

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI  
UNIVERSITATEA TEHNICĂ TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ȘI TELECOMUNICAȚII

Tehnici de măsurare adaptivă cu aplicații  
în aparatura de măsurare numerică

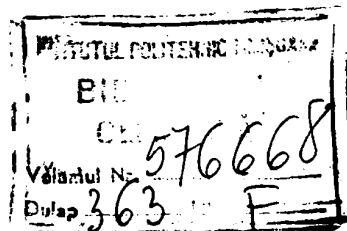
TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător științific  
prof.dr.ing.EUGEN POP

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

Autor  
ing.ALEXANDRU ISAR

-1993-



"Ce à quoi l'un s'était failli, l'autre y est arrivé et ce qui était inconnu à un siècle, le siècle suivant l'a éclairci, et les sciences et les arts ne se jettent pas en moule mais se forment et figurent en les maniant et polissant à plusieurs fois [...] Ce que ma force ne peut découvrir, je ne laisse pas de le sonder et essayer et, en restant et pétrissant cette nouvelle matière, la remuant et l'eschaufant, j'ouvre à celui qui me suit quelque facilité et la lui rends plus souple et plus maniable. Autant en fera le second au tiers qui est cause que la difficulté ne me doit pas désespérer, ni aussi peu mon impuissance..."

Montaigne, Les Essais, Livre II, Chapitre XII.

## Prefață

Izvorite din dorința umană de a imita sistemele vii din natură , care se adaptează în mod remarcabil la condițiile de mediu , tehnicile adaptive se dezvoltă vertiginos în deceniul actual. Deși își au originea în teoria prelucrării semnalelor aceste tehnici se utilizează în prezent în majoritatea domeniilor ingineresti.

Nici domeniul tehnicii măsurării nu face excepție de la această regulă. Lucrarea de față se înscrie pe linia aprofundării științifice a tehnicilor de măsurare adaptivă, reprezentând una dintre primele încercări de sistematizare a acestui subiect.

Teza a fost elaborată în intervalul 1989 - 1993 la Facultatea de electronică și telecomunicații a Universității Tehnice din Timișoara.

Lucrarea conține 8 capitole și 5 anexe , are un număr de 200 de pagini, 58 de figuri, și 6 tabele. Au fost utilizate 102 referințe bibliografice . Dintre acestea 12 sînt lucrări la elaborarea cărora a participat și autorul, două dintre ele fiind prezentate la conferințe internaționale ,una în Polonia și cealaltă în Algeria.

Pe întreaga perioadă de elaborare a lucrării, autorul a beneficiat de îndrumarea competentă și plină de înțelegere a conducătorului științific ,domnul profesor doctor inginer Eugen Pop, căruia îi mulțumește din suflet.

Pentru încurajările și sfaturile primite pe parcursul redactării lucrării ca și pentru întreaga sa formație profesională autorul aduce cele mai sincere mulțumiri domnului profesor doctor inginer Ioan Naforniță .

Atît ca student cît și mai tîrziu în calitate de cadru didactic autorul a participat la expuneri ale domnului conferențiar doctor Pașc Găvrută , referitoare la cele mai moderne metode matematice utilizate în teoria semnalelor. Pentru înalta competență și pentru generozitatea arătate autorul îi mulțumește din suflet.

Pentru discuțiile pe teme de specialitate purtate pe durata elaborării tezei , din care a avut atît de mult de cîștigat autorul îi mulțumește colegului său,șef de lucrări doctor inginer Aldo De Sabata.

De asemenea autorul mulțumește tuturor colegilor din catedră și în special celor de la disciplinele "Semnale circuite și sisteme ", "Circuite de telecomunicații" , "Teoria transmiției

datelor" și "Electroalimentare" pentru atmosfera de muncă creată.

Un rol important în elaborarea tezei în forma actuală îl are doamna Dorina Maghețiu, cea mai bună desenatoare din Universitatea Tehnică din Timișoara. Autorul îi mulțumește pentru prețiosul ajutor oferit, cu atîta generozitate.

Nu în ultimul rînd, autorul mulțumește părinților , soției și întregii sale familii pentru sprijinul continuu care i-a fost oferit și fără care această lucrare nu s-ar fi putut finaliza.

\* \* \*

În lucrare se utilizează cîteva prescurtări. Acestea sînt:  
O pentru observație, D pentru demonstrație, P pentru propoziție și  
E pentru exemplu. Celelalte notații sînt cele uzual utilizate în  
lucrările de prelucrarea semnalelor.

## CUPRINS

Prefață	i
Cap.1 Conceptul de măsurare adaptivă	1
Cap.2 Modalități de analiză spectrală adaptivă	4
2.1. Reprezentări tridimensionale ale semnalelor deterministe	4
2.1.1. Reprezentări timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă	6
2.1.2. Reprezentarea timp frecvență de tipul funcție de incertitudine	10
2.1.3. Reprezentarea timp frecvență de tipul Wigner-Ville	12
2.2. Reprezentări de tipul timp factor de scală. Transformarea undișoară în timp continuu	13
2.3. Discretizarea reprezentărilor tridimensionale ale semnalelor	19
2.4. Reprezentări tridimensionale pentru semnale în timp discret	21
2.5. Concluzii	25
Cap.3. Noi modalități de eșantionare a semnalelor de bandă nelimitată	27
3.1. Definierea conceptului de analiză multirezoluție	27
3.1.1. Exemple de analize multirezoluție	34
3.1.2. O modalitate de construcție a unei baze ortonormale a lui $L^2(\mathbb{R})$ pornind de la o analiză multirezoluție	37
3.1.3. Exemple de baze ortonormale de undișoare pe $L^2(\mathbb{R})$	42
3.1.4. Construcția unor baze ortonormale de undișoare pe $L^2(\mathbb{R})$ pornind de la analiza multirezoluție $\{V_m^{b.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$	48
3.2. Eșantionarea semnalelor de energie finită și bandă nelimitată	56
3.3. Concluzii	64

Cap.4. Tehnici de eșantionare adaptivă utilizate în construcția unor aparate de măsurare numerice	66
4.1. Introducere	66
4.2. Eșantionarea adaptivă a semnalelor cu minimizarea erorii de jitter	67
4.2.1. Generarea erorii de jitter în cazul sistemelor de eșantionare multicanal	68
4.2.2. Analiza spectrală a semnalelor eșantionate neuniform cu variație periodică a pasului de eșantionare	72
4.2.3. O metodă de măsurare a decalajelor temporale la sistemele de eșantionare multicanal	74
4.2.4. Metodă de eșantionare adaptivă cu minimizarea erorii de jitter în cazul sistemelor de măsurare multicanal	77
4.2.5. Etajul de intrare într-un analizor de forme de undă ultrarapid	77
4.3. Eșantionarea adaptivă a semnalelor cu minimizarea erorii de aliere	79
4.3.1. Margini superioare ale erorii de aliere. Cazul semnalelor aperiodice	80
4.3.2. Cazul semnalelor periodice	82
4.3.3. Eroarea medie pătratică de aliere	85
4.3.4. Fazmetru numeric cu eșantionare adaptivă	88
4.3.5. Eșantionarea adaptivă în scopul compresiei de date în înregistratoarele numerice de forme de undă	96
4.3.5.1. O metodă de eșantionare adaptivă destinată compresiei de date	98
4.3.5.2. Criteriul de estimare a erorii de reconstrucție	98
4.3.5.3. Descrierea metodei de eșantionare adaptivă	101
4.3.5.3.1. Eșantionarea adaptivă în cazul înre- gistratorului de forme de undă HP-5183	102
4.3.5.4. O altă metodă de realizare a eșantionării adaptive	102

4.3.6. Concluzii	104
Cap.5. Noi tehnici de filtrare adaptivă cu aplicații la prelucrarea semnalelor modulate în frecvență	106
5.1. Filtre cu urmărire analogice	106
5.2. Filtre cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2	107
5.2.1. Legătura dintre transformarea undișoară în timp continuu și filtrele analogice cu urmărire	110
5.2.2. Proprietățile filtrelor cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2	112
5.2.3. Construcția filtrelor cu urmărire folosind circuite cu capacități comutate	119
5.2.4. Filtre cu urmărire construite folosind filtre numerice	124
5.2.5. Concluzii	130
Cap.6. Metode de măsurare a frecvenței instantanee	132
6.1. Definirea conceptului de frecvență instantanee	132
6.2. Estimarea frecvenței instantanee a unui semnal pe baza definiției	133
6.3. Utilizarea filtrării numerice în estimarea frecvenței instantanee	135
6.4. Folosirea filtrării adaptive la estimarea frecvenței instantanee	136
6.5. Măsurarea frecvenței instantanee cu ajutorul reprezentărilor timp frecvență	139
6.6. O nouă metodă de măsurare a frecvenței instantanee a unui semnal nestaționar	146
6.7. Concluzii	149
Cap.7 Un analizor original în domeniul modulației construit folosind un calculator universal de tipul IBM-PC-2	150
7.1. Schema bloc a analizorului propus	150
7.2. Aspecte hard ale construcției sistemului propus	152

7.3. Aspecte soft ale construcției analizorului în domeniul modulației _____	158
7.4. Rezultate experimentale _____	159
7.5. Concluzii _____	164
Cap.8. Concluzii _____	165
Anexa 1 _____	174
Anexa 2 _____	175
Anexa 3 _____	176
Anexa 4 _____	177
Anexa 5 _____	182
Bibliografie _____	189



## 1. Conceptul de măsurare adaptivă

Noțiunea de "sistem adaptiv" s-a născut din dorința umană de a imita sistemele vii din natură, care se adaptează la condițiile de mediu în moduri remarcabile și variate [Lim., Opp. '88].

Aceste sisteme au înregistrat o dezvoltare remarcabilă în anii din urmă, datorită ultimelor realizări ale electronicii în domeniul circuitelor integrate pe scară foarte largă.

Aproape că nu există domeniu tehnic modern în care să nu se folosească sisteme adaptive. Pot fi amintite în acest sens aparatele de zbor cu geometrie variabilă, rachetele autodirijate, mașinile unelte din structura centrelor de prelucrare sau cromatografele cu rețele neuronale [Spe. '91].

Și în aplicațiile tradiționale ale electronicii există numeroase exemple de utilizare a sistemelor adaptive. În domeniul telecomunicațiilor tehnicile adaptive se folosesc pentru integrarea de servicii cât mai flexibile. În acest sens trebuie amintite metodele de adaptare a vitezei de transmisie a datelor la debitul instantaneu al traficului de informație sau îmbunătățirea adaptivă a raportului semnal pe zgomot. Se vorbește tot mai des de tehnicile de compresie adaptivă (de exemplu în sistemele de televiziune de înaltă fidelitate, HDTV) destinate integrării mai multor servicii într-un canal conceput anterior pentru unul singur, sau de metodele adaptive de egalizare a canalelor. Și în domeniul electronicii aplicate se observă tendința de construcție a unor circuite care să integreze tehnici adaptive. O categorie importantă de circuite de acest tip este cea a procesoarelor de semnal (Digital Signal Processors). Sînt remarcabile în acest sens procesoarele de voce cu capacitate de recunoaștere adaptivă sau circuitele inteligente pentru controlul vehiculelor. Tehnicile adaptive se utilizează și în identificarea sistemelor [Eik. '77].

Ca și în celelalte aplicații ale electronicii sistemele adaptive sînt tot mai des utilizate și în tehnica măsurării. Scopul lor este îmbunătățirea performanțelor unor aparate de măsură clasice precum și elaborarea unor noi tipuri de astfel de aparate. În primul caz prin înlocuirea unor blocuri funcționale ale unui sistem de măsurare clasic (circuit de eșantionare, convertor analog numeric, filtru numeric) cu sisteme adaptive (circuit de eșantionare adaptiv, convertor analog numeric adaptiv, sau filtru adaptiv) se obține

îmbunătățirea performanțelor sistemului de măsurare (osciloscop, analizor de spectru, înregistrator de fenomene tranzitorii ...).

În cel de al doilea caz pe baza unor tehnici adaptive de măsurare se construiesc aparate de măsură de tipuri noi (analizoare de spectru în trei dimensiuni, analizoare în domeniul modulației ...). Exemple de astfel de aparate de măsură sînt prezentate în [Isa.'92 2].

În această lucrare se prezintă studiul aprofundat al cîtorva tehnici noi de măsurare adaptivă pe baza cărora se elaborează tehnici originale care se pot folosi pentru construcția aparatelor de măsură adaptive. Aceste tehnici presupun modificarea parametrilor unui sistem (subsistem al unui aparat de măsură) în acord cu modificarea parametrilor mărimii de măsurat. Efectul este creșterea performanțelor aparatului de măsură considerat.

De aceea în continuare se vor prezenta tehnici adaptive specifice pentru efectuarea principalelor operații necesare într-un aparat de măsurare numeric. În capitolul 2 se prezintă metode de analiză în domeniul frecvență a semnalelor nestaționare bazate pe reprezentări tridimensionale. Semnalele nestaționare sînt semnale cu parametri variabili în timp. Considerînd aceste semnale ca mărimi de intrare pentru un aparat de măsură este evident că este util ca acesta să fie unul adaptiv (în acest caz parametrii aparatului urmăresc variația parametrilor semnalului nestaționar care trebuie măsurat). De aceea se poate afirma că tehnicile prezentate în capitolul 2 au un caracter adaptiv deoarece pe baza lor pot fi analizate semnale nestaționare. În același capitol este introdusă noțiunea de undișoară. Acest concept matematic modern este folosit pentru introducerea noțiunii de analiză multirezoluție. Acest tip de analiză este intim legat de conceptul de măsurare adaptivă, deoarece rezoluția metodei de măsurare poate fi adaptată. Fundamentarea matematică a analizei multirezoluție este făcută în capitolul 3 în legătură cu eșantionarea semnalelor de bandă nelimitată. În acest capitol se pun bazele unor noi metode de eșantionare adaptivă. Sînt de asemenea formulate cîteva rezultate matematice remarcabile fiind obținute noi baze ortonormate ale spațiului Hilbert al semnalelor de energie finită. În capitolul 4 sînt prezentate cîteva metode noi de eșantionare adaptivă precum și aparatele de măsură care le folosesc. Scopul capitolului următor este prezentarea unor structuri originale de filtre adaptive care pot fi utilizate în construcția unor aparate de măsură destinate semnalelor modulate în frecvență. În capitolul 6 sînt prezentate cîteva tehnici moderne de măsurare a frecvenței instantanee.

Aparatele de măsură care folosesc aceste tehnici sînt adaptive deoarece prelucrează semnale nestacionare ( care își modifică parametrii în timp). Conținutul capitolului 7 este referitor la construcția unui aparat de măsură original , destinat măsurării frecvenței instantanee.

## 2. Modalități de analiză spectrală adaptivă

În acest capitol vor fi prezentate principalele tehnici de analiză spectrală a semnalelor nestaționare. Având în vedere natura acestor semnale ele nu pot fi caracterizate în domeniul frecvență cu analizoarele de spectru tradiționale (bazate pe utilizarea transformării Fourier) fiind necesară utilizarea unor aparate de măsură mai speciale. Acestea fac parte din categoria aparatelor de măsură adaptive.

În continuare se va înțelege prin semnal staționar un semnal ai cărui parametri sînt constanți în timp. De exemplu semnalul :

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 \cdot t + \phi_0)$$

este unul staționar, parametrii săi fiind amplitudinea  $A_0$ , pulsația  $\omega_0$  și faza inițială  $\phi_0$ . Dacă unul dintre acești parametri este funcție de timp atunci semnalul  $x(t)$  este nestaționar.

### 2.1. Reprezentări tridimensionale ale semnalelor deterministe

Analiza comportării semnalelor staționare în domeniul frecvență se face cu ajutorul transformării Fourier, care descrie spectrul semnalului considerat. Pe baza analizei spectrului pot fi extrasi parametrii semnalului.

De exemplu, considerînd semnalul:

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \left[ \mathcal{G}\left(t + \frac{T}{2}\right) - \mathcal{G}\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \quad (2.1)$$

cu parametrii  $A$  și  $T$  reprezentat în figura 2.1 a) prin calculul transformării sale Fourier se obține spectrul:

$$X(\omega) = \frac{AT}{2} \left[ \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot T}{2} + \pi\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot T}{2} - \pi\right) \right]$$

cu reprezentarea grafică din figura 2.1.b).

Pe baza celui de-al treilea desen din figura 2.1.b) se constată că :

$$X(\pm 4\pi/T) = 0$$

Măsurînd pe axa  $\omega$  distanța de la origine pînă la următoarea trecere prin zero a lui  $X(\omega)$  se poate determina valoarea  $4\pi/T$  și deci se poate obține valoarea parametrului  $T$ .  
De asemenea se constată că:

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \{X(\omega)\} = \frac{AT}{2}$$

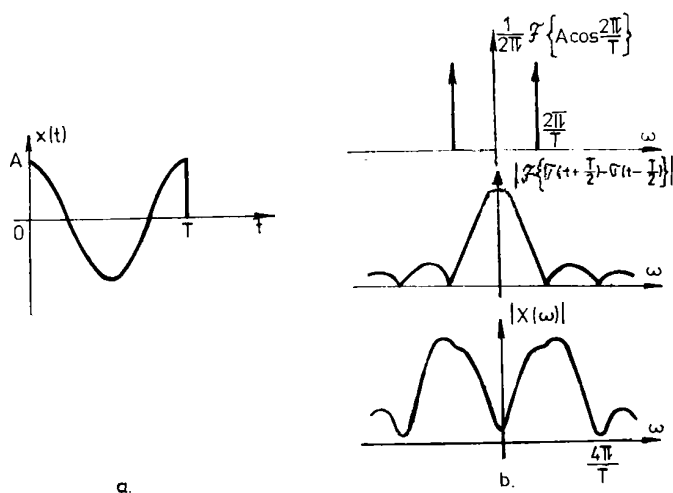


Figura 2.1. Analiza semnalului dat de relația (2.1)

Măsurînd valoarea maximă a lui  $X(\omega)$  din figura 2.1.b) și folosind rezultatul măsurării anterioare se poate determina și valoarea parametrului  $A$ .

Deci, pe baza exemplului considerat se vede cum pot fi determinați parametrii unui semnal pe baza reprezentării grafice a spectrului său.

În cazul în care semnalul care trebuie analizat nu este staționar, caracterizarea sa completă nu mai poate fi făcută doar în domeniul frecvență. Această afirmație este justificată în [Isa.'92 1],[Ran.' 88] și [Rio.'91].

În scopul caracterizării semnalelor nestaționare în domeniul frecvență se utilizează reprezentările tridimensionale ( timp frecvență ) ale acestora. Aparatele de măsură care prezintă rezultatul măsurării prin grafice în trei dimensiuni , dintre care una este timpul, sînt adaptive, deoarece se poate considera că fiecare rezultat momentan ( a cărui formă este o secțiune prin suprafața reprezentată în cele trei dimensiuni rezultată la momentul considerat) a fost obținut cu un set de parametri ai aparatului de măsură specifici momentului considerat. Variația temporală a acestor parametri urmărește variația parametrilor corespunzători ai semnalului nestaționar de analizat.

În continuare se va nota reprezentarea timp frecvență a semnalului  $x(t)$  prin  $TF_X(t, \omega)$ . Dacă este vorba de semnale de energie finită ,  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  , atunci reprezentarea timp frecvență este un operator definit pe  $L^2(\mathbb{R})$  cu valori în  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Valoarea operatorului TF aplicat semnalului  $x$  este deci funcția de două variabile  $TF_X(t, \omega)$ . Valoarea acestei funcții în punctul  $(t_0, \omega_0)$  reprezintă valoarea instantanee la momentul  $t_0$  a componentei de pulsație  $\omega_0$  a semnalului  $x(t)$ . De aceea se poate folosi pentru funcția  $TF_X(t_0, \omega)$  denumirea de spectru instantaneu. Principalele reprezentări tridimensionale ale semnalelor nestaționare de energie finită ( care se vor prezenta în continuare ) sînt izometrii pînă la o constantă de proporționalitate de la  $L^2(\mathbb{R})$  la  $L^2(\mathbb{R}^2)$  , adică este satisfăcută o relație de tipul:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |TF_X(t, \omega)|^2 dt d\omega \sim \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

unde cu  $\sim$  s-a specificat relația de proporționalitate.

### 2.1.1.Reprezentări timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă

Din dorința de a localiza în timp informația (despre comportarea în domeniul frecvență a unui semnal nestaționar) Gabor a definit reprezentările timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă folosind o fereastră temporală ,  $w(t)$ , în integrala Fourier [Mal.'89 1], [Lim.,Opp.' 88].

Această fereastră este translatată de-a lungul întregii axe temporale din dorința de a cuprinde întregul semnal studiat. La momentul  $t$  și la pulsația  $\omega$ , transformarea Fourier scurtă a semnalului  $x(t)$  din  $L^2(\mathbb{R})$  este definită prin:

$$\text{TF}_X^{\text{STF}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau-t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.3)$$

În cazul transformării Gabor originale, fereastră temporală folosită a fost o funcție gaussiană.

În general fereastră temporală este o funcție reală și pară de tipul răspunsului la impuls al unui filtru trece jos.

În scopul normalizării se presupune de obicei că energia lui  $w(t)$  este egală cu:

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = 1$$

Transformarea Fourier scurtă a semnalului  $x(t)$  poate fi interpretată și ca produs scalar dintre semnalul  $x(t)$  și familia de funcții:

$$\{w_{\omega, t}(\tau)\}_{(\omega, t) \in \mathbb{R}^2}$$

unde s-a folosit notația:

$$w_{\omega, t}(\tau) = e^{j\omega\tau} \cdot w(\tau-t)$$

Exprimarea analitică a transformării Fourier scurte este în acest caz:

$$\text{TF}_X^{\text{STF}}(t, \omega) = \langle x(\tau), w_{\omega, t}(\tau) \rangle$$

Transformarea Fourier a semnalului  $w_{\omega_0, t_0}$  este:

$$\hat{w}_{\omega_0, t_0}(u) = F \{ e^{j\omega_0\tau} \cdot w(\tau-t_0) \} = e^{jt_0\omega_0} \cdot e^{-jut_0} \cdot \hat{w}(u-\omega_0)$$

unde s-a notat cu  $\hat{w}(\omega)$  transformarea Fourier a ferestrei temporale  $w(\tau)$ .

Analizând expresiile funcțiilor  $w_{\omega,t}(\tau)$  și  $\hat{w}_{\omega,t}(u)$  se constată faptul că ele sînt ferestre centrate pe momentul  $t$  respectiv pe pulsația  $\omega$ . Ținînd seama de relația lui Parseval, relația (2.4) poate fi pusă în forma :

$$TF_X^{S.T.F.T.}(t,\omega) = [1/(2\cdot\pi)] \langle \hat{X}(u), \hat{W}_{\omega,t}(u) \rangle \quad (2.5)$$

Se mai observă că :

$$|\hat{W}_{\omega,t}(u)| = |\hat{W}(u-\omega)|$$

Pe baza relațiilor (2.3) și (2.5) se constată că în expresia lui  $TF_X^{STFT}(t,\omega)$ , cînd  $\omega$  este fixat, prin modificarea lui  $t$ , fereastra  $w_{\omega,t}(\tau)$  "mătură" semnalul  $x(\tau)$  și că atunci cînd  $t$  este fixat prin modificarea lui  $\omega$ , fereastra  $\hat{W}_{\omega,t}$  "mătură" spectrul  $X(u)$ . Deci  $TF_X^{STFT}(t,\omega_0)$  descrie evoluția temporală a semnalului  $x(\tau)$  la pulsația  $\omega_0$  iar  $TF_X^{STFT}(t_0,\omega)$  descrie spectrul instantaneu al semnalului  $x(\tau)$  la momentul  $t_0$ .

Relațiile (2.3) și (2.4) sînt echivalente cu:

$$TF_X^{STFT}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w_{\omega,t}^*(\tau) d\tau .$$

Admițînd că  $w_{\omega,t_0}(\tau)$  are valori neglijabile în exteriorul intervalului temporal  $I$ , centrat pe  $t_0$ , rezultă că valorile reprezentării timp frecvență ale semnalului  $x(\tau)$  din exteriorul zonei  $\{\omega_0, \tau \in I\}$  sînt practic nule.

Deci  $TF_X^{STFT}(\omega_0, t_0)$  face o caracterizare a semnalului considerat în planul timp frecvență doar pe un segment de curbă compus din punctele  $(\omega_0, \tau)$  cu  $\tau \in I$ . Lungimea acestui segment este  $l_I$  (egală cu lungimea intervalului  $I$ ).

De obicei durata ferestrei temporale  $w(\tau)$ , adică lungimea intervalului  $I$  se determină cu relația :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |w(\tau)|^2 d\tau = [(1/2)l(I)]^2$$

Comentarii suplimentare referitoare la această relație pot fi găsite în [Del.'91] respectiv în [Naf., Cîm., Isa.' 92].

Relația (2.5) este echivalentă cu:

$$TF_X^{STFT}(t, \omega) = [1/(2\pi)] \int_{-\infty}^{\infty} X(u) \hat{W}_{\omega,t}^*(u) du$$



Admițând că  $\hat{w}_{\omega_0, t_0}(u)$  are valori neglijabile în exteriorul intervalului de pulsații  $J$ , centrat pe  $\omega_0$  rezultă că valorile reprezentării timp frecvență a semnalului  $x(t)$  din exteriorul zonei  $\{t_0, \omega \in J\}$  sînt practic nule.

Deci  $TF_x^{STFT}(\omega_0, t_0)$  face o caracterizare a semnalului considerat în planul timp frecvență doar pe un segment compus din punctele  $(t_0, \omega)$  cu  $\omega \in J$ .

Se obișnuiește să se folosească ca măsură a lungimii intervalului  $J$ ,  $l(J)$  deviația standard a transformării Fourier a ferestrei temporale folosite:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 |\hat{w}(u)|^2 du = [(1/2)l(J)]^2$$

Se constată că atât  $\sigma_t$  cît și  $\sigma_\omega$  depind doar de tipul ferestrei temporale folosite. S-a demonstrat astfel că domeniul din planul timp frecvență în care  $TF_x^{STFT}(t_0, \omega_0)$  caracterizează bine distribuția semnalului considerat este definit de așa numita "celulă de rezoluție":  $[t_0 - \sigma_t, t_0 + \sigma_t] \times [\omega_0 - \sigma_\omega, \omega_0 + \sigma_\omega]$ . Se observă că este vorba de un domeniu dreptunghiular în planul timp frecvență centrat în punctul de coordonate  $(t_0, \omega_0)$ . Forma și suprafața acestui domeniu sînt independente de valorile coordonatelor  $\omega_0$  și  $t_0$ , dar depind de tipul ferestrei  $w(t)$ , folosite. Pe baza suprafeței celulei de rezoluție pot fi clasificate transformările Fourier scurte avînd în vedere că o suprafață mai mică a celulei de rezoluție presupune o concentrare mai mare (deci o descriere mai detaliată) a reprezentării timp frecvență în jurul punctului  $(t_0, \omega_0)$ . Valorile  $\sigma_t, \sigma_\omega$  nu pot fi însă micșorate oricît de mult, aplicarea principiului incertitudinii (descriis în [Rio.'91], [Mal.'89] sau [Lim., Opp., 88]) ferestrei temporale  $w(t)$  conducînd la inegalitatea:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq (\pi/2)$$

Semnul egal în inegalitatea de mai sus este obținut pentru fereastra temporală gaussiană. Deci cea mai bună rezoluție a transformării Fourier scurte (celula de rezoluție de suprafață minimă) se obține în cazul utilizării ferestrei gaussiene. Din toate transformările Fourier scurte aceea cu cea mai bună rezoluție este transformarea Gabor.

În multe lucrări printre care și [Isa.'92 2] sînt prezentate ferestrele temporale mai des utilizate:

-fereastra dreptunghiulară ;

- fereastra Hamming generalizată ;
- fereastra Blackmann, etc.

În continuare se prezintă câteva dintre proprietățile transformării Fourier scurte.

Transformarea Fourier scurtă este , indiferent de fereastra folosită , o izometrie pînă la o constantă de proporționalitate de la  $L^2(\mathbb{R})$  la  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . De fapt poate fi demonstrată relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |TF_X^{STF}(t, \omega)|^2 dt d\omega$$

O proprietate remarcabilă a distribuțiilor timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă este că ele definesc operatori inversabili.

Formula de transformare Fourier scurtă inversă este:

$$x(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} TF_X^{STF}(\tau, \omega) w(\tau-t) e^{j\omega t} d\omega d\tau$$

Ultimele două relații prezentate sînt demonstrate în [Isa.'92 2].

### 2.1.2. Reprezentarea timp frecvență de tipul funcție de incertitudine

Un alt operator definit pe  $L^2(\mathbb{R})$  cu valori în  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , care poate caracteriza comportarea în domeniul frecvență a unui semnal nestaționar este funcția de incertitudine a semnalului  $x(t)$ ,  $TF_X^I(t, \omega)$ , definită prin:

$$TF_X^I(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (2.6)$$

Se observă că funcția de incertitudine poate fi privită ca și o transformare Fourier scurtă adaptivă , deoarece folosește o fereastră temporală ,  $x^*(\tau-t/2)$ , care depinde de semnalul analizat.

Și acest operator este o izometrie de la  $L^2(\mathbb{R})$  la  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pînă la o constantă, fiind valabilă relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |TF_X^I(t, \omega)|^2 dt d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Se constată că la fel ca și în cazul transformării Fourier scurte constanta de proporționalitate este și în acest caz  $1/2\pi$ . O demonstrație a ultimei relații este prezentată în [Rul.'80]. În aceeași lucrare sînt prezentate următoarele proprietăți ale funcției de incertitudine:

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), |TF_X^I(t, \omega)| = |TF_X^I(-t, -\omega)|$$

și:

$$|TF_X^I(t, \omega)|^2 \leq |TF_X^I(0, 0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (147)$$

Conform relației (2.3) transformarea Fourier scurtă poate fi privită ca și transformarea Fourier a semnalului  $x(\tau)w(\tau-t)$ . Si reprezentarea timp frecvență de tipul funcție de incertitudine admite o reprezentare de tipul transformare Fourier:

$$TF_X^I(t, -\omega) = F \left\{ x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \right\}$$

Funcția a cărei transformare Fourier este calculată pentru a se obține reprezentarea tridimensională se numește nucleu al reprezentării timp frecvență. Se constată că nucleul distribuției timp frecvență de tip transformare Fourier scurtă este:

$$K_{STFT}(\tau, t) = x(\tau) \cdot w(\tau-t)$$

iar nucleul distribuției timp frecvență de tip funcție de incertitudine este:

$$K_{FI}(\tau, t) = x\left(\tau + \frac{t}{2}\right) x^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right)$$

În [Rul.'80] sînt calculate distribuțiile timp frecvență de tip funcție de incertitudine pentru cîteva semnale nestaționare remarcabile și anume:

- semnalul gaussian cu modulație liniară de frecvență,
- semnalul dreptunghiular cu modulație liniară de frecvență,
- semnalul dreptunghiular cu fază logaritmică,
- semnalul dreptunghiular cu modulație de frecvență în scară.

### 2.1.3.Reprezentarea timp frecvență de tipul Wigner-Ville

Considerînd semnalul de energie finită  $x(t)$ , se poate defini nucleul transformării Wigner-Ville a semnalului  $x(t)$ :

$$K_{W-V}(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Transformarea Wigner-Ville a semnalului  $x(t)$  se definește ca și transformare Fourier a nucleului  $K_{W-V}(t, \tau)$ :

$$\begin{aligned} TF_{X}^{W-V}(t, \omega) &= \mathcal{F} \{ K_{W-V}(t, \tau) \}(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

Comparînd nucleele ultimelor două tipuri de reprezentări se constată că:

$$K_{W-V}(t, \tau) = K_{FI}(\tau, t)$$

adică cele două nucleee se pot obține unul din celălalt pe baza schimbării de variabilă  $t \leftrightarrow \tau$ . De aici rezultă și asemănarea remarcabilă între transformarea Wigner-Ville și funcția de incertitudine ale aceluiași semnal.

De aceea și transformarea Wigner-Ville poate fi privită ca și o transformare Fourier scurtă adaptivă. Conform [Rio.'91] și reprezentarea timp frecvență de tip Wigner-Ville este o izometrie de la  $L^2(\mathbb{R})$  la  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pînă la o constantă de proporționalitate.

În [Boa., O'Sh., Arn.'90] se propune o reprezentare timp frecvență de tip Wigner-Ville generalizată pornind de la nucleul:

$$K_{W-Vg}(t, \tau) = \prod_{k=1}^p (x(t+c_k\tau)^{b_k} \cdot x^*(t+c_k\tau)^{-b-k})$$

Se observă că expresia acestui nucleu se reduce pentru  $p=1$ ,  $c_1=1/2$ ,  $c_{-1}=-1/2$ ,  $b_1=1$ ,  $b_{-1}=-1$ , la nucleul reprezentării de tip Wigner - Ville.

O altă posibilitate de generalizare a distribuției timp frecvență de tip Wigner-Ville este inspirată de utilizarea în practică a acestei distribuții.

Avînd în vedere că semnalele nestaționare care se observă în vederea analizei în timp și în frecvență sînt de durată limitată, în practică se folosesc tehnici de ferestruire temporală.

Clasa distribuțiilor Wigner-Ville "netezite" prin folosirea ferestrelor unidimensionale (în domeniul timp) sau bidimensionale (în domeniile timp și frecvență) este numită clasa Cohen a distribuțiilor timp frecvență. Aceste distribuții sînt prezentate în [Rio.'91] și [Boa., O'Sh., Arn.'90]. Expresia transformării Cohen este:

$$TF_X^C(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu, \tau) K_{W-Vg}(\nu, \tau) e^{j\nu(\lambda-t)} e^{-j\omega\tau} d\nu d\lambda d\tau$$

unde  $\phi(\nu, \tau)$  este fereastra "de netezire" bidimensională.

Și în cazul reprezentărilor de tip Wigner-Ville sau Wigner-Ville generalizate se poate vorbi despre rezoluția reprezentării în același fel ca și în cazul reprezentării de tip transformare Fourier scurtă. În [Hla.'Krat.' 89] se prezintă o modalitate de îmbunătățire a rezoluției distribuției Wigner-Ville bazată pe un nou tip de descompunere a acestei distribuții.

O clasificare alternativă a reprezentărilor timp-frecvență prezentate pînă aici din care rezultă și alte proprietăți remarcabile ale acestora, este făcută în [Hla.' 91].

## 2.2 Reprezentări de tipul timp factor de scală. Transformarea undișoară în timp continuu

După cum s-a specificat în paragrafele anterioare, toate reprezentările tridimensionale prezentate pînă acum se puteau reduce la reprezentări de tip transformare Fourier scurtă prin alegerea potrivită a ferestrei temporale  $w(t)$ , pe baza semnalului de

analizat  $x(t)$ . Dacă se admite că "durata"  $\sigma_t$  și banda  $\sigma_\omega$  ale semnalului  $x(t)$  sînt constante, atunci pentru toate reprezentările timp-frecvență considerate, suprafața celulei de rezoluție este de arie constantă.

În continuare se prezintă efectele pe care le are o anumită valoare a ariei celulei de rezoluție din punctul de vedere al analizei semnalului cu ajutorul unei reprezentări timp frecvență. Aria celulei de rezoluție specifică posibilitățile metodei de a discerne între două semnale distincte. E clar că pentru o rezoluție bună în domeniul timp a reprezentării timp frecvență de tip transformare Fourier scurtă e necesar ca fereastra temporală folosită să fie cît mai scurtă ( $\sigma_t$  cît mai mic). În acest mod vor putea fi separate două semnale de durată foarte scurtă, succesive (cu o distanță mică între terminarea primului semnal și declanșarea celui de al doilea), deoarece ele vor fi analizate cu două ferestre temporale succesive. Comparînd relațiile (2.4) și (2.5) se constată că rolul ferestrei temporale  $w_{\omega,t}(\tau)$  este preluat în domeniul frecvență de fereastra  $\hat{w}_{\omega,t}(u)$ . De aceea e necesar ca pentru o rezoluție bună în domeniul frecvență banda lui  $\hat{w}_{\omega,t}(u)$  (care este egală cu banda lui  $\hat{w}(u)$  și deci cu  $\sigma_\omega^2$ ) să fie cît mai îngustă.

Fereastra temporală cu cea mai mare concentrare este  $\delta(\tau)$  (semnal care nu aparține spațiului semnalelor de energie finită dar care poate fi oricît de bine aproximat cu semnale din acest spațiu). Expresia transformării Fourier scurte care folosește această fereastră este :

$$TF_x^{STFT}(t,\omega) = e^{-j\omega t} x(t)$$

Se constată că :

$$|TF_x^{STFT}(t,\omega)| = |x(t)|$$

și că :

$$\sigma_t = 0 ; \sigma_\omega = \infty$$

Deci transformarea Fourier scurtă care folosește această fereastră are o rezoluție temporală infinită dar și o rezoluție frecvențială nulă. Rezultă că o astfel de transformare nu poate fi utilizată în analiza spectrală.

Fereastra temporală cu cea mai slabă concentrare în domeniul timp este :

$$w(\tau) = 1$$

Se constată că :

$$\text{TF}_x^{\text{STFT}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \hat{x}(\omega);$$

Rezoluția frecvențială a reprezentării timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă care folosește această fereastră este infinită dar rezoluția temporală este nulă.

Deci pentru o rezoluție cât mai bună a reprezentării timp frecvență ar fi necesar ca fereastra temporală să fie un semnal care să aibă și durata și banda de valori cât mai mici.

Aceste cerințe sînt evident contradictorii , așa cum specifică principiul incertitudinii prezentat în 2.1.1.

Admițînd că semnalul nestaționar  $x(t)$  este descris printr-o succesiune de semnale, dintre care primele sînt de durată mare și frecvență mică iar ultimele sînt scurte și de frecvență înaltă, se constată că , pentru ca toate să poată fi analizate la fel de precis, sînt necesare atît o rezoluție temporală cît și una frecvențială ,mari. Acest lucru nu este însă posibil. De aceea, dacă se dorește o analiză corectă din punct de vedere al rezoluției temporale a succesiunii de semnale descrisă anterior, atunci se constată că în domeniul frecvență vor fi confundate elementele din succesiune de joasă frecvență. Acest rezultat se obține dacă se folosește o fereastră temporală îngustă. Dacă se alege o fereastră frecvențială îngustă , în urma analizei vor fi confundate în domeniul timp componentele de durată scurtă din succesiunea considerată. De aceea pentru astfel de semnale este mai utilă o reprezentare timp frecvență de rezoluție variabilă .

De exemplu, comentînd în continuare succesiunea de semnale descrisă mai sus ar fi de preferat ca pentru caracterizarea componentelor de durată lungă și frecvență joasă să se folosească o rezoluție temporală mai mică și o rezoluție frecvențială mai ridicată iar componentele de durată scurtă și frecvență înaltă să fie caracterizate de o rezoluție mare în timp și mai mică în frecvență.

O astfel de analiză spectrală variabilă în timp ar putea fi realizată folosind o fereastră temporală de lungime variabilă. Această idee este sugerată în [Isa.'92 1] și în [Rio.'91].

O fereastră temporală de acest fel este:

$$w(\tau) = \sqrt{s} \psi(s(\tau-t))$$

unde  $\psi$  se numește undișoară (wavelet, ondelette) iar  $s$  este un

parametru care ține seama de durata semnalului de analizat.  
 O transformare a semnalului  $x(t)$  care folosește o astfel de fereastră este transformarea undișoară în timp continuu:

$$CWT_x(s, t) = \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \psi(s(\tau-t)) d\tau \quad (2.7)$$

Se constată că este vorba despre o reprezentare de tipul timp factor de scală. Dacă factorul de scală este un raport de pulsații

$$s = \omega / \omega_0$$

atunci se poate vorbi despre o reprezentare timp frecvență de tip undișoară, TF<sub>x</sub>C.W.T.

În [Mal.'89] se arată că și reprezentarea timp factor de scală de tip undișoară este o izometrie de la  $L^2(\mathbb{R})$  la  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  pînă la un factor de proporționalitate, deoarece:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_x(s, t)|^2 ds dt = C_{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Valoarea constantei  $C_{\psi}$  depinde de undișoara folosită și este descrisă de relația:

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

De aici rezultă necesitatea ca  $\psi(t)$  să reprezinte răspunsul la impuls al unui filtru trece bandă.

Și transformarea undișoară este inversabilă, formula de inversare fiind conform [Mal.'89]:

$$x(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_x(s, \tau) \cdot \psi(s(t-\tau)) ds d\tau$$



Folosind notația :

$$\Psi_s(\tau) = \sqrt{s} \Psi(s\tau)$$

se constată faptul că și reprezentarea tridimensională de tip undișoară se poate exprima printr-un produs scalar de elemente din  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\text{CWT}_x(s,t) = \langle x(\tau), \Psi_s(\tau-t) \rangle \quad (2.8)$$

Este valabilă și scrierea alternativă :

$$\text{CWT}_x(s,t) = x(t) * \Psi_s(-t)$$

Deci pentru fiecare valoare a lui  $s$  transformarea undișoară în timp continuu poate fi privită ca și răspunsul unui filtru trece bandă (cu răspunsul la impuls  $\Psi_s(-t)$ ) la semnalul  $x(t)$ . De aceea folosind această transformare se poate caracteriza spectrul semnalului  $x(t)$  în banda de trecere a filtrului trece bandă cu răspunsul în frecvență  $\hat{\Psi}_s(-\omega)$ .

Dar :

$$\hat{\Psi}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\Psi}\left(\frac{\omega}{s}\right)$$

și folosind relația lui Parseval , (2.8) se mai poate scrie:

$$\text{CWT}_x(s,t) = (1/2\pi) \langle \hat{x}(\omega), e^{-j\omega t} (1/\sqrt{s}) \hat{\Psi}(\omega/s) \rangle$$

Notînd cu  $\omega_0$  pulsația centrală a benzii de trecere a filtrului trece bandă cu răspunsul în frecvență  $\hat{\Psi}(\omega)$  și cu  $\sigma_\omega$  lățimea benzii de trecere a aceluiași filtru (păstrînd sensul acestei mărimi din 2.1.1.) se constată că:

$$\sigma_{\omega_\Psi}^2 = \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 \cdot |\hat{\Psi}_s(\omega)|^2 d\omega$$

Este clar că centrul benzii de trecere a filtrului cu răspunsul

576668  
363 F

în frecvență  $\hat{\Psi}_s(\omega)$  este  $s\omega_0$  și că lățimea sa de bandă efectivă este:

$$\frac{\sigma_\omega}{\Psi_s} = s \frac{\sigma_\omega}{\Psi}$$

Deci rezoluția frecvențială a transformării undișoară depinde de parametrul  $s$  prin intermediul relației de mai sus. Se constată că raportul dintre lățimea de bandă și pulsația centrală a filtrului cu răspunsul la impuls  $\Psi_s(t)$ ,  $Q$ , este constant pentru orice valoare a lui  $s$ .

Deci, indiferent de  $s$ , filtrul cu răspunsul în frecvență  $\hat{\Psi}_s(\omega)$  are același factor de calitate cu filtrul cu răspunsul în frecvență  $\hat{\Psi}(\omega)$ .

De aceea se poate afirma că reprezentarea timp factor de scală este o metodă de caracterizare în frecvență a semnalului  $x(t)$  cu factor de calitate constant.

Pe baza relației (2.8) se constată faptul că valorile funcției  $CWT_x(s, t)$  sînt practic nule acolo unde valorile funcției  $\Psi_s(\tau-t)$  sînt neglijabile. De aceea este firesc ca această funcție să fie privită ca și o fereastră temporală. Notînd cu  $\sigma_t$  durata semnalului  $\Psi(\tau)$ :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Psi(\tau)|^2 d\tau$$

se constată că durata ferestrei temporale  $\Psi_s(\tau-t)$  este:

$$\sigma_t^2 \Psi_s(\tau-t) = \frac{\sigma_t^2}{s^2}$$

Întrucît lungimea ferestrei temporale fixează rezoluția temporală, se poate afirma că în cazul reprezentării timp factor de scală, rezoluția temporală este dependentă de  $s$ . Deci celula de rezoluție a acestei reprezentări este definită de:

$[t_0 - (\sigma_t/s), t_0 + (\sigma_t/s)] \times [s\omega_0 - s\sigma_\omega, s\omega_0 + s\sigma_\omega]$ . În figura 2.2a) este prezentată acoperirea planului timp frecvență cu celule de rezoluție în cazul transformării Fourier scurte, iar în figura 2.2b) este prezentată acoperirea aceluiași plan cu celule de rezoluție în cazul transformării undișoară.

Reprezentarea timp factor de scală de tip undișoară este o transformare foarte modernă fiind utilizată în prezent nu numai pentru caracterizarea semnalelor nestaționare ci și în cadrul analizei imaginilor [Mal.'89 2], în aproximarea semnalelor [Mal.'89 2] sau

în analiza canalelor de telecomunicații [Wor.'Opp.'92].

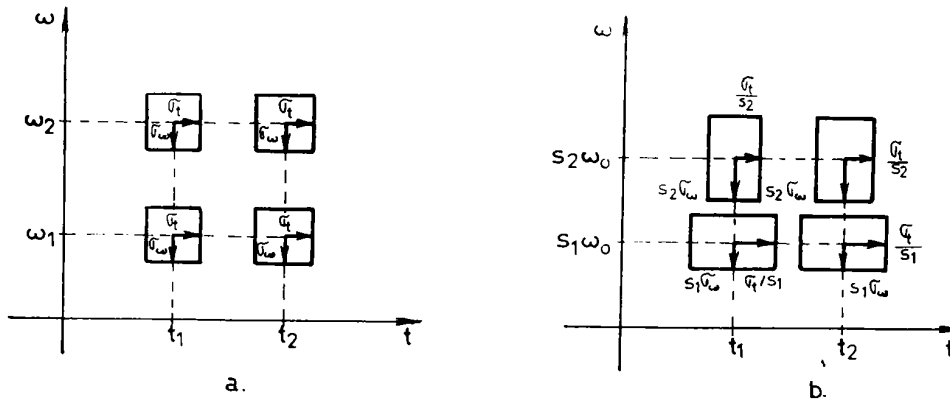


Figura 2.2. O comparație între acoperirile planului timp-frecvență cu celule de rezoluție în cazul transformării Fourier scurte a) și în cazul transformării undișoară b).

### 2.3. Discretizarea reprezentărilor tridimensionale ale semnalelor

Toate distribuțiile timp-frecvență prezentate sînt funcții continue de două variabile continue. Utilizarea lor în analiza semnalelor nestaționare presupune construcția unor aparate care pe baza semnalului  $x(t)$  să calculeze și să reprezinte grafic  $TF_X(\omega, t)$ . Această reprezentare grafică nu poate fi făcută decît în 3 dimensiuni. De aceea pentru realizarea sa este potrivită utilizarea monitorului unui calculator. Din păcate sistemele de calcul numerice nu pot decît să aproximeze funcțiile continue de variabile continue prin funcții discrete cu variabile discrete. De aceea este interesantă discretizarea distribuțiilor timp-frecvență. Această discretizare poate fi realizată prin eșantionarea funcției de două variabile  $TF_X(\omega, t)$  după cele două varia-

bile, obținându-se eșantioanele  $TF_X(m\omega_0, nt_0)$ . Se observă că s-a ales ca și pas de eșantionare după variabila  $t$  valoarea  $t_0$ , iar ca și pas de eșantionare după variabila  $\omega$  valoarea  $\omega_0$ . Este foarte important să se cunoască valorile necesare ale acestor pași pentru ca pe baza eșantioanelor obținute ( $TF_X(m\omega_0, nt_0)$ ) să poată fi reconstruită distribuția  $TF_X(\omega, t)$ . În cazul reprezentării de tip transformare Fourier scurtă expresia unui eșantion din colecție este:

$$TF_X^{STF}[m, n] = TF_X(m\omega_0, nt_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - nt_0) \cdot e^{-j m \omega_0 \tau} d\tau$$

Distribuția punctelor de eșantionare în planul  $(\omega, t)$  este reprezentată în figura 2.3.

În cazul reprezentării timp factor de scală de tip undișoară, având în vedere faptul că suprafața celulei de rezoluție depinde de  $s$ , rezultă că eșantionarea după această variabilă trebuie să fie neuniformă. Fie punctele de eșantionare după variabila  $s$  de forma  $a^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Valoarea transformării undișoară în aceste puncte este:

$$CWT_X(a^j, t) = x(t) * \psi_{a^j}(-t)$$

Având în vedere că banda de trecere a filtrului trece bandă cu răspunsul la impuls  $\psi_{a^j}(-t)$  este  $a^j \cdot \sigma_\omega$  rezultă că pentru  $j$  fixat  $CWT_X(a^j, t)$  are valori semnificative într-un interval de lățime  $a^j \cdot \sigma_\omega$ . Cu alte cuvinte  $CWT_X(a^j, t)$  este răspunsul unui filtru trece bandă la  $x(t)$ . Prin modificarea lui  $j$  se realizează o descompunere a semnalului  $x(t)$  într-o mulțime de canale cu pulsațiile centrale  $a^j \cdot \omega_0$  cu benzile  $a^j \cdot \sigma_\omega$ . Deci se poate realiza o descompunere după  $j$  a semnalului  $x(t)$  într-o mulțime de semnale de bandă limitată  $x_j(t)$ . Fiecare dintre aceste semnale (de bandă limitată) trebuie să fie eșantionat uniform cu o frecvență de eșantionare proporțională cu  $a^j \cdot \sigma_\omega$ , fie aceasta  $a^j/\beta$ . De aceea expresia eșantioanelor reprezentării timp factor de scală de tip undișoară este:

$$CWT_X[j, n] = CWT_X(a^j, (n\beta)/(a^j)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi_{a^j}(\tau - n\beta/a^j) d\tau$$

Distribuția punctelor de eșantionare în planul timp frecvență

este prezentată în figura 2.4.

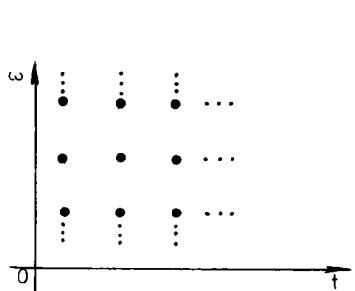


Figura 2.3. Distribuția punctelor de eșantionare în planul timp frecvență pentru reprezentarea de tip transformare Fourier scurtă.

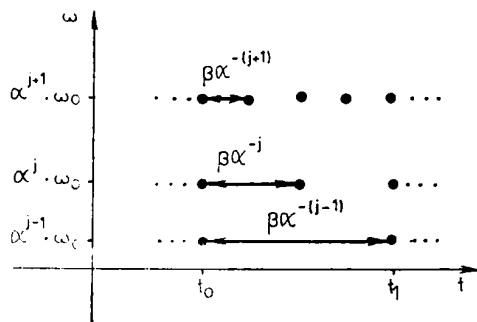


Figura 2.4. Distribuția punctelor de eșantionare în planul timp frecvență pentru reprezentarea de tip transformare undișoară.

#### 2.4. Reprezentări tridimensionale pentru semnale în timp discret

Si în cazul semnalelor în timp discret poate fi realizată analiza spectrală adaptivă pe baza reprezentărilor tridimensionale. Expresia reprezentării timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă pentru semnale în timp discret este:

$$TF_x^{STFT}[n,k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-j\Omega m}$$

Proprietățile acestei transformări sînt prezentate în [Lim.,Opp.'88] și [Pop.,Naf.'ș.a.'86].

Deoarece reprezentarea timp-frecvență definită în relația de mai sus este continuă în variabila  $\Omega$ , aceasta nu poate fi calculată cu ajutorul calculatorului numeric. De aceea, în practică se folosește reprezentarea timp frecvență de tipul transformare

Fourier discretă scurtă :

$$TF_X^{STDFT}[n,k] = \sum_{m=0}^{N-1} w[n-m] e^{-jk(2\pi/N)m} [\sigma[k] - \sigma[k-N]]$$

Proprietățile acestei transformări sînt prezentate în [Pop,Naf.,ș.a.'86] iar erorile cu care această transformare aproximează reprezentarea  $TF_X^{STFT}(t,\omega)$  sînt enunțate și calculate în [Isa.'92 1] și în [Thr.'79].

Pentru calculul eșantioanelor reprezentării timp frecvență de tipul transformare Fourier discretă scurtă poate fi utilizat algoritmul F.F.T. Deci calculul acestei transformări poate fi realizat rapid cu ajutorul calculatorului numeric.

O altă reprezentare timp frecvență pentru semnale în timp discret des utilizată este conform [Lim.,Opp.'88]:

$$TF_X^{MSTDFT}[n,k] = |TF_X^{STDFT}[n,k]|$$

Această reprezentare poartă numele de spectrogramă.

La fel ca și în cazul semnalelor în timp continuu și în cazul semnalelor în timp discret pot fi introduse reprezentări înrudite cu reprezentarea de tip transformare Fourier scurtă în timp discret , cum ar fi de exemplu reprezentarea de tipul funcție de incertitudine sau reprezentările de tip Wigner-Ville sau Wigner-Ville generalizată. De exemplu în cazul ultimei reprezentări amintite , nucleul folosit este :

$$K_{W-Vg}[m,n] = \prod_{k=1}^p (x[n+mc_k])^{b_k} (x^*[n+mc_{-k}])^{-b_{-k}}$$

Se observă că acest nucleu s-a obținut prin eșantionarea uniformă a nucleului  $K_{W-Vg}(\tau,t)$ , definit în paragraful 2.1.3., folosind o frecvență de eșantionare  $f_s$ , pentru ambele variabile  $\tau$  și  $t$ . De fapt această frecvență este folosită pentru transformarea semnalului  $x(t)$  în semnalul  $x[n]$ . Expresia reprezentării Wigner-Ville generalizată pentru semnalele în timp discret se obține prin calculul transformării Fourier discrete a nucleului  $K_{W-Vg}[m,n]$ :

$$TF_X^{W-Vg}[n,k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{W-Vg}[n,m] e^{-jk(2\pi/N)m} [\sigma[k] - \sigma[k-N]]$$

Prin particularizarea valorii lui  $p$  ( $p=1$ ) , reprezentarea timp frecvență de tip Wigner-Ville generalizată se reduce la reprezentarea timp frecvență de tip Wigner-Ville.

Toate reprezentările timp frecvență amintite mai sus sînt inver-sabile. De asemenea , ele sînt izometrii de la  $l^2(Z)$  la  $l^2(Z^2)$

pînă la un factor de proporționalitate .

O reprezentare timp frecvență specifică pentru semnalele în timp discret este reprezentarea de tipul densitate complexă de energie :

$$TF_X^{CED}[n,\Omega] = x[n] \cdot X^*(\Omega) \cdot e^{-j\Omega n}$$

unde  $X(\Omega)$  este transformata Fourier în timp discret a lui  $x[n]$ . Proprietățile acestei reprezentări sînt prezentate în [Lim.,Opp.'88]. Una dintre cele mai interesante dintre acestea este legătura dintre reprezentarea de tip CED și reprezentarea de tip funcție de incertitudine:

$$TF_X^{FI}[n,\Omega] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m-n]e^{j\Omega m}$$

Conform acestei proprietăți  $TF_X^{CED}[n,\Omega]$  este transformarea Fourier bidimensională în variabile discrete a lui  $TF_X^{FI}[n,\Omega]$ .

Ferestrele temporale folosite pentru calculul transformatelor Fourier scurte în timp discret se obțin prin eșantionarea uniformă a ferestrelor temporale utilizate la calculul transformatelor Fourier scurte în timp continuu .

O trecere în revistă a principalelor tipuri de astfel de ferestre este prezentată în [Dra.,Ios.'87]. Toate aceste ferestre temporale sînt semnale în timp discret , reale, pare, de tipul răs-punsului la impuls al unui filtru trece jos.

În [Isa.'92 1 ] se propune o metodă de analiză spectrală adaptivă pe baza reprezentării timp frecvență de tipul transformare Fourier scurtă folosind o fereastră temporală de lungime variabilă. Această idee este dezvoltată și în [Pra.,Bho.'89]. E clar că utilizarea unor astfel de ferestre conduce la realizarea unei analize spectrale adaptive.

La baza calculului reprezentărilor timp frecvență de tip transformare Fourier scurtă în timp discret stă algoritmul FFT. O direcție actuală de cercetare constă în căutarea unor algoritmi de calcul și mai rapizi. O cale pentru atingerea acestui deziderat este descompunerea în subbenzi a spectrului instantaneu al semnalului de analizat , calculul transformării Fourier discrete în fiecare subbandă cu ajutorul algoritmului FFT fiind mult mai rapid (avînd în vedere numărul mai mic de eșantioane implicat). În urma calculului transformărilor din toate subbenzile și în urma asamblării rezultatelor se obține spectrul instantaneu al semnalului de analizat pe baza unui număr mai mic de operații efectuate decît în cazul metodei de analiză tradiționale. Această strategie de analiză spectrală este prezentată în [She.,Mit.'89].

Conform principiului incertitudinii , analiza spectrală bazată pe utilizarea reprezentării timp frecvență de tip transformare Fourier discretă scurtă conduce la rezoluții temporale foarte bune dar la rezoluții frecvențiale slabe , dacă durata ferestrei temporale folosite este mică .

În cazul aceleiași metode se poate ajunge la rezoluții frecvențiale foarte bune , dar la rezoluții temporale proaste , dacă se folosește o fereastră temporală de durată mare ( adică de bandă îngustă). Analiza spectrală bazată pe utilizarea unei ferestre scurte se numește analiză de bandă largă și se notează  $TF_{x, b.l.}^{STDFT}[n,k]$  iar analiza bazată pe utilizarea unei ferestre de durată lungă se numește analiză de bandă îngustă și se notează  $TF_{x, b.l.}^{STDFT}[n,k]$ .

În [Che., Lim.'91] se propune o metodă de îmbunătățire a rezoluției reprezentării timp frecvență de tip transformare Fourier scurtă pe baza calculului reprezentării combinate :

$$TF_{x,c}^{STDFT}[n,k] = \sqrt{|TF_{x,b.l.}^{STDFT}[n,k]| |TF_{x,b.l.}^{STDFT}[n,k]|}$$

și în cazul semnalelor în timp discret se poate vorbi despre reprezentări timp factor de scală. Expresia reprezentării timp factor de scală de tip undișoară pentru semnale în timp discret este :

$$CWT_x[2^j, n] = \sqrt{2^j} \cdot \sum_m x[m] \cdot \psi[2^j(m-n)]$$

sau:

$$CWT_x[2^j, n] = \langle x[m], \sqrt{2^j} \cdot \psi^*[2^j(m-n)] \rangle_{l^2(z)}$$

Folosind notația :

$$\psi_2^j[n] = \sqrt{2^j} \cdot \psi[2^j n]$$

ultima relație mai poate fi scrisă și în forma:

$$CWT_x[2^j, n] = x[n] * (\psi_2^j)^*[-n]$$

Deci  $CWT_x[2^j, n]$  poate caracteriza comportarea în domeniul frecvență a semnalului  $x[n]$  în banda de frecvență egală cu banda de trecere a filtrului cu răspunsul la impuls  $\psi_2^j * [-n]$ .

Deoarece parametrul  $j$  caracterizează valoarea benzii de trecere a sistemului cu răspunsul la impuls  $\psi_2^j[n]$ , se poate afirma că rezoluția frecvențială a reprezentării timp factor de scală de tip undișoară depinde de  $j$ .



## 2.5. Concluzii

În acest capitol este prezentată problema analizei spectrale a semnalelor nestaționare. Avînd în vedere modificarea în timp a parametrilor semnalelor nestaționare este foarte utilă analiza lor cu aparate de măsură adaptive care să reprezinte grafic spectrele instantanee ale acestora. Aparatele care utilizează reprezentările tridimensionale ale semnalelor, deoarece descriu evoluția în timp a spectrelor instantanee pot fi considerate ca aparținînd clasei aparatelor de măsură adaptive. De aceea reprezentările tridimensionale prezentate în acest capitol conduc la metode de măsurare adaptivă.

Din acest motiv capitolul prezentat nu trebuie să lipsească din structura unei lucrări destinate tehnicilor de măsurare adaptivă.

Scopul urmărit în prezentare a fost introducerea și descrierea matematică a reprezentărilor tridimensionale ale semnalelor, cel mai frecvent utilizate. S-au evidențiat principalele proprietăți ale acestor reprezentări precum și asemănările și deosebirile dintre ele. Principalele aplicații ale reprezentărilor timp frecvență sînt :

- extragerea parametrilor semnalelor analizate, (frecvență instantanee, bandă instantanee, energie instantanee, etc) cu utilizări în radar, sonar, ecografie, etc.

- analiza sistemelor cu parametri variabili în timp : canale de telecomunicații, dispozitive de urmărire, dispozitive parametrice, etc.

- analiza semnalelor nestaționare ; vorbire, imagini ale unor obiecte în mișcare, poziția unor obiecte, cu utilizări în recunoașterea vorbirii, televiziune, detecția țintelor, etc.

- descrierea unor fenomene complexe : emisie acustică, zborul liliacului, etc.

Direcțiile viitoare de dezvoltare ale problematicei prezentate în acest capitol sînt:

- investigarea unor noi tehnici adaptive de prelucrare a semnalelor nestaționare pe baza reprezentărilor timp frecvență,

- introducerea altor reprezentări tridimensionale precum și diversificarea celor existente prin construcția altor ferestre temporale și al altor undișoare mamă (decît cele prezentate în bibliografia citată).

- fundamentarea matematică a procesului de discretizare a reprezentărilor tridimensionale ale semnalelor în timp continuu.

- studiul aprofundat al reprezentărilor tridimensionale ale

semnalelor în timp discret , și al erorilor de aproximare prin aceste reprezentări a reprezentărilor în timp continuu .  
Contribuțiile autorului care rezultă din citirea acestui capitol sînt:

- sistematizarea unui material bibliografic vast în forma prezentată ,
- demonstrarea cîtorva proprietăți , care sînt doar enunțate în lucrările consultate,
- încadrarea reprezentărilor tridimensionale între metodele de analiză spectrală adaptivă,
- sugestia utilizării ferestrelor temporale de durată variabilă la analiza spectrală adaptivă,
- definirea tehnicilor de prelucrare adaptive ca tehnici de prelucrare relizate de sisteme cu parametri variabili în timp , care urmăresc parametrii semnalului de prelucrat.

