

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE HIDROTEHNICĂ

619.429

266 C

*Contribuții la soluționarea prin metoda  
elementelor de frontieră a unei clase de ecuații cu  
derivate parțiale cu aplicații în hidrotehnică*

**TEZĂ DE DOCTORAT**

**CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC**  
*Prof.dr.ing. Ioan David*

**DOCTORAND**  
*Ing.Popescu Ioana*

*Timișoara*  
1997

*“Am crezut ca am inteles teoria relativitatii  
pana cand matematicienii au pus mana pe ea”*

*A. Einstein*

514.479  
200

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA



00051761

# CUPRINS

<b>1. INTRODUCERE</b> .....	11
1.1. Generalități .....	11
1.2. Obiectivele studiului .....	13
1.3. Conținutul lucrării .....	13
<b>2. ECUAȚII DIFERENȚIALE SI TEHNICA APROXIMĂRII</b> .....	15
2.1. Introducere .....	15
2.2. Clasificarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale .....	15
2.3. Câteva clase de probleme tehnice reprezentate prin diferite ecuații diferențiale sau ecuații diferențiale cu derivate parțiale .....	17
2.4. Condiții inițiale și de margine .....	19
2.5. Ecuații integrale .....	21
2.6. Tehnica aproximării cu reziduuri ponderate .....	21
2.6.1. Prezentarea bazelor metodei reziduurilor ponderate .....	22
2.6.2. Formularea slabă .....	24
2.6.3. Metoda soluțiilor pe contur .....	25
2.6.3. Formulări integrale care stau la baza metodei elementelor finite și a metodei elementelor de frontieră .....	26
<b>3. METODE NUMERICE ÎN INGINERIA CONSTRUCȚIILOR HIDROTEHNICE</b> .....	31
3.1. Clasificarea metodelor numerice .....	31
3.2. Metoda diferențelor finite .....	32
3.3. Metoda elementului finit (FEM) .....	33
3.4. Metoda elementelor de frontiera (BEM) .....	35
<b>4. DINAMICA SISTEMELOR CUPLATE SOLID - FLUID</b> .....	39
4.1. Considerații introductive .....	37
4.2. Stadiul actual .....	40
4.3. Ecuații generale .....	42

4.3.1.	Ipoteze și formularea problemei . . . . .	42
4.3.2.	Ecuția de mișcare a unui fluid sub acțiunea forțelor instantanee (ecuațiile presiunii hidrodinamice)	43
<b>5.</b>	<b>BAZELE ANALIZEI SEISMICE</b>	<b>45</b>
5.1.	Generalități. Vibrații seismice	45
5.1.1.	Definiții	45
5.1.2.	Intensitatea unui cutremur	47
5.1.3.	Magnitudinea unui cutremur . . . . .	50
5.1.4.	Unde seismice	51
5.1.5.	Mișcarea seismică de proiectare . . . . .	53
5.2.	Baze de date pentru calculul seismic . . . . .	55
5.2.1.	Generalități	55
5.2.2.	Metode de analiză a înregistrărilor seismice	55
5.2.2.1.	Transformata Fourier rapidă	55
5.2.2.2.	Metoda Integrării Numerice . . . . .	61
5.2.3.	Modificarea înregistrărilor seismice ale cutremurului El Centro . . . . .	63
5.2.3.1.	Filtrarea datelor prin transformata Fourier rapidă . . . . .	63
5.2.3.2.	Corecția vitezelor prin metoda integrării numerice . . . . .	65
5.2.3.3.	Modificări finale	70
5.2.3.4.	Sumar al pașilor de transformare aplicați	71
<b>6.</b>	<b>ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR CUPLATE</b>	
	<b>BARAJ - LAC DE ACUMULARE</b>	<b>73</b>
6.1.	Analiza dinamică a unui sistem cuplat reprezentativ	73
6.1.1.	Generalități	73
6.1.2.	Caracteristicile de bază ale unei probleme dinamice	74
6.1.3.	Grade de libertate . . . . .	75
6.1.4.	Analiza dinamică a unei console . . . . .	77
6.2.	Soluția analitică pentru calculul presiunilor hidrodinamice asupra barajelor	80
6.2.1.	Ecuția fundamentală a fenomenului . . . . .	80
6.2.2.	Condiții inițiale și pe contur	82
6.2.3.	Contribuții aduse la calculul soluției analitice	83

<b>7. SOLUȚII NUMERICE DEZVOLTATE CU MEDODA ELEMENTELOR DE FRONTIERA</b>	<b>89</b>
7.1. Dezvoltarea metodei elementelor de frontieră și stadiul actual al aplicării în domeniu	89
7.2. Formularea metodei elementelor de frontieră pentru probleme dinamice	91
7.2.1. Modelul matematic în cazul ecuației lui Laplace (baraj rigid)	91
7.2.2. Modelul matematic propus în cazul ecuației Helmholtz (baraj rigid sau flexibil)	92
7.3. Implementarea numerică	95
7.3.1. Modelul pentru ecuația lui Laplace (baraj rigid)	95
7.3.2. Modelul matematic propus	99
<b>8. REZULTATE</b>	<b>105</b>
8.1. Compararea soluției analitice propuse cu soluția Westergaard	105
8.1.1. Soluția adimensională a presiunii hidrodinamice	105
8.1.2. Soluția exactă și soluția Westergaard	106
8.1.3. Compararea soluțiilor	108
8.2. Distribuția presiunilor hidrodinamice	111
8.2.1. Baraj rigid	112
8.2.1.1. Ecuația lui Laplace	112
8.2.1.2. Ecuația Helmholtz	113
8.2.2. Baraj flexibil	115
<b>9. CONTRIBUȚII, CONCLUZII ȘI RECOMANDĂRI</b>	<b>119</b>
9.1. Contribuții aduse	119
9.2. Concluzii	120
9.2.1. Concluzii despre date seismice	120
9.2.2. Concluzii despre presiuni hidrostatice	121
9.2.3. Concluzii despre metoda elementelor de frontieră	122
9.3. Recomandări	123
9.3.1. Presiuni hidrostatice	123
9.3.2. BEM sau FEM ?	124

Bibliografie .....	125
Anexe .....	133
A.1.    General .....	135
A.1.1. Lema lui Green .....	135
A.1.2. FASTFR - Program Pascal de calcul a transformatei Fourier rapide .....	136
A.1.3. Pricipiul deplasărilor virtuale .....	137
A.1.4. Teorema Graffi .....	138
A.1.5. Definirea funcțiilor Heaviside și Dirac .....	138
A.1.6. Program Stodola .....	139
A.2.    Rezultate .....	145
A.2.1. Program Pascal pentru soluția BEM a presiunii hidrodinamice .....	145
A.2.2. Presiuni hidrodinamice la un baraj rigid - undă sinusoidală .....	159

## LISTA FIGURILOR

2.1. Condiții pe contur (de margine) .....	19
3.1. Metode numerice în mecanica mediilor continue .....	32
4.1. Sistemul baraj - lac sub acțiunea unei mișcări seismice .....	43
5.1. Corelații între diferite scări seismice .....	49
5.2. Tipuri de unde seismice .....	52
5.3. Accelația maximă a unui cutremur funcție de depărtarea de epicentru .....	54
5.4. Accelațiile cutremurului El -Centro Imperial Valley (SUA, 1940) și distribuția de frecvență a înregistrărilor .....	59
5.5. Accelațiile și viteza calculate cu transformata Fourier rapidă (nefiltrate) .....	60
5.6. Procedura de integrare numerică .....	61
5.7. Accelația, viteza și deplasarea calculate cu metoda integrării numerice (nemodificate) .....	62
5.8. Densitatea spectrală a vitezelor finale modificate .....	63
5.9. Accelația, viteza și deplasarea calculate cu transformata Fourier rapidă (filtrate) .....	64
5.10. Distribuția erorii .....	65
5.11. Modificarea curburii vitezei .....	67

5.12.	Accelerații, viteze și deplasări calculate cu metoda integrării numerice (filtrate) . . .	69
5.13.	Funcția deplasare $u(t)$ calculată în baza datelor prezentate în figura 5.12 c . . . . .	71
6.1.	Diferența între încărcarea statică și dinamică . . . . .	74
6.2.	Sistem cu trei grade de libertate (mase echivalente) . . . . .	76
6.3.	Structură elastică și deformată ei; (a)Structură, (b)Forțe pe element,(c)Forma deformației structurii sub acțiunea încărcărilor . . . . .	78
6.4.	Sistemul fluid - structură . . . . .	80
7.1.	Domeniu supus acțiunii cutremurului și condiții pe contur . . . . .	92
7.2.	Domeniu de calcul. Notății . . . . .	97
8.1.	Presiunea hidrodinamică la baza unui baraj rigid, de 100m înălțime (1) . . . . .	109
8.1.	Presiunea hidrodinamică la baza unui baraj rigid, de 100m înălțime (2) . . . . .	110
8.2.	Distribuția presiunilor hidrodinamice . . . . .	112
8.3.	Presiuni hidrodinamice adimensionale la baza unui baraj rigid supus acțiunii unei unde seismice sinusoidale . . . . .	113
8.4.	Presiuni hidrodinamice la jumătatea înălțimii unui baraj rigid (100m înălțime) supus acțiunii cutremurului El Centro . . . . .	113
8.5.	Valorile maxime ale presiunii hidrodinamice în timp, pe paramentul amonte al unui baraj rigid (100m înălțime) . . . . .	114
8.6.	Soluția BEM - Exactă - Westergaard pentru un baraj rigid( $t=2.5$ sec, $h=100m$ ) . . . . .	114
8.7.	Presiunea hidrodinamică la baza barajului supus unei unde seismice sinusoidale, baraj flexibil, $h=100m$ . . . . .	115
8.8.	Presiuni hidrodinamice la jumătatea înălțimii barajului flexibil supus acțiunii unei unde seismice sinusoidale $h=100m$ . . . . .	115
8.9.	Presiunea hidrodinamicăadimensională, la un baraj flexibil, supus acțiunii cutremurului El Centro, $h=100m$ . . . . .	116
8.10.	Comparație între presiunile hidrodinamice adimensionale la baza unui baraj supus acțiunii unui seism impuls unitate ( $a=2.94$ m/sec <sup>2</sup> ) . . . . .	117
A.1.	Notății pentru lema lui Green . . . . .	135
A.2.	Sistem în echilibru dinamic . . . . .	137
A.3.	Definirea funcției Heaviside . . . . .	138

## LISTA ABREVIERILOR

EDDP	-ecuații diferențiale cu derivate parțiale;
FFT	-transformată Fourier rapidă;
FD	-metoda diferențelor finite;
FEM	-metoda elementului finit;
BEM	-metoda elementelor de frontieră.



# 1. INTRODUCERE

## 1.1. Generalități

Consecința cedării unui baraj este dezastruoasă și de aceea proiectarea antiseismică a barajelor este un capitol important al ingineriei seismice. Cu toate că nici un baraj de beton nu a cedat total datorită unui cutremur, este important de menționat că nici unul dintre acestea nu au fost testate în mod serios, pentru că foarte rar au apărut cutremure în apropierea unui baraj mare din beton la care în același timp lacul de acumulare să fie plin. Exemple de apariții de cutremure cu magnitudini de 6.5 sau mai mari, sunt următoarele:

- în apropiere de Koyna -baraj de beton, de greutate- în India în anul 1967;
- la Hsinfengiang - baraj de beton cu contraforți ciupercă -în Republica Populară Chineză, în 1962 (Chopra, 1987).  
Ambele baraje menționate mai sus au fost suprasolicitate de către cutremur și deteriorate la un nivel alarmant.
- barajul Pacoima- structură de beton în arc- a suferit deteriorări la una dintre încastrări în timpul cutremurului San Fernando din 1971; iar lacul de acumulare era doar parțial plin la aceea dată.

Experiența acumulată datorită acestor baraje arată că barajele de beton nu sunt imune distrugerilor datorate cutremurelor, așa cum inițial a fost considerat. Din acest motiv atenția acordată acestor structuri din punct de vedere al securității împotriva cutremurelor trebuie să fie considerabilă.

Abilitatea de a evalua efectele unui cutremur asupra barajelor de beton este esențială pentru determinarea siguranței barajelor existente, determinarea celor mai potrivite măsuri de remediere a barajelor deja construite cât și pentru alegerea metodei de proiectare a unui nou baraj.

Estimarea comportării unui baraj de beton în timpul solicitărilor seismice este una dintre cele mai complexe probleme actuale ale dinamicii structurilor. Următorii factori contribuie la această complexitate:

- Barajele și lacurile de acumulare pe care le formează au geometrii complicate dictate de topografia naturală a locului în care sunt construite;
- Răspunsul barajelor la solicitări seismice poate fi influențat în mod semnificativ de către variațiile în intensitate și caracteristicile mișcării seismice atât pe lățimea cât și pe înălțimea văii. Datorită lipsei de înregistrări seismice, variația spațială a mișcării seismice nu poate fi definită cu certitudine ;
- Răspunsul barajelor la solicitarea seismică este influențat într-o măsură foarte mare de către mișcarea seismică indusă de către lacul de acumulare, de interacțiunea dintre apă și roca de fundare cât și de deformabilitatea rocii de fundare ;
- În tipul cutremurelor puternice rosturile verticale ale construcției se pot deschide sau aluneca, betonul poate crăpa, iar apa din lac se poate desprinde local, temporar de paramentul amonte, rezultând cavitație. Aceste fenomene sunt neliniare și foarte dificil de modelat.

O analiză reală a răspunsului barajelor la solicitări seismice nu a fost posibilă până la apariția și dezvoltarea metodelor numerice, dezvoltării metodelor de analiză dinamică și apariția calculatoarelor de mare capacitate și viteză. Din acest motiv cercetările au început doar la mijlocul anilor 60.

În ultimii ani metoda standard de evaluare a siguranței barajelor la încărcări seismice a fost numită pseudo-statică. În această metodă, efectul cutremurelor asupra structurii era reprezentat de către o forță statică orizontală echivalentă determinată ca produs între un coeficient seismic și greutatea structurii. Această metodă este bazată pe ipoteza simplificatoare că accelerația orizontală a mișcării seismice acționează permanent asupra materialului barajului și doar într-o singură direcție.

Mai recent, răspunsul dinamic al structurilor la încărcări seismice a primit o atenție mare. În acest scop, din punct de vedere practic al proiectării trebuie considerate aspecte foarte variate legate de geofizică, geologie, seismologie, dinamica materialelor, metode de analiză dinamică, tehnologia de construcție etc. Prezentul studiu se dorește a fi un plus de claritate adus modului de evaluare a încărcărilor hidrodinamice datorate acțiunii seismice asupra structurilor.

## 1.2. Obiectivele studiului

Principalul obiectiv al cercetării propuse în lucrarea de față este acela de a aduce contribuții la modelarea interacțiunii baraj - lac de acumulare în timpul producerii unui cutremur. Acest segment de modelare este parte componentă a cercetării mai generale a mecanismului de cedare a unui baraj și totodată a siguranței în exploatare sub acțiunea încărcărilor seismice.

Principalele obiective, care fac parte din această cercetare sunt următoarele:

- prezentarea modelului matematic (ecuațiile generale) pentru fenomenul interacțiunii dinamice baraj - lac;
- formularea problemei;
- analiza și prelucrarea bazei de date necesare unui calcul seismic;
- dezvoltarea unui model numeric bazat pe metoda elementelor de frontieră, pentru determinarea încărcărilor hidrodinamice. Această metodă relativ recentă (aproximativ 20 de ani de la fundamentarea ei teoretică) se arată a avea aplicabilitate la problemele dinamice și din acest motiv este considerată o alternativă de calcul bună;
- determinarea soluției exacte pentru calculul presiunilor hidrodinamice atunci când cutremurul de calcul este considerat a avea o mișcare arbitrară (oarecare);
- compararea rezultatelor obținute;

## 1.3. Conținutul lucrării

O scurtă descriere a conținutului capitolelor lucrării de față este următoarea:

→Capitolul 1 :conține o considerații introductive asupra problemei tehnice de ansamblu în care se încadrează teza de față. De asemenea sunt prezentate pe scurt obiectivele studiului și conținutul lucrării.

→Capitolul 2 :conține prezentarea generală a modelelor matematice sub formă de ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale pentru o clasă mai largă de fenomene din domeniul fizicii, în care se încadrează și problema interacțiunii hidrodinamice baraj - lac de acumulare în cazul încărcărilor seismice. Sunt

prezentate, de asemenea, pe scurt, bazele tehnicilor de aproximare precum și formele specifice ale ecuațiilor, pentru metoda elementului finit și pentru metoda elementelor de frontiera.

- Capitolul 3 :prezintă cele mai importante metode numerice folosite în mecanica mediilor continue, cu precizarea etapelor de calcul ce trebuie urmate în fiecare metodă în parte.
- Capitolul 4 :prezintă formularea problemei, stadiul actual și obiectivele studiului în modelarea matematică a interacțiunii baraj - lac de acumulare la încărcări seismice.
- Capitolul 5 :prezintă teoria de bază a analizei dinamice a unui sistem cuplat supus unei încărcări seismice. De asemenea se prezintă câteva noțiuni de seismologie și a modului de prelucrare a datelor seismice necesare ca bază de date în calculele seismice ale structurilor. Ca exemplu de prelucrare a datelor seismice au fost considerate accelerațiile cutremurului El Centro din 1940, California.
- Capitolul 6 :conține calculul analitic al presiunilor hidrodinamice al sistemului cuplat baraj - lac de acumulare.
- Capitolul 7 :prezintă soluția numerică în element de frontieră corespunzătoare problemei propuse in capitolul 3
- Capitolul 8 :prezintă rezultatele obținute în cele două metode de calcul abordate atât pentru un baraj rigid cât și pentru un baraj elastic. De asemenea soluția analitică obținută este comparată cu soluția clasică Westergaard.
- Capitolul 9 :face un rezumat al contribuțiilor aduse și prezintă concluzii asupra studiului efectuat.

## 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI TEHNICA APROXIMĂRII

### 2.1. Introducere

Reprezentările matematice apar în toate ramurile ingineriei. Modul de prezentare al acestora, atât pentru înțelegerea lor corectă, cât și pentru alegerea celor mai adecvate modele și metode de rezolvare.

Un loc remarcabil în rezolvarea unor clase de probleme îl ocupă metoda reprezentărilor integrale a ecuațiilor și metoda numerică corespunzătoare, cunoscută sub denumirea de metoda elementelor de frontieră, de partiție sau boundary elements. (BEM)

Principalul obstacol în extinderea aplicării acestei metode îl constituie reputația (printre ingineri) de a avea o bază matematică deloc familiară și foarte complexă (Becker A.A., 1992). Din acest motiv în acest capitol sunt prezentate bazele matematice necesare înțelegerii și aplicării metodei. Teoria descrisă în acest capitol se limitează strict la cea necesară a fi utilizată în formularea metodei elementelor de frontieră. Unicitatea și existența soluțiilor nu face scopul acestei lucrări, ele fiind demonstrate anterior de către alți autori.

### 2.2. Clasificarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale

Ecuațiile diferențiale ordinare sunt ecuații ce implică derivate ale uneia sau mai multor variabile dependente, în raport cu o singură variabilă independentă. Utilizând ecuații diferențiale ordinare pentru a rezolva probleme ingineresti, în general se simplifică foarte mult modelul matematic care guvernează fenomenul fizic.

În practică apar mai des probleme în care funcția soluție a unei probleme fizice depinde de mai multe variabile spațiale cât și de variabila timp  $t$ . Atunci când trebuie luată în considerare mai mult decât o singură variabilă formularea problemei conduce la ecuații diferențiale cu derivate parțiale (EDDP).

În general o EDP cu două variabile independente are forma:

$$a(x,y)\Phi_{xx} + b(x,y)\Phi_{xy} + c(x,y)\Phi_{yy} = f(x,y,\Phi,\Phi_x,\Phi_y) \quad (2.1)$$

unde  $\Phi(x,y)$  este variabila dependentă, care are semnificația fizică a unei mărimi caracteristice problemei modelate, iar  $x,y$  sunt variabilele independente.  $f$  este o funcție oarecare, dar dată. Se presupune că  $a, b, c$  au derivate parțiale de ordinul întâi continue în același domeniu  $D$  în care este definită funcția și că aceștia nu se anulează în același timp. Indicii definesc variabilele în raport cu care se face derivarea, ca de exemplu:

$$\Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \Phi_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (2.2)$$

EDP se clasifică în una din trei tipuri eliptice, hiperbolice sau parabolice, fiecare dintre ele având caracteristici distincte una față de cealaltă. Această clasificare se formulează astfel:

**ecuația diferențială cu derivate parțiale (2.1) este:**

**-hiperbolică în punctul  $(x,y)$  dacă  $b^2-ac > 0$ ;**

**-parabolică în punctul  $(x,y)$  dacă  $b^2-ac = 0$ ;**

**-eliptică în punctul  $(x,y)$  dacă  $b^2-ac < 0$ ;**

Această clasificare este punctuală, deci o EDP poate să-și schimbe tipul de la un punct la altul. Ecuația unidimensională a propagării valurilor este hiperbolică în toate punctele domeniului de definiție, ecuația unidimensională a transmiterii căldurii este parabolică iar ecuația lui Laplace este eliptică.

### 2.3. Câteva clase de probleme tehnice reprezentate prin diferite ecuații diferențiale sau ecuații diferențiale cu derivate parțiale

Procedeele de integrare numerică și-au găsit cea mai largă aplicare în integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale. Integrarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale care rezultă, ridică probleme esențiale de convergență și stabilitate a soluției, deoarece aceasta depinde de tipul cu derivate parțiale de integrat.

Problemele tehnice se reduc de regulă la ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale din tipul celor prezentate în paragraful precedent, în una, două și trei dimensiuni după complexitatea fenomenului pe care acestea îl modelează

Câteva exemple al acestor tipuri de ecuații este dat în cele ce urmează:

- *ecuații unidimensionale*

Denumire ecuație	Ecuație	Fenomen
Laplace / Poisson	$\frac{d^2u}{dx^2} = \begin{cases} 0 & \text{sau} \\ f \end{cases}$	-curgerea fluidelor prin medii poroase omogene;
Helmholtz	$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0$	
Ecuația undelor	$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$	-propagarea valurilor;
Ecuația difuziei	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	-transmiterea căldurii; -transportul poluanților

619.479  
365 c

**-ecuații bidimensionale:**

Denumire ecuație	Ecuație	Fenomen
Laplace / Poisson	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{cases} 0 & \text{sau} \\ f \end{cases}$ $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left( T \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f + s \frac{\partial u}{\partial t}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- mișcări potențiale;</li> <li>- mișcări prin medii poroase omogene;</li> <li>- curgerea fluidelor prin medii poroase neomogene;</li> </ul>
Helmholtz	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0$	
Ecuația undelor	$c^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$	-propagarea valurilor;
Ecuația plăcilor	$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \nabla^4 \right] u = 0$	-eforturi în plăci;

În toate ecuațiile prezentate  $u$ , reprezintă mărimea fizică necunoscută caracteristică problemei, iar  $x, y$  și  $t$  reprezintă coordonatele spațiale, respectiv temporale ale domeniului de calcul.

Ecuațiile tridimensionale sunt similare cu cele bidimensionale, doar că intervine în plus cea de-a treia coordonată spațială  $z$ .

În general toate tipurile de ecuații se pot nota într-o formă unitară:

$$\tilde{L}u = f \quad \text{in } \Omega \quad (2.3)$$

unde  $L$  reprezintă operatorul diferențial (unul din cele menționate în cadrul exemplelor de mai sus).



## 2.4. Condiții inițiale și de margine

Problemele ingineresti sunt fenomene fizice a căror reprezentare matematică conduce la ecuații diferențiale cu derivate parțiale, care sunt valabile într-un domeniu  $\Omega$ , de regulă de de frontieră închisă  $\Gamma$  (figura 2.1).

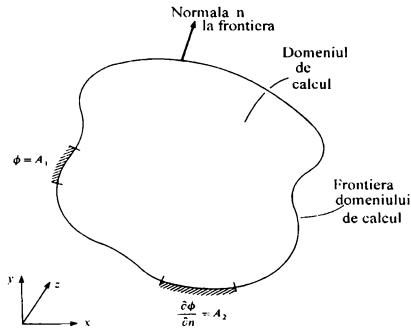


Figura 2.1. Condiții pe contur (de margine)

$$\begin{aligned} &\tilde{L}u = f, \\ &\text{cu} \\ &u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n=1,2,3; \quad \text{in cazul stationar} \\ &u: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{in cazul problemelor nestationare} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pentru a obține o soluție unică a unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale este necesar a se specifica ‘*condiții pe contur*’ (sau ‘*condiții de margine*’), unde valori ale funcției sunt cunoscute pe anumite porțiuni ale suprafeței  $S$ .

Problemele cu *condiții inițiale* presupun suplimentar determinarea funcției soluție  $\phi$ -dependentă de timp,  $t \geq 0$ , atunci când valorile funcției cât și alte elemente, în funcție de tipul problemei, sunt cunoscute pentru momentul inițial  $t=0$ . Condițiile pe contur trebuie de asemenea să fie date ca funcții de timp.

De regulă condițiile pe contur au una din formele:

1. Funcția necunoscută  $\phi$  are valori precizate :

$$\phi(M)|_{\Gamma_0} = A_1 \quad (2.5)$$

unde  $A_1$  este o funcție cunoscută pe porțiunea de frontieră  $\Gamma_1$ . Aceste condiții se numesc de *tip Dirichlet*.

2. Valori precizate pentru derivata normală a funcției necunoscute  $\phi$  :

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = A_2 \quad (2.6)$$

unde  $A_2$  este o funcție cunoscută iar  $n$  vectorul unitar normal la frontiera  $\Gamma_2$ . Aceste condiții se numesc de *tip Neumann*.

3. Condiții de *tip Mixt* sau *tip Cauchy*, când se cere determinarea funcției  $\phi(x,y)$  prin intermediul unei condiții de tipul:

$$\left( a\phi + b \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = \omega(P) \quad ; \quad P \in \Gamma_3 \subset \Omega \quad (2.7)$$

condiție care este o combinație liniară între distribuția funcției căutate și derivata după normala la contur, pe frontiera domeniului,  $\Gamma$ .

Analog cu operatorul  $L$  și condițiile la limită se pot reprezenta într-o formă mai generală.

## 2.5. Ecuații integrale

O serie de probleme fizice (tehnice) pot fi formulate matematic cu ajutorul ecuațiilor integrale. Ecuațiile integrale sunt ecuații ce conțin funcția necunoscută sub semnul integral:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u(p, \xi) \cdot \phi(\xi) d\xi = f(\xi) \quad (2.8)$$

unde funcțiile  $u$  și  $f$  sunt cunoscute, iar funcția  $\phi$  este necunoscută. Ecuația se numește *ecuație integrală de ordinul întâi*. Dacă funcția necunoscută apare atât sub semnul integralei cât și în afară, ca în următoarea ecuație:

$$\phi(p) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(p, \xi) \cdot \phi(\xi) d\xi = f(\xi) \quad (2.9)$$

atunci aceasta se numește *ecuație integrală de ordinul doi*. Funcția  $u$  care multiplică funcția necunoscută de sub semnul integrală se numește *nucleu*. Ambele ecuații prezentate anterior sunt unidimensionale. Reprezentări similare se pot obține și în cazul bi sau tri dimensional.

## 2.6. Tehnica aproximării cu reziduuri ponderate

Deoarece obținerea unor soluții exacte este dificilă și se rezumă la probleme relativ simple se aplică de regulă tehnici de aproximare. “Aproximarea” apare la două nivele. Primul nivel este acela al legilor constitutive când sistemele fizice reale sunt approximate printr-un model matematic idealizat. Aceste idealizări sunt acceptabile pentru majoritatea aplicațiilor tehnice deoarece se bazează pe o experiență îndelungată în domeniul tehnic respectiv (exemplu : modelul constitutiv Newton în ecuațiile Navier- Stokes, modelul elastic Hooke în teoria elasticității).

Cel de-al doilea nivel de aproximare apare la aplicarea metodelor numerice. Dezvoltarea calculatoarelor moderne a facilitat dezvoltarea rapidă și extinderea metodelor numerice în toate domeniile tehnice.

Se prezintă în continuare variante reprezentative ale tehnicii reziduurilor ponderate, care permit obținerea reprezentărilor integrale generale, care stau la baza metodei elementelor finite, respectiv a metodei elementelor de frontieră.

### 2.6.1. Prezentarea bazelor metodei reziduurilor ponderate

Fie ecuația generală :

$$\tilde{L}\Phi + f = 0 \quad pe \quad \Omega \quad (2.10)$$

și un set de condiții de margine:

$$\tilde{M}\Phi + r = 0 \quad pe \quad \Gamma \quad (2.11)$$

Soluția aproximativă pentru  $\Phi$ , notată  $\hat{\Phi}$  are forma generală:

$$\Phi \approx \hat{\Phi} = \Psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.12)$$

unde:

$\tilde{L}, \tilde{M}$  - operatori diferențiali,  $M$  poate fi și un operator algebric;

$\Psi$  - funcție auxiliară care satisface condițiile de margine pe  $\Gamma$ ;

$N_m$  - funcții de forma, care se aleg în așa manieră încât să reprezinte cât mai fidel caracteristicile geometrice și fizice ale problemei;

$a_m$  - coeficienți constanți nedeterminați, meniți să optimizeze soluția.

În conformitate cu cele precizate mai înainte, condițiile de margine se scriu:

$$\begin{cases} \tilde{M}\Psi = -r \\ \tilde{M}N_m = 0 \\ m = \overline{1, M} \text{ pe } \Gamma \end{cases} \quad (2.13)$$

Aproximarea (2.12) poate fi utilizată pentru a exprima derivatele funcției necunoscute  $\phi$ .

Astfel  $N_m$  trebuie să fie continuă pe  $\Omega$  și diferențiabile, adică să aibe o reprezentare de forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^m a_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^m a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pentru o anumă aproximare dorită a funcției  $\phi$ , este necesar ca  $\hat{\phi}$  să fie o soluție aproximativă a ecuației diferențiale (2.10). Substituind  $\hat{\phi}$  în ecuația (2.10) rezultă:

$$\varepsilon = \tilde{L}\hat{\phi} + f = \tilde{L}\Psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \tilde{L}N_m \right) + f \quad (2.15)$$

unde “reziduul  $\varepsilon$ ” reprezintă diferența dintre soluția exactă și cea aproximativă.

În conformitate cu tehnica reziduurilor ponderate acest reziduu  $\varepsilon$  trebuie să satisfacă ecuația (2.16) oriunde în interiorul domeniului  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \{w\} d\Omega &= \int_{\Omega} (\tilde{L}\hat{\phi} + f) \{w\} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\tilde{L}\Psi + \sum_{m=1}^M a_m \tilde{L}N_m + f) \{w\} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

unde  $\{w\}$  sunt un set de funcții de pondere alese astfel încât reziduul să fie distribuit pe domeniu. În același timp aceste funcții de pondere trebuie să satisfacă, identic, condițiile de margine ale problemei date. (2.16) este un set de  $m$  ecuații, care pot fi scrise în formulare matriceală ca:

$$[K]\{a\} = \{p\} \quad (2.17)$$

unde elementele matricii  $[K]$ , respectiv  $\{p\}$  sunt date de:

$$k_{lm} = \int_{\Omega} w_l \tilde{L} N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M$$

$$p_l = - \int_{\Omega} w_l f d\Omega - \int_{\Omega} w_l \tilde{L} \Psi d\Omega \quad 1 \leq l \leq m$$
(2.18)

### 2.6.2. Formularea slabă

Găsirea unei funcții  $w$  care satisface exact condițiile pe contur este dificilă. Din acest motiv o alternativă de rezolvare este aceea de a aproxima în același timp atât ecuația (2.10) cât și (2.11) cu o soluție de forma :

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.19)$$

Această aproximare conduce la două reziduuri de forma:

$$\varepsilon_{\Omega} = \tilde{L}\hat{\phi} = f \quad pe \quad \Omega$$

$$\varepsilon_{\Gamma} = \tilde{M}\hat{\phi} + r \quad pe \quad \Gamma$$
(2.20)

Un posibil optim este minimizarea sumei acestor două reziduuri pe domeniul de calcul:

$$\int_{\Omega} w \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w} \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

unde  $w_l, \bar{w}_l$  sunt funcții de pondere. Ecuația (2.17) este cunoscută sub denumirea de *„formulare slabă”*.

### 2.6.3. Metoda soluțiilor pe contur

Față de cele două variante ale metodei reziduurilor ponderate prezentate mai sus, (2.16), respectiv (2.21):

(2.16)- Condițiile pe contur sunt satisfăcute în totalitate de către funcția soluție de aproximare  $\hat{\phi}$ , iar ecuația diferențială nu este **a priori** verificată pe domeniul  $\Omega$ .

(2.21)- Condițiile pe contur **nu** sunt verificate **a priori**, și totodată nici ecuația diferențială nu este verificată pe domeniu.

există o a treia posibilitate, aceea de a alege funcțiile de formă în așa fel încât funcția soluție aproximativă să satisfacă ecuația diferențială, dar nu și condițiile de contur. Dacă ecuația diferențială care se consideră este lineară această condiție este îndeplinită prin alegerea funcțiilor de formă ca fiind soluțiile ecuației diferențiale considerate spre rezolvare.

Această tehnică de alegere a funcțiilor de formă a fost descrisă pentru prima dată de către Trefftz în 1926 și din acest motiv funcțiile de formă se numesc funcții Trefftz.

Alegând astfel funcțiile de formă se poate considera o soluție :

$$\phi \equiv \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.22)$$

Ecuația (2.21), se reduce la o ecuație mai simplă, de forma:

$$\int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (2.23)$$

deoarece prin ipoteză  $\varepsilon_{\Omega} = 0$ .

În continuare tot ceea ce se cere este să se determine un set de funcții de pondere  $\bar{w}_l$  potrivite, definite pe frontiera  $\Gamma$  a domeniului, și nu pe tot domeniul  $\Omega$ . Oricum în general acest set de funcții  $N_m$  nu este ușor de determinat. Există o varietate mare și complexă de procedee de determinare a acestor funcții.

#### 2.6.4. Formulări integrale care stau la baza metodei elementelor finite și a metodei elementelor de frontieră

Există numeroase formulări ale metodei reziduurilor ponderate. Cea mai răspândită până în prezent este cea sub forma ecuației (2.21), mai numită și metoda “slabă” a reziduurilor ponderate. Utilizarea acestei forme de formulare permite formarea soluției sub forma Trefftz, dând în același timp și posibilitatea ca la limita domeniului condițiile naturale să fie respectate. Trebuie reamintit că la folosirea ecuației (2.21) nu s-a impus satisfacerea condițiilor de margine și nici a ecuației diferențiale (spre deosebire de ecuația (2.23) unde această ultimă condiție este impusă).

