\lambda}^e(B_{\lambda,c}^e) = \text{cst.}, \quad \lambda = z, r \quad (2.39)$$

respectiv functionala (2.35) se poate aproxima sub forma:

$$\int_{D^e} \left[ \int_0^{rB} v(B) \cdot B \cdot d(rB) - J_{\theta} U \right] \frac{dz dr}{r} \approx \frac{1}{r_c^e} \int_{D^e} \left[ \int_0^{rB} v(B) \cdot B \cdot d(rB) - J_{\theta} U \right] dz dr \quad (2.40)$$

Fara aceasta aproximare deducerea coeficientilor sistemului de ecuatii algebrice echivalente ar fi anevoioasa, sub integrala ar apare  $r$  sau  $\frac{1}{r}$ , ceea ce complica calculul analitic al integralelor.

Daca la integrare se noteaza cu  $r = r_c^e = \frac{1}{3}(r_i^e + r_j^e + r_k^e) = \text{cst.}$ , raza centrului de greutate al triunghiului, aleasa ca media aritmetica a coordonatelor radiale ale nodurilor elementale (fig. 2.2), este posibila aproximarea (2.40).

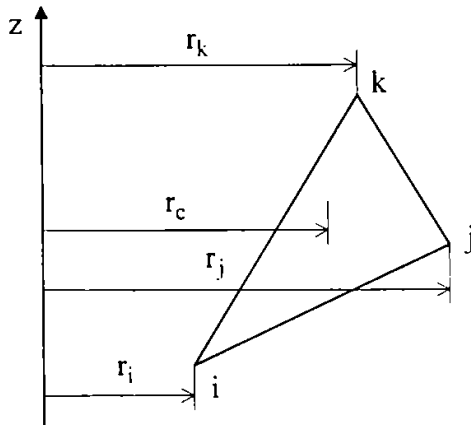


Fig. 2.2 Raza medie  $r_c$  a unui element in coordonatele zOr

In acest caz  $r_c^e$  se scoate de sub integrala si restul integralei se calculeaza la fel ca si in cazul campurilor magnetice bidimensionale, plan-paralele, cu corespondenta formala:

$$\begin{aligned} (x, y) &\leftrightarrow (z, r) \\ A &= A_z \leftrightarrow U \\ a_i &= r_j b_k - r_k z_j, \quad b_i = z_j - z_k, \quad c_i = r_k - r_j \\ &\text{si anloagele} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Avand in vedere dimensiunile mici ale elementelor finite, eroarea care se face considerand  $r = r_c^e = \text{cst.}$  este mica, lucru specificat in literatura [S8, Mi1].

Daca axa Oz trece prin domeniul de camp D, singularitatea  $\frac{1}{r}$ , in caz ca nu se face aproximarea cu  $r_c^e$ , se elimina prin diferite schimbari de variabila [D5, S8] insa complica algoritmul metodei:  $U_1 = A_0 / \sqrt{r}$ ,  $U_2 = J_{\theta} / \sqrt{r}$ ,  $U_3 = A_{\theta} / r$ , ...

Prin aceasta simplificare, coeficientii sistemului algebric nelinier echivalenti extremizarii functionalei energetice (2.35) vor fi prin analogie cu (2.33) de forma:

$$M_{i\lambda}^e = \frac{\pi}{2\Delta^e r_c^e} v^e (B_c^e) \cdot (c_i^e c_\lambda^e + b_i^e b_\lambda^e) \quad , \quad \lambda = i, j, k$$

$$G_i^e = -\frac{2\pi}{3} \Delta^e J_\theta^e + 2\pi g_i^e$$
(2.42)

unde  $g_i^e$  are semnificatiile prezentate anterior.

Cu aceste aproximatii, componentele inducției magnetice vor fi de forma:

$$B_z^e = \frac{1}{r_c^e} \frac{\partial U^e}{\partial r} = \frac{1}{r_c^e} \frac{\partial}{\partial r} \sum_i^k N_i^e U_i^e = \frac{1}{2r_c^e \Delta^e} \sum_i^k b_i^e U_i^e$$

$$B_r^e = -\frac{1}{r_c^e} \frac{\partial U^e}{\partial z} = -\frac{1}{r_c^e} \frac{\partial}{\partial z} \sum_i^k N_i^e U_i^e = -\frac{1}{2r_c^e \Delta^e} \sum_i^k c_i^e U_i^e$$
(2.43)

Corespunzator triangulatiei domeniului de camp, functionala energetica  $F(U)$  data de (2.35) devine o suma de functionale elementale

$$F(U) = \sum_{e=1}^m F^e(U^e) = \sum_{i=1}^n \tilde{F}^e(U_i^e)$$
(2.44)

iar extremizarea sa se face in raport cu valorile nodale ale potentialului magnetic modificat nodal  $U_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_i} = \sum_{e=1}^{m_i} \frac{\partial \tilde{F}^e}{\partial U_i^e} = 0$$
(2.45)

unde  $m_i < m$  reprezinta numarul de elemente finite care au comun nodul  $i$ .

Tinand seama de aproximarea functiei potential pe un element prin polinom de ordinul I:

$$U^e = a^e + b^e z + c^e r = N_i^e U_i^e + N_j^e U_j^e + N_k^e U_k^e$$
(2.46)

variata functionalei de energie se aduce la forma

$$\frac{\partial F}{\partial U^e} = 2\pi \left[ v^e \int_{D^e} \left( \frac{\partial [N]}{\partial r} \cdot \frac{\partial [N]^T}{\partial r} + \frac{\partial [N]}{\partial z} \cdot \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \right) dz dr \right] U^e -$$

$$- 2\pi J^e \int_{D^e} [N]^T dr dz = [M]^e \{U\}^e + [F]^e$$
(2.47)

Matricea coeficientilor elementului "e" notata  $[M]^e$  are elementele:

$$M_{ij}^e = 2\pi v^e \int_{D^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dz dr = 2\pi v^e \int_{D^e} \frac{b_i b_j + c_i c_j}{(2\Delta^e)^2} dz dr =$$

$$= v^e \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta^e} 2\pi \int_{D^e} dz dr = \frac{v^e (B^e)}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j)$$
(2.48)

coeficienti identici cu cei stabiliti prin analogie cu cazul campului plan-parallel in (2.42).

Sub forma matriciala se obtine:

$$[M]^e = \frac{v^e}{4\Delta^e} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Matricea coloana a functiilor de sursa si cele corespunzatoare conditiilor la limita  $g_i^e$  obtin forma analoaga ca in (2.42):

$$G_i^e = F_i^e + g_i^e = -J^e 2\pi \int_{D^e} N_i \, dr \, dz + g_i^e = -\frac{1}{3} J^e \Delta^e + g_i^e \quad (2.50)$$

Extinzand procesul de extremizare asupra tuturor elementelor triangulatiei domeniului de camp si asambland ecuatiile elementale rezulta ecuatia matriceala globala de forma:

$$[M] \cdot \{U\} + \{G\} = 0 \quad (2.51)$$

unde:

- [M] – matricea extinsa a coeficientilor; matrice patrata ( $n \times n$ ), simetrica, pozitiv definita, slab populata – de tip banda;
- {U} – vectorul potentialelor magnetice modificate a celor n noduri ( $n \times 1$ );
- {G} – matricea termenilor liberi ( $n \times 1$ ) continand functiile de sursa elementale si eventual conditiile la limita Dirichlet.

Rezolvarea ecuatiei matriceale globale neliniare (2.51) necesita mai multe iteratii de calcul, pe parcursul carora matricea neliniara a coeficientilor trebuie reevaluată in functie de valorile reactualizate ale parametrului constitutiv  $v^e(B^e)$ . Indiferent de metoda iterativa adoptata, stabilitatea, convergenta si precizia solutiei depind de mai multi factori: numerotarea nodurilor si elementelor; conditiile la limita si neomogenitatile mediului; initializarea valorilor potentialelor si a parametrului constitutiv; modul de reprezentare a caracteristicii neliniare si nu in ultimul rand de alegerea coeficientilor de sub si respectiv suprarelaxare a ciclurilor alternative.

### 2.3 Aplicarea metodei elementelor finite pentru a determina distributia campului magnetic stationar cu simetrie plan-meridiana intr-un dispozitiv magnetic neliniar, comandat ortogonal

Studiul distributiei campurilor magnetice stationare pentru care s-au stabilit in paragraful precedent modelele matematice variationale, respectiv formele functionalelor energetice de extremizat si ecuatiile algebrice asociate acestui proces, se va efectua pentru un dispozitiv magnetic neliniar (DMN) comandat ortogonal, problema prezentata partial in [Mi4].

Dispozitivul analizat reprezinta un miez de ferita toroidal, avand in interiorul sau o infasurare de comanda axiala, parcursa de un curent de comanda  $i_c$  (solenatia de comanda  $\theta_c$ ) si avand densitatea  $\bar{J}_c$  (functia sursa a campului), respectiv o infasurare toroidala de lucru parcursa de un curent variabil  $i_\ell(t)$  (fig. 2.3-a).

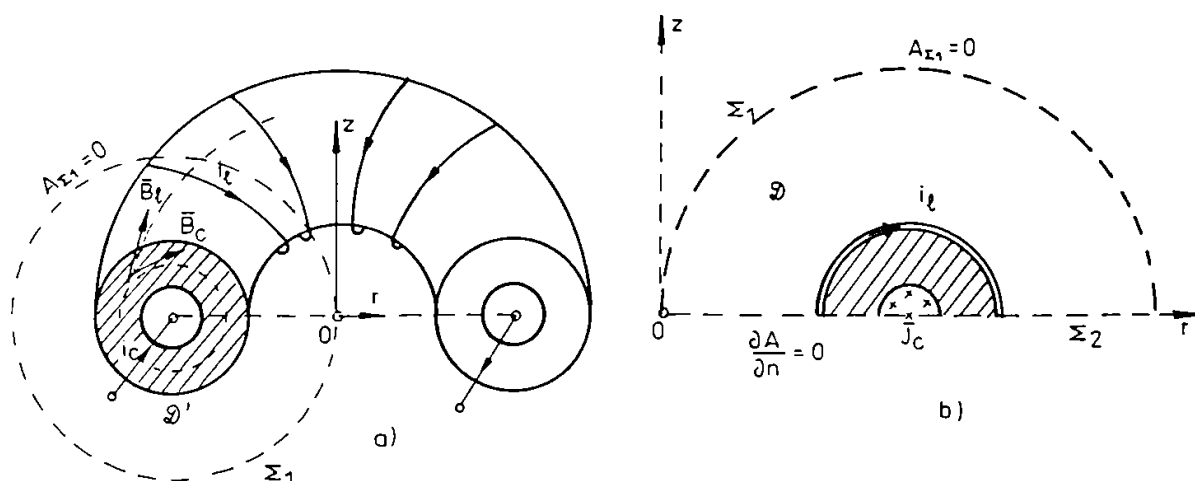


Fig. 2.3 Sectiune prin dispozitivul magnetic neliniar (a); Alegerea domeniului de definitie a campului magnetic (b)

Reluctivitatea  $\nu$  a miezului magnetic izotrop se considera o functie neliniara univoca de valoarea locala a inducției magnetice rezultante  $\bar{B}$ , iar conductivitatea  $\sigma$  a miezului de ferita se presupune nula.

Domeniul de camp  $\mathcal{D}'$  luat in considerare (fig. 2.3-b) cuprinde, datorita simetriei, doar o sectiune plan-meridiana ( $rOz$ ) din dispozitivul studiat, avand partea hasurata a miezului cu caracteristica nelinara  $\nu(B)$  cunoscuta, iar restul domeniului avand  $\nu = \nu_0 = \text{cst}$ .

Axa  $Oz$  fiind o axa de simetrie, echivalenta cu o conditie Dirichlet omogena, intreaga suprafata (curba)  $\Sigma_1$  va avea  $A_{\Sigma_1} = 0$ .

Daca pe anumite portiuni  $\Sigma_2$  ale frontierei ar exista schimb de energie intre domeniul interior si exterior, acesta ar fi dat de expresia:

$$W_s = - \int_{\Sigma_2} (\bar{A} \times \bar{H}) \bar{n} ds = - \int_{\Sigma_2} \bar{A} \frac{\bar{B}}{\mu} \bar{n} ds = - \int_{\Sigma_2} \nu A \frac{\partial A}{\partial n} ds \quad (2.52)$$

Daca in domeniu exista suprafete (sau la campuri plane, curbe) de-alungul carora  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ , deci energia magnetica schimbata prin ele este nula [Mi14], se poate reduce domeniul de studiu la un subdomeniu marginit de o astfel de curba.

De-alungul unei linii de simetrie in camp avem  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$  si se obtine astfel un subdomeniu de camp  $\mathcal{D}$  pe a carui frontiera (fig. 2.3-b) avem conditii la limita mixte, dar omogene:

$$\begin{aligned} A|_{\Sigma_1} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial n}|_{\Sigma_1} &= 0, \quad \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi \end{aligned} \quad (2.53)$$

Functionala de energie ce trebuie extremizata pentru a determina distributia campului magnetic creat de infasurarea de comanda in domeniul de camp  $\mathcal{D}$  este cea data de relatia (2.35).

Tinand seama de particularitatea si simetria problemei, marimile ce intervin sunt de forma:

$$\begin{aligned} v_{rr}(B) &= v_{zz}(B) = v(B) \\ \bar{B} &= B_z \bar{u}_z + B_r \bar{u}_r \\ U &= r A_\theta \quad ; \quad \bar{A} = A_\theta \bar{u}_\theta \\ \bar{J} &= J_\theta \bar{u}_\theta \end{aligned} \quad (2.54)$$

In aceste conditii functionala energetica devine de forma

$$\mathcal{F}(U) = 2\pi \int_{\mathcal{D}} \left[ \int_0^B r v(B) \cdot B dB - J_\theta U \right] dz dr \quad (2.55)$$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.56)$$

in care

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

Functionile de forma rezulta analog ca in (2.26):

$$\begin{aligned} N_i^e(r, z) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e r + c_i^e z); \quad i = i, j, k \\ a_i^e &= r_j^e z_k^e - r_k^e z_j^e \\ b_i^e &= z_j^e - z_k^e \\ c_i^e &= r_k^e - r_j^e \end{aligned} \quad (2.57)$$

### 2.3.1 Implementarea programului de analiza numerica pe baza algoritmului MEF

Alegerea domeniului de camp  $\mathcal{D}$  s-a facut astfel incat sa reprezinte partea semnificativa a distributiei de camp din DMN si in acord cu teorema de unicitate [T5, R2] sa se poata preciza conditiile de surse, la limita si de material (constitutive).

Referitor la definirea conditiilor de surse ale DMN, comanda acestuia se poate face atat in curent continuu cat si in curent alternativ. Pentru comanda in curent continuu se admite o

densitate de curent  $J_c = \text{cst.}$  in interiorul cavitatii torului, valoarea sa fiind limitata de considerente functionale, respectiv de saturatie si incalzire. Sectiunea cavitatii torului pentru una dintre situatii este  $A_c = 58,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  si admitand  $J_c = 0,2 \text{ A/mm}^2$ , respectiv  $N_c = 50$  conductoare in paralel, rezulta valoarea curentului de comanda  $I_c = 0,235 \text{ A}$ .

La comanda in curent alternativ se admite curentul din infasurarea toroidala de lucru a dispozitivului  $i_\ell(t)$  ca origine de faza, iar inductia de lucru  $B_\ell$  creata de acest curent deasemenea in faza cu intensitatea curentului de lucru. In studiul efectuat s-a admis infasurarea de comanda parcursa de un curent sinusoidal cu amplitudinea constanta si faza variabila

$$i_c = I_{c_m} \sin(\omega t + \varphi_c) \quad (2.58)$$

considerandu-se cazurile  $\varphi_c = 0 ; 45^\circ ; 90^\circ ; 180^\circ$ . Valoarea maxima a densitatii curentului de comanda (amplitudinea) luata in studiu a fost  $J_c = J_{c_1} = J_{c_2} = J_{c_3} = J_{c_4} = 0,15 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ .

Infasurarea de lucru a dispozitivului contine  $N_\ell = 300$  spire de diametru  $d = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , dispuse intr-un singur strat uniform in jurul torului; densitatea curentului de lucru este  $J_\ell = 0,06 \text{ A/mm}^2$  si asigura o solenatie de lucru  $\theta_\ell = 5 \text{ Aspire}$ .

Etapele implementarii programului de analiza numerica a campului magnetic pe baza algoritmului MEF, plecand de la definirea elementelor: geometria, constante de material, surse, conditii la limita, discretizare, generare matrici, rezolvarea ecuatiei matriceale si prelucrarea rezultatelor vor fi prezentate in paragrafele urmatoare.

### **Triangularizarea domeniului**

Avandu-se in vedere simetria domeniului de camp  $\mathcal{D}$  si configuratia subdomeniilor de continuitate, s-a impartit domeniul dupa raze de divizare in 9 sectoare de cerc, razele fiind astfel trasate incat nu schimba directia de trecere dintr-un subdomeniu in altul (fig. 2.4).

Originea sistemului cilindric de coordonate  $zOr$  s-a considerat in centrul de simetrie al torului. Domeniul  $\mathcal{D}$  este divizat in trei subdomenii cu semnificatie diferita:

- subdomeniul infasurarii de comanda cu  $v = v_0 = \text{cst.}$  si  $J_c \neq 0$  este impartit de doua cercuri concentrice si cele noua raze;
- subdomeniul cu material feromagnetic cu  $v = v(B)$  dat si  $J_c = 0$  este impartit de patru cercuri concentrice si de razele de divizare.
- subdomeniul exterior din vecinatatea dispozitivului continand campul magnetic de dispersie si avand  $v = v_0 = \text{cst.}$  si  $J_c = 0$  este impartit de doua cercuri si cele noua raze de divizare.

Numerotarea nodurilor se face astfel incat sa se obtina o structura banda cat mai ingusta pentru matricea  $[M]$  a sistemului. Numerotarea nodurilor incepe de-alungul primei raze din interiorul domeniului de camp  $\mathcal{D}$  si de la cercul interior spre exterior. Dupa ce se ajunge la nodul 7 se reia baleiajul dinspre interiorul torului luand razele in sens trigonometric. Numerotarea se incheie cu nodurile aflate pe frontiera  $\Sigma$  a domeniului.

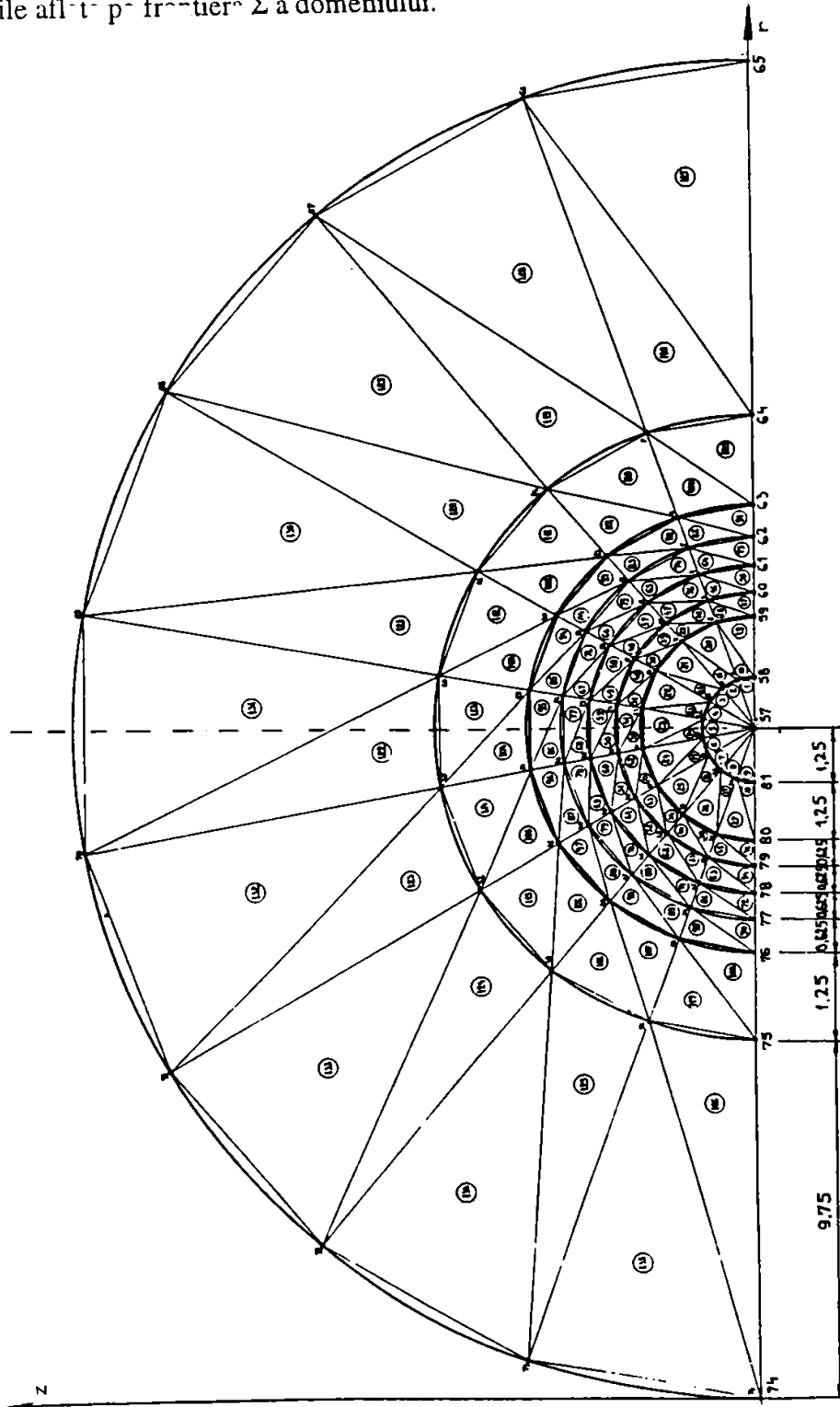


Fig. 2.4 Discretizarea domeniului de camp; numerotarea nodurilor si a elementelor finite



Aceste particularitati impuse a permis generarea automata a coordonatelor nodurilor, rezultand un numar de 81 de noduri.

Elementele finite triunghiulare se obtin prin trasarea diagonalelor pentru fiecare trapez obtinut din unirea nodurilor de pe cercuri concentrice.

Numerotarea triunghiurilor incepe din centrul torului, baleiajul continua in sens trigonometric dinspre interior spre exterior; au rezultat 135 elemente.

In jurul fiecarui nod interior se gasesc cate 5 triunghiuri pentru nodurile 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50 si cate 6 triunghiuri in jurul nodurilor 2 – 56.

Fiecare element triunghiular este definit de cele trei noduri de indexare (i, j, k) aflate in varfurile triunghiului respectiv, considerat cu sensul de parcurgere orar asa cum rezulta din Tabelul 2.1.

**Tabelul 2.1**

Numar element	Nod i	Nod j	Nod k
1	1	58	57
2	1	57	8
11	1	8	9
20	1	9	2
10	1	2	58
⋮	⋮	⋮	⋮

### 2.3.2 Descrierea algoritmului MEF utilizat si a programului FORTRAN de implementare

Cele 30 de programe scrise in limbaj FORTRAN, aferente algoritmului MEF au fost concepute modularizat astfel incat sa fie posibila utilizarea lor, cu mici modificari, in studiul altor probleme tehnice.

Fiecare program este impartit pe subrutine, pe care le poate apela programul principal (PP). La un moment dat se gaseste in memoria centrala – operativa – a calculatorului doar programul principal si subrutina apelata. Durata unei rulari este cca 15 minute, iar listarea rezultatelor dureaza 4 minute.

#### Variabilele folosite in programul FORTRAN implementat

$R(IS)$ ,  $IS = 1, 8$  – matricea razelor cercurilor pe care se gasesc nodurile triangulatiei domeniului D:

$N(IN, IX)$ ,  $IX = 1, 4$ ,  $IN = 1, 329$  – matricea de generare a triunghiurilor discretizarii

$IX = 1$  – coloana numarului triunghiului

- $IX = 2$  – coloana nodului “i”  
 $IX = 3$  – coloana nodului “j”  
 $IX = 4$  – coloana nodului “k”, conform Tabelului 2.1;  
 $D(ID)$  – densitatea curentului;  
 $FE(IE)$  – indicele triunghiurilor care se gasesc in zona cu material feromagnetic neliniar;  
 $Z(IZ, IT)$ ,  $IZ = 1, 7$ ,  $IT = 1, 2$  – matricea valorilor reluctivitatii  $v(B)$   
 $IT = 1$  – valoarea lui  $B$   
 $IT = 2$  – valoarea reluctivitatii  $v$  corespunzatoare lui  $B$ ;  
 $X(81, 2)$  – matricea coordonatelor nodurilor  
coloana 1 – valoarea absciselor nodurilor  
coloana 2 – valoarea ordonatelor nodurilor;  
 $RC(A_1)$  – matricea coordonatelor radiale ale centrelor de greutate ale fiecarui triunghi elemental;  
 $A(A_1)$  – matricea care contine aria fiecarui triunghi elemental ( $\Delta_i^e$ );  
 $B(MB)$  – matricea inductiei magnetice a fiecarui element ( $B_i^e$ );  
 $NU(MB, 2)$  – matricea reluctivitatii magnetice a fiecarui element ( $v_i^e$ );  
 $U(81, 2)$  – matricea potentialului magnetic modificat al nodurilor;  
 $FI$  – fluxul magnetic prin sectiunea torului;  
 $AIND$  – inductivitatea proprie a torului.

*Programul TOR:*

- $BL$  – blanc;  $AS$  – asterisc;  $AL$  – minus (linie);  $AI - I$ ;  
 $R_1$  – raza interioara a torului;  
 $R_2$  – raza exterioara a torului;  
 $N$  – numarul de spire al infasurarii toroidale ( $N_\ell$ );  
 $JP$  – numarul de puncte in aproximarea caracteristicii  $v(B)$ ,  $JP = 7$ ;  
 $K$  – numarul de diviziuni in care a fost impartita sectiunea circulara a torului;  
 $X(I, J)$ ,  $J = 1, 2$ ;  $I = 1, JP$  – matricea bidimensionala care contine in coloana intai valorile tabelate ale inductiei magnetice  $B$ , iar in coloana a doua valorile tabelate ale reluctivitatii  $v$ ;  
 $C(I)$  – matricea unidimensionala care stocheaza valoarea inductiilor de lucru ( $B_\ell$ ).

*Programul TEST:*

Programul cu titlul “TEST” realizeaza rezolvarea numerica propriu-zisa a problemei variationale asociate campului magnetic stationar dintr-un DMN comandat ortogonal.

Organigrama simplificata a acestui program este prezentata in figura 2.5

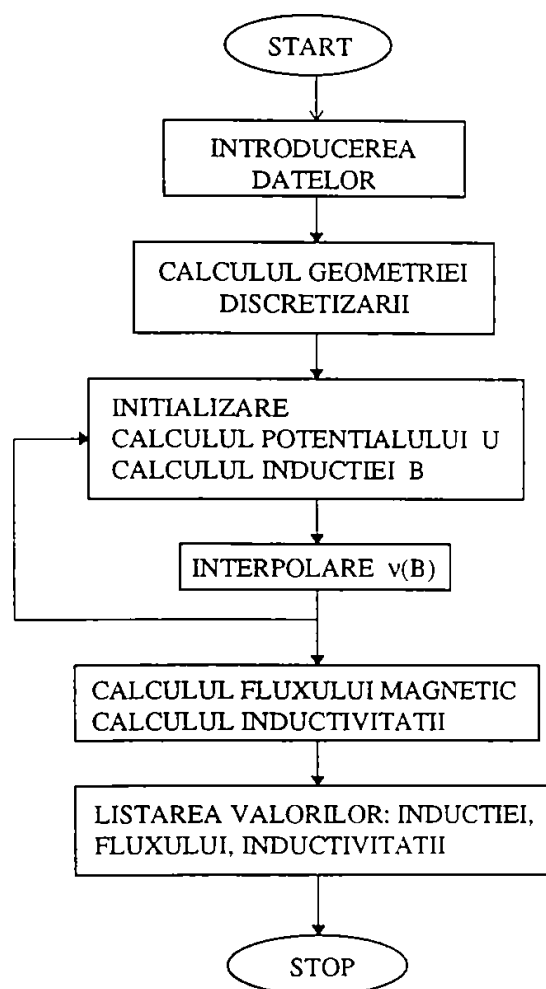


Fig. 2.5 Organigrama programului de calcul prin MEF

Organigrama detaliata a programului TEST este prezentata in figura 2.6.

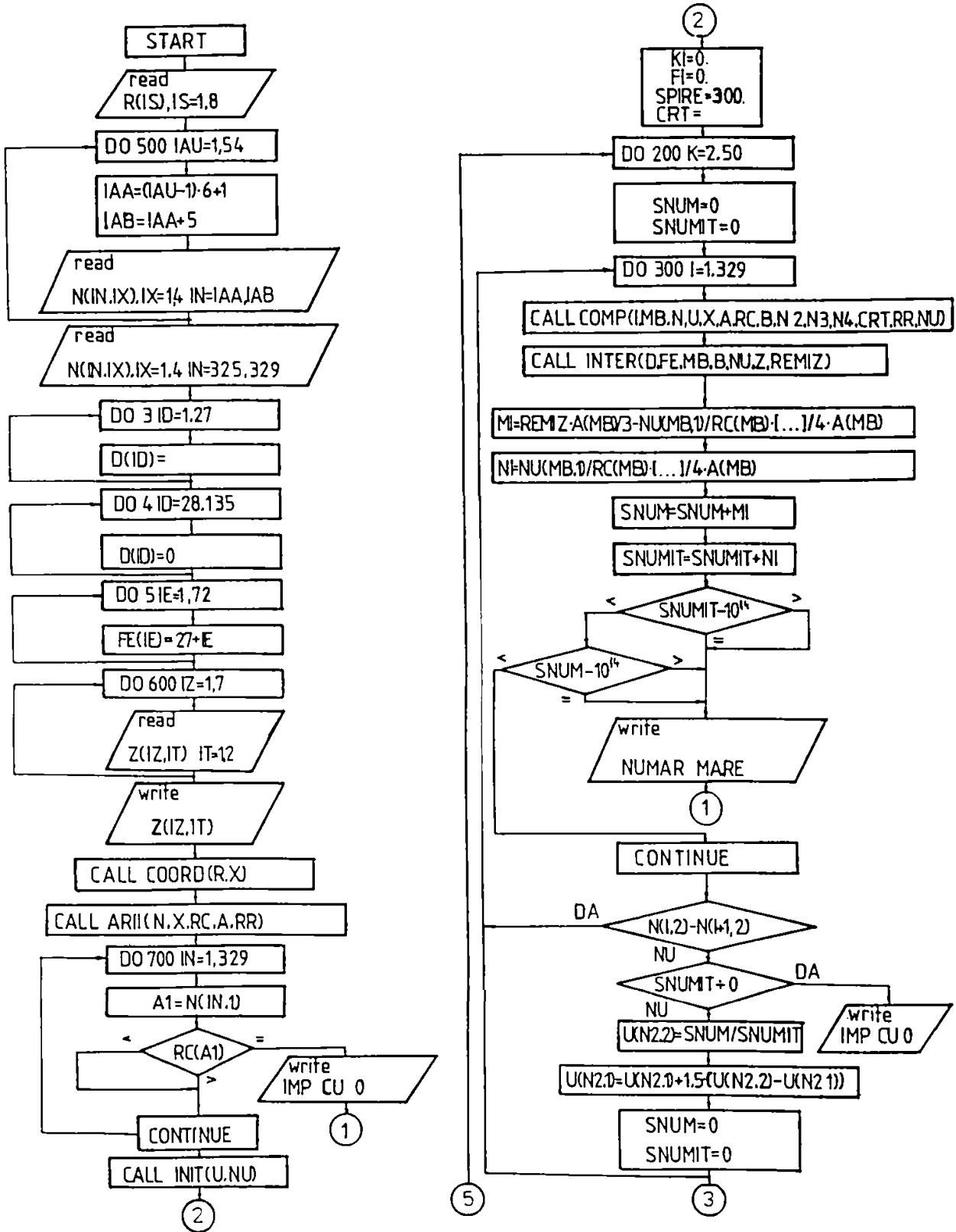
Programul TEST debuteaza cu citirea razelor pentru cercurile concentrice care contribuie la discretizarea domeniului, raze care sunt stocate in matricea  $R(IS)$ .

Printr-un ciclu DO este citita matricea  $N(IN, IX)$ , sensul de scriere a nodurilor la indexarea locala  $(i, j, k)$  ale unui triunghi elementar "e" se adopta ca fiind cel orar.

Se scriu toate elementele care concura in fiecare nod  $(m_i)$ , sensul de parcurgere a elementelor fiind deasemenea cel orar. De exemplu, in jurul nodului 1 (fig. 2.4) se gasesc triunghiurile cu indicii: 1, 2, 11, 20, 10.

Se precizeaza sursele campului (densitatea  $J_c$ ) ca marime reala – in curent continuu – sau ca marime complexa – in regim sinusoidal, ele existand in elementele 1-27 si este nula pentru elementele 28-135.

Se precizeaza elementele ce apartin zonei feromagnetice, ele fiind continute in matricea  $FE(TE)$ .



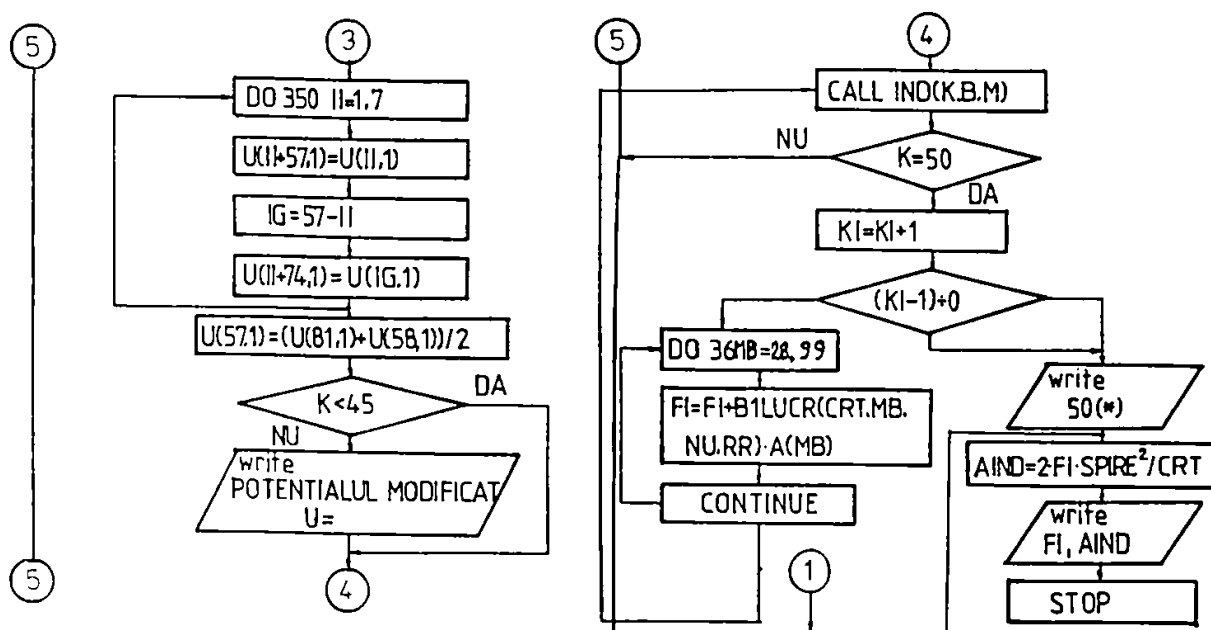
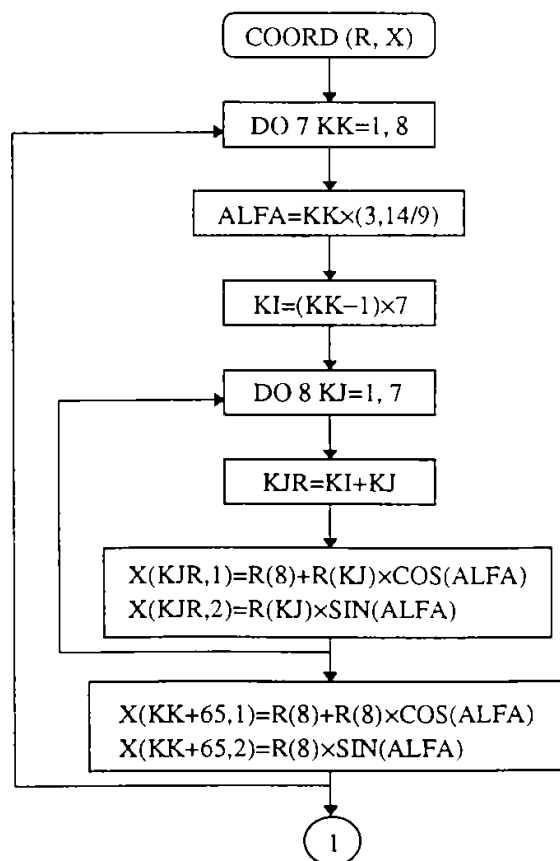


Fig. 2.6 Schema logica a programului principal (PP) de calcul a campului magnetic prin MEF

Cu instructiunea de tiparire a matricii  $Z(IZ, IT)$  de aproximare a neliniaritatii  $v(B)$  se termina faza de introducere a datelor in program.

Subrutina *COORD*:

Organigrama acestei subrutine, prezentata in figura 2.7, calculeaza coordonatele nodurilor rezultate prin discretizarea domeniului  $\mathcal{D}$ .



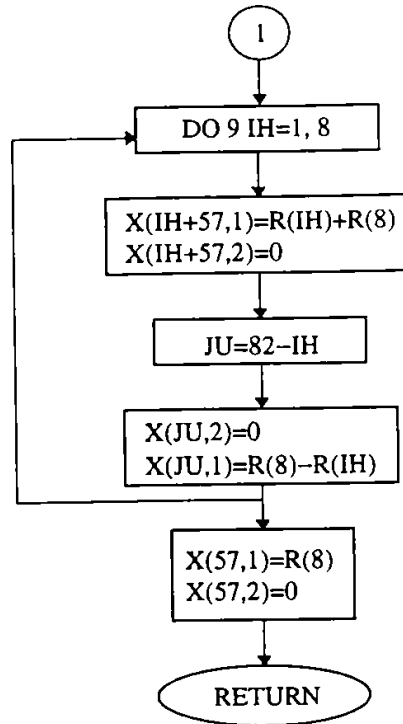


Fig. 2.7 Subrutina COORD pentru calculul coordonatelor nodurilor

Coordonatele nodurilor sunt introduse in matricea  $X(81, 2)$ ; pentru nodurile interioare ele sunt:

$$\begin{aligned} X(KJR, 1) &= R(8) + R(KJ) \cdot \cos(ALFA) \\ X(KJR, 2) &= R(KJ) \cdot \sin(ALFA) \end{aligned} \quad (2.59)$$

unde  $ALFA = KK \cdot \frac{\pi}{9}$  ;  $KK = \overline{1, 8}$ .

Coordonatele nodurilor de pe frontiera  $\Sigma_1$  sunt de forma:

$$\begin{aligned} X(KK + 65, 1) &= R(8) A(1 + \cos ALFA) \\ X(KK + 65, 2) &= R(8) \sin ALFA \end{aligned} \quad (2.60)$$

iar coordonatele nodurilor de pe axa  $O_r$  ( $\Sigma_2$ ) sunt date de

$$\begin{aligned} X(IH + 57, 1) &= R(IH) + R(8) \\ X(IH + 57, 2) &= 0 \quad IH = \overline{1, 8} \end{aligned} \quad (2.61)$$

respectiv pentru nodurile (74 – 80).

Accest mod de definire a coordonatelor, respectiv subrutina COORD, din programul principal a fost apelata si in programul de trasare a spectrului campului magnetic.

*Subrutina ARII:*

Subrutina ARII prezentata in figura 2.8 furnizeaza programului principal ariile elementelor finite triunghiulare. Subrutina extrage din PP indexarea locala a fiecarui element (i, j, k), acestea fiind citite din matricea  $N(IN, IX)$  si primesc o noua indexare:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= N(KA,1) \\
 A_2 &= N(KA,2) \\
 &\vdots \\
 KA &= \overline{1,329}
 \end{aligned}$$

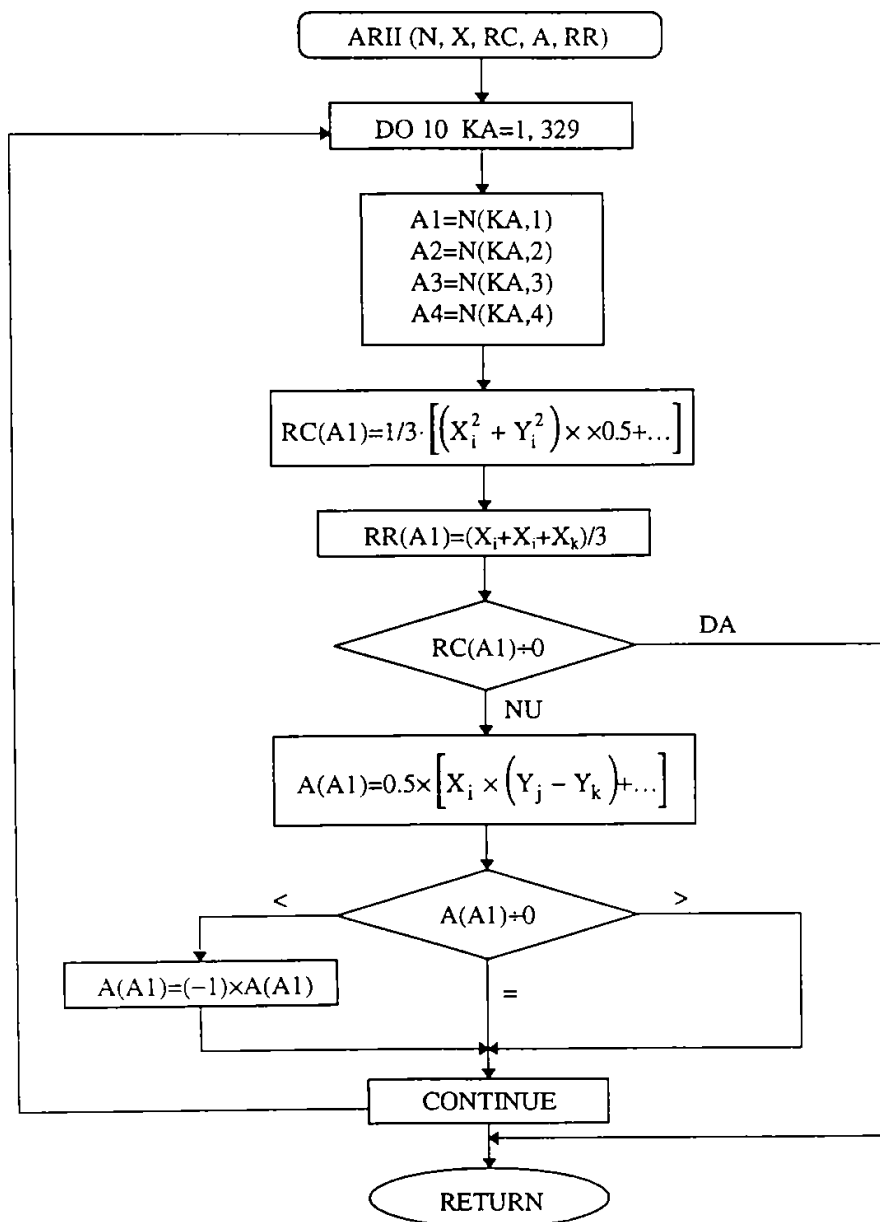


Fig. 2.8 Subrutina ARII pentru calculul ariilor elementale

Notand simplificat cu "X" coordonata dupa axa Ox si cu "Y" coordonata dupa axa Oz, aria fiecarui element va fi data de (2.62):

$$A_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)] \quad (2.62)$$

valoare care se testeaza fata de zero, iar daca este negativa se ia cu semn schimbat iar valorile rezultate sunt returnate programului principal alaturi de alte doua marimi caracteristice:

- raza vectoare a baricentrului fiecarui element

$$RC(A_1) = \frac{1}{3} \left( \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} + \sqrt{X_j^2 + Y_j^2} + \sqrt{X_k^2 + Y_k^2} \right) \quad (2.63)$$

- raza cercului  $\Gamma$  asociat fiecarui element finit in raport cu care se calculeaza valoarea inductiei de lucru ( $B_\ell$ ):

$$RR(A_1) = \frac{1}{3} (X_i + X_j + X_k) \quad (2.64)$$

Aceste doua marimi s-au atasat subrutinei ARII pentru a se evita iesirea din subrutine pe mai multe adrese.

#### Subrutina INIT:

Subrutina INIT (U, NU) (fig. 2.9) initializeaza valorile potentialului magnetic modificat in noduri, respectiv valoarea reluctivitatii pentru elementele din zona feromagnetica la o valoare medie pe caracteristica  $v(B)$ .

In programul principal se initializeaza:  $KI = 0$  ;  $FI = 0$  ;  $SPIRE = 300$  ;  $CRT = \dots$

Solenatia de lucru apare ca marime variabila  $CRT = 1 Asp$  ;  $5$  ;  $10 \dots$ , iar pentru a evita uitarea de legaturi la fiecare noua rulare a programului, sub programul EDI se introduce aceasta valoare prin mesaj de la consola, cand apare mesajul "Introduceti valoarea curentului: ".

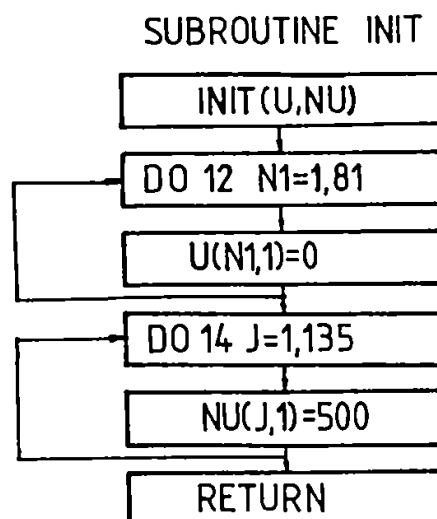


Fig. 2.9 Subrutina INIT, pentru initializarea valorilor potentialului U si a reluctivitatii  $v(B)$

Programul principal trece la rezolvarea efectiva a sistemului de ecuatii (2.51). Numarul mare de date ale problemei, relativ la capacitatea de memorie, a impus ca rezolvarea sistemului de ecuatii algebrice neliniare sa nu se faca matriceal ci o rezolvare "linie de linie" cu ajutorul metodei de relaxare punctuala [Mi1].



Aceasta tehnica consta in ansamblarea derivatelor pariale ale functionalei energetice corespunzatoare tuturor elementelor vecine unui nod activ (2.45 – 2.48) in functie de valoarea necunoscuta a potentialului din acel nod si baleiajul retelei de discretizare in ordinea nodurilor. Generarea “linie de linie” evita utilizarea unui fisier care sa contina matricea globala [M], ansamblarea matricei extinse, in acest fel, se face concomitent cu rezolvarea ecuatiei globale.

*Subrutina COMP:*

Subprogramul COMP (I, MB, N, X, U, A, RC, B, N2, N3, N4, CRT, RR, NU) prezentat in figura 2.10 realizeaza compunerea punctuala a campurilor magnetice date de infasurarile de lucru ( $\bar{B}_f$ ), respectiv de comanda ( $\bar{B}_c$ ).

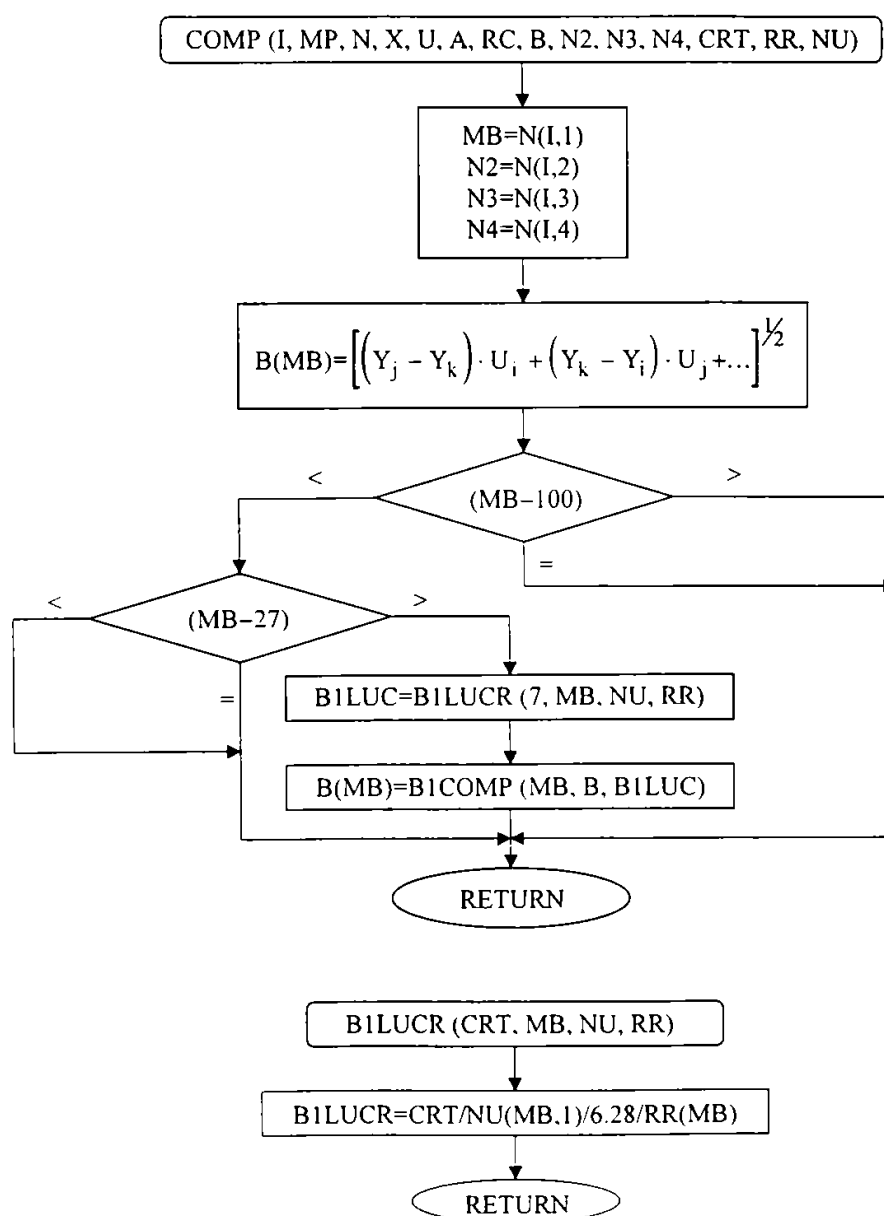


Fig. 2.10 Subrutina COMP pentru superpozitia campurilor  $\bar{B}$  in zona de interes

Subrutina extrage din PP indicele elementului finit impreuna cu indexarea locala a nodurilor sale, atribuindu-le o noua indexare:

$$\begin{aligned} MB &= N(I,1) \\ N2 &= N(I,2) \\ N3 &= N(I,3) \\ N4 &= N(I,4) \end{aligned}$$

Valoarea inductiei magnetice de comanda in functie de potentialul magnetic modificat data de relatiile (2.39) devine:

$$B = \frac{1}{2 \cdot A \cdot RC} \left\{ \left[ (Y_j - Y_k) \cdot U_i + (Y_k - Y_i) \cdot U_j + (Y_i - Y_j) \cdot U_k \right]^2 + \left[ (X_k - X_j) \cdot U_i + (X_i - X_k) \cdot U_j + (X_j - X_i) \cdot U_k \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

Valoarea inductiei magnetice de lucru se calculeaza cu ajutorul unei functii externe "Function B<sub>1</sub> LUCR" care preia din PP valoarea solenatiei de lucru, valoarea actualizata a reluctivitatii si a razei curbei de integrare  $\Gamma$  (2.64), iar valoarea obtinuta este returnata PP.

Compunerea inductiei magnetice de lucru cu cea de comanda se realizeaza prin "Function B<sub>1</sub> COMP" avandu-se in vedere ortogonalitatea celor doi vectori in orice punct din zona miezului magnetic:

$$B_{1COMP} = \sqrt{B_{(MB)}^2 + B_{1LUCR}^2} \quad (2.66)$$

Cu ajutorul a doua blocuri de testare se separa din totalitatea elementelor finite acelea in care are loc suprapunerea campurilor .

In cazul DMN comandat prin inductie magnetica ortogonala, in algoritmul prezentat se va inlocui valoarea data de (2.65) cu o inductie B<sub>(MB)</sub> careia i se atribuie valoarea impusa (externa) in cadrul subrutinei COMP.

Pentru alte configuratii ale DMN programul ramane la fel structurat, doar in expresia celor doua functii externe se schimba modul de determinare si de compunere a campurilor.

*Subrutina INTER:*

Subrutina INTER (D, FE, MB, B, NU, Z, REMIZ) apelata de PP si prezentata in figura 2.11 realizeaza selectarea valorilor reluctivitatii si interpolarea valorilor respective, recalculand noile valori ale lui  $\nu$  prin metoda subrelaxarii punctuale [Z1, Mi1, Mi5].

Subrutina testeaza daca elementul curent "e" apartine subdomeniului nelinier sau nu. Daca este in domeniul nelinier se testeaza valoarea inducției magnetice calculata cu subrutina COMP: daca B este negativ programul se opreste; daca  $B(MB) = 0$  se ia pentru v prima valoare

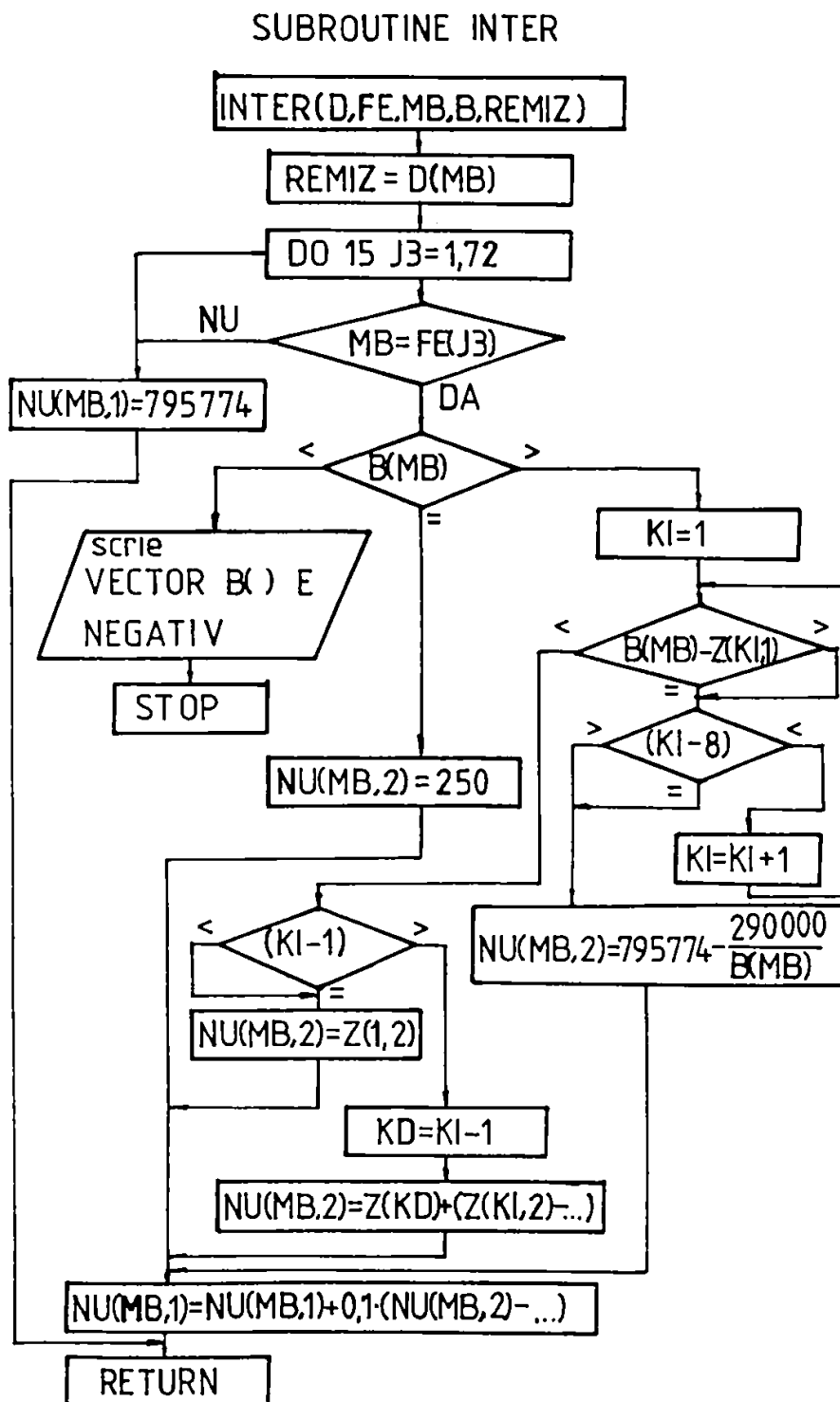


Fig. 2.11 Subrutina INTER pentru interpolarea reluctivității pe caracteristica  $v(B)$

din stanga care va fi subrelaxata; daca  $B(MB) > 0$  se testeaza pozitia sa in cadrul matricei Z, reluctivitatea de calcul se va interpola intre elementele  $i \sim (i+1)$  in care este cuprins B [Mi5].

$$v_c = v_i + (v_{i+1} - v_i) \frac{B_c - B_i}{B_{i+1} - B_i} \quad (2.67)$$

Daca B se gaseste in dreapta ultimei valori tabelata in Z, atunci reluctivitatea de calcul este:

$$v_c = v_0 - \frac{B_8}{B_c} (v_0 - v_8) \quad (2.68)$$

Subrutina INTER returneaza PP valoarea reluctivitatii subrelaxate la iteratia (k+1):

$$v_{k+1} = v_k + \omega_v (v_c - v_k); \quad \omega_v \in \overline{0,1} \quad (2.69)$$

Programul principal continua cu rezolvarea efectiva a ecuatiei (2.51) pentru fiecare element situat in jurul unui nod activ. Pentru simplificarea calculului s-au facut notatiile:

$$\begin{aligned} -MI &= \left[ \frac{U_j}{4 \cdot A \cdot RC} v(c_i c_j + b_i b_j) + \frac{U_k}{4 \cdot A \cdot RC} v(c_i c_k + b_i b_k) \right] - \frac{1}{3} J \cdot A \\ NI &= \frac{v}{4 \cdot A \cdot RC} (c_i^2 + b_i^2) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Se calculeaza apoi sumele:  $SNUM = \sum MI$ ,  $SNUMIT = \sum NI$ , care anterior fusesera initializate la zero. Se testeaza valorile SNUM si SNUMIT ca sa nu depaseasca un anumit ordin (de exemplu  $10^{14}$ ). Se testeaza marimea SNUMIT fata de zero si apoi se calculeaza valoarea potentialului modificat:

$$U_c = \frac{SNUM}{SNUMIT} \quad (2.71)$$

Marimea de calcul  $U_c$  se suprarelaxeaza, valoarea sa la iteratia (k+1) fiind de forma [Mil]:

$$U_{k+1} = U_k + \omega_U (U_c - U_k); \quad \omega_U \in \overline{1,2} \quad (2.72)$$

respectiv valoarea  $U_{k+1}$  se va utiliza la calculul inductiei magnetice in cadrul iteratiei urmatoare si se va lista la iesirea din bucla.

*Subrutina IND:*

Subrutina IND listeaza valorile calculate ale inductiei magnetice B din fiecare element la ultima iteratie, respectiv rezultatul final al calculului campului magnetic la nivel de element finit.

Se selecteaza elementele prin care doresc sa calculez fluxul magnetic, respectiv se calculeaza inductivitatea in raport cu fluxul determinat.

Fluxul magnetic util, prin elementele active feromagnetice, va fi de forma:

$$FI = \sum_{k=28}^{99} (BI \text{ LUCR})_k \cdot A_k \quad (2.73)$$

iar inductivitatea proprie a bobinei de lucru este de forma:

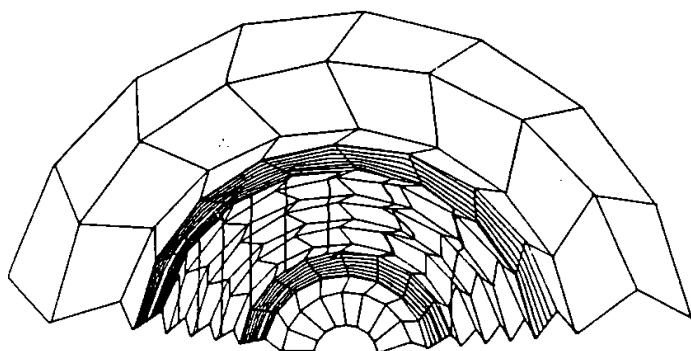
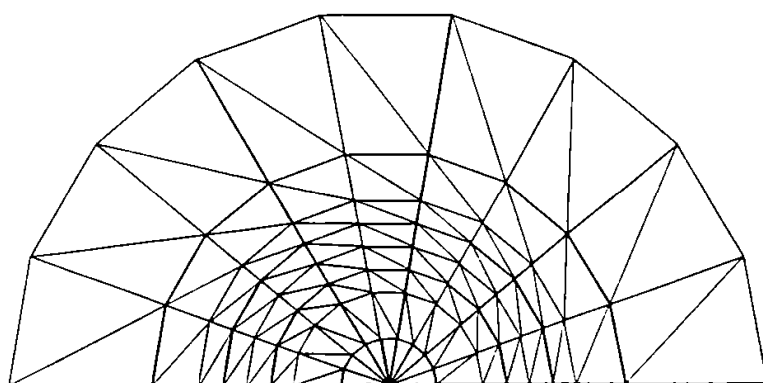
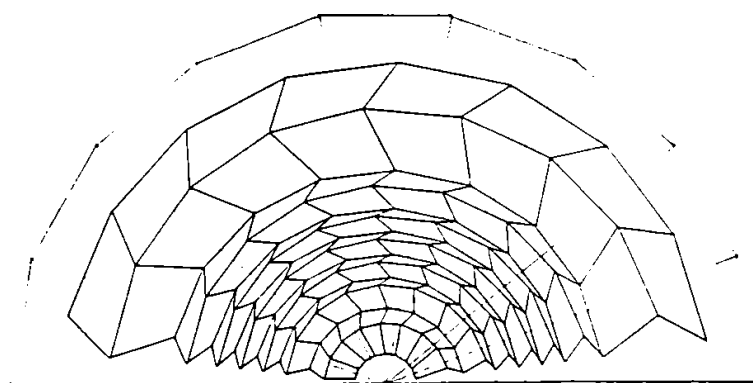


Fig. 2.12 Liniile campului  $\bar{B}_c$  (partial) in zona feromagnetica



a).



b).

Fig. 2.13

- a). Reteaua de discretizare in nodurile careia se cunoaste  $U_i(x_i, y_i)$   
 b). Reteaua de discretizare in nodurile careia se cunoaste  $B_{c_i}(z_i, r_i)$

$$AIND = \frac{1}{CRT} 2 \cdot FI \cdot SPIRE^2 \quad (2.74)$$

In figura 2.12, referitor la o retea de discretizare avand ca noduri centrele de greutate ale elementelor triunghiulare, se traseaza o parte din liniile cam ului  $\bar{B}_c$  la cele doua margini ale zonei feromagnetice.

Cele doua retele de discretizare, una ce cuprinde elementele finite avand nodurile sale drept varfuri ale elementelor triunghiulare (fig. 2.13-a) si in care noduri se cunoaste functia potential magnetic, iar cealalta retea (fig. 2.13-b) contine ca noduri centrele de greutate ale elementelor finite si in aceste noduri se cunoaste valoarea campului magnetic.

Programul de plotare (prin int r,olare) a campului se face in raport cu nodurile celei de a doua retele de discretizare.

## 2.4 Analiza numerica a campului magnetic prin MEF utilizand programul ANSYS

Programul ANSYS versiunea 5.0A (1995), produs de Swanson Analysis System, este destinat studierii problemelor de solicitari mecanice, probleme termice, fluide, campuri magnetice, campuri electrice.

Structura unui program ANSYS este de tipul celui prezentat in figura 2.14.

