

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVAȚĂMINTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VULIA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

Ing. SABIN IONEL

CONTRIBUȚII LA ANALIZA DE CORELAȚIE  
A PROCESELOR ELECTRICE NESTAȚIONARE

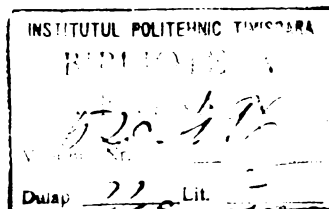
Teză de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

Conducător științific:

Prof.dr.ing.CONSTANTIN ȘORA

- 1987 -



17

## C U P R I N S

Cap.1. INTRODUCERE . . . . .	1
Cap.2. CONSIDERAȚII ASUPRA METODELOR DE STUDIU A REGIMULUI TRANZITORIU ÎN SISTEME LINIARE . . . . .	8
2.1. O clasificare a problemelor de regim tranzitoriu . . . . .	8
2.2. Particularități ale metodei variabilelor de stare utilizată în studiul regimurilor tranzitorii . . . . .	10
2.3. Metoda corelației și raportarea ei uzuală la procedeele de studiu a regimurilor tranzitorii deterministe . . . . .	12
2.4. Modalități de descriere a regimurilor aleatoare nestaționare . . . . .	14
2.4.1. Descrierea regimurilor aleatoare nestaționare prin ecuații pentru realizări particulare (ERP) . . . . .	15
2.4.2. Descrierea regimurilor aleatoare nestaționare prin ecuații pentru densități de probabilitate (EDP) . . . . .	18
2.5. Înțelesul acordat în literatura de specialitate noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu . . . . .	19
2.6. Concluzii . . . . .	21
Cap.3. STUDIUL PRIN METODA CORELAȚIEI A REGIMURILOR TRANZITORII DETERMINISTE ȘI ALEATOARE . . . . .	22
3.1. Noțiunile de regim permanent și regim tranzitoriu în cadrul metodei corelației . . . . .	22
3.2. Separarea componentelor de regim permanent și de regim tranzitoriu ale valorii medii, autocovarianței și autocorelației . . . . .	24
3.3. Generalizarea teoremei condițiilor inițiale . . . . .	27
3.4. Utilizarea metodei corelației la calculul regimurilor tranzitorii în sisteme liniare supuse unor excitații deterministe . . . . .	29

3.4.1. Metodă de calcul a momentelor statistice pentru semnale deterministe, bazată pe teoria funcțiilor generalizate (teoria distribuțiilor) . . . . .	30
3.4.2. Utilizarea transformatei Laplace pentru calculul momentelor statistice tranzitorii la ieșirea sistemelor liniare . . . . .	32
3.5. Caracterizarea regimurilor tranzitorii aleatoare în domeniul frecvență . . . . .	35
3.5.1. Spectrul complex dublu (SCD) . . . . .	35
3.5.2. Spectrul complex instantaneu (SCI) . . . . .	38
3.6. Observații privind durata regimului tranzitoriu . . . . .	39
3.7. Concluzii . . . . .	43
Cap.4. DEZVOLTAREA UNEI METODE PENTRU ANALIZA DE CORELAȚIE A PROCESELOR NESTAȚIONARE . . . . .	44
4.1. Analiza de corelație a proceselor nestaționare (privire de ansamblu) . . . . .	44
4.2. Metoda Wierwille pentru măsurarea funcțiilor de corelație nestaționare . . . . .	46
4.3. Dezvoltarea metodei pentru măsurarea funcțiilor de corelație tranzitorii . . . . .	51
4.3.1. Observații critice asupra metodei Wierwille . . . . .	51
4.3.2. Dezvoltarea metodei pentru măsurarea profilurilor $t$ -constant ale funcțiilor de corelație nestaționare . . . . .	53
4.3.3. Determinarea filtrelor corelatorului pentru măsurarea funcțiilor de corelație tranzitorii . . . . .	59
4.3.4. Creșterea stabilității funcțiilor de corelație estimate prin măsurători asupra unor regimuri tranzitorii repetate . . . . .	61
4.4. Concluzii . . . . .	63

Cap.5. EXTINDEREA ANALIZEI DE CORELAȚIE STAȚIONARĂ LA CARACTERIZAREA PROCESELOR TRANZITORII REPETITIVE . . . . .	64
5.1. Posibilități de utilizare a analizei de corelație staționară în cazul proceselor nestaționare . . . . .	64
5.2. Descrierea analitică a proceselor stocastice de impulsuri . . . . .	67
5.3. Transferul liniar al proceselor stocastice de impulsuri . . . . .	70
5.3.1. Descrierea transferului liniar cu ajutorul funcției pondere a sistemului .	70
5.3.2. Descrierea transferului liniar al proceselor stocastice de impulsuri cu ajutorul ecuațiilor pentru realizări particulare (ERP) . . . . .	72
5.3.3. Descrierea transferului liniar al proceselor stocastice de impulsuri cu ajutorul ecuațiilor de evoluție a densității de probabilitate (EDP) . .	77
5.4. Calculul funcțiilor de intercorelație "staționare" la ieșirea unor sisteme liniare testate cu impulsuri de zgomot . . . .	82
5.4.1. Calculul funcției de intercorelație dintre răspunsul sistemului la impulsuri de zgomot și un semnal dreptunghiular sincron . . . . .	82
5.4.2. Calculul funcției de intercorelație dintre răspunsul detectat pătratic al sistemului și un semnal dreptun- ghiular sincron . . . . .	86
5.5. Concluzii . . . . .	89
Cap.6. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ȘI APLICAȚII . . . . .	90
6.1. Rezultate de simulare privind metoda de corelație pentru procese nestaționare . . . . .	90
6.1.1. Generarea semnalului aleator de testare . . . . .	90
6.1.2. Simularea numerică a unor filtre de ordinele unu și doi . . . . .	91

6.1.3. Testarea corelatorului pentru procese nestaționare . . . . .	93
6.2. Rezultate experimentale privind utilizarea analizei de corelație staționară la caracteri- zarea regimurilor tranzitorii repetitive . . . .	96
6.2.1. Schema bloc a instalației experimentale. .	96
6.2.2. Forme de undă reprezentative pentru diferite puncte ale instalației expe- rimentale . . . . .	98
6.2.3. Funcții de intercorelație măsurate fără utilizarea detecției . . . . .	99
6.2.4. Funcții de intercorelație măsurate pentru semnalul detectat pătratic. . . . .	104
6.2.5. Efectul perturbațiilor asupra funcțiilor de intercorelație empirice . . . . .	109
6.2.6. Observații privind precizia funcțiilor de intercorelație empirice . . . . .	112
6.3. Posibilități de aplicare a metodelor de măsurare prezentate . . . . .	117
Cap.7. CONCLUZII GENERALE . . . . .	120
ANEXA A. CALCULUL FUNCȚIILOR DE CORELAȚIE STATISTICE PENTRU UNELE SEMNALE DETERMINISTE, UTILIZIND TEORIA FUNCȚIILOR GENERALIZATE . . . . .	125
ANEXA B. ASPECTE FUNDAMENTALE PRIVIND TRANSFORMAREA LAPLACE BILATERALĂ, UNI- SI BIDIMENSIONALĂ . . . . .	128
ANEXA C. CALCULUL SPECTRULUI COMPLEX DUBLU (SCD) AL ZGOMO- TULUI ALB MODULAT ÎN AMPLITUDINE CU SEMNAL DREP- TUNGHIIULAR . . . . .	131
ANEXA D. REZULTATE DE SIMULARE PRIVITOARE LA METODA DE CORELAȚIE NESTAȚIONARĂ . . . . .	134
ANEXA E. FOTOGRAFII ALE UNOR SEMNALE ȘI FUNCȚII DE CORELA- ȚIE DETERMINATE ÎN DIFERITE CONDIȚII EXPERIMENTALE .	140
BIBLIOGRAFIE . . . . .	147

## CAPITOLUL 1.

### I N T R O D U C E R E

Teoria proceselor întâmplătoare (aleatoare, stocastice) este o ramură importantă a teoriei probabilităților și se referă la studiul variabilelor aleatoare dependente de un parametru, /16, 25, 28, 31, 37, 40, 48, 53, 83, 90, 91, 104, 114, 122/.

În general, pentru a caracteriza statistic complet un proces aleator este necesară cunoașterea tuturor densităților de probabilitate multidimensionale; numai în cazul proceselor gaussiene (normale) densitățile de probabilitate de ordinele unu și doi oferă o caracterizare statistică completă /53, 79, 91/.

Metoda corelației, ca procedeu teoretic și experimental, se referă la studiul acelor proprietăți ale proceselor aleatoare care sînt determinate doar de densitățile de probabilitate de ordinele unu și doi; dezvoltarea acestei metode se justifică atît prin frecvența cu care apar în practică procesele gaussiene cît și prin faptul că procesele ce intervin în aplicații se consideră caracterizate suficient de bine prin valorile medii și funcțiile de corelație - mărimi ce se pot deduce din densitățile de probabilitate de ordinele unu și doi. Funcțiile de corelație /8, 9, 28, 40, 41, 77, 78, 91, 98, 113/ se aplică, în principal studiului fenomenelor aleatoare. Aceste funcții permit evidențierea și exprimarea cantitativă a unor legături între mărimi variabile, legături ce nu pot fi observate prin mijloacele curente de investigare. Utilizarea practică a funcțiilor de corelație a fost mult timp restrînsă datorită dificultăților de prelucrare a datelor experimentale.

Dezvoltarea tehnicii de calcul a determinat, în ultimul sfert de veac, apariția de noi și noi aplicații particulare ale analizei de corelație. Funcțiile de corelație au aplicații în diferite domenii ale științei și tehnicii. Legătura între

aceste domenii trebuie căutată, din punctul de vedere al analizei de corelație, în mărimile cu caracter aleator ce intervin, indiferent de natura lor fizică. Ca exemple de aplicații particulare ale analizei de corelație se pot menționa: îmbunătățirea capacității de descoperire a stațiilor de radiolocație /2, 3, 78, 110/, studii de acustică arhitecturală și măsurarea vitezei semnalelor acustice în diverse medii /83, 98, 133/, studiul turbulențelor și a vitezei de deplasare a fluidelor /81, 135/, identificarea și studiul unor surse de vibrații industriale /8, 9, 22/, identificarea sistemelor automate /11, 17, 35, 40, 62, 93, 97, 102, 104/, studiul datelor meteorologice /21/, prelucrarea unor semnale biologice (în special electroencefalografice - EEG) /83, 61/ etc. Menționăm cu această ocazie că autorul face parte din primul colectiv din țară care s-a ocupat de analiza de corelație a semnalelor EEG /41, 60, 61, 105, 106, 131/.

În legătură cu utilizarea analizei de corelație este rațional să se evidențieze principiile de bază, numărul aplicațiilor particulare fiind practic nelimitat. Astfel de principii au fost evidențiate în monografiile /9, 40, 78, 83/. Se consideră că există șase principii aplicative ale analizei de corelației: 1. Detectația unui semnal periodic înecat în zgomot; 2. Extragerea unui semnal periodic din zgomot; 3. Detectarea periodicităților mascate; 4. Obținerea densităților spectrale de energie (pe baza teoremelor Wiener-Hincin); 5. Măsurarea caracteristicilor dinamice ale sistemelor liniare și 6. Măsurarea coerenței semnalelor.

Cu privire la metodele de calcul și măsurare se relevă trei modalități de reprezentare a funcțiilor de corelație: reprezentarea statistică, reprezentarea temporală și reprezentarea spectrală /41, 77/. Reprezentarea în domeniul frecvență (spectrală) a funcțiilor de corelație este echivalentă cu celelalte două în baza teoremelor Wiener-Hincin /8, 28, 40, 41, 47, 70, 78, 79, 91/. Această echivalență a fost utilizată curent în practică pentru măsurarea densităților spectrale de putere prin transformarea Fourier a funcțiilor de corelație. Determinarea funcțiilor de corelație prin transformarea Fourier inversă a densităților spectrale de putere apărea inițial ca nepractică, dar odată cu descoperirea transformării Fourier rapide (TFR) această posibilitate a devenit avantajoasă în anumi-



te cazuri /10, 100/. Deși funcțiile de corelație și densitățile spectrale de putere conțin același cantitate de informație în domeniile timp respectiv frecvență, de la aplicație la aplicație poate fi preferabilă una dintre aceste reprezentări. În profida celor relevate mai sus, obișnuit se subînțelege că metoda corelației operează doar cu valori medii și funcții de corelație în reprezentările statistică și temporală; uzual reprezentarea spectrală a funcțiilor de corelație se consideră ca aparținând exclusiv metodelor de analiză în domeniul frecvență.

Aspectele teoretice și aplicative ale analizei de corelație au făcut obiectul unui mare număr de lucrări publicate, unele cu caracter monografic /6, 9, 41, 91, 93, 94, 113/. De asemenea, principiile constructive ale aparatului de măsurare a funcțiilor de corelație - domeniu supus unei schimbări relativ rapide odată cu evoluția tehnologiei electronice - au fost prezentate în mai multe lucrări /6, 11, 14, 17, 18, 40, 41, 64, 94, 96, 100, 102/. Trebuie subliniat însă că toate aceste lucrări se referă aproape în exclusivitate doar la procese aleatoare staționare pentru care se presupune îndeplinită, în plus, ipoteza de ergodicitate /41, 91/. De aceea atunci când se vorbește de analiză de corelație fără alte precizări, se subînțelege că se analizează procese (staționare) și ergodice. Absența ergodicității face analiza de corelație pentru proces aleatoare nestaționare (în particular, tranzitorii) o problemă dificilă, în special sub aspect experimental. Interesul pentru analiza de corelație nestaționară este justificat de incidența ridicată a fenomenelor fizice la care ipoteza staționarității este evident încălcată. Caracterizarea unui proces ca nestaționar poate fi făcută fie pe baza analizei prin "inspecție" a uneia sau mai multor realizări ale procesului fie în baza faptului că din considerente fizice, mecanismul generator al procesului depinde de parametrii variabili /8, 137/.

Analiza de corelație nestaționară este reprezentată prin relativ puține lucrări, acestea referindu-se la calculul statistic al unor funcții de corelație tranzitorii /69, 91, 107, 108/ și considerații teoretice privind măsurarea funcțiilor de corelație nestaționare prin mediere statistică /47, 86/ sau prin tehnici de aproximare pe intervale scurte /13, 32/. Au existat și încercări de a extinde analiza de corelație staționară la ca-

racterizarea unor procese nestaționare /85/ respectiv preocupări de estimare a funcțiilor de corelație nestaționare prin filtrare bidimensională /136, 137/.

Din cele prezentate rezultă actualitatea preocupărilor în domeniul analizei de corelație nestaționară precum și importanța evidențierii unui nou principiu aplicativ al metodei corelației. Prezenta teză se referă la aceste două aspecte cu accentul pe studiul și utilizarea semnalelor de regim tranzitoriu.

Obiectivele urmărite în lucrare sînt în principal două: încadrarea metodei corelației în rîndul metodelor uzuale de studiu a regimului tranzitoriu și dezvoltarea unor procedee de măsurare corelativă pentru procese nestaționare. Ideea centrală a părții de "încadrare" este aceea că metoda corelației este aplicabilă atît studiului proceselor deterministe cît și studiului proceselor aleatoare și prin urmare, procedeele de analiză a regimurilor tranzitorii deterministe trebuie să-și afle, prin generalizare, un corespondent în cadrul metodei corelației. În dezvoltarea unor procedee de măsurare corelativă se urmăresc două căi: perfecționarea unei metode specifice pentru măsurarea funcțiilor de corelație nestaționare și respectiv extinderea analizei de corelație convenționale (staționară) la caracterizarea anumitor procese nestaționare. În acest sens, o atenție specială se acordă proceselor rezultate prin repetarea regimurilor tranzitorii aleatoare deoarece pe această cale se poate crește raportul semnal/zgomot comparativ cu situația că s-ar efectua măsurători asupra unor regimuri tranzitorii singulare.

În mod inerent, dată fiind complexitatea problematicii, intervin și anumite limitări, dintre care, cele mai importante se referă la caracterul sistemului (circuitului) și la natura semnalelor de intrare utilizate. Astfel, sistemele ale căror mărimi de ieșire se analizează, sînt considerate liniare și stabile. De asemenea, dacă există o variație a parametrilor sistemului (de exemplu datorită "degradării" sistemului) aceasta se consideră suficient de lentă pentru ca pe durata cît se efectuează analiza (măsurarea), parametrii sistemului să poată fi considerați constanți. Ca mărimi de intrare (excitație) se consideră pe lîngă anumite semnale deterministe și următoarele procese aleatoare nestaționare: treaptă de zgomot (obținută prin conectarea unui proces staționar la intrarea sistemului); in-

puls de zgomot (obținut prin conectarea și deconectarea unui proces staționar) și proces de impulsuri de zgomot (obținut prin conectarea și deconectarea repetată a unui zgomot staționar). Aceste procese corespund unor semnale deterministe uzuale (treaptă, impuls rectangular respectiv undă rectangulară) și oferă largi posibilități pentru teorie și aplicații.

La încadrarea metodei corelației în rîndul metodelor de studiu al regimurilor tranzitorii (nestaționare) ca și la dezvoltarea metodelor de măsurare corelativă prezentate în lucrare, autorul a avut în vedere semnale și sisteme electrice. În acest sens pot fi menționate următoarele aspecte particulare: în capitolul 3 se generalizează teorema condițiilor inițiale, specifică sistemelor electrice; parametrii filtrelor care simulează sistemele testate cu impulsuri de zgomot ca și parametrii semnalelor de testare utilizate în capitolul 6, sînt specifice domeniului electric. Aceste condiții experimentale particulare limitează desigur și valabilitatea formulelor empirice stabilite în capitolul 6. Trebuie însă subliniat că aplicabilitatea metodelor de măsurare dezvoltate poate fi ușor extinsă la alte categorii de sisteme (mecanice, de exemplu) în condițiile adaptării parametrilor de prelucrare la aplicația concretă.

Teza conține 7 capitole, 5 anexe și o bibliografie generală cuprinzînd 140 de titluri dintre care 11 aparțin autorului: /41, 50, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 105, 106/.

Capitolele 2 și 3 au ca scop încadrarea metodei corelației în rîndul metodelor uzuale de studiu a regimului tranzitoriu. Astfel, în capitolul 2 se prezintă o clasificare originală a problemelor de regim tranzitoriu urmată de prezentarea succintă a metodei variabilelor de stare care, oferă o punte de legătură între ecuațiile diferențiale deterministe și stocastice. Se evidențiază că metoda corelației este raportată uzual la celelalte metode de studiu a regimului tranzitoriu prin analogie cu metoda impulsului Dirac, în baza unei teoreme de echivalență /104/. Ecuațiile pentru realizări particulare și ecuațiile pentru densități de probabilitate sînt prezentate ca modalități complementare de studiu a proceselor aleatoare nestaționare (în particular, tranzitorii). În finalul capitolului se analizează critic înțelesul acordat în literatura de specialitate noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu. În capitolul 3 se stabilește în-

telesul noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu ca o generalizare valabilă atât pentru semnale deterministe cât și pentru procese aleatoare. Ca o generalizare a descompunerii soluției generale de regim tranzitoriu determinist în componentă permanentă și componentă tranzitorie se obțin descompuneri similare pentru valorile medii și pentru funcțiile de autocovarianță și autocorelație. Se dă o formulare mai generală teoremei condițiilor inițiale și se arată posibilitatea utilizării metodei corelației la studiul regimurilor tranzitorii deterministe. Se introduce noțiunea de spectru complex dublu ca modalitate de caracterizare a regimurilor tranzitorii în domeniul frecvenței. Noțiunea de durată a regimului tranzitoriu poate fi și ea generalizată în cadrul metodei corelației.

Capitolele 4 și 5 conțin dezvoltarea unor procedee de măsurare corelativă pentru procese nestaționare. Astfel, în capitolul 4 se prezintă critic o metodă de măsurare a profilelor  $\tau$ -constant ale funcțiilor de corelație nestaționare. Apoi se dezvoltă această metodă pentru a se putea măsura și profile  $t$ -constant. Se sugerează optimizarea filtrelor corelatorului pornind de la o factorizare aproximativă a funcțiilor de corelație nestaționare. Se arată că metoda poate fi utilizată și pentru caracterizarea regimurilor tranzitorii repetate, cu avantajul creșterii raportului semnal/zgomot. În capitolul 5 se pune accentul pe calculul funcțiilor de corelație "staționare" pentru cazul unor procese nestaționare formate din regimuri tranzitorii repetate. Ca bază teoretică se arată modalitatea de descriere analitică a proceselor stocastice de impulsuri precum și a transferului lor liniar. Pentru caracterizarea analitică a regimurilor tranzitorii repetate se utilizează atât ecuațiile pentru realizări particulare cât și ecuațiile pentru densitățile de probabilitate.

Capitolul 6 este rezervat prezentării unor verificări experimentale pentru metodele de măsurare tratate în capitolele 4 și 5. Metoda de corelație nestaționară este verificată prin simulare la un calculator universal; pentru verificarea metodei de măsurare prezentată în capitolul 5, se utilizează un corelator specializat pentru procese staționare. Se evidențiază posibilitatea testării sistemelor cu impulsuri de zgomot /50/; această modalitate se înscrie în cadrul unui nou principiu aplicativ al analizei de corelație: identificarea degradării sistemelor.

Capitolul 7 este rezervat formulării unor concluzii generale asupra lucrării.

■

■

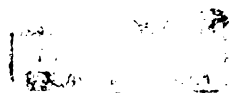
■

Pe întreaga perioadă de elaborare a lucrării, autorul a beneficiat de o îndrumare competentă, multilaterală și plină de înțelegere din partea conducătorului științific, prof.dr.doc. ing.Constantin Șora; pentru toate acestea, autorul îi aduce un ales omagiu, rămânându-i profund îndatorat.

Autorul este recunoscător tovarășilor prof.dr.ing.Nicolae Bogoevici, prof.dr.ing.Eugen Iovițiu și conf.dr.ing.Ștefan Gîrlașu sub îndrumarea cărora s-a inițiat în studiul proceselor aleatoare.

Pentru sollicitudinea manifestată în diferite împrejurări autorul își exprimă recunoștința față de tovarășii prof.dr.ing. Eugen Pop și prof.dr.ing.Anton Policec.

Pentru facilitarea accesului la unele echipamente de calcul autorul adresează sincere mulțumiri tovarășilor dr.ing. T. Cioară, as.univ.Gh.Drăgănescu și ing.I.Dragomir de la Facultatea de Mecanică precum și tov.ing.I.Grando de la CCSIȚEH Reșița.



## CAPITOLUL 2.

### CONSIDERAȚII ASUPRA METODELOR DE STUDIU A REGIMULUI TRANZITORIU ÎN SISTEME LINIARE

#### 2.1. O clasificare a problemelor de regim tranzitoriu

În cadrul general de studiu a fenomenelor nestaționare problema particulară a regimurilor tranzitorii se formulează astfel: dacă la intrarea unui sistem liniar (L) sau neliniar (N), cu parametri constanți (PC), cu parametri care variază după o lege deterministă (PD) sau cu parametri aleatori (PA), cu condiții inițiale nule (CIN), nenule deterministe (CID) sau aleatoare (CIA), se conectează la un moment pe care îl desemnăm  $t=0$  un semnal determinist (D), aleator (A) sau o combinație a acestor tipuri de semnal, să se determine mărimea de ieșire a sistemului începând cu momentul  $t=0$ . Luarea în considerare a caracteristicilor prezentate anterior privind sistemul și semnalul de intrare permite stabilirea tipurilor de probleme de regim tranzitoriu, în număr de 36, conform fig.2.1. În aceeași figură, pe baza unor ponderi afectate diferitelor particularități ale sistemului și semnalului (D-0, L-0, PC-0, CID-1, PD-2, N-3, CIA-8, A-9, PA-10) sînt trecute numere reprezentînd "gradul de dificultate" al problemelor, conform clasificării propuse. Dintre cele opt tipuri abordabile prin metode deterministe (cele unite cu linie continuă în fig.2.1) se consideră, uzual, numai cele de gradele 0 și 1.

Problemele în care intervine caracterul aleator reclamă metode statistice de rezolvare. În fig.2.2 se prezintă o ordonare (prin linie continuă) după "gradul de dificultate" a problemelor în care intervine caracterul aleator. Pentru a stabili raportul între domeniile de utilizare a metodelor deterministe și respec-

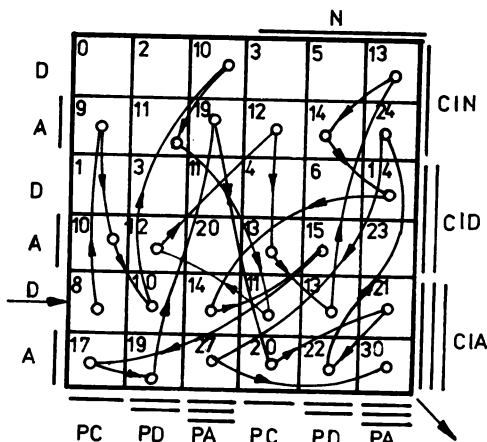
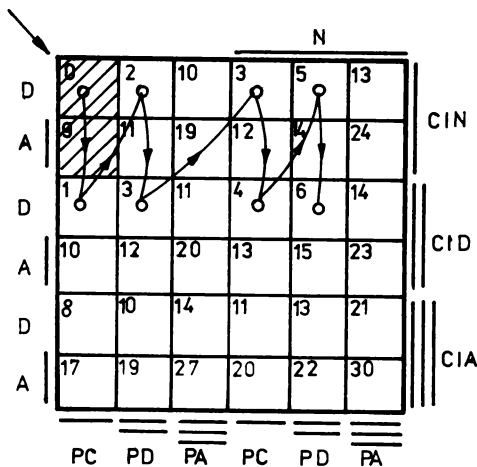


Fig. 2.1. Explicativă privind tipurile de probleme care pot fi rezolvate prin metode deterministe.

Fig. 2.2. explicativă privind tipurile de probleme în care intervine caracterul aleator.

tiv statistice trebuie subliniat că procedeele deterministe pot fi aplicate numai în 8 din cele 36 de cazuri stabilite mai sus; metodele statistice sînt aplicabile în toate situațiile (acest aspect se va trata în capitolul 3 cu referire la metoda corelației). Mai mult, se constată că, exceptînd regimurile tranzitorii provocate de semnale treaptă, nedeterminarea intervine (prin faza inițială), practic, în cazul conectării oricărui alt semnal determinist. Intr-adevar, în marea majoritate a lucrărilor de specialitate, se consideră semnale deterministe acele semnale la care caracterul imprevizibil intervine printr-un număr finit de parametri (convenția B din tabelul 2.1) /113/. Această caracterizare corespunde situațiilor des întîlnite în practică. Totuși, în calculul regimurilor tranzitorii provocate de mărimi (semnale) de excitație deterministe, aceste semnale se consideră deterministe în sens restrîns (v. tabelul 2.1), ceea ce reprezintă o idealizare. Convenția B este adoptată și în cadrul prezentei lucrări. Mai puțin răspîndită este convenția A din tabelul 2.1 /33/.

Dat fiind că și în semnalele deterministe intervine adesea un caracter imprevizibil, interesul teoretic, de încadrare, pentru utilizarea metodelor statistice în studiul regimurilor tranzitorii provocate de semnale deterministe poate fi dublat, în unele cazuri, de un interes aplicativ /98, 92/.

Tabelul 2.1.

Numărul de parametri prin care intervine caracterul imprevizibil	Denumirea semnalului	
	Convenția A	Convenția B
nul (0)	determinist	determinist în sens restrâns (pur determinist)
finit (n) (nenul)	semialeator (de grad n)	} determinist (în sens larg)
infinit( $\infty$ )	aleator	

Referitor la clasificarea propusă a problemelor de regim tranzitoriu, se precizează că în lucrarea de față se tratează doar cazurile sistemelor liniare (L) cu parametri constanți (PC).

2.2. Particularități ale metodei variabilelor de stare utilizată în studiul regimurilor tranzitorii

În rândul metodelor deterministe de studiu a regimului tranzitoriu, metoda variabilelor de stare <sup>52are</sup> /30, 101, 119/ este cea mai adecvată studiului pe calculator a sistemelor (circuitelor) cu parametri concentrați, având o structură relativ complexă. Mărimile de stare reprezentând tensiunile pe condensatoare (de forma  $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C dt + u_C(0)$ ) și curenții prin inductivități (de forma  $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt + i_L(0)$ ), rezultă că în cadrul metodei analizate se ține ușor seama de condițiile inițiale (de forma  $u_C(0)$  și  $i_L(0)$ ). Comparată cu metoda transformatei Laplace - cel mai puternic și răspândit procedeu operațional de studiu a regimurilor tranzitorii /30, 63, 69, 80, 119/ - metoda variabilelor de stare are avantajul de a permite determinarea simultană a mai multor mărimi de ieșire, față de una singură urmărită în cazul metodei operaționale. Avantajos este și faptul că, dacă interesează răspunsul în timp al unui circuit, acesta se obține direct, fără ocolirea prin domeniul complex, specifică metodei transformatei Laplace.



Importantă este și posibilitatea extinderii metodei variabilelor de stare la circuite neliniare.

