

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

617.832  
285 H

Ing. GHEORGHE MADESCU

MODEL NELINIAR  
AL MAȘINII DE INDUCȚIE  
ADAPTAT PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE

Teză de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:  
Acad. TOMA DORDEA

-1996-

## Prefață

Sub aspect economic, cea mai importantă problemă legată de mașina de inducție este cea a optimizării construcției sale. Problema este încă actuală și face parte din preocupările cercetătorilor și proiectanților, care au reconsiderat-o la nivelul tehnicilor actuale de calcul.

Aria vastă a problematicii impune împărțirea ei în câteva domenii distincte: probleme privind modelul utilizat ca echivalent al mașinii reale, probleme legate de algoritmul de căutare a optimului global, alegerea criteriului de optim, construirea funcției obiectiv, etc.

Lucrarea de față se plasează, în mare parte, în domeniul modelelor echivalente ale mașinii de inducție.

Fiecare din cele două modele echivalente fundamentale (schema electrică și modelul de câmp) rezolvă o anumită categorie de probleme; fiecare are avantaje și dezavantaje.

Lucrarea își propune să îmbine avantajele particulare ale acestor două modele, prin asocierea soluției problemei de câmp cu schema electrică echivalentă. Se obține astfel o schemă echivalentă având un caracter neliniar prin considerarea caracteristicii reale a circuitului magnetic principal, obținută din calculul de câmp. Se ține seama de reacția de indus prin considerarea surselor de câmp pe ambele armături. Modelul este adecvat inclusiv sintezei optime ale mașinii de inducție.

Lucrarea se extinde pe 192 pagini (exclusiv figurile, în număr de 80) și este structurată pe șase capitole, conținând de asemenea o listă cu notații utilizate și o listă cu 134 referințe bibliografice.

Capitolul 1 are un caracter de sinteză prezentând principalele metode de calcul al câmpurilor electromagnetice; sunt analizate metodele de bază utilizate la rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul doi la care se reduc legile generale ale electrodinamicii macroscopice.

Capitolul 2 tratează problema de câmp la mașina de inducție cu întrefier constant; se elaborează o soluție analitică iterativă (SAI) a problemei, care reprezintă un model neliniar al câmpului magnetic principal al mașinii și o posibilitate de calcul al caracteristicii reale a circuitului magnetic principal.

Capitolul 3 analizează, comparativ, soluțiile obținute prin metoda SAI și prin metoda elementelor finite, într-un domeniu de calcul dat.

Capitolul 4 prezintă aplicații ale modelului SAI în analiza neliniară a mașinii de inducție, utilizând posibilitatea de asociere a modelului neliniar de câmp cu schema electrică echivalentă cunoscută (la mașinile cu câmp circular), sau cu modelul vectorilor spațiali (la mașinile cu câmp eliptic); analiza ia în considerare caracteristica reală a circuitului magnetic, la mersul în gol și reacția indusului, la mersul în sarcină; se determină prin calcul influența saturației circuitului magnetic principal asupra distribuției spațiale a câmpului din întrefier, de-a lungul pasului polar; se calculează armonicile de

saturație; se determină prin calcul forma de variație în timp a curenților, în prezența saturației. Majoritatea exemplelor de calcul sunt însoțite de verificări experimentale.

Capitolul 5 abordează problema optimizării construcției mașinii de inducție cu ajutorul modelului SAI; sunt enunțate și rezolvate succesiv trei probleme elementare de optim ce conduc univoc spre geometria transversală care maximizează fluxul magnetic polar pe unitatea de lungime a statorului, pentru un diametru exterior dat; determinarea optimului global se face în etapa finală, în care intervin restricțiile impuse, funcția obiectiv adoptată și două variabile independente.

Capitolul 6 cuprinde concluziile generale și principalele contribuții originale ale lucrării.

În afara surselor bibliografice, lucrarea are la bază activitatea depusă de autor timp de 15 ani, în domeniul proiectării mașinilor de inducție, la S.C. Electroprecizia Săcele-Brașov și S.C. Electromotor Timișoara.

Autorul exprimă pe această cale mulțumiri respectuoase conducătorului științific, domnul Acad. Toma Dordea, pentru observațiile și îndrumările atente și riguroase primite pe parcursul elaborării lucrării.

# CUPRINS

	Pag.
1. Metode de calcul al câmpurilor electromagnetice.....	1
1.1. Introducere.....	1
1.2. Teoreme ale câmpurilor de vectori.....	3
1.3. Ecuatiile câmpului electromagnetic în diferite regimuri ale electrodinamicii macroscopice.....	8
1.3.1. Regimul nestaționar.....	8
1.3.2. Regimul cvasistaționar.....	13
1.3.3. Regimul staționar.....	17
1.3.4. Regimul static.....	19
1.4. Metode analitice de calcul al câmpurilor.....	22
1.4.1. Integrarea directă a ecuației Poisson.....	22
1.4.2. Metoda funcțiilor Green.....	24
1.4.3. Metoda separării variabilelor.....	26
1.4.4. Metoda funcțiilor de variabilă complexă.....	29
1.4.5. Metoda transformărilor conforme.....	32
1.5. Metode numerice de calcul al câmpurilor.....	34
1.5.1. Metoda diferențelor finite.....	35
1.5.2. Metoda elementelor finite.....	47
1.5.3. Metoda elementelor de frontieră.....	53
1.6. Exemple de calcul.....	55
1.7. Concluzii.....	61
2. Contribuții privind elaborarea unei Soluții Analitice Iterative (SAI) a problemei de câmp la mașina de inducție.....	63
2.1. Ecuatia diferențială a potențialului magnetic vector.....	65
2.2. Rezolvarea analitică a ecuației pe un domeniu ideal.....	67
2.3. Aproximarea domeniului real al problemei de câmp prin subdomenii ideale.....	70
2.4. Aproximarea distribuției reale a surselor câmpului printr-o distribuție spațială ideală.....	73
2.5. Soluția problemei de câmp.....	75
2.6. Determinarea constantelor.....	79
2.7. Considerații privind întocmirea unui program de calcul.....	84
3. Exemple comparative de calcul cu metoda SAI și cu metoda elementelor finite.....	92



4. Analiza neliniară a mașinii de inducție folosind modelul SAI.....	102
4.1. Cazul mașinii de inducție cu câmp magnetic circular.....	102
4.1.1. Calcule și verificări experimentale privind efectul saturației circuitului magnetic principal.....	102
4.1.2. Reacția indusului. Calcule și verificări experimentale.....	106
4.1.3. Analiza armonicilor de câmp .....	112
4.2. Cazul mașinii de inducție cu câmp magnetic eliptic.....	125
4.2.1. Ecuațiile de tensiuni și modelul de circuit electric.....	127
4.2.2. Modelul cu vectori spațiali.....	130
4.2.3. Asupra caracteristicii magnetice în câmp eliptic.....	138
4.2.4. Mașina monofazăată.....	140
4.2.5. Mașina bifazăată cu condensator.....	146
5. Sinteza optimă a mașinii de inducție cu ajutorul modelului SAI.....	151
5.1. Introducere.....	151
5.2. Geometria transversală optimă.....	157
5.2.1. Considerații preliminare.....	157
5.2.2. Probleme elementare de optim.....	162
5.3 Determinarea optimului global.....	170
5.4 Concluzii.....	172
6. Concluzii generale.....	174
Notații utilizate.....	177
Bibliografie.....	184

## Cap.1

# METODE DE CALCUL AL CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE

## 1.1. INTRODUCERE

În sens matematic prin câmp se înțelege o porțiune dintr-un spațiu în care de fiecare punct este atașată o anumită mărime scalară, vectorială sau tensorială. Câmpul electromagnetic este un caz complex, în care, două câmpuri (unul electric și unul magnetic) sunt legate între ele printr-o relație de interdependență astfel încât fiecărui punct din spațiul câmpului i se asociază două mărimi vectoriale de stare, una pentru câmpul electric și una pentru cel magnetic.

Studiul fenomenelor electromagnetice la scară microscopică a început experimental prin M. Faraday ale cărui rezultate au fost generalizate, sintetizate și exprimate prin ecuații matematice de J.C. Maxwell. În a doua jumătate a secolului trecut s-au pus astfel bazele teoriei macroscopice a electrodinamicii. În cadrul acestei teorii câmpul electromagnetic este considerat, alături de substanță, ca o formă de existență a materiei. Substanța și câmpul sunt considerate continue iar acțiunile ponderomotoare se transmit din aproape în aproape, cu viteză finită (principiul acțiunii mijlocite sau prin contiguitate). Un pas înainte a fost făcut de H. Hertz care a dezvoltat teoria și pentru cazul mediilor în mișcare (cu viteză finită). Se vorbește astfel de electrodinamica corpurilor în mișcare, respectiv de teoria macroscopică Maxwell-Hertz.

După descoperirea electronilor, plecând de la teoria lui Maxwell, studiul electrodinamicii a fost reluat la o altă scară de A.H. Lorentz care a pus bazele teoriei microscopice a electrodinamicii numită și teoria electronilor sau electrodinamica statistică. Teoria lui Lorentz este valabilă pentru viteze finite ale mediului în mișcare (teoria nerelativistă), substanța este considerată discontinuă iar câmpul continuu. Acest pas spre generalizare a condus la reducerea numărului de ecuații ale electrodinamicii (în teoria microscopică, de exemplu, nu există legi de material, ele devin teoreme deoarece pot fi deduse din celelalte legi). Teoria lui Lorentz a fost dezvoltată de H. Minkowski și pentru cazul vitezelor apropiate de viteza luminii punându-se bazele teoriei relativiste a fenomenelor electromagnetice numită și electrodinamica relativistă.

Studiul fenomenelor electromagnetice la scară microscopică a cunoscut încă un salt spre generalizare în cadrul electrodinamicii cuantice, în care și substanța și câmpul se consideră ca având o structură discontinuă (discretă).

Pentru cazul mediilor în repaus, generalizarea dată de Hertz și formularea dată de Minkowski coincid cu cea elaborată de Maxwell.

În cazul mediilor în mișcare, legile generale ale teoriei Maxwell-Hertz sunt reprezentate de următoarele ecuații de bază scrise în formă locală:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \operatorname{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\bar{B} \times \bar{v}) \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}(\bar{J} + \rho_v \bar{v}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_v \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (1.5)$$

în care:  $\bar{E}, \bar{D}, \bar{H}, \bar{B}$  sunt mărimi de stare macroscopică a câmpului electromagnetic;  $\bar{J}$  și  $\rho_v$  sunt sursele câmpului electromagnetic iar  $\bar{v}$  este o funcție de punct reprezentând viteza punctelor materiale față de un sistem de referință inerțial fix. Dacă mediile sunt fixe ( $\bar{v}=0$ ), ecuațiile (1.1) - (1.5) obțin o formă mai simplă și reprezintă (în forma locală) ecuațiile de bază ale lui Maxwell în electrodinamica macroscopică.

Prin diferite particularizări legate de mărimile de stare și de sursele câmpului, ecuațiile lui Maxwell pot dobândi și forme mai simple concretizate în cele patru regimuri ale electrodinamicii macroscopice: regimul nestaționar, regimul cvasistaționar, regimul staționar și regimul static. Fiecare regim în parte va fi dezvoltat în continuare în vederea stabilirii ecuațiilor diferențiale ale câmpului electromagnetic și ulterior a rezolvării acestora.

## 1.2. TEOREME ALE CÂMPURILOR DE VECTORI

### Teorema fundamentală a câmpurilor de vectori

Într-un domeniu  $V_{\Sigma}$ , mărginit de suprafața închisă  $\Sigma$  se presupune că există un câmp de vectori  $\vec{F}(\vec{r})$  oarecare. Dacă se cunoaște în fiecare punct din  $V_{\Sigma}$  divergența lui  $\vec{F}(\vec{r})$ , vectorul  $\vec{F}$  nu poate fi univoc determinat (decât până la rotorul unui vector oarecare). De asemenea, dacă se cunoaște rotorul lui  $\vec{F}(\vec{r})$ , vectorul  $\vec{F}$  nu poate fi determinat în mod univoc (decât până la gradientul unui scalar).

Dacă însă, în fiecare punct din  $V_{\Sigma}$ , se cunosc și rotorul și divergența vectorului  $\vec{F}$  atunci câmpul vectorial poate fi determinat. La acest ultim aspect se referă teorema fundamentală a câmpurilor de vectori care s-ar putea enunța astfel:

Un câmp vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  este unic determinat în domeniul  $V_{\Sigma}$  dacă în fiecare punct al domeniului se cunosc:

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{R}(\vec{r}) \quad (1.6)$$

$$\text{div}\vec{F} = \rho(\vec{r}) \quad (1.7)$$

iar în fiecare punct al frontierei  $\Sigma$  se cunosc componentele normale  $F_n$  ale lui  $\vec{F}$ :

$$F_n = (\vec{n} \cdot \vec{F})_{\Sigma} = f(\vec{r}) \quad (1.8)$$

sau componentele tangențiale  $F_t$  ale vectorului  $\vec{F}$ :

$$F_t = (\vec{n} \times \vec{F})_{\Sigma} = g(\vec{r}) \quad (1.9)$$

Normala la suprafața  $\Sigma$ , luată spre exterior, are versorul  $\vec{n}$ .

Din punct de vedere matematic problema constă în rezolvarea ecuațiilor (1.6) - (1.7) cu condițiile la limită (pe frontieră) (1.8) sau (1.9). Se presupune că domeniul  $V_{\Sigma}$  poate fi descompus într-un număr finit de subdomenii în care funcțiile date  $\vec{R}(\vec{r})$  și  $\rho(\vec{r})$  sunt uniform continue împreună cu derivatele lor parțiale. De asemenea, vectorul  $\vec{F}$  este continuu și de două ori derivabil iar derivatele pot prezenta discontinuități numai într-un număr finit de puncte, curbe sau suprafețe. Pe suprafețele de discontinuitate, componenta normală a vectorului  $\vec{F}$  este continuă și numai componenta tangențială poate prezenta discontinuități. Funcțiile date (cunoscute):  $\vec{R}(\vec{r})$ ,  $\rho(\vec{r})$ ,  $f(\vec{r})$  și  $g(\vec{r})$  nu pot fi luate arbitrar,

între ele trebuie să existe anumite relații. De exemplu, din (1.6) rezultă că  $\text{div} \bar{R}(\bar{r})$  trebuie să fie egală cu zero, iar din (1.7), aplicând transformarea Gauss-Ostrogradski rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \bar{F}_n dS = \int_{V_{\Sigma}} \rho(\bar{r}) dv \quad (1.10)$$

De asemeni, aplicând transformarea Stokes în relația (1.6) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{F}_t dl = \oint_{\Sigma} \bar{R}(\bar{r}) d\bar{S} \quad (1.11)$$

unde  $\Gamma$  este o curbă închisă de pe  $\Sigma$ .

Revenind la sistemul de ecuații (1.6) - (1.7), se demonstrează [S1,S3,L1] că soluția este o superpoziție de trei câmpuri elementare: un câmp solenoidal  $\bar{F}_1(\bar{r})$ , un câmp potențial  $\bar{F}_2(\bar{r})$  și un câmp armonic  $\bar{F}_3(\bar{r})$ :

$$\bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}_1(\bar{r}) + \bar{F}_2(\bar{r}) + \bar{F}_3(\bar{r}) \quad (1.12)$$

În domeniul  $V_{\Sigma}$ , câmpul solenoidal  $\bar{F}_1(\bar{r})$  de ecuații:

$$\text{rot} \bar{F}_1 = \bar{R}(\bar{r}) \quad (1.13)$$

$$\text{div} \bar{F}_1 = 0 \quad (1.14)$$

conduce la ecuația diferențială de tip Poisson, în formă vectorială:

$$\Delta \bar{A} = -\bar{R}(\bar{r}) \quad (1.15)$$

unde  $\bar{A}$  este potențialul vector al câmpului  $\bar{F}_1(\bar{F}_1 = \text{rot} \bar{A})$  iar  $\text{div} \bar{A} = 0$  conform relației de etalonare a lui Coulomb. Soluția ecuației (1.15) se compune din: o soluție particulară a ecuației neomogene (Poisson) și soluția generală a ecuației omogene (ec. Laplace). O soluție particulară simplă pentru ecuația neomogenă (1.15) se poate obține în întreg spațiul și este de formă:

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{1}{r} \bar{R}(\bar{r}) dv \quad (1.16)$$

Din (1.16) rezultă:

$$\bar{F}_1 = \text{rot} \bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} (\text{grad} \frac{1}{r} \times \bar{R}) dv \quad (1.17)$$

În mod similar, câmpul potențial  $\bar{F}_2(\bar{r})$  de ecuații:

$$\text{rot} \bar{F}_2 = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{div} \bar{F}_2 = \rho(\bar{r}) \quad (1.19)$$

conduce la ecuația diferențială de tip Poisson (scalară):

$$\Delta\varphi_2 = -\rho(\bar{r}) \quad (1.20)$$

unde  $\varphi_2$  este potențialul scalar al câmpului  $\bar{F}_2$  ( $\bar{F}_2 = -\text{grad}\varphi_2$ ). Soluția ecuației (1.20) se compune din: o soluție particulară a ecuației neomogene (Poisson) și soluția generală a ecuației omogene (ec. Laplace). În întreg spațiul, soluția particulară a ecuației neomogene (1.20) va fi:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{V_x} \frac{1}{r} \rho(\bar{r}) dv \quad (1.21)$$

de unde:

$$\bar{F}_2 = -\text{grad}\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_x} \frac{\bar{r}}{r^3} \rho(\bar{r}) dv \quad (1.22)$$

Trebuie observată acum necesitatea introducerii câmpului armonic  $\bar{F}_3$  și anume: fără câmpul  $\bar{F}_3$ , condiția la limită (1.8) sau (1.9) nu putea fi îndeplinită. Câmpul  $\bar{F}_1$  dat de (1.17) are pe  $\Sigma$  valori bine determinate. De exemplu, componenta normală este  $F_{1n} = (\bar{n}\bar{F}_1)_\Sigma$ . Câmpul  $\bar{F}_2$ , determinat de (1.22) are pe  $\Sigma$  componenta normală  $F_{2n} = (\bar{n}\bar{F}_2)_\Sigma$ . Suma componentelor normale  $F_{1n}$  și  $F_{2n}$  nu îndeplinește însă condiția pe frontieră (1.8):

$$F_{1n} + F_{2n} \neq f(\bar{r}) \quad (1.23)$$

Este deci necesar să se introducă al treilea câmp, de tip armonic (fără surse) dar care pe frontieră să restabilească egalitatea în (1.23):

$$F_{1n} + F_{2n} + F_{3n} = f(\bar{r}) \quad (1.24)$$

Cu această ocazie s-a stabilit și condiția impusă pe frontiera  $\Sigma$  pentru câmpul  $\bar{F}_3$ . În domeniul  $V_x$ , câmpul armonic  $\bar{F}_3(\bar{r})$ , de ecuații:

$$\text{rot}\bar{F}_3 = 0 \quad (1.25)$$

$$\text{div}\bar{F}_3 = 0 \quad (1.26)$$

conduce la ecuația diferențială de tip Laplace:

$$\Delta\varphi_3 = 0 \quad (1.27)$$

cu condiția impusă pe frontieră (care decurge din (1.24)):

$$F_{3n} = f(\bar{r}) - F_{1n} - F_{2n} \quad (1.28)$$

sau:

$$F_{3t} = g(\bar{r}) - F_{1t} - F_{2t} \quad (1.29)$$

Se constată că problema determinării unui câmp de formă generală se reduce la trei probleme mai simple care se reduc toate la rezolvarea ecuației de tip Laplace într-un domeniu finit  $V_{\Sigma}$  cu condiții date pe frontiera  $\Sigma$ . O altă observație: rezolvarea ecuației de tip Poisson într-un domeniu finit poate fi redusă la rezolvarea ecuației de tip Laplace dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației Poisson (care de fapt este ecuația neomogenă). Rezultatele acestui paragraf sunt sistematizate în figura 1.1.

### Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic

Se consideră cazul general când toate mărimile de stare ale câmpului sunt variabile în timp (regim netaționar). Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}(P,t)$  și magnetic  $\vec{H}(P,t)$  sunt astfel funcții de punct și de timp într-un domeniu  $V_{\Sigma}$  mărginit de suprafața închisă  $\Sigma$  în interiorul căruia se cunosc în fiecare punct permitivitatea electrică  $\epsilon(P)$ , permeabilitatea magnetică  $\mu(P)$  și conductivitatea electrică  $\sigma(P)$ , care pot prezenta discontinuități pe suprafețe, curbe sau puncte. În aceste condiții intensitățile câmpurilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ , într-un punct  $P \in V_{\Sigma}$ , la momentul  $t$ , sunt unic determinate de valorile lor inițiale  $\vec{E}(P,0)$  și  $\vec{H}(P,0)$  și de componentele tangențiale, fie ale câmpului electric  $E_t(P_{\Sigma},t)$  fie ale câmpului magnetic  $H_t(P_{\Sigma},t)$  pe suprafața de frontieră  $\Sigma$ .

Rezolvarea problemelor de câmp electromagnetic necesită cunoașterea condițiilor pe frontiera domeniului, numite condiții la limită, sau pe frontieră și a condițiilor inițiale, problema numindu-se cu condiții la limită și/sau inițiale.

Prin condiții pe frontiera domeniului se înțeleg valorile care pot fi impuse pentru funcția necunoscută (de multe ori potențialul) sau pentru derivatele acesteia, sau pentru combinații ale acestora, astfel încât soluția să fie unică.

Condițiile pe frontieră pentru ecuațiile scalare Poisson și Laplace sunt:

-de tip Dirichlet (de prima speță), dacă se impun pe frontieră valorile potențialului:

$$\varphi(P) = f_1(P) \quad ; \quad P \in \Sigma \quad (1.30)$$

-de tip Neumann (de speța a doua), dacă se impun valorile componente normale a gradientului de potențial:

$$\vec{n} \cdot \text{grad}\varphi(P) = \frac{\partial\varphi(P)}{\partial\vec{n}} = f_2(P) \quad ; \quad P \in \Sigma \quad (1.31)$$

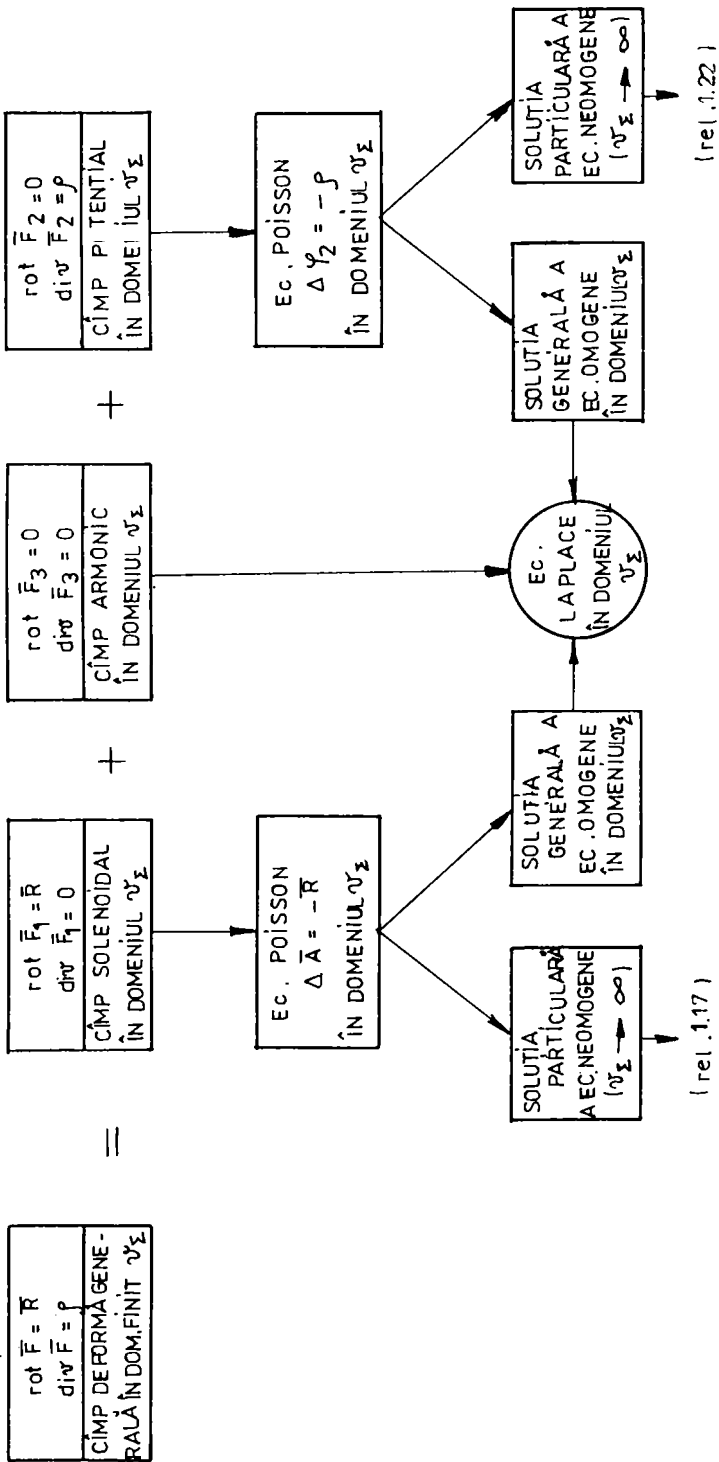


Fig. 1.1



-de tip Robin (de speța a treia), dacă în fiecare punct de pe frontiera  $\Sigma$  este dată o relație liniară în raport cu  $\varphi$  și  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  :

$$a\varphi(P) + b\frac{\partial\varphi}{\partial n} = f_3(P) \quad ; \quad P \in \Sigma \quad (1.32)$$

unde  $a$  și  $b$  sunt funcții de punct definite pe frontieră și nenule. Condiția pe frontieră este omogenă dacă  $f_3(P)=0$  și neomogenă dacă  $f_3(P)\neq 0$ . Observația este valabilă și în cazul relațiilor (1.30) și (1.31).

Soluția problemei lui Dirichlet este unică atât în cazul domeniilor mărginite cât și în cazul domeniilor nemărginite.

Soluția problemei lui Neumann pentru domenii mărginite este determinată în afara unei constante aditive. În cazul domeniilor nemărginite soluția este unică dacă îndeplinește unele condiții suplimentare [S1,M1].

### Formulele lui Green

Să considerăm relația de transformare Gauss-Ostrogradski pentru un domeniu tridimensional al câmpului vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ :

$$\int_{V_\Sigma} \text{div}\vec{F}dv = \int_{\Sigma} \vec{F}d\vec{S} \quad (1.33)$$

Scriem funcția vectorială  $\vec{F}$  sub următoarea formă:  $\vec{F} = \varphi \text{grad}\psi$ , unde  $\varphi$  și  $\psi$  sunt funcții scalare de punct. Înlocuim pe  $\vec{F}$  sub această formă în (1.33) și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi \cdot \text{grad}\psi) &= \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi + \varphi\Delta\psi \\ (\varphi \cdot \text{grad}\psi)d\vec{S} &= \varphi \cdot \vec{n} \cdot \text{grad}\psi dS = \varphi \frac{d\psi}{dn} dS \end{aligned}$$

$$\int_{V_\Sigma} (\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi + \varphi\Delta\psi)dv = \int_{\Sigma} \varphi \frac{d\psi}{dn} dS \quad (1.34)$$

Relația (1.34) reprezintă prima formulă a lui Green. Se repetă calculul pentru cazul  $\vec{F} = \psi \text{grad}\varphi$  și se obține:

$$\int_{V_\Sigma} (\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\varphi + \psi\Delta\varphi)dv = \int_{\Sigma} \psi \frac{d\varphi}{dn} dS \quad (1.35)$$

Scăzând relațiile (1.34) și (1.35) rezultă a doua formulă a lui Green:

$$\int_{V_\Sigma} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dv = \int_{\Sigma} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right)dS \quad (1.36)$$

Aceste formule sunt utile la integrarea ecuației Poisson-Laplace, la deducerea formulei celor trei potențiale.

### 1.3. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN DIFERITE REGIMURI ALE ELECTRODINAMICII MACROSCOPICE

#### 1.3.1. Regimul nestaționar

Regimul nestaționar corespunde cazului în care mărimile de stare ale câmpului electromagnetic sunt variabile în timp, adică:  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ . Interdependența reciprocă dintre aceste mărimi este dată de ecuațiile câmpului electromagnetic. Completitudinea acestui sistem de ecuații, coerența și necontradicția lui pot fi analizate cu ajutorul teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori. În acord cu această teoremă [M1], sistemul complet, coerent și necontradictoriu al ecuațiilor câmpului electromagnetic în medii neliniare, omogene și izotrope (caz frecvent în aplicații) este constituit din următoarele nouă ecuații valabile în fiecare punct și în orice moment:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.37)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v \quad (1.38)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_t \quad (1.39)$$

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t(\vec{E}) \quad (1.40)$$

pentru intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și inducția electrică  $\vec{D}$  și:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.42)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_t) \quad (1.43)$$

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H}) \quad (1.44)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}) \quad (1.45)$$

pentru intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  și inducția magnetică  $\vec{B}$ . Ecuațiile (1.40), (1.44), (1.45) reprezintă cele trei legi de material, respectiv: legea polarizației electrice temporare, legea magnetizației temporare și legea conducerii electrice. Referitor la independența

ecuațiilor (1.37)-(1.45) se demonstrează [M1], [S3] că până la o constantă aditivă independentă de timp, din legea inducției electromagnetice (1.37) rezultă legea fluxului magnetic (1.42). Prin excluderea ecuației (1.42) rămân opt ecuații independente (șapte vectoriale și una scalară) care conduc la 22 de ecuații scalare cu 22 de necunoscute, din care trei pentru fiecare din vectorii  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{P}_t, \vec{M}_t, \vec{J}$  și una pentru scalarul  $\rho_v$ .

În medii liniare, omogene și izotrope, presupunând cunoscute în fiecare punct permitivitatea electrică  $\epsilon(\vec{r})$ , permeabilitatea magnetică  $\mu(\vec{r})$  și conductivitatea  $\sigma(\vec{r})$ , legile de material nu mai sunt independente de celelalte legi, astfel încât sistemul complet, coerent și necontradictoriu al ecuațiilor câmpului electromagnetic în regim nestaționar se reduce la următoarele șase ecuații:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1.46)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho_v \quad (1.47)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (1.48)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\sigma}\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (1.49)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.50)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (1.51)$$

Referitor la independența ecuațiilor (1.46) - (1.51) este valabilă observația făcută la sistemul anterior. Sistemul (1.46) - (1.51) cuprinde patru ecuații vectoriale și două scalare. Pentru un domeniu tridimensional rezultă de aici 14 ecuații scalare cu 14 necunoscute. Pentru medii imobile și cu valori constante pe subdomenii ale mărimilor de material, sistemul de ecuații (1.46) - (1.51) reprezintă ecuațiile lui Maxwell în regim nestaționar. În acest regim (fig. 1.2) câmpul electric este strâns legat de cel magnetic (caracterizat de vectorii  $\vec{H}$  și  $\vec{B}$ ) și anume: variația în timp a câmpului electric produce câmp magnetic (1.49). Din cauza acestei interdependențe reciproce nu este posibilă determinarea vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  distinct de vectorii  $\vec{H}$  și  $\vec{B}$ . În acest regim mărimile de stare  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$  satisfac o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi de tip hiperbolic care descrie un fenomen de propagare. Regimul nestaționar al câmpului electromagnetic intervine în studiul radiației și propagării undelor electromagnetice.

### Ecuatiile diferențiale ale mărimilor de stare

Considerând cazul simplu al unui mediu fără sarcină electrică liberă ( $\rho_v = 0$ ) se urmărește separarea mărimilor de stare  $\bar{E}$  și  $\bar{H}$  din ecuațiile lui Maxwell (1.46) - (1.51).

Pentru aceasta se aplică operatorul “rot” ecuației (1.46) și operatorului “ $\frac{\partial}{\partial t}$ ” ecuației (1.49):

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{E}) = -\text{rot}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \quad (1.52)$$

$$\text{rot}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} = \sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2\bar{D}}{\partial t^2} \quad (1.53)$$

S-a presupus în (1.53) că funcția  $\bar{H}$  este continuă și de două ori derivabilă astfel încât se poate inversa ordinea de derivare în timp și în spațiu. Ținând cont și de celelalte ecuații ale sistemului (1.46) - (1.51) se pot elimina mărimile de stare ale câmpului magnetic din (1.52) - (1.53) și se obține:

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{E}) = -\mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \quad (1.54)$$

După transformarea membrului stâng se obține ecuația diferențială pe care o satisface  $\bar{E}$ , sub forma:

$$\Delta\bar{E} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.55)$$

Procedând în mod similar, pentru vectorul  $\bar{H}$  se obține:

$$\Delta\bar{H} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.56)$$

Trebuie observat că aceste două ecuații nu sunt independente deoarece între  $\bar{E}$  și  $\bar{H}$  există o strânsă legătură dată de (1.46) și (1.49). Dacă mediul este un dielectric perfect ( $\sigma = 0$ ), ecuațiile (1.55) - (1.56) devin:

$$\Delta\bar{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.57)$$

$$\Delta\bar{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.58)$$

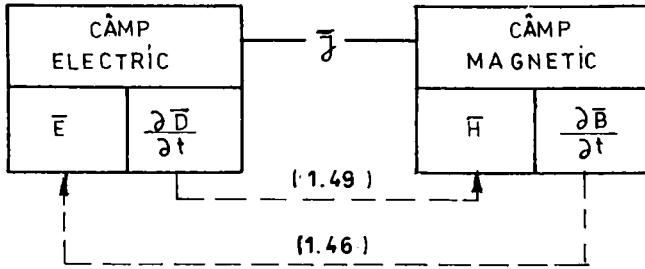


Fig. 1.2

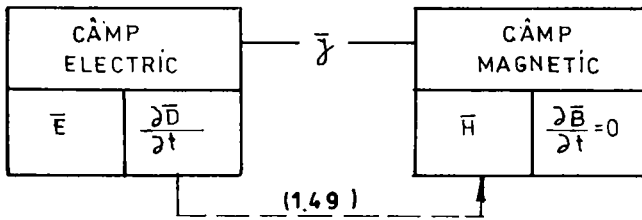


Fig. 1.3

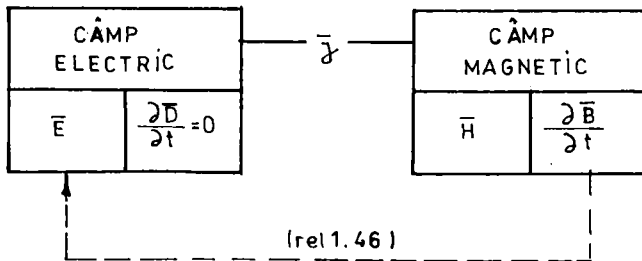


Fig. 1.4

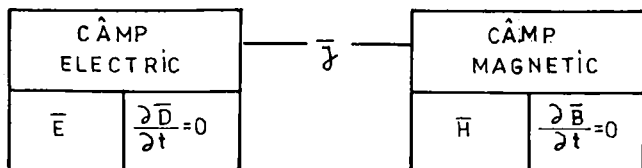


Fig. 1.5

Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  satisfac deci, fiecare, același tip de ecuație: ecuația vectorială a undelor. În consecință, toate componentele scalare ale vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  vor satisface ecuația scalară a undelor. Forma particulară a ecuației undelor depinde de sistemul de coordonate în care se consideră laplaceanul.

### Ecuțiile diferențiale ale potențialelor

Pentru calculul câmpului electromagnetic, trebuie determinate șase mărimi (componentele scalare ale vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  din relațiile 1.57,1.58). Problema poate fi redusă la calculul a patru mărimi scalare prin introducerea potențialelor câmpului, operație echivalentă cu o schimbare de variabile în problema matematică. Astfel, câmpul electromagnetic va fi determinat indirect, prin intermediul potențialelor sale :  $\vec{A}$ - potențialul vector și V-potențialul scalar. În acest regim cele două potențiale sunt denumite electrodinamice. Un alt avantaj al introducerii acestor potențiale (mărimi auxiliare) ar fi acela că permit mai ușor stabilirea unor condiții inițiale și la limită și în plus sunt mai apropiate de acele mărimi care pot fi măsurate direct. Urmărim în acest paragraf să obținem ecuațiile pe care le satisfac aceste noi variabile ale câmpului electromagnetic în regim nestaționar.

Se consideră cazul mediilor liniare, omogene și izotrope pentru care sunt valabile ecuațiile lui Maxwell (1.46-1.51). Din ecuația (1.50) rezultă:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.59)$$

Înlocuind (1.59) în (1.46) se obține:

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (1.60)$$

de unde:

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}V \quad (1.61)$$

și deci:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (1.62)$$

Relațiile (1.59) și (1.62) asigură trecerea de la variabilele  $\vec{E}, \vec{B}$ , la variabilele  $\vec{A}, V$ , sau invers. Pentru determinarea ecuațiilor potențialelor se folosesc celelalte ecuații rămase din sistemul (1.46-1.51). Astfel, înlocuind (1.59) și (1.62) în (1.49) rezultă succesiv:

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu\vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(-\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \quad (1.63)$$

$$\Delta\vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad}(\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) = -\mu\vec{J} \quad (1.64)$$

Potențialul electrodinamic vector  $\vec{A}$  este un câmp vectorial cărui i se cunoaște rotorul (rel. 1.59). Conform teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori, este necesară și precizarea, în fiecare punct, a divergenței vectorului  $\vec{A}$ . Există acum posibilitatea stabilirii avantajoase a divergenței lui  $\vec{A}$ , din rel. (1.64). Alegând:

$$\text{div}\vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.65)$$

se obține în plus și o simplificare a ecuației (1.64) care devine:

$$\Delta\vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \quad (1.66)$$

Relația (1.65) se mai numește relație de etalonare. În rel. (1.66) vectorul  $\vec{J}$  este dat și reprezintă sursa câmpului vectorial  $\vec{A}$ .

Pentru stabilirea ecuației potențialului electrodinamic scalar  $V$  se folosește ecuația rămasă (1.47) în care se înlocuiește (1.62) și se obține succesiv:

$$\text{div}(-\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.67)$$

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\vec{A}) = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.68)$$

$$\Delta V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.69)$$

în care  $\rho_v$  este dat și reprezintă sursa câmpului scalar  $V$ .

Dacă mediul este un dielectric perfect ( $\sigma=0$  și deci  $\vec{J}=0$ ) și în plus nu conține sarcină electrică liberă ( $\rho_v=0$ ) ecuațiile (1.66) și (1.69) obțin forma:

$$\Delta \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.70)$$

$$\Delta V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (1.71)$$

Relațiile (1.70),(1.71) și (1.57), (1.58) reprezintă același tip de ecuație: ecuația undelor. În același mediu, deci, potențialele electrodinamice  $\bar{A}$  și  $V$  satisfac același tip de ecuație ca și mărimile de stare  $\bar{E}$  și  $\bar{H}$  ale câmpului electromagnetic. Ecuațiile (1.70),(1.71) conduc la patru ecuații scalare (trei pentru vectorul  $\bar{A}$  și una pentru scalarul  $V$ ). În prima etapă se determină potențialele  $\bar{A}$  și  $V$  ( din rel. 1.70 și 1.71) și apoi, în etapa a doua, se determină mărimile de stare  $\bar{E}$  și  $\bar{H}$  (din 1.62, 1.59, 1.51).

### 1.3.2. Regimul cvasistaționar

În regimul nestaționar (general variabil) al câmpului electromagnetic există o dublă legătură de dependență între câmpul electric și câmpul magnetic. Dacă se neglijează una dintre aceste două dependențe se obține regimul cvasistaționar al câmpului electromagnetic. În consecință există două tipuri de regimuri cvasistaționare:

Regimul cvasistaționar amagnetic obținut prin neglijearea dependenței dintre  $\text{rot } \bar{E}$  și  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  (figura 1.3). În acest caz legea inducției electromagnetice are forma  $\text{rot } \bar{E} = 0$ . Variația în timp a câmpului magnetic nu mai produce acum câmp electric. Acest regim interesează în studiul fenomenelor din dielectricii cu pierderi.

Regimul cvasistaționar de tip magnetic obținut prin neglijearea dependenței dintre  $\text{rot } \bar{H}$  și  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  (fig. 1.4). În acest caz legea circuitului magnetic are forma :  $\text{rot } \bar{H} = \bar{J}$  Variația în timp a câmpului electric nu mai produce câmp magnetic, în acest caz. Termenul  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  este denumit densitatea curentului de deplasare (noțiune introdusă de Maxwell ) și este neglijabil în regim cvasistaționar de tip magnetic față de densitatea curentului de conducție:

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \ll \bar{J} \quad (1.72)$$



Regimul cvasistaționar de tip magnetic interesează în studiul câmpului magnetic din mașinile și aparatele electrice și în special în studiul efectelor care însoțesc curenții variabili în conductoare masive. În regim cvasistaționar nu mai există o dublă legătură între câmpul electric și cel magnetic și în consecință dispare posibilitatea existenței câmpului sub formă de unde electromagnetice.

Regimul cvasistaționar permite analiza prioritară a aspectului electric sau magnetic funcție de problema practică. În cazul mașinilor electrice studiul câmpului magnetic are o importanță deosebită și din acest motiv, în continuare, va fi analizat doar regimul cvasistaționar de tip magnetic.

### Ecuatiile diferențiale ale mărimilor de stare

În regim cvasistaționar de tip magnetic urmărim doar mărimile de stare  $\bar{H}$  și  $\bar{B}$  ale câmpului magnetic. Din sistemul (1.46-1.51) se rețin ecuațiile (se neglijează curentul de deplasare):

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1.73)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} \quad (1.74)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (1.75)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (1.76)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (1.77)$$

Aplicând operatorul “rot” relației (1.74) și ținând seama de celelalte relații se obține:

$$\Delta \bar{H} = \mu \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (1.78)$$

Ecuatia este valabilă în medii liniare, omogene și izotrope și descrie un fenomen de difuzie. Este o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul doi de tip parabolic și permite, în principal, studiul câmpului magnetic în conductoare masive.

## Ecuatiile diferențiale ale potențialelor

Ecuatiile (1.73), (1.75) permit introducerea potențialului vector  $\bar{A}$  și a potențialului scalar  $V$  sub aceeași formă (similar regimului nestaționar):

$$\bar{B} = \text{rot}\bar{A} \quad (1.79)$$

$$\bar{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (1.80)$$

În regim cvasistaționar de tip magnetic se reține doar potențialul  $\bar{A}$  care în acest caz este denumit potențial magnetic vector  $\bar{A}$ . În consecință potențialul  $V$  este denumit potențial electric scalar. Înlocuind aceste potențiale în ecuația nefolosită încă (1.74) se obține succesiv:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}\bar{B} = \sigma \left( -\text{grad}V - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \right) \quad (1.81)$$

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{A}) = -\text{grad}\mu\sigma V - \mu\sigma \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (1.82)$$

$$\text{grad}(\text{div}\bar{A} + \mu\sigma V) - \Delta\bar{A} = -\mu\sigma \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (1.83)$$

În acest moment este avantajos să fixăm condiția de etalonare:

$$\text{div}\bar{A} = -\mu\sigma V \quad (1.84)$$

care simplifică forma ecuației (1.83), aceasta devenind:

$$\Delta\bar{A} = \mu\sigma \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (1.85)$$

Ecuția este de același tip cu (1.78) descriind același fenomen de difuzie. În regim cvasistaționar de tip magnetic există o posibilitate remarcabilă de a introduce potențialele câmpului și sub altă formă [M2]. Din ecuația (1,74) rezultă succesiv:

$$\text{rot}\bar{H} = \bar{J} \quad (1.86)$$

$$\text{div}(\text{rot}\bar{H}) = \text{div}\bar{J} \quad (1.87)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = 0 \quad (1.88)$$

Ultima relație permite introducerea unui nou tip de potențial: potențialul electric vector  $\bar{\mathbf{T}}$  astfel:

$$\bar{\mathbf{J}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{T}} \quad (1.89)$$

Deoarece  $\bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{T}}$  rezultă:

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{T}} - \operatorname{grad} V_m \quad (1.90)$$

unde  $V_m$  este potențialul magnetic scalar.

Folosind relația (1.73) se poate obține relația pe care o satisface potențialul electric vector  $\bar{\mathbf{T}}$  :

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (1.91)$$

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{T}} - \operatorname{grad} V_m) \quad (1.92)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{\mathbf{T}}) = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} V_m - \bar{\mathbf{T}}) \quad (1.93)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} - \mu \sigma \frac{\partial V_m}{\partial t}) - \Delta \bar{\mathbf{T}} = \mu \sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial t} \quad (1.94)$$

Pentru a asigura unicitatea vectorului  $\bar{\mathbf{T}}$  se impune condiția de etalonare convenabilă:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} = \mu \sigma \frac{\partial V_m}{\partial t} \quad (1.95)$$

care reduce ecuația (1.94) la forma:

$$\Delta \bar{\mathbf{T}} = \mu \sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial t} \quad (1.96)$$

Ecuația (1.96) descrie tot un fenomen de difuzie fiind de același tip cu (1.85) și (1.78).

### 1.3.3. Regimul staționar

În regimul staționar, toate derivatele în raport cu timpul sunt nule ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ). Ecuțiile generale ale lui Maxwell (1.46-1.51) pot fi decuplate pentru a studia separat câmpul electric și câmpul magnetic (fig. 1.5). Legătura dintre câmpul electric și cel magnetic se menține doar prin intermediul densității curentului de conducție  $\vec{J}$  care apare și în ecuațiile câmpului electric și în cele ale câmpului magnetic. Se disting astfel două tipuri de regimuri staționare:

Regimul electric (sau electrocinetic) staționar se întâlnește în studiul curentului continuu în conductoare masive în repaus.

Regimul magnetic staționar al câmpului electromagnetic corespunde fenomenelor magnetice produse de curentul continuu.

#### Ecuțiile diferențiale ale mărimilor de stare

Ecuțiile principale ale regimului staționar se reduc la următoarele:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.97)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_v \quad (1.98)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (1.99)$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (1.100)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.101)$$

În cazul regimului electric staționar se rețin ecuațiile:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.102)$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (1.103)$$

Pentru medii liniare omogene și izotrope,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  iar ecuațiile devin:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.104)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1.105)$$

Ecuțiile câmpului electric în regim electrocinetic (1.104 și 1.105) nu pot fi restrânse într-o singură ecuație diferențială. Conform teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori aceste ultime ecuații reprezintă un câmp armonic și vor fi rezolvate prin introducerea potențialului scalar. Regimul electrocinetic este prezent în cazul curentului continuu în medii conductoare

masive. În aceste medii conductoare densitatea de volum a sarcinii este nulă ( $\rho_v=0$ ) și deci  $\text{div } \vec{D} = 0$ . Se poate constata o analogie remarcabilă între câmpul de vectori  $\vec{J}$  și câmpul de vectori  $\vec{D}$ .

În cazul regimului magnetic staționar se rețin ecuațiile:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (1.106)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.107)$$

Pentru medii liniare, omogene și izotrope,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  astfel încât:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (1.108)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad (1.109)$$

Ecuatiile (1.108), (1.109), conform teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori, reprezintă un câmp solenoidal. Aplicând operatorul "rot" ecuației (1.108) și ținând seama de (1.109) se obține:

$$\Delta \vec{H} = -\text{rot} \vec{J} \quad (1.110)$$

Vectorul  $\vec{J}$  reprezintă sursa câmpului  $\vec{H}$  și deci este cunoscut în fiecare punct, încât se poate calcula membrul drept al ecuației (1.110) care astfel reprezintă o ecuație diferențială de tip Poisson.

### Ecuatiile diferențiale ale potențialelor

În regim electrocinetic staționar, din ecuația (1.102) se poate scrie:

$$\vec{E} = -\text{grad} V \quad (1.111)$$

unde  $V$  este potențialul scalar, denumit aici potențial electrocinetic scalar. Înlocuind (1.111) în (1.103), ținând seama că  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , se obține ecuația diferențială a potențialului pentru medii liniare, omogene și izotrope:

$$\Delta V = 0 \quad (1.112)$$

Relația (1.112) reprezintă o ecuație cu derivate parțiale de tip eliptic (ecuația Laplace) și descrie un fenomen de difuzie staționară a câmpului electromagnetic.

În cazul regimului magnetic staționar, din ecuația (1.107) se scrie:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.113)$$

unde  $\vec{A}$  este potențialul magnetic vector al câmpului magnetic în acest regim. Înlocuind (1.113) în (1.106), pentru  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  se obține succesiv:

$$\text{rot}\vec{B} = \mu\vec{J} \quad (1.114)$$

$$\text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} \quad (1.115)$$

Ecuția se simplifică dacă se impune condiția de etalonare:

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (1.116)$$

și devine

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (1.117)$$

Ecuția (1.117) este cu derivate parțiale de tip eliptic (ecuația Poisson) descriind fenomenul de difuzie staționară a câmpului.

Potențialul electric vector  $\vec{T}$  și potențialul magnetic scalar  $V_m$  introduse conform relațiilor (1.89), (1.90) satisfac, în acest regim, ecuațiile de tip Poisson respectiv Laplace (același tip de ecuații diferențiale pe care le satisfac  $\vec{A}$  și  $V$ ).

### 1.3.4. Regimul static

În regim static, toate dependențele dintre mărimile electrice și cele magnetice sunt nule :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ . Ecuțiile care reprezintă legile generale ale lui Maxwell (1.46 - 1.51) se descompun în două grupe de ecuații complet independente.

Prima grupă de ecuații conține numai mărimile de stare electrică ( $\vec{E}, \vec{D}$ ) a câmpului:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \quad (1.118)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho_v \quad (1.119)$$

și sunt analizate în cadrul regimului electrostatic. Ele descriu câmpul electrostatic care este un câmp potențial conform teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori. Relația (1.118) arată că  $\vec{E}$  provine dintr-un potențial scalar  $V$ :

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (1.120)$$

Ținând seama că  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , înlocuind (1.120) în (1.119) se obține ecuația potențialului electric scalar  $V$ :

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (1.121)$$

În regim electrostatic, potențialul electric scalar satisface o ecuație cu derivate parțiale de tip eliptic (Poisson).

A doua grupă de ecuații conține numai mărimile de stare magnetică ( $\vec{H}, \vec{B}$ ) a câmpului :

$$\text{rot} \vec{H} = 0 \quad (1.122)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.123)$$

analizate în cadrul regimului magnetostatic. Ele descriu câmpul magnetostatic care derivă dintr-un potențial magnetic scalar  $V_m$  introdus cu ajutorul relației (1.122):

$$\vec{H} = -\text{grad} V_m \quad (1.124)$$

Utilizând și cealaltă ecuație (1.123), în cazul  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  se obține ecuația potențialului magnetic  $V_m$ :

$$\Delta V_m = 0 \quad (1.125)$$

În regim magnetostatic, potențialul magnetic scalar satisface o ecuație cu derivate parțiale de tip eliptic (Laplace).

## Concluzii

În problemele de calcul al câmpului electromagnetic, în medii imobile, liniare, omogene, izotrope și fără magnetizație permanentă, fără polarizație permanentă și fără câmp imprimat, forma de ecuație diferențială care apare în cel mai general regim electrodinamic este cea cu derivate parțiale de ordinul doi.

Forma generală a unei astfel de ecuații este:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c \cdot u = f \quad (1.126)$$

Tabel 1

Regimul electrodinamic	Forma ecuației în întinse	Mărimi care verifică ecuația	Tipul ecuației	Legătura cu potențialele
Regim nestationar	$\Delta \bar{U} - \mu \epsilon \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0$	intensitățile $\bar{E}, \bar{H}$ inducțiile $\bar{D}, \bar{B}$ potențialele $\bar{A}, V$	hiperbolic	$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ $\bar{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$
Regimul cvasistationar de tip magnetic	$\Delta \bar{U} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0$	$\bar{H}, \bar{B}, \bar{J}$ potențialele $\bar{A}, \bar{T}$	parabolic	$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ $\bar{J} = \text{rot } \bar{T}$ $\bar{H} = \bar{T} - \text{grad } V_m$
Regimul stationar	$\Delta \bar{U} = \bar{w}$	$\bar{B}, \bar{H}, \bar{A}, \bar{T}$	eliptic (Poisson)	$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ $\bar{J} = \text{rot } \bar{T}$ $\bar{H} = \bar{T} - \text{grad } V_m$ $\bar{E} = -\text{grad } V$
	$\Delta \varphi = 0$	$V, V_m$		
Regimul static	$\Delta \varphi = h$	$V$	eliptic (Poisson)	$\bar{E} = -\text{grad } V$
	$\Delta \varphi = 0$	$V_m$	eliptic (Laplace)	$\bar{H} = -\text{grad } V_m$



în care  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este funcția căutată, iar  $a_i, b, c, f$  sunt în general funcții de  $n$ -variabile, caz în care ecuația se numește cu coeficienți variabili, sau constante, în ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți.

Dacă funcția  $u$  este numai de două variabile:  $u(x_1, x_2)$  sau  $u(x, y)$  sau  $u(x, t)$  ecuația (1.126) devine (pentru cazul variabilelor  $x$  și  $t$ ):

$$\left( a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot u = f(x, t) \quad (1.127)$$

Ecuația (1.127) se numește neomogenă dacă  $f \neq 0$  și omogenă dacă  $f = 0$ .

Se definește discriminantul ecuației (1.127) astfel:

$$\delta = a_2^2 - 4a_1 a_3 \quad (1.128)$$

Astfel, dacă:

$\delta > 0$ , ecuația se numește de tip hiperbolic;

$\delta = 0$ , ecuația se numește de tip parabolic;

$\delta < 0$ , ecuația este de tip eliptic.

Analizând din acest punct de vedere ecuațiile diferențiale întâlnite în studiul câmpului electromagnetic, se constată prezența celor trei tipuri de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi : hiperbolice, parabolice și eliptice, care trebuie rezolvate pentru determinarea mărimilor de stare a câmpului electromagnetic.

Sinteza acestor concluzii poate fi urmărită și în tabelul 1. Scopul acestui paragraf a fost acela de a conduce problema determinării câmpului electromagnetic până în sfera matematicii.

În continuare se prezintă câteva metode matematice (analitice și numerice) de rezolvare a acestor ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi.

În general, soluțiile problemelor de câmp electromagnetic sunt funcții de toate coordonatele spațiale și problemele se numesc tridimensionale. Dacă soluțiile depind numai de două, respectiv numai de o coordonată spațială, problemele se numesc bidimensionale, respectiv unidimensionale.

Există două cazuri particulare remarcabile de probleme bidimensionale: probleme plan-paralele și plan-meridiane.

## 1.4. METODE ANALITICE DE CALCUL AL CÂMPURILOR

În cazul problemelor de calcul al câmpurilor electromagnetice se ajunge la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, a cărei soluție, uneori poate fi obținută și analitic, adică în termeni finiți, sub forma unor expresii conținând funcții elementare sau speciale cunoscute. Soluția analitică reprezintă soluția exactă a ecuației diferențiale dar, în general, această soluție nu poate fi obținută decât în cazul unor probleme simplificate (probleme model). Studiul analitic al unei probleme model, alese corespunzător, poate permite stabilirea unor concluzii cu privire la comportarea soluției problemei nesimplificate. Soluția analitică permite interpretarea calitativă a rezultatelor și este întotdeauna preferabilă, dacă poate fi obținută.

Pentru studiul problemelor de câmp electromagnetic se mai folosesc următoarele metode: metode grafo-analitice în care se aproximează forma liniilor de câmp prin segmente de dreaptă și arce de cerc, metode grafice, în care se trasează aproximativ spectrele liniilor de câmp și echipotențiale, metode analogice care utilizează reprezentări ale câmpului electromagnetic pe modelele unor câmpuri de altă natură fizică.

În continuare se prezintă câteva metode analitice utilizate în studiul și calculul câmpului magnetic din mașinile electrice.

### 1.4.1. Integrarea directă a ecuației lui Poisson

Se consideră o funcție scalară  $\varphi$  de clasă  $c^2$  pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^3$  și  $V_\Sigma \subset D$  un subdomeniu mărginit de suprafața închisă  $\Sigma$ , având normala  $\vec{n}$  orientată spre exterior și continuă pe porțiuni [N3]. În domeniu  $V_\Sigma$  se cunoaște în fiecare punct (prin funcția dată  $h$ ) valoarea laplaceanului:

$$\Delta\varphi = h \tag{1.129}$$

Funcția  $\varphi$ , de cele mai multe ori este o funcție potențial dar poate fi și o componentă scalară a unei funcții vectoriale. O ecuație vectorială de tip Poisson se descompune, în spațiul tridimensional în trei ecuații scalare de tip Poisson (1.129).

Se pune problema determinării funcției  $\varphi(x,y,z)$  care satisface ecuația (1.129) în condițiile de mai sus. Problema se poate rezolva folosind a doua formulă a lui Green (rel.

1.36) în care funcția  $\psi$  se înlocuiește cu o funcție armonică cunoscută  $\psi = \frac{1}{r}$ . În acest caz  $\Delta\psi = 0$  și relația (1.36) devine:

$$\int_{V_{\Sigma}} \frac{1}{r} \Delta\varphi dv = \oint_{\Sigma} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) ds \quad (1.130)$$

Se precizează (figura 1.6) că  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$  este distanța dintre punctul fix  $P(x, y, z)$  în care se calculează potențialul  $\varphi$  și punctul mobil  $M(\xi, \eta, \zeta)$ , variabil în tot domeniul  $V_{\Sigma}$ . Trebuie observat că, dacă  $P \rightarrow M$ ,  $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$  și deci punctul  $P$  trebuie exclus din domeniul  $V_{\Sigma}$  înconjurându-l cu o mică sferă de suprafață  $S_0$  și volum  $v_0$ . Astfel, în rel. (1.130), integrala de volum se efectuează pe volumul  $V_{\Sigma} - v_0$  în care funcția  $\frac{1}{r}$  este peste tot definită, dar integrala de suprafață se extinde și asupra lui  $S_0$ .

Se demonstrează [S1] că, dacă raza sferei tinde la zero:

$$\oint_{S_0} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS_0 = 4\pi\varphi(x, y, z) \quad (1.131)$$

$$\int_{v_0} \frac{1}{r} \Delta\varphi dv_0 = 0 \quad (1.132)$$

Cu aceste precizări, relația (1.130) devine:

$$\int_{V_{\Sigma}} \frac{\Delta\varphi}{r} dv = \oint_{\Sigma} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS + 4\pi\varphi(x, y, z) \quad (1.133)$$

de unde rezultă:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{\Delta\varphi}{r} dv \quad (1.134)$$

Pentru a evidenția rolul punctelor  $P$  și  $M$  (fig 1.6) se pune rel. (1.134) și sub forma:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r(P, M)} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M} - \varphi(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{r(P, M)} \right) dS_M - \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \frac{h(M)}{r(P, M)} dv_M \quad (1.135)$$

Relația 1.134 (sau 1.135) reprezintă soluția ecuației (1.129) și arată că valoarea unei funcții scalare, într-un punct  $P$ , se poate calcula dacă se cunosc: valoarea expresiei  $\Delta\varphi$  (laplaceanul funcției) în toate punctele domeniului  $V_{\Sigma}$ , valoarea funcției  $\varphi$  și valoarea  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  în fiecare punct al frontierei  $\Sigma$ .

Relația (1.134) se mai numește formula celor trei potențiale. Ea leagă într-o relație valorile:

$\varphi$  - în domeniu ,  $\varphi$  - pe frontieră,  $\Delta\varphi$  - în domeniu,  $\frac{d\varphi}{dn}$  pe frontieră. Pentru aceeași funcție  $\varphi$ , aceste valori sunt bine determinate într-un caz concret. Astfel,  $\varphi$  și  $\frac{d\varphi}{dn}$  nu pot fi arbitrare pe frontieră și deci rel. (1.134) nu poate servi la determinarea funcției  $\varphi$  într-un punct al domeniului deoarece, necunoscând funcția  $\varphi(x,y,z)$ , nu se pot preciza valorile corecte  $\varphi$  și  $\frac{d\varphi}{dn}$  pe frontieră. Ne aflăm în fața unui veritabil cerc vicios.

### 1.4.2 Metoda funcțiilor Green

Metoda funcțiilor Green oferă posibilitatea rezolvării analitice definitive a ecuației Poisson (1.129) pentru domenii simple, cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet sau Neumann.

În acest sens se scrie a doua formulă a lui Green (1.36) pentru funcția  $\varphi$  și o funcție  $g$  armonică în domeniul  $V_\Sigma$  ( $\Delta g = 0$ ):

$$\int_{V_\Sigma} g \Delta \varphi dv = \int_{\Sigma} \left( g \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (1.136)$$

Se adună (1.136) la (1.134) se grupează termenii și se obține:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ \left( g + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \left( \frac{\partial g}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{V_\Sigma} \left( g + \frac{1}{r} \right) \Delta \varphi dv \quad (1.137)$$

În integrala de suprafață există doi termeni : unul care conține pe  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  și altul care conține pe  $\varphi$ . Metoda Green constă în determinarea funcției  $g$  astfel încât să se anuleze unul din cei doi termeni ai integralei de suprafață. În problema lui Dirichlet pentru ecuația Poisson se urmărește anularea termenului care conține pe  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  iar în problema lui Neumann, anularea termenului care conține pe  $\varphi$ .

Se consideră în continuare condiții de tip Dirichlet alese pe frontiera  $\Sigma$  arbitrar (nu există altă posibilitate):

$$\varphi(P) = f(P) \quad , \quad P \in \Sigma \quad (1.138)$$

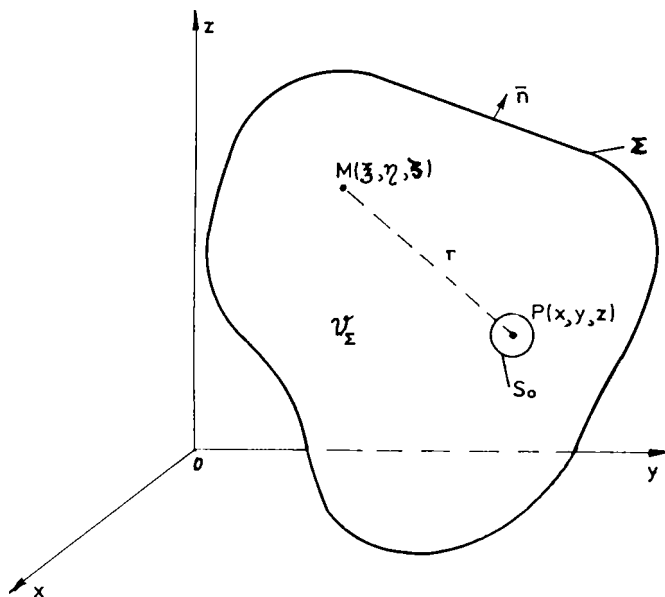


Fig. 1.6

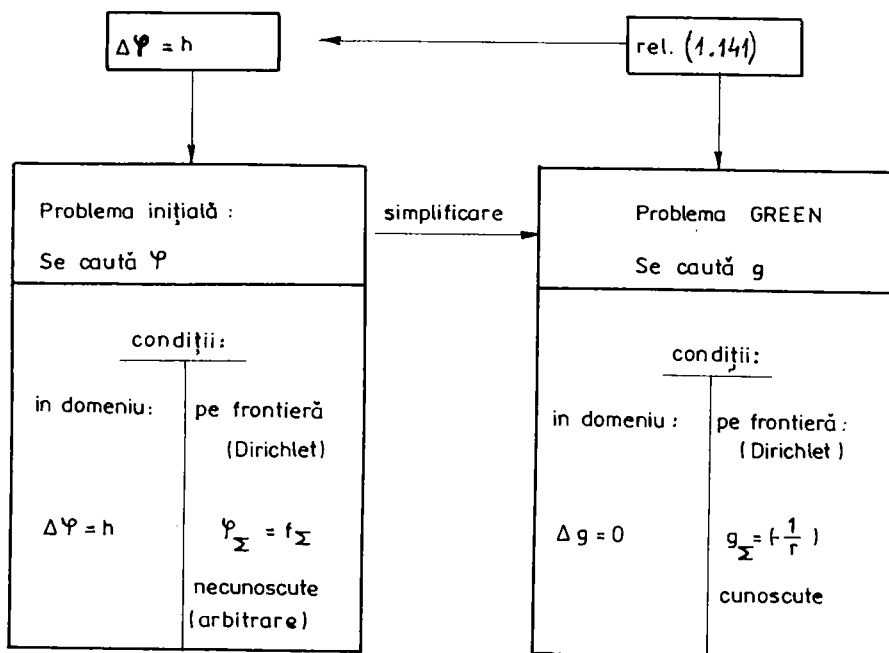


Fig. 1.7

Astfel, pentru anularea termenului cu  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  se impune pentru funcția  $g$  condiția:

$$g + \frac{1}{r} = 0 \quad (1.139)$$

de unde rezultă că, pe frontiera  $\Sigma$ , este necesar ca funcția  $g$  să fie:

$$g|_{\Sigma} = -\frac{1}{r} \quad (1.140)$$

În aceste condiții, relația (1.137) devine:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} f(P) \left( \frac{\partial g}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\Sigma}} \left( g + \frac{1}{r} \right) \Delta \varphi dv \quad (1.141)$$

Problema nu este încă rezolvată deoarece nu se cunoaște funcția  $g$ .

Problema determinării lui  $g$  este însă mult mai simplă decât problema inițială a determinării funcției  $\varphi$ . În probleme concrete domeniul  $V_{\Sigma}$  și frontiera  $\Sigma$  sunt cunoscute și deci condiția la limită (1.140) este bine determinată. O schemă sintetică este prezentată în figura 1.7. În literatură se întâlnesc construite funcțiile Green pentru diverse domenii simple: semispațiu, cerc, sferă [T1,S1], dreptunghi [M1], probleme cu simetrie plan paralelă [N4].

În același mod problema poate fi pusă și în cazul condițiilor la limită de tip Neumann. Se urmărește determinarea funcției  $g$  astfel încât să dispară (în integrala de suprafață) termenul care-l conține pe  $\varphi$ , deci:

$$\left( \frac{\partial g_N}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right)_{\Sigma} = 0 \quad (1.142)$$

unde indicele  $N$  marchează pe  $g$  în problema Neumann.

Cum soluția problemei Neumann se determină până la o constantă, este suficient ca, pe frontiera  $\Sigma$ , condiția să fie:

$$\left( \frac{\partial g_N}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right)_{\Sigma} = c \quad (1.143)$$

sau:

$$\left. \frac{\partial g_N}{\partial n} \right|_{\Sigma} = c - \left( \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right)_{\Sigma} \quad (1.144)$$

Pentru probleme concrete (cu frontiere simple, cunoscute), membrul drept al relației (1.144) este cunoscut și relația poate servi la determinarea (până la o constantă) a lui  $g_N$  pe frontieră.

Metoda funcțiilor Green se aplică (dacă domeniul este simplu și permite) ecuațiilor Poisson -Laplace.

Într-un context mai general se integrează și ecuațiile cu derivate parțiale de tip hiperbolic (ecuația scalară a undelor) și parabolic (ecuația difuziei) utilizând metoda Kirchhoff care reprezintă o extindere a metodei utilizate anterior la integrarea ecuației Poisson. Se obțin [N1,N2] relații generale de tipul (1.134) în care intervin potențiale retardate.

### 1.4.3. Metoda separării variabilelor

Metoda separării variabilelor este una dintre cele mai cunoscute metode de rezolvare a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Ea nu este generală dar permite obținerea unor soluții în diferite cazuri interesante în practică. Metoda constă în a prezenta soluția ecuației în forma unui produs de funcții, fiecare funcție depinzând de câte o singură variabilă a sistemului de coordonate folosit. Metoda separării variabilelor permite astfel reducerea integrării ecuației cu derivate parțiale la rezolvarea unor ecuații diferențiale ordinare.

Această metodă (metoda Fourier) se aplică unei clase largi de ecuații cu derivate parțiale scalare și vectoriale de tip eliptic, parabolic și hiperbolic [T1,T2,V1,M1] .

Soluțiile ecuațiilor Poisson - Helmholtz - Laplace cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet sunt unice iar cele cu condiții de tip Neumann sunt de asemenea unice până la o constantă aditivă.

Soluția generală a ecuației lui Poisson:

$$\Delta \varphi(\bar{r}) = h(\bar{r}) \quad (1.145)$$

este:

$$\varphi(\bar{r}) = \varphi_p(\bar{r}) + \varphi_o(\bar{r}) \quad (1.146)$$

unde,  $\varphi_p(\bar{r})$  este soluția particulară a ecuației neomogene (Poisson), iar  $\varphi_o(\bar{r})$  soluția generală a ecuației omogene (Laplace):

$$\Delta\varphi_0(\bar{r}) = 0 \quad (1.147)$$

Într-un sistem de coordonate curbiliniu triortogonal;  $Ox_1x_2x_3$ , ecuația lui Laplace devine:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (1.148)$$

în care  $h_1, h_2, h_3$  sunt parametrii lui Lamé, funcții de coordonatele  $x_1, x_2, x_3$ . În metoda separării variabilelor, funcția necunoscută ( $\varphi$ ) se caută sub forma unei serii sau integrale de produse a trei funcții  $X_k(x_k)$ ,  $k=1,2,3$ , adică:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2) \cdot X_3(x_3) \quad (1.149)$$

care, introdusă în ecuația (1.148) și împărțită cu  $X_1 X_2 X_3$  se obține:

$$\frac{1}{X_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{X_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{X_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (1.150)$$

În toate sistemele de coordonate curbiliniu triortogonale (aproximativ unsprezece) fiecare dintre termeni depinde numai de una dintre coordonate. Astfel, rel. (1.150) nu poate fi posibilă decât în cazul în care fiecare termen este o constantă:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) &= \lambda_1^2 \\ \frac{1}{X_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) &= \lambda_2^2 \\ \frac{1}{X_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right) &= \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (1.151)$$

în care constantele  $\lambda_k$  ( $k=1,2,3$ ) satisfac relația de dependență:

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 = 0 \quad (1.152)$$

Fiecare funcție  $X_k(x_k)$ ,  $k=1,2,3$  este soluție a unei ecuații diferențiale cu derivate ordinare independente, de forma:

$$\frac{d}{dx_k} \left[ f_k(x_k) \frac{dX_k}{dx_k} \right] + [g_k(x_k) + \lambda_k h_k(x_k)] X_k = 0 \quad , \quad a_k < x_k < b_k \quad (1.153)$$

cu condiții la limită liniare și omogene:

$$\begin{aligned} A_{1k} X_k(a_k) + B_{1k} X_k'(a_k) &= 0 \\ A_{2k} X_k(b_k) + B_{2k} X_k'(b_k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.154)$$



unde:  $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}$  sunt constante, constituind o problemă Sturm-Liouville. Dacă intervalele  $(a_k, b_k)$  sunt mărginite, ecuațiile diferențiale ordinare pot fi satisfăcute numai pentru anumite valori bine determinate  $\lambda_{1j}$  și  $\lambda_{2l}$ , numite valori proprii sau caracteristice, cărora le corespund funcții proprii sau caracteristice  $X_{1j}(x_1)$  și  $X_{2l}(x_2)$  soluția generală fiind:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j,l} A_{j,l} X_{1j}(x_1) \cdot X_{2l}(x_2) \cdot X_{3j,l}(x_3) \quad (1.155)$$

Dacă intervalele  $(a_k, b_k)$  sunt infinite, condițiile la limită sunt satisfăcute de un spectru continuu al valorilor  $\lambda_k$  și seria (1.155) trece în integrală.

Se prezintă în continuare un exemplu de separare a variabilelor în sistemul de coordonate cilindrice circulare pentru ecuația lui Helmholtz în regim armonic permanent

În acest sistem coordonatele sunt  $r, \theta, z$ , versorii  $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z$  iar ecuația vectorială a lui Helmholtz (reprezentată în complex) are forma:

$$\text{rot rot } \bar{U} = -\gamma^2 \bar{U} \quad (1.156)$$

Ecuația (1.156) are pentru fiecare componentă scalară  $\underline{U}_k$  câte o ecuație scalară cu derivate parțiale de ordinul doi, care în general, nu admit separarea variabilelor. Dacă vectorul  $\bar{U}$  este axial și nu depinde de coordonata  $Z$  problema devine plan-paralelă, adică:

$$\bar{U}(r, \theta) = \underline{U}_z(r, \theta) \bar{u}_z = \underline{U}(r, \theta) \bar{u}_z \quad (1.157)$$

iar ecuația vectorială se reduce la ecuația scalară:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial \theta^2} = \gamma^2 \underline{U} \quad (1.158)$$

cu soluția de forma:

$$\underline{U}(r, \theta) = \underline{R}(r) \cdot \underline{\Phi}(\theta) \quad (1.159)$$

Substituind (1.159) în (1.158) se obține:

$$\frac{r^2}{\underline{R}} \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\underline{R}} \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} + \frac{1}{\underline{\Phi}} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \theta^2} = \gamma^2 r^2 \quad (1.160)$$

care, după egalarea cu o constantă a termenilor ce depind de o singură variabilă, trece într-un sistem de două ecuații diferențiale cu derivate ordinare independente de forma:

$$\frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} - \left( \gamma^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \underline{R} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \underline{\Phi}}{d\theta^2} + n^2 \underline{\Phi} = 0 \quad (1.161)$$

unde  $n^2$  este o constantă arbitrară.

Prima ecuație diferențială a sistemului (1.161) este de tip Bessel de ordinul  $n$ , de variabilă complexă  $j r \gamma$ , iar a doua este o ecuație diferențială omogenă cu coeficienți constanți.

Soluția sistemului (1.161) poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned} \underline{R}(r) &= A_n J_n(j r \gamma) + A'_n Y_n(j r \gamma) \\ \underline{\phi}(\theta) &= B_n \sin(n\theta) + B'_n \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (1.162)$$

unde  $J_n$  este funcția Bessel de speța întâia,  $Y_n$  este funcția Bessel de speța a doua, ambele de ordinul  $n$  și argument complex, iar  $A_n, A'_n, B_n, B'_n$ , sunt constante de integrare.

Astfel, soluția generală a ecuației Helmholtz (1.158) este;

$$\underline{U}(r, \theta) = \sum_n [A_n J_n(j r \gamma) + A'_n Y_n(j r \gamma)] (B_n \sin(n\theta) + B'_n \cos(n\theta)) \quad (1.163)$$

Dacă vectorul  $\underline{U}$  este axial și depinde numai de coordonata  $r$ , adică:

$$\underline{U}(r) = \underline{U}_z(r) \underline{u}_z = \underline{U}(r) \underline{u}_z \quad (1.164)$$

ecuația se reduce la ecuația scalară de forma:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} = \gamma^2 \underline{U} \quad (1.165)$$

care este ecuația de tip Bessel anterioară pentru  $n=0$ , cu soluția:

$$\underline{U}(r) = A_0 J_0(j r \gamma) + A'_0 Y_0(j r \gamma) \quad (1.166)$$

Dacă vectorul  $\underline{U}$  este tangențial și depinde numai de coordonata  $r$ , adică:

$$\underline{U}(r) = \underline{U}_\theta(r) \underline{u}_\theta = \underline{U}(r) \underline{u}_\theta \quad (1.167)$$

ecuația vectorială se reduce la ecuația scalară de forma:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} - \left(\gamma^2 + \frac{1}{r^2}\right) \underline{U} = 0 \quad (1.168)$$

ecuația de tip Bessel de ordinul  $n=1$  și argument complex  $j r \gamma$ , cu soluția generală:

$$\underline{U}(r) = A_1 J_1(j r \gamma) + A'_1 Y_1(j r \gamma) \quad (1.169)$$

#### 1.4.4. Metoda funcțiilor de variabilă complexă

O clasă foarte importantă de funcții complexe de variabilă complexă este cea a funcțiilor olomorfe. Proprietățile funcțiilor olomorfe (monogene în toate punctele unui

domeniu) le fac utilizabile în calculul câmpurilor în probleme bidimensionale sau probleme tridimensionale cu simetrie plan paralelă. În acest scop se amintesc în continuare câteva proprietăți importante ale funcțiilor olomorfe:

-Dacă funcția  $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ , cu  $z = x+jy$  este olomorfă, atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.170)$$

Și reciproca acestei proprietăți este adevărată și reprezintă condițiile (Cauchy - Riemann) de verificare a olomorfiei.

- Cunoscând doar pe  $u(x,y)$ , din condițiile de olomorfie (1.170) se poate afla  $v(x,y)$  sau invers, cunoscând pe  $v(x,y)$  se poate deduce  $u(x,y)$ . Din acest motiv funcțiile reale  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$  se numesc funcții conjugate. În planul Z, cele două funcții reprezintă două familii de curbe ortogonale.

- Funcțiile conjugate  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$  sunt și armonice, adică verifică ecuația de tip Laplace:

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad , \quad \Delta v(x,y) = 0 \quad (1.171)$$

Această proprietate a sugerat utilizarea funcțiilor olomorfe în rezolvarea ecuației Laplace.

-Funcțiile olomorfe realizează o transformare conformă (în care se conservă unghiurile)

În vederea folosirii acestor funcții la calculul câmpurilor (electrice sau magnetice) laplaceene se fac unele analogii între mărimile care definesc câmpul și funcțiile reale  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$  care definesc funcția complexă  $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ . În acest sens se presupune că  $v(x,y)$  reprezintă potențialul unui câmp. În consecință, ecuația  $v(x,y) = v_1 = ct.$  este ecuația liniilor echipotențiale (o familie de drepte în planul W și o familie de curbe în planul Z). Perpendicular pe această familie de curbe se află curbele conjugate, date de ecuația  $u(x,y) = u_1 = ct.$  Prin urmare, în acest caz funcția  $u(x,y)$  reprezintă liniile de câmp perpendicularare pe liniile echipotențiale. În planul W, un asemenea câmp este reprezentat sub forma unui câmp omogen la care liniile echipotențiale și liniile de câmp sunt linii paralele cu axele  $u$  și  $v$ . În anumite probleme rolul funcției  $v$  și rolul funcției  $u$  pot fi schimbate între ele. Prin urmare, funcția care definește potențialul se numește funcție potențial, iar funcția care definește liniile de câmp este denumită funcție flux. Cele două funcții sunt reunite într-o manieră condensată și comodă în funcția complexă  $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$  numită potențial complex.

În aplicarea metodei funcțiilor complexe se disting două tipuri de probleme: când se cunoaște funcția potențial complex și când nu se cunoaște această funcție  $w(z)$ .

Dacă se cunoaște potențialul complex  $w(z)$ , ca o funcție olomoră de variabilă complexă, se pune problema determinării câmpului laplacean (magnetic sau electric) pe care-l reprezintă. Pentru aceasta se separă părțile reală și imaginară ale funcției  $w(z)$  pentru identificarea funcțiilor reale  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$ . Cunoscând funcția flux și funcția potențial, problema este în esență soluționată. Sunt cunoscute liniile de câmp și cele echipotențiale și prin acestea chiar sistemul fizic (configurația domeniului) în care s-ar putea stabili câmpul ce corespunde funcției considerate. Se alege, spre exemplu, în cazul câmpului magnetic staționar,  $v(x,y)$  ca funcție potențial:

$$v(x,y) = V_m \quad (1.172)$$

în care  $V_m$  este potențialul magnetic scalar al câmpului ( $\vec{H} = -\text{grad } V_m$ )

Expresia vectorului inducție magnetică  $\vec{B}$  este:

$$\vec{B} = -\mu \text{grad } V_m = -\mu \frac{\partial V_m}{\partial x} \vec{u}_x - \mu \frac{\partial V_m}{\partial y} \vec{u}_y \quad (1.173)$$

și deci în complex:

$$\underline{B} = -\mu \frac{\partial v}{\partial x} - j\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -j\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} - j \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -j\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^* = -j\mu \left( \frac{dw}{dz} \right) \quad (1.174)$$

unde s-a ținut seama de condiția (1.170).