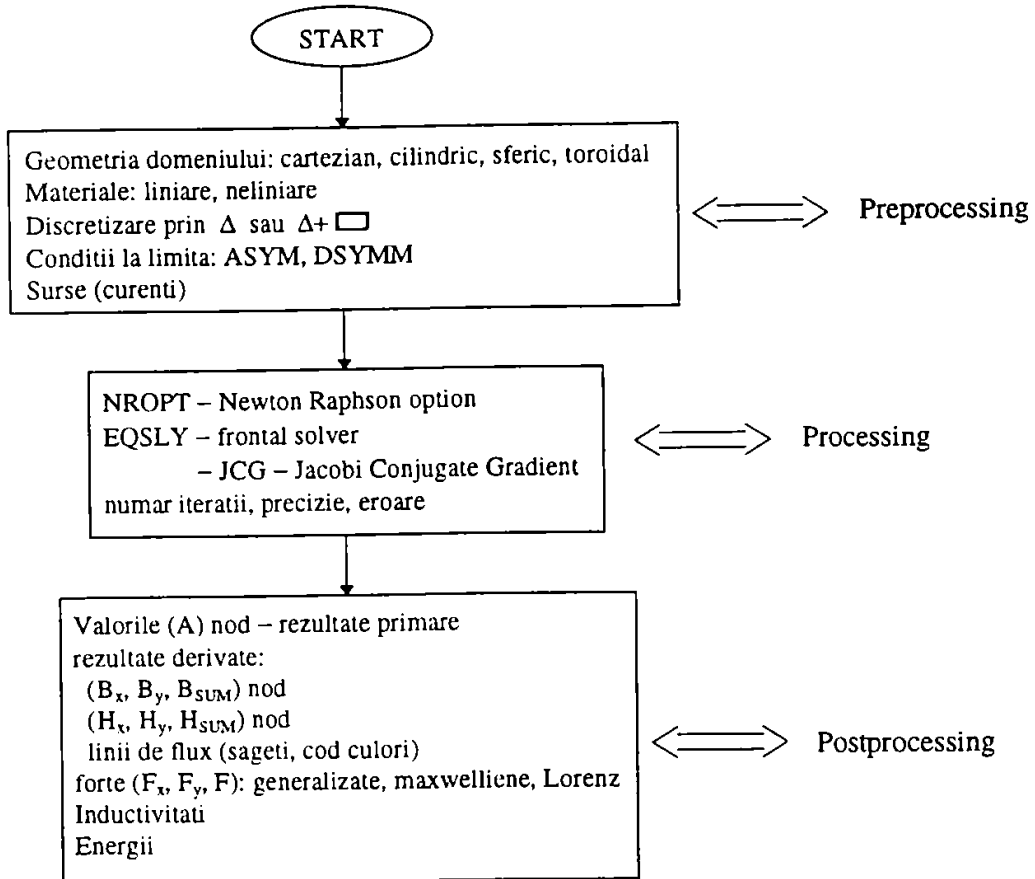


Fig. 2.14 Structura de lucru a unui program ANSYS

Programul utilizat pentru bobina neliniara comandata ortogonal avand geometria din

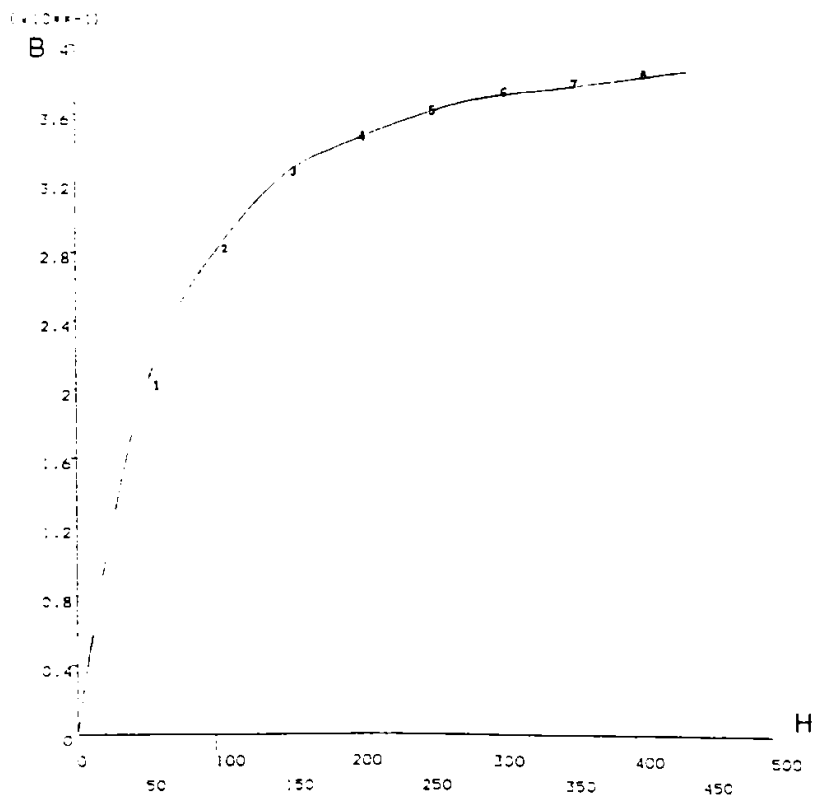
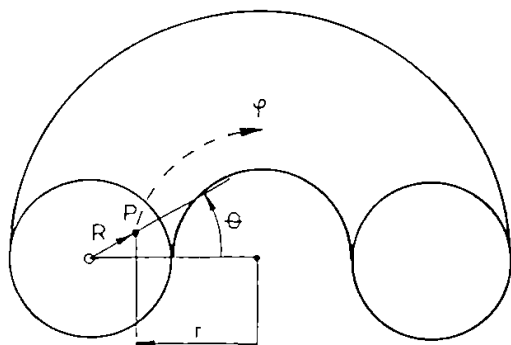


Fig. 2.15 Caracteristica neliniara  $B(H)$  discretizata in opt sectiuni

figura 2.3 este prezentat in Anexa II.

Materialul neliniar utilizat are caracteristica  $B(H)$  din figura 2.15. Geometria este definita intr-un sistem toroidal de axe (fig. 2.16) astfel alese incat un punct  $P$  din domeniu are



coordonatele:  $\{r, R, \theta, \phi\}$ . Lucrand intr-o sectiune transversala ( $\phi = \text{cst.}$ ) el este definit prin coordonatele  $\{r, R, \theta\}$ .

Intr-o sectiune, domeniul in spatiu discretizat prin elemente tetraedrice arata ca in figura 2.17.

Fig. 2.16 Definirea coordonatelor unui sistem toroidal de coordonate

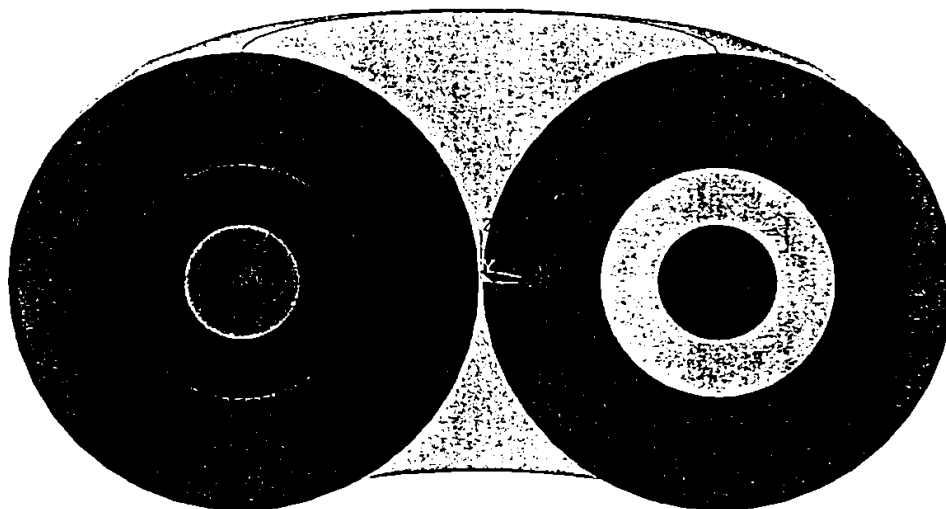


Fig. 2.17 Discretizarea domeniului de camp in 3D prin elemente tetraedrice

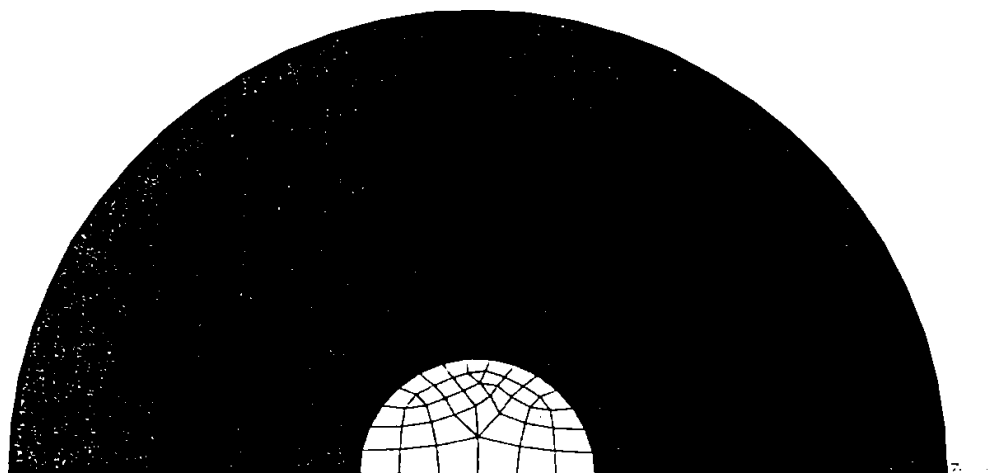


Fig. 2.18 Discretizarea domeniului plan prin elemente finite triunghiulare si patrulatere  
Discretizarea domeniului de camp, pe zone de material se prezinta ca in figura 2.18.

Valorile campului  $B$  creat de curentul de comanda cu densitatea  $\bar{J}$  are valorile si forma liniilor de cam ca in figura 2.19.

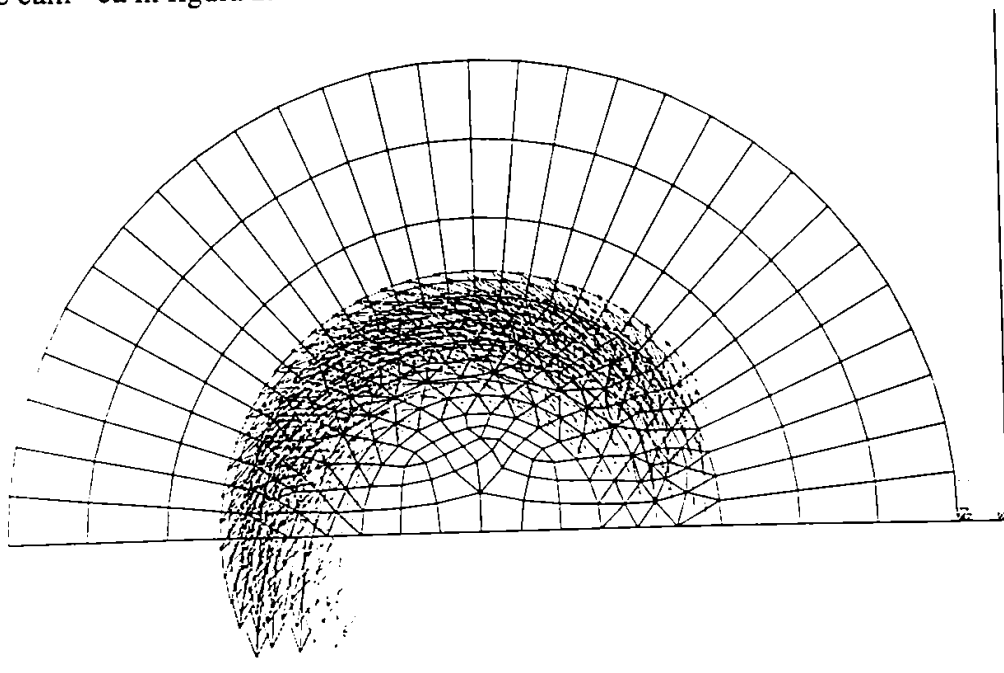


Fig. 2.19 Liniile campului  $\bar{B}$ , cu pondere semnificativa in domeniul neliniar

La o discretizare cu 356 noduri (dintre care in 33 este definita conditia la limita Dirichlet omogena  $A = 0$ ) si 299 elemente triunghiulare si patrulatere s-a optat pentru o rezolvare prin metoda Newton-Raphson in 25 iteratii, combinat cu metoda gradientului conjugat cu o pivotare cuprinsa intre 285 si 2.884.495, respectiv cu o norma de convergenta de  $0,392 \cdot 10^{-2}$ .

Valorile de camp si de potential magnetic obtinute se incadreaza in aceeasi plaja de valori si ca distributie in spatiu, doar ca programul fiind rulat pe o retea de statii grafice SUN s-a putut lucra cu o discretizare imbunatatita si erori impuse mici ( $10^{-6}$ ). Astfel se constata ca in zona cea mai saturata se obtine o valoare a inductiei magnetice de 0,4081 T prin programul propriu prezentat anterior, respectiv 0,4074 T prin programul ANSYS, deci o eroare de 0,171%.

## 2.5 Concluzii

1. Plecand de la teorema de unicitate in rezolvarea clasica (model diferential) a unei probleme de camp magnetic, se stabileste o teorema de unicitate echivalenta in model variational prin corespondenta termenilor care intervin in functionala energetica de extremizat, in raport cu elementele analizei clasice a campului magnetic.
2. Functionalele energetice stabilite, de tipul (2.9) pentru o problema tridimensionala sau de tipul (2.20) pentru o problema bidimensionala plan-paralela, respectiv de tipul (2.21) pentru



---

simetria plan-meridiana sunt justificate in fiecare regim de functionare in parte prin corelarea lor cu ecuatiile lui Maxwell pentru acel regim, astfel incat sa asigure unicitatea solutiei.

3. Matricile (coeficientilor [K] sau a termenilor liberi [G]) caracteristice MEF, in variabila A pentru campuri plan-paralele sau matricile [M] si [G] in variabila  $U = rA$  pentru campuri plan-meridiane, se arata ca se pot genera dupa acelasi algoritim, tinandu-se seama de corespondenta dintre domenii si se stabilesc in mod concret acesti algoritmi.

4. Se implementeaza algoritmul MEF dedus pentru un camp magnetic stationar, plan-meridian, dintr-un dispozitiv magnetic neliniar, comandat ortogonal, urmarindu-se pasii acestuia intr-un program principal modularizat care apeleaza alte subprograme pentru: discretizare, initializare, calcul si compuneri de campuri. interpolare, calcul de marimi globale etc.

5. Rezultatele obtinute prin programele proprii se compara cu rezultatele rularii aceleasi probleme printr-un program ANSYS versiunea 5.0A (1995). Diferenta rezultatelor este foarte mica (0.171%).



### Cap. 3 Sinteza optimala a campului magnetic stationar in medii neliniare

Modelul matematic diferential de camp magnetic stationar se deduce din ecuatiile fundamentale ale regimului electromagnetic variabil in cazul mediilor neliniare fixe si in domenii de continuitate si netezime a proprietatilor fizice locale , prin transcrierea acestora in functie de potentialul magnetic vector  $\bar{A}$  si asocierea conditiilor de unicitate corespunzatoare [T5],[Mi2] :

- *conditiile de material*, fixate prin ecuatiile de forma  $v=v(B)$  cunoscuta.
- *conditiile la limita* pe frontiera  $\Sigma$  a domeniului de camp  $\mathcal{D}$ , prin fixarea componentei

$$\bar{H}_{t_\Sigma} \text{ sau } \left. \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} \right|_\Sigma, \text{ respectiv } \bar{B}_{n_\Sigma} \text{ sau } \bar{A}_{t_\Sigma}, \text{ a } \textit{conditiilor de interfata} \text{ pe suprafetele } S \text{ de}$$

discontinuitate din domeniul  $\mathcal{D}$

- *conditiile de surse*, reprezentate de distributia densitatii de curent electric de conductie  $\bar{J}$  in interiorul domeniului  $\mathcal{D}$ , a inductiei magnetice remanente  $\bar{B}_{rem}$  (daca exista) si a panzei de curent electric de conductie  $\bar{J}_S$  (daca exista ) pe suprafetele de discontinuitate  $S \in \mathcal{D}$ .

#### 3.1. Modelul matematic diferential de camp magnetic stationar

In regim magnetic stationar potentialul magnetic vector  $\bar{A}$  satisface ecuatiile :  $\text{div } \bar{A}(\bar{r})=0$  si  $\text{rot } \bar{A}(\bar{r})= \bar{B}(\bar{r})$ , respectiv pentru domenii de continuitate ecuatiile vectoriale satisfacuta de variabila  $\bar{A}$  se deduce din forma locala a legii circuitului magnetic sub forma [D6], [M8], [N3], [S12]:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} \Leftrightarrow \text{rot}(v \text{ rot } \bar{A}) = \bar{J} \quad (3.1)$$

Ea este o ecuatie cvasi-Poisson vectoriala de forma :

$$- v \Delta \bar{A} + \text{grad } v \times \text{rot } \bar{A} = \bar{J} \quad (3.2)$$

cu valoarea densitatii de curent  $\bar{J}$  impusa (sursa campului) si conditiile la limita Dirichlet

$$(\bar{A}|_\Sigma = \bar{f}_S) \text{ sau Neumann } \left. \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} \right|_\Sigma = \bar{f}_N \text{ cunoscute.}$$

In subdomeniile neliniare (miezuri) unde  $\bar{J} = 0$  iar reluctivitatea  $v = v(B) = v(r,z)$  este cunoscuta ca o functie neliniara univoca, ecuatiile (3.2) devine o ecuatie cvasi-Laplace vectoriala

$$\mathbf{v} \Delta \bar{A} - \text{grad } \mathbf{v} \times \text{rot } \bar{A} = 0 \quad (3.3)$$

respectiv in subdomeniile pasive ( $\bar{J} = 0$ ) si liniare (heterogene) cu  $\mathbf{v} = \text{ct.}$ , potentialul  $\bar{A}$  satisface o ecuatie Laplace vectoriala :

$$\Delta \bar{A} = 0 \quad (3.4)$$

Intr-un sistem cilindric de coordonate ( $z, r, \varphi$ ) cu versorii  $\bar{u}_z, \bar{u}_r$  si  $\bar{u}_\varphi$  functiile din ecuatiile precedente se pot exprima sub forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \bar{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \bar{u}_\varphi + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \bar{u}_z = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \bar{u}_r + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \bar{u}_z \\ \text{rot } \bar{A} = -\frac{\partial A}{\partial z} \bar{u}_r + \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \bar{u}_z \\ \Delta \bar{A} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \bar{u}_r + \left( \Delta A - \frac{A}{r^2} \right) \bar{u}_\varphi = \left( \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} \right) \bar{u}_\varphi \\ \text{rot } \bar{A} \times \text{grad } \mathbf{v} = \left[ \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right] \bar{u}_\varphi \end{array} \right. \quad (3.5)$$

In exprimarile de forma (3.5) s-a tinut seama de simetria plan-meridiana (axiala in raport cu axa Oz ) a problemei, respectiv :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = A_\varphi(r, z) \bar{u}_\varphi = A \bar{u}_\varphi; A_r = A_z = 0 \\ \bar{J} = J_\varphi \bar{u}_\varphi; J_r = J_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Tinand seama de exprimarile (3.5) si (3.6) ecuatiile de potential (3.2), (3.3), (3.4) se pot scrie sub forma unor ecuatii de potential speciale ( in variabila  $A_\varphi = A$ ) ca ecuatii cu derivate partiale de forma :

$$\mathbf{v} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} \right) + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} = J \quad \text{sau } 0 \quad (3.7)$$

echivalenta ecuatiilor (3.2) si (3.3), respectiv ecuatia

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = 0 \quad (3.7')$$

echivalenta ecuatiei (3.4).

Ecuațiilor (3.7) și (3.7') li se asociază condițiile la limită impuse problemei studiate precum și ecuațiile de trecere pentru suprafețele de discontinuitate  $S$  ce separă două subdomenii cu reactivitățile  $v_1$  și  $v_2$ .

În problemele spațiale (3D), ecuațiile de trecere se deduc succesiv ținându-se seama că potențialul  $\bar{A}$  are trei componente:

$$\bar{A} = A_n \bar{n} + A_t \bar{t} + A_s \bar{s} \quad (0_1)$$

iar condiția de etalonare Coulomb ( $\text{div } \bar{A} = 0$ ) în jurul discontinuităților pasive ( $\bar{J}_s = 0$ ) este echivalentă cu  $A_{n1} = A_{n2}$ , respectiv conservarea componentei tangențiale a lui  $\bar{H}$ .

$\bar{H}_{t1} = \bar{H}_{t2}$  este echivalentă cu :

$$\bar{n} \times (v_1 \text{rot } \bar{A}_1) = \bar{n} \times (v_2 \text{rot } \bar{A}_2) \quad (0_2)$$

Componentele potențialului  $\bar{A}$  vor verifica ecuațiile de trecere deduse din (0<sub>1</sub>) și (0<sub>2</sub>) sub formă:

$$\begin{cases} A_{n1} = A_{n2} \\ \left( \frac{\partial A_t}{\partial n} \right)_1 = \frac{v_2}{v_1} \left( \frac{\partial A_t}{\partial n} \right)_2 - \left( \frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \left( \frac{\partial A_n}{\partial t} \right)_2 \\ \left( \frac{\partial A_s}{\partial n} \right)_1 = \frac{v_2}{v_1} \left( \frac{\partial A_s}{\partial n} \right)_2 + \left( \frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \left( \frac{\partial A_s}{\partial n} \right)_2 \end{cases} \quad (0_3)$$

Pentru probleme plane (2D) ecuațiile de trecere scrise în variabila  $A$  devin de forma:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ v_2 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 - v_1 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 = J_s \quad \text{sau} \quad 0 \end{cases} \quad (0_4)$$

### 3.1.1. Exprimarea în diferite finite a operatorilor diferențiali din ecuațiile de potențial magnetic vector

Vom admite o discretizare neuniformă a domeniului de câmp  $\mathcal{D}$ , cu pas variabil în jurul nodului  $\alpha$ , arbitrar pe axa  $Ox$ , astfel încât orice modificare a geometriei să poată fi cuprinsă în ecuațiile de câmp prin modificarea factorului de scară  $\alpha$  al discretizării, atunci când dorim optimizați geometriile.

Astfel, la o discretizare cu pas constant pe axa Ox, derivata intaia si a doua se exprima sub forma [Mi1, Mi2]:

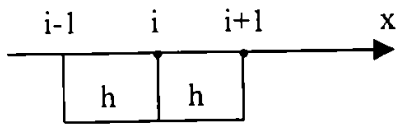


Fig. 3.1. Discretizare cu pas constant

$$\begin{aligned} D[x] &= \frac{1}{2h} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \\ D^2[x] &= \frac{1}{h^2} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

La o discretizare cu pas variabil derivatele se exprima prin relatii de forma :

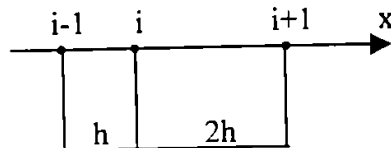
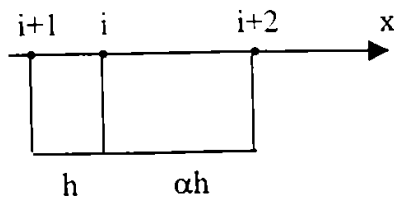


Fig. 3.2. Discretizare cu pas variabil

$$\begin{cases} D[x] = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)h} [x_{i+1,j} + (\alpha^2 - 1) \cdot x_{i,j} - \alpha^2 \cdot x_{i-1,j}] \\ D^2[x] = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)h^2} [\alpha \cdot x_{i-1,j} - (\alpha+1) \cdot x_{i,j} + x_{i+1,j}] \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{cu } h = x_i - x_{i-1} \quad \text{si} \quad \alpha = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}}$$

La o exprimare unilaterala , cu doi pasi inainte Fig. 3.3 sau doi pasi inapoi Fig.3.4 fata de nodul central (i) , exprimarile sunt de forma :



$$\alpha = \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \quad ; \quad h = x_{i+1} - x_i$$

$$D[x] = \frac{1}{2h} \left[ (\alpha+1) x_{i+1,j} - \frac{1}{\alpha+1} x_{i+2,j} - \frac{\alpha(\alpha+2)}{\alpha+1} x_{i,j} \right] \quad (3.10)$$

Fig. 3.3. Discretizare in avans

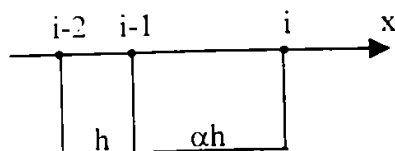


Fig. 3.4. Discretizare in urma

$$\alpha = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \quad ; \quad h = x_{i-1} - x_{i-2}$$

$$D[x] = \frac{1}{2h} \left[ (\alpha+1) x_{i-1,j} - \frac{\alpha^2}{\alpha+1} x_{i-2,j} - \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} x_{i,j} \right] \quad (3.11)$$

Expresia rotorului pentru un camp plan-meridian (3.5)

$$\text{rot } \bar{A} = -\frac{\partial A}{\partial z} \bar{u}_r + \left( \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right) \bar{u}_z$$

scrisa in diferente finite pentru o schema in cinci puncte este de forma :

$$\text{rot } \bar{A} = -\frac{1}{\alpha_z(\alpha_z+1) h_z} [A_{i+1,j} + (\alpha_z^2 - 1)A_{i,j} - \alpha_z^2 A_{i-1,j}] \cdot \bar{u}_r$$

$$+ \left\{ \frac{1}{\alpha_r(\alpha_r+1) h_r} [A_{i,j+1} + (\alpha_r^2 - 1)A_{i,j} - \alpha_r^2 A_{i,j-1}] + \frac{A_{i,j}}{r_{i,j}} \right\} \cdot \bar{u}_z \quad (3.12)$$

In mod similar se exprima in diferente finite si celelalte functii din expresiile (3.5) care intervin in ecuatiile speciale de potential magnetic.

Domeniul de camp magnetic stationar pentru care se scriu ecuatiile in diferente finite este cel prezentat in Fig. 3.5.

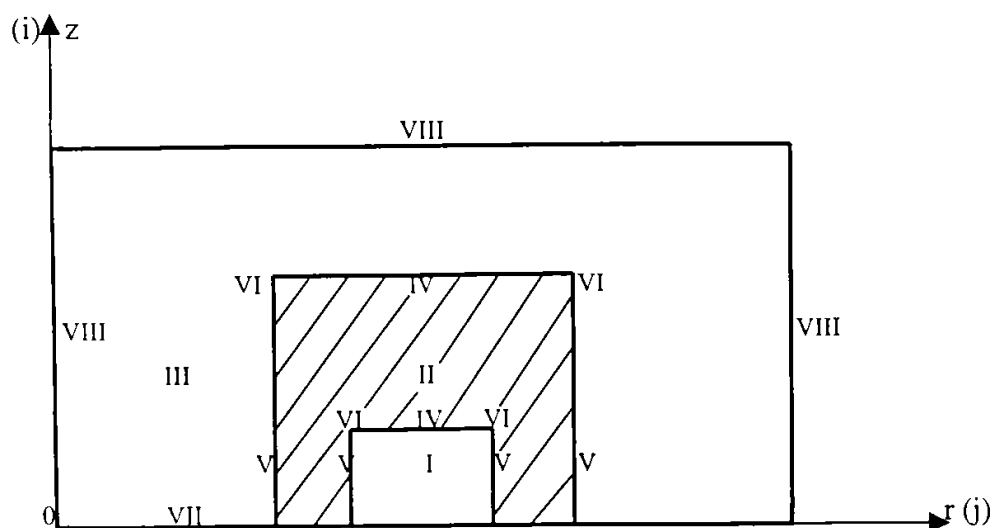


Fig. 3.5. Domeniul de camp  $\mathcal{D}$  in coordonate (r,z)

Se disting domeniile de continuitate notate cu I, II, III, pentru care se vor scrie ecuatii de potential de forma (3.2, 3.3, 3.4), respectiv (3.7, 3.7') si care au fost codificate prin coeficientii  $k_1$  si  $k_2$  astfel :

$$\begin{aligned} k_1 = 1 &\Leftrightarrow \bar{J} \neq 0 ; & k_1 = 0 &\Leftrightarrow J = 0 \\ k_2 = 0 &\Leftrightarrow v = v(B) ; & k_2 = 0 &\Leftrightarrow v = v_0 = \text{ct.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pentru suprafetele de discontinuitate (separatie) orizontale se vor scrie ecuatii de trecere speciale . de tipul IV (3.28).

Pentru suprafetele de separatie verticale se vor scrie ecuatii de trecere codificate sub forma unor ecuatii de tipul V (3.20).

Pentru colturi de unghi de deschidere  $\alpha$ , in general , si pentru colturi de  $\frac{\pi}{2}$ , se vor scrie ecuatii de trecere de tipul VI (3.38, 3.41)

Pentru suprafetele la limita, cu conditia Neumann omogena  $\left( \frac{\partial A}{\partial n} = 0 \right)$ , se vor scrie ecuatii la limita de forma VII (3.36), iar pentru suprafete la limita cu conditie Dirichlet omogena ( $A = 0$ ) se vor scrie ecuatii de tipul VIII (atribuite).

Subdomeniile de continuitate au caracteristicile:

- I :  $k_1 = 1, k_2 = 0 \rightarrow$  este parcurs de curent ( $\bar{J}$ ) si are  $v_0$ .
- II :  $k_1 = 0, k_2 = 1 \rightarrow J = 0$  si este neliniar  $v = v(B) = v(r,z)$
- III :  $k_1 = k_2 = 0 \rightarrow J = 0, v = v_0 = \text{ct.}$

### 3.1.2. Ecuatiile in diferente finite pentru subdomenii de continuitate

#### I, II, III

Potentialul magnetic vector  $\bar{A} = A_\varphi \cdot \bar{u}_\varphi = A \cdot \bar{u}_\varphi$  satisface in subdomeniile de continuitate ecuatii de forma (3.7) :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{A}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{J}{v} \quad \text{sau} \quad 0 \quad (3.7'')$$



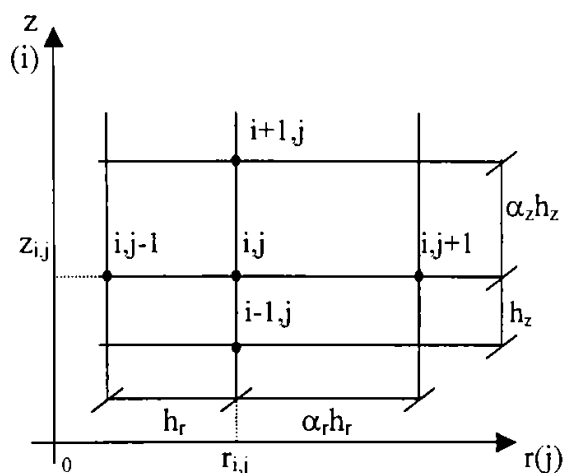


Fig. 3.6. Discretizare in plan cu pas variabil

Utilizand pentru aproximarea derivatelor lui  $A$  si  $v$  din (3.7'') scheme in diferente finite de forma (3.9), ecuatia (3.7''') se poate restrange ca o ecuatie algebrica in valori nodale corespunzatoare unei scheme in cinci puncte:

$$c_1 A_{i,j-1} + c_2 A_{i,j+1} + c_3 A_{i-1,j} + c_4 A_{i+1,j} + c_5 A_{i,j} = c_6 \quad (3.14)$$

respectiv pentru o schema explicita in diferente finite potentialul in nodul curent  $(i,j)$  Fig.3.6. , se poate scrie:

$$A_{i,j} = \frac{c_6}{c_5} - \frac{c_1}{c_5} A_{i,j-1} - \frac{c_2}{c_5} A_{i,j+1} - \frac{c_3}{c_5} A_{i-1,j} - \frac{c_4}{c_5} A_{i+1,j} \quad (3.15)$$

coeficientii  $c_k$ ,  $k = \overline{1,5}$  au expresiile date de (3.16):

$$\left\{ \begin{array}{l}
c_1 = 2 \frac{\alpha_r}{\alpha_r(\alpha_r+1)h_r^2} - \frac{\alpha_r}{r_{ij}(\alpha_r+1)h_r} - \frac{1}{v_{ij}} \cdot \frac{1}{(\alpha_r+1)^2 h_r^2} \left[ v_{i,j+1} + (\alpha_r^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_r^2 v_{i,j-1} \right] * k_2 \\
c_2 = 2 \frac{1}{\alpha_r(\alpha_r+1)h_r^2} + \frac{1}{\alpha_r(\alpha_r+1)h_r r_{ij}} + \frac{1}{v_{ij}} \cdot \frac{1}{\alpha_r^2(\alpha_r+1)^2 h_r^2} \left[ v_{i,j+1} + (\alpha_r^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_r^2 v_{i,j-1} \right] * k_2 \\
c_3 = 2 \frac{1}{(\alpha_z+1)h_z^2} - \frac{1}{v_{ij}} \cdot \frac{1}{(\alpha_z+1)^2 h_z^2} \left[ v_{i+1,j} + (\alpha_z^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_z^2 v_{i-1,j} \right] * k_2 \\
c_4 = 2 \frac{1}{\alpha_z(\alpha_z+1)h_z^2} + \frac{1}{v_{ij}} \cdot \frac{1}{\alpha_z^2(\alpha_z+1)^2 h_z^2} \left[ v_{i+1,j} + (\alpha_z^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_z^2 v_{i-1,j} \right] * k_2 \\
c_5 = \frac{-2}{\alpha_r h_r^2} - \frac{2}{\alpha_z h_z^2} + \frac{\alpha_r - 1}{\alpha_r h_r r_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}^2} + \frac{1}{v_{ij}} \cdot \frac{\alpha_z - 1}{\alpha_z^2(\alpha_z+1)h_z^2} \left[ v_{i+1,j} + (\alpha_z^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_z^2 v_{i-1,j} \right] * k_2 + \\
+ \frac{1}{v_{ij}} \frac{1}{\alpha_r(\alpha_r+1)h_r} \left[ \frac{\alpha_r - 1}{\alpha_r h_r} + \frac{1}{r_{ij}} \right] \cdot \left[ v_{i,j+1} + (\alpha_r^2 - 1)v_{i,j} - \alpha_r^2 v_{i-1,j} \right] * k_2 \\
c_6 = -\frac{1}{v_{ij}} J * k_1
\end{array} \right. \quad (3.16)$$

relatii in care  $k_2 = 1$ . pentru medii feromagnetice (neliniar-neomogene), presupune:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \neq 0 \text{ iar } k_2 = 0 \text{ pentru medii liniar omogene, presupune } \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

De asemenea coeficientii de discretizare sunt definiti prin relatiile :

$$\left\{ \begin{array}{l}
h_r = r_{i,j} - r_{i,j-1}, \quad h_z = z_{i,j} - z_{i-1,j} \\
\alpha_r = \frac{r_{i,j+1} - r_{i,j}}{r_{i,j} - r_{i,j-1}}, \quad \alpha_z = \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j}}{z_{i,j} - z_{i-1,j}}
\end{array} \right. \quad (3.17)$$

La suprafata de separatie aer-feromagnet parametrii constitutivi au o variatie prin salt ceea ce duce si la variatia accentuata a marimilor de stare a campului in puncte apropiate cu suprafata respectiva.

Distributia puternic neuniforma a campului in jurul discontinuitatilor afecteaza rezolvarea numerica a problemei de camp, asigurand o convergenta lenta a procesului iterativ de rezolvare a

modelului numeric adoptat si implicit scaderea preciziei, ca urmare a cresterii erorilor de rotunjire la rezolvarea numerica repetata a sistemului de ecuatii.

Prin corecta alegere si corelare a coeficientilor de suprar relaxare, respectiv subrelaxare din ciclurile iterative succesive, se poate asigura o convergenta si o precizie suficienta a procesului numeric asociat modelului neliniar

### 3.1.3. Ecuatiile in diferente finite pentru suprafetele de trecere orizontale

Consideram o suprafata de separatie  $S_{12}$  intre doua subdomenii cu  $v_1$  si  $v_2$ , avand normala locala  $\bar{n}_{12}$ , Fig. 3.7., si admitem ca este o discontinuitate pasiva. (fara panze de curent  $\bar{J}_s = 0$ ).

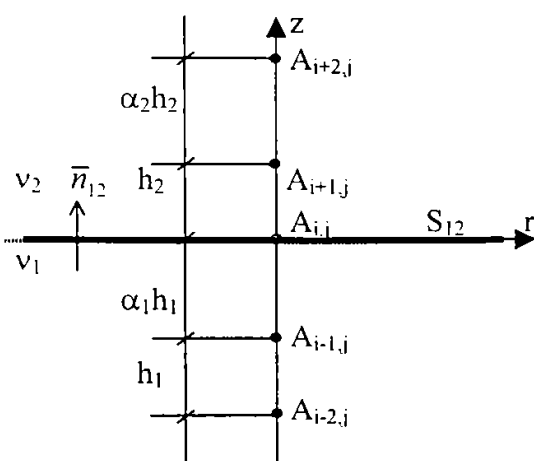


Fig. 3.7. Discretizarea in jurul unei suprafete de trecere orizontala

Pe suprafata  $S_{12}$  ecuatia de trecere  $[o_2]$  cu versorul normal la discontinuitate cu  $\bar{n}_{12} = \bar{u}_z$  devine:

$$\bar{n}_{12} \times (v_1 \text{rot } \bar{A}_1 - v_2 \text{rot } \bar{A}_2) = 0 \quad (3.18)$$

Tinand seama ca  $\bar{u}_z \times \bar{u}_r = \bar{u}_\varphi$  se obtine:

$$v_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = v_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} \quad (3.19)$$

Aproximand variatiile potentialului  $\bar{A}$  in cele doua subdomenii prin diferente finite de forma (3.10,3.11) (in apropierea frontierelor exprimarea variatiei potentialului se face prin formule imbunatatite – aproximare in mai multe noduri – in acest fel contribuind la reducerea erorilor) ecuatia de trecere (3.19) devine:

$$A_{i,j} = \frac{c_2}{c_1} A_{i-2,j} + \frac{c_3}{c_1} A_{i-1,j} + \frac{c_4}{c_1} A_{i+1,j} + \frac{c_5}{c_1} A_{i+2,j} \quad (3.20)$$

unde coeficientii  $c_k$  ( $k = \overline{1,5}$ ) au semnificatiile:

$$\begin{cases} c_1 = v_2 \frac{\alpha_2 + 2}{h_2(\alpha_2 + 1)} - v_1 \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1(\alpha_1 + 1)} \\ c_2 = v_1 \frac{\alpha_1}{h_1(\alpha_1 + 1)} ; & c_3 = -v_1 \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1} \\ c_4 = v_2 \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 h_2} ; & c_5 = -v_2 \frac{1}{\alpha_2 h_2(\alpha_2 + 1)} \end{cases} \quad (3.21)$$

iar parametrii de discretizare cu notatiile din Fig. 3.7 sunt:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{z_{i-1,j} - z_{i-2,j}} ; & h_1 = z_{i-1,j} - z_{i-2,j} \\ \alpha_2 = \frac{z_{i+2,j} - z_{i+1,j}}{z_{i+1,j} - z_{i,j}} ; & h_2 = z_{i+1,j} - z_{i,j} \end{cases} \quad (3.22)$$

Cand subdomeniile de camp sunt neliniare, reluctivitatea este variabila in jurul nodurilor retelei de discretizare si ecuatiile de trecere in diferente finite au o exprimare in functie de valorile nodale ale reluctivitatii  $v$  de forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1 h_1} \left[ (\alpha_1 + 1) A_{i-1,j} \cdot v_{i-1,j} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + 1} A_{i-2,j} v_{i-2,j} - \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} A_{i,j} v_{i,j}^{(1)} \right] = \\ \frac{1}{\alpha_2 h_2} \left[ (\alpha_2 + 1) A_{i+1,j} \cdot v_{i+1,j} - \frac{1}{\alpha_2 + 1} A_{i+2,j} v_{i+2,j} - \frac{\alpha_2(\alpha_2 + 2)}{\alpha_2 + 1} A_{i,j} v_{i,j}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pentru nodurile asezate chiar pe frontiera dintre subdomenii s-a facut o dedublare a reluctivitatii de pe cele doua fete:  $v_{i,j}^{(1)}$  si  $v_{i,j}^{(2)}$ .

Ecuatia in diferente finite explicitata in acest mod devine de forma :

$$A_{i,j} = \frac{c_2}{c_1} A_{i-2,j} + \frac{c_3}{c_1} A_{i-1,j} + \frac{c_4}{c_1} A_{i+1,j} + \frac{c_5}{c_1} A_{i+2,j} \quad (3.24)$$

unde coeficientii  $c_k$  au exprimarile date de (3.25)

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\alpha_2 + 2}{(\alpha_2 + 1) h_2} v_{i,j}^{(2)} - \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1(\alpha_1 + 1) h_1} v_{i,j}^{(1)} \\ c_2 = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + 1) h_1} v_{i-2,j} ; & c_3 = -\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1} v_{i-1,j} \\ c_4 = \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 h_2} v_{i+1,j} ; & c_5 = -\frac{1}{\alpha_2 h_2 (\alpha_2 + 1)} v_{i+2,j} \end{cases} \quad (3.25)$$

### 3.1.4. Ecuatiile in diferente finite pentru suprafete de trecere verticale

Fie  $S_{12}$  o suprafata de trecere (discontinuitate pasiva) intre doua subdomenii cu reluctivitatile  $\nu_1$  si  $\nu_2$  si normala locala la discontinuitate este  $\bar{n}_{12} = \bar{u}_r$  (Fig. 3.8).

Ecuatia de trecere pentru discontinuitati este de forma :  $\bar{n}_{12} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = 0$ , care scrisa in variabila potential magnetic vector  $\bar{A}$  devine de forma (3.26):

$$\bar{n}_{12} \times (\nu_2 \text{rot } \bar{A}_2 - \nu_1 \text{rot } \bar{A}_1) = 0 \quad (3.26)$$

Tinand seama de relatiile (3.5) ecuatia de trecere (3.26) se scrie:

$$\nu_1 \left( \frac{A_1}{r} + \frac{\partial A_1}{\partial r} \right) = \nu_2 \left( \frac{A_2}{r} + \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) \quad (3.27)$$

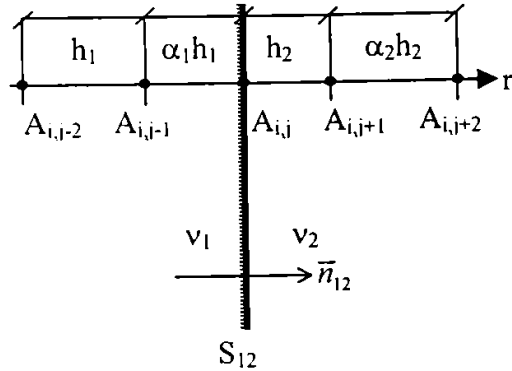
Utilizand scheme de aproximare in diferente finite de tipul (3.10, 3.11) se poate aduce ecuatia de trecere in diferente finite sub forma explicita:

$$A_{i,j} = \frac{c_2}{c_1} A_{i,j-2} + \frac{c_3}{c_1} A_{i,j-1} + \frac{c_4}{c_1} A_{i,j+1} + \frac{c_5}{c_1} A_{i,j+2} \quad (3.28)$$

unde coeficientii au expresiile:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\nu_1 - \nu_2}{r_{i,j}} - \nu_1 \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1 (\alpha_1 + 1)} + \nu_2 \frac{\alpha_2 + 2}{h_2 (\alpha_2 + 1)} \\ c_2 = \nu_1 \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + 1) h_1} ; & c_3 = -\nu_1 \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1} \\ c_4 = \nu_2 \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 h_2} ; & c_5 = -\nu_2 \frac{1}{\alpha_2 (\alpha_2 + 1) h_2} \end{cases} \quad (3.29)$$

iar parametrii de discretizare conform Fig. 3.8 au semnificatiile:



$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{r_{i,j} - r_{i,j-1}}{r_{i,j-1} - r_{i,j-2}} \\ \alpha_2 = \frac{r_{i,j+2} - r_{i,j+1}}{r_{i,j+1} - r_{i,j}} \\ h_1 = r_{i,j-1} - r_{i,j-2} \\ h_2 = r_{i,j+2} - r_{i,j+1} \end{cases} \quad (3.30)$$

Fig. 3.8 Discretizare in jurul unei suprafete de trecere orizontala

Daca mediile (1) si (2) sunt neliniare, atunci in jurul nodurilor de discretizare reluctivitatea este variabila, iar ecuatiile in diferente finite scrise pentru astfel de discontinuitati vor fi de forma:

$$\begin{aligned} v_i^{(1)} \frac{A_{i,j}}{r_{i,j}} + \frac{1}{\alpha_1 h_1} \left[ (\alpha_1 + 1) A_{i,j-1} \cdot v_{i,j-1} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + 1} A_{i,j-2} v_{i,j-2} - \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} A_{i,j} v_{i,j}^{(1)} \right] = \\ = v_{i,j}^{(2)} \frac{A_{i,j}}{r_{i,j}} + \frac{1}{\alpha_2 h_2} \left[ (\alpha_2 + 1) A_{i,j+1} \cdot v_{i,j+1} - \frac{1}{\alpha_2 + 1} A_{i,j+2} v_{i,j+2} - \frac{\alpha_2(\alpha_2 + 2)}{\alpha_2 + 1} A_{i,j} v_{i,j}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ecuatia de trecere in diferente finite explicitata in acest caz devine:

$$A_{i,j} = \frac{c_2}{c_1} A_{i,j-2} + \frac{c_3}{c_1} A_{i,j-1} + \frac{c_4}{c_1} A_{i,j+1} + \frac{c_5}{c_1} A_{i,j+2} \quad (3.32)$$

unde coeficientii din (3.32) au expresiile:

$$\begin{cases} c_1 = \left( \frac{v_{i,j}^{(1)}}{r_{i,j}} - \frac{1}{\alpha_1 h_1} \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} v_{i,j}^{(1)} \right) - \left( \frac{v_{i,j}^{(2)}}{r_{i,j}} - \frac{\alpha_2 + 2}{(\alpha_2 + 1) h_2} v_{i,j}^{(2)} \right) = \\ = v_{i,j}^{(1)} \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1 (\alpha_1 + 1)} \right) - v_{i,j}^{(2)} \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{\alpha_2 + 2}{h_2 (\alpha_2 + 1)} \right) \\ c_2 = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + 1) h_1} v_{i,j-2} ; \quad c_3 = -\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 h_1} v_{i,j-1} \\ c_4 = \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2 h_2} v_{i,j+1} ; \quad c_5 = -\frac{1}{\alpha_2 (\alpha_2 + 1) h_2} v_{i,j+2} \end{cases} \quad (3.33)$$

Daca mediul (1) este liniar si omogen atunci  $v_{i,j-1} = v_{i,j-2} = v_{ij}^{(1)} = v_1$  respectiv daca si subdomeniul (2) este liniar si omogen  $v_{i,j+1} = v_{i,j+2} = v_{ij}^{(2)} = v_2$  si in acest caz ecuatiile in diferente finite (3.23, 3.31) se reduc la (3.20, 3.28), ecuatii scrise pe suprafete de trecere intre subdomenii liniare si omogene.

Daca subdomeniul (1) de exemplu, este neomogen  $v_{i,j-1} \neq v_{i,j-2} \neq v_{ij}^{(1)}$  valorile reluctivitatii in fiecare nod raman constante in procesul de calcul (aceste valori nu se modifica in procesul iterativ de calcul). Daca domeniul este si neliniar fiecare reluctivitate isi modifica valoarea functie de valorile campului in nodul respectiv, la iteratia curenta de calcul al acestuia, cu subrelaxarea impusa.

### 3.1.5 Ecuatiile in diferente finite pentru nodurile de frontiera corespunzatoare unor conditii Neumann omogene

Consideram o portiune din frontiera  $(\Sigma)_{i=1}$  pentru care potentialul magnetic vector satisface o conditie Neumann omogena  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial z} = 0$ .

Exprimand derivata dupa variabila  $z$  in diferente finite, cu o aproximare de forma (3.10), cu doi pasi in avans (Fig. 3.9) obtinem ecuati:

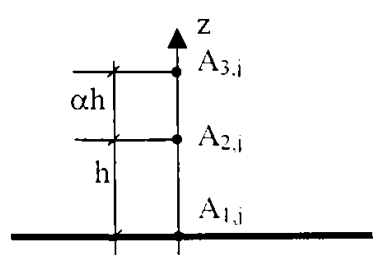


Fig.3.9 Discretizare in jurul frontierei pentru conditii Neumann

$$A_{1,j} = \frac{c_2}{c_1} A_{2,j} + \frac{c_3}{c_1} A_{3,j} \quad (3.34)$$

in care:

$$c_1 = \frac{\alpha+2}{(\alpha+1)h} \quad c_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha h} \quad c_3 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)h} \quad (3.35)$$

$$h = z_{2,j} - z_{1,j} \quad \alpha = \frac{z_{3,j} - z_{2,j}}{z_{2,j} - z_{1,j}}$$

respectiv

$$A_{1,j} = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+2)} A_{2,j} - \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} A_{3,j} \quad (3.36)$$

Pentru frontiere cu conditii Dirichlet omogene (sau neomogene) nu este nevoie de ecuati pentru potentialele acestor noduri, valorile potentialelor in noduri ( de tipul VIII) se atribuie prin initializare.

### 3.1.6 Ecuatiile de trecere in diferente finite pentru nodurile de colt

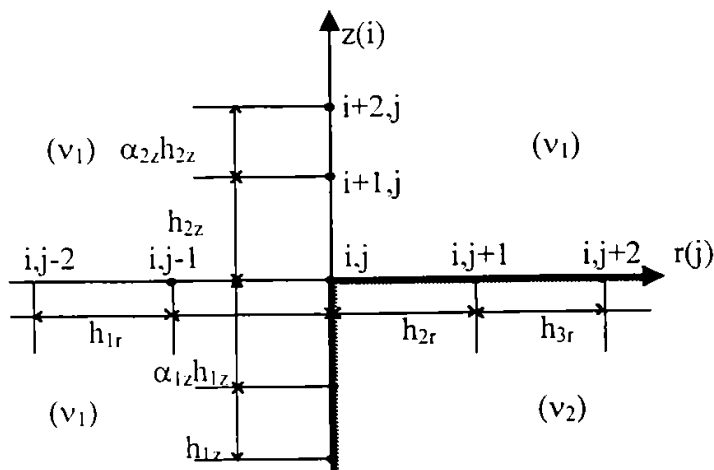


Fig.3.10 Discretizare in jurul unui colt stanga

Pentru un colt "stanga" ce separa mediile cu reactivitatile  $v_1$  si  $v_2$  (Fig.3.10) ecuatia de potential este de forma scrisa in relatia (3.37) in care  $A_1$  si  $A_2$  sunt valorile potentialului magnetic in cele doua subdomenii :

$$v_1 \left( \frac{A_1}{r} + \frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) = v_2 \left( \frac{A_2}{r} + \frac{\partial A_2}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \quad (3.37)$$

Prin aproximările (3.10, 3.11) ecuatia (3.37) se poate scrie sub forma:

$$c_1 A_{i,j} = c_2 A_{i,j-2} + c_3 A_{i,j-1} + c_4 A_{i,j+1} + c_5 A_{i,j+2} + c_6 A_{i-2,j} + c_7 A_{i-1,j} + c_8 A_{i+1,j} + c_9 A_{i+2,j} \quad (3.38)$$

unde coeficientii au exprimarile date de relatiile (3.39):

Ecuatia (3.38) este o aproximare imbunatatita a valorii potentialului in nodul de colt (i,j) in functie de valorile in nodurile vecin (formula in noua puncte).



$$\left\{ \begin{aligned}
 c_1 &= \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{2\alpha_{1r} + 1}{\alpha_{1r}(\alpha_{1r} + 1)h_{1r}} + \frac{\alpha_{1z} + 2}{(\alpha_{1z} + 1)h_{1z}} \right) v_{i,j}^1 - \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{\alpha_{2r} + 2}{(\alpha_{2r} + 1)h_{2r}} + \frac{2\alpha_{2z} + 1}{\alpha_{2z}(\alpha_{2z} + 1)h_{2z}} \right) v_{i,j}^2 \\
 c_2 &= \frac{\alpha_{1r}}{(\alpha_{1r} + 1)h_{1r}} v_{i,j-2} \\
 c_3 &= -\frac{\alpha_{1r} + 1}{\alpha_{1r}h_{1r}} v_{i,j-1} \\
 c_4 &= \frac{\alpha_{2r} + 1}{\alpha_{2r}h_{2r}} v_{i,j+1} \\
 c_5 &= -\frac{1}{\alpha_{2r}(\alpha_{2r} + 1)h_{2r}} v_{i,j+2} \\
 c_6 &= \frac{\alpha_{2z}}{(\alpha_{2z} + 1)h_{2z}} v_{i-2,j} \\
 c_7 &= -\frac{\alpha_{2z} + 1}{\alpha_{2z}h_{2z}} v_{i-1,j} \\
 c_8 &= \frac{\alpha_{1z} + 1}{\alpha_{1z}h_{1z}} v_{i+1,j} \\
 c_9 &= -\frac{1}{\alpha_{1z}(\alpha_{1z} + 1)h_{1z}} v_{i+2,j}
 \end{aligned} \right. \quad (3.39)$$

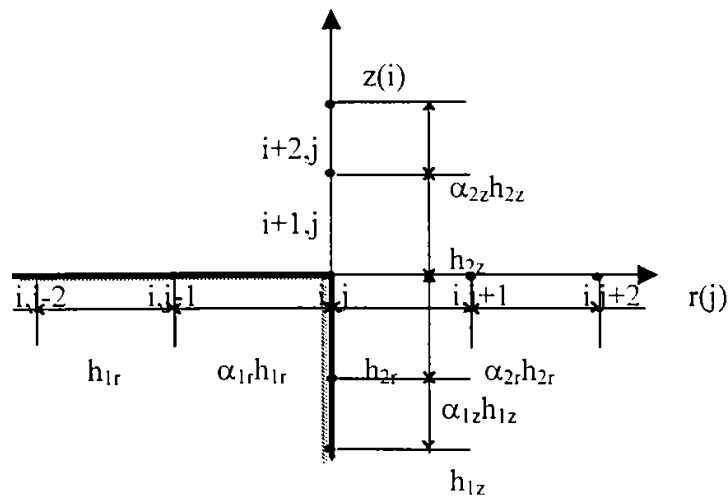


Fig.3.11 Discretizarea in jurul unui colt dreapta

Pentru un colt dreapta (Fig.3.11) ecuatia de trecere ,cu derivate pariale este de forma

(3.40).

$$v_1 \left( \frac{A_1}{r} + \frac{\partial A_1}{\partial r} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) = v_2 \left( \frac{A_2}{r} + \frac{\partial A_2}{\partial r} + \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \quad (3.40)$$

Prin aproximarile (3.10, 3.11), ecuatia (3.40) exprima potentialul magnetic vector in punctul (i,j) cu ajutorul valorilor sale din opt puncte vecine ca in Fig.3.11, sub forma:

$$c_1 A_{i,j} = c_2 A_{i,j-2} + c_3 A_{i,j-1} + c_4 A_{i,j+1} + c_5 A_{i,j+2} + c_6 A_{i-2,j} + c_7 A_{i-1,j} + c_8 A_{i+1,j} + c_9 A_{i+2,j} \quad (3.41)$$

unde coeficientii  $c_i$   $i = \overline{1,9}$  sunt dati de relatiile (3.42)

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{2\alpha_{1r} + 1}{\alpha_{1r}(\alpha_{1r} + 1)h_{1r}} - \frac{\alpha_{1z} + 2}{(\alpha_{1z} + 1)h_{1z}} \right) v_{i,j}^1 - \left( \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{\alpha_{2r} + 2}{(\alpha_{2r} + 1)h_{2r}} - \frac{2\alpha_{2z} + 1}{\alpha_{2z}(\alpha_{2z} + 1)h_{2z}} \right) v_{i,j}^2 \\ c_2 = \frac{\alpha_{1r}}{(\alpha_{1r} + 1)h_{1r}} v_{i,j-2} \\ c_3 = -\frac{\alpha_{1r} + 1}{\alpha_{1r}h_{1r}} v_{i,j-1} \\ c_4 = \frac{\alpha_{2r} + 1}{\alpha_{2r}h_{2r}} v_{i,j+1} \\ c_5 = -\frac{1}{\alpha_{2r}(\alpha_{2r} + 1)h_{2r}} v_{i,j+2} \\ c_6 = -\frac{\alpha_{2z}}{(\alpha_{2z} + 1)h_{2z}} v_{i-2,j} \\ c_7 = \frac{\alpha_{2z} + 1}{\alpha_{2z}h_{2z}} v_{i-1,j} \\ c_8 = -\frac{\alpha_{1z} + 1}{\alpha_{1z}h_{1z}} v_{i+1,j} \\ c_9 = \frac{1}{\alpha_{1z}(\alpha_{1z} + 1)h_{1z}} v_{i+2,j} \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Trecerea de la potentialul magnetic vector  $\bar{A}$  la inducția magnetică  $\bar{B}$  ( $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ ) se poate aproxima în diferite finite prin expresii de forma (3.9) care capătă succesiv formele:

$$\bar{B}_{ij} = (\text{rot } \bar{A})_{ij} = \left[ -\frac{\partial A}{\partial z} \bar{u}_r + \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \bar{u}_z \right]_{ij} = (B_r \bar{u}_r + B_z \bar{u}_z)_{ij} \quad (3.43)$$

respectiv forma discretă:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{ij} = & -\frac{1}{\alpha_z (\alpha_z + 1) h_z} \cdot [A_{i+1,j} + (\alpha_z^2 - 1)A_{i,j} - \alpha_z^2 A_{i-1,j}] \bar{u}_r + \\ & + \left\{ \frac{1}{\alpha_r (\alpha_r + 1) h_r} \cdot [A_{i,j+1} + (\alpha_r^2 - 1)A_{i,j} - \alpha_r^2 A_{i,j-1}] + \frac{1}{r_{ij}} A_{i,j} \right\} \bar{u}_z \end{aligned} \quad (3.44)$$

În funcție de valorile locale  $B_{ij}$  ale inducției magnetice, la fiecare iterație de calcul, se reevaluează valoarea reluctivității în nodul respectiv  $v_{ij}$  la situația curentă. Convergența sirului de valori  $v_{ij}^{(n)}$ , la iterația (n), dă soluția numerică finală a procesului de calcul.

Modificarea geometriei domeniului (optimizarea formei geometrice) se face păstrând semnificația subdomeniilor din Fig.3.5 și a tipurilor de ecuații scrise (3.8 ~ 3.44), doar modificând valorile  $\alpha_z$ ,  $\alpha_r$ ,  $h_z$ ,  $h_r$  și prin aceasta coeficienții ecuațiilor algebrice de potențial discret: 3.20, 3.24, 3.28, 3.32, 3.36, 3.38 și 3.41.

### 3.2. Algoritm de rezolvare numerică prin MDF a problemei de optimizare

Pentru dispozitivul neliniar prezentat în Fig. 3.5, problema analizei numerice de câmp magnetic constă în a determina distribuția inducției magnetice de comandă  $\bar{B}_c$  prin metoda diferențelor finite, în funcție de potențialul său magnetic  $\bar{A}$ , calculat într-un număr mare de noduri ale rețelei de discretizare. Programul principal de calcul scris în limbaj Basic-plus 2 (dar și în varianta C++) cu subrutine în FORTRAN are structura logică prezentată în figura 3.12.

#### 3.21. Descrierea programului de analiză numerică a câmpului magnetic

Structura logică din Fig. 3.12 prezintă organizarea tipică a unei analize numerice de câmp în medii neliniare.

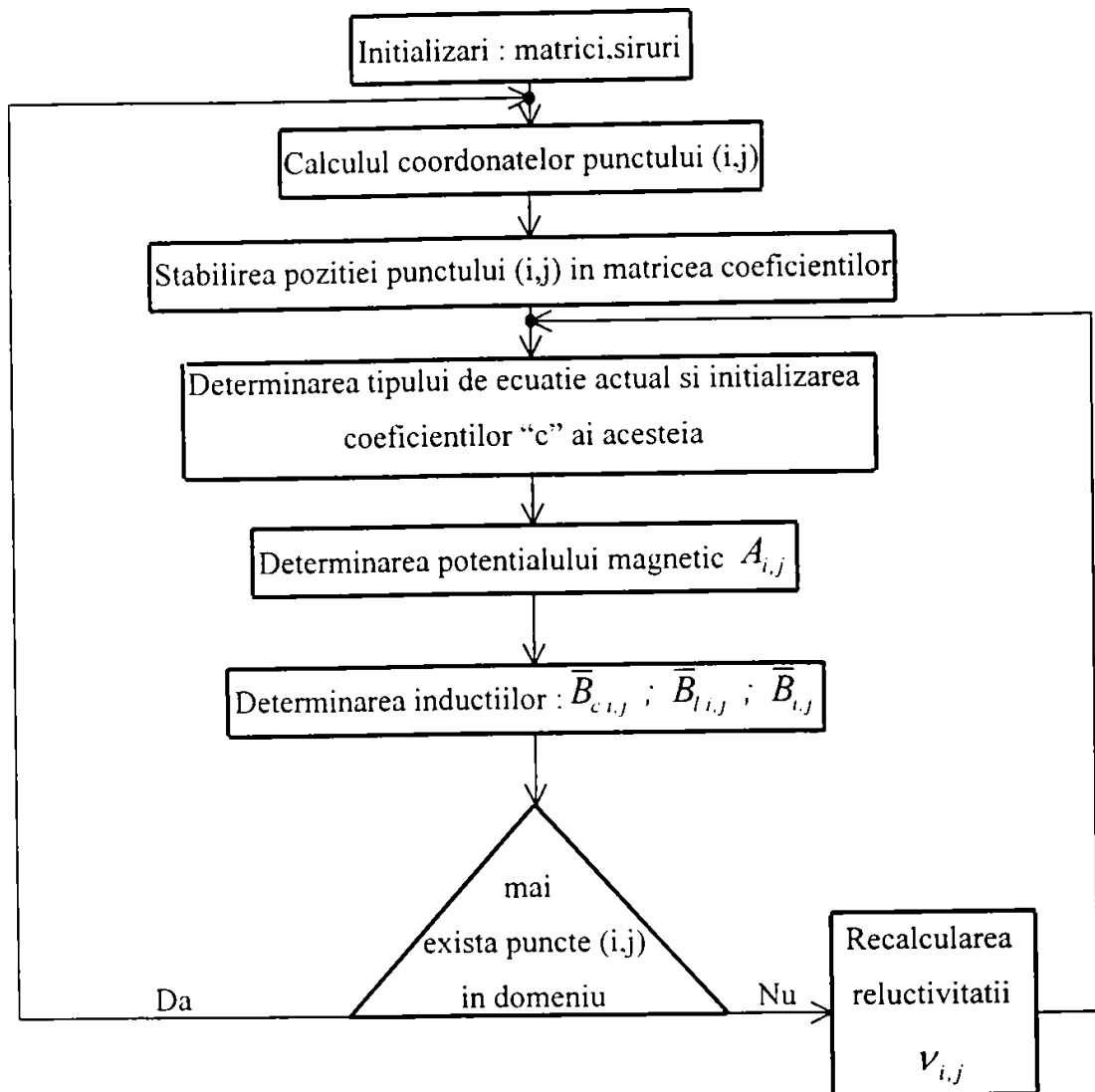


Fig. 3.12. Schema logica de analiza numerica prin MDF a campului magnetic

Variabilele din program cu care se opereaza sunt:

A = masiv in care se memoreaza valorile calculate ale potentialului  $A_{i,j}$ ;

B = masiv in care se memoreaza valorile inductiei magnetice  $B_{i,j}$ ;

C = masiv in care se memoreaza valorile suprarelaxate ale potentialului  $A_{i,j}$ ;

M = masiv in care se memoreaza valorile subrelaxate ale reluctivitatii  $V_{i,j}$ ;

NL = numarul de spire al infasurarii de lucru;

IL = intensitatea curentului de lucru;

DC = densitatea curentului de comanda

XI.XF.YI.YF = parametrii ce permit baleieri succesive ale matricii de lucru de la stanga la dreapta si invers;

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  = siruri de valori ce ajuta la stabilirea pozitiei punctului (i,j) in matrice;

QB = sir in care sunt memorate valorile caracteristicii de magnetizare;

HR =  $h_r$  ; AR =  $\alpha_r$  ; HZ =  $h_z$  ; AZ =  $\alpha_z$  ; H<sub>1</sub> =  $h_1$  ; A<sub>1</sub> =  $\alpha_1$  ; HR1 =  $h_{r1}$ ;

K1 = parametru care indica existenta densitatii de curent  $\bar{J}_c$  in punctul dat ;

K2 = parametru care indica daca  $v \neq v_0$  in punctul curent;

K3 = parametru care indica daca exista camp de lucru in punctul dat ;

$V_1, V_2, V_3, \dots$  = expresii care apar in mai multe ecuatii in același timp și care se calculează o singură dată;

$P_1$  = componenta după  $\bar{u}_r$  a câmpului de comandă ;

$P_2$  = componenta după  $\bar{u}_z$  a câmpului de comandă ;

CAMP2.DAT, CAMP3.DAT, ... = fișiere virtuale în care se găsesc matricile A, B, ...

