

184 5-77
c

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ

ing. **ROMEO FLORIN SUSAN-RESIGA**

**HIDRODINAMICA JETURILOR
DE MARE VITEZĂ ȘI APLICAȚII**
Teză de doctorat

Conducător științific :
Acad.Prof.dr.doc.ing. **IOAN ANTON**

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

TIMIȘOARA 1996

Cuvânt înainte

Tăierea materialelor cu jeturi de apă de mare viteză este o tehnologie modernă, dezvoltată pe scară industrială începând cu anii '80, care prezintă multiple avantaje față de procedeele de tăiere mecanică sau termică.

Dezvoltarea acestei tehnologii este strâns legată de studiul hidrodinamicii jeturilor de apă în aer, la viteze de 600...900 m/s, precum și de perfecționarea surselor de apă la presiune înaltă și a duzei de generare a jetului.

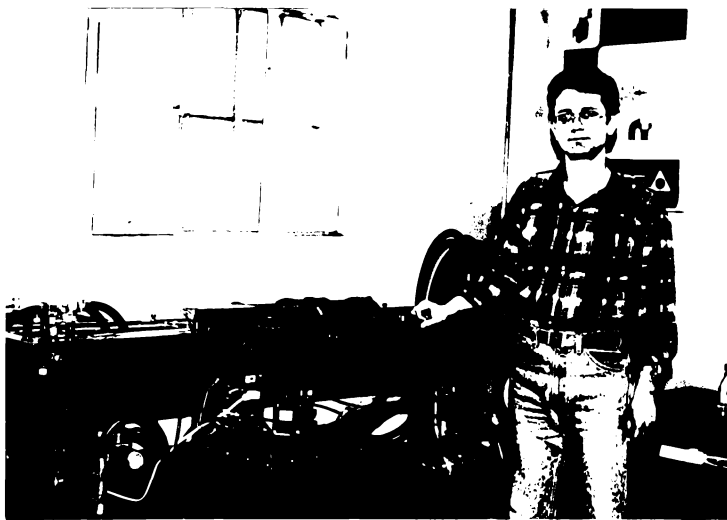
În prezenta lucrare sunt abordate aceste probleme atât din punct de vedere teoretic cât și experimental. Cercetările teoretice utilizează în mare parte modele matematice originale propuse de autor, soluționarea problemelor făcându-se numeric. Pentru studiul câmpului hidrodinamic în duză a fost utilizată Metoda Elementului Finit, cu programe de calcul elaborate de autor. Pentru studiul experimental al jetului, autorul a proiectat și executat o instalație complexă pentru generarea jeturilor de apă de mare viteză, având ca parte principală un multiplicator de presiune. Instalația conține multe soluții constructive originale, în special la partea de presiune foarte înaltă. Realizarea practică a instalației a fost posibilă cu sprijinul personalului din atelierul Laboratorului de Mașini Hidraulice din Timișoara, care a asigurat calitatea lucrărilor de execuție și montaj.

Problemele abordate pe parcursul elaborării lucrării acoperă un spectru foarte larg de preocupări, începând de la fundamentele mecanicii fluidelor, algoritmi și metode numerice, programarea calculatoarelor, și încheind cu probleme de proiectare, execuție, montaj al componentelor instalației experimentale, probleme de echipamente electronice, etc. Pentru rezolvarea lor, eforturile autorului au fost încurajate și sprijinite de experiența și profesionalismul multor colegi din colectivul Catedrei de Mașini Hidraulice, respectiv al Centrului de Cercetări de Hidrodinamică, Cavitație și Lichide Magnetice din cadrul Universității "Politehnica" din Timișoara.

Mi-a rămas mereu vie amintirea regretatului meu dascăl de matematici Anton Hadnagy, care în perioada studenției mele a organizat un seminar studențesc de Calcul Variațional și Metoda Elementului Finit unde am deprins ideile de bază ale acestei metode larg utilizată astăzi în rezolvarea problemelor de inginerie.

Gândurile mele de recunoștință se îndreaptă spre Prof.dr.ing. Victor Ancușa, care acum zece ani îmi călăuzea primii pași în domeniul Mecanicii Fluidelor și care mi-a însoțit dragostea pentru acest domeniu fascinant al științei. Sfaturile și încurajările sale m-au însoțit permanent, fiind un imbold pentru abordarea unor probleme din ce în ce mai dificile atât pe tărâm teoretic cât și experimental.

Am avut privilegiul de a elabora această lucrare sub îndrumarea magistrului Acad.Prof.dr.doc.ing. Ioan Anton, ale cărui îndemnuri și aprecieri m-au ajutat întotdeauna să depășesc dificultățile ivite atât în studiile teoretice cât și în realizarea și punerea în funcțiune a instalației experimentale. Exemplul său de muncă și probitate științifică, sfaturile și învățămintele izvorâte din experiența unei vieți pusă în slujba științei și a Politehnicii Timișorene constituie pentru mine un îndbold continuu spre autodepășire. Pentru încrederea pe care mi-a acordat-o în mod constant, pentru exigența și în special autoexigența pe care mi le-a însușit, și nu în ultimul rând pentru tot ce a investit în mine pe tărâm profesional și moral îi voi rămâne mereu recunoscător.



ing. Romeo Florin SUSAN RESIGA

Cuprins

1	Introducere	4
1.1	Scurt istoric al prelucrării materialelor cu jet de apă de mare viteză	4
1.2	Particularitățile tăierii materialelor cu jet de apă	5
1.3	Parametrii caracteristici pentru jeturile de lichid de mare viteză	7
1.4	Sursa de apă la presiune ridicată, pentru generarea jeturilor de apă de mare viteză	11
1.5	Duze pentru generarea jeturilor de tăiere	13
1.5.1	Tipuri de duze utilizate la tăierea materialelor	13
1.5.2	Parametrii geometrici optimi ai duzelor conico-cilindrice	16
1.6	Stădiul actual al cercetărilor în domeniul jeturilor de apă de mare viteză. Concluzii și definirea problemelor abordate în teză	18
2	Modelarea matematică a funcționării instalației de tăiere cu jet de apă	20
2.1	Compresibilitatea apei	21
2.2	Ecuția diferențială a pompei volumice	23
2.3	Pompa volumică cu mecanism bielă-manivelă	25
2.4	Pompa volumică cu motor hidraulic liniar (multiplicatorul de presiune)	29
3	Hidrodinamica duzei cilindrice pentru jeturi de tăiere	35
3.1	Curgerea axial-simetrică a fluidului nevâscos incompresibil	36
3.1.1	Formularea în funcția de curent	36
3.1.2	Formularea în potențialul vitezei	39
3.2	Metoda Elementului Finit pentru curgerea axial-simetrică a fluidului nevâscos incompresibil	40
3.2.1	Elementul finit triunghiular	43
3.2.2	Elementul finit patrulater	50
3.2.3	Structura pachetului de programe care utilizează Metoda Elementului Finit	56
3.3	Domaniul de curgere și condițiile pe frontieră	57
3.4	Suprafața jetului	59

3.4.1	Corecția suprafeței libere în cazul utilizării potențialului vitezei	62
3.4.2	Corecția suprafeței libere în cazul utilizării funcției de curent	64
3.5	Rezultate numerice	65
3.5.1	Curgerea irotațională	65
3.5.2	Curgerea rotațională	69
3.6	Comparație cu date experimentale pentru duze de tăiere cu jet	72
3.7	Variația vitezei pe peretele duzei și dezvoltarea stratului limită	74
3.8	Concluzii privind hidrodinamica duzei	82
4	Hidrodinamica jetului de lichid în gaz	83
4.1	Stabilitatea jeturilor de lichid	83
4.1.1	Ecuția stabilității jetului	84
4.1.2	Soluționarea numerică a ecuației stabilității jetului	91
4.1.3	Rezultate numerice	92
4.2	Studii experimentale asupra structurii jeturilor de lichid de mare viteză	96
4.3	Concluzii privind hidrodinamica jetului	107
5	Acțiunea jetului de apă de mare viteză asupra materialului solid	108
5.1	Impactul jetului de apă de mare viteză cu o placă plană	108
5.2	Corelația între parametrii caracteristici ai jetului și distrugerea materialului solid	115
5.3	Concluzii privind interacțiunea jet-solid	124
6	Calculul și construcția instalației experimentale pentru studii jeturilor de apă de mare viteză.	125
6.1	Stabilirea dimensiunilor principale ale multiplicatorului de presiune	126
6.2	Calculul de rezistență al cilindrilor pompei de apă de înaltă presiune	127
6.3	Schema hidraulică a instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză.	130
6.4	Descrierea instalației experimentale	133
6.5	Analiza stării de tensiune din pastila de safir a duzei	145
7	Studiul experimental al structurii jetului de apă de mare viteză și al instalației de generare a lui	148
7.1	Studiul experimental al funcționării pompei de apă de înaltă presiune	149
7.1.1	Principalele probleme apărute în funcționarea instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză și modificările constructive realizate pentru eliminarea lor	149
7.1.2	Calculul, construcția și etalonarea traductorului de înaltă presiune	151

7.1.3	Performanțele funcționale ale pompei de foarte înaltă presiune	157
7.2	Studiul experimental al structurii jetului de apă de mare viteză	161
7.2.1	Aparatura utilizată și mărimile măsurate	161
7.2.2	Rezultate experimentale privind structura jetului de apă de mare viteză	167
8	Concluzii	176
8.1	Concluzii generale	176
8.2	Contribuții personale	179
8.3	Perspective	181
	Bibliografie	182
A	Programe de calcul în limbaj FORTRAN elaborate de autor și utilizate în lucrare	188
A.1	Generarea geometriei domeniului și discretizarea	189
A.2	Rezolvarea problemei cu condiții la limită cu Metoda Elementului Finit	196
A.3	Trasarea liniilor de curent	213
A.4	Rezolvarea ecuației stabilității jetului	218

Capitolul 1

Introducere

1.1 Scurt istoric al prelucrării materialelor cu jet de apă de mare viteză

Tăierea cu jet de apă, denumită uneori și prelucrare hidrodinamică, este o tehnologie avansată de tăiere, care utilizează un jet de apă de mare viteză, $600 \dots 900 \text{ m/s}$, produs de o duză cu diametrul $0.1 \dots 0.4 \text{ mm}$.

Primele studii și cercetări experimentale în vederea utilizării jeturilor de apă de mare viteză în minerit au fost făcute de inginerii americani și sovietici în anii '30, pentru exploatarea cărbunilor. În 1949 compania americană Gilsonite a demarat exploatarea minereurilor cu jeturi de apă. Deasemenea, în 1956 au fost efectuate în U.R.S.S. primele încercări cu utilaje pentru săparea tunelurilor, utilizând jeturi de apă până la 2000 bar pentru tăierea rocilor.

Primul mare proiect pentru exploatarea hidromecanică a cărbunilor a fost testat în faza de instalație pilot în Germania, între anii 1977–1980, la Ruhrkohle A.G. Dortmund Zeche Hansa. Scopul inițial prevedea posibilitatea exploatării cărbunelui folosind exclusiv jeturi de apă de mare viteză, dar rezultatele practice au evidențiat un ritm de extracție sub cel așteptat. În această situație s-a optat pentru o tehnologie mixtă la care plăcuțele tăietoare ale utilajelor tradiționale sunt asistate cu jeturi de apă [15].

De mult mai mare succes s-a bucurat utilizarea jeturilor de apă la tăierea materialelor tehnice. Bazele științifice ale tăierii cu jet de apă au fost puse încă din anii '50 de L.F. Vereschagin, A.A. Semertchan, G.P. Nikonov, S.S. Shavlovski, dar tehnologia propriu-zisă a fost dezvoltată în anii '60 de N.C. Franz, la Universitatea din Michigan. Ulterior, contribuții importante la studiul procesului de tăiere cu jet au adus P.D. Lee, F. Lavoie, M. Hashish.

Primul sistem comercial a fost instalat în 1971 la McCartney Company, o filială Ingersoll-Rand [31]. Printre primii utilizatori ai acestei tehnologii a fost firma Boeing, care a folosit tăierea cu jet de apă a materialelor compozite, a semifabricatelor celulare și a aliajelor metalice speciale din domeniul aerospațial

[67]. Despre folosirea pe scară largă a instalațiilor cu jet de apă de mare viteză se poate vorbi numai începând cu anii '80. Utilizarea roboților industriali pentru o manipulare superioară a duzei de producere a jetului și introducerea particulelor abrazive în jetul de apă au fost principalii pași în dezvoltarea sistemelor de tăiere cu jet. Peste 500 astfel de sisteme erau operaționale la începutul anilor '90.

1.2 Particularitățile tăierii materialelor cu jet de apă

Sistemele de tăiere cu jet de apă fără abraziv sunt utilizate pentru a tăia materiale compozite, carton ondulat, produse din azbest, materiale plastice expandate (spună), cauciuc, nylon, fibre minerale, materiale plastice armate cu fibră de sticlă, placaj, folii de polietilenă și produse alimentare.

Principalele avantaje ale tăierii cu jet de apă față de alte procedee clasice sau neconvenționale sunt:

- utilizarea comodă la liniile de fabricație flexibile, modificarea traseului de tăiere putând fi controlată comod cu ajutorul computerului;
- eliminarea necesității finisării marginilor tăieturii; deasemenea, forța exercitată de jet nu depășește de regulă 100 N , evitându-se deformările în vecinătatea zonei prelucrate;
- inexistența zonei degradată termic, ca la procedeele cu LASER, fascicol de electroni, jet de plasmă; la tăierea cu jet de apă temperatura nu depășește local $60 \dots 90^\circ\text{ C}$;
- reducerea pierderilor de material, datorită lățimii mici a tăieturii, respectiv o cantitate mică de material îndepărtat;
- eliminarea problemelor de poluare a mediului prin praf, gaze de ardere, căldură;
- posibilitatea tăierii precise după orice contur tridimensional, procesul fiind omnidirecțional.

La acestea se adaugă faptul că productivitatea este comparabilă sau chiar superioară celorlalte procedee utilizate curent în practica industrială.

În Tab.1.1 sunt prezentate după [33] câteva rezultate obținute la încercări de tăiere cu jet de apă a diverse materiale.

Deoarece pentru materialele mai dure aspectul marginilor tăieturii nu corespunde cerințelor impuse, existând chiar pericolul spargerii semifabricatului, s-a încercat ameliorarea rezultatelor obținute prin adaos de polimer în apă. Astfel, un adaos de 0.2% polietilenglicol îmbunătățește considerabil coerența jetului și implicit calitatea tăieturii.

Deși este nepoluant, jetul de apă poate fi periculos pentru operatorul uman, atât din punct de vedere al acțiunii mecanice, cât și din punct de vedere al zgomotului produs. Practic viteza jetului depășește uzual dublul vitezei sunetului în aer. În Tab.1.2 sunt prezentate după [66] distanțele până la care se consideră că

Tabelul 1.1: Capacitatea de tăiere a jetului de apă de mare viteză.

Material	Gros. [mm]	Diametru duza [mm]	Presiune [bar]	Vit. avans [mm/s]	Adaus 0.2 % polimer
Piele	7	0.2	3920	250	NU
Carton ondulat	8	0.2	4310	3330	NU
Cauciuc sint.	6.4	0.2	2940	17	NU
Azbociment	18	0.2	3920	17	NU
Vată minerală	100	0.2	2940	830	NU
Polietilenă	3.6	0.2	1960	100	NU
Poliester	2	0.2	4310	2500	NU
Gheață	230	0.3	2940	17	NU
Marmură	20	0.3	3920	25	DA
Granit	24	0.2	3920	1.7	DA
Azbest	9	0.3	2940	830	DA
Circ. imprim.	1.7	0.2	2940	7	DA
Fibră sticlă	1	0.2	2940	17	DA

jetul este periculos, zona **A**, respectiv până la care se consideră zona de protecție a muncii, zona **B**.

Tabelul 1.2: Zonele de pericolozitate pentru jeturile de apă folosite la tăiere.

Presiunea [bar]	Zona A [m]	Zona B [m]	Nivel zgomot în zona A [dB]
1000	1.5	2.0	92
2000	2.0	2.5	97
3000	3.5	4.5	104
4000	4.0	6.0	118

Datorită nivelului ridicat al zgomotului, zona de lucru este realizată în interiorul unei incinte închise, operarea făcându-se din exterior prin comandă la distanță [68].

1.3 Parametrii caracteristici pentru jeturile de lichid de mare viteză

Îmbunătățirea performanțelor instalațiilor de tăiere cu jet de apă de mare viteză (creșterea productivității, optimizarea parametrilor de lucru) necesită cunoașterea structurii și controlul comportării jetului atunci când variază diferiți parametri hidrodinamici.

Condiția principală pentru utilizarea cu succes a jetului de apă de mare viteză la tăierea materialelor este, conform [51], realizarea unui jet compact. Conceptul de *compactitate a jetului* se utilizează pentru a exprima capacitatea jetului de a-și păstra energia cinetică până la o anumită distanță față de duză, evitându-se dezintegrarea lui. Cuantificarea compactității jetului poate fi făcută în mai multe moduri, rezultând diferite criterii practice pentru aprecierea caracteristicilor hidrodinamice ale jetului.

Dezvoltarea instalațiilor industriale de tăiere cu jet a impulsionat studiul detaliat a structurii jeturilor de lichid. Deși primele studii asupra dezintegrării jeturilor de lichid au apărut la sfârșitul secolului trecut, mecanismul complex care guvernează acest fenomen nu este nici astăzi pe deplin elucidat.

Principalii parametri utilizați pentru caracterizarea jeturilor de lichid sunt presiunea înaintea duzei, p , și viteza jetului, v . În ipoteza că întreaga energie potențială de presiune a lichidului (considerat incompresibil) se transformă în energie cinetică, legătura între viteză și presiune este dată de relația:

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (1.1)$$

unde ρ este densitatea lichidului. Deoarece jeturile de tăiere evoluează în aer, este natural să raportăm viteza jetului la viteza sunetului în aer (343 m/s). Astfel, un jet de apă ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) devine supersonic la presiuni $p > 600 \text{ bar}$. Conform relației de mai sus, pentru $p = 1000 \text{ bar}$ se obține $v = 447 \text{ m/s}$, la $p = 5000 \text{ bar}$, $v = 1000 \text{ m/s}$, iar pentru $p = 10000 \text{ bar}$ rezultă $v = 1414 \text{ m/s}$. Valorile obținute mai sus, deși nu concordă exact cu cele reale, justifică apelația de *jeturi supersonice* pentru jeturile de tăiere, ținând cont că în acest caz presiunea este în general de $2000 \dots 4000 \text{ bar}$. Mulți autori vehiculează denumirea de *jeturi de lichid de presiune înaltă*, în ideea că presiunea lichidului în fața duzei este un parametru mult mai ușor de măsurat în practică, decât viteza jetului. În cele ce urmează, vom utiliza termenul de **jet de lichid de mare viteză**, considerând că aceasta este corectă din punct de vedere hidrodinamic.

Studiul structurii și dinamicii jetului de lichid, în particular al celui supersonic, este una dintre cele mai dificile probleme ale hidrodinamicii. Din punct de vedere teoretic, trecerea de la jetul continuu (la ieșirea din duză) la un amestec de particule de lichid și aer, este dificil de exprimat cu metodele mecanicii mediilor fluide continue. De aceea, se studiază separat problema curgerii în duză și în zona

inițială a jetului, respectiv problema stabilității și dispersiei. Pe de altă parte, investigațiile experimentale sunt îngreunate de vitezele foarte mari de curgere și dimensiunile reduse (diametru 0.1...0.4 mm) ale jeturilor.

Jetul de apă evacuat prin duza de tăiere, evoluează în aer, a cărui densitate este de aproximativ 800 de ori mai mică decât a apei. După ieșirea din duză, jetul își pierde forma inițial cilindrică, evazându-se aproximativ conic datorită pulsațiilor turbulente și frecării cu mediul ambiant.

În general, jetul este format dintr-un amestec de picături de apă în aer. În vecinătatea secțiunii de ieșire, jetul are aspectul unui filament continuu de lichid, de viteză practic constantă, înconjurat de un strat subțire de picături fine. Gradientul de viteză din stratul limită al jetului, împreună cu variațiile de presiune din mediul ambiant și cu forțele de tensiune superficială, conduc la amplificarea perturbațiilor inerente curgerii. Pe măsură ce cresc aceste perturbații, din jet se desprind filamente de lichid, care la rândul lor se rup în picături mai mici. Acestea antrenează în mișcarea lor aerul din mediul ambiant, având loc un schimb de masă între jet și gaz.

"Aerarea" jetului începe de la suprafață și se propagă spre interior, astfel încât diametrul filamentului continuu de lichid se anulează la o anumită distanță față de duză. Această porțiune a jetului, în care se menține un nucleu continuu de lichid, respectiv presiunea dinamică, viteza și densitatea rămân constante în axă, se numește *porțiunea inițială*. În continuare, viteza în axă și presiunea dinamică scad după o lege hiperbolică, odată cu creșterea distanței față de duză. Într-o secțiune transversală a jetului, presiunea dinamică și viteza scad rapid spre frontieră, după o curbă de tip Gauss. Această porțiune a jetului în care concentrația de picături este ridicată, iar evazarea este relativ redusă, se numește *porțiunea principală*.

În continuare, jetul devine practic un amestec de picături fine de apă și aer, pentru care viteza în axă și presiunea dinamică sunt reduse și nu prezintă importanță din punct de vedere al tehnologiilor de tăiere cu jet. În alte procese, de exemplu arderea combustibilului lichid în motoarele Diesel, această ultimă zonă este cea mai importantă.

Porțiunea inițială a jetului, din vecinătatea duzei, este cel mai des utilizată pentru tăierea plăcilor, pe când porțiunea principală își găsește aplicații în procesele de finisare a marginilor tăieturilor obținute cu alte procedee, lustruirea și curățirea suprafețelor, respectiv îndepărtarea crustelor de depuneri.

O secțiune transversală în porțiunea inițială evidențiază trei regiuni circulare concentrice. Prima regiune corespunde zonei centrale ocupată de filamentul continuu de lichid. În a doua regiune densitatea scade, și apar bule microscopice de aer. A treia regiune reprezintă practic zona de trecere dintre jet și aerul ambiant, și aici se găsesc filamente de lichid și picături desprinse din jet.

Analiza dimensională a procesului de pulverizare a jeturilor de lichid [17] evidențiază câteva mărimi adimensionale utile în descrierea din punct de vedere hidrodinamic, a evoluției jetului. Mărimile fizice luate în considerare în acest caz

sunt:

Mărimea	Notăție	Dimensiunea
Diametrul mediu al picăturilor	D_{pic}	L
Diametrul orificiului duzei	D_o	L
Viteza jetului	v	LT^{-1}
Unghiul de evazare	λ	-
Densitatea lichidului	ρ	ML^{-3}
Vâscozitatea lichidului	η	$ML^{-1}T^{-1}$
Tensiunea superficială	σ	MT^{-2}
Densitatea aerului	ρ_a	ML^{-3}
Vâscozitatea aerului	η_a	$ML^{-1}T^{-1}$

Legătura între mărimile de mai sus poate fi pusă sub forma:

$$f(D_{pic}, D_o, v, \lambda, \rho, \eta, \sigma, \rho_a, \eta_a) = 0 \quad (1.2)$$

Dacă fenomenul poate fi descris cu o relație de tipul celei de mai sus, cu n variabile, și dacă aceste variabile pot fi scrise ca expresii adimensionale utilizând m variabile ca unități fundamentale, atunci funcția poate fi rescrisă cu un număr de $n - m$ argumente.

Deoarece în cazul de față avem 9 variabile, respectiv 3 unități de măsură fundamentale, funcția va avea în final 6 variabile, fiecare de forma:

$$D_{pic}^a D_o^b v^c \lambda^e \rho^f \eta^g \sigma^h \rho_a^j \eta_a^k$$

unde a, b, \dots, k sunt 6 seturi de valori independente.

Înlocuind unitățile de măsură corespunzătoare, obținem:

$$L^{a+b}(LT^{-1})^c(ML^{-3})^{f+j}(ML^{-1}T^{-1})^{g+k}(MT^{-2})^h$$

și condițiile de adimensionalitate impun anularea exponenților pentru M, L și T :

$$\begin{cases} f + j + g + k + h = 0 \\ a + b + c - 3f - 3j - g - k = 0 \\ -c - g - k - 2h = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Numai 3 necunoscute pot fi determinate din acest sistem, deci celelalte 5 trebuie să fie alese arbitrar (e este exponentul unei mărimi adimensionale, deci nu intervine în această discuție). Indiferent ce valori alegem pentru cele 5 mărimi, celelalte 3 pot fi calculate, și știm că această combinație de exponenți convertește combinația inițială într-o expresie adimensională.

Spre exemplu, punând $a = 1$ și $c = h = j = k = 0$, obținem:

$$\begin{cases} f + g = 0 \\ 1 + b - 3f - g = 0 \\ -g = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

și rezultă $g = 0$, $f = 0$, $b = -1$, deci pentru prima variabilă obținem criteriul adimensional d/D . Rezultatele obținute cu această metodă sunt prezentate în tabelul de mai jos:

valori arbitrare					valori calculate			mărimi adimensionale
a	c	h	j	k	b	f	g	
1	0	0	0	0	-1	0	0	D_{pic}/D_o
0	1	0	0	0	1	1	-1	$D_o v \rho / \eta$
0	0	1	0	0	1	1	-2	$D_o \rho \sigma / \eta^2$
0	0	0	1	0	0	-1	0	ρ_a / ρ
0	0	0	0	1	0	0	-1	η_a / η

De remarcat că

$$\frac{D_o v \rho}{\eta} = Re$$

este numărul Reynolds asociat jetului la ieșirea din duză, respectiv:

$$\frac{D_o \rho \sigma}{\eta^2} = \frac{1}{Z^2}$$

unde Z este numărul lui Ohnesorge. De obicei în practică se utilizează o combinație a celor două criterii de similitudine prezentate mai sus:

$$\frac{D_o \rho \sigma / \eta^2}{(D_o v \rho / \eta)^2} = \frac{\sigma}{D_o v^2 \rho} = We$$

care este numărul Weber.

Pentru un jet de apă ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 72.7 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}$) utilizat la tăierea materialelor, obținem următoarele valori tipice pentru numerele Reynolds și Weber:

- pentru $D_o = 0.3 \text{ mm}$ și $v = 775 \text{ m/s}$ (la $p = 3000 \text{ bar}$) rezultă $Re = 2.32 \cdot 10^5$ și $We = 0.4 \cdot 10^{-6}$;
- pentru $D_o = 0.4 \text{ mm}$ și $v = 632 \text{ m/s}$ (la $p = 2000 \text{ bar}$) rezultă $Re = 2.53 \cdot 10^5$ și $We = 0.45 \cdot 10^{-6}$.

Numărul Reynolds reprezintă raportul dintre forțele de inerție și forțele de frecare vâscoasă, iar numărul Weber este raportul dintre forțele datorate tensiunii superficiale și forțele de inerție. Cum ordinea de mărime ale celor două criterii de similitudine sunt $\mathcal{O}(Re) = 10^5$ și $\mathcal{O}(We) = 10^{-6}$, rezultă că frecarea vâscoasă și tensiunea superficială au un rol secundar în evoluția jeturilor de apă de mare viteză, în raport cu forțele de inerție.

1.4 Sursa de apă la presiune ridicată, pentru generarea jeturilor de apă de mare viteză

Pentru generarea jeturilor de apă folosite la tăierea materialelor este necesară realizarea unei presiuni de 3...4 kbar înaintea duzei, în condițiile unor debite de 3...1 l/min. Pentru aceasta se folosesc pompe speciale de înaltă presiune, la care etanșarea pistonului este fixă iar pistonul plonjor se deplasează în cilindru fără a avea contact cu suprafața interioară a acestuia. Antrenarea plonjorului se poate face fie mecanic (cu mecanism bielă-manivelă [72]) fie hidraulic (cu ajutorul unor motoare hidraulice liniare acționate cu ulei [67] [66]). Producătorii de echipamente de tăiere cu jet de apă au optat pentru a doua variantă, ansamblul motor hidraulic liniar – pompă cu piston plonjor fiind denumit **multiplicator de presiune**.

Pentru a asigura continuitatea jetului, pompa de înaltă presiune are doi cilindri care lucrează în contratimp, antrenați de un cilindru hidraulic cu dublă acțiune. O asemenea soluție constructivă este prezentată în Fig.1.1.

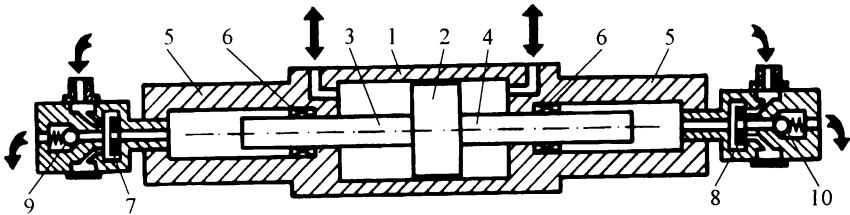


Figura 1.1: Schema de principiu a multiplicatorului de presiune utilizat la instalațiile de tăiere cu jet de apă.

În cilindrul hidraulic 1 se deplasează pistonul 2 care antrenează plonjoarele 3 și 4. Cele două pistoane plonjoare se deplasează în cilindrii pompei de apă de presiune foarte înaltă 5, etanșarea fiind realizată cu etanșările fixe 6. Fiecare cilindru are un bloc de supape de aspirație 7 și 8, respectiv refulare 9 și 10. Când ansamblul pistoanelor se deplasează spre dreapta, supapele 7 și 10 sunt deschise, iar 8 și 9 închise. Corespunzător, în cilindrul din stânga se realizează cursa de aspirație iar în cel din dreapta cea de refulare. La inversarea sensului de mișcare a pistoanelor, rolurile celor doi cilindri de inversează.

Raportul de amplificare al presiunii este la majoritatea echipamentelor produse industrial de 20:1 [31], și prin urmare presiunea uleiului cu care este antrenat cilindrul hidraulic nu depășește 200 bar.

În Tab.1.3 sunt prezentate principalele caracteristici constructive și funcționale ale surselor de apă realizate de firma FLOW SYSTEMS pentru echiparea unuia sau mai multor posturi de lucru cu capete de tăiere cu jet de apă.

Tabelul 1.3: Parametrii constructivi și funcționali ai instalațiilor de tăiere cu jet de apă de mare viteză, realizate de firma FLOW SYSTEMS.

Model	Nr. multiplicatoare	Pres. [bar]	Putere motor [kW]	Frecvența [curse/min]	Debit apă [l/min]	Diam. max. duza [mm]
6 XS-30	1	2070	19	50	4.35	0.432
6 XS-40	1	2760	19	50	3.17	0.356
6 XS-55	1	3790	19	50	1.93	0.254
9 XS-30	1	2070	30	80	6.96	0.559
9 XS-40	1	2760	30	80	5.07	0.457
9 XS-55	1	3790	30	80	3.10	0.330
6 XD-30	2	2070	45	120	10.45	0.686
9 XD-40	2	2760	45	120	7.61	0.559
9 XD-55	2	3790	45	120	4.69	0.406
12 XT-30	3	2070	75	180	15.70	0.863
12 XT-40	3	2760	75	180	11.40	0.686
12 XT-55	3	3790	75	180	7.00	0.483

Se observă că dacă debitul de apă necesar crește, sa preferă legarea în paralel a mai multor multiplicatoare în locul realizării unui nou multiplicator cu alte dimensiuni. De asemenea, dacă se modifică presiunea de lucru se modifică doar diametrul pistoanelor plonjoare și cilindrii pompei de înaltă presiune, sistemul de antrenare rămânând neschimbat. Această soluție asigură o flexibilitate ridicată a echipamentelor, parametrii de lucru putând fi ajustați ușor funcție de necesitățile procesului de tăiere.

Schema hidraulică de principiu a unei instalații de tăiere cu jet de apă este prezentată în Fig.1.2, după [33].

În circuitul primar de ulei, pompa 1 alimentează cilindrul hidraulic al multiplicatorului de presiune 2 prin intermediul distribuitorului 3 care permite inversarea sensului de mișcare la capătul cursei. Presiunea din circuitul primar este limitată de supapa comandată 4 și implicit este limitată și valoarea presiunii apei din circuitul secundar. Pentru a evita încălzirea uleiului la funcționarea îndelungată, pe traseul de retur la tanc se prevede un răcitor de ulei 5.

Circuitul de apă are o parte de joasă presiune, în care pompa 6 aspiră apa din rezervor și o trimite spre supapele de aspirație 7 ale cilindrilor de înaltă presiune ai multiplicatorului. Presiunea realizată de pompa 6 nu depășește de obicei 10...20 bar, ea trebuind să învingă numai rezistența hidraulică a supapelor. Partea de înaltă presiune a circuitului de apă este delimitată de supapele de evacuare 8 și de duza 11. Pe acest traseu se dispune un acumulator hidraulic 9 care are rolul de a atenua pulsațiile de presiune la inversarea sensului de mișcare

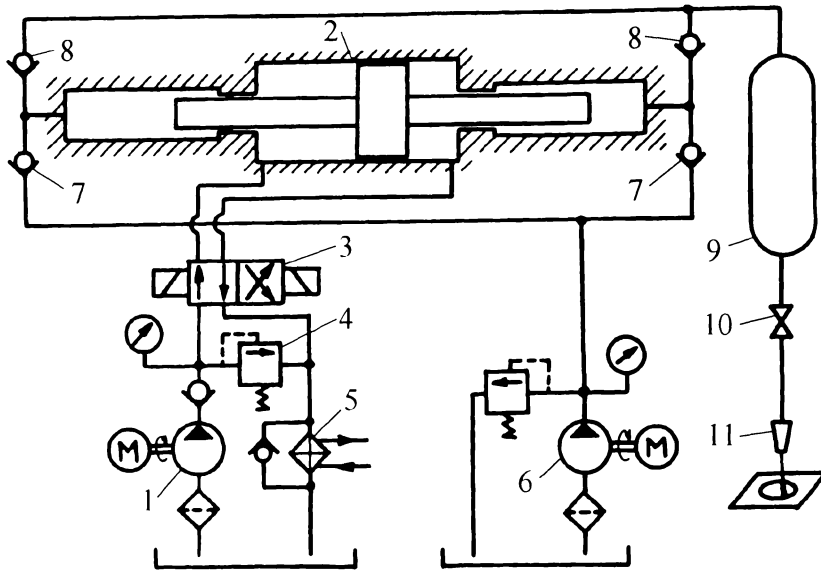


Figura 1.2: Schema hidraulică a unei instalații de tăiere cu jet de apă de mare viteză.

a pistoanelor. Acest acumulator utilizează ca element elastic însăși apa, care la 4000 bar se comprimă cu 12%, prin urmare este realizat sub forma unui simplu recipient de presiune foarte înaltă, fără piese în mișcare. Opțional, în acumulator se pot dispune filtre fine pentru apă în vederea protejării duzei. Înaintea duzei se prevede un ventil cu ac 10, acționat pneumatic, care poate opri accesul apei spre duză în timpul întreruperii procesului de tăiere.

Pentru creșterea performanțelor de tăiere, în jetul de apă evacuat din duză se pot introduce particule abrazive printr-un dispozitiv de tip ejector, nefigurat în schemă.

1.5 Duze pentru generarea jeturilor de tăiere

1.5.1 Tipuri de duze utilizate la tăierea materialelor

Energia potențială de presiune a fluidului este transformată în duză în energie cinetică a jetului evacuat. Forma, dimensiunile și rugozitatea suprafeței de conducere a fluidului în interiorul duzei influențează compactitatea jetului, respectiv lungimea porțiunii inițiale.

Pentru generarea jeturilor de lichid de mare viteză au fost încercate mai multe tipuri de duze, [51]: cilindrică (Fig.1.3.a), conică (Fig.1.3.b), conoidă (Fig.1.3.c), conico-cilindrică (Fig.1.3.d) și bicubică (Fig.1.3.e).

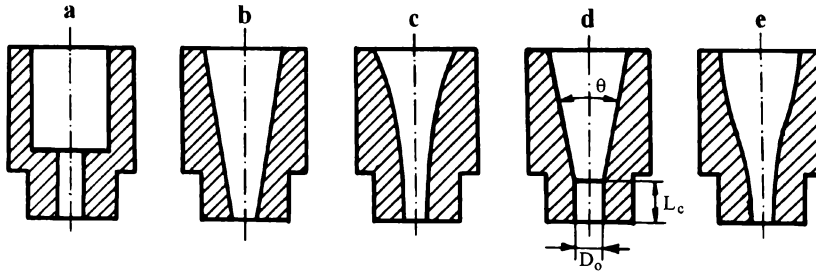


Figura 1.3: Tipuri de duze pentru jeturi de tăiere.

Duza cilindrică este cel mai ușor de realizat din punct de vedere tehnologic, dar studiul curgerii lichidului în duză evidențiază următoarele neajunsuri:

- contractia bruscă a vânei de fluid la capătul conductei cilindrice conduce la apariția unor zone de recirculare **r1**, Fig.1.4; întreținerea mișcării în aceste zone se face cu ajutorul energiei preluată de la curentul principal, energie care este disipată prin frecare vâscoasă;
- jetul produs se contractă inițial, după care se reatașează la peretele porțiunii cilindrice, formându-se o a doua zonă de recirculare **r2**, Fig.1.4.a; presiunea în această zonă scade și apar bule cavitaționale a căror implozie ulterioară distruge peretele duzei.

Zona de recirculare **r1** nu poate fi eliminată fără modificarea geometriei cilindrice a duzei, dar influența sa asupra jetului poate fi mult diminuată prin utilizarea unui raport suficient de mare între diametrul conductei și diametrul orificiului (uzual mai mare de 10:1). Zona **r2** poate fi eliminată prin scurtarea porțiunii cilindrice a orificiului, evitându-se contactul jetului cu peretele solid. Această soluție ridică probleme legate de rezistența mecanică a duzei, și prin urmare orificiul va fi practicat într-o pastilă de safir sau diamant sintetic, fixată într-o montură metalică. Diametrul pastilei de safir este de aproximativ 2 mm și grosimea de 1 mm, orificiul avînd diametrul în intervalul 0.1...0.4 mm. La avantajul legat de simplitatea constructivă se adaugă și faptul că suprafața în contact cu lichidul în zona vitezelor mari de curgere este cea mai mică la duza cilindrică, în comparație cu celelalte variante de duze. Aceasta asigură pentru duza cilindrică cele mai mici pierderi prin frecare. În schimb, calitatea jetului este puternic influențată de precizia prelucrării muchiei de intrare a orificiului, respectiv de uzura ei în timpul funcționării.

Evitarea apariției zonelor de recirculare **r1**, Fig.1.4, se poate obține numai dacă secțiunea de curgere a lichidului scade progresiv cu creșterea corespunzătoare

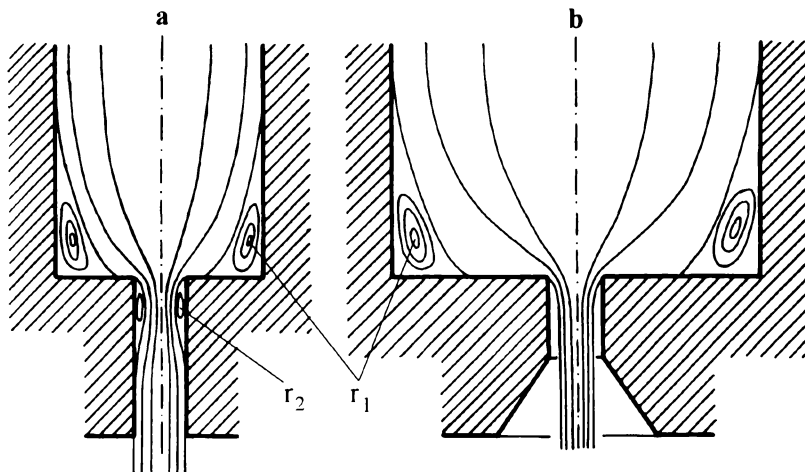


Figura 1.4: Curgerea în duza cilindrică.

a vitezei. Cea mai simplă soluție de acest gen este duza conică, Fig.1.3.b. Din punct de vedere tehnologic, suprafața conică este mai greu de obținut decât cea cilindrică, mai ales în cazul diametrelor mici ale orificiului.

În afara duzei conice s-au propus și duze "conoide", la care variația secțiunii de curgere se face după o lege polinomială sau exponențială, Fig.1.3.c. Spre exemplu, dacă se dorește o creștere liniară a vitezei de-a lungul axei, secțiunea trebuie să scadă liniar. Notând cu R_0 raza orificiului, cu R_1 raza la intrare în duză și cu L lungimea duzei, raza curentă r , la distanța z de la intrare, va fi:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{z}{L} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad (1.5)$$

În cazul unui profil exponențial, avem:

$$r = R_1 e^{-\frac{z}{L} \ln \frac{R_1}{R_0}} \quad (1.6)$$

acest tip de duză fiind folosit în special pentru jeturile pulsante. Execuția și controlul suprafeței de conducere a lichidului sunt extrem de dificile, crescând nejustificat prețul de cost, fără a obține o îmbunătățire corespunzătoare a calității jetului. Aceeași remarcă este valabilă și pentru duzele "bicubice", Fig.1.3.e. La acestea din urmă, dependența $r(z)$ este obținută cu două arce de polinom de gradul al treilea, racordate astfel încât să se obțină o curbă de clasă C^2 .

În practică, cel mai ușor de realizat este profilul duzei conico-cilindrice, Fig.1.3.d. Materialele utilizate la construcția acestor duze sunt oțeluri aliate cu molibden,

carburi metalice, respectiv diamant sau safir sintetic. Uzura cea mai pronunțată apare în zonele în care fluidul are viteză ridicată, deci în porțiunea cilindrică de la ieșire și în vecinătatea ei, și din acest motiv se preferă și în acest caz practicarea orificiului într-o pastilă de safir sau diamant. Spre deosebire de duzele cilindrice, porțiunea conică va fi situată acum în amonte de orificiu.

Durabilitatea duzelor realizate din oțel aliat nu depășește 20...120 min, iar a celor realizate din carburi metalice se situează între 2...18 ore. Spre deosebire de acestea, utilizarea pastilei de safir sau diamant conduce la o durată de utilizare de până la 30 zile, costul mai ridicat al acestora fiind perfect justificat de creșterea importantă a fiabilității instalației de tăiere.

1.5.2 Parametrii geometrici optimi ai duzelor conico-cilindrice

Geometria duzei conico-cilindrică este descrisă de unghiul conului, θ , și de lungimea relativă a porțiunii cilindrice de la ieșire, L_c/D_0 Fig.1.3.d. Există mai multe criterii posibile de optimizare a acestor parametri, și prin urmare și valorile recomandate în literatură diferă ușor de la un autor la altul.

Pornind de la dezideratul productivității maxime a procesului de tăiere, asociată cu o calitate corespunzătoare a marginii tăieturii, în [51] se ia în considerare criteriul compactității jetului, adică minimizarea unghiului de evazare (notat în continuare cu λ). Duzele studiate experimental au avut unghiul θ egal cu 3°, 5°, 8°, 10°, 15°, 20°, 30°, respectiv lungimea tronsonului cilindric $L_c/D_0 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Diametrul duzei a variat între 0.1...0.4 mm iar presiunea apei între 1000 și 5000 bar. Unghiul de evazare a jetului, λ , a fost determinat prin filmare sau fotografiere.

Cele mai compacte jeturi au fost obținute, pentru diferite presiuni și diametre de duză, în cazul când unghiul conului este $\theta = 3...9^\circ$ (Fig.1.5).

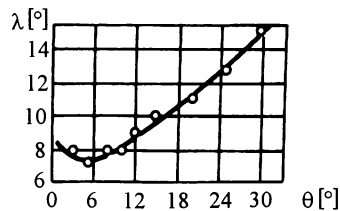


Figura 1.5: Unghiul de evazare a jetului, λ , funcție de unghiul conului, θ [51].

Lungimea optimă a tronsonului cilindric este $L_c/D_0 = 2...7$ (Fig.1.6).

L_c/D_0 crește odată cu scăderea lui D_0 și creșterea presiunii. Cea mai bună compactitate a jetului, $\lambda = 7^\circ$, a fost observată la o presiune de 5000 bar și o

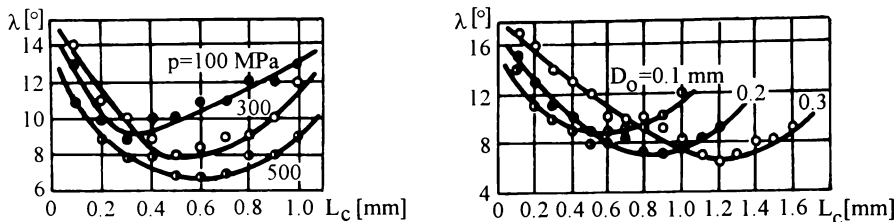


Figura 1.6: Unghiul de evazare a jetului, λ , funcție de lungimea tronsonului cilindric, L_c : a) pentru diferite valori ale presiunii; b) pentru diferite diametre ale duzei [51].

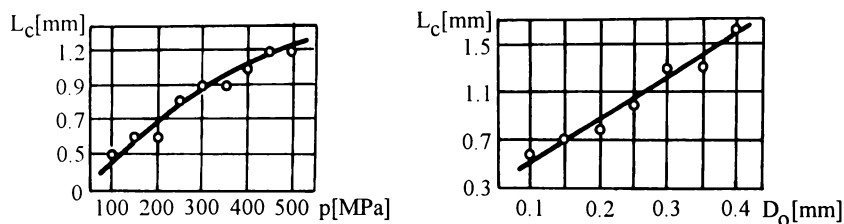


Figura 1.7: Valoarea optimă a lui L_c funcție de: a) presiune; b) diametrul duzei [51].

duză cu $D_0 = 0.3 \text{ mm}$. Pe baza valorilor optime ale lui L_c , prezentate în Fig.1.7 s-a putut stabili următoarea corelație empirică [51] :

$$L_c = 0.14 p^{0.52} D_0^{0.8} \tag{1.7}$$

În relația de mai sus, se introduce $p [\text{MPa}]$, $D_0 [\text{mm}]$ și se obține $L_c [\text{mm}]$. Spre exemplu, pentru $p = 400 \text{ MPa}$ și $D_0 = 0.3 \text{ mm}$, avem:

$$L_c = 0.14 \cdot 400^{0.52} \cdot 0.3^{0.8} = 1.2 \text{ mm} \quad \text{adică } L_c/D_0 = 4$$

Un alt criteriu de optimizare a formei duzei este cantitatea maximă de material dizlocat de jetul care lovește o placă plană. Pornind de la acest principiu, Kobayashi, [21], a efectuat experiențe cu duze conice și cilindrice, având $D_0 = 1 \text{ mm}$, la presiunea apei de 50 MPa și un timp de 60 s de expunere a unei probe de aluminiu sub acțiunea jetului de apă. Cantitatea maximă de material dizlocat de către jet variază funcție de L_c/D_0 , respectiv funcție de θ , după cum se arată în Fig.1.8 și Fig.1.9. Pe baza acestor date experimentale, Kobayashi recomandă $\theta = 13^\circ$ și $L_c/D_0 = 4$ pentru duzele conico-cilindrice.

În cazul duzelor cilindrice, se constată că parametrul L_c/D_0 practic nu influențează evoluția jetului, respectiv cantitatea de material dizlocat. Explicația acestei

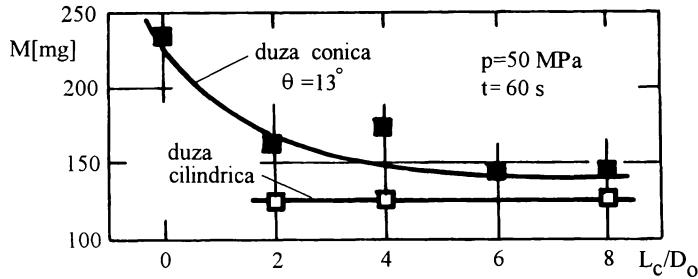


Figura 1.8: Pierderea de masă a probei, funcție de lungimea relativă a tronsonului cilindric. L_c/D_0 [24].

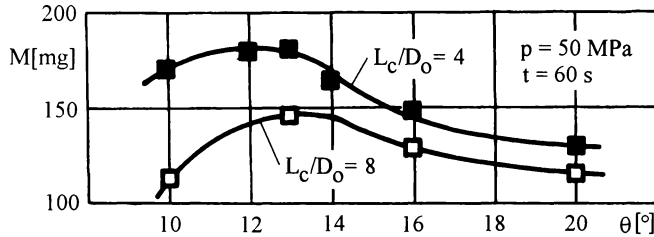


Figura 1.9: Pierderea de masă a probei, funcție de unghiul de evazare al conului, θ [24].

observații constă în faptul că jetul suferă o contracție la ieșirea din orificiu și practic nu mai atinge peretele cilindric de la ieșire. Mărima lui L_c este dictată în acest caz de considerente de rezistență mecanică a duzei.

Dimensiunile canalului de alimentare a duzei influențează de asemenea caracteristicile jetului [51]. Experimental, s-a constatat că raportul între diametrul interior al conductei de înaltă presiune și diametrul orificiului este optim în intervalul $10 \dots 15$ (conducele utilizate în instalațiile de tăiere cu jet au diametrul interior de $(1/8)^{\text{in}} = 3.175 \text{ mm}$). Lungimea tronsonului drept de conductă din fața duzei trebuie să fie între $50 \dots 80 \times \text{diametrul interior}$.

1.6 Stadiul actual al cercetărilor în domeniul jeturilor de apă de mare viteză. Concluzii și definirea problemelor abordate în teză

Tăierea materialelor cu jeturi de apă de mare viteză este un procedeu tehnologic relativ nou, dezvoltat pe scară industrială în ultimii 20 de ani. Avantajele deosebite pe care le prezintă în multe aplicații față de procedeele convenționale de tăiere au impulsat studiile și cercetările atât în domeniul hidrodinamicii

jetului și a interacțiunii cu materialul solid cât și în domeniul dezvoltării unor sisteme industriale de tăiere cu jet și stabilirea parametrilor tehnologici optimi ai acestora.

Din punct de vedere tehnologic, principala problemă o constituie ghidarea jetului, astfel încât să urmărească conturul dorit, menținând totodată duza la distanța optimă de material. Problema și-a găsit soluționarea în dezvoltarea sistemelor robotizate care realizează conducerea jetului în trei dimensiuni.

Din punct de vedere al generării jetului și al evoluției lui în aer, respectiv al acțiunii asupra materialului solid, rămân încă deschise o serie de probleme. Deși începând cu anii '80 câteva firme constructoare din S.U.A, Germania și Japonia produc surse de apă la presiune înaltă pentru echiparea instalațiilor de tăiere cu jet, există puține date în literatură asupra soluțiilor constructive utilizate. Tendința generală este de a se utiliza multiplicatoare de presiune, la care circuitul primar de ulei la joasă presiune (până la 200 bar) utilizează componentele uzuale din instalațiile de acționare hidraulică. Pentru pompa de apă de înaltă presiune (2000...4000 bar) soluțiile constructive sunt specifice. De aceea ne-am propus în această lucrare studiul teoretic al funcționării pompelor volumice de presiune înaltă (luând în considerare și compresibilitatea lichidului) precum și elaborarea unor soluții constructive pentru elementele care vin în contact cu apa sub presiune înaltă. Aceste soluții originale au fost înglobate într-o instalație experimentală pentru studiul jeturilor de apă de mare viteză, proiectată în întregime de autor și realizată practic în atelierele Catedrei de Mașini Hidraulice a Facultății de Mecanică din Timișoara.

Analizând soluțiile constructive pentru duzele folosite la producerea jetului am constatat că pentru dimensiuni mici ale orificiului (0.1...0.4 mm) este preferabilă o geometrie cilindrică, orificiul fiind practicat într-o pastilă de safir. Pentru acest tip de duză se impune studiul câmpului hidrodinamic, inclusiv porțiunea inițială a jetului la ieșirea din orificiu. Acest studiu a fost efectuat în cadrul tezei cu Metoda Elementului Finit, utilizând programe elaborate de autor. Investigația teoretică a hidrodinamicii jetului a fost completată cu analiza stabilității jetului de lichid în aer, pentru a pune în evidență cauzele principale care conduc la destrămarea jetului.

Studiile experimentale prezentate în literatură asupra structurii jeturilor de tăiere și a interacțiunii cu materialul solid s-au concentrat în special asupra stabilirii zonelor caracteristice ale jetului și corelarea lor cu performanțele tehnologice. S-a insistat mai puțin asupra structurii jetului în secțiune transversală, în principal datorită diametrului mic al acestuia. Pornind de la aceste premize am elaborat o metodă de investigare optică a jetului de apă de mare viteză care să permită stabilirea distanței de la duză până la care jetul rămâne coerent și prin urmare poate fi utilizat la tăierea materialelor. Investigațiile experimentale au fost realizate pe instalația experimentală de construcție proprie, cu această ocazie fiind perfecționate soluțiile constructive utilizate la pompa de înaltă presiune, în special la etanșarea pistonului plonjor.

Capitolul 2

Modelarea matematică a funcționării instalației de tăiere cu jet de apă

Conform schemei de principiu a unei instalații de tăiere cu jet de apă, Fig.1.2, circuitul de ulei și circuitul de apă de joasă presiune utilizează echipamente uzuale în practica acționărilor hidraulice. În acest caz, deoarece nivelul presiunii uleiului nu depășește 200 bar, iar alimentarea cu apă a multiplicatorului de presiune se face la 10...20 bar, compresibilitatea lichidului este practic neglijabilă. Cu totul alta este situația în circuitul de apă de presiune înaltă, unde compresibilitatea apei la presiune de câteva mii de bar nu mai poate fi neglijată, ba mai mult poate fi utilizată pentru atenuarea pulsațiilor de presiune inerente mașinilor volumice.

În acest capitol este abordat studiul teoretic al funcționării pompelor volumice care debitează apa printr-un orificiu mic. Pentru caracterizarea proprietăților elastice ale apei autorul propune relații originale de calcul, pornind de la ipoteza variației liniare a modulului de elasticitate cu presiunea. Coeficienții care intervin în aceste relații sunt determinați pe baza datelor experimentale din literatură, referitoare la proprietățile fizice ale apei la presiuni înalte.

În vederea studierii hidrodinamicii traseului de înaltă presiune al instalațiilor de generare a jeturilor de apă de mare viteză propunem un model matematic original, care utilizează ecuația pompei volumice cu lichid compresibil dedusă de autor. Acest model este validat cu date experimentale din literatură, în final fiind aplicat la studiul funcționării instalațiilor de tăiere cu jet dotate cu multiplicator de presiune. Pe baza rezultatelor obținute se poate stabili volumul acumulatorului hidraulic ce utilizează ca element elastic chiar apa, astfel încât să se reducă pulsațiile presiunii înaintea duzei până la nivelul dorit de utilizator.

2.1 Compresibilitatea apei

Compresibilitatea apei este proprietatea fluidelor de a-și micșora volumul odată cu creșterea presiunii. Expimarea cantitativă a compresibilității se face cu ajutorul coeficientului de compresibilitate β sau a modulului de elasticitate E (STAS 3061-74), conform formulei:

$$\beta = \frac{1}{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.1)$$

unde p este presiunea iar ρ densitatea. Pentru lichide se utilizează de obicei coeficientul de compresibilitate izotermă, iar pentru gaze coeficientul de compresibilitate izentropă.

În majoritatea aplicațiilor practice lichidele sunt considerate ca fiind incompresibile, dar în tehnica presiunilor înalte compresibilitatea lor nu poate fi neglijată.

Pornind de la modelul atomic Fermi-Thomas, se poate deduce următoarea ecuație diferențială pentru coeficientul de compresibilitate, respectiv pentru modulul de elasticitate [12]:

$$\frac{d\beta}{dp} = -a\beta^2 \quad \text{respectiv} \quad \frac{dE}{dp} = a \quad (2.2)$$

unde a este un coeficient adimensional. Integrând, obținem pentru E o variație liniară cu presiunea:

$$E(p) = E_0 + a \cdot p \quad (2.3)$$

unde E_0 este valoarea corespunzătoare presiunii de referință p_0 . Din (2.1) și (2.3) rezultă:

$$\frac{p + \frac{E_0}{a}}{p_0 + \frac{E_0}{a}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^a \quad (2.4)$$

unde ρ_0 este valoarea densității la p_0 .

Ecuația (2.4) este similară cu formula lui Tait [49], care indică pentru apa la temperatura ambiantă $E_0/a \approx 3.05 \text{ kbar}$ și $a \approx 7.15$.

Dacă considerăm ca presiune de referință presiunea atmosferică, de $\mathcal{O}(10^5 \text{ Pa})$, deoarece E_0/a este de $\mathcal{O}(10^9 \text{ Pa})$ putem simplifica relația (2.4) astfel:

$$\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{ap}{E_0} \right)^{\frac{1}{a}} \quad (2.5)$$

În cele ce urmează, pentru precizarea valorilor coeficienților E_0 și a se utilizează datele experimentale obținute de Smith și Lawson [36] care au măsurat viteza sunetului în apă la diferite presiuni și temperaturi.

Pornind de la formula de calcul a vitezei sunetului în medii elastice, $c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{dp/d\rho}$, cu (2.3) și (2.5) obținem:

$$c(p) = c_0 \left(1 + \frac{ap}{E_0} \right)^{\frac{a-1}{2a}} \quad (2.6)$$

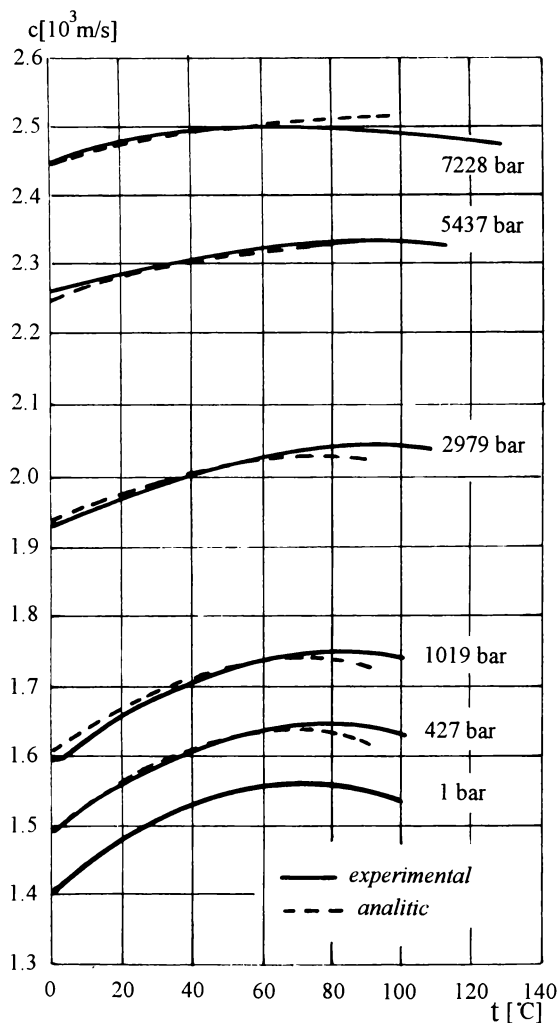


Figura 2.1: Viteza sunetului în apă, funcție de presiune și temperatură. Curbele continue reprezintă datele experimentale ale lui Smith și Lawson [36], iar curbele întrerupte sunt calculate cu relațiile (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) propuse de noi [37].

unde $c_0 = c(p_0) = \sqrt{E_0/\rho_0}$. Dependența de temperatura $t[^\circ\text{C}]$ a vitezei sunetului

va fi luată în considerare prin construirea unor funcții polinomiale de tipul:

$$\rho_0 = d_0 + d_1 \cdot (t[^\circ C]) + d_2 \cdot (t[^\circ C])^2 + d_3 \cdot (t[^\circ C])^3 \quad [\text{kg/m}^3] \quad (2.7)$$

$$E_0 = [e_0 + e_1 \cdot (t[^\circ C]) + e_2 \cdot (t[^\circ C])^2] \cdot 10^9 \quad [\text{Pa}] \quad (2.8)$$

$$a = a_0 + a_1 \cdot (t[^\circ C]) + a_2 \cdot (t[^\circ C])^2 \quad [-] \quad (2.9)$$

Temperatura se introduce în grade Celsius, iar coeficienții polinomiali, calculați cu metoda celor mai mici pătrate, au valorile numerice indicate în tabelul de mai jos [37].

$d_0 = 999.9$	$e_0 = 1.974$	$a_0 = 7.204$
$d_1 = 3.735 \cdot 10^{-2}$	$e_1 = 1.254 \cdot 10^{-2}$	$a_1 = -1.276 \cdot 10^{-2}$
$d_2 = -6.409 \cdot 10^{-3}$	$e_2 = -9.670 \cdot 10^{-5}$	$a_2 = 9.469 \cdot 10^{-5}$
$d_3 = 1.894 \cdot 10^{-5}$		

Fig. 2.1 prezintă comparația între valorile experimentale pentru viteza sunetului în apă (curbele continue, după Smith și Lawson [36]) și rezultatele numerice obținute cu relațiile 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 propuse de noi. Se observă că expresiile analitice aproximează cu o eroare mai mică de 1% datele experimentale, domeniul lor de valabilitate fiind cel puțin pentru presiuni mai mici de 7000 bar și temperaturi sub 100°C.

Având în vedere că pentru tăierea cu jet de apă de mare viteză presiunea nu depășește de regulă 4000 bar iar efectele termice conduc la o creștere a temperaturii apei la cel mult 50°C, se poate considera că pentru studiul acestor procese relațiile (2.3) și (2.5) propuse de autor descriu cu o acuratețe foarte bună proprietățile elastice ale apei.

2.2 Ecuația diferențială a pompei volumice

Pompele de înaltă presiune utilizate la instalațiile de tăiere cu jet de apă sunt pompe volumice, la care antrenarea pistonului se poate face direct mecanic sau prin intermediul unor cilindri hidraulici. Modelul simplificat al unei asemenea pompe este prezentat în Fig. 2.2

Pistonul, cu diametrul D_p , se deplasează cu viteza v_p în sensul micșorării volumului de lichid Vol conținut în cilindrul pompei. Aceasta are ca efect comprimarea lichidului, a cărui densitate crește de la ρ_0 , pentru $p_0 = 0$, până la ρ , corespunzătoare presiunii din cilindru, p , concomitent cu generarea unui jet prin orificiul de diametru D_o și coeficient de debit C_d .

Viteza teoretică a jetului (în ipoteza neglijării disipațiilor vâscoase) v , se calculează scriind ecuația lui Bernoulli între un punct din interiorul cilindrului și un punct din jet:

$$\frac{v^2}{2} = \int_{p_0=0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (2.10)$$

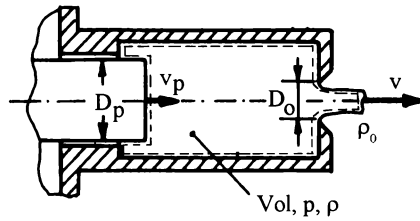


Figura 2.2: Modelul pompei volumice care debitează printr-un orificiu mic

de unde obținem, ținând cont de (2.5):

$$v = \sqrt{2 \int_0^p \frac{dp}{\rho_0 \left(1 + \frac{ap}{E_0}\right)^{1/a}}} \quad (2.11)$$

Dupa calculul integralei rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{2 E_0}{\rho_0 (a - 1)} \left[\left(1 + \frac{ap}{E_0}\right)^{1-\frac{1}{a}} - 1 \right]} \quad (2.12)$$

Dacă lichidul este considerat incompresibil, adică $\rho = \rho_0$, din (2.10) rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho_0}} \quad (2.13)$$

Rezultatele obținute pentru viteza unui jet de apă la temperatura de $20^\circ C$, ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $E_0 = 2.186 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $a = 6.987$) pentru diferite valori ale presiunii din cilindru, p , sunt prezentate în Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1: Viteza jetului de apă la diferite presiuni

p [bar]	v [m/s]	v [m/s]	dif. rel. [%]
	compresibil (2.12)	incompresibil (2.13)	
1000	442.6	447.2	1.03
2000	620.5	632.4	1.88
3000	754.3	774.6	2.62
4000	865.2	894.4	3.26
5000	961.6	1000.0	3.84
6000	1047.7	1095.4	4.35

Se observă că pentru presiuni uzuale în tehnica tăierii cu apă (de obicei nu mai mari de 4000 bar) luarea în considerare a compresibilității apei conduce la valori

mai mici ale vitezei jetului cu până la 4% față de valorile obținute în ipoteza incompresibilității. În concluzie, variația densității apei cu presiunea nu are o influență considerabilă asupra vitezei jetului, deci relația (2.13) poate fi utilizată cu suficientă precizie pentru calcule estimative. În cele ce urmează va fi utilizată relația (2.12).

Pentru volumul de control marcat cu linie punctată în Fig. 2.2 scriem ecuația de continuitate în ipoteza fluidului compresibil:

$$Vol \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{\pi D_p^2}{4} v_p + \rho_0 C_d \frac{\pi D_o^2}{4} v = 0 \quad (2.14)$$

Ținând cont de legătura între densitate și presiune (2.5), obținem:

$$\begin{aligned} Vol \frac{\rho_0}{E_0} \left(1 + \frac{ap}{E_0}\right)^{\frac{1}{a}-1} \frac{dp}{dt} - \rho_0 \left(1 + \frac{ap}{E_0}\right)^{\frac{1}{a}} \frac{\pi D_p^2}{4} v_p + \\ + \rho_0 C_d \frac{\pi D_o^2}{4} \sqrt{\frac{2E_0}{\rho_0(a-1)}} \sqrt{\left(1 + \frac{ap}{E_0}\right)^{1-\frac{1}{a}} - 1} = 0 \end{aligned}$$

Dacă notăm cu S cursa pistonului și cu T timpul în care pistonul se deplasează pe distanța S , putem rescrie ecuația de mai sus sub formă adimensională, folosind următoarele notații:

$\tau = t/T$ timpul adimensional

$P = 1 + ap/E_0$ presiunea adimensională

$V = Vol/(S \pi D_p^2/4)$ volumul adimensional

$K = C_d \frac{T}{S} \left(\frac{D_o}{D_p}\right)^2 \sqrt{\frac{2E_0}{\rho_0(a-1)}}$ constanta pompei

Cu acestea, ecuația diferențială adimensională a pompei volumice este, [40]:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{aP}{V} \left(\frac{v_p}{S/T} - K P^{-\frac{1}{a}} \sqrt{P^{1-\frac{1}{a}} - 1} \right) \quad (2.15)$$

2.3 Pompa volumică cu mecanism bielă–manivelă

Modelul matematic prezentat mai sus este folosit în cele ce urmează pentru studiul funcționării unei pompe volumice cu mecanism bielă–manivelă. Datele experimentale pentru o asemenea pompă monocilindrică, prevăzută cu acumulator hidraulic între supapa de evacuare și duză, sunt preluate din [55].

Schema de principiu a pompei este prezentată în Fig. 2.3. În cilindrul 1 se deplasează pistonul plonjor 2, antrenat cu mecanismul bielă–manivelă 3, 4. Cilindrul este alimentat prin supapa 5 iar evacuarea apei se face prin supapa 6. Pompa debitează într-un acumulator hidraulic 7 care alimentează duza 8 de producere a jetului de mare viteză. Rolul acumulatorului este de a diminua pulsațiile de presiune, utilizând elasticitatea apei.

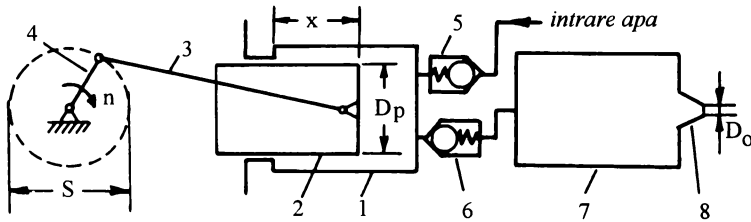


Figura 2.3: Pompa de înaltă presiune cu piston plonjor antrenat cu mecanism bielă-manivelă

Dacă turația manivelei este $n[\text{rot}/\text{min}]$, perioada mișcării pistonului va fi

$$T = \frac{60}{n} \quad (2.16)$$

Ținând cont de cinematica mecanismului bielă-manivelă, legea de mișcare a pistonului poate fi scrisă cu suficientă precizie sub forma:

$$x = \frac{S}{2} [1 - \cos(2\pi\tau)] \quad (2.17)$$

de unde viteza pistonului rezultă:

$$v_p = \frac{S}{T} \pi \sin(2\pi\tau) \quad (2.18)$$

Ecuția diferențială a pompei, (2.15) devine în acest caz:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{aP}{V} \left[\pi \sin(2\pi\tau) - K P^{-\frac{1}{a}} \sqrt{P^{1-\frac{1}{a}} - 1} \right] \quad (2.19)$$

Dacă notăm cu V_c și V_a volumul adimensional al cilindrii pompei respectiv al acumulatorului hidraulic, variația de-a lungul unei perioade $0 \leq \tau \leq 1$ a volumului adimensional V din (2.19) este cea prezentată în Fig. 2.4.