Revenind la (2.21) prin utilizarea operatorilor pentru exprimarea reziduurilor  $\varepsilon_\Gamma$  și  $\varepsilon_\Omega$  și a unor funcții de pondere diferențiale, aceasta se poate scrie sub forma:

$$\int_{\Omega} (\tilde{L}\hat{\phi} + f)w_I d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\tilde{M}_1\hat{\phi} + r_1)\overline{w}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\tilde{M}_2\hat{\phi} + r_2)\overline{\overline{w}}_I d\Gamma = 0 \quad (2.24)$$

unde  $\overline{w}_I$  și  $\overline{\overline{w}}_I$  Sunt funcțiile de pondere pe contur.

Ecuația (2.24) se mai poate scrie prescurtat :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} w_I d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{\Gamma_1} \overline{w}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \varepsilon_{\Gamma_2} \overline{\overline{w}}_I d\Gamma = 0 \quad (2.25)$$

(2.24), respectiv (2.25) este o altă formă a formulării “slabe” a reziduurilor ponderate. Această formă este greu de folosit dacă toate reziduurile sunt nenule.

În cele ce urmează se va prezenta un caz particular al utilizării reprezentărilor (2.24) respectiv (2.25) pentru ecuația lui Laplace, cu sublinierea diferenței dintre această formulare și formularea Trefftz.



Formularea diferențială a problemei este următoarea :

**-se caută soluția ecuației diferențiale cu derivate parțiale:**

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \quad \text{în } \Omega \\ &\text{cu condițiile de margine} \\ \phi &= \bar{\phi} \quad \text{pe } \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{pe } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se consideră o soluție aproximativă  $\hat{\phi}$ . Reziduurile (erorile) sunt de forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Omega} &= \nabla^2 \hat{\phi} \\ \varepsilon_{\Gamma_1} &= \hat{\phi} - \bar{\phi} \\ \varepsilon_{\Gamma_2} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - \bar{q} = \hat{q} - \bar{q} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cu (2.27) ecuația (2.25) devine:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{\phi}) w_I d\Omega + \int_{\Gamma_0} (\hat{\phi} - \bar{\phi}) \bar{w}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (\hat{q} - \bar{q}) \bar{w}_I d\Gamma = 0 \quad (2.28)$$

Expresia (2.28) nu se folosește în general sub această formă. Se integrează prin părți pe domeniul  $\Omega$ , folosind lema Green (anexa 1.1). Se observă că primul termen se poate scrie sub forma:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{\phi}) w_I d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) w_I d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) w_I d\Omega \quad (2.29)$$

Identificând  $w_I$  cu  $\alpha$  în ecuația (a.1) a anexei 1.1., și  $\partial \phi / \partial x$  cu  $\partial \beta / \partial x$ , prima integrală a expresiei din membrul drept al ecuației (2.29) se scrie:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) w_I d\Omega = \int_{\Gamma} w_I \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \cdot n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w_I}{\partial x} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} d\Omega \quad (2.30)$$

În mod similar termenul al doilea al membrului drept al ecuației (2.29) este:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \right) w \rho d\Omega = \int_{\Gamma} w_l \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \cdot n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w_l}{\partial y} \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} d\Omega \quad (2.31)$$

Înlocuind în (2.28) se obține o nouă formă echivalentă cu ecuația (2.25):

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial w_l}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} w_l \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_0} (\hat{\Phi} - \bar{\Phi}) \bar{w} \rho d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (\hat{q} - \bar{q}) \bar{w} \rho d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Această ecuație este foarte importantă pentru obținerea unor reprezentări remarcabile.

Astfel dacă

- $\hat{\Phi} = \bar{\Phi}$  pe  $\Gamma_1$  este satisfăcut în mod identic;
- se alege  $\bar{w}_l = -w_l$  pe  $\Gamma_2$ , și în plus
- se alege  $w_l = 0$  pe  $\Gamma_1$ ;

ecuația (2.32) reprezintă *punctul de plecare în metoda elementelor finite* a ecuației lui Laplace, varianta Galerkin:

$$- \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial w_l}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_l \bar{\rho} d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

Prin noi transformări în (2.32) se obține în continuare o reprezentare deosebit de utilă în metoda elementelor de frontieră. Astfel printr-o nouă integrare prin părți a reprezentării (3.32) se obține:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} n_x + \frac{\partial w_l}{\partial y} n_y \right) \hat{\Phi} d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_l}{\partial y^2} \right) \hat{\Phi} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} w_l \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\hat{\Phi} - \bar{\Phi}) \bar{w} \rho d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\hat{q} - \bar{q}) \bar{w} \rho d\Gamma \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ceea ce este interesant este faptul că operatorul lui Laplace nu mai acționează asupra lui  $\hat{\phi}$ , ci asupra lui  $w_1$ ; cel de-al doilea termen al ecuației (2.34) este:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \nabla^2 w_1 \quad (2.35)$$

De asemenea primul termen al ecuației este derivata după normală a aceleiași funcții de pondere  $w_1$ :

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} n_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} n_y = \frac{\partial w_1}{\partial n} \quad (2.36)$$

Substituind ecuația (2.35) și (2.36) în (2.34), se obține:

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial w_1}{\partial n} \hat{\phi} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 w_1) \hat{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} w_1 \rho d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\hat{\phi} - \bar{\phi}) \bar{w} \rho d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - \bar{q} \right) \bar{w} \rho d\Gamma = 0 \quad (2.37)$$

‘Frumusețea’ acestei expresii constă în faptul că  $w_1$  poate fi orice expresie care respectă condiția să fie de două ori diferențiabilă (condiție utilizată când s-a trecut de la ecuația (2.25) la (2.37). Prin alegerea convenabilă a funcțiilor de pondere  $\bar{w}_1$  și  $\bar{\bar{w}}_1$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \frac{\partial w_1}{\partial n} \text{ pe } \Gamma_1 \\ \bar{\bar{w}}_1 &= -w_1 \text{ pe } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

ecuația (2.37) devine:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w_1) \hat{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} w_1 - \bar{\phi} \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\bar{q} w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial n} \hat{\phi}) d\Gamma = 0 \quad (2.39)$$

Această ecuație este punctul de plecare pentru *metoda elementelor de frontieră directă* (prin alegerea convenabilă a funcției de pondere  $w_1$ , cum ar fi de exemplu soluția fundamentală a ecuației Laplace).



### 3. METODE NUMERICE ÎN INGINERIA CONSTRUCȚIILOR HIDROTEHNICE

#### 3.1. Clasificarea metodelor numerice

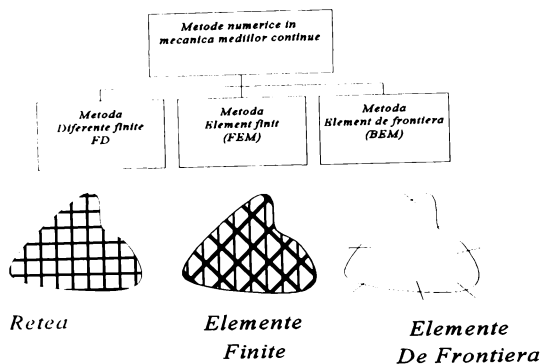
Fară metodele numerice este aproape imposibil să se rezolve probleme ingineresti cu un grad de acuratețe ridicat. Majoritatea tehnicilor de rezolvare numerica a problemelor din mecanica mediilor continue se bazează pe principiul că este posibil să fie deduse ecuații și relații care descriu cu acuratețe comportarea unor elemente mici, diferențiale, ale unui corp.

Divizând întregul corp într-un număr mare de asemenea elemente mici și utilizând ulterior relații de legatură pentru asamblarea acestora este posibil să se calculeze, cu un grad suficient de exact, valorile diferitelor variabile cum ar fi tensiuni sau deplasări ale corpului considerat. Pe măsură ce mărimea acestor elemente este tot mai mică, soluția numerică devine din ce în ce mai bună, dar costul calcului devine foarte mare. Nu există nici un înlocuitor pentru experiența utilizării în aplicații tehnice a metodelor numerice pentru că răspunsul la întrebarea “ Cât de mici trebuie să fie aceste elemente pentru a obține o soluție cât mai apropiată de soluția exactă?” nu este clar determinat încă.

În mecanica mediilor continue, se disting următoarele trei metode numerice mai importante (figura 3.1.):

- metoda diferențelor finite ( FD );
- metoda elementelor finite ( FE );
- metoda elementelor de frontieră ( BEM ).

În cele ce urmează se descriu pe scurt aceste metode.



*Figura 3.1. Metode numerice în mecanica mediilor continue*

### 3.2. Metoda diferențelor finite (FD)

În această metodă ecuația diferențială parțială ce guvernează un anumit fenomen este scrisă în termeni de diferențe finite. Domeniul se discretizează în noduri sau “celule”, iar aproximarea diferențială este aplicată fiecărui nod (celule). Pe baza discretizării se obține un sistem liniar de ecuații algebrice ale căror necunoscute sunt valorile funcției căutate în nodurile corespunzătoare discretizării.

Abordarea cu diferențe finite este cea mai simplă dintre cele trei metode și relativ ușor de programat. Dezavantajul cel mai important al acestei metode este acela că nu este potrivită pentru domenii cu geometrii iregulare. Mai mult chiar, pentru că este dificil să fie variată dimensiunea celulelor pe domeniul de calcul, această metodă nu se poate folosi în cazul domeniilor cu schimbări rapide ale variabilelor, așa cum sunt de exemplu concentrări de eforturi.

Astăzi metoda diferențelor finite este populară în cazul curgerii fluidelor (mișcări potențiale), schimbului de căldură și mai puțin la analiza tensiunilor.

### 3.3. Metoda elementului finit (FEM)

Baza teoretică a metodei diferă esențial de cea a metodei diferențelor finite. Punctul de plecare este fie o reprezentare de tipul (2.31) (Galerkin), fie o formulare de tip variațional.

În această metodă întregul domeniu de calcul este discretizat în subdomenii (elemente, segmente) finite mici (de unde și numele de “elemente finite”). Pe fiecare element comportamentul variabilelor ce trebuie calculate este descris de ecuații diferențiale. Elementele sunt asamblate și fiecare dintre acestea trebuie să respecte condițiile de continuitate și echilibru cu elementele vecine și în acest caz se ajunge la un sistem liniar de ecuații algebrice. Dacă condițiile la marginea domeniului sunt satisfăcute se obține o soluție unică a întregului sistem de ecuații algebrice liniare.

Metoda elementelor finite este potrivită pentru aplicațiile ingineresti cu geometrii complicate. Rezultatele obținute, în cazul existenței regiunilor cu schimbări rapide ale valorilor variabilelor, sunt foarte bune, dar trebuie utilizat un număr mare de elemente.

Etapile de calcul ce trebuie urmate atunci când se aplică metoda elementelor finite sunt următoarele:

1. Se divide domeniul de calcul în elemente mici (finite). Aceste elemente pot fi segmente liniare (pentru probleme unidimensionale), respectiv triunghiulare sau dreptunghiulare (pentru probleme bidimensionale), sau tetraedre și poliedre (pentru probleme tridimensionale);
2. Se definește comportamentul variabilelor pe fiecare element printr-o funcție de formă. Se alege funcția caracteristică (de exemplu presiune, viteză, deplasare) fiecărui punct nodal ca fiind necunoscuta problemei și se folosesc funcțiile de formă pentru a descrie cum se schimbă variabila și geometria pe fiecare element (de exemplu linear sau quadratic). Cu cât ordinul funcției de formă este mai mare, cu atât este necesară definirea mai multor puncte nodale pe fiecare element. Acuratețea soluției poate fi îmbunătățită prin utilizarea unui număr cât mai mare de elemente simple (liniare) sau măbind ordinul funcțiilor de formă (utilizând de exemplu elemente cuadractice)

3. Alegerea unei formulări adecvate cum ar fi (2.29), Galerkin, a unei formulări variaționale (Ritz), sau direct a “echilibrului” pe fiecare element definit, obținându-se un sistem liniar pe fiecare element “m”, care asamblat conduce la un sistem liniar sub forma:

$$\sum_m [k]_m [\delta]_m = [F] \quad (3.1)$$

unde m reprezintă numărul de elemente,  $[k]_m$  este matricea de rigiditate a unui element,  $[\delta]_m$  este vectorul funcțiilor nodale a unui element iar  $[F]$  este vectorul ce conține “forțele” exterioare care acționează asupra corpului. Pentru a determina coeficienții care multiplică deplasările unui punct nodal anume, se însumează coeficienții matricilor de rigiditate ale tuturor elementelor ce conțin acel punct.

4. Asamblarea întregului sistem de ecuații pentru obținerea soluției pe întregul domeniu. Pentru că în sumarea rigidităților a fost făcută doar pentru elementele ce conțineau un nod particular, matricea totală de rigiditate va fi doar parțial populată.  
În asamblarea sistemului de ecuații global se vor introduce condițiile de margine. Acestea pot lua forma unor presiuni impuse, deplasări impuse, alunecări pe o suprafață, resorturi, sau eforturi. Condiții pe frontieră mult mai complexe pot apare în cazul problemelor de contact.
5. Rezolvarea sistemului de ecuații liniare pentru a determina funcția căutată în punctele nodale (de exemplu deplasarea fiecărui punct nodal). Se utilizează fie eliminarea Gauss (directă) sau eliminarea Gauss -Seidel (indirectă) iterativă. Alegerea modului de rezolvare a sistemului de ecuații depinde de mărimea matricei soluție.
6. Din funcția primară se pot deduce alte funcții caracteristice sistemului (de exemplu tensiuni și eforturi pe fiecare element, utilizând relațiile între eforturi și deplasări -legea lui Hooke). Compatibilitatea ecuațiilor este satisfăcută automat pe fiecare element pentru că deplasările au fost alese ca variabile necunoscute.



7. Calculul altor mărimi. Odată ce valorile deplasărilor necunoscute au fost determinate în fiecare nod, pot fi obținute și alte valori pentru alte mărimi cum ar fi tensiuni la noduri, energii, etc.

### 3.4. Metoda elementelor de frontieră (BEM)

Baza teoretică a acestei metode se obține din ecuațiile diferențiale care guvernează un fenomen prin transformarea acestora în reprezentări integrale conturul (frontiera) domeniului de calcul. Aceste reprezentări integrale sunt rezolvate apoi numeric prin discretizarea frontierei domeniului, care este divizată în segmente mici (elemente de frontieră). Ca și în celelalte metode numerice, condițiile de margine trebuie să fie îndeplinite. Sistemul de ecuații algebrice care rezultă are o soluție unică.

Avantajul acestei metode este acela că poate fi adaptată ușor domeniilor cu geometrie complexă. Mai mult, deoarece în dezvoltarea metodei se utilizează soluțiile fundamentale de EDP în domeniu se poate modela comportamentul real al funcțiilor soluție, inclusiv cel singular.

Pentru a da posibilitatea comparării acestei metode cu metoda elementului finit, în continuare sunt descrise etapele de calcul ce trebuie urmate la aplicarea acestei metode:

1. Determinarea ecuațiilor diferențiale ale fenomenului în studiu.
2. Obținerea “ soluției fundamentale “ pentru ecuația diferențială dată. Această soluție este valabilă pe orice geometrie și se bazează pe soluția dată de încărcarea unitară a unui mediu infinit. Soluția fundamentală pentru ecuația lui Laplace este de forma  $(1/r)$  în cazul unidimensional sau  $\log(1/r)$  în cazul bidimensional, unde  $r$  este distanța geometrică dintre punctul de aplicație al încărcării (denumit “punct de încărcare”  $P$ ) și orice alt punct (denumit “punct în câmp”  $Q$ ).
3. Soluțiile fundamentale satisfac principiul reciprocității. Conform cu acest principiu de exemplu în cazul a două sisteme tensionate (a) și (b) aflate în echilibru satisfac următoarea condiție: lucrul mecanic efectuat de forțele sistemului ( a ) cu deplasările

sistemului (b) este egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele sistemului (b) cu deplasările sistemului (a), astfel:

$$\sum_p F_p^{(a)} u_p^{(b)} = \sum_p F_p^{(b)} u_p^{(a)} \quad (3.2)$$

unde p este un punct în care acționează o forță F.

Dacă forțele exterioare acționează numai pe suprafața (S), atunci acest principiu poate fi scris sub formă integrală astfel:

$$\int_s t_i^{(a)} u_i^{(b)} dS = \int_S t_i^{(b)} u_i^{(a)} dS \quad (3.3)$$

unde  $i = 1, 2, 3$  (corespund coordonatelor carteziene  $x, y, z$ ) iar vectorul tensiunilor este definit ca ( $t_i = \sigma_{ij} n_j$ ), unde  $n_j$  este vectorul unitate normal la suprafață.

Alegând sistemul (a) ca fiind soluția fundamentală a ecuației fenomenului (cunoscută) și (b) sistemul problemei date (necunoscut), rezultatul este o ecuație integrală care face legătura dintre deplasări și tensiuni pe frontiera domeniului de calcul.

Pentru ecuațiile de tip Laplace construcția ecuațiilor integrale se poate face pornind de la ecuația (2.36), în care  $w_i$  se substituie cu soluția fundamentală.

4. Divizarea frontierei domeniului în segmente sau elemente. Definirea funcțiilor de formă care descriu geometria domeniului și variația mărimilor pe domeniu de calcul. Aceste funcții de formă pot fi liniare, cuadratice sau de un ordin superior. Pentru că ecuațiile integrale determinate în etapele anterioare nu se pot integra ușor analitic se vor efectua integrări numerice utilizând cuadratura Gauss. Însușind aceste integrale pentru fiecare element pe întregul domeniu de calcul se evaluează ecuația integrală a fenomenului studiat.
5. Formarea matricei soluție prin repetarea procesului de integrare pentru punctul de încărcare P variind ca poziție în fiecare punct al frontierei domeniului. Mai întâi punctul de încărcare P se poziționează în elementul 1, rezultând un set de ecuații de legătură între cele N variabile de pe frontieră.

În pasul următor punctul de încărcare se plasează pe elementul 2 al frontierei, rezultând un alt set de ecuații, ș.a.m.d. până când sunt formate N seturi de ecuații.

În final rezultă un sistem de ecuații de următoarea formă:

$$[A][u]=[B][t] \quad (3.4)$$

6. Aplicarea condițiilor de margine. Acestea sunt date fie sub formă de valori ale funcției (de exemplu tensiuni impuse sau eforturi), fie sub formă de derivate normale date, sau relații liniare între deplasări și eforturi în cazul elasticității. Prin rearanjarea sistemului de ecuații linear astfel încât mărimile necunoscute să fie poziționate în partea stângă a sistemului de ecuații, iar mărimile cunoscute în partea dreaptă a sistemului. Prin astfel de transformări sistemul final de ecuații este de forma:

$$[A^*][x]=[B^*][y]=[c] \quad (3.5)$$

în care vectorul necunoscutelor a fost notat  $[x]$ . Acesta conține atât valori ale funcției, cât și a derivatei normale, respectiv atât deplasări cât și eforturi necunoscute în cazul elasticității. Vectorul  $[y]$  conține toate valorile impuse pentru funcție (respectiv deplasări și eforturi) la frontiera domeniului de calcul. Vectorul  $[c]$  este al coeficienților care se cunosc.

7. Rezolvarea sistemului de ecuații. Matricea soluție a sistemului este nesimetrică și total populată cu coeficienți nenuli
8. Calculul altor mărimi care interesează în descrierea sistemului. Odată ce valorile deplasărilor necunoscute au fost determinate în fiecare nod, pot fi obținute și alte valori pentru alte mărimi cum ar fi tensiuni la noduri, energii, etc.



## 4. DINAMICA SISTEMELOR CUPLATE

### SOLID - FLUID



#### 4.1. Considerații introductive

Proiectarea antisismică a barajelor este o problemă inginerescă foarte importantă având în vedere consecințele dezastruoase pe care le poate avea cedarea unui baraj din cauza unui cutremur. Nivelul cunoștințelor actuale în ceea ce privește efectul seismelor asupra barajelor nu este la fel de avansat ca al celor al efectelor seismelor asupra construcțiilor civile și industriale. Mai mult, fenomenul studierii comportamentului barajelor la încărcări seismice a fost mai puțin studiat decât comportamentul construcțiilor civile sub acțiunea acelorași încărcări, cu toate că primul este cu mult mai complex .

Observațiile efectuate asupra clădirilor supuse seismelor au adus un aport important la studiul efectului cutremurelor asupra construcțiilor civile, fenomen ce nu a fost repetat în cazul barajelor pentru simplul motiv că doar câteva baraje au fost subiectul unor cutremure puternice și deci există prea puține date în acest sens.

Este unanim acceptat faptul că barajele de beton trebuie proiectate astfel încât să reziste de la seisme medii și la seisme puternice. Studiul comportării structurilor de retenție sub acțiunea seismelor este complicat de fenomene ca interacțiunea dintre mișcarea apei și cea a structurii. Mișcarea structurii și a apei pe întreaga ei întindere poate genera unde în interiorul fluidului și uneori poate provoca apariția valurilor de suprafață.

Din punct de vedere al analizei seismice, barajele diferă de alte clase de structuri în sensul că o procedură de analiză riguroasă trebuie să ia în considerare efectele apei asupra proprietăților dinamice ale barajului și asupra spectrului de răspuns.

## 4.2. Stadiul actual

Mișcarea seismică și deformațiile paramentului amonte al barajului vor produce presiuni hidrodinamice în lacul de acumulare, iar deformațiile structurii vor fi afectate la rândul lor de către presiunile hidrodinamice de pe fața amonte. Pentru a întrerupe acest cerc închis al cauzei și efectului, formularea problemei trebuie să ia în considerare interacțiunea dintre baraj și apă. Problema analizei seismice a fost studiată cu numeroase metode și relații de calcul aproximative (Prișcu, R., 1974 și Popovici, A., 1977).

Analiza proiectării antiseismice a barajelor a evoluat de la metode cu formulări exprimate empiric la metode implicând rezolvări statice prin metoda forțelor (cu utilizarea de coeficienți de siguranță seismici) și în final la proceduri care recunosc natura dinamică a problemei (Jansen, 1990). În analiza stării de tensiune și deformație a unui baraj supus acțiunii unui cutremur trebuie acordată atenție efectului forței hidrodinamice datorate apei din lacul de acumulare format în spatele structurii. Au fost efectuate o serie de studii care au luat în considerare această problemă încă din anii 1933, când Westergaard a publicat primul studiu asupra determinării presiunilor hidrodinamice la baraje rigide. Investigații ulterioare au tratat barajele ca fiind rigide (Chopra, 1967, Kotsubo, 1959).

Studiile care au luat pentru prima dată în considerare flexibilitatea barajelor au apărut în anii 1967 (Chakrabarti and Chopra, 1967). Concluziile cele mai importante ce pot fi deduse din aceste studii sunt acelea că în cazul cutremurelor se generează presiuni hidrodinamice importante pe paramentul amonte al barajului, compresibilitatea apei nu poate fi neglijată în studiu, iar deformațiile barajului au o influență majoră în valorile presiunilor hidrodinamice formate. O ipoteză fundamentală a tuturor acestor studii este aceea că problema este bidimensională. Această ipoteză este suficientă pentru studiul barajelor de greutate.

De-a lungul timpului trei abordări diferite au fost adoptate pentru rezolvarea acestei probleme bidimensionale.

În prima dintre abordări, barajul este tratat ca un ansamblu de elemente finite, iar lacul este modelat ca un mediu continuu cu geometrie simplă pe contur. Pentru fiecare dintre sisteme se deduce soluția fundamentală clasică și apoi cele două soluții sunt cuplate ținând cont de faptul

că forțele care acționează între paramentul amonte și apă sunt aceleași. Limitarea acestei abordări constă în faptul că pentru presiunile hidrodinamice există soluții fundamentale doar în cazul geometriilor foarte simple ale lacului. Pentru geometrii mai complexe, cum ar fi un fund de lac înclinat, sau un parament amonte înclinat această abordare nu este fiabilă.

Cea de a doua abordare a problemei este aceea de a modela întregul sistem cu elemente finite considerând deplasările barajului ca fiind necunoscutele de bază ale structurii și presiunile ca necunoscute pentru lacul de acumulare (Zienkiewicz, 1969). Excepție făcând efortul considerabil cerut de metodă, dificultatea apare la reprezentarea lacului ca un mediu infinit la unul dintre capete. Eforturile de a modela pierderile de energie ale undelor care se propagă la infinit prin elemente finite sunt foarte mari în cazul lacurilor cu geometrie complexă sau pentru tratări tridimensionale ale problemei.

De-a lungul timpului au fost dezvoltate foarte multe modele matematice bazate pe metoda elementelor finite (Chopra, 1967; Chakrabati and Chopra, 1973). În aceste modele domeniul fluid este discretizat în elemente finite, și soluția problemei este obținută în nodurile elementelor, care pot fi fie de pe frontiera domeniului, fie din interior. Pentru a modela pierderea de energie au fost utilizate elemente finite hibride (Mei, et al. 1979) care utilizează soluția analitică a ecuației pentru câmpurile îndepărtate și soluția în elemente finite numai în vecinătatea barajului, acolo unde adâncimea apei nu este constantă.

Au mai fost utilizate și alte tehnici, cum ar fi utilizarea de elemente infinite pentru câmpul îndepărtat (Hall and Chopra, 1982 în cazul sistemelor baraj - lac; și Zienkiewicz și Bettess 1978 pentru alte tipuri de interacțiuni fluid - structuri).

Cea de a treia abordare de rezolvare a problemei a fost una similară cu abordarea a doua, doar că discretizarea domeniului a fost făcută cu elemente de frontieră (Medina și Dominguez, 1990). Modelul tratează problema în domeniul frecvențelor. În acest model condițiile de echilibru și compatibilitate la frontiera dintre solid și fluid sunt luate în considerare, și domeniile cu geometrie complexă sunt ușor de reprezentat.

## 4.3. Ecuații generale

### 4.3.1. Ipoteze și formularea problemei

Într-o primă etapă de calcul se poate presupune că barajul este rigid.

O ipoteză mai generală este aceea de a calcula presiunile hidrodinamice asupra unui baraj atunci când acesta este supus unui cutremur oarecare (a cărui accelerație variază în timp) și este flexibil, în condițiile în care se ia în considerare interacțiunea dintre structură și fluid.

Calculul acestor presiuni se va investiga în cadrul lucrării cu ajutorul unui model matematic bazat pe metoda elementelor de frontieră și pe soluția analitică rezultată prin rezolvarea directă a ecuațiilor ce descriu fenomenul.

Următoarele ipoteze simplificatoare vor fi luate în considerare pentru determinarea presiunii hidrodinamice a apei într-un lac de acumulare:

1. Apa este incompresibilă dar vâscozitatea ei internă se neglijează.
2. Efectul valurilor de la suprafața apei se neglijează. Erorile datorate acestei omisiuni au fost demonstrate, de alți autori, a avea valori mici (Chopra A.K., 1967; Bustamante, & Flores, 1963).
3. a) Baraj rigid (se neglijează într-o primă variantă deformația proprie a structurii și variația în timp a accelerațiilor seismice);  
b) Paramentul amonte al barajului este presupus a executa o mișcare oscilatorie care este o funcție oarecare de timp.
4. Paramentul amonte al barajului este de formă oarecare în varianta a), respectiv vertical în varianta b)
5. Mișcarea sistemului baraj - lac este considerată bidimensională, adică aceeași în orice plan vertical perpendicular pe axa barajului.



6. Mișcarea seismică atinge toate punctele bazei în același timp, adică viteza orizontală de propagare a mișcării este infinită.

Exemplificarea acestor ipoteze grafic, este reprezentată grafic în figura 4.3.

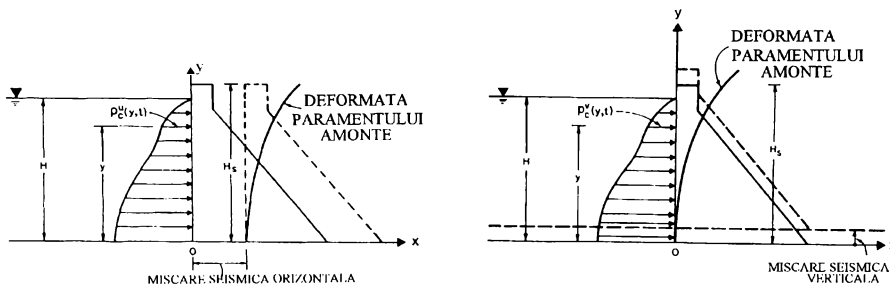


Figura 4.3. Sistemul baraj - lac sub acțiunea unei mișcări seismice

#### 4.3.2. Ecuația de mișcare a unui fluid sub acțiunea forțelor instantanee (ecuațiile presiunii hidrodinamice)

Fluidul considerat este compresibil și se neglijează influența vâscozității. De asemenea se studiază cazul bidimensional. Pentru a înțelege fenomenul și a-l studia cantitativ se formulează matematic relațiile implicate de acesta. În cazul de față punctul de plecare îl constituie ecuațiile de echilibru și de continuitate ale masei fluidului din lacul de acumulare.

Ecuațiile de echilibru (neglijând forțele de frecare) diferențiale sunt de forma:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.1)$$

în care :

p - presiunea hidrodinamică, în exces presiunii statice;

x, y - coordonate spațiale;

t - coordonata timp;

u, v - componentele scalare ale vitezei locale după direcțiile x, respectiv y ale spațiului.

$\rho$  - densitatea fluidului;

Relația de continuitate ce poate fi scrisă este de forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{E} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.2)$$

În relația (4.2) cu E a fost notat modulul de elasticitate al fluidului.

Dacă se face notația:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.3)$$

și se elimină u și v din relațiile (4.1) și (4.2) se obține ecuația:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

cunoscută sub numele de **“ecuația propagării undelor”**, în care c se numește celeritate a undei și este echivalentă ca valoare cu viteza sunetului în mediul fluid.

Ecuația (4.4) este o ecuație diferențială cu derivate parțiale, de tip hiperbolic.

În ipoteza modelului de lichid incompresibil ( $\rho = \text{const}$ , condiție care este identică cu  $c = \infty$ ) ecuația (4.4) se reduce la ecuația lui Laplace, care este de tip eliptic:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (4.5)$$

Dacă se introduce funcția de potențial  $\phi(x,y,t)$  al vitezelor, și deci câmpul vitezelor locale poate fi exprimat conform relației:

$$\vec{v} = \text{grad}\phi \quad (4.6)$$

atunci se obțin două ecuații analoge ecuațiilor (4.4) și (4.5) după cum urmează:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} & \text{pentru fluid compresibil} \\ \nabla^2 \phi = 0 & \text{pentru fluid incompresibil} \end{cases} \quad (4.7)$$

Presiunea hidrodinamică locală derivă din funcția de potențial:

$$P(x,y,t) = -\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} \quad (4.8)$$

# 5. BAZELE ANALIZEI SEISMICE



## 5.1. Generalități. Vibrații seismice

### 5.1.1. Definiții

Liniștea interioară a pământului este doar aparentă. Există regiuni pe glob în care populația trebuie să suporte din când în când acțiunea distructivă a cutremurelor.

Cutremurele sunt fenomene complexe induse în scoarța terestră de către energia eliberată de o perturbare apărută în interiorul pământului. De obicei acestea apar în mod neprevăzut și sunt semnalate de către instrumente de măsură.

**Seismologia** este știința care se ocupă cu structura pământului cât și cu cauzele producerii cutremurelor. Bazându-se pe rezultate teoretice și experimentale aceasta definește parametrii care generează și transmit șocurile.

**Ingineria seismică** este o știință aplicată care utilizează datele furnizate de către seismologie pentru a analiza diferite structuri, pentru a studia comportamentul structurilor la vibrații seismice și măsurile ce trebuie luate pentru întărirea rezistenței și stabilității acestor structuri.

**Cutremurele** sunt mișcări aleatoare ale unor porțiuni exterioare ale scoarței terestre cu amplitudini și direcții ce variază substanțial în timp (Ifrim, 1973). Cutremurele încep cu un șoc puternic, asemănător unei explozii, într-un punct al scoarței terestre numit hipocentru. Energia eliberată la hipocentru este transmisă prin unde elastice de diferite tipuri. Intensitatea acestor unde se diminuează pe măsura depărtării de hipocentru.

Tăria unui cutremur nu este un termen oficial, dar este utilizat în limbajul curent ingineresc în sensul “Cât de puternic a fost acel cutremur?”. Tăria unui cutremur este definită în două moduri și anume:

- tăria mișcării pentru un anumit loc numită **intensitate**; și
- tăria totală sau mărimea evenimentului numită **magnitudine**.

Magnitudinea este măsura energiei eliberate de către cutremur la hipocentru. Intensitatea este măsura distrugerilor locale cauzate de cutremur. Deci un anumit cutremur are asociat cu el o magnitudine unică, în timp ce intensitatea poate varia dintr-un loc în altul (Newmark & Rosenblueth, 71).

Cauzele cutremurelor pot fi atât naturale cât și artificiale. Cauzele naturale pot fi la rândul lor grupate în cauze endogene datorate energiei interne a pământului (fenomene vulcanice sau tectonice) și exogene, datorate unor factori externi (schimbări bruște ale presiunii atmosferice, căderi de meteoriți, etc).

Cauzele artificiale sunt generate de activități umane care distrug echilibrul scoarței terestre cum ar fi exploziile nucleare, lacuri de acumulare mari, extragerea prin pompare a apei subterane, etc.

Una dintre cele mai impotente întrebări în inginerie seismică este care dintre înregistrări (acelerații) și ce direcție de mișcare trebuie utilizată pentru proiectarea structurilor? În inginerie seismică se utilizează o paletă foarte largă de domenii cum ar fi geofizica, geologia, seismologia, teoria vibrațiilor, dinamica structurilor, dinamica materialelor, etc, pentru a rezolva problema proiectării din punct de vedere seismic a structurilor.

Undele seismice sunt foarte complexe. Aceasta se datorează diferențelor în modul de producere al cutremurelor, reflecției și refracției undelor seismice la frontiera dintre două straturi care au caracteristici de propagare diferite.

Pentru analiza seismică a structurilor trebuie luați în considerare o serie de factori care influențează mișcarea seismică și anume:

- magnitudinea cutremurului;
- distanța locului de construcție față de hipocentru;
- caracteristicile geologice ale rocii în lungul căreia se propagă cutremurul;
- structura solului de fundare;
- efecte de interferență a undelor seismice în direcția rupturii solului și viteza de propagare a rupturii.