Pentru a se evita calculele inutile s-a prevăzut recalcularea unor subexpresii care apar în mai multe ecuații o singură dată , organizarea masivelor virtuale în așa fel încât să se reducă la minimum transferurile între memorie și sistemul operativ.

Programul utilizat este prezentat în detaliu în Anexa IV.

### Descrierea programului de analiza și sinteza numerică prin MDF

Programul este conceput modular, având o structură ierarhizată pe diverse nivele. Acest lucru a fost impus de varietatea mare a datelor ce trebuie inițializate sau reinițializate pe parcursul rularii programului, precum și datorită numărului mare de tipuri de ecuații care trebuie rezolvate. Funcțiile fiecărei părți din programul prezentat în Anexa IV rezultă din comentariile textului sursă.

În ceea ce privește realizarea concretă a programului se pot remarca două aspecte mai importante :

- ◆ probleme privind *elaborarea practică a algoritmului*;
- ◆ probleme privind *optimizarea timpului de rulare* .
- Din motive de timp – o baleiere cu sistemul neîncărcat durează 1'20", iar în caz contrar până la (3 – 4)' – s-a prevăzut posibilitatea de a întrerupe execuția programului la

sfarsitul fiecarei baleieri. La reluarea executiei datele nu se initializeaza ci se folosesc fisierele remanente.

- Pentru a putea urmari evolutia datelor dupa un numar oarecare de baleieri ale matricelor din program, s-a prevazut posibilitatea de a le *vizualiza* sau *lista*, posibilitate evident optionala. Aceasta facilitate este legata direct de a se putea vedea in ce mod evolueaza optimizarea geometriei domeniului.

- Pentru a facilita o convergenta rapida a valorilor calculate si pentru a impiedica acumularea erorilor de calcul, starea initiala a subdomeniului neliniar se considera ca are punctul de functionare plasat aproximativ in zona medie a caracteristicii neliniare  $v(B)$ , aproximata pe portiuni. In acelasi scop se foloseste si procedeul de subrelaxare (linia 6820 din program). Alegerea coeficientului de subrelaxare s-a facut in functie de viteza de convergenta a datelor in cazul unor rulari de testare. Cu cat punctul de functionare pe caracteristica  $v(B)$  este estimat mai aproape de saturatie se va lua un coeficient ( $\omega$ ) de subrelaxare mai aproape de 0.1 (in cazul nostru), iar pentru functionari sub saturatie se poate lucra cu un coeficient de 0.3 – 0.6.

- In scopul de a accelera difuzia valorilor calculate, diferite de 0, in matricea reluctivitatii, baleierile se fac alternativ in sensuri opuse dupa directia radiala (Or); lucru asigurat de manipularea in liniile 6876 – 6890 ale valorilor variabilelor  $J1$ ,  $JF$ ,  $SJ$ .

- O problema mai laborioasa in evaluarea programului este identificarea exacta a caracteristicilor mediului in care se afla punctul curent supus prelucrarii. Aceasta influenteaza atat prin caracteristicile geometrice si de material cat si prin tipul ecuatiei ce trebuie utilizata in punctul respectiv. Deoarece folosirea tabelor de decizie ar fi fost putin eficienta prin necesitatea utilizarii si initializarii unor tablouri multidimensionale, s-a optat pentru folosirea unor siruri de indici (notati cu  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ ). Esenta metodei consta in identificarea rapida, prin intermediul unui ciclu FOR conditionat (de exemplu in liniile 600 – 610) care surprinde intervalul in care se incadreaza valoarea indicelui studiat. Ca rezultat al acestui ciclu FOR se obtine un numar care se foloseste intr-o instructiune de tip ON GOTO (exemplu linia 620).

Succesiunea cautarii este : identificarea pozitiei pe axa radiala (Or), urmata de indentificarea pozitiei pe axa verticala (Oz).

Prin folosirea acestei metode s-a realizat o crestere a lizibilitatii programului si totodata o compactare a lui, datorita evitarii a foarte multe teste imbricate.

- Tot pentru a reduce timpul de executie a programului s-a evitat sistematic recalcularea subexpresiilor care intervin in mai multe ecuatii. Aceasta tehnica poate fi urmarita de exemplu in liniile 5400 – 5610

- Volumul mare de date manipulate face imposibila mentinerea lor simultana in memorie, deoarece s-ar depasi dimensiunea maxima a partitiei permisa de sistemul de operare sub care s-a executat programul. Problema a fost rezolvata prin folosirea masivelor virtuale, dar tratate de program ca orice masiv obisnuit. La prima utilizare a masivelor virtuale se da o valoare oarecare ultimului element al masivului; aceasta asigura rezervarea dintr-o data a intregului spatiu necesar.

### 3.2.2. Optimizarea geometriei domeniului de camp

Solutionarea unei probleme inverse de camp electromagnetic (ca problema de sinteza a campului) conform [M10,T9,G7] poate fi subdivizata in doua subprobleme:

-- *probleme de identificare* , care constau in a determina valoarea surselor campului (care exista intr-un loc bine precizat din domeniu) care sa asigure un anumit efect ; de exemplu, densitatea de curent  $\bar{J}$  care asigura o inductie magnetica  $\bar{B}$  cu o anumita distributie  $\bar{B}(\bar{r})$ .

-- *probleme de sinteza*, care constau in a determina geometria si valoarea surselor (forma bobinelor si densitatea  $\bar{J}$  ) capabile sa produca un efect dat (de exemplu o lege de repartitie a inductiei magnetice  $\bar{B}$  in tot domeniul sau numai pe un subdomeniu). O astfel de problema, in general, nu are o solutie unica [M10, B8]; solutiile depind mult de metoda de rezolvare adoptata (problema "incorect pusa" dupa definitia lui Hadamard). Ca metode specifice de sinteza sunt cunoscute : metode de regularizare Tihonov ; metoda descompunerii dupa valorile proprii, etc. Solutia aproximativa a problemei, daca aceasta exista, poate sa nu fie optima.

*Sinteza prin optimizare* a unei probleme inverse de camp electromagnetic se bazeaza pe un algoritm de calcul numeric care contine doua etape:

- *analiza numerica* (in cazul nostru bazata pe MDF ) destinata ca in conditii de unicitate date sa evalueze performanta sistemului de optimizat (in cazul nostru distributia discreta a functiilor  $\bar{A}(\bar{r})$ , respectiv  $\bar{B}(\bar{r})$ .)

- *minimizarea functiei obiectiv*, pentru functii restrictii bine precizate, etapa destinata a cauta solutia optima in domeniul de definitie a parametrilor de optimizare (in cazul nostru, parametri geometrici).

Algoritmul de rezolvare a problemelor de *sinteza prin optimizare* presupune proceduri iterative, in care se rezolva mai multe probleme de analiza numerica a campului si la sfarsitul fiecarei iteratii sunt comparate performantele obtinute cu cele impuse ( prin functia obiectiv), facandu-se corectiile necesare pentru ca solutia sa avanseze spre cea dorita. Privit ca un proces in bucla, algoritmul de optimizare poate fi schematizat ca in Fig. 3.13

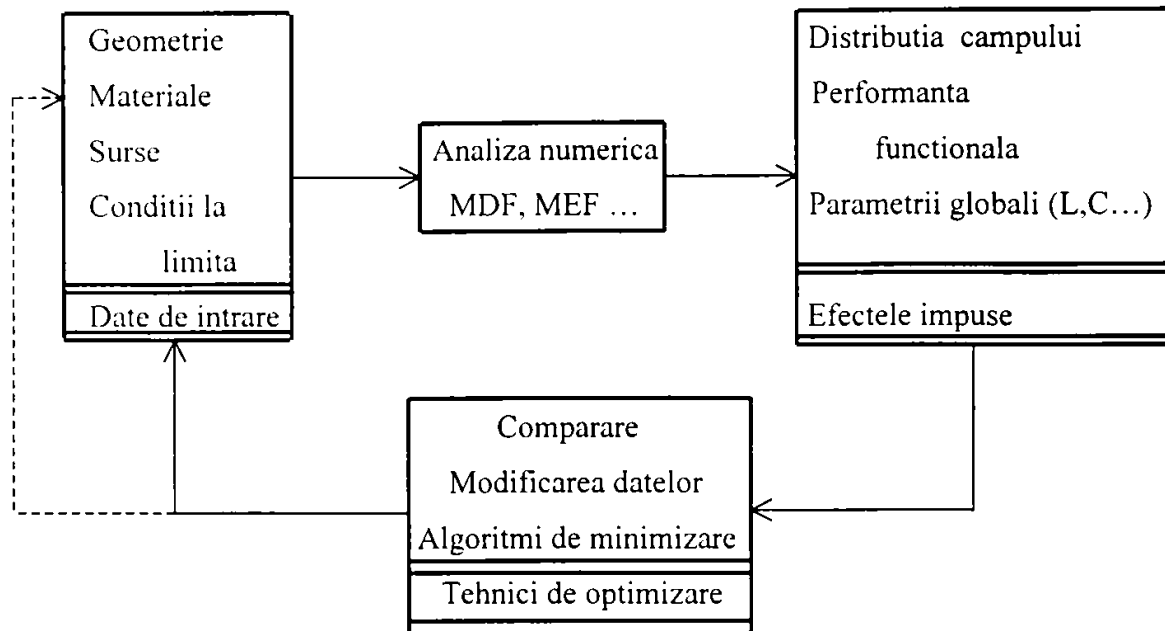


Fig. 3.13 Configuratia unui algoritmul de sinteza prin optimizare

Blocul de analiza numerica prin MDF ca parte componenta a procesului de optimizare este cel prezentat in Fig. 3.12.

Discretizarea cu pasi variabili a subdomeniilor de camp permite modificarea elementelor  $\alpha_r$ ,  $\alpha_z$ ,  $h_r$  si  $h_z$  fara a afecta tipurile de ecuatii si in consecinta subprogramul de analiza numerica asociat problemei de optimizare . Fara aceasta proprietate a programului (care a justificat, de altfel, alegerea metodei diferentelor finite ca suport de analiza numerica) la sfarsitul fiecarei iteratii era necesara o noua discretizare, definirea proprietatilor geometrice, de material, surse si tipuri de ecuatii care formeaza matricea globala.

Functia obiectiv care trebuie minimizata este de forma :

$$F(r_{57}, r_{15}) = \sum_{i=1}^n [B_1(r_{j,0}) - B_2(r_{j,0})]^2 \quad (3.45)$$

unde:

$B_1(r_{j,0})$  este inductia magnetica rezultanta in punctele:



$$z = 0, (i = 0) \text{ si } r_j \in (r_{37}, r_{71})$$

$B_2(r_{j,0})$  este inductia magnetica rezultanta in punctele

$$z = 0, (i = 0) \text{ si } r_j \in (r_{12}, r_{23})$$

Restrictiile asociate procesului de optimizare dat de (3.45) se pot prezenta sub forma :

- toti parametri  $\geq 0$
- $B_{max} \leq 0,55 T$
- $J_{max} \leq 0,5 \frac{A}{mm^2}$  (3.46)
- $\Delta r = r_{12} - r_{71} \in (4,75 \approx 5,25) mm$

Organigrama programului de sinteza prin optimizare este prezentata in figura 3.14 .

Interfata realizeaza cuplarea algoritmului numeric de optimizare cu programul numeric de analiza a campului.

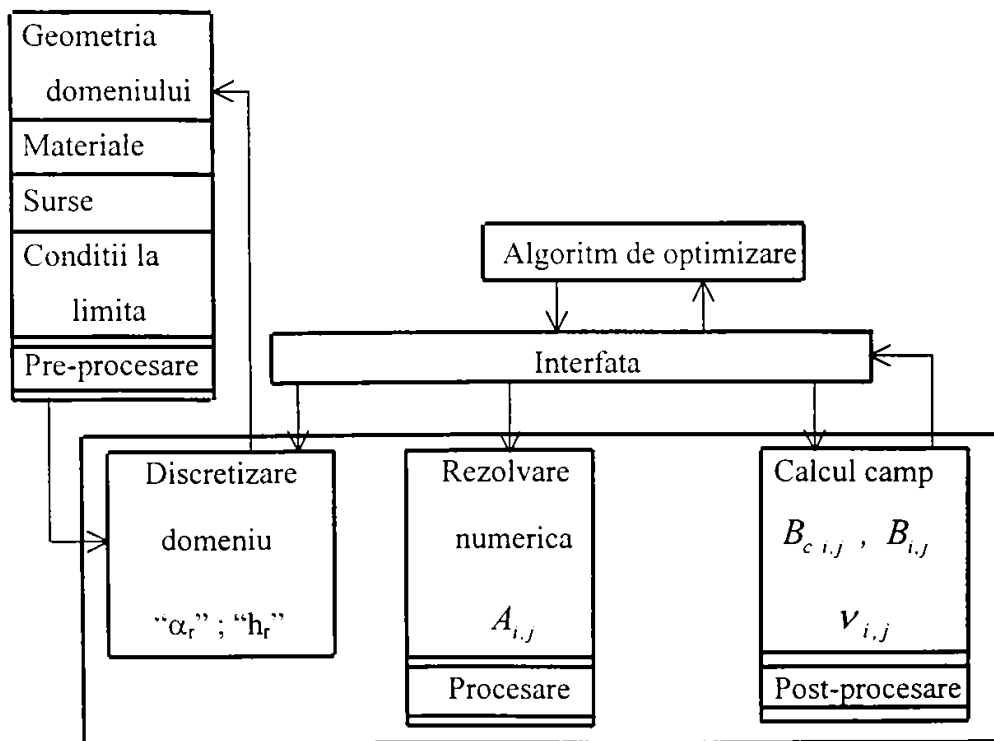


Fig. 3.14. Organigrama pentru sinteza geometriei care optimizeaza repartitia dorita a campului  $\bar{B}(\bar{r})$

Variabilele geometriei care realizeaza optimizarea pot fi dimensiuni, forma si pozitie relativa si la fiecare iteratie prin modificarea geometriei intreg blocul de pre-procesare se

reinitializeza. In cazul studiat functia obiectiv urmareste saturatia magnetica uniforma a miezului magnetic de-alungul axei Or.

Minimizarea functiei obiectiv s-a realizat prin metode deterministe (*metoda gradientului*) care presupune ca exista derivata functiei obiectiv si gradientul acesteia [B8, F2, P8, V2] cu directia de variatie (evolutie) cunoscuta – axa Or – deci avem de a face cu o metoda de ordinul I.

In figura 3.15 se prezinta rezultatele procesului de optimizare obtinut combinand o analiza numerica prin diferente finite cu o minimizare a functiei obiectiv prin metoda gradientului.

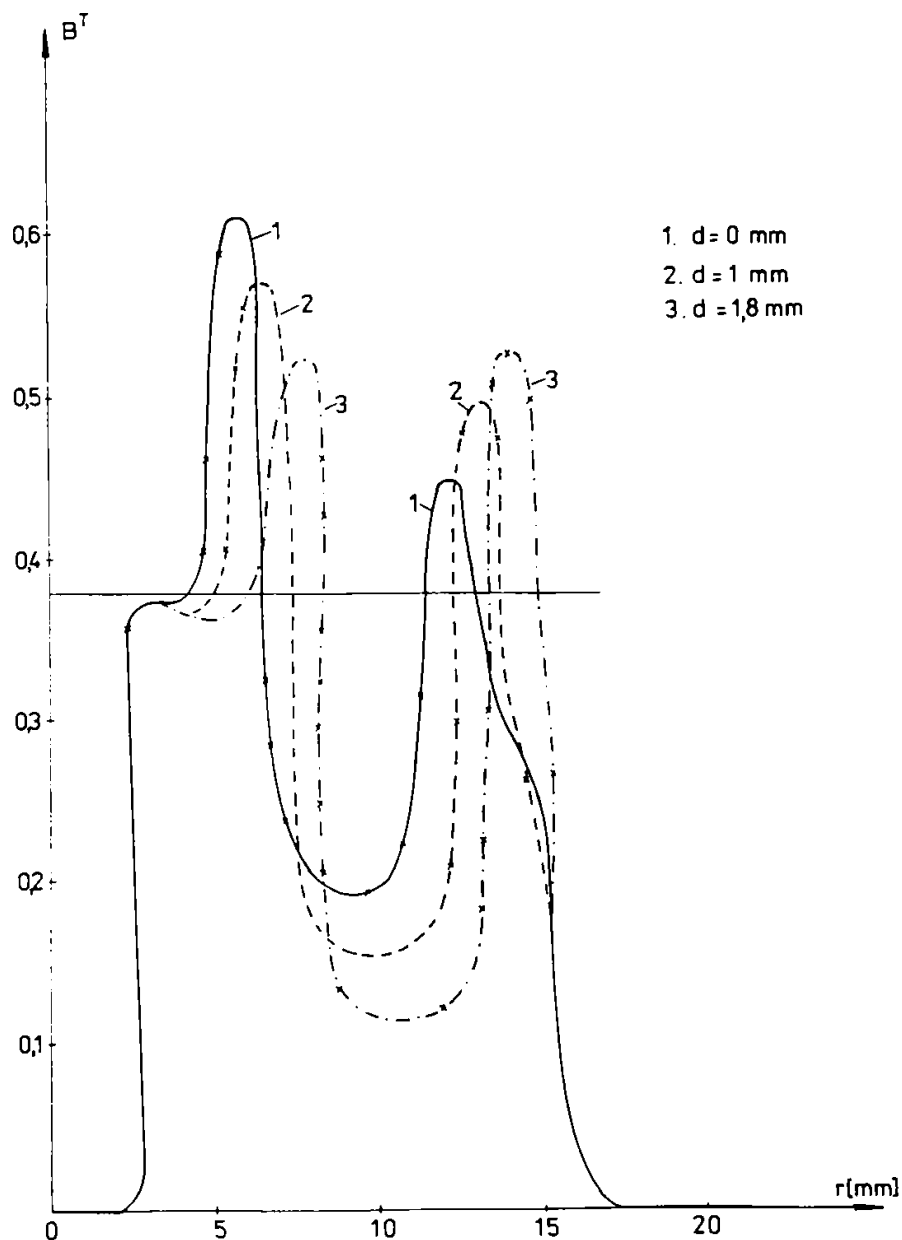
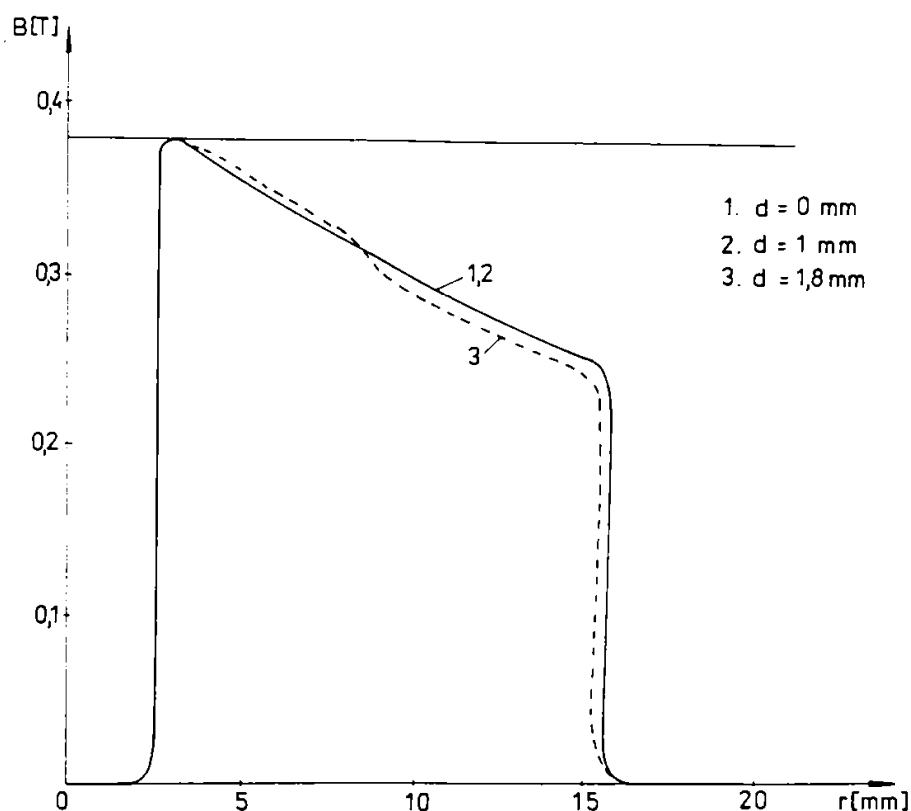


Fig.3.15. Repartitia campului  $B(0, r)$  de-alungul axei Or pentru diferite valori ale excentricitatii  $d$

Pentru simplificare s-a notat pe figura un singur parametru geometric de optimizare “d” care reprezinta excentricitatea asezarii cavitatii in care este dispusa sursa campului ( $\bar{J}$ ); pentru  $d = 0$  este configuratia initiala a domeniului iar pentru  $d = 1,8$  mm este configuratia optima obtinuta.

Se observa in Fig. 3.15 ca pentru o geometrie a miezului corespunzatoare unei excentricitati  $d = 1,8$  mm se obtine o repartitie aproximativ uniforma a inducției magnetice rezultante

$B = \sqrt{B_c^2 + B_l^2}$  in cele doua zone de pe axa Or.



**Fig. 3.16.** Repartitia campului  $B(z,r)$  pentru  $z = 8$  mm, la diferite valori ale excentricitatii

In sectiunea mediana a miezului, pentru  $z = 8$  mm si  $r \in (r_1, r_4)$ , repartitia campului  $\bar{B}(z,r)$  (si a nivelului de saturatie a acestei zone) nu este afectata de procesul de optimizare impus pentru repartitia lui  $B$  pe axa Or (Fig.3.16).

Rezultatele obtinute prin programul propriu de analiza numerica si de optimizare se vor compara cu rezultatele obtinute utilizand in acest scop programe comerciale (ANSYS, MagNet, OPERA-2d) prezentate in paragraful 3.3 si care au ca suport de analiza numerica metoda elementelor finite.

### 3.3. Optimizarea geometriei domeniului de camp magnetic in regim stationar

Evolutia rapida a tehnicii de calcul, a algoritmilor si softurilor de rezolvare numerica a problemelor de campuri electromagnetice si a algoritmilor specifici de optimizare au impus o dezvoltare puternica a domeniilor aferente din cercetarea electrotehnica.

Numarul mare de lucrari de prezentate spre publicare in ultimii ani in revistele de specialitate (IEEE Trans on Magnetics) si in Proceedings-urile Conferintelor de specialitate (COMPUMAG, ISEF, INTERMAG, ICEM, etc) precum si aparitia pe piata a unor programe comerciale care au ajutat la concretizarea rezultatelor cercetarii, cum ar fi:

ANSYS - dezvoltat de Swanson Analysis System, Inc.(SASI) din Huston, USA, conceput in 1970 pentru probleme termice si dezvoltat in 1995 (Versiunea 5.0) in varianta pentru PC sau Workstation.

MagNet – dezvoltat de Infolitica Corporation – Canada si Infolitica Ltd – UK. Ultima varianta a programului MagNet 5 din 1995 sub variantele Fast-Trak si Tool-Box.

OPERA – dezvoltat de Vector Fields Ltd, Oxford, UK in colaborare cu Vector Fields Inc., Aurora, USA in variantele OPERA – 2d, PC – OPERA, OPERA – 3d, precum si variantele TOSCA (pentru campuri statice, 3d) si ELECTRA pentru probleme de curenti turbionari ( eddy – current problems).

#### 3.3.1 Formularea variationala a problemei de camp

Formularea completa a unei probleme de camp electromagnetic, fie ca este vorba de analiza numerica sau de sinteza optimala, presupune a cunoaste:

- geometria domeniului de camp
- caracteristicile de material ale subdomeniilor ( $\epsilon$ ,  $\sigma$  sau  $\mu$ )
- sursele interne ale campului ( $\bar{J}$  sau  $\rho_v$ )
- conditiile la limita (care includ si sursele externe).

Sinteza optimala presupune a se cunoaste *a priori* legea de distributie a campului (impusa) si a se determina *a posteriori* cauzele care pot produce aceasta lege (surse interne, conditii la limita, parametri de material  $\nu(B)$ , geometria unuia sau a mai multor subdomenii, etc).

In functie de parametrul de optimizare care se modifica se poate vorbi de:

- modificare *parametrilor geometrici* ai domeniului de camp cand avem o *sinteza geometrica*

- modificare *valorii surselor*  $\bar{J}(\bar{r})$  si/sau variatia lor in timp  $\bar{J}(\bar{r}, t)$ , cand avem o *sinteza de surse*
- modificare *conditiilor la limita*, cand avem o *sinteza a conditiilor la limita*.

Sinteza optima presupune a cupla o metoda de optimizare cu o metoda iterativa de analiza numerica (uzual programele comerciale au la baza MEF). Combinatia celor doua metode ne da solutia optima dorita pentru conceperea unor dispozitive noi sau mai performante.

Cuplarea unei probleme de analiza numerica (MEF) cu o problema de optimizare (programare matematica) a facut-o prima data Schmit (1960) pentru structuri mecanice iar pentru campuri electromagnetice Marrocco si Pironneau (1978) pentru optimizarea distributiei de camp magnetic, precum si Sikora si Palka (1981) pentru campuri electrice.

Pana astazi foarte putine dispozitive electromagnetice au fost concepute cu tehnici de optimizare, majoritatea au rezultat printr-o conceptie clasica in care decizia revine experientei si intuitiei celui care le concepe.

Aprecierea performantelor unui program de optimizare se face prin:

- convergenta algoritmilor
- precizia solutiei
- timpul de calcul

Procesul de optimizare la care variabilele de stare sunt proprietati de material ( $\epsilon, \sigma$  sau  $\mu$ ) sau surse interne ( $\bar{J}, \rho_v$ ) deci care nu implica modificarea procesului de discretizare a domeniului la fiecare iteratie, este mai simplu de realizat decat atunci cand variabilele sunt parametri geometrici [Mi 13; S2; S15].

Modelul matematic asociat etapei de analiza numerica a campului magnetic in regim stationar poate fi unul diferential (MDF) sau unul integral (variational, MEF). Toate programele comerciale utilizeaza metode variationale corespondente cu MEF. Functionala energetica asociata regimului magnetic stationar este de forma (2.9) si pentru un domeniu spatial (3D) are forma:

$$F(A) = \int_{v_\Sigma} \left[ \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B} - \bar{J} \cdot \bar{A} + \frac{1}{2} \nu' \cdot (\text{div} \bar{A})^2 \right] dv + \int_{\Sigma} (\bar{H} \times \bar{A}) \cdot \bar{n}_\Sigma dS_\Sigma - \int_S \bar{J}_s \bar{A} \cdot dS \quad (3.46)$$

Integrala a doua din (3.46) reprezinta energia magnetica ce traverseaza frontiera  $\Sigma$  a domeniului de camp  $v_\Sigma$  si exista doar pentru conditii de frontiera neomogene ( $\bar{A}_{t_\Sigma} \neq 0; \bar{H}_{t_\Sigma} \neq 0$ ).

Pentru campuri plan-paralele integrala devine de forma:

$$\int_{\Sigma_N} f_N A_Z d\Sigma_n, \quad \text{cu } f_N = \bar{u}_z \cdot (\bar{n}_{\Sigma_N} \times \bar{H}). \quad (3.47)$$

Integrala a treia din (3.46) reprezinta energia magnetica ce traverseaza o discontinuitate  $S$  activa din domeniul  $v_s$  ( $\bar{J}_s = \bar{H}_{t_2} - \bar{H}_{t_1} \neq 0$ ).

In cazul campurilor magnetice stationare plan – meridiane, lucrând cu potentialul magnetic modificat  $U = r \cdot A_\theta(z, r)$ , functionala energetica este de tipul (2.21) sau pentru medii neliniare, izotrope si fara magnetizatie remanenta de forma (2.35).

### 3.3.2 Optimizarea geometriei utilizand programul MagNet si programul ANSYS

Formulara unei probleme tip de optimizare presupune:

- sa se minimizeze *functia obiectiv*  $F_0(x) \Big|_{x \in \mathbb{R}^n}$ , proces supus:
- *functiilor de constrangere* (restrictii)  $F_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}$

$$x_i \in (x_{i_{\min}}, x_{i_{\max}}).$$

Si unde:  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T$  este *vectorul variabilelor de stare*, necunoscutele problemei.

Intr-o problema de optim se cauta valoarea vectorului  $\mathbf{x}$  pentru care functia obiectiv  $F_0(x)$  admite un minim sau maxim.

Practic, functia obiectiv poate fi: o *distributie a campului magnetic* dupa o anumita lege (pe o axa sau intr-un subdomeniu), un *flux magnetic* maxim, un *parametru global* (energie, inductivitate, forte, pierderi) maxime (sau minime), dar si *parametri functionali* optimizati (timp de raspuns, deformarea unui semnal, etc).

Functiile de constrangere (restrictii) se impun variabilelor de proiectare care trebuie sa satisfaca anumite cerinte legate de: *limitari fizice* (campul sa nu depaseasca un prag de saturatie sau sa nu scada sub o valoare minima necesara), *limitari geometrice* (gabarit, anumite dimensiuni minime sau maxime), etc.

O solutie optimala a problemei (optimum global) este solutia care minimizeaza functia obiectiv  $F_0(x)$  si care respecta toate constrangerile impuse.

Functia obiectiv  $F_0(x)$  pote sa fie de o singura variabila sau de mai multe, liniara sau neliniara, continua sau discontinua, discreta, etc; la fel si functiile de constrangere  $F_i(x)$ .

Majoritatea problemelor de optim sunt formulate prin functii neliniare.

Metodele de cautare *deterministe* de tip HODOM (**H**igher **O**rder **D**eterministic **O**ptimization **M**ethods) numite si *metode de gradient*, cu o larga utilizare datorita vitezei mari de convergenta (mai ales atunci cand directia de cautare pentru fiecare variabila este cunoscuta). Pentru a testa punctul de *extrem global* se va relua procesul cu plecari din diferite stari initiale ale sistemului.

Valoarea parametrului la iteratia (k+1) se subrelaxeaza printr-un coeficient subunitar  $\alpha \in (0,1)$  cu valori aleatoare, in functie de valorile parametrului la iteratiile precedente:

$$d^{(k+1)} = d^k + \alpha^k \cdot (d^{(k)} - d^{(k-1)}) \quad (3.48)$$

Deasemnea, valoarea functiei obiectiv la iteratia (k+1) se subrelaxeaza fata de valorile precedente pentru a nu avea depasiri oscilante in jurul punctului de minim:

$$F^{(k+1)} = F^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot \Delta F^{(k)} \quad (3.49)$$

si algoritmul continua pana cand:  $F^{(k+1)} \leq F^{(k)}$ .

### Optimizarea pe baza programului MagNet, Version 5.0

Programul MagNet Version 5.0 [M4 ] are doua variante de aplicare: Fast-Track si Tool-Box, ambele in varianta 2D sau 3D. Schema bloc de organizare a programului de analiza numerica prin MEF asociat variantei mai noi Tool-Box este cea prezentata in figura 3.18.

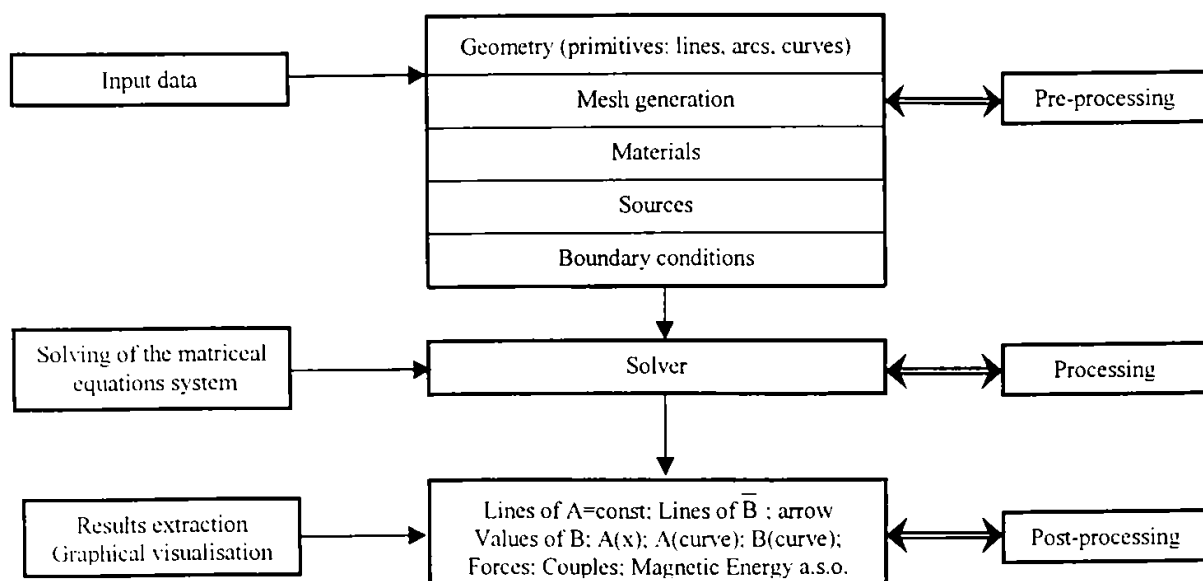


Fig. 3.18 Organizarea programului de calcul a campului magnetic prin MagNet.

### *Pre-processing*

- ◆ *draw 2d* - definirea geometriei domeniului de camp
  - *exte* -  $(x_{\min}, y_{\min}); (x_{\max}, y_{\max})$
  - *grid* - rectang, polar, liber.
  - *redr* - definirea liniilor, arcelor, etc.
- ◆ *mesh* - discretizarea domeniului
  - *geom "tor n"* - numele geometriei introduse
  - *subdiv* - subdivizarea fiecarei linii din geometrie pentru a realiza finetea discretizarii in zonele de interes.
  - *relabel* - fiecarei ferestre din domeniu i se atribuie o litera .
  - *make* - start pentru discretizarea in elementele finite.
  - *cons* - definirea conditiilor la limita (cu click sau keyboard).
- ◆ *materials* - definirea caracteristicilor de material pentru fiecare fereastră din domeniu
  - *buil* (sp 15) - definirea unui nou material (neexistent in memorie)
    - n - neliniar
    - i - izotrop
  - *tt* - introducerea tabelara a caracteristicii neliniare B(H).
  - *constr* - aproximarea (liniara, cubica, etc) a caracteristicii neliniare.

### *Processing*

- ◆ *prob 2d* - defineste parametrii problemei plane
  - *new* (tor n) - afiseaza numarul de noduri, elemente, conditii la limita.
  - *no* - regim non-transient
  - *no(yes)* - problema de :VECT, REAL, NONL, CART, MAGN, SOFT  
sau : SACALR, COMPLEX, LINE, AXIS, ELECT, HARD,
  - *no(yes)* - metoda de rezolvare: Newton+gradient conjugat (CG).
    - 0.01 % - convergenta adaptare
    - 0,1 % - tolerante pentru B
    - 2 - ordinul polinomului de interpolare
  - *para* - fixeaza parametrii de rezolutie (Newton - 30 iteratii, CG-60) corespunzator cu toleranta pentru Newton 1% si CG 0,01%.
  - *show* - solving (rezolvarea numerica a problemei).
  - *pm 2d -s* - solverul da solutia pentru o problema medie (m) in plan (2d) sub forma prescurtata (s) in maxim 5000 noduri.



### Post – processing

- ♦ *post 2d* - post-procesarea rezultatelor (lucreaza doar in SI cu A, T, m, sec, ...)
- get „tor n” - plaseaza valorile potentialului  $\bar{A}$  .
- disp equi 25 - traseaza 25 linii echipotentiale a lui A
- disp outl - traseaza conturul geometric
- disp elem - traseaza elementele finite
- disp nod - traseaza nodurile
- ents - evolueaza energia magnetica
- *stac field*
- get „tor n” b - plaseaza valorile lui  $\bar{B}$
- disp outl
- disp arro 25 - traseaza 25 linii a lui  $\bar{B}$  cu sageti
- root - obtine valoare  $B = |\bar{B}| = \sqrt{\bar{B} \cdot \bar{B}}$
- disp regi - ploteaza in cod de culori valorile lui  $|\bar{B}|$
- point - da valoarea lui  $|\bar{B}|$  intr-un punct indicat

In figura 3.19 se prezinta schema bloc a procesului de optimizare in care se ataseaza programului de analiza numerica MagNet, un program de optimizare a geometriei.

In figura 3.20 se prezinta schema bloc a unui proces de optimizare “ideal”, in care parametrii de optimizare pot fi de natura geometrica, materiale, surse si conditii la limita, simultan continuti in functia obiectiv.

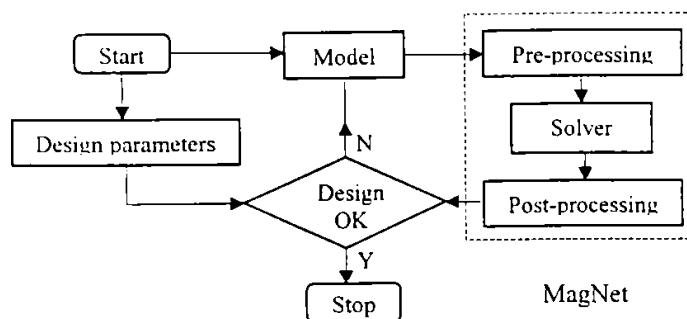


Fig.3.19 Organigrama procesului de optimizare a geometriei

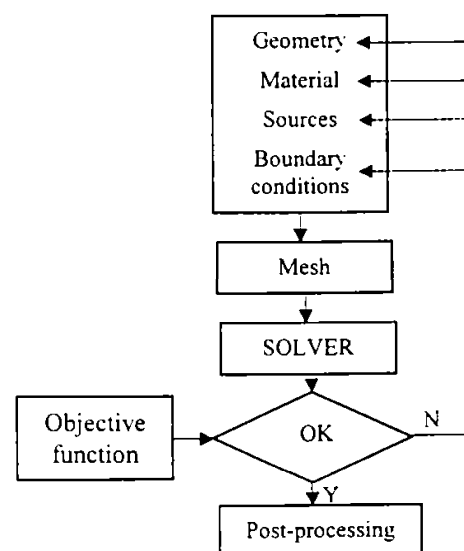


Fig 3.20 Organigrama procesului de optimizare in caz “ideal”

Pentru o aplicatie practica [Mi 13], se considera un domeniu  $D$  axial-simetric (Fig 3.21) limitat de curba  $\Gamma$  pentru care se cunosc:

- conditiile Dirichlet omogene ( $A=0$ )
- conditiile Neumann omogene ( $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ )

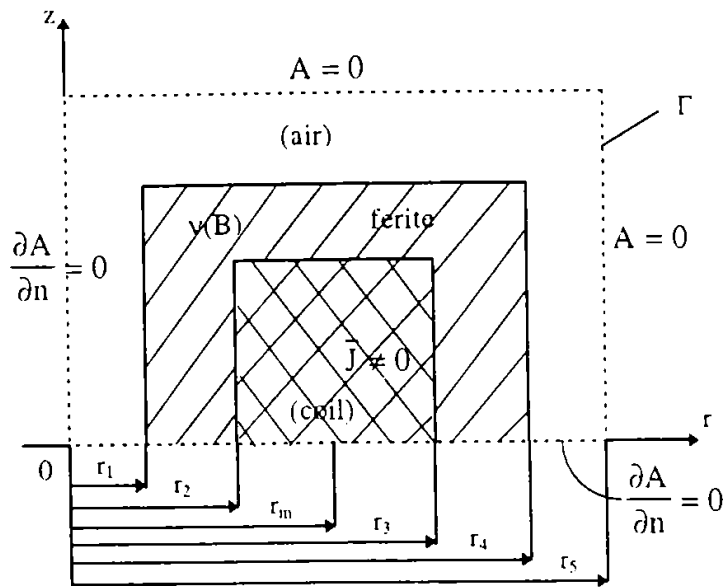


Fig 3.21 Problema de camp axial-simetrica

Pentru a obtine o saturatie uniforma a miezului de-a lungul axei Or se doreste ca functia  $B(0, r)$  sa aiba aceeasi valoare atat pentru  $r \in (r_1, r_2)$  cat si pentru  $r \in (r_3, r_4)$ . Aceasta duce la o magnetizare uniforma a miezului, deci la o distorsiune minima (din cauza saturatiei) pentru semnalul de curent absorbit de dispozitiv.

Functia obiectiv se poate scrie sub forma:

$$F(r_2, r_3) = \sum_{i=1}^n \left[ B(r, 0)_{r \in (r_1, r_2)} - B(r, 0)_{r \in (r_3, r_4)} \right]^2 \quad (3.50)$$

variabilele de optimizare fiind  $r_2$  si  $r_3$  care definesc geometria, respectiv plasarea zonei active (cu  $\vec{J} \neq 0$ ) in interiorul miezului.

Cele doua variabile pot fi inlocuite cu alte doua "deplasari" ale razelor ( $d_2, d_3$ ) fata de

valoare de referinta (initiala):

$$\begin{aligned} r_2 &= r_{20} + d_2 \\ r_3 &= r_{30} + d_3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

sau o singura deplasare "d" care defineste o excentricitate a sursei ca singur *parametru de optimizare* :

$$\begin{aligned} r_2 &= r_{20} + d \\ r_3 &= r_{30} + d \end{aligned} \quad (3.52)$$

Constrangerile impuse procesului de optimizare sunt cele prezentate in (3.53):

- toti parametri sa fie pozitivi
  - $\Delta r = (r_3 - r_2) \in (4,75 \approx 5,25) \text{ mm}$
  - $J_{\max} \leq 0,5 \text{ A/mm}^2$
  - $B_{\max} \leq 0,45 \text{ T}$
- (3.53)

In acest caz se urmareste minimizarea functiei (3.50) ce depinde doar de un parametru  $F(d)$ . Introducand in expresia (3.50) o alta variabila  $\Delta = \frac{r_m}{2} + d$ , rezultatele procesului de optimizare sunt prezentate in Tabela 1.3:

**Tabela 1.3**

No	Conditions	d	$\Delta$	B=uniform (ideal)	B $\approx$ uniform $\Phi = \text{const}$ (real)
1	Initial geometry	0	4.56	-	-
2	Modified geometry Linear medium	1.645	5.38	yes	-
3	Modified geometry	1.75	5.435	yes	-
4	Non-linear medium: $v(B)$	1.73	5.4	-	yes

Daca functiei obiectiv (3.50) si constrangerilor (3.53) li se ataseaza o restrictie suplimentara care sa asigure un flux magnetic constant prin miez (nediminuat in procesul de optimizare), care trebuie sa corespunda cazului numit "real", atunci pentru parametrul de optimizare "d" se obtine o valoare putin modificata (Tabela 1.3).

In particular, pentru cazul in care mediul ar fi liniar si se doreste un camp  $\bar{B}$  uniform pe cele doua sectiuni ale miezului toroidal, atunci fluxul magnetic  $\Phi = B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2$  implica  $S_1 = S_2$  si valoarea lui "d" care asigura optimul este  $d=1.645$ , valoare dedusa din considerente geometrice.

In figura 3.22 se prezinta rezultatul procesului de minimizare a functiei obiectiv (3.50):  $F(d)=F_1(\Delta)$  reprezentata in functie de valoarea parametrului geometric  $\Delta$ , obtinuta in zece pasi ai iteratiilor de optimizare. In figura 3.23 se prezinta un detaliu in jurul valorii de optim :  $\Delta = 5,4$ .

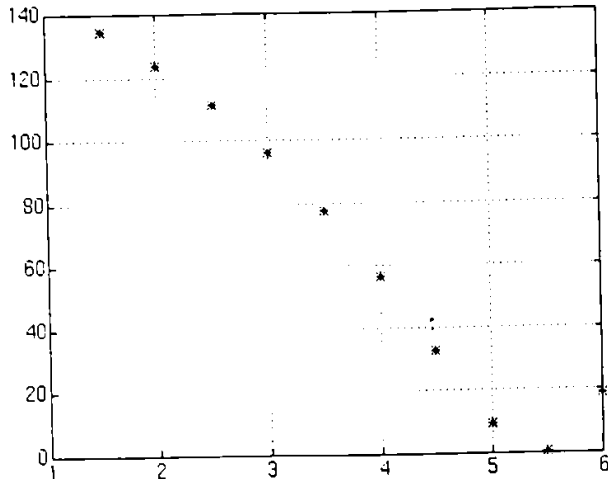


Fig. 3.22 Minimizarea functiei obiectiv in zece iteratii

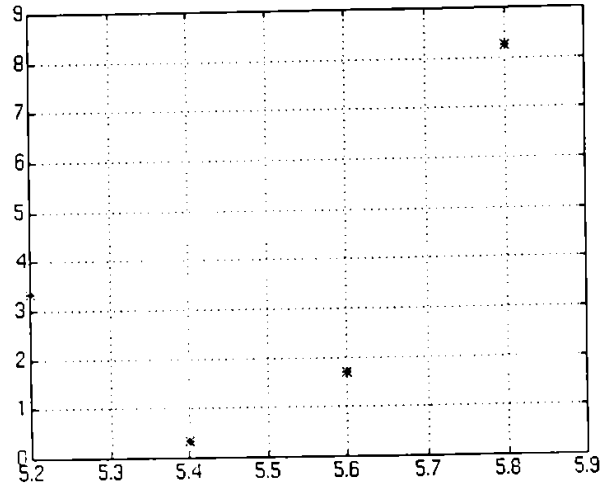


Fig 3.23 Detaliu al punctului de optim

Repartitia functiei de  $B(r)$  de-alungul axei Or in situatia initiala ( $d=0$ ) este prezentata in figura 3.24 – a alaturi de repartitia potentialului magnetic  $A(r)$  pe aceasi axa (Fig 3.24 – b), respectiv a functiei  $\bar{B}(r, z)$  in tot domeniul de camp (Fig 3.24 – c); se pune astfel in evidenta saturatia neuniforma a celor doua zone din miez .

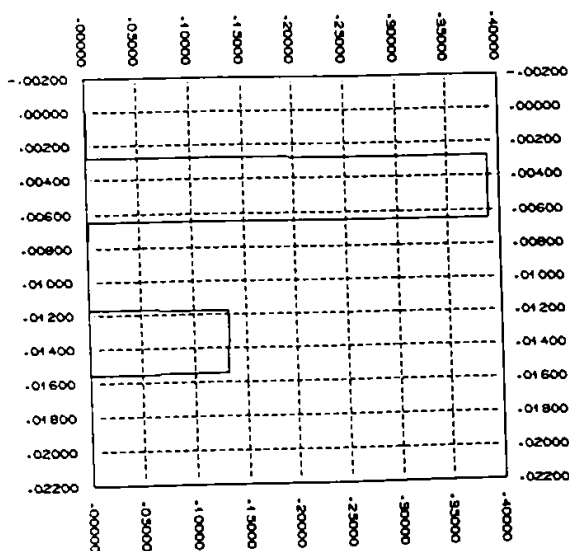


Fig 3.24-a – Repartitia functiei B(r)

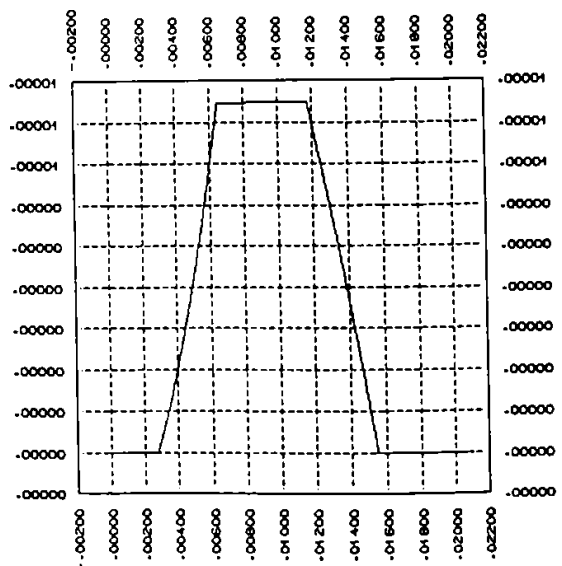
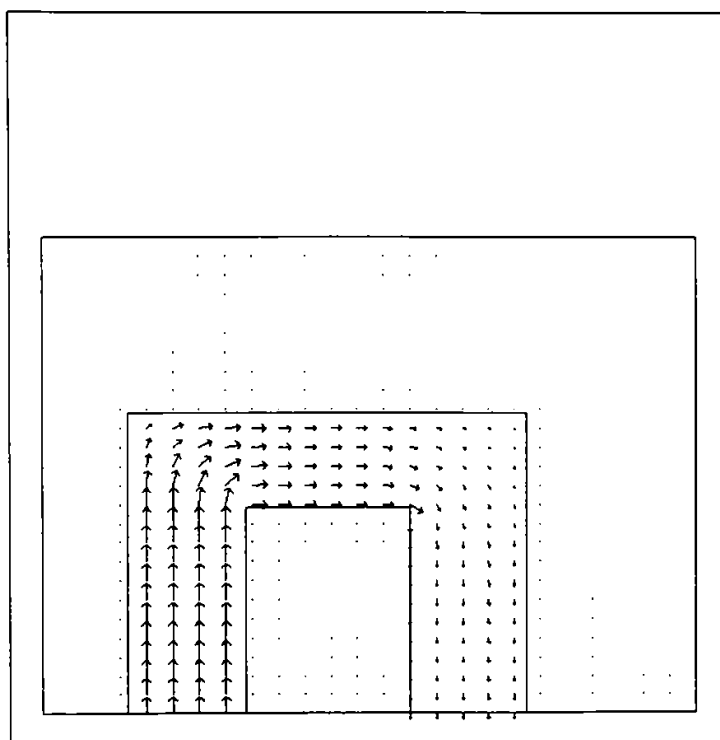
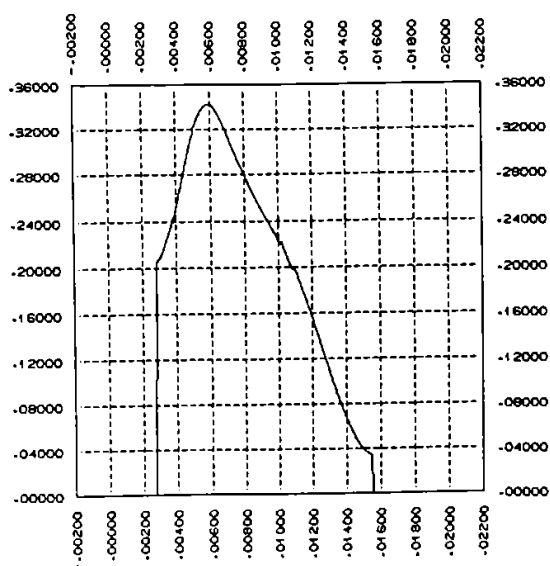


Fig 3.24-b – Repartitia functiei A(r)

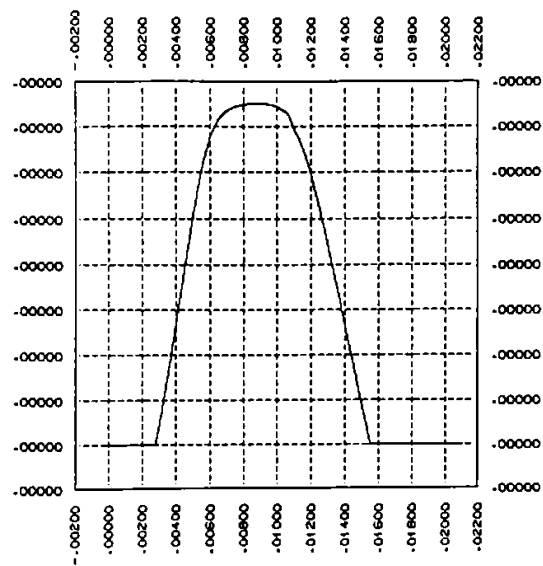


**Fig 3.24-c**  
Reprezentarea  
câmpului  
 $\bar{B}(r, z)$

În figura 3.25 – a și b se prezintă, tot pentru  $d=0$ , repartițiile funcțiilor  $B(z, r)$ ,  $A(z, r)$  dar nu de-a lungul axei  $Oz$  ci prin porțiunea medie a miezului de sus (pentru  $z=8$  mm).



**Fig 3.25-a** Funcția  $B(8, r)$



**Fig 3.25-b** Funcția  $A(8, r)$

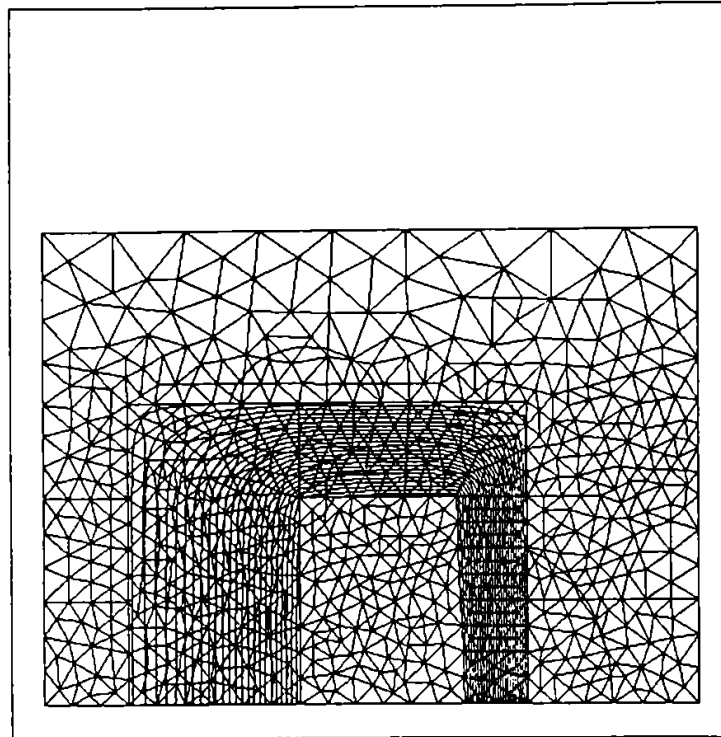


Fig 3.26-a Liniile lui  $\bar{B}(r, z)$  pentru optim "ideal"

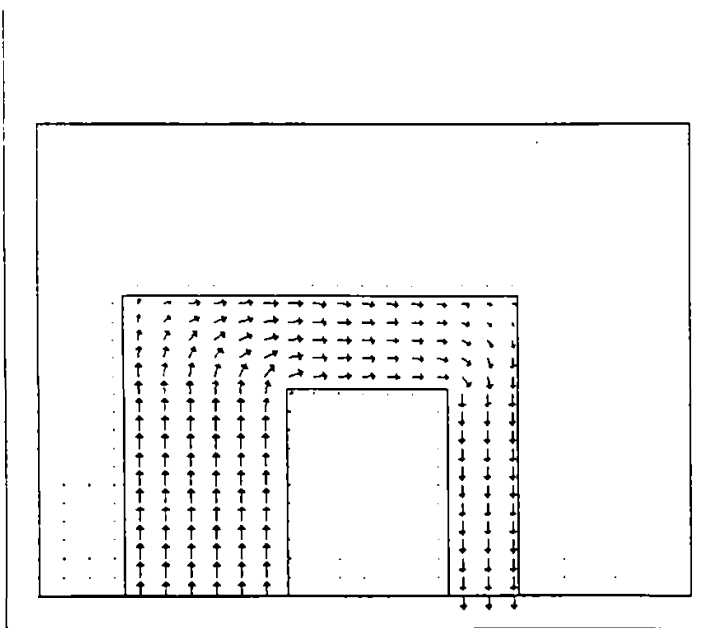


Fig 3.26-b Liniile lui  $\bar{B}(r, z)$  pentru optim "ideal"

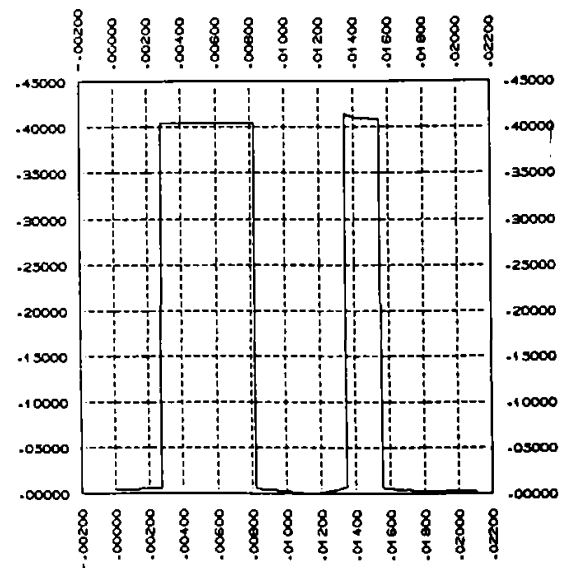


Fig 3.26-c Functia  $B(0, r)$  pentru optim "ideal"

In cazul de optimizare “ideal” din Tabele 1.3, se prezinta distributia liniilor campului  $\bar{B}(r, z)$  in figura 3.26- a si b si a functiei  $B(o, r)$  de-alungul axei Or in figura 3.26 -c. In acest caz se asigura pe cele doua zone de interes  $r \in (r_1, r_2)$  si  $r \in (r_3, r_4)$  aproape aceeasi valoare a inductiei magnetice B, respectiv functia obiectiv pentru cazul “ideal” devine la optim :  $F_{\min}(d) \approx 0$ .

Pentru situatia de optim “ideal” in Fig 3.27 – a, b, c se reprezinta in “cod de culori” repartitia in domeniu a componentelor campului  $B_x \sim B_r$  ;  $B_y \sim B_z$  si a campului total  $B = \sqrt{B_z^2 + B_r^2}$ .

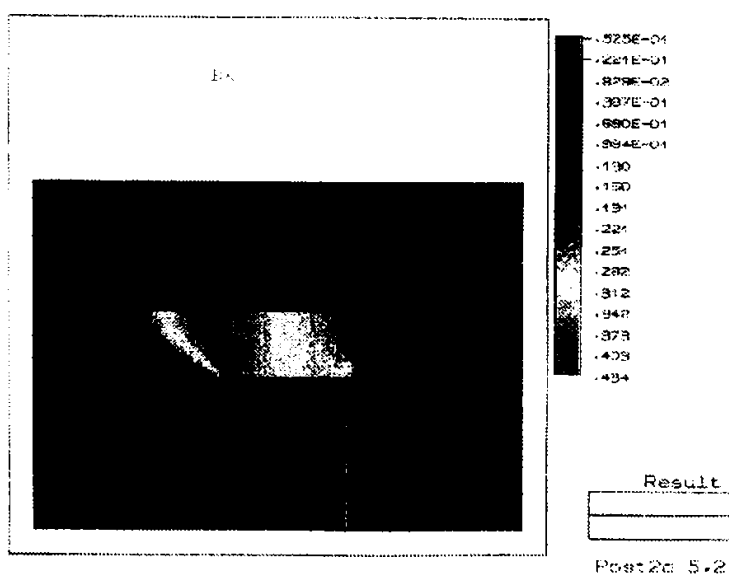


Fig 3.27-a Functia  $B_r(r) = B_x$  in cod culori

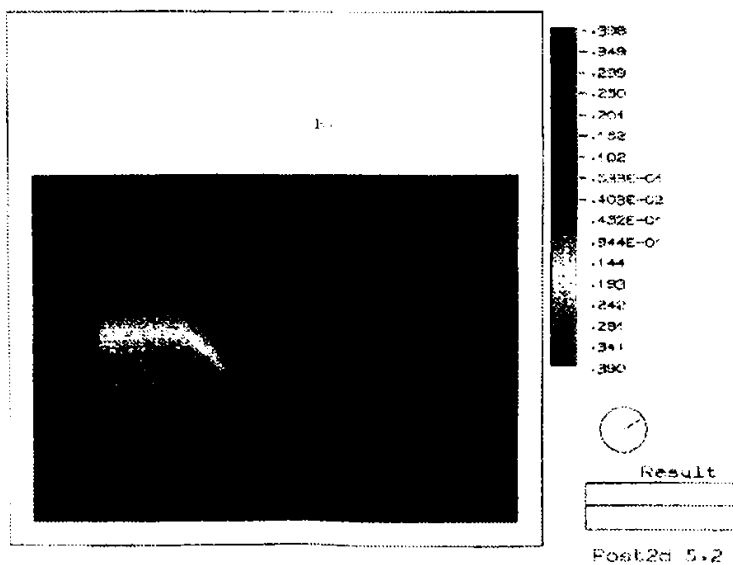


Fig 3.27-b Functia  $B_z(r) = B_y$  in cod culori

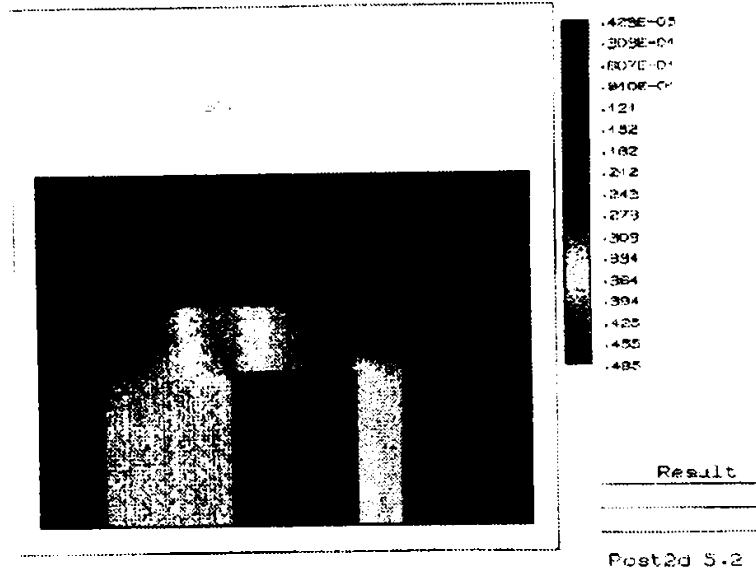


Fig 3.27 c Functia B(z,r) in cod culori

In cazul "real" care asigura mentinerea fluxului magnetic la aceeasi valoare in procesul de optimizare si care corespunde unei valori a excentricitatii  $d=1.73$  mm, repartitia functiilor  $B(r)$ ,  $A(r)$  si a liniilor de camp  $\bar{B}(z, r)$  sunt redade in figura 3.28- a, b si c.