Din punctul de vedere urmărit în lucrarea de față, metoda variabilelor de stare prezintă avantajul esențial de a constitui o punte de legătură între ecuațiile diferențiale deterministe și ecuațiile diferențiale stocastice. Într-adevăr, referindu-ne la sisteme liniare, de la ecuația de stare matriceală:

$$\dot{Z}(t) = A \cdot Z(t) + B \cdot X(t) \quad (2.1)$$

se poate trece formal la ecuația diferențială stocastică:

$$dZ(t) = A \cdot Z(t) \cdot dt + B \cdot dW \quad (2.2)$$

în care:

$$dW = d \left[ \int X(t') dt' \right] \quad (2.3)$$

reprezintă procesul Wiener-Lévy (în general, un proces stocastic cu creșteri independente) /4, 48, 91, 122/. Trebuie subliniat că ecuațiile (2.1) și (2.2), formal identice, sînt fundamentale diferite, în baza faptului că relația (2.1) nu mai este valabilă dacă  $X(t)$  reprezintă zgomotul alb /4/.

Sistemul de ecuații diferențiale (2.1) are soluția generală corespunzătoare regimului tranzitoriu:

$$Z(t) = \Phi(t-t_0) \cdot Z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot X(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

al cărei prim termen reprezintă soluția sistemului omogen, în timp ce termenul integral redă efectul vectorului de excitație  $X(t)$ . Matricea de tranziție  $\Phi(t)$  poate fi dezvoltată sub forma:

$$\Phi(t) = \exp[A(t)] = \sum_{n=0}^N \frac{[A(t)]^n}{n!} + R_N(t) \quad (2.5)$$

în care elementele matricii reziduale  $R_N(t)$  pot fi făcute suficient de mici prin creșterea lui  $N$ . Soluția generală (2.4) poate fi exprimată sub forma:

$$Z(t) = Z_t(t) + Z_p(t) \quad (2.6)$$

în care:

$$Z_p(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot X(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

reprezintă componenta de regim permanent, iar

$$Z_t(t) = \Phi(t) \cdot \{Z(0) - Z_p(0)\} \quad (2.8)$$

este componenta de regim tranzitoriu /119/.

Trebuie remarcat că termenul  $Z_t(t)$  reflectă doar structura sistemului pe cînd componenta  $Z_p(t)$  depinde esențial de vectorul de excitație  $X(t)$ . În cazul sistemelor stabile termenii de regim permanent și regim tranzitoriu sînt echivalenți cu termenii de regim forțat și respectiv regim liber. Remarca precedentă în legătură cu descompunerea (2.6) a soluției generale (2.4) sugerează faptul că dacă se urmărește evidențierea modificării parametrilor sistemului, trebuie studiat în primul rînd regimul tranzitoriu (liber) al mărimii de ieșire din sistem.

În general, mărimile de ieșire  $Y(t)$  nu sînt variabile de stare dar se pot exprima ca o combinație liniară a acestora și (eventual) a mărimilor de excitație sub forma ecuației matriciale de ieșire:

$$Y(t) = C.Z(t) + D.X(t) . \quad (2.9)$$

Este important de relevat că există metode de scriere sistematică a ecuațiilor de stare atît pe baza schemei echivalente a circuitului (sistemului) cît și pornind de la ecuațiile (ecuația) diferențiale sau funcțiile (funcția) de transfer ale acestuia /21/.

### 2.3. Metoda corelației și raportarea ei uzuală la procedeele de studiu a regimurilor tranzitorii deterministe

Metodele uzuale de studiu (calcul și măsurare) a regimului tranzitoriu sînt următoarele /63, 69, 119/ : metoda directă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale, metoda răspunsului tranzitoriu sau a integralei Duhamel, metoda impulsului Dirac, metoda transformării Fourier și metoda transformării Laplace. Strîns legată de dezvoltarea tehnicilor numerice și analogice de calcul, se impune tot mai mult metoda variabilelor de stare. Aceste procedee (deterministe) nu sînt aplicabile problemelor în care intervine caracterul aleator.

Metoda corelației /6, 9, 23, 35, 40, 41, 73, 79, 91/ ca disciplină teoretică studiază acele proprietăți ale proceselor stocastice care sînt determinate de momentele statistice de ordinele unu și doi. În același timp, ca procedeu experimental, metoda reprezintă un domeniu de sine stătător în cadrul tehnicii moderne de măsurare. Precizăm că sub numele de metoda corelației înțelegem utilizarea în calcul sau experiment a funcțiilor de corelație în oricare din cele trei reprezentări: statistică, temporală și spectrală /41, 77/.

Uzual, metoda corelației se raportează la celelalte procedee de studiu a regimurilor tranzitorii prin analogie cu metoda impulsului Dirac. Asemănarea formală dintre metoda corelației și metoda impulsului Dirac este fundamentată matematic prin teorema de echivalență dintre un semnal determinist și procesul aleator a cărui funcție de autocorelație are același expresie matematică cu semnalul determinist echivalent /104/. Dincolo de formalismul matematic, metoda corelației aduce, față de celelalte metode experimentale de studiu a regimului tranzitoriu avantaje practice hotărâtoare (cum ar fi posibilitatea testării sistemelor în timpul funcționării normale a acestora, posibilitatea extragerii semnalului tranzitoriu "util" din zgomot etc.). Aceste facilități au determinat utilizarea largă a metodelor de corelare în domeniul identificării sistemelor /35, 93/.

În fig.2.3 sînt notate metodele de studiu a regimului tranzitoriu cu precizarea că acestea reprezintă procedee analitice ( $A_n$ ) sau experimentale ( $Exp$ ). Legătura profundă dintre diferitele metode se realizează prin teorema convoluției /55, 115/.

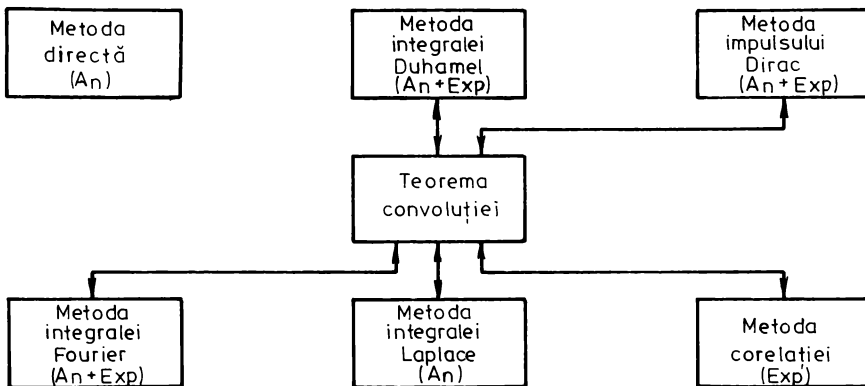


Fig.2.3. Explicativă privind încadrarea uzuală a metodei corelației în rîndul procedeele de studiu a regimului tranzitoriu.

Încadrarea prezentată, avînd la bază teorema de echivalență, deși fructuoasă pentru aplicațiile de identificare, reprezintă un punct de vedere limitat. Într-adevăr, teorema de echivalență se referă numai la procese aleatoare staționare; este necesară o încadrare care să cuprindă și procesele aleatoare nestaționare (în particular, tranzitorii).

Literatura de specialitate relevă și o altă legătură exis-

tentă între metoda corelației și unele mărimi electrotehnice uzuale /41, 78/ : funcția de autocorelație reprezintă o generalizare a pătratului valorii efective iar funcția de intercorelație este o generalizare a noțiunii de putere.

#### 2.4. Modalități de descriere a regimurilor aleatoare nestaționare

Conceptul de proces stocastic (aleator) se definește ca o familie de funcții reale sau complexe  $X(t,k)$  în care  $t \in \mathbb{R}$  și semnifică, de obicei, timpul iar  $k$  ia valori în spațiul eșantioanelor /28, 91, 104/. Pentru  $X(t,k)$  există patru interpretări în funcție de faptul că  $t$  și  $k$  se consideră fixe sau variabile (v. tabelul 2.2). Astfel, cazul 1 corespunde procesului stocastic propriu-zis (ansamblu de realizări) iar prin fixarea lui  $t$  și  $k$   $X(t,k)$  degenerază într-o constantă. Aceste două interpretări nu permit din cauza generalității (cazul 1) sau a prea strictei par-

Tabelul 2.2.

Cazul	t	k	$X(t,k)$
1	variabil	variabil	proces stocastic
2	variabil	fix	realizare particulară (reprezentativă)
3	fix	variabil	variabilă aleatoare
4	fix	fix	constantă

ticularizări (cazul 4) dezvoltarea unei metode de studiu analitic a procesului. În schimb interpretările 2 și 3 din tabelul 2.2 au dus la două modalități de descriere a evoluției proceselor stocastice nestaționare. Prima alternativă, corespunzătoare cazului 2, a condus la ecuații diferențiale stocastice în variabile de stare pentru descrierea evoluției unei realizări particulare a procesului  $X(t,k)$ ; a doua alternativă, corespunzătoare cazului 3, se reflectă în ecuațiile (deterministe) cu derivate parțiale care descriu evoluția probabilității stării procesului  $X(t,k)$ . Relația dintre cele două modalități de descriere a evoluției proceselor nestaționare se prezintă, intuitiv, în fig. 2.4.

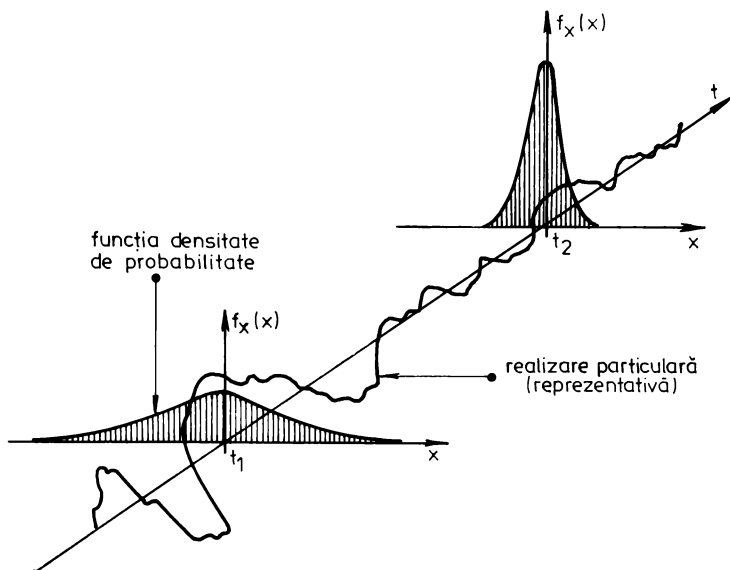


Fig.2.4. Explicativă privind cele două modalități de descriere a evoluției proceselor nestacionare.

În domeniul ecuațiilor de evoluție a unor realizări particulare (ERP) sînt clasice lucrările lui Langevin, Nyquist, Kùpfmùller; activitate de pionerat în domeniul ecuațiilor de evoluție a densității de probabilitate (EDP) au desfășurat Fokker, Planck, Kolmogorov. Din punctul de vedere urmărit în lucrare, utilizarea EDP are avantajul teoretic al unei interpretări intuitive directe (v.fig.2.4) precum și faptul că ecuațiile care intervin sînt în acest caz deterministe; alternativa utilizării ERP este importantă deoarece în practică dispunem, în general de o singură realizare pe care trebuie efectuate măsurători. Astfel, cele două alternative de descriere a proceselor nestacionare (EDP respectiv ERP) apar ca modalități complementare de studiu.

#### 2.4.1. Descrierea regimurilor aleatoare nestacionare prin ecuații pentru realizări particulare (ERP)

Conform figurii 2.2, în cazul cel mai simplu, caracterul aleator intervine doar prin condițiile inițiale; prin intermediul acestui caz se face trecerea firească de la ecuații dife-

rențiale deterministe la ecuații stocastice. Ecuații diferențiale stocastice propriu-zise se obțin în cazurile în care semnalele de intrare sînt aleatoare, condițiile inițiale putînd fi nule, deterministe sau aleatoare.

a) Ca interpretare mecanică, ecuațiile diferențiale cu condiții inițiale aleatoare descriu mișcarea unei particule sau a unui grup de particule care pornind dintr-o poziție incertă se deplasează sub acțiunea unor forțe deterministe. În circuitele electrice condițiile inițiale aleatoare intervin datorită necunoașterii valorilor inițiale ale variabilelor de stare precum și datorită caracterului aleator al momentului aplicării excitației.

Soluția sistemului de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\dot{x}_\ell(t) = K_\ell(x, t); \quad \ell = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

se poate scrie sub forma:

$$x_\ell = F_\ell(x^0, t); \quad \ell = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Pentru condensarea scrierii s-au utilizat notațiile:

$$x_\ell(t) = x_\ell; \quad x_\ell(0) = x_\ell^0; \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0); \quad \frac{dx_\ell(t)}{dt} = \dot{x}_\ell; \quad \ell = 1, \dots, n$$

iar operatorii  $K_\ell$  sînt variabile aleatoare - funcții de variabilele aleatoare  $x_1, \dots, x_n$ . În situația că  $x^0$  este vectorul condițiilor inițiale aleatoare,  $x_\ell$  din relația (2.11) reprezintă un proces stocastic semialeator [33, 35] a cărui nedeterminare se datorește celor  $n$  condiții inițiale. Astfel de procese se mai numesc și semialeatoare de gradul  $n$  [103], denumire mai explicită decît termenul de "semialeator". Problema care se pune este de a determina funcțiile densitate de probabilitate iar apoi valorile medii, varianțele și funcțiile de corelație ale proceselor  $x_1$  în situația că este datu funcția densitate de probabilitate a vectorului  $x_\ell^0$ .

După cunoștința autorului, în literatură nu se tratează prin metoda corelației regimurile tranzitorii provocate de semnale deterministe aplicate la intrarea circuitelor (sistemelor) electrice. Faptul se explică prin aceea că semnalele de intrare se consideră complet cunoscute, ca și condițiile inițiale. În realitate, regimul tranzitoriu este nedeterminat atît datorită condițiilor inițiale cit și datorită caracterului aleator al mo-

mentului aplicării excitației. Când caracterul aleator al condițiilor inițiale este luat totuși în considerare, tratarea se limitează la calculul densităților de probabilitate ale unor mărimi care interesează /44, 103/.

b) Ecuația diferențială (2.2) este un caz particular de ecuație diferențială stocastică liniară /4/. Prin analogie cu soluția (2.4) a ecuației diferențiale deterministe (2.1), soluția ecuației (2.2) se poate scrie:

$$Z(t) = \Phi(t-t_0) \cdot Z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-z) \cdot B \cdot dW_z \quad (2.12)$$

în care notația simbolică  $dW_z$  reprezintă diferențiala procesului Wiener-Levy în raport cu  $z$  /4/. Presupunând că procesul de intrare  $X(t)$  are o valoare medie  $m_x(t)=0$ , valoarea medie a procesului de ieșire este:

$$m_z(t) = \Phi(t-t_0) \cdot m_z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-s) \cdot B \cdot m_x(s) ds \quad (2.13)$$

ceea ce reprezintă soluția ecuației deterministe:

$$\dot{m}_z(t) = A \cdot m_z(t) + B \cdot m_x(t); \quad m_z(t_0) = M\{Z(t_0)\}. \quad (2.14)$$

Prin medierea produsului soluției (2.12) considerată la două momente de timp  $t_1$  și  $t_2$  se obține covarianța:

$$\begin{aligned} C_z(t_1, t_2) &= M\{[Z(t_1) - M\{Z(t_1)\}][Z(t_2) - M\{Z(t_2)\}]^T\} = \\ &= \Phi(t_1) \cdot M\{[Z(t_0) - m_z(t_0)][Z(t_0) - m_z(t_0)]^T\} \cdot \Phi^T(t_2) + \Phi(t_1) \cdot \\ &\quad \cdot \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \Phi^{-1}(u) \cdot B \cdot B^T \cdot [\Phi^{-1}(u)]^T du \cdot \Phi^T(t_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

În particular, matricea de covarianță a componentelor lui  $Z_t$

$$C(t) = C(t, t) = M\{[Z_t - MZ_t][Z_t - MZ_t]^T\} \quad (2.15 \text{ bis})$$

este soluția simetrică și nenegativă a ecuației:

$$\dot{C}(t) = A \cdot C(t) + C(t) \cdot A^T + B \cdot B^T \quad (2.16)$$

cu valoarea inițială  $C(t_0) = M\{[C - MC][C - MC]^T\}$ .

Observație: În general, evaluarea integralei din soluția de tipul (2.12) a unei ecuații diferențiale stocastice ridică probleme da-

torită proprietății remarcabile a procesului Wiener-Levy că  $(dw)^2 \sim dt$ . Această proprietate face ca valoarea integralei (spre deosebire de integralele în sensul lui Riemann) să depindă de alegerea punctelor de eşantionare a funcției de integrat, în cadrul subintervalelor de sumare. La alegeri particulare ale acestor puncte, integrala din (2.12) se interpretează în sensul lui Ito sau în sensul lui Stratonovici ceea ce conduce la valori diferite ale integralei față de cazul că ea s-ar efectua în sensul lui Riemann. Se dovedește însă că dacă în ecuația (2.2) coeficientul  $B$  nu depinde de  $Z$  (cazul nostru), soluția ecuației în sensul lui Ito sau Stratonovici este identică cu cea obținută în sensul lui Riemann.

2.4.2. Descrierea regimurilor aleatoare nestaționare prin ecuații pentru densități de probabilitate (FDP)

Numeroase fenomene fizice pot fi descrise (modelate) cu ajutorul unei categorii speciale de procese aleatoare - procesele Markov. Un proces Markov are proprietatea că dacă se cunoaște starea sa la un moment de timp (timpul prezent,  $t_{n-1}$ ), starea viitoare (la momentul  $t_n$ ) este independentă de stările trecute ale procesului. Această proprietate (formulată de A.A. Markov în 1906) enunță ca "viitorul" este independent de "trecut" dacă se cunoaște "prezentul". Dacă prin "stare" se înțelege densitatea de probabilitate și referindu-ne la procesul  $X(t)$ , proprietatea Markov poate fi exprimată matematic astfel:

$$\begin{aligned} P \{X(t_n) \leq x \mid X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_0)\} &= \\ &= P \{X(t_n) \leq x \mid X(t_{n-1})\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Considerînd timpul ca parametru continuu și notînd cu  $s$  și  $t$  momentul prezent și respectiv un moment viitor, evoluția procesului poate fi descrisă cu ajutorul densității de probabilitate condiționată (de trecere):

$$f_{x_s x}(s, t) = \frac{\partial P \{X(t) \leq x \mid X(s) = x_s\}}{\partial x} = f_{x \mid x_s}(t, s). \quad (2.18)$$

Se dovedește că densitatea de probabilitate  $f_{x_s x}(s, t)$   $\hat{=}$   $f_x$  satisface așa-numita ecuație a lui Kolmogorov (înainte, directă):



$$\frac{\partial f_{x_s x}(s, t)}{\partial t} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} [K_n(x, t) \cdot f_{x_s x}(s, t)] \quad (2.19)$$

în care:

$$K_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M\{[X(t+\Delta t) - X(t)]^n | X(t)\}}{\Delta t} \quad \text{sînt} \quad (2.20)$$

coeficienții de intensitate. Pentru o categorie de procese Markov, numite processe de difuzie, coeficienții de intensitate sînt nuli pentru  $n \geq 3$  astfel încît (2.19) devine:

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) \cdot f_x] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) \cdot f_x] \quad (2.21)$$

unde  $f_x = f_{x_s x}(s, t)$ . Egalitatea (2.21) se numește ecuație de difuzie.

Pe baza definiției (2.20) se poate arăta că  $K_1(x, t)$  reprezintă derivata valorii medii condiționate,

$$K_1(x, t) = \frac{\partial m_x(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} x_{\tau} \cdot f_{xx_{\tau}}(t, t+\tau) dx_{\tau}, \quad (2.22)$$

iar  $K_2(x, t)$  este derivata valorii medii pătratice (variația  $v_x^2$ ) condiționate:

$$K_2(x, t) = \frac{\partial v_x^2(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} [x_{\tau} - m_x(t, \tau)]^2 \cdot f_{xx_{\tau}}(t, t+\tau) dx_{\tau} \quad (2.23)$$

$K_1$  se numește coeficient de tendință (drift) iar  $K_2$  este coeficient de difuzie.

Ecuațiile de difuzie au fost utilizate deja în studiul acțiunii zgomotelor asupra unor circuite electrice cît și pentru descrierea efectului vibrațiilor asupra sistemelor mecanice./122/.

## 2.5. Înțelesul acordat în literatura de specialitate noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu

Pentru sisteme și semnale deterministe literatura de specialitate oferă un consens privind înțelesul noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu. Ca formulare generală, regimul permanent se caracterizează prin invarianță iar regimul tranzitoriu prin modificarea în timp a unor parametri specifici ai mărimilor care se studiază. Regimul permanent particular la care însăși valorile momentane ale mărimilor analizate sînt invariante în timp se numește regim staționar. Se relevă de asemenea că sem-

nalele de regim tranzitoriu formează numai o subclasă a semnalelor de regim nepermanent (nestaționar).

Evident conceptele de regim permanent și nepermanent sînt complementare; încadrarea corespunzătoare a semnalelor într-unul din cele două regimuri presupune stabilirea parametrilor a căror invarianță caracterizează regimul permanent.

Din punct de vedere fizic, regimul tranzitoriu al mărimii (mărimilor) de ieșire apare ca o consecință a modificării legii de variație în timp a mărimii (mărimilor) de intrare în sistem. Luînd în considerare și regimurile staționare caracterizate prin valori momentane nule ale mărimilor studiate, se poate preciza că orice regim tranzitoriu este succedat de un regim permanent. Momentul de început al regimului tranzitoriu este de obicei, fenomenologic, bine precizat; momentul final se stabilește în funcție de criteriul după care regimul tranzitoriu se consideră încheiat sau nu.

Este importantă raportarea corectă a noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu la termenii de regim forțat și regim liber, termeni rezultați din descompunerea matematică a mărimii (mărimilor) de ieșire ale sistemului. Concluzia importantă a lucrării clasice /128/ este că termenii forțat și liber nu trebuie considerați sinonimi cu permanent respectiv tranzitoriu: "termenul permanent desemnează o mărime cu caracter de permanență iar termenul tranzitoriu se asociază unei mărimi cu caracter trecător". Termenul forțat se folosește pentru componenta mărimii de ieșire care depinde de mărimea de intrare și mai puțin de structura sistemului; termenul liber se va folosi pentru componenta mărimii de ieșire a cărei formă de variație în timp nu depinde de mărimea de intrare ci de structura sistemului.

Cu referire la semnalele deterministe, în literatura de specialitate se consideră următoarele tipuri de regimuri permanente: regimul staționar, regimul permanent periodic (în particular, sinusoidal) și regimul permanent caracterizat de mărimi care variază proporțional cu timpul. Prin generalizare, uneori se vorbește și de alte tipuri de regimuri permanente; de exemplu parabolic, hiperbolic /42, 128/.

Clasificarea precedentă, bazată pe forma de undă a mărimilor, se referă numai la semnale deterministe și nu poate cuprinde și semnalele aleatoare. Un punct de vedere desigur limitat este de a considera toate semnalele aleatoare, indiferent de particularitățile lor cu semnale de regim tranzitoriu /42/: "Faptul că un sis-

tem nu funcționează niciodată în regim permanent este o consecință a caracterului cu totul întâmplător al mărimii de intrare. Toate sistemele de reglare automată au această caracteristică: din cauza caracterului aleator al mărimii de intrare, sistemele de reglare automată lucrează practic întotdeauna în regim tranzitoriu".

Pe de altă parte, în literatura de specialitate se studiază regimul tranzitoriu provocat prin conectarea la intrarea sistemelor electrice, mecanice etc. a unor semnale aleatoare staționare în sens larg /21, 41, 58, 91, 107, 108/. În acest caz se consideră unanim că regimul permanent este caracterizat de procese aleatoare staționare. Faptul se explică și prin existența unor procedee bine puse la punct de măsurare a proceselor aleatoare staționare. Totuși, punctul de vedere menționat este limitat și discutabil. Spre exemplu și procesele la care mediile statistice variază periodic prezintă un "caracter de permanență".

## 2.6. Concluzii

Din cele prezentate rezultă două direcții de cercetare care sînt urmărite în lucrarea de față:

a) Prima direcție se referă la încadrarea metodei corelației în rîndul metodelor de studiu a regimului tranzitoriu. În acest sens se urmărește clasificarea unitară a semnalelor de regim permanent și tranzitoriu, posibilitatea tratării unitare a tuturor regimurilor tranzitorii indiferent dacă sînt produse de semnale deterministe sau aleatoare și definirea unitară a duratei regimurilor tranzitorii.

b) Pe de altă parte se urmărește dezvoltarea unor procedee adecvate de calcul pentru caracterizarea regimurilor tranzitorii aleatoare în domeniile timp și frecvență, respectiv a unor metode de măsurare a regimurilor aleatoare, nestaționare (în particular, tranzitorii).

### CAPITOLUL 3.

#### STUDIUL PRIN METODA CORELAȚIEI A REGIMURILOR TRANZITORII DETERMINISTE ȘI ALEATOARE

##### 3.1. Noțiunile de regim permanent și regim tranzitoriu în cadru metodei corelației

După cum rezultă din § 2.5, în literatura de specialitate noțiunea de regim permanent nu are un înțeles unitar care să cuprindă deopotrivă semnalele deterministe și aleatoare. Este necesară definirea noțiunii de regim permanent astfel încât, ea să cuprindă cazul semnalelor aleatoare iar în particular să corespundă semnalelor permanente deterministe.

În acest capitol este utilizată posibilitatea descompunerii oricărui proces aleator  $X(t)$  în valoarea sa medie  $M\{X(t)\} = m_X(t)$  și procesul aleator centrat,  $X_0(t)$ , corespunzător:

$$X(t) = m_X(t) + X_0(t). \quad (3.1)$$

Sînt evidente relațiile:

$$C_X(t_1, t_2) = C_{X_0}(t_1, t_2) = R_{X_0}(t_1, t_2); \quad (3.2)$$

$$R_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2) + m_X(t_1) \cdot m_X(t_2). \quad (3.3)$$

Prin convenție, considerăm că orice semnal determinist  $d(t)$  reprezintă valoarea medie a unui proces aleator  $X(t)$  degenerat, în sensul că  $X_0(t) = 0$ :

$$d(t) = m_X(t). \quad (3.4)$$

În cazul unui astfel de proces degenerat,

$$C_X(t_1, t_2) = 0 \quad (3.5)$$

iar utilizarea funcției de autocorelație

$$R_X(t_1, t_2) = m_X(t_1) \cdot m_X(t_2) = d(t_1) \cdot d(t_2) \quad (3.6)$$

nu se justifică; "procesul" (semnalul) este caracterizat prin valoarea momentană  $d(t)$  a oricăreia dintre realizările sale (identice). Convenția prezentată este o particularizare a înțelesului care se dă în /114/ noțiunii de semnal determinist: aceea de "proces aleator avînd o singură traiectorie". Accepțiunea dată în prezenta lucrare noțiunii de semnal determinist presupune satisfacerea identică a relației (3.5) în urma unui proces de trecere la limită, proces care nu afectează valoarea medie (3.4).

Valoarea medie a unui proces aleator oarecare poate fi:

- staționară (constantă),

$$m_x(t) = m_x^C = C; \quad (3.7)$$

- periodică,

$$m_x(t) = m_x(t+nP_m) = m_x^P(t), \quad n - \text{întreg}; \quad (3.8)$$

- tranzitorie,

$$m_x^T(t) = m_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left\{ m_x^C \quad \text{sau} \quad m_x^P(t) \right\}; \quad (3.9)$$

- oarecare, cînd nu are nici una din proprietățile (3.7), (3.8), (3.9).

Similar, covarianța unui proces oarecare  $x(t)$  poate fi:

- staționară,

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau); \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (3.10)$$

(aici se include și cazul  $C_x(t_1, t_2)=0$ ),

- periodică,

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(t_1+nP_c, t_2+mP_c) = C_x^P(t_1, t_2) \quad (3.11)$$

( $m, n$  - numere întregi),

- tranzitorie,

$$C_x^T(t_1, t_2) \xrightarrow{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \left\{ C_x(\tau) \quad \text{sau} \quad C_x^P(t_1, t_2) \right\} \quad (3.12)$$

( $\tau$  finit)

- oarecare, cînd nu are nici una din proprietățile (3.10), (3.11), (3.12).

În general, perioadele  $P_m$  (din relația (3.8)) și  $P_c$  (din relația (3.11)) pot fi diferite. Cazul particular în care:

$$P_m = P_c = P \quad (3.13)$$

apare frecvent în aplicații.

Deoarece în cadrul metodei corelației interesează atît valoarea medie cît și covarianța, un proces  $X(t)$  poate să corespun-

dă unui regim permanent, tranzitoriu sau nestaționar oarecare, conform tabelului 3.1.

Tabelul 3.1.

		Valoarea medie $m_x(t)$			
		staționară (constantă)	nestaționară		
			periodică	tranzitorie	oarecare
Covarianța $C_x(t_1, t_2)$	staționară	nulă	Cazul determinist		
		nenulă	Regim permanent		tranzitoriu
	nestaționară	periodică			
		tranzitorie	Regim nestaționar		
		oarecare			

În clasificarea propusă prin tabelul 3.1, regimurile deterministe (permanent, tranzitoriu sau nestaționar oarecare) sînt cuprinse ca și cazuri particulare, corespunzătoare unei covarianțe nule  $C_x(t_1, t_2) = 0$ . Pe de altă parte, sfera noțiunii de regim permanent conform clasificării propuse, cuprinde pe lângă regimul permanent staționar. (vezi § 2.5) și regimurile caracterizate prin periodicitatea valorii medii și covarianței.