De aici rezultă imediat modulul inducției magnetice:

$$B = \mu \left| \frac{dw}{dz} \right| \quad (1.175)$$

Se poate calcula și fluxul vectorului câmp ( $\vec{B}$ ) printr-o suprafață  $S$  având lățimea  $h$  (perpendiculară pe planul  $Z$ ) și lungimea (de-a lungul unei linii echipotențiale) cuprinsă între două linii de câmp  $u(x,y) = u_1$  și  $u(x,y) = u_2$  [S2, N4, M1]:

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu h (u_1 - u_2) \quad (1.176)$$

Se mai poate determina și densitatea de volum a energiei magnetice:

$$\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (1.177)$$

Se constată că problema este simplă dacă se cunoaște potențialul complex.

Dacă nu se cunoaște funcția potențial complex  $w(z)$ , problema este foarte dificilă (uneori imposibilă). Căutarea funcției  $w(z)$  se poate face doar prin încercări, intuind forma liniilor de câmp (sau a celor echipotențiale) și apoi găsind funcția olomoră complexă  $w(z)$

care ar da aceeași configurație de câmp. În matematică se cunosc numeroase funcții complexe olomorfe și configurațiile de câmp corespunzătoare, încât, de multe ori, se pot găsi printre ele și cele căutate.

Nu se cunoaște o metodă generală de sinteză (construire) a funcției potențial complex pentru orice domeniu de câmp.

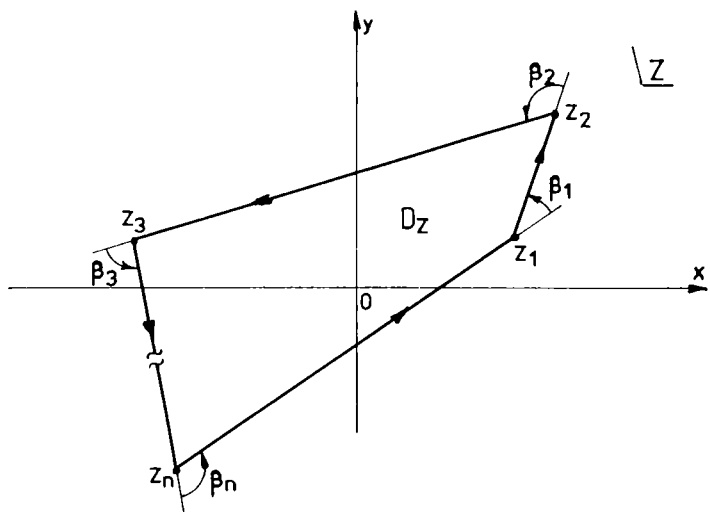
#### 1.4.5. Metoda transformărilor conforme

Metoda transformărilor conforme este strâns legată de metoda funcțiilor de variabilă complexă. O funcție olomorfă  $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ , cu  $w'(z) \neq 0$  definește o transformare conformă asigurând corespondența biunivocă între punctele unui domeniu  $D_z$  din planul  $Z$  și punctele domeniului  $D_w$  corespunzător din planul  $W$ . Realizând una sau mai multe transformări conforme succesive dintr-un plan în altul, forma domeniului  $D$  se modifică până când, în final, se obține un domeniu în care câmpul este omogen și poate fi determinat ușor. Ulterior, soluția este readusă în planul inițial (în domeniu fizic  $D_z$ ) prin intermediul relațiilor de transformare. Caracteristicile principale ale transformărilor conforme sunt: punctele distincte într-un plan se transformă în puncte distincte în planul celălalt; liniile de câmp și cele echipotențiale sunt perpendiculare în cele două plane; se păstrează în această transformare toate unghiurile și sensurile acestor unghiuri (asemănarea figurilor); se conservă potențialul, fluxul, sarcina electrică, energia [C1].

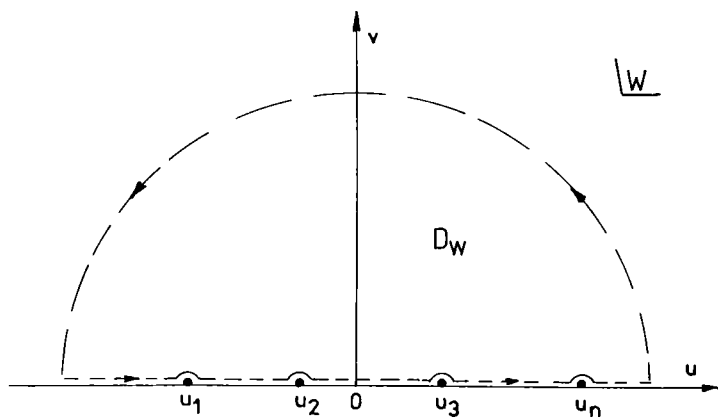
Transformările conforme reprezintă una dintre aplicațiile cele mai importante ale funcțiilor de variabilă complexă și joacă un rol foarte important în rezolvarea unor probleme teoretice și a multor probleme practice din diferite domenii ale tehnicii. Metoda se folosește în calculul câmpurilor potențiale în domenii fără surse, cu condiții la limită cunoscute, în probleme bidimensionale sau tridimensionale plan-paralele.

Dacă funcția complexă olomorfă  $w=f_1(z)$  este cunoscută, cu ajutorul ei se pot "transforma conform" anumite domenii din planul  $Z$  în planul  $W$  (sau din planul  $W$  în planul  $Z$  dacă se poate inversa funcția:  $z=f_2(w)$ ).

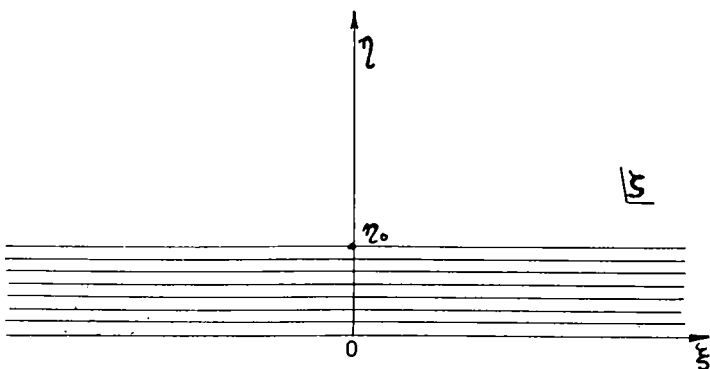
Dacă funcția olomorfă  $w=f(z)$  nu este cunoscută (așa cum se întâmplă aproape întotdeauna), problema poate fi rezolvată doar într-un singur caz particular și anume atunci când domeniul fizic  $D_z$  este un contur poligonal (închis sau deschis). Metoda a fost publicată, separat, de Schwarz și Christoffel și oferă posibilitatea construirii relației de transformare  $w=f(z)$  prin calcul, în fiecare caz în parte. În cele ce urmează se prezintă pe scurt procedeul.



a)

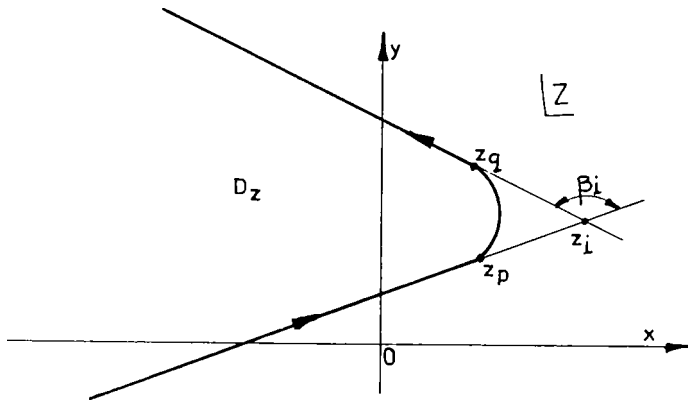


b)

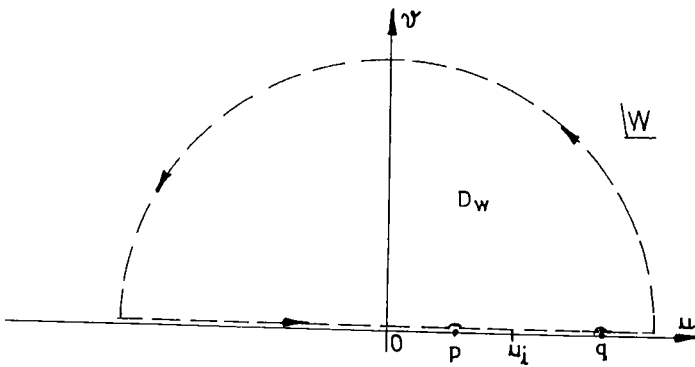


c)

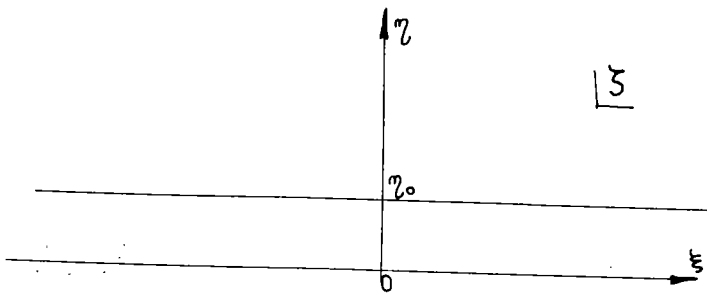
Fig. 1.8



a)



b)



c)

Fig. 1.9

Fi, în planul Z, conturul poligonal închis  $D_z$  (fig. 1.8.a). Interiorul poligonului poate fi transformat în întreg semiplanul superior  $D_w$  (fig. 1.8b) prin relația Schwarz - Christoffel:

$$Z = A \int (w - u_1)^{-\frac{\beta_1}{\pi}} \cdot (w - u_2)^{-\frac{\beta_2}{\pi}} (w - u_3)^{-\frac{\beta_3}{\pi}} \dots (w - u_n)^{-\frac{\beta_n}{\pi}} dw + C \quad (1.178)$$

în care A și C sunt constante ce urmează a fi determinate.

Unghiurile exterioare poligonului,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$  sunt cunoscute și se consideră cu semnul plus când sunt în sens trigonometric și cu semnul minus în caz contrar. Fiecare vârf al poligonului  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  are un corespondent pe axa reală în planul W, în punctele  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ . Ordinea acestor puncte corespunde sensului de parcurgere a frontierei în fiecare domeniu (sensul se alege astfel încât domeniul să rămână în partea stângă dacă se parcurge frontiera). Conform teoremei lui Riemann, trei dintre punctele  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  din planul W pot fi alese arbitrar [N4]. De obicei unul din puncte se alege la infinit (de exemplu  $u_1 = \infty$ ), altul se alege în origine (de exemplu  $u_2 = 0$ ) și al treilea în punctul +1 (de pildă  $u_3 = 1$ ). Dacă unul din puncte s-a ales la infinit, atunci factorul corespunzător lipsește din integrala (1.178). În cazul de mai sus din integrală lipsește factorul  $(w - u_1)^{-\frac{\beta_1}{\pi}}$ . Celelalte constante rămase  $u_4, u_5, u_6, \dots, u_n$  urmează să fie determinate.

Pentru a ajunge la un câmp uniform se face încă o transformare conformă și anume:

$$\zeta = k \ln w \quad (1.179)$$

care transformă semiplanul superior W în dreptunghiul deschis cuprins între  $\eta = 0$  și  $\eta = \eta_0$  din planul  $\zeta$  (figura 1.8.c), în care câmpul este omogen (liniile de câmp și cele echipotențiale sunt paralele cu axele).

Integrala (1.178) este o integrală reală, întrucât este luată în lungul axei de coordonate reale din planul W și deseori conduce la integrale elementare, care, rezolvate, dau relația de transformare  $z = f_2(w)$ . Uneori este posibilă obținerea relației inverse  $w = f_1(z)$  mult mai utilă.

Constantele care apar în transformările (1.178) și (1.179) și anume A, C, k și celelalte rămase necunoscute  $u_4, u_5, u_6, \dots, u_n$  se determină pe baza dimensiunilor domeniului fizic  $D_z$  și prin asigurarea corespondenței unor puncte din plane diferite [N4].

Cunoscând expresiile funcțiilor care asigură transformările  $z \rightarrow w \rightarrow \zeta$  se poate afla modulul inducției magnetice B folosind o relație similară cu (1.175):

$$B = \mu \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \mu \left| \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dz} \right| \quad (1.180)$$

Cele două derivate din ultimul modul se obțin simplu din relațiile (1.178) și (1.179).



În metoda Schwarz - Christoffel există posibilitatea de înlocuire a vârfurilor poligoanelor cu arce de cerc. Există însă două procedee simplificate [C1] prin intermediul cărora se poate înlocui un vârf  $z_i$  cu o porțiune rotunjită care aproximează un arc de cerc (figural.9.a). Primul procedeu constă în a înlocui factorul  $(w - u_i)^{-\frac{\beta_i}{\pi}}$ , de sub integrala (1.178), corespunzător vârfului  $i$  al poligonului, cu termenul:

$$\{(w - p)^{-\frac{\beta_i}{\pi}} + \lambda(w - q)^{-\frac{\beta_i}{\pi}}\} \quad (1.181)$$

în care  $p$  și  $q$  din planul  $W$  (fig 1.9.b) corespund punctelor  $Z_p$ , respectiv  $Z_q$  din planul  $Z$ . Când punctul  $u$  (din planul  $W$ ) parcurge porțiunea  $pq$ , schimbarea de direcție din planul  $Z$  este aceeași ca și pentru factorul inițial (adică  $\beta_i$ ) dar nu se mai face brusc (în punctul  $Z_i$ ) ci progresiv între  $Z_p$  și  $Z_q$  aproximativ pe un arc de cerc. Parametrul  $\lambda$  urmează să fie determinat alături de celelalte constante. Transformarea din planul  $W$  în planul  $\zeta$  se face în continuare cu aceeași relație de tipul (1.179).

Al doilea procedeu constă în a înlocui factorul respectiv prin termenul:

$$[w + \lambda\sqrt{w^2 - 1}]^{-\frac{\beta_i}{\pi}} \quad (1.182)$$

în care punctele  $p$  și  $q$  sunt fixate în  $-1$  respectiv  $+1$  în planul  $W$ .

Aceste două puncte ( $-1$  și  $+1$ ) corespund punctelor  $Z_p$  și  $Z_q$  care reprezintă extremitățile porțiunii rotunjite în planul  $Z$ .

În [C1] sunt prezentate exemple de calcul în care se aplică transformarea Schwarz - Christoffel pentru poligoane cu unghiuri rotunjite.

## 1.5. METODE NUMERICE DE CALCUL AL CÂMPURILOR

Dezvoltarea recentă a mijloacelor informatice, în speță creșterea performanțelor tehnicii moderne de calcul, a determinat o modificare structurală a proceselor de modelare, prin integrarea sistematică a metodelor numerice. Comparativ cu metodele analitice cele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mai mare, fiind supuse la restricții mai puține. Deși aproximative, metodele numerice (dacă satisfac anumite criterii calitative de rigoare și convergență) conduc cu aceeași certitudine ca și metodele directe ale analizei matematice la rezultate acceptabile. Reuniunea dintre un model matematic de câmp electromagnetic (ecuațiile diferențiale ale câmpului) și o metodă numerică de rezolvare a acestuia conform

unui algoritm programabil definește un model de câmp electromagnetic ce constituie un instrument eficient de analiză numerică a câmpului electromagnetic [M2].

Se prezintă în continuare câteva procedee numerice de rezolvare a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic, parabolic și hiperbolic, insistând asupra ecuațiilor cu forme simple care sunt în același timp și mai interesante din punct de vedere practic (Laplace, Poisson, Helmholtz, ecuația undelor). Este interesant de remarcat că, în contrast cu marea diversitate de metode numerice dezvoltate pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare, pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale cu condiții inițiale și/sau la limită se cunosc mult mai puține metode, dintre care cea mai utilizată este cea a diferențelor finite.

### 1.5.1. Metoda diferențelor finite

Rezolvarea problemelor cu condiții la limită prin metoda diferențelor finite (metoda rețelelor) constă, în esență, în înlocuirea (aproximarea) ecuațiilor cu derivate parțiale prin ecuații cu diferențe finite, soluția problemei obținându-se sub forma unui tabel cu date numerice, care reprezintă valorile funcției căutate în nodurile unei rețele aplicată domeniului de definiție  $V_{\Sigma}$ . Aceste valori numerice se determină prin rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare, care se obține prin discretizarea ecuațiilor cu derivate parțiale în punctele rețelei alese (regulată sau neregulată, cu pas egal sau neegal). În consecință în metoda diferențelor finite, în loc de a calcula funcția necunoscută în orice punct din domeniul  $V_{\Sigma}$ , se calculează numai valorile ei în nodurile rețelei în care a fost divizat domeniul. Pe frontieră, în loc de a se considera toate valorile funcției sau componente normale a gradientului ei, se iau în considerare numai valorile din punctele situate la intersecția frontierei  $\Sigma$  cu rețeaua de divizare.

Precizia de rezolvare (ordinul de aproximare) depinde: de forma și pasul rețelei, de tipul expresiei de discretizare a derivatelor parțiale, de modul de aproximare a condițiilor pe frontieră și de tehnicile de calcul (procedee și echipamente) utilizate.

### Generalități

Pentru aproximarea ecuațiilor cu derivate parțiale prin ecuații cu diferențe se determină inițial o rețea de discretizare, adică o mulțime  $\mathfrak{R}_h$  de puncte  $M$  discrete (nodurile rețelei) din domeniul  $V_{\Sigma}$ . Fiecare punct (nod) al rețelei, în cazul general (spațiu  $n$ -

dimensional), este definit prin coordonatele sale:  $M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Fiecare coordonată  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  are o valoare egală cu un număr întreg ( $k_i$ ) de pași de discretizare ( $h_i$ ) în direcția coordonatei "i":  $x_i = k_i h_i$ . Astfel, rețeaua  $\mathfrak{R}_{h_i}$  poate fi reprezentată sub forma unei mulțimi de puncte  $M$ , discrete:

$$\mathfrak{R}_{h_i} = \{M | M = M(k_1 h_1, k_2 h_2, \dots, k_n h_n); k_i \in \mathbb{N}; h_i > 0; i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.183)$$

în care  $\mathbb{N}$  este mulțimea numerelor naturale;  $h_1, h_2, \dots, h_n$  sunt pașii de divizare (discretizare) ai rețelei (cantități strict pozitive, suficient de mici).

Dacă  $h_1=h_2=\dots=h_n=h$  rețeaua se numește cu pași egali. În practică prezintă importanță doar cazurile  $i=1,2,3$ , adică cel mult spațiul euclidian tridimensional.

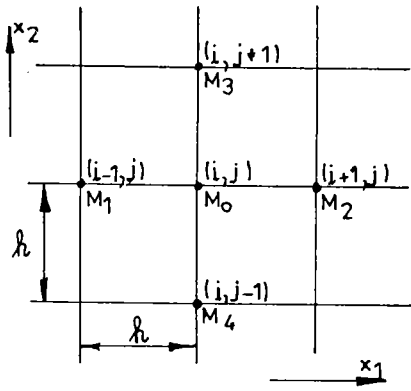
Pentru orice  $M \in \mathfrak{R}_{h_i}$  se aleg ( $q-1$ ) noduri vecine, care împreună cu  $M$  formează o submulțime  $\mathfrak{R}_q \subset \mathfrak{R}_{h_i}$  :

$$\mathfrak{R}_q = \{M | M = M(m_1 h_1, m_2 h_2, \dots, m_n h_n); m_i \in \{-1, 0, 1\}; h_i > 0; i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.184)$$

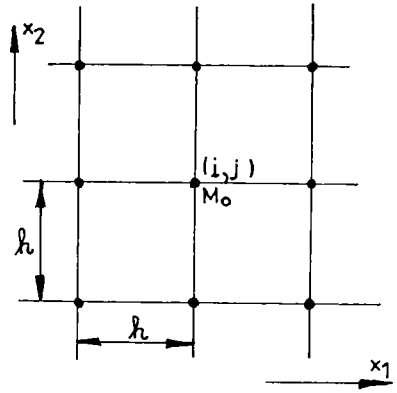
Mulțimea  $\mathfrak{R}_q$  are  $q$  noduri și este denumită structură caracteristică [D1] a rețelei. În problemele unidimensionale ( $n=1$ ) există numai  $q=3$  noduri, iar în cele bidimensionale ( $n=2$ ) se pot lua  $q=5$  sau  $q=9$  noduri. În spațiul tridimensional ( $n=3$ ),  $q$  poate lua valorile: 7, 19, 27.

De exemplu în plan, într-un sistem de referință cartezian (rețea cu pași egali) sunt posibile două structuri caracteristice: cu 5 noduri (figura 1.10.a) și cu 9 noduri (figura 1.10.b). Rețeaua de discretizare  $\mathfrak{R}_{h_i}$  se alege în funcție de problemă (în special în funcție de forma frontierei) și de sistemul de coordonate. În general se aleg rețele regulate (cu pași egali), cele mai utilizate fiind rețelele rectangulare cu ochiuri pătrate (figura 1.10.a,b). Uneori este mai convenabilă utilizarea rețelelor hexagonale (figura 1.10.d) sau mai precisă aplicarea unei rețele triunghiulare (figura 1.10.c). Sunt uneori cazuri (domenii cu frontiere neregulate în formă de "deget") când este mai potrivită o rețea de formă dreptunghiulară figura 1.10.e). Un procedeu original de alegere a rețelei  $\mathfrak{R}_{h_i}$  este acela propus de Milnes și Potts [D1] care constă în discretizarea domeniului prin "retragerea" repetată (cu un anumit pas  $h$ ) a frontierei  $G$  care "se contractă" degenerând într-un punct. În problemele tridimensionale se aleg rețele cubice sau paralelipipedice.

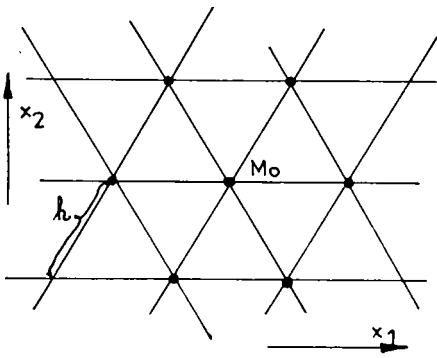
În [R3] se prezintă și se analizează noțiunile de consistență eroare de trunchiere, convergență, stabilitate pentru schemele cu diferențe finite. În [G1] sunt prezentate metode speciale pentru studiul stabilității (metoda Neumann, principiul coeficienților înghețați, criteriul Babenko-Ghelfand, principiul maximului). O atenție deosebită se acordă în ultimul timp metodelor de creștere a preciziei soluțiilor aproximative, cea mai puternică dintre



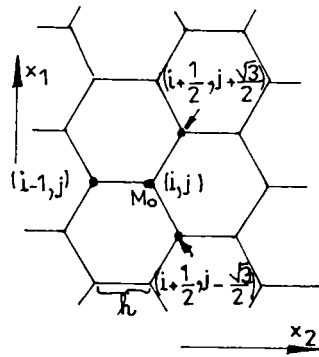
a)



b)



c)



d)

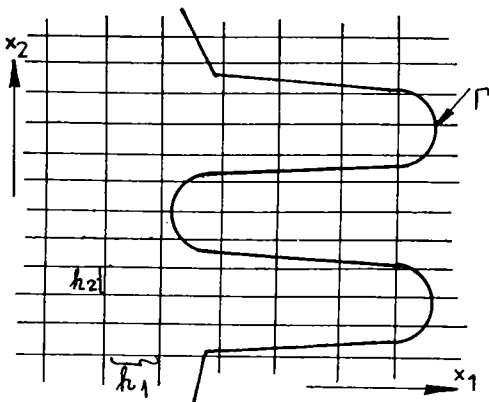


Fig. 1.10

acestea fiind metoda de extrapolare a lui Richardson [M4] aplicată la toate tipurile de ecuații cu derivate parțiale.

În continuare se introduc câțiva operatori cu funcții de o singură variabilă în vederea prezentării metodei diferențelor finite.

Se consideră o funcție  $u(x)$  definită pe intervalul  $[a,b]$  discretizat cu pasul constant  $h = (b-a)/n$ . Valorile funcției în nodurile rețelei (extremitățile subintervalurilor) formează un șir :  $U_1, U_2, \dots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \dots, U_n$ .

Operatorul diferență la stânga (regresivă, inversă sau înapoi), notat cu  $\nabla^-$ , de ordinul I, este definit prin relația [M2, R3]:

$$\nabla_i^- U = U_i - U_{i-1}$$

Diferența la stânga de ordin superior constă în repeterea operatorului după relația:

$$\nabla_i^{-n} = \nabla_i^- (\nabla_i^{-(n-1)})$$

adică:

$$\nabla_i^{-2} U = U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}$$

$$\nabla_i^{-3} U = U_i - 3U_{i-1} + 3U_{i-2} - U_{i-3} \quad (1.185)$$

Pe baza analogiei dintre operatorul diferență la stânga  $\nabla_i^-$  și operatorul derivată

$D = \frac{d}{dx}$  se poate găsi o relație de legătură între cei doi operatori. Pornind de la dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $u(x)$  în vecinătatea punctului  $x$  (cu  $h$  - subunitar):

$$u(x+h) = u(x) + \frac{h}{1!} u'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) + \dots$$

se ajunge la următoarele relații între cei doi operatori [M2] :

$$hD = \nabla_i^- + \frac{1}{2} \nabla_i^{-2} + \frac{1}{3} \nabla_i^{-3} + \dots$$

$$h^2 D^2 = \nabla_i^{-2} + \nabla_i^{-3} + \frac{11}{12} \nabla_i^{-4} + \dots \quad (1.186)$$

Aproximarea operatorului derivată  $D$  se poate face folosind primii termeni ai seriilor (1.186). Eroarea care se face în fiecare caz este de ordinul de mărime al primului termen neglijat din serie. Dacă se reține doar primul termen din fiecare serie se obține:

$$DU_i \cong \frac{1}{h} (U_i - U_{i-1})$$

$$D^2 U_i \cong \frac{1}{h^2} (U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}) \quad (1.187)$$

Operatorul diferență la dreapta (progresivă, directă sau înainte), notat cu  $\nabla^+$ , de ordinul I este definit prin relația:

$$\nabla_i^+ U = U_{i+1} - U_i$$

Diferența la dreapta de ordin superior constă în repetarea operatorului după relația :

$$\nabla_i^{+n} = \nabla_i^+ (\nabla_i^{+(n-1)})$$

adică:

$$\nabla_i^{+2} U = U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i$$

$$\nabla_i^{+3} U = U_{i+3} - 3U_{i+2} + 3U_{i+1} - U_i \quad (1.188)$$

Și în acest caz se pot găsi relații de legătură între operatorii  $\nabla^+$  și  $D$  sub forma [M2]:

$$hD = \nabla_i^+ - \frac{1}{2}\nabla_i^{+2} + \frac{1}{3}\nabla_i^{+3} + \dots$$

$$h^2 D^2 = \nabla_i^{+2} - \nabla_i^{+3} + \frac{11}{12}\nabla_i^{+4} + \dots \quad (1.189)$$

Reținând doar primul termen din fiecare serie, derivatele de ordinul întâi și doi se exprimă prin diferențe finite sub forma aproximativă:

$$DU_i \cong \frac{1}{h}(U_{i+1} - U_i)$$

$$D^2 U_i \cong \frac{1}{h^2}(U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i) \quad (1.190)$$

Operatorul diferență simetrică (sau centrală ), de ordinul I, notat cu  $\hat{\nabla}$  se definește pentru nodul  $i$  prin expresia:

$$\hat{\nabla}_i U = U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}$$

unde  $U_{i+\frac{1}{2}}$  și  $U_{i-\frac{1}{2}}$  sunt valorile funcției  $u(x)$  la jumătatea intervalelor vecine nodului  $i$ .

Similar se definește operatorul de ordin superior:

$$\hat{\nabla}_i^n = \hat{\nabla}_i (\hat{\nabla}_i^{n-1})$$

obținându-se:

$$\hat{\nabla}_i^2 U = U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} \quad (1.191)$$

$$\hat{\nabla}_i^3 U = U_{i+\frac{3}{2}} - 3U_{i+\frac{1}{2}} + 3U_{i-\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{3}{2}} \quad (1.192)$$

Pentru a evita folosirea valorilor funcției la jumătatea intervalelor de discretizare se utilizează operatorul diferență finită medie:

$$\bar{\nabla}_i U = \frac{1}{2}(U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}})$$

de unde rezultă:

$$\bar{\nabla}_i(\hat{\nabla}_i U) = \frac{1}{2}(U_{i+1} - U_{i-1}) \quad (1.193)$$

iar între  $D$  și  $\hat{\nabla}_i$  [R3] :

$$hD = \bar{\nabla}_i(\hat{\nabla}_i - \frac{1}{6}\hat{\nabla}_i^3 + \frac{1}{30}\hat{\nabla}_i^5 - \frac{1}{400}\hat{\nabla}_i^7 + \dots)$$

$$h^2 D^2 = \hat{\nabla}_i^2 - \frac{1}{12}\hat{\nabla}_i^4 + \frac{1}{90}\hat{\nabla}_i^6 - \frac{1}{560}\hat{\nabla}_i^8 + \dots \quad (1.194)$$

Dacă se reține doar primul termen din fiecare serie rezultă (erorile fiind de ordinul  $h^2$ ):

$$DU_i \cong \frac{1}{2h}(U_{i+1} - U_{i-1})$$

$$D^2 U_i \cong \frac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \quad (1.195)$$

Dacă discretizarea funcției  $u(x)$  se face cu pași inegali se obțin alte relații [M2] .

În [R3, R4, M3] se prezintă și alți operatori, pentru funcții de două și trei variabile precum și diverși operatori șablon foarte utili în aplicațiile practice.

### Ecuatii cu derivate parțiale de tip eliptic

În domeniul  $D_r$  mărginit de curba închisă  $\Gamma$  (fig. 1.11) se cere determinarea unei funcții  $u(x,y)$ , soluție a ecuației cu derivate parțiale de tip Poisson:

$$\Delta u = f(x, y) \quad (1.196)$$

cu condiții pe frontieră corespunzătoare problemei Dirichlet:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = g_1(x, y) \quad (1.197)$$

sau problemei Neumann:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma} = D_n u = g_2(x, y) \quad (1.198)$$

Expresia laplaceanului în plan este:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.199)$$

și deci se pune problema aproximării derivatelor parțiale din relația (1.199) cu diferențe finite. În acest scop se discretizează domeniul de câmp printr-o rețea rectangulară (fig. 1.11) având pașii,  $h_x$  în direcția  $x$  și  $h_y$  în direcția  $y$ , invariabili. Aproximarea laplaceanului în nodul interior  $(i, j)$  prin diferențe finite se face înlocuind derivatele parțiale de ordinul al doilea din (1.199) pe baza relației (1.195) în funcție de valorile funcției în nodurile vecine, adică:

$$D_x^2 U_{i,j} \cong \frac{1}{h_x^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})$$

$$D_y^2 U_{i,j} \cong \frac{1}{h_y^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) \quad (1.200)$$

unde  $D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  și  $D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Introducând aproximațiile (1.200) în (1.196) se obține:

$$\frac{1}{h_x^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = f(M_0) \quad (1.201)$$

Dacă rețeaua de discretizare este pătratică ( $h_x = h_y = h$ ), relația (1.201) devine:

$$\frac{1}{h^2} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}) = f(M_0) \quad (1.202)$$

Relația (1.202) este cunoscută sub denumirea de formula în cinci puncte. Dacă dispunerea celor cinci puncte este ca în fig 1.12.a formula devine [D1]:

$$\frac{1}{(\sqrt{2}h)^2} (U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1} - 4U_{i,j}) = f(M_0)$$

O aproximare mai bună a laplaceanului în nodul  $(i, j)$  se obține utilizând relații cu diferențe finite de ordin superior. Astfel, pentru o discretizare cu o rețea pătratică de pas  $h$  (fig. 1.12.b), laplaceanul în nodul  $(i, j)$  se poate aproxima folosind formula în nouă puncte:



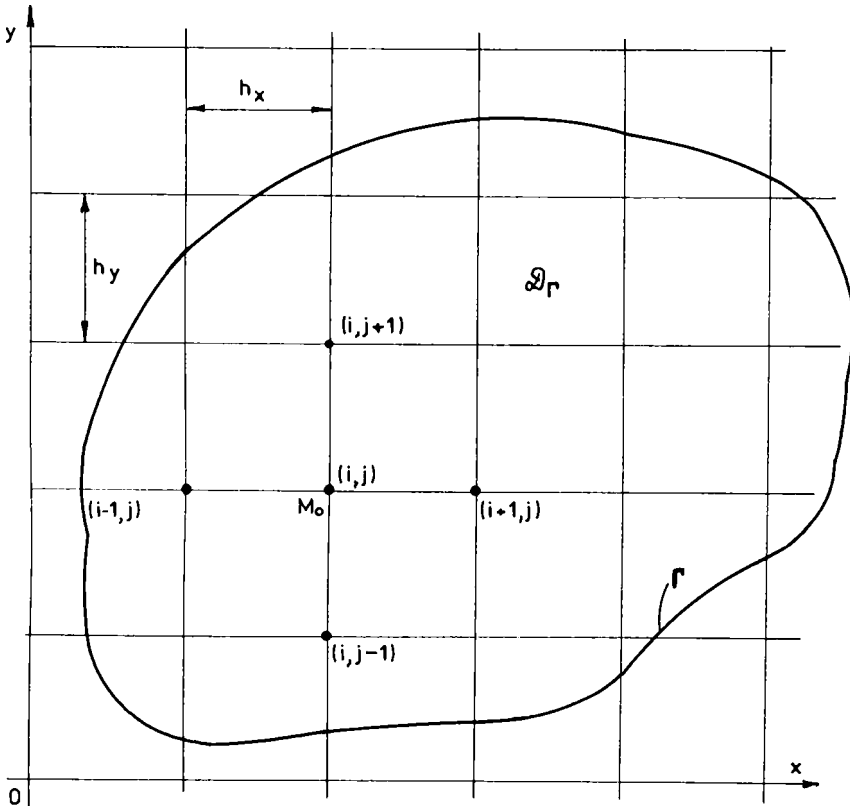
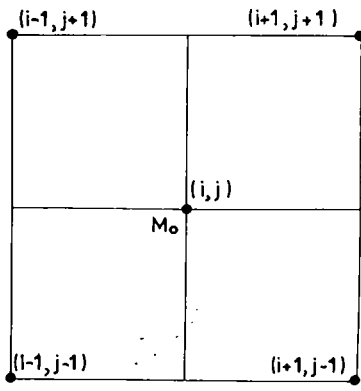
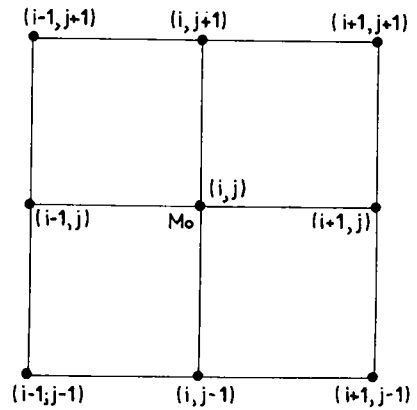


Fig. 1.11



a)



b)

Fig. 1.12

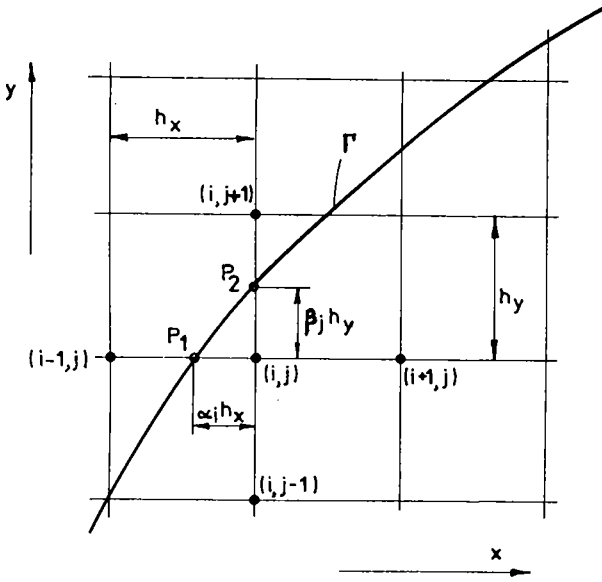


Fig. 1.13

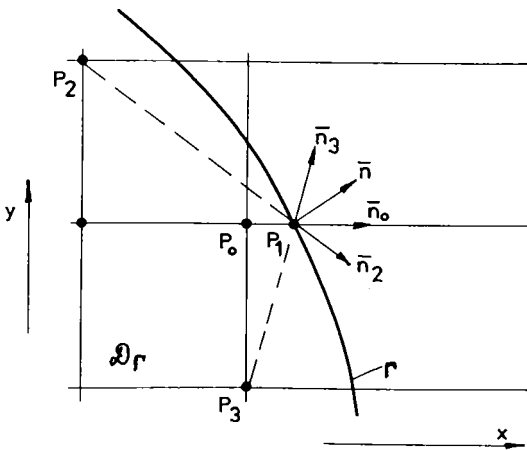


Fig. 1.14

$$\frac{1}{6h^2}(4U_{i-1,j} + 4U_{i+1,j} + 4U_{i,j-1} + 4U_{i,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1} - 20U_{i,j}) = f(M_0)$$

Pentru cazul rețelelor triunghiulare (fig. 1.10.c) și hexagonale (fig. 1.10.d) în [D1] se dau o serie de relații de aproximare a laplaceanului prin diferențe finite. Sunt dezvoltate de asemenea [D1, M2, M3, M1, S2] formule cu diferențe finite care aproximează laplaceanul în coordonate polare (pentru probleme plan-paralele, cu simetrie cilindrică), în coordonate sferice și rectangulare (pentru probleme tridimensionale).

Aproximarea condițiilor de frontieră prin diferențe finite constituie o problemă la fel de importantă ca și aproximarea interioară.

Se consideră ecuația (1.196) cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet (1.197). În cazul general, când frontiera  $\Gamma$  a domeniului bidimensional are o formă oarecare, la discretizarea interioară a domeniului unele noduri nu cad pe frontieră. În cazul unui nod periferic (de exemplu nodul (i,j) din fig.1.13) se scriu relații de interpolare pentru  $U_{i,j}$  între nodurile vecine interioare și punctele  $P_1, P_2$  în care frontiera  $\Gamma$  intersectează rețeaua de discretizare. La aproximarea laplaceanului se consideră noduri vecine cu (i,j) nodurile  $P_1, P_2, (i, j-1), (i+1, j)$ , cu pașii  $\alpha, h_x, \beta, h_y, h_y, h_x$ . Potențialele punctelor  $P_1, P_2$  rezultă de forma:

$$\begin{aligned} U_{P_1} &= \alpha_1(2U_{i,j} - U_{i+1,j}) \\ U_{P_2} &= \beta_j(2U_{i,j} - U_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (1.203)$$

iar laplaceanul în nodul (i,j) obține forma [M2] :

$$\Delta U_{i,j} = \frac{2}{\alpha_1(\alpha_1+1)h_x^2}(\alpha_1 U_{P_1} - (\alpha_1+1)U_{i,j} + U_{i+1,j}) + \frac{2}{\beta_j(\beta_j+1)h_y^2}(\beta_j U_{i,j-1} - (\beta_j+1)U_{i,j} + U_{P_2}) \quad (1.204)$$

Înlocuind în (1.204) pe (1.203) rezultă:

$$\Delta U_{i,j} = \frac{2}{\alpha_1(\alpha_1+1)h_x^2}[(2\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1)U_{i,j} + (1 - \alpha_1^2)U_{i+1,j}] + \frac{2}{\beta_j(\beta_j+1)h_y^2}[(2\beta_j^2 + \beta_j + 1)U_{i,j} + (1 - \beta_j^2)U_{i,j-1}]$$

Dacă în ecuația (1.196) condițiile de frontieră sunt de tip Neumann (1.198), se înlocuiește condiția Neumann  $D_n U$  cu aproximarea sa normală prin diferențe finite. Spre exemplu, se consideră o rețea pătratică în care  $P_0$  este un nod periferic (fig. 1.14). Cel mai apropiat punct de intersecție cu frontiera este  $P_1$ . Normala exterioară la frontiera  $\Gamma$  în punctul  $P_1$  este  $\bar{n}$  (versor), iar versorii direcțiilor  $\overline{P_2 P_1}, \overline{P_3 P_1}, \overline{P_0 P_1}$  sunt respectiv  $\bar{n}_2, \bar{n}_3, \bar{n}_0$

În aceste condiții se poate scrie:

$$U_1 = U_2 + r_{21} \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_2}$$

$$U_1 = U_3 + r_{31} \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_3}$$

$$U_1 = U_0 + r_{01} \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_0}$$

(1.205)

în care  $r_{21}$ ,  $r_{31}$ ,  $r_{01}$  sunt distanțele de la  $P_1$  la  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_0$ . Eliminând în sistemul (1.205) pe  $U_1$  se obține un sistem de ecuații în  $\delta U/\delta x$  și  $\delta U/\delta y$  echivalent cu [M2]:

$$\begin{aligned} & (U_2 - U_0)[r_{01} \sin(\varphi - \varphi_0) - r_{31} \sin(\varphi - \varphi_3)] - (U_3 - U_0)[r_{01} \sin(\varphi - \varphi_0) \\ & - r_{21} \sin(\varphi - \varphi_2)] + \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{n}}\right)_1 [r_{21} r_{31} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_{21} r_{01} \sin(\varphi_2 - \varphi_0) \\ & - r_{31} r_{01} \sin(\varphi_3 - \varphi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (1.206)$$

în care:  $\varphi_0$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  și  $\varphi$  sunt unghiurile pe care le fac versorii  $\bar{n}_0, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  și  $\bar{n}$  cu axa  $Ox$ , iar mărimea:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{n}}\right)_1 = g_2(P_1)$$

este cunoscută din condiția pe frontieră (Neumann).

Relația (1.206) permite aflarea valorii funcției ( $U_0$ ) în nodul periferic  $P_0$ .

Condiții Neumann omogene ( $g_2(x,y)=0$ ) intervin pe acele porțiuni ale frontierei  $\Gamma$  care coincid cu o linie de câmp, iar condiții neomogene ( $g_2 \neq 0$ ) când prin frontieră ies (sau intră) linii de câmp sub un unghi oarecare.

Ecuațiile de tipul (1.206) scrise pentru toate nodurile periferice ale domeniului se alătură celor în diferențe finite scrise pentru toate nodurile interioare, rezultând un sistem de ecuații în care numărul de ecuații este egal cu numărul de noduri ale domeniului adică cu numărul de necunoscute (valorile funcției în noduri). Sistemul este liniar și poate fi rezolvat printr-o metodă numerică oarecare (metoda Gauss, Jacobi Gauss-Seidel, Cholesky, metoda suprarelaxărilor succesive).

Aceste metode sunt cunoscute [B1, B2, D1, N4, M2] existând subprograme standard pentru rezolvarea sistemelor liniare. În [G2] se prezintă în detaliu o metodă cu diferențe finite iterativă de calcul al câmpului magnetic cvasistaționar.

### Ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic

Se consideră cea mai simplă formă de ecuație hiperbolică de ordinul doi (ecuația undelor):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.207)$$

și condițiile inițiale :

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (1.208)$$

Se pune problema rezolvării problemei Cauchy (1.207, 1.208) prin metoda diferențelor finite. Pentru aceasta se consideră o rețea rectangulară cu pașii:  $h$  pe direcția  $x$  și  $k$  pe direcția  $t$ . Se notează cu  $\alpha$  raportul dintre cei doi pași ( $\alpha = k/h$ ).

Aproximând cu diferențe finite derivatele parțiale de ordinul doi, din relația (1.207) se obține următoarea schemă explicită cu diferențe:

$$\frac{1}{k^2}(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) - \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) = 0$$

sau:

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \alpha^2)U_{i,j} + \alpha^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1} \quad (1.209)$$

în care indicele  $i$  este folosit la discretizarea spațială iar indicele  $j$  la discretizare timpului. Dacă  $h=k$ , adică  $\alpha = 1$ , în [R3] se arată că eroarea de trunchiere pentru schema (1.209) tinde la zero iar schema explicită cu diferențe devine:

$$U_{i,j+1} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - U_{i,j-1}$$

Pentru discretizarea condițiilor inițiale (1.208) se consideră funcțiile  $f$  și  $g$  continue și derivabile de două ori.

În aceste condiții prima relație din (1.208) se poate scrie în formă discretă astfel:

$$U_{i,0} = f(ih) = f_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\dots$$

Presupunând că soluția  $u(x,t)$  este tot continuă și de două ori derivabilă se poate dezvolta în serie Taylor în funcție de timp, astfel [R3]

$$U_{i,4} = U_{i,0} + k\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,0} + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,0} + \dots = f(ih) + Kg(ih) + \frac{1}{2}\alpha^2[f((i+1)h) + f((i-1)h) - 2f(ih)]$$

În acest caz schema explicită cu diferențe ce permite calculul soluției numerice pentru problema (1.207 - 1.208) se prezintă astfel:

$$U_{i,0} = f_i$$

$$U_{i,1} = f_i + kg_i + \frac{1}{2}\alpha^2(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i)$$

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \alpha^2)U_{i,j} + \alpha^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1} \quad (1.210)$$

în care  $ij = 0,1,2,3,\dots$

Prima relație din (1.210) permite calculul nodurilor de pe axa  $x$ , adică pe nivelul  $j=0$  (valori inițiale), a doua relație permite calculul nodurilor la nivelul de timp următor ( $j = 1$ ), iar a treia relație determină succesiv nodurile din rețea pe următoarele nivele de timp. Schema cu diferențe (1.210) are o stabilitate dependentă de  $\alpha$ . Dacă  $\alpha \leq 1$ , domeniul de dependență pentru ecuația cu diferențe este inclus în domeniul ecuației diferențiale [R3] și soluția este unic determinată, schema (1.210) fiind stabilă. Dacă  $\alpha > 1$  stabilitatea nu mai este asigurată iar soluțiile oferite de (1.210) pot fi incorecte.

Schemele implicite cu diferențe finite oferă mari avantaje din punctul de vedere al stabilității. Se consideră aceeași problemă (1.207 - 1.208) la care se mai adaugă condițiile la limită:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

Aproximând derivata de ordinul doi în raport cu timpul prin diferențe simetrice (1.195) în punctul  $(i,j)$  iar derivata în raport cu  $x$  prin diferența medie (1.93) se obține o schemă implicită de forma:

$$U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1} = \frac{1}{2}\alpha^2[(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (U_{i+1,j-1} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1})]$$

sau de forma:

$$-\alpha^2 U_{i+1,j+1} + 2(1 + \alpha^2)U_{i,j+1} - \alpha^2 U_{i-1,j+1} = 4U_{i,j} + \alpha^2 U_{i+1,j-1} - 2(1 + \alpha^2)U_{i,j-1} + \alpha^2 U_{i-1,j-1} \quad (1.211)$$

Utilizând și condițiile inițiale și la limită discretizate se poate afla soluția problemei în nodurile de la nivelele de timp  $j=0$  și  $j=1$ , după care intră în funcțiune rel. (1.211) care, scrisă pentru  $i=1,2,3,\dots$  conduce la un sistem de ecuații de formă tridiagonală.

Diagonala principală conține coeficienți de forma  $2(1 + \alpha^2)$  iar celelalte două diagonale, coeficienți de forma  $(-\alpha^2)$ . Matricea fiind astfel diagonal dominantă, se poate

calcula soluția după o metodă iterativă. Se obțin valorile funcției căutate  $u(x,t)$  în toate nodurile rețelei la diferite nivele de timp.

Metoda diferențelor finite dă rezultate foarte bune în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic cu două și trei variabile spațiale [R3] .

### Ecuatii cu derivate parțiale de tip parabolic

Se consideră cea mai simplă formă de ecuație parabolică de ordinul doi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.212)$$

cu condiția inițială:

$$u(x,0)=f(x); \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.213)$$

și cu condiția la limită:

$$u(0,t) = g_1(t) \quad ; \quad u(1,t) = g_2(t) \quad (1.214)$$

Se presupune o rețea de discretizare rectangulară  $x=ih$  și  $t=jk$ . Înlocuind derivatele din (1.212) prin operatorul cu diferențe la dreapta se obține schema:

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) \quad (1.215)$$

Astfel, pentru nivelul de timp  $j=0$ ,  $i=0,1,2,\dots, I$  se calculează valorile inițiale în fiecare nod al rețelei:

$$U_{i,0} = f_i \quad ;$$

pentru  $i=0$ ,  $j=0,1,2,\dots, J$ , se calculează valorile pe frontieră în partea stângă:

$$U_{0,j} = g_1(jk)$$

iar pentru  $i=I$ ,  $j=0,1,2,\dots, J$ , se calculează valorile pe frontiera din dreapta:

$$U_{I,j} = g_2(jk)$$

Pentru nodurile interne ale domeniului se folosește schema explicită (obținută din 1.215):

$$U_{i,j+1} = \frac{k}{h^2} U_{i-1,j} + (1 - \frac{2k}{h^2}) U_{i,j} + \frac{k}{h^2} U_{i+1,j} \quad (1.216)$$

Schema explicită (1.216) cu două nivele de timp poate fi obținută și cu ajutorul dezvoltării în serie Taylor după variabila  $t$ :

$$u(x, t + k) = (1 + k \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots) u(x, t) \quad (1.217)$$

Înlocuind operatorul de derivare în timp cu cel de derivare în spațiu

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_x^2$$

relația (1.217) devine:

$$U_{i,j+1} = (1 + k D_x^2 + \frac{1}{2} k^2 D_x^4 + \dots) U_{i,j} \quad (1.218)$$

Relația (1.218) poate fi scrisă [R4] și funcție de operatorul diferență simetrică ținând cont de relația (1.194):

$$U_{i,j+1} = [1 + \alpha \hat{V}_i^2 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - \frac{1}{6}) \hat{V}_i^4 + \dots] U_{i,j} \quad (1.219)$$

în care  $\alpha = k/h^2$  este parametrul rețelei de discretizare.

Reținând din (1.219) doar primii doi termeni și ținând cont de rel. (1.191) se obține schema explicită anterioară (1.216)

Dacă se rețin primii trei termeni din (1.219) și se ține seama de (1.191) se obține o schemă explicită cu diferențe cu două nivele ce implică șase noduri ale rețelei [R4] :

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (2 - 5\alpha + 6\alpha^2) U_{i,j} + \frac{3}{2} \alpha (2 - 3\alpha) (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - \frac{1}{12} \alpha (1 - 6\alpha) (U_{i+2,j} + U_{i-2,j}) \quad (1.220)$$

Condiția de stabilitate pentru schemele explicite cu diferențe date de (1.216) și (1.220) este:  $0 < \alpha \leq 1/2$ . Această condiție poate fi un impediment pentru calculator, deoarece impune alegerea unui pas (k) destul de mic în direcția timpului. Datorită acestui fapt un interes deosebit se acordă schemelor implicite cu diferențe în care stabilitatea este asigurată pentru orice  $\alpha > 0$ .

Ecuăției (1.212) i se poate asocia [R4] o schemă cu diferențe de forma:

$$\frac{1}{k} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{h^2} [\theta (U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (1 - \theta) (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})] \quad (1.221)$$

unde  $\theta$  este o variabilă ( $0 \leq \theta \leq 1$ ). Această schemă implică în calcul șase noduri ale rețelei (trei la nivelul de timp j și alte trei la nivelul de timp j+1). Dacă  $\theta=0$ , rel. (1.221) se reduce la (1.216). Pentru  $\theta=1$  se obține schema Hyman-Kaplan:

$$-\alpha U_{i-1,j+1} + (1 + 2\alpha) U_{i,j+1} - \alpha U_{i+1,j+1} = U_{i,j}$$

Pentru  $\theta=1/2$  schema (1.221) se poate scrie sub forma:



$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{2h^2}(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})$$

cunoscută sub denumirea de schemă implicită cu diferențe Crank - Nicolson. În [R4] se analizează stabilitatea schemei cu ajutorul metodei matriceale (teorema lui Gherșgorin) ajungându-se la concluzia că schema implicită Crank - Nicolson este necondiționat stabilă.

### 1.5.2. Metoda elementelor finite

Metoda elementului finit este o metodă numerică a calculului variațional utilă în problemele de analiză a câmpului electromagnetic care admit și o formulare variațională. Calculul variațional a luat naștere din necesitatea de a determina extremele (valorile extreme) ale funcționalelor. O funcțională se definește ca o valoare sau funcție care depinde de întreaga variație (de graficul uneia sau mai multor funcții) și nu de un număr de variabile discrete. Domeniul unei funcționale este o mulțime de funcții admisibile care aparțin unui spațiu sau unei clase de funcții și nu unui domeniu din spațiul coordonatelor. Sunt cunoscute numeroase exemple de funcționale din domeniile fizicii, matematicii, tehnicii [L2, N6, K2, F1, S1].

Se consideră cazul unei funcționale definite printr-o integrală dublă pe un domeniu  $D$  mărginit de curba  $\Gamma$  netedă pe porțiuni în planul  $Oxy$ :

$$\mathfrak{J} = \iint_D F(x,y,w,w_x,w_y) dx dy \quad (1.222)$$

în care  $F$  este o funcție cu derivatele de ordinul doi continue în raport cu cele cinci argumente, iar  $w_x$  și  $w_y$  sunt derivatele în raport cu  $x$ , respectiv  $y$  ale funcției  $w(x,y)$ .

Se pune problema determinării unei funcții  $w = u(x,y)$  care realizează un extrem pentru funcționala  $\mathfrak{J}$ . Pentru aceasta se scrie funcția  $w(x,y)$  sub forma :

$$w(x,y) = u(x,y) + \varepsilon v(x,y) \quad (1.223)$$

în care  $v(x,y)$  este derivabilă de două ori și este nulă pe curba de frontieră  $\Gamma$  și deci:

$$w(x,y)|_{\Gamma} = u(x,y)|_{\Gamma} \quad (1.224)$$

În problemele la limită soluția este în general cunoscută pe frontieră și deci valorile funcțiilor  $u$  și  $w$  sunt cunoscute pe curba  $\Gamma$ . Înlocuind (1.223) în (1.222) și efectuând integrala dublă, funcționala  $\mathfrak{J}$  devine o funcție de  $\varepsilon$  (parametru ce nu depinde de  $x$  și  $y$ ).

În practică, funcționala (1.222) este de regulă o funcțională energetică și deci extremul căutat este un minim. Astfel problema minimizării funcționalei  $\mathfrak{I}$  se reduce la o problemă de minim local pentru funcția  $\mathfrak{I}(\varepsilon)$ . Conform analizei clasice condiția de minim este:

$$\left. \frac{d\mathfrak{I}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.225)$$

Relația (1.225) reprezintă condiția de minim pentru funcția  $\mathfrak{I}(\varepsilon)$  și în același timp condiția de staționaritate pentru funcționala (1.222). Dezvoltând relația (1.225) se obține:

$$\left( \frac{d\mathfrak{I}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \iint_D \left( \frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y \right) dx dy = 0 \quad (1.226)$$

în care  $v_x$  și  $v_y$  sunt derivatele în raport cu  $x$  respectiv  $y$  ale funcției  $v(x,y)$ , iar  $u_x$  și  $u_y$  sunt derivatele parțiale ale funcției  $u(x,y)$ .

Pentru a elimina termenii care conțin pe  $v_x$  și  $v_y$  se integrează prin părți, primul termen în raport cu  $x$  iar al doilea în raport cu  $y$  și se ține seama că  $v(x,y) = 0$  pe curba  $\Gamma$ , iar în final rel. (1.226) devine:

$$\iint_b v \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy = 0 \quad (1.227)$$

de unde rezultă ecuația cu derivate parțiale a lui Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (1.228)$$

Ecuația lui Euler (1.228) reprezintă condiția de staționaritate (minimizare) a funcționalei (1.222). În rel. (1.228) se caută o funcție  $u(x,y)$  care verifică ecuația diferențială (Euler). Dacă se găsește o astfel de funcție, ea minimizează și funcționala (1.222). În consecință, problema variațională (1.222) și ecuația cu derivate parțiale a lui Euler (1.228) reprezintă două probleme, în aparență diferite, care au aceeași soluție:  $u(x,y)$ . Pentru a găsi funcția  $u(x,y)$  se rezolvă: fie ecuația diferențială a lui Euler, fie direct problema variațională.

Dacă funcția  $F$  este aleasă convenabil, ecuația cu derivate parțiale (1.228) poate fi de tip Poisson sau Laplace. Fie, de exemplu, funcția  $F$  din (1.222) de forma:

$$F = u_x^2 + u_y^2 + 2f(x,y) \cdot u(x,y) \quad (1.229)$$

unde  $u_x$  și  $u_y$  sunt derivatele de ordinul întâi în raport cu  $x$  și  $y$ , iar  $f(x,y)$  o funcție dată continuă. În acest caz, ecuația lui Euler (1.228) devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.230)$$

care este ecuația lui Poisson .

În consecință problema rezolvării ecuației Poisson (1.230) poate fi transferată (în domeniul variațional) la rezolvarea funcționalei:

$$\mathfrak{J} = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2f(x, y) \cdot u(x, y)) dx dy \quad (1.231)$$

Ecuatiile cu derivate parțiale de tip eliptic (ecuații ale câmpului electromagnetic) pot primi astfel o formulare variațională.

Construcția modelului matematic variațional de câmp presupune stabilirea unui principiu variațional ( de tip lagrangean sau hamiltonian ), capabil să furnizeze din condiția de staționaritate a unei funcționale adecvate ecuațiile de bază ale câmpului electromagnetic.

Dacă se aplică principiul variațional al acțiunii staționare unui sistem fizic constituit dintr-un mediu în prezența câmpului electromagnetic , integrala  $\mathfrak{J}$  este de forma [M2] :

$$\mathfrak{J} = \int_D [ \int_0^E D dE - \int_0^B H dB + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \rho_v V ] d\omega \quad (1.232)$$

în care primii doi termeni caracterizează câmpul electromagnetic liber, iar ultimii doi cuplajul câmp-corpuri, toți termenii reprezentând densități de volum ale energiei ( $d\omega$  este elementul de volum al domeniului  $D$ ). În cazul câmpului magnetic staționar, funcționala energetică (1.232) devine:

$$\mathfrak{J} = \int_D ( \int_0^B \bar{H} d\bar{B} - \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{A}} ) d\omega \quad (1.233)$$

Metoda Ritz este o metodă numerică de minimizare a funcționalei (1.222) și constă în aproximarea funcției căutate printr-o combinație liniară de funcții triale :

$$u(x, y) = \varphi_0(x, y) + c_1 \varphi_1(x, y) + c_2 \varphi_2(x, y) + \dots + c_n \varphi_n(x, y) \quad (1.234)$$

unde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sunt coeficienți constanți ce urmează a fi determinați. Pe frontiera domeniului

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  sunt nule și deci valoarea funcției este :  $u(x, y)|_r = \varphi_0(x, y)$

În aceste condiții funcționala  $\mathfrak{J}$  devine o funcție de  $n$  - variabile:  $\mathfrak{J}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$  . Condiția de staționaritate pentru funcțională, devine astfel echivalentă cu condiția de extrem pentru funcția de  $n$ - variabile:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial c_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.235)$$

Metoda Ritz și echivalentele sale (Galerkin, Kontorovici) aparțin metodelor variaționale clasice și prezintă unele dezavantaje în aplicații : discretizarea funcționalei se efectuează pe întreg domeniul D; pentru mărirea preciziei sunt necesare funcții triale mai complicate ; funcțiile triale trebuie să satisfacă condițiile pe frontieră.

În metoda elementelor finite domeniul D se partiționează în subdomenii disjuncte numite elemente finite, în general de aceeași formă. Funcțiile triale sunt definite pe fiecare element, în majoritatea cazurilor fiind polinoame de interpolare Lagrange de grad relativ mic. Se mai folosesc și polinoame Hermite și "spline", detalii în acest sens găsim în [S6,M6]

Satisfacerea condițiilor pe frontiera elementelor finite este simplu de îndeplinit deoarece, în general, frontierele sunt linii poligonale. Într-o problemă plan-paralelă elementele finite sunt de formă triunghiulară, dreptunghiulară, etc., cu laturi drepte sau curbe. Nodurile se aleg în vârfurile elementelor, la mijlocul laturilor, în centrul elementelor, etc. Fiecare element este caracterizat de numărul gradelor de libertate, egal cu numărul nodurilor aparținând elementului în care se impun valorile funcției triale. Cel mai simplu element finit este triunghiul care este și cel mai des folosit. Triunghiul cu șase grade de libertate are încă trei noduri situate la mijlocul laturilor și se numește element finit de ordinul doi. O serie de detalii privind elementele finite și tehnica metodei pot fi găsite în [O1,P1,M2,N5].

În esență metoda constă în dezvoltarea funcționalei (1.232) sau (1.233) pe fiecare element finit în care a fost discretizat domeniul D și apoi în rezolvarea sistemului algebric liniar de ecuații care asigură condițiile de staționaritate ale funcționalelor.

Pentru exemplificare se presupune o problemă plan-paralelă de câmp magnetic staționar cîrcia îi corespunde funcționala (1.233) . Domeniul D este conținut în planul xOy. Dacă se reprezintă potențialul magnetic vector ( $\vec{A}$ ) pe a treia axă a sistemului cartezian se obține o suprafață în spațiu,  $A=A(x,y)$ . Direcția vectorului  $\vec{A}$  fiind mereu aceeași (perpendiculară pe planul xOy) se renunță la reprezentarea vectorială. Această suprafață se discretizează prin mici suprafețe plane (elemente finite) de formă triunghiulară.

Astfel pe fiecare element finit potențialul  $A^e$  devine o funcție liniară de x și y (polinom de gradul întâi în două variabile):

$$A^e(x,y) = a_1^e + a_2^e x + a_3^e y \quad (1.236)$$

unde indicele "e" marchează mărimile care sunt proprii fiecărui element (trecând la un alt element , acestea se schimbă).

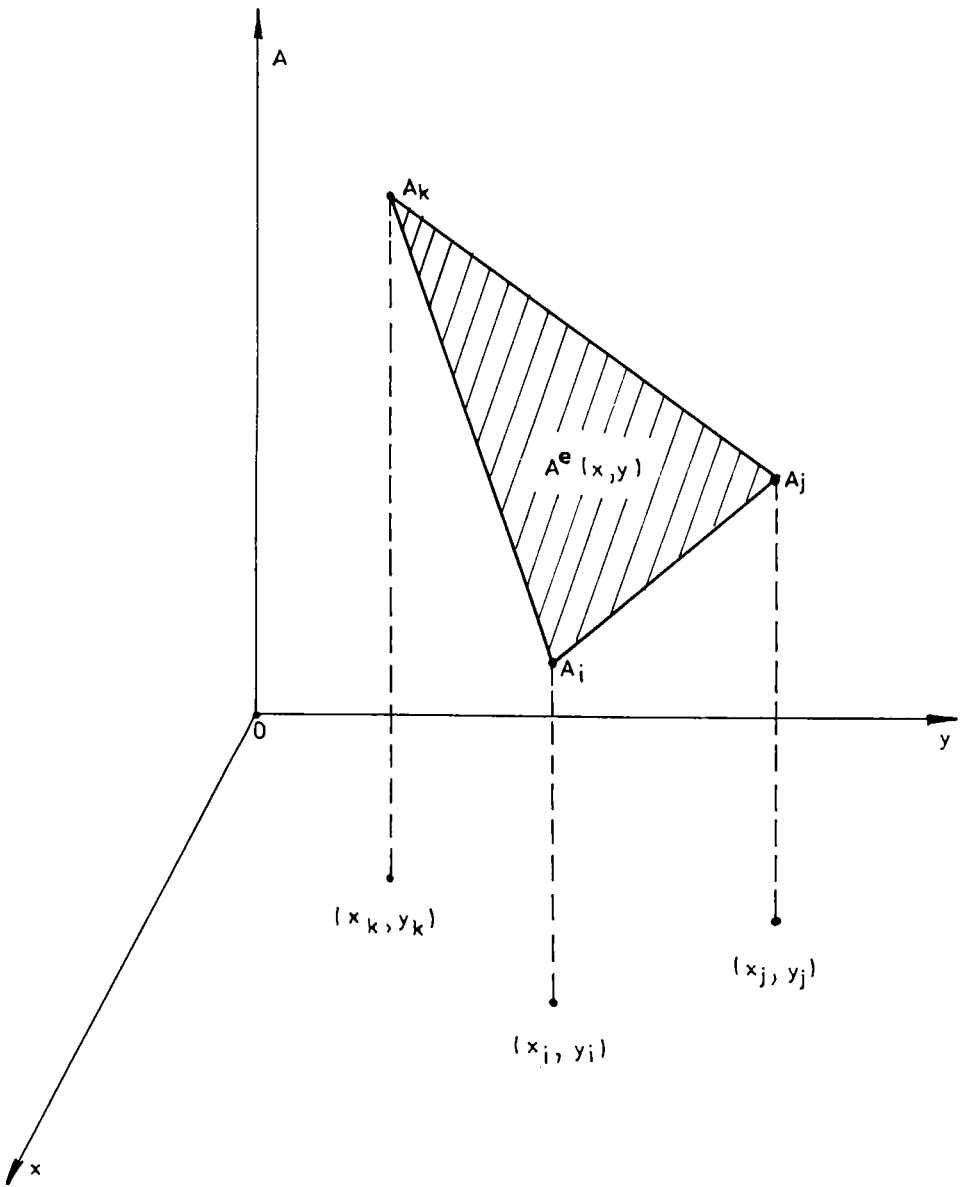


Fig.1.15

Nodurile rețelei de elemente finite se consideră în vârfurile triunghiurilor (fig. 1.15). Fiecărui nod îi corespunde o valoare a potențialului. Punctului de coordonate  $(x_i, y_i)$  îi corespunde potențialul  $A_i$ , ș.a.m.d. Pentru elementul finit din fig. 1.15, coeficienții  $a_1, a_2, a_3$  din (1.236) se determină impunând condiția ca planul (1.236) să treacă prin trei puncte:

$$\begin{aligned} A_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ A_j &= a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\ A_k &= a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k \end{aligned} \quad (1.237)$$

Prin rezolvarea sistemului rezultă coeficienții  $a_1, a_2, a_3$ .

În consecință, pentru fiecare element, coeficienții  $a_1^e, a_2^e, a_3^e$  sunt funcții de valorile potențialelor ( $A_i, A_j, A_k$ ) în vârfurile elementului triunghiular respectiv. Astfel, pe suprafața elementului, potențialul se determină cu relația:

$$A^e(x, y) = a_1^e(A_i, A_j, A_k) + a_2^e(A_i, A_j, A_k)x + a_3^e(A_i, A_j, A_k)y \quad (1.238)$$

sau, ordonând altfel membrul drept:

$$A^e(x, y) = A_i \varphi_i(x, y) + A_j \varphi_j(x, y) + A_k \varphi_k(x, y) \quad (1.239)$$

în care se recunosc funcțiile triale sau de coordonate ( $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ ) din rel. (1.234) și coeficienții constanți ( $A_i, A_j, A_k$ ).

În problema plan-paralelă considerată se pot calcula în acest moment componentele inducției magnetice (ținând seama și de rel. 1.238) pe fiecare element în parte:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = a_3^e(A_i, A_j, A_k) = \text{ct.} \quad (1.240)$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -a_2^e(A_i, A_j, A_k) = \text{ct.} \quad (1.241)$$

Se constată că inducția  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$  este constantă pe toată suprafața elementului finit (triunghiului).

Revenind la rel. (1.233), funcționala energetică se transformă într-o sumă de funcționale elementare la nivelul celor  $m$ -elemente de discretizare a domeniului [M2]:

$$\mathfrak{J} = \int_D \left( \frac{1}{\mu} \int_b^B B_x dB_x + \frac{1}{\mu} \int_b^B B_y dB_y - JA \right) dx dy = \sum_{e=1}^m \mathfrak{J}^e \quad (1.242)$$

în care  $\mathfrak{J}^e$  este funcționala corespunzătoare elementului finit "e" (domeniul  $D$  este în acest caz suprafața elementului "e", notată cu  $D^e$ ):

$$\mathfrak{J}^e = \int_{D^e} \left( \int_0^B H dB - J \cdot A \right) dx dy \quad (1.243)$$

Deoarece  $B_x$  și  $B_y$  sunt funcții de potențialele  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , la nivelul întregului domeniu, funcționala este dependentă de potențialele tuturor celor  $n$ -noduri ale domeniului  $D$  :

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \quad (1.244)$$

și deci condiția de staționaritate devine sistemul algebric:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial A_v} = 0 \quad v = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.245)$$

în care se recunoaște relația generală ( 1.235 ) .

Trebuie semnalat aici un fapt remarcabil: dacă se scrie, de exemplu, ecuația pentru  $v = 7$  din sistemul (1.245), derivarea funcționalei  $\mathfrak{F} = \sum_{e=1}^m \mathfrak{F}^e$  se face în raport cu  $A_7$  și deci suma  $\sum_{e=1}^m$  trebuie extinsă doar asupra elementelor finite din jurul nodului  $v = 7$  care conțin variabile  $A_7$  (celelalte funcționale  $\mathfrak{F}^e$  se anulează prin derivare), astfel că:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial A_v} = \frac{\partial}{\partial A_v} \sum_{e=1}^{m_v} \mathfrak{F}^e = \sum_{e=1}^{m_v} \frac{\partial \mathfrak{F}^e}{\partial A_v} \quad (1.246)$$

în care  $m_v$  reprezintă numărul de elemente finite din jurul nodului "v" În consecință sistemul ( 1.245 ) devine:

$$\sum_{e=1}^{m_v} \frac{\partial}{\partial A_v} \int_b \left( \frac{1}{\mu} \int_b^{b_x} B_x dB_x + \frac{1}{\mu} \int_b^{b_y} B_y dB_y - JA \right) dx dy = 0 \quad (1.247)$$

$$v = 1, 2, 3, \dots, n$$

Efectuând în continuare calculele se obține:

$$\sum_{e=1}^{m_v} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial A_v} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial A_v} \right) \frac{\Delta^e}{\mu^e} - \sum_{e=1}^{m_v} \frac{1}{3} J^e \Delta^e = 0 \quad (1.248)$$

$$v = 1, 2, 3, \dots, n$$

în care  $\Delta, \mu, J$  reprezintă aria suprafeței elementului respectiv, permeabilitatea magnetică (constanta) a elementului și densitatea curentului de conducție ce traversează elementul, toate variabile de la element la element . Ținând seama și de rel. (1.240) - (1.241) se obține în final un sistem algebric liniar în care necunoscutele sunt  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_v, \dots, A_n$  care se rezolvă numeric printr-o metodă adecvată. Cunoscând aceste potențiale, se determină, cu ajutorul rel. ( 1.240 ) - ( 1.241 ) inducțiile magnetice pe fiecare element și problema se consideră rezolvată.

Procedeele legate de aplicarea metodei elementelor finite se dezvoltă în permanență. În [N5] se prezintă un procedeu relativ simplu de generare automată a rețelei de discretizare și de realizare a conexiunilor triunghiurilor, descriindu-se întreg algoritmul. În [I3] se sugerează folosirea transformărilor conforme pentru realizarea unei rețele de discretizare simplă (regulată) în planul  $W$  care apoi se transformă conform în planul fizic ( $Z$ ) al problemei.

Numeroase detalii privind aplicarea concretă a metodei elementului finit în calculul câmpului electromagnetic staționar pot fi urmărite în [S5,C3,C4,V2]. Metoda elementului finit poate fi extinsă și pentru calculul câmpului magnetic nestaționar (ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic și hiperbolic). Includerea dimensiunii "timp" face astfel posibilă soluționarea prin această metodă a unor probleme legate de regimuri tranzitorii sau de difuzie a câmpului electromagnetic. În acest sens în [P2,B3] se poate urmări modul de soluționare a unei probleme de câmp nestaționar prin metoda elementului finit.

În [G3] se face o comparație între performanțele metodei diferențelor finite și metodei elementelor finite prezentându-se câteva concluzii: viteza de convergență a celor două metode este aceeași; erorile de discretizare sunt egale; la același număr de necunoscute, metoda diferențelor finite necesită un volum de memorie cel mult egal cu cel pretins de metoda elementelor finite; dacă numărul de necunoscute este mai mic decât cca. 800, timpul de calcul este mai mic la metoda diferențelor finite, iar peste acest număr, la metoda elementelor finite.

### 1.5.3. Metoda elementelor de frontieră

Metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite sunt metode "de domeniu". Ele aproximează ecuațiile câmpului electromagnetic în tot domeniul (discretizat) și satisfac în prealabil condițiile la limită impuse. Dimpotrivă, metoda elementelor de frontieră, este o metodă "de frontieră". Ea verifică exact ecuațiile câmpului electromagnetic în domeniu de câmp și aproximează condițiile pe frontieră.

Față de celelalte două metode (de domeniu), metoda elementelor de frontieră oferă următoarele avantaje [M2]:

- necesită doar discretizarea frontierei rezultând un număr mai mic de ecuații ale sistemului algebric liniar și tot ce decurge din aceasta: număr mai mic de date de intrare, spațiu de memorie mai mic, timp de calcul mai redus;
- acuratețea sa numerică este, în general, superioară;



- poate fi combinată cu metoda elementelor finite sau diferențelor finite pentru obținerea unor precizii sporite.

Se consideră o problemă plan - paralelă în care potențialul  $\varphi$  satisface ecuația lui Poisson (1.129) pe un domeniu plan  $D$  având condiții pe frontieră  $\Gamma$  de tip Dirichlet sau Neumann (în fiecare punct al frontierei se cunoaște potențialul sau componenta normală a gradientului).

În această situație formula celor trei potențiale (1.34) leagă valorile  $\varphi$  și  $\frac{d\varphi}{dn}$  pe frontieră sub următoarea formă:

$$\frac{\alpha_p}{2\pi} \varphi(P) = \oint_{\Gamma} \left( G \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dG}{dn} \right) dl - \iint_D G(\Delta\varphi) d\sigma \quad (1.249)$$

în care:  $\alpha_p = 2\pi$  dacă  $P \in D$ ;  $\alpha_p = \pi$  dacă  $P \in \Gamma$ ;  $\alpha_p = 0$  dacă  $P$  este în exteriorul domeniului, iar  $G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ . Dacă în fiecare punct al frontierei s-ar cunoaște valorile  $\varphi$  și  $\frac{d\varphi}{dn}$ , atunci relația (1.249) ar putea servi la determinarea potențialului în fiecare punct al domeniului  $D$ .

Prin rezolvarea numerică a ecuației (1.249) se urmărește tocmai determinarea valorilor  $\varphi$  și  $\frac{d\varphi}{dn}$  în fiecare punct al frontierei  $\Gamma$ .

În acest scop se discretizează (se aproximează) frontiera prin  $N$  elemente de frontieră liniare (segmente de dreaptă),  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N$ . Nodurile rețelei de discretizare se consideră la mijlocul fiecărui element de frontieră, în punctele  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . (figura 1.16). Pe elementele de frontieră  $\Gamma_j$ , valoarea potențialului  $\varphi_j$  și valoarea componentei normale a gradientului  $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j$ , sunt constante și egale cu valorile lor în centrul elementului, adică în punctul  $X_j$ .

În aceste condiții integrala pe curba  $\Gamma$  din relația (1.249) se descompune în  $N$  integrale pe cele  $N$  elemente de frontieră. Dacă punctul  $P \in \Gamma_1$ , relația (1.249) devine:

$$\frac{1}{2} \varphi_1 = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left( G(X_1, x) \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j - \varphi_j \frac{dG(X_1, x)}{dn} \right) dl_j - \sum_{k=1}^k \iint_{D_k} G(X_1, x) h_k d\sigma_k \quad (1.250)$$

Dacă punctul  $P \in \Gamma_2$ , în relația (1.250) se schimbă doar  $\varphi_1$  în  $\varphi_2$  și  $G(X_1, x)$  în  $G(X_2, x)$ . În acest fel se obține un sistem de ecuații algebrice liniare după rezolvarea integralelor. La efectuarea integralelor pe elementele  $\Gamma_j$ , valorile  $\varphi_j$  și  $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j$ , fiind

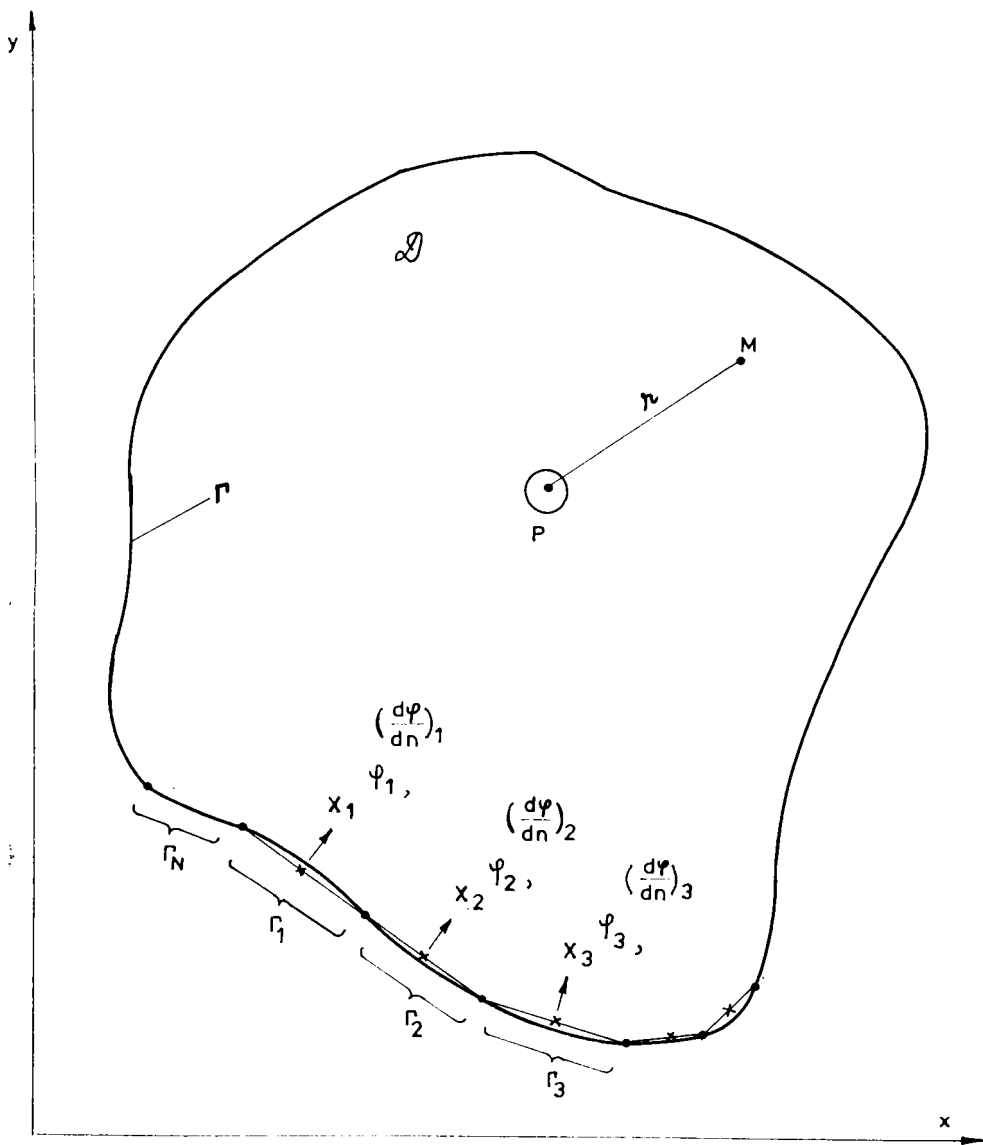


Fig. 1.16

constante, se scot în afara integralelor . În integrala dublă, valoarea laplacianului ( $\Delta \varphi = h$ ) este iarăși constantă pe domeniul  $D_k$  de discretizare și se scoate în afara integralei.