Numeroase noțiuni introduse în acest capitol vor fi folosite și în capitolele următoare . Conceptul matematic de undișoară va sta la baza rezultatelor prezentate în capitolul 3.În capitolul 4 se va prezenta modul în care pot fi utilizate reprezentările timp frecvență la realizarea sistemelor de eșantionare adaptivă , iar în capitolul 6 vor fi prezentate tehnici de măsurare a frecvenței instantanee bazate pe utilizarea reprezentărilor tridimensionale.Deasemenea în capitolul 5 va fi prezentat un sistem capabil să implementeze transformarea undișoară în timp continuu.

### 3. Noi modalități de eșantionare a semnalelor de bandă nelimitată

Unul dintre blocurile cele mai importante ale unui aparat de măsurare numeric (nelipsit din structura oricărui astfel de aparat) este circuitul de eșantionare. În acest capitol se vor prezenta fundamentele matematice ale procesului de eșantionare într-un context mai general decât cel al teoremei W.K.S. punându-se bazele tehnicilor adaptive de eșantionare care se vor prezenta în capitolul următor.

Una dintre principalele limitări ale teoremei W.K.S. este ipoteza care restrânge clasa semnalelor care pot fi eșantionate și reconstruite perfect în urma acestui proces, la mulțimea semnalelor de bandă limitată. Deoarece semnalele practice sînt de bandă nelimitată (fiind de durată finită) la eșantionare se produce inerent eroarea de aliere. În acest capitol se analizează bazele matematice ale teoremei W.K.S. și se lărgeste conținutul acesteia avîndu-se în vedere semnalele de energie finită (deci nu neapărat de bandă limitată). Este expusă o teorie pe baza căreia pot fi formulate teoreme de eșantionare generalizate. Toate rezultatele prezentate în capitol sînt originale și sînt stabilite pe baza regulilor de calcul specifice semnalelor de energie finită (convergență în medie pătratică, relația lui Parseval etc).

#### 3.1. Definirea conceptului de analiză multirezoluție

Acesta este un concept fundamental pentru rezultatele care vor fi expuse în acest capitol. El este definit distinct în [Dau.'88], [Mal.'89 2] și [Jaf.'92].

Conform [Dau.'88] se numește analiză multirezoluție a spațiului Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , familia de subspații închise  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  cu proprietățile:

$$i) \dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots,$$

$$ii) \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}, \quad \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R})$$

$$iii) \forall f_m(x) \in V_m, \quad f_m(2x) \in V_{m-1}$$

iv) Există  $\phi \in V_0$  astfel încît oricare ar fi  $m \in \mathbb{Z}$  mulțimea  $\{\phi_{m,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  cu  $\phi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}x - n)$  are proprietățile:  
-  $\text{Sp}(\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}) = V_m$

-Există  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $A \leq B$  astfel încât oricare ar fi șirul  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din  $l^2(\mathbb{Z})$  are loc:

$$A \sum_n |c_n|^2 \leq \left\| \sum_n c_n \phi_{m,n} \right\|^2 \leq B \cdot \sum_n |c_n|^2$$

În [Jaf.'92] condiția iv) este înlocuită cu condiția iv'):

iv') Există  $\phi \in V_0$ , astfel încât mulțimea  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  să formeze o bază Riesz a lui  $V_0$ .

Definiția unei baze Riesz este:

Dacă  $H$  este un spațiu Hilbert separabil, șirul  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  formează o bază Riesz a lui  $H$  dacă:

-mulțimea combinațiilor liniare ale lui  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este densă în  $H$ ,  
 -e valabilă echivalența normelor:

Există  $C$  și  $C' \in \mathbb{R}$ ,  $C \leq C'$  astfel încât oricare ar fi șirul  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  să aibă loc relația:

$$C \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k e_k \right\|^2 \leq C' \sum_k |c_k|^2$$

**01.** Pe baza acestei definiții se constată că mulțimea  $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din condiția iv) este o bază Riesz a spațiului  $V_m$  (dacă acesta este unul separabil).

În continuare se demonstrează că dacă mulțimea  $\{\phi_{0,n(x)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală, atunci sînt îndeplinite condițiile iv) și iv').

Se demonstrează pentru început propoziția:

**P1.** Dacă mulțimea  $\{\phi_{0,n(x)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe spațiul Hilbert  $V_0$ , atunci ea este o bază Riesz pe acest spațiu.

**D:** Conform [Cris.'65] (pag.176) un spațiu Hilbert care are o bază ortonormală numărabilă este un spațiu Hilbert separabil. Avînd în vedere că baza ortonormală  $\{\phi_{0,n(x)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o mulțime numărabilă, rezultă că spațiul Hilbert  $V_0$  este unul separabil. Deci prima condiție de existență a unei baze Riesz este satisfăcută. Deoarece mulțimea  $\{\phi_{0,n(x)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este completă, fiind bază înseamnă că orice semnal din  $V_0$  se poate exprima ca și o combinație liniară de elemente ale acestei mulțimi în forma:

$$f(x) = \sum_k c_k \phi_{0,k}(x)$$

Deci închiderea mulțimii combinațiilor liniare de elemente din

$\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este chiar  $V_0$ , adică mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este densă în  $V_0$ . Și această condiție de existență a bazei Riesz este deci satisfăcută.

Conform teoremei 3.4.2. [Cri.'65] (pag.178), orice spațiu Hilbert separabil, deci și  $V_0$ , este izomorf cu  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Pe baza acestui izomorfism la orice șir  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  din  $l^2(\mathbb{Z})$ , pe care îl vom nota în continuare cu  $c$ , îi corespunde o funcție  $f$  din  $V_0$  și :

$$\|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \left\| \sum_n c_n \phi_{0,n} \right\|_{V_0}^2 = \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2$$

adică:

$$\sum_k |c_k|^2 = \left\| \sum_n c_n \phi_{0,n} \right\|_{V_0}^2 = \sum_k |c_k|^2$$

Este deci îndeplinită și ultima condiție din definiția unei baze Riesz, pentru  $A=B=1$ .

O2. Pe baza proprietății  $P_1$  se constată că orice bază ortonormală a lui  $V_0$  satisface condiția iv').

În continuare se demonstrează următoarea proprietate :

P2. Dacă mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $V_0$  atunci mulțimea  $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $V_m$ .

D. Se vor analiza două cazuri:  $m < 0$  și  $m > 0$ .

Cazul I.  $m < 0$ .

Pentru  $m = -1$ .

Fie  $g(x)$  o funcție din  $V_{-1}$  și  $g(x) = f_0(2x)$  cu  $f_0(x) \in V_0$ . Această funcție se poate descompune în serie Fourier generalizată în baza ortonormală din  $V_0$   $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  în forma:

$$f_0(x) = \sum_n c_n \phi_{0,n}(x)$$

De aceea se poate scrie și:

$$g(x) = \sum_n c_n \phi_{0,n}(2x)$$

Dar:

$$\phi_{0,n}(2x) = \phi(2x-n) \text{ și } \phi_{-1,n}(x) = 2^{1/2} \phi(2x-n)$$

De aceea :

$$\phi_{-1,n}(x) = 2^{1/2} \phi_{0,n}(2x)$$

adică:

$$g(x) = \sum_n 2^{-1/2} c_n \phi_{-1,n}(x)$$

Deci orice element din  $V_{-1}$  se poate exprima ca și o combinație

liniară de elemente ale mulțimii  $\{\phi_{-1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Aceasta este deci o mulțime completă în  $V_{-1}$ . În continuare se demonstrează că mulțimea considerată este și ortonormală.

$$\langle \phi_{-1,n}, \phi_{-1,1} \rangle = \langle 2^{1/2} \phi_{0,n}(2x), 2^{1/2} \phi_{0,1}(2x) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,n}(2x) \phi_{0,1}^*(2x) dx$$

Pe baza substituției  $2x=u$  se obține:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{-1,n}(x), \phi_{-1,1}(x) \rangle &= 2 (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,n}(u) \phi_{0,1}^*(u) du = \langle \phi_{0,n}(x), \phi_{0,1}(x) \rangle = \\ &= \begin{cases} 1 & , n=1 \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases} \end{aligned}$$

Deci mulțimea  $\{\phi_{-1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $V_{-1}$ . Procedând similar se poate demonstra prin recurență că  $\{\phi_{m,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $V_m$ , pentru  $m < 0$ .

Cazul II.  $m > 0$

Pentru  $m=1$ .

Se consideră funcția  $h(x)$  din  $V_1$  cu  $h(x) = f_0(x/2)$  unde  $f_0(x)$  este o funcție din  $V_0$ . Această funcție se poate descompune în serie Fourier generalizată în forma:

$$f_0(x) = \sum_n c_n \phi_{0,n}(x)$$

De aceea se poate scrie și:

$$h(x) = \sum_n c_n \phi_{0,n}(x/2)$$

Dar:  $\phi_{0,n}(2^{-1}x) = \phi(2^{-1}x-n)$  și  $\phi_{1,n}(x) = 2^{-1/2} \phi(2^{-1}x-n)$ .

De aceea  $\phi_{1,n}(x) = 2^{-1/2} \phi_{0,n}(2^{-1}x)$  și deci :

$$h(x) = \sum_n c_n (2^{1/2}) \phi_{1,n}(x)$$

Deci orice element din  $V_1$  se poate exprima ca și o combinație

liniară de elemente ale mulțimii  $\{\phi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . S-a demonstrat astfel că această mulțime este completă în  $V_1$ . În continuare se demonstrează că această mulțime este și ortonormală .

$$\begin{aligned} \langle \phi_{1,n}, \phi_{1,l} \rangle &= \langle 2^{-1/2} \phi_{0,n}(2^{-1}x), 2^{-1/2} \phi_{0,l}(2^{-1}x) \rangle = \\ &= 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,n}(2^{-1}x) \phi_{0,l}^*(2^{-1}x) dx \end{aligned}$$

Făcînd schimbarea de variabilă  $2^{-1}x = u$  , se obține:

$$\langle \phi_{1,n}, \phi_{1,l} \rangle = 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,n}(u) \phi_{0,l}^*(u) du / (2^{-1}) = \begin{cases} 1, n=l \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$$

S-a demonstrat că mulțimea  $\{\phi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $V_1$ .

Procedînd similar se poate demonstra prin recurență că mulțimea  $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe  $V_m$  pentru orice  $m$  din  $\mathbb{Z}^+$ .

**03.** Deoarece spațiile Hilbert  $V_m$  au baze ortonormale numărabile , rezultă că ele sînt spații Hilbert separabile, oricare ar fi numărul întreg  $m$ .

**04.** Pe baza proprietății  $P_1$  rezultă că mulțimile  $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sînt baze Riesz pe spațiile  $V_m$ .

**05.** Pe baza observațiilor anterioare se constată că dacă mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $V_0$  atunci sînt îndeplinite cerințele condiției iv) din definiția analizei multirezoluție.

Deci condiția iv) poate fi înlocuită în definiția analizei multirezoluție cu condiția mai restrictivă ca mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  să fie o bază ortonormală a spațiului Hilbert  $V_0$ .

**06.** În cazul în care mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală condiția iv') implică condiția iv) și deci definiția dată de Jaffard analizei multirezoluție este suficientă. Deci în cazul în care mulțimea  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului Hilbert  $V_0$  condițiile i), ii), iii) și condiția anterior enunțată definesc o analiză multirezoluție. Aceasta are cîteva proprietăți, ce au fost folosite în [Mal.'89] pentru definirea conceptului de analiză multirezoluție.

**P3.** Notînd cu  $P_m f$  proiecția ortogonală a semnalului  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pe spațiul  $V_m$  se poate demonstra că :

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f = f$$

D. Pe baza ipotezei i) se constată că :

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = V_{-\infty}$$

Avînd în vedere că  $V_m$  sînt subspații închise rezultă că și  $V_{-\infty}$  este subspațiu închis adică :

$$V_{-\infty} = V_{-\infty}$$

Pe baza relației ii) se constată că :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} UV_m = V_{-\infty}$$

Dar  $P_{-\infty} f$  este cea mai bună aproximare de medie pătratică a lui  $f$  din  $L^2(\mathbb{R})$  cu elemente din  $V_{-\infty}$ . Dar cea mai bună aproximare de acest fel este chiar  $f$ . De aceea :

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f = P_{-\infty} f = f \quad (\text{c.c.t.d})$$

**O7.**  $P_3$  reprezintă condiția 6) impusă unei analize multirezoluție în [Mal.'89].

**P4.** Pentru orice funcție  $f_m(x)$  din  $V_m$  și funcția  $f_m(x-2^m n)$  aparține lui  $V_m$  pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ .

D.  $f_m(x) \in V_m$ . De aceea se poate folosi descompunerea în serie Fourier :

$$f_m(x) = \sum_n c_n \cdot \phi_{m,n}(x)$$

sau :

$$f_m(x-2^m n) = \sum_n c_n \phi_{m,n}(x-2^m n)$$

Dar:

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}(x-2^m n) &= 2^{-m/2} \phi_{0,0}[2^{-m}(x-2^m n)-n] = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}x-2n) = \\ &= 2^{-m/2} \phi_{0,0}(2^{-m}x-2n) = \phi_{m,2n}(x) \end{aligned}$$

Avînd în vedere că funcția  $\phi_{m,n}(x)$  este din  $V_m$  indiferent de valoarea lui  $n$ , rezultă că și funcția  $\phi_{m,2n}(x)$  este din  $V_m$  pentru orice valoare a lui  $n$ . De aceea și funcția  $\sum_n c_n \phi_{m,2n}(x)$  este din

$V_m$  și deci  $f_m(x-2^m n)$  este din  $V_m$ .

**O8.** Această proprietate a semnalelor din  $V_m$  se numește invarianță la translație. Propoziția P4 exprimă condiția 5) din [Mal.'89].



**P5.** Operatorul  $P_m f$  este liniar.

$$D. \quad P_m f = \sum_n \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n}$$

$$P_m(\alpha f + \beta g) = \alpha \left( \sum_n \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} \right) + \beta \left( \sum_n \langle g, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} \right) = \alpha P_m f + \beta P_m g \quad (\text{c.c.t.d.})$$

**O9.** Dacă se aplică de două ori operatorul de proiecție unui semnal, expresia acestuia nu se schimbă.

$$D. \quad P_m(P_m f) = \sum_n \langle P_m f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} = \sum_n \phi_{m,n} \langle \sum_p \langle f, \phi_{m,p} \rangle \phi_{m,p}, \phi_{m,n} \rangle = \\ = \sum_n \sum_p \langle f, \phi_{m,p} \rangle \langle \phi_{m,p}, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} = \sum_n \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n} = P_m f \quad (\text{c.c.t.d.})$$

**O10.** P5 și O9 dau condiția 1) din [Mal.'89].

**O11.** Deoarece  $P_m f$  este proiecția lui  $f$  pe  $V_m$  este respectată teorema proiecției (teorema lui Riesz) și deci: oricare ar fi  $g$  din  $V_m$ :

$$\|g-f\| \geq \|P_m f - f\|$$

Această relație reprezintă condiția 2) din [Mal.89].

**O12.** Condiția i) din definiția analizei multirezoluție din acest text conduce pentru  $j=-m$  la condiția 3) din [Mal.89].

**O13.** Condiția iii) prezentată mai sus conduce pentru  $j=-m$  la condiția 6) din [Mal.89].

**P6.** Dacă proiecția semnalului de energie finită  $f$  pe subspațiul  $V_m$  se exprimă cu relația:

$$P_m f = \sum_n c_n \phi_{m,n}$$

atunci:

$$P_m f(x-2^m k) = \sum_n c_{n-k} \phi_{m,n}$$

$$D. \quad P_m f(x-2^m k) = \sum_n \langle f(x-2^m k), \phi_{m,n}(x) \rangle \phi_{m,n}(x)$$

$$\text{Dar:} \quad \langle f(x-2^m k), \phi_{m,n}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-2^m k) \phi_{m,n}^*(x) dx$$

Făcînd schimbarea de variabilă  $u=x-2^m k$  și ținînd seama de faptul că:

$$\phi_{m,n}(u+2^m k) = \phi_{m,n-k}(u)$$

se constată că:

$$P_m f(x-2^m k) = \sum_n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \phi_{m,n-k}^*(u) du \right] \phi_{m,n}(x) = \sum_n c_{n-k} \phi_{m,n}(x) \quad (\text{c.c.t.d.})$$

**O14.** Propoziția P6 completează enunțul proprietății din [Mal.'89].

**O15.** Referindu-ne din nou la izomorfismul dintre spațiul Hilbert separabil  $V_m$  și  $l^2(\mathbb{Z})$  amintit mai sus, se poate afirma acum că acesta conservă translația, în sensul că dacă funcției  $f(x)$  din  $V_m$  îi corespunde șirul  $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  atunci funcției  $f(x - 2^m k)$  cu  $k \in \mathbb{Z}$ , fixat, din  $V_m$  îi corespunde șirul  $c_k = \{c_{n-k}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din  $l^2(\mathbb{Z})$ .

**O16.** Proprietatea 6) din [Mal.'89] corespunde propoziției P3 din acest text și ipotezei ii).

### 3.1.1. Exemple de analiză multirezoluție

**E1.** Acest exemplu apare în toate lucrările amintite mai sus: [Dau.'88], [Jaf.'92], [Mal.'89].

Fie  $V_m = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{-constant pe } [2^m n, 2^m(n+1)) \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}\}$ . Aceste spații formează o analiză multirezoluție deoarece se verifică ipotezele i)-iv). Pentru verificarea ipotezei iv) se alege funcția generatoare a bazelor de translatate:

$$\phi_{0,0}(x) = \phi(x) = \theta_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

tocmai funcția caracteristică a intervalului  $[0,1)$ .

**O17.** Expresia coeficienților Fourier  $c_k$  ai dezvoltării semnalului  $P_m f$  în spațiul  $V_m$ , este chiar valoarea medie a semnalului  $f(x)$  pe intervalul  $[k, k+1)$ :

$$c_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$$

De aceea este valabilă relația :

$$f_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{2^m k}^{2^m(k+1)} f(x) dx \right) \cdot 2^{-m} \theta_{[0,1)}(2^{-m}x - k)$$

**E2.** (original)

Fie spațiile  $V_m^{\perp} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0, \text{ ptr. } |\omega| > \pi/(2^m)\}$  oricare ar fi  $m \in \mathbb{Z}$ . În continuare se demonstrează că aceste spații generează o analiză multirezoluție.

**Verificarea ipotezei i).**

$V_{m-1}^{b,1} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0, \text{ ptr. } |\omega| > \pi/(2^{m-1}) \}$   
 Dar pentru orice număr întreg  $m$  e valabilă relația :

$$\pi/(2^m) < \pi/(2^{m-1})$$

De aceea orice funcție  $f$  din  $V_m^{b,1}$  are proprietatea că  $\hat{f}(\omega) = 0$   
 ptr.  $|\omega| > \pi/(2^{m-1})$  adică :  
 pentru orice întreg  $m$   $V_m^{b,1} \subset V_{m-1}^{b,1}$  .

**Verificarea ipotezei ii).**

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{b,1} = (V_{-\infty}^{b,1}) \cap \dots \cap (V_{-1}^{b,1}) \cap (V_0^{b,1}) \cap (V_1^{b,1}) \cap \dots \cap (V_{\infty}^{b,1})$$

dar:

$$V_{\infty}^{b,1} = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^{b,1} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ ptr. } |\omega| > \lim_{m \rightarrow \infty} [\pi/(2^m)] \} = \\ = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \} = \{0\}.$$

Avînd în vedere că pe baza ipotezei i)  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{b,1} = V_{\infty}^{b,1}$  se constată

că:  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{b,1} = \{0\}$ . (c.c.t.d.)

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{b,1} = (V_{-\infty}^{b,1}) \cup \dots \cup (V_{-1}^{b,1}) \cup (V_0^{b,1}) \cup (V_1^{b,1}) \cup \dots \cup (V_{\infty}^{b,1}) = V_{-\infty}^{b,1}$$

Dar  $V_{-\infty}^{b,1}$  este identic cu  $L^2(\mathbb{R})$ . De aceea :

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{b,1} = L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{c.c.t.d.})$$

**Verificarea ipotezei iii).**

Oricare ar fi semnalul  $f$  din  $V_m^{b,1}$  este valabilă relația :

$$\hat{f}(\omega) = 0 \text{ ptr. } |\omega| > \pi/(2^m).$$

Dar:

$$F\{f(2t)\}(\omega) = (1/2)\hat{f}(\omega/2)$$

unde s-a notat cu  $F$  operatorul Fourier.

Deoarece :

$$\text{supp. } \hat{f}(\omega) = [-\pi/(2^m), \pi/(2^m)]$$

rezultă că:

$$\text{supp. } \hat{f}(\omega/2) = [-\pi/(2^{m-1}), \pi/(2^{m-1})]$$

Deci oricare ar fi  $f(x)$  din  $V_m^{b.l.}$   $f(2x)$  aparține lui  $V_{m-1}^{b.l.}$  (c.c.t.d.)

**Verificarea ipotezei iv).**

Avînd în vedere relația :

$$V_0^{b.l.} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ ptr. } |\omega| > \pi \}$$

se constată că pe acest spațiu poate fi aplicată teorema W.K.S. Conform acestei teoreme oricare ar fi semnalul  $f(t)$  din  $V_0^{b.l.}$  el se poate descompune într-o serie de forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \text{sinc}[\pi(t-n)]$$

De aceea se poate afirma că mulțimea  $\{\text{sinc}[\pi(t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este completă în  $V_0^{b.l.}$ .

Această mulțime este și ortonormală . Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \langle \text{sinc}[\pi(t-n)], \text{sinc}[\pi(t-p)] \rangle &= \\ &= [1/(2\pi)] \langle F\{\text{sinc}[\pi(t-n)]\}, F\{\text{sinc}[\pi(t-p)]\} \rangle \end{aligned}$$

$$= [1/(2\pi)] \langle e^{-j\omega n} P_{\pi}(\omega), e^{-j\omega p} P_{\pi}(\omega) \rangle = [1/(2\pi)] \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(p-n)} d\omega =$$

$$= \text{sinc}[(n-p)\pi] = \begin{cases} 1, & n=p \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci mulțimea  $\{\text{sinc}[\pi(t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe spațiul  $V_0^{b.l.}$ .

Fiind verificate toate ipotezele, rezultă că mulțimea subspațiilor  $\{V_m^{b.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  formează o analiză multirezoluție a lui  $L^2(\mathbb{R})$ . Expresia proiecției semnalului  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pe  $V_m^{b.l.}$  este:

$$P_m f = \sum_n c_n \phi_{m,n}$$

Avînd în vedere că :

$$\phi_{0,0}(t) = \text{sinc}(\pi t)$$

rezultă că :

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

și expresia proiecției semnalului  $f$  pe subspațiul  $V_m^{b.l.}$  devine:

$$P_m f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2^{-m/2} \cdot \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

Valorile coeficienților Fourier sînt :

$$c_n = \langle f(t), 2^{-m/2} \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)] \rangle = [1/(2\pi)] \langle F\{f\}, F\{2^{-m/2} \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]\} \rangle$$

În urma efectuării calculelor se obține:

$$c_n = [1/(2\pi)] \langle F\{f\}, 2^{m/2} e^{-j \cdot 2^m \omega n} p_{\pi/(2^m)}(\omega) \rangle = 2^{m/2} \cdot f(2^m n)$$

Se obține în final:

$$P_m f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^m n) \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

017. Avînd în vedere că  $V_{\frac{1}{2}} \cdot L = L^2(\mathbb{R})$  și că oricare ar fi semnalul  $f$  de energie finită  $f = \lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f$  rezultă că :

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow -\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^m n) \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

Această relație este utilizată (fără a fi însă demonstrată) și în [But.'83].

### 3.1.2.0 modalitate de construcție a unei baze ortonormale a lui $L^2(\mathbb{R})$ pornind de la o analiză multirezoluție

În [Cri.'65] (pag.168) este dată următoarea definiție:  
Un sistem  $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de subspații liniare închise se zice că formează o descompunere ortogonală a spațiului  $H$  dacă pentru  $n \neq m$  avem  $W_m \perp W_n$ , iar subspațiul liniar închis generat de  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m$ , coincide cu  $H$ .

În continuare se prezintă modul în care pornind de la o analiză multirezoluție a lui  $L^2(\mathbb{R})$  se poate ajunge la o descompunere ortogonală a acestui spațiu.

În acest scop se consideră că spațiul închis  $W_m$  este complementul ortogonal al lui  $V_m$  în raport cu  $V_{m-1}$ .

Cu alte cuvinte oricare ar fi semnalul  $f$  din  $W_m$  acesta are proprietățile:

$f \perp V_m, f \in V_{m-1}, V_m \cup W_m = V_{m-1}$   
 În continuare se verifică dacă subspațiile  $W_m$  verifică ipotezele definiției de mai sus.

În primul rând se verifică condiția:

- Dacă  $m \neq n$  atunci  $W_m \perp W_n$ .

În [Cri.'65] (pag.166) este formulată următoarea teoremă :

Dacă  $E$  este un subspațiu liniar închis al unui spațiu Hilbert  $H$ , atunci orice element  $x$  din  $H$  se poate reprezenta în mod unic în forma:  $x=u+v$  cu  $u \in E$  și  $v \in E^\perp$  (complementul ortogonal al lui  $E$  în  $H$ ).

Pentru  $E=V_m$  și  $H=V_{m-1}$  rezultă că:

oricare ar fi  $f_m$  din  $V_m$ , acesta se poate reprezenta în mod unic sub forma:

$$f_{m-1} = f_m + g_m \text{ cu } f_{m-1} \in V_{m-1} \text{ și } g_m \in W_m$$

Dar orice semnal  $g_m$  din  $W_m$  este perpendicular pe subspațiul  $V_m$  și aparține subspațiului  $V_{m-1}$ . Avînd în vedere faptul că subspațiul  $V_{m-1}$  este perpendicular pe subspațiul  $W_{m-1}$  rezultă că semnalul  $g_m$  este perpendicular pe subspațiul  $W_{m-1}$ .

Tinînd seama de proprietatea 1) a analizei multirezoluție rezultă că:

$$g_m \in V_{m-1} \subset V_{m-2} \text{ adică rezultă că : } g_m \in V_{m-2} \text{ . De aceea rezultă că } g_m \perp W_{m-2}$$

Deoarece proprietatea enunțată anterior este valabilă pentru orice număr întreg  $m$  se poate afirma că  $W_m \perp W_{m-2}$ . Ultima afirmație este adevărată și într-un context mai general :

deoarece  $g_m \in V_{m-p}$  rezultă că  $g_m \perp W_{m-p}$ .

Notînd  $m-p=n$  rezultă că pentru  $m \neq n$   $W_m \perp W_n$  (c.c.t.d).

**O18.** Mulțimile  $W_m$  sînt disjuncte oricare ar fi  $m \in \mathbb{Z}$ .

D. Dacă  $f \in W_m$  atunci  $f \notin V_m$ , dar:  $V_m = V_{m-1} \cup W_{m+1}$  deci  $f \notin W_{m+1}$

$$V_m = V_{m+2} \cup W_{m+2} \cup W_{m+1} \text{ deci } f \notin W_{m+2}$$

.

.

$$V_m = V_{m+p} \cup V_{m+p-1} \cup \dots \cup W_{m+1} \text{ deci } f \notin W_{m+p}$$

oricare ar fi numărul natural  $p$ .

**O19.** Conform definiției 2.2.1. [Cris.65] (pag.167)  $f_m$  este proiecția lui  $f_{m-1}$  pe  $V_m$  iar  $g_m$  este proiecția lui  $f_{m-1}$  pe  $W_m$ .

În continuare se verifică cea de-a doua ipoteză a descompu-

nerii ortogonale:

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m} = L^2(\mathbb{R}).$$

D. Fiind vorba de subspații închise:  $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \overline{W_m}$ .

Se demonstrează afirmația directă :

Fié  $f$  un semnal din  $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m}$ . În mod sigur există un anumit  $m$  astfel încît  $f \in W_m$ . De aceea  $f \in V_{m-1}$  și deci  $f \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_{m-1} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R})$ .

Deci orice semnal din  $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m}$  este și din  $L^2(\mathbb{R})$ .

Se demonstrează afirmația inversă :

Oricare ar fi semnalul  $f$  din  $L^2(\mathbb{R})$   $f \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ . Deci există un anumit  $m$  astfel încît  $f \in V_m$ .

Dar  $V_m = V_{m+1} \cup W_{m+1} = V_{m+2} \cup W_{m+2} \cup W_{m+1} = \dots = V_\infty \cup \left( \bigcup_{l=1}^{\infty} W_{m+l} \right)$ .

Avînd în vedere că  $V_\infty = \{0\}$  rezultă că pentru orice  $f$  din  $L^2(\mathbb{R})$

$$f \in \bigcup_{l=1}^{\infty} W_{m+l} \text{ adică } f \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m. \quad (\text{c.c.t.d.}).$$

Deci pornind de la analiza multirezoluție  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  se poate ajunge la descompunerea ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$  în subspațiile  $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  cu  $W_m$  complementul ortogonal al lui  $V_m$  în  $V_{m-1}$ .

În [Cri.'65] (pag.168) este formulată următoarea teoremă :  
Teorema 2.3.1. Dacă mulțimea  $\{W_m\}_{m \in I}$  este o descompunere ortogonală a spațiului Hilbert  $H$ , atunci orice element  $f$  din  $H$  se reprezintă în forma :

$$f = \sum_{m \in I} f_m$$

cu  $f_m \in W_m$ .

Această teoremă stă la baza construcțiilor de baze ortonormale pe spațiul  $L^2(\mathbb{R})$ . În continuare se vor demonstra câteva propoziții ajutătoare acestui scop.

P7. Dacă mulțimea  $B_m = \{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  pentru orice număr întreg  $m$  este o bază ortonormală a subspațiului închis  $W_m$ , atunci mulțimea  $B = \{\psi_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

D. Conform teoremei anterioare, considerînd subspațiile  $W_m$  construite ca și complemente ortogonale ale subspațiilor  $V_m$  (care definesc o analiză multirezoluție) în subspațiile  $V_{m-1}$ , pentru orice număr întreg  $m$  și spațiul Hilbert  $H$  identic cu  $L^2(\mathbb{R})$  rezultă că :

oricare ar fi semnalul  $f$  din  $L^2(\mathbb{R})$   $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m$  unde  $g_m = P_{W_m} f = Q_m f$

este proiecția lui  $f$  pe subspațiul  $W_m$ .

Avînd în vedere că  $B_m$  este o bază ortonormală a lui  $W_m$  rezultă că :

$$g_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \cdot \psi_{m,n}(t)$$

unde :

$$c_{m,n} = \langle g_m(t), \psi_{m,n}(t) \rangle = \langle Q_m f, \psi_{m,n}(t) \rangle$$

De aceea orice semnal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se poate exprima în forma :

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \cdot \psi_{m,n}(t)$$

Deci mulțimea  $B$  este completă în  $L^2(\mathbb{R})$ . În continuare se demonstrează că ea este și ortonormală.

Avînd în vedere că mulțimea  $B_m$  este ortonormală, oricare ar fi numărul întreg  $m$ , este valabilă relația:

$$\langle \psi_{m,p}, \psi_{m,l} \rangle = \begin{cases} 1, & p=l \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

În continuare se calculează  $\langle \psi_{p,n}, \psi_{l,n} \rangle$ . Pentru orice număr întreg  $n$  semnalul  $\psi_{p,n}(t)$  aparține subspațiului  $W_p$ , iar semnalul  $\psi_{l,n}(t)$  subspațiului  $W_l$ . Dar pentru  $l \neq p$ ,  $W_l \perp W_p$ , de aceea :

$$\langle \psi_{p,n}, \psi_{l,n} \rangle = \begin{cases} \langle \psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle = 1, & p=l=m \\ 0, & p \neq l \end{cases}$$



Deci :

$$\langle \Psi_{n,p} , \Psi_{l,q} \rangle = \begin{cases} 1 & , m=1 \text{ și } p=q \\ 0 & , \text{ în rest} \end{cases}$$

În acest mod s-a demonstrat enunțul propoziției P7.

Subspațiile  $W_m$  au câteva proprietăți remarcabile. Acestea sînt prezentate în [Dau.'88].

Prima astfel de proprietate este formulată în cadrul observației O19. Cea de a doua constituie enunțul următoarei propoziții:

**P8.** Oricare ar fi semnalul  $g_m$  aparținînd subspațiului  $W_m$  semnalul  $g_m(2^m t)$  aparține subspațiului  $W_0$ .

**D.** Dacă semnalul  $g_m(t)$  aparține subspațiului  $W_m$  atunci există două semnale  $f_{m-1}$  din  $V_{m-1}$  și  $f_m$  din  $V_m$  astfel încît :

$$f_{m-1} = f_m + g_m$$

De aceea se poate scrie că :

oricare ar fi numărul real  $t$ ,  $g_m(2t) = f_{m-1}(2t) - f_m(2t)$ .

Dar oricare ar fi semnalul  $f_{m-1}(t)$  din  $V_{m-1}$  semnalul  $f_{m-1}(2t)$  aparține subspațiului  $V_{m-2}$ , și oricare ar fi semnalul  $f_m(t)$  din subspațiul  $V_m$ , semnalul  $f_m(2t)$  aparține subspațiului  $V_{m-1}$ . Deci  $g_m(2t)$  se poate exprima ca și diferența dintre proiecțiile semnalului  $f$  de energie finită pe subspațiile  $V_{m-2}$  și  $V_{m-1}$ . De aceea semnalul  $g_m(2t)$  aparține subspațiului  $W_{m-1}$ . Repetînd raționamentul expus se poate demonstra prin recurență că semnalul  $g_m(2^m t)$  aparține subspațiului  $W_0$ .

Cea de-a treia proprietate a subspațiilor  $W_m$  este :

**P9.** În  $W_0$  există un semnal  $\Psi_{0,0}(t)$  astfel încît închiderea liniară a mulțimii  $\{\Psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  să fie chiar  $W_0$ , unde:

$$\Psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \Psi_{0,0}(2^{-m}t - n)$$

**D.** Oricare ar fi semnalul  $g_0(t)$  din  $W_0$  există semnalul  $f_{-1}(t)$  care aparține subspațiului  $V_{-1}$  și semnalul  $f_0(t)$  care aparține subspațiului  $V_0$  astfel încît :

$$g_0(t) = f_{-1}(t) - f_0(t)$$

adică :

$$g_0(t) = \sum_n \alpha_n \phi_{-1,n}(t) - \sum_n \beta_n \phi_{0,n}(t) = \sum_n \alpha_n \phi_{-1,0}(t-n) - \sum_n \beta_n \phi_{0,0}(t-n)$$

Deci semnalul  $g_0(t)$  se exprimă ca și o combinație de translatate

ale semnalelor  $\phi_{-1,0}(t)$  și  $\phi_{0,0}(t)$ . Elementele acestei mulțimi de translatate, indexate după  $n$ , pot fi privite ca și translatate ale semnalului  $\psi_{0,0}(t)$ . Deci baza din  $W_0$  este una de translatate.

**O20.** Propoziția P9 completează propoziția P7 arătând forma bazei din  $W_0$  și anume:

$$B_{W_0} = \{\psi_{0,n}(t) = \psi_{0,0}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Ținând seama de propozițiile anterioare pentru construcția unor baze (de undișoare) pe  $L^2(\mathbb{R})$ , mai rămâne să se explicitizeze forma semnalului  $\psi_{0,0}(t)$  (care prin translatate și scalare generează elementele bazei ortonormate, numit undișoară mamă). În acest scop poate fi utilizată următoarea propoziție formulată în [Dau.'88] (pag.919).

**P10.** Dacă funcția  $\phi_{0,0}(t)$  (generatoarea elementelor bazelor ortonormale ale subspațiilor  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  se exprimă prin relația :

$$\phi_{0,0}(t) = \sum_n c_n \cdot \phi_{0,0}(2t-n)$$

atunci funcția  $\psi_{0,0}(t)$  se exprimă cu relația:

$$\psi_{0,0}(t) = \sum_n (-1)^n \cdot c_{n+1} \phi_{0,0}(2t+n) \quad (3.1)$$

O demonstrație a acestei afirmații este prezentată în [Mey. 90]. Deci pentru construcția unei baze de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  se poate proceda în felul următor:

- Se pornește de la analiza multirezoluție  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  a lui  $L^2(\mathbb{R})$  folosindu-se bazele ortonormale ale subspațiilor  $V_m$   $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

-Se construiește descompunerea ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$   $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ .

-Se construiesc bazele ortonormale pe  $W_m$  :

$\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi_{0,0}(2^{-m}t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , pornind de la formula (3.1).

-Se construiește mulțimea  $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  care este o bază ortonormală a lui  $L^2(\mathbb{R})$  (conform teoremei 2.3.1.).

### 3.1.3. Exemple de baze ortonormale de undișoare pe $L^2(\mathbb{R})$

**E 1** .( continuarea exemplului E1 din paragraful 2)

Forma subspațiilor  $V_m$  din acest exemplu este :

$V_m = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{-constant pe } [2^m n, 2^m(n+1)) \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}\}$

Expresia funcției generatoare de baze ortonormale pe aceste subspații este :

$$\phi_{0,0}(t) = \theta_{[0,1)}(t)$$

Se verifică cu ușurință că :

$$\phi_{0,0}(t) = \phi_{0,0}(2t) + \phi_{0,0}(2t-1) \quad (3.2)$$

Această relație este reprezentată grafic în figura 3.1.

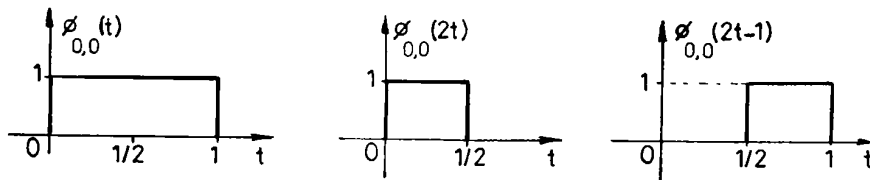


Figura 3.1. Verificarea relației (3.2.).

De aceea  $c_0 = 1$  și  $c_1 = 1$  iar  $c_k = 0$  pentru orice număr întreg  $k$  diferit de 0 sau 1. Relația (3.1.) devine:

$$\Psi_{0,0}(t) = -c_0 \cdot \phi_{0,0}(2t-1) + c_1 \cdot \phi_{0,0}(2t) = \phi_{0,0}(2t) - \phi_{0,0}(2t-1)$$

Undișoara mamă este reprezentată grafic în figura 3.2.

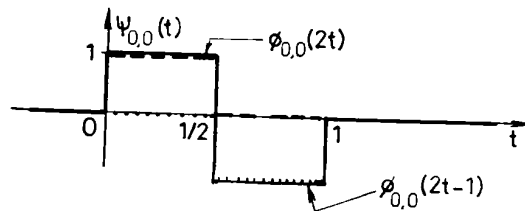


Figura 3.2. Undișoara mamă pentru exemplul 1.

Expresia analitică a acestei funcții este :

$$\Psi_{0,0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < (1/2) \\ -1, & (1/2) \leq t < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Baza ortonormală generată pe  $L^2(\mathbb{R})$  de această funcție este :

$$B_H = \{2^{-m/2} \cdot \Psi_{0,0}(2^{-m}t-n)\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$$

Aceasta este binecunoscuta bază Haar a spațiului Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

**E 2.** (continuarea exemplului E2 din paragraful 2)

Descrierea subspațiilor  $V_m^{p.l.}$  și  $V_{m-1}^{p.l.}$  din acest exemplu este:  
 $V_m^{p.l.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = F\{f\}(\omega) = 0, \text{ pentru orice } \omega \text{ cu } |\omega| > \pi/2^m\}$

$V_m^{b.l.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = F\{f\}(\omega) = 0, \text{ pentru orice } \omega \text{ cu } |\omega| > \pi/2^{m-1}\}$   
 De aceea subspațiile  $W_m^{b.l.}$  pot fi descrise prin relația:  
 $W_m^{b.l.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ pentru orice } \omega \text{ din } (-\infty, -\pi/(2^{m-1})) \cup (-\pi/(2^m), \pi/(2^m)) \cup (\pi/(2^{m-1}), \infty)\}$ .

Deci pentru orice semnal din  $W_m^{b.l.}$ :  
 $\text{supp.}\{\hat{f}(\omega)\} = [-\pi/(2^{m-1}), -\pi/(2^m)] \cup [\pi/(2^m), \pi/(2^{m-1})]$ .  
 Expresia funcției care generează bazele ortonormale ale spațiilor  $V_m^{b.l.}$  este :

$$\phi_{0,0}(t) = \text{sinc}(\pi t)$$

Descompunerea acestui semnal în baza spațiului  $V_m^{b.l.}$  este :

$$\text{sinc}(\pi t) = \sum_n \text{sinc}(\pi 2^{-1}n) \text{sinc}[\pi(2t-n)]$$

Deci expresia coeficienților  $c_n$  este :

$$c_n = \text{sinc}(\pi n/2)$$

De aceea :

$$\Psi_{0,0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \text{sinc}[(\pi/2)(n+1)] \cdot \text{sinc}[\pi(2t-n)] = {}_1\Psi_{0,0}(t)$$

Pe baza notației introduse în relația de mai sus , se poate afirma că mulțimea  $\{ {}_1\Psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \Psi_{0,0}(2^{-m}t-n) \}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

O21. Funcția  ${}_1\Psi_{0,0}(t)$  este dificil de utilizat avînd în vedere expresia sa analitică complicată . O undișoară mamă, cu o expresie analitică mai simplă, este cea prezentată în lucrarea [Wor., Opp.' 92], a cărei transformare Fourier este :

$$\hat{{}_2\Psi}_{0,0}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \pi \leq |\omega| \leq 2\pi \\ 0 & , \quad \text{în rest} \end{cases} \quad (3.5)$$

În continuare se demonstrează că folosind această undișoară mamă se poate genera o bază pe  $L^2(\mathbb{R})$ . În acest scop se demonstrează pentru început proprietatea :

P11. Mulțimea  $\{ {}_2\Psi_{0,n}(t) = 2\Psi_{0,0}(t-n) \}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $W_0^{b.l.}$ .

Se demonstrează în primul rînd că  ${}_2\Psi_{0,n}(t) \in W_0^{b.l.}$ .

$$F\{{}_2\Psi_{0,n}(t)\} = F\{{}_2\Psi_{0,n}(t)\} = F\{{}_2\Psi_{0,0}(t-n)\} = e^{-j\omega n} \hat{{}_2\Psi}_{0,0}(\omega)$$

De aceea  $\text{supp.}\{F\{{}_2\Psi_{0,n}(t)\}\} = \text{supp.}\{\hat{{}_2\Psi}_{0,0}(\omega)\} = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$  și

deci oricare ar fi numărul întreg  $n, 2\psi_{0,n}(t) \in W_0^{b.l.}$ .  
 Se demonstrează că mulțimea  $\{2\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală .

$$\begin{aligned} \langle 2\psi_{0,n}(t), 2\psi_{0,m}(t) \rangle &= \\ &= (1/2\pi) \langle 2\hat{\psi}_{0,n}(\omega), 2\hat{\psi}_{0,m}(\omega) \rangle = \\ &= (1/2\pi) \langle e^{-j\omega n} 2\hat{\psi}_{0,0}(\omega), e^{-j\omega m} 2\hat{\psi}_{0,m}(\omega) \rangle = \\ &= (1/2\pi) \int_{-\pi \leq |\omega| \leq \pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = -\text{sinc}[\pi(n-m)] + 2\text{sinc}[2\pi(n-m)] = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Deci mulțimea  $\{2\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală .  
 În continuare se demonstrează că această mulțime este și completă în subspațiul  $W_0^{b.l.}$ .  
 În acest scop se determină pentru început expresia analitică a funcției  $\psi_{0,0}(t)$ .

$$2\psi_{0,0}(t) = F^{-1}\{p_{2\pi}(\omega) - p_{\pi}(\omega)\} = \dots = (1/2) \text{sinc}(\pi t/2) \cos(3\pi t/2)$$

unde s-a notat cu  $p_a(\omega)$  expresia  $\sigma(\omega+a) - \sigma(\omega-a)$ .  
 De aceea se poate scrie că :

$$2\psi_{0,n}(t) = (1/2) \cdot \text{sinc}[(\pi/2)(t-n)] \cdot \cos[(3\pi/2)(t-n)]$$

Se va demonstra că orice semnal din  $W_0^{b.l.}$  se poate exprima ca și o combinație liniară de elemente ale mulțimii  $\{2\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .  
 Se consideră în acest scop sistemul din figura 3.3.

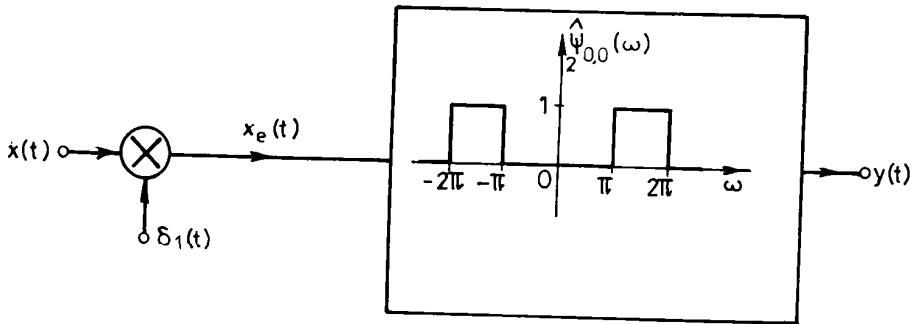


Figura 3.3 Sistem de prelucrare a semnalelor din  $W_0$ .

Se calculează spectrul semnalului  $x_e(t)$ :  
 $\hat{x}_e(\omega) = (1/2\pi) (\hat{x}(\omega) * 2\pi \cdot \delta_{2\pi}(\omega) ) = \sum_n \hat{x}(\omega - 2\pi n)$

În figura 3.4 se prezintă un exemplu de astfel de spectru.

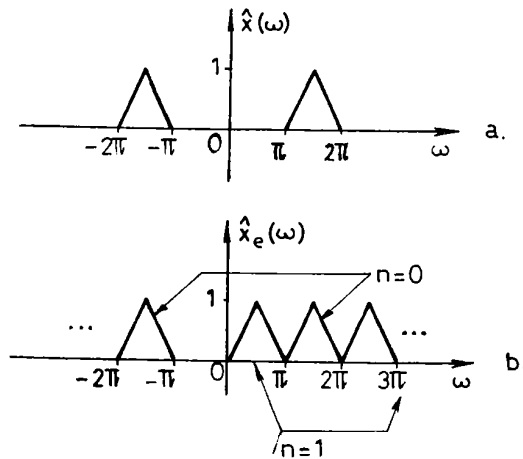


Figura 3.4. Un exemplu de aplicare a teoremei de eșantionare a semnalelor trece bandă, a) Spectrul semnalului de eșantionat ; b) Spectrul semnalului eșantionat.

Pe baza exemplului din figura 3.4. se constată că :

$$\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega)$$

pentru semnalul  $x(t)$  cu spectrul din figura 3.4.a).

Această proprietate este însă generală , pentru orice semnal din  $W_0$  (conform teoremei de eșantionare a semnalelor trece bandă ).

Deci pentru orice semnal  $x(t)$  din  $W_0$  :

$$y(t) = x(t)$$

Dar:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \cdot \delta_1(t) = \sum_n x(n) \cdot \delta(t-n) , \text{ iar } y(t) = \sum_n x(n) \cdot 2\psi_{0,0}(t-n) \\ &= \sum_n (1/2) x(n) \text{sinc}[(\pi/2)(t-n)] \cos[(3\pi/2)(t-n)] \end{aligned}$$

Deci oricare ar fi semnalul  $x(t)$  din  $W_0$ . acesta se poate descompune în forma:

$$x(t) = \sum_n (1/2) \cdot x(n) \cdot \text{sinc}[(\pi/2)(t-n)] \cdot \cos[(3\pi/2)(t-n)]$$

Cu alte cuvinte orice semnal  $x(t)$  din  $W_0$  se exprimă ca și o combinație liniară de elemente ale mulțimii  $\{2\Psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Rezultă că această mulțime este completă în  $W_0$ .

O22. Avînd în vedere că  $\{w_m^{p.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  este o descompunere ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$  rezultă că mulțimea:

$B_1 = \{2\Psi_{0,n}(t) = 2^{-m}/2 \text{sinc}[(\pi/2)(t-n)] \cos[(3\pi/2)(t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

Deci orice semnal de energie finită se poate descompune în seria

$$x(t) = \sum_m x_m(t)$$

unde cu  $x_m(t)$  s-a notat proiecția pe  $W_m$  a semnalului  $x(t)$ . Dar conform celor afirmate mai sus :

$$x_m(t) = \sum_n c_{m,n} \cdot 2\Psi_{m,n}(t)$$

cu :

$$c_{m,n} = \langle x(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle$$

Deoarece  $x_m(t)$  este proiecția lui  $x(t)$  pe  $W_m$ , ca o consecință a teoremei proiecției :

$$\langle x(t) - x_m(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle = 0$$

adică :

$$\langle x(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle = \langle x_m(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle$$

Deci :

$$c_{m,n} = \langle x(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle$$

S-a demonstrat în acest mod că :

$$x(t) = \sum_m \sum_n c_{m,n} \cdot 2\Psi_{m,n}(t)$$

În continuare se explicitază expresia coeficienților  $c_{m,n}$ :

$$c_{m,n} = (1/2\pi) \langle \hat{x}_m(\omega), 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \rangle$$

unde:

$$2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) = F\{2^{-m}/2 \Psi_{0,0}(2^{-m}t-n)\} = \dots = 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} 2\hat{\Psi}_{0,0}(\omega 2^m)$$

De aceea :

$$c_{m,n} = (1/2\pi) \langle \hat{x}_m(\omega), 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} 2\hat{\Psi}_{0,0}(\omega 2^m) \rangle = \dots = 2^m/2 x_m(n 2^m)$$

Deci orice semnal de energie finită se poate exprima în forma:

$$x(t) = \sum_m \sum_n \langle x(t), 2\Psi_{m,n}(t) \rangle 2\Psi_{m,n}(t)$$

sau:

$$x(t) = \sum_m \sum_n x_m(n 2^m) \text{sinc}[(\pi/2)(2^{-m}t-n)] \cos[(3\pi/2)(2^{-m}t-n)] \quad (3.6)$$

**3.1.4. Construcția unor baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  pornind de la analiza multirezoluție  $\{V_m^{d.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$**

În acest paragraf se vor construi cîteva noi undișoare mamă , generatoare de baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ , folosind o metodă sugerată în [Hig.'84]. Această metodă se bazează pe utilizarea proprietății de inversabilitate a transformării Fourier pe spațiul  $L^2(\mathbb{R})$  .

Notînd :

$V_m^{d.l.} = L^2[-\pi/(2^m), \pi/(2^m)] = \{ \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0, \text{ ptr. } |\omega| > \pi/(2^m) \}$  se poate afirma că spațiile  $V_m^{d.l.}$  și  $V_m^{b.l.}$  sînt echivalente din punct de vedere al transformării Fourier deoarece :  
oricare ar fi semnalul  $f(t)$  din  $V_m^{b.l.}$  "semnalul"  $\hat{f}(\omega)$  aparține mulțimii  $V_m^{d.l.}$ .

Fie  $H_m$  un spațiu Hilbert inclus în  $L^2(\mathbb{R})$  și  $\hat{H}_m$  spațiul Hilbert ;  $\hat{H}_m = \{ \hat{f}(\omega) \mid \hat{f}(\omega) = F\{f(t)\} \text{ cu } f(t) \in H_m \}$ . În continuare se demonstrează următoarea propoziție :

**P 12.** Dacă mulțimea  $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe  $H_m$  atunci mulțimea  $\{(1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală pe  $\hat{H}_m$ .

**D.** În primul rînd se va demonstra că mulțimea  $\{(1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală.

$$\langle (1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega), (1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_p(\omega) \rangle = [1/(2\pi)] \langle \hat{\phi}_n(\omega), \hat{\phi}_p(\omega) \rangle =$$

$$= \langle \phi_n(t), \phi_p(t) \rangle = \begin{cases} 1, & n=p \\ 0, & n \neq p \end{cases}$$

În continuare se demonstrează că mulțimea considerată este și completă , pe  $\hat{H}_m$ .

Fie  $\hat{f}(\omega)$  un element al subspațiului  $\hat{H}_m$ .  $F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = f(t)$  care este un semnal din subspațiul  $H_m$ .

Deoarece  $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este bază ortonormală în  $H_m$  , această mulțime este completă pe  $H_m$ . De aceea oricare ar fi " semnalul"  $\hat{f}(\omega)$  din  $\hat{H}_m$  se poate scrie:

$$f(t) = \sum_n \langle f(t), \phi_n(t) \rangle \phi_n(t)$$

Luînd în ambii membri ai acestei relații transformarea Fourier se obține pe baza relației lui Parseval:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_n \langle \hat{f}(\omega), (1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega) \rangle (1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega)$$



Deci orice semnal din  $\hat{H}_m$  se poate exprima ca și o combinație liniară de elemente ale mulțimii  $\{(1/\sqrt{2\pi})\hat{\phi}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Rezultă că această mulțime este completă în  $\hat{H}_m$ .

Enunțul propoziției P12 este demonstrat.

Reciproca acestei propoziții se poate demonstra ușor pe baza teoremei simetriei.

O23. Pentru  $H_m = V_m^{b.l.}$ , se notează  $\hat{H}_m = V_m^{d.l.}$ .

Bazei  $B_{W.K.S.} = \{2^{-m/2} \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din  $V_m^{b.l.}$  îi corespunde baza ortonormală  $\hat{B}_{W.K.S.} = \{(1/\sqrt{2\pi})2^{m/2}e^{-jn2^m}p_\pi(2^m\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din  $V_m^{d.l.}$ . În continuare se construiesc subspațiile  $w_m^{d.l.}$  complementele ortogonale ale subspațiilor  $V_m^{d.l.}$  în raport cu subspațiile  $V_{m-1}^{d.l.}$ .

Fie  $w_m^{d.l.} = \{ \hat{f}(\omega) \mid \hat{f}(\omega) = F\{f(t)\}(\omega), \text{ cu } f(t) \in w_m^{b.l.} \}$

În acest capitol s-a demonstrat că mulțimea  $\{2\Psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală în  $w_m^{b.l.}$ . De aceea mulțimea  $\{(1/\sqrt{2\pi})2\Psi_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a subspațiului  $w_m^{d.l.}$ .

În continuare se demonstrează o propoziție, care stă la baza metodei de construcție a bazelor ortonormale de undișoare din  $L^2(\mathbb{R})$  care constituie subiectul acestui paragraf.

**P13.** Fiind dată funcția reală  $\mu(\omega)$ , continuă pe porțiuni și mulțimea  $\hat{B}_g = \{\hat{\phi}_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  bază ortonormală a spațiului Hilbert  $\hat{H}_m$ , mulțimea  $\mu\hat{B}_g = \{\hat{\phi}_{m,n}(\omega)e^{j\mu(\omega)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este bază ortonormală a spațiului  $\hat{H}_m$ .

D. Demonstrăm că mulțimea  $\mu\hat{B}_g$  este ortonormală.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_{m,n}(\omega)e^{j\mu(\omega)}, \hat{\phi}_{m,p}(\omega)e^{j\mu(\omega)} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{m,n}(\omega)\hat{\phi}_{m,p}^*(\omega) d\omega = \\ &= \langle \hat{\phi}_{m,n}(\omega), \hat{\phi}_{m,p}(\omega) \rangle = \begin{cases} 1, & n=p \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{c.c.t.d.}) \end{aligned}$$

Se demonstrează că mulțimea  $\mu\hat{B}_g$  este completă.

Se consideră în acest scop elementul  $\hat{f}_m(\omega)$  din spațiul  $\hat{H}_m$ . Descompunerea sa în serie Fourier generalizată în baza  $\hat{B}_g$  este :

$$\hat{f}_m(\omega) = \sum_n \langle \hat{f}_m(\omega), \hat{\phi}_{m,n}(\omega) \rangle \hat{\phi}_{m,n}(\omega) \quad (3.7)$$

Descompunerea semnalului  $\hat{f}_m(\omega) \cdot e^{j\mu(\omega)}$  în aceeași bază este :

$$\hat{f}_m(\omega) e^{j\mu(\omega)} = \sum_n \langle \hat{f}_m(\omega) e^{j\mu(\omega)}, \hat{\phi}_{m,n}(\omega) \rangle \hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{-j\mu(\omega)} \quad (3.8)$$

sau:

$$\hat{f}_m(\omega) = \sum_n \langle \hat{f}_m(\omega) e^{j\mu(\omega)}, \hat{\phi}_{m,n}(\omega) \rangle \hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{-j\mu(\omega)} \quad (3.9)$$

Dar  $\langle \hat{f}_m(\omega) e^{j\mu(\omega)}, \hat{\phi}_{m,n}(\omega) \rangle = \langle \hat{f}_m(\omega), \hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{-j\mu(\omega)} \rangle$

De aceea relația (3.9) devine :

$$\hat{f}_m(\omega) = \sum_n \langle \hat{f}_m(\omega), \hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{-j\mu(\omega)} \rangle \hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{-j\mu(\omega)} \quad (3.10)$$

Această relație demonstrează că orice semnal din  $\hat{H}_m$  se poate exprima ca și o combinație liniară de elemente ale mulțimii  $\mu_{\hat{B}_g}$ . Deci această mulțime este completă în  $\hat{H}_m$ . S-a demonstrat că mulțimea  $\mu_{\hat{B}_g}$  este o bază ortonormală a spațiului  $\hat{H}_m$ .

O24. Dacă  $\hat{H}_m = v_m^d.l.$  și  $\hat{\phi}_{m,n}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-j\omega n 2^{m/2}} p_{\pi/(2^m)}(\omega)$  atunci bazei  $\hat{B}_g = \hat{B}_{W.K.S.}$  din spațiul  $v_m^d.l.$  (căreia îi corespunde baza  $\{2^{-m/2} \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  din  $v_m^d.l.$ ) îi corespunde baza  $\mu_{\hat{B}_g}$  din  $v_m^d.l.$  cu:

$$\mu_{\hat{B}_g} = g_{\hat{B}_{W.K.S.}} = \{(1/\sqrt{2\pi}) e^{-j\omega n 2^{m/2}} p_{\pi/(2^m)}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

O25. Dacă  $\hat{H}_m = w_m^d.l.$  și  $\hat{\phi}_{m,n}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) 2^{\hat{\psi}_{m,n}(\omega)}$  atunci bazei:

$$\hat{B}_g = \{(1/\sqrt{2\pi}) 2^{\hat{\psi}_{m,n}(\omega)}\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ din } w_m^d.l.$$

îi corespunde baza ortonormală :

$$\mu_{\hat{B}_g} = \{(1/\sqrt{2\pi}) 2^{\hat{\psi}_{m,n}(\omega)} e^{j\mu(\omega)}\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ a lui } w_m^d.l.$$

În continuare se determină condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcția  $\mu(\omega)$  astfel încât baza ortonormală  $g_{\hat{B}_{W.K.S.}}$  obținută prin procedeul expus mai sus să fie formată din undișoare .

Pentru ca elementele  $g_{\hat{\phi}_{m,n}(t)}$ , ale mulțimii  $g_{\hat{B}_{W.K.S.}}$  să fie undișoare e necesar ca :

$$g_{\hat{\phi}_{m,n}(t)} = 2^{-m/2} g_{\hat{\phi}_{0,0}(2^{-m}t-n)}$$

Această condiție se exprimă în domeniul frecvență astfel:

Pentru orice numere întregi  $m$  și  $n$  :

$$(1/\sqrt{2\pi}) g_{\hat{\phi}_{m,n}(\omega)} = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot 2^{m/2} \cdot e^{-j\omega n 2^m} \hat{\phi}_{0,0}(2^m \omega)$$

Avînd în vedere că orice element al mulțimii  $g_{\hat{B}_{W.K.S.}}$  este de forma :

$$(1/\sqrt{2\pi}) \hat{g}_{\phi_{m,n}}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} \cdot p_{\pi}(2^m \omega) e^{j\mu(\omega)}$$

pentru  $m=n=0$  se obține :

$$(1/\sqrt{2\pi}) \hat{g}_{\phi_{0,0}}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot p_{\pi}(\omega) \cdot e^{j\mu(\omega)}$$

Deci elementele mulțimii  $\hat{g}_{\hat{B}_W.K.S.}$  sînt undișoare dacă :

$$(1/\sqrt{2\pi}) 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} p_{\pi}(2^m \omega) e^{j\mu(\omega)} = 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} (1/\sqrt{2\pi}) \cdot p_{\pi}(2^m \omega) e^{j\mu(2^m \omega)}$$

adică dacă :

$$e^{j\mu(\omega)} = e^{j\mu(2^m \omega)} \quad , \quad \omega \in [-\pi/(2^m) , \pi/(2^m)] \quad (3.11)$$

În continuare se prezintă cîteva exemple de funcții  $\mu(\omega)$  care conduc la baze ortonormale de undișoare pe  $V_{\hat{B}_W.K.S.}^{\hat{B}_W.K.S.}$ . Cu ajutorul lor se pot construi bazele ortonormale corespunzătoare pe  $W_{\hat{B}_W.K.S.}^{\hat{B}_W.K.S.}$  și bazele ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ .

**E 2.** (Continuarea exemplului 2 din paragraful precedent)

$$\mu_2(\omega) = 0$$

$$2\hat{\phi}_{m,n}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) 2^m/2 e^{-j\omega n 2^m} p_{\pi/(2^m)}(\omega)$$

$$2\phi_{m,n}(t) = 2^{-m}/2 \cdot \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

$$2\hat{B}_W.K.S. = \hat{B}_W.K.S.$$

**E 3.** (original)

$$\mu_3(\omega) = (\pi/2)(\text{sgn}\omega - 1)$$

$$e^{j\mu_3(\omega)} = \text{sgn}(\omega)$$

$$3\hat{\phi}_{m,n}(\omega) = 2\hat{\phi}_{m,n}(\omega) \cdot \text{sgn}(\omega) = j[2\hat{\phi}_{m,n}(\omega) (-j\text{sgn}(\omega))] = jF\{H\{2\phi_{m,n}(t)\}\}$$

unde cu  $H$  s-a notat operatorul Hilbert.