La momentul $\tau = 0$ începe cursa de refulare, supapele de admisie și evacuare fiind închise. Presiunea din cilindrul pompei crește, iar presiunea din acumulator scade (acesta golindu-se prin duză), astfel încât la momentul τ_1 cele două presiuni se egalează și se deschide supapa de evacuare.

Variația presiunii adimensionale în cilindru, P_c , în intervalul $0 \leq \tau \leq \tau_1$ este descrisă de ec. (2.19) la care punem $K = 0$:

$$\frac{dP_c}{d\tau} = \frac{a P_c}{V_c - \sin^2(\pi\tau)} \pi \sin(2\pi\tau) \quad (2.20)$$

cu condiția inițială $P_c = 1$ la $\tau = 0$. Soluția acestei ecuații este:

$$P_c = \left[1 - \frac{1}{V_c} \sin^2(\pi\tau) \right]^{-a} \quad (2.21)$$

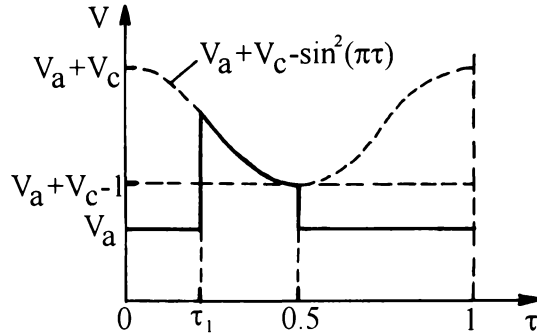


Figura 2.4: Variația volumului adimensional pentru pompa cu bielă-manivelă

Refularea propriu-zisă a lichidului din cilindrul pompei în acumulator se produce în intervalul $\tau_1 \leq \tau \leq 0.5$, după care supapa de evacuare se închide și începe cursa de admisie.

În intervalul $0.5 < \tau < 1$ acumulatorul se goleşte prin duză ca efect al destinderii lichidului comprimat. În total, alimentarea duzei este asigurată de acumulator pentru intervalul de timp adimensional $\tau_1 + 0.5$, presiunea scăzând de la valoarea maximă $P_{max} = P(\tau = 0.5)$ la valoarea minimă $P_{min} = P(\tau = \tau_1)$. Descărcarea acumulatorului este guvernată de ecuația diferențială (2.15) la care punem $v_p = 0$ și $V = V_a$:

$$\frac{dP}{d\tau} = -K \frac{a}{V_a} P^{1-\frac{1}{a}} \sqrt{P^{1-\frac{1}{a}} - 1} \quad (2.22)$$

Integrarea ecuațiilor (2.19) și (2.22) se face numeric, utilizând metoda Runge-Kutta [14].

Inițial, valorile maximă și minimă ale presiunii, respectiv momentul deschiderii supapei de evacuare, nu sunt cunoscute. Ele sunt determinate iterativ, prin parcurgerea de mai multe ori a unui ciclu complet de funcționare a pompei, până la stabilizarea lor.

Calculul numeric a fost efectuat pentru instalația de producere a jeturilor de apă de mare viteză prezentată în [55]. Caracteristicile constructive și funcționale ale instalației sunt:

- diametrul pistonului: 38 mm;
- cursa pistonului: 70 mm;
- turația manivelei: 1000 rot/min;
- volumul acumulatorului hidraulic: 1.0, 3.3, 4.0, 5.85 l.

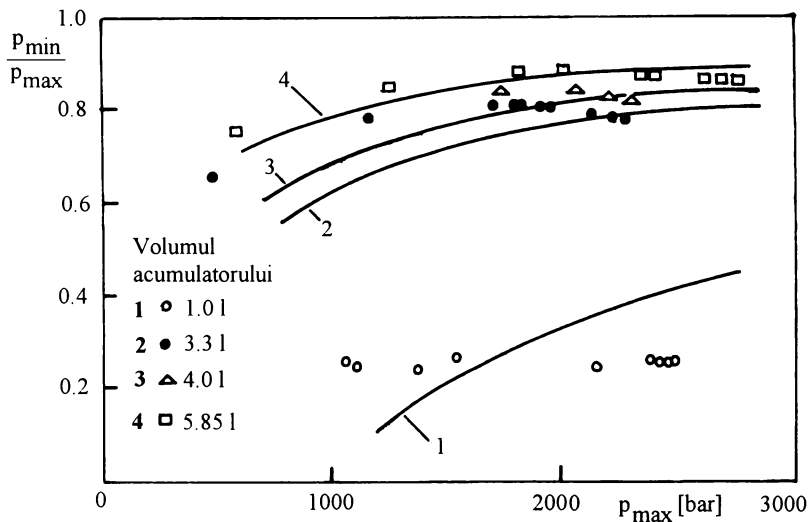


Figura 2.5: Variația raportului dintre presiunea maximă și presiunea minimă, funcție de presiunea maximă de refulare a unei pompe cu bielă manivelă prevăzută cu acumulator hidraulic. Punctele reprezintă rezultatele experimentale ale lui Vereșcagin [55], iar curbele sunt calculate de noi, cu relațiile (2.19)...(2.22).

Măsurarea presiunii din acumulator a fost efectuată cu ajutorul unor timbre tensometrice, semnalul electric obținut fiind vizualizat pe osciloscop. Rezultatele experimentale sunt prezentate prin punctele din Fig. 2.5 sub forma raportului între presiunea minimă și maximă. Se observă că odată cu creșterea volumului acumulatorului hidraulic, presiunea se uniformizează.

Rezultatele teoretice sunt prezentate prin cele patru curbe corespunzătoare celor patru valori ale volumului acumulatorului. Se constată o bună concordanță între teorie și experiment pentru valorile ridicate ale volumului acumulatorului, respectiv pentru pulsații reduse ale presiunii. De asemenea, se poate observa că rezultatele teoretice sunt apropiate de cele experimentale în special în vecinătatea presiunii nominale a pompei (aprox. 2000 bar).

Diferențele care apar atât la pulsații mari de presiune (volumul acumulatorului 1.0 l) cât și la valori reduse ale presiunii maxime (corespunzătoare utilizării unor duze cu diametru mărit) ar putea fi explicate prin variația debitului pierdut prin etanșarea plonjorului. În [55] nu se precizează dacă s-a utilizat o etanșare cu strângere fixă sau cu autostrângere și nu se menționează nici dependența debitului pierdut prin etanșare funcție de presiunea din cilindru.

2.4 Pompa volumică cu motor hidraulic liniar (multiplicatorul de presiune)

Așa cum am arătat în Cap. 2, utilizarea multiplicatoarelor de presiune pentru generarea jeturilor de apă folosite la tăierea materialelor prezintă avantaje importante în comparație cu pompele antrenate mecanic. Motorul hidraulic liniar, cu dublă acțiune, antrenează alternativ două pompe cu piston plonjor legate în paralel, așa cum este prezentat în Fig.1.2.

În vederea utilizării modelului matematic prezentat mai sus pentru studiul evoluției în timp a presiunii pe traseul de refulare, putem considera că practic avem o singură pompă de înaltă presiune care execută numai curse de refulare.

Dacă notăm cu n numărul curselor simple efectuate de piston într-un minut, perioada mișcării va fi tot cea dată de relația (2.16). Notând cu t_0 timpul de comutare al distribuitorului, respectiv cu $\tau_0 = t_0/T$ timpul adimensional de comutare, viteza medie a pistonului este:

$$v_p = \frac{S}{T} \frac{1}{1 - \tau_0} \quad (2.23)$$

În cele ce urmează vom admite ipoteza simplificatoare a vitezei constante pentru piston, ceea ce înseamnă practic că motorul hidraulic liniar este alimentat cu un debit constant de ulei. Evident aceasta se întâmplă atât timp cât presiunea uleiului nu depășește valoarea ce comandă deschiderea supapei de siguranță a pompei de ulei. Ecuația (2.15) devine în acest caz:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{aP}{V} \left[\frac{1}{1 - \tau_0} - K P^{-\frac{1}{a}} \sqrt{P^{1-\frac{1}{a}} - 1} \right] \quad (2.24)$$

Variația volumului adimensional V este prezentată în Fig. 2.6, semnificația mărimilor adimensionale V_a , V_c și τ_1 fiind cea prezentată în paragraful anterior.

Se disting următoarele situații care apar în funcționare, pe parcursul unei perioade:

- $0 < \tau < \tau_1$ Supapele de evacuare sunt închise și începe cursa de refulare (pentru multiplicatorul real, în timp ce o pompă efectuează cursa de refulare, cealaltă efectuează cursa de aspirație). Evoluția presiunii din cilindru va fi dată de ecuația diferențială:

$$\frac{dP_c}{d\tau} = \frac{a P_c}{V_c (1 - \tau_0) - (\tau - \tau_0)} \quad (2.25)$$

cu condiția inițială $P_c = 1$ la $\tau = \tau_0$. Soluția acestei ecuații este:

$$P_c = \left[1 - \frac{1}{V_c} \frac{\tau - \tau_0}{1 - \tau_0} \right]^{-a} \quad (2.26)$$

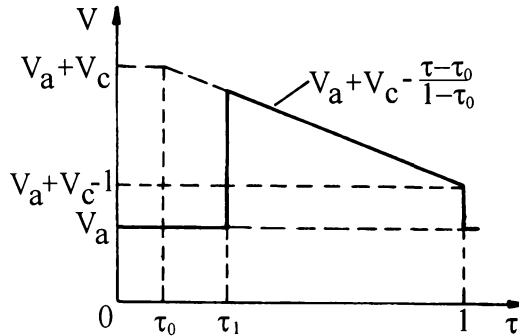


Figura 2.6: Variația volumului adimensional pentru pompa cu motor hidraulic liniar

Presiunea din acumulator scade conform ecuației (2.22) iar la momentul τ_1 devine egală cu presiunea din cilindru, deschizându-se supapa de refluxare.

• $\tau_1 < \tau < 1$ Supapa de refluxare (a pompei care efectuează cursa de refluxare) este deschisă și evoluția presiunii de pe traseul de refluxare este descrisă de ecuația (2.24) unde

$$V = V_a + V_c - \frac{\tau - \tau_0}{1 - \tau_0}$$

În continuare este prezentat un exemplu de calcul pentru o instalație de tăiere cu jet de apă, având următoarele caracteristici:

- diametrul pistonului plonjor 25 mm;
- cursa pistonului 125 mm;
- $V_c = 1.1$ adică spațiul mort din cilindru pompei este 10% din volumul dizlocuit de piston la o cursă;
- frecvența 60 curse simple pe minut;
- timpul de comutare al distribuitorului 50 ms;
- diametrul orificiului duzei 0.4 mm.

În Fig. 2.7 este prezentată evoluția presiunii din cilindru și din acumulator, pe parcursul unei perioade. Presiunea din cilindru, curba **1**, începe să crească după consumarea timpului de comutare al distribuitorului. Presiunea din acumulator, curba **2** pentru $V_a = 1$ și curba **3** pentru $V_a = 15$, scade de la valoarea maximă la valoarea minimă când devine egală cu presiunea din cilindru și se deschide supapa de refluxare. Valorile maximă și minimă ale presiunii nu sunt inițial cunoscute, ele determinându-se prin iterații succesive.

În Fig. 2.8 se prezintă influența volumului acumulatorului asupra presiunii maxime, presiunii medii și pulsației de presiune. Se observă că, dacă volumul acumulatorului (incluzând aici și volumul conductelor de legătură dintre multiplicatorul de presiune și duză) este egal cu volumul dizlocuit de pistonul plonjor

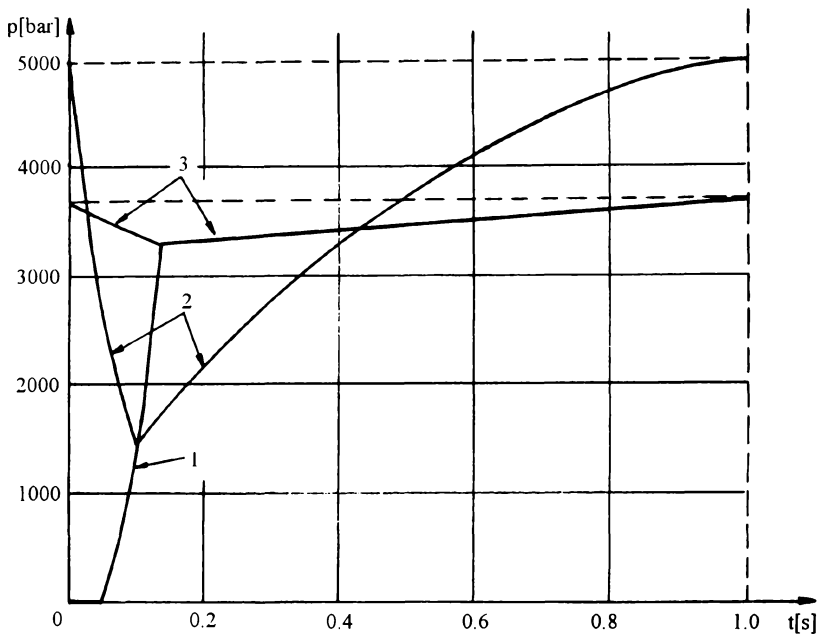


Figura 2.7: Evoluția în timp a presiunii din cilindru, **1**, și din acumulator, **2** ($V_a = 1$) și **3** ($V_a = 15$)

la o cursă, adică $V_a = 1$, atunci presiunea din acumulator atinge valoarea maximă $p_{max} = 5015$ bar, iar pulsația de presiune este $\Delta p = p_{max} - p_{min} = 3560$ bar. Aceasta înseamnă că cilindrul pompei de înaltă presiune împreună cu toate componentele traseului de refulare trebuie dimensionate la o presiune mai mare de 5000 bar, în timp ce presiunea medie la care lucrează instalația este $p_{med} = 3500$ bar. Pe de altă parte, valoarea ridicată a pulsației de presiune poate provoca spargerea pastilei de safir în care este practicat orificiul duzei.

Crescând volumul acumulatorului, presiunea maximă și pulsația de presiune scad, în condițiile menținerii practic la aceeași valoare a presiunii medii. Spre exemplu, pentru $V_a = 15$ se obține $p_{max} = 3688$ bar și $\Delta p = 402$ bar. În aceste condiții presiunea la care trebuie dimensionate reperele în contact cu apa la presiune înaltă scade cu mai mult de 1000 bar față de cazul anterior, iar pulsația de presiune scade la o valoare care practic nu mai influențează pastila de safir a duzei.

Deoarece volumul acumulatorului nu are nici o influență asupra presiunii medii, rezultă că debitul mediu de apă și puterea medie furnizată multiplicatorului rămân constante.

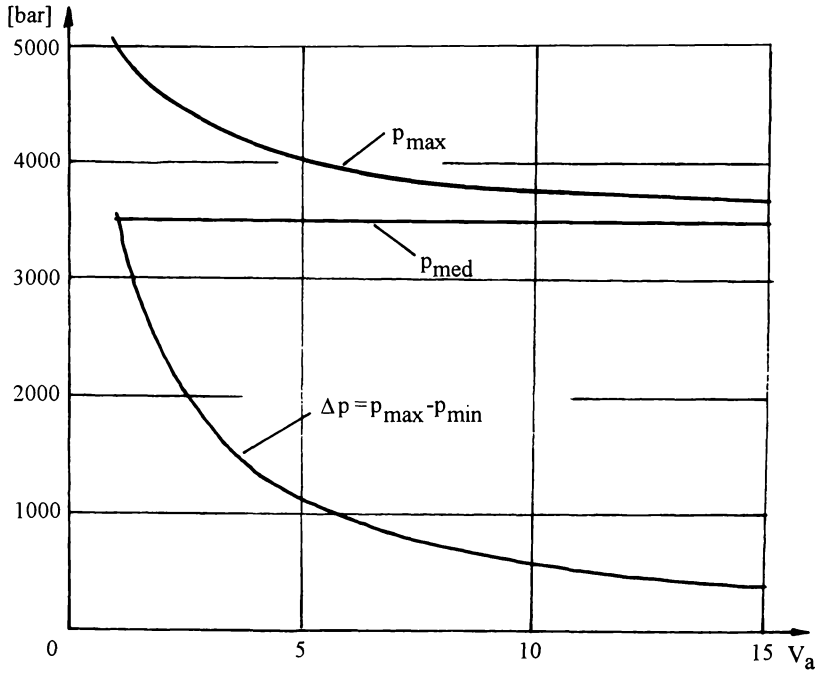


Figura 2.8: Presiunea maximă p_{max} , presiunea medie p_{med} și pulsația de presiune $\Delta p = p_{max} - p_{min}$, funcție de volumul adimensional al acumulatorului, V_a .

Rezultatele prezentate mai sus au fost obținute în ipoteza unei etanșări perfecte pentru pistonul plojor. În realitate, prin etanșare se pierde întotdeauna fluid, datorită jocurilor existente între elementul de etanșare și piston. În [39] este prezentată influența jocului în etanșare asupra funcționării instalației de tăiere cu jet. Debitul de fluid evacuat prin interstițiul etanșării, calculat în ipoteza curgerii axiale între doi cilindri coaxiali este:

$$Q_e = \frac{1}{96} \frac{\pi D_p j^3}{l_e \eta} p \quad (2.27)$$

unde D_p este diametrul pistonului plojor, j este jocul în etanșare, l_e lungimea etanșării, η vâscozitatea dinamică iar p presiunea relativă din cilindru.

Pentru o etanșare cu $D_p = 25 \text{ mm}$, $l_e = 50 \text{ mm}$, $j = 20 \mu\text{m}$, prin care curge apă cu $\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$ la o cădere de presiune de 3000 bar, numărul Reynolds

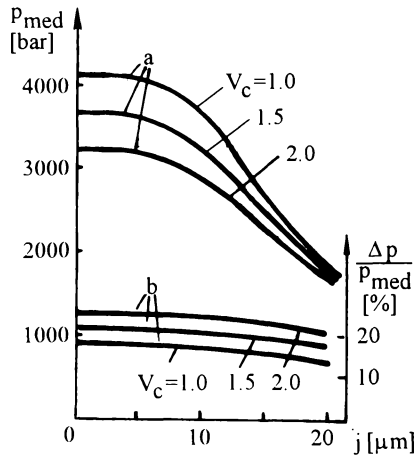


Figura 2.9: Presiunea medie (curbele a) și pulsația relativă a presiunii (curbele b) funcție de volumul adimensional al cilindrilor pompei, V_c , și de jocul în etanșare, j .

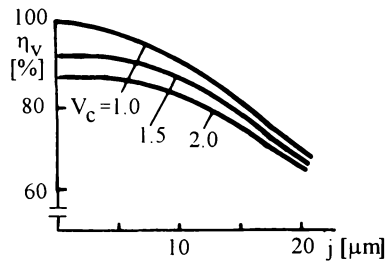


Figura 2.10: Randamentul volumic al pompei, η_v , funcție de volumul adimensional al cilindrilor, V_c , și de jocul în etanșare, j .

calculat cu viteza medie și cu jocul j este:

$$Rc = \frac{\rho \frac{Q_c}{\pi D_p j} j}{\eta} = \frac{\rho Q_c}{\pi D_p \eta} = 500$$

Prin urmare, relația (2.27) dedusă în cazul curgerii laminare poate fi utilizată, ea fiind valabilă pentru $Rc < 1000 \dots 2000$. În plus, viteza medie în etanșare este mult mai mare decât viteza de deplasare a pistonului, aceasta din urmă putând fi neglijată la calculul debitului.

Rezultatele prezentate în Fig.2.9 și Fig.2.10 au fost obținute pentru instalația de tăiere cu jet de apă descrisă anterior, la care cursa pistonului a fost mărită la 140 mm , volumul adimensional al acumulatorului este $V_a = 10$ iar volumul

adimensional al cilindrului pompei a fost variat în intervalul $V_c = 1...2$. Volumul rămas în cilindrul pompei după consumarea cursei de refulare este uzual denumit spațiu mort. Spre exemplu, dacă $V_c = 1.5$, spațiul mort reprezintă 50% din volumul dizlocuit de piston la o cursă.

Din Fig. 2.9 se observă că jocul în etanșare conduce la diminuarea considerabilă a presiunii medii p_{med} (curbele **a**) dar nu influențează practic pulsația relativă a presiunii $\Delta p/p_{med} = (p_{max} - p_{min})/p_{med}$ (curbele **b**). Deasemenea, spațiul mort din cilindrul pompei are un efect nefavorabil, reducând nivelul presiunii medii și măbind pulsația relativă.

Ținând cont că fluidul scăpat prin etanșare reprezintă o pierdere din punct de vedere practic, putem defini un randament volumic η_v ca fiind raportul dintre debitul mediu evacuat prin duză și debitul teoretic calculat în ipoteza unei etanșări perfecte.

Conform Fig. 2.10, la jocuri mici (sub $5 \mu m$) η_v depinde numai de spațiul mort, scăzând odată cu creșterea acestuia. Pentru un joc mai mare (peste $15 \mu m$) η_v scade, influența spațiului mort devenind nesemnificativă.

În concluzie, autorul a elaborat un model matematic original pentru studiul funcționării pompelor volumice de presiune foarte înaltă. Relațiile propuse pentru descrierea proprietăților elastice ale apei (2.3) și (2.5) sunt verificate cu măsurători experimentale ale vitezei sunetului în apă, prezentate în literatură. A fost dedusă expresia vitezei jetului de lichid compresibil (2.12) și apoi a fost obținută ecuația diferențială a pompei volumice ce debitează printr-un orificiu mic (2.15). Această ecuație este particularizată pentru pompa cu bielă-manivelă și pentru pompa antrenată cu cilindru hidraulic, fiind obținută variația în timp a presiunii pe traseul de refulare al pompei.

Se pune clar în evidență efectul acumulatorului hidraulic montat înaintea duzei asupra pulsațiilor de presiune care apar la inversarea sensului de mișcare al pistoanelor. Deasemenea, din punct de vedere practic este important faptul că s-a demonstrat posibilitatea realizării acumulatorului ca un simplu recipient, fără piese în mișcare, acesta utilizând elasticitatea apei. Pe baza rezultatelor obținute se poate stabili volumul necesar al acumulatorului pentru a reduce pulsațiile presiunii până la valoarea dorită. Soluția este simplă din punct de vedere tehnic dar are dezavantajul realizării unui recipient cu volum relativ mare, care să reziste la presiunea ridicată de lucru. Costul ridicat al acumulatorului se justifică însă la echipamentele industriale pentru că această soluție este optimă din punct de vedere energetic (acumularea și cedarea energiei se face practic fără pierderi). Pentru instalații experimentale de laborator utilizarea acumulatorului hidraulic poate fi înlocuită prin alimentarea motorului hidraulic liniar cu ulei la presiune constantă, acceptând întreruperea jetului pentru o perioadă scurtă la capăt de cursă.

Pe de altă parte, modelarea numerică pune cantitativ în evidență efectele nefavorabile ale spațiului mort din cilindrul pompei și jocului în etanșarea pistonului plonjor asupra presiunii medii de refulare și asupra randamentului volumic.

Capitolul 3

Hidrodinamica duzei cilindrice pentru jeturi de tăiere

Pentru generarea jeturilor de apă folosite la tăierea materialelor se utilizează cel mai adesea duze cilindrice de tipul celei prezentate în Fig.1.4.b, la care din considerente de rezistență mecanică orificiul este practicat într-o pastilă de safir.

În acest capitol este prezentat studiul curgerii în duza cilindrică și în porțiunea inițială a jetului de lichid. Analiza hidrodinamicii duzei de tăiere cu jet permite introducerea unor ipoteze simplificatoare asupra curgerii, respectiv asupra proprietăților fluidului. Din punct de vedere cinematic, ținând cont că duza este cilindrică rezultă că avem o **mișcare axial-simetrică**. Prin urmare este suficient să studiem mișcarea într-un semiplan meridian. Față de valoarea vitezei jetului calculată în ipoteza fluidului incompresibil, luarea în considerare a compresibilității apei conduce la diferențe sub 4%, conform Tab.2.1. Ținând cont de această observație, considerarea fluidului ca fiind **incompresibil** nu va modifica practic structura câmpului de viteză. Pe de altă parte, am arătat că deși diametrul orificiului duzei este mic, datorită valorii ridicate a vitezei jetului numărul Reynolds corespunzător depășește 10^5 în cazul apei, deci se poate considera într-o primă aproximație curgerea unui **fluid nevâscos**,

Studiul curgerii axial-simetrice a fluidului nevâscos incompresibil este efectuat cu Metoda Elementului Finit. Pentru aceasta autorul a dedus, pornind de la formularea variațională a problemelor la limită pentru potențialul vitezei și pentru funcția de curent, ecuațiile elementale și a realizat programe de calcul proprii. Domeniul de analiză considerat include și porțiunea inițială a jetului, fiind dezvoltată în acest sens algoritmi originali pentru determinarea suprafeței libere.

Pe baza repartiției de viteză pe peretele frontal al duzei a fost calculată dezvoltarea stratului limită, pentru a obține o estimare a disipațiilor prin frecarea vâscoasă a fluidului real cu peretele solid în vecinătatea orificiului, unde viteza de curgere atinge valori de ordinul sutelor de metri pe secundă.

3.1 Curgerea axial-simetrică a fluidului nevâscos incompresibil

3.1.1 Formularea în funcția de curent

În cazul curgerii axial-simetrice a unui fluid incompresibil, viteza într-un semiplan meridian poate fi exprimată cu ajutorul funcției de curent ψ , după cum urmează:

$$\vec{v} = v_z \vec{k} + v_r \vec{i}_r = -\frac{\vec{i}_\theta}{r} \times \nabla \psi \quad \text{unde } \vec{i}_\theta = \vec{k} \times \vec{i}_r \quad (3.1)$$

de unde rezultă componenta axială, respectiv radială:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.2)$$

Mișcarea se studiază în semiplanul meridian zOr pe un domeniu \mathcal{D} cu frontiera Γ (Fig. 3.1). Sensul de parcurgere a frontierei se alege astfel încât domeniul să rămână la stânga (sensul trigonometric).

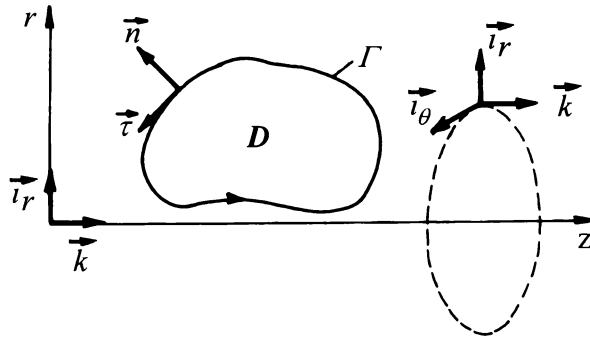


Figura 3.1: Domeniul din semiplanul meridian

Componentele vitezei pe direcțiile versorilor normalei exterioare, \vec{n} , respectiv tangentei, $\vec{\tau}$, sunt:

$$v_n = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial s}; \quad v_\tau = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (3.3)$$

unde s este abscisa curbilinie de-a lungul curbei Γ .

Curgerea se presupune a fi fără rotație în jurul axei de simetrie, adică rotorul vitezei $\vec{\omega}$ nu are componentă după \vec{k} . Vom avea deci:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \nabla \times \left(-\frac{\vec{i}_\theta}{r} \times \nabla \psi \right) = -\frac{\vec{i}_\theta}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \quad (3.4)$$

Rotorul are componentă numai pe direcția normalei la semiplanul meridian, \vec{i}_θ , și aceasta este:

$$\omega = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \quad (3.5)$$

Ecuatiile care guvernează mișcarea fluidului incompresibil nevâscos, sunt:

- ecuația de continuitate $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- ecuația de mișcare Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$

Presupunem că forțele masice derivă dintr-un potențial, deci $\vec{f} = -\nabla \mathcal{F}$. Dacă introducem funcția de presiune $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}$, și ținem cont că

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

ecuația de mișcare se poate pune sub forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{F} + \mathcal{P} \right) \quad (3.6)$$

Aplicând rotorul ecuației (3.6), rezultă:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0 \quad (3.7)$$

Prin calcul direct, termenul al doilea din membrul stâng se poate scrie:

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -r \vec{i}_\theta (\vec{v} \cdot \nabla) \frac{\omega}{r}$$

și ecuația (3.7) poate fi pusă sub forma:

$$\vec{i}_\theta r \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega}{r} \right) + (\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{\omega}{r} \right) \right] = 0 \quad \text{sau} \quad \vec{i}_\theta r \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Ecuatia de mișcare este valabilă pentru orice r , deci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0 \quad (3.9)$$

adică derivata substanțială a mărimii ω/r este nulă [6] Prin urmare, ω/r este constantă în timp pentru o particulă de fluid în mișcare. Dacă curgerea este staționară, traiectoriile particulelor de fluid coincid cu liniile de curent, deci în acest caz ω/r este constantă de-a lungul unei linii de curent, adică va depinde numai de ψ . Ținând cont de expresia lui ω , (3.5), vom avea:

$$-\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) = \Omega(\psi) \quad (3.10)$$

unde Ω este o funcție care depinde numai de ψ . Dacă adăugăm condițiile pe frontieră:

$$\psi = g_1 \text{ pe } \Gamma_D \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = g_2 \text{ pe } \Gamma_N \quad (3.12)$$

obținem formularea diferențială a problemei pentru funcția de curent. Γ_D este porțiunea frontierei pe care se impun condițiile Dirichlet descrise de funcția g_1 , iar Γ_N porțiunea pe care se impun condițiile Neumann precizate prin funcția g_2 . Evident, trebuie să avem $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$.

În continuare vom trata cazul cel mai simplu, pentru care $\Omega(\psi) = \text{constant}$, și notăm această constantă cu Ω . Soluția problemei (3.10),(3.11),(3.12), în formulare variațională, este acea funcție scalară $\psi : \mathcal{D} \rightarrow R$, care satisface condiția pe frontieră (3.11), și care minimizează funcționala:

$$J(\psi) = \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{2} \left(\nabla \psi \times \frac{\vec{z}_0}{r} \right)^2 - \psi \Omega \right] 2 \pi r d\mathcal{D} - \int_{\Gamma_N} \psi \frac{g_2}{r} 2 \pi r d\Gamma \quad (3.13)$$

unde $dVol = 2 \pi r d\mathcal{D} = 2 \pi r dr dz$ este elementul de volum, iar $dS = 2 \pi r d\Gamma$ este elementul de suprafață, pentru domeniul axial-simetric în care studiem curgerea. După efectuarea calculelor, neglijând factorul π care înmulțește ambele integrale, funcționala J poate fi scrisă sub forma [9]:

$$J(\psi) = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{1}{r} - 2 \psi r \Omega \right\} dr dz - 2 \int_{\Gamma_N} \psi g_2 d\Gamma \quad (3.14)$$

Pentru determinarea expresiei lui Ω , vom presupune că fluidul curge într-o conductă cilindrică, viteza având numai componentă axială. În acest caz, ecuația (3.10) se poate scrie:

$$\Omega(\psi) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{d^2\psi}{dr^2} \right) \quad (3.15)$$

În continuare vom nota cu r_* raza adimensională (raza raportată la raza conductei \mathcal{R}) și cu v_{max} viteza în axa conductei. Dacă f este funcția care descrie profilul de viteză, putem scrie:

$$v_z = v_{max} f(r_*) \quad (3.16)$$

cu $f(1) = 0$ și $f(0) = 1$. Debitul volumic de fluid prin conductă este:

$$Q = 2 \pi v_{max} \mathcal{R}^2 \int_0^1 r_* f(r_*) dr_* \quad (3.17)$$

Dacă considerăm în axa conductei $v_r = 0$, atunci la perete vom avea $\psi = Q/2\pi$. Din (3.16) și (3.17) obținem distribuția funcției de curent de-a lungul razei, de forma:

$$\psi(r_*) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\int_0^{r_*} x f(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \quad (3.18)$$

Înlocuind (3.18) în (3.15) obținem:

$$\Omega(\psi) = -\frac{Q}{2\pi \mathcal{R}^4} \frac{f'(r_*)}{\mathcal{A} r_*} \quad \text{unde } \mathcal{A} = \int_0^1 x f(x) dx \quad (3.19)$$

Dacă profilul vitezei în conductă este parabolic, adică $f(r_*) = 1 - (r_*)^2$, vom obține din (3.19):

$$\Omega = \frac{Q}{2\pi} \frac{8}{\mathcal{R}^4} \quad (3.20)$$

Observăm că în acest caz particular, funcția $\Omega(\psi)$ este constantă [44], și am notat această constantă cu Ω .

3.1.2 Formularea în potențialul vitezei

Dacă mișcarea fluidului este irotațională, adică $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \vec{0}$, atunci există o funcție scalară φ , numită potențialul vitezei, cu care viteza poate fi exprimată sub forma $\vec{v} = \nabla\varphi$ de unde și apelația de *mișcare potențială*. În cazul mișcării axial-simetrice componentele axială și radială ale vitezei într-un semiplan meridian zOr sunt:

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{și} \quad v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad (3.21)$$

Ținând cont de convenția de parcurgere în sens trigonometric a curbei Γ ce delimitează domeniul \mathcal{D} în semiplanul meridian, componentele vitezei pe direcția normalei, respectiv tangentei la frontieră, sunt:

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \text{și} \quad v_\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad (3.22)$$

unde s este abscisa curbilinie pe Γ .

Pentru un fluid incompresibil, din ecuația de continuitate $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ rezultă $\Delta\varphi = 0$, adică potențialul scalar al vitezei satisface ecuația lui Laplace în \mathcal{D} :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pe } \mathcal{D} \quad (3.23)$$

la care se adaugă condițiile la limită:

$$\varphi = f_1 \quad \text{pe } \Gamma_D \quad (\text{condiție Dirichlet}) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_N \quad (\text{condiție Neumann}) \quad (3.25)$$

unde $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$, iar f_1 și f_2 sunt funcții date pe porțiunile respective ale frontierei.

În formulare variațională, soluția problemei (3.23),(3.24),(3.25) este acea funcție scalară φ care satisface condiția (3.24) și care realizează extremul funcționalei [9]:

$$I(\varphi) = \int_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 \right] r dr dz - 2 \int_{\Gamma_N} \varphi f_2 r d\Gamma \quad (3.26)$$

3.2 Metoda Elementului Finit pentru curgerea axial-simetrică a fluidului nevâscos incompresibil

Așa cum am arătat în paragraful anterior, problemele cu condiții la limită pentru funcția de curent ψ , respectiv pentru potențialul vitezei φ , admit formulări variaționale echivalente, care presupun determinarea extremului unor funcționale. Calculul integralelor care intervin în expresiile funcționalelor este dificil de efectuat în cazul unor forme mai complicate ale domeniului \mathcal{D} , respectiv ale frontierei sale Γ .

Pe de altă parte, din punct de vedere numeric determinarea funcției necunoscute se poate reduce la calculul valorilor ei într-un număr finit de puncte din interiorul domeniului și de pe frontieră, valoarea în oricare alt punct fiind exprimată cu ajutorul unui set de funcții de interpolare cunoscute.

În practică, domeniul \mathcal{D} este împărțit în subdomenii de formă simplă \mathcal{D}^e (triunghiuri, patrulatere), astfel încât $\cup \mathcal{D}^e = \mathcal{D}$. Aceste subdomenii se numesc **elemente finite**, de unde și numele metodei [11, 13].

Pe fiecare element finit, funcția necunoscută (spre exemplu ψ) va fi aproximată cu ajutorul valorilor sale în n_i puncte, (situate pe frontiera și eventual în interiorul elementului respectiv), numite **noduri de interpolare**, respectiv cu un set de n_i **funcții de interpolare**, $N_j^e(z, r)$, $j = 1, 2 \dots n_i$. Prin urmare, pe elementul \mathcal{D}^e vom scrie:

$$\psi^e(z, r) \approx \sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^e N_j^e(z, r) \tag{3.27}$$

unde ψ_j^e se numesc **valori nodale**.

Funcționala $J(\psi)$ va fi calculată însumând integralele calculate pe fiecare element finit, adică:

$$J(\psi) \approx \sum_{e=1}^{n_e} J^e(\psi^e) \tag{3.28}$$

unde n_e este numărul de elemente finite cu care s-a discretizat domeniul \mathcal{D} . Membrul drept al relației (3.28) este o expresie algebrică care, pentru o discretizare a domeniului, va depinde numai de valorile nodale ale lui ψ . Integrala pe frontiera Γ_N va fi nenulă numai pentru elementele care au cel puțin o latură comună cu această porțiune a frontierei. Ținând cont de (3.27), membrul drept al relației (3.28) va fi o funcție numai de valorile nodale ale lui ψ . Extremul acestei funcții se determină prin anularea derivatelor parțiale în raport cu fiecare valoare nodală, ceea ce conduce la următorul sistem de ecuații:

$$\frac{\partial J}{\partial \psi_k} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial J^e}{\partial \psi_k} = 0 \quad k = 1, 2 \dots n_n \tag{3.29}$$

unde n_n este numărul total de noduri din domeniul \mathcal{D} și de pe frontiera lui. Rezolvând sistemul (3.29) se obțin cele n_n valori nodale ale funcției necunoscută, după care cu (3.27) putem calcula valoarea funcției în oricare punct al domeniului.

Ecuatiile (3.29) vor fi scrise, dar nu și rezolvate, pentru fiecare element în parte, obținând **ecuațiile elementale**:

$$\frac{\partial J^e}{\partial \psi_i^e} = 0 \quad i = 1, 2 \dots n_i \quad (3.30)$$

Acestea se pun de regulă sub formă matricială, cu ajutorul **matricii elementale** și a **vectorului termenilor liberi elementali**.

Utilizând corespondența între numerotarea locală (pe un element) și cea globală (pentru tot domeniul) a nodurilor, adică corespondența $\psi_j^e \longleftrightarrow \psi_k$, se realizează **asamblarea** ecuațiilor elementale pentru obținerea sistemului (3.29); această operație reprezintă de fapt însumarea contribuțiilor fiecărui element.

În continuare, vom determina expresiile termenilor matricii elementale, respectiv ale termenilor liberi elementali, pentru funcționalele $J(\psi)$, și $I(\varphi)$.

Utilizând relația (3.27), funcționala J , (3.14) va avea pe elementul e expresia:

$$\begin{aligned} J^e(\psi_1^e, \psi_2^e \dots \psi_{n_i}^e) = & \int_{\mathcal{D}^e} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^e N_j^e \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^e N_j^e \right)^2 \right] \frac{1}{r} - \right. \\ & \left. - 2 \left(\sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^e N_j^e \right) r \Omega \right\} dr dz - 2 \int_{\Gamma_N^e} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^e N_j^e \right) g_2 d\Gamma \end{aligned}$$

Cu aceasta, ecuațiile elementale (3.30) pot fi puse sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^e}{\partial \psi_i^e} = & 2 \sum_{j=1}^{n_i} \left[\int_{\mathcal{D}^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial r} \frac{\partial N_j^e}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dz \right] \psi_j^e - \\ & - 2 \Omega \int_{\mathcal{D}^e} N_i^e r dr dz - 2 \int_{\Gamma_N^e} N_i^e g_2 d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

cu $i = 1, 2 \dots n_i$. După simplificare cu 2, aceste n_i ecuații se scriu sub următoarea formă matricială:

$$[EP] \{\psi\} = \{BR\} + \{BP\} \quad (3.31)$$

unde:

$[EP]$ este matricea elementală (matrice pătrată simetrică)

$\{\psi\} = [\psi_1^e \psi_2^e \dots \psi_{n_i}^e]^T$ este vectorul valorilor nodale ale lui ψ

$\{BR\}$ reprezintă contribuția vorticității la vectorul termenilor liberi

$\{BP\}$ reprezintă contribuția condițiilor Neumann la vectorul termenilor liberi.

Expresiile termenilor matricii elementale și ale termenilor liberi sunt:

$$EP_{ij} = \int_{\mathcal{D}^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dz \quad (3.32)$$

$$BR_i = \Omega \int_{\mathcal{D}^\epsilon} N_i r dr dz \quad (3.33)$$

$$BP_i = \int_{\Gamma_N^\epsilon} N_i g_2 d\Gamma \quad (3.34)$$

La ultimele patru relații a fost omis indicele (ϵ), subînțelegându-se că se referă la un element.

Evident în cazul mișcării irotaționale vom avea $BR_i = 0$.

Utilizând relația (3.27) scrisă pentru potențialul vitezei φ , funcționala I , (3.26), va avea pe elementul ϵ expresia:

$$I^\epsilon(\varphi_1^\epsilon, \varphi_2^\epsilon \dots \varphi_{n_i}^\epsilon) = \int_{\mathcal{D}^\epsilon} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_j^\epsilon N_j^\epsilon \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_j^\epsilon N_j^\epsilon \right)^2 \right] r dr dz - \\ - 2 \int_{\Gamma_N^\epsilon} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \varphi_j^\epsilon N_j^\epsilon \right) f_2 r d\Gamma$$

Ecuțiile elementale se obțin prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale în raport cu valorile nodale ale lui φ :

$$\frac{\partial I^\epsilon}{\partial \varphi_i^\epsilon} = 2 \sum_{j=1}^{n_i} \left[\int_{\mathcal{D}^\epsilon} \left(\frac{\partial N_i^\epsilon}{\partial z} \frac{\partial N_j^\epsilon}{\partial z} + \frac{\partial N_i^\epsilon}{\partial r} \frac{\partial N_j^\epsilon}{\partial r} \right) r dr dz \right] \varphi_j^\epsilon - \\ - 2 \int_{\Gamma_N^\epsilon} N_i^\epsilon f_2 r d\Gamma = 0$$

După simplificare cu 2, ecuațiile de mai sus se scriu matricial:

$$[EF] \{\varphi\} = \{BF\} \quad (3.35)$$

unde:

$[EF]$ este matricea elementală (matrice pătrată simetrică)

$\{\varphi\} = [\varphi_1^\epsilon \varphi_2^\epsilon \dots \varphi_{n_i}^\epsilon]^T$ este vectorul valorilor nodale ale lui φ

$\{BF\}$ este vectorul termenilor liberi elementali.

Expresiile termenilor matricii elementale, respectiv ale termenilor liberi, sunt:

$$EF_{ij} = \int_{\mathcal{D}^\epsilon} \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) r dr dz \quad (3.36)$$

$$BF_i = \int_{\Gamma_N^\epsilon} N_i f_2 r d\Gamma \quad (3.37)$$

3.2.1 Elementul finit triunghiular

În cele ce urmează se prezintă calculul matricii elementale și a termenilor liberi elementali, pentru problema cu condiții la limită aferentă potențialului vitezei, în cazul unui element finit triunghiular [13].

Elementul triunghiular poate fi definit univoc cu ajutorul a trei **noduri geometrice**, (n_g), notate cu 1,2 și 3 în Fig. 3.2.

Pentru aproximarea funcției necunoscute vom utiliza șase **noduri de interpolare**, (n_i), dintre care trei coincid cu nodurile geometrice 1,2,3, iar celelalte trei, 4,5, și 6 se găsesc la mijlocul laturilor.

În vederea simplificării definirii analitice a elementului, vom utiliza în continuare un element de referință \mathcal{D}^r , situat în spațiul de referință $\xi O \eta$. Printr-o transformare geometrică, elementul de referință generează elementul real \mathcal{D}^e , din semiplanul meridian zOr (Fig. 3.2)

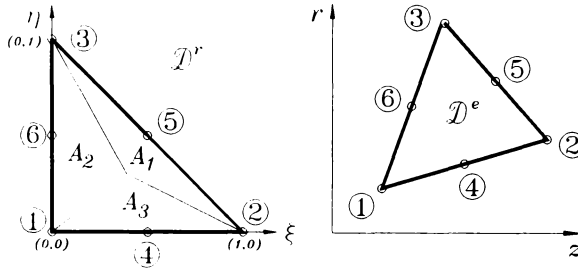


Figura 3.2: Elementul triunghiular de referință

Transformarea geometrică asociază unui punct (ξ, η) din \mathcal{D}^r un punct (z, r) din \mathcal{D}^e , astfel încât:

- corespondența să fie bijectivă;
- nodurile geometrice să corespundă, în aceeași ordine de numerotare;
- fiecare porțiune a frontierei elementului de referință, definită de nodurile geometrice de pe ea, să corespundă unei porțiuni din frontiera elementului real definită de nodurile geometrice corespunzătoare.

Deoarece pentru elementul triunghiular avem 3 noduri geometrice, vom căuta expresia transformării geometrice sub forma unui polinom cu trei termeni, simetric în variabilele ξ și η , deci vom porni de la baza polinomială:

$$\langle \bar{P} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \rangle \tag{3.38}$$

Cu aceasta, coordonatele unui punct din spațiul real pot fi exprimate sub forma:

$$z(\xi, \eta) = \langle \bar{P} \rangle \{ \alpha_z \} \quad \text{și} \quad r(\xi, \eta) = \langle \bar{P} \rangle \{ \alpha_r \} \tag{3.39}$$

unde $\{\alpha_z\}$ și $\{\alpha_r\}$ sunt vectori coloană ce conțin coeficienții polinoamelor. Aceștia se determină din condițiile de corespondență a nodurilor:

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(0,0) \\ z(1,0) \\ z(0,1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\alpha_z\}$$

sau pe scurt:

$$\{z_{ng}\} = [\bar{P}_{ng}] \{\alpha_z\} \text{ respectiv } \{r_{ng}\} = [\bar{P}_{ng}] \{\alpha_r\} \quad (3.40)$$

Din (3.40) rezultă:

$$\{\alpha_z\} = [\bar{P}_{ng}]^{-1} \{z_{ng}\} \text{ și } \{\alpha_r\} = [\bar{P}_{ng}]^{-1} \{r_{ng}\} \quad (3.41)$$

care înlocuite în (3.39) ne furnizează transformările geometrice:

$$z(\xi, \eta) = \langle 1 \ \xi \ \eta \rangle [\bar{P}_{ng}]^{-1} \{z_{ng}\} \quad (3.42)$$

$$r(\xi, \eta) = \langle 1 \ \xi \ \eta \rangle [\bar{P}_{ng}]^{-1} \{r_{ng}\} \quad (3.43)$$

Se observă că putem exprima coordonatele unui punct cu ajutorul coordonatelor nodurilor geometrice și a unor funcții:

$$\langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \ \bar{N}_2(\xi, \eta) \ \bar{N}_3(\xi, \eta) \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \rangle [\bar{P}_{ng}]^{-1} \quad (3.44)$$

numite **funcții de transformare geometrică**. Ținând cont că

$$[\bar{P}_{ng}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obținem expresiile acestor funcții prezentate în Tab. 3.1 împreună cu derivatele lor parțiale.

În cazul elementului triunghiular, pentru comoditatea calculului se utilizează coordonatele baricentrice, Fig. 3.2, care reprezintă raporte de arii:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

Tabelul 3.1: Funcțiile de transformare geometrică

i	N_i	$\partial N_i / \partial \xi$	$\partial N_i / \partial \eta$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	ξ	1	0
3	η	0	1

unde $A = A_1 + A_2 + A_3$ este aria elementului. Pentru elementul de referință rezultă: $L_1 = 1 - \xi - \eta$, $L_2 = \xi$ și $L_3 = \eta$ deci practic

$$L_i = \bar{N}_i \quad (3.45)$$

Deoarece elementele reale sunt generate pornind de la elementul de referință, vom transforma derivatele în raport cu coordonatele din spațiul real în derivate în raport cu coordonatele din spațiul de referință:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{array} \right\} = [J] \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial z \\ \partial/\partial r \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

unde $[J]$ este matricea jacobiană a transformării:

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial z/\partial\xi & \partial r/\partial\xi \\ \partial z/\partial\eta & \partial r/\partial\eta \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Această matrice poate fi obținută pornind de la relația

$$\langle z \ r \rangle = \langle \bar{N} \rangle [\{z_{ng}\} \{r_{ng}\}]$$

prin derivare în raport cu ξ , respectiv cu η :

$$[J] = \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{array} \right\} \langle z \ r \rangle = \begin{bmatrix} \langle \partial\bar{N}/\partial\xi \rangle \\ \langle \partial\bar{N}/\partial\eta \rangle \end{bmatrix} [\{z_{ng}\} \{r_{ng}\}]$$

Rezultă:

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & r_1 \\ z_2 & r_2 \\ z_3 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & r_2 - r_1 \\ z_3 - z_1 & r_3 - r_1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Jacobianul transformării este:

$$J = \det [J] = (z_2 - z_1)(r_3 - r_2) - (z_3 - z_1)(r_2 - r_1) \quad (3.49)$$

Din (3.46) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial z \\ \partial/\partial r \end{array} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{array} \right\} \quad (3.50)$$

iar din (3.48) avem: $[J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} r_3 - r_1 & r_1 - r_2 \\ z_1 - z_3 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ unde $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & r_1 \\ 1 & z_2 & r_2 \\ 1 & z_3 & r_3 \end{vmatrix}$

este aria elementului real.

Pe lângă legătura între operațiile de derivare, putem stabili și legătura între operațiile de integrare din spațiul real și din spațiul de referință cu relația:

$$\int_{D'} f(z, r) dz dr = \int_D f(z(\xi, \eta), r(\xi, \eta)) J d\xi d\eta \quad (3.51)$$

Tabelul 3.2: Funcțiile de interpolare pentru elementul triunghiular cu 6 noduri

i	N_i
1	$1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2$
2	$-\xi + 2\xi^2$
3	$-\eta + 2\eta^2$
4	$4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta$
5	$4\xi\eta$
6	$4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2$

Conform (3.27) funcția necunoscută, spre exemplu φ , poate fi aproximată pe un element finit cu ajutorul valorilor sale în nodurile de interpolare și a unui set de funcții de interpolare. În cele ce urmează vom construi aceste funcții (notate cu N , fără bară) pentru elementul triunghiular. Deoarece avem 6 noduri de interpolare vom utiliza în continuare o bază polinomială de ordinul al doilea completă, care are 6 elemente:

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \rangle \tag{3.52}$$

Ținând cont de coordonatele nodurilor de interpolare pe elementul de referință:

$$\langle \xi_{ni}, \eta_{ni} \rangle = \langle 0, 0; 1, 0; 0, 1; \frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \rangle$$

și utilizând același procedeu ca și la funcțiile de transformare geometrică, obținem succesiv:

$$[P_{ni}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} ; [P_{ni}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Funcțiile de interpolare vor fi $\langle N \rangle = \langle P \rangle [P_{ni}]^{-1}$ și după efectuarea calculelor obținem expresiile din Tab. 3.2.

Utilizând coordonatele baricentrice (3.45) obținem pentru funcțiile de interpolare și derivatele lor parțiale, expresiile din Tab. 3.3. Ultimele trei coloane ale tabelului reprezintă coordonatele baricentrice ale nodurilor elementului. În interiorul elementului de referință și pe frontiera lui, funcția necunoscută φ va fi aproximată cu relația:

$$\varphi(\xi, \eta) = \langle N \rangle \{ \varphi_{ni} \} = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) \varphi_i \tag{3.53}$$

Tabelul 3.3: Funcțiile de interpolare exprimate cu coordonatele baricentrice

i	N_i	$\partial N_i / \partial \xi$	$\partial N_i / \partial \eta$	L_1	L_2	L_3
1	$-L_1(1 - 2L_1)$	$1 - 4L_1$	$1 - 4L_1$	1	0	0
2	$-L_2(1 - 2L_2)$	$-1 + 4L_2$	0	0	1	0
3	$-L_3(1 - 2L_3)$	0	$-1 + 4L_3$	0	0	1
4	$4L_1L_2$	$4(L_1 - L_2)$	$-4L_2$	1/2	1/2	0
5	$4L_2L_3$	$4L_3$	$4L_2$	0	1/2	1/2
6	$4L_3L_1$	$-4L_3$	$4(L_1 - L_3)$	1/2	0	1/2

Tabelul 3.4: Derivatele parțiale ale funcțiilor de interpolare

i	$\partial N_i / \partial z$	$\partial N_i / \partial r$
1	$b_1(4L_1 - 1)/(2A)$	$a_1(4L_1 - 1)/(2A)$
2	$b_2(4L_2 - 1)/(2A)$	$a_2(4L_2 - 1)/(2A)$
3	$b_3(4L_3 - 1)/(2A)$	$a_3(4L_3 - 1)/(2A)$
4	$4(b_2L_1 + b_1L_2)/(2A)$	$4(a_2L_1 + a_1L_2)/(2A)$
5	$4(b_3L_2 + b_2L_3)/(2A)$	$4(a_3L_2 + a_2L_3)/(2A)$
6	$4(b_1L_3 + b_3L_1)/(2A)$	$4(a_1L_3 + a_3L_1)/(2A)$

Cu aceasta putem calcula derivatele parțiale ale funcției φ în raport cu coordonatele z și r , utilizând schimbarea de variabilă (3.50):

$$\begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial z \rangle \\ \langle \partial N / \partial r \rangle \end{bmatrix} \{\varphi_{ni}\} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial \xi \rangle \\ \langle \partial N / \partial \eta \rangle \end{bmatrix} \{\varphi_{ni}\} \quad (3.54)$$

Dacă notăm: $a_1 = z_3 - z_2$; $b_1 = r_2 - r_3$
 $a_2 = z_1 - z_3$; $b_2 = r_3 - r_1$ avem: $[J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ și cu
 $a_3 = z_2 - z_1$; $b_3 = r_1 - r_2$
 relațiile din Tab. 3.3 rezultă expresiile din Tab. 3.4. Cu acestea putem calcula componentele vitezei pe direcțiile axelor din semiplanul meridian:

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad \text{și} \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad (3.55)$$

Pentru problema aferentă potențialului vitezei, în cazul curgerii axial-simetrice, expresia termenilor matricii elementale este dată de ecuația (3.36). Utilizând expresiile derivatelor parțiale ale funcțiilor de interpolare exprimate cu coordonatele baricentrice, Tab. 3.4. și scriind raza curentă sub forma $r = r_1L_1 + r_2L_2 + r_3L_3$,

putem trece la integrarea pe elementul de referință, conform relației (3.51):

$$EF_{ij} = \int_{\mathcal{D}^r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right] (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) J d\mathcal{D}^r \quad (3.56)$$

Pentru calculul integralei se folosește formula:

$$\int_{\mathcal{D}^r} L_1^{\beta_1} L_2^{\beta_2} L_3^{\beta_3} d\mathcal{D}^r = \frac{\beta_1! \beta_2! \beta_3!}{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2)!} \quad (3.57)$$

Dacă notăm cu $E_{ij} = (a_i a_j + b_i b_j)/(60 A)$, $i, j = 1, 2, 3$, expresiile termenilor matricii elementale sunt [9]:

$$EF_{11} = 3E_{11}(3r_1 + r_2 + r_3) \quad (3.58)$$

$$EF_{12} = EF_{21} = -E_{12}(2r_1 + 2r_2 + r_3) \quad (3.59)$$

$$EF_{13} = EF_{31} = -E_{13}(2r_1 + r_2 + 2r_3) \quad (3.60)$$

$$EF_{14} = EF_{41} = E_{11}(3r_1 - 2r_2 - r_3) + E_{12}(14r_1 + 3r_2 + 3r_3) \quad (3.61)$$

$$EF_{15} = EF_{51} = E_{12}(3r_1 - r_2 - 2r_3) + E_{13}(3r_1 - 2r_2 - r_3) \quad (3.62)$$

$$EF_{16} = EF_{61} = E_{11}(3r_1 - r_2 - 2r_3) + E_{13}(14r_1 + 3r_2 + 3r_3) \quad (3.63)$$

$$EF_{22} = 3E_{22}(r_1 + 3r_2 + r_3) \quad (3.64)$$

$$EF_{23} = EF_{32} = -E_{23}(r_1 + 2r_2 + 2r_3) \quad (3.65)$$

$$EF_{24} = EF_{42} = E_{12}(3r_1 + 14r_2 + 3r_3) + E_{22}(-2r_1 + 3r_2 - r_3) \quad (3.66)$$

$$EF_{25} = EF_{52} = E_{22}(-r_1 + 3r_2 - 2r_3) + E_{23}(3r_1 + 14r_2 + 3r_3) \quad (3.67)$$

$$EF_{26} = EF_{62} = E_{12}(-r_1 + 3r_2 - 2r_3) + E_{23}(-2r_1 + 3r_2 - r_3) \quad (3.68)$$

$$EF_{33} = 3E_{33}(r_1 + r_2 + 3r_3) \quad (3.69)$$

$$EF_{34} = EF_{43} = E_{13}(-r_1 - 2r_2 + 3r_3) + E_{23}(-2r_1 - r_2 + 3r_3) \quad (3.70)$$

$$EF_{35} = EF_{53} = E_{23}(3r_1 + 3r_2 + 14r_3) + E_{33}(-r_1 - 2r_2 + 3r_3) \quad (3.71)$$

$$EF_{36} = EF_{63} = E_{13}(3r_1 + 3r_2 + 14r_3) + E_{33}(-2r_1 - r_2 + 3r_3) \quad (3.72)$$

$$EF_{44} = 8[E_{11}(r_1 + 3r_2 + r_3) + E_{12}(2r_1 + 2r_2 + r_3) + E_{22}(3r_1 + r_2 + r_3)] \quad (3.73)$$

$$EF_{45} = EF_{54} = 8E_{13}(r_1 + 3r_2 + r_3) - 4(E_{12}r_1 + E_{22}r_2 + E_{23}r_3) \quad (3.74)$$

$$EF_{46} = EF_{64} = 8E_{23}(3r_1 + r_2 + r_3) - 4(E_{11}r_1 + E_{12}r_2 + E_{13}r_3) \quad (3.75)$$

$$EF_{55} = 8[E_{22}(r_1 + r_2 + 3r_3) + E_{23}(r_1 + 2r_2 + 2r_3) + E_{33}(r_1 + 3r_2 + r_3)] \quad (3.76)$$

$$EF_{56} = EF_{65} = 8E_{12}(r_1 + r_2 + 3r_3) - 4(E_{13}r_1 + E_{23}r_2 + E_{33}r_3) \quad (3.77)$$

$$EF_{66} = 8[E_{11}(r_1 + r_2 + 3r_3) + E_{13}(2r_1 + r_2 + 2r_3) + E_{33}(3r_1 + r_2 + r_3)] \quad (3.78)$$

Expresia termenilor liberi elementali pentru problema aferentă potențialului vitezei este dată de ecuația (3.36). Deoarece funcțiile de interpolare le-am exprimat cu coordonatele baricentrice, Tab. 3.3, va trebui ca și elementul de linie $d\Gamma$

să-l exprimăm cu aceleași coordonate. Astfel, pentru latura 2 – 3, de lungime l_{23} avem $d\Gamma = l_{23}(-dL_2) = l_{23}dL_3$ respectiv pentru latura 3 – 1, de lungime l_{31} , $d\Gamma = l_{31}(-dL_3) = l_{31}dL_1$ și pentru latura 1 – 2 de lungime l_{12} , $d\Gamma = l_{12}(-dL_1) = l_{12}dL_2$. În cele ce urmează vom considera că derivata lui φ pe direcția normalei este constantă de-a lungul unei laturi, având respectiv valorile:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{23} \quad ; \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31}$$

Se tratează aici doar acest caz simplificat, deoarece în problemele studiate se impune componenta normală a vitezei constantă pe porțiunea Γ_N a frontierei domeniului.

Cu precizările de mai sus avem:

$$BF_1 = \int_1^2 N_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} r d\Gamma + \int_2^3 N_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{23} r d\Gamma + \int_3^1 N_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31} r d\Gamma$$

Ținând cont că $N_1 = 0$ (și implicit $L_1 = 0$) pe latura 2 – 3, obținem:

$$BF_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} \int_1^0 [-L_1(1 - 2L_1)] [r_1L_1 + (1 - L_1)r_2] l_{12}(-dL_1) + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31} \int_0^1 [-L_1(1 - 2L_1)] [r_1L_1 + (1 - L_1)r_3] l_{31}dL_1$$

După efectuarea calculelor rezultă:

$$BF_1 = \frac{r_1}{6} \left[l_{31} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31} + l_{12} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} \right] \quad (3.79)$$

$$BF_2 = \frac{r_2}{6} \left[l_{12} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} + l_{23} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{23} \right] \quad (3.80)$$

$$BF_3 = \frac{r_3}{6} \left[l_{23} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{23} + l_{31} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31} \right] \quad (3.81)$$

Deasemenea, deoarece $N_4 = 0$ pe laturile 2 – 3 și 3 – 1 avem:

$$BF_4 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} \int_0^1 4L_2(1 - L_2) [r_2L_2 + r_1(1 - L_2)] l_{12}dL_2$$

și efectuând calculele rezultă:

$$BF_4 = \frac{r_1 + r_2}{3} l_{12} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{12} \quad (3.82)$$

$$BF_5 = \frac{r_2 + r_3}{3} l_{23} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{23} \quad (3.83)$$

$$BF_6 = \frac{r_3 + r_1}{3} l_{31} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{31} \quad (3.84)$$

3.2.2 Elementul finit patrulater

În cele ce urmează se prezintă calculul matricii elementale și al termenilor liberi elementali pentru problemele aferente potențialului vitezei, respectiv funcții de curent în cazul elementului finit patrulater. Elementul considerat are patru noduri geometrice care coincid cu nodurile de interpolare, deci în acest caz funcțiile de transformare geometrică coincid cu funcțiile de interpolare (notate în continuare cu N_i , $i = 1 \dots 4$), de unde și apelația *izoparametric*.

Pentru construirea acestor funcții ținem cont că având 4 noduri, va trebui să pornim de la o bază polinomială cu 4 elemente:

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle$$

Coordonatele nodurilor de pe elementul de referință sunt, conform Fig. 3.3:

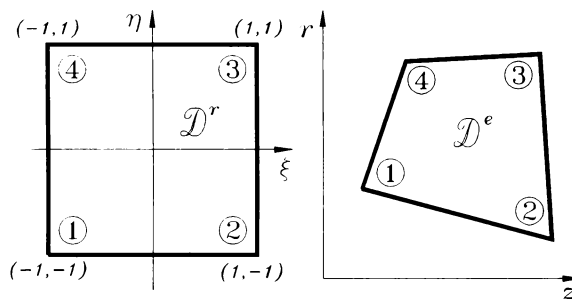


Figura 3.3: Elementul patrulater

$$\langle \xi_n, \eta_n \rangle = \langle -1, -1; 1, -1; 1, 1; -1, 1 \rangle$$

Cu acestea, aplicând procedeul descris în paragraful anterior, obținem succesiv:

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad [P_n]^{-1} = \frac{1}{4} [P_n]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Funcțiile de transformare geometrică, respectiv de interpolare, vor fi:

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

expresiile lor, precum și ale derivatelor parțiale fiind prezentate în Tab.3.5. Matricea

Tabelul 3.5: Funcțiile de transformare geometrică și de interpolare

i	N_i	$\partial N_i / \partial \xi$	$\partial N_i / \partial \eta$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \xi)$
2	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

jacobiană a transformării este:

$$\begin{aligned}
 [J] &= \begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial \xi \rangle \\ \langle \partial N / \partial \eta \rangle \end{bmatrix} [\{z_n\} \{r_n\}] = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & (1 - \eta) & (1 + \eta) & (-1 - \eta) \\ (-1 + \xi) & (-1 - \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & r_1 \\ z_2 & r_2 \\ z_3 & r_3 \\ z_4 & r_4 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + & -r_1 + r_2 + r_3 - r_4 + \\ +\eta(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) & +\eta(r_1 - r_2 + r_3 - r_4) \\ -z_1 - z_2 + z_3 + z_4 + & -r_1 - r_2 + r_3 + r_4 + \\ +\xi(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) & +\xi(r_1 - r_2 + r_3 - r_4) \end{bmatrix} \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

Notând:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= (r_4 - r_2)(z_3 - z_1) - (r_3 - r_1)(z_4 - z_2) \\
 \alpha_1 &= (r_3 - r_4)(z_2 - z_1) - (r_2 - r_1)(z_3 - z_4) \\
 \alpha_3 &= (r_4 - r_1)(z_3 - z_2) - (r_3 - r_2)(z_4 - z_1)
 \end{aligned}$$

jacobianul transformării poate fi scris sub forma:

$$J = \det[J] = \frac{1}{8}(\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta) \quad (3.86)$$

La calculul inversei matricii jacobiene, ținem cont că pentru:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \text{ avem } [J]^{-1} = (\det[J])^{-1} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

și cu aceasta derivatele parțiale ale funcțiilor de interpolare, în raport cu coordonatele din spațiul real z și r , vor fi:

$$\begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial z \rangle \\ \langle \partial N / \partial r \rangle \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial \xi \rangle \\ \langle \partial N / \partial \eta \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16J} \begin{bmatrix} -r_1 - r_2 + r_3 + r_4 + & r_1 - r_2 - r_3 + r_4 + \\ +\xi(r_1 - r_2 + r_3 - r_4) & +\eta(-r_1 + r_2 - r_3 + r_4) \\ z_1 + z_2 - z_3 - z_4 + & -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + \\ +\xi(-z_1 + z_2 - z_3 + z_4) & +\eta(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & (1 - \eta) & (1 + \eta) & (-1 - \eta) \\ (-1 + \xi) & (-1 - \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

După efectuarea calculelor, expresiile derivatelor obținute din (3.87) pot fi puse sub forma:

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{8J}(a_i^i + b_{11}^i \xi + b_{12}^i \eta) \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{8J}(a_i^i + b_{21}^i \xi + b_{22}^i \eta) \quad (3.89)$$

pentru $i = 1 \dots 4$, unde coeficienții a și b sunt:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= r_2 - r_4 & a_1^2 &= r_3 - r_1 & a_1^3 &= r_4 - r_2 & a_1^4 &= r_1 - r_3 \\ a_2^1 &= z_4 - z_2 & a_2^2 &= z_1 - z_3 & a_2^3 &= z_2 - z_4 & a_2^4 &= z_3 - z_1 \\ b_{11}^1 &= r_4 - r_3 & b_{11}^2 &= r_3 - r_4 & b_{11}^3 &= r_1 - r_2 & b_{11}^4 &= r_2 - r_1 \\ b_{12}^1 &= r_3 - r_2 & b_{12}^2 &= r_1 - r_4 & b_{12}^3 &= r_4 - r_1 & b_{12}^4 &= r_2 - r_3 \\ b_{21}^1 &= z_3 - z_4 & b_{21}^2 &= z_4 - z_3 & b_{21}^3 &= z_2 - z_1 & b_{21}^4 &= z_1 - z_2 \\ b_{22}^1 &= z_2 - z_3 & b_{22}^2 &= z_4 - z_1 & b_{22}^3 &= z_1 - z_4 & b_{22}^4 &= z_3 - z_2 \end{aligned}$$

Raza unui punct din interiorul elementului poate fi exprimată cu ajutorul razelor vârfurilor patrulaterului și cu funcțiile din Tab. 3.5 după cum urmează:

$$r = \sum_{i=1}^4 N_i r_i = \frac{1}{4} [(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + \xi(-r_1 + r_2 + r_3 - r_4) + \eta(-r_1 - r_2 + r_3 + r_4) + \xi\eta(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)]$$

respectiv dacă notăm:

$$\begin{aligned} d_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 & d_2 &= -r_1 + r_2 + r_3 - r_4 \\ d_3 &= -r_1 - r_2 + r_3 + r_4 & d_4 &= r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \end{aligned}$$

obținem în final următoarea expresie:

$$r = \frac{1}{4}(d_1 + d_2 \xi + d_3 \eta + d_4 \xi \eta) \quad (3.90)$$

Pentru funcția de curent ψ și pentru potențialul vitezei φ , expresiile termenilor matricilor elementale sunt date de ecuațiile (3.32) și (3.36). Expresia din paranteză este aceeași în ambele cazuri, și ținând cont de (3.88) și (3.89), obținem:

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} = \frac{1}{64 J^2} (c_1^{ij} + c_2^{ij} \xi + c_3^{ij} \eta + c_4^{ij} \xi \eta + c_5^{ij} \xi^2 + c_6^{ij} \eta^2) \quad (3.91)$$

unde:

$$\begin{aligned}
 c_1^{i,j} &= a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j \\
 c_2^{i,j} &= a_1^i b_{11}^j + a_1^j b_{11}^i + a_2^i b_{21}^j + a_2^j b_{21}^i \\
 c_3^{i,j} &= a_1^i b_{12}^j + a_1^j b_{12}^i + a_2^i b_{22}^j + a_2^j b_{22}^i \\
 c_4^{i,j} &= b_{11}^i b_{12}^j + b_{12}^i b_{11}^j + b_{21}^i b_{22}^j + b_{22}^i b_{21}^j \\
 c_5^{i,j} &= b_{11}^i b_{11}^j + b_{21}^i b_{21}^j \\
 c_6^{i,j} &= b_{12}^i b_{12}^j + b_{22}^i b_{22}^j
 \end{aligned}$$

Tinând cont de (3.86), (3.90) și (3.91), vom trece la integrarea pe elementul de referință, conform ec. (3.51):

$$\begin{aligned}
 EP_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (c_1^{ij} + c_2^{ij} \xi + c_3^{ij} \eta + c_4^{ij} \xi \eta + c_5^{ij} \xi^2 + c_6^{ij} \eta^2) / \\
 &\quad / (d_1 + d_2 \xi + d_3 \eta + d_4 \xi \eta) / (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) d\xi d\eta \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EF_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{32} (c_1^{ij} + c_2^{ij} \xi + c_3^{ij} \eta + c_4^{ij} \xi \eta + c_5^{ij} \xi^2 + c_6^{ij} \eta^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (d_1 + d_2 \xi + d_3 \eta + d_4 \xi \eta) / (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) d\xi d\eta \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

Integralele din (3.92) și (3.93) se evaluează numeric, cu metoda Gauss.