În continuare se fac următoarele notații [G4] :

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = \Phi_j$$

$$\int_{\Gamma_j} G(X_1, x) \phi_j = \phi_j G_j^1$$

$$\int_{\Gamma_j} \varphi_j \left(\frac{dG(X_1, x)}{dn}\right) = \varphi_j F_j^1$$

$$\iint_{D_k} G(X_1, x) h_k = h_k H_k^1$$

astfel încât sistemul algebric complet poate fi scris astfel:

$$\frac{1}{2} \varphi_i = \sum_{j=1}^N \phi_j G_j^i - \varphi_j F_j^i - \sum_{k=1}^K h_k H_k^i \quad (1.251)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Sistemul conține  $N$  ecuații și  $2N$  necunoscute. Necunoscutele se consideră a fi:  $\varphi_j$ ,

$j=1, 2, 3, \dots, N$  și  $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = \Phi_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots, N$ . Dacă pe frontieră se cunosc potențialele  $\varphi_j$  (cazul problemei Dirichlet) rezultă că mai rămân  $N$  necunoscute ( $\Phi_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots, N$ ) care pot fi determinate prin rezolvarea sistemului de ecuații algebrice liniar (1.251). În cazul problemei Neumann, din sistemul (1.251) se determină potențialele pe frontieră ( $\varphi_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots, N$ ).

În consecință oricare ar fi condițiile la limită date, sistemul (1.251) permite determinarea pe frontieră a celuilalt set de mărimi astfel încât după rezolvarea sistemului se cunosc pe frontieră valorile potențialului și ale componenteii normale a gradientului de potențial. Cu aceste valori cunoscute, formula celor trei potențiale (1.249) devine utilizabilă și permite calculul potențialului  $\varphi(P)$  în orice punct  $P$  al domeniului  $D$ .

În [S7] se arată că metoda elementelor de frontieră este indicată la cazurile în care zona de interes este frontiera și se va evita utilizarea ei la problemele "de domeniu" din cauza timpului de calcul.

## 1.6. EXEMPLU DE CALCUL

În (figura 1.17) se prezintă desfășurat forma jugului în cazul unei tole utilizată în construcția mașinilor electrice. Liniile de câmp magnetic care se închid prin jugul de

înălțime  $h$  se curbează în dreptul dinților, secțiunea jugului fiind mai mare în axa dinților. Se obține ca efect o descărcare magnetică a jugului ca urmare a prezenței dinților. Deci, prezența dinților mărește fictiv jugul, așa cum deschiderea creștăturilor mărește întrefierul. Deosebirea dintre cele două situații constă în aceea că liniile de câmp din jug sunt linii echipotențiale în întrefier și invers. Se pune problema [M12] determinării unui coeficient ( $k$ ) de creștere a înălțimii jugului (sau de micșorare a inducției în jug) care să țină seama de prezența dinților, de forma creștăturii în zona jugului și de dimensiunile geometrice  $h$ ,  $r$ ,  $d$  (figura 1.17). Problema pusă se rezolvă în continuare prin metoda transformărilor conforme.

În planul  $Z$  se consideră domeniul din figura 1.18.a care aproximează problema reală în următoarele ipoteze simplificatoare:

- se consideră un singur dinte, neglijând influența prezenței celorlalți;
- se neglijează prezența celeilalte creștături, adiacente dintelui considerat;
- înălțimea dintelui se consideră a fi limitată (ca în figura 1.18.a)

Verificările experimentale au dovedit că ipotezele de mai sus pot fi acceptate.

Domeniul ales simplifică problema permițându-i o rezolvare analitică în conformitate cu cele expuse în paragraful 1.4.5.

În acest sens se urmărește transformarea conformă a conturului ABCDEF din planul  $Z$  pe semiplanul superior  $W$  (figura 1.18.b.) utilizând formula Schwarz - Christoffel (1.178) în care:

$$u_E = 0 ; \quad u_A = 1 ; \quad u_B = a; \quad \beta_E = \pi ;$$

$$\beta_A = -\frac{\pi}{2} \quad \beta_B = \frac{\pi}{2} \tag{1.252}$$

Deoarece " poligonul " ABCDEF are o formă rotunjită (arc de cerc) pe porțiunea AB, se ține seama de observația (1.181) și se obține relația de transformare conformă amintită, sub forma:

$$z = A_1 \int \frac{(w-1)^{\frac{1}{2}} + \lambda(w-a)^{\frac{1}{2}}}{w(w-a)^{\frac{1}{2}}} dw + C \tag{1.253}$$

în care  $A_1$ ,  $C$ ,  $\lambda$ ,  $a$  sunt constante ce urmează a fi determinate.

Rezolvarea integralei se face separat descompunând expresia de sub integrală în doi termeni:

$$I = I_1 + I_2 = \int \frac{(w-1)^{\frac{1}{2}}}{(w-a)^{\frac{1}{2}}} \frac{dw}{w} + \lambda \int \frac{dw}{w} \tag{1.254}$$

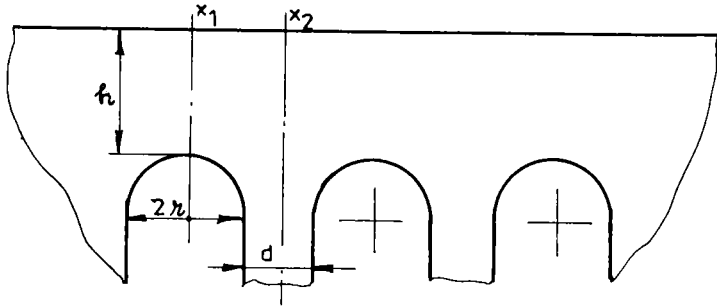


Fig. 1.17

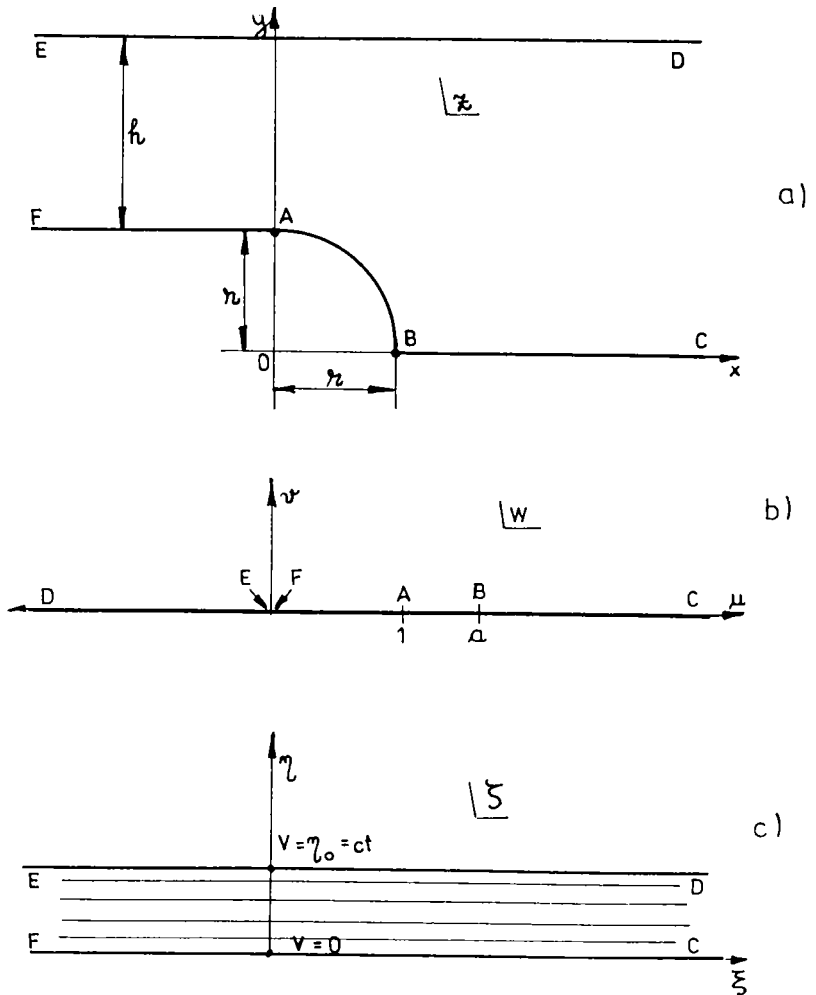


Fig. 1.18

Întrucât rezolvarea integralei  $I_2$  este imediată se prezintă în continuare modul de rezolvare a integralei  $I_1$  făcând substituția:

$$p^2 = \frac{(w-1)}{(w-a)} \quad (1.255)$$

de unde rezultă:

$$w = \frac{ap^2 - 1}{p^2 - 1}$$

$$dw = \frac{2p(1-a)}{(p^2 - 1)^2} dp$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{2p(1-a)}{(p^2 - 1)^2 (ap^2 - 1)} dp \quad (1.256)$$

Cu acestea, integrala  $I_1$  devine:

$$I_1 = \int \frac{2(1-a)p^2}{(p^2 - 1)^2 (ap^2 - 1)} dp \quad (1.257)$$

care se rezolvă imediat prin descompunere în fracții simple.

În final expresia (1.253) are forma:

$$z = A_1 \left( \ln \frac{p+1}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{p\sqrt{a+1}}{p\sqrt{a}-1} + \lambda \ln \frac{ap^2 - 1}{p^2 - 1} \right) + C \quad (1.258)$$

sau ținând seama de (1.255) :

$$z = A_1 \left( \ln \frac{\sqrt{w-1} + \sqrt{w-a}}{\sqrt{w-1} - \sqrt{w-a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a(w-1)} + \sqrt{w-a}}{\sqrt{a(w-1)} - \sqrt{w-a}} + \lambda \ln w \right) + C \quad (1.259)$$

### Determinarea constantelor

Dacă  $Z$  parcurge distanța  $\overline{CD}$ , în planul  $Z$ , atunci  $w$  parcurge drumul de la  $C$  la  $D$  pe un semicerc cu rază  $R \rightarrow \infty$  în semiplanul superior  $W$ :

$$i(h+r) = \lim_{R \rightarrow \infty} A_1 \int_0^\pi \frac{(Re^{i\varphi} - 1)^{\frac{1}{2}} + \lambda (Re^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}}}{Re^{i\varphi} (Re^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}}} Re^{i\varphi} i d\varphi = iA_1 (1 + \lambda)\pi \quad (1.260)$$

de unde:

$$h + r = \pi A_1 (1 + \lambda) \quad (1.261)$$

Alte relații pot fi găsite urmărind corespondența diferitelor puncte între planele  $W$  și  $Z$ . De exemplu, pentru  $w=1$  se obține  $p = 0$  și  $\bar{z} = 0 + ir$  (corespondența punctului  $A$  în cele două plane), iar din relația (1.258) rezultă:

$$0 + ir = A_1 \left[ \ln(-1) - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(-1) + \lambda \ln 1 \right] + C \quad (1.262)$$

Efectuând calculele se obține succesiv:

$$0 + ir = A_1 \left( i\pi - \frac{1}{\sqrt{a}} i\pi \right) + C$$

$$0 + ir = i\pi A_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) + C$$

și prin identificare rezultă:

$$C = 0 \quad (1.263)$$

$$r = \pi A_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \quad (1.264)$$

Pentru  $w = a$  se obține  $p = \infty$  și  $\bar{z} = r + i \cdot 0$  (corespondența punctului  $B$  în cele două plane):

$$r + i0 = A_1 \left( \ln 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \ln 1 + \lambda \ln a \right) \quad (1.265)$$

de unde:

$$r = \lambda A_1 \ln a \quad (1.266)$$

Rezolvând sistemul de ecuații format din (1.261), (1.264), (1.266) se obține:

$$A_1 = \frac{r\sqrt{a}}{\pi(\sqrt{a} - 1)} \quad (1.267)$$

$$\lambda = \frac{\pi(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} \ln a} \quad (1.268)$$

iar constanta  $a$  rezultă din ecuația transcendentă:

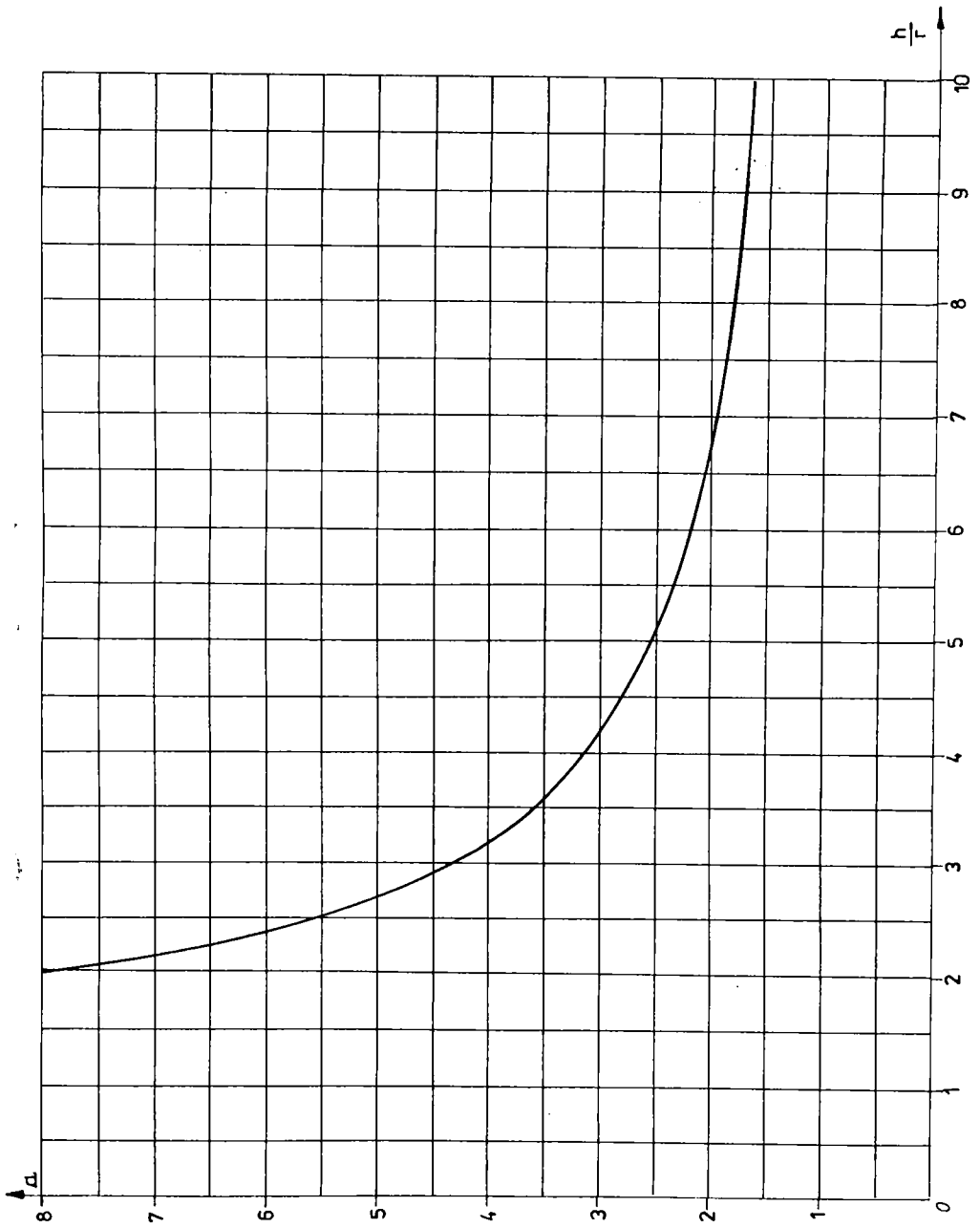


Fig. 1.19 Soluția ecuației (1.269)



$$\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)} + \frac{\pi}{\ln a} = \frac{h+r}{r} \quad (1.269)$$

În figura 1.19 se poate urmări soluția ecuației (1.269) rezolvată printr-o metodă numerică (Newton-Raphson), pentru diferite valori ale raportului  $h/r$ .

Constantele sunt determinate dar câmpul nu este încă omogen în planul  $W$ , motiv pentru care se realizează încă o transformare conformă (din planul  $W$  în planul  $\zeta$ ) dată de următoarea relație:

$$\zeta = A_2 \int \frac{dw}{w} + K = A_2 \ln w + K \quad (1.270)$$

Relația (1.270) transformă semiplanul superior  $W$  în fâșia cuprinsă între  $\eta=0$  și  $\eta=\eta_0$  (figura 1.18.c) în care câmpul este omogen.

Plasând originea planului  $\zeta$  în punctul  $A$  (unde  $w=1$ ) se obține:

$$\zeta = 0 = A_2 \ln 1 + K \quad (1.271)$$

de unde rezultă:  $k=0$ .

Dacă  $w \rightarrow -\infty$ , ținând cont de (1.270) se poate scrie:

$$\infty + i\eta_0 = A_2 \ln(-\infty) = A_2 \ln(i^2 \infty) = A_2 (2 \ln i + \infty) = A_2 (i\pi + \infty) \quad (1.272)$$

de unde:

$$A_2 = \frac{\eta_0}{\pi} \quad (1.273)$$

Transformarea (1.270) are forma finală:

$$\zeta = \frac{\eta_0}{\pi} \ln w \quad (1.274)$$

Astfel se obține în fâșia CDEF din figura 1.18.c un câmp magnetic omogen, liniile de câmp respectiv cele echipotențiale fiind drepte paralele.

Relațiile (1.259) și (1.274) definesc transformările conforme care asigură corespondența a trei domenii din cele trei plane (figura 1.18).

Modulul inducției magnetice într-un punct al domeniului din planul  $Z$  va fi (considerând  $\mu$  constant pe porțiuni):

$$B = \mu \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \mu \left| \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dz} \right| \quad (1.275)$$

în care:

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{\eta_0}{\pi} \cdot \frac{1}{w}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w\sqrt{w-a}}{A_1(\sqrt{w-1} + \lambda\sqrt{w-a})} \quad (1.276)$$

Cu aceste valori, relația (1.275) devine:

$$B = \frac{\mu\eta_0}{\pi A_1} \left| \frac{\sqrt{w-a}}{\sqrt{w-1} + \lambda\sqrt{w-a}} \right| \quad (1.277)$$

Din planul Z se observă că valoarea maximă a inducției se obține pentru  $z \rightarrow -\infty$ , respectiv  $w \rightarrow 0$  (în planul W), astfel încât:

$$B_{\max} = \frac{\mu\eta_0}{\pi A_1} \cdot \frac{\sqrt{a}}{1 + \lambda\sqrt{a}} \quad (1.278)$$

Împărțind ultimele două relații se obține:

$$\frac{B}{B_{\max}} = \frac{1 + \lambda\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \left| \frac{\sqrt{w-a}}{\sqrt{w-1} + \lambda\sqrt{w-a}} \right| \quad (1.279)$$

Relația (1.279) permite calculul raportului  $B/B_{\max}$  în diferite puncte ale frontierei ED ( $w < 0$ ). Prezintă interes intervalul:

$$0 \leq \text{Real} \bar{z} \leq r + \frac{d}{2} \quad (1.280)$$

adică între axa creștăturii și axa dintelui vecin. Variația inducției magnetice pe intervalul (1.280) este o măsură a descărcării magnetice a jugului datorită prezenței dinților. În consecință se definește coeficientul ( $k_j$ ) de descărcare magnetică a jugurilor ca o medie a inducției pe intervalul (1.280), astfel:

$$k_j = \frac{1}{r + \frac{d}{2}} \int_0^{r + \frac{d}{2}} \left( \frac{B}{B_{\max}} \right) dx \quad (1.281)$$

în care.  $x = \text{Real}(\bar{z})$

În figura 1.20 se poate urmări variația inducției relative pe intervalul  $0 \leq x \leq 7,5$  mm pentru  $r=5$ mm,  $d=5$ mm și patru valori ale lui h.

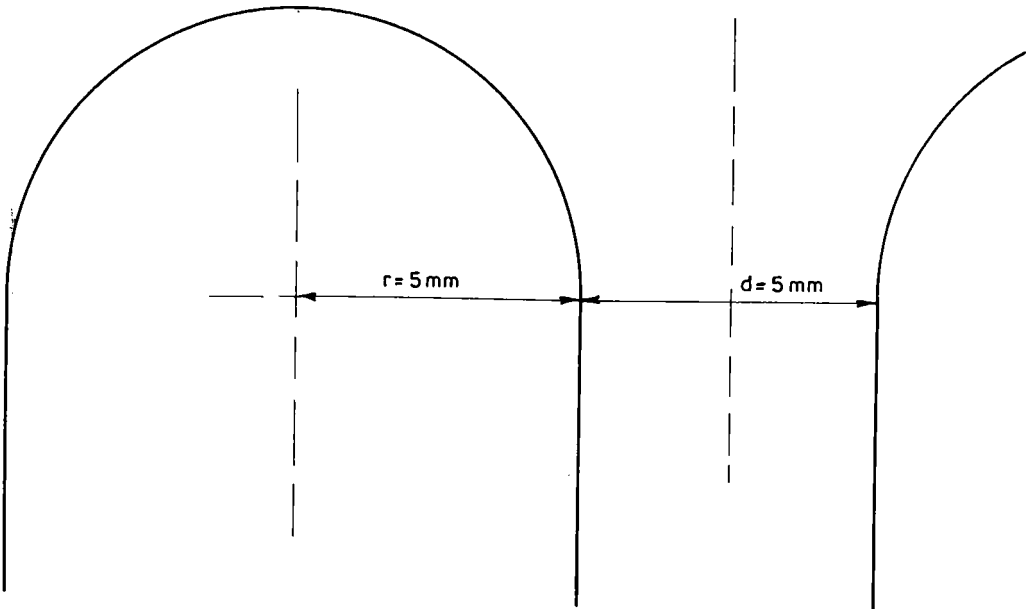
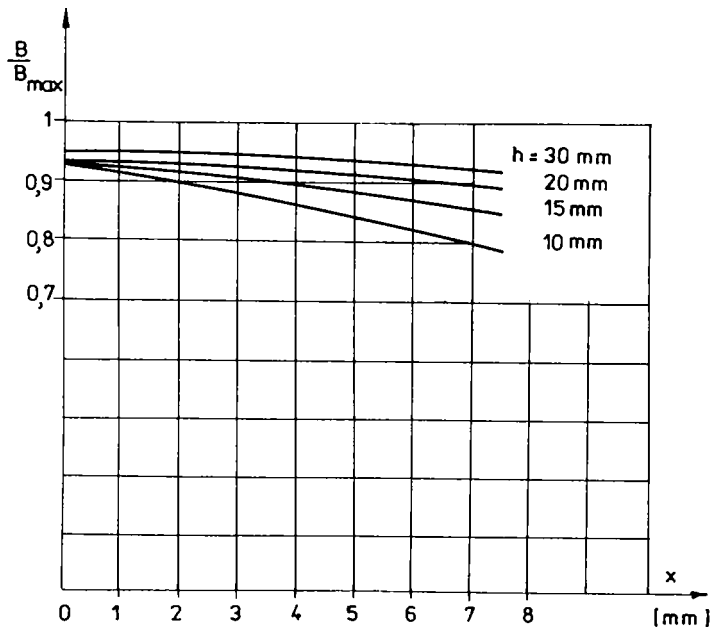


Fig. 1.20

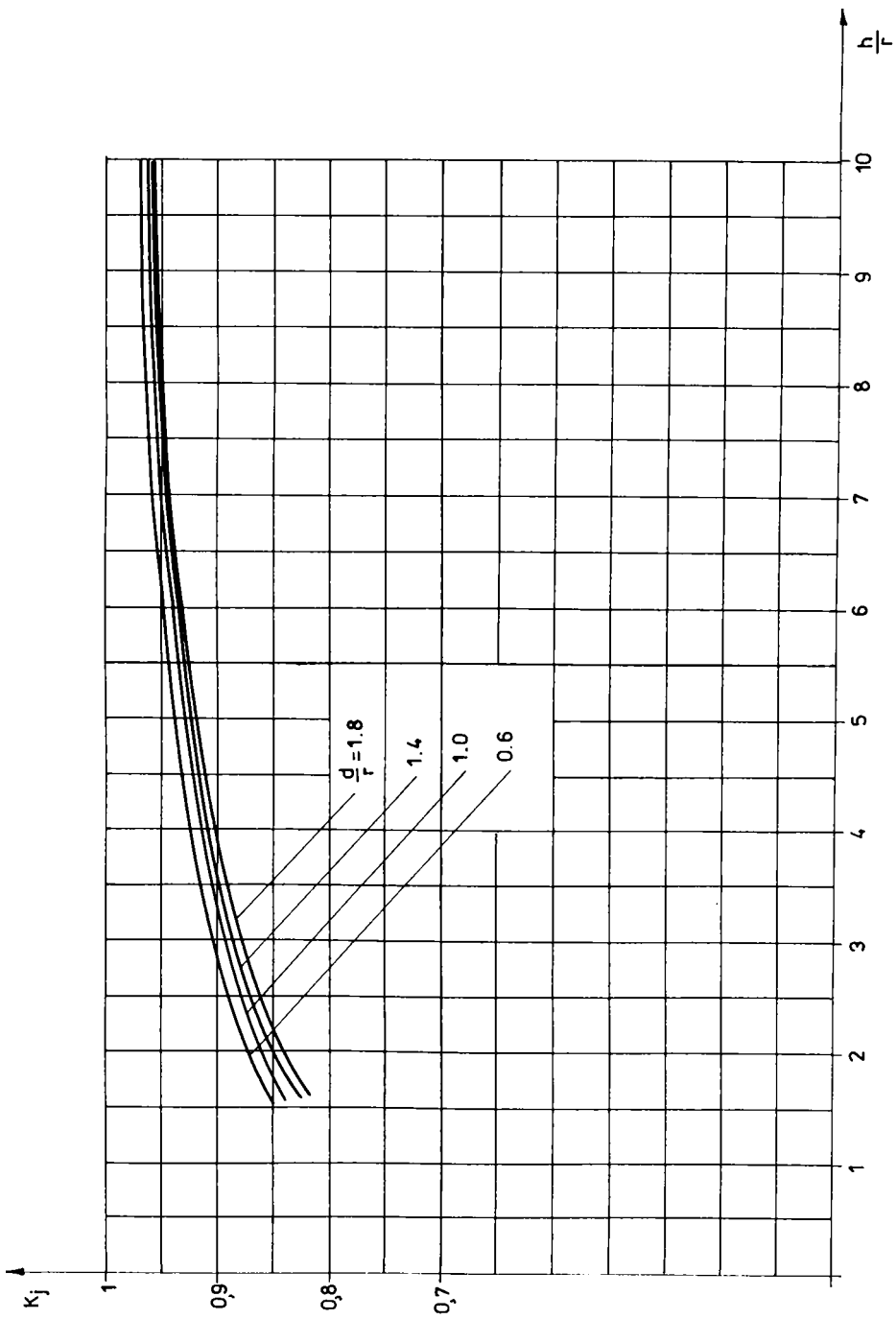


Fig. 1.21. Variația coeficientului de descărcare magnetică a jugurilor

Curbele prezentate în figura 1.21 reprezintă coeficientul  $k_j$  calculat cu relația (1.281), pentru numeroase cazuri reale care acoperă situațiile întâlnite în practică. Cunoscând dimensiunile tolei:  $r, d, h$ , curbele din figura 1.21 permit determinarea coeficientului  $k_j$  care, în calculele de proiectare, trebuie să înmulțească inducția magnetică în jug ( $k_j B_j$ ) având semnificația de descărcare magnetică a jugului. Efectul este același în cazul în care  $k_j$  acționează asupra înălțimii jugului, măbind înălțimea de calcul a jugului ( $h/k_j$ ).

## 1.7 CONCLUZII

Soluția unei probleme de câmp poate fi obținută pe cale analitică sau pe cale numerică.

Metodele analitice de calcul al câmpurilor au o arie restrânsă de aplicabilitate (probleme model cu domenii omogene și forme simple ale frontierelor) dar prezintă un avantaj remarcabil: permit obținerea soluției exacte a problemei de câmp sub formă unor expresii finite conținând funcții elementare sau speciale cunoscute. Soluția analitică permite interpretarea calitativă a rezultatelor și este întotdeauna preferabilă, dacă poate fi obținută.

Metodele numerice de calcul al câmpurilor au un domeniu mult mai larg de aplicare (domenii neomogene, frontiere de formă oarecare) în raport cu cele analitice; acesta reprezintă principalul lor avantaj, care a contribuit la dezvoltarea și perfecționarea algoritmilor numerici odată cu creșterea vitezei de calcul a ordinaoarelor electronice.

Metodele numerice au și câteva dezavantaje:

- conduc la obținerea unei soluții aproximative;
- soluția se prezintă sub forma unui șir de valori numerice, fiind greu de manevrat și reprezentat;
- implică un volum mare de muncă pentru implementarea algoritmului de calcul numeric;
- necesită utilizarea unui ordinator electronic având memorie și viteză de calcul relativ mari.

Alegerea metodei de calcul al câmpului este determinată direct de ipotezele problemei, în special de forma domeniului de calcul. În problemele reale, stabilirea ipotezelor trebuie făcută cu multă atenție având în vedere, în permanență, două aspecte contradictorii:

- rigurozitatea soluției, care trebuie afectată cât mai puțin cu puțină;
- timpul necesar pentru obținerea soluției.

Ipotezele de lucru trebuie alese astfel încât să conducă la un raport echilibrat între rigurozitate și timp necesar de calcul.

Analiza acestor aspecte trebuie făcută în orice exemplu de calcul al câmpului și conduce la stabilirea celei mai potrivite metode de soluționare a problemei de câmp.

În consecință, nu poate fi recomandată, în general, o anumită metodă de calcul al câmpului electromagnetic. Trebuie cunoscute toate metodele, aria lor de aplicare, avantajele și dezavantajele lor pentru a face o alegere potrivită, într-o aplicație dată.

Soluționarea problemei de câmp în cazul unei mașini electrice nu este simplă, întrucât intervin câteva dificultăți suplimentare:

- există armături în mișcare;
- domeniul de calcul are un număr relativ mare de neomogenități și frontiere cu forme complexe;
- sursele câmpului sunt variabile în timp și nedeterminate în anumite zone (subdomeniul indusului).

Cu toate acestea, au fost elaborate programe complexe de calcul care determină câmpul magnetic într-o mașină electrică, folosind exclusiv metodele numerice, în special metoda elementelor finite. Aceste programe de calcul sunt indispensabile în analiza câmpului magnetic din mașină și reprezintă un model de câmp al mașinii (model neliniar) care permite determinarea cu precizie mai mare a unor parametri concentrați (inductivități) din schema electrică echivalentă.

Alături de aceste performanțe, modelul de câmp al mașinii electrice (cu elemente finite, sau cu diferite finite) are anumite limite. Una dintre ele este aceasta: rezolvarea repetată a problemei de câmp (de mii de ori, în cazul problemelor de optimizare) conduce la un timp de calcul inacceptabil de mare. Cu alte cuvinte, este greu de imaginat implicarea unui model de câmp cu elemente finite într-o problemă de optimizare a construcției unei mașini electrice, deși acest fapt ar fi de dorit, întrucât, în acest fel, s-ar obține un model al mașinii mai apropiat de cel real, cu toate avantajele care decurg de aici.

Pentru realizarea acestui obiectiv este necesar să se rezolve problema de câmp la mașina electrică în așa fel încât soluția să poată fi ușor de construit, să necesite un timp redus de calcul, pentru a putea fi inclusă în procesele ciclice de calcul din problemele de optimizare, care impun determinarea repetată a câmpului.

În această direcție este dezvoltată lucrarea în continuare: se reconsideră problema de câmp la mașina de inducție urmărindu-se elaborarea unei soluții adaptate algoritmilor de optimizare.

Pentru aceasta, subdomeniile neomogene sunt echivalate cu subdomeniile ideale, omogene și anizotrope; se alege o metodă analitică de rezolvare a problemei de câmp; soluția analitică obținută este inclusă într-un proces iterativ de calcul în care se ajustează permeabilitatea magnetică la fiecare iterație pentru a ține seama de neliniaritatea mediului feromagnetic. Se obține astfel o soluție aproximativă, denumită în cele ce urmează :  
Soluție Analitică Iterativă (sau prescurtat SAI).

# CONTRIBUȚII PRIVIND ELABORAREA UNEI Soluții Analitice Iterative (SAI) A PROBLEMEI DE CÂMP LA MAȘINA DE INDUCȚIE

## INTRODUCERE

Pe măsură ce teoria mașinilor electrice face progrese, este tot mai evidentă complexitatea fenomenelor care stau la baza funcționării acestora. Cu toate aproximațiile care s-au făcut până în prezent, teoria modernă a mașinilor de curent alternativ descrie satisfăcător comportarea mașinii în diferite regimuri și servicii de funcționare, dacă parametrii mașinii sunt stabiliți în mod corect.

În [D5] prin “parametrii” se înțelege totalitatea inductivităților mutuale, a inductivităților și a rezistențelor circuitelor mașinii, totalitate care determină comportarea mașinii în sistemul energetic și desfășurarea proceselor în mașină. În consecință, calculul precis al parametrilor este de cea mai mare importanță în practica și în teoria mașinilor electrice de c. a.

Inductivitățile principale (mutuale, sau de cuplaj) ale unei mașini electrice se referă numai la câmpul magnetic principal al ei (ale cărei linii traversează întrefierul înlănțuind și înfășurări din cealaltă parte a mașinii).

Inductivitatea principală a unei înfășurări monofazice ( $L_{11h}$ ) parcurse de curentul  $i$  se definește în general prin raportul [D3]:  $L_{11h} = \psi_{11h} / i$ , în care  $\psi_{11h}$  este fluxul magnetic principal corespunzător câmpului magnetic din întrefier produs de curentul  $i$ . Valoarea inductivității principale depinde de dimensiunile geometrice, de forma constructivă a mașinii considerate și de proprietățile de material. Pentru o mașină electrică dată, inductivitatea principală este dependentă de gradul de saturație a circuitului feromagnetic și de regimul de funcționare a mașinii.

Expresia pentru calculul practic al inductivității poate fi dedusă pe baza tensiunii magnetomotoare și a câmpului magnetic produs în întrefier. Deoarece în mașinile electrice câmpul magnetic este produs numai de curenții de conducție, în locul tensiunii

magnetomotoare se poate lua solenația. Astfel, calculul inductivității principale urmărește întocmai calculul caracteristicii magnetice la mers în gol pentru mașina considerată (fluxul - funcție de solenație). Fiecărui punct determinat al acestei caracteristici îi corespunde și o valoare a inductivității principale. Pornind de la valoarea tensiunii induse (aproximativ egală cu tensiunea la borne), se determină succesiv: fluxul magnetic din întrefier (din legea inducției electromagnetice), inducția în întrefier, tensiunile magnetice pe porțiuni, tensiunea magnetomotoare, solenația, curentul de magnetizare (ca sursă a câmpului magnetic) și astfel se obține, un punct al caracteristicii magnetice la mers în gol. Dacă se împarte valoarea fluxului polar din întrefier la valoarea curentului de magnetizare al mașinii, se obține, în plus și valoarea inductivității principale.

Deoarece solenația de magnetizare este proporțională cu curentul de magnetizare, iar fluxul polar din întrefier este proporțional cu tensiunea indusă, curba  $I_0=f(U_0)$ , obținută prin măsurare, reprezintă aproximativ și caracteristica magnetică de mers în gol, dar la altă scară. Acest fapt oferă posibilitatea determinării experimentale a caracteristicii magnetice și în același timp permite un control bun al metodelor de calcul al mărimilor globale (tensiune indusă, curent de magnetizare, flux, inductivități).

În aceste calcule se ține seama doar de armonica fundamentală de spațiu a tensiunii magnetice. Armonicile superioare de spațiu ale tensiunii magnetice, produse în întrefier de înfășurările statorice, au o interacțiune slabă cu înfășurările rotorice provocând, la mersul în gol, doar o oarecare saturare a extremității dinților statorului și rotorului (capetele de dinți). Aceste armonici superioare formează dispersia diferențială cunoscută a înfășurării respective.

Conform celor de mai sus, calculul inductivității principale (mutuale) implică și calculul tensiunilor magnetice pe diferite porțiuni ale circuitului magnetic (în dinți, în juguri), lucru care mărește considerabil dificultatea problemei. Pentru calculul tensiunilor magnetice în fier au fost elaborate diferite metode bazate pe coeficienți empirici și curbe de corecție determinate experimental și valabile pentru anumite cazuri particulare.

În [M12] se prezintă o astfel de metodă în care se aduc unele îmbunătățiri în calculul tensiunilor magnetice în juguri, fapt dovedit prin verificări experimentale. A fost însă necesară introducerea unor curbe de corecție a tensiunii magnetice, determinate experimental pe un număr mare de motoare electrice reale.

În acest capitol se propune o altă metodă de calcul al caracteristicii magnetice la mersul în gol, pentru o mașină de curent alternativ cu întrefier constant și anume prin rezolvarea problemei de câmp electromagnetic.



Pornind de la o valoare dată a curentului  $i$  (sursa câmpului) se determină mai întâi distribuția câmpului magnetic în tot domeniul și apoi fluxul magnetic polar din întrefier. Se parcurge deci un drum invers față de metoda clasică: pornind de la o solenație dată se determină în final fluxul. În acest fel, punct cu punct, se construiește caracteristica magnetică la mers în gol, cu observația că pentru fiecare punct al caracteristicii, trebuie rezolvată și problema de câmp electromagnetic. Împărțind valoare fluxului polar din întrefier la valoarea curentului care-l produce, în fiecare punct al caracteristicii, se determină inductivitatea mutuală de cuplaj magnetic între stator și rotor, care, înmulțită cu pulsația curentului, dă reactanța mutuală (sau de magnetizare).

## 2.1. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A POTENȚIALULUI MAGNETIC VECTOR

Se consideră o mașină electrică rotativă, cu simetrie cilindrică, în care se stabilește un câmp magnetic staționar produs de curenți electrici de conducție ( $\vec{J}$ ), care parcurg înfășurările mașinii. Se alege un sistem ortogonal de coordonate cilindrice, de versori  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , având axa "z" identică cu axa longitudinală a mașinii.

În acest caz ecuațiile lui Maxwell se reduc la:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{2.1}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

Ecuția (2.2) sugerează introducerea potențialului magnetic vector  $\vec{A}$  sub forma:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{2.3}$$

având semnificația unei schimbări de variabile în problemă.

Potențialul magnetic are componentă numai după axa OZ și nu depinde de coordonata Z ( $\frac{\partial}{\partial Z} = 0$ ), în același fel ca densitatea curentului electric de conducție, astfel că:

$$\vec{A} = A\vec{u}_z \tag{2.4}$$

$$\vec{J} = J\vec{u}_z \tag{2.5}$$

în care:  $A = A(r, \theta)$  și  $J = J(r, \theta)$ .

Dezvoltând rel.(2.3) în coordonate cilindrice se obține:

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r\bar{u}_\theta & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \bar{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \bar{u}_\theta = \bar{B} \quad (2.6)$$

ceea ce permite exprimarea componentelor inducției magnetice ca funcții de potențialul magnetic

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad ; \quad B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r} \quad (2.7)$$

Dacă se consideră cazul general al unui mediu anizotrop, legătura dintre  $\bar{B}$  și  $\bar{H}$  se realizează prin intermediul unei permeabilități magnetice ( $\bar{\mu}$ ) care are caracterul unui tensor ( $\bar{B} = \bar{\mu} \bar{H}$ ). În sistemul particular al coordonatelor de mai sus, această legătură se reduce la:

$$H_r = \frac{1}{\mu_r} B_r \quad ; \quad H_\theta = \frac{1}{\mu_\theta} B_\theta \quad (2.8)$$

în care  $\mu_r$  este permeabilitatea magnetică în direcția versorului  $\bar{u}_r$ , iar  $\mu_\theta$  este permeabilitatea magnetică în direcția  $\bar{u}_\theta$ , ambele fiind mărimi scalare (dependente de intensitatea câmpului magnetic în cazul mediilor neliniare).

Dezvoltând relația (2.1) în coordonate cilindrice se poate scrie:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r\bar{u}_\theta & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ H_r & rH_\theta & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{r} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \bar{u}_z = J \bar{u}_z \quad (2.9)$$

Ținând seama de relația (2.8) și apoi (2.7), ultima relație obține forma unei ecuații scalare cu derivate parțiale de tip eliptic (Poisson) cu coeficienți constanți:

$$\frac{1}{\mu_\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -J \quad (2.10)$$

Ecuția (2.10) permite determinarea componentei scalare a potențialului magnetic vector  $\bar{A}$  dacă se cunosc, în fiecare punct al domeniului, densitatea curentului electric de conducție ( $J$ ) și permeabilitățile magnetice  $\mu_r$  și  $\mu_\theta$  în cele două direcții.

## 2.2. REZOLVAREA ANALITICĂ A ECUAȚIEI PE UN DOMENIU IDEAL

Soluția ecuației cu derivate parțiale (2.10) este formată din soluția generală a ecuației omogene (Laplace) plus o soluție particulară a ecuației neomogene (Poisson). Pentru rezolvare ecuației omogene se folosește, în cele ce urmează, metoda separării variabilelor. În acest sens se caută o funcție armonică sub forma  $A(r, \theta) = R(r) \cdot T(\theta)$ , definită pe interiorul unui cerc cu centrul în originea axelor de coordonate și având pe frontieră valori cunoscute. Cu acestea, forma omogenă a ecuației (2.10) devine:

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{r} T \frac{dR}{dr} + T \frac{d^2 R}{dr^2} \right) + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0 \quad (2.11)$$

Separând variabilele și notând  $\alpha^2 = \mu_0 / \mu_r$  se obține:

$$\frac{1}{R} (rR' + r^2 R'') = -\alpha^2 \frac{1}{T} T'' \quad (2.12)$$

în care  $R'$  și  $R''$  sunt derivatele de ordinul întâi respectiv doi ale funcției  $R(r)$ , iar  $T''$  este derivata de ordinul doi a funcției  $T(\theta)$ .

Pentru ca egalitatea (2.12) să fie adevărată, oricare ar fi  $r$  și  $\theta$ , este necesar ca ambii săi membri să fie egali cu aceeași constantă ( $\lambda^2$ ).

Se obțin astfel două ecuații diferențiale ordinare:

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \quad (2.13)$$

$$T'' + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} T = 0 \quad (2.14)$$

Ecuția (2.13) este de tip Euler și are soluția generală:

$$R(r) = C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda} \quad (2.15)$$

Deoarece soluția (2.15) are o discontinuitate pentru  $r=0$ , este necesar să se excludă centrul cercului (originea sistemului de coordonate) din domeniul de existență al soluției. În consecință soluția (2.15) este valabilă pe coroana circulară  $r_1 \leq r \leq r_2$ , oricât de mic ar fi  $r_1 \neq 0$

Ecuția (2.14) este o ecuație diferențială de ordinul doi având soluția generală:

$$T(\theta) = C_3 \cos \frac{\lambda}{\alpha} \theta + C_4 \sin \frac{\lambda}{\alpha} \theta \quad (2.16)$$

În cazul unei mașini electrice rotative se poate presupune că potențialul magnetic vector este o funcție periodică, în raport cu  $\theta$ , cu perioada  $\frac{2\pi}{p}$ ,  $\theta$  - fiind un unghi geometric, iar  $p$ - numărul de perechi de poli ai mașinii. Dacă se fixează originea unghiului  $\theta$  într-un punct de potențial nul, se poate scrie:

$$\begin{aligned} A(r, 0) &= 0 \\ A\left(r, \frac{\pi}{p}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ceea ce conduce la;

$$T(0) = 0 \quad T\left(\frac{\pi}{p}\right) = 0 \quad (2.18)$$

Din prima rel. (2.18) se obține  $C_3=0$ , iar din a doua:

$$\frac{\lambda}{\alpha} = p \quad (2.19)$$

astfel că soluția (2.16) ia forma:

$$T(\theta) = C_4 \sin p\theta \quad (2.20)$$

În consecință funcția armonică  $A(r, \theta)$ , căutată pe interiorul coroanei circulare  $r_1 \leq r \leq r_2$ , având valori cunoscute pe frontieră, este:

$$A(r, \theta) = (C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda}) C_4 \sin p\theta \quad (2.21)$$

Ținând seama de (2.19) și notând  $g=C_1 C_4$  și  $h= C_2 C_4$  se scrie forma finală astfel:

$$A(r, \theta) = (gr^{p\alpha} + hr^{-p\alpha}) \sin p\theta \quad (2.22)$$

în care:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_r}} \quad (2.23)$$

Soluția (2.22) poate fi racordată la orice condiții de frontieră date, prin determinarea constantelor de integrare  $g$  și  $h$  și reprezintă soluția generală a ecuației omogene cu derivate parțiale (2.11).

În continuare se caută o soluție particulară a ecuației neomogene (2.10).

În acest scop se presupune o distribuție omogenă a densității curentului electric de conducție în tot domeniul de calcul, sub următoarea formă:

$$J = J_M \sin p\theta \quad , \quad \forall r \quad (2.24)$$

care permite determinarea lui  $J$  în fiecare punct al domeniului .

Ecuția (2.10) devine:

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -J_M \sin p\theta \quad (2.25)$$

Se caută o soluție particulară a ec. (2.25) de forma:

$$A(r, \theta) = R_1(r) \sin p\theta \quad (2.26)$$

După înlocuirea în (2.25) se obține o ecuație diferențială ordinară de tip Euler:

$$\frac{1}{\mu_0} r^2 R_1'' + \frac{1}{\mu_0} r R_1' - \frac{p^2}{\mu_r} R_1 = -J_M r^2 \quad (2.27)$$

în care  $R_1'$  și  $R_1''$  sunt derivatele de ordinul întâi și doi ale funcției  $R_1(r)$  .

Se încercă o soluție de forma  $R_1(r) = kr^m$  care, după înlocuirea în (2.27) , dă  $m=2$  și:

$$k = -\frac{\mu_r \mu_0}{4\mu_r - p^2 \mu_0} J_M \quad (2.28)$$

S-a găsit astfel o soluție particulară a ec. (2.25) de forma:

$$A(r, \theta) = kr^2 \sin p\theta \quad (2.29)$$

unde  $k$  este cel din rel. (2.28) .

Acum se poate scrie soluția generală a ecuației (2.10) ca sumă a soluției generale (2.22) a ecuației omogene și a soluției particulare (2.29) a ecuației neomogene:

$$A(r, \theta) = (gr^{p\alpha} + hr^{-p\alpha} + kr^2) \sin p\theta \quad (2.30)$$

Ultimul termen din paranteză reprezintă contribuția surselor la crearea potențialului magnetic. Soluția (2.30) este definită pe interiorul coroanei circulare  $r_1 \leq r \leq r_2$  iar constantele  $g$  și  $h$  se determină din condițiile de frontieră considerate:

$$\begin{aligned} A(r_1, \theta) &= A_{10} \\ A(r_2, \theta) &= A_{20} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Singura condiție de mediu care se pune soluției analitice (2.30) este ca acesta să fie omogen. Dacă mediul este neomogen, pentru determinarea soluției problemelor de câmp se folosesc, aproape exclusiv, metodele numerice.

Soluționarea pe cale analitică a ecuației cu derivate parțiale de tip eliptic (2.10) , cu aplicație în domeniul mașinilor electrice de curent alternativ, se întâlnește și în [R5, pag. 157]și [J2].

### 2.3 APROXIMAREA DOMENIULUI REAL AL PROBLEMEI DE CÂMP PRIN SUBDOMENII IDEALE

Pentru a putea folosi soluția (2.30) în problemele de câmp magnetic staționar este necesar, în primul rând, ca domeniul în care se determină câmpul să aibă forma unei coroane circulare (sau o porțiune dintr-o coroană circulară având unghiul la centru  $\theta_{\max} < 2\pi$  ).

În acest sens, în secțiunea transversală a unei mașini electrice rotative cu întrefier constant , este ușor de delimitat subdomenii având forma unor coroane circulare și proprietăți de mediu diferite.

Datorită simetriei câmpului magnetic de-a lungul pasului polar, pentru a studia distribuția lui, este suficient să se considere o porțiune dintr-o coroană circulară și anume  $0 < \theta < \frac{\pi}{p}$ .

În fig. 2.1 se pot distinge cinci astfel de subdomenii (simplu conexe), numerotate începând din centru spre exterior, anume:

-Subdomeniul  $D_1$ , cuprins între  $r=a$  și  $r=b$  reprezintă zona jugului rotor, cu extindere de la suprafața axului până la baza creștăturilor rotorului;

-Subdomeniul  $D_2$  , cuprins între  $r=b$  și  $r=c$ , reprezintă zona crestată a rotorului, de la baza creștăturilor până la întrefier;

-Subdomeniul  $D_3$  , cuprins între  $r=c$  și  $r=d$ , reprezintă în întregime, întrefierul constant al mașinii;

-Subdomeniul  $D_4$  , cuprins între  $r=d$  și  $r=e$ , reprezintă zona crestată a statorului, de la întrefier până la baza creștăturilor;

Subdomeniul  $D_5$  , cuprins între  $r=e$  și  $r=f$  , reprezintă jugul statorului, de la baza creștăturilor până la extremitatea exterioară a statorului.

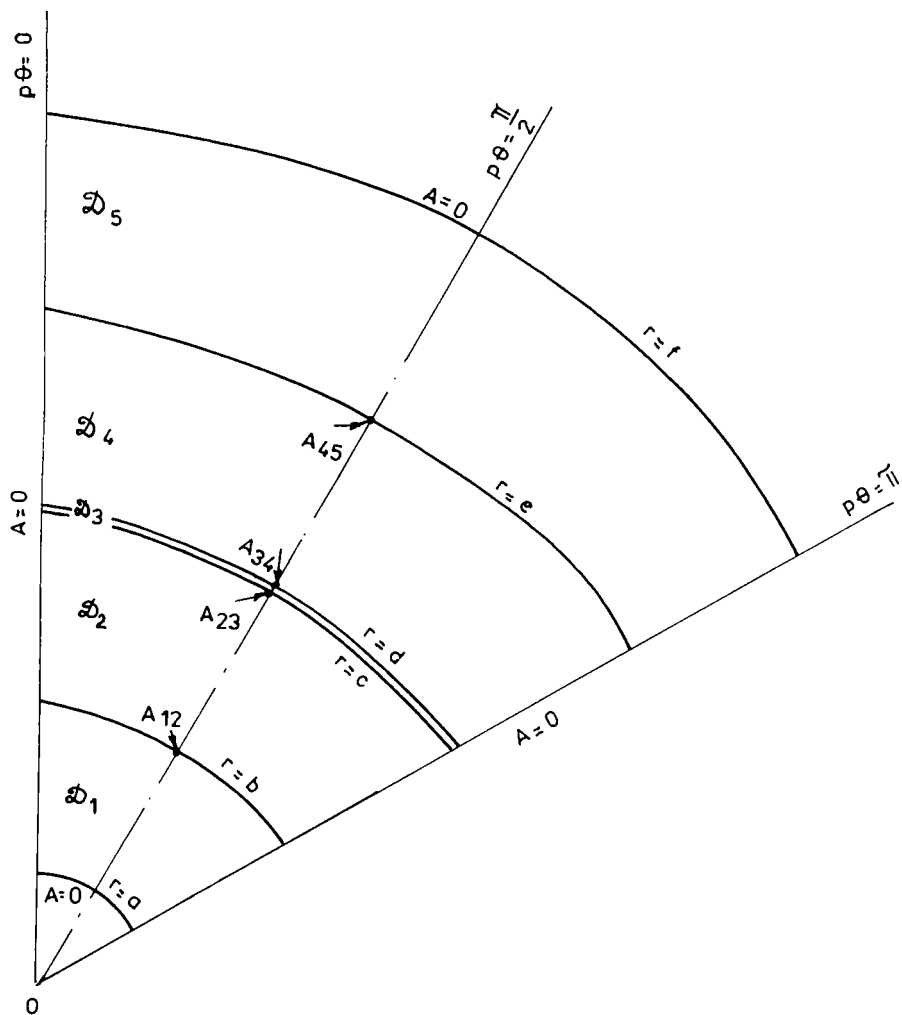


Fig. 2.1. Domeniul de calcul

Pentru toate cele cinci subdomenii unghiul la centru  $\theta$  aparține intervalului cuprins între  $\theta = 0$  și  $\theta = \frac{\pi}{p}$ .

În fiecare din cele cinci subdomenii proprietățile de material sunt diferite, după cum urmează:

Subdomeniul  $D_3$  este omogen și liniar :  $\mu_r = \mu_\theta = \mu_0$ , unde  $\mu_0$  este permeabilitatea magnetică a aerului;

Subdomeniile  $D_1$  și  $D_5$  sunt omogene și neliniare :  $\mu_r = \mu_\theta = \mu(\bar{H})$  ;

În sfârșit, subdomeniile  $D_2$  și  $D_4$  sunt neomogene și neliniare .

Faptul că aceste două zone sunt neomogene reprezintă cea mai mare dificultate de până acum. Totul trebuie să se oprească aici dacă nu se depășește acest obstacol. Din acest motiv, în cele ce urmează, se va intra în detaliu în problema neomogenității subdomeniilor  $D_2$  și  $D_4$

Prima observație [J2] este aceea că prezența dinților pe direcție radială, în aceste două subdomenii, face ca permeabilitatea magnetică rezultată pe direcție radială să fie mult mai mare decât cea pe direcție tangențială ( $\mu_r \gg \mu_\theta$ ) . Aceste două permeabilități rezultante sau echivalente ( $\mu_r$  și  $\mu_\theta$ ) sunt dependente de permeabilitățile reale ale dinților ( $\mu_d$ ) și creștăturilor ( $\mu_0$ ).

Pentru a determina permeabilitățile echivalente  $\mu_r$  și  $\mu_\theta$  ale subdomeniilor  $D_2$  și  $D_4$  trebuie, în primul rînd, approximate creștăturile reale (cu pereții drepecți sau trapezoidale - fig. 2.2a) cu creștături cu pereții radiali (fig. 2.2b) din cauza sistemului de coordonate polare în care se lucrează. În acest fel se obțin (în  $D_2$  și  $D_4$ ) dinți echivalenți cu pereții radiali, având unghiul la centru  $\theta_d$  și creștături deschise echivalente cu pereții radiali cu unghiul la centru  $\theta_c$  . Este ușor de observat că:  $\theta_d + \theta_c = 2\pi / Z$  , unde  $Z$  este numărul de creștături din zona respectivă. Razele  $OQ_1, OQ_2, OQ_3$  (fig. 2.2b) trec prin punctele  $P_1, P_2$  respectiv  $P_3$  (fig. 2.2a) situate la mijlocul înălțimii creștăturii reale. În acest fel unghiurile la centru  $\theta_d$  și  $\theta_c$  vor fi univoc determinate.

În fig. 2.3a se consideră o porțiune din  $D_2$  sau  $D_4$  corespunzătoare unui dinte și unei creștături vecine, având un unghi la centru egal cu  $\theta_d + \theta_c$  . Această porțiune elementară, neomogenă, de permeabilități  $\mu_d$  și  $\mu_0$  poate fi omogenizată [J2] sau, altfel



spus, transformată într-un mediu echivalent omogen dar anizotrop , de permeabilitate magnetică  $\mu_r$  (în direcție radială ) și  $\mu_\theta$  (în direcție tangențială).

În acest sens se face următoarea ipoteză: fluxul magnetic care traversează radial porțiunea omogenizată, de permeabilitate  $\mu_r$  (fig. 2.3b) , este egal cu suma fluxurilor magnetice care traversează radial dintele și creștătura (fig. 2.3a) . În cele două figuri echivalente se consideră că cercurile de rază  $r = e$  au același potențial  $V_c$  , iar cele de rază  $r = d$  au potențialul  $V_d$ . În consecință intensitatea câmpului magnetic ( $H$ ) , pe direcție radială, este aceeași: în dinte, în creștătură , în zona omogenizată. Se poate astfel scrie:

$$\mu_d H \theta_d r_x L_j + \mu_0 H \theta_c r_x L_j = \mu_r H (\theta_d + \theta_c) r_x L_j \quad (2.32)$$

în care  $L_j$  este lungimea mașinii , iar  $r_x$  este raza suprafeței cilindrice traversată de flux în direcție radială.

După simplificare se obține:

$$\mu_r = \frac{\mu_d \theta_d + \mu_0 \theta_c}{\theta_d + \theta_c} \quad (2.33)$$

Pentru câmpul magnetic tangențial al creștăturii se presupune că pereții radiali ai creștăturilor sunt suprafețe echipotențiale , astfel că liniile câmpului magnetic tangențial vor fi arce de cerc. Se mai admite că tensiunea magnetică între punctele A și C este aceeași în cele două figuri (2.3a și 2.3b), astfel că se poate scrie :

$$U_{mAC} = U_{mAB} + U_{mBC} \quad (2.34)$$

Pe linia de câmp ABC , valoarea inducției magnetice nu se modifică deoarece componenta normală a inducției se conservă la trecerea dintr-un mediu în altul. Din acest motiv se exprimă tensiunile magnetice din (2.34) funcție de inducția magnetică B pe arcul de rază  $r_x$

$$\frac{B}{\mu_0} (\theta_d + \theta_c) r_x = \frac{B}{\mu_d} \theta_d r_x + \frac{B}{\mu_0} \theta_c r_x \quad (2.35)$$

După simplificare se obține:

$$\mu_\theta = \frac{\mu_0 \mu_d (\theta_d + \theta_c)}{\mu_0 \theta_d + \mu_d \theta_c} \quad (2.36)$$

În acest fel zonele crestate ( $D_2$  și  $D_4$ ), care în realitate sunt medii neomogene , au fost approximate prin medii omogene , dar anizotrope . Transformarea neomogenității într-o anizotropie reprezintă o simplificare remarcabilă care face posibilă continuare problemei pe cale analitică.

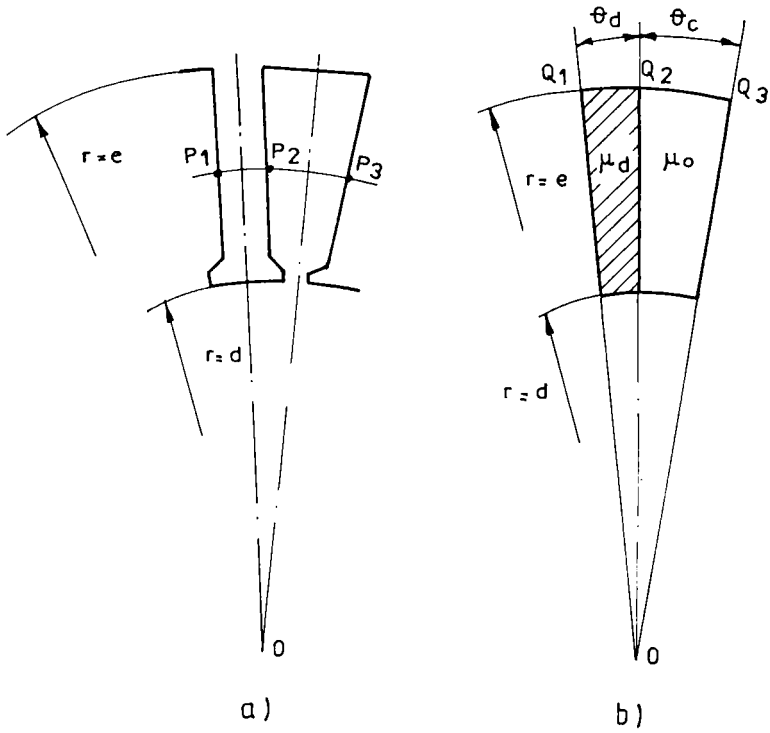


Fig. 2.2

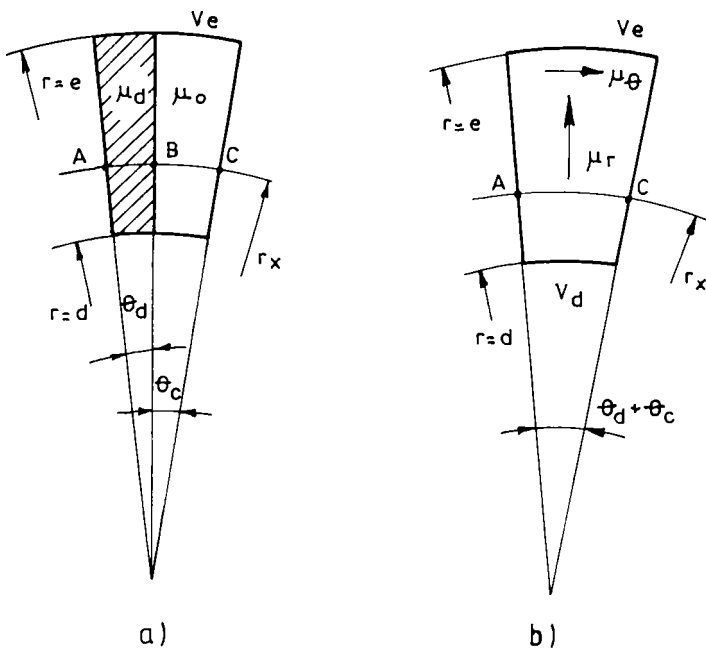


Fig. 2.3

În final se poate afirma că subdomeniile  $D_2$  și  $D_4$ , prin transformare, au devenit medii omogene, neliniare și anizotrope, de permeabilități magnetice  $\mu_\theta(H)$  și  $\mu_r(H)$  date de relațiile (2.33) și (2.36).

În consecință, fiecare din cele cinci subdomenii îndeplinește condițiile cerute de soluția (2.30) care trebuie particularizată pentru fiecare subdomeniu în parte.

## 2.4. APROXIMAREA DISTRIBUȚIEI REALE A SURSELOR CÂMPULUI PRINTR-O DISTRIBUȚIE SPAȚIALĂ IDEALĂ

Prin rel. (2.24) s-a pus deja condiția pe care trebuie s-o îndeplinească densitatea curentului electric de conducție (ca sursă a câmpului) și anume: densitatea locală ( $J$ ) a curentului, în subdomeniile în care există, trebuie să aibă o distribuție spațială sinusoidală continuă (distribuție ideală).

În realitate, densitatea de curent este distribuită discret de-a lungul pasului polar, în creștăturile statorului și rotorului.

Pentru a ajunge la relația (2.24) trebuie, fie să se considere teoretic o distribuție sinusoidală și continuă a conductoarelor înfășurărilor de-a lungul pasului polar, fie să se facă o descompunere în serie Fourier a distribuției discrete reale a densității de curent reținând doar fundamentală. Oricum s-ar proceda se ajunge la expresia (2.24). Înlocuirea distribuției reale a densității de curent cu una ideală este o aproximare, deoarece prin această operație se neglijează armonicile superioare spațiale ale solenației. În majoritatea cazurilor practice, aceste armonici superioare nu contribuie la saturarea circuitului magnetic principal al mașinii și nu sunt luate în considerație. Dacă, însă, amplitudinile primelor armonici superioare (de ordinul 3,5,7) sunt considerabile în raport cu fundamentală, atunci aproximația făcută prin relația (2.24) nu poate fi acceptată, introducând erori în calcule.

În ipoteza neglijării armonicilor superioare de spațiu ale solenației, în subdomeniile  $D_2$  și  $D_4$ , densitatea de curent  $J$  are o distribuție spațială continuă, sinusoidală în raport cu  $\theta$  și independentă în raport cu coordonata  $r$  (omogen repartizată pe suprafața subdomeniului).

Rămâne astfel de determinat doar amplitudinea  $J_M$  a acestei distribuții , adică relația de legătură dintre  $J_M$  și intensitatea curentului electric de conducție care parcurge înfășurările.

Se consideră în continuare un motor de inducție trifazat simetric , ale cărui înfășurări sunt alimentate de la un sistem trifazat simetric de tensiuni sinusoidale . La mersul în gol ideal , înfășurările de fază ale motorului vor fi parcurse de curentul de magnetizare  $I_\mu$  (neglijând pierderile în fier). În aceste condiții valoarea amplitudinii armonicii fundamentale a solenației rezultante (  $\vartheta_1$  ) este cunoscută sub forma [D3,N9,R5]:

$$\vartheta_1 = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I_\mu (W_1 k_w) \quad (2.37)$$

în care  $W_1$  este numărul de spire pe fază al înfășurării trifazate,  $k_w$  este factorul de bobinaj (produsul dintre factorul de repartizare a bobinelor și factorul de scurtare) , iar  $I_\mu$  este valoare efectivă a curentului de magnetizare cu variație sinusoidală în timp.

Pentru o linie de câmp închisă  $\Gamma$  (corespunzătoare unei perechi de poli) se poate scrie legea circuitului magnetic sub forma integrală cunoscută:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_r} \vec{J} d\vec{s} \quad (2.38)$$

în care  $S_r$  este o suprafață ce se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  .

Deoarece câmpul magnetic este produs aici exclusiv de curenți electrici de conducție, se poate exprima integrala curbilinie din (2.38) în funcție de solenație, astfel:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \frac{\vartheta_1}{p} \quad (2.39)$$

Integrala de suprafață din (2.38) se calculează ținând seama de rel. (2.24) și de faptul că suprafața  $S_r$  se identifică aici cu subdomeniul  $D_4$ . În consecință:

$$\vec{J} \perp S_r; \vec{J} d\vec{s} = J ds \quad ; ds = r d\theta dr \quad , \text{ astfel că se poate scrie :}$$

$$\int_{D_4} \vec{J} d\vec{s} = J_M \int_0^{\frac{\pi}{p}} \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} \sin p\theta d\theta \quad (2.40)$$

Efectuând calculele și înlocuind în (2.38) rezultă:

$$\frac{\vartheta_1}{p} = \frac{1}{p} (e^2 - d^2) J_M \quad (2.41)$$

de unde se obține expresia lui  $J_M$  , ținând seama și de (2.37) :

$$J_M = \frac{6\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{e^2 - d^2} W_1 k_w I_\mu \quad (2.42)$$

Se reamintește că  $J_M$  este amplitudinea fundamentalei spațiale a densității curentului de conducție total al crestăturilor (considerat ca valoare maximă în timp), iar  $I_\mu$  este valoarea efectivă a curentului de magnetizare pe fază. Relația (2.42) servește la calculul constantei  $k$  din relația (2.28) care caracterizează sursa câmpului magnetic (vezi rel. 2.30).

## 2.5 SOLUȚIA PROBLEMEI DE CÂMP

Determinările și precizările de mai sus permit particularizarea soluției problemei de câmp în fiecare din cele cinci subdomenii, ținând seama de proprietățile de mediu și de condițiile de frontieră.

Astfel, în subdomeniile  $D_1$ ,  $D_5$  și  $D_3$  (medii omogene și izotrope) se poate scrie:  $\mu_{r_1} = \mu_{\theta_1} = \mu_1$ ,  $\mu_{r_3} = \mu_{\theta_3} = \mu_0$ ,  $\mu_{r_5} = \mu_{\theta_5} = \mu_5$ , încât din (2.23) se obține  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 1$ . Aceste trei subdomenii sunt întotdeauna fără surse (câmp irotațional), adică  $J_{M_1} = J_{M_3} = J_{M_5} = 0$ , iar din (2.28) rezultă  $k_1 = k_3 = k_5 = 0$ .

În consecință se pot scrie direct (din 2.30) expresiile potențialelor în aceste trei subdomenii:

$$A_1(r, \theta) = (g_1 r^p + h_1 r^{-p}) \sin p\theta \quad (2.43)$$

$$\dot{A}_3(r, \theta) = (g_3 r^p + h_3 r^{-p}) \sin p\theta \quad (2.44)$$

$$A_5(r, \theta) = (g_5 r^p + h_5 r^{-p}) \sin p\theta \quad (2.45)$$

Constantele ( $g_1, h_1, g_3, h_3, g_5, h_5$ ) se vor determina din condițiile de frontieră.

Pentru a trata cazul general (cu considerarea câmpului de reacție a indusului) se presupune, în continuare, că ambele subdomenii ( $D_4$  și  $D_2$ ) conțin surse de câmp. Câmpul de excitație și cel de reacție sunt sincrone, dar între ele există, în realitate, un decalaj spațial. Unghiul de decalaj dintre cele două câmpuri este egal cu unghiul de defazaj temporal dintre solenațiile celor două amături. La mașina de inducție acest unghi are o valoare cuprinsă între  $\frac{\pi}{2}$  și  $\pi$  radiani, astfel că reacția de indus este întotdeauna demagnetizantă.

Considerând componentele reactive ale curenților din stator și din rotor ca surse ale câmpurilor de excitație și de reacție se obține o reacție a indusului pur longitudinală. Cu alte cuvinte, câmpul de reacție este decalat cu  $\pi$  radiani în raport cu cel de excitație.

În consecință se poate scrie:

$$J_4 = J_{M_4} \sin p\theta \quad (2.46)$$

$$J_2 = J_{M_2} \sin(p\theta - \pi) \quad (2.47)$$

în care  $J_{M_2} \neq J_{M_4} \neq 0$  și , în consecință, din (2.28) rezultă  $k_2 \neq k_4 \neq 0$ .

Conform rel. (2.42) se poate scrie:

$$J_{M_4} = \frac{6\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{e^2 - d^2} W_1 k_w I_{1r} \quad (2.48)$$

$$J_{M_2} = \frac{6\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{c^2 - b^2} W_1 k_w I'_{2r} \quad (2.49)$$

în care  $I_{1r}$  este componenta reactivă a curentului de fază din stator, iar  $I'_{2r}$  este componenta reactivă a curentului din rotor raportat la înfășurarea statorului.

Componentele  $I_{1r}$  și  $I'_{2r}$  asigură legătura între problema de câmp și teoria clasică a mașinii (ecuațiile scrise în complex , schema echivalentă , diagrama fazorială).

Subdomeniile  $D_4$  și  $D_2$  fiind anizotrope (în urma transformărilor de mai sus ) rezultă  $\mu_{t_4} \neq \mu_{o_4}$  și  $\mu_{r_2} \neq \mu_{o_2}$  , astfel că, din (2.23) , se obține :  $\alpha_4 \neq \alpha_2 \neq 1$  .

Cu urmare, pentru  $D_4$  se poate scrie expresia potențialului (din 2.30) sub forma:

$$A_4(r, \theta) = (g_4 r^{p\alpha_4} + h_4 r^{-p\alpha_4}) \sin p\theta + k_4 r^2 \sin p\theta \quad (2.50)$$

în care:

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{\mu_{o_4}}{\mu_{t_4}}} \quad (2.51)$$

$$k_4 = -\frac{\mu_{t_4} \mu_{o_4}}{4\mu_{t_4} - p^2 \mu_{o_4}} J_{M_4} \quad (2.52)$$

iar din (2.33) și (2.36):

$$\mu_{t_4} = \frac{\mu_{d_4} \theta_{d_4} + \mu_{o_4} \theta_{c_4}}{\theta_{d_4} + \theta_{c_4}} \quad (2.53)$$

$$\mu_{o_4} = \frac{\mu_{o_4} \mu_{d_4} (\theta_{d_4} + \theta_{c_4})}{\mu_{o_4} \theta_{d_4} + \mu_{d_4} \theta_{c_4}} \quad (2.54)$$

În ultimele două relații,  $\mu_{d_1}$  este permeabilitatea magnetică a dinților statorului (dependentă de inducția magnetică reală din dinți), iar  $\theta_{d_1}$  și  $\theta_{c_1}$  sunt unghiurile la centru corespunzătoare unui dinte respectiv unei creștături din stator (fig. 2.2b).

În același fel, pentru subdomeniul  $D_2$  se poate scrie:

$$A_2(r, \theta) = (g_2 r^{\alpha_2} + h_2 r^{-\alpha_2}) \sin p\theta + k_2 r^2 \sin p\theta \quad (2.55)$$

în care:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\mu_{\theta_2}}{\mu_{r_2}}} \quad (2.56)$$

$$k_2 = -\frac{\mu_{r_2} \mu_{\theta_2}}{4\mu_{r_2} - p^2 \mu_{\theta_2}} (-J_{M_2}) \quad (2.57)$$

$$\mu_{r_2} = \frac{\mu_{d_2} \theta_{d_2} + \mu_0 \theta_{c_2}}{\theta_{d_2} + \theta_{c_2}} \quad (2.58)$$

$$\mu_{\theta_2} = \frac{\mu_0 \mu_{d_2} (\theta_{d_2} + \theta_{c_2})}{\mu_0 \theta_{d_2} + \mu_{d_2} \theta_{c_2}} \quad (2.59)$$

În relațiile (2.58) și (2.59)  $\mu_{d_2}$  este permeabilitatea magnetică a dinților rotorului (dependentă de inducția magnetică reală din dinți) iar  $\theta_{d_2}$  și  $\theta_{c_2}$  sunt unghiurile la centru corespunzătoare unui dinte respectiv unei creștături din rotor.

Constantele  $g_2, h_2, g_4, h_4$  se vor determina din condițiile de frontieră.

Din rel. (2.7) se obțin imediat componentele radiale și tangențiale ale inducțiilor magnetice din cele cinci subdomenii ca funcții analitice de coordonatele  $r$  și  $\theta$ . Se reține, în continuare, componentele tangențiale din juguri și cele radiale din dinți și întrefier, sub forma:

$$B_{1\theta}(r, \theta) = -p(g_1 r^{p-1} - h_1 r^{-p-1}) \sin p\theta \quad (2.60)$$

$$B_{3\theta}(r, \theta) = -p(g_3 r^{p-1} - h_3 r^{-p-1}) \sin p\theta \quad (2.61)$$

$$B_{3r}(r, \theta) = p(g_3 r^{p-1} + h_3 r^{-p-1}) \cos p\theta \quad (2.62)$$

$$B_{2r}(r, \theta) = p(g_2 r^{\alpha_2-1} + h_2 r^{-\alpha_2-1} + k_2 r) \cos p\theta \quad (2.63)$$

$$B_{4r}(r, \theta) = p(g_4 r^{\alpha_4-1} + h_4 r^{-\alpha_4-1} + k_4 r) \cos p\theta \quad (2.64)$$

Cunoscând componenta radială a inducției magnetice în întrefier (2.62) sau expresia potențialului magnetic (2.44) se poate determina fluxul magnetic polar:

$$\phi_m = \int_{S_r} \overline{B} ds = \int_{S_r} \text{rot} \overline{A} ds \quad (2.65)$$

în care  $S_r$  este suprafața întrefierului corespunzătoare unui pas polar.

Din punct de vedere matematic,  $S_r$  se definește ca fiind o suprafață cilindrică de rază  $r=d$ , corespunzătoare unui unghi la centru  $\theta = \pi/p$  și extinsă pe toată lungimea mașinii, având ecuația:

$$S_r: \begin{cases} r = d \\ -\frac{\pi}{2p} < \theta < \frac{\pi}{2p} \\ 0 < z < L_1 \end{cases} \quad (2.66)$$

Folosind transformarea Stokes, integrala din (2.65) devine:

$$\phi_m = \oint_{\Gamma} \overline{A}_3 d\overline{l} \quad (2.67)$$

în care  $\Gamma$  este curba închisă definită de frontiera suprafeței  $S_r$  de mai sus. Curba  $\Gamma$  este formată, astfel din două arce ( $\Gamma_1, \Gamma_3$ ) și din două drepte ( $\Gamma_2, \Gamma_4$ ), având ecuațiile parametrice:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: & \begin{cases} r = d \\ -\frac{\pi}{2p} < \theta < \frac{\pi}{2p} \\ z = 0 \end{cases} & \Gamma_3: & \begin{cases} r = d \\ -\frac{\pi}{2p} < \theta < \frac{\pi}{2p} \\ z = L_1 \end{cases} \\ \Gamma_2: & \begin{cases} r = d \\ \theta = \frac{\pi}{2p} \\ 0 < z < L_1 \end{cases} & \Gamma_4: & \begin{cases} r = d \\ \theta = -\frac{\pi}{2p} \\ 0 < z < L_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.68)$$

În consecință integrala (2.67) se descompune astfel:

$$\phi_m = \int_1 \overline{A}_3(d, \theta) d\overline{l}_1 + \int_2 \overline{A}_3(d, \frac{\pi}{2p}) d\overline{l}_2 + \int_3 \overline{A}_3(d, \theta) d\overline{l}_3 + \int_4 \overline{A}_3(d, -\frac{\pi}{2p}) d\overline{l}_4 \quad (2.69)$$



Integralele curbilunii efectuate pe  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_3$  sunt nule, deoarece  $\overline{A}_3 \perp d\overline{l}_1$  și  $\overline{A}_3 \perp d\overline{l}_3$ . Se observă că  $\overline{A}_3$  este coliniar cu  $d\overline{l}_2$  și  $d\overline{l}_4$ , iar  $\overline{A}_3(d, -\frac{\pi}{2p}) = -\overline{A}_3(d, \frac{\pi}{2p})$

Ținând seama și de sensul de parcurgere pe curba  $\Gamma$  se obține în final:

$$\phi_m = 2L_1 A_3(d, \frac{\pi}{2p}) = 2L_1 (g_3 d^p + h_3 d^{-p}) \quad (2.70)$$

Ultima relație permite calculul valorii maxime a fluxului magnetic folosind constantele de integrare  $g_3$  și  $h_3$  din problema de câmp.

Utilizând expresia cunoscută, se determină, în fine, valoarea efectivă a tensiunii electromotoare indusă ( $U_e$ ) în înfășurarea reală din stator (pe o fază):

$$U_e = 4,44 f_1 W_1 k_w \phi_m \quad (2.71)$$

Relația (2.70) asigură încă odată legătura problemei de câmp magnetic cu mărimi globale din teoria clasică.

## 2.6 DETERMINAREA CONSTANTELOR

Fiecare din cele cinci subdomenii (fig. 2.1) are și frontiere libere și zone comune cu subdomenii vecine. În consecință, pe lângă condițiile de frontieră trebuie puse și condiții de interfață la trecerea câmpului dintr-un subdomeniu în altul (deoarece proprietățile de material sunt diferite). Cele zece constante de integrare ( $g_n, h_n, n=1...5$ ), care apar în expresiile anterioare, se determină în continuare impunând condiții necesare pe frontiera domeniului D și la limita de separare dintre subdomenii.

Datorită variației sinusoidale a potențialului de-a lungul pasului polar, în toate cele cinci subdomenii, se poate afirma că, pe frontierele radiale ( $p\theta = 0$  și  $p\theta = \pi$ ), valoarea potențialului este nulă:  $A(r, 0) = A(r, \frac{\pi}{p}) = 0$ . În plus, pentru domeniul D se pot scrie următoarele condiții la limită de tip Dirichlet:

$$A_1(a, \theta) = A_5(f, \theta) = 0 \quad (2.72)$$

Curba închisă, corespunzătoare potențialului constant ( $A=0$ ) din fig.2.1, poate fi considerată o linie închisă de câmp magnetic a domeniului D, ce leagă o pereche de poli. Alte linii închise de câmp vor fi similare cu aceasta și vor corespunde altor valori ale potențialului magnetic. La trecerea câmpului magnetic printr-o suprafață de discontinuitate trebuie asigurată (conform teoremei) continuitatea potențialului magnetic. În consecință, pe

arcul  $r=b$ , în oricare punct al frontierei comune, potențialul magnetic  $A$  are aceeași valoare în ambele subdomenii  $D_1$  și  $D_2$ . Acest fapt este valabil pentru toate celelalte limite de separație dintre subdomenii și anume la  $r=c$ ,  $r=d$ ,  $r=e$ . Deoarece potențialul are aceeași variație sinusoidală în toate cele cinci subdomenii, este suficientă asigurarea continuității într-un singur punct al suprafeței de discontinuitate (de exemplu pentru  $p\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Se notează aceste valori de potențial cu  $A_{12}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{34}$ ,  $A_{45}$ , valori necunoscute deocamdată, dar care permit scrierea următoarelor condiții de interfață pentru subdomeniile de câmp:

$$\begin{aligned}
 A_1\left(b, \frac{\pi}{2p}\right) &= A_2\left(b, \frac{\pi}{2p}\right) = A_{12} \\
 A_2\left(c, \frac{\pi}{2p}\right) &= A_3\left(c, \frac{\pi}{2p}\right) = A_{23} \\
 A_3\left(d, \frac{\pi}{2p}\right) &= A_4\left(d, \frac{\pi}{2p}\right) = A_{34} \\
 A_4\left(e, \frac{\pi}{2p}\right) &= A_5\left(e, \frac{\pi}{2p}\right) = A_{45}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Condițiile la limită (2.72) și cele de interfață dintre subdomenii (2.73) conduc la un sistem de 10 ecuații de forma:

$$\begin{aligned}
 g_1 a^p + h_1 a^{-p} &= 0 \\
 g_1 b^p + h_1 b^{-p} &= A_{12} \\
 g_2 b^{p\alpha_2} + h_2 b^{-p\alpha_2} + k_2 b^2 &= A_{12} \\
 g_2 c^{p\alpha_2} + h_2 c^{-p\alpha_2} + k_2 c^2 &= A_{23} \\
 g_3 c^p + h_3 c^{-p} &= A_{23} \\
 g_3 d^p + h_3 d^{-p} &= A_{34} \\
 g_4 d^{p\alpha_4} + h_4 d^{-p\alpha_4} + k_4 d^2 &= A_{34} \\
 g_4 e^{p\alpha_4} + h_4 e^{-p\alpha_4} + k_4 e^2 &= A_{45} \\
 g_5 e^p + h_5 e^{-p} &= A_{45} \\
 g_5 f^p + h_5 f^{-p} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Forma particulară a sistemului (2.74) permite determinarea imediată a celor 10 necunoscute (constantele  $g_n, h_n, n=1...5$ ), în funcție de  $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45}$ , prin gruparea ecuațiilor două câte două.