Deci:

$$3\hat{\phi}_{m,n}(\omega) = F\{jH\{2\phi_{m,n}(t)\}\}$$

adică :

$$3\phi_{m,n}(t) = jH\{2\phi_{m,n}(t)\} = jH\{2^{-m}/2 \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]\} \quad (3.12)$$

$$3\hat{B}_W.K.S. = \{jF\{H\{2\phi_{m,n}(t)\}\}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$3B_W.K.S. = \{jH\{2\phi_{m,n}(t)\}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Oricare ar fi semnalul  $f_m$  din  $V_m^{b.l.}$  el se poate dezvolta în seria:

$$f_m(t) = \sum_n \langle f_m(t), {}_3\phi_{m,n}(t) \rangle {}_3\phi_{m,n}(t)$$

De aceea se obțin:  
undişoara mamă:

$${}_3\Psi_{0,0}(t) = \sum_n \langle {}_3\phi_{0,0}(t), {}_3\phi_{-1,n+1}(t) \rangle (-1)^n {}_3\phi_{-1,n}(t) \quad (3.13)$$

baza pe  $W_m^{b.l.}$ :

$$\{ {}_3\Psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} {}_3\Psi_{0,0}(2^{-m}t-n) \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

și baza pe  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\{ {}_3\Psi_{m,n}(t) \}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$$

Baza  ${}_3\hat{B}_{W.K.S.}$  a fost introdusă în [Hig.'84] și utilizată în [Naf., Isa.'Isa.' 91].

**E 4.** (original)

$$u_4(\omega) = (\pi/2)(\text{sgn}(\omega) + 1)$$

$$e^{j u_4(\omega)} = -\text{sgn}(\omega)$$

$${}_4\hat{B}_{W.K.S.} = \{ -jF\{H\{2\phi_{m,n}(t)\}\} \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$${}_4B_{W.K.S.} = \{ -jH\{2\phi_{m,n}(t)\}\} \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$${}_4\phi_{m,n}(t) = -jH\{2\phi_{m,n}(t)\} \quad (3.14)$$

$${}_4\Psi_{0,0}(t) = \sum_n \langle {}_4\phi_{0,0}(t), {}_4\phi_{-1,n+1}(t) \rangle (-1)^n {}_4\phi_{-1,n+1}(t) \quad (3.15)$$

De aceea se poate afirma că mulțimea  $\{ {}_4\Psi_{m,n}(t) \}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală de undişoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ .

**O 26.** Alte exemple pot fi obținute prin rezolvarea ecuației funcționale:

$\mu(\omega) = \mu(2^m \omega)$  pentru orice  $m$  număr întreg  
în intervalul  $[-\pi/(2^m), \pi/(2^m)]$ .

În continuare se determină condițiile pe care trebuie să le

îndeplinească funcția  $\mu(\omega)$  astfel încît baza ortonormală  $\mu_{B_g}^{\hat{}} = \{(1/\sqrt{2\pi}) \cdot 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) e^{j\mu(\omega)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  a lui  $W_m^{d.l.}$  să corespundă unei baze ortonormale de undișoare  $\mu_{B_g}$  a lui  $W_m^{p.l.}$ . Pentru ca elementele  $g\hat{\Psi}_{m,n}(t)$  ale mulțimii  $\mu_{B_g}^{\hat{}}$  să fie undișoare este necesar ca :

$$g\hat{\Psi}_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot g\hat{\Psi}_{0,0}(2^{-m}t - n) \quad (3.16)$$

oricare ar fi numerele întregi  $m$  și  $n$ . Această condiție se exprimă în domeniul frecvență astfel: Pentru orice întregi  $m$  și  $n$ :

$$g\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) = 2^{m/2} e^{-j\omega n 2^m} g\hat{\Psi}_{0,0}(\omega 2^m) \quad (3.17)$$

Condiția revine , avînd în vedere forma elementelor mulțimii  $\mu_{B_g}^{\hat{}}$  la:

$$2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) e^{j\mu(\omega)} = 2^{m/2} \cdot e^{-j\omega n 2^m} 2\hat{\Psi}_{0,0}(2^m\omega) e^{j\mu(2^m\omega)} \quad (3.18)$$

Dar mulțimea  $\{2\hat{\Psi}_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală de undișoare pe  $W_m^{p.l.}$ . De aceea funcțiile  $2\hat{\Psi}_{m,n}(t)$  îndeplinesc condiția (3.16). Din acest motiv relația (3.18) se mai scrie :

$$2^{m/2} \cdot e^{-j\omega n 2^m} 2\hat{\Psi}_{0,0}(2^m\omega) e^{j\mu(\omega)} = 2^{m/2} \cdot e^{-j\omega n 2^m} 2\hat{\Psi}_{0,0}(2^m\omega) e^{j\mu(2^m\omega)}$$

Deci funcțiile  $\mu(\omega)$  care conduc la baze ortonormale de undișoare  $\mu_{B_g}$  pe  $W_m^{p.l.}$  trebuie să îndeplinească condiția :

$$e^{j\mu(\omega)} = e^{j\mu(2^m\omega)} \quad \text{oricare ar fi} \\ \omega \in [-2\pi/(2^m), -\pi/(2^m)] \cup [\pi/(2^m), 2\pi/(2^m)] \quad (3.19)$$

În continuare se prezintă cîteva exemple de funcții  $\mu(\omega)$  care conduc la baze ortonormale de undișoare pe  $W_m^{p.l.}$ . Cu ajutorul lor se pot construi noi baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ .

#### E 5.

$$\mu_5(\omega) = \mu_2(\omega) = 0$$

$$e^{j\mu_5(\omega)} = 1$$

$$5\hat{\Psi}_{m,n}(t) = 2\hat{\Psi}_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \text{sinc}[(\pi/2)(2^{-m}t - n)] \cos[(3\pi/2)(2^{-m}t - n)]$$

$$\mu_{5B_g} = \{2\hat{\Psi}_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \bullet$$

Conform observației O22 , mulțimea  $\{2\Psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  , orice semnal de energie finită putîndu-se dezvolta în serie Fourier generalizată în această bază conform relației (3.6).

**E 6.** (original)

$$\mu_6(\omega) = \mu_4(\omega) = (\pi/2) (\text{sgn}\omega + 1)$$

$$e^{j\mu_6(\omega)} = -\text{sgn}(\omega).$$

$$\mu_6 \hat{B}_g = \{(1/\sqrt{2\pi}) 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) (-\text{sgn}\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{(-j/\sqrt{2\pi}) 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) (-j\text{sgn}\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{Dar } (-j/\sqrt{2\pi}) [(-j\text{sgn}\omega) 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega)] = (-j/\sqrt{2\pi}) F\{H\{2\Psi_{m,n}(t)\}\} = (1/\sqrt{2\pi}) F\{-jH\{2\Psi_{m,n}(t)\}\}$$

Deci:

$$\mu_6 \hat{B}_g = \{(1/\sqrt{2\pi}) F\{-jH\{2\Psi_{m,n}(t)\}\}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

și deci:

$$\mu_6 B_g = \{-jH\{2\Psi_{m,n}(t)\}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

De aceea mulțimea  $\{-jH\{2\Psi_{m,n}(t)\}\}_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dar :

$$H\{2\Psi_{m,n}(t)\} = 2^{-m/2} \text{sinc}[(\pi/2)(2^{-m}t-n)] \cdot \sin[(3\pi/2)(2^{-m}t-n)]$$

De aceea se poate afirma că mulțimea :

$B_2 = \{-j2^{-m/2} \text{sinc}[(\pi/2)(2^{-m}t-n)] \sin[(3\pi/2)(2^{-m}t-n)]\}_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

Orice semnal de energie finită se poate exprima deci în forma:

$$x(t) = \sum_m \sum_n \langle x(t), -jH\{2\Psi_{m,n}(t)\} \rangle (-jH\{2\Psi_{m,n}(t)\}) \quad (3.21)$$

Dar:

$$\begin{aligned} \langle x(t), -jH\{2\Psi_{m,n}(t)\} \rangle &= (1/2\pi) \langle \hat{x}(\omega), -j(-j\text{sgn}\omega) 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \rangle = \\ &= (1/2\pi) \langle \hat{x}(\omega), e^{j\mu_6(\omega)} 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \rangle \end{aligned}$$

adică:

$$\begin{aligned} \langle x(t), -jH\{2\Psi_{m,n}(t)\} \rangle &= (1/2\pi) \langle \hat{x}(\omega) e^{-j\mu_6(\omega)}, 2\hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \rangle = \\ &= \langle -jH\{x(t)\}, 2\Psi_{m,n}(t) \rangle \end{aligned}$$

De aceea relația (3.21) se mai scrie în forma:

$$x(t) = -j \sum_m \sum_n \langle -jH\{x(t)\}, 2\Psi_{m,n}(t) \rangle H\{2\Psi_{m,n}(t)\}$$

sau ținînd seama de liniaritatea transformării Hilbert :

$$x(t) = -jH\left\{ \sum_m \sum_n \langle -jH\{x(t)\}, 2\Psi_{m,n}(t) \rangle 2\Psi_{m,n}(t) \right\} \quad (3.22)$$

Deci dezvoltarea semnalului  $x(t)$  în baza  $B_2$  este echivalentă cu calculul transformării Hilbert a dezvoltării semnalului  $-jH\{x(t)\}$  în baza  $B_1$ .

O 27. Exemplul 6 a fost construit prin analogie cu exemplul 4. Se poate construi cu ușurință un exemplu prin analogie cu exemplul 3.

O28. În [Hig.'84] au fost date numeroase exemple de baze ortonormale de translatate pe  $W_0$ , care în această lucrare a fost numit spațiul Palley-Wiener. Toate aceste exemple pot fi folosite pentru construcția unor baze ortonormale de translatate pe  $L^2(\mathbb{R})$  pe baza proprietății P7. Ele nu sînt însă baze de undișoare deoarece nu satisfac condiția (3.19).

O 29. Rezultatele din acest paragraf constituie generalizări ale celor prezentate în [Naf., Isa., Isa.'91].

### 3.2. Eșantionarea semnalelor de energie finită și bandă nelimitată

În paragrafele anterioare au fost prezentate baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ , cele formate din elemente cu expresiile analitice cele mai compacte fiind  $B_1$  și  $B_2$ . Modul de construcție al acestora presupune utilizarea descompunerii ortogonale a spațiului  $L^2(\mathbb{R})$  (de exemplu în spațiile  $\{w_m^{b.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ ). Semnalul de energie finită se descompune într-o serie ai cărei termeni sînt proiecțiile sale pe subspațiile descompunerii. Fie-

care dintre proiecții se poate calcula ca și serie Fourier generalizată asociată uneia dintre bazele ortonormale din subspațiu. Eșantionarea semnalelor de bandă nelimitată iese din contextul teoremei W.K.S.. Descompunerile prezentate în capitolele anterioare pot fi privite ca și teoreme de eșantionare generalizate, deoarece se referă la semnale de energie finită care nu sînt neapărat de bandă limitată.

Aceste descompuneri sugerează modul în care poate fi prelucrat prin eșantionare un semnal de bandă nelimitată. Oricare dintre descompunerile prezentate are forma:

$$x(t) = \sum_m \sum_n c_{m,n} \cdot p\psi_{m,n}(t) = \sum_m x_m(t) \quad (3.23)$$

Semnalul de energie finită  $x(t)$  poate fi reconstruit din eșantioanele  $c_{m,n}$ . În continuare se prezintă structura unui sistem de prelucrare a semnalului  $x(t)$  în scopul obținerii eșantioanelor  $c_{m,n}$  respectiv modalitatea reconstrucției semnalului original pe baza acestora. Folosind relația (3.23) se constată că pentru obținerea eșantioanelor  $c_{m,n}$  e necesară determinarea proiecțiilor semnalului  $x(t)$  pe spațiile  $H_m$  (care realizează descompunerea ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$ ),  $x_m(t)$ . După aceea este necesară descompunerea unei proiecții în baza ortonormală a lui  $H_m$ ,  $\{p\psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . În continuare se demonstrează că determinarea proiecției  $x_m(t)$  a semnalului  $x(t)$  pe subspațiul  $H_m$  se poate realiza prin filtrare și că descompunerea lui  $x_m(t)$  în baza  $\{p\psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se poate face prin eșantionare ideală. Proiecția  $x_m(t)$  poate fi descompusă în baza  $\{p\psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  în serie Fourier generalizată:

$$x_m(t) = \sum_n \langle x_m(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle p\psi_{m,n}(t) \quad (3.24)$$

Avînd în vedere teorema proiecției:

$$\langle x(t) - x_m(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle = 0$$

sau:

$$\langle x(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle = \langle x_m(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle$$

și deci:

$$x_m(t) = \sum_n \langle x(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle p\psi_{m,n}(t) \quad (3.25)$$

Dar:



$$\langle x(t), p\psi_{m,n}^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,n}^*(\tau-t) d\tau$$

În același timp:

$$x(t) * p\psi_{m,n}^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,n}^*(\tau-t) d\tau$$

și deci:

$$x(t) * p\psi_{m,n}^*(-t) |_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,n}^*(\tau) d\tau = \langle x(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle$$

Admițînd că baza  $\{p\psi_{m,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este una de translatate, adică considerînd că este valabilă relația :

$$p\psi_{m,n}(t) = p\psi_{m,0}(t-n)$$

rezultă că :

$$x(t) * p\psi_{m,n}^*(-t) |_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,0}^*(\tau-n) d\tau = x(t) * p\psi_{m,0}^*(-t) |_{t=n} \quad (3.26)$$

Valorile  $\langle x_m(t), p\psi_{m,n}^*(t) \rangle$  sînt deci eșantioane ale semnalului  $x(t) * p\psi_{m,0}^*(-t)$  obținute prin eșantionarea acestuia în mod ideal, folosind un pas de eșantionare egal cu 1. Dacă acest semnal eșantionat este filtrat apoi cu sistemul cu răspuns la impuls  $p\psi_{m,n}(t)$  atunci se obține semnalul :

$$\sum_n \langle x_m(t), p\psi_{m,n} \rangle \delta(t-n) * p\psi_{m,0}(t) = \dots = \sum_n \langle x_m(t), p\psi_{m,n}(t) \rangle p\psi_{m,n}(t)$$

adică tocmai semnalul  $x_m(t)$ .

Mai sus a fost descris sistemul care conduce la obținerea semnalului  $x_m(t)$  pornind de la semnalul  $x(t)$ . Acest sistem are schema bloc din figura 3.5.

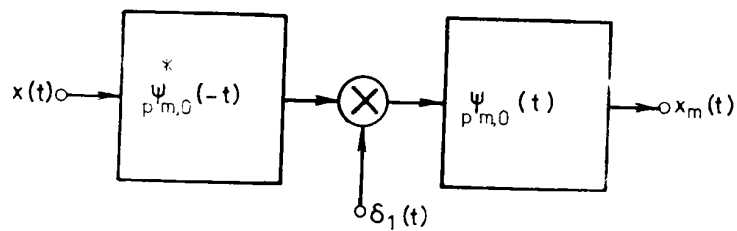


Figura 3.5. Schema bloc a sistemului de proiecție a semnalului  $x(t)$  pe subspațiul  $H_m$ .

De aceea sistemul de prelucrare al semnalului  $x(t)$  descris de relația (3.23) este cel cu schema bloc desenată în figura 3.6. Relația (3.23) și figura (3.6) sugerează următoarea teoremă de eșantionare generalizată .

**T1. Condiția necesară și suficientă ca un semnal de bandă nelimitată să poată fi reconstruit perfect din eșantioane este ca el să fie prelucrat cu un sistem de tipul celui din figura 3.6. Formula de reconstrucție este (3.23).**

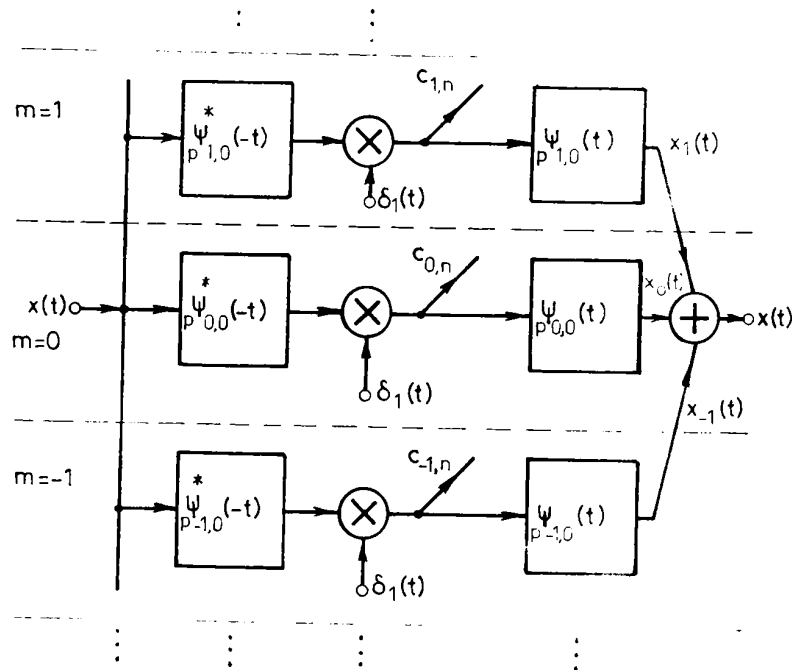


Figura 3.6. Sistem de eșantionare și reconstrucție a unui semnal de bandă nelimitată.

030. În cazul în care poate fi realizată o descompunere ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$  într-un număr finit de subspații, sistemul din figura 3.6. are un număr finit de canale ( $m$  are un număr finit de valori).

031. Și în cazul în care elementele bazei spațiului Hilbert  $H_m$  sînt undișoare aceasta este tot o bază de translatate. Într-adevăr:

$$p\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot p\psi_{0,0}(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} p\psi_{0,0}(2^{-m}(t - 2^m n)) = p\psi_{m,0}(t - 2^m n)$$

Diferența față de cazul presupus anterior este că de această dată constanta de translatate  $2^m n$  depinde și de  $m$ . De aceea în acest caz relația (3.26) devine:

$$x(t) * p\psi_{m,n}^*(-t) |_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,n}^*(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p\psi_{m,0}^*(\tau - 2^m n) d\tau = x(t) * p\psi_{m,n}^*(-t) |_{t=2^m n}.$$

În acest caz schema bloc a sistemului din figura 3.6. poate fi redesenată ca în figura 3.7.

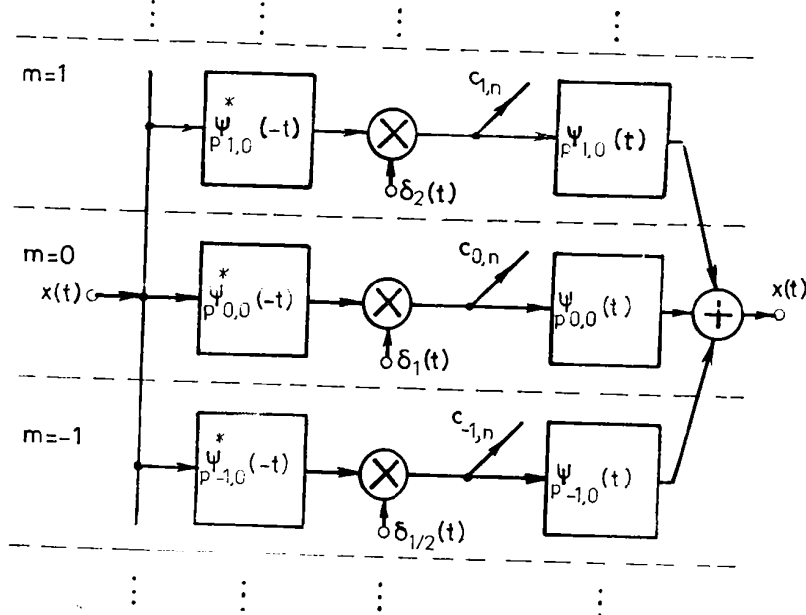


Figura 3.7. Schema bloc a unui sistem de eșantionare și reconstrucție perfectă a unui semnal de energie finită folosind undișoare.

032. În [Isa.'92] sînt date exemple de sisteme de tipul celor prezentate în figurile 3.6. și 3.7. Pentru sistemul din figura 3.7. au folosite undișoarele  $2\psi_{m,n}(t)$ .

033. Șirul de circuite de eșantionare separă figurile 3.6. și 3.7. în sisteme de intrare alcătuite din circuite cu răspunsul la impuls  $p\psi_{m,n}^*(-t)$ , numite prefiltre și sisteme de ieșire alcătuite din circuite cu răspunsul la impuls  $p\psi_{m,n}^*(t)$  numite postfiltre. Mulțimea prefiltrelor se mai numește și bancă de prefiltre iar mulțimea postfiltrelor bancă de postfiltre.

034. În figura 3.8. se prezintă distribuția răspunsurilor în frecvență ale pre și postfiltrelor din exemplul amintit în 032, avînd în vedere că  $F\{2\psi_{m,0}^*(-t)\} = 2\hat{\psi}_{m,0}(\omega)$ .

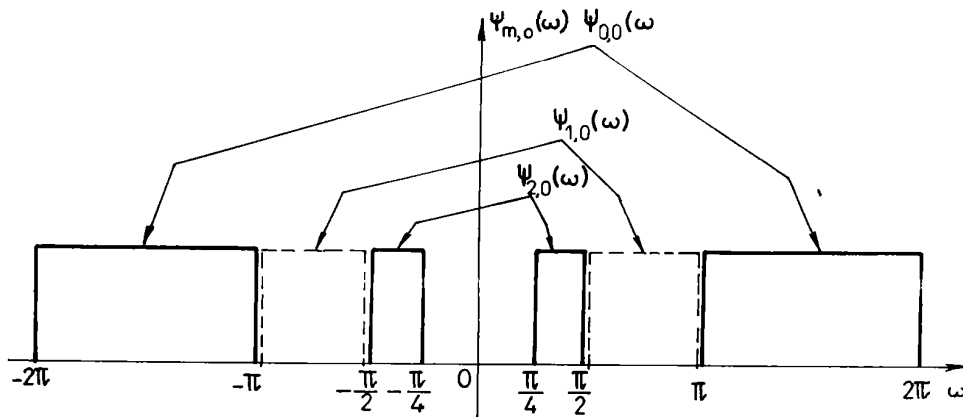


Figura 3.8. Distribuția răspunsurilor în frecvență ale prefiltrelor și postfiltrelor din figura 3.7. pentru cazul în care se folosește undișoara mamă  $2\hat{\Psi}_{0,0}(\omega)$ .  
 Se observă că prefiltrele realizează o codare în subbenzi a semnalului de prelucrat. De asemenea se constată că pentru un semnal de bandă limitată de tip trece bandă teorema T1 se particularizează la teorema de eșantionare a semnalelor trece bandă având în vedere că suma din membrul drept al relației (3.23) se reduce la un singur termen, acela corespunzător indicelui  $m_0$  pentru care semnalul de eșantionat este inclus în  $W_{m_0}$ . În această situație schema din figura 3.7. se reduce la un singur canal, acela corespunzător lui  $m_0$ . Se poate observa că și în acest caz este verificată teorema eșantionării ca și un caz particular al teoremei T1.

**O35.** Expresia coeficienților  $c_{m,n}$  din relația (3.23) este, ținând seama de (3.24) și (3.25) :

$$c_{m,n} = \langle x(t), p\hat{\Psi}_{m,n}(t) \rangle \quad \forall m \in Z \text{ și } \forall n \in Z \quad (3.27)$$

Dacă  $p\hat{\Psi}_{m,n}(t)$  sînt undișoare atunci se constată că:

$$c_{m,n} = CW_{T_X}(2^m n)$$

Deci sistemul din figura 3.7. poate fi folosit, de exemplu, pentru determinarea eșantioanelor transformării undișoare continue asociate undișoarei mamă  $\psi_{0,0}(t) = \text{sinc}[(\pi/2)t] \cos[(3\pi/2)t]$ . În general  $c_{m,n}$  pot fi eșantioane ale oricărei reprezentări timp-frecvență a semnalului de energie finită  $x(t)$ , care se exprimă printr-un produs scalar. Un alt exemplu (decît cel al transformării undișoare în timp continuu) de astfel de reprezentare este cea de tip transformare Fourier scurtă cu fereastră temporală dreptunghiulară.

036. Și analiza multirezoluție  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  poate fi utilizată în aproximarea semnalelor de bandă limitată care folosește sisteme de eșantionare, avînd în vedere că  $L^2(\mathbb{R}) = V_{-\infty}$ . Considerînd semnalul  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  și notînd cu  $P_m f$  proiecția sa pe  $V_m$  este adevărată relația :

$$f = \lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f$$

De aceea  $f$  poate fi aproximat prin  $P_m f$ , aproximarea fiind cu atît mai bună cu cît  $m$  este mai mic. Dacă  $\{\phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe  $V_m$  atunci :

$$P_m f = \sum_n c_{m,n} \phi_{m,n}$$

În figura 3.9. este prezentat un sistem de aproximare a semnalului  $f \in L^2(\mathbb{R})$  prin analiză multirezoluție.

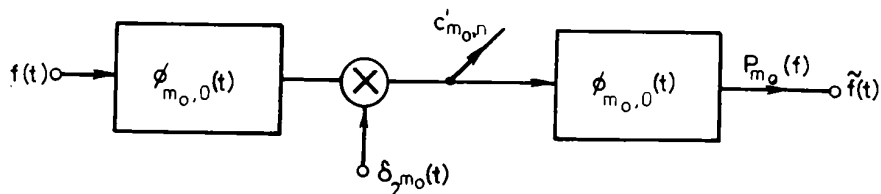


Figura 3.9. Aproximarea lui  $f(t)$  prin analiză multirezoluție.

Prin selectarea ieșirii canalului  $m$  cu ajutorul comutatorului  $K$  se obține aproximarea semnalului  $f(t)$  prin semnalul :

$$f(t) = P_m f$$

De asemenea se obțin coeficienții  $c_{m,n}^i$ .

Ieșirea canalului  $m$  din figura 3.9. ( $P_m f$ , proiecția lui  $f$  pe  $V_m$ ) reprezintă aproximarea cu rezoluția  $m$  a semnalului  $f(t)$ .

Având în vedere că prin intermediul comutatorului  $K$  poate fi selectată ieșirea oricărui canal rezultă că sistemul prezentat realizează o analiză multirezoluție.

Conform [Dau.'88] cunoscând coeficienții  $c_{m_0,n}^i$  ai lui  $P_{m_0} f$  pot fi determinați pe baza algoritmului lui Mallat coeficienții  $c_{m,n}^i$  ai oricărei proiecții  $P_m f$  cu  $m > m_0$ . De aceea pentru obținerea semnalului  $f(t)$  din figura 3.9. nu este necesară utilizarea unui număr infinit de canale fiind suficientă structura din figura 3.10.

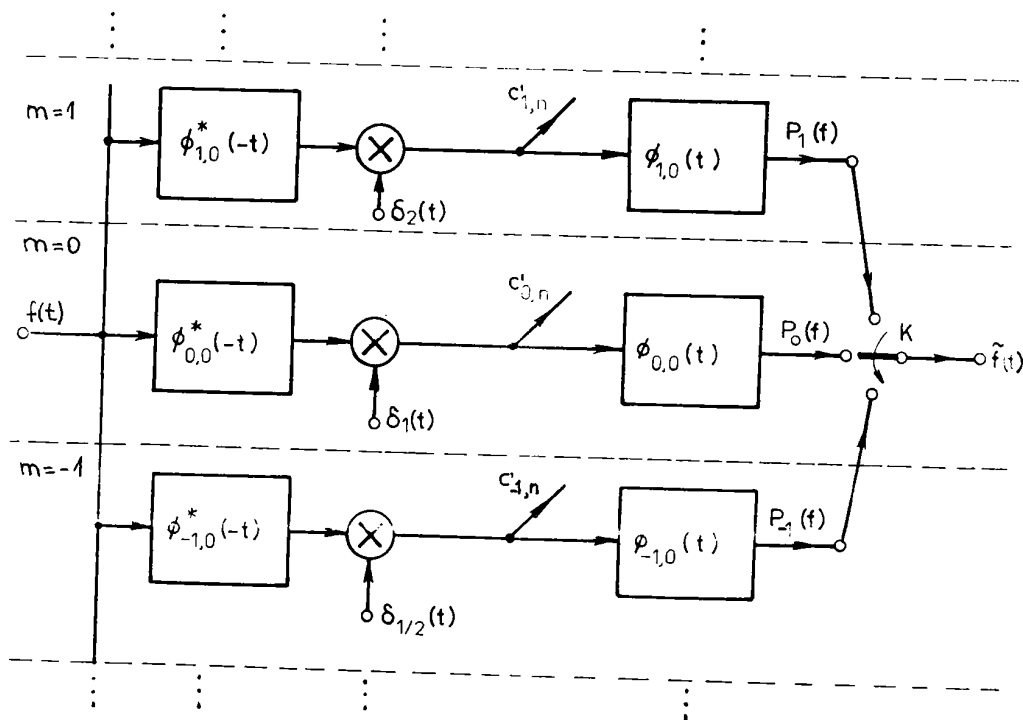


Figura 3.10. Schema bloc a unui sistem care permite aproximarea semnalelor prin analiză multirezoluție, pe baza algoritmului lui Mallat.

Folosind algoritmul lui Mallat pornind de la coeficienții  $c_{m_0,n}$ , pot fi obținuți coeficienții  $c_{m,n}$  pentru orice valoare a lui  $m$  superioară lui  $m_0$ . Deci pornind de la  $f(t)$  se obțin aproximările  $P_m f$  ale acestuia pentru  $m > m_0$ , urmînd ca în funcție de rezoluția necesară, avută în vedere în aplicația considerată, să se aleagă aproximarea necesară. Folosind sistemul din figura 3.10 este deci foarte ușor să se implementeze o tehnică de aproximare adaptivă, fiind necesară doar adăugarea la acest sistem a unui bloc de calcul al coeficienților  $c_{m,n}$  pe baza coeficienților  $c_{m_0,n}$  și a unui sistem de apreciere a calității aproximării (care să fixeze valoarea momentană a rezoluției necesare).

O37. Sistemele de tipul celor prezentate în figurile 3.6, 3.7, și 3.10 se pot utiliza la eșantionarea adaptivă a semnalelor așa cum se va vedea în capitolul următor.

### 3.3. Concluzii

În acest capitol au fost prezentate rezultate originale din domeniul analizei semnalelor de energie finită. Au fost evidențiate două căi de aproximare a semnalelor de energie finită cu ajutorul unor sisteme de eșantionare, analiza multirezoluție și descompunerea ortogonală. A fost de asemenea enunțată o teoremă care generalizează teorema W.K.S.

Au fost sugerate căile de implementare a unor tehnici de aproximare adaptivă a semnalelor de energie finită precum și a unor tehnici de eșantionare adaptivă.

A fost evidențiat rolul central al spațiilor semnalelor de bandă limitată  $V_0^{b.l.}$  și  $W_0^{b.l.}$  în studiul semnalelor din  $L^2(\mathbb{R})$ .

Au fost date cîteva noi exemple de baze ortonormale ale spațiului  $L^2(\mathbb{R})$  formate din undișoare.

Principalele contribuții originale prezentate în acest capitol sînt formulate în observațiile făcute în fiecare paragraf. Toate propozițiile enunțate, cu excepția propoziției P10 sînt originale.

Prima observație remarcabilă este O6, care simplifică cerințele definiției analizei multirezoluție. Exemplul de analiză multirezoluție E2 este original. Observația O17 originală și ea, este foarte importantă, ea stă la baza analizei erorii de aliere în [But.'83] sau [Isa.'92.2]. Sistemul de eșantionare adaptivă sugerat de această observație este cel care stă la baza construcției circuitului de eșantionare adaptivă folosit în înregistratorul de forme de undă, HP-5183 A care va fi descris în capitolul următor.

În studiul descompunerii ortogonale a lui  $L^2(\mathbb{R})$ , un loc central



il ocupă propoziția P7 care este de asemenea o propoziție originală . În exemplul 2 din paragraful 3.1.3. se dă un prim exemplu original de bază ortonormală de undișoare a lui  $L^2(\mathbb{R})$  ,  $\{\psi_{m,n}(t)\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ .

Trebuie remarcată și demonstrația afirmației din [Wor.,Opp.'92] că mulțimea  $B_1$  este o bază ortonormală de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ . Propozițiile P12 și P13 sînt originale reprezentînd generalizări ale unor propoziții formulate în [Hig.'84].

Observațiile O23, O24 și O25 dau exemple de baze ortonormale pe spațiile  $V_m^{b.l.}$ ,  $V_m^{d.l.}$ ,  $W_m^{b.l.}$  și  $W_m^{d.l.}$ . Unele dintre acestea au fost utilizate în [Naf.,Isa.,Isa.'91] în scopul elaborării unor generalizări ale teoremei W.K.S. și celelalte pot servi unui astfel de scop.

Exemplele 3 și 4 din paragraful 3.1.4. sînt originale și conduc la noi baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ . Condiția (3.11) de construcție a bazelor de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  este originală. Și relația (3.19) este originală .De asemenea exemplul E6 din paragraful 3.1.4. este original.

Observația O.28 este foarte importantă deoarece deschide calea construcției unui mare număr de noi baze de translatate pe  $L^2(\mathbb{R})$ .

Teorema T1 , principalul rezultat al acestui capitol este originală. Enunțul acestei teoreme este general , existînd un număr mare de particularizări remarcabile.

Sistemele din figurile 3.6 și 3.7 constituie noi forme de sisteme de identitate destinate prelucrării semnalelor în timp continuu prin eșantionare. Ideea codării subbandă este foarte modernă fiind frecvent folosită în prezent în vederea artificială .

Observația O35 arată modul de utilizare a sistemelor descrise în figurile amintite mai sus , la calculul eșantioanelor unor reprezentări tridimensionale (de tipul celor prezentate în capitolul 2) ale semnalelor nestaționare . În viitor rezultatele acestui capitol pot fi extinse prin:

- construcția altor baze ortonormale de undișoare pe spațiile  $V_m^{b.l.}$  ,  $V_m^{d.l.}$ ,  $W_m^{b.l.}$  și  $W_m^{d.l.}$ .
- construcția altor baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  ,
- utilizarea observației O28 în scopul construcției altor baze de translatate pe  $L^2(\mathbb{R})$  ,
- studiul eșantionării reprezentărilor timp frecvență ,
- estimarea erorilor de aproximare a semnalelor de energie finită prin analiză multirezoluție respectiv prin descompunere ortogonală folosind un număr finit de proiecții și un număr finit de coeficienți  $c_{m,n}$ .

#### 4. Tehnici de eşantionare adaptivă utilizate în construcția unor aparate de măsurare numerice

##### 4.1. Introducere

Unul dintre blocurile care nu poate lipsi din structura unui aparat de măsurare numeric este sistemul de eşantionare. Dacă acest sistem este realizat în variantă adaptivă atunci performanțele aparatului de măsurare sînt superioare. În majoritatea aplicațiilor de eşantionare adaptivă se aleg în așa fel parametrii procesului de eşantionare ( frecvența de eşantionare , momentele de eşantionare ) încît să fie minimizată o anumită eroare , specifică acestui proces ( eroarea de jitter , eroarea de trunchiere sau cea de aliere). Valorile parametrilor procesului de eşantionare sînt modificate pe parcursul realizării sale în mod adaptiv în așa fel încît valorile momentane ale erorii să fie minimizate. În acest capitol se vor prezenta principalele erori de eşantionare precum și procedeele de eşantionare adaptivă care conduc la minimizarea lor. Sînt de asemenea date exemple de aparate de măsurare numerice care utilizează tehnicile de eşantionare descrise.

Operațiile de eşantionare a semnalelor și de reconstrucție din eşantioane sînt descrise matematic de teorema W.K.S.. Rezultatele acestei teoreme idealizează semnalele și sistemele folosite. Datorită acestor restricții , rezultatele practice aproximează doar modelul matematic. Principalele idealizări făcute de teorema W.K.S. sînt:

- semnalul prelucrat trebuie să fie de bandă limitată ;
- este vorba despre o eşantionare ideală;
- pentru realizarea reconstrucției este necesară utilizarea unui filtru trece jos ideal și un număr infinit de eşantioane.

Datorită acestor idealizări în practică apar următoarele tipuri de erori:

- eroarea de aliere ;
- eroarea de trunchiere;
- eroarea de jitter,

conform : [Jer.'77],[Opp.,Wil.'86],[Che.,All.'87] , [But.'83] , [Tip.'87] , [Pap.'66] , [Hig.'85] , [Tem.,Bar.'73] .

Eroarea de aliere apare la eşantionarea semnalelor de bandă nelimitată. În lucrarea de față se dă o deosebită importanță acestui tip de eroare . Eroarea de trunchiere apare atunci cînd pentru reconstrucție se folosește un număr finit de eşantioane.

Eroarea de jitter se manifestă ca urmare a variațiilor pasului de eșantionare.

Aceste erori pot fi studiate separat sau global. În continuare ele se vor studia separat.

#### 4.2. Eșantionarea adaptivă a semnalelor, cu minimizarea erorii de "jitter"

În acest paragraf se analizează eroarea de "jitter", se dau exemple referitoare la sursele acestei erori și se prezintă metode de compensare.

Modelul sistemului de eșantionare ideală și reconstrucție care ține seama de eroarea de jitter este prezentat în figura 4.1.

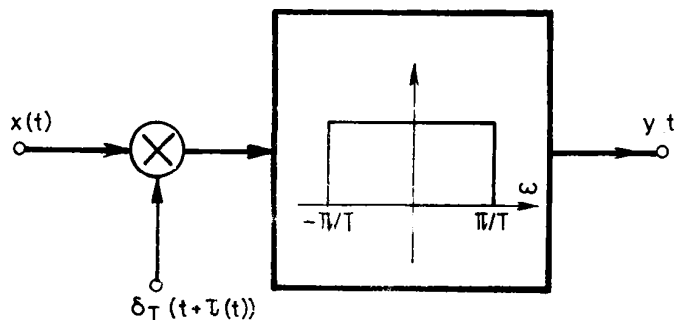


Figura 4.1. Modelul eșantionării ideale și reconstrucției care ține seama de eroarea de "jitter".

În cazul cel mai general variația pasului de eșantionare  $\tau(t)$  este descrisă de o variabilă aleatoare [Jer.'77], [Sou.'90], [Jen.'88]. În această situație și eșantioanele obținute sînt variabile aleatoare. Pe baza acestor rezultate a fost conceput osciloscopul cu eșantionare aleatoare. Cazul cel mai general este cel în care și semnalul de eșantionat este considerat aleator [De S.'91]. Revenind la modelul din figura 4.1 pentru a scădea eroarea cu care semnalul  $y(t)$  aproximează semnalul  $x(t)$  este necesară minimizarea funcției  $\tau(t)$  la momente de timp multipli de  $T$ . Poate fi concepută o

metodă de eșantionare a lui  $x(t)$  în care pe baza aprecierii erorii de aproximare a lui  $x(t)$  prin  $y(t)$  să se minimizeze  $\tau(t)$ . O astfel de metodă este una adaptivă cu minimizarea erorii de "jitter".

#### 4.2.1. Generarea erorii de "jitter" în cazul sistemelor de eșantionare multicanal

Ipoteza teoremei W.K.S. de limitare în bandă a spectrelor semnalelor de eșantionat face necesară utilizarea unei frecvențe de eșantionare cel puțin egale cu frecvența Nyquist. În cazul eșantionării semnalelor de bandă largă e necesară realizarea unor circuite de eșantionare de înaltă frecvență. În sistemele de achiziții de date aceste circuite sînt urmate de convertoare analog numerice rapide. De aceea prelucrarea numerică a semnalelor de bandă foarte largă este stînjinită de limitările tehnologice în construcția circuitelor de eșantionare precum și a convertoarelor analog numerice rapide. O posibilitate de scădere a frecvenței de eșantionare sub frecvența Nyquist (operație numită subeșantionare) este oferită de teorema lui Papoulis [Bro., Cab.'91 1], [Bro., Cab.'91 2], [Bro., Kar.'89]. Această teoremă utilizează sisteme de eșantionare multicanal. Ea poate fi formulată în legătură cu schema bloc din figura 4.2.

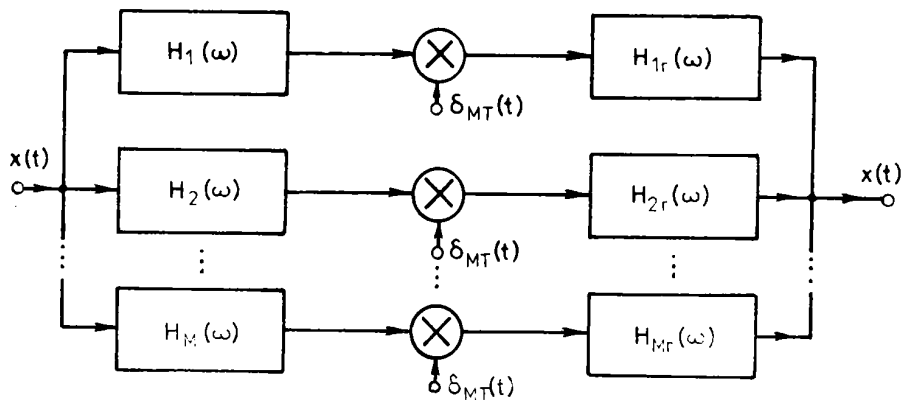


Figura 4.2. Modelul eșantionării ideale și reconstrucției perfecte a semnalului  $x(t)$  de bandă limitată  $\pi/T$  folosind o frecvență de eșantionare de  $2\pi/MT$ .

Un enunț posibil pentru această teoremă este :

Reconstrucția perfectă a semnalului  $x(t)$  de bandă limitată  $\pi/T$  poate fi realizată în urma eșantionării ideale cu o frecvență de  $M$  ori mai mică decît frecvența Nyquist folosind sistemul multicanal din figura 4.2, dacă matricea :

$$\begin{bmatrix} H_1(\omega) & H_2(\omega) & H_M(\omega) \\ H_1(\omega+c) & H_2(\omega+c) & H_M(\omega+c) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_1(\omega+(M-1)c) & H_2(\omega+(M-1)c) & H_M(\omega+(M-1)c) \end{bmatrix}$$

unde  $c=2\pi/MT$ , este nesingulară pentru majoritatea valorilor lui  $\omega$  din intervalul  $(-\pi/T, \pi/T)$ .

Răspunsurile în frecvență ale sistemelor de reconstrucție se determină din ecuația :

$$H^{-1}(\omega) = (1/MT) \cdot \begin{bmatrix} H_{1r}(\omega) & H_{1r}(\omega+c) & H_{1r}(\omega+(M-1)c) \\ H_{2r}(\omega) & H_{2r}(\omega+c) & H_{2r}(\omega+(M-1)c) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{Mr}(\omega) & H_{Mr}(\omega+c) & H_{Mr}(\omega+(M-1)c) \end{bmatrix}$$

Aplicarea acestei teoreme se face cu dificultate datorită faptului că răspunsurile la impuls  $h_k(t)$  și  $h_{kr}(t)$ ,  $k=1, M$  nu sînt unic determinate.

O modalitate de realizare a unui sistem de eșantionare de tipul celui din figura 4.2 este prezentată în figura 4.3.

Pe baza acestei figuri se constată faptul că imperfecțiunile liniilor de întîrziere prevăzute pot conduce la apariția "jitterului". Acesta afectează reconstrucția, la ieșirea sistemului nemaiobtînîndu-se semnalul  $x(t)$  ci doar o aproximare a acestuia. Utilizînd proprietățile convoluției sistemul din figura 4.3 poate fi redesenat ca și în figura 4.4.

Pe baza figurii 4.4 se constată că la ieșirea sumatorului se obține un semnal identic cu semnalul  $x(t)$  eșantionat ideal cu pasul  $T$ .

Deci structura blocului încadrat cu linie punctată în figura 4.4 este atrăgătoare pentru etajele de intrare ale aparatelor de măsurare numerice de bandă largă.

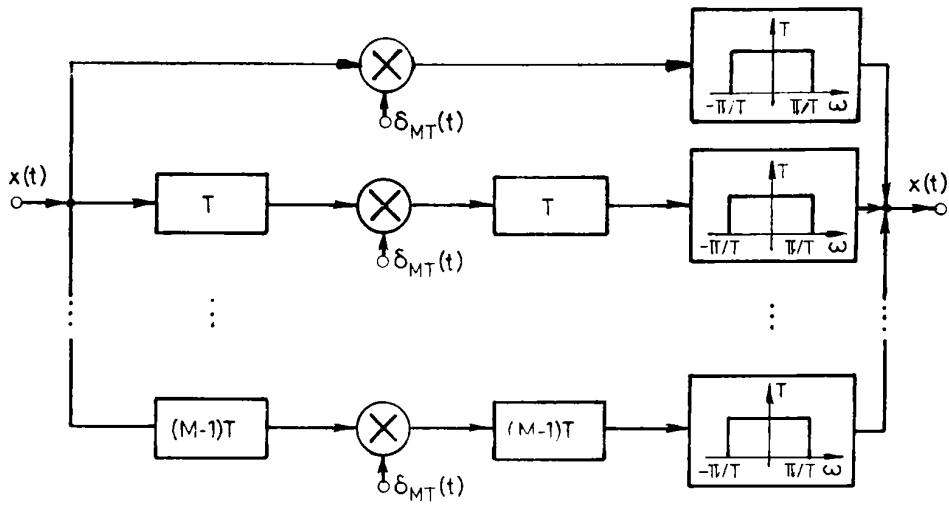


Figura 4.3. Schema unui sistem de eșantionare ideală și reconstrucție perfectă cu M canale.

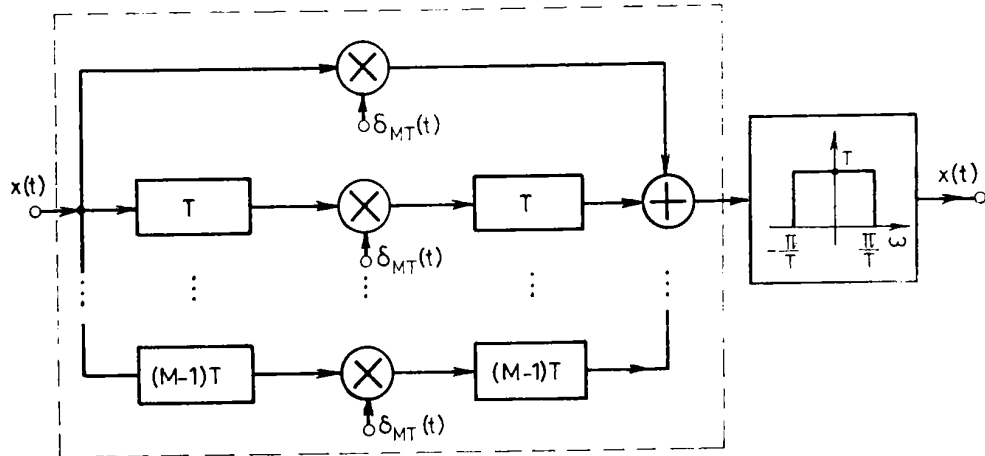


Figura 4.4. Schema echivalentă a unui sistem de eșantionare ideală și reconstrucție perfectă cu M canale.

Etajul de intrare din structura unui înregistrator de forme de undă de bandă largă care se concepe în prezent la firma Tektronix este prezentat în figura 4.5, [Jen.'90]. Avînd în vedere faptul că sisteme identice (circuite de eşantionare, linii de întârziere, convertoare analog numerice) de pe căi diferite din figura 4.5 introduc întârzieri diferite rezultă că semnalul  $x[n]$  poate fi privit ca fiind obţinut prin eşantionarea neuniformă a semnalului  $x(t)$  cu un pas  $T+\tau(t)$ . Momentele de eşantionare pot fi privite ca fiind obţinute prin deplasarea momentelor specifice eşantionării uniforme (de forma  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) cu intervale de eroare  $\tau(kT)$  (numite erori de decalaj temporal).

Prin măsurarea acestor durate ( $\tau(kT)$ ), eşantionarea poate fi corectată, adică transformată dintr-o eşantionare neuniformă într-una uniformă.

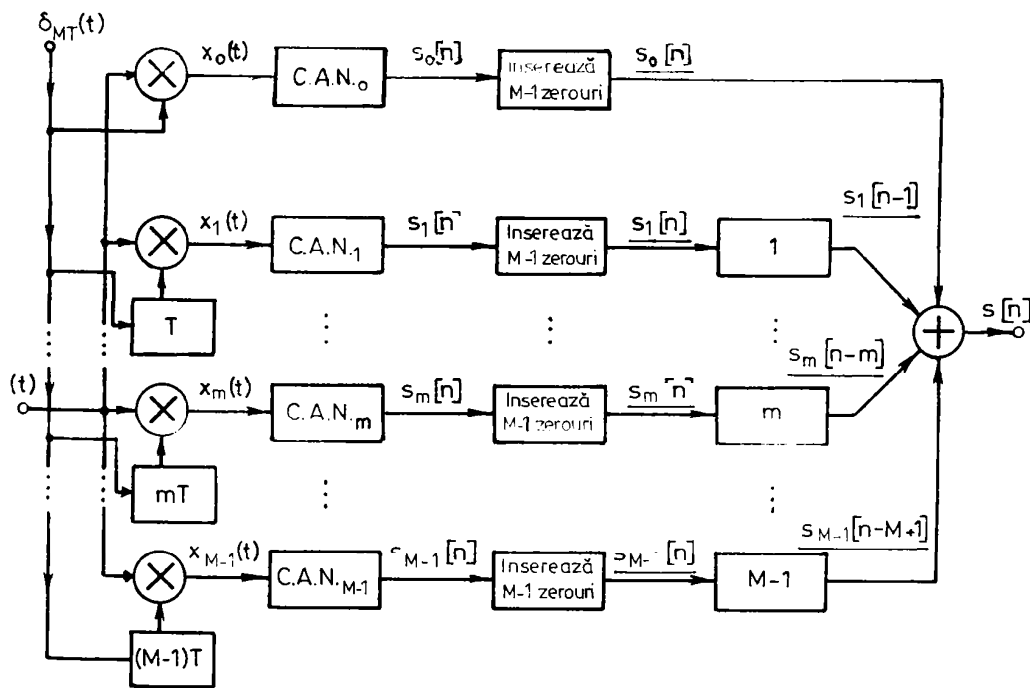


Figura 4.5. Schema echivalentă a sistemului încadrat cu linie punctată din figura 4.4.

În continuare se prezintă o modalitate de măsurare a erorilor de decalaj temporal bazată pe analiza spectrală a semnalului eșantionat neuniform.

Analizând variația pasului de eșantionare în cazul sistemului echivalent celui din figura 4.5 se constată faptul că semnalul  $\tau(kT)$   $k \in \mathbb{Z}$  este periodic cu perioada  $M$ .

#### 4.2.2. Analiza spectrală a semnalelor eșantionate neuniform cu variație periodică a pasului de eșantionare

În continuare se prezintă formula spectrului semnalului  $s[n]$   $S(\Omega)$  în ipoteza că momentele la care se realizează eșantionarea pe canalul  $m$ ,  $t_m$  sînt de forma:

$$t_m = mT + \tau_m + kMT = t_m' + kMT, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conform acestei ipoteze canalul  $m$  al schemei din figura 4.5 poate fi remodelat ca și în figura 4.6.

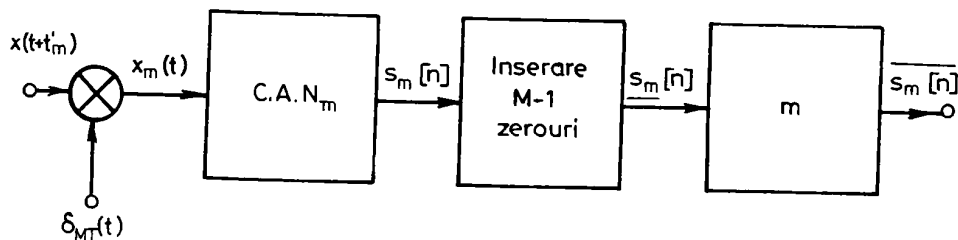


Figura 4.6. Schema bloc a canalului  $m$  din figura 4.5.

Se constată faptul că :

$$x_m(t) = x(t+t_m') \cdot \delta_{MT}(t)$$

și că:

$$\begin{aligned} X_m(\omega) &= (1/2\pi) F\{x(t+t_m')\} * F\{\delta_{MT}(t)\} = \\ &= (1/MT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega t_m'} (\omega - k2\pi/MT) X(\omega - k2\pi/MT) \end{aligned}$$

Dacă se consideră că se utilizează convertoare analog numerice ideale, în sensul că eroarea de cuantizare a



acestora este nulă , pe baza legăturii dintre spectrul semnalului numeric și spectrul semnalului continuu din a cărei eșantionare provine semnalul numeric se obține :

$$S_m(\Omega) = X_m(\omega) \quad | \quad \omega = \Omega/MT$$

Avînd în vedere faptul că prin inserarea de M-1 zerouri se obține secvența :

$$s_m[n] = \begin{cases} s_m[n/M] & ; n: M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

rezultă expresia spectrului :

$$S_m(\Omega) = S_m(M\Omega)$$

Legătura dintre semnalul  $s[n]$  și semnalele  $s_m[n]$  ,  $m=0, M-1$  din figura 4.5 este:

$$s[n] = \sum_{m=0}^{M-1} s_m[n-m]$$

De aceea:

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\Omega m} X_m(\omega) \quad | \quad \omega = \Omega/T \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\Omega m} (1/MT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\tau m' (\Omega/T - k2\pi/MT)} X(\Omega/T - k2\pi/MT) \end{aligned}$$

adică :

$$S(\Omega) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/M) \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\tau m' (\Omega/T - k2\pi/MT)} e^{-j\Omega m} X(\Omega/T - k2\pi/MT) \quad (4.1)$$

Conform celor afirmate în paragrafele anterioare semnalul  $s[n]$  poate fi privit ca fiind obținut prin eșantionarea uniformă afectată de jitter a semnalului  $x(t)$ , folosind pentru comanda eșantionării distribuția  $\delta_T(t+\tau(t))$  unde  $\tau(t)$  este o funcție periodică de perioadă  $MT$ .

Notînd cu  $S(\omega)$  spectrul semnalului obținut prin eșantionarea uniformă cu pasul  $1/T$  a semnalului  $x(t)$ , formula pentru acest spectru se obține din  $S(\Omega)$  prin înlocuirea lui  $\Omega$  cu  $\omega T$  [Pop, Naf., ș.a.' 86]. Deci:

$$S(\omega) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/M) \sum_{m=0}^{M-1} e^{j t_m' (\omega - 2k\pi/MT)} e^{-j\omega T m} X(\omega - 2k\pi/MT) \quad (4.1)$$

Ținînd seama de modul în care se realizează fizic eșantionarea se poate afirma că relația (4.1) exprimă spectrul semnalului  $x(t)$  eșantionat neuniform.

Dacă se consideră că decalajele temporale care afectează fiecare canal sînt fracțiuni ale pasului de eșantionare  $T$ , adică  $t_m = r_m T$ , atunci momentele  $t_m'$  se pot exprima cu relația :

$$t_m' = mT - r_m T$$

Se observă că momentele de eșantionare  $t_m$  se succed periodic cu perioada  $MT$  și sînt translatate față de pozițiile exacte specifice unei eșantionări uniforme (de forma  $mT$ ) cu valoarea  $r_m T$ .

Rezultă expresia spectrului semnalului obținut prin eșantionarea neuniformă a lui  $x(t)$  :

$$S(\omega) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/M) \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j r_m T (\omega - k2\pi/MT)} e^{-j m k 2\pi / M X(\omega - k2\pi/MT)} \quad (4.2)$$

Această relație exprimă spectrul semnalului  $x(t)$  eșantionat neuniform cu un pas de eșantionare cu variație periodică în timp. Formula evidențiază dependența spectrului  $S(\omega)$  de valorile decalajelor temporale  $r_m T$ ,  $m = \overline{0, M-1}$ .

De aici se naște ideea determinării valorilor decalajelor temporale pe baza calculului spectrului  $S(\omega)$  în cazul unor semnale  $x(t)$  particulare.

#### 4.2.3.0 metodă de măsurare a decalajelor temporale la sistemele de eșantionare multicanal

În figura 4.5 este prezentat un sistem de eșantionare cu  $M$  canale al cărui avantaj în raport cu sistemele tradiționale este faptul că poate utiliza frecvențe de eșantionare de  $M$  ori mai mici și convertoare analog numerice de  $M$  ori mai lente (cu un timp de conversie de  $M$  ori mai mare). Datorită unor neîmperechieri tehnologice inerente, momentele de eșantionare de pe fiecare canal sînt afectate de decalaje

temporale. Formula (4.2) exprimă spectrul semnalului în timp continuu echivalent semnalului  $s[n]$  în funcție de decalajele temporale  $r_m T$ ,  $m=0, M-1$ .

În continuare se presupune că expresia semnalului de intrare este:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Având în vedere că expresia spectrului acestui semnal este:

$$X(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

pe baza relației (4.2) se obține pentru  $S(\omega)$  expresia:

$$S(\omega) = (2\pi/MT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-jr_m T(\omega - k2\pi/MT)} e^{-jkm2\pi/M} \delta(\omega - \omega_0 - k2\pi/MT)$$

Cu notațiile :

$$f_s = 1/T$$

și:

$$A[k] = (1/M) \sum_{m=0}^{M-1} (e^{-jr_m 2\pi f_0 / f_s}) e^{-jkm2\pi/M} \quad (4.3)$$

expresia spectrului semnalului eșantionat neuniform devine:

$$S(\omega) = (2\pi/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] \delta(\omega - \omega_0 - k2\pi/MT) \quad (4.4)$$

Se poate constata prin verificare faptul că secvența  $A[k]$  este periodică de perioadă  $M$  și că  $S(\omega)$  este periodic de perioadă  $\omega_s = 2\pi/T$ .

Dă acea e clar că în fiecare perioadă a lui  $S(\omega)$  există  $M$  componente spectrale.

Distanța dintre două astfel de componente succesive este  $\omega_s/M$ . Pe baza relației (4.3) se constată faptul că pentru  $k=0, M-1$  secvența  $A[k]$  reprezintă transformata Fourier discretă a secvenței:

$$a[n] = (1/M) e^{-jr_n 2\pi f_0 / f_s}, n=0, M-1 \quad (4.5)$$

Considerînd cã expresia semnalului de intrare este :

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)$$

poate fi calculatã expresia spectrului  $S(\omega)$ , în acest caz pornind de la relațiile (4.3) și (4.4), pe baza relației lui Euler și a principiului superpoziției.

Componenta spectrului  $S(\omega)$  derivatã din semnalul  $(e^{-j\omega_0 t})/(2j)$  are expresia din relația (4.4) în care se înlocuiește  $\omega_0$  cu  $-\omega_0$  și se face împãrțirea la  $-2j$ .

Deci:

$$S(\omega) = (1/2j) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} (2\pi/T) \delta(\omega - \omega_0 - k(2\pi/MT)) e^{-j r_m 2\pi f_0 / f_s} e^{-j k m (2\pi/M)} - (2\pi/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} (1/M) \delta(\omega + \omega_0 - k(2\pi/MT)) e^{j r_m (2\pi f_0 / f_s)} \cdot e^{-j k m (2\pi/M)} \right] \quad (4.6)$$

Tinînd seama de identitatea :

$$e^{-j k m (2\pi/M)} = e^{j [M-k] m (2\pi/M)}$$

expresia (4.5) se mai scrie:

$$S(\omega) = (1/2j) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi/T) \sum_{m=0}^{M-1} (A[k] \delta(\omega - \omega_0 - k(2\pi/MT)) - A^*[M-k] \delta(\omega + \omega_0 - k(2\pi/MT))) \right]$$

Deci și pentru semnale de intrare sinusoidale se obține un spectru de intrare periodic de perioadã  $\omega_s$ , în fiecare perioadã gãsindu-se  $M$  perechi de componente spectrale de module :  $|A[k]|/2$  și  $|A[M-k]|/2$  situate simetric față de punctele  $k\omega_s/M$  la distanțe egale cu  $\omega_0$ ,  $k = 0, M-1$ .

Avînd în vedere cã  $A[k]$  este transformata Fourier discretã a secvenței  $a[n]$  și cã  $A^*[M-k]$  este transformata Fourier discretã a secvenței  $a[-n]$  rezultã cã transformata Fourier discretã a secvenței  $\sin[r_m(2\pi(f_0/f_s))]$ ,  $m=0, M-1$  este  $(A[k] - A^*[M-k])/(2j)$ ,  $k=0, M-1$ .

Dar primele  $M$  eșantioane ale secvenței  $s[n]$  pentru  $x(t)$  definit mai sus sînt:

$$\sin[\omega_0(t_m' - mT)] = -\sin[r_m(2\pi f_0 / f_s)]$$

Avînd în vedere cã secvența  $s[n]$  este periodicã de perioadã  $M$ , rezultã cã transformata Fourier discretã a restricției sale la

perioada principală este  $(-A[k]+A^*[M-k])/2j$ ,  $k=0, M-1$ .  
 Făcînd transformata Fourier discretă a secvenței  $s[n]$ , pentru  $n=0, M-1$  se determină  $16M$  eșantioane ale transformării Fourier discrete :  $(A^*[M-k]-A[k])/2j$ ,  $k=0, 16M-1$ .  
 Pe baza acestora se determină  $M$  valori ale lui  $A[k]$ ,  $k=0, M-1$ .  
 Cu ajutorul transformării Fourier discrete inverse se determină secvența  $a[n]$ ,  $n=0, M-1$ . Pe baza acestor eșantioane se calculează valorile  $(2\pi f_0/f_s) \cdot T_m$ ,  $m=0, M-1$ . Prin împărțire la  $2\pi f_0$  se obțin valorile  $r_m T$ ,  $m=0, M-1$  ale decalajelor temporale introduse de cele  $M$  canale.

#### 4.2.4. Metodă de eșantionare adaptivă cu minimizarea erorii de jitter în cazul sistemelor de măsurare multicanal

Pe baza metodei descrise mai sus pot fi deci determinate decalajele temporale introduse pe cele  $M$  canale din figura 4.5. Metoda presupune utilizarea semnalului de intrare descris de relația (4.5) și efectuarea unei transformări Fourier discrete urmată de o transformare Fourier discretă inversă.  
 În urma corecției, semnalul de intrare se înlocuiește cu semnalul care trebuie măsurat numeric. În urma achiziției eșantioanelor care trebuie prelucrate în prima etapă a măsurării, în timpul prelucrării numerice a acestora și al afișării rezultatului, la intrarea aparatului poate fi din nou adus semnalul de calibrare sinusoidal și reajustate liniile de întârziere comandate numeric, dacă este necesar.  
 Procesul descris mai sus constituie o metodă de eșantionare adaptivă cu minimizarea erorii de jitter.