### 5.1.2. Intensitatea unui cutremur

În mod normal tăria unui cutremur este evaluată prin scări seismice de intensitate. Intensitatea este măsura severității mișării seismice într-un anumit loc. În decursul timpului au fost folosite diferite scări seismice. De menționat sunt Scara Mercalli Modificată și Scara MSK.

Printre inginerii constructori o practică comună este aceea de a exprima intensitatea unui cutremur prin accelerația lui maximă. Această exprimare pornește de la premisa că efectul unui cutremur asupra unei construcții este influențat în mod hotărâtor de către accelerația maximă a cutremurului. Acest concept este utilizat pentru proiectarea unei structuri considerate rigide. Structurile elastice (coșurile, clădirile înalte) nu pot fi proiectate luând în considerare doar accelerația maximă. Pentru acest tip de structuri frecvența, forma undei și durata vibrațiilor seismice trebuie luate în calcul.

#### *Scara Mercalli Modificată (MM)*

Scara de intensitate Mercalli a fost definită la începutul secolului de către Wood și Neumann și este cunoscută sub numele de Scara Mercalli Modificată. Această scară este cea mai utilizată la ora actuală în zonele seismice ale globului. Scara împarte cutremurele în 12 grade, în conformitate cu efectele acestora asupra populației, obiectelor și clădirilor. Pentru fiecare grad de intensitate există o valoare de referință a accelerației cutremurului, valoare echivalentă cu o accelerație medie a seismului.

#### *Scara Magnitudinilor (M)*

Această scară a fost definită de către Richter și îmbunătățită ulterior de către Gutenberg. Se notează în mod convențional cu  $M$ . Magnitudinea  $M$  este logaritmul în bază 10 a valorii amplitudinii maxime, măsurate în micrometrii, a accelerației cutremurului obținute cu seismograful Wood - Anderson. Acest seismograf are o magnitudine maximă de 2.800, perioada naturală de 0.8 secunde și un coeficient de atenuare de 0.8 în condițiile în care seismograful este plasat la o distanță de 100 km de epicentru.

Relatia dintre magnitudinea  $M$  și energia  $E$  eliberată de către cutremur este:

$$\log E = 11.8 + 1.5M \quad (5.1)$$

dacă energia se exprimă în ergs, și

$$\log E = 9.40 + 2.14M - 0.054M^2 \quad (5.2)$$

dacă energia se exprimă în joules.

### Scara MSK

Scara de intensitate *MSK* a fost propusă de către Medvedev și revizuită ulterior de către Medvedev, Sponheuer și Karnik. Măsurătorile se bazează pe înregistrările furnizate de un pendul sferic standard. Astfel, gradul de intensitate al unui cutremur este estimat de deplasarea maximă  $X_0$  (în milimetri) a pendulului sferic, care are o perioadă naturală de vibrație  $T_1 = 0.25$  sec și un coeficient de atenuare, logaritm,  $\Delta_0 = 0.25$ . Pe scara *MSK*, efectul seismic asupra structurilor este exprimat de spectrul de încărcare ( $x$ ), dat de expresia:

$$x = X_0 \psi \varepsilon \quad (5.3)$$

unde:

- $\psi$ - coeficient spectral, care depinde de perioada naturală  $T$  a structurii;
- $\varepsilon$ - raportul de atenuare, determinat funcție de decrementul logaritm ( $\Delta$ ) a coeficientului de atenuare al structurii.

### Alte scări

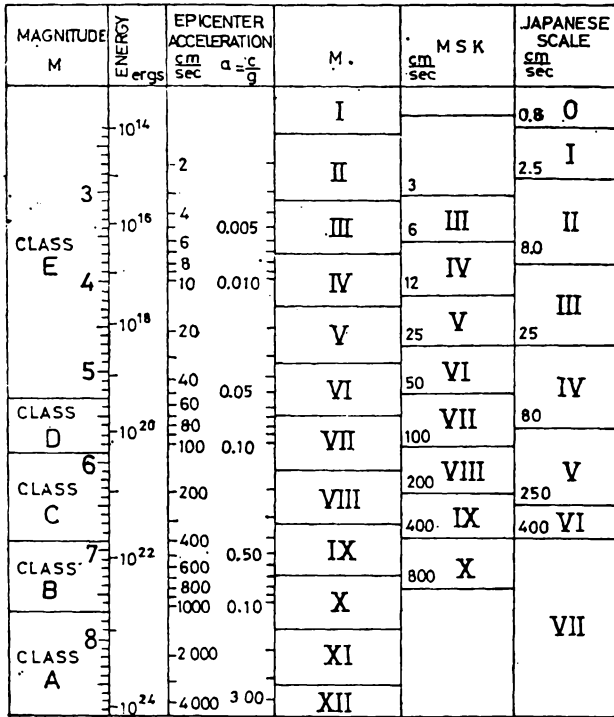
Alte scări de intensitate utilizate sunt :

- scara Cancani-Sieberg în Europa vestică, care este asemănătoare scării *MM*;
- scara Japoneză *X*, care gradează intensitatea în șase nivele, etc.

Intensitatea cutremurului a fost definită și conform cu alte criterii. Astfel, Arias definește intensitatea medie a unui cutremur ca fiind cantitatea de energie disipată pe unitatea de masă a unui oscilator standard care are doar un grad de libertate.

Housner definește intensitatea spectrală ( $SI$ ) a unui cutremur pentru un coeficient de atenuare dat prin integrarea spectrului de răspuns al pseudo-vitezei pendulului, având coeficientul de atenuare considerat și perioada naturală de vibrație de la 0.1 la 0.5 sec.

Corelațiile dintre diferitele scări de intensitate seismică au fost studiate în detaliu și sunt prezentate în figura 5.1 pentru scările cel mai des utilizate.



M - Gutenberg, Richter - 1956  
 MM - Modified Mercalli - 1931  
 MS K - Medvedev, Sponheuer, Karnik - 1964

Figura 5.1. Corelații între diferite scări seismice (după Prișcu et al. . 1982)

### 5.1.3. Magnitudinea unui cutremur

Din punct de vedere al inginerului proiectant este foarte important să poată fi descris un cutremur din punct de vedere cantitativ. Magnitudinea este măsura mărimii unui cutremur legată indirect de energia eliberată. Aceasta nu depinde de locul în care se află observatorul.

Magnitudinea se măsoară ca logaritm al amplitudinii deplasării unei stații de înregistrări seismice. Această amplitudine se corectează cu distanța de la stația de înregistrări la locul desfășurării evenimentului (cutremurului). Scara magnitudinilor a fost inventată de către C.F.Richter (de la Institute of California) în 1935. Magnitudinea unui cutremur cu șocuri mici este definită ca:

$$M = \text{Log}_{10} \frac{A}{A_0} \quad (5.4)$$

unde:  $M$  = magnitudinea cutremurului;  
 $A$  = amplitudinea maximă înregistrată pe un seismograf Wood-Anderson la o distanță de 100 km de la centrul de disturbare;  
 $A_0$  = amplitudine de 1 micron pentru un șoc standard la 100 km distanță.

Cutremure de magnitudine 5.0 (pe scara Richter) sau mai mari, generează mișcări ale pământului suficient de severe pentru a distruge o structură.

Când distanța de la epicentru la punctul de observație al cutremurelor este alta decât 100 km, se aplică o corectie cu următoarea formulă (Shunzo Okamoto 1973):

$$M = M_{\Delta} + 1.73 \cdot \text{Log}_{10} \frac{100}{\Delta} \quad (5.5)$$

în care:  $M$  = magnitudinea cutremurului;  
 $\Delta$  = distanța de la epicentru în km;  
 $M_{\Delta}$  = magnitudinea calculată cu formula  $M = \text{Log}_{10} A/A_0$  utilizând valorile măsurate la distanța  $\Delta$  de epicentru.

Relația dintre energia eliberată ( $E$ ) ca undă seismică și magnitudine a fost stabilită în mod empiric (Shunzo Okamoto 1973) ca fiind:

$$\text{Log} E = 11.8 + 1.5M \quad [\text{erg}] \quad (5.6)$$

Pentru că magnitudinea este în relație cu energia seismică, ea este totodată în relație cu distrugerile provocate de cutremur și cu intensitatea seismică.



Richter a stabilit corelația între scara de intensitate Mercalli Modificată și scara magnitudinilor după cum urmează:

Magnitudine						
2	3	4	5	6	7	8
Scara de intensitate Mercalli Modificată (MM)						
I-II	III	V	VI-VII	VII-VIII	IX-X	XI

#### 5.1.4. Unde seismice

Energia eliberată de către un cutremur la hipocentru este transmisă prin intermediul undelor elastice, indiferent de cauzele care au produs cutremurul. Există două feluri de unde elastice:

- *unde primare* (unde longitudinale notate cu P) sau unde de dilatație, care sunt longitudinale și induc modificări ale volumului materialului prin care se propagă prin alternarea de compresii și
- *unde secundare* (unde transversale notate cu S) sau unde de tăiere, care sunt transversale și pulsatorii cu efecte de tăiere, perpendiculare pe direcția de propagare, fără să producă modificări de volum ale mediului prin care se propagă.

Atunci când în hipocentru se produce o eliberare de energie toate undele seismice se propagă simultan. Totuși propagarea undelor se face diferit, funcție de viteza proprie de propagare a undei. Din acest motiv undele longitudinale sunt observate la suprafață înaintea celorlalte.

În propagarea lor undele primare suferă continuu fenomene de reflexie și refracție, funcție de natura straturilor geologice pe care le străbat. Cea mai importantă reflexie se produce la suprafața pământului. Prin reflexie, o undă P poate genera o undă de dilatare (notată PP) sau o undă de tăiere notată (PS). În mod similar o undă incidentă S poate genera prin reflexie unde SS și SP. Trebuie menționat că o undă de tip S nu se propagă niciodată prin flude pentru că acestea nu pot transmite eforturi de tăiere.

La suprafața terestră se mai întâlnesc și alte tipuri de unde seismice, numite și unde seismice de suprafață (notate L). Undele de suprafață longitudinale sunt numite unde Rayleigh (r), iar cele transversale sunt numite unde Love (Q).

Reprezentarea diferitelor unde seismice este dată în figura 5.2.

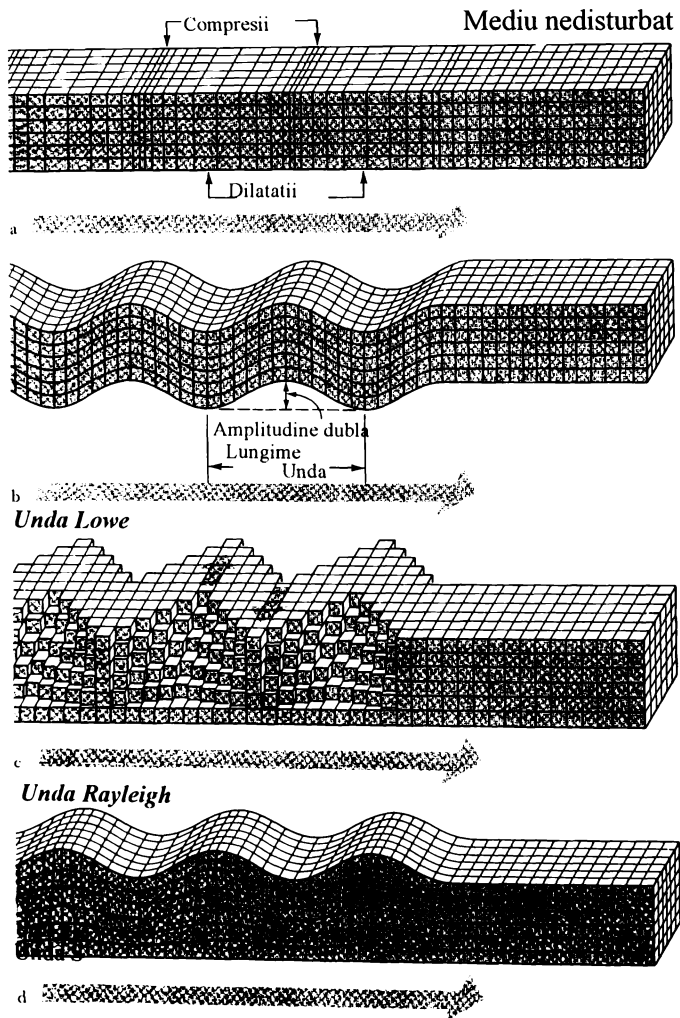


Figura 5.2. Tipuri de unde seismice

Viteza de propagare a diferitelor unde seismice variază substanțial de la un tip de undă la altul.

Presupunând mediul prin care se propagă ca fiind ideal elastic, infinit omogen și izotrop, atunci viteza de propagare a unei unde P este:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2 \cdot G}{\rho}} \quad (5.7)$$

iar a unei unde S :

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.8)$$

unde  $\lambda$  și  $G$  sunt constantele Lamé:

$$\left( \lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1 - 2 \cdot \mu) \cdot (1 + \mu)}, G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \right); \quad (5.9)$$

$E$ -modul de elasticitate longitudinal a mediului prin care se propagă;

$\mu$ - coeficientul Poisson;

$\lambda$ -densitatea.

### 5.1.5. Mișcarea seismică de proiectare

Pentru a proiecta o construcție din punct de vedere seismic trebuie cunoscute efectele seismice. Cutremurul considerat în cazul acesta se numește *seism de proiectare* iar mișcarea datorată acestuia se numește *mișcare seismică de proiectare*.

Se poate considera că amplitudinea maximă a accelerației seismice de proiectare a unui anumit cutremur la o locație dată este determinată în principal de către magnitudinea cutremurului și de către distanța față de epicentru. Pentru zonele terestre des afectate de cutremure, magnitudinea și locația epicentrului cutremurului sunt cunoscute foarte bine din înregistrările efectuate în decursul timpului. Acest lucru a făcut posibil să se determine o relație între mărimile mai sus menționate. Graficul din figura 5.3. este un exemplu în acest sens.

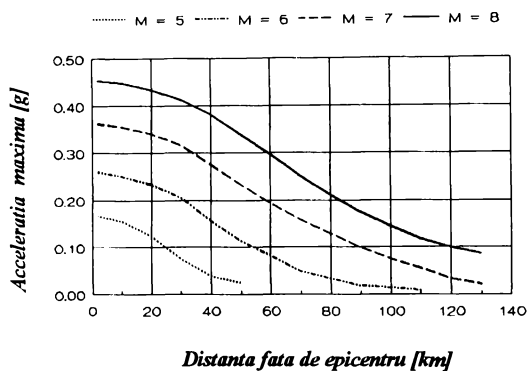


Figura 5.3. Accelația maximă a unui cutremur funcție de depărtarea de epicentru (dupa Housner ,1965)

In cazul proiectării complexe a structurilor la cutremur, seismicitatea aleatoare a locului construcției trebuie evaluată urmând pașii:

- definirea naturii și locației sursei seismice;
- determinarea relației magnitudine-frecvență pentru sursa seismică considerată;
- atenuarea mișcării seismice cu depărtarea de sursă;
- determinarea acelei mișcări seismice, la locul construcției, care are probabilitatea de a fi depășită.

## 5.2. Baze de date pentru calculul seismic

### 5.2.1. Generalități

Definirea datelor seismice care trebuie utilizate la calculul seismic al structurilor a fost și rămâne un subiect de o mare importanță printre ingineri. Înregistrările seismice originale ale unui cutremur nu pot fi utilizate în mod direct pentru că, de cele mai multe ori, acestea nu sunt perfecte. Erorile apar datorită instrumentelor de măsură (de exemplu coeficientul de atenuare), operatorilor (erori artificiale) precum și modului de digitizare a acestora. În acest paragraf sunt prezentate metodele de modificare a înregistrărilor seismice astfel încât acestea să devină cât mai exacte și să poată fi folosite în proiectarea antisismică. Obiectivul modificărilor este acela de a elimina erorile evidente și anume:

1. de a avea accelerația inițială și finală egale cu zero ;
2. de a avea viteza și deplasarea finală egale cu zero;
3. de a avea viteza și accelerația finală egale cu zero în același timp și de a avea o viteză uniformă spre final;
4. de a obține înregistrări rezonabile pentru deplasări .

### 5.2.2. Metode de analiză a înregistrărilor seismice

În practică se aplică două metode pentru a calcula viteza și deplasarea atunci când se cunoaște accelerația unui cutremur : transformata Fourier rapidă și integrarea numerică.

#### 5.2.2.1. Transformata Fourier rapidă

Transformata Fourier se aplică în cazul analizei cantităților periodice  $\ddot{u}_g(t)$  ca funcții de timpul  $t$  cu perioada  $T$ , care pot fi exprimate în termeni de pulsații  $\omega$  utilizând o aproximare cu o serie Fourier :

$$\ddot{u}_g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] \quad (5.10)$$

În expresia (5.10) pulsațiile  $\omega_k$  sunt definite de :

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (5.11)$$

în care  $T$  este perioada .

În cazul în care  $T$  se divide în  $m$  intervale  $\Delta t$ , ceea ce înseamnă că funcția  $u_g(t)$  este cunoscută doar pentru  $t_n = n \Delta t$ , unde  $n \leq m$ , coeficienții  $a_k$  și  $b_k$  se calculează cu formulele :

$$a_k = \frac{2\Delta t}{T} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi kn\Delta t}{T}\right) \quad (5.12)$$

$$b_k = \frac{2\Delta t}{T} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn\Delta t}{T}\right)$$

Introducând incrementul de pulsație:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{m\Delta t} \quad (5.13)$$

și substituind în ecuația (5.11) se obțin următoarele expresii pentru pulsația  $\omega_k$ , respectiv pentru pulsația maximă  $\omega_h$  :

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \Delta\omega k \quad ; \quad \omega_h = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (5.14)$$

Substituția lui  $T = m\Delta t$  în ecuația (5.12) conduce la:

$$a_k = a(\omega_k) = \frac{2}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi kn}{m}\right) \quad (5.15)$$

$$b_k = b(\omega_k) = \frac{2}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{m}\right)$$

Dacă perioada  $T$  a unei funcții periodice crește nedefinit, funcția devine neperiodică, iar seria Fourier din ecuația (5.10) devine o reprezentare Fourier integrală :

$$\ddot{u}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_g(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$$\ddot{u}_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$
(5.16)

în care  $i = \sqrt{-1}$

La aplicarea transformatei Fourier rapide, se face presupunerea că seismul este o funcție periodică de perioadă  $T$ . În conformitate cu această presupunere ecuația (5.16) poate fi scrisă :

$$\ddot{u}_g(t_n) = \sum_{k=0}^{m/2} \ddot{u}_g(\omega_k) \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{m}} = \sum_{k=0}^{m/2} \ddot{u}_g(\omega_k) \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi kn}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kn}{m}\right) \right]$$
(5.17)

și

$$\ddot{u}_g(\omega_k) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t_n) \cdot e^{-\frac{i2\pi kn}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \ddot{u}_g(t_n) \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi kn}{m}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kn}{m}\right) \right]$$
(5.18)

în care  $T = n\Delta t$ .

Comparând ecuația (5.17) cu ecuația (5.10) rezultă:

$$a(\omega_k) = 2Re[Y(\omega_k)]$$

$$b(\omega_k) = 2Re[iY(\omega_k)]$$
(5.19)

Dacă funcția  $\ddot{u}_g(t)$  din ecuația (5.10) se consideră a fi înregistrările accelerațiilor unui cutremur, atunci viteza  $V(t)$  și deplasarea  $U(t)$  se pot exprima în mod direct prin integrare :

$$V(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(t) dt = a_o t + \sum_{k=1}^{m/2} \left[ \frac{a_k}{\omega_k} \sin(\omega_k t_n) - \frac{b_k}{\omega_k} \cos(\omega_k t_n) \right]$$

$$U(t) = \int_0^t V(t) dt = \frac{1}{2} a_o t^2 + \sum_{k=1}^{m/2} \left[ -\frac{a_k}{\omega_k^2} \cos(\omega_k t_n) - \frac{b_k}{\omega_k^2} \sin(\omega_k t_n) \right]$$
(5.20)

unde  $a_o$  este valoarea medie a accelerațiilor.

În analiza numerică transformata Fourier este aplicată atât pentru transformarea din domeniul timp în domeniul pulsațiilor, cât și pentru transformarea din domeniul pulsațiilor în domeniul timp prin utilizarea transformatei Fourier rapide (FFT), (Blackman & Tukey , 58), dacă valoarea medie a accelerației,  $a_0$ , este egală cu zero.

Pentru aplicarea metodei a fost alcătuit un program de calcul în limbaj Pascal numit FASTFR. Acesta este listat în anexa 1.3.

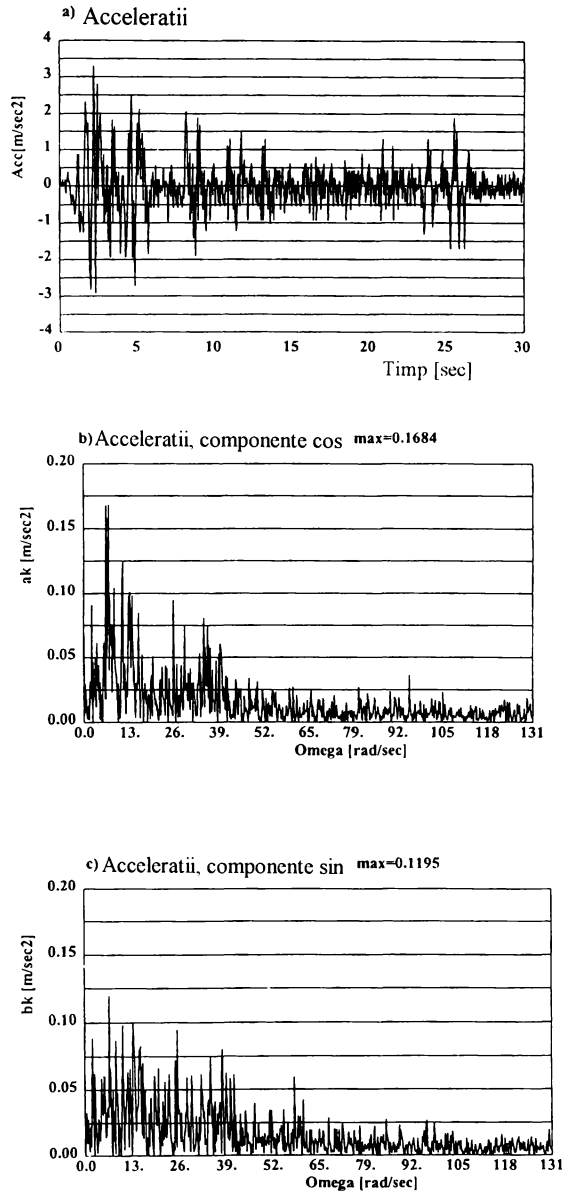
Ca exemplu de calcul au fost selectate înregistrările seismice ale accelerațiilor cutremurului El - Centro, din California petrecut în anul 1940 (figura 5.4.a). Figurile 5.4.b) și c) arată distribuția de frecvență a accelerațiilor.  $a_c$  și  $b_c$  sunt valori absolute ale componentelor cos și sin ale transformatei Fourier. Viteza și deplasarea calculate pe baza ecuațiilor (5.20) sunt reprezentate în figurile 5.5.b) și 5.5.c). Din aceste curbe se poate observa că viteza și deplasarea inițială nu sunt nule, în plus o deplasare de 40 cm este obținută la final . Aceasta se datorează transformatei Fourier rapide.

În analiza accelerațiilor au fost luați în considerare următorii parametri:

$\Delta t$	= 0.02	[s]	-pasul de timp;
N	= 1500	[-]	-numarul total de pași de calcul;
T	= 30	[s]	-perioada înregistrărilor seismice egala cu $(N-1)\Delta t$ ;
$\omega_0$	= 0.0	[rad/s]	-pulsăția minimă;
$\Delta \omega$	= 0.2094	[rad/s]	-increment de pulsație,egal cu $\omega_1=2\pi/T$ ;
$\omega_{max}$	= 157	[rad/s]	-pulsăția maxima, egala cu $\pi/\Delta t$ .

Valoarea medie  $a_0$  a accelerației originale este aproximativ  $4.79 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ .





**Figura 5.4.** *Accelerațiile cutremurului El - Centro Imperial Valley (SUA 1940) și distribuția de frecvență a înregistrărilor*

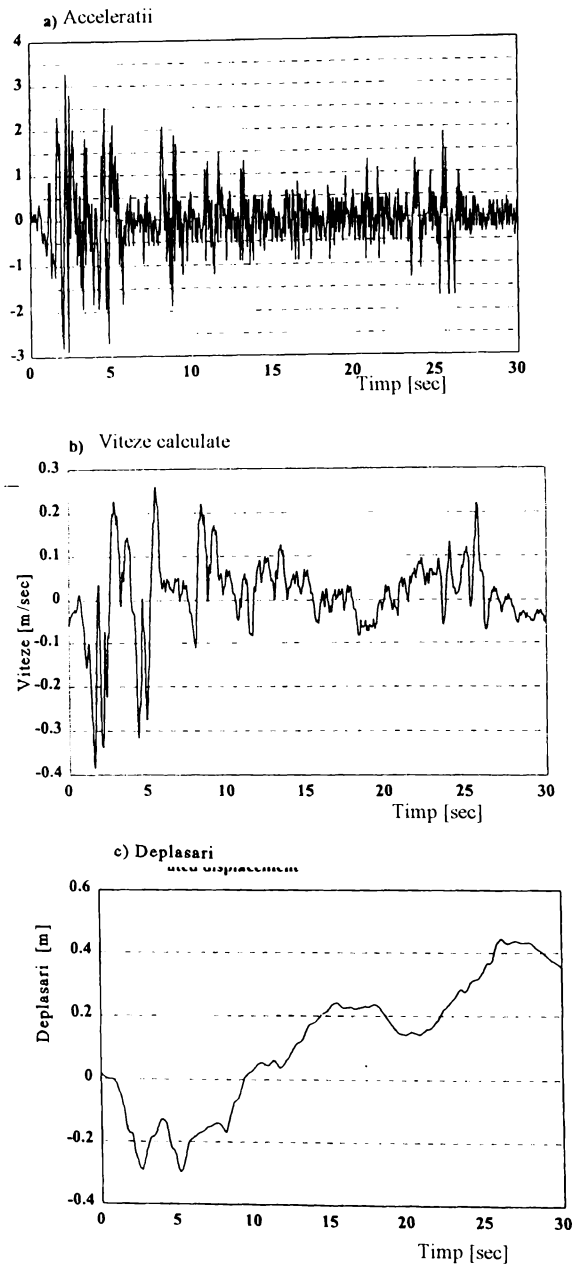


Figura 5.5. Accelerația și viteza calculate cu transformata Fourier rapidă (nefiltrate)

### 5.2.2.2. Metoda Integrării Numerice

În cazul unei înregistrări discrete a accelerațiilor unui seism, viteza și deplasarea corespunzătoare pot fi calculate utilizând integrarea numerică (așa cum este arătat în figura 5.6)

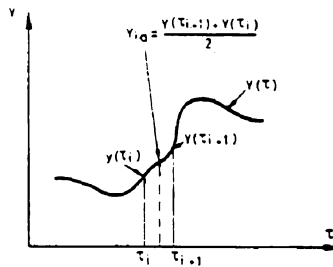


Figura 5.6. Procedura de integrare numerică

Dacă se considera accelerația ca fiind parametrul  $\ddot{u}_g(t)$ , atunci viteza poate fi exprimată ca:

$$V(t_n) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{\ddot{u}_g(t_{i+1}) + \ddot{u}_g(t_i)}{2} \right) \cdot \Delta t_i + v(t_0) \quad v(t_0) = 0 \quad (5.21)$$

În mod similar deplasarea poate fi scrisă:

$$U(t_n) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{V(t_{i+1}) + V(t_i)}{2} \right) \cdot \Delta t_i + U(t_0) \quad U(t_0) = 0 \quad (5.22)$$

Utilizând procedura de integrare numerică sunt calculate vitezele și deplasările corespunzătoare accelerațiilor seismice prezentate în figura 5.7a. Rezultatele obținute sunt prezentate în figura 5.7.b și 5.7.c. În aceste calcule vitezele și deplasările inițiale sunt forțate să fie zero. Soluțiile obținute sunt inacceptabile (pentru că deplasarea finală, la încetarea seismului, este de 1.74 m!)

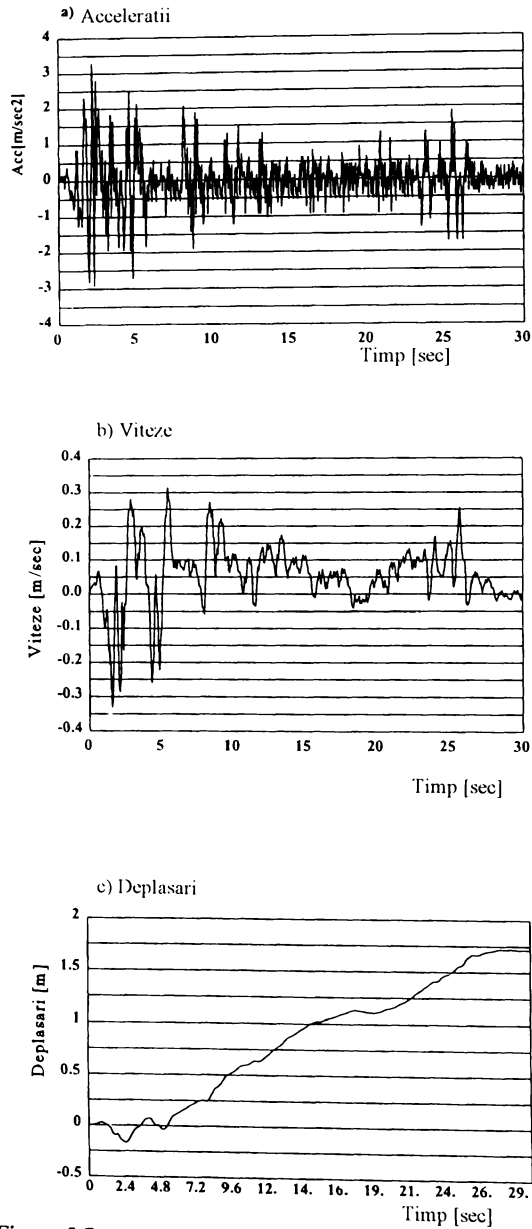


Figura 5.7. Accelerația, viteza și deplasarea calculate cu metoda integrării numerice (nemodificate)

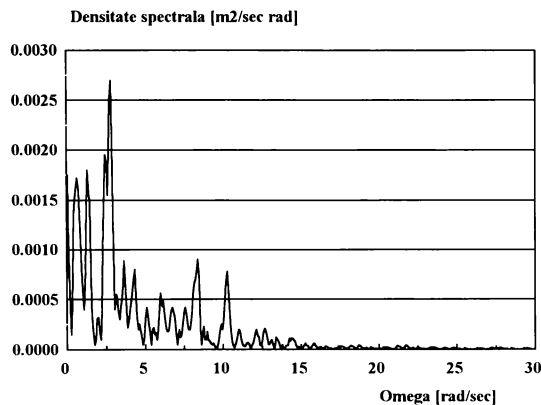
### 5.2.3. Modificarea înregistrărilor seismice ale cutremurului El Centro

Există mai multe metode de corecție a înregistrărilor seismice originale. De exemplu una dintre metode este corecția polinomială sau metoda de filtrare (Basili & Brady, 1978). Scopul acestor metode este acela de a modifica înregistrările originale pentru a obține o accelerație de calcul acceptabilă (cât mai reală) pentru proiectare.

În lucrarea de față este utilizată o procedură aparte de modificare/corectare a accelerațiilor seismice originale ale cutremurului El-Centro (accelerații N-S, 1940), accelerații prezentate în figura 5.4.a. Obiectivul modificărilor a fost prezentat în paragraful 5.1. iar diferiții pași de calcul sunt următorii:

#### 5.2.3.1. *Filtrarea datelor cu Transformata Fourier Rapidă*

Primul pas în modificarea datelor este acela al filtrării înregistrărilor accelerațiilor originale după un filtru al pulsațiilor îndeajuns de înalt (pulsațiile care contribuie cu cantități de energii mici pot fi neglijate- figura 5.8.).



*Figura 5.8. Densitatea spectrală a vitezelor finale modificate*

Utilizând Transformata Fourier Rapidă, pulsațiile mai mari de 50 rad/s sunt neglijate și noile valori ale accelerației seismice sunt calculate cu transformata Fourier rapidă inversă. Rezultatele sunt prezentate în figura 5.9. În figura 5.9.a sunt prezentate accelerațiile filtrate, valori ce vor fi utilizate în procesul de calcul ce urmează.

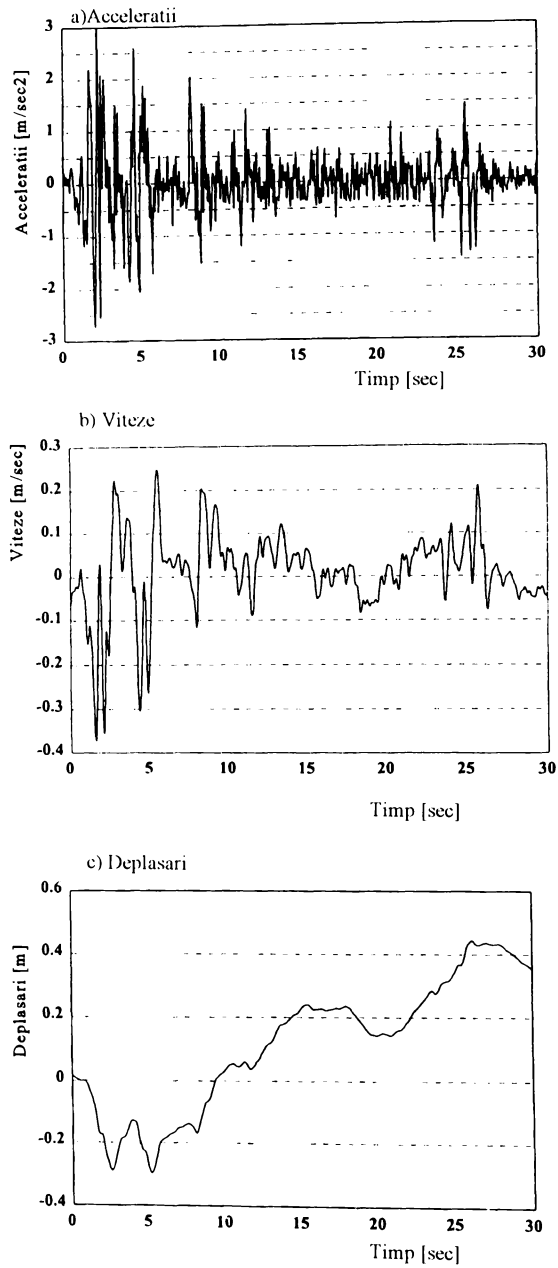


Figura 5.9. Accelerațiile, vitezele și deplasările calculate cu transformata Fourier rapidă (filtrate)

### 5.2.3.2. Corecția vitezei prin Metoda Integrării Numerice

Noile valori pentru viteze și deplasări sunt obținute din valorile filtrate ale accelerațiilor seismice utilizând metoda integrării numerice, procedură descrisă de ecuațiile (5.21) și (5.22). Adăugând valori nule la începutul înregistrărilor accelerațiilor, viteza și deplasarea inițială calculate vor fi zero, dar cele finale vor fi diferite de zero. Aceasta se datorează propagării progresive a erorii în calculul vitezei și a deplasării la fiecare pas de timp. Aceste erori trebuie corectate prin impunerea condiției ca alura curbei vitezei să fie lină și în plus valoarea finală a vitezei trebuie să fie zero.