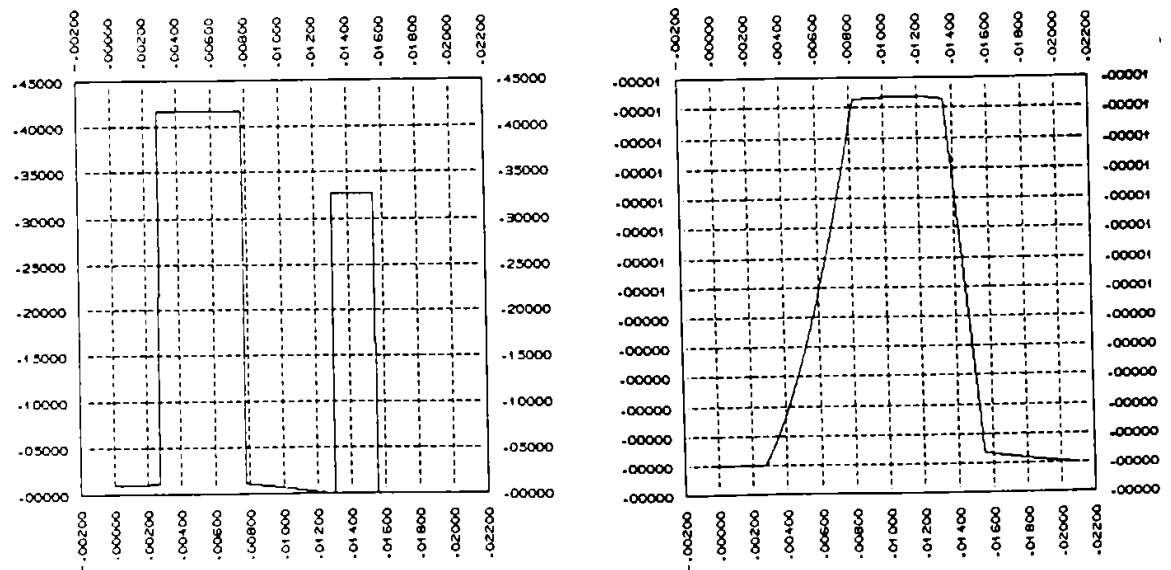


Fig 3.28-a Functia B (r) pentru cazul "real". Fig 3.28-b Functia A (r) pentru cazul "real"



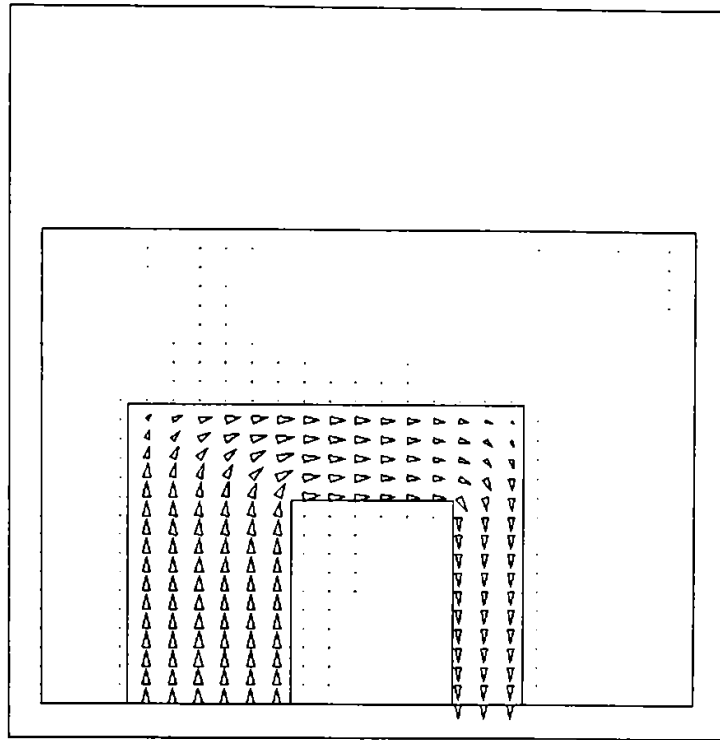


Fig 3.28-c Functia  $\bar{B}(z, r)$  pentru cazul "real"

### Optimizarea pe baza programului ANSYS - 5.0 A

Programul comercial ANSYS Version 5.0 A (1995), [A8], permite studiul campurilor electrice si magnetice avand asociata ca metoda numerica de rezolvare MEF.

S-a lucrat cu o discretizare a domeniului in 478 elemente finite (triunghiulare si dreptunghiulare), 873 noduri, cu o aproximare la nivel de element printr-un polinom de gradul doi, program prezentat in Anexa II. Programul este structurat pe modulele :

- **Pre-procesare:** definirea geometriei, parametri de material ( $\mu, \sigma$ ), fixarea conditiilor la limita, discretizarea domeniului.
- **Procesarea :** rezolvarea sistemului de ecuatii algebrice asociat prin metoda Newton-Raphson option ( NROPT ) si Jacobi Conjugate Gradient ( JCG ); eroarea impusa  $1.0 \cdot 10^{-6}$  iar norma de convergenta  $0,39 \cdot 10^{-2}$  .
- **Post-procesarea :** permite a se obtine rezultatele *primare*:  $(A)_{nod}$  , a celor *derivate*:  $(B_x, B_y, B_{sum})_{nod}$ ;  $(H_x, H_y, H_{sum})_{nod}$ . Deasemenea : plotarea liniilor de camp (numar de linii, cod de culori. etc), plotarea vectorilor  $\bar{B}(r)$ , inductivitati, energii, forte, etc.

Utilizand aceeasi functie obiectiv (3.50) si aceleasi restrictii (3.53) prin atasarea programului matematic de optimizare la programul de analiza numerica prin MEF de tip ANSYS, se obtin practic aceleasi rezultate. Minimul functiei obiectiv la optim se realizeaza pentru o valoare a parametrului de optimizare ( excentricitatea )  $d=1,78$  mm.

Repartitia de-alungul axei Or a functiilor  $B(0, r)$  si  $A(0, r)$  este prezentata in figura 3.29-a si b. In figura 3.30 este prezentata discretizarea domeniului de camp prin elemente finite mixte (triunghiulare, patratere) iar in figura 3.31 este prezentata distributia pe axa Or a functiilor:

$$B_r = B_\nu = 0, B_z = B_y, \text{ si } B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = |B_y|$$

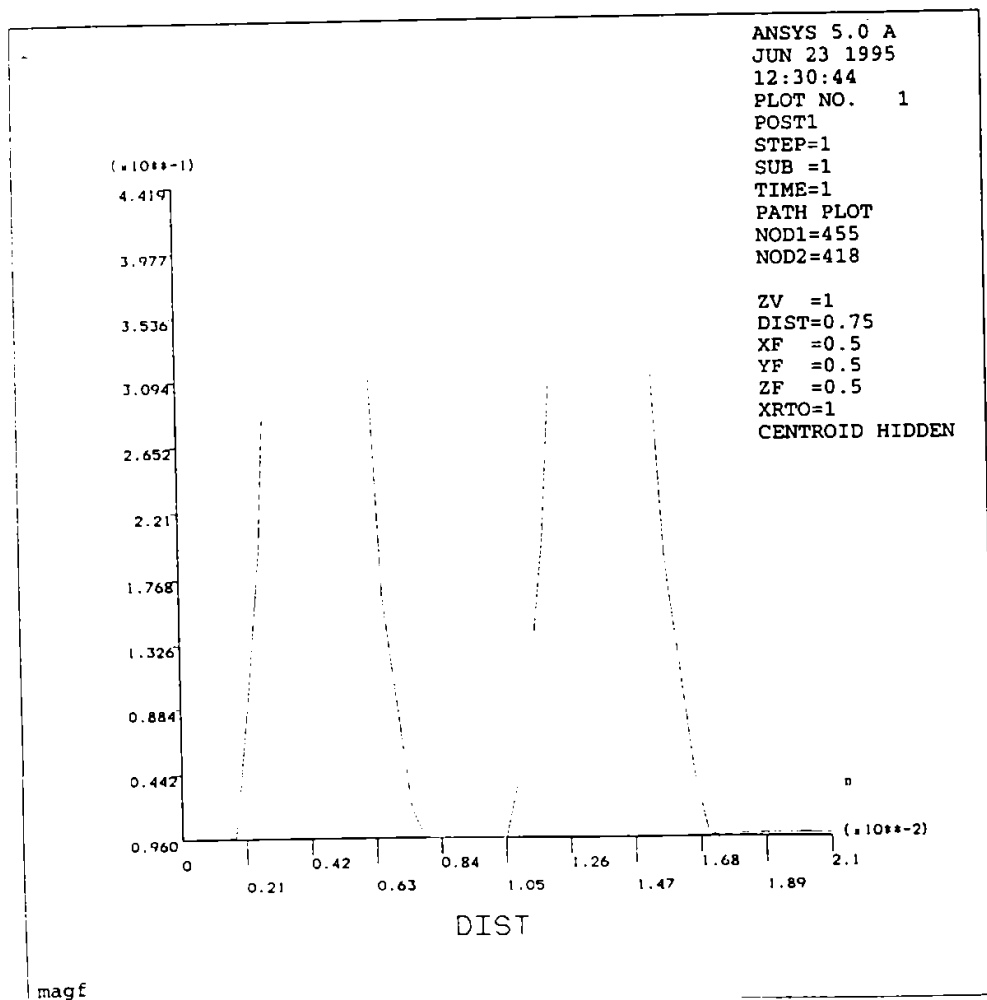


Fig.3.29-a Repartitia functiei  $B(0, r)$

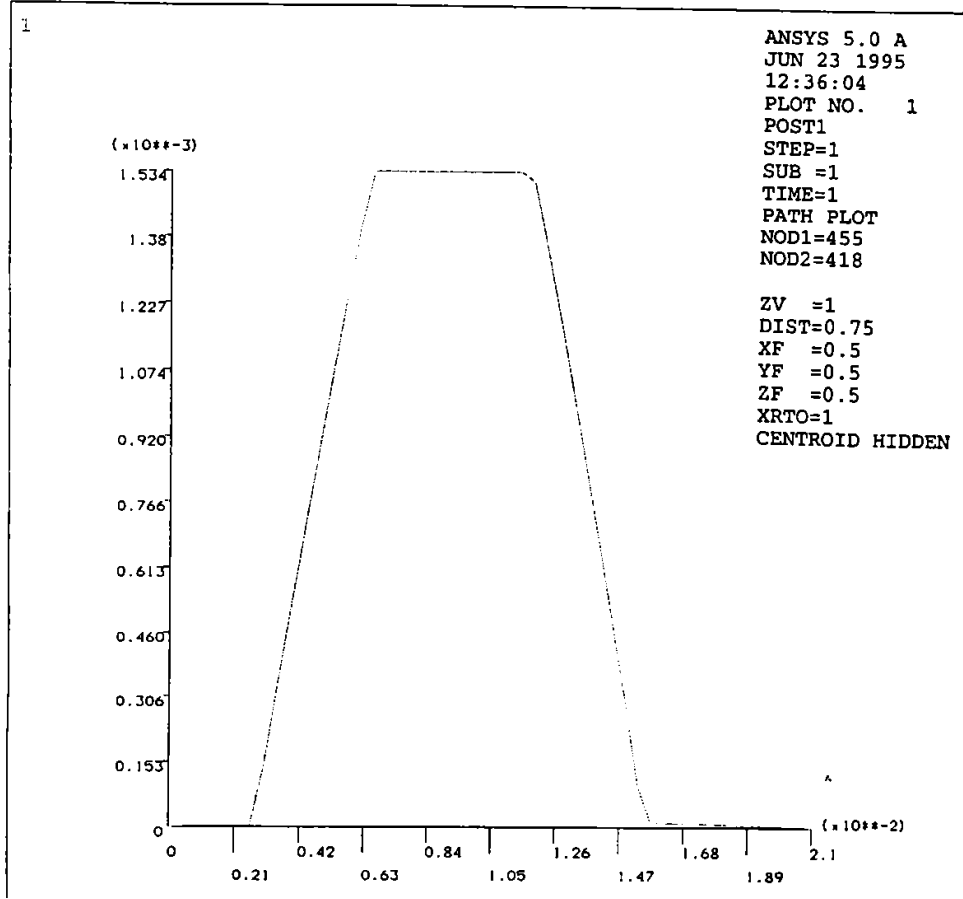


Fig. 3.29-b Functia A (0, r)

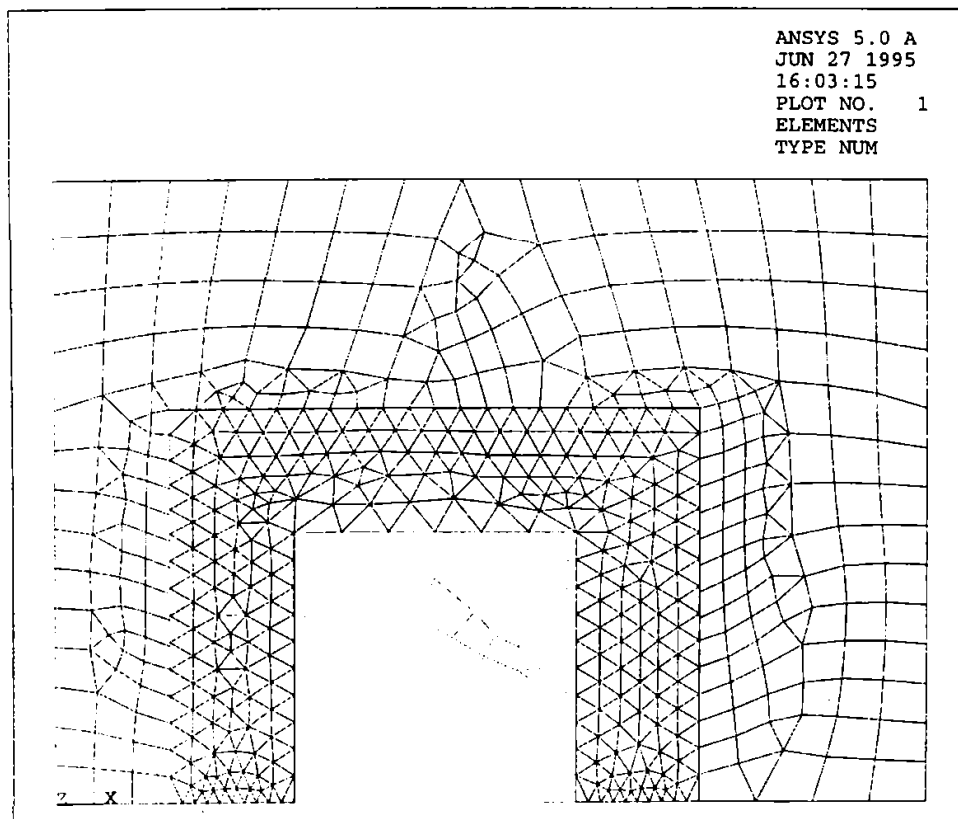


Fig.3.30 Discretizarea domeniului de camp

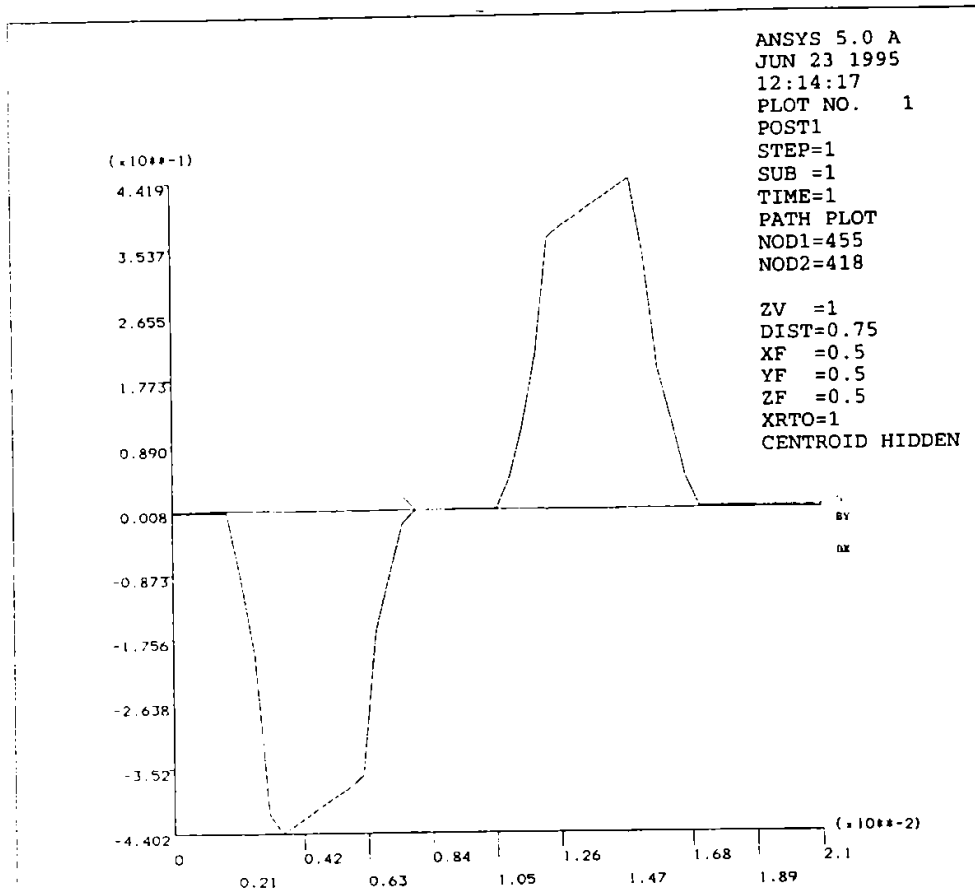


Fig. 3.31 Repartitia functiilor  $B_r$ ,  $B_z$  si  $B_{rezult}$  pe axa Or

### 3.3.3. Optimizarea parametrica pe baza programului OPERA-2d

Atunci cand variabilele de optimizare sunt parametri geometrici (dimensiune, forma, pozitie, etc) aceasta implica refacerea retelei de discretizare a domeniului in elemente finite la fiecare iteratie a procesului de optimizare. Daca interfata de optimizare nu este realizata, este nevoie de accesul la programul sursa pentru a face posibila cuplarea procesului de analiza numerica cu cel de optimizare. Prin acest acces se poate realiza o definire parametrica a geometriei domeniului si prin aceasta este posibila mentinerea discretizarii initiale in elementele finite, doar coordonatele unor puncte cheie din domeniu se modifica dupa ecuatii parametriche prestabilite [P11].

Programul OPERA -2d este un software care ofera o interfata utilizator de tip "user friendly" prezentata prin meniuri tip Windows. De asemenea programul OPERA-2d are si un modul de pre-procesare special " Design Envirovment Modules - DEM " descris in [O2, S15, T9] cu o schema bloc ca in figura 3.32.

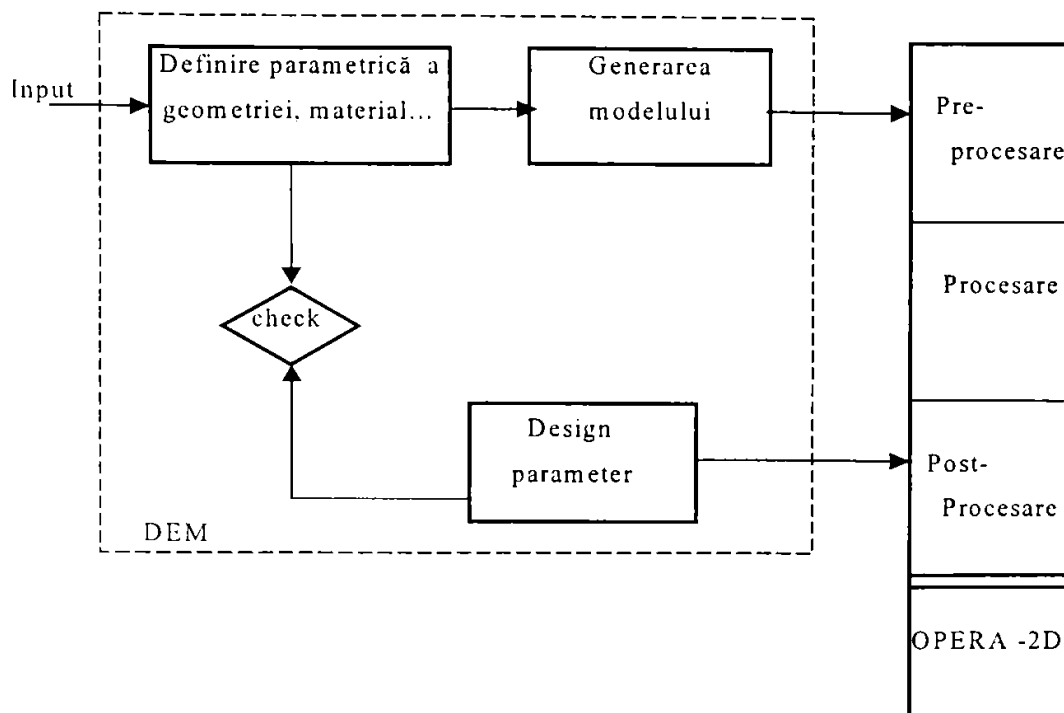


Fig 3.32 Organigrama modului DEM

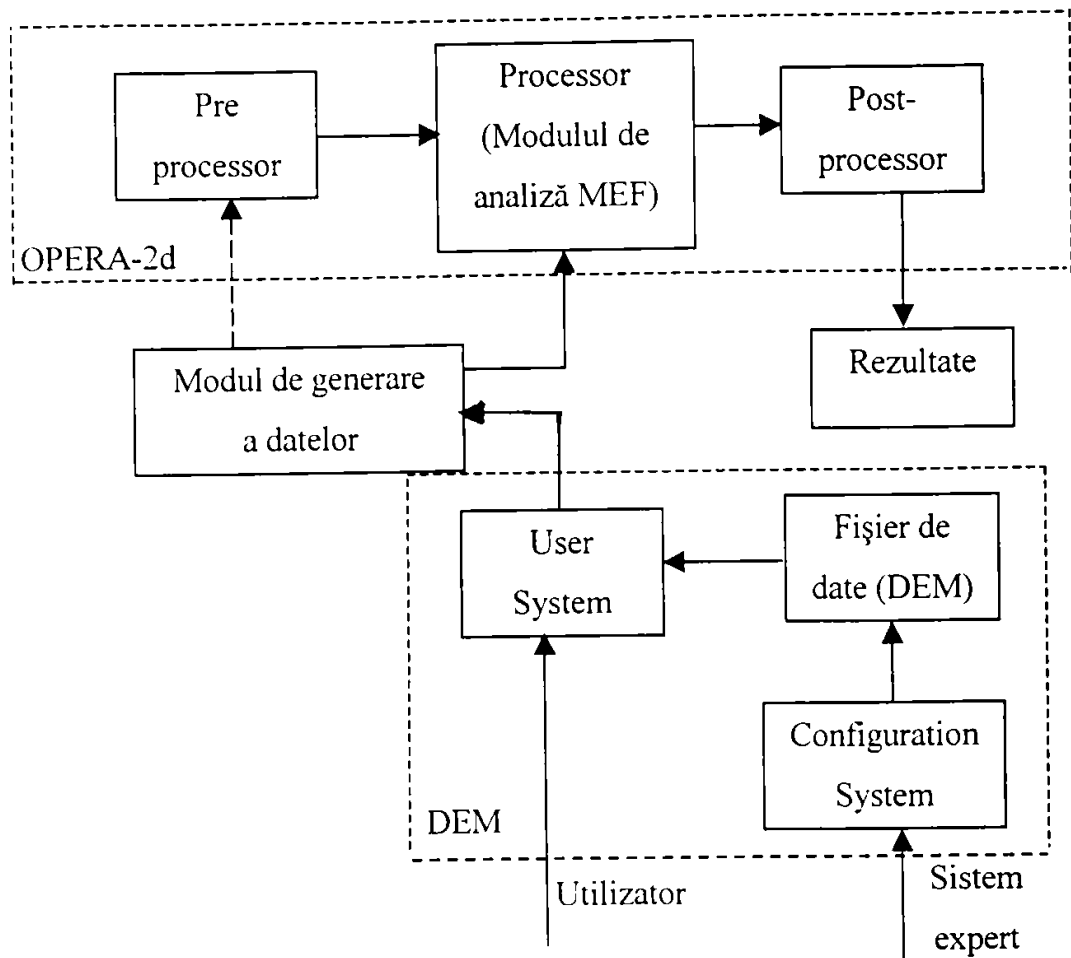
Odata introduse toate datele ce definesc modelul de camp (geometrie, materiale, conditii la limita, surse) ele se salveaza in DEM, acesta ramane singurul fisier pentru modelul de design creat. In acest modul se pot face modificari ale unui parametru geometric printr-o functie externa introdusa (sau prin valori punctuale):

DEM → Create or modify part → Create new part

Cele doua sub blocuri speciale ale modului DEM permit:

- *Configuration System* : o interfata grafica in care definesc constrangerile pentru anumite parti ale modelului si in care se pot defini prin expresie anumite variabile (in cazul nostru sub forma unui nou parametru "d" - excentricitatea  $r_2 = r_{20} + d$ ,  $r_3 = r_{30} + d$ ;  $d \in (d_{\min}, d_{\max})$  cu pasul  $\Delta d$ ).

- *User System* : converteste modelul definit parametric intr-un fisier compatibil cu programul OPERA -2d ca in figura 3.33 .



**Fig.3.33** Interfata dintre DEM si OPERA-2d

Ca aplicatie s-au considerat seturi de miezuri de ferita tip "oala de ferita" avand configuratia geometrica din figura 3.34 si ale caror date geometrice sunt prezentate in Tabela 2.3.

Pentru produsele germane [F1] datele se afla la pozitiile (1-7) iar pentru produsele romanesti [F5] la pozitiile (8-10). Primele (cele germane) sunt realizate actualmente cu o anumita excentricitate "d" a carei valoare o vom compara cu rezultatul obtinut prin optimizarea geometriei miezului si este consemnata pe ultima coloana a Tabelului 2.3.

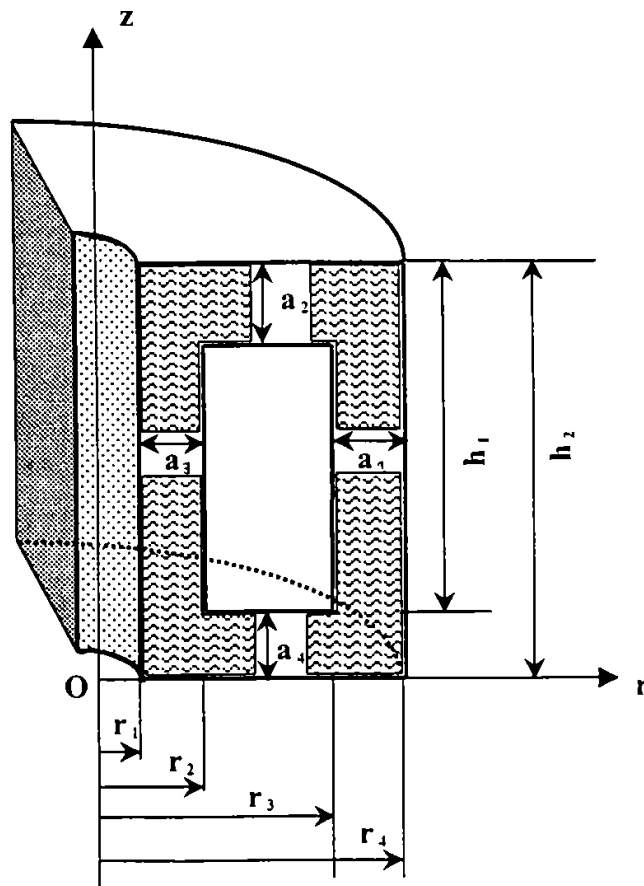


Fig 3.34 Geometria miezului

Tabela 2.3

Nr. crt	Tipul miezului $d_1 \times h_2$	$h_1$ mm	$h_2$ mm	$r_1$ mm	$r_4$ mm	d mm	$d_{opt}$ mm
1	7×4	2,8	4,2	1	3,7	0,4	0,42
2	9×5	3,6	5,4	1,2	4,65	0,52	0,535
3	18×11	7	11	1,5	9,2	1,26	1,4
4	26×16	11	16,3	2,7	13	1,4	1,43
5	30×19	13	19	2,7	15,2	1,7	1,78
6	36×22	14,6	22	2,7	18,1	2,3	2,36
7	42×29	20	30	2,7	21,5	2,7	2,72
8	18×11	7,6	10,7	1,6	9,2	-	1,4
9	30×19	13,4	19	2,8	15,7	-	1,78
10	36×22	15	22	2,8	18,1	-	2,36

Optimizarea geometriei pentru *miezul tip* 18×11 s-a realizat în 4 pași (iteratii) de optimizare și s-a obținut o magnetizare uniformă pentru  $d_{opt} = 1,4$  mm, conform Tabelei 3.3 iar distribuția  $B(r)$  pentru diferite excentricități ca în figura 3.35

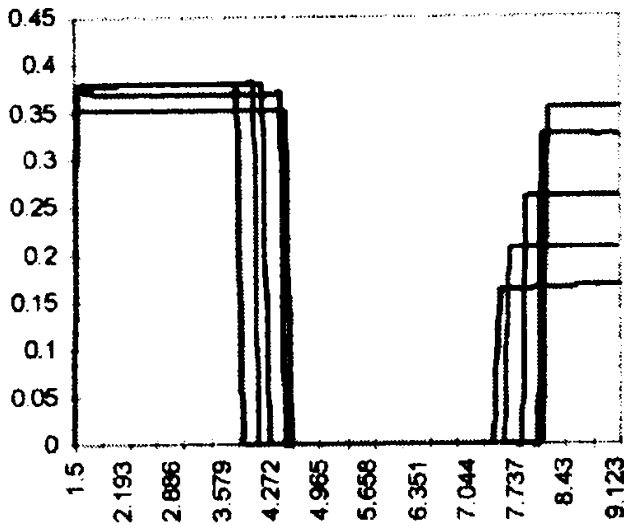


Fig 3.35 Distribuția  $B(r)$ .

Tabela 3.3

$d$ (mm)	0	0,4	0,8	1,2	1,4
$a_1$ (mm)	1,75	1,55	1,35	1,15	1,05
$a_3$ (mm)	2,35	2,55	2,75	2,95	3,05
$B_{int}(T)$	0,38	0,375	0,375	0,376	0,3514
$B_{ext}(T)$	0,16	0,205	0,26	0,32	0,353

*Miezul tip* 26×16 admite configurația optimă pentru excentricitatea  $d=1,43$  mm și s-a obținut tot în 4 iterații cu datele intermediare din Tabela 4.3 iar distribuția câmpului  $B(r)$  pentru acest caz este în figura 3.36.

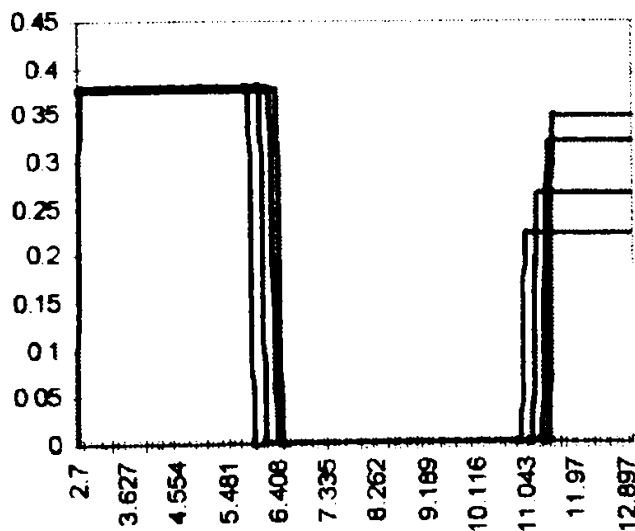


Fig 3.36 Distribuția  $B(r)$

Tabela 4.3

$d$ (mm)	0	0,4	0,8	1,2	1,43
$a_1$ (mm)	2,2	2	1,8	1,6	1,47
$a_3$ (mm)	3,05	3,25	3,45	3,65	3,75
$B_{int}(T)$	0,38	0,379	0,377	0,373	0,37
$B_{ext}(T)$	0,22 36	0,2235	0,267	0,324	0,348



*Miezul tip 30×19* admite configuratia optima pentru  $d=1,78$  mm obtinuta in 5 iteratii, cu datele intermediare din Tabela 5.3 si distributia campului pe axa Or,  $B(r)$ , ca in figura 3.37.

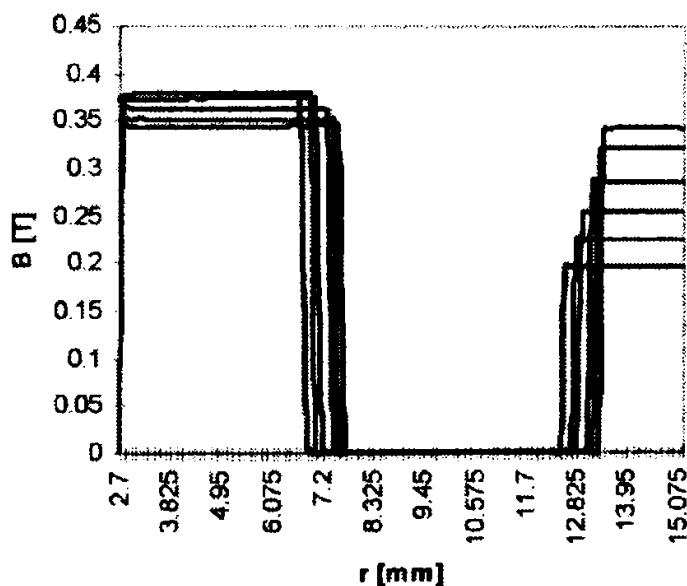
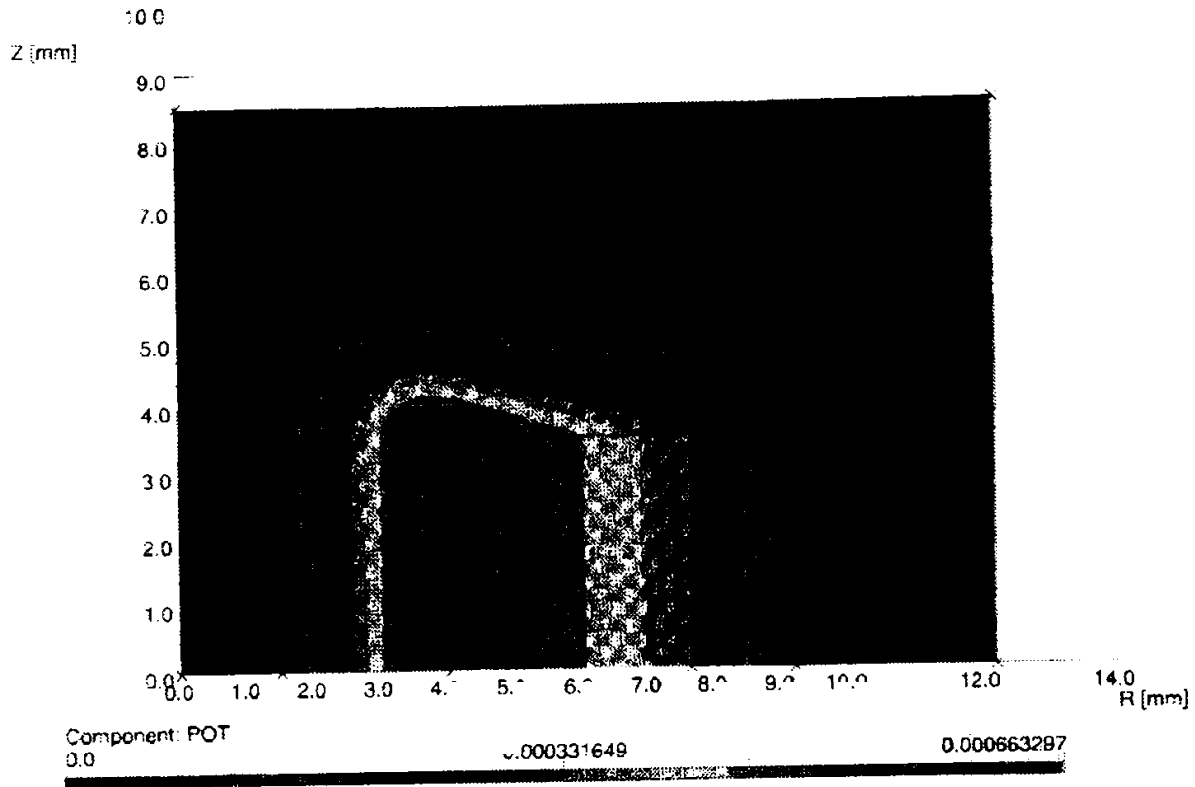
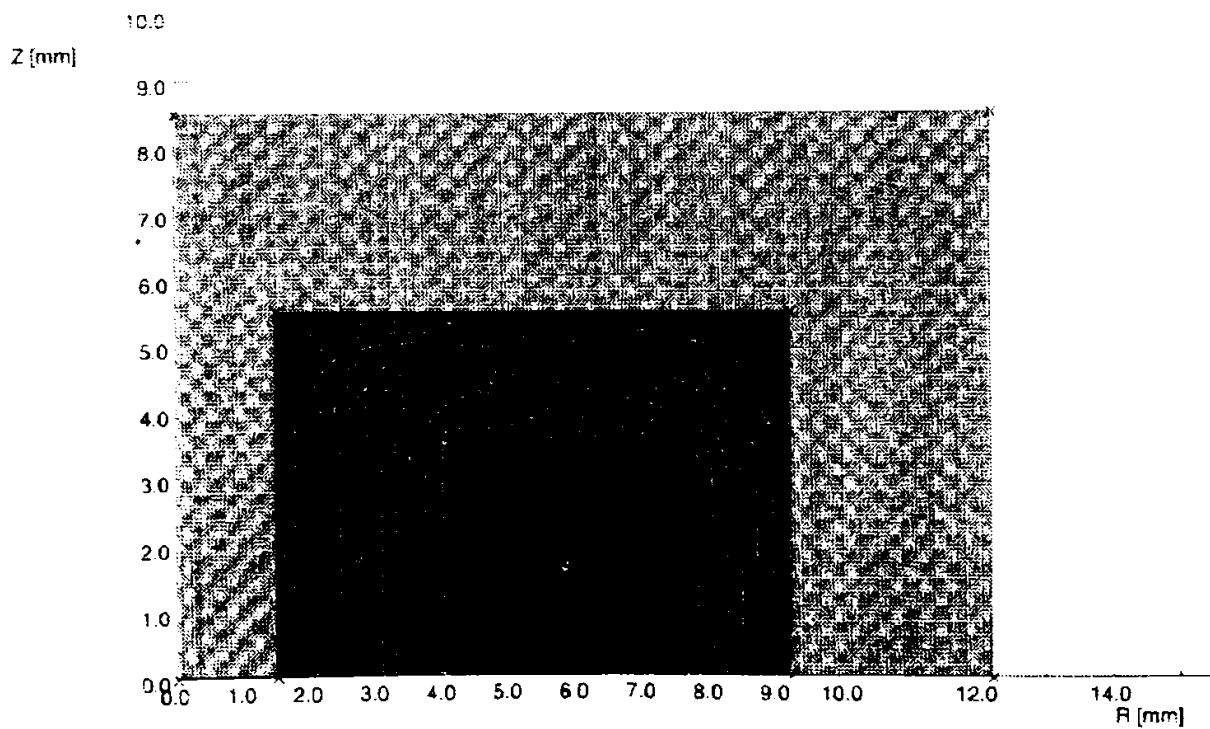


Fig 3.37 Distributia  $B(r)$

Tabela 5.3

$d$ (mm)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	1,78
$a_1$ (mm)	2,7	2,5	2,3	2,1	1,9	1,82
$a_3$ (mm)	4,05	4,25	4,45	4,65	4,85	4,95
$B_{int}(T)$	0,375	0,375	0,371	0,363	0,351	0,344
$B_{ext}(T)$	0,195	0,223	0,245	0,285	0,322	0,342

In figura 3.38-a se reprezinta distributia potentialului  $A(z, r)$  in cod culori iar in figura 3.38-b liniile campului  $\bar{B}(z, r)$ , ambele pentru *miezul tip 18×11* in cazul optim obtinut. Analog in figura 3.39-a, b se prezinta aceleasi rezultate pentru *miezul tip 26×16*, iar in figura 3.40-a, b rezultatele pentru *miezul tip 30×19*.

Fig 3.38-a. Distribuția potențialului  $A(z, r)$  pentru  $(18 \times 11)$ Fig 3.38-b. Distribuția liniilor câmpului  $\bar{B}(z, r)$

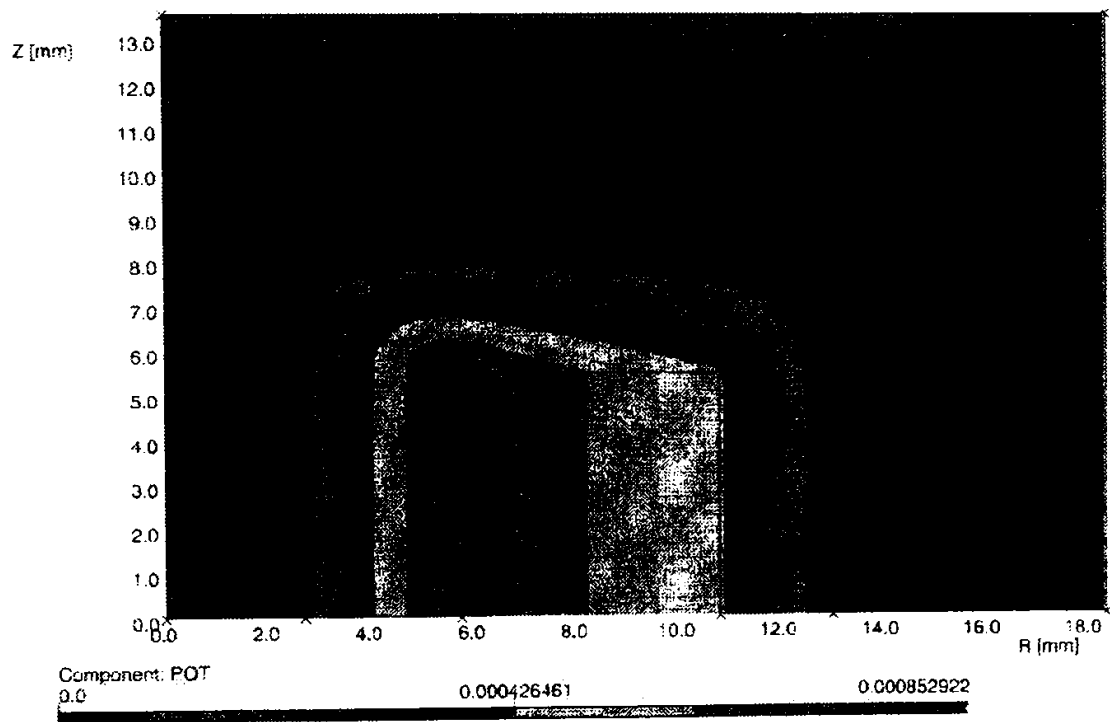


Fig 3.39-a. Distribuția potențialului  $A(z, r)$  pentru miezul  $(26 \times 16)$

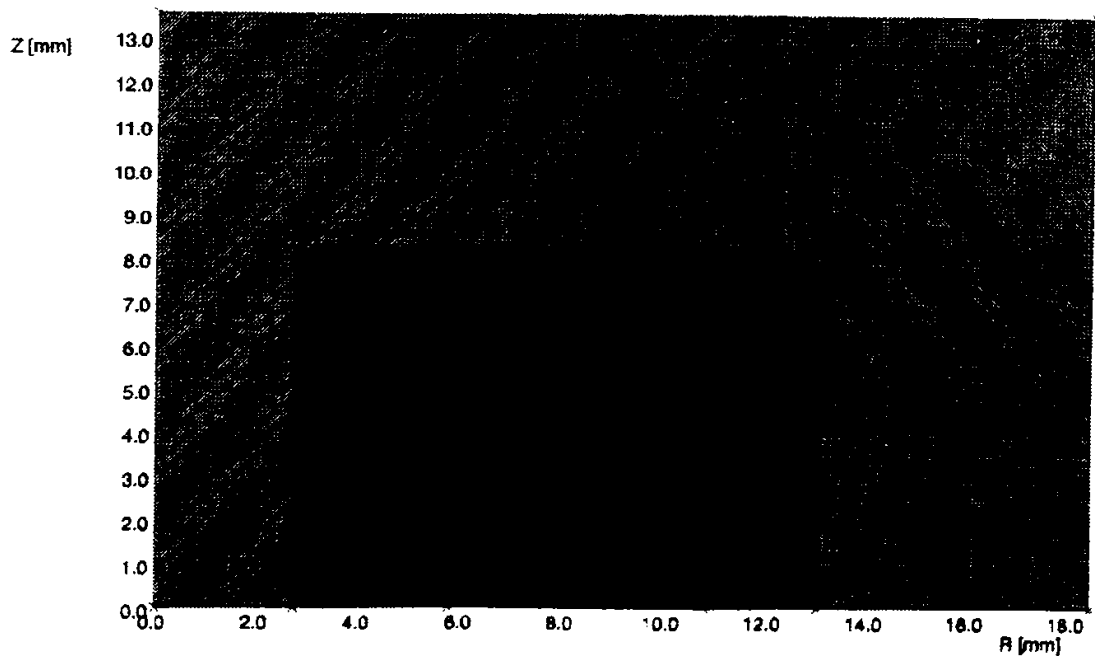


Fig. 3.39-b Distribuția liniilor câmpului  $\bar{B}(z, r)$

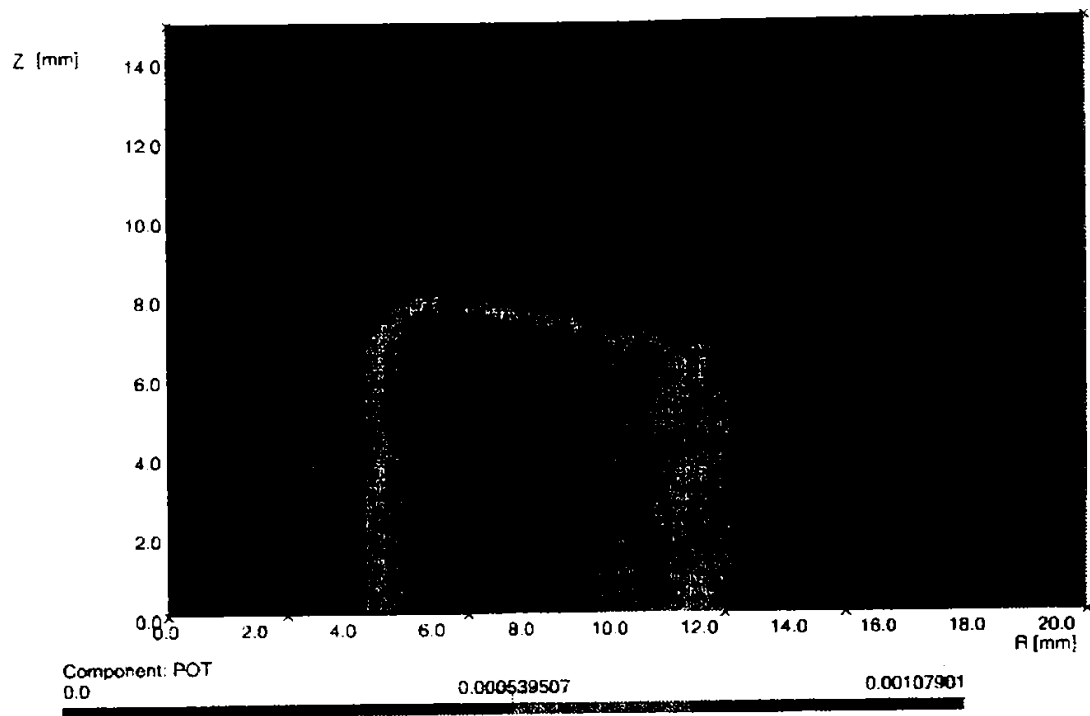


Fig. 3.40-a Distribuția  $A(z, r)$  pentru miezul (30×19)

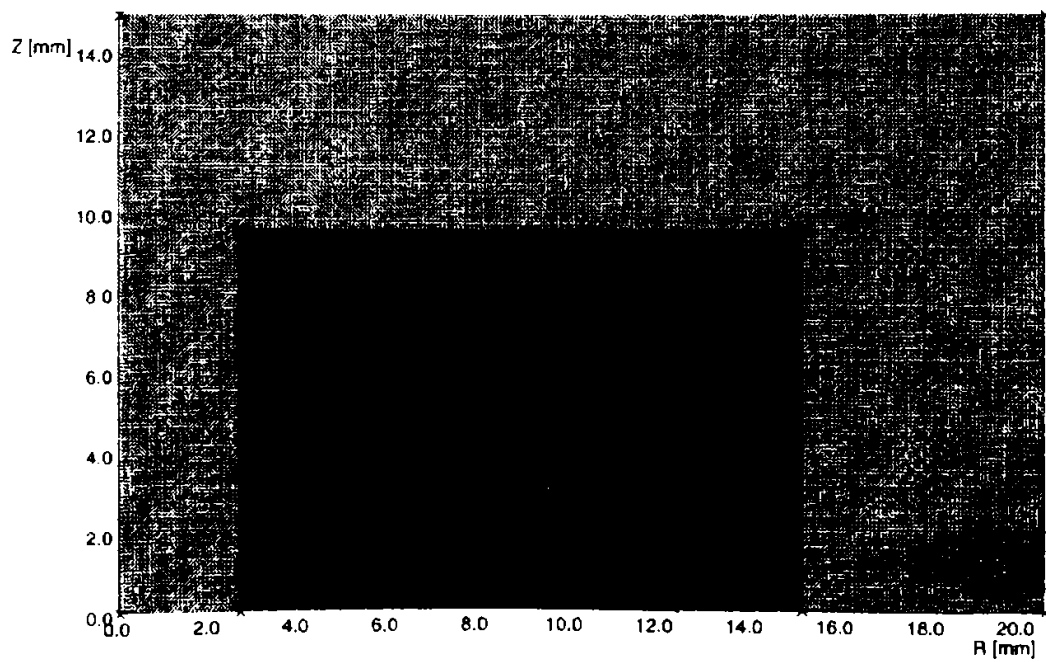


Fig. 3.40-b Distribuția liniilor câmpului  $\vec{B}(z, r)$

In figura 3.41 – a, b si c se prezinta repartitia campului  $B(z, r)$  pe tot domeniul, in cod culori, pentru miezurile de tip  $(18 \times 11)$ ,  $(26 \times 16)$  si  $(30 \times 19)$ .

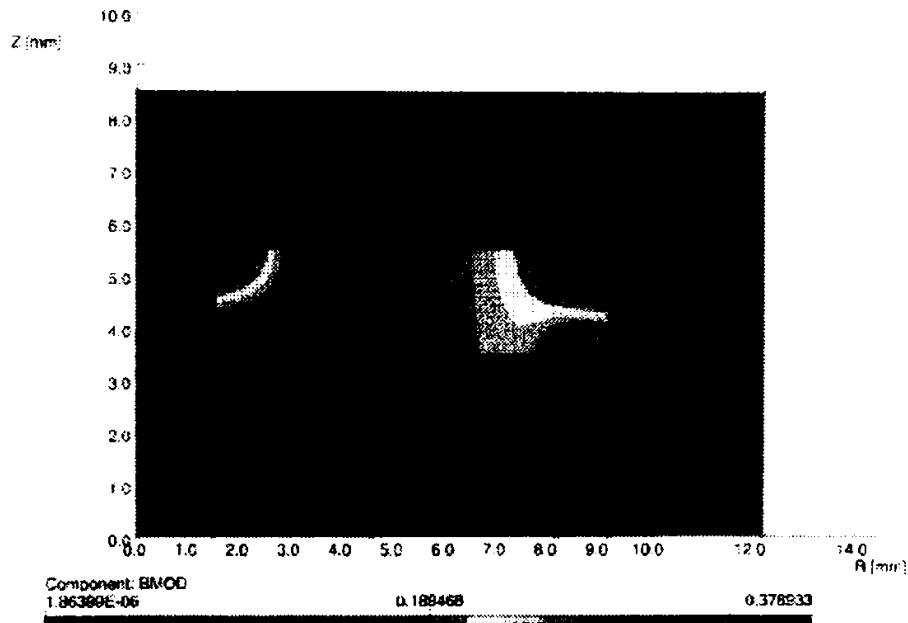


Fig. 3.41 – a Distributia  $B(z, r)$  pentru miezul  $(18 \times 11)$

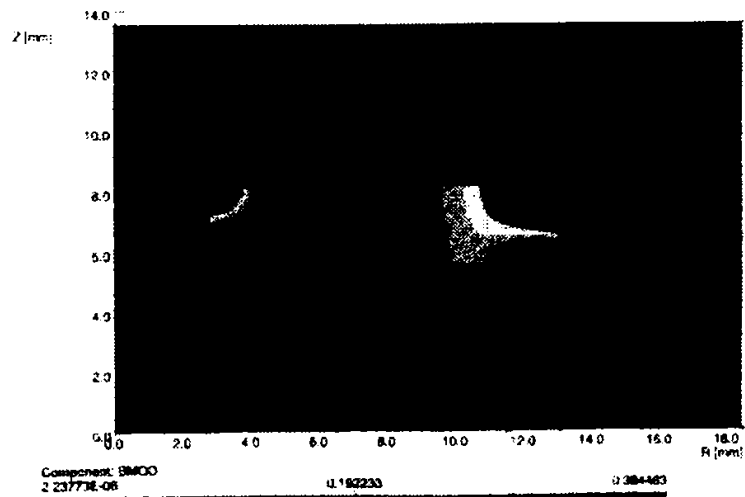


Fig. 3.41 – b Distributia  $B(z, r)$  pentru miezul  $(26 \times 16)$

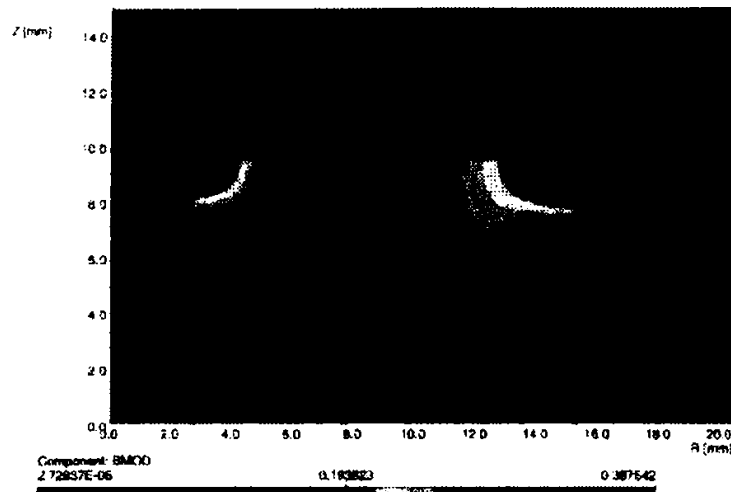


Fig. 3.41 – c Distribuția  $B(z, r)$  pentru miezul ( $30 \times 19$ )

Rezultatele acestui studiu de optimizare a geometriei miezurilor de ferita în scopul de a reduce distorsiunile semnalelor au constituit obiectul unui contract cu Fabrica de ferite – Urziceni având ca obiect “Îmbunătățirea performanțelor funcționale ale miezurilor de ferita”. Rezultatele studiului s-au concretizat prin Brevetul de invenție [Mi 17], titular de brevet Fabrica de ferite – Urziceni.

### 3.4 Concluzii

În acest capitol de “sinteza optimă” a geometriei domeniului de câmp rezultatele se pot concretiza astfel :

1. S-a formulat un *model matematic diferențial* de câmp magnetic în regim staționar pentru care s-au dedus *ecuațiile în diferențe finite* având ca necunoscută funcția potențial magnetic vector. Ecuațiile s-au stabilit pentru subdomenii de continuitate, pentru suprafețe de trecere orizontale, verticale, pentru noduri de colț stânga/dreapta, pentru condiții Neumann omogene, toate pentru medii liniare/nelineare și s-au asamblat într-un sistem algebric. Acest model de ecuații poate fi transpus în oricare altă problemă de câmp magnetic staționar.

2. S-a scris un *program propriu de analiza numerica* prin MDF a unei probleme de camp magnetic stationar in medii neliniare–neomogene (Anexa IV), structurat astfel incat sa devina “comparabil” ca performante cu un program bazat pe orice alta metoda numerica.
3. Discretizarea cu pasi variabili a domeniului de camp a permis atasarea unui *subprogram de optimizare geometrica* care are ca parametri de optimizare pasul  $h_r$  si neuniformitatea  $\alpha_r$ . Rezultatele obtinute in procesul de optimizare pe baza programului propriu s-au comparat cu cele obtinute prin alte metode.
4. *Optimizarea geometrica* pe baza programelor MagNet si ANSYS ce au la baza metoda elementelor finite si un program extern de optimizare geometrica atasat acestora, au permis obtinerea unor valori ale parametrilor de optimizare foarte apropiati de cei obtinuti prin programul propriu.
5. *Optimizarea parametrica* prin programul OPERA-2d si modulul (DEM) ce permite definirea parametrica, au condus la aceleasi valori ale parametrilor de optimizare.
6. Programele de sinteza geometrica prin optimizare s-au aplicat unui set de produse “oale de ferita” fabricate in Romania [F5] si in Germania [F1]. pentru comparatie, au avut drept scop imbunatatirea parametrilor functionali ai acestora. Rezultatele s-au concretizat printr-un *brevet de inventie* [Mi 17]
7. Toate rezultatele prezentate in acest capitol sunt *contributii originale ale autorului*.





## Cap.4 Analiza numerica a campurilor magnetice stationare in medii neliniare prin metoda tubului de flux elementar (MTFE)

Metoda tubului de flux elementar (MTFE) prezentata in [Mi9, Mi10, Mi11] este o metoda numerica de analiza a campului magnetic stationar (cvasistationar) ce poate fi aplicata in medii liniare sau neliniare.

In comparatie cu metodele analitice (practic utilizabile pentru domenii liniare si geometrii relativ simple) MTFE se poate extinde la medii neliniare, iar din punctul de vedere al complexitatii geometriei, asa cum vom arata in continuare, metoda se poate aplica la acele forme la care se poate intui geometria tuburilor de flux. Se considera doar fluxurile utile (cele ce se inchid prin miezurile magnetice cu permeabilitate mult mai mare decat aerul din jurul lor). Se pot lua in considerare toate liniile de camp doar la probleme de afinare, cand rezultatul a fost obtinut printr-o alta metoda numerica.

Fata de metodele numerice clasice (MDF, MEF) datorita formularii matematice de tip integral si avand un algoritm aferent nesofisticat prezinta operativitate (timpi de calcul redusi), necesar de memorie redus si precizie avansata.

### 4.1 Principiul metodei tubului de flux elementar

Consideram un tub de flux elementar dintr-un miez magnetic, in general neliniar, izotrop si fara magnetizatie permanenta, de sectiune infinitesimala, a carui axa, curba  $\Gamma$ , este o linie a campului  $\vec{B}$ . Fie o sectiune de referinta  $dS_0$  in acest tub (fig. 4.1), respectiv originea curbei  $\Gamma$

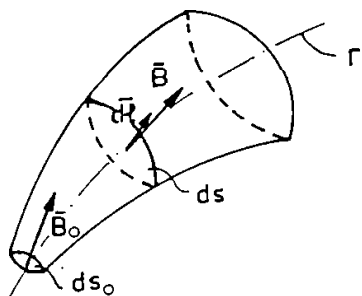


Fig. 4.1 Tub de flux elementar cu sectiunea de referinta  $dS_0$

este continuata in aceasta sectiune.

O sectiune curenta prin tubul de flux poate fi exprimata sub forma

$$dS = dS_0 \cdot \frac{1}{f(\ell)} \quad (4.1)$$

unde  $f(\ell)$  depinde de geometria miezului, respectiv a liniilor de camp  $\vec{B}$  care se inchid in lungul acestuia.

Legea fluxului magnetic pentru acest tub de flux elementar

$$BdS = B_0 dS_0 \quad (4.2)$$

impune cu relatia geometrica (4.1) si cu functia  $v(B)$  ce reprezinta aproximarea univoca a reluctivitatii tubului de flux elementar (o aproximare numerica de tip Lagrange sau de alt tip) permit exprimarea numerica a marimilor de stare a campului magnetic in orice punct de pe curba

$$\Gamma \text{ sub forma: } \begin{cases} \mathbf{B} = B_0 \cdot f(\ell) \\ \mathbf{H} = v(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.3)$$

Legea circuitului magnetic sub forma integrala, in regim stationar, pentru curba  $\Gamma$  ce inconjoara solenatia  $\theta_{S\Gamma}$ :

$$\oint_{\Gamma} \overline{\mathbf{H}} d\overline{\ell} = \theta_{S\Gamma} \quad (4.4)$$

devine pe baza relatiilor (4.3) de forma

$$\theta_{S\Gamma} = \oint_{\Gamma} \{v[\mathbf{B}_0 \cdot f(\ell)] \cdot \mathbf{B}_0 \cdot f(\ell)\} d\ell = W(B_0) \quad (4.5)$$

unde  $W: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$  defineste o functie pozitiva si strict crescatoare. Ecuatia (4.5) admite o singura radacina  $B_0$  care se poate determina numeric. Avand calculata inductia  $B_0$  in sectiunea de referinta a tubului (in originea curbei  $\Gamma$ ) se poate determina perechea de marimi de stare  $(\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{H}})$  in orice punct al curbei  $\Gamma$ .

Pentru medii neliniare, izotrope dar cu magnetizare remanenta, functionala  $W(B_0)$  se va scrie sub forma

$$W(B_0) = \oint_{\Gamma} \{v[\mathbf{B}_0 f(\ell)] \cdot [\mathbf{B}_0 f(\ell) - \mathbf{B}_{rem}]\} d\ell = \theta_{S\Gamma} \quad (4.6)$$

respectiv pentru medii anizotrope si neliniare functionala devine

$$W(B_0) = \oint_{\Gamma} \{\overline{v}[\mathbf{B}_0 f(\ell)] \cdot [\overline{\mathbf{B}}_0 f(\ell) - \overline{\mathbf{B}}_{rem}]\} d\overline{\ell} = \theta_{S\Gamma} \quad (4.7)$$

Pentru tuburi de flux cu o astfel de geometrie incat curba  $\Gamma$  nu se poate defini univoc, se poate proceda la o aproximare a sa pe portiuni, prin functii spline, in general. In acest caz functionala devine

$$W(B_0) = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} \overline{\mathbf{H}}_k d\overline{\ell}_k = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} \{v[\mathbf{B}_0 f_k(\ell)] \cdot \mathbf{B}_0 f_k(\ell)\} d\ell_k = \theta_{S\Gamma} \quad (4.8)$$

functiile  $(f_k)$  de aproximare pe portiunea  $C_k$  a curbei  $\Gamma$  pot avea o exprimare in general sub forma polinomiala.

In mod analog, daca se dispune de spectrul campului  $\overline{\mathbf{B}}$  studiat printr-o metoda numerica oarecare, facuta cu un anumit pas de discretizare, liniile lui  $\overline{\mathbf{B}}$  pot fi approximate pe portiuni prin functiile  $f_k$  iar functionala (4.8) permite a determina inductia magnetica in sectiunea de referinta ( $B_0$ ). Astfel, un camp magnetic determinat discret, in anumite puncte ale domeniului, poate fi transformat intr-un camp aproximat cu o distributie continua pe domeniu (problema de afinare).

Bazat tot pe o aproximare a geometriei liniilor de camp in [H1] se propune evaluarea parametrilor: capacitate, rezistenta, permeanta bazat pe o discretizare a domeniului in mici tuburi de flux "using tubes and slice".

#### 4.2 Distributia campului magnetic intr-un dispozitiv nelinier comandat de forma toroidala prin MTFE

Pentru un miez magnetic cu o configuratie geometrica toroidala si caracteristica  $v(B)$  cunoscuta si in care solenatia de lucru  $\theta_\ell$  creeaza campul de lucru  $\bar{H}_\ell$ , respectiv inductia de lucru  $\bar{B}_\ell$  iar solenatia de comanda  $\theta_c$  creeaza marimile de stare  $(\bar{H}_c, \bar{B}_c)$ , campurile reprezentate in orice punct din domeniu vor fi o superpozitie locala a celor doua campuri componente.

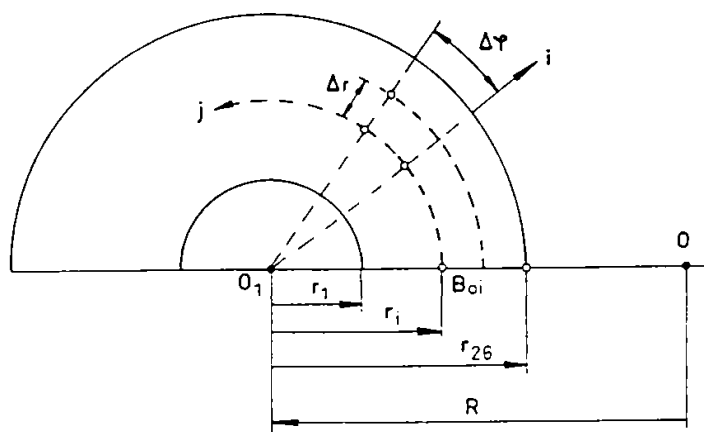


Fig. 4.2 Discretizarea domeniului de camp avand axele  $r$  si  $\varphi$

O sectiune transversala prin miez (fig. 4.2) contine in planul  $(r, \varphi)$  liniile campului de comanda iar intr-un plan perpendicular pe aceasta sectiune liniile campului de lucru. Am facut o discretizare a domeniului de forma:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\pi}{10} \text{ si } \varphi_j = j\Delta\varphi \\ \Delta r &= 0.2 \text{ mm si } r_i = r_1 + (i-1)\Delta r \\ R &= 10 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Funcția de forma  $f(\ell)$  din (4.1) pentru geometria data, in functie de corespondenta coordonatelor toroidale, va fi:

$$f(\ell) = g(\varphi) = \frac{R-r}{R-r \cos \varphi} \quad (4.10)$$

Corespunzator, functionala  $W(B_0)$  devine

$$W(B_0) = B_0 r \int_0^{2\pi} v[B_0 g(\varphi)] \cdot g(\varphi) d\varphi = \theta_c \quad (4.11)$$

din care numeric se poate determina inductia de comanda  $B_c$  in sectiunea de referinta

$$B_{c_i} = B_{0_i} \left|_{\varphi=0} \right|_{r=r_1+(i-1)\Delta r} \quad \forall i \in \overline{1, n} \quad (4.12)$$

Intr-un punct oarecare pe curba  $\Gamma$  ( $\varphi \neq 0$ ) inductia de comanda se poate exprima prin relatia

$$B_c(r, \varphi) = B_0(r, \varphi) \cdot f(\ell) = B_0(r, \varphi) \cdot g(r, \varphi) \quad (4.13)$$

inductiile de lucru  $B_\ell(r, \varphi)$ , respectiv inductia rezultanta  $B(r, \varphi)$  devin succesiv

$$B_\ell(r, \varphi) = \frac{1}{v(B)} H_\ell(r, \varphi) = \frac{\theta_\ell}{2\pi v(B)(R - r \cos \varphi)} \quad (4.14)$$

$$B(r, \varphi) = \sqrt{B_\ell^2(r, \varphi) + B_c^2(r, \varphi)} \quad (4.15)$$

Cu noua valoare a campului rezultat  $B(r, \varphi)$  se reitereaza procesul de calcul, in punctul curent  $(r, \varphi)$ , actualizand dupa fiecare etapa valoarea reluctivitatii  $v(B) = v[B(r, \varphi)] = v(r, \varphi)$ , valoare cu care se reface algoritmul corespunzator relatiilor (4.11)~(4.15).