#### 4.2.5. Etajul de intrare într-un analizor de forme de undă ultrarapid

După cum s-a specificat în paragraful 4.2.1. pentru realizarea unui analizor de forme de undă ultrarapid e necesară utilizarea eșantionării multicanal.  
 Datorită întârzierilor diferite introduse de elementele fiecărui canal (linii de întârziere, circuite de eșantionare, convertoare analog numerice) apar decalaje temporale între momentele de eșantionare ideale și cele la care are loc în realitate eșantionarea. Pentru compensarea acestora poate fi realizată o calibrare a etajului de intrare al analizorului care presupune măsurarea decalajelor temporale și scăderea lor cu ajutorul unor linii de întârziere comandate numeric. Metoda de măsurare a decalajelor temporale poate fi cea din paragraful 4.2.3. Structura etajului de intrare din cadrul unui analizor de forme de undă ultrarapid

este schițată în figura 4.7.

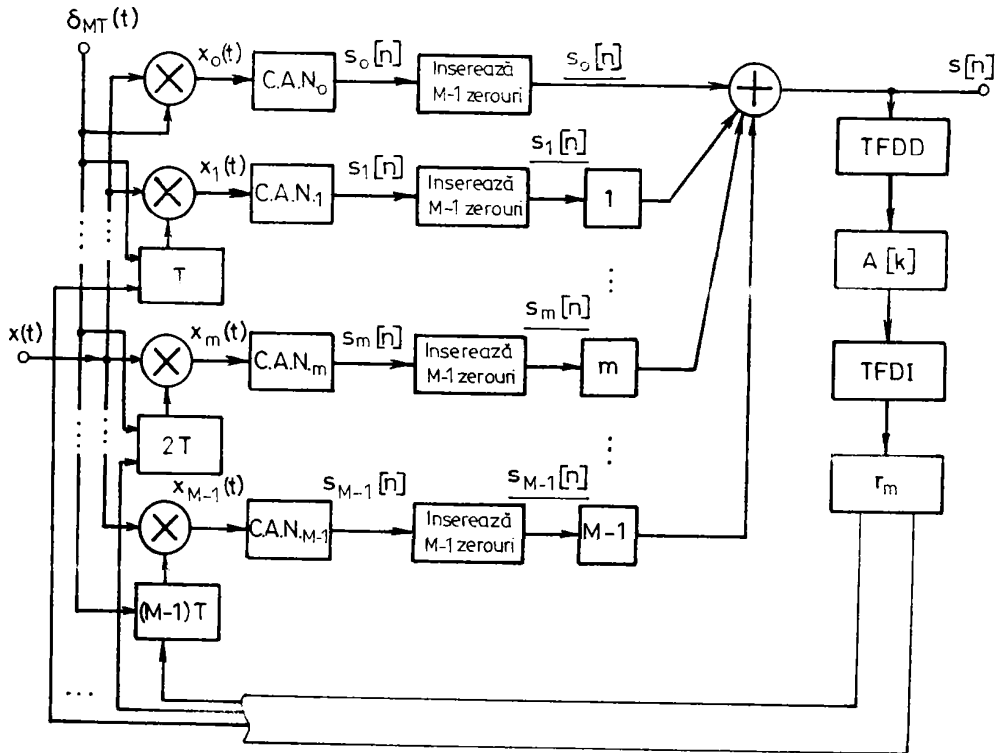


Figura 4.7. Schema bloc a etajului de intrare al unui analizor de forme de undă ultrarapid.

Funcționarea se realizează în două etape:

-etapa de calibrare : semnalul  $x(t)$  este descris de relația (4.5). Cele  $M$  linii de întârziere sînt necomandate , ele introducînd întârzieri egale cu multipli întregi de  $T$  cuprinși între 0 și  $M-1$ . Pe baza metodei descrise în 4.2.3. se măsoară decalajele temporale  $r_m T$  ,  $m=0, M-1$ . Se comandă liniile de întârziere numerice și se înlocuiește semnalul de calibrare cu

cel de analizat.

-etapa de măsurare : se efectuează măsurarea propriuzisă , efectul erorii de jitter fiind eliminat. Amănuntele de natură practică ( eficiența compensării, construcție) sînt discutate în [Jen.'90].

#### 4.3. Eșantionarea adaptivă a semnalelor cu minimizarea erorii de aliere

După cum s-a arătat în introducerea acestui capitol una dintre erorile sistematice care apare la reconstrucția semnalelor eșantionate ideal este eroarea de aliere . Acest tip de eroare este cel mai important în numeroase procedee de prelucrare numerică a semnalelor analogice. Orice semnal analogic practic este de durată limitată. Dar orice semnal de durată limitată este de bandă nelimitată. Rezultă că nici un semnal practic nu respectă ipoteza de limitare în bandă a teoremei W.K.S. Modelul fizic pentru teorema W.K.S. care face posibilă determinarea erorii de aliere este prezentat în figura 4.8.

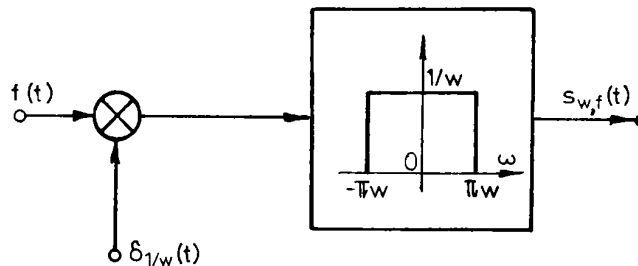


Figura 4.8. Modelul fizic al eșantionării ideale și reconstrucției semnalelor de bandă limitată.

Semnalul  $s_{w,f}(t)$  este o aproximare a semnalului  $f(t)$  a cărei calitate depinde de forma semnalului  $f(t)$  și de valoarea frecvenței de eșantionare  $w$ .

Eroarea de aliere notată  $e_a(t)$  se calculează cu relația:

$$e_a(t) = f(t) - s_{w,f}(t)$$

Se constată că și eroarea de aliere este un semnal în timp continuu care depinde de forma semnalului  $f(t)$  și de parametrul  $w$ . De aceea este mai comodă aprecierea acestei erori prin intermediul marginilor sale superioare. Determinării expresiilor acestor margini îi sînt dedicate numeroase articole. Principalele rezultate cunoscute precum și ordinea valorică a acestora sînt prezentate în [Isa.'92 3].

#### 4.3.1. Margini superioare ale erorii de aliere . Cazul semnalelor aperiodice

În [But.'83] este demonstrat că pentru semnale cu transformata Fourier în  $L^1$  aproximarea lui  $f(t)$  cu  $s_{w,f}(t)$  este cu atît mai bună cu cît  $w$  este mai mare. Deci are loc relația:

$$f(t) = \lim_{w \rightarrow \infty} s_{w,f}(t) \quad (4.7)$$

Aceeași relație este demonstrată în cazul semnalelor de energie finită în capitolul anterior.

Această relație arată că cea mai bună cale de scădere a erorii de aliere este creșterea frecvenței de eșantionare .

Notînd cu  $h(t)$  răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție din figura 4.8 se constată că :

$$s_{w,f}(t) = [f(t) \cdot \delta_{1/w}(t)] * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k/w) \text{sinc}[\pi(wt-k)]$$

Folosind relațiile de mai sus și proprietățile transformării Fourier se obține pentru eroarea de aliere expresia:

$$e_a(t) = (1/2\pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-jk2\pi wt}) \int_{(2k-1)\pi w}^{(2k+1)\pi w} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.8)$$

unde cu  $F(\omega)$  s-a notat transformata Fourier a lui  $f(t)$  .  
Folosind exprimarea polară a funcției  $F(\omega)$  și presupunînd că semnalul  $f(t)$  este real în [Isa.'92 3] este dată următoarea for-



ma echivalenta pentru modulul erorii de aliere :

$$|e_a(t)| = (2/\pi) \int_{(2k-1)\pi\omega}^{(2k+1)\pi\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi\omega t) |F(\omega)| |\sin(\phi_F(\omega) + \omega t - k\pi\omega t)| d\omega \quad (4.9)$$

De aici rezultă o primă margine superioară a erorii de aliere :

$$|e_a(t)| \leq (2/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi\omega}^{(2k+1)\pi\omega} |\sin(k\pi\omega t)| |F(\omega)| |\sin(\phi_F(\omega) + \omega t - k\pi\omega t)| d\omega = m_I(t) \quad (4.10)$$

În [Isa.'92 3] se demonstrează că această margine este inferioară tuturor celorlalte margini superioare ale erorii de aliere cunoscute deja și prezentate în tabelul 1. Demonstrația este unitară folosindu-se criteriile de majorare succesive.

Tipul marginii	Simbol	Expresie	Observații
Stickler	$m_S(t)$	$(2/\pi) \int_{\pi\omega}^{\infty} \sin(\theta(\omega)t/2) \cdot  F(\omega)  d\omega$	
Tiponut	$m_T(t)$	$(2/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \{  \sin[(k-1)\pi\omega t]  \cdot \cos(\pi\omega t) \cdot B_k^+ +  \sin(\pi\omega t)  \cdot B_k^- \cdot \cos[(k-1)\pi\omega t] \}$	$B_k = \int_{(2k-1)\pi\omega}^{(2k+1)\pi\omega}  F(\omega)  d\omega$
Weiss	$m_W$	$(1/2\pi) \int_{\pi\omega}^{\infty}  F(\omega)  d\omega$	
Brown	$m_B$	$(1/4\pi) \int_{ \omega  > \pi\omega}  F(\omega)  d\omega$	

Tabelul 1

Funcția  $\theta(\omega)$  este definită prin :

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi\omega \\ 2\omega[ (|\omega| - \pi\omega) / 2\pi\omega ] \operatorname{sgn}\omega, & |\omega| > \pi\omega \end{cases}$$

Conform [Isa.'92 3] este adevărată succesiunea de inegalități:

$$|e_a(t)| \leq m_T(t) \leq m_S(t) \leq m_T(t) \leq m_W = m_B$$

Pentru semnale  $f(t)$  cu transformata Fourier în  $L^1$  toate aceste margini sînt convergente.

Avînd în vedere relația (4.7) rezultă ca și cale de reducere a erorii de aliere creșterea frecvenței de eșantionare  $w$ .

Dar valoarea acestui parametru este limitată tehnologic.

Pe baza relației (4.8) se constată că modulul erorii de aliere scade dacă scad valorile modulului spectrului semnalului  $f(t)$  în afara benzii de frecvență  $[-\pi w, \pi w]$ .

Un astfel de rezultat poate fi obținut dacă semnalul, înainte de a fi eșantionat, suferă o prelucrare de tipul dilatare în timp.

O astfel de prelucrare poate fi realizată prin înregistrarea semnalului  $f(t)$  într-o memorie analogică (de exemplu pe o bandă magnetică) urmată de redarea sa folosind o altă turație decît la înregistrare. Scalarea în timp se obține dacă viteza de rotire a benzii magnetice la redare este diferită de viteza de rotire a benzii magnetice la înregistrare.

O metodă de acest tip este folosită la analizoarele de spectru numerice destinate semnalelor aperiodice [Ran.'88].

În cazul acestei metode are loc o schimbare de variabilă în domeniul frecvență, spectrul  $F(\omega)$  transformîndu-se în spectrul  $1/|a| \cdot F(\omega/a)$ . O altă metodă de evitare a erorii de aliere este eșantionarea în spectru.

#### 4.3.2. Cazul semnalelor periodice

Se consideră semnalul periodic  $f(t)$  cu dezvoltarea în serie Fourier :

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \cdot e^{j l (2\pi/T) t}$$

Expresia transformării sale Fourier este:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \delta(\omega - l 2\pi/T)$$

Relația permite analiza erorii de aliere pe baza relațiilor stabilite pentru semnale aperiodice. În continuare se presupune

că este respectată ipoteza de eşantionare coerentă:

$$T=N/w, \quad N=2p+1, \quad p \in N \quad (4.11)$$

Având în vedere că :

$$\int_{(2k-1)\pi w}^{(2k+1)\pi w} \delta(\omega - l \cdot 2\pi/T) d\omega = \begin{cases} 1, & (N/2)(2k-1)+1/2 \leq l \leq (N/2)(2k+1)-1/2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

şi folosind notațiile:

$$(N/2)(2k-1)+1/2=L_k$$

şi :

$$(N/2)(2k+1)-1/2=L_k'$$

rezultă că este valabilă următoarea relație:

$$\int_{(2k-1)\pi w}^{(2k+1)\pi w} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = (2\pi) \sum_{l=L_k}^{L_k'} c_l \cdot e^{jl(2\pi/T)t}$$

Expresia erorii de aliere în cazul semnalelor periodice devine pe baza relației (4.8) :

$$e_{ap}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-jk2\pi w t}) \sum_{l=L_k}^{L_k'} c_l e^{jl(2\pi/T)t} \quad (4.12)$$

Folosind exprimarea polară a coeficienților Fourier, expresia erorii de aliere pentru cazul eşantionării coerente a semnalelor periodice reale devine:

$$e_{ap}(t) = -4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi w t) \sum_{l=L_k}^{L_k'} |c_l| \sin(l \cdot 2\pi/T + \phi_{c_l} - k\pi w t) \quad (4.13)$$

În [Isa.'92 3] sînt determinate expresii pentru marginile superioare ale erorii de aliere în cazul eşantionării coerente a semnalelor periodice de tipul celor prezentate în tabelul 1. Aceste rezultate sînt rezumate în tabelul 2.

Tipul marginii	Expresia marginii	Observații
$m_{Ip}(t)$	$4 \sum_{k=1}^{\infty}  \sin(k\pi wt)  \sum_{l=L_k}^{L_k'}  c_l   \sin(1 \cdot 2\pi/T + \phi_{c_1} - k\pi wt) $	$B_{pk} = \sum_{l=L_k}^{L_k'}  c_l $
$m_{Sp}(t)$	$4 \sum_{k=1}^{\infty}  \sin(k\pi wt)  \sum_{l=L_k}^{L_k'}  c_l $	
$m_{Tp}(t)$	$2 \left[  \cos(\pi wt)  \sum_{k=2}^{\infty}  1 - e^{-2j(k-1)\pi wt}  \cdot B_{pk} +  \sin(\pi wt)  \cdot \sum_{k=1}^{\infty}  1 + e^{-2j(k-1)\pi wt}  B_{pk} \right]$	
$m_{Wp}$	$4 \cdot \sum_{l=L_1}^{\infty}  c_l $	
$m_{Bp}$	$2 \cdot \sum_{l= 1  \geq L_1}^{\infty}  c_l $	

Tabelul 2

În [Isa.'92 3] este demonstrată relația :

$$|e_{ap}(t)| \leq m_{Ip}(t) \leq m_{Sp}(t) \leq m_{Tp}(t) \leq m_{Wp} = m_{Bp}$$

Seriile pe care le reprezintă aceste margini sînt convergente dacã secvența formată de coeficienții seriei Fourier ai lui  $f(t)$  este de clasă  $l^1$ . Comparînd tabelele 1 și 2 se constată faptul că formulele din cazul semnalelor periodice sînt mai simple.

Unele dintre metodele de scãdere a erorii de aliere amintite în finalul paragrafului anterior sînt valabile și în cazul semnalelor periodice. Caracterul discret al spectrelor semnalelor periodice crează posibilitatea imaginării unor metode de eliminare a erorii de aliere specifice pentru acest tip de semnale. Aceste metode nu pot fi folosite în cazul semnalelor aperiodice. Cel mai cunoscut exemplu este principiul osciloscopului cu eșantionare [Opp., Wil. '85], [Nic.'85]. Eșantionarea este în acest caz

necoerentă , nefiind satisfăcută o relație de tipul relației (4.11). Un filtru de reconstrucție util în cazul eșantionării necoerente este filtrul transversal [Pop., Sto.'80]. Un astfel de sistem este descris în [Naf., Isa.'91].

#### 4.3.3. Eroarea medie pătratică de aliere

Problema reconstrucției semnalelor de bandă nelimitată eșantionate ideal poate fi privită ca și o problemă de aproximare a semnalului de bandă nelimitată considerat printr-un semnal de bandă limitată (deoarece în figura 4.8 filtrul de reconstrucție este un sistem de bandă limitată).

În continuare se presupune că semnalul  $f(t)$  este de energie finită ( $f(t) \in L^2$ ) și că pentru eșantionare se folosește frecvența  $w$ . Semnalul  $s_{w,f}(t)$  este de bandă limitată deci aparține mulțimii :

$$B_w^2 = \{s_{w,f}(t) \in L^2 \mid \mathcal{F}\{s_{w,f}(t)\} = 0 \text{ ptr. } |\omega| > \pi w\}$$

Dar  $B_w^2$  are o structură de spațiu Hilbert închis , subspațiu al lui  $L^2$  [Hig.'84]. Se poate așadar vorbi despre aproximarea semnalului  $f(t) \in L^2$  cu semnalul  $s_{w,f}(t) \in B_w^2$ .

Deoarece spațiile  $B_w^2$  și  $L^2$  respectă condițiile teoremei proiecției (Riesz) [Sta., Stă.'80], pe baza acesteia poate fi determinată cea mai bună aproximare de medie pătratică a lui  $f(t)$  cu elemente din  $B_w^2$ ,  $\hat{s}_{w,f}(t)$ .

Expresia lui  $\hat{s}_{w,f}(t)$  este obținută în [Isa.'89] pe baza dezvoltării în serie Fourier a acestui semnal în baza  $e$  a spațiului  $B_w^2$ , definită prin :

$$e = \{\phi_n(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi_n(t) \in B_w^2, n \in \mathbb{Z}\}$$

Această expresie este:

$$\hat{s}_{w,f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \phi_m(t)$$

unde :

$$b_m = \langle f(t), \phi_m(t) \rangle$$

Valoarea minimă a erorii medii pătratice de aproximare este:

$$\epsilon_{\min} = \|f(t) - \hat{s}_{w,f}(t)\|^2 = \|f(t)\|^2 - \|\hat{s}_{w,f}(t)\|^2$$

Deci valoarea minimă a erorii medii pătratice de aliere este egală cu diferența energiilor semnalelor de aproximat și aproximat.

Semnalul aproximat reprezintă proiecția pe  $B_w^2$  a semnalului de aproximat. Expresia proiecției nu este unică, ea depinzând de alegerea elementelor bazei e. Una dintre cele mai cunoscute baze ale spațiului  $B_w^2$  este cea formată cu elementele:

$$\phi_m(t) = \text{sinc}[\pi w(t-m)] \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

Seria Fourier în care se dezvoltă semnalul  $\hat{s}_{w,f}(t)$  folosind această bază se numește seria Shanon. Expresia celei mai bune aproximări de bandă limitată din punct de vedere al erorii medii pătratice a semnalului  $f(t)$  devine în acest caz:

$$\hat{s}_{w,f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m/w) \cdot \text{sinc}[\pi w(t-m)]$$

Avînd în vedere legătura dintre spectrele semnalelor  $f(t)$  și  $\hat{s}_{w,f}(t)$ :

$$\hat{S}_{w,f}(\omega) = F(\omega) \quad , \quad |\omega| \leq \pi w$$

se constată că semnalul  $\hat{s}_{w,f}(t)$  poate fi obținut din semnalul  $f(t)$  prin filtrare trece jos ideală folosind sistemul cu răspunsul în frecvență:

$$H_a(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi w \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci proiecția semnalului  $f(t)$  pe spațiul  $B_w^2$  poate fi realizată prin filtrare cu sistemul cu răspunsul în frecvență din relația precedentă.

Această concluzie este prezentată și în [Pap.'66] și [Pap.'83]. Deci sistemul de eșantionare ideală și reconstrucție optimal din punct de vedere al erorii medii pătratice de aliere este cel cu schema bloc din figura 4.9.

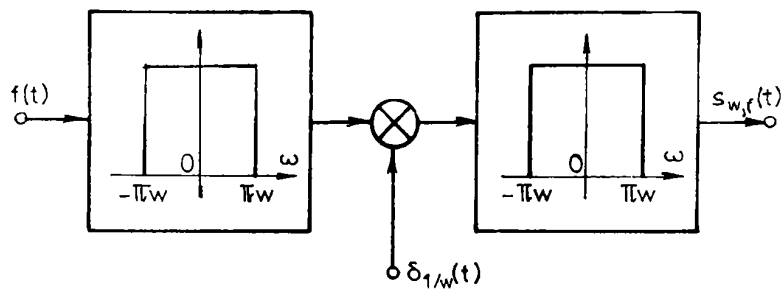


Figura 4.9. Modelul eșantionării ideale și reconstrucției cu minimizarea erorii medii pătratice de aliere.

Avînd în vedere că sistemul responsabil pentru minimizarea erorii medii pătratice de aliere în figura 4.9 este filtrul de la intrare, acesta se numește filtru antialiasing. În practică se utilizează filtre antialiasing realizabile, care aproximează doar funcționarea filtrului trece jos ideal (care este un sistem necauzal și deci nu se poate construi). În [Isa.'88] este prezentat un filtru antialiasing adaptiv.

Trăbuie remarcat faptul că minimizarea erorii medii pătratice de aproximare nu conduce și la minimizarea erorii absolute de aliere, cel mai bun exemplu în acest sens fiind fenomenul Gibbs [Pop., Naf.'86].

Unul dintre articolele care tratează cel mai eficient problema aproximării semnalelor de bandă nelimitată prin semnale de bandă limitată este [Tem., Bar., Mar.'73].

#### 4.3.4. Fazmetru numeric cu eșantionare adaptivă

Pentru măsurarea numerică a defazajului dintre semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  periodice de perioadă  $T$ , este necesară eșantionarea acestor semnale.

Admițând că dezvoltările în serie Fourier ale acestor semnale sînt:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kx_1}(t) \cdot e^{jk2\pi t/T}$$

și:

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kx_2}(t) \cdot e^{jk2\pi t/T}$$

defazajul semnalelor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  este dat de formula:

$$\phi = \arg\{c_{1x_1}(t)\} - \arg\{c_{1x_2}(t)\} \quad (4.14)$$

Eșantionînd uniform semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  cu un pas de eșantionare  $\Delta T = T/N$  se vor obține două semnale  $x_{1e}(t)$  și  $x_{2e}(t)$  periodice de perioadă  $T$ .

Spectrele acestor semnale sînt discrete și periodice.

Pentru măsurarea defazajului conform relației (4.14) este suficient ca eroarea de aliere să nu afecteze componenta de frecvență fundamentală din spectrul semnalului  $x_{1e}(t)$  respectiv  $x_{2e}(t)$ .

Această condiție este îndeplinită dacă semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  sînt de bandă limitată conținînd cîte  $N_1$  respectiv  $N_2$  componente spectrale de frecvență pozitivă și dacă frecvența de eșantionare este aleasă astfel încît să fie respectată condiția:

$$\frac{1}{\Delta T} - \max\{N_1, N_2\} \frac{1}{T} > \frac{1}{T}$$

Se observă că această condiție este mult mai puțin restrictivă decît condiția ca frecvența de eșantionare  $1/\Delta T$  să fie mai mare decît dublul frecvenței Nyquist:

$$\frac{1}{\Delta T} > 2 \max\{N_1, N_2\} \frac{1}{T}$$

Deci dacă în urma eșantionării se dorește doar reconstrucția fundamentalei semnalului  $x_1(t)$  (sau  $x_2(t)$ ) poate fi folosită o



frecvență de eșantionare  $1/\Delta T$  mult mai mică decât frecvența Nyquist,  $2\max\{N_1, N_2\}/T$ .

Dacă fundamentală semnalului  $x_{1e}(t)$  ( $x_{2e}(t)$ ) nu este afectată de aliere atunci argumentul acestei componente armonice este identic cu argumentul fundamentalei semnalului neeșantionat  $x_1(t)$  ( $x_2(t)$ ) [Pap. '83] deoarece:

$$c_{1, x_{pe}(t)} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1-Nk, x_p(t)} \quad p=\overline{1,2}$$

Într-adevăr dacă fundamentală semnalului  $x_{pe}(t)$ ,  $p=\overline{1,2}$  nu este afectată de aliere atunci:

$$c_{1-Nk, x_p(t)} = 0 \text{ ptr. } k \neq 0 \quad (4.15)$$

și deci:

$$c_{1, x_{pe}(t)} = \frac{1}{\Delta T} c_{1, x_p(t)} \quad p=\overline{1,2}$$

Conform acestei relații:

$$\arg\{c_{1, x_{pe}(t)}\} = \arg\{c_{1, x_p(t)}\} \quad p=\overline{1,2}$$

relație care demonstrează afirmația făcută.

În continuare se prezintă o modalitate de evidențiere a prezenței erorii de aliere bazată pe măsurarea defazajului dintre fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$  unde  $t_0$  este o întârziere impusă.

În acest scop se calculează fazele inițiale ale fundamentalelor semnalelor  $x_{pe}(t-t_0)$ ,  $p=\overline{1,2}$ .

Pentru semnalele  $x_{pe}(t-t_0)$ ,  $p=\overline{1,2}$  se obține:

$$c_{1, x_{pe}(t-t_0)} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(1-Nk)2\pi t_0/T} c_{1-Nk, x_{pe}(t)} \quad (4.16)$$

Folosind notația:

$$\frac{2\pi}{T} t_0 = \theta \quad (4.17)$$

și exprimând coeficienții Fourier în formă polară, relația (4.16) conduce în urma separării părților reală și imaginară ale celor doi membri ai săi la sistemul de ecuații:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left| \frac{c_1}{x_{pe}(t-t_0)} \right| \cos [\phi_{c_{1x}}(t-t_0)] = \\
 & = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_{1-Nk}}{x_{pe}(t)} \right| \cos [\phi_{c_{1-Nkx}}(t) - (1-Nk)\theta] \quad (4.18) \\
 & \left| \frac{c_1}{x_{pe}(t-t_0)} \right| \sin [\phi_{c_{1x}}(t-t)] = \\
 & = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_{1-Nk}}{x_{pe}(t)} \right| \sin [\phi_{c_{1-Nkx}}(t) - (1-Nk)\theta] \quad (4.19)
 \end{aligned} \right\}$$

Prin împărțirea relațiilor (4.19) la (4.18) se obține:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\phi_{c_{1x}}(t-t)) &= \\
 &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_{1-Nk}}{x_{pe}(t)} \right| \sin [\phi_{c_{1-Nkx}}(t) - (1-Nk)\theta]}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_{1-Nk}}{x_{pe}(t)} \right| \cos [\phi_{c_{1-Nkx}}(t) - (1-Nk)\theta]} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

și deci faza inițială a fundamentalei semnalului  $x_{pe}(t-t_0)$ ,  $p=1,2$  este:

$$\begin{aligned} \phi_c(\theta) &= \arctg \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{1-Nk}| \sin [\phi_c - (1-Nk)\theta]}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{1-Nk}| \cos [\phi_c - (1-Nk)\theta]} \\ &= \arctg \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{1-Nk}| \sin [\phi_c - (1-Nk)\theta]}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{1-Nk}| \cos [\phi_c - (1-Nk)\theta]} \quad (4.21) \end{aligned}$$

Pe baza relației (4.21) se constată faptul că faza inițială a fundamentalei semnalului  $x_{pe}(t-t_0)$  este o funcție de  $\theta$ . În cazul în care fundamentala semnalului  $x_{pe}(t-t_0)$  nu este afectată de aliere, folosind condiția (4.15), relația (4.21) devine:

$$\phi_c(\theta) = \arctg \left\{ \frac{\sin [\phi_c - \theta]}{\cos [\phi_c - \theta]} \right\} \quad (4.22)$$

adică:

$$\phi_c(\theta) = \phi_c - \theta \quad p=1,2$$

Deci defazajul dintre fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$ , dacă acestea nu sînt afectate de aliere, este:

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \phi_c - \phi_c = \\ &= \phi_c - \phi_c = \\ &= \phi_c - \phi_c = \phi(0) \quad (4.23) \end{aligned}$$

S-a demonstrat în acest mod că pentru măsurarea defazajului semnalelor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  este suficientă măsurarea defazajului dintre fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$ , dacă acestea nu sînt afectate de aliere. Este evident că relația (4.23) trebuie satisfăcută pentru orice  $\theta$ . Cu alte cuvinte, indiferent de valoarea lui  $\theta$ , funcția  $\phi(\theta)$  are aceeași valoare dacă alierea nu este prezentă. Constanța funcției  $\phi(\theta)$  este bazată pe faptul că fazele inițiale ale fundamentalelor semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$  sînt în absența alierii funcției de gradul I în  $\theta$ .

Dacă fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$  sînt afectate de aliere defazajul dintre ele este:

$$\phi(\theta) = \phi_{c1} - \phi_{c2} \neq \phi(0)$$

$$\begin{matrix} \phi_{c1} & \phi_{c2} \\ x_{1e}(t-t_0) & x_{2e}(t-t_0) \\ 1e & 2e \end{matrix}$$

Conform relației (4.21) rezultă că în acest caz defazajul este o funcție de  $\theta$ , neconstantă.

S-a demonstrat în acest mod că dacă fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$  sînt neafectate de aliere,  $\phi(\theta)$  este constant, iar dacă cele două fundamentale sînt afectate de aliere atunci defazajul dintre ele depinde de  $\theta$ .

Această constatare stă la baza construcției unui fazmetru numeric de mare precizie descris în [Mah. '89].

Acest aparat măsoară valoarea lui  $\phi(\theta)$ , pentru diferite valori ale lui  $\theta$  și dacă în fiecare caz obține același rezultat atunci acesta reprezintă defazajul semnalelor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$ . Dacă pentru valori diferite ale lui  $\theta$  se obțin valori diferite pentru  $\phi(\theta)$  atunci se consideră că efectul alierii este prezent. Pentru eliminarea efectului acestei erori se mărește frecvența de eșantionare utilizată. Pe baza eșantioanelor achiziționate se măsoară noi valori ale lui  $\phi(\theta)$  și se repetă operațiile descrise mai sus. În continuare se lămuresc două aspecte ale metodei de măsurare descrise mai sus.

În primul rînd se prezintă modul de calcul al funcției  $\phi(\theta)$  cu ajutorul eșantioanelor semnalelor  $x_1(t-t_0)$  și  $x_2(t-t_0)$ .

În acest scop se calculează valorile  $c_{1xpe}(t-t_0)$ ,  $p=1,2$ . Pe baza formulei de calcul a coeficienților Fourier :

$$c_{1xpe}(t-t_0) = (1/T) \int_T x_{pe}(t-t_0) e^{-j(2\pi/T)t} dt$$

Dar:

$$x_{pe}(t-t_0) = x_p(t-t_0) \cdot \delta_{\Delta T}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(m\Delta T - t_0) \delta(t - m\Delta T) \quad (4.25)$$

De aceea :

$$c_1 x_{pe}(t-t_0) = (1/T) \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(m\Delta T - t_0) \delta(t - m\Delta T) e^{-j(2\pi/T)t} dt$$

Adică:

$$c_1 x_{pe}(t-t_0) = (1/T) \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) e^{-j(2\pi/T)m\Delta T} \quad (4.26)$$

Separînd părțile reală și imaginară ale membrilor drept și stîng ai relației (4.26) se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} |c_1 x_{pe}(t-t_0)| \cos(\phi_c) = (1/T) \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \cos((2\pi/T)m\Delta T) \\ |c_1 x_{pe}(t-t_0)| \sin(\phi_c) = -(1/T) \sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \sin((2\pi/T)m\Delta T) \end{cases}$$

Împărțind cele două relații se obține :

$$\operatorname{tg}(\phi_c) = - \frac{\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \sin((2\pi/T)m\Delta T)}{\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \cos((2\pi/T)m\Delta T)}$$

Pe baza acestei relații se pot determina fazele inițiale ale fundamentalelor semnalelor  $x_{pe}(t-t_0)$ ,  $p=1,2$ .

$$\phi_c = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \sin((2\pi/T)m\Delta T)}{\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m\Delta T - t_0) \cos((2\pi/T)m\Delta T)} \right)_{p=1,2}$$

Se constată că prin intermediul lui  $t_0 = \Theta / (2\pi/T)$  defazajul calculat depinde de valoarea lui  $\Theta$ . Pe baza ultimei relații se poate determina expresia defazajului dintre fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$ :

$$\phi(\Theta) = \phi_c \frac{1}{x_{1e}(t-t_0)} - \phi_c \frac{1}{x_{2e}(t-t_0)} \quad (4.27)$$

Relația (4.27) exprimă defazajul  $\phi(\Theta)$  în funcție de eșantioanele semnalelor  $x_1(t-t_0)$  și  $x_2(t-t_0)$ .

Pentru :

$$t_0 = \Theta = 0$$

se obține :

$$\phi(0) = -\arctg\left(\frac{\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m\Delta T) \sin[(2\pi/T)m\Delta T]}{\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m\Delta T) \cos[(2\pi/T)m\Delta T]}\right) + \arctg\left(\frac{\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m\Delta T) \sin[(2\pi/T)m\Delta T]}{\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m\Delta T) \cos[(2\pi/T)m\Delta T]}\right)$$

Deci pentru aprecierea valorilor funcției  $\phi(\Theta)$  în punctele  $\Theta_k, k=1, M$  se determină momentele  $t_{0k} = \Theta_k / (2\pi/T)$ , se întârzie semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  cu aceste cantități și se eșantionează semnalele obținute cu pasul  $T$  obținând semnalele descrise de relația (4.25). Pe baza acestor eșantioane se calculează defazajul  $\phi(\Theta_k)$ . Cel de-al doilea aspect care trebuie lămurit este legat de soluțiile ecuației (4.24) :

$$\phi(\Theta) = \phi(0) \quad (4.28)$$

unde membrul stîng reprezintă defazajul dintre fundamentalele semnalelor  $x_{1e}(t-t_0)$  și  $x_{2e}(t-t_0)$  în ipoteza existenței alierii iar membrul drept același defazaj în absența alierii. Avînd în vedere relația (4.21) cu ajutorul căreia se poate calcula membrul stîng din (4.28) se constată că această relație este o ecuație trigonometrică. Dacă valoarea aleasă pentru  $\Theta$  în cadrul algoritmului destinat deciziei referitoare la prezența erorii de aliere este o soluție a ecuației (4.28) atunci se poate lua decizia de absență a erorii de aliere chiar în prezența

acesteia. Pentru ca probabilitatea acestei decizii incorecte să fie cât mai mică este bine ca numărul de verificări al constantei cu  $\Theta$  a lui  $\phi(\Theta)$ , anterioare deciziei referitoare la absența alierii, să fie cât mai mare. În [Mah.'89] valorile lui  $\Theta$  folosite pentru aceste verificări sînt generate aleator între 0 și  $2\pi$ . În figura 4.10 este prezentată ordinograma algoritmului care stă la baza funcționării fazmetrului amintit.

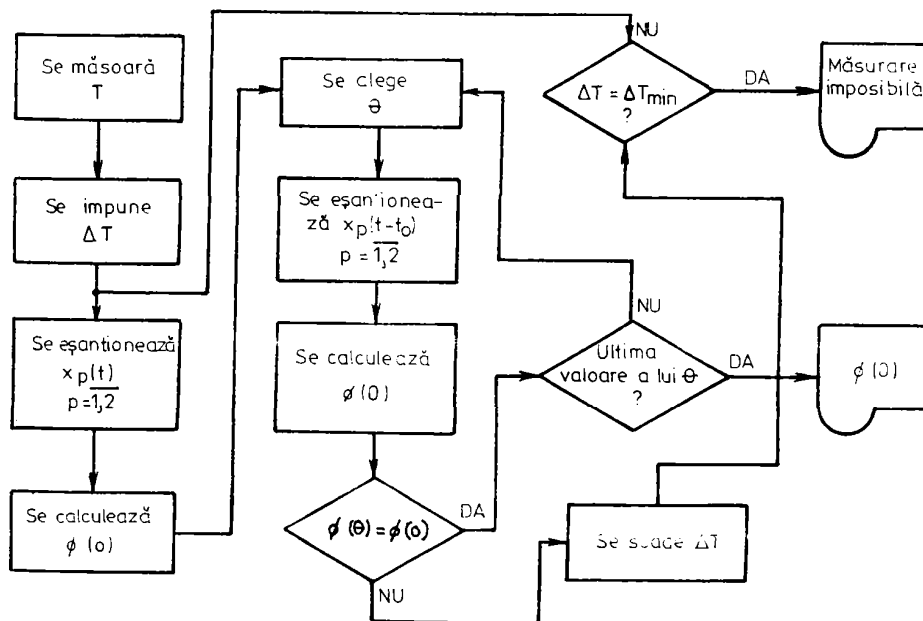


Figura 4.10. Ordinograma algoritmului de funcționare a fazmetrului cu eșantionare adaptivă.

Avînd în vedere că pasul de eşantionare  $\Delta T$  şi întârzierea  $t_0$  se schimbă pe durata unei măsurători de defazaj , eşantionarea realizată de aparatul descris este una adaptivă. Deci în cazul semnalelor de bandă limitată poate fi realizată o eşantionare adaptivă care să anuleze eroarea de aliere a fundamentalelor acestora chiar dacă nu li se cunoaşte exact banda. În cazul aparatului prezentat ar fi interesantă o tratare alternativă bazată pe eşantionarea necoerentă a semnalelor  $x_1(t)$  şi  $x_2(t)$ .

#### 4.3.5. Eşantionarea adaptivă în scopul compresiei de date în înregistratoarele numerice de forme de undă

Se vor face în continuare referiri la circuitul de eşantionare adaptivă din structura înregistratorului numeric de forme de undă HP-5183 A (ASR). Acest aparat este destinat înregistrării cu mijloace numerice a formei de undă a semnalelor analogice aduse la intrarea sa. Funcţionarea sa presupune eşantionarea semnalului analogic , achiziţia eşantioanelor într-o memorie numerică , prelucrarea semnalului numeric astfel obţinut în vederea îmbunătăţirii raportului său semnal pe zgomot , după care urmează reconstrucţia semnalului analogic şi afişarea acestuia.

În cazul înregistrării semnalelor analogice periodice , pentru efectuarea operaţiilor amintite , este suficientă cunoaşterea eşantioanelor dintr-o singură perioadă ale semnalului analogic. De aceea nu apar probleme deosebite legate de capacitate în exploatarea memoriei numerice la înregistrarea formei de undă a semnalelor analogice periodice. În cazul semnalelor aperiodice situaţia este mai complicată . Admiţînd că aceste semnale sînt eşantionate cu frecvenţă fixă , rezultă în cadrul unei măsurători un număr de eşantioane proporţional cu intervalul de timp scurs de la declanşarea achiziţiei semnalului considerat. De aceea durata din semnalul analogic care poate fi înregistrată este proporţională cu capacitatea memoriei numerice care se foloseşte.

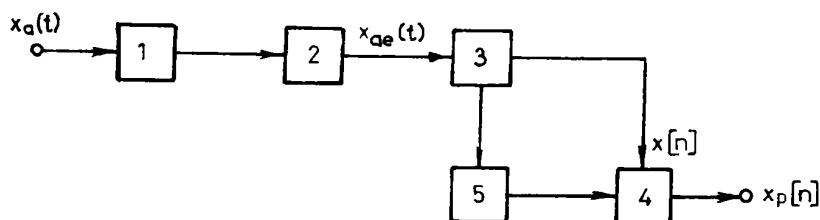
Constanta de proporţionalitate este pasul de eşantionare. Rezultă că pentru durate relativ mari ale semnalului aperiodic care trebuie înregistrat sînt necesare memorii de capacitaţi



foarte mari. Pentru o memorie de capacitate impusă durata semnalului înregistrat este cu atât mai scurtă cu cât frecvența de eșantionare este mai mare.

Dar banda amplificatorului de intrare al înregistratorului de forme de undă este direct proporțională cu frecvența de eșantionare folosită. Rezultă că în cazul unui înregistrator de forme de undă de bandă largă pentru semnale analogice aperiodice de durată mare este necesară o capacitate mare a memoriei numerice.

Aceasta nu este însă exploatată eficient dacă semnalul de analizat este cu variație lentă. Pentru o exploatare eficientă a memoriei este necesară în aceste cazuri realizarea unei compresii de date. Această operație este mai eficientă dacă are un caracter adaptiv, numărul eșantioanelor memorate fiind corelat cu valoarea vitezei de variație a semnalului care se înregistrează. Schema bloc a etajului de intrare în înregistratorul numeric de forme de undă HP-5183 A este prezentată în figura 4.11.



1.-filtru antialiasing;2.-circuit de eșantionare și memorare;3.-convertor analog numeric;4.- circuit de eșantionare numeric;5.-bloc de estimare a erorii de reconstrucție.

Figura 4.11. Schema bloc a circuitului de intrare în înregistratorul numeric de forme de undă considerat.

Valoarea frecvenței de eșantionare fiind fixă  $f_e$ , filtrul antialiasing va fi un filtru trece jos de ordin superior care aproximează un filtru trece jos ideal cu frec-

vența de tăiere  $f_e/2$ . Eșantionarea adaptivă este realizată cu ajutorul circuitului de eșantionare în timp discret 4, care transformă secvența  $x[n]$  în secvența  $x_p[n]$ . Pasul cu care realizează eșantionarea blocul 4 este variabil și este ales de către blocul 5. Rolul acestui bloc este de a aprecia eroarea cu care este aproximat semnalul  $x[n]$  de către semnalul  $x_r[n]$  obținut prin reconstrucția din eșantioanele  $x_p[n]$ .

#### 4.3.5.1. O metodă de eșantionare adaptivă destinată compresiei de date

Forma lui  $x_p[n]$  depinde de pasul de eșantionare folosit în 4. Deci pentru un pas de eșantionare ales se determină  $x_r[n]$  și se măsoară eroarea cu care acest semnal aproximează semnalul  $x[n]$ . Dacă această eroare este la orice moment de timp inferioară unei valori impuse atunci pasul de eșantionare poate fi crescut. Operațiile descrise mai sus se repetă pentru noua valoare a pasului de eșantionare. Dacă se obține din nou o valoare maximă a erorii de aproximare, inferioară valorii impuse, se alege o nouă valoare (și mai mare) a pasului de eșantionare. Algoritmul descris se încheie atunci când în urma ultimei reconstrucții se constată că eroarea de aproximare depășește limita superioară impusă. În această situație se memorează eșantioanele  $x_p[n]$  obținute în iterația anterioară a algoritmului descris.

#### 4.3.5.2. Criteriul de estimare a erorii de reconstrucție

În continuare este descrisă eroarea de aproximare a lui  $x[n]$  prin  $x_r[n]$ , precum și o modalitate de măsurare a acesteia. Se consideră că semnalul  $x[n]$  este de energie finită adică aparține clasei  $l^2$ :

$$l^2 = \{x[n] \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty\}$$

Semnalul  $x_r[n]$  este reconstruit dintr-un număr finit de eșantioane, deoarece durata lui  $x[n]$  este finită, ca urmare a faptului că doar durate finite ale semnalelor analogice aperiodice pot fi înregistrate cu ajutorul unui înregistrator realizabil. Dacă numărul eșantioanelor folosite pentru generarea lui  $x_r[n]$  este egal cu  $M$ , atunci  $x_r[n]$  va fi un semnal de

durată limitată  $M$ .

Fie  $l_M^2$  subspațiul lui  $l^2$  format din semnale de durată limitată  $M$ :

$$l_M^2 = \{x_M[n] \in \mathbb{C} \mid x_M[n] = 0 \text{ dacă } n \notin \{0, 1, \dots, M-1\}\}$$

Este clar că  $x_T[n] \in l_M^2$ . Soluția problemei discutate poate fi acum specificată ca fiind cea mai bună aproximare a semnalului  $x[n]$  de energie finită cu semnale din  $l_M^2$ .

Mulțimea  $l^2$  are o structură de spațiu Hilbert. Produsul scalar se exprimă pe acest spațiu cu formula :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$$

Norma semnalului  $x[n]$  este :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$$

Se observă că  $\|x\|^2$  reprezintă energia semnalului  $x[n]$ .

Se poate demonstra [Che., All. '87] că  $l_M^2$  este un subspațiu Hilbert închis al lui  $l^2$ . De aceea pentru determinarea celei mai bune aproximări de medie pătratică a semnalului  $x[n]$  cu semnale de durată limitată  $M$  se poate aplica teorema proiecției (Riesz).

Conform acestei teoreme pentru fiecare semnal  $x[n]$  există un semnal  $x^o[n]$  care reprezintă aproximarea de medie pătratică minimă a lui  $x[n]$  cu semnale din  $l_M^2$ .

În continuare se determină valoarea erorii medii pătratice de aproximare a lui  $x[n]$  cu  $x^o[n]$ ,  $\|\varepsilon\|^2$ :

$$\|\varepsilon\|^2 = \|x[n] - x^o[n]\|^2 = \langle x[n] - x^o[n], x[n] - x^o[n] \rangle$$

adică:

$$\|\varepsilon\|^2 = \langle x[n], x[n] - x^o[n] \rangle - \langle x^o[n], x[n] - x^o[n] \rangle$$

sau folosind proprietățile produsului scalar :

$$\|\varepsilon\|^2 = \langle x[n], x[n] \rangle - \langle x^o[n], x[n] \rangle - \langle x[n], x^o[n] \rangle + \langle x^o[n], x^o[n] \rangle$$

adică:

$$||\varepsilon||^2 = ||x[n]||^2 - \langle x[n], x^\circ[n] \rangle - \langle x^\circ[n], x[n] \rangle + ||x^\circ[n]||^2$$

sau :

$$||\varepsilon||^2 = ||x[n]||^2 - 2\operatorname{Re}\{\langle x[n], x^\circ[n] \rangle\} + ||x^\circ[n]||^2$$

Fie mulțimea :

$$B = \{ \phi_m[n] \in l_M^2 \mid m = \overline{0, M-1} \}$$

o bază a spațiului  $l_M^2$ .

Dezvoltarea în serie Fourier a lui  $x^\circ[n]$  în baza B este :

$$x^\circ[n] = \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k[n]$$

Pe baza acestei relații se obține pentru produsul scalar al semnalelor  $x[n]$  și  $x^\circ[n]$  expresia :

$$\begin{aligned} \langle x[n], x^\circ[n] \rangle &= \langle x[n], \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k[n] \rangle = \langle \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k[n], x[n] \rangle^* = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} c_k^* \langle x[n], \phi_k[n] \rangle \end{aligned}$$

Dar o consecință a teoremei lui Riesz este că semnalul  $x[n] - x^\circ[n]$  este ortogonal pe toate elementele spațiului  $l_M^2$ , deci în particular și pe elementele bazei B. De aceea:

$$\langle x[n], \phi_k[n] \rangle = \langle x^\circ[n], \phi_k[n] \rangle = c_k$$

De aceea:

$$\langle x[n], x^\circ[n] \rangle = \sum_{k=0}^{M-1} |c_k|^2 = \left( \sum_{k=0}^{M-1} |c_k|^2 \right)^* = \langle x^\circ[n], x[n] \rangle$$

Dar conform teoremei lui Parseval aplicată pe  $l_M^2$ :

$$||x^o[n]||^2 = \sum_{k=0}^{M-1} |c_k|^2$$

De aceea:

$$||\varepsilon||^2 = ||x[n]||^2 - 2 ||x^o[n]||^2 + ||x^o[n]||^2$$

Deci valoarea minimă a erorii medii pătratice de aproximare este:

$$||\varepsilon||^2 = ||x[n]||^2 - ||x^o[n]||^2 \quad (4.29)$$

Semnificația fizică a relației (4.29) este că eroarea de aproximare minimă a semnalului  $x[n]$  de energie finită cu semnalul de energie finită și durată limitată  $M$ ,  $x^o[n]$  este egală cu diferența energiilor semnalelor de aproximat și aproximat.

#### 4.3.5.3. Descrierea metodei de eșantionare adaptivă

Prin eșantionarea semnalului  $x(t)$  se obține secvența  $x[n]$ . Aceasta se grupează în secvențe succesive de durată  $N$ ,  $x_i[n]$ ,  $i \in N$  pe măsură ce valoarea variabilei  $t$  crește. Pentru fiecare dintre aceste secvențe are loc un proces iterativ de determinare a duratei minime admisibile. Acest proces are următoarele etape:

-se determină transformata Fourier scurtă discretă a secvenței  $x_i[n]$   $X_i[k]$ ,  $k=0, N-1$ . Se determină energia secvenței  $x_i[n]$  pe baza formulei:

$$E_{Ni} = \sum_{m=0}^{N-1} |X_i[m]|^2$$

-se decimează secvența  $x_i[n]$  obținându-se semnalul  $x_{i1}[n]$ , de lungime  $M_1$ .

-se determină transformata Fourier scurtă discretă a secvenței  $x_{i1}[n]$ ,  $X_{i1}[k]$ ,  $k=0, M_1-1$ .

-se determină energia secvenței  $x_{i1}[n]$  pe baza formulei :

$$E_{Mi} = \sum_{m=0}^{M_1-1} |x_{i1}[m]|^2$$

-se calculează raportul  $(E_{M_1 i})/E_{Ni}$

-se compară acest raport cu valoarea impusă  $\Gamma$ .

Dacă  $E_{M_1 i}/E_{Ni} < \Gamma$  atunci factorul de decimare folosit pentru obținerea secvenței  $x_{i1}[n]$  a fost prea mare. În caz contrar se trece la iterația următoare, obținându-se secvențele  $x_{i2}[n]$ ,

$x_{i2}[k]$  , de durată  $M_{2i}$  , energie  $E_{M_{2i}}$  și raportul  $E_{M_{2i}}/E_{N_i}$ . Dacă acesta este superior lui  $\Gamma$  se trece la iterația următoare. Ultima iterație , cea cu numărul de ordine  $p$ , este aceea în care raportul  $E_{M_{p_i}}/E_{N_i}$  este pentru prima dată inferior lui  $\Gamma$ . Procesul iterativ descris se încheie cu memorarea eșantioanelor secvenței  $x_{ip-1}[n]$ . Deci a avut loc o compresie de date , numărul eșantioanelor fiind scăzut de la valoarea  $N$  la valoarea  $M_{p-1}$ .

#### 4.3.5.3.1. Eșantionarea adaptivă în cazul înregistratorului de forme de undă HP-5183 A

În cazul înregistratorului de forme de undă amintit procesul de eșantionare adaptivă se desfășoară în timp real. Cei  $p-1$  pași ai algoritmului descris anterior referitor la secvența  $x_i[n]$  trebuie să se desfășoare sincron cu achiziția eșantioanelor secvenței  $x_{i+1}[n]$ . De aceea operațiile matematice descrise trebuie să se desfășoare cât mai rapid, iar numărul pașilor algoritmului descris anterior,  $p$ , trebuie să fie cât mai mic.

Circuitul ASR (Adaptive Sampling Rate) din structura înregistratorului de forme de undă HP-5183 A utilizează un algoritm cu  $p=2$  pași, raportul  $M_1/N$  fiind de  $1/64$ .

Pentru calculul transformatei Fourier scurte este utilizat un circuit specializat cu o structură serie paralel. Pentru compararea rapidă a raportului de energii cu  $\Gamma$  se compară diferența  $\log(E_{M_{1i}}/E_{N_i}) - \log\Gamma$ .

Reconstrucția semnalului analogic  $x(t)$  din secvențele  $x_{1,p-1}[n]$  se bazează pe utilizarea tehnicilor de interpolare [Pag., Fos. '88] sau a metodelor de sinteză descrise în [Dem., Mal. '89].

#### 4.3.5.4.0 altă metodă de realizare a eșantionării adaptive

În cazul metodei descrise în paragraful anterior compresia de date poate fi modelată printr-un proces de subeșantionare. Efectul eșantionării numerice și al decimării este echivalent cu eșantionarea analogică a semnalului de analizat , cu o frecvență mai mică decât cea folosită în realitate. Fixarea frecvenței de eșantionare echivalente era realizată pe baza unui algoritm iterativ.

Aceasta presupune calculul succesiv al diferitelor valori ale energiei  $E_{m_i}$  ,  $i=1,p$  și determinarea secvenței numerice optime  $x_{1,p-1}[n]$ .

Avînd în vedere că funcționarea aparatului are loc în timp real ,

este necesar ca algoritmul descris să fie foarte rapid, durata sa limitînd practic banda de frecvență a înregistratorului numeric descris. O îmbunătățire se poate realiza dacă se elimină caracterul iterativ al algoritmului, adică dacă stabilirea secvenței optime pentru  $\Gamma$  fixat se face într-un singur pas. Acest deziderat este atins dacă eșantionarea se face cu ajutorul unui sistem multicanal de tipul celor descrise în capitolul anterior (în figurile 3.6, 3.7, 3.9 sau 3.10). Schema bloc a unui circuit de achiziții de date care utilizează aproximarea prin analiză multirezoluție este prezentată în figura 4.12.

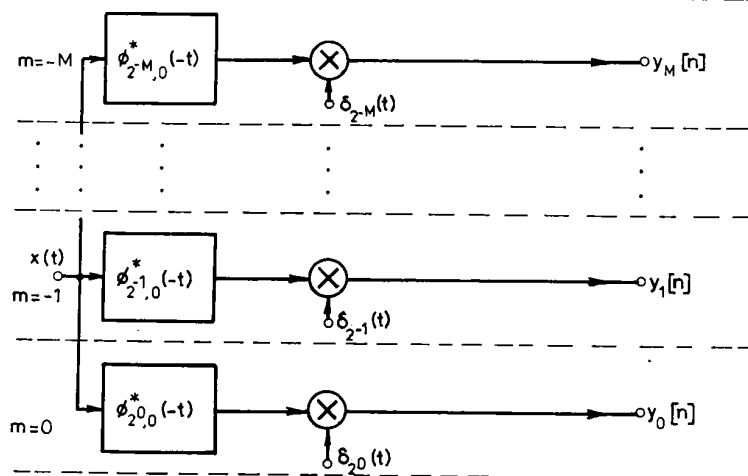


Figura 4.12. Schema bloc a unui sistem de achiziții de date al unui analizor numeric de forme de undă, construit pe baza analizei multirezoluție.

Problema pe care trebuie să o rezolve cu prioritate sistemul numeric de calcul al analizorului de forme de undă este alegerea secvenței  $y_l[n]$  cu cea mai mică valoare a lui  $l$  care încă mai satisface condiția :

$$E_{y_l}/E_{y_M} > \Gamma$$

Cu  $E_{y_l}$  s-a notat energia secvenței  $y_l[n]$ , considerată de durată limitată. Durata acestei secvențe este  $N2^l$ ,  $l=0, M$ .

Spre deosebire de cazul discutat în paragraful precedent de această dată secvențele  $y_l[n]$   $l=0, M$  există simultan. Folosind  $M+1$  dispozitive de calcul a energiei de tipul celui discutat în paragraful 4.3.5.3.1 toate valorile  $E_{y_l}$   $l=0, M$  pot fi calculate

simultan. La fel și valorile rapoartelor  $E_{y1}/E_{yM}$  pot fi obținute simultan. Deci folosind un sistem de calcul cu arhitectură paralelă, în cazul metodei propuse în acest paragraf, secvența optimă poate fi detectată mult mai repede decât în cazul sistemului propus în paragraful 4.3.5.3. Un astfel de sistem, adaptează rezoluția de aproximare a semnalului de înregistrat, în funcție de caracteristicile locale ale acestui semnal, păstrând constantă eroarea medie pătratică de aproximare.

#### 4.3.6. Concluzii

În acest capitol au fost prezentate câteva tehnici noi de eșantionare adaptivă precum și modul în care se aplică aceste tehnici în aparatura de măsurare numerică. Au fost alese exemple de aparate de măsurare, foarte moderne, recent lansate pe piață. Prezentarea a fost făcută la nivel de principiu, evidențiindu-se ideile care stau la baza fiecărui procedeu expus. Pentru detalii constructive ca și pentru performanțele obținute de aceste aparate poate fi consultată bibliografia citată în fiecare caz. Caracterul unitar al primelor patru capitole ale acestei lucrări provine din preocuparea constantă a autorului de a prezenta diverse aspecte legate de eșantionarea semnalelor.

Contribuțiile originale din acest capitol sînt:

- clasificarea metodelor de eșantionare adaptivă pe baza tipurilor de erori care apar la eșantionarea semnalelor;

- calculul spectrului semnalului eșantionat neuniform cu pasul de eșantionare avînd o variație periodică (demonstrarea relației (4.2)).

- stabilirea celei mai mici margini a erorii de aliere  $m_I(t)$  precum și ordonarea în sens crescător a principalelor margini ale erorii de aliere cunoscute:  $m_S(t)$ ,  $m_T(t)$ ,  $m_W$  și  $m_B$ .

- calculul valorii minime a erorii medii pătratice de aliere și construcția aproximării care conduce la această valoare;

- determinarea celei mai bune aproximări de medie pătratică a unui semnal de energie finită printr-un semnal de energie finită și de durată limitată. Efectul este minimizarea erorii de trunchiere.

- metoda de eșantionare adaptivă bazată pe o analiză multirezoluție prezentată în paragraful 4.3.5.4.

Alte metode de eșantionare adaptivă cu minimizarea erorii de aliere precum și estimări ale erorii de trunchiere sînt prezentate în [Isa.' 92 1].

Preocupări interesante de viitor în domeniul eșantionării adaptive a semnalelor par a fi:



-determinarea erorii la aproximarea prin analiză multirezoluție ;

-determinarea condiției maxime optime din punct de vedere al erorii de aproximare prin analiză multirezoluție , respectiv a celei optime din punct de vedere al aproximării la analiza prin descompunere ortogonală.

- utilizarea algoritmului lui Mallat în scopul scăderii numărului de canale din schema bloc din figura 4.12.

## **5. Noi tehnici de filtrare adaptivă cu aplicații la prelucrarea semnalelor modulate în frecvență**

În structura aparatelor de măsură adaptive se folosesc frecvent filtrele adaptive. Un filtru adaptiv este un sistem care își modifică parametrii în funcție de parametrii semnalului pe care îl prelucrează. Modificarea parametrilor filtrului adaptiv se face în așa fel încât valorile acestora să urmărească valorile parametrilor semnalului de prelucrat. Dacă acest semnal este unul modulat în frecvență, singurul său parametru variabil în timp este frecvența instantanee. De aceea filtrele adaptive destinate prelucrării semnalelor modulate în frecvență trebuie să aibă un singur parametru care să se modifice în timp și anume frecvența centrală sau de tăiere. Filtrele adaptive din această categorie se numesc filtre cu urmărire.

### **5.1. Filtre cu urmărire analogice**

Una dintre aplicațiile de bază ale circuitelor cu calare de fază este de a genera semnale a căror frecvență să urmărească frecvența instantanee a semnalului de la intrarea circuitului. În acest mod de funcționare circuitul cu calare de fază (P.L.L.) îmbunătățește raportul semnal pe zgomot al semnalului pe care îl prelucrează. Această funcționare este echivalentă cu filtrarea cu un filtru trece bandă a semnalului [Mil.'71]. De aceea se spune că circuitul P.L.L. este un filtru cu urmărire. Această denumire este improprie, deoarece circuitul cu calare de fază generează semnale cu nivel constant și de formă impusă pe când nivelul și forma semnalului de la ieșirea unui filtru sînt funcție de spectrul semnalului de prelucrat și de parametrii circuitului. De aceea în [Zal.'83] este sugerată următoarea definiție:

**Se numește filtru cu urmărire, un filtru a cărui frecvență centrală sau de tăiere are în permanență aceeași valoare cu frecvența instantanee a semnalului de la intrarea sa.**

Prin analogie cu circuitele cu calare de fază mai interesante par filtrele cu urmărire de tip trece bandă.

## 5.2. Filtre cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2

În continuare vor fi prezentate câteva proprietăți ale filtrelor trece bandă de ordinul 2 cu urmărire. Aceste proprietăți sînt valabile pentru filtrele cu urmărire de tip trece bandă de orice ordin.

A fost ales exemplul filtrelor de ordinul 2 deoarece acestea sînt folosite în construcția filtrelor de orice ordin superior. Demonstrațiile proprietăților filtrelor cu urmărire de ordin superior se pot face similar cu demonstrațiile prezentate în acest capitol.

Funcția de transfer a unui filtru trece bandă de ordinul 2 este:

$$H(s) = A \frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Parametrii acestui sistem sînt :

- A : amplificarea circuitului la pulsația centrală,
- $-\omega_0$  : pulsația centrală,
- $\xi$  : gradul de amortizare al circuitului

În cazul unui filtru trece bandă de ordinul 2 cu urmărire  $\omega_0$  nu mai este o constantă , fiind valabilă ecuația:

$$\omega_0(t) = \omega_1(t)$$

pulsația centrală a filtrului fiind în permanență egală cu pulsația instantanee a semnalului de prelucrat ,  $\omega_1(t)$ .

"Răspunsul în frecvență" al acestui sistem variant în timp este :

$$H(\omega, t) = 2 A j \frac{\xi \omega \omega_0(t)}{\omega_0^2(t) - \omega^2 + 2j\xi\omega\omega_0(t)} \quad (5.1)$$

Aceasta este de fapt o reprezentare timp-frecvență a răspunsului la impuls al sistemului considerat. În continuare se determină în primul rînd domeniile variabilelor  $\omega$  și  $t$  pentru care  $|H(\omega, t)|$  este de valoare extremă . În acest scop se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\frac{\partial |H(\omega, t)|}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial |H(\omega, t)|}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Soluția acestui sistem de ecuații este curba :

$$\omega_0(t) = \omega \quad (5.3)$$

Un exemplu de reprezentare timp frecvență care caracterizează comportarea unui filtru trece bandă de ordinul 2 este prezentat în figura 5.1.