#### Corecția vitezei

Următorul pas de calcul este acela de a modifica valorile calculate ale vitezei cu scopul de a obține o deplasare suficient de mica la încheierea mișcării seismice. Obiectivul acestui pas de calcul este acela de a face ca viteza finală să fie nulă prin adaptarea unei viteze modificate. Viteza modificată  $V_{t,mod}$  se obține prin extragerea erorii  $\Delta E_t$  din valoarea vitezei calculate  $V_{t,cal}$ .

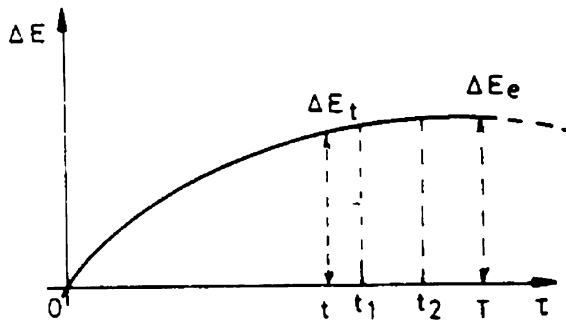


Figura 5.10. Distribuția erorii

Formularea este după cum urmează:

$$V_{t,\text{mod}} = V_{t,\text{cal}} - \Delta E_t \quad (5.22)$$

în care  $\Delta E_t$  este eroarea la timpul  $t$ , care are următoarea lege de distribuție parabolică:

$$\Delta E_t = \Delta E_e \left[ 1 - \frac{(T-t)^2}{T^2} \right] \quad (5.23)$$

Valoarea medie a vitezei în intervalul  $t_1 - t_2$  se exprimă ca:

$$\bar{V} = \frac{\sum_{t_1}^{t_2} V_t \Delta t_i}{t_2 - t_1} \quad (5.24)$$

unde  $V_{it}$  este valoarea discretă (în punct) a vitezei.

În mod similar valoarea medie a erorii în același interval de timp este :

$$\Delta \bar{E} = \Delta E_e \int_{t_1}^{t_2} \left[ 1 - \frac{(T-t)^2}{T^2} \right] \frac{1}{(t_2 - t_1)} dt \quad (5.25)$$

Condiția ce trebuie satisfăcută, conform cu cele enunțate anterior este:

$$\bar{V} - \Delta \bar{E} = 0 \quad (5.26)$$

Substituind ecuația (5.24) și (5.25) în ecuația (5.26) și regrupând termenii, se poate calcula valoarea necunoscutei, scalare,  $\Delta E_e$ :

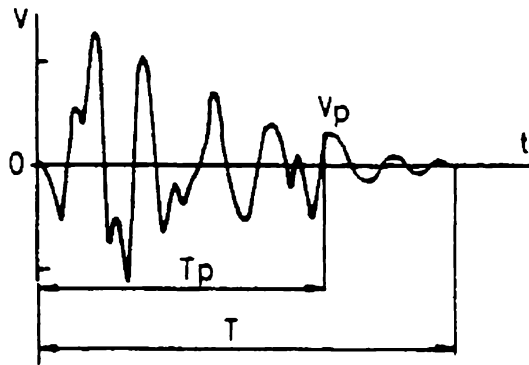
$$\Delta E_e = \frac{\sum_{t_1}^{t_2} V_t \Delta t_i}{\sum_{t_1}^{t_2} \left[ 1 - \frac{(T-t)^2}{T^2} \right] \Delta t_i} \quad (5.27)$$



*Curbură vitezei*

Următorul pas este acela de a modifica valorile vitezei astfel încât aceasta să prezinte o ‘curbură naturală’, a cărei semnificație este aceea că viteza trebuie să aibe o formă care să urmărească alura unei vibrații amortizate.

Considerând o curbură a vitezelor ca cea prezentată în figura 5.11, problema devine cea a vibrațiilor cu un singur grad de libertate.



*Figura 5.11. Modificarea curburii vitezei*

Ecuția considerată are forma:

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

cu condițiile inițiale:  $\begin{cases} \dot{u}_0 = v_p \\ \ddot{u}_0 = A_p \end{cases}$  (5 28)

$A_p$  este amplitudinea accelerației la timpul de calcul  $p$  și  $\omega$  este pulsația

$$\omega = \frac{2\pi N}{T - T_p} \quad (5 29)$$

$N$  este un parametru care definește numărul de cicluri de vibrații libere în timpul  $T - T_p$ ,

Soluția ecuației (5.28) este :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega} [A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)] \quad (5.30)$$

unde

- $\zeta$  este factorul de amortizare; și

-  $\omega_d$  este pulsația amortizată:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (5.31)$$

A și B sunt constante care se determină din condițiile inițiale astfel:

$$\begin{aligned} A &= V_p \\ B &= \frac{A + \zeta\omega V_p}{\omega_d} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Selectând parametrul N și factorul de amortizare  $\zeta$  se poate utiliza această formulă pentru a obține o curbă dorită. Utilizând valorile vitezelor calculate cu ecuația (5.22) și incluzând curbura obținută cu ecuația (5.30), se pot obține noile valori pentru deplasare și accelerație punct cu punct. Valorile modificate ale deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor originale ale cutremurului El Centro sunt prezentate în figura 5.12.

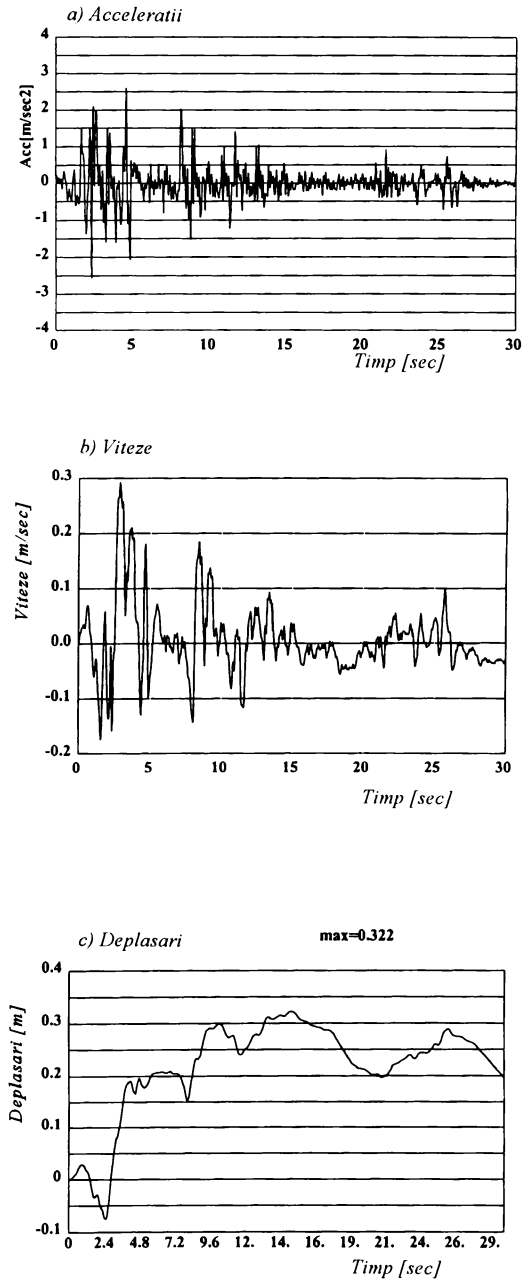


Figura 5.12. Accelerații, viteze și deplasări calculate cu metoda integrării numerice (modificate)

### 5.2.3.3. Modificări finale

Prin metoda integrării numerice calculul vitezelor și deplasărilor din înregistrările accelerațiilor unui cutremur nu sunt potrivite (pulsățiile de valori mari sunt introduse suplimentar datorită diferențierii). De aceea accelerația calculată nu este încă potrivită unei analize dinamice. Deoarece viteza și deplasarea îndeplinesc condițiile impuse se vor modifica în continuare valorile accelerațiilor prin 'calcul înapoi' din valorile calculate ale deplasărilor.

Procedura constă în a scrie deplasările ca o sumă a două funcții și anume:

1. O funcție a cărei curbă este lină cu tangenta orizontală la curbă atât la început cât și la sfârșit, iar valoarea finală a acestei funcții este egală cu valoarea deplasării finale ;
2. O funcție obținută prin extragerea precedentei din valorile finale ale deplasărilor;

Următorii pași sunt :

3. diferențierea primei funcții pentru a obține accelerațiile și vitezele corespunzătoare acestora ;
4. calculul accelerației și vitezei celei de-a doua funcții prin transformata Fourier inversă;
5. Însumarea valorilor accelerațiilor și vitezelor obținute din pașii de calcul menționați mai sus pentru a obține accelerația și viteza reală de calcul, corespunzătoare deplasării reale .

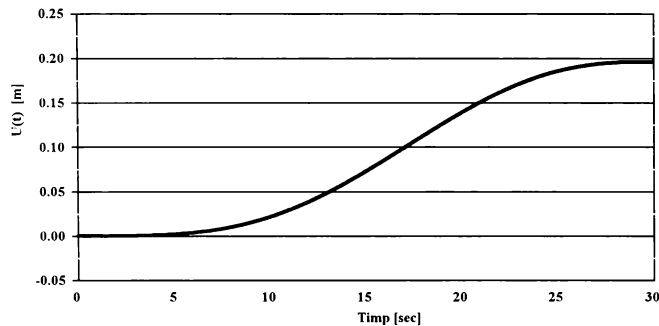
Ecuatiile utilizate pentru a obține o funcție  $U(t)$ , ca cea definită în pasul 1 de calcul, consistă din însumarea a două expresii  $U_1(t)$  și  $U_2(t)$ :

$$U_1(t) = \left[ \frac{5}{T^3} t^3 - \frac{9}{T^5} t^5 + \frac{5}{T^6} t^6 \right]$$

$$U_2(t) = X \left[ 1 - \frac{(T-t)^3}{T^3} \right]$$

$$U(t) = U_1(t) \cdot U_2(t)$$

pentru care derivatele  $\dot{U}_o$ ,  $\dot{U}_T$ ,  $\ddot{U}_o$ ,  $\ddot{U}_T$  trebuie să îndeplinească condițiile  $U_o = 0$ ,  $U_T = X$  (valoarea maximă a deplasării la sfârșitul seismului pentru deplasarea modificată prin calcul). Reprezentarea grafică a funcției  $U(t)$  este dată în figura 5.13.



**Figura 5.13.** Funcția deplasare  $u(t)$  calculată în baza datelor prezentate în figura 5.12.c)

#### 5.2.3.4. Sumar al pașilor de transformare aplicați

Următorii pași de calcul sunt cei care au fost aplicați pentru a modifica înregistrările accelerațiilor cutremurului El - Centro California (1940), în vederea folosirii acestora ca date de calcul antisismic al barajelor de beton.

1. Prin aplicarea transformatei Fourier rapide, pulsațiile mai mari de 50 rad/sec sunt neglijate din înregistrările inițiale ale accelerației cutremurului ;
2. Au fost calculate vitezele cutremurului, prin aplicarea metodei de integrare numerice la un polinom. De asemenea curbura “naturală” a părții finale a funcției viteză a fost modificată considerând  $T = 30$  s,  $T_p = 25$  s, coeficientul de amortizare = 0.05 și  $N = 5$ ;
3. Înregistrările deplasare ale cutremurului au fost calculate în baza vitezei calculate la punctul 2. Funcția deplasare astfel obținută a fost scrisă ca o sumă de două funcții. Accelerațiile de calcul finale au fost obținute prin diferențiere

directă a primei funcții deplasare și prin aplicarea transformatei Fourier rapide celei de-a doua funcții deplasare. De asemenea pulsațiile mai mari ca 50 rad/sec au fost eliminate. Ulterior aceste două funcții accelerații obținute au fost însumate.

Inregistrările seismice calculate ale accelerațiilor se vor folosi în capitolele ce urmează. În analiza de calcul dinamică a unei structuri nu doar durata mișcării seismice este importantă ci și componentele pulsației. Fiecare cutremur are caracteristicile lui proprii din acest punct de vedere, spectrul pulsațiilor și al distribuției energiei fiecărui cutremur fiind diferite. Acest lucru afectează modul de răspuns al structurilor la diferite cutremure. Pentru structurile la care pulsația naturală proprie este apropiată de cea a mișcării seismice influența acestor factori este foarte importantă.

## 6. ANALIZA DINAMICĂ A SISTEMELOR CUPLATE BARAJ - LAC DE ACUMULARE

### 6.1. Analiza dinamică a unui sistem cuplat reprezentativ

#### 6.1.1. Generalități

Deși deteriorări structurale pot rezulta din diferite efecte cum ar fi forțele valurilor tsunami, cedări ale fundațiilor datorită diminuării portanței solului prin fenomenul de lichefacție, deplasări ale fundației asociate cu fisuri geologice sau cu alunecări de teren, etc, mecanismul de încărcare principal, recunoscut de către proiectarea antisismică a construcțiilor, este dat de aplicarea unei mișcări la baza structurii.

Scopul acestui paragraf este acela de a furniza teoria necesară calculării tensiunilor și deformațiilor care se formează în orice sistem structural solicitat la o mișcare a bazei sale. Trebuie menționat că problema trebuie să fie complet definită din punct de vedere al proprietăților fizice ale sistemului, adică se cunoaște masa, rigiditatea, caracteristicile de atenuare și variația în timp a deplasărilor fundației din încărcări statice. Din acest motiv evaluarea proprietăților structurale și selecția cutremurului de calcul sunt factori critici importanți în proiectarea antisismică a structurilor. În analiza ce urmează se presupune că aceste caracteristici, ale structurii și cutremurului de calcul, sunt cunoscute, atenția îndreptându-se către tehnicile de analiză a răspunsului dinamic al structurilor. În formularea răspunsului dinamic al unei structuri se presupune că aceasta este sub acțiunea forțelor statice (forțe gravitaționale, etc) și în plus se suprapune efectul acțiunii dinamice.

Dacă structura se comportă linear elastic, astfel încât principiul superpoziției este aplicabil, este mult mai convenabil să se ia în considerare separat încărcările statice și dinamice, răspunsul final al structurii fiind obținut prin însumarea eforturilor și deplasărilor rezultate din aceste două ipoteze de încărcare. Dacă structura este supusă unor comportări neliniare în timpul încărcării dinamice principiul superpoziției nu mai este valabil și în acest caz analiza trebuie făcută luând în considerare atât încărcările statice cât și cele dinamice în același timp.

### 6.1.2. Caracteristicile de bază ale unei probleme dinamice

În contextul de față, termenul *“dinamic”* înseamnă variație în timp. Astfel, într-o problemă de analiză sinamică a unei structuri, încărcarea cât și toate celelalte aspecte legate de răspunsul structurii (deformații, forțe interioare, eforturi, etc) variază cu timpul. În conformitate cu aceasta este clar că în analiza dinamică a unui sistem nu există o singură soluție ci se obțin soluții distincte pentru fiecare instanță de timp considerată. Din acest motiv efortul de calcul în cazul unei analize dinamice este mult mai mare decât în cazul unei analize statice.

Caracteristicile de bază ale unei probleme dinamice pot fi definite cu referință la o grindă simplu rezemată, figura 6.1. Atunci când grinda este supusă unei încărcări statice, figura 6.1.a, forțele interioare rezistente încărcării pot fi evaluate utilizând principiile simple din statica construcțiilor. Dacă aceleași încărcări sunt aplicate dinamic, deformata structurii variază cu timpul, ceea ce implică formarea unor accelerații și conform principiului d'Alembert acestea generează la rândul lor forțe de inerție rezistente mișcării, figura 6.1.b. Astfel, la analiză, grinda simplu rezemată poate fi considerată ca fiind acționată de două încărcări: cea exterioară  $P(t)$ , care este cauza mișcării, și forțele de inerție  $f_i(t)$  rezistente. Forțele interne generate în structură sunt chemate să echilibreze acest sistem combinat de încărcare și din acest motiv forțele de inerție trebuie întodeauna calculate înainte să fie calculate eforturile interne ale structurii.

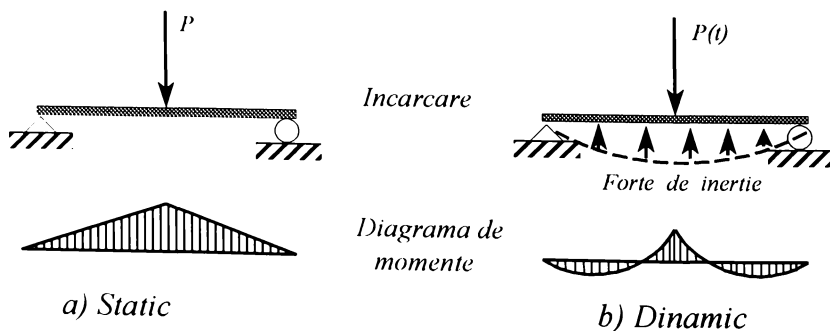


Figura 6.1. Diferența dintre încărcarea statică și dinamică



Din cele prezentate anterior se poate trage concluzia că forțele de inerție reprezintă o caracteristică esențială a unei probleme dinamice. Magnitudinea acestor forțe depinde de rata de încărcare a structurii precum și de caracteristicile de flexibilitate și masă ale acesteia.

Dacă încărcarea este aplicată treptat și încet, forțele de inerție vor fi mici comparativ cu încărcările aplicate și pot fi neglijate. În acest caz situația se analizează din punct de vedere static. Dacă încărcarea este aplicată rapid, forțele de inerție formate vor fi semnificative comparativ cu încărcările exterioare și vor avea efect considerabil asupra valorii eforturilor interne formate, astfel că în acest caz este necesar să se aplice o analiză dinamică pentru a evalua răspunsul structurii. Dificultatea care apare în cazul analizei dinamice constă în faptul că deformațiile care duc la formarea forțelor de inerție sunt ele însele influențate de către aceste forțe de inerție. Pentru a întrerupe acest ciclu al cauzei și efectului problema se formulează în termeni de ecuații diferențiale exprimând forțele de inerție în funcție de derivatele în raport cu timpul al deplasărilor structurii.

### 6.1.3. Grade de libertate

Sistemul complet al forțelor de inerție care acționează asupra unei structuri poate fi determinat doar dacă se cunosc accelerațiile ( și ca urmare deplasările) fiecărei particule masice a structurii. Într-o structură reală aceasta înseamnă să fie calculate deplasările fiecărui punct al structurii, ceea ce reprezintă un volum de calcul foarte mare, chiar și în cazul unei analize statice. Acest calcul poate fi simplificat dacă deformata structurii poate fi exprimată riguros de către un număr limitat de componente ale deplasării datorate deformării (coordonate).

Există două metode frecvent folosite în analiza dinamică a unei structuri pentru a defini forma deformată a acesteia și anume:

- metoda maselor echivalente;
- metoda coordonatelor generalizate.

În ambele cazuri numărul componentelor deplasării (coordonate) necesare a fi precizate, pentru a determina poziția oricărei particule masice din structură, se constituie în **numărul gradelor de libertate** al structurii.

În metoda maselor echivalente (așa cum arată și numele acestora), se presupune că întreaga masă a structurii este concentrată într-un număr finit de puncte a căror poziție în structură este cunoscută. În figura 6.2 este reprezentată spre exemplificare un sistem cu trei grade de libertate. Dacă deformarea axială a grinzii este neglijată, deplădările celor trei mase sunt date de către trei coordonate  $v_a$ ,  $v_b$ , și  $v_c$ , și este necesar să fie evaluate accelerațiile doar în aceste trei puncte pentru a calcula forțele de inerție produse în sistem.

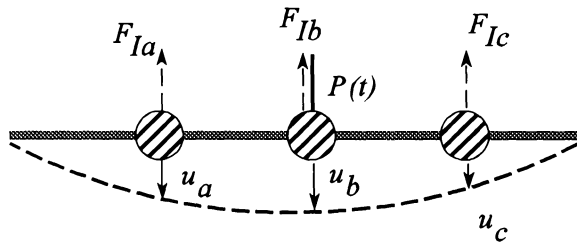


Figura 6.2. Sistem cu trei grade de libertate (mase echivalente)

O alternativă la calculul de aproximare al deformației grinzii este aceea de a le reprezenta sub forma unei serii Fourier. Pentru a reprezenta o formă deformată oarecare în mod exact trebuie folosiți un număr infinit de termeni ai seriei, iar prin folosirea doar a câțiva termeni se poate obține o aproximare bună.

Este postulat faptul că structurile flexibile ale unui sistem dinamic se deformează după forme fixe, și doar amplitudinea deformației variază în timp (Berg, G.V., 1989). Dacă cel de-al  $n$ -lea termen al funcțiilor de formă al seriei deplasărilor este notat cu  $\psi_n(x)$ , atunci forma generală a deformației unei structuri cu  $N$  grade de libertate este :

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^N \psi_n(z) \cdot y_n(t) \quad (6.1)$$

unde  $y_n$  este amplitudinea celei de a  $n$ -a funcție de formă.

În aceste reprezentări ale deformației în cazul unei analize dinamice, acuratețea soluției date de idealizarea făcută crește prin creșterea numărului de grade de libertate considerat, soluția exactă fiind atinsă la considerarea unui număr infinit de termeni.

Numărul de termeni necesari a fi considerați pentru a obține o soluție adecvată depinde de complexitatea structurii și de modul în care aceasta este încărcată. În majoritatea cazurilor două sau trei grade de libertate sunt suficiente pentru a obține rezultate bune.

În capitolele care urmează s-a folosit sistemul coordonatelor generalizate pentru reprezentarea deformației structurii.

#### 6.1.4. Analiza dinamică a unei console

Acest paragraf prezintă analiza sistemului baraj - lac de acumulare, sistem supus unei acțiuni dinamice, adică unui cutremur, considerând că acesta barajul se comportă ca o structură încastrată la bază și liberă la vârf, consolă.

Fie structura din figura 6.3 . Caracteristicile acestei structuri sunt : masa pe unitatea de lungime  $m_b$ , rigiditatea  $EI$ , și forța pe unitatea de lungime  $f$ . Atât  $m_b$  cât și  $EI$  variază în lungul structurii, iar forța  $f$  poate să varieze atât în lungul structurii cât și în timp. Dacă se neglijează deformația structurii datorată eforturilor tangențiale și momentul de torsiune atunci poate fi aplicat principiul coordonatelor generalizate pentru a exprima deformația acesteia ( adică ecuația 6.1.). Funcțiile de formă  $\psi_n(z)$  trebuie să satisfacă condițiile de margine, care în acest caz sunt:

- forță tăietoare zero;
- moment încovoietor nul la capătul liber al structurii;
- deformație și rotație nulă la capătul fix al structurii.

Ecuația mișcării poate fi obținută considerând forțele dinamice de translație ce acționează pe un element de grindă și aplicând principiul deplasărilor virtuale (anexa 1.4). În figura 6.3 este reprezentat un element de grindă de lungime  $dz$  în poziție deformată. Forțele ce acționează asupra acestui element sunt încărcarea pe element (orientată de sus în jos), forța de inerție și forța tăietoare care se formează. Deplasarea elementului este  $\Sigma \psi_n y_n$ . În scopul ușurării atât a scrierii cât și a citirii expresiei  $\Sigma \psi_n y_n$  aceasta va fi notată cu  $\psi y$ .

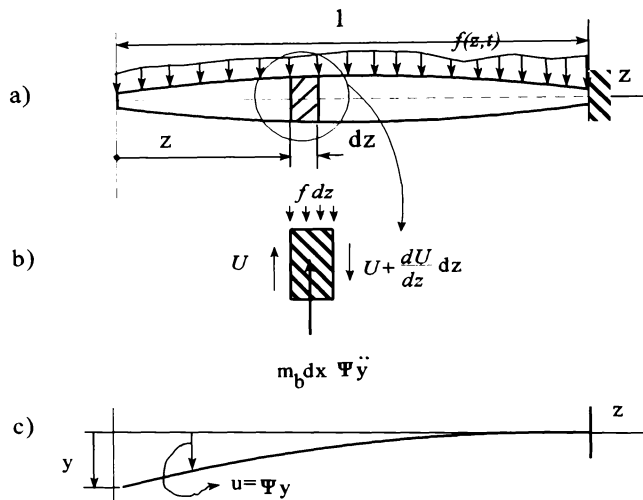


Figure 6.3. Structură elastică și deformata ei. (a)Structură; (b)Forțe pe element; (c) Forma deformată a structurii sub acțiunea încărcărilor

Atunci când se aplică o deplasare virtuală  $\delta y$  acestui element diferențial lucrul mecanic virtual pe element este :

$$\delta W = \left[ f \cdot dz - (m_0 \Psi \ddot{y}) \cdot y + \frac{dU}{dz} \cdot dz \right] \Psi \cdot \delta y \quad (6.2)$$

Relația efort tensiuni pentru grindă se scrie:

$$U = - \left[ \frac{d}{dz} (EI \cdot \Psi'') \right] \cdot y \quad (6.3)$$

care prin diferențiere devine :

$$\frac{dU}{dz} = - \left[ \frac{d^2}{dz^2} (EI \Psi'') \right] \cdot y \quad (6.4)$$

Substituind ecuația (6.4) în ecuația (6.2) și integrând pe lungimea grinzii rezultă :

$$\delta W = \int_0^l f \cdot \psi dz - \left( \int_0^l m_b \cdot \psi^2 \cdot dz \right) \cdot \ddot{y} - \left( \int_0^l \frac{d^2(EI\psi'')}{dz^2} \cdot \psi \cdot dz \right) \cdot y = 0 \quad (6.5)$$

Termenul care conține rigiditatea se integrează prin părți astfel :

$$\int_0^l \frac{d^2(EI\psi'')}{dz^2} \cdot \psi dz = \left[ \frac{d(EI\psi'')}{dz} \cdot \psi \right]_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \frac{d(EI\psi'')}{dz} \cdot \psi' dz \quad (6.6)$$

Expresia cuprinsă între paranteze drepte în ecuația 6.6 dispare pentru că forța tăietoare  $d(EI\psi'')/dz$  este zero la capătul liber al consolei și deplasarea  $\psi$  este zero la capătul fix . Integrând din nou prin părți se obține:

$$- \int_0^l \frac{d(EI\psi'')}{dz} \cdot \psi' \cdot dz = \left[ EI \cdot \psi'' \cdot \psi' \right]_{z=0}^{z=l} + \int_0^l EI\psi'' \cdot dz \quad (6.7)$$

Primul termen al expresiei din membrul doi al ecuației (6.7) este zero pentru că momentul încovoietor ( $-EI\psi''$ ) este nul la capătul liber, iar rotația este  $\psi'$ . În final ecuația de mișcare a acestei structuri sub acțiunea încărcărilor considerate este :

$$\ddot{y} \int_0^l m_b \psi^2 dz + y \int_0^l EI\psi'' = \int_0^l f \cdot \psi dz \quad (6.8)$$

Expresia (6.8) reprezintă un sistem liniar de ecuații diferențiale de ordinul doi. Termenii integrali ai ecuației (6.8) poartă denumirea de *masă generalizată*, *rigiditate generalizată* și respectiv *încărcare generalizată*.

## 6.2. Soluția analitică pentru calculul presiunilor hidrodinamice asupra barajelor

### 6.2.1. Ecuația fundamentală a fenomenului

În analiza dinamică a sistemului fluid - structură (figura 6.4.) Se face presupunerea că structura se comportă ca și o consolă a cărei ecuație fundamentală de mișcare este :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \ddot{u}_g - p(0, z, t) \quad (6.9)$$

unde:

$E$ - modulul de elasticitate;

$I$ - momentul de inerție al secțiunii transversale în raport cu axa de încovoiere ( axa  $y$ );

$m$ - masa pe unitatea de lungime a structurii;

$u$ -deplasarea structurii relativ la la teren în direcția axei  $x$ ;

$u_g$  - accelerația seismică a terenului pe direcție orizontală;

$p$ -presiunea hidrodinamică ( în exces față de presiunea hidrostatică).

Atât  $EI$  cât și  $m$  variază arbitrar pe înălțimea structurii ( în raport cu variabila  $z$ ).

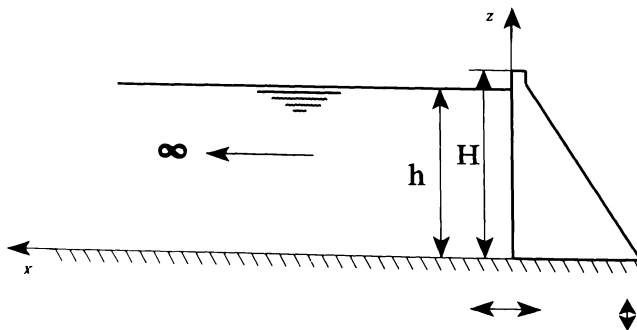


Figura 6.4. Sistemul fluid - structură

Răspunsul structurii, incluzând efectul fluidului , poate fi exprimat ca o combinație liniară între modurile proprii de vibrație ale structurii și coordonatele generalizate:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n Y_n(t) \quad (6.10)$$

Accelerația proprie a structurii poate fi exprimată în conformitate cu ecuația (6.10) astfel:

$$\ddot{u}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \ddot{Y}_n(t) \quad (6.11)$$

Aplicând principiul superpoziției ecuației (6.11), principiu prezentat în paragraful 6.1.4., rezultă:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = -V_n(t) - P_n(t) \quad n=1,2,3,\dots \quad (6.12)$$

Masa generalizată asociată cu cel de-al  $n$ -lea mod de vibrație  $\psi_n(z)$  este definit ca :

$$M_n = \int_0^h \psi_n^2(z) m(z) dz \quad (6.13)$$

Încărcarea generalizată indusă de către presiunea hidrodinamică este:

$$P_n(t) = \int_0^h \psi_n(z) P(0,z,t) dz \quad (6.14)$$

Forța generalizată indusă de către mișcarea seismică este:

$$V_n(t) = \ddot{u}_g(t) \int_0^h m(z) \psi_n(z) dz \quad (6.15)$$

Presiunea hidrodinamică în interiorul domeniului fluid este guvernată de ecuația undelor (capitolul 4):

$$\nabla^2 P(x,z,t) = \frac{1}{c^2} \ddot{P}(x,z,t) \quad (6.16)$$

unde:  $P(x,z,t)$ - distribuția presiunii hidrodinamice în exces presiunii hidrostatice;

$c$  - viteza sunetului în apă ;

$x,z$  -coordonate carteziene;

$\omega_n$  - a  $n$ -a pulsație naturală a structurii fără lac de acumulare.

### 6.2.2. Condiții inițiale și pe contur

Distribuția presiunii hidrodinamice poate fi obținută rezolvând ecuația (6.16) care satisface următoarele condiții inițiale și de margine:

- la momentul inițial apa din lac se află în repaus, condițiile inițiale fiind:

$$\begin{aligned} P|_{t=0} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

-la timpul t:

•La interfață dintre fluid și structură:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(z,t)] = -\rho \left[ \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \ddot{Y}_n(t) \right] \quad (6.18)$$

•Pe fundul lacului:

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (6.19)$$

•La suprafața lacului:

$$P|_{z=h} = 0 \quad (6.20)$$

•La capătul lacului:

$$P|_{x=L} = 0 \quad (6.21)$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (6.16) se obține:

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^2} = \frac{s^2}{c^2} P^* \quad (6.22)$$

unde:

- $P^*$  este transformata Laplace a funcției  $P(x,z,t)$ ;
- $s$  este parametrul de transformare Laplace .