3.2. Separarea componentelor de regim permanent și de regim tranzitoriu ale valorii medii, autocovarianței și autocorelației

Ca și în cazul particular al metodelor deterministe /119, 128/ nici în cadrul mai larg de studiu al regimului tranzitoriu prin metoda corelației, termenii forțat și liber nu trebuie considerați sinonimi cu permanent respectiv tranzitoriu. Trebuie precizat însă că în lucrarea de față se iau în considerare numai sisteme stabile a căror mărimi de excitație reprezintă, în sensul clasificării propuse în acest paragraf, semnalele de regim

permanent; în acest caz noțiunile de regim forțat și regim permanent sînt sinonime ca și noțiunile de regim liber și regim tranzitoriu. Așadar echivalența dintre noțiunile de regim forțat și regim permanent respectiv dintre noțiunile de regim liber și regim tranzitoriu este condiționată de stabilitatea sistemului dar și de excluderea din rîndul mărimilor de excitație a semnalelor cu caracter tranzitoriu.

Din punctul de vedere urmărit în lucrare este importantă exprimarea valorii medii (relația (2.13)) și a covarianței (relația (2.15) și (2.16)) ca sumă a unor componente de regim permanent respectiv tranzitoriu.

Dezvoltarea:

$$m_Z(t) = m_Z^t(t) + m_Z^p(t) \quad (3.14)$$

a valorii medii (2.13) se obține direct, prin analogie cu cazul determinist reprezentat de relațiile (2.4), (2.7) și (2.8). Astfel,

$$m_Z^p(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot m_x(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

reprezintă componenta de regim permanent iar:

$$m_Z^t(t) = \Phi(t) \cdot \{m_Z(0) - m_Z^p(0)\} \quad (3.16)$$

este componenta tranzitorie (liberă) a valorii medii. Pentru  $t_1$  și  $t_2$  finiți, considerînd  $t_0 \rightarrow -\infty$ , din expresia generală a covarianței de regim tranzitoriu (2.15) se obține covarianța corespunzătoare regimului permanent:

$$C_Z^p(t_1, t_2) = \Phi(t_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\min(t_1, t_2)} \Phi^{-1}(u) \cdot B \cdot B^T \cdot [\Phi^{-1}(u)]^T du \right\} \cdot \Phi^T(t_2). \quad (3.17)$$

Pentru exprimarea covariației  $C_Z(t_1, t_2)$  ca o sumă dintre componenta de regim permanent (3.17) și componenta de regim tranzitoriu se procedează astfel: în soluția (2.12) se utilizează pentru  $t_0$  succesiv valorile  $t_1^* < t_1$  (pentru scrierea lui  $Z(t_1)$ ) și  $t_2^* < t_2$  (pentru scrierea lui  $Z(t_2)$ ); se dezvoltă apoi  $C(t_1, t_2)$  conform definiției (2.15):

$$C_Z(t_1, t_2) = M \left\{ [Z(t_1) - M\{Z(t_1)\}] [Z(t_2) - M\{Z(t_2)\}]^T \right\}$$

ținându-se cont de independența dintre  $Z(t_0)$  și  $\int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot W d\tau$  și respectiv dintre  $Z(t_0)$  și  $\int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot W d\tau$ ; particularizând în expresia obținută pe  $t_1^* = t_2^* = 0$  se obține formula:

$$C_Z(t_1, t_2) = C_Z^P(t_1, t_2) + C_Z^T(t_1, t_2) \quad (3.18)$$

în care  $C_Z^P(t_1, t_2)$  este componenta de regim permanent dată de (3.17) iar:

$$C_Z^T(t_1, t_2) = \Phi(t_1) [C_Z(0, 0) - C_Z^P(0, 0)] \cdot [\Phi(t_2)]^T \quad (3.19)$$

reprezintă componenta de regim tranzitoriu. Notăția  $C_Z(0, 0)$  s-a utilizat pentru matricea covarianței în momentul inițial  $t_1 = t_2 = 0$ :

$$C_Z(0, 0) = M \left\{ [Z(0) - m_Z(0)] [Z^T(0) - m_Z^T(0)] \right\}. \quad (3.20)$$

Din relația (3.19) se obține, pentru  $t_1 = t_2 = t$ , expresia componentei tranzitorii a covarianței particulare  $C_Z(t)$  definită în (2.15 bis),

$$C_Z^T(t) = \Phi(t) [C_Z(0, 0) - C_Z^P(0, 0)] [\Phi(t)]^T. \quad (3.21)$$

O expresie similară cu (3.18) poate fi obținută și pentru funcția de autocorelație:

$$R_Z(t_1, t_2) = M \{ Z(t_1) \cdot Z^T(t_2) \} = R_Z^P(t_1, t_2) + R_Z^T(t_1, t_2) \quad (3.21)$$

în care:

$$R_Z^P(t_1, t_2) = C_Z^P(t_1, t_2) \quad (3.22)$$

reprezintă funcția de autocorelație de regim permanent, iar:

$$R_Z^T(t_1, t_2) = \Phi(t_1) \cdot [R_Z(0, 0) - R_Z^P(0, 0)] \cdot [\Phi(t_2)]^T \quad (3.23)$$

este componenta de regim tranzitoriu a autocorelației.

Dezvoltările (3.14), (3.18) și (3.21) facilitează aflarea soluției generale de regim tranzitoriu în cazurile în care valoarea medie, covarianța sau autocorelația de regim permanent pot fi calculate ușor prin metode specifice. De asemenea, expresiile menționate sugerează generalizarea noțiunii de durată a regimului tranzitoriu, după cum se va evidenția în § 3.6.



### 3.3. Generalizarea teoremei condițiilor inițiale

Condițiile inițiale ale unei rețele electrice aflată în regim tranzitoriu rezultă din legea inducției electromagnetice și din teorema conservării sarcinii electrice. Astfel, fluxul magnetic total al bobinelor din fiecare ochi de circuit și sarcina electrică totală a armăturilor condensatoarelor legate la un nod oarecare de circuit nu pot varia brusc. Pentru circuitele care intervin în practică (neidealizate) teorema condițiilor inițiale se formulează prin egalitățile:

$$u_C(o_+) = u_C(o_-) = u_C(o); \quad (3.24)$$

$$i_L(o_+) = i_L(o_-) = i_L(o). \quad (3.25)$$

Presupunind că regimul tranzitoriu este declanșat prin acționarea unui întrerupător,  $t=o_-$  și  $t=o_+$  reprezintă momentele imediat anterior respectiv imediat posterior comutării întrerupătorului.

Relațiile (3.24) și (3.25) pot fi utilizate numai în cazul determinist adică atunci când se cunosc cu certitudine valorile  $u_C(o_-)$  și  $i_L(o_-)$ . Dacă nu se poate neglija caracterul aleator al condițiilor inițiale în sensul că  $u_C(o_-)$  și  $i_L(o_-)$  sînt variabile aleatoare, utilizarea relațiilor (3.24) și (3.25) înseamnă o particularizare nejustificată a rezultatelor de calcul. Intre cunoașterea certă și totală necunoaștere a condițiilor inițiale este mai plauzibil și frecvent cazul când se cunosc numai anumite proprietăți statistice ale condițiilor inițiale. Astfel, presupunînd că se cunosc densitățile de probabilitate ale mărimilor  $u_C(o_-)$  și  $i_L(o_-)$ , adică  $p^-(u_C)$  și respectiv  $p^-(i_L)$ , în baza relațiilor (3.24) și (3.25) densitățile de probabilitate ale mărimilor  $u_C(o_+)$  și  $i_L(o_+)$ , adică  $p^+(u_C)$  respectiv  $p^+(i_L)$  verifică egalitățile:

$$p^+(u_C) = p^-(u_C) = p(u_C); \quad (3.26)$$

$$p^+(i_L) = p^-(i_L) = p(i_L). \quad (3.27)$$

Formularea teoremei condițiilor inițiale cu ajutorul relațiilor (3.26), (3.27) este adecvată pentru studiul regimului tranzitoriu prin ecuații de evoluție a probabilităților (ecuații Kolmogorov). După cunoștința autorului, în literatura de specialitate nu s-a abordat problema regimurilor tranzitorii în circuitele electrice prin metoda ecuațiilor Kolmogorov.

În expresiile (3.16), (3.21) și (3.23) care descriu regi-

mul tranzitoriu intervin mărimile caracteristice vectorului de stare în momentul inițial:

$$\begin{aligned} m_Z(o) &= \|M\{Z_1(o)\}\| = \|m_1(o)\| \quad - \text{valoarea medie} \\ R_Z(o, o) &= \|M\{Z_1(o)Z_j(o)\}\| = \|r_{1j}(o)\| \quad - \text{autocorelația} \\ C_Z(o, o) &= \|M\{(Z_1(o)-M\{Z_1(o)\}) \cdot (Z_j(o)-M\{Z_j(o)\})\}\| = \\ &= \|C_{1j}(o, o)\| \quad - \text{autocovarianța} \end{aligned}$$

Cu condiția suficientă (dar nu necesară) că variabilele de stare în momentul inițial sînt statistic independente și ținînd seama de relațiile (3.26) și (3.27), teorema condițiilor inițiale poate fi exprimată și pentru mărimile  $m_Z(o)$ ;  $R_Z(o, o)$  și  $C_Z(o, o)$ .

Intr-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_1 \cdot p^-(z_1) dz_1 = \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \cdot p^+(z_1) dz_1 = \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \cdot p(z_1) dz_1$$

adică:

$$M\{Z_1(o_-)\} = M\{Z_1(o_+)\} = M\{Z_1(o)\} ; \quad i=1, 2, \dots, n$$

și deci:

$$m_Z(o_-) = m_Z(o_+) = m_Z(o). \quad (3.28)$$

Relațiile (3.28) reprezintă teorema condițiilor inițiale pentru valoarea medie a vectorului de stare. Similar, pe baza independenței statistice a variabilelor de stare în momentul inițial se pot scrie egalitățile:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_j p^-(z_1, z_j) dz_1 dz_j &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1 p^-(z_1) dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} z_j p^-(z_j) dz_j = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1 p^+(z_1) dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} z_j p^+(z_j) dz_j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_j p^+(z_1, z_j) dz_1 dz_j \end{aligned}$$

adică:

$$M\{Z_1(o^-) \cdot Z_j(o^-)\} = M\{Z_1(o^+) \cdot Z_j(o^+)\} = M\{Z_1(o) \cdot Z_j(o)\} \\ i=1, 2, \dots, n$$

și deci:

$$R_Z(o^-, o^-) = R_Z(o^+, o^+) = R_Z(o, o). \quad (3.29)$$

Bazîndu-ne pe egalitatea:

$$M\{(Z_1(t_1)-M\{Z_1(t_1)\})(Z_j(t_2)-M\{Z_j(t_2)\})\} =$$

$$= M\{Z_i(t_1) \cdot Z_j(t_2)\} - M\{Z_i(t_1)\} \cdot M\{Z_j(t_2)\},$$

echivalentă cu:

$$C_{ij}(t_1, t_2) = r_{ij}(t_1, t_2) - m_i(t_1) \cdot m_j(t_2),$$

și pe relațiile de continuitate (3.28) și (3.29) rezultă continuitatea în momentul inițial a autocovarianței,

$$C_Z(o^-, o^-) = C_Z(o^+, o^+) = C_Z(o, o). \quad (3.30)$$

Relațiile (3.26) și (3.27) reprezintă o generalizare a teoremei condițiilor inițiale în formularea egalităților (3.24) respectiv (3.25). Într-adevăr, în cazul particular că densitățile de probabilitate din relațiile (3.26) și (3.27) sînt de tipul distribuției  $\mathcal{J}$ , egalitățile:

$$\mathcal{J}^+(u_C - u_C(o_+)) = \mathcal{J}^-(u_C - u_C(o_-)) = \mathcal{J}(u_C - u_C(o)) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{J}^+(i_L - i_L(o_+)) = \mathcal{J}^-(i_L - i_L(o_-)) = \mathcal{J}(i_L - i_L(o)) \quad (3.32)$$

sînt echivalente cu (3.24) respectiv (3.25).

Relațiile de continuitate (3.28), (3.29) și (3.30) sînt adecvate studiului regimului tranzitoriu pe baza ecuațiilor de evoluție a stării, în forma prezentată în § 3.2.

#### 3.4. Utilizarea metodei corelației la calculul regimurilor tranzitorii în sisteme liniare supuse unor excitații deterministe

În literatura de specialitate nu se tratează prin metoda corelației regimurile tranzitorii provocate de semnale deterministe; motivul este că aceste semnale se consideră complet specificate ca funcții de timp și prin urmare tratarea statistică nu mai prezintă interes practic. Totuși, din punct de vedere teoretic este util să se evidențieze posibilitatea pe care metoda corelației o oferă de a trata unitar regimurile tranzitorii, indiferent dacă acestea sînt produse de semnale deterministe sau aleatoare. În plus, contrar formulării uzuale a problemelor de regim tranzitoriu, imprevizibilul intervine printr-un număr finit de parametri și în cazul excitațiilor deterministe (cu excepția semnalului treaptă); această împrejurare face ca din punct de vedere formal calculul prin metoda corelației a regimurilor tranzitorii provocate de semnale deterministe să prezinte asemănări cu studiul sistemelor cu condiții inițiale aleatoare /44, 103/, deși ca semnificație fizi-

că cele două tipuri de probleme diferă net /55, 58/.

Calculul statistic a valorii medii, covarianței sau autocovarianței semnalului de ieșire  $y(t)$  al unui sistem liniar la a cărei intrare acționează semnalul determinist  $x(t)$ , presupune parcurgerea a două etape: - în prima etapă se calculează momentele statistice (valoarea medie, covarianța, autocorelația) ale semnalului de intrare; pasul acesta nu intervine în cazul semnalelor de intrare aleatoare când momentele statistice se consideră date; - în a doua etapă se determină momentele statistice ale semnalului de ieșire, ținând seama de caracteristicile semnalului de intrare și ale sistemului.

### 3.4.1. Metodă de calcul a momentelor statistice pentru semnale deterministe, bazată pe teoria funcțiilor generalizate (teoria distribuțiilor)

Utilizarea funcțiilor generalizate (distribuțiilor) în teoria probabilităților și în statistica matematică nu este de dată recentă. Se menționează în acest sens introducerea proceselor stocastice generalizate /27/ care au avantajul că permit definirea riguroasă a conceptului de zgomot alb. De asemenea, a fost remarcată posibilitatea de a extinde în distribuții expresiile valorii medii și a dispersiei unei variabile aleatoare, cu avantajul de a avea expresii unice pentru aceste mărimi, indiferent dacă variabila aleatoare în cauză este continuă sau discretă (65/. Funcțiile generalizate sînt un instrument de bază în teoria modernă a semnalelor /114/.

După cunoștința autorului, teoria funcțiilor generalizate a fost utilizată pentru prima dată la calculul momentelor statistice pentru semnale deterministe în sens larg în lucrarea /58/. Metoda propusă are la bază faptul cunoscut /65, 66/ că valoarea medie a unui semnal (proces) oarecare  $X(t)$ ,

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad (3.33)$$

poate fi privită ca valoarea distribuției  $f_x(x)$  în funcția  $\varphi(x) = x$ . Deoarece  $\varphi(x)$  este un element al spațiului fundamental  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  al funcțiilor indefinit derivabile și cu suport arbitrar, relația (3.33) are sens numai dacă  $f_x(x)$  este o distribuție cu suport

compact, deci aparținând spațiului de distribuții  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  /66/. Condiția menționată este totdeauna îndeplinită în cazul semnalelor fizice. Similar, funcția de autocorelație statistică:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdot f_{x_1, x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.34)$$

poate fi privită ca valoarea distribuției  $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$  în funcția  $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . Funcția  $\varphi(x_1, x_2)$  aparține spațiului fundamental  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$  al funcțiilor indefinit derivabile și cu suport arbitrar. Distribuția  $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$  trebuie să fie cu suport compact, condiție totdeauna îndeplinită în cazul semnalelor fizice.

În cadrul metodei propuse pentru calculul momentelor statistice a semnalelor deterministe, singura etapă mai pretențioasă este determinarea lui  $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , după care  $m_x(t)$  și  $R_{x_1, x_2}(t_1, t_2)$  rezultă prin aplicarea automată a regulilor de calcul cu distribuții. În Anexa A se prezintă modul de aplicare a metodei în cazurile unui semnal constant (pur determinist)  $x_1(t) = U$ , respectiv a unui semnal sinusoidal  $x_2(t) = \cos(\omega t + \Phi)$  cu faza inițială  $\Phi$  impredictibilă (determinist în sens larg). Este interesant de relevat că dacă faza inițială  $\Phi$  este uniform distribuită,  $x_2(t)$  este realizarea unui proces (semialeator) staționar cu funcția de autocorelație:

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \cos \omega \tau. \quad (3.35)$$

Pentru oricare altă distribuție a fazei inițiale procesul corespunzător realizării  $x_2(t)$  rezultă nestaționar. De exemplu, pentru o fază inițială perfect controlabilă  $\varphi_0 < \infty$ , funcția de autocorelație rezultă:

$$R^{\varphi_0}(\tau, t_1) = \cos(\omega t_1 + \varphi_0) \cdot \cos(\omega \tau - \omega t_1 - \varphi_0). \quad (3.36)$$

În concluzie, metoda propusă pentru calculul momentelor statistice pentru semnale deterministe se caracterizează prin aplicarea automată a regulilor de calcul cu funcții generalizate. Ea permite urmărirea ușoară a efectului modificării statisticii parametrilor aleatori asupra momentelor calculate (valoare medie, funcție de autocorelație).

3.4.2. Utilizarea transformatei Laplace pentru calculul momentelor statistice tranzitorii la ieșirea sistemelor liniare

Transformarea Laplace care s-a impus în rândul procedurilor determinate de studiu a regimurilor tranzitorii /29, 30, 49, 63, 69, 80, 112, 126/, este, în diferite variante, "unealta" matematică adecvată și pentru studiul regimurilor tranzitorii aleatoare /58, 80, 108/. În continuare se prezintă câteva modalități de utilizare a transformatei Laplace la calculul momentelor statistice tranzitorii la ieșirea sistemelor liniare.

a) Procedul bazat pe transformarea Laplace unilaterală și unidimensională.

Considerăm ecuația diferențială de gradul  $n$ :

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^{(i)}(t) = x(t) \quad (3.37)$$

în care  $a_i, i=1,2,\dots,n$  sînt constante date iar  $y^{(i)}(t)$  reprezintă derivata de ordinul  $i$  a lui  $y(t)$ . Valoarea medie  $m_y(t)$  și autocorelația  $R_{yy}(t_1, t_2)$  ale procesului de ieșire  $y(t)$  pot fi determinate din ecuațiile diferențiale ce se obțin din (3.37) ținînd seama de relațiile /41, 91/ :

$$M\left\{\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right\} = \frac{d^i M\{y(t)\}}{dt^i} = m_y^{(i)}(t); \quad i - \text{număr natural} \quad (3.38)$$

$$M\left\{\frac{d^i x(t_1)}{dt_1^i} \cdot \frac{d^j x(t_2)}{dt_2^j}\right\} = \frac{\partial^{i+j} R_{xy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^i \partial t_2^j} = R_x^{(i)} y^{(j)}(t_1, t_2);$$

$i, j - \text{numere naturale.} \quad (3.39)$

Formulele (3.38) și (3.39) sînt valabile numai dacă procesele  $x(t)$  și  $y(t)$  sînt derivabile în sens de medie pătratică (m.p.) /91/. Această condiție este totdeauna îndeplinită în cazul semnalelor fizice dar nu este îndeplinită pentru zgomotul alb - proces matematic idealizat /4/. Dacă  $x(t)$  și  $y(t)$  sînt m.p. derivabile relația (3.39) este valabilă și în cazul particular  $y(t)=x(t)$ .

Avînd în vedere relația (3.38), din (3.37) rezultă ecuația diferențială pentru valori medii:

$$\sum_{i=0}^n a_i m_y^{(i)}(t) = m_x(t) \quad (3.40)$$

în care  $m_x(t)$  reprezintă valoarea medie a procesului de intrare

$x(t)$ . Tot din (3.57), utilizând relația (3.39) se obțin ecuațiile diferențiale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot R_{x(i)y}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i R_{xy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^i} = R_{xx}(t_1, t_2); \quad (3.41)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot R_{y(i)y}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i R_{yy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^i} = R_{xy}(t_1, t_2). \quad (3.42)$$

Din ecuația (3.41) în care  $R_{xx}(t_1, t_2)$  - autocorelația semnalului de intrare,  $x(t)$  - apare ca mărime de excitație se determină intercorelația  $R_{xy}(t_1, t_2)$ . Apoi, considerînd pe  $R_{xy}(t_1, t_2)$  ca excitație, din (3.42) se determină autocorelația procesului de ieșire  $R_{yy}(t_1, t_2)$ . Ecuațiile (3.41) și (3.42) sînt diferențiale ordinare (nu cu derivate parțiale), în prima  $t_1$ , în a doua  $t_2$  intervenind doar ca parametri. Deoarece conțin funcții ce depind de cîte o singură variabilă ecuațiile (3.40), (3.41) și (3.42) pot fi rezolvate utilizînd, cu avantajele cunoscute, transformarea Laplace unilaterală și unidimensională /30, 63, 91/.

b) Procedeu bazat pe transformarea Laplace unilaterală și multidimensională.

În lucrarea /107/ se utilizează transformarea Laplace unilaterală și n-dimensională /49, 112/ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^n \{R_x(t_1, t_2, \dots, t_n)\} &= S_x(p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{\text{de n-ori}} R_x(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \exp(-p_1 t_1 - p_2 t_2 - \dots - p_n t_n) \cdot \\ &\quad \cdot dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned} \quad (3.43)$$

pentru exprimarea legăturii dintre funcțiile de autocorelație de ordin superior ale intrării și ieșirii unui sistem linear caracterizat prin funcția pondere  $g(t)$ , respectiv prin transformata Laplace a acesteia:

$$G(p) = \int_0^\infty g(t) \cdot \exp(-pt) dt. \quad (3.44)$$

Se menționează că funcția de autocorelație de ordinul n a unui

proces  $x(t)$  se definește prin relația:

$$R_x(t_1, t_2, \dots, t_n) = M \{ X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n) \}. \quad (3.45)$$

În rezultatul final din /107/ :

$$S_Y(p_1, p_2, \dots, p_n) = S_X(p_1, p_2, \dots, p_n) \cdot \prod_{i=1}^n G(p_i), \quad (3.46)$$

$S_X(\cdot)$  și  $S_Y(\cdot)$  reprezintă transformatele Laplace - calculate cu formula (3.43) - ale funcțiilor de autocorelație  $R_X(\cdot)$  respectiv  $R_Y(\cdot)$  -

Procesele Gaussiene sînt complet caracterizate de valoarea medie și de funcția de autocorelație, ceea ce corespunde la  $n=1$  respectiv  $n=2$  în relațiile (3.43) și (3.45).

Corectitudinea determinării autocorelației  $R_Y(t_1, t_2)$  corespunzătoare regimului tranzitoriu poate fi verificată cu ajutorul relațiilor Wiener-Hincin /40, 41, 73, 91/, în situația că procesul de intrare  $x(t)$  este staționar, adică dacă :

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau); \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (3.47)$$

Intr-adevăr, după substituirea  $t_1=t$ ,  $t_2=t+\tau$ , prin trecere la limită se obține autocorelația de regim permanent:

$$R_Y(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} R_Y(t, t+\tau)$$

Dacă expresia lui  $R_Y(t_1, t_2)$  este corectă, între densitățile spectrale de putere  $S_X(\omega)$  și  $S_Y(\omega)$  determinate cu formula:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (3.48)$$

există relația:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 \quad (3.49)$$

Trebule menționată și utilizarea transformării Laplace bilaterală la calculul funcțiilor de corelație tranzitorii /108/. Acest procedeu evidențiază mai clar efectul funcției de transfer a sistemului asupra procesului de ieșire; totuși metoda nu s-a răspîndit din cauză că transformarea Laplace bilaterală /126/ este mai puțin familiară inginerilor.



### 3.5. Caracterizarea regimurilor tranzitorii aleatoare în domeniul frecvență

Spectrul frecvențial dublu (SFD) /8, 55/ și spectrul instantaneu (SI) sînt mărimi adecvate pentru caracterizarea proceselor tranzitorii în domeniul frecvență. SFD și SI sînt reprezentări spectrale ale funcțiilor de corelație nestaționare (tranzitorii), reprezentări obținute utilizînd transformarea Fourier. În continuare se folosește transformarea Laplace (bilaterală) pentru a se defini variantele în complex ale acestor reprezentări spectrale, cu avantajul extinderii domeniului lor de aplicabilitate.

#### 3.5.1. Spectrul complex dublu (SCD)

Literatura de specialitate, inclusiv monografiile /8, 91/ prezintă SFD ca transformata Fourier bidimensională a funcțiilor de auto- sau intercorelație nestaționare. Astfel între SFD,  $S_x(f,g)$  al procesului stocastic cu valori reale  $X(t)$  și funcția de autocorelație a aceluiași proces  $R_x(\tau,t)$  există relațiile:

$$S_x(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau,t) \cdot \exp[-j2\pi(f\tau + gt)] d\tau dt; \quad (3.50)$$

$$R_x(\tau,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f,g) \cdot \exp[j2\pi(f\tau + gt)] df dg. \quad (3.51)$$

Pe de altă parte, urmînd un procedeu euristic, SFD se introduce ca funcție de autocorelație a procesului aleator cu valori complexe,  $X(f)$ , ale cărui realizări se pun în legătură cu realizările procesului  $X(t)$  prin transformările /8/ :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt; \quad (3.52)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) \cdot \exp(j2\pi ft) df. \quad (3.53)$$

Se obține:

$$S_x(f,g) = M \{ x^*(f) \cdot x(g) \}. \quad (3.54)$$

Dacă nu se impun condiții foarte restrictive asupra procesului  $X(t)$  - de exemplu, ca fiecare realizare  $x(t)$  să satisfacă

condițiile lui Dirichlet /66/ - transformările (3.52) și (3.53) nu au sens. În locul relației (3.52) ar trebui utilizată transformarea Fourier generalizată, în care caz, (3.53) devine o integrală Stieltjes /78/.

În lucrarea /56/ autorul generalizează noțiunea de SFD, utilizând transformarea Laplace bilaterală. Avantajul principal obținut prin generalizare constă în lărgirea clasei proceselor care pot fi caracterizate prin spectrul dublu, astfel încât se vor cuprinde toate semnalele de regim tranzitoriu; aceasta în condițiile unei convergențe în sens obișnuit (sens Hardy, /66/) a integralelor care intervin. Avantajul menționat provine din faptul că, în principiu, transformarea Laplace este aplicabilă unei game mai largi de semnale decât transformarea Fourier /29, 116/. Trebuie subliniat că transformarea Laplace bilaterală /Anexa B/, este mai accesibilă inginerilor decât transformarea Fourier generalizată care ar trebui să se utilizeze de drept în locul relațiilor (3.52), (3.53).

Referindu-ne la procesul stocastic cu valori reale  $X(t)$ , trebuie observat că limitele domeniului de convergență  $\tilde{\nu}_{x1}$  și  $\tilde{\nu}_{x2} < \tilde{\nu}_{x1}$  se determină din considerente statistice; de exemplu, se poate impune ca mulțimea realizărilor  $x(t)$  pentru care convergența nu este asigurată în tot domeniul ( $\tilde{\nu}_{x1}, \tilde{\nu}_{x2}$ ), să fie de măsură nulă. În particular, dacă domeniul de convergență degerează în dreapta  $\tilde{\nu}_{x1} = \tilde{\nu}_{x2}$ , se va pune condiția ca mulțimea realizărilor pentru care transformările integrale nu converg nici pe această dreaptă să fie de măsură nulă. Pentru a nu încălca inutil expunerea, în relațiile generale de la acest punct nu se mai precizează domeniile de convergență.

Pe baza transformării (B.1), proceselor stocastice reale  $X(t)$  și  $Y(t)$  li se pot asocia procesele stocastice cu valori complexe  $X(p)$  și respectiv  $Y(p)$ . Dacă se exprimă  $x(t_1)$  din (B.2 bis) iar  $x(t_2)$  din (B.2), prin medierea statistică a procesului  $x(t_1)$ .  $x(t_2)$ , se obține:

$$M \{x(t_1) \cdot x(t_2)\} = R_x(t_1, t_2) \stackrel{**}{=} S_x(p_1, p_2) \quad (3.55)$$

în care:

$$S_x(p_1, p_2) = M \{X^{**}(p_1) X(p_2)\} \quad (3.56)$$

se numește spectrul complex dublu (SCD) al procesului  $X(t)$  și reprezintă o generalizare a SFD dat de (3.54). La rîndul ei, rela-

ția (3.55) este o generalizare a formulelor (3.50) și (3.51).

Similar se poate defini și SCD mutual al proceselor  $X(t)$  și  $Y(t)$ ,

$$S_{xy}(p_1, p_2) = M \{ X^{**}(p_1) Y(p_2) \} \quad (3.57)$$

care se pune în legătură cu funcția de intercorelație a proceselor prin relația:

$$M \{ x(t_1) \cdot y(t_2) \} = R_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{*}{=} S_{xy}(p_1, p_2). \quad (3.58)$$

Pentru a evidenția, dacă este cazul, că procesul nestaționar  $X(t)$  este cu parte staționară separabilă /8, 12/, se pot utiliza următoarele grupuri de transformări:

$$p = \frac{p_2 - p_1^{**}}{2}; \quad q = p_2 + p_1^{**} \quad (3.59)$$

$$p_1^{**} = \frac{q}{2} - p; \quad p_2 = \frac{q}{2} + p \quad (3.60)$$

Schimbările de variabilă (3.59) și (3.60) le corespund în domeniul timpului transformările:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}; \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (3.61)$$

și respectiv:

$$t_1 = t - \frac{\tau}{2}; \quad t_2 = t + \frac{\tau}{2} \quad (3.62)$$

Dacă  $X(t)$  este cu parte staționară separabilă, se poate scrie:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t - \frac{\tau}{2}, t + \frac{\tau}{2}) = R_x(\tau, t) = R_1(t) \cdot R_2(\tau). \quad (3.63)$$

Înlocuind (3.63) în (B.8 bis) și ținând seama de transformările (3.60) rezultă:

$$S_x(p, q) = S_1(q) \cdot S_2(p) \stackrel{*}{=} R_1(t) \cdot R_2(\tau) = R_x(\tau, t) \quad (3.64)$$

în care:

$$S_1(q) \stackrel{*}{=} R_1(t); \quad (3.65)$$

$$S_2(p) \stackrel{*}{=} R_2(\tau). \quad (3.66)$$

Trebuie remarcat că trecerea între funcția de autocorelație și SCD se face prin transformările (B.8) sau (B.8 bis) după cum aceste mărimi sînt reprezentate în planele  $(\tau, t)$ ,  $(p, q)$  și respectiv  $(t_1, t_2)$ ,  $(p_1, p_2)$ .