În final se obține:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -a^{-p} A_{12} N_1 \\
 h_1 &= a^p A_{12} N_1 \\
 g_2 &= [A_{12} c^{-p\alpha_2} - A_{23} b^{-p\alpha_2} - k_2 (b^2 c^{-p\alpha_2} - c^2 b^{-p\alpha_2})] N_2 \\
 h_2 &= -[A_{12} c^{p\alpha_2} - A_{23} b^{p\alpha_2} - k_2 (b^2 c^{p\alpha_2} - c^2 b^{p\alpha_2})] N_2 \\
 g_3 &= (A_{23} d^{-p} - A_{34} c^{-p}) N_3 \\
 h_3 &= -(A_{23} d^p - A_{34} c^p) N_3 \\
 g_4 &= [A_{34} e^{-p\alpha_4} - A_{45} d^{-p\alpha_4} - k_4 (d^2 e^{-p\alpha_4} - e^2 d^{-p\alpha_4})] N_4 \\
 h_4 &= -[A_{34} e^{p\alpha_4} - A_{45} d^{p\alpha_4} - k_4 (d^2 e^{p\alpha_4} - e^2 d^{p\alpha_4})] N_4 \\
 g_5 &= A_{45} f^{-p} N_5 \\
 h_5 &= -A_{45} f^p N_5
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= [(a/b)^p - (b/a)^p]^{-1} \\
 N_2 &= [(b/c)^{p\alpha_2} - (c/b)^{p\alpha_2}]^{-1} \\
 N_3 &= [(c/d)^p - (d/c)^p]^{-1} \\
 N_4 &= [(d/e)^{p\alpha_4} - (e/d)^{p\alpha_4}]^{-1} \\
 N_5 &= [(e/f)^p - (f/e)^p]^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Constantele necunoscute  $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45}$ , au fost introduse pentru a ușura rezolvarea sistemului (2.74). Ele trebuie însă determinate și folosite în rel. (2.75). Determinare lor este posibilă deoarece au mai rămas încă patru condiții de continuitate care se pot scrie pe interfețele subdomeniilor de câmp. Acestea se referă la continuitatea componentelor tangențiale ( $H_{\theta}$ ) ale intensității câmpului ( $\vec{H}$ ) la trecerea dintr-un mediu în altul, adică:  $H_{\theta_1} = H_{\theta_2}$  pentru  $r=b$ ,  $H_{\theta_2} = H_{\theta_3}$  pentru  $r=c$ , s.a.m.d. Ținând seama de rel.(2.8) și apoi (2.7) se obțin 4 ecuații independente care pot fi folosite la determinarea celor 4 constante suplimentare ( $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45}$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{\theta_1}} \left( \frac{\widehat{c}A_1}{\widehat{c}r} \right)_{r=b} &= \frac{1}{\mu_{\theta_2}} \left( \frac{\widehat{c}A_2}{\widehat{c}r} \right)_{r=b} \\
\frac{1}{\mu_{\theta_2}} \left( \frac{\widehat{c}A_2}{\widehat{c}r} \right)_{r=c} &= \frac{1}{\mu_{\theta_3}} \left( \frac{\widehat{c}A_3}{\widehat{c}r} \right)_{r=c} \\
\frac{1}{\mu_{\theta_3}} \left( \frac{\widehat{c}A_3}{\widehat{c}r} \right)_{r=d} &= \frac{1}{\mu_{\theta_4}} \left( \frac{\widehat{c}A_4}{\widehat{c}r} \right)_{r=d} \\
\frac{1}{\mu_{\theta_4}} \left( \frac{\widehat{c}A_4}{\widehat{c}r} \right)_{r=c} &= \frac{1}{\mu_{\theta_5}} \left( \frac{\widehat{c}A_5}{\widehat{c}r} \right)_{r=c}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Prima ecuație din (2.77) se înmulțește cu b, a doua cu c, a treia cu d și a patra cu c, iar după câteva calcule simple se obține forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 (g_1 b^p - h_1 b^{-p}) &= g_2 b^{p\alpha_2} - h_2 b^{-p\alpha_2} + \frac{2k_2 b^2}{p\alpha_2} \\
g_2 c^{p\alpha_2} - h_2 c^{-p\alpha_2} + \frac{2k_2 c^2}{p\alpha_2} &= \varepsilon_2 (g_3 c^p - h_3 c^{-p}) \\
\varepsilon_3 (g_3 d^p - h_3 d^{-p}) &= g_4 d^{p\alpha_4} - h_4 d^{-p\alpha_4} + \frac{2k_4 d^2}{p\alpha_4} \\
g_4 e^{p\alpha_4} - h_4 e^{-p\alpha_4} + \frac{2k_4 e^2}{p\alpha_4} &= \varepsilon_4 (g_5 e^p - h_5 e^{-p})
\end{aligned} \tag{2.78}$$

în care s-au notat:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\mu_{\theta_5}}{\mu_{\theta_1} \alpha_2} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\mu_{\theta_2}}{\mu_{\theta_3} \alpha_2} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\mu_{\theta_4}}{\mu_{\theta_3} \alpha_4} \\
\varepsilon_4 &= \frac{\mu_{\theta_4}}{\mu_{\theta_5} \alpha_4}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Înlocuind (2.75) în (2.78) se obține un sistem simplu cu patru necunoscute sub forma:

$$\begin{aligned}
2N_2 A_{23} - \varepsilon_{12} A_{12} &= S_1 \\
2N_2 A_{12} - \varepsilon_{23} A_{23} + 2\varepsilon_2 N_3 A_{34} &= S_2 \\
2\varepsilon_3 N_3 A_{23} - \varepsilon_{34} A_{34} + 2N_4 A_{45} &= S_3 \\
2N_4 A_{34} - \varepsilon_{45} A_{45} &= S_4
\end{aligned} \tag{2.80}$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= \varepsilon_1 M_1 + M_2 ; & M_1 &= [(a/b)^p + (b/a)^p] N_1 \\
\varepsilon_{23} &= \varepsilon_2 M_3 + M_2 ; & M_2 &= [(b/c)^{p\alpha_2} + (c/b)^{p\alpha_2}] N_2 \\
\varepsilon_{34} &= \varepsilon_3 M_3 + M_4 ; & M_3 &= [(c/d)^p + (d/c)^p] N_3 \\
\varepsilon_{45} &= \varepsilon_4 M_5 + M_4 ; & M_4 &= [(d/e)^{p\alpha_4} + (e/d)^{p\alpha_4}] N_4 \\
& & M_5 &= [(e/f)^p + (f/e)^p] N_5 \\
S_1 &= k_2 (2c^2 N_2 - b^2 M_2 + \frac{2b^2}{p\alpha_2}) \\
S_2 &= k_2 (2b^2 N_2 - c^2 M_2 - \frac{2c^2}{p\alpha_2}) \\
S_3 &= k_1 (2e^3 N_4 - d^2 M_4 + \frac{2d^2}{p\alpha_4}) \\
S_4 &= k_1 (2d^2 N_4 - e^2 M_4 - \frac{2e^2}{p\alpha_4})
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Rezolvarea sistemului (2.80) conduce la următoarele valori ale celor patru constante necunoscute:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{4\varepsilon_2 \varepsilon_{45} N_2 N_3 S_3 + 8\varepsilon_2 N_2 N_3 N_4 S_4 + \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2}{4\varepsilon_{12} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_{45} N_3^2 - \varepsilon_{17} \varepsilon_{23} \varepsilon_{34} \varepsilon_{45} + 4\varepsilon_{34} \varepsilon_{45} N_2^2 + 4\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} N_4^2 - 16N_2^2 N_4^2} \\
A_{23} &= \frac{\varepsilon_{12}}{2N_2} A_{12} + \frac{S_1}{2N_2} \\
A_{34} &= \frac{\varepsilon_{12} \varepsilon_{23}}{4\varepsilon_2 N_2 N_3} A_{12} + \frac{S_2}{2\varepsilon_2 N_3} + \frac{\varepsilon_{23} S_1}{4\varepsilon_2 N_2 N_3} \\
A_{45} &= \frac{2N_4}{\varepsilon_{45}} A_{34} - \frac{S_4}{\varepsilon_{45}}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

în care:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \varepsilon_{23}\varepsilon_{34}\varepsilon_{45} - 4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_{45}N_3^2 - 4\varepsilon_{23}N_4^2 \\ \gamma_2 &= 2\varepsilon_{34}\varepsilon_{45}N_2 - 8N_2N_4^2\end{aligned}\quad (2.83)$$

În acest fel problema constantelor a fost rezolvată. Cele 10 constante de integrare ( $g_n, h_n, n=1\dots 5$ ) se vor determina, în fiecare caz, din rel. (2.75) folosind și (2.82). Cunoscând valorile acestor constante, soluția problemei de câmp este în întregime determinată.

Analiza rel. (2.75) și (2.82) arată că aceste constante de integrare, care intră în expresiile potențialului magnetic, sunt dependente de următoarele mărimi:

- razele  $a, b, c, d, e, f$ , care delimitează subdomeniile  $D_i, i=1\dots 5$ ;
- unghiurile la centru  $\theta_c$  și  $\theta_d$  corespunzătoare dinților și creștăturilor;
- proprietățile magnetice ale mediului (permeabilitățile magnetice ale celor cinci subdomenii de câmp);
- sursele câmpului (amplitudinile  $J_{M_2}$  și  $J_{M_4}$ ).

Pentru o mașină electrică dată, aceste constante mai rămân dependente doar de gradul de saturație al circuitului magnetic principal care determină modificarea permeabilităților magnetice în subdomeniile considerate mai sus. În consecință, constantele de integrare trebuie recalulate la orice modificare a câmpului magnetic principal din mașină.

## 2.7 CONSIDERAȚII PRIVIND ÎNTOCMIREA UNUI PROGRAM DE CALCUL

În aplicații, utilizarea soluției anterioare a problemei de câmp întâmpină o singură dificultate și anume aceea a permeabilităților magnetice ale celor cinci subdomenii. Problema permeabilităților magnetice complică utilizarea soluției găsite din două motive:

- permeabilitatea magnetică este dependentă de inducția magnetică (mărimea de stare a câmpului magnetic) într-un punct dat;
- permeabilitatea este dependentă de poziția punctului curent (P) în subdomeniu.

Ecuția (2.10) a fost rezolvată în ipoteza unor permeabilități magnetice constante pe tot domeniul (ec. dif. cu coeficienți constanți).

În consecință este absolut necesar să se considere, pe fiecare subdomeniu, o permeabilitate medie, având aceeași valoare în fiecare punct al subdomeniului. În aceste

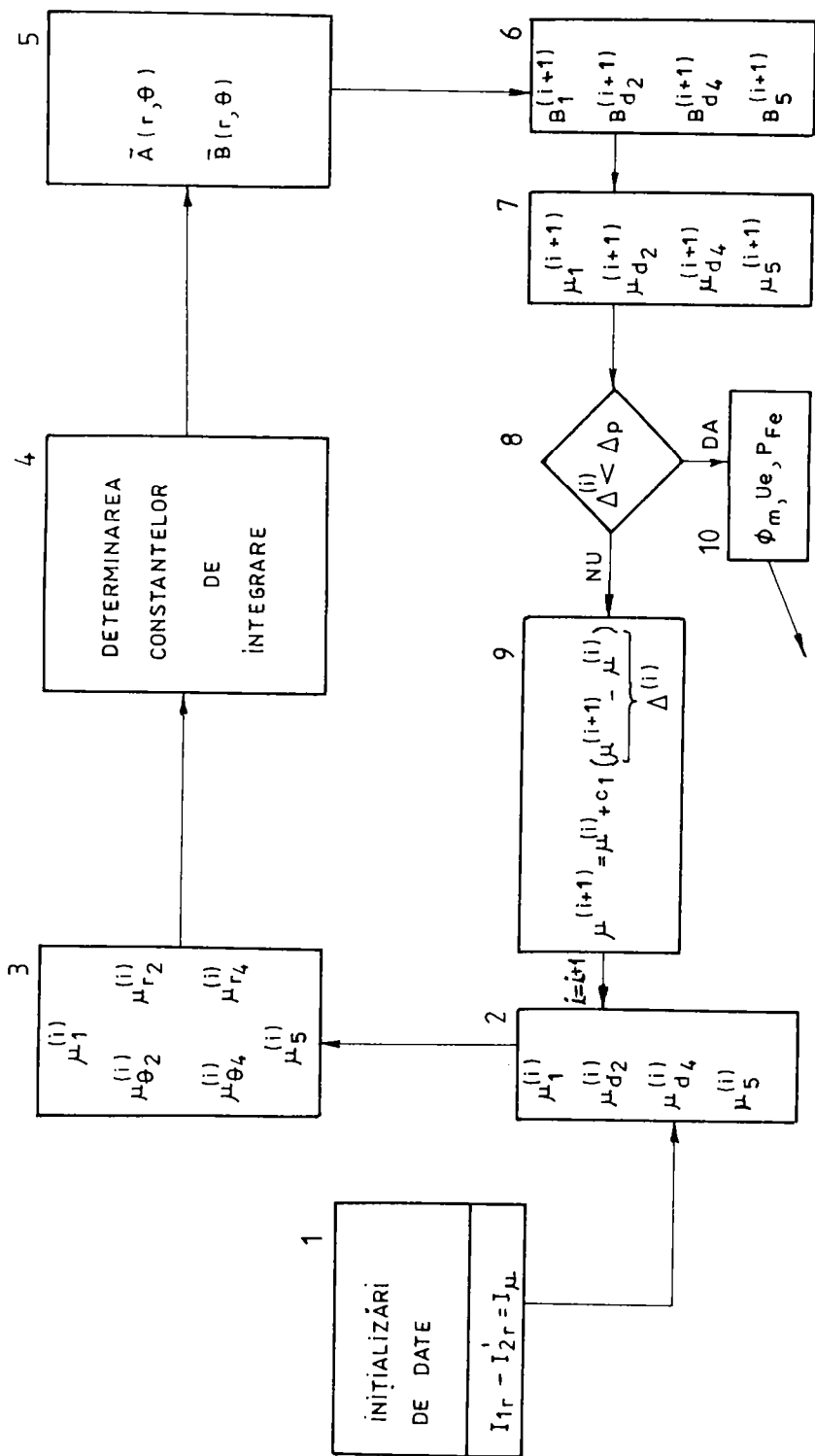


Fig. 2.4 Algoritm de calcul

condiții permeabilitatea rămâne dependentă doar de inducția magnetică și astfel ipoteza presupusă în (2.10) este respectată, iar soluția analitică găsită poate fi folosită.

Care este, însă, acea permeabilitate medie, caracteristică fiecărui subdomeniu, sau cu alte cuvinte, care este punctul în care permeabilitatea are o valoare ce poate fi considerată “reprezentativă” pentru întreg subdomeniul? În continuare acest punct va fi denumit “punct reprezentativ” și va fi notat cu  $P_0$ , urmând a fi identificat pentru fiecare subdomeniu în parte.

În acest punct, permeabilitatea magnetică este dependentă doar de inducția magnetică corespunzătoare și va reprezenta permeabilitatea întregului subdomeniu. Sub această formă, dubla dependență  $\mu(\vec{B}, P)$  a fost redusă la o simplă dependență  $\mu(\vec{B}, P_0)$ , cunoscută prin intermediul curbei de magnetizare a materialului.

Așa cum s-a menționat în capitolul anterior, pentru determinarea constantelor de integrare, trebuie cunoscute inițial permeabilitățile magnetice ale subdomeniilor. Necunoscând însă soluția problemei de câmp, este necesar să se considere inițial valori arbitrare ale permeabilităților magnetice pe subdomenii. După aflarea soluției se va constata dacă aceste valori au fost alese bine sau nu.

Se recunoaște aici necesitatea unui procedeu de calcul iterativ pentru determinarea soluției corecte. Calculul se repetă până când valorile de început ale permeabilităților devin aproximativ egale cu cele obținute după cunoașterea soluției. La fiecare iterație, permeabilitățile sunt menținute constante, modificându-și valoarea la iterația următoare.

Modelul de calcul propus poate fi urmărit în fig. 2.4 în care se pot distinge câteva blocuri semnificative.

La începutul programului (Blocul 1) sunt precizate toate mărimile de intrare necesare calculului ulterioare și care, pe parcursul programului, nu-și schimbă valoarea. Sunt date aici numerele de creștături ( $Z_1, Z_2$ ), numărul de perechi de poli ( $p$ ), numărul de spire pe fază ( $W_1$ ), factorul de bobinaj ( $k_w$ ), lungimea pachetului de tole ( $L_1$ ), curba de magnetizare a materialului feromagnetic, sursele câmpului sub forma componentelor reactive ale curenților de fază din stator și rotor ( $I_{1r}, I'_{2r}$ ). Se mai inițializează aici valorile unghiurilor la centru corespunzătoare creștăturilor și dinților statorului ( $\theta_{c4}, \theta_{d4}$ ), respectiv rotorului ( $\theta_{c2}, \theta_{d2}$ ). Valorile acestor unghiuri se determină univoc conform procedurii stabilit în paragraful 2.3. Spre exemplu, în fig. 2.5 se prezintă câteva forme de creștături și modul de plasare a punctelor  $P_1, P_2$  și  $P_3$  pe arcul de cerc (cu centrul în  $O$ ), de rază  $r_{m4}$  în stator și  $r_{m2}$  în rotor.



Construind din centru razele  $OP_1$  ,  $OP_2$  și  $OP_3$  se obțin cele două unghiuri la centru corespunzătoare dintelui ( $P_1\hat{O}P_2$ ) și respectiv creștăturii ( $P_2\hat{O}P_3$ ) .

Se dau în continuare valorile razelor (a, b, c, d, e,f) care delimitează subdomeniile problemei. Valorile de calcul ale razelor c și d se determină astfel:

$$c = r_\delta - \frac{\delta'}{2} \qquad d = r_\delta + \frac{\delta'}{2} \qquad (2.84)$$

unde  $r_\delta$  este raza suprafeței cilindrice care trece prin mijlocul întrefierului real, iar  $\delta'$  este întrefierul echivalent (de calcul):

$$\delta' = k_c \delta \qquad (2.85)$$

în care  $\delta$  este întrefierul real (obținut prin măsurare) și  $k_c$  este factorul lui Carter .

La creștăturile de formă rotunjită în vecinătatea jugului (fig. 2.5b) se recomandă ca, în calculul valorii  $r=e$ , să se țină seama de coeficientul  $k_j$  calculat în paragraful 1.6.

În sfârșit, se inițializează aici valorile permeabilităților magnetice ale subdomeniilor neliniare ( $\mu_1^{(1)}, \mu_{d2}^{(1)}, \mu_{d4}^{(1)}, \mu_5^{(1)}$ ), necesare primei iterații.

Blocul 2 reprezintă locul de intrare în circuitul iterativ de calcul pentru efectuarea primei iterații (i=1) și faza din care se reiau calculele la fiecare iterație nouă, cu noile valori ale permeabilităților.

Blocul 3 conține relațiile (2.53) , (2.54) , (2.58) , (2.59) , în care se determină permeabilitățile echivalente ale subdomeniilor anizotrope  $D_2$  și  $D_4$  , în funcție de permeabilitățile magnetice reale ale dinților statorului ( $\mu_{d4}$ ) și respectiv rotorului ( $\mu_{d2}$ ). Începând de aici problema este idealizată (prin omogenizarea subdomeniilor) permițând soluționarea analitică.

Blocul 4 include toate relațiile de determinare a constantelor de integrare cuprinse în paragraful 2.6. Cunoscând aceste constante, se pot determina, în fiecare punct , al fiecărui subdomeniu , potențialele magnetice și componentele radiale și tangențiale ale inducțiilor magnetice. În acest moment soluția este cunoscută, dar reprezintă o problemă idealizată. Ea trebuie transferată înapoi în planul real. Acest transfer se referă la subdomeniile  $D_2$  și  $D_4$  care au fost omogenizate.

Blocul 6 conține relațiile prin care se determină valorile reale ale inducțiilor magnetice din  $D_2$  și  $D_4$  (inducția magnetică în dinții statorului  $B_{d4}$  și cea în dinții rotorului  $B_{d2}$  ) necesare pentru stabilirea valorilor reale ale permeabilităților caracteristice celor două subdomenii . Aici trebuie poziționate "punctele reprezentative" definite anterior,

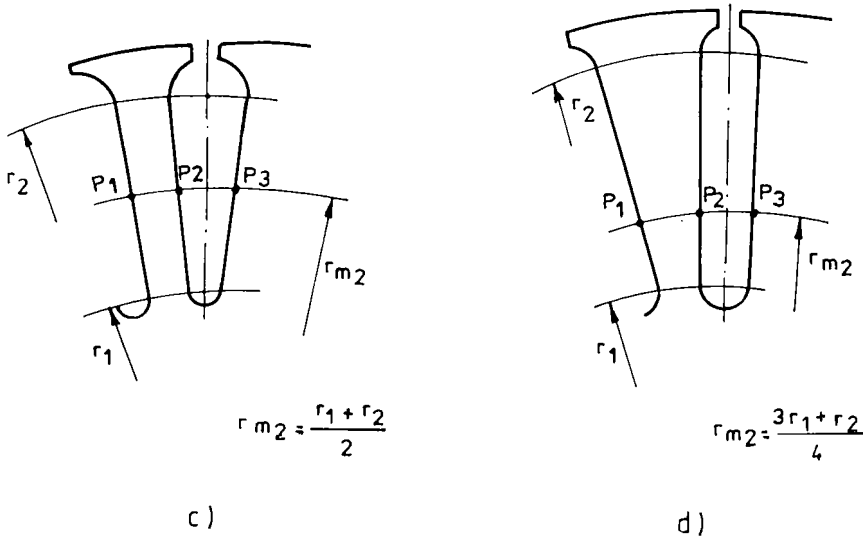
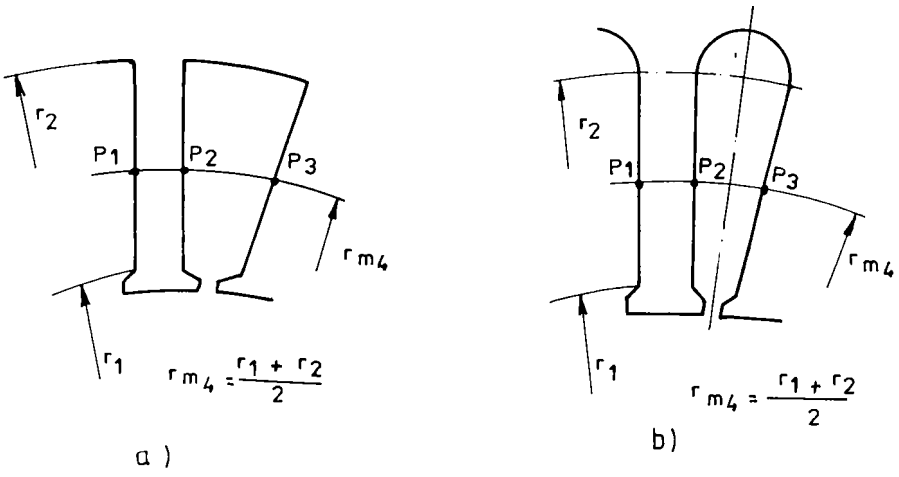


Fig. 2.5

în care se vor determina inducțiile și apoi permeabilitățile magnetice care vor caracteriza global fiecare subdomeniu nelinier . Este evident că un astfel de “punct reprezentativ” se va găsi (pentru fiecare subdomeniu) în zona valorilor medii ale inducțiilor magnetice. În acest sens se propune, pentru fiecare subdomeniu nelinier, câte un punct  $P_0(r_0, \theta_0)$ , a cărui permeabilitate magnetică (locală) va caracteriza întreg subdomeniul respectiv.

Componentele radiale și tangențiale ale inducțiilor sunt dependente de coordonata  $r$ . În acest caz este rațional să se considere un arc de cerc , având o rază medie  $(r_0)$ , în fiecare subdomeniu, pe care să se găsească punctul  $P_0$  .Rămâne de stabilit unghiul  $p\theta_0$  care va fixa punctul  $P_0$  . În  $D_1$  și  $D_5$  , componentele tangențiale ale inducțiilor au o variație sinusoidală în raport cu  $\theta$  , încât este justificat să se considere  $p\theta_0 \approx \frac{\pi}{4}$ . Astfel, din

(2.60) și (2.61) se obține:

$$B_{10}(r_0, \theta_0) = -p[g_1(\frac{a+b}{2})^{p-1} - h_1(\frac{a+b}{2})^{-p-1}] \sin \frac{\pi}{4} \quad (2.86)$$

$$B_{50}(r_0, \theta_0) = -p[g_5(\frac{e+f}{2})^{p-1} - h_5(\frac{e+f}{2})^{-p-1}] \sin \frac{\pi}{4} \quad (2.87)$$

în care  $a, b, e, f$  sunt raze ce delimitează subdomeniile respective.

Rel. (2.86) și (2.87) dau valorile inducțiilor magnetice cu ajutorul cărora se determină, din curba de magnetizare, valorile permeabilităților magnetice din  $D_1$  și  $D_5$  , la fiecare iterație.

În același fel, pentru  $D_2$  și  $D_4$  , folosind rel. (2.63) și (2.64), se poate scrie:

$$B_{2r}(r_0, \theta_0) = p(g_2 r_{m2}^{p\alpha_2-1} + h_2 r_{m2}^{-p\alpha_2-1} + k_2 r_{m2}) \cos p\theta_0 \quad (2.88)$$

$$B_{4r}(r_0, \theta_0) = p(g_4 r_{m4}^{p\alpha_4-1} + h_4 r_{m4}^{-p\alpha_4-1} + k_4 r_{m4}) \cos p\theta_0 \quad (2.89)$$

în care  $r_{m2}$  și  $r_{m4}$  sunt razele medii din fig. 2.5.

În rel. (2.88) și (2.89) se va considera  $\cos p\theta_0 = 0,95$  pentru motoarele bipolare ( $p=1$ ) și respectiv  $\cos p\theta_0 = 0,9$  pentru celelalte ( $p>1$ ) .

Rel. (2.88) dă valoarea componentei radiale a “inducției magnetice reprezentative” din  $D_2$  și similar, rel. (2.89) dă valoarea inducției în punctul  $P_0$  din  $D_4$ . Propunerile făcute prin rel. (2.86) ... (2.89) își găsesc în final o justificare prin concordanța dintre rezultatele calculate și cele determinate experimental.

Conform rel (2.63) și (2.64) componentele radiale ale inducțiilor din  $D_2$  și  $D_4$  au o distribuție continuă, în raport cu unghiul  $\theta$  , prin omogenizarea celor două zone dințate. În

realitate. Însă, distribuția inducției este discretă în raport cu  $\theta$  în aceste zone: are valoare mare în dinți și mult mai mică în creștături (deoarece aproape tot fluxul magnetic trece radial prin dinți).

Considerând, pentru zona dințată a statorului, o secțiune după o suprafață cilindrică de rază  $r_{m4}$  (fig. 2.5a,b), se poate scrie, pentru un pas dentar, următoarea relație aproximativă între fluxurile care traversează această suprafață (se ține seama că lățimea dintelui, în această secțiune, poate fi exprimată aproximativ prin produsul  $\theta_{d4} \cdot r_{m4}$ , ș.a.m.d.):

$$B_{4r} \cdot (\theta_{d4} + \theta_{c4}) r_{m4} L_1 = B_{d4} \theta_{d4} r_{m4} L_1 + B_{c4} \theta_{c4} r_{m4} L_1 \quad (2.90)$$

în care:  $B_{4r}$  este componenta radială a inducției în zona omogenizată  $D_4$ , dată de rel.(2.89);  $B_{d4}$  - inducția magnetică reală din dintele statorului;  $B_{c4}$  - inducția magnetică din creștătură ( $B_{c4} = \mu_0 H_{c4}$ ).

După simplificare, rel. (2.90) dă valoarea inducției magnetice reale din dintele statorului, sub forma:

$$B_{d4} = \frac{\theta_{d4} + \theta_{c4}}{\theta_{d4}} B_{4r} - \frac{\theta_{c4}}{\theta_{d4}} B_{c4} \quad (2.91)$$

Primul termen din membrul drept reprezintă inducția aparentă din dintele statorului ( $B'_{d4}$ ), adică acea inducție care ar avea loc în dinte în ipoteza că întreg fluxul magnetic ar trece numai prin dinți. Ultimul termen contribuie la descărcarea magnetică a dintelui prin câmpul magnetic care trece radial prin creștătură, astfel că inducția reală din dinte ( $B_{d4}$ ) va fi mai mică decât cea aparentă ( $B'_{d4}$ ):

$$B_{d4} = B'_{d4} - \frac{\theta_{c4}}{\theta_{d4}} B_{c4} \quad (2.92)$$

Dacă toate liniile de câmp din dinți și din creștături ar fi pe direcție radială, atunci intensitatea de câmp magnetic ar fi aceeași, în dinți și în creștături ( $H_{d4} = H_{c4}$ ). În acest caz  $B_{c4} = \mu_0 H_{c4} = \mu_0 H_{d4}$ , iar rel. (2.92) obține forma cunoscută în literatură [D4, V8, C5]:

$$B_{d4} = B'_{d4} - \mu_0 H_{d4} \frac{\theta_{c4}}{\theta_{d4}} \quad (2.93)$$

Cum însă liniile de câmp prin creștătură nu sunt strict pe direcție radială, adică există și un câmp tangențial prin creștătură, se poate considera că influența ultimului termen din (2.93) este mai mare în realitate. Verificările experimentale au confirmat necesitatea completării rel. (2.93) sub forma:

$$B_{d_4} = B'_{d_4} - c_0 \mu_0 H_{d_4} \frac{\theta_{c_4}}{\theta_{d_4}} \quad (2.94)$$

în care, pentru coeficientul  $c_0$  se vor lua următoarele valori supraunitare:  $c_0 = 3,5$  pentru motoarele cu  $p=1$ ;  $c_0 = 5$  pentru  $p=2$ ;  $c_0 = 6,5$  pentru  $p \geq 3$ .

Cu alte cuvinte, pentru a ține seama și de câmpul transversal al creștăturii, care duce la o descărcare magnetică suplimentară a dinților, în rel. (2.93) se va considera pentru spațiul creștăturii o permeabilitate magnetică de câteva ori mai mare decât  $\mu_0$  și anume  $c_0 \mu_0$ .

Efectul de descărcare magnetică a dinților, exprimat de rel. (2.94) este semnificativ doar în zona inducțiilor mari ( $B'_{d_4} > 1,6T$ ).

Cu totul similar, pentru zona dințată a rotorului (fig. 2.5c,d) se obține inducția magnetică reală în dintele rotorului ( $B_{d_2}$ ):

$$B_{d_2} = B'_{d_2} - c_0 \mu_0 H_{d_2} \frac{\theta_{c_2}}{\theta_{d_2}} \quad (2.95)$$

unde  $B'_{d_2}$  este inducția magnetică aparentă în dinte:

$$B'_{d_2} = \frac{\theta_{d_2} + \theta_{c_2}}{\theta_{d_2}} B_{2r} \quad (2.96)$$

în care  $B_{2r}$ , conform rel (2.88) este componenta radială a inducției magnetice reprezentative din  $D_2$

Pentru a putea utiliza relațiile (2.94) și (2.95) se menționează că valorile intensităților  $H_{d_4}$  și  $H_{d_2}$  corespund inducțiilor magnetice aparente  $B'_{d_4}$  și  $B'_{d_2}$  calculate anterior.

Revenind la fig. 2.4, în blocul 7 se determină permeabilitățile magnetice folosind curba de magnetizare a materialului feromagnetic.

Inducțiile magnetice  $B_1$  și  $B_5$  din juguri (obținute din rel. 2.86 și 2.87) dau permeabilitățile  $\mu_1$  și  $\mu_5$ , iar inducțiile reale din dinții  $B_{d_4}$  și  $B_{d_2}$  (rel. 2.94, 2.95) dau

permeabilitățile  $\mu_{d_4}$  și  $\mu_{d_2}$ . Aceste patru valori determinate ale permeabilităților pot fi acum comparate cu valorile lor inițiale luate arbitrar.

La fiecare iterație (i), se calculează diferențele  $\Delta^{(i)}$  față de valorile inițiale (de la iterația anterioară):

$$\begin{aligned}\Delta_1^{(i)} &= \mu_1^{(i+1)} - \mu_1^{(i)} \\ \Delta_2^{(i)} &= \mu_{d_2}^{(i+1)} - \mu_{d_2}^{(i)} \\ \Delta_4^{(i)} &= \mu_{d_4}^{(i+1)} - \mu_{d_4}^{(i)} \\ \Delta_5^{(i)} &= \mu_s^{(i+1)} - \mu_s^{(i)}\end{aligned}\tag{2.97}$$

Dacă oricare din aceste diferențe este mai mare decât o valoare prescrisă  $\Delta_p$ , ciclul de calcul se reia până când toate cele patru diferențe din (2.97) devin mai mici ca  $\Delta_p$ . În acest fel, precizia de calcul poate fi impusă de  $\Delta_p$ .

Noile aproximații ale permeabilităților magnetice, care urmează să fie folosite într-o nouă iterație, nu vor fi cele determinate în blocul 7 ci vor avea valori corectate astfel:

$$\begin{aligned}\mu_1^{(i+1)} &= \mu_1^{(i)} + c_1 \Delta_1^{(i)} \\ \mu_{d_2}^{(i+1)} &= \mu_{d_2}^{(i)} + c_1 \Delta_2^{(i)} \\ \mu_{d_4}^{(i+1)} &= \mu_{d_4}^{(i)} + c_1 \Delta_4^{(i)} \\ \mu_s^{(i+1)} &= \mu_s^{(i)} + c_1 \Delta_5^{(i)}\end{aligned}\tag{2.98}$$

în care s-au folosit diferențele din (2.97). Coeficientul  $c_1$  se determină prin încercări astfel încât să asigure cea mai rapidă convergență.

Când toate cele patru diferențe  $\Delta^{(i)}$  devin mai mici decât  $\Delta_p$ , procesul iterativ de calcul se oprește, ieșind din ciclu. În acest moment soluția se cunoaște și se consideră corectă deoarece valorile de intrare și cele de ieșire ale permeabilităților sunt aproximativ egale.

Convergența și stabilitatea procesului iterativ de calcul au fost analizate pe mai multe exemple concrete. În fig. 2.6 se poate urmări, pentru un motor de inducție bipolar trifază de 0.75 kw, influența coeficientului de relaxare  $c_1$  asupra convergenței. Procesul este oscilant pentru  $0.5 < c_1 < 1$ , dar se stabilizează pentru  $c_1 < 0.5$ . S-a găsit valoarea optimă la  $c_1 = 0.3$ , care s-a confirmat în toate cazurile analizate. De asemenea, s-a verificat stabilitatea procesului iterativ de calcul pentru diverse valori inițiale ale celor patru

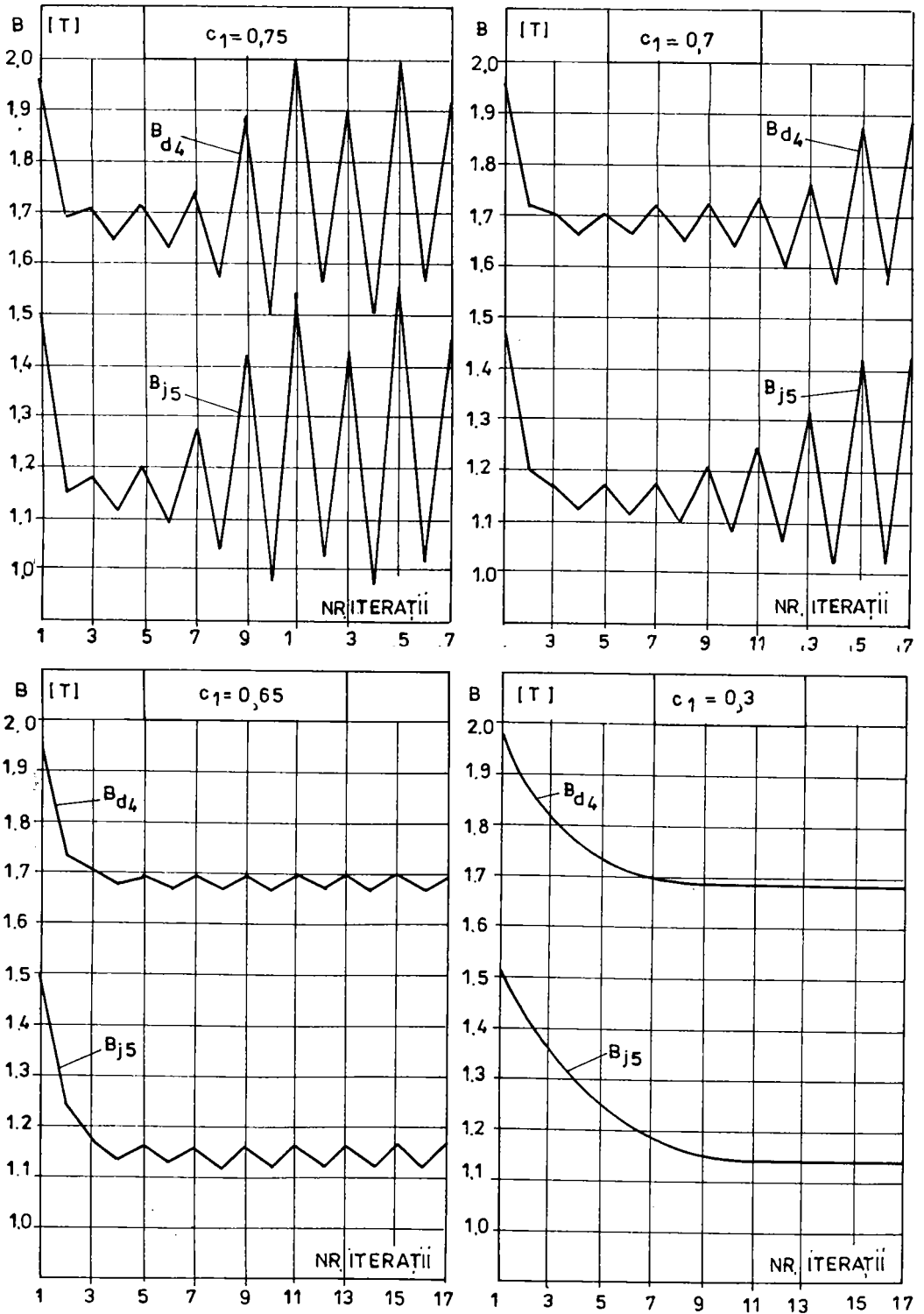


Fig. 2.6 Referitor la convergența algoritmului de calcul

permeabilități utilizate la prima iterație. Procesul de calcul s-a dovedit a fi foarte stabil pentru orice valori ale permeabilităților inițiale cuprinse între  $\mu_0$  și  $10000\mu_0$  (pentru  $c_1 = 0,3$  menținut constant).

Ca valori inițiale (de start) se recomandă:

$$\mu_1^{(1)} = \mu_{d_2}^{(1)} = \mu_{d_4}^{(1)} = \mu_5^{(1)} = 1000\mu_0 \quad (2.99)$$

Pentru  $\Delta p = 10^{-5}$ , numărul de iterații necesar pentru ieșirea din ciclul de calcul este mai mic decât 20, ceea ce înseamnă o foarte bună convergență.

Pentru a aprecia timpul de calcul se poate afirma că un calculator de tip AT 386, cu coprocesor matematic, execută cca. 90 astfel de iterații într-o secundă, determinând cca. 8 puncte ale caracteristicii magnetice .

În sfârșit, după ieșirea din ciclul iterativ de calcul se determină fluxul și tensiunea indusă (rel. 2.70, 2.71) și pierderile în fier.



### Cap. 3

## EXEMPLE COMPARATIVE DE CALCUL CU METODA SAI ȘI CU METODA ELEMENTELOR FINITE

Pentru calculul distribuției câmpului electromagnetic, pe un domeniu dat, sunt cunoscute mai multe metode. Cele mai utilizate dintre acestea au fost analizate anterior (Cap. 1).

Metoda elementelor finite (MEF) poate fi privită ca o metodă aproximativă de calcul al câmpului pe un domeniu dat, în timp ce metoda analitică iterativă (SAI), propusă mai sus (Cap. 2), reprezintă o metodă exactă de calcul al câmpului pe un domeniu aproximat. În cazul al doilea aproximarea se face, asupra domeniului fizic al problemei, iar în primul caz aproximarea se face asupra soluției.

Ambele metode conduc la soluții aproximative, dar metoda analitică (SAI) este incomparabil mai rapidă, permițând astfel elaborarea unui model combinat "câmp- circuit electric echivalent" pentru mașinile electrice de curent alternativ cu întrefier constant .

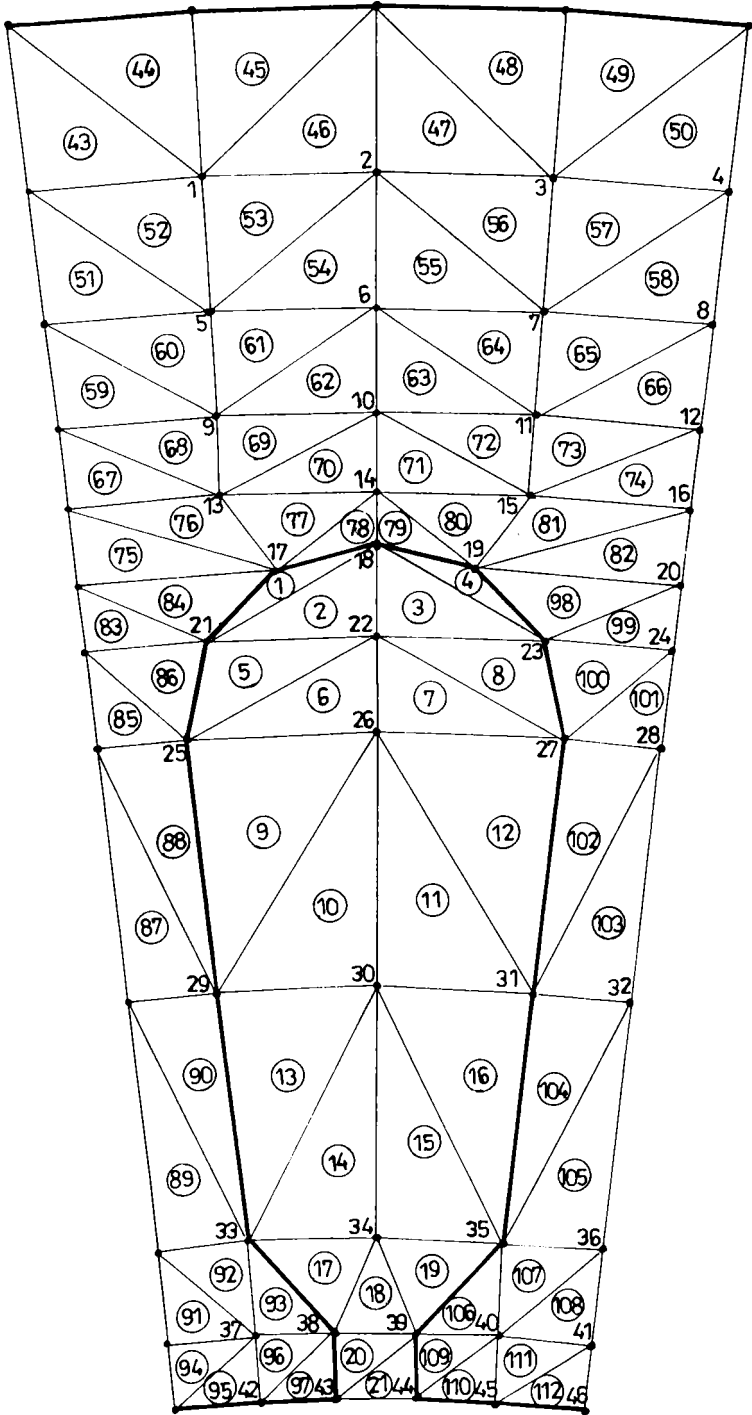
Combinarea modelului "de câmp" cu cel "de circuit" este inevitabilă deoarece sursele câmpului (curenții de conducție din stator și din rotor) pot fi determinate numai din modelul circuitului echivalent al mașinii și, în consecință, modelul de câmp nu poate fi utilizat separat în tratarea unor aspecte cantitative.

Pentru evidențierea celor de mai sus, s-a elaborat un program de calcul numeric al câmpului magnetic, utilizând metoda elementelor finite pentru cazul mașinii de inducție cu întrefier constant.

Conform detaliilor prezentate anterior (Cap. 1) asupra metodei elementelor finite se ajunge la un sistem algebric liniar de ecuații, având ca necunoscute potențialele magnetice ale tuturor nodurilor ( $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ) ale rețelei de discretizare. Dezvoltând relația (1.248) pentru nodul "i" se poate scrie:

$$A_i \sum \frac{1}{\mu^e \Delta^e} [(x_k - x_j)^2 + (y_j - y_k)^2] + \sum \frac{1}{\mu^e \Delta^e} [(x_k - x_j)(x_i - x_k) + (y_j - y_k)(y_k - y_i)] A_j^e + \\ + \sum \frac{1}{\mu^e \Delta^e} [(x_k - x_j)(x_j - x_i) + (y_j - y_k)(y_i - y_j)] A_k^e - \sum \frac{4}{3} J^e \Delta^e = 0$$

(3.1)



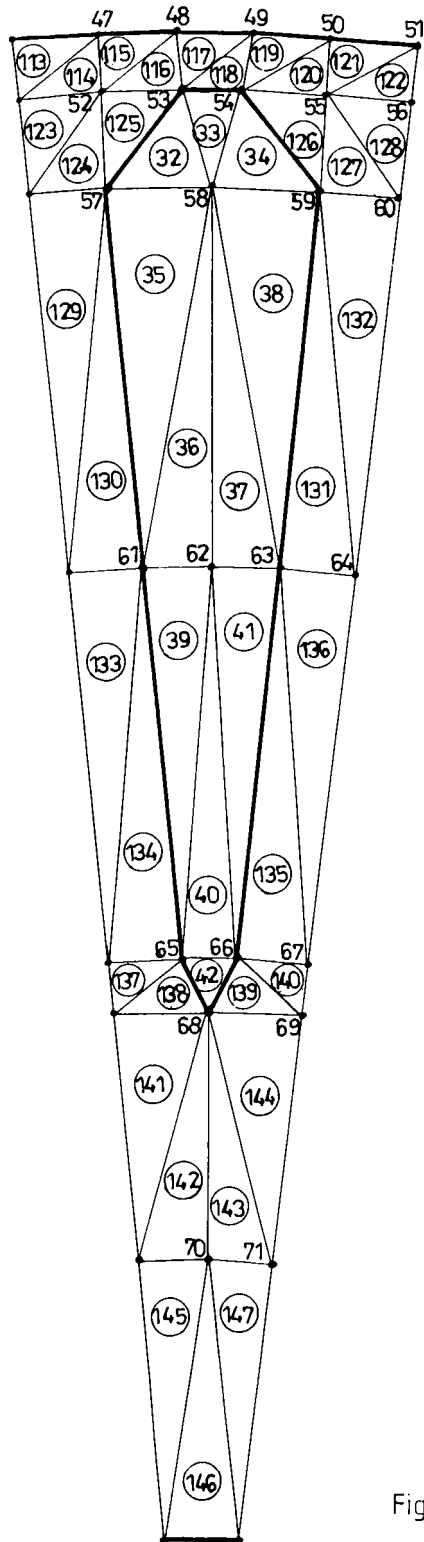


Fig. 3.1 b)

Sumele din 3.1 se efectuează pentru toate elementele (de tip triunghiular) din jurul nodului "i". Pe fiecare element "e" al domeniului discretizat trebuie cunoscute: aria suprafeței elementului ( $\Delta^e$ ), densitatea curentului ( $J^e$ ) care traversează perpendicular elementul, permeabilitatea magnetică ( $\mu^e$ ), coordonatele vârfurilor fiecărui element triunghiular ( $(x_i, y_i)$ ;  $(x_k, y_k)$ ).

Domeniul de calcul, cuprinzând o jumătate de pas polar, a fost împărțit în subdomenii corespunzătoare unei creștături din stator (figura 3.1a) și respectiv din rotor (figura 3.1b) datorită simetriilor geometrice.

Discretizarea acestor subdomenii s-a făcut manual, obținându-se în tot domeniul de calcul 426 noduri interioare, 50 noduri de frontieră și 882 elemente finite, pentru motorul de inducție cu doi poli ( $p=1$ ), luat ca exemplu.

Pentru a evita segmentarea programului de calcul, s-a procedat la întocmirea a două programe distincte. Astfel, primul program (ELFIN1) generează doar datele legate de discretizarea spațială a domeniului și cuprinde următoarele etape:

- se citesc datele de intrare (dimensiunile geometrice ale tolelor stator-rotor cu creștături);
- pe baza unor relații parametrice, determinate de discretizarea propusă în fig. 3.1, se calculează coordonatele nodurilor celor două subdomenii (din fig. 3.1a și fig. 3.1b);
- prin multiplicare se generează automat coordonatele nodurilor din celelalte subdomenii ale domeniului de calcul;
- se calculează ariile suprafețelor tuturor elementelor finite;
- se rețin într-un fișier coordonatele tuturor nodurilor și ariile tuturor elementelor, folosind tablouri unidimensionale.

Al doilea program (ELFIN2) urmărește rezolvarea numerică a sistemului algebric liniar de ecuații, oferind soluția numerică a problemei de câmp. Programul conține următoarele etape:

- citește din fișierul de intrare coordonatele nodurilor și ariile suprafețelor tuturor elementelor finite (fișierul de ieșire din programul ELFIN1 reprezintă fișierul de intrare în ELFIN2);
- se citește curba de magnetizare a materialului feromagnetic și funcția - sursă a câmpului magnetic;

- inițializează: permeabilitățile magnetice pe suprafața fiecărui element ( $\mu^e$ ) ; densitățile de curent pe element ( $J^e$ ) ; valorile potențialelor magnetice în fiecare nod al rețelei, acestea reprezentând și prima (iterație) aproximație a soluției în procesul iterativ care urmează; condițiile de frontieră.

- rezolvă iterativ sistemul algebric prin metoda de eliminare Gauss-Seidel;
- reține soluția finală în fișierul de ieșire.

Câteva detalii asupra algoritmului de calcul se prezintă în continuare.

Sistemul linear conține ecuații de tipul 3.1, câte una pentru fiecare nod al rețelei de discretizare. Fiecare ecuație conține un număr de 3 până la 8 necunoscute, acestea fiind valorile potențialelor magnetice în nodul considerat și în nodurile vecine, legate direct de el.

Conform algoritmului Gauss-Seidel, în fiecare ecuație se separă în membrul stâng al ecuației potențialul nodului la care se referă ecuația, iar în membrul drept, celelalte potențiale ale nodurilor vecine.

Sub această formă, sistemul de ecuații este pregătit pentru procesul iterativ de rezolvare numerică. La fiecare iterație se parcurg toate ecuațiile sistemului obținând un nou set de valori ale potențialelor.

Se notează prin  $A_i^{(n)}$  ( $i=1,476$ ) setul de valori obținute la iterația "n", pentru toate cele 476 noduri ale domeniului de calcul. Cu aceste valori se determină, la nivelul fiecărui element, inducția magnetică pe suprafața elementului, conform relațiilor (1.240) (1.241) , care în final obțin forma:

$$B_x^e = \frac{\partial A^e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta^e} (x_k - x_j) A_i^e + \frac{1}{2\Delta^e} (x_i - x_k) A_j^e + \frac{1}{2\Delta^e} (x_j - x_i) A_k^e$$

$$B_y^e = -\frac{\partial A^e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta^e} (y_k - y_j) A_i^e + \frac{1}{2\Delta^e} (y_i - y_k) A_j^e + \frac{1}{2\Delta^e} (y_j - y_i) A_k^e \quad (3.2)$$

Astfel se determină, pe fiecare element, modulul inducției magnetice:

$$B^e = \sqrt{(B_x^e)^2 + (B_y^e)^2} \quad (3.3)$$

notată cu  $B^{(n)}$  la iterația "n".

Corespunzător, din curba de magnetizare a materialului se determină valorile permeabilității magnetice  $\mu^{(n)}$  , la iterația "n".

Din motive de convergență și de stabilitate a procesului iterativ, nu se vor considera valorile  $\mu^{(n)}$ , obținute mai sus, ci se vor adopta, pentru iterația "n", următoarele valori corectate (subrelaxate):

$$\mu^{e(n)} = \mu^{e(n-1)} + c_{\mu}(\mu^{e(n)} - \mu^{e(n-1)}) \tag{3.4}$$

în care  $c_{\mu}$  reprezintă un coeficient de atenuare (decelerare), stabilit prin încercări la o valoare optimă ( $c_{\mu} = 0,1$ ), iar  $\mu^{e(n-1)}$  este permeabilitatea magnetică a unui element la iterația anterioară (n-1).

Cu aceste valori se poate relua o nouă iterație.

Pentru a mări viteza de convergență, se corectează și valorile potențialului magnetic, astfel încât pentru iterația următoare (n+1), se adoptă valorile suprarelaxate:

$$A_i^{(n+1)} = A_i^{(n)} + c_A(A_i^{(n+1)} - A_i^{(n)}) \tag{3.5}$$

în care  $c_A$  este coeficientul de accelerare, stabilit tot prin încercări la valoarea optimă ( $c_A = 1,3$ ).

La prima iterație s-au inițializat valorile:  $A_i^{(0)} = 0$ , ( $i=1,476$ );  $\mu^{e(0)} = \mu_0$ , pentru elementele din creștături și întrefier;  $\mu^{e(0)} = 4300\mu_0$  pentru triunghiurile din subdomeniile feromagnetice. Pe frontiera domeniului de calcul (figura 3.2) condițiile sunt omogene: de tip Dirichlet (pe porțiunea  $P_2P_3P_4P_1$ ) și de tip Neumann (pe porțiunea  $P_1P_2$ ).

Calculul s-a efectuat pe un circuit magnetic corespunzător unui motor de inducție trifazat de 4 kw, cu doi poli, având dimensiunile din fig. 3.2. Înfașurarea trifazată a statorului este simetrică, într-un strat fiind parcursă de un sistem trifazat simetric de curenți de magnetizare (se consideră regimul de mers în gol ideal, cu  $I_{10} = I_{\mu} = 4A$ ). În consecință, la momentul  $t_1 = \pi/2\omega$ , rezultă următoarea distribuție instantanee a solenației de excitație, corespunzătoare celor 6 creștături statorice din domeniul de calcul (o jumătate de pas polar):

/ 93,34 / 93,34 / 93,34 / 93,34 / 186,68 / 186,68 / [Asp]

Această distribuție de solenație reprezintă funcția - sursă a câmpului magnetic (la momentul  $t_1$ ) și trebuie considerată, în continuare, ca o distribuție de regim staționar. Pentru calcule s-a considerat o poziție fixă a rotorului în raport cu statorul.

Cu acestea au fost prezentate toate datele de intrare necesare execuției programului ELFIN2.

Timpu de calcul reprezintă una din marile probleme ale programelor de tip "element finit". Programul ELFIN1 nu ridică probleme în acest sens, în schimb algoritmul numeric

de rezolvare a sistemului de ecuații (în cazul de față având 476 de necunoscute ) consumă timp considerabil de calcul.

Pe un calculator AT-386, fără coprocesor matematic, algoritmul numeric din ELFIN2 necesită cca. 1 minut pentru fiecare iterație din cele peste 70 iterații necesare. În prezența coprocesorului matematic, timpul de calcul se reduce de aproximativ 60 de ori, astfel că ELFIN2 se execută în 1...2 minute.

Câteva rezultate de calcul, furnizate de ELFIN2, sunt grupate în exemplele următoare.

#### Exemplul 1.

Pentru a urmări convergența și stabilitatea procesului iterativ de calcul, se prezintă în fig. 3.3 valorile inducției magnetice pe elementul  $e=797$ . Acest element se află în zona jugului stator, în apropierea axei  $\theta = \pi / 2$ , având poziția echivalentă cu cea a elementului  $e=62$  din fig. 3.1a. Procesul de calcul are o convergență satisfăcătoare valorile stabilizându-se după cca. 70 iterații, dacă se folosesc coeficienții optimi  $c_{\mu} = 0.1$  și  $c_{\lambda} = 1.3$ .

Pentru comparație, se prezintă și rezultatele de calcul corespunzătoare pentru  $c_{\mu} = 0.2$ . Se constată că, pentru  $c_{\mu} > 0.1$  convergența se înrăutățește, iar pentru  $c_{\mu} > 0.2$  procesul de calcul devine chiar instabil. Influența coeficientului de suprarelaxare ( $c_{\lambda}$ ) asupra stabilității este mai redusă decât influența lui  $c_{\mu}$ . Totuși, pentru  $c_{\lambda} > 1.5$  procesul iterativ devine iarăși instabil, chiar cu  $c_{\mu} = 0.1$ .

#### Exemplul 2.

În figura 3.4 se prezintă variația potențialului magnetic  $A$ , în funcție de arcul polar  $\theta$ , în jugul statorului și anume în nodurile 13, 14, 15, 16, ..., 368, 369, 370, 371, de pe arcul  $P_5P_6$  de rază  $r = 0,069m$  (vezi fig. 3.2).

Valorile potențialului în nodurile respective, unite prin segmente de dreaptă, formează curba 1.

Cu această ocazie, s-au efectuat și calcule prin metoda analitică (SAI) pentru aceeași problemă de mai sus, cu aceleași date, pentru comparație .

Rezultatele calculului sunt reprezentate prin curba 2.

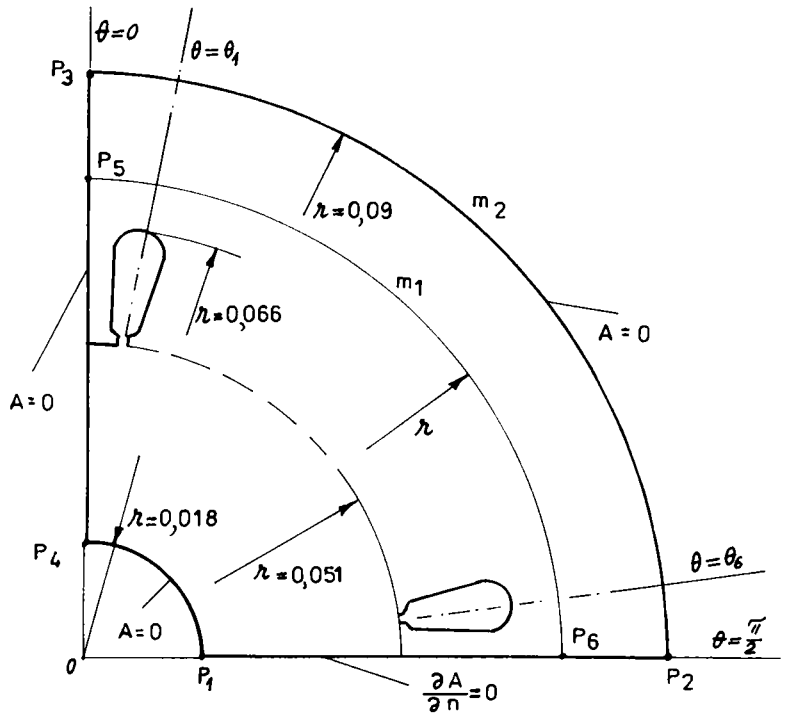


Fig. 3.2 Domeniul de calcul

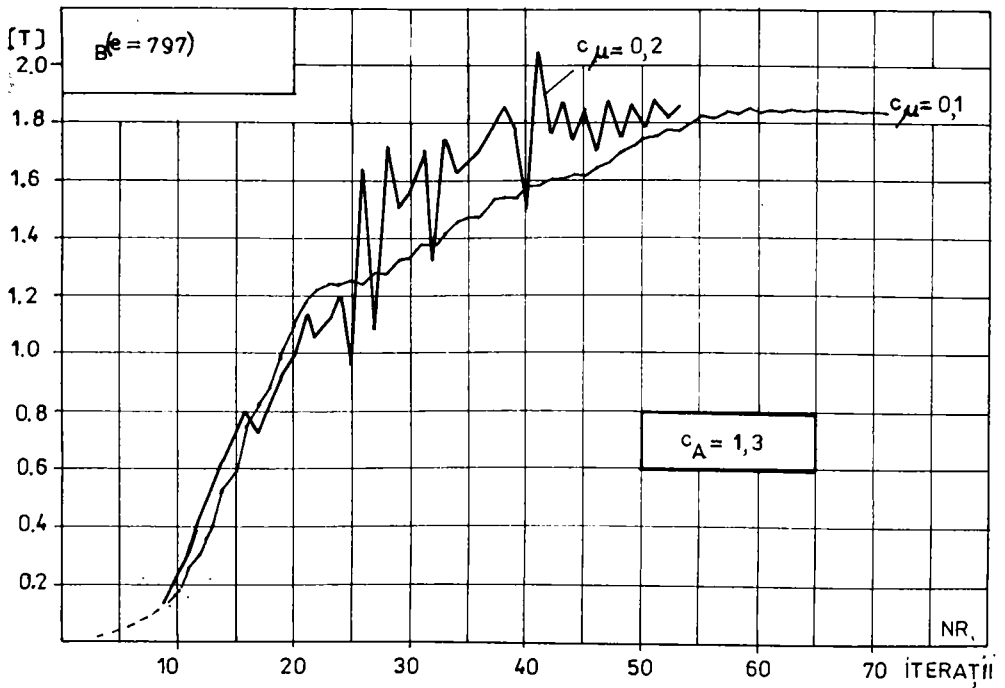


Fig. 3.3 Convergența soluției pe elementul 797



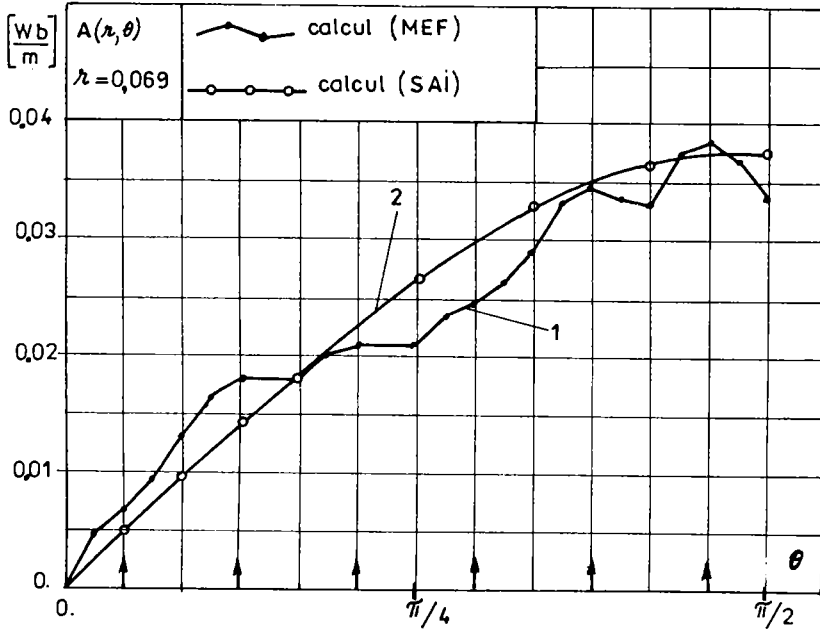


Fig. 3.4 Potențialul magnetic vector in jugul statorului

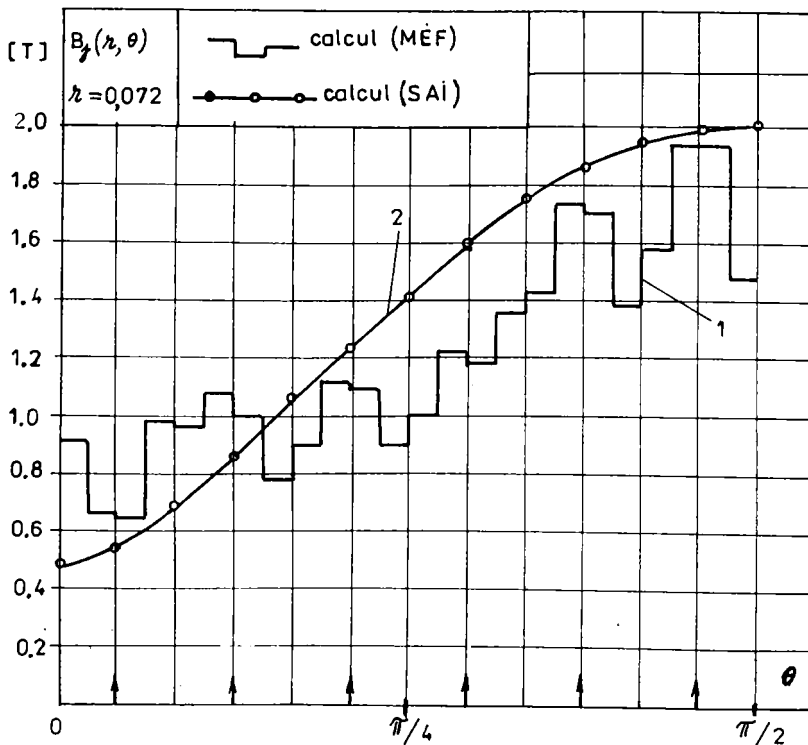


Fig. 3.5 Variația modului inducției magnetice in jugul statorului în direcție tangențială.

Din cauza prezenței creștăturilor statorului (neomogenității), câmpul magnetic din jug se distorsionează, iar metoda MEF poate reproduce aceste distorsiuni (pe direcția “ $\theta$ ” în cazul figurii 3.4). Săgețile de pe abscisă marchează poziția axelor creștăturilor statorului. Se constată unele maxime locale ale potențialului în axele creștăturilor.

Metoda SAI presupune zona “creștată” a statorului omogenă (dar anizotropă), astfel că potențialul magnetic în jug, în raport cu  $\theta$ , are o variație sinusoidală ( $\sin p\theta$ ), conform rel. (2.45).

În exemplele care urmează se procedează la fel, prezentându-se rezultatele de calcul obținute prin ambele metode, pentru a face, în același timp, o analiză a câmpului magnetic și o comparație a celor două metode.

### Exemplul 3.

Modulul inducției magnetice se determină din cele două componente ale ei (rel. 3.3). În fig.3.5 se poate urmări variația modulului inducției din jugul statorului, în direcția coordonatei  $\theta$ .

Pe suprafața unui element finit, valoarea inducției se menține constantă. Din acest motiv, rezultatele de calcul obținute prin metoda MEF sunt reprezentate printr-o curbă în trepte (curba 1), fiecare treaptă reprezentând nivelul inducției unui element al șirului de elemente: 67, 70, 71, 74, ... 802, 805, 806, 809, plasate de-a lungul arcului  $P_5P_6$  ( $0.069 \leq r \leq 0.0726$ ). Pe primele elemente ale șirului este preponderentă componenta radială a inducției din jug iar pe ultimele elemente, cea tangențială. Din acest motiv, pe ultimele elemente, se înregistrează valori maxime (locale) în axele creștăturilor, acolo unde lățimea jugului scade, iar componenta tangențială a inducției crește. De-a lungul arcului de cerc  $P_5P_6$  ( $r=0.072$ ), prin metoda SAI, se obțin valorile date de curba 2.

### Exemplul 4

Deoarece subdomeniul jugului nu conține surse ( $J=0$ ), tensiunea magnetică între punctele  $P_5$  și  $P_6$  este aceeași, pe orice contur ( $\Gamma$ ) conținut în subdomeniul jugului. Cu alte cuvinte, tensiunea magnetică între  $P_5$  și  $P_6$ , pe conturul direct  $P_5m_1P_6$ , este egală cu cea de pe conturul  $P_5P_3m_2P_6$ .

În consecință, inducția magnetică pe arcul "m<sub>2</sub>" este mai mică decât cea de pe arcul de cerc "m<sub>1</sub>", din cauza lungimilor diferite ale celor două contururi. Este justificată, deci, variația inducției magnetice din jug în raport cu coordonata "r". În vecinătatea creștăturilor, inducția din jug are valori mai mari, care apoi scad înspre exteriorul jugului. Acest aspect poate fi urmărit în figura 3.6.

În direcția coordonatei "r", subdomeniul jugului corespunde intervalului:  $0.066 \leq r \leq 0.09$  regăsit pe abscisa din figură.

Așa cum s-a constatat și anterior (figura 3.5), valorile inducției magnetice din jug sunt mai mici (de regulă) în axele dinților decât în axele creștăturilor. Se poate spune că prezența dinților are ca efect o relaxare magnetică a jugului. În paragraful 1.6 și în [M12] se propune un coeficient de corecție, utilizat în calculele de proiectare clasice și determinat prin metoda transformărilor conforme, care să țină seama de relaxarea magnetică a jugului. Coeficientul obținut este subunitar și înmulțește valoarea inducției maxime din jug (cea din axa creștăturii).

Din cauza acestui efect, inducția magnetică din jug, în direcția coordonatei "r", variază diferit în axa dintelui și în axa creștăturii.

Curba 1 din figura 3.6 reprezintă valorile inducției de-a lungul axei ( $\theta = \theta_0$ , din figura 3.2) corespunzătoare ultimei creștături din domeniul de calcul, respectiv pe elementele :813, 805, 797, 789, 781, echivalente ca poziție cu elementele: 78, 70, 62, 54, 46, din figura 3.1a.

Curba 3 indică valorile inducției de-a lungul axei ( $\theta = \pi / 2$ ) corespunzătoare ultimului dinte, respectiv pe elementele :817, 809, 801, 793, 785, echivalente ca poziție cu: 82, 74, 66, 58, 50.

În fine, curba 2 reprezintă inducția pe elementele:816, 807, 799,791, 783, situate între axele  $\theta = \theta_0$  și  $\theta = \pi / 2$ , în poziții echivalente cu elementele: 81, 72, 64, 56, 48.

Valorile maxime ale inducției magnetice în jug (conform metodei analitice) se obțin pentru  $\theta = \pi / 2$  (rel. 2.61). Aceste valori maxime se modifică în raport cu "r", după curba 4, obținută din calcul prin metoda SAI. Se constată că și această metodă de calcul redă scăderea inducției, în direcția "r", înspre extremitatea exterioară a jugului.

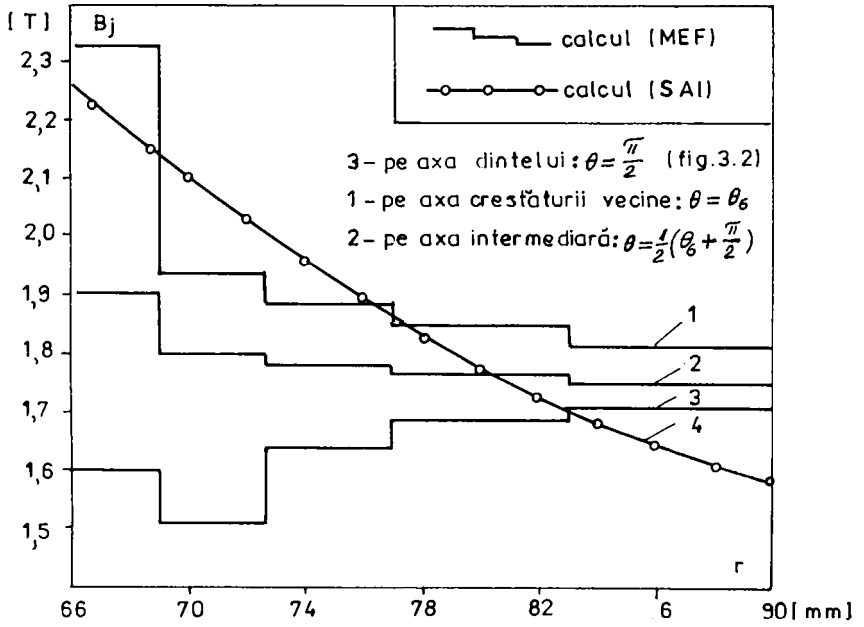


Fig.3.6 Variația modului inducției magnetice in jugul statorului in direcție radială.

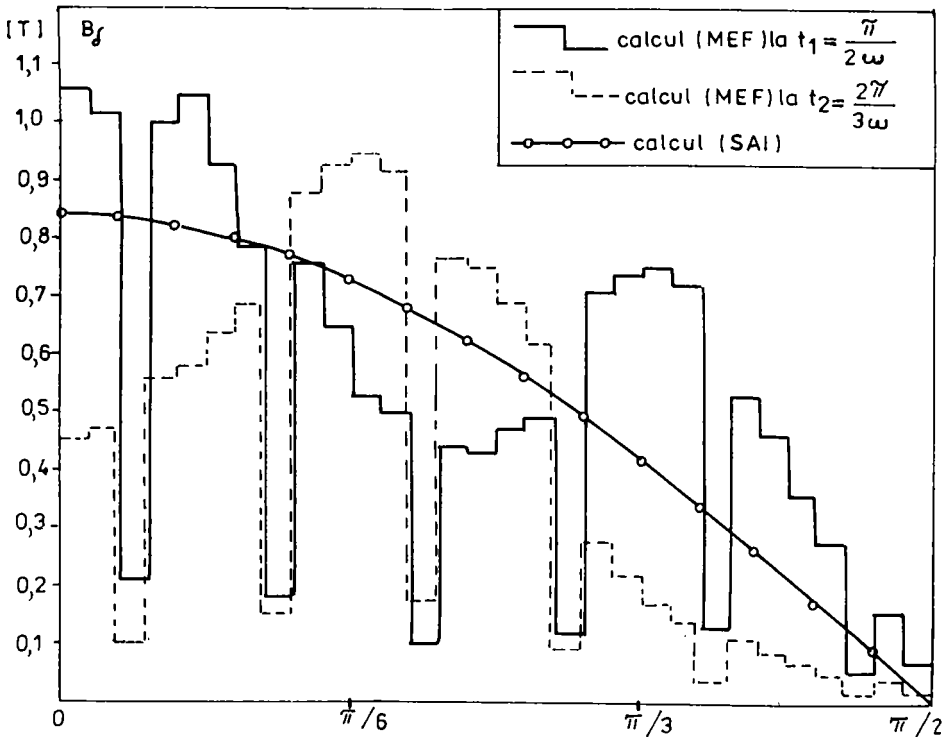


Fig. 3.7 Variația inducției magnetice din intrefier

### Exemplul 5.

În Cap. 2 secțiunea transversală a mașinii de inducție este împărțită în cinci subdomenii de calcul. În fiecare subdomeniu inducția magnetică are componentă radială și componentă tangențială, cu ponderi diferite de la caz la caz. De exemplu, componenta tangențială este preponderent în juguri, iar în întrefier și zonele dințate, aproape nulă.

În întrefier, inducția are, practic, numai componentă radială, cu valori maxime în axa polului ( $\theta=0$ ).

În fig. 3.7 se poate urmări variația în raport cu  $\theta$  a inducției din întrefier ( $B_\delta$ ) pe o jumătate de pas polar ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ).

Fiecare pas dentar cuprinde cinci elemente finite: patru sub dinte și unul în dreptul deschiderii creștăturii.

Inducția din întrefier fiind constantă pe suprafață fiecărui element (dar diferită de la element la element) se obține o curbă în trepte, în raport cu coordonata  $\theta$ .

Curba reprezentată cu linie continuă corespunde momentului  $t_1 = \pi/2\omega$  când curentul primei faze trece prin maxim.

Se constată variații mari ale inducției de la un element la altul, cu minime în axele creștăturilor, din cauza deschiderii lor.

Pentru comparație s-au reprezentat (cu linie întreruptă) și valorile obținute în alt moment de timp ( $t_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ ), când curentul fazei "doi" este nul.

Se observă pulsații mari ale inducției sub fiecare dinte. Ambele curbe indică un conținut ridicat de armonici superioare ale inducției din întrefier, dependente de numărul de creștături, de distribuția solenației, de saturația magnetică, de poziția rotorului în raport cu statorul.

Metoda SAI conduce la valori ale inducției în întrefier care variază, în raport cu  $\theta$ , după o curbă continuă (rel. 2.62). Astfel, pe intervalul considerat ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) este reprezentată în fig. 3.7. distribuția valorilor inducției din întrefier, așa cum rezultă din calculul analitic iterativ (SAI), pentru cazul de mai sus.

Se obține un câmp magnetic "armonică fundamentală", care cuprinde efectul neliniarității circuitului magnetic, în sensul că amplitudinea lui nu este direct proporțională cu amplitudinea solenației de excitație.

## Concluzii

Analiza efectuată mai sus prin metoda MEF arată o variație discontinuă oarecare a mărimilor magnetice (inducții, potențiale) pe orice direcție a domeniului. Această distribuție aproximativă a câmpului magnetic bidimensional (plan-paralel) conține inclusiv informații privind armonicile spațiale ale câmpului magnetic din întrefier, la un moment dat, la o solenație dată și la o poziție dată a rotorului în raport cu statorul. Pentru alte condiții date (privind momentul de timp, solenația de excitație, poziția rotorului), distribuția spațială a câmpului se modifică și trebuie recalculată.

În consecință, o analiză a armonicilor spațiale ale câmpului magnetic din întrefier, folosind distribuția spațială dată de MEF pentru tot domeniul, este extrem de dificilă și laborioasă, iar în practică foarte rar se face o astfel de analiză.

Ceea ce este într-adevăr util este armonica fundamentală a câmpului magnetic din întrefier, care trebuie "extrasă" din distribuția aproximativă obținută, iar apoi folosită în calcule.

Această armonică fundamentală, determinată din problema de câmp, prezintă interes deoarece cuprinde în ea efectul neliniarității circuitului magnetic și efectul reacției indusului.

În consecință, pentru a lega cele două modele ale mașinii de inducție cu întrefier constant (modelul de câmp și cel de circuit) este necesar și suficient să se determine doar armonica fundamentală a câmpului magnetic din întrefier, prin rezolvarea problemei de câmp.

Informațiile suplimentare obținute prin metoda MEF, legate de distribuția câmpului în restul domeniului, pot conduce la unele concluzii interesante, dar obținerea lor se face cu implicații foarte serioase în elaborarea unui model global al mașinii de inducție.

Fiecare din cele două metode de calcul al câmpului magnetic (MEF și SAI), utilizate mai sus, prezintă avantaje și dezavantaje, dependente de complexitatea domeniului de calcul și de scopul urmărit.

Dacă domeniul dat este secțiunea transversală a mașinii de inducție cu întrefier constant, iar scopul este doar analiza distribuției spațiale a câmpului magnetic, atunci se vor folosi indiscutabil metodele numerice de discretizare a domeniului (metoda elementelor finite, metoda diferențelor finite). Acestea redau aproximativ distorsiunile locale ale câmpului, provocate de neomogenitățile (crestăturile) prezente în domeniul de câmp, așa cum se constată din figurile 3.4, 3.5, 3.6, 3.7..

Pentru același domeniu de mai sus, dacă se urmărește calculul fundamentalei câmpului magnetic din întrefier (cu considerarea curbei reale de saturație și a reacției de indus) și apoi determinarea parametrilor energetici globali ai mașinii de inducție, atunci metoda analitică iterativă (SAI) este mai avantajoasă decât MEF deoarece:

- timpul de calcul este mult mai redus ( de sute de ori);

- permite elaborarea unui model combinat "câmp-circuit" pentru mașina de inducție cu întrefier constant ;

- permite optimizarea simplă a geometriei transversale a mașinii de inducție prin numărul redus de variabile;

- asigură o manevrare ușoară a soluției, care este în întregime cuprinsă într-o expresie analitică simplă.