Aplicând o procedură similară condițiilor de margine rezultă :

-la un timp dat  $t$ ;

•La interfață dintre fluid și structură :

$$\left. \frac{\partial P^*}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho s^2 \left[ u^*(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) Y_n^*(s) \right] \quad (6.23)$$

•Pe fundul lacului :

$$\left. \frac{\partial P^*}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (6.24)$$

•La suprafața lacului :

$$P^*|_{z=h} = 0 \quad (6.25)$$

•La capătul lacului

$$P^*|_{x=\infty} = 0 \quad (6.26)$$

### 6.2.3. Contribuții la calculul soluției analitice

Utilizând metoda separării variabilelor, distribuția presiunii hidrodinamice în lac poate fi exprimată ca:

$$P^*(x,z,s) = X(x,s) \cdot Z(z,s) \quad (6.27)$$

Atunci (6.22) devine:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) X = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 Z = 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

Soluția celei de a doua ecuații a sistemului (6.28), care satisface condițiile (6.24) și (6.25) este dată de :

$$Z(z,s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) \cos(\lambda_k \cdot z) \quad ; \quad \text{cu} \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h} \quad (6.29)$$

Soluția primei ecuații a sistemului (6.28), care satisface condiția de a tinde la zero către infinit este:

$$X(x,s) = e^{-x \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \quad (6.30)$$

Substituția ecuațiilor (6.29) și (6.30) în ecuația (6.27) dau:

$$P'(x,z,s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) \cdot e^{-x \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot \cos(\lambda_k \cdot z) \quad (6.31)$$

Derivata funcției din ecuația (6.31) trebuie să satisfacă ecuația (6.23) care conduce la :

$$\rho s^2 \left[ u_g''(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) Y_n'(s) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) \cdot \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)} \cdot \cos(\lambda_k \cdot z) \quad (6.32)$$

Din (6.32) rezultă coeficientul necunoscut  $a_k(s)$  :

$$a_k(s) = \frac{4(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot \rho s^2 u_g''(s) + \frac{2}{h} \cdot \frac{\rho s^2}{\sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Y_n'(s) \cdot \int_0^h \psi_n(z) \cos \lambda_k z dz \quad (6.33)$$

Substituția ecuației (6.23) în ecuația (6.21) conduce la :

$$\begin{aligned}
 P'(x,z,s) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)\pi \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot e^{-x\sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot s^2 u_g'(s) \cdot \cos\lambda_k z + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\rho}{h \cdot \sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot e^{-x\sqrt{\lambda_k^2 + \left(\frac{s^2}{c^2}\right)}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} s^2 Y_n'(s) \cdot \cos\lambda_k z \int_0^h \Psi_n(z) \cos\lambda_k z dz
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Soluția în domeniul timp a presiunilor hidrodinamice se obține aplicând transformarea Laplace inversă ecuației (6.35). Adică:

$$\begin{aligned}
 P(x,z,t) = & \frac{4\rho c}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} \cdot \cos\lambda_k z \cdot \int_0^{t-x/c} \ddot{u}_g(\tau) \cdot J_0 \left[ \lambda_k c \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau + \\
 & + \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\lambda_k z \cdot \int_0^h \Psi_n(z) \cos\lambda_k z dz \cdot \int_0^{t-x/c} \ddot{Y}_n(\tau) J_0 \left[ \lambda_k c \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right] d\tau ; \quad t > -
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Presiunea hidrodinamică pe paramentul amonte al structurii, conform cu formula dată de ecuația (6.36) este:

$$\begin{aligned}
 P(0,z,t) = & \frac{4\rho c}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} \cdot \cos\lambda_k z \cdot \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot J_0 \left[ \lambda_k c(t-\tau) \right] d\tau + \\
 & + \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\lambda_k z \cdot \int_0^h \Psi_n(z) \cos\lambda_k z dz \cdot \int_0^t \ddot{Y}_n(\tau) J_0 \left[ \lambda_k c(t-\tau) \right] d\tau ; \quad t > 0
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Încărcarea generalizată  $P_n(t)$  din ecuația (6.12) este:

$$\begin{aligned}
 P_n(t) &= \int_0^h \Psi_n(z) P(0, z, t) dz = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} \cdot \int_0^h \Psi_n(z) \cos \lambda_k z dz \cdot \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau \\
 &+ \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^h \Psi_n(z) \cos \lambda_k z dz \cdot \int_0^t \Psi_m(z) \cos \lambda_k z dz \cdot \int_0^t \ddot{Y}_m(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau = \\
 &= \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} Q_{nk} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau + \\
 &+ \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nk} Q_{mk} \int_0^t \ddot{Y}_m(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau = \\
 &= P_n^r(t) + P_n^f(t)
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Încărcarea generalizată  $P_n^r(t)$  indusă de către presiunea hidrodinamică dacă structura este rigidă este dată de :

$$P_n^r(t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} Q_{nk} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau \tag{6.39}$$

Încărcarea generalizată  $P_n^f(t)$  indusă de către presiunea hidrodinamică datorită deformării structurii este:

$$P_n^f(t) = \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nk} Q_{mk} \int_0^t \ddot{Y}_m(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau = P_n^r(t) + P_n^f(t) \tag{6.40}$$

unde:

$$Q_{nk} = \int_0^h \Psi_n(z) \cos \lambda_k z dz \tag{6.41}$$

substituind (6.39) și (6.40) în ecuația (6.12) se obține ecuația interacțiunii dintre fluid și structură:

$$\begin{aligned}
 M_n \cdot \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) &= -\ddot{u}_g(t) \cdot \int_0^h m(z) \cdot \Psi_n(z) dz - \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} Q_{nk} \cdot \\
 &\cdot \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau - \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nk} Q_{mk} \int_0^t \ddot{Y}_m(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau \\
 t > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Pentru a putea rezolva această ecuație este necesar să se accepte câteva simplificări și anume:

- 1.- mișcarea seismică are variație liniară între doi pași de calcul  $(n-1)\Delta t$  și  $n\Delta t$ :

$$\ddot{u}_g(\tau) = \left( n - \frac{\tau}{\Delta t} \right) \ddot{u}_g[(n-1)\Delta t] + \left( \frac{\tau}{\Delta t} - (n-1) \right) \ddot{u}_g(n\Delta t) \quad (6.43)$$

Substituirea lui (6.43) în (6.39) transformă încărcarea generalizată  $P_n^r(t)$  într-o sumă de forma:

$$P_n^r(t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} Q_{nk} \left\{ \left[ \sum_{n=1}^{N-1} B_{nk} \cdot \ddot{u}_g(n\Delta t) \right] + B_k^* \cdot \ddot{u}_g(N\Delta t) \right\} \quad (6.44)$$

în care:

$$B_k^* = \frac{1}{\lambda_k} \left[ \int_0^{\lambda_k c \Delta t} J_o(\tau) d\tau - J_1(\lambda_k c \Delta t) \right]$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \begin{aligned} & -(N-n-1) \cdot \int_{\lambda_k c(N-n)\Delta t}^{\lambda_k c(N-n+1)\Delta t} J_o(\tau) d\tau + (N-n+1) \cdot \int_{\lambda_k c(N-n)\Delta t}^{\lambda_k c(N-n+1)\Delta t} J_o(\tau) d\tau \\ & + 2(N-n) \cdot J_1[\lambda_k c(N-n)\Delta t] - (N-n+1) \cdot J_1[\lambda_k c(N-n+1)\Delta t] \\ & - (N-n-1) \cdot J_1[\lambda_k c(N-n-1)\Delta t] \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

- 2.- accelerația structurii între doi pași de timp  $(n-1)\Delta t$  și  $n\Delta t$  poate fi considerată constantă:

$$\ddot{Y}_m(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \ddot{Y}_m[(n-1)\Delta t] + \ddot{Y}_m[n\Delta t] \right\} \quad (6.46)$$

Substituirea ecuației (6.45) în (6.40) furnizează efectul hidrodinamic rezultat din deformarea structurii:

$$P_n^f(t) = F_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \ddot{Y}_m(t) \quad (6.47)$$

în care:

$$\begin{aligned}
 W_{nm} &= \frac{2\rho c}{h} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} \cdot Q_{mk} \cdot E_k \\
 F_n &= \frac{2\rho c}{h} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk} \cdot Q_{mk} \cdot G_{mk} \\
 E_k &= \frac{1}{2\lambda_k} \int_0^{\lambda_k c \Delta t} J_o(\tau) d\tau \\
 G_{mk} &= \frac{1}{2\lambda_k} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \ddot{Y}_m(n\Delta t) \cdot \int_{\lambda_k c \Delta t(N-n-1)}^{\lambda_k c \Delta t(N-n+1)} J_o(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Substituția ecuațiilor (6.38), (6.39) și (6.47) în ecuația (6.12) are ca rezultat:

$$M_n \cdot \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 \cdot M_n \cdot Y_n(t) = -V_n(t) - P_n^r(t) - F_n(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \cdot \ddot{Y}_m(t), \quad n=1,2,3,\dots \tag{6.49}$$

Scriind ecuația (6.49) sub formă matriceală, cu o serie trunchiată la  $M$  moduri de vibrație ale structurii, se obține :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1M} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2M} \\ m_{M1} & m_{M2} & \dots & m_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \ddot{Y}_2(t) \\ \ddot{Y}_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_M(t) \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

unde:

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= W_{ij} \quad i \neq j \\
 m_{ii} &= M_i + W_{ii} \\
 K_{ii} &= \omega_i^2 \cdot M_i \\
 L_i(t) &= -V_i(t) - P_i^r(t) - F_i(t)
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Masele adăugate  $W_{ij}$  din (6.50) și (6.51) care vibrează împreună cu structura, rezultă din efectul hidrodinamic datorat deformării la un moment dat al structurii. Coeficientul care multiplică aceste mase adiționale depinde de modul de vibrație atât al structurii cât și al lacului de acumulare, și are valoare constantă, dacă pasul de timp de calcul este constant. Încărcările adiționale  $F_n(t)$ , reprezintă presiunea hidrodinamică datorată tuturor pașilor de calcul anterior pasului curent și sunt la rândul lor funcție de modurile de vibrație ale structurii și lacului de acumulare. Încărcarea adițională  $P_n^r(t)$ , care este dependentă de comportarea lacului, reprezintă presiunea hidrodinamică creată dacă structura ar fi rigidă în timpul cutremurului.

## 7. SOLUȚII NUMERICE DEZVOLTATE CU METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

### 7.1. Dezvoltarea metodei elementelor de frontieră și stadiul actual al aplicării în domeniu

Tehnica rezolvării ecuațiilor integrale ce apar la probleme cu condiții de margine se pune de foarte multă vreme. În anul 1903, Fredholm a folosit discretizarea ecuațiilor integrale din problemele de potențial, discretizare ce a stat la baza dezvoltării metodei 'indirecte' a elementelor de frontieră. Denumirea de metodă indirectă vine din faptul că sunt folosite funcții de pondere care nu au nici o semnificație fizică, dar ulterior prin intermediul metodei se pot calcula cantități fizice clare cum ar fi deplasări sau eforturi.

O formulare integrală care leagă deplasări ale punctelor de pe frontieră cu eforturi (tensiuni) a fost stabilită de în anul 1886. Identitatea lui Somigliana, așa cum este cunoscută ca denumire astăzi această relație, stă la baza formulării 'directe' a metodei elementelor de frontieră. De-a lungul timpului au apărut o serie de cărți și articole despre aplicarea ecuațiilor integrale în teoria potențială și în teoria elasticității, scrise de către distinși matematicieni ca Kellogg -1929, Muskhelishvili -1953, Mikhlin -1957- și Kupradze -1965. Formulările integrale au fost rezolvate prin procedee analitice, dar acest lucru a limitat folosirea lor la probleme foarte simple. Problema rezolvării acestor formulări integrale prin procedee analitice a început să fie pusă la începutul anilor 60, datorită apariției calculatoarelor de mare viteză. În mod particular metoda elementului finit a atras un interes deosebit de aplicare al ei în domenii complexe ale inginerie. Pasul major de rezolvare al ecuațiilor integrale a fost făcut în anul 1963, prin publicarea a două articole de către Jaswon -1963- și Symm -1963. Abordarea acestora a problemei a constat în discretizarea ecuațiilor integrale a teoriei potențiale în două dimensiuni, fenomen guvernate de o ecuație de tip Laplace în elemente drepte, pe care funcția de potențial era considerată constantă. Elementele erau definite de punctele lor nodale și integrarea se efectua aplicând regula lui Simpson, cu excepția unor integrale singulare care erau calculate analitic.

Abordarea făcută de Jaswon și Symm poate fi definită ca o metodă 'semi-directă' pentru că

funcțiile folosite pentru a defini problema nu sunt fictive și pot fi diferențiate sau integrate pentru a calcula cantități fizice necunoscute ale problemei.

Ulterior au apărut formulări integrale pentru alte tipuri de probleme, după cum urmează Jaswon și Ponter -1963- pentru probleme de torsiune a barelor cu moment de inerție variabil, Hess și Smith -1967- pentru probleme de curgere a fluidelor și Harrington ș.a. -1969- pentru probleme în electricitate, bidimensionale.

Primul articol care a utilizat formularea directă a metodei, utilizând deplasări și eforturi într-o ecuație integrală aplicabilă pe frontiera unui domeniu de calcul a fost publicat de către în 1967. Cercetarea prezentată de către Rizzo a fost considerată foarte originală, mai ales că pentru prima dată a fost utilizată major analogia dintre teoria de potențial și teoria elasticității, clasică, precum și proceduri numerice pentru a rezolva o problemă. Acesta a utilizat elemente linie dreaptă, pentru a discretiza frontiera, elemente pe care funcția necunoscută ( deplasare sau efort unitar) era considerată constantă. Extinderea studiului efectuat de Rizzo la probleme tridimensionale a fost realizată de Cruse -1969- formulare similară cu cea a lui Rizzo, cu excepția faptului că suprafața (care este frontieră) a fost discretizată în elemente triunghiulare pe care funcția necunoscută era considerată constantă. Studiul prezentat de Cruse a fost urmat de alte două publicații ale acestuia în care probleme practice tridimensionale au fost comparate cu metoda elementului finit (Cruse, T.A., 1973) și totodată elementele de discretizare ale frontierei au fost mai sofisticate permițând ca funcțiile necunoscute să varieze liniar pe element (Cruse, T.A., 1974). În timpul acelei perioade de început de dezvoltare al metodei elementelor de frontieră (from 1967 to 1972), formularea problemelor sub formă de ecuații integrale a fost extinsă la probleme de materiale neomogene (Rizzo and Shippy, 1968), elastodinamică (Cruse 1968 și Cruse, T.A. și Rizzo, 1968), elastoplasticitate (Swedlow și Cruse, T.A., 1971), materiale anizotropice (Cruse și Swedlow, 1971) și probleme tridimensionale din mecanica fracturilor (Cruse, T.A., și Van Buren, 1971 și Cruse, T.A., 1972). Aceste publicații au fost foarte importante pentru că au pus bazele metodei elementelor de frontieră (BEM) și totodată au demonstrat că această metodă este o tehnică numerică foarte puternică.

*“ Dacă trebuie acordat cuiva titlul de inventator al metodei elementelor de frontieră atunci cu siguranță acesta trebuie acordat lui M. A. Jaswon, G. T. Symm, F. J. Rizzo și T. A. Cruse ” - Bekcer, 1994. În particular publicațiile lui T. A. Cruse, într-o perioadă relativ scurtă (1968-1973) au fost primele care au demonstrat acuratețea tehnicii elementelor de frontieră în domenii ca elastostatică, elastodinamică, anizotropie, plasticitate și mecanica fracturilor.*



Muți dintre algoritmi și multe dintre conceptele metodei elementului finit s-au regăsit formulate în metoda elementelor de frontieră, așa cum ar fi conceptul de elemente de ordin superior, prin utilizarea de funcții de formă cuadratică. Aceste elemente au fost introduse pentru prima dată de către Lachat -1975- și îmbunătățite ulterior de către Lachat și Watson -1975, 1976. Alți autori, cum ar fi Cruse și Wilson -1978- sau Tan și Fenner -1978, 1979-, au utilizat elemente cuadratică izoparametrice, pentru care atât geometria cât și variabilele au variație quadratică pe element și au demonstrat a da soluții foarte exacte în cazul problemelor tridimensionale. Datorită renumelui de acuratețe pe care îl au aceste elemente în rezolvarea problemelor în teza de față au fost folosite astfel de elemente pentru soluția numerică propusă.

Începând cu anii 70 au fost publicate un număr foarte mare de cărți și articole referitoare la metoda elementelor de frontieră, timp în care și numele ei este recunoscut ca BEM. Menționarea tuturor autorilor acestor publicații este aproape imposibilă.

## 7.2. Formularea metodei elementelor de frontieră

### 7.2.1. Modelul matematic în cazul ecuației Laplace (baraj rigid)

În cele ce urmează se exemplifică modelul matematic bazat pe metoda elementelor de frontieră prezentat de I. David și Gh. Lazăr în lucrarea “ Model de calcul pentru determinarea distribuției presiunii seismice a apei asupra paramentului unui baraj. bazat pe metoda elementelor de frontieră” la Al VI-lea simpozion național de Informatică în Construcții. Timișoara. 1988

Formularea matematică a problemei este următoarea:

- se cere rezolvarea ecuației ce guvernează fenomenul (ecuație de tip Laplace)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1)$$

– care îndeplinește următoarele condiții de margine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= v_s = c \cdot \tau & \text{pe } AB \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 & \text{pe } BCD \\ \phi &= 0 & \text{pe } AD \end{aligned} \quad (7.2)$$

cu referire la notațiile din figura (7.1) și semnificațiile:

- $\phi$ -potențialul vitezelor;
- $x, y$ - coordonate carteziene;
- $\tau$ -semiperioada cutremurului;
- $v$ -viteza;

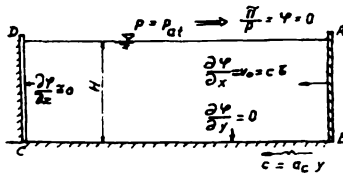


Figura 7.1. Domeniu supus acțiunii cutremurului și condiții pe contur

### 7.2.2. Modelul matematic propus în cazul ecuației Helmholtz (baraj rigid sau flexibil)

În acest paragraf sunt prezentate aspectele formulării ecuațiilor integrale a problemelor dinamice dependente de timp, precum și procedura de rezolvare în pași de timp prin metoda elementelor de frontieră a problemei propuse spre studiu în capitolul 4, paragraful 4.3.1. ( Ipoteze și formularea problemei).

Ecuția de mișcare a unui material elastic poate fi scrisă sub formă vectorială astfel:

$$L(u) = (c_1^2 - c_2^2) \nabla \nabla \cdot u + c_2^2 \nabla \cdot \nabla u - \ddot{u} = -\frac{b}{\rho} \quad (7.3)$$

în timp ce ecuația scalară a unui fluid compresibil are ecuația (prezentată în 4.3.2.):

$$L(\phi) = c^2 \nabla \cdot \nabla \phi - \ddot{\phi} = -\gamma \quad (7.4)$$

În ecuația (7.3) și (7.4) au fost folosite următoarele notații:

- $\nabla$  denotă vectorul derivatelor spațiale;
- $\ddot{\phantom{x}}$  acolo unde sunt specificate, indică derivate în raport cu variabila timp a funcției;
- $c_1, c_2$  vitezele undelor elastice de dilatație, respectiv distorsionale;
- $c$  viteza undelor în fluide;
- $\rho$  densitate;
- $b_j$  forțe interioare ale mediului elastic;
- $\gamma$  sursa distribuită.

În lungul unei porțiuni a frontierei  $\Gamma_1$  se cunoaște fie deplasarea  $u(x,t)$ , fie potențialul vitezelor  $\phi(x,t)$ , în timp ce de-a lungul celeilalte porțiuni a frontierei  $\Gamma_2$  sunt cunoscute tensiunile  $T(x,t)$ , respectiv fluxul  $\psi(x,t)$ .

Componentele tensiunilor și ale fluxului pot fi exprimate în funcție de deplasări respectiv derivatele potențialului vitezei, astfel:

$$\begin{aligned} T &= \rho[(c_1^2 - c_2^2)u \cdot \nabla n + c_2^2(u \nabla \cdot n + u \cdot \nabla n)] \\ \psi &= c^2 n \cdot \nabla \Phi \end{aligned} \quad (7.5)$$

În plus la timpul  $t=0$ , soluția problemei trebuie să satisfacă condițiile inițiale ale problemei, adică să aibă valori ale deplasărilor și vitezelor :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_o(x) \\ \dot{u}(x,0) &= v_o(x) \end{aligned} \quad (7.6)$$

respectiv potențial și presiuni:

$$\begin{aligned} \Phi(x,0) &= \Phi_o(x) \\ \dot{\Phi}(x,0) &= \frac{p(x,0)}{\rho_f} = \frac{p_o(x)}{\rho_f} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$\rho_f$  - densitatea mediului fluid.

Problema cu condiții inițiale și de margine a propagării undelor în medii fluide este un caz particular al propagării undelor prin medii elastice. Demonstrația acestei afirmații este obținută și prin particularizarea ecuației (7.3) pentru  $c_1=c_2=c$ , și considerând ecuația scalară obținută.

Datorită acestei similarități în cele ce urmează se face deducerea ecuațiilor doar pentru cazul al doilea, al mediului fluid, ecuațiile scalare, în final obținându-se prin analogie formularea pentru cazul mediului elastic.

Ideea de bază a metodei ce se propune este aceea de a descrie problema cu condițiile inițiale date pe frontieră prin ecuații integrale. Pentru a face acest lucru se folosește teorema reciprocității lui Graffi a elastodinamicii (anexa 1.4.). Se consideră două momente distincte în care sunt satisfăcute ecuațiile (7.4): momentul actual cu distribuția de presiuni  $\gamma$  și o sursă impuls unitar la timpul  $t$  și punctul de aplicare  $\xi$ .

Aplicând teorema Graffi se obține:

$$k_{st} \Phi(\xi, t) = \int_0^{t'} \int_{\Gamma} \left\{ \bar{\Phi}(x, \xi, t-\tau) \psi(x, \tau) - \bar{\Psi}(x, \xi, t-\tau) \Phi(x, \tau) \right\} d\Gamma_x + \int_{\Omega} \bar{\Phi}(x, \xi, t-\tau) \gamma(x, \tau) d\Omega_x + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[ \bar{\Phi}(x, t) p_o(x) / \rho_f - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(x, t) \phi_o(x) \right] d\Omega_x \quad (7.8)$$

unde:

- $k_{st}$  este un coeficient care depinde de forma conturului pe care este situat  $\xi$ ;
- $\phi, \psi$  potențialul vitezelor, respectiv presiuni - funcții necunoscute căutate;
- $\bar{\Phi}, \bar{\Psi}$  potențialul vitezelor, respectiv presiuni - funcții soluții fundamentale a ecuației date, în domeniul infinit.

Dacă punctul este pe frontiera domeniului ( $\xi \in \Gamma$ ) atunci  $k_{st}=0.5$ , în timp ce pentru punctele interioare domeniului ( $\xi \in \Omega$ )  $k_{st}=1$ . Limita superioară de integrare  $t'$  reprezintă o notație prescurtată pentru  $t+\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  fiind un număr arbitrar foarte mic. Soluția fundamentală a ecuației (7.4) este dată de Mansur (Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation - Applied mathematical modelling, 1982, vol 6, August, pag 307-311):

$$\bar{\Phi}(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2\pi c} \cdot \frac{1}{R} \cdot H[c(t-\tau) - r] \quad (7.9)$$

unde:

$$R = \sqrt{(c^2 t'^2 - r^2)} \quad ; \quad t' = t - \tau \quad ; \quad r = |x - \xi| \quad (7.10)$$

iar H este funcția Heaviside (definită în anexa 1.5).

Fluxul corespunzător funcției definite de ecuația (7.10),  $\bar{\Psi}(x,t)$  se obține prin derivare, utilizând relația dată de ecuația (7.5). Pentru obținerea acestei din urmă funcții trebuie folosite derivatele funcției Heaviside, adică funcția Dirac (anexa (1.5), în combinație cu termenul singular  $1/R$ . Funcția Heaviside se folosește în combinație cu termenul singular  $1/R^3$ . Acești doi termeni nu pot fi integrați numeric. Pentru a elimina acest inconvenient se efectuează analitic integrarea în raport cu timpul.

Considerând condițiile inițiale și sursa  $\gamma(x,t)$  egală cu zero, rezultă următoarea ecuație integralo-diferențială, pentru propagarea undelor în medii fluide compresibile:

$$kst \Phi(\xi,t) = \int_0^t \int_0^r \{ \bar{\Phi}(x,\xi,t') \cdot \Psi(x,\tau) + \frac{c}{2\pi R} H(ct'-r) \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \frac{ct'-r}{R^2} \Phi(x,\tau) + \frac{1}{c} \dot{\Phi}(x,\tau) \right] \} d\Gamma dt \quad (7.11)$$

### 7.3. Implementarea numerică

Prezentarea implementării numerice se face pentru fiecare din cele două modele de calcul prezentate la 7.2.

#### 7.3.1. Modelul pentru ecuația lui Laplace - (baraj rigid)

Modelul matematic al problemei se poate formula pentru înălțimea piezometrică  $h(x,y)$ , definită ca o funcție reală de clasă  $C_2$  în domeniul de calcul.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

$$h = h_{ok}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{A_k, B_k} = \frac{v_k}{v_o} \quad (7.11)$$

$$k=1,2,\dots,m \quad , \quad h = \frac{\phi}{v_o}$$

unde  $A_{k+1}B_k$  sunt porțiuni pe care sunt precizate valorile vitezelor normale.

Soluția problemei la limită (7.11) se poate reprezenta sub forma integrală:

$$\begin{aligned} h(z) &= -\frac{1}{2\pi k} \int_{\Gamma} q(\xi) \ln r(z/\xi) dl + c \\ u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln(z/\xi) ds \end{aligned} \quad (7.12)$$

unde:

- q(ξ)- densitatea unei surse distribuite pe contur, reprezentând necunoscutele indirecte ale problemei;
- h(z)- înălțimea piezometrică;
- u(z)- viteza în punctul  $z \in \Gamma$ , după direcția  $n_z$ ;
- ds- elementul de arc de-a lungul conturului  $\Gamma$ ;

Prin discretizarea frontierei și substituirea ei cu un contur poligonal cu colțurile în punctele  $\xi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), ținându-se cont de (7.11) precum și de condițiile la limită din (7.11) se ajunge la un sistem de ecuații integrale având drept necunoscute distribuția surselor. Prin urmare, cunoașterea înălțimilor piezometrice și a distribuției de viteze, adică utilizarea practică a relației (7.11) și a derivatei ei este condiționată de determinarea distribuției de surse  $q(\xi)$ .

Sistemul liniar obținut este de forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} a_{ij} \frac{q_i}{H_o} + c &= \frac{H_{oj}}{H_o} \quad \text{pe } AD \\ \sum_{i=1}^{N_2} b_{ij} \frac{q_i}{H_o} - \frac{1}{2} \frac{q_j}{H_o} &= \begin{cases} 0 & \text{pe } DCB \\ 1 & \text{pe } AD \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{N_3} \frac{q_i r_{i,i+1}}{H_o} &= 0 \quad , \quad i=1,\dots,N_1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

unde  $H_o$  este înălțime piezometrică de referință introdusă pentru adimensionalizarea relațiilor. Ecuațiile cu coeficienții  $a_{ij}$  se scriu pentru elemente aparținând lui  $\Gamma_{II}$ , adică cu înălțime piezometrică cunoscută  $h_{oj}$  iar cele cu coeficienții  $b_{ij}$  pentru elementele aparținând lui  $\Gamma_{\Sigma}$  pe care viteza normală este cunoscută. Evident  $N_1 + N_2 = N_3$  reprezintă numărul total de

elemente. Sistemul permite determinarea necunoscutelor  $q_i$  în număr de  $N_1$ , în total  $N_3$  necunoscute.

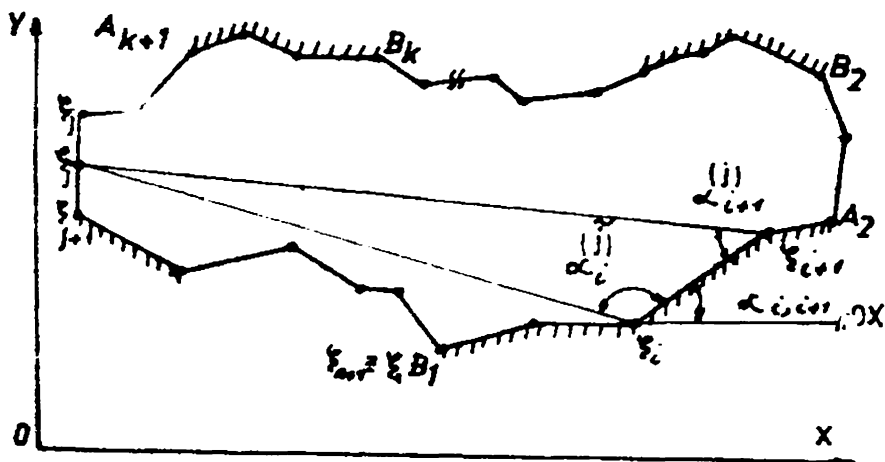


Figura 7.2. Domeniu de calcul. Notații

Coeficienții  $a_{ji}$  și  $b_{ji}$  se calculează pe baza expresiilor, ținând cont de notațiile din figura 7.2.:

$$a_{ji} = \frac{r_i^j}{2\pi} [(\ln(r_i^j - 1) \cos \alpha_i^j + (\frac{\pi}{2} - \alpha_i^j) \sin \alpha_i^j)] +$$

$$+ \frac{r_{i+1}^j}{2\pi} [(\ln(r_{i+1}^j - 1) \cos \alpha_{i+1}^j + (\frac{\pi}{2} - \alpha_{i+1}^j) \sin \alpha_{i+1}^j)] \quad (7.14)$$

$$b_{ji} = \frac{1}{2\pi} (\alpha_i^j + \alpha_{i+1}^j - \pi) \cos \theta_{ji} + \frac{1}{2\pi} \sin \theta_{ji} \ln \left| \frac{\sin \alpha_{i+1}^j}{\sin \alpha_i^j} \right|$$

unde:

$$\alpha_i^j = \begin{cases} |\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}| & , \text{dacă } |\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}| \ll \pi \\ 2\pi - |\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}| & , \text{dacă } |\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}| \end{cases} \quad (7.15)$$

$$\theta_{ji} = \alpha_{j,j+1} - \alpha_{i,i-1}$$

cu:

$$\alpha_{i,i+1} = \begin{cases} \alpha_{i,i+1}^* & \text{dacă } y_{i+1} \geq y_i \text{ și } x_{i+1} \geq x_i \\ \pi - \alpha_{i,i+1}^* & \text{dacă } y_{i+1} \geq y_i \text{ și } x_{i+1} < x_i \\ \pi + \alpha_{i,i+1}^* & \text{dacă } y_{i+1} < y_i \text{ și } x_{i+1} < x_i \\ 2\pi - \alpha_{i,i+1}^* & \text{dacă } y_{i+1} < y_i \text{ și } x_{i+1} \geq x_i \end{cases} \quad (7.14)$$

unde:

$$\alpha_{i,i+1}^* = \arctg \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \quad (7.15)$$

$$\alpha_{i,j}^* = \begin{cases} \alpha_{i,j}^* & \text{dacă } N_y \geq 0 \text{ și } N_x \geq 0 \\ \pi - \alpha_{i,j}^* & \text{dacă } N_y \geq 0 \text{ și } N_x < 0 \\ \pi + \alpha_{i,j}^* & \text{dacă } N_y < 0 \text{ și } N_x < 0 \\ 2\pi - \alpha_{i,j}^* & \text{dacă } N_y < 0 \text{ și } N_x \geq 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

unde:

$$\alpha_{i,j}^* = \arctg \left| \frac{N_y}{N_x} \right|$$

$$N_x = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_i; \quad (7.17)$$

$$N_y = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} - y_i.$$



De asemenea :

$$r_i^j = \sqrt{\left(x_i - \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)^2 + \left(y_i - \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)^2} \quad (7.18)$$

$$l_{i,i+1} = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$$

Cu ajutorul acestora se poate determina înălțimea piezometrică în orice punct al domeniului cu formula :

$$h(M) = \sum_{i=1}^{N_3} a_{(M)i} \frac{q_i}{H_o} + c \quad (7.19)$$

unde coeficienții  $a_{(M)i}$  se calculează din aceleași formule ca și  $a_{ij}$  cu mențiunea că  $x_j$  și  $y_j$  se substituie prin coordonatele punctului M.

Relația de legătură între înălțimea piezometrică și presiunea hidrodinamică este:

$$h_i = p_i / \rho \quad (7.20)$$

### 7.3.2. Modelul matematic propus

Prezentarea implementării numerice a metodei se face pentru ecuația generală (7.8), nu pentru (7.12) care este doar un caz particular mai simplu al celei dintâi.

Ecuația (7.8) poate fi utilizată pentru a determina potențialul dependent de timp, oriunde într-un punct interior domeniului  $\Omega$  și pe frontiera  $\Gamma$  a acestuia. Înainte de a afla acest potențial trebuie cunoscute valorile funcțiilor potential  $\phi$  și flux  $\psi$  pe frontiera domeniului.

Frontiera se discretizează în elemente determinate de către punctele nodale  $r_j \in \Gamma$  cu  $j=1 \dots J$ ; și totodată se consideră un set de valori în timp  $t_n$ ,  $n=1 \dots N$ .

Integrarea pas cu pas în timp se face considerându-se că potențialul variază liniar, iar fluxul este constat pe fiecare interval de timp  $\Delta t$  de integrare, adică:

$$\phi(r,t) = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \pi^m(t) \eta_j(r) \phi_j^m$$

$$\psi(r,t) = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \theta^m(t) \mu_j(r) \psi_j^m \quad (7.21)$$

în care :

$m, j$  - se referă la timp, respectiv spațiu;

$r, t$  - sunt coordonatele spațiale, respectiv temporale ale nodului considerat;

$\pi^N(t), \eta_j^N(r), \theta^N(t), \mu_j^N(r)$  -sunt funcții alese astfel încât:

$\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker;

$$\begin{aligned}\pi^m(t_n) &= \delta_{mn} \\ \eta_j(r_i) &= \delta_{ij} \\ \theta^m(t_n) &= \delta_{mn} \\ \mu_j(r_i) &= \delta_{ij}\end{aligned}\quad (7.22)$$

iar  $\phi_j^m, \psi_j^m$  sunt valorile funcției potențial și vitează în punctul de poziție spațială  $r_j$ , la timpul  $t_m$ , adică:

Rescriind ecuația (7.12) pentru fiecare nod  $i$  și fiecare pas de timp  $t_m$ , și înlocuind în aceasta

$$\begin{aligned}\phi_j^m &= \Phi(r_j, t_m) \\ \psi_j^m &= \Psi(r_j, t_m)\end{aligned}\quad (7.23)$$

valorile potențialului și vitezei, așa cum au fost ele definite de ecuația (7.21) se obține următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^J H_{ij}^{nm} \cdot \phi_j^m = \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^J G_{ij}^{nm} \cdot \psi_j^m + F_i^n + S_i^n \quad (7.24)$$

în care:

$$\begin{aligned}H_{ij}^{nm} &= kst_i \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{nm} - \int_{\Gamma} \frac{\partial R}{\partial n} \eta_j(r) \cdot \int_0^{t_n} [\pi^m(\tau) \cdot \bar{\psi}(r_j, \tau)] d\tau d\Gamma \\ G_{ij}^{nm} &= \int_{\Gamma} \mu_j(r) \cdot \int_0^{t_n} \theta^m(\tau) \bar{\Phi}(r_j, \tau) d\tau d\Gamma \\ F_i^n &= \frac{1}{c^2} \cdot \int_{\Omega} \bar{\Phi}(r_j, \tau) \cdot \dot{\phi}(r_j, 0) d\Omega \\ S_i &= \int_{\Omega} \bar{\Phi}(r_j, \tau) \cdot \gamma(r, \tau) d\Omega_x\end{aligned}\quad (7.25)$$

Pentru a rezolva sistemul de ecuații algebrice, este utilizată metoda colocației în fiecare punct nodal  $\xi_\lambda$  al frontierei caracterizat de vectorul spațial  $r_\lambda$ , în toți pașii de timp  $t_m = m\Delta t$ , iar integrarea în raport cu variabila timp se efectuează analitic pe fiecare element de frontieră, rezultând:

$$H^{nm}_{\lambda l} := (H^{nm}_{\lambda l}) = \int_{(n-1)\Delta t}^{(n\Delta t)} \cdot \int_{\Gamma_1} \overline{\Phi}(x, \xi_\lambda, m\Delta t - \tau) d\Gamma_x d\tau \quad (7.26)$$

În urma integrării analitice în raport cu timpul rezultă:

$$H^{nm}_{\lambda l} = \frac{1}{2\pi c^2} \cdot \int_{\Gamma_1} \ln \left( \frac{n-m+1+D_{nm}(r,1)}{n-m+D_{nm}(r,0)} \right) d\Gamma_x, \quad (r = |x - \xi_\lambda|) \quad (7.27)$$

$$G^{nm}_{\lambda l} = -\frac{1}{2\pi c^2} \int_{\Gamma_1} \frac{n \cdot (\nabla r)}{r} [D_{nm}(r, -1) - 2D_{nm}(r, 0) + D_{nm}(r, 1)] d\Gamma_x$$

unde:

$$D_{nm}(r, q) = \begin{cases} \sqrt{(n-m+q)^2 - (r/c\Delta t)^2} & \text{daca } (n-m+q) > r/c\Delta t \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (7.28)$$

Datorită instabilităților introduse de integrarea numerică Gauss de-a lungul elementelor ‘singulare’ (elemente ce conțin puncte singulare  $\xi_\lambda$ ) pe aceste porțiuni s-a integrat tot analitic obținându-se (dacă  $\xi_\lambda$  este mijlocul elementului  $\Gamma_1$ ):

$$H_{ll}^{nm} = \begin{cases} [d_l \ln \left( \frac{1+D_{nm}(0.5d_l, 1)}{D_{nm}(0.5d_l, 0)} \right) + 2c\Delta t \arcsin \left( \frac{d_l}{2c\Delta t} \right)] / 2\pi c^2 & \text{daca } d_l < 2c\Delta t \\ \Delta t / 2c & \text{daca } d_l > 2c\Delta t \end{cases} \quad (7.29)$$

$$G_{ll} = 0$$

pentru că  $n \cdot (\nabla r) = 0$  de-a lungul elementelor de frontieră liniare.  $d_l$  este lungimea elementului.