În cazul particular al proceselor staționare, la scrierea relațiilor (3.63), (3.64), (3.65) trebuie să se țină seama că:

$$R_1(t) = C = \text{constantă} \quad (3.67)$$

și /66, 126/ :

$$1 \text{ o} \text{---} \bullet 2\pi \cdot \delta(jq); \operatorname{Re}\{g\} = 0 \quad (3.68)$$

Rezultă:

$$S_x(p, q) = 2\pi C \cdot \delta(jq) \cdot S_2(p); \operatorname{Re}\{q\} = 0. \quad (3.67)$$

Deoarece  $\operatorname{Re}\{q\}=0$  impune  $p_1=-r+j\omega_1$ ,  $p_2=r+j\omega_2$ , aplicarea transformării (3.59) în (3.67) conduce la:

$$S_x(p_1, p_2) = S_x(r, \omega_1, \omega_2) = 2\pi C \delta(\omega_1 - \omega_2) \cdot S_2(r + j \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) \quad (3.68)$$

adică SCD al procesului staționar  $X(t)$  este concentrat pe axa  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  și are expresia:

$$S_2(r, \omega) = 2\pi C \cdot S_2(r + j\omega). \quad (3.69)$$

### 3.5.2. Spectrul complex instantaneu (S.C.I.)

Spectrul instantaneu (S.I.) se definește ca transformata Fourier a funcției de autocorelație  $R_x(\tau, t)$  în raport cu variabila  $\tau$  /8/ :

$$s_x(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau, t) \cdot \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (3.70)$$

în care:

$$R_x(\tau, t) = M \left\{ X(t - \frac{\tau}{2}) \cdot X(t + \frac{\tau}{2}) \right\}. \quad (3.71)$$

Transformarea inversă a relației (3.70) este:

$$R_x(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(f, t) \cdot \exp(j2\pi f \tau) df; \quad (3.72)$$

în particular, pentru  $\tau=0$ , se obține:

$$R_x(0, t) = M \{ X^2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(f, t) df \geq 0. \quad (3.73)$$

Relația (3.73) permite o interpretare fizică a spectrului  $s_x(f, t)$ : SI arată cum este distribuită valoarea medie pătratică  $M\{X^2(t)\}$  în planul  $(f, t)$ .

Trebuie menționat că există și alte definiții ale S.I. precum și încercări de a măsura experimental această mărime /13, 32/.

Dificultăți matematice de natura celor relevate în § 3.5.1 în legătură cu relațiile (3.50) la (3.54) au condus la generali-

zări ale noțiunii de spectru instantaneu. Astfel în lucrările /140/ și /108/ se introduce noțiunea de spectru complex definit ca transformata Laplace unilaterală respectiv bilaterală a funcției de autocorelație  $M\{X(t).X(t+\tau)\}$ .

În continuare se preferă utilizarea transformatei Laplace bilaterală, generalizare firească a relației (3.70). Spre deosebire de lucrarea /108/ se preferă reprezentarea (3.71) a funcției de autocorelație nestaționară, reprezentare care evidențiază proprietatea de simetrie a autocorelației. Astfel, definim spectrul complex instantaneu (SCI) prin relația:

$$s_x(p, t) = L_u \{R_x(\tau, t)\} \equiv R_x(\tau, t). \quad (3.74)$$

Pentru un proces cu parte staționară separabilă, ținând seama de relația (3.63) se obține:

$$s_x(p, t) = R_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau) \cdot \exp(-p\tau) d\tau = R_1(t) \cdot S_x(p) \quad (3.75)$$

în care  $S_x(p)$  este spectrul complex corespunzător părții "staționare" a procesului. Dacă procesul în cauză este pur staționar, atunci este valabilă relația (3.67) și dacă:

$$R_x(\tau, t) = C \cdot R_2(\tau) = R_x(\tau). \quad (3.76)$$

În consecință, pentru procese staționare SCI este identic cu spectrul complex al procesului staționar.

### 3.6. Observații privind durata regimului tranzitoriu

În /20/ se arată că dacă la intrarea unui sistem descris prin ecuația stocastică (2.2) se aplică la momentul  $t=0$  un zgomot alb cu valoare medie nulă, atunci pentru  $t \rightarrow \infty$  vectorul de stare tinde spre un regim permanent staționar, cu condiția ca matricea  $A$  să fie stabilă (adică să aibă numai valori proprii cu parte reală negativă).

Deși din punct de vedere matematic regimul permanent este atins la  $t \rightarrow \infty$ , în aplicații se pune întrebarea cât durează "practic" regimul tranzitoriu. Problema duratei regimului tranzitoriu se pune uzual în studiul fenomenelor deterministe /42, 119/ dar ea nu a fost ridicată în studiul răspunsului sistemelor la semnale aleatoare. Lucrările în care se abordează regimurile tranzitorii aleatoare /41, 70, 91, 107, 108/ vizează determinarea mărimilor de regim permanent (prin trecerea la limită pentru

$t \rightarrow \infty$ ). Considerarea unui caz particular al ecuației (2.1) permite formularea unor observații privind durata regimului tranzitoriu. Astfel presupunem că la intrarea unui filtru trece-jos ( $A=-a$ ;  $B=a/RC$ ) acționează, începând cu momentul  $t=0$ , mărimea de excitație  $X(t)+U$ , în care: -  $U$  reprezintă o tensiune constantă iar  $X(t)$  este un zgomot gaussian de bandă limitată având funcția de autocorelație:

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 \cdot \exp[-b|\tau|], \quad b > 0 \quad (3.77)$$

Deoarece sistemul este liniar, se pot trata separat răspunsurile la treapta de tensiune  $U$  și la "treaptă de zgomot". În primul caz, se obțin la ieșire următoarele medii statistice /41, 58/:

- valoarea medie

$$m_{Z1}(t) = U[1 - \exp(-at)] = Z_1(t), \quad (3.77)$$

- covarianța

$$C_{Z1}(t_1, t_2) = 0$$

- funcția de autocorelație

$$R_{Z1}(t_1, t_2) = U^2[1 - \exp(-at_1) - \exp(-at_2) + \exp(-at_1 - at_2)]. \quad (3.78)$$

Cînd mărimea de excitație este zgomotul staționar  $X(t)$  mediile statistice ale procesului de ieșire  $Z_2(t)$  sînt /41, 55, 68/ :

- valoarea medie

$$m_{Z2}(t) = 0,$$

- covarianța și funcția de autocorelație

$$C_{Z2}(t_1, t_2) = R_{Z2}(t_1, t_2) = \frac{a \sigma_X^2}{a^2 - b^2} \left\{ a \cdot \exp(-b|t_2 - t_1|) - b \cdot \exp(-a|t_2 - t_1|) + (a+b) \exp[-a(t_1 + t_2)] - a[\exp(-bt_1 - at_2) + \exp(-at_1 - bt_2)] \right\}. \quad (3.79)$$

Dacă în funcția de autocorelație (3.78) se pune  $t_1 = t_2 = t$  se obține expresia:

$$R_{Z1}(t, t) = U^2[1 - \exp(-at)]^2 = R_{Z1}(t) \quad (3.80)$$

care reprezintă o altă descriere a regimului tranzitoriu al valorii medii.

În cazul regimurilor tranzitorii determinate cu variație exponențială, admitînd o eroare de 5% durata  $T$  a regimului tranzitoriu se poate defini din relația:

$$[y(T) - y(t_0)] / [y(\infty) - y(t_0)] = 0,95 \quad (3.81)$$

echivalentă cu:

$$0,95 y(\infty) + 0,05 y(t_0) = y(T). \quad (3.81 \text{ bis})$$

Cu  $y(\cdot)$  s-a notat mărimea ce descrie rezimul tranzitoriu.

Aplicarea relației (3.81 bis) în cazul valorii medii (3.77) conduce la rezultatul cunoscut:  $T \approx 3/a = 3RC$ . Același criteriu aplicat autocorelației (3.80) arată că pentru atingerea regimului permanent este necesare 3.7 constante de timp:  $T_1 \approx 3,7/a = 3,7RC$ . Desigur același rezultat se obține și dacă durata regimului tranzitoriu se definește relativ la autocorelația normalată:

$$\frac{R_{Z1}(t)}{R_{Z1}(\infty)} = [1 - \exp(-at)]^2. \quad (3.82)$$

Independent de "descrierea" utilizată, este esențial ca durata regimului tranzitoriu al valorii medii depinde doar de constanta de timp a sistemului.

Trebuie subliniat că definirea duratei regimului tranzitoriu cu ajutorul autocorelației are avantajul aplicabilității atât pentru valoarea medie cât și pentru covarianță. Într-adevăr, din (3.79) se obține:

$$R_{Z2}(t) = R_{Z2}(t, t) = C_{Z2}(t, t) = \frac{a \sigma_x^2}{a+b} \left\{ 1 - \frac{\exp(-at)}{a-b} \cdot [2a \cdot \exp(-bt) - (a+b) \exp(-at)] \right\}. \quad (3.83)$$

Este clar că aplicarea criteriului (3.81 bis) autocorelației (3.82) conduce la o durată a regimului tranzitoriu al variației, dependentă atât de constanta de timp a sistemului cât și de "gradul de corelare" al mărimii de excitație, reflectat de constanta de timp  $b$ :  $T_2 = T_2(a, b)$ . În fig. 3.1 se reprezintă autocorelația normalată:

$$\frac{R_{Z2}(t)}{R_{Z2}(\infty)} = 1 - \frac{2}{1 - \frac{b}{a}} \cdot \exp\left[-at\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right] + \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} \cdot \exp(-2at). \quad (3.84)$$

În funcționarea reală a circuitului regimurile tranzitorii ale variației și valorii medii apar suprapuse. Definirea duratei reale a regimului tranzitoriu se poate realiza cu ajutorul autocorelației normale:

$$\frac{R_Z(t)}{R_Z(\infty)} = \frac{R_{Z1}(t) + R_{Z2}(t)}{R_{Z1}(\infty) + R_{Z2}(\infty)}. \quad (3.85)$$

Această definiție are dezavantajul că dacă valorile finale  $R_{Z1}(\infty)$  și  $R_{Z2}(\infty)$  sînt mult diferite, durata regimului tranzitoriu

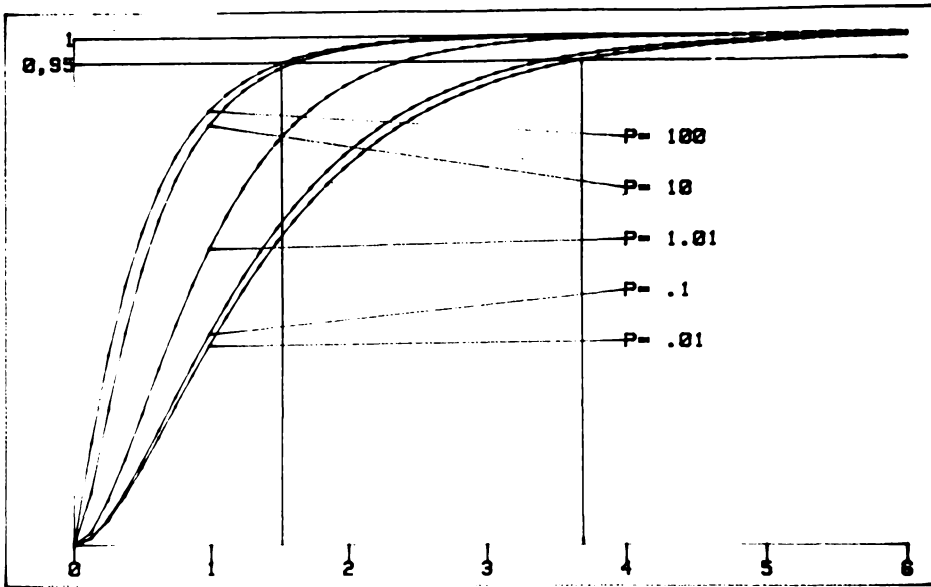


Fig.3.1. Familie de curbe reprezentind regimul tranzitoriu al variației normale, cu expresia (3.84); ca variabilă independentă s-a considerat produsul  $at$ ; raportul  $p=b/a$  are rol de parametru. Se observă că regimul tranzitoriu "durează" aproximativ între 1,5 și 3,7 constante de timp, în funcție de parametrul  $p$ .

ar fi practic determinată doar de una dintre componentele tranzitorii (cea cu valoare finală mai mare). In acest sens este preferabil să se utilizeze în ecuația - criteriu (3.81 bis) suma valorilor normale ale funcțiilor de autocorelație:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ (R_{Z1}(t)/R_{Z1}(\infty)) + R_{Z2}(t)/R_{Z2}(\infty) \right] = 1 - \exp(-at) + \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \cdot \exp(-2at) - \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \exp\left[-at\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]. \quad (3.86)$$

Expresia (3.86) se reprezintă în fig.3.2 în funcție de  $(at)$ , și considerind raportul  $b/a$  ca parametru.

Analiza prezentată în acest paragraf evidențiază faptul că noțiunea de durată a regimului tranzitoriu utilizată în studiul regimurilor deterministe poate fi generalizată în cadrul metodei corelației astfel încât să se trateze unitar fenomenele tranzitorii, indiferent dacă mărimea de excitație are un caracter determinist, aleator sau *mixt*.

Desigur analiza poate fi extinsă și la regimurile permanente periodice în sensul clasificării din § 3.1.



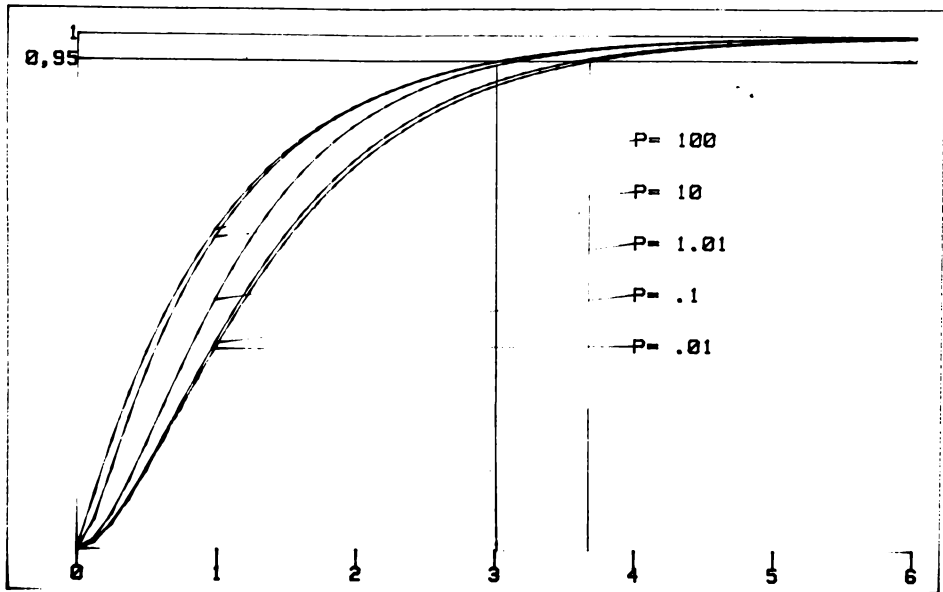


Fig.3.2. Familie de curbe reprezentind regimul tranzitoriu a funcțiilor de autocorelație normale, conform expresiei (3.86). Ca variabilă independentă s-a considerat produsul  $at$  iar ca parametru raportul  $p=b/a$ ; regimul tranzitoriu astfel definit "durează" între 3 și 3,7 constante de timp, în funcție de parametrul  $p$ .

### 3.7. Concluzii

Metoda corelației este prezentată ca un procedeu de studiu a regimurilor tranzitorii, valabil atât pentru procesele deterministe cât și pentru cele aleatoare. Descompunerea soluției de regim tranzitoriu în componentă de regim permanent și în componentă tranzitorie, teorema condițiilor inițiale, noțiunea de durată a regimului tranzitoriu - capătă formulări mai generale în cadrul metodei corelației. În cadrul capitolului se introduce noțiunea de spectru complex dublu - ca o generalizare a spectrului frecvențial dublu - mărime ce permite caracterizarea regimurilor tranzitorii în domeniul frecvență.

## CAPITOLUL 4.

### DEZVOLTAREA UNEI METODE PENTRU ANALIZA DE CORELAȚIE A PROCESELOR NESTAȚIONARE

#### 4.1. Analiza de corelație a proceselor nestaționare (privire de ansamblu)

Analiza de corelație s-a dezvoltat cu precădere legată de studiul proceselor staționare. Aparatele de măsură specializate au la bază variate principii și metode de calcul a funcțiilor de corelație pentru cazul proceselor staționare și ergodice /6, 17, 40, 93/. Faptul că în numeroase aplicații, procesele stocastice care intervin nu verifică nici pe departe ipotezele de staționaritate și ergodicitate, a determinat preocupări în analiza de corelație a proceselor nestaționare /8, 12, 13, 36, 41, 107/. Se precizează că nu există o metodă unitară de măsurare corelativă a tuturor proceselor nestaționare. Procedeele de măsurare propuse se referă, în general, la o singură categorie (clasă) de procese nestaționare. Principalele clase de procese nestaționare se consideră a fi cele caracterizate prin: variația valorii medii, variația valorii medii pătratice sau modificarea simultană a valorii medii și a valorii medii pătratice /8/. Într-una dintre aceste clase se încadrează și tipul de procese nestaționare periodice /36, 51, 85, 87/ pentru care sînt valabile relații de tipul (3.8) și (3.11). Suprapusă cu clasele de nestaționaritate de mai sus apare categoria proceselor nestaționare cu parte staționară "separabilă" /55, 85/. Funcțiile de autocorelație ale proceselor de acest tip pot fi puse sub forma (v.rel.(3.63)):

$$R(t, \tau) = R_1(t) \cdot R_2(\tau) \quad (4.1)$$

unde (v.rel.(3.61)) :

$$t = (t_1 + t_2)/2; \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (4.2)$$

În (4.1),  $R_2(\tau)$  este autocorelația "părții staționare" a procesului iar  $R_1(t)$  este un factor de scară variabil (respectiv constant dacă procesul în cauză este pur staționar). Dacă  $R_1(t)$  este o funcție de timp nenegativă, procesul asociat se numește local staționar /8/. Conform clasificării propuse în § 3.1 numeroase regimuri tranzitorii se caracterizează prin procese asimptotic staționare, procese pentru care sînt valabile relații de tipul /32, 41, 55, 69, 107, 108/ :

$$\lim_{\substack{t_1, t_2 \rightarrow \infty \\ t_2 - t_1 = \text{finit}}} R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1). \quad (4.3)$$

Măsurarea funcțiilor de corelație nestaționare, în particular tranzitorii (conform § 3.1) presupune medierea pe un număr teoretic infinit de mare de realizări /40, 41, 91/. Construirea corelatoarelor pentru procese nestaționare bazate pe medierea unui ansamblu de realizări implică dificultăți din cauza necesității de a memora un volum mare de informații și din cauza volumului mare de calcule necesare /86/. Medierea statistică este puțin utilizabilă în practică și din cauză că numai în puține cazuri dispunem de un număr suficient de mare de realizări; cel mai adesea, experimentatorul are la îndemînă o singură realizare.

Pentru estimarea funcțiilor de corelație nestaționare prin mediere (temporală) asupra unei singure realizări, în /12/ se înmulțește produsul de corelație cu o funcție de ponderare care se determină în mod "optim" prin minimizarea unei erori. Metoda are dezavantajul că pentru determinarea funcției de ponderare trebuie cunoscută funcția de corelație pe care dorim să o măsurăm. Acest fapt explică în mare parte de ce această metodă a rămas la stadiul de "primă investigare". Același autori în /13/ deduc în condiții foarte restrictive durata optimă de mediere a unei realizări a procesului nestaționar pentru determinarea cu eroare minimă a funcției de autocorelație. Procedul este puțin semnificativ pentru practică.

O cale diferită propusă pentru estimarea funcțiilor de corelație nestaționare prin mediere asupra unei singure realizări este filtrarea liniară a produsului corelației conform relației:

$$R(\zeta, t) = \int_{-\infty}^t f(x)f(x-|\zeta|) \cdot r(t-x)dx \quad (4.4)$$

în care  $r(t)$  este funcția pondere a filtrului. Ideea de a utiliza filtrarea în scopul obținerii unor estimări stabile pentru funcții de corelație nestaționare este reluată și dezvoltată în lucrările /136, 137/ sub forma unei metode de măsurare convenabilă. Această metodă se prezintă succint în paragraful următor.

#### 4.2. Metoda Wierwille pentru măsurarea funcțiilor de corelație nestaționare

Din lucrările /136, 137/ rezultă că metoda Wierwille aplicată în varianta "off-line"<sup>\*)</sup> prezintă față de varianta "on-line"<sup>\*\*)</sup> avantaje practice importante:

- funcțiile de corelație pot fi determinate atât pentru  $\zeta > 0$  cât și pentru  $\zeta < 0$ ;
- nu se pun condiții de realizabilitate pentru filtrele din corelator;
- pentru analiza "off-line" sînt disponibile, mai multe date. Din aceste motive, în continuare se va considera doar varianta "off-line" a metodei.

Presupunem că dispunem de  $P$  perechi de realizări din procesele nestaționare  $X(t)$  și  $Y(t)$  :

$$\{x_n(t); y_n(t)\} \quad n = 1, 2, \dots, P. \quad (4.5)$$

Pe baza acestora se poate determina media aritmetică a produselor de corelație:

$$\theta_{xy}(t_w, \zeta_w) = \sum_{n=1}^P \frac{x_n(t_w) \cdot y_n(t_w - \zeta_w)}{P}. \quad (4.6)$$

Dacă  $P$  este suficient de mare (de exemplu,  $P > 1000$ ),  $\theta_{xy}(t_w, \zeta_w)$

<sup>\*)</sup> Termenii "on-line" și "off-line" sînt complementari și se utilizează, în general, pentru a desemna un echipament care se află sau nu se află sub controlul unei unități centrale. Sensul atribuit termenului "on-line" în lucrarea de față, ca și în /137/, este acela de prelucrare directă a semnalelor începînd chiar în timpul prelevării acestora. Dimpotrivă, termenul "off-line" presupune o prelucrare indirectă pe baza unei prealabile înregistrări a semnalelor.

poate fi acceptată ca o bună estimare a funcției de corelație adevărată:

$$R_{xy}(t_w, \tau_w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N x_n(t_w) \cdot y_n(t_w - \tau_w)}{N} = M \{x(t_w) \cdot y(t_w - \tau_w)\}. \quad (4.7)$$

Pentru  $P$  mic este necesară o "prelucrare" a mediei (4.6) pentru a obține o estimare a funcției de corelație (4.7). Cazul particular important pentru practică este  $P=1$  (calculul funcției de autocorelație corespunde unei perechi de realizări identice  $y(t)=x(t)$ ).

Conform metodei, prelucrarea constă în filtrarea mediei (4.6). Justificarea intuitivă pentru utilizarea filtrării este faptul că ea realizează o "netezire" a mediei (4.6), echivalentă cu efectul care, potrivit legii numerelor mari /91/ se realizează prin trecerea la limită în relația (4.7). Filtrarea reduce "rezoluția" funcției de corelație determinată, cu avantajul creșterii stabilității estimării, în condițiile utilizării a mai puține date statistice.

Funcția  $\Theta_{xy}(t_w, \tau_w)$  fiind de două variabile, filtrul utilizat trebuie să fie, în mod natural, bidimensional; filtrarea bidimensională nu este practică dacă se utilizează metode digitale de prelucrare dar ar fi adecvată unei prelucrări optice a informației /132/. "Optimizarea" corelatorului constă în alegerea unei funcții de ponderare  $h(\alpha, \tau)$  astfel încît funcția de corelație estimată:

$$R^e(t_w, \tau_w) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, \tau) \cdot \Theta(t_w - \alpha, \tau + \tau_w) d\tau d\alpha \quad (4.8)$$

să aproximeze cu o eroare cît mai mică funcția de corelație de "test",  $R^t(t_w, \tau_w)$ . Minimizarea erorii:

$$e(t_w, \tau_w) = R^t(t_w, \tau_w) - R^e(t_w, \tau_w) \quad (4.9)$$

conform relației:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^2(t_w, \tau_w) dt_w d\tau_w = \text{minim} \quad (4.10)$$

permite determinarea transformatei Laplace bidimensională  $H_0(p_w, q_w)$  a funcției pondere optimă  $h_0(t_w, \tau_w)$ . În general,  $H_0(p_w, q_w)$  nu poate fi factorizată în forma:

$$H_0(p_w, q_w) = H(p_w) \cdot L(q_w). \quad (4.11)$$

Factorizarea (4.11) este posibilă dacă în relațiile (4.8) la (4.10) se utilizează funcții test de forma:

$$R^t(t_w, \tau_w) = R_a(t_w) \cdot R_b(\tau_w); \quad (4.12)$$

$$\Theta^t(t_w, \tau_w) = \Theta_a(t_w) \cdot \Theta_b(\tau_w). \quad (4.13)$$

În acest caz, în locul filtrării bidimensionale după formula (4.8) se poate utiliza filtrarea unidimensională repetată, odată după variabila  $t_w$ , odată după  $\tau_w$ :

$$R^e(t_w, \tau_w) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot l(t) \cdot \Theta(t_w - \alpha, t + \tau_w) dt d\alpha. \quad (4.14)$$

Relația (4.14) poate fi implementată sub forma următoarei scheme bloc:

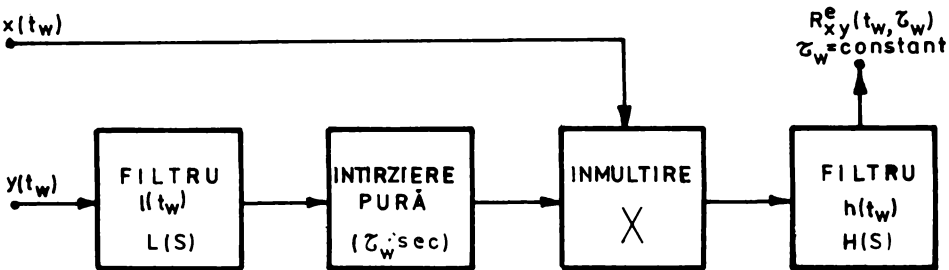


Fig.4.1. Schema bloc a corelatorului (pentru măsurarea profilelor  $\tau_w = \text{constant}$  ale funcției de corelație nestaționare).

Evident, în cazul în care dispunem de o singură pereche ( $P=1$ ) de realizări,

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xy}(t_w, \tau_w) &= x(t_w) \cdot y(t_w - \tau_w) \\ \text{sau} \\ \Theta_x(t_w, \tau_w) &= x(t_w) \cdot x(t_w - \tau_w) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

și blocul de sumare din fig.4.1 lipsește. Factorii din membrul drept al relațiilor (4.12) și (4.13) se obțin prin medierea unor "profile reprezentative" ale funcțiilor test:

$$R_a(t_w) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R^t(t_w, \tau_{wN}); \quad (4.16)$$

$$R_b(\tau_w) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R^t(t_{wm}, \tau_w); \quad (4.17)$$

$$\Theta_a(t_w) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R^t(t_w, \tau_{wN}); \quad (4.18)$$

$$\Theta_b(\tau_w) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \Theta^t(t_{wm}, \tau_w). \quad (4.19)$$

Dacă pentru  $t_w \rightarrow \infty$  sau  $\tau_w \rightarrow \infty$  funcțiile test  $R^t(t_w, \tau_w)$  și  $\Theta^t(t_w, \tau_w)$  tind spre zero, autorul indică înlocuirea mediei aritmetice a profilelor pentru diferiți  $t_{wm}$  respectiv pentru diferiți  $\tau_{wn}$  cu simpla însumare a acelor profile. Varianta continuă a relațiilor (4.16) la (4.19) presupune înlocuirea medierii prin sumare cu medierea prin integrare:

$$R_a(t_w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} R^t(t_w, \tau_w) d\tau_w = R^t(t_w, \tau_w) \Big|_{\tau_w}; \quad (4.16 \text{ bis})$$

$$R_b(\tau_w) = R^t(t_w, \tau_w) \Big|_{t_w}; \quad (4.17 \text{ bis})$$

$$\Theta_a(t_w) = \Theta^t(t_w, \tau_w) \Big|_{\tau_w}; \quad (4.18 \text{ bis})$$

$$\Theta_b(\tau_w) = \Theta^t(t_w, \tau_w) \Big|_{t_w}. \quad (4.19 \text{ bis})$$

Pentru implementarea practică a metodei se prezintă o "modificare" a teoriei în sensul că între funcțiile test din relațiile (4.12) și (4.13) se consideră că există următoarea legătură:

$$\Theta_a(t) \cdot \Theta_b(\tau_w) = [R_a(t_w) + Z_a(t_w)] [R_b(\tau_w) + Z_b(\tau_w)]. \quad (4.20)$$

$Z_a(t)$  și  $Z_b(t)$  reprezintă zgomotele "externe" ce afectează cei doi factori ai funcției de corelație de măsurat.