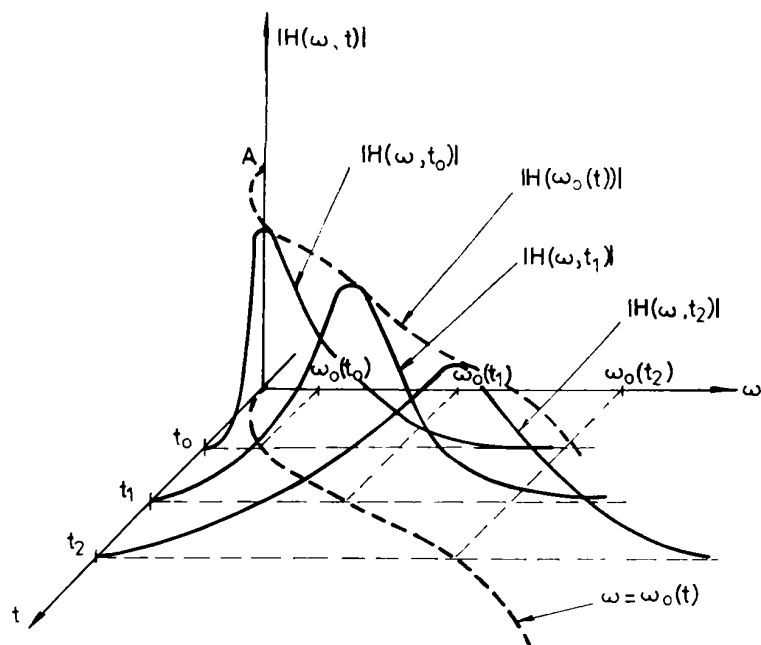


Figura 5.1 Reprezentarea timp frecvență a modulului răspunsului în frecvență al unui filtru trece bandă de ordinul 2 cu urmărire.

Analizînd figura se constată prezența unor secțiuni semnifi-

cative ale suprafeței  $|H(\omega, t)|$  :

-intersecția dintre suprafața  $|H(\omega, t)|$  și planul  $\{(\omega, t_p) | \omega \in \mathbb{R}, t_p \in \mathbb{Z} \text{ fixat}\}$ . Această curbă se va nota  $|H(\omega, t_p)|$  sau  $|H(\omega, \omega_p)|$  cu  $\omega_p = \omega_0(t_p)$ . În continuare această curbă se va numi caracteristică momentană de modul. Ea descrie comportarea în domeniul frecvență a filtrului trece bandă de ordinul  $n$  cu urmărire, la momentul  $t_p$ . La fel se poate vorbi despre caracteristica momentană de frecvență a filtrului cu urmărire, care este curba  $H(\omega, \omega_p)$  sau despre caracteristica momentană de fază a filtrului cu urmărire care este curba  $\arg\{H(\omega, \omega_p)\}$ .

-intersecția dintre suprafața  $|H(\omega, t)|$  și planul vertical a cărui urmă pe planul  $(\omega, t)$  este curba de ecuație (5.3). Această curbă se va nota  $|H(\omega_0(t))|$  și se va numi în continuare caracteristică globală de frecvență. Reprezentarea sa grafică este prezentată în figura 5.2.

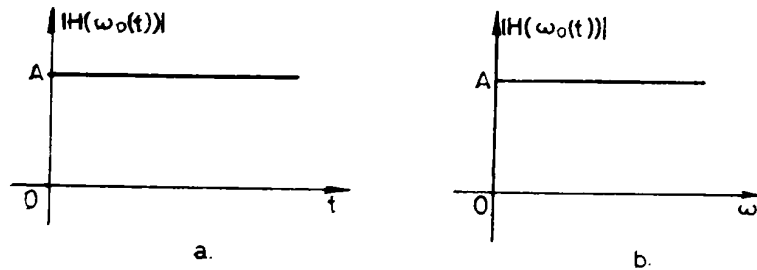


Figura 5.2 Caracteristica globală de modul a filtrului cu urmărire de ordinul 2 a) în domeniul timp, b) în domeniul frecvență.

În funcționare, filtrul cu urmărire trece printr-o succesiune de stări, în fiecare dintre acestea el se comportă ca și un sistem invariant în timp. De exemplu la momentul  $t_p$  filtrul cu urmărire poate fi identifi-

cat cu sistemul invariant în timp cu răspunsul în frecvență  $H(\omega, \omega_p)$  cu  $\omega_p = \omega_0(t_p)$ .

### 5.2.1. Legătura dintre transformarea undișoară în timp continuu și filtrele analogice cu urmărire

Fie :

$$\omega_q = a\omega_p, \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (5.4)$$

Se determină legătura dintre caracteristicile momentane de frecvență ale filtrului cu urmărire de la momentele  $t_p$  și  $t_q$ .

$$H(\omega, \omega_p) = \frac{2j\xi A \omega \omega_p}{\omega_p^2 - \omega^2 + 2j\xi \omega \omega_p}$$

și :

$$H(\omega, \omega_q) = \frac{2j\xi A \omega \omega_q}{\omega_q^2 - \omega^2 + 2j\xi \omega \omega_q}$$

sau pe baza relației (5.4) :

$$H(\omega, a\omega_p) = \frac{2j\xi A \omega (a\omega_p)}{a^2\omega_p^2 - \omega^2 + 2j\xi \omega a\omega_p} = 2j A \frac{(\omega/a)\omega_p}{\omega_p^2 - (\omega/a)^2 + 2j\xi (\omega/a)\omega_p} = H(\omega/a, \omega_p) \quad (5.5)$$

Făcînd notația :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} H(\omega, a\omega_p) = \hat{\Psi}_a(\omega)$$

se constată că :

$$\hat{\Psi}_1(\omega) = H(\omega, \omega_p)$$

Substituind ultimele două relații în relația (5.5) se obține :

$$\hat{\Psi}_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \hat{\Psi}_1(\omega/a)$$

Avînd în vedere semnificația fizică a lui  $H(\omega, \omega_p)$  (adică  $\hat{\Psi}_1(\omega)$ ) de răspuns în frecvență al unui sistem invariant în timp rezultă că li se poate aplica transformarea Fourier inversă funcțiilor din cei doi membri ai ultimei relații, obținîndu-se :

$$\Psi_a(t) = \sqrt{a} \Psi_1(at) , \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (5.6)$$

Deci funcțiile  $\Psi_a(t)$  sînt undișoare.

Avînd în vedere semnificația fizică a funcțiilor  $H(\omega, a\omega_p)$  funcțiile  $\Psi_a(t)$  pot fi numite răspunsuri la impuls instantanee ale filtrului cu urmărire. De aceea răspunsul filtrului cu urmărire la semnalul  $x(t)$  este semnalul :

$$y(t) = x(t) * \Psi_a(t)$$

Dar membrul drept al acestei relații reprezintă tocmai transformarea undișoară în timp continuu a semnalului  $x(t)$ .

Deci filtrul cu urmărire răspunde la semnalul  $x(t)$  cu semnalul  $CWT_x(a, t)$ . Parametrul de scalare  $a$  este raportul pulsațiilor centrale ale filtrului :

$$a = \frac{\omega_0(t_q)}{\omega_0(t_p)}$$

determinate la două momente de timp. Fixînd unul dintre acestea, de exemplu  $t_p$  se observă că  $a$  se modifică în timp urmărind variația lui  $\omega_0(t_q)$  care este identică cu variația lui  $\omega_1(t_q)$  (s-a considerat  $t_q$  ca și variabilă).

Dacă semnalul de intrare  $x(t)$  este modulată în frecvență cu modulator liniar :

$$x(t) = A_0 \cdot \cos(\beta t^2)$$

atunci :

$$\omega_p = \omega_0(t_p) = \omega_1(t_p) = \beta t_p$$

și:

$$\omega_q = \omega_0(t_q) = \omega_1(t_q) = \beta t_q$$

De aceea :

$$\alpha = \frac{\omega_q}{\omega_p} = \frac{t_q}{t_p}$$

adică parametrul  $\alpha$  este un raport de momente (factor de scală) așa cum s-a introdus această mărime în capitolul 2. S-a demonstrat așadar că filtrul cu urmărire permite calculul transformării undișoară în timp continuu a semnalului modulat în frecvență de la intrarea sa pe curba  $(t, k\omega_0(t))$  unde  $k$  este o constantă. Rezultă că folosind un filtru cu urmărire pot fi determinate secțiuni ale reprezentării tridimensionale de tip undișoară ( undișoara mamă fiind tocmai răspunsul la impuls al filtrului ).

### 5.2.2. Proprietățile filtrelor cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2

Deoarece răspunsurile la impuls instantanee ale filtrului cu urmărire sînt undișoare, acest sistem va putea fi caracterizat pe baza proprietăților acestor funcții. De aceea sînt valabile următoarele propoziții:

**P1.** Dacă momentele de timp  $t_p$  și  $t_q$  sînt alese astfel încît raportul pulsațiilor instantanee ale semnalului de la intrare calculate la aceste momente  $\omega_i(t_q)/\omega_i(t_p)$  să fie egal cu  $\alpha$ , frecvența centrală a caracteristicii momentane a filtrului la momentul  $t_q$  va fi de  $\alpha$  ori mai mare decît frecvența centrală a caracteristicii momentane la momentul  $t_p$ . Această proprietate rezultă din faptul că în cazul unui filtru cu urmărire  $\omega_0(t_p) = \omega_i(t_p)$  și  $\omega_0(t_q) = \omega_i(t_q)$ .

**P2.** În condițiile de la P1, banda la -3dB a caracteristicii momentane  $H(\omega, \omega_q)$  este de  $\alpha$  ori mai mare decît banda la -3dB a caracteristicii momentane  $H(\omega, \omega_p)$ .

Această propoziție se poate demonstra pe baza proprietăților undișoarelor prezentate în capitolul 3. De fapt propoziția P2 este o formulare a caracterului de analiză cu factor de calitate constant ( $Q$ ) a transformării undișoară în timp continuu. Proprietatea poate fi verificată și prin calcul direct, deoarece:

$$H(\omega, \omega_q) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} H(\omega/\alpha, \omega_p)$$



Notînd cu  $B_p$  lăţimea benzii la  $-3\text{dB}$  a caracteristicii  $H(\omega, \omega_p)$  din condiţia :

$$(\omega/a) \in [\omega_p - B_p/2, \omega_p + B_p/2]$$

se obţine condiţia :

$$\omega \in [\omega_q - B_q/2, \omega_q + B_q/2]$$

unde  $B_q = aB_p$ .

Deci filtrul cu urmărire poate fi descris printr-o succesiune de filtre trece bandă cu  $Q$  constant.

În continuare se vor prezenta cîteva proprietăţi ale caracteristicilor momentane de modul respectiv de fază .

Expresia caracteristicii momentane de modul a unui filtru cu urmărire trece bandă de ordinul 2 este :

$$|H(\omega, t_p)| = |H(\omega, \omega_0(t_p))| = |H(\omega, \omega_p)| = \frac{2\xi A \cdot |\omega| \omega_0(t_p)}{\sqrt{(\omega_0^2(t_p) - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_0^2(t_p)}}$$

În practică condiţia (5.2) nu poate fi îndeplinită pentru orice  $\omega$ , de aceea este raţional să se considere că ea are loc doar într-un anumit interval de frecvenţe ,  $B_u$  , numit bandă de urmărire a filtrului adaptiv , adică :

$$\omega = \omega_0(t) \quad , \quad \forall \omega \in [\omega_{00} - B_u/2, \omega_{00} + B_u/2] \quad (5.7)$$

De aceea răspunsul filtrului cu urmărire va fi considerat în continuare de forma :

$$H(\omega, t) = \begin{cases} \frac{2j\xi A \omega \omega_0(t)}{\omega_0^2(t) - \omega^2 + 2j\xi \omega \omega_0(t)} = A \quad , \quad \omega = \omega_0(t) , \omega \in [\omega_{00} - B_u/2, \omega_{00} + B_u/2] \\ \frac{2j\xi A \omega \omega_{00}}{\omega_{00}^2 - \omega^2 + 2j\xi \omega \omega_{00}} \quad , \quad \text{în rest} \end{cases} \quad (5.8)$$

$\omega_{00}$  fiind o constantă .

Pe baza figurilor 5.1 și 5.2.b) și a relației (5.7) se poate formula următoarea proprietate a filtrelor cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2:

**P3.** În banda de urmărire modulul răspunsului în frecvență al unui filtru trece bandă cu urmărire de ordinul 2 este maxim.

Cum s-a arătat în paragraful anterior cu ajutorul filtrului cu urmărire cu răspunsul în frecvență  $H(\omega, t)$  poate fi determinată reprezentarea timp-frecvență de tip undișoară a semnalului  $x(t)$  (pe care îl prelucrează filtrul cu urmărire)  $CWT_x(\alpha, t)$  pe conturul  $\alpha = k\omega_i(t)$ . Și un filtru trece bandă cu frecvența centrală comandabilă electric (care nu este un filtru cu urmărire) implementează tot o transformare undișoară în timp continuu. În acest caz însă parametrul  $\alpha$  are o lege de variație în timp de forma:  $\alpha = k \cdot u_1(t)$  unde  $u_1(t) = \omega_0(t)$  este tensiunea cu care se comandă frecvența centrală a filtrului. Și acest sistem poate fi folosit pentru determinarea unei secțiuni prin reprezentarea  $CWT_x(\omega, t)$  doar că urma acestei secțiuni pe planul  $(\omega, t)$  este curba  $\alpha = k\omega_i(t)$ . Evident că dacă funcțiile  $u_1(t)$  și  $\omega_i(t)$  sînt identice atunci filtrul comandat devine unul cu urmărire. Semnificația proprietății P3 este că dintre toate filtrele comandate cel care asigură răspunsul cu cea mai mare amplitudine este filtrul cu urmărire. De aceea se poate afirma că secțiunea reprezentării  $CWT_x(\alpha, t)$  determinată de prelucrarea semnalului  $x(t)$  cu filtrul cu urmărire este aceea care conține maximele acestei reprezentări:

$$CWT_x(k\omega_i(t), t) = \max_{\alpha} CWT_x(\alpha, t)$$

Conform acestei relații proiecțiile maximelor reprezentării  $CWT_x(\alpha, t)$  pe planul  $(\omega, t)$  sînt situate pe curba  $\alpha = k\omega_i(t)$ . Această observație poate fi utilizată pentru măsurarea frecvenței instantanee a unui semnal pe baza reprezentării sale tridimensionale de tip undișoară în timp continuu.

În figura 5.3 sînt reprezentate în același plan cîteva caracteristici momentane de modul precum și modulul caracteristicii globale de frecvență ale filtrului cu urmărire caracterizat de relația (5.8).

Pe baza acestei figuri se poate formula o altă proprietate a filtrelor cu urmărire:

**P4.** Modulul caracteristicii globale de frecvență a unui filtru cu urmărire este o bună aproximare a modulului caracteristicii de frecvență a filtrului trece bandă ideal.

Se observă că aproximarea este cu atît mai bună cu cît banda de urmărire,  $B_u$ , este mai largă și cu cît filtrul trece bandă cu urmărire este mai selectiv (caracteristicile momentane de modul sînt mai înguste), adică are un factor de calitate,  $Q$ , mai mare.

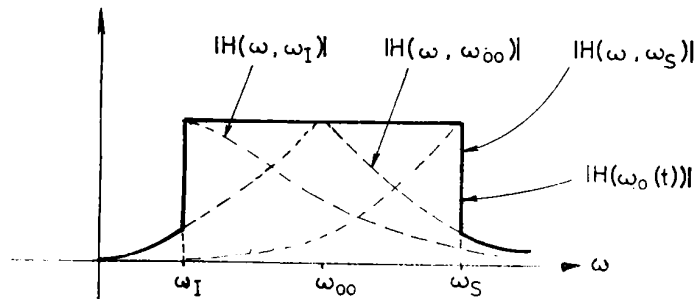


Figura 5.3. Reprezentările caracteristicilor de modul, globală și momentane ale unui filtru cu urmărire de tip trece bandă de ordinul II.

O caracteristică de tipul celei din figura 5.3. obținută experimental cu ajutorul unui circuit construit de autor este prezentată în [Isa.'91].

În continuare se analizează cazul în care pulsația centrală a filtrului adaptiv este în permanență egală cu o fracțiune din pulsația instantanee a semnalului de intrare. În acest caz relația care descrie procesul de urmărire se scrie:

$$\omega = k_0 \cdot \omega_1(t) \quad , \quad k_0 = \text{constantă} \quad (5.9)$$

Expresia răspunsului în frecvență al filtrului cu urmărire devine:

$$H(\omega, t) = \frac{2 \cdot A \cdot \xi \cdot k_0}{1 - k_0^2 + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot k_0} \quad , \quad \begin{matrix} \omega = k_0 \cdot \omega_0(t), \\ \omega \in [\omega_{00} - B_u/2, \omega_{00} + B_u/2] \end{matrix}$$

$$H(\omega, t) = \frac{2 \cdot A \cdot \xi \cdot \omega \omega_{00}}{(\omega^2 - \omega_{00}^2) + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_{00}} \quad \omega \notin [\omega_{00} - B_u/2, \omega_{00} + B_u/2] \quad (5.10)$$

Proprietatea P3 se poate reformula în acest caz în forma:

P5. Un filtru adaptiv pentru semnale modulate în frecvență la care urmărirea se face conform relației (5.9) are caracteristica globală de frecvență de valoare constantă în banda de urmărirea. Valoarea acestei constante este:  
 $(2 \cdot A \cdot \xi \cdot k_0) / [(1 - k_0) + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot k_0]$ .

Legătura dintre caracteristica globală și caracteristicile momentane ale unui filtru cu urmărirea se pune în evidență când se analizează îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot  $\chi$  pe care o introduce acest sistem în comparație cu un filtru trece bandă obișnuit.

Considerând că semnalul modulat în frecvență care trebuie prelucrat,  $x(t)$  este afectat aditiv de zgomotul  $n(t)$  și că pulsația sa instantanee se modifică între valorile  $\omega_m$  și  $\omega_M$ , banda de trecere necesară unui filtru trece bandă tradițional pentru prelucrarea acestui semnal este  $B_t = \omega_M - \omega_m$ .

În cazul în care prelucrarea se face cu un filtru cu urmărirea este necesar ca  $B_u = B_t$ , banda caracteristicilor momentane de frecvență putînd fi mult mai îngustă.

Valoarea maximă a benzii unei caracteristici momentane de frecvență este necesar să fie  $\omega_M / (2 \cdot \pi \cdot Q)$ .

Dacă filtrul cu urmărirea are un factor de calitate mare este ușor să fie îndeplinită condiția:

$$\frac{\omega_M}{2 \cdot \pi \cdot Q} < \omega_M - \omega_m$$

Această relație exprimă legătura între valoarea maximă a benzii unei caracteristici momentane de frecvență a filtrului cu urmărirea și banda filtrului fără urmărirea necesară pentru filtrarea aceluiași semnal  $x(t)$ . Valorile benzilor echivalente de zgomot ale filtrului cu urmărirea și fără urmărirea echivalent (din punct de vedere al semnalului  $x(t)$ ) sînt proporționale cu  $\omega_M / (2 \cdot \pi \cdot Q)$  și  $\omega_M - \omega_m$ .

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot introdusă de filtrul cu urmărirea în comparație cu cel fără urmărirea echivalent,  $\chi$  este proporțională cu raportul benzilor lor echivalente de zgomot. De aceea este valabilă relația:

$$\chi > 1$$

O evaluare pentru  $\chi$  este prezentată în [Isa.'91] pentru cazul filtrului cu urmărirea construit de autor, amintit mai sus. Această proprietate este firească avînd în vedere că la fiecare

moment de timp filtrul adaptiv poate fi caracterizat printr-un filtru adaptat la semnalul de intrare (avînd frecvența centrală identică cu frecvența instantanee de la acel moment a semnalului de la intrare).

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată prin utilizarea unui filtru adaptiv (cu urmărirea) în locul unui filtru trece bandă tradițional este cu atît mai mare cu cît factorul de calitate al filtrului adaptiv este mai mare.

În cazul caracteristicilor de fază ale filtrelor cu urmărirea de ordinul 2 există proprietăți echivalente pentru  $P3 \div P5$ .

Caracteristica de fază a sistemului adaptiv este;

$$\varphi_H(\omega, t) = \text{arctg} \frac{\omega \dot{\omega}_0(t) - \omega^2}{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_0(t)}$$

Reprezentarea tridimensională a acestei caracteristici este prezentată în figura 5.4.

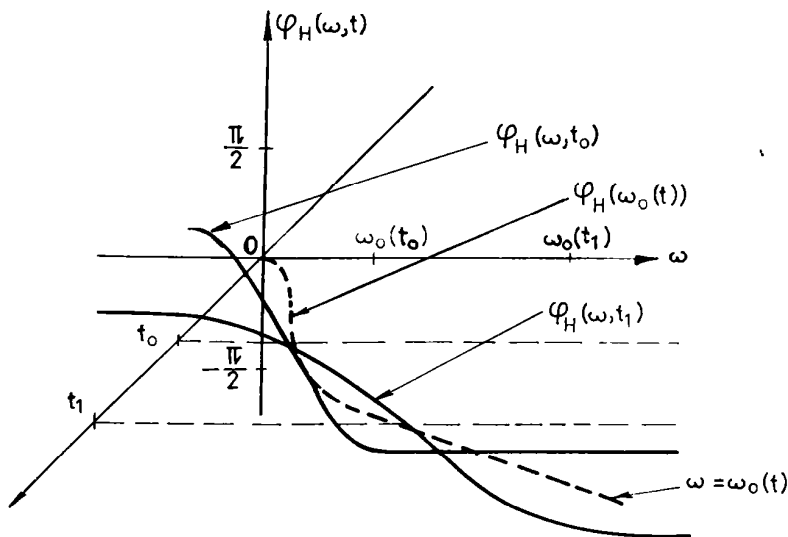


Figura 5.4. Caracteristica de fază a răspunsului în frecvență al unui filtru cu urmărirea de tip trece bandă de ordinul 2.

Cu  $\phi_H(\omega, t_k)$  s-a notat caracteristica momentană de fază la momentul  $t_k$ .

În figura 5.5 se prezintă caracteristica globală de fază:

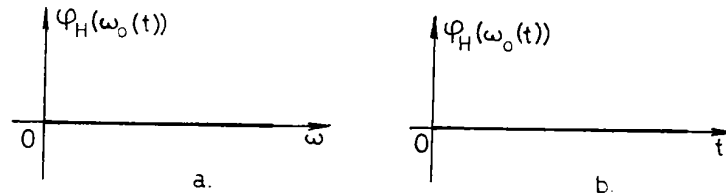


Figura 5.5. Caracteristica globală de fază a filtrului cu urmărire de ordinul II de tip trece bandă : a) în domeniul frecvență; b) în domeniul timp.

În figura 5.6. sînt reprezentate în raport cu același sistem de coordonate cîteva caracteristici momentane și caracteristica globală de fază ale filtrului cu urmărire cu răspuns în frecvență dat de relația (5.8).

Enunțurile proprietăților caracteristicilor de fază (analoage proprietăților de modul P3 ÷ P5) sînt prezentate în [Isa., Isa., Sch. '89].

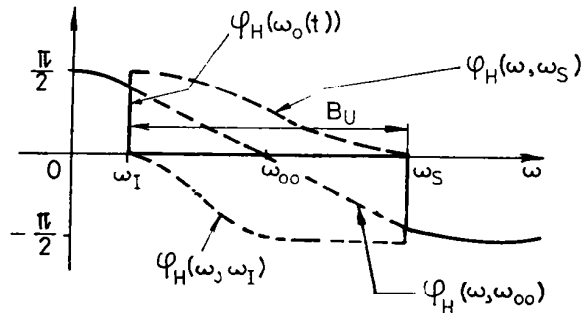


Figura 5.6. Caracteristica globală și cîteva caracteristici momentane de fază ale unui filtru cu urmărire de ordinul II de tip trece bandă, reprezentate în raport cu același sistem de coordonate.

### 5.2.3. Construcția filtrelor cu urmărire folosind circuite cu capacități comutate

Pentru realizarea unui filtru cu urmărire este necesară reglarea valorii uneia dintre componentele circuitului ( care intră în calculul frecvenței centrale a filtrului trece bandă ) în funcție de valoarea frecvenței instantanee a semnalului de prelucrat.

De aceea în construcția unui astfel de filtru este necesar să fie folosite două tipuri de circuite:

- un filtru trece bandă cu frecvența centrală comandabilă electric ;

- un circuit de conversie a frecvenței instantanee a semnalului de intrare într-un semnal de comandă a filtrului cu frecvența centrală comandabilă electric.

O clasă de filtre cu frecvența centrală comandabilă electric este clasa filtrelor comandate în tensiune.

O categorie interesantă de filtre cu frecvența centrală comandabilă direct printr-o frecvență este cea a circuitelor cu capacități comutate .

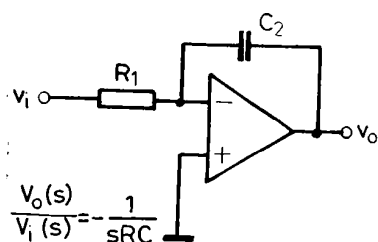


Figura 5.7. Schema unui integrator clasic.

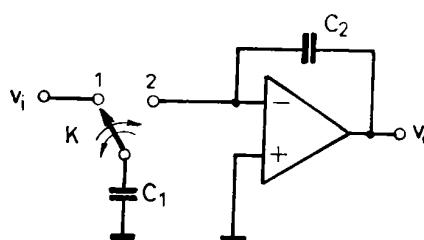


Figura 5.8. Schema unui integrator cu capacități comutate.

În continuare se analizează schema din figura 5.8, echivalându-se acest circuit variant în timp cu unul invariant în timp , al cărui răspuns în frecvență se determină . Se consideră că la momentul  $(n-1)T$  comutatorul K este în poziția 1. Sarcinile celor

două condensatoare din schemă sînt :

$$q_1[(n-1)T] = C_1 v_1[(n-1)T]$$

$$q_2[(n-1)T] = C_2 v_2[(n-1)T]$$

Dacă la momentul  $(n-1/2)T$ , K se trece în poziția 2, atunci la momentul  $nT$ , condensatorul  $C_1$  a cedat întreaga sa sarcină  $q_1[(n-1)T]$  condensatorului  $C_2$  care a acumulat sarcina :

$$q_2[nT] = q_2[(n-1)T] - q_1[(n-1)T]$$

adică :

$$C_2 v_2[nT] = C_2 v_2[(n-1)T] - C_1 v_1[(n-1)T]$$

Se observă că semnalele descrise  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $v_1$  și  $v_2$  pot fi considerate ca și semnale în timp discret. Aplicînd în ultima relație transformata z unilaterală se obține :

$$C_2 V_2(z/T) = (C_2/z) V_2(z/T) - (C_1/z) V_1(z/T)$$

Sistemul în timp discret descris de semnalele  $v_1, v_2, q_1, q_2$  prezentate mai sus este un sistem liniar și invariant în timp. De aceea se poate vorbi despre funcția sa de transfer. Pe baza ultimei relații expresia acesteia este :

$$\frac{V_2(z/T)}{V_1(z/T)} = \frac{-(C_1/C_2)}{z(1-1/z)}$$

Dacă se admite că sistemul în timp discret descris astfel a fost obținut din sistemul în timp continuu considerat pe baza metodei de echivalare care presupune invarianța răspunsului la impuls, atunci se poate exprima pornind de la ultima relație, funcția de transfer a sistemului liniar și invariant în timp continuu echivalat.

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{V_2(z/T)}{V_1(z/T)} \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{-(C_1/C_2)e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}$$

Pentru banda de frecvențe în care este satisfăcută condiția :

$$|sT| \ll 1, \quad s = j\omega \quad (5.11)$$



este valabilă aproximarea :

$$e^{-sT} = 1 - sT$$

și expresia funcției de transfer devine :

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-(C_1/C_2)e^{-sT}}{sT} \quad (5.12)$$

În acest caz modulul răspunsului în frecvență al sistemului considerat este :

$$|H(\omega)| = \frac{(C_1/C_2)}{|\omega|T} = \frac{1}{|\omega|(C_2/C_1)T}$$

Avînd în vedere că  $T$  este perioada semnalului cu care se comandă comutatorul  $K$  și notînd cu  $f_c$  frecvența corespunzătoare acestei perioade , ultima relație se mai scrie:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega| \cdot [1/(f_c C_1)] C_2}$$

Modulul răspunsului în frecvență al unui integrator clasic ( de tipul celui din figura 5.7) este :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega| \cdot R_1 C_2}$$

Prin identificarea ultimelor două relații se obține egalitatea :

$$R_1 = \frac{1}{f_c C_1}$$

Deci integratorul cu capacități comutate poate fi echivalat (în limitele în care metoda de echivalare a sistemelor în timp continuu cu sisteme în timp discret are erori acceptabile și pentru frecvențe în banda descrisă de relația (5.11) ) cu un integrator clasic a cărui rezistență  $R_1$  este o funcție de frecvență (de valoare  $f_c$ ). Circuitele integratoare fac parte din structura unor filtre active ca de exemplu filtrul activ universal sau filtrele

de tip " leap-frog" , [Hue.,All.'86].

În cazul primului exemplu valoarea  $R_1$  intră în calculul frecvenței centrale a filtrului trece bandă realizat.

Structură unui filtru activ universal este prezentată în figura 5.9.

Dacă amplificatoarele operaționale se consideră ideale atunci ieșirea de tip trece bandă a filtrului este caracterizată de funcția de transfer :

$$H(s) = \frac{2\frac{R}{R_1}A_0s}{s^2 + 2\frac{R}{R_1}A_0s + \omega_0^2}$$

unde:

$$A = -R_2/R ; \quad Q = (R + R_2)/(2R) ; \quad \omega_0 = 1/(R_1 \cdot C_2)$$

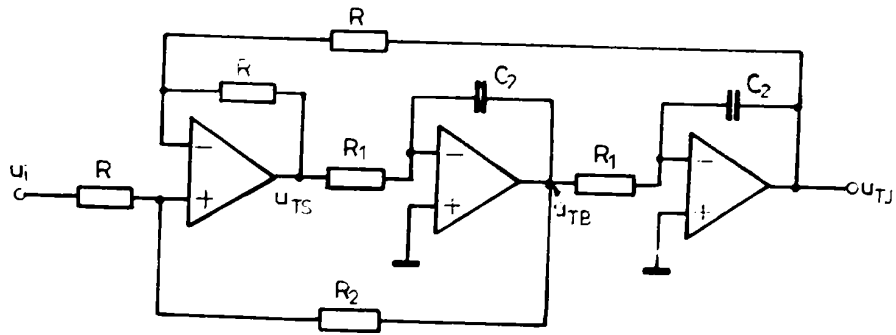


Figura 5.9. Schema unui filtru activ universal.

Varianta cu capacități comutate a filtrului activ universal este prezentată în figura 5.10.

Ecuatiile care descriu funcționarea circuitului se pot scrie pe baza relației (5.12) astfel:

$$\frac{U_{TJ}(s)}{U_{TB}(s)} = \frac{-(C_1/C_2) e^{-sT}}{sT}$$

$$\frac{U_{TB}(s)}{U_{TS}(s)} = \frac{-(C_1/C_2) e^{-sT}}{sT}$$

$$\frac{u_{TS}(t) - u_{TJ}(t)}{2R} R + u_{TJ}(t) = \frac{u_{TB}(t) - u_i(t)}{R + R_2} R + u_i(t)$$

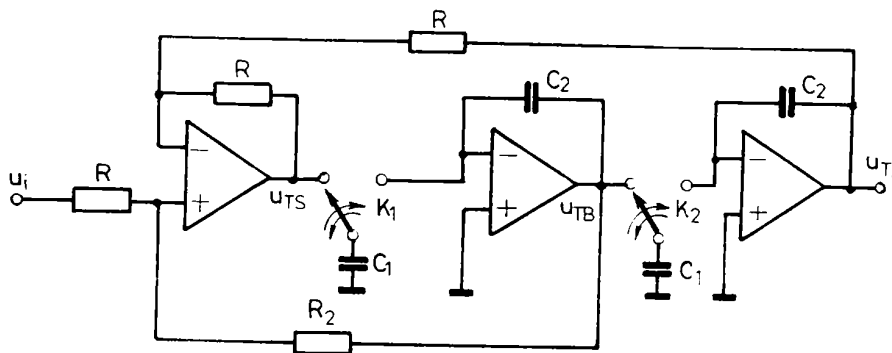


Figura 5.10. Schema unui filtru universal realizat cu circuite cu capacități comutate.

Luând transformarea Laplace în ambii membri ai ultimei ecuații și exprimând  $U_{TJ}(s)$  și  $U_{TS}(s)$  în funcție de  $U_{TB}(s)$  pe baza aproximărilor prezentate mai sus se obține următoarea expresie a funcției de transfer :

$$H(s) = \frac{-2R_2/(R+R_2) [(1/T)(C_1/C_2)]s}{s^2 + 2s[(R/(R+R_2))(1/T)(C_1/C_2)] + [(1/T)(C_1/C_2)]^2}$$

Se constată că este vorba despre un filtru trece bandă de ordinul 2 cu următorii parametrii :

$$A = -(R_2/R) ; \quad \xi = R/(R+R_2) \quad \text{și} \quad \omega_0 = (C_1/C_2)f_c$$

Deci frecvența centrală a filtrului trece bandă obținut este proporțională cu frecvența de comutație a comutatoarelor. Pentru realizarea unui filtru trece bandă de ordinul 2 cu urmărire este necesară construcția unui circuit care să genereze semnalul de comandă al comutatoarelor în așa fel încât să fie îndeplinită condiția:

$$2\pi f = (C_1/C_2)f_c$$

unde s-a notat cu  $f$  frecvența instantanee a semnalului de preluat. Un astfel de circuit, poate fi un multiplicator de frecvență realizat cu un circuit P.L.L. Parametrii unui filtru cu urmărire construit în acest mod sînt: amplificarea  $A$ , factorul de calitate  $Q$ , banda de urmărire  $B_u$ , viteza de urmărire  $v_u$  și sensibilitatea de calare  $S_c$ . Un exemplu de filtru cu urmărire construit în acest mod precum și performanțele sale sînt prezentate în [Isa.'91].

#### 5.2.4. Filtre cu urmărire construite folosind filtre numerice

În continuare se prezintă un filtru cu urmărire de tip transversal. În figura 5.11, este desenată forma canonică de implementare a unui astfel de sistem. Blocurile marcate cu  $\tau$  realizează întârzierea semnalului de la intrarea lor cu această cantitate. Considerînd că se folosesc  $N-1$  linii de întârziere, expresia răspunsului în frecvență al sistemului din figură este:

$$H(\omega) = (1/N) e^{-j\omega(N-1)\tau/2} \frac{\sin(N\omega\tau/2)}{\sin(\omega\tau/2)} \quad (5.13)$$

Se observă că  $H(\omega)$  este o funcție periodică de  $\omega$ . În figura 5.12 este prezentată schema bloc a unui filtru transversal construit cu ajutorul unui filtru numeric.

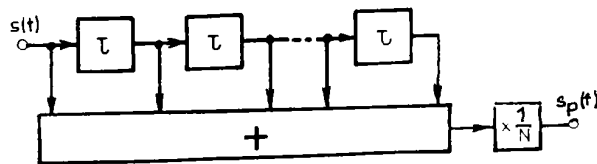
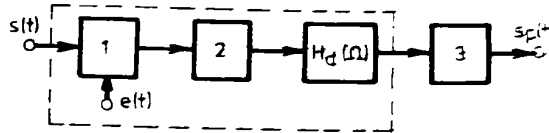


Figura 5.11. Forma canonică de implementare a unui filtru transversal.



1. circuit de eșantionare și memorare , 2. convertor analog numeric . 3 convertor numeric analogic

Figura 5.12. Schema bloc a unui filtru transversal construit cu ajutorul unui filtru numeric.

Semnalul de comandă al eșantionării  $e(t)$  (semnal dreptunghiular cu factor de umplere mic și cu perioada  $T_e = T/K$ ,  $K \in \mathbb{Z}$  asigură o eșantionare coerentă. Filtrul numeric considerat are răspunsul la impuls :

$$h_d[n] = (1/N) \{ \delta[n] + \delta[n-K] + \delta[n-2K] + \dots + \delta[n-(N-1)K] \}$$

și răspunsul în frecvență :

$$H_d(\Omega) = (1/N) e^{-j(N-1)QK/2} \frac{\sin(NQK/2)}{\sin(QK/2)}$$

Răspunsul în frecvență al sistemului analogic echivalent pentru sistemul din figura 5.12 este conform [Opp., Wil., '85],  $H_e(\omega T_e)$ . Avînd în vedere faptul că răspunsul la impuls al convertorului numeric analogic este :

$$h_3(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_e)$$

rezultă că răspunsul în frecvență al sistemului echivalent celui din figura 5.12. este:

$$H_e(\omega) = S_p(\omega)/S(\omega) = (1/N) e^{-j(N-1)K\omega T_e/2} \frac{\sin(NK\omega T_e/2)}{\sin(K\omega T_e/2)} e^{-j\omega T_e/2} \quad (5.14)$$

Comparînd relațiile (5.13) și (5.14) se constată că pentru  $\omega = \omega_0$  și pentru  $K$  de valori mari,  $|H_e(\omega)|$  este o bună aproximare pentru  $|H(\omega)|$ .

Analiza făcută se bazează pe ipoteza de coerență a eșantionării ( $K$  - constant). Dacă semnalul de intrare are frecvența instantanee variabilă în timp, iar  $T_e$  este constant, condiția de coerență :

eșantionării nu mai este respectată .  
 În [Isa.'92 1] se analizează cazul în care se eșantionează semnale modulate în frecvență . Concluzia obținută este că erorile de eșantionare sînt minime dacă se eșantionează cu pasul  $T_e$  variabil ,  $2/T_e$  fiind o funcție de timp identică cu  $\omega_1(t)$  ( unde s-a notat cu  $\omega_1(t)$  pulsația instantanee a semnalului care se eșantionează ). Utilizînd acest mod de eșantionare , constanta  $T_e$  din relația (5.14) se înlocuiește cu funcția de timp  $T_e(t)$  și răspunsul  $H_e(\omega)$  devine particularizarea unei funcții de transfer de tip Zadeh,  $H_e(\omega, t)$ . Această expresie caracterizează global , comportarea în domeniul frecvență a filtrului cu urmărire considerat. În continuare se prezintă construcția unui astfel de filtru precuz și rezultatele obținute în urma utilizării sale. Scopul propus este îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot al semnalului  $s(t)$  cu graficul din figura 5.13 a). Acesta este un semnal modulat în amplitudine prin modulație de produs folosindu-se un semnal purtător sinusoidal și un semnal modulator dreptunghiular. Raportul dintre perioada semnalului modulator și perioada semnalului purtător este 12.

$$\omega_m = \omega_p / 12 = 2\pi / T$$

Pulsația instantanee a semnalului purtător scade lent de la valoarea  $2\pi \cdot 864$  rad/s la valoarea  $2\pi \cdot 480$  rad/s.

Pulsația instantanee a semnalului modulator urmărește pulsația instantanee a semnalului purtător respectîndu-se la orice moment de timp ultima relație scrisă . În figura 5.13 b) este prezentat spectrul instantaneu al semnalului  $s(t)$  .

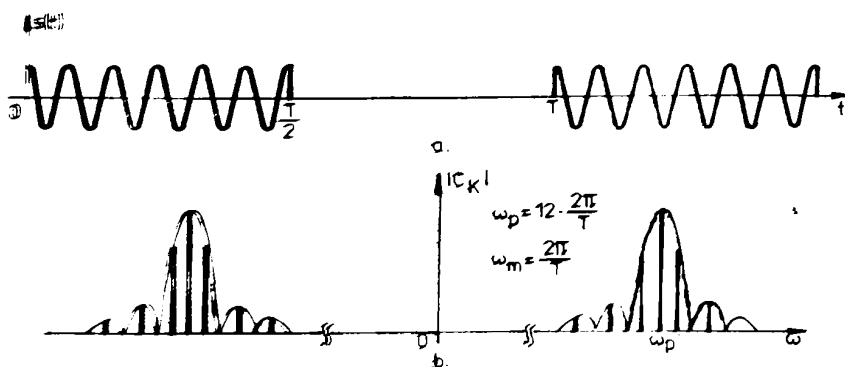


Figura 5.13. Caracterizarea instantanee a semnalului  $s(t)$  a) în domeniul timp b) în domeniul frecvență .

Schema filtrului cu urmărire este prezentată în figura 5.14.

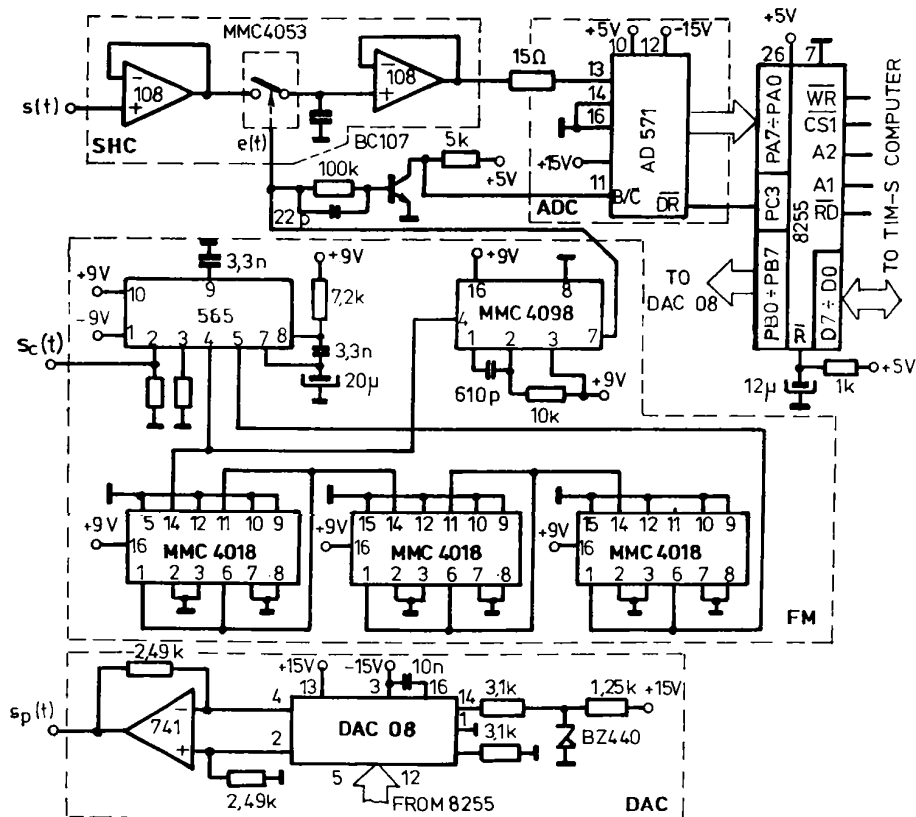


Figura 5.14. Schema filtrului cu urmărire realizat.

Cu ajutorul buclei P.L.L. (BE 565) și a numărătoarelor (MMC 4018) s-a realizat un multiplicator de frecvență (FM) care prin intermediul monostabilului MMC 4098 generează semnalul de comandă a eșantionării  $e(t)$ . Perioada acestui semnal,  $T_e$ , este legată de perioada  $T$  a semnalului modulator prin relația :

$$T_e(t) = \frac{T(t)}{12 \cdot 18}$$

Eșantionarea cu memorare a semnalului  $s(t)$  este efectuată în blocul (SHC) cu ajutorul celor două amplificatoare operaționale de tipul 108, a comutatorului MMC 4053 și a condensatorului. Conversia analog numerică este realizată cu ajutorul circuitului

specializat AD 571 , folosindu-se cei mai semnificativi opt biți. Filtrul numeric este realizat cu ajutorul unui calculator de tip TIM-S. Conversia numeric analogică este realizată în blocul DAC , construit cu ajutorul convertorului numeric analogic DAC-08. Comunicația celor două convertoare (numeric analogic și analog numeric ) cu calculatorul TIM-S este realizată prin intermediul circuitului 8255.

În figura 5.15 se prezintă ordinograma programului de filtrare numerică.

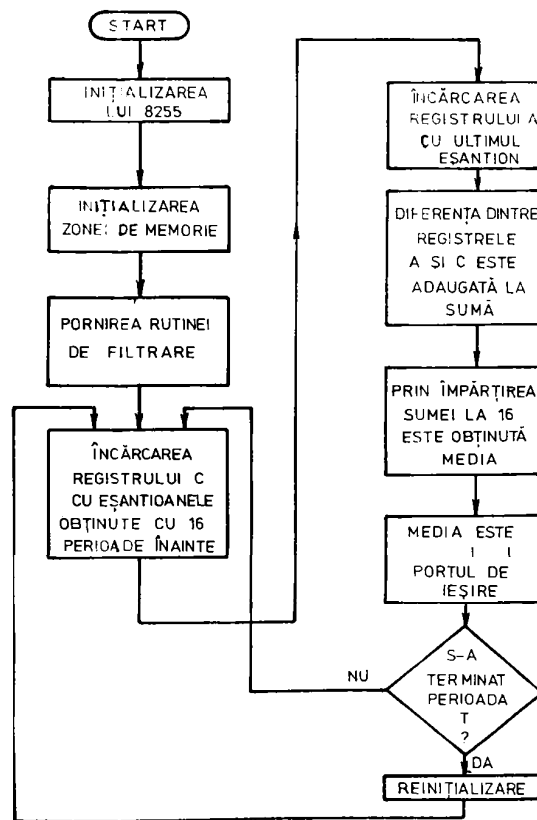
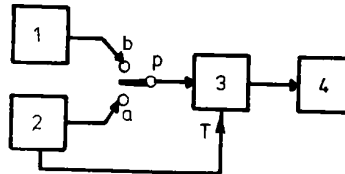


Figura 5.15. Ordinograma programului de filtrare adaptivă .

Valoarea constantei N (numărul liniilor de întârziere din figura 5.12 este N-1) poate fi aleasă cu ajutorul tastaturii calculatorului din mulțimea  $\{ 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \}$ .



Filtrul realizat a fost testat folosind montajul din figura 5.16.



1.-generator de zgomot alb.2-generatorul semnalului  $s(t)$  , p-comutator cu două poziții .3 -filtru testat .4-detector de valoare efectivă adevărată

Figura 5.16. Montajul de test al filtrului realizat.

Testele au fost realizate pentru semnale generate de blocul 2 cu  $\omega_p = 2\pi \cdot 864$  ,  $\omega_p = 2\pi \cdot 720$  ,  $\omega_p = 2\pi \cdot 600$  și  $\omega_p = 2\pi \cdot 480$  rad/s. Indiferent de valoarea aleasă pentru  $N$  , de fiecare dată când  $p$  a fost pe poziția a , s-a obținut aceeași valoare efectivă a semnalului de la ieșirea blocului 3. De aceea pentru determinarea îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot este suficientă determinarea proporției în care a scăzut puterea zgomotului de la ieșire față de puterea zgomotului de la intrare (comutatorul  $p$  conectat în poziția b).

Dependența de  $N$  a îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot introdusă de filtrul cu urmărire poate fi dedusă pe baza graficului din figura 5.17.

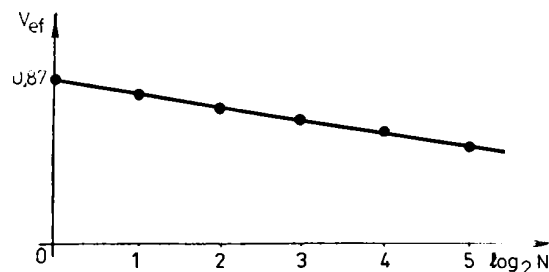


Figura 5.17 Dependența valorii efective a zgomotului de la ieșirea circuitului testat , de valoarea constantei  $N$ .

Pentru celelalte valori ale lui  $\omega_p$  se obține o îmbunătățire și mai mare a raportului semnal pe zgomot.

#### 5.2.5. Concluzii

În acest capitol au fost prezentate câteva proprietăți ale filtrelor adaptive destinate prelucrării semnalelor nestaționare. Avînd în vedere interesul tot mai mare pentru măsurarea acestor semnale, explicat de utilizarea lor tot mai frecventă, în structura aparatelor de măsurare numerice moderne astfel de filtre adaptive se folosesc tot mai frecvent. Filtrele cu urmărire prezentate în paragrafele 5.2.3. și 5.2.4. au fost utilizate la îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot al semnalelor utilizate la măsurarea poziției unor ținte. Ele pot fi de asemenea utilizate și la prelucrarea altor semnale nestaționare, de exemplu în structura unei mașini de echilibrat, sau în prelucrarea muzicii. Metoda de eșantionare prezentată în paragraful 5.2.4. este una adaptivă. Contribuțiile originale ale autorului prezentate în acest paragraf sînt:

- definirea filtrului cu urmărire și plasarea sa în categoria filtrelor adaptive destinate prelucrării semnalelor nestaționare
- definirea noțiunilor de caracteristică momentană, respectiv caracteristică globală,
- evidențierea legăturii dintre filtrele cu urmărire și transformarea undișoară în timp continuu precum și descrierea consecințelor acestei legături,
- fundamentarea metodei de măsurare a frecvenței instantanee pe baza detectării valorilor maxime ale reprezentării tridimensionale de tip undișoară în timp continuu,
- determinarea proprietăților filtrelor cu urmărire,
- demonstrarea acestor proprietăți pe cazul unui filtru cu urmărire de tip trece bandă de ordinul 2,
- evidențierea acestor proprietăți pe baza analizei experimentale a unui filtru cu urmărire cu capacități comutate construit de autor,
- elaborarea metodei de echivalare a filtrelor transversale cu urmărire cu sisteme liniare și invariante în timp continuu pe baza utilizării filtrelor numerice,
- proiectarea și experimentarea filtrelor descrise în paragrafele 5.2.3. și 5.2.4.

În viitor rezultatele prezentate în acest capitol pot fi utilizate la studiul filtrelor numerice cu urmărire. De asemenea este

interesantă analiza filtrelor cu capacități comutate de tip leap-frog.

O preocupare de perspectivă este și utilizarea filtrelor comandate, la calculul reprezentării tridimensionale de tip undișoară în timp continuu a unor semnale. De asemenea este interesantă utilizarea acestor filtre în scopul măsurării frecvenței instantanee a unor semnale nestaționare.

## 6. Metode de măsurare a frecvenței instantanee

Măsurarea frecvenței instantanee a semnalelor nestaționare nu poate fi realizată decât în mod adaptiv datorită faptului că acest parametru este variabil în timp.

În capitolele 4 și 5 a fost relevată importanța cunoașterii acestui parametru. În acest capitol se prezintă câteva tehnici moderne de măsurare adaptivă a frecvenței instantanee.

### 6.1. Definirea conceptului de frecvență instantanee

Unul dintre parametrii unui semnal nestaționar este frecvența sa instantanee. Considerînd semnalul nestaționar  $x(t)$  se definește semnalul analitic asociat acestuia  $x_a(t)$  cu formula:

$$x_a(t) = x(t) + jH\{x(t)\}$$

unde cu  $H\{x(t)\}$  s-a notat transformata Hilbert a semnalului  $x(t)$ . Această transformare este definită astfel:

$$H\{x(t)\} = x(t) * [(1/\pi) \cdot \text{V.P.}\{1/t\}]$$

Cel de-al doilea termen al produsului de convoluție din membrul drept al relației de mai sus reprezintă răspunsul la impuls al unui transformator Hilbert. Răspunsul în frecvență al acestui transformator este :

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega$$

De aceea legătura dintre transformatele Fourier ale semnalelor  $x(t)$  și  $H\{x(t)\}$  este :

$$F\{H\{x(t)\}\} = -j \cdot \operatorname{sgn} \omega F\{x(t)\}$$

iar legătura dintre transformatele Fourier ale semnalelor  $x(t)$  și  $x_a(t)$  este :

$$F\{H\{x_a(t)\}\} = \begin{cases} 2F\{H\{x(t)\}\} & , \text{ ptr. } \omega \geq 0 \\ 0 & , \text{ ptr. } \omega < 0 \end{cases}$$

Se numește anvelopa semnalului  $x(t)$  , funcția  $|x_a(t)|$ .

Se numește fază instantanee a semnalului  $x(t)$  , funcția  $\arg\{x_a(t)\}$ .

Se numește pulsație instantanee a semnalului  $x(t)$  , funcția:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \{ \arg\{x_a(t)\} \} \quad (6.1)$$

### 6.2. Estimarea frecvenței instantanee a unui semnal pe baza definiției

Eșantionînd cu pas unitar semnalul analitic asociat semnalului  $x(t)$  se obține secvența complexă  $x_a[n]$ . Denumind argumentul acestei secvențe:

$$\phi[n] = \arg\{x_a[n]\}$$

se poate exprima formula echivalentă în timp discret a formulei (6.1):

$$\hat{f}_i[n] = \frac{1}{c} (\phi[n+1] - \phi[n-1]) \quad (6.2)$$

ținînd seama de corespondența dintre transformarea Hilbert din timp discret și din timp continuu. Indicele  $c$  folosit în membrul stîng al relației (8) indică faptul că această estimare ( $\hat{f}_i[n]$ ) a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  este bazată pe utilizarea diferenței finite centrate de ordinul I a argumentului secvenței  $x_a[n]$ :

$$\Delta_c\{\phi[n]\} = \frac{1}{2} (\phi[n+1] - \phi[n-1])$$

De aceea estimatorul frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  definit de relația (6.2) se mai numește și estimator cu diferență centrată.

Alți estimatori ai frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  se pot defini pe baza diferențelor finite înainte:

$$\Delta_f\{\phi[n]\} = \phi[n+1] - \phi[n]$$

sau înapoi:

$$\Delta_b\{\phi[n]\} = \phi[n] - \phi[n-1]$$

Aceștia sînt: estimatorul cu diferență înainte,  $\hat{f}_i[n]$  și estimatorul cu diferență înapoi,  $\hat{f}_i[n]$ . Expresiile lor sînt:

$$\hat{f}_i [n] = \left( \frac{1}{f} \right) (\phi[n+1] - \phi[n]) \quad (6.3)$$

și:

$$\hat{f}_i [n] = \left( \frac{1}{b} \right) (\phi[n] - \phi[n-1]) \quad (6.4)$$

Din relațiile (6.2), (6.3) și (6.4) se constată că:

$$\hat{f}_i [n] = \frac{\frac{\hat{f}_i [n]}{f} + \frac{\hat{f}_i [n]}{b}}{2}$$

În [Boa., O'Sh., Arn.' 90] se propune un estimator generalizat al frecvenței instantanee a semnalului nestaționar  $x(t)$  inspirat din ultima formulă:

$$\hat{f}_i [n+p] = \left( \frac{1}{g} \right) \sum_{k=0}^{2p} b_k \cdot \phi[n+k] \quad (6.5)$$

Estimatorul definit de relația (6.5) este nepolarizat pentru semnale  $x(t)$  modulate în frecvență cu modulator cu lege de variație polinomială de grad mai mic sau egal cu  $2p$ . Analizând relația (6.5) se constată faptul că:

$$\text{pentru } p = 1, b_0 = -0,5, b_1 = 0 \text{ și } b_2 = 1 ; \hat{f}_i [n] = \hat{f}_i [n]$$

$$\text{pentru } p = 1, b_0 = 0, b_1 = -1 \text{ și } b_2 = 1 ; \hat{f}_i [n] = \hat{f}_i [n]$$

În [Boa., O'Sh., Arn.' 90] sînt tabelate valorile coeficienților  $b_k$  pentru semnale  $x(t)$  modulate în frecvență cu semnal modulator cu lege de variație în timp polinomială cu grad mai mic sau egal cu 4.

Pentru a fi posibilă estimarea frecvenței instantanee pe baza definiției este deci necesară eșantionarea semnalului  $x(t)$  care conduce la obținerea secvenței  $x[n]$ , calculul transformatei Hilbert a acestei secvențe (transformatoare Hilbert în timp

discret foarte precise pot fi construite cu ajutorul filtrelor cu răspuns finit la impuls), calculul argumentului semnalului analitic asociat secvenței  $x[n]$ ,  $\phi[n]$  și utilizarea uneia dintre formulele prezentate mai sus.

Metoda de măsurare a frecvenței instantanee descrisă necesită pentru o precizie satisfăcătoare un raport semnal pe zgomot al semnalului  $x(t)$  foarte mare, dispersia estimărilor realizate este mare (deci metoda este imprecisă), dar volumul de calcul necesar este foarte mic în raport cu alte metode de măsurare care vor fi prezentate în continuare.

### 6.3. Utilizarea filtrării numerice în estimarea frecvenței instantanee

Pentru reducerea dispersiei estimărilor realizate folosind metoda descrisă în paragraful anterior poate fi utilizată filtrarea. Dacă deviația de frecvență a semnalului  $x(t)$  este finită, acesta este un semnal de bandă esențială (banda în care se găsește 90% din energia semnalului) limitată, B. De aceea se poate reduce dispersia de estimare a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  pe baza metodei prezentate în paragraful anterior prin creșterea raportului său semnal pe zgomot, realizată prin filtrarea lui  $x(t)$  în banda B. Metoda poate fi îmbunătățită în unele cazuri prin prelucrarea semnalului  $x(t)$  cu un filtru cu urmărire.

O altă posibilitate de scădere a dispersiei estimărilor frecvenței instantanee este filtrarea numerică a estimatorului folosit. Rezultatul este un estimator netezit. Un astfel de estimator a fost propus de Kay sub numele de "estimator cu diferență de fază ponderată" și este exprimat prin formula:

$$\hat{f}_1[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{N-2} w[n-k] (\phi[k+1] - \phi[k])$$

Fereastra alunecătoare  $w[n]$  propusă de Kay este:

$$w[n] = \frac{(3/2)N}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[ \frac{n - (N/2 - 1)}{N/2} \right]^2 \right\}$$

În cazul în care raportul semnal pe zgomot al semnalului  $x(t)$  este suficient de mare, se poate demonstra că prin utilizarea estimatorului Kay (adică prin filtrarea estimatorului  $\hat{f}_1[n]$  se

obține o scădere a dispersiei estimărilor dată de relația:

$$\frac{\sigma_{\hat{f}_i}}{f} = \frac{N(N+1)}{6(N-1)} = \frac{N}{6}$$

Estimatorul lui Kay poate fi calculat recursiv pe baza secvenței  $\phi[n]$ . Valoarea  $N$  trebuie aleasă în concordanță cu viteza de variație a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ . În cazul estimării frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  pe baza metodei descrise în acest paragraf este necesar ca acest semnal să aibă un raport semnal pe zgomot mare, estimările vor avea dispersii relativ mici iar volumul de calcul necesar este încă mic.

#### 6.4. Folosirea filtrării adaptive la estimarea frecvenței instantanee

O tehnică convențională de estimare a frecvenței unui semnal staționar de bandă îngustă este numărarea trecerilor sale prin zero. Frecvența unei sinusoidă este dată de jumătate din inversul valorii intervalului dintre trecerile prin zero:

$$f = \frac{1}{2T_z} = \frac{Z}{2}$$

unde  $T_z$  este valoarea intervalului între trecerile prin zero ale sinusoidă iar  $Z$  este frecvența trecerilor prin zero.  $T_z$  poate fi folosit și ca estimator al frecvenței instantanee a unui semnal  $x(t)$ , nestaționar.

În continuare se presupune că între două treceri consecutive prin zero ale semnalului  $x(t)$  va fi obținut un număr întreg de eșantioane (indiferent de valoarea frecvenței sale instantanee) și anume  $K+1$ , considerînd și valorile nule ale eșantioanelor obținute la momentele la care au loc cele două treceri prin zero considerate. Estimarea frecvenței instantanee bazată pe utilizarea diferențelor finite înainte făcute pe baza acestor eșantioane este dată de relația:



$$\hat{f}_i [k] = \left( \frac{1}{f} \right) (\phi[k+1] - \phi[k])$$

Media aritmetică a acestor estimări este:

$$m = \left( \frac{1}{2\pi K} \right) \sum_{k=0}^{K-1} (\phi[k+1] - \phi[k]) = \left( \frac{1}{2\pi K} \right) (\phi[1] - \phi[0] + \phi[2] - \phi[1] + \dots + \phi[K] - \phi[K-1]) =$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi K} \right) (\phi[K] - \phi[0])$$

Ținînd cont de faptul că diferența de fază între două momente succesive de trecere prin zero ale semnalului  $x(t)$  este  $\pi$  și că momentele corespunzătoare trecerilor prin zero sînt 0 și  $K$ , se constată că:

$$m = \frac{1}{2K}$$

Deci media aritmetică a estimărilor frecvenței instantanee bazată pe utilizarea diferențelor finite ale secvenței  $\phi[n]$  este egală cu estimarea frecvenței instantanee pe baza formulei (6.6) pentru cazul semnalelor în timp discret (cînd  $T_z$ , perioada semnalului în timp continuu  $x(t)$  se transformă în  $K$ , perioada semnalului în timp discret  $x[n]$ ).

Deci estimarea frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  pe baza măsurării trecerilor sale prin zero (care constă în estimarea frecvenței instantanee pe baza determinării lui  $K$ ) este o metodă de estimare pe baza definiției urmată de filtrarea numerică a rezultatelor. De aceea estimatorul obținut în cazul acestei metode este de tipul estimatorului Kay.

Avînd în vedere faptul că în cazul de față filtrarea numerică este o mediere, estimatorul frecvenței instantanee pe baza numărării trecerilor prin zero este caracterizat de o fereastră temporală de forma:

$$w_{t.p.z.}[n] = \begin{cases} 1/K & , & 0 \leq n \leq K \\ 0 & , & \text{în rest} \end{cases}$$

care alunecă peste secvența  $\hat{f}_i [n]$  cu un pas egal cu  $K$ .

În cazul în care intervalul între trecerile prin zero ale semnalului  $x(t)$  nu este egal cu un multiplu întreg al pasului de eșantionare utilizat, pentru estimarea frecvenței instantanee se poate folosi formula:

$$\hat{f}_i [k] = \frac{1}{2K[k]} \quad \text{t.p.z.}$$

unde  $k$  este indicele perioadei considerate din semnalul  $x(t)$  iar  $K[k]$  reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu numărul eșantioanelor din intervalul dintre primele două treceri prin zero succesive ale semnalului  $x(t)$  din cadrul perioadei considerate (acest număr este egal cu raportul dintre durata semiperioadei considerate și valoarea pasului de eșantionare).

Această metodă de estimare a frecvenței instantanee presupune deci filtrarea semnalului analizat cu ajutorul unui filtru adaptiv. Este vorba de un mediator alunecător realizat cu un filtru cu răspuns finit la impuls a cărui durată se modifică pe parcursul procesului de filtrare, urmărind distanța temporală dintre trecerile prin zero succesive ale semnalului de analizat. Și estimările frecvenței instantanee bazate pe numărarea trecerilor prin zero ale semnalului  $x(t)$  au o dispersie mare dacă acest semnal este afectat semnificativ de zgomot (raportul său semnal pe zgomot este mic).

În scopul reducerii acestei dispersii Rabiner și Schaefer au propus estimarea frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  pe baza numărării trecerilor prin zero ale semnalului  $\tilde{x}(t)$  obținut prin trunchierea semnalului  $x(t)$  prin înmulțirea acestuia cu o fereastră temporală dreptunghiulară de lungime  $MT_e$  (unde cu  $T_e$  s-a notat durata pasului de eșantionare).