Dezavantajul metodei SAI constă în faptul că neglijează armonicile superioare de spațiu ale câmpului magnetic din întrefier cu scopul de a rezolva, cel puțin pentru fundamentală, cazul problemei neliniare.

Problema armonicilor poate fi tratată separat pentru găsirea unor căi de reducere a lor. Aceste căi sunt, în principal, cunoscute, dar pot fi găsite încă altele noi printr-o analiză aprofundată.

;

## Cap. 4

# ANALIZA NELINIARĂ A MAȘINII DE INDUCȚIE FOLOSIND MODELUL SAI

### 4.1 CAZUL MAȘINII DE INDUCȚIE CU CÂMP MAGNETIC CIRCULAR

#### 4.1.1 Calcule și verificări experimentale privind efectul saturației circuitului magnetic principal.

Funcționarea mașinii asincrone trifazate în regim de mers în gol oferă posibilitatea efectuării unor verificări experimentale în legătură cu cele de mai sus. Mașina, în acest regim de funcționare este conectată la rețeaua de alimentare trifazată simetrică ce asigură tensiunea  $U_0$  pe fiecare fază, iar rotorul în mișcare are o viteză de rotație aproximativ egală cu cea a câmpului magnetic învârtitor, circular.

Se consideră că prin colivia în scurtcircuit a rotorului nu circulă curent ( $I'_{2r} = 0$ , în rel 2.49), astfel că există un singur curent - cel de magnetizare ( $I_\mu = I_{1r}$ ) care circulă prin înfășurările statorului și produce câmpul magnetic din mașină.

Curentul total ( $I_{10}$ ) la mersul în gol are și o componentă activă ( $I_{0a}$ ) și poate fi scris în complex sub forma:

$$\underline{I}_{10} = I_{0a} + jI_\mu \quad (4.1)$$

Componenta activă este mult mai mică decât cea reactivă ( $I_{0a} \ll I_\mu$ ) și se determină din pierderile active la mersul în gol după relația cunoscută [C5]:

$$I_{0a} = \frac{P_{Fe} + P_{mv} + P_{cu0}}{3U_0} \quad (4.2)$$

în care  $P_{Fe}$  sunt pierderile în fier,  $P_{mv}$  - pierderile mecanice și de ventilație,  $P_{cu0}$  - pierderile în înfășurarea de fază a statorului determinate de curentul  $I_{10}$ .

După cum este cunoscut, aceste pierderi pot fi determinate prin separare, dintr-o probă de mers în gol, încât componenta reactivă rezultă imediat:

$$I_\mu = \sqrt{I_{10}^2 - I_{0a}^2} \quad (4.3)$$

Pe de altă parte, neglijând rezistența electrică a înfășurării statorului în raport cu reactanța sa utilă și punând  $I_{10} \approx jI_\mu$  în ecuația de tensiune a statorului (scrisă în complex pentru mersul în gol), se obține relația scalară aproximativă:



$$U_{e0} \cong U_0 - X_1 I_{10} \quad (4.4)$$

în care  $X_1$  este reactanța de dispersie a înfășurării de fază.

Este cunoscut [D4] că valoarea tensiunii induse  $U_{e0}$  este cu circa 2...5% mai mică decât  $U_0$ , pentru motoarele de inducție trifazate cu  $p \leq 8$ .

Relațiile (4.3) și (4.4) asigură trecerea de la  $I_\mu$  la  $I_{10}$  și de la  $U_{e0}$  la  $U_0$ , în ambele sensuri, astfel încât proba de mers în gol oferă posibilitatea unor verificări experimentale.

Punând  $I'_{2r} = 0$  în relația 2.49 și  $I_r = I_\mu$ , în (2.48) se poate calcula, după algoritmul iterativ prezentat anterior (fig. 2.4), caracteristica  $U_{e0}(I_\mu)$ , dând valori crescătoare curentului de magnetizare  $I_\mu$ . Folosind apoi corecțiile (4.3) și (4.4) se obține curba  $I_{10}(U_0)$  care se compară cu cea determinată experimental.

În acest fel s-au efectuat verificări experimentale pentru numeroase cazuri concrete de motoare de inducție trifazate.

Figura 4.1 prezintă câteva din exemplele analizate.

Cu linie continuă s-au reprezentat caracteristicile determinate prin calcul, după metoda SAI (calculul 1).

Pe aceeași figură, cu linie întreruptă (calculul 2), s-au reprezentat caracteristicile obținute tot prin calcul, dar folosind metoda clasică [B5, C5, D4, N9, R6, V8] bazată pe calculul tensiunilor magnetice pe diferitele porțiuni ale circuitului magnetic (în dinți, juguri, întrefier). Valorile obținute prin măsurare directă sunt reprezentate discret prin câteva puncte ("0").

Se constată o bună corespondență între valorile măsurate și cele calculate după metoda propusă (prin rezolvarea problemei de câmp), pentru toate cazurile analizate. În consecință, se poate afirma că metoda propusă surprinde corect efectul de saturație al circuitului magnetic principal al mașinii. La saturații medii și mari, calculul clasic al tensiunilor magnetice în fier se face cu erori foarte mari (mai ales la motoarele bipolare), fapt ce afectează toate calculele ulterioare ale performanțelor energetice ale motorului.

Motoarele de 4 kW și de 15 kW, bipolare și tetrapolare, au fost executate cu tablă silicioasă din același lot, la care curba de magnetizare a materialului  $B(H)$  a fost determinată prin măsurare și folosită în calcule. La aceste patru motoare (vezi fig. 4.1) se constată abateri minime (<5%) ale valorilor calculate, pentru orice nivel de saturație.

Este necesar să se folosească în calcule o curbă de magnetizare cât mai apropiată de cea reală. În caz contrar pot să apară unele diferențe între calcule și măsurători. În concluzie se poate spune că algoritmul de calcul iterativ din fig. 2.4, care utilizează soluția

analitică a problemei de câmp, determină cu foarte bună aproximație caracteristica magnetică la mersul în gol, pentru orice mașină de inducție cu câmp învârtitor circular și întrefier constant. În fiecare punct al acestei caracteristici magnetice se poate defini reactanța de magnetizare  $X_{1m}$  a unei faze:

$$X_{1m} = \frac{U_{e0}}{I_{\mu}} \quad (4.5)$$

care va avea valori diferite, de la un punct la altul al caracteristicii, în funcție de gradul de saturație a circuitului magnetic.

După cum se știe, proba de mers în gol al motorului de inducție trifazat permite separarea pierderilor în fier pentru orice grad de saturație magnetică obținut prin modificarea tensiunii la borne ( $U_0$ ). Este astfel posibil, cu această ocazie, să se verifice experimental și o metodă de calcul al pierderilor în fier.

Se propune, în acest sens, utilizarea punctelor reprezentative ( $P_0$ ) din fiecare subdomeniu, în care s-au determinat inducțiile reprezentative care vor impune, de data aceasta, pierderile specifice pentru întreg subdomeniul respectiv.

Neglijând pierderile în fier din rotor, se poate scrie relația cunoscută de calcul al pierderilor principale în fier ( $P_{pi}$ ), la mersul în gol:

$$P_{pi} = 1,6P_{j5} + 1,8P_{d4} \quad (4.6)$$

adică suma pierderilor în fier din jugul ( $P_{j5}$ ) și dinții ( $P_{d4}$ ) statorului, înmulțite cu 1,6 respectiv 1,8 datorită prelucrării mecanice [C6, N9, P5].

Pentru cei doi termeni din (4.6) se propun următoarele relații de calcul:

$$P_{j5} = p_{10} B_{s0}^{1.7} G_{j5} \quad (4.7)$$

$$P_{d4} = p_{10} B_{d4}^{1.7} G_{d4} \quad (4.8)$$

în care  $B_{s0}$  este componenta tangențială a inducției magnetice reprezentative (în punctul  $P_0$ ) dată de relația (2.87);  $B_{d4}$  - inducția magnetică reală din dinți dată de (2.94);  $G_{j5}, G_{d4}$  - masa jugului, respectiv masa dinților statorului.

Funcția  $p_{10} B^{1.7}$  reprezintă aproximarea curbei pierderilor specifice în materialul tolelor, determinată experimental, iar  $p_{10}$  reprezintă pierderile specifice în curent alternativ (50Hz) la o inducție de 1T. Din curba determinată experimental rezultă  $p_{10} \cong 2,7$  W/kg, dar în calcule s-a folosit valoarea mărită  $p_{10} \cong 4$  W/kg corespunzătoare remagnetizării circulare [D4].

Masa jugului statorului se determină simplu folosind razele  $r=f$  și  $r=e$  care delimitează subdomeniul D5:

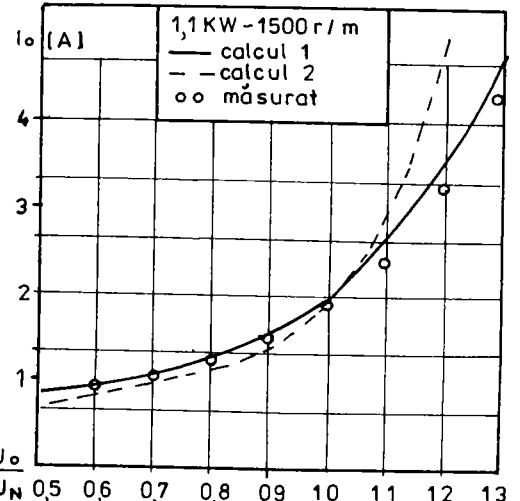
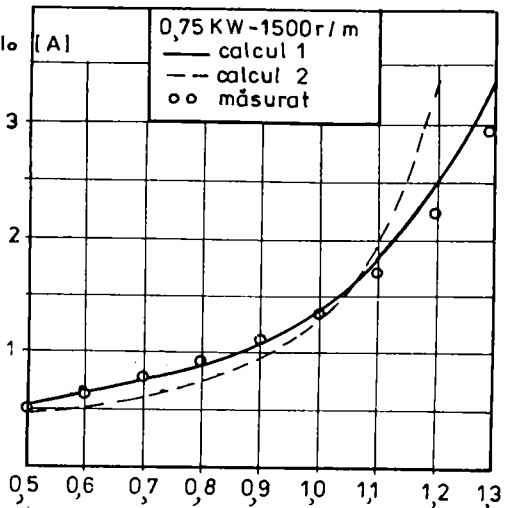
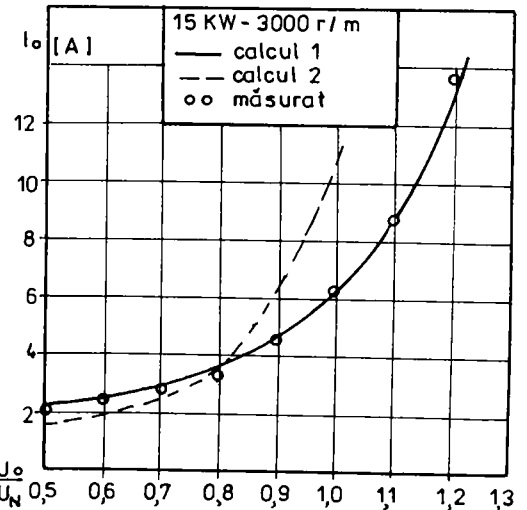
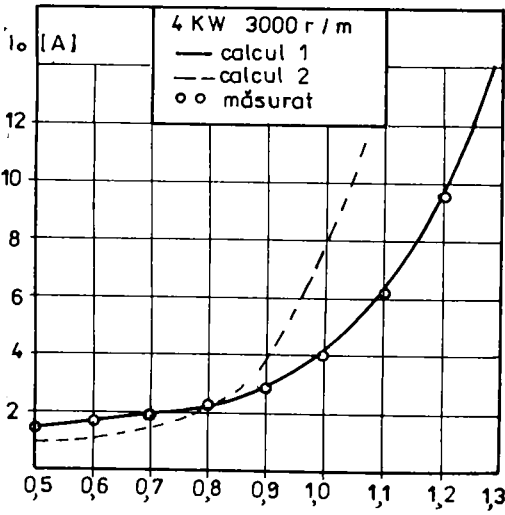
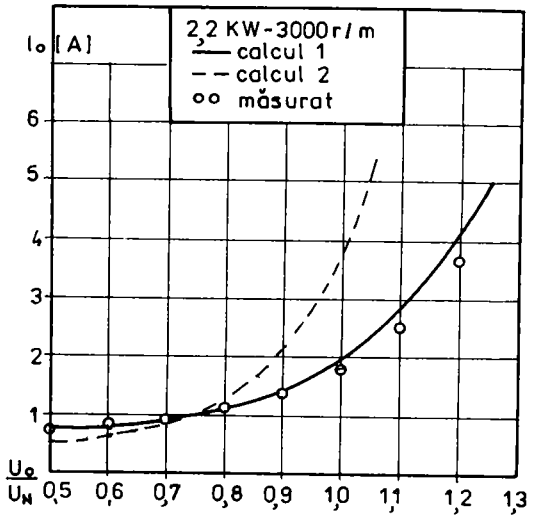
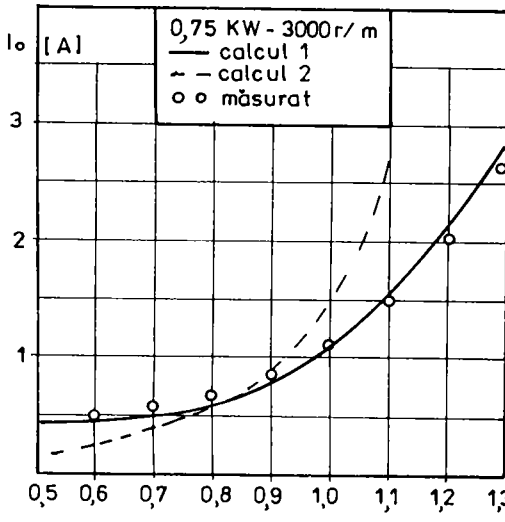


Fig. 4.1 Variația curentului de mars in gol in raport cu tensiunea :  
 — calcul SAI    - - - - calcul clasic

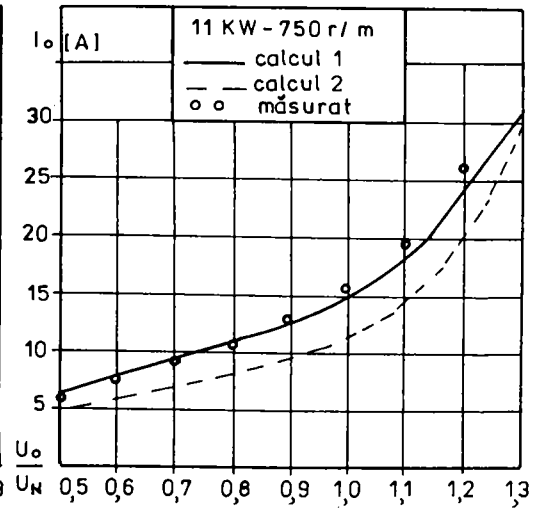
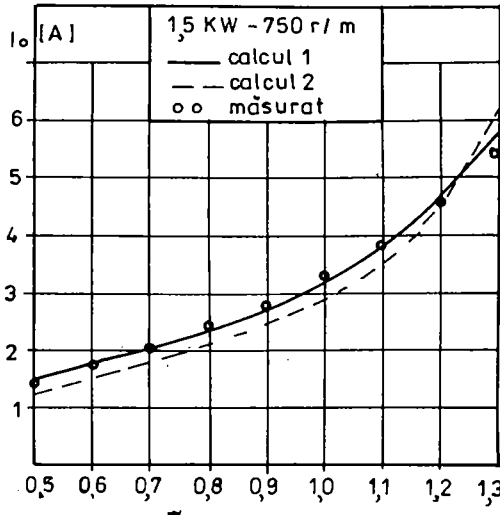
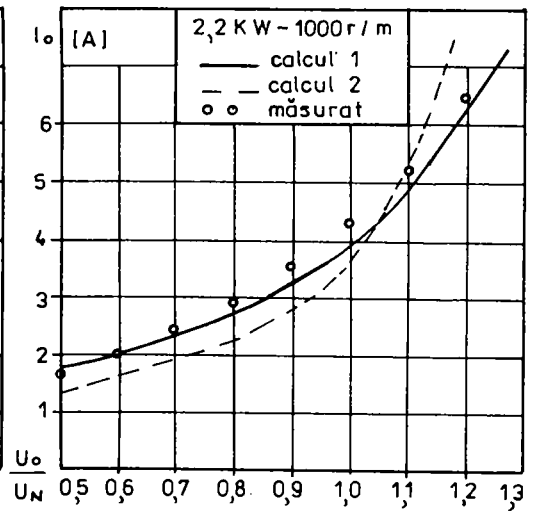
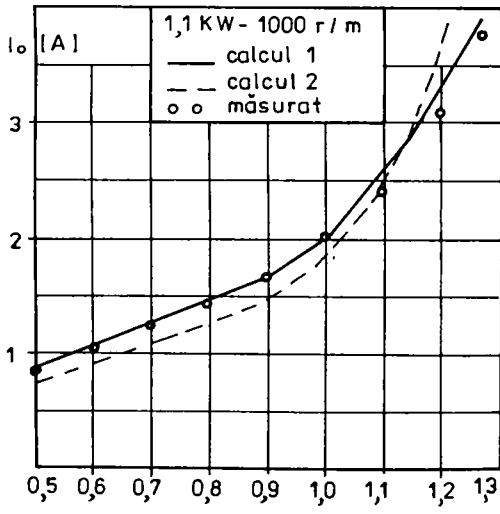
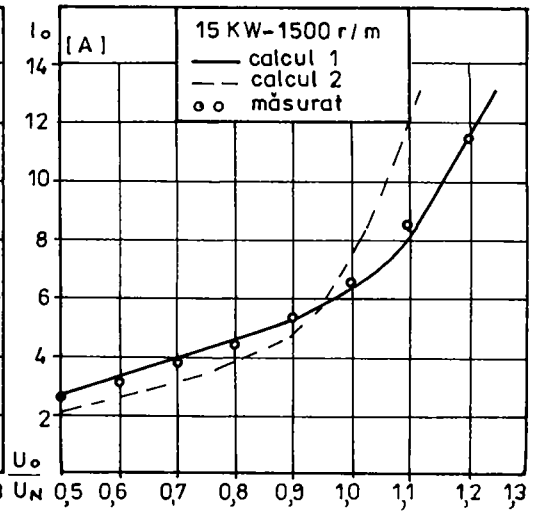
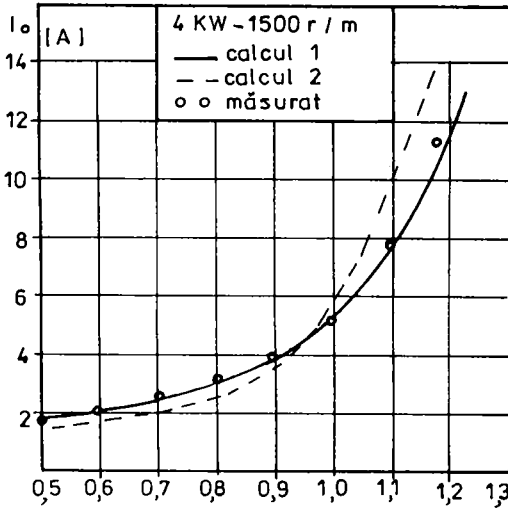


Fig. 4.1 Continuare

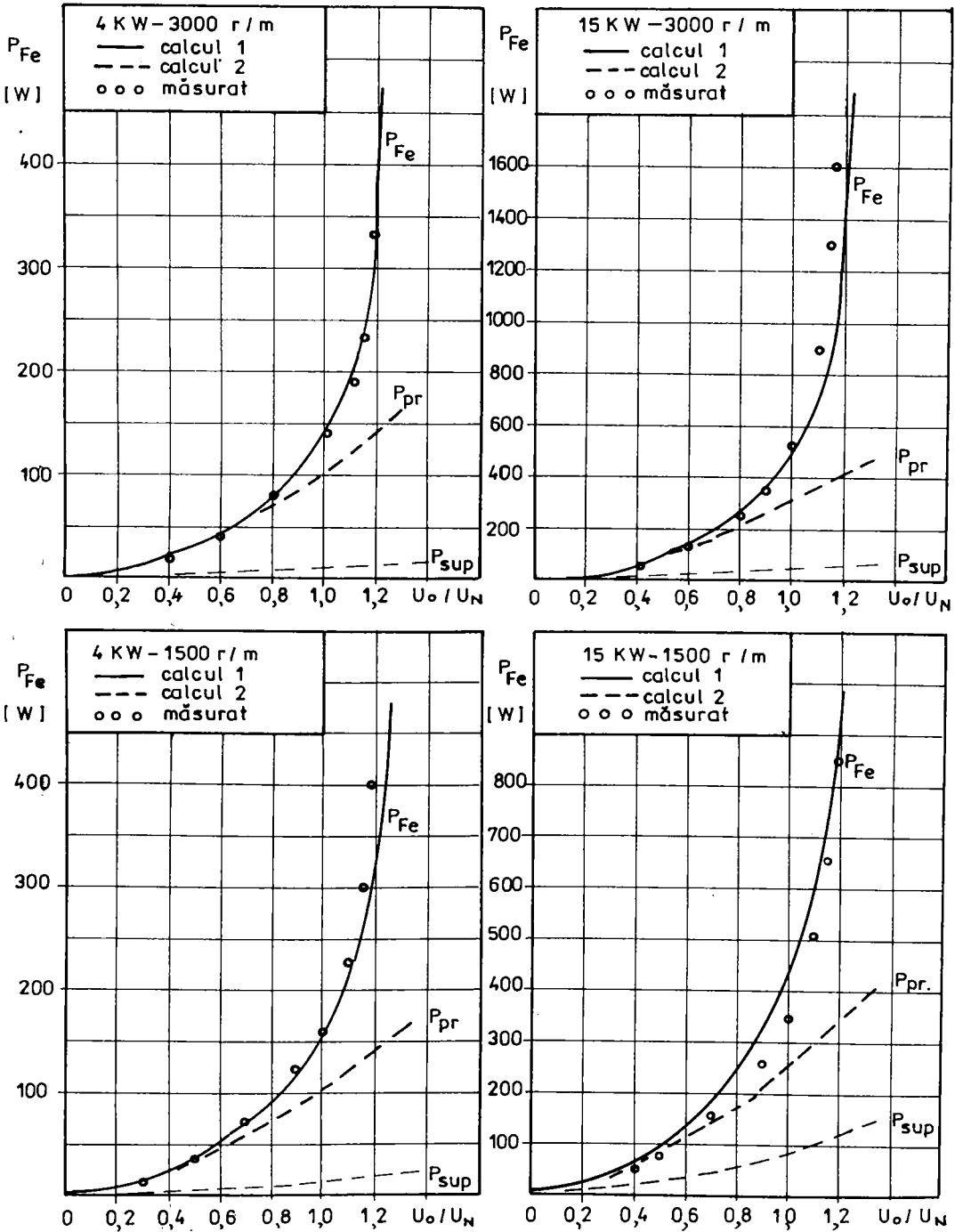


Fig. 4.2 Variația pierderilor în fier în raport cu tensiunea :  
 — calcul SAI — — — calcul clasic

$$G_{j5} = \gamma_{Fe} \cdot k_{Fe} \cdot \pi(f^2 - e^2)L_1 \quad (4.9)$$

și asemănător, pentru dinții statorului:

$$G_{d4} = \gamma_{Fe} \cdot k_{Fe} \cdot \pi(e^2 - d^2)L_1 \frac{\theta_{d4}}{\theta_{d4} + \theta_{c4}} \quad (4.10)$$

în care  $\gamma_{Fe} = 7800 \text{ kg/m}^3$  este masa specifică a fierului, iar  $k_{Fe}$  este factorul de împachetare a tolelor statorului.

La mersul în gol, din cauza mișcării rotorului, apar în plus pierderi suplimentare ( $P_{sup}$ ):

$$P_{sup} = P_{s4} + P_{s2} + P_{p4} + P_{p2} \quad (4.11)$$

în care  $P_{s4}$  și  $P_{s2}$  sunt pierderile de suprafață în stator, respectiv în rotor, iar  $P_{p4}$  și  $P_{p2}$  sunt pierderile de pulsație în dinți. În rel.(4.11) pierderile  $P_{p4}$  și  $P_{p2}$  au o pondere mult mai mare decât cele de suprafață și se calculează după relația cunoscută [C6, N9, P5]:

$$\begin{aligned} P_{p4} &= 0,5 \cdot 10^{-4} (z_2 n B_{p4})^2 G_{d4} \\ P_{p2} &= 0,5 \cdot 10^{-4} (z_1 n B_{p2})^2 G_{d2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

în care  $z_1$  și  $z_2$  sunt numerele de dinți ai statorului respectiv ai rotorului, iar  $n$  este viteza de rotație a rotorului (rot/sec).

Inducțiile de pulsație în dinții statorului ( $B_{p4}$ ) și ai rotorului ( $B_{p2}$ ) se determină pe baza relațiilor cunoscute în literatură [C6, D4, N9, P5].

Pierderile totale în fier, la mersul în gol, rezultă însumând pierderile principale (rel 4.6) și cele suplimentare (4.11):

$$P_{Fe} = P_{pr} + P_{sup} \quad (4.13)$$

Conform relațiilor de mai sus au fost determinate pierderile totale în fier pentru câteva motoare, la diferite valori ale tensiunii de alimentare ( $U_n$ ), în scopul comparării rezultatelor de calcul cu cele experimentale. În fig. 4.2 se prezintă patru astfel de exemple.

Cu linie întreruptă (calcul 2) s-au reprezentat pierderile principale și cele suplimentare din fierul mașinii (rel. 4.6 și 4.11). Valorile măsurate ale pierderilor totale în fier arată o creștere pronunțată a acestor pierderi la creșterea saturației fierului. Se constată o diferență tot mai mare între valorile calculate și cele măsurate pe măsură ce nivelul de saturație a fierului crește. Este prezent aici un fenomen, dependent de saturație, care nu este prins în relațiile de calcul al pierderilor de mai sus. Considerăm că acest fenomen este legat de valoarea inducțiilor de pulsație în dinți din rel. (4.12) pentru care se dau relații de calcul în literatură în ipoteza neglijării saturației fierului.

Ca urmare, pentru a include și fenomenul de saturație în calculul pierderilor suplimentare, se propune ca, în locul inducțiilor  $B_{p_4}$  și  $B_{p_2}$  (rel 4.12), să se pună  $k_{p_4} B_{p_4}$  respectiv  $k_{p_2} B_{p_2}$  în care:

$$k_{p_4} = \frac{1}{2,2 - B_{d4}}$$

$$k_{p_2} = \frac{1}{2,2 - B_{d2}} \quad (4.14)$$

unde  $B_{d_4}$  și  $B_{d_2}$  sunt valorile reale ale inducțiilor în dinții statorului și ai rotorului. Coeficienții propuși în ultima relație măresc justificat valorile inducțiilor de pulsație în dinți ( $B_{p_4}, B_{p_2}$ ) pe măsură ce gradul de saturație a acestora crește, provocând o creștere rapidă a pierderilor suplimentare de pulsație, la saturații mari.

În fig. 4.2, cu linie continuă (calcul 1), s-au reprezentat pierderile totale în fier calculate cu relațiile de mai sus, în care s-au luat în considerare coeficienții din (4.14). Se constată în acest caz o apropiere a rezultatelor calculate față de cele măsurate (reprezentate prin "0").

În acest fel efectul de saturație este cuprins mai bine în calculul pierderilor suplimentare de pulsație, care devin foarte mari când dinții se saturează.

Determinarea prin calcul a pierderilor în fier s-a făcut simplu, în același timp cu determinarea câmpului magnetic și anume la ieșirea din ciclul iterativ de calcul prezentat în fig. 2.4, când se cunosc valorile reprezentative ale inducțiilor magnetice în dinți și juguri.

Valoarea pierderilor în fier este necesară în calculul randamentului dar și la calculul componentei active a curentului de mers în gol.

#### 4.1.2 Reacția indusului. Calcule și verificări experimentale.

Se consideră ecuațiile unei mașini de inducție trifazate simetrice, cu rotor în scurtcircuit, în regim staționar sinusoidal [D3]:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{U}_{e1}$$

$$0 = -\underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 + \underline{U}_{e1}$$

$$\underline{I}_{01} = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2$$

$$\underline{U}_{e1} = -\underline{Z}'_{1m} \underline{I}_{01} \quad (4.15)$$

în care:  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$  este impedanța de dispersie a unei faze din stator;  $\underline{Z}_2' = \frac{R_2'}{s} + jX_2'$  este impedanța de dispersie a unei faze din rotor raportată la înfășurarea statorului;  $\underline{U}_1$  - tensiunea sinusoidală de alimentare pe fază.

Tensiunea electromotoare indusă ( $\underline{U}_{e1}$ ) depinde neliniar de curentul de magnetizare (dependență exprimată de caracteristica magnetică) și în consecință impedanța de magnetizare ( $\underline{Z}_{im}$ ) nu poate fi considerată constantă. Ea depinde de punctul de funcționare de pe caracteristica magnetică care, la rândul său, depinde de gradul de saturație a circuitului magnetic principal și de "gradul" de reacție a indusului.

În consecință, pentru a implica în ec. (4.15) și soluția problemei de câmp, cu considerarea saturației magnetice și a reacției de indus, se propune înlocuirea ultimei ecuații din (4.15) prin funcția neliniară  $U_c(I_\mu)$ , cunoscută în urma calculului iterativ prezentat mai sus:

Astfel, sistemul (4.15) devine:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{U}_c(I_\mu)$$

$$0 = -\underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 + \underline{U}_c(I_\mu)$$

$$\underline{I}'_\alpha + j\underline{I}'_\mu = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2 \quad (4.16)$$

în care  $I_\alpha$  este componenta activă corespunzătoare pierderilor de mers în gol:

$$I_\alpha = \frac{P_{Fe} + P_{mv} + P_{cu0}}{3U_0} \quad (4.17)$$

iar  $I_\mu$  este o componentă fictivă rezultantă, numită curent de magnetizare:

$$I_\mu = \text{Imag}(\underline{I}_1 + \underline{I}'_2) \quad 4.18$$

Așa cum s-a arătat anterior, curentul din rotor ( $\underline{I}'_2$ ) are o acțiune demagnetizantă, astfel că, la mersul în sarcină, componenta  $I_\mu$  este mai mică decât la mersul în gol.

Sub această formă, sistemul de ec. (4.16) este neliniar, iar rezolvarea lui se poate face numai pe cale numerică dar fără dificultate.

În acest sens se elimină  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}'_2$  din primele două ecuații (4.16) și se înlocuiesc în ultima:



$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} (\underline{U}_1 + \underline{U}_c(I_\mu))$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{1}{\underline{Z}'_2} \underline{U}_c(I_\mu)$$

$$\underline{I}_\alpha + j\underline{I}_\mu = \frac{1}{\underline{Z}_1} (\underline{U}_1 + \underline{U}_c(I_\mu)) + \frac{1}{\underline{Z}'_2} \underline{U}_c(I_\mu) \quad (4.19)$$

Ultima ecuație din (4.19) conține o singură necunoscută și poate fi rezolvată în raport cu  $I_\mu$ , pentru o alunecare dată.

Pentru simplificare, se va lua tensiunea indusă  $\underline{U}_c$  pe axa reală pozitivă, astfel că:  
 $\underline{U}_c(I_\mu) = U_c(I_\mu) =$  caracteristica magnetică.

Celelalte mărimi complexe se pun sub formă exponențială:

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\alpha_{11}} ; Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} ; \alpha_{11} = \arctg \frac{X_1}{R_1}$$

$$\underline{Z}'_2 = Z'_2 e^{j\alpha_{22}} ; Z'_2 = \sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2)^2} ; \alpha_{22} = \arctg \frac{sX'_2}{R'_2}$$

$$\underline{U}_1 = U_N e^{j\beta} \quad (\beta - \text{necunoscut}) \quad (4.20)$$

Cu aceste notații, ultima ecuație din (4.19) se descompune în două ecuații de tip real prin egalarea părților reale respectiv imaginare:

$$I_\alpha = \frac{U_N}{Z_1} \cos(\beta - \alpha_{11}) + Y_c U_c(I_\mu)$$

$$I_\mu = \frac{U_N}{Z_1} \sin(\beta - \alpha_{11}) - Y_s U_c(I_\mu) \quad (4.21)$$

în care:

$$Y_c = \frac{1}{Z_1} \cos \alpha_{11} + \frac{1}{Z'_2} \cos \alpha_{22}$$

$$Y_s = \frac{1}{Z_1} \sin \alpha_{11} + \frac{1}{Z'_2} \sin \alpha_{22} \quad (4.22)$$

Eliminând unghiul  $\beta$  între cele două ecuații (4.21) se obține în final:

$$I_\mu = \sqrt{\left(\frac{U_N}{Z_1}\right)^2 - (I_\alpha - Y_c U_c(I_\mu))^2} - Y_s U_c(I_\mu) \quad (4.23)$$

Deși ec. (4.23) are o formă potrivită pentru o rezolvare numerică în raport cu  $I_\mu$  (după un procedeu iterativ), se impune o scurtă analiză a acestei ecuații.

Funcția neliniară  $U_c(I_\mu)$  reprezintă caracteristica magnetică a circuitului magnetic al mașinii electrice. Datele constructive ale mașinii determină univoc caracteristica sa magnetică.

Punctul de funcționare a mașinii respective pe această caracteristică depinde de valoarea tensiunii de alimentare pe fază ( $U_N$ ). La variația tensiunii de alimentare, punctul de funcționare se va deplasa pe această caracteristică magnetică astfel: “în sus”, la creșterea tensiunii și respectiv “în jos”, la scăderea ei.

Al doilea fenomen care deplasează punctul de funcționare pe această caracteristică este reacția demagnetizată a indusului. Pe măsură ce reacția indusului crește, punctul de funcționare se deplasează “în jos” pe caracteristică din cauza scăderii fluxului magnetic rezultat.

Pentru regimul de motor, punctele de funcționare extreme de pe caracteristică sunt: cel corespunzător mersului în gol (extrema “superioară”), când reacția de indus este nulă și respectiv cel corespunzător funcționării în scurtcircuit (extrema “inferioară”), când reacția de indus este maximă. Pentru orice alunecare  $0 \leq s \leq 1$ , punctul de funcționare rămâne pe aceeași caracteristică magnetică (inițială). În concluzie, la o mașină dată, pentru a fixa punctul de funcționare pe caracteristica magnetică a sa, trebuie precizate tensiunea de alimentare și alunecarea. Este important de subliniat încă odată că, la creșterea reacției indusului ( $s \rightarrow 1$ ), punctul de funcționare coboară continuu pe caracteristică, sau, cu alte cuvinte, curentul de magnetizare rezultat ( $I_\mu$ ) scade continuu.

Ținând seama de cele de mai sus, se revine la ec. (4.23) și se propune un algoritm iterativ de rezolvare simplu, ilustrat în fig. 4.3.

Se introduc mărimile de intrare necesare:  $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2'$ ,  $X_2'$ ,  $U_N$ ,  $s$ .

Pentru prima iterație se consideră valoarea curentului de magnetizare corespunzător mersului în gol:  $I_\mu^{(1)} = \text{Imag}(I_{10})$ , determinată anterior din caracteristica magnetică. Conform algoritmului din fig. 2.4 se determină tensiunea indusă  $U_c$ , pierderile în fier, componenta activă  $I_a$ . Pentru această valoare a curentului de magnetizare se verifică ec. (4.23), evaluând membrul drept al ei. Dacă eroarea depășește limita impusă se reia ciclul de calcul cu altă valoare, mai mică, a curentului de magnetizare, astfel:

$$I_\mu^{(i+1)} = I_\mu^{(i)}(1 - i\Delta_c) \quad (4.24)$$

în care  $\Delta_c$  este pasul de scădere a curentului de magnetizare. La fiecare iterație ( $i$ ) se face câte un pas “în jos” pe caracteristică până se ajunge la valoarea curentului de magnetizare  $I_\mu$

care verifică ec. (4.23). Atunci se cunosc: soluția ec. (4.23), adică valoarea curentului  $I_{\mu}$ ; tensiunea indusă corespunzătoare  $U_c$ ; pierderile în fier  $P_{fe}$ ; componenta  $I_a$ . Toate acestea corespund valorii date a alunecării.

Cunoscând aceste mărimi (corespunzătoare punctului de funcționare), din rel. (4.21) se determină unghiul  $\beta$ , iar din (4.19) rezultă curenții  $I_1$  și  $I_2'$ . În continuare se pot determina toate celelalte caracteristici energetice ale mașinii.

Pentru verificarea celor de mai sus, s-a executat o mașină de inducție trifazată, simetrică de 1.5kW, cu patru poli ( $p=2$ ), având pe stator două înfășurări suplimentare de măsură pentru determinarea tensiunii induse de câmpul magnetic rezultat.

Prima înfășurare de măsură, cu pas diametral, este așezată în creștături, peste înfășurarea trifazată a mașinii, iar a doua, tot cu pas diametral, este plasată în întrefier, pe capetele a doi dinți.

Forma de undă a tensiunii induse în bobinele de măsură se distorsionează ușor în zona alunecărilor mari ( $s \rightarrow 1$ ) din cauza prezenței armonicilor. Din acest motiv, pentru a măsura doar valoarea fundamentalei tensiunii electromotoare induse, s-a folosit un filtru activ acordat pe frecvența rețelei de alimentare (50Hz).

S-au efectuat calcule conform algoritmului din fig. 4.3 (în care s-a luat  $R_1 = 3,6\Omega$  și  $R_2' = 3\Omega$ ) pentru diferite alunecări.

Aceste rezultate de calcul și cele experimentale (în mărimi raportate la valorile corespunzătoare mersului în gol) sunt reprezentate în fig. 4.4, în care:

- curba 1 reprezintă t.e.m. calculată folosind valorile nesaturate ale reactanțelor de dispersie, determinate din calculul de proiectare ( $X_1 = 7,1 \Omega$ ;  $X_2' = 3,9 \Omega$ ).
- curba 2 reprezintă t.e.m. calculată cu valorile saturate ale reactanțelor de dispersie, estimate dintr-o probă de scurtcircuit la tensiunea nominală ( $X_1 = 4,3 \Omega$ ;  $X_2' = 3,2 \Omega$ ).

Punctele discrete, marcate cu "0", reprezintă valorile t.e.m. măsurate în bobina plasată în întrefier, iar cele marcate cu "Δ" respectiv pe cele măsurate în bobina din creștături.

Bobina de măsură plasată în creștături dă o t.e.m. mai mare decât cea plasată în întrefier, la aceeași alunecare. Faptul se explică prin aceea că înfășurarea de măsură așezată în creștături este înălțuită și de o parte a câmpului de dispersie a înfășurării statorului (câmp care devine tot mai mare, pe măsură ce alunecarea crește) și astfel în bobină se induce și o t.e.m. suplimentară corespunzătoare acestui câmp de dispersie.

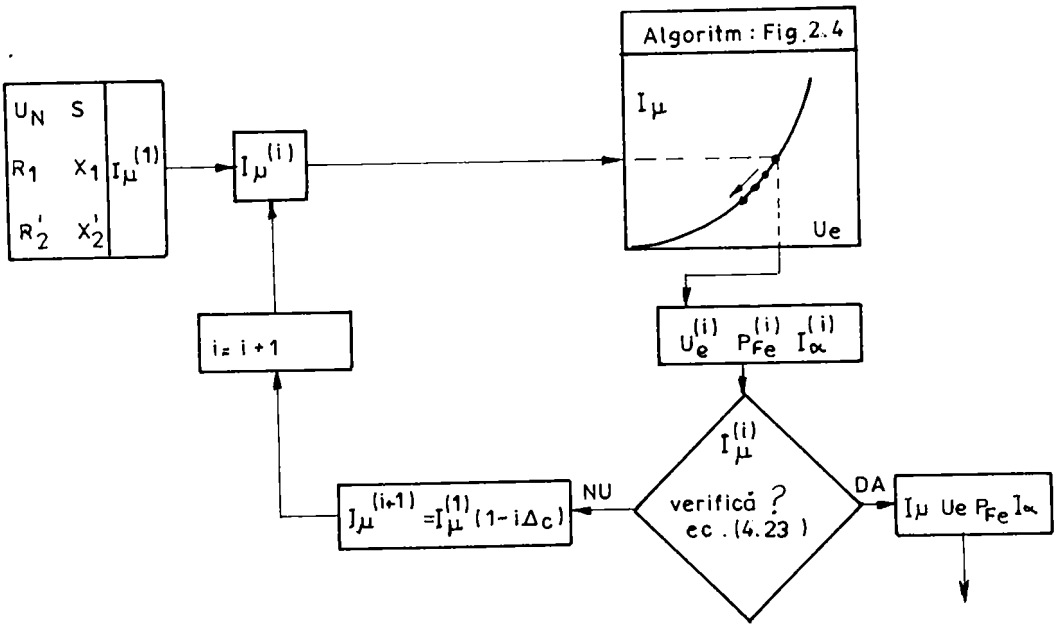


Fig. 4.3

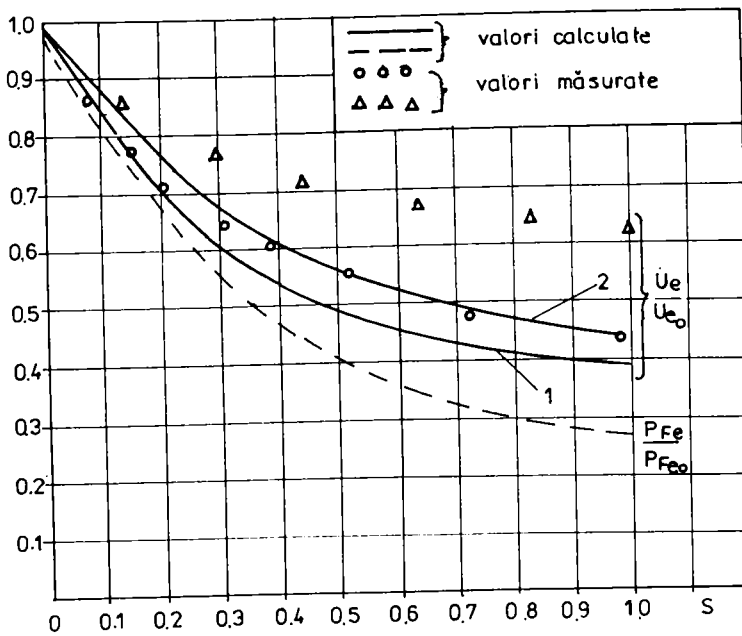


Fig. 4.4 Referitor la reacția indusului.

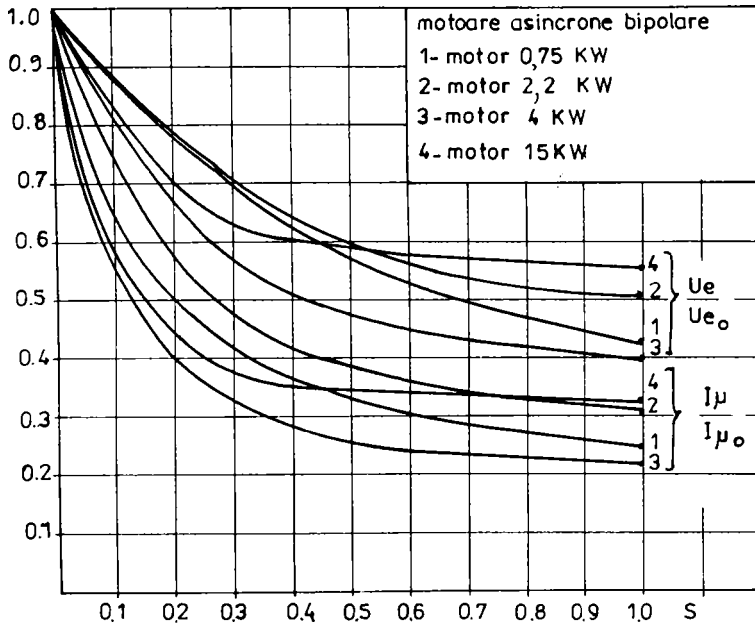


Fig. 4.5

Variația t.e.m.induse și a curentului de magnetizare, raportate la valorile corespunzătoare mersului în gol, în funcție de alunecare.

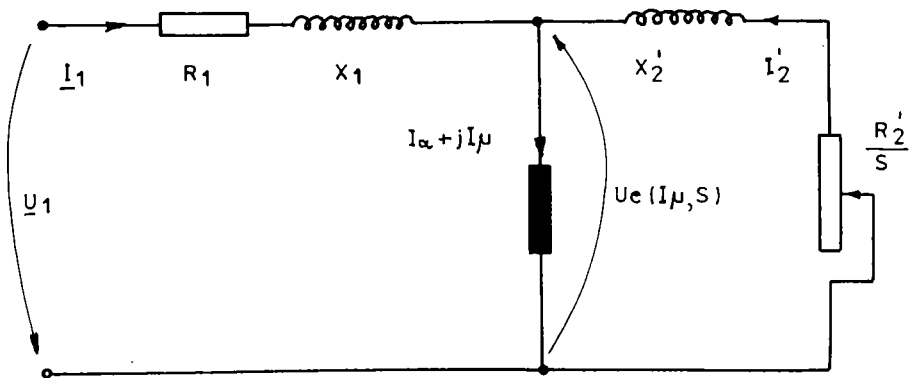


Fig. 4.6

Schema electrică echivalentă corespunzătoare modelului nelinier al mașinii de inducție.

Câmpul magnetic rezultat (corespunzător lui  $I_\mu$ ) este cel care traversează întrefierul, astfel că înfășurarea de măsură din întrefier este cea care indică valorile corecte ale t.e.m.

Comparând valorile măsurate ("0") cu cele calculate (curbele 1 și 2) se constată că, pentru valori mici ale alunecării, când reactanțele de dispersie  $X_1$  și  $X_2'$  sunt nesaturate, valorile măsurate se apropie de curba 1, iar pentru alunecări mari, când reactanțele de dispersie încep să se satureze, valorile măsurate se apropie de curba 2, fapt care este explicabil.

În urma acestor verificări experimentale se poate afirma că algoritmul propus în figura 4.3 ia în considerație în mod corect efectul reacției de indus asupra câmpului magnetic principal din mașina trifazată, sau, altfel spus, asupra punctului de funcționare de pe caracteristica magnetică.

Curba trasată cu linie întreruptă în fig. 4.4 reprezintă pierderile totale în fierul statorului, raportate la valoarea lor corespondătoare mersului în gol, calculate în funcție de alunecare.

În fig. 4.5 se prezintă rezultatele de calcul obținute pentru patru motoare bipolare. S-au reprezentat tensiunea indusă și curentul de magnetizare echivalent, în mărimi raportate, în funcție de alunecare.

Se constată reacții diferite ale indusului, de la motor la motor, ca o consecință a unor caracteristici magnetice diferite (circuite magnetice diferite) și a unor nivele diferite de saturație existente la mersul în gol. Curbe asemănătoare celor din fig. 4.5 se obțin și pentru motoarele de inducție cu mai mulți poli.

Pentru ecuația 4.16 se reprezintă în fig. 4.6 schema echivalentă corespondătoare.

Conform algoritmului din fig. 4.3 pentru o valoare dată a alunecării, se determină  $U_c$ ,  $I_\mu$ ,  $I_\alpha$  și celelalte mărimi necunoscute din circuitul electric echivalent (fig. 4.6).

În consecință se poate evita determinarea impedanței de magnetizare ( $Z_{1m} = R_{1m} + jX_{1m}$ ) din schema echivalentă cunoscută, nefiind necesară în calcule. Acest parametru concentrat  $Z_{1m}$  este înlocuit prin caracteristica magnetică, determinată prin calcul, care modelează mult mai bine comportarea mașinii.

Folosind soluția problemei de câmp se poate, deci, rezolva circuitul echivalent al mașinii de inducție trifazate, luând în considerare saturația circuitului magnetic principal și reacția indusului, pentru orice valoare a tensiunii de alimentare pe fază și pentru orice valoare a alunecării.

### 4.1.3 Analiza armonicilor de câmp

#### Introducere

Se consideră o mașină de inducție simetrică, având un întrefier constant, în care se admite o distribuție sinusoidală continuă a solenației de-a lungul pasului polar. În aceste condiții, curba de repartiție a componentei normale a inducției magnetice în întrefier  $B_{\delta}(\theta)$ , în mod obișnuit, diferă de o curbă sinusoidală. Saturația porțiunilor feromagnetice ale circuitului magnetic principal al mașinii determină distorsionarea câmpului magnetic din întrefier. Este cunoscut faptul că, dacă jugul nu este saturat, saturația dinților determină o "aplatizare" a curbei de repartiție a inducției din întrefier. Dacă nivelul de saturație a jugurilor este mai mare decât cel al dinților, se obține o formă "ascuțită" a curbei  $B_{\delta}(\theta)$ . Prin descompunere în serie Fourier a curbei  $B_{\delta}(\theta)$  se obține o fundamentală și o serie de armonici superioare. Aceste armonici sunt denumite "armonici de saturație" întrucât sunt produse direct de saturația magnetică, nefiind excitate de vreuna din armonicile spațiale superioare ale solenației.

Armonicile de saturație produc zgomote suplimentare, pierderi în fier și în înfășurări, iar unele din ele, cupluri "folositoare" [L5]. Datorită simetriei circuitului magnetic, distribuția spațială a inducției magnetice  $B_{\delta}(\theta)$  este aceeași pentru fiecare pol. În consecință seria conține numai armonici impare (de ordin  $\varepsilon=2k-1$ ;  $k=1,2,3,\dots$ ). Toate aceste armonici rotesc, împreună cu fundamentală, în același sens și cu aceeași viteză de rotație, având amplitudini maxime la mersul în gol. Ele nu sunt amortizate semnificativ de curenții rotorici de reacție, întrucât viteza lor de rotație este aproximativ egală cu cea a rotorului.

Fluxurile armonicilor de saturație induc tensiuni în înfășurările statorului, cu frecvențe care sunt multipli ai frecvenței rețelei de alimentare. Dacă mașina este trifazată, armonicile tensiunilor de ordinul trei și multiplu de trei, din cele trei faze, sunt în fază și determină curenți de circulație interioară prin înfășurări, când acestea sunt conectate în triunghi. În anumite cazuri, (când amplitudinile armonicilor de saturație sunt mari), valoarea acestor curenți devine considerabilă.

Dacă înfășurările sunt conectate în stea, nu apar astfel de curenți, întrucât circuitul lor de închidere este întrerupt între nului stelei și nului rețelei de alimentare. Celelalte armonici superioare (care nu sunt multiplu de trei), determină curenți armonici în rețeaua de alimentare dar, din cauza impedanțelor mari ale motorului și rețelei, la frecvența ridicată a armonicilor, acești curenți au valori neglijabile [C8].

Pentru determinarea armonicilor de saturație se propune mai jos o metodă de calcul, care admite următoarea ipoteză de bază: saturația circuitului magnetic principal este determinată numai de fundamentală spațială a solenației, care este astfel singura responsabilă de producerea armonicilor de saturație.

Pentru susținerea acestei ipoteze se prezintă în continuare câteva argumente:

- armonicile spațiale superioare ale solenației de magnetizare din stator produc fluxuri armonice, care rotesc cu viteze de câteva ori mai mici decât cea a fundamentalei, înlănțuind și înfășurarea rotorului (colivia); aceste unde sunt atenuate puternic de efectul curenților rotorici induși de ele, încît fluxurile armonice rezultante ( flux direct plus flux de reacție) devin neglijabile și nu modifică semnificativ valorile inducțiilor în dinți și juguri;
- componentele fluxurilor armonice din stator, care nu înlănțuie colivia rotorului, nu sunt atenuate, dar ele nu influențează saturația dinților și a jugurilor întrucît se închid prin întrefier și capetele de dinți.
- deschiderea creștăturilor influențează doar repartiția componentei normale a inducției din întrefier de-a lungul pasului dentar, fără să modifice fluxul corespunzător pasului dentar și inducția magnetică din dinți și juguri.

În literatură sunt întâlnite două categorii de lucrări care analizează distribuția spațială a inducției magnetice din întrefier:

a) Lucrări care admit ipoteza conform căreia numai fundamentală spațială a solenației este relevantă în aprecierea saturației [L5, C8, C7].

Acestea prezintă metode indirecte de calcul al formei inducției  $B_s(\theta)$ , implicând calculul tensiunilor magnetice în dinți și juguri pe diferite linii de câmp concentrice. Se obține o undă spațială  $B_s(\theta)$  care rotește cu viteză sincronă având aceeași formă în orice moment. Toate armonicile superioare obținute prin descompunerea ei în serie Fourier sunt armonici "pure" de saturație.

Metodele prezentate în aceste lucrări ridică unele probleme în privința calculului tensiunilor magnetice pe câteva porțiuni ale circuitului magnetic (cum sunt jugurile), unde distribuția spațială a inducției este doar aproximativ cunoscută.

În acest caz este necesar ca relațiile aproximative de calcul al tensiunilor magnetice să fie validate prin numeroase verificări experimentale.

b) Lucrări care nu admit ipoteza de mai sus [V2, S10, L6], determinând distribuția spațială a inducției din întrefier prin rezolvarea numerică a problemei de câmp, folosind metode de discretizare spațială (diferențe finite, elemente finite, etc.).



În [L6] unda spațială este descompusă în serie Fourier, printr-o metodă numerică, determinându-se valorile primelor armonici de saturație.

Prin analiza numerică a câmpului magnetic din întrefierul mașinii de inducție se obțin puncte ale unei curbe de distribuție a câmpului, ce are forme diferite, la momente diferite și deci un conținut de armonici variabil în timp. La momentul  $t=t_0$ , curba obținută din calcul  $B_\delta(\theta, t_0)$  conține câte o infinitate de armonici, de amplitudini  $B_{\delta, v, \epsilon}$  ( $\epsilon=1,3,5\dots$ ), pentru fiecare armonică spațială de ordinul  $v$  a solenației. Unele armonici de câmp, de același ordin, rotesc cu viteze diferite. De pildă, armonica de saturație  $B_{\delta 1,5}$  (de ordinul  $\epsilon=5$ ), produsă de fundamentală spațială a solenației ( $v=1$ ), rotește cu viteza sincronă a câmpului, în timp ce armonica de câmp  $B_{\delta 5,5}$  (de ordinul  $\epsilon=5$ ), produsă de armonica superioară a solenației de ordinul  $v=5$ , rotește cu o viteză de cinci ori mai mică decât viteza fundamentală.

Din descompunerea în serie Fourier a curbei  $B_\delta(\theta, t_0)$  se obțin amplitudinile rezultante ale armonicilor superioare de câmp, fiecare având două componente. Este necesar, ulterior, să se separe, pentru fiecare armonică de câmp în parte, componenta de "saturație" și componenta produsă de armonica spațială a solenației, de același ordin. Astfel, analiza armonicilor de saturație, pe această cale, ridică probleme privind separarea componentei de saturație.

În [L6] problema separării este soluționată prin repetarea calculului de câmp în condiții de "nesaturare" (cu curent de magnetizare redus) pentru determinarea armonicilor spațiale ale solenației, urmată de scăderea "vectorială" a acestor armonici din cele obținute la primul calcul, cu circuit magnetic saturat.

În cele ce urmează se propune o metodă de determinare prin calcul a armonicilor de saturație, care îmbină unele avantaje ale celor două categorii de metode de mai sus (a și b).

### **Metodă de calcul al armonicilor de saturație.**

În sistemul de coordonate polar, se consideră o porțiune din mașina de inducție polifazată simetrică, cuprinsă între axele a doi poli adiacenți, respectiv  $\theta=0$  și  $\theta=\pi/p$  (fig. 4.7)

Rezolvarea problemei de câmp prin metoda soluției analitice iterative (SAI), prezentată în capitolul 2, permite exprimarea componentelor inducției magnetice  $B_r(r, \theta)$  și

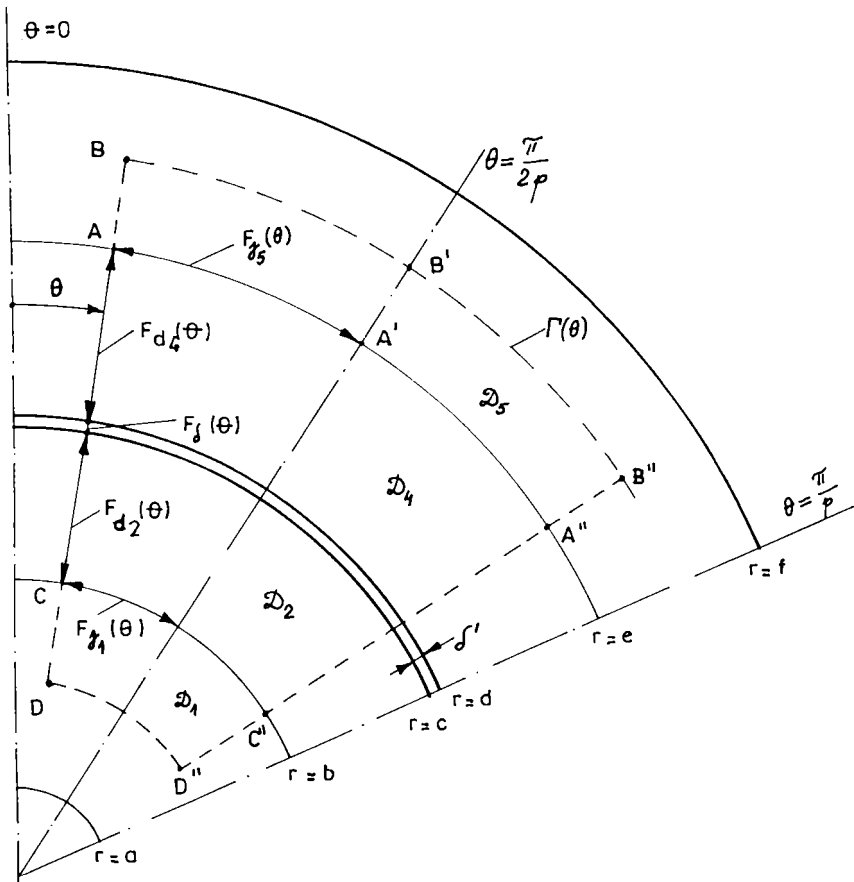


Fig. 4.7. Referitor la modul de calcul

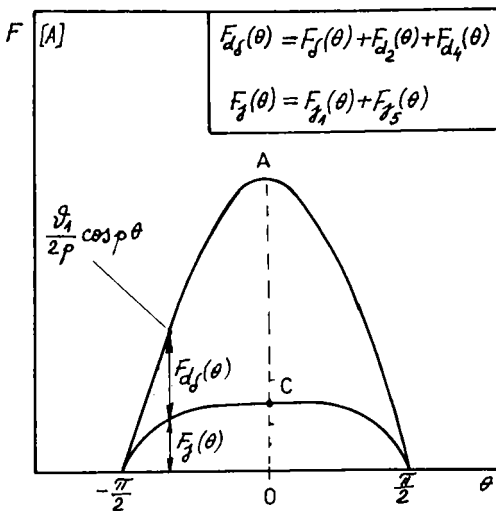


Fig. 4.8. Variația tensiunilor magnetice de-a lungul pasului polar

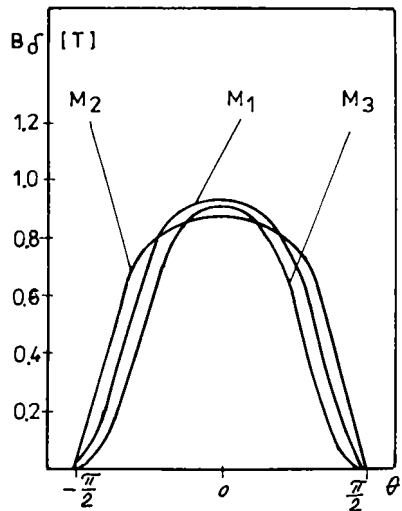


Fig. 4.9. Variații tipice ale inducției în direcție tangențială

$B_{\theta}(r,\theta)$  în cele cinci subdomenii idealizate (D1...D5) ale problemei. Pornind de la ipoteza unei distribuții continue și sinusoidale a solenației, de-a lungul pasului polar, s-au obținut distribuții sinusoidale ale componentelor inducției magnetice, în raport cu variabila  $\theta$ , în toate subdomeniile, conform relațiilor (2.60) - (2.64).

Distribuția reală a câmpului magnetic din întrefier, de-a lungul pasului polar, diferă de cea sinusoidală, obținută prin metoda SAI.

Această distribuție reală se poate determina aplicând repetat legea circuitului magnetic, sub formă integrală, pe contururi ce traversează întrefierul și urmăresc liniile de câmp magnetic principal.

Condiția impusă în acest fel permite determinarea abaterilor de la forma sinusoidală a distribuției câmpului din întrefier și, prin descompunere în serie Fourier, calculul armonicilor de saturație.

În acest scop se adoptă următoarele ipoteze:

- numai fundamentala spațială a solenației contribuie la saturarea circuitului magnetic principal, fiind singura sursă a armonicilor de saturație ale câmpului din întrefier;
- componenta tangențială a inducției magnetice din juguri are o distribuție sinusoidală, în raport cu  $\theta$ , pe orice arc de cerc de rază  $r=ct$ ;
- se neglijează componenta tangențială a inducției magnetice din întrefier;
- valoarea maximă a inducției din întrefier ( $B_{\delta\max}$ ), corespunzătoare unei solenații date  $\mathcal{G}_1$ , se consideră cunoscută în urma rezolvării problemei de câmp prin metoda SAI;
- se admit distribuții identice ale inducției, de-a lungul fiecărui pas polar, astfel încât unda câmpului este o funcție periodică.

Se exprimă distribuția sinusoidală a solenației, în raport cu variabila  $\theta$ , sub forma:

$$\mathcal{G}(p\theta) = \frac{\mathcal{G}_1}{2p} \sin p\theta \quad (4.25)$$

în care  $\mathcal{G}_1$  este amplitudinea fundamentalei spațiale a solenației rezultante a întregii mașini, iar  $p$  este numărul de perechi de poli.

Variabilei  $\theta$  i se asociază un contur  $\Gamma(\theta)$ , format din (fig. 4.7):

- segmentul de dreaptă  $\overline{DB}$ , de ecuație  $\theta=\theta_k=ct$ . ( $0\leq\theta_k\leq\pi/2p$ );
- arcul de cerc  $BB''$ , de rază  $r=ct$ . ( $e<r<f$ );
- segmentul de dreaptă  $\overline{B''D''}$ , de ecuație  $\theta=\pi/p-\theta_k$ ;
- arcul de cerc  $D''D$ , de rază  $r=ct$ . ( $a<r<b$ );

Pentru o valoare dată  $\theta = \theta_k$ , legea circuitului magnetic se exprimă, sub formă integrală, astfel:

$$\oint_{\Gamma(\theta_k)} \vec{H} d\vec{l} = \frac{g_1}{2p} \int_{-\theta_k}^{\pi - \theta_k} \sin \alpha d\alpha \quad (4.26)$$

în care  $\vec{H}$  este intensitatea câmpului magnetic în punctul curent de pe curba închisă  $\Gamma(\theta_k)$ , iar în membrul drept s-a folosit relația (4.25).

După efectuarea calculelor în membrul drept, se obține forma:

$$\oint_{\Gamma(\theta)} \vec{H} d\vec{l} = \frac{g_1}{2p} (2 \cos \theta) \quad (4.27)$$

oricare ar fi valoarea variabilei  $\theta$  în intervalul  $[0 \dots \pi/2p]$ .

Calculul integralei din membrul stâng se face cu dificultate din cauza distribuției spațiale neregulate a componentelor inducției magnetice în juguri. Ambele componente (radială și tangențială) ale inducției din juguri sunt dependente de două variabile ( $r, \theta$ ). În plus, se pune întrebarea: cum se definește porțiunea  $ABB'$  a conturului de integrare  $\Gamma(\theta)$ ?

În acest sens se fac unele observații în continuare.

Aplicând legea circuitului magnetic pe conturul  $ABB'A'A$ , inclus în întregime în subdomeniul  $D_5$  al jugului stator, alegând sensul de integrare astfel ca  $\vec{H} d\vec{l} > 0$  pe porțiunea  $AB$ , se poate scrie:

$$\oint_{ABB'A'A} \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (4.28)$$

întrucât subdomeniul  $D_5$  nu are surse.

Se descompune integrala din (4.28) în patru integrale curbilinii ținând seama de următoarele:

-pe porțiunea  $B'A'$ ,  $\vec{H} d\vec{l} = H_r(r, \theta) dr = 0$ , întrucât pe axa neutră (de ecuație  $\theta = \pi/2p$ ) inducția magnetică are numai componentă tangențială și astfel  $H_r(r, \theta) = 0$ ;

-pe porțiunea  $A'A$ , din cauza sensului de integrare,  $\vec{H} d\vec{l} < 0$ .

Cu acestea, relația (4.28) devine:

$$\int_A^B \vec{H} d\vec{l} + \int_B^{A'} \vec{H} d\vec{l} = \int_A^{A'} \vec{H} d\vec{l} \quad (4.29)$$

În consecință, pentru o valoare dată unghiului  $\theta$ , porțiunea  $ABB'$  a conturului  $\Gamma(\theta)$  poate fi înlocuită cu arcul de cerc  $AA'$ , de rază  $r = e$ , care separă subdomeniile  $D_4$  și  $D_5$ .

În mod similar se poate pune problema pentru conturul  $A''B''B'A'A''$  și la fel pentru jugul rotor.

Astfel, conturul  $\Gamma(\theta)$  devine univoc determinat de valoarea variabilei  $\theta$  și permite definirea tensiunilor magnetice în juguri.

Datorită simetriei admise, tensiunea magnetică în jugul stator  $F_{j_s}(\theta)$  și tensiunea magnetică în jugul rotor  $F_{j_r}(\theta)$ , corespunzătoare variabilei  $\theta$ , se calculează numai pe jumătate din pasul polar.

Revenind la relația (4.27) și scriind integrala curbilinie ca sumă de integrale pe porțiuni, se obține:

$$F_{j_s}(\theta) + F_{d_2}(\theta) + F_{d_4}(\theta) + F_{j_1}(\theta) + F_{j_5}(\theta) = \frac{g_l}{2p} \cos p\theta \quad (4.30)$$

în care:  $F_{j_s}(\theta)$  este tensiunea magnetică în întrefier,  $F_{d_4}(\theta)$ - tensiunea magnetică în dinții statorului,  $F_{d_2}(\theta)$ - tensiunea magnetică în dinții rotorului, corespunzătoare unghiului  $\theta$ .

Membrul drept fiind cunoscut, ec. (4.30) poate servi la determinarea inducției magnetice în întrefier, corespunzătoare punctului de coordonate  $(d, \theta_k)$ , cu condiția ca singura necunoscută din ecuație să rămână  $B_\delta(\theta_k)$ . În acest scop, tensiunile magnetice se grupează astfel:

-tensiuni magnetice care depind de valoarea locală a inducției din întrefier și pot fi exprimate în raport cu  $B_\delta(\theta)$ ; se notează cu  $F_{d_s}$  suma lor:

$$F_{d_s}(\theta) = F_{j_s}(\theta) + F_{d_2}(\theta) + F_{d_4}(\theta) \quad (4.31)$$

-tensiuni magnetice care nu pot fi exprimate în raport cu  $B_\delta(\theta)$ ; se notează suma lor cu  $F_j$ :

$$F_j(\theta) = F_{j_1}(\theta) + F_{j_5}(\theta) \quad (4.32)$$

Tensiunea magnetică în întrefier se exprimă simplu:

$$F_{j_s}(\theta) = \frac{\delta'}{\mu_o} B_\delta(\theta) \quad (4.33)$$

unde  $\delta'$  este întrefierul de calcul (relația 2.85).

Tensiunea magnetică în dinții statorului implică utilizarea curbei de magnetizare a materialului feromagnetic; pentru exprimarea analitică a ei se utilizează o secvență de calcul cunoscută. Inducția magnetică reală  $B_{d_4}$  din dintele stator, la unghiul  $\theta$ , se exprimă sub forma:

$$B_{d_1}(\theta) = \frac{\beta_1}{\xi_{11}} B_\delta(\theta) \quad (4.34)$$

în care  $\xi_{11}$  este raportul dintre lăţimea dintelui statoric şi pasul dentar statoric, iar  $\beta_1$  este raportul dintre inducţia reală şi cea aparentă din dinte. Dacă lăţimea dintelui este variabilă în direcţie radială, se recurge la o discretizare pe direcţia  $r$ , obţinându-se inducţii variabile în dinte, în raport cu  $r$ .

Corespunzător valorilor  $B_{d_1}$ , se obţin din curba de magnetizare, valorile intensităţii câmpului magnetic din dinte ( $H_{d_1}$ ).

Tensiunea magnetică se obţine, în general, prin integrare:

$$F_{d_1}(\theta) = \int_d^c H_{d_1}(B_{d_1}(\theta)) dr = f_4(B_\delta(\theta)) \quad (4.35)$$

în care  $f_4$  este o funcţie neliniară dependentă de valoarea locală a inducţiei din întrefier.

Tensiunea magnetică în dinţii rotorului se determină similar:

$$B_{d_2}(\theta) = \frac{\beta_2}{\xi_{22}} B_\delta(\theta) \quad (4.36)$$

$$F_{d_2}(\theta) = \int_b^c H_{d_2}(B_{d_2}(\theta)) dr = f_2(B_\delta(\theta)) \quad (4.37)$$

în care indicele "2" se referă la rotor, mărimile având aceeaşi semnificaţie ca mai sus.

Tensiunea magnetică în jugul statorului. Conform ipotezei admise:

$$B_{j_s}(\theta) = B_{j_{sM}} \sin p\theta \quad (4.38)$$

unde  $B_{j_{sM}}$  este valoarea maximă a componentei tangenţiale a inducţiei magnetice în jugul statorului, pe arcul de cerc de rază  $r = e$ . Tensiunea magnetică  $F_{j_s}(\theta)$  se obţine integrând produsul  $\vec{H}_{j_s} d\vec{l}$  pe arcul de cerc de rază  $r = e$ , între punctele A şi A'. Ținând seama că  $dl = e d\alpha$ , se poate scrie:

$$F_{j_s}(\theta) = \int_{p\theta}^{\pi/2} H_{j_s}(B_{j_{sM}} \sin \alpha) e d\alpha \quad (4.39)$$

Tensiunea magnetică în jugul rotorului se determină integrând câmpul pe arcul de cerc de rază  $r = b$ . Prin analogie cu relaţia (4.39) se obţine:

$$F_{j_r}(\theta) = \int_{p\theta}^{\pi/2} H_{j_r}(B_{j_{rM}} \sin \alpha) b d\alpha \quad (4.40)$$

în care  $B_{jM}$  este valoarea maximă a componentei tangențiale a inducției în jugul rotorului, pe arcul de cerc de rază  $r = b$ .

Revenind la relația (4.30) se fac următoarele observații:

-valoarea locală a inducției magnetice din întrefier  $B_{\delta}(\theta)$  este determinată direct de raporturile după care se repartizează tensiunile magnetice (în dinți, juguri și întrefier) pe conturul  $\Gamma(\theta)$ ; ținând seama de relațiile prin care au fost exprimate cele cinci componente ale tensiunii magnetomotoare, rămâne un singur astfel de raport nedeterminat și anume  $F_{\delta\delta}(\theta)/F_j(\theta)$ , cu notațiile din (4.31) și (4.32); cu alte cuvinte, deși este cunoscută suma celor doi termeni:

$$F_{\delta\delta}(\theta) + F_j(\theta) = \frac{\mathfrak{G}_1}{2p} \cos p\theta \quad (4.41)$$

raportul lor nu se cunoaște;

-întrucât tensiunile magnetice în juguri se integrează pe arce de cerc fixe, valorile lor depind numai de limitele de integrare; în consecință valoarea maximă se obține pentru  $\theta=0$  când drumul de integrare are lungimea maximă; pentru toate celelalte valori ale variabilei ( $\theta \neq 0$ ), se poate scrie:

$$F_j(\theta) < F_j(0) \quad (4.42)$$

oricare ar fi distribuția în raport cu  $\theta$  a componentei tangențiale a inducției magnetice în juguri, de unde se obține o repartitie a tensiunii magnetice în juguri ca cea din fig. 4.8; curba  $F_j(\theta)$  are maximumul în punctul C și este esențială în determinarea valorii locale a inducției din întrefier.

Ținând seama de cele de mai sus, se propune o metodă de calcul al armonicilor de saturație cuprinzând următoarele etape:

#### A. Rezolvarea problemei de câmp

Pentru o valoare dată  $\mathfrak{G}_1$  a amplitudinii fundamentale spațiale a solenației rezultante, se rezolvă problema de câmp prin metoda SAI, obținându-se expresii analitice ale componentelor radiale și tangențiale ale inducției în toate subdomeniile; din această soluție se rețin doar valoarea inducției maxime din întrefier ( $B_{\delta\max}$ ) și valorile rapoartelor  $\beta_1$  și  $\beta_2$  dintre inducțiile magnetice reale și cele aparente din dinții statorului respectiv rotorului (relația 4.34 și 4.36) ;

#### B. Determinarea tensiunilor magnetice în juguri, pentru $\theta = 0$

Se identifică valoarea locală a inducției din întrefier  $B_{\delta}(0)$  cu valoarea maximă obținută în etapa anterioară:  $B_{\delta}(0) = B_{\delta\max}$ . Din ec. (4.41) se obține:

$$F_j(0) = \frac{g_1}{2p} - F_{d_k}(0) \quad (4.43)$$

Termenul  $F_{d_k}(0)$  este determinat univoc, prin rel. (4.31),(4.33),(4.35),(4.37) de valoarea cunoscută a inducției  $B_\delta(0)$ . În consecință relația (4.43) permite determinarea tensiunii magnetice din juguri  $F_j(0)$  pe această cale, evitând utilizarea relațiilor (4.39) și (4.40). Astfel, se creează posibilitatea “etalonării” relațiilor (4.39) și (4.40) prin mărirea sau micșorarea valorilor  $B_{jSM}$  și  $B_{jIM}$  (cu păstrarea raportului inițial dintre ele obținut prin metoda SAI), până când aceste relații dau aceeași valoare a tensiunii magnetice în juguri ca și relația (4.43). Cu alte cuvinte, în această etapă se obține (cu certitudine) punctul C al curbei  $F_j(\theta)$  din fig. 4.8. Răstul curbei  $F_j(\theta)$  se calculează, punct cu punct, folosind relațiile (4.39) și (4.40), prin modificarea exclusivă a limitelor de integrare în raport cu  $\theta$ , menținând neschimbate valorile “etalonate”  $B_{jSM}$  și  $B_{jIM}$  la  $\theta = 0$ .

#### C. Determinarea inducției din întrefier, pentru $\theta \neq 0$ .

Dacă  $\theta \neq 0$ , ec. (4.41) este folosită pentru determinarea componentei  $F_{d_k}(\theta)$

$$F_{d_k}(\theta) = \frac{g_1}{2p} \cos p\theta - F_j(\theta) \quad (4.44)$$

întrucât termenul  $F_j(\theta)$  este cunoscut din etapa anterioară (B).

Utilizând și relațiile (4.31), (4.33), (4.35), (4.37), ecuația (4.44) obține forma:

$$\frac{\delta'}{\mu_0} B_\delta(\theta) + f_4(B_\delta(\theta)) + f_2(B_\delta(\theta)) = \frac{g_1}{2p} \cos p\theta - F_j(\theta) \quad (4.45)$$

Pentru  $\theta = \theta_k$ , ecuația neliniară (4.45) se rezolvă printr-o metodă numerică iterativă, în raport cu necunoscuta  $B_\delta(\theta_k)$ .

Prin rezolvarea repetată a ecuației (4.45) se construiește, punct cu punct, curba de distribuție a inducției din întrefier, de-a lungul pasului polar. Pentru a defini satisfăcător forma curbei, se recomandă considerarea unui număr minim de 50 puncte, pe un pas polar, în care se calculează valorile inducției.

#### D. Descompunerea în serie Fourier

Ultima etapă a problemei constă în analiza Fourier a funcției periodice care reprezintă distribuția câmpului din întrefier. Se alege originea sistemului de referință astfel încât funcția periodică să fie impară (de exemplu, în sistemul de coordonate rectangular, originea  $x = 0$  va corespunde cu mijlocul distanței dintre doi poli adiacenți). În acest caz,



prin descompunerea în serie Fourier se obține o serie trigonometrică de funcții “sinus”, sub forma:

$$B_{\delta}(x) \cong \sum_{\varepsilon=1}^{\infty} B_{\delta_{1,\varepsilon}} \sin\left(\varepsilon \frac{\pi}{\tau} x\right) \quad (4.46)$$

în care:  $B_{\delta_{1,\varepsilon}}$  este amplitudinea armonicilor spațiale de ordinul  $\varepsilon$  a inducției, produsă de armonica fundamentală a solenoidului ( $\nu = 1$ ), iar  $\tau$  este pasul polar.

### Rezultate de calcul și discuții

În scopul analizei distribuției câmpului de-a lungul pasului polar, se consideră, în cele ce urmează, trei cazuri tipice de circuite magnetice ale motorului de inducție trifazat simetric:

Motorul M1, având circuitul magnetic optimizat, cu următoarele date geometrice:  $a = 0.015$ ,  $b = 0.036$ ,  $c = 0.0505$ ,  $d = 0.051$ ,  $e = 0.066$ ,  $f = 0.091$ ,  $\xi_{11} = 0.54$ ,  $\xi_{22} = 0.6$ ;

Motorul M2, la care circuitul magnetic este astfel dimensionat încât dinții statorului și rotorului sunt mult mai saturați decât jugurile; față de motorul M1 se modifică următoarele date:  $b = 0.040$ ,  $e = 0.063$ ,  $\xi_{11} = 0.42$ ,  $\xi_{22} = 0.48$ ;

Motorul M3, la care jugurile sunt mai saturate decât dinții, având următoarele modificări dimensionale în raport cu M1:  $b = 0.033$ ,  $e = 0.069$ ,  $\xi_{11} = 0.6$ ,  $\xi_{22} = 0.65$ .

Unitatea de măsură pentru razele  $a, b, c, d, e, f$  este metrul.

Parcurgând cele patru etape de calcul prezentate mai sus s-a determinat forma de undă  $B_{\delta}(\theta)$  pentru fiecare din cele trei cazuri (M1, M2, M3). Curbele obținute din calcul sunt prezentate în fig. 4.9 și reprezintă situații tipice cunoscute, privind repartitia câmpului de-a lungul pasului polar: distribuția “normală” (M1), distribuția “aplatizată” (M2), distribuția “ascuțită” (M3). Urmărind cele trei curbe, se poate constata că saturarea dinților și saturarea jugurilor au efecte contrare în distorsionarea curbei câmpului. În consecință, conținutul de armonici de saturație este dependent, în mare măsură, de raportul nivelelor de saturație dinți/juguri. Dacă nivelele de saturație sunt echilibrate, chiar și la inducții mari în întrefier, conținutul de armonici de saturație poate fi scăzut.

Curbele de distribuție spațială a inducției, de forma celor din fig. 4.9, sunt descompuse numeric în serie Fourier pentru determinarea amplitudinilor armonicilor. În acest scop s-a folosit algoritmul numeric prezentat în [M15].

Pentru analiza armonicilor de saturație se definesc următorii factori de saturație:

- factorul de saturație a dinților:

$$k_{sd} = \frac{F_{\delta}(0) + F_{d_4}(0) + F_{d_2}(0)}{F_{\delta}(0)} \quad (4.47)$$

- factorul de saturație a jugurilor:

$$k_{sj} = \frac{F_{\delta}(0) + F_{j_1}(0) + F_{j_2}(0)}{F_{\delta}(0)} \quad (4.48)$$

- factorul total de saturație:

$$k_{ST} = \frac{F_{\delta}(0) + F_{j_5}(0) + F_{j_1}(0) + F_{d_4}(0) + F_{d_2}(0)}{F_{\delta}(0)} \quad (4.49)$$

Considerând cele trei cazuri tipice de mai sus, s-au calculat armonicile de saturație în funcție de factorul total de saturație prin modificarea amplitudinii solenției ( $\mathcal{G}_1$ ). Rezultatele de calcul sunt prezentate în figurile 4.10, 4.11, 4.12, care se referă respectiv la cazurile M1, M2, M3.