În această interpretare, operația de corelare constă în extragerea, după fiecare dimensiune, a semnalului dorit,  $R_a(t_w)$  și  $R_b(\tau_w)$  din zgomot.

Cu justificarea că timpul de calcul crește liniar cu ordinul filtrului, autorul recomandă utilizarea unor filtre de ordin scăzut și folosește practic numai filtre de ordinul unu. În scopul redării corecte a valorii medii, filtrele trebuie să aibă, la frecvența zero, atenuare unitară:

$$a_H(0) = a_L(0) = 1. \quad (4.21)$$

În legătură cu condițiile (4.21), lucrarea /137/ conține o inexactitate: autorul lucrării menționate formulează aceste condiții utilizând transformata Laplace bilaterală ceea ce are ca efect, în domeniul timp, înjumătățirea amplitudinii semnalelor de la intrarea filtrelor. Se impune deci precizarea că relațiile (4.21) se referă la transformatele Laplace unilaterale deoarece acestea corespund funcțiilor pondere ale filtrelor.

Cu aceste precizări, filtrele sînt de tipul trece-jos, pentru fiecare urmînd a se mai alege frecvența de tăiere. Alege-

rea judicioasă a acestui parametru realizează un compromis între o comportare tranzitorie bună și o bună netezire a zgomotului. Frecvențele de tăiere se aleg suficient de mari pentru ca  $h(\infty)$  - care filtrează după  $t_w$  - să poată reda variațiile cauzate de nestăționaritate iar  $l(\tau)$  să poată reda variațiile funcției de corelație după  $\tau_w$ . În cazul practic considerat, autorul determină frecvențele de tăiere prin analiza vizuală a realizării procesului nestăționar.

Corelatorul se verifică prin următoarele teste:

- T1 : calculul funcției de intercorelație a două semnale aproximativ staționare și aproximativ necorelate;
- T2 : calculul funcției de autocorelație pentru un semnal de tipul zgomotului alb;
- T3 : calculul funcției de intercorelație a semnalelor utilizate în testul T1, la care, în a doua jumătate a realizărilor s-a adunat câte un semnal de tip treaptă.

Rezultatele acestor teste sînt apreciate doar calitativ în sensul că atestază valabilitatea metodei.

Pentru evidențierea "periodicităților" din semnalul analizat, autorul utilizează transformarea Fourier (cosinus) a funcției de corelație nestăționare:

$$S(t, f) = 2 \int_0^{\infty} R^g(t, \tau) \cdot m(\tau) \cdot \cos 2\pi f\tau \, d\tau. \quad (4.22)$$

Transformarea se referă doar la semi-axa pozitivă ( $\tau > 0$ ) și cuprinde o fereastră de ponderare, aleasă pentru semnalul particular analizat,

$$m(\tau) = \exp(-4,9 \cdot \tau^2). \quad (4.23)$$

Avînd în vedere că metoda Wiernille este singura care a depășit faza de încercare teoretică, fiind utilizată la analiza unor semnale de vibrații /137/, ea reprezintă cea mai importantă metodă de corelație nestăționară aplicabilă unei singure (perechi de) realizări. Totuși, metoda prezintă unele neajunsuri atît sub aspect teoretic cît și al implementării practice. Aceste neajunsuri sînt arătate în continuare prin prisma dezvoltării metodei pentru analiza de corelație a proceselor tranzitorii.



#### 4.3. Dezvoltarea metodei pentru măsurarea funcțiilor de corelație tranzitorii

##### 4.3.1. Observații critice asupra metodei Wierwille

Metoda "off-line" de estimare a funcțiilor de corelație nestaționare se prezintă în două variante:

a) Procedeu bazat pe filtrarea bidimensională. În această variantă metoda nu este adecvată implementării pentru prelucrarea digitală. Filtrarea bidimensională are avantajul că permite descrierea teoretică, riguroasă a prelucrării adiționale.

b) Procedeu bazat pe filtrarea unidimensională repetată se dezvoltă ca o modalitate practică de implementare digitală a filtrării bidimensionale. Substituirea filtrării bidimensionale cu o filtrare unidimensională repetată este neafectată de erori doar în cazul că procesele admit factorizarea funcțiilor de test conform relațiilor (4.12) și (4.13).

Trebuie observat că între relațiile (4.1) și (4.12) există o diferență netă deși ambele exprimă factorizarea funcției de corelație nestaționare în raport cu cele două variabile. Într-adevăr, o comparare între relațiile (4.6) și (4.7) pe de o parte și produsul de corelație  $x(t_2) \cdot y(t_1)$  arată oă în cadrul metodei s-au folosit transformările de variabile:

$$t_w = t_2; \quad \tau_w = t_2 - t_1 \quad (4.24)$$

care diferă de transformările (4.2). Pentru varianta "on-line" a metodei relațiile (4.24) satisfac cerința neîndeplinită de transformările (4.2) ca produsul de corelație să depindă doar de valorile semnalelor la momente prezente și trecute:

$$t_2 = t_w; \quad t_1 = t_w - \tau_w; \quad (\tau_w \geq 0) \quad (4.25)$$

Această cerință nu apare în cadrul variantei "off-line"; totuși transformările (4.2) nu pot fi utilizate nici în varianta "off-line" a metodei deoarece ambele momente de timp din produsul de corelație depinde atât de  $t$  cât și de  $\tau$ , condiții în care integrala dublă din (4.14) nu poate fi echivalată cu două integrale repetate (deci filtrarea bidimensională nu poate fi înlocuită cu două filtrări unidimensionale). Se știe că funcțiile de autocorelație posedă așa numita proprietate hermitică /91/ a cărei semnificație în cazul proceselor reale este simetria în raport cu  $t_1$  și  $t_2$ , respectiv în raport cu  $\tau$ , dacă se utilizează transformă-

rile (4.2). Această proprietate facilitează factorizarea funcțiilor de autocorelație în planul variabilelor  $(t, \tau)$ . În general însă factorizarea nu este posibilă nici sub forma relației (4.1) și cu atât mai puțin sub forma relației (4.12). Se poate obține dar o aproximare bilineară a funcției de corelație sub forma:

$$R(t_w, \tau_w) \approx \sum_{i=1}^I R_{a_i}(t_w) \cdot R_{b_i}(\tau_w). \quad (4.26)$$

În lucrările /136, 137/ nu se ia în considerare și o astfel de aproximare. Dificultatea factorizării este ocolită teoretic cu ajutorul "profilurilor reprezentative" - conform relațiilor (4.16) la (4.19) respectiv (4.16 bis) la (4.19 bis) - iar practic prin estimarea frecvențelor de tăiere ale filtrelor corelatorului pe baza "inspctării" vizuale a semnalului de înregistrat. Concret, funcția de transfer este pentru ambele filtre de tipul:

$$F(S) = \frac{K^2}{K^2 - S^2} = \frac{1}{2} \frac{K}{K+S} + \frac{1}{2} \frac{K}{K-S}; \quad (4.27)$$

parametrul  $K_h$  al filtrului  $H(S)$  se alege  $K_h = 0,333$  rad/sec. ceea ce corespunde la aproximativ "5 secunde de netezire după  $t$ " sau altfel spus, răspunsul (exponențial) la semnal treaptă atinge după 5 sec. regimul permanent, cu o precizie de 80%. Parametrul  $K_l$  al filtrului  $L(S)$  se alege  $K_l = 100$  rad/sec. corespunzător unei benzi echivalente a semnalului de 25 Hz.

Se dovedește utilă calcularea spectrului funcției de corelație nestaționare. Spectrul definit prin relația (4.22) se calculează de-a lungul axei  $\tau$  (pentru  $t = \text{constant}$ ) și reprezintă deci un spectru "instantaneu" asemănător cu cel definit prin relația (3.70). Nu se justifică în nici un fel alegerea funcției de pondere (4.23) dar se poate constata ușor că în exemplul considerat de autori,  $\tau_{\max} = 0,8$  sec. iar funcția (4.23) prezintă la această întîrziere maximă o valoare mai mică de 5 din valoarea ei maximă  $m(0) = 1$ .

Calculul spectrului instantaneu evidențiază un alt dezavantaj al metodei în varianta prezentată în lucrările /137, 136/, deoarece din  $R(t, \tau)$  se calculează doar profile  $\tau = \text{const.}$  urmează că spectrul definit de (4.22) se poate estima doar printr-un număr redus de puncte, egal cu numărul profilelor  $\tau = \text{const.}$  determinate (41 în exemplul din lucrarea /137/). Chiar și în aceste condiții, determinarea lui  $S(t, f)$  pentru diferite valori ale lui

t presupune memorarea prealabilă a tuturor valorilor calculate ale lui  $R(t, \tau)$  fiind astfel necesar un volum mare de memorie și de calcul.

Observațiile precedente relevă următoarele direcții de dezvoltare a metodei:

- utilizarea unei transformări de variabile care să permită, ca o alternativă la transformările (4.24), calculul unui spectru "instantaneu" printr-un număr mai mare de puncte de reducere simultan a volumului de memorie necesar;

- punerea la punct a unei metode de factorizare a funcțiilor de corelație nestaționare și adaptarea structurii corelatorului la o aproximare biliniară de tipul (4.26);

- deoarece metoda prezentată se referă doar la analiza regimurilor nestaționare singulare, apare ca interesantă posibilitatea extinderii procedurii de măsurare la caracterizarea regimurilor nestaționare repetate; evident, repetarea regimurilor nestaționare (în particular, tranzitorii) permite creșterea raportului semnal/zgomot în rezultatul final al măsurării. Pentru claritate se subliniază că termenul "repetare" din fraza precedentă trebuie înțeles în sens statistic, nu determinist.

#### 4.3.2. Dezvoltarea metodei pentru măsurarea profilelor $t=\text{constant}$ ale funcțiilor de corelație nestaționare

Relațiile (4.24) utilizate în cadrul metodei Wierwille reprezintă transformări afine particulare. În cazul cel mai general, transformările afine care fac trecerea de la planul  $(t_1, t_2)$  la planul  $(t, \tau)$  se descriu prin relațiile /46/ :

$$\left. \begin{aligned} t &= at_1 + bt_2 + c; \\ \tau &= dt_1 + et_2 + f. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Din punct de vedere geometric transformările (4.28) au proprietatea de a converti dreptele (paralele) tot în drepte (paralele) fără a conserva însă, în general, distanțele; se conservă doar raportul a două segmente de pe aceeași dreaptă.

Se poate constata că (4.24) este cea mai simplă transformare afină care convertește dreptele  $t_2 = t_1 + k$  ( $k$  - parametru) în drepte  $\tau_w = k = \text{constant}$  ale planului  $(t_w, \tau_w)$ . Într-adevăr (4.24)

se obține din (4.28) pentru  $a=c=f=0$ ;  $b=e=1$ ;  $d=-1$ . Transformarea (4.24) convertește domeniul pătratic ABCD de definiție al funcției de corelație nestaționare  $R(t_1, t_2)$  în domeniul A'B'C'D' al funcției  $R(t_w, \tau_w)$  (fig.4.2 b,c).

Similar se poate vedea că transformările (4.2) se obțin din relațiile (4.28) pentru coeficienții particulari  $a=b=\frac{1}{2}$ ;  $c=f=0$ ;  $e=1$ ;  $d=-1$ . Transformările (4.2) convertesc dreptele  $t_2=t_1+k$  ( $k$  - parametru) în drepte  $\tau=k=\text{constant}$  iar dreptele  $t_2=-t_1+k$  în drepte  $t=k/2$ ; domeniul de definiție al funcției  $R(t, \tau)$  este rombul A"B"C"D" (fig.4.2.d).

Cea mai simplă transformare care convertește dreptele  $t_2=-t_1+k$  în drepte  $t=\text{constant}$  se obține din (4.28) pentru  $a=b=e=1$ ;  $c=f=0$  :

$$t_I = t_1 + t_2; \quad \tau_I = t_2 \quad (4.29)$$

Domeniul de definiție al funcției  $R(t_I, \tau_I)$  este paralelogramul A"B"C"D" din fig.4.2.d

O imagine intuitivă a funcțiilor de autocorelație în coordonatele  $(t_1, t_2)$ ;  $(t, \tau)$ ;  $(t_w, \tau_w)$ ,  $(t_I, \tau_I)$  se obține prin reprezentarea curbelor de nivel constant. Astfel, în figura 4.3 sînt trasate curbele de nivel constant, în diferite sisteme de coordonate, pentru autocorelația ce caracterizează răspunsul unui filtru RC-trece-jos la semnal treaptă /41, 58/ :

$$R_y(t_1, t_2) = [1 - \exp(-at_1) - \exp(-at_2) + \exp(-at_1 - at_2)]. \quad (4.30)$$

Se constată că simetriei în raport cu prima bisectoare a funcției  $R_x(t_1, t_2)$  îi corespunde simetria în raport cu axa absciselor ( $\tau=0$ ) a autocorelației  $R_x(t, \tau)$ . Această proprietate justifică utilizarea transformărilor (4.2) în analiza de corelație a proceselor "local staționare".

În planele transformărilor (4.24) și (4.29) funcțiile de autocorelație nestaționare nu mai au proprietăți de simetrie, dar au avantajul (valabil atât pentru auto- cât și pentru intercorelație) că unul din factorii produsului de corelație depinde doar de o variabilă. Consecința este că  $R(t_w, \tau_w)$  și  $R(t_I, \tau_I)$  pot fi exprimate cu ajutorul a două convoluții (filtrări) repetate. Într-adevăr, relația (4.14) poate fi scrisă astfel:

$$R^0(t_w, \tau_w) = \iint h(\alpha) \cdot \ell(\tau) \cdot \Theta(t_w - \alpha, \tau + \tau_w) d\tau d\alpha =$$

$$= \iint h(\alpha) \ell(\tau) \cdot x(t_w - \alpha) \cdot y(t_w - \alpha - \tau - \tau_w) d\tau d\alpha =$$

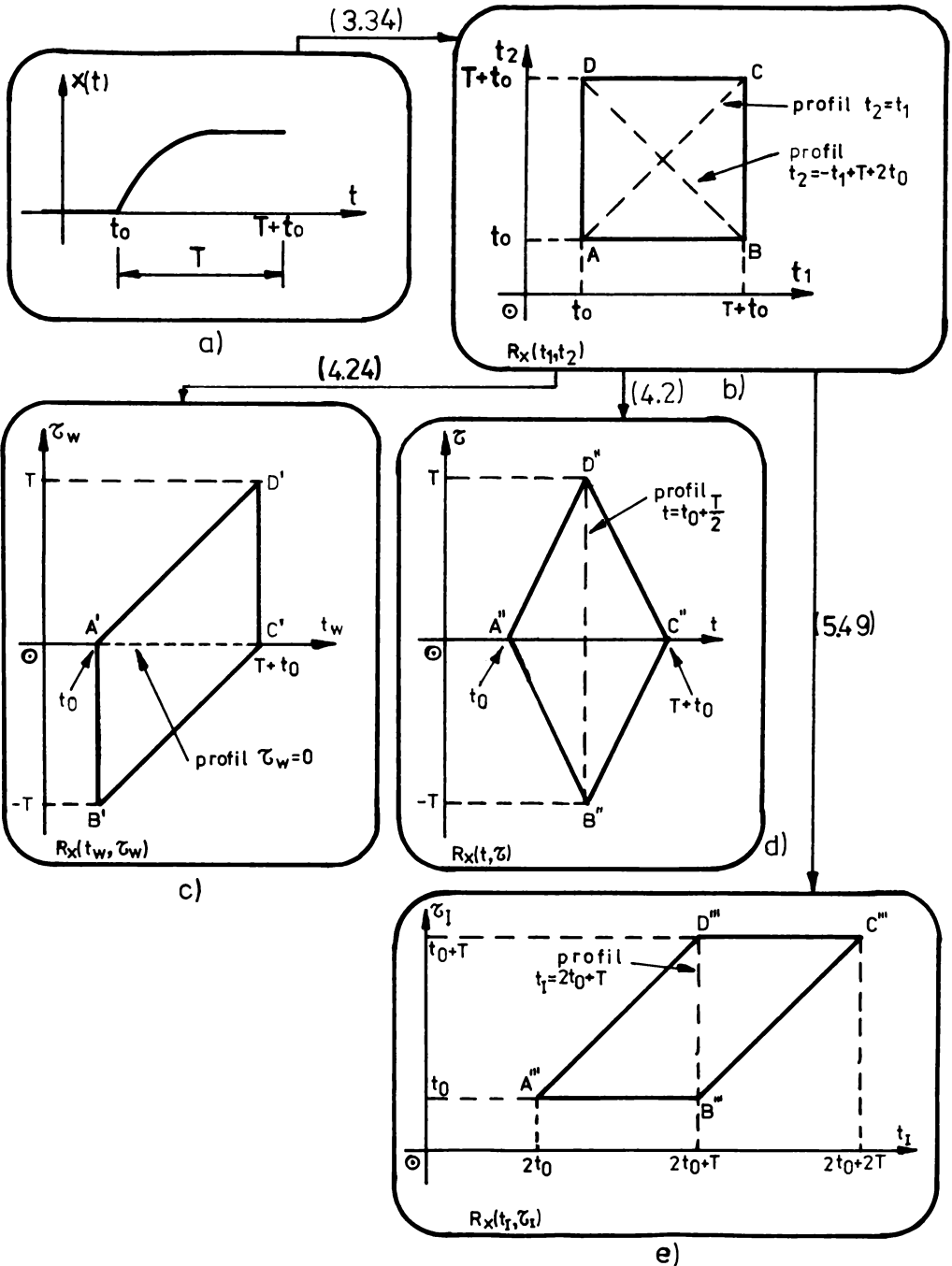


Fig.4.2. Explicativă privind domeniile de definiție ale funcțiilor de (auto) corelație nestacionare în planele  $(t_1, t_2)$ ,  $(t, z)$ ,  $(t_w, z_w)$  și  $(t_I, z_I)$ . Punctele  $(A', B', C', D')$ ,  $(A'', B'', C'', D'')$  respectiv  $(B''', C''', D''')$  corespund punctelor  $ABCD$  din planul  $(t_1, t_2)$

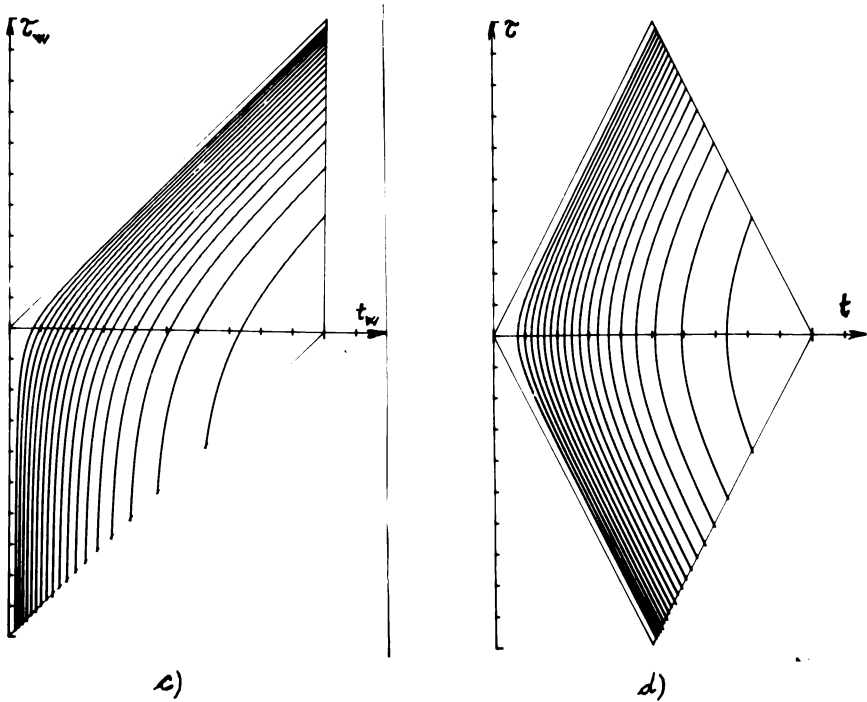
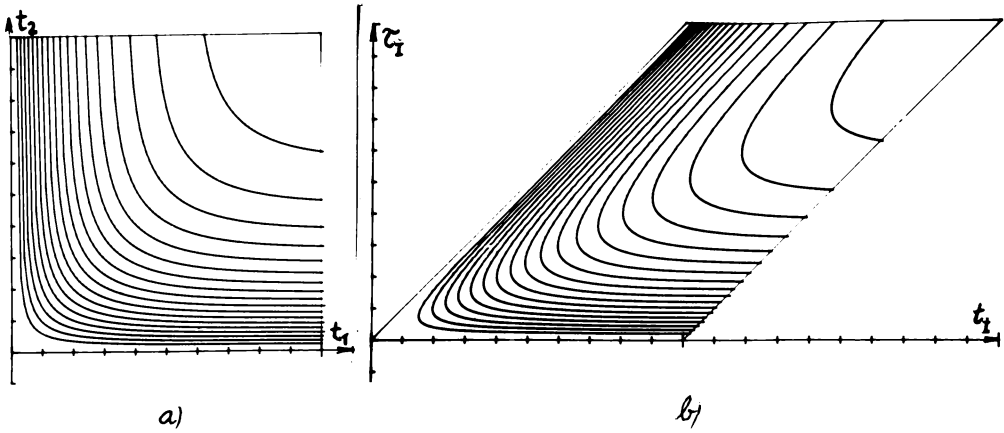


Fig.4.3. Curbele de nivel ale funcției de autocorelație (4.30) în reprezentările  $(t_1, t_2)$ -a;  $(t_1, \tau_1)$ -b;  $(t_w, \tau_w)$ -c;  $(t, \tau)$ -d.

$$\begin{aligned}
 &= \int h(\alpha) \cdot x(t_W - \alpha) d\alpha \cdot \int \ell(\tau) \cdot y(t_W - \alpha - \tau_W - \tau) d\tau = \\
 &= \left\{ x(t_W) \cdot \int \ell(\tau) \cdot y(t_W - \tau - \tau_W) dt_W \right\} * h(t_W) = \\
 &= \left\{ x(t_W) \cdot [y(t_W - \tau_W) * \ell(t_W)] \right\} * h(t_W). \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Cu observația că filtrarea liniară și întârzierea sînt operații interschimbabile, ultima formă a relației (4.31) corespunde schemei bloc din fig.4.1, adică permite măsurarea prin filtrare recursivă a profilelor  $\tau_W = \text{constant}$  ale funcției de corelație  $R(t_W, \tau_W)$ .

Transformările inverse relațiilor (4.29) sînt:

$$t_1 = t_I - \tau_I; \quad t_2 = \tau_I \quad (4.32)$$

iar produsul de corelație corespunzător are forma:

$$\mathcal{O}_{xy}(t_I, \tau_W) = x(\tau_I) \cdot y(t_I - \tau_I)$$

sau

$$\mathcal{O}_x(t_I, \tau_W) = x(\tau_I) \cdot x(t_I - \tau_I). \quad (4.33)$$

Acest produs poate fi filtrat unidimensional, recursiv pentru obținerea profilelor  $t_I = \text{constant}$  ale funcției  $R(t_I, \tau_I)$ . Într-adevăr, cu notațiile  $p = \tau_I$ ,  $x(t) = u(-t)$  și admitînd o filtrare bidimensională după o relație similară cu (4.14), se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 R^0(t_I, \tau_I) &= \iint g(\alpha) \cdot m(\tau) \cdot \mathcal{O}(t_I - \alpha, \tau + \tau_I) d\tau d\alpha = \\
 &= \iint g(\alpha) \cdot m(\tau) \cdot x(\tau + \tau_I) \cdot y(t_I - \alpha - \tau - \tau_I) d\tau d\alpha = \\
 &= \iint [g(\alpha) \cdot m(\tau) \cdot u(\tau - \tau_I)] \cdot y(t_I - \alpha - \tau - \tau_I) d\tau d\alpha = \\
 &= \int m(\tau) \cdot u(p - \tau) d\tau \cdot \int g(\alpha) \cdot y(p - \alpha - \tau - \tau_I) d\alpha = \\
 &= m(p) * \left\{ u(p) \cdot [g(p) * y(p + \tau_I)] \right\} = \\
 &= m(-\tau_I) * \left\{ x(\tau_I) [q(-\tau_I) * y(-\tau_I + \tau_I)] \right\}. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

Dacă se ține seama de relațiile:

$$f_1(t) * f_2(-t) = f_1(-t) * f_2(t);$$

$$f_1(-t) * f_2(-t) = f_1(t) * f_2(t),$$

Ultima formă a dezvoltării (4.34), conduce la:

$$R^0(t_I, \tau_I) = m(\tau_I) * \{x(-\tau_I) \cdot [g(\tau_I) * y(\tau_I - t_I)]\}. \quad (4.35)$$

Formulei de calcul (4.35) îi corespunde schema bloc din fig.4.4. Din punct de vedere structural singura deosebire față de corelatorul din fig.4.1 este prezența blocului de inversiune.

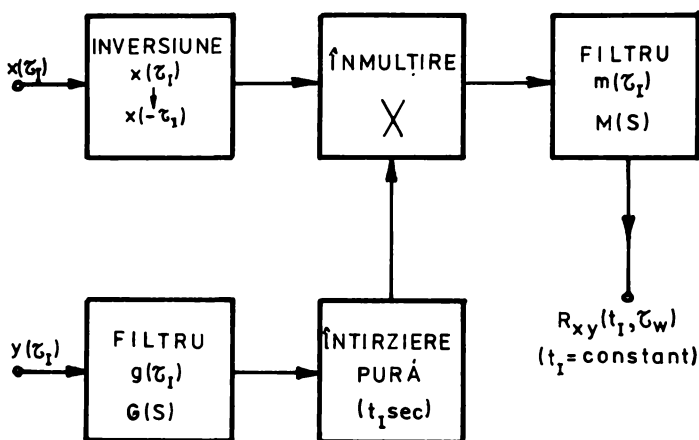


Fig.4.4. Schema bloc a corelatorului pentru măsurarea profilelor  $t_I = \text{constant}$  ale funcției de corelație netaționare.

Comparînd relațiile (4.24) cu relațiile (4.2) se constată că profilele  $\tau_w = \text{constant}$  măsurate cu corelatorul din fig.4.1 sînt tot una cu profilele  $\tau = \text{constant}$ . De asemenea, comparînd relațiile (4.29) cu transformările (4.2) rezultă că profilele  $t_I = \text{constant}$  măsurate cu corelatorul din fig.4.4 sînt tot una cu profilele  $t = \text{constant}$ . Aceste echivalențe sînt sugerate grafic în fig.4.2 c, d, e. Extinderea posibilităților metodei de măsurarea profilelor funcțiilor de corelație netaționare după două dimensiuni permite implicit calcularea unor "spectre instantanee" (transformatele Fourier ale profilelor  $t_I = \text{constant}$ ) respectiv ale unor "spectre tranzitorii" (transformatele Fourier ale profilelor  $\tau_w = \text{constant}$ ).



#### 4.3.3. Determinarea filtrelor corelatorului pentru măsurarea funcțiilor de corelație tranzitorii

Pentru redarea corectă a componentelor de curent continuu ale profilelor  $t_I = \text{constant}$  se impun și pentru filtrele  $m(\mathcal{Z}_I)$  și  $g(\mathcal{Z}_I)$  condiții similare cu relațiile (4.21) :

$$a_M(o) = a_G(o) = 1. \quad (4.36)$$

La alegerea filtrelor trebuie să se țină seama de datele apriorice despre proces. Dacă nu dispunem decât de o înregistrare (grafică) a semnalului de analizat, se impune o alegere intuitivă a frecvențelor de tăiere ale filtrelor presupuse de tipul trece-jos. Pentru acest caz s-ar putea dezvolta o variantă succesivă a metodei care să permită ajustarea parametrilor filtrelor în funcție de semnalul analizat.

În lucrare interesează situația când un sistem cu caracteristică de frecvență cunoscută (de exemplu de tipul trece-jos sau trece-bandă) este supus unei excitații de tipul zgomotului alb. În această situație funcția de autocorelație a regimului tranzitoriu de ieșire este determinată doar de parametrii sistemului și de valoarea medie pătratică a zgomotului de intrare, deci se cunoaște cel puțin ca expresie analitică, sub rezerva modificării unor parametri ai sistemului. Ca o alternativă avantajoasă față de metoda profilelor reprezentative propusă în /137/, apare factorizarea prin aproximarea bilineară - relația (4.26) - a funcțiilor de corelație. În legătură cu aproximarea bilineară (4.26) bazată pe criteriul celor mai mici pătrate se poate dovedi că :

$$R(t_W, \mathcal{Z}_W) = \lim_{I \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^I R_{aI}(t_W) \cdot R_{bI}(\mathcal{Z}_W).$$

Similar se poate descompune funcția de corelație  $R(t_I, \mathcal{Z}_I)$  :

$$R(t_I, \mathcal{Z}_I) \approx \sum_{i=1}^I R_{cI}(t_I) \cdot R_{dI}(\mathcal{Z}_I)$$

cu proprietatea că :

$$R(t_I, \mathcal{Z}_I) = \lim_{I \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^I R_{cI}(t_I) \cdot R_{dI}(\mathcal{Z}_I).$$

Formularea matematică a problemei factorizării este următoarea /45/. Se dă o funcție  $f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$  și se cer două funcții  $u^1 \in L_2(\Omega_1)$  și  $u^2 \in L_2(\Omega_2)$  astfel încât eroarea :

$$E(f; v) = \|f - v^1 v^2\| \quad (4.37)$$

în care  $v_1 \in L_2(\Omega_1)$ ;  $v_2 \in L_2(\Omega_2)$  să fie minimă pentru  $v_1 = u_1$  și  $v_2 = u_2$ . S-a dovedit că eroarea (4.37) este minimizată de soluțiile următorului sistem de ecuații integrale:

$$\int_{\Omega_1} f u^1 = K u^2; \quad \int_{\Omega_2} f u^2 = K u^1 \quad (4.38)$$

$$\text{în care } K = \|u^1 u^2\| \quad (4.39)$$

este cel mai mare număr pentru care sistemul (4.38) are soluție. Din punctul de vedere al metodei este avantajos ca în locul sumei de produse din relația (4.26) funcția de corelație să se aproximeze pentru un singur produs. Limitarea la un singur produs introduce, în general, erori care justifică utilizarea unei metode aproximative de rezolvare a sistemului (4.38). De exemplu, aproximând integralele din sistemul (4.38) cu ajutorul unor sume finite, se poate concepe un program de calcul numeric pentru determinarea funcțiilor  $u^1$  și  $u^2$ . Produsul :

$$f_e = u^1 u^2 \quad (4.40)$$

se numește element aproximat al funcției  $f$ .