Pentru calculul contribuției vorticității la termenii liberi elementali, ecuația (3.33), trebuie evaluată o integrală de forma $\int_{\mathcal{D}^e} N_i r dr dz$. Pentru aceasta vom scrie funcțiile de interpolare din Tab. 3.5 sub forma:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + A_i \xi + B_i \eta + C_i \xi \eta) \quad i = 1 \dots 4$$

unde coeficienții A , B și C sunt:

$$\{\{A\}\{B\}\{C\}\} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Trecând la integrarea pe elementul de referință, cu (3.86) și (3.90) obținem:

$$\begin{aligned}
 BR_i &= \frac{\Omega}{128} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + A_i \xi + B_i \eta + C_i \xi \eta) (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) \\
 &\quad (d_1 + d_2 \xi + d_3 \eta + d_4 \xi \eta) d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

și după efectuarea calculelor rezultă în final [45]:

$$\begin{aligned}
 BR_i &= \frac{\Omega}{32} \left(\alpha_0 d_1 + \frac{A_i \alpha_1 d_1}{3} + \frac{B_i \alpha_2 d_1}{3} + \frac{A_i \alpha_0 d_2}{3} + \frac{\alpha_1 d_2}{3} + \frac{C_i \alpha_2 d_2}{9} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_i \alpha_0 d_3}{3} + \frac{C_i \alpha_1 d_3}{9} + \frac{\alpha_2 d_3}{3} + \frac{C_i \alpha_0 d_4}{9} + \frac{B_i \alpha_1 d_4}{9} + \frac{A_i \alpha_2 d_4}{9} \right) \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Tabelul 3.6: Segmentele infinitezimale și funcțiile de intepolare pe laturile elementului

latura	$d\Gamma$	N_1	N_2	N_3	N_4
1 – 2	$\frac{1}{2}l_{12} d\xi$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	0	0
2 – 3	$\frac{1}{2}l_{23} d\eta$	0	$\frac{1}{2}(1 - \eta)$	$\frac{1}{2}(1 + \eta)$	0
3 – 4	$-\frac{1}{2}l_{34} d\xi$	0	0	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$
4 – 1	$-\frac{1}{2}l_{41} d\eta$	$\frac{1}{2}(1 - \eta)$	0	0	$\frac{1}{2}(1 + \eta)$

Pentru calculul contribuției condițiilor Neumann la termenii liberi elementali, în Tab. 3.6 sunt prezentate expresiile segmentelor infinitezimale $d\Gamma$, respectiv ale funcțiilor de interpolare, de-a lungul laturilor elementului patrulater, conform Fig. 3.3 respectiv Tab. 3.5. În plus vom presupune că funcțiile g_2 și f_2 sunt constante de-a lungul unei laturi a elementului, având respectiv valorile:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{12} \quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{23} \quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{34} \quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{41} \\ \text{și} \quad & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{12} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{23} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{34} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{41} \end{aligned}$$

Cu acestea, conform relației (3.34) avem:

$$BP_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \xi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{12} \frac{l_{12}}{2} d\xi + \int_1^{-1} \frac{1}{2}(1 - \eta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{41} \left(-\frac{l_{41}}{2} d\eta \right)$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$BP_1 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{12} \frac{l_{12}}{2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{41} \frac{l_{41}}{2} \tag{3.95}$$

$$BP_2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{23} \frac{l_{23}}{2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{12} \frac{l_{12}}{2} \tag{3.96}$$

$$BP_3 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{34} \frac{l_{34}}{2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{23} \frac{l_{23}}{2} \tag{3.97}$$

$$BP_4 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{41} \frac{l_{41}}{2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{34} \frac{l_{34}}{2} \tag{3.98}$$

Pentru calculul termenilor liberi elementali corespunzători potențialului vitezei, ecuația (3.37) vom scrie raza conform (3.90), ceea pe latura 1 – 2 conduce la expresia:

$$r = \frac{1 - \xi}{2} r_1 + \frac{1 + \xi}{2} r_2$$

respectiv pe latura 4 – 1:

$$r = \frac{1 - \eta}{2} r_1 + \frac{1 + \eta}{2} r_4$$

Cu acestea avem:

$$BF_1 = \int_{-1}^1 \frac{1 - \xi}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{12} \left[\frac{1 - \xi}{2} r_1 + \frac{1 + \xi}{2} r_2 \right] \frac{l_{12}}{2} d\xi + \int_1^{-1} \frac{1 - \eta}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{41} \left[\frac{1 - \eta}{2} r_1 + \frac{1 + \eta}{2} r_4 \right] \left(-\frac{l_{41}}{2} d\eta \right)$$

După efectuarea calculelor rezultă în final:

$$BF_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{12} \frac{l_{12}}{6} (2r_1 + r_2) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{41} \frac{l_{41}}{6} (2r_1 + r_4) \quad (3.99)$$

$$BF_2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{23} \frac{l_{23}}{6} (2r_2 + r_3) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{12} \frac{l_{12}}{6} (2r_2 + r_1) \quad (3.100)$$

$$BF_3 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{34} \frac{l_{34}}{6} (2r_3 + r_4) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{23} \frac{l_{23}}{6} (2r_3 + r_2) \quad (3.101)$$

$$BF_4 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{41} \frac{l_{41}}{6} (2r_4 + r_1) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{34} \frac{l_{34}}{6} (2r_4 + r_3) \quad (3.102)$$

Odată determinate valorile funcției de curent, respectiv potențialului vitezei în nodurile elementului, putem calcula componentele axială și radială ale vitezei, utilizând relațiile (3.86), (3.88), (3.89) și (3.90). În cazul utilizării funcției de curent vom avea:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} \psi_i = \frac{4}{d_1 + d_2\xi + d_3\eta + d_4\xi\eta} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \sum_{i=1}^4 (a_2^i + b_{21}^i\xi + b_{22}^i\eta) \psi_i \quad (3.103)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial z} \psi_i = -\frac{4}{d_1 + d_2\xi + d_3\eta + d_4\xi\eta} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \sum_{i=1}^4 (a_1^i + b_{11}^i\xi + b_{12}^i\eta) \psi_i \quad (3.104)$$

respectiv în cazul utilizării potențialului vitezei:

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial z} \varphi_i = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \sum_{i=1}^4 (a_1^i + b_{11}^i\xi + b_{12}^i\eta) \varphi_i \quad (3.105)$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} \varphi_i = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \sum_{i=1}^4 (a_2^i + b_{21}^i\xi + b_{22}^i\eta) \varphi_i \quad (3.106)$$

3.2.3 Structura pachetului de programe care utilizează Metoda Elementului Finit

Pachetul de programe utilizat pentru studiul curgerii cu Metoda Elementului Finit este de concepție proprie, și a fost organizat astfel încât operațiile de pre-procesare, procesare și postprocesare să fie efectuate cu programe independente. Aceasta permite o adaptare ușoară a programelor la modificarea tipului problemei.

Preprocesorul, anexa A.1, realizează următoarele trei operații:

- generarea frontierei domeniului și definirea nodurilor de pe contur, cu programul **DUZGEO**;
- generarea rețelei de discretizare, cu programul **GENRET**, care calculează coordonatele nodurilor și construiește matricea de conexiuni cu subrutina **GENCNX4** pentru elemente patrulatere, respectiv cu subrutina **GENCNX6** pentru elemente triunghiulare.
- generarea fișierului de date pentru procesor, cu programul **CONEX**, care la rândul lui apelează procedurile **RDATEE** pentru citirea datelor furnizate de **GENRET**, **SORCNX** pentru sortarea matricii de conexiuni, **LATURI** pentru generarea matricii de conexiuni pentru laturile elementelor, și **RETEACAD** pentru generarea fișierului *.scr de comunicare cu AutoCAD în vederea desenării rețelei; ultima procedură utilizează două subrutine pentru stabilirea limitelor ferestrei de reprezentare a desenului, **LIMACAD**, respectiv pentru scrierea coordonatelor punctelor în fișierul *.scr cu formatul cerut de AutoCAD, **WRSCR**.

Procesorul, anexa A.2, rezolvă problema cu condiții la limită și calculează valorile nodale ale funcției necunoscută. Programul **ROFEM** care implementează Metoda Elementului Finit apelează următoarele proceduri:

- **RDATEE** pentru citirea datelor din fișierul construit cu **CONEX**;
- **VORTEX** pentru introducerea în vectorul termenilor liberi a contribuției vorticității, în cazul curgerii rotaționale;
- **CONDLIM** pentru introducerea condițiilor la limită Dirichlet;
- **CLNPSI** pentru introducerea condițiilor la limită Neumann;
- **ASMB1S** pentru asamblarea matricii sistemului de ecuații; matricea este simetrică, de tip bandă;
- **EE** pentru calculul termenilor matricii elementale; această procedură de tip **FUNCTION** este singura componentă a programului care depinde de problema studiată și de tipul elementului finit utilizat (în această lucrare este utilizat elementul finit triunghiular cu trei noduri geometrice și șase noduri de interpolare pentru potențialul vitezei, respectiv elementul patrulater cu patru noduri, izoparametric, pentru funcția de curent);
- **REBSGA** pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare, cu matricea sistemului simetrică, tip bandă [16];
- **OUTREZ** pentru scrierea în fișierul de ieșire a valorilor nodale ale funcției;
- **CORPSI** pentru corectarea formei suprafeței libere, conform algoritmilor

descriși în cele ce urmează.

Postprocesorul, anexa A.3, realizează trasarea liniilor de curent, atunci când se utilizează funcția de curent pentru exprimarea vitezei. Programul **IZOLIN** apelează următoarele proceduri:

- **RDATEG** pentru citirea valorilor nodale ale funcției de curent și a informațiilor referitoare la rețeaua de discretizare din fișierul generat de **CONEX**;
- **LIMACAD** pentru stabilirea dimensiunilor desenului în AutoCAD (aceeași cu cea utilizată de **CONEX**);
- **LINIE** pentru calcularea coordonatelor punctelor de intersecție ale liniei de curent cu laturile elementelor.

Toate procedurile sunt scrise în limbajul Fortran. Programele au fost rulate pe un calculator IBM-PC, utilizând compilatorul Microsoft FORTRAN 5.1 [63].

3.3 Domeniul de curgere și condițiile pe frontieră

Duzele utilizate pentru producerea jeturilor de apă de mare viteză au o geometrie foarte simplă, dictată de diametrul redus al orificiului ($0.1 \dots 0.4 \text{ mm}$) și de condițiile deosebite de funcționare (presiunea apei în amonte de $2000 \dots 4000 \text{ bar}$). În cele ce urmează se prezintă studiul curgerii lichidului în duza cilindrică și în porțiunea inițială a jetului. Domeniul de curgere considerat este prezentat în Fig.3.4, într-un semiplan meridian.

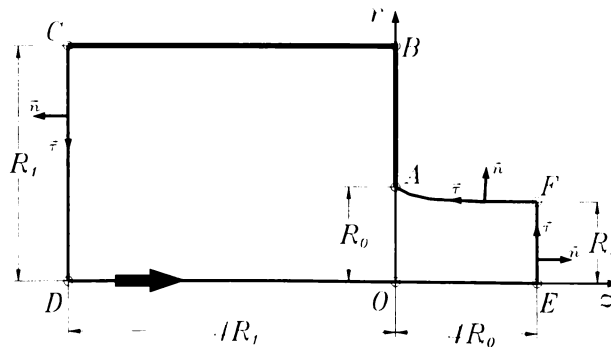


Figura 3.4: Domeniul de curgere, într-un semiplan meridian

Segmentul $A-B$ corespunde suprafeței pastilei de safir, iar $B-C$ este peretele conductei. Conducta are raza R_1 iar orificiul duzei are raza R_0 . După ce iese din orificiu, jetul se contractă până la raza R_2 . În ipoteza absenței forțelor masice și a frecării cu mediul ambiant, respectiv dacă jetul nu suferă nici o perturbare,

forma lui va rămâne cilindrică, cu liniile de curent paralele cu axa de simetrie Oz . Porțiunea $A - F$ a frontierei corespunde suprafeței jetului, și inițial nu este cunoscută. Deocamdată, pe baza considerațiilor de mai sus, putem preciza direcția tangentei la curba $A - F$, în punctele de capăt (paralelă cu Or în A , respectiv paralelă cu Oz în F).

Lungimile tronsoanelor de conductă, respectiv de jet, au fost considerate egale cu $4R_1$, respectiv $4R_0$, astfel încât în secțiunile de intrare, $C - D$, și de ieșire, $E - F$, curgerea să fie stabilizată. Cu alte cuvinte, în aceste secțiuni viteza are practic numai componentă axială, iar profilul de viteză corespunde cu cel din amonte de $C - D$, respectiv din aval de $E - F$.

Pentru precizarea condițiilor pe frontieră, vom ține cont că:

- în axa de simetrie, componenta radială a vitezei este nulă, prin urmare Oz va fi linie de curent; fără a impune condiții suplimentare, putem considera

$$\psi = 0 \quad \text{pe} \quad [D - O - E] \quad (3.107)$$

unde parantezele drepte indică includerea punctelor de la capete.

- pe frontiera solidă, componenta normală a vitezei este nulă, deci și aceasta va fi linie de curent; dacă debitul volumic de lichid este Q , atunci avem:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{pe} \quad (A - B - C) \quad (3.108)$$

unde paranteza rotundă indică faptul că punctul respectiv nu este inclus în segmentul de frontieră.

- în secțiunile de intrare și de ieșire se consideră că viteza are numai componentă axială, deci:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{pe} \quad (C - D) \text{ și } (E - F) \quad (3.109)$$

Precizarea condițiilor pe frontieră pentru potențialul vitezei φ se va face în următoarele ipoteze:

- pe axa de simetrie și pe frontiera solidă componenta normală a vitezei este nulă, deci:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{pe} \quad (D - O - E) \text{ și } (A - B - C) \quad (3.110)$$

- în secțiunea de ieșire, viteza are numai componentă axială, deci $E - F$ este linie echipotențială; fără a impune condiții suplimentare, vom considera:

$$\varphi = 0 \quad \text{pe} \quad [E - F] \quad (3.111)$$

- în secțiunea de intrare, $C - D$, vom impune un profil constant de viteză, adică:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{Q}{\pi R_1^2} \quad \text{pe} \quad [C - D] \quad (3.112)$$

Referitor la ultimele două condiții se impun câteva precizări. În principiu, se poate impune și pe frontiera de ieșire o condiție de tipul (3.112), dar în acest caz potențialul vitezei poate fi determinat numai până la o constantă aditivă arbitrară, deoarece nu se precizează decât derivatele lui. Pe de altă parte, frontiera de intrare, $C - D$, poate fi considerată linie echipotențială, dar impunerea unei condiții de tipul (3.111) este mai dificilă din punct de vedere numeric pentru că nu se cunoaște valoarea lui φ . Vom arăta în cele ce urmează că este necesară precizarea valorii lui φ în punctul F (pentru condițiile pe frontiera jetului) și prin urmare varianta prezentată mai sus este cea mai potrivită.

3.4 Suprafața jetului

Pe suprafața jetului, căreia îi corespunde curba $A - F$ în semiplanul meridian, Fig.3.4, trebuie îndeplinite următoarele două condiții:

c1) Componenta normală a vitezei este nulă, sau cu alte cuvinte suprafața jetului este o frontieră impenetrabilă. În cazul utilizării funcției de curent din rezultă (3.108) că:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{pe } [A - F] \quad (3.113)$$

Dacă se folosește formularea în potențialul vitezei, condiția de impenetrabilitate se scrie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{pe } [C - D]$$

dar sub această formă este incomodă pentru calculul numeric. De aceea în practică vom impune ca viteza să fie tangentă la $A - F$, [9], așa cu se va arăta în subcapitolul următor.

c2) Presiunea este constantă, deoarece se consideră că jetul iese în atmosferă. Această condiție nu este riguros adevărată în zona de contracție a jetului, deoarece s-a neglijat influența tensiunii superficiale. În plus, dacă pe suprafața jetului apar mici perturbații, repartiția presiunii se modifică substanțial datorită în principal acțiunii mediului gazos în care evoluează jetul. Acest aspect va fi tratat în capitolul referitor la stabilitatea jeturilor.

Integrând ecuația de mișcare Euler de-a lungul unei linii de curent, în ipoteza curgerii staționare a fluidului nevâscos incompresibil, cu forțe masice neglijabile, obținem că:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{constant de-a lungul unei linii de curent}$$

și ținând cont că $p = \text{const.}$ și $\rho = \text{const.}$ obținem în final că pe suprafața jetului modulul vitezei este constant. Cum viteza are numai componentă tangențială,

vom avea pentru funcția de curent:

$$\vec{r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) = \vec{v}_{A-F}$$

și ținând cont că $\vec{v}_{A-F} = -\vec{r} v_{A-F}$, putem scrie:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = v_{A-F} \quad \text{pe } [A-F] \quad (3.114)$$

unde v_{A-F} este modulul vitezei pe suprafața jetului.

Pentru potențialul vitezei avem:

$$\vec{r} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \vec{v}_{A-F}$$

respectiv

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -v_{A-F} \quad \text{pe } [A-F] \quad (3.115)$$

Ținând cont că $\varphi_F = 0$, conform (3.111), ecuația (3.115) permite calculul valorilor lui φ de-a lungul curbei $A-F$. Pentru aceasta este suficient să scriem (3.115) cu diferențe finite:

$$\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} = -v_{A-F}, \quad i = 1, 2, \dots$$

unde i este punctul curent în care calculăm pe φ_i , iar s_i este abscisa curbilinie, măsurată de-a lungul lui $A-F$, pornind din F . Evident, avem $s_0 = 0$ și $\varphi_0 = \varphi_F = 0$.

Condițiile **c1** și **c2** nu pot fi impuse simultan, deoarece inițial nu se cunoaște forma suprafeței jetului. Pentru determinarea acesteia vom utiliza un algoritm iterativ, la care fiecare iterație presupune efectuarea următorilor doi pași:

p1) Se rezolvă problema (3.10),(3.107),(3.108), (3.109),(3.114) pentru funcția de curent, respectiv (3.23),(3.110),(3.111), (3.112),(3.115) pentru potențialul vitezei.

p2) Se corectează forma curbei $A-F$ astfel încât aceasta să devină linie de curent, respectiv să fie tangentă la vectorul viteză.

La prima iterație se admite o formă pentru suprafața jetului. În cazul de față, s-a considerat inițial că jetul este cilindric, având raza R_0 .

În cazul potențialului vitezei, domeniul din Fig.3.4 a fost discretizat cu elemente finite triunghiulare cu 6 noduri de interpolare. Alegerea acestui tip de element, pe care φ are o variație pătratică, a fost dictată de necesitatea obținerii unei variații liniare a vitezei (calculată prin derivarea lui φ). Dacă s-ar fi ales un element triunghiular cu 3 noduri, variația liniară a lui φ ar fi condus la o valoare constantă a vitezei pe un element, respectiv discontinuitatea vitezei la trecerea de la un element la altul.

În Fig. 3.5 se prezintă un exemplu de discretizare pentru cazul $R_0/R_1 = 1/2$. Deoarece în acest caz se utilizează 2436 de elemente, în figură este prezentat doar

un detaliu din zona orificiului. Discretizarea domeniului s-a făcut pornind de la ideea "deformării" rețelei regulate corespunzătoare unui domeniu dreptunghiular, astfel încât să se acopere domeniul din Fig. 3.4. Rețeaua astfel obținută permite construirea unei matrici bandă, pentru sistemul de ecuații liniare, cu banda de lățime constantă și minimă.

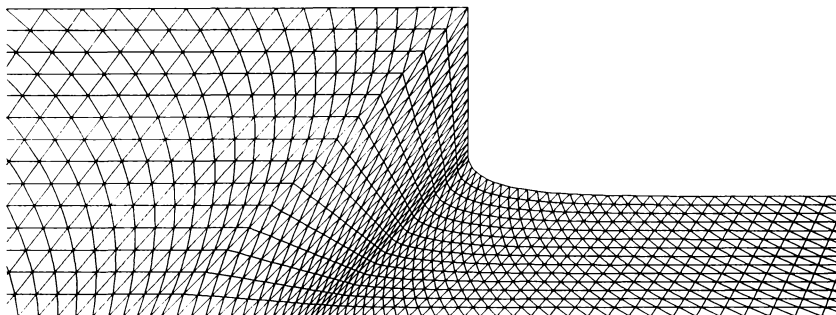


Figura 3.5: Discretizarea cu elemente finite triunghiulare (detaliu din zona orificiului, în cazul $R_1/R_0 = 2$)

Pentru funcția de curent, domeniul de curgere a fost discretizat cu elemente patrulatere cu 4 noduri (izoparametrice). Așa cum se va arăta în continuare, pentru formularea în ψ nu mai este necesar calculul vitezei, deci nu este nevoie să se utilizeze elemente cu funcții de interpolare de ordin superior. În Fig. 3.6 se prezintă discretizarea cu elemente patrulatere a domeniului din Fig. 3.4 pentru $R_0/R_1 = 1/2$. Și în acest caz este prezentat numai un detaliu din zona orificiului, deoarece numărul total de elemente este 2523.

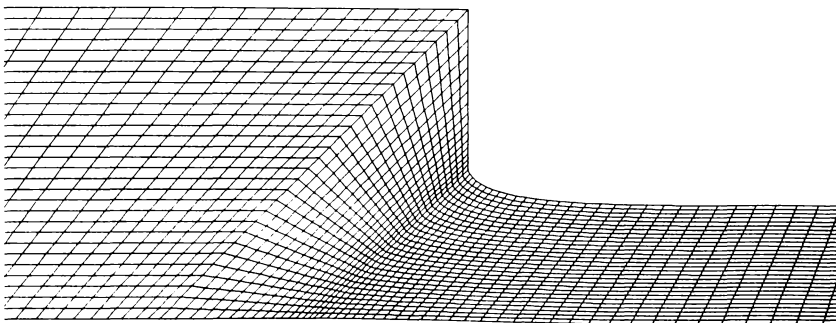


Figura 3.6: Discretizarea cu elemente finite patrulatere (detaliu din zona orificiului, în cazul $R_1/R_0 = 2$)

3.4.1 Corecția suprafeței libere în cazul utilizării potențialului vitezei

În urma rezolvării la pasul **p1** a problemei cu condiții la limită pentru domeniul de curgere, s-au calculat valorile lui φ în toate nodurile, respectiv componentele v_z și v_r ale vitezei pe frontiera liberă $A - F$.

Să considerăm un segment de frontieră, care reprezintă latura unui element triunghiular, delimitat de nodurile 1 și 2, și având la mijloc nodul 3, conform Fig. 3.7.

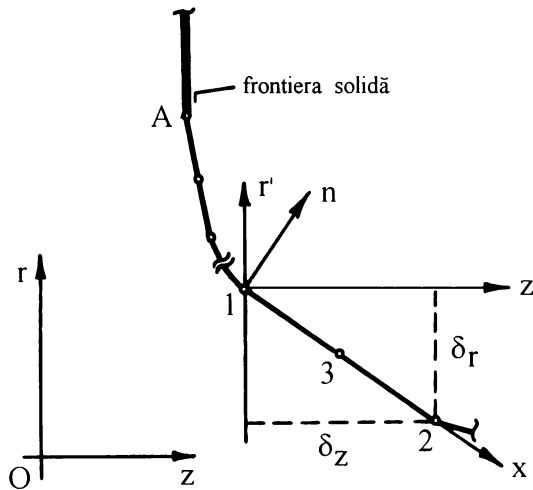


Figura 3.7: Segmentul de frontieră, cu sistemul de coordonate local.

Coordonatele globale (z, r) ale nodurilor 1 și 2, folosite la pasul **p1**, sunt (z_1, r_1) și (z_2, r_2) , iar coordonatele corectate după pasul **p2** vor fi notate cu (z_1^c, r_1^c) și (z_2^c, r_2^c) . Frontiera liberă pornește din punctul A (muchia orificiului) și va fi parcursă în sensul de curgere (de la A la F) corectându-se succesiv poziția nodurilor astfel încât noua curbă să fie tangentă vectorilor vitezei. Cu alte cuvinte, pentru segmentul de frontieră 1 – 2 presupunem cunoscute coordonatele nodului 1 și vom determina coordonatele nodului 2 astfel încât segmentul să aibă direcția tangentei la frontiera liberă.

Dacă efectuăm o translație a sistemului global de coordonate, zOr , astfel încât originea să fie în nodul 1, coordonatele (z', r') ale nodului 2 în noul sistem de coordonate vor fi:

$$\delta_z = z_2 - z_1 \quad \text{și} \quad \delta_r = r_2 - r_1 \quad (3.116)$$

iar lungimea segmentului este $l = \sqrt{\delta_z^2 + \delta_r^2}$.

Pentru corectarea poziției nodului 2 este convenabil să rotim abscisa locală, astfel încât să se suprapună peste segment. Noile coordonate (x, n) ale acestui nod pot fi scrise funcție de δ_z și δ_r , utilizând o matrice de rotație:

$$\begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

unde $a = \delta_z/l$ and $b = -\delta_r/l$. Analog putem exprima componentele tangențială, v_t și normală, v_n , ale vitezei:

$$\begin{bmatrix} v_t \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_z \\ v_r \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Panta tangentei la frontiera liberă, exprimată în sistemul de coordonate local (x, n) este:

$$S^i = \frac{v_n^i}{v_r^i} = \frac{\delta_z v_r^i - \delta_r v_z^i}{\delta_z v_z^i + \delta_r v_r^i} \quad \text{pentru } i = 1, 2, 3 \quad (3.119)$$

Dacă ținem cont că S reprezintă derivata funcției $n(x)$ ce descrie local curba $A-F$, corecția pe direcția normalei a poziției nodului 2, notată δ_n , va fi calculată prin integrare. Deoarece cunoaștem valorile lui S în trei puncte, vom efectua integrarea numeric, utilizând formula lui Simpson (care aproximează local curba cu o parabolă):

$$\frac{\delta_n}{l} = \frac{S^1 + 4S^3 + S^2}{6} \quad (3.120)$$

și revenind în coordonatele (z', r') , vom avea:

$$\begin{bmatrix} \delta_z^c \\ \delta_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

În final, coordonatele globale corectate ale nodului 2 sunt:

$$z_2^c = z_1^c + \delta_z^c = z_1^c + \delta_z - \frac{\delta_n}{l} \delta_r \quad (3.122)$$

$$r_2^c = r_1^c + \delta_r^c = r_1^c + \delta_r + \frac{\delta_n}{l} \delta_z \quad (3.123)$$

O metodă asemănătoare pentru corectarea suprafeței libere este prezentată de Chan și Larock, [9], cu mențiunea că panta tangentei la curbă este calculată în sistemul global de coordonate. Dezavantajul principal al acestor metode este acela că S este definit fie prin raportul v_r/v_z , fie ca v_z/v_r , după cum tangenta este mai apropiată de abscisa Oz sau de ordonata Or [42]. Deasemenea, corecția poziției nodurilor se face numai în direcția radială, ceea ce conduce la alungirea importantă a segmentelor aproape paralele cu Or (vezi segmentul care pornește din A).

Aceste dezavantaje sunt eliminate de metoda prezentată mai sus prin utilizarea sistemului de coordonate local, forma relațiilor (3.119), (3.120), (3.122) și (3.123) fiind independentă de orientarea segmentului de frontieră [43, 45].

3.4.2 Corecția suprafeței libere în cazul utilizării funcției de curent

Rezolvând problema cu condiții la limită de la pasul **p1** se determină valorile lui ψ în toate nodurile din interiorul domeniului și de pe frontiera lui. În Fig.3.8 se prezintă un detaliu din vecinătatea muchiei orificiului. A , domeniul de curgere fiind discretizat cu elemente patrulatere.

La pasul **p2**, se corectează forma curbei $A - F$, astfel încât să devină linia de curent $\psi = \psi_A$. Noile coordonate ale nodurilor de pe frontiera liberă se determină simplu prin interpolare liniară de-a lungul laturilor elementelor, [44, 45] așa cum se observă în Fig. 3.8.

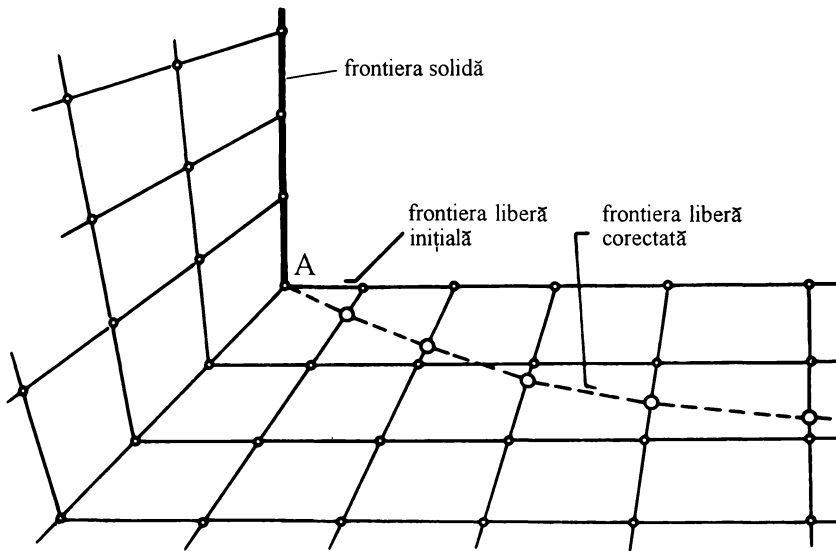


Figura 3.8: Corecția suprafeței libere, pentru formularea în ψ .

Evident, în cazul unei rețele de discretizare la care unele laturi de elemente din vecinătatea frontierei se apropie de direcția tangentei este necesar ca poziția corectată a nodurilor să fie determinată de-a lungul normalei locale, utilizând valoarea derivatei normale a funcției de curent impusă prin condiția la limită (3.114). Această observație permite folosirea metodei prezentată mai sus și în cazul utilizării Metodei Elementului de Frontieră pentru rezolvarea problemei cu condiții la limită, când se determină valorile funcției necunoscută și a derivatelor ei pe direcția normalei numai pe nodurile de pe frontieră.

Trebuie remarcat că în general $\psi_A \neq Q/(2\pi)$, dar pe măsură ce ne apropiem de forma corectă a suprafeței jetului, $\psi_A \rightarrow Q/(2\pi)$, respectiv este îndeplinită și

condiția (3.113).

Se observă că utilizarea funcției de curent la problemele de curgere cu suprafață liberă prezintă următoarele avantaje față de formularea în potențialul vitezei:

- nu este necesar calculul vitezei, și prin urmare se pot utiliza funcții de interpolare liniare pe element;
- poziția corectată a fiecărui nod nu depinde de pozițiile nodurilor din amonte, și prin urmare nu se cumulează erorile de integrare numerică.

În plus, formularea în ψ permite și studiul curgerilor rotaționale ale fluidului incompresibil. Chan și Larock, [9], preferă formularea în φ , bănuind că factorul $1/r$ din expresia funcționalei J (ec. 3.14) crează dificultăți numerice în vecinătatea axei de simetrie. Așa cum se va arăta în continuare, această presupunere nu este adevărată, rezultatele obținute cu funcția de curent fiind superioare (acuratețe mai bună și efort de calcul mai mic) față de cele obținute cu potențialul vitezei. Evitarea evaluării integrandului din expresia termenilor matricii elementale (3.32) pentru $r = 0$ (ceea ce ar conduce la o valoare infinită) se face prin integrarea numerică a expresiei cu metoda Gauss. Aceasta necesită calculul valorii numerice a integrandului numai în puncte din interiorul elementului, nu și de pe frontiera lui [11, 13].

3.5 Rezultate numerice

În cele ce urmează sunt prezentate rezultatele numerice obținute pentru câmpul hidrodinamic în duze cilindrice, pentru configurații de tipul celei din Fig. 3.4. Ca dimensiune caracteristică a fost considerată raza orificiului, R_0 , celelalte dimensiuni fiind exprimate cu această unitate de măsură. Cu alte cuvinte, putem spune că $R_0 = 1$, celelalte lungimi (z , r , R_1 , R_2) devenind adimensionale prin raportare la R_0 .

Valoarea debitului Q nu influențează aspectul liniilor de curent deoarece fluidul a fost presupus nevâscos. Pentru calculul numeric s-a considerat $Q = 2\pi$, dar poate fi aleasă la fel de bine și altă valoare. În acest fel, dacă $\psi = 0$ în axa de simetrie, atunci linia de curent corespunzătoare frontierei impenetrabile (peretele solid și suprafața jetului) va fi $\psi = 1$.

3.5.1 Curgerea irotațională

În cazul curgerii irotaționale avem $\nabla \times \vec{v} = 0$, respectiv pentru o mișcare axial simetrică (cu $v_\theta = 0$ și $\partial/\partial\theta = 0$) condiția de irotaționalitate este suficient să fie scrisă pentru componenta rotorului pe direcția perpendiculară la zOz :

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (3.124)$$

În regiunea de curgere în care liniile de curent sunt paralele cu axa de simetrie,

Tabelul 3.7: Raza jetului, R_2 , pt. diferite raze de conductă, R_1 (curgere irotatională, formularea în potențialul vitezei)

Nr. crt.	R_1/R_0	numărul de elemente triunghiulare	numărul de noduri	numărul de iterații	R_2/R_0
1	10.0	2968	6177	15	0.7443
2	6.0	2856	5945	15	0.7448
3	2.0	2436	5075	14	0.7638
4	1.4142	2240	4662	14	0.7858
5	1.1547	2128	4437	12	0.8222

deci $v_r = 0$, condiția de mai sus se scrie $\partial v_z / \partial r = 0$, adică v_z este constantă pe rază.

Pentru domeniul din Fig. 3.4 rezultă că în secțiunile $C - D$ și $E - F$ avem un profil constant de viteză, iar viteza pe frontiera jetului, v_{A-F} , care intervine în condițiile (3.114) și (3.115) va fi:

$$v_{A-F} = \frac{Q}{\pi R_2^2} \quad (3.125)$$

În Tab. 3.7 sunt prezentate valorile numerice obținute pentru raza jetului la diferite valori ale razei conductei. În tabel sunt indicate și caracteristicile rețelei de discretizare utilizată (elemente triunghiulare cu 6 noduri), precum și numărul de iterații necesare pentru stabilizarea primelor patru cifre semnificative ale razei jetului.

Fig. 3.9 prezintă forma suprafeței libere a jetului pentru cele cinci cazuri din Tab. 3.7. Se observă că pentru primele două cazuri, $R_1/R_0 = 10$ respectiv $R_1/R_0 = 6$, forma suprafeței libere este practic aceeași (curbele 1 și 2 sunt suprapuse).

Se confirmă astfel observația experimentală conform căreia contractia jetului este completă dacă distanța de la axa orificiului la peretele conductei (sau în general pereții rezervorului) este mai mare de $3 \times$ diametrul orificiului [5].

De obicei rezultatele referitoare la contractia jetului se exprimă cu ajutorul coeficientului de contractie, C_c , care este raportul dintre aria secțiunii transversale a jetului și aria orificiului:

$$C_c = \frac{R_2^2}{R_0^2}$$

În plus, pentru geometria particulară studiată mai sus, Fig. 3.4, putem defini un coeficient de contractie geometrică, C_g , ca fiind raportul dintre aria orificiului și

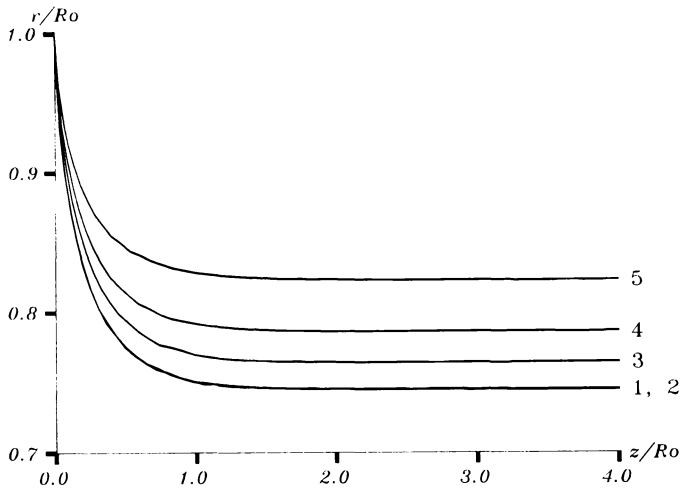


Figura 3.9: Forma suprafeței libere a jetului obținută pentru formularea în potențialul vitezei.

Tabelul 3.8: Coeficientul de contracție a jetului, C_c , pt. diferite valori ale coeficientului de contracție geometrică, C_g .

Nr. crt.	contr. geom. C_g	coef. contr. jet, C_c Resiga	Chan și Larock [9]	diferența relativă [%]
1	1/100	0.5540	-	-
2	1/36	0.5547	0.5853	5.5
3	1/4	0.5834	0.5936	1.7
4	1/2	0.6175	0.6296	1.9
5	3/4	0.6760	0.6945	2.7

aria secțiunii transversale a conductei:

$$C_g = \frac{R_0^2}{R_1^2}$$

În Tab. 3.8 sunt prezentate valorile lui C_g și C_c pentru cazurile din Tab. 3.7. Pentru comparație se prezintă și coeficientul de contracție obținut de Chan și Larock. [9], observându-se o bună concordanță a valorilor numerice.

Trebuie precizat însă că, spre exemplu pentru cazul 2, Chan și Larock au

utilizat 500 de elemente triunghiulare pentru discretizarea domeniului, pe când în această lucrare s-au utilizat 2856 de elemente, respectiv 5945 de noduri. Aceasta ar putea fi o explicație pentru diferența de 5.5% dintre cele două valori ale lui C_c . În cazurile 3, 4 și 5 diferențele sunt mai mici, dar explicabile deasemenea prin finețea discretizării utilizate.

Problema contracției jetului, în ipoteza curgerii irotaționale, a fost rezolvată și cu ajutorul funcției de curent. Rezultatele obținute în acest caz sunt prezentate în Tab. 3.9.

Tabelul 3.9: Raza jetului, R_2 , pt. diferite raze de conductă, R_1 (curgere irotațională, formulare în funcția de curent)

Nr. crt.	R_1/R_0	numărul de elemente patrulatere	numărul de noduri	numărul de iterații	R_2/R_0
1	10.0	3074	3210	15	0.7441
2	6.0	2958	3090	16	0.7443
3	2.0	2523	2640	16	0.7528
4	1.4142	2320	2430	16	0.7729
5	1.1547	2204	2310	13	0.8207

Se observă că valoarea razei jetului diferă foarte puțin față de valorile prezentate în Tab. 3.7. Forma suprafeței libere obținută cu ψ , Fig. 3.10 nu diferă semnificativ de cea prezentată în Fig. 3.9.

Pe baza rezultatelor de mai sus putem concluziona că deși formulările matematice și tipul elementelor finite sunt diferite, algoritmi de determinare a frontierei libere propuși de autor atât în cazul utilizării potențialului vitezei cât și a funcției de curent conduc practic la aceleași rezultate numerice. Această concluzie este validată odată în plus de Fig. 3.11 care prezintă suprafața liberă obținută cu φ , respectiv cu ψ , în cazul contracției complete a jetului. Mici diferențe apar în vecinătatea buzei orificiului, dar în final raza jetului este aceeași. Se remarcă însă faptul că frontiera liberă obținută în cazul utilizării funcției de curent este riguros tangentă la peretele solid al duzei, în dreptul muchiei de ieșire a orificiului.

Deasemenea, se poate observa că distanța pe care are loc contracția jetului este practic de $1.5 \times$ diametrul orificiului, în continuare jetul fiind practic cilindric. Aceasta permite studiul separat al curgerii în duza și contracției jetului, respectiv al problemei stabilității frontierei libere, pentru care se presupune jetul de formă inițial cilindrică, cu un profil de viteză constant în secțiunea transversală.

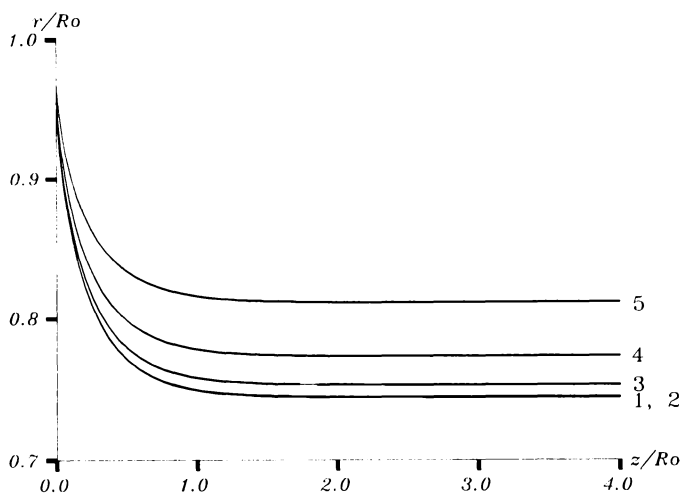


Figura 3.10: Forma suprafeței libere a jetului obținută pentru formularea în funcția de curent.

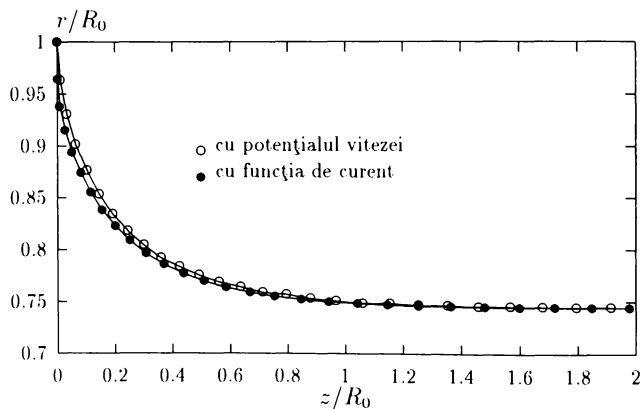


Figura 3.11: Suprafața liberă în cazul contracției complete a jetului

3.5.2 Curgerea rotațională

Utilizarea funcției de curent pentru exprimarea vitezei permite studiul curgerii rotaționale. În acest caz, membrul drept al ecuației (3.10) va fi diferit de zero.

În cele ce urmează se consideră că profilul vitezei în conductă, la distanță suficient de mare amonte față de orificiu, este parabolic, iar $\Omega(\psi)$ va fi egală cu o constantă pe tot domeniul de curgere. Ținând cont de notațiile din Fig. 3.4, respectiv de condiția (3.108), avem:

$$\Omega = \frac{8}{R_1^4} \frac{Q}{2\pi} \quad (3.126)$$

În ecuațiile elementale obținute prin aplicarea Metodei Elementului Finit, vorticitatea intervine în vectorul termenilor liberi al ecuațiilor elementale conform relației (3.33).

Deoarece profilul vitezei în conductă nu este constant, nici viteza în secțiunea transversală a jetului contractat nu va fi constantă. Prin urmare, viteza pe frontiera liberă a jetului, v_{A-F} , nu mai este egală cu viteza medie dată de (3.125).

Dacă notăm cu v_* viteza adimensională într-o secțiune transversală pe axa de simetrie (viteza axială / viteza medie), respectiv cu r_* raza adimensională (raza / raza secțiunii), profilul vitezei în secțiunea $C - D$ este:

$$v_* = 2(1 - r_*^2) \quad (3.127)$$

unde $r_* = r/R_1$.

În jet profilul vitezei va fi deasemenea parabolic, deci pentru secțiunea $C - D$ putem scrie:

$$v_* = v_*^F + (v_*^E - v_*^F)(1 - r_*^2) \quad (3.128)$$

unde v_*^E și v_*^F sunt vitezele adimensionale în E , respectiv F , iar $r_* = r/R_2$. Pentru acestea putem scrie:

$$\frac{v_*^E - v_*^F}{2} = \frac{R_2^4}{R_1^4} \quad (3.129)$$

iar din expresia debitului în secțiunea $E - F$ avem:

$$\frac{v_*^E + v_*^F}{2} = 1 \quad (3.130)$$

Membrul drept al ecuației (3.129) justifică introducerea coeficientului de contracție total, C_t , definit ca raportul ariilor secțiunilor transversale ale jetului, respectiv conductei:

$$C_t = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Evident, C_t este legat de coeficienții de contracție a jetului, C_c , respectiv de contracție geometrică, C_g , conform relației:

$$C_t = C_c \cdot C_g$$

Utilizând (3.129) și (3.130) profilul vitezei în jet, (3.128), poate fi scris sub forma:

$$v_* = 1 + C_t^2 (1 - 2r_*^2) \quad (3.131)$$

Ecuția (3.131) arată că dacă vâna de fluid se contractă, profilul de viteză se uniformizează. Astfel, dacă $C_t < 1/10$, vitezele în axa jetului, respectiv pe suprafața liberă, diferă cu mai puțin de 1% de viteza medie în jet.

Punând $r_* = 1$ obținem viteza pe frontiera liberă pentru (3.114):

$$v_{A-F} = (1 - C_t^2) \frac{Q}{\pi R_2^2} \quad (3.132)$$

În Tab. 3.10 se prezintă rezultatele obținute în cazul curgerii rotaționale, cu profil parabolic în conductă.

Tabelul 3.10: Raza jetului, R_2 , pentru curgerea rotațională cu profil parabolic de viteză în conductă.

Nr. crt.	contr. geom. C_g	R_1/R_0	R_2/R_0	contr. total C_t
1	1/100	10.0	0.7443	$5.54 \cdot 10^{-3}$
2	1/36	6.0	0.7454	0.0154
3	1/4	2.0	0.7808	0.1524
4	1/2	1.4142	0.8444	0.3565
5	3/4	1.1547	0.9190	0.6334

Observăm că, în acord cu concluzia de mai sus referitoare la uniformizarea profilului de viteză în cazul contracției puternice a vânei de fluid, valorile razei jetului în primele două cazuri, corespunzătoare contracției complete, coincid practic cu cele obținute în cazul curgerii irotaționale. În cazul contracției incomplete, raza jetului este mai mare decât la curgerea irotațională. Figurile 3.12 și 3.13 prezintă aspectul liniilor de curent în cazul curgerii irotaționale, respectiv rotaționale, pentru $C_g = 1/2$. Modelul curgerii rotaționale permite punerea în evidență a unei regiuni de recirculare, cu linii de curent închise, în zona de modificare bruscă a direcției curentului.

În Fig. 3.14 se poate observa mărimea zonei de recirculare în cazul unei contracții geometrice ridicată, $C_g = 1/100$. Trebuie remarcat însă că deși curgerea în duză diferă substanțial de cazul curgerii irotaționale, aspectul liniilor de curent în jet este practic același. Acest lucru se explică prin distanța relativ mare dintre punctul de stagnare aferent liniei de curent ce delimitează zona de recirculare și buza orificiului.

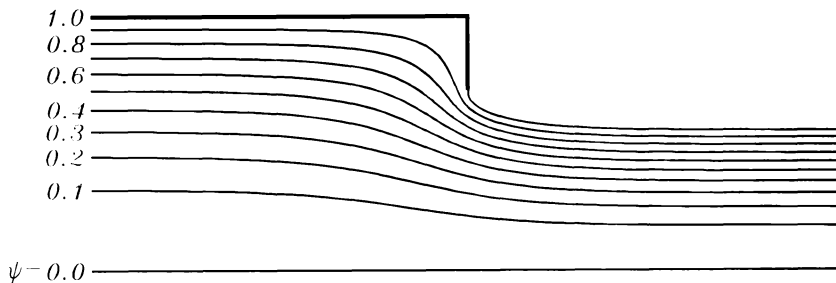


Figura 3.12: Liniile de curent pentru curgerea irotatională, la o contracție geometrică $C_g = 1/2$.

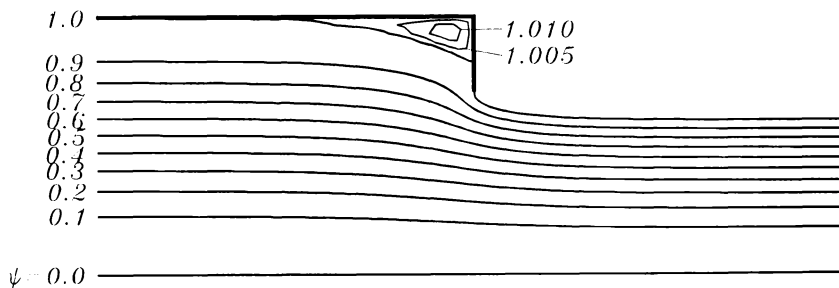


Figura 3.13: Liniile de curent pentru curgerea rotațională, la o contracție geometrică $C_g = 1/2$.

3.6 Comparație cu date experimentale pentru duze de tăiere cu jet

Așa cum se poate observa din Tab. 3.7...3.10, valoarea coeficientului de contracție a jetului, C_c , nu depinde practic nici de contracția geometrică, exprimată prin C_g , nici de profilul vitezei în conductă, în cazul contracției complete. Această situație se întâlnește la duzele cilindrice utilizate pentru generarea jeturilor de tăiere.

Engemann, [15] a măsurat debitul de apă evacuat prin duze de tăiere cu diametrul orificiului $D_o = 0.132 \dots 0.401 \text{ mm}$, la presiuni înaintea duzei $p = 1000 \dots 4000 \text{ bar}$. Diametrul conductei este de aproximativ 3.5 mm , deci contracția jetului este completă. Utilizând aceste date experimentale am calculat coeficientul de debit al duzei:

$$C_d = \frac{4Q}{\pi D_o^2 v} \tag{3.133}$$

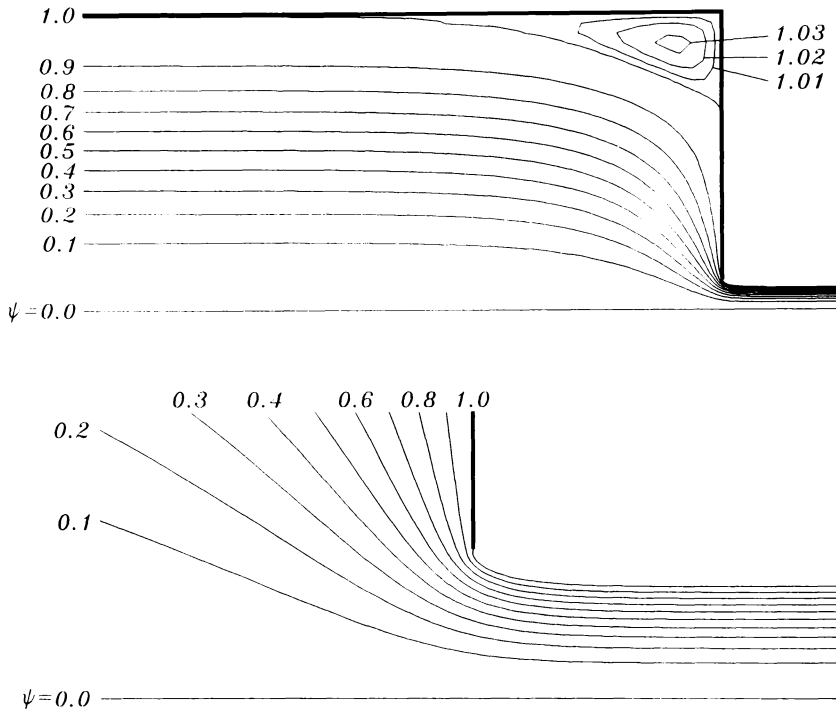


Figura 3.14: Liniile de curent pentru curgerea rotațională, la o contracție geometrică $C_g = 1/100$.

unde v este viteza teoretică a jetului, calculată ținând cont de compresibilitatea apei, cu relația (2.12).

Valorile lui C_d sunt prezentate în graficul din Fig. 3.15 funcție de numărul Re asociat orificiului duzei:

$$Re = \frac{w d}{\nu}$$

cu $\nu = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Utilizând metoda celor mai mici pătrate, pe baza datelor experimentale s-a stabilit următoarea relație de legătură între C_d și Re :

$$C_d(Re) = 0.549 + \frac{0.526}{Re^{0.235}} \quad (3.134)$$

Coeficientul de debit poate fi scris ca produsul coeficientului de contracție C_c cu coeficientul de viteză C_v , acesta din urmă fiind raportul dintre viteza reală

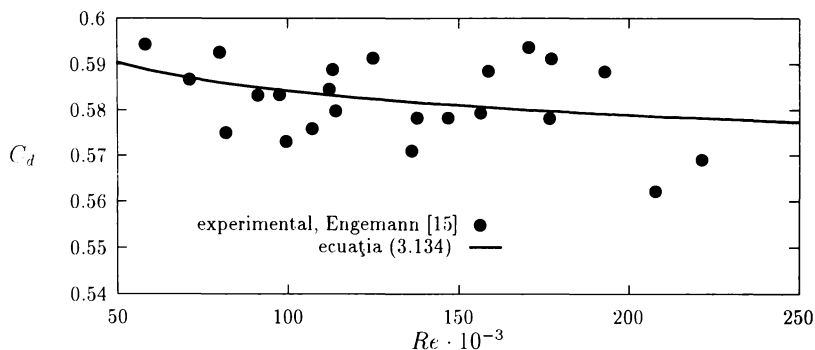


Figura 3.15: Coeficientul de debit al duzei cilindrice, C_d , funcție de numărul Re asociat orificiului.

a jetului și viteza teoretică. Practic, C_v caracterizează curgerea din punct de vedere energetic, iar pentru $Re \rightarrow \infty$ avem $C_v \rightarrow 1$. Rezultă că pentru valori mari ale numărului Re putem considera că $C_d \approx C_c$.

Așa cum rezultă din (3.134), valoarea către care tinde asimptotic, pentru $Re \rightarrow \infty$, coeficientul de debit este 0.549, în foarte bună concordanță cu valoarea numerică 0.554 obținută în cazul contracției complete a jetului.

3.7 Variația vitezei pe peretele duzei și dezvoltarea stratului limită

Deoarece curgerea în duză a fost studiată în ipoteza fluidului nevâscos, viteza pe frontiera solidă este nenulă. În realitate, fluidul vâscos aderă la perete deci viteza va fi nulă. În vecinătatea peretelui, pe o distanță mică în raport cu dimensiunile caracteristice ale domeniului, viteza va crește rapid de la zero la valoarea corespunzătoare curentului nevâscos. Stratul de lângă perete în care vâscozitatea joacă un rol esențial și în care avem o variație rapidă a vitezei în direcția normală la frontieră se numește *strat limită*.

Prima etapă a calculului stratului limită o reprezintă stabilirea modului în care variază viteza curentului nevâscos U pe frontieră. În particular, interesează porțiunea frontierei corespunzătoare peretelui frontal al duzei, începând din punctul de stagnare al curentului și până la buza orificiului. În cele ce urmează vom trata cazul în care raza conductei este de zece ori mai mare decât raza orificiului, acesta fiind aproximativ raportul utilizat în practică pentru duzele cilindrice de

tăiere cu jet.

Dacă considerăm curgerea ca fiind irotatională, atunci punctul de viteză nulă va corespunde intersecției între tronsonul cilindric și peretele frontal al duzei. În cazul curgerii rotaționale, Fig. 3.14, apare o zonă de recirculare delimitată de o linie de curent ce intersectează peretele frontal în punctul de stagnare. Raza acestui punct este $7.25 \cdot R_0$, spre deosebire de cazul curgerii irotatională când raza punctului de stagnare este $10 \cdot R_0$. Ca o primă concluzie, cele două modele de curgere evidențiază lungimi diferite pentru traseul de accelerare a particulelor de fluid în vecinătatea peretelui frontal al duzei. Vom nota cu x abscisa curbiliniei măsurată de-a lungul liniei de curent $\psi = 1$, începând din punctul de stagnare spre buza orificiului, Fig.3.16. Viteza fluidului nevâscos pe perete U crește de la zero la viteza jetului, v_{jet} .

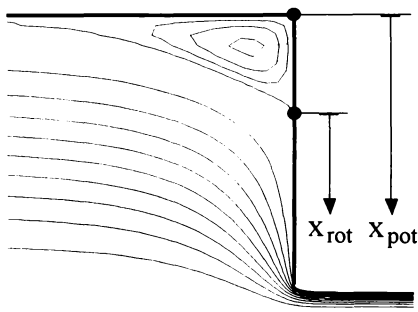


Figura 3.16: Abscisa de-a lungul peretelui frontal al duzei măsurată începând din punctul de stagnare: x_{rot} pentru curgere rotațională și x_{pot} pentru curgere potențială.

În Fig. 3.17 este prezentată variația vitezei adimensionale U/v_{jet} funcție de abscisa curbilinie x/R_0 . În conformitate cu cele prezentate mai sus cu privire la poziția punctului de stagnare, buza orificiului este situată la $x/R_0 = 9$ pentru curgerea irotatională, respectiv la $x/R_0 = 6.25$ pentru curgerea rotațională, cele două valori fiind marcate cu liniile verticale din figură.

Se observă că la început creșterea vitezei este foarte lentă, particula de fluid fiind accelerată puternic doar pe o distanță egală cu $4 \dots 4.5 R_0$, deci practic egală cu dublul diametrului orificiului. Aceasta explică alura identică a celor două curbe pentru $U/v_{jet} > 0.1$.

Pe de altă parte, viteza în dreptul muchiei de ieșire a jetului reprezintă 0.755 din viteza jetului, accelerarea particulei de fluid continuând și în zona de contracție a jetului pe o distanță aproximativ egală cu raza orificiului. Se remarcă faptul că accelerația crește atingând un maxim pe buza orificiului, după care scade și se anulează odată cu uniformizarea vitezei în jet. Această observație

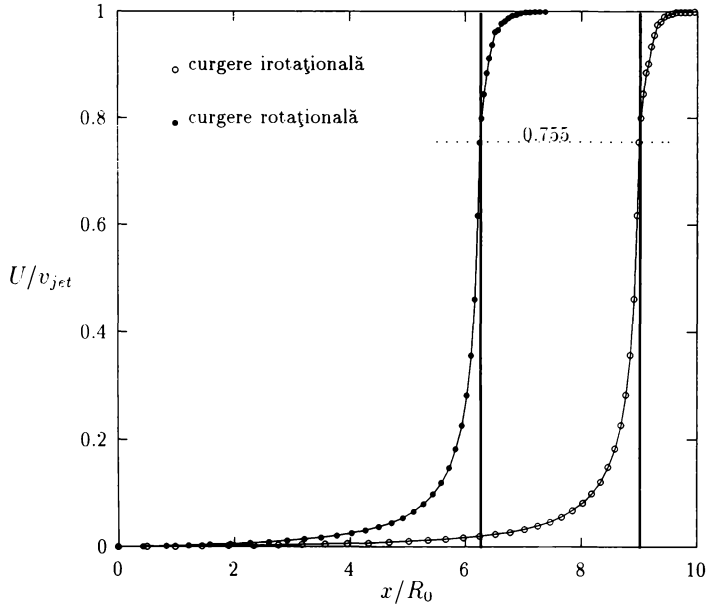


Figura 3.17: Variația vitezei adimensionale a curentului nevâscos. U/v_{jet} , pe peretele frontal al duzei și în zona de contracție a jetului, funcție de abscisa curbilinie adimensională x/R_0 măsurată începând din punctul de stagnare

este argumentată de faptul ca începutul frontierei libere a jetului reprezintă punctul de inflexiune al curbei distribuției de viteză.

Ținând cont de particularitățile curgerii în stratul limită, prezintă interes proiecția ecuației Navier-Stokes de-a lungul abscisei curbiliniei x :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3.135)$$

unde y este măsurat pornind de la peretele solid, pe direcția normalei interioare. La aceasta se adaugă ecuația de continuitate pentru fluidul incompresibil

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.136)$$

Ecuațiile (3.135) și (3.136) reprezintă ecuațiile diferențiale ale stratului limită laminar și se integrează cu următoarele condiții pe frontieră:

$$y = 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0$$

$$y = \delta \Rightarrow v_x = U(x)$$

unde δ este grosimea stratului limită iar $U(x)$ este viteza pe frontiera stratului limită. Grosimea stratului limită este o mărime convențională și se definește ca distanța de la perete la care viteza fluidului vâscos diferă cu 1% de viteza fluidului nevâscos.

Ținând cont de ecuația lui Bernoulli putem exprima gradientul presiunii sub forma:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

și cu ajutorul mărimilor:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy && \text{grosimea de eliminare} \\ \delta^{**} &= \int_0^\delta \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy && \text{grosimea pierderilor de impuls} \\ \tau_p &= \rho \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} && \text{tensiunea de frecare la perete} \end{aligned}$$

se obține ecuația integrală a stratului limită [8]:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U^2} \quad (3.137)$$

Introducând parametrul de formă al stratului limită $H = \delta^*/\delta^{**}$, respectiv coeficientul de frecare $c_f = \tau_p/(\rho U^2/2)$, ecuația de mai sus poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (H + 2) \frac{\delta^{**}}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad (3.138)$$

Dacă H și c_f sunt funcții cunoscute de δ^{**} atunci ecuația (3.138) poate fi integrată numeric. Asemenea dependențe au fost stabilite de Thwaites [53] scriind următoarele condiții la limită:

$$y = 0 \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{U}{(\delta^{**})^2} \lambda \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U}{\delta^{**}} l$$

Aceste relații definesc pe λ și l . Thwaites a găsit dependențe universale $l(\lambda)$ și $H(\lambda)$ de forma:

$$\begin{aligned} &\text{pentru } 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ l &= 0.22 + 1.57\lambda - 1.8\lambda^2 \\ H &= 2.61 - 3.75\lambda + 5.24\lambda^2 \\ &\text{pentru } -0.1 \leq \lambda \leq 0 \\ l &= 0.22 + 1.402\lambda + \frac{0.018\lambda}{0.107 + \lambda} \\ H &= \frac{0.0731}{0.14 + \lambda} + 2.088 \end{aligned}$$

Din (3.135) rezultă pentru $y = 0$:

$$\lambda = \frac{(\delta^{**})^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad \frac{c_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho U^2} = \frac{\nu}{U^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 = \frac{\nu l(\lambda)}{U \delta^{**}}$$

Cu acestea, ecuația (3.138) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{U}{\nu} \frac{d(\delta^{**})^2}{dx} = 2 \{ - [H(\lambda) + 2] \lambda + l(\lambda) \} = F(\lambda) \quad (3.139)$$

unde $F(\lambda)$ este o alta funcție universală. Ținând cont de relațiile de mai sus, F poate fi foarte bine aproximată cu o dreaptă:

$$F(\lambda) \approx 0.45 - 6\lambda = 0.45 - 6 \frac{(\delta^{**})^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (3.140)$$

Înlocuind (3.140) în (3.139) și înmulțind cu U^5 obținem:

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dx} [(\delta^{**})^2 U^6] = 0.45 U^5 \quad (3.141)$$

care integrată cu condiția inițială $U(0) = 0$ conduce la:

$$\frac{(\delta^{**})^2 U^6}{\nu} = 0.45 \int_0^x U^5 dx \quad (3.142)$$

Deoarece am prezentat repartiția de viteză în coordonate adimensionale, este convenabil ca ecuația de mai sus să o scriem sub formă adimensională cu mărimile:

$$\bar{x} = \frac{x}{R_0} \quad \bar{\delta}^{**} = \frac{\delta^{**}}{R_0} \quad \bar{U} = \frac{U}{v_{jet}} \quad Re_R = \frac{v_{jet} R_0}{\nu}$$

S-a notat aici cu Re_R numărul Reynolds calculat cu raza orificiului, pentru a-l diferenția de numărul Reynolds calculat cu diametrul orificiului, utilizat anterior. Alegerea razei orificiului, R_0 , ca lungime de referință este justificată în acest caz de faptul că mișcarea fiind axial-simetrică se studiază curgerea într-un semiplan meridian. Rezultă:

$$\bar{\delta}^{**} \sqrt{Re_R} = \sqrt{\frac{0.45}{\bar{U}^6} \int_0^{\bar{x}} \bar{U}^5 d\bar{x}} \quad (3.143)$$

În vecinătatea punctului de stagnare ($\bar{x} = 0$) repartiția vitezei poate fi aproximată cu o dreaptă de pantă $(d\bar{U}/d\bar{x})_0$. Cu această observație, din (3.143) rezultă valoarea inițială a grosimii pierderilor de impuls de forma:

$$\bar{\delta}_0^{**} \sqrt{Re_R} = \sqrt{\frac{0.075}{(d\bar{U}/d\bar{x})_0}} \quad (3.144)$$

Se observă că expresiile din membrul drept al ecuațiilor (3.143) și (3.144) nu depind decât de repartiția vitezei, exprimată în coordonate adimensionale.

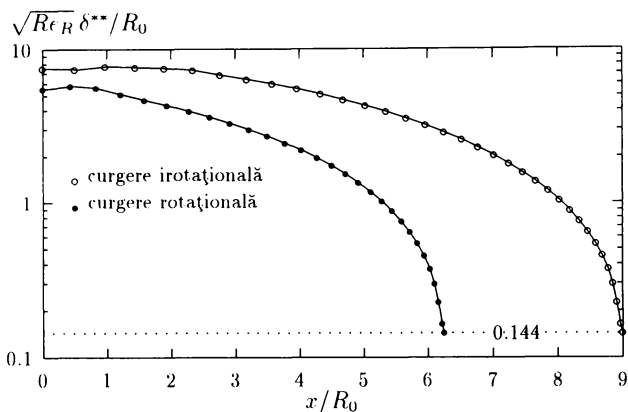


Figura 3.18: Grosimea adimensională a pierderilor de impuls funcție de abscisa adimensională măsurată din punctul de stagnare.

Deoarece această repartiție a fost determinată în ipoteza fluidului nevâscos, ea va fi aceeași pentru orice domeniu de curgere asemenea geometric și prin urmare curbele din Fig. 3.17 pot fi considerate valabile pentru orice duză cilindrică la care contracția jetului este completă.