Estimatorul frecvenței instantanee propus de ei este definit de relația:

$$\hat{f}_i [n] = \frac{1}{RS} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\text{sgn}\{x[m]\} - \text{sgn}\{x[m-1]\}| w[n-m] \quad (6.7)$$

$$\text{unde } w[n] = \begin{cases} 1/(2M) & , & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & , & \text{în rest} \end{cases}$$

Din analiza membrului drept al relației (6.7) se constată că acesta exprimă numărul mediu al trecerilor prin zero ale semnalului  $x[n]$  în cadrul ferestrei  $w[n]$ . Și această fereastră este alunecătoare, dar pasul de alunecare este 1.

### 6.5 Măsurarea frecvenței instantanee cu ajutorul reprezentărilor timp-frecvență

Reprezentările timp-frecvență ale unui semnal nestaționar pot fi folosite pentru estimarea legii de variație în timp a frecvenței instantanee a acestuia. De exemplu reprezentarea timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă poate fi utilizată în acest scop conform [Hla., Bou. '92]. În aceeași lucrare se arată că și reprezentarea timp-frecvență de tip funcție de incertitudine a fost folosită pentru estimarea frecvențelor instantanee ale semnalelor de tip radar sau sonar.

În aceste aplicații frecvența instantanee reprezintă proiecția pe planul  $(t, f)$  a curbei care unește valorile maxime ale reprezentării timp-frecvență considerate. În [Boa., O'Sh., Arn. '90] se afirmă că acest tip de estimare este optim pentru semnalele modulate în frecvență cu modulator liniar, care au un raport semnal pe zgomot mare sau moderat.

Una dintre reprezentările timp-frecvență care se poate folosi foarte bine pentru estimarea frecvenței instantanee este reprezentarea de tip Wigner-Ville. Fie de exemplu semnalul modulat în frecvență cu modulator liniar:

$$x(t) = \cos(2\pi t^2)$$

Transformarea sa Hilbert este egală cu  $\sin(2\pi t^2)$ . Deci expresia semnalului analitic asociat semnalului  $x(t)$  este:

$$x_a(t) = \cos(2\pi t^2) + j\sin(2\pi t^2) = e^{j2\pi t^2} = e^{j(2\pi t) \cdot t}$$

Se constată că frecvența instantanee a acestui semnal este:

$$f_1(t) = t \tag{6.8}$$

În continuare se demonstrează că reprezentarea timp-frecvență de tip Wigner-Ville a semnalului  $x_a(t)$  are maximele dispuse pe o curbă a cărei proiecție pe planul  $(t, f)$  este dreapta din ecuația (6.8) adică tocmai legea de variație în timp a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ .

Nucleul transformării Wigner-Ville este în acest caz:

$$K_{W-V} \quad x_a(t) \quad (t, \tau) = x_a\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x_a^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = e^{j2\pi t \tau}$$

Transformarea Wigner-Ville a semnalului  $x_a(t)$  este:

$$\begin{aligned} TF_{x_a}^{W-V}(\omega, t) &= F\{e^{j2\pi t \tau}\}(\omega) \stackrel{2\pi t = \omega_0}{=} F\{e^{j\omega_0 \tau}\}(\omega) = \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi\delta(\omega - 2\pi t) \end{aligned}$$

Această distribuție timp-frecvență este reprezentată grafic în figura 6.1.

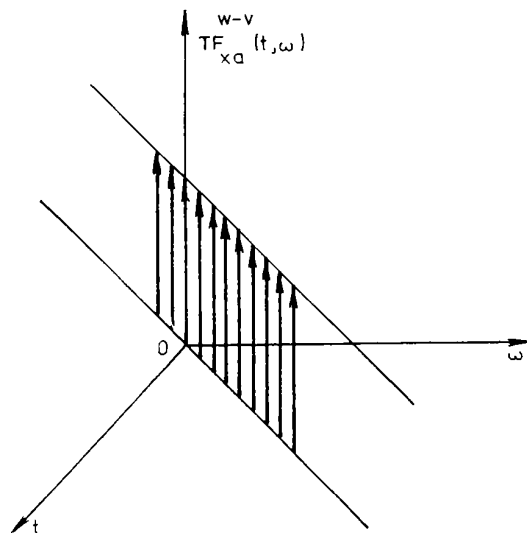


Figura 6.1. Reprezentarea timp-frecvență de tip Wigner-Ville a semnalului descris de relația de mai sus.

E clar că maximele unei reprezentări timp-frecvență trebuie să se găsească pe o curbă a cărei proiecție pe planul  $(\omega, t)$  să fie conținută în suportul reprezentării. Dar în cazul din figura 6.1 suportul se reduce la dreapta  $\omega = 2\pi t$ . De aceea proiecția curbei care unește maximele reprezentării pe planul  $(\omega, t)$  este dată de aceeași ecuație. Dacă modulația de frecvență nu ar fi fost liniară atunci suportul reprezentării timp-frecvență considerate nu ar fi fost o linie ci o anumită zonă a planului  $(\omega, t)$ . Detectarea curbei care unește maximele reprezentării timp-frecvență a semnalului a cărui frecvență instantanee se estimează este cu atât mai ușor de efectuat cu cât aceste maxime sînt mai proeminente. Proeminența maximelor este cu atât mai evidentă cu cât reprezentarea timp-frecvență este mai concentrată în jurul curbei care le unește.

O măsură a gradului de concentrare este și valoarea ariei suportului reprezentării timp-frecvență într-o zonă semnificativă a planului  $(\omega, t)$  de suprafață finită. Utilizînd această măsură poate fi aleasă din mulțimea reprezentărilor timp-frecvență, în scopul estimării frecvenței instantanee a unui semnal, aceea care are cel mai mare grad de concentrare.

Este clar că pentru cazul semnalelor armonice modulate în frecvență cu semnale liniar variabile în timp, distribuția cu cel mai mare grad de concentrare este distribuția Wigner-Ville. De aceea se afirmă în [Boa., O'Sh., Arn.'90] că metoda de extragere a vîrfurilor distribuției Wigner-Ville conduce la un estimator optimal al frecvenței instantanee a semnalelor modulate în frecvență cu modulator liniar variabil în timp, care au raport semnal pe zgomot mare.

Problema poate fi formulată și într-un cadru ceva mai general. Dacă expresia analitică a semnalului  $x(t)$  este:

$$x(t) = \cos(\phi(t)) \quad (6.9)$$

atunci:

$$x_a(t) = e^{j\phi(t)}$$

iar:

$$W_{x_a}^{W-V}(t, \tau) = e^{j[\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)]} \quad (6.10)$$

Dar  $\phi(t)$  reprezintă chiar faza instantanee a semnalului modulat în frecvență  $x(t)$ . Înlocuind derivata din relația de definiție a pulsației instantanee cu raportul diferenței dintre fazele in-

stantanee la momentele  $(t+\tau/2)$  și  $(t-\tau/2)$  și diferența acestor momente (deci aproximînd derivata, care este o limită, cu expresia a cărei limită o reprezintă aceasta) se obține pentru frecvența instantanee estimarea:

$$\hat{f}_i(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \cdot \frac{\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)}{\tau}$$

Acest estimator este numit estimatorul frecvenței instantanee cu diferență finită centrată.

În cazul în care modulația de frecvență a semnalului  $x(t)$  este cu modulator liniar variabil în timp, se poate scrie:

$$\phi(t) = a \cdot t^2$$

Pe baza relației (6.9) se constată că:

$$\hat{f}_i(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a(2\tau)}{\tau} = \frac{a}{\pi} t$$

adică estimatorul nu depinde de variabila  $\tau$  și este egal cu

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ adică cu adevărata valoare a frecvenței instantanee.}$$

Pe baza relației (6.9) nucleul distribuției Wigner-Ville asociată semnalului  $x_a(t)$  devine:

$$K_X^{W-V}(t, \tau) = e^{j2\pi \hat{f}_i(t, \tau) \tau}$$

Dar dacă semnalul  $x(t)$  este modulat în frecvență cu modulator liniar variabil în timp, atunci, se constată că estimatorul (care în acest caz este identic cu parametrul de estimat) nu depinde de  $\tau$  și că semnalul MF este transformat într-o sinusoidă  $K_X(t, \tau)$ .

De aceea distribuția Wigner-Ville asociată semnalului  $x_a(t)$  care se obține prin calculul transformării Fourier a nucleului în raport cu variabila  $\tau$  este:

$$TF_X^{W-V}(t, \tau) = F\{e^{j2\pi \hat{f}_i(t, \tau) \tau}\} = 2\pi \delta(\omega - 2\pi \hat{f}_i(t))$$

După cum se vede din această relație transformarea Fourier a nucleului conduce în mod natural la un șir de distribuți Dirac al căror suport descrie legea de variație a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  considerat. Această afirmație nu este valabilă în cazul semnalelor modulate în frecvență cu raport semnal pe zgomot mic (și modulator liniar) sau cu raport semnal pe zgomot mare dar cu modulator neliniar (ca lege de variație în timp). Pentru cazul semnalelor  $x(t)$  modulate în frecvență cu raport semnal pe zgomot mare, dar cu semnal modulator cu lege de variație în timp polinomială, cu grad  $2m$  mai mare decât 1 se poate utiliza distribuția Wigner-Ville generalizată, asociată semnalului analitic al lui  $x(t)$ :  $x_a(t)$ . În acest caz legea de variație a fazei instantanee a semnalului  $x(t)$  este:

$$\phi(t) = Q_{2m}(t) \cdot t$$

iar expresia acestui semnal devine:

$$x(t) = \cos(\phi(t)) = \cos(Q_{2m}(t) \cdot t)$$

Semnalul analitic asociat acestui semnal este:

$$x_a(t) = e^{j\phi(t)} = e^{j[Q_{2m}(t) \cdot t]}$$

Nucleul transformării Wigner-Ville generalizate asociate lui  $x_a(t)$  pentru  $p=m$  are forma:

$$K_X^{W-V} (t, \tau) = \prod_{k=1}^p (x_a(t+c_k\tau))^{b_k} (x_a^*(t+c_{-k}\tau))^{-b_{-k}} =$$

$$= \prod_{k=1}^p e^{j \cdot b_k \phi(t+c_k\tau)} \cdot e^{j \cdot b_{-k} \phi(t+c_{-k}\tau)}$$

sau :

$$K_X^{W-V} (t, \tau) = \prod_{k=1}^p e^{j \cdot [ b_k \phi(t+c_k\tau) + b_{-k} \phi(t+c_{-k}\tau) ]} \quad (6.11)$$

adică:

$$K_X^{W-V} (t, \tau) = e^{j(\sum_{k=1}^p (b_k \phi(t+c_k\tau) + b_{-k} \phi(t+c_{-k}\tau)))}$$

Ultima relație se mai poate scrie:

$$K_{x,a}^{W-V}(t,\tau) = e^{j(\sum_{k=-m, k \neq 0}^m b_k \phi(t+c_k \tau))}$$

Fie un estimator al frecvenței instantanee de forma:

$$\hat{f}_i(t,\tau) = \frac{1}{2m} \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m b_k \phi(t+c_k \tau)$$

Dacă se face o bună alegere a constantelor  $b_k$  și  $c_k$   $k \in \{-m, -m+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, m-1, m\}$  atunci se poate ca membrul drept al relației (6.11) să fie independent de  $\tau$  și egal cu  $Q_{2m}(t) + tQ'_{2m}(t)$  care reprezintă tocmai legea de variație temporală a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ . Considerînd că alegerea coeficienților  $b_k$  și  $c_k$  a fost făcută corect, expresia nucleului devine:

$$K_{x,a}^{W-V}(t,\tau) = e^{j2\pi \hat{f}_i(t)\tau}$$

Reprezentarea timp-frecvență de tip Wigner-Ville generalizată devine acum:

$$TF_{x,a}^{W-V}(\omega,t) = F\{e^{j2\pi \hat{f}_i(t)\tau}\} = 2\pi \delta(\omega - 2\pi \hat{f}_i(t))$$

Aceasta este prezentată în figura 6.2.

În practică pentru a putea utiliza calculatoarele numerice în determinarea legii de variație temporale a frecvenței semnalului  $x(t)$  se utilizează transformarea Wigner-Ville generalizată eșantionată.

Din păcate calitatea estimării se degradează semnificativ dacă raportul semnal pe zgomot este mic. Din acest motiv a fost propusă ca și estimator al frecvenței instantanee curba care unește vîrfurile interdistribuției Wigner - Ville,  $ITF_{x,r}(\omega,t)$ .

Nucleul acestei distribuții este:

$$K_{x,r}^{W-V}(t,\tau) = x(t+\tau/2)r^*(t-\tau/2)$$



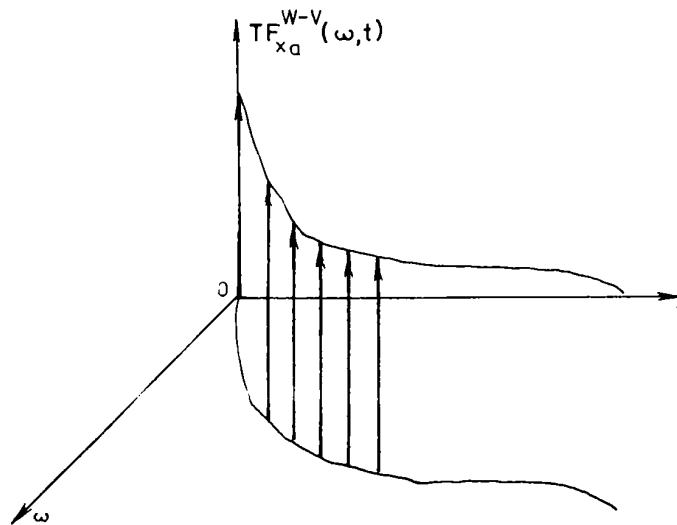


Figura 6.2 Reprezentarea Wigner-Ville a semnalului considerat în ipoteza că s-au ales în așa fel coeficienții  $c_k$  și  $b_k$  încît estimarea să fie independentă de  $\tau$ .

Avînd în vedere că acest nucleu este definit în legătură cu două semnale el este numit al unei interdistribuții. Interdistribuția Wigner -Ville asociată semnalelor  $x(t)$  și  $r(t)$  este :

$$ITF_{x,r}^{W-V}(t,\omega) = F\{K_{x,r}^{W-V}(t,\tau)\}(\omega)$$

Estimatorul frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  propus reprezintă proiecția pe planul  $(\omega, t)$  a curbei care unește vîrfurile interdistribuției Wigner -Ville a semnalelor  $x_a(t)$  și  $r_a(t)$ .

Prima parte a procedurii de estimare constă în estimarea semnalului de referință  $r(t)$ . Acest semnal este de fapt unul construit pe baza unei prime estimări a legii temporale de variație a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ ,  $f_1(t)$ . Semnalul analitic asociat semnalului  $r(t)$  se construiește pe baza estimării  $f_1(t)$  cu formula :

$$r_a(t) = A_T(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \int_{-T/2}^t f_i(\alpha) d\alpha}$$

unde  $A_T(t)$  este un semnal armonic de perioadă  $T$  cu amplitudine unitară.

Este clar că semnalul  $r(t)$  este partea reală a semnalului  $r_a(t)$ . Cel de-al doilea pas al procedurii de estimare este acela în care se calculează  $ITF_{x,r}^{W-V}$ .

Prin determinarea proiecției pe planul  $(\omega, t)$  a curbei ce unește maximele acestei reprezentări se obține estimarea legii de variație a frecvenței instantanee a semnalului,  $\hat{f}$  propusă în legătură cu interdistribuția Wigner - Ville.

O îmbunătățire a acestei metode de estimare a frecvenței instantanee poate consta în reiterarea celor doi pași ai procedurii amintiți mai sus pînă cînd ultima interdistribuție obținută nu se mai deosebește semnificativ de penultima.

Despre metoda estimării frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  pe baza determinării vîrfurilor distribuției Wigner - Ville a semnalului analitic  $x_a(t)$  se poate afirma că necesită un raport semnal pe zgomot foarte mare pentru semnalul  $x(t)$ , că dispersia estimărilor este mică și că necesită un volum de calcul moderat. Despre metoda determinării legii de variație a frecvenței instantanee pe baza utilizării interdistribuției Wigner - Ville se poate afirma că necesită un raport semnal pe zgomot moderat că implică o dispersie mică a estimatelor și că necesită un volum de calcul moderat.

#### 6.6 O nouă metodă de măsurare a frecvenței instantanee a unui semnal nestaționar

Se prezintă o metodă analogică de estimare a frecvenței instantanee bazată pe utilizarea unui filtru cu urmărire.

Un astfel de sistem este prezentat în [Isa.'91].

În esență este vorba despre un filtru trece bandă comandat a cărui frecvență centrală poate fi reglată cu ajutorul frecvenței unui semnal de sincronizare. În cazul în care raportul semnal pe zgomot al semnalului  $x(t)$  este mare chiar acest semnal poate fi folosit drept semnal de generare (prin multiplicare de frecvență folosind un circuit PLL și un numărător) a semnalului de sincronizare. Avînd în vedere că semnalul de sincronizare este sinteti-

zat cu ajutorul unui circuit PLL la ieșirea filtrului trece jos din structura acestuia se obține un semnal al cărui nivel este proporțional cu frecvența instantanee a semnalului  $x(t)$ . În cazul în care se folosește un circuit de tipul  $\beta E 565$  acest semnal este disponibil la borne.

Deci măsurând variațiile nivelului semnalului de la intrarea în oscilatorul local (semnal identic cu cel de la ieșirea filtrului trece jos) al circuitului cu calare de fază din structura unui filtru cu urmărire se obține legea de variație temporală a frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$  atunci când raportul său semnal pe zgomot este mare.

În cazul în care raportul semnal pe zgomot al semnalului  $x(t)$  este foarte mic poate fi realizată o estimare a frecvenței sale instantanee folosind ca intrare de sincronizare în filtrul cu urmărire ieșirea multiplicatorului de frecvență amintit mai sus când la intrarea sa este adus un semnal de tip chirp.

Această conexiune este prezentată în figura 6.3.

La ieșirea sistemului se obține semnalul  $y(t)$ .

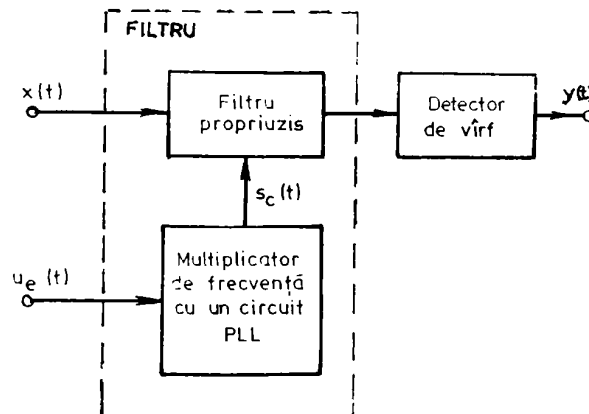


Figura 6.3 Conectarea filtrului cu urmărire pentru estimarea frecvenței instantanee a unui semnal cu raport semnal pe zgomot mic.

Conform [Isa.'91] sau [Isa.,Isa.,Sch.'89] valoarea lui  $y(t)$  va fi maximă atunci cînd frecvențele instantanee ale semnalelor  $x(t)$  și  $s_c(t)$  vor fi identice. Admițînd că legea de variație a frecvenței instantanee a semnalului  $s_c(t)$  este cunoscută pe baza determinării momentelor la care semnalul  $y(t)$  este maxim se pot specifica valori ale eșantioanelor frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ .

Un exemplu de aplicare a metodei descrise este prezentat în figura 6.4.

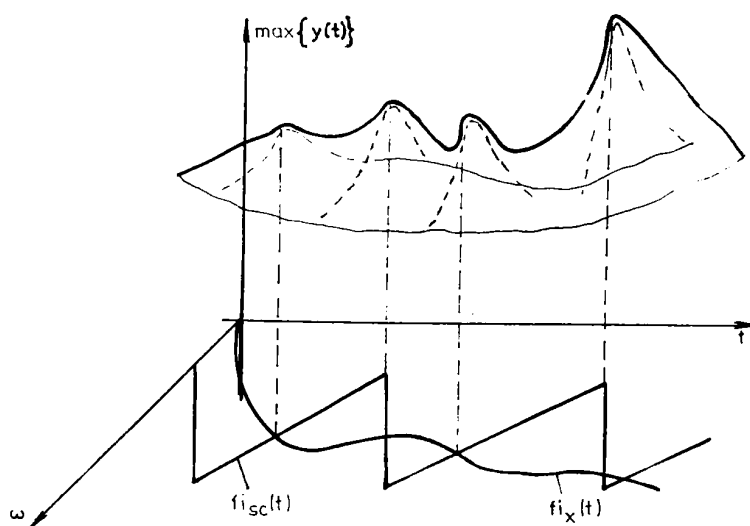


Figura 6.4. Un exemplu de funcționare a circuitului din figura 6.3.

Se constată faptul că proiecțiile vîrfurilor suprafeței care-l descriu pe  $y(t)$  pe planul  $(f, t)$  sînt situate pe curba  $f_{ix}(t)$ . O observație interesantă în legătură cu filtrele cu urmărire este că în regimul de funcționare în care semnalul de sincronizare este generat pornind chiar de la semnalul  $x(t)$  aceste sisteme răspund la semnalul  $x(t)$  cu semnalul  $u(t)$  dat de relația:

$$u(t) = \text{CWT}_x(s, t)$$

unde  $s$  depinde de valoarea frecvenței instantanee a semnalului  $x(t)$ .

De aceea filtrele cu urmărire sînt sisteme multirezoluție, banda caracteristicilor lor momentane modificîndu-se odată cu modifica-

rea frecvenței lor centrale (analiză cu  $Q$  constant) ,  
[Rio.,Vet.,91].

### 6.7. Concluzii

În acest capitol au fost prezentate câteva metode moderne de măsurare a frecvenței instantanee . Acestea sînt metode de măsurare adaptive avînd în vedere că ele se utilizează pentru caracterizarea unor semnale care își modifică parametrii în timp. Scopul urmărit în prezentare a fost descrierea matematică a metodelor considerate.

Contribuțiile originale ale autorului din acest capitol sînt:

- echivalarea metodei de măsurare a frecvenței instantanee bazată pe numărarea trecerilor prin zero ale semnalului de analizat cu o metodă de măsurare care utilizează filtrarea adaptivă.

- elaborarea unei noi metode de măsurare (paragraful 6.6) a frecvenței instantanee care poate fi utilizată cu bune rezultate și în cazul în care raportul semnal pe zgomot al semnalului de măsurat este mic. Această metodă presupune practic detecția vîrfurilor reprezentării tridimensionale de tip undișoară în timp continuu a semnalului de măsurat , și proiecția acestora pe planul  $(\omega, t)$ . Utilizarea transformării undișoară în timp continuu la măsurarea frecvenței instantanee este recomandată și în [Del.,Esc.,Gui.,Kro.,Tch., Tor.' 92].

## 7. Un analizor original în domeniul modulației construit folosind un calculator universal, de tipul IBM-PC-2

În acest capitol se prezintă realizarea unui aparat de măsură numeric adaptiv construit de autor. Scopul său este măsurarea frecvenței instantanee a semnalelor nestaționare. Construcția sa se bazează pe metoda de măsurare descrisă în paragraful 6.4.

Pe lângă toate avantajele sale, analizorul în domeniul modulației realizat de firma HP ( prezentat în [Isa., '92 2] care servește ca și model de referință pentru aparatul descris în acest capitol ) are dezavantajul că fiind un aparat de măsurare dedicat are un preț de cost relativ ridicat. De aceea o soluție alternativă preferată uneori este aceea în care se folosește un calculator universal (care se găsește de obicei în dotarea beneficiarului).

În acest caz prețul plătit pentru a putea realiza analiza în domeniul modulației la beneficiar este mult mai mic nefiind necesară decât cumpărarea unei interfețe (pentru formarea semnalelor pe care trebuie să le achiziționeze calculatorul ) și a unui disc care conține programele necesare funcționării analizorului în domeniul modulației . Bineînțeles performanțele unui astfel de aparat sînt mult mai modeste decât cele ale modelului de referință prezentat, avînd în vedere faptul că utilizează subsisteme de uz general.

### 7.1. Schema bloc a analizorului propus

În figura 7.1 se prezintă schema sistemului realizat.

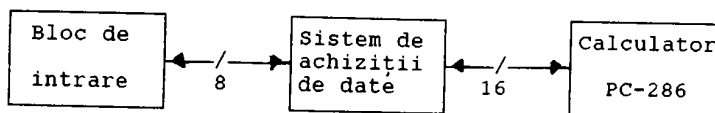


Figura 7.1 Schema bloc a unui sistem de analiză în domeniul modulației construit cu ajutorul unui calculator universal.

Sistemul de achiziții de date folosit este realizat de firma americană Real Time Devices, Inc. în anul 1991, [Ada.'91]. Blocul de intrare este construit în laboratoarele facultății

noastre.

Ca și în cazul sistemului de referință , metoda de măsurare a frecvenței instantanee este cea bazată pe numărarea trecerilor prin zero. Diferența este că în cazul acestui aparat banda de frecvențe în care poate fi măsurată frecvența instantanee este cuprinsă în domeniul 100 Hz-100 KHz.

De asemenea avînd în vedere durata subrutinelor de întreruperi ale microprocesorului din structura calculatorului folosit , care trebuie executate în scopul realizării măsurărilor sau în scopul transferului de date între sistemul de achiziții de date și calculator, durata pasului între estimări consecutive ale frecvenței instantanee nu este egală cu durata perioadei semnalului de intrare pe baza căreia se face următoarea estimare (ca în cazul modelului de referință ) ci cu suma duratelor următoarelor patru perioade consecutive ale semnalului de intrare.

Cu alte cuvinte în cazul aparatului propus estimarea frecvenței instantanee a semnalului de intrare se face prin eșantionarea frecvenței instantanee a semnalului de analizat folosind un pas de eșantionare de aproximativ patru ori mai mare decît în cazul modelului de referință. De aceea sensibilitatea acestui aparat la variațiile bruște ale frecvenței instantanee a semnalului de intrare este mai slabă decît sensibilitatea la aceleași variații ale modelului de referință.

Rolul sistemului de intrare este de a transforma semnalul analogic de intrare într-un semnal logic ale cărui fronturi să marcheze trecerile prin zero ale semnalului analogic considerat. De asemenea acest bloc generează semnale pentru comanda sistemului de achiziții de date și a calculatorului. Rolul sistemului de achiziții de date este de a măsura duratele unor perioade ale semnalului logic amintit mai sus, de a transforma aceste valori în numere și de a permite înregistrarea acestora în memoria calculatorului.

Toate operațiile pe care le execută aparatul sînt controlate de un soft specializat care este încărcat în memoria calculatorului. Pe baza acestor programe sînt inițializate blocul de intrare și sistemul de achiziții de date , are loc un dialog al calculatorului cu aceste subsisteme , sînt executate calculele estimărilor de frecvență instantanee și este realizată afișarea rezultatelor.

## 7.2. Aspecte hard ale construcției sistemului propus

Elementele constructive ale calculatorului folosit care intervin nemijlocit în funcționarea analizorului propus sînt prezentate în [Asz.'92]. Este vorba despre sistemul de întreruperi și despre circuitul numărător/temporizator de tip 8253, folosit pentru realizarea cererii de întrerupere IRQ 0 și pentru reîmprospătarea memoriei dinamice (DRAM) a calculatorului. În aceeași lucrare este prezentat și sistemul de achiziții de date ADA-3100. În anexa 1 este prezentată schema bloc a acestui sistem. Acesta este compus dintr-un canal de intrare a maximum opt semnale analogice din două canale de ieșire analogică, dintr-un canal de intrare cu opt linii de date și un canal de ieșire cu opt linii de date, dintr-un generator de tact programabil bazat pe utilizarea unui oscilator cu cuarț cu frecvența de 5 MHz și dintr-un bloc de numărare / temporizare programabil.

Sistemul de achiziții de date se poate cupla direct pe magistralele de adrese și date ale calculatorului.

Canalul de intrări analogice este compus dintr-un multiplexor cu opt intrări analogice, dintr-un circuit amplificator cu câștig programabil dintr-un circuit de selecție a excursiei maxime a semnalului de intrare dintr-un convertor analog numeric de tipul AD 678 pe 12 biți și cu un timp de stabilizare de 5μs și dintr-o memorie FIFO. La încărcarea completă a acesteia cu datele furnizate de convertorul analog numeric, în urma generării unei întreruperi, conținutul său este transferat în memoria calculatorului. Acest transfer poate fi realizat și prin DMA.

Canalele de ieșire analogică leagă magistrala de date a calculatorului prin intermediul a două convertoare numeric analogice pe 12 biți de tipul AD 7248 pe liniile de ieșire analogică AOUT1 și AOUT 2.

Generatorul de tact programabil folosește semnalul furnizat de oscilatorul cu cuarț sau semnalul de tact extern EXT CLOCK sau semnalul EXT GATE pentru a furniza semnale de control al sistemului de achiziții de date, semnale de control a calculatorului și un semnal de control pe linia TIMER OUT. În acest mod poate fi controlată frecvența de eșantionare a circuitului dedicat acestui scop din structura convertorului analog numeric, sau multiplexorul cu opt intrări.

Cel mai important bloc al sistemului de achiziții de date din punct de vedere al construcției analizorului în domeniul modulației propus este subsistemul de numărare / temporizare. Acesta este compus din două numărătoare programabile



TC1 și TC2 de tipul 82C54 , fiecare alcătuit din trei numărătoare/temporizatoare pe 16 biți care pot lucra la o frecvență de tact de 8 MHz fiind astfel posibilă realizarea mai multor funcții de temporizare și numărare. Două numărătoare/temporizatoare din TC1 sînt legate în cascadă și utilizate pentru generarea tactului. Celălalt numărător/temporizator din TC1 precum și cele trei numărătoare temporizatoare din TC2 pot fi conectate în cascadă prin programare pentru aplicații de temporizare de către utilizator. Structura blocului de numărare/temporizare este prezentată în anexa 2. Utilizînd cuvinte de comandă potrivite, numărătoarele din structura blocurilor TC1 și TC2 pot fi programate în binar sau în cod complementar față de 2. Fiecare dintre aceste șase circuite are două intrări CLK și GATE și o ieșire OUT. Cuvîntul de comandă permite selecția modului de operare al circuitului TC1 sau TC2. Există următoarele șase moduri de operare ale numărătoarelor de tipul 82C54 :

-MODUL 0 : pornirea numărării se face la încheierea programării (după citirea cuvîntului de comandă), întreruperea numărării are loc atunci cînd conținutul numărătorului ajunge la zero.

-MODUL 1 : Declanșarea numărării se realizează cu frontul pozitiv al semnalului de pe intrarea GATE. Întreruperea numărării se face atunci cînd conținutul numărătorului ajunge la zero.

-MODUL 2 : În acest mod numărătorul 82C54 se comportă ca și un generator de impulsuri de tact.

-MODUL 3 : În acest mod circuitul 82C54 se comportă ca și un generator de impulsuri dreptunghiulare cu factor de umplere programabil.

-MODUL 4 : Funcționarea în acest mod este similară cu cea din modul 0 , singura diferență constînd în faptul că semnalul de la ieșirea numărătorului în acest mod este complementar semnalului de la ieșire din modul 0.

-MODUL 5 : Funcționarea în acest mod este similară cu cea din modul 1 , singura diferență constînd în faptul că semnalul de la ieșirea numărătorului este în acest mod complementar semnalului de la ieșire din modul 1. O prezentare detaliată a numărătorului programabil 82C54 este făcută de exemplu în [NEC.,81].

Blocul de intrare este alcătuit dintr-un formator de semnal logic, dintr-un circuit logic combinațional și dintr-un formator de impulsuri de întrerupere . Formatorul de semnal logic generează pe baza semnalului analogic de intrare un semnal TTL a cărui durată este egală cu durata perioadei cerute a semnalului de analizat. "Perioada" acestui semnal logic este egală cu suma a două perioade consecutive ale semnalului de analizat. Schema blocului de intrare este prezentată în anexa 3.

Formatorul de semnal logic (structură identică la intrarea canalelor A și B) este alcătuit dintr-un filtru trece sus cu frecvența de tăiere de 6 Hz, dintr-un comparator cu referința de 0 V și cu impedanța de intrare de 56  $\Omega$  (folosind un circuit de tipul ROB 760) din două monostabile (de tipul CDB 4121) care marchează momentele de basculare ale comparatorului prin impulsuri TTL de durată foarte scurtă (în jur de 40 ns) și din două circuite basculante bistabile (de tipul MH 72S74 și CDB 473). La ieșirea circuitului ROB 760 este conectat un filtru trece jos (prin intermediul comutatorului  $K_1$ , pe care îl vom considera în continuare închis) cu frecvența de tăiere de aproximativ 330 KHz. Pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot al semnalului logic de la ieșirea circuitului ROB 760 au fost luate următoarele măsuri:

- a fost aleasă o impedanță de intrare mică a circuitului comparator, 56  $\Omega$ , (în scopul scăderii zgomotului termic propriu al comparatorului) [Isa.'87].

- a fost prevăzută pe intrare un filtru trece sus (pentru scăderea puterii componentelor de zgomot 1/f ale semnalului perturbator care însoțește semnalul de măsurat).

- ieșirea circuitului comparator a fost încărcată cu o rezistență de 560  $\Omega$ , fiind forțată funcționarea etajului de ieșire la curent maxim admisibil în scopul scăderii vitezei de comutație a tranzistoarelor din acest circuit (având în vedere faptul că banda de frecvență în care trebuie să funcționeze corect analizorul în domeniul modulației este mai îngustă decât banda de frecvență mărginită superior de frecvența maximă de lucru a circuitului ROB 760, care este exploatat de obicei doar la frecvențe înalte).

- la ieșire a fost conectat un filtru trece jos format din rezistența de ieșire a circuitului ROB 760 (de valoare 100  $\Omega$ ) din rezistența de 560  $\Omega$  și din condensatorul cu capacitatea de 4,7 nF (a cărui frecvență de tăiere este de 330 KHz), cu scopul scăderii puterii zgomotului alb care însoțește semnalul de analizat și care este propriu circuitului ROB 760.

Datorită acestor măsuri fronturile semnalului logic de la ieșirea comparatorului nu apar exact la momentele de timp la care au loc trecerile prin zero ale semnalului de analizat ci decalat. Funcționarea formatorului de semnal logic poate fi înțeleasă pe baza formelor de undă din figura 7.2.

Se observă că durata semnalului de la ieșirea celui de-al doilea circuit basculant bistabil este egală cu perioada semnalului de intrare, durata intervalului dintre  $t_1$  și  $t_3$ . Această funcționare este justificată de faptul că durata semnalului QCI8B este măsurată între fronturi de același tip (descrescătoare) ale

semnalului  $Q_{CI1}$ . De aceea decalarea momentelor de trecere prin zero  $t_1$  și  $t_3$  față de momentele de declanșare a fronturilor semnalului  $Q_{CI8B}$  este realizată cu aceeași cantitate  $t_c$  (fixată de constanta de timp a filtrului trece jos și de nivelul de declanșare în starea jos a circuitului basculant monostabil  $CI5$ ). În modul descris se obține un impuls  $Q_{CI8B}$  de durată egală cu durata perioadei semnalului  $IN1$ . Prin măsurarea duratei acestui semnal se obține valoarea perioadei instantanee a semnalului  $IN1$ .

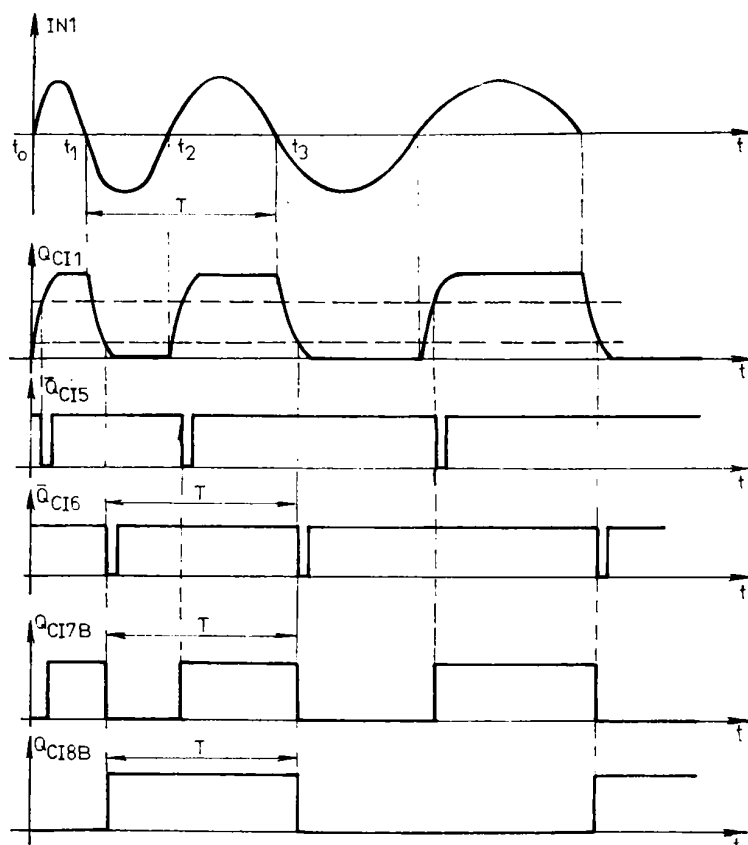


Figura 7.2 Un exemplu de funcționare al circuitului de formare a semnalului logic.

Prin măsurarea duratei acestui semnal se obține valoarea perioadei instantanee a semnalului  $IN1$ . Din diagramă se constată că în acest mod nu poate fi măsurată fiecare perioadă a semnalului de

măsurat.

Circuitul combinațional are rolul de a permite calculatorului să facă programarea blocului de intrare folosind liniile de date D<sub>3</sub>, D<sub>4</sub> și D<sub>7</sub> de ieșire ale sistemului ADA 3100.

Astfel, cu semnalul logic de pe linia 4 de nivel 1 logic se validează pe baza circuitului și-nu, CI-13B, circuitul formator de întreruperi. Liniile D<sub>3</sub> și D<sub>7</sub> se folosesc pentru programarea blocului de intrare pentru funcționarea analizorului în domeniul modulației în regim de fazmetru instantaneu respectiv în regim de numărător universal precum și pentru declanșarea achiziției (D<sub>4</sub> → 1 logic) respectiv blocarea acesteia (D<sub>4</sub> → 0 logic). Circuitul formator de întreruperi este construit cu ajutorul unui circuit basculant bistabil de tipul CDB 473 (CI 9A), din circuitul de validare CI 13 B și din circuitul basculant monostabil de tipul CDB 4121 (CI 10). Rolul său este de a genera semnalul de cerere de întrerupere pe linia de comandă TRIGG-IN a sistemului de achiziții de date. Cererile de întrerupere sînt generate din 4 în 4 perioade ale semnalului IN1. Această funcție este îndeplinită datorită divizării cu 2 a frecvenței semnalului QCI8B de către bistabilul CI9A. Pentru ca impulsurile generate de monostabilul CI10 să poată fi interpretate ca și cereri de întrerupere este necesar ca durata lor să fie de aproximativ 340 ns. O durată mai mică nu este admisibilă deoarece semnalul de cerere de întrerupere este activ pe palier și nu pe front iar o durată mai mare ar face ca un singur impuls pe linia TRIGGER -IN să conducă la două cereri de întrerupere succesive. Analizînd schema bloc a sistemului de achiziții de date din anexa 1, se constată că semnalul transmis pe linia TRIGGER-IN este distribuit de către blocul TRIGGER -SELECT (programat corespunzător de calculator pe magistrala de date prin intermediul blocului PACER-CLOCK) spre blocul de gestionare a întreruperilor (INTERRUPT SELECT) care transmite cererea de întrerupere spre microprocesorul calculatorului pe magistrala de control. Ca linie de întrerupere hardware externă a calculatorului s-a ales linia IRQ-7, căreia îi corespunde întreruperea de tipul 15( a microprocesorului 80286). Pentru a fi activată această linie este necesar, așa cum s-a arătat mai sus, ca să fie programat sistemul de achiziții de date pentru a genera cereri de întreruperi hardware externe (programarea blocurilor PACER-CLOCK, TRIGGER SELECT și INTERRUPT - SELECT) precum și interfața de întreruperi hardware externe a calculatorului IBM-PC2. Programarea acestei interfețe pentru a specifica linia IRQ-7 ca linie de întreruperi hardware externe se face prin aducerea la zero a bitului D<sub>7</sub> din registrul mască de întreruperi (IMR) al primului controlor programabil de întreruperi 8259 A din cadrul

acesteia. Intervalul de timp între două cereri de întrerupere consecutive generate pe linia IRQ-7 (care reprezintă durata a patru perioade consecutive ale semnalului IN1) este măsurat prin contorizarea pe durata sa, în blocul de numărare/temporizare a tactului de 5 MHz (generat de oscilatorul cu cuarț al sistemului ADA-3100A). În acest scop se programează numărătorul 0 din circuitul TC-2 (cel de-al doilea numărător/temporizator de tip 82C54 din structura blocului de numărare/temporizare al sistemului de achiziții de date) în modul de lucru 4. Tactul adus la intrarea acestui numărător are o frecvență de 5MHz (datorită programării corespunzătoare a blocului PROGRAMABLE TIMER CLOCK SELECT) făcută de către calculator pe magistrala de control). În acest mod de lucru numărarea este validată dacă GATE este conectată la 1 logic. Se realizează o validare permanentă a numărătorului 0 din circuitul TC 2 prin programarea de către calculator în mod corespunzător a blocului PROGRAMABLE TIMER GATE SELECT. După generarea cuvântului de comandă al numărătorului TC 2, numărătorul 0 începe să numere și va fi lăsat să o facă pe toată durata achiziției valorilor necesare estimării legii de variație a frecvenței semnalului de intrare, conținutul său fiind citit "on-fly" și trimis pe magistrala de date spre memoria calculatorului după fiecare cerere de întrerupere de pe linia IRQ-7. Comanda de memorare este lansată din subrutina de deservire a întreruperii (care a fost lansată în urma satisfacerii cererii de întrerupere considerate) adresa acestei subrutine fiind 60 (3C H) deoarece este vorba despre o întrerupere de tipul 15.

La încheierea acestei subrutine are loc memorarea numărului citit "on-fly" din numărătorul 0.

În acest mod pe baza citirii consecutive a două numere din numărătorul 0 se poate calcula prin scăderea lor suma a patru perioade succesive din semnalul IN1. Astfel se obține o estimare a perioadei medii (mediere făcută pe baza a patru eșantioane) cu o eroare egală cu un sfert din perioada impulsului de tact (adică 50 ns). Această valoare a erorii este independentă de frecvența semnalului IN1. Pe baza valorii acestei perioade se poate estima frecvența instantanee a semnalului IN1 în intervalul de timp al celor patru perioade consecutive considerate.

Durata unui interval de măsură de patru perioade ale semnalului de intrare a fost aleasă pentru ca să se poată atinge banda de frecvențe [100Hz, 100KHz] a analizorului în domeniul modulației, având în vedere timpul necesar pentru desfășurarea subrutinei de întrerupere a instrucțiunii de citire și a instrucțiunii de memorare (30 μs).

### 7.3. Aspecte soft ale construcției analizorului în domeniul modulației

Softul aparatului este descris în [Asz.'92]. El este alcătuit dintr-o serie de programe care coordonează toate operațiile necesare pentru efectuarea unei măsurări. Programele au fost scrise în limbajul de nivel înalt C folosind mediul integrat Turbo C2.0.

Aceste programe se bazează pe utilizarea a cinci funcții de bază:

- funcția de instalare -INSTALL,
- funcția de achiziție -ACHIZITIE,
- funcția de dezactivare hardware -UNINSTALL,
- funcția de calcul -CALC,
- funcția de afișare - AFIS.

În figura 7.3 este prezentată ordinograma programului principal.

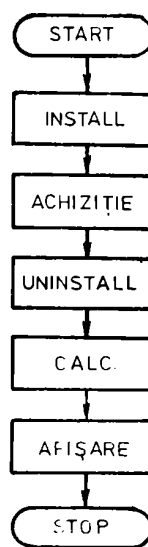


Figura 7.3. Ordinograma programului principal.

Funcția INSTALL programează hardware-ul aparatului conform celor prezentate în paragraful anterior. Valorile achiziționate pe baza funcției ACHIZITIE la sfârșitul fiecărui interval de

măsurare sînt încărcate în tabelul val[NR-INT]. Pe baza funcției UNINSTALL se încheie activitatea calculatorului de supraveghere a hardului extern putîndu-se trece la calculul estimărilor frecvenței instantanee cu ajutorul funcției CALC. Această funcție are mai multe sarcini :

- determinarea momentelor de măsurare ( capetele intervalelor de măsurare nefiind uniform repartizate în timp este necesar să se determine cupluri de forma  $(f_{ik}, t_k)$  în scopul afișării rezultatelor ; de aceea trebuiesc calculate momentele  $t_k$  pe baza momentelor citite secvențial în timpul decrementării număratorului 0). Aceste valori sînt încărcate în tabelul mom[NR-INT].

- determinarea estimatelor pentru frecvența instantanee (se determină valorile  $f_{ik}$  prin scăderea valorilor memorate la sfîrșitul unor intervale de măsurare succesive și prin inversare). Aceste valori sînt încărcate în tabelul freqv[NR-INT].

- determinarea duratei achiziției  $t_{max}$  (se face pe baza ultimei valori  $t_k$ ). În programele realizate aceasta este o variabilă de tip global.

Funcția AFIS este alcătuită din următoarele subfuncții:

- funcția initmgrph : inițializează modul grafic de lucru al calculatorului ,

- funcția calc.1 : este funcția care implementează operația "zoom" ,

- funcția afiș.2: realizează desenarea pe ecran a sistemului de coordonate și a graficului,

- funcția movec.: permite afișarea unui cursor care poate fi deplasat pe ecran cu ajutorul tastaturii , fiind afișate valorile coordonatelor de pe grafic indicate de poziția sa. În cadrul acestei funcții poate fi realizată marcarea limitelor unui interval care se dorește a fi extins pe întreg ecranul prin funcția "zoom". În cadrul funcției calcvpt. se face și o regularizare a axei timpului avînd în vedere că punctele  $t_k$  sînt repartizate neuniform și că pentru o reprezentare grafică corectă este necesară o succesiune uniformă a absciselor estimărilor (care sînt reprezentate grafic). Ordinogramele funcțiilor amintite mai sus precum și programele propriuzise comentate sînt prezentate în [Asz.'92].

#### 7.4. Rezultate experimentale

În urma construcției echipamentului descris și a punerii în funcțiune s-a trecut la caracterizarea performanțelor sale. În acest scop au fost folosite surse pentru semnalul IN1 cu parametrii controlați : versatester de tipul E0502 , generator de

funcții de tipul POF-01 și generator vobulator de tipul E-0507. Semnalele aduse pe intrarea IN1 au fost controlate prin oscilografie permanentă pe durata întregii experimentări. Folosind ca și sursă a semnalului de intrare versatesterul s-a putut determina sensibilitatea analizorului în domeniul modulației. S-a constatat că dacă nivelul semnalului de intrare este mai mare sau egal cu  $100 \text{ mV}_{\text{ef}}$ , frecvența acestui semnal este afișată în tabelul care se prezintă pe ecran, adică măsurarea se realizează corect. De aceea este firesc să se declare ca și sensibilitate a aparatului valoarea de  $100 \text{ mV}_{\text{ef}}$ . Având în vedere că blocul de intrare folosește o sursă de alimentare cu valoarea de 5 V este necesar ca semnalul IN 1 să nu aibă o amplitudine vîrf la vîrf mai mare de  $5 \text{ V}_{\text{VV}}$ . Printr-un experiment similar s-a constatat că banda de frecvențe în care aparatul lucrează corect este cuprinsă între 100 Hz și 100 kHz.

În continuare s-a trecut la testarea analizorului în domeniul modulației folosind semnale modulate în frecvență. În anexa 4 sînt prezentate tabelele care conțin rezultatele experimentale. În prima coloană a unui astfel de tabel este dat numărul de ordine al măsurării din șirul de măsurări efectuate, în cea de-a doua coloană valoarea numărului introdus în memoria calculatorului, în cea de-a treia, valoarea frecvenței instantanee iar în ultima coloană valoarea perioadei instantanee. În tabel sînt de asemenea prezentate valorile minimă, medie și maximă ale frecvențelor instantanee anterior listate. În tabelul 1 sînt prezentate valorile obținute la măsurarea frecvenței generate de versatester cînd afișajul acestuia indica valoarea de 1 KHz.

În tabelul 2 sînt prezentate valorile obținute la măsurarea cu metoda tradițională a frecvenței furnizate de versatester cînd acesta indica valoarea de 100 KHz (prin metodă tradițională se înțelege numărarea perioadelor semnalului IN 1 pe intervale de timp riguros constante).

În tabelul 3 sînt prezentate toate valorile obținute la măsurarea frecvenței instantanee a unui semnal modulată în frecvență cu purtător cu frecvența de 12 KHz și modulator dreptunghiular. Analizînd acest tabel se constată că pe durata achiziției a avut loc un salt al semnalului modulator între două constante (saltul a avut loc după cea de-a 85-a măsurătoare și corespunzător celor două nivele constante ale semnalului modulator se obțin două valori constante ale frecvenței instantanee 12 KHz și 9,6 KHz). Între măsurările cu număr de ordine 85 și 88 se observă fenomenul tranzitoriu prin care trece oscilatorul comandat în tensiune al aparatului POF-01 (folosit ca și generator de semnal modulată în frecvență, cu ieșirea versatesterului conectată la intrarea FM).



Se constată faptul că pe baza acestui tabel se poate determina răspunsul indicial al oscilatorului comandat în tensiune din structura generatorului de funcții POF- 01. În tabelul 4 sînt prezentate toate valorile obținute la măsurarea frecvenței instantanee a unui semnal modulat în frecvență cu modulator de formă sinusoidală. Se constată că pe baza acestor valori poate fi trasată legea de variație în timp a frecvenței instantanee și că durata achiziției corespunde unei fracțiuni din durata perioadei semnalului modulator.

În anexa 5 sînt prezentate graficele afișate pe ecranul calculatorului în cazul măsurării frecvenței instantanee a unor semnale modulate în frecvență.

În figura 1 este prezentată legea de variație în timp a frecvenței instantanee a unui semnal modulat în frecvență cu modulator sinusoidal. Frecvența semnalului purtător a fost de 10 KHz iar frecvența semnalului modulator de 50Hz. Din figură se constată că reprezentarea grafică este normalizată atât pe abscisă cît și pe ordonată. Citirea momentelor de pe axa timp se face ținînd seama de faptul că diviziunii 10 îi corespunde durata maximă a achiziției care în cazul de față este  $t_{max}=76,028ms$ . Pentru aprecierea mai exactă a coordonatelor unui punct de pe grafic poate fi utilizat cursorul (reprezentat pe figură cu o linie continuă verticală). Astfel, momentul la care este fixat cursorul în figura 1 are valoarea : 31,17 ms , așa cum este înscris sub grafic.

Citirea valorilor frecvenței instantanee de pe axa ordonatelor se face ținînd seama că diviziunii 1 îi corespunde valoarea minimă a frecvenței instantanee înregistrate (valoare care apare deasupra reprezentării grafice și care în cazul figurii 1 este de  $f_{min} = 4,416961KHz$ ) și diviziunii 10 îi corespunde valoarea maximă a frecvenței instantanee înregistrate (afișată deasupra reprezentării grafice , care în cazul figurii 1 are valoarea  $f_{max} = 17,421603 KHz$ ).

Pentru aprecierea mai exactă a valorilor coordonatelor unui anumit punct de pe grafic poate fi utilizat cursorul. Astfel, valoarea frecvenței instantanee la care este fixat cursorul în figură este așa cum se poate citi sub reprezentarea grafică de 10,5263 KHz.

Pe lîngă facilitățile reprezentării grafice descrise pînă acum , pe ecran mai sînt afișate valoarea medie a frecvenței (valoare care ar fi fost afișată de un numărător universal și care în cazul figurii 1 este de  $f_{med} = 12,44870757 KHz$ ) , numărul total de intervale de măsură folosite (care în cazul de față este : NR. interval de măsură = 200) , poziția curentă a cursorului față de

marginea din stînga a chenarului care limitează reprezentarea grafică (valoare care în cazul figurii 1 este  $x=264$ ) precum și tastele care pot fi folosite pentru modificarea reprezentării grafice (toate reprezentările grafice despre care se afirmă că rezultă prin modificări se referă la aceeași achiziție). Numele și semnificația acestor taste apar în partea de jos a ecranului. Astfel :

-cu tasta  $\leftarrow$  se poate face deplasarea la stînga a cursorului pe reprezentarea grafică ,

-cu tasta  $\rightarrow$  se poate face deplasarea la dreapta a cursorului pe reprezentarea grafică ,

-cu tasta ' se poate memora limita din stînga a intervalului pe care se dorește realizarea funcției "zoom" .

-cu tasta 1 se poate memora limita din dreapta a intervalului pe care se dorește realizarea funcției "zoom". Deplasarea cursorului între limitele din stînga și din dreapta poate fi realizată cu ajutorul primelor două taste descrise.

-cu ajutorul tastelor Control și R se poate declanșa funcția "zoom" care presupune reprezentarea pe întreg ecranul a legii de variație a frecvenței instantanee din intervalul specificat de limitele stînga și dreapta . În cadrul acestei funcții între valorile măsurate se introduc valori calculate prin interpolare liniară.

-cu tasta BLANC se poate face revenirea la prima reprezentare grafică făcută pe ecran.

-cu tasta Q se poate părăsi reprezentarea grafică în scopul efectuării unei alte achiziții.

Principala observație care poate fi făcută în legătură cu reprezentările grafice este că în cadrul lor nu este conservată rezoluția temporală, intervalele de timp în care sînt reprezentate valori mici ale frecvenței instantanee fiind mai lungi decît intervalele de timp în care sînt reprezentate valori mari ale frecvenței instantanee. Această manifestare este specifică reconstrucției legii de variație temporală a frecvenței instantanee bazată pe o eșantionare neuniformă .

În figura 2 se prezintă legea de variație în timp a frecvenței instantanee a unui semnal modulat în frecvență cu frecvență purtătoare de 1 KHz folosind un semnal modulator dreptunghiular avînd frecvența de 10 Hz.

Fronturile reprezentării descriu procesul tranzitoriu specific funcționării oscilatorului comandat în tensiune , din structura modulatorului în frecvență aparținînd generatorului POF-01.

Analizînd figura se constată că s-a lucrat cu un indice de modulație relativ mare (la fel ca și în cazul figurii 1) , motiv

pentru care palierele obținute (atît cel corespunzător frecvențelor mari cît și cel corespunzător frecvențelor mici ) au aceeași rezoluție ( variațiile frecvenței instantanee în jurul valorilor  $f_{\min}$  și  $f_{\max}$  sînt mult mai mici decît variația dintre  $f_{\min}$  și  $f_{\max}$  ).

În figura 3 se prezintă legea de variație în timp a frecvenței instantanee a unui semnal modulat în frecvență cu frecvența purtătoare de 5 KHz folosind un semnal modulator dreptunghiular cu frecvența de 10 Hz. Deoarece indicele de modulație are și în acest caz aceeași valoare ca și în cazul prezentat în figura 2 rezoluția pe palierele inferior și superior este din nou aceeași. Spre deosebire de cazul prezentat anterior avînd în vedere că raportul dintre indicele de modulație și frecvența purtătoare este de cinci ori mai mare în acest caz , dispersia pe cele două paliere ale reprezentării grafice este mai mare. Acest efect se datorează modului de reprezentare grafică (mai precis normării ordonatelor ) și nu caracterizează precizia de măsurare.

În figura 4 se prezintă legea de variație temporală a frecvenței instantanee a semnalului modulat furnizat de generatorul E0507 , avînd o perioadă de vobulare de 10 ms. Analizînd figura se constată prezența unor timpi morți la începutul și sfîrșitul perioadei de vobulare.

În figura 5 se prezintă reprezentarea aferentă unei determinări bazată pe metoda tradițională ( la care s-au făcut referiri în comentariul tabelului 2 din anexa 4 ) a frecvenței de 100 KHz a semnalului generat de un versatester.

Pe baza figurii 6 poate fi analizat rezultatul măsurării frecvenței instantanee a unui semnal generat de versatester ( cu frecvența indicată de acest aparat de 10 KHz).

Se evidențiază în acest mod stabilitatea pe termen scurt a versatesterului , constatînd că mediile statistice ale valorilor maxime și minime ale frecvenței măsurate în mod continuu sînt de 3 și 8 (adică 9,896 KHz și 10,059 KHz). Deci valoarea medie a dispersiei estimărilor este de 163 Hz. Această valoare este confirmată de observația că pe durata măsurării valoarea frecvenței generate de versatester a fost afișată pe indicatorul acestuia ca fiind 9,9 sau 10 KHz. Se constată că pe durata achiziției limitate 3 și 8 sînt depășite foarte rar, în intervalul temporal [3,4] obținîndu-se variația cea mai mare a frecvenței instantanee în valoare de 318 Hz.

### 7.5. Concluzii

În acest capitol a fost făcută o prezentare succintă a unui analizor în domeniul modulației construit de autor. Acest tip de aparat aparține clasei aparatelor de măsurare adaptive, parametrilor săi (frecvență de eșantionare, durată a unei măsurări individuale etc.) modificându-se în timp pe parcursul măsurării pentru a urmări cât mai fidel parametrul corespunzător al semnalului de măsurat.

O prezentare mai detaliată a acestui aparat este făcută în [Asz. '92].

Trebuie remarcat că astfel de aparate se construiesc în prezent de firme de prestigiu în domeniul aparatelor de măsură cum ar fi Hewlett - Packard sau Philips. Astfel de aparate se folosesc cu precădere în testarea echipamentelor de telecomunicații.

Contribuțiile originale ale autorului prezentate în acest capitol sînt:

- ideea utilizării unui calculator universal, echipat cu o placă de achiziții de date dedicată, la construcția unui analizor în domeniul modulației, ieftin și versatil, destinat uzului curent, în orice laborator de electronică.

- schema bloc a etajului de intrare în analizor.

- forma de prezentare a rezultatelor pe monitorul calculatorului.

- strategia de testare a aparatului realizat.

În viitor se vor studia tehnicile de prelucrare numerică a semnalului care pot conduce la îmbunătățirea rezoluției aparatului în special în cazul în care semnalul de analizat este perturbat aditiv de zgomot.

De asemenea vor fi investigate și alte modalități de măsurare a frecvenței instantanee în special pentru semnalele cu raport semnal pe zgomot mic.

## 8. Concluzii

Clasa semnalelor nestaționare este frecvent utilizată în prezent, acceptarea ipotezei de nestaționaritate conducând la o calitate superioară a modelării fenomenelor fizice prin semnale.

În cazul semnalelor nestaționare, parametrii caracteristici sînt variabili în timp. De aceea se poate vorbi despre valori instantanee ale parametrilor. Măsurarea semnalelor nestaționare constă tocmai în determinarea acestor valori instantanee, la fiecare moment de timp. Rezultatele măsurării sînt cu atît mai precise cu cît valorile parametrilor aparatului de măsurare sînt mai apropiate de valorile optime corespunzătoare valorii mărimii de măsurat.

De aceea prin modificarea continuă a parametrilor aparatului de măsurare, în acord cu valorile instantanee ale parametrilor semnalului de măsurat, se obțin rezultate mai precise decît în cazul în care parametrii aparatului de măsurare sînt ficși.

Modificarea parametrilor aparatului de măsurare în acord cu parametrii semnalului de măsurat conferă acestui aparat un caracter adaptiv. Deci, pentru măsurarea semnalelor nestaționare se recomandă utilizarea aparatelor de măsurare adaptive. Această clasă de aparate de măsurare se dezvoltă rapid în prezent, majoritatea aparatelor de măsurare tradiționale (voltmetre, osciloscop, numărătoare universale, analizoare de spectru etc.) fiind realizate și în variantă adaptivă. În prezent se realizează și aparate de măsurare care implementează noi tehnici de măsurare adaptivă fără corespondent între tehnicile care stau la baza construcției aparatelor de măsurare tradiționale.

Din afirmațiile făcute rezultă marea actualitate a temei acestei teze de doctorat. În cercetarea efectuată pe această temă au fost utilizate metode moderne (de exemplu conceptele matematice de undișoară sau multirezoluție), reieșind și de aici actualitatea temei abordate.

Prezentarea făcută pentru tehnicile de măsurare adaptivă precum și pentru aparatele care funcționează pe baza acestor tehnici are un caracter unitar, pornindu-se de la aspecte principiale (cărora le sînt dedicate primele trei capitole), continuînd cu prezentarea unor aparate de măsurare moderne (în capitolele 4, 5 și 6) și încheindu-se cu descrierea unui aparat de măsurare adaptiv, original, realizat de autor (capitolul 7).

Întreaga lucrare este concepută pe baza unei bibliografii recente (un număr însemnat de referințe bibliografice au anii de apariție 1990, 1991 sau 1992), relativ vastă (sînt citate peste o

sută de titluri) și de bună calitate (majoritatea lucrărilor citate au fost prezentate la conferințe I.E.E.E. sau au apărut în reviste editate de acest institut).

O parte, semnificativă, din această lucrare are un caracter original. În continuare se prezintă principalele contribuții originale ale autorului.

În capitolul 1, "Conceptul de măsurare adaptivă", după o trecere în revistă a principalelor domenii din tehnică în care se utilizează metode adaptive, este definit conceptul de măsurare adaptivă:

1) - **Se numește aparat de măsurare adaptiv acel aparat de măsurare ai cărui parametri se modifică în acord cu modificarea parametrilor mărimii de măsurat.**

**Efectul utilizării unui aparat de măsurare adaptiv în locul unuia neadaptiv este obținerea unor performanțe superioare.**

În capitolul 2, "Modalități de analiză spectrală adaptivă", sînt prezentate bazele analizei spectrale a semnalelor neștaționare, justificîndu-se necesitatea utilizării reprezentărilor tridimensionale. Sînt descrise reprezentările timp-frecvență de tipul transformare Fourier scurtă, Wigner-Ville, funcție de incertitudine și Cohen. De asemenea sînt definite reprezentările timp-factor de scală, de tip undișoară. Sînt prezentate formele acestor reprezentări atît pentru semnale de energie finită în timp continuu cît și în timp discret.