În final sistemele rezultate din discretizarea ecuațiilor (7.1) și (7.2) sunt:

$$\begin{aligned} \hat{G} \cdot \Phi &= (0.5I + G) \cdot \Phi = \sum_n \sum_m (0.5I^{nm} + G^{nm}) \cdot \Phi^m = \sum_n \sum_m H^{nm} \cdot \Psi^m =: H \cdot \Psi \\ \hat{T} \cdot u &= (0.5I + T) \cdot u = \sum_n \sum_m (0.5I^{nm} + T^{nm}) \cdot u^m = \sum_n \sum_m U^{nm} \cdot t^m =: U \cdot t \end{aligned} \quad (7.30)$$

Sistemul de ecuații (7.30) nu este cel final, acesta trebuie reordonat pentru ca toate necunoscutele problemei să fie într-o singură parte (în stânga). Necesitatea reordonării apare ca o consecință a faptului că pe conturul domeniului nu sunt cunoscute același tip de mărimi fizice (pe unele elemente se cunoaște valoarea funcției căutate, pe când în altele se cunoaște derivata acesteia).

### *Rezolvarea sistemului de ecuații*

Sistemul ordonat a fost rezolvat prin scrierea unui program în limbaj Pascal, prezentat în anexa 2.1. Fiecare termen sub formă de integrală al sistemului a fost rezolvat utilizând metoda Gauss de integrare, folosind trei puncte de colocație pentru fiecare element de frontieră. Acest tip de element de frontieră se mai numește quadratic ( pătratic) sau de ordin superior. Pentru aproximare programul permite specificarea numărului de puncte de cuadratură care se doresc a fi folosite (3-12), implicit fiind folosite 8.

Rezolvarea sistemului de ecuații rezultat nu a fost făcută prin metoda eliminării Gauss, datorită matricii total populate care rezultă. Metoda Gauss a eliminării prezenta dezavantajul folosirii unei memorii mari a calculatorului și. Metoda aplicată pentru rezolvarea sistemului se numește Crout și are la bază următoarele aspecte teoretice:

- 1.- dacă A este o matrice nesingulară, atunci ea poate fi scrisă ca produs de doi factori astfel:

$$A=LU \quad (7.31)$$

unde

L - este o matrice triunghiulară inferior, iar

U - este o matrice triunghiulară superior.

Factorii U și L sunt unici pentru o matrice nesingulară cunoscută.

2.- dacă se scrie produsul LU sub forma:

$$LU=(LD)(D^{-1}U) \quad (7.32)$$

în care prin D a fost notată o matrice diagonală, atunci pentru matricea D sunt interesante două alegeri, și anume cele pentru care produsul LD este reprezentat de o matrice diagonală inferior unitară, respectiv  $D^{-1}U$  este reprezentat de o matrice unitate triunghiulară superior. Prin matrice unitate triunghiulară superior sau inferior a fost denumită matricea triunghiulară superior, respectiv inferior, care are pe diagonala principală toate elementele egale cu unitatea.

3.- elementele matricii L și U pot fi determinate pe coloana r a matricii L, respectiv pe linia r a matricii U ( $r=1,2,\dots,n$ ) cu formulele:

$$\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} \cdot u_{kr} + l_{ir} = a_{ir} \quad (i=r, \dots, n) \quad (7.33)$$

$$\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} \cdot u_{ki} + l_{rr} \cdot u_{ri} = a_{ri} \quad (i=r+1, \dots, n)$$

prin a,l, u s-au notat generic elementele matricilor A,L, respectiv U.

Ținând cont de cele prezentate mai sus , în cazul în care A este matricea unui sistem liniar de n necunoscute, iar B este matricea termenilor liberi, atunci necunoscutele sistemului se pot determina prin rezolvarea de fapt a două sisteme cu necunoscutele matricile coloană X și Y astfel:

$$\begin{aligned} LY &= B \\ UX &= Y \end{aligned} \quad (7.34)$$

Se observă că sistemele (7.34) se reduc la:

$$AX=B \quad (7.35)$$

Avantajul aplicării acestui sistem de rezolvare este acela că toate calculele se pot efectua în memoria calculatorului în zona rezervată matricilor A și B.

Algoritmul care furnizează elementele matricilor L și U este descris de către următorii pași de calcul, care se aplică în fiecare etapă  $r$  de calcul:

i) se calculează elementul  $l_{ir}$ :

$$l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} \cdot u_{kr} \quad (7.35)$$

și se rescrie peste elementul  $a_{ir}$ , ( $i=r, \dots, n$ )

ii) se calculează elementul  $u_{ri}$ :

$$u_{ri} = \left( a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} \cdot u_{ki} \right) / l_{rr} \quad (7.36)$$


și se rescrie peste elementul  $a_{ri}$ , ( $i=r+1, \dots, n$ )

După  $n$  astfel de pași matricea A este înlocuită cu L și U.

De exemplu într-un pas  $r=3$ , o matrice de  $5 \times 5$  arată astfel:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ l_{31} & l_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ l_{41} & l_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ l_{51} & l_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

# 8. REZULTATE



## 8.1. Compararea soluției analitice propuse cu soluția Westergaard

În capitolul 6 a fost prezentată teoria referitoare la calculul analitic al presiunii hidrodinamice datorate unei accelerații seismice oarecare (cutremure neregulate). Teoria clasică de calcul a acestor presiuni (Westergaard, H.M., 1933) a fost demonstrată în baza presupunerii că un cutremur poate fi reprezentat ca mișcare de o funcție staționară, simplu armonică.

În acest paragraf se prezintă diferențele dintre cele două teorii.

### 8.1.1. Soluția adimensională a presiunilor hidrodinamice

Conform abordării Westergaard se face presupunerea că barajul prezintă o rigiditate infinită și deci vibrează împreună cu fundația. Pentru a putea face comparația această ipoteză a fost considerată în ambele teorii de calcul a presiunilor. În conformitate cu teoria prezentată în lucrarea de față presiunile hidrodinamice sunt date de ecuația (6.28) :

$$P_n^r(t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1)} \cos(\lambda_k z) \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0 \left[ \lambda_k \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - x^2} \right] d\tau \quad (8.1)$$

Introducând următoarele valori adimensionale:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{h}; & z' &= \frac{z}{h} \\ t' &= \frac{t}{h/c}; & p' &= \frac{p}{\rho c^2} \\ u' &= \frac{x/h}{t/h/c} = \frac{u}{c}; & \ddot{u}'_g &= \frac{\ddot{u}_g \cdot h}{c^2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

unde:

$h$ -înălțimea de apă în lacul de acumulare (figura 6.1);

$\rho$ -densitatea apei;

$c$ -viteza sunetului în apă ( $\sim 1440$  m/s<sup>2</sup>);

formula presiunilor hidrodinamice devine:

$$\frac{p(x,z,t)}{\rho c^2} = \frac{4\rho c}{\pi\rho c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi\cdot z}{2h}\right) \cdot \int_{\frac{c\cdot x}{h}}^{\frac{c\cdot t}{h}} \frac{h}{c^2} \cdot \ddot{u}_g\left(\frac{c}{h}t - \frac{c}{h}\tau\right) \cdot J_0\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi\cdot\sqrt{(c\tau)^2 - x^2}}{h}\right) d\left(\frac{c}{h}\tau\right) \quad (8.3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(x,z,t)}{\rho c^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos(\lambda'_k z'_k) \cdot \int_{x'_k}^{t'_k} \ddot{u}_g(t'_k - \tau'_k) \cdot J_0(\lambda'_k \sqrt{(\tau'_k)^2 - x'^2}) d\tau'_k$$

În cazul considerării presiunilor pe paramentul amonte al barajului, ecuația (8.3) devine:

$$\frac{p(0,z,t)}{\rho c^2} = p'(0,z',t') = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos(\lambda'_k z'_k) \cdot \int_0^{t'_k} \ddot{u}_g(t'_k - \tau'_k) \cdot J_0(\lambda'_k \tau'^2) d\tau' \quad (8.4)$$

### 8.1.2. Soluția exactă și soluția Westergaard

Westergaard obține presiunea hidrodinamică pe paramentul amonte considerând accelerația seismică de forma:

$$\ddot{u}_g(t) = -\alpha \cdot g \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (8.5)$$

Înlocuind expresia (8.5) în ecuația (8.4), presiunea hidrodinamică va fi exprimată ca :

$$p(x,z,t) = p = \frac{4\alpha\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cdot \cos(\lambda_k \cdot z) \cdot \int_{x_c}^t \cos(\omega \cdot (t-\tau)) \cdot J_0(\lambda_k \cdot \sqrt{(c\tau)^2 - x^2}) d\tau \quad (8.6)$$



Efectuând integrala din ecuația (8.6) ecuația presiunii hidrodinamice se scrie ca o sumă de trei termeni, doi staționari și unul nestaționar, după cum urmează :

$$p = \frac{4\alpha\rho}{\pi} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} p_{1k} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} p_{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} p_{3k} \quad (8.7)$$

unde:

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \frac{\cos(\lambda_k \cdot z)}{\sqrt{v^2 - \lambda_k^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - x \cdot \sqrt{v^2 - \lambda_k^2}) \\ p_{2k} &= \frac{\cos(\lambda_k \cdot z)}{\sqrt{\lambda_k^2 - v^2}} \cdot e^{x \cdot \sqrt{\lambda_k^2 - v^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ p_{3k} &= \cos(\lambda_k \cdot z) \cdot \int_t^{\infty} \cos(\omega \cdot (t - \tau)) \cdot J_0(\lambda_k \cdot \sqrt{(c\tau)^2 - x^2}) \\ cu \quad v &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (8.8)$$

s este valoarea minimă a lui k pentru care este satisfăcută relația  $\lambda_k^2 > v^2$

În ecuația (8.7) primul și al doilea termen sunt staționari, iar cel de-al treilea este tranzitoriu. ( prin termen staționar se înțelege o funcție armonică, iar prin termen tranzitoriu se înțelege o funcție oarecare nearmonică, a cărei variație nu este cunoscută).

Atunci când perioada cutremurului este mai mare decât perioada de rezonanță a presiunii hidrodinamice a apei, primul termen al expresiei (8.7) dispare.

În teoria prezentată de către Westergaard doar cel de-al doilea termen al expresiei (8.7) este luat în considerare. Deasemenea termenul tranzitoriu nu este cuprins în soluția Westergaard.

Soluțiile prezentate se simplifică mult dacă se scriu doar pentru paramentul amonte al barajului, caz în care  $x=0$ .

### 8.1.3.Compararea soluțiilor

Pentru a putea vedea care este aportul celor doi termeni ai formulei presiunii hidrodinamice, în cazul în care se consideră soluția exactă pentru calculul acestora, se calculează presiunea hidrodinamică adimensională la baza unui baraj rigid, de 100 m înălțime într-un interval de timp de 1 secundă.

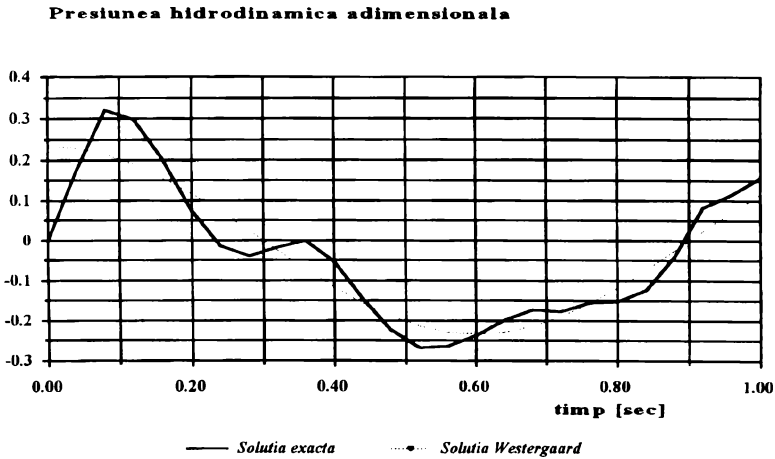
Calculul este efectuat pentru diferite perioade de vibrație ale cutremurului: 1.2 sec, 0.6 sec , 0.278 sec (perioada de rezonanță) și 0.15 sec. Rezultatele sunt prezentate în figura (8.1). Linia punctată reprezintă presiunea hidrodinamică adimensională conform cu formula Westergaard, iar cea continuă este conform cu soluția exactă.

Conform cu cele prezentate în figură se poate deduce că în cazul în care  $T= 1.2$  sec, presiunea hidrodinamică la începutul mișcării seismice este cu 30% mai mare decât cea care se obține cu formula clasică, iar în cazul în care  $T= 0.6$  sec diferența este de aproximativ 40% .

Atunci când perioada cutremurului este egală cu perioada de rezonanță a barajului, presiunea hidrodinamică crește în mod progresiv în timp.

Dacă perioada cutremurului este mai mică decât perioada de rezonanță, conform formulei Westergaard presiunea hidrodinamică, adimensională, foarte mică ca valoare, dar conform soluției exacte această valoare nu este de neglijat.

a)  $T=1.2$  sec



b)  $T=0.6$  sec

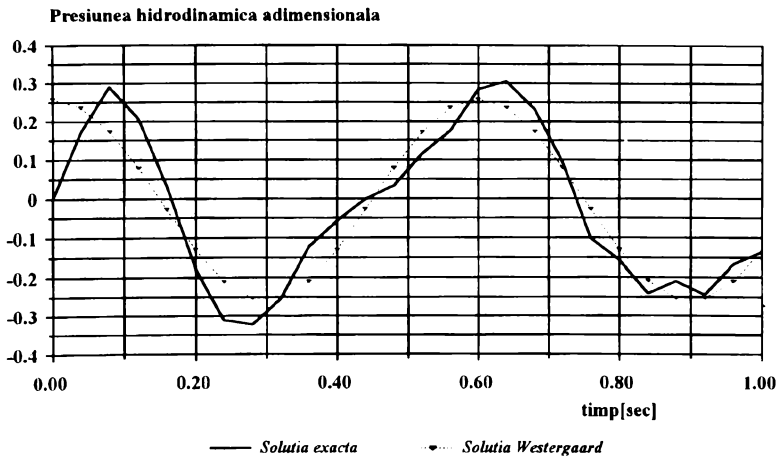
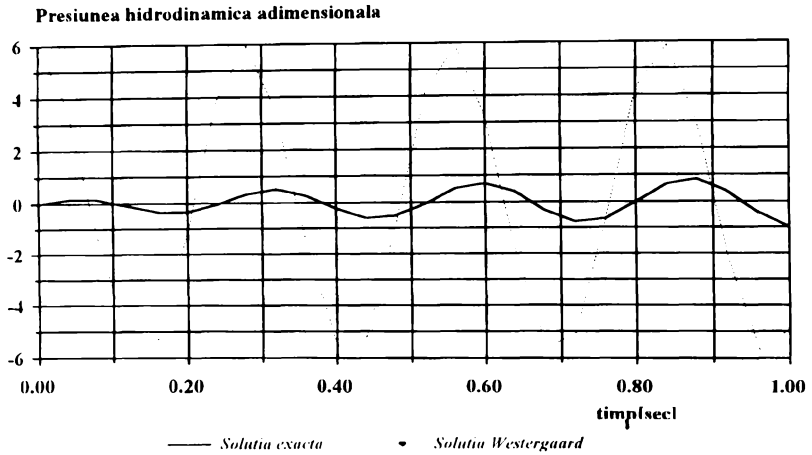


Figura 8.1. Presiunea hidrodinamică la baza unui baraj rigid, de 100m înălțime (1)

c)  $T=0.278$  sec



d)  $T=0.15$  sec

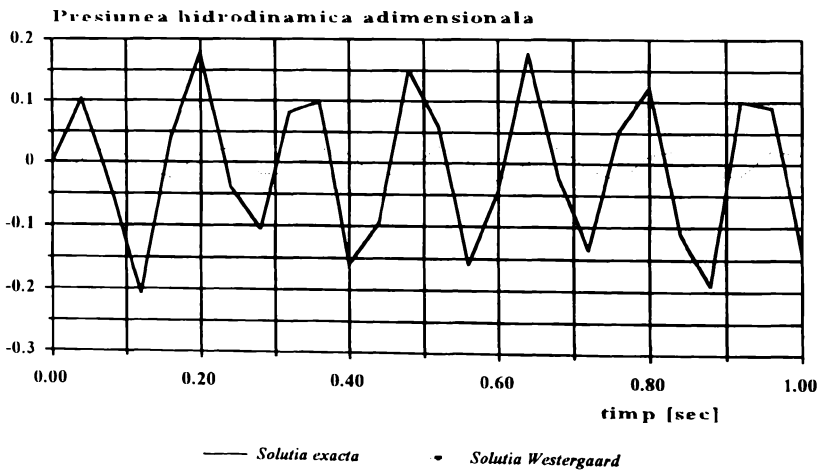


Figura 8.1. Presiunea hidrodinamică adimensională, la un baraj rigid de 100m înălțime (2)

## 8.2. Distribuția presiunilor hidrodinamice

În acest paragraf se face o analiză între soluția exactă și cea numerică, obținută prin modelare matematică cu elemente de frontieră, pentru calculul presiunilor hidrodinamice la baraje supuse acțiunilor seismice.

Sunt prezentate două cazuri de baraje, și anume:

- un baraj rigid ; și
- un baraj flexibil;

Fiecare baraj a fost încărcat cu o undă  $\ddot{u}_g = 2.94 \cdot \sin(6.14 \cdot t)$  și cu accelerațiile cutremurului El - Centro California, așa cum au fost calculate în capitolul 5, a căror reprezentare este dată în figura 5.12.

Datele de intrare pentru analiză sunt:

- ambele baraje au **100m înălțime** și o adâncime de apă constantă în spatele barajului care se extinde la infinit;
- viteza sunetului în apă este de 1438.656 m/s;
- greutatea structurii pe unitatea de lungime este de 35 ton/m ;
- barajul flexibil are o rigiditate  $EI = 12.8 \times 10^9 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$  la baza barajului (valoare care corespunde unei secțiuni transversale de  $40 \times 1 \text{ m}^2$ ) și  $EI = 0.0432 \times 10^9 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$  la coronament ( $1 \times 6 \text{ m}^2$ ).

Pentru a putea calcula presiunile hidrodinamice cu soluția exactă în cazul barajului flexibil, au fost luate în considerare primele patru moduri de vibrație ale structurii, calculate conform cu metoda Stodola.

Calculul a fost efectuat în timp în secțiunile transversale situate la **bază** și la **mijlocul înălțimii** structurii, iar **frontiera îndepărtată** (capătul lacului) a fost considerată la **de cinci ori înălțimea structurii**.

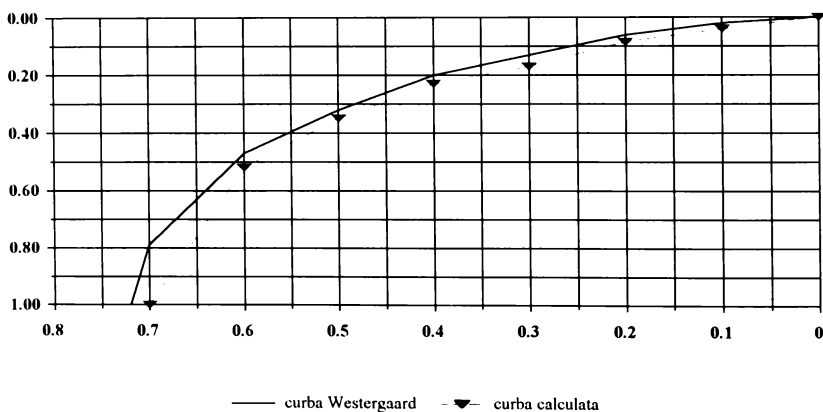
Pasul de timp utilizat pentru calcul este de  $\Delta t = 0.02$  secunde. Rezultatele obținute sunt prezentate în cele ce urmează.

## 8.2.1. Baraj rigid

### 8.2.1.1. Ecuația lui Laplace

Conform cu teoria prezentată în capitolul 7, pentru un baraj rigid există elaborat în metoda elementelor de frontieră, un model de calcul, pentru cazul în care presiunile hidrodinamice sunt considerate a fi soluție a ecuației lui Laplace.

Conform cu modelul prezentat, în cazul unui baraj de 65 de metri înălțime, care satisface condițiile de margine prezentate în figura (7.1), și pentru care sfârșitul lacului a fost considerat la de 10 ori înălțimea barajului,  $x=650$  m, rezultatele obținute sunt prezentate în figura 8.2. Presiunile calculate sunt comparate cu cele obținute prin calcul clasic cu formula Westergaard.

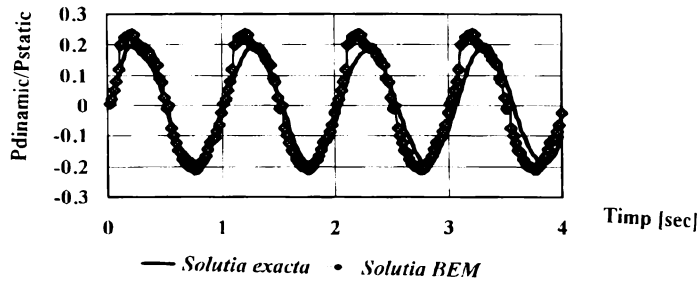


**Figura 8.2.** Distribuția presiunii hidrodinamice

Valorile obținute pentru presiuni sunt foarte bune. Metoda prezintă avantajul că poate modela orice fel de geometrie de lac de acumulare.

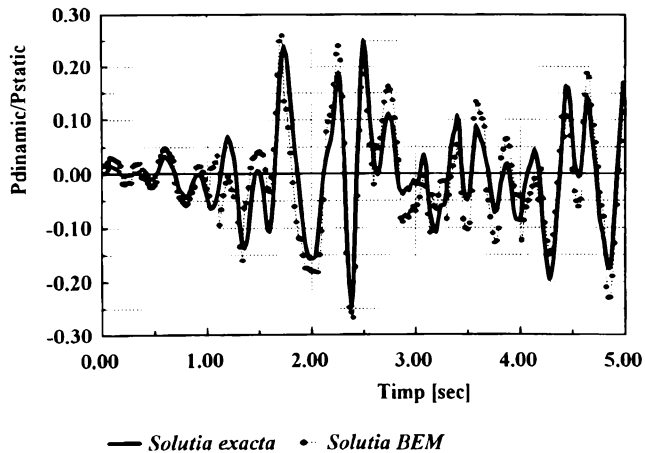
### 8.2.1.2. Ecuația Helmholtz

În cazul unui baraj rigid  $EI = \infty$ . Valoarea presiunilor adimensionale, în cazul în care un baraj rigid este supus unei unde seismice  $\sin a$  accelerației, sunt prezentate în figura 8.3.



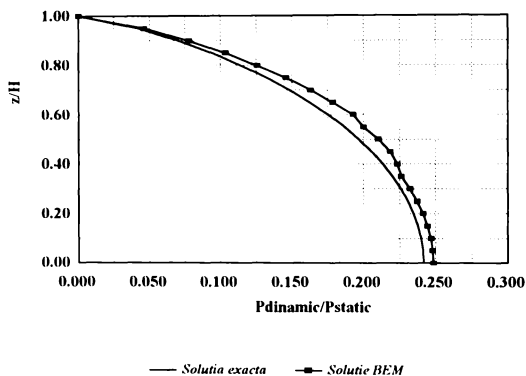
**Figura 8.3.** Presiuni hidrodinamice adimensionale la baza unui baraj rigid supus acțiunii unei unde seismice sinusoidale.

Figura 8.4 prezintă valorile obținute pentru presiunea hidrodinamică în cazul încărcării barajului cu accelerațiile cutremurului El-Centro.



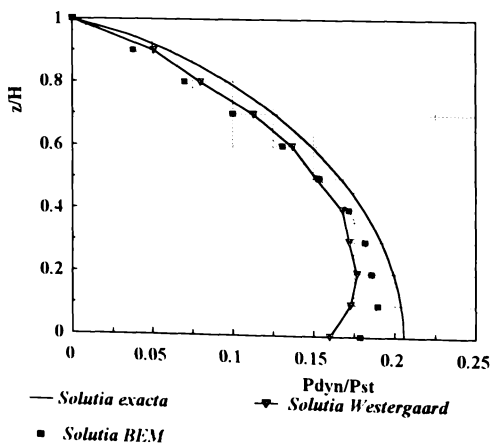
**Figura 8.4.** Presiuni hidrodinamice la jumătatea înălțimii unui baraj rigid (100m înălțime) supus acțiunii seismului El-Centro

Figura 8.5. arată variația în timp a amplitudinii presiunii hidrodinamice (valoarea maximă a presiunii), pe paramentul amonte al barajului în funcție de înălțimea barajului. Valorile presiunii hidrodinamice pe paramentul amonte al barajului sunt prezentate grafic în anexa 2.2..



**Figure 8.5.** Valori maxime ale presiunii hidrodinamice în timp, pe paramentul amonte al unui baraj rigid (100 m Înălțime)

În figura 8.6 este prezentată comparația, pentru un baraj rigid, a valorilor presiunilor hidrodinamice obținute cu soluția exactă, soluția în elemente de frontieră și soluția Westergaard.



**Figura 8.6.** Soluția BEM -Exactă-Westergaard pentru un baraj rigid ( $t = 2.5 \text{ sec.}$ ,  $h = 100\text{m}$ )



## 8.2.2. Baraj flexibil

Valoarea presiunii hidrodinamice, adimensionale, la baza barajului flexibil, în cazul în care acesta este supus acțiunii unui cutremur ce are accelerația reprezentată de o undă sinus, este dată în figura 8.7. Figura 8.8. reprezintă valorile aceleiași presiuni în cazul în care unda seismică considerată este El Centro.

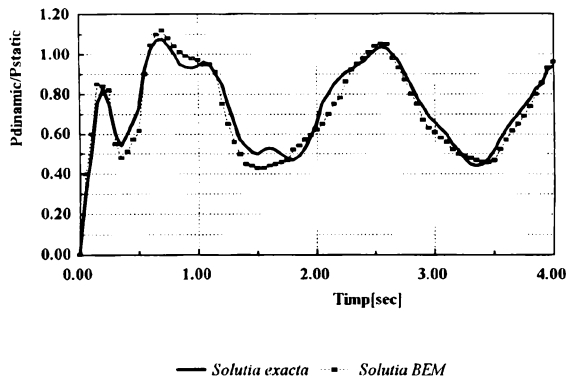


Figura 8.7. Presiunea hidrodinamică la baza barajului supus unei unde seismice sinusoidale, baraj flexibil,  $h=100m$

Figura 8.8. prezintă presiunile hidrodinamice, adimensionale la jumătatea înălțimii barajului.

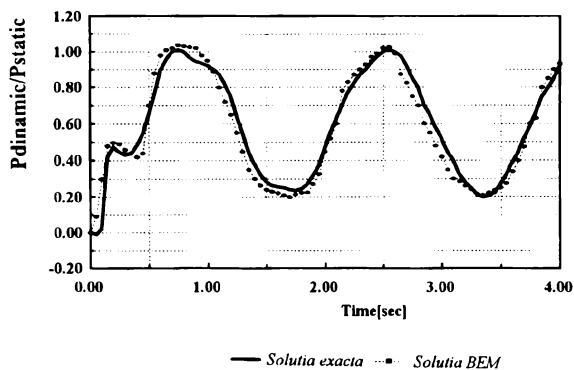
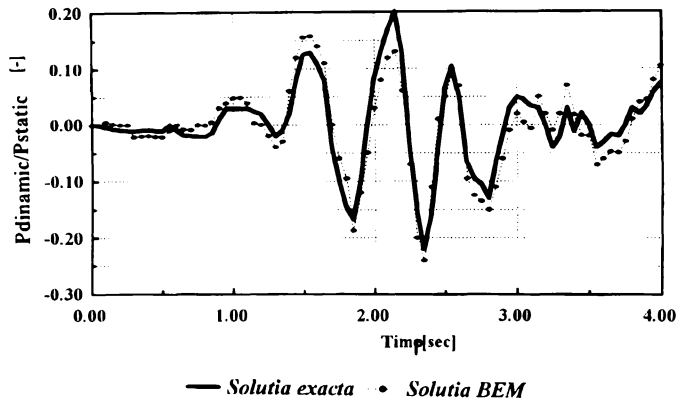


Figura 8.8. Presiuni hidrodinamice, la jumătatea înălțimii barajului, flexibil, supus acțiunii unei unde seismice sinusoidale,  $h=100m$

Din cele două grafice prezentate anterior se poate observa că presiunea hidrodinamică la baza barajului este mai mare ca valoare decât cea de la jumătatea înălțimii.

În cazul în care barajul este supus acțiunii cutremurului El - Centro, presiunea hidrodinamică obținută are forma prezentată în figura 8.9.



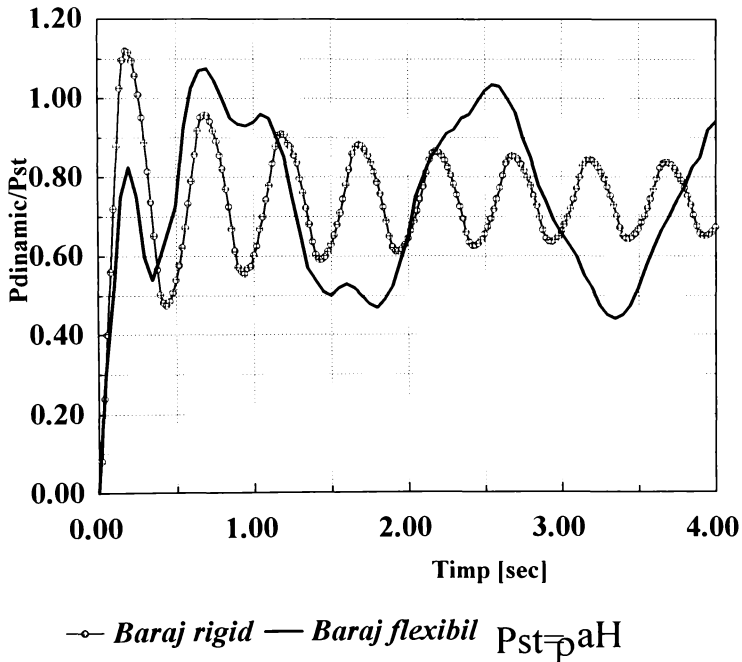
**Figura 8.9.** Presiunea hidrodinamică, adimensională, la un baraj flexibil, supus acțiunii cutremurului El Centro,  $h = 100m$

Diferența între valorile presiunii hidrodinamice calculate prin cele trei metode, soluția exactă, soluția BEM și soluția Westergaard este de maxim 10%. Această valoare poate fi redusă dacă se consideră capătul lacului mult mai îndepărtat decât de cinci ori înălțimea barajului.

Pentru calculul presiunilor cu soluția exactă au fost luați în considerare 40 de termeni ai seriei ecuației(6.29).

În proiectarea antisismică a barajelor, intervine întodeauna întrebarea “Ce fel de baraj trebuie luat în considerare, la proiectare, flexibil sau rigid?”. Răspunsul la această întrebare poate fi dedus din cele prezentate anterior, și din figura 8.10., în care se prezintă în paralel presiunile hidrodinamice ale celor două tipuri de baraje, atunci când sunt supuse acțiunii unui seism impuls unitar

Se poate observa din această reprezentare că flexibilitatea barajului joacă un rol foarte important în răspunsul acestuia la solicitarea seismică. Deși un baraj rigid are la început valori ale presiunii mari, acestea se amortizează foarte repede în timp. Un baraj flexibil are un răspuns mai lent la început, dar pe măsura trecerii timpului valorile presiunilor hidrodinamice se mențin, caz care este mult mai aproape de ceea ce se întâmplă în realitate.



**Figura 8.10.** Comparație între presiunile hidrodinamice, adimensionale, la baza unui baraj supus acțiunii unui seism impuls unitate ( $a=2.94m/sec^2$ )



## 9. CONTRIBUȚII, CONCLUZII ȘI RECOMANDĂRI

### 9.1. Contribuții aduse

Prezenta lucrare aduce contribuții în multe domenii, fără ca cercetarea să fie exhaustivă. Contribuțiile cele mai importante au fost sistematizate, în cele ce urmează, în raport cu apariția lor în lucrare:

- ▶ Se pun în evidență clasele de probleme tehnice ce pot fi guvernate de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (Laplace, Helmholtz, D'Arcy, ecuația plăcilor, etc.). Cu această ocazie se pun în evidență o multitudine de probleme cu tratare dispartă ce pot fi aduse sub guvernarea unei ecuații a fizicii matematice și de aici rezolvarea unitară a multor cazuri particulare la care condițiile inițiale și de margine pot fi diferite.
- ▶ Se prezintă, sub o formă originală și unitară, rezolvarea ecuațiilor integrale prin tehnica reziduurilor de influență, și se pun în evidență ecuațiile fundamentale ce sunt punctul de plecare al celor două metode numerice fundamentale, metode elementului finit și metoda elementului de frontieră. Totodată prin prezentarea în paralel a punctului de plecare în dezvoltarea celor două metode se pune în evidență care este locul de despărțire al celor două metode.
- ▶ Se face o sinteză a metodelor numerice cu aplicații în ingineria construcțiilor hidrotehnice și se dă pentru fiecare metodă algoritmul ce trebuie urmat pentru aplicarea acestor metode în domeniul construcțiilor hidrotehnice în general.
- ▶ Se prezintă o metodă de prelucrare a bazelor de date existente în domeniul încărcărilor seismice prin scrierea ecuațiilor accelerațiilor seismice rezultate din măsurătorile existente pentru un tip de mișcare seismică dată. Explicarea teoretică sub formă generală a acestor accelerații, permite abordarea analitică a comportării construcțiilor hidrotehnice sub acțiunea unui cutremur dat. Metoda poate fi aplicată cu succes pentru orice tip de cutremur.
- ▶ Pentru prelucrarea datelor seismice s-a elaborat un program de calcul, FASTER, în limbaj Pascal, pentru calculul transformatei Fourier rapide, iar pentru aplicarea

metodei de integrare numerică s-a alcătuit un 'spreadsheet' în Quatro \_Pro, prezentat în discheta ce însoțește lucrarea. Datele numerice de prelucrat fiind foarte mari (6M), programul se găsește compactat pe dischetă.