În Fig. 3.18 este prezentată variația mărimii $\delta^{**} \sqrt{Re_R}$ între punctul de stagnare și muchia orificiului, pentru curgerea irotațională, respectiv rotațională. Se observă că în vecinătatea orificiului cele două curbe au aceeași valură, obținându-se pe buza orificiului aceeași valoare $\delta^{**} \sqrt{Re_R} = 0.144$. Observația este importantă deoarece se confirmă faptul că în cazul unui raport suficient de mare între raza conductei și raza orificiului, curgerea în duză (în speță modelul folosit pentru descrierea ei) nu influențează dezvoltarea stratului limită, acesta având aceiași parametri în dreptul buzei orificiului.

Înainte de a continua analiza rezultatelor pentru stratul limită trebuie verificat dacă acesta rămâne laminar pe întreaga porțiune investigată. Pentru aceasta se folosesc criteriile empirice bazate pe date experimentale care permit precizarea punctului în care are loc tranziția laminar-turbulent. În [8] este prezentată o relație între numerele Reynolds corespunzătoare grosimii pierderii de debit, respectiv abscisei curbilinii, pentru punctul corespunzător tranziției:

$$Re_{\delta^{**}tr} = 1.174 \left(1 + \frac{22400}{Re_{xtr}} \right) Re_{xtr}^{0.46} \quad (3.145)$$

unde:

$$Re_{\delta^{**}tr} = \frac{U \delta^{**}}{\nu} = \bar{U} \delta^{**} Re_R \quad \text{și} \quad Re_{xtr} = \frac{U x}{\nu} = \bar{U} \bar{x} Re_R$$

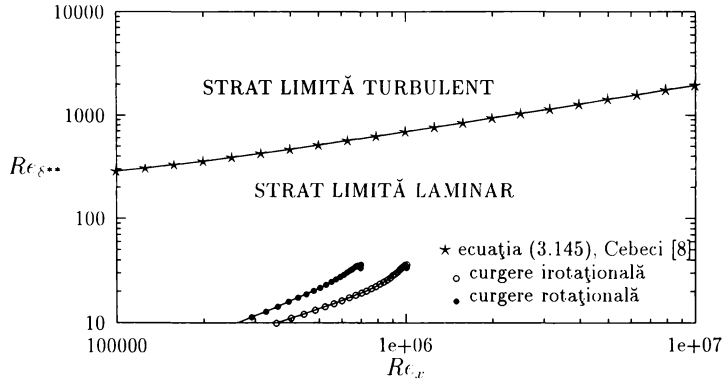


Figura 3.19: Verificarea regimului de curgere în stratul limită de pe peretele frontal al duzei.

În Fig. 3.19 sunt prezentate curbele corespunzătoare celor două modele de curgere pentru $Re_R = 1.125 \cdot 10^5$ (viteza jetului 750 m/s și diametrul duzei 0.3 mm) împreună cu cea corespunzătoare tranziției. Se observă că prin accelerarea fluidului în duză stratul limită se menține laminar până la ieșirea din orificiu.

Grosimea stratului limită δ nu poate fi calculată direct cu ajutorul metodei lui Thwaites, dar o putem estima dacă admitem forma profilului de viteză. Spre exemplu, dacă considerăm repartiția polinomială propusă de Pohlhausen:

$$\frac{v_x}{U} = \left[2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right] + \frac{1}{6} \Lambda \left[\frac{y}{\delta} + \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

atunci:

$$\delta^* = \delta \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{120} \Lambda \right) \quad \text{și} \quad \delta^{**} = \frac{\delta}{315} \left(37 - \frac{1}{3} \Lambda - \frac{5}{144} \Lambda^2 \right)$$

Valoarea parametrului Λ o putem determina calculând în prealabil parametrul de forma al profilului de viteză, H . Acesta rezultă din funcția $H(\lambda)$ propusă de Thwaites, unde λ poate fi exprimat cu ajutorul mărimilor adimensionale precizate mai sus, astfel:

$$\lambda = (\delta^{**})^2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} Re_R$$

Pentru punctul de ieșire a jetului, unde $d\bar{U}/d\bar{x} = 4.224$, rezultă succesiv $\lambda = 0.088$, $H = 2.322$ și $\Lambda = 6.471$. Cu acestea, grosimea stratului limită în dreptul

buzei orificiului este $\delta = 9.434 \delta^{**}$, adică practic cu un ordin de mărime mai mare decât grosimea pierderilor de impuls.

Influența regimului de curgere în duză este luată în considerare prin intermediul numărului Reynolds, conform expresiei obținută anterior pentru δ^{**} , și obținem $\delta/R_0 = 1.358/\sqrt{Re_R}$. Revenind la diametrul orificiului ca lungime caracteristică, pentru care numărul Reynolds l-am notat simplu Re , grosimea stratului limită la ieșirea jetului din orificiu este:

$$\delta = \frac{0.96}{\sqrt{Re}} \times \text{diametrul orificiului} \quad (3.146)$$

Spre exemplu, pentru cazul considerat mai sus, cu $Re_R = 1.125 \cdot 10^5$ respectiv $Re = 2.25 \cdot 10^5$, rezultă grosimea stratului limită la ieșirea din orificiu $\delta = 0.6 \mu m$, deci rugozitatea pastilei de safir în vecinătatea orificiului trebuie să fie mai mică de $0.05 \mu m$ pentru a nu influența curgerea în stratul limită.

Odată determinată distribuția grosimii pierderilor de impuls, tensiunea tangențială la perete, τ_p se poate calcula utilizând cele două moduri de exprimare a coeficientului de frecare c_f :

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho U^2} = \frac{1}{Re_R} \frac{l(\lambda)}{U \delta^{**}}$$

Cu aceasta se poate evalua puterea disipată prin frecare vâscoasă pe peretele frontal al duzei:

$$\mathcal{P} = \int_{R_0}^{R_S} \tau_p U 2\pi r dr$$

unde R_S este raza punctului de stagnare, respectiv $\bar{R}_S = R_S/R_0$. Introducând variabilele adimensionale, obținem:

$$\mathcal{P} = \left(\pi R_0^2 v_{jet} \right) \frac{\rho v_{jet}^2}{2} \frac{4}{Re_R} \int_0^{\bar{R}_S-1} \frac{\bar{U}^2}{\delta^{**}} l(\lambda) (\bar{R}_S - \bar{x}) d\bar{x}$$

unde expresia din prima paranteză este debitul volumic raportat la coeficientul de contracție, Q/C_c . Pe de altă parte, dacă exprimăm puterea disipată sub forma:

$$\mathcal{P} = \zeta \frac{\rho v_{jet}^2}{2} Q$$

putem identifica pentru coeficientul de pierdere hidraulică locală ζ expresia:

$$\zeta = \frac{4}{Re_R C_c} \int_0^{\bar{R}_S-1} \frac{\bar{U}^2}{\delta^{**}} l(\lambda) (\bar{R}_S - \bar{x}) d\bar{x}$$

Calculând integrala din membrul drept se obține aceeași valoare numerică pentru curgerea potențială, respectiv rotațională. Cu numărul Reynolds calculat cu diametrul orificiului, coeficientul de pierdere hidraulică prin frecarea pe peretele frontal al duzei cilindrice poate fi exprimat sub forma:

$$\zeta = \frac{546.8}{Re} \quad (3.147)$$

Valoarea numerică obținută pentru $Re = 2.25 \cdot 10^5$ este $\zeta = 0.00243$. Se observă că datorită traseului scurt de accelerare a particulelor de fluid, respectiv o porțiune redusă pe care curentul cu viteză ridicată vine în contact cu peretele solid, disipațiile prin frecare vâscoasă au o pondere foarte mică. Bineînțeles, la acestea se adaugă disipațiile din interiorul curentului, datorate gradientilor de viteză, dar evaluarea acestora necesită utilizarea unui model de curgere vâscoasă.

3.8 Concluzii privind hidrodinamica duzei

Deși duza cilindrică are o geometrie simplă, studiul câmpului hidrodinamic necesită utilizarea metodelor numerice deoarece este necesară determinarea frontierei libere a jetului la ieșirea din orificiu. Soluții analitice pentru astfel de probleme sunt cunoscute pentru curgerile plane, dar nu au fost găsite pentru curgeri axial-simetrice. Pentru exprimarea vitezei am utilizat atât formularea în potențialul vitezei cât și în funcția de curent. Pentru rezolvarea problemelor cu condiții la limită am utilizat formulările variaționale corespunzătoare, soluționarea numerică fiind făcută cu Metoda Elementului Finit. Menționăm că introducerea termenului corespunzător vorticității în funcționala funcției de curent reprezintă o contribuție originală a autorului. Deasemenea, programele utilizate sunt de concepție proprie. Algoritmii de determinare a suprafeței libere a jetului pentru formularea în potențialul vitezei este o variantă îmbunătățită a celui descris de Chan și Larock, dar varianta pentru funcția de curent este originală, dovedind multiple avantaje din punct de vedere numeric.

Rezultatele numerice obținute au permis evaluarea coeficientului de contracție a jetului, la diferite rapoarte între diametrul orificiului și diametrul conductei. Deasemenea, în cazul curgerilor rotaționale se evidențiază o zonă de recirculare la joncțiunea dintre peretele frontal al duzei și canalul cilindric. Pentru un raport diametru orificiu / diametru conductă de 1/10, se observă că zona de recirculare nu influențează contracția jetului, coeficientul de contracție fiind practic același atât pentru curgerea irotatională cât și pentru cea rotațională. Comparația cu valori experimentale pentru coeficientul de debit al duzelor de tăiere arată că valoarea coeficientului de debit calculată teoretic reprezintă o valoare asimptotică pentru numere Reynolds foarte mari.

Studiul dezvoltării stratului limită pe peretele frontal al duzei arată că stratul limită se menține laminar până la ieșirea din orificiu, grosimea lui nedepășind $1 \mu m$. De aici rezultă necesitatea șlefuirii fine a pastilei de safir pentru a nu perturba curgerea. Calculul coeficientului de pierdere hidraulică luând în considerare numai frecarea cu peretele solid oferă valori de ordinul a 10^{-3} , dar evident o estimare mai realistă necesită includerea efectelor frecării vâscoase în interiorul fluidului.

Capitolul 4

Hidrodinamica jetului de lichid în gaz

4.1 Stabilitatea jeturilor de lichid

La sfârșitul secolului trecut, Rayleigh a studiat dezintegrarea jeturilor de lichid nevâscos în vid, sub efectul perturbațiilor axial simetrice. Concluzia principală a fost că lungimea de undă a perturbației care este cel mai rapid amplificată din cauza tensiunii superficiale este $4.44 \times \text{diametrul jetului}$, ceea ce conduce în final la formarea unor picături sferice cu raza $0.94 \times \text{diametrul jetului}$.

Weber, [59], extinde teoria lui Rayleigh luând în considerare și efectul vâscozității fluidului, ceea ce conduce la următoarea expresie pentru lungimea de undă optimă a perturbației, din punctul de vedere al dezintegrării:

$$\pi D_j \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{\frac{9\eta^2}{\sigma \rho D_j}} \right)}$$

unde D_j este diametrul jetului, iar ρ , η și σ sunt respectiv densitatea, vâscozitatea dinamică și tensiunea superficială a fluidului. De remarcat că dacă $\eta = 0$ se obține valoarea prezisă de Rayleigh ($\pi\sqrt{2} = 4.44$).

Pe de altă parte, Weber a studiat și influența aerului asupra dezvoltării perturbațiilor axial-simetrice ale jetului. Exemplul numeric din [59] prezentat pentru un jet de apă în aer (în ipoteza fluidului nevâscos), evidențiază următoarea concluzie: dacă viteza jetului crește, lungimea de undă optimă a perturbației scade, concomitent cu creșterea coeficientului de amplificare. Cu alte cuvinte, jetul de lichid în aer se va dezintegra mai repede și în picături mai mici, pe măsură ce viteza lui crește. Astfel, pentru jetul de apă evoluând în aer cu viteza de 15 m/s , lungimea de undă optimă este de $2.85 \times \text{diametrul jetului}$, iar coeficientul de amplificare este de 1.75 ori mai mare decât pentru jetul în vid.

Din relația de mai sus rezultă că pentru studiul stabilității jeturilor de apă de mare viteză poate fi utilizat un model matematic construit în ipoteza fluidului

nevâscos. În plus, trebuie luată în considerare compresibilitatea fluidelor, datorită vitezelor ridicate de curgere.

4.1.1 Ecuația stabilității jetului

În cele ce urmează vom considera un jet de lichid nevâscos și compresibil, evacuat dintr-o duză cilindrică circulară, cu raza a , într-un mediu gazos, nevâscos compresibil și nemărginit (Fig. 4.1).

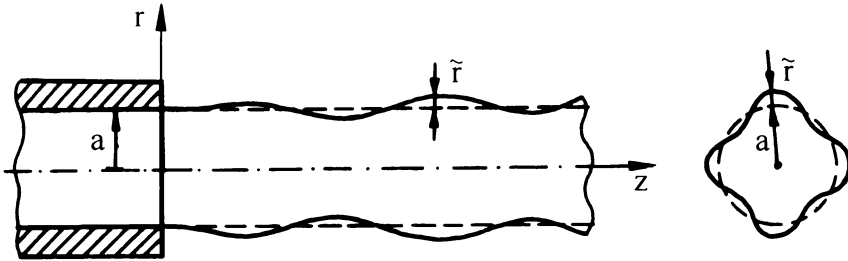


Figura 4.1: Jetul perturbat.

Luarea în considerare a compresibilității, atât pentru lichid cât și pentru gaz se justifică prin faptul că jeturile de tăiere ating viteze până la 900 m/s.

Lichidul are densitatea ρ_1 și tensiunea superficială σ , iar gazul are densitatea ρ_2 .

În general, presiunea p este funcție de densitatea ρ și temperatura T . Temperatura intervine în expresia presiunii prin intermediul entropiei specifice s , adică avem $p[\rho, s(\rho, T)]$. În ipoteza unui proces izentropic, micile variații ale presiunii sunt legate de variațiile corespunzătoare de densitate conform relației:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = c^2 \quad (4.1)$$

unde c este viteza sunetului în fluid (viteza de propagare a micilor perturbații). Expresia vitezei sunetului depinde de forma ecuației de stare și de proprietățile fluidului. Conform ecuației energiei avem:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = p \rho^{-2} \frac{d\rho}{dt} \quad (4.2)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(\epsilon + p/\rho)}{dt} = \rho^{-1} \frac{dp}{dt} \quad (4.3)$$

unde ϵ este energia internă specifică, h entalpia specifică, iar d/dt este derivata substanțială. Din (4.2) și (4.3) obținem pentru un proces izentropic de propagare

a sunetului:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial h / \partial T}{\partial c_v / \partial T}\right)_s \quad (4.4)$$

În cazul mediului ambiant gazos, pentru care vom utiliza în continuare indicele (2), avem $p_2 = \mathcal{R}\rho_2 T_2$, $\partial h_2 / \partial T_2 = c_p$, $\partial c_v / \partial T_2 = c_v$, și prin urmare

$$c_2 = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_2} \quad (4.5)$$

unde \mathcal{R} este constanta gazului iar $\gamma = c_p / c_v$.

În cazul lichidului din jet, $p_1[(\partial h_1 / \partial T_1) / (\partial c_v / \partial T_1)] = E$ este modulul de elasticitate, iar viteza sunetului se scrie sub forma:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_1}} \quad (4.6)$$

Ecuatiile care guvernează curgerea fluidului compresibil nevâscos sunt:

- ecuația de continuitate

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (4.7)$$

- ecuația de mișcare

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.8)$$

Jetul iese din duză cu viteza U , și în ipoteza că celelalte componente ale vitezei sunt mici în raport cu U , operatorul de derivare substanțială poate fi pus sub forma:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.9)$$

Dacă jetul este neperturbat, soluția banală a sistemului (4.7), (4.8) este:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{k}U, & \rho_1 &= \text{const.}, & \bar{p}_1 &= \text{const.}, & (0 \leq r \leq a) \\ \vec{v}_2 &= 0, & \bar{\rho}_2 &= \text{const.}, & \bar{p}_2 &= \bar{p}_1 - \frac{\sigma}{a}, & (a \leq r \leq \infty) \end{aligned}$$

Pentru a studia stabilitatea mișcării, suprapunem peste această soluție o perturbație mică, adică vom pune:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_1 + \vec{\tilde{v}}_1 & \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{\tilde{v}}_2 \\ p_1 &= \bar{p}_1 + \tilde{p}_1 & p_2 &= \bar{p}_2 + \tilde{p}_2 \\ \rho_1 &= \bar{\rho}_1 + \tilde{\rho}_1 & \rho_2 &= \bar{\rho}_2 + \tilde{\rho}_2 \end{aligned}$$

Înlocuind în (4.7) și (4.8) aceste expresii, obținem pentru jet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z}\right) \tilde{\rho}_1 = -\tilde{\rho}_1 \nabla \cdot \vec{\tilde{v}}_1 \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z}\right) \vec{\tilde{v}}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \nabla \tilde{p}_1 \quad (4.11)$$

respectiv pentru mediul ambiant:

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial t} = -\tilde{\rho}_2 \nabla \cdot \tilde{v}_2 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla \tilde{p}_2 \quad (4.13)$$

Calculând divergența fiecărui membru din ecuațiile de mișcare (4.11) și (4.13), și ținând cont de ecuațiile de continuitate (4.10) și (4.12), obținem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{p}_1 = \Delta \tilde{p}_1 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial t^2} = \Delta \tilde{p}_2 \quad (4.15)$$

Perturbațiile presiunii sunt legate de variațiile corespunzătoare ale densității conform (4.1), deci avem $\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$, și cu aceasta ecuațiile (4.14) și (4.15) devin:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{p}_1 = c_1^2 \Delta \tilde{p}_1 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \tilde{p}_2 \quad (4.17)$$

Perturbația jetului se traduce, din punct de vedere cinematic, la mici abateri, \tilde{r} ale forme suprafeței libere față de forma cilindrică cu raza a , deci raza interfeței lichid-gaz va fi $r = a + \tilde{r}$. **Studiul stabilității jetului constă în stabilirea comportării spațio-temporală a acestor perturbații.** În general, forma suprafeței perturbate este oarecare, dar prin descompunere în serie Fourier putem considera pe \tilde{r} ca fiind suma ponderată a unor oscilații armonice. Ținând cont de această observație, în cele ce urmează vom considera perturbația presiunii, \tilde{p} , respectiv a suprafeței jetului, \tilde{r} , sub următoarea formă adimensională:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1 t'^2 P_1(\eta) \\ \tilde{\rho}_1 t'^2 P_2(\eta) \\ a\varepsilon \end{bmatrix} \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \quad (4.18)$$

unde:

P_1, P_2 - perturbația presiunii adimensionale în lichid și gaz;

ε - perturbația radială adimensională a suprafeței jetului;

$\eta = r/a$ - raza adimensională;

$\zeta = z/a$ - coordonata axială adimensională;

θ - coordonata unghiulară, într-un plan normal la Oz ;

$\tau = tU'/a$ - timpul adimensional;

(k, n) - vectorul numărului de undă, adimensional;

ω - frecvența adimensională a undei.

Referitor la numărul de undă, respectiv frecvența ei, cu care se descrie comportarea spațio-temporală a perturbației armonice, trebuie făcute următoarele precizări:

n - este un număr întreg, care caracterizează forma suprafeței jetului într-un plan perpendicular pe axa Oz :

$k = k_r + ik_i$ - este numărul de undă complex adimensional, care caracterizează forma suprafeței jetului în planul zOr , unde:

$k_r = \frac{2\pi a}{\text{lungimea de unda}}$ - numărul de undă adimensional;

k_i - viteza de creștere spațială a perturbației;

$\omega = \omega_r + i\omega_i$ - este frecvența complexă adimensională, cu:

$\omega_r = f \cdot a / U$ - frecvența adimensională, iar f frecvența [Hz];

ω_i - viteza de creștere temporală a perturbației.

Operatorul lui Laplace are în coordonate cilindrice expresia:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\eta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Înlocuind expresia considerată pentru \tilde{p}_1 în (4.16), avem pentru membrul stâng:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{p}_1 = \\ &= \frac{l'^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \left\{ \bar{\rho}_1 U'^2 P_1(\eta) \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \right\} = \\ &= \frac{l'^2}{a^2} \rho_1 U'^2 P_1(\eta) \cdot (-\omega^2 + 2k\omega - k^2) \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

respectiv pentru membrul drept:

$$\begin{aligned} c_1^2 \Delta \tilde{p}_1 &= c_1^2 \frac{\rho_1 l'^2}{a^2} \left[\frac{d^2 P_1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dP_1}{d\eta} + \frac{1}{\eta^2} P_1 \cdot (-n^2) + P_1 \cdot (-k^2) \right] \cdot \\ &\exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Egalând cei doi membri obținem:

$$-P_1(\eta) \frac{l'^2}{c_1^2} (k - \omega)^2 = \frac{d^2 P_1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dP_1}{d\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} P_1 - k^2 P_1$$

sau

$$\left\{ \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} - [n^2 \eta^{-2} + k^2 - M_1^2 (k - \omega)^2] \right\} P_1(\eta) = 0 \quad (4.22)$$

unde $M_1 = U/c_1$ este numărul Mach pentru jet.

Analog obținem din (4.17):

$$\left\{ \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} - [n^2 \eta^{-2} + k^2 - M_2^2 \omega^2] \right\} P_2(\eta) = 0 \quad (4.23)$$

unde $M_2 = U/c_2$ este numărul Mach pentru mediul ambiant gazos.

Cu notațiile:

$$\lambda_1 = [k^2 - M_1^2(k - \omega)^2]^{1/2} \quad (4.24)$$

$$\lambda_2 = [k^2 - M_2^2 \omega^2]^{1/2} \quad (4.25)$$

ecuațiile diferențiale pentru P_1 și P_2 pot fi scrise sub forma:

$$\eta^2 \frac{d^2 P_1(\eta)}{d\eta^2} + \eta \frac{dP_1(\eta)}{d\eta} - (n^2 + \lambda_1^2 \eta^2) P_1(\eta) = 0 \quad (4.26)$$

$$\eta^2 \frac{d^2 P_2(\eta)}{d\eta^2} + \eta \frac{dP_2(\eta)}{d\eta} - (n^2 + \lambda_2^2 \eta^2) P_2(\eta) = 0 \quad (4.27)$$

Ecuațiile (4.26) și (4.27) sunt ecuații Bessel modificate [48], soluțiile lor fiind exprimate cu funcțiile Bessel modificate de prima speță, I_n , respectiv de speța a doua, K_n . Deoarece P_1 și P_2 sunt funcții liniar independente, soluțiile ecuațiilor (4.26) și (4.27) pot fi scrise sub forma:

$$P_1(\eta) = A I_n(\lambda_1 \eta) \quad (4.28)$$

$$P_2(\eta) = B K_n(\lambda_2 \eta) \quad (4.29)$$

Pentru determinarea constantelor A și B , vom utiliza proiecțiile ecuațiilor de mișcare (4.11) și (4.13) pe direcția radială, ținând cont că $\tilde{v}_r = d\tilde{r}/dt$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{r} = -\frac{1}{\bar{\rho}_1} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial r} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\bar{\rho}_2} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial r} \quad (4.31)$$

Ținând cont de (4.18) și (4.28), ecuația (4.30) devine:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 \{ \varepsilon \cdot \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \} = \\ & - \frac{d}{d\eta} [A I_n(\lambda_1 \eta)] \cdot \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \end{aligned}$$

de unde rezultă pentru $\eta = 1$:¹

$$A = \frac{(k - \omega)^2 \varepsilon}{\lambda_1 I'_n(\lambda_1)} \quad (4.32)$$

¹Pentru \tilde{r} mic, adică $\varepsilon = \tilde{r}/a \ll 1$, frontiera jetului este practic $\eta \approx 1$.

Analog, obținem pentru (4.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \{ \varepsilon \cdot \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \} = \\ - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d}{d\eta} [B K_n(\lambda_2 \eta)] \cdot \exp[i(k\zeta + n\theta - \omega\tau)] \end{aligned}$$

de unde pentru $\eta = 1$ avem:

$$B = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\omega^2 \varepsilon}{\lambda_2 K'_n(\lambda_2)} \quad (4.33)$$

În final, cu notația $D = \bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$, obținem pentru P_1 și P_2 expresiile:

$$P_1(\eta) = \frac{(k - \omega)^2 \varepsilon}{\lambda_1 I'_n(\lambda_1)} I_n(\lambda_1 \eta) \quad (4.34)$$

$$P_2(\eta) = \frac{D \omega^2 \varepsilon}{\lambda_2 K'_n(\lambda_2)} K_n(\lambda_2 \eta) \quad (4.35)$$

Legătura între P_1 și P_2 , pe frontiera jetului, se obține scriind echilibrul presiunilor ținând cont de tensiunea superficială. Conform formulei lui Laplace, [26], avem:

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.36)$$

unde R_1 și R_2 sunt razele principale de curbura.

Curbura în secțiunea transversală a jetului este [21]:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.37)$$

Deoarece $r = a + \hat{r}$, vom avea $\partial r / \partial \theta = \partial \hat{r} / \partial \theta$. În ipoteza că $\partial \hat{r} / \partial \theta$ este suficient de mic, vom neglija $(\partial \hat{r} / \partial \theta)^2$ în raport cu ceilalți termeni. Deasemenea, în ipoteza micilor perturbații, putem scrie:

$$r^2 = (a + \hat{r})^2 = a^2 + 2a\hat{r} + \hat{r}^2 \approx a^2 + 2a\hat{r}$$

respectiv la numitor:

$$r^3 = (a + \hat{r})^3 \approx a^3 + 3a^2\hat{r}$$

Cu acestea, relația (4.37) devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &\approx \frac{a^2 + 2a\hat{r} - (a + \hat{r}) \frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \theta^2}}{a^3 + 3a^2\hat{r}} = \frac{1}{a} - \frac{\hat{r}}{a^2 \left(1 + \frac{3\hat{r}}{a} \right)} - \frac{1}{a^2} \frac{a + \hat{r}}{a + 3\hat{r}} \frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \theta^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{a} - \frac{\hat{r}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Se observă că avem o curbură pozitivă dacă centrul de curbură este în interiorul jetului (în particular, dacă $\tilde{r} = 0$ avem $1/R_1 = 1/a > 0$).

În semiplanul meridian zOr , curbura frontierei jetului este [21]:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\left| \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.39)$$

Neglijăm și în acest caz termenii de ordin superior, $(\partial r / \partial z)^2 \ll 1$, iar pentru modulul de la numărător, cu convenția că raza de curbură este pozitivă când centrul de curbură este în interiorul jetului, avem:

$$\left| \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right| = -\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

Cu acestea, echilibrul presiunilor se scrie:

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{a} - \frac{\tilde{r}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial z^2} \right) \quad (4.40)$$

respectiv ținând cont că $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \sigma/a$, obținem următoarea relație de legătură între perturbațiile presiunii și perturbația suprafeței jetului:

$$\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 = -\sigma \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{r} \quad (4.41)$$

Utilizând expresiile perturbațiilor, (4.18), și înlocuind pe z cu ζ , obținem:

$$P_1 - P_2 = -\frac{\sigma}{\bar{\rho}_1 U^2 a} (1 - n^2 - k^2) \varepsilon \quad (4.42)$$

unde P_1 și P_2 sunt $P_1(1)$ și $P_2(1)$, relația de mai sus fiind valabilă pe frontiera jetului, deci pentru $\eta = 1$. Dacă notăm

$$We = \frac{\sigma}{\bar{\rho}_1 U^2 a} \quad (4.43)$$

numărul Weber asociat jetului, și înlocuim expresiile pentru P_1 și P_2 din (4.34) și (4.35), obținem următoarea ecuație:

$$\frac{(k - \omega)^2}{\lambda_1} \frac{I_n(\lambda_1)}{I'_n(\lambda_1)} - \frac{D \omega^2}{\lambda_2} \frac{K_n(\lambda_2)}{K'_n(\lambda_2)} + We(1 - n^2 - k^2) = 0 \quad (4.44)$$

Aceasta este ecuația utilizată de Z.W. Zhou și S.P. Lin, [62], pentru studiul stabilității jetului de lichid în gaz, luînd în considerare efectele compresibilității și tensiunii superficiale. Pentru un set de parametri M_1 , M_2 , D , We , ecuația

(4.44) stabilește legătura între numărul de undă adimensional, k , și frecvența complexă adimensională, ω .

O ecuație similară este obținută de H.S. Li și R.E. Kelly, [27], cu deosebirea că în acest caz se utilizează funcțiile Bessel de prima speță, J , și funcțiile Bessel de speța a treia (sau funcțiile lui Hankel), H .

Un număr important de lucrări tratează problema stabilității jetului, utilizând ecuații de stabilitate de tipul (4.44). Dintre acestea, menționăm pe cele ale Prof. S.P. Lin (Clarkson University, U.S.A.) [62],[28],[29],[30].

4.1.2 Soluționarea numerică a ecuației stabilității jetului

Studiul numeric al ecuației (4.44) evidențiază faptul că perturbațiile axial-simetrice sunt cel mai puternic amplificate, în comparație cu celelalte tipuri de perturbații [62]. Rezultă că este suficient să soluționăm ecuația (4.44) pentru $n = 0$. În acest caz avem $I'_0 = I_1$ și $K'_0 = -K_1$, [48].

Cu acestea, ecuația stabilității jetului devine:

$$\frac{(k - \omega)^2}{\lambda_1} \frac{I_0(\lambda_1)}{I_1(\lambda_1)} + \frac{D\omega^2}{\lambda_2} \frac{K_0(\lambda_2)}{K_1(\lambda_2)} + We(1 - k^2) = 0 \quad (4.45)$$

În vederea soluționării numerice, vom pune ecuația sub forma:

$$k - \omega = \pm \sqrt{E(k, \omega, We, D, M_1, M_2)} \quad (4.46)$$

unde expresia de sub radical este:

$$E = -\lambda_1 \frac{I_1(\lambda_1)}{I_0(\lambda_1)} \left[\frac{D\omega^2}{\lambda_2} \frac{K_0(\lambda_2)}{K_1(\lambda_2)} + We(1 - k^2) \right] \quad (4.47)$$

k și ω sunt numere complexe, deci (4.46) poate fi privită ca un sistem de două ecuații algebrice obținute prin egalarea părților reale respectiv imaginare ale celor doi membri, cu patru necunoscute: k_r , k_i , ω_r , ω_i .

Instabilitatea jetului poate fi convectivă sau absolută, corespunzător creșterii spațiale sau temporale a perturbațiilor. În [29] se arată că pentru $We < 0.322$ instabilitatea este convectivă, acesta fiind și cazul jeturilor de mare viteză. În acest caz perturbațiile vor fi amplificate spațial, adică la o valoare a abscisei z amplitudinea este constantă în timp, dar pe măsură ce ne deplasăm în sensul pozitiv al axei Oz amplitudinea crește. Rezultă că trebuie să studiem perturbațiile cu amplificarea temporală nulă, adică cu $\omega_i = 0$. Dacă considerăm pe k_i ca și parametru, adică impunem lungimea de undă a perturbației, din (4.46) putem găsi celelalte două necunoscute:

$$k_i = \pm \Im \sqrt{E} \quad (4.48)$$

$$\omega_r = k_r \mp \Re \sqrt{E} \quad (4.49)$$

Rezolvarea sistemului (4.48),(4.49) se face iterativ, cu programul prezentat în anexa A.4. Procedurile de calcul ale funcțiilor Bessel utilizează dezvoltările acestora în serie, [48], conform relațiilor:

$$I_0(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (4.50)$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right] \quad (4.51)$$

$$K_0(z) = -I_0(z) \ln \frac{z}{2} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k+1) \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (4.52)$$

$$K_1(z) = I_1(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left[\gamma - 0.5 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \frac{1}{2(k+1)}}{(k!)^2(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right] \quad (4.53)$$

În (4.52) și (4.53) intervin constanta lui Euler, $\gamma = 0.57721566490$ și derivata logaritmică a funcției gamma al cărui calcul efectiv se face tot prin dezvoltare în serie:

$$\psi(1) = -\gamma \quad (4.54)$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (4.55)$$

Pentru calculul numeric, seriile au fost trunchiate la 30 de termeni.

4.1.3 Rezultate numerice

Lichidul din jet este apa, cu următoarele proprietăți fizice: $\bar{\rho}_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 72.7 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$.

În expresia numărului We , (4.43), intervin raza jetului, a , și viteza lui, U , mărimi care sunt dificil de măsurat direct. De aceea este preferabil să le înlocuim cu puterea jetului, P_j , respectiv presiunea apei în amonte de duză, p_d . În ipoteza unui coeficient de viteză practic unitar, avem:

$$\frac{1}{2} \bar{\rho}_1 U^2 = p_d$$

Puterea jetului este produsul dintre debit și căderea de presiune, adică:

$$P_j = \pi a^2 U p_d$$

respectiv din cele două relații de mai sus rezultă, în cazul apei:

$$\bar{\rho}_1 U^2 a = 5.336 P_j^{0.5} p_d^{0.25}$$

și

$$We = 0.0136 P_j^{-0.5} p_d^{-0.25}$$

Pentru un jet cu $P_j = 20 \text{ kW}$ și $p_d = 2000 \dots 4000 \text{ bar}$, obținem:

$$We = 6.8 \cdot 10^{-7} \dots 8.1 \cdot 10^{-7}$$

Pentru studiul numeric vom considera o valoare medie, corespunzătoare presiunii $p_d = 3000 \text{ bar}$, și anume $We = 7.3 \cdot 10^{-7}$.

Pentru densitatea aerului de 1.3 kg/m^3 , vom avea $D = 0.0013$.

Viteza sunetului în apă la 20°C este, conform (4.6), $c_1 = 1478 \text{ m/s}$, iar viteza sunetului în aer la aceeași temperatură este, conform (4.5), $c_2 = 343 \text{ m/s}$. Ținând cont că pentru $p_d = 3000 \text{ bar}$ viteza jetului este $U = 775 \text{ m/s}$, obținem următoarele valori pentru numerele Mach: $M_1 = 0.52$, $M_2 = 2.26$.

Jetul de lichid în vid

Cel mai simplu caz al problemei stabilității jetului cilindric corespunde jetului de lichid nevâscos, incompresibil ($M_1 = 0$), evacuat în vid ($D=0$). În acest caz ecuația (4.45) devine:

$$(k - \omega)^2 = We k (k^2 - 1) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \quad (4.56)$$

Soluția aproximativă a ecuației (4.56) este:

$$k_i = \pm \sqrt{\frac{1}{2} We k_r^2 (1 - k_r^2)} \quad (4.57)$$

Se observă că în planul (k_r, k_i) se obțin două curbe simetrice față de abscisă. Prin urmare soluția reprezintă suprapunerea a două perturbații amplificate cu $e^{-k_i z/a}$. Evident, perturbația corespunzătoare valorilor pozitive pentru k_i dispăre odată cu îndepărtarea de duză deci ne interesează numai curba din semiplanul $k_i < 0$.

În Fig. 4.2 se prezintă curbele obținute cu ecuația exactă (4.56) și cu ecuația aproximativă (4.57).

Lungimea de undă optimă corespunde lui $k_{r \text{ opt}} = 1/\sqrt{2}$ și este:

$$\frac{2\pi a}{k_{r \text{ opt}}} = 4.44 \times \text{diametrul jetului}$$

Picăturile ce ar rezulta din ruperea jetului ar avea raza $0.94 \times \text{diametrul jetului}$, ceea ce nu corespunde cu observațiile experimentale care evidențiază un nor de picături fine în jurul jeturilor de mare viteză. Valoarea minimă pentru k_i este $-2.933 \cdot 10^{-4}$ pentru soluția exactă respectiv $-3.021 \cdot 10^{-4}$ pentru soluția aproximativă.

Compresibilitatea apei nu influențează rezultatele.

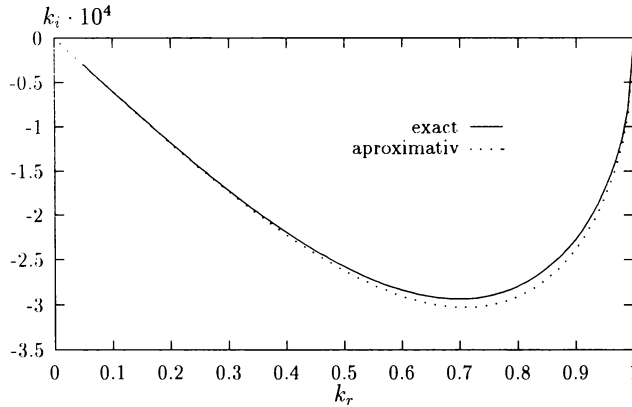


Figura 4.2: Amplificarea spațială a perturbației, k_i , funcție de numărul de undă adimensional, k_r , pentru jetul de lichid în vid ($W\epsilon = 7.3 \cdot 10^{-7}$).

Jetul de lichid în aer

Luarea în considerare a influenței aerului în care evoluează jetul permite explicarea procesului de pulverizare [30].

În Fig. 4.3 sunt prezentate curbele $k_i \leftrightarrow k_r$ pentru $W\epsilon = 7.3 \cdot 10^{-7}$, $M_1 = 0.52$, $M_2 = 2.28$ și $D = 0.0013, 0.001$ și 0.0005 . Se observă că odată cu creșterea densității gazului cresc atât $k_{r \text{ opt}}$ cât și $k_{i \text{ min}}$. Aceasta înseamnă că în mediu gazos mai dens lungimea de undă optimă a perturbației scade, rezultând picături mai mici, respectiv are loc o amplificare puternică a perturbației deci o pulverizare rapidă a jetului. Astfel, pentru cele trei cazuri precizate mai sus, avem:

$$D = 0.0013: k_{r \text{ opt}} = 82.5, k_{i \text{ min}} = -1.04325$$

$$D = 0.001: k_{r \text{ opt}} = 72.5, k_{i \text{ min}} = -0.80434$$

$$D = 0.0005: k_{r \text{ opt}} = 51.0, k_{i \text{ min}} = -0.40659$$

Comparativ cu lungimea de undă optimă corespunzătoare jetului în vid, pentru jetul de apă în aer cu densitatea normală, ($D = 0.0013$) obținem:

$$\frac{2\pi a}{k_{r \text{ opt}}} = 0.038 \times \text{diametrul jetului}$$

adică o lungime de undă de aproximativ 100 de ori mai mică.

Corespunzător, raza picăturilor rezultate este:

$$R_p = \left(\frac{3\pi}{16} \frac{1}{k_{r \text{ opt}}} \right)^{1/3} (2a) = 0.19 \times \text{diametrul jetului}$$

adică de 5 ori mai mică decât pentru jetul în vid.

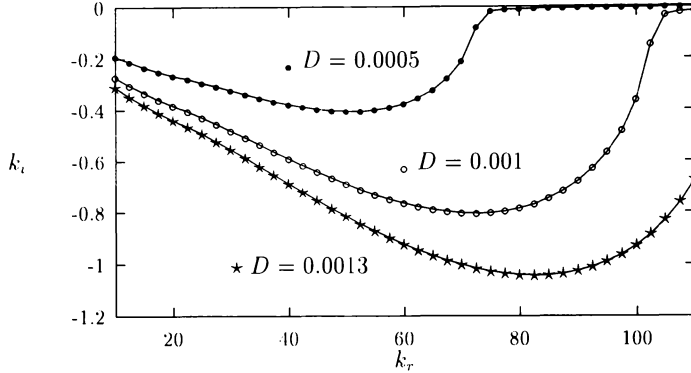


Figura 4.3: Amplificarea spațială a perturbației, k_i , funcție de numărul de undă adimensional, k_r , pentru jetul de lichid în aer.

În ceea ce privește amplificarea perturbațiilor, se pot extrapola într-o primă aproximație rezultatele obținute cu modelul de mai sus până în faza ruperii jetului, deși ecuația stabilității a fost scrisă în ipoteza perturbațiilor mici în raport cu raza a (justificarea dată de Weber este că porțiunea de jet în care perturbațiile devin mari este foarte scurtă). Principala problemă o constituie estimarea ordinului de mărime al perturbației în vecinătatea duzei. Pentru jeturi de apă cu viteză mică (câțiva metri pe secundă) Weber, [59], pe baza datelor experimentale ale lui Haenlein [19], estimează amplitudinea inițială a perturbației la (vezi notațiile din ec.(4.18)):

$$\ln \frac{a}{\tilde{r}} = \ln \frac{1}{\varepsilon} = 12$$

ceea ce înseamnă o perturbație adimensională $\varepsilon = e^{-12}$. La asemenea ordine de mărime este practic imposibil să se facă măsurători directe, estimarea fiind făcută pe baza lungimii de descompunere a jetului.

Această metodă este greu de aplicat la jeturile de mare viteză, pentru că implică stabilirea lungimii de descompunere pe baza fotografierii jetului. Ori în cazul jeturilor de tăiere, fotografiile evidențiază formarea unei anvelope de picături fine care se evazează odată cu depărtarea de duză [15]. În această situație, este mai potrivită tratarea jetului ca un fluid bifazic, la care densitatea medie variază într-o secțiune transversală. Practic toate studiile experimentale efectuate pentru jeturile de mare viteză, [35], [51], [55], [56], [57], [58], [60] pornesc de la această premiză.

4.2 Studii experimentale asupra structurii jeturilor de lichid de mare viteză

Dificultățile teoretice legate de descrierea evoluției jeturilor de lichid de mare viteză în aer au condus la concentrarea eforturilor în direcția studiului experimental al structurii jetului, respectiv la determinarea unor relații empirice bazate pe datele obținute.

Printre primele studii sistematice ale jeturilor de apă subsonice și supersonice în aer se numără cele efectuate în anii '50 în laboratorul de fizica presiunilor înalte al Academiei de Științe a U.R.S.S.

În [35] Semberčan ș.a. prezintă un studiu experimental asupra distribuției radiale și axiale a impulsului în jeturi supersonice de apă. Sursa de apă sub presiune a fost o pompă cu bielă-manivelă, capabilă să furnizeze un debit de 2000 . . . 2500 l/h cu presiune reglabilă până la 2000 at. Duza folosită la producerea jetului este de tip conic, cu diametrul orificiului 0.595 mm și unghiul conului de 30°, la ieșire având un tronson cilindric lung de 1.5 mm. Datorită diametrului mic al jetului, în vecinătatea duzei nu se pot face practic măsurători prin introducerea unui obstacol în jet, pe post de instrument de măsură. Totuși, la distanțe mai mari de 100 mm de duză (unde datorită dispersiei în aer diametrul jetului atinge 10 . . . 15 mm) devine posibilă investigarea structurii în secțiunea transversală.

La ieșirea jetului din duză, fluxul impulsului jetului este $\dot{m} v = \rho S v^2$, unde \dot{m} este debitul masic, $S = 0.278 \text{ mm}^2$ este aria secțiunii orificiului iar v viteza jetului. Deoarece viteza este dificil de măsurat, este comod să se introducă presiunea înaintea duzei, $p = \rho v^2/2$ și fluxul impulsului se poate scrie $\dot{m} v = 2 p S$. Relația obținută arată că acesta depinde numai de presiune și nu este influențat de densitatea lichidului.

Dacă se pune un obstacol în calea jetului, asupra acestuia se exercită o forță. Pentru anularea vitezei jetului după impactul cu obstacolul, acesta a fost realizat dintr-un recipient cu pereți perforați, umplut cu nisip, astfel încât debitul de apă captat să fie evacuat prin această structură poroasă cu viteză neglijabilă. În fața obstacolului a fost plasată o diafragmă fixă de tipul celei prezentate în Fig. 4.4.

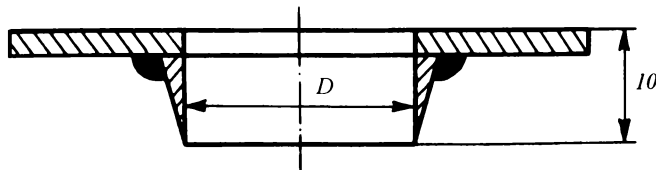


Figura 4.4: Diafragma folosită pentru studiul repartiției impulsului în jet.

S-au folosit diafragme cu diferite diametre, în intervalul $D = 10 \dots 100 \text{ mm}$.

Forța exercitată de jet asupra obstacolului a fost măsurată cu o balanță tip pendul, a cărei schemă de principiu este prezentată în Fig. 4.5. Distanța între duză și obstacol a fost variată în intervalul $l = 0.1 \dots 1 \text{ m}$.

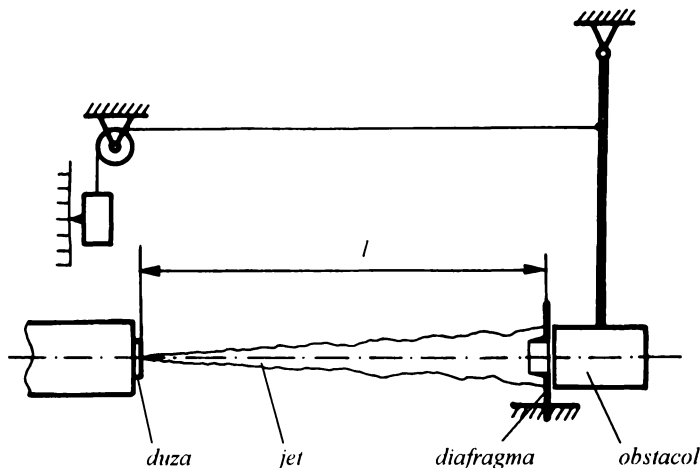


Figura 4.5: Schema de principiu a instalației de măsurare a forței cu care acționează jetul asupra unui obstacol.

La distanțe mici de duză, dacă orificiul diafragmei este suficient de mare astfel încât întreg jetul să treacă prin el, forța măsurată este practic constantă și egală cu $F = 2pS$. Dacă o parte din jet lovește diafragma înainte de a atinge obstacolul, atunci forța va fi mai mică. Utilizând măsurătorile efectuate cu diafragme de diferite diametre, se poate determina impulsul mediu pe suprafețe inclinate cu diferite raze medii. Practic, rezultatele experimentale permit stabilirea distribuției presiunii dinamice (forța exercitată de jet pe unitatea de suprafață) atât în axa jetului cât și în secțiunea transversală. În Fig. 4.6 se prezintă rezultatele obținute pentru un jet generat cu o presiune de 1500 at , la distanța de $200, 300$ și 500 mm față de duză.

Se observă că datorită creșterii secțiunii transversale a jetului, presiunea dinamică scade rapid în axă. Trebuie menționat însă că această presiune dinamică reprezintă o valoare medie în timp, rezultată practic din impactul picăturilor de apă provenite din dispersarea jetului, cu obstacolul solid. Totuși, pe durate scurte, de câteva μs după impactul unei picături, presiunea poate atinge valori cu un ordin de mărime mai mare decât presiunea de producere a jetului.

Valorile reduse ale presiunii dinamice arată că porțiunea jetului investigată în [35] este inutilizabilă pentru tăierea materialelor, dar poate fi utilă pentru operații de curățire a depunerilor de pe diverse suprafețe.

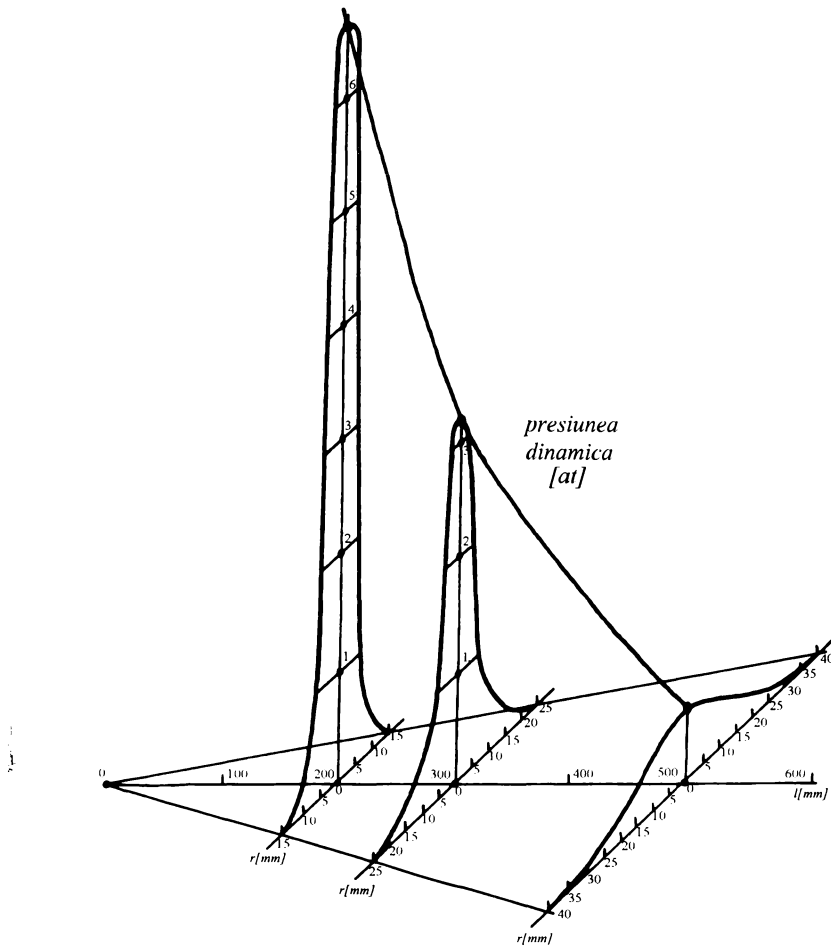


Figura 4.6: Repartiția presiunii dinamice într-un jet de apă în aer, produs cu o presiune de 1500 at, [35]

La ieșirea din duză, jetul se prezintă practic sub forma unui tronson cilindric continuu de lichid. După ce parcurge o anumită distanță în aer, jetul se transformă într-o succesiune de picături, sub influența forțelor de tensiune superficială și aerodinamice. De regulă, studiile experimentale asupra ruperii jetului în picături au fost efectuate pentru jeturi cu viteză relativ mică ($2 \dots 70 \text{ m/s}$ [19], $1 \dots 50 \text{ m/s}$ [47], $2 \dots 5 \text{ m/s}$ [18]) utilizând tehnica fotografierii jetului. De remar-

cat faptul că pentru a obține o acuratețe cât mai mare a rezultatelor s-au folosit timpi de expunere de ordinul a $10^{-6} \dots 10^{-5}$ s. În particular, în [18] s-a utilizat un timp de expunere de $1 \mu\text{s}$ chiar și la viteze mici ale jetului, pentru a pune în evidență și modul de dezvoltare al perturbațiilor. De regulă s-au luat măsuri speciale pentru a evita perturbațiile de natură hidrodinamică dinaintea duzei, iar pentru a studia efectele amplitudinii și frecvenței perturbației s-au utilizat sisteme electrice sau acustice de inducere a perturbațiilor după ieșirea jetului din duză.

Pentru jeturile de mare viteză, interacțiunea cu aerul conduce la desprinderea unor picături foarte mici de pe toată periferia jetului, formându-se o anvelopă de ceață care împiedică vizualizarea zonei centrale a jetului. În plus, dacă acceptăm pentru fotografiere un timp de expunere de ordinul a $1 \mu\text{s}$, distanța parcursă de jetul cu viteză de ordinul a 500 m/s este 0.5 mm , adică aproximativ egală cu diametrul duzei, și mult mai mare decât diametrul mediu al picăturilor de apă.

Pornind de la asemenea observații, în [58] Vereščagin ș.a. au optat pentru utilizarea unei metode experimentale bazată pe conductibilitatea electrică a porțiunii continue a jetului. Duza metalică prin care iese jetul este legată la pământ, iar în fața jetului este plasat un electrod sub forma unei plase metalice. Montajul electronic utilizat aduce electrodul la un potențial negativ, în impulsuri la fiecare 0.02 s . Dacă porțiunea de jet dintre duză și electrod este continuă, potențialul negativ de pe sita metalică scade și se generează corespunzător un impuls electric înregistrat pe un osciloscop. Dacă se vizualizează impulsurile înregistrate timp de 1 s se pun în evidență practic 50 de impulsuri, iar pe măsură ce se mărește distanța față de duză numărul de impulsuri scade. Împărțind numărul de impulsuri înregistrat pe un interval de timp la numărul maxim de impulsuri corespunzător perioadei de 0.02 s se obține o măsură a continuității jetului, parametrul corespunzător fiind notat cu Π .

În Fig. 4.7 se prezintă rezultatele obținute pentru jeturi generate cu o duză conică, cu diametrul orificiului 1 mm , unghiul conului 13° și o porțiune cilindrică la ieșire lungă de 3 mm . Presiunea maximă utilizată a fost de 1000 at .

Se observă că la o anumită distanță față de duză, dependentă de presiune, jetul își pierde relativ brusc continuitatea. Există totuși o regiune spațială în care jetul este fie discontinuu, fie continuu, corespunzător amplificării perturbațiilor aleatoare astfel încât să se întrerupă sau nu continuitatea. Faptul că jetul rămâne continuu pe o porțiune bine definită confirmă ideea că din perturbațiile aleatoare de natură hidrodinamică sunt "selectate" și amplificate doar o mică parte.

Rezultatele obținute în [58] pentru lungimea continuă a jetului l_c , produs cu duza descrisă mai sus, sunt prezentate în Fig. 4.8.

Se observă că pentru toată plaja de presiuni utilizate, jeturile obținute prezintă o primă porțiune continuă în vecinătatea duzei. Lungimea continuă a jetului, prezintă trei maxime locale, corespunzătoare presiunilor de 0.25 , 6 și 200 at (primul maxim a fost determinat prin investigarea separată a domeniului de presiuni $0 \dots 16 \text{ at}$). Valoarea maximă maximorum a lungimii continue este 178 mm

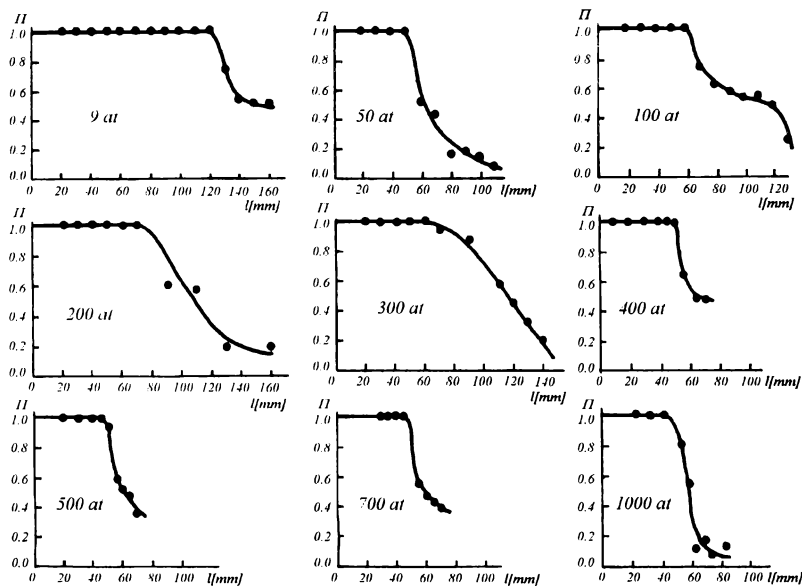


Figura 4.7: Probabilitatea ca jetul de apă în aer să fie continuu, Π , funcție de distanța până la duză l și de presiune, după [58].

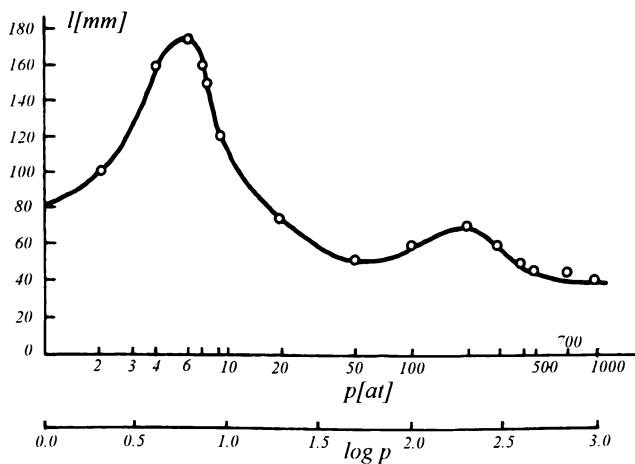


Figura 4.8: Lungimea porțiunii continue a unui jet de apă în aer, funcție de presiune, [58].

și corespunde presiunii de 6 at.

Pentru jeturile de mare viteză se poate reține faptul că lungimea porțiunii continue a unui jet cu diametrul de 1 mm este de aproximativ 40...50 mm și nu se modifică semnificativ pentru variația presiunii între 400...1000 at.

Yanaida, [60] a investigat teoretic și experimental structura jeturilor de apă de mare viteză în aer. Conform Fig. 4.9 pot fi puse în evidență trei regiuni distincte în jet:

- regiunea inițială, de lungime x_c , în care presiunea dinamică în axă rămâne constantă;
- regiunea principală, care se extinde până la distanța x_b de la duză, în care viteza în axă rămâne practic constantă (de unde și apelăția de nucleu de viteză);
- regiunea finală, în care are loc o difuzie rapidă a lichidului în aer, sub formă de picături fine.

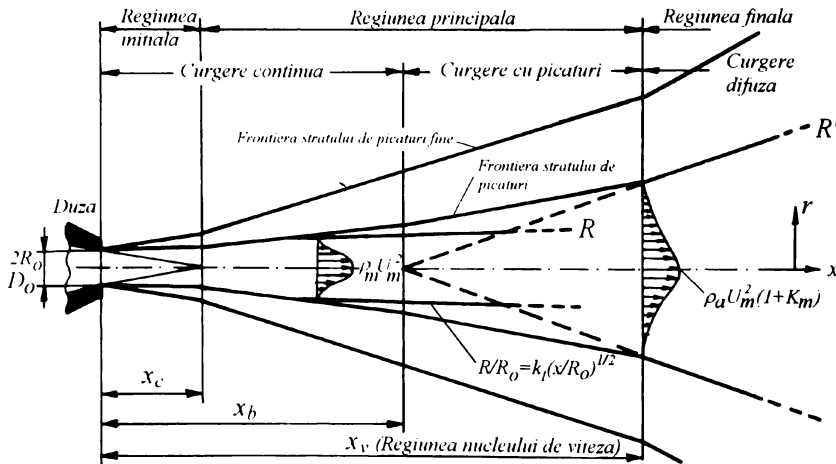


Figura 4.9: Structura jetului de apă de mare viteză în aer, după Yanaida [60], [61].

În regiunea principală se pune în evidență o lungime de rupere, x_b , care delimitează porțiunea de curgere practic continuă de cea în care curgerea are loc predominant sub formă de picături.

Pentru a descrie distribuția fluxului impulsului în jet, Yanaida consideră că jetul este un amestec bifazic, format din:

- faza continuă (înțelegând aici inclusiv curgerea cu picături concentrate, din prelungirea zonei efectiv continue);
- faza difuză, corespunzătoare amestecului practic omogen de aer și picături fine de apă.

Presupunând că fluxul impulsului printr-o secțiune transversală pe jet rămâne constant și egal cu valoarea la ieșirea din duză, J_0 , atunci putem scrie:

$$J_0 = J_c + J_d$$

unde J_c și J_d reprezintă fluxul impulsului pentru faza continuă, respectiv difuză. Pentru J_0 avem expresia:

$$J_0 = \pi R_0^2 \rho_0 U_0^2 \quad (4.58)$$

unde R_0 este raza orificiului duzei, ρ_0 și U_0 densitatea respectiv viteza lichidului la ieșirea din duză.

Fluxul impulsului în faza continuă este:

$$J_c = 2\pi \int_0^R \rho U^2 r dr$$

unde R este raza până la care se întinde faza continuă, ρ și U densitatea, respectiv viteza la raza curentă r . În continuare se acceptă că forma distribuției radiale a mărimii ρU^2 rămâne aceeași în orice secțiune transversală pe jet, și notând cu $\rho_m U_m^2$ valoarea ei în axă se poate scrie:

$$\begin{aligned} J_c &= 2\pi R^2 \rho_m U_m^2 \int_0^1 \frac{\rho U^2}{\rho_m U_m^2} \left(\frac{r}{R}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \\ &= 2\pi R^2 \rho_m U_m^2 \int_0^1 (1 - \eta^{3/2})^2 \eta d\eta = \\ &= 2\pi \cdot 0.129 R^2 \rho_m U_m^2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dacă într-o primă etapă se neglijează contribuția fazei difuze, adică considerăm practic $J_0 \approx J_c$, se poate stabili o primă relație aproximativă pentru exprimarea scăderii presiunii dinamice în axă, p_m , în raport cu valoarea corespunzătoare de la ieșirea din duză și din regiunea inițială, p_0 :

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{\rho_m U_m^2}{\rho_0 U_0^2} = \frac{1}{2 \cdot 0.129} \frac{R_0^2}{R^2} = 3.89 \frac{R_0^2}{R^2} \quad (4.60)$$

Dependența lui R de distanța axială x a fost stabilită experimental sub forma:

$$\frac{R}{R_0} = k_1 \left(\frac{x}{R_0}\right)^{1/2} \quad \text{sau} \quad \bar{R} = k_1 \bar{x}^{1/2} \quad (4.61)$$

În cele ce urmează vom nota cu bară deasupra lungimile adimensionale, obținute prin raportare la R_0 . Coeficientul empiric k_1 descrie practic evazarea zonei de curgere continuă. Din ec.(4.60) și (4.61) rezultă:

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{3.89}{k_1^2 x} \quad (4.62)$$

relație valabilă pentru $x > x_c$. Evident, conform definiției regiunii inițiale, pentru $0 < x < x_c$ avem $p_m/p_0 = 1$.

Pentru a calcula contribuția fazei difuze la fluxul impulsului, densitatea acesteia se pune sub forma $\rho_a (1 + K)$, unde ρ_a este densitatea aerului iar K este un coeficient care ia în considerare contribuția picăturilor fine de lichid. Dacă R' este raza până la care se extinde curgerea sub formă de picături, atunci:

$$J_d = 2\pi \int_0^{R'} \rho_a (1 + K) U^2 r dr$$

Procedând la fel ca mai sus, se obține succesiv:

$$\begin{aligned} J_d &= 2\pi (R')^2 \rho_a U_m'^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{U}{U_m} \right)^2 \left(\frac{r}{R'} \right) d \left(\frac{r}{R'} \right) + \right. \\ &+ \left. K_m \int_0^1 \left(\frac{U}{U_m} \right)^2 \left(\frac{K}{K_m} \right) \left(\frac{r}{R'} \right) d \left(\frac{r}{R'} \right) \right] = \\ &= 2\pi (R')^2 \rho_a U_m'^2 \left[\int_0^1 (1 - \eta^{3/2})^4 \eta d\eta + K_m \int_0^1 (1 - \eta^{3/2})^5 \eta d\eta \right] = \\ &= 2\pi \cdot 0.1656 (R')^2 \rho_a U_m'^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

La evaluarea parantezei s-a ținut cont că valorile celor două integrale sunt 0.0667 respectiv 0.0526 iar $K_m = 1.88$, valoare determinată experimental și considerată constantă în interiorul nucleului de viteză.

Deoarece $J_c = J_0 - J_d$, cu (4.58), (4.59), și (4.63) se obține:

$$\frac{\rho_m U_m'^2}{\rho_0 U_0'^2} = \frac{1}{2 \cdot 0.129} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - \frac{0.1656}{0.129} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \frac{\rho_a}{\rho_0} \left(\frac{U_m}{U_0} \right)^2$$

și ținând cont că $\rho_0/\rho_a = 816$ (apă în aer la 15° C) iar $U_m/U_0 = 1$ pentru $x < x_v$, rezultă în final:

$$\frac{\rho_m U_m'^2}{\rho_0 U_0'^2} = 3.89 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 0.00158 \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \quad (4.64)$$

Cu acestea, însumând contribuțiile celor două faze pentru zona de curgere cu picături, obținem distribuția presiunii dinamice sub forma:

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{\rho_m U_m'^2}{\rho_0 U_0'^2} + \frac{\rho_a (1 + K) U_m'^2}{\rho_0 U_0'^2}$$

respectiv ținând cont de (4.64) și de condiția $U_m/U_0 = 1$ pentru nucleul de viteză, rezultă:

$$\frac{p_m}{p_0} = 3.89 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 0.00158 \left(\frac{R'}{R} \right)^2 + 0.00352 \quad (4.65)$$

Pentru $x > x_b$ s-a determinat experimental forma frontierei stratului de picături:

$$\frac{R'}{R} = \frac{0.263 k_1 (\bar{x} - \bar{x}_b) + 7}{k_1 \bar{x}^{1/2}}$$

care înlocuită în (4.65) conduce la relația ce exprimă diminuarea presiunii dinamice în zona de curgere cu picături din regiunea principală a jetului, [61] :

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{3.89}{k_1^2 \bar{x}} - 0.00158 \left[\frac{0.263 k_1 (\bar{x} - \bar{x}_b) + 7}{k_1 \bar{x}^{1/2}} \right]^2 + 0.00352$$

pentru $x_b < x < x_v$

Analog, se poate rescrie expresia repartiției presiunii dinamice în zona de curgere continuă, [60] :

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{3.89}{k_1^2 \bar{x}} - 0.00158 \left(\frac{k_1^2 \bar{x}}{3.89} \right) + 0.00352$$

pentru $x_c < x < x_b$

Modelul propus de Yanaida pentru descrierea structurii jeturilor de apă de mare viteză în aer are avantajul că necesită determinarea unui singur parametru empiric, k_1 , care este o măsură a evazării jetului. În acest fel, studiul curgerii în jet nu mai necesită cunoașterea hidrodinamicii duzei, dar pe de altă parte k_1 poate fi folosit fie pentru a compara diverse duze la același regim de curgere, fie la evaluarea comportării unei duze la diferite regimuri de curgere. În particular, cu k_1 pot fi exprimate, conform datelor experimentale [60], toate lungimile caracteristice ale jetului:

$$\bar{x}_c = \frac{x_c}{R_0} = \frac{3.89}{k_1^2} \quad \text{vezi (4.62) pentru } p_m/p_0 = 1 \quad (4.66)$$

$$\bar{x}_b = \frac{x_b}{R_0} = 3.55 \bar{x}_c \quad (4.67)$$

$$\bar{x}_v = \frac{x_v}{R_0} = \bar{x}_b + \frac{160}{k_1} \quad (4.68)$$

Pentru a avea o imagine asupra acurateții modelului prezentat mai sus, în Fig. 4.11 și Fig. 4.12 se prezintă, sub formă adimensională, repartiția presiunii dinamice și a vitezei în axă pentru jeturile generate cu duzele din Fig. 4.i0.

Se observă că ipoteza constanței presiunii dinamice în regiunea inițială ($0 < x < x_c$) nu este riguros valabilă, teoria oferind supraevaluări cu 20...30% față

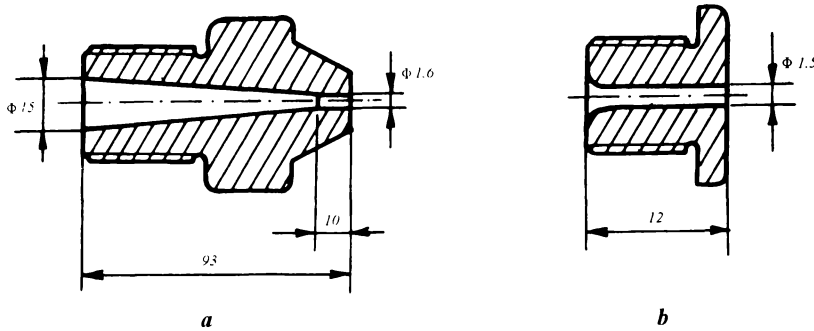


Figura 4.10: Tipuri de duze pentru generarea jeturilor de apă, [61].