În fig. 4.10 a) se reprezintă valorile amplitudinilor armonicilor de câmp, de ordin  $\varepsilon = 3,5,7,9$ , raportate la valoarea fundamentalei câmpului ( $B_{\delta 1,1}$ ), în funcție de factorul total de saturație a circuitului magnetic. Chiar și la nivele înalte de saturație ( $k_{ST} \cong 3$ ), amplitudinile armonicilor superioare de saturație se mențin la valori relativ reduse. Toate celelalte armonici superioare ( $\varepsilon > 9$ ) au valori mai mici de 1% și nu sunt reprezentate în figură.

Pentru  $k_{ST} = 2,5$ , de pildă, din fig. 4.10a) se obțin următoarele valori raportate:  $B_{\delta 1,3}/B_{\delta 1,1} = 0,031$ ;  $B_{\delta 1,5}/B_{\delta 1,1} = -0,078$ ;  $B_{\delta 1,7}/B_{\delta 1,1} = -0,038$ ;  $B_{\delta 1,9}/B_{\delta 1,1} = 0,005$ . Cu acestea, neglijând armonicile de ordin  $\varepsilon > 9$ , se poate scrie o expresie analitică aproximativă a distribuției spațiale a inducției din întrefier (folosind relația 4.46):

$$B_{\delta}(x) \cong B_{\delta 1,1} \left( \sin \frac{\pi}{\tau} x + 0,031 \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x - 0,078 \sin 5 \frac{\pi}{\tau} x - 0,038 \sin 7 \frac{\pi}{\tau} x + 0,005 \sin 9 \frac{\pi}{\tau} x \right) \quad (4.50)$$

Se poate constata că armonica de ordinul trei nu este întotdeauna cea mai mare, în curba câmpului distorsionată de saturație.

În fig.4.10b) se prezintă factorii parțiali de saturație  $k_{sj}$  și  $k_{sd}$  și coeficientul de aplatizare a curbei câmpului (definit prin raportul  $B_{\delta \max}/B_{\delta 1,1}$ ), în funcție de factorul total de

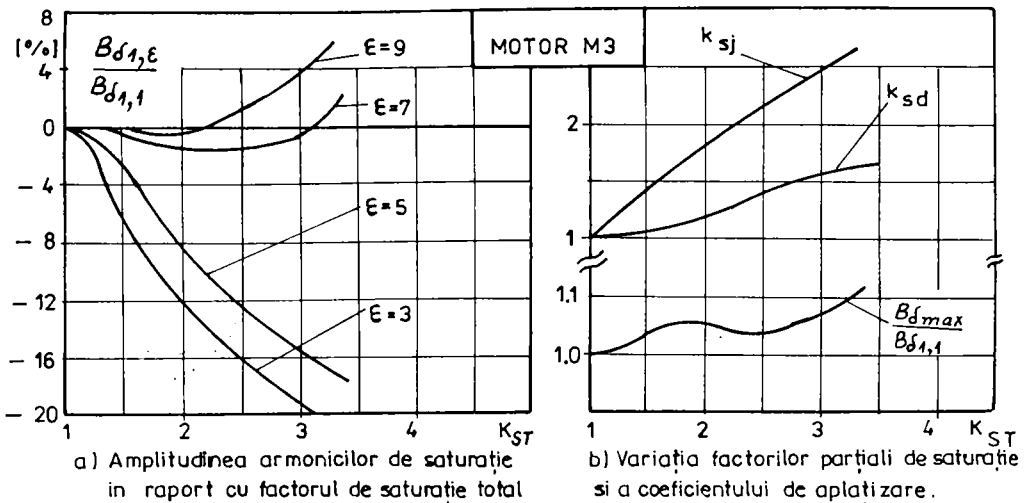
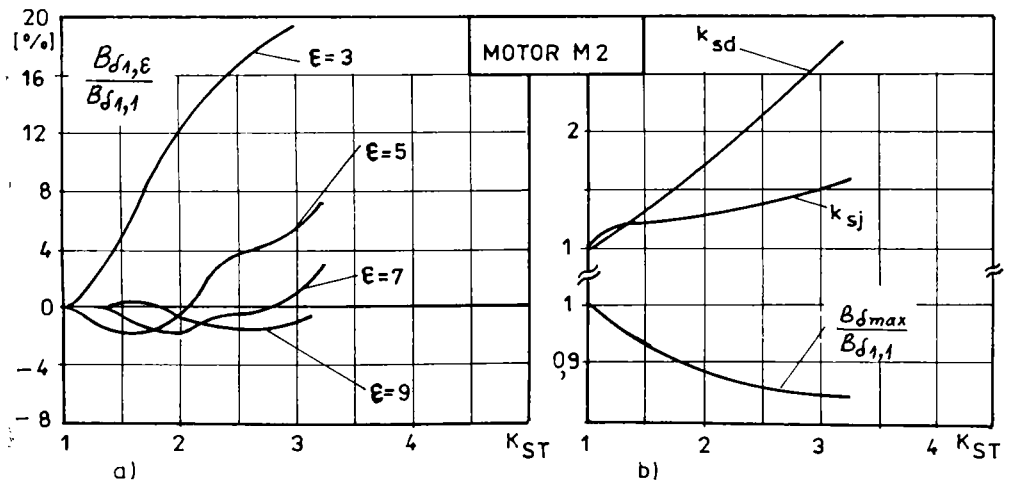
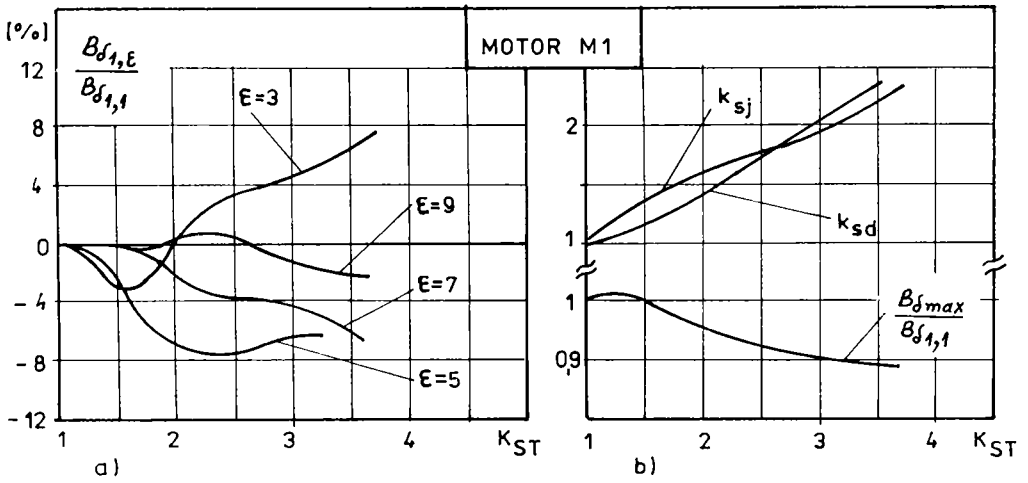


Fig. 4.12. M3 - Motor cu juguri saturate

saturație. Echilibrul dintre saturația dinților și cea a jugurilor se reflectă prin valorile aproximativ egale ale factorilor de saturație  $k_{sj}$  și  $k_{sd}$ , la orice nivel de saturație total, dat de  $k_{ST}$ .

De regulă, forma "aplatizată" a curbei câmpului se asociază cu valori  $B_{\delta_{max}}/B_{\delta_{1,1}} < 1$ , iar forma "ascuțită", cu valori  $B_{\delta_{max}}/B_{\delta_{1,1}} > 1$ ; în fig.4.10b) se constată aplatizări relativ reduse, pentru  $k_{ST} > 1,5$ , iar pentru  $k_{ST} < 1,5$ , forma este chiar ușor ascuțită.

În fig. 4.11 și 4.12, mărimile au aceeași semnificație ca în fig. 4.10. Conform fig. 4.11, dacă dinții sunt saturați puternic ( $k_{sd} \gg k_{sj}$ ), aplatizarea curbei câmpului este pronunțată, iar armonica de ordin  $\varepsilon = 3$  are valori pozitive mari. Dacă jugurile sunt saturate ( $k_{sj} \gg k_{sd}$ ), forma curbei câmpului este ascuțită, iar armonicile de ordine  $\varepsilon = 3$  și  $\varepsilon = 5$  au amplitudini relativ mari, de semne negative (fig. 4.12).

De remarcat este faptul că o mașină saturată nu are, obligatoriu, un conținut ridicat de armonici de saturație; doar dacă factorii  $k_{sd}$  și  $k_{sj}$  au valori depărtate una de alta, armonicile de saturație obțin amplitudini relativ mari (între 10 ... 20%).

În consecință, printr-o proiectare corespunzătoare a circuitului magnetic al mașinii de inducție, se pot accepta nivele ridicate de saturație, fără implicarea unui conținut ridicat de armonici de saturație în câmpul magnetic din întrefier.

Metoda de calcul al armonicilor de saturație, prezentată mai sus, poate fi aplicată și la mersul în sarcină întrucât metoda analitică iterativă (SAI) de rezolvare a problemei de câmp ia în considerare efectul de reacție a indusului, prin care se reduce nivelul de saturație a circuitului magnetic principal.

Posibilitatea determinării prin calcul a amplitudinilor armonicilor de saturație permite aprecierea cantitativă a unor efecte suplimentare introduse de acestea, precum și identificarea unor căi de eliminare a lor când devin supărătoare.

### **Observație**

În calculul armonicilor de saturație, prezentat mai sus, s-au neglijat deschiderile de creștătură de pe cele două armături ale mașinii. Acestea pot fi luate în considerație prin înlocuirea întrefierului real cu un întrefier echivalent variabil, sau prin considerarea unei permeabilități variabile a întrefierului de-a lungul pasului de creștătură.

În [V4] se analizează problema determinării unei permeanțe echivalente variabile a întrefierului, care permite tratarea analitică a influenței deschiderii creștăturilor asupra

distribuției câmpului din întrefier. Efectul deschiderilor de creștătură, obținut pe această cale, se aplică asupra unei principale a câmpului  $B_{\delta}(\theta)$ , sau  $B_{\delta}(x)$  din relația (4.46). De pildă, utilizând partea variabilă a permeanței echivalente a întrefierului, pentru cazul considerării creștăturilor numai pe stator, se obține unda “zimțată”:

$$B'_{\delta}(x) = (1 + \lambda_1 \cos \frac{2\pi}{\tau_c} x) B_{\delta}(x) \quad (4.51)$$

în care  $\lambda_1$  este coeficientul permeanței echivalente variabile a întrefierului [V4],  $\tau_c$  este pasul de creștătură statorică, iar funcția  $B_{\delta}(x)$  este cea din relația (4.46). Coeficientul  $\lambda_1$  se obține în [V4] prin descompunerea în serie Fourier a unor funcții analitice care reprezintă distribuții ale inducției din întrefier (pe un pas dentar) propuse de diferiți autori.

În fine, forma reală a distribuției câmpului din întrefier, de-a lungul pasului polar, se obține dacă se iau în considerație și armonicile de câmp induse de armonicile superioare de spațiu ale solenației. Aceste armonicile de câmp rotesc cu aceeași viteză ca și undele de solenație corespunzătoare care le-au excitat. Vitezele lor de rotație sunt submultipli ai vitezei de rotație a fundamentalei câmpului. Efectele acestor armonici pot fi suprapuse peste unda principală  $B_{\delta}(x)$ , sau peste unda “zimțată”  $B'_{\delta}(x)$ .

Principiul superpoziției poate fi aplicat întrucât armonicile de câmp, produse de armonicile superioare de spațiu ale solenației, nu contribuie la saturarea circuitului magnetic principal, conform argumentelor menționate mai sus.

Prin suprapunerea efectelor se obține o undă de spațiu rezultantă  $B''_{\delta}(x,t)$  ale cărei distorsiuni locale sunt variabile în timp:

$$B''_{\delta}(x,t) = B'_{\delta}(x) + \sum_{v=1} B_{\delta_{v,1}} \sin(v \frac{\pi}{\tau} x \pm \omega t) \quad (4.52)$$

unde  $B'_{\delta}(x)$  este de forma (4.51), iar  $B_{\delta_{v,1}}$  este amplitudinea primei armonici de câmp, produsă de armonica de spațiu de ordinul  $v$  a solenației.

Se poate obține astfel o distribuție a inducției din întrefier de-a lungul pasului polar, apropiată de cea reală.

## 4.2. CAZUL MAȘINII DE INDUCȚIE CU CÂMP MAGNETIC ELIPTIC

O mașină electrică polifazăată, alimentată de la o rețea monofazăată de tensiune sinusoidală, funcționează, în regim de motor, cu câmp magnetic învârtitor eliptic. Studiul unor astfel de mașini a început odată cu inventarea motorului de inducție trifazăat (cu câmp învârtitor circular). Astfel, conform [L4], în anul 1887, profesorul american ELIHU THOMSON face primele încercări asupra motorului de inducție monofazăat, iar savantul iugoslav NICOLAS TESLA obține o serie de brevete asupra motorului de inducție printre care și cel bifazăat.

În anul 1890 MAURICE LEBLANC a prezentat, pentru prima dată, posibilitatea teoretică de descompunere a unui câmp alternativ în două câmpuri învârtitoare (teorema lui LEBLANC) și a demonstrat teoretic posibilitatea alimentării în curent alternativ (monofazăat) a unui motor de inducție de construcție polifazăată, cu ajutorul unui dispozitiv special de demarare.

În 1892, E. THOMSON prezintă ideea utilizării condensatorului pentru pornirea motoarelor alimentate monofazăat.

În anul 1894-1895, M. BLONDEL publică prima teorie riguroasă asupra câmpului învârtitor. Aici apare expusă, pentru prima dată, teoria motorului de inducție monofazăat, bazată pe considerarea a două fluxuri învârtitoare în sesuri contrare. În anul 1899 M. POTIER publică o metodă de calcul al motoarelor monofázate, urmată în 1900 de alta a lui M. BLONDEL. În acești ani, STEINMETZ brevetează câteva variante de motoare de inducție cu condensator, În anul 1906, M.BETHENOD stabilește diagrama fazorială riguroasă a motorului monofázat iar în 1911 M. GUILBERT construiește diagrama cercului pentru acest motor.

De-a lungul anilor au rămas în atenția cercetătorilor motoarele în construcție monofázată și bifázată ca prezentând interes practic.

Pentru analiza lor s-au impus până în prezent trei teorii, care au devenit clasice:

- teoria câmpurilor magnetice învârtitoare [N11,V9,V7,M9];
- teoria componentelor simetrice [B4 ,N10 ,M14 ,S8 , U1, D6, T3, P6, K5, F2, A2, M10];
- teoria câmpului transversal [W1, K8, P6, V7, G5].

Primele două teorii au la bază metoda superpoziției, apelând la schimbări de variabile de natură matematică.

Metoda componentelor simetrice permite numeroase dezvoltări și prelucrări în formă analitică, motiv pentru care se întâlnește foarte des în literatură. Se trece însă foarte ușor peste faptul că ea nu poate fi aplicată în cazul circuitelor neliniare (cum este cazul mașinilor electrice), fiind o metodă de superpoziție.

Solicitările magnetice foarte intense la care sunt supuse mașinile electrice în prezent fac din acestea medii pronunțat neliniare, astfel încât aplicarea primelor două teorii poate conduce la erori inacceptabile.

Teoria câmpului transversal operează cu mărimi reale, de fază (curenți, tensiuni, fluxuri, inductivități, etc.) astfel încât este indicat să se folosească această teorie, dacă trebuie luată în considerație și saturația magnetică (neliniaritatea mediului magnetic).

Mașinile monofazate și bifazate care se vor analiza în continuare au pe stator o înfășurare, respectiv două (în cuadratură electrică), iar în rotor o colivie în scurtcircuit. Aceste construcții simple de mașini reale permit particularizarea ecuațiilor scrise pentru "mașina generalizată" și cunoscute în cadrul teoriei unitare a mașinilor electrice, astfel încât se obțin, în final, ecuații relativ simple. Atunci când este posibil, se recomandă folosirea acestor ecuații ale teoriei unitare a mașinilor electrice, cunoscute și acceptate în general.

În analizele ce urmează se admit următoarele ipoteze generale:

- mașinile prezintă o simetrie polară;
- întrefierul echivalent este constant, astfel încât modelul nu are creștături nici pe stator nici pe rotor;
- înfășurările mașinii sunt reprezentate prin circuite electrice cu parametrii concentrați (rezistențe, reactanțe proprii și mutuale);
- înfășurările sunt distribuite sinusoidal pe periferia statorului și pe cea a rotorului (se neglijează armonicile superioare de spațiu ale solenațiilor, cu excepția celor din reactanțele de dispersie);
- inductivitățile sunt definite în cazul absenței pierderilor în fier;
- se consideră regimul staționar și sinusoidal.

În privința saturației magnetice, problema este complicată și discutabilă. În [J1] se enunță un "principiu al separației" pentru a face posibilă efectuarea operațiilor matematice de derivare a fluxurilor  $d(Li)/dt$ , adică, variația inductivităților  $L$  cu poziția rotorului este separată de variația lui " $L$ " cu " $i$ " (neliniaritatea mediului).

Pentru efectuarea acestor operații matematice, în vederea deducerii ecuațiilor de tensiuni, este necesară de asemenea neglijarea "temporară" a neliniarității mediului

(menținerea constantă a lui “L” în raport cu “i”) ceea ce nu este același lucru cu neglijarea totală a neliniarității.

În acest fel, după deducerea ecuațiilor de tensiuni din teoria celor două axe, se poate lua în considerare saturația circuitului magnetic principal (neliniaritatea lui) presupunând inductivitățile constante doar “temporar” (pe parcursul unei iterații de calcul), modificându-și apoi valoarea, în funcție de curent, la fiecare nouă iterație a unui proces de calcul.

#### 4.2.1. Ecuațiile de tensiuni și modelul de circuit electric

În ipotezele de mai sus se consideră modelul de “mașină electrică generalizată” din fig. 4.13, cu axele fixe față de stator, pentru care se poate scrie următoarea ecuație matriceală simplă [M7,B6,K4,J1] :

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A + pL_A & 0 & 0 & pM_A \\ 0 & R_B + pL_B & pM_B & 0 \\ \omega_r M_A & pM_B & R_b + pL_b & \omega_r L_a \\ pM_A & -\omega_r M_B & -\omega_r L_b & R_a + pL_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_b \\ i_a \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

în care:

- indicii A și B se referă la fazele statorului, iar a și b la fazele rotorului;
- cu R s-au notat rezistențele electrice ale fazelor, cu L- inductivitățile proprii totale ale fazelor, iar cu M-inductivitățile maxime de cuplaj între o înfășurare din stator și alta din rotor, de pe aceeași axă;
- cu  $\omega_r$  s-a notat viteza unghiulară a rotorului (în termeni electrici) iar p este operatorul de derivare (d/dt).

Înlocuirea rotorului real, având colivie în scurtcircuit, cu un altul echivalent, având înfășurări numai după axele ortogonale d și q, este o problemă discutabilă și nu va fi abordată aici. În [D8] se stabilește un criteriu general de echivalență și se prezintă condițiile în care o mașină electrică dată poate fi echivalată energetic cu alta, pentru care ecuațiile au o formă mai simplă. Generalizarea teoriei celor două axe, prezentată în [D8] a permis stabilirea limitelor de aplicare a ei.

Pentru mașina bifazată, analizată în continuare, s-au ales ecuațiile (4.53), care definesc un model de circuit al mașinii, urmând a pune în evidență, în principal, posibilitatea cuplării acestuia cu modelul de câmp propus mai sus. Aplicația aceasta se face, în cele ce urmează, pe sistemul de ecuații (4.53) luat ca exemplu pentru modelul de circuit.

În regim sinusoidal ( $p \rightarrow j\omega$ ) se folosesc următoarele notații:



$$\begin{aligned} pL_A &= jX_A; \quad pL_a = jX_a; \quad pM_a = jX_{Aa}; \quad \omega_r = \omega(1-s) \\ pL_B &= jX_B; \quad pL_b = jX_b; \quad pM_b = jX_{Bb} \end{aligned} \quad (4.54)$$

în care:  $X_A, X_B, X_a, X_b$  sunt reactanțe proprii totale,  $X_{Aa}$  și  $X_{Bb}$  sunt reactanțe mutuale, iar  $s$  este alunecarea.

Cu acestea, din (4.53) se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= (R_A + jX_A)\underline{I}_A + jX_{Aa}\underline{I}_a \\ \underline{U}_B &= (R_B + jX_B)\underline{I}_B + jX_{Bb}\underline{I}_b \\ 0 &= (1-s)X_{Aa}\underline{I}_A + jX_{Bb}\underline{I}_B + (R_b + jX_b)\underline{I}_b + (1-s)X_a\underline{I}_a \\ 0 &= jX_{Aa}\underline{I}_A - (1-s)X_{Bb}\underline{I}_B - (1-s)X_b\underline{I}_b + (R_a + jX_a)\underline{I}_a \end{aligned} \quad (4.55)$$

În continuare se exprimă reactanțele proprii totale în funcție de reactanțele de dispersie ( $X_{\sigma A}, X_{\sigma B}, X_{\sigma a}, X_{\sigma b}$ ) și de reactanțele proprii principale ( $X_{AA}, X_{BB}, X_{aa}, X_{bb}$ ) astfel [D3,G6]:

$$\begin{aligned} X_A &= X_{\sigma A} + X_{AA} = X_{\sigma A} + k_A X_{Aa} \\ X_B &= X_{\sigma B} + X_{BB} = X_{\sigma B} + k_B X_{Bb} \\ X_a &= X_{\sigma a} + X_{aa} = X_{\sigma a} + \frac{1}{k_A} X_{Aa} \\ X_b &= X_{\sigma b} + X_{bb} = X_{\sigma b} + \frac{1}{k_B} X_{Bb} \end{aligned} \quad (4.56)$$

în care:

$$k_A = \frac{W_A \cdot k_{wA}}{W_a \cdot k_{wa}}, \quad k_B = \frac{W_B \cdot k_{wB}}{W_b \cdot k_{wb}} \quad (4.57)$$

unde s-a notat cu  $W$  numărul de spire pe faza respectivă, iar cu  $k_w$ - factorul de bobinaj al înfășurării reale considerate.

Înlocuind (4.56) în (4.55) și grupând corespunzător termenii se obține:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A + jk_A X_{Aa} \left( \underline{I}_A + \frac{1}{k_A} \underline{I}_a \right) \\ \underline{U}_B &= \underline{Z}_B \underline{I}_B + jk_B X_{Bb} \left( \underline{I}_B + \frac{1}{k_B} \underline{I}_b \right) \\ 0 &= (1-s)X_{Aa} \left( \underline{I}_A + \frac{1}{k_A} \underline{I}_a \right) + jX_{Bb}\underline{I}_B + \underline{Z}_b \underline{I}_b + jX_{Bb} \frac{1}{k_B} \underline{I}_b + (1-s)X_{\sigma a} \underline{I}_a \\ 0 &= -(1-s)X_{Bb} \left( \underline{I}_B + \frac{1}{k_B} \underline{I}_b \right) + jX_{Aa}\underline{I}_A + \underline{Z}_a \underline{I}_a + jX_{Aa} \frac{1}{k_A} \underline{I}_a - (1-s)X_{\sigma b} \underline{I}_b \end{aligned} \quad (4.58)$$

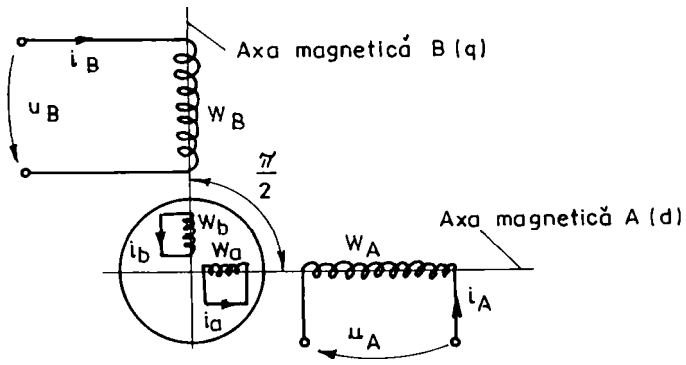


Fig. 4.13

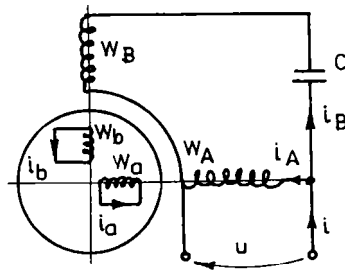


Fig. 4.14

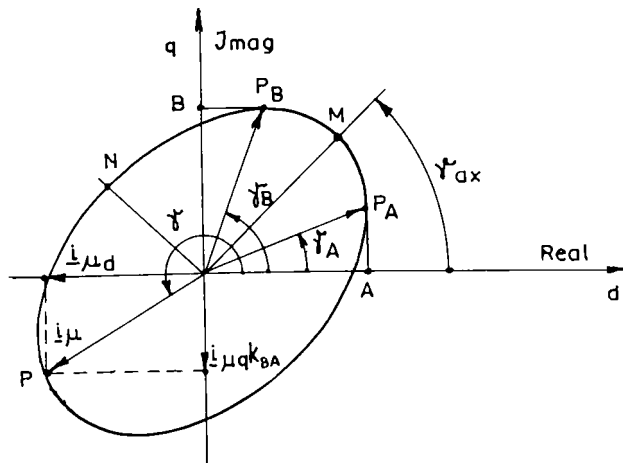


Fig. 4.15

în care s-au folosit notațiile:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_A &= R_A + jX_{\sigma A} \quad , \quad \underline{Z}_a = R_a + jX_{\sigma a} \\ \underline{Z}_B &= R_B + jX_{\sigma B} \quad , \quad \underline{Z}_b = R_b + jX_{\sigma b}\end{aligned}\quad (4.59)$$

În continuare mărimile rotorice se raportează la înfășurarea statorului de pe aceeași axă, astfel:

$$\begin{aligned}\underline{I}'_a &= \frac{1}{k_A} \underline{I}_a \quad , \quad R'_a = k_A^2 R_a \quad , \quad \underline{Z}'_a = k_A^2 \underline{Z}_a \\ \underline{I}'_b &= \frac{1}{k_B} \underline{I}_b \quad , \quad R'_b = k_B^2 R_b \quad , \quad \underline{Z}'_b = k_B^2 \underline{Z}_b \\ X_{mA} &= k_A X_{Aa} \quad , \quad X_{mB} = k_B X_{Bb} \quad , \quad X'_{\sigma a} = k_A^2 X_{\sigma a} \quad , \quad X'_{\sigma b} = k_B^2 X_{\sigma b}\end{aligned}\quad (4.60)$$

în care  $X_{mA}$  și  $X_{mB}$  reprezintă reactanțele de magnetizare corespunzătoare câmpurilor magnetice principale ale celor două axe ortogonale. Folosind (4.60), sistemul de ecuații (4.58) obține forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A + jX_{mA} (\underline{I}_A + \underline{I}'_a) \\ \underline{U}_B &= \underline{Z}_B \underline{I}_B + jX_{mB} (\underline{I}_B + \underline{I}'_b)\end{aligned}\quad (4.61)$$

$$0 = +(1-s) \frac{1}{k_A} X_{mA} (\underline{I}_A + \underline{I}'_a) + j \frac{1}{k_B} X_{mB} (\underline{I}_B + \underline{I}'_b) + \frac{1}{k_B} \underline{Z}'_b \underline{I}'_b + (1-s) \frac{1}{k_A} X'_{\sigma a} \underline{I}'_a$$

$$0 = -(1-s) \frac{1}{k_B} X_{mB} (\underline{I}_B + \underline{I}'_b) + j \frac{1}{k_A} X_{mA} (\underline{I}_A + \underline{I}'_a) + \frac{1}{k_A} \underline{Z}'_a \underline{I}'_a - (1-s) \frac{1}{k_B} X'_{\sigma b} \underline{I}'_b$$

Se pot introduce acum tensiunile electromotoare induse  $\underline{U}_{eA}$  și  $\underline{U}_{eB}$ , corespunzătoare celor două axe, sub forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{eA} &= -jX_{mA} (\underline{I}_A + \underline{I}'_a) \\ \underline{U}_{eB} &= -jX_{mB} (\underline{I}_B + \underline{I}'_b)\end{aligned}\quad (4.62)$$

Folosind coeficientul de raportare:

$$k_{BA} = \frac{k_B}{k_A} = \frac{W_B k_{WB}}{W_A k_{WA}}\quad (4.63)$$

precum și tensiunile induse din (4.62), sistemul de ecuații (4.61) se mai poate scrie și astfel:

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A \underline{I}_A - \underline{U}e_A$$

$$\underline{U}_B = \underline{Z}_B \underline{I}_B - \underline{U}e_B$$

$$0 = j(1-s)k_{BA} \underline{U}e_A - \underline{U}e_B + \underline{Z}'_b \underline{I}'_b + (1-s)k_{BA} X'_{ga} \underline{I}'_a$$

$$0 = -j(1-s)\underline{U}e_B - k_{BA} \underline{U}e_A + k_{BA} \underline{Z}'_a \underline{I}'_a - (1-s)X'_{gb} \underline{I}'_b \quad (4.64)$$

Sistemul de ecuații (4.64) sau (4.61) caracterizează modelul de mașină electrică bifazată din fig. 4.13.

În cazul mașinii bifazate cu condensator, alimentată monofazată (fig. 4.14), sistemului (4.61) sau (4.64) i se mai adaugă următoarele ecuații simple de circuit:

$$\underline{I} = \underline{I}_A + \underline{I}_B$$

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + \underline{Z}_C \underline{I}_B \quad (4.65)$$

în care  $\underline{Z}_C = -jX_C$  este impedența condensatorului, iar  $\underline{U}_B$  este tensiunea la bornele fazei B.

#### 4.2.2. Modelul cu vectori spațiali

În cazul mașinii de inducție trifazate simetrice, sursa câmpului magnetic este reprezentată de o solenație rezultantă distribuită sinusoidal în spațiu având amplitudinea constantă (dată de relația 2.37) și învârtitoare în spațiu cu viteza de rotație constantă.

În cazul de față, al mașinii de inducție bifazate nesimetrice, sursa câmpului este solenația de magnetizare rezultantă, obținută prin însumarea celor două solenații pulsatorii de pe cele două axe ortogonale d, q, care coincide cu axele A, respectiv B, de simetrie ale înfășurărilor reale de pe stator (fig. 4.13). Deoarece se consideră și în continuare numai distribuții continue și sinusoidale ale înfășurărilor se poate aplica aici teoria vectorilor spațiali [K6,K7,K8].

Conform [K7] distribuția spațială sinusoidală a solenației rezultante poate fi reprezentată de un vector spațial  $\underline{g}(t)$ , care are direcția înspre valoarea maximă a solenației și modulul egal cu această valoare maximă.

Deoarece valoarea maximă a distribuției periferice a solenației și a curentului diferă doar printr-un factor de proporționalitate (numărul de spire), inclusiv distribuția de curent poate fi reprezentată, la un moment dat, de un vector spațial de curent  $\underline{i}(t)$  în direcția vectorului spațial al solenației.

În cazul fluxului magnetic principal, fazorul spațial  $\underline{\phi}(t)$  sugerează poziția

( direcția ) fluxului rezultant din întrefier.

Caracterul spațial al acestor vectori rezultanți, în general învârtitori permite proiecția lor (în orice moment) pe cele două axe (d,q) fixe față de stator. Se obțin astfel două componente, fixe în spațiu și variabile în timp, care dau prin însumare, în orice moment, vectorul spațial rezultant. Este clar că cele două componente pot fi privite și ele ca vectori spațiali, având însă o poziție particulară (fixă) în spațiu precizată în continuare de indicii: d- pentru componenta fixă după axa d și respectiv q pentru componenta fixă după axa q.

Astfel, pentru motorul bifazat, având înfășurările statorice în cuadratură, se consideră pe axa d(A) vectorul spațial component  $\underline{\mathcal{G}}_d(t)$  al solenației de magnetizare și vectorul spațial component  $\underline{i}_{\mu d}(t)$  al curentului de magnetizare și, corespunzător, pe axa q(B), vectorii spațiali componenți  $\underline{\mathcal{G}}_q(t)$  și  $\underline{i}_{\mu q}(t)$ .

Înfășurările rotorului se consideră deschise (nu există reacție de indus), încât curenții stabiliți prin înfășurările statorului au numai componentă de magnetizare (se neglijează aici pierderile active la mersul în gol: în fier și în înfășurările statorului ).

Se consideră un plan complex perpendicular pe axul motorului având axa reală suprapusă peste axa d(A), iar cea imaginară peste axa q(B). Astfel [K8], vectorii spațiali fixi de mai sus obțin expresiile:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}_d(t) &= \mathcal{G}_d(t) \cdot e^{j0} \quad , \quad \underline{i}_{\mu d}(t) = i_{\mu d}(t) \cdot e^{j0} \\ \underline{\mathcal{G}}_q(t) &= \mathcal{G}_q(t) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \underline{i}_{\mu q}(t) = i_{\mu q}(t) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

oricare ar fi forma de variație în timp a curenților  $\underline{i}_{\mu d}(t)$  și  $\underline{i}_{\mu q}(t)$ .

Din cauza neliniarității proprietăților materialului feromagnetic, în realitate, forma de variație a celor doi curenți nu este strict sinusoidală. În cele ce urmează, se vor considera numai armonicile fundamentale ale variațiilor în timp, astfel:

$$i_{\mu d}(t) = \sqrt{2}I_{\mu d} \sin \omega t \quad , \quad i_{\mu q}(t) = \sqrt{2}I_{\mu q} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.67)$$

Vectorul spațial al solenației de magnetizare rezultante  $\underline{\mathcal{G}}(t)$  se obține prin însumarea celor două solenații componente:

$$\underline{\mathcal{G}}(t) = \underline{\mathcal{G}}_d(t) + \underline{\mathcal{G}}_q(t) \quad (4.68)$$

Împărțind ultima relație cu numărul de spire  $W_A$  al înfășurării de fază A, se obține vectorul spațial al curentului de magnetizare  $\underline{i}_{\mu}(t)$  corespunzător câmpului magnetic rezultant din întrefier (raportat la înfășurarea A):

$$\underline{i}_{\mu}(t) = \underline{i}_{\mu d}(t) + k_{BA} \underline{i}_{\mu q}(t) \quad (4.69)$$

în care  $k_{BA}$  este factorul de raportare a înfășurării B, la înfășurarea A, cel din (4.63).

Înlocuind (4.66) în (4.69) se obține:

$$\dot{i}_\mu(t) = \dot{i}_{\mu_d}(t) + jk_{BA}\dot{i}_{\mu_q}(t) = \dot{i}_\mu(t)e^{j\gamma(t)} \quad (4.70)$$

în care:

$$i_\mu(t) = \sqrt{\dot{i}_{\mu_d}^2(t) + k_{BA}^2 \dot{i}_{\mu_q}^2(t)} \quad (4.71)$$

$$\gamma(t) = \arctg \frac{k_{BA} \dot{i}_{\mu_q}(t)}{\dot{i}_{\mu_d}(t)} \quad (4.72)$$

Relația (4.71) reprezintă modulul vectorului spațial  $\dot{i}_\mu(t)$ , iar (4.72) dă faza sa (orientarea în spațiu). Amândouă sunt variabile în timp pentru cei doi vectori spațiali rezultanți  $\dot{i}_\mu(t)$  și  $\underline{g}(t)$ . Vârfurile lor descriu în spațiu, în general o curbă închisă oarecare, dar în condițiile particulare date de relația (4.67), această curbă devine o elipsă, iar câmpul magnetic pe care-l reprezintă se numește astfel "câmp învârtitor eliptic".

Înlocuind (4.67) în (4.71) și (4.72) se obține modulul vectorului spațial al curentului de magnetizare:

$$i_\mu(t) = \sqrt{2I_{\mu_d}^2 \sin^2 \omega t + 2k_{BA}^2 I_{\mu_q}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)} \quad (4.73)$$

și poziția sa momentană (unghiul  $\gamma$ ):

$$\gamma(t) = \arctg \frac{k_{BA} I_{\mu_q} \sin(\omega t + \varphi)}{I_{\mu_d} \sin \omega t} \quad (4.74)$$

în care s-a considerat originea unghiurilor pe axa reală și pozitivă a planului complex.

Se determină și viteza unghiulară a vectorului spațial:  $\omega_\gamma = d\gamma/dt$ , fiind și aceasta variabilă în timp.

În fig. 4.15 s-a reprezentat elipsa descrisă de vectorul spațial  $\dot{i}_\mu$ , când se dau curenții sinusoidali  $\dot{i}_{\mu_d}$  și  $\dot{i}_{\mu_q}$  (relația 4.67).

Elipsa este univoc determinată, având o poziție fixă în spațiu (dată de unghiul  $\gamma_{ax}$  dintre axa mare a elipsei și axa reală a planului complex).

Raportul dintre axele elipsei poate defini gradul de "elipticitate" al solenației de magnetizare rezultante.

Modulul vectorului spațial  $i_\mu$  variază între o valoare minimă ( $i_{\mu m} = ON$ ) și una maximă ( $i_{\mu M} = OM$ ). Aceste valori extreme pot fi determinate derivând expresia (4.73) și anulând derivata.

Se obține în final:

$$i_{\mu_m} = \sqrt{2I_{\mu_d}^2 \sin^2 \alpha_0 + 2k_{BA}^2 I_{\mu_q}^2 \sin^2(\alpha_0 + \varphi)}$$

$$i_{\mu_M} = \sqrt{2I_{\mu_d}^2 \sin^2(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) + 2k_{BA}^2 I_{\mu_q}^2 \sin^2(\alpha_0 + \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (4.75)$$

în care:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{k_{BA}^2 I_{\mu_q}^2 \sin 2\varphi}{I_{\mu_d}^2 + k_{BA}^2 I_{\mu_q}^2 \cos 2\varphi}\right) \quad (4.76)$$

iar unghiul  $\gamma_{ax}$  rezultă:

$$\gamma_{ax} = \operatorname{arctg} \frac{k_{BA} I_{\mu_q} \sin(\alpha_0 + \varphi)}{I_{\mu_d} \sin \alpha_0} \quad (4.77)$$

Valorile momentane ale funcțiilor sinusoidale de fază se pot regăsi prin proiecția (la momentul respectiv) a vectorului spațial ( $\dot{i}_\mu$ ) pe cele două axe, astfel [K7]:

$$\dot{i}_{\mu d}(t) = \operatorname{pr}_d(\dot{i}_\mu); \quad \dot{i}_{\mu q}(t) = \operatorname{pr}_q(\dot{i}_\mu).$$

Valorile maxime ale acestor proiecții sunt:

$$\sqrt{2}I_{\mu_d} = \operatorname{Max}(\operatorname{pr}_d \dot{i}_\mu) = OA$$

$$\sqrt{2}I_{\mu_q} = \operatorname{Max}(\operatorname{pr}_q \dot{i}_\mu) = OB \quad (4.78)$$

și se obțin când vârful vectorului spațial  $\dot{i}_\mu$  trece prin punctele  $P_A$ , respectiv  $P_B$  de pe elipsă (fig. 4.15).

Vectorul spațial  $\dot{i}_\mu$ , dat de (4.69), reprezintă curentul de magnetizare unic, care produce câmpul magnetic rezultat din spațiul mașinii. Așa cum există un singur câmp rezultat în întrefier, tot așa avem un singur curent de magnetizare corespunzător. Amplitudinea câmpului magnetic rezultat este proporțională cu amplitudinea curentului de magnetizare  $|\dot{i}_\mu|$ , legătura fiind asigurată printr-o mărime scalară.

Astfel, câmpului magnetic din întrefier  $i$  se poate asocia vectorul spațial al fluxului magnetic principal  $\underline{\phi}(t)$  care are, neglijând pierderile în fier, aceeași orientare cu  $\dot{i}_\mu(t)$ , rotind amândoi sincron [K8]:

$$\underline{\phi}(t) = \phi(t)e^{j\gamma(t)} \quad (4.79)$$

La un moment dat ( $t = t_1$ ), fazorul spațial  $\dot{i}_\mu$  are orientarea  $\gamma(t_1)$  și modulul

$$|\dot{i}_\mu(t_1)| = i_\mu(t_1), \text{ producând în întrefier un flux polar } |\underline{\phi}(t_1)| = \phi(t_1) \text{ pe aceeași direcție } \gamma(t_1).$$

Legătura dintre curentul de magnetizare  $i_{\mu}(t)$  și fluxul  $\phi(t)$  poate fi obținută numai prin curba neliniară de magnetizare a materialului.

Pentru a lua în considerație și în acest caz neliniaritatea mediului magnetic, se poate folosi același algoritm (fig. 2.4) prezentat anterior la mașina de inducție trifazată, care asigură prin calcul legătura univocă:  $\underline{i}_{\mu} \rightarrow \underline{\phi}$ .

În cazul de față, al mașinii bifazate, modulul vectorului spațial  $\underline{i}_{\mu}$  este variabil în timp oscilând între o valoare minimă și una maximă (4.75)

Astfel, pentru fiecare punct al elipsei descrise de  $\underline{i}_{\mu}$ , se poate determina univoc o valoare  $\phi$  a vectorului flux, trecând prin algoritmul de calcul al câmpului din fig. 2.4. Vârfurile tuturor vectorilor spațiali ai fluxului  $\underline{\phi}$ , determinați astfel, vor descrie o curbă închisă, care nu va mai fi o elipsă, din cauza neliniarității mediului. Admitem că această "pseudoelipsă" a fluxului are două axe de simetrie perpendiculare, acestea fiind suprapuse cu axele de simetrie ale elipsei curentului de magnetizare (datorită sincronismului celor doi vectori spațiali  $\underline{i}_{\mu}$  și  $\underline{\phi}$ ). Se poate spune că, inclusiv vectorul spațial rotitor  $\underline{\phi}(t)$  are un modul care oscilează în timp, între o valoare maximă și una minimă, schimbându-și continuu orientarea. Din toate orientările lui interesează, în primul rând, cele două direcții fixe  $d$  și  $q$ , coincidente cu axele de simetrie ale celor două înfășurări de fază din stator.

Fluxurile magnetice, corespunzătoare celor două direcții, se obțin, în orice moment, prin proiecția vectorului spațial  $\underline{\phi}(t)$  pe axa  $d$ , respectiv pe axa  $q$ :

$$\begin{aligned}\phi_d(t) &= \text{pr}_d(\underline{\phi}) \\ \phi_q(t) &= \text{pr}_q(\underline{\phi})\end{aligned}\tag{4.80}$$

În acest mod se pot determina, punct cu punct, forma de variație în timp a fluxurilor magnetice principale, corespunzătoare celor două axe.

Cele două funcții  $\phi_d(t)$  și  $\phi_q(t)$  sunt periodice, dar nu sunt sinusoidale, fiind determinate de "pseudoelipsa" vectorului spațial  $\underline{\phi}$ .

Chiar dacă s-au admis curenți de magnetizare  $i_{\mu d}(t)$  și  $i_{\mu q}(t)$  sinusoidali, forma de variație a fluxurilor  $\phi_d(t)$  și  $\phi_q(t)$  rezultă distorsionată în raport cu sinusoida (din cauza



neliniarității mediului magnetic) și poate fi obținută prin calcul, după procedeul de mai sus.

În procesul de calcul se vor reține valorile maxime ( $\phi_{dM}$  ,  $\phi_{qM}$ ) ale fluxurilor pe direcțiile fixe d, q:

$$\begin{aligned} \phi_{dM} &= \text{Max}(pr_d \phi) \\ \phi_{qM} &= \text{Max}(pr_q \phi) \end{aligned} \tag{4.81}$$

Tensiunea electromotoare indusă de câmpul magnetic învârtitor rezultant din întrefier este reprezentată de vectorul spațial  $\underline{u}_e(t)$  al t.e.m., care poate fi determinat [K8] din vectorul spațial al fluxului:

$$\underline{u}_e(t) = W \frac{d\phi}{dt} = W \frac{d\phi}{dt} e^{j\gamma(t)} + jW\phi(t)e^{j\gamma(t)} \frac{d\gamma}{dt}$$

în care W este numărul de spire.

În problema neliniară de față nu se cunoaște expresia analitică  $\phi(t)$  și, în consecință, ultima relație nu poate fi folosită pentru calculul t.e.m.

Se observă, pe de altă parte, că tensiunile  $u_{cd}(t)$  și  $u_{cq}(t)$ , induse de vectorul spațial  $\underline{\phi}(t)$  , sunt determinate de fluxurile fixe în spațiu  $\phi_d(t)$  și  $\phi_q(t)$  .

Valorile maxime  $\phi_{dM}$  și  $\phi_{qM}$  din (4.81) determină valorile maxime  $U_{cdM}$  și  $U_{cqM}$  ale tensiunilor induse corespunzătoare:

$$\begin{aligned} \text{Max}(u_{cd}(t)) &= U_{cdM} = \omega \phi_{dM} W_A k_{WA} \\ \text{Max}(u_{cq}(t)) &= U_{cqM} = \omega \phi_{qM} W_B k_{WB} \end{aligned} \tag{4.82}$$

în care  $\omega=2\pi f$ , este pulsația curentului de magnetizare din înfășurări. Pentru a utiliza calculul cu mărimi complexe este necesar să admitem o variație sinusoidală în timp a tensiunilor induse. În acest sens, funcțiile reale și periodice  $u_{cd}(t)$  și  $u_{cq}(t)$  se aproximează prin două sinusoidale, având amplitudini  $U_{cdM}$  și respectiv  $U_{cqM}$  date de (4.82), trecând prin valoarea zero în același timp cu funcțiile periodice pe care le aproximează. În acest caz se poate scrie:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}U_{cd} &= U_{cdM}; \\ \sqrt{2}U_{cq} &= U_{cqM}; \end{aligned} \tag{4.83}$$

în care  $U_{cd}$  și  $U_{cq}$  reprezintă valorile efective ale tensiunilor induse sinusoidale de aproximare, reprezentate în complex prin fazorii de timp  $\underline{U}_{cd}$  și  $\underline{U}_{cq}$  (corespunzători celor două axe).

În realitate, nici una din funcțiile  $i_{\mu d}(t)$  ,  $i_{\mu q}(t)$  ,  $u_{cd}(t)$  ,  $u_{cq}(t)$  nu sunt strict sinusoidale. Necesitatea admiterii regimului sinusoidal este legată de posibilitatea utilizării acestor mărimi, reprezentate prin fazorii de timp corespunzători, în ecuațiile regimului staționar (4.64) și în diagramele fazoriale aferente.

În cele ce urmează se admite că defazajul în timp, dintre curentul de magnetizare al fazei și tensiunea indusă, este același pe oricare din fazele mașinii. În consecință, defazajul  $\varphi$  dintre curenții  $i_{\mu d}(t)$  și  $i_{\mu q}(t)$ , sau dintre fazorii corespunzători  $\underline{I}_{\mu d}$  și  $\underline{I}_{\mu q}$  , se transferă și asupra t.e.m. induse, astfel că:

$$\arg(\underline{I}_{\mu d}, \underline{I}_{\mu q}) = \varphi = \arg(\underline{U}_{cd}, \underline{U}_{cq}) \quad (4.84)$$

Această observație permite determinarea poziției relative a fazorilor  $\underline{U}_{cd}$  și  $\underline{U}_{cq}$  (modulele lor fiind cunoscute din relația 4.83).

Rezumând cele de mai sus, se poate afirma că vectorul spațial al fluxului magnetic principal din întrefier este univoc determinat (prin modulul și poziția sa spațială), dacă se cunosc valorile efective ( $I_{\mu d}$  și  $I_{\mu q}$  ) ale curenților de magnetizare din cele două înfășurări statorice și unghiul de defazaj în timp ( $\varphi$ ) dintre acești curenți. Vectorul spațial al fluxului permite determinarea tensiunilor induse corespunzătoare celor două axe.

Timul de calcul, consumat de algoritmul din fig. 2.4, fiind relativ mic, procedul de mai sus (expus în fig. 4.17 ) poate fi pus în aplicare fără dificultate. Pentru un număr de 20 puncte ale elipsei, calculul a durat cca. 5 secunde (pe AT 386) pentru un set de date de intrare ( $I_{\mu d}$  ,  $I_{\mu q}$  ,  $\varphi$  ).

Dacă  $I_{\mu q} = 0$ , se obține un câmp pulsatoriu pe axa d, iar elipsa degenerază într-o dreaptă suprapusă cu axa d. Dacă  $\varphi = 0$ , se obține tot un câmp pulsatoriu, elipsa degenerând într-o dreaptă pe o direcție intermediară (  $\gamma_{ax} = \arctg(k_{BA} I_{\mu q} / I_{\mu d})$ ). Modificând datele de intrare se pot modela diverse situații.

Aplicarea algoritmului propus în fig. 4.17 relevă un fapt remarcabil și anume: tensiunea indusă de-a lungul fiecăreia din cele două axe ortogonale este dependentă de curenții după ambele axe. Se poate scrie:

$$\begin{aligned} U_{cd} &= U_{cd}(I_{\mu d}, I_{\mu q}, \varphi) \\ U_{cq} &= U_{cq}(I_{\mu d}, I_{\mu q}, \varphi) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Cu alte cuvinte, stările magnetice, existente pe cele două direcții ortogonale, se influențează reciproc. Această influență este simțită numai în prezența saturației și este semnalată și în alte lucrări [H1,B8,B7].

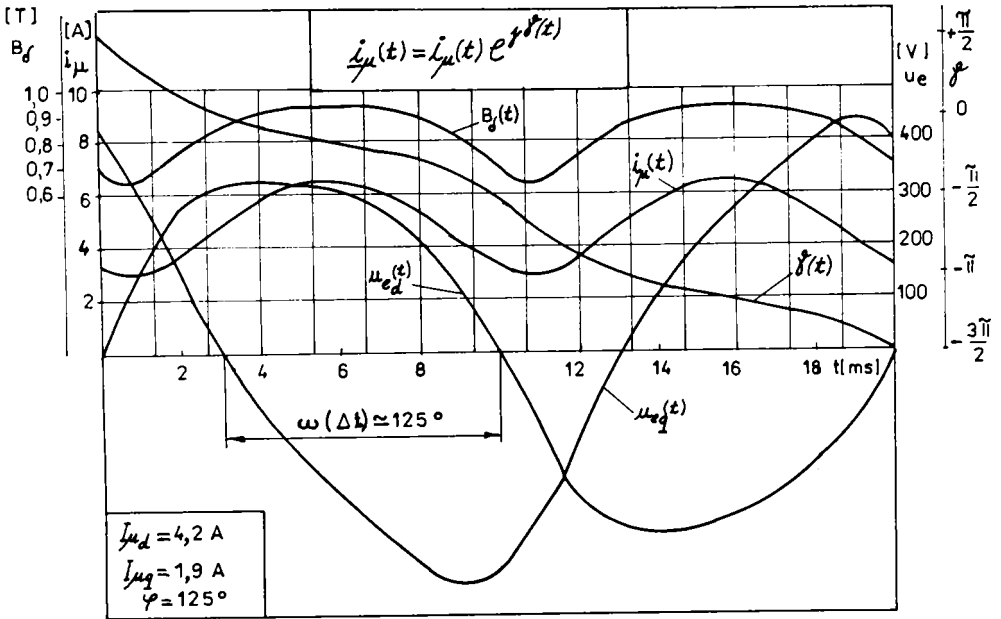


Fig. 4.16

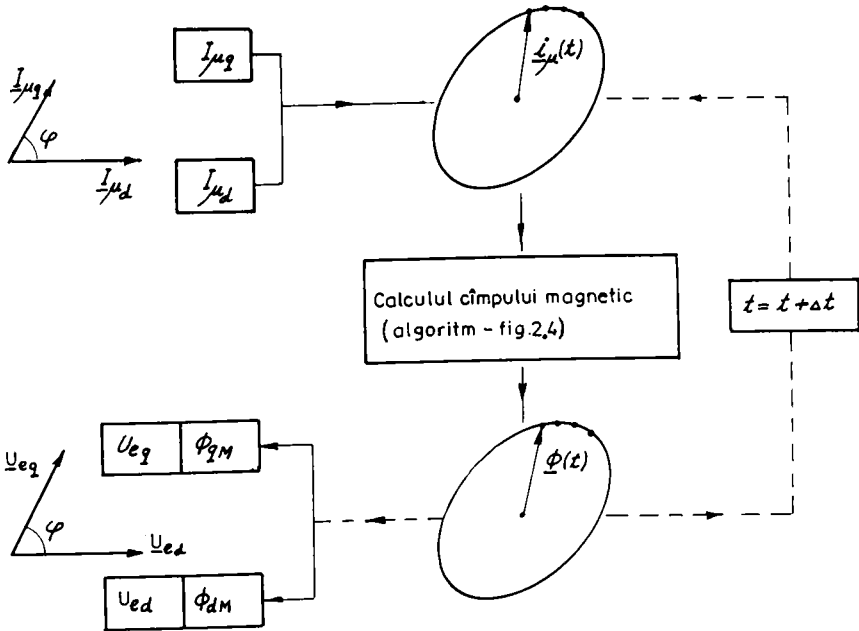


Fig. 4.17

În consecință inclusiv reactanțele de magnetizare corespunzătoare celor două axe ( $X_{md}$ ,  $X_{mq}$ ) vor fi funcții mult mai complicate decât la motorul de inducție trifazat simetric:

$$X_{md} = \frac{U_{ed}}{I_{\mu d}} = X_{md}(I_{\mu d}, I_{\mu q}, \varphi) ; X_{mq} = \frac{U_{eq}}{I_{\mu q}} = X_{mq}(I_{\mu d}, I_{\mu q}, \varphi) \quad (4.86)$$

Efectul poate fi constatat și experimental în diverse moduri (se va reveni asupra acestui fapt în cele ce urmează), iar în calcule poate fi controlat urmând procedeul propus mai sus ( fig. 4.17 ).

Timpul de calcul poate fi considerabil redus dacă nu se construiește toată “pseudoelipsa” fluxului (punct cu punct) ci doar două puncte ale ei: cel corespunzător semiaxei mari și cel corespunzător semiaxei mici. În acest fel algoritmul consumă cca. 1 secundă pentru un set de date de intrare și astfel poate fi inclus în unele procese iterative de calcul la alte nivele.

Pentru exemplificare se prezintă în fig. 4.16 rezultatele de calcul obținute aplicând algoritmul din fig. 4.17, pentru următoarele mărimi de intrare:

$$I_{\mu d} = 4,2A \quad ; \quad I_{\mu q} = 1,9A \quad ; \quad \varphi = 125^\circ \quad ; \quad k_{BA} = 1,52$$

Curenții de magnetizare se consideră sinusoidali, conform relației (4.67). În fig. 4.16 se reprezintă următoarele curbe, în raport cu timpul:

- modulul vectorului spațial  $\dot{i}_\mu(t)$ , cu variație continuă și periodică între o valoare maximă (6,521A) și una minimă (3,07A). Se obține o “elipticitate” de  $6,521/3,07 = 2,12$ ;
- modulul vectorului spațial  $B_\delta(t)$ , cu variație între 0,941T și 0,657T. Raportul între axa mare și cea mică a “pseudoelipsei” inducției magnetice este, în acest caz, de 1,43 din cauza saturării circuitului magnetic, care limitează creșterea inducției în întrefier;
- poziția momentană a vectorilor spațiali de mai sus. Se obține o curbă neliniară  $\gamma(t)$  care indică o viteză de rotație neuniformă a fazorilor spațiali ( $d\gamma/dt$ );
- tensiunea electromotoare indusă  $u_{ed}(t)$  obținută prin proiecția momentană a vectorului spațial al fluxului pe axa d. Se poate constata o ușoară distorsiune a unde, față de sinusoidă;
- tensiunea electromotoare  $u_{eq}(t)$  obținută în același mod, prin proiecția pe axa q, la diferite momente succesive, a vectorului fluxului principal rezultat. Unda este de asemenea distorsionată.

Toate aceste elipse sau “pseudoelipse” au o poziție fixă în spațiu, dată de unghiul  $\gamma_{ax}$  care, pentru acest caz, are valoarea calculată:  $\gamma_{ax} = -28^\circ$ .

Urmărind pe grafic (fig. 4.16) trecerile prin zero ale funcțiilor  $u_{cd}(t)$  și  $u_{cq}(t)$  se poate constata un defazaj în timp și anume:  $u_{cq}(t)$  este defazată în avans cu unghiul  $\omega(\Delta t) \equiv 125^\circ$ , față de  $u_{cd}(t)$ , adică la fel cum  $i_{\mu d}(t)$  este defazat în avans față de  $i_{\mu q}(t)$  cu unghiul  $\varphi = 125^\circ$ . Se confirmă presupunerea din relația (4.84).

### 4.2.3. Asupra caracteristicii magnetice în câmp eliptic

Se consideră un motor de inducție trifazat simetric tetrapolar, având pe fază  $W_1 = 260$  spire, distribuite uniform în creștături. Circuitul electric al rotorului este deschis (lipsește colivia în scurtcircuit) pentru a simula o încercare de mers în gol ideal. Cunoscând toate datele constructive ale motorului și folosind algoritmul din fig. 2.4 se determină prin calcul caracteristica magnetică, sub forma  $I_o(U_o)$ , reprezentând curentul de mers în gol în funcție de tensiunea la bornele fazei. Această curbă (notată cu 3) este reprezentată în fig. 4.18. Valorile măsurate ( $I_o$ ) în funcție de tensiunea sinusoidală  $U_o$  sunt reprezentate în figură discret prin "0". Se constată o corespondență bună cu valorile calculate pentru acest caz. Curba 3 reprezintă caracteristica magnetică pe fază, în câmp magnetic învârtitor circular.

Se repetă procedeul în vederea determinării caracteristicii magnetice a unei faze, a motorului trifazat de mai sus, în condițiile alimentării unei singure faze cu o tensiune monofazată, sinusoidală.

În acest sens, în relația (2.37) se omite factorul 3/2 (caracteristic cazului trifazat) și se repetă calculul folosind același algoritim din fig. 2.4. Se obține, din calcul, o caracteristică magnetică (notată cu 1a) situată deasupra celei "trifazate". La aceeași tensiune la borne ( $U_o$ ), de data aceasta, curentul de magnetizare este mai mare decât în cazul trifazat, ceea ce este explicabil. Cu toate acestea, valorile măsurate ale curentului  $I_o$  (însemnate cu "Δ") sunt tot mai depărtate de cele calculate, pe măsură ce tensiunea la borne crește.

Singura diferență dintre cele două cazuri o constituie natura câmpului magnetic (învârtitor circular în cazul trifazat și alternativ în cazul monofazat). În consecință, se impune aici o intervenție în algoritmul de calcul al caracteristicii magnetice în câmp pulsatoriu pentru a apropia valorile calculate de cele măsurate. Dar înainte de aceasta este necesară o explicație.

Experiența arată că, în cazul alimentării unei bobine cu miez de fier cu o tensiune alternativă sinusoidală, unda curentului de magnetizare se deformează tot mai mult, pe măsură ce se saturează circuitul magnetic. Fenomenul este cunoscut și întâlnit și la

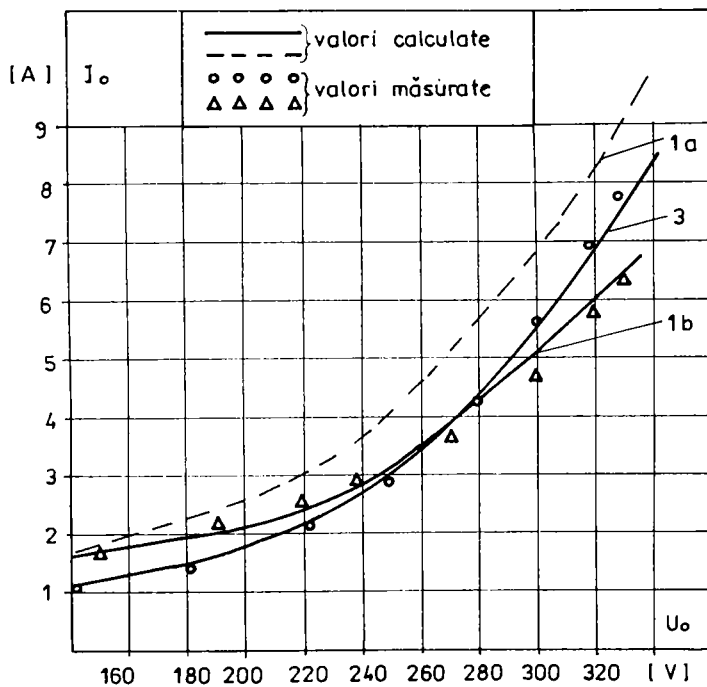


Fig. 4.18

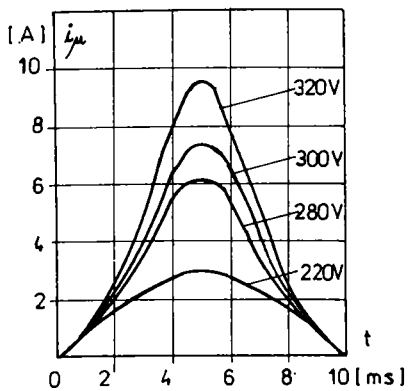


Fig. 4.19 Influența saturației asupra formei de undă a curentului (valori obținute prin calcul SAI)

transformatoarele monofazate cu circuit magnetic saturat (unda curentului de mers în gol are o formă ascuțită, aproximativ triunghiulară, dacă se presupune o variație sinusoidală a fluxului).

În aceste condiții, raportul dintre valoarea maximă și cea efectivă a curentului nu mai este  $\sqrt{2}$  (valoare corespunzătoare formei sinusoidale) ci este mai mare decât  $\sqrt{2}$ .

Pentru a lua în considerație acest fapt se poate interveni în relația (2.37) punând, în locul valorii maxime a curentului ( $\sqrt{2} I_{\mu}$ ), mărimea ( $c_r \sqrt{2} I_{\mu}$ ), unde  $c_r$  este un coeficient supraunitar care va compensa deformarea curentului de magnetizare în funcție de gradul de saturație a circuitului magnetic principal (aici,  $c_r \sqrt{2}$  reprezintă raportul dintre valoarea maximă și cea efectivă a curentului pentru forma de undă reală, deformată). În fig. 4.18, curba 1a este calculată cu  $c_r = 1$ .

Pentru valori ale inducției în întrefier  $B_s \geq 0,4T$ , punând:

$$c_r = 0,7B_s + 0,72 \quad (4.87)$$

și repetând calculul (fără alte modificări) se obține curba 1b foarte apropiată de valorile măsurate ("Δ").

Curba 1b dă astfel valorile efective ale unui curent de magnetizare echivalent sinusoidal care poate fi reprezentat în diagramele fazoriale. Acest curent echivalent sinusoidal are valoarea efectivă egală cu cea a curentului real, distorsionat.

De remarcat este însă faptul că distorsionarea curentului de magnetizare poate fi pusă în evidență și prin calcul. Se utilizează același algoritm din fig. 2.4 și se consideră câteva valori momentane, succesive, ale tensiunii de alimentare sinusoidale. Pentru fiecare valoare momentană a tensiunii se determină valoarea momentană a curentului de magnetizare (trecând prin curba de magnetizare a materialului). Se obține astfel variația în timp a curentului de magnetizare pentru o "sinusoidă" dată a tensiunii de alimentare.

S-a repetat calculul pentru mai multe nivele de tensiuni (valori efective) obținându-se curbele din fig. 4.19. La creșterea tensiunii de alimentare se constată o distorsionare tot mai pronunțată a unde.

Dacă se presupune un curent de magnetizare sinusoidal (așa cum s-a procedat în calculele din fig. 4.16) se constată o distorsionare a tensiunilor induse.

În realitate, rețeaua de alimentare menține o tensiune la borne sinusoidală, încât distorsiunile vor fi preluate de unda curentului de magnetizare. Câteva înregistrări pe osciloscop au confirmat formele de undă ale curentului, obținute prin calcul (fig. 4.19). Pentru valori mari ale tensiunii de alimentare (peste 280V) osciloscopul arată forme triunghiulare ale curentului (triunghi isoscel).

Și în câmp magnetic eliptic apar distorsiuni ale curentului de magnetizare dar mai mici decât cele corespunzătoare în câmp alternativ.

În concluzie, pentru a ține oarecum seama de deformarea curentului de magnetizare, în calculul caracteristicii magnetice, se poate folosi coeficientul de corecție  $c_i$  din (4.87), determinat empiric și valabil numai în cazul motorului monofazat funcționând în câmp alternativ.

#### 4.2.4. Mașina monofazată

Se consideră o mașină de inducție, având pe stator o singură înfășurare repartizată în crestături, alimentată de la o sursă monofazată de tensiune sinusoidală ( $\underline{U}_A$ ) și parcursă de curentul  $I_A$ . Rotorul este prevăzut cu o colivie simetrică în scurtcircuit având parametrii cunoscuți.

În aceste condiții se poate folosi modelul dq-dq de “mașină electrică generalizată” din fig. 4.13, la care lipsește înfășurarea statorică B.

În consecință, pentru această mașină se pot folosi ecuațiile (4.64) cu următoarele observații:

- ecuația a doua din (4.64) lipsește (în axa B nu este înfășurare pe stator);
- raportarea mărimilor rotorice se face acum la singura înfășurare a statorului, astfel că în (4.60) se va considera:  $(k_A = k_B)$ , de unde rezultă  $R_a' = R_b' = R_2'$ ,  $X_{\sigma a}' = X_{\sigma b}' = X_2'$ ,  $Z_s' = Z_b' = Z_2'$ , iar din (4.63) se obține  $k_{AB} = 1$ ;
- pentru simplificarea notațiilor se va pune:  $X_{mA} = X_{mB} = X_m$ ,  $U_{cA} = U_c$ ;
- pentru  $I_B = 0$ , din (4.62) avem:  $\underline{U}_{cB} = -jX_m I_b'$  care se înlocuiește în ultimele două ecuații (4.64).

Cu aceste precizări, sistemul (4.64), particularizat pentru motorul de inducție monofazat cu rotor în scurtcircuit, obține forma:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{Z}_A I_A - \underline{U}_c \\ \underline{U}_c &= -jX_m (I_A + I_a') \\ 0 &= j(1-s)\underline{U}_c + jX_m I_b' + Z_2' I_b' + (1-s)X_2' I_a' \\ 0 &= -(1-s)X_m I_b' - \underline{U}_c + Z_2' I_a' - (1-s)X_2' I_b' \end{aligned} \quad (4.88)$$

Reactanța de magnetizare  $X_m$  este dependentă, în realitate, de gradul de saturație a circuitului magnetic și deci dependentă de fluxul magnetic principal, rezultat din întrefier. Acestui flux rezultat îi corespunde, cum se știe, un curent fictiv ( $I_\mu$ ) care, dacă ar parcurge



înfășurarea statorului , ar produce singur câmpul rezultat (obținut, de fapt, prin acțiunea ambilor curenți, unul din stator și celălalt din rotor).

Pentru fixarea planului complex al fazelor, se consideră tensiunea indusă pe axa reală pozitivă, astfel că, dacă se neglijează pierderile în fier, se poate scrie:

$$-jX_m(I_A + I_a') \cong -jX_m(jI_\mu) = X_m I_\mu = U_e(I_\mu) \tag{4.89}$$

În consecință, sistemul (4.88) devine:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{Z}_A I_A - U_e(I_\mu) \\ -j(1-s)U_e(I_\mu) &= (\underline{Z}'_2 + jX_m)I_b' + (1-s)X_2' I_a' \\ U_e(I_\mu) &= \underline{Z}'_2 I_a' - (1-s)(X_2' + X_m)I_b' \end{aligned} \tag{4.90}$$

în care funcția neliniară  $U_e(I_\mu)$  reprezintă caracteristica magnetică a mașinii, obținută prin calcul.

Ultimele două ecuații din (4.90) permit determinarea curenților rotorici sub forma:

$$\begin{aligned} I_a' &= \frac{1}{\underline{Z}_e} U_e \\ I_b' &= \frac{\underline{Z}'_2 I_a' - U_e}{(1-s)(X_2' + X_m)} \end{aligned} \tag{4.91}$$

în care:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}'_2(\underline{Z}'_2 + jX_m) + (1-s)^2(X_2' + X_m)X_2'}{(\underline{Z}'_2 + jX_m) - j(1-s)^2(X_2' + X_m)} \tag{4.92}$$

iar din prima ecuație (4.90) se obține:

$$I_A = \frac{\underline{U}_A + U_e}{\underline{Z}_A} \tag{4.93}$$

Cele două solenații, ale statorului și rotorului, se compun pe axa longitudinală (A) dând un câmp magnetic rezultat, care ar putea fi produs de curentul fictiv  $I_{oA} = I_\alpha + jI_\mu$  parcurgând înfășurarea statorului. Astfel, se poate scrie următoarea ecuație de curenți, obținută din ecuația solenațiilor:

$$I_\alpha + jI_\mu = I_A + I_a' \tag{4.94}$$

Se impune aici o discuție asupra componentei active  $I_\alpha$ .

Dacă mersul în gol are loc fără curent în rotor (așa cum s-a considerat la motorul trifazat), atunci  $I_a$  acoperă pierderile în fier și cele în înfășurarea statorului, determinate de curentul de mers în gol.

În cazul motorului monofazat, mersul în gol ideal ( $I_a' = I_b' = 0$ ) se poate realiza doar cu un rotor având circuitul electric deschis (fără colivie în scurtcircuit) și antrenat din exterior la viteza de rotație de sincronism. În aceste condiții, motorul absoarbe de la rețea curentul  $I_{A0}$  având componenta reactivă  $I_\mu$  și componenta activă  $I_a$  care acoperă pierderile totale în fier și pierderile în înfășurare determinate de  $I_{A0}$ . Dacă motorul monofazat are un rotor cu circuitul electric închis (colivie în scurtcircuit), componenta activă  $I_a$ , a curentului de mers în gol, acoperă pierderile în fier, pierderile în înfășurarea statorului și în înfășurarea rotorului determinate de curenții rotorici  $I_s'$  și  $I_r'$ , care au valori semnificative chiar la viteza de rotație sincronă. Astfel, în cazul motorului monofazat cu rotor în scurtcircuit, componenta  $I_a$  este mult mai mare decât la motorul de inducție trifazat.

Înlocuind curenții din (4.91) și (4.92) în (4.94) se obține:

$$I_a + jI_\mu = \frac{1}{Z_A} U_A + \frac{1}{Z_c} U_c + \frac{1}{Z_c} U_c \quad (4.95)$$

în care impedanța echivalentă  $Z_c$  este neliniară conform relației (4.92) unde  $X_m = U_c / I_\mu$ .

Mărimile complexe din (4.95) se exprimă sub formă exponențială:

$$\underline{Z}_A = Z_A \cdot e^{j\alpha_A}, \quad Z_A = \sqrt{R_A^2 + X_{\sigma_A}^2}, \quad \alpha_A = \arctg \frac{X_{\sigma_A}}{R_A}$$

$$\underline{Z}_c = Z_c e^{j\alpha_c}, \quad Z_c = |\underline{Z}_c|, \quad \alpha_c = \arctg \frac{\text{Imag}(\underline{Z}_c)}{\text{Real}(\underline{Z}_c)} \quad (4.96)$$

$$\underline{U}_A = U_N e^{j\beta}$$

Înlocuind (4.96) în (4.95) și egalând părțile reale și pe cele imaginare se obțin două ecuații reale:

$$I_a = \frac{U_N}{Z_A} \cos(\beta - \alpha_A) + Y_c U_c$$

$$I_\mu = \frac{U_N}{Z_A} \sin(\beta - \alpha_A) - Y_s U_c \quad (4.97)$$

în care:

$$\begin{aligned}
 Y_c &= \frac{1}{Z_A} \cos \alpha_A + \frac{1}{Z_c} \cos \alpha_c \\
 Y_s &= \frac{1}{Z_A} \sin \alpha_A + \frac{1}{Z_c} \sin \alpha_c
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

Eliminând unghiul  $\beta$  între cele două ecuații (4.97) se obține în final:

$$I_\mu = \sqrt{\left(\frac{U_N}{Z_A}\right)^2 - (I_\alpha - Y_c U_c(I_\mu))^2} - Y_s U_c(I_\mu)
 \tag{4.99}$$

Ultima ecuație este neliniară în raport cu variabila  $I_\mu$ . Ea are aceeași formă cu ecuația. (4.23) obținută la motorul de inducție trifazat.

În ecuația (4.99) însă,  $Y_c$  și  $Y_s$  sunt și ele funcții neliniare de  $I_\mu$ , așa cum este  $U_c$ . Pentru o alunecare dată, singura variabilă din (4.99) rămâne  $I_\mu$ .

Soluția acestei ecuații reprezintă punctul de funcționare de pe caracteristica magnetică, adică perechea de valori  $U_c$  și  $I_\mu$ .

După rezolvarea ecuației (4.99) se revine la una din ecuațiile (4.97) și se determină unghiul de defazaj  $\beta$ , apoi din (4.93) se determină curentul statoric  $I_A$  și, în sfârșit, din (4.91) se obțin curenții rotorici  $I'_a$  și  $I'_b$ .

În scopul verificării celor de mai sus, s-a executat un motor de inducție având pe stator o singură înfășurare cu 4 poli, cu  $W_A = 300$  spire, distribuite în 16 din cele 24 creștături ale statorului. Pentru măsurarea t.e.m. induse  $U_c$  s-a utilizat o înfășurare suplimentară plasată în deschiderea creștăturilor statorului. În calcule s-au folosit următorii parametrii:  $R_A = 2,8\Omega$ ;  $R_2' = 3,8\Omega$ ;  $X_{\sigma A} = 7\Omega$ ;  $X_2' = 2\Omega$ .

Pentru determinarea experimentală a caracteristicii magnetice a fost necesară o probă de mers în gol cu circuitul electric al rotorului deschis. În acest scop s-a folosit un rotor fără colivie realizat prin împachetarea tolelor pe axul rotorului. Proba de mers în gol s-a efectuat cu două tipuri de rotoare: unul fără colivie în scurtcircuit și celălalt cu colivie, ambele având același tip de tolă rotor și același întrefier. Rezultatele de calcul și cele experimentale se prezintă în fig. 4.20a.

Curba 1 reprezintă valoarea curentului din înfășurarea statorică la mersul în gol ideal, în funcție de tensiunea la borne, în cazul rotorului fără colivie. Această curbă  $I_{A0}(U_c)$  corectată conform relației (4.3) și (4.4), reprezintă caracteristica magnetică în câmp alternativ. În calculul ei s-a folosit și coeficientul (4.87) care ține seama de forma de undă a curentului conform celor prezentate în paragraful anterior.

Repetând calculul, fără a lua în considerație corecția (4.87), se obține curba notată cu 3 (linie întreruptă). Valorile măsurate confirmă, din nou, că relația (4.87) poate fi folosită în calcule.

În cazul rotorului cu colivie (curba 2), curentul de mers în gol obține, la aceeași tensiune de alimentare, o valoare aproximativ dublă (cu componentă reactivă aproape dublă). Faptul este explicabil deoarece curentul  $I_{A_0}$  asigură acum și magnetizarea axei transversale. La orice nivel de saturație se constată o bună concordanță între valorile calculate și cele măsurate.

În fig. 4.20b s-a reprezentat coeficientul  $k_c = U_c/U_0$  în funcție de nivelul de saturație a circuitului magnetic principal. La saturații mari se constată o scădere a t.e.m. induse  $U_c$ .

Valorile  $U_c$  măsurate în bobina de măsură sunt ceva mai mari decât cele obținute din calcul, deoarece, așa cum s-a arătat în cazul prezentat la motorul trifazat, câmpul magnetic de dispersie induce tensiuni electromotoare suplimentare în bobina de măsură plasată în deschiderea creștăturii.

În fig. 4.20c se reprezintă pierderile totale în fier  $P_{Fe}$ , calculate și măsurate în cazul rotorului fără colivie, când avem câmp magnetic doar pe direcția axei longitudinale (rotorul a fost antrenat din exterior cu viteza de rotație sincronă).

În fig. 4.20d se prezintă diagrama fazorială a curenților, la  $s = 0$ , în cazul rotorului cu colivie. Pentru  $U_0 = 220V$  s-au calculat următoarele valori (folosite în diagrama din figură):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{A_0} &= -0,993 + 4,265j & ; & \quad | \underline{I}_{A_0} | = 4,38A \\ \underline{I}'_{a_0} &= 0,084 - 2,08j & ; & \quad | \underline{I}'_{a_0} | = 2,085A \\ \underline{I}'_{b_0} &= -2,08 - 0,084j & ; & \quad | \underline{I}'_{b_0} | = 2,085A \\ \underline{U}_A &= -219,88 + 7,17j & ; & \quad | \underline{U}_A | = 220V \\ U_c &= 196,6V & ; & \quad I_\mu = 2,18A \end{aligned}$$

Este interesant de observat că,  $I_\mu = \text{Imag}(\underline{I}_{A_0} + \underline{I}'_{a_0}) = 2,18A$  este curentul fictiv care magnetizează axa longitudinală, în timp ce curentul  $\text{Real}(\underline{I}'_{b_0}) = 2,08A$  magnetizează axa transversală (B). Acești doi curenți sunt defazați în spațiu și timp cu unghiul electric  $\frac{\pi}{2}$ . astfel încât se obține un câmp învârtitor aproximativ circular (cu elipticitate foarte redusă). Valoarea curentului  $I_\mu$  poate reprezenta axa mare a elipsei, iar valoarea curentului

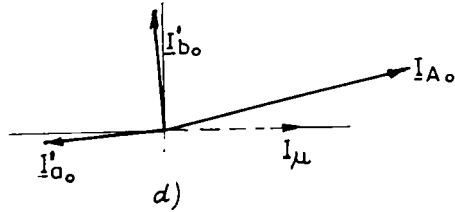
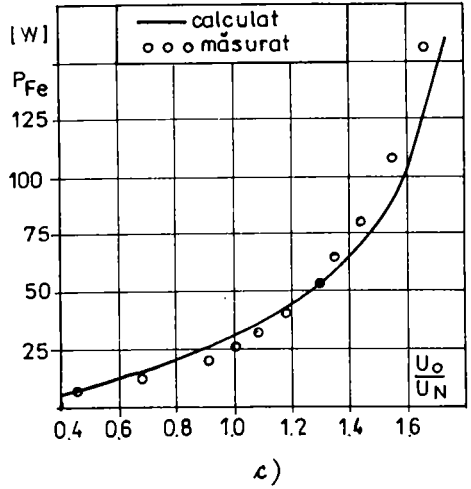
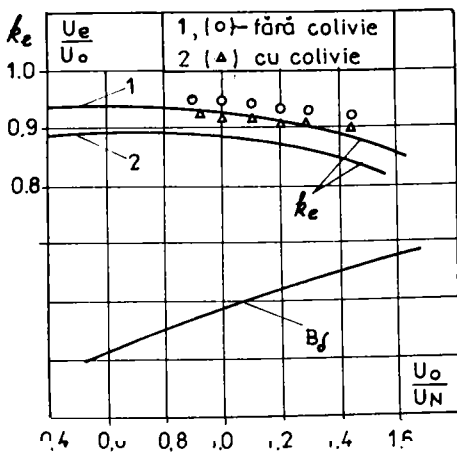
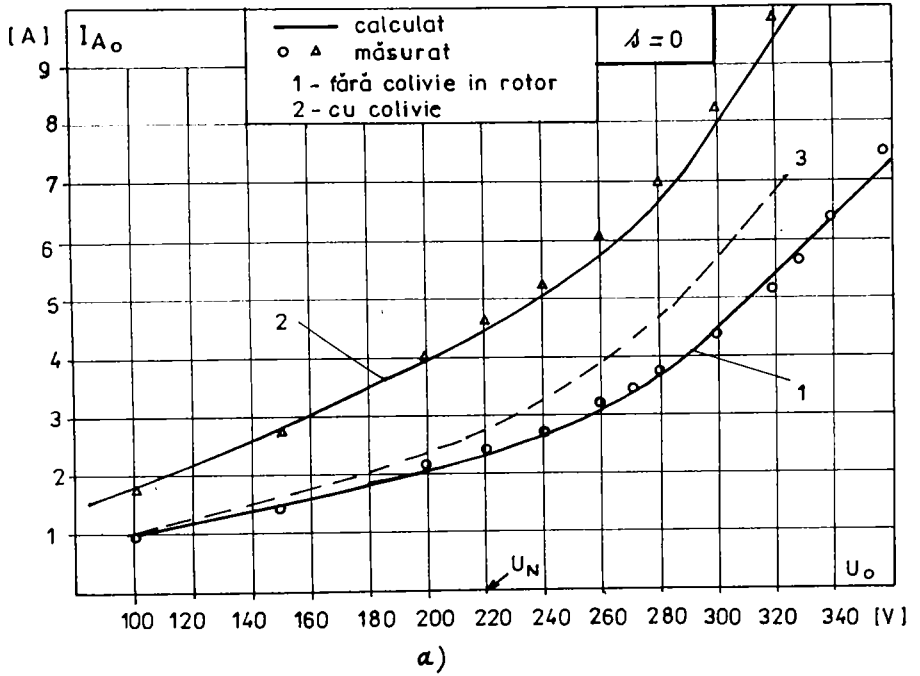
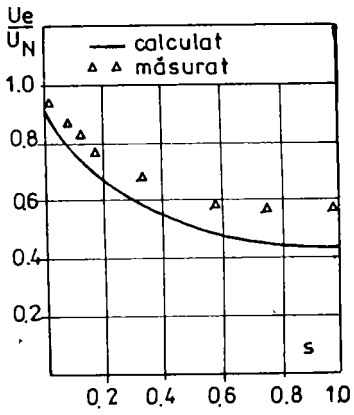
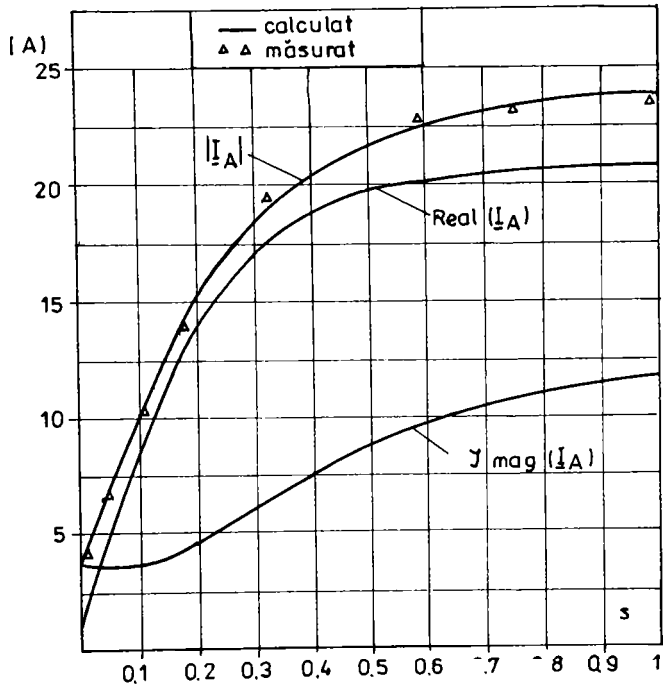


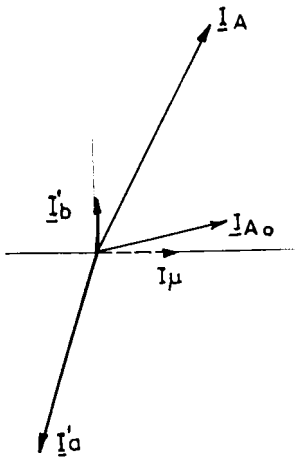
Fig. 4.20 Motorul monofazat la mersul în gol



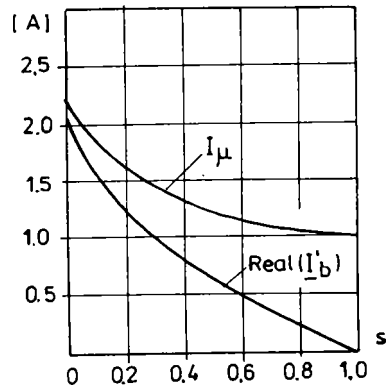
a)



b)



c)



d)

Fig. 4.21 Motorul monofazat la mersul în sarcină ( $s = 0 \dots 1$ )

$\text{Real}(\underline{I}_{b_0}')$  pe cea mică. În acest fel se poate aprecia “elipticitatea câmpului magnetic învârtitor”.