Algoritmul corespunzator calculului inductiei magnetice in orice punct  $(r, \varphi)$  din domeniu este schematizat in figura 4.3, iar schema logica a programului FORTRAN aferent acestui algoritm este prezentata in figura 4.4 alaturi de programul utilizat.

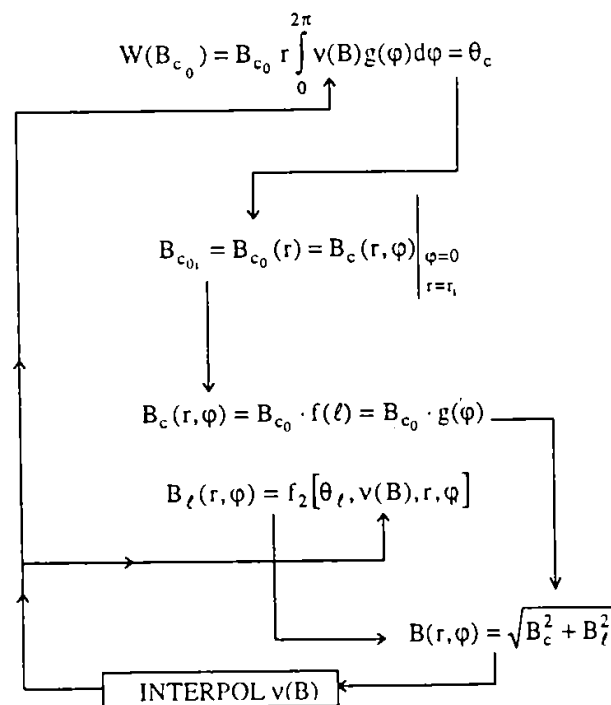


Fig. 4.3 Algoritmul MTFE pentru medii neliniare si superpoziti $\bar{u}$  ortogonale de campuri  $\bar{B}$

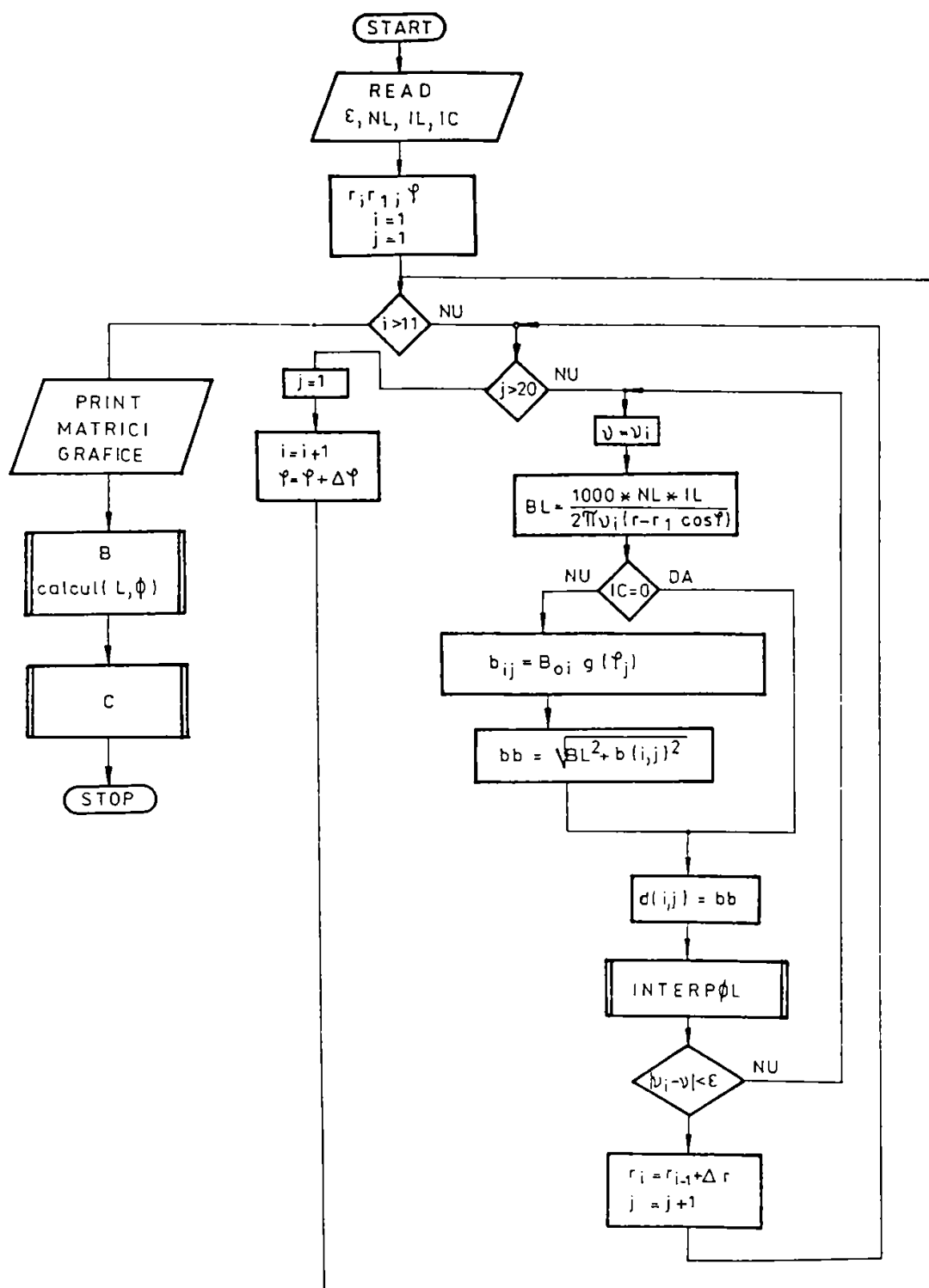


Fig. 4.4 Schema logica a programului FORTRAN aferent MTFE

Nodurile rețelei se parcurg în raport cu coordonata "i" după care se trece pe o altă direcție radială, mutată cu  $\Delta\phi$ , până când s-a calculat  $B(r, \phi) = B_{ij}$  în fiecare nod al domeniului. Pentru fiecare nod se retin valorile  $B_{cij}$ ;  $B_{lij}$ ;  $B_{ij}$ . În raport cu inducțiile de lucru se evaluează numeric fluxul magnetic printr-o secțiune transversală a miezului (fig. 4.5).

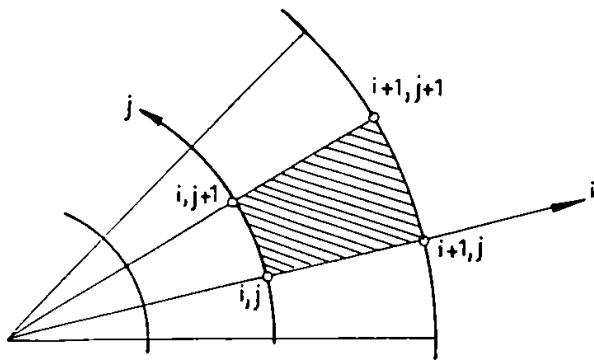


Fig. 4.5 Evaluarea fluxului magnetic printr-o sectiune din miez

Fluxul magnetic printr-un element de sectiune (cel hasurat in fig. 4.5) se poate exprima prin

$$\phi_{ij} = (r_{ij} \Delta r \Delta \varphi) \frac{1}{4} [B_{\ell_{ij}} + B_{\ell_{i+1,j}} + B_{\ell_{i,j+1}} + B_{\ell_{i+1,j+1}}] \quad (4.16)$$

Fluxul fascicular si inductivitatea bobinei de lucru vor fi

$$\phi_f = \sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^{10} \phi_{ij} \rightarrow L = \frac{N_{\ell} \cdot \phi_f}{I_{\ell}} \quad (4.17)$$

Sau in alt mod, cunoscand valorile reluctivitatii  $v_{ij}$  la ultima iteratie se poate determina inductivitatea extrapoland definitia clasica ( $L = N^2 \Lambda_m$ ,  $\Lambda_m$  - permeabilitatea miezului) pentru domenii discrete:

$$L = N_{\ell}^2 \sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^{10} \left[ \frac{r_{ij} \Delta r \Delta \varphi}{2\pi (R - r_i \cos \varphi_j)} \cdot \frac{4}{v_{ij} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}} \right] \quad (4.18)$$

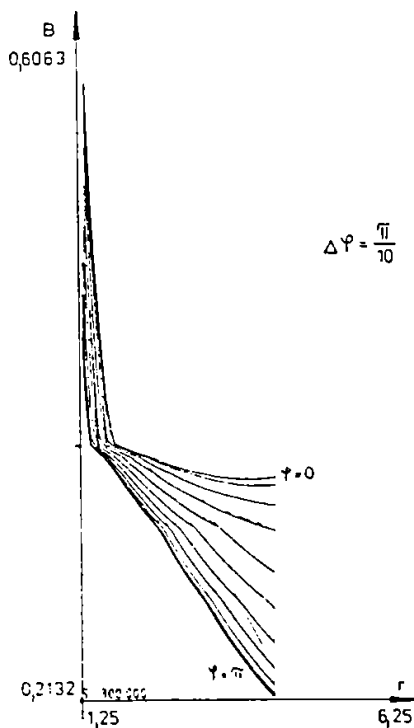


Fig. 4.6 Repartitia inducției magnetice:

$$B(r) \Big|_{\varphi=cst}$$

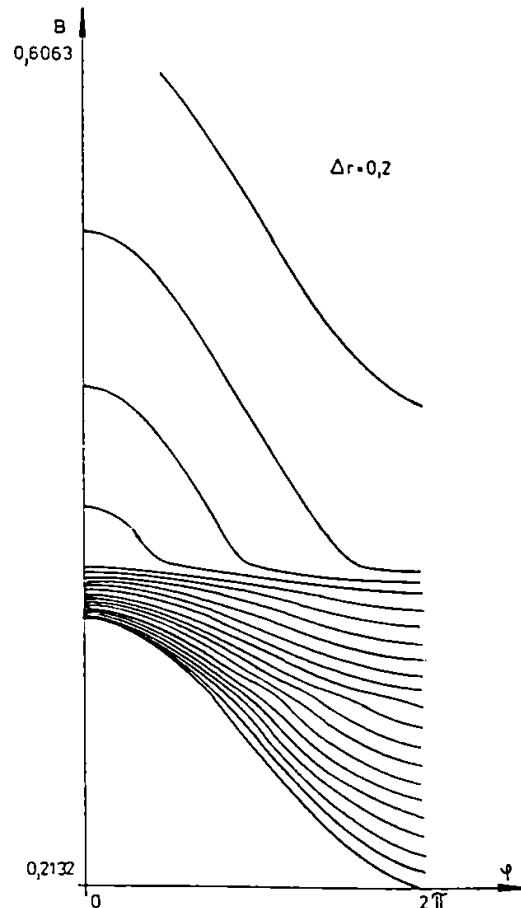


Fig. 4.7 Repartitia inducției magnetice:  $B(\varphi) \Big|_{r=cst}$

Pe baza relatiilor (4.16)~(4.18) s-a realizat subrutina  $\mathbb{B}$  din figura 4.15, unde subrutina  $\mathbb{C}$  da posibilitatea relansarii programului pentru un alt set de date.

Rezultatele concrete ale programului sunt prezentate atat sub forma tabelara cu valorile inductiei magnetice in nodurile retelei cat si sub forma grafica obtinute utilizand subrutine de plotare pe baza matricilor de date.

Astfel, in figura 4.6 si 4.7 se prezinta legea de repartitie a inductiei in functie de raza  $B(r)\Big|_{\varphi}$  respectiv in functie de unghi  $B(\varphi)\Big|_r$ , iar in figurile 4.8, 4.9, si 4.10 se prezinta repartitia spatiala  $B = B(r, \varphi)$ .

S-au efectuat un numar mare de rulari pentru diferite valori ale curentului (solenatiei) de comanda  $I_c$  si s-a plotat repartitia inductiei magnetice in functie de raza la diferite valori ale parametrului  $I_c$  (fig. 4.11), evident pentru  $I_c > 3A$  se obtine saturatia miezului central.

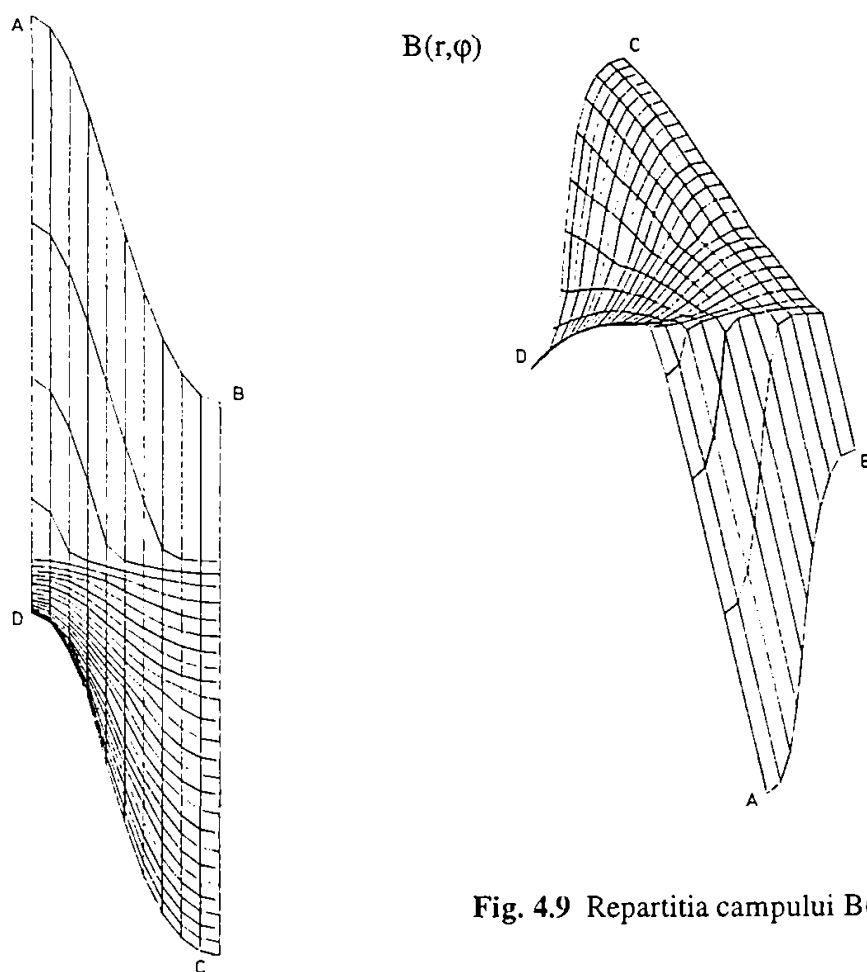
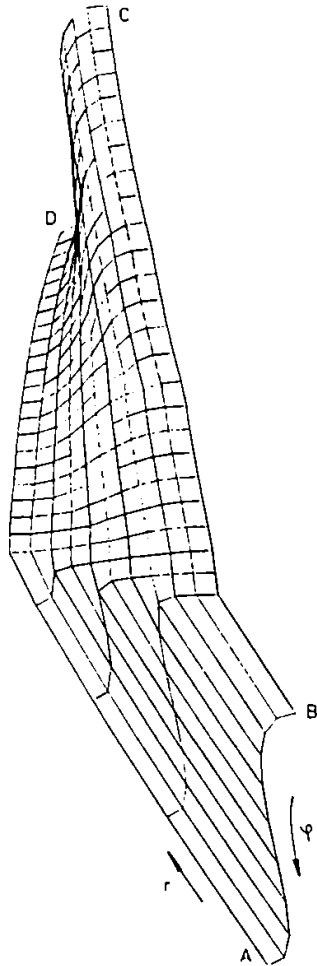


Fig. 4.8 Repartitia campului  $B(r, \varphi)$

Fig. 4.9 Repartitia campului  $B(r, \varphi)$

Cu valorile finale ale inductiilor in nodurile retelei s-a evaluat inductivitatea pe baza relatiei (4.17), iar figura 4.12 prezinta dependenta  $L = L(I_c)\Big|_{I_c=ct}$ .

$B(r, \varphi)$



	x	y	z
A	0,6063	1,25	0
B	0,4443	1,25	3,1415
C	0,2132	6,25	3,1415
D	0,3592	6,25	0

Fig. 4.10 Repartitia  $B(r, \varphi)$ :  $x = B$ ;  $y = r$ ;  $z = \varphi$

$r$	$B(I_c)$						
	$I_c$	1	2	3	4	5	6
1,25		0.3268	0.3688	0.4259	0.6063	0.7871	0.9681
1,45		0.3156	0.3621	0.3781	0.5197	0.6785	0.8376
1,65		0.3058	0.3556	0.3747	0.4545	0.5968	0.7394
1,85		0.2982	0.3498	0.3717	0.4040	0.5333	0.6630
2,05		0.2924	0.3451	0.3686	0.3787	0.4826	0.6020
2,25		0.2880	0.3405	0.3648	0.3761	0.4415	0.5523
2,45		0.2846	0.3366	0.3617	0.3740	0.4075	0.5113
2,65		0.2821	0.3334	0.3586	0.3722	0.3799	0.4770
2,85		0.2803	0.3308	0.3554	0.3707	0.3780	0.4480
3,05		0.2789	0.3286	0.3527	0.3689	0.3764	0.4234
3,25		0.2780	0.3268	0.3504	0.3667	0.3750	0.4023
3,45		0.2778	0.3254	0.3485	0.3649	0.3739	0.3841
3,65		0.2782	0.3236	0.3469	0.3634	0.3729	0.3791
3,85		0.2792	0.3220	0.3455	0.3620	0.3720	0.3780
4,05		0.2804	0.3209	0.3443	0.3609	0.3713	0.3771
4,25		0.2818	0.3202	0.3432	0.3600	0.3706	0.3763
4,45		0.2835	0.3200	0.3424	0.3589	0.3701	0.3757
4,65		0.2856	0.3202	0.3419	0.3581	0.3694	0.3751
4,85		0.2880	0.3208	0.3416	0.3575	0.3688	0.3747
5,05		0.2907	0.3219	0.3415	0.3571	0.3683	0.3744



5,25	0.2937	0.3234	0.3417	0.3569	0.3680	0.3741
5,45	0.2971	0.3251	0.3421	0.3569	0.3678	0.3740
5,65	0.3009	0.3263	0.3428	0.3572	0.3678	0.3739
5,85	0.3051	0.3278	0.3437	0.3576	0.3680	0.3739
6,05	0.3097	0.3295	0.3449	0.3583	0.3683	0.3740
6,25	0.3149	0.3315	0.3462	0.3592	0.3688	0.3743

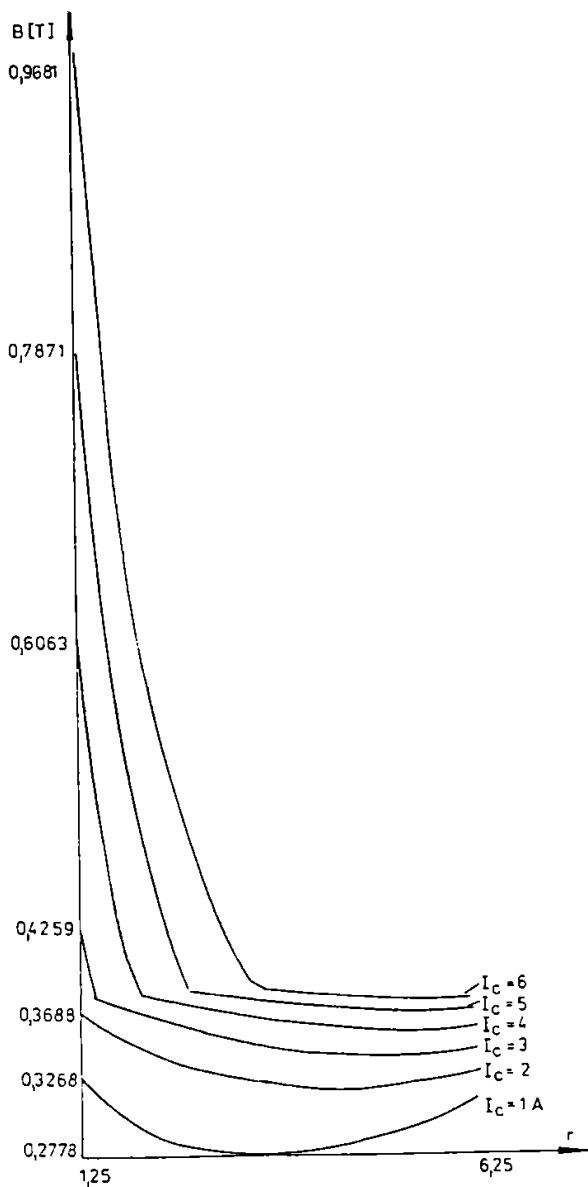


Fig. 4.11 Influenta curentului de comanda asupra

repartitiei  $B(r)|_{\varphi=0}$

	B(r)										
	0.6063	0.6012	0.5869	0.5658	0.5408	0.5152	0.4915	0.4715	0.4566	0.4474	0.4443
	0.5197	0.5144	0.4995	0.4777	0.4523	0.4265	0.4030	0.3834	0.3791	0.3784	0.3782
	0.4545	0.4490	0.4336	0.4111	0.3852	0.3784	0.3765	0.3750	0.3738	0.3732	0.3729
	0.4040	0.3982	0.3821	0.3783	0.3762	0.3742	0.3723	0.3708	0.3694	0.3681	0.3677
B(φ)	0.3787	0.3782	0.3769	0.3750	0.3729	0.3708	0.3679	0.3650	0.3628	0.3615	0.3611
	0.3761	0.3756	0.3742	0.3723	0.3701	0.3660	0.3624	0.3592	0.3561	0.3543	0.3536
	0.3740	0.3734	0.3720	0.3699	0.3655	0.3613	0.3566	0.3524	0.3493	0.3475	0.3468

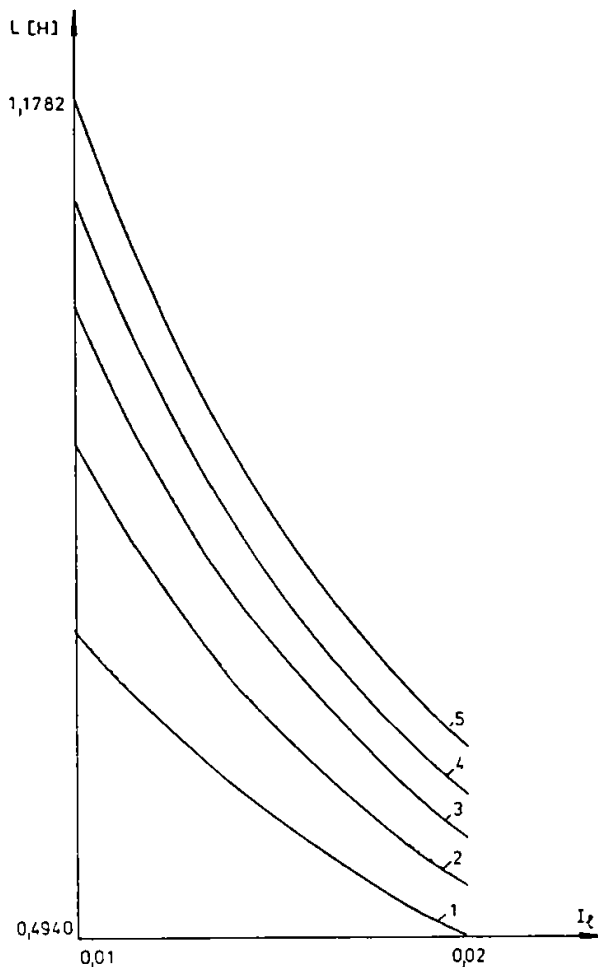
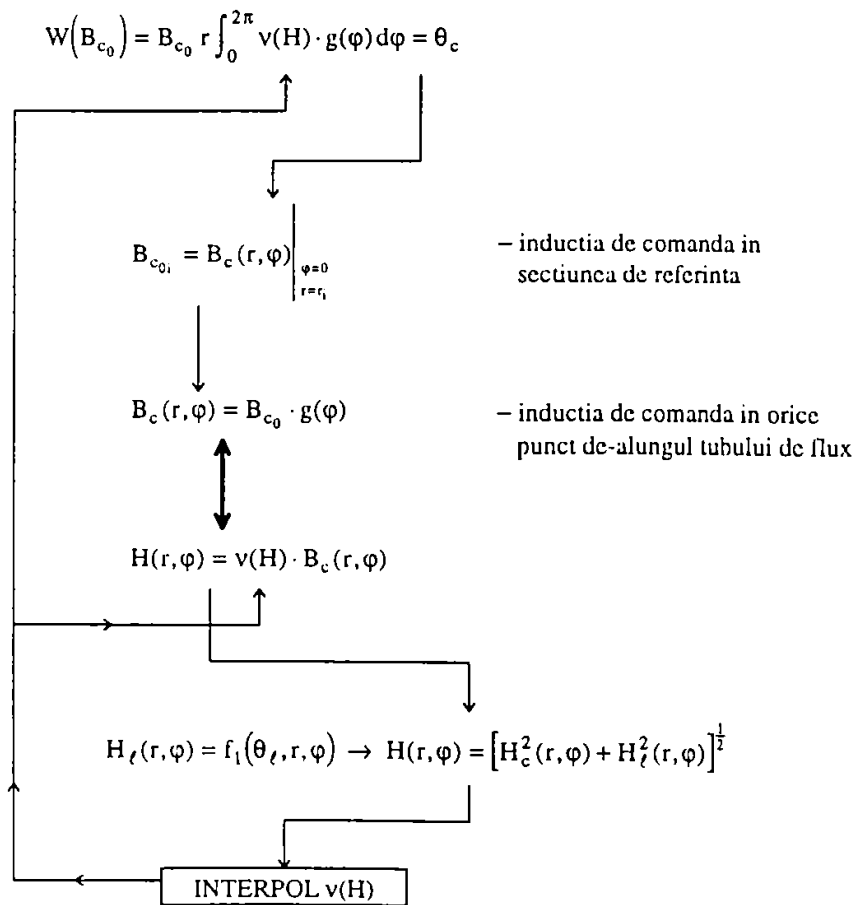


Fig. 4.12 Dependenta inductivitatii infasurarii de lucru pentru diversele valori ale curentului de comanda  $L(I_c)|_{I_c=const}$

0.3722	0.3716	0.3701	0.3661	0.3616	0.3561	0.3507	0.3464	0.3430	0.3407	0.3400
0.3707	0.3701	0.3671	0.3628	0.3572	0.3509	0.3455	0.3403	0.3365	0.3343	0.3335
0.3689	0.3676	0.3643	0.3597	0.3528	0.3464	0.3399	0.3346	0.3308	0.3285	0.3278
0.3667	0.3654	0.3619	0.3560	0.3489	0.3417	0.3348	0.3294	0.3256	0.3218	0.3203
0.3649	0.3635	0.3598	0.3527	0.3453	0.3371	0.3301	0.3245	0.3170	0.3126	0.3111
0.3634	0.3619	0.3571	0.3498	0.3415	0.3329	0.3259	0.3161	0.3086	0.3041	0.3027
0.3620	0.3605	0.3548	0.3471	0.3378	0.3291	0.3191	0.3083	0.3008	0.2963	0.2948
0.3609	0.3589	0.3527	0.3445	0.3345	0.3256	0.3120	0.3012	0.2936	0.2891	0.2876
0.3600	0.3575	0.3508	0.3418	0.3314	0.3198	0.3054	0.2944	0.2868	0.2823	0.2809
0.3589	0.3562	0.3492	0.3393	0.3286	0.3138	0.2992	0.2882	0.2805	0.2746	0.2726
0.3581	0.3552	0.3477	0.3369	0.3259	0.3082	0.2934	0.2823	0.2726	0.2665	0.2644
0.3575	0.3544	0.3464	0.3348	0.3219	0.3030	0.2879	0.2775	0.2650	0.2588	0.2568
0.3571	0.3537	0.3453	0.3328	0.3173	0.2980	0.2828	0.2683	0.2577	0.2516	0.2496
0.3569	0.3533	0.3441	0.3310	0.3130	0.2932	0.2770	0.2615	0.2509	0.2447	0.2427
0.3569	0.3530	0.3430	0.3293	0.3089	0.2887	0.2706	0.2550	0.2444	0.2382	0.2362
0.3572	0.3529	0.3421	0.3277	0.3050	0.2844	0.2645	0.2488	0.2382	0.2321	0.2301
0.3576	0.3530	0.3413	0.3262	0.3013	0.2803	0.2587	0.2429	0.2323	0.2262	0.2242
0.3583	0.3533	0.3407	0.3247	0.2978	0.2751	0.2531	0.2372	0.2266	0.2206	0.2186
0.3592	0.3537	0.3402	0.3222	0.2944	0.2699	0.2477	0.2318	0.2212	0.2152	0.2132



**Fig. 4.13** Algoritm MTFE pentru medii neliniare si superpozitii ortogonale de campuri  $\vec{H}$

Pentru aceeași configurație a domeniului de câmp și aceeași caracteristică neliniară  $B(H)$  dar convertită în  $v(H)$  s-a conceput un algoritm dual cu cel din figura 4.3 în care are loc o

compunere punctuala a intensitatilor campului magnetic de lucru si de comanda. Algoritmul obtinut are in principiu arhitectura din figura 4.13.

Subrutinele de interpolare  $v(B)$ , respectiv  $v(H)$  se realizeaza principial asa cum rezulta din schema logica redada in figura 4.14, iar subrutina  $B$  pentru calculul inductivitatii ca (4.17) are schema logica din figura 4.15. Logica primei interpolari  $v(B)$  este bazata pe ideea de aproximare din [Mi5], iar cea a caracteristicii  $v(H)$  prin dualitatea sa cu prima aproximare.

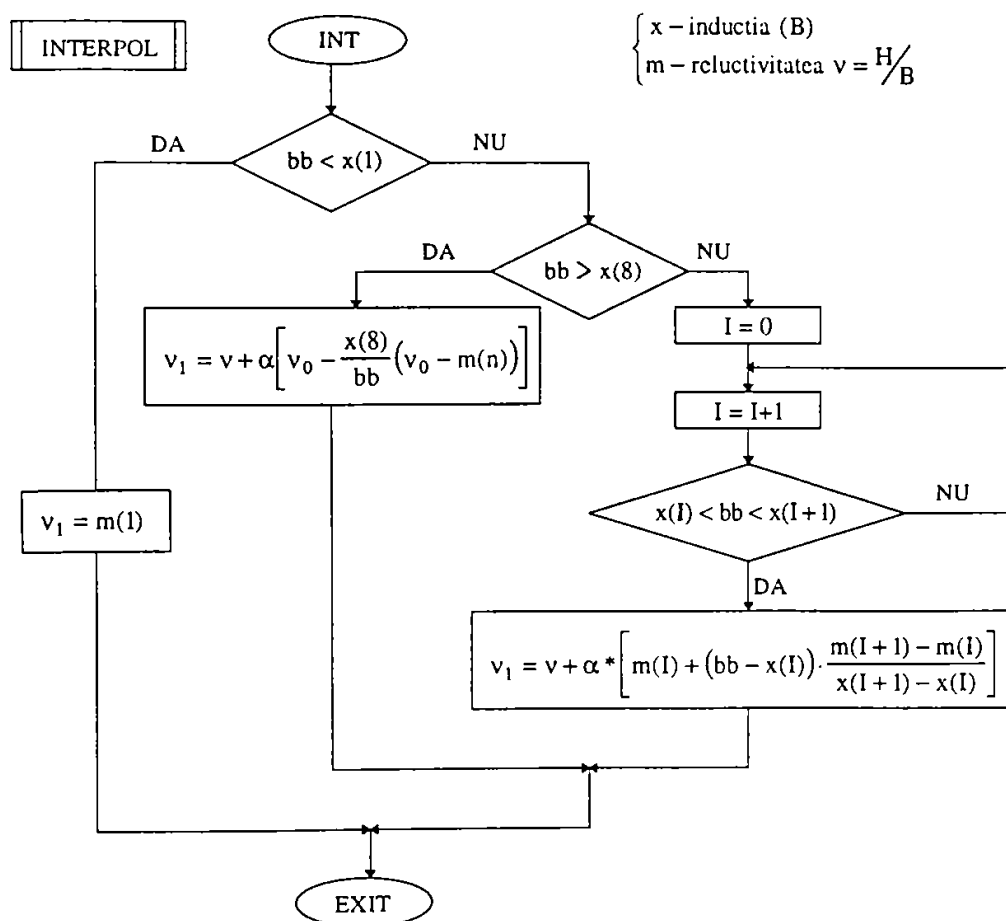


Fig. 4.14 Subrutina INTERPOL pentru interpolari pentru caracteristica  $v(B) = m(x)$

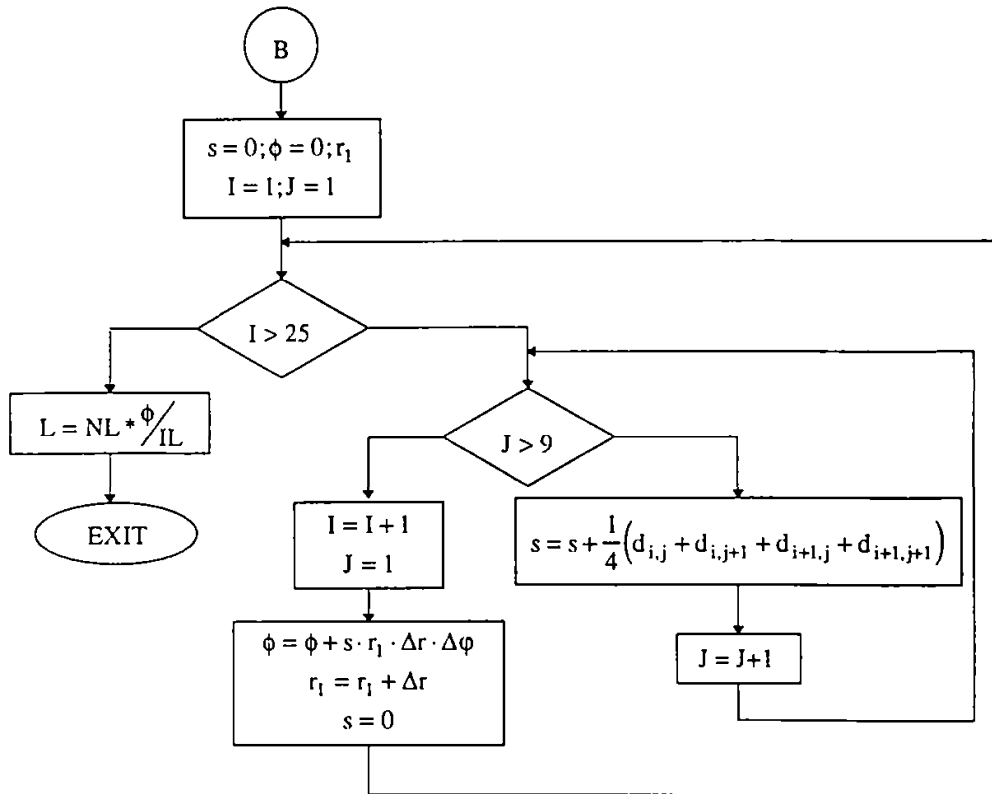


Fig. 4.15 Subrutina B de calcul a inductivitatii (postprocesare)

#### 4.3 Distributia campului magnetic intr-o bobina toroidala cu sectiune circulara, necomandata, prin MTFE

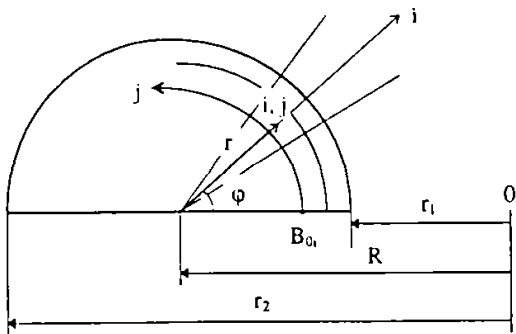


Fig. 4.16 Geometria domeniului de camp pentru MTFE

S-a considerat un miez toroidal din productia cur nta d f rite avand atele de catalog:  $r_1=5\text{mm}$ ;  $r_2=15\text{mm}$ ;  $R=10\text{mm}$  si caracteristica  $B(H)$ , respectiv  $v(B)$  cunoscuta.

Admitand o infasurare toroidala cu  $N_\ell=300$  spire si un curent de lucru  $I_\ell=0,1\text{A}$ , respectiv  $0,3\text{A}$ , prin metoda tubului de flux elementar s-a determinat distributia campului magnetic (s-a admis  $\Delta r=0,2\text{mm}$ ;  $\Delta\varphi=0,1\pi$ ). Avand in vedere geometria simpla (fig. 4.16) a domeniului de

camp, algoritmul MTFE pentru simetria toroidala a tuburilor de flux se reduce la forma:

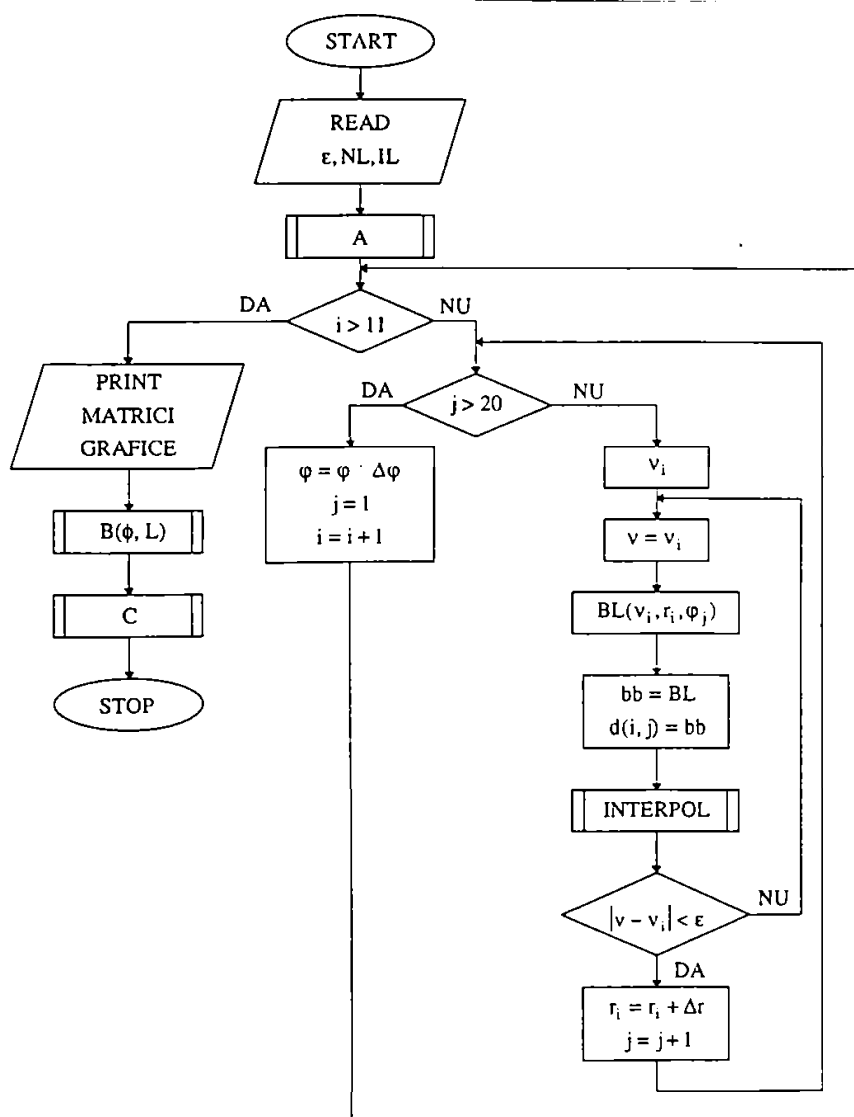
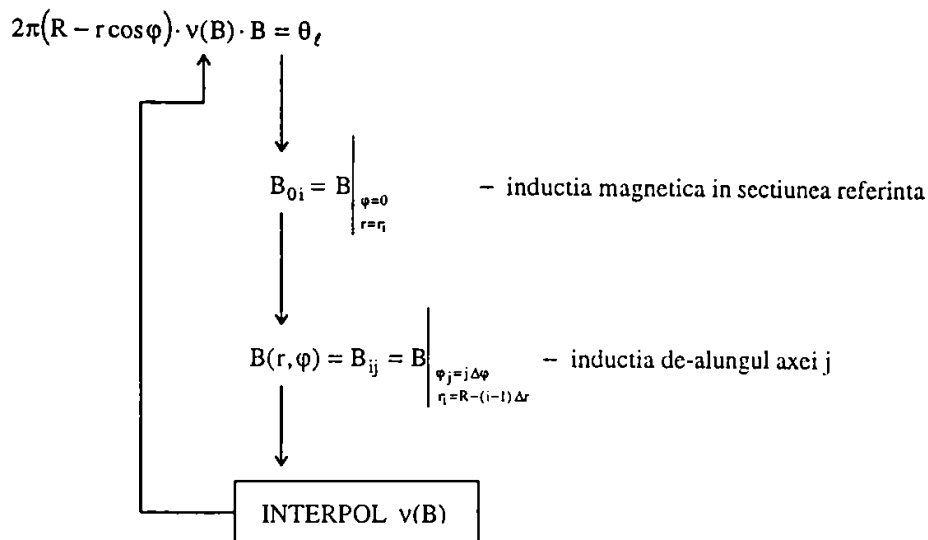
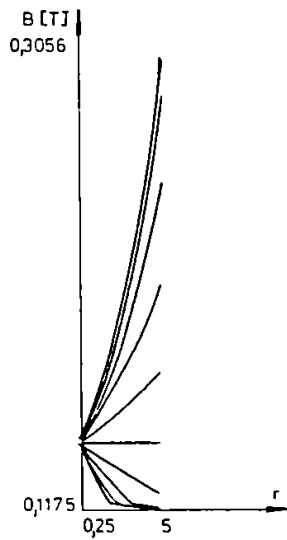


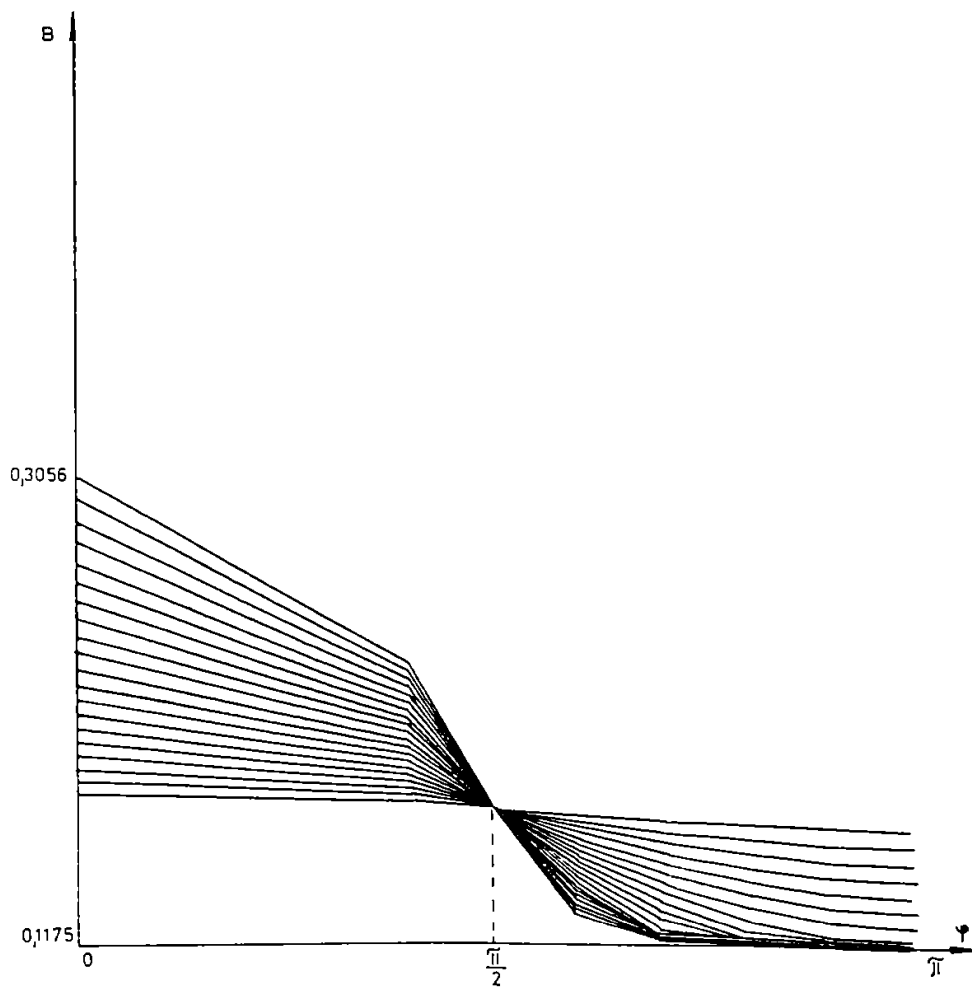
Fig. 4.17 Schema logica a programului aferent MTFE

Schema logica si programul aferente metodei pentru acest caz sunt prezentate in figura 4.17; subrutinele A, B, C si INTERPOL au aceeasi structura ca si in cazul precedent.

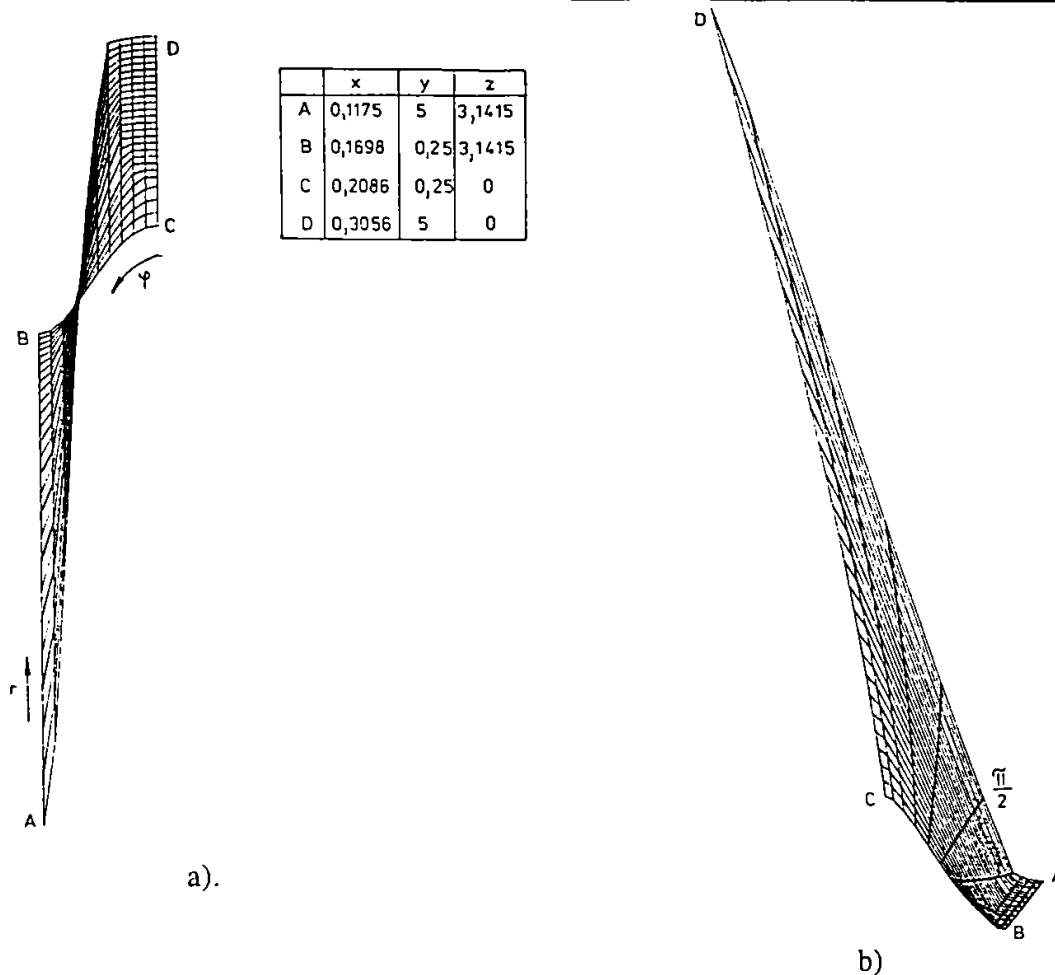


Rezultatele calculului inducției magnetice sunt prezentate tabelar și sunt plotate dependentele  $B(r)|_{\varphi}$  – figura 4.18,  $B(\varphi)|_r$  – figura 4.19 și reprezentarea  $B(r,\varphi)$  – figura 4.20.

**Fig. 4.18** Repartitia inducției în miezul magnetic:  $B(r)|_{\varphi}$



**Fig. 4.19** Repartitia inducției în miezul magnetic:  $B(\varphi)|_r$

Fig. 4.20 Repartitia inducției magnetice:  $B(r,\varphi)$ 

#### 4.4 Determinarea distribuției câmpului magnetic într-o bobină toroidală cu secțiune dreptunghiulară prin MTFE

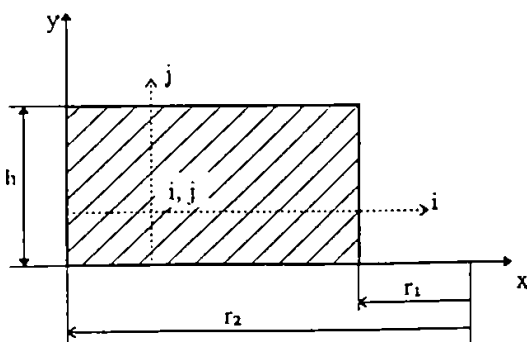


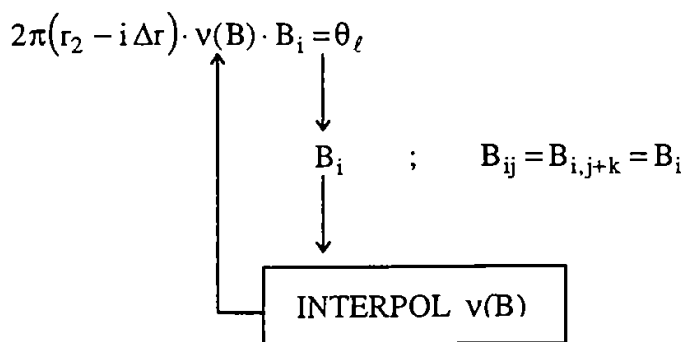
Fig. 4.21 Secțiune curentă prin miezul toroidal

Pentru o configurație de miez toroidal din producția curentă având în secțiune geometria din figura 4.21 pentru care se cunosc  $r_1=5\text{mm}$ ;  $r_2=15\text{mm}$ ;  $h=10\text{mm}$  și caracteristica  $v(B)$ .

S-a admis o înfășurare toroidală în jurul acestui miez cu  $N_\ell=300$  spire și  $I_\ell=0,1\text{A}$  respectiv  $0,3\text{A}$ , discretizarea făcându-se astfel:

$$\begin{aligned} r \rightarrow x; \quad \Delta r = \Delta x = 0,2\text{mm} & \quad i = \overline{1,51} \\ \varphi \rightarrow y; \quad \Delta y = 1\text{mm} & \quad j = \overline{1,10} \end{aligned}$$

Algoritmul aferent acestei geometrii prin MTFE ar avea următoarea structură:



Schema logica este prezentata in aceeasi structura ca si pentru problemele precedente dar cu particularizarile sale (fig. 4.22).

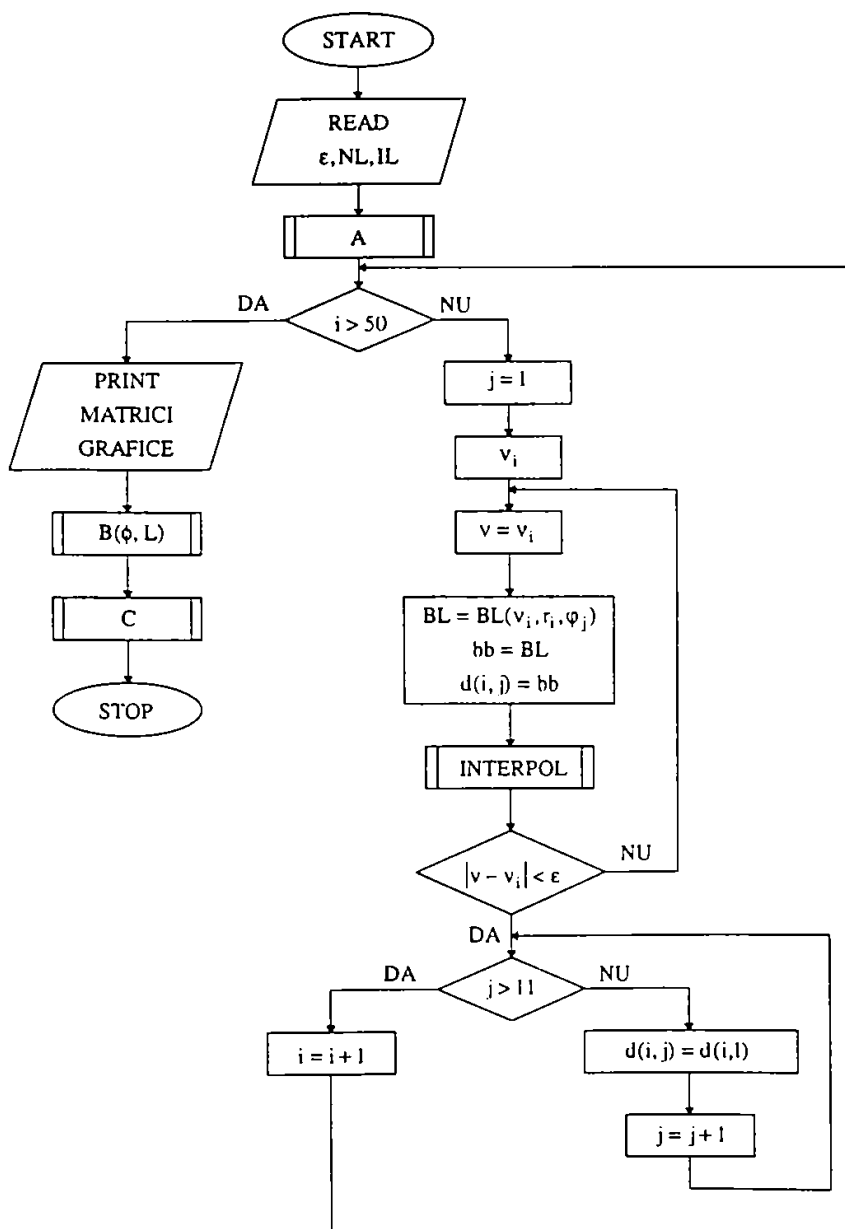


Fig. .4.22 Schema logica a programului aferent MTFE



#### 4.5 Distribuția câmpului magnetic în interiorul unui miez cu secțiune dreptunghiulară prin MTFE

S-a admis un miez de ferită dreptunghiular având caracteristicile geometrice ca în figura 4.23.

Pentru un astfel de miez se cunosc:  $a_1=40\text{mm}$ ;  $a_2=60\text{mm}$ ;  $b_1=30\text{mm}$ ;  $b_2=50\text{mm}$ ;  $h=10\text{mm}$  și caracteristica sa  $v(B)$ . Considerând o înfășurare de lucru cu  $N_\ell=2500$  spire și  $I_\ell=0,02\text{A}$  și o discretizare cu  $\Delta x=0,2\text{mm}$  se pot evalua marimile geometrice asociate unei linii de câmp  $\Gamma$ . Lungimea unei linii curenți  $\Gamma$  este:

$$\ell_\Gamma = 2(\ell_1 + \ell_2) = 2\left[2x + (b_1 + 2y_1)\right] = 2\left[a_1 + 2(i-1)\Delta x\right] + 2\left[b_1 + \frac{1}{2}(2x - a_1)\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\right]$$

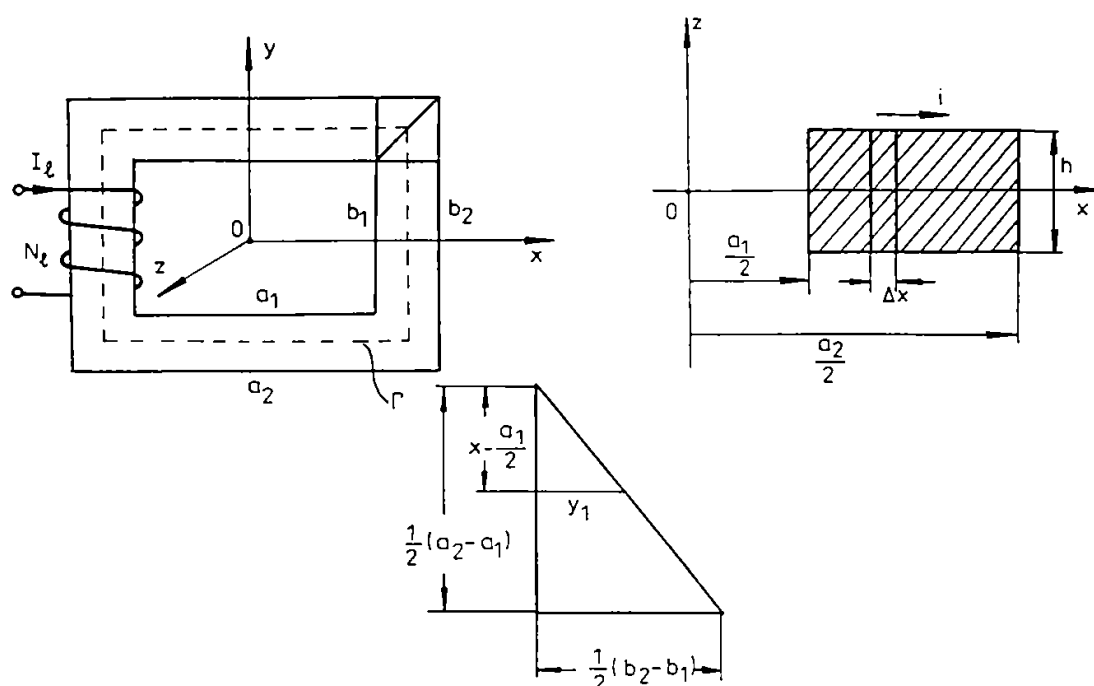
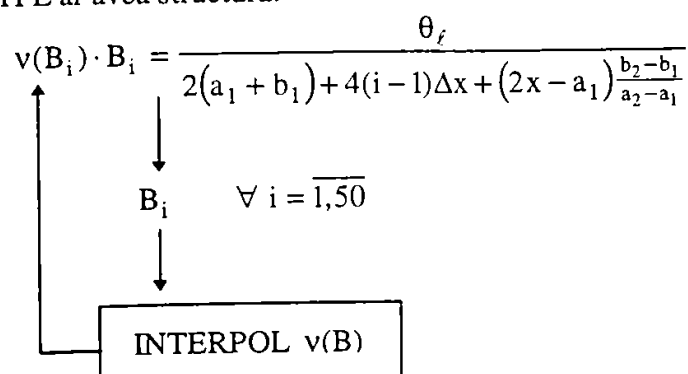


Fig. 4.23 Geometria domeniului de câmp magnetic

Algoritm conform MTFE ar avea structura:



In figura 4.24– a,b se prezinta rezultatul  $B(r,\varphi)$  respectiv  $L(I_\ell)$ .

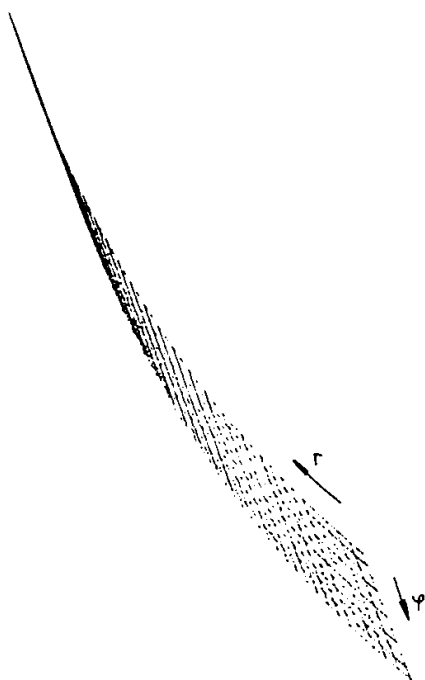


Fig. 4.24-a Repartitia campului  $B(x,z)$ , respectiv  $B(r,\varphi)$

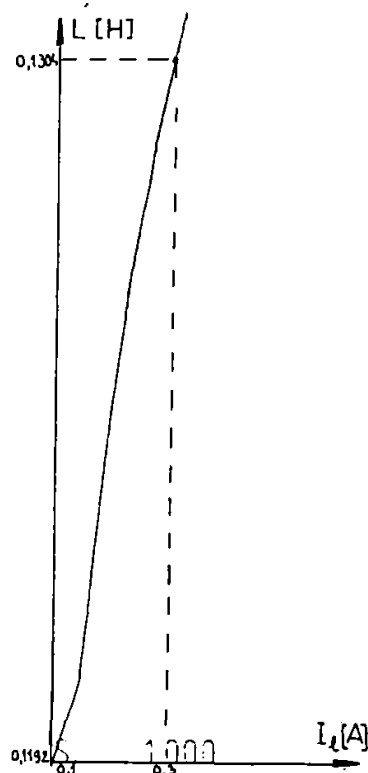


Fig. 4.24-b Dependenta inductivitatii in functie de curentul de lucru  $L(I_\ell)$

#### 4.6 Concluzii

1. Metoda tubului de flux elementar prezentata in acest capitol este o contributie originala a autorului si permite determinarea distributiei campului magnetic dintr-un dispozitiv magnetic neliniar cu o geometrie data. Se poate evalua distributia campului magnetic si a fluxului magnetic util prin miezuri, pierzandu-se campurile si fluxurile magnetice de dispersie a caror valoare in multe probleme tehnice prezinta mai putina importanta si pentru calculul carora exista in literatura alte metode de analiza numerica.
2. Se remarca ca pentru configuratia problemelor 1 si 2 functia de forma  $f(\ell)$ , respectiv  $g(\varphi)$  trebuie dedusa din considerente functionale si de geometria domeniului, iar pentru configuratii simple, ca in problemele 3 si 4, functia de forma este neutra, problemele au fost alese tocmai pentru a ilustra aplicarea metodei in astfel de cazuri.
3. Indiferent de numarul punctelor de discretizare, respectiv marimea pasului, volumul de calcul si volumul de memorie aferent sunt mici, ecuatia integrala specifica metodei se rezolva operativ.
4. Se apreciaza ca pentru probleme de campuri magnetice stationare sau cvasistationare, in general neliniare si unde geometria domeniului se poate reduce la un sistem de coordonate uzual pentru a stabili functia de forma, MTFE are avantaje nete in raport cu oricare alta metoda numerica.

## Cap.5 Simularea analogica (hibrida) a comportarii bobinelor neliniare pentru diferite modalitati de comanda ale acestora

Rezultatele obtinute in studiul unei bobine neliniare prin metode de analiza numerica a campului permit a determina distributia spatiala a campului magnetic, evaluarea energiei magnetice, fluxului, inductivitatii etc. Cand semnalele (curentii de lucru sau de comanda) sunt variabile in timp, influenta formei semnalului asupra comportarii in timp a dispozitivului este mai dificil de evaluat pe baza unei analize numerice de camp. Deasemenea, distorsiunile introduse in semnalul de alimentare nu sunt puse in evidenta doar de distributia spatiala a campului.