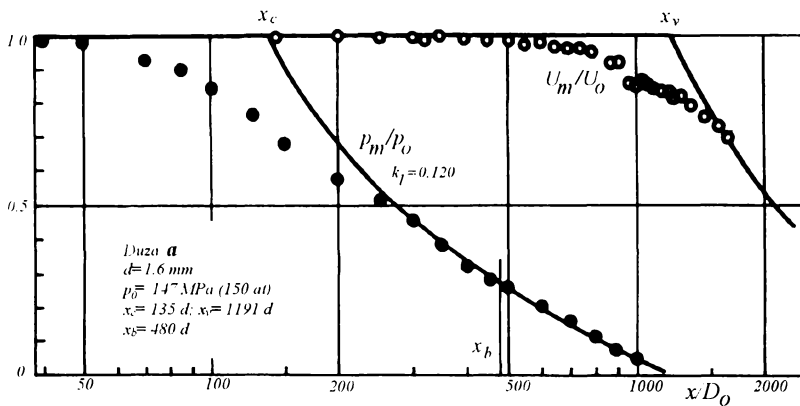


Figura 4.11: Repartiția presiunii dinamice și a vitezei în axa unui jet de apă în aer, generat cu duza din Fig. 4.10a, [61].

de valorile experimentale în vecinătatea lui $x = x_c$. În schimb, curbele teoretice concordă bine cu experimentul în interiorul regiunii principale a jetului. Se verifică deasemenia bine valoarea prezisă teoretic pentru lungimea nucleului de viteză, x_v , deși și în acest caz teoria oferă o ușoară supraevaluare.

Engemann [15] utilizează modelul propus de Yanaida pentru studiul jeturilor de apă de tăiere, produse cu duze cilindrice cu pastilă de safir (de tipul celor studiate în Cap. 5). Parametrul de evazare a jetului, k_f , a fost determinat experimental utilizând măsurători fotografice. Camera utilizată a fost *Minolta XM2*, cu obiectivul "Rokkor" 50 mm, 1:1.4. Distanța până la jet a fost de 60 cm, iar la 15 mm în spatele jetului a fost dispus un caroiaj alb pe fond negru. Pentru prelucrarea rezultatelor negativele au fost mărite, apoi măsurate, și rezul-

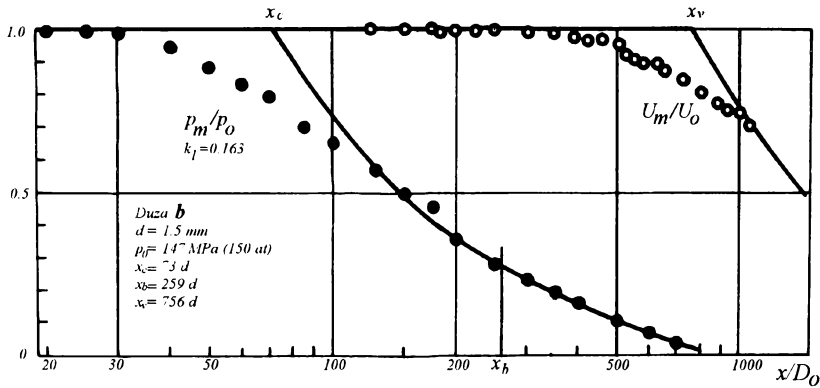


Figura 4.12: Repartiția presiunii dinamice și a vitezei în axa unui jet de apă în aer, generat cu duza din Fig. 4.10b, [61].

Tabelul 4.1: Lungimile caracteristice ale jetului de tăiere, [15].

presiunea [bar]	k_1	x_c/d	x_b/d	x_v/d	x_v [mm]	x_{vm} [mm]
$D_o = 0.12 \text{ mm}$						
1000	0.129	116	413	1033	124	115
2000	0.137	104	369	954	115	105
3000	0.155	82	289	807	97	85
4000	0.162	74	263	757	91	80
5000	0.180	60	212	656	79	70
$D_o = 0.25 \text{ mm}$						
1000	0.205	46	164	553	138	120
2000	0.217	41	145	512	127	105
3000	0.228	37	132	483	120	95
4000	0.245	32	115	441	110	95
$D_o = 0.40 \text{ mm}$						
1000	0.249	31	111	433	173	140
1500	0.269	27	95	392	157	125

tatele obținute conform relațiilor (4.61),(4.66),(4.67),(4.68) sunt cele prezentate în Tab. 4.1. Ultima coloană din tabel reprezintă valoarea lui x_v , determinată experimental prin măsurarea directă a repartiției vitezei în axa jetului. Se observă o bună concordanță cu valorile prezise de relația (4.68), acestea din urmă fiind mai mari decât valorile reale, așa cum rezultă și din Fig. 4.11 și Fig. 4.12.

4.3 Concluzii privind hidrodinamica jetului

Analiza teoretică a stabilității jeturilor de lichid evidențiază două cauze principale ale ruperii jetului: tensiunea superficială și interacțiunea cu mediul gazos ambiant. Autorul prezintă în acest capitol o demonstrație proprie a ecuației stabilității jetului, împreună cu o procedură numerică originală de soluționare a ei. Rezultatele numerice obținute evidențiază faptul că pe măsură ce crește densitatea mediului gazos ambiant crește jetul se dispersează mai repede (corespunzător cu creșterea coeficientului de amplificare a perturbațiilor de pe suprafața lui) formându-se picături de dimensiuni tot mai reduse. În particular, pentru jeturile de mare viteză efectul tensiunii superficiale este neglijabil în raport cu influența mediului gazos ambiant, dispersia jetului având practic loc numai prin contactul cu aerul. Teoria stabilității jetului are inconvenientul că amplitudinea perturbațiilor este considerată mică în raport cu diametrul jetului ceea ce restrânge domeniul ei de aplicare la fazele incipiente de pierdere a stabilității, rezultatele neputând fi extinse pînă în zona fragmentării jetului.

Analiza studiilor experimentale asupra evoluției jeturilor de apă de mare viteză în aer, prezentate în literatură evidențiază faptul că eforturile cercetătorilor s-au concentrat în direcția identificării zonelor caracteristice ale jetului și a stabilirii lungimilor lor. Astfel, s-a pus în evidență o zonă inițială de curgere continuă, a cărei lungime poate fi estimată prin măsurarea conductibilității electrice a vanei fluide, și o zonă în care viteza în axa jetului se menține aproximativ constantă a cărei lungime se poate estima prin anemometrie LASER. Între cele două zone se definește o lungime de rupere a jetului, corespunzătoare trecerii de la curgerea quasicontinuă (inclusiv curgerea cu picături concentrate) la curgerea difuză, cu picături mici. Această lungime de rupere nu a fost măsurată direct, ci a fost determinată din calcul pe baza unui parametru de evazare a jetului. Ne propunem în această lucrare ca investigațiile experimentale ale jetului să pună în evidență această lungime de rupere.

Capitolul 5

Acțiunea jetului de apă de mare viteză asupra materialului solid

5.1 Impactul jetului de apă de mare viteză cu o placă plană

Una din problemele teoretice principale ale tehnologiei de tăiere cu jet de apă o reprezintă dinamica jetului liber care lovește o placă plană.

În [1] Amano și Neusen prezintă un studiu numeric și experimental al caracteristicilor jeturilor turbulente care impactează o placă plană dispusă perpendicular pe direcția jetului. Curgerea lichidului este modelată cu ecuațiile Navier-Stokes, completate cu modelul $k - \epsilon$ pentru turbulență. Setul de ecuații considerat pentru mărimile mediate temporal utilizează conceptul de vâscozitate turbulentă al lui Boussinesq. În coordonate cilindrice (x, r) componentele axială și radială ale vitezei sunt v_x și v_r , iar ecuația de continuitate este:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) = 0 \quad (5.1)$$

Ecuțiile de mișcare sunt:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] + S_x \quad (5.2)$$

$$S_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{ef} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (5.3)$$

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] - \eta_{ef} \frac{v_r}{r^2} + S_r \quad (5.4)$$

$$S_r = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{ef} \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\eta_{ef} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - r\eta_{ef} \frac{v_r}{r^2} \quad (5.5)$$

Vâscozitatea turbulentă efectivă este obținută din modelul $k - \epsilon$ al lui Jones și Launder [22]. S-a folosit forma pentru numere Reynolds mari:

$$\eta_{ef} = \eta + \eta_T \quad (5.6)$$

unde η este vâscozitatea moleculară a lichidului, iar

$$\eta_T = C_\eta \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.7)$$

unde C_η este un coeficient numeric, k este energia cinetică turbulentă provenită din pulsațiile vitezei, iar ϵ este viteza de disipare a energiei turbulente.

Ecuția pentru energia cinetică turbulentă este:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[r \left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] \right\} + G - \rho \epsilon \quad (5.8)$$

iar ecuația pentru disipația energiei cinetice turbulente este:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[r \left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] \right\} + C_1 \frac{\epsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.9)$$

unde:

$$G = \eta_T \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.10)$$

Valorile asimptotice ale coeficienților numerici care intervin în ecuațiile de mai sus, pentru valori mari ale numărului Reynolds, sunt:

C_η	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Condițiile pe frontieră pentru un jet care lovește o placă plană sunt prezentate în Fig.5.1

AB este axa de simetrie a jetului, BC este frontiera solidă impenetrabilă iar CD respectiv DE sunt considerate frontiere prin care are loc curgerea spre interiorul și exteriorul domeniului. La ieșirea din duză au fost considerate două tipuri de condiții: fie profil de viteză uniform, fie profil de tip putere cu exponent 5.5. Soluționarea ecuațiilor de mai sus s-a făcut cu diferențe finite. Calculele numerice au fost efectuate până la viteze ale jetului de 900 m/s.

Instalația experimentală utilizată de Amano și Neusen [1] este formată dintr-un acumulator hidraulic în care se realizează o presiune inițială de aproximativ 7000 bar și care se descarcă printr-o duză conică cu diametrul 0.24 mm. În acest mod se poate investiga întregul domeniu de variație a vitezei jetului într-un singur

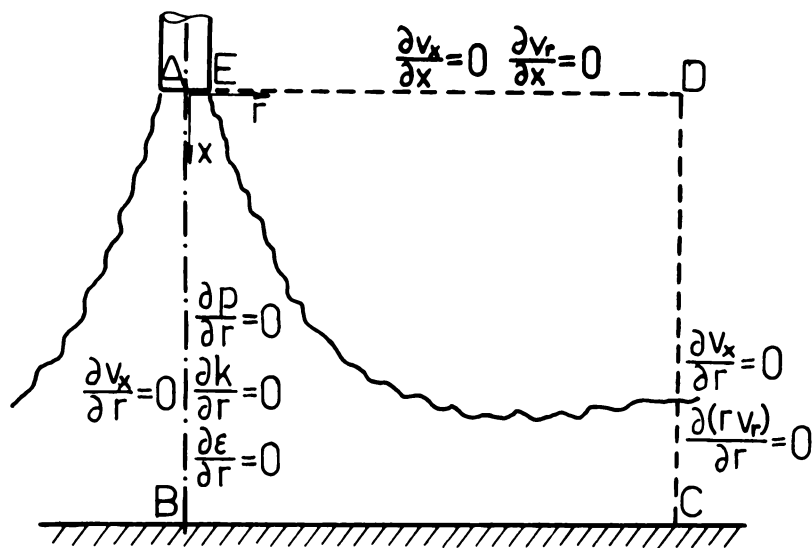


Figura 5.1: Domeniul de calcul și condițiile pe frontieră pentru un jet care lovește o placă plană.

experiment. Forța cu care acționează jetul de apă de mare viteză asupra plăcii plane este măsurată cu un traductor tensometric. Presiunea dinaintea duzei (din care se calculează viteza jetului) și forța pe placă au fost înregistrate simultan. Fluidul utilizat în experimente a fost un lichid hidraulic sintetic, *Plexol 201*, iar măsurătorile au fost făcute la două valori ale distanței duză-placă, $h = 16 D_o$, respectiv $h = 28 D_o$.

În Fig.5.2 este prezentată comparația între valorile calculate și măsurate ale forței pe placă, la cele două valori ale lui h precizate mai sus. Atât calculele teoretice cât și valorile experimentale arată că influența lui h , în domeniul investigat, este neglijabilă. Pe de altă parte, valorile teoretice sunt cu până la 20% mai mari decât cele experimentale, neconcordanța fiind pusă pe seama faptului că viteza la ieșirea din duză a fost calculată utilizând presiunea în fața duzei fără a se ține seama de disipațiile din duză. Definind un coeficient de viteză C_v ca raportul între viteza reală și cea teoretică a jetului la ieșirea din duză, autorii constată că pentru $C_v = 0.9$ curbele teoretice se apropie foarte mult de punctele experimentale.

Cu această corecție, în Fig.5.3 sunt prezentate curbele teoretice, pentru profil de viteză constant la ieșirea din duză, respectiv profil putere de exponent 5.5, împreună cu datele experimentale la $h/D_o = 28$, obținându-se o bună concordanță.

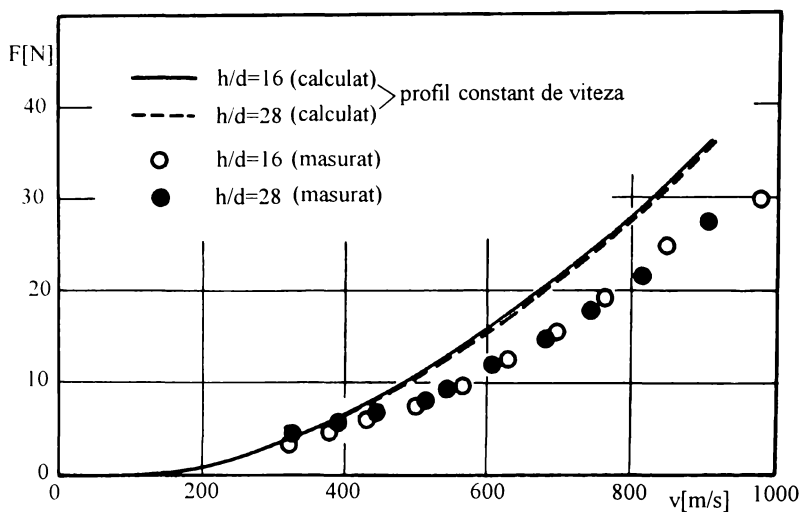


Figura 5.2: Forța jet-placă. Comparație între valorile experimentale (puncte) și cele teoretice (curbe), fără corecția vitezei jetului [1].

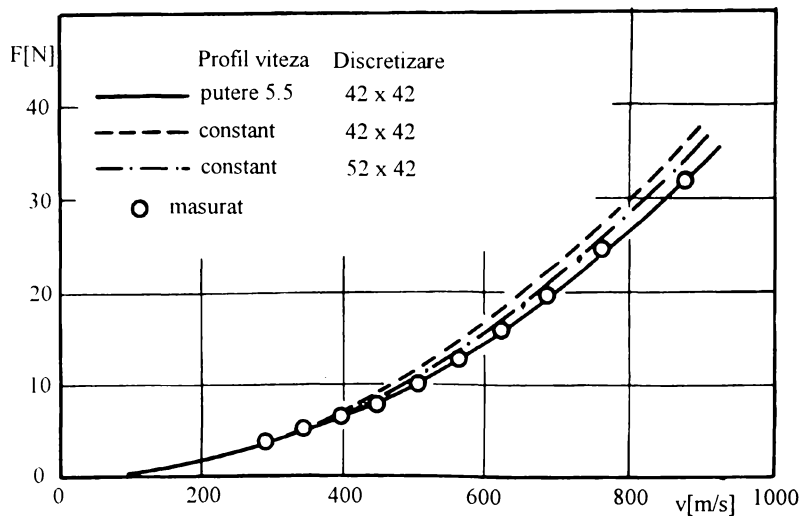


Figura 5.3: Forța jet-placă. Comparație între valorile experimentale (puncte) și cele teoretice (curbe), cu corecția vitezei jetului [1].

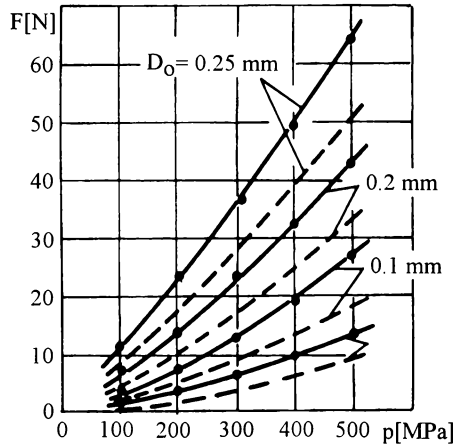


Figura 5.4: Variația forței jet-placă funcție de presiunea înaintea duzei, pentru distanța duză-placă de 5 mm . [50].

Se concluzionează că pentru tipul de duză folosit, cu $C_v = 0.9$ și profil de viteză tip putere la ieșirea din duză se obține cea mai bună concordanță teorie-experiment. Deasemenea, din investigațiile numerice se trage concluzia că influența intensității turbulenței jetului la ieșirea din duză este nesemnificativă și prin urmare evaluarea corectă a vitezei inițiale a jetului este mult mai importantă decât modelul de turbulență utilizat.

În [50] este investigată experimental relația între forța exercitată de un jet lichid de mare viteză asupra unei plăci plane perpendiculară pe jet și presiunea lichidului înaintea duzei. În Fig.5.4 sunt prezentate rezultatele obținute pentru patru duze conice situate la distanța de 5 mm față de placă (curbele continue). Datele experimentale sunt comparate cu rezultatele teoretice (curbele întrerupte) obținute cu relația $F_t = \rho Q v$, unde ρ este densitatea lichidului, Q debitul volumic evacuat prin duză și v viteza jetului. Coeficientul de viteză utilizat variază în intervalul $C_v = 0.95 \dots 0.97$, funcție de tipul duzei.

Se observă că valorile efective măsurate ale forței, F_e sunt mai mari decât valorile teoretice F_t (calculate în ipoteza că jetul este deviat cu 90° de către placă), diferența crescând odată cu presiunea. Spre exemplu, pentru o presiune de 100 MPa , $F_e = (1.12 \dots 1.21) F_t$, iar la 500 MPa , $F_e = (1.3 \dots 1.67) F_t$. Diferența între F_e și F_t scade odată cu creșterea diametrului duzei. De exemplu, pentru $D_o = 0.1\text{ mm}$, $F_e = (1.21 \dots 1.67) F_t$, în timp ce pentru $D_o = 0.25\text{ mm}$, $F_e = (1.12 \dots 1.30) F_t$.

Explicația faptului că valorile măsurate sunt mai mari decât cele calculate este

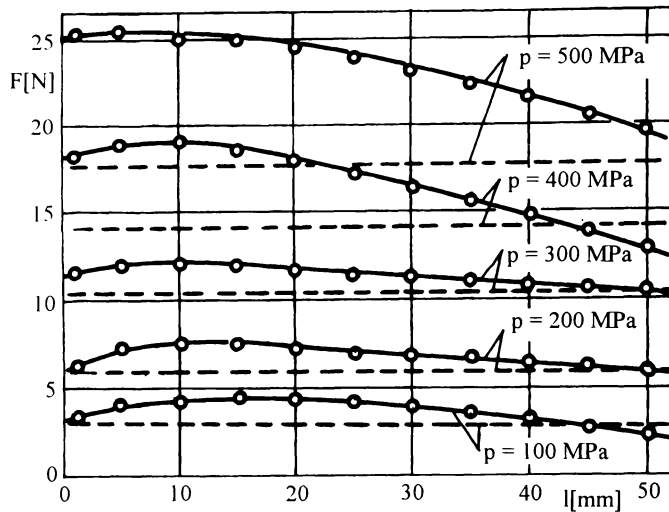


Figura 5.5: Variația forței jet-placă funcție de distanța duză-placă, având ca parametru presiunea în fața duzei, pentru o duză cu diametrul de 0.15 mm , [50].

pusă pe seama faptului că în realitate particulele fluide nu sunt deviate cu 90° față de direcția inițială (adică de-a lungul plăcii) ci cu un unghi mai mare. Jeturile cu viteze $v = 443 \dots 990\text{ m/s}$ se dezintegrează și sunt reflectate de suprafață. Unghiul real de deviere este dificil de evaluat pentru că se modifică odată cu pătrunderea jetului în material, respectiv cu rugozitatea suprafeței.

Studiile de mai sus au fost efectuate pentru valori mici ale distanței duză-piesă. Din punct de vedere tehnologic este însă interesantă determinarea dependenței $F = f(l)$ unde l este distanța duză-piesă, respectiv precizarea distanței optime $l_{opt} = f(p, d)$ la care forța are valoarea maximă, F_{max} . În [51] sunt prezentate astfel de date experimentale, obținute pentru duze conice, variind presiunea în intervalul $100 \dots 500\text{ MPa}$, diametrul duzei $D_o = 0.1, 0.2$ și 0.3 mm iar distanța duză plăcă $l = 2 \dots 50\text{ mm}$. S-a măsurat forța jet-placă.

Fig.5.5 arată dependența $F(l)$ luând ca parametru presiunea p , pentru o duză cu diametrul $D_o = 0.15\text{ mm}$. Fig.5.6 prezintă dependența $F(l)$ având ca parametru diametrul duzei d , la o presiune $p = 300\text{ MPa}$. În ambele figuri, cu linie întreruptă este figurată valoarea calculată a forței.

Se observă că l_{opt} scade cu creșterea presiunii, obținându-se următoarea relație empirică:

$$l_{opt} = 99.7 (p/100)^{-0.88} D_o^{0.9} \quad [mm] \quad (5.11)$$

unde $p [MPa]$, iar $d [mm]$. Valoarea maximă a forței obținută la l_{opt} este dată de

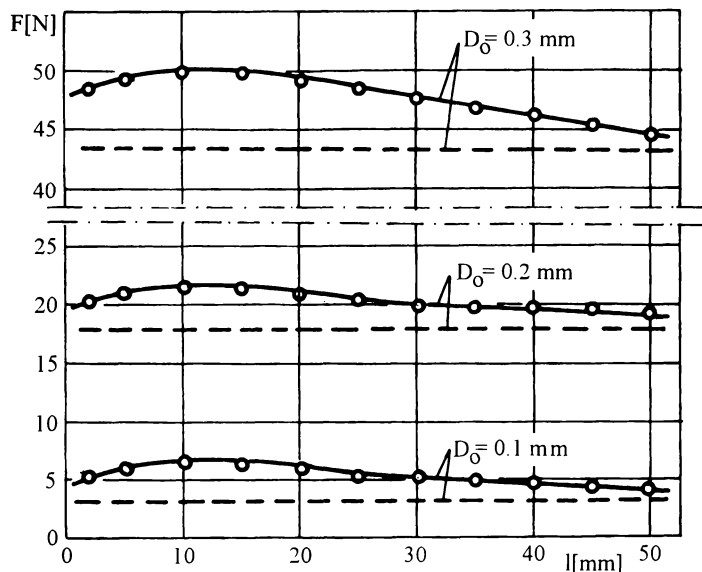


Figura 5.6: Variația forței jet-placă funcție de distanța duză-placă, având ca parametru diametrul duzei, pentru o presiune înaintea duzei de 300 MPa . [50].

relația:

$$F_{max} = 120 (p/100)^{1.15} D_o^{1.75} \quad [\text{N}] \quad (5.12)$$

cu p și d introduse ca mai sus.

În [15] Engemann prezintă rezultate experimentale obținute pentru forța cu care acționează un jet de apă de mare viteză asupra unei plăci plane. Pentru generarea jetului s-au folosit duze cilindrice, cu pastilă de safir. Tabelul 5.1 conține valorile măsurate ale forței jet-placă pentru două duze diferite ($D_o = 0.124 \text{ mm}$ și $D_o = 0.256 \text{ mm}$). Presiunea înaintea duzei a fost variată în intervalul $1 \dots 4 \text{ kbar}$ iar distanța duză-placă $h = 3 \dots 68 \text{ mm}$. Ultima linie din tabel conține valorile teoretice ale forței, calculate cu relația $F = \rho Q v = \rho \alpha A_o v^2$ unde α este coeficientul de debit al duzei, A_o aria orificiului duzei, iar v viteza jetului (calculată ținând cont de compresibilitatea apei). Se observă că și în acest caz valorile măsurate sunt mai mari decât cele calculate. Engemann explică această diferență prin aceea că jetul este compus practic din picături mai mari sau mai mici de apă, la lovirea plăcii apărând pentru o durată scurtă o forță de impact mai mare decât cea corespunzătoare curgerii staționare a jetului continuu. Traductorul de forță atașat plăcii măsoară practic o valoare medie în timp, mai mare decât cea teoretică. În acest caz însă, se pune problema răspunsului dinamic al ansamblului placă-traductor pentru a putea verifica această ipoteză.

Tabelul 5.1: Forța exercitată de un jet de apă, produs cu o duză cilindrică, asupra unei plăci plane, [15].

h [mm]	F_e [N] pentru $D_o = 0.124$ mm și $p =$				F_e [N] pentru $D_o = 0.256$ mm și $p =$			
	1 kbar	2 kbar	3 kbar	4 kbar	1 kbar	2 kbar	3 kbar	4 kbar
3	2.10	3.50	4.85	6.30	6.90	13.40	19.20	29.00
8	2.05	3.50	4.90	6.20	6.00	11.50	18.50	27.50
13	1.90	3.35	4.65	5.95	5.90	13.40	20.50	26.70
18	1.85	3.40	4.80	5.90	7.00	14.10	20.70	27.50
28	1.90	3.40	4.70	6.15	6.40	13.40	19.80	26.50
38	2.10	3.50	4.60	5.70	6.30	13.00	20.00	26.40
48	1.95	3.40	4.45	5.40	6.60	13.10	19.50	26.50
58	1.85	3.20	4.50	5.60	6.80	13.10	19.50	25.80
68	1.65	2.75	3.95	5.00	5.90	12.00	18.00	24.70
F_t	1.45	2.90	4.25	5.65	6.25	12.30	18.10	24.00

5.2 Corelația între parametrii caracteristici ai jetului și distrugerea materialului solid

Studiul forței cu care acționează jetul lichid de mare viteză asupra unei plăci plane pune în evidență faptul că la o anumită distanță față de duză forța are o valoare maximă. Engemann [15] consideră că poziția maximumului forței se situează în zona în care jetul începe să se fragmenteze, adică unde se face trecerea de la curgerea cvasi-continuuă la curgerea în picături. Pentru a verifica această ipoteză, în Fig.5.7 și Fig.5.8 sunt reprezentate grafic valorile forței jet-placă din Tab.5.1, împreună cu lungimea de rupere a jetului x_b calculată conform teoriei lui Yanaida cu relațiile (4.66) și (4.67). Se observă că într-adevăr pentru majoritatea curbelor prezentate, maximumul forței este localizat în vecinătatea lui x_b . Concluzia este importantă din punct de vedere practic, deoarece se poate estima poziția acestui maxim din simpla măsurare a parametrului de evazare a jetului care determină pe x_b .

Din punct de vedere al eroziunii materialului solid impactat de jet, este dificil de corelat forța jet-placă cu procesul de îndepărtare al particulelor solide. Dificultatea provine în principal din modul diferit în care se comportă diferite materiale sub acțiunea solicitărilor statice și dinamice. Deasemenea, odată cu erodarea suprafeței solidului se modifică geometria zonei de impact și implicit unghiul de deviere a jetului.

Kobayashi [23] studiază experimental procesul de eroziune provocat de un jet de apă de mare viteză asupra unor probe metalice. Jetul este produs cu o duză

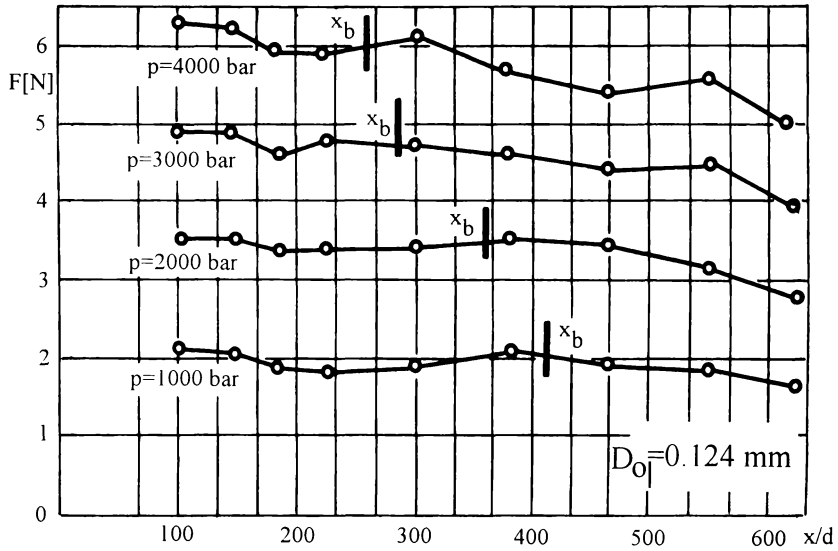


Figura 5.7: Forța jet-placă funcție de distanța duză-placă, pentru o duză cilindrică cu diametrul 0.124 mm, [15].

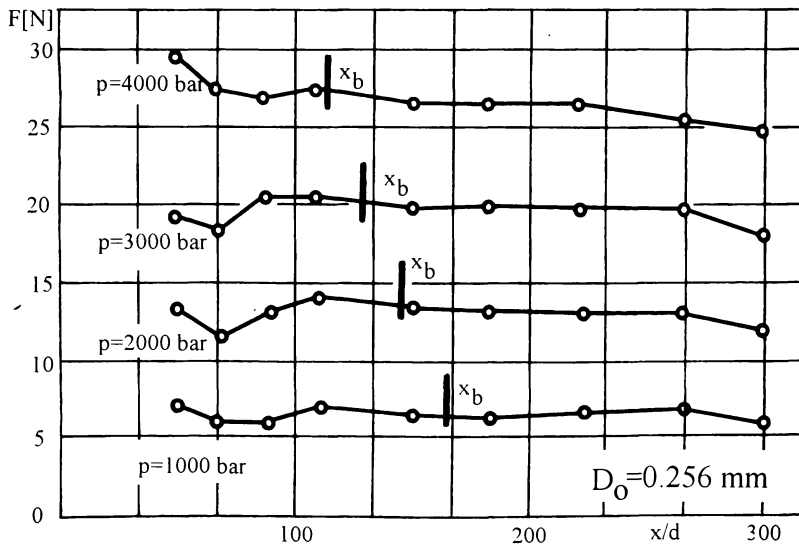


Figura 5.8: Forța jet-placă funcție de distanța duză-placă, pentru o duză cilindrică cu diametrul 0.256 mm, [15].

conico-cilindrică, unghiul conului fiind de 13° iar porțiunea cilindrică de la ieșire are diametrul de 1.11 mm și lungimea de 4 mm . Instalația folosită poate asigura o presiune în fața duzei între $300 \dots 900 \text{ bar}$. Materialele testate au fost aluminiu (A1050P), oțel moale (SS41) și oțel inoxidabil (SUS304). Probele au fost realizate sub formă de plăcuțe $50 \times 50 \text{ mm}$, cu grosimea de 5 mm , și s-a măsurat masa lor înainte și după eroziune pentru a determina pierderea de masă M .

Structura jetului de apă la diferite distanțe față de duză a fost investigată calitativ prin fotografiere, cu timp de expunere $0.8 \mu\text{s}$. De asemenea, variația în timp a presiunii de impact a fost investigată utilizând un traductor piezo-ceramic cuplat cu un orificiu de 1 mm practicat într-un disc dispus perpendicular pe jet. Structura suprafețelor erodate a fost investigată cu microscopul electronic.

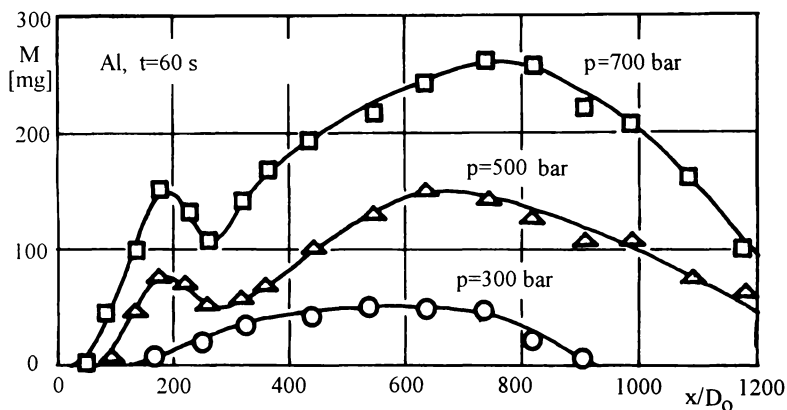


Figura 5.9: Pierderea de masă a probelor de aluminiu impactate de un jet de apă, funcție de distanța duză-probă, [23].

Fig.5.9 prezintă pierderea de masă a probelor de aluminiu, supuse timp de 60 s acțiunii jetului de apă la diferite presiuni, funcție de distanța adimensională duză-probă x/D_0 . Curbele obținute prezintă două maxime, distanța până la al doilea maxim având tendința să crească ușor cu creșterea presiunii.

Fig.5.10 prezintă pierderea de masă funcție de distanța duză-probă, pentru cele trei materiale studiate, menținând constantă presiunea în fața duzei, $p = 700 \text{ bar}$. Timpul de expunere a probelor de oțel a fost 300 s , proba de aluminiu fiind expusă tot 60 s . Se observă că pentru probele de oțel nu mai apare primul maxim la distanță mică de duză.

În schimb este remarcabil faptul că poziția maximum pierderii de masă (aproximativ $x/D_0 = 700$) rămâne aceeași pentru toate cele trei materiale. Aceasta conduce la concluzia că poziția maximum este legată de structura jetului și nu de tipul materialului testat.

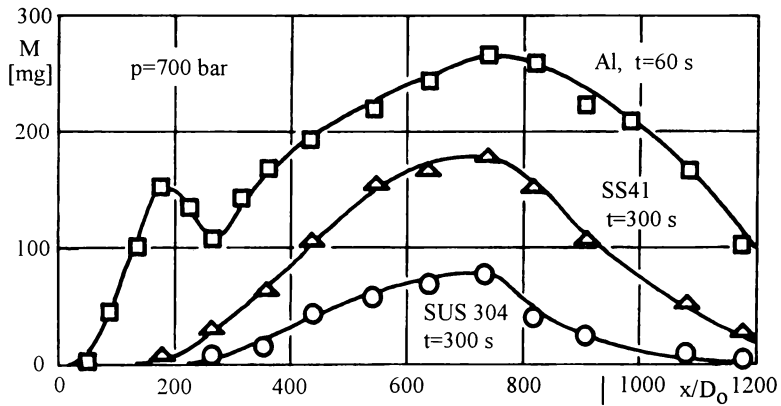


Figura 5.10: Pierderea de masă a probelor de aluminiu, oțel moale (SS41) și oțel inoxidabil (SUS304) impactate de un jet de apă, funcție de distanța duză-probă, [23].

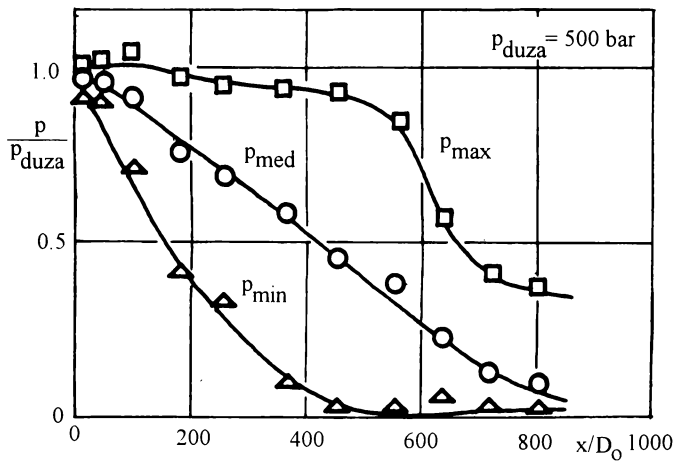


Figura 5.11: Variația presiunii maxime p_{max} , medii p_{med} și minime p_{min} în axa jetului, funcție de distanța duză-placă, [23].

Faptul că maximum pierderii de material apare la distanță relativ mare de duză și nu în vecinătatea duzei conduce la concluzia că eroziunea materialului se produce mai degrabă datorită impactului repetat al picăturilor pe suprafața

solidă decât sub acțiunea presiunii de stagnare a jetului continuu.

Fig.5.11 prezintă valorile maximă, medie și minimă ale presiunii în axa jetului, funcție de x/D_o , pentru o presiune înaintea duzei de 500 bar. Se observă că valoarea maximă a presiunii rămâne aproape constantă în intervalul $x/D_o = 0 \dots 500$ ceea ce înseamnă că viteza în axa jetului este aproximativ constantă în această regiune. În schimb, valoarea presiunii minime scade rapid cu x/D_o , ceea ce înseamnă că pe măsură ce crește distanța de la duză oscilațiile de presiune maxim-minim cresc în amplitudine. Această concluzie cantitativă este corelată de Kobayashi cu aspectul jetului la diferite distanțe față de duză. Astfel, pe măsură ce jetul se dezintegrează prin frecare cu aerul, amplitudinea oscilațiilor de presiune crește.

Deasemenea, fotografiile efectuate la microscopul electronic arată clar că structura suprafeței metalului erodată cu jet de lichid prezintă foarte multe asemănări cu cea observată la probele erodate cavitațional pe un aparat magnetostrictiv. Ambele structuri par a fi produse ca urmare a microfisurilor provocate de pulsuri de presiune ridicată [4].

În [24] Kobayashi ș.a. prezintă influența geometriei duzei de producere a jetului asupra pierderii de material a probei impactate de jet. S-au studiat două tipuri de duze: conică și cilindrică. În cele ce urmează se prezintă rezultatele obținute pentru o duză conică, cu diametrul orificiului de 1 mm, unghiul conului 13° și lungimea tronsonului cilindric de la ieșire 4 mm, comparativ cu o duză cilindrică de același diametru. Jetul de apă a fost generat cu presiune de 500 bar, iar probele utilizate au fost realizate din aluminiu, fiind expuse 60 s acțiunii jetului.

În Fig.5.12 se prezintă variația pierderii de masă M funcție de distanța adimensională până la duză x/D_o pentru cele două duze.

Se observă prezența celor două maxime ale pierderii de masă, unul în apropierea duzei și celălalt la o distanță mai mare. Pozițiile maximelor corespunzătoare duzei conice sunt plasate mai departe de duză decât cele corespunzătoare duzei cilindrice, dar valoarea pierderii maxime de masă este aceeași pentru ambele duze. Această ultimă observație ne conduce la concluzia că printr-o alegere convenabilă a abscisei cele două curbe ar putea fi practic suprapuse, obținând astfel o curbă universală de descriere a pierderii de masă.

Pentru aceasta vom porni de la ipoteza că **masa de material îndepărtat este proporțională cu puterea jetului.**

Puterea jetului la ieșirea din duză este produsul dintre debitul volumic de fluid Q și energia cinetică specifică:

$$\mathcal{P} = Q \frac{\rho v^2}{2} = C_d C_v^2 Q_t \frac{\rho v_t^2}{2} = C_d C_v^2 \mathcal{P}_t \quad (5.13)$$

În relația (5.13) C_d este coeficientul de debit al duzei

$$C_d = \frac{\text{debitul real de fluid evacuat}}{\text{debitul teoretic}} = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4} v_t}$$

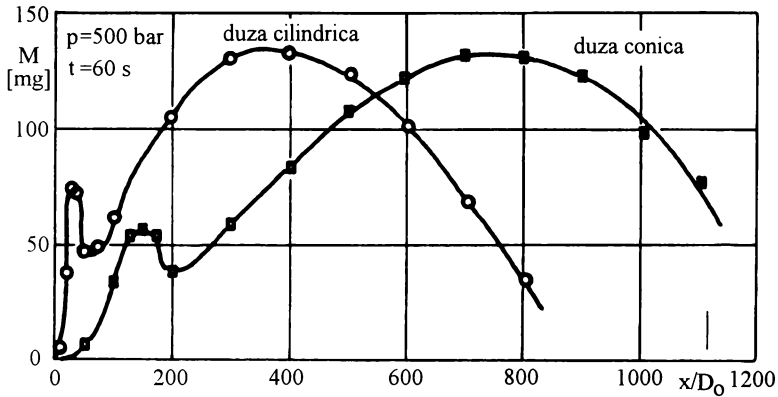


Figura 5.12: Pierderea de masă a probelor de aluminiu impactate de un jet de apă produs cu o duză conică, respectiv cilindrică, funcție de distanța duză–probă, [24].

iar C_v este coeficientul de viteză

$$C_v = \frac{\text{viteza reală a jetului}}{\text{viteza teoretică}} = \frac{v}{v_t}$$

Puterea teoretică a jetului poate fi scrisă și funcție de căderea de presiune pe duză, p , ținând cont că $p = \rho v_t^2/2$:

$$\mathcal{P}_t = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} p = \left(\frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \right) p^{1.5} \quad (5.14)$$

Deasemenea, dacă notăm cu D_j diametrul jetului, se definește coeficientul de contracție

$$C_c = \frac{\text{aria secțiunii jetului}}{\text{aria orificiului duzei}} = \left(\frac{D_j}{D_o} \right)^2$$

Cu acesta, coeficientul de debit este $C_d = C_c C_v$.

Din relațiile de mai sus putem defini un coeficient de putere

$$C_P = \frac{\text{puterea reală a jetului}}{\text{puterea teoretică}} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_t} = C_d C_v^2 = C_c C_v^3 \quad (5.15)$$

Deasemenea, observăm din (5.13) și (5.14) că puterea jetului este proporțională cu $p^{1.5}$.

Ținând cont de această ultimă observație, putem verifica ipoteza proporționalității între masa de material îndepărtat și puterea jetului. În Fig.5.13 sunt prezentate rezultatele încercărilor efectuate de firma germană UHDE pentru tăierea diferitelor materiale cu jet de apă de mare viteză. Figura prezintă în coordonate dublu logaritmice variația adâncimii tăieturii (proporțională cu cantitatea de material îndepărtată) funcție de presiunea în fața duzei.

Se observă că toate dreptele au aproximativ aceeași înclinație. Spre exemplu, pentru dreapta corespunzătoare încercărilor de tăiere a plumbului (care are cele mai multe puncte experimentale) putem scrie pentru punctele A și B relațiile:

$$\begin{aligned} a \log(p_A) + b &= \log(h_A) \\ a \log(p_B) + b &= \log(h_B) \end{aligned}$$

de unde panta dreptei este:

$$a = \frac{\log(h_b) - \log(h_A)}{\log(p_B) - \log(p_A)}$$

Cu valorile numerice obținute de pe grafic avem:

$$a = \frac{1.45 - (-0.1)}{4 - 3} = 1.55$$

adică

$$\frac{h_B}{h_A} = \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{1.55} = \frac{\mathcal{P}_B}{\mathcal{P}_A}$$

Ultima relație arată că adâncimea tăieturii crește cu presiunea la puterea 1.55, deci practic este proporțională cu puterea jetului.

Revenind la Fig.5.12 putem aprecia că puterea jetului evacuat din cele două duze este practic aceeași, deoarece cantitatea maximă de material îndepărtată prin eroziune este aceeași. Ținând cont că ambele jeturi sunt generate cu o presiune de 500 bar, rezultă că C_P are aceeași valoare atât pentru duza conică cât și pentru duza cilindrică.

Evoluția jetului de apă în aer este caracterizată de frecarea vanei lichide cu mediul gazos înconjurător, ceea ce conduce la ruperea jetului și transformarea lui într-un amestec bifazic gaz-lichid. Prin frecarea cu aerul jetul disipă o parte din puterea mecanică pe care o are la ieșirea din duză, disipația fiind cu atât mai mare cu cât puterea inițială este mai mare. Prin urmare, apare natural ca în locul abscisei geometrice x , care reprezintă distanța până la duză, să utilizăm abscisa corectată $C_v^3 x$.

Deasemenea, pentru a obține abscisa adimensională ar trebui să raportăm abscisa la diametrul jetului, D_j , și nu la diametrul orificiului duzei, D_o , ținând astfel cont și de contracția jetului la ieșirea din duză. Cu aceste considerații, definim abscisa

$$x^* = \frac{C_v^3}{\sqrt{C_c}} \frac{x}{D_o} \quad (5.16)$$

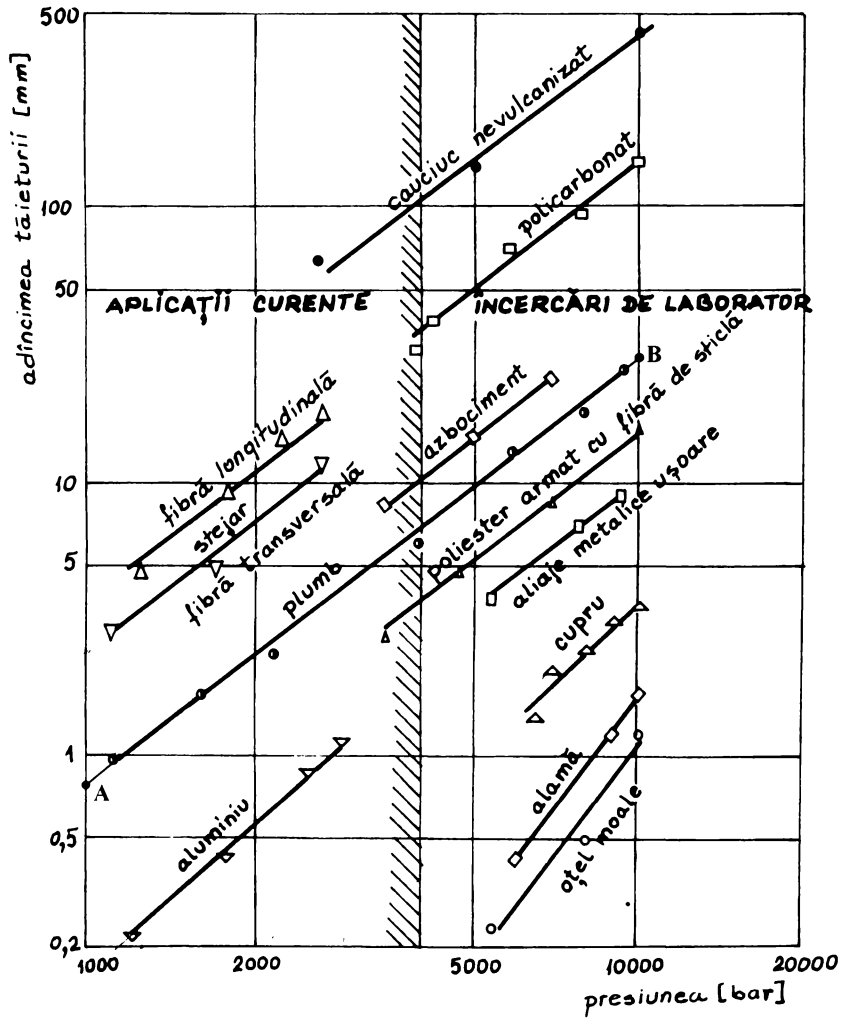


Figura 5.13: Adâncimea de tăiere a diferite materiale, funcție de presiunea în fața duzei, [66].

care ia în considerare caracteristicile cinematice și energetice ale duzei prin intermediul coeficientului de contracție respectiv a coeficientului de viteză.

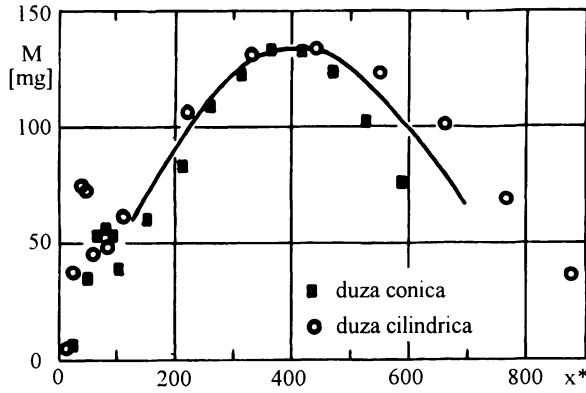


Figura 5.14: Pierderea de masă a probelor de aluminiu impactate de un jet de apă produs cu o duză conică, respectiv cilindrică, funcție de distanța adimensională duză - probă, definită de relația (5.16).

Pentru duza cilindrică, pe baza datelor experimentale din [15] s-a obținut :

$$C_d = 0.549 + \frac{0.526}{Re^{0.235}}$$

unde $Re = v D_o / \nu$ este numărul Reynolds asociat orificiului duzei. Pentru o duză cu diametrul de 1 mm , alimentată cu apă ($\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$) la presiunea $p = 500\text{ bar}$ avem $Re = 316 \cdot 10^3$, respectiv $C_d = 0.576$.

Dacă acceptăm pentru duza cilindrică un coeficient de viteză $C_v = 0.95$ rezultă $C_p = 0.606$ și

$$x_{cil}^* = 1.101 \frac{x}{D_o}$$

Coeficientul de putere va fi $C_P = C_c C_v^3 = 0.519$. Ținând cont că la duza conică, datorită porțiunii cilindrice de la ieșire contracția jetului este nulă, avem $C_v = 1$ și

$$x_{con}^* = 0.519 \frac{x}{D_o}$$

Fig.5.14 prezintă punctele experimentale din Fig.5.12 reprezentate cu abscisa adimensională x^* definită mai sus pentru fiecare duză. Se observă că în regiunea pierderii maxime de masă, care interesează din punct de vedere practic, se poate construi o curbă printre punctele experimentale, al cărui maxim este situat aproximativ la $x^* = 400$. Cu aceasta se poate estima distanța optimă față de duză, la care eroziunea are intensitatea maximă, cu relația:

$$\frac{x_{opt}}{D_o} = 400 \frac{\sqrt{C_c}}{C_v^3} \tag{5.17}$$

5.3 Concluzii privind interacțiunea jet–solid

Studiile referitoare la interacțiunea jetului de apă de mare viteză cu un obstacol solid, prezentate în literatură, abordează în principal două tipuri de probleme: forța cu care acționează jetul asupra unei plăci plane și eroziunea materialului solid.

Măsurarea forței de interacțiune jet–placă la diferite distanțe față de duză evidențiază un maxim într-o anumită zonă, poziția acestuia depinzând de tipul duzei, diametrul orificiului și presiunea apei înaintea duzei. Explicațiile oferite pentru apariția acestui maxim pornesc fie de la ipoteza devierii particulelor fluide cu un unghi mai mare de 90° fie de la ipoteza contribuției componentei nestaționare a presiunii de impact în zona în care jetul este fragmentat. A doua explicație este susținută de observația că poziția maximumului forței se situează în vecinătatea zonei de rupere a jetului.

Studiul variației cantității de material îndepărtat prin eroziune funcție de distanța duză–probă evidențiază clar o zonă în care pierderea de masă este maximă. Experiențe efectuate cu diverse tipuri de materiale metalice au demonstrat că poziția acestui maxim nu depinde de tipul materialului, și prin urmare este legat doar de structura jetului.

Pornind de la ipoteza că masa de material îndepărtat este proporțională cu puterea jetului autorul propune reprezentarea datelor experimentale funcție de distanța până la duză înmulțită cu cubul coeficientului de viteză și împărțită cu radicalul coeficientului de contractie. Această abscisă corectată permite reprezentarea unitară a rezultatelor experimentale obținute cu diverse tipuri de duze, deoarece ia în considerare caracteristicile energetice și cinematice ale duzei.

Concluzia finală care se desprinde din acest studiu este că pentru a putea corela structura jetului cu performanțele lui tehnologice este necesară determinarea lungimii lui de rupere, și în general evidențierea zonelor caracteristice ale jetului produs cu diverse tipuri de duze, la diferite valori ale presiunii.

Capitolul 6

Calculul și construcția instalației experimentale pentru studiul jeturilor de apă de mare viteză.

În vederea efectuării de cercetări experimentale asupra jeturilor de apă de mare viteză, am proiectat și realizat practic o instalație pentru generarea unor asemenea jeturi. O parte din soluțiile constructive originale realizate de autor sunt prezentate în acest capitol. Construcția instalației a fost efectuată în atelierul Catedrei de Mașini Hidraulice a Facultății de Mecanică din Timișoara.

Așa cum se poate observa din Tab.1.3 parametrii caracteristici unei instalații de tăiere cu jet de apă sunt puterea, presiunea de lucru și frecvența curselor pistoanelor. Debitul de apă al pompei de înaltă presiune și diametrul maxim al duzei rezultă din parametrii precizați anterior.

Pentru realizarea instalației prezentată în această lucrare s-a optat pentru utilizarea unui multiplicator de presiune cu următorii parametri funcționali:

- puterea utilă (furnizată de pompa de apă de foarte înaltă presiune) **20 kW**;
- presiunea maximă de lucru **3000 bar**;
- frecvența curselor, maxim **1 cursă/sec**.

Principial s-a pornit de la schema multiplicatorului prezentată în Fig.1.1 dar soluția constructivă utilizată este diferită, urmărind eliminarea conductelor de legătură de pe traseul de apă de presiune înaltă necesare pentru legarea în paralel a refulărilor celor doi cilindri, respectiv conectarea la duză (Fig.1.2). Astfel, cei doi cilindri ai pompei de apă de foarte înaltă presiune sunt montați cap în cap, având blocul de supape de admisie și evacuare comun. Legătura de la blocul supapelor la duză se face cu o conductă scurtă de 100 mm. Această variantă necesită antrenarea celor două pistoane plonjoare cu cilindri hidraulici cu simplă acțiune, mișcarea lor fiind sincronizată mecanic cu ajutorul unor tije de legătură.

6.1 Stabilirea dimensiunilor principale ale multiplicatorului de presiune

Pentru proiectarea multiplicatorului de presiune se pornește de la următoarele date inițiale:

- puterea utilă a pompei de înaltă presiune, P ;
- numărul de cilindri ai pompei de apă;
- numărul de curse pe minut, n ;
- raportul de amplificare a presiunii, A .

Din primii trei parametri se pot stabili dimensiunile principale ale pompei de apă, respectiv diametrul pistonului plonjor, D_p și cursa lui, S . Raportul de amplificare permite stabilirea dimensiunilor cilindrilor hidraulici utilizați la acționarea pompei [2], [3].

Pistonul plonjor al pompei de înaltă presiune este supus la compresiune, deci gabaritul lui va fi restricționat din considerente de flambaj. Dacă notăm cu l_g lungimea ghidajului plonjorului și cu l_e lungimea etanșării, atunci lungimea totală a pistonului va fi $L_p = l_g + l_e + S$. Dacă considerăm că aceasta este lungimea liberă a pistonului atunci când este complet introdus în cilindru, atunci lungimea de flambaj va fi egală cu dublul lungimii libere $l_f = 2L_p = 2(l_g + l_e + S)$. Coeficientul de sveltețe al pistonului este $4l_f/D_p$ și va fi limitat la valoarea 80 pentru a nu se ajunge la flambajul elastic. De aici rezultă condiția dimensională pentru pistonul plonjor:

$$\frac{l_g}{D_p} + \frac{l_e}{D_p} + \frac{S}{D_p} < 10$$

Studiul diverselor soluții constructive pentru ghidaje și pentru etanșări a condus la următoarele valori orientative de gabarit: $l_g/D_p = 1 \dots 2$, $l_e/D_p = 2 \dots 3$. Prin urmare am ales

$$\frac{S}{D_p} = 5$$

astfel încât să rămână suficientă flexibilitate în alegerea soluțiilor constructive.

Pentru a asigura continuitatea debitului de apă evacuat prin duză, pompa de înaltă presiune se realizează cu cel puțin doi cilindri care funcționează în contratimp (când într-un cilindru se efectuează cursa de evacuare în celălalt se efectuează cursa de aspirație). La multiplicatoarele de presiune se folosesc doi cilindri de pompă de înaltă presiune, dar la pompele antrenate mecanic se întâlnesc frecvent soluții cu trei cilindri.

Numărul de curse pe minut este dictat de performanțele echipamentelor de acționare hidraulică. De regulă, distribuitorii cu sertar obișnuite acceptă $50 \dots 60$ comutări pe minut. La proiectarea instalației s-a ales $n = 60 \text{ cursa}/\text{min}$.

Puterea utilă furnizată de pompa de înaltă presiune este:

$$\mathcal{P} = \frac{\pi D_p^2}{4} S \frac{n}{60} p = 3.9 D_p^3 p$$

S-a ales pentru puterea utilă valoarea $\mathcal{P} = 20 \text{ kW}$ și rezultă următoarea corelație între presiunea maximă de refulare și diametrul pistonului plonjor:

$p \text{ [bar]}$	1000	2000	3000	4000
$D_p \text{ [mm]}$	37.1	29.5	25.8	23.4

Dacă impunem presiunea maximă de lucru $p = 3000 \text{ bar}$ rezultă:

$$D_p = 25 \text{ mm} \quad S = 125 \text{ mm}$$

În vederea antrenării pistoanelor plonjoare ale celor doi cilindri ai pompei de apă de înaltă presiune s-a optat pentru utilizarea a patru cilindri hidraulici cu simplă acțiune, cu diametrul interior al cilindrului $D_c = 60 \text{ mm}$ și diametrul tijei pistonului $D_t = 30 \text{ mm}$. Cilindrii hidraulici au o cursă maximă de 130 mm .

Cei patru cilindri sunt alimentați în paralel, astfel încât pentru acționarea pistonului care efectuează cursa de evacuare doi cilindri sunt alimentați pe fața pistonului (de secțiune $\pi D_c^2/4$) și ceilalți doi pe spatele pistonului (de secțiune $\pi(D_c^2 - D_t^2)/4$). Mecanismul de sincronizare a mișcării cilindrilor asigură însumarea forțelor tuturor cilindrilor. Prin urmare, raportul de amplificare al multiplicatorului de presiune este:

$$A = \frac{2 \frac{\pi D_c^2}{4} + 2 \frac{\pi(D_c^2 - D_t^2)}{4}}{\frac{\pi D_p^2}{4}} = 20.16$$

În [31] se precizează că raportul de amplificare utilizat la majoritatea instalațiilor industriale de tăiere cu jet de apă este de 20.

În cazul de față, pentru atingerea presiunii de 3000 bar pe circuitul de apă este necesară o presiune maximă în circuitul de ulei de 150 bar . Deasemenea, ținând cont de numărul de curse pe minut și de volumul de ulei vehiculat prin cilindrii hidraulici la o cursă, rezultă debitul de ulei necesar de 74 l/min .

6.2 Calculul de rezistență al cilindrilor pompei de apă de înaltă presiune

Condițiile speciale în care funcționează pompa de apă de înaltă presiune impun pentru cilindrii pompei o construcție fretată. În acest caz, cilindrul este realizat prin asamblarea cu strângere a unui cilindru interior și a unui exterior. Faptul că cilindrul interior este solicitat în repaus la compresione asigură compensarea unei părți din tensiunea de întindere corespunzătoare presiunii interioare. În plus, construcția fretată prezintă următoarele avantaje față de soluția monobloc:

- dacă se amorsează o fisură la suprafața interioară, unde apar tensiunile maxime, aceasta se propagă numai până la diametrul de fretaj, evitându-se eventuala rupere bruscă a cilindrului pe toată grosimea sa;

• deoarece fluidul de lucru este apă, cilindrul interior trebuie realizat din oțel inoxidabil, pe când cel exterior poate fi realizat dintr-un oțel mai slab aliat și deci mai ieftin.

În cele ce urmează vom nota cu D_i diametrul interior, D_f diametrul de fretaj și D_e diametrul exterior al cilindrilor. Materialul cilindrilor interior are tensiunea admisibilă σ_a , iar materialul cilindrilor exterior $a\sigma_a$ (a este raportul celor două tensiuni admisibile). Deasemenea, cu p_i se notează presiunea interioară și cu p_f presiunea realizată la diametrul de fretaj în urma asamblării cu strângere.

Rapoartele între diametrii caracteristici cilindrilor fretat sunt:

$$\beta_1 = \frac{D_f}{D_i} \quad \beta_2 = \frac{D_e}{D_f} \quad \beta = \frac{D_e}{D_i} = \beta_1 \beta_2$$

Relațiile de calcul pentru cilindrul fretat sunt:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{D_e}{D_i} = \frac{\sqrt{a}}{\frac{a+1}{2} - \frac{p_i}{\sigma_a}} \quad \text{pentru } p_i \text{ impus} \\ p_i &= \frac{\frac{a+1}{2} \beta - \sqrt{a}}{\beta} \sigma_a \quad \text{pentru } \beta \text{ impus} \\ \beta_1 &= \frac{D_f}{D_i} = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{a}}} \end{aligned}$$

Presiunea de fretaj este:

$$p_f = \frac{(\beta\sqrt{a} - 1)^2 (\beta - \sqrt{a}) \sigma_a}{\beta (\beta^2 - 1) 2}$$

iar strângerea necesară este:

$$s = D_f \frac{a\beta - \sqrt{a} \sigma_a}{\beta E}$$

unde E este modulul de elasticitate al oțelului. Dacă atât cilindrul interior cât și cel exterior au aceeași tensiune admisibilă σ_a , atunci $a = 1$ și relațiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{1 - \frac{p_i}{\sigma_a}} \quad p_i = \frac{\beta - 1}{\beta} \sigma_a \quad \beta_1 = \sqrt{\beta} \\ p_f &= \frac{(\beta - 1)^2 \sigma_a}{\beta (\beta + 1) 2} = \frac{1}{2} \frac{\beta - 1}{\beta + 1} p_i \quad s = D_f \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{\sigma_a}{E} = D_f \frac{p_i}{E} \end{aligned}$$

În condițiile de funcționare specifice instalațiilor de tăiere cu jet de apă Körner [25] recomandă pentru piesele "udate" de apă sub presiune ridicată oțelurile inoxidabile martensitice, care realizează un optim între rezistența la coroziune și rezistența mecanică. Aceste oțeluri se caracterizează prin conținut ridicat

de crom, uzual 13...20% și conținut de carbon de 0.1%. Pentru a menține tenacitatea la conținut ridicat de crom se aliază cu 2...4% nichel. În țara noastră se produc asemenea oțeluri cu marca 20Cr130, 30Cr130, 40Cr130 conform STAS 3583-80, respectiv 22NiCr170 conform STAS 11523-80. Aceste oțeluri ating în urma tratamentului termic de călire și revenire o rezistență la curgere $R_{p02} = 610 \text{ MPa}$ și o rezistență la rupere $R_m = 950 \text{ MPa}$. Pentru cilindrul exterior se poate utiliza un oțel aliat pentru construcții de mașini, STAS 791 80, care oferă practic aceleași proprietăți mecanice la un preț mai scăzut. În această categorie menționăm marca 41MoCrNi20, cu $R_{p02} = 690 \text{ MPa}$ și $R_m = 880...1080 \text{ MPa}$. Aceste caracteristici mecanice sunt garantate în urma tratamentului termic de călire și revenire înaltă, pentru semifabricate ce nu depășesc grosimi de 100 mm.

Pentru cilindrul pompei de înaltă presiune, considerat ca recipient sub presiune, tensiunea maximă admisibilă o vom calcula conform prescripțiilor tehnice ISCIR, C4 83 :

$$\sigma_a = \min \left(\frac{R_{p02}}{C_c}, \frac{R_m}{C_r} \right)$$

unde $C_c = 1.5$ și $C_r = 2.4$ sunt coeficienții de siguranță față de limita la curgere, respectiv rezistența la rupere.

În cele ce urmează se prezintă calculul cilindrilor fretat cu $D_i = 25 \text{ mm}$ supus la o presiune interioară $p_i = 3000 \text{ bar}$. Cilindrul interior este realizat din 22NiCr170 iar cilindrul exterior din 41MoCr11, cele două mărci de oțeluri fiind apropiate din punct de vedere al proprietăților mecanice. Conform normelor ISCIR, obținem pentru tensiunea admisibilă:

$$\sigma_a = 400 \text{ MPa}, \quad \text{respectiv } a = 1$$

Cu relațiile de calcul de mai sus obținem:

$$j = 4, \quad D_i = 100 \text{ mm}, \quad D_j = 50 \text{ mm}, \quad p_j = 900 \text{ bar}$$

Strângerea necesară realizării presiunii de fretaj este $s = 71 \mu\text{m}$. Pentru a ține cont de rugozitatea suprafețelor rezultată în urma prelucrării mecanice, strângerea calculată trebuie corectată determinându-se dtrângerea tabelară:

$$s_T = s + 1.2(R_{D_{j_{i_{max}}}} + R_{D_{j_{e_{max}}}})$$

unde $R_{D_{j_{i_{max}}}}$ și $R_{D_{j_{e_{max}}}}$ reprezintă înălțimile maxime ale microneregularităților suprafeței piesei cuprinse (cilindrul interior) respectiv piesei cuprinzătoare (cilindrul exterior). Printr-o rectificare fină, respectiv honuire, se poate ajunge la o rugozitate a suprafețelor $R_a = 0.4$ careia îi corespunde $R_{max} = 2 \mu\text{m}$. Strângerea tabelară va fi în acest caz $s_T = 76 \mu\text{m}$, aceasta fiind și valoarea minimă a strângerii.

Pentru realizarea îmbinării fretate cilindrul exterior trebuie încălzit față de cilindrul interior cu:

$$\Delta t = \frac{s_t + j_m}{\alpha D_f}$$

unde $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5} C^{-1}$ este coeficientul de dilatare termică liniară iar $j_m = 0.001 D_f = 50 \mu m$ este jocul suplimentar care se asigură pentru ușurința montajului. Rezultă în cazul de față $\Delta t = 230^\circ C$, la care se adună temperatura de montaj $20^\circ C$. În practică temperatura de $250^\circ C$ se mărește cu circa 20% pentru a compensa răcirea piesei în timpul manipulării, deci în final rezultă că cilindrul exterior trebuie încălzit la $300^\circ C$.

6.3 Schema hidraulică a instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză.

Fig.6.1 prezintă schema hidraulică a multiplicatorului de presiune împreună cu sursele de ulei, pentru circuitul de joasă presiune, și de apă pentru partea de presiune înaltă.

Pompa de apă de înaltă presiune este formată din doi cilindri CA1 și CA2 în care se mișcă pistoanele plonjoare PP1 și PP2. Cilindrii pompei sunt prevăzuți cu supapele de admisie SA și de evacuare SE. Pentru a evita trasee lungi de legătură pe partea de presiune ridicată, cilindrii pompei sunt montați cap în cap, având între ei blocul de supape.

Pistoanele plonjoare sunt antrenate de cilindrii hidraulici CU1, CU2, CU3 și CU4 de construcție specială, având pistonul fix și alimentarea cu ulei prin tija pistonului. Mișcarea simultană a cilindrilor hidraulici și a pistoanelor plonjoare este asigurată de sistemul de sincronizare SS, format din două traverse și două tije longitudinale. Când PP1 efectuează cursa activă, CU1 și CU2 îl împing prin intermediul traversei de care sunt legați, iar CU3 și CU4 îl trag în același sens prin intermediul celeilalte traverse și a tijelor. În această situație, uleiul sub presiune este introdus prin ramura B a distribuitorului. Mișcarea de translație a traverselor sistemului de sincronizare este ghidată cu cele patru ghidaje în V la 90° , G. Se observă că tijele care fac legătura mecanică între cele două traverse sunt solicitate totdeauna la întindere, neexistând pericolul flambajului.

Alimentarea cu ulei a cilindrilor hidraulici se face cu ajutorul pompei cu pistoane axiale și debit reglabil, PU. Pompa este antrenată cu motorul electric M1, 32 kW la 1480 rot/min și poate furniza un debit maxim de 160 l/min. Pompa de ulei PU aspiră din rezervorul RU (cu capacitatea de 1000 l) și trimite uleiul prin filtrul FU la distribuitorul cu sertar DS. Distribuitorul este DN20, 4/3, cu comandă electro-hidraulică, pilotul său fiind DN10. 4/3 acționat electromagnetic cu bobine de curent continuu la 24V.