Se poate, de asemenea, constata o componentă activă relativ mare a curentului  $\underline{I}_{A_0}$ , așa cum s-a subliniat anterior.

La mersul în gol, curenții rotorici rămân egali în modul  $|\underline{I}_{a_0}'| = |\underline{I}_{b_0}'| = 2,085A$ . Dacă rezistența  $R_2'$  tinde la infinit (spre cazul rotorului fără colivie), cei doi curenți rotorici tind, în mod egal, către zero, iar curentul statoric  $\underline{I}_{A_0}$  tinde spre  $(\underline{I}_\mu)$ .

În sfârșit o ultimă observație: pentru celălalt sens de rotație a rotorului ( $s = 2$ ), fazorul  $\underline{I}_b'$  își schimbă semnul în diagrama din fig. 4.20d, ceilalți fazori rămânând nemodificați.

În fig. 4.21 sunt prezentate câteva caracteristici ale motorului monofazat (cu colivie în rotor), alimentat cu tensiune constantă. În acest caz, toate mărimile sunt dependente de alunecare.

În fig. 4.21a se poate urmări dependența de alunecare a t.e.m.  $U_c$ . Fenomenele sunt similare cu cele de la motorul trifazat, analizat anterior. În fig. 4.21b sunt reprezentate: componenta reală, cea imaginară și modulul curentului  $\underline{I}_A$  care se compară cu valorile măsurate.

Diagrama fazorială a curenților este reprezentată în fig. 4.21c , pentru  $s = 0,08$  pe baza următoarelor valori calculate:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{A_0}' &= -7,83 + 4,07j & ; & & |\underline{I}_{A_0}'| &= 8,82A \\ \underline{I}_{a_0}' &= 6,92 - 2,12j & ; & & |\underline{I}_{a_0}'| &= 7,24A \\ \underline{I}_{b_0}' &= -1,7 + 0,067j & ; & & |\underline{I}_{b_0}'| &= 1,702A \\ \underline{U}_{A_0} &= -218,4 - 26,2j & ; & & |\underline{U}_{A_0}| &= 220V \\ U_c &= 177V & ; & & I_\mu &= 1,94A \end{aligned}$$

Pentru comparație s-a reprezentat și fazorul  $\underline{I}_{A_0}$  (corespunzător la  $s = 0$ ). Calculele au arătat că, pentru orice alunecare  $0 < s < 1$ , curentul  $\underline{I}_b'$  are o componentă imaginară foarte mică, mult mai mică decât cea reală. Fazorul  $\underline{I}_b'$  rămâne (la orice alunecare) aproximativ pe axa reală, dar scade odată cu scăderea vitezei de rotație (fig. 4.21d ), astfel încât , la  $s=1$ , el se anulează ( $\underline{I}_b' = 0$  ). La alunecarea  $s=1$  rămâne numai un câmp magnetic pulsatoriu, pe axa longitudinală, corespunzător curentului  $I_\mu$ . Pentru celelalte valori ale alunecării ( $0 \leq s < 1$ ),

câmpul rezultat este eliptic, cu axa mare proporțională cu  $I_a$  și cu axa mică proporțională cu valoarea  $\text{Real}(I'_b)$ .

Gradul de "elipticitate" variază continuu, de la câmp pulsatoriu (la  $s=1$ ), la câmp aproximativ circular ( $s=0$ ), așa cum sugerează fig. 4.21d.

#### 4.2.5. Mașina bifazată cu condensator

Se consideră o mașină de inducție bifazată nesimetrică, având pe stator două înfășurări repartizate în crestături și decalate în spațiu cu un unghi electric de  $\frac{\pi}{2}$  radiani, iar în rotor o colivie simetrică în scurtcircuit. În aceste condiții se poate folosi direct modelul de "mașină electrică generalizată" din fig. 4.13 împreună cu ecuațiile obținute, fără nici o modificare, cu toate precizările legate de sistemul (4.64). Mașina este alimentată de la o rețea monofazată de tensiune sinusoidală prin intermediul unui condensator  $C$ , conform fig.4.14, astfel că se vor utiliza și ecuațiile suplimentare (4.65).

În cazul mașinii bifazate nesimetrice este necesar să admitem două circuite magnetice principale, unul după axa  $d(A)$  și altul după axa  $q(B)$ , cu stări magnetice diferite. În problemele considerate liniare, aceste două circuite magnetice sunt independente între ele, în sensul că fluxul magnetic principal, după o direcție, nu depinde de curentul electric după cealaltă direcție (ortogonală).

Anterior (paragraful 4.2.2.) s-a arătat cum, în prezența saturației mediului magnetic neliniar, stările magnetice corespunzătoare celor două axe se influențează reciproc. Cu alte cuvinte, fluxul, iar apoi tensiunea indusă, corespunzătoare unei axe, sunt dependente de curenții ambelor axe (vezi relația 4.85) devenind funcții neliniare de cei doi curenți.

Nici una dintre aceste funcții neliniare complicate (de două variabile) nu mai poate reprezenta caracteristica magnetică unică a mașinii electrice (exprimată de legătura neliniară dintre fluxul principal rezultat și curentul de magnetizare unic din mașină).

Totuși, posibilitatea determinării prin calcul (după algoritmul din fig. 4.17), a funcțiilor neliniare din (4.85), este remarcabilă și permite construirea unui algoritm iterativ de rezolvare a sistemului de ecuații (4.64), devenit neliniar prin funcțiile  $U_{cA}$  și  $U_{cB}$  (ambele dependente de două variabile).

Considerarea neliniarității mediului magnetic constituie o complicație serioasă în rezolvarea sistemului (4.64) și din acest motiv se rezolvă, mai întâi, cazul simplu când rotorul are circuitul electric deschis ( $I'_a = I'_b = 0$ ). În aceste condiții sistemul se reduce la ecuațiile de tensiuni din stator:



$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A - \underline{U}_{e_A} \\ \underline{U}_B &= \underline{Z}_B \underline{I}_B - \underline{U}_{e_B}\end{aligned}\quad (4.100)$$

Din (4.65) rezultă:  $\underline{U}_B = \underline{U}_A - \underline{Z}_C \underline{I}_B$ , încât (4.100) devine:

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A - \underline{U}_{e_A} \\ \underline{U}_A &= \underline{Z}_{BC} \underline{I}_B - \underline{U}_{e_B}\end{aligned}\quad (4.101)$$

unde  $\underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_B + \underline{Z}_C$ , iar  $\underline{U}_A$  este tensiunea de alimentare a rețelei.

În acest regim de mers în gol, dacă se neglijează pierderile active (în fier și în înfășurările statorului), curenții  $\underline{I}_A$  și  $\underline{I}_B$  au numai componentă de magnetizare, adică:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A &= \underline{I}_{\mu_A} = j \underline{I}_{\mu_A} \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{\mu_B} = j \underline{I}_{\mu_B} e^{j\varphi}\end{aligned}\quad (4.102)$$

unde  $\varphi$  este unghiul de defazaj dintre fazorii  $\underline{I}_{\mu_A}$  și  $\underline{I}_{\mu_B}$  iar  $\underline{I}_{\mu_A}$  și  $\underline{I}_{\mu_B}$  reprezintă modulele lor.

În consecință, pentru tensiunile electromotoare induse se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{e_A} &= U_{e_A} e^{j0} \\ \underline{U}_{e_B} &= U_{e_B} e^{j\varphi}\end{aligned}\quad (4.103)$$

unde s-a ținut seama de relația (4.84).

Se exprimă sub formă exponențială și celelalte mărimi:

$$\underline{U}_A = U_N e^{j\beta}; \quad \underline{Z}_A = Z_A e^{j\alpha_A}; \quad \underline{Z}_{BC} = Z_{BC} e^{j\alpha_{BC}} \quad (4.104)$$

Cu acestea, sistemul (4.101) devine:

$$\begin{aligned}U_N e^{j\beta} &= Z_A e^{j\alpha_A} j \underline{I}_{\mu_A} - U_{e_A} \\ U_N e^{j\beta} &= Z_{BC} e^{j\alpha_{BC}} j \underline{I}_{\mu_B} e^{j\varphi} - U_{e_B} e^{j\varphi}\end{aligned}\quad (4.105)$$

Egalând părțile reale și apoi pe cele imaginare, se obține un sistem de patru ecuații reale cu patru necunoscute:

$$\begin{aligned}U_N \cos\beta &= -Z_A \underline{I}_{\mu_A} \sin\alpha_A - U_{e_A} \\ U_N \sin\beta &= Z_A \underline{I}_{\mu_A} \cos\alpha_A \\ U_N \cos\beta &= -Z_{BC} \underline{I}_{\mu_B} \sin(\alpha_{BC} + \varphi) - U_{e_B} \cos\varphi \\ U_N \sin\beta &= Z_{BC} \underline{I}_{\mu_B} \cos(\alpha_{BC} + \varphi) - U_{e_B} \sin\varphi\end{aligned}\quad (4.106)$$

Eliminând unghiurile  $\beta$  și  $\varphi$  în sistemul (4.106) se obține:

$$U_N^2 = (U_{e_A} + X_{\sigma_A} \underline{I}_{\mu_A})^2 + R_A^2 \underline{I}_{\mu_A}^2$$

$$U_N^2 = (U_{cB} + X_{\sigma B} I_{\mu B} - X_C I_{\mu A})^2 + R_B^2 I_{\mu B}^2 \quad (4.107)$$

în care  $U_{eA}$  și  $U_{cB}$  sunt funcții neliniare de ambele variabile independente ( $I_{\mu A}$  și  $I_{\mu B}$ ) și, în consecință, ultimele două ecuații sunt cuplate, formând un sistem neliniar cu două necunoscute.

Sistemul (4.107) se rezolvă printr-o metodă numerică adecvată, de tip iterativ, în care se include și algoritmul din fig. 4.17 pentru determinarea t.e.m. induse  $U_{eA}$  și  $U_{cB}$ .

Din cauza complexității problemei, timpul de calcul este mai mare, de data aceasta. Algoritmul din fig. 4.17 consumă mai puțin de 1 secundă, dar, dacă acesta este inclus într-un proces de calcul iterativ (cum este rezolvarea sistemului 4.107), timpul de calcul crește, ajungând la zeci de secunde în unele situații, în funcție de numărul de iterații necesar pentru aproximarea soluției.

Perechile de valori ( $U_{eA}, I_{\mu A}$ ) și ( $U_{cB}, I_{\mu B}$ ) obținute prin rezolvarea numerică a sistemului (4.107) permit determinarea reactanțelor de magnetizare căutate (pentru o tensiune dată a rețelei și un condensator dat):

$$X_{mA} = \frac{U_{eA}}{I_{\mu A}} ; \quad X_{mB} = \frac{U_{cB}}{I_{\mu B}} \quad (4.108)$$

Pentru verificări experimentale s-a executat un motor de inducție bifazat cu patru poli, de 1,5kW, cu înfășurările dispuse în cuadratură electrică, ocupând volume egale și având numere de spire diferite ( $W_A \neq W_B$ ) în raportul  $k_{BA} = 1,52$ . Pentru partea de indus s-au executat două rotoare, folosind același tip de tole: unul fără colivie și celălalt cu colivie în scurtcircuit.

Fig. 4.22 prezintă comparativ rezultatele de calcul și experimentale efectuate pe motorul bifazat de mai sus, având rotorul fără colivie și conectat la rețea conform schemei din fig. 4.14 .

În fig. 4.22a) se reprezintă valoarea curentului de magnetizare al fazei A în funcție de tensiunea de alimentare  $U_A$ , pentru trei valori ale capacității condensatorului. Se remarcă aici trei caracteristici magnetice diferite corespunzătoare axei magnetice A. Este interesant de observat că, la aceeași tensiune de alimentare a fazei A, curentul de magnetizare  $I_{\mu A}$  are valori diferite, funcție de capacitatea condensatorului plasat în cealaltă fază (B). Altfel spus: nivelul de saturație al circuitului magnetic de pe direcția B(q) influențează curentul de magnetizare  $I_{\mu A}$ . Se confirmă aici experimental cele afirmate în paragraful 4.2.2. și anume

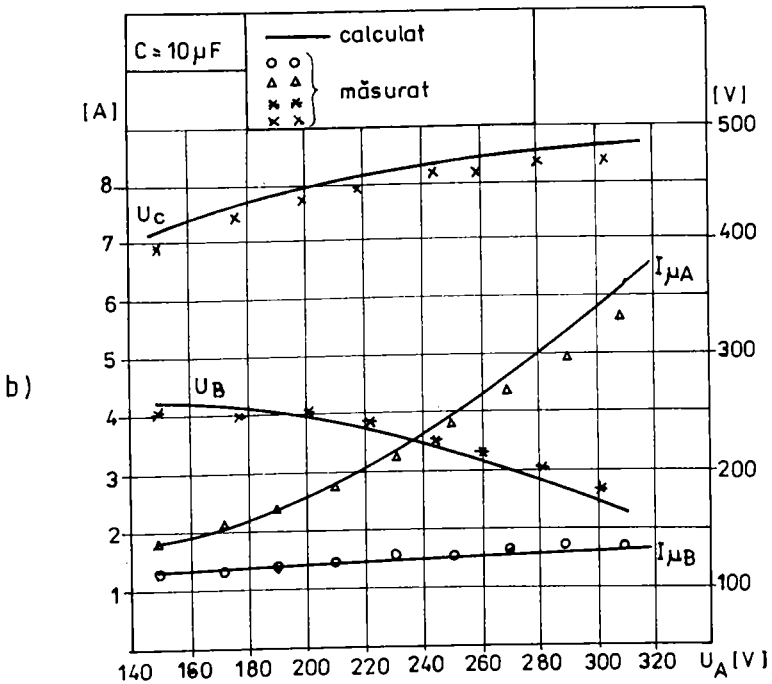
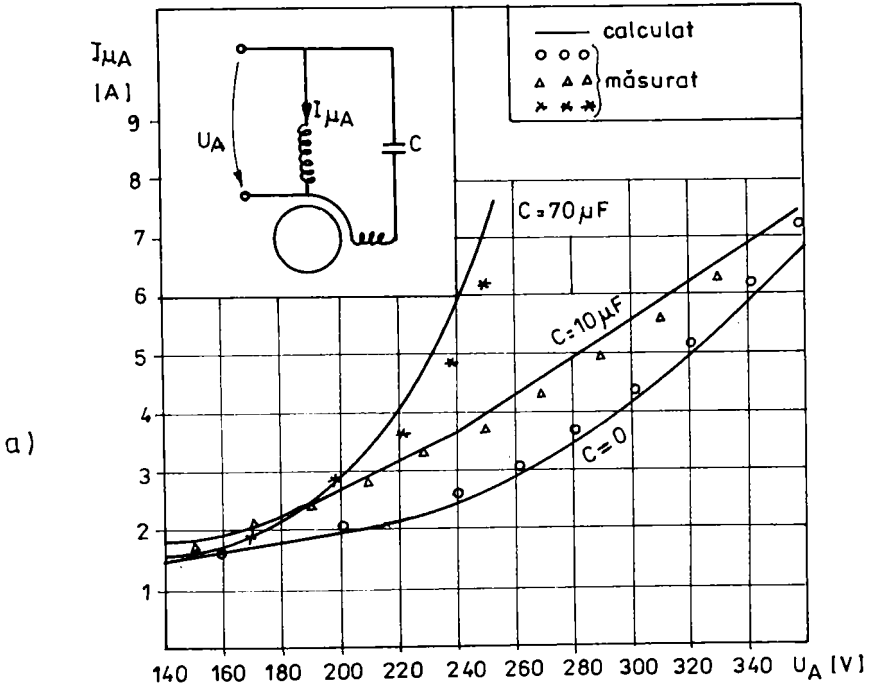
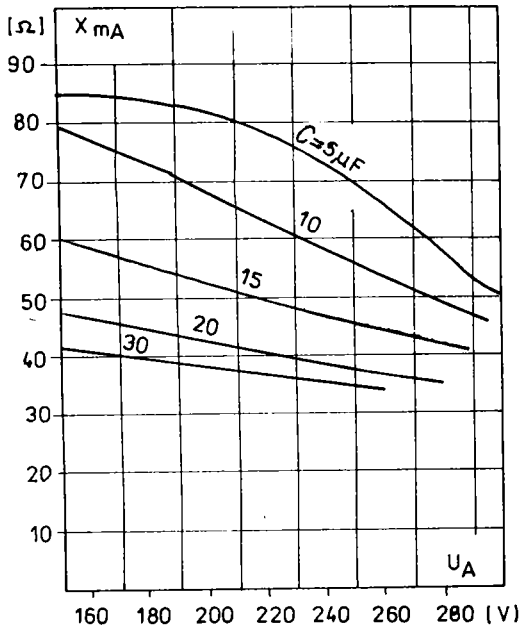
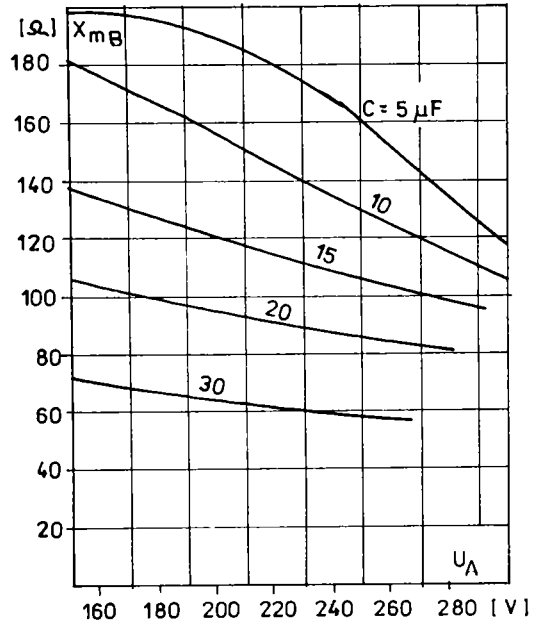


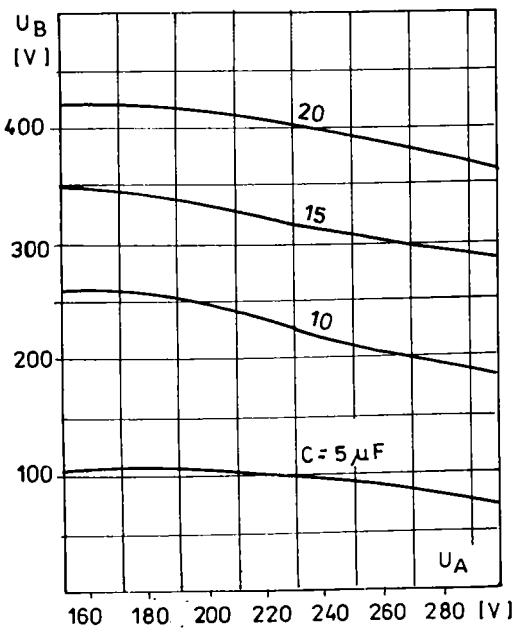
Fig. 4.22 Motorul bifazat cu condensator (fără colivie în rotor)



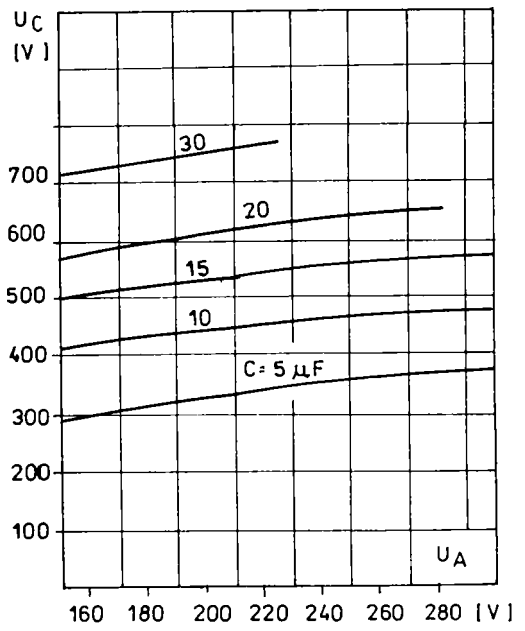
a)



b)



c)



d)

Fig. 4.23

că reactanțele de magnetizare  $X_{m_A}$  și  $X_{m_B}$  sunt (fiecare din ele) funcții neliniare de două variabile ( $I_{\mu_A}, I_{\mu_B}$ ).

Cazul al treilea ( $C = 0$ ) corespunde întreruperii circuitului electric al fazei auxiliare ( $X_c = \infty$ ), rămânând alimentată doar faza A.

În fig. 4.22b) se pot urmări rezultatele de calcul și experimentale pentru celelalte mărimi, în funcție de tensiunea de alimentare, pentru o valoare fixă a capacității condensatorului ( $C=10 \mu F$ ):  $U_c$  - tensiunea la bornele condensatorului,  $U_B$  - tensiunea la bornele fazei B, curenții de magnetizare din cele două faze.

Rezultatele de calcul sunt suficient de apropiate de cele determinate experimental pentru a putea afirma că algoritmul propus în fig. 4.17 este corect. Acesta, inclus în procedeu numeric iterativ de rezolvare a sistemului (4.107), permite o bună aproximare a reactanțelor de magnetizare  $X_{m_A}$  și  $X_{m_B}$ , în cazul motorului de inducție bifazat cu condensator.

Ca exemplu, în fig. 4.23 se pot urmări câteva rezultate de calcul, obținute conform procedurii de mai sus. Se constată cum ambele reactanțe de magnetizare sunt afectate de saturație dar și de capacitatea condensatorului.

Aceste două reactanțe de magnetizare (funcții complicate de nivelele de saturație existente pe cele două axe) pot fi astfel determinate numeric, iar valorile lor vor fi folosite în rezolvarea analitică a sistemului (4.61) pentru determinarea tuturor parametrilor motorului de inducție bifazat. Chiar și la mersul în gol ( $s=0$ ), dacă rotorul are colivie în scurtcircuit, prin apariția curenților în rotor, se impune considerarea tuturor ecuațiilor sistemului (4.61). În acest caz, sistemul complet de ecuații ale motorului de inducție bifazat cu condensator, devine:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{Z}_A \underline{I}_A + jX_{m_A} (\underline{I}_A + \underline{I}_a') \\ \underline{U}_A &= \underline{Z}_{BC} \underline{I}_B + jX_{m_B} (\underline{I}_B + \underline{I}_b') \\ 0 &= (1-s)k_{BA} X_{m_A} (\underline{I}_A + \underline{I}_a') + jX_{m_B} (\underline{I}_B + \underline{I}_b') + \underline{Z}_b' \underline{I}_b' + (1-s)k_{BA} X_{\sigma_s}' \underline{I}_a' \\ 0 &= -(1-s)X_{m_B} (\underline{I}_B + \underline{I}_b') + jk_{BA} X_{m_A} (\underline{I}_A + \underline{I}_a') + k_{BA} \underline{Z}_a' \underline{I}_a' - (1-s)X_{\sigma_s}' \underline{I}_b' \end{aligned} \quad (4.109)$$

Urmărind rezolvarea analitică a sistemului (4.109), din primele două ecuații se determină curenții statorici:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{\underline{U}_A - jX_{m_A} \underline{I}_a'}{\underline{Z}_A + jX_{m_A}} \\ \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_A - jX_{m_B} \underline{I}_b'}{\underline{Z}_{BC} + jX_{m_B}} \end{aligned} \quad (4.110)$$

care apoi se înlocuiesc în ultimele două ecuații. În acest fel, în cele două ecuații rotorice rămân numai două necunoscute (curenții rotorici):

$$\begin{aligned} \underline{T}_1 &= \underline{T}_2 \underline{I}_a' + \underline{T}_3 \underline{I}_b' \\ \underline{T}_4 &= \underline{T}_5 \underline{I}_a' + \underline{T}_6 \underline{I}_b' \end{aligned} \quad (4.111)$$

în care:

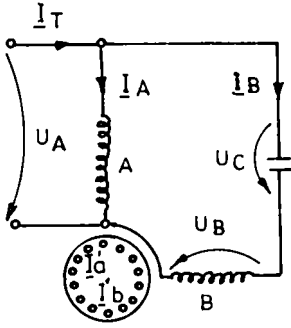
$$\begin{aligned} \underline{T}_1 &= \left( -\frac{k_{BA}(1-s)X_{m_A}}{\underline{Z}_A + jX_{m_A}} - \frac{jX_{m_B}}{\underline{Z}_{BC} + jX_{m_B}} \right) \underline{U}_A \\ \underline{T}_2 &= k_{BA}(1-s) \left( -\frac{jX_{m_A}^2}{\underline{Z}_A + jX_{m_A}} + X_{m_A} + X_{\sigma_a'} \right) \\ \underline{T}_3 &= \frac{X_{m_B}^2}{\underline{Z}_{BC} + jX_{m_B}} + jX_{m_B} + \underline{Z}_b' \\ \underline{T}_4 &= \left( -\frac{jk_{BA}X_{m_A}}{\underline{Z}_A + jX_{m_A}} + \frac{(1-s)X_{m_B}}{\underline{Z}_{BC} + jX_{m_B}} \right) \underline{U}_A \\ \underline{T}_5 &= k_{BA} \left( \frac{X_{m_A}^2}{\underline{Z}_A + jX_{m_A}} + jX_{m_A} + \underline{Z}_a' \right) \\ \underline{T}_6 &= (1-s) \left( \frac{jX_{m_B}^2}{\underline{Z}_{BC} + jX_{m_B}} - X_{m_B} - X_{\sigma_b'} \right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

Din (4.111) se obține:

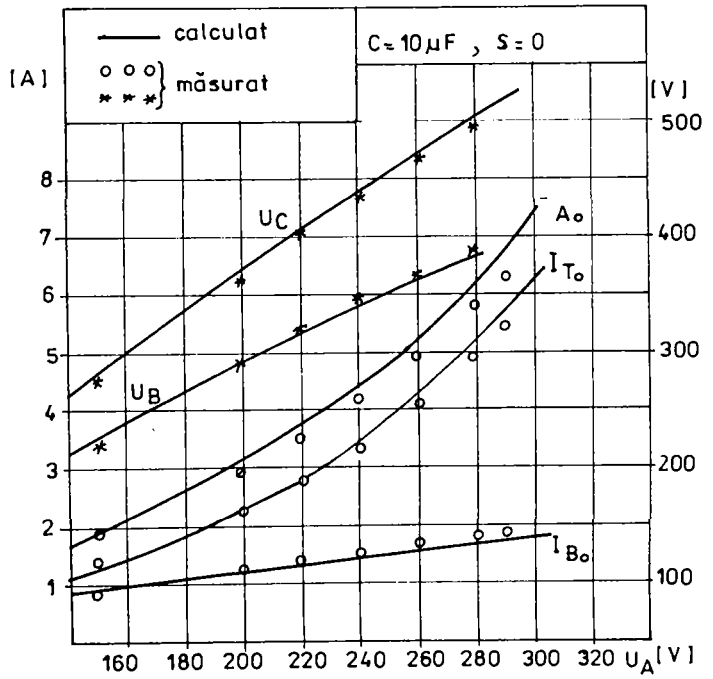
$$\begin{aligned} \underline{I}_a' &= \frac{\underline{T}_1 \underline{T}_6 - \underline{T}_3 \underline{T}_4}{\underline{T}_2 \underline{T}_6 - \underline{T}_3 \underline{T}_5} \\ \underline{I}_b' &= \frac{\underline{T}_1 \underline{T}_5 - \underline{T}_2 \underline{T}_4}{\underline{T}_3 \underline{T}_5 - \underline{T}_2 \underline{T}_6} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Cu acestea, revenind la (4.110) se determină și curenții statorici.

În relațiile (4.113) și (4.110) se vor folosi valorile numerice ale reactanțelor de magnetizare  $X_{m_A}$  și  $X_{m_B}$ , determinate mai sus în cazul rotorului fără colivie, ceea ce înseamnă că, de data aceasta, se neglijează influența reacției de indus asupra reactanțelor de magnetizare.

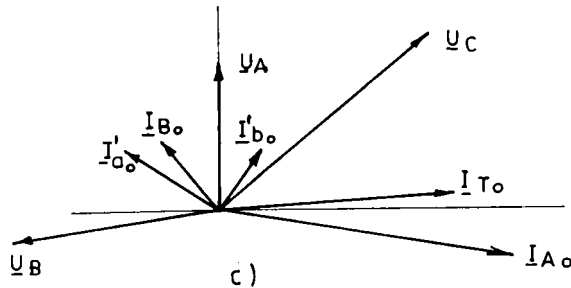


a)



b)

$C =$	$\mu F$	$s =$
$I'_{a_0} =$	$1,09 + 1,65j$	
$I'_{b_0} =$	$1,09 - 0,71j$	
$I_{A_0} =$	$-0,78 - 5,16j$	
$I_{B_0} =$	$1,18 + 1,91j$	
$I_{T_0} =$	$0,4 - 4,15j$	
$U_A =$	$260$	
$U_B =$	$-47,3 + 358,1j$	
$U_C =$	$307,3 - 358,1j$	



c)

Fig. 4.24 Motorul bifazat cu condensator (cu colivie in scurtcircuit)

În aceste condiții s-au calculat curenții de mers în gol ( $s = 0$ ) ai motorului bifazat de mai sus, în cazul rotorului cu colivie pentru  $C = 10 \mu F$ . Comparația cu valorile determinate experimental poate fi urmărită în fig. 4.24b unde se reprezintă modulele fazorilor:  $\underline{I}_{A_0}, \underline{I}_{B_0}, \underline{I}_{T_0} = \underline{I}_{A_0} + \underline{I}_{B_0}, \underline{U}_C, \underline{U}_B$ .

Este interesant de comparat aceste valori cu cele din fig. 4.22b) determinate pentru cazul rotorului fără colivie. Se poate constata cum, prezența coliviei în rotor mărește tensiunea la bornele fazei B datorită componentei de rotație a t.e.m.  $\underline{U}_{eB}$  care depinde de viteza de rotație a rotorului (la  $s=0$  această componentă este maximă).

În fig. 4.24c) se prezintă diagrama fazorială și valorile corespunzătoare ale fazorilor, calculate pentru:  $s = 0, C = 10 \mu F, U_A = 260V$ . Tensiunea la borne  $\underline{U}_A$  s-a considerat pe axa reală a planului complex.

Este surprinzătoare poziția fazorului  $\underline{I}_{A_0}$  în raport cu  $\underline{U}_A$ . Fazorul  $\underline{I}_{A_0}$  este defazat în urma lui  $\underline{U}_A$  cu un unghi mai mare de  $\frac{\pi}{2}$  radiani.

În această situație factorul de putere al fazei A este negativ, ceea ce înseamnă că puterea activă înregistrată ar trebui să fie negativă.

Faptul este confirmat de wattmetrele montate în circuit, care indică:

$P_T \cong 290W$ , puterea totală absorbită de motor din rețea;

$P_A \cong 38W$ , puterea activă înregistrată pe faza A;

$P_B \cong 330W$ , puterea activă pe faza B.

Bilanțul de puteri este simplu:  $P_T = P_A + P_B$  sau

$$U_A I_{T_0} \cos(\underline{U}_A, \underline{I}_{T_0}) = U_A I_{A_0} \cos(\underline{U}_A, \underline{I}_{A_0}) + U_B I_{B_0} \cos(\underline{U}_B, \underline{I}_{B_0})$$

Pentru cazul de față  $\cos(\underline{U}_A, \underline{I}_{A_0}) < 0$  și, în consecință puterea înregistrată pe faza A are semnul minus ( $290 \cong -38 + 330$ ).

Situația se schimbă repede le creșterea alunecării, când  $\cos(\underline{U}_A, \underline{I}_{A_0})$  devine pozitiv. Pentru unele valori ale capacității, chiar la  $s = 0$  se obține un factor de putere pozitiv pe faza A. De exemplu, pentru același motor bifazat de mai sus, la  $C = 70 \mu F$  se măsoară la mersul în gol:  $P_T = 920W, P_A = 400W, P_B = 520W$  (implicând factori de putere pozitivi).

Astfel, pentru anumite valori ale capacității, la alunecări mici, faza principală (A) a motorului bifazat cu condensator poate deveni generatoare, acoperind o parte din puterea consumată în faza auxiliară (B).



# SINTEZA OPTIMĂ A MAȘINII DE INDUCȚIE CU AJUTORUL MODELULUI SAI

## 5.1. INTRODUCERE

Proiectarea unui motor de inducție implică un mare număr de variabile, care determină performanțele energetice și încălzirea motorului. Proiectantul stabilește o anumită combinație de variabile care va conduce la realizarea performanțelor cerute.

Prin analogie cu definiția unei funcții matematice, combinația de variabile reprezintă un punct din domeniul de definiție “n” - dimensional al “funcției” , iar performanțele obținute reprezintă punctul corespondent din domeniul în care “funcția” ia valori.

În problemele de proiectare, orice combinație de variabile reprezintă un proiect al motorului și, conform celor de mai sus, un punct în domeniul de definiție. Un astfel de proiect este declarat satisfăcător dacă performanțele motorului îndeplinesc condițiile impuse. În consecință, orice combinație de variabile trebuie verificată printr-un calcul complet al performanțelor energetice și al supratemperaturii motorului.

Într-o problemă de proiectare dată se constată că există extrem de multe combinații posibile și, dintre acestea, foarte multe pot fi declarate satisfăcătoare. Din această etapă problema dobândește un grad sporit de complexitate devenind o problemă de optimizare. Din mulțimea combinațiilor (proiectelor) declarate satisfăcătoare, trebuie identificat acel proiect care conduce la “cel mai bun motor”. Acest “cel mai bun motor” sau “motorul optim” poate fi definit în diverse moduri, în funcție de obiectivul urmărit: motorul cu randamentul maxim , sau motorul cel mai ieftin, sau motorul cu greutate minimă, etc.

Problematika optimizării constă în definirea “motorului optim” prin alegerea unui obiectiv și apoi elaborarea unei metode (algoritm) de căutare a combinației de variabile care asigură atingerea obiectivului ales, cu respectarea parametrilor impuși ai motorului. Combinația astfel găsită reprezintă soluția problemei de optimizare, adică proiectul optim.

Optimizarea mașinilor electrice , încă din etapa de proiectare a dobândit o atenție considerabilă în prezent având în vedere uriașele cheltuieli de fabricație și de exploatare suportate de producător și beneficiar.

Se lucrează intens pe plan mondial la elaborarea unor programe de optimizare cât mai perfecționate care să soluționeze problema pusă. Cum se știe, problema este foarte dificilă, chiar dacă se folosesc calculatoarele numerice. Aproximarea de mașina optimă se poate face doar prin intermediul unui număr de cel puțin 10-15 variabile independente [D6] , care determină un număr foarte mare de combinații posibile, de ordinul  $10^{20}$  -  $10^{24}$ . Din acest motiv nu este practic să se încerce (verifice) toate combinațiile. Este rațional să se reducă la minimum zona de căutare a soluției optime, prin evitarea a cât mai multor combinații necorespunzătoare, cu scopul de a reduce timpul de căutare.

Cu toate eforturile depuse nu s-a reușit până în prezent să se găsească o metodă cu caracter general, unanim acceptată, care să încheie capitolul optimizării constructive a mașinilor de inducție. Fiecare cercetare legată de optimizarea mașinilor electrice se finalizează printr-un program propriu, diferit de celelalte existente, având un caracter particular.

Pe lângă aceste dificultăți obiective, care derivă din complexitatea problemei, există și unele aspecte controversate (cum sunt cele referitoare la definirea optimului și alegerea obiectivului), care întârzie găsirea unor soluții optime. Spre exemplu, problema creșterii randamentului motoarelor de inducție nu este încă luată în considerare de toți fabricanții. Necesitatea îmbunătățirii randamentului este justificată în multe lucrări [D6, D7, C7, A5, H2, H3]. Problema este prioritară , având implicații majore asupra economiei naționale și trebuie impusă pe diverse căi.

În ultimii 10 ani, în S.U.A. au fost înaintate Senatului numeroase proiecte de legi referitoare la energia electrică. Acestea s-au finalizat printr-un amendament la legea "National Energy Efficiency Act", semnată în oct. 1992 de președintele S.U.A. Legea se referă [B9] la motoarele de inducție trifazate de uz general, cu puteri între 0,75 și 150KW, cu 2, 4 și 6 poli, precum și la cele fracționare și speciale. Legea face trimitere la standardele NEMA [N12] pentru detalii legate de inscripționarea și stabilirea noilor nivele ale randamentelor motoarelor "energo-eficiente" (NEMA-MG1-12.59).

NEMA (National Electrical Manufacturers Association) analizează în prezent [B9] oportunitatea introducerii unei noi clase de motoare energo-eficiente ("design E") la care se admit și curenți de pornire mai mari (cu 15 - 20%), precum și adoptarea unei noi

corelări ("U") între putere și gabarit (execuția motorului pe alte diametre exterioare care asigură o creștere suplimentară de randament).

În oct. 1990 a avut loc în Canada prima reuniune anuală a producătorilor de motoare electrice [ M 11] pe aceeași temă: motoare de inducție cu randamente ridicate. Au participat 22 de firme producătoare de motoare electrice (BALDOR, LEROY SOMER, SIEMENS, TOSHIBA, US ELECTRIC, WEG, WESTINGHOUSE MOTOR, AEG, ASEA BROWN BOVERI,...) precum și distribuitori și clienți. Cu scopul lărgirii pieței de desfacere a motoarelor energo-eficiente, producătorii au urmărit să demonstreze că motoarele cu randamente ridicate pot reprezenta o alternativă atractivă pentru clienți. Au fost identificate căi pentru stimularea clienților și s-au întocmit programe comune pentru a mări eficiența acțiunii, care cuprinde motoarele de inducție trifazate cu puteri 0,75 ... 350 kW. S-a propus extinderea programului și asupra motoarelor monofazate și fracționare. Multe alte detalii în acest sens pot fi găsite în [ M 11].

Reducerea cheltuielilor de fabricație, pe de o parte și creșterea randamentului motoarelor electrice, pe de altă parte, reprezintă tendințe contradictorii. Dacă problema este privită unilateral, va fi și rezolvată unilateral, cu consecințe negative asupra economiei în ansamblu.

Modul rațional de a privi această problemă obligă la considerarea ambelor aspecte în permanență.

În consecință, găsirea soluției optime constă în a urmări modul în care variază costul materialelor active și costul pierderilor (puterea electromagnetică trasformată în căldură în interiorul mașinii).

Minimizarea sumei dintre cele două costuri reprezintă obiectivul cel mai rațional, care trebuie adoptat în problemele actuale de optimizare a mașinilor electrice. Contractele de cercetare care au fost finanțate în ultimul timp (cum sunt cele citate în [H3, S9, A5]), pe tema optimizării mașinilor de inducție, includ cu prioritate problema creșterii randamentului.

Consecințele economice importante, care pot fi obținute, au impulsionat cercetările în direcția găsirii unor noi metode de investigare a soluției constructive optime în cazul mașinilor electrice, care reprezintă cca. două treimi din totalul consumatorilor de energie electrică [B9].

Cum se știe, se lucrează mult în direcția transferării problemei tehnice în domeniul matematicii. Cu alte cuvinte, problema tehnică a optimizării construcției mașinii electrice este redusă la o problemă de matematică. Astfel, în noua formulare, problema

poate beneficia de toate metodele clasice cunoscute ale programării matematice [D9, M8], precum și de altele specializate, elaborate în acest scop [A4, H2, S9].

Conform celor cunoscute, o problemă generală de programare matematică poate fi formulată ca mai jos.

Să se afle minimumul funcției  $F(X)$ :

$$\min F(X) \quad (5.1)$$

cu condiția ca:

$$\begin{aligned} G_i(X) &= 0, \quad i=1,2,\dots,k \\ G_i(X) &\geq 0, \quad i=k+1,\dots,m. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}$$

unde  $X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$  este vectorul de proiectare ce conține variabilele independente, aparținând unui domeniu de definiție  $n$ -dimensional  $D^{(n)}$ ,  $F(X)$  este funcția-obiectiv exprimată într-o formă analitică finită,  $G_i(X)$  sunt funcții restrictive (limitări, condiționări), iar  $X_{\min}$  și  $X_{\max}$  reprezintă frontiere ale domeniului  $D^{(n)}$ .

Formularea de mai sus poate avea caracter general întrucât minimizarea funcției  $F(X)$  este echivalentă cu maximizarea funcției  $-F(X)$ , iar  $G_i(X) \geq 0$  este echivalent cu  $-G_i(X) \leq 0$ .

Funcția obiectiv  $F(X)$  este identificată cu parametrul care urmează a fi optimizat: randamentul ( $-\eta$ ), costul materialelor active, suma dintre costul materialelor active și costul pierderilor de energie, etc.

Minimumul funcției obiectiv  $F(X)$  se obține pentru valoarea optimă a lui  $X$ , care verifică în același timp și restricțiile date de rel. (5.2).

Inegalitățile restrictive (5.2) cuprind: performanțele energetice impuse, performanțele de pornire, restricții dimensionale și cerințe suplimentare ale beneficiarului.

În cazul optimizării mașinilor electrice, funcțiile  $F(X)$  și  $G_i(X)$  sunt neliniare, iar problema matematică face parte din domeniul programării (optimizării) neliniare cu restricții.

Această problemă rămâne mereu în actualitate întrucât alegerea funcției obiectiv (5.1) și a restricțiilor asociate (5.2) se face ținând seama de disponibilitățile tehnologice, de materii prime și de energie, ale economiei naționale la un moment dat. Cu alte cuvinte, soluția constructivă optimă depinde și de conjunctura momentană a prețurilor implicate în problemă. Analiza literaturii din domeniul optimizării neliniare cu restricții

scoate în evidență diverși algoritmi de optimizare specializați pentru cazul particular al mașinilor de inducție. Importante contribuții în acest domeniu aduce Appelbaum [A3, A4, A5]. Acesta elaborează o metodă de optimizare bazată pe căutarea optimului de-a lungul frontierei domeniului de restricții (Method of Boundary Search Along Active Constraints). O aplicație a acestei metode poate fi urmărită în [A5].

Metoda de căutare a optimului pe frontiera domeniului restricțiilor are câteva avantaje importante față de alte metode disponibile:

-asigură o înțelegere mai profundă a procesului de optimizare prin păstrarea sensului fizic al problemei tehnice;

- permite interpretări geometrice prin reprezentarea caracteristicilor motorului (două câte două) în diferite plane;

-pot fi incluse și funcții discontinue (cu variabile discrete);

-nu necesită calculul derivatelor (gradienți).

Pe de altă parte, prin lucrările citate în [S9], Han și Powell dezvoltă o altă metodă generală pentru probleme de optimizare neliniară cu restricții, perfecționată ulterior de Schittkowski. S-a obținut un algoritm puternic și eficient, cu o convergență rapidă cunoscut sub denumirea de "programare pătratică secvențială" (SQP). O aplicație a metodei poate fi urmărită în [S9].

Principalul dezavantaj al metodei Han-Powell constă în necesitatea evaluării derivatelor.

În [H2] se face un studiu comparativ asupra celor două metode de mai sus: metoda căutării pe frontiera restricțiilor și metoda Han-Powell. Se propune în final o combinație a acestor două metode pentru a îmbina avantajele fiecăreia și pentru a reduce timpul de calcul, astfel [H2]:

-se optimizează prima dată variabilele continue cu metoda Han-Powell;

-se mențin aceste variabile continue la valoare constantă și se optimizează variabilele discontinue prin metoda căutărilor pe frontiera restricțiilor ;

-se păstrează variabilele discrete la valoare constantă și se optimizează încă o dată variabilele continue prin metoda Han-Powell.

În comentariile făcute pe marginea lucrării [H3], Appelbaum face următoarea remarcă : "toate metodele de optimizare pentru probleme generale de optimizare neliniară, incluzând și metoda Han-Powell, găsesc un optim local și nu unul global. Metoda de căutare directă pe frontiera restricțiilor găsește optimul global, dar numai pentru probleme cu două variabile. La număr mare de variabile, încrederea, în convergența spre optimul global, scade."

Doar în anumite situații particulare poate fi garantată găsirea optimului global.

Chiar dacă, în viitor , toate aceste dificultăți de ordin matematic pot fi depășite și se va putea garanta găsirea optimului global, pentru un caz general, rămâne problema dificilă (sau imposibilă uneori - cum se afirmă în [H2]) de a construi funcțiile analitice  $F(X)$  și  $G(X)$ . Pentru a exprima funcția criteriului de optimizare (funcția obiectiv) sub o formă explicită, finită, este necesar să se admită o serie întreagă de aproximații, care vor afecta, în consecință, rezultatele obținute, încât optimul găsit va fi incert și sub acest aspect.

Considerăm că matematica este mai puțin răspunzătoare de aceste incertitudini decât domeniul tehnic. Cu alte cuvinte, problema dificilă rămâne, în continuare, în scama inginerului și nu a matematicianului și constă în construirea (elaborarea) celui mai bun model matematic al mașinii electrice.

Așadar, se poate pune și problema optimizării modelelor matematice ale mașinii electrice. Până în prezent, în domeniul optimizării, au fost folosite doar modelele liniare, cu scopul simplificării problemei de optimizare a mașinii.

Natura acestui model matematic al mașinii electrice influențează direct problema de optimizare.

Acest aspect va fi evidențiat în continuare , cu ocazia optimizării circuitului magnetic al mașinii de inducție. Se va constata cum, prin folosirea unui model matematic "de câmp" pentru mașina de inducție, se poate reconsidera problema optimizării construcției mașinii.

## 5.2. GEOMETRIA TRANSVERSALĂ OPTIMĂ

Optimizarea dimensională a mașinii de inducție reprezintă componenta de bază în problema de optimizare globală a mașinii. În general, această componentă poate conduce la îmbunătățirea randamentului mașinii fără adaus de materiale active (fără costuri suplimentare).

Metoda extensivă, de supradimensionare a mașinii în vederea îmbunătățirii randamentului, nu conduce întotdeauna la rezultate favorabile [H3]. Este clar însă că orice combinație de variabile, care determină creșterea randamentului, fără costuri suplimentare, reprezintă o apropiere de optimul global.

O dificultate majoră în problema de optimizare a circuitului magnetic o reprezintă numărul mare de variabile. Din punct de vedere matematic, aceste variabile trebuie să fie independente între ele. Orice relație de legătură, care poate fi exprimată, între două sau mai multe variabile, va reduce numărul acestora și în consecință, gradul de dificultate al problemei.

Geometria transversală a mașinii rezultă din totalitatea dimensiunilor unei perechi de tole stator-rotor și reprezintă o posibilitate de îmbunătățire a proiectului prin apropierea de soluția optimă. Optimizarea geometriei transversale se face, în mod obișnuit în direcția minimizării tensiunilor magnetice în fier, menținând constantă inducția magnetică din întrefier. Sunt determinate astfel anumite variabile (diametre, dimensiuni ale creștături, etc.) care, în orice caz, reprezintă un câștig pe calea spre soluția optimă globală. Din acest motiv, optimizarea geometriei transversale este considerată o "optimizare parțială", întrucât nu implică toate variabilele problemei globale.

Soluția analitică iterativă (SAI) de rezolvare a problemei de câmp, prezentată în Cap.2, oferă o perspectivă nouă asupra problemei de optimizare a geometriei transversale. În cele ce urmează se reconsideră problema optimizării geometriei transversale a mașinii de inducție cu întrefier constant .

### 5.2.1. Considerații preliminare

a) Variabile implicate în geometria transversală. În conformitate cu metoda SAI de soluționare a problemei de câmp, se folosesc următoarele variabile (fig.5.1.), care determină esența geometriei transversale a mașinii de inducție:  $D_c$ ,  $D_i$  - diametrul exterior, respectiv interior, ale tolei statorului;  $D_1$ ,  $D_2$  - diametrele de fund ale

crestăturilor statorului, respectiv rotorului;  $\theta_{d_4}, \theta_{c_4}$  - unghiurile la centru corespunzătoare dintelui stator, respectiv rotor;  $\theta_{c_4}, \theta_{c_2}$  - unghiurile la centru corespunzătoare crestăturii stator, respectiv rotor;  $S_{a1}, S_{a2}$  - ariile suprafețelor geometrice ale crestăturii stator, respectiv rotor;  $\delta$  - întrefierul real al mașinii. Cunoscând numerele de crestături ( $Z_1, Z_2$ ) ale statorului și rotorului se pot scrie următoarele relații de dependență:

$$\theta_{d_4} + \theta_{c_4} = \frac{2\pi}{Z_1}$$

$$\theta_{d_2} + \theta_{c_2} = \frac{2\pi}{Z_2} \quad (5.3)$$

În consecință, numai două din cele patru variabile din (5.3) sunt independente. Se face o schimbare de variabile sub forma:

$$\xi_1 = \frac{\theta_{d_4}}{\theta_{d_4} + \theta_{c_4}} \quad (5.4)$$

$$\xi_2 = \frac{\theta_{d_2}}{\theta_{d_2} + \theta_{c_2}} \quad (5.5)$$

Variabilele independente  $\xi_1$  și  $\xi_2$  caracterizează lățimile dinților din stator, respectiv din rotor, raportate la pașii dentari corespunzători. În felul acesta, ele au caracter general, nefiind legate de anumite valori particulare ale numerelor de crestături.

Pentru  $\xi_1 = \text{constant}$  și  $D_1 = \text{constant}$ , diametrul  $D_1$  este dependent de suprafața crestăturii statorului ( $S_{a1}$ ). Se poate scrie următoarea relație geometrică, în acest sens:

$$D_1 = \sqrt{D_i^2 + \frac{4Z_1 \cdot S_{a1}}{\pi(1 - \xi_1)}} \quad (5.6)$$

În același fel:

$$D_2 = \sqrt{(D_i - 2\delta')^2 - \frac{4Z_2 \cdot S_{a2}}{\pi(1 - \xi_2)}} \quad (5.7)$$

în care  $\delta'$  este întrefierul de calcul (rel. 2.85).

În consecință rămân independente următoarele variabile, legate de geometria transversală:  $D_c, D_i, \xi_1, \xi_2, S_{a1}, S_{a2}$



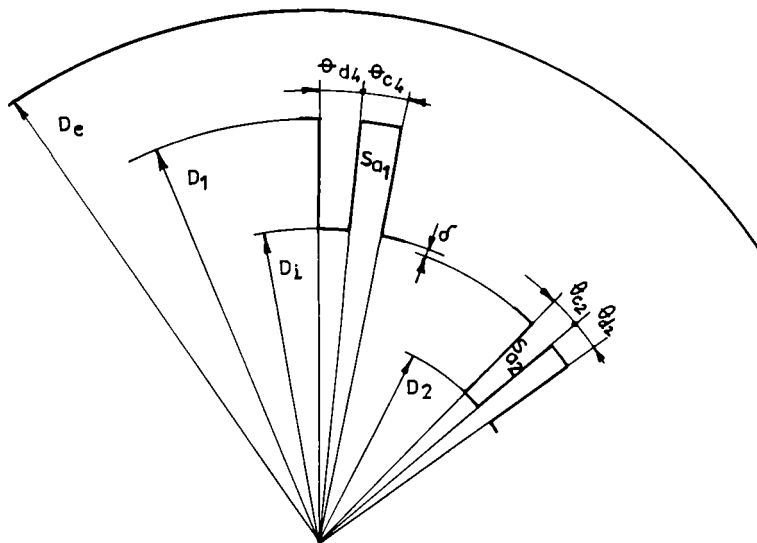


Fig51.Esența geometriei transversale

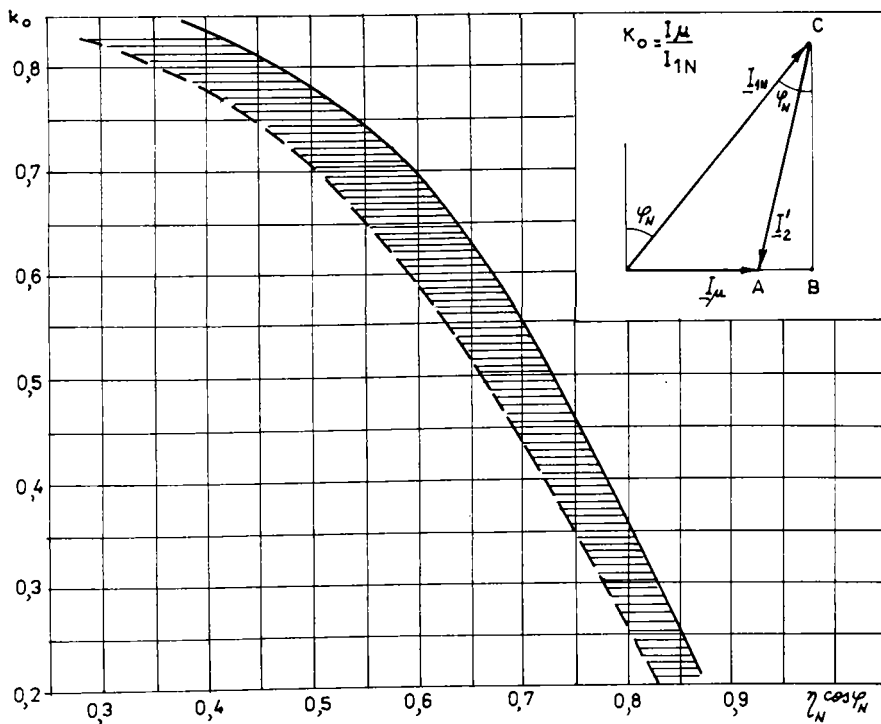


Fig. 5.2. Domeniul practic de variație a coeficientului  $k_0$

b) Raportul dintre curentul de magnetizare și curentul nominal

Se știe că ponderea curentului de magnetizare ( $I_{\mu}$ ), în curentul nominal ( $I_{1N}$ ), este mai mare la mașinile mici și invers. De asemenea ponderea crește la mașinile cu poli mulți. Se notează acest raport cu  $k_0$ ,

$$k_0 = \frac{I_{\mu}}{I_{1N}} \quad (5.8)$$

Folosind rezultatele experimentale efectuate pe un număr foarte mare de motoare de inducție trifazate (cca. 70 de tipuri diferite), cu 2, 4, 6, 8 poli și puteri cuprinse între 0.25 ... 55 kw, s-a constatat dependența din fig. 5.2, dintre  $k_0$  și produsul: randament nominal ( $\eta_N$ ) x factor de putere nominal ( $\cos\varphi_N$ ).

În figură este reprezentată și diagrama fazorială a curenților, cu neglijarea componentei active a curentului de mers în gol. Din triunghiul dreptunghic ABC se deduce relația:

$$\frac{I_2'}{I_{1N}} = \sqrt{1 + k_0^2 - 2k_0 \sin\varphi_N} \quad (5.9)$$

în care s-a utilizat și factorul  $k_0$  definit în (5.8), cu valori cuprinse între cele două curbe din figura 5.2. Relația (5.9) permite aprecierea mărimii curentului rotoric ( $I_2'$ ) raportat la înfășurarea statorului:

$$I_2' = (0,7 \dots 0,9) I_{1N} \quad (5.10)$$

c) Raportul dintre secțiunea totală a creștăturilor din rotor și cea corespunzătoare din stator.

În proiectare, repartizarea pierderilor din înfășurări între stator și rotor se face ținând seama de condițiile de răcire și de condițiile impuse asupra cuplului de pornire. În cazul mașinilor de inducție trifazate, cu rotor în scurtcircuit, cu ventilație exterioară, din cauza dificultăților de evacuare a căldurii din rotor, este necesar ca pierderile din înfășurarea rotorului să fie mai mici decât cele din înfășurarea statorului. Dacă se consideră  $R_2' \cong R_1$ , ținând seama de relația (5.10), se obține:  $P_{cu2} = (0.5 \dots 0.80) P_{cu1}$ .

În aceste condiții încălzirile statorului și rotorului vor fi apropiate, iar condițiile de pornire impuse pot fi îndeplinite fără probleme (așa cum se constată și practic). Întrucât rezistența electrică echivalentă a înfășurării rotorului  $R_2'$  este direct legată de

secțiunea creștăturilor rotorului, se obține de aici un raport corespunzător între secțiunile celor două înfășurări, astfel încât  $R'_2 \cong R_1$ .

Înfășurarea echivalentă a rotorului (identificată prin mărimile notate cu "prim") diferă de înfășurarea reală a statorului prin: material ( $\rho'_{Al} \neq \rho_{cu}$ ), lungimea medie a spirei ( $l'_{Al} \neq l_{cu}$ ), secțiunea conductorului corespunzătoare unei spire ( $q'_{Al} \neq q_{cu}$ ), secțiunea totală a materialului conductor dintr-o creștătură ( $S'_{Al} \neq S_{cu}$ ). Din condiția  $R'_2 = R_1$  se poate scrie:

$$\rho_{cu} \frac{l_{cu}}{q_{cu}} = \rho'_{Al} \frac{l'_{Al}}{q'_{Al}} \quad (5.11)$$

de unde:

$$\frac{q'_{Al}}{q_{cu}} = \frac{S'_{Al}}{S_{cu}} = \frac{l'_{Al} \rho'_{Al}}{\rho_{cu} l_{cu}} \quad (5.12)$$

Practica arată că, în mod obișnuit maxim 45% din secțiunea geometrică a creștăturii statorului poate fi ocupată de cupru ( $S_{cu} = k_u \cdot S_{a1}$ , unde  $k_u \leq 0,45$ ), în timp ce aluminiul înfășurării rotorului ocupă toată creștătura ( $S'_{Al} = S'_{a2}$ ). În consecință:

$$\frac{S'_{a2}}{S_{a1}} = k_u \frac{l'_{Al} \rho'_{Al}}{\rho_{cu} l_{cu}} \quad (5.13)$$

Ultima relație exprimă, de fapt, raportul dintre secțiunea totală a creștăturilor din rotorul echivalent ( $Z_1 S'_{a2}$ ) și cea corespunzătoare ( $Z_1 S_{a1}$ ) din stator (întrucât numărul de creștături ale rotorului echivalent este egal cu cel al statorului).

În cazul rotorului real, când  $Z_1 \neq Z_2$ , raportul (5.13) se păstrează neschimbat, astfel că:

$$\frac{Z_1 S'_{a2}}{Z_1 S_{a1}} = \frac{Z_2 S_{a2}}{Z_1 S_{a1}} = k_u \frac{l'_{Al} \rho'_{Al}}{\rho_{cu} l_{cu}} = k_{21} \quad (5.14)$$

Considerând  $k_u \cong 0,42$ ;  $\frac{\rho'_{Al}}{\rho_{cu}} \cong 1,75$ ;  $\frac{l'_{Al}}{l_{cu}} \cong 0,8$  se obține:

$$Z_2 S_{a2} = k_{21} (Z_1 S_{a1}) \cong 0,6 (Z_1 S_{a1}) \quad (5.15)$$

Valori mai mici ale secțiunii totale a creștăturilor rotorului ( $k_{21} < 0,6$ ) vor conduce la încălziri excesive ale rotorului (cu gradienti termici înspre înfășurarea statorului), iar valori mai mari ( $k_{21} > 0,6$ ) vor determina dificultăți în realizarea condițiilor de pornire.

Pentru cca. 40 de cazuri practice analizate, (existente în fabricație) s-a obținut  $k_{21} = (0,48 \dots 0,68)$ .

Dispersia ușoară care se constată la valorile lui  $k_{21}$  provine mai degrabă din inconsecvența proiectanților și nu din necesități obiective.

Relația (5.15) poate fi considerată ca o legătură justificată de dependență dintre  $S_{a1}$  și  $S_{a2}$ , astfel încât numai una din cele două variabile trebuie considerată independentă.

d) Relația dintre secțiunea geometrică a unei creștături statorice și solenația de excitație din creștătură

Dacă numărul total de spire dintr-o creștătură este  $n_c$ , se poate exprima secțiunea necesară a creștăturii, admitând anumite valori pentru factorul de umplere ( $k_u$ ) și pentru densitatea curentului de conducție ( $J$ ), astfel:

$$S_{a1} = \frac{1}{k_u} \frac{I_{IN} \cdot n_c}{J} \quad (5.16)$$

Utilizând rel. (5.8) se poate obține în continuare:

$$S_{a1} = \frac{1}{k_u} \frac{1}{J} \frac{1}{k_0} (I_\mu \cdot n_c) \quad (5.17)$$

și în final:

$$S_{a1} = \frac{1}{k_u J k_0} \mathcal{G}_c \quad (5.18)$$

unde  $\mathcal{G}_c$  este solenația totală de magnetizare corespunzătoare unei creștături din stator.

Valorile  $\mathcal{G}_c$  pot fi determinate și din pătura de curent ( $A$ ), cunoscând pasul dentar

( $\tau_c$ ):

$$\mathcal{G}_c = (k_0 A) \tau_c \quad (5.19)$$

În procesul de optimizare de mai jos, mărimile  $k_u$ ,  $k_0$ ,  $J$  sunt considerate cunoscute și constante, astfel că rel. (5.18) stabilește o proporționalitate directă între solenația din creștătură ( $\mathcal{G}_c$ ) și suprafața necesară a creștăturii ( $S_{a1}$ ). Constanta de proporționalitate se notează cu  $k_a$

$$k_a = \frac{1}{k_u k_0 J} \quad (5.20)$$

### 5.2.2. Probleme elementare de optim

De regulă, din tema de proiectare a mașinii de inducție se cunosc: puterea utilă nominală ( $P_N$ ), randamentul nominal ( $\eta_N$ ), factorul de putere nominal ( $\cos\phi_N$ ), viteza de rotație.

Sinteza geometriei transversale a mașinii ține seama de aceste date și se face pe baza unui criteriu de optim definit astfel: pentru un diametru exterior fixat, este optimă acea geometrie transversală care, în prezența unor surse de câmp date, determină o inducție magnetică maximă, într-un întrefier dat.

Stabilirea acestui criteriu s-a făcut ținând seama de specificul problemei de câmp soluționată în Cap. 2 . Se știe că, în problemele de câmp, sursa câmpului este curentul de magnetizare (sau solenația crestăturii  $-\mathcal{G}_c$ ), care determină în întrefier o anumită inducție magnetică.

Valabilitatea criteriului de maximizare a inducției magnetice ( $B_\delta$ ) poate fi susținută și prin următoarele observații:

-Întrucât solenația de magnetizare este constantă, maximizarea tensiunii magnetice pe întrefier este echivalentă cu minimizarea tensiunii magnetice pe restul circuitului (porțiunile feromagnetice). Astfel, criteriul propus mai sus, include criteriul clasic de optimizare a geometriei transversale prin minimizarea tensiunilor magnetice din fier:

-Întrucât  $\mathcal{G}_c = \text{constant}$  , creșterea inducției magnetice din întrefier nu conduce la creșterea curentului de magnetizare și nici la scăderea factorului de putere al mașinii;

-Creșterea inducției  $B_\delta$  conduce la creșterea t.e.m. induse și, în consecință, la creșterea puterii mașinii (proporțională cu produsul  $A B_\delta$  );

-Maximizarea inducției din întrefier, la solenație constantă, este echivalentă cu minimizarea solenației de magnetizare la inducție constantă;

-Maximizarea inducției  $B_\delta$  (flux magnetic maxim pe unitatea de lungime a mașinii), la  $\mathcal{G}_c = \text{constant}$  , conduce la cea mai favorabilă caracteristică magnetică de mers în gol, a mașinii.

Folosind metoda SAI de soluționare a problemei de câmp și adoptând în toate situațiile criteriul de maximizare a inducției  $B_\delta$  au fost analizate posibilitățile de optimizare a geometriei transversale a mașinii de inducție cu întrefier constant. Rezultatele acestei analize sunt prezentate mai jos sub forma a trei probleme tip, care reprezintă trei etape distincte în sinteza optimă a geometriei transversale.

## **Problema P1**

Prima analiză se referă la influența dimensiunilor creștăturii statorice, respectiv rotorice, asupra inducției magnetice din întrefier. Se urmărește determinarea unor valori optime în cazul variabilelor  $\xi_1$  și  $\xi_2$ . Problema poate fi enunțată în felul următor:

Se dau valori constante următoarelor variabile incluse în geometria transversală:

- diametrul exterior  $D_e$  ;
- diametrul interior  $D_i$  ;
- suprafața creștăturilor statorului  $S_{a1}$ .

Suprafața creștăturilor rotorului este legată de cea a statorului prin rel. (5.15).

Să se determine valorile optime  $\xi_1^0$  și  $\xi_2^0$  care determină maximizarea inducției  $B_\delta$ .

Cunoscând sursa câmpului (prin relația 5.18), metoda SAI permite determinarea inducției magnetice din întrefier, conform algoritmului expus anterior (fig. 2.4).

În aceste condiții, se determină variația funcției reale de o singură variabilă  $B_\delta(\xi_1)$ , considerând, succesiv, unele variabile ca parametru, pentru cazul:  $D_e = 0.184\text{m}$ ,  $D_i = 0.102\text{m}$ ,  $S_{a1} = 0.00011\text{m}^2$ ,  $\delta = 0.00035\text{m}$ ,  $2p = 2$ . Rezultatele calculelor sunt prezentate în fig. 5.3, după cum urmează:

-Fig. 5.3 a) prezintă inducția  $B_\delta$  în raport cu  $\xi_1$ , având ca parametru solenația Raportul  $\xi_2$  este menținut constant ( $\xi_2 = 0.55$ ). În figură se reprezintă și variația permeabilității magnetice relative a jugului ( $\mu_j / \mu_0$ ), respectiv a dinților ( $\mu_d / \mu_0$ ), în funcție de raportul  $\xi_1$ .

Inducția  $B_\delta$  obține valori mai mari, pentru solenații de excitație  $\mathcal{G}_c$  mai mari, dar valoarea optimă ( $\xi_1^0$ ) a variabilei  $\xi_1$  nu depinde de mărimea solenației. În consecință, determinarea lui  $\xi_1^0$  se face la o valoare "rezonabilă"  $\mathcal{G}_c$ , care determină inducții maxime  $(B_\delta)_{\max} = (0.8 \dots 1)\text{T}$ . Aceste valori "rezonabile", ale solenației de magnetizare, pot fi apreciate ușor folosind rel. (5.19);

-În fig. 5.3b) se reprezintă funcția  $B_\delta(\xi_1)$ , având ca parametru raportul  $\xi_2$ . Valoarea solenației este menținută constantă ( $\mathcal{G}_c = 132\text{A}$ ). Două aspecte importante pot fi remarcate aici: i) Valoarea optimă  $\xi_1^0$ , determinată anterior, rămâne neschimbată, oricare

ar fi valoarea parametrului  $\xi_2$ . ii) Pentru o valoare  $\xi_1$  constantă, există o valoare optimă  $\xi_2^0$  care maximizează funcția  $B_8(\xi_2)$ ; pentru  $\xi_2 = 0.55$  se obțin cele mai mari valori ale inducției din întrefier.

În consecință, s-a elaborat următorul algoritm numeric (fig.5.4) pentru determinarea valorilor optime  $\xi_1^0$  și  $\xi_2^0$  în două etape, cu două subrutine diferite și anume:

1) Pentru  $\xi_2 = 0.5$ , se determină valoarea  $\xi_1^0$ , prin găsirea maximului funcției  $B_8(\xi_1)$ .

2) Pentru  $\xi_1 = \xi_1^0$ , se determină valoarea  $\xi_2^0$ , prin găsirea maximului funcției  $B_8(\xi_2)$ .

Cu scopul îmbunătățirii valorilor optime găsite, algoritmul poate fi parcurs de mai multe ori. Calculele iterative au arătat că este suficient dacă se repetă doar punctul 1) de mai sus, pentru o singură "ajustare" a valorii  $\xi_1^0$ , nefiind necesară continuarea iterațiilor.

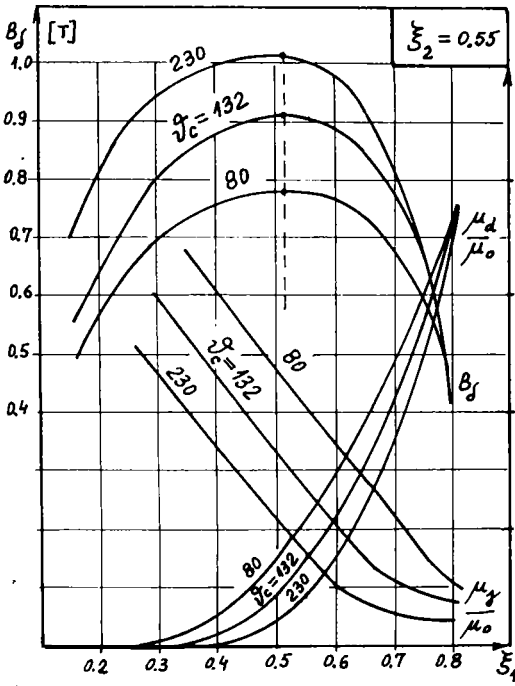
- Figura 5.3c) prezintă influența calității materialului feromagnetic asupra dimensiunilor optime ale crestăturii. Celelalte mărimi sunt menținute constante ( $\xi_2 = 0.55$ ,  $\mathcal{G}_c = 132A$ ). Cele trei sorturi de tablă silicioasă sunt caracterizate prin trei curbe diferite de magnetizare (cu  $B_{25} = 1,4T/1,53T/1,62T$ ). Valoarea optimă  $\xi_1^0$ , determinată anterior, rămâne neschimbată la modificarea calității materialului feromagnetic.

- Figura 5.3d) prezintă variația funcției  $B_8(\xi_1)$ , având ca parametru aria suprafeței crestăturii stator ( $S_{a1}$ ), celelalte mărimi fiind constante ( $\xi_2 = 0.55$ ,  $\mathcal{G}_c = 132A$ ). Cele trei curbe  $B_8(\xi_1)$  arată că, la modificarea parametrului  $S_{a1}$ , se modifică valoarea optima  $\xi_1^0$ . Este prima încercare de a studia influența uneia din variabilele menținute constante în ipoteza problemei P1. Cu alte cuvinte, este o încercare de a ieși din limitele problemei P1.

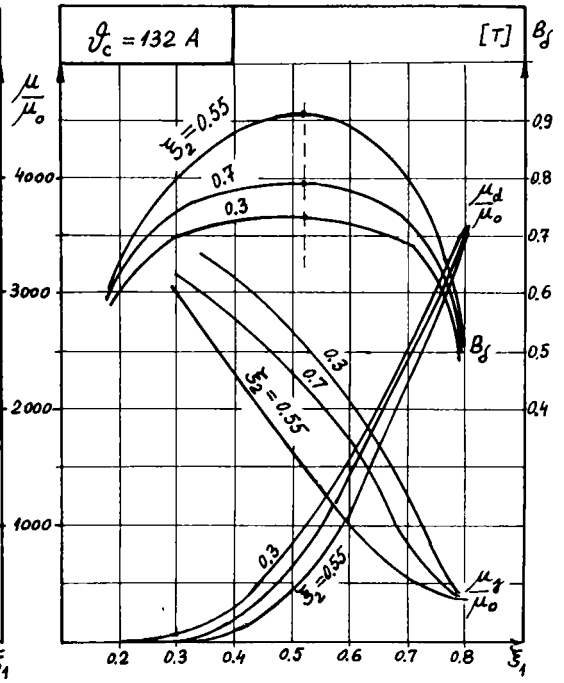
De altfel, problema P1, enunțată mai sus, poate fi considerată rezolvată, prin faptul că determină valorile optime  $\xi_1^0$  și  $\xi_2^0$ , pentru valori date ale variabilelor:  $D_c$ ,  $D$ ,  $S_{a1}$ .

Curbele din fig. 5.3d) generează o nouă problemă și anume: cum se determină aria suprafeței  $S_{a1}$ , întrucât valoarea ei trebuie cunoscută în problema P1 ?.

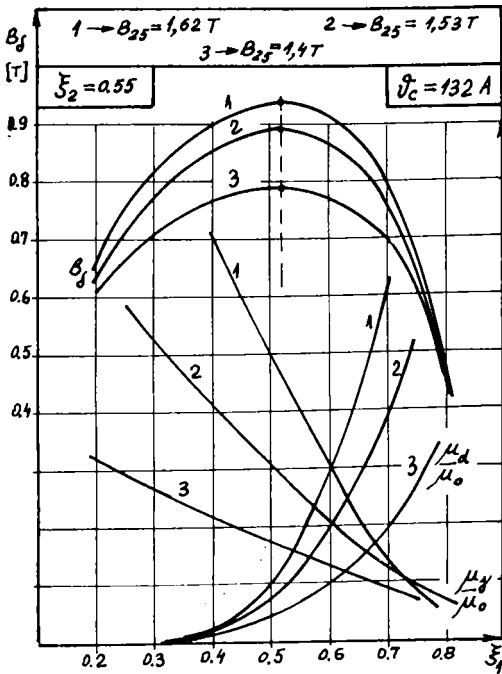
Aceasta este tema problemei care urmează.



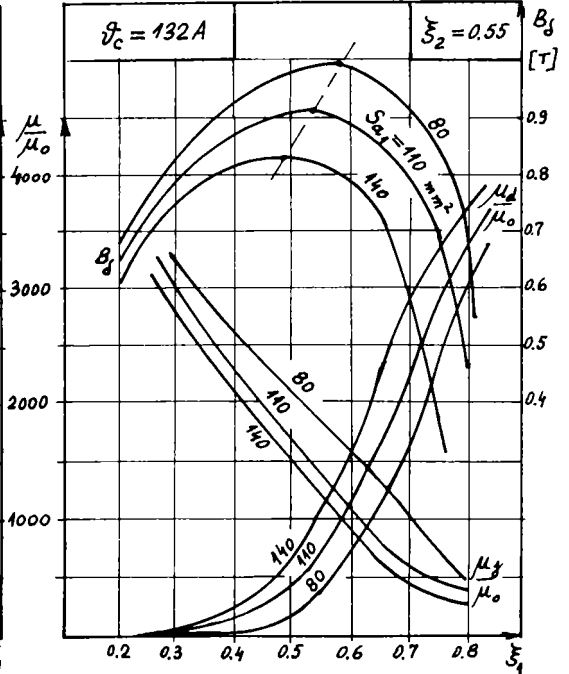
a)



b)



c)



d)

Fig. 5.3. Analiza problemei P1



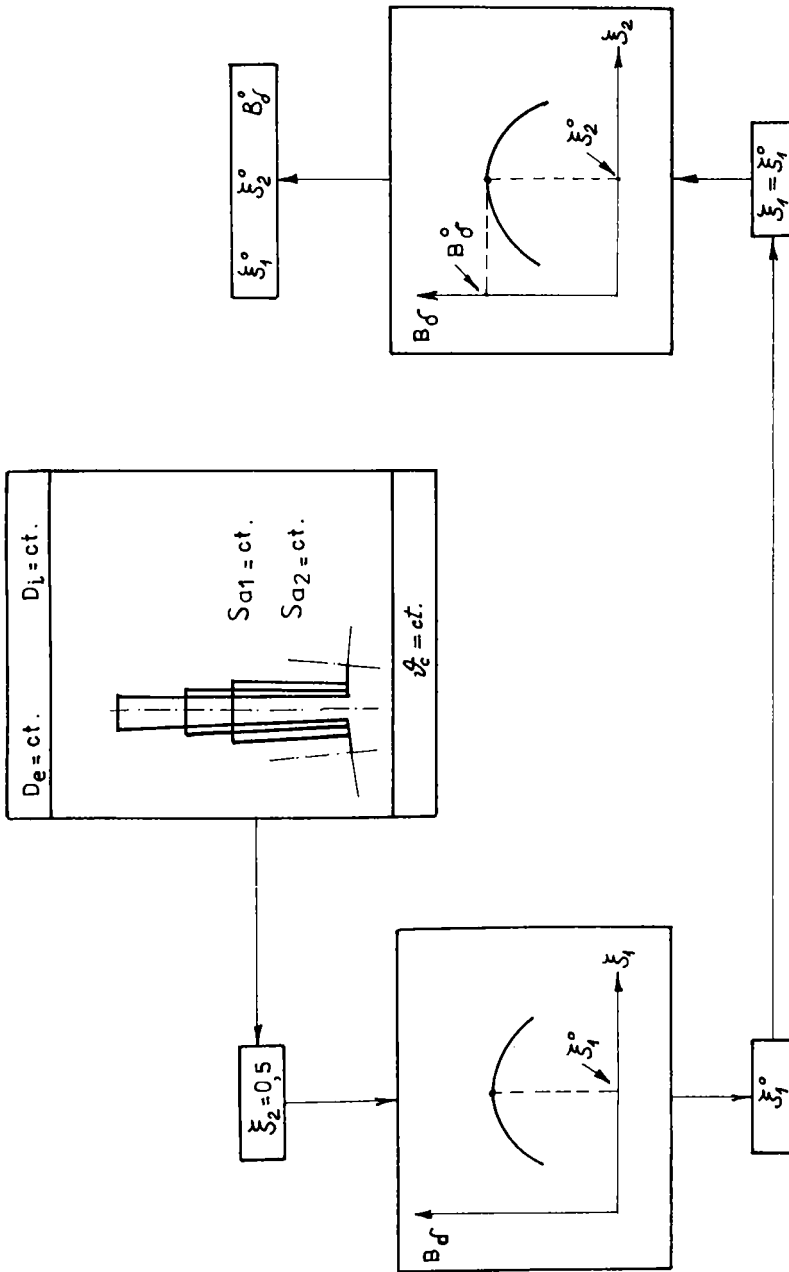


Fig.5.4. Algoritmul problemei P1

## Problema P2

Dacă P1 a fost problema variabilelor  $\xi_1$  și  $\xi_2$ , atunci P2 este problema variabilei  $S_{a1}$ . În cele ce urmează se studiază variația inducției din întrefier în raport cu  $S_{a1}$ . Se consideră următorul enunț:

Se dau valori constante variabilelor :

-- diametrul exterior ( $D_e$ ) ;

- diametrul interior ( $D_i$ ) ;

Aria suprafeței creștăturii statorului ( $S_{a1}$ ) este variabilă, fiind proporțională cu solenația creștăturii, conform rel. (5.18).