- ▶ Se face analiza dinamică a unui sistem cuplat reprezentativ și se dă un program de determinare a modurilor proprii de vibrație( în anexa 1.6) ale unei structuri cu moment de inerție variabil.
- ▶ Se integrează ecuația diferențială a oscilațiilor unui sistem cuplat baraj - lac de acumulare, cu contribuții la determinarea soluțieianalitice a ecuației diferențiale a propagării undelor pentru condiții de margine impuse.
- ▶ Ecuațiile obținute pentru presiunile hidrodinamice sunt funcții de spațiu și timp. În final se prezintă o metodă matriceală pentru determinarea coordonatelor generalizate ale deformatei structurii.
- ▶ Se construiește un model matematic, bazat pe metoda elementelor de frontieră, pentru calculul presiunilor hidrodinamice. În baza acestui model a fost elaborat un program de calcul în limbaj Pascal prezentat în anexa 2.1.
- ▶ În urma prelucrărilor, folosind integrarea ecuațiilor diferențiale și programele de calcul elaborate se prezintă rezultatele exacte în comparație cu soluția dată de Westergaard și de modelul matematic.
- ▶ În final se dau recomandări privitoare la oportunitatea aplicării metodei elementului finit sau a elementelor de frontieră în proiectare.
- ▶ Elaborarea a patru programe de calcul , în limbaj Pascal, reprezintă contribuții originale, cu posibilități de a fi extinse ușor pentru alte domenii de calcul.
- ▶ Bibliografia prezentată constituie un îndreptar de studiu în domeniu pentru cei ce doresc să aducă contribuții în acest domeniu.

## 9.2. Concluzii

### 9.2.1. Concluzii despre date seismice

În cazul analizei antiseismice a structurilor complexe, caracteristicile instrumentelor de înregistrare a seismelor unei anumite regiuni trebuie studiate foarte atent. În cazul utilizării înregistrărilor seismice, disponibile, din altă regiune decât cea în care este plasată structura de calculat, trebuie studiate în plus geologia locului, mecanismul de producere al cutremurului,

stratificația terenului, etc, care trebuie să fie similare locului de construcție real al structurii. În plus tipul solului și nivelul la care apare cutremurul de calcul trebuie identificate și specificate clar.

Înregistrările seismice de calcul trebuie obținute din cele originale prin modificări succesive, modificări prezentate în paragraful 5.2. al acestei lucrări. Diferiții pași de calcul ce trebuie aplicați în procesul de modificare sunt sumarizați în paragraful 5.2.3. și exemplificați pe înregistrările seismice ale cutremurului El Centro, California, 1940.

În calcule trebuie specificată distribuția energiei și distribuția de frecvență. Bazat pe această distribuție poate fi redus timpul de calcul (în cazul modelelor matematice din domeniul timp) necesar pentru o analiză dinamică a structurilor.

### **9.2.2. Concluzii despre presiunea hidrodinamică**

Lucrarea de față prezintă o metodă de analiză bidimensională a încărcărilor hidrodinamice asupra barajelor de greutate. Metoda permite includerea efectului compresibilității apei și a interacțiunii dintre fluid și structură într-un model numeric bazat pe metoda elementelor de frontieră.

De asemenea a fost studiată importanța interacțiunii dintre fluid și structură asupra determinării mărimii presiunii hidrodinamice. În baza acestei analize a rezultat că această interacțiune are un efect important.

Limitarea care apare în studiul de față este aceea că barajul a fost considerat a se deforma doar în patru moduri. Această limitare nu are influență prea mare pentru că se știe că modul fundamental dominant în vibrație al fiecărei structuri este primul.

Rezultatele au fost obținute pentru geometrii de lac simple. Acestea au fost comparate cu soluția exactă. Între cele două soluții există apropieri de valoare foarte bune.

### 9.2.3. Concluzii despre metoda elementelor de frontieră

Pentru a fi obiectivi, calitățile metodei elementelor de frontieră trebuie comparate cu rivalul ei cel mai mare, metoda elementului finit. Avantajele și dezavantajele metodei elementelor de frontieră sunt prezentate după cum urmează:

#### ➡ Avantaje BEM

1. *Timp de pregătire a datelor mic.* Aceasta este o consecință directă a modelării “doar a frontierei” domeniului (reducerea dimensionalității cu unu). Din acest punct de vedere atât munca de pregătirea datelor de calcul cât și cea de verificare a analistului, pentru o problemă dată este redusă comparativ cu FEM.  
Acest avantaj este foarte important în special în problemele în care sunt necesare mai multe iterații pentru calcul, iar la fiecare iterație se cere îmbunătățirea discretizării.
2. *Acuratețe ridicată a valorilor mărimilor calculate.* Mărimile calculate prezintă acuratețe ridicată pentru că nu se fac nici un fel de aproximații suplimentare pentru calculul acestora în punctele interioare domeniului, soluția fiind exactă în interiorul domeniului. Aceasta face ca metoda elementelor de frontieră să fie potrivită la modelarea problemelor în care apar schimbări bruște în variația unor mărimi fizice care se calculează.
3. *Timp de calcul și memorie a calculatorului mai mici.* La același grad de exactitate cerut, BEM utilizează mai puține elemente pentru discretizare (dar o matrice a sistemului total populată), decât FEM.
4. *Mai puțină informație nedorită.* În majoritatea problemelor situația cea mai complicată apare pe frontiera domeniului și deci modelarea unui întreg corp în elemente finite sau de volum pentru a afla informații despre mărimile fizice ale frontierei presupune introducerea în calcul a unui volum mare de informații care ulterior sunt neinteresante.

#### ➡ Dezavantaje BEM:

1. *Matematică nefamiliară.* Matematica utilizată la formularea metodei elementelor de frontieră pare puțin mai grea. La începuturile dezvoltării acestei metode a fost necesar un bagaj de cunoștințe matematice avansat, pentru a demonstra unicitatea



soluției și existență ei. Acest lucru nu mai este necesar în momentul de față pentru că formulările BEM sunt clar stabilite acum, iar unicitatea soluției se consideră demonstrată.

2. *Interiorul domeniului de calcul trebuie modelat în cazul problemelor neliniare.*
3. *Matrici total populate.* Matricile sistemelor rezultate din formulările BEM sunt nesimetrice și total populate cu coeficienți nenuli. Deși matricile rezultate din formulări FEM, pentru aceeași problemă, sunt mult mai mari, ele sunt matrici speciale mult mai ușor de rezolvat. Deși acesta pare un dezavantaj mare, nu este așa luând în considerare că la același grad de aproximare al soluției BEM are mult mai puține elemente în discretizare decât FEM

## 9.3. Recomandări

### 9.3.1. Presiuni hidrodinamice

În conformitate cu studiul de față considerarea în calcule a unui baraj rigid nu duce întodeauna la calculul presiunilor hidrodinamice maxime ce pot apare pe parcursul funcționării unei structuri. Din acest motiv se recomandă ca acest tip de structură, rigidă, să fie considerată doar în studiile de prefezabilitate, urmând ca ulterior la proiectarea de detaliu să se considere o structură flexibilă.

Studii de viitor trebuie orientate în următoarele direcții:

1. Efectul fundului înclinat al lacului de acumulare.
2. Efectul poziției frontierei care modelează capătul lacului.
3. Mișcare verticală a cutremurului;
4. Presiuni hidrodinamice datorate exploziilor subacvatice;

### 9.3.2. BEM sau FEM?

Pentru a decide care dintre soluții, BEM sau FEM, este mai bine de folosit în cazul unei probleme date trebuie luată în considerare următorii factori:

1. Tipul problemei de analizat (lineară, ne-linear, analiza pânzelor subțiri, etc.) ;
2. Gradul de exactitate cerut;
3. Timpul disponibil pentru pregătirea datelor și interpretarea rezultatelor.

Ambele tehnici trebuie să fie la îndemâna inginerilor, pentru că în unele tipuri de probleme o metodă prezintă avantaje specifice față de cealaltă. Luând în considerare atât avantajele cât și dezavantajele BEM, menționate anterior, următoarele idei pot constitui puncte de ajutor în alegerea uneia sau a celeilalte metode:

- a). BEM este foarte potrivită și mult mai exactă pentru cazul problemelor liniare;
- b). Datorită timpului redus de pregătire a datelor de intrare pentru un program în BEM a unei probleme particulare date, aceasta este foarte potrivită pentru proiectarea preliminară, proiectare în care atât geometria domeniului de calcul cât și încărcările pot fi modificate cu un efort minim de calcul. Aceasta dă proiectantului posibilitatea de a experimenta cât mai multe geometrii .
- c). FEM este mult mai dezvoltată din punct de vedere comercial prin programele care se găsesc pe piață, și în mod particular pentru problemele neliniare , caz în care multitudinea de teste realizate pe aceste programe i-au conferit metodei *încredere printre inginerii.*
- d). Generatoarele de rețele de discretizare din programele FEM sunt direct aplicabile programelor BEM.

# BIBLIOGRAFIE



- Antes, H. - A boundary element procedure for transient wave propagation in two dimensional isotropic elastic media, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, 1985, pg. 313 - 322.
- Antes, H., Estroff, O. -Analysis of Absorption Effects on the Dynamic Response of Dam Reservoir Systems by Boundary Element Methods, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1987, no. 15, pg. 1023 - 1036
- Antes, H, Panagiotopoulos -The boundary integral approach to static and dynamic contact problems, *International Series of Numerical Mathematics*, Birkhauser, Bassel, 1992.
- Ashton-Tate, dBASE II. Assembly Language Relational Database Management System ver. 2.3, Osborne Computer Corp., Hayward California.
- Bathe K.J., Wilson E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, New Jersey.
- Brătianu C. , *Metoda cu elemente finite în dinamica fluidelor*. Ed. Acad. RSR, București 1983.
- Bucur C. M., *Metode numerice*. Ed. Facla, Timișoara, 1973.
- Banerjee, P., Butterfield, R.-*Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- Barbat, A.H. -*Seismic Soil- Structure-Fluid Interaction Analysis, Numerical Methods in Coupled Systems*, chapter 12, R.W. Lewis and Bettres eds, John Wiley and Sons Ltd, London, 1984.
- Basili, M., Brady, G. -Low frequency filtering and the selection of limits for acceleration corrections, *Comitato Nazionale Energia Nucleare*, Dubrovnik, Yugoslavia, 1978.
- Bateman, H. - *Tables of integral transforms*, vol. 1+2, McGraw-Hill Book Co.Inc., 1954.
- Becker, A.A. -*The Boundary Element Method in Engineering, a complete course*, McGraw-Hill, 1992.

- Blackman, R.B, Tukey, J. -The measurement of power spectra, Dover Publications Inc, New York, 1958.
- Bowdler, H.J., Martin, R.ş.a-Solution of Real and Complex Systems of Linear Equations , Numerische Matematik, no. 8, 1966, pg.217 - 234.
- Brebbia, C.A. -Recent Advances in Boundary Element Methods, vol. 3. Stress Analysis, Computational Mechanics Publications, Springer Verlag, 1989.
- Brebbia, C. A. -Boundary elements, Fifth International Conference, Hiroshima, Japan, Nov. 1983, Springer - Verlag, Berlin, 1983.
- Brebbia, C. A. -Boundary element research, Progress in Engineering Science, Computational Mechanics Publications, Boston, 1985
- Brebbia, C.A., Telles, J.Cş.a-Boundary Element Techniques-theory and applications in engineering, Springer - Verlag, Berlin, 1984.
- Brebbia, C. A. -Boundary Element Techniques in Computer Aided Engineering, Martins Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1984.
- Brebbia, C. A. -Boundary elements XIV, vol. 2.Stress Analysis and Computational Aspects, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1992.
- Brebbia, C.A., Chang, P. -Application of boundary element method for solving elastodynamic problems, , pg. 381 - 408.
- Bruch, E.K. - The boundary element method for groundwater flow, Lecture notes in engineering, vol. 70, Springer -Verlag, Berlin, 1991.
- Bustamante, J., Rosenblueth, E., Herrera, I., Flores, A. - Precision hidrodinamica en presas y depositos, Boletin Sociedad Mexicana de Ingeria Sismica, 1, no.2, 1963.
- Chopra, A.K. -Hydrodynamic Pressures in Dams during Earthquakes, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE, vol. 93, Dec. 1967, pg.205 - 223..
- Chung T.J. , Finit Element Analisis in Fluid Dinamics. McGraw- Hill International Book Company, New York, 1978.

- 
- Chakrabarti, P, Chopra, A.K.-Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol.2, 1973, pg. 143 - 160.
- Cheung, Y.K. -Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGraw - Hill Inc. 1978, U.S.A.
- Cheung, Y.K., Yeo, M.F. -A practical introduction to finite element analysis, π Pitman, London, 1979.
- Chopra, A.K., Chakrabarti,P-Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Dam Water Foundation Rock Interaction, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1981, 9, pg. 363 - 383.
- Chopra, A.K. -Earthquake behavior of reservoir- dam systems, *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, vol.94, Dec 1968, pg.1475 - 1500.
- Chopra, A.K. -Earthquake response of concrete gravity dams, *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, vol.96, Aug 1970, pg.443 - 454.
- Chopra, A. K. -Reservoir - dam interaction during earthquakes, *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 57, no. 4, Aug 1967, pg. 675 - 687.
- Alarcon, E. -Applied Numerical Modeling, Second International Conference in Madrid Polytechnic University, Spain, September 1978, pg.591 - 600, Pentech Press, 1979.
- Chopra, A.K. -Earthquake analysis, design and safety evaluation of concrete dams, Fifth Canadian Conference Earthquake Engineering Ottawa, 1987.
- Clough, R.W., Penzien, J. - Dynamics of structures, McGraw Hill Inc., New York 1975.
- Colt, D.L. -Analytic theory of partial differential equation, π Pitman, Bath, 1980.
- Cruse, T.A., Rizzo, F.J. -A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Dynamic Elastodynamic Problems, Part I and II, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol 22, 1968, pg. 244 - 259 and 341 - 355.
- Dancea I., Metode de optimizare. Ed. Dacia, Cluj Napoca, 1976
- David E., Gogonea S., Ene H.I. , Hidrodinamica mediilor poroase neomogene, Ed. tehnică, București, 1989.
- David I., Hidraulică vol.II. Litografia IPTV Timișoara, 1984.
-

- David I. , Bazele teoretice ale metodei elementelor de frontieră pentru probleme de mișcări potențiale plane, fundamentate pe reprezentarea integrală Cauchy. Simpozion "Soluții noi și eficiente în proiectarea și execuția structurilor", Timișoara, 14-15 nov. 1986.
- David I., Lazăr Gh., Calculul infiltrațiilor pe sub construcții hidrotehnice, utilizând metoda elementelor de frontieră, Conferința energetică, București, 1989.
- David I., Gerders H., Incorporation of the local three-dimensional flow in the plane BEM to model complex groundwater supply-system. Computational Methodes in Water Resources, X., vol.I pag.135. Kluver Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1994.
- Desai, C. S. - Elementary finite element method, Prentice Hall Inc, New Jersey, 1979.
- Dominguez, J., Meise, T. - On the use of Boundary Element Method for wave propagation in infinite domains, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol.8., no. 3, 1991, pg.132 - 138.
- Dowrick, D.J. - Earthquake resistant design, a manual for engineers, John Wiley and Sons, London, 1977.
- Eringen, A.C., Erdogan,S.- Elastodynamics, vol.2. Linear theory, Academic Press, New York, 1975.
- Fenves, G., Chopra, A.K. - Earthquake analysis of concrete gravity dams including reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol 12, 1984, pg. 663 - 680.
- Froberg, C-E.- Introduction to numerical analysis, Addison - Wesley Publishing Co.Inc., Massachusetts, 1965.
- Gârbea D. , Analiză cu elemente finite. Ed. tehnică, București, 1990.
- Gallagher, R.H., Oden,J.T., Taylor, C., Zienkiewicz, O.C. - Finite elements in fluids, vol 1+3, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- Gipson, G.S. - Boundary element fundamentals-basic concepts and recent developments in Poisson equation, Topics in Engineering, vol.2. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1987.

- 
- Hall, J.F., Chopra, A.K. - Hydrodynamic effects in the dynamic response of concrete gravity dams, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 10., no.2, Mar. 1982, pg. 333 - 345.
- Hall, J.F., Chopra, A.K. - Two dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol 10., 1982, pg.305 - 332.
- Hanna, Y.G., Humar, J.L. - Boundary Element Analysis of Fluid Domain, *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, vol 108, Apr. 1982, pg. 436 - 449.
- Holt, M. - *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- Humar, J., Jablonski, A.M. - Boundary element analysis of the hydrodynamic forces in a 2D reservoir, *Fifth Canadian Conference Earthquake Engineering Ottawa*, 1987.
- Hâncu S., Popescu M., Zaharescu E., Duma D., Danchiv Al., Dan P. Constantinescu Al., Rus E. , *Hidraulică aplicată. Ed. tehnică, București* 1985.
- Ion Michael, *Calculul structurilor hidrotehnice, Curs, Tipografia IPT, Timișoara*, 1982.
- Ifrim, M. - *Dynamic analysis of structures and seismic engineering (in Romanian)*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucharest, 1973.
- Jain, M.K. - *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Wiley Easton Ltd, New Delhi, 1979.
- Jaswon, M.A. - Integral equation methods in potential theory - I, *Proc. Royal Society, London* A275, pg.23 -32.
- Kakuda, K., Tosaka, N. - Numerical Analysis of coupled fluid - elasticity systems using the B.E.M., *Boundary Elements*, Brebbia, C.A. et al eds, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- Karami, G. - A boundary element method for two dimensional contact problems, *Lecture notes in Engineering* 51, Springer Verlag, 1989.
- Kotsubo, S. - Dynamic water pressures on dams due to irregular earthquakes, *Memoirs, Faculty of Engineering, Kyushu University, Iukukoa, Japan*, vol. 18, no.4, 1959.
- Lamb Horace - *Hydrodynamics*, sixth edition, Cambridge University Press, 1995.
- Lefeber, D. - Solving problems with singularities using boundary elements, *Computational*
-

- Mechanics Publication, Southampton, Topics in Engineering, vol 6., 1989.
- Lewis, R.W., Bettess, P., Hinton, E. - Numerical methods in coupled systems, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- Liu, P.L.-F., Cheng, A.H.-D. - Boundary solutions for fluid - structure interaction, Journal of Hydraulic Engineering ASCE, vol. 110, no.1, Jan. 1984, pg. 51 -64.
- Liu, P.L.-F., Liggett, J.A. - Application of Boundary Element Methods to problems of water waves, Developments in Boundary Element Method, vol 2., Applied Science Publishers Ltd, London, England, 1982, pg.37 -67.
- Lotfi, V., Roesset, J.M., Tassaoulas, J.L. - A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol 15, 1987, pg.463 - 490.
- Mansur, W.J., Brebbia, C.A. - Numerical implementation of boundary element method for two dimensional transient problems, Applied Mathematical Modeling, vol.6., Aug.1982, pg.299 - 305.
- Mansur, W.J., Brebbia, C.A. - Formulation of boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation, Applied Mathematical Modeling, vol.6., Aug.1982, pg.307 - 311.
- McLachlan,N.W. - Bessel functions for engineers, second edition, Oxford, Clarendon Press, 1955.
- Medina, F., Dominguez, J. - Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects. II., Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, vol. 6., no. 3, pg. 158 - 163.
- Medina, F., Dominguez, J. - Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects. I., Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, vol. 6., no. 3, pg. 152 - 157.
- Mei,C.C., Foda,M.A., Tong,P. - Exact and hybrid solutions for the vibrations of a thin elastic structure seated on the sea floor, Applied Ocean Resources, vol 1., no. 2, Jan 1979, pg.79 -88.
- Murray, F.J. - Applied Mathematics, Plenum Press, New York, 1978.



- 
- Newmark, N., Rosenblueth, E. - Fundamentals of earthquake engineering, Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- Oden, J.T., Graham, F.C. - Finite elements fluid mechanics vol VI, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- Prişcu, R, Popovici, A., Stematiu, D., Ilie, L., Stere, C. - Ingineria seismică a marilor baraje, Editura Academiei, 1980
- Prişcu, R. - Construcţii hidrotehnice, vol I + II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974
- Popovici, A. - Analiza dinamică prin metode numerice, ICB, 1978
- Prişcu, R, Popovici, A., Stematiu, D., Ilie, L., Stere, C. - Ingineria seismică a construcţiilor hidrotehnice, Editura Didactică şi Pedagogică , 1980
- Popescu I, Nicoară, S - Applications of the finite element method and boundary element method for Poissons problems - Buletinul Ştiinţific şi Tehnic al Universităţii Tehnice Timişoara, Tom 40(54), pg169 - 174.
- Popescu I. - Hydrodynamic pressures on dams by boundary element techniques, IIIE, Dell, 1997
- Porter, C.S., Chopra, A.K. - Hydrodynamic effects in dynamic response of simple arch dams, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 10, 1982, pg. 417 - 431
- Rahman, M. - Applied differential equations for scientists and engineers, vol. 112, Computational Mechanics Publications, Glasgow, 1991.
- Rea, D., Liaw, C.-Y., Chopra, A.K. - Mathematical models for the dynamic analysis of concrete gravity dams, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 3, 1975, pg. 249 - 258.
- Raleigh C.B., Healy J.H., Bredehoff J.D., An experiment in earthquake control at Rangely Colorado, Science 191, 1976.
- Shaw, R.P. - Boundary integral equation methods applied to wave problems, Developments in Boundary Element Methods, vol 1, Applied Science Publishers Ltd, London, England 1979, pg. 121 -153.
- Timoshenko, S., Young, D., Weaver, J.W. - Vibration Problems in Engineering, fourth edition, John Wiley and Sons.
-

Trim,D.W. - Applied partial differential equations, PWS Kent Publishing Company, 1990.

Westergaard,H.M. - Water pressures on dams during earthquakes, Transactions ASCE, vol 98, 1933, pg. 418 - 433.

Zienkiewicz,O.C., Bettess,P. - Fluid structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol 13.,no.1,Jan 1978,pg.1 - 16.

Zienkiewicz,O.C., Newton, R.E. - Coupled Vibration of a structure submerged in a compressible fluid, International Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, Germany, 1969.

Zienkiewicz,O.C., Morgan,K. - Finite element and approximation, John Wiley and Sons, New York, 1983.

Zienkiewicz, O.C. - The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill, London, 1967.

Zienkiewicz O.C., The Finit Element Method in Engineering Science Mc Grow-Hill, London, 1972.

# *ANEXE*



# ANEXE

## A.1. General

### A.1.1. Lema lui Green

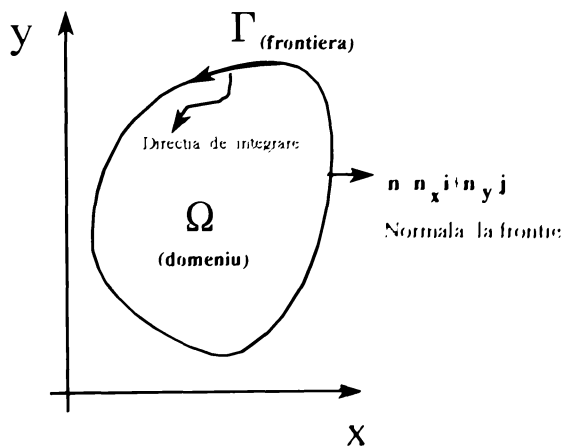


Figura A.1. Notații pentru lema lui Green

Următoarea relație permite transformarea unei integrale pe un domeniu dat într-o integrală pe conturul aceluia domeniu.

$$\int_{\Omega} a \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} a \beta n_x d\ell = \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial x} \beta dx dy \quad (a.1)$$

$$\int_{\Omega} a \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy - \int_{\Gamma} a \beta n_y d\ell = \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial y} \beta dx dy$$

$\alpha, \beta$  sunt funcții diferențiabile, iar  $n_x, n_y$  sunt componentele vectorului normal la  $\Gamma$  (Figura A.1).

**A.1.2. FASTFR - Program Pascal de calcul a transformatei Fourier rapide****Program Fast\_f\_t;**

```
var
    fr,fi:array[1..50] of real;
    k,n,mr,nn,m,l,istep,i:integer;
    tr,ti,wr,wi,a,el,j:real;

begin
    read(k);
    n:=k*k;
    mr:=0;
    nn:=n-1;
    for m:= 1 to nn do
        begin
            l:=n;
            l:=l/2;
            while ((mr+l)>nn) do l:=l/2;
            mr:=(mr div l) + 1;
            if (mr>m) then
                begin
                    tr:=fr[m+1];
                    fr[m+1]:=fr[mr+1];
                    fr[mr+1]:=tr;
                    tr:=fi[m+1];
                    fi[m+1]:=fi[mr+1];
                    fi[mr+1]:=tr;
                end;
            end;
            l:=1;
            while (l<n) do
                begin
                    istep:=2*l;cl:=l;
                    for m:=1 to l do
                        begin
                            a:=pi*(1-m)/cl;
                            wr:=cos(a); wi:=sin(a);
```

```

i:=m;
while (i<n) do
  begin
    j:=i+1;
    tr:=wr*fr[j]-wi*fi[j];
    ti:=wr*fr[j]-wi*fr[j];
    fr[j]:=fr[i]-tr;
    fi[j]:=fi[i]-ti;
    fr[i]:=fr[i]+tr;
    i:=i+istep;
  end;
l:=istep;
end;
end;

```

### A.1.3. Principiul deplasărilor virtuale

Principiul deplasărilor virtuale se aplică atât la problemele statice cât și la cele dinamice. În conformitate cu acest principiu *dacă unui sistem aflat în echilibru dinamic I se aplică o deplasare virtuală arbitrară mică atunci lucrul mecanic efectuat de toate forțele (inclusiv cele de inerție) este nul*. Acest principiu este de fapt o reformulare a celei de a doua legi a lui Newton, sau mai este cunoscut sub numele de principiul lui D’Alambert.

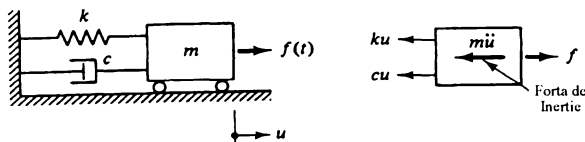


Figura A.2. Sistem supus unei forțe dinamice

Astfel pentru sistemul reprezentat în figura A.2, lucrul mecanic efectuat de forța dinamică  $f$  la aplicarea deplasării virtuale, mici,  $\delta u$  este  $f \delta u$ ; lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență  $ku$  este  $-ku \delta u$ ; lucrul mecanic efectuat de forța de amortizare  $c\dot{u}$  este  $-c\dot{u} \delta u$ ; și lucrul mecanic efectuat de forța inerției  $m\ddot{u}$  este  $-m\ddot{u} \delta u$ . Impunând condiția ca lucrul mecanic virtual total să fie zero rezultă:

$$(f - m\ddot{u} - c\dot{u} - ku) \delta u = 0 \quad (\text{a.2})$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f$$

### A.1.4. Teorema Graffi

Fie un corp în echilibru și două seturi de eforturi și deplasări, după cum urmează:

1. Un set (a) de eforturi aplicate  $\sigma_{ij}^a$  care crează un set de deplasări  $\epsilon_{ij}^a$ ;
2. Un set, diferit de primul, (b) de eforturi aplicate  $\sigma_{ij}^b$  care crează deplasările  $\epsilon_{ij}^b$ .

Teorema de reciprocitate Graffi spune că lucrul mecanic dat de eforturile sistemului (a) cu deplasările sistemului (b) este egal cu lucrul mecanic dat de eforturile sistemului (b) cu deplasările sistemului (a). Deci este valabilă relația:

$$\int_V \sigma_{ij}^a \epsilon_{ij}^b dV = \int_V \sigma_{ij}^b \epsilon_{ij}^a dV \quad (\text{a.3})$$

### A.1.5. Definiția funcției Heaviside și a funcției Dirac

A.1.5.1. Funcția Heaviside se definește astfel:

$$H(x-x') \begin{cases} 0, & \text{daca } 0 < x < x' \\ 1, & \text{daca } x > x' \end{cases} \quad (\text{a.4})$$

Reprezentarea funcției în plan este dată în figura A.3.

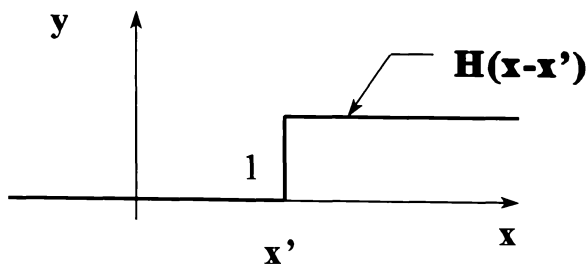


Figura A.3. Definierea funcției Heaviside

Derivata acestei funcții în raport cu variabila  $x$  este funcția Dirac (sau impuls unitar):

$$\frac{dH(x-x')}{dx} = \delta(x-x') \quad (\text{a.5})$$



### A.1.5.2. Funcția Dirac

Pentru o forță impuls unitară care acționează în punctul  $x'$ , funcția Dirac se definește ca:

$$\delta(x, x') \begin{cases} 0, & \text{daca } x \neq x' \\ \infty, & \text{daca } x = x' \end{cases}$$

Funcția se mai notează  $\delta(x-x')$ . Această funcție se folosește pentru a defini forțe concentrate în mecanica corpurilor solide și fluide, un punct de masă în teoria potențială, o forță impuls în acustică, un punct de încărcare în electronică, etc.