Între filtrul de ulei și distribuitor este prevăzută supapa pilotată de descărcare

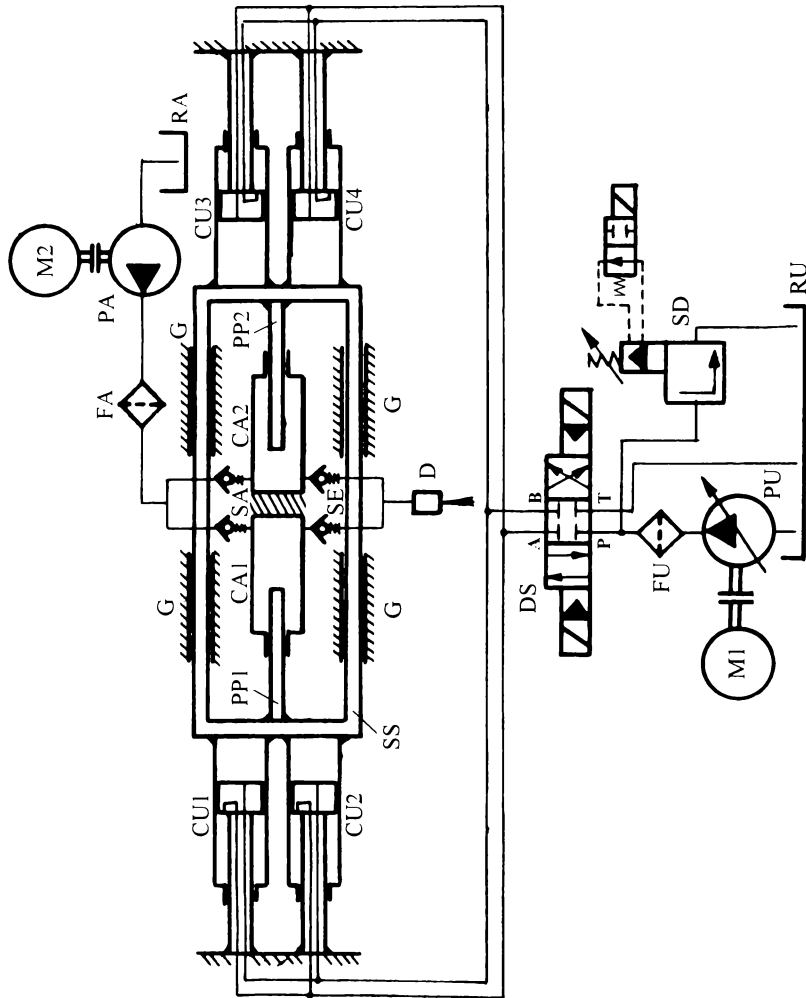


Figura 6.1: Schema hidraulică a instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză.

SD, cu cuplare electrică. Cu SD se poate regla manual presiunea maximă din sistem.

Alimentarea cu apă a pompei de înaltă presiune este realizată cu pompa Pitot PA care aspiră din rezervorul de apă RA (cu capacitatea de 100 l) și trimite apa

la o presiune de 10 bar, prin filtrul de apă FA, la supapele de admisie SA. Pompa PA este antrenată cu motorul electric M2 de 2kW la 3000 rot/min.

Apa sub presiune ridicată este trimisă la duza D care produce jetul de mare viteză. Debitul de apă evacuat prin duză se poate întoarce în rezervorul RA, sau poate fi evacuat la canal dacă se fac probe de tăiere a materialelor.

Funcționarea în bune condiții a instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză necesită urmărirea următorilor parametri funcționali:

1. *Presiunea uleiului la intrarea în distribuitor.* Aceasta se măsoară cu un manometru 0...400 bar montat pe sursa de ulei, reglarea valorii maxime a presiunii putând fi realizată manual de la supapa de descărcare. Decuplarea bobinei pilotului supapei conduce la dirijarea întregului debit furnizat de pompa de ulei la rezervorul de ulei. Nu se recomandă depășirea valorii de 250 bar pentru presiunea uleiului.
2. *Puterea electrică absorbită de motorul pompei de ulei.* Aceasta se măsoară cu ajutorul unei truse wattmetrice montată pe panoul electric general. Protejarea motorului la suprasarcină se face efectuând reglajul debitului și presiunii uleiului în următoarea succesiune:
 - se deschide complet supapa de descărcare și se decuplează bobina pilotului;
 - se stabilește valoarea dorită a debitului;
 - se cuplează supapa de descărcare și se crește nivelul presiunii maxime urmărind continuu puterea absorbită de motor.
3. *Presiunea de refulare a pompei Pitot care alimentează pompa de înaltă presiune.* Aceasta se măsoară cu un manometru 0...25 bar și în condiții normale de funcționare trebuie să fie 10...12 bar.
4. *Frecvența curselor efectuate de multiplicatorul de presiune.* Pentru aceasta, cu ajutorul unui numărător electronic cuplat la comutatorul electronic se măsoară durata unei curse. În condiții normale de funcționare, durata cursei spre stânga trebuie să fie egală cu cea a cursei spre dreapta, iar valoarea ei nu trebuie să scadă sub 1 s. Durata, respectiv frecvența curselor constituie mărimea primară din care se poate calcula debitul de ulei utilizat.
5. *Presiunea apei înaintea duzei* se măsoară cu un traductor special realizat prin dispunerea de timbre tensometrice pe conducta de legătură între blocul de supape și duză. Tronsonul conductei pe care sunt montate timbrele are diametrul interior 4 mm și exterior 12 mm. Etalonarea traductorului oferă legătura între valoarea presiunii și indicația punții tensometrice la care sunt cuplate timbrele. Trebuie precizat ca presiunea uleiului la intrarea în distribuitor este mai mare decât presiunea apei în fața duzei împărțită cu coeficientul de amplificare datorită pierderilor hidraulice din distribuitor, furtunile de racord și traseele interne ale cilindrilor hidraulici.

6.4 Descrierea instalației experimentale

În Fig.6.2 este prezentată vederea frontală a instalației experimentale. Pe șasiul 1 este montat cadrul multiplicatorului de presiune 2, care susține cilindrii hidraulici și pompa de înaltă presiune 5. Schimbarea sensului de mișcare la capăt de cursă este realizată cu două microîntrerupătoare montate în suportul 14. Microîntrerupătoarele comandă comutatorul electronic 23, care alimentează alternativ bobinele distribuitorului 22. Legătura de la placa distribuitorului la racordurile cilindrilor hidraulici 16 se realizează cu furtune DN6, iar alimentarea cu ulei a instalației se realizează cu două furtune DN10 (nefigurate pe desen).

Apa din rezervorul 18 este trimisă de pompa Pitot 19 la racordurile supapelor de aspirație ale pompei de înaltă presiune, 15. Presiunea de refulare a pompei 19 este măsurată cu manometrul 20.

Jetul de apă de mare viteză este generat de duza 17 și este captat de paharul montat în masa 21. Masa poate fi deplasată pe verticală pentru a regla distanța până la duză. Debitul de apă evacuat prin duză se poate întoarce direct în rezervorul 18 sau poate fi dirijat spre canalizare (în cazul efectuării unor probe de tăiere) prin montarea unui dop în paharul de prindere a jetului.

În Fig.6.3 este prezentată vederea de sus a instalației, punându-se în evidență componentele multiplicatorului de presiune. Pompa de înaltă presiune 5 este fixată pe cadru cu bolțurile 7 care materializează o axă orizontală de rotație. Cele două perechi de cilindri hidraulici 3 și 4 au deasemenea la capetele fixe axe orizontale de rotație materializate de bolțurile 6. Partea mobilă a cilindrilor hidraulici este fixată cu bolțuri verticale în traversele 8 și 9, acestea fiind legate între ele prin intermediul tijelor 10. Cele două traverse antrenează pistoanele plonjoare 12 și 13. Când pistonul 12 efectuează cursa de refulare (intră în cilindru) este împins de cilindrii 3 prin intermediul traversei 8, forța exercitată de cilindrii 4 fiind transmisă prin intermediul tijelor 10 care sunt solicitate numai la tracțiune. Traversele culisează în ghidajele 11, articulațiile realizate cu bolțurile 6 și 7 asigurând preluarea eventualelor abateri de la alinierea cilindrilor hidraulici cu pompa de apă de înaltă presiune.

Gabaritul șasiului instalației este $2000 \times 1100 \times 400 \text{ mm}$.

Fig.6.6 prezintă o secțiune transversală prin **pompa de apă de înaltă presiune**. În cei doi cilindri fretați 1 se mișcă alternativ pistoanele plonjoare 2. Capetele cilindrilor sunt închise cu blocul de supape 3 care conține supapele de admisie, de evacuare și are prevăzut racordul spre duza de producere a jetului. Ansamblul cilindrii – bloc supape este fixat cu capacele fixe 4 și cu capacele demontabile 6. Capacele 6 sunt strânse cu prezoanele 7. Capacele fixe sunt rigidizate cu jugurile 5, acestea din urmă fiind legate de cadrul multiplicatorului cu două bolțuri conice.

Etanșarea pistonului plonjor 10 este montată în paharul 8. Strângerea paharelor și implicit a inelelor de etanșare fixe 14 este realizată cu piesele de închidere 9. Inelele de etanșare statică 14 sunt realizate din oțel inoxidabil și

au secțiunea transversală sub formă de triunghi echilateral. Etanșarea pistonului este pretensionată cu inelele de împingere 10, acționate de arcurile 12. În piesele de închidere sunt prevazute ghidajele pistonului plonjor 13, realizate din bandă de teflon cu bronz.

Pistonul plonjor împreună cu sistemul său de antrenare este prezentat în Fig.6.7. Pistonul 1 este antrenat de traversa 2 prin intermediul bolțului 3. Legătura între piston și bolț se face cu talpa profilată 4, fixată de piston cu șurubul 5. Acest sistem asigură o articulație cilindrică cu ax vertical în timpul cursei de evacuare (când pistonul este împins în cilindru), respectiv permite retragerea pistonului în timpul cursei de admisie. Articulațiile cilindrice ale plonjoarelor (cu ax vertical) și corpului pompei (cu ax orizontal) asigură deplasarea corectă a pistonului în cilindru, fără să apară solicitări deosebite în ghidajele 13 (Fig.6.6).

În Fig.6.10 este prezentat **subansamblul etanșării de înaltă presiune a pistonului plonjor**. Etanșarea este formată din inelul de etanșare 1, realizat din teflon, sprijinit între inelul de pretensionare 2 și inelul antiextrudare 3. Cele trei inele sunt plasate în spațiul dintre paharul etanșării 4 și pistonul plonjor 6. Împingerea axială pentru realizarea pretensionării este asigurată de inelul de împingere 5.

Când presiunea din cilindru crește, inelul de etanșare este presat pe pahar, respectiv pe piston, de apa sub presiune.

Desenul de execuție al inelului de etanșare, în stare nemontată este prezentat în Fig.6.11. Pe porțiunea inelului care vine în contact cu paharul, respectiv cu pistonul, sunt practicate două canale care sunt umplute cu apă în timpul cursei de admisie. La cursa de refluxare, când inelul este presat pe suprafețele metalice, apa din aceste canale asigură o peliculă de lichid necesară lubrifierii, evitându-se astfel uzura prematură [69].

În Fig.6.12 este prezentată **schema electrică a comutatorului electronic**. Cele două microîntrerupătoare K1 și K2 comandă porțile integratului MMC4011 montate ca bistabil. Comanda bobinelor distribuitorului, B1 și B2 se face cu două perechi de tranzistoare 2N3055 montate în cuplaj Darlington. Montajul asigură alimentarea alternativă a celor două bobine, fiind protejat la comutări parazite care pot apărea la capetele de cursă, precum și la tensiunile de autoinducție care apar la decuplarea bobinelor (prin diodele D10N1R montate în paralel cu B1 și B2). La punerea sub tensiune a comutatorului electronic, una din bobine este alimentată, asigurând pornirea multiplicatorului de presiune într-un sens. Inversarea sensului de mișcare se face la atingerea microîntrerupătorului de capăt de cursă, asigurându-se menținerea acestei stări până la atingerea celuiilalt microîntrerupător. Întreruperea tensiunii de alimentare conduce la oprirea mișcării multiplicatorului deoarece distribuitorul cu sertar este în poziție mediană, cu toate căile blocate. În final, precizăm că utilizarea componentelor electronice de comutare statică asigură avantaje nete față de schemele cu relee, atât din punct de vedere al timpului de răspuns cât și al siguranței în funcționare.

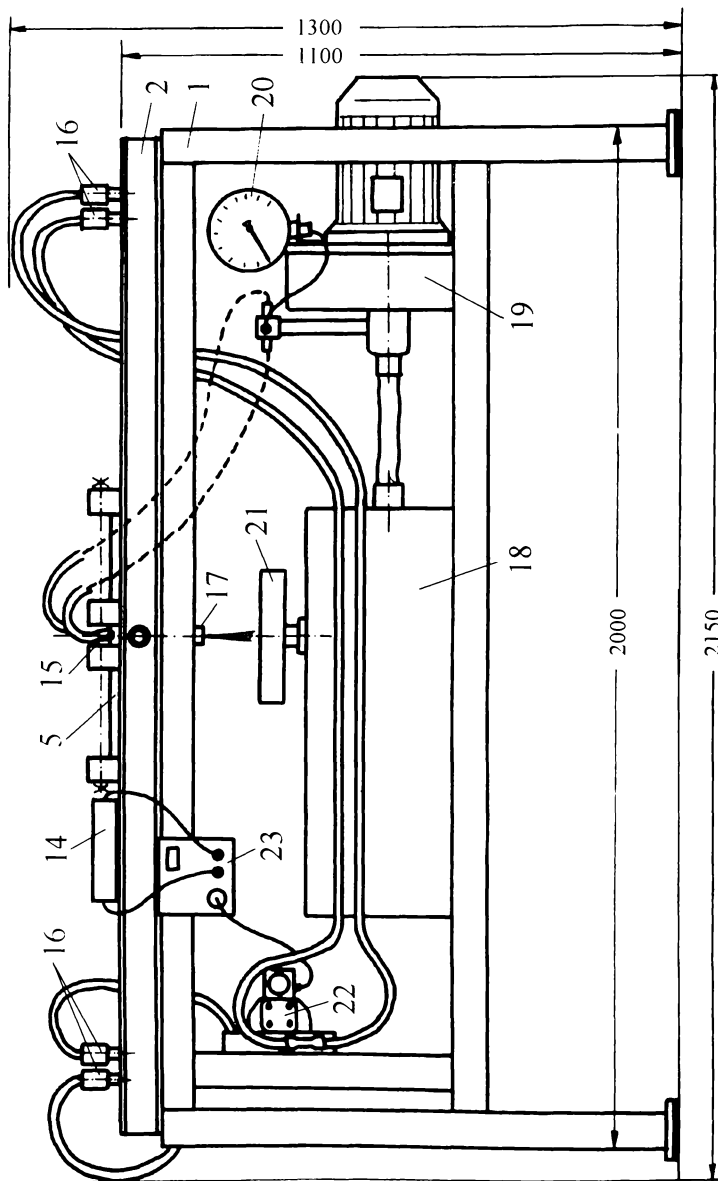


Figura 6.2: Vedere frontală a instalației experimentale de generare a jeturilor de apă de mare viteză.

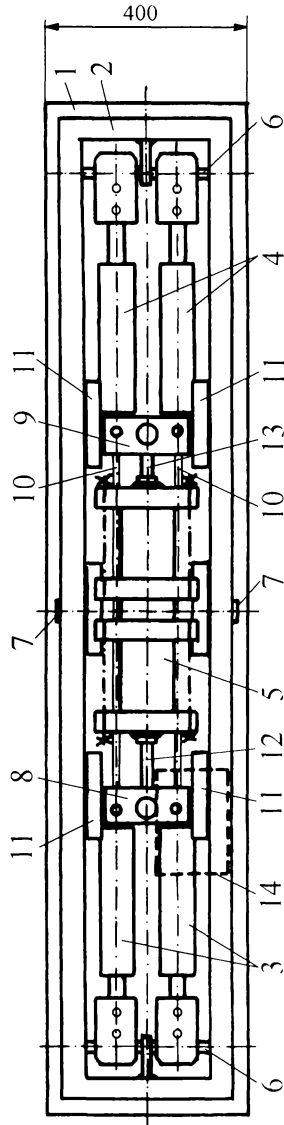


Figura 6.3: Vedere de sus a instalației experimentale de generare a jeturilor de apă de mare viteză.

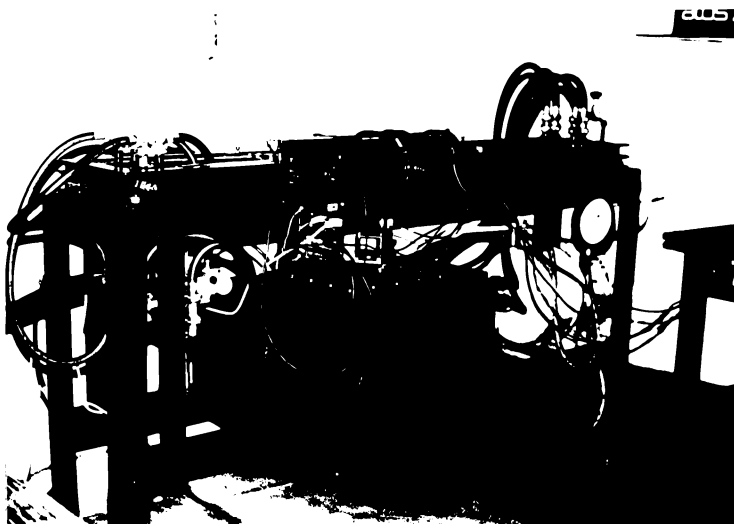


Figura 6.4: Vedere generală a instalației experimentale pentru generarea jeturilor de apă de mare viteză

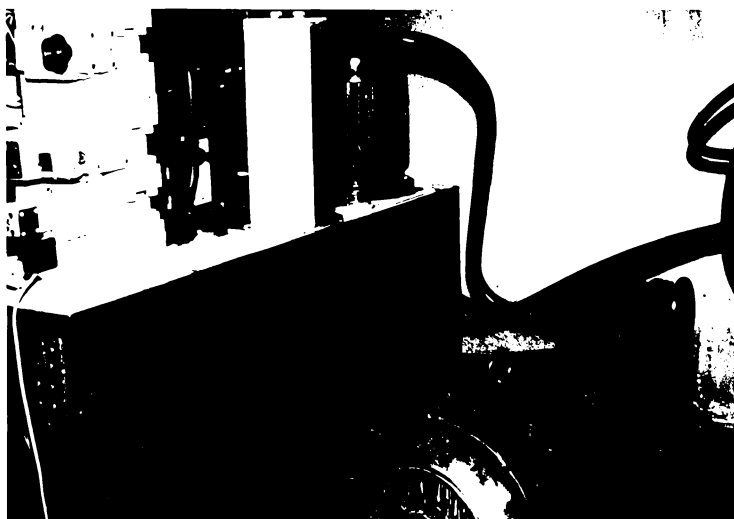


Figura 6.5: Sursa de ulei sub presiune pentru alimentarea multiplicatorului de presiune

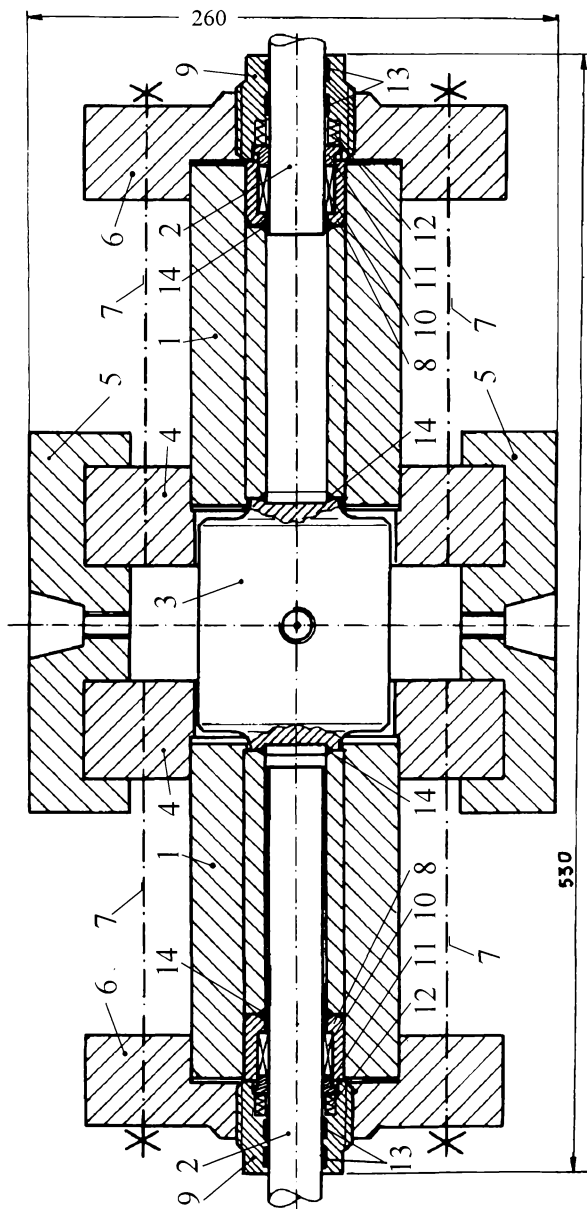


Figura 6.6: Pompa de apă de înaltă presiune.

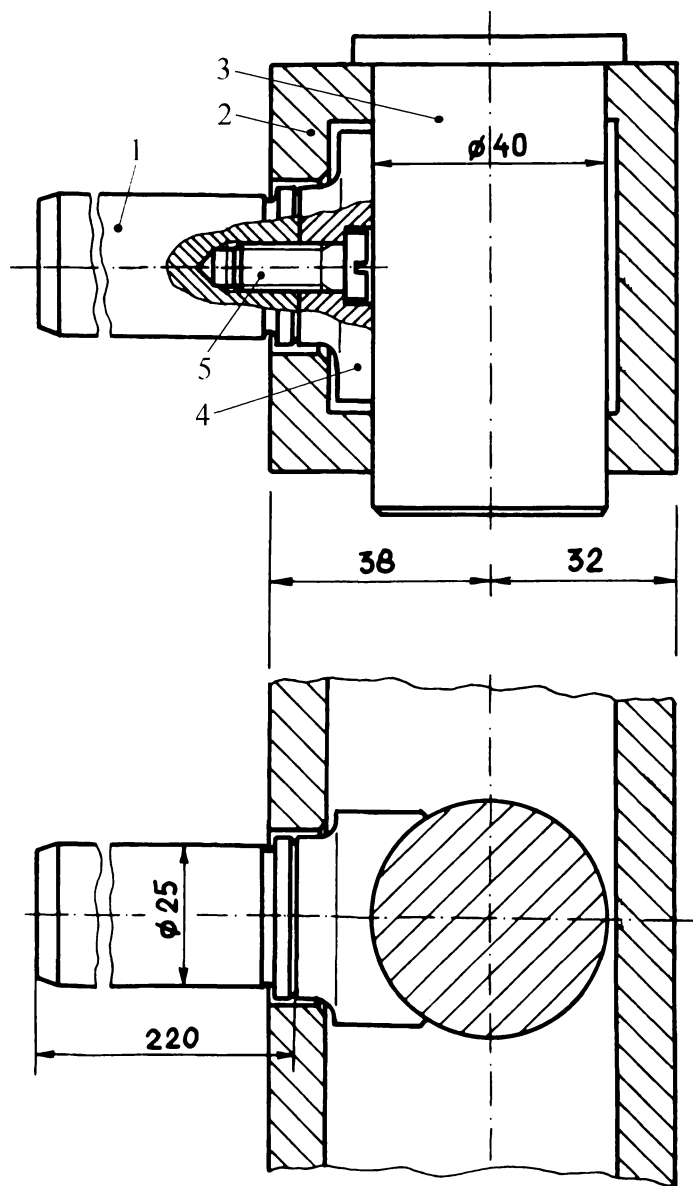


Figura 6.7: Pistonul plonjour al pompei de apă de înaltă presiune și sistemul său de antrenare.

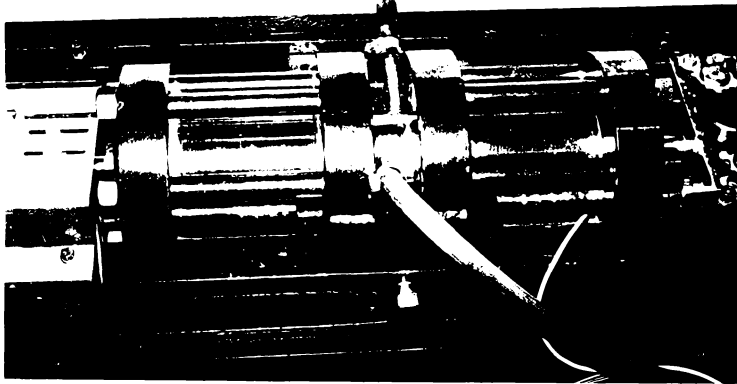


Figura 6.8: Vedere generală a pompei de apă de înaltă presiune

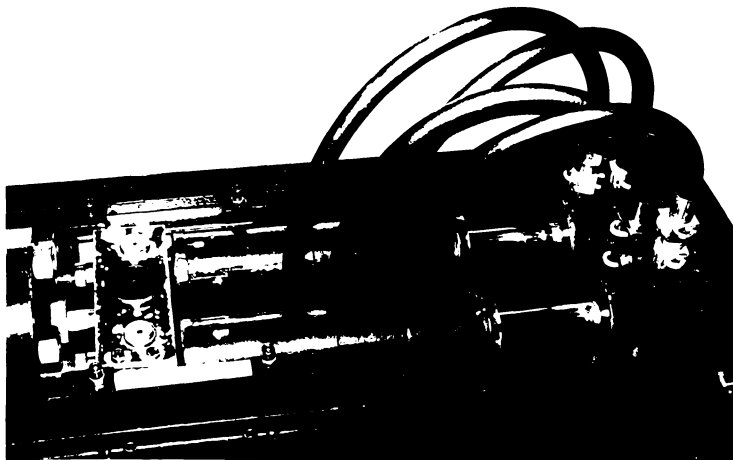


Figura 6.9: Cilindrii hidraulici dreapta și sistemul de antrenare a pistonului plon-jor.

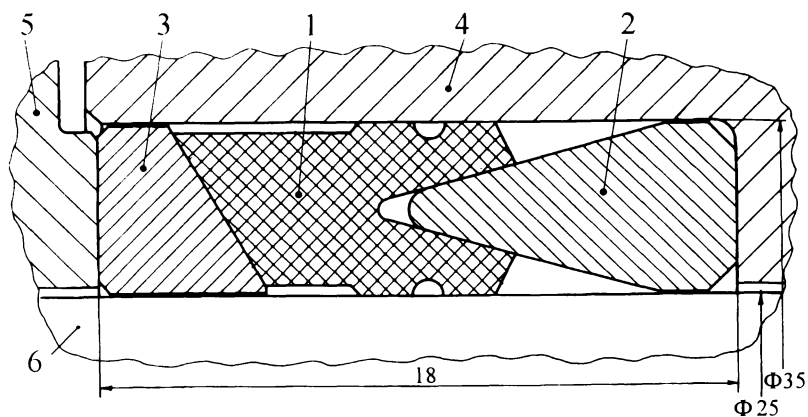


Figura 6.10: Etanșarea pistonului plonjor al pompei de apă de înaltă presiune.

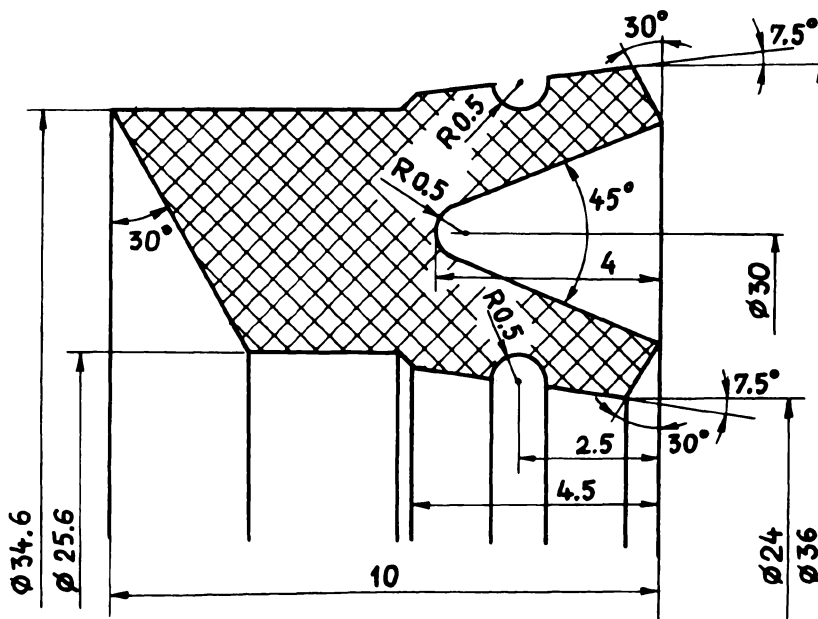


Figura 6.11: Inclul de teflon al etanșării de înaltă presiune.

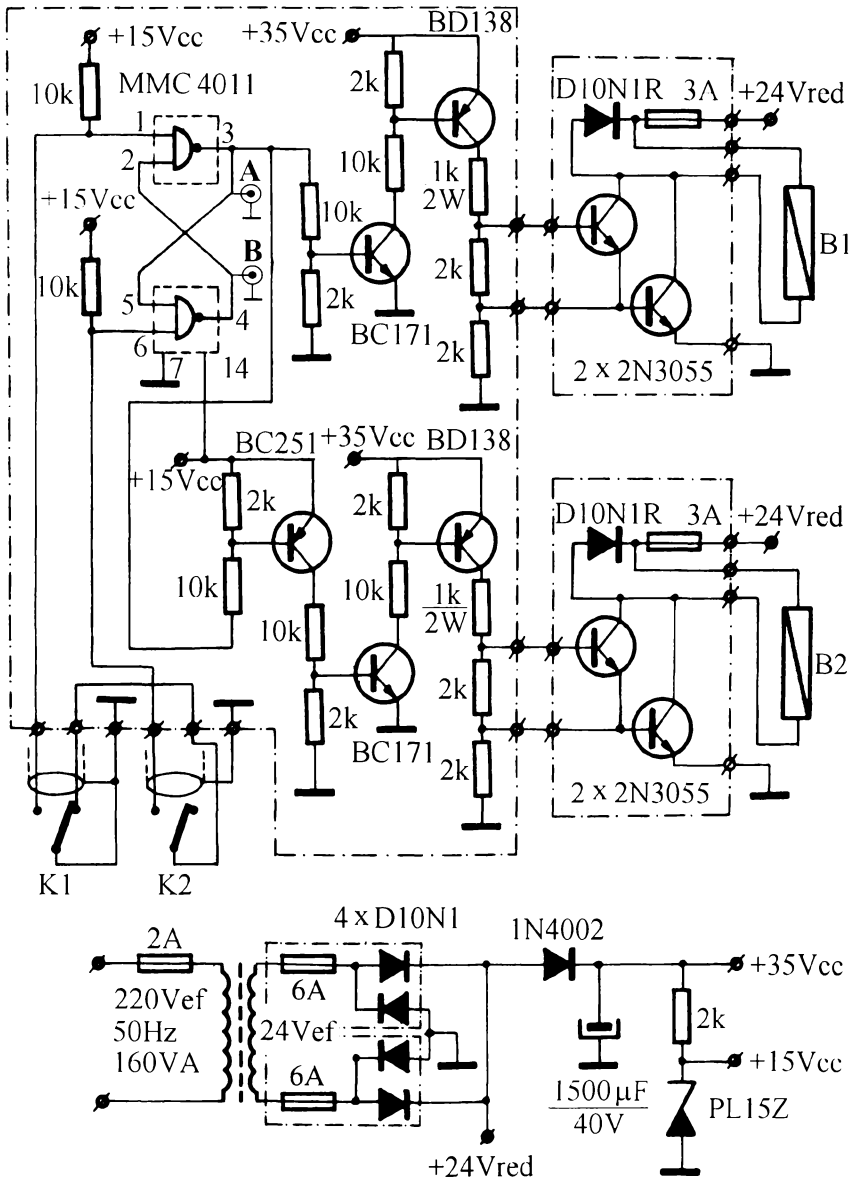


Figura 6.12: Schema comutatorului electronic pentru comanda distribuitorului electrohidraulic.

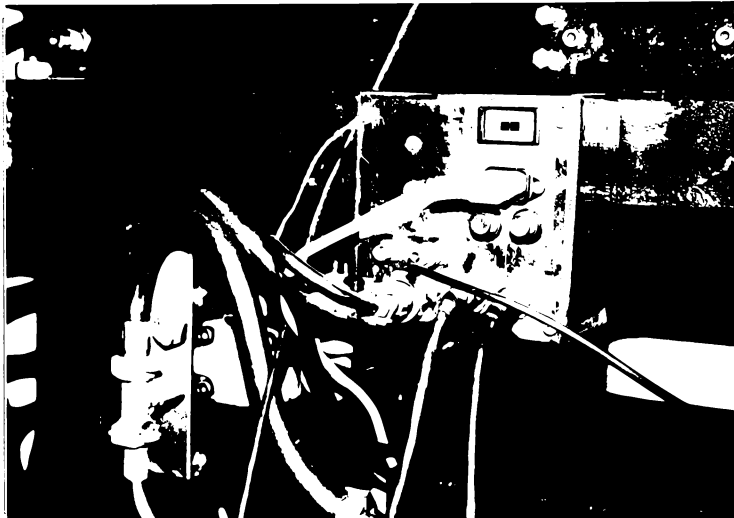


Figura 6.13: Comutatorul electronic și distribuitorul electrohidraulic pe care îl comandă.

Jetul de apă de mare viteză este produs de duza prezentată în Fig.6.11. În corpul duzei 1 este fixată pastila de safir 2 prin intermediul inelului 3. Inelul 3 este realizat dintr-o rășină epoxidică, care îndeplinește și rolul de etanșare statică. În pastila de safir este practică la ieșire o degajare cu scopul de a micșora lungimea orificiului duzei, astfel încât jetul să nu se reatașeze pe perețele porțiunii cilindrice. Forma acestei degajări poate fi semisferică sau conică, funcție de tehnologia de execuție preferată de producător. În paragraful următor este prezentată analiza stării de tensiune din pastila de safir, pentru cele două tipuri de degajări.

O problemă deosebită a reprezentat-o fixarea pastilei de safir în corpul duzei, respectiv dispunerea rășinii epoxidice. Polimerii epoxidici se prezintă ca polimeri termorigizi cu proprietăți mecanice foarte bune (rezistență la compresiune 200...270 MPa). Pentru realizarea compoundului se folosește rășina și întăritorul (dicianoamidă) în proporție 1:1. Suprafața pe care aderă polimerul se degresează în prealabil cu alcool etilic absolut 99.5% după care se usucă în etuvă la 110°C. Polimerul se dispune în spațiul dintre pastilă și montura metalică în două etape:

- prima cantitate de compound se depune în spațiul dintre pastilă și montura metalică, după care se păstrează la temperatura de 70°C timp de 3 minute pentru fluidificare;
- după ce compoundul a umplut uniform spațiul din jurul pastilei, se completează dacă este necesar până la nivelul superior al pastilei, după care se rigidizează prin

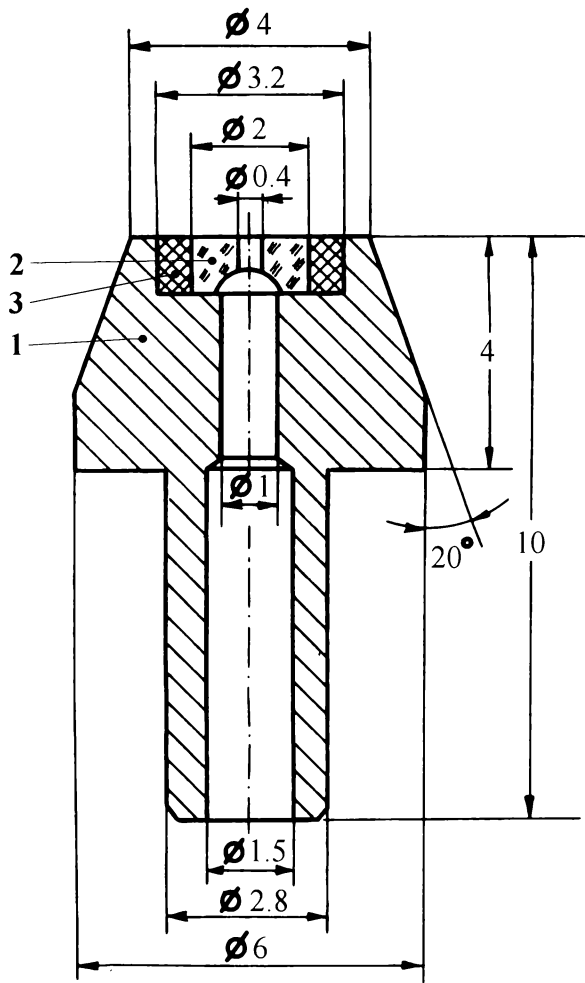


Figura 6.14: Duza cilindrică, cu pastilă de safir.

menținere la 105°C timp de 20 de minute.

Modul de fixare al duzei la capătul conductei de înaltă presiune este prezentat în Fig.6.15. Duza 1 este etanșată pe porțiunea conică de la capătul conductei 2, fiind strânsă cu piulița 3. Orificiul 4 permite evacuarea eventualelor scăpări de apă prin etanșarea conductă-duză, evitându-se deteriorarea filetului M16 și eventual smulgerea piuliței.

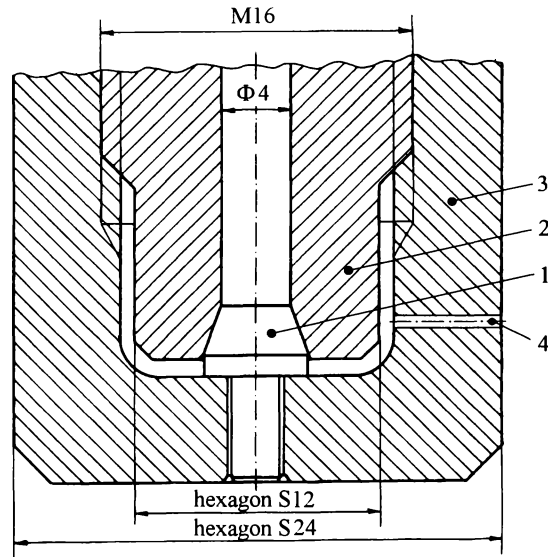


Figura 6.15: Montura duzei.

6.5 Analiza stării de tensiune din pastila de safir a duzei

Pastila de safir în care este practicat orificiul duzei are forma cilindrică, cu diametrul de 2 mm și grosimea de 1 mm . Pastila este solicitată mecanic sub acțiunea presiunii apei dinaintea duzei, atât pe fața frontală unde se găsește muchia de intrare a orificiului cât și pe suprafața laterală prin intermediul inelului de fixare. Deoarece presiunea maximă atinsă în instalațiile de tăiere cu jet de apă este de 4000 bar , calculul stării de tensiune din pastilă s-a făcut în ipoteza unei solicitări normale pe suprafețele precizate mai sus de 400 MPa . Fața pastilei unde este practicată degajarea este rezemată pe corpul metalic al duzei.

Datorită simetriei axiale a pastilei, vom avea o solicitare axial-simetrică, și prin urmare este suficient să analizăm starea de tensiune într-un semiplan meridian. Figura 6.16 prezintă domeniul de analiză și condițiile corespunzătoare pe frontieră pentru o pastilă cu degajare semisferică, respectiv conică.

Safirul sintetic are modulul de elasticitate $3.5 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$, coeficientul lui Poisson 0.3 și tensiunea de rupere 2000 MPa . Analiza stării de tensiune s-a făcut cu Metoda Elementului Finit, utilizând programul ELCUT.

Figura 6.17 prezintă discretizarea domeniului cu elemente triunghiulare și distribuția tensiunii echivalente pentru cele două cazuri studiate. Pe figurile

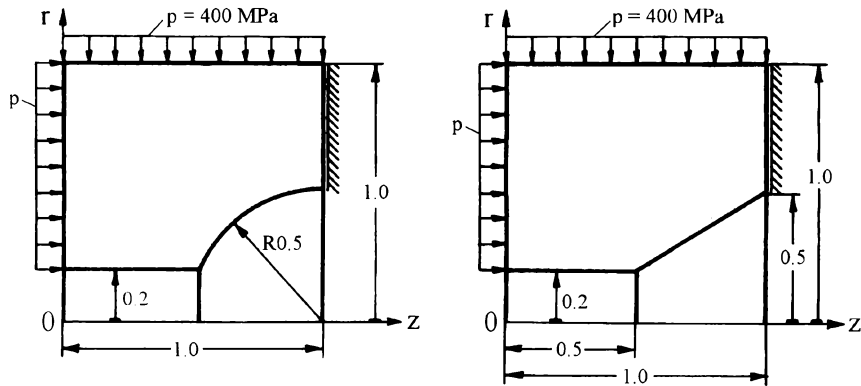


Figura 6.16: Domeniul de analiză și condițiile pe frontieră pentru studiul stării de tensiune în pastila de safir a duzei.

cu harta tensiunilor este prezentată și deplasarea frontierei duzei sub acțiunea presiunii, mărită de 50000 de ori.

Se observă că pentru pastila cu degajare semisferică valoarea maximă a tensiunii este de 700 MPa , iar pentru pastila cu degajare conică aceasta atinge 900 MPa . Deasemenea, solicitarea este mai uniformă în cazul degajării semisferice decât dacă se practică degajarea conică. În acest din urmă caz evidențindu-se o concentrare a tensiunii la interiorul porțiunii inelare de sprijin.

În concluzie, se constată că degajarea semisferică conduce la o distribuție mai favorabilă a tensiunii în pastila de safir decât degajarea conică, în ambele cazuri însă tensiunea maximă nedepășind jumătate din tensiunea de rupere a safirului. Deasemenea, nivelul maxim al tensiunii coroborat cu solicitarea în regim pulsator (datorită variației presiunii la inversarea sensului de mișcare al multiplicatorului de presiune) arată că utilizarea oțelurilor aliate și chiar a carburilor metalice este improprie pentru zona din vecinătatea orificiului duzei.

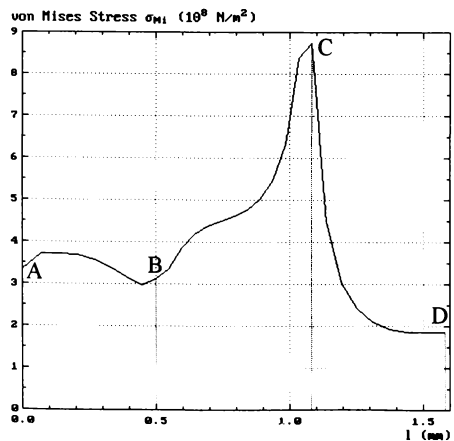
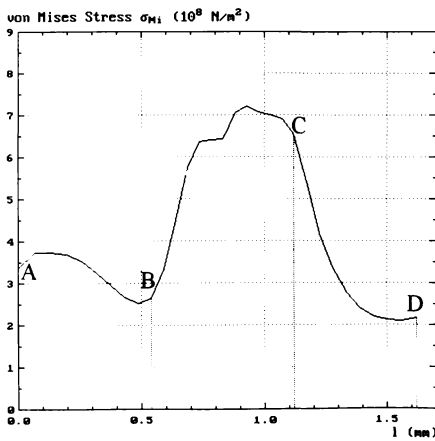
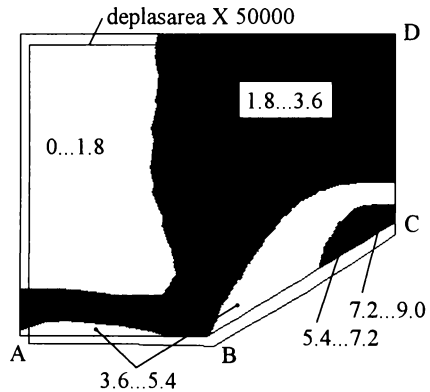
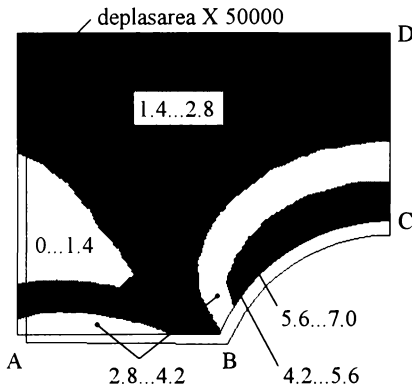
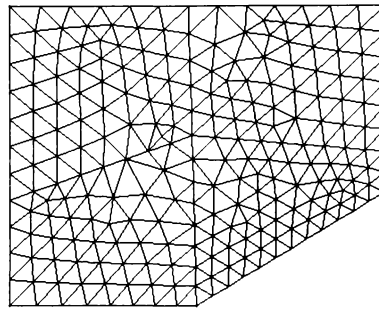
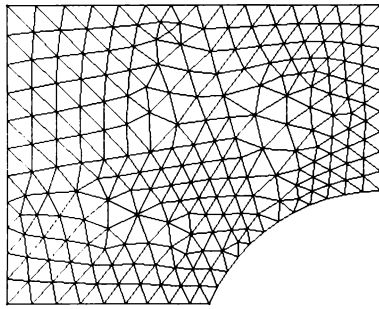


Figura 6.17: Analiza stării de tensiune în pastila de safir a duzei, cu degajare semisferică, respectiv conică.

Capitolul 7

Studiul experimental al structurii jetului de apă de mare viteză și al instalației de generare a lui

În capitolul precedent este prezentată instalația experimentală realizată de autor pentru generarea jeturilor de apă de mare viteză. Dacă partea de alimentare și comandă a cilindrilor hidraulici conține elemente uzuale pentru schemele de acționare hidraulică, elementele componente ale pompei de apă de foarte înaltă presiune sunt de concepție și realizare proprie. Prin urmare se impune verificarea experimentală a soluțiilor constructive utilizate la pompa de apă cu piston plonjor prin stabilirea performanțelor funcționale ale pompei. Deasemenea trebuie menționat că în timpul funcționării instalației au fost constatate unele neajunsuri în special la etanșările pistoanelor plonjoare și la sistemul de comutare a sensului de mișcare la capăt de cursă, ceea ce a condus la îmbunătățirea soluțiilor constructive pentru aceste elemente.

Pentru investigarea experimentală a jetului de apă de mare viteză propunem în această lucrare o metodă optică originală. Analiza metodelor de studiu a structurii jeturilor de lichid în aer, prezentate în literatură (Cap. 4.2) evidențiază trei tipuri principale: metode mecanice, electrice și optice. Primele două tipuri presupun introducerea unui obstacol solid în jet pentru a măsura fie forța sau presiunea, fie conductibilitatea electrică. În cazul jeturilor de foarte mare viteză acesta poate fi un important neajuns, ținând cont că impactul lichidului cu solidul se face la o viteză de $600 \dots 900 \text{ m/s}$.

Metodele optice au avantajul că elimină contactul mecanic cu jetul. Cea mai comodă metodă optică este fotografierea, obținându-se pe această cale o estimare a evazării jetului și eventual informații calitative asupra structurii lui. Cantitativ, evazarea se exprimă prin coeficientul k_1 (vezi ecuația 4.61) cu ajutorul

căruia se pot calcula lungimile caracteristice ale jetului (ecuațiile 4.66, 4.67 și 4.68). Fotografiiile jeturilor de mare viteză de apă în aer evidențiază formarea unei anvelope de picături fine în jurul vânei centrale de lichid și de aceea este relativ dificil de estimat cu precizie poziția frontierei jetului.

Metoda optică propusă de noi utilizează analiza variației intensității unui fascicol LASER care străbate transversal jetul, ținând cont că difuzia semnalului luminos depinde de structura amestecului bifazic apă-aer.

7.1 Studiul experimental al funcționării pompei de apă de înaltă presiune

7.1.1 Principalele probleme apărute în funcționarea instalației de generare a jeturilor de apă de mare viteză și modificările constructive realizate pentru eliminarea lor

Pompa de apă de înaltă presiune este o pompă volumică cu piston plonjor, cu doi cilindri montați cap în cap (Fig.6.6). Blocul de supape este comun celor doi cilindri și conține supapele de admisie și de refulare. Supapele au ca element de închidere o bilă (cu diametrul de 5.5 mm) care se așează pe un scaun conic (cu unghiul conului de 90°), orificiul controlat de bilă având diametrul de 3 mm. În repaos, bila este ținută în contact cu scaunul cu ajutorul unui arc. Din precizările de mai sus rezultă că supapele reprezintă rezistențe hidraulice pe traseul de vehiculare a apei. Evident, din punct de vedere funcțional este necesar ca supapele de admisie să permită umplerea completă a cilindrului, și de aceea pentru învingerea rezistențelor hidraulice de pe traseul de admisie se utilizează pompa Pitot care realizează o presiune de 10...12 bar. În plus, toate supapele trebuie să asigure închiderea completă a orificiului pe care îl controlează, pentru a evita trecerea apei dintr-un cilindru în celălalt sau returnarea în traseul de aspirație. La punerea în funcțiune a instalației s-a urmărit ajustarea tensionării arcurilor supapelor de admisie astfel încât să se asigure așezarea fermă a bilei pe scaun concomitent cu diminuarea rezistenței hidraulice. În plus, scaunele supapelor sunt realizate ca piese separate, asamblate cu filet în blocul supapelor, astfel încât să poată fi ușor schimbate în caz de defectare.

O atenție deosebită a fost acordată etanșării pistonului plonjor (Fig.6.10). Principalele probleme care au apărut în funcționare au fost legate de rezistența mecanică a inelului de teflon al etanșării (Fig.6.11) evidențiindu-se două tipuri de defecțiuni:

- extrudarea teflonului prin interstițiul dintre inelul de sprijin și paharul etanșării;
- distrugerea prin solicitare la compresiune a buzei inelului care este în contact cu pistonul plonjor.

Analiza acestor defecțiuni a condus la concluzia că strângerea inelului de teflon între inelele de sprijin și de pretensionare nu se face uniform pe toată circumferința, în principal datorită lungimii relativ reduse de ghidare a pieselor în paharul etanșării. În plus, am presupus că strângerea de la montaj nu permite accesul uniform al apei în degajarea la 45° practică în inelul de teflon, cauzând solicitarea lui neuniformă sub acțiunea apei sub presiune din cilindru.

În concluzie s-au luat următoarele măsuri:

- realizarea unui nou inel metalic de sprijin, la care jocul față de paharul etanșării a fost diminuat de la 0.1 mm la aproximativ $0.03 \dots 0.05\text{ mm}$ în vederea împiedicării extrudării inelului de teflon;
- practicarea în inelul de pretensionare a 6 orificii axiale cu diametrul de 1 mm dispuse echidistant pe un cerc cu diametrul de 30 mm , asigurându-se accesul apei sub presiune în degajarea la 45° a inelului de teflon și presarea uniformă a acestuia din urmă pe paharul etanșării respectiv pe pistonul plonjor;
- punerea în mișcare lentă a pistonului plonjor în timpul strângerii etanșării, astfel încât să se realizeze autocentrarea pistonului cu paharul etanșării prin intermediul inelului de teflon.

În final s-a obținut o comportare corespunzătoare în funcționare a etanșării plonjorului, nefiind observate pierderi semnificative după aproximativ 20 de ore de funcționare. Concomitent a fost limitată presiunea de lucru la valoarea de 2000 bar în vederea creșterii durabilității etanșării.

Pentru etanșările statice, realizate cu inele metalice a căror secțiune transversală are forma unui triunghi echilateral, s-au luat măsuri speciale pentru lustruirea suprafețelor metalice care vin în contact direct și curățarea atentă a acestora, inclusiv degresare, înainte de montare.

În funcționare s-a constatat că prezența urmelor de ulei sau unsoare consistentă pe suprafața pistonului conduce la creșterea bruscă a pierderilor de apă prin etanșarea lui, datorită filmului de lubrefiant care se formează între inelul de teflon și piston. Prin urmare, înainte de montare pistoanele au fost curățate complet de lubrefianți.

O altă problemă importantă sesizată la punerea în funcțiune a fost legată de comanda microîntrerupătoarelor care comandă inversarea sensului de mișcare la capăt de cursă. Microîntrerupătoarele sunt prevăzute din construcție cu o lamelă elastică ce acționează microcontactul. Inițial, lamela era acționată cu un știft montat prin filetare într-unul din bolțurile ce realizează legătura dintre cilindrul hidraulic și traversă. La viteze mici de deplasare, (durata cursei de $4 \dots 5\text{ s}$) sistemul funcționa corect, dar pe măsură ce scădea durata cursei (la $1 \dots 2\text{ s}$) s-a constatat deformarea lamelor. Aceasta s-a datorat inerției sistemului care se mai deplasa aproximativ 5 mm după comanda electrică a distribuitorului electrohidraulic. În consecință, comanda inversării sensului de mișcare devenea nesigură, constatându-se chiar spargerea unui microîntrerupător.

Ținând cont de această observație, s-a modificat sistemul de antrenare al

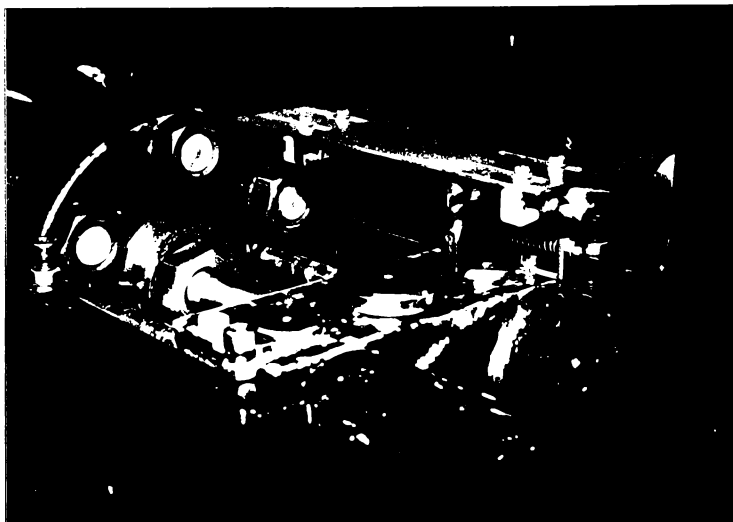


Figura 7.1: Sistemul cu pârghie elastică de acționare a microîntrerupătoarelor de capăt de cursă.

microîntrerupătoarelor prin înlocuirea știftului rigid cu o pârghie care folosește știftul original ca articulație. Unul din capetele pârghiei este sprijinit cu două arcuri, iar capătul liber acționează lamelele microîntrerupătoarelor, Fig.7.1.

7.1.2 Calculul, construcția și etalonarea traductorului de înaltă presiune

Presiunea apei înaintea duzei este un parametru determinant pentru evoluția și performanțele jetului. Valoarea ei ajunge la instalațiile de tăiere cu jet la 4000 *bar*, dar pentru instalația experimentală prezentată în capitolul anterior s-au utilizat presiuni până la 2000 *bar*. Măsurarea acestei presiuni necesită un traductor de construcție specială, având în vedere că nu se produc uzual manometre în acest domeniu.

Traductorul pentru măsurarea presiunii, prezentat în continuare, este de concepție și realizare proprie. Am pornit de la ideea utilizării ca element sensibil a conductei de legătură între blocul de supape și duză, a cărei deformare sub acțiunea presiunii interioare este utilizată ca o măsură a presiunii. Deformația este măsurată cu ajutorul unor țimbre tensometrice dispuse pe suprafața exterioară a conductei. Pentru a asigura o sensibilitate corespunzătoare a traductorului trebuie ca tensiunea pe suprafața exterioară să aibă o valoare de câteva zeci de *MPa* (cel mult 100) în cazul în care presiunea interioară atinge valoarea maximă măsurată.

Ținând cont că traductorul este un cilindru cu pereți groși, notând cu D_i diametrul interior și cu D_e diametrul exterior relațiile care permit determinarea tensiunii radiale σ_r , respectiv tangențiale σ_t , funcție de presiunea interioară p sunt [7]:

$$\begin{array}{ll} \text{La interior} & \text{La exterior} \\ \sigma_r = -p & \sigma_r = 0 \\ \sigma_t = \sigma_{t \max} = p \frac{D_e^2 + D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} & \sigma_t = 2p \frac{D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} \end{array}$$

Diametrul interior a fost ales $D_i = 4 \text{ mm}$ din considerațiile prezentate la studiul geometriei duzei cilindrice, fiind de zece ori mai mare decât diametrul orificiului duzei. Valoarea diametrului exterior este $D_e = 12 \text{ mm}$, pentru care, la o presiune interioară de 2000 bar avem următoarele valori ale tensiunilor:

$$\begin{array}{ll} \text{La interior} & \text{La exterior} \\ \sigma_r = -200 \text{ MPa} & \sigma_r = 0 \\ \sigma_t = 250 \text{ MPa} & \sigma_t = 50 \text{ MPa} \end{array}$$

La acestea se adaugă valoarea tensiunii axiale datorată întinderii tubului produsă de forța ce apasă pe suprafața frontală a duzei:

$$\sigma_a = \frac{p D_i^2}{D_e^2 - D_i^2} = 25 \text{ MPa}$$

Tensiunea echivalentă, calculată conform teoriei energiei totale de deformare (valabilă pentru materiale tenace la care $\sigma_r + \sigma_t + \sigma_a > 0$, [7]) este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_a^2 - 2\nu(\sigma_r \sigma_t + \sigma_r \sigma_a + \sigma_t \sigma_a)}$$

unde $\nu = 0.3$ este coeficientul lui Poisson.

Cu acestea obținem la suprafața interioară $\sigma_{ech \text{ int}} = 364 \text{ MPa}$ iar pe suprafața exterioră $\sigma_{ech \text{ ext}} = 48.8 \text{ MPa}$. Pentru un oțel inoxidabil, fără tratament termic de călire și revenire (nu este recomandată călirea pieselor prevăzute cu filet, deoarece la baza spirei apare un puternic concentrator de tensiune) valoarea limitei de curgere coboară până în jurul valorii de 400 MPa și este posibil ca pe suprafața interioară a cilindrului să apară o deformare plastică. În acest caz, la anularea presiunii interioare cilindrul nu mai revine elastic pe toată grosimea lui, stratul de la interior în care a avut loc deformarea plastică fiind supus la compresiune. Acest fenomen poartă denumirea de autofretaj. În practică, cilindrii la care se practică autofretajul sunt încărcăți inițial la o presiune mai mare cu aproximativ 25% decât presiunea de lucru, astfel încât în funcționare să nu se mai modifice grosimea stratului de la interior, inițial deformat plastic.

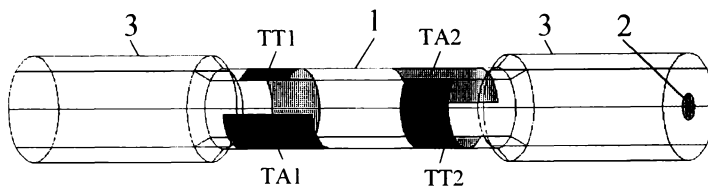


Figura 7.2: Traductorul de foarte înaltă presiune și dispunerea timbrilor tensometrice.

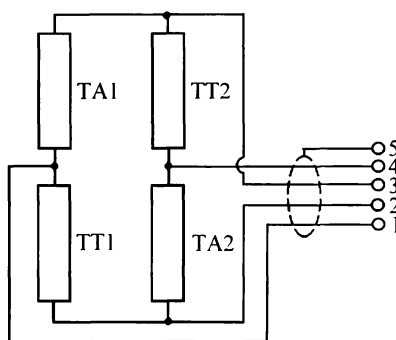


Figura 7.3: Conectarea timbrilor tensometrice ale traductorului de foarte înaltă presiune la tensometrul electronic.

În Fig.7.2 este prezentată schema traductorului pe care l-am realizat practic, împreună cu dispunerea timbrilor tensometrice. Porțiunea folosită la măsurarea presiunii este tronsonul cilindric 1 cu diametrul de 12 mm , prevăzut cu gaura axială 2 de diametru 4 mm . La capete sunt prevăzute două tronsoane 3 cu filet M16. Pe tronsonul 1 am dispus patru timbre tensometrice cu baza de 6 mm și rezistența electrică de $120\ \Omega$. Două timbre sunt amplasate transversal, TT1 și TT2, iar celelalte două TA1 și TA2 sunt amplasate longitudinal.

Cele patru timbre tensometrice sunt conectate electric conform schemei din Fig.7.3 la un tensometru electronic cu un canal tip N-2301 [71], numerotarea bornelor corespunzând mufei de legătură la tensometru. La măsurători am utilizat următoarea configurație a comutatoarelor tensometrului:

CONFIGURAȚIA PUNȚII: 4D

TENSIUNEA PUNȚII: 4V

SCĂRI: $500\ \mu\text{m}/\text{m}$

SENSIBILITATE TRADUCTOR: comutator 1.5, potențiometru 0.00.

Ultimele două comutatoare au fost reglate astfel încât pentru o variație a presiunii $0 \dots 2000\ \text{bar}$ să se acopere practic întreaga scală a aparatului indicator. În

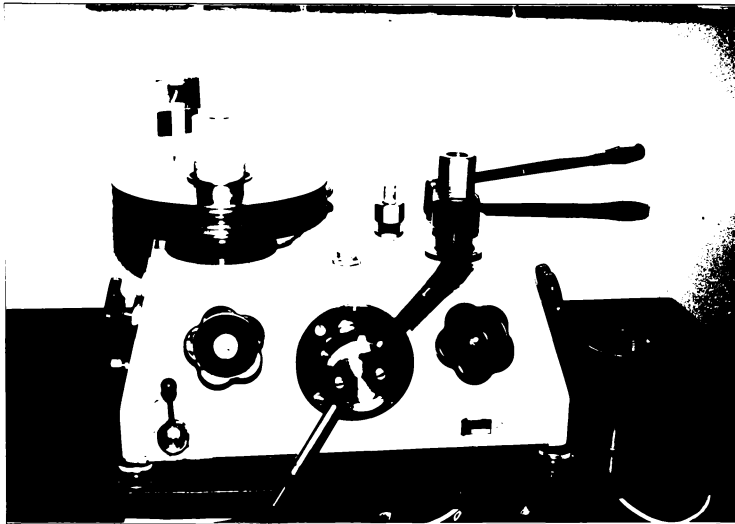


Figura 7.4: Presa de etalonare a instrumentelor de măsură a presiunii, cu presiune maximă de lucru de 2500 bar.

acest fel, citind indicația de pe scala 0...20 putem estima rapid prin înmulțire cu 100 valoarea presiunii, în bar.

Pentru ridicarea curbei de etalonare a traductorului am utilizat o presă de etalonare a manometrelor, tip 3/PD2500 cu domeniul de lucru 0...2500 bar, Fig.7.4. Elementul de control precis al valorii presiunii (precizie 0.1%) îl constituie un piston cu diametrul de 1.60 mm pe care se pot așeza greutateți sub formă de discuri cu masa totală până la 50 kg. Reducerea frecării pistonului în cilindru se realizează prin punerea lui într-o mișcare de rotație cu aproximativ 30 rot/min.

La început, traductorul a fost încărcat la 2500 bar pentru eventuala realizare a autofretajului și stabilizarea stării de tensiune din cilindru. S-au efectuat 10 încărcări și descărcări succesive, după care s-a trecut la trasarea curbei de etalonare. Măsurătorile de etalonare au fost repetate de 20 de ori, în cicluri de încărcare descărcare, pe parcursul a două zile, urmărindu-se ca în final să se obțină o bună reproductibilitate a rezultatelor. În Tab.7.1 sunt prezentate datele obținute pentru ultimele două serii de măsurători. Indicația tensometrului este citită pe scala 0...20.

În Tab.7.2 sunt prezentate valorile presiunii p calculate funcție de masa m a greutateților ce apasă pe pistonul preseii, cu relația:

$$p [Pa] = \frac{m \cdot 9,81}{\frac{\pi (1,6 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = 4,879 \times 10^6 \times m [kg]$$

Tabelul 7.1: Rezultate experimentale pentru etalonarea traductorului de foarte înaltă presiune.

Masa [kg]	Indicația tensometrului electronic I[div], pe scala 0...20			
	încărcare	descărcare	încărcare	descărcare
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.5	1.5	1.7	1.5	1.6
5.0	2.7	2.9	2.6	2.8
7.5	3.8	4.0	3.75	4.0
10.0	4.8	5.25	4.8	5.2
12.5	6.0	6.5	6.0	6.4
15.0	7.25	7.6	7.2	7.6
17.5	8.4	8.8	8.4	8.75
20.0	9.5	9.9	9.6	9.9
22.5	10.7	11.0	10.7	11.0
25.0	11.8	12.2	11.8	12.1
27.5	13.0	13.3	13.0	13.3
30.0	14.2	14.5	14.2	14.5
32.5	15.4	15.6	15.4	15.7
35.0	16.6	16.6	16.75	16.7
37.5	17.8	17.9	17.8	17.9
40.0	19.0	19.0	19.0	19.0

împreună cu indicația medie a tensometrului (media aritmetică a valorilor din ultimele patru coloane ale Tab.7.1).

Expresia matematică a curbei de etalonare, $p(I)$, este un polinom de gradul întâi deoarece traductorul are o comportare elastică. Calculul coeficienților l-am efectuat cu metoda celor mai mici pătrate.

Dacă se consideră o dreaptă ce trece prin origine rezultă:

$$p[bar] = 101.72 I[div] \tag{7.1}$$

dar se observă că eroarea relativă a presiunii calculate față de valoarea măsurată scade sub 1% abia de la valori ale presiunii peste 1000 bar.

Rezultate sensibil mai bune se obțin considerând ecuația generală a dreptei, adică:

$$p[bar] = 104.284 I[div] - 33.512 \tag{7.2}$$

caz în care diferențele față de valoarea măsurată a presiunii scad sub 1% pentru $p > 400 bar$. Dacă indicația tensometrului revine la zero, adică traductorul este descărcat de presiune internă, se observă că la suprafața interioară apare o ușoară solicitare de compresiune, ceea ce confirmă apariția autofretajului în urma încărcării inițiale la 2500 bar.

Tabelul 7.2: Etalonarea traductorului de foarte înaltă presiune.

Presiunea etalon [bar]	Indicație tensometru I [div]	$p = 101.72 I$		$p = 104.284 I - 33.512$	
		p [bar]	er.rel. [%]	p [bar]	er.rel. [%]
122	1.575	160.2	31.34	130.7	7.18
244	2.75	279.7	14.66	253.3	3.818
365.9	3.888	395.4	8.063	371.9	1.629
487.9	5.013	509.9	4.501	489.2	0.2669
609.9	6.225	633.2	3.824	615.7	0.9459
731.9	7.413	754	3.025	739.5	1.042
853.8	8.588	873.5	2.305	862	0.9586
975.8	9.725	989.2	1.374	980.6	0.4951
1098	10.85	1104	0.5343	1098	0.01575
1220	11.98	1218	-0.1375	1215	-0.3677
1342	13.15	1338	-0.308	1338	-0.2928
1464	14.35	1460	-0.2764	1463	-0.05228
1586	15.53	1579	-0.4101	1585	-0.01318
1708	16.66	1695	-0.748	1704	-0.2087
1830	17.85	1816	-0.7629	1828	-0.0931
1952	19	1933	-0.9714	1948	-0.1924

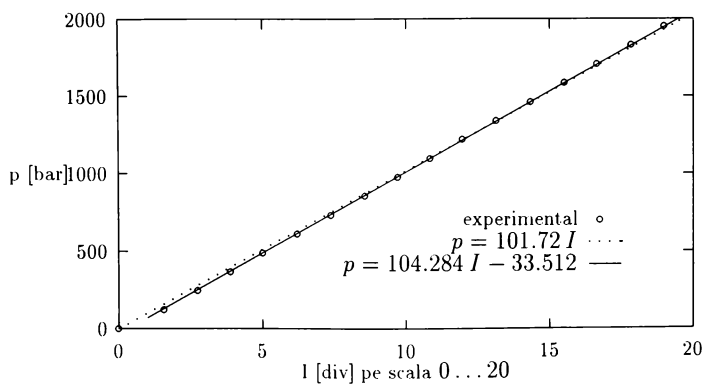


Figura 7.5: Curba de etalonare a traductorului de presiune înaltă.

În Fig.7.5 sunt prezentate punctele experimentale obținute la etalonarea traductorului, împreună cu dreptele descrise de ec.(7.1) cu linie punctată și ec.(7.2) cu linie plină. Se observă că traductorul realizat are practic o caracteristică liniară.

În cele ce urmează vom utiliza pentru prelucrarea datelor experimentale ecuația (7.2).