Dezvoltarea biliniară a funcțiilor de corelație nestaționare sugerează următoarea interpretare: metoda de măsurare corelativă prezentată este riguros aplicabilă proceselor nestaționare cu parte staționară separabilă (inclusiv staționare). Aplicarea metodei de măsurare la alte tipuri de procese nestaționare, implică erori ce corespund neglijării termenilor pentru  $i \geq 2$  din dezvoltarea biliniară a funcțiilor de corelație.

Din figurile 4.2 și 4.3 este evident că pentru o înregistrare de durată  $T$  a procesului nestaționar, profilele  $\tilde{C}_{W=0}$  ( $\tilde{C}=0$ ) respectiv  $t_I=T$  ( $t=2T$ ) au lungime maximă și deci conțin maximum de informație. De aceea este firesc că dacă se măsoară un număr redus de profile, acestea să se aleagă în jurul profilelor de lungime maximă. În particular, se pot măsura numai profilele  $\tilde{C}_{W=0}$  și  $t_I=T$ . Frecvențele de tăiere ale filtrelor corelatorului se pot determina în acest caz din analiza profilelor corespunzătoare ale funcției de corelație analitică (presupusă cunoscută). Deoarece filtrele  $L(S)$  și  $M(S)$  acționează după  $\tilde{C}$ , ele se pot alege identice (deși  $\tilde{C}_I \neq \tilde{C}_W = \tilde{C}$ ); de asemenea, se pot alege identice filtrele  $H(S)$  și  $G(S)$  care acționează după  $t$  (deși  $t_W = t_I = 2t$ ):

$$L(S) = M(S); \quad H(S) = G(S). \quad (4.41)$$

Riguros,  $L(S)$  și  $H(S)$  se determină din  $R_b(\tilde{z}_w)$  și respectiv din  $R_a(t_w)$  care reprezintă factorii din dezvoltarea funcției de corelație  $R(t_w, \tilde{z}_w) = R_a(t_w) R_b(\tilde{z}_w)$ . Similar,  $G(S)$  și  $M(S)$  se pot determina din factorii  $R_c(t_I)$  și respectiv  $R_d(\tilde{z}_I)$  ai funcției de corelație  $R(t_I, \tilde{z}_I) = R_c(t_I) \cdot R_d(\tilde{z}_I)$ .

În încheiere trebuie subliniată importanța rutinei, a experienței directe în aplicarea acestei metode de corelație ne-staționară. Într-adevăr, pe baza rutinei se pot alege empiric parametrii filtrelor corelatorului chiar și numai după o analiză vizuală a semnalelor înregistrate /137/. Această alegere este ușurată de existența unor informații apriorice despre procesul generator al semnalelor. Chiar și dacă proiectarea filtrelor corelatorului se face teoretic, riguros, rutina este importantă în faza de apreciere a rezultatelor măsurărilor. În acest sens, este util să se repete măsurătorile asupra câtorva semnale obținute de la același proces generator. Dacă estimările ce rezultă sînt stabile dar prezintă totuși diferențe minore de la o realizare la alta putem aprecia ca și corecte rezultatele (corelatorul filtrează suficient pentru ca funcțiile măsurate să nu depindă de realizarea particulară considerată; filtrarea nu este însă prea puternică pentru a crește nepermis distorsiunile de netezire).

#### 4.3.4. Creșterea stabilității funcțiilor de corelație estimate prin măsurători asupra unor regimuri tranzitorii repetate

Deși metoda prezentată a fost concepută pentru măsurarea funcțiilor de corelație ce caracterizează regimurile tranzitorii singulare, ea poate fi adaptată și pentru măsurarea regimurilor tranzitorii repetate. Acest fapt este important deoarece numeroase fenomene tehnice prezintă o periodicitate a parametrilor statistici /109, 111, 133/ iar în unele cazuri se injectează din exterior impulsuri de zgomot cu scopul testării sistemului /26, 50, 54/. Pentru ilustrarea acestei modalități de testare, în ANEXA D (fotografiile D1-3, E1-4 și D1-5) se pot urmări formele de undă de la ieșirea unor filtre de tipul trece-jos sau trece-bandă, excitate cu impulsuri de zgomot.

Stimularea repetată a unui sistem oscilare și extragerea parametrilor de regim tranzitoriu prin explorarea unei secvențe de răspunsuri tranzitorii sînt indispensabile în situația că

sistemul se testează în timpul funcționării lui normale; în acest caz, semnalul de testare este parțial sau total înecat în zgomotul propriu al sistemului. Ne referim la cazul particular al măsurării profilelor  $\tau_w = \text{constant}$  (relații similare se pot scrie și pentru cazul măsurării profilelor  $\tau_I = \text{constant}$ , ale funcției de autocorelație tranzitorie (similar se tratează și cazul intercorelației). Notăm cu  $x(t)$  semnalul util (răspunsul sistemului la impulsurile de zgomot) și cu  $z(t)$  - zgomotul propriu al sistemului, suprapus aditiv peste  $x(t)$ . Presupunem că aplicăm  $N$  impulsuri succesive cu perioada  $T$  și notăm cu  $x_n(t) + z_n(t)$  răspunsul sistemului în cadrul celei de-a  $n$ -a perioade. În sensul relației (4.31) se poate scrie:

$$\begin{aligned} R_x^0(t_w, \tau_w) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \iint h(\alpha) \cdot \ell(t) \cdot \Theta_n(t_w - \alpha, t + \tau_w) dt d\alpha = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \iint h(\alpha) \ell(t) \cdot [x_n(t_w - \alpha) + z_n(t_w - \alpha)] \cdot [x_n(t_w - \alpha - t - \tau_w) + \\ &+ z_n(t_w - \alpha - t - \tau_w)] dt d\alpha = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{ x_n(t_w) \cdot [x_n(t_w - \tau_w) = (t_w)] \} = \\ &= h(t_w) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{ z_n(t_w) \cdot [x_n(t_w - \tau_w) = \ell(t_w)] \} = h(t_w) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{ x_n(t_w) [z_n(t_w - \tau_w) = \ell(t_w)] \} = h(t_w) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cdot \\ &\cdot \{ z_n(t_w) \cdot [z_n(t_w - \tau_w) = \ell(t_w)] \} = h(t_w). \end{aligned} \quad (4.42)$$

În membrul drept al relației (4.42) primul din cei patru termeni reprezintă estimarea profilelor  $\tau_w = \text{constant}$  dintr-un semnal neperturbat; ceilalți termeni reprezintă efectul zgomotului perturbator. Presupunem că zgomotul  $Z(t)$  este staționar, cu valoarea medie nulă,  $\overline{Z(t)} = 0$  și dispersie  $Z^2(t) = \sigma_Z^2$ . Efectul său asupra funcției de autocorelație estimată depinde și de filtrele  $\ell(t_w)$  respectiv  $h(t_w)$  utilizate. Efectul medierii (sumării) pe mai multe perioade se poate evidenția considerând filtrele de bandă suficient de largă astfel încât ele să nu modifice spectrul semnalelor transferate. Dacă mai considerăm, pentru simplitate că semnalul util  $x(t)$  este pur determinist (și periodic) ultimii trei termeni din membrul drept al relației (4.42) devin:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n(t_w) \cdot x_n(t_w - \tau_w) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t_w) \cdot z_n(t_w - \tau_w) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n(t_w) \cdot z_n(t_w - \tau_w) = x(t_w - \tau_w) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n(t_w) + \end{aligned}$$

$$+ x(t_W) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n(t_W - \tau_W) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n(t_W) \cdot Z_n(t_W - \tau_W). \quad (4.43)$$

Primii doi termeni din membrul drept al relației (4.43) au valoarea medie nulă astfel încât varianța lor poate fi considerată o măsură a efectului zgomotului perturbator asupra funcției de corelație estimate. În acest sens, este cunoscut că varianța unei sume de variabile aleatoare independente și de aceeași varianță este varianța comună împărțită la rangul sumei /78/; astfel, prin estimarea funcției de corelație pe  $N$  perioade, efectul perturbator al zgomotului se reduce de  $N$  ori. Referitor la ultimul termen din (4.43) este evident că valoarea medie a produsului  $Z_n(t_W) \cdot Z_n(t_W - \tau_W)$  nu este, în general, nulă. Pentru estimarea acestei valori medii cât și pentru estimarea varianței este necesară cunoașterea densității de probabilitate de ordinul doi a zgomotului  $Z(t)$ . În cazul particular pentru  $\tau_W=0$ , ultimul termen din (4.43) devine  $(\sum_{n=1}^N Z_n^2(t_W))/N$ . Este clar că acest termen avînd o valoare medie în general nenulă introduce o deplasare ("bias") a estimării, deplasare ce nu poate fi micșorată prin mediere. În schimb și varianța acestui termen este redusă de  $N$  ori prin mediere. Reducerea varianței termenilor adiționali din (4.42) este echivalentă cu creșterea stabilității funcției de corelație estimată față de zgomotul perturbator.

#### 4.4. Concluzii

Cu completările aduse în acest capitol metoda off-line de măsurare corelativă devine puternică în sensul că permite atât determinarea profilelor  $\tau=\text{constant}$ ,  $t=\text{constant}$  cât și creșterea raportului semnal/zgomot prin repetarea regimului tranzitoriu. O problemă deschisă este optimizarea filtrelor corelatorului în funcție de cunoștințele apriorice despre proces. În capitol se propune o metodă de determinare a filtrelor corelatorului pentru situația că, sub rezerva modificării unor parametri, funcția de corelație nestaționară este cunoscută ca egresie analitică. În mod riguros, metoda de măsurare dezvoltată este aplicabilă numai proceselor nestaționare cu partea staționară separabilă (inclusiv staționare).

## CAPITOLUL 5.

### EXTINDEREA ANALIZEI DE CORELAȚIE STATIONARĂ LA CARACTERIZAREA PROCESELOR TRANZITORII REPETITIVE

#### 5.1. Posibilități de utilizare a analizei de corelație staționară în cazul proceselor nestaționare

Pe lângă dezvoltarea unor metode specifice de analiză de corelație nestaționară au existat tendințe de a aplica analiza de corelație staționară și în cazul unor procese nestaționare. Se admite existența a trei tipuri fundamentale de nestaționaritate /8/: a) nestaționarității datorată valorii medii variabile; b) nestaționarității datorată valorii medii pătratice variabile și c) o combinație a primelor două variante. În privința variației valorii medii se consideră că procesul nestaționar are expresia /8/

$$X(t) = A(t) + Y(t) \quad (5.1)$$

în care  $A(t)$  este o funcție deterministă iar  $Y(t)$  este un proces staționar cu valoare medie nulă astfel încât valoarea medie a procesului nestaționar este:

$$M\{X(t)\} = M\{A(t) + Y(t)\} = A(t). \quad (5.2)$$

Dacă valoarea medie este lent variabilă - în sensul că variațiile lui  $A(t)$  sînt lente comparativ cu cele mai joase frecvențe cuprinse în  $Y(t)$  - efectul acestora poate fi eliminat prin operații de filtrare și procesul  $X(t)$  poate fi analizat cu un corelator pentru procese staționare. Pentru evidențierea variației valorii medii se pot utiliza teste de drum (run test) sau teste de derivă (trend test) /8, 40, 118/. Dacă se utilizează o metodă off-line de prelucrare, deriva mediei procesului poate fi eliminată de exemplu cu ajutorul unei analize de regresie /8, 118/.

Extinderea analizei de corelație staționară la cazurile (b și c) când apare o variație a valorii medii pătratice este mult mai dificilă. În /85/ se arată că o astfel de extindere este posibilă în cazul proceselor aleatoare periodic staționare. Trebuie remarcat că și sub aspect pur teoretic proceselor periodic staționare (ciclostacionare) li s-a acordat o atenție deosebită /39, 87/.

Metoda de măsurare propusă în /85/ se bazează pe faptul că la procesele periodic staționare funcția de autocorelație este periodică în raport cu  $t$  și deci poate fi dezvoltată în serie Fourier:

$$R_x(t, \tau) = M\{X(t)X(t+\tau)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_{\nu}(\tau) \cdot e^{j\nu\omega_0 t} \quad (5.3)$$

$$C_{\nu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{(T)} M\{X(t) \cdot X(t+\tau)\} \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} dt \quad (5.4)$$

în care  $\omega_0 = 2\pi/T$  iar notația  $\int_{(T)}$  semnifică integrarea de-a lungul unei perioade a procesului. Presupunând operațiile de integrare și mediere interschimbabile, formula (5.4) poate fi echivalată cu:

$$C_{\nu}(\tau) = M\left\{\frac{1}{T} \int_{(T)} X(t) \cdot X(t+\tau) \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} dt\right\} \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_n(\tau) \quad (5.5)$$

unde  $I_n(\tau)$  reprezintă integrala  $\frac{1}{T} \int_{(T)} (\dots)$ . Datorită caracterului periodic al procesului  $X(t)$ , medierea statistică pe  $N$  funcții aleatoare  $I_n(\tau)$  poate fi înlocuită cu o mediere pe  $N$  perioade ale semnalului  $x(t)$ , adică:

$$C_{\nu}(\tau) \cong \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \cdot x(t+\tau) \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} dt; \quad T_1 = NT. \quad (5.6)$$

Precizia măsurării este proporțională cu  $\sqrt{N}$  (după relația (5.5)) respectiv cu  $\sqrt{T_1}$  (după relația (5.6)).

Practic, implementarea relației (5.6) necesită două corelatoare pentru procese staționare: la intrarea primului, pentru măsurarea părții reale a lui  $C_{\nu}(\tau)$  semnalul se modulează în amplitudine cu  $\cos \nu\omega_0 t$  iar la cel de-al doilea, pentru măsurarea părții imaginare semnalul se modulează cu  $\sin \nu\omega_0 t$  (v.fig.5.1).

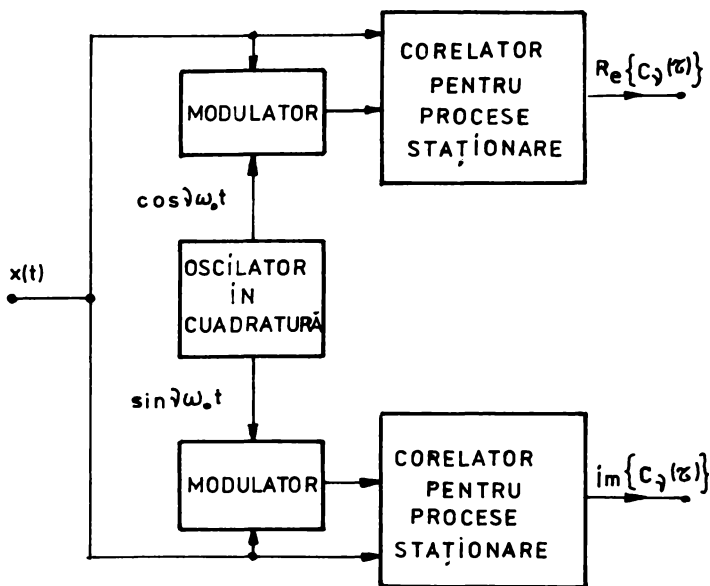


Fig.5.1. Schema bloc a corelatorului pentru măsurarea coeficienților Fourier a funcției de autocorelație.

Metoda menționată este o încercare de "adaptare" a analizei de corelație staționară la măsurarea proceselor nestaționare. Ea are însă câteva dezavantaje importante:

- Se aplică unei categorii foarte restrânse de procese nestaționare.

- Necesită două corelatoare pentru procese staționare și trei blocuri auxiliare pentru măsurarea coeficienților Fourier a funcției de autocorelație nestaționare; desigur există teoretic și posibilitatea determinării succesive (nu simultane) a părții reale și imaginare utilizând un singur corelator pentru procese staționare. Aceasta ar duce la mai mult decât dublarea timpului de măsurare și ridică problema sincronizării semnalelor modulate.

- Timpul de măsurare este lung chiar și dacă se utilizează două corelatoare în paralel, ca în fig.5.1. În acest sens trebuie avut în vedere că măsurătorile se repetă pentru diferiți coeficienți Fourier.

Cele două metode prezentate sînt încercări de utilizare a analizei de corelație staționară la caracterizarea proceselor nestaționare. În primul caz, problema nestaționară se reduce la



una staționară prin eliminarea derivatei valorii medii; în cazul al doilea, în condiții foarte restrictive, se măsoară, coeficienții Fourier ai funcției de corelație nestaționară. Dificultățile de implementare a procedeeilor de măsurare corelativă menționate reduc utilitatea practică a acestor metode.

Pornind de la precedentele constatări, în cadrul capitolului se propune o altă abordare experimentală a proceselor nestaționare periodice. Funcția de corelație nestaționară nu trebuie privită ca un scop în sine. Problema esențială este utilitatea inginerască a rezultatelor experimentale. Prin această prisma, o extensie naturală a analizei de corelație staționară constă în efectuarea unor măsurători cu corelatorul pentru procese staționare asupra unor procese nestaționare. Se pune doar problema semnificației practice a rezultatelor.

## 5.2. Descrierea analitică a proceselor stocastice de impulsuri

În sensul lucrărilor /68, 79/ realizarea cu numărul de ordine  $k$  a unui proces stocastic de impulsuri poate fi descrisă prin relația:

$$\gamma^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \cdot u_n\left(\frac{t-t_n^{(k)}}{T_n^{(k)}}\right) \quad (5.7)$$

în care  $u_n(\dots)$  este funcția ce descrie forma celui de-al  $n$ -lea impuls din realizarea a  $k$ -a iar  $T_n^{(k)}$  reprezintă lățimea celui de-al  $n$ -lea impuls. Intervalul pe care se definește funcția  $u_n(\dots)$  depinde de alegerea momentelor  $t_n$ . Pentru cazul că  $t_n$  marchează începutul celui de-al  $n$ -lea impuls,  $u_n(\dots)$  este definită pe intervalul  $(0, 1)$ ; dacă  $t_n$  marchează mijlocul impulsului, atunci  $u_n$  este definită pe intervalul  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

În cele ce urmează, se consideră că procesul stocastic  $X_T(t)$  se obține la trecerea procesului staționar  $X(t)$  printr-o poartă analogică comandată cu o undă dreptunghiulară de perioadă  $T$ . Dacă alegem momentul  $t=0$  astfel încît să corespundă cu trecerea porții în starea "conectat" (echivalentă cu un întrerupător închis), particularizînd relația (5.7) pentru o realizare oarecare, se poate scrie:

$$x_T^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{(k)} \cdot u\left(2 \frac{t-nT}{T}\right) \quad (5.8)$$

în care  $u(\dots)$  are valoare unitară cînd argumentul ia valori în intervalul  $(0, 1)$  și este nulă în rest. Dacă nu se asigură o sincronizare, este rezonabil să se considere că faza inițială a diferitelor realizări este uniform distribuită în raport cu momentul  $t=0$  front arbitrar. Consecința este că deși fiecare realizare în parte este constituită din impulsuri de zgomot, procesul  $X_T(t)$  este staționar /68/. Deoarece dorim să efectuăm măsurători asupra unei singure realizări a procesului, considerăm că fiecare realizare este de forma (5.8) și în consecință densitățile de probabilitate și mediile statistice sînt ciclostaționare conform relațiilor:

$$p(x;t) = p(x;t+T); \quad (5.9)$$

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, x_2; t_1+T, t_2+T); \quad (5.10)$$

$$M\{X_T(t)\} = a(t) = M\{X_T(t+T)\} = a(t+T); \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} M\{[X_T(t)-a(t)]^2\} &= \sigma^2(t) = M\{[X_T(t+T)-a(t+T)]^2\} = \\ &= \sigma^2(t+T); \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} M\{X_T(t_1) \cdot X_T(t_2)\} &= R(t_1, t_2) = M\{X_T(t_1+T) \cdot X_T(t_2+T)\} = \\ &= R(t_1+T, t_2+T); \end{aligned} \quad (5.13)$$

Funcția de autocorelație statistică a procesului de impulsuri  $X_T(t)$  este:

$$\begin{aligned} R_{X_T}(t_1, t_2) &= M\{X_T(t_1) \cdot X_T(t_2)\} = M\left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(t_1) X(t_2) \cdot \right. \\ &\cdot u\left(2 \frac{t_1-iT}{T}\right) \cdot u\left(2 \frac{t_2-jT}{T}\right) \Big\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} M\{X(t_1) X(t_2)\} \cdot \\ &\cdot u\left(2 \frac{t_1-iT}{T}\right) \cdot u\left(2 \frac{t_2-jT}{T}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_X(t_2-t_1) \cdot u\left(2 \frac{t_1-iT}{T}\right) \cdot \\ &\cdot u\left(2 \frac{t_2-jT}{T}\right); \end{aligned} \quad (5.14)$$

Domeniul de definiție al funcției  $R_X(t_1, t_2)$  este reprezentat de zonele hașurate în fig.5.2. Deoarece  $R_X(t_2-t_1)$  este simetrică în raport cu  $\tau=t_2-t_1$ , urmează că liniile simetrice în raport cu prima bisectoare sînt linii de nivel constant. Este clar că procesul  $X_T(t)$  este ciclostaționar în sensul relațiilor (5.9)

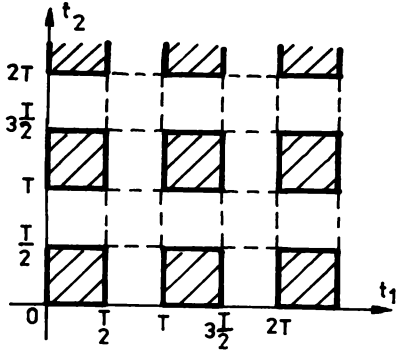


Fig. 5.2. Explicativă privind domeniul de definiție a funcției de corelație  $R_{X_T}(t_1, t_2)$ .

domeniul frecvență utilizând spectrul complex dublu (SCD) introdus în §. 3.5.1. În acest caz SCD are avantajul că integralele care intervin sînt convergente chiar dacă transformarea se referă la tot planul  $(t_1, t_2)$ . Conform relației (B.8) din ANEXA B,

$$S_{X_T}(p_1, p_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{X_T}(t_1, t_2) \cdot e^{-p_1 t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2. \quad (5.16)$$

În practică, mărimea de excitație este cel mai des un zgomot alb cu bandă limitată avînd funcția de autocorelație /33/ :

$$R_X(t_2 - t_1) = \sigma_X^2 \cdot e^{-\mu |t_2 - t_1|} \quad (5.17)$$

Pentru simplitatea calculului presupunem, prin trecere la limită, că mărimea de excitație este de tipul zgomotului alb și are funcția de autocorelație:

$$R_X(t_2 - t_1) = \sigma_X^2 \cdot \delta(t_2 - t_1). \quad (5.18)$$

În acest caz, SCD conform relației (5.16) se poate scrie sub forma (v. fig. 5.2) :

$$\begin{aligned} S_{X_T}(p_1, p_2) &= \sigma_X^2 \cdot \sum_{\substack{i, j = -\infty \\ i \neq j}}^{\infty} \int_{iT}^{iT+T/2} \int_{jT}^{jT+T/2} \delta(t_2 - t_1) \cdot \\ &\cdot e^{-p_1^* t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2 + \sigma_X^2 \cdot \sum_{\substack{k = -\infty \\ (i=j=k)}}^{\infty} \int_{kT}^{kT+T/2} \int_{kT}^{kT+T/2} \delta(t_2 - t_1) \cdot \\ &\cdot e^{-p_1^* t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

la (5.13). Expresia (5.14) corespunde unui caz particular de modulare a unui proces stocastic în amplitudine. Se știe că dacă  $X(t)$  este un proces staționar și  $f(t)$  este un semnal modulator oarecare, procesul  $X_T(t) = f(t) \cdot X(t)$  are funcția de autocorelație /79/ :

$$R_{X_T}(t_1, t_2) = f(t_1) f(t_2) \cdot$$

$$\cdot R_X(t_2 - t_1). \quad (5.15)$$

Procesul stocastic de impulsuri  $X_T(t)$  poate fi descris și în

Primul termen din membrul drept al relației (5.19) este nul deoarece domeniile de integrare nu conțin segmente din dreapta  $t_2=t_1$ ; pentru domeniul de variație a lui  $K$ , integralele din (5.19) sînt convergente doar pe dreptele imaginare ( $\operatorname{Re}\{p_1\} = \operatorname{Re}\{p_2\} = 0$ ). Se obține:

$$S_{X_T}(p_1, p_2) = S_{X_T}(\omega_1, \omega_2) = \sigma_X^2 \frac{\sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-jKT(\omega_2 - \omega_1)} e^{-j(KT + \frac{T}{2})(\omega_2 - \omega_1)}}{j(\omega_2 - \omega_1)} \quad (5.20)$$

expresie care după transformări revine la (v. ANEXA C):

$$S_{X_T}(\omega_1, \omega_2) = \pi \cdot \sigma_X^2 \cdot \delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (5.21)$$

Formula (5.21) pentru SCD denotă că prin modulare în amplitudine caracterul de zgomot alb al procesului  $X(t)$  se conservă. Acest fapt este important deoarece, puterea fiind distribuită într-un domeniu foarte larg de frecvențe, în cazul testării unui sistem cu impulsuri de zgomot se asigură perturbarea minimă a funcționării normale a sistemului. Observația aceasta justifică de ce nu se utilizează pentru testarea sistemelor în funcționare normală, impulsuri de semnale deterministe; puterea semnalului de testare ar fi concentrată în acest caz la anumite frecvențe ceea ce ar determina perturbarea puternică a funcționării sistemului.

### 5.3. Transferul liniar al proceselor de impulsuri

#### 5.3.1. Descrierea transferului liniar cu ajutorul funcției pondere a sistemului

Răspunsul  $y(t)$  al unui sistem cu funcția pondere  $h(t)$  la semnalul de intrare  $x(t)$  este:

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (5.22)$$

Considerînd, pentru simplitate,  $t_0=0$ , funcția de autocorelație a procesului de ieșire se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M \left\{ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(v_1) \cdot h(v_2) \cdot x(t_1 - v_1) x(t_2 - v_2) dv_1 dv_2 \right\} = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(v_1) h(v_2) \cdot R_x(t_1 - v_1, t_2 - v_2) dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

În cazul că la intrarea sistemului acționează procesul de impulsuri  $X_T(t)$ , cu observația că în (5.14):

$$R_x(t_2 - t_1) \cdot u\left(2 \frac{t_1 - iT}{T}\right) \cdot u\left(2 \frac{t_2 - jT}{T}\right) = R_{1j}(t_1, t_2)$$

reprezintă autocorelația impulsurilor cu numerele de ordine  $i$  și  $j$ , relația (5.23) devine:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(v_1)h(v_2) \cdot R_{1j}(t_1 - v_1, t_2 - v_2) dv_1 dv_2. \quad (5.24)$$

Valoarea medie a procesului de ieșire rezultă direct prin medierea statistică a răspunsurilor sistemului la realizările procesului de intrare, conform relației (5.22) :

$$m_y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot m_x(t - \tau) d\tau. \quad (5.25)$$

Dacă procesul de intrare are realizările exprimate prin (5.8), valoarea medie conform (5.25) devine:

$$m_y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t h(\tau) \cdot m_x(t - \tau) \cdot u\left(2 \frac{t - \tau - nT}{T}\right) d\tau. \quad (5.26)$$

Se observă că în relația (5.22) momentul inițial poate fi oarecare, inclusiv  $t_0 = -\infty$ . O altă remarcă este că relația (5.23) poate fi scrisă condensat sub forma /91/ :

$$R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2). \quad (5.27)$$

Prin generalizare, pentru cazul unui proces de impulsuri care acționează la intrarea sistemului cu funcția pondere  $h(t)$ , relația (5.24) capătă forma condensată:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_i \sum_j R_{1j}(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2). \quad (5.28)$$

Pentru calculul funcției de autocorelație a procesului de ieșire este preferabilă descompunerea relațiilor (5.27) și (5.28) în două etape de calcul:

$$\begin{aligned} R_{yx}(t_1, t_2) &= R_x(t_1, t_2) * h(t_1); \\ R_y(t_1, t_2) &= R_{yx}(t_1, t_2) * h(t_2). \end{aligned} \quad (5.27 \text{ bis})$$

În prima etapă, se obține  $R_{yx}(t_1, t_2)$  dacă la intrarea sistemului cu funcția pondere  $h(t_1)$  acționează funcția de autocorelație a procesului de intrare, considerată sub forma unor profile  $t_2 = \text{const.}$  În a doua etapă de calcul,  $R_{yx}(t_1, t_2)$  considerată sub forma unor

profile  $t_1 = \text{const.}$  acționează la intrarea sistemului cu funcția pondere  $h(t_2)$ .