Simularea este o tehnica de realizare a unui model pentru un sistem real in scopul de a experimenta acest model; ea se concepe ca o prelungire a metodelor de analiza numerica acolo unde acestea devin mai putin eficiente.

Modelul fizic si matematic a unui sistem nelinier cuprinde mai mult sau mai putin exact toate aspectele, aproximand unele dintre acestea.

Simularea unui fenomen poate sa fie:

- **digitala:** modelul matematic se asociaza cu un algoritm numeric de rezolvare;
- **analogica:** permite obtinerea raspunsului sub forma grafica, util in studiul comportarii dinamice;
- **hibrida:** blocuri numerice pentru calculele distributiei unui camp magnetic si a fluxului magnetic (de exemplu) cuplat cu alte blocuri functionale intr-o schema de simulare.

Simularea analogica si hibrida folosita in studiul comportarii dinamice a unui sistem in timp real utilizeaza blocuri functionale care sa poata efectua operatii de: adunare-scadere, multiplicare, integrare, generatoare de functii etc.

Elaborarea programului de simulare analogica [P10, S13, Mi7] presupune:

- stabilirea variabilelor problemei si explicitarea ecuatiilor in raport cu derivata de ordin maxim;
- lista coeficientilor, a valorilor initiale, a domeniului maxim de variatie a marimilor de stare;
- normarea variabilelor dependente  $x = \frac{X}{X_{\max}}$  si a celor independente  $\tau = \alpha t$  cu  $X_{\max}$  astfel ales incat sa nu depaseasca unitatea de lucru;
- stabilirea schemei de calcul analogic (simulare analogica);

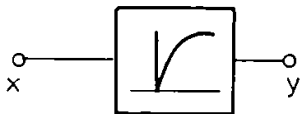
- transpunerea schemei pe simulator si fixarea valorilor coeficientilor din potentiometre;
- ecuatiile cu derivate parțiale in raport cu variabile spațiale trebuie transformate in derivate in raport cu timpul (singura variabila independenta intr-un simulator) prin discretizare.

## 5.1 Simularea neliniaritatilor

Neliniaritatile curențe in analiza campului magnetic se datoreaza comportarii neliniare a mediilor de camp manifestate prin fenomene de saturatie si de histerezis. Relatia  $B(H)$  este in general neliniara si neunivoaca de tip histerezis (magnetic). La frecvențe joase (regimuri stationare~cvasistationare) efectele macroscopice ale histerezisului fiind neglijabile se poate lua in considerare doar efectul de saturatie.

In analiza numerica a campului magnetic, caracteristica neliniara  $\mu(H)$  respectiv  $v(B)$  se poate aproxima pe portiuni fie analitic (polinoame, modelul Frölich, functii transcendente etc.), fie numeric prin interpolare Lagrange, Hermite, functii spline cubice etc. [Mi5, Mi6, Mi13, C7].

Pentru modelarea neliniaritatilor neunivoace de tip histerezis s-au impus fie modelul Frölich modificat [Mi5, R6], fie modelul Preisach-Néel [D11, R6, Mi5, M5].



**Fig. 5.1** Dependenta iesire–intrare realizata printr-un bloc de simulare

raportate  $y = \frac{B}{B_m}$  si  $x = \frac{H}{H_m}$  simulatorul (fig. 5.1) reda dependenta  $y(x)$ .

Caracteristicile neliniare ale elementelor de circuit si in general orice functie neliniara poate fi simulata cu un anumit grad de aproximare. Caracteristicile neliniare univoace de tipul  $B(H)$  sau  $H(B)$  pot fi simulate realizand sinteza unui sistem care sa asigure dependenta ceruta. Lucrand in marimi

### 5.1.1 Simularea neliniaritatilor univoace

Pentru neliniaritati de tip saturatie, caracteristica  $H(B)$  poate fi aproximata prin functii transcendente de forma:

$$H = \alpha_1 \operatorname{sh} \beta_1 B \leftrightarrow x = \alpha \operatorname{sh} \beta y \quad (5.1)$$

unde marimile raportate au valorile:

$$x = \frac{H}{H_m}; y = \frac{B}{B_m}; \alpha = \frac{\alpha_1}{H_m} = 0,166; \beta = \beta_1 \cdot B_m = 300,$$

functia  $x(y)$  este solutie a ecuatiei diferentiale:  $\frac{d^2x}{dy^2} - \beta^2 x = 0$ , iar  $y(t) = \sin \omega t$  este solutie a ecuatiei  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$ .

Caracteristica  $x(y)$  univoca o putem exprima si ca  $y(x)$  sub forma:

$$y = \frac{1}{\beta} \operatorname{Argsh} \frac{x}{\alpha} = \beta' \operatorname{Argsh} \alpha' x = \alpha' \beta' \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \alpha'^2 x^2}} \quad (5.2)$$

Cele doua functii date de (5.1) si (5.2) se pot simula ca in figura 5.2 unde generatorul de semnal G.S. produce excitatia sinusoidala de la intrare.

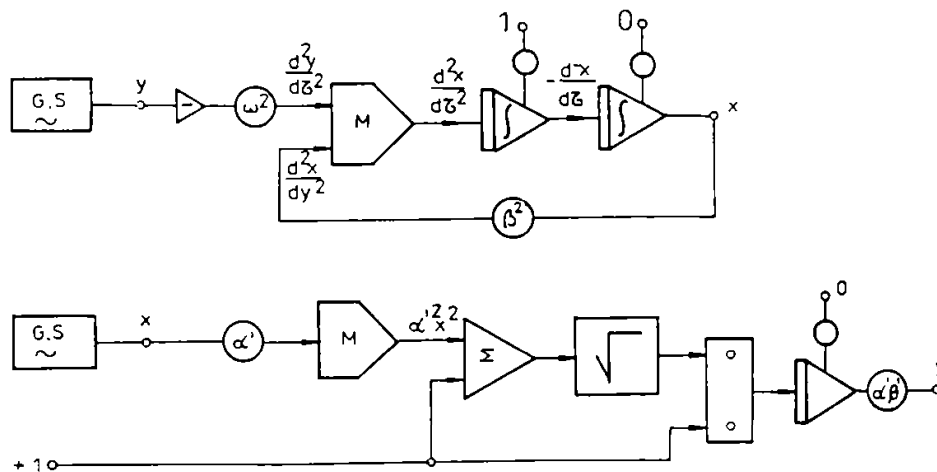


Fig. 5.2 Simularea caracteristicii neliniare  $x(y)$ , respectiv  $y(x)$  pentru excitatie sinusoidala

Caracteristici neliniare cu saturatie  $x(y)$  approximate prin functii transcendente de forma

$$y = \alpha \operatorname{Arctg} \beta x \quad (5.3)$$

cu  $\alpha = 0,68$ ,  $\beta = 7,73$  coeficientii de aproximare (dedusi pe baza erorii patratice minime), pot fi simulate pe baza corespondentei date de relatia integrala:

$$y = \alpha \beta \int_0^x \frac{dx}{1 + \beta^2 x^2} = \alpha \int_0^{\tau} \frac{\beta \cos \tau}{1 + \beta^2 \sin^2 \tau} d\tau = \alpha \int_0^{\tau} \frac{\cos \tau}{\frac{1}{\beta} + \beta \sin^2 \tau} d\tau \quad (5.4)$$

care transpusa in model analogic in figura 5.3 reprezinta in acelasi timp schema analogica de simulare.

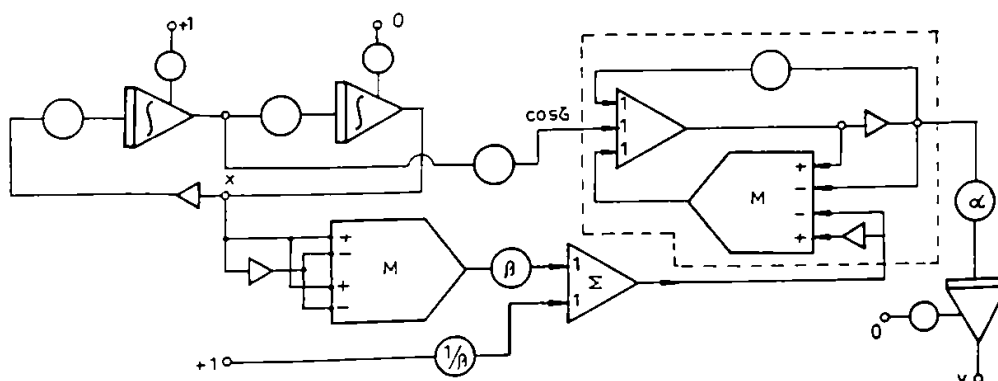


Fig. 5.3 Simularea caracteristicii neliniare  $y(x)$  prin blocuri de functii transcendente

## 5.1.2 Simularea ciclurilor histerezis

Atunci cand studiul sistemului neliniar pretinde a se lua in considerare existenta ciclului histerezis real, acesta nu poate fi simulat cu blocurile componente ale calculatoarelor analogice existente (tip MEDA sau tip ENDIM). In literatura [B5, C7, M5] exista numeroase propuneri pentru simularea buclelor histerezis, mai ales in sisteme automate. Dependenta  $B(H)$  care in marimi raportate devine  $y(x)$  este data de tipul materialului neliniar; la un  $H$  dat nu se poate obtine un  $B$  in mod univoc, trebuie ca simulatorul sa tina seama de magnetismul remanent al materialului.

In [H4] se propune o anumita descompunere a ciclului histerezis real in cicluri intermediare in concordanta cu feromagnetismul procesului de magnetizare, limitandu-se numarul domeniilor magnetice.

### 5.1.2.1 Varianta I de simulare

Preluand ideea lucrarii amintite anterior, s-a stabilit un algoritm de identificare a unui ciclu histerezis dat si s-a realizat pe aceasta baza un simulator pentru fenomenul de histerezis.

O bucla de histerezis (fig. 5.4-a) se poate descompune formal intr-o bucla cu saturatie plata (fig. 5.4-b) si o caracteristica neliniara univoca (fig. 5.4-c).

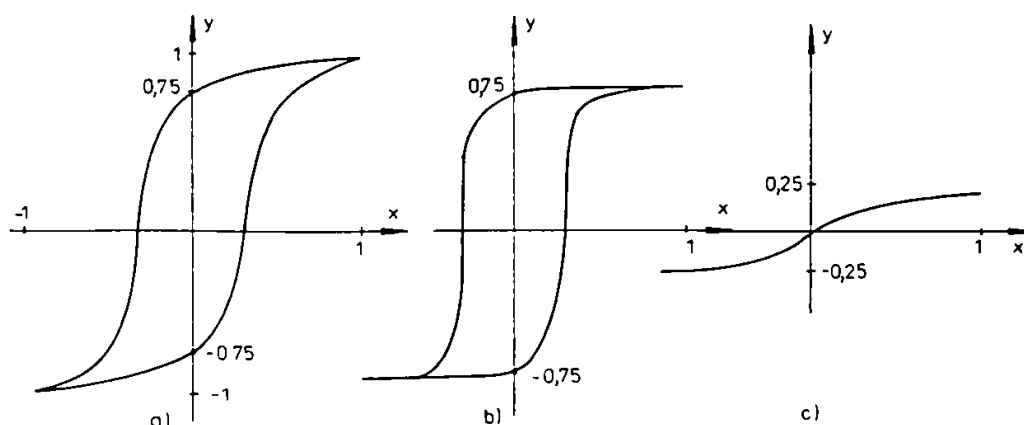
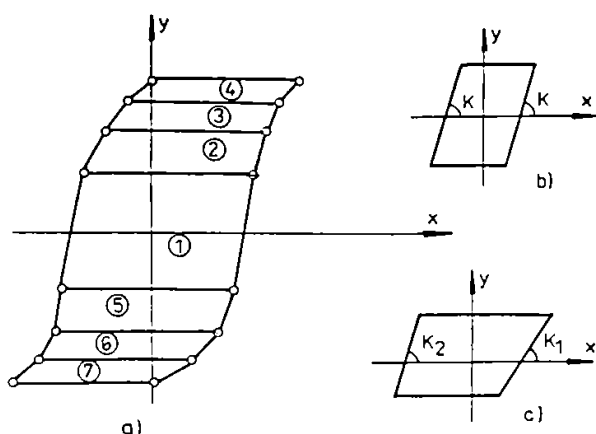


Fig. 5.4 Descompunerea unui ciclu histerezis real (a) in doua functii  $y(x)$  separate (b si c)

La randul sau bucla cu saturatie plata (fig. 5.4-b) o impartim in mai multe bucle (fig. 5.5-a):

- o bucla centrala (1) avand un histerezis de tip paralelogram (de tipul I);
- sase bucle de forma unui trapez traslatat (de tipul II).

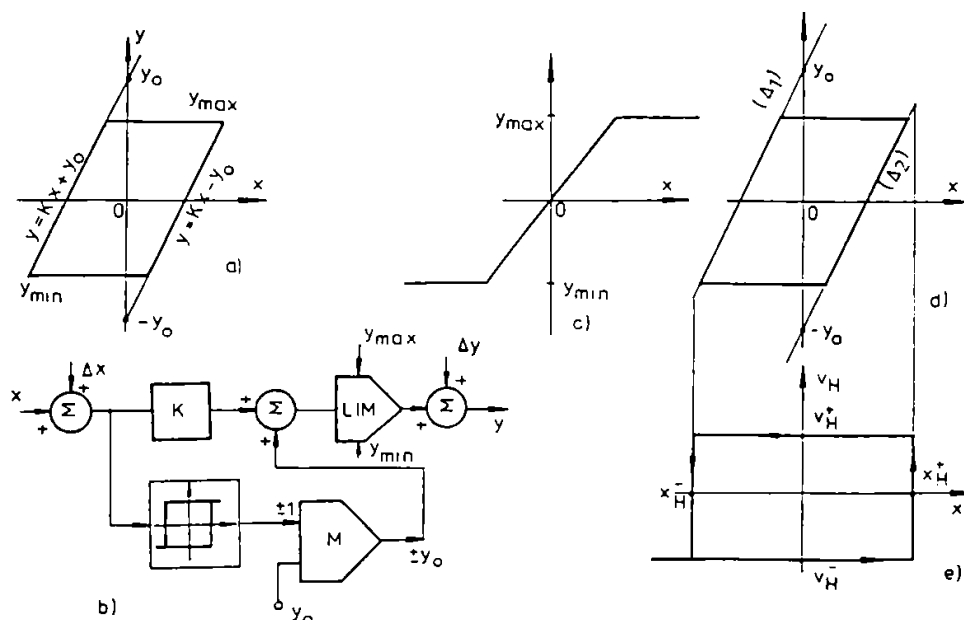
Elementele de tipul I prezinta aceeasi panta  $K$  pe ambele laturi ale caracteristicii intrare-iesire (fig. 5.5-b), iar cele de tipul II prezinta pante diferite  $K_1$  si  $K_2$  (fig. 5.5-c) si a carui centru poate fi deplasat fata de origine.



**Fig. 5.5** Discretizarea buclei histerezis plate prin bucle componente de tipul I si II

### Elemente de tipul I

Caracteristica intrare-iesire a acestui element (fig. 5.6-a) are drept parametri panta  $K$ , ordonata  $\pm y_0$ , pragul de saturatie  $y_{max}$ ,  $y_{min}$  (pentru simplificarea constructiei s-a admis  $y_{max} = -y_{min}$ ). Structura elementului de tipul I este prezentata in figura 5.6-b.



**Fig. 5.6** Realizarea simularii unui ciclu de tipul I

Dreptele  $\Delta_1$  si  $\Delta_2$  de ecuatii  $y = Kx + y_0$  respectiv  $y = Kx - y_0$  se obtin prin sumarea lui  $+y_0$  si  $-y_0$ , obtinute de la un bloc de histerezis drept avand caracteristica din figura 5.6-e si trecute printr-un bloc multiplicator  $M$ .

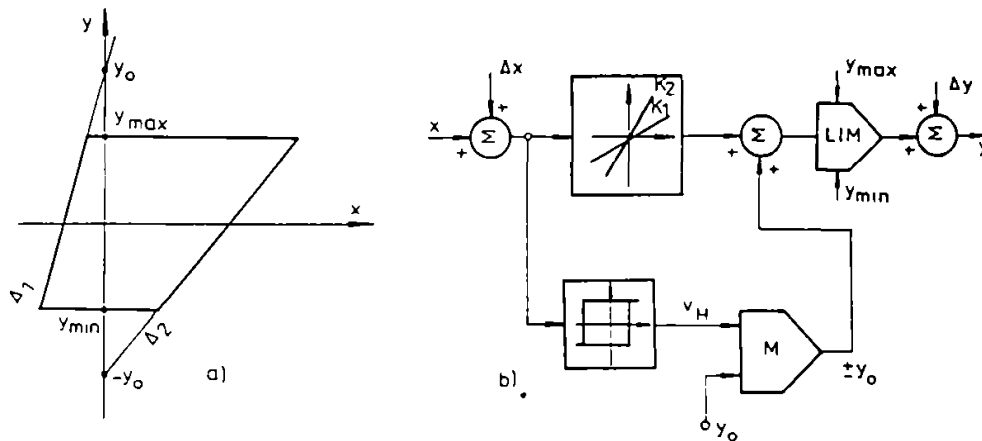
Elementul limitator (LIM) cu caracteristica din figura 5.6-c limiteaza punctul de functionare pe dreptele  $\Delta_1$  si  $\Delta_2$  intre cele doua limite ( $\pm y_{max}$ ).

La cresterea semnalului de intrare, cand  $x$  depaseste valoarea  $x_H^+$  se comuta punctul de functionare de pe  $\Delta_2$  pe  $\Delta_1$ , iar cand  $x$  scade sub  $x_H^-$  acelasi bloc comuta punctul de functionare din nou pe  $\Delta_2$ .

Pentru a deplasa centrul de greutate al caracteristicii cu  $\Delta x$  pe axa  $Ox$  si  $\Delta y$  pe axa  $Oy$  se sumeaza la marimea de intrare, respectiv de iesire, marimile  $\Delta x$  si  $\Delta y$  (fig. 5.6-b).

### Elemente de tipul II

Caracteristica de intrare-iesire a acestui element prezentata in figura 5.7-a, este formata din dreptele  $\Delta_1$  avand ecuatia  $y = k_1x + y_0$  si  $\Delta_2$  de ecuatie  $y = k_2x - y_0$ , una ( $\Delta_2$ ) parcursa pentru marimea de intrare ( $x$ ) crescatoare, iar cealalta ( $\Delta_1$ ) pentru marimea  $x$  evoluand descrescator.



**Fig. 5.7** Realizarea simulării unui ciclu de tipul II

La acest element simultan cu comutarea valorilor  $+y_0 \leftrightarrow -y_0$  se impune și realizarea comutării  $K_1 \leftrightarrow K_2$ . Blocul de histerezis drept (fig. 5.7-b), având ieșirea  $v_H$  comanda selecția pantelor  $K_1$  și  $K_2$ , respectiv a ordonatelor la origine  $\pm y_0$ . Limitarea superioară și inferioară la valorile  $y_{max}$  și  $y_{min}$  este dată de blocul "LIM", iar deplasarea caracteristicii se face sumând marimile  $\Delta x$  și  $\Delta y$  la intrare, respectiv la ieșire. Pentru a putea realiza bucle histerezis de acest tip în diverse configurații se pot regla parametrii  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $y_0$ ,  $y_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ .

Caracteristica neliniară din figura 5.4-c se realizează prin aproximări liniare pe porțiuni cu amplificator operațional cu amplificare variabilă, respectiv cu praguri decalate prin diode. Curba este aproximată printr-un număr de 8 segmente (cate 4 în fiecare alternanță) având pantele variabile  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  și  $K_3$ .



### 5.1.3 Algoritm de identificare a parametrilor necesari simularii unui histerezis

Pentru a putea construi elementul neliniar de tipul I, cele sase elemente de tipul II si caracteristica neliniara univoca trebuiesc, plecand de la un ciclu histerezis dat, sa se determine parametrii necesari simularii.

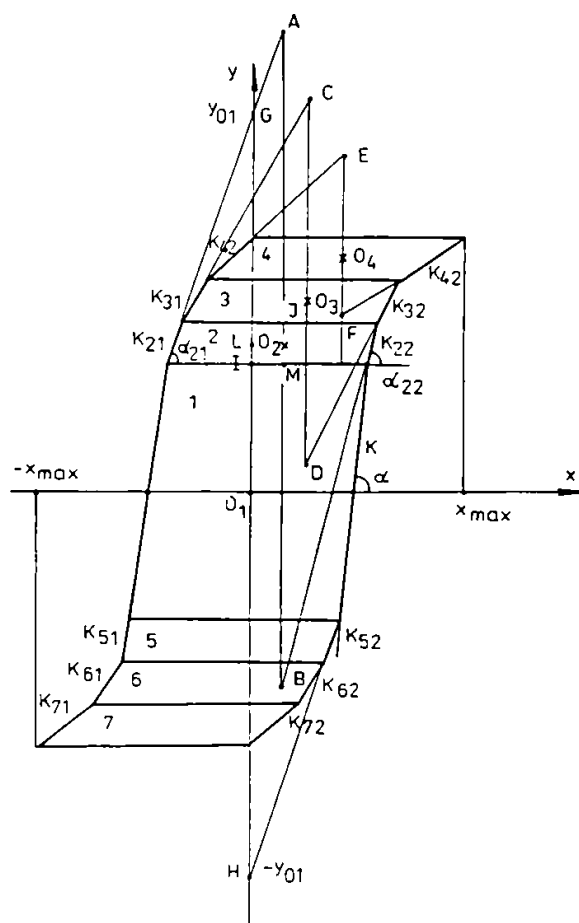


Fig. 5.8 Deducerea elementelor necesare simulării unui ciclu histerezis real

$$y_{05} = y_{02}; y_{\max_5} = -y_{\min_2}; y_{\min_5} = -y_{\max_2}; K_{52} = K_{21}; K_{51} = K_{22}$$

Bucła histerezis plată din figura 5.4-b se obține prin sumarea caracteristicilor pentru elementele 1, 2, ..., 7, respectiv prin sumarea ieșirilor acestor elemente. Facând și sumarea caracteristicii neliniare univoce se obține bucła reală de histerezis.

Câteva din oscilogramele obținute sunt prezentate (prin fotografiere la osciloscop) în figura 5.9:

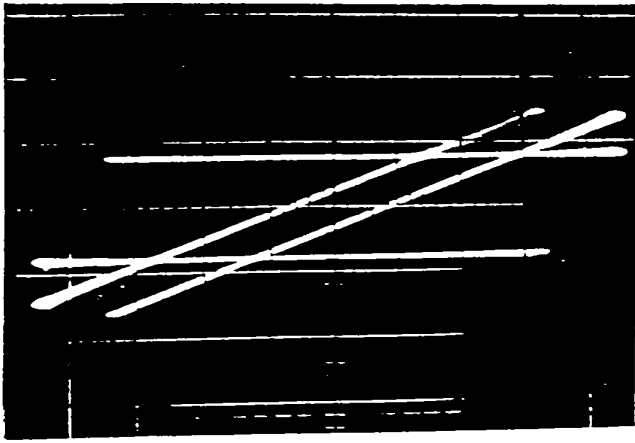
Grafic se citesc (fi. 5.8) parametrii

$$y_{\max_1} = \overline{O_1 I} = |y_{\min_1}|, y_{01} = \overline{O_1 G}, K = \operatorname{tg} \alpha$$

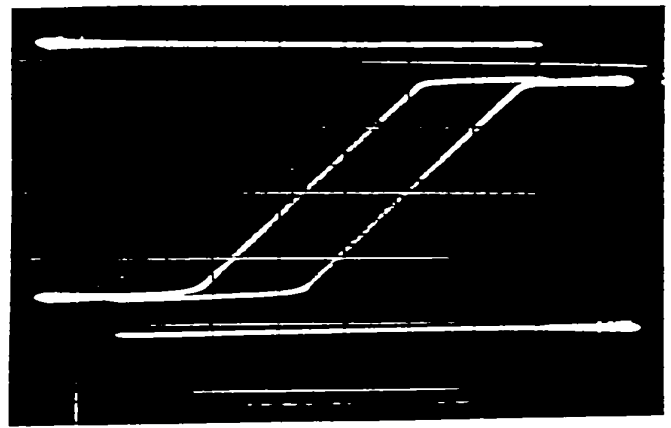
care definesc histerezisul de tipul I.

Pentru elementele de tipul II (de exemplu histerezisul 2) se duc dreptele  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  de unghiuri  $\alpha_{21}$  și  $\alpha_{22}$  și față de centrul sau  $O_2$  se obțin ordonatele la origine  $y_{02} = \overline{O_2 A} = \overline{O_2 B}$ . Deasemenea, nivelele maxim și minim ale acestui ciclu vor fi  $y_{\max_2} = \overline{O_2 J}$ ,  $y_{\min_2} = \overline{O_2 M}$ , pantele dreptelor  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  vor fi  $K_{21} = \operatorname{tg} \alpha_{21}$  și  $K_{22} = \operatorname{tg} \alpha_{22}$ , iar deplasarea centrului acestui histerezis este  $\Delta x_2 = \overline{O_2 L}$  și  $\Delta y_2 = \overline{O_1 L}$ .

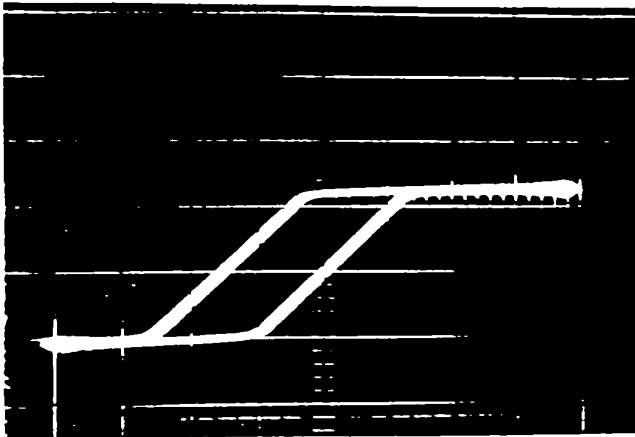
Similar se procedează pentru histerezisele 3 și 4. Elementele histereziselor 5, 6 și 7 se obțin în cele pentru 1, 2 și 3 printr-o rotație de  $180^\circ$  și o translație. Pentru perechea 2-5 se obține:



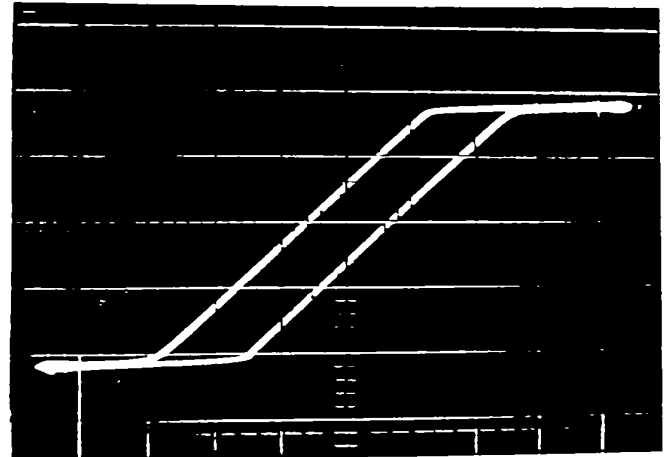
a).



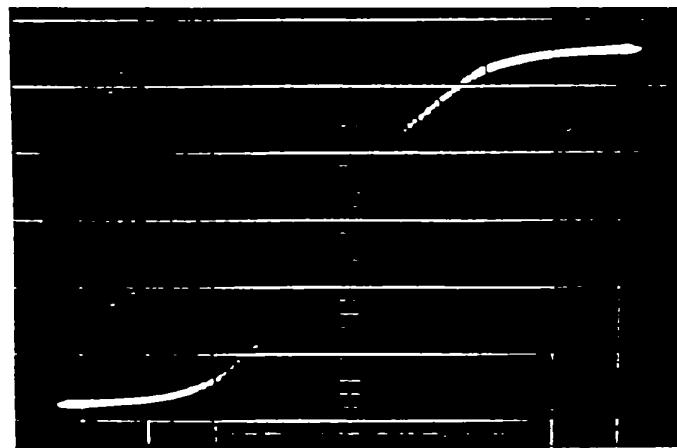
b).



c).



d).



e).

**Fig. 5.9** Rezultate experimentale obtinute pentru subblocurile componente ale simulatorului

fig. 5.9-a: dreptele inclinate si cele orizontale parcurse de semnalul de iesire la trecerea

$$+y_0 \leftrightarrow -y_0;$$

fig. 5.9-b: histerezis de tipul I, centrat, limitat simetric. Peste caracteristica sa este suprapusa caracteristica trigger-ului care efectueaza selectia dreptelor inclinate ( $f = 1 \text{ kHz}$ );

fig. 5.9-c: histerezis de tipul II, descentrat, limitat asimetric ( $f = 50 \text{ Hz}$ );

fig. 5.9-d: histerezis de tipul I ( $f = 1 \text{ kHz}$ ), limitat simetric;

fig. 5.9-e: caracteristica elementului nelinier univoc.

### 5.1.4 Varianta II de simulare

S-a realizat simularea unei bucle reale de histerzis considerand-o formata din trei domenii: un histerzis oblic central (de tipul I) ca si in varianta I cu particularitatile descrise anterior si prin doua generatoare de functii neliniare de tipul celui care realizeaza functia univoca din varianta I.

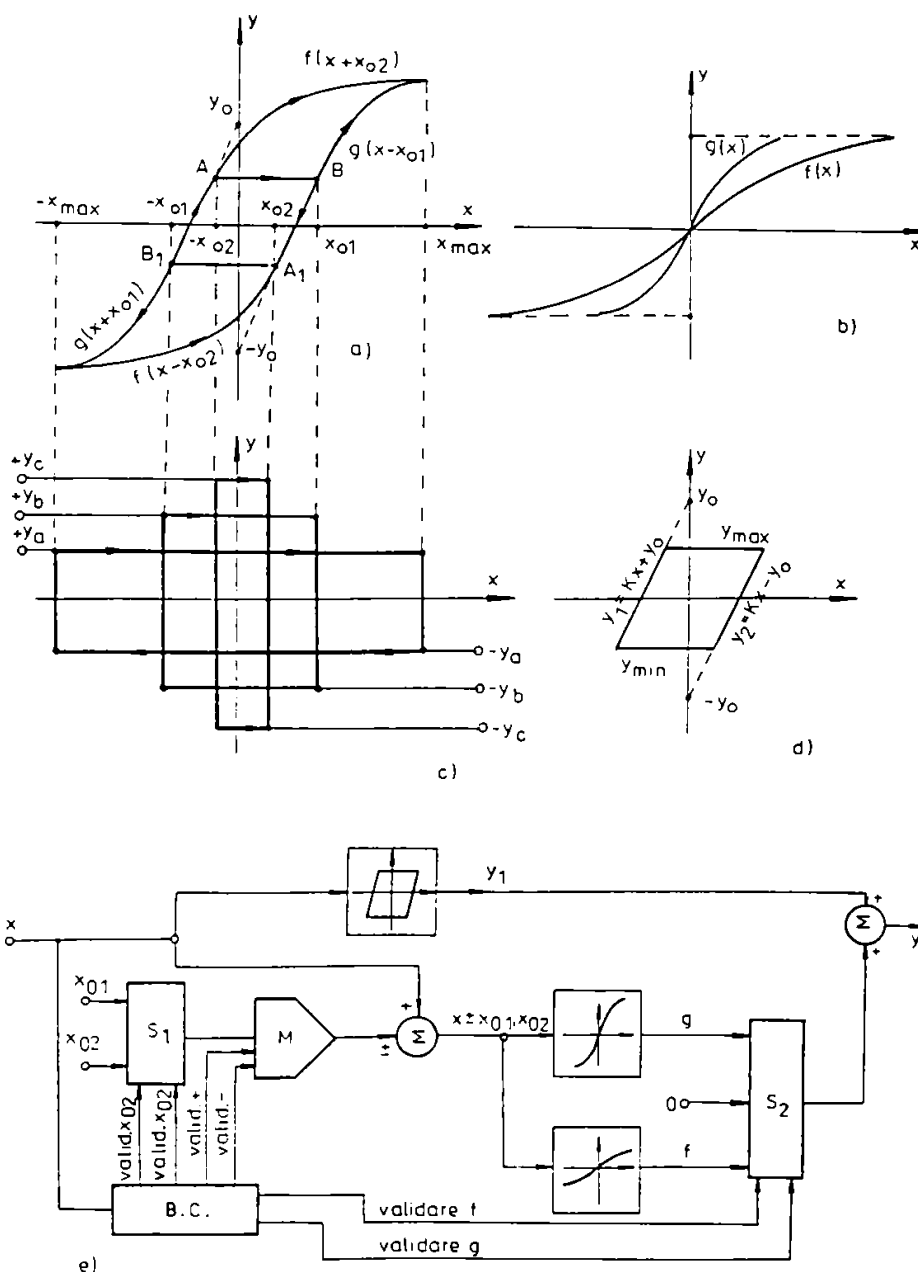


Fig. 5.10 Schema bloc de simulare si deducerea elementelor necesare in varianta II de simulare

Bucula de histerzis se descompune in cele trei blocuri ca in figura 5.10-a. Pentru blocul histerzis central sunt necesare marimile:  $y_0$ ,  $K$ ,  $y_{\max} = |y_{\min}|$ ,  $x_{01}$ ,  $x_{02}$  si  $x_{\max}$ , cu semnificatiile din figura. Functiile  $f$  si  $g$  se determina de pe caracteristica reala.

Sensul de variatie a semnalului de intrare  $x$  determina sensul de parcurgere a buclei. Corelarea celor doua sensuri de parcurgere se realizeaza prin intermediul unui bloc de comanda (BC) (fig. 5.10-e). Iesirile blocului de comanda BC selecteaza valorile  $x_{01}$  sau  $x_{02}$ , semnul  $+$  sau  $-$ , respectiv functia  $f$  sau  $g$ . Elementul de histerezis de tipul I realizeaza functia  $y_1(x)$ . Toate blocurile au parametri ajustabili.

Blocul de comanda detecteaza pragurile in ordinea:  $-x_{\max}, -x_{01}, -x_{02}, x_{02}, x_{01}, x_{\max}$  si da comanda de validare necesara in momentul cand marimea de intrare  $x$  atinge pragurile respective (pentru  $x$  crescator). Pentru semnal de intrare  $x$  descrescator, pragurile sunt atinse in ordine inversa. Prin urmare, blocul de comanda BC trebuie sa sesizeze atat pragurile argumentului cat si ordinea in care sunt atinse pentru a valida corect formarea functiei de iesire  $y$ .

Selectorul  $S_1$  alege valoarea  $x_{01}$  sau  $x_{02}$  in functie de validarea blocului de comanda, iar selectorul  $S_2$  alege una dintre functiile  $f$  sau  $g$ , respectiv valoarea zero tot in functie de validarea blocului de comanda. Algoritmul de identificare a parametrilor necesari pentru simularea prin vaianta II rezulta analog:

- Se descompune caracteristica in trei domenii corespunzatoare (fig. 5.10-a).
- Histerezisul central, de tipul I este definit prin parametrii  $y_0, k = \operatorname{tg} \alpha$  si  $y_{\max} = |y_{\min}|$  ca in figura 5.10-d, iar proiectiile varfurilor acestui histerezis pe axa  $Ox$  sunt punctele de abscisa  $-x_{01}, -x_{02}, x_{02}, x_{01}$  ale caror valori sunt necesare in algoritmul de simulare. Tot grafic rezulta si valorile  $-x_{\max}$  si  $x_{\max}$  ca in figura 5.10-a.
- Pentru a determina parametrii necesari construirii functiilor neliniare  $f$  si  $g$  se considera doua sisteme de axe de coordonate translatate, avand centrele in punctele A si B (fig. 5.10-a). Parametrii necesari construirii functiilor  $f$  si  $g$  se obtin aproximand prin patru segmente fiecare din ramurile ce pleaca din A si B (analog ca la functia neliniara din primul model de aproximare).

Pentru validarea expresiei corecte a functiei de iesire din blocul de comanda BC se folosesc semnalele  $y_a^+, y_b^+, y_c^+, y_a^-, y_b^-, y_c^-$  (fig. 5.10-c) obtinute cu trei circuite de basculare ale caror praguri de basculare sunt  $\pm x_{\max}, \pm x_{01}, \pm x_{02}$  sunt obtinute printr-o corelare a figurii 5.10-a cu figura 5.10-c.

Intervalul de variatie a marimii de intrare $x$	Sensul de variatie	Expresia corecta a marimii de iesire	Validarea functiei de iesire
$-x_{\max} \leq x \leq x_{02}$	crescator	$y = y_1 + f(x - x_{02})$	$y_a^+ y_b^+ y_c^+$
$x_{02} \leq x \leq x_{01}$	crescator	$y = y_1$	$y_a^+ y_b^+ y_c^-$

$x_{01} \leq x \leq x_{\max}$	crescator	$y = y_1 + g(x - x_{01})$	$y_a^+ y_b^- y_c^-$
$-x_{02} \leq x \leq x_{\max}$	descrescator	$y = y_1 + f(x + x_{02})$	$y_a^- y_b^- y_c^-$
$-x_{01} \leq x \leq -x_{02}$	descrescator	$y = y_1$	$y_a^- y_b^- y_c^+$
$-x_{\max} \leq x \leq -x_{01}$	descrescator	$y = y_1 + g(x + x_{01})$	$y_a^- y_b^+ y_c^+$

Din tabel rezulta expresiile functiilor care valideaza valorile  $x_{01}$  sau  $x_{02}$ , semnul “+” sau “-”, respectiv functia  $f$  sau  $g$ .

Iesirile analogice  $y_a^+, y_b^+, y_c^+, y_a^-, y_b^-, y_c^-$  se convertesc in iesiri digitale  $y_a, y_b, y_c, \bar{y}_a, \bar{y}_b, \bar{y}_c$ . Expresiile validarii date de blocul de comanda sunt:

$$\begin{aligned}
 v_{x_{01}} &= y_a \bar{y}_b \bar{y}_c + \bar{y}_a y_b y_c \\
 v_{x_{02}} &= \bar{y}_a y_b y_c + y_a \bar{y}_b \bar{y}_c \\
 v_+ &= y_a \bar{y}_b \bar{y}_c + y_a y_b y_c \\
 v_- &= y_a y_b y_c + y_a \bar{y}_b \bar{y}_c \\
 v_f &= v_{x_{02}} \\
 v_g &= v_{x_{01}}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

iar cele patru functii de comanda sunt implementate prin scheme logice adecvate.

## 5.2 Simularea comportarii bobinelor neliniare comandate

Bobinele comandate ortogonal introduse in literatura de specialitate prin lucrarile [A2, B1, D9, G6, H5, L3, M1, P10, R6, S3, S4, S14, Mi7, Mi8 etc] pun in evidenta functionarea acestora, proprietatile lor si posibilitatea utilizarii lor in tehnica masurarilor, a construirii unor dispozitive speciale. Se lucreaza exclusiv cu dependente flux-solenatie si caracteristicile neliniare asociate, aproximabile, ale acestora. In [S14] se introduc noi concepte legand problema bobinelor neliniare comandate in mod direct de marimile de stare a campului:  $\bar{B}_\ell, \bar{B}_c, \bar{B}, \bar{H}$ ... si nu prin intermediul unor marimi globale de circuit neliniar, flux – solenatie etc.

Astfel, daca in bobina de comanda, asezata ortogonal in spatiu in raport cu bobina de lucru, se injecteaza un curent de o anumita forma si circuitul magnetic (miezul) pentru campul de comanda este inchis (fara intrefieruri), atunci se defineste comanda prin “camp magnetic ortogonal” ( $H_1$ ) (fig. 5.11-a). Aceasta ar fi situatia analoaga cu comanda prin “solenatie” din literatura anterioara.

Daca bobina de comanda este alimentata cu o tensiune, respectiv circuitul magnetic de comanda este intrerupt (cu intrefier), iar inductia creata de aceasta infasurare  $\bar{B}_c$  este ortogonala in spatiu cu inductia creata de infasurarea de lucru  $\bar{B}_l$  avem de a face cu o comanda prin inductie ortogonala ( $B_\perp$ ) (fig. 5.11-b). Aceasta ar corespunde, in mod analog, cu o comanda prin flux magnetic.

In cele ce urmeaza dorim ca printr-o simulare analogica a unor astfel de dispozitive magnetice neliniare (DMN) sa punem in evidenta cum pot fi influentate caracteristicile bobinei de lucru  $u_l(i_l) \sim \psi_l(i_l) \sim B_l(H_l)$  in functie de marimile de comanda  $\bar{H}_c$  la comanda prin intensitate  $H_\perp$ , respectiv  $\bar{B}_c$  la comanda prin inductie  $B_\perp$ .

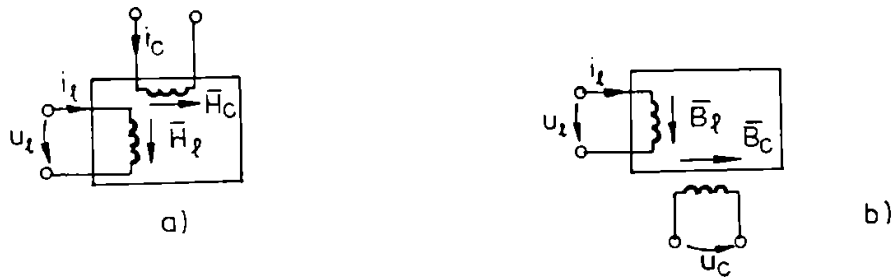


Fig. 5.11 Comanda unei bobine prin intensitatea  $\bar{H}_c$  (a),  
respectiv prin inductia  $\bar{B}_c$  (b)

Astfel de simulari facute in regimuri permanente in care marimile de comanda sunt functii continue, sinusoidale de aceeasi frecventa sau de alte frecvente decat marimile de lucru au pus in evidenta multe proprietati ale acestor bobine neliniare.

Simularea facuta pe sisteme hibride MEDA si ENDIM au permis ca functie de semnalul de comanda sa se puna in evidenta in special dependentele de timp ale semnalelor din infasurarea de lucru, problema care intr-o analiza numerica de camp este mai greu de evidentiata. Pentru o parte din rezultate (cele care sunt continute si in [P10]) forma semnalelor obtinute si concluziile coincid in mare masura [Mi7].

## 5.2.1 Bobine neliniare comandate prin camp $H_\perp$ [solenatie (curent) de comanda]

### 5.2.1.1 Bobina alimentata in curent sinusoidal si comandata prin camp $H_\perp$

Admitem infasurarea de lucru alimentata cu un curent sinusoidal, respectiv  $H = H_m \sin \omega t$  iar infasurarea de comanda fie este alimentata in curent continuu  $H_c = H_{c0}$ , fie in curent alternativ de aceeasi frecventa ca si curentul de lucru, dar avand faza initiala variabila, respectiv:

$$H_c = H_{c_m} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.6)$$

unde vom considera  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ , fie curentul de comanda are forma unei unde de curent simplu redresat (caz frecvent utilizat pentru astfel de dispozitive [S3, S4]).

Utilizand o aproximare a caracteristicii neliniare a miezului de forma [R6, Mi5, M5]:

$$B_t = \frac{a H_t}{d + c H_t} \quad (5.7)$$

scrisa pentru valorile totale (rezultante) ale intensitatii, respectiv inducției magnetice in miez, vom obtine:

$$B_t = \frac{B}{H} H_t = \frac{B}{H} \sqrt{H^2 + H_c^2} \quad (5.8)$$

Introducand marimile raportate (adimensionale si subunitare):

$$\begin{aligned} x = \frac{H}{H_m} = X_m \sin \tau \quad , \quad y = \frac{B}{B_m} \quad ; \quad x_c = \frac{H_c}{H_m} \\ d_1 = d \frac{B_m}{a H_m} = 0,0468 \quad \text{si} \quad c_1 = c \frac{B_m}{a} = 0,9532 \end{aligned} \quad (5.9)$$

caracteristica B(H) a bobinei de lucru scrisa in valori raportate devine o functie y(x) de forma:

$$y = \frac{x}{d_1 + c_1 \sqrt{x^2 + x_c^2}} \quad (5.10)$$

Permeabilitatile statice si dinamice se obtin din caracteristica y(x) sub forma:

$$\mu = \frac{y}{x} = \frac{1}{d_1 + c_1 \sqrt{x^2 + x_c^2}} = f_1(x) = f_1^*(x_c) = f_1^{**}(t) \quad (5.11)$$

respectiv:

$$\mu_d = \frac{dy}{dx} = \frac{d_1 + c_1 \sqrt{x^2 + x_c^2} - \frac{c_1 x^2}{\sqrt{x^2 + x_c^2}}}{\left(d_1 + c_1 \sqrt{x^2 + x_c^2}\right)^2} = f_2(x) = f_2^*(x_c) = f_2^{**}(t) \quad (5.12)$$

Modelul analogic aferent relatiilor (5.10), (5.11), (5.12) este prezentat in figura 5.12. Prin comutatorul  $K_1$  se poate regla faza initiala a semnalului de comanda, iar prin deschiderea contactului  $K_2$  se realizeaza un semnal de comanda simplu redresat si cu faza variabila. Tot in figura 5.12 se indica posibilitatea obtinerii permeabilitatii statice si dinamice date de relatiile (5.11) si (5.12).

i). Pentru un semnal de comanda continuu, efectul comenzii asupra comportarii infasurarii de lucru este prezentat in caracteristicile y(x) respectiv y(t) – tensiunea la bornele acestei infasurari (fig. 5.13). Se constata ca odata cu cresterea valorii curentului de comanda ( $X_{c_0}$ ), caracteristica infasurarii de lucru se liniarizeaza , iar tensiunea la bornele sale se apropie de o variatie sinusoidala (curba 5).

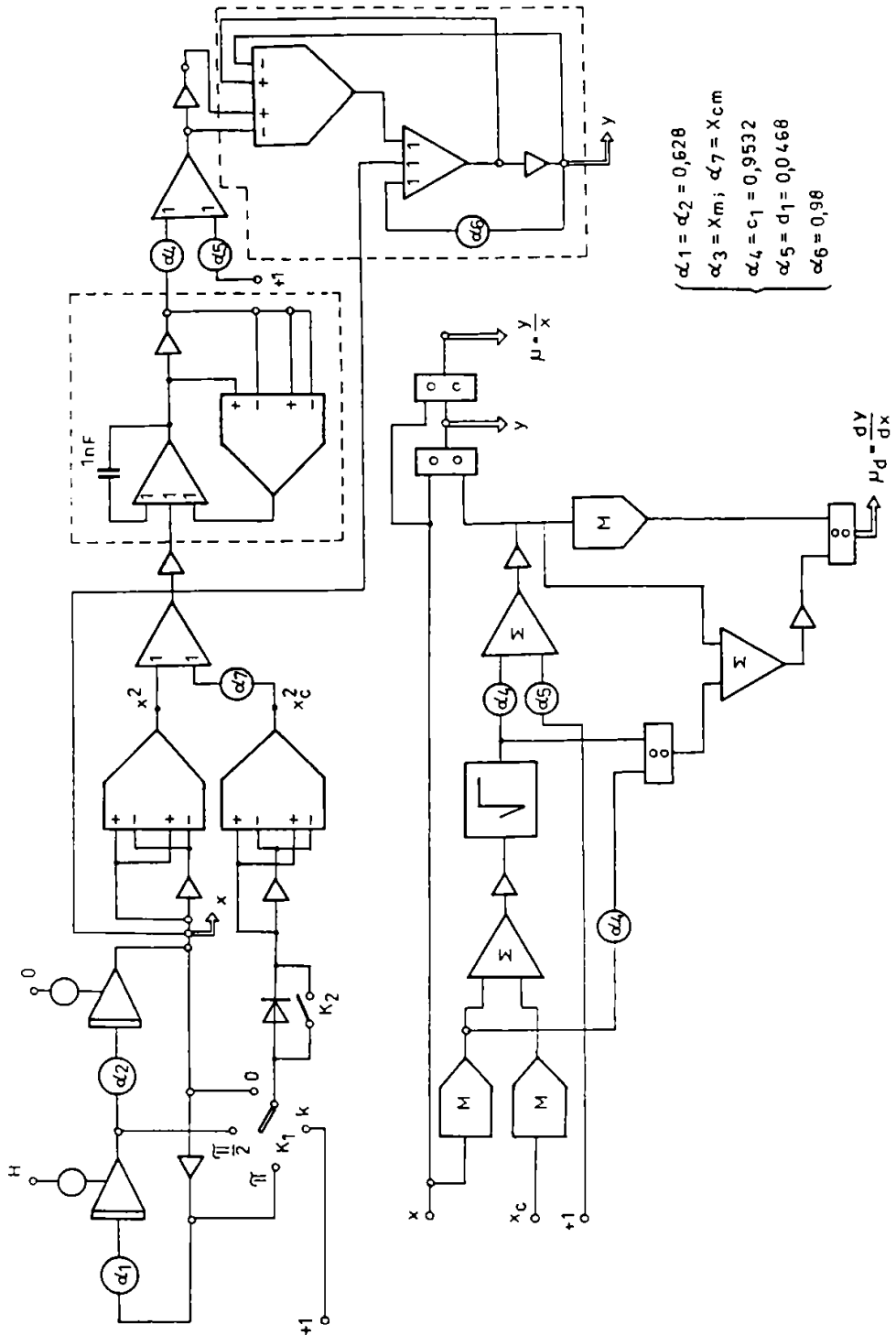


Fig. 5.12 Schema de simulare a caracteristicilor  $y(x)$ ;  $\mu_s$ ;  $\mu_d$

ii). Pastrand aceeasi amplitudine  $X_m$  a intensitatii campului de lucru iar campul de comanda sa fie

sinusoidal:  $x_c = X_{c_m} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$  cu  $X_{c_m} = 0; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6$

apare un efect de liniarizare a caracteristicii infasurarii de lucru mult mai pronuntat odata cu cresterea amplitudinii semnalului de comanda (curba 6 din fig. 5.14) si concomitent nu este afectat nivelul (amplitudinea) tensiunii la bornele infasurarii de lucru  $y(t)$ .



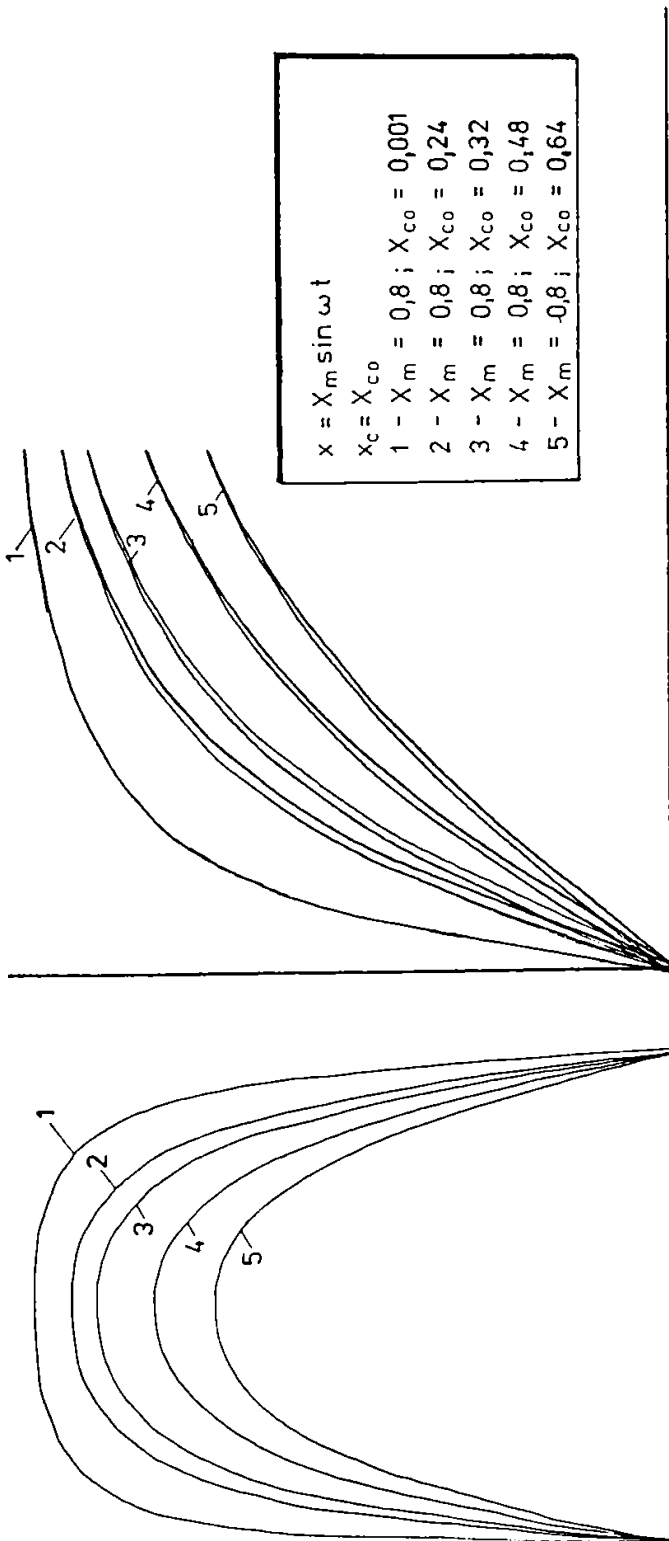


Fig. 5.13 Modificarea caracteristicii  $y(x)$  a bobinei de lucru si forma semnalului  $y(t)$  la bornele acesteia in functie de marimea semnalului de comanda

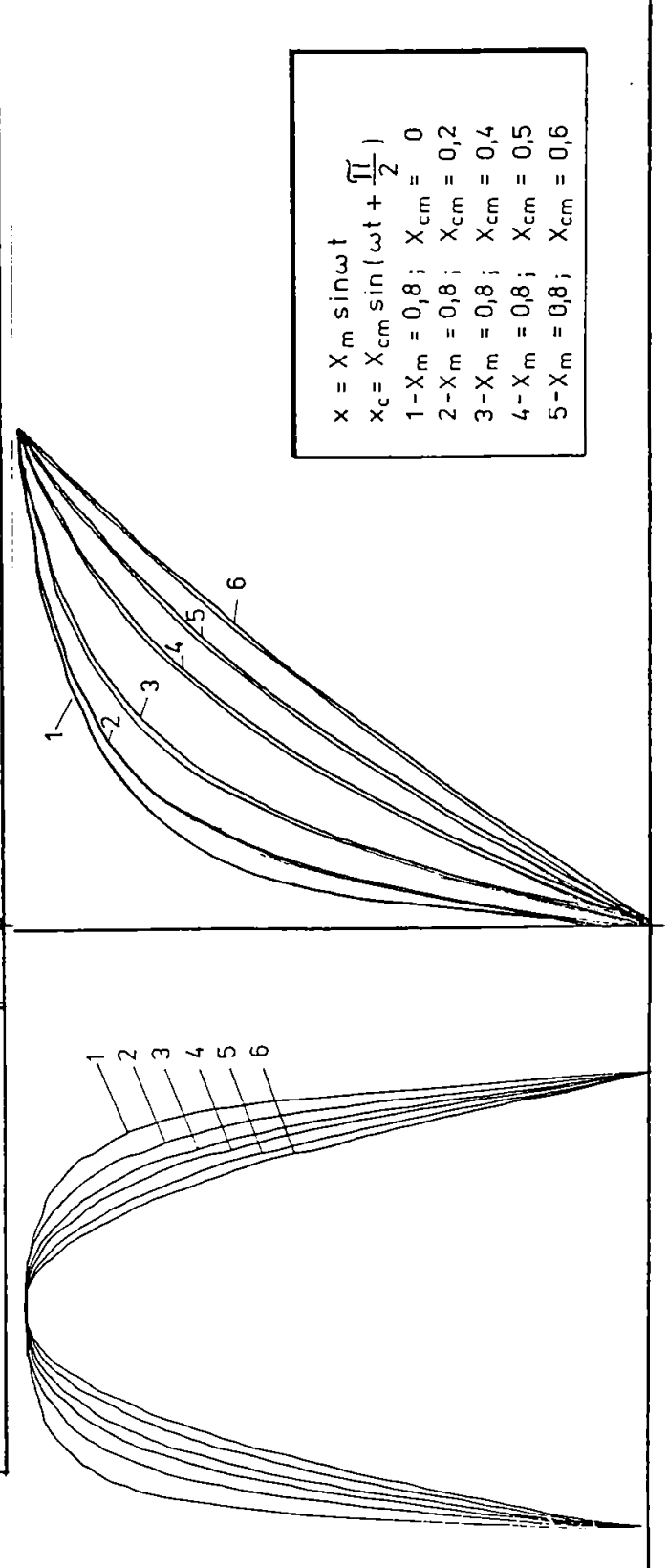


Fig. 5.14 Caracteristicile  $y(x)$  si  $y(t)$  la o comanda ortogonala in spatiu (si timp)  $x_c(t)$

iii). Regland simultan atat amplitudinea campului de lucru ( $X_m$ ) cat si a celui de comanda ( $X_{c_m}$ ) astfel ca amplitudinea campului rezultat sa ramana constanta ( $X_{t_m} = 0,8$ ), la o comanda in

cuadratura

$$x_c = X_{c_m} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

se constata o liniarizare a caracteristicii infasurarii de lucru fara a se micsora prea mult panta caracteristicii  $y(x)$ , respectiv permeabilitatea echivalenta a acestei infasurari. In acest mod se obtine, printr-o astfel de comanda, un efect de liniarizare fara a fi afectat nici nivelul de saturatie, nici permeabilitatea echivalenta (fig. 5.15).

In mod analog, pastrand  $X_{t_m} = 0,8$  dar comanda continua avand  $X_{c_0} \in (0; 0,6)$  se obtine comportarea bobinei ilustrata in figura 5.16.

iv). La o alimentare a infasurarii de lucru cu  $X_m = \text{const.}$ , iar comanda alimentata fie in curent continuu, fie in regim variabil cu diferite faze initiale ( $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ ) se obtin in figura 5.17 comportarile infasurarii de lucru atunci cand amplitudinea campului rezultat este  $X_{t_m} = 0,8 = \text{cst.}$ . Se pune astfel in evidenta efectul semnalului de comanda ca functie de timp asupra comportarii bobinei, iar la aceeasi functie sinusoidala efectul fazei initiale a comenzi.

Pastrand acelasi nivel al campului rezultat  $X_{t_m} = 0,8 = \text{cst.}$ , pentru aceleasi functii de timp ale semnalului de comanda dar cu o alta pondere a campului de lucru, respectiv de comanda in obtinerea aceluiasi  $X_{t_m}$ , se constata ca forma caracteristicii de lucru ramane asemanatoare ca in cazul precedent (fig. 5.18).

Daca la diferite forme de variatie in timp a semnalului de comanda nu se pastreaza conditia  $X_{t_m} = \text{cst.}$ , efectul diverselor modalitati de comanda asupra comportarii infasurarii de lucru este prezentat in figura 5.13 si 5.14.

v). Exista situatii in care in scopul obtinerii unui efect similar reactiei interne de la amplificatoarele magnetice, infasurarea de comanda este alimentata cu un semnal simplu redresat de amplitudine variabila ( $X_{c_m}$ ). In figura 5.19 este prezentat efectul simularii unei astfel de comenzi asupra infasurarii de lucru.

Mai mult, semnalul de comanda simplu redresat  $x_c(t)$  poate sa fie in faza sau in cuadratura cu alimentarea infasurarii de lucru. In figura 5.20 se prezinta rezultatul unei astfel de comenzi avand termen de comparatie efectul semnalului continuu de comanda care are acelasi

nivel cu amplitudinea celui redresat. In cazul (3) se obtine o permeabilitate echivalenta mare si un semnal de lucru de amplitudine mare.