7.1.3 Performanțele funcționale ale pompei de foarte înaltă presiune

Pompa de apă de înaltă presiune cu care este dotată instalația de generare a jeturilor de apă de mare viteză debitează apa prin orificiul duzei. În timpul cursei de refulare efectuată de unul dintre cei doi cilindri debitul de apă evacuat de pompă Q_p este egal cu volumul dizlocuit de pistonul plonjor în unitatea de timp, adică:

$$Q_p = \frac{\pi D_p^2 S}{4 T} \quad (7.3)$$

unde D_p este diametrul plonjorului, S lungimea cursei și T durata cursei. În același timp, debitul de apă evacuat prin orificiul duzei este (în ipoteza neglijării compresibilității, care la presiuni până la 2000 bar conduce la erori sub 2% conform Tab.2.1):

$$Q_o = C_d \frac{\pi D_o^2}{4} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (7.4)$$

unde C_d este coeficientul de debit al duzei, D_o este diametrul orificiului, p presiunea înaintea duzei și ρ densitatea lichidului.

Datorită scăpărilor de lichid prin etanșarea pistonului plonjor și prin supapele care sunt închise în timpul cursei de refulare, Q_o este mai mic decât Q_p . Definim randamentul volumic al pompei ca fiind

$$\eta_v = \frac{Q_o}{Q_p} \quad (7.5)$$

această mărime evidențiind ponderea pierderilor prin neetanșeități față de debitul pompei. Soluția constructivă utilizată la instalația de generare a jeturilor de mare viteză prezentată în această lucrare conduce la existența unui volum foarte redus de apă pe traseul de înaltă presiune (datorită montării cilindrilor pompei cu blocul de supape comun și evitarea conductelor de legătură lungi) și prin urmare efectele comprimării acestui volum de apă pot fi neglijate.

Ținând cont de (7.3),(7.4) și (7.5) putem scrie:

$$\eta_v \frac{\pi D_p^2 S}{4 T} = C_d \frac{\pi D_o^2}{4} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (7.6)$$

Tabelul 7.3: Variația presiunii de refulare a pompei de foarte înaltă presiune funcție de durata cursei.

Indicație tensometru $I [div]$	Durata cursei $T [s]$	Presiunea de refulare $p [bar]$
5.0	2.456	487.9
5.6	2.253	550.5
6.7	2.085	665.2
8.7	1.823	873.8
10.2	1.686	1030
11.8	1.572	1197
14.0	1.431	1426
15.5	1.357	1583
17.1	1.266	1750

de unde rezultă, în ipoteza $\eta_v \approx constant$ și $C_d \approx constant$:

$$T\sqrt{p} = constant \quad (7.7)$$

Cu alte cuvinte, produsul dintre durata cursei și radicalul presiunii este o constantă.

O primă investigație experimentală a urmărit determinarea dependenței între presiunea înaintea duzei p și durata cursei pistonului plonjor T . Presiunea este măsurată cu traductorul de presiune prezentat în paragraful anterior, iar durata cursei este măsurată cu ajutorul unui numărător electronic tip E02546 conectat la comutatorul electronic. Semnalul electric de la comutator este preluat la una din bornele **A** sau **B** (vezi Fig.6.12), corespunzător măsurându-se durata cursei de refulare pentru un plonjor sau pentru celălalt.

Rezultatele experimentale obținute sunt prezentate în Tab.7.3. Prima coloană prezintă valorile indicației tensometrului, în diviziuni citite pe scala 0...20, iar ultima coloană valorile corespunzătoare presiunii, calculate cu relația (7.2). Durata cursei se citește direct la numărătorul electronic, cu precizie de milisecundă.

Pornind de la relația (7.7) s-a căutat o dependență analitică între p și T sub forma:

$$p = \frac{c}{T^2}$$

unde coeficientul c este determinat cu metoda celor mai mici pătrate, cu relația:

$$c = \frac{\sum_i p_i / T_i^2}{\sum_i 1 / T_i^4}$$

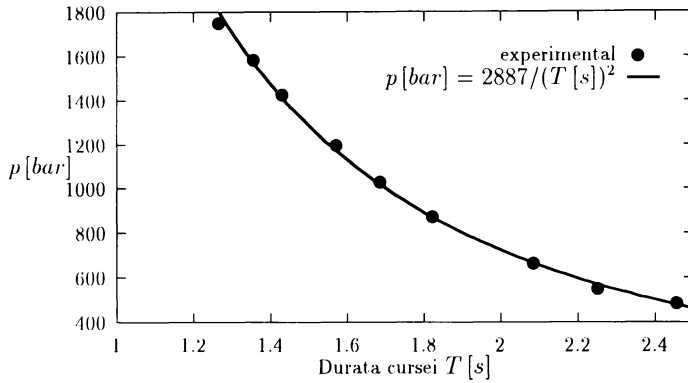


Figura 7.6: Presiunea de refulare a pompei de apă de înaltă presiune funcție de durata cursei pistonului plonjor.

Pentru setul de puncte experimentale din Tab.7.3 rezultă:

$$p [\text{bar}] = \frac{2887}{(T [\text{s}])^2} \quad (7.8)$$

În Fig.7.6 este prezentată dependența între presiunea de refulare și durata cursei, observându-se că relația (7.8) oferă o aproximare foarte bună a datelor experimentale.

Din relația (7.6), ținând cont de (7.7) rezultă:

$$\frac{\eta_v}{C_d} = \frac{1}{S} \left(\frac{D_o}{D_p} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} T \sqrt{p}$$

Pentru instalația experimentală utilizată avem $D_o = 0.4 \text{ mm}$, $D_p = 25 \text{ mm}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar cursa pistonului, măsurată, este $S = 118 \text{ mm}$. Cu acestea, utilizând și relația (7.8) determinată pe baza măsurătorilor experimentale, obținem:

$$\frac{\eta_v}{C_d} = \frac{1}{0.118} \left(\frac{0.0004}{0.025} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{1000}} \sqrt{2887 \cdot 10^5} = 1.648 \quad (7.9)$$

de unde rezultă că pentru a determina randamentul volumic al pompei trebuie măsurat coeficientul de debit al duzei. Pentru aceasta am măsurat debitul de apă evacuat prin duză, cu metoda vasului etalonat, la diferite valori ale presiunii înaintea duzei. Volumul de apă a fost măsurat cu un cilindru gradat de capacitate maximă 500 cm^3 , iar intervalul de timp Δt cu numărătorul electronic așa cum

Tabelul 7.4: Determinarea coeficientului de debit al duzei.

Mărimi măsurate			Mărimi calculate			
I [div]	Vol [cm ³]	Δt [s]	p [bar]	Q_o [cm ³ /s]	C_d [-]	$Re \cdot 10^{-3}$ [-]
5.2	335	14.3	508.8	23.43	0.5877	126.9
6.3	270	10.8	623.5	25.00	0.5672	140.3
7.0	275	10.2	696.5	26.96	0.5791	148.2
8.2	320	11.3	821.6	28.32	0.5607	160.8
10.4	380	11.6	1051	32.76	0.5748	181.4
11.8	370	10.9	1197	33.94	0.5588	193.3
13.0	420	11.8	1322	35.59	0.5582	203.0
14.7	425	11.1	1499	38.29	0.5647	215.8
16.1	430	10.6	1645	40.57	0.5719	225.8
17.7	465	11.3	1812	41.15	0.5535	236.6
18.4	480	11.1	1885	43.24	0.5706	241.2

este indicat mai sus. Rezultatele experimentale sunt prezentate în primele trei coloane ale tabelului 7.4. Presiunea p este calculată cu relația (7.2) folosind indicația tensometrului I , iar debitul volumic prin orificiu Q_o s-a obținut prin raportarea volumului Vol la intervalul de timp corespunzător Δt .

Coeficientul de debit C_d și numărul Reynolds Re asociate duzei sunt calculate cu relațiile:

$$C_d = \frac{Q_o}{\frac{\pi D_o^2}{4} v} \quad Re = \frac{v D_o}{\nu}$$

cu viteza jetului v calculată funcție de presiune luând în considerare și compresibilitatea apei (relația 2.12)

În Fig.7.7 este reprezentat coeficientul de debit al duzei funcție de numărul Reynolds. Punctele experimentale obținute de autor (cercurile pline) sunt prezentate împreună cu rezultatele lui Engemann [15] obținute pentru duze având riguros aceeași geometrie, observându-se o bună concordanță. Comparativ cu dependența $C_d(Re)$ descrisă de ec.(3.134) și reprezentată de curba de pe figură, valorile noastre sunt puțin mai mici, diferența maximă fiind de -4%.

Valoarea medie a coeficientului de debit măsurat de noi, conform datelor din Tab.7.4 este

$$C_d = 0.568$$

celelalte valori încadrându-se în plaja -2.55% ... +3.5% față de aceasta. Corepunzător, din (7.9) se obține valoarea medie a randamentului volumic al pompei

$$\eta_v = 0.936$$

ceea ce indică pierderi de debit de aproximativ 6.4% prin etanșarea plonjorului și supapele închise.

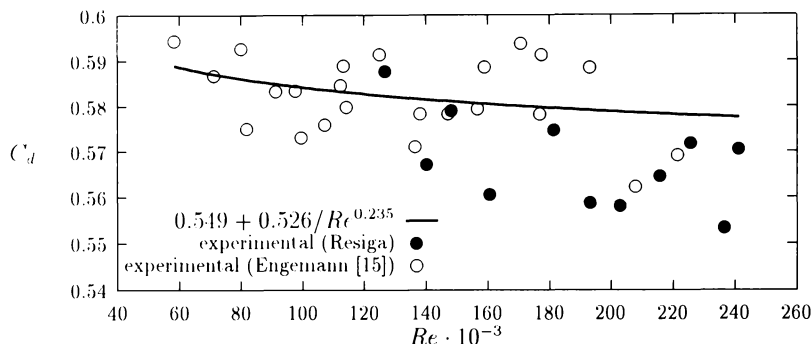


Figura 7.7: Coeficientul de debit al duzei cilindrice funcție de numărul Reynolds asociat orificiului.

7.2 Studiul experimental al structurii jetului de apă de mare viteză

7.2.1 Aparatura utilizată și mărimile măsurate

Pe baza analizei metodelor experimentale de investigare a jeturilor de apă de mare viteză prezentate în literatură, autorul propune o metodă optică originală care constă în analiza variației intensității unui fascicol LASER care străbate transversal jetul. Semnalul luminos rezultat după străbaterea amestecului bifazic apă-aer este captat cu o fotodiodă pe care se măsoară variația tensiunii ce depinde practic liniar de intensitatea luminoasă.

LASER-ul utilizat este de tip He-Ne, cu o putere de 0.8 mW pentru o radiație luminoasă cu lungimea de undă de 633 nm . Diametrul fascicolului LASER este de 0.18 mm și divergența de 1.7 mrad . LASER-ul este montat împreună cu fotodioda pe suportul prezentat în Fig.7.8. Fotodioda, de tip SD 5421-2, este fixată într-o montură specială ce permite alinierea optică cu fascicolul luminos. Întreg suportul se poate deplasa de-a lungul axei jetului, putând culisa pe o țevă filetată prinsă de piulița ce fixează duza. Țeava este prevăzută cu un filet patrat exterior, cu pas de 3 mm , fixarea suportului la o anumită distanță față de duză fiind realizată între o piuliță superioară și una inferioară. Acest sistem asigură concurența între axa jetului și axa optică LASER fotodiodă, cele două axe intersectându-se în unghi drept. Țeava filetată este prevăzută cu fante longitudinale (vezi Fig.7.8) care permit vizarea jetului de către fascicolul luminos.

Fig.7.9 prezintă dispozitivul optic montat pe instalația experimentală, LASER-



Figura 7.8: Dispozitivul optic LASER + fotodioda utilizat pentru investigarea structurii jetului de apă de mare viteză

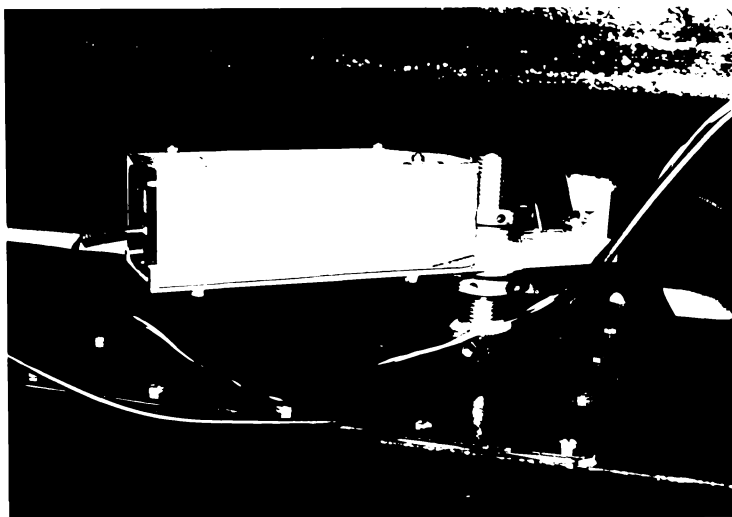


Figura 7.9: Dispozitivul optic de investigare a jetului, montat pe instalația experimentală

ul fiind protejat cu un capac pentru evitarea deteriorării accidentale.

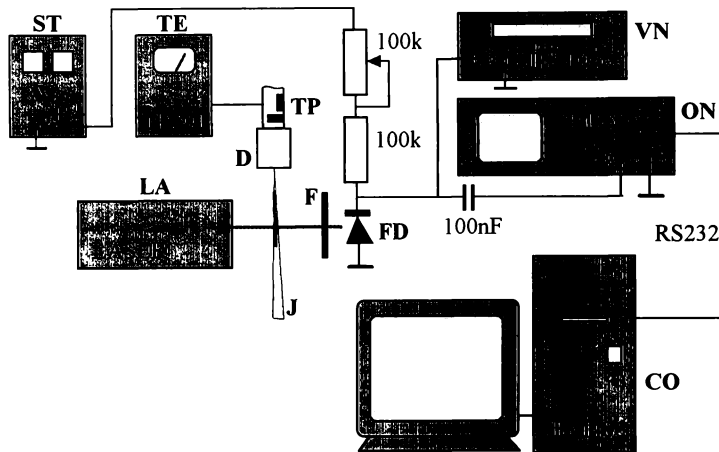


Figura 7.10: Schema de conectare a aparatelor utilizate pentru studiul experimental al structurii jetului de apă de mare viteză.

Fig.7.10 prezintă schema generală de conectare a aparaturii utilizată pentru investigarea jetului.

Jetul **J** este generat cu duza **D**, presiunea înaintea duzei fiind măsurată cu traductorul tensometric de presiune **TP** cuplat la tensometrul electronic **TE**.

Fotodioda **FD** este polarizată invers cu o tensiune de 8V de la sursa de tensiune stabilizată **ST** prin intermediul rezistențelor de limitare a curentului, de 100 kΩ (o rezistență fixă și una reglabilă). Atunci când fotodioda este luminată cu fasciculul generat de LASER-ul **LA**, intră în conducție și tensiunea măsurată între anod și catod scade. S-a constatat însă că în cazul iluminării directe (fără jetul de apă) fotodioda intră în saturație datorită intensității prea mari a fascicolului luminos, ajungând chiar în regim de generator. Pentru a rămâne totuși în domeniul liniar al dependenței tensiune - intensitate luminoasă, în fața fotodiodei a fost plasat filtrul **F**, al cărui grad de atenuare a fost ajustat prin încercări astfel încât la iluminare directă tensiunea la fotodiodă să fie de +2V (reglajul fin al acestei valori a tensiunii se face cu rezistența reglabilă). Cu aceasta, tensiunea măsurată pe fotodiodă variază în plaja +2... +8V, corespunzător intensității maxime respectiv nule a semnalului luminos incident.

Analiza semnalului luminos captat de pe fotodiodă s-a efectuat cu un voltmetru numeric **VN** și cu un osciloscop numeric **ON**. Voltmetrul numeric de tip TSI 1076 a fost utilizat în faza inițială a cercetărilor experimentale pentru a investiga variația tensiunii medii pe fotodiodă atunci când fasciculul LASER trece prin jet la diferite distanțe de duză. Măsurătorile efectuate au evidențiat o variație

a tensiunii medii în intervalul $6.5 \dots 7.5 V$ pentru diverse distanțe față de duză, dar repetarea măsurătorilor la aceeași distanță a condus la valori care variau în plaja $\pm 0.2 V$ față de o valoare medie. În aceste condiții s-a optat pentru analiza semnalului cu un osciloscop, evidențiindu-se faptul că relevantă este variația pulsației tensiunii de pe fotodiodă și nu valoarea medie.

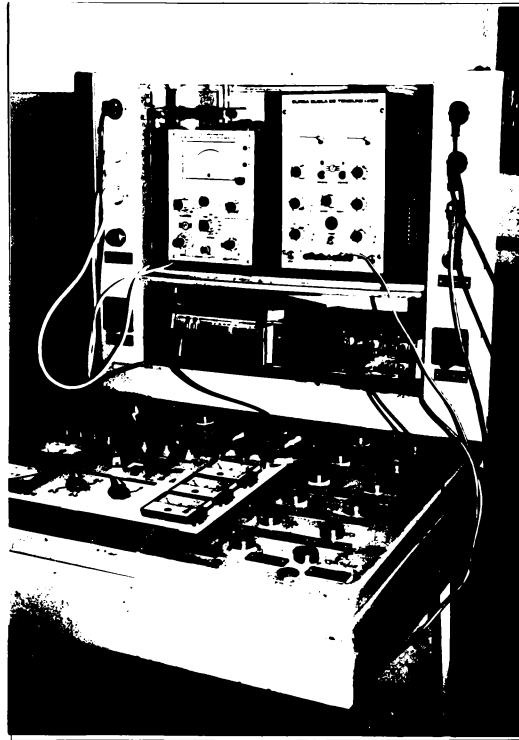


Figura 7.11: Pupitrul de comandă al instalației experimentale pentru studiul jeturilor de apă de mare viteză

Pupitrul de comandă al instalației experimentale, împreună cu o parte din aparatura utilizată este prezentat în Fig.7.11. Pentru supravegherea funcționării motorului electric de antrenare a pompei de ulei, respectiv pentru evitarea supra-sarcinilor, pupitrul este prevăzut cu o trusă wattmetrică. În partea superioară a nișei pupitrului sunt amplasate tensometrul electronic și sursa de tensiune stabilizată, iar în partea inferioară a nișei sunt amplasate voltmetrul numeric și numărătorul electronic.

Pornind de la constatarea că partea variabilă în timp a semnalului electric de pe fotodiodă este utilă pentru a obține informații despre structura jetului, s-a

utilizat un osciloscop cu memorie numerică marca PHILIPS tip PM3350A [70], care are principalul avantaj față de un osciloscop analogic că permite stocarea semnalului în regiștrii de memorie internă (eșantionare în 1024 de puncte) fiind foarte comodă investigarea ulterioară. Baza de timp disponibilă în regim numeric este $50\text{ s/div} \dots 0.5\text{ }\mu\text{s/div}$ (ecranul având 10 diviziuni pe orizontală) iar atenuarea verticală poate fi modificată în plaja $2\text{ mV/div} \dots 10\text{ V/div}$ (ecranul având 8 diviziuni pe verticală).

Imaginea de pe ecranul osciloscopului poate fi transferată la un periferic grafic (plotter sau imprimantă) prin interfața serială RS232C/V24. Autorul a realizat însă transferul imaginii sub formă de fișier și stocarea ei pe un computer IBM-PC 486. Comunicarea computer (CO) – osciloscop numeric (ON) s-a făcut prin intermediul unui cablu serial cu conector de 25 de pini [32]. [10], transferul de date fiind efectuat cu aplicația TERMINAL de sub WINDOWS. Pentru a putea insera imaginea într-un editor de texte, la osciloscopul numeric a fost selectat un plotter digital tip HP7550, obținându-se un fișier în limbaj HPGL (Hewlett Packard Graphic Language).

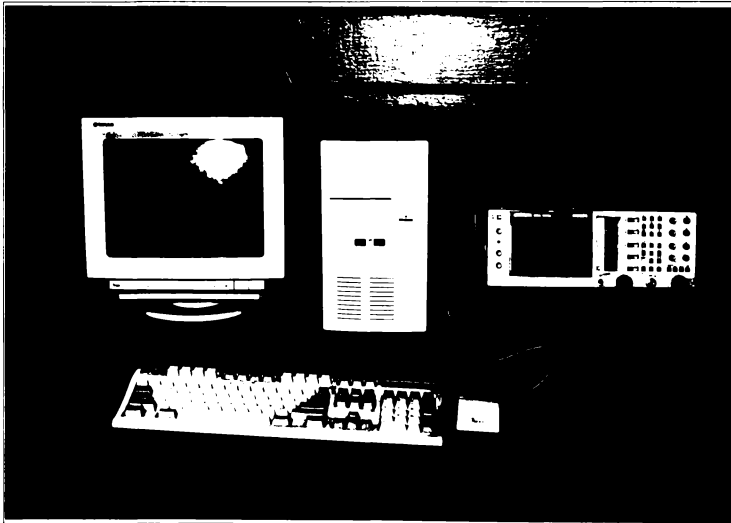


Figura 7.12: Osciloscopul numeric PM3350A (dreapta) și computerul IBM-PC 486 (stânga) utilizate pentru analiza semnalului electric captat de pe fotodiodă.

Pentru un semnal oarecare, osciloscopul permite măsurarea valorii medii a tensiunii și tensiunea efectivă. Cum componenta medie a semnalului investigat este de ordinul a 7 V iar pulsația tensiunii este de ordinul zecilor sau sutelor de mV , tensiunea medie și cea efectivă au valori foarte apropiate. În condițiile în care precizia de măsurare a osciloscopului este de trei cifre semnificative, este practic

imposibil să se poată caracteriza în această variantă amplitudinea pulsației. De aceea, pentru a investiga exclusiv componenta variabilă a tensiunii am montat înainte de intrarea în osciloscop un condensator de 100 nF care blochează trecerea componentei continue a semnalului.

Semnalul electric aplicat osciloscopului este caracterizat de tensiunea electrică U . Aceasta poate fi scrisă ca suma dintre componenta medie \bar{U} și pulsația tensiunii \tilde{U} :

$$U = \bar{U} + \tilde{U} \quad (7.10)$$

unde tensiunea medie pe un interval de timp Δt este:

$$\bar{U} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} U dt \quad (7.11)$$

Din (7.10) și (7.11) rezultă că media pulsației tensiunii este nulă deoarece:

$$\bar{U} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{U} + \tilde{U}) dt = \bar{U} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{U} dt \quad (7.12)$$

Pentru a caracteriza cantitativ o tensiune variabilă în timp, una din mărimile de utilizate în practică este tensiunea efectivă U_{ef} , definită de relația:

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} U^2 dt \quad (7.13)$$

Cu aceasta se poate calcula tensiunea efectivă a pulsației \tilde{U}_{ef} , care în concordanță cu relația (7.13) se definește ca fiind:

$$\tilde{U}_{ef}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{U}^2 dt \quad (7.14)$$

și este o mărime strict pozitivă.

Înlocuind pe (7.10) în (7.13) și ținând cont de (7.12) și (7.14) avem:

$$\begin{aligned} U_{ef}^2 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{U} + \tilde{U})^2 dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\bar{U}^2 + 2\bar{U}\tilde{U} + \tilde{U}^2) dt = \\ &= \bar{U}^2 + 2\bar{U} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{U} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{U}^2 dt = \\ &= \bar{U}^2 + \tilde{U}_{ef}^2 \end{aligned}$$

de unde

$$\tilde{U}_{ef} = \sqrt{U_{ef}^2 - \bar{U}^2} \quad (7.15)$$

Rezultă că pentru a obține tensiunea efectivă a pulsației trebuie măsurate tensiunea medie și tensiunea efectivă a semnalului. Măsurătorile au fost efectuate la diverse valori ale presiunii înaintea duzei, respectiv distanțe față de duză.

7.2.2 Rezultate experimentale privind structura jetului de apă de mare viteză

Cu instalația prezentată în paragraful precedent a fost investigată structura jetului de apă de mare viteză produs cu o duză cilindrică cu diametrul orificiului $D_o = 0.1 \text{ mm}$. Conform Fig.6.14 jetul parcurge o distanță de 10 mm după ieșirea din orificiul duzei, prin orificiul axial practicat în corpul acesteia. Prin urmare, aceasta este distanța minimă de la orificiu începând de la care este posibilă investigarea jetului.

Fascicolul LASER străbate transversal jetul, distanța până la orificiul duzei fiind modificată cu pas de 3 mm , corespunzător pasului filetului de pe țeava ce susține ansamblul LASER + fotodiodă. La fiecare măsurătoare au fost citite la osciloscopul numeric valoarea tensiunii efective U_{ef} și tensiunea medie \bar{U} cu care s-a calculat tensiunea efectivă a pulsației \hat{U}_{ef} conform relației (7.15).

Tabelul 7.5: Valorile măsurate ale tensiunii efective și ale tensiunii medii funcție de distanța până la orificiul duzei, pentru presiunea înaintea duzei $p = 613 \text{ bar}$.

Distanța până la orificiul duzei, x [mm]	Tensiunea efectivă U_{ef} [mV]	Tensiunea medie \bar{U} [mV]	Tensiunea efectivă a pulsației $\hat{U}_{ef} = \sqrt{U_{ef}^2 - \bar{U}^2}$ [mV]
10	328	-60.3	322.4
13	316	-68.7	308.4
16	320	17.5	319.5
19	312	-5.0	312.0
22	351	177	303.1
25	320	-77.5	310.5
28	295	25.3	293.9
31	302	-12.5	301.7
34	333	70.2	325.5
37	318	-62.4	311.8
40	292	23.7	291.0
43	304	62.7	297.5
46	276	37.5	273.4
49	265	-53.7	259.5
52	217	-45.0	212.3
55	198	46.2	192.5
58	127	8.75	126.7
61	145	63.7	130.3
64	131	56.2	118.3
70	118	30.4	114.0

Tabelul 7.6: Valorile măsurate ale tensiunii efective și ale tensiunii medii funcție de distanța până la orificiul duzei, pentru presiunea înaintea duzei $p = 988 \text{ bar}$.

Distanța până la orificiul duzei, x [mm]	Tensiunea efectivă U_{ef} [mV]	Tensiunea medie \bar{U} [mV]	Tensiunea efectivă a pulsației $\tilde{U}_{ef} = \sqrt{U_{ef}^2 - \bar{U}^2}$ [mV]
10	188	-30.3	185.5
13	175	25.1	173.2
16	168	-35.3	164.2
19	183	32.5	180.1
22	148	17.4	147.0
25	192	32.3	189.3
28	134	-15.2	133.1
31	106	-12.5	105.3
34	54.5	6.22	54.14
37	68.5	26.5	63.17
40	28.6	-8.32	27.36
43	20.5	14.6	14.39
49	36.5	4.75	36.19
55	12.6	7.12	10.4

Tabelul 7.7: Valorile măsurate ale tensiunii efective și ale tensiunii medii funcție de distanța până la orificiul duzei, pentru presiunea înaintea duzei $p = 1468 \text{ bar}$.

Distanța până la orificiul duzei, x [mm]	Tensiunea efectivă U_{ef} [mV]	Tensiunea medie \bar{U} [mV]	Tensiunea efectivă a pulsației $\tilde{U}_{ef} = \sqrt{U_{ef}^2 - \bar{U}^2}$ [mV]
10	75.2	-11.3	74.35
13	79.5	9.75	78.9
16	69.5	7.5	69.09
19	84.3	17.4	82.48
22	67.2	-14.8	65.55
25	42.6	7.5	41.93
28	21.3	-8.42	19.57
31	27.5	1.37	27.47
34	11.6	2.35	11.36
37	7.5	-3.25	6.759
40	9.25	5.11	7.71
43	6.62	3.0	5.901
46	5.5	3.75	4.023

Rezultatele experimentale obținute sunt prezentate în Tab.7.5 pentru presiunea înaintea duzei $p = 613 \text{ bar}$, respectiv Tab.7.6 pentru $p = 988 \text{ bar}$ și Tab.7.7 pentru $p = 1468 \text{ bar}$.

Analiza variației tensiunii efective a pulsației \tilde{U}_{ef} funcție de distanța până la orificiul duzei x evidențiază o scădere relativ bruscă a lui \tilde{U}_{ef} la o anumită distanță x , în restul intervalului investigat \tilde{U}_{ef} oscilând în jurul a două valori constante.

Pentru descrierea analitică a unei asemenea dependențe propunem utilizarea funcției lui Laplace [52], definită de relația:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (7.16)$$

Graficul acestei funcții este prezentat în Fig.7.13 evidențiindu-se următoarele valori: $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$, $\Phi(0) = 0.5$. Intervalul în care se face trecerea între cele două valori asimptotice poate fi caracterizat cantitativ ducând tangenta la graficul funcției în punctul $y = 0$, aceasta intersectând dreptele $\Phi = 0$ și $\Phi = 1$ în punctele de abscisă $y = -\sqrt{\pi/2}$ respectiv $y = \sqrt{\pi/2}$.

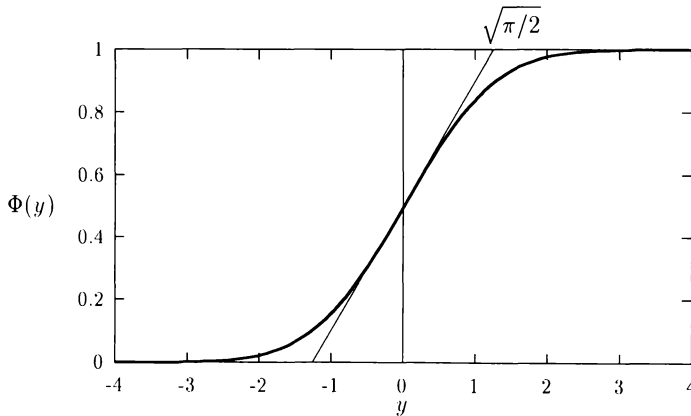


Figura 7.13: Funcția lui Laplace.

Pentru a construi o curbă printre punctele experimentale (x, \tilde{U}_{ef}) pornim de la expresia funcției lui Laplace și introducem în locul constantelor parametri:

$$\tilde{U}_{ef}(x) = A - B \int_0^{\frac{x-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (7.17)$$

Parametrii A și B asigură corecția ordonatei iar a și b corectează abscisa. În particular, abscisa $x = a$ corespunde punctului de inflexiune a curbei, iar cu

$\Delta x = b\sqrt{\pi/2} = 1.253b$ definim abscisele $a - \Delta x$ și $a + \Delta x$ între care putem considera că are loc saltul funcției.

Pentru un set de puncte experimentale (x_i, U_{ef_i}) cei patru coeficienți din expresia (7.17) se calculează cu metoda celor mai mici pătrate prin determinarea minimumului expresiei:

$$\sum_i \left(A - B \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - U_{ef_i} \right)^2$$

Egalând cu zero derivatele parțiale în raport cu A , B , a și b obținem următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\sum_i \left(A - B \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - U_{ef_i} \right) = 0 \tag{7.18}$$

$$\sum_i \left(A - B \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - U_{ef_i} \right) \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \tag{7.19}$$

$$\sum_i \left(A - B \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - U_{ef_i} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i-a}{b} \right)^2} = 0 \tag{7.20}$$

$$\sum_i \left(A - B \int_0^{\frac{x_i-a}{b}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - U_{ef_i} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i-a}{b} \right)^2} (x_i - a) = 0 \tag{7.21}$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuații a fost efectuată cu programul MathCAD [65], folosind procedura iterativă **Given-Find**.

Pentru rezultatele experimentale prezentate în Tab.7.5, Tab.7.6 și Tab.7.7 au fost obținute următoarele valori ale coeficienților:

Tabelul 7.8: Valorile coeficienților din relația 7.17.

p [bar]	A	B	a	b
613	210.43	79.11	52.38	6.091
988	98.57	60.62	31.54	4.753
1468	42.61	27.49	25.44	4.068

Punctele experimentale și curbele descrise de ecuația (7.17) cu coeficienții din Tab.7.8 sunt prezentate în figurile 7.14, 7.15 și 7.16 pentru valorile presiunii de 613, 988 și 1468 bar. Pe fiecare figură sunt marcate abscisele corespunzătoare punctului de inflexiune al curbei ($x = a$) și punctelor între care considerăm că are loc saltul tensiunii efective a pulsației ($x = a \pm 1.253b$).

În cele ce urmează vom nota $x_{cr} = a$ distanța până la orificiul duzei corespunzătoare mijlocului intervalului în care scade U_{ef} și cu $x_{cr}^{inf} = a - 1.253b$ respectiv $x_{cr}^{sup} = a + 1.253b$ limitele acestui interval.

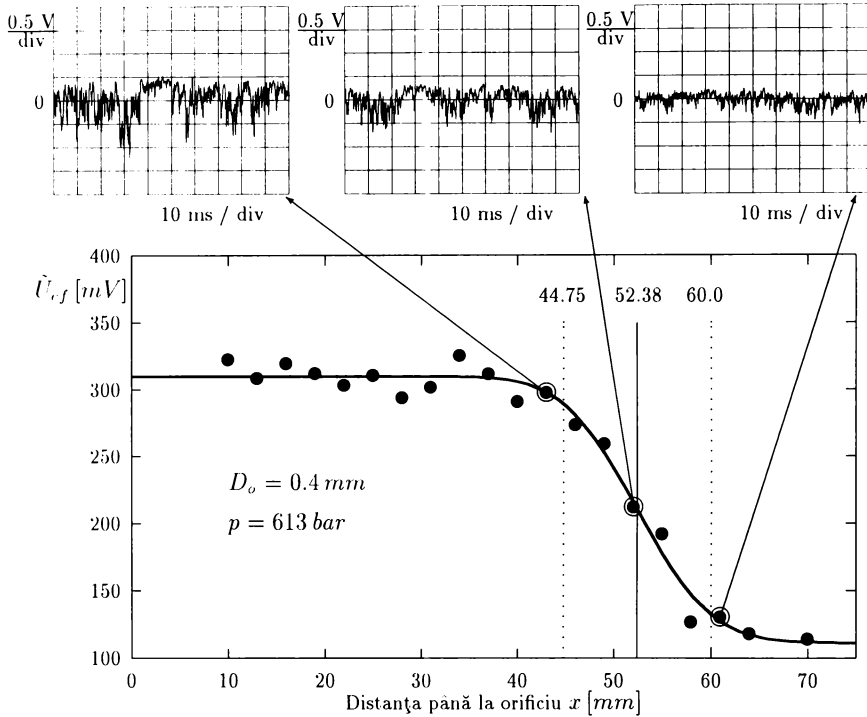


Figura 7.14: Variația valorii efective a pulsației tensiunii \tilde{U}_{ef} funcție de distanța până la orificiul duzei x , pentru presiunea înaintea duzei $p = 613 \text{ bar}$.

În partea superioară a fiecărei figuri este prezentată variația componentei pulsatorii a tensiunii pe fotodiodă, pentru punctele experimentale din vecinătatea lui x_{cr}^{inf} , x_{cr} și x_{cr}^{sup} . Fiecare figură ce prezintă imaginea înregistrată pe ecranul osciloscopului are marcate valoarea unei diviziuni pe abscisă (timp) și ordonată (tensiune), precum și poziția ordonatei corespunzătoare tensiunii nule.

Pentru a interpreta datele experimentale trebuie să analizăm mai întâi cauzele care conduc la diminuarea lui \tilde{U}_{ef} pe măsură ce crește distanța față de orificiul duzei.

În apropierea duzei jetul este relativ compact, fiind format din tronsoane relativ mari de vână fluidă înconjurate de o anvelopă de picături fine. Regiunea ocupată de picăturile fine are o extindere radială redusă și corespunzător difuzia semnalului luminos nu este prea puternică. În vecinătatea lui x_{cr} se evidențiază pulsații cu durată de câteva milisecunde peste care se suprapun pulsații a căror durată este cu un ordin de mărime mai mică. Acestea din urmă corespund

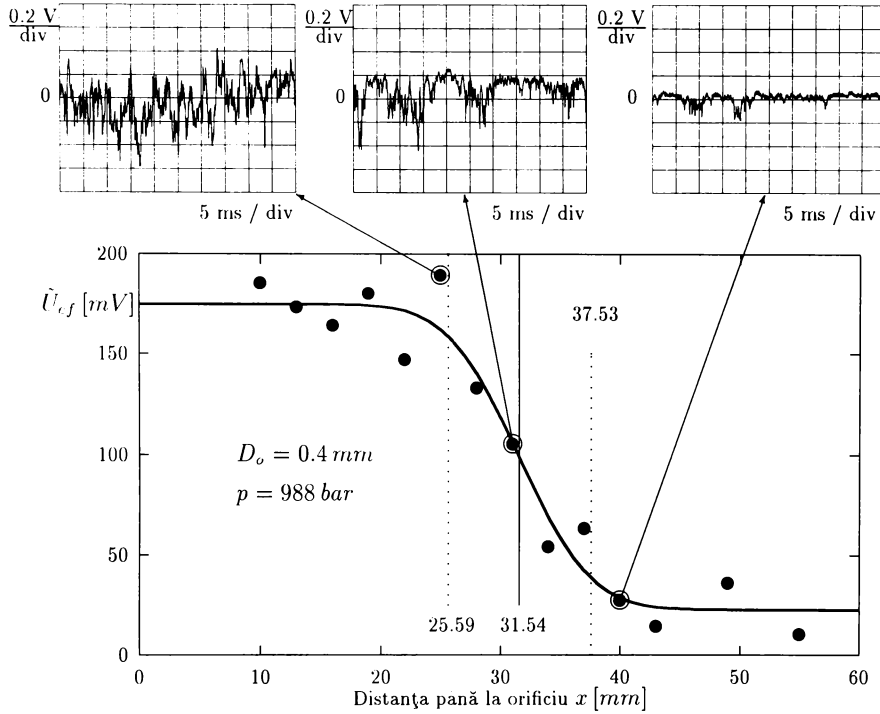


Figura 7.15: Variația valorii efective a pulsației tensiunii \dot{U}_{ef} funcție de distanța până la orificiul duzei x , pentru presiunea înaintea duzei $p = 988$ bar.

picăturilor de dimensiuni reduse, care ocupă o regiune cu extindere radială tot mai mare pe măsură ce se fragmentează tronșoanele mai mari de vână fluidă prin frecarea cu aerul ambiant. Corespunzător jetul se evazează, ajungând ca după x_{cr}^{sup} să fie format dintr-un amestec relativ omogen de picături mici de apă și aer. În această zonă atenuarea semnalului luminos este foarte puternică datorită reflecțiilor și refracțiilor multiple pe numărul mare de picături ce trec prin fasciculul LASER. În consecință scade amplitudinea semnalului luminos captat de fotodiodă și se înregistrează numai pulsații de durată mică.

Din analiza de mai sus rezultă că în intervalul $x_{cr}^{inf} < x < x_{cr}^{sup}$ se modifică structura jetului prin fragmentarea lui. Conform teoriei lui Yanaida, această zonă corespunde trecerii de la zona continuă (înțelegând aici inclusiv curgerea cu picături concentrate) la curgerea difuză cu picături fine. Lungimea caracteristică a jetului care delimitează cele două zone este *lungimea de rupere* x_b , definită de relațiile (4.66) și (4.67) funcție de parametrul de evazare a jetului k_1 . Pentru a

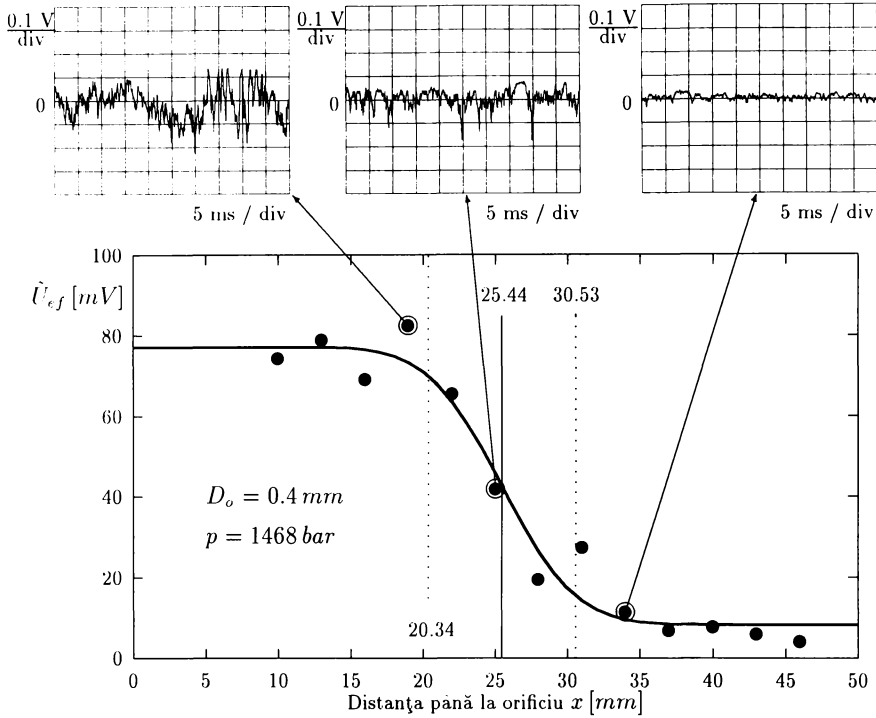


Figura 7.16: Variația valorii efective a pulsației tensiunii \tilde{U}_{ef} funcție de distanța până la orificiul duzei x , pentru presiunea înaintea duzei $p = 1468 \text{ bar}$.

stabilă legătura între lungimea critică pusă în evidență de experimentele noastre x_{cr} și x_b , în Tab.7.9 se prezintă comparativ valorile lui x_{cr}^{inf} , x_{cr} și x_{cr}^{sup} obținute de noi și valorile lui x_b determinate de Engemann (vezi Tab.4.1) pe baza teoriei lui Yanaida, pentru duze cilindrice cu diametrul $D_o = 0.4 \text{ mm}$.

Se observă că valorile obținute de noi pentru lungimile critice ale jetului sunt mai mici decât valorile lui x_b calculate de Engemann. În schimb, dacă analizăm datele din Tab.4.1 observăm că valoarea lungimii nucleului de viteză măsurată x_{vm} este mai mică decât valoarea calculată x_v . Putem presupune deci că dacă s-ar fi măsurat, printr-o metodă oarecare, valorile lui x_b este posibil să se fi obținut deasemenea valori mai mici decât cele calculate. Această ipoteză ne-a sugerat calcularea unei valori corectate a lui x_b (figurată în ultima coloană din tabel) prin înmulțire cu x_{vm}/x_v .

Putem observa că valorile lui x_{cr}^{sup} și respectiv x_b corectat sunt foarte apropiate. Pe baza acestei analize putem afirma că lungimea x_{cr}^{sup} obținută de noi prin

Tabelul 7.9: Comparație între lungimile critice ale jetului măsurate de noi și lungimea de rupere a jetului.

Resiga				Engemann [15]		
p [bar]	x_{cr}^{inf} [mm]	x_{cr} [mm]	x_{cr}^{sup} [mm]	p [bar]	x_b [mm]	x_b corectat cu x_{vm}/x_v [mm]
613	44.75	52.38	60.0	1000	44.4	35.9
988	25.59	31.54	37.53	1500	38.0	30.2

metoda optică prezentată mai sus corespunde practic lungimii de rupere a jetului x_b definită de teoria lui Yanaida [60], [61].

Punerea în evidență a acestei lungimi prezintă importanță nu numai din punct de vedere al hidrodinamicii jetului ci și din punct de vedere al interacțiunii jetului cu materialul solid. Într-adevăr, în regiunea în care se rupe jetul apare un maxim al forței de interacțiune jet – placa plană (Fig.5.7, Fig.5.8), respectiv este distanța față de duză la care este de așteptat ca distrugerea materialului solid să fie maximă.

Din datele experimentale prezentate mai sus se poate stabili o corelație între lungimile critice ale jetului și valoarea presiunii înaintea duzei. Expresia analitică pentru o asemenea relație este sugerată de reprezentarea punctelor experimentale din Tab.7.9 în coordonate dublu logaritmice.

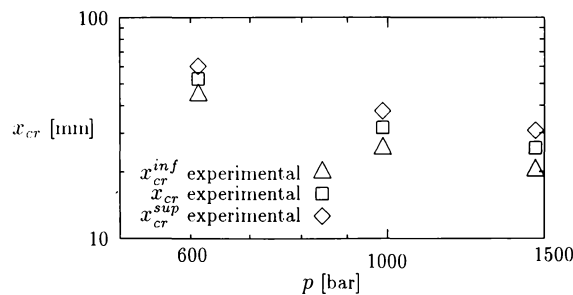


Figura 7.17: Lungimile critice ale jetului, funcție de presiune, în coordonate dublu logaritmice.

Se poate observa ușor din Fig.7.17 că logaritmul distanței are o variație aproximativ liniară cu logaritmul presiunii, dependență descrisă de o relație de forma:

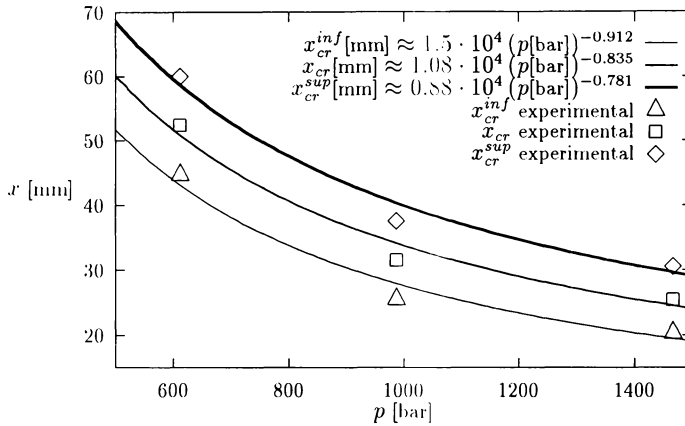


Figura 7.18: Dependența între lungimile critice ale jetului, generat cu o duză de diametru $D_o = 0.4 \text{ mm}$, funcție de presiunea înaintea duzei.

$x_{cr} = \beta p^\alpha$ cu α și β coeficienți numerici. O astfel de relație este dată și de Tikhomirov [50] pentru dependența distanței la care apare maximul forței jet-placă de presiune, ec.(5.11). Cu metoda celor mai mici pătrate s-au determinat coeficienții α și β , rezultând:

$$x_{cr}^{inf} [\text{mm}] \approx 1.5 \cdot 10^4 (p[\text{bar}])^{-0.912} \quad (7.22)$$

$$x_{cr} [\text{mm}] \approx 1.08 \cdot 10^4 (p[\text{bar}])^{-0.835} \quad (7.23)$$

$$x_{cr}^{sup} [\text{mm}] \approx 0.88 \cdot 10^4 (p[\text{bar}])^{-0.781} \quad (7.24)$$

Curbele descrise de ecuațiile (7.22),(7.23) și (7.24) împreună cu punctele experimentale corespunzătoare sunt prezentate în Fig.7.18, observându-se o bună concordanță.

Remarcăm că valorile exponentului presiunii se situează în jurul valorii indicate de Tikhomirov în relația (5.11), -0.88, ceea ce confirmă odată în plus concluzia că maximul forței jet-placă apare în zona de rupere a jetului.

Pentru scopuri practice, în vederea stabilirii distanței optime între duză și piesa prelucrată cu jet de apă, se poate reține concluzia că această distanță variază invers proporțional cu presiunea apei înaintea duzei.

În concluzie, metoda de investigare optică a jeturilor de apă de mare viteză prezentată în acest capitol este o metodă originală care permite punerea în evidență a lungimii de rupere a jetului, aceasta fiind orientativ lungimea până la care jetul poate fi folosit cu succes în scopuri tehnologice.

Capitolul 8

Concluzii

8.1 Concluzii generale

Tăierea materialelor cu jet de apă de mare viteză este un procedeu tehnologic nou, dezvoltat pe scară industrială în ultimii 20 de ani [31], [51]. Principalele avantaje pe care le oferă în raport cu procedeele clasice mecanice sau termice de tăiere sunt eliminarea deformării marginilor tăieturii și a degradării termice a materialului, în condițiile unei productivități comparabile sau chiar sporită. Potențial, cu jeturi de apă se poate tăia orice material.

Dezvoltarea în continuare a tehnologiei de tăiere cu jet de apă are la bază studiile asupra hidrodinamicii jetului și asupra echipamentelor folosite pentru generarea lui. Prezenta lucrare se încadrează în aceste eforturi de investigare a jeturilor de apă de mare viteză, atât teoretic cât și experimental, și de elaborare a soluțiilor tehnice pentru sursa de apă de înaltă presiune.

Jeturile studiate au ca parametri caracteristici viteza de $600 \dots 900 \text{ m/s}$ și diametrul orificiului duzei de $0.1 \dots 0.4 \text{ mm}$. Corespunzător, presiunea înaintea duzei este de $2000 \dots 4000 \text{ bar}$. Sursa de apă care realizează această presiune, la debite de $3 \dots 6 \text{ l/min}$ este un multiplicator de presiune, format dintr-o pompă de apă de înaltă presiune antrenată cu un cilindru hidraulic [67], [66].

Studiul funcționării acestei pompe volumice care debitează apa printr-un orificiu mic a luat în considerare compresibilitatea apei [37]. S-a pus în evidență posibilitatea utilizării ca acumulator hidraulic a unui recipient dispus pe traseul de refulare între pompă și duză, acesta înmagazinând și cedând energie pe baza elasticității apei. Modelul matematic elaborat permite dimensionarea volumului acumulatorului funcție de nivelul maxim admis al pulsațiilor de presiune care apar la inversarea sensului de mișcare al pistoanelor [38], [40]. Deasemenea, rezultatele numerice obținute pentru variația în timp a presiunii pe traseul de refulare pun în evidență cantitativ efectul negativ pe care îl are jocul în etanșarea plonjorului și spațiul mort din cilindrul pompei asupra presiunii medii a apei înaintea duzei și a randamentului volumic al pompei [39].

Dintre diversele tipuri de duze pentru generarea jetului prezentate în literatură [51], [24], [61], s-au impus în practică duzele cilindrice, care au orificiul practicat într-o pastilă de safir. Analiza hidrodinamicii duzei a necesitat luarea în considerare și a porțiunii inițiale a jetului pentru a evidenția contracția vânei de fluid la ieșirea din orificiu. Rezultatele numerice au fost obținute cu Metoda Elementului Finit, completată cu algoritmi de determinare a poziției suprafeței libere [43], [44], [45].

Din punct de vedere al formulării matematice s-a demonstrat că utilizarea funcției de curent este mai avantajoasă, atât din punct de vedere al simplității și eficienței algoritmului de determinare a suprafeței libere, cât și datorită faptului că permite tratarea curgerilor rotaționale. Comparativ, utilizarea formulării în potențialul vitezei permite numai studiul curgerilor irotaționale și în plus necesită calculul vitezei pe suprafața liberă, respectiv utilizarea unor elemente finite cu funcții de interpolare de ordin superior. Rezultatele numerice obținute pentru coeficientul de contracție a jetului arată că acesta scade odată cu creșterea raportului între diametrul conductei și diametrul orificiului. Dacă însă acest raport este mai mare de 6, coeficientul de contracție rămâne practic nemodificat și spunem că avem o contracție completă a jetului. Dacă se consideră curgerea rotațională corespunzătoare unui profil de viteză parabolic în conductă, se pun în evidență trei particularități ale câmpului hidrodinamic:

- la intersecția între peretele conductei și peretele frontal al duzei apare o zonă de recirculare a fluidului, a cărei extindere crește cu raportul diametru conductă / diametru orificiu;
- în cazul contracției incomplete, coeficientul de contracție a jetului este mai mare decât valoarea corespunzătoare pentru curgerea irotațională, dar cele două valori devin practic identice în cazul contracției complete;
- profilul de viteză, inițial parabolic în conductă, se aplatizează în jet, devenind practic uniform (viteza constantă pe secțiunea jetului) în cazul contracției complete.

Observațiile de mai sus justifică alegerea de către producătorii de echipamente de tăiere cu jet a unui raport între diametrul conductei și diametrul orificiului de 10 sau chiar mai mare.

Comparația între valoarea coeficientului de contracție pentru contracția completă 0.554 și valorile măsurate de Engemann pentru coeficientul de debit al duzelor cilindrice [15] arată că aceasta este practic valoarea către care tinde asimptotic coeficientul de debit la $Re \rightarrow \infty$ (ecuația (3.134) și Fig.3.15).

Analiza dezvoltării stratului limită pe peretele frontal al duzei arată că stratul limită se menține laminar până la ieșirea din orificiu, grosimea lui maximă nedepășind $1 \mu m$. Rezultă de aici necesitatea șlefuirii fine a pastilei de safir în care este practicat orificiul, astfel încât rugozitatea să nu depășească $0.05 \mu m$ pentru a nu crea surse de perturbații pentru jet.

Fenomenul specific evoluției jetului de lichid în aer este destrămarea lui și corespunzător transformarea într-un amestec bifazic apă-aer. Cauzele care conduc

la pierderea stabilității jetului și în final la ruperea lui în picături sunt tensiunea superficială și interacțiunea cu mediul gazos ambiant, dar pentru jeturile de mare viteză a două cauză este predominantă.

Studiul teoretic al stabilității jetului arată că pe măsură ce crește densitatea gazului crește amplificarea perturbațiilor și scade lungimea de undă la care amplificarea este maximă. Corespunzător, în mediu gazos mai dens jetul de lichid se fragmentează mai repede și în picături mai mici.

Studiile experimentale asupra structurii jeturilor de lichid de mare viteză în aer [60], [61], [54], [55], [56], au pus în evidență câteva distanțe față de duză care delimitează zone specifice ale acestor jeturi. Astfel, în ordinea creșterii distanței față de duză, se definește o lungime a porțiunii continue a jetului, o lungime de rupere și o lungime până la care viteza rămâne practic constantă în axă. Dacă prima și a treia lungime au fost măsurate direct prin metode electrice (de conductibilitate a vânei fluide) și prin anemometrie LASER, lungimea de rupere a fost estimată pe baza unor considerații teoretice. Pe de altă parte, studiile referitoare la interacțiunea jet-solid evidențiază un maxim al forței cu care acționează jetul asupra unei plăci plane chiar în zona lungimii de rupere. Această concluzie a orientat cercetările experimentale din această lucrare spre utilizarea unei metode aptă de a evidenția zona în care se produce trecerea de la curgera în picături concentrate la curgera difuză.

Analizând studiile realizate de Kobayashi ș.a. [23], [24] asupra eroziunii provocate de jetul de apă, s-au desprins următoarele concluzii:

- distanța față de duză la care eroziunea este maximă nu depinde de tipul materialului probei, deci este o caracteristică a jetului;
- duze de forme diferite, dar cu același diametru de orificiu și aceeași presiune de alimentare, produc aceeași pierdere maximă de material dar la distanțe diferite de duză.

A doua observație ne-a condus la ideea corectării distanței reale (pornind de la ipoteza că jeturile au aceeași putere) prin înmulțire cu cubul coeficientului de viteză și împărțire cu radicalul coeficientului de contracție. Distanța astfel definită este practic aceeași pentru duze diferite.

Investigațiile experimentale proprii asupra jetului de apă de mare viteză au fost efectuate pe o instalație proiectată și realizată de autor. Instalația se compune dintr-un multiplicator de presiune, format dintr-o pompă de înaltă presiune cu doi cilindri montați cap în cap cu blocul de supape comun, și patru cilindri hidraulici care antrenează două pistoane plonjoare. Instalația a fost proiectată pentru o presiune de 3000 *bar*, dar în exploatare s-a funcționat la presiuni de cel mult 2000 *bar*. Comanda mișcării cilindrilor hidraulici se face cu un distribuitor electrohidraulic, ale cărui bobine sunt alimentate printr-un comutator electronic de concepție proprie. Soluțiile constructive utilizate la pompa de înaltă presiune sunt originale, o mențione aparte necesitând etanșarea pistoanelor plonjoare. Deasemenea, tehnologia de montare a pastilei de safir în corpul duzei a fost pusă la punct de autor.

Pentru a evita atașarea jetului la peretele orificiului, pe fața pastilei dinspre ieșirea din orificiu se practică o degajare. Analiza stării de tensiune din duză a evidențiat faptul că degajarea semisferică conduce la o solicitare mecanică mai favorabilă decât degajarea conică.

Investigațiile experimentale efectuate de autor au urmărit pe de o parte stabilirea performanțelor funcționale ale pompei de înaltă presiune și pe de altă parte punerea în evidență a zonei în care se produce ruperea jetului. Pentru măsurarea presiunii înaintea duzei, autorul a conceput și realizat un traductor tensometric prin dispunerea a 4 timbre tensometrice pe conducta de legătură între blocul de supape și duză.

Încercările efectuate cu instalația experimentală au demonstrat că aceasta este capabilă să realizeze o presiune de 2000 *bar*, cu un randament volumic de 93%. Valorile măsurate ale coeficientului de debit al duzei concordă bine cu cele măsurate de Engemann [15] pentru același tip de duză.

Studiul structurii jetului a fost efectuat cu o metodă originală, care constă în analiza intensității luminoase a unui fascicol LASER ce străbate transversal jetul. Semnalul luminos este captat de o fotodiodă, iar semnalul electric furnizat de aceasta este analizat cu un osciloscop numeric. Dintre parametrii care caracterizează semnalul a fost identificată tensiunea efectivă a pulsației ca fiind relevantă. Variația acesteia cu distanța până la duză evidențiază o zonă în care scade brusc. Comparând distanța la care apare această zonă cu lungimea de rupere calculată de alți autori, s-a concluzionat că metoda utilizată este capabilă să evidențieze zona la care începe curgerea difuză a jetului, deci lungimea până la care acesta poate fi utilizat în scopuri tehnologice.

8.2 Contribuții personale

1. Lucrarea abordează un domeniu nou la noi în țară, cel al tehnologiei de tăiere cu jet. Studiul aprofundat al hidrodinamicii jetului de apă de mare viteză și al instalațiilor utilizate pentru generarea lui reprezintă fundamentul dezvoltării unor echipamente competitive, pentru utilizări pe scară industrială.
2. Pentru modelarea funcționării pompelor volumice la presiune înaltă am elaborat un model matematic original care ia în considerare elasticitatea lichidului și variația ei cu presiunea. Au fost stabilite relații pentru descrierea variației densității apei și a vitezei sunetului cu presiunea, (2.5) și (2.6), coeficienții numerici fiind calculați pe baza măsurătorilor de viteză a sunetului efectuate de Smith și Lawson [36]. Cu acestea au fost stabilite relația de calcul a vitezei jetului (2.12) și ecuația diferențială a pompei volumice (2.15) cu lichid compresibil. Modelul matematic a fost verificat cu datele experimentale ale lui Vereščagin [55] și apoi este utilizat pentru

- studiul pompei volumice antrenată cu motor hidraulic liniar (multiplicator de presiune). Rezultatele numerice permit dimensionarea acumulatorului hidraulic care utilizează apa ca element elastic.
3. Pentru analiza hidrodinamicii duzei am dezvoltat un model matematic original pentru studiul curgerii rotaționale nevâscoase, (3.15) ... (3.20).
 4. Soluționarea problemelor la limită pentru potențialul vitezei și pentru funcția de curent s-a făcut cu Metoda Elementului Finit, ecuațiile elementale fiind deduse de autor pornind de la formulările variaționale ale ecuațiilor cu derivate parțiale. Programele în limbaj FORTRAN care implementează MEF, anexele A.1, A.2, A.3, sunt de concepție proprie.
 5. Algoritmii de determinare a frontierei libere a jetului sunt originali. Algoritmii care utilizează formularea în potențialul vitezei (ecuațiile 3.119, 3.120, 3.122, 3.123) este o variantă îmbunătățită a celui utilizat de Chan și Larock [9], iar cel care utilizează formularea în funcția de curent reprezintă o noutate.
 6. Pentru ecuația stabilității jetului, autorul prezintă o demonstrație originală. Rezolvarea ecuației este făcută cu un algoritm propriu, implementat în programul în limbaj FORTRAN din anexa A.4.
 7. Autorul a proiectat și realizat o instalație experimentală originală, pentru studiul jeturilor de apă de mare viteză. Dintre elementele de noutate ce caracterizează soluțiile tehnice încorporate în această instalație menționăm construcția pompei de înaltă presiune, etanșarea pistoanelor plonjoare, blocul de supape, duza de generare a jetului, comutatorul electronic ce comandă distribuitorul electrohidraulic. Tot printre soluțiile originale se cuvine menționat traductorul tensometric de presiune înaltă.
 8. Metoda de investigare optică a structurii jetului este originală. Autorul a proiectat și realizat sistemul optic LASER+fotodiodă. Fotodioda este fixată într-o montură specială ce permite alinierea cu fascicolul LASER.
 9. Identificarea pulsației tensiunii pe fotodiodă ca mărime relevantă pentru analiza structurii jetului constituie o noutate. Deasemenea, trebuie menționat că la măsurători a fost utilizat un echipament modern compus dintr-un osciloscop numeric și un computer pentru achiziția imaginii semnalului de pe ecranul osciloscopului.

8.3 Perspective

Dezvoltarea studiilor teoretice și experimentale asupra jeturilor de apă de mare viteză, prezentate în această lucrare, pot fi completate și aprofundate în următoarele direcții:

1. Analiza curgerii în duză considerând fluidul vâscos în curgere turbulentă ar putea pune în evidență cauzele perturbațiilor care conduc la pierderea stabilității jetului.
2. Studiul stabilității jetului, cu analiza evoluției perturbațiilor când amplitudinea acestora devine mare în raport cu diametrul jetului necesită luarea în considerare a unui model neliniar. În acest caz, micile perturbații inițial armonice se deformează pe măsură ce se amplifică, punându-se în evidență ruperea jetului în picături, începând de la periferie.
3. Efectul adaosului de polietilenglicol în apă asupra coerenței jetului trebuie investigat atât teoretic cât și experimental. Aceasta poate fi o soluție viabilă pentru creșterea performanțelor jeturilor de tăiere.
4. Instalația experimentală realizată de autor poate fi echipată cu un acumulator hidraulic pe traseul de refulare, corespunzător verificându-se considerațiile teoretice din Cap.2. Acumulatorul poate fi realizat în construcție modulară, astfel încât volumul său să fie modificabil în trepte.
5. Echipamentul optic utilizat pentru analiza structurii jetului poate fi perfecționat astfel încât să permită baleierea secțiunii transversale a jetului, respectiv captarea semnalului luminos sub diferite unghiuri față de direcția inițială a fascicolului. În acest fel se poate efectua o analiză mai aprofundată a modului în care se fragmentează și se dispersează jetul pe măsură ce crește distanța până la duză.
6. Creșterea spectaculoasă a productivității tăierii cu jet de apă a fost realizată la echipamentele industriale prin adaosul de particule abrazive în jet. Studiul și optimizarea dispozitivului de înglobare a abrazivului în jetul de apă curată este o problemă cu implicații practice deosebite, aducând tehnologia de tăiere hidroabrazivă la performanțe chiar superioare procedeelor convenționale la tăierea metalelor.
7. Instalația experimentală prezentată în lucrare poate fi completată cu un sistem de ghidare a semifabricatului sub duza fixă, astfel încât să se poată realiza efectiv încercări de tăiere a diverselor materiale.

Bibliografie

- [1] AMANO R.S., NEUSEN K.F., *A numerical and experimental investigation of high-velocity jets impinging on a flat plate*, 6th International Symposium on Jet Cutting Technology, Guildford, 1982.
- [2] ANCUȘA V., SUCITU L., SUSAN-RESIGA R., ANTON L., *Cercetări teoretice și fundamentarea cercetărilor de laborator privind tăierea cu jet de lichid*, Contract de cercetare științifică nr.77/1990, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara.
- [3] ANCUȘA V., SUSAN-RESIGA R., *Soluții constructive pentru multiplicatorul de presiune aparținând instalației de tăiere cu jet de lichid*, Contract de cercetare științifică nr.91/1991, Universitatea Tehnică Timișoara.
- [4] ANTON I., **Cavitația**, vol. I, Editura Academiei R.S.R., București, 1984.
- [5] ANTON VIORICA, POPOVICIU M., FITERO I., **Hidraulică și Mașini Hidraulice**. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
- [6] BATCHELOR G.K. , **An Introduction to Fluid Dynamics**, Cambridge University Press, 1967.
- [7] BUZDUGAN GH. , **Rezistența Materialelor**, Editura Tehnică, București, 1980.
- [8] CEBECI T., BRADSHAW P., **Momentum Transfer in Boundary Layers**. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [9] CHAN S.T.K., LAROCK B.E., *Fluid Flows from Axisymmetric Orifices and Valves*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.99, No.HY1, 1973, pp.81-97.
- [10] CHIOREAN C., **MS-DOS 6. Utilitare, Comenzi, Interfete. Ghid de utilizare** . Ed. Microinformatica, Cluj-Napoca, 1994.
- [11] CHUNG T.J. , **Finite Element Analysis in Fluid Dynamics**. McGraw-Hill, New York, 1978.

- [12] COOK M.A., ROGERS L.A., *Journal of Applied Physics* **34** (1963), p.2330
- [13] DHATT G., TOUZOT G., **Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis**, Maloine S.A. Editeur, Paris, et Les Presses de l'Université Laval. Québec, 1981.
- [14] DORN W.S., MCCracken D.D., **Metode numerice cu programe în FORTRAN IV**, Editura Tehnică, București, 1976.
- [15] ENGEMANN B.K. Beitrag zu Physik und Technik des Trennens mittels Hochgeschwindigkeitsflüssigkeitsstrahlen, Disertation zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs, Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt, 1984.
- [16] GÂRBEA D., **Analiză cu elemente finite**, Editura Tehnică, București, 1990.
- [17] GIFFEN E., MURASZEW A., **The Atomisation of Liquid Fuels**, John Wiley and Sons, New York, 1953.
- [18] GOEDDE E.F., YUEN M.C., *Experiments on liquid jet instability*, *J. Fluid Mech.*, vol.**40**, 1970, p.495-511.
- [19] HAENLEIN A., *Über den Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles*, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Heft 4, April 1931, p. 139-149.
- [20] HUEBNER K.H., **The Finite Element Method for Engineers**, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [21] IONESCU GH.D., **Teoria diferențială a curbelor și suprafețelor, cu aplicații tehnice**, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1984.
- [22] JONES W.P., LAUNDER B.E., *Prediction of Laminarization with a 2-Equation Model of Turbulence*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 1972, p301.
- [23] KOBAYASHI R., ARAI T., YAMADA H., *Structure of a High-Speed Water Jet and the Damage Process of Metals in Jet Cutting Technology*, *JSME International Journal, Series II, Vol.31, No.1*, 1988, p.53-57.
- [24] KOBAYASHI R., ARAI T., MASUKI Y., *Water Jet Nozzle Geometry and its Effect on Erosion Process of Metallic Material*, 5th American Water Jet Conference, Toronto, Canada, 1989, p.59-68.
- [25] KÖRNER J.P., *Design and Development of Intensifier Systems for Continuous Operation at Pressures in Excess of 3000 bars*, 7th International Symposium on Jet Cutting Technology, Hanover, 1980.

- [26] LANDAU L., LIFCHITZ E., **Mécanique des Fluides**, Éditions Mir, Moscou, 1989.
- [27] LI H.S., KELLY R.E., *The Instability of a Liquid Jet in a Compressible Airstream*, Phys. Fluids A4(10), Oct.1992, p.2162-2168.
- [28] LIN S.P., KANG D.J., *Atomization of a Liquid Jet*, Phys. Fluids 30(7), July 1987, p.2000-2006.
- [29] LIN S.P., LIAN Z.W., *Absolute Instability of a Liquid Jet in a Gas*, Phys. Fluids A1(3), March 1989, p.490-493.
- [30] LIN S.P., LIAN Z.W., *Mechanism of the Breakup of Liquid Jets*, AIAA Journal, Vol.28, No.1, 1990, p.120-126.
- [31] MILLER R.K., **Waterjet Cutting: Technology and Industrial Applications**, The Fairmont Press, Lilburn, 1991.
- [32] MUELLER S., **PC - Depanare și Modernizare**, Ed. Teora, Bucuresti, 1995.
- [33] NAKAYA M., NISHITA N., *The Systems and Water Jet Cutting Data*, 5th International Symposium on Jet Cutting Technology, Hanover, 1980.
- [34] SCHLICHTING H., **Boundary-Layer Theory**, McGraw Hill Book Company, New York, 1968.
- [35] SEMERČAN A.A., VEREŠČAGIN L.F., FILLER F.M., KUZIN N.N., *Raspre-delenie količestva dviženia v neprepynoj židkostnoj strue sverh-zvukovoj skorosti*, Žurnal tehničeskoj fiziki, Tom XXVII, v.9, 1958, p.2062-2071.
- [36] SMITH A.H., LAWSON A.W., Journal of Chemical Physics **22** (1954), p.351
- [37] SUSAN-RESIGA R., *La détermination des relations de calcul pour caractériser la compressibilité de l'eau*, Buletinul Științific și Tehnic al Universității Tehnice din Timișoara, Tom 37(51) Mecanica, (1992)
- [38] SUSAN-RESIGA R., *The study of the function of a jet cutting unit*, Proceedings of the "Physique en Herbe '92" Congress, Marseille, 1992.
- [39] SUSAN-RESIGA R., *Influența spațiului mort și a interstițiului etanșării asupra funcționării unei instalații de tăiere cu jet de lichid*. Sesiunea de comunicări științifice "Conceptie, Tehnologie și Management în Construcția de Mașini". Iași, 1992, p.155-160.