**A.1.6. Program Stodola** (în limbaj Pascal) de calcul a frecvențelor proprii de vibrație a unei structuri cu moment de inerție variabil

#### *Program Stodola;*

```
uses crt;
const g=9.81;
var
i,incr,j,k,r,n,mode,n1,n2,modes,cycles:integer;
z,z1,z2,muv,lambda,l12,bigu,shear,mpsi,h_baraj,lat_baza:double;
sus,jos,dif,a,lat_sus,elst,dens,epsilon,change,mvsq:double;
w,u,oldu,m,mass,inert,freq,per:array[0..80] of real;
psi:array[0..80,1..10] of real;
mpsisq,gama:array[1..10] of real;
rez:text;
procedure pr_4000;
begin
for r:=1 to mode-1 do
begin
z:=mass[0]*psi[0,r]*u[0]-mass[n]*psi[n,r]*u[n];
j:=1;
while (j<n) do
```

```
begin
  z:=z+4*mass[j]*psi[j,r]*u[j]+2*mass[j+1]*psi[j+1,r]*u[j+1];
  j:=j+2;
end;
z:=z*lambda/(3*mpsisq[r]);
for j:=1 to n do u[j]:=u[j]-z*psi[j,r];
end;{for lui r}
bigu:=0;
for j:=1 to n do if abs(u[j])>abs(bigu) then bigu:=u[j];
for j:=1 to n do u[j]:=u[j]/bigu;
end;{end pr_4000}
```

```
procedure pr_2000(incr:integer);
```

```
begin
```

```
if incr<0 then n1:=n
```

```
  else n1:=0;
```

```
n2:=n-n1;
```

```
m[n1]:=0;shear:=-incr*(3.5*w[n1]+3*w[n1+incr]-0.5*w[n1+2*incr])*112;
```

```
k:=n1+incr;
```

```
if incr <0 then
```

```
  begin
```

```
  while (k>=(n2-incr)) do
```

```
    begin
```

```
    m[k]:=m[k-incr]+incr*shear*lambda;
```

```
    shear:=shear-incr*(w[k-1]+10*w[k]+w[k+1])*112;
```

```
    k:=k+incr;
```

```
    end;
```

```
  end;
```

```
if incr >0 then
```

```
  begin
```

```
  while (k<=(n2-incr)) do
```

```
    begin
```

```
    m[k]:=m[k-incr]+incr*shear*lambda;
```

```
    shear:=shear-incr*(w[k-1]+10*w[k]+w[k+1])*112;
```

```

    k:=k+incr;
    end;
end;
m[n2]:=m[n2-incr]+incr*shear*lambda;
end;

procedure pr_6000;
begin
assign (rez,'frv_test');
rewrite(rez);
writeln(rez,'Frecventele calculate sunt:');
writeln(rez,'*****');
writeln(rez,'-----');
writeln(rez,' i | r | psi(i,r) |');
writeln(rez,'-----');
for i:= 1 to n do
    begin
        for r:= 1 to modes do
            begin
                if (r= trunc(modes/2)) then writeln(rez,' i:2,' | ',r:2,' | ',psi[i,r]:12:4,' |') {vine else}
                    else writeln(rez,' | ',r:2,' | ',psi[i,r]:12:4,' |');
            end;
        writeln(rez,'-----');
    end;
writeln(rez,'-----');
writeln(rez);writeln(rez);
writeln(rez,'-----');
writeln(rez,' r | freq | T | gamma |');
writeln(rez,' | rad/sec | sec | |');
writeln(rez,'-----');
for r:=1 to modes do
    begin
        write(rez,' | ',r:2,' | ',freq[r]:7:2,' | ',per[r]:5:2);
        writeln(rez,' | ',gama[r]:8:5,' |');
    end;

```

```
end;
writeln(rez,'-----');
close(rez);
end;

procedure pr_3000;
begin
change:=1 + epsilon;cycles:=0;
  while change>epsilon do
    begin
    for i:=0 to n do
    begin
    oldu[i]:=u[i];
    w[i]:=mass[i]*u[i];
    end;
    pr_2000(-1);

    for i:=0 to n do w[i]:=m[i]/(elst*inert[i]);
    pr_2000(1);
    for i:=1 to n do u[i]:=m[i];pr_4000;
    change:=0;
    for i:=0 to n do change:=change+abs(oldu[i]-u[i]);
    cycles:=cycles+1;
    end;{while}

end;

procedure pr_5000;
begin
muv:=mass[0]*u[0]*m[0]-mass[n]*u[n]*m[n];
mvsq:=mass[0]*m[0]*m[0]-mass[n]*m[n]*m[n];
i:=1;
  while i<n do
```

```

begin
  muv:=muv+4*mass[i]*u[i]*m[i]+2*mass[i+1]*u[i+1]*m[i+1];
  mvvsq:=mvvsq+4*mass[i]*m[i]*m[i]+2*mass[i+1]*m[i+1]*m[i+1];
  i:=i+2;
end;
freq[mode]:=sqrt(muv/mvvsq);
writeln('frecventa in rutina este: ',freq[mode],' mode=',mode:2);
per[mode]:=2*pi/freq[mode];
for i:=1 to n do psi[i,mode]:=u[i];
z1:=mass[0]*u[0]-mass[n]*u[n];
z2:=mass[0]*u[0]*u[0]-mass[n]*u[n]*u[n];
i:=1;
while(i<n) do
  begin
    z1:=z1+4*mass[i]*u[i]+2*mass[i+1]*u[i+1];
    z2:=z2+4*mass[i]*u[i]*u[i]+2*mass[i+1]*u[i+1]*u[i+1];
    i:=i+2;
  end;
  mpsi:=z1*lambda/3;
  mpsisq[mode]:=z2*lambda/3;
  gama[mode]:=mpsi/mpsisq[mode];
end;

begin
  clrscr;
  { readln(date,n);
  readln(date,modes);
  readln(date,h_baraj);
  readln(date,lat_baza);
  readln(date,lat_sus);
  readln(date,elst);
  readln(date,dens); }
  n:=80;

```

```
modes:=10;
h_baraj:=100;
lat_baza:=10;
lat_sus:=10;

elst:=2500000000.0;{2100000000daN/m2}
dens:=2400;{2400daN/m3}
epsilon:=0.000001*n;lambda:=h_baraj/n;l12:=lambda/12;
for i:=0 to n do
  begin
    dif:=lat_baza-lat_sus;
    a:=lat_sus+dif*(n-i)/n;{latura*1m = [m]}
    mass[i]:=(a*dens)/g; {massa}
    inert[i]:=a*a*a/12;
  end;
  writeln('gata date initiale');
for mode := 1 to modes do
  begin
    u[0]:=0;
    for i:=1 to n do u[i]:=1;
    {if mode=1 then for i:=1 to n do psi[i,mode]:=u[i];}
    if mode > 1 then pr_4000;
    pr_3000;
    pr_5000;
    writeln('gata modes',mode:2,'freq['',mode:2,']= ',freq[mode]);
    readkey;
  end; {end for _mode}
  pr_6000;
end.
```

## A.2. Rezultate

### A.2.1. Program Pascal pentru soluția BEM a presiunilor hidrodinamice

```

program bem_hydr;
uses comun_va,functii,crt;
var
    nume:string[12];
    kkk:integer;

{----- Main programme-----}
begin
    clrscr;
    write(' Name file with data : '); readln(nume);
    assign(data,nume);
    write(' Name file for results : '); readln(nume);
    assign(rez,nume);
    {-----}
    read_dat;
    for i:=1 to nstep do
        begin
            calc_gh(istep);
            prest(istep);
            {-----solving system of equations-----}
            kkk:=0;
            if (istep=1) then kkk:=1;
            rsolver(kkk);
            {-----write results-----}
            output(istep);
        end;
    end.
    {-----}
unit functii;

interface

uses comun_va;
procedure read_data;
procedure calc_gh(istep:integer);
procedure prest10(istep:integer);
procedure rsolver(kkk:integer);
procedure output10(istep:integer);

implementation

var

```

```
i,j,jb,ja,tst,cdb,cda:integer;
dist:real;
```

```
procedure read_data;
var
  titlu:string;
  gaussfis:string[3];
  gss:text;
  nod:integer;
begin
  reset(data); rewrite(rez);
  readln(data.titlu);writeln(rez,titlu);
  readln(data.nc): {numar de elemente}
  readln(data.cs): {wave velocity}
  readln(data.at): {delta t- marimea intervalului de timp}
  readln(data.nstep): {numar de intervale de timp de considerat}
  readln(data.nfunct): {numar de functii de timp}
  readln(data.intimp): {primul interval}
  if intimp=0 then intimp:=nstep+1;
  readln(data.pqg): {numar puncte de quadratura gauss de folosit pentru integrare}
  str(pqg,gaussfis);
  gaussfis:=concat('g',gaussfis);
  assign(gss,gaussfis);
  reset(gss);
  for i:=1 to pqg do readln(gss.gi|i);
  for i:=1 to pqg do readln(gss.ome|i);
  for i:=1 to pqg do readln(gss.gil|i);
  for i:=1 to pqg do readln(gss.ome1|i);
  close(gss);

  n:=2*nc;
  writeln(rez,'*****');
  writeln(rez,'Coordinates of nodes on the boundary');
  writeln(rez,'*****');
  writeln(rez);
  writeln(rez,'-----');
  writeln(rez,' Nod          X          Y');
  writeln(rez,'-----');
  for i:=1 to n do
    begin
      readln(data.nod.x|i,y|i);
      writeln(rez,nod:5,x|i:10:2,y|i:10:2);
    end;
  writeln(rez);

  for i:=1 to nfunct do
    begin
      readln(data.npoif|i,fscale|i);
```



```

writeln(rez,i,npoif[i],fscale[i]);
for j:=1 to npoif[i] do
  begin
    readln(data,funct[i,j,1],funct[i,j,2]);
    writeln(rez,j,funct[i,j,1],funct[i,j,2]);
  end;
writeln(rez);
end;

writeln(rez,'*****');
writeln(rez,' Boundary conditions');
writeln(rez,'*****');
writeln(rez,'-----');
writeln(rez,'element | first nod | 2-nd nod | 3- rd nod |');
writeln(rez,'-----');
writeln(rez,' | cod| value | funct| cod| value | funct| cod| value | funct|');
writeln(rez,'-----');
for i:=1 to ne do
  begin
    write(rez,i:4);
    for j:=1 to 3 do
      begin
        readln(data, code[3*i-3+j],bc[3*i-3+j],ifunct[3*i-3+j]);
        if j=3 then writeln(rez,'|,code[3*i-3+j]:2,|,bc[3*i-3+j]:8:2,|,ifunct[3*i-3+j]:4,|')
          else write(rez,'|,code[3*i-3+j]:2,|,bc[3*i-3+j]:8:2,|,ifunct[3*i-3+j]:4,|');
      end;
    end;
writeln(rez);
close(rez); close(data);
end;

{
var a,b,c,d,gc,hc,a1,a0,xjal,xja,eta1,eta2,eta,cst,f1,f2,f3,rdn,ra,xco,yco:real;
    gia,s1,s2,s3:real;
    i10,j10:integer;

procedure fundsols(ra:real;istep:integer; var g,h:real);
var a0,a1,a2:real;
function raiz(x:real):real;
begin
  raiz:=sqrt(x*x-1);
end;
begin
  g:=0;
  h:=0;
  a0:=cs*istep*at/ra;
  if (a0>1) then
    begin
      a1:=cs*(istep-1)*at/ra;
      a2:=cs*(istep-2)*at/ra;
    end;
end;

```

```

    if (a1<=1) then
      begin
        g:=ln(a0+raiz(a0))/(2*pi);
        h:=-raiz(a0)/(2*pi)/cs/at;
      end;
    if (a1>1) then
      begin
        if (a2>1) then
          begin
            g:=ln((a0+raiz(a0))/(a1+raiz(a1)))/(2*pi);
          end;
        h:=-((2-2*(a0*a0+a2*a2-1)/(raiz(a0)*raiz(a2)+a0*a2))/(raiz(a0)+2*raiz(a1)+raiz(a2)))/(2*pi)/cs/at;
      end;
      if (a2<=1) then
        begin
          g:=ln((a0+raiz(a0))/(a1+raiz(a1)))/(2*pi);
          h:=-((2-istep)*(3*istep-2)*(cs*at/ra)*(cs*at/ra)+3)/(raiz(a0)+2*raiz(a1))/(2*pi)/cs/at;
        end;
      end;
end;

```

*procedure locin(xp,yp,x1,y1,x2,y2,x3,y3: real;nodo:integer; var gt,ht: matr3);*

```

begin
a:=x3-2*x2+x1;
b:=(x3-x2)/2;
c:=y3-2*y2+y1;
d:=(y3-y1)/2;
case nodo of
1: begin
a1:=0.5;
a0:=0.5;
xjal:=2;
end;
2: begin
a1:=1.0;
a0:=0.0;
xjal:=1;
end;
3: begin
a1:=-0.5;
a0:=0.5;
xjal:=2;
end;
end;
cst:=cs*at;
for il0:=1 to 3 do
begin
ht[i10]:=0;gt[i10]:=0;
end;

```

```

for i10:= 1 to pqg do
  begin
    f1:=gi[i10]*(gi[i10]-1)*0.5;
    f2:=1-gi[i10]*gi[i10];
    f3:=gi[i10]*(gi[i10]+1)*0.5;
    xco:=x1*f1+x2*f2+x3*f3-xp;
    yco:=y1*f1+y2*f2+y3*f3-yp;
    ra:=sqrt(xco*xco+yco*yco);
    xja:=sqrt((gi[i10]*a+b)*(gi[i10]*a+b)+(gi[i10]*c+d)*(gi[i10]*c+d));
    fundsols(ra, l.gc, hc);
    eta:=abs(a1*gi[i10]+a0);
    gc:=(gc*2*pi+ln(eta))*xja*ome[i10];
    gia:=(gil[i10]-a0)/a1;
    xja:=xjal*sqrt((gia*a+b)*(gia*a+b)+(gia*c+d)*(gia*c+d))*omel[i10];
    s1:=0.5*gia*(gia-1)*xja+f1*gc;
    s2:=(1-gia*gia)*xja+f2*gc;
    s3:=0.5*gia*(gia+1)*xja+f3*gc;
    if nodo =2 then
      begin
        gia:=-gil[i10];
        xja:=xjal*sqrt((gia*a+b)*(gia*a+b)+(gia*c+d)*(gia*c+d))*omel[i10];
        s1:=s1+0.5*gia*(gia-1)*xja;
        s2:=s2+(1-gia*gia)*xja;
        s3:=s3+0.5*gia*(gia+1)*xja;
      end;
    gt[1]:=gt[1]+s1/(2*pi);
    gt[2]:=gt[2]+s2/(2*pi);
    gt[3]:=gt[3]+s3/(2*pi);
    if (ra<cst) then
      begin
        eta1:=(gi[i10]*c+d);
        eta2:=(gi[i10]*a+b);
        rdn:=(xco*eta1+yco*eta2)/ra;
        hc:=rdn*hc*ome[i10];
        ht[1]:=ht[1]+f1*hc;
        ht[2]:=ht[2]+f2*hc;
        ht[3]:=ht[3]+f3*hc;
      end;
  end;
end;

```

**procedure** *extin*(*xp,yp,x1,y1,x2,y2,x3,y3:real; var gt,ht: matr3*);

```

begin
  for i10:=1 to 3 do
    begin
      ht[i10]:=0;gt[i10]:=0;
    end;
  a:=x3-2*x2+x1;
  b:=(x3-x2)/2;
  c:=y3-2*y2+y1;

```

```

d:=(y3-y1)/2;
cst:=cs*at*istep;
for i10:= 1 to pqg do
  begin
    f1:=gi[i10]*(gi[i10]-1)*0.5;
    f2:=1-gi[i10]*gi[i10];
    f3:=gi[i10]*(gi[i10]+1)*0.5;
    xco:=x1*f1+x2*f2+x3*f3-xp;
    yco:=y1*f1+y2*f2+y3*f3-yp;
    ra:=sqrt(xco*xco+yco*yco);

    if (ra<=cst) then
      begin
        fundsols(ra,istep,gc,hc);
        eta1:=(gi[i10]*c+d);
        eta2:=-(gi[i10]*a+b);
        xja:=sqrt(eta1*eta1+eta2*eta2);
        gc:=xja*gc*ome[i10];
        gt[1]:=gt[1]+f1*gc;
        gt[2]:=gt[2]+f2*gc;
        gt[3]:=gt[3]+f3*gc;
        rdn:=(xco*eta1+yco*eta2)/ra;
        hc:=rdn*hc*ome[i10];
        ht[1]:=ht[1]+f1*hc;
        ht[2]:=ht[2]+f2*hc;
        ht[3]:=ht[3]+f3*hc;
      end;
    end;
end; {end extin10}

function distp(xp,yp,x1,y1,x2,y2,x3,y3:real):real;
var
d1,d2,d3:real;
function min(d1,d2,d3:real):real;
var minim:real;
begin
minim:=d1;
if ( minim > d2) then minim:=d2;
if ( minim > d3) then minim:=d3;
min:=minim;
end;
begin
d1:=(xp-x1)*(xp-x1)+(yp-y1)*(yp-y1);
d2:=(xp-x2)*(xp-x2)+(yp-y1)*(yp-y1);

```

4. x5, y6: real;

```

begin
zeta1:=arctan((-0.5*x1+2*x2-1.5*x3)/(0.5*y1-2*y2+1.5*y3));
zeta2:=arctan((1.5*x3-2*x4+0.5*x5)/(-1.5*y3+2*y4-0.5*y5));
zet:=(zeta2-zeta1)/pi;
if ( abs(abs(zet)-1)<0.0001) then write('eroare in freeterm: elemente identice');
if (zet<0) then cii:=0.5*(-1-zet);
if ((zet>0) and (zet <1)) then cii:=0.5*(1-zet);
if (zet>1) then cii:=0.5*(3-zet);

end;
```

```
procedure calc_gh(istep:integer);
```

```
var j1,j2,j3,i1,i2,k:integer;
```

```
procedure s130(j,jb,ja:integer);
```

```
var l:integer;
```

```
begin
```

```
for l:=1 to n do
```

```
begin
```

```
a_1[l,j]:=h[l,j];
```

```
b_1[l,jb]:=g[l,jb];
```

```
b_1[l,ja]:=g[l,ja];
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure s150(j,jb,ja:integer);
```

```
var l:integer;
```

```
begin
```

```
for l:=1 to n do
```

```
begin
```

```
a_1[l,j]:=-g[l,jb];
```

```
b_1[l,jb]:=h[l,j];
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure s170(j,jb,ja:integer);
```

```
var l:integer;
```

```
begin
```

```
for l:=1 to n do
```

```
begin
```

```
a_1[l,j]:=-(g[l,jb]+g[l,ja]);
```

```
b_1[l,jb]:=-h[l,j];
```

```
b_1[i,ja]:=0;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure s190(j,jb,ja:integer);
```

```
var l:integer;
```

```
begin
```

```
for l:=1 to n do
```

```
begin
```

```
a_1[l,j]:=-g[l,jb];
```

```
b_1[l,jb]:=-h[l,j];
```

```

    b_1[l,ja]:=g[l,ja];
  end;
end;
procedure s210(j,jb,ja:integer);
  var l:integer;
begin
  for l:=1 to n do
    begin
      a_1[l,j]:=-g[l,ja];
      b_1[l,jb]:=g[l,jb];
      b_1[l,ja]:=-h[l,j];
    end;
  end;

begin
  nc:=n div 2;
  ng:=3*nc;
  for j:=1 to n do for i:=1 to n do
    begin
      h[i,j]:=0;
      g[i,j]:=0;
    end;
  for j:=n+1 to ng do for i:=1 to n do g[i,j]:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      for j:= 1 to nc do
        begin
          j1:=2*j-1;
          j2:=j1+1;
          j3:=j2+1;
          if j3>n then j3:=1;
          tst:=(i-j1)*(i-j2)*(i-j3);
          if ((istep=1) and (tst=0)) then
            begin
              nodo:=i-2*j+2;
              if ((i=1) and (j=nc)) then nodo:=3;
              locin10(x[i],y[i],x[j1],y[j1],x[j2],y[j2],x[j3],y[j3],nodo,gt,ht);
            end
          else
            begin
              dist:=distp(x[i],y[i],x[j1],y[j1],x[j2],y[j2],x[j3],y[j3]);
              if ( dist<cs*istep*at) then extin10(x[i],y[i],x[j1],y[j1],x[j2],y[j2],x[j3],y[j3],gt,ht){else}
                else for k:=1 to 3 do
                  begin
                    ht[k]:=0;gt[k]:=0;
                  end;
            end;
          end;
          h[i,j1]:=h[i,j1]+ht[1];
          h[i,j2]:=h[i,j2]+ht[2];

```

```

h[i,j3]:=h[i,j3]+ht[3];
g[i,3*j-2]:=gt[1];
g[i,3*j-1]:=gt[2];
g[i,3*j]:=gt[3];
end;
if (istep = 1) then
  begin
    cii:=0.5;
    if (2*(i/2)-i)<>0 then
      begin
        i2:=i-1;
        if (i=1) then i2:=n;
        i1:=i2-1;
        fterm10(cii,x[i1],y[i1],x[i2],y[i2],x[i],y[i],x[i+1],y[i+1],x[i+2],y[i+2]},{!!!!!!!});
      end;
    h[i,i]:=h[i,i]+cii;
  end;
end;

assign(aux, 'auxiliar');
rewrite(aux);
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do write(aux,h[i,j]);
for i:=1 to n do
  for j:= 1 to ng do write(aux,g[i,j]);

{-----reordering equation system and memorize the first step-----}
if (istep =1) then for j :=1 to n do
  begin
    jb:=j div 2-1;
    if (j=1) then jb:=ng;
    ja:=2*j-j div 2-1;
    cdb:=code[jb];
    cda:=code[ja];
    case cdb of
      0: case cda of
          0: begin
              if ja<>jb then s170(j,jb,ja)
              else s150(j,jb,ja);
            end;
          1: s190(j,jb,ja);
        end;
      1: case cda of
          0:s210(j,jb,ja);
          1: s130(j,jb,ja);
        end;
    end;{case}
  end;
end;{procedura}

```

```

function funcval(nf:integer;tt,scale: real; npoin: integer):real;
var l: integer;
begin
funcval:=func[nf,1,2]*scale;
if (scale<>0) then
  begin
    for l:=1 to npoin-1 do
      begin
        if ((tt> func[nf,l,1]) or (tt<func[nf,l+1,1])) then
          begin

funcval:=scale*(func[nf,l,2]+(func[nf,l+1,2]-func[nf,l,2])/(func[nf,l+1,1]-func[nf,l,1]))*(tt-func[n
f,l,1]);
          end;
        end;
      end;
end;{funcval}

```

```

procedure prest(istep:integer);
var ax,ax1,bcvala,bcvalb,time:real;
nf,imat,iut:integer;
begin
ne:=trunc(n/2);
ng:=3*ne;
for j10:=1 to n do fi[j10]:=0;
time:=at*istep;
for j10:=1 to n do
  begin{100}
    jb:=trunc(j+j/2-1);
    if j=1 then jb:=ng;
    ja:=trunc(2*j-j/2-1);
    cdb:=code[jb];cda:=code[ja];
    nf:=ifunct[jb];
    bcvalb:=funcval(nf,time,bc[jb]*fscale[nf],npoif[nf]);
    bcvala:=bcvalb;
    if (jb<>ja) then
      begin
        nf:=ifunct[ja];
        bcvala:=funcval(nf,time,bc[ja]*fscale[nf],npoif[nf]);
      end;
    if ((cdb=0) or (cda=0) or (jb<>ja) then
      begin
        if ((cdb=0) or (cda=0) or (jb=ja) then
          begin
            if ((cdb=1) or (cda=1) ) then
              begin
                if ((cdb=1) or (cda=0)) then
                  begin
                    if ((cdb=0) or (cda=1)) then halt(154)
                    else

```



```

begin
t[jb,istep]:=bcvalb;
u[j,istep]:=bcvala;
end;

end
else
begin
u[j,istep]:=bcvalb;
t[ja,istep]:=bcvala;
end;

end
else
begin
if (bcvalb<>bcvala) then halt(154);
u[j,istep]:=bcvalb;
bcvala:=0;
end;

end
else
begin
t[jb,istep]:=bcvalb;
t[ja,istep]:=bcvala;
end;

end
else
begin
t[jb,istep]:=bcvalb;
bcvala:=0;
end;
fi[i]:=fi[i]+b_1[i,jb]*bcvalb+b_1[i,ja]*bcvala;
end; {100}
if (istep<>1) then
begin
reset(aux);
for imat:=2 to istep do
begin
for i10:=1 to n do
for j10:=1 to n do read(h[i10,j10]);
for i10:=1 to n do
for j10:= 1 to ng do read(g[i10,j10]);
iut:=istep-imat+1;
for j10:= 1 to n do
begin
ax:=u[j10,iut];
ax1:=t[j10,iut];
if((ax<>0) or (ax1<>0)) then
for i10:=1 to n do fi[i10]:=fi[i10]-h[i10,j10]*ax+g[i10,j10]*ax1;
end;
for j10:=n+1 to ng do
begin

```

```

    ax:=t[j10,iut];
    for i10:=1 to n do fi[i10]:=fi[i10]+g[i10,j10]*ax;
    end;
  end;
  close(aux);
end;
end:

```

***procedure output(istep:integer);***

```

  var scria:integer;
  begin
  ne:= trunc(n/2);
  ng:=3*ne;
  scria:=0;
  append(rez);
  writeln(rez,'Rezultate');
  if ((istep*intimp/intimp = istep) or (istep=1)) then scria:=1;
  while (scria=1) do
    begin
    writeln(rez,'timp=',at*istep,' secunde');
    writeln(rez,'nr nod   potential derivative   potential');
    writeln(rez,'          inainte   dupa');
    writeln(rez,'-----');
    for j:=1 to n do
      begin {60}
      jb:=trunc(j+j/2-1);
      if j=1 then jb:=ng;
      ja:=trunc(2*j-j/2-1);
      cdb:=code[jb];
      cda:=code[ja];
      if ((cdb=0) or (cda=0)) then
        begin
          if ((cdb=1) or (cda=1)) then
            begin
              if ((cdb=1) or (cda=0)) then
                begin
                  if ((cdb=0) or (cda=1)) then halt(1)
                  else t[ja.istep]:=fi[i];
                  end
                else t[jb.istep]:=fi[i];
                end
              end
            else
              begin
                t[jb.istep]:=fi[j];
                t[ja.istep]:=fi[j];
                end;
              end
            else u[j.istep]:=fi[j];
            writeln(rez,x[j]:6:2,' ',y[j]:4:2,' ',u[j.istep]:10:2,' ',t[jb.istep]:10:2,' ',t[ja.istep]:10:2);
            end:{60}
    end;
  end:

```

```

    scric:=0;
    end;

close(rez);

end;

procedure rsolver(kkk:integer);
var l,ll:integer;
x:real;
{kkk=0 forward and backward substitution}
{kkk=1 factorization and forward and backward substitution}
function rdotaa(npasi:integer; var a:matricea_a;lin:integer; var b:matricea_a;col:integer):real;
var ia,ib,indice:integer;
    rd:real;
begin
rd:=0;
if (npasi>0) then
begin
ia:=1;ib:=1;
if (lin<0) then ia:=1-(npasi-1)*lin;
if (col<0) then ib:=1-(npasi-1)*col;
for indice:=1 to npasi do
begin
rd:=rd+ a[lin,ia]*b[ib,col];
ia:=ia+1;
ib:=ib+1;
end;
end;
rdotaa:=rd;
end;

function rdotab(npasi:integer; var a:matricea_a;lin:integer; var b:matricea_rez;cresc:integer):real;
var ia,ib,contor,indice:integer;
    rd:real;
begin
rd:=0;
if (npasi>0) then
begin
if cresc=1 then
begin
ia:=1;ib:=1;contor:=1;
end;
if cresc=0 then
begin
ib:=n;
ia:=n;
contor:=-1;
end;
end;

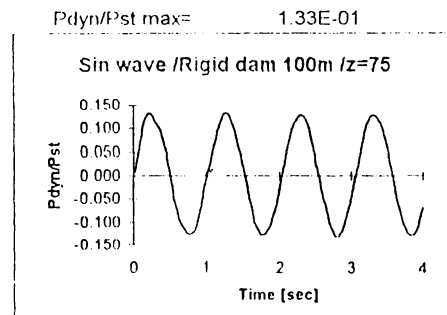
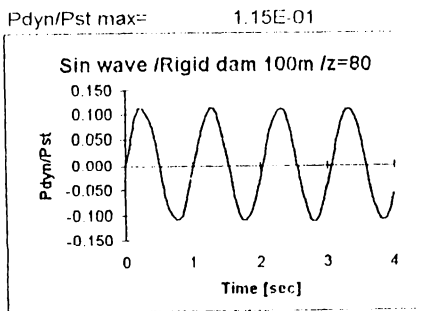
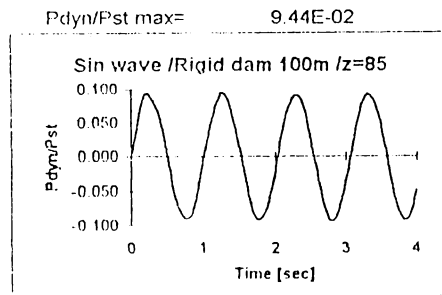
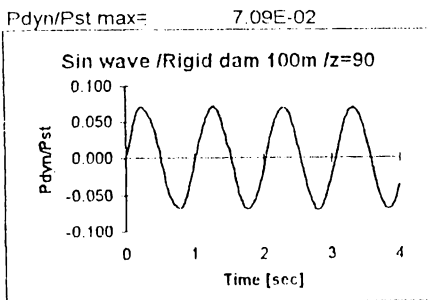
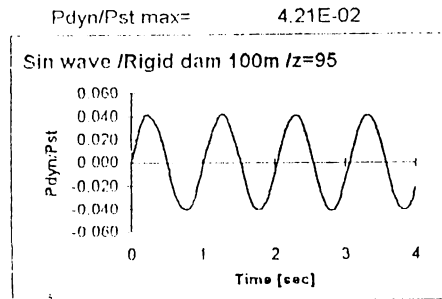
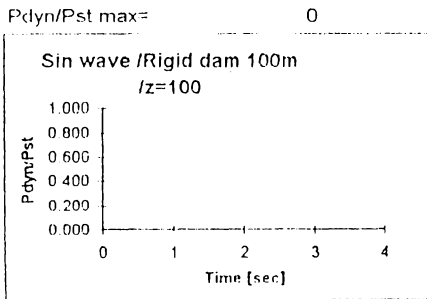
```

```
for indice:=1 to npasi do
  begin
    rd:=rd+ a[lin,ia]*b[ib];
    ia:=ia+contor;ib:=ib+contor;
  end;

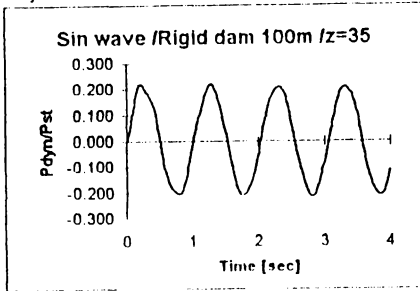
end;
rdotab:=rd;
end;

begin
if kkk=1 then
  for l:=1 to n do
    begin
      ll:=l-1;
      for i10:=1 to n do a_1[i10,l]:=a_1[i10,ll]-rdotaa(ll,a_1,i10,a_1,l);
      x:=a_1[l,l];
      if x=0 then halt(1);
      x:=1/x;
      for j:=l+1 to n do a_1[l,j]:=x*(a_1[l,j]-rdotaa(ll,a_1,l,a_1,j));
    end;
  for i10:=1 to n do fi[i10]:=-(rdotab(i10-1,a_1,i10,fi,l)+fi[i10])/a_1[i10,i10];
  for i10:=n downto 1 do
    fi[i10]:=-(rdotab(n-i10,a_1,i10,fi,0)+fi[i10]);
  end;
```

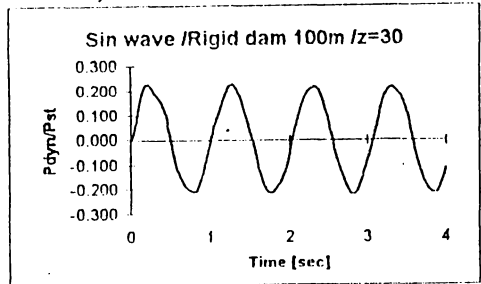
**A.2.2. Presiuni hidrodinamice la un baraj rigid - undă sinusoidală**



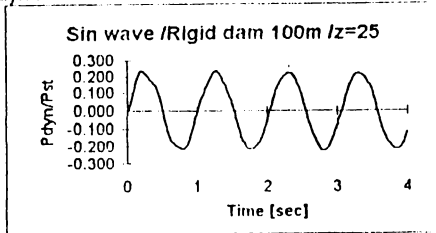
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.20E-01



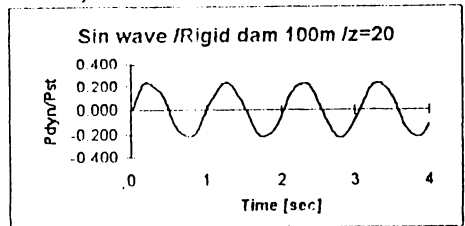
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.26E-01



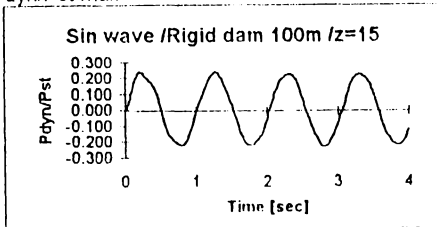
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.31E-01



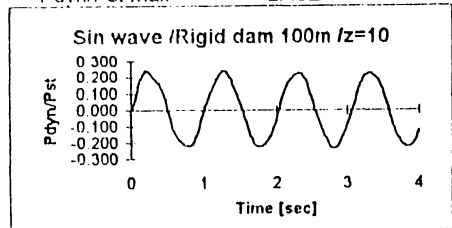
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.35E-01



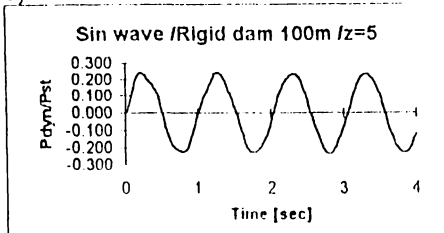
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.36E-01



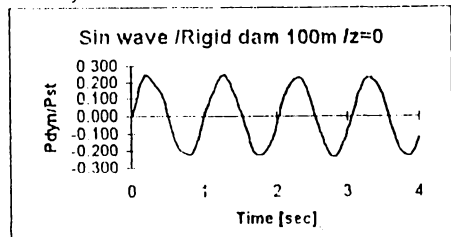
P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.40E-01

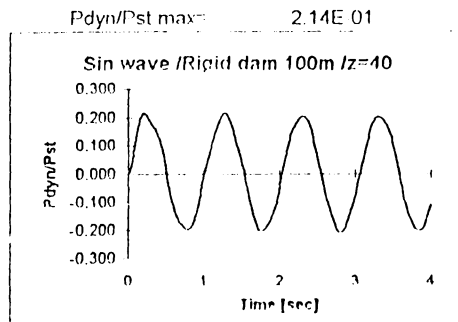
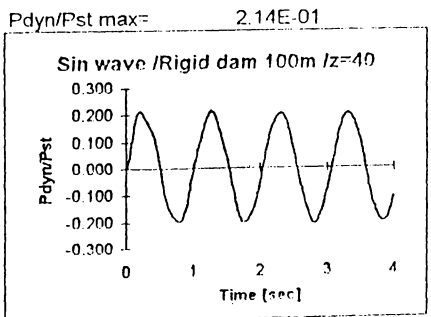
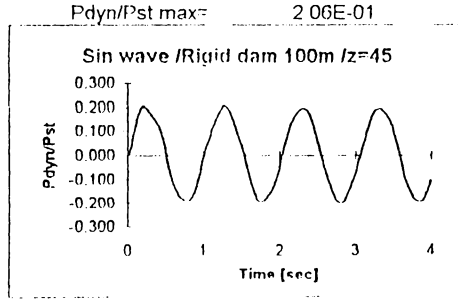
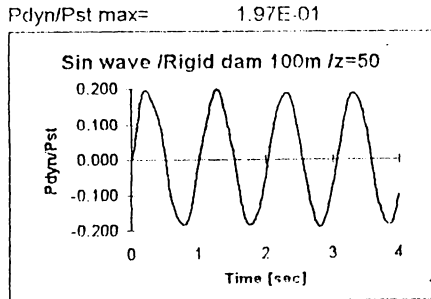
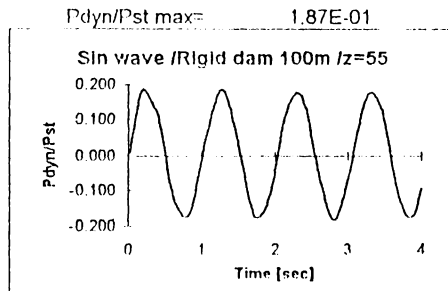
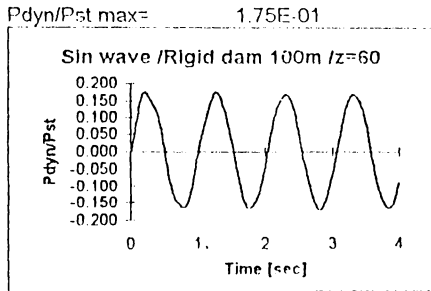
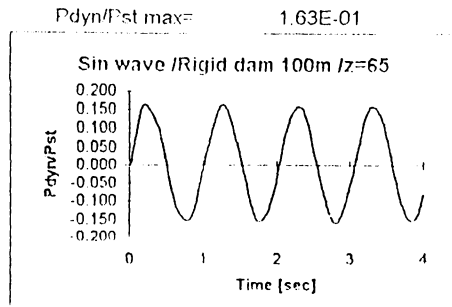
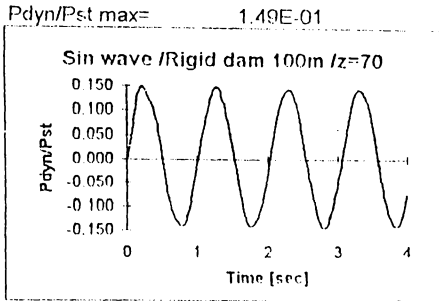


P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.42E-01



P<sub>dyn</sub>/P<sub>st</sub> max= 2.42E-01





*“Aș fi putut s-o fac într-un mod  
mult mai complicat” spuse Regina  
de Rosu foarte mândra.*

*Lewis Carroll - Alice în Țara Minunilor*

10/11