5.3.2. Descrierea transferului liniar al proceselor de impulsuri cu ajutorul ecuațiilor pentru realizări particulare (ERP)

Prin analogie cu cazul determinist, următoarele trei tipuri de procese prezintă interes deosebit ca mărimi de excitație în studiul regimurilor tranzitorii aleatoare:

- treaptă de zgomot:

$$X(t) = \check{f}(t) \cdot N(t) \quad (5.29)$$

în care  $\check{f}(t)$  reprezintă funcția treaptă unitară;

- impuls de zgomot:

$$X(t) = u\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot N(t) \quad (5.30)$$

în care  $u\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \check{f}(t_0)$ .  $\check{f}(-t_0 - T)$  este funcția impuls unitar;

- secvență de impulsuri de zgomot (proces de impulsuri) descris, în caz particular, prin relația următoare:

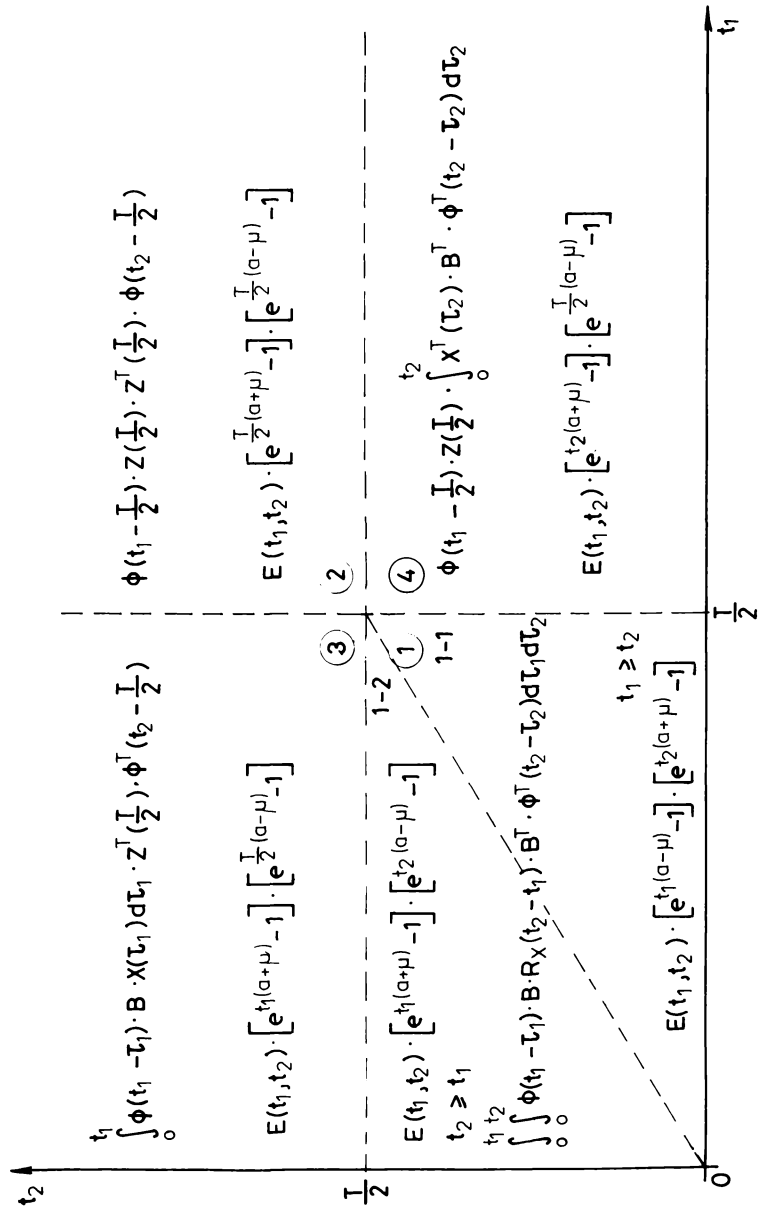
$$X(t) = N(t) \cdot \sum_1 u\left(2 \frac{t-iT}{T}\right). \quad (5.31)$$

În relațiile (5.29), (5.30) și (5.31),  $N(t)$  reprezintă un proces aleator staționar de tipul zgomotului alb.

Dacă se ține seama de expresia (2.4) corespunzătoare unei realizări particulare a stării în regim tranzitoriu, se pot deduce, pe domenii, expresiile funcției de autocorelație la ieșirea sistemului pentru fiecare din cele trei tipuri de procese de excitație considerate.

Presupunând, pentru simplitate, că sistemul este un filtru trece-jos ( $A=-a$ ;  $B=a/RC$ ) și că procesul de intrare este de tipul zgomotului alb cu banda limitată avînd autocorelația (3.77), funcția de autocorelație a procesului tranzitoriu provocat de o treaptă de zgomot are expresia (3.79). Trebuie remarcat că dacă momentul aplicării treptei de zgomot se consideră  $t_0=0$ , autocorelația (3.79) este definită pe domeniul  $t_1 > 0$ ;  $t_2 \geq 0$ . Calculul efectiv se face doar pentru unul din subdomeniile  $t_1 \geq t_2 \geq 0$  respectiv  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ ; pentru celălalt subdomeniu funcția de autocorelație se obține inversînd  $t_1$  cu  $t_2$ , în baza proprietății de simetrie. Este uzuală folosirea expresiei  $|t_1 - t_2|$  pentru scrierea

TABELUL 5.1. Funcția de autocorelație a stării,  $R_Z(t_1, t_2) = M\{Z(t_1) \cdot Z^T(t_2)\}$ , pentru cazul aplicării unui impuls singular de zgomot, de durată  $T/2$ , la intrarea sistemului. În expresiile particulare (corespunzătoare unui filtru trece-zos) s-a utilizat notația  $E(t_1, t_2) = (V_X^2 \cdot a^2 \cdot e^{at_1 - at_2}) / (a^2 - \mu^2)$ . Funcția  $R_Z(t_1, t_2)$  este simetrică în raport cu prima bisectoare (marcată punctat) și are, în domeniul 1 expresii diferite pe cele două subdomenii (1-1 respectiv 1-2).



**TABELUL 5.2.** Expresile funcției de autocorelație a procesului nestaționar periodic de la ieșirea unui sistem linear testat cu impulsuri de zgomot. Funcția de autocorelație nestaționară este periodică după ambele axe:  $R_Z(t_1 + nT, t_2 + nT) = R_Z(t_1, t_2)$ .

$e^{At_1} \left\{ \sigma_Z^2(0) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-At_1} \cdot B \cdot R_X(\tau_1, \tau_2) \cdot B^T \cdot \right.$ $\left. \cdot [e^{-A\tau_2}]^T d\tau_1 d\tau_2 \right\} \cdot [e^{At_2}]^T$	$e^{At_1} \left\{ \sigma_Z^2(0) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-At_1} \cdot B \cdot R_X(\tau_1, \tau_2) \cdot B^T \cdot \right.$ $\left. \cdot [e^{-A\tau_2}]^T d\tau_1 d\tau_2 \right\} \cdot [e^{At_2}]^T$
③	②
$e^{At_1} \left\{ \sigma_Z^2(0) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-At_1} \cdot B \cdot R_X(\tau_1, \tau_2) \cdot B^T \cdot \right.$ $\left. \cdot [e^{-A\tau_2}]^T d\tau_1 d\tau_2 \right\} \cdot [e^{At_2}]^T$	$e^{At_1} \left\{ \sigma_Z^2(0) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{At_1} \cdot B \cdot R_X(\tau_1, \tau_2) \cdot B^T \cdot \right.$ $\left. \cdot [e^{-A\tau_2}]^T d\tau_1 d\tau_2 \right\} \cdot [e^{At_2}]^T$
①	④



unei formule unice a funcției de autocorelație nestaționară pentru întreg domeniul  $t_1 \geq 0$ ;  $t_2 \geq 0$ .

Pentru cazul că mărimea de excitație este un impuls de zgomot respectiv un proces stocastic de impulsuri, expresiile funcțiilor de autocorelație nestaționare sînt date, pe domenii, în tabelele 5.1 și respectiv 5.2. Expresiile particulare corespund unui sistem de tipul filtru trece-jos cu mărimea de excitație avînd funcția de autocorelație (5.17).

Referitor la valoarea medie, ținînd seama de soluția generală de regim tranzitoriu (2.4) în care  $\Phi(t) = \exp(At)$ , se poate scrie:

$$Z(T) = e^{A \frac{T}{2}} \cdot Z\left(\frac{T}{2}\right) = e^{AT} \left\{ Z(0) + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-A\tau} \cdot B \cdot X(\tau) d\tau \right\}$$

și deci:

$$m_Z(T) = e^{AT} \left\{ m_Z(0) + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-A\tau} \cdot B \cdot m_X(\tau) d\tau \right\} = m_Z(0). \quad (5.32)$$

egalitățile (5.32) reprezintă condiții de continuitate a valorii medii în momentele  $t_n = nT$  ( $n$  - întreg). Particularizînd expresia (5.32) pentru cazul important că media statistică a mărimii de excitație este constantă  $m_X(t) = m_X$  iar sistemul este un filtru trece jos avînd  $A = -a$ ;  $B = a$  rezultă

$$m_Z(T) = m_X \frac{e^{-a + \frac{T}{2}} \left[ 1 - e^{-a \frac{T}{2}} \right]}{1 - e^{-aT}} = m_Z(0). \quad (5.33)$$

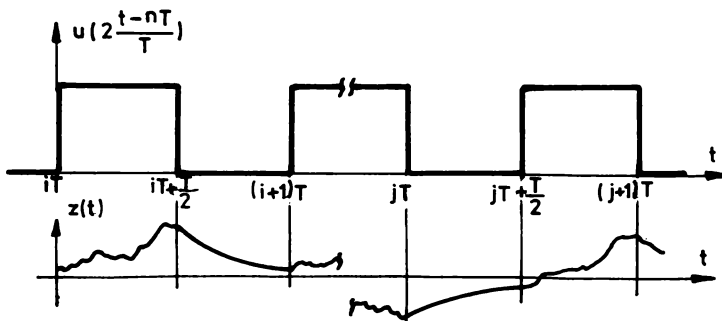


Fig.5.3. Explicativă privind semnalul rectangular modulator și evoluția mărimii de stare  $Z(t)$ .

Denumirea de relații de continuitate pentru (5.32) este justificată de faptul că  $m_Z(T)$  s-a determinat pe baza evoluției stării în intervalul  $(0, T)$  iar  $m_Z(0)$  reprezintă valoarea inițială a valorii medii în cadrul unei perioade. În fond, relația (5.32) exprimă faptul că:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_Z(nT - \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_Z(nT + \Delta t). \quad (5.32 \text{ bis})$$

Similar se poate deduce o relație de periodicitate și continuitate a variației. Ținând seama de independența dintre:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot X(\tau) d\tau \text{ și } Z^T(0)$$

se poate scrie:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2\left(\frac{T}{2}\right) &= M\left\{Z\left(\frac{T}{2}\right) \cdot Z^T\left(\frac{T}{2}\right)\right\} = e^{A \frac{T}{2}} \cdot \sigma_Z^2(0) \cdot \left(e^{A \frac{T}{2}}\right)^T + \\ &+ \int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{A\left(\frac{T}{2}-\tau\right)} \cdot B \cdot \sigma_X^2(\tau) \cdot B^T \cdot \left[e^{A\left(\frac{T}{2}-\tau\right)}\right]^T d\tau. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Cu acest rezultat intermediar, relația de continuitate a variației este:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2(T) &= M\left\{Z(T) \cdot Z^T(T)\right\} = e^{A \frac{T}{2}} \cdot \sigma_Z^2\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \left[e^{A\left(\frac{T}{2}\right)}\right]^T = \\ &= e^{AT} \cdot \sigma_Z^2(0) \cdot \left(e^{AT}\right)^T + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{A(T-\tau_1)} \cdot B \cdot R_X(\tau_1, \tau_2) \cdot B^T \cdot \\ &\cdot \left[e^{A(T-\tau_2)}\right]^T d\tau_1 d\tau_2 = \sigma_Z^2(0). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Relația (5.35) exprimă continuitatea varianței la momentele  $t_n = nT$ , ( $n$  - întreg). Pentru cazul particular că funcția de autocorelație a mărimii de excitație are expresia (5.17) iar sistemul este un filtru trece-jos ( $A = -a$ ,  $B = a$ ) rezultă

$$\sigma_Z^2(T) = \sigma_X^2 \frac{K(a, \mu, T)}{1 - e^{-2aT}} = \sigma_Z^2(0) \quad (5.36)$$

în care:

$$K(a, \mu, T) = \frac{2a^2 \cdot e^{-2aT}}{a + \mu} \left[ \frac{1}{2a} (e^{aT} - 1) + \frac{1}{a - \mu} \left(1 - e^{-\frac{T(a-\mu)}{2}}\right) \right].$$

5.3.3. Descrierea transferului liniar al proceselor de impulsuri cu ajutorul ecuațiilor de evoluție a densității de probabilitate (BDP)

Ecuația (2.21) poate fi utilizată pentru caracterizarea transferului liniar atunci când sistemul este descris prin ecuațiile de stare (2.1), (2.9). Pentru simplitate considerăm că în (2.9)  $D=0$  și că procesul de ieșire este o mărime scalară. În acest caz relațiile (2.1) și (2.9) se pot combina într-o singură ecuație:

$$y(t) = C.A.Z(t) + C.B.X(t). \quad (5.37)$$

Pentru procesul de ieșire  $y(t)$  se pot calcula coeficienții de intensitate conform relației de definiție (2.20). Astfel, pentru coeficientul de tendință se obține expresia:

$$K_1(y, t) = C.A.Z(t) + C.B.M\{X(t)\}$$

iar în cazul că mărimea de excitație are valoare medie nulă, rezultă:

$$K_1(y, t) = C.A.Z(t). \quad (5.38)$$

Pe baza definiției (2.20) se poate deduce și coeficientul de difuzie

$$\begin{aligned} K_2(y, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M \left\{ \left[ \int_t^{t+\Delta t} y(u) du \right]^2 \middle| y(t) \right\}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M \left\{ \int_t^{t+\Delta t} [CAZ(u) + CBX(u)] du \cdot \int_t^{t+\Delta t} [Z^T(v)A^T C^T + X^T(v)B^T C^T] dv \right\}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_t^{t+\Delta t} C.B.R_x(u, v).B^T.C^T du dv}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

În (5.39),  $R_x(u, v)$  reprezintă matricea de corelație a procesului de excitație  $X(t)$ . Dacă procesul  $X(t)$  are mai multe componente, toate de tipul zgomotului alb avînd toate aceleași densitate spectrală de putere  $2D=N_0/2$ , se poate scrie:

$$R_x(u, v) = M\{X(u).X^T(v)\} = \|\| r_{X_1 X_j}(u, v) \|\|$$

în care:

$$r_{X_i X_j}(u, v) = \begin{cases} 2D \delta(u-v) & \text{pentru } i=j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases} \quad (5.40)$$

Cu ajutorul matricei unitate I, se poate introduce matricea diagonală  $D=D \cdot I$  astfel încît, coeficientul de difuzie devine:

$$K_2(y, t) = 2 C \cdot B \cdot D \cdot B^T \cdot C^T. \quad (5.41)$$

Semnificația coeficienților de tendință și de difuzie în descrierea evoluției stării este sugerată de fig.5.4.

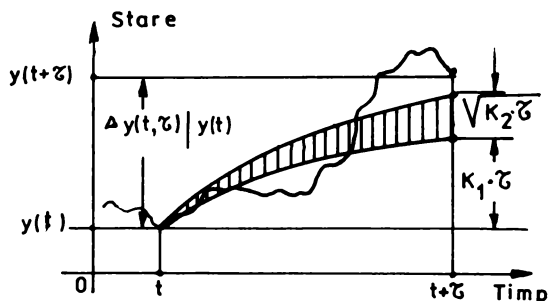


Fig.5.4. Explicativă privind semnificația coeficienților de intensitate.

Din punct de vedere teoretic este avantajos să se considere că mărimea de excitație  $X(t)$  este de tipul zgomotului alb; se impune o adaptare a relațiilor prezentate mai sus pentru situația practică în care mărimea de intrare este "autocorelată". Astfel,

se poate dovedi că dacă la intrarea unui sistem caracterizat prin constanta de timp  $T_S$  (corespunzătoare frecvenței de tăiere) se aplică un proces  $X(t)$  caracterizat prin constanta de timp  $T_X$ , atunci pentru intervalele de timp  $\Delta t \geq \Delta$  în care  $T_S \gg \Delta \gg T_X$ , procesul de ieșire este de tip Markov și deci pentru descrierea lui poate fi utilizată ecuația (2.21). Limitarea inferioară a intervalului  $\Delta$  provine din faptul că datorită autocorelării mărimii de excitație, în relația de definiție a coeficienților de intensitate (2.20) nu se mai poate trece la limită ci se utilizează un interval finit  $\Delta t = \Delta$ . Limitarea superioară a lui  $\Delta$  este utilizată în deducerea aproximativă a coeficienților de tendință și de difuzie. În condițiile acestor limitări pentru intervalul  $\Delta$  se dovedește că expresiile (5.38) și (5.41) pentru coeficienții de intensitate rămîn valabile cu următoarea "corecție": scalarul  $D$  în (5.40) este dat de relația:

$$D = \int_0^{\infty} M \{x_i x_j\} d\tau = \int_0^{\infty} r_{ij}(\tau) d\tau. \quad (5.42)$$

Pentru aplicații este important cazul când mărimea de intrare este *scalară* și are funcția de autocorelație (5.17). În această situație rezultă:

$$T_X = 1/\mu; \quad D = \int_0^{\infty} \sigma_X^2 \cdot e^{-\mu\tau} d\tau \approx \sigma_X^2/\mu. \quad (5.43)$$

Din punct de vedere analitic este preferabil să se considere cazul ideal în care:

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 \cdot \delta(\tau). \quad (5.44)$$

Spre exemplu, în cazul unui filtru trece-jos ( $A=-a$ ,  $B=a$ ,  $C=1$ ) la intrarea cărui acționează un proces cu valoare medie nulă și funcție de autocorelație (5.44), conform (5.38) și (5.41) rezultă:

$$K_1(y, t) = -a Z(t) = -a y(t); \quad (5.45)$$

$$K_2(y, t) = a^2 \cdot \sigma_X^2. \quad (5.46)$$

Pentru aceste valori ale coeficienților, ecuația de difuzie (2.21) devine:

$$\frac{\partial f_y(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot f_y) + \frac{a^2 \sigma_X^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_y(y, t)}{\partial y^2}. \quad (5.47)$$

Se cunosc mai multe metode de rezolvare a acestei ecuații /122/. De exemplu, utilizând metoda funcției caracteristice,  $G_y(\omega, t) = M\{\exp(j\omega y)\} = G$ , ecuația (5.47) poate fi redusă la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -a \omega \frac{\partial G}{\partial \omega} - \frac{a^2 \sigma_X^2}{2} \omega^2 G. \quad (5.48)$$

Condiției inițiale a densității de probabilitate:

$$f_y(y, 0) = \delta(y - y_0) \quad (5.49)$$

ii corespunde condiția inițială:

$$G(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y, 0) \cdot \exp(j\omega y) dy = \exp(j\omega y_0) \quad (5.50)$$

a funcției caracteristice. Astfel, pentru (5.48) se obține soluția:

$$G(\omega, t) = \exp(jM_y \omega - \sigma_y^2 \omega^2 / 2) \quad (5.51)$$

în care  $M_y = y_0 \cdot \exp(-at)$  și  $\sigma_y^2 = a \sigma_X^2 \cdot \frac{1}{\mu} (1 - e^{-2at})$  reprezintă valoarea medie respectiv varianța densității de probabilitate. Prin trans-

formarea Fourier inversă a funcției caracteristice (5.51) se obține densitatea de probabilitate tranzitorie:

$$f_Y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \tau_X^2 (1 - \exp(-2at))}} \cdot \exp \left\{ - \frac{(y - y_0 e^{-at})^2}{a \tau_X^2 (1 - \exp(-2at))} \right\}. \quad (5.52)$$

În regim permanent (pentru  $t \rightarrow \infty$ ), densitatea de probabilitate devine:

$$f_Y^P(y) = \frac{1}{\tau_X \sqrt{\pi a}} \cdot \exp \left\{ -y^2 / a \tau_X^2 \right\}. \quad (5.53)$$

Pentru descrierea răspunsului sistemului la impulsuri repetate de zgomot, este necesar să considerăm în locul condiției inițiale (5.49), densitatea de probabilitate gaussiană:

$$f_Y(y, 0) = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[ -y^2 / 2 \tau_0^2 \right]. \quad (5.54)$$

Densitatea de probabilitate tranzitorie se obține în acest caz înmulțind (5.54) cu (5.52) și integrând în raport cu  $y_0$ :

$$f_{Y1}(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[ \frac{a \tau_X^2}{2} (1 - e^{-2at}) + \tau_0^2 e^{-2at} \right]}} \cdot \exp \left\{ - \frac{y^2}{2 \left[ \frac{a \tau_X^2}{2} (1 - e^{-2at}) + \tau_0^2 e^{-2at} \right]} \right\}. \quad (5.55)$$

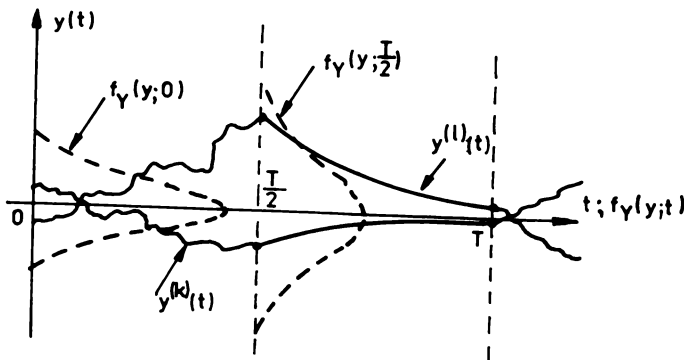


Fig.5.5. Evoluția realizărilor particulare și a densității de probabilitate la ieșirea unui filtru trece jos testat cu impulsuri de zgomot.

Evoluția densității de probabilitate în regim permanent nestaționar, la ieșirea unui filtru trece-jos, se prezintă în fig.5.5. În intervalul  $t \in [0, T/2]$ , expresia densității de probabilitate nestaționare este dată de relația (5.55). Acest interval de timp corespunde cu durata pe care la intrarea sistemului acționează un impuls de zgomot. În intervalul  $t \in (T/2, T)$  semnalul de intrare este nul astfel încât în acest interval variabila aleatoare  $Y(t)$  are expresia (v.rel.(2.4) în care  $X(\mathcal{Z})=0$ ) :

$$Y_2(t) = Y_1\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \exp\left[-a\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]. \quad (5.56)$$

Corespunzător acestei transformări densitatea de probabilitate a variabilei  $Y_2(t)$  se poate scrie cu ajutorul densității de probabilitate a lui  $Y\left(\frac{T}{2}\right)$ , /91/ :

$$f_{Y_2}(y, t) = f_{Y_1}\left(y \cdot e^{a\left(t - \frac{T}{2}\right)}, \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-a\left(t - \frac{T}{2}\right)}. \quad (5.57)$$

Condițiilor (5.32) și (5.36) de continuitate a valorii medii și varianței le corespund în acest caz condiția de continuitate a densității de probabilitate:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{Y_1}(y, nT + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{Y_2}(y, nT - \Delta t). \quad (5.58)$$

Ținând seama de expresiile (5.52) și (5.57) a densităților de probabilitate, condiția (5.58) conduce la următoarele formule ale densităților de probabilitate ale procesului periodic nestaționar de ieșire:

- pentru  $t \in (nT, nT + T/2)$ ,  $n$  - întreg:

$$f_{Y_1}(y, t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} \sqrt{1 - e^{-2a(t-nT)}} (1-F^2)} \cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2 [1 - e^{-2a(t-nT)}} (1-F^2)]\right\}$$

- pentru  $t \in \left\{nT + \frac{T}{2}, (n+1)T\right\}$ ,  $n$  - întreg: (5.59)

$$f_{Y_2}(y, t) = \frac{1}{e^{-a\left[t - T\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right]} \sigma \sqrt{2\pi} \sqrt{1 - e^{-aT}} (1-F^2)} \cdot \exp\left\{-\frac{y^2}{e^{-a[2t - (2n+1)T]} 2\sigma^2 [1 - e^{-aT}} (1-F^2)]}\right\} \quad (5.60)$$

În relațiile (5.59) și (5.60) s-au folosit notațiile:

$$\sigma^2 = \frac{a \sigma_X^2}{2}; \quad F^2 = \frac{1}{1 + e^{aT}} \quad (5.61)$$

#### 5.4. Calculul funcțiilor de intercorelație "staționare" la ieșirea unor sisteme liniare testate cu impulsuri de zgomot

Considerăm că la intrarea unui sistem liniar acționează procesul stocastic de impulsuri  $X_T(t)$  ale cărui realizări se exprimă prin relația (5.8). Procesul de ieșire este nestaționar dar de regim permanent, în sensul clasificării din § 3.1. Acest proces este format din regimuri tranzitorii repetate și poate fi descris fie cu ajutorul mediilor statistice (valoare medie, varianță, autocorelație) fie cu ajutorul densității de probabilitate, așa cum s-a arătat în § 5.3.2 respectiv § 5.3.3. Se subliniază că "repetarea" regimului tranzitoriu trebuie înțeleasă statistic; deoarece mărimea de excitație este zgomot, la nivel de realizări individuale, regimul tranzitoriu nu se repetă. Desigur, nefiind staționar, procesul de ieșire nu este ergodic. Totuși, utilizând un corelator convențional se poate calcula funcții de corelație "staționare" pentru a caracteriza procesul de ieșire. Dată fiind periodicitatea aplicării semnalului de excitație, regimurile tranzitorii de ieșire se vor repeta cu aceeași perioadă. Extragerea frecvenței fundamentale a procesului de ieșire prezintă interes deoarece cu ajutorul ei se poate caracteriza sistemul liniar testat cu impulsuri de zgomot. De aceea în continuare se pune accent pe calculul funcțiilor de intercorelație dintre semnalul compus din regimuri tranzitorii repetate de la ieșirea sistemului liniar și un semnal dreptunghiular sincron cu procesul de impulsuri de la intrarea sistemului. Pentru simplitate se presupune că unda dreptunghiulară sincronă are valoare unitară în intervalele în care se aplică impulsurile de zgomot la intrarea sistemului și este nulă în rest.

##### 5.4.1. Calculul funcției de intercorelație dintre răspunsul sistemului la impulsuri de zgomot și un semnal dreptunghiular sincron

Pentru a reda cât mai fidel procesul de măsurare considerăm că unda dreptunghiulară este formată din  $(N+1)$  impulsuri:

$$P(t) = \sum_{j=0}^N u(2 \frac{t-jT}{T}). \quad (5.62)$$



Ținând seama de expresia (2.4) a soluției de regim tranzitoriu și considerînd că în ecuația de ieșire (2.9),  $D=0$ , o realizare oarecare a procesului de ieșire se poate scrie astfel:

$$y(t) = \sum_{i=0}^N u\left(2 \frac{t-iT}{T}\right) \cdot \left[ C \cdot \Phi(t-iT) \cdot Z(iT) + \right. \\ \left. + C \int_{iT}^t \Phi(t-v) \cdot B \cdot x(v) dv \right] + \sum_{i=0}^N u\left(\frac{2t-(2i+1)T}{T}\right) \cdot \\ \cdot C \cdot \Phi\left(t-iT - \frac{T}{2}\right) \cdot Z\left(iT + \frac{T}{2}\right). \quad (5.63)$$

Formele de undă corespunzătoare expresiilor (5.62) și (5.63) se prezintă în fig.5.6 pentru cazul particular,  $N=1$ ,  $C=1$ ,  $B=1$ .

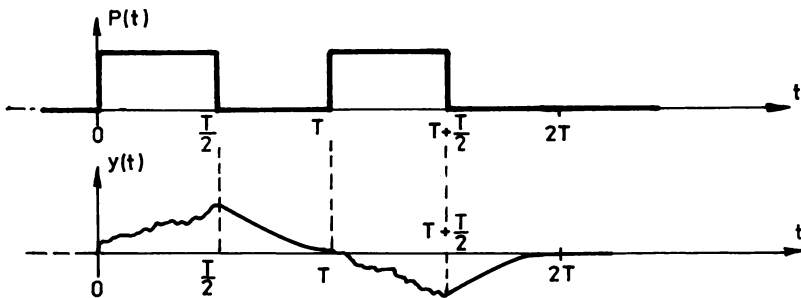


Fig.5.6. Explicativă privind semnalul dreptunghiular auxiliar  $P(t)$  și răspunsul sistemului la impulsuri de zgomot pentru  $N=1$ .