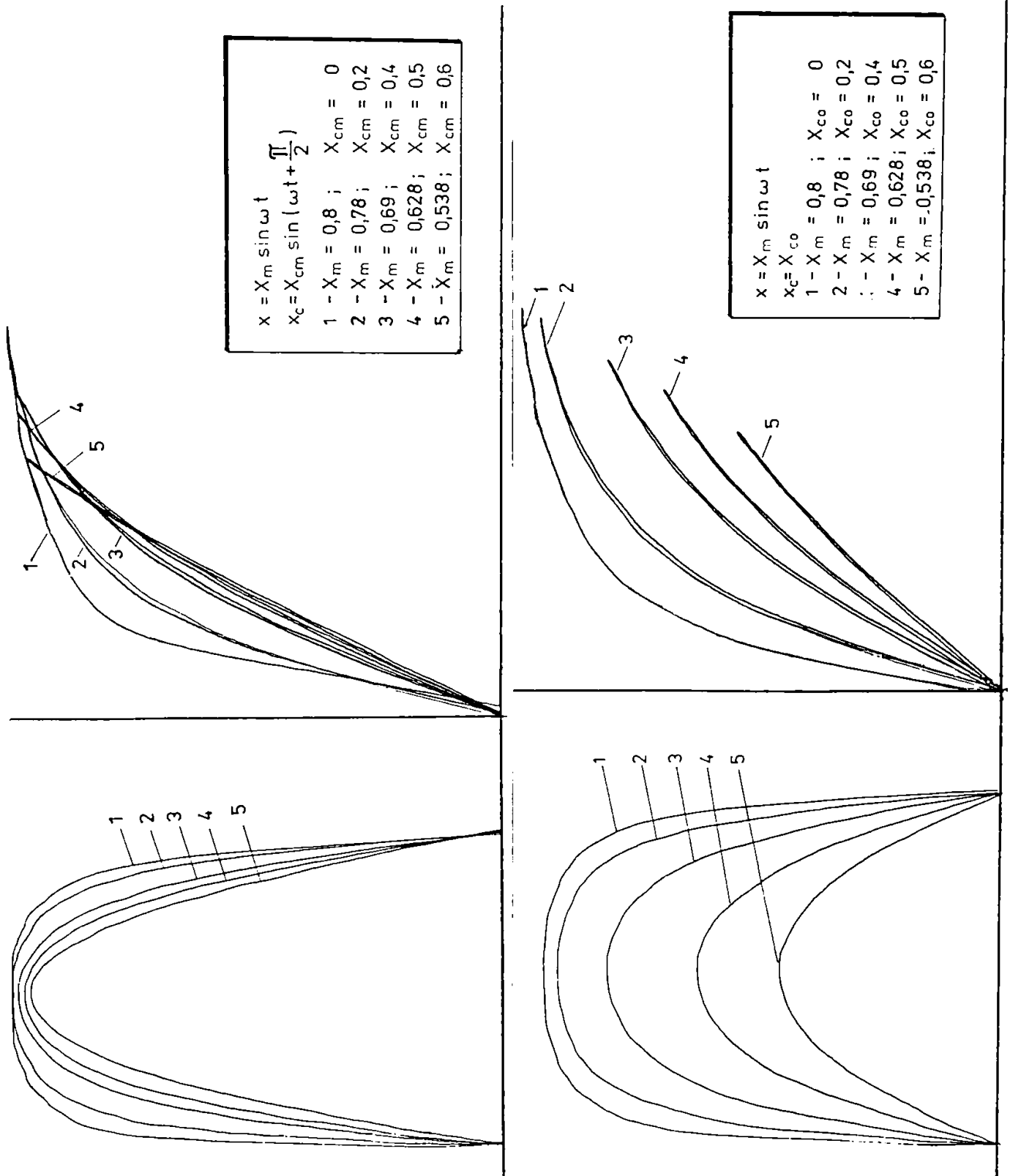


Fig. 5.15 Caracteristicile  $y(x)$  si  $y(t)$  la o comanda in cuadratura cu  $X_{t_m} = \text{cst.}$

Fig. 5.16 Efectul comenzii ortogonale  $X_{c_0}$  asupra caracteristicii  $y(x)$  si a tensiunii la bornele acesteia  $y(t)$  pentru  $X_{t_m} = \text{cst.}$

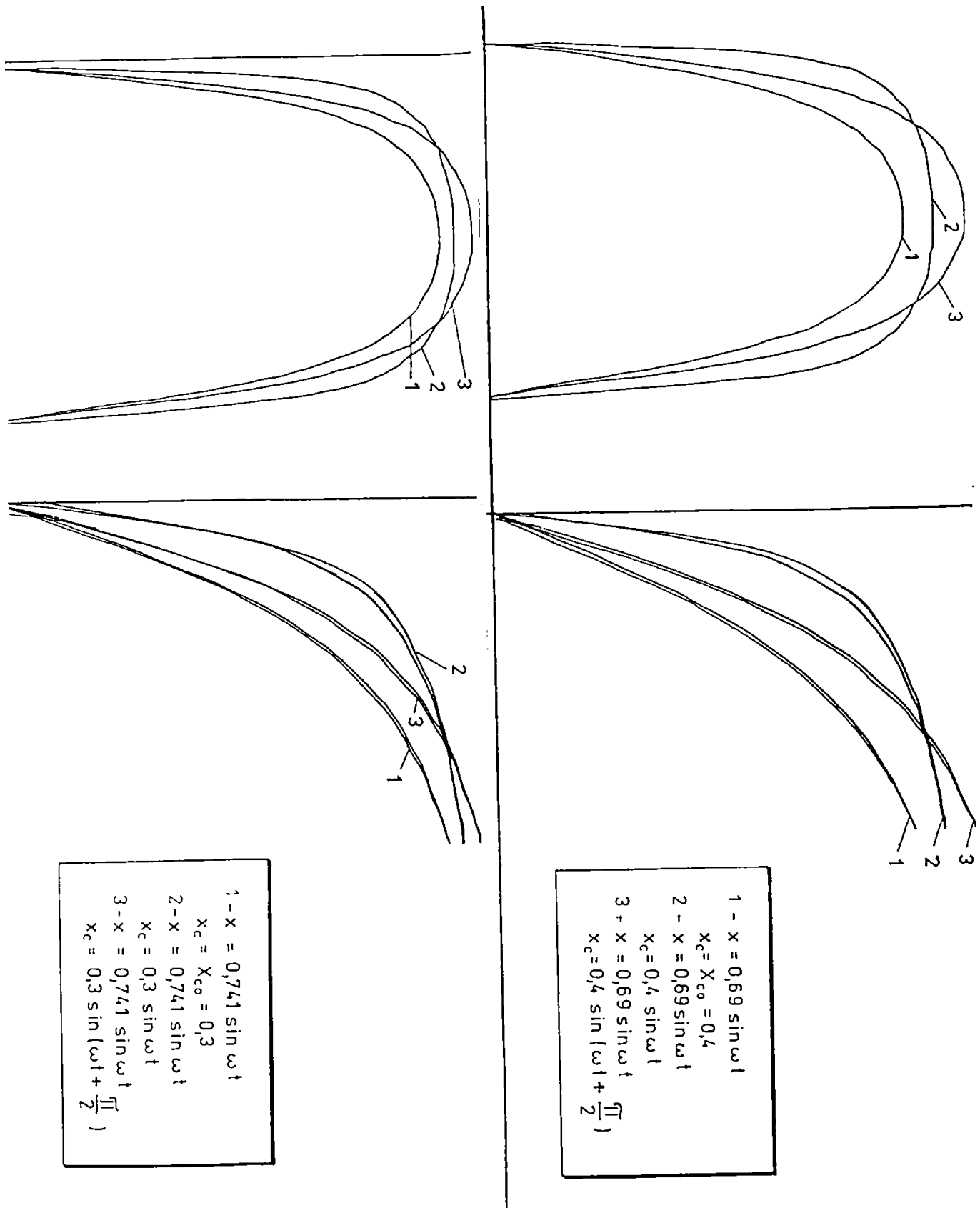
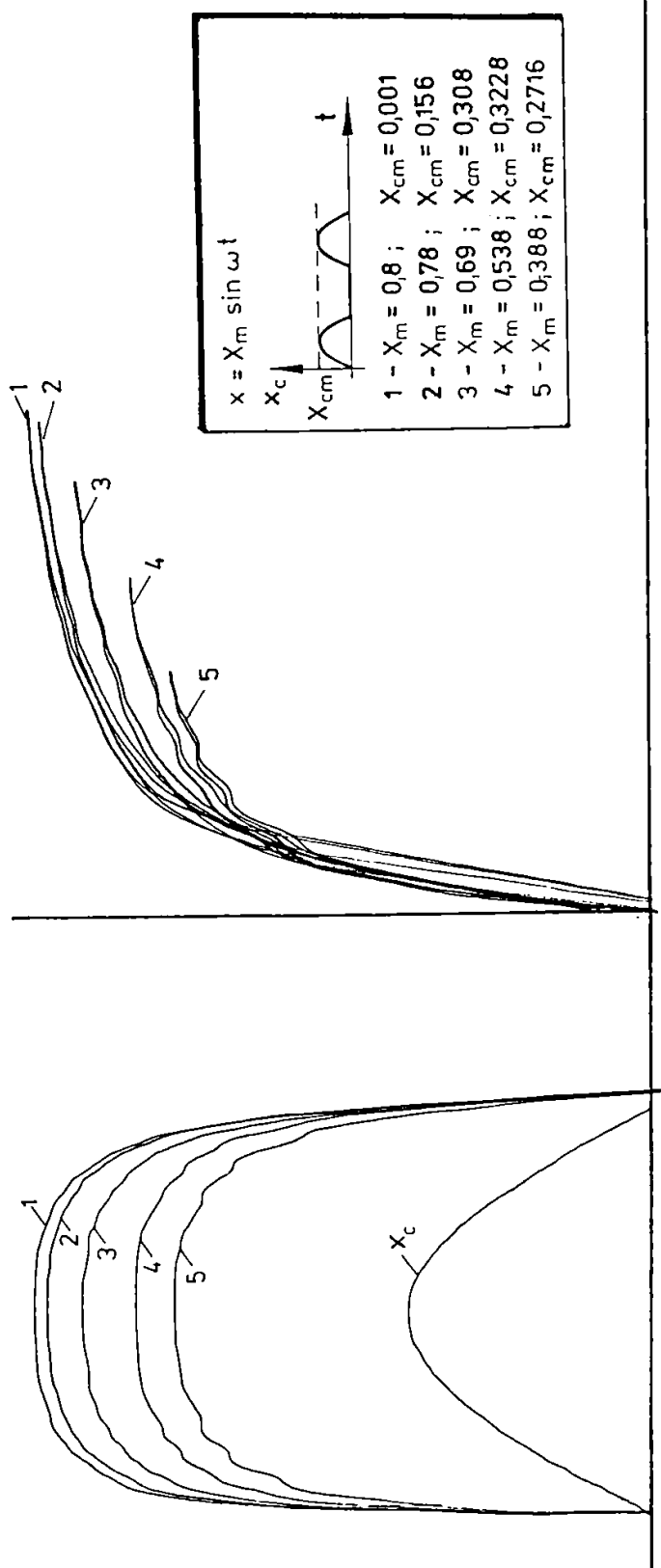
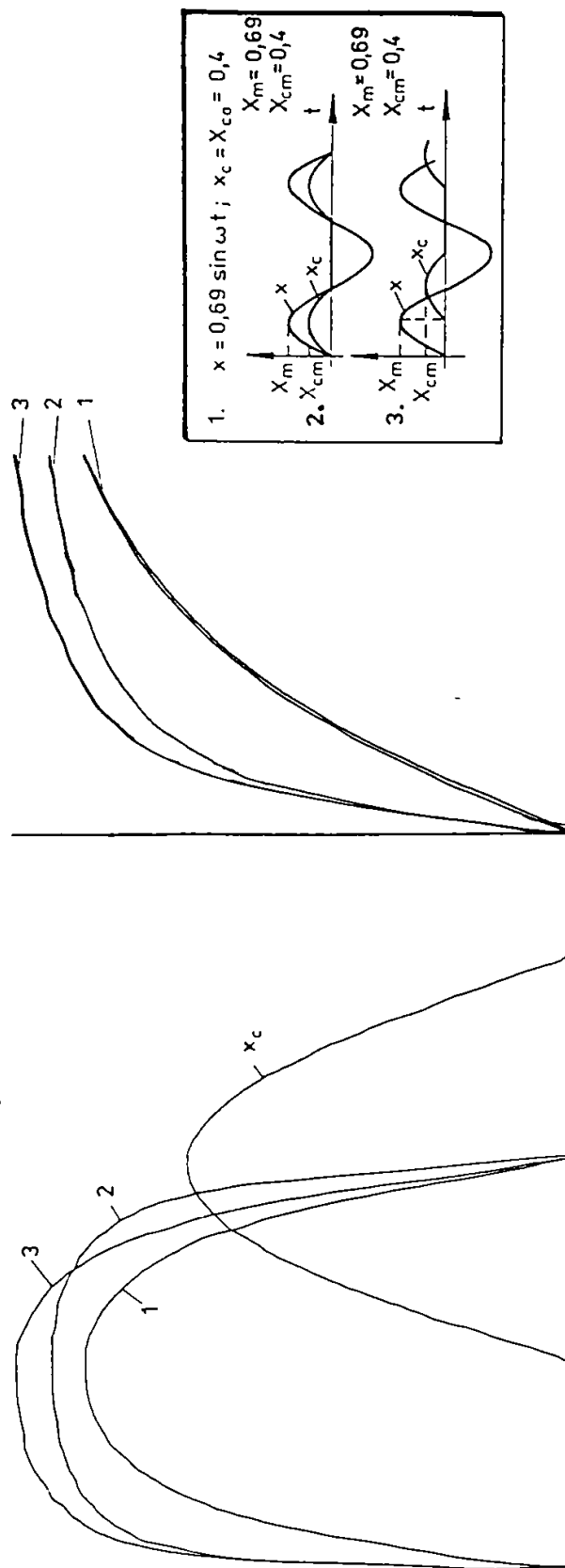


Fig. 5.17 Efectul semnalului de comanda  $x_c$  ca functie de timp si ca faza initiala asupra caracteristicilor  $y(x)$  si  $y(t)$

Fig. 5.18 Efectul comenzii  $x_c$  asupra caracteristicilor  $y(x)$  si  $y(t)$  la alte amplitudini  $X_{c0}$  si  $X_m$ , dar la acelasi  $X_{t_m} = \text{cst.}$



**Fig. 5.19** Efectul unei comenzi  $x_c$ , semnal simplu redresat, asupra caracteristicilor  $y(x)$ , respectiv  $y(t)$



**Fig. 5.20** Influenta semnalului de comanda  $x_c$  simplu redresat dar cu faza variabila asupra caracteristicii  $y(x)$ , respectiv  $y(t)$

### 5.2.1.2 Influenta comenzii asupra unei neliniaritati tip saturatie

Se aproximeaza caracteristica reala de magnetizare printr-o forma idealizata cu nivel de saturatie constant ( $y_s$ ) si comportare liniara inainte de saturatie, caracteristica care in valorile rezultante ale campului ( $y_t$ ,  $x_t$ ) este de forma

$$y_t = \begin{cases} a x_t & \text{pentru } |x_t| < x_s \\ y_s & \text{pentru } |x_t| \geq x_s \end{cases} \quad (5.13)$$

unde  $y_t = \sqrt{y^2 + y_c^2}$  iar  $x_t = \sqrt{x^2 + x_c^2}$  sunt campurile rezultante in valori raportate.

Tinand seama de izotropia miezului ( $y_c = y \frac{x_c}{x}$ ) caracteristica de magnetizare idealizata pentru infasurarea de lucru devine de forma

$$y = \begin{cases} a x & \text{pentru } |x| < \sqrt{x_s^2 - x_c^2} \\ \frac{y_s x}{\sqrt{x^2 + x_c^2}} & \text{pentru } |x| \geq \sqrt{x_s^2 - x_c^2} \end{cases} \quad (5.14)$$

Schema de simulare conform relatiilor (5.14) este prezentata in figura 5.21.

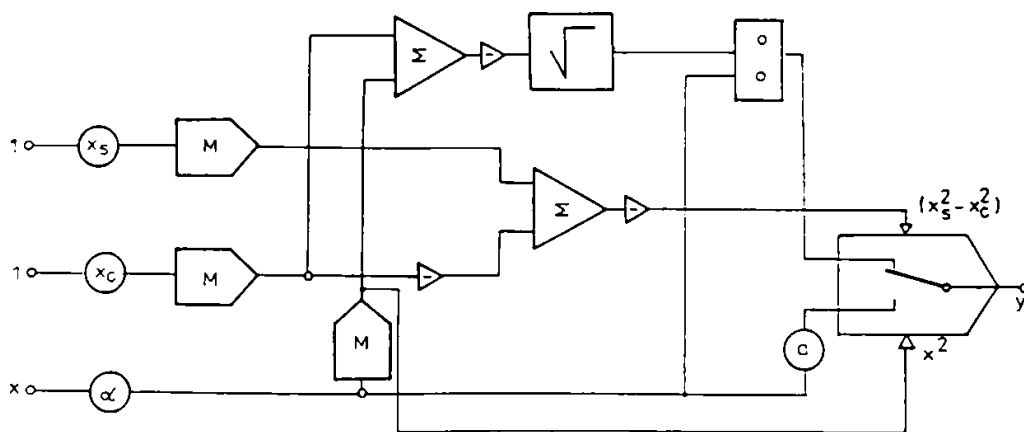


Fig. 5.21 Schema de simulare a caracteristicii  $y(x)$  de tip saturatie

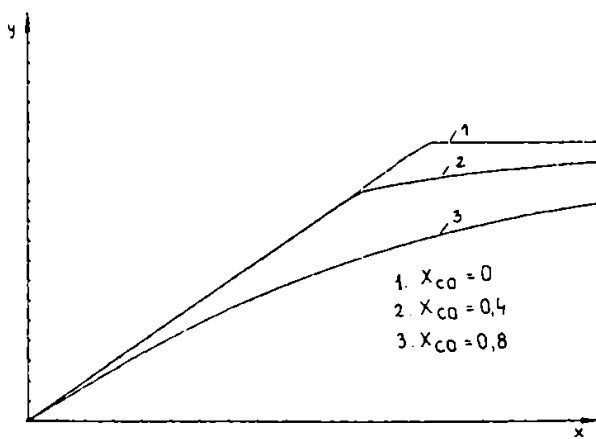


Fig. 5.22 Influenta comenzii  $x_c$  asupra caracteristicii  $y(x)$  pentru  $x = 0,6 \sin \omega t$  iar  $x_c = X_{c0}$

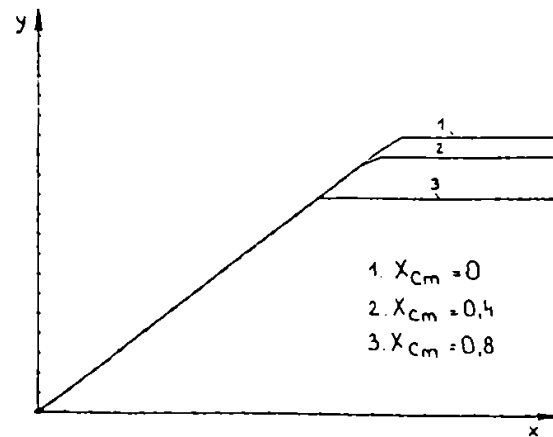
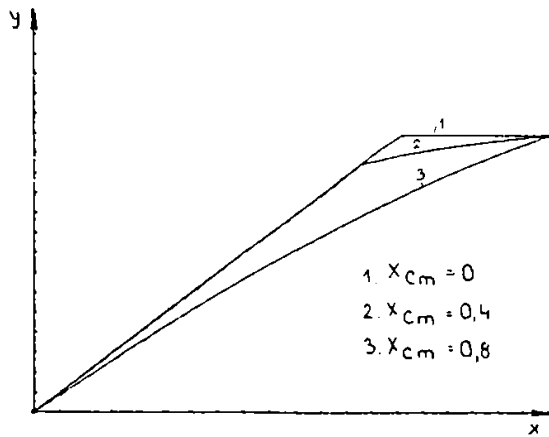


Fig. 5.23 Influenta comenzii  $x_c$  asupra caracteristicii  $y(x)$  pentru  $x = 0,6 \sin \omega t$  si  $x_c = X_{cm} \sin \omega t$

In modelare s-a tinut seama de alimentarea bobinei de lucru cu un curent sinusoidal de amplitudine constanta:  $x = X_m \sin \omega t$  ( $X_m = 0,6$ );  $x$  este expresia intensitatii campului magnetic scrisa in valori raportate, iar semnalul de comanda este un semnal continuu de valoare variabila.

Rezultatele obtinute (fig. 5.22) pun in evidenta ca semnalul de comanda odata cu liniarizarea caracteristicii diminueaza nivelul de saturatia al infasurarii de lucru.



**Fig. 5.24** Influenta comenzii  $x_c$  asupra caracteristicii de lucru  $y(x)$  pentru

$$x = 0,6 \sin \omega t \text{ si } x_c = X_{c_m} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Daca semnalul de comanda este variabil in timp

$$\text{sub forma } x_c = X_{c_m} \sin(\omega t + \varphi) \Big|_{\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \pi}$$

expresie scrisa deasemenea in valori raportate, efectul comenzii asupra infasurarii de lucru (modificarea pantei si a nivelului de saturatie) este prezentata in figurile 5.23 si 5.24.

Comparativ cu semnalul de comanda continuu (fig. 5.22), semnalul de comanda sinusoidal in faza cu cel de lucru,  $\varphi = 0$  (fig. 5.23), respectiv in cuadratura cu campul de lucru,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (fig.

5.24), au efect diferit. Si in acest caz, la semnal de comanda in cuadratura ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) liniarizarea nu afecteaza nivelul de saturatie al infasurarii de lucru, analog cu rezultatul prezentat in figura 5.14.

### 5.2.1.3 Bobina alimentata cu tensiune sinusoidala si comandata prin camp $H_{\perp}$

La o comanda ortogonala prin camp magnetic  $H_{c \perp}$  (prin solenatie), infasurarea bobinei de lucru fiind alimentata cu tensiune sinusoidala, atunci si inductia creata de aceasta infasurare va fi sinusoidala de forma  $B = B_m \sin \omega t$ .

Caracteristica neliniara a miezului scrisa in valorile campului rezultat o aproximam printr-un polinom de gradul trei de forma:

$$H_t = \alpha_1 B_t + \beta_1 B_t^3 \quad (5.15)$$

Tinand seama de izotropia mediului, caracteristica infasurarii de lucru devine succesiv sub forma:

$$H = \frac{B}{B_t} H_t = B(\alpha_1 + \beta_1 B_t^2) = \alpha_1 B + \beta_1 B^3 \left( 1 + \frac{H_c^2}{H^2} \right) \quad (5.16)$$

Normand marimile de stare, caracteristica devine

$$x = \alpha y + \beta y^3 \left[ 1 + \left( \frac{x_c}{x} \right)^2 \right] \quad (5.17)$$

unde s-au facut notatiile:

$$\begin{aligned} x &= \frac{H}{H_m} ; \quad x_c = \frac{H_c}{H_m} ; \quad y = \frac{B}{B_m} \\ \alpha &= \alpha_1 \frac{B_m}{H_m} = 0,2 ; \quad \beta = \beta_1 \frac{B_m^3}{H_m} = 0,8 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Schema simplificata a modelului analogic aferent relatiei (5.17) este prezentat in figura 5.25.

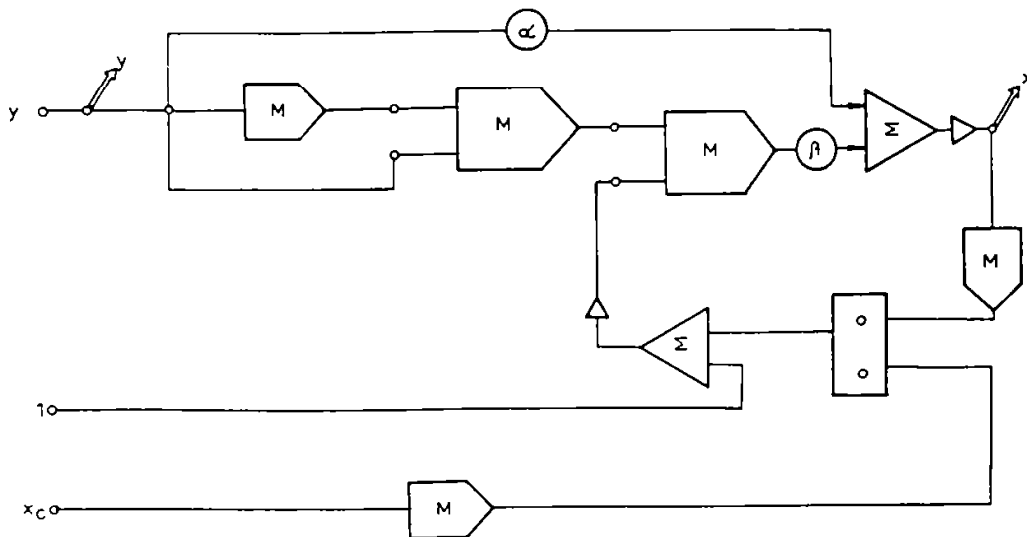


Fig. 5.25 Schema bloc de simulare a caracteristicii  $x(y)$  la o comanda ortogonală  $x_c$

Influenta unei astfel de comenzi asupra comportarii infasurarii de lucru este prezentata in figura 5.26. Forma curentului absorbit de infasurarea de lucru  $x(t)$  se observa ca este o unda cu atat mai ascutita cu cat amplitudinea semnalului de comanda este mai mare.

## 5.2.2 Comanda prin inductie $B_{\perp}$ (prin tensiune (flux) de comanda)

### 5.2.2.1 Bobina alimentata cu tensiune sinusoidala si comandata prin inductie $B_{\perp}$

Infasurarea de lucru a DMN este alimentata cu o tensiune sinusoidala, respectiv inductia magnetica creata in miez de catre aceasta infasurare va fi de forma  $B = B_m \sin \omega t$ .

Infasurarea de comanda este alimentata fie cu o tensiune continua ( $B_c = B_{c_0}$ ), fie sinusoidala de aceeasi frecventa ca si alimentarea infasurarii de lucru, iar faza acesteia variabila

$$B = B_{c_m} \sin(\omega t + \varphi) \Big|_{\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \pi} \quad (5.19)$$

Caracteristica neliniara a miezului o aproximam printr-o functie polinomiala de forma:



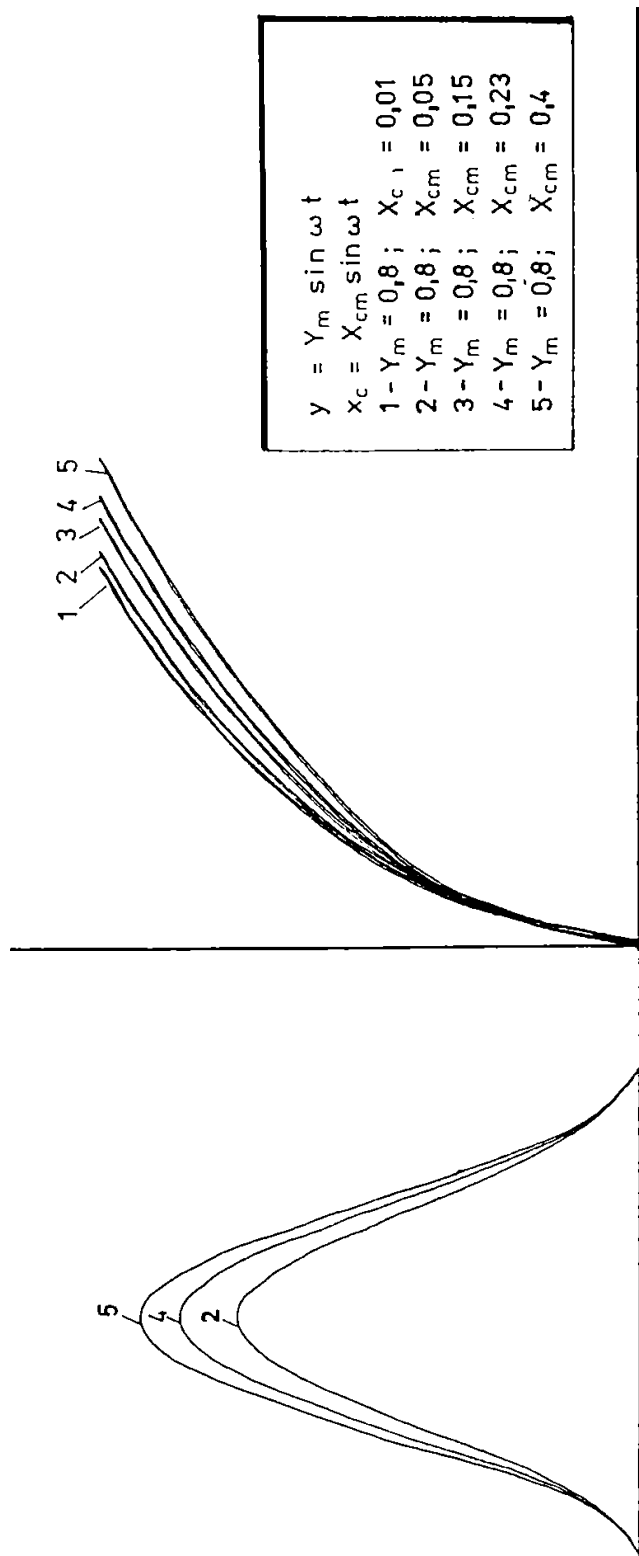


Fig. 5.26 Influenta comenzii  $x_c(t)$  (in faza cu  $y(t)$ ) de amplitudine variabila  $X_{c_m}$  asupra caracteristicii  $y(x)$  a infasurarii de lucru si asupra unei de curent absorbita de acesta  $x(t)$

$$H_t = \alpha B_t + \beta B_t^9 \tag{5.20}$$

unde  $H_t = \sqrt{H^2 + H_c^2}$ ,  $B_t = \sqrt{B^2 + B_c^2}$  sunt intensitatea respectiv inductia magnetica

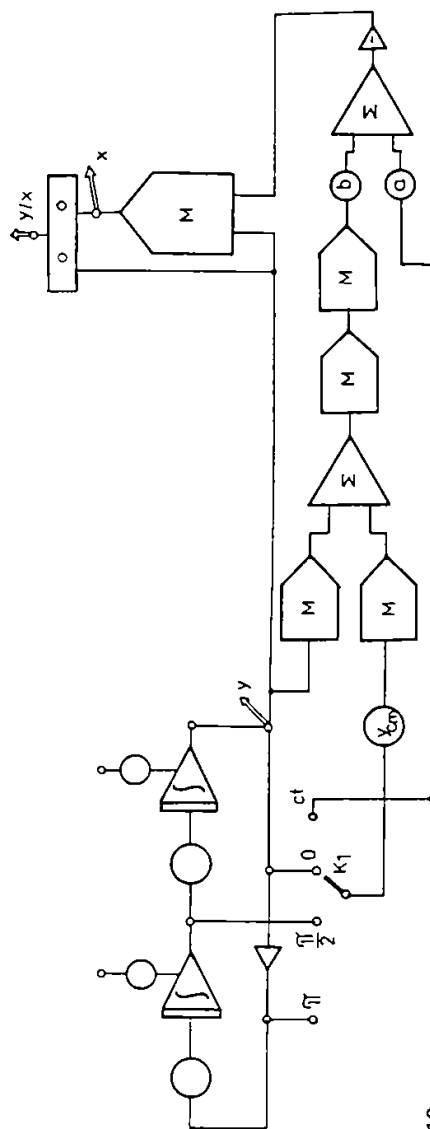


Fig. 5.27 Schema bloc de simulare a comportarii DMN la o comanda ortogonala prin inductie  $B_1$

rezultanta intr-un punct din miez. Dependenta  $H(B)$  a parametrilor infasurarii de lucru se deduce sub forma:

$$H = B \frac{H_t}{B_t} = \frac{B}{B_t} (\alpha B_t + \beta B_t^9) = B(\alpha + \beta B_t^8) = B \left[ \alpha + \beta (B^2 + B_c^2)^4 \right] \quad (5.21)$$

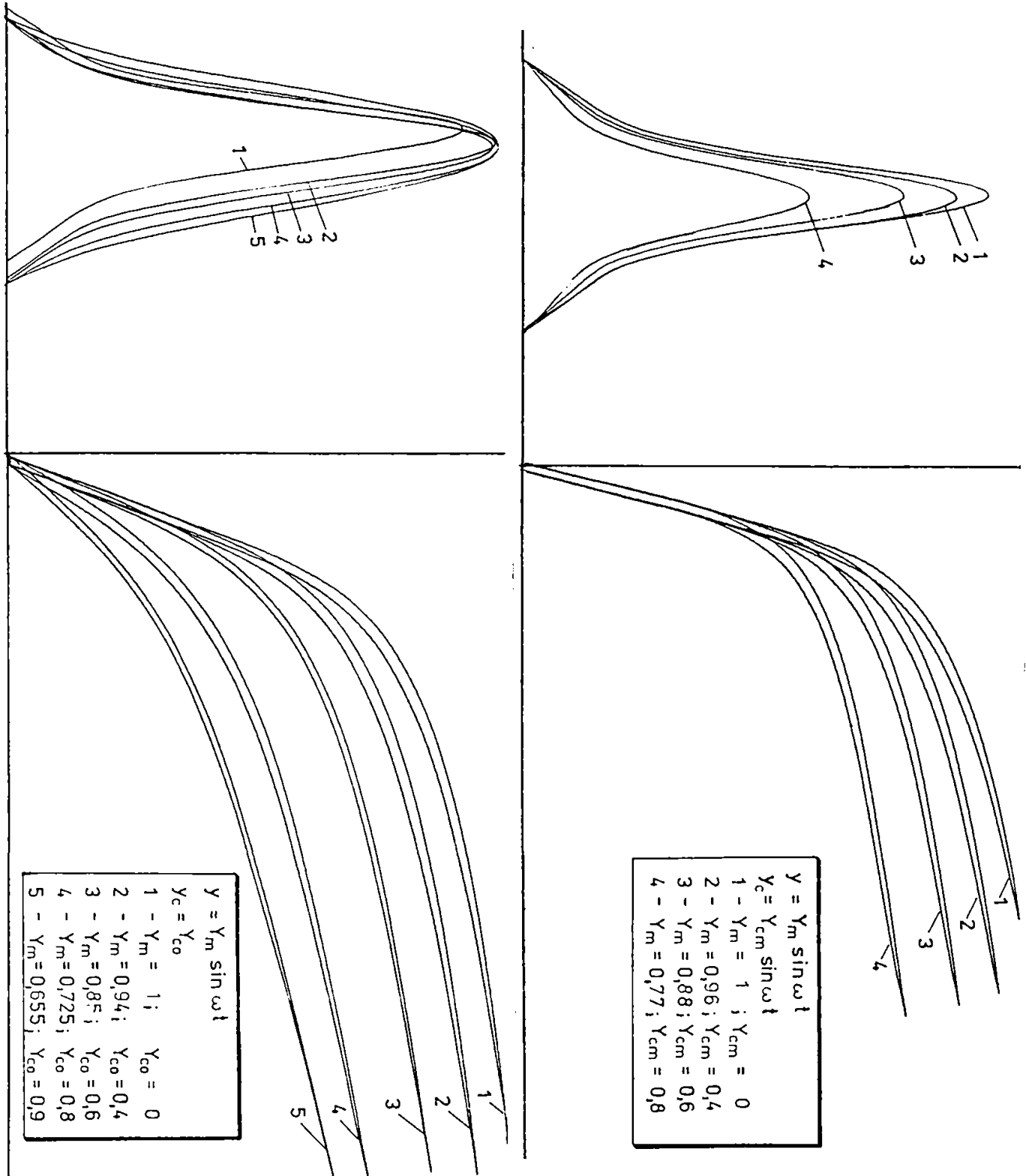


Fig. 5.28 Influenta inducției de comanda ( $Y_{c_0}$ )

asupra caracteristicii  $y(x)$  a infasurării de lucru și asupra formei curentului absorbit de aceasta  $x(t)$

Fig. 5.29 Influenta inducției de comanda

având faza fixă ( $\frac{\pi}{2}$ ) și amplitudinea variabilă asupra caracteristicii  $y(x)$  a bobinei de lucru și asupra semnalului  $x(t)$

Introducand marimile raportate (adimensionale) definite prin

$$y = \frac{B}{B_m} = \sin \omega t = \sin \tau ; y_c = \frac{B_c}{B_m} ; x = \frac{H}{H_m} \quad (5.22)$$

$$a = \alpha \frac{B_m}{H_m} = 0,25 \quad ; \quad b = \beta \frac{B_m^9}{H_m} = 0,75$$

caracteristica neliniara a infasurarii de lucru scrisa in astfel de marimi devine de forma:

$$x = y \left[ a + b(y^2 + y_c^2)^4 \right] \quad (5.23)$$

careia ii corespunde o schema bloc de simulare analogica a functionarii DMN, pentru o astfel de alimentare, ca in figura 5.27. Rezultatele simularii sunt prezentate sub forma dependentelor  $B(H)$  respectiv  $y(x)$  la bornele infasurarii de lucru si prin formele curentului din infasurarea de lucru  $x(t)$ , pentru diferite valori ale comenzii.

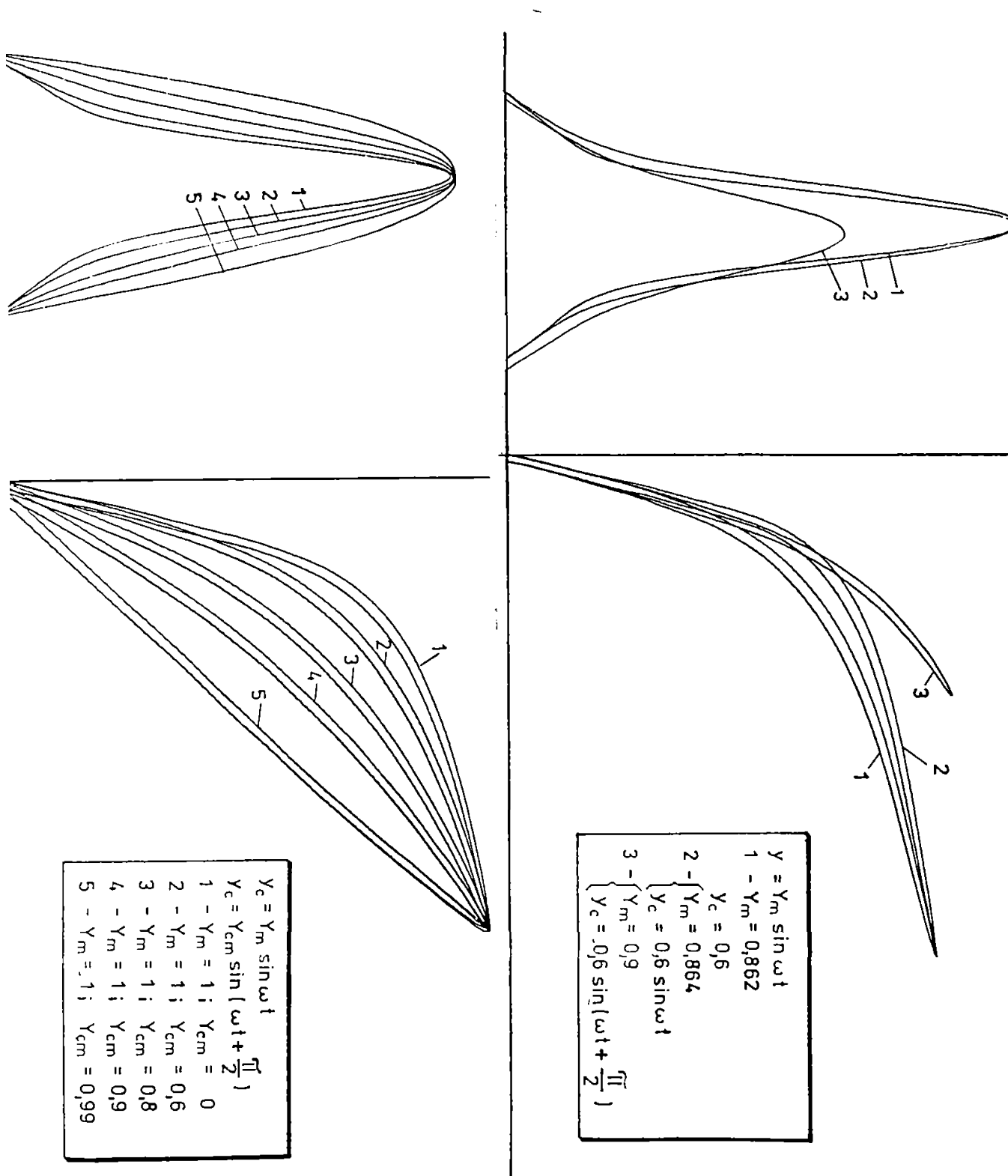
i). Astfel, in figura 5.28 este prezentata dependenta  $y(x)$  atunci cand amplitudinea tensiunii de alimentare a infasurarii de lucru este variabila, respectiv  $Y_m \in (1; 0,655)$  iar valoarea continua a inductiei magnetice create de infasurarea de comanda este variabila, respectiv  $Y_{c_0} \in (0; 0,9)$ . Daca inductia de comanda  $B_c$  este o marime exterioara, independenta de starea bobinei de lucru, atunci  $y_c$  este exprimarea lui  $B_c$  in marimi raportate.

ii).Daca cele doua tensiuni de alimentare a celor doua infasurari – de lucru si de comanda – sunt sinusoidale (in faza) de amplitudini variabile, amplitudinile inductiilor magnetice in marimi relative au valorile  $y_{c_m}$  si  $y_m$  din figura 5.29. Se poate observa influenta comenzii atat asupra caracteristicii neliniare a infasurarii de lucru cat si asupra formei undeii de curent din aceasta infasurare  $x(t)$ : scade nivelul de saturatie al acestei bobine, iar forma curentului nu se imbunatateste.

iii). Alimentand cele doua infasurari cu tensiuni sinusoidale astfel incat inductiile  $B$  si  $B_c$  sa fie in cuadratura  $\left( \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$  este redata in figura 5.30 influenta unei astfel de comenzi asupra comportarii infasurarii de lucru. La fel ca si la comanda in curent si in acest caz de cuadratura spatio-temporala a celor doua inductii, prin cresterea amplitudinii semnalului de comanda se obtine o liniarizare a caracteristicii, fara a fi diminuat nivelul de saturatie. Forma curentului absorbit se apropie de o sinusoida la cresterea comenzii

iv). Se pastreaza aceeasi amplitudine a inductiei de comanda  $(Y_{c_m} = 0,6)$  deci la o valoare constanta, iar variatia sa in timp are loc in faza cu inductia de lucru respectiv in cuadratura cu aceasta; aceste cazuri sunt redade in figura 5.31, putandu-se remarca efectul comenzii asupra

comportarii infasurarii de lucru. In cazul 3 permeabilitatea echivalenta este mare si forma curentului  $x(t)$  se apropie de sinusoida.



$$\begin{aligned}
 & y_c = Y_m \sin \omega t \\
 & y_c = Y_{cm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\
 1 - & Y_m = 1; \quad Y_{cm} = 0 \\
 2 - & Y_m = 1; \quad Y_{cm} = 0,6 \\
 3 - & Y_m = 1; \quad Y_{cm} = 0,8 \\
 4 - & Y_m = 1; \quad Y_{cm} = 0,9 \\
 5 - & Y_m = 1; \quad Y_{cm} = 0,99
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y = Y_m \sin \omega t \\
 1 - & Y_m = 0,862 \\
 & y_c = 0,6 \\
 2 - & \begin{cases} Y_m = 0,864 \\ y_c = 0,6 \sin \omega t \end{cases} \\
 3 - & \begin{cases} Y_m = 0,9 \\ y_c = 0,6 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 5.3 Verificarea experimentală a rezultatelor simulării

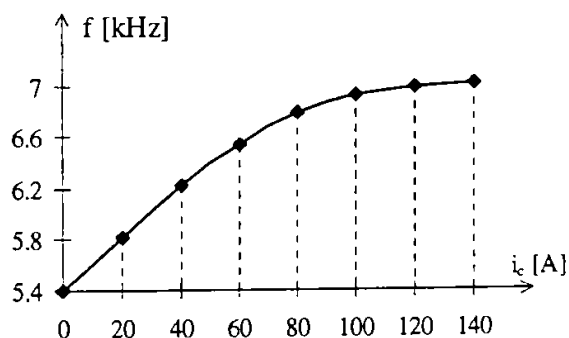
Deoarece inductivitatea statică a bobinei de lucru depinde de parametrul de comandă  $B_c$  sau  $H_c$  ca modul, respectiv ca faza, totodată de valoarea curentului, respectiv de valoarea tensiunii prin propria înfășurare, o măsurare precisă a acestei inductivități nu este posibilă și rezultatul ar depinde chiar de semnalul utilizat pentru măsurare.

Pentru a măsura experimental valoarea acestei inductivități se utilizează bobina comandată ca modulator montat într-un oscilator. O modificare a inductivității statice a bobinei duce la o modificare a frecvenței de lucru a oscilatorului.

Dacă parametrul de comandă este curentul de comandă  $i_c$ , caracteristica  $f(i_c)$ , respectiv caracteristica frecvenței ca funcție de curentul de comandă obținută experimental este prezentată în Tabelul 5.3.

**Tabelul 5.3**

$i_c$ [mA]	0	10	20	30	50	70	90	120	150
$f$ (Hz)	5453	5563	5681	6810	6064	6280	6455	6683	6894



**Fig. 5.32**

Caracteristica convertorului (frecvența – curent de comandă) are aspectul din figura 5.32.

Valorile inductivității statice corespunzătoare frecvenței de oscilație sunt prezentate în Tabelul 5.4.

**Tabelul 5.4**

$i_c$ [mA]	0	20	30	50	70	90	120
$L_s$ [mH]	88	81	77	71	66	63	58

iar caracteristica  $L_s = L_s(i_c)$  este cea din figura 5.33.

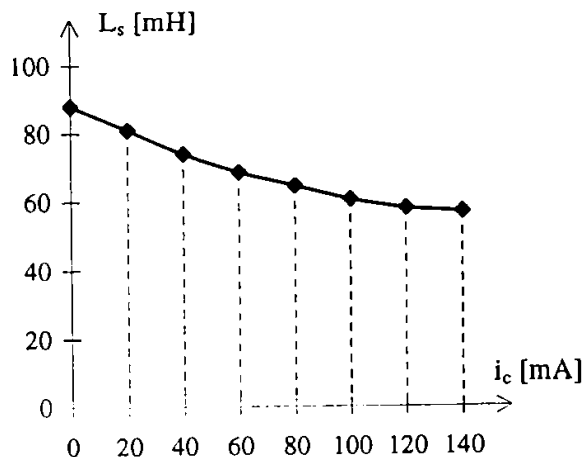


Fig. 5.33

Caracteristica  $L_s(i_c)$  dedusa experimental coincide cu cea determinata pe baza relatiei (4.17 sau 4.18), respectiv cu cea obtinuta prin simulare cu schema din figura 5.13 bazata pe relatia de simulare (5.10), respectiv cu familia de caracteristici din programul MEF (Cap. 2).

Daca parametrul de comanda nu este intensitatea curentului de comanda  $i_c$  (respectiv intensitatea campului magnetic de comanda  $H_c$ ) ci o inductie de comanda ortogonala  $B_{\perp} = B_c$ , in mod similar s-a realizat o convertire a parametrului de comanda  $B_c$  intr-o valoare a inductivitatii statice a infasurarii de lucru, respectiv o frecventa de oscilatie.

Bobina de lucru s-a mentinut in interiorul unui dispozitiv Weiss care permite reglarea si mentinerea inductiei de comanda  $B_c$  la o valoare precisa. Bornele bobinei de lucru au ramas conectate la oscilatorul Colpitts pentru a realiza conversia in frecventa. S-a obtinut o dependenta a inductivitatii statice  $L_s = L_s(B_c)$  ca in figura 5.34.

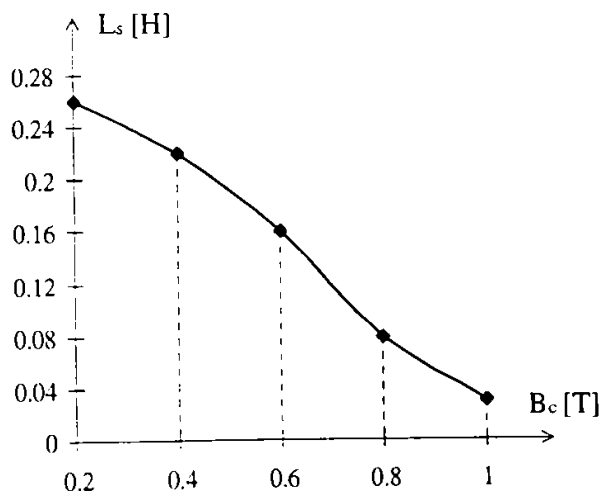


Fig. 5.34

## 5.4 Concluzii

1). In analiza numerica a campului magnetic, caracteristica  $B(H)$  definita pe portiuni este unica pentru materialul neliniar, indiferent de valoarea si forma de variatie in timp a semnalului excitatie (densitatea de curent  $\bar{J}$  – sursa campului magnetic).

Ceea ce se obtine prin simularea analogica, in cazul superpozitiei ortogonale de campuri, nu este modificarea caracteristicii  $B(H)$  a materialului – sau  $y(x)$  in valori raportate – ci modificarea dependentei  $y_\ell(x_\ell)$  sau  $B_\ell(H_\ell)$  dintre parametrii campului de lucru in prezenta unui alt camp de comanda. Caracteristica  $B_\ell(H_\ell)$  se modifica din punctul de vedere a formei (nivel de saturatie, panta etc.) pentru diversele valori ale campurilor de comanda  $H_c$  care se suprapun cu  $H_\ell$ . Se poate observa ca pentru  $B_c = 0$  sau  $H_c = 0$ , caracteristica  $B_\ell(H_\ell)$  coincide cu caracteristica naturala a materialului:  $B(H)$ .

Caracteristica reala a materialului  $B(H)$  isi pastreaza forma doar intre marimile rezultante ale campului  $B_i(H_i)$ .

2). Influenta geometriei (forma miez, dimensiuni) si a surselor (solenatie,  $\bar{J}$ ) asupra caracteristicii unei bobine neliniare se pune in evidenta prin functia  $F(\lambda, x_c)$  – capitolul 1 – , forma caracteristicii externe a unei bobine  $\psi(i)$  sau  $u_\ell(i_\ell)$  putand fi influentata atat de geometrie cat si de comanda, plecand de la aceeasi caracteristica de material  $B(H)$ . Ceea ce s-a pus in evidenta in acest capitol a fost influenta comenzii asupra caracteristicii  $y_\ell(x_\ell) = y(x)$ .

3). Simularea analogica permite pe langa punerea in evidenta a influentei amplitudinii, fazei initiale si formei semnalului de comanda asupra caracteristicii  $y(x)$  a infasurarii de lucru si obtinerea formei semnalelor  $x(t) \sim i(t)$  – curentul sau  $y(t) \sim u(t)$  – tensiunea din infasurarea de lucru, respectiv determinarea spectrului de frecventa (coeficientii Fourier) ale acestor semnale.

4). In analiza numerica a campului magnetic se opereaza doar cu surse  $\bar{J}(t)$  constante sau sinusoidale, obtinandu-se valori reale sau complexe ale potentialului magnetic. Pentru alte forme de semnal, stiute apriori, se poate face, in principiu o analiza numerica repetata, testand functia sursa  $J(t)$  cu un pas de discretizare  $\Delta t$  pe axa timpului. Sirul valorilor campului  $\bar{B}$  obtinute intr-un nod  $(x_i, y_i)$  din domeniu la diferitele momente  $t_0 + n\Delta t$  ne da evolutia in timp a campului din acel punct. Prin simulare analogico-hibrida problema comportarii in timp a unui dispozitiv neliniar, asa cum rezulta din cele prezentate in acest capitol, se obtine mult mai direct si intuitiv.

5). Cele doua infasurari ortogonale in spatiu daca ar fi situate in medii omogene si liniare ( $\mu = \text{cst.}$ ) nu s-ar influenta electromagnetic. In medii neliniare nu numai inductia rezultanta  $\bar{B}$  dar si fiecare componenta a sa in parte  $\bar{B}_\ell$  sau  $\bar{B}_c$  este influentata atat de campul de lucru  $\bar{H}_\ell$  cat si de cel de comanda  $\bar{H}_c$ . Procesul s-ar complica si mai mult daca mediul ar fi neliniar-anizotrop.

6). Simularea neliniaritatilor univoce cu saturatie precum si simularea neliniaritatilor tip histerezis prin cele doua modele (varianta I si II) sunt contributiile originale ale autorului. Modelele devin utile atunci cand intereseaza distorsiunile in timp ale semnalelor, respectiv comportarea dinamica a acestor elemente intr-o schema mai mare.



## Cap. 6 Concluzii finale

Prezenta teză structurată pe *șase capitole* (cu 199 pagini, 125 figuri, 16 tabele), *patru anexe* cu programe de calcul, o *listă bibliografică* cu 152 titluri (dintre care 17 lucrări de referință din anii '60; 32 din anii '70; 66 din anii '80 și respectiv 37 din anii '90), abordează un domeniu de actualitate în cercetarea electrotehnică (analiza numerică, sinteza optimală și simularea), domeniu care se află la interfața dintre: Electrotehnica clasică, Metodele matematice moderne și Informatică.

Prin problematica abordată, referințele bibliografice consultate, metodele propuse și rezultatele obținute, teza își propune să reflecte stadiul actual al cercetării electrotehnice din acest domeniu.

Rezultatele originale obținute și prezentate în cadrul acestei lucrări se pot grupa în trei direcții principale :

- a. contribuții *teoretice* originale
- b. contribuții *aplicative* originale
- c. rezultate *concrete*

fiecare dintre acestea fiind prezentate detaliat în cadrul diferitelor capitole ale tezei.

a. . Astfel, în domeniul *teoretic* al formulărilor și definirii problemelor de câmp magnetic staționar s-au adus câteva contribuții originale:

$a_1$ . Stabilirea unei *metode* și a unui *algorithm* de evaluare a fluxului magnetic total  $\Psi$ , a inducției magnetice medii ( $B_{med}$ ) pe secțiunea miezului și a inductivității pentru o bobină neliniară pentru care se cunoaște caracteristica  $B(H)$  și geometria miezului magnetic. Expresiile stabilite pentru flux (1.4; 1.9 și 1.23) și pentru  $B_{med}$  (1.11; 1.12 și 1.25) permit evaluarea lor analitică sau numerică în raport cu complexitatea geometriei și a tipului de funcție pentru aproximarea neliniarității.

$a_2$ . Generalizând teorema superpoziției câmpurilor în medii liniare, se stabilește o teoremă de superpoziție *punctuală* și *iterativă* a câmpului magnetic  $\vec{B}$  creat de mai multe surse  $\vec{J}_k$  într-un domeniu neliniar-heterogen, cu aplicabilitate în cazul algoritmilor numerici pentru probleme spațiale de câmp.

$a_3$ . Se pleacă de la teorema de unicitate a unei probleme de câmp magnetic staționar în model diferențial (relațiile 2.1; 2.3 și 2.4) și se stabilește forma funcționalei energetice de extremizat (relațiile 2.9; 2.20 și 2.21) care asigură *unicitatea* unei formulări în model variațional. De asemenea, se demonstrează că ecuațiile caracteristice MEF pentru câmpuri magnetice

staționare se pot genera după același algoritm, indiferent de simetria lor (relațiile 2.32; 2.34 și 2.51), pe baza corespondenței variabilelor.

*a*<sub>4</sub>. Se stabilește o metoda proprie de analiză numerică a unei probleme de câmp magnetic variațional - *metoda tubului de flux elementar*: MTFE -, metodă aplicabilă fie în analiza câmpului magnetic dintr-un dispozitiv magnetic neliniar dat, fie pentru afinarea soluției obținută prin alte metode de analiză numerică. Sunt prezentați algoritmi și programele de implementare pentru câteva situații studiate. Ca rezultat final, metoda MTFE are corespondent în "method of tubes and slices" [S15].

*b*. . Contribuțiile *aplicative* originale prezentate în teză se pot grupa în câteva direcții:

*b*<sub>1</sub>. Stabilirea unui *algoritm propriu de implementare a MEF* prin corelarea sa cu algoritmul de deducere a ecuațiilor algebrice caracteristice MEF. Un program principal apelează mai multe subprograme care realizează: discretizarea domeniului, inițializarea valorilor, superpoziții punctuale și iterative de câmpuri, interpolări, postprocesări, etc, în total 30 de subprograme scrise în FORTRAN.

*b*<sub>2</sub>. S-a stabilit un *algoritm propriu de implementare a MDF* pornind de la șase tipuri de ecuații în diferențe finite stabilite în capitolul 3, care se atașează unei probleme de câmp magnetic staționar; programul este prezentat în Anexa IV.

*b*<sub>3</sub>. S-au conceput și realizat *modele de simulare* a neliniarității univoce și neunivoce (de tip histerezis). Pentru ciclul histerezis s-au conceput două variante de simulare, fiecare cu algoritmul de identificare a parametrilor necesari simulării.

*b*<sub>4</sub>. S-au realizat mai multe *sisteme hibride de simulare* a bobinelor neliniare comandate și pentru două dintre sistemele simulate s-au obținut rezultate identice cu cele din literatură [D9], unde erau tratate.

Sistemele de simulare concepute vin în completarea metodelor numerice de analiză a câmpului, ele pun în evidență caracteristici funcționale, distorsiunea semnalelor, etc, aspecte care momentan nu sunt accesibile unui program numeric.

*b*<sub>5</sub>. Plecând de la definirea unui proces de optimizare (funcții obiectiv, funcții de constrângeri, algoritmi numerici asociați) s-a conceput un algoritm de optimizare bazat pe metode deterministe, care s-a atașat programelor proprii de analiză numerică de câmp și s-a obținut un program mixt de *sinteză optimală* a geometriei domeniului de câmp. Aceiași algoritmi de optimizare atașați programelor comerciale MagNet, ANSYS sau Opera-2d au dat aceleași valori ale parametrilor de optimizare ca și programele proprii, ceea ce a constituit și un mijloc de evaluare a performanțelor fiecăruia dintre ele.

*b*<sub>6</sub>. În capitolul 3 se prezintă un algoritm mixt de *analiză* numerică prin MDF, combinat cu un proces de *optimizare* a geometriei și un program de *superpoziție punctuală* a câmpurilor în medii neliniare.

*c*. Prin rezultate *concrete* originale înțelegem nu atât rezultatele obținute prin rularea programelor de analiză numerică, sinteză optimală sau simulare, descrise detaliat în teză, cât ceea ce rămâne și poate fi utilizat în continuare:

*c*<sub>1</sub> Program propriu de analiză numerică a unui câmp magnetic staționar (cartezian sau axial) prin diferențe finite, cu o discretizare cu pași variabili funcție de zonele de interes, cu unul sau mai multe subdomenii neliniare și care momentan nu este concurat de programe comerciale (care au ca suport MEF).

*c*<sub>2</sub> Program propriu de analiză numerică a unui câmp prin elemente finite, comparabil cu programele comerciale (pentru elemente de ordinul I) iar performanțele depind de complexitatea problemei și dimensiunile matricilor.

*c*<sub>3</sub> *Sisteme de simulare* a neliniarităților, sisteme care trebuie dezvoltate și cuplate în viitor cu programele de analiză numerică a câmpului.

*c*<sub>4</sub> *Metoda tubului de flux elementar (MTFE)* și programele asociate acesteia, aplicabilă în determinarea distribuției de câmp magnetic din multe dispozitive electromagnetice neliniare (în care se neglijează câmpul magnetic de dispersie).

Privind spre viitorul cercetării în acest domeniu, se pot contura câteva tendințe posibile de realizare:

- analiza câmpurilor electromagnetice în 3D ce cuprind corpuri rigide aflate în mișcare; abordarea este posibilă prin metode integrale (variaționale) și algoritmi de procesare paralelă.
- modelarea materialelor neliniare și includerea sistemelor de simulare a ciclurilor histerezis (și a anizotropiilor) în algoritmi de analiză numerică a câmpurilor.
- studiul problemelor cuplate între câmpuri electromagnetice și probleme conexe (termice, mecanice, fluide, etc.).
- optimizări globale (multi-criteriu) de geometrii, surse, materiale, etc, cu funcții obiectiv și funcții de constrângere în general neliniare și algoritmi performanți de rezolvare. Majoritatea firmelor care produc programe comerciale au ca obiectiv de cercetare pentru următorii ani realizarea unor subprograme de parametrizare a geometriei, a caracteristicilor de material, etc.
- vizualizarea rezultatelor în 3D utilizând postprocesări grafice, în cod de culori și modele de realitate virtuală.



## Bibliografie

- [A1] Ancelle, B. - Emploi de la méthode des équations intégrale de frontière et mise en oeuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques, *Thèse*, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1979
- [A2] Andersen, O.W.; Fehrle, K.G. - Int. Conf. Numer. Method, Electr. Magn. Field Prob., *S-ta Margherita Ligure*, 1976, Preprints, pag. 263-274.
- [A3] Andersen, O.W. - *IEEE P.E.S. Summer Meeting*, 1972, Paper C.72425-7.
- [A4] Angel, Y. - Commande magnétique orthogonale de systèmes paramétriques, *Acta Electronica*, 4, Nr.3, 1960, pag. 359-380.
- [A5] Adamiak, K. - Method of the Magnetic Field Synthesis on the Axis of Cylinder Solenoid, *J. Appl. Phys*, 16, pag. 417-423, 1978.
- [A6] Adly, A.A.; Mayergoyz, I.D. - Accurate Modeling of Vector Hysteresis using a Superposition of Preisach - Type Models, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol 33, Nr. 5, 1977, pag. 4155-4157.
- [A7] Andrei, Petru; Caltun, O.; Stancu, Al. - Differential Phenomenological Models for the Magnetization Processes in Soft MnZn Ferrites, *IEEE Trans on Magnetics*, vol.34, Nr.1, 1998, pag.231-241.
- [A8] ANSYS, Version 5.0A, Swanson Analysis System. Huston. 1995.
- [B1] Baraboi, A. - Contributii la studiul si aplicatiile magnetizarii in campuri ortogonale, *Teza doctorat*, I. P. Iasi, 1980.
- [B2] DiBarbara, P.; Navarra, P.; Savini, A.; Sikora, R. - Optimum design of iron-core electromagnets, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 26, Nr. 2, March 1990.
- [B3] Binns, K.J.; Lawrenson, P.J.; Trowbridge, C.W. - The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields, *Jhon Wiley & Sons*, 1995.
- [B4] Bozorth, M. Richard - Ferromagnetism, *Princeton*, New Jersey, Toronto, New-York, London, 1959.
- [B5] Bratianu, C. - Metode cu elemente finite in dinamica fluidelor, *Ed. Academiei*, Bucuresti, 1983.
- [B6] Biró, Oszkár; Preis, Kurt - On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents, *IEEE Trans on Magnetics*, vol. 25, Nr. 4, July 1989.

- [B7] Belmans,R.;Hameyer,K.;Pahner,V. - Computer-Aided Design in Magnetics, Tutorial, K.U.Leuven, 1996.
- [B8] Biedinger, J.M.;Kant, M. - On the Optimization of the Magnetic Field Sources in Electromechanical Energy Conversion, *J.Appl.Phys*, 53(10), oct.1982.
- [B9] Brandstätter,B.R.;Ring,W.;Magele,Ch.;Richter,K.R. - Shape Design with great geometrical deformations using continuous movable Finite Elements nodes, *COMPUMAG*, Rio de Janeiro, Nov.1997, pag.159-160.
- [C1] Carstea, I. - Calculul numeric al campului magnetic de dispersie in transformatoare prin metoda elementelor finite, *E.E.A. - Electrotehnica*, Nr. 2/1980.
- [C2] Carstea,I.;Pasare,S. - Un model hibrid pentru campul magnetic stationar bidimensional, *E.E.A. -Electrotehnica*, Nr. 7/1989.
- [C3] Cedighian , S. - Materiale magnetice, *Ed.Tehnica*, Bucuresti, 1974.
- [C4] Chari, M. W. K.; Silvester, P. P. - Finite elements in electrical and magnetic field problems, *J. Wiley&Sons*, Chichester, 1980.
- [C5] Chari, M.W.K.;Konrad, A.;D'Angelo, J.;Palmo, M.A. - *IEEE Trans. on Magnetics* (1983), Nr.6, pag. 2321-2324.
- [C6] Clough, R.W. - The finite element method in plane stress analysis, *Proc.2<sup>nd</sup> ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, SUA, sept. 1960.
- [C7] Chiricozzi, E.;Franco, S. - La scelta automatica della rappresentazione analitica ottimale delle curve di prima magnetizzazione dei materiali ferromagnetici, *L'Electrotecnica*, vol. LXIV, Nr.12, 1977.
- [C8] Coulomb. J.L. - Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnetiques par la méthode des elements finis, *Thèse*, Inst. National Polytechnique de Grenoble, 1981.
- [D1] Delfino, G.;Denegri, G.B. ;Molinari, G.;Viviani, A. - *Pocceedings Int . Conf. Numer. Meth. Electr . Magn.Field Probl.Genova*, 1976, pag.121-131.
- [D2] Demerdash, N.A. ;Nehl, T.W. - Three dimensional finite element vector potential formulation of magnetic field in electrical apparatus, *IEEE Trans PAS*, Nr. 8, 1981, pag. 4105-4111.
- [D3] Demerdash, N.A. ;Nehl, T.W.; Fonad, F.A.; Mohammed, O.A. - *IEEE Trans - Power. App. Syst.* Nr.100(1981), 8, pag. 4104-4111.
- [D4] Demidovitch, B.;Maron, I. - Éléments de calcul numérique, *Ed. Mir*, Moscou,1973.
- [D5] Demircean, K.S.; Ceciurin. V. L. - Masiniie rasceti electromagnetih polei, Moscva, *Vissaita scola*. 1986.

- [D6] De Sabata, I. – Bazele Electrotehnicii, vol.1,2, *Inst. Politehnic Timisoara*, 1980
- [D7] De Sabata, I.;Fränkel, D. - *Conf. Nat. Electrotehn. Elctroenerg.*, Craiova 1984, vol.1- Bazele electrotehnicii, Probleme de camp, pag. 33-42.
- [D8] Dinca, G. - Metode variationale si aplicatii, *Ed.Tehnica*, Buc. 1980.
- [D9] Dorojko, L.L. - Peredacia energhii cerez ferromagnitnniu sreau mejdu vzaimno ortogonalnini conturani , *Electronicestvo*, Nr. 2, 1985.
- [D10] Drechsler, S.;Mindru,Gh.; Farschtschi, A.;Mindru, A. - Upon the Transient Regime of the Electromagnetic Field by Means of Finite Network Method, *Acta Electrotehnica Napocensis*, vol. 36, Nr.1, 1995, pag.62-67.
- [D11] Del Vecchio, R.M. – *IEEE Trans . MAG*, Nr.1, 1982, pag. 275-283.
- [F1] Ferrite, *Handbuch*, Kombinat; Keramische Werke, Hermsdorf,1990.
- [F2] Fogia, A.;Buraiss, N.;Krahenbuhl, L.;Nicolas, A. – *IEEE Trans on Magn.*, Nr. 20(1984), 5, pag.1942-1944.
- [F3] Fuchs, E.F.; McNaughton, G.A. - *IEEE Trans. Power App. Syst.* ,101(1982), 5,pag.1770-1202.
- [F4] Fletcher,R.-Practical Methods of Optimisation, 2<sup>nd</sup> edition,*Jhon&Wiley*,Chicester,1991.
- [F5] Ferite, *Catalog de produse*, Fabrica de ferite, Urziceni.
- [G1] Gambolati, G. –*Int . J. Numer. Method. Eng.*,15(1980), 5, pag.661-675.
- [G2] Gherman, Gh. - Contributii la calculul numeric al campului magnetic cvasistationar, *Teza de doctorat*, I. P. Timisoara, 1982.
- [G3] Gitosusastro, M.S. - Analyse de Sensibilité et Optimisation par Raport aux Paramètres de Construction dans les Systèmes Electromagnétique, *Thèse*, I.N.P.G. Grenoble, 1988.
- [G4] Godunov, S.K.; Reabenki, V. S. - Scheme de calcul cu diferente finite, traducere din limba rusa, *Ed.Tehnica*, Bucuresti, 1977.
- [G5] Guarnieri, M.;Stella, A.;Trevisan, F. - A Methodological Analysis of Different Formulations for Solving Inverse Electromagnetic Problems, *IEEE Trans. on Mag.*, vol.26, nr.2, pag. 622-625, march 1990.
- [G6] Geyger, W. A. - Dispozitive magnetice neliniare, *Ed.Tehnica*, Bucuresti., 1968.
- [H1] Hammond, P.;Sykulski, J. K. - Engineering Electromagnetism, *Oxford Univ. Press*, 1994.
- [H2] Hans, Herman A.;Melcher, James R. - Electromagnetic fields and Energy , *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1989.
- [H3] Hantila, F. - On the uniqueness theorems of the stationary and quasistationary electromagnetic fields in nonlinear media, *Rev. Roum. des Sci. Techn*, Serie Electrotechn. Energ.,tom.20, Nr.1, 1975.