Contribuțiile originale ale autorului prezentate în acest capitol sînt:

2) - **demonstrațiile proprietăților de izometrie pînă la o constantă și de inversabilitate pentru reprezentările timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă;**

3) - **considerarea reprezentărilor timp-frecvență de tipul funcție de incertitudine sau Wigner-Ville ca și reprezentări timp-frecvență de tip transformare Fourier scurtă adaptive, cu fereastra de analiză dependentă de semnalul de analizat;**

4) - **exemplificarea principiului incertitudinii pe baza celor două cazuri extreme de analiză cu ajutorul transformării Fourier scurte:**

- fereastra temporală cu cea mai mare concentrare în timp,

$$w(t) = \delta(t):$$

$$\sigma_t = 0, \quad \sigma_\omega = \infty$$

- fereastra temporală cu cea mai mare coconcentrare în frecvență,  $w(\omega) = \delta(\omega)$ :

$$\sigma_\omega = 0, \quad \sigma_t = \infty$$

5) - **propunerea unei metode de adaptare a duratei ferestrei de analiză la semnalul de analizat în cazul utilizării transformării**

### Fourier scurte în timp discret.

Capitolul 3, "Noi modalități de eșantionare a semnalelor de bandă nelimitată", este în întregime original. Scopul său este formularea unei teoreme de eșantionare, mai generală decât teorema W.K.S., pe baza căreia să se poată realiza și reconstrucția perfectă a semnalelor de bandă nelimitată, folosind eșantioanele prelevate.

În acest capitol se sugerează două căi de aproximare a semnalelor de energie finită folosind sisteme de eșantionare: analiza multirezoluție și descompunerea ortogonală a spațiilor de funcții. Principalele rezultate originale prezentate în acest capitol sînt conținute în observațiile din fiecare paragraf (în întreg capitolul sînt formulate 35 de observații).

Primul obiectiv al capitolului 3 a fost clarificarea noțiunii de analiză multirezoluție. Observația O6 simplifică conținutul definiției acestui concept.

6) - Conform acestei observații, mulțimea subspațiilor închise ale lui  $L^2(\mathbb{R})$ , notată  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , este o analiză multirezoluție a acestui spațiu dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

i).  $\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$

ii).  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$ ,  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R})$

iii). Pentru orice funcție  $f_m(x)$  din  $V_m$ , funcția  $f_m(2x)$  aparține lui  $V_{m-1}$ .

iv). Există o funcție  $\phi(x)$  din subspațiul  $V_0$ , astfel încît, oricare ar fi  $m \in \mathbb{Z}$ , mulțimea  $\{\phi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \cdot \phi(2^{-m} \cdot x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $V_m$ .

În paragraful 3.1.1 se prezintă un exemplu original E2, de analiză multirezoluție.

7)  $-E2.V_m^h.l. = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0, \text{ ptr. } |\omega| > \frac{\pi}{2^m}\}$

$$\phi(t) = \phi_{0,0}(t) = \text{sinc}(\pi t)$$

În același paragraf se dă o demonstrație originală a afirmației din [But.'83] conform căreia:

8) - orice semnal de energie finită  $f(t)$  se poate exprima cu:

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow -\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^m \cdot n) \cdot \text{sinc}[\pi(2^{-m} \cdot t - n)]$$

În paragraful 3.1.2, "O modalitate de construcție a unei baze ortonormale a lui  $L^2(\mathbb{R})$  folosind o analiză multirezoluție", este prezentată calea de construcție a descompunerii ortogonale

$\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  a spațiului  $L^2(\mathbb{R})$  pornind de la o analiză multirezoluție,  $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ . Rezultatul acestui paragraf este teorema:

9) P7. Dacă mulțimea  $B_m = \{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ , este o bază ortonormală a subspațiului  $W_m$  (membru al unei descompuneri ortogonale a lui  $L^2(\mathbb{R})$ ), atunci mulțimea  $B = \{\psi_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $L^2(\mathbb{R})$ .

Demonstrația acestei teoreme este originală.

În paragraful 3.1.3, "Exemple de baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$ ", se prezintă următorul exemplu :

10)  $\{-\psi_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  cu:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot \psi_{0,0}(2^{-m}(t-n))$$

și

$$\psi_{0,0}(t) = \sum_n (-1)^n \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\pi}{2}(n+1) \right] \cdot \text{sinc} [ \pi(2 \cdot t - n) ]$$

Acest exemplu este original. Funcțiile de tipul  $\psi_{0,0}(t)$  se numesc "undișoare mamă".

De asemenea, în același paragraf se dă o demonstrație originală a afirmației din [Wor., Opp. '92] conform căreia :

11) -"undișoara mamă":

$$2\psi_{0,0}(t) = \text{sinc} \left( \frac{\pi}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left( \frac{3 \cdot \pi}{2} \cdot t \right)$$

generează baza ortonormală  $\{2\psi_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

În același paragraf se prezintă o nouă descompunere ortogonală a acestui spațiu în subspațiile  $\{W_m^{b.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , unde :

12)  $-W_m^{b.l.} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega) = 0 \text{ ptr. } |\omega| < \frac{\pi}{2^m} \text{ sau } |\omega| > \frac{\pi}{2^{m-1}}\}$

Si acest rezultat este original.

În paragraful 3.1.4, "Construcția unor baze ortonormale de undișoare pe  $L^2(\mathbb{R})$  pornind de la analiza multirezoluție  $\{v_m^{b.l.}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ " se generalizează două teoreme prezentate în [Hig. '84]. Enunțurile acestor teoreme noi sînt:

13) -P12. Dacă mulțimea  $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe  $H_m$ , atunci mulțimea  $\{(1/2\pi) \cdot \hat{\phi}_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală pe  $\hat{H}_m$ , unde  $\hat{H}_m = \{\hat{f}(\omega) \mid f(t) \in H_m\}$ .



14) -P13. Fiind dată funcția reală  $\mu(\omega)$ , continuă pe porțiuni și mulțimea  $\hat{B}_g = \{\hat{\phi}_{m,n}(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  bază a spațiului Hilbert  $\hat{H}_m$ , mulțimea  $\mu \hat{B}_g = \{\hat{\phi}_{m,n}(\omega) e^{jn\omega}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este bază ortonormală a lui  $\hat{H}_m$ .

De asemenea în acest paragraf se determină și condiția pe care trebuie să o îndeplinească funcția auxiliară  $\mu(\omega)$ , astfel încât bazele ortonormale obținute utilizând teoremele P12 și P13 să fie compuse din undișoare. Și acesta este un rezultat original. La sfârșitul acestui paragraf se prezintă două noi baze ortonormale de undișoare în spațiul Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . Folosind notația :

$$2\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \text{sinc}[\pi(2^{-m}t-n)]$$

cele două noi baze ortonormale ale lui  $L^2(\mathbb{R})$  sînt generate de undișoarele mamă :

$$15) -3\psi_{0,0}(t) = j\sum_n \langle jH\{2\phi_{0,0}(t)\}, jH\{2\phi_{-1,n}(t)\} \rangle (-1)^n H\{2\phi_{-1,n}(t)\}$$

și:

$$16) -4\psi_{0,0}(t) = -3\psi_{0,0}(t)$$

Un alt exemplu original de undișoară mamă este:

$$17) -6\psi_{0,0}(t) = -jH\{2\psi_{0,0}(t)\}$$

În ultimul paragraf al capitolului 3 se formulează teorema de eșantionare generalizată :

18) -Condiția necesară și suficientă ca un semnal de bandă nelimitată să poată fi reconstruit perfect din eșantioane este ca el să fie prelucrat cu un sistem de tipul celui din figura 1 sau 2. Formula de reconstrucție este :

$$x(t) = \sum_m \sum_n c_{m,n} \cdot k\psi_{m,n}(t) = \sum_m x_m(t)$$

Această teoremă reprezintă rezultatul central al acestei teze. În comparație cu teorema W.K.S., noua teoremă de eșantionare are avantajul că elimină ipoteza simplificatoare de limitare într-o bandă de frecvențe a spectrului semnalului de eșantionat. Celelalte ipoteze simplificatoare ale teoremei W.K.S. stau și la baza acestei noi teoreme de eșantionare. Într-adevăr în cazul ambelor teoreme eșantionarea se realizează în mod ideal, iar pentru reconstrucție se utilizează filtre ideale și un număr infinit de eșantioane. În plus teorema enunțată are în comparație cu teorema W.K.S. dezavantajul că presupune utilizarea unui număr infinit de subsisteme de prelucrare.

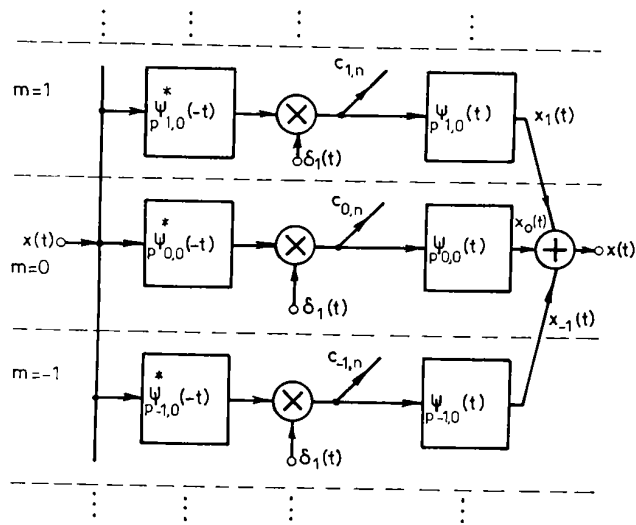


Figura 1. Implementarea teoremei de eşantionare folosind o bancă de filtre de translație a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

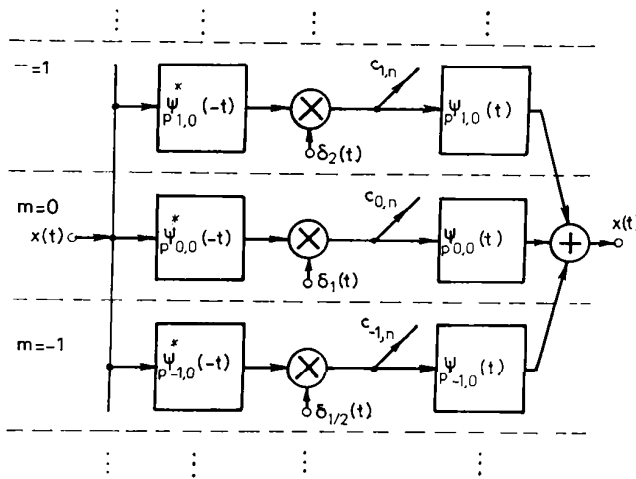


Figura 2. Implementarea teoremei de eşantionare folosind o bancă de filtre de undișoare a lui  $L^2(\mathbb{R})$ .

Teorema prezentată poate fi utilizată în cadrul teoriei aproximării semnalelor (de energie finită), după cum este menționat în cadrul paragrafului 3.2. În acest paragraf se prezintă încă o metodă de aproximare a semnalelor de energie finită folosind eșantionarea, de asemenea originală, care se bazează pe conceptul de analiză multirezoluție. Calitățile acestor metode de aproximare le recomandăm pentru a fi utilizate în implementarea unor tehnici de aproximare adaptivă. Capitolul 4 "Tehnici de eșantionare adaptivă utilizate în construcția unor aparate de măsurare numerice" are ca scop prezentarea principială a unor aparate de măsurare numerice, moderne, înzestrate cu sisteme de eșantionare adaptivă.

19) -La începutul capitolului este făcută o clasificare originală a tehnicilor de eșantionare adaptivă în funcție de tipul de eroare pe care îl minimizează.

20) -În relația (4.2) este dată formula de calcul a spectrului unui semnal eșantionat neuniform, cu pas de eșantionare cu variație periodică.

Această formulă a fost stabilită pe baza unei demonstrații originale. O chestiune interesantă legată de eșantionare este cea a aprecierii erorii de aliere. Aceasta este o familie de funcții de timp care depind de parametrul frecvență de eșantionare exprimate analitic prin formule complicate. De aceea, de obicei, această eroare se apreciază prin intermediul unor margini superioare.

21) -În acest capitol este prezentată o nouă expresie pentru marginea superioară a erorii de aliere,  $m_1(t)$ .

Se demonstrează că acest rezultat este superior tuturor celorlalte rezultate de același tip prezentate în literatură, deoarece  $m_1(t)$  este majorată de toate celelalte margini superioare ale erorii de aliere cunoscute. Aceste rezultate au fost prezentate la o conferință internațională organizată în Algeria în anul 1992. Este studiată de asemenea eroarea medie pătratică de aliere.

22) -Un rezultat original este formula valorii minime a acestei erori și sinteza sistemului de aproximare a semnalelor de bandă nelimitată prin semnale de bandă limitată care folosește eșantionarea, cu eroare medie pătratică minimă de aproximare.

23) -O altă contribuție a autorului prezentată în acest capitol este formula valorii minime a erorii medii pătratice de trunchiere.

24) -În paragraful 4.3.5.4. se prezintă o metodă originală de eșantionare adaptivă bazată pe o analiză multirezoluție.

Avantajul potențial al acestei metode , în comparație cu metodele destinate aceluiași scop prezentate în literatură, constă în creșterea capacității de compresie de date a sistemului de calcul aferent.

Capitolul 5, "Tehnici noi de filtrare adaptivă aplicate la prelucrarea semnalelor modulate în frecvență " are ca scop prezentarea contribuțiilor autorului în problema filtrării adaptive utilizată în aparatura de măsurare.

Primul rezultat original din acest capitol este definiția filtrului cu urmărire:

25) -D. Se numește filtru cu urmărire un filtru a cărui frecvență centrală (sau de tăiere) are în permanență aceeași valoare cu frecvența instantanee a semnalului de la intrarea sa. De asemenea sînt definite noțiunile noi de caracteristică momentană și de caracteristică globală de frecvență . Se evidențiază apoi cîteva proprietăți specifice ale filtrelor analogice cu urmărire :

26) -P1. Dacă momentele de timp  $t_p$  și  $t_q$  sînt alese astfel încît raportul pulsațiilor instantanee ale semnalului de intrare , calculate la aceste momente ,  $\omega_1(t_q)/\omega_1(t_p)$ , să fie egal cu  $\alpha$  , frecvența centrală a caracteristicii momentane a unui filtru cu urmărire de tip trece bandă la momentul  $t_q$  va fi de  $\alpha$  ori mai mare decît frecvența centrală a aceleiași caracteristici la momentul  $t_p$ .

27) -P2. În condițiile de la P1, banda la -3dB a caracteristicii momentane  $H(\omega, \omega_q)$  este de  $\alpha$  ori mai mare decît banda la -3dB a caracteristicii momentane  $H(\omega, \omega_p)$ .

28) -P3. În banda de urmărire , modulul caracteristicii globale de frecvență a unui filtru trece bandă de ordinul 2 cu urmărire este maxim.

29) -P4. Modulul caracteristicii globale de frecvență a unui filtru trece bandă cu urmărire este o bună aproximare a modulului caracteristicii de frecvență a unui filtru trece bandă ideal.

30) -P5. Un filtru adaptiv pentru semnale modulate în frecvență la care urmărirea se face conform relației :

$$\omega = k_0 \omega_1(t)$$

are caracteristica globală de frecvență de valoare constantă în banda de urmărire.

Enunțurile și demonstrațiile acestor proprietăți sînt originale. Valabilitatea lor a fost pusă în evidență pe cale experimentală prin analiza unui filtru cu urmărire de ordinul 2 , construit de autor. Aceste rezultate au fost prezentate la o conferință internațională în Polonia în 1991.

31) -În acest capitol a fost evidențiată și legătura dintre

**transformarea undișoare în timp continuu și filtrele cu urmărire**  
Acest rezultat este de asemenea original.

Sînt prezentate și două realizări experimentale ale unor filtre cu urmărire proiectate de autor, unul folosind circuite cu capacități comutate iar cel de al doilea bazat pe un filtru numeric.

32) **-În acest context a fost elaborată o metodă de echivalare a circuitelor cu capacități comutate și o metodă de echivalare a filtrelor analogice construite cu ajutorul filtrelor numerice cu sisteme liniare și invariante în timp continuu.**

Cele două metode de echivalare sînt originale.

Scopul capitolului 6 "Metode de măsurare a frecvenței instantanee", este trecerea în revistă a celor mai moderne tehnici de măsurare a acestui parametru.

Prezentarea metodelor este realizată pe baza descrierii lor matematice.

Un rezultat original prezentat în acest capitol este :

33) **-echivalarea metodei de măsurare a frecvenței instantanee, numită măsurare continuă, cu o metodă de măsurare care utilizează filtrarea adaptivă.**

34) **-În paragraful 6.6 se prezintă o metodă originală de măsurare adaptivă a frecvenței instantanee a semnalelor perturbate aditiv de zgomot alb.**

În capitolul 7, "Un analizor original în domeniul modulației construit cu ajutorul unui calculator universal IBM-PC-AT", este dat un exemplu de utilizare a unui calculator universal la măsurarea frecvenței instantanee. Prin structura sa, acest aparat se diferențiază de alte aparate de același tip construite de firme de prestigiu cum ar fi Hewlett-Packard sau Philips-Fluke. Construcția se bazează pe utilizarea sistemului de achiziții de date ADA-3100A, fabricat la firma americană "Real Time Devices" cu începere din anul 1991.

Contribuțiile autorului la construcția acestui aparat sînt :

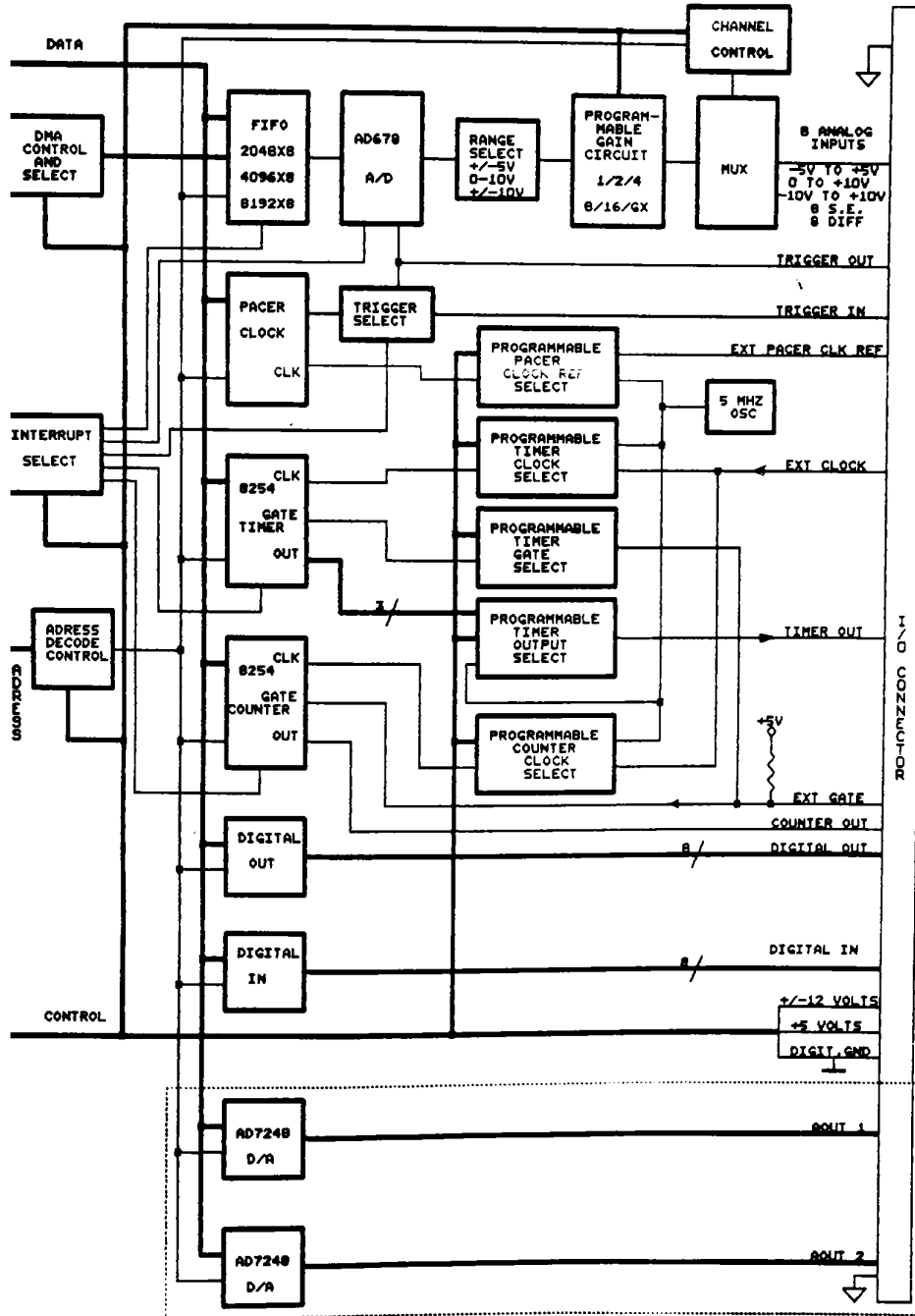
35) **-proiectarea și construcția blocului de intrare al cărui rol este transformarea semnalului de măsurat într-un semnal logic ale cărui fronturi marchează intervalele de timp care trebuie măsurate.**

36) **-stabilirea strategiei de utilizare a subsistemelor din structura sistemului de achiziții de date în scopul implementării tehnicii de măsurare continuă.**

37) **-stabilirea formatului de prezentare a rezultatelor experimentale.**

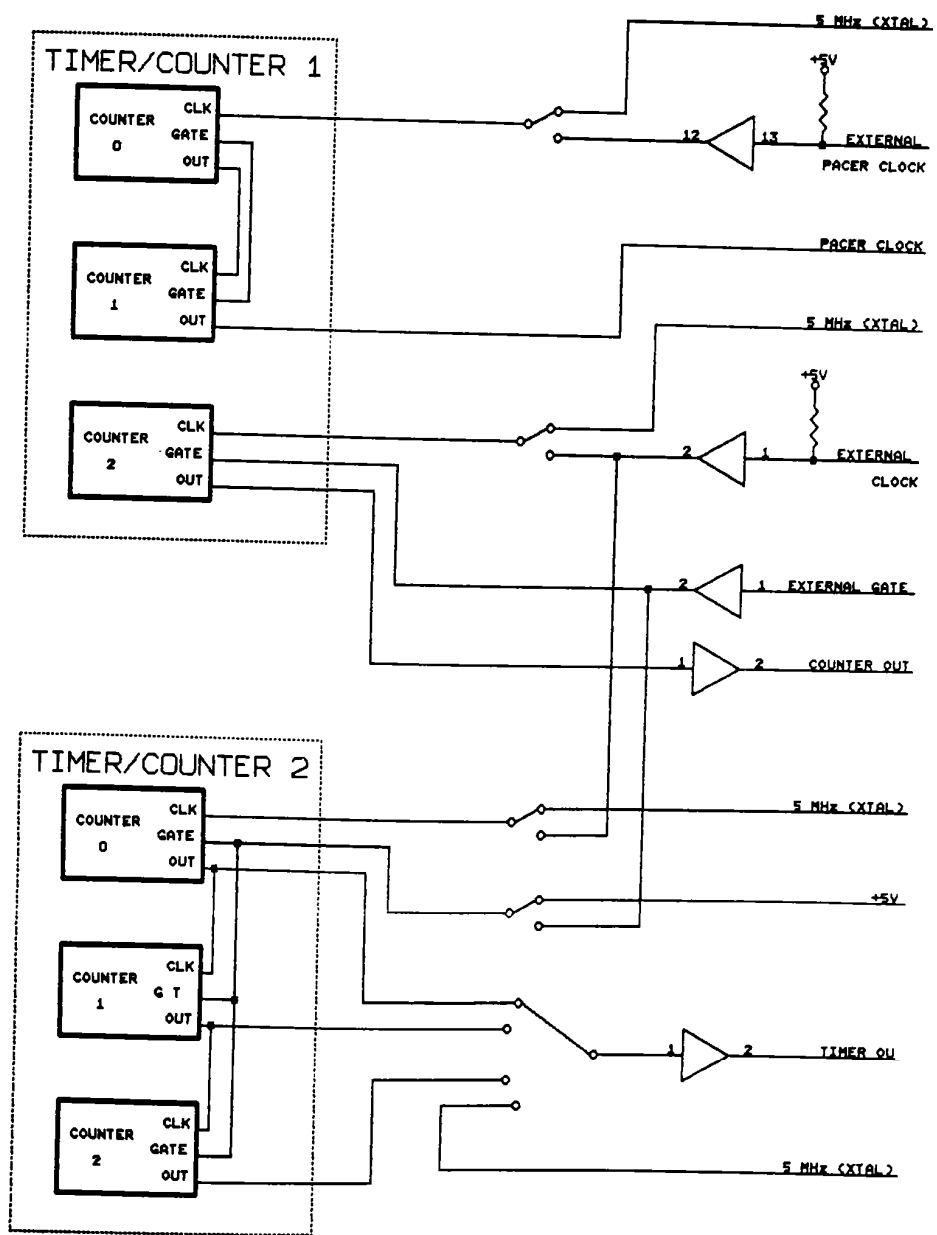
\*  
\* \* \*

# ANEXA 1

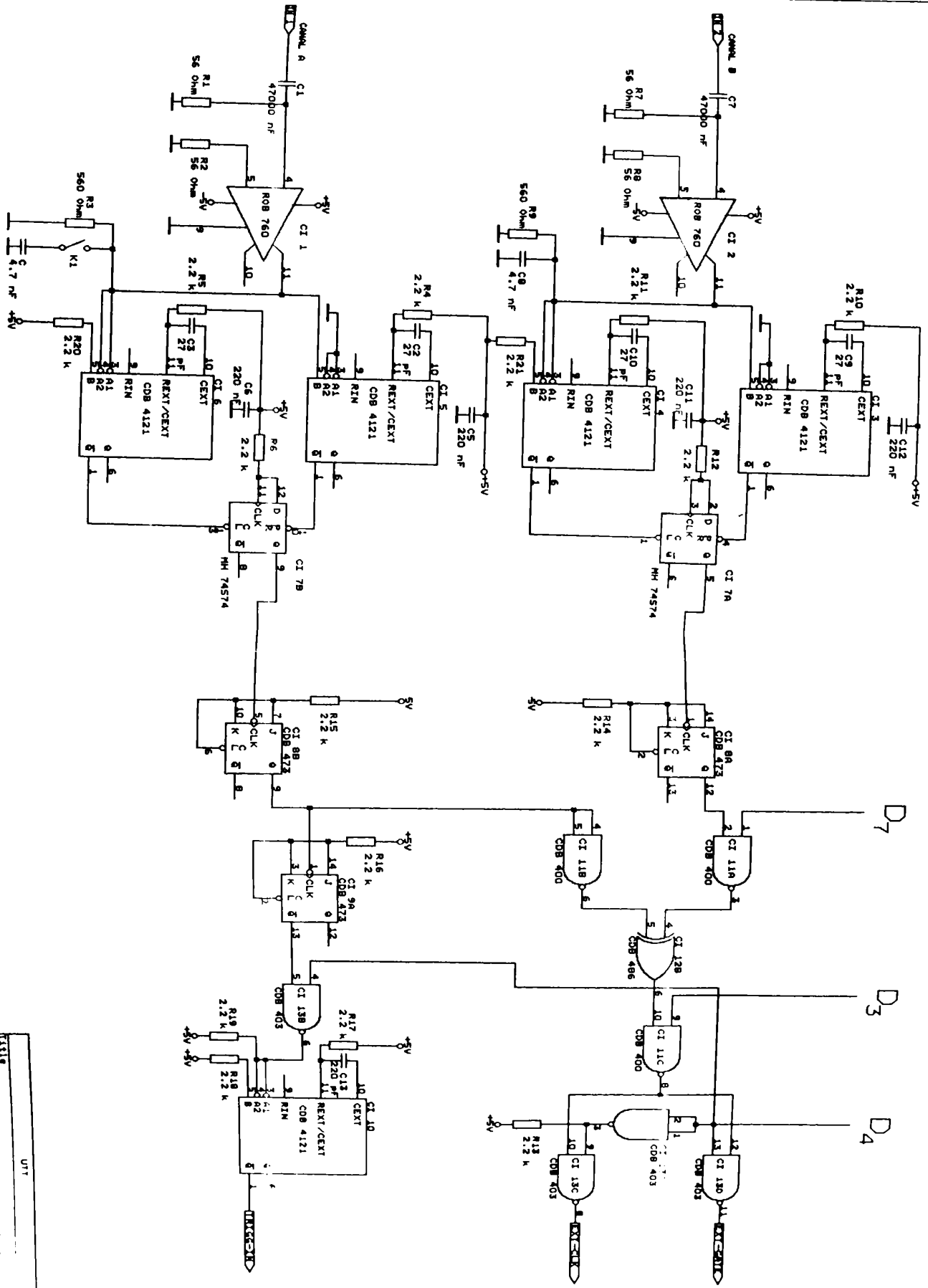


SCHEMA BLOC A SISTEMULUI ADA 3100

# ANEXA 2



SCHEMA BLOC A TIMERULUI SISTEMULUI ADA 3100



UT
13118
SCHEMA DE PRINCIPIU A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z. AA. AB. AC. AD. AE. AF. AG. AH. AI. AJ. AK. AL. AM. AN. AO. AP. AQ. AR. AS. AT. AU. AV. AW. AX. AY. AZ. BA. BB. BC. BD. BE. BF. BG. BH. BI. BJ. BK. BL. BM. BN. BO. BP. BQ. BR. BS. BT. BU. BV. BW. BX. BY. BZ. CA. CB. CC. CD. CE. CF. CG. CH. CI. CJ. CK. CL. CM. CN. CO. CP. CQ. CR. CS. CT. CU. CV. CW. CX. CY. CZ. DA. DB. DC. DD. DE. DF. DG. DH. DI. DJ. DK. DL. DM. DN. DO. DP. DQ. DR. DS. DT. DU. DV. DW. DX. DY. DZ. EA. EB. EC. ED. EE. EF. EG. EH. EI. EJ. EK. EL. EM. EN. EO. EP. EQ. ER. ES. ET. EU. EV. EW. EX. EY. EZ. FA. FB. FC. FD. FE. FF. FG. FH. FI. FJ. FK. FL. FM. FN. FO. FP. FQ. FR. FS. FT. FU. FV. FW. FX. FY. FZ. GA. GB. GC. GD. GE. GF. GG. GH. GI. GJ. GK. GL. GM. GN. GO. GP. GQ. GR. GS. GT. GU. GV. GW. GX. GY. GZ. HA. HB. HC. HD. HE. HF. HG. HH. HI. HJ. HK. HL. HM. HN. HO. HP. HQ. HR. HS. HT. HU. HV. HW. HX. HY. HZ. IA. IB. IC. ID. IE. IF. IG. IH. II. IJ. IK. IL. IM. IN. IO. IP. IQ. IR. IS. IT. IU. IV. IW. IX. IY. IZ. JA. JB. JC. JD. JE. JF. JG. JH. JI. JJ. JK. JL. JM. JN. JO. JP. JQ. JR. JS. JT. JU. JV. JW. JX. JY. JZ. KA. KB. KC. KD. KE. KF. KG. KH. KI. KJ. KL. KM. KN. KO. KP. KQ. KR. KS. KT. KU. KV. KW. KX. KY. KZ. LA. LB. LC. LD. LE. LF. LG. LH. LI. LJ. LK. LL. LM. LN. LO. LP. LQ. LR. LS. LT. LU. LV. LW. LX. LY. LZ. MA. MB. MC. MD. ME. MF. MG. MH. MI. MJ. MK. ML. MN. MO. MP. MQ. MR. MS. MT. MU. MV. MW. MX. MY. MZ. NA. NB. NC. ND. NE. NF. NG. NH. NI. NJ. NK. NL. NM. NO. NP. NQ. NR. NS. NT. NU. NV. NW. NX. NY. NZ. OA. OB. OC. OD. OE. OF. OG. OH. OI. OJ. OK. OL. OM. ON. OO. OP. OQ. OR. OS. OT. OU. OV. OW. OX. OY. OZ. PA. PB. PC. PD. PE. PF. PG. PH. PI. PJ. PK. PL. PM. PN. PO. PP. PQ. PR. PS. PT. PU. PV. PW. PX. PY. PZ. QA. QB. QC. QD. QE. QF. QG. QH. QI. QJ. QK. QL. QM. QN. QO. QP. QQ. QR. QS. QT. QU. QV. QW. QX. QY. QZ. RA. RB. RC. RD. RE. RF. RG. RH. RI. RJ. RK. RL. RM. RN. RO. RP. RQ. RR. RS. RT. RU. RV. RW. RX. RY. RZ. SA. SB. SC. SD. SE. SF. SG. SH. SI. SJ. SK. SL. SM. SN. SO. SP. SQ. SR. SS. ST. SU. SV. SW. SX. SY. SZ. TA. TB. TC. TD. TE. TF. TG. TH. TI. TJ. TK. TL. TM. TN. TO. TP. TQ. TR. TS. TT. TU. TV. TW. TX. TY. TZ. UA. UB. UC. UD. UE. UF. UG. UH. UI. UJ. UK. UL. UM. UN. UO. UP. UQ. UR. US. UT. UV. UW. UX. UY. UZ. VA. VB. VC. VD. VE. VF. VG. VH. VI. VJ. VK. VL. VM. VN. VO. VP. VQ. VR. VS. VT. VU. VV. VW. VX. VY. VZ. WA. WB. WC. WD. WE. WF. WG. WH. WI. WJ. WK. WL. WM. WN. WO. WP. WQ. WR. WS. WT. WU. WV. WW. WX. WY. WZ. XA. XB. XC. XD. XE. XF. XG. XH. XI. XJ. XK. XL. XM. XN. XO. XP. XQ. XR. XS. XT. XU. XV. XW. XX. XY. XZ. YA. YB. YC. YD. YE. YF. YG. YH. YI. YJ. YK. YL. YM. YN. YO. YP. YQ. YR. YS. YT. YU. YV. YW. YX. YY. YZ. ZA. ZB. ZC. ZD. ZE. ZF. ZG. ZH. ZI. ZJ. ZK. ZL. ZM. ZN. ZO. ZP. ZQ. ZR. ZS. ZT. ZU. ZV. ZW. ZX. ZY. ZZ.
REV
1
1971



val[ 0].x= 48191	frecv[ 0]=1.00190 kHz	per[ 0]=998.10 microsec
val[ 4].x= 33869	frecv[ 4]=1.00145 kHz	per[ 4]=998.55 microsec
val[ 8].x= 19543	frecv[ 8]=1.00170 kHz	per[ 8]=998.30 microsec
val[ 12].x= 5213	frecv[ 12]=1.00165 kHz	per[ 12]=998.35 microsec
val[ 16].x= 56423	frecv[ 16]=1.00140 kHz	per[ 16]=998.60 microsec
val[ 20].x= 42094	frecv[ 20]=1.00165 kHz	per[ 20]=998.35 microsec
val[ 24].x= 27767	frecv[ 24]=1.00160 kHz	per[ 24]=998.40 microsec
val[ 28].x= 13440	frecv[ 28]=1.00160 kHz	per[ 28]=998.40 microsec
val[ 32].x= 64647	frecv[ 32]=1.00170 kHz	per[ 32]=998.30 microsec
val[ 36].x= 50309	frecv[ 36]=1.00210 kHz	per[ 36]=997.90 microsec
val[ 40].x= 35983	frecv[ 40]=1.00165 kHz	per[ 40]=998.35 microsec
val[ 44].x= 21661	frecv[ 44]=1.00120 kHz	per[ 44]=998.80 microsec
val[ 48].x= 7333	frecv[ 48]=1.00170 kHz	per[ 48]=998.30 microsec
val[ 52].x= 58541	frecv[ 52]=1.00165 kHz	per[ 52]=998.35 microsec
val[ 56].x= 44203	frecv[ 56]=1.00220 kHz	per[ 56]=997.80 microsec
val[ 60].x= 29876	frecv[ 60]=1.00150 kHz	per[ 60]=998.50 microsec
val[ 64].x= 15555	frecv[ 64]=1.00200 kHz	per[ 64]=998.00 microsec
val[ 68].x= 1230	frecv[ 68]=1.00120 kHz	per[ 68]=998.80 microsec
val[ 72].x= 52137	frecv[ 72]=1.00135 kHz	per[ 72]=998.65 microsec
val[ 76].x= 38111	frecv[ 76]=1.00120 kHz	per[ 76]=998.80 microsec
val[ 80].x= 23786	frecv[ 80]=1.00145 kHz	per[ 80]=998.55 microsec
val[ 84].x= 9458	frecv[ 84]=1.00145 kHz	per[ 84]=998.55 microsec
val[ 88].x= 60650	frecv[ 88]=1.00236 kHz	per[ 88]=997.65 microsec
val[ 92].x= 46324	frecv[ 92]=1.00231 kHz	per[ 92]=997.70 microsec
val[ 96].x= 31999	frecv[ 96]=1.00226 kHz	per[ 96]=997.75 microsec
val[100].x= 17664	frecv[100]=1.00185 kHz	per[100]=998.15 microsec
val[104].x= 3348	frecv[104]=1.00125 kHz	per[104]=998.75 microsec
val[108].x= 54557	frecv[108]=1.00180 kHz	per[108]=998.20 microsec
val[112].x= 40232	frecv[112]=1.00170 kHz	per[112]=998.30 microsec
val[116].x= 25886	frecv[116]=1.00266 kHz	per[116]=997.35 microsec
val[120].x= 11561	frecv[120]=1.00175 kHz	per[120]=998.25 microsec
val[124].x= 62777	frecv[124]=1.00220 kHz	per[124]=997.80 microsec
val[128].x= 48451	frecv[128]=1.00175 kHz	per[128]=998.25 microsec
val[132].x= 34124	frecv[132]=1.00155 kHz	per[132]=998.45 microsec
val[136].x= 19799	frecv[136]=1.00145 kHz	per[136]=998.55 microsec
val[140].x= 5471	frecv[140]=1.00190 kHz	per[140]=998.10 microsec
val[144].x= 56661	frecv[144]=1.00266 kHz	per[144]=997.35 microsec
val[148].x= 42343	frecv[148]=1.00125 kHz	per[148]=998.75 microsec
val[152].x= 28018	frecv[152]=1.00185 kHz	per[152]=998.15 microsec
val[156].x= 13679	frecv[156]=1.00256 kHz	per[156]=997.45 microsec
val[160].x= 64891	frecv[160]=1.00180 kHz	per[160]=998.20 microsec
val[164].x= 50575	frecv[164]=1.00135 kHz	per[164]=998.65 microsec
val[168].x= 36250	frecv[168]=1.00160 kHz	per[168]=998.40 microsec
val[172].x= 21924	frecv[172]=1.00165 kHz	per[172]=998.35 microsec
val[176].x= 7590	frecv[176]=1.00120 kHz	per[176]=998.80 microsec
val[180].x= 58801	frecv[180]=1.00165 kHz	per[180]=998.35 microsec
val[184].x= 44469	frecv[184]=1.00125 kHz	per[184]=998.75 microsec
val[188].x= 30146	frecv[188]=1.00170 kHz	per[188]=998.30 microsec
val[192].x= 15808	frecv[192]=1.00145 kHz	per[192]=998.55 microsec
val[196].x= 1490	frecv[196]=1.00155 kHz	per[196]=998.45 microsec
recventa medie este f=1.00171 kHz		
recventa minima este f=1.001 kHz		
recventa maxima este f=1.00281 kHz		

TABELA 1

val[ 0].x=	0	frecv[ 0]=	99.80 kHz
val[ 4].x=	63538	frecv[ 4]=	99.80 kHz
val[ 8].x=	61540	frecv[ 8]=	100.00 kHz
val[ 12].x=	59541	frecv[ 12]=	100.00 kHz
val[ 16].x=	57543	frecv[ 16]=	100.00 kHz
val[ 20].x=	55544	frecv[ 20]=	100.00 kHz
val[ 24].x=	53545	frecv[ 24]=	99.80 kHz
val[ 28].x=	51547	frecv[ 28]=	100.00 kHz
val[ 32].x=	49548	frecv[ 32]=	99.80 kHz
val[ 36].x=	47550	frecv[ 36]=	100.00 kHz
val[ 40].x=	45551	frecv[ 40]=	99.80 kHz
val[ 44].x=	43553	frecv[ 44]=	100.00 kHz
val[ 48].x=	41554	frecv[ 48]=	99.80 kHz
val[ 52].x=	39556	frecv[ 52]=	100.00 kHz
val[ 56].x=	37557	frecv[ 56]=	100.00 kHz
val[ 60].x=	35559	frecv[ 60]=	100.00 kHz
val[ 64].x=	33560	frecv[ 64]=	100.00 kHz
val[ 68].x=	31562	frecv[ 68]=	100.00 kHz
val[ 72].x=	29563	frecv[ 72]=	100.00 kHz
val[ 76].x=	27564	frecv[ 76]=	99.80 kHz
val[ 80].x=	25566	frecv[ 80]=	100.00 kHz
val[ 84].x=	23567	frecv[ 84]=	99.80 kHz
val[ 88].x=	21569	frecv[ 88]=	100.00 kHz
val[ 92].x=	19570	frecv[ 92]=	99.80 kHz

val[ 96].x=	17572	frecv[ 96]=	100.00 kHz
val[100].x=	15573	frecv[100]=	99.80 kHz
val[104].x=	13575	frecv[104]=	100.00 kHz
val[108].x=	11576	frecv[108]=	100.00 kHz
val[112].x=	9578	frecv[112]=	100.00 kHz
val[116].x=	7579	frecv[116]=	100.00 kHz
val[120].x=	5580	frecv[120]=	99.80 kHz
val[124].x=	3582	frecv[124]=	100.00 kHz
val[128].x=	1583	frecv[128]=	99.80 kHz
val[132].x=	65121	frecv[132]=	100.00 kHz
val[136].x=	63122	frecv[136]=	99.80 kHz
val[140].x=	61124	frecv[140]=	100.00 kHz
val[144].x=	59125	frecv[144]=	99.80 kHz
val[148].x=	57127	frecv[148]=	100.00 kHz
val[152].x=	55128	frecv[152]=	100.00 kHz
val[156].x=	53130	frecv[156]=	100.00 kHz
val[160].x=	51131	frecv[160]=	100.00 kHz
val[164].x=	49132	frecv[164]=	99.80 kHz
val[168].x=	47134	frecv[168]=	100.00 kHz
val[172].x=	45135	frecv[172]=	99.80 kHz
val[176].x=	43137	frecv[176]=	100.00 kHz
val[180].x=	41138	frecv[180]=	99.80 kHz
val[184].x=	39140	frecv[184]=	100.00 kHz
val[188].x=	37141	frecv[188]=	99.80 kHz

val[192].x=	35143	frecv[192]=	100.00 kHz
val[196].x=	33144	frecv[196]=	99.80 kHz

Frecventa medie este f=99.9266331658 kHz  
Frecventa minima este f=99.800000 kHz  
Frecventa maxima este f=100.000000 kHz

## TABELA 2

val[ 0].x= 65267	frecv[ 0]=12.06273 kHz	per[ 0]=82.90 microsec
val[ 1].x= 63609	frecv[ 1]=12.04819 kHz	per[ 1]=83.00 microsec
val[ 2].x= 61949	frecv[ 2]=12.08459 kHz	per[ 2]=82.75 microsec
val[ 3].x= 60294	frecv[ 3]=12.04819 kHz	per[ 3]=83.00 microsec
val[ 4].x= 58634	frecv[ 4]=12.07729 kHz	per[ 4]=82.80 microsec
val[ 5].x= 56978	frecv[ 5]=12.06273 kHz	per[ 5]=82.90 microsec
val[ 6].x= 55320	frecv[ 6]=12.06273 kHz	per[ 6]=82.90 microsec
val[ 7].x= 53662	frecv[ 7]=12.04819 kHz	per[ 7]=83.00 microsec
val[ 8].x= 52002	frecv[ 8]=12.07001 kHz	per[ 8]=82.85 microsec
val[ 9].x= 50345	frecv[ 9]=12.05546 kHz	per[ 9]=82.95 microsec
val[10].x= 48686	frecv[10]=12.08459 kHz	per[10]=82.75 microsec
val[11].x= 47031	frecv[11]=12.06273 kHz	per[11]=82.90 microsec
val[12].x= 45373	frecv[12]=12.07001 kHz	per[12]=82.85 microsec
val[13].x= 43716	frecv[13]=12.07001 kHz	per[13]=82.85 microsec
val[14].x= 42059	frecv[14]=12.06273 kHz	per[14]=82.90 microsec
val[15].x= 40401	frecv[15]=12.04819 kHz	per[15]=83.00 microsec
val[16].x= 38741	frecv[16]=12.09921 kHz	per[16]=82.65 microsec
val[17].x= 37088	frecv[17]=12.07001 kHz	per[17]=82.85 microsec
val[18].x= 35431	frecv[18]=12.07001 kHz	per[18]=82.85 microsec
val[19].x= 33774	frecv[19]=12.06273 kHz	per[19]=82.90 microsec
val[20].x= 32116	frecv[20]=12.07001 kHz	per[20]=82.85 microsec
val[21].x= 30459	frecv[21]=12.07001 kHz	per[21]=82.85 microsec
val[22].x= 28802	frecv[22]=12.07001 kHz	per[22]=82.85 microsec
val[23].x= 27145	frecv[23]=12.07001 kHz	per[23]=82.85 microsec
val[24].x= 25488	frecv[24]=12.06273 kHz	per[24]=82.90 microsec
val[25].x= 23830	frecv[25]=12.04094 kHz	per[25]=83.05 microsec
val[26].x= 22169	frecv[26]=12.07001 kHz	per[26]=82.85 microsec
val[27].x= 20512	frecv[27]=12.05546 kHz	per[27]=82.95 microsec
val[28].x= 18853	frecv[28]=12.07001 kHz	per[28]=82.85 microsec
val[29].x= 17196	frecv[29]=12.04819 kHz	per[29]=83.00 microsec
val[30].x= 15536	frecv[30]=12.06273 kHz	per[30]=82.90 microsec
val[31].x= 13878	frecv[31]=12.06273 kHz	per[31]=82.90 microsec
val[32].x= 12220	frecv[32]=12.07001 kHz	per[32]=82.85 microsec
val[33].x= 10563	frecv[33]=12.06273 kHz	per[33]=82.90 microsec
val[34].x= 8905	frecv[34]=12.04819 kHz	per[34]=83.00 microsec
val[35].x= 7245	frecv[35]=12.07001 kHz	per[35]=82.85 microsec
val[36].x= 5588	frecv[36]=12.05546 kHz	per[36]=82.95 microsec
val[37].x= 3929	frecv[37]=12.05546 kHz	per[37]=82.95 microsec
val[38].x= 2270	frecv[38]=12.07001 kHz	per[38]=82.85 microsec
val[39].x= 613	frecv[39]=12.04094 kHz	per[39]=83.05 microsec
val[40].x= 64486	frecv[40]=12.06273 kHz	per[40]=82.90 microsec
val[41].x= 62830	frecv[41]=12.06273 kHz	per[41]=82.90 microsec
val[42].x= 61172	frecv[42]=12.05546 kHz	per[42]=82.95 microsec
val[43].x= 59513	frecv[43]=12.05546 kHz	per[43]=82.95 microsec
val[44].x= 57854	frecv[44]=12.06273 kHz	per[44]=82.90 microsec
val[45].x= 56196	frecv[45]=12.04819 kHz	per[45]=83.00 microsec
val[46].x= 54536	frecv[46]=12.05546 kHz	per[46]=82.95 microsec
val[47].x= 52877	frecv[47]=12.05546 kHz	per[47]=82.95 microsec

TABELA 3

val[ 50].x= 47900	frecv[ 50]=12.06273 kHz	per[ 50]=82.90 microsec
val[ 51].x= 46243	frecv[ 51]=12.06273 kHz	per[ 51]=82.90 microsec
val[ 52].x= 44586	frecv[ 52]=12.06273 kHz	per[ 52]=82.90 microsec
val[ 53].x= 42929	frecv[ 53]=12.06273 kHz	per[ 53]=82.90 microsec
val[ 54].x= 41272	frecv[ 54]=12.06273 kHz	per[ 54]=82.90 microsec
val[ 55].x= 39615	frecv[ 55]=12.06273 kHz	per[ 55]=82.90 microsec
val[ 56].x= 37958	frecv[ 56]=12.07729 kHz	per[ 56]=82.80 microsec
val[ 57].x= 36301	frecv[ 57]=12.07001 kHz	per[ 57]=82.85 microsec
val[ 58].x= 34644	frecv[ 58]=12.08459 kHz	per[ 58]=82.75 microsec
val[ 59].x= 32987	frecv[ 59]=12.05546 kHz	per[ 59]=82.95 microsec
val[ 60].x= 31330	frecv[ 60]=12.06273 kHz	per[ 60]=82.90 microsec
val[ 61].x= 29673	frecv[ 61]=12.04819 kHz	per[ 61]=83.00 microsec
val[ 62].x= 28016	frecv[ 62]=12.09190 kHz	per[ 62]=82.70 microsec
val[ 63].x= 26359	frecv[ 63]=12.06273 kHz	per[ 63]=82.90 microsec
val[ 64].x= 24702	frecv[ 64]=12.07729 kHz	per[ 64]=82.80 microsec
val[ 65].x= 23045	frecv[ 65]=12.05546 kHz	per[ 65]=82.95 microsec
val[ 66].x= 21388	frecv[ 66]=12.05546 kHz	per[ 66]=82.95 microsec
val[ 67].x= 19731	frecv[ 67]=12.07729 kHz	per[ 67]=82.80 microsec
val[ 68].x= 18074	frecv[ 68]=12.07729 kHz	per[ 68]=82.80 microsec
val[ 69].x= 16417	frecv[ 69]=12.06273 kHz	per[ 69]=82.90 microsec
val[ 70].x= 14760	frecv[ 70]=12.06273 kHz	per[ 70]=82.90 microsec
val[ 71].x= 13103	frecv[ 71]=12.07729 kHz	per[ 71]=82.80 microsec
val[ 72].x= 11446	frecv[ 72]=12.04094 kHz	per[ 72]=83.05 microsec
val[ 73].x= 9789	frecv[ 73]=12.08459 kHz	per[ 73]=82.75 microsec
val[ 74].x= 8132	frecv[ 74]=12.09921 kHz	per[ 74]=82.65 microsec
val[ 75].x= 6475	frecv[ 75]=12.04819 kHz	per[ 75]=83.00 microsec
val[ 76].x= 4818	frecv[ 76]=12.06273 kHz	per[ 76]=82.90 microsec
val[ 77].x= 3161	frecv[ 77]=12.10654 kHz	per[ 77]=82.60 microsec
val[ 78].x= 1504	frecv[ 78]=12.07729 kHz	per[ 78]=82.80 microsec
val[ 79].x= 6378	frecv[ 79]=12.07729 kHz	per[ 79]=82.80 microsec
val[ 80].x= 63722	frecv[ 80]=12.07001 kHz	per[ 80]=82.85 microsec
val[ 81].x= 62065	frecv[ 81]=12.07729 kHz	per[ 81]=82.80 microsec
val[ 82].x= 60409	frecv[ 82]=12.07001 kHz	per[ 82]=82.85 microsec
val[ 83].x= 58752	frecv[ 83]=12.06273 kHz	per[ 83]=82.90 microsec
val[ 84].x= 57094	frecv[ 84]=12.08459 kHz	per[ 84]=82.75 microsec
val[ 85].x= 55439	frecv[ 85]=12.06273 kHz	per[ 85]=82.90 microsec
val[ 86].x= 53781	frecv[ 86]=11.62115 kHz	per[ 86]=86.05 microsec
val[ 87].x= 52060	frecv[ 87]=9.99001 kHz	per[ 87]=100.10 microsec
val[ 88].x= 50058	frecv[ 88]=9.63855 kHz	per[ 88]=103.75 microsec
val[ 89].x= 47983	frecv[ 89]=9.65717 kHz	per[ 89]=103.55 microsec
val[ 90].x= 45912	frecv[ 90]=9.63855 kHz	per[ 90]=103.75 microsec
val[ 91].x= 43837	frecv[ 91]=9.67118 kHz	per[ 91]=103.40 microsec
val[ 92].x= 41769	frecv[ 92]=9.62001 kHz	per[ 92]=103.95 microsec
val[ 93].x= 39690	frecv[ 93]=9.66651 kHz	per[ 93]=103.45 microsec
val[ 94].x= 37621	frecv[ 94]=9.63391 kHz	per[ 94]=103.80 microsec
val[ 95].x= 35545	frecv[ 95]=9.66651 kHz	per[ 95]=103.45 microsec
val[ 96].x= 33476	frecv[ 96]=9.63391 kHz	per[ 96]=103.80 microsec
val[ 97].x= 31400	frecv[ 97]=9.66184 kHz	per[ 97]=103.50 microsec

TABELA 3

val[ 98].x= 29330	frecv[ 98]=9.62464 kHz	per[ 98]=103.90 microsec
val[ 99].x= 27252	frecv[ 99]=9.66651 kHz	per[ 99]=103.45 microsec
val[100].x= 25183	frecv[100]=9.62927 kHz	per[100]=103.85 microsec
val[101].x= 23106	frecv[101]=9.65251 kHz	per[101]=103.60 microsec
val[102].x= 21034	frecv[102]=9.61538 kHz	per[102]=104.00 microsec
val[103].x= 18954	frecv[103]=9.66651 kHz	per[103]=103.45 microsec
val[104].x= 16885	frecv[104]=9.62001 kHz	per[104]=103.95 microsec
val[105].x= 14806	frecv[105]=9.66184 kHz	per[105]=103.50 microsec
val[106].x= 12736	frecv[106]=9.62927 kHz	per[106]=103.85 microsec
val[107].x= 10659	frecv[107]=9.66184 kHz	per[107]=103.50 microsec
val[108].x= 8589	frecv[108]=9.62464 kHz	per[108]=103.90 microsec
val[109].x= 6511	frecv[109]=9.67586 kHz	per[109]=103.35 microsec
val[110].x= 4444	frecv[110]=9.63855 kHz	per[110]=103.75 microsec
val[111].x= 2369	frecv[111]=9.66184 kHz	per[111]=103.50 microsec
val[112].x= 299	frecv[112]=9.63391 kHz	per[112]=103.80 microsec
val[113].x= 63759	frecv[113]=9.66651 kHz	per[113]=103.45 microsec
val[114].x= 61690	frecv[114]=9.63391 kHz	per[114]=103.90 microsec
val[115].x= 59614	frecv[115]=9.67118 kHz	per[115]=103.40 microsec
val[116].x= 57546	frecv[116]=9.63391 kHz	per[116]=103.80 microsec
val[117].x= 55470	frecv[117]=9.65717 kHz	per[117]=103.55 microsec
val[118].x= 53399	frecv[118]=9.62927 kHz	per[118]=103.85 microsec
val[119].x= 51322	frecv[119]=9.66651 kHz	per[119]=103.45 microsec
val[120].x= 49253	frecv[120]=9.62927 kHz	per[120]=103.85 microsec
val[121].x= 47176	frecv[121]=9.66184 kHz	per[121]=103.50 microsec
val[122].x= 45106	frecv[122]=9.62464 kHz	per[122]=103.90 microsec
val[123].x= 43028	frecv[123]=9.68054 kHz	per[123]=103.30 microsec
val[124].x= 40962	frecv[124]=9.62464 kHz	per[124]=103.90 microsec
val[125].x= 38884	frecv[125]=9.67586 kHz	per[125]=103.35 microsec
val[126].x= 36817	frecv[126]=9.63855 kHz	per[126]=103.75 microsec
val[127].x= 34742	frecv[127]=9.64785 kHz	per[127]=103.65 microsec
val[128].x= 32669	frecv[128]=9.66184 kHz	per[128]=103.50 microsec
val[129].x= 30599	frecv[129]=9.64785 kHz	per[129]=103.65 microsec
val[130].x= 28526	frecv[130]=9.66651 kHz	per[130]=103.45 microsec
val[131].x= 26457	frecv[131]=9.64320 kHz	per[131]=103.70 microsec
val[132].x= 24383	frecv[132]=9.66184 kHz	per[132]=103.50 microsec
val[133].x= 22313	frecv[133]=9.62927 kHz	per[133]=103.85 microsec
val[134].x= 20236	frecv[134]=9.66651 kHz	per[134]=103.45 microsec
val[135].x= 18167	frecv[135]=9.62464 kHz	per[135]=103.90 microsec
val[136].x= 16089	frecv[136]=9.66651 kHz	per[136]=103.45 microsec
val[137].x= 14020	frecv[137]=9.62001 kHz	per[137]=103.95 microsec
val[138].x= 11941	frecv[138]=9.66651 kHz	per[138]=103.45 microsec
val[139].x= 9872	frecv[139]=9.62001 kHz	per[139]=103.95 microsec
val[140].x= 7793	frecv[140]=9.67118 kHz	per[140]=103.40 microsec
val[141].x= 5725	frecv[141]=9.62927 kHz	per[141]=103.85 microsec
val[142].x= 3648	frecv[142]=9.66651 kHz	per[142]=103.45 microsec
val[143].x= 1579	frecv[143]=9.62001 kHz	per[143]=103.95 microsec
val[144].x= 65036	frecv[144]=9.66651 kHz	per[144]=103.45 microsec
val[145].x= 62967	frecv[145]=9.62001 kHz	per[145]=103.95 microsec