- [40] SUSAN-RESIGA R., *Attenuator's Volume Influence on High Pressure's Pulsations in a Jet Cutting Unit*, Proceedings of the 11-th International Conference on Jet Cutting Technology, St.Andrews, 1992, pp.37-45
- [41] SUSAN-RESIGA R., RAICOV P.C., *Design optimization of the synchronization system for high pressure intensifier, using the Finite Element Method*, Proceedings of the 2nd National Conference on Boundary and Finite Elements, Sibiu, 1993, Section 2.1, p.100-105.
- [42] SUSAN-RESIGA R., *Determination of the axisymmetric jet surface by using F.E.M.*, Proceedings of the Workshop on Computational Fluid Dynamics, Galați, 1993, p77-85.
- [43] SUSAN-RESIGA R., *Finite Element Analysis of Free Surface Axisymmetric Flows, using Velocity Potential Formulation*, Proceedings of the 4th Conference on Hydraulic Machinery and Hydrodynamics, Timișoara, 1994, vol.1, p.83-90.
- [44] SUSAN-RESIGA R., *Finite Element Analysis of Free Surface Axisymmetric Flows, using Stream Function Formulation*, Proceedings of the 4th Conference on Hydraulic Machinery and Hydrodynamics, Timișoara, 1994, vol.1, p.91-98.
- [45] SUSAN-RESIGA R., *Finite Element Analysis of Free Surface Axisymmetric Flows*, *Révue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée*, Tom 40(3), 1995.
- [46] SUSAN-RESIGA R., *Finite Element Analysis of Cylindrical Cutting Nozzle Hydrodynamics*, microCAD International Computer Science Conference, Miskolc, 1995, Vol.K., p.68-71.
- [47] STERLING A.M., SLEICHER C.A., *The instability of capillary jets*, *J. Fluid Mech.*, vol.68, 1975, p.477-495.
- [48] ȘABAC I. GH., **Matematici speciale**, E.D.P. București, 1981.
- [49] TAIT P.G., *Report on some of the physical properties of fresh water and sea water*, *Phys. Chem.* **2** (1888)
- [50] TIKHOMIROV R.A., **Mechanical Machining of Plastics**, Mashinostroenie, Leningrad, 1975.
- [51] TIKHOMIROV R.A., BABANIN V.F., PETUKHOV E.N., STARIKOV I.D., KOVALEV V.A., **High-Pressure Jetcutting**, ASME Press, New York, 1992.

- [52] TIRON M., **Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsurare**, Editura Tehnică, București, 1976.
- [53] THWAITES B., *Approximate Calculation of the Laminar Boundary Layer*, Aero. Quart. vol.1, 1949, p.245.
- [54] VEREŠČAGHIN L.F., SEMERČAN A.A., FIRSOV A.I., GALAKTIONOV V.A., FILLER F.M., *Nekotorye issledovanija gidrodinamiki strui jidkosti, vytekajuščie iz sopla pod davleniem do 1500 atm.*, Žurnal tehničkoj fiziki, Tom XXVI, v.11, 1956, p.2570-2577.
- [55] VEREŠČAGHIN L.F., SEMERČAN A.A., FILLER F.M., *Nekotorye issledovanija strui vody, vytekajuščej, iz sopla pod davleniem do 2000 atmosfer*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tehničkoj Nauk, No.1, 1957, p.57-60.
- [56] VEREŠČAGHIN L.F., SEMERČAN A.A., MASLENNIKOV M.V., SEKOJAN S.S., *K voprosu o trenii strui vody o stenki sopla pri sverhzvukovoj skorosti*, Žurnal tehničkoj fiziki, Tom XXVII, v.2, 1957.
- [57] VEREŠČAGHIN L.F., SEMERČAN A.A., FILLER F.M., *K voprosu o razryve skorosti v vodjanoj strue*, Žurnal tehničkoj fiziki, Tom XXVIII, v.2, 1958.
- [58] VEREŠČAGHIN L.F., SEMERČAN A.A., SEKOJAN S.S., *K voprosu o raspade vysokoskorostnoj vodjanoj strui*, Žurnal tehničkoj fiziki, Tom XXIX, v.1, 1959, p.45-50.
- [59] WEBER C., *Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles*, Ztschr. f. angew. Math. und Mech., Band 11, Heft 2, April 1931, p.136-154.
- [60] YANAIDA K., *Flow characteristics of water jets*, Paper A2 in **Proceedings of the second International Symposium on Jet Cutting Technology**, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Bedford, U.K., 1974.
- [61] YANAIDA K., OHASHI A., *Flow Characteristics of water jets in air*, Paper A3 in **Proceedings of the fifth International Symposium on Jet Cutting Technology**, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Bedford, U.K., 1980.
- [62] ZHOU Z.W., LIN S.P., *Absolute and Convective Instability of a Compressible jet*, Phys. Fluids A4(2), Feb.1992, p.277-282.
- [63] *** **Microsoft FORTRAN version 5.1 for MS-OS/2 and MS-DOS operating systems**, Microsoft Corporation. 1989.
- [64] *** **ELCUT 3.0 - Finite Element Analysis System, User's Guide**, TOR Cooperative Enterprise, St. Petersburg, 1992.

- [65] *** **MathCAD User's Guide**, MathSoft Inc., 1989.
- [66] *** *Precision aqua-jet cutting* (UHDE).
- [67] *** *Waternife + Passer Systems* (FLOW SYSTEMS).
- [68] *** *Fluid jet cutting equipment* (AB BEST MATIC).
- [69] *** *Systemes d'átancheilć* (GREENE, TWEED & Co).
- [70] *** PHILIPS Oscilloscopes à Mémoire Numérique PM3350/A, Notice d'utilisation.
- [71] *** *Tensometru electronic cu un canal, Tip N-2301. Carte Tehnică*. Întreprinderea de Aparate Electronice de Măsură și Industriale, București, 1975.
- [72] *** *Wortington vertical plunger pumps* (WORTINGTON PUMPS).

Anexa A

**Programe de calcul în limbaj
FORTRAN elaborate de autor și
utilizate în lucrare**

A.1 Generarea geometriei domeniului și discretizarea

```

$STORAGE: 2
      PROGRAM DUZGEO
C   Program pentru generarea fisierului cu geometria
C   initiala a domeniului duza & jet
      CHARACTER*12 FISGEOM
      REAL L1,L2,L3
      DIMENSION Z1(200),R1(200),Z2(200),R2(200)
C-----Introducerea de la tastatura a razelor
      WRITE (*,'('' Raza conductei este: '',$)')
      READ (*,'(F15.0)') RC
      WRITE (*,'('' Raza orificiului este: '',$)')
      READ (*,'(F15.0)') RO
C-----Numele fisierului generat este:
      FISGEOM='GEO.00'
      L1=4.*RO !lungimea tronsonului de jet
      L2=4.*RC ! lungimea tronsonului de conducta
      L3=RC-RO
      S1=5./4.
      S2=3./4.
      N1=40
      N2=32
C-----Jetul
      DO 10 I=1,N1+1
          R1(I)=0
10      R2(I)=RO
          Z1(1)=L1
          Z2(1)=L1
          DO 20 I=2,N1
              DZ=RO/6.+(I-2)*RO*(1./30.-1./6.)/(N1-1)
              Z1(I)=Z1(I-1)-S1*DZ
20      Z2(I)=Z2(I-1)-DZ
          Z1(N1+1)=-RO
          Z2(N1+1)=0.
C-----Capatul conductei
      N3=20*(RC-RO)/(RC/2.+RO/3.)+.9
C   Diviziunea la capatul lui L3 este
      D3=2.*L3/N3-RO/30.
      DO 30 I=N1+2,N1+N3+1
          R1(I)=0.

```

```

30      Z2(I)=0.
        DO 40 I=N1+2,N1+N3
        D=R0/30.+(I-N1-2)*(D3-R0/30.)/(N3-1)
        Z1(I)=Z1(I-1)-D
40      R2(I)=R2(I-1)+D
        Z1(N1+N3+1)=-RC
        R2(N1+N3+1)=RC
C-----Conducta
        DO 50 I=N1+N3+2,N1+N3+N2+1
        R1(I)=0.
50      R2(I)=RC
        DO 60 I=N1+N3+2,N1+N3+N2
        DZ=RC/20.+(I-N1-N3-2)*RC*(1./5.-1./20.)/(N2-1)
        Z1(I)=Z1(I-1)-S2*DZ
60      Z2(I)=Z2(I-1)-DZ
        Z1(N1+N3+N2+1)=-L2
        Z2(N1+N3+N2+1)=-L2
C-----Scrierea fisierului FISGEOM
        OPEN (2, FILE=FISGEOM)
        WRITE (2,'(3(I5,'',''))') N1+N3+N2+1,15,N1+1
        DO 70 I=1,N1+N3+N2+1
70      WRITE (2,'(4(F12.5,'',''))') Z1(I),R1(I),Z2(I),R2(I)
        CLOSE (2)
        STOP
        END

```

\$STORAGE: 2

```

PROGRAM GENRET4
C   Program pentru generarea fisierelor:
C   FISCOORD : fisierul cu coordonatele nodurilor
C   FISCONEX : fisierul cu matricea de conexiune
C   Din fisierul FISGEOM, se citesc :
C   - numarul de noduri pe "lungime", NNLUNG
C   - numarul de noduri pe "latime", NNLAT
C   - coordonatele perechilor de puncte care definesc:
C     frontierele impenetrabile
C   Numele acestor fisiere se citesc din 'FILES.IO'
C
        DIMENSION E(300)
        COMMON /XY/X(8191),Y(8191)
        CHARACTER*12 FISCONEX, FISCOORD, FISGEOM
        OPEN(1,FILE='FILES.IO',STATUS='OLD')

```

```

        READ(1,100) FISGEOM, FISCONEX, FISCOORD
100     FORMAT (60X,A12)
        CLOSE(1)
        OPEN (1,FILE=FISGEOM, STATUS='OLD')
        OPEN (2,FILE=FISCOORD)
        READ (1,'(3I10)') NNLUNG,NNLAT,NNFL
        E1=1.
        E2=1.
        A1=(E2-E1)/((NNFL-1)**3.)
        B1=3.*(NNFL+1)
        C1=6.*1.*NNFL
        D1=2.-B1+C1
        A2=(E1-E2)/((NNLUNG-NNFL)**3.)
        B2=3.*(NNLUNG+NNFL)
        C2=6.*NNFL*NNLUNG
        D2=2.*NNFL**3.-B2*NNFL**2.+C2*NNFL
        DO 1 I=1,NNFL
1         E(I)=E1+A1*(-2.*I**3. +B1*I**2. -C1*I+ D1)
        DO 2 I=NNFL+1,NNLUNG
2         E(I)=E2+A2*(-2.*I**3. +B2*I**2. -C2*I+ D2)
        NNT=NNLUNG*NNLAT
        NINTLAT=NNLAT-1
        DO 10 I=1,NNLUNG
            READ(1,'(4F20.0)') XC,YC,XI,YI
            WRITE(*,'(''+'',5X,I5,4G15.7)') I,XC,YC,XI,YI
            DO 10 J=0,NINTLAT
                K=(I-1)*NNLAT+J+1
                F = J
                F = F/NINTLAT
                F = F**E(I)
                X(K)=XC+(XI-XC)*F
                Y(K)=YC+(YI-YC)*F
10         CONTINUE
        CLOSE(1)
        WRITE(*,'(''+'',10X,'''',
*      ''                                     ''',
        ''                                     ''')')
        WRITE (2,'(I6,'''')') NNT
        DO 20 I=1,NNT
20        WRITE(2,'(2(G15.7,'''')') X(I),Y(I)
        CLOSE(2)
C_____Generarea matricii de conexiuni
CALL GENCNX4(NNLUNG,NNLAT,FISCONEX)
STOP
    
```

END

```
$STORAGE: 2
SUBROUTINE GENCNX4 (NNLUNG,NNLAT,FISCONEX)
C   Subrutina pentru generarea fisierului cu matricea de conexiuni
C   pentru o retea de elemente patrulatere
C   Parametrii subrutinei sunt:
C  >NNLUNG : Numarul de noduri pe "lungimea" retelei.
C  >NNLAT  : Numarul de noduri pe "latimea" retelei
C  >FISCONEX: Variabila ce contine numele fisierului
C             cu matricea de conexiuni
C   In fisierul FISCONEX se scriu pe prima linie:
C   NET : Numarul de elemente total
C   NNE : Numarul de noduri pe element
C
CHARACTER*12 FISCONEX
INTEGER CNX(4), N(4)
OPEN (1,FILE=FISCONEX)
NET=(NNLAT-1)*(NNLUNG-1)
NNE=4
WRITE (1,100) NET,NNE
C-----Generare matrice de conexiuni
N(1)=0
N(2)=1
N(3)=NNLAT+1
N(4)=NNLAT
DO 30 J=1,NNLUNG-1
  DO 20 I=1,NNLAT-1
    DO 10 K=1,4
      CNX(K)=N(K)+I
    WRITE (1,200) CNX
  DO 30 K=1,4
    N(K)=N(K)+NNLAT
  CLOSE(2)
100  FORMAT(2(I6,' ',''))
200  FORMAT(4(I6,' ',''))
RETURN
END
```

```

$STORAGE: 2
      PROGRAM GENRET6
C
C   Program pentru generarea fisierelor:
C     FISCOORD : fisierul cu coordonatele nodurilor
C     FISCONEX  : fisierul cu matricea de conexiune
C   Din fisierul FISGEOM, se citesc :
C     - numarul de noduri geometrice pe "lungime", NNLUN
C     - numarul de noduri geometrice pe "latime", NNGLAT
C     - numarul de "felii de jet", NFJ
C     - coordonatele perechilor de puncte care definesc
C       frontierele impenetrabile ale domeniului
C   Numele acestor fisiere se citesc din 'FILES.IO'
C
      CHARACTER*12 FISCONEX, FISCOORD, FISGEOM, FISRET
      DIMENSION XS1(90),YS1(90),XSM(90),YSM(90),XS2(90),YS2(90)
      OPEN(1,FILE='FILES.IO',STATUS='OLD')
      READ(1,100) FISGEOM, FISCONEX, FISCOORD
      CLOSE(1)
      OPEN (1,FILE=FISGEOM)
      OPEN (2,FILE=FISCOORD)
      READ (1,'(2I10)') NNLUN,NNGLAT
      NNILAT=2*NNGLAT-1
      NNILUN=2*NNLUN-1
      NNT=NNILAT*NNILUN
      WRITE (2,400) NNT
      NELUN=NNLUN-1
      READ (1,300) X1,Y1,X2,Y2
      DO 10 I=0,NNILAT-1
        XS1(I+1)=X1+(X2-X1)/(NNILAT-1)*I
        YS1(I+1)=Y1+(Y2-Y1)/(NNILAT-1)*I
10      WRITE (2,200) XS1(I+1),YS1(I+1)
      DO 70 K=1,NELUN
        READ (1,300) X1,Y1,X2,Y2
          write (*,'(4f15.5)') x1,y1,x2,y2
          DO 20 I=0,NNILAT-1
            XS2(I+1)=X1+(X2-X1)/(NNILAT-1)*I
            YS2(I+1)=Y1+(Y2-Y1)/(NNILAT-1)*I
20          DO 30 I=1,NNILAT,2
            XSM(I)=(XS1(I)+XS2(I))/2

```

```

30          YSM(I)=(YS1(I)+YS2(I))/2
           DO 40 I=2,NNILAT-1,2
             XSM(I)=(XS1(I-1)+XS2(I+1))/2
             YSM(I)=(YS1(I-1)+YS2(I+1))/2
40          DO 50 I=1,NNILAT
           WRITE (2,200) XSM(I),YSM(I)
50          DO 60 I=1,NNILAT
           WRITE (2,200) XS2(I),YS2(I)
           XS1(I)=XS2(I)
60          YS1(I)=YS2(I)
70          CONTINUE
           CLOSE(1)
           CLOSE(2)
           CALL GENCNX6(NNGLAT,NNGLUN,FISCONEX)
100         FORMAT (60X,A12)
200         FORMAT (1X,2(F12.6,', '))
300         FORMAT (4F15.0)
400         FORMAT (I6,', ')
           STOP
           END

```

\$STORAGE: 2

SUBROUTINE GENCNX6(NNGLAT,NNGLUN,FISCONEX)

C Subrutina pentru generarea fisierului cu matricea de conexiuni
C pentru o retea cu elemente triunghiulare cu 6 noduri de
C interpolare si 3 noduri geometrice.
C Reteaua este generata de la dreapta la stinga
C Parametrii subrutinei sint:
C NNGLAT : Numarul de Noduri Geometrice pe LAtime
C NNGLUN : Numarul de Noduri Geometrice pe LUNGime
C FISCONEX : Numele fisierului
C Alte notatii:
C NNILAT : Numarul de Noduri de Interpolare pe LAtime
C NNILUN : Numarul de Noduri de Interpolare pe LUNGime
C NELAT : Numarul de Elemente pe LAtime
C NET : Numarul de Elemente Total
C IEG : Indicele Elementului, Global
C IFE : Indicele "FELiei de retea"
C IIFO : Indicele de Interpolare initial al Feliei
C IEF : Indicele Elementului in Felie
C NI : Numarul nodului de Interpolare
C

```

        CHARACTER*12 FISCONEX
        INTEGER NI(6)
        OPEN (3,FILE=FISCONEX)
        NNILAT=2*NNGLAT-1
        NNILUN=2*NNGLUN-1
        NELAT=NNGLAT-1
        NET=2*NELAT*(NNGLUN-1)
        WRITE (3,100) NET,6
100     FORMAT (2(I5,', '))
        DO 10 IEG=1,NET
        IFE=(IEG-1)/(2*NELAT)
        IIF0=IFE*2*NNILAT
        IEF=IEG-IFE*2*NELAT
        IF ((2*(IEG/2)).NE.IEG) THEN
C         Tratare caz IEG impar
            NI(1)=IIF0+IEF
            NI(2)=NI(1)+2
            NI(3)=NI(1)+2+2*NNILAT
            NI(4)=NI(1)+1
            NI(5)=NI(1)+2+NNILAT
            NI(6)=NI(1)+1+NNILAT
        ELSE
C         Tratare caz IEG par
            NI(1)=IIF0+IEF-1
            NI(2)=NI(1)+2+2*NNILAT
            NI(3)=NI(1)+2*NNILAT
            NI(4)=NI(1)+1+NNILAT
            NI(5)=NI(1)+1+2*NNILAT
            NI(6)=NI(1)+NNILAT
        ENDIF
10     WRITE (3,200) NI
200     FORMAT (6(I6,', '))
        CLOSE (3)
        RETURN
        END
    
```


A.2 Rezolvarea problemei cu condiții la limită cu Metoda Elementului Finit

```

$STORAGE: 2
PROGRAM ROFEM
C Scop: Rezolvarea problemei cu conditii la limita pentru functia
C de curent (miscare axial-simetrica) si corectarea coor-
C donatelor nodurilor de pe suprafata libera a jetului
CHARACTER*12 FILES, FISDATE, FISCL, FISREZ
C FILES: Fisierul cu numele fisierelor utilizate.
C FISDATE: Fisierul cu matricile de conexiuni sortate
C si coordonatele nodurilor.
C FISCL: Fisierul cu conditiile la limita.
C FISREZ: Fisierul cu rezultatul calculelor.
C GEOINI: Fisierul cu geometria initiala a domeniului
C GEOCOR: Fisierul cu geometria corectata a domeniului
C-----Cere numele 'FILES'
WRITE (*,'('' Dati numele fisierului continnd'',
+ '' fisierele utilizate:'',$)')
READ (*,'(A)') FILES
C-----Citeste numele fisierelor utilizate
OPEN (1, FILE=FILES, STATUS='OLD')
READ (1,100) FISDATE, FISCL, FISREZ, GEOINI, GEOCOR
CLOSE (1)
PSIFL = 1. ! valoarea lui PSI pe frontiera libera
C-----Citeste fisierul FISDATE
CALL RDATEE (FISDATE, NET, NNT, NNE, M)
WRITE (*,'('' Numarul de elemente total: ''I5)') NET
WRITE (*,'('' Numarul de noduri total: ''I5)') NNT
WRITE (*,'('' Nr. de noduri pe element: ''I5)') NNE
WRITE (*,'('' Latimea semibenzii: ''I5)') M
C-----Anulare termeni liberi
DO 10 I=1,NNT
10 B(I)=0.
C-----Actualizare termeni liberi pentru vortex
V=8./(R(NNT)**4.)
CALL VORTEX(NET,NNT,V)
C-----Introducere conditii la limita Dirichlet
CALL CONDLIM (FISCL)
C-----Introducere conditii la limita Neumann
CALL CLNPSI(NNFL,NNLAT,PSIFL)
C-----Asambleaza sistemul simetric

```

```

OPEN (1, FORM='UNFORMATTED')
CALL ASMB1S (1, NNT, NNE,>NNL, M)
WRITE (*,'(''      Nr. de noduri libere:      ''I5)')>NNL
C-----Rezolvare sistem
CALL REBSGA (1,>NNL, M)
CLOSE (1)
C-----Completeaza si scrie solutia
CALL OUTREZ (FISREZ, NNT)
C-----Corecteaza frontiera libera
CALL CORPSI(NNFL,>NNLAT)
C-----Scrie fisierul cu noile coordonate ale punctelor de pe
suprafata libera
OPEN (1,FILE=GEOCOR)
WRITE(1,'(3(I5'', ''))')>NNLUNG,>NNLAT,>NNFL
DO 30 I=1,>NNLUNG
INA=(I-1)*>NNLAT+1
INF=I+>NNLAT
30  WRITE(1,'(4(F12.5, '', ''))') Z(INA),R(INA),Z(INF),R(INF)
CLOSE(1)
STOP
100  FORMAT (64X,A12)
END

```

\$STORAGE: 2

```

SUBROUTINE RDATEE (FISDATE, NET, NNT, NNE, M)
C Scop: Citirea datelor pentru programul de analiza cu
C       elemente finite ROFEM1.
C Parametrii subrutinei:
C       FISDATE: Fisierul cu matricile de conexiuni si
C               de coordonate ale nodurilor.
C       NET:    Numarul total de elemente finite.
C       NNT:    Numarul total de noduri
C       NNE:    Numarul de noduri pe element.
C       M:      Latimea semibenzii.
C Rezultatele subrutinei vor fi transferate si prin blocurile
C COMMON:
C       /CNX/ CNX: Matricea de conexiuni.
C       /AE/ SNEA: Sirul elementelor de asamblat pe nod.
C       /X/X,/Y/Y: Coordonatele nodurilor.
CHARACTER FISDATE*12
INTEGER*1 SNEA
INTEGER*2 CNX

```

```

COMMON /CNX/ CNX(32766)
COMMON /AE/ SNEA(16383)
COMMON /X/ X(16383), /Y/ Y(16383)
C-----Citire FISDATE (N1, N2, N3 sunt "locuri libere")
OPEN (1, FILE=FISDATE, STATUS='OLD', FORM='UNFORMATTED')
READ (1) NNT, NET, NNE, M, M, N1, N2, N3
READ (1) (CNX(I),I=1,NNE*NET)
READ (1) (SNEA(I),I=1,NNT)
READ (1) (X(I), Y(I),I=1,NNT)
CLOSE (1)
RETURN
END

$STORAGE: 2
SUBROUTINE VORTEX (NET, NNT, V)
C Scop: Completarea termenilor liberi, pentru miscarea
C rotatională, axial-simetrice, fara swirl.
C Subrutina este scrisa pentru elemente patrulate, cu
C 4 noduri.
C Subrutina se apeleaza PRIMA la setarea termenilor liberi.
C Parametrii subrutinei:
C NET: Numarul de elemente total.
C NNT: Numarul de noduri total.
C V: Vorticitatea raportata la raza.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C /CNX/ CNX: Matricea de conexiuni
C /X/Z,/Y/R: Coordonatele nodurilor
C /B/ B: Sirul termenilor liberi (considerati zero)
INTEGER*2 CNX
DIMENSION C1(4), C2(4), C3(4)
COMMON /CNX/ CNX (32766)
COMMON /X/ Z(16383), /Y/ R(16383)
COMMON /B/ B(16383)
DATA C1 /-1., 1., 1., -1./
DATA C2 /-1., -1., 1., 1./
DATA C3 / 1., -1., 1., -1./
C-----Pentru toate elementele:
DO 10 IX=0,4*NET-1,4
C-----Calcul coeficienti
IN1=CNX(IX+1)
IN2=CNX(IX+2)
IN3=CNX(IX+3)

```

```

IN4=CNX(IX+4)
Z1=Z(IN1)
Z2=Z(IN2)
Z3=Z(IN3)
Z4=Z(IN4)
R1=R(IN1)
R2=R(IN2)
R3=R(IN3)
R4=R(IN4)
A0=(Z4-Z2)*(R1-R3)-(Z1-Z3)*(R4-R2)
A1=(Z3-Z4)*(R1-R2)-(Z1-Z2)*(R3-R4)
A2=(Z4-Z1)*(R2-R3)-(Z2-Z3)*(R4-R1)
D1=R1+R2+R3+R4
D2=-R1+R2+R3-R4
D3=-R1-R2+R3+R4
D4=R1-R2+R3-R4
C-----Setare termeni liberi
DO 10 I=1,4
    IB=CNX(IX+I)
    B(IB)=B(IB) +
+   (      A0*D1      + C1(I)*A1*D1/3. + C2(I)*A2*D1/3.+
+   C1(I)*A0*D2/3. +      A1*D2/3. + C3(I)*A2*D2/9.+
+   C2(I)*A0*D3/3. + C3(I)*A1*D3/9. +      A2*D3/3.+
+   C3(I)*A0*D4/9. + C2(I)*A1*D4/9. + C1(I)*A2*D4/9.)/32.
10    CONTINUE
C-----Inmultire cu vorticitatea raportata la raza
DO 20 I=1,NNT
20    B(I)=V*B(I)
    RETURN
    END

```

\$STORAGE: 2

```

SUBROUTINE CONDLIM (FISCLIM)
C Scop: Introducerea conditiilor la limita
C Parametrii subrutinei:
C     FISCLIM: Fisierul cu conditiile la limita.
C Rezultatele subrutinei vor fi transferate prin blocurile COMMON:
C     /K/ SFCL: Sirul fanioanelor conditiilor la limita.
C     /CL/ SCL: Sirul conditiilor la limita.
C     /B/ B: Sirul termenilor liberi.
CHARACTER FISCLIM*12, ALFACOD*2
INTEGER*1 SFCL

```

```

        DIMENSION N(10)
        COMMON /K/ SFCL (16383)
        COMMON /CL/ SCL (16383)
        COMMON /B/   B (16383)
C-----Citire fisier de conditii la limita
        OPEN (1, FILE=FISCLIM, STATUS='OLD')
100    READ (1,'(A,1X,F15.0,10I8)') ALFACOD, CL, N
        IF (ALFACOD.NE.'DN' .AND. ALFACOD.NE.'dn') GO TO 200
C-----Conditie Dirichlet pe noduri
        ASSIGN 110 TO IET
110    DO 190 I=1,10
            NOD=N(I)
            IF (NOD .EQ. 0) GO TO 100
            CALL ERRCL (NOD)
            SFCL(NOD)=1
190    SCL (NOD)=CL
        GO TO 100
200    IF (ALFACOD.NE.'DR' .AND. ALFACOD.NE.'dr') GO TO 500
C-----Conditie Dirichlet repetitiva
        DO 290 NOD=N(1), N(2), N(3)
            CALL ERRCL (NOD)
            SFCL(NOD)=1
290    SCL (NOD)=CL
        GO TO 100
300    IF (ALFACOD.NE.'NL' .AND. ALFACOD.NE.'nl') GO TO 400
C-----Conditie Neumann pe laturi
        ASSIGN 310 TO IET
310    DO 390 I=1,10
            IF (NOD .EQ. 0) GO TO 100
            CALL ERRCL (NOD)
            SFCL(NOD)=2
C-----Introducere conditii Neumann
390    CONTINUE
        GO TO 100
400    IF (ALFACOD.NE.'NR' .AND. ALFACOD.NE.'nr') GO TO 500
C-----Conditie Neumann repetitiva
        DO 490 NOD=N(1), N(2), N(3)
            CALL ERRCL (NOD)
            SFCL(NOD)=2
C-----Introducere conditii Neumann
490    CONTINUE
        GO TO 100
C-----Sfirsit de fisier
    
```

```

500    IF (ALFACOD.EQ.'EO' .OR. ALFACOD.EQ.'eo') THEN
        CLOSE (1)
        RETURN
    ENDIF
C-----Reciteste ultima linie si continua cu nodurile
        BACKSPACE (1)
        READ (1,'(I26,9I8)') N
        GO TO IET
        END
C-----Subrutina de testare eroare.
        SUBROUTINE ERRCL (NOD)
C-----NOD: Nodul in care se testeaza fanionul.
        INTEGER*1 SFCL
        COMMON /K/ SFCL (16383)
        IF (SFCL(NOD) .EQ. 0) RETURN
        WRITE (*,'('' ERRCL: In nodul''I6'' SFCL este deja positionat pe''
-       I3/'' Daca e cazul, opriti cu Ctrl-C, altfel substituie.'')')
-       NOD, SFCL(NOD)
        PAUSE
        RETURN
        END

```

\$STORAGE: 2

```

        SUBROUTINE CLNPSI(NNFL,NNLAT,PSIFL)
C Scop: Aduna la termenii liberi contributia conditiilor la
C       limita Neumann.
C       Se utilizeaza la impunerea vitezei tangentiale constanta
C       pe suprafata libera a unui jet axial-simetric, in cazul
C       formularii in functia de curent PSI.
C Parametrii subrutinei:
C       NNFL - Numarul de Noduri de pe Frontiera Libera
C      >NNLAT - Numarul de Noduri pe LATime
C       PSIFL - valoarea lui "PSI" pe linia de curent care va fi
C              Frontiera Libera (dupa corectare)
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C       /X/Z, /Y/R - coordonatele nodurilor in semiplanul meridian
C       /B/B - vectorul termenilor liberi
        COMMON /X/Z(16383), /Y/R(16383)
        COMMON /B/B(16383)
C-----Viteza jetului este:
        V = 2.*PSIFL/(R(NNLAT)**2)
        write(*,'('' viteza jetului = '' ,f10.5)') v

```

```

DO 10 I=2,NNFL
  I1 = I *>NNLAT
  I2 = (I-1) *>NNLAT
  DZ = Z(I2) - Z(I1)
  DR = R(I2) - R(I1)
  DL = SQRT (DZ*DZ + DR*DR) ! segmentul de frontiera
  DB = V * DL/2. ! modificarea termenilor liberi
  B(I1) = B(I1) + DB
  B(I2) = B(I2) + DB
10  CONTINUE
    RETURN
    END

```

\$STORAGE: 2

```

SUBROUTINE ASMB1S (UNIT, NNT, NNE,>NNL, M)
C Scop: Asamblarea matricilor elementale si introducerea
C      conditiilor la limita tip Dirichlet. Algoritmul este
C      utilizabil pentru cimpuri scalare (o necunoscuta pe nod)
C      si matrici simetrice.
C Parametrii subrutinei:
C      UNIT: Unitatea pe care este deschis fisierul temporar in
C      care se stocheaza matricea globala. Matricea este banda,
C      si simetrica. Fiecare inregistrare contine cite o linie
C      a semibenzii superioare.
C      NNT: Numarul total de noduri.
C      NNE: Numarul de noduri pe element.
C     >NNL: Numarul de noduri libere (fara conditii Dirichlet)
C      M: Latimea semibenzii, inclusiv diagonala.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C      /CNX/ CNX: Matricea de conexiuni dupa elemente.
C      /AE/ SNEA: Sirul numerelor elementelor de asamblat
C      pentru completarea unei linii.
C      /K/ SFCL: Sirul fanioanelor pentru conditii la limita.
C      /CL/ SCL: Sirul conditiilor la limita.
C Rezultatele subrutinei se gasesc in fisierul deschis pe UNIT
C si blocul COMMON:
C      /B/ B: Sirul termenilor liberi.
C Rutina calculeaza elementele matricilor elementale in ordinea
C pe linii cu subprogramul:
C      FUNCTION EE (I, J, IX)
C unde: I, J: Indicii nodului, in numerotare locala.
C      IX: Indicele elementului in matricea de conexiuni

```

```

C          ordonata, considerata monodimensională.
      INTEGER*1 SNEA, SFCL
      INTEGER*2 CNX, E, UNIT
      COMMON /CNX/ CNX (32766)
      COMMON /AE/ SNEA (16383)
      COMMON /K/ SFCL (16383)
      COMMON /CL/ SCL (16383)
      COMMON /M/ A (90,178), AA (363)
      COMMON /B/ B (16383)
      WRITE (*, '( ' ASMB1S ' )')
C-----Initializari
      MP1=M+1
      MM1=M-1
      NB=MM1+NNT
      IW=1
      IX=0
      IB=M
C-----Anulare zona de manevra si deplasare termeni liberi
      DO 10 I=1,2*M
        DO 10 J=1,MP1
10         A(J,I)=0.
      DO 11 I=NNT,1,-1
11         B(MM1+I)=B(I)
      DO 12 I=1,MM1
12         B(I)=0.
C-----Cicleaza pentru toate nodurile
      DO 110 N=1,NNT
C-----Daca este cazul, cicleaza in jurul nodului
      NEA=SNEA(N)
      IF (NEA .EQ. 0) GO TO 40
      DO 30 E=1,NEA
C-----Calculeaza si expandeaza matricea elementala
      DO 20 I=1,NNE
        DO 20 J=I,NN
          IXI=CNX(IX+I)
          IXJ=CNX(IX+J)
          IF (IXI.LE. IXJ) GO TO 15
          IXR=IXI
          IXI=IXJ
          IXJ=IXR
15         IAI=IXJ-IXI+1
          IAJ=IXI+M-N
20         A(IAI,IAJ)=A(IAI,IAJ)+EE(I,J,IX)

```



```

30          IX=IX+NNE
C-----Fanion 0, nod fara conditii la limita, nu trebuie tratat;
C-----Fanion 1, conditii la limita Dirichlet, tratat aici;
C-----Fanion 2, conditii la limita Cauchy, netratate aici.
40          IF (SFCL(N) .EQ. 1) GO TO 60
C-----Tratare nod fara conditii la limita Dirichlet
          IF (IW .LT. M) GO TO 45
          WRITE (UNIT) (A(J,1),J=1,M)
45          IW=IW+1
          DO 50 I=1,MM1+M
            DO 50 J=1,MP1
50          A(J,I)=A(J,I+1)
            IB=IB+1
            GO TO 110
C-----Tratare nod cu conditii la limita Dirichlet
C-----Trecere ecuatie in membrul drept
60          DO 70 I=1,MM1
            B(IB-I)=B(IB-I)-SCL(N)*A(I+1,M-I)
70          B(IB+I)=B(IB+I)-SCL(N)*A(I+1,M)
C-----Deplasare termeni liberi
          DO 80 I=IB,NB
80          B(I)=B(I+1)
            NB=NB-1
C-----Deplasare matrice A
          DO 90 I=M,MM1+M
            DO 90 J=1,MP1
90          A(J,I)=A(J,I+1)
            DO 100 I=1,MM1
              DO 100 J=MP1-I,M
100         A(J,I)=A(J+1,I)
110        CONTINUE
            NNL=NB-MM1
C-----Salvare rest matrice globala din zona de manevra
          DO 120 I=1,MM1
            IF (IW .LT. M) GO TO 120
            WRITE (UNIT) (A(J,I),J=1,M)
120         IW=IW+1
            ENDFILE UNIT
C-----Aranjare termeni liberi
          DO 130 I=1,NNL
130        B(I)=B(MM1+I)
            RETURN
            END

```

```

$STORAGE: 2
      SUBROUTINE REBSGA (UNIT1, N, M)
C Scop: Rezolvare sistem de ecuatii liniare cu matrice banda
C       simetrica, prin eliminare Gaussiana.
C Parametrii subrutinei:
C       UNIT1: Unitatea pe care este deschis fisierul temporar ce
C       contine matricea A a sistemului. Fisierul este pozitionat
C       pe EOF. Matricea A este considerata simetrica. Matricea
C       contine doar elementele semibenzii superioare, inclusiv
C       diagonala. Elementele matricii sint depuse in fisier cite
C       o linie pe articol.
C       N: Numarul de necunoscute (nr. de linii din fisierul
C       de pe UNIT1).
C       M: Latimea semibenzii inclusiv diagonala.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C       /B/ B: Sirul termenilor liberi.
C           Dupa executie contine solutia sistemului.
      INTEGER*2 UNIT1, UNIT2
      COMMON /M/ A(16383)
      COMMON /B/ B(16383)
      UNIT2=UNIT1+1
      OPEN (UNIT2, STATUS='NEW', FORM='UNFORMATTED')
C-----Initializari generale
      MM1=M-1
      LMAX=16383/M-MM1
      NA=M*MM1
      NT=M*LMAX
      IEND=0
      DO 10 I=1,MM1
10         B(N+I)=0.
      WRITE (*,'(1X)')
C-----Citire initiala in antet si tampon
      IPAS=1
      WRITE (*,'(''+REBSGA ''I3'' '')') IPAS
      DO 20 I=0,N
20         BACKSPACE UNIT1
           ID=0
           DO 30 I=1,MM1+LMAX
               IS=ID+1
               ID=IS+MM1
30         READ (UNIT1, END=35) (A(J),J=IS,ID)

```

```

        GO TO 40
35      IEND=1
40      IS=-MM1
C-----Ciclul principal, pentru toate valorile necunoscutele
        DO 110 L=1,N
            IS=IS+M
            IF (IEND.GT.0 .OR. IS.LT.NT) GO TO 80
C-----Muta coada in antet si citeste in tampon
            IPAS=IPAS+1
            WRITE (*,'(''+REBSGA ''I3'' ''')') IPAS
            DO 50 I=1,NA
50          A(I)=A(NT+I)
            ID=NA
            DO 60 I=1,LMAX
                IS=ID+1
                ID=IS+MM1
60          READ (UNIT1, END=65) (A(J),J=IS,ID)
                GO TO 70
65          IEND=1
70          IS=1
C-----Calculul liniei curente
80          ID=IS
                DO 100 J=1,MM1
                    ID=ID+MM1
                    IF (A(IS+J) .EQ. 0.) GO TO 100
                    R=A(IS+J)/A(IS)
                    DO 90 K=J,MM1
90          A(ID+K)=A(ID+K)-R*A(IS+K)
                    A(IS+J)=R
                    B(L+J)=B(L+J)-R*B(L)
100         CONTINUE
                WRITE (UNIT2) (A(J),J=IS,IS+MM1)
110        B(L)=B(L)/A(IS)
C-----Substitutia inversa (retrosubstitutie)
        DO 130 L=N-1,1,-1
            BACKSPACE UNIT2
            BACKSPACE UNIT2
            READ (UNIT2) (A(J),J=1,M)
            S=0.
            DO 120 J=2,M
                IF(A(J) .EQ. 0.) GO TO 120
                S=S+A(J)*B(L-1+J)
120        CONTINUE

```

```

130      B(L)=B(L)-S
        CLOSE (UNIT2)
        RETURN
        END

```

```

$STORAGE: 2

```

```

        SUBROUTINE OUTREZ (FISREZ, NNT)
C Scop: Refacerea solutiei complete (inserarea valorilor impuse
C      prin conditii Dirichlet) si scrierea rezultatelor
C      intr-un fisier ASCII.
C Parametrii subrutinei:
C      FISREZ: Numele fisierului de iesire.
C      NNT:    Numarul de noduri total.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C      COMMON /B/ B: Solutiile in nodurile libere.
C      COMMON /K/ SFCL: Fanioane cu conditiile la limita.
C      COMMON /CL/ SOL: Valorile impuse. Dupa rulare contine
C      solutia completa.
        CHARACTER FISREZ*12
        INTEGER*1 SFCL
        COMMON /B/  B(16383)
        COMMON /K/  SFCL(16383)
        COMMON /CL/ SOL(16383)
        OPEN (2, FILE=FISREZ)
        IB=1
        DO 10 I=1,NNT
            IF (SFCL(I) .EQ. 1) GO TO 10
            SOL(I)=B(IB)
            IB=IB+1
10      CONTINUE
        WRITE (2,100) (SOL(I),I=1,NNT)
        CLOSE (2)
        RETURN
100     FORMAT(5G15.6)
        END

```

```

$STORAGE: 2

```

```

        SUBROUTINE CORPSI(NNFL,NNLAT)
C Scop: Corectarea frontierei libere, astfel incit sa devina
C      linia de curent ce porneste din punctul de iesire a
C      jetului. Subrutina modifica coordonatele punctelor de pe
C      frontiera libera, din blocurile COMMON /X/ si /Y/.

```

```

C Parametrii subrutinei:
C     NNFL = numarul de noduri pe frontiera libera
C    >NNLAT = numarul de noduri pe latimea retelei
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C     /X/Z, /Y/R - coordonatele nodurilor
COMMON /X/Z(16383), /Y/R(16383)
COMMON /CL/PSI(16383)
PSIFL = PSI(NNFL>NNLAT)
DO 1 NFJ=2,>NNFL-1
    INFL=NFJ>NNLAT
C-----Pentru primul interval poate fi si extrapolare
N1=INFL
N2=N1-1
C=(PSIFL-PSI(N2))/(PSI(N1)-PSI(N2))
IF (C.GT.0.0) THEN
    Z(INFL)=Z(N2)+C*(Z(N1)-Z(N2))
    R(INFL)=R(N2)+C*(R(N1)-R(N2))
ENDIF
C-----Pentru celelalte intervale poate fi numai interpolare
DO 2 I=1,>NNLAT-2
    N1=INFL-I
    N2=N1-1
    C=(PSIFL-PSI(N2))/(PSI(N1)-PSI(N2))
    IF ((C.GT.0.0).AND.(C.LE.1.0)) THEN
        Z(INFL)=Z(N2)+C*(Z(N1)-Z(N2))
        R(INFL)=R(N2)+C*(R(N1)-R(N2))
        GO TO 1
    ENDIF
2     CONTINUE
1     CONTINUE
C-----Raza jetului (ultimul punct de pe frontiera libera)
C-----se calculeaza ca medie a M valori precedente
R1=0
M=5
DO 3 I=2,M+1
3     R1=R1+R(I>NNLAT)
    R>NNLAT)=R1/M
    RETURN
END

$STORAGE: 2
    FUNCTION EE (I, J, IX)
C Scop: Calculul matricii elementale pentru element patrulater,

```

```

C      operator Laplace in coordonate cilindrice.
C      Integrare numerica cu metoda Gauss, 4 puncte pe element.
C      (problema pentru potentialul vitezei, conductie termica)
C Parametrii functiei:
C      I, J: Indicii nodurilor in numerotarea locala.
C      IX:  Indicele elementului in matricea de conexiuni
C      ordonata, considerata monodimensionala.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C      /CNX/ CNX: Matricea de conexiuni
C      /X/Z,/Y/R: Coordonatele nodurilor in reprezentare globala.
      INTEGER*2 CNX
      DIMENSION CA(4,2), CB(4,2,2), CZ(4,2)
      COMMON /CNX/ CNX(32766)
      COMMON /X/ Z(16383), /Y/ R(16383)
      DATA IXF /1/
      DATA CI /.5773502/
      DATA CZ /-1., -1., 1., 1., 1., -1., -1., 1./
C-----Calcul coeficienti
      IF (IX .EQ. IXF) GO TO 10
      IN1=CNX(IN1)
      IN2=CNX(IN2)
      IN3=CNX(IN3)
      IN4=CNX(IN4)
      Z1=Z(IN1)
      Z2=Z(IN2)
      Z3=Z(IN3)
      Z4=Z(IN4)
      R1=R(IN1)
      R2=R(IN2)
      R3=R(IN3)
      R4=R(IN4)
      CA(1,1)=R2-R4
      CA(2,1)=R3-R1
      CA(3,1)=R4-R2
      CA(4,1)=R1-R3
      CA(1,2)=Z4-Z2
      CA(2,2)=Z1-Z3
      CA(3,2)=Z2-Z4
      CA(4,2)=Z3-Z1
      CB(1,1,1)=R4-R3
      CB(2,1,1)=R3-R4
      CB(3,1,1)=R1-R2
      CB(4,1,1)=R2-R1

```

```

CB(1,2,1)=Z3-Z4
CB(2,2,1)=Z4-Z3
CB(3,2,1)=Z2-Z1
CB(4,2,1)=Z1-Z2
CB(1,1,2)=R3-R2
CB(2,1,2)=R1-R4
CB(3,1,2)=R4-R1
CB(4,1,2)=R2-R3
CB(1,2,2)=Z2-Z3
CB(2,2,2)=Z4-Z1
CB(3,2,2)=Z1-Z4
CB(4,2,2)=Z3-Z2
ALFA0=(Z4-Z2)*(R1-R3)-(Z1-Z3)*(R4-R2)
ALFA1=(Z3-Z4)*(R1-R2)-(Z1-Z2)*(R3-R4)
ALFA2=(Z4-Z1)*(R2-R3)-(Z2-Z3)*(R4-R1)
A2=R1+R2+R3+R4
B2=-R1+R2+R3-R4
C2=-R1-R2+R3+R4
D2=R1-R2+R3-R4
IXF=IX
C-----Calcul element
10  A=CA(I,1)*CA(J,1)+CA(I,2)*CA(J,2)
    B=CA(I,1)*CB(J,1,1)+CA(J,1)*CB(I,1,1)+CA(I,2)*CB(J,2,1)+
    +  CA(J,2)*CB(I,2,1)
    C=CA(I,1)*CB(J,1,2)+CA(J,1)*CB(I,1,2)+CA(I,2)*CB(J,2,2)+
    +  CA(J,2)*CB(I,2,2)
    D=CB(I,1,1)*CB(J,1,2)+CB(I,1,2)*CB(J,1,1)+
    +  CB(I,2,1)*CB(J,2,2)+CB(I,2,2)*CB(J,2,1)
    E=CB(I,1,1)*CB(J,1,1)+CB(I,2,1)*CB(J,2,1)
    F=CB(I,1,2)*CB(J,1,2)+CB(I,2,2)*CB(J,2,2)
C-----Integrare numerica functie
    EE=0.
    DO 20 IE=1,4.
        X=CZ(IE,1)*CI
        Y=CZ(IE,2)*CI
        EE=EE+((E*X+D*Y+B)*X+(F*Y+C)*Y+A)*((D2*Y+B2)*X+C2*Y+A2)/
    /    (ALFA0+ALFA1*X+ALFA2*Y)
20  CONTINUE
    EE=EE/32.
    RETURN
    END

$STORAGE: 2

```

```

      FUNCTION EE (I, J, IX)
C Scop: Calculul matricii elementale pentru element patrulater,
C       problema pentru functia de curent in coordonate cilindrice.
C       Integrare numerica cu metoda Gauss, 4 puncte pe element.
C       (curgerea axial-simetrica a fluidului incompresibil)
C Parametrii functiei:
C       I, J: Indicii nodurilor in numerotarea locala.
C       IX:  Indicele elementului in matricea de conexiuni
C            ordonata, considerata monodimensionala.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C       /CNX/ CNX: Matricea de conexiuni
C       /X/Z,/Y/R: Coordonatele nodurilor in reprezentare globala.
      INTEGER*2 CNX
      DIMENSION CA(4,2), CB(4,2,2), CZ(4,2)
      COMMON /CNX/ CNX(32766)
      COMMON /X/ Z(16383), /Y/ R(16383)
      DATA IXF /1/
      DATA CI /.5773502/
      DATA CZ /-1., -1., 1., 1., 1., -1., -1., 1./
C-----Calcul coeficienti
      IF (IX .EQ. IXF) GO TO 10
      IN1=CNX(IX+1)
      IN2=CNX(IX+2)
      IN3=CNX(IX+3)
      IN4=CNX(IX+4)
      Z1=Z(IN1)
      Z2=Z(IN2)
      Z3=Z(IN3)
      Z4=Z(IN4)
      R1=R(IN1)
      R2=R(IN2)
      R3=R(IN3)
      R4=R(IN4)
      CA(1,1)=R2-R4
      CA(2,1)=R3-R1
      CA(3,1)=R4-R2
      CA(4,1)=R1-R3
      CA(1,2)=Z4-Z2
      CA(2,2)=Z1-Z3
      CA(3,2)=Z2-Z4
      CA(4,2)=Z3-Z1
      CB(1,1,1)=R4-R3
      CB(2,1,1)=R3-R4

```



```

CB(3,1,1)=R1-R2
CB(4,1,1)=R2-R1
CB(1,2,1)=Z3-Z4
CB(2,2,1)=Z4-Z3
CB(3,2,1)=Z2-Z1
CB(4,2,1)=Z1-Z2
CB(1,1,2)=R3-R2
CB(2,1,2)=R1-R4
CB(3,1,2)=R4-R1
CB(4,1,2)=R2-R3
CB(1,2,2)=Z2-Z3
CB(2,2,2)=Z4-Z1
CB(3,2,2)=Z1-Z4
CB(4,2,2)=Z3-Z2
ALFA0=(Z4-Z2)*(R1-R3)-(Z1-Z3)*(R4-R2)
ALFA1=(Z3-Z4)*(R1-R2)-(Z1-Z2)*(R3-R4)
ALFA2=(Z4-Z1)*(R2-R3)-(Z2-Z3)*(R4-R1)
A2=R1+R2+R3+R4
B2=-R1+R2+R3-R4
C2=-R1-R2+R3+R4
D2=R1-R2+R3-R4
IXF=IX
C-----Calcul element
10  A=CA(I,1)*CA(J,1)+CA(I,2)*CA(J,2)
    B=CA(I,1)*CB(J,1,1)+CA(J,1)*CB(I,1,1)+CA(I,2)*CB(J,2,1)+
    +  CA(J,2)*CB(I,2,1)
    C=CA(I,1)*CB(J,1,2)+CA(J,1)*CB(I,1,2)+CA(I,2)*CB(J,2,2)+
    +  CA(J,2)*CB(I,2,2)
    D=CB(I,1,1)*CB(J,1,2)+CB(I,1,2)*CB(J,1,1)+
    +  CB(I,2,1)*CB(J,2,2)+CB(I,2,2)*CB(J,2,1)
    E=CB(I,1,1)*CB(J,1,1)+CB(I,2,1)*CB(J,2,1)
    F=CB(I,1,2)*CB(J,1,2)+CB(I,2,2)*CB(J,2,2)
C-----Integrare numerica functie
    EE=0.
    DO 20 IE=1,4
        X=CZ(IE,1)*CI
        Y=CZ(IE,2)*CI
        EE=EE+((E*X+D*Y+B)*X+(F*Y+C)*Y+A)/((D2*Y+B2)*X+C2*Y+A2)/
    /
    (ALFA0+ALFA1*X+ALFA2*Y)
20  CONTINUE
    EE=EE/2.
    RETURN
    END

```

A.3 Trasarea liniilor de curent

```

$STORAGE: 2
    PROGRAM IZOLIN
C Scop: Program de generare a unui fisier *.scr, pentru
C      trasarea liniilor izoparametrice in AutoCAD.
      CHARACTER*12 FILES, FISDATE, FISREZ, FISLINII
C      FISDATE: Fisierul cu matricile de conexiuni si coordonate.
C      FISREZ:  Fisierul cu rezultatul calculelor.
C      FISLINII: Fisierul pentru AutoCAD cu punctele liniilor.
      DIMENSION P(100)
C-----Cere numele 'FILES'
      WRITE (*,'('' Dati numele fisierului continnd'',
+  '' fisierele utilizate: '',$)')
      READ (*,'(A)') FILES
C-----Citeste numele fisierelor utilizate si valorile parametrilor
      OPEN (1, FILE=FILES, STATUS='OLD')
      READ (1,100) FISDATE, FISREZ, FISLINII
      READ (1,'(64X,I8/)') NPARAM
      READ (1,'(10F10.0)') (P(I),I=1,NPARAM)
      CLOSE (1)
C-----Citeste fisierele FISDATE, FISREZ
      CALL RDATEG (FISDATE, FISREZ, NNT, NLT)
      WRITE (*,'('' Numarul de noduri total:  ''I5)') NNT
      WRITE (*,'('' Numarul de laturi total:  ''I5)') NLT
      OPEN (2, FILE=FISLINII)
      CALL LIMACAD (2, NNT)
      WRITE (2,'(''line'')')
      DO 10 I=1,NPARAM
          PARAM=P(I)
10      CALL LINIE (PARAM, NLT)
      WRITE (2,'(1H /''redraw'')')
      CLOSE (2)
      STOP
100  FORMAT (64X,A12)
      END

$STORAGE: 2
      SUBROUTINE RDATEG (FISDATE, FISREZ, NNT, NLT)
C Scop: Citirea datelor din fisiere, pentru programul de grafica.
C Parametrii subrutinei sunt:

```

```

C      FISDATE: Numele fisierului cu matricile de conexiuni
C              si coordonate.
C      FISREZ: Numele fisierului cu solutiile in noduri.
C      NNT:    Numarul de noduri total.
C      NLT:    Numarul de laturi total.
C Rezultatele subrutinei vor fi transferate si prin blocurile
C COMMON:
C      /N/ NODS, NODD: Nodurile la stinga si la dreapta laturilor.
C      /E/ ELS, ELD: Elementele la stinga si la dreapta laturilor.
C      /X/X,/Y/Y: Coordonatele nodurilor in reprezentare globala.
C      /B/  B: Solutiile in noduri.
CHARACTER FISDATE*12, FISREZ*12
INTEGER*1 SNEA
INTEGER*2 ELS, ELD
COMMON /N/ NODS (16383), NODD (16383)
COMMON /E/ ELS (16383), ELD (16383)
COMMON /X/  X (16383), /Y/ Y (16383)
COMMON /B/  B (16383)
C-----Citire FISDATE (N1, N2, N3 sint "locuri libere")
OPEN (1, FILE=FISDATE, STATUS='OLD', FORM='UNFORMATTED')
READ (1) NNT, NET, NNE, NLT, M, N1, N2, N3
READ (1) (M,I=1,NNE*NET)
READ (1) (SNEA,I=1,NNT)
READ (1) (X(I),Y(I),I=1,NNT)
READ (1) (NODS(I), NODD(I), ELS(I), ELD(I),I=1,NLT)
CLOSE (1)
C-----Citire FISREZ (solutii in noduri)
OPEN (1, FILE=FISREZ, STATUS='OLD')
READ (1,'(5E15.0)') (B(I),I=1,NNT)
CLOSE (1)
RETURN
END

$STORAGE: 2
SUBROUTINE LINIE (PARAM, NLT)
C Scop: Trasare linie izoparametrica
C Parametrii subrutinei:
C      PARAM: Valoarea parametrului pentru care se traseaza linia.
C      NLT:   Numarul maxim de laturi a retelei.
C Informatii transferate prin blocuri COMMON:
C      /N/ NODS, NODD: Nodurile la stinga si la dreapta laturilor
C      /E/ ELS, ELD: Elementele la stinga si la dreapta laturilor

```

Programe de calcul în limbaj FORTRAN

```
C      /B/ B: Valorile in noduri (solutia calculata)
C      /X/X,/Y/Y: Coordonatele nodurilor
      INTEGER*1 KOD
      INTEGER*2 ELS, ELD, ELEM, PASILAT, PASILIN
      COMMON /K/ KOD(16383)
      COMMON /N/ NODS(16383), NODD(16383)
      COMMON /E/ ELS(16383), ELD(16383)
      COMMON /B/ B(16383)
      COMMON /X/ X(16383), /Y/ Y(16383)
      COMMON /M/ XLIN(8191), YLIN(8191), A1
      WRITE (*,'(/' ' LINIE Tratate parametru:''E15.8)') PARAM
C-----Anulare semafoare.
      DO 10 I=1,NLT
10      KOD(I)=0
C-----Inceput de linie. Cauta punctul de start.
20      IMAX=NLT
      ILAT=0
30      ILAT=ILAT+1
      IF (ILAT .GT. IMAX) RETURN
      IF (KOD(ILAT) .NE. 0) GO TO 30
      KOD(ILAT)=-1
      NS=NODS(ILAT)
      ND=NODD(ILAT)
      IF (B(NS) .EQ. B(ND)) GO TO 30
      R=(PARAM-B(NS))/(B(ND)-B(NS))
      IF (R.LT.0. .OR. R.GT.1.) GO TO 30
C-----Gasit punct de start. Initializari.
      KOD(ILAT)=1
      ILIN=4096
      ILINS=ILIN
      ILIND=ILIN
      ILATO=ILAT
C-----Trece punctul de start in tabel.
      XLIN(ILIN)=X(NS)+R*(X(ND)-X(NS))
      YLIN(ILIN)=Y(NS)+R*(Y(ND)-Y(NS))
      ELEM=ELS(ILAT)
      PASILAT=1
      PASILIN=1
C-----Cauta alt punct al liniei.
60      ILAT=ILAT+PASILAT
      IF (ILAT .GT. NLT) THEN
          ILAT=ILAT-1
          PASILAT=-1
```

```

ENDIF
IF (ILAT .LT. ILATO) THEN
    ILAT=ILAT+1
    PASILAT=1
ENDIF
IF (ELS(ILAT) .EQ. ELEM) THEN
C-----Gasit pe stinga.
    IS=1
    GO TO 70
ENDIF
IF (ELD(ILAT) .EQ. ELEM) THEN
C-----Gasit pe dreapta.
    IS=0
    GO TO 70
ENDIF
GO TO 60
70    IF (KOD(ILAT)) 60, 80, 150
80    KOD(ILAT)=-1
    NS=NODS(ILAT)
    ND=NODD(ILAT)
    IF (B(NS) .EQ. B(ND)) GO TO 60
    R=(PARAM-B(NS))/(B(ND)-B(NS))
    IF (R.LT.0. .OR. R.GT.1.) GO TO 60
C-----Trece punctul gasit in tabel.
    ILIN=ILIN+PASILIN
    IF (PASILIN .GT. 0.) THEN
        ILIND=ILIN
        IF (ILIND .EQ. 8191) GO TO 210
    ELSE
        ILINS=ILIN
        IF (ILINS .EQ. 1) GO TO 220
    ENDIF
    XLIN(ILIN)=X(NS)+R*(X(ND)-X(NS))
    YLIN(ILIN)=Y(NS)+R*(Y(ND)-Y(NS))
    IF (IS .GT. 0) THEN
C-----Cautare inainte.
        ELEM=ELD(ILAT)
        PASILAT=1
    ELSE
C-----Cautare inapoi.
        ELEM=ELS(ILAT)
        PASILAT=-1
    ENDIF

```

```
      ILAT1=ILAT
      IF (ELEM .GT. 0) GO TO 60
C-----Capat de linie. Daca este cazul se parcurge si
C-----cealalta ramura.
      IF (PASILIN .LT. 0) GO TO 170
      ILIN=4096
      PASILIN=-1
      ILAT=ILATO
      ELEM=ELD(ILAT)
      IF (ELEM .EQ. 0) GO TO 170
      GO TO 60
C-----Linia se inchide
150    ILIN=ilin+1
      XLIN(ILIN)=XLIN(4096)
      YLIN(ILIN)=YLIN(4096)
      ILIND=ILIN
C-----Scrie linie in fisier
170    CONTINUE
      DO 180 I=ILINS,ILIND
180      CALL WRSCR (2, XLIN(I), YLIN(I))
      WRITE (2, '(1H )')
      WRITE (*, '(10X''Trasat linie.'')')
C-----Reia cautarea pentru alta linie cu aceeasi valoare a PARAM
      KOD(ILATO)=-1
      GO TO 20
C-----Mesaje de eroare
200    WRITE (2, '( '' Nu se gaseste continuarea liniei ce urmeaza:'' )')
      GO TO 170
210    WRITE (2, '( '' Indicele liniei a atins limita sup. de 8191.'')')
      GO TO 170
220    WRITE (2, '( '' Indicele liniei a atins limita inf. de 1.'')')
      GO TO 170
      END
```

A.4 Rezolvarea ecuației stabilității jetului

```

PROGRAM JET
C Rezolvarea ecuatiei de stabilitate in cazul unui jet de lichid
C (cu tensiune superficiala) compresibil, neviscos, evacuat in
C mediu gazos, compresibil si neviscos
  REAL WNR,WNI,WNIO,WFR,WFRO,WFI,WE,ML,MG,Q
  COMPLEX R,E
  COMMON /D/WE,Q,ML,MG,N
C Citirea datelor initiale din fisierul 'jet.dat':
  OPEN (1,FILE='JET.DAT',STATUS='OLD')
  READ (1,30) WE
  READ (1,30) Q
  READ (1,30) ML
  READ (1,30) MG
  READ (1,30) WNR
  READ (1,30) DWNR
  CLOSE (1)
30  FORMAT (39X,F10.7)
C Rezultatele se scriu in fisierul 'jet.rez'
  OPEN (1,FILE='JET.REZ',STATUS='NEW')
  WRITE (1,'('' Numarul WEBER = ''E13.8)'') WE
  WRITE (1,'('' Numarul Mach pt. lichid = ''F7.5)'') ML
  WRITE (1,'('' Numarul Mach pt. gaz = ''F7.5)'') MG
  WRITE (1,'('' Raportul densitatilor gaz/lichid = ''F7.5)'') Q
  WRITE (1,'(''          WNR          WNI          WFR
*   WFR/WNR '')'')
  N=15
  CALL CBESS(N)
C Se calculeaza curba de amplificare temporala nula
  WFI=0.0
C Valori initiale pt. iteratie:
  WNIO=-.1
  WFRO=0.05
1   R=E(WNR,WNIO,WFRO,WFI)
C Daca WNIO si IMAG(R) au acelasi semn, radicalul se va lua
C cu semnul plus, iar in caz contrar, cu semnul minus
  R=SIGN(1.,WNIO*IMAG(R))*CSQRT(R)
  WNI=IMAG(R)
  R=E(WNR,WNI,WFRO,WFI)
  R=SIGN(1.,WNIO*IMAG(R))*CSQRT(R)
  WFR=WNR-REAL(R)

```

```

                IF((ABS(WNI/WNIO-1.)+ABS(WFR/WFRO-1)).LT.1E-4) GO TO 2
                WNIO=WNI
                WFRO=WFR
                GO TO 1
2                WRITE (1,20) WNR,WNI,WFR,WFR/WNR
                WRITE (*,10) WNR,WNI,WFR
                WNR=WNR+DWNR
                IF (WNI.LT.-0.0001) GO TO 1
10               FORMAT (3F20.9)
20               FORMAT (4E16.5)
                CLOSE(1)
                END

```

```

                COMPLEX FUNCTION E(WNR,WNI,WFR,WFI)
C
C   Calculul expresiei din ecuatia de stabilitate, rezultata
C   din explicitarea lui (WN-WF)**2
C
C   Parametrii functiei sint:
C   WNR = numarul de unda adimensional
C   WNI = cresterea spatiala a perturbatiei
C   WFR = frecventa adimensionala
C       WFI = cresterea temporala a perturbatiei
C
C   Parametri care vin prin blocul COMMON /D/
C   WE = numarul Weber al jetului
C   Q  = raportul densitatilor gaz/lichid
C   ML = numarul Mach pt. lichid
C   MG = numarul Mach pt. gaz
C       N = nr. termeni la care se trunchiaza seriile
C
                REAL WE,Q,ML,MG,WNR,WNI,WFR,WFI,ML2,MG2
                COMPLEX WN,WF,LA,B0,B1,DNF
                COMMON /D/WE,Q,ML,MG,N
                ML2=ML*ML
                MG2=MG*MG
                WN=CMPLX(WNR,WNI)
                WF=CMPLX(WFR,WFI)
                DNF=WN-WF
                DNF=DNF*DNF
                WN=WN*WN
                WF=WF*WF

```



```

E=WE*(1-WN)
LA=CSQRT(WN-MG2*WF)
CALL BESSMK(LA,N,B0,B1)
E=E+Q*WF*B0/B1/LA
LA=CSQRT(WN-ML2*DNF)
CALL BESSMI(LA,N,B0,B1)
E=E*LA*B1/B0
E=-E

RETURN
END

SUBROUTINE CBESS(N)
C
C Calculul coeficientilor din dezvoltarile in serie ale
C functiilor Bessel modificate I0, I1, K0, K1.
C N = numarul termenilor la care se trunchiaza sumele.
C Coeficientii sint inregistrati in blocul COMMON /CB/
C
INTEGER N,K,KP1
REAL PSI,CBMIO,CBMI1,CBMK0,CBMK1
COMMON /CB/CBMIO(30),CBMI1(30),CBMK0(30),CBMK1(30)
CBMIO(1)=1
PSI=-.5772156690
DO 1 K=2,N
1 CBMIO(K)=CBMIO(K-1)/(K*K)
DO 2 K=1,N
PSI=PSI+(1./K)
KP1=K+1
CBMI1(K)=CBMIO(K)/KP1
CBMK0(K)=CBMIO(K)*PSI
2 CBMK1(K)=CBMI1(K)*(PSI+0.5/KP1)
RETURN
END

SUBROUTINE BESSMI(Z,N,BMIO,BMI1)
C
C Calculul functiilor Bessel modificate, de prima speta,
C I0 si I1, dezvoltate in serie pina la primii N termeni.
C Coeficientii sumelor vin din blocul COMMON /CB/.
C Argumentul functiei este Z, iar rezultatele sint furnizate
C in variabilele complexe BMIO si BMI1.
C

```

Programe de calcul în limbaj FORTRAN

```
      INTEGER N,NM1,K
      REAL CBMIO,CBMI1,CBMKO,CBMK1
      COMPLEX Z,Z2,Z22,BMIO,BMI1
      COMMON /CB/CBMIO(30),CBMI1(30),CBMKO(30),CBMK1(30)
      Z2=Z/2
      Z22=Z2*Z2
      NM1=N-1
      BMIO=CBMIO(N)
      BMI1=CBMI1(N)
      DO 1 K=NM1,1,-1
      BMIO=BMIO*Z22+CBMIO(K)
1      BMI1=BMI1*Z22+CBMI1(K)
      BMIO=BMIO*Z22+1
      BMI1=(BMI1*Z22+1)*Z2
      RETURN
      END

      SUBROUTINE BESSMK(Z,N,BMKO,BMK1)

C
C   Calculul functiilor Bessel modificate de speta a doua,
C   K0 si K1, dezvoltate in serie pina la primii N termeni.
C   Coeficientii sumelor vin prin blocul COMMON /CB/
C   Argumentul functiei este Z, iar rezultatele sint furnizate
C   in variabilele complexe BMKO si BMK1
C

      INTEGER N,NM1,K
      REAL CBMIO,CBMI1,CBMKO,CBMK1
      COMPLEX Z,Z2,Z22,BMIO,BMI1,BMKO,BMK1,LOGZ2
      COMMON /CB/CBMIO(30),CBMI1(30),CBMKO(30),CBMK1(30)
      CALL BESSMI(Z,N,BMIO,BMI1)
      Z2=Z/2
      Z22=Z2*Z2
      NM1=N-1
      BMKO=CBMKO(N)
      BMK1=CBMK1(N)
      DO 1 K=NM1,1,-1
      BMKO=BMKO*Z22+CBMKO(K)
1      BMK1=BMK1*Z22+CBMK1(K)
      LOGZ2=CLOG(Z2)
      BMKO=-BMIO*LOGZ2-0.57721566490+BMKO*Z22
      BMK1=BMI1*LOGZ2+1/Z+Z2*(0.07721566490-BMK1*Z22)
      RETURN
      END
```