Aria suprafeței creștăturii rotorului ( $S_{a2}$ ) este determinată de cea a statorului prin rel. (5.15).

În aceste condiții se caută valoarea maximă a inducției din întrefier, conform criteriului definit mai sus.

Pentru efectuarea calculelor este necesar să se stabilească valorile celor trei constante ( $k_u$ ,  $k_v$ ,  $J$ ) din (5.18). Din fig. 5.2., folosind curba extremă (trasată cu linie continuă) se determină  $k_v$ , cunoscând produsul impus ( $\eta_N \cos(\varphi_N)$ ). Pentru  $k_u$  se ia valoarea  $k_u \cong 0.42$ , care asigură o umplere acceptabilă a creștăturii. Valoarea densității de curent ( $J$ ) se impune ținând seama de sistemul de răcire a mașinii și de celelalte recomandări clasice [D4, P5, C5, V8]. În consecință, prin rel. (5.18), aria  $S_{a1}$  devine direct proporțională cu solenația de magnetizare. Această proporționalitate este normală, întrucât o solenație mai mare are nevoie de un spațiu de creștătură proporțional mai mare, pentru ca factorul de umplere să rămână constant.

În privința calculelor, problema P2 reprezintă o succesiune de probleme P1, cum se poate constata din fig. 5.5. Pentru fiecare valoarea dată solenației  $\mathcal{G}_c$  se determină valorile optime  $\xi_1^0$ ,  $\xi_2^0$ ,  $B_\delta^0$ , conform problemei P1. Repetând acest ciclu de calcul de mai multe ori, se obține curba  $B_\delta^0(\mathcal{G}_c)$ , care are un maxim (fig 5.6). Solenația  $\mathcal{G}_c$ , pentru care se obține valoarea maximă ( $B_\delta^0)_{\max} = B_\delta^{(0)}$ , este solenația optimă de magnetizare  $\mathcal{G}_c^0$ , pentru tola de diametre date ( $D_e$ ,  $D_i$ ). Relația liniară de legătură, dintre  $\mathcal{G}_c$  și  $S_{a1}$ , permite folosirea celor două axe abscise simultan. Solenația optimă  $\mathcal{G}_c^0$  determină imediat și o suprafață "optimă"  $S_{a1}^0$  a creștăturii. În fig. 5.7 se prezintă rezultatele de calcul pentru cazul:

$D_c=0.184\text{m}$ ,  $D_i=0.098\text{m}$ ,  $\delta=0.00035\text{m}$ ,  $2p=2$ ,  $k_o=0.48$ ,  $k_u=0.42$ ,

$J=6 \cdot 10^6$  și  $k_a=0.83 \cdot 10^{-6}$  obținut din (5.20).

Curba  $B''_8(\vartheta_c)$  are un maxim  $B''_8 = 0.895T$ , pentru  $\vartheta_c^0 = 110\text{A}$  ( $S''_{a1} = 92\text{mm}^2$ ).

Întrucât cele două diametre  $D_c$  și  $D_i$  sunt constante, creșterea suprafeței creștăturilor ( $Z, S_{a1}$ ) duce la scăderea suprafeței “feromagnetice” și invers. În consecință, este firesc să existe un optim al raportului celor două suprafețe (deci o valoare optimă  $S''_{a1}$ ).

Pe aceeași figură s-a reprezentat și curba de variație a produsului ( $AB_\delta$ ), întrucât este cunoscută și pătura de curent, prin rel.(5.19). Pentru  $\vartheta_c^0$ , de pe această curbă se poate determina valoarea optimă a produsului ( $AB_\delta$ )<sup>0</sup>, corespunzător punctului  $M''$ .

Dreapta  $\vartheta_c = \vartheta_c^0$  împarte domeniul în două zone:

-În partea stângă ( $\vartheta_c < \vartheta_c^0$ , sau  $S_{a1} < S''_{a1}$ ), există posibilitatea creșterii inducției din întrefier prin creșterea solenației. Aici materialul feromagnetic “suport” solenația de magnetizare, întrucât suprafața “feromagnetică” este excedentară;

-În partea dreaptă ( $\vartheta_c > \vartheta_c^0$ ,  $S_{a1} > S''_{a1}$ ), la creșterea solenației de magnetizare, inducția din întrefier scade. Suprafața feromagnetică este deficitară în această zonă; solenația a devenit prea mare pentru suprafața dată prin diametrele  $D_c$  și  $D_i$ . Suprasolicitarea fierului, în zona aceasta, este neeconomică (cu solenație mai mare se obține o inducție în întrefier mai mică).

În consecință, punctul de maxim al curbei  $B''_8(\vartheta_c)$  determină solenația optimă  $\vartheta_c^0$  și suprafața optimă alocată creștăturii  $S''_{a1}$ , pentru o tolă cu  $D_c$  și  $D_i$  date.

Din problema P2 se rețin valorile  $\vartheta_c^0$  și  $S''_{a1}$ , împreună cu valorile optime corespunzătoare  $B''_8^{(0)}$ ,  $\xi_1^{(0)}$ ,  $\xi_2^{(0)}$ .

Se știe că puterea mașinii electrice este proporțională cu dimensiunile sale principale și cu solicitările electromagnetice (produsul  $AB_\delta$ ).

Curba din fig. 5.7 arată că puterea mașinii electrice poate fi mărită în continuare prin produsul  $AB_\delta$ , care obține valori tot mai mari în dreapta punctului  $M''$ . Ținând seama de cele de mai sus, valoarea optimă a produsului  $AB_\delta$  este cea corespunzătoare punctului  $M''$  și reprezintă contribuția optimă a secțiunii transversale la creșterea puterii mașinii.

Dacă se dorește o creștere suplimentară a puterii, aceasta se va face, în continuare, pe alte căi și anume, prin creșterea dimensiunii longitudinale a mașinii, nu

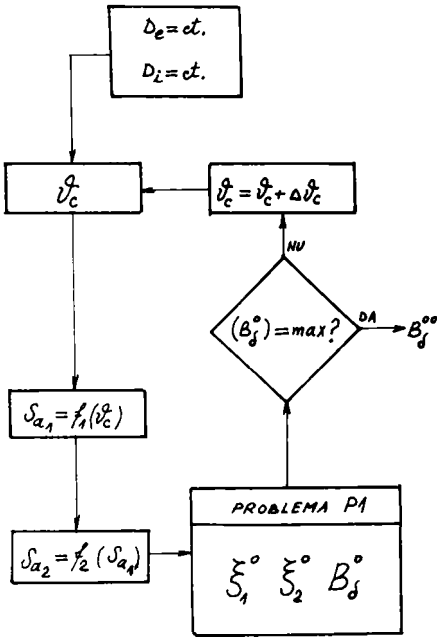


Fig.5.5. Algoritmul problemei P 2

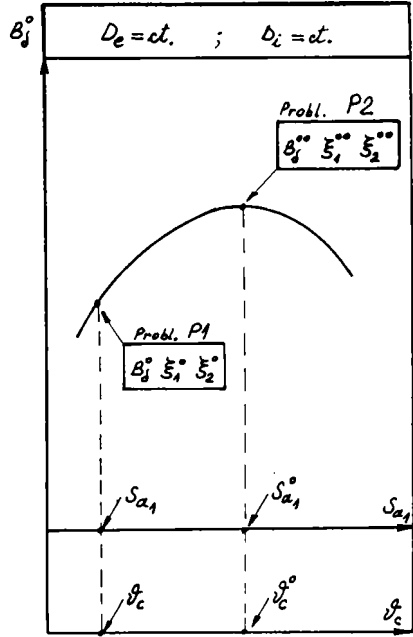


Fig.5.6. Prezentarea problemei P2

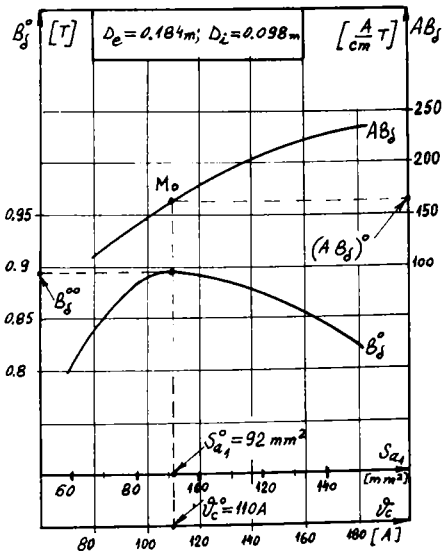


Fig.5.7. Exemplu de calcul (P2)

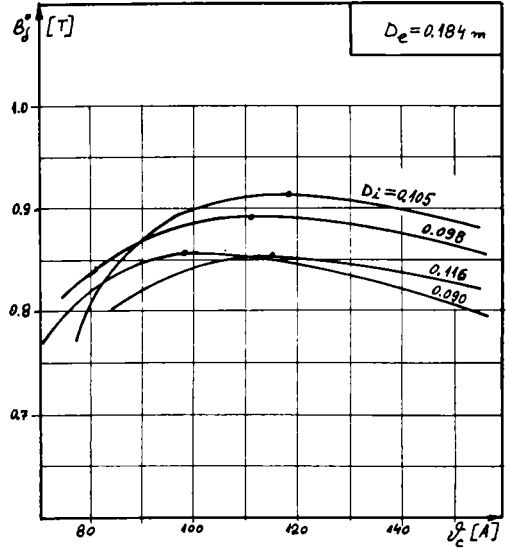


Fig.5.8. Exemplu de calcul (P2)

prin suprasolicitarea unei secțiuni transversale date (limitată de  $D_e$  și  $D_i$ ). Valoarea optimă a produsului  $AB_\delta$  conduce la valori optime pentru coeficienții fundamentali: constanta mașinii, efortul tangențial mediu, coeficientul de utilizare.

În fig. 5.8 se prezintă mai multe curbe  $B_\delta^0(\mathcal{G}_c)$  pentru câteva valori diferite ale diametrului interior  $D_i$ . Există o anumită valoare  $D_i$ , pentru care se obține inducție  $B_\delta^{00}$  maximă.

Rezultă de aici încă o posibilitate de maximizare a inducției  $B_\delta$  și anume în raport cu diametrul interior  $D_i$ . Acest aspect este urmărit în problema următoare.

### **Problema P3**

Această etapă tratează problema variabilei  $D_i$ . Pentru generalizare, se face următoarea schimbare de variabilă:

$$k_D = \frac{D_i}{D_e} \quad (5.21)$$

astfel că, noua variabilă a problemei P3 este  $k_D$ .

Pentru un diametru interior dat, problema P3 se reduce la P2. Cu alte cuvinte, P3 reprezintă o succesiune de probleme P2, rezolvate pentru valori diferite ale variabilei  $k_D$ .

Se caută valoarea optimă  $k_D^0$  care maximizează inducția magnetică din întrefier. Problematika este redată, pe scurt, în fig. 5.9. Problema P3 este cea de-a treia etapă (și ultima) de maximizare a inducției magnetice din întrefier.

Fiecare punct al curbei  $B_\delta^{00}(k_D)$  se determină conform problemei P2 și apoi se reține valoarea maximă  $B_\delta^{00}$ .

În fig. 5.10 se prezintă rezultatele de calcul pentru cazul:  $D_e = 0.184\text{m}$ ,  $\delta = 0.00035\text{m}$ ,  $2p = 2$ ,  $k_a = 0.83 \cdot 10^{-6}$ . Curba  $B_\delta^{00}(k_D)$  are un maxim pentru o anumită valoare a diametrului interior, care este valoarea optimă căutată ( $k_D^0 = 0.58$ ). Pe aceeași figură este reprezentată și funcția  $S_{a1}^0(k_D)$ , care obține valoare maximă pentru același  $k_D^0 = 0.58$ .

Coincidența nu este întâmplătoare: echilibrul optim dintre suprafața "feromagnetică" și cea a creștăturilor, dobândit prin rezolvarea problemei P2, se reflectă aici la orice diametru interior.

Pentru  $k_D > k_D^0$ , se reduce suprafața totală disponibilă statorului, iar pentru  $k_D < k_D^0$ , cea disponibilă rotorului. Dacă  $k_D = k_D^0$ , se realizează echilibrul optim între cele două

suprafețe (stator-rotor) și, în consecință, la acest diametru interior se poate realiza cea mai mare suprafață optimă (max  $S_{\text{ai}}^0$ ) a creștăturilor și cea mai mare inducție în întrefier (conform fig. 5.10).

Timpul de calcul consumat pentru curba  $B_{\delta}^{\text{opt}}(k_D)$  este cca. 7 minute pe un calculator de tip PC 486, cu coprocesor matematic.

Existența unui diametru interior optim (definit de  $k_D^0$ ) se constată prin calcul pentru oricare alt caz concret.

Cu determinarea valorii optime  $k_D^0$ , problema P3 poate fi considerată încheiată. În etapele anterioare, de fiecare dată, s-a încercat o generalizare a problemei. De data aceasta generalizarea este urmărită prin studiul influenței diametrului exterior  $D_e$ .

Este extrem de interesant de constatat că valoarea optimă ( $k_D^0$ ) a raportului diametrelor nu depinde de diametrul exterior  $D_e$  (fig. 5.11a).

Pentru  $k_D^0 = 0.58$  se obține maximum inducției în întrefier, la orice valori  $D_e = (0,16\text{m} \dots 0,2\text{m})$ , ale diametrului exterior al tolei stator.

Toate curbele din fig. 5.11a) sunt obținute pentru  $\delta = 0.00035\text{m}$ ,  $k_a = 0.83 \cdot 10^{-6}$  și, din acest motiv, inducția magnetică din întrefier obține valori tot mai mari, la creșterea diametrului exterior, ca o consecință a “relaxării magnetice” a materialului feromagnetic. În cazurile practice, la creșterea diametrului exterior  $D_e$ , vor crește și valorile  $k_a$  și  $\delta$ , astfel încât, valoarea maximă a inducției magnetice din întrefier nu va depăși 1T, oricât de mare ar fi  $D_e$ .

S-au efectuat astfel de calcule pentru tole (în cazul  $2p = 2$ ) având diametre exterioare din ce în ce mai mari, până la  $D_e = 0.4\text{m}$ .

Este remarcabilă concluzia care poate fi desprinsă în urma acestor calcule: invarianța raportului optim  $k_D^0$  pentru un numărul dat de poli. Pentru  $2p = 2$ , oricare ar fi valoarea diametrului exterior ( $D_e$ ), valoarea optimă a raportului diametrelor este  $k_D^0 = 0.58$ .

Subiectivitatea alegerii constantelor  $k_a$ ,  $k_q$ ,  $J$  din rel. (5.20) este analizată în fig. 5.11b). Multiplicarea valorii  $k_a = 0.83 \cdot 10^{-6}$  cu factori supraunitari, sau subunitari (ca efect al modificării uneia din cele trei constante componente), nu influențează valoarea optimă găsită anterior ( $k_D^0 = 0.58$ ); atribuirea unor valori particulare constantelor  $k_a$ ,  $k_q$ ,  $J$  nu alterează generalitatea optimului găsit ( $k_D^0$ ).

Un alt test asupra obiectivității valorii  $k_D^0 = 0.58$  poate fi urmărit în fig. 5.11c. Comentariile făcute anterior în legătură cu rel. (5.14) și (5.15) conduc la cea mai bună valoare a coeficientului  $k_2$ , care definește raportul dintre secțiunea totală a creștăturilor

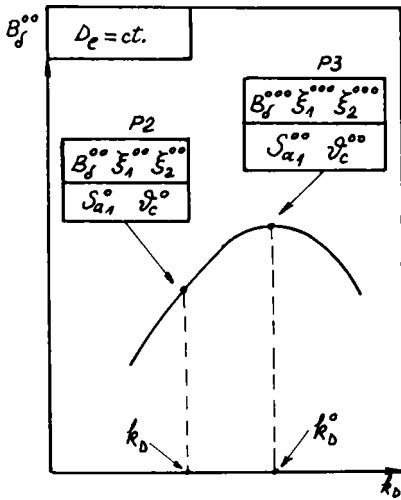


Fig. 5.9. Prezentarea problemei P 3

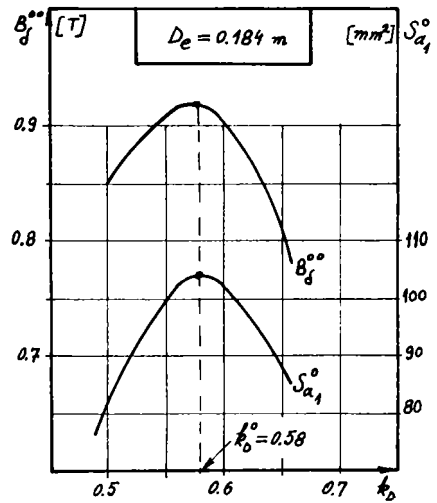


Fig. 5.10. Exemplet de calcul (P 3)

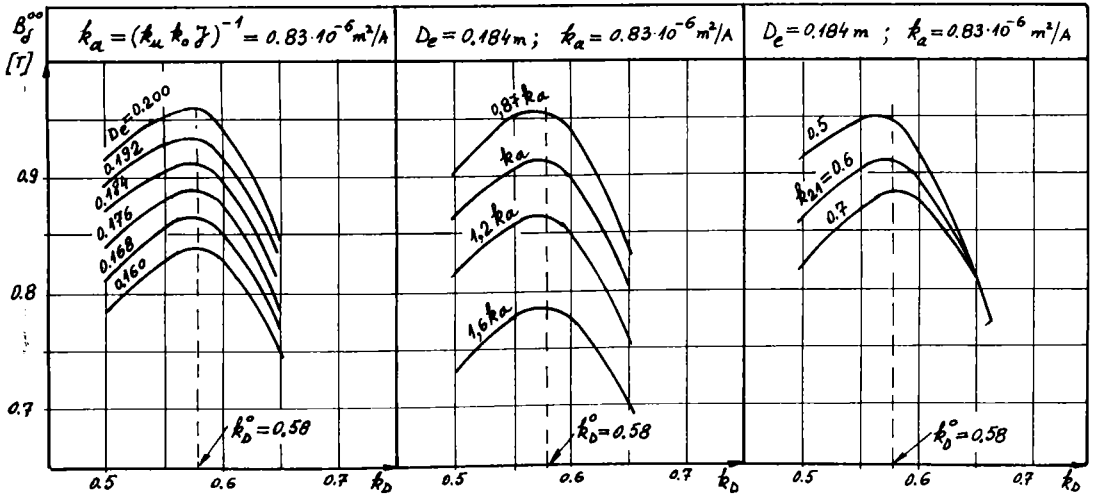


Fig. 5.11. Analiza problemei P 3

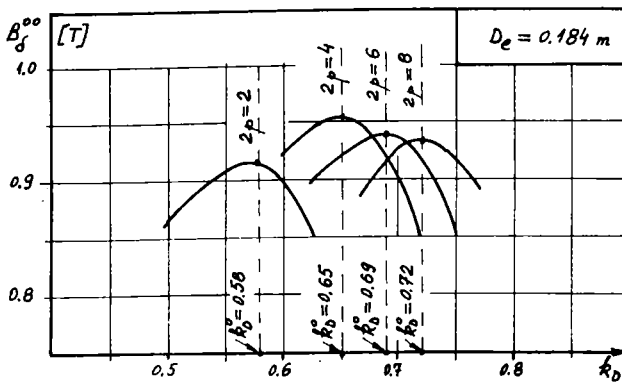


Fig. 5.12. Influența numărului de poli asupra valorii  $k_D^0$

din rotor și cea corespunzătoare din stator ( $k_{21} \cong 0.6$ ), pentru o mașină de inducție având în rotor o colivie din aluminiu turnat sub presiune. Chiar și pentru alte valori  $k_{21} = (0,5 \dots 0,7)$ , fig. 5.11c arată că optimul raportului diametrelor rămâne, practic, la aceeași valoare  $k_D^0 = 0.58$ .

În fine, în urma calculelor efectuate, se poate afirma că nici calitatea materialului feromagnetic (curba de magnetizare) nu afectează valoarea optimă găsită  $k_D^0 = 0.58$ .

Singura mărime, care modifică semnificativ valoarea optimă a raportului diametrelor, este numărul de poli ai mașinii.

În fig. 5.12 se pot urmări influența numărului de poli asupra lui  $k_D^0$ , precum și valorile optime găsite:

$$\begin{aligned} k_D^0 &\cong 0.58 \text{ pentru mașini de inducție cu } 2p = 2 \text{ poli} \\ k_D^0 &\cong 0.65 \text{ pentru } 2p = 4 \text{ poli} \\ k_D^0 &\cong 0.69 \text{ pentru } 2p = 6 \text{ poli} \\ k_D^0 &\cong 0.72 \text{ pentru } 2p = 8 \text{ poli} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Rezultatele obținute, exprimate în rel. (5.22), permit ocolirea problemii P3, rezolvarea ei nefiind necesară pentru fiecare caz în parte, întrucât raportul optim între diametre ( $D_i / D_c$ ) se dovedește a fi o constantă, ce depinde numai de numărul de poli ai mașinii.

În final se poate afirma că, în condițiile de mai sus, există o geometrie transversală optimă, univoc determinată, pentru un diametru exterior dat și un număr dat de poli. Această geometrie transversală reprezintă modul rațional de a folosi materialul feromagnetic al unei tole cu diametrul exterior dat, având în vedere criteriul de optim adoptat mai sus.

Geometria transversală optimă se obține prin calcul, numai din considerente de natură magnetică și exprimă raporturi echilibrate între "suprafața feromagnetică" și suprafața creștăturilor, între înălțimea și lățimea creștăturilor, între suprafața transversală repartizată statorului și cea rămasă rotorului.

Sub forma prezentată mai sus, optimizarea geometriei transversale este echivalentă cu optimizarea caracteristicii circuitului magnetic principal (raportată la unitatea de lungime a mașinii) și, în consecință, poate fi privită ca o problemă independentă.

Posibilitatea optimizării separate a geometriei transversale simplifică extrem de mult problema optimizării globale a mașinii.



### 5.3 DETERMINAREA OPIMULUI GLOBAL

Toate variabilele independente, implicate în geometria transversală, au fost determinate prin valorile lor optime, cu excepția diametrului exterior  $D_e$ . Analizând condițiile în care s-a obținut optimul geometriei transversale se stabilesc, în această etapă, variabilele independente care determină optimul global. Prima dintre acestea este diametrul exterior ( $D_e$ ).

În privința mărimilor  $k_{21}$ ,  $k_u$ ,  $k_0$ , din rel. (5.15) și (5.18) s-au făcut precizări în paragraful 5.2.1. Valorile lor sunt menținute constante în timpul calculelor, Densitatea de curent  $J$ , din relația (5.18), trebuie privită în această etapă ca variabilă independentă, îndeosebi atunci când funcția-obiectiv adoptată include randamentul, sau costul pierderilor de energie în exploatare.

În consecință, pentru etapa determinării optimului global rămân două variabile independente:  $D_e$  și  $J$ .

Chiar dacă nu creează dificultăți în rezolvarea problemei, adăugarea altor variabile la cele două de mai sus este discutabilă.

În continuare se prezintă un algoritm simplu de determinare a optimului global pentru cazul celor două variabile independente ( $D_e$ ,  $J$ ).

La o mașină electrică de putere dată, dimensiunea sa longitudinală este legată de valoarea diametrului interior. Este cunoscută relația dintre puterea aparentă ( $S_N$ ), dimensiunile principale ( $D_i$ ,  $L_i$ ) și viteza de rotație ( $n$ ), în cazul mașinilor de curent alternativ:

$$S_N = CnD_i^2L_i \quad (5.23)$$

unde  $C$  este constanta mașinii (constantă lui Esson), sau coeficientul de utilizare:

$$C = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} k_w (A \cdot B_s) \quad (5.24)$$

Valoarea optimă  $(AB_s)^0$  a produsului  $AB_s$ , determinată în problema P2 de mai sus, stabilește un coeficient optim de utilizare:

$$C^0 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} k_w (A \cdot B_s)^0 \quad (5.25)$$

Ținând seama de valoarea optimă  $k_D^0$  a raportului diametrelor (din problema P3), relația (5.23) devine:

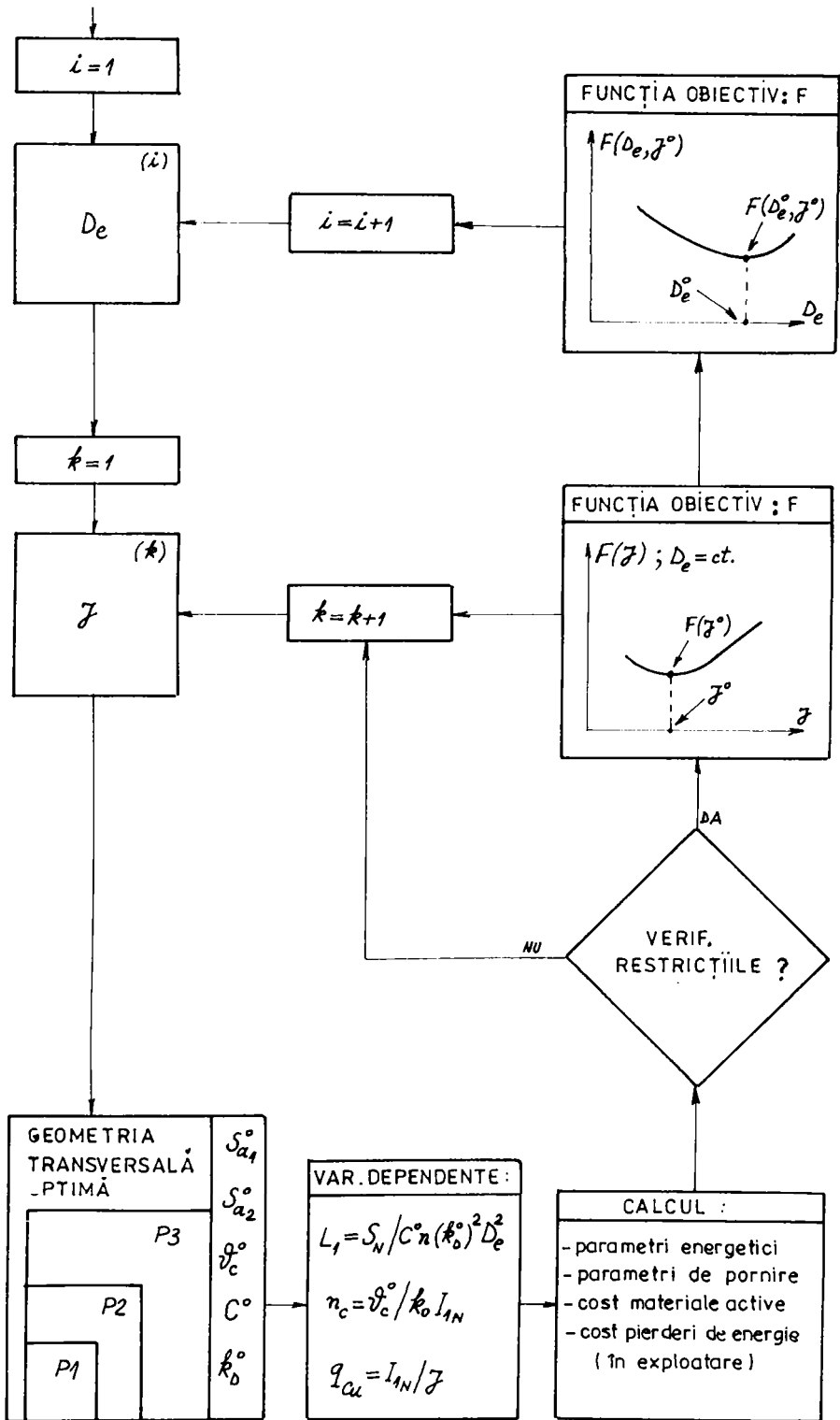


Fig. 5.13, Algoritm de optimizare globală

$$S_N = C^0 n (k_D^0)^2 D_c^2 L_1 \quad (5.26)$$

De regulă, în problemele practice, puterea mașinii și viteza de rotație sunt cunoscute, astfel că ultima relație asigură dependența lungimii statorului ( $L_1$ ) de diametrul său exterior ( $D_c$ ).

Din punct de vedere matematic această etapă reprezintă o problemă de optimizare neliniară cu restricții care se rezolvă iterativ conform schemei de calcul din fig. 5.13 parcurgând următoarele etape:

1. Se adoptă o valoare inițială pentru variabila  $D_c$  ;
2. Se inițializează variabila  $J$ ;
3. Cu acestea se determină geometria transversală optimă conform problemelor P1, P2 , P3 de mai sus;
4. Cu ajutorul valorilor optime obținute ( $C^0$ ,  $k_D^0$  ,  $\vartheta^0$ ) se determină lungimea statorului ( $L_1$ ) din relația (5.26); numărul de spire pe crestătură ( $n_s$ ) ținând seama că  $I_{\mu} = k_0 I_{1N}$ ; secțiunea conductorului de bobinaj ( $q_{cs}$ ). Sunt cunoscute astfel principalele mărimi necesare calculului parametrilor mașinii (cu excepția unor detalii constructive care se stabilesc pe baza experienței practice și a unor recomandări);
5. Utilizând modelul schemei electrice echivalente a mașinii de inducție trifazate, cu datele constructive anterioare se efectuează un calcul complet al performanțelor: parametri energetici, supratemperatura înfășurărilor, parametri de pornire, costul materialelor active, costul pierderilor de energie (corespunzătoare unei perioade date de exploatare);
6. Se repetă de câteva ori acest ciclu (punctele 2...5) cu valori diferite ale densității de curent, reținând doar soluțiile care satisfac restricțiile impuse alături de valorile funcției-obiectiv alese. Se obține curba de variație a acestei funcții în raport cu variabila  $J$ , pentru valoarea dată  $D_c$ ;
7. Se determină valoarea minimă  $F(J^0)$  a funcției - obiectiv  $F(J)$ ;
8. Repetând calculul, cu alte valori ale diametrului  $D_c$ , se obține curba finală de variație a funcției-obiectiv în raport cu  $D_c$ , formată din valorile minime  $F(J^0)$  determinate la punctul 7;
9. Se află minimul funcției  $F(D_c)$  care reprezintă optimul global căutat. Valoarea diametrului exterior care duce la minimizarea funcției-obiectiv este diametrul optim ( $D_c^0$ ). Se înțelege că, alături de valoarea  $D_c^0$  , se obțin valorile optime ale tuturor celorlalte variabilelor implicate.

În acest fel, pentru o putere dată și un numărul dat de poli, se determină prin calcul diametrul exterior optim corespunzător funcției obiectiv adoptate. Rezultă o valoare optimă a lungimii statorului ( $L_1^0$ ) și un raport optim între această lungime și pasul polar ( $\lambda^0 = L_1^0 / \tau^0$ ).

În urma calculului efectuat se pot obține suplimentar curbele de variație a tuturor parametrilor mașinii, în raport cu  $D_c$ ,  $J$ ,  $L_1$ , ceea ce permite o înțelegere mai profundă a procesului de optimizare. Schema de calcul de optimizare globală (fig. 5.13) permite determinarea unei corelări optime între puterea și gabaritul mașinii, corespunzătoare unui criteriu de optim.

Asupra acestei corelări nu există în prezent o concepție unitară. Pe plan mondial se practică astăzi mai multe corelări putere-gabarit, recomandate prin diverse norme și standarde internaționale, dar nici una nu este atât de convingătoare pentru a se impune.

Pe lângă corelările normale ("CENELEC" în Europa și "T" pe continentul nord-american), au fost făcute și alte propuneri de corelări noi ("R" prin standardul STCAER 4447 și "U" prin normele NEMA). Ultima ediție a normelor CEI [N13] definește separat gabaritele standard și puterile standard, fără să recomande o corelare între puterea motorului și gabaritul său.

Se pare că problema este lăsată în seama constructorilor de mașini electrice, care vor trebui să decidă (independent) încadrarea unei puteri date într-un gabarit și apoi, în cadrul gabaritului, pe un anumit diametru exterior.

În [B9] se pot urmări câteva încercări de optimizare experimentală a unui motor de inducție, de putere dată, construit pe patru diametre exterioare diferite.

Trebuie recunoscut că problema de optimizare ar fi foarte costisitoare dacă ar trebui rezolvată experimental.

## 5.4 CONCLUZII

Se propune mai sus o metodă de optimizare care poate constitui un criteriu unitar în determinarea univocă a soluției constructive optime, în fabricarea mașinilor electrice de inducție de uz general. Metoda este prezentată și analizată pe cazul unei mașini de inducție trifazate simetrice, având întrefier constant.

Soluționare problemei de câmp prin metoda analitică iterativă (SAI), propusă în cap. 2, a permis reconsiderarea problemei optimizării circuitului magnetic al mașinii de inducție .

Pentru definirea "optimului" se propune criteriul maximizării inducției magnetice din întrefier, pentru o solenație de magnetizare dată.

Sunt puse în evidență trei etape distincte (sub forma a trei probleme: P1, P2, P3) în procesul de optimizare a geometriei transversale a mașinii, unde sunt implicate cele mai multe variabile independente. Rezolvând succesiv cele trei probleme, pe baza criteriului propus, se determină valorile optime ale variabilelor care definesc esența geometriei transversale, pentru un diametru exterior dat și un număr dat de poli. Posibilitatea determinării unei astfel de "tole optime", în condițiile de mai sus, poate conduce la rezolvarea unei probleme foarte importante în fabricarea mașinilor electrice de uz general: standardizarea , sau unificarea tolelor.

Optimul geometriei transversale se dovedește a fi dependent doar de diametrul exterior al statorului și de numărul de poli, nefiind necesară implicarea dimensiunii longitudinale a mașinii.

Aceste rezultate simplifică foarte mult, în continuare problema determinării optimului global.

Aceasta din urmă devine o problemă simplă de optimizare matematică neliniară cu restricții, având doar două variabile, care poate fi rezolvată iterativ după metodele cunoscute.

Din acest motiv, etapa optimizării longitudinale este prezentată doar principial reprezentând a doua latură a problemei de optimizare, cea care asigură obținerea optimului global.

Criteriul minimizării funcției-obiectiv conduce la stabilirea valorii optime a diametrului exterior , pentru o putere dată și un număr dat de poli.

În acest sens, se constată posibilitatea determinării unei corelări optime între puterea mașinii și gabaritul său (definit, în principal, prin diametrul exterior al statorului).

Considerăm că metoda propusă deschide o perspectivă coerentă asupra problemei de optimizare globală a mașinii de inducție, oferind un instrument unitar și comod de investigare a soluției optime.

### CONCLUZII GENERALE

Schema electrică echivalentă a mașinii de inducție reprezintă modelul cel mai cunoscut și mai utilizat pentru analiza globală a mașinii în diferite regimuri de funcționare, iar în problemele de optimizare a construcției este singurul folosit. Sunt cunoscute avantajele și dezavantajele acestui model și limitele lui de aplicare.

Contribuțiile aduse de unii autori, prin lucrările publicate în acest domeniu, privind calculul parametrilor schemei echivalente, au redus tot mai mult diferența dintre valorile calculate și cele măsurate ale performanțelor energetice și de pornire ale mașinii.

Pentru a crește precizia de analiză a mașinii de inducție prin modelul schemei echivalente, este necesar să fie luate în considerare unele fenomene greu de stăpânit prin relații matematice: fenomenul de saturație a căilor principale și de dispersie ale fluxului magnetic, fenomenul de refluxare a curentului în barele rotorului, fenomenul de reacție a indusului, fenomenul termic, etc.

Controlul prin calcul al saturației circuitului magnetic principal are o importanță majoră în stabilirea punctului de funcționare real pe caracteristica magnetică a mașinii. În calculele de optimizare, procesul de căutare a soluției optime duce inevitabil și la situații în care unele porțiuni ale circuitului magnetic principal ating nivele foarte ridicate de saturație. Experiența arată că, în astfel de situații extreme, calculul tensiunilor magnetice pe unele porțiuni (în special în juguri) se face cu erori considerabile care determină modificarea frontierei domeniului  $n$ -dimensional al soluțiilor admisibile și, în consecință, luarea unor decizii incorecte în procesul de optimizare.

Lucrarea își propune să elimine calculul tensiunilor magnetice, determinând caracteristica magnetică neliniară la mersul în gol prin rezolvarea problemei de câmp. Soluția problemei de câmp asociată schemei echivalente cunoscute formează un model combinat "câmp-circuit".

Pentru rezolvarea problemei de câmp sunt cunoscute diferite metode numerice de discretizare: de tip element finit, diferențe finite, elemente de frontieră, etc. Aceste metode sunt utilizate în prezent pentru analiza câmpului din mașină, fiind cele mai performante în acest sens.

Asocierea modelului de câmp cu elemente finite la modelul de circuit echivalent întâmpină dificultăți majore, în primul rând din cauza timpului mare de calcul impus de rezolvarea repetată a problemei de câmp. Chiar dacă aceste dificultăți vor fi în totalitate depășite, utilizarea unui astfel de model combinat în problemele de optimizare rămâne o perspectivă îndepărtată.

În lucrare se urmărește obținerea unei soluții a problemei de câmp care să fie ușor de construit și manevrat și să necesite un timp redus de calcul, întrucât se cere să fie inclusă în procese de calcul ciclice care impun determinarea repetată a câmpului.

În acest sens se elaborează o soluție analitică iterativă (SAI) de rezolvare a problemei de câmp care poate fi ușor asociată modelului de circuit electric echivalent formând un model combinat câmp-circuit.

Metoda SAI permite determinarea prin calcul a caracteristicii magnetice neliniare a mașinii la mersul în gol. Caracteristica magnetică este preluată și utilizată în modelul de

circuit, jucând rol de "interfață" între modelul de câmp și cel de circuit. Acest model combinat permite analiza parametrilor globali ai mașinii de inducție cu considerarea caracteristicii reale de saturație a circuitului magnetic principal și a reacției de indus. Pe de altă parte modelul este adecvat și problemelor de sinteză, sau de optimizare referitoare la mașina de inducție.

Metoda SAI propusă nu este recomandată pentru analiza distribuției spațiale a câmpului magnetic din mașină întrucât nu ia în considerare distribuția discretă a surselor câmpului (în rezolvarea problemei de câmp se neglijează toate armonicile superioare de spațiu ale solenației de magnetizare) și recurge la omogenizarea zonelor dințate din stator și din rotor. Pentru analiza câmpului magnetic din domeniul neomogen al mașinii, metodele numerice (în special metoda elementelor finite) sunt, incontestabil, cele mai potrivite.

Autorul consideră că modelul combinat, elaborat în lucrare, corespunde scopului urmărit și reprezintă un instrument util, comod și eficient în analiza neliniară a mașinii de inducție cu întrefier constant, iar în domeniul optimizării mașinii deschide perspective interesante, dând posibilitatea tratării unitare și coerente a problemei.

Modelul a fost validat prin multe verificări experimentale și a fost utilizat în practica industrială la optimizarea motoarelor trifazate de inducție cu rotor în scurtcircuit de uz general ( $P_N < 55\text{kW}$ ), de la S.C. Electromotor S.A. Timișoara. Dintre acestea, până în prezent au intrat în producție de serie un număr de 12 tipodimensiuni având o nouă geometrie a tolelor. S-au obținut efecte economice care constau în reduceri ale consumurilor specifice de materiale active cuprinse între 5...15% față de proiectele anterioare, la același nivel al performanțelor energetice și al suprațemperaturii înfășurărilor.

După părerea autorului, principalele contribuții ale lucrării sunt:

- determinarea soluției analitice a problemei de câmp pe fiecare din cele cinci subdomenii (omogenizate) ale domeniului de calcul, considerând surse de câmp pe ambele armături ale mașinii; se obțin expresii analitice, sub forma unor funcții de două variabile, ale potențialului magnetic vector și ale componentelor radiale, respectiv tangențiale ale inducției magnetice; se determină fluxul magnetic polar și t.e.m. indusă folosind soluția problemei de câmp;
- determinarea expresiilor celor zece constante de integrare prin rezolvarea sistemului de ecuații obținut din condițiile de frontieră (Dirichlet) și de interfață dintre subdomenii (condiții de continuitate);
- elaborarea unui algoritm iterativ de calcul (SAI) pentru rezolvarea problemei neliniare, utilizând soluția analitică determinată, prin ajustarea permeabilităților magnetice ale subdomeniilor la fiecare iterație; se determină valoarea optimă a unui coeficient de subrelaxare necesar asigurării stabilității și convergenței procesului de calcul;
- se compară soluția problemei de câmp obținută prin metoda SAI cu cea obținută prin metoda elementelor finite, pe același domeniu de calcul; se prezintă mai multe comparații în diferite zone ale domeniului;
- validarea modelului SAI, la mersul în gol, prin multe verificări experimentale, comparând caracteristica circuitului magnetic principal, obținută din calculul de câmp, cu cea obținută experimental; validarea s-a făcut pe motoare de inducție trifazate, bifazate cu condensator și monofazate;
- validarea modelului SAI, la mersul în sarcină, prin compararea valorilor t.e.m. induse, obținută din calculul de câmp (considerând reacția indusului), cu cele măsurate în bobina sondă la diferite valori ale alunecării ( $s=0 \dots 1$ );

- asocierea modelului neliniar SAI cu modelul vectorilor spațiali și calculul câmpului magnetic eliptic din mașina de inducție bifazată cu condensator, în prezența saturației fierului;

- calculul deformării curbei fundamentale de repartiție a inducției magnetice din întrefier, de-a lungul pasului polar, sub influența saturației circuitului magnetic principal; determinarea amplitudinilor armonicilor de saturație prin descompunerea în serie Fourier a “fundamentalei deformate” la diferite nivele de saturație;

- definirea criteriului de optim al geometriei transversale a mașinii de inducție, echivalent cu maximizarea fluxului magnetic polar pe unitatea de lungime a statorului cu diametrul exterior fixat (cea mai favorabilă caracteristică magnetică la mersul în gol);

- formularea problemelor elementare de optim (P1 ,P2 ,P3 )conform criteriului de optim definit;

- rezolvarea succesivă a problemelor P1 ,P2 ,P3, folosind modelul de câmp (SAI) și determinarea geometriei transversale optime, dependentă de diametrul exterior dat al statorului și independentă de dimensiunea longitudinală a mașinii;

-elaborarea algoritmului de optimizare globală a unui motor de inducție trifazat cu rotor în scurtcircuit, ca etapă finală a problemei de optimizare, în care sunt implicate: restricțiile impuse, funcția obiectiv adoptată, lungimea statorului, diametrul exterior al statorului cu geometria transversală optimă asociată.

Autorul intenționează să continue activitatea de cercetare în această direcție, ținând seama de perspectivele deschise de rezultatele obținute în lucrarea de față.



## NOTAȚII UTILIZATE

a - rază (fig 2.1);

$\bar{A}$  - potențial magnetic vector (indicii 1,2,3,4,5 se referă la subdomeniile  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  ale domeniului de calcul-fig. 2.1);

$A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45}$  - valorile potențialelor magnetice pe suprafețele de separație dintre subdomeniile 1-2, 2-3, 3-4, respectiv 4-5 (vezi relația 2.82);

$A_i, A_j, A_k$  - valorile potențialelor magnetice în vârfurile i, j, k ale elementului finit triunghiular;

A - pătura de curent (cap. 5);

b - rază (fig.2.1);

$\bar{B}$  - inducția magnetică în general (semnificația indicilor :1,2,3,4,5 se referă la cele cinci subdomenii ; p - de pulsație; d- în dinte ; c-în creștătură;  $\delta$ - în întrefier; r,  $\theta$  - pe direcția coordonatelor r, respectiv  $\theta$ ; x,y - pe direcția coordonatelor x, respectiv y);

c - rază (fig.21.);

$c_0, c_f$  - coeficienți de corecție (rel. 2.94, 4.87);

$c_1, c_A, c_\mu$  - coeficienți de relaxare în calculele iterative (2.98,3.4,3.5);

C - capacitatea condensatorului (cap.4);

C - constanta mașinii (Esson) în cap. 5;

d - rază (fig.2.1);

$\bar{D}$  - inducția electrică;

D - operatorul de derivare d/dx (cap.1.);

$D_1, D_2$  - diametrul de fund al creștăturilor statorice, respectiv rotorice ( $D_1=2e$ ;  $D_2=2b$ );

$D_e, D_i$  - diametrul exterior, respectiv interior ale statorului ( $D_e=2f$ ;  $D_i=2d$ );

e - rază (cap2.1);

$\bar{E}$  - intensitatea câmpului electric;

f - rază (fig.2.1);

$f_1$ - frecvența tensiunii de alimentare;

$\bar{F}$  - funcție vectorială;

$F_{j1}, F_{j5}$  - tensiunea magnetică în jugul rotorului, respectiv statorului;  
 $F_{2d}, F_{d4}$  - tensiunea magnetică în dinții rotorului, respectiv statorului;  
 $F_{\delta}$  - tensiunea magnetică a întrefierului;  
 $g$  - funcție scalară în cap.1;  
 $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  - constante de integrare (2.75);  
 $G_{j5}, G_{d4}$  - masa jugului, respectiv masa dinților statorului;  
 $h$  - funcție scalară în cap.1;  
 $h$  - pasul de integrare pe direcția  $x$ ;  
 $h_1, h_2, h_3$  - parametrii lui Lamé (1.148);  
 $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  - constante de integrare (2.75);  
 $\vec{H}$  - intensitatea câmpului magnetic (semnificația indicilor:  $r, \theta$  - pe direcția  
 coordonatelor  $r$ , respectiv  $\theta$ ;  $d_1, d_2$  - în dinții statorului, respectiv rotorului);  
 $I_1$  - valoarea efectivă a curentului prin înfășurarea de fază a statorului în cazul motorului  
 de inducție trifazat simetric ( $I_{1N}$  - valoarea sa nominală);  
 $I'_2$  - valoarea efectivă a curentului rotoric raportat la înfășurarea statorului;  
 $I_{10}$  - valoarea efectivă a curentului de mers în gol;  
 $I_{1r}, I'_{2r}$  - componenta reactivă a curentului  $\underline{I}_1$ , respectiv  $\underline{I}'_2$ ;  
 $I_{1a}$  - componenta activă a curentului de mers în gol;  
 $I_{\mu}$  - curentul de magnetizare corespunzător câmpului magnetic principal rezultat;  
 $\underline{I}_{01} = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2$ ;  
 $I_{\alpha}$  - componenta activă a curentului  $\underline{I}_{01}$ ;  
 $I_A, I_B$  - valorile efective ale curenților prin înfășurările A și B ale statorului mașinii  
 bifazate;  
 $I'_{a'}, I'_{b'}$  - curenții rotorici raportați respectiv la înfășurările A și B ale statorului mașinii  
 bifazate;  
 $\underline{i}_{\mu}$  - vectorul spațial al curentului de magnetizare corespunzător câmpului magnetic  
 rezultat din întrefier (raportat la înfășurarea A a mașinii bifazate);  
 $\underline{i}_{\mu d}, \underline{i}_{\mu q}$ , - componentele (după axa  $d$ , respectiv  $q$ ) ale vectorului spațial  $\underline{i}_{\mu}$ ;  
 $\underline{i}_{\mu M}, \underline{i}_{\mu m}$  - valorile (maximă, respectiv minimă) ale modulului vectorului spațial  $\underline{i}_{\mu}$   
 (echivalente cu razele extreme ale elipsei corespunzătoare);  
 $\vec{J}$  - densitatea curentului de conducție (indicii 2,4 se referă la subdomeniile 2 respectiv 4);

$J_M$  - amplitudinea fundamentale spațiale a densității curentului total al creștăturilor  
(indicii 2, 4 se referă la subdomeniile 2, respectiv 4);

$k$  - coeficient în soluția problemei de câmp (relația 2.28); indicii 1, 2, 3, 4, 5 se referă  
respectiv la subdomeniile 1,2,3,4,5;

$k$  - pasul de integrare pe direcția timpului ( $t$ );

$k_w$  - factorul de înfășurare ;

$k_c$  - factorul lui Carter;

$k_{Fc}$  - factorul de împachetare a tolelor;

$k_u$  - factorul de umplere a creștăturii (raportul dintre secțiunea totală a cuprului din  
creștătură și secțiunea geometrică a creștăturii);

$k_D$  - raportul dintre diametrele (interior și exterior ) ale statorului ;

$k_O$  - raportul dintre curentul de magnetizare și curentul nominal ;

$k_a = 1/(k_u k_o J)$  (relația 5.20)

$k_{BA}$  = factorul de raportare a înfășurării B la înfășurarea A (mașina bifazată);

$L_1$  - lungimea statorului (lungimea ideală);

$L_A, L_B, L_a, L_b$  - inductivități proprii totale ale fazelor (mașina bifazată);

$l_{cu}, l'_{Al}$  - lungimea spirei medii a înfășurării statorului , respectiv a înfășurării  
echivalente a rotorului;

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  -constante (relația 2.81);

$M_A, M_B$  - inductivități maxime de cuplaj, între o înfășurare din stator și alta din rotor,  
de pe aceeași axă (mașina bifazată);

$\overline{M}_1$  - magnetizația temporară;

$\overline{n}$  - versorul normalei pozitive într-un punct al suprafeței;

$n$  - viteza de rotație a rotorului;

$n_c$  - numărul de spire pe creștătură;

$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  - constante (relația 2.76);

$p$  - numărul de perechi de poli;

$p_{10}$  - pierderile specifice în fier la 1T și 50 Hz;

$P_N$  - putere nominală;

$P_{Fc}, P_{mv}, P_{cu0}$  - pierderi la mersul în gol: în fier, mecanice și ventilație, respectiv în  
înfășurarea statorului ;

$P_{p2}, P_{p4}$  - pierderi suplimentare de pulsație în dinții rotorului, respectiv statorului;

$P_{j5}, P_{j4}$  - pierderi principale în fierul statorului: în jug, respectiv în dinți;

$\overline{P}_1$  - polarizația electrică temporară;

$r$  - rază în sistemul de coordonate cilindrice;

$r_0$  - coordonată a punctului reprezentativ  $P_0(r_0, \theta_0)$ ;  
 $r_{m2}, r_{m4}$  - raze medii (figura 2.5);  
 $\vec{R}$  - funcție vectorială;  
 $R_1$  - rezistența electrică a înfășurării statorului (pe fază);  
 $R'_2$  - rezistența electrică a înfășurării rotorului raportată la înfășurarea statorului ;  
 $R_A, R_B, R_a, R_b$  - rezistențele electrice ale înfășurărilor mașinii bifazate;  
 $s$  - alunecarea;  
 $S_N$  - puterea aparentă nominală;  
 $S_1, S_2, S_3, S_4$  - constante (relația 2.81);  
 $S_{a1}, S_{a2}$  - aria suprafeței geometrice a creștăturii statorice, respectiv rotorice;  
 $t$  - timpul;  
 $\vec{T}$  - potențial electric vector;  
 $u$  - funcție scalară;  
 $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  - versorii sistemului ortogonal de coordonate cilindrice;  
 $\vec{U}$  - funcție vectorială (cap. 1);  
 $U_0, U_1$  - tensiunea pe fază la mersul în gol, respectiv în sarcină (mașina trifazată);  
 $U_A, U_B$  - tensiunea pe faza A, respectiv B (mașina bifazată);  
 $U_N$  - valoarea nominală a tensiunii;  
 $U_{e0}, U_{e1}$  - tensiunea electromotoare indusă la mersul în gol, respectiv în sarcină  
 (mașina trifazată);  
 $U_{eA}, U_{eB}$  - tensiunea electromotoare indusă pe faza A, respectiv B (mașina bifazată);  
 $U_{ed}, U_{eq}$  - t.e.m. indusă după axa d, respectiv q (valori efective);  
 $U_m$  - tensiune magnetică;  
 $v$  - funcție scalară;  
 $\vec{v}$  - viteza punctelor materiale (în cazul mediilor în mișcare) față de un sistem de  
 referință inerțial fix;  
 $v_\Sigma$  - domeniul mărginit de suprafața închisă  $\Sigma$ ;  
 $V$  - potențial electric scalar;  
 $V_m$  - potențialul magnetic scalar;  
 $w$  - funcție complexă de variabilă complexă;  
 $W_1$  - numărul de spire pe fază (mașina trifazată);  
 $W_A, W_B$  - numărul de spire pe faza A, respectiv B (mașina bifazată);  
 $x$  - coordonată;

$X_1, X_2'$  - reactanța de dispersie a înfășurării statorice, respectiv rotorice raportată la stator;

$X_{1m}$  - reactanța de magnetizare (mașina trifazată);

$X_A, X_B, X_a, X_b$  - reactanțe proprii totale la mașina bifazată (relația 4.56) ;

$X_{mA}, X_{mB}$  - reactanțe de magnetizare (4.60) corespunzătoare câmpurilor magnetice principale ale celor două axe ortogonale: A(d), B(q) - fig. 4.13;

$X_{Aa}, X_{Bb}$  - reactanțe mutuale (4.54);

y - coordonată;

$Y_C, Y_S$  - funcții (4.22, 4.98);

z - coordonată

$Z_1, Z_2$  - numărul de creștături din stator, respectiv din rotor;

$Z_1, Z_2'$  - impedanțe de dispersie la mașina trifazată;

$Z_{1m}$  - impedanța de magnetizare (mașina trifazată);

$Z_A, Z_B, Z_a, Z_b$  - impedanțe de dispersie la mașina bifazată (relația 4.59);

---

$$\alpha = \sqrt{\mu_\theta / \mu_r}$$

$\alpha_2, \alpha_4$  - referitor la subdomeniul anizotrop 2, respectiv 4 (2.56, 2.51);

$\alpha_{11}, \alpha_{22}$  - unghiuri asociate impedanțelor (4.20);

$\alpha_A, \alpha_e, \alpha_{BC}$  - unghiuri asociate impedanțelor (4.96, 4.104);

$\beta$  - unghi asociat tensiunii de alimentare (4.20);

$\beta_1, \beta_2$  - raportul dintre inducția reală și cea aparentă în dinții statorului respectiv rotorului;

$\Gamma$  - curbă închisă;

$\gamma$  - constantă (cap. 1);

$\gamma$  - unghi (caracterizează poziția momentană a vectorului spațial al curentului de magnetizare la mașina bifazată - fig. 4.15, relația 4.74 );

$\gamma_1, \gamma_2$  - constante (2.83);

$\gamma_{\alpha}$  - unghiul format de axa mare a elipsei curentului de magnetizare și axa reală a planului complex (fig. 4.15);

$\delta$  - întrefierul real;

$\delta$  - discriminantul ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi (1.128);

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_5$  - diferențe (în calculele iterative);

$\Delta^e$  - aria suprafeței elementului finit "e";

$\varepsilon$  - permitivitate electrică (Cap. 1);

$\varepsilon$  - ordinul armonicilor de câmp (paragraf 4.1.3);

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  - constante (2.79);

$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{45}$  - constante (2.81);

$\theta$  - unghi, în sistemul de coordonate cilindrice;

$\theta_0$  - coordonată a punctului reprezentativ  $P_0(r_0, \theta_0)$  ;

$\theta_c, \theta_{c2}, \theta_{c4}$  - unghiurile la centru corespunzătoare unei creștături (2 - din rotor, 4- din stator);

$\theta_d, \theta_{d2}, \theta_{d4}$  - unghiurile la centru corespunzătoare unui dinte (2 - din rotor, 4 - din stator);

$\underline{\mathcal{G}}$  - vectorul spațial al solenației de magnetizare rezultante;

$\underline{\mathcal{G}}_d, \underline{\mathcal{G}}_q$  - componentele vectorului spațial  $\underline{\mathcal{G}}$  după cele două axe;

$\mathcal{G}_1$  - amplitudinea fundamentalei spațiale a solenației rezultante la mașina trifazată (relația 2.37);

$\mathcal{G}_c$  - solenația totală de magnetizare corespunzătoare unei creștături statorice (5.18);

$\mu$  - permeabilitate magnetică;

$\mu_1, \mu_5$  - permeabilitatea magnetică a subdomeniului 1, respectiv 5;

$\mu_r, \mu_\theta$  - permeabilitate magnetică a unui mediu anizotrop pe direcția r, respectiv  $\theta$  (indici 2, 4 se referă la subdomeniile 2, respectiv 4);

$\mu_{d2}, \mu_{d4}$  - permeabilitate magnetică a dinților rotorici, respectiv statorici;

$\mu^e$  - permeabilitate magnetică a elementului finit "e";

$\xi_1, \xi_2$  - variabile independente în problema de optimizare (5.4.5.5);

$\xi_{11}, \xi_{22}$  - raportul dintre lățimea dintelui și pasul dentar în stator, respectiv în rotor;

$\rho$  - rezistivitate electrică;

$\rho_v$  - densitate de volum a sarcinii electrice;

$\Sigma$  - suprafață închisă;

$\sigma$  - conductivitate electrică;

$\tau_c$  - pasul dentar;

$\varphi$  - funcție scalară (cap.1);

$\varphi$  - unghi de defazaj în timp între cei doi curenți de magnetizare ai mașinii bifazate  
(4.67);

$\varphi_N$  - se referă la factorul de putere nominal ( $\cos\varphi_N$ ) la motorul de inducție trifazat;

$\phi_m$  - fluxul magnetic polar;

$\underline{\phi}$  - vectorul spațial al fluxului magnetic principal, având componentele  $\phi_d$  și  $\phi_q$ ,  
după axele d și q;

$\psi$  - funcție scalară (cap.1);

$\omega$  - pulsația tensiunii sinusoidale de alimentare ( $\omega = 2\pi f_1$ );

$\omega_r$  - viteza unghiulară a rotorului (în termeni electrici).

---

MEF - metoda elementelor finite

SAI - soluția analitică iterativă a problemei de câmp

P1, P2, P3 - probleme elementare de optim

## BIBLIOGRAFIE

- [A1] Plaușius Andronescu: "Bazele electrotehnicii", vol.1,2, E.D.P. București, 1972;
- [A2] M.N. Abdel-Hamid: "Moteur à induction monophasé a stator triphasé, a démarrage par condensateur", R.G.E. Tome 77, numărul.2, 1968, p. 217-228;
- [A3] J. Appelbaum: "Performance analysis of an induction machine", IEEE Power Eng. Soc. Conf. Paper Winter Meeting, New York, 1975;
- [A4] J. Appelbaum, E.F. Fuchs, J.C. White: "Optimization of three-phase induction motor design, part 1: Formulation of the optimization technique", IEEE Trans., 1987, EC-2, No. 3, p. 407-414;
- [A5] J.Appelbaum, I.A. Khan, E.F.Fuchs, J.C.White: " Optimization of three-phase induction motor design, part2: The efficiency and cost of an optimal design", IEEE Trans., 1987, EC-2, No.3, p.415-422;
- [B1] N.Bakhvalov: "Méthodes numériques" Edition de Moscou, 1976;
- [B2] C.M.Bucur: "Metode numerice", Editura Facla, Timișoara,1973;
- [B3] C.Bălă, I.Soran: "Câmpul magnetic în statorul motoarelor asincrone cu jugul foarte saturat" COMEP - Pitești, 1981, pag. 2-16;
- [B4] S.Benko, Imre Rajki:"Indító-kondenzátoros aszinkron motorok indítási viszonyainak vizsgálata digitális számológépen" Elektrotechnika 62, Budapesta, 1969, pag. 331-338;
- [B5] I.N.Bichir:"Proiectarea și construcția mașinilor electrice", vol.1,2, Institutul Politehnic București, 1988;
- [B6] Ion Boldea, Gh. Atanasiu: "Analiza unitară a mașinilor electrice", Editura Academiei Române,București,1983;
- [B7] Ion Boldea: : "Parametrii mașinilor electrice", Editura Academiei Române, București,1991;



- [B8] Ion Boldea, S. A. Nasar: "Upon unitary treatment of magnetic saturation in orthogonal axis models of electric machines", Proc. ICEM-1986, vol.1, Munich, sept., 1986;
- [B9] A.H.Bonnett:"Understanding the Changing Requirements and Opportunities for Improvement of Operating Efficiency of AC Motors", IEEE Trans. on Industry Applications, vol.29, no3, 1993;
- [B10] Marius Babescu:"Mașini electrice monofazate: Editura Tehnică, București, 1992;
- [B11] C. Bălă:"Mașini electrice", E.D.P. București, 1979;
- [C1] R. Cramariuc:"Transformări conforme în fizică și electrotehnică", Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984;
- [C2] Aurel Câmpeanu:"Mașini electrice", Editura Scrisul Românesc, Craiova,1988;
- [C3] I.Cârstea:"Calculul câmpului electrostatic prin metoda elementelor finite", EEA-Electrotehnica 30, nr.5,iulie,1982,pag.204-208;
- [C4] I.Cârstea:"Calculul numeric al câmpului magnetic de dispersie în transformatoare prin metoda elementelor finite", EEA-Electrotehnica 28, nr.2,februarie,1980, pag.53-56;
- [C5] Ion Cioc, Năstase Bichir, Nicolae Cristea:"Mașini electrice - îndrumar de proiectare", vol. II, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1981;
- [C6] Ion Cioc, Ion Boros, Nicolae Cristea:"Mașini electrice - îndrumar de proiectare", vol I, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1976;
- [C7] Mihail Cistelecan:"Contribuții la proiectarea optimală a motorului asincron cu aplicații la seriile unificate de motoare", Teză de doctorat, I. P. București, 1991;
- [C8] B.J. Chalmers, R.Dodgson:"Waveshapes of flux density in polyphase induction motors under saturated condition", IEEE Trans. on PAS, vol.90, nr. 2, 1971, p. 564-569;
- [D1] Ion Dumitrescu:"Simularea câmpurilor potențiale", Editura Academiei Române, București,1983;
- [D2] Ioan De Sabata:"Bazele electrotehnicii",vol. 1,2,3, Institutul "Politehnic" Timișoara , 1972 - 1976;
- [D3] Toma Dordea:"Mașini electrice", E.D.P. București, 1977;
- [D4] Toma Dordea:"Proiectarea și construcția mașinilor electrice", Partea I,II, Institutul "Politehnic" Timișoara ,1979;
- [D5] Ia.B.Danilevici,V.VDombrovski, E.Ia, Kazovski:"Parametrii mașinilor de curent alternativ", Editura Tehnică București , 1968;

- [D6] Toma Dordea: "Tendințe actuale în calculul și construcția mașinilor electrice", Sesiune de comunicări EMT-1984, vol. 1, pag. 4-10 ;
- [D7] Toma Dordea: "Necesitatea măririi randamentului mașinilor electrice", Sesiune de comunicări EMT-1985, Timișoara, vol.1, pag. 3-9 ;
- [D8] Toma Dordea: "La theorie des deux axes pour les machines électriques à enroulement répartis par zones", Revue Roumanie des sciences techniques. Série Électrotechnique et énergétique, Tome 38, Avril-Juin, 1993;
- [D9] Ioan Dancea: "Metode de optimizare", Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976;
- [F1] M.J. Forray: "Calculul variațional în știință și tehnică", traducere, Editura Tehnică București, 1975;
- [F2] R.Fischer: "Berechnungen zum Anlauf von Betriebs- und Doppelkondensatormotoren", ETZ-A, 91, H.9, 1970, pag. 506-509 ;
- [G1] S.K. Godunov, V.S.Reabenki: "Scheme de calcul cu diferențe finite", traducere. Editura Tehnică București , 1977;
- [G2] Gh.Gherman: "Metoda cu diferențe finite iterativă de calcul al câmpului magnetic cvasistaționar", EEA, nr. 6, aug. 1983, pag. 217-223;
- [G3] Gh.Gherman: "Comparație între metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite utilizate în calculul câmpului magnetic staționar", EEA, nr. 8, nov. 1982, pag. 355-359;
- [G4] P. Găvruță, ș.a.: "Metode numerice", Institutul "Politehnic" Timișoara , 1990;
- [G5] K.G. Baurat: "Asynchronmotoren", Fachbuchverlag, Leipzig, 1953;
- [G6] I.S. Gheorghiu, A. Fransua: "Tratat de mașini electrice", vol. III, Editura Academiei București , 1971;
- [H1] R.G. Harley et al.: "Comparative study of saturation methods in synchronous machine models", Proc. IEEE, 1275, 1, p. 1-7, 1980;
- [H2] H. Huang, E.F. Fuchs, Z. Zak: "Optimisation of single-phase induction motor design. Part 1: Formulation of the optimisation technique", IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 3, no. 2, June 1988, p. 349-356;
- [H3] H. Huang, E.F. Fuchs, J.C. White: "Optimisation of single-phase induction motor design. Part 2: The maximum efficiency and minimum cost of an optimal design", IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 3, no. 2, June 1988, p. 357-366;
- [I1] A.V. Ivanov-Smolensky, Meye Joachim: "Physikalische Modellierung electromagnetischer Felder und Prozesse in elektrischen Maschinen", VEB Verlag Technik Berlin;

- [I2] L.G. Ixaru: "Metode numerice pentru ecuații diferențiale", Editura Academiei București, 1979;
- [I3] C. Ifrim: "Autogenerarea unei rețele de triunghiuri în vecinătatea colțurilor prin metoda Schwartz-Christoffel în vederea aplicării metodei elementului finit", EEA, 32, numărul.1, 1984, pag. 29-30 ;
- [J1] C.V. Jones: "The unified theory of Electrical Machines", London, Butterworths, 1967;
- [J2] C.V. Jones, R.C. Gibson: "Correlation of the air-gap vector potential of an induction motor with the magnetising current", Proc. IEE, vol. 116, No. 3, 1969, pag. 385-390;
- [J3] G.K. Jerve: "Încercările industriale ale mașinilor electrice", Editura Tehnică București, 1961;
- [K1] N.E. Kocin: "Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial", traducere, Editura Tehnică București, 1954;
- [K2] W. Kees: "Complemente de matematici cu aplicații în tehnică", Editura Tehnică București, 1981;
- [K4] I.P. Kopylov: "Mathematical Models of Electrical Machines", Mir Publishers Moscow, 1984;
- [K5] H. Kleinrath: "Genauere Berechnung von Einphasen-Asynchronmotoren mit Digitalrechenanlagen" ETZ-A, 89, H.15, 1968, pag. 366-371 ;
- [K6] K.P.Kovács: "Analiza regimurilor tranzitorii ale mașinilor electrice", Editura Tehnică București, 1989;
- [K7] Arpad Kelemen, Maria Imecs: "Sisteme de reglare cu orientare după câmp ale mașinilor de curent alternativ", Editura Academiei București, 1989;
- [K8] K.P.Kovács: "Fejezet a kétfázisú indukciós motorok elméletéből: látszólagos keresztmágnesezés", Elektrotechnika, nr. 9, 1984, Budapesta, pag. 289-298;
- [L1] I.F. Ladon: "Bazele calculului vectorial", vol. 1 și 2, traducere, Editura de Stat București, 1949;
- [L2] M.A. Lavrentiev, L.A. Linsternik: "Curs de calcul variațional", traducere, Editura Tehnică București, 1955;
- [L4] H. Lanoy: "Les petites machines électriques a courant continu et alternatif", Librairie Girardot-Paris, 1947;
- [L5] C.H. Lee: "Saturation harmonics of polyphase induction motors", Trans.AIEE, vol. 80, 1961, pag. 597-603 ;
- [L6] M.J. Lees, C.E. Tindall: "Field-theory analysis of saturation harmonics in induction machines", Proc. IEE, vol. 121, no. 4, 1974, pag. 276-280 ;

- [M1] Constantin Mocanu:" Teoria câmpului electromagnetic", E.D.P. București, 1981;
- [M2] Gh. Mîndru, M.M. Rădulescu:" Analiza numerică a câmpului electromagnetic",  
Editura Dacia, Cluj-Napoca,1986;
- [M3] Viorel Mărieș:"Metode numerice pentru studiul câmpului electromagnetic", Teză de doctorat, I. P. București,1983;
- [M4] G.I. Marciuc, V.V.Șaidurov:"Creșterea preciziei soluțiilor în scheme cu diferențe",  
Editura Academiei București, traducere, 1981;
- [M5] Augustin Moraru, Mircea Covrig:"Determinarea parametrilor funcionali ai motorului asincron prin rezolvarea problemei de câmp electromagnetic", COMEP-83,  
pag. 163-173, Pitești ;
- [M6] Gh. Micula:"Funcții spline și aplicații", Editura Tehnică București , 1978;
- [M7] Răzvan Măgureanu:" Mașini electrice speciale pentru sisteme automate", Editura Tehnică București , 1980;
- [M8] I. Marusciac:"Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară", Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1973;
- [M9]W.J. Morrill:" Revolving-Field Theory of the Capacitor Motor", Trans.AIEE, vol. 48 ,  
1929, pag.614-628;
- [M10] A.L. Mohamadein et all.:" On the choise of Phase-Balancer Capacitance for  
Induction Motors Fed from Single-Phase Supply", IEEE Trans. on Energy  
Conversion. vol. EC-2, no.3, 1987, pag. 458-464 ;
- [M11] Motor Manufacturers Meeting. High Efficiency Motors., 25 Oct., 1990, Mississauga-  
Ontario;
- [M12] Gh.Madescu:" Asupra calculului reactanței de magnetizare la motoarele asincrone trifazate", EEA,29,nr.8, nov. 1981, pag. 320-328 ;
- [M13] Gh.Madescu:"Elemente noi în proiectarea pe calculator a circuitului magnetic al  
motorului asincron trifazat", COMEP-81, pag. 124-130, Pitești ;
- [M14] Gh.Madescu:"Proiectarea înfășurării de pornire la motorul asincron monofazat", EEA,  
numărul.5, 1983, pag. 177-184 ;
- [M15] Gh.Madescu:"Analiza armonică automată a câmpului magnetic produs de înfășurări  
repartizate de curent alternativ", EEA-Electrotehnica, numărul. 5, iulie, 1984,  
pag. 187-195 ;
- [M16] Gh.Madescu:"Aspecte privind optimizarea înfășurărilor repartizate la motoarele  
asincrone", Sesiunea de comunicări EMT-1987, vol.1,pag. 117;
- [M17] Gh.Madescu:"Determinare parametrilor interni ai motorului asincron trifazat",  
Sesiunea de comunicări EMT-1988, vol.1,pag. 168;

- [M18] Gh.Madescu:"Asupra zgomotului magnetic produs de motoarele electrice asincrone trifazate", Sesiunea de comunicări EMT-1989, pag. 205-208;
- [M19] Gh.Madescu:"Motor electric cu autofrânare", Brevet RSR nr. 81860/83;
- [M20] Gh.Madescu:"Metodă și dispozitiv pentru măsurarea alunecării motoarelor asincrone", Brevet RSR nr. 96126/88;
- [M21] Gh.Madescu:"Metode de calcul al câmpurilor electromagnetice", Referat nr.1, Universitatea "Politehnica" Timișoara, 1993;
- [M22] Gh.Madescu:"Calculul reactanței mutuale a înfășurărilor statorice și rotorice la mașina de inducție", Referat nr. 2, Universitatea "Politehnica" Timișoara, 1994;
- [M23] Gh.Madescu:"Analiza câmpului magnetic din întrefierul unui motor de inducție ", Referat nr.3, Universitatea "Politehnica" Timișoara, 1994;
- [N1] Edmond Nicolau:"Câmpuri și unde electromagnetice", Editura Academiei București,1972;
- [N2] Edmond Nicolau:"Radiația electromagnetică", E.D.P. București, 1973;
- [N3] Valeriu Novacu:" Electrodinamica", E.D.P. București, 1966;
- [N4] Andrei Nicolaide:"Bazele fizice ale electrotehnicii", vol. 1 și 2, Editura Scrisul Românesc,Craiova,1983 și 1986;
- [N5] Andrei Nicolaide:"Utilizarea metodei elementelor finite cu realizarea automată a conexiunilor rețelei pentru rezolvarea problemelor de câmp electromagnetic", EEA 30, nr. 5, iulie 1982, pag. 173-182;
- [N6] Edmond Nicolau:"Metode variaționale și tensoriale în electricitate", Editura Tehnică București 1956;
- [N7] Ioan Novac, ș. a. : " Mașini și acționări electrice", E.D.P. București, 1982;
- [N9] Andrei Nicolaide:"Mașini electrice", vol. I,II, Editura Scrisul Românesc,Craiova,1975;
- [N10] Doru Adrian Nicola:"Contribuții la studiul mașinii de inducție bifazate nesimetrice cu referiri la motoarele asincrone monofazate", Teză de doctorat, Universitatea "Tehnică" Timișoara, 1987;
- [N11] Doru Adrian Nicola:"Analiza motorului de inducție monofazat, cu condensator în derivație, prin metoda câmpurilor magnetice învârtitoare", EEA 28, nr. 8, 1980, pag. 331-337 ;
- [N12] NEMA Standards Publication No. MG1-1993;
- [N13] Norme CEI/IEC 72-1 ediția a 6-a (1991-2);
- [O1] V. Olariu, C. Brătianu:"Modelare numerică cu elemente finite", Editura Tehnică București 1986;

- [O2] Vlado Ostović:"Dynamics of Saturated Electric Machines", Springer-Verlang, New- York, 1989;
- [P1] Ioan Pascariu:"Elemente finite", Editura Militară, București , 1985;
- [P2] S. Pușcașu, I. T. Cârstea:"Calculul numeric al câmpului electromagnetic netaționar utilizând metoda elementelor finite", EEA, nr. 6, aug. 1985, pag. 231-236 ;
- [P3] M.Preda, P.Cristea:"Bazele electrotehnicii", vol.1,2, E.D.P. București, 1980;
- [P4] G. Palz:"Cu privire la o metodă numerică de calcul al câmpurilor electrostatice", Elektrotechnik und Maschinenbau, 88, nr. 11, 1971, pag. 472-478 ;
- [P5]I.M. Postnikov:"Proiectarea mașinilor electrice", traducere din l. rusă, Editura Energetică de Stat,1954; .
- [P6] J. Pustola, T. Sliwinski:"Kleine Einphasen-Motoren", VEB Verlag Technik- Berlin, 1961;
- [R1]Remus Răduleț:"Bazele electrotehnicii -Probleme", vol. 1,2, E.D.P. București, 1981;
- [R2]Remus Răduleț:"Mijloace matematice ale electrotehnicii", Litografia Institutului de căi Ferate, București, 1958;
- [R3] N. Racoveanu, G. Dodescu, I. Mincu:"Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic", Editura Tehnică București , 1976;
- [R4] N. Racoveanu, G. Dodescu, I. Mincu:"Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic", Editura Tehnică București , 1977;
- [R5] Rudolf Richter:"Mașini electrice", vol. 1, traducere, Editura Tehnică București ,1958;
- [R6] Rudolf Richter:"Mașini electrice", vol. 4, traducere, Editura Tehnică București ,1960;
- [S1] Ion G. Șabac:"Matematici speciale", vol.1,2, E.D.P. București, 1981,1983;
- [S2] Constantin Șora:"Bazele electrotehnicii", E.D.P. București, 1982;
- [S3] K. Simonyi:"Electrotehnică teoretică", traducere, Editura Tehnică București, 1974;
- [S5] I.F. Soran, M. Mihalache:"Observații privind aplicarea metodei elementelor finite la rezolvarea problemelor de câmp magnetic staționar", EEA-Electrotehnica, nr.6, aug. 1982. pag. 263-267 ;
- [S6] A.I. Șchiop:"Analiza unor metode de discretizare", Editura Academiei București , 1974;
- [S7] I.F. Soran:"Utilizarea metodei elementelor de frontieră pentru rezolvarea unei probleme de tip Laplace", Conferința Națională de Electrotehnică și Electronică, Timișoara, sept. 1982, pag. 357-366 ;

- [S8] G.S. Somihina: "Analiza generală a schemelor echivalente ale mașinilor asincrone bifazate", l. rusă, Electricestvo, nr. 7, 1971, pag. 22-29 ;
- [S9] C. Singh, D. Sarkar: "Practical consideration in the optimisation of induction motor design", IEE Proc. - B, vol. 139, no. 4, July, 1992;
- [S10] I.F. Soran: "Studiul configurației câmpului din întrefierul mașinii asincrone și influența ei asupra caracteristicilor de pornire", Teză de doctorat, Inst. Politehnic Timișoara, 1979;
- [T1] A.N Tihonov, A.A. Samarski: "Ecuțiile fizicii matematice", traducere, Editura Tehnică București, 1956;
- [T2] N. Teodorescu, V. Olariu: "Ecuții diferențiale și cu derivate parțiale", vol.1,2,3, Editura Tehnică București , 1978,1979,1980;
- [T3] A. Tozunc: "A Method for Design of Two -speed Shunted Capacitor Motor", Electric Machines and Power Systems, 15, 1988, p. 81-92;
- [U1] N.M. Usmanhodjev, M.A. Tadjiev: "Despre componentele simetrice la motoarele asincrone monofazate cu condensator", l.rusă, Elektrotehnika, URSS, nr.3, 1974;
- [V1] V.S. Vladimirov: "Ecuțiile fizicii matematice", Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980;
- [V2] I.A. Viorel, G. Mîndru, M.M. Rădulescu, Z. Szabo: "Analiza numerică prin metoda elementelor finite a câmpului magnetic din mașina de inducție în regim staționar", EEA, nr. 4, 1984, pag. 143-148;
- [V3] I.A. Viorel, K. Biro, V. Iancu, M.M. Rădulescu: "Metodă de calcul iterativă pentru determinarea saturației și a pierderilor în fier la mașina de inducție", COMEP-83, pag. 180-187, Pitești;
- [V4] I.A. Viorel, M.M. Rădulescu: "Asupra calculului coeficienților permeanței echivalente variabile a întrefierului la mașina de inducție", EEA-Electrotehnica, 32, nr. 3, 1984, pag. 108-111 ;
- [V5] C.G. Veinott: "Performance Calculations on Induction Motors. Practical Straightforward Means for Calculating Performance", Trans.AIEE, vol. 51, 1932, pag. 743-754 ;
- [V6] C.G. Veinott: "Segregation of Losses in Single Phase Induction Motor", Trans.AIEE, ianuarie, 1935, pag. 1302 ;
- [V7] C.G. Veinott: "Theory and Design of Small Induction Motors", McGraw-Hill Book Company, New-York, 1959;

- [V8] N.V. Vinogradov, F.A. Gorianov, P.S. Serghiev: "Proiectarea maşinilor electrice" vol. 1,2, Editura Energetică de Stat, 1953, traducere;
- [V9] C.G. Veinott: "Performance Calculations on the Two-speed Shunted Capacitor Motor. Performance Calculations on L- and T- connected Tapped-Winding Capacitor Motor", IEEE Trans. on PAS, vol. 96, nr. 4, 1977, pag. 1132-1144 ;
- [W1] H.R. West: "The Cross-Field Theory of Alternating-Current Machines", AIEE Jl. v. 45, Feb. 1926, pag. 160-166 ;