Ne propunem să calculăm funcția de intercorelație:

$$R_{YP}^N(z) = \int_0^{(N+1)T} y(t) \cdot P(t-z) dt = \int_0^{(N+1)T} \sum_{i=0}^N u\left(2 \frac{t-iT}{T}\right) \cdot \\ \cdot C \cdot \Phi(t-iT) \cdot Z(iT) \cdot \sum_{j=0}^N u\left(2 \frac{t-z-jT}{T}\right) dt + \\ + \int_0^{(N+1)T} \sum_{i=0}^N u\left(2 \frac{t-iT}{T}\right) \cdot C \cdot \left[ \int_{iT}^t \Phi(t-v) \cdot B \cdot x(v) dv \right] \cdot \\ \cdot \sum_{j=0}^N u\left(2 \frac{t-z-jT}{T}\right) dt + \int_0^{(N+1)T} \sum_{i=0}^N u\left(\frac{2t-(2i+1)T}{T}\right) \cdot$$

$$c \cdot \Phi(t-iT - \frac{T}{2}) \cdot Z(iT + \frac{T}{2}) \cdot \sum_{j=0}^N u(2 \frac{t-\zeta-jT}{T}) dt. \quad (5.64)$$

Definim următoarele intervale:

$$I_1 = [iT, iT + \frac{T}{2}], \quad I_2 = [iT + \frac{T}{2}, (i+1)T], \quad J = [jT + \zeta, jT + \zeta + \frac{T}{2}]$$

și notăm cu  $I_1 J$  și  $I_2 J$  intersecția intervalelor  $I_1$  și  $J$  respectiv  $I_2$  și  $J$ . Cu ajutorul acestor notații expresia (5.64) poate fi scrisă în forma simplificată:

$$R_{YP}^N(\zeta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \int_{I_1, J} c \cdot \Phi(t-iT) \cdot Z(iT) dt + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \int_{I_1 J} \left[ c \cdot \int_{iT}^t \Phi(t-v) \cdot B \cdot x(v) dv \right] dt + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \int_{I_2 J} c \cdot \Phi(t-iT - \frac{T}{2}) \cdot Z(iT + \frac{T}{2}) dt. \quad (5.65)$$

Dată fiind periodicitatea statistică a procesului  $Y(t)$ , funcția de intercorelație va fi de asemenea periodică astfel încât pentru concretizarea calculelor conform relației (5.65) se consideră că

$\zeta$  ia valori pe interval de o perioadă cu următoarele subdomenii  $\zeta \in [0, \frac{T}{2}]$  și  $\zeta \in [\frac{T}{2}, T]$ . Corespunzător, vom obține pentru funcția de intercorelație  $R_{yp}^N(\zeta)$  expresii diferite în cadrul celor două subdomenii. Astfel, pentru  $\zeta \in [0, \frac{T}{2}]$  rezultă  $I_1 J = [jT + \zeta, iT + \frac{T}{2}]$ , ( $i \neq j$ ) respectiv  $I_2 J = [iT + \frac{T}{2}, jT + T/2 + \zeta]$  ( $i \neq j$ ) iar (5.65) devine:

$$R_{yp}^N(\zeta) \quad \zeta \in [0, \frac{T}{2}] = \sum_{i=0}^N c \cdot \int_{iT+\zeta}^{iT+\frac{T}{2}} \Phi(t-iT) dt \cdot Z(iT) + \sum_{i=0}^N \int_{jT+\zeta}^{iT+\frac{T}{2}} \left[ c \cdot \int_{iT}^t \Phi(t-v) \cdot B \cdot x(v) \cdot dv \right] dt + \sum_{i=0}^N c \cdot \int_{iT+\frac{T}{2}}^{iT+\frac{T}{2}+\zeta} \Phi(t-iT - \frac{T}{2}) \cdot dt \cdot Z(iT + \frac{T}{2}). \quad (5.66)$$

Similar, pentru  $\zeta \in [\frac{T}{2}, T]$  rezultă  $I_1 J = [iT, jT + \zeta + \frac{T}{2}]$  ( $i \neq j+1$ ),

$I_2 J = [jT + \zeta, (i+1)T]$  ( $i \neq j$ ) iar (5.65) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
 R_{Y_P}^N(\zeta) \quad \zeta \in \left[\frac{T}{2}, T\right] &= \sum_{i=1}^{N+1} C \cdot \int_{iT}^{iT + \zeta - \frac{T}{2}} \Phi(t - iT) dt \cdot Z(iT) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N+1} \int_{iT}^{iT + \zeta - \frac{T}{2}} C \cdot \left[ \int_{iT}^t \Phi(t - v) \cdot B \cdot x(v) dv \right] dt + \sum_{i=0}^N C \cdot \\
 &\cdot \int_{iT + \zeta}^{(i+1)T} \Phi(t - iT - \frac{T}{2}) dt \cdot Z\left(iT + \frac{T}{2}\right). \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

Pentru un sistem cu matricea de tranziție cunoscută expresiile (5.66) și (5.67) ale funcției de intercorelație pot fi particularizate. Astfel pentru un filtru trece-jos la care  $\Phi(t) = \exp(-at)$ ,  $C=B=1$ , primul și ultimul termen din (5.66) pot fi grupați sub forma:

$$\begin{aligned}
 (N+1) \left\{ \sum_{i=0}^N y(iT) \cdot \left[ \frac{e^{-a\zeta} - e^{-a\left(\frac{T}{2}\right)}}{a} \right] + \sum_{i=0}^N y\left(iT + \frac{T}{2}\right) \frac{1 - e^{-a\zeta}}{a} \right\} = \\
 = \frac{e^{-a\zeta} \left[ e^{-a\frac{T}{2}} - 1 \right] + 1 - e^{-aT}}{a} \cdot (N+1) \cdot \sum_{i=0}^N y\left(iT + \frac{T}{2}\right) = U(\zeta, a, T, N). \quad (5.68)
 \end{aligned}$$

Similar, primul și ultimul termen din (5.66) pot fi grupați astfel:

$$\begin{aligned}
 (N+1) \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} y(iT) \cdot \frac{1 - e^{-a\left(\zeta - \frac{T}{2}\right)}}{a} + \sum_{i=1}^{N+1} y\left(iT + \frac{T}{2}\right) \frac{e^{-a\left(\zeta - \frac{T}{2}\right)} - e^{-a\frac{T}{2}}}{a} \right\} = \\
 = \frac{e^{-a\zeta} \left[ e^{a\frac{T}{2}} - 1 \right]}{a} \cdot (N+1) \cdot \sum_{i=1}^{N+1} y\left(iT + \frac{T}{2}\right) = V(\zeta, a, T, N). \quad (5.69)
 \end{aligned}$$

Termenul al doilea din membrul drept al relațiilor (5.66) respectiv (5.67) are o contribuție minoră la valoarea funcției de intercorelație deoarece  $x(t)$  este realizarea unui proces  $X(t)$  cu valoare medie nulă și de bandă largă. Valoarea acestui termen este o variabilă aleatoare a cărei dispersie crește odată cu reducerea benzii de frecvență a procesului  $X(t)$ . Dacă  $X(t)$  este de tipul zgomotului alb cu bandă limitată, contribuția acestui termen se manifestă prin "netezirea" vîrfurilor funcției de corela-

ție empirică. Cu aceste observații și cu notațiile (5.68) și (5.69), o perioadă a funcției  $R_{yp}^N(\tau)$  se poate exprima astfel:

$$R_{yp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in [0, T]} \approx U(\tau, a, T, N) \cdot u\left(2 \frac{\tau - 1T}{T}\right) + V(\tau, a, T, N) \cdot u\left[\frac{2\tau - (2i+1)T}{T}\right] \quad (5.70)$$

Tinând seama că  $\sum_{i=1}^{N+1} y(iT) \sim a \sqrt{X}$ , din (5.68) sau (5.69) rezultă amplitudinea funcției de intercorelație (5.70):

$$A(T, a) = \left[1 - \exp\left(-\frac{aT}{2}\right)\right]^{2(N+1)} \cdot \sqrt{X} \quad (5.71)$$

Se constată că pentru un "a" dat, amplitudinea  $A(T, a)$  scade monoton cu creșterea frecvenței de modulare  $f_{MOD} = 1/T$  (deoarece  $\frac{dA}{dT} > 0$ ).

Mărimea :

$$\frac{\partial A(T, a)}{\partial a} = T \exp\left(-\frac{aT}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{aT}{2}\right)\right]^{2(N+1)} \sqrt{X} \quad (5.72)$$

descrie sensibilitatea amplitudinii (5.71) în raport cu parametrul "a". Practic trebuie aleasă perioada de modulare astfel încât sensibilitatea parametrică a amplitudinii să fie maximă. Din ecuația :

$$\frac{1}{(N+1) \sqrt{X}} \cdot \frac{\partial A(T, a)}{\partial T \partial a} = e^{-aT/2} \left[1 - \frac{aT}{2}\right] + e^{-aT} [aT - 1] = 0$$

rezultă valoarea optimă a frecvenței de modulare:

$$f_{MOD} = \frac{1}{T} = 0,725 a. \quad (5.73)$$

#### 5.4.2. Calculul funcției de intercorelație dintre răspunsul detectat pătratic al sistemului și un semnal dreptunghiular sincron

Faptul că procesul de impulsuri se obține prin modularea în amplitudine a zgomotului alb de bandă limitată sugerăm utilizarea unei detecții a procesului de ieșire (5.63). Atât din punct de vedere al tratării analitice cât și al realizării fizice este avantajos să se folosească detecția pătratică. O realizare care are ca procesului (5.63) detectat pătratic se exprimă prin relația:

$$w = ky^2(t) = k \sum_{i=0}^N u\left(2 \frac{t-iT}{T}\right) \cdot \left\{ C \cdot \left[ \Phi(t-iT) \cdot Z(iT) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + C \int_{iT}^t \Phi(t-v) \cdot B \cdot x(v) dv \cdot \left[ Z^T(iT) \cdot \Phi^T(t-iT) \cdot C^T + \right. \\
 & \left. + \int_{iT}^t x^T(v) \cdot B^T \cdot \Phi^T(t-v) \cdot C^T dv \right] + k \sum_{i=0}^N u \left( \frac{2t - (2i+1)T}{T} \right) \cdot \\
 & \cdot C \cdot \Phi \left( t - iT - \frac{T}{2} \right) \cdot Z \left( iT + \frac{T}{2} \right) \cdot Z^T \left( iT + \frac{T}{2} \right) \cdot \Phi \left( t - iT - \frac{T}{2} \right) \cdot C^T. \quad (5.74)
 \end{aligned}$$

Funcția de intercorelație poate fi calculată cu formula:

$$R_{wp}^N(\tau) = \int_0^{(N+1)T} w(t) \cdot P(t-\tau) dt \quad (5.75)$$

urmînd același procedeu, ca în § 5.4.1. Se constată însă că această cale este laborioasă. Expresia căutată poate fi determinată, mai simplu, în baza observației că datorită numărului mare de perioade pe care se face integrarea (echivalentă unei medieri urmată de o înmulțire cu  $(N+1)$ ), formula (5.75) conduce la același rezultat ca și intercorelarea semnalelor deterministe  $P(t)$  și  $M\{w(t)\}$ . Pentru determinarea valorii  $M\{w(t)\}$  utilizăm faptul cunoscut că un proces gaussian are valoare medie nulă  $M\{y\}=0$  și varianță  $M\{y^2(t)\}=R(0)$ , are densitatea de probabilitate /91/ :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(0)}} \cdot \exp(-y^2/2R(0)). \quad (5.76)$$

Comparînd densitățile de probabilitate (5.59) și (5.60) cu formula (5.76) și avînd în vedere transformarea  $w=ky^2$ , pentru  $n=0$  se obțin relațiile:

$$M\{w_1\} = k \cdot \sigma^2 [1 - e^{-2at} F^2]; \quad t \in [0, \frac{T}{2}] \quad (5.77)$$

$$M\{w_2\} = k \cdot \sigma^2 \cdot e^{-a[2t-T]} \cdot [1 - e^{-aT} F^2]; \quad t \in [\frac{T}{2}, T] \quad (5.78)$$

în care  $\sigma^2 = a \sigma_X^2 / 2$ ;  $F^2 = 1 / (1 + e^{-aT})$ .

Relația de "continuitate" (5.58) implică și "continuitatea" valorii medii a semnalului detectat pătratic. Într-adevăr pentru  $t = \frac{T}{2}$ , formulele (5.77) și (5.78) dau același rezultat:

$$M\{w_1\} \Big|_{t=\frac{T}{2}} = M\{w_2\} \Big|_{t=\frac{T}{2}} = k \sigma^2 \frac{1}{1+e^{-aT}}.$$

De asemenea,

$$M\{w_1\} \Big|_{t=0} = M\{w_2\} \Big|_{t=T} = k \vartheta^2 \cdot \frac{1}{1+e^{aT}}.$$

Cu notațiile precedente, pentru intervalul  $\tau \in [0, \frac{T}{2}]$ , funcția de intercorelație poate fi determinată astfel:

$$\begin{aligned} R_{wp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in [0, \frac{T}{2}]} &\cong (N+1) \left[ \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} M\{w_1\} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} M\{w_2\} dt \right] = \\ &= (N+1)k \vartheta^2 \left[ \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} (1-e^{-2at} F^2) dt + (e^{aT}-F^2) \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} e^{-2at} dt \right] = \\ &= (N+1)k \frac{\vartheta^2}{2} \left\{ a \left( \frac{T}{2} - \tau \right) + \frac{F^2}{2} \cdot e^{-2a\tau} (e^{-aT}-1) + \frac{1}{2} (1-e^{-2a\tau}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

În mod similar, cu notația :

$$M\{w_3\} = k \vartheta^2 [1 - e^{-2a(t-T)} \cdot F^2]$$

se poate exprima funcția de intercorelație și în intervalul

$$\tau \in \left[ \frac{T}{2}, T \right] :$$

$$R_{wp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in \left[ \frac{T}{2}, T \right]} = (N+1) \left[ \int_{\tau}^T M\{w_2\} dt + \int_T^{T+\tau} M\{w_3\} dt \right]. \quad (5.80)$$

Pentru a afla valorile extreme ale funcției de intercorelație, trebuie anulate derivatele expresiilor  $R_{wp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in [0, \frac{T}{2}]}$  (pentru maxim) și  $R_{wp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in [\frac{T}{2}, T]}$  (pentru minim). Calculele pentru deducerea expresiei amplitudinii funcției de intercorelație sînt laborioase și rezultatul final dificil de interpretat. O imagine intuitivă se obține în domeniul frecvențelor de modulare joase ( $aT \gg 1$ ) unde exponențialele cu puteri negative devin neglijabile astfel încît (5.79) poate fi aproximat astfel:

$$R_{wp}^N(\tau) \Big|_{\tau \in [0, \frac{T}{2}]} \cong (N+1) k \cdot \frac{\vartheta^2}{2} \cdot a \cdot \left( \frac{T}{2} - \tau \right). \quad (5.81)$$

Expresia (5.81) arată că funcția de intercorelație are aspect triunghiular, valoare minimă nulă (la  $\tau = \frac{T}{2}$ ) și valoare maximă

(amplitudine) :

$$A(T,a) = (N+1) \cdot k \cdot \frac{\sqrt{X}}{4} \cdot aT. \quad (5.82)$$

Sensibilitatea parametrică a amplitudinii în raport cu parametrul "a" :

$$\frac{\partial A(T,a)}{\partial a} = (N+1) T \cdot k \cdot \frac{\sqrt{X}}{4} \quad (5.83)$$

este proporțională cu durata totală a realizării pe care se face măsurarea, (N+1)T.

### 5.5. Concluzii

În capitol se prezintă posibilitatea extinderii analizei de corelație staționară la caracterizarea proceselor tranzitorii repetitive. Se arată modul de calcul al funcțiilor de intercorelație pentru cazurile că se utilizează sau nu se utilizează detecția pătratică a semnalului de ieșire. Se aplică ecuațiile pentru realizări particulare și pentru densități de probabilitate la caracterizarea regimurilor tranzitorii repetitive. Utilizând noțiunea de spectru complex dublu (SCD), introdusă de autor, se arată că procesul de impulsuri obținut prin modularea în amplitudine a zgomotului alb păstrează caracterul de zgomot alb, fapt important pentru testarea sistemelor cu impulsuri de zgomot.

## CAPITOLUL 6.

### VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ȘI APLICAȚII

În acest capitol de prezintă unele rezultate experimentale, cu scop de verificare și justificare din punct de vedere aplicativ a metodelor de măsurare dezvoltate în capitolele 4 și 5. Metoda pentru analiza de corelație a proceselor nestaționare s-a verificat prin simulare pe un calculator numeric universal (HEWLETT PACKARD 9845 T); posibilitatea extinderii analizei de corelație staționară la caracterizarea proceselor tranzitorii repetitive s-a verificat în primul rând, cu ajutorul unui corelator specializat pentru analiza proceselor staționare (CNTR 1024 - SAIP SCHLUMBERGER). S-a utilizat însă și simularea pe calculatorul universal a unor regimuri tranzitorii repetitive, obținute prin transferul liniar a unor impulsuri de zgomot.

#### 6.1. Rezultate de simulare privind metoda de corelație pentru procese nestaționare

##### 6.1.1. Generarea semnalului aleator de testare

Ca semnal de testare se utilizează realizarea unui proces stocastic staționar cu funcția de autocorelație:

$$\rho(k) = \theta^k, \quad 0 < \theta < 1. \quad (6.1)$$

O realizare a procesului gaussian  $\{Z(t), t \in N\}$  cu valoare medie nulă, dispersie unitară și funcție de autocorelație de expresie (6.1), poate fi obținută cu ajutorul relației de recurență:

$$Z_t = \theta \cdot Z_{t-1} + \sqrt{1 - \theta^2} \cdot \varepsilon_t; \quad t=1, 2, \dots \quad (6.2)$$

în care  $Z_0$  și  $\varepsilon_t$  sînt variabile aleatoare normale -  $N(0,1)$  - și independente /129/. Practic, pentru generarea realizării se apelează succesiv subrutina Gauexp prezentată în Anexa D. În foto.



D2-1 sînt reprezentate suprapus la realizări conținînd fiecare cîte 512 valori generate cu programul Gauexp. Impulsurile de zgomot obținute prin transferul acestor realizări printr-o "poartă analogică" se prezintă în foto.D2-2. Durata unui impuls de zgomot este egală cu durata pauzei dintre impulsuri și corespunde la 128 puncte.

Pentru stabilirea corespondenței între un "zgomot alb" fizic avînd banda limitată la 50 kHz și zgomotul simulat, trebuie determinat parametrul  $\theta$ . Convențional, echivalăm pasul  $\Delta t=1$  din modelul discret cu o perioadă de eșantionare  $T_F=10 \mu s$  din modelul continuu. Pe de altă parte, se știe că funcție de autocorelație:

$$R_x(\tau) = \exp(-\mu |\tau|) \quad (6.3)$$

îi corespunde spectrul

$$S_x(\omega) = \frac{2\mu}{\mu^2 + \omega^2} \quad (6.4)$$

Parametrul  $\mu$  din expresia funcției de autocorelație se fixează din condiția ca banda procesului să fie de 50 kHz ceea ce din (6.4) revine la  $\omega = \mu$ . Din relația de echivalență dintre funcțiile de autocorelație (6.1) și (6.3) :

$$\rho(1) = R_x(10 \mu s) \quad (6.5)$$

rezultă  $\theta = \exp(-\tilde{\eta}) = 0,043$ .

### 6.1.2. Simularea numerică a unor filtre de ordinele unu și doi

În schema bloc a corelatorului pentru procese nastaționare intervin două filtre. Testarea filtrelor simulate numeric implică apariția unor regimuri tranzitorii la ieșirea acestora. S-a folosit acest fapt pentru ca prin aplicarea la intrarea filtrelor a unor impulsuri de zgomot să se simuleze generarea regimurilor tranzitorii repetitive. Dacă pentru testarea filtrelor parametrii ce intervin în modelele acestora pot fi aleși arbitrar, practic s-au utilizat valori ce corespund frecvențelor de trecere și de tăiere ale filtrelor fizice utilizate în verificarea metodei de măsurare prezentată în capitolul 5. Compararea formelor de undă simulate cu cele fotografiate în anumite puncte ale instalației experimentale atestă atât valabilitatea modelului de generare a proceselor tranzitorii repetitive cît și valabilitatea

modelelor deduse pentru filtrele numerice.

Modelul de stare continuu al filtrelor constă din ecuațiile (2.1) și (2.9). În modelul continuu al filtrului trece-jos de ordinul unu intervin coeficienții  $A=-a$ ;  $B=a$ ;  $C=1$ ;  $D=0$ . Matricea de tranziție este în acest caz  $\Phi(t,0)=\exp(-at)$  și cu metodele cunoscute /20/ se obține modelul de stare discret:

$$\left. \begin{aligned} Z(t_{k+1}) &= \exp(-\frac{1}{T}) \cdot Z(t_k) + [1 - \exp(-\frac{1}{T})] \cdot X(t_k); \\ Y(t_{k+1}) &= Z(t_{k+1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Constanta  $T$  se alege în funcție de frecvența de tăiere a filtrului. Astfel, pentru filtrul trece-jos de 90 Hz rezultă  $T=177$  (unitatea de măsură este  $T_F=10 \mu s$ , prin convenție).

Pentru filtrul de tip trece-bandă, coeficienții din ecuațiile de stare (2.1) și (2.9) sînt:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} & -1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K K_2}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad D = 0. \quad (6.7)$$

Matricea de tranziție a sistemului este:

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} \beta \cdot e_1(t) + \alpha e_2(t) & \alpha T_2 \cdot e_2(t) + \beta T_1 \cdot e_1(t) \\ \frac{\alpha}{T_1} \cdot e_1(t) + \frac{\beta}{T_2} e_2(t) & \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

în care:  $\alpha = T_1 / (T_1 - T_2)$ ;  $\beta = T_2 / (T_2 - T_1)$ ;  $e_1(t) = \exp(-\frac{t}{T_1})$ ;  $e_2(t) = \exp(-\frac{t}{T_2})$ . Se obține următorul model discret:

$$\begin{bmatrix} Z_1(t_{k+1}) \\ Z_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \cdot e^{-1/T_1} + \alpha \cdot e^{-1/T_2} & \alpha T_2 \cdot e^{-1/T_2} + \beta T_1 e^{-1/T_1} \\ \frac{\alpha}{T_1} \cdot e^{-1/T_1} + \frac{\beta}{T_2} \cdot e^{-1/T_2} & \alpha \cdot e^{-1/T_1} + \beta \cdot e^{-1/T_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1(t_k) \\ Z_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2}{T_1} \left\{ \beta T_1 (1 - e^{-1/T_1}) + \alpha T_2 (1 - e^{-1/T_2}) \right\} \\ \frac{k_1 k_2}{T_1} \left\{ \alpha (1 - e^{-1/T_1}) + \beta (1 - e^{-1/T_2}) \right\} \end{bmatrix} \cdot x(t_k) \quad (6.9)$$

$$y(t_{k+1}) = Z(t_{k+1}).$$

Constantele  $T_1$  și  $T_2$  se pot determina ținând seama că lui  $T_F=10 \mu s$  din modelul continuu îi corespunde  $t_{k+1}-t_k=1$  în modelul discret. Astfel pentru un filtru trece bandă de 355 Hz - 1,4 kHz se obțin valorile  $T_1=11$ ;  $T_2=45$ .

În fig.D2-3 este reprezentat răspunsul filtrului trece bandă cu  $T_1=11$ ,  $T_2=45$  la o realizare a impulsurilor de zgomot din fig.D2-2. Reprezentând suprapus toate răspunsurile la cele 10 realizări ale zgomotului de impulsuri din fig.D2-2 se obține imaginea din fig.D2-4 corespunzătoare unor regimuri tranzitorii repetate. Se observă că în intervalele în care există impuls de zgomot la intrare răspunsul sistemului are un pronunțat caracter aleator; dimpetrivă, în intervalele dintre două impulsuri consecutive aplicate la intrare, caracterul aleator al răspunsului intervine printr-un singur parametru: condiția inițială.

Observații similare se pot face și pentru răspunsul la impulsuri de zgomot a filtrului trece-jos. Astfel, în foto.D2-5 sînt reprezentate suprapus cinci realizări obținute la ieșirea unui filtru cu frecvența de tăiere 90 Hz ( $T=177$ ). Lungimea totală a realizării este de 1024 puncte, prima jumătate corespunzînd intervalului în care impulsul de zgomot acționează la intrarea sistemului. Se remarcă diferența între amplitudinile semnalelor de ieșire ale celor două sisteme: gradațiile maxime pe verticală corespund valorilor  $\pm 5$  pentru semnalul de intrare (foto.D2-1 și D2-2),  $\pm 1$  pentru semnalul de ieșire al filtrului trece bandă (foto.D2-3 și D2-4) respectiv  $\pm 0,2$  pentru semnalul de ieșire al filtrului trece jos (foto.D2-5).

### 6.1.3. Testarea corelatorului pentru procese nestacionare

Pentru a testa valabilitatea teoriei prezentate în capitolul 4, s-a simulat numeric funcționarea corelatorului pentru cazurile a două procese nestacionare particulare. Rezultatele simulării se prezintă sub formă de fotografii în anexa D (§ D3).

Trebuie subliniat că pentru a avea o imagine globală ușor de interpretat este importantă o reprezentare grafică adecvată a rezultatelor.

Ținînd cont de natura funcțiilor de corelație și spectrale nestacionare s-au conceput subrutine de reprezentare care sugerea-

ză imaginea unor suprafețe în spațiu. Aceste subrutine se prezintă în anexa D (§ D1) : subrutina Axe permite trasarea axelor și a caroiajului; subrutina Graf trasează, prin apelare repetată profilele funcțiilor de corelație și spectrale nestaționare. Pentru aplicarea spectrului corespunzător unui anumit profil s-a utilizat o subrutină de transformare Fourier rapidă (TFR) existentă în biblioteca matematică a calculatorului. În acest scop, profilele funcțiilor de corelație s-au calculat prin 256 puncte iar profilele spectrale s-au obținut prin 128 puncte (numărul de puncte este, în fiecare caz, o putere a lui 2).

Primul semnal considerat se obține prin suprapunerea unei trepte de amplitudine unitară peste o undă sinusoidală de amplitudine 0,5. În cel de al doilea caz, treapta de amplitudine unitară se suprapune pentru un semnal aleator generat cu subrutina Gauexp. În ambele cazuri, "nestaționaritatea" intervine datorită treptei care se suprapune peste semnalele de bază care sînt, evident, staționare.

Ne propunem că extragem, după cele două coordonate ( $\tau$  respectiv  $t$ ), funcțiile de corelație nestaționare ce corespund variației în treaptă a valorii medii. Pentru redarea corectă a valorii medii, filtrele corelatorului trebuie să îndeplinească evident condițiile (4.21) respectiv (4.36). De aceea, fără pretenții de optimizare, s-au folosit în toate cazurile filtre corespunzătoare modelului de stare discret (6.6). Teoretic, funcția de corelație de măsurat are, în ambele cazuri, valoare unitară în primul cadran ( $t_1 \geq 0$ ;  $t_2 \geq 0$ ) și este nulă în rest.

Pentru măsurarea profilelor  $\tau = \text{constant}$  s-a utilizat corelatorul cu structura din fig.4.1, avînd parametrii  $T_g = 80$  și  $T_h = 20$ . Profilele calculate pentru cazul unui semnal treaptă suprapus peste un semnal sinusoidal sînt reprezentate grafic în foto.D3-1. Se constată că funcția de corelație măsurată are un aspect tranzitoriu dar cu valorile alese ale parametrilor corelatorului, profilele ajung să se stabilizeze în jurul valorii unu (lungimea segmentului trasat din axa B corespunde valorii  $R_{\max} = 1,5$ ). Dacă notăm cu  $T_g$  pasul de simulare (eșantionare), lungimea profilelor este de  $256 \cdot T_g$ . Intervalul dintre două profile alăturate este numai  $\Delta\tau = 2T_g$ , ceea ce explică faptul că profilele sînt aproape identice. Diferențele dintre profile sînt mai evidente din compararea spectrelor tranzitorii din foto.D3-2. Se constată că amplitudinea com-

ponentei continue (pentru  $f=0$ ) scade ușor odată cu creșterea întârzierii. De asemenea, se observă că spectrele tranzitorii conțin un vârf corespunzător componentei sinusoidale a semnalului analizat.

În cazul semnalului treaptă suprapus peste un zgomot gaussian, măsurarea profilelor  $\tau = \text{constant}$  s-a făcut utilizând parametrii  $T_g = T_m = 100$ . Filtrarea fiind mai puternică decât în cazul anterior, profilele nu mai ajung să se stabilizeze pe surata 256.  $T_g$  (foto.D3-3). Diferența dintre profilele tranzitorii ale funcției de corelație este vizibilă. Și în acest caz se constată o scădere a amplitudinii componentei continue odată cu creșterea întârzierii. Profilele spectrale tranzitorii corespund unui zgomot de joasă frecvență cu componentă continuă importantă (foto.D3-4).

Pentru măsurarea profilelor  $t = \text{constant}$ , s-a utilizat corelatorul cu structura din fig.4.4. Pentru cazul semnalului treaptă suprapus cu semnalul sinusoidal s-au utilizat parametrii  $T_g = 20$  și  $T_m = 80$ . Profilele  $t = \text{constant}$  ale funcției de corelație sînt reprezentate în foto.D3-5. Lungimea acestor profile este tot  $256 T_g$  iar intervalul dintre două profile alăturate este  $\Delta t = 10 T_g$ . Se constată că profilele tind să se stabilizeze în jurul valorii unu, odată cu creșterea lui  $t$ . Pe baza profilelor  $t = \text{constant}$  s-au putut calcula profilele spectrului instantaneu, reprezentate în foto. D3-6. Se poate constata creșterea și tendința de stabilizare a componentei continue din spectrul instantaneu odată cu creșterea timpului  $t$ . În profilele spectrale este prezentă de asemenea o componentă ce corespunde undei sinusoidale din semnalul analizat.

Profilele  $t = \text{constant}$  pentru cazul unui semnal treaptă suprapus peste un zgomot gaussian s-au calculat utilizând  $T_g = T_m = 100$  și sînt reprezentate în foto.D3-7. Din cauza filtrării puternice nu ajung să se stabilizeze. Acest fapt este relevat și de profilele spectrului instantaneu reprezentate în foto.D3-8.

Testele precedente relevă capacitatea corelatorului de a extrage funcțiile de corelație nestaționare atât după axa  $\tau = \text{constant}$  cît și după axa  $t = \text{constant}$  cu avantajul de a putea calcula atât profile spectrale tranzitorii cît