TABELA 3

val[146].x=	60888	frecv[146]=9.67118	kHz	per[146]=103.40	microsec
val[147].x=	58820	frecv[147]=9.62001	kHz	per[147]=103.95	microsec
val[148].x=	56741	frecv[148]=9.66651	kHz	per[148]=103.45	microsec
val[149].x=	54672	frecv[149]=9.61076	kHz	per[149]=104.05	microsec
val[150].x=	52591	frecv[150]=9.65717	kHz	per[150]=103.55	microsec
val[151].x=	50520	frecv[151]=9.62927	kHz	per[151]=103.85	microsec
val[152].x=	48443	frecv[152]=9.63855	kHz	per[152]=103.75	microsec
val[153].x=	46368	frecv[153]=9.63855	kHz	per[153]=103.75	microsec
val[154].x=	44293	frecv[154]=9.65251	kHz	per[154]=103.60	microsec
val[155].x=	42221	frecv[155]=9.63855	kHz	per[155]=103.75	microsec
val[156].x=	40146	frecv[156]=9.65251	kHz	per[156]=103.60	microsec
val[157].x=	38074	frecv[157]=9.63855	kHz	per[157]=103.75	microsec
val[158].x=	35999	frecv[158]=9.67586	kHz	per[158]=103.35	microsec
val[159].x=	33932	frecv[159]=9.62927	kHz	per[159]=103.85	microsec
val[160].x=	31855	frecv[160]=9.67118	kHz	per[160]=103.40	microsec
val[161].x=	29787	frecv[161]=9.63855	kHz	per[161]=103.75	microsec
val[162].x=	27717	frecv[162]=9.65717	kHz	per[162]=103.55	microsec
val[163].x=	25641	frecv[163]=9.63391	kHz	per[163]=103.80	microsec
val[164].x=	23565	frecv[164]=9.66184	kHz	per[164]=103.50	microsec
val[165].x=	21495	frecv[165]=9.63391	kHz	per[165]=103.80	microsec
val[166].x=	19419	frecv[166]=9.65251	kHz	per[166]=103.60	microsec
val[167].x=	17347	frecv[167]=9.64320	kHz	per[167]=103.70	microsec
val[168].x=	15273	frecv[168]=9.65717	kHz	per[168]=103.55	microsec
val[169].x=	13202	frecv[169]=9.63855	kHz	per[169]=103.75	microsec

val[170].x=	11127	frecv[170]=9.66651	kHz	per[170]=103.45	microsec
val[171].x=	9058	frecv[171]=9.62464	kHz	per[171]=103.90	microsec
val[172].x=	6980	frecv[172]=9.67118	kHz	per[172]=103.40	microsec
val[173].x=	4912	frecv[173]=9.62464	kHz	per[173]=103.90	microsec
val[174].x=	2834	frecv[174]=9.66651	kHz	per[174]=103.45	microsec
val[175].x=	765	frecv[175]=9.64320	kHz	per[175]=103.70	microsec
val[176].x=	64227	frecv[176]=9.67118	kHz	per[176]=103.40	microsec
val[177].x=	62159	frecv[177]=9.63855	kHz	per[177]=103.75	microsec
val[178].x=	60084	frecv[178]=9.65717	kHz	per[178]=103.55	microsec
val[179].x=	58013	frecv[179]=9.64320	kHz	per[179]=103.70	microsec
val[180].x=	55939	frecv[180]=9.66184	kHz	per[180]=103.50	microsec
val[181].x=	53869	frecv[181]=9.64785	kHz	per[181]=103.65	microsec
val[182].x=	51796	frecv[182]=9.64320	kHz	per[182]=103.70	microsec
val[183].x=	49722	frecv[183]=9.63855	kHz	per[183]=103.75	microsec
val[184].x=	47647	frecv[184]=9.64785	kHz	per[184]=103.65	microsec
val[185].x=	45574	frecv[185]=9.64320	kHz	per[185]=103.70	microsec
val[186].x=	43500	frecv[186]=9.64785	kHz	per[186]=103.65	microsec
val[187].x=	41427	frecv[187]=9.63855	kHz	per[187]=103.75	microsec
val[188].x=	39352	frecv[188]=9.64785	kHz	per[188]=103.65	microsec
val[189].x=	37279	frecv[189]=9.64320	kHz	per[189]=103.70	microsec
val[190].x=	35205	frecv[190]=9.63855	kHz	per[190]=103.75	microsec
val[191].x=	33130	frecv[191]=9.65717	kHz	per[191]=103.55	microsec
val[192].x=	31059	frecv[192]=9.63391	kHz	per[192]=103.80	microsec
val[193].x=	28983	frecv[193]=9.64785	kHz	per[193]=103.65	microsec

val[194].x=	26910	frecv[194]=9.64320	kHz	per[194]=103.70	microsec
val[195].x=	24836	frecv[195]=9.63855	kHz	per[195]=103.75	microsec
val[196].x=	22761	frecv[196]=9.63855	kHz	per[196]=103.75	microsec
val[197].x=	20686	frecv[197]=9.63391	kHz	per[197]=103.80	microsec
val[198].x=	18610	frecv[198]=0.00000	kHz	per[198]=0.00	microsec
val[199].x=	16538	frecv[199]=0.00000	kHz	per[199]=12.00	microsec

ecventa medie este f=10.7089 kHz

ecventa minima este f=9.61076

ecventa maxima este f=12.1065



val[146].x= 60888	frecv[146]=9.67118 kHz	per[146]=103.40 microsec
val[147].x= 58820	frecv[147]=9.62001 kHz	per[147]=103.95 microsec
val[148].x= 56741	frecv[148]=9.66651 kHz	per[148]=103.45 microsec
val[149].x= 54672	frecv[149]=9.61076 kHz	per[149]=104.05 microsec
val[150].x= 52591	frecv[150]=9.65717 kHz	per[150]=103.55 microsec
val[151].x= 50520	frecv[151]=9.62927 kHz	per[151]=103.85 microsec
val[152].x= 48443	frecv[152]=9.63855 kHz	per[152]=103.75 microsec
val[153].x= 46368	frecv[153]=9.63855 kHz	per[153]=103.75 microsec
val[154].x= 44293	frecv[154]=9.65251 kHz	per[154]=103.60 microsec
val[155].x= 42221	frecv[155]=9.63855 kHz	per[155]=103.75 microsec
val[156].x= 40146	frecv[156]=9.65251 kHz	per[156]=103.60 microsec
val[157].x= 38074	frecv[157]=9.63855 kHz	per[157]=103.75 microsec
val[158].x= 35999	frecv[158]=9.67586 kHz	per[158]=103.35 microsec
val[159].x= 33932	frecv[159]=9.62927 kHz	per[159]=103.85 microsec
val[160].x= 31855	frecv[160]=9.67118 kHz	per[160]=103.40 microsec
val[161].x= 29787	frecv[161]=9.63855 kHz	per[161]=103.75 microsec
val[162].x= 27712	frecv[162]=9.65717 kHz	per[162]=103.55 microsec
val[163].x= 25641	frecv[163]=9.63391 kHz	per[163]=103.80 microsec
val[164].x= 23565	frecv[164]=9.66184 kHz	per[164]=103.50 microsec
val[165].x= 21495	frecv[165]=9.63391 kHz	per[165]=103.80 microsec
val[166].x= 19419	frecv[166]=9.65251 kHz	per[166]=103.60 microsec
val[167].x= 17347	frecv[167]=9.64320 kHz	per[167]=103.70 microsec
val[168].x= 15273	frecv[168]=9.65717 kHz	per[168]=103.55 microsec
val[169].x= 13202	frecv[169]=9.63855 kHz	per[169]=103.75 microsec

val[170].x= 11127	frecv[170]=9.66651 kHz	per[170]=103.45 microsec
val[171].x= 9058	frecv[171]=9.62464 kHz	per[171]=103.90 microsec
val[172].x= 6980	frecv[172]=9.67118 kHz	per[172]=103.40 microsec
val[173].x= 4912	frecv[173]=9.62464 kHz	per[173]=103.90 microsec
val[174].x= 2834	frecv[174]=9.66651 kHz	per[174]=103.45 microsec
val[175].x= 765	frecv[175]=9.64320 kHz	per[175]=103.70 microsec
val[176].x= 64227	frecv[176]=9.67118 kHz	per[176]=103.40 microsec
val[177].x= 62159	frecv[177]=9.63855 kHz	per[177]=103.75 microsec
val[178].x= 60084	frecv[178]=9.65717 kHz	per[178]=103.55 microsec
val[179].x= 58013	frecv[179]=9.64320 kHz	per[179]=103.70 microsec
val[180].x= 55939	frecv[180]=9.66184 kHz	per[180]=103.50 microsec
val[181].x= 53869	frecv[181]=9.64785 kHz	per[181]=103.65 microsec
val[182].x= 51796	frecv[182]=9.64320 kHz	per[182]=103.70 microsec
val[183].x= 49722	frecv[183]=9.63855 kHz	per[183]=103.75 microsec
val[184].x= 47647	frecv[184]=9.64785 kHz	per[184]=103.65 microsec
val[185].x= 45574	frecv[185]=9.64320 kHz	per[185]=103.70 microsec
val[186].x= 43500	frecv[186]=9.64785 kHz	per[186]=103.65 microsec
val[187].x= 41427	frecv[187]=9.63855 kHz	per[187]=103.75 microsec
val[188].x= 39352	frecv[188]=9.64785 kHz	per[188]=103.65 microsec
val[189].x= 37279	frecv[189]=9.64320 kHz	per[189]=103.70 microsec
val[190].x= 35205	frecv[190]=9.63855 kHz	per[190]=103.75 microsec
val[191].x= 33130	frecv[191]=9.65717 kHz	per[191]=103.55 microsec
val[192].x= 31059	frecv[192]=9.63391 kHz	per[192]=103.80 microsec
val[193].x= 28983	frecv[193]=9.64785 kHz	per[193]=103.65 microsec

val[194].x= 26910	frecv[194]=9.64320 kHz	per[194]=103.70 microsec
val[195].x= 24836	frecv[195]=9.63855 kHz	per[195]=103.75 microsec
val[196].x= 22761	frecv[196]=9.63855 kHz	per[196]=103.75 microsec
val[197].x= 20686	frecv[197]=9.63391 kHz	per[197]=103.80 microsec
val[198].x= 18610	frecv[198]=0.00000 kHz	per[198]=0.00 microsec
val[199].x= 16538	frecv[199]=0.00000 kHz	per[199]=12.85 microsec

Frecventa medie este  $f=10.7089$  kHz

Frecventa minima este  $f=9.61076$

Frecventa maxima este  $f=12.1065$

val[ 0].x=	63282	frecv[ 0]=	9.02935 kHz	per[ 0]=	110.75 microsec
val[ 1].x=	61067	frecv[ 1]=	9.01307 kHz	per[ 1]=	110.95 microsec
val[ 2].x=	58848	frecv[ 2]=	8.95255 kHz	per[ 2]=	111.70 microsec
val[ 3].x=	56614	frecv[ 3]=	8.90869 kHz	per[ 3]=	112.25 microsec
val[ 4].x=	54369	frecv[ 4]=	8.87311 kHz	per[ 4]=	112.70 microsec
val[ 5].x=	52115	frecv[ 5]=	8.81834 kHz	per[ 5]=	113.40 microsec
val[ 6].x=	49847	frecv[ 6]=	8.78735 kHz	per[ 6]=	113.80 microsec
val[ 7].x=	47571	frecv[ 7]=	8.74508 kHz	per[ 7]=	114.35 microsec
val[ 8].x=	45284	frecv[ 8]=	8.66927 kHz	per[ 8]=	115.35 microsec
val[ 9].x=	42977	frecv[ 9]=	8.66551 kHz	per[ 9]=	115.40 microsec
val[ 10].x=	40669	frecv[ 10]=	8.61698 kHz	per[ 10]=	116.05 microsec
val[ 11].x=	38348	frecv[ 11]=	8.56531 kHz	per[ 11]=	116.75 microsec
val[ 12].x=	36013	frecv[ 12]=	8.52878 kHz	per[ 12]=	117.25 microsec
val[ 13].x=	33668	frecv[ 13]=	8.49779 kHz	per[ 13]=	117.65 microsec
val[ 14].x=	31315	frecv[ 14]=	8.44595 kHz	per[ 14]=	118.40 microsec
val[ 15].x=	28947	frecv[ 15]=	8.43882 kHz	per[ 15]=	118.50 microsec
val[ 16].x=	26577	frecv[ 16]=	8.37872 kHz	per[ 16]=	119.35 microsec
val[ 17].x=	24190	frecv[ 17]=	8.35422 kHz	per[ 17]=	119.70 microsec
val[ 18].x=	21796	frecv[ 18]=	8.31947 kHz	per[ 18]=	120.20 microsec
val[ 19].x=	19392	frecv[ 19]=	8.30565 kHz	per[ 19]=	120.40 microsec
val[ 20].x=	16984	frecv[ 20]=	8.26788 kHz	per[ 20]=	120.95 microsec
val[ 21].x=	14565	frecv[ 21]=	8.22368 kHz	per[ 21]=	121.60 microsec
val[ 22].x=	12133	frecv[ 22]=	8.20681 kHz	per[ 22]=	121.85 microsec
val[ 23].x=	9696	frecv[ 23]=	8.17996 kHz	per[ 23]=	122.25 microsec
val[ 24].x=	7251	frecv[ 24]=	8.15993 kHz	per[ 24]=	122.55 microsec
val[ 25].x=	4800	frecv[ 25]=	8.14001 kHz	per[ 25]=	122.85 microsec
val[ 26].x=	2343	frecv[ 26]=	8.12348 kHz	per[ 26]=	123.10 microsec
val[ 27].x=	65417	frecv[ 27]=	8.09389 kHz	per[ 27]=	123.55 microsec
val[ 28].x=	62946	frecv[ 28]=	8.08734 kHz	per[ 28]=	123.65 microsec
val[ 29].x=	60473	frecv[ 29]=	8.06777 kHz	per[ 29]=	123.95 microsec
val[ 30].x=	57994	frecv[ 30]=	8.07428 kHz	per[ 30]=	123.85 microsec
val[ 31].x=	55517	frecv[ 31]=	8.03536 kHz	per[ 31]=	124.45 microsec
val[ 32].x=	53028	frecv[ 32]=	8.03859 kHz	per[ 32]=	124.40 microsec
val[ 33].x=	50540	frecv[ 33]=	8.02568 kHz	per[ 33]=	124.60 microsec
val[ 34].x=	48048	frecv[ 34]=	8.00961 kHz	per[ 34]=	124.85 microsec
val[ 35].x=	45551	frecv[ 35]=	8.00961 kHz	per[ 35]=	124.85 microsec
val[ 36].x=	43054	frecv[ 36]=	8.00961 kHz	per[ 36]=	124.85 microsec
val[ 37].x=	40557	frecv[ 37]=	8.00000 kHz	per[ 37]=	125.00 microsec
val[ 38].x=	38057	frecv[ 38]=	8.00961 kHz	per[ 38]=	124.85 microsec
val[ 39].x=	35560	frecv[ 39]=	8.00000 kHz	per[ 39]=	125.00 microsec
val[ 40].x=	33060	frecv[ 40]=	7.98722 kHz	per[ 40]=	125.20 microsec
val[ 41].x=	30556	frecv[ 41]=	8.01603 kHz	per[ 41]=	124.75 microsec
val[ 42].x=	28061	frecv[ 42]=	8.01925 kHz	per[ 42]=	124.70 microsec
val[ 43].x=	25567	frecv[ 43]=	8.02890 kHz	per[ 43]=	124.55 microsec
val[ 44].x=	23076	frecv[ 44]=	8.04182 kHz	per[ 44]=	124.35 microsec
val[ 45].x=	20589	frecv[ 45]=	8.04829 kHz	per[ 45]=	124.25 microsec
val[ 46].x=	18104	frecv[ 46]=	8.06452 kHz	per[ 46]=	124.00 microsec
val[ 47].x=	15624	frecv[ 47]=	8.08407 kHz	per[ 47]=	123.70 microsec

TABELA 4



val[ 48].x=	13150	frecv[ 48]=	8.08081 kHz	per[ 48]=	123.75 microsec
val[ 49].x=	10675	frecv[ 49]=	8.09389 kHz	per[ 49]=	123.55 microsec
val[ 50].x=	8204	frecv[ 50]=	8.10373 kHz	per[ 50]=	123.40 microsec
val[ 51].x=	5736	frecv[ 51]=	8.15661 kHz	per[ 51]=	122.60 microsec
val[ 52].x=	3284	frecv[ 52]=	8.14996 kHz	per[ 52]=	122.70 microsec
val[ 53].x=	830	frecv[ 53]=	8.17996 kHz	per[ 53]=	122.25 microsec
val[ 54].x=	63921	frecv[ 54]=	8.22030 kHz	per[ 54]=	121.65 microsec
val[ 55].x=	61488	frecv[ 55]=	8.21693 kHz	per[ 55]=	121.70 microsec
val[ 56].x=	59054	frecv[ 56]=	8.25764 kHz	per[ 56]=	121.10 microsec
val[ 57].x=	56632	frecv[ 57]=	8.28500 kHz	per[ 57]=	120.70 microsec
val[ 58].x=	54218	frecv[ 58]=	8.31601 kHz	per[ 58]=	120.25 microsec
val[ 59].x=	51813	frecv[ 59]=	8.36470 kHz	per[ 59]=	119.55 microsec
val[ 60].x=	49422	frecv[ 60]=	8.35422 kHz	per[ 60]=	119.70 microsec
val[ 61].x=	47028	frecv[ 61]=	8.41043 kHz	per[ 61]=	118.90 microsec
val[ 62].x=	44650	frecv[ 62]=	8.43526 kHz	per[ 62]=	118.55 microsec
val[ 63].x=	42279	frecv[ 63]=	8.48536 kHz	per[ 63]=	117.85 microsec
val[ 64].x=	39922	frecv[ 64]=	8.50702 kHz	per[ 64]=	117.55 microsec
val[ 65].x=	37571	frecv[ 65]=	8.53971 kHz	per[ 65]=	117.10 microsec
val[ 66].x=	35229	frecv[ 66]=	8.56898 kHz	per[ 66]=	116.70 microsec
val[ 67].x=	32895	frecv[ 67]=	11.50086 kHz	per[ 67]=	86.95 microsec
val[ 68].x=	31156	frecv[ 68]=	8.65801 kHz	per[ 68]=	115.50 microsec
val[ 69].x=	28846	frecv[ 69]=	8.68056 kHz	per[ 69]=	115.20 microsec
val[ 70].x=	26542	frecv[ 70]=	8.73744 kHz	per[ 70]=	114.45 microsec
val[ 71].x=	24253	frecv[ 71]=	8.78349 kHz	per[ 71]=	113.85 microsec
val[ 72].x=	21976	frecv[ 72]=	8.81446 kHz	per[ 72]=	113.45 microsec
val[ 73].x=	19707	frecv[ 73]=	8.84956 kHz	per[ 73]=	113.00 microsec
val[ 74].x=	17447	frecv[ 74]=	8.89680 kHz	per[ 74]=	112.40 microsec
val[ 75].x=	15199	frecv[ 75]=	8.92459 kHz	per[ 75]=	112.05 microsec
val[ 76].x=	12958	frecv[ 76]=	8.98876 kHz	per[ 76]=	111.25 microsec
val[ 77].x=	10733	frecv[ 77]=	8.99685 kHz	per[ 77]=	111.15 microsec
val[ 78].x=	8510	frecv[ 78]=	9.07029 kHz	per[ 78]=	110.25 microsec
val[ 79].x=	6305	frecv[ 79]=	9.09918 kHz	per[ 79]=	109.90 microsec
val[ 80].x=	4107	frecv[ 80]=	9.15332 kHz	per[ 80]=	109.25 microsec
val[ 81].x=	1922	frecv[ 81]=	9.18274 kHz	per[ 81]=	108.90 microsec
val[ 82].x=	65280	frecv[ 82]=	9.22509 kHz	per[ 82]=	108.40 microsec
val[ 83].x=	63112	frecv[ 83]=	9.28505 kHz	per[ 83]=	107.70 microsec
val[ 84].x=	60958	frecv[ 84]=	9.31966 kHz	per[ 84]=	107.30 microsec
val[ 85].x=	58812	frecv[ 85]=	9.38527 kHz	per[ 85]=	106.55 microsec
val[ 86].x=	56681	frecv[ 86]=	9.40291 kHz	per[ 86]=	106.35 microsec
val[ 87].x=	54554	frecv[ 87]=	9.47418 kHz	per[ 87]=	105.55 microsec
val[ 88].x=	52443	frecv[ 88]=	9.50570 kHz	per[ 88]=	105.20 microsec
val[ 89].x=	50339	frecv[ 89]=	9.53289 kHz	per[ 89]=	104.90 microsec
val[ 90].x=	48241	frecv[ 90]=	9.60154 kHz	per[ 90]=	104.15 microsec
val[ 91].x=	46158	frecv[ 91]=	9.65717 kHz	per[ 91]=	103.55 microsec
val[ 92].x=	44087	frecv[ 92]=	9.66184 kHz	per[ 92]=	103.50 microsec
val[ 93].x=	42017	frecv[ 93]=	9.71817 kHz	per[ 93]=	102.90 microsec
val[ 94].x=	39959	frecv[ 94]=	9.77517 kHz	per[ 94]=	102.30 microsec
val[ 95].x=	37913	frecv[ 95]=	9.81836 kHz	per[ 95]=	101.85 microsec

TABELA 4

val[ 96].x=	35876	frecv[ 96]=9.86680	kHz	per[ 96]=101.35	microsec
val[ 97].x=	33849	frecv[ 97]=9.89609	kHz	per[ 97]=101.05	microsec
val[ 98].x=	31828	frecv[ 98]=9.97009	kHz	per[ 98]=100.30	microsec
val[ 99].x=	29822	frecv[ 99]=9.97506	kHz	per[ 99]=100.25	microsec
val[100].x=	27817	frecv[100]=10.05530	kHz	per[100]=99.45	microsec
val[101].x=	25828	frecv[101]=10.06036	kHz	per[101]=99.40	microsec
val[102].x=	23840	frecv[102]=10.12658	kHz	per[102]=98.75	microsec
val[103].x=	21865	frecv[103]=10.17294	kHz	per[103]=98.30	microsec
val[104].x=	19899	frecv[104]=10.19888	kHz	per[104]=98.05	microsec
val[105].x=	17938	frecv[105]=10.24590	kHz	per[105]=97.60	microsec
val[106].x=	15986	frecv[106]=10.30397	kHz	per[106]=97.05	microsec
val[107].x=	14045	frecv[107]=10.33058	kHz	per[107]=96.80	microsec
val[108].x=	12109	frecv[108]=10.35197	kHz	per[108]=96.60	microsec
val[109].x=	10177	frecv[109]=10.42209	kHz	per[109]=95.95	microsec
val[110].x=	8258	frecv[110]=10.42209	kHz	per[110]=95.95	microsec
val[111].x=	6339	frecv[111]=10.47669	kHz	per[111]=95.45	microsec
val[112].x=	4430	frecv[112]=10.11634	kHz	per[112]=98.85	microsec
val[113].x=	2453	frecv[113]=10.99505	kHz	per[113]=90.95	microsec
val[114].x=	634	frecv[114]=10.59883	kHz	per[114]=94.35	microsec
val[115].x=	64283	frecv[115]=10.62135	kHz	per[115]=94.15	microsec
val[116].x=	62400	frecv[116]=10.65530	kHz	per[116]=93.85	microsec
val[117].x=	60523	frecv[117]=10.67806	kHz	per[117]=93.65	microsec
val[118].x=	58650	frecv[118]=10.72961	kHz	per[118]=93.20	microsec
val[119].x=	56786	frecv[119]=10.78749	kHz	per[119]=92.70	microsec
val[120].x=	54932	frecv[120]=10.77006	kHz	per[120]=92.85	microsec
val[121].x=	53075	frecv[121]=10.82251	kHz	per[121]=92.40	microsec
val[122].x=	51227	frecv[122]=10.86957	kHz	per[122]=92.00	microsec
val[123].x=	49387	frecv[123]=10.89325	kHz	per[123]=91.80	microsec
val[124].x=	47551	frecv[124]=10.89918	kHz	per[124]=91.75	microsec
val[125].x=	45716	frecv[125]=10.93494	kHz	per[125]=91.45	microsec
val[126].x=	43887	frecv[126]=10.96491	kHz	per[126]=91.20	microsec
val[127].x=	42063	frecv[127]=11.00715	kHz	per[127]=90.85	microsec
val[128].x=	40246	frecv[128]=11.01322	kHz	per[128]=90.80	microsec
val[129].x=	38430	frecv[129]=11.03144	kHz	per[129]=90.65	microsec
val[130].x=	36617	frecv[130]=11.05583	kHz	per[130]=90.45	microsec
val[131].x=	34808	frecv[131]=11.09262	kHz	per[131]=90.15	microsec
val[132].x=	33005	frecv[132]=11.08033	kHz	per[132]=90.25	microsec
val[133].x=	31200	frecv[133]=11.13586	kHz	per[133]=89.80	microsec
val[134].x=	29404	frecv[134]=11.12347	kHz	per[134]=89.90	microsec
val[135].x=	27606	frecv[135]=11.20448	kHz	per[135]=89.25	microsec
val[136].x=	25821	frecv[136]=11.18568	kHz	per[136]=89.40	microsec
val[137].x=	24033	frecv[137]=11.17943	kHz	per[137]=89.45	microsec
val[138].x=	22244	frecv[138]=11.24859	kHz	per[138]=88.90	microsec
val[139].x=	20466	frecv[139]=11.22334	kHz	per[139]=89.10	microsec
val[140].x=	18684	frecv[140]=11.26126	kHz	per[140]=88.80	microsec
val[141].x=	16908	frecv[141]=11.26761	kHz	per[141]=88.75	microsec
val[142].x=	15133	frecv[142]=11.28032	kHz	per[142]=88.65	microsec
val[143].x=	13360	frecv[143]=11.29944	kHz	per[143]=88.50	microsec

## TABELA 4

val[144].x= 11590	frecv[144]=11.33144 kHz	per[144]=88.25 microsec
val[145].x= 9825	frecv[145]=11.28668 kHz	per[145]=88.60 microsec
val[146].x= 8053	frecv[146]=11.35074 kHz	per[146]=88.10 microsec
val[147].x= 6291	frecv[147]=11.29944 kHz	per[147]=88.50 microsec
val[148].x= 4521	frecv[148]=11.37656 kHz	per[148]=87.90 microsec
val[149].x= 2763	frecv[149]=11.31862 kHz	per[149]=88.35 microsec
val[150].x= 996	frecv[150]=11.36364 kHz	per[150]=88.00 microsec
val[151].x= 64772	frecv[151]=11.37656 kHz	per[151]=87.90 microsec
val[152].x= 63014	frecv[152]=11.35074 kHz	per[152]=88.10 microsec
val[153].x= 61252	frecv[153]=11.36364 kHz	per[153]=88.00 microsec
val[154].x= 59492	frecv[154]=11.39601 kHz	per[154]=87.75 microsec
val[155].x= 57737	frecv[155]=11.37656 kHz	per[155]=87.90 microsec
val[156].x= 55979	frecv[156]=11.35718 kHz	per[156]=88.05 microsec
val[157].x= 54218	frecv[157]=11.40901 kHz	per[157]=87.65 microsec
val[158].x= 52465	frecv[158]=11.39601 kHz	per[158]=87.75 microsec
val[159].x= 50710	frecv[159]=11.35074 kHz	per[159]=88.10 microsec
val[160].x= 48948	frecv[160]=11.38952 kHz	per[160]=87.80 microsec
val[161].x= 47192	frecv[161]=11.39601 kHz	per[161]=87.75 microsec
val[162].x= 45437	frecv[162]=11.35718 kHz	per[162]=88.05 microsec
val[163].x= 43676	frecv[163]=11.36364 kHz	per[163]=88.00 microsec
val[164].x= 41916	frecv[164]=11.40251 kHz	per[164]=87.70 microsec
val[165].x= 40162	frecv[165]=11.33144 kHz	per[165]=88.25 microsec
val[166].x= 38397	frecv[166]=11.35074 kHz	per[166]=88.10 microsec
val[167].x= 36635	frecv[167]=11.35718 kHz	per[167]=88.05 microsec

val[168].x= 34874	frecv[168]=11.33144 kHz	per[168]=88.25 microsec
val[169].x= 33109	frecv[169]=11.35074 kHz	per[169]=88.10 microsec
val[170].x= 31347	frecv[170]=11.29305 kHz	per[170]=88.55 microsec
val[171].x= 29576	frecv[171]=11.32503 kHz	per[171]=88.30 microsec
val[172].x= 27810	frecv[172]=11.30582 kHz	per[172]=88.45 microsec
val[173].x= 26041	frecv[173]=11.28668 kHz	per[173]=88.60 microsec
val[174].x= 24269	frecv[174]=11.28668 kHz	per[174]=88.60 microsec
val[175].x= 22497	frecv[175]=11.28032 kHz	per[175]=88.65 microsec
val[176].x= 20724	frecv[176]=11.26761 kHz	per[176]=88.75 microsec
val[177].x= 18949	frecv[177]=11.25492 kHz	per[177]=88.85 microsec
val[178].x= 17172	frecv[178]=11.21705 kHz	per[178]=89.15 microsec
val[179].x= 15389	frecv[179]=11.22965 kHz	per[179]=89.05 microsec
val[180].x= 13608	frecv[180]=11.17943 kHz	per[180]=89.45 microsec
val[181].x= 11819	frecv[181]=11.17318 kHz	per[181]=89.50 microsec
val[182].x= 10029	frecv[182]=11.16695 kHz	per[182]=89.55 microsec
val[183].x= 8238	frecv[183]=11.15449 kHz	per[183]=89.65 microsec
val[184].x= 6445	frecv[184]=11.11729 kHz	per[184]=89.95 microsec
val[185].x= 4646	frecv[185]=11.09878 kHz	per[185]=90.10 microsec
val[186].x= 2844	frecv[186]=11.06195 kHz	per[186]=90.40 microsec
val[187].x= 1036	frecv[187]=11.05583 kHz	per[187]=90.45 microsec
val[188].x= 64763	frecv[188]=11.03753 kHz	per[188]=90.60 microsec
val[189].x= 62951	frecv[189]=11.01322 kHz	per[189]=90.80 microsec
val[190].x= 61135	frecv[190]=10.97695 kHz	per[190]=91.10 microsec
val[191].x= 59313	frecv[191]=10.97695 kHz	per[191]=91.10 microsec

val[192].x= 57491	frecv[192]=10.91703 kHz	per[192]=91.60 microsec
val[193].x= 55659	frecv[193]=10.91107 kHz	per[193]=91.65 microsec
val[194].x= 53826	frecv[194]=10.90513 kHz	per[194]=91.70 microsec
val[195].x= 51992	frecv[195]=10.84011 kHz	per[195]=92.25 microsec
val[196].x= 50147	frecv[196]=10.84599 kHz	per[196]=92.20 microsec

recventa medie este f=9.83139 kHz  
recventa minima este f=7.98722 kHz  
recventa maxima este f=11.5009 kHz

#### TABELA 4

fmax=17.4216)3 kHz      fmin=4.416961 kHz  
 tmax=76.0280( ms      fmed=12.44870757 kHz  
 NR interval de masura =200

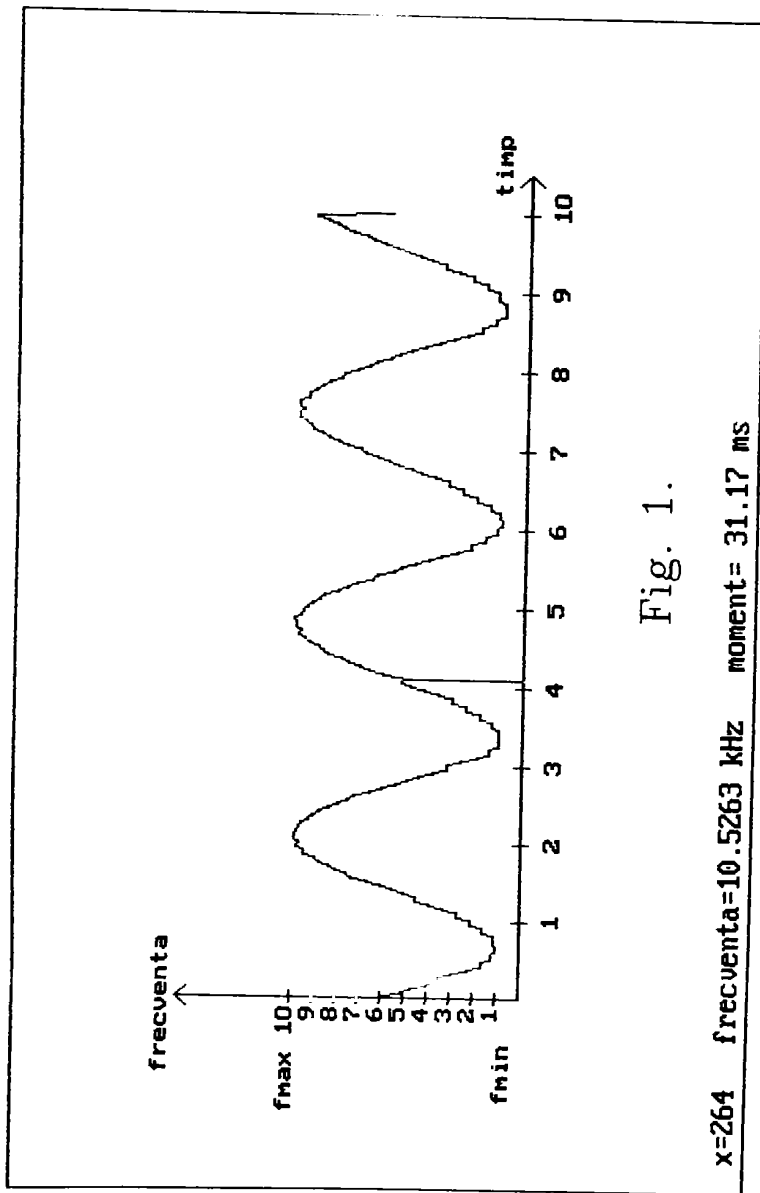


Fig. 1.

```

fmax=2.07550 KHZ      fmin=1.183712 KHZ
tmax=483.73760 ms    fmed=1.77605404 KHZ
NR interval de masura =200

```

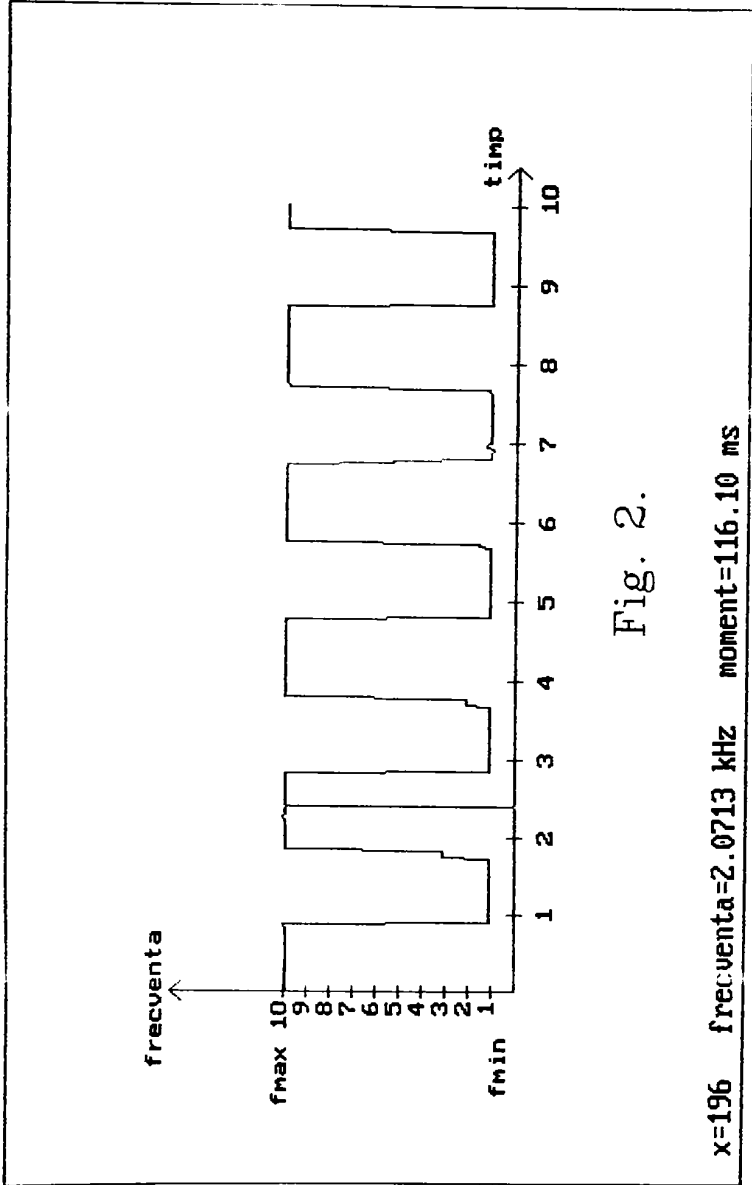


Fig. 2.

```

<- -Stinga      -> -Dreapta      Q -Quit
, -Memorare limita stinga      I -Memorare limita dreapta
CR -Extensie intre noile limite  B -Revenire la prima imagine

```

fmax=6.345178 kHz      fmin=5.411255 kHz  
 tmax=135.09680 ms      fmed=5.97936192 kHz  
 NR interval de masura =200

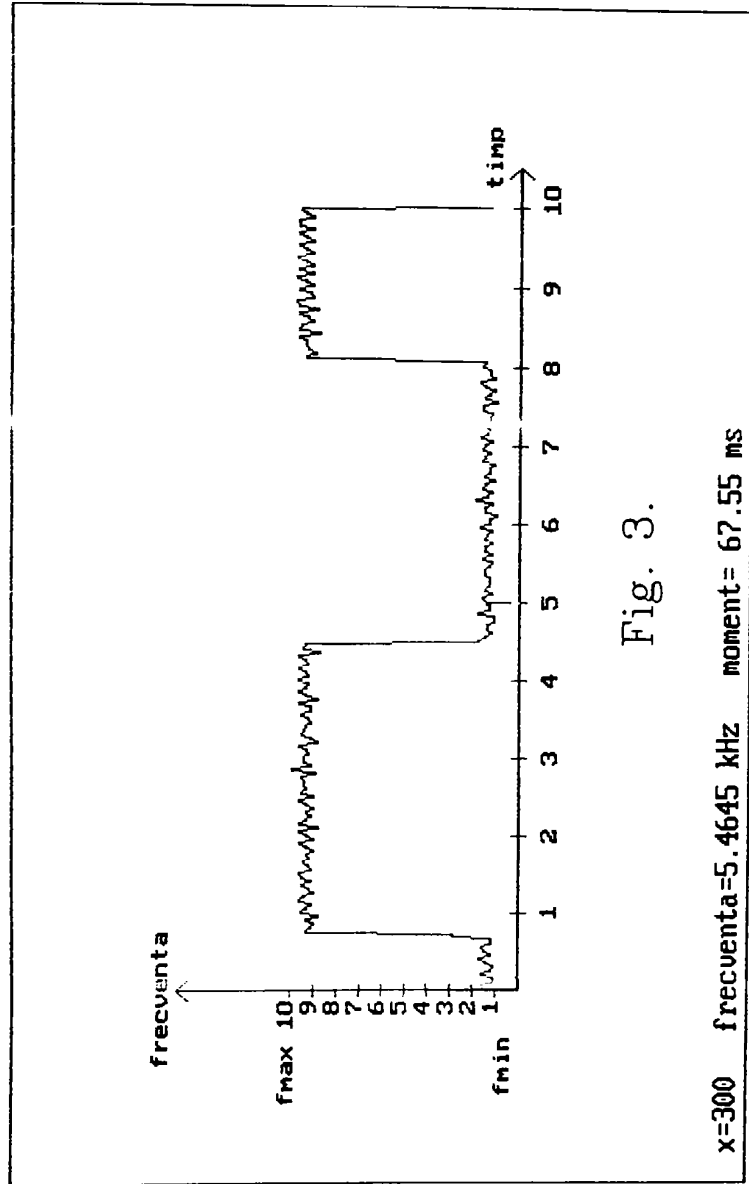


Fig. 3.

← -Stinga      -> -Dreapta      Q -Quit  
 ( -Memorare limita stinga      1 -Memorare limita dreapta  
 CR -Extensie intre noile limite      Blanc -Revenire la prima imagine

fmax=11.337868 KHZ      fmin=1.288992 KHZ  
 tmax=140.24400 ms      fmed=7.32157389 KHZ

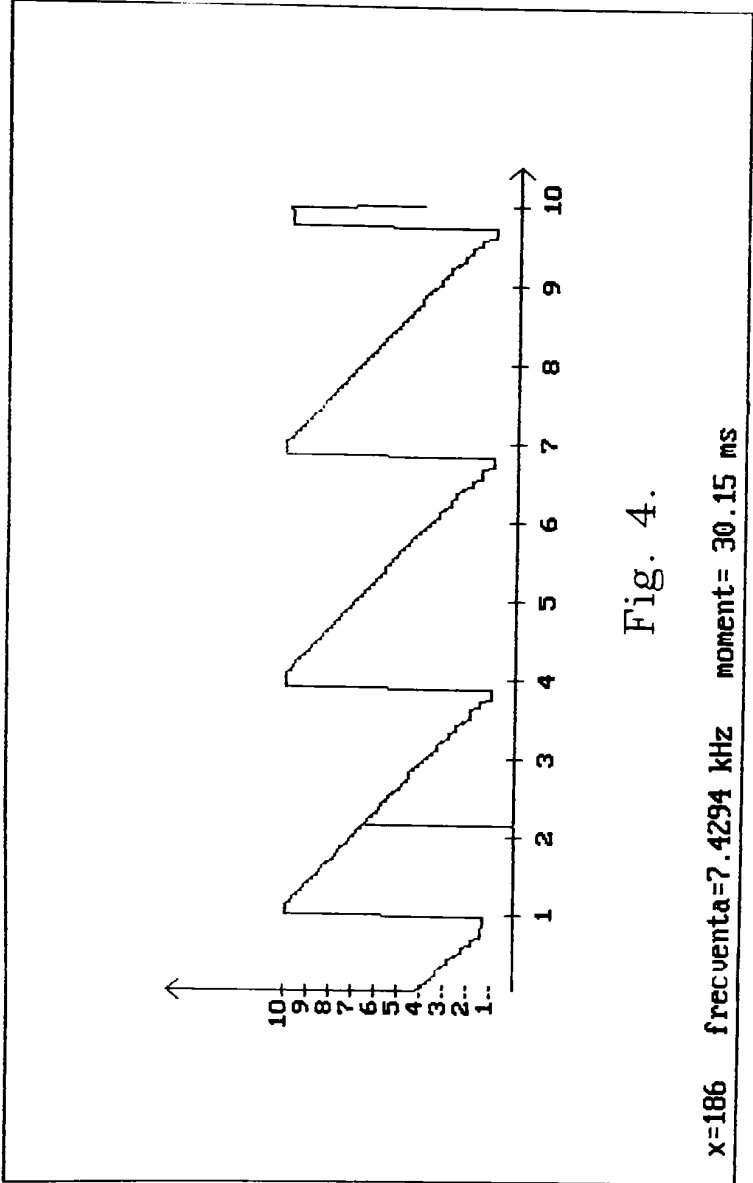


Fig. 4.

← -Stinga                    -> -Dreapta                    Q -Quit  
 ( -Memorare limita stinga                    I -Memorare limita dreapta  
 CR -Extensie intre noile limite                    Blanc -Revenire la prima imagine

fmax=100.200000 KHZ    fmin=100.000000 KHZ  
 frecventa medie=100.02775119617 KHZ

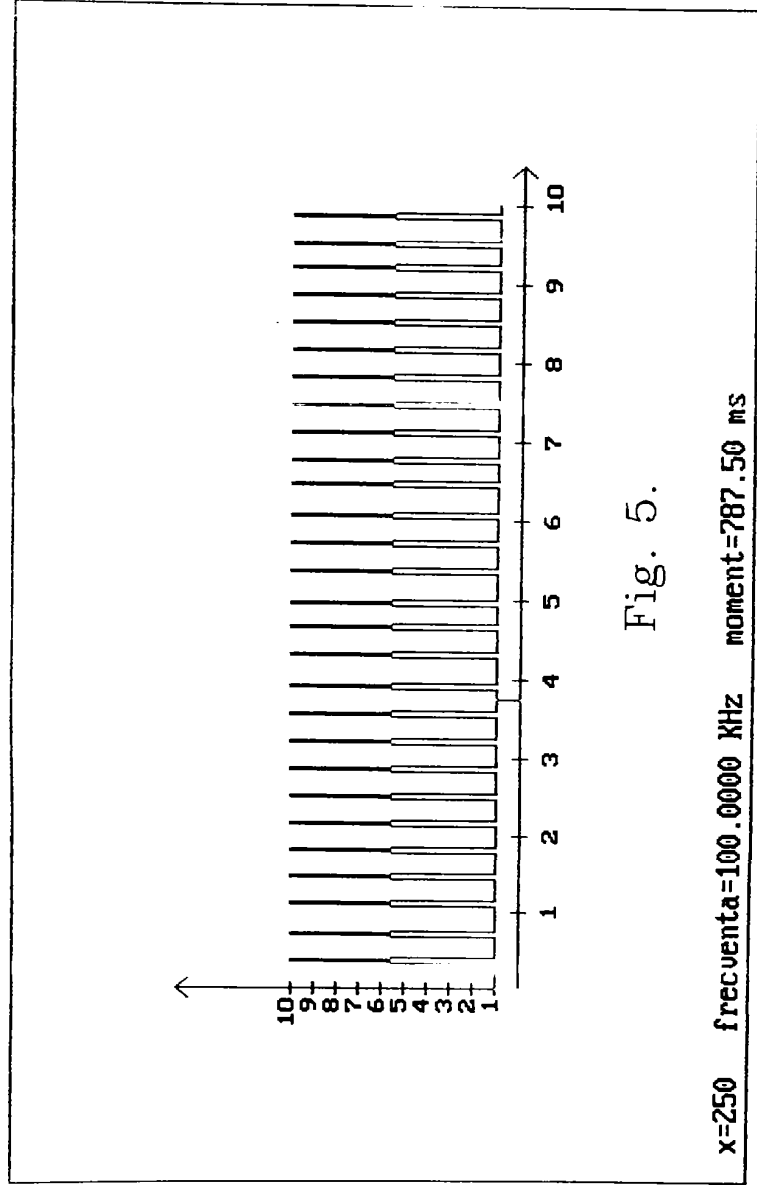


Fig. 5.

<- -Stinga    -> -Dreapta    Q    -Quit  
 ,    -Memorare limita stinga    I    -Memorare limita dreapta  
 CR -Extensie intre noile limite    Blanc -Revenire la prima imagine



fmax=10.121457 KHZ      fmin=9.803922 KHZ  
 tmax=80.32240 ms      fmed=10.01027440 KHZ

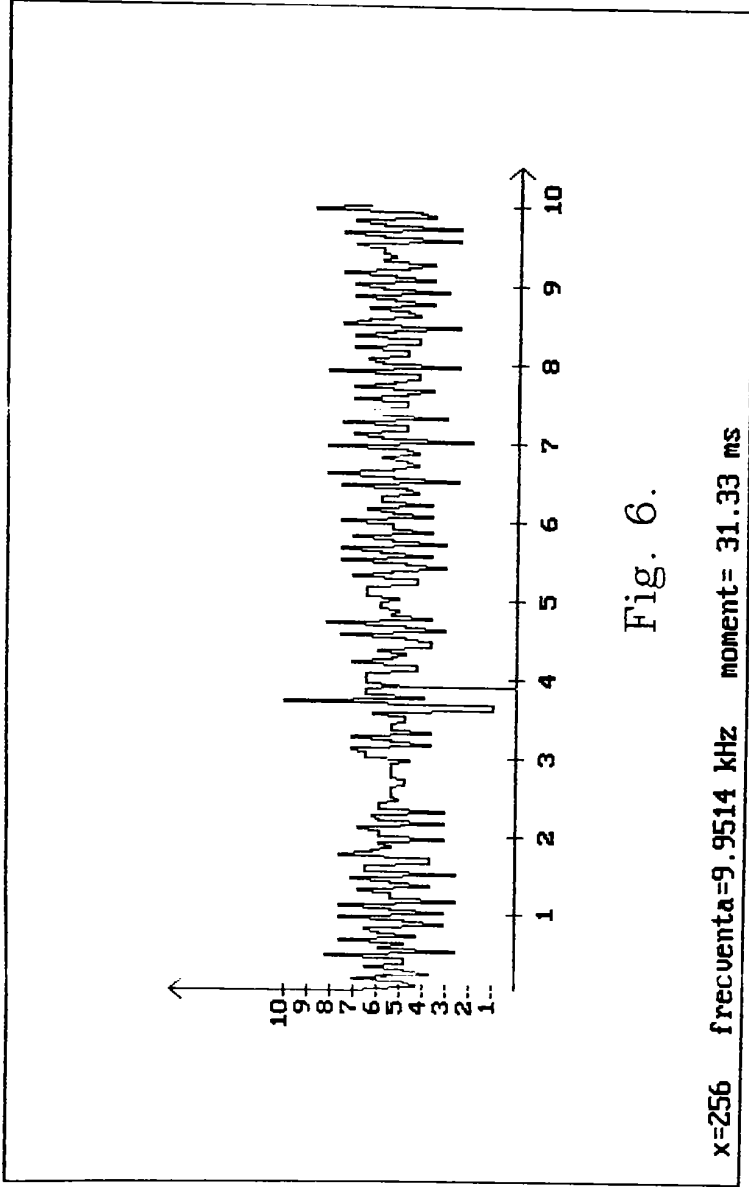


Fig. 6.

## BIBLIOGRAFIE

- [A.D.'84] \*\*\* : Nonlinear Circuits Handbook, Designing with Analog Function Modules and IC's, Analog Devices Inc. Norwood Massachusetts , U.S.A. , 1984.
- [ADA.'91] \*\*\* AD 3100/ADA 3100A, User's Manual ; Real Time Devices , Inc. U.S.A. 1991.
- [Ale.'88] S.T.Alexander : Adaptive Signal Processing , Theory and applications, Springer Verlag , New York , 1988.
- [Asz.'92] Asztalos T. : Analizor în domeniul modulației realizat cu un calculator de tip PC-AT-286 , proiect de diplomă , conducător științific A.Isar , 1992.
- [Bar.'91] S.Barbarossa : Parameter Estimation of Undersampled Signals by Wigner - Ville Analysis , Proceedings of ISCAS Conference , Canada 1991.
- [Bar.,Zan.'91] S.Barbarossa,A.Zanalda : A Combined Wigner - Ville and Hough Transform for Cross - Terms Supression and Optimal Detection and Parameter Estimation , Proceedings of ISCAS Conference , Canada 1991.
- [Bel.'89] M.Belanger : Analyse des signaux et filtrage numerique adaptatif, ed.Masson , 1989.
- [Ber.,Mac.'91] N.J.Bershard, O.Macchi: Adaptive Recovery of a chirped Sinusoid in Noise , Part 2 : Performance of the LMS Algorithm, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING , vol.39 , no 3, March , 1989.
- [Boa.,O'Sh.,Arn.'90] B.Boashash , P O'Shea , M.J.Arnold : Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation: A Comparative Study, Proceedings of SPIE , July 1990, California.
- [Boa.,O'Sh.' 91] B.Boashash , P. O'Shea : Time -Varying Higher Order Spectra , Proceedings of SPIE - International Conference , San Diego , California , July , 1991.
- [Boi.,Kun.'87] R.Boite , M.Kunt : Traitement de la parole, Presses Polytechniques Romandes , 1987.

[Bro.,Kar.'89] J.L.Brown Jr.,Karun Sa-Nagri : Sampling Reconstruction of N Dimensional Bandlimited Images After Multilinear Filtering , IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.36 , no.7, July 1989.

[Bro.,Cab.'91 1] J.L.Brown Jr., S.D.Cabrera : On Well Posedness of the Papoulis Generalised Sampling Expansion, IEEE Transactions on Circuits and Systems vol.38 no.5 , May 1991.

[Bro.,Cab.'91 2] J.L.Brown Jr., S.D.Cabrera : Input Reconstruction from Oversampled Multi-Channel Data ;Proceedings of ICASSP Canada , May 1991.

[But.'83] P.L.Butzer : A Survey of the Whittaker - Shannon Sampling Theorem and Some of its Extensions , Journal of Mathematical Research and Exposition , vol.3 , no.1 , Jan.1983.

[Che.,All.' 87] D.S.Chen, J.P.Allebach : Analysis of Error in Reconstruction of Two Dimensional Signals from Irregularly Spaced Samples,IEEE Transactions on A.S.S.P.,vol.35,no.2,February,1987.

[Che.,Lim.'91] S.Cheung , J.S.Lim : Combined Multi- Resolution (Wideband / Narrowband ) Spectrogram; Proceedings of The ICASSP 91, Toronto , Canada , May , 1991.

[Cim.,Fil.,Isa.'88] A.Cimponeriu, V.Filimon , A.Isar: Mediator numeric alunecător , Aspecte hard și soft , Simpozionul Național de calculatoare , Timișoara , 1988.

[Cla.,Pal.,Law.'85] J.J.Clark,R.M.Palmer P.D.Lawrence : A Transformation Method for the Reconstruction of Functions from Nonuniformly Spaced Samples , IEEE Transactions on ASSP , vol.33, no.4, October 1985.

[Cou.'84] F.Coulon : Theorie et traitement du signal. Presses polytechniques romandes , Lausanne ,1984.

[Cri.'65] R.Cristescu : Analiză funcțională, Editura Didactică și Pedagogică , București , 1965.

[Dau.'88] I.Daubechies : Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets , Communications on Pure and Applied Mathematics vol.XLI,1988.

[Del.'91] J.P.Delmas : Elements de theorie du signal: les signaux deterministes, Ed. Ellipses , 1991.

[Del.,Esc.,Gui.,Kro.,Tch.,Tor.'92] N.Delprat,B.Escudié P.Guillemain., R.Kronland -Martinet , P.Tchamitchian , B.Torrésani: Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis : Extraction of Instantaneous Frequencies , IEEE Transactions on Information Theory , vol.38, no.2 , March 1992.

[Dem.'76] B.P.Demidovitch, I.A.Marón; Computational Mathematics, Ed. MIR , Moscow , 1976.

[Dem.,Ant.'92] S.Demeter,L.Anton : Analiza unor tipuri de impulsuri de sondare pentru radiolocația de bandă largă,Revista A.T.M.,nr.1,an II,1992.

[Dem.,Mal.'89] A.Dembo,D.Malach : Signal Synthesis from Modified Discrete Short Time Transform , Internal Report , Dept.of Electrical Engineering , Technion , Haifa , Israel, 1989.

[De S.'91] A.De Sabata : Referat nr.2 în cadrul pregătirii pentru doctorat,1991.

[Dra.'85] I. Dragu , I.M. Iosif : Prelucrarea numerică a semnalelor discrete în timp, Ed. Tehnică , București , 1987.

[Eik.'77] P.Eikhoff: Identificarea sistemelor .Ed.Tehnică , București , 1977.

[Găv.'88] P.Găvruta : Bounds for Truncation Error in Sampling Theorem of Band-limited Signals, Seminarul de matematică și fizică al institutului politehnic T.Vuia Timișoara , 1988.

[Gâr.'82] S.Gârlaşu , C.Popp , S.Ionel : Introducere în analiza spectrală și de corelație , Ed.Facla , Timișoara , 1982.

[Hei.'89] J.J.Heinzl: Input Amplifier and Trigger Circuit for a 500 MHz Time Interval Analyzer , H.P.-Journal , February 1989.

[Hig.'84] J.R.Higgins : Bases for the Hilbert Space of Paley-Wiener Functions, Proceedings of Aachener Qoloquium, 1984.

[Hig.'86] J.R.Higgins:Five Short Stories About the Cardinal Series,Bulletin of the American Mathematical Soc.vol.12,no.1,'85.

[Hla.,Krat.'89] F.Hlawatsch , W. Krattenthaler : A New Approach To Time -Frequency Signal Decomposition, International Symposium on Circuits and Systems ( ISCAS-89) Portland , Oregon , May 9-11 , 1989.

[Hla.'90] F.Hlawatsch , W.Kozek ş.a. : Time Frequency Subspaces and Their Applications to Time Varying Filtering , Proceedings of ICASSP New Mexico , April , 1990.

[Hla.'91 1] F.Hlawatsch : Duality and Classification of Bilinear Time -Frequency Signal Representation ; IEEE Transactions on Signal Processing , vol. 39 , no. 7 , July , 1991.

[Hla.'91 2] F.Hlawatsch , W.Kozek : Time Frequency Filter Banks with Perfect Reconstruction , Proceedings of ICASSP , Canada , May, 1991.

[Hla.'92] F.Hlawatsch , G.F.Boudreaux - Bartels: Linear and Quadratic Time -Frequency Signal Representations ; IEEE Signal Processing Magazine , April , 1992.

[Hue.,All.'86] J.Huelsman ,P.Allen : Actives Filters , Prentice Hall, 1984.

[Isa.'87] A.Isar : Caracteristici de zgomot ale amplificatoarelor operaţionale, Cel de-al şaptelea simpozion naţional "Tehnologie electronică şi fiabilitate " Băile Herculane , 1987.

[Isa.'88] D.Isar : Implementarea unui circuit de eşantionare şi memorare într-un sistem de achiziţii de date . Simpozionul naţional "Electronică profesională" Snagov 8-10 Septembrie 1988.

[Isa.'89] A.Isar : O metodă de construcţie a filtrelor anti-aliasing optime din punct de vedere al erorii medii pătratice de aproximare, Sesiunea tinerilor absolvenţi , Timişoara,1989.

[Isa.,Isa.,Sch.'89 1] D.Isar , A. Isar , G.Schmidt: Filtre adaptate la semnale modulate în frecvenţă, Simpozionul naţional "Electronică profesională" Snagov,1989.

[Isa.,Isa.,Sch.'89 2] D.Isar , A.Isar , G.Schmidt: Implementarea unui filtru cu urmărire folosind circuite cu capacităţi comutate,Simpozionul naţional "Electronică profesională" Snagov , 1989.

[Isa.'91] A. Isar : Tracking Filter Built with Switched Capacitors , Proceedings of International Conference Signals and Systems , Varşovia , 1991.

[Isa.'92 1] A.Isar: O trecere în revistă a principalelor tehnici de măsurare adaptivă cu aplicații la aparatura de măsurare numerică , Referat nr.1 în cadrul pregătirii pentru doctorat, Timișoara 1992.

[Isa.'92 2] A.Isar : Metode și aparat pentru măsurarea frecvenței instantanee a semnalelor nestaționare , Referat nr.2 în cadrul pregătirii prin doctorat, Timișoara 1992.

[Isa.'92 3] A.Isar : A New Expression of the Aliasing Error Bound, Proceedings of the International Conference I.E.A. Tizi Ouzu , Algeria,1992.

[Jaf.'92] S.Jaffard : Ondlettes et applications à l'étude des équations aux dérivées partielles, note de curs , Scoala post-doctorală , Paris VI.

[Jen.'88] Y.C.Jenq : Digital Spectra of Nonuniformly Sampled Signals ; Fundamentals and High Speed Waveform Digitizers , IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol.37.no.2,June,1988.

[Jen.'90] Y.C.Jenq : Digital Spectra of Nonuniformly Sampled Signals ; A Robust Sampling Time Offset Estimation Algorithm for Ultra High Speed Waveform Digitizers Using Interleaving , IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol.39,no.1,February 1990.

[Jon.,Boa.'91] G. Jones , B.Boashash :Instantaneous quantities and uncertainty concepts for signal time- frequency distributions, Proceedings of SPIE , IC, San Diego , California , 24-26 July , 1991.

[Kar.,Bal.'89] A.Kareem,K.Balakrishnan: Impact of Digital Signal Processing on Measurement and Test Instruments, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,vol.37,no.6, December 1989.

[Lim,Opp.'88] J.S.Lim , A.V.Oppenheim : Advanced Topics in Signal Processing, Prentice Hall , New Jersey , 1988.

[Liu'76] B.Liu Digital Signal Processing , John Wiley and Sons,1976.

[Mac.,Ber.'91] O.Macchi , N.J.Bershard: Adaptive Recovery of a chirped Sinusoid in Noise , Part 1 : Performance of the RLS Algorithm, IEEE Transactions on Signal Processing , vol.39 , no 3 March , 1989.

[Mah.'89] J.M.Mahmud : High Precision Phase Measurement Using Adaptive Sampling, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement , vol.38, no.5 ,October 1989.

[Mal.'89 1] S.G.Mallat : Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models, IEEE Transactions on A.S.S.P. vol 37 , no.1 , december 1989.

[Mal.'89 2] S.G.Mallat : A Theory for Multiresolution Signal Decomposition , The Wavelet Representation ; IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11 , no .7 , July 1989.

[Mat.,Dum.'80] A.Mateescu,N.Dumitriu : Semnale și circuite de telecomunicații , Ed.Didactică și Pedagogică , București 1980.

[Mat.,Ser.'87] A.Mateescu,A.Serbănescu : Circuite cu capacități comutate, Editura militară,București,1987.

[Mill.'80] A.Millea : Măsurări electrice , principii și metode, Editura Tehnică București , 1980.

[Mil.'71] T.B.Mils : The Phase Locked Loop I.C. as a Communication System Building Block ; Application Note , National Semiconductor , June 1971.

[Mey.'90] Ondelettes et Operateurs, vol.I Hermann,Éditeurs des sciences et des arts ,1990.

[Naf.,Isa.'91 1] M.Naforniță D.Isar : Numerical Tracking Filter . Proceidings of the International Conference on Applied and Theoretical Electrotechnics , Craiova 1991.

[Naf.,Isa.'91 2] M.Naforniță ,D.Isar :The Implementation of a Numerical Tracking Filter,Proceidings of the International Conference on Applied and Theoretical Electrotechnics , Craiova '91.

[Naf.,Isa.,Isa.' ] M.Naforniță , D.Isar,A.Isar : A Generalization of the W.K.S. Theorem , în curs de publicare în Revue roumaine d'electrotechnique.

[Naf.,Cam.,Isa.'92] I.Naforniță,A.Câmpeanu,A.Isar: Semnale Circuite și Sisteme ,curs,vol.I, în curs de publicare.

[NEC.'81] \*\*\* Catalog , NEC , 1981.

[Nic.'79] E.Nicolau : Manualul inginerului electronist, Măsurări electronice, Editura Tehnică , București, 1979.

[Nim.'89] T.K.Nimori , L.B.Stainbaugh : Firmware System Design for a Frequency and Time Interval Analyzer, H.P.-Journal, February, 1989.

[Opp,Wil.'86] A.V.Oppenheim , A.V.Wilsky : Signals and Systems, Prentice Hall , 1983.

[Pag.,Nel.'88] R.W.Page;A.S.Foster: Waweform Reconstruction Techniques for Precision Digitizing Oscilloscopes , Hewlett Packard Journal , February 1988.

[Pag.,Fos.'88] R.W.Page,A.S.Foster : Waveform Reconstruction Techniques for Precision Digitizing Oscilloscopes, Hewlett Packard Journal , February 1988.

[Pap.,66] A.Papoulis : Error Analysis in Sampling Theory, Proceedings of IEEE , vol.54,no.7, July 1966.

[Pap.'83] A.Papoulis : The Fourier Integral and it's Applications , Prentice Hall , 1983.

[Pop,Sto.'81] E.Pop,V.Stoica : Metode numerice de măsurare , Ed.Facla, Timșoara,1981.

[Pop,Naf.'86] E. Pop , I. Naforniță,ș.a.: Metode în prelucrarea numerică a semnalelor vol.1,Ed.Facla, Timișoara,1986.

[Pra.,Bho.'89] K.M.M.Prabhu, K. Bhoopathy Bogan : Variable Parameter Window Families for Digital Spectral Analysis, IEEE Transactions on ASSP , vol 37, no.6 June , 1989.

[Ran.'88] B.Randal : Frequency Analysis , B&K, 1988.



[Rio.'91] O.Rioul , M.Vetterli : Wavelets and Signal Processing, IEEE Signal Processing Magazine , October 1991.

[Rul.'80] G. Rulea : Prelucrarea optimă a semnalelor radio , Ed. Tehnică , București , 1980.

[Sa.C ] \*\*\* Sampling Converter , Carte tehnică.

[Sch.,Sha.'84] M.Schwartz , L.Shaw: Signal Processing , Prentice Hall, 1984.

[She.,Mit.'89] O.V.Shentov , S.K.Mitra : A Simple Method For Power Spectral Estimation Using Subband Decomposition , Proceedings of The International Conference on Circuits and Systems (ICCS-89) , Portland , Oregon, May,1989.

[Sor.'88] J.L.Sorden : Precision Digital Oscilloscopes and Waveform Recorders , Hewlett Packard Journal , February 1988.

[Sou.'90] T.M.Souders ș.a. The Effect of Timing Jitter in Sampling Systems , IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement , vol.39,no.1,February,1990.

[Spe.'91] \*\*\* Technology 1991, IEEE Spectrum , January, 1991.

[Sta.,Stă.'80] D.Stanomir , O. Stănășilă : Metode matematice în teoria semnalelor , Ed. Tehnică București , 1980 .

[Ste.'89] P.S.Stephenson : Frequency and Time Interval Analyzer Measurement Hardware , H.P.-Journal , February 1989.

[Sto.'88] R.Stoian : Compresie de date . Algoritmi de predicție. Editura Stiințifică și enciclopedică , București 1988.

[Stol.'84] G.Stolojan,V.Podaru,F.Cetină : Prelucrarea numerică a semnalului vocal. Editura Militară,București 1984.

[Tem.,Bar.'73] G.C.Temes,V.C.Barçilon,F.G.Marshall : The Optimisation of Bandlimited Systems , Proceedings of IEEE , vol.61,no.2,February 1973.

[Thr.'79] N.Thrane : The discrete Fourier Transform and FFT Analyzers; Technical Review , B&K no.1 , 1979.

[Tip.'87] V.Tiponuç: An Extension of the Expression of the Aliasing Error Bound , Signal Processing 12 , 1987 , North Holland.

[Vet.'92] M.Vetterli, K.Metin Uz : Multiresolution Coding Techniques for Digital Television : A Review ; Multidimensional Systems and Signal Processing , vol 3, NO.2/3, may 1992.

[Wec.'89] M.Wechsler; Characterization of Time Varying Frequency Behaviour Using Continuous Measurement Technology , H.P.-Journal, February 1989.

[Whi.,Boa.'88] L.B.White,B.Boashash : On Estimating the Instantaneous Frequency of a Gaussian Random Signal by Use of the Wigner-Ville Distribution , IEEE Transactions on ASSP vol.36,no.3, March 1988.

[Wid.'76] B.Widrow , J.M.Mc.Cool , M.G.Larimore , C.R.Johnson: Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter , Proceedings of the IEEE , vol. 64 , no.8 , August , 1976.

[Zal.'83] G.Zaloylo : Etude et realisation d'un filtre de poursuite, Electronique Applications , no.28, fevr.-mars,1983.