- [H4] Hayashi, C. und Abe, M. - Analogsimulation von magnetischen Hysteresephänomenen, *XX Int. Wiss. Koll.*, T.H. Ilmenau, Okt,1975.
- [H5] Hertz, A.;Robert, Bueltemann Jr. Hebert - The Application of Prependicularly superposed Magnetic Fields , *A.I.E.E. Trans.* , 74, 1955, pag .655-659.
- [H6] Hennerberg, G.;Sabonnadière, J. C.; Sattler, Ph.; Shen, D. - An accelerated Newton-Raphson Method associated with the Incomplete Cholensky Conjugate Gradient Algorithm, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26. Nr. 2, March 1990, pag. 709-711.
- [H7] Hoole, S.R.H.; Subramaniam, S.;Saldanha,R.;Coulomb, J. J.; Sabonnadière, J.C. - Inverse problem Methodology and Finite Elements in the Indentification of Craks , Sources ,Materials and their Geometry in Inaccessible Locations, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.27, Nr.3, pag. 3433-3443.
- [H8] Huebner, K.H. - The finite element method for engineers , *J. Wiley&Sons*, New-York,1975.
- [H9] Hinton,E.;Owen,D.;R.J.-Finite element programming,*Acad.Press.*,London, 1977.
- [I1] Ivanenko, D.D.; Sokolov, A.; - Teoria clasica a campului (traducere din lb. rusa), *Ed.Tehnica*, Bucuresti, 1955.
- [I2] Ixaru, L.G. - Metode numerice pentru ecuatii diferentiale cu aplicatii, *Ed-tehica*, Bucuresti, 1979.
- [I3] Daniel, Ioan; Gabriel. Ciuprina;C. Dumitrescu - Use of stochastic algorithms for formulations for solving inverse electromagnetic devices, *Proceeding a 11<sup>a</sup> Conf. COMPUMAG'97*, 3-6 nov., Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
- [K1] Keran, S.;Xianzhen, C.;Keding, Z. - *IEEE Trans.on Magn.*, 20(1984).
- [K2] Kitamura,M.;Kakukawa.S.;Mori,K.;Tominaka,T. - An optimal Design Tehnique for Coil Configurations in Iron-Shielded M R I. Magnets, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.30, Nr. 4, (1994).
- [K3] Kotinga, P.R.; Silvester, P. P. - Vector potential formulation for three-dimensional magnetostatics, *J. Appl. Phys.*, vol.53, Nr.11, Nov, 1982.
- [K4] Kreisinger , V.;Adam. J. - *Acta Techn. ČSAV*, vol. 29, Nr.2, pag. 209-241.
- [L1] Landau, L.D.; Lifschitz,E. M. - Klassische Feldtheorie, Bd. 2, *Akad. Verlag*, Berlin,1977.
- [L2] Libkind, M.S. - Metodica rasceta poperécinovo podmagnicivania upravleaemovo ferromagnitovo ustroistva. *Izvestia Akademii Nauk URSS, Energetica I Transport*, Nr.5, 1964.
- [I.3] Libkind, M. S.; Dorojko, L. I. - Electromognitniie haracteristiki upravleaemovo s reactora popericiniim podmagnicivania. *Electrcestvo*, Nr.1, 1967.



- 
- [L4] Liese,M.;Lentz,K.;Senske,K.;Spiegel,J. - Comparison of Vector Potential and Extended Scalar Potential Methods and True Three-Dimensional Magnetostatic Field Calculation, *IEEE Trans on Power App. and Systems*, vol. Pas-103, Nr.6, June, 1984.
- [L5] Lixin, Li; Jorma, Luomi - On three-dimensional boundary element methods for magnetostatics in vector variables, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, Nr.1, 1988.
- [L6] Leonard,P.J.;Rodger,D;Karagular,T.;Coles,C. - Finite Element Modelling of Magnetic Hysteresis, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 31, Nr.3, May 1955, pag.1801-1804.
- [M1] Marie,G.-Amplificateurs paramétriques basses fréquences à commande orthogonale, *Acta Electronica*, 8, nr.1,1964,pag.7-81.
- [M2] Marciuk ,G.I. - Metode de analiza numerica,*Ed. Acad.RSR*, București, 1983.
- [M3] Marinescu,M;Marinescu,N -Numerical computation of torques in permanent magnet motors by Maxwell's stresses and energy method, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol 24, nr.1, Jan.,1988.
- [M4] MagNet 5-2D, Tool-Box, Reference Manual, *Infolytica Corporation*, 1995.
- [M5] Mayergoyz, I.D.; Friedman, G. - Generalized Preisach model of hysteresis,*IEEE Trans. on Magn.*, Vol 24, Nr.1, 1988 .
- [M6] Michlin, S.G. - Variativonmethoden der Matematischen-Physik, *Akad. Verlag*, Berlin, 1962.
- [M7] Mitchell,A.R.;Griffiths,D.F. - The finite difference method in partial differential equations, *J. Willey & Sous* , Chichester, 1980.
- [M8] Mocanu, C.I - Teoria câmpului electromagnetic, *E.D.P.* , Bucuresti, 1981.
- [M9] Mocanu, C.I. - *Rev. Roum. Sci. Tech.-Electrotehn.Energ.* .29(1984), 1,pag.3-10.
- [M10] Micu, D.O. - Contribuții la sinteza câmpului electric si magnetic staționar, *Teză de doctorat*, UT Cluj-Napoca, 1992 .
- [M11] Mendes, J.M.; Saldanha, R.R;Vasconcelios, J.A -Using a Hybrid Algorithm of Design Electromagnetics Devices, *COMPUMAG*, Rio de Janeiro, Nov1997,pag.163-164.
- [N1] Nakata, T.; Takahashi ,N. - "Direct finite element analysis of flux and current distributions under specified conditions", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol MAG-18, Nr.2, 1982.

- [N2] Nakata, T.;Takahashi, N.; Kawase, Y.; Funakoshi, H., and Ito, S. - Finite element analysis of magnetic circuits composed of axisymmetric and rectangular regions, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol . MAG-21, Nr.6, 1985.
- [N3] Nicolaide, A. - Bazele fizice ale electrotehnicii, Vol 1, *Ed. Scrisul Românesc*, Craiova, 1983.
- [N4] Nicolau,E. - Introducere în electromagnetismul teoretic modern, *Ed. Academiei*, București, 1974.
- [O1] Florence, Ossart; Robert, Davidson; Stanley, Charap - A 3D Moving Vector Preisach Hysterezis Model, *IEEE Trans on Magnetics*, Vol 31, Nr.3 May 1995, pag.1785-1788.
- [O2] OPERA-2d - The Design Environment Reference Manual, *Vector Fields Limited*, Anglia , 1995.
- [P1] Palka. R. - Synthesis of magnetic fields by optimisation of the shape of current areas. *Archiv für Elektrotechnik*, 72, 1989.
- [P2] Panaitescu, A. - Contribuții la studiul proceselor electromagnetice în dispozitive cu medii în mișcare, *Teză de Doctorat*, Inst. Politehnic București, 1981.
- [P3] Phillipow, E. - Nichtlineare Elektrotechnik, *Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig*, Leipzig, 1976.
- [P4] Poincelot, P. - Précis d'électromagnetisme théorique, *Ed. Dunod*, Paris, 1963.
- [P5] Preda. M.;Cristea, P.;Spinei, F. - Bazele electrotehnicii, vol 1, *E.D.P.* București, 1980.
- [P6] Preis. K.;Mangele. C.;Biro, O. - FEM and evolution strategies in the optimal design of electromagnetic devices, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol 26, nr .5, sept. 1990.
- [P7] Preis. K.; Biro. O. - On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy-Currents, *IEEE Trans. On Magn*, vol .25 No 4. July 1989.
- [P8] Preis. K.; Biro, O.;Friederich, M.;Gottvald, A; Mangele, C. - Comparison of Different Optimisation Strategies in the Design of Electromagnetic Devices, *IEEE Trans. on Magn.* . vol. 27, 5 (Sept.1991).
- [P9] Petrov, R.;Rezvyakov, N.A. - Synthesis of an Axissymmetric inductor with specified Magnetic Field distribution, *Energ.i Transp.* , Izd. Akad. Nauk USSR , nr.3 , pag 168-171. 1987

- [P10] Pugacev, V.A. - Analiz electromagneticei sveazi mejdu vzaimno ortogonalnîmi conturami v nelineinovi ferromagneticei srede, *Electricestvo*, Nr.1, 1980, pag. 24-28.
- [P11] Pahner, Uwe; Martens R.; De Gersem, H.; Hameyer, K.; Belmans, R., - A Parametric Finite Element Environment tuned for Numerical Optimization, *COMPUMAG*, Rio de Janeiro, Nov. 1997, pag. 505-550.
- [R1] Răduleț, R. - Bazele electrotehnicii, Probleme, *EDP*, București, 1970.
- [R2] Reichert, K. - Über ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Magnetfeldern und Wirbelströmen in elektrischen Maschinen, *Habilitationsschrift*, TH, Stuttgart, 1968.
- [R3] Rădulescu, M.M.; Mîndru, Gh. - *Conf. Nat. Electrotehn. Electroenerg.*, Craiova, 1984, vol 1, - Bazele electrotehnicii, Probleme de câmp, pag. 117-122.
- [R4] Rădulescu, M.M.; Mîndru, Gh. - Asupra condițiilor la limită în formularea variațională a problemelor tridimensionale de câmp magnetic staționar, *Lucr. Ses.șt., I.P. Iași*, 1986.
- [R5] Rikabi, J.; Briaut, C.F.; Freeman, E.M. - On the Solvability of Magnetostatic Vector Potential Formulations, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol 26, nr.5, sept.1990.
- [R6] Rodger, D. - Finite-element method for calculating power frequency 3-dimensional electromagnetic field distributions, *IEEE Proceedings*, vol 130, Pt.A., Nr. 5, July, 1983.
- [R7] Rosenblat, M.A. - Magnitnie elementi avtomatiki i vîcislitelnoi tehniki. *Izd. Nauka*, Moscova, 1974.
- [R8] Rahmann, M.A., s.a. - *IEEE Trans. MAG*, Nr. 6, 1981, pag. 3253-3255.
- [S1] Sabonnadière, J.C.; Meunier, G.; Morel, B. - *IEEE Trans. Magn*, 18, (1982), 2, pag. 624-626.
- [S2] Saldanha, R.R. - Optimisation en Electromagnétisme par application conjointe des Méthodes de Programation Non Lineaire et de la Méthode des Eléments Finis. *Thèse*, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, mai, 1992.
- [S3] Savin, Gh.; Rosman, H. - Circuite electrice neliniare și parametrice, *Ed. tehnică*, București, 1973.
- [S4] Savin, Gh.; Balan, D.; Zitron, N. - Das Parametron mit orthogonal magnetisierter Spule. *XIV, Int. Wiss. Koll.*, T.H., Ilmenau, D.D.R., okt. 1969.
- [S5] Schmit, Z. A. - Structural Design by Systematic Synthesis, *Proc of the Second Nat. Conf. on Electric Computation*, ASCE New York, pag. 105-122., 1960.
- [S6] Shen, Dazhong - Contribution à la Modélisation Numérique des Phénomènes Electromagnétiques. *Dissertation*, Grenoble, 1978.

- [S7] Sikora. J.;Skoczylas, J.; Sroka ,J;Wincenciak. S. - Singular Value Decomposition in Identification of Magnetic Field Modelled with Finite Elements, *Scientia Electrica*, vol 32, nr .3. Zürich, 1986.
- [S8] Silvester. P.P.;Ferrari, R.L. - Finite elements for electrical engineers, *Cambridge Univ. Press*. Cambridge, 1983.
- [S9] Simkin. J.;Trowbridge, C.W . - Optimizing electromagnetic devices combining direct search methods with simulated annealing, *IEEE Trans. on Magn.*, vol.28, Nr.2, pag.1545-1548, march, 1992.
- [S10] Soran. I.F. - Studiul configurației câmpului magnetic în întrefierul mașinii de inducție și influența ei asupra parametrilor de pornire, *Teză de doctorat*, I.P., Timisoara, 1979.
- [S11] Soran. I.F. - *Rev. Roum. Sci. Techn.–Electrotechn.Energ.*,28,1983, 4, pag. 363-371.
- [S12] Sora . C. - Bazele electrotehnicii, *EDP*, Bucuresti, 1982.
- [S13] Stanciulescu, Fl. - Analiza si simularea sistemelor neliniare, *Ed. Acad. RSR*, Bucuresti, 1974
- [S14] Simion. E. ; Mîndru, Gh. - Unele aspecte privind bobinele neliniare comandate *Studia, Universitatis Babes-Bolyai, Seria Physica Fasc.1*,pag .73-82.1974.
- [S15] Sykulski, K., Jan , *Computational Magnetics, Chapman & Hall*, London, 1995.,373 pagini.
- [T1] Timotin .A. - *St. cerc. energ. electrotehn.* 17 (1967), nr.1, pag .143-156.
- [T2] Torschanoff, T. - *IEE Trans. Magn.*, 20 (1984), 5 , pag. 1912-1917.
- [T3] Toshiya, Morisue - 3D eddy-current calculation using the magnetic vector potential, *The International Workshop for eddy current code comparison*, USA, June, 1986.
- [T4] Trutt. F.C.;Erdélyi, E.A;Hopkins, R.E. - Representation of the Magnetisation Characteristic of DC Machines for Computer Use, *IEE Trans. on Power App. and Syst.* , vol. PAS- 87, nr. 3, 1968.
- [T5] Tugulea. A.;Timotin,A. - Condițiile de unicitate in determinarea campurilor electrostatic si magnetic cvasistationar in materiale neliniare cu polarizare reversibila si magnetizare reversibila *Studii si cerc. de energetica si electrotehnica*, Tom 15, nr .3, 1965, pag. 5-31.
- [T6] Turner. M.J.; Clough,R.W.;Martin, H.C.;Topp, L.J. - Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of Aeronautical Sciences*, 23, pag. 805-823, 1956.
- [T7] Tevan.G. - *Per. Polytech. – Electr. Eng.*, 27 (1983), 1, pag. 61-65.
- [T8] Edward Della Torre;Ferenc,Vajda - Physical Basis for Parameter Identification in Magnetic Materials.*IEEE Trans. on Magnetics*,vol.32,nr.5,sept.1996,pag.4186-4191.
- [T9] Topa.V. - Contributii la rezolvarea prin tehnici numerice de optimizare a problemelor inverse de camp electromagnetic, *Teza de doctorat*, UT Cluj- Napoca, 1997.

- [V1] Vaduva, I. - Modele de simulare cu calculatorul, *Ed. Tehnica*, Bucuresti, 1977.
- [V2] Vanderplaats, G. - Numerical Optimisation Techniques for Engineering Design *Mc Graw - Hill*, New York, 1984.
- [V3] Viorel, I.A.; Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M.; Szabó, Z. - *E.E.A. - Electrotehn.*, 32 1984, nr. 4, pag. 143-148.
- [Z1] Zienkiewicz, O.C. - The Finite element method in engineering science, *Mc Graw-Hill*, London, 1971.
- [Z2] Zienkiewicz, O.C., Constrained variational principles and penalty function method in finite element analysis, *Lect. Notes Math*, vol 363, (1974), pag. 207-214.
- [Z3] Zsombory, L.; Mihály, K. - Electromágneses terek gépi analizise, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1979.
- [Mi1] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M. - Analiza numerica a campului electromagnetic, *Litografia . Inst. Politehnic Cluj-Napoca*, 1983.
- [Mi2] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M. - Analiza numerica a campului electromagnetic, *Ed. Dacia*, 1986.
- [Mi3] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M. - *Conferinta. Nationala Electrotehnica, Electroenerg.*, Timisoara, 1982, vol.2 - Bazele electrotehnicii II, pag.227-235.
- [Mi4] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M. - *Conf. Nat. Electrotehn. Electroenerg.*, Craiova, 1984, vol.G, Tractiune electrica si echipamente neconventionale, pag.143-148.
- [Mi5] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M., *Bul. .St.Inst.Politehnic Cluj-Napoca*, seria Electrotehn., Energ., Inform., 23 (1980), pag. 43-48.
- [Mi6] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M.; Balan, R.; Tulai, A., Static and Dynamic Parameters of an open-loop controlled nonlinear Magnetic System, *Intermag*, Boston, 1980.
- [Mi7] Mîndru, Gh. - Bobina neliniara comandata ortogonal in circuit deschis, *Lucrarile Ses. St. I.P.C-N*, 1978, pag.13-19.
- [Mi8] Mîndru, Gh. - Influenta parametrilor geometrici si de material asupra comportarii unei bobine comandate, *Lucrarile Ses. St. I.P.C-N*, 1978 pag.20-25.
- [Mi9] Mîndru, Gh. - Aplicarea metodei tubului de flux elementar la analiza câmpului magnetic staționar in medii neliniare, *Lucrările Ses. St. I.P. Iasi, secția I, Câmpul electromagnetic*, 1986, pag.35-38.
- [Mi10] Mîndru, Gh.; Radulescu, M.M. - Asupra analizei numerice a campului electromagnetic prin metoda ec.integrale. *Ses. St. Univ. Oradea*, 1979.
- [Mi11] Mîndru, Gh. - Algoritmi bazati pe metoda tubului de flux elementar pentru campuri magnetice stationare. *Bul. St. Inst. Politehnic Cluj-Napoca*, seria Electrotehn. Energ., Inform., 32, 1989, pag.30-34.

- [Mi12] Mîndru, Gh.; Mîndru, A. - Numerical Analysis of the Stationary (Cvasistationary) Magnetic Fields by Elementary Flux Tube, *Acta Electrotehnica Napocensis* ;vol.36, nr.1,1995,pag.81-85.
- [Mi13] Mîndru, Gh.; Mîndru, A. - The Syntesis of a Magnetic Field in Stationary State and Concerning the Optimisation of the Field Domain's Geometry, *First Romanian - Japonese Joint Seminar on Applied Electromagnetics and Mechanics*, sept.1996, Neptun, Romania.
- [Mi14] Mîndru, Gh. - Modelarea numerica a campului electromagnetic, *Univ. Tehnica din Cluj Napoca*, vol I,81pagini,1995.
- [Mi15] Mîndru, Gh.; Mîndru, A.;Uwe, Pahner - Optimisation of the Magnetic Field's Domain Geometry in the Stationary Regime, *Acta Electrotehnica Napocensis*,vol. 37, nr.1,1997, pag. 25-30.
- [Mi16] Mîndru, Gh.; Mîndru, A. - The Theorem of the Punctual Superposition of the Electric and Magnetic Fields in Non-Linear Media, *Proceedings CADEMEC'97*, Cluj Napoca, August 1997, pag.18-23.
- [Mi17] Mîndru, Gh.; Ranea ,Tiberiu - *Brevet inventie*, nr. 107787.

## Anexa I

## Calculul campului magnetic prin MEF

```

DOUBLE PRECISION SNUM SNUMIT
INTEGER FE(72), A1, A2, A3, A4
REAL MI, NI, NU(135,2)
DIMENSION X(81,2), N(329,4), U(81,2), B(135), D(135), R(8),
*Z(7,2), A(135), RC(135)
READ(105,1) (R(IS), IS=1,8)
1  FORMAT(8F8.5)
   DO 500 IAU=1,54
   IAA=(IAU-1)*6+1
   IAB=IAA+5
   READ(105,2) ((N(IN,IX), IX=1,4), IN=IAA,IAB)
2  FORMAT(24I4)
500 CONTINUE
   READ(105,501) ((N(IN,IX), IX=1,4), IN=325,329)
501 FORMAT(20I4)
   DO 3 ID=1,24
3  D(ID)=2000000.
   DO 4 ID=28,135
4  D(ID)=0.
   DO 5 IE=1,72
5  FE(IE)=27+IE
   DO 600 IZ=1,7
   READ(105,6) (Z(IZ,IT), IT=1,2)
6  FORMAT(F12.10, F10.4)
600 CONTINUE
   WRITE(108,503) Z
503 FORMAT(3X, 10F8.4)

C  CALCULUL COORDONATELOR

   DO 7 KK=1,8
   ALFA=KK*(3.14/9)
   KI=(KK-1)*7
   DO 8 KJ=1,7
   KJR=KI+KJ
   X(KJR,1)=R(8)+R(KJ)*COS(ALFA)
8  X(KJR,2)=R(KJ)*SIN(ALFA)
   X(KK+65,1)=R(8)*COS(ALFA)+R(8)
7  X(65+KK,2)=R(8)*SIN(ALFA)
   DO 9 IH=1,8
   X(IH+57,1)=R(IH)+R(8)
   X(IH+57,2)=0
   JU=82-IH
   X(JU,2)=0
9  X(JU,1)=R(8)-R(IH)
   X(57,1)=R(8)

```

X(57,2)=0

C CALCULUL ARIILOR SI AL BARICENTRELOR

```

DO 10 KA=1,329
A1=N(KA,1)
A2=N(KA,2)
A3=N(KA,3)
A4=N(KA,4)
RC(A1)=((X(A2,1)**2+X(A2,2)**2)**0.5+(X(A3,1)**2+X(A3,2)**2)**0.5+
*(X(A3,1)**2+X(A4,2)**2)**0.5)*(1/3.)
IF(RC(A1)) 70,71,70
71 WRITE(108,75)
75 FORMAT(3X,'IMPARTIRE CU ZERO')
GO TO 200
70 CONTINUE
A(A1)=0.5*(X(A2,1)*(X(A3,2)-X(A4,2))+X(A3,1)*(X(A4,2)-X(A2,2))
*+X(A4,1)*(X(A2,2)-X(A3,2)))
IF (A(A1)) 11,10,10
11 A(A1)=(-1)*A(A1)
10 CONTINUE

```

C INITIALIZAREA POTENTIALULUI SI A LUI NU

```

DO 12 N1=1,81
12 U(N1,1)=0.
DO 14 J=1,135
14 NU(J,1)=500.

```

C CALCULUL CAMPULUI

```

KI=0
DO 200 K=2,100
SNUM=0
SNUMIT=0
DO 300 I=1,328
MB=N(I,1)
N2=N(I,2)
N3=N(I,3)
N4=N(I,4)
B(MB)=((ABS((X(N3,2)-X(N4,2))*U(N2,1)+(X(N4,2)-X(N2,2))*U(N3,1)+
*(X(N2,2)-X(N3,2))*U(N4,1)))**2+(ABS(X(N4,1)-X(N3,1))*U(N2,1)+
*(X(N2,1)-X(N4,1))*U(N3,1)+(X(N3,1)-X(N2,1))*U(N4,1)))**2)**0.5/
*(2*A(MB)*RC(MB))

```

C INTERPOLAREA LUI NU

```

REMIZ=D(MB)
DO 15 J3=1,72
IF(MB.EQ.FE(J3)) GO TO 16
15 CONTINUE
NU(MB,1)=795774.

```



```

GO TO 27
16 IF(B(MB)) 17,18,19
17 WRITE(108,20) MB
20 FORMAT(20X,'VECTORUL B(',I3,') ESTE NEGATIV')
STOP
18 NU(MB,2)=250.
GO TO 21
19 KI=1
51 IF(B(MB)-Z(KI,1)) 22,23,23
22 IF(KI-1) 25,25,24
25 NU(MB,2)=Z(1,2)
GO TO 21
24 KD=KI-1
NU(MB,2)=Z(KD,2)+(Z(KI,2)-Z(KD,2))*(B(MB)-Z(KD,1))/(Z(KI,1)-Z(KD,1))
GO TO 21
23 IF(KI-8) 26,50,50
26 KI=KI+1
GO TO 51
50 NU(MB,2)=795774-290000./B(MB)
21 NU(MB,1)=NU(MB,1)+0.1*(NU(MB,2)-NU(MB,1))
27 MI=REMIZ*A(MB)/3-(NU(MB,1)/RC(MB))*(((X(N3,2)-X(N4,2))*
*(X(N4,2)-X(N2,2))+X(N4,1)-X(N3,1))*(X(N2,1)-X(N4,1)))*U(N3,1)+
*((X(N3,2)-X(N4,2))*(X(N2,2)-X(N3,2))+X(N4,1)-X(N3,1))*
*(X(N3,1)-X(N2,1)))*U(N4,1))/(4*A(MB))
NI=(NU(MB,1)/RC(MB))*((ABS(X(N3,2)-X(N4,2)))**2+
*(ABS(X(N4,1)-X(N3,1)))**2)/(4*A(MB))
SNUM=SNUM+MI
SNUMIT=SNUMIT+NI
IF(SNUMIT-1000000000000000.) 80,81,81
80 IF(SNUM-1000000000000000.) 82,81,81
81 WRITE(108,85)
85 FORMAT(3X,NUMAR MARE')
GO TO 200
82 CONTINUE
IF(N(I,2)-N(I+1,2)) 28,300,28
28 IF(SNUMIT) 129,71,129
129 U(N2,2)=SNUM/SNUMIT
U(N2,1)=U(N2,1)+1.2*(U(N2,2)-U(N2,1))
SNUM=0.
SNUMIT=0.
300 CONTINUE
DO 350 II=1,7
U(II+57,1)=U(II,1)
IG=57-II
350 U(II+74,1)=U(IG,1)
U(57,1)=(U(81,1)+U(58,1))/2
IF(K.LT.95) GO TO 400
WRITE(108,29) (U(N7,1), N7=1,81)
29 FORMAT(10X,POTENTIALUL MODIFICAT/(' ',8E16.6))
400 CONTINUE
37 B(127)=B(128)
IF(K.LT.95) GO TO 401

```

182

```
DO 30 M=1,135
30 WRITE(108,31) M,B(M)
31 FORMAT(2X,'VECTORUL B(',I3,')='E13.8)
WRITE(108,32)
32 FORMAT(20X,16(1H*))
401 CONTINUE
IF(K.EQ.100) GO TO 33
GO TO 200
33 KI=KI+1
IF(KI-1) 34,35,34
35 DO 36 IK=1,328
MB=N(IK,1)
N2=N(IK,2)
N3=N(IK,3)
N4=N(IK,4)
36 B(MB)=((ABS((X(N3,2)-X(N4,2))*U(N2,1)+(X(N4,2)-X(N2,2))*U(N3,1)+
(X(N2,2)-X(N3,2))*U(N4,1)))**2+(ABS(X(N4,1)-X(N3,1))*U(N2,1)+
(X(N2,1)-X(N4,1))*U(N3,1)+(X(N3,1)-X(N2,1))*U(N4,1)))**2)**0.5/
*(2*A(MB)*RC(MB))
GO TO 37
34 WRITE(108,38)
38 FORMAT(10X,50(1H*))
200 CONTINUE
STOP
END
```

## Anexa II

### Calculul campului magnetic prin MEF utilizand programul ANSYS

#### 1. Descrierea programului ANSYS

Utilitarul ANSYS este un pachet de programe bazate pe MEF pentru calculul de campuri electromagnetice, probleme de mecanica, termotehnica etc. El este accesibil mai multor tipuri de computere: PC, Workstation, minicomputer etc.

Sistemul ANSYS are doua nivele principale: nivelul de accesare (sau de lansare) a programului si nivelul de procesare.

Nivelul de accesare se comporta ca o poarta de intrare/iesire in/din utilitarul ANSYS, respectiv pentru controlul global al derularii programului, definirea aplicatiei, definirea numelui fisierului, stergerea datelor ce exista initial in baza de date etc.

Nivelul de procesare este lansat in executie prin /nume; abandonarea unei procesari se face prin /finish (pentru revenire la nivelul de accesare si lansarea urmatoarei procesari), prin /quit cand se abandoneaza temporar procesarea fara a sterge baza de date pentru rularea acestuia sau /exit cand se revine la nivelul sistemului de operare.

Pentru a proteja datele apartinand bazei de date utilitarul poate crea copii "back-up" pe care le include in fisierul aplicatiei curente folosind comanda /save, respectiv pentru citirea ulterioara a acestor date comanda /resume.

Comunicarea utilizatorului cu programul ANSYS se face printr-un numar de peste 800 comenzi concepute pentru date (de exemplu proprietati de materiale) sau pentru atitudini (de exemplu afisarea modelului). O comanda este formata din numele comenzii urmata de mai multe argumente separate intre ele si separate de comanda prin virgula. O comanda nu poate avea mai mult de opt caractere sau prescurtari cu mai putin de patru caractere; astfel comenzile finish, finis sau fini sunt echivalente. Comenzile care incep cu / (slash) sunt in general folosite pentru controlul general al programului (lansarea in executie, control grafice etc.)

#### 2. Indexul comenzilor ANSYS folosite

##### a). Comenzi slash

/clear - sterge datele curente din baza de date

/filename - definirea numelui fisierului

/number - specifica modul de identificare a materialului (dupa numere, culori sau ambele)

/pnum - controlul pe entitati a numerotarii/asocierii de culori

/post1 - postprocesarea generala a datelor referitoare la intregul model

/post26 - postprocesare functie de timp

/prep7 - preprocesarea generala a datelor; constructia modelului (geometrie, materiale, surse etc.)

/replot - afisarea datelor rezultate in urma executiei ultimei comenzi

/solu - apelarea procesului de solutie: actualizarea datelor si rezolvarea ecuatiilor corespunzatoare MEF

/title - definirea titlului aplicatiei

/opt - optimizarea modelului

##### b). Alte comenzi

alls - selectarea tuturor entitatilor

amesh - genereaza noduri si elemente finite in limitele definite  
 antype - specificarea tipului analizei  
 aovl - suprapune ariile definite  
 arsym - creaza simetrie axiala fata de o axa  
 asel - selectarea unei arii  
 bfe - defineste parametrul sau legea de aproximare pe element  
 cp - defineste sau modifica un set de grade de libertate  
 d - defineste limitele gradelor de libertate in noduri  
 dsymm - specifica simetria sau asimetria limitariilor impuse  
 emunit - specifica sistemul de unitati folosite  
 eplot - comanda de figurare a elementelor finite  
 esel - selectarea unei multimi de elemente  
 eshape - defineste forma elementelor finite (cu trei, patru, ... laturi)  
 esize - defineste dimensiunile maxime ale elementelor finite  
 et - defineste tipul de element folosit  
 fini - abandonarea unei procesari  
 harfrq - defineste frecventa  
 lesize - specifica dimensiunea maxima a elementelor ce au doua noduri pe aceeasi linie  
 mat - asociaza un numar unui anumit material  
 mp - defineste proprietatile liniare ale unui material  
 nsel - selectarea unei multimi de noduri  
 nsle - selectarea nodurilor atasate elementelor specificate anterior  
 pletab - afisarea rezultatelor  
 rect - generarea de suprafete dreptunghiulare  
 sadd - genereaza un nou item prin insumarea a doua itemuri existente  
 set - defineste setul de date ce trebuie citite din fisierul cu rezultatele problemei  
 sexp - formeaza un nou item prin ridicare la putere sau inmultire  
 smult - formeaza un nou item prin inmultirea a doua itemuri deja existente  
 type - asociaza un set de elemente unui anumit material  
 solve - rezolva sistemul de ecuatii

### 3. Aplicatie in ANSYS

```

/filenam,torrdr6
/title,magf
mucu=1
mulu=1
j=.25e6
r1=2.75e-3
r2=7e-3
rc=9.125e-3
r3=12.25e-3
r4=15.5e-3
r5=21e-3
z1=6.5e-3
z2=9.5e-3
z3=15e-3
f=50

TBPT,,50,,200
TBPT,,100,,280
TBPT,,150,,325
TBPT,,200,,345
TBPT,,250,,360
TBPT,,300,,370
TBPT,,350,,375
TBPT,,400,,380
TBPLOT,BH,2
TBPLOT,NB,2

et,1,13
et,2,13
et,3,13
mp,murx,1,mucu

mp,murx,2,TB,BH,2
mp,murx,3,mulu
type,1
mat,1
rect,r2,r3,0,z1
aplot
type,2
mat,2,TB,Bh,2
rect,r1,r2,0,z1
aplot
rect,r3,r4,0,z1
aplot
rect,r1,r4,z1,z2
aplo,all
aadd,2,3,4

```

aplot	eplo	d,all,az,0
type,3	fini	alls
mat,3		nset,s,P50X
rect,0,r1,0,z2	/solu	88
aplot	nset,s,P50X	1
rect,r4,r5,0,z2	44	2
aplot	416	3
rect,0,r5,z2,z3	420	4
aplot	421	5
aadd,2,3,4	422	6
aplo	423	7
	424	8
/pnum,area,1	425	9
aplo	426	10
/pnum,line,1	427	11
lplot	428	12
lesize,1,,,5	429	13
lesize,2,,,10	430	14
lesize,3,,,6	431	15
lesize,4,,,10	432	16
lesize,5,,,10	433	17
lesize,9,,,10	434	18
lesize,6,,,10	435	19
lesize,12,,,10	436	20
lesize,7,,,3	437	21
lesize,16,,,4	438	22
lesize,8,,,10	439	23
lesize,11,,,15	440	24
lesize,10,,,10	441	25
lesize,18,,,5	442	26
lesize,19,,,5	443	27
lesize,15,,,20	444	28
lesize,17,,,6	445	29
lesize,14,,,10	446	30
lesize,20,,,10	447	31
lesize,22,,,15	448	32
lesize,27,,,20	449	33
lesize,29,,,4	450	34
lesize,28,,,4	451	35
lesize,25,,,15	452	36
eshape,3	453	37
type,1	454	38
mat,1	455	39
amesh,1	456	40
type,2	457	41
mat,2	458	42
amesh,5	459	43
	460	44
	461	45
type,3	462	46
mat,3		47
amesh,6		48
numm.node		

186

```
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88
```

```
apply  
pdef,b,b,sum  
pdef,bx,b,x  
pdef,by,b,z  
plpath,b,bx,by  
pdef,a,a,z  
plpath,a  
elist  
nset  
fini  
/clear
```

```
bfe,all,js,...,j  
alls  
solve  
fini
```

```
/post1  
plns,a,z  
plvect,h  
plvect,b  
Lpath,p
```

## Anexa I'

## Calculul campului magnetic prin MEF (varianta 2)

```

DIMENSION R(50), X(15,2), B(50), FI(50), BT(50), UN(50), F(50),
*VA(70), FU(4)
DATA BL, AS, AL, AI', *, ', T/
READ(105,1) R1, R2, CI, BO, EPS, N, JP, K
1  FORMAT(5F8.4,3I4)
  READ(105,2) ((X(I,J), J=1,2), I=1,JP)
2  FORMAT(2F8.4)
  DR=(R2-R1)/(K-1)
  DO 3 I=1,K
  R(I)=R1+(I-1)*DR
3  F(I)=SQRT(ABS((R2/2-R1/2)*(R2/2-R1/2)-(R1/2+R2/2-R(I))*(R1/2+R2/2-R(I))))
  DO 60 IPR=1,2
  DO 61 I=1,70
61  VA(I)=AL
  WRITE(108,62) VA
62  FORMAT(5X,70A1,5X,7=,5X,BO=',3X,0',9X,0.12',6X,0.24',6X,0.36')
  DO 63 I=1,70
63  VA(I)=RL
  DO 64 KK=1,50
  VA(1)=AI
  DO 65 JJ=1,4
  CI=0.02*KK
  BO=0.1*(JJ-1)
  I=1
  UN(I)=X(1,2)
14  B(I)=N*CI/6.28/UN(I)/R(I)
11  PROB=B(I)
  BT(I)=SQRT(ABS(B(I)*B(I)+BO*BO))
  J=1
  IF(BT(I)=X(1,1))4,4,5
4  UN(I)=X(1,2)
  GO TO 20
5  J=J+1
  IF(BT(I)=X(J,1))6,7,8
6  UN(I)=X(J-1,2)+(BT(I)-X(J-1,1))/X(J,1)-X(J-1,10)*X(J,2)
  GO TO 20
7  UN(I)=X(J,2)
  GO TO 20
8  IF(J-JP) 5,9,9
9  UN(I)=X(JP,2)
20  UN(I)=(UN(I)-COR)*0.2+COR
  COR=UN(I)
  B(I)=N*CI/2/3.14/UN(I)/B(I)
  IF(ABS(PROB-B(I))-EPS) 10,10,11
10  IF(I-K) 12,13,13
12  I=I+1

```

188

```
UN(I)=UN(I-1)
GO TO 14
13 CONTINUE
M=K-1
FT=0.
DO 16 I=1,M
FI(I)=(B(I)+B(I+1))/2*DR*(F(I)+F(I+1))/2*1000.
16 FT=FT+FI(I)
IF(IPR.EQ.2) GO TO 66
IY=N*FT/CI*200
FU(JJ)=N*FT/CI
GO TO 67
66 IY=FT*6000
FU(JJ)=FT
67 VA(IY)=AS
65 CONTINUE
WRITE(108,68) VA, CI,FU
68 FORMAT(5X, 70A1, 5X, F5.3, 5X, 4(F8.6, 2X))
DO 69 I=1,70
69 VA(I)=BL
64 CONTINUE
IF(IPR.EQ.1) GO TO 71
WRITE(108, 70)
70 FORMAT(5X/5X, 'GRAFICUL FLUXULUI/5X)
GO TO 60
71 WRITE(108, 72)
72 FORMAT(5X/5X, 'GRAFICUL INDUCTANTEI/5X)
60 CONTINUE
STOP
END
```



## ANEXA IV

## CALCULUL CAMPULUI MAGNETIC PRIN MDF

```

1 REM PROGRAMUL CALCULEAZA CU AJUTORUL DIFERENTELOR FINITE CAMPUL MAGNETIC
2 REM CREAT DE UN DISPOZITIV NELINIAR COMANDAT. BOBINA LUATA IN CONSIDERARE
3 REM ARE DOUA INFASURARI: UNA DE LUCRU PARCURSA DE CURENTUL DE LUCRU IL, IAR
4 REM CEALALTA DE COMANDA CARACTERIZATA DE O DENSITATE DE CURENT JC.
5 REM
6 REM
7 REM ***** DECLARARI DE MASIVE *****
8 REM
9 REM
10 DIM Q1(18), Q2(12), Q3(16), Q5(8), Q6(14), QB(10), XI(3), XF(3), YI(3), YF(3)
11 DIM#2, A(29,48)
12 DIM#3, B(29,48)
13 DIM#4, C(29,48)
14 DIM#5, M(29,48)
15 INPUT "INTRODUCETI NUMARUL PARCURGERII : ", X
16 IF X<>0 THEN 24
17 OPEN "CIMP2.DAT" FOR OUTPUT AS FILE 2,VIRTUAL
18 OPEN "CIMP3.DAT" FOR OUTPUT AS FILE 3,VIRTUAL
19 OPEN "CIMP4.DAT" FOR OUTPUT AS FILE 4,VIRTUAL
20 OPEN "CIMP5.DAT" FOR OUTPUT AS FILE 5,VIRTUAL
21 A(29,48)=0 : B(29,48)=0 : C(29,48)=0 : M(29,48)=0
22 JI=1 : JF=48 : SJ=1
23 GOTO 35
24 OPEN "CIMP2.DAT" FOR INPUT AS FILE 2,VIRTUAL
25 OPEN "CIMP3.DAT" FOR INPUT AS FILE 3,VIRTUAL
26 OPEN "CIMP4.DAT" FOR INPUT AS FILE 4,VIRTUAL
27 OPEN "CIMP5.DAT" FOR INPUT AS FILE 5,VIRTUAL
29 JI=1 : JF=48 : SJ=1
30 IF X/2*2<>X THEN JI=48 : JF=1 : SJ=-1
31 GOTO 36
32 REM
33 REM ***** INITIALIZARI DE MASIVE *****
34 REM
35 MAT A=ZER : MAT B=ZER : MAT C=ZER
36 NL=300
40 IL=0.025
50 DC=3000000
56 XI(1)=7 : XI(2)=7 : XI(3)=29
57 XF(1)=44 : XF(2)=22 : XF(3)=44
58 YI(1)=8 : YI(2)=1 : YI(3)=1
59 YF(1)=23 : YF(2)=7 : YF(3)=7
65 IF X<>0 THEN 200
70 FOR E1=1 TO 29
75 FOR F1=1 TO 6
80 M(E1,F1)=795774
85 NEXT F1
90 FOR F2=45 TO 48

```

```

190 95   M(E1,F2)=795774
100   NEXT F2
105   NEXT E1
110   FOR F3=7 TO 44
115   FOR E2=24 TO 29
120   M(E2,F3)=795774
125   NEXT E2
130   FOR E3=8 TO 23
135   M(E3,F3)=500
140   NEXT E3
145   NEXT F3
150   FOR E4=1 TO 7
155   FOR F4=7 TO 22
160   M(E4,F4)=500
165   NEXT F4
170   FOR F5=23 TO 28
175   M(E4,F5)=795774
180   NEXT F5
185   FOR F6=29 TO 44
190   M(E4,F6)=500
195   NEXT F6
196   NEXT E4
200   Q5(1)=1 : Q5(2)=6 : Q5(3)=7 : Q5(4)=7 : Q5(5)=8 : Q5(6)=8 : Q5(7)=9 :
      Q5(8)=22
208   Q1(1)=1 : Q1(2)=6 : Q1(3)=7 : Q1(4)=7 : Q1(5)=8 : Q1(6)=8 : Q1(7)=9 :
      Q1(8)=22
209   Q1(9)=23 : Q1(10)=23 : Q1(11)=24 : Q1(12)=24 : Q1(13)=25 : Q1(14)=25 :
      Q1(15)=26 : Q1(16)=28 : Q1(17)=29 : Q1(18)=29
215   DATA 0,0.2,0.28,0.325,0.345,0.360,0.370,0.375,0.380,100
216   FOR S20=1 TO 10
217   READ QB(S20)
218   NEXT S20
221   Q6(1)=8 : Q6(2)=22 : Q6(3)=23 : Q6(4)=23 : Q6(5)=24 : Q6(6)=24 :
      Q6(7)=25 : Q6(8)=27 : Q6(9)=28 : Q6(10)=28 : Q6(11)=29 : Q6(12)=29 :
      Q6(13)=30 : Q6(14)=43
225   Q2(1)=1 : Q2(2)=22 : Q2(3)=23 : Q2(4)=23 : Q2(5)=24 : Q2(6)=24 :
      Q2(7)=25 : Q2(8)=25 : Q2(9)=26 : Q2(10)=28 : Q2(11)=29 : Q2(12)=29
245   Q3(1)=1 : Q3(2)=7 : Q3(3)=8 : Q3(4)=8 : Q3(5)=9 : Q3(6)=22 :
      Q3(7)=23 : Q3(8)=23 : Q3(9)=24 : Q3(10)=24 : Q3(11)=25 : Q3(12)=25 :
      Q3(13)=26 : Q3(14)=28 : Q3(15)=29 : Q3(16)=29
250   OPEN "CIMP1.LST" FOR OUTPUT AS FILE 1
260   REM
261   REM ***** INCEPUTUL BALEIERII *****
262   REM
270   FOR I=1 TO 29
280   FOR J=JI TO JF STEP SJ
285   REM
286   REM ***** CALCULAREA DISTANTEI D *****
287   REM
290   IF J<=6 THEN D=.022-J*.001 : GOTO 435
320   IF J<=22 THEN D=.01725-J*.00025 : GOTO 435
330   IF J=23 THEN D=.0115 : GOTO 435

```

```

340 IF J<=28 THEN D=.035-J*.001 : GOTO 435
370 IF J<=44 THEN D=.01375-J*.00025 : GOTO 435
380 IF J=45 THEN D=.00025 : GOTO 435
390 D=.048-J*.001
400 REM
401 REM ***** CAUTAREA POZITIEI PUNCTULUI DE COORDONATE (I,J) *****
402 REM
435 IF J=1 THEN 2570
440 IF J<6 THEN 600
450 IF J=6 THEN 630
460 IF J=7 THEN 660
480 IF J<22 THEN 720
490 IF J=22 THEN 750
500 IF J=23 THEN 780
505 IF J=24 THEN 660
510 IF J<28 THEN 810
520 IF J=28 THEN 840
530 IF J=29 THEN 900
550 IF J<44 THEN 720
560 IF J=44 THEN 930
570 IF J=45 THEN 960
575 IF J=46 THEN 870
580 IF J<48 THEN 600
590 IF J=48 THEN 2570
600 FOR S1=1 TO 17 STEP 2 UNTIL ((I>=Q1(S1)) AND (J<=Q1(S1+1)))
610 NEXT S1
620 ON (S1+1)/2 GOTO 2610,2630,2670,2690,2690,2710,2730,2610,2570
630 FOR S2=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S2)) AND (I<=Q1(S2+1))
640 NEXT S2
650 ON (S2+1)/2 GOTO 2750,2770,2810,2830,2830,2850,2870,2750,2570
660 FOR S3=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S3)) AND (I<=Q1(S3+1))
670 NEXT S3
680 ON (S3+1)/2 GOTO 3570,3590,3870,3470,3850,3330,3170,3190,2570
690 FOR S4=1 TO 11 STEP 2 UNTIL (I>=Q2(S4)) AND (I<=Q2(S4+1))
700 NEXT S4
710 ON (S4+1)/2 GOTO 3810,3890,2890,3050,3070,2570
720 FOR S5=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S5)) AND (I<=Q1(S5+1))
730 NEXT S5
740 ON (S5+1)/2 GOTO 3350,3370,3410,3430,3850,2910,3230,3250,2570
750 FOR S6=1 TO 15 STEP 2 UNTIL (I>=Q3(S6)) AND (I<=Q3(S6+1))
760 NEXT S6
770 ON (S6+1)/2 GOTO 3830,3910,3430,3850,2910,3230,3250,2570
780 FOR S7=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S7)) AND (I<=Q1(S7+1))
790 NEXT S7
800 ON (S7+1)/2 GOTO 3750,3770,3870,3450,3850,2990,3110,3130,2570
810 FOR S8=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S8)) AND (I<=Q1(S8+1))
820 NEXT S8
830 ON (S8+1)/2 GOTO 3630,3650,3870,3490,3850,2710,2730,2610,2570
840 FOR S9=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S9)) AND (I<=Q1(S9+1))
850 NEXT S9
860 ON (S9+1)/2 GOTO 3690,3710,3870,3510,3850,2850,2870,2750,2570
870 FOR S10=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S10)) AND (I<=Q1(S10+1))

```

```
880 NEXT S10
890 ON (S10+1)/2 GOTO 3190,2370,3290,3310,3310,3330,3170,3190,2570
900 FOR S11=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S11)) AND (I<=Q1(S11+1))
910 NEXT S11
920 ON (S11+1)/2 GOTO 3810,3930,3550,3850,2890,3050,3070,2570
930 FOR S12=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S12)) AND (I<=Q1(S12+1))
940 NEXT S12
950 ON (S12+1)/2 GOTO 3930,3950,2910,3230,3250,2570
960 FOR S13=1 TO 17 STEP 2 UNTIL (I>=Q1(S13)) AND (I<=Q1(S13+1))
970 NEXT S13
980 ON (S13+1)/2 GOTO 3130,3090,2950,2970,2970,2990,3110,3130,2570
2500 REM
2501 REM ***** INITALIZARI PARAMETRI ECUATII *****
2502 REM
2570 B(I,J)=0
2580 GOTO 6500
2610 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=1 : K3=0
2620 GOTO 4500
2630 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=.5 : K3=0
2640 GOTO 4500
2670 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.0005 : AR=1 : AZ=1 : K3=0
2680 GOTO 4500
2690 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=1 : AZ=1 : K3=0
2700 GOTO 4500
2710 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=1 : AZ=2 : K3=0
2720 GOTO 4500
2730 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.0005 : AR=1 : AZ=2 : K3=0
2740 GOTO 4500
2750 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=.5 : AZ=1 : K3=0
2760 GOTO 4500
2770 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=.5 : AZ=.5 : K3=0
2780 GOTO 4500
2810 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.0005 : AR=.5 : AZ=.5 : K3=0
2820 GOTO 4500
2830 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=.5 : AZ=1 : K3=0
2840 GOTO 4500
2850 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=.5 : AZ=2 : K3=0
2860 GOTO 4500
2870 K1=0 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.0005 : AR=.5 : AZ=2 : K3=0
2880 GOTO 4500
2890 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.00025 : AR=.5 : AZ=2 : K3=0
2900 GOTO 4500
2910 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.00025 : AR=1 : AZ=2 : K3=0
2920 GOTO 4500
2950 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.0005 : AR=2 : AZ=.5 : K3=0
2960 GOTO 4500
2970 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.0025 : AR=2 : AZ=1 : K3=0
2980 GOTO 4500
2990 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.0005 : AR=2 : AZ=2 : K3=0
3000 GOTO 4500
3050 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.0005 : AR=.5 : AZ=2 : K3=0
3060 GOTO 4500
```

3070 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.001 : AR=.5 : AZ=1 : K3=0  
 3080 GOTO 4500  
 3090 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=.5 : K3=0  
 3100 GOTO 4500  
 3110 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.0005 : AR=2 : AZ=2 : K3=0  
 3120 GOTO 4500  
 3130 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=1 : K3=0  
 3140 GOTO 4500  
 3170 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.0005 : AR=2 : AZ=2 : K3=0  
 3180 GOTO 4500  
 3190 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=1 : K3=0  
 3200 GOTO 4500  
 3230 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.0005 : AR=1 : AZ=2 : K3=0  
 3240 GOTO 4500  
 3250 K1=0 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=1 : K3=0  
 3260 GOTO 4500  
 3270 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=.5 : K3=0  
 3280 GOTO 4500  
 3290 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.0005 : AR=2 : AZ=.5 : K3=0  
 3300 GOTO 4500  
 3310 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.00025 : AR=2 : AZ=1 : K3=0  
 3320 GOTO 4500  
 3330 K1=0 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.00025 : AR=2 : AZ=2 : K3=0  
 3340 GOTO 4500  
 3350 K1=0 : K2=1 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=1 : K3=1  
 3360 GOTO 4500  
 3370 K1=0 : K2=1 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=.5 : K3=1  
 3380 GOTO 4500  
 3410 K1=0 : K2=1 : HR=.00025 : HZ=.0005 : AR=1 : AZ=.5 : K3=1  
 3420 GOTO 4500  
 3430 K1=0 : K2=1 : HR=.00025 : HZ=.00025 : AR=1 : AZ=.5 : K3=1  
 3440 GOTO 4500  
 3450 K1=0 : K2=1 : HR=.00025 : HZ=.00025 : AR=2 : AZ=1 : K3=1  
 3460 GOTO 4500  
 3470 K1=0 : K2=1 : HR=.0005 : HZ=.00025 : AR=2 : AZ=1 : K3=1  
 3480 GOTO 4500  
 3490 K1=0 : K2=1 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=1 : AZ=1 : K3=1  
 3500 GOTO 4500  
 3510 K1=0 : K2=1 : HR=.001 : HZ=.00025 : AR=.5 : AZ=1 : K3=1  
 3520 GOTO 4500  
 3550 K1=0 : K2=1 : HR=.0005 : HZ=.00025 : AR=.5 : AZ=1 : K3=1  
 3560 GOTO 4500  
 3570 K1=1 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=1 : K3=1  
 3580 GOTO 4500  
 3590 K1=1 : K2=0 : HR=.0005 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=.5 : K3=1  
 3600 GOTO 4500  
 3630 K1=1 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=1 : K3=1  
 3640 GOTO 4500  
 3650 K1=1 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=1 : AZ=.5 : K3=1  
 3660 GOTO 4500  
 3690 K1=1 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=.5 : AZ=1 : K3=1  
 3700 GOTO 4500



```

3710 K1=1 : K2=0 : HR=.001 : HZ=.001 : AR=.5 : AZ=.5 : K3=1
3720 GOTO 4500
3750 K1=1 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=1 : K3=1
3760 GOTO 4500
3770 K1=1 : K2=0 : HR=.00025 : HZ=.001 : AR=2 : AZ=.5 : K3=1
3780 GOTO 4500
3810 M1=795774 : M2=M(I,J) : H1=.001 : A1=.5 : H2=.00025 : A2=1 : K3=1
3820 GOTO 4800
3830 M1=M(I,J) : M2=795774 : H1=.00025 : A1=1 : H2=.00025 : A2=2 ; K3=1
3840 GOTO 4800
3850 M1=795774 : M2=M(I,J) : H2=.00025 : A2=2 : H1=.00025 ; A1=1 : K3=1
3860 GOTO 5100
3870 M1=M(I,J) : M2=795774 : H1=.001 : A1=.5 : H2=.00025 : A2=1 : K3=1
3880 GOTO 5100
3890 M1=795774 : M2=M(I,J) : HR1=.001 : AR1=.5 : HR2=.00025 : AR2=1 :
      HZ1=.00025 : AZ1=1 : HZ2=.00025 : AZ2=2 : K3=1
3900 GOTO 5400
3910 M1=M(I,J) : M2=795774 : HR1=.00025 : AR1=1 : HR2=.00025 : AR2=2 :
      HZ1=.001 : AZ1=.5 : HZ2=.00025 : AZ2=1 : K3=1
3920 GOTO 5400
3930 M1=M(I,J) : M2=795774 : HR1=.001 : AR1=.5 : HR2=.00025 : AR2=1 :
      HZ1=.001 : AZ1=.5 : HZ2=.00025 : AZ2=1 : K3=1
3940 GOTO 5800
3950 M1=795774 : M2=M(I,J) : HR1=.00025 : AR1=1 : HR2=.00025 : AR2=2 :
      HZ1=.00025 : AZ1=1 : HZ2=.00025 : AZ2=2 : K3=1
3960 GOTO 5800
3995 REM
4000 REM ***** ECUATIE IN MEDII CONTINUE *****
4005 REM
4500 S=J-1 : T=J+1 : U=I-1 : V=I+1 : IF I=1 THEN U=V
4501 IF K2=0 THEN V1=0 : V2=0 : GOTO 4505
4502 V1=(M(I,T)+(AR*AR-1)*M(I,J)-
      AR*AR*M(I,S))/((AR+1)*(AR+1)*HR*HR*M(I,J)*AR*AR)
4503 V2=(M(V,J)+(AZ*AZ-1)*M(I,J)-
      AZ*AZ*M(U,J))/(M(I,J)*AZ*AZ*(AZ+1)*(AZ+1)*HZ*HZ)
4505 V3=2/(AR*(AR+1)*HR*HR)
4506 V4=2/((AZ+1)*HZ*HZ)
4507 V5=1/((AR+1)*HR*D)
4510 C1=AR*V3-AR*V5-V1*AR*AR
4520 C2=V3+V5/AR+V1
4530 C3=V4-V2*AZ*AZ
4540 C4=V4/AZ+V2
4550 C5=2/(AR*HR*HR)-2/(AZ*HZ*HZ)+(AR-1)/(AR*HR*D)+(AZ-1)*V2+
      (AR-1+AR*HR/D)*(AR+1)*V1
4560 C6=(-DC*K1)/M(I,J)
4570 PVX=C6/C5-C1/C5*A(I,S)-C2/C5*A(I,T)-C3/C5*A(U,J)-C4/C5*A(V,J)
4580 C(I,J)=PVX
4590 IF I=1 THEN GOSUB 6400 ELSE GOSUB 6450
4660 GOTO 6500
4700 REM
4705 REM ***** ECUATIE SUPRAFETE TRECERE VERTICALE *****
4710 REM

```

```

4800 S=J-2 : T=J-1 : U=J+1 : V=J+2
4801 V1=A1+1
4802 V2=A1*H1
4803 V3=A2+1
4804 V4=A2*H2
4810 C1=(1/D-(2*A1+1))/(V1*V2)*M1-(1/D-(A2+2))/(H2*V3)*M2
4820 C2=(M(I,S)*A1)(H1*V1)
4830 C3=-(M(I,T)*V1)/V2
4840 C4=(M(I,U)*V3)/V4
4850 C5=-M(I,V)/(V4*V3)
4870 PVX=(C2*A(I,S)+C3*A(I,T)+C4*A(I,U)+C5*A(I,V))/C1
4880 C(I,J)=PVX
4940 HR=A1*H1 : AR=H2/HR
4950 FOR S15=1 TO 7 STEP 2 UNTIL (I>=Q5(S15)) AND (I<=Q5(S15+1))
4955 NEXT S15
4960 ON (S15+1)/2 GOTO 4970,4971,4972,4974
4970 HZ=.001 : AZ=1 : GOTO 4975
4971 HZ=.001 : AZ=.5 : GOTO 4975
4972 HZ=.0005 : AZ=.5 : GOTO 4975
4974 HZ=.00025 : AZ=1
4975 IF I=1 THEN GOSUB 6400 ELSE GOSUB 6450
4980 GOTO 6500
5000 REM
5005 REM ***** ECUATIE SUPRAFETE TRECERE ORIZONTALE *****
5010 REM
5100 S=I-2 : T=I-1 : U=I+1 : V=I+2
5101 V1=A1+1
5102 V2=A1*H1
5103 V3=A2+1
5104 V4=A2*H2
5110 C1=(M2*(A2+2))/(H2*V3)-(M1*(2*A1+1))/(V1*V2)
5120 C2=(M(S,J)*A1)(H1*V1)
5130 C3=-(M(T,J)*V1)/V2
5140 C4=(M(U,J)*V3)/V4
5150 C5=-M(V,J)/(V4*V3)
5160 PVX=(C2*A(S,J)+C3*A(T,J)+C4*A(U,J)+C5*A(V,J))/C1
5170 C(I,J)=PVX
5175 HZ=V2 : AZ=H2/HZ
5180 FOR S16=1 TO 13 STEP 2 UNTIL (J>=Q6(S16)) AND (J<=Q6(S16+1))
5185 NEXT S16
5190 ON (S16+1)/2 GOTO 5195,5200,5205,5210,5215,5220,5195
5195 HR=.00025 : AR=1 : GOTO 5250
5200 HR=.00025 : AR=2 : GOTO 5250
5205 HR=.0005 : AR=2 : GOTO 5250
5210 HR=.001 : AR=1 : GOTO 5250
5215 HR=.001 : AR=.5 : GOTO 5250
5220 HR=.0005 : AR=.5
5250 GOSUB 6450
5260 GOTO 6500
5300 REM
5305 REM ***** ECUATIE COLT STINGA *****
5310 REM

```

```

5400 S=I-2 : T=I-1 : U=I+1 : V=I+2
5410 S1=J-2 : T1=J-1 : U1=J+1 : V1=J+2
5411 V9=AR1+1
5412 V2=AR1*HR1
5413 V3=AZ1+1
5414 V4=AZ1*HZ1
5415 V5=AR2+1
5416 V6=AR2*HR2
5417 V7=AZ2+1
5418 V8=AZ2*HZ2
5420 C1=(1/D-(2*AR1+1)/(V9*V2)+(AZ1+2)/(V3*HZ1))*M1-(1/D-(AR2+2)/(HR2*V5)+
(2*AZ2+1)/(V7*V8))*M2
5430 C2=(M(I,S1)*AR1)/(V9*HR1)
5440 C3=-(M(I,T1)*V9)/V2
5450 C4=(M(I,U1)*V5)/V6
5460 C5=-(M(I,V1)/(V5*V6)
5470 C6=(M(S,J)*AZ2)/(V7*HZ2)
5480 C7=-(M(T,J)*V7)/V8
5490 C8=(M(U,J)*V3)/V4
5500 C9=-(M(V,J)/(V3*V4)
5510 PVX=(C2*A(I,S1)+C3*A(I,T1)+C4*A(I,U1)+C5*A(I,V1)+C6*A(S,J)+C7*A(T,J)+
C8*A(U,J)+C9*A(V,J))/C1
5520 C(I,J)=PVX
5530 HR=V2 : AR=HR2/HR : HZ=V4 : AZ=HZ2/HZ
5630 GOSUB 6450
5640 GOTO 6500
5700 REM
5705 REM ***** ECUATIE COLT DREAPTA *****
5710 REM
5800 S=I-2 : T=I-1 : U=I+1 : V=I+2
5810 S1=J-2 : T1=J-1 : U1=J+1 : V1=J+2
5811 V9=AR1+1
5812 V2=AR1*HR1
5813 V3=AZ1+1
5814 V4=AZ1*HZ1
5815 V5=AR2+1
5816 V6=AR2*HR2
5817 V7=AZ2+1
5818 V8=AZ2*HZ2
5820 C1=(1/D-(2*AR1+1)/(V9*V2)-(AZ1+2)/(V3*HZ1))*M1-(1/D-(AR2+2)/(HR2*V5)-
(2*AZ2+1)/(V7*V8))*M2
5830 C2=(M(I,S1)*AR1)/(V9*HR1)
5840 C3=-(M(I,T1)*V9)/V2
5850 C4=(M(I,U1)*V5)/V6
5860 C5=-(M(I,V1)/(V5*V6)
5870 C6=-(M(S,J)*AZ2)/(V7*HZ2)
5880 C7=(M(T,J)*V7)/V8
5890 C8=-(M(U,J)*V3)/V4
5900 C9=(M(V,J)/(V3*V4)
5910 PVX=(C2*A(I,S1)+C3*A(I,T1)+C4*A(I,U1)+C5*A(I,V1)+C6*A(S,J)+C7*A(T,J)+
C8*A(U,J)+C9*A(V,J))/C1
5920 C(I,J)=PVX

```



```

5925 HR=V2 : AR=HR2/HR : HZ=V4 : AZ=HZ2/HZ
5930 GOSUB 6450
5940 GOTO 6500
6300 REM
6301 REM ***** CALCULAREA INDUCTIEI MAGNETICE TOTALE , B *****
6302 REM
6400 IF K3=0 THEN BL=0 ELSE BL=(NL*IL)/(2*3.14159*M(I,J)*D)
6410 P1=(AZ-1)*(A(I,J)-A(I+1,J))/(AZ*HZ)
6420 P2=(C(I,J+1)+(AR*AR-1)*C(I,J)-AR*AR*C(I,J-1))/(AR*(AR+1)*HR)+C(I,J)/D
6430 B(I,J)=SQR(P1*P1+P2*P2+BL*BL)
6440 RETURN
6450 IF K3=0 THEN BL=0 ELSE BL=(NL*IL)/(2*3.14159*M(I,J)*D)
6460 P1=(C(I+1,J)+(AZ*AZ-1)*C(I,J)-AZ*AZ*C(I-1,J))/(AZ*(AZ+1)*HZ)
6470 P2=(C(I,J+1)+(AR*AR-1)*C(I,J)-AR*AR*C(I,J-1))/(AR*(AR+1)*HR)+C(I,J)/D
6480 B(I,J)=SQR(P1*P1+P2*P2+BL*BL)
6490 RETURN
6500 NEXT J
6510 NEXT I
6515 REM
6520 REM ***** SFIRSITUL BALEIERII *****
6530 REM
6534 MAT A=C
6537 REM
6538 REM ***** LISTAREA REZULTATELOR *****
6539 REM
6542 FOR I2=1 TO 29
6543 FOR J2=1 TO 48
6544 PRINT #1," B(";I2;"",";J2;"")=";B(I2,J2);" A(";I2;"",";J2;"")=";A(I2,J2);
" NIU(";I2;"",";J2;"")=";M(I2,J2)
6545 NEXT J2
6546 NEXT I2
6550 PRINT " DORITI SA VEDETI REZULTATELE ?"
6560 INPUT BW
6570 IF BW<>"D" THEN 6620
6580 FOR Z5=1 TO 29
6590 FOR Z6=1 TO 48
6600 PRINT "B(";Z5;"",";Z6;"")=";B(Z5,Z6);" A(";Z5;"",";Z6;"")=";A(Z5,Z6)
6605 NEXT Z6
6610 NEXT Z5
6615 REM
6616 REM ***** RECALCULAREA RELUCTANTEI *****
6617 REM
6620 FOR L=1 TO 3
6630 XI=XI(L)
6640 XF=XF(L)
6650 YI=YI(L)
6660 YF=YF(L)
6670 FOR J1=XI TO XF
6680 FOR I1=YI TO YF
6685 BB=B(I1,J1)
6690 FOR K=1 TO 9 UNTIL (BB>=QB(K)) AND (BB<QB(K+1))
6700 NEXT K

```

```
6710 ON K GOTO 6720,6730,6740,6750,6760,6770,6780,6790,6800
6720 MC=250 : GOTO 6820
6730 MC=-17.85+BB*1339.25 : GOTO 6820
6740 MC=-292.3975+BB*2319.777 : GOTO 6820
6750 MC=-1458.895+BB*5909 : GOTO 6820
6760 MC=-2509.0797+BB*7648.666 : GOTO 6820
6770 MC=-3494.52+BB*11636 : GOTO 6820
6780 MC=-8256.42+BB*24506 : GOTO 6820
6790 MC=-8014.17+BB*23860 : GOTO 6820
6800 MC=1052.63
6820 M(I1,J1)=M(I1,J1)+0.1*(MC-M(I1,J1))
6830 NEXT I1
6840 NEXT J1
6850 NEXT L
6851 REM
6852 REM ***** RELUAREA (SAU TERMINAREA) BALEIERILOR *****
6853 REM
6855 X=X+1
6860 INPUT "DORITI SA CONTINUAM (D/N)?",AW
6870 IF AW<>"D" THEN 6880
6874 JI=1 : JF=48 : SJ=1
6876 IF X/2*2<>X THEN J1=48 : JF=1 : SJ=-1
6878 CLOSE #1 : GOTO 250
6880 PRINT "URMEAZA BALEIEREA NR : ",X
6890 CLOSE #1,#2,#3,#4,#5
6900 STOP
7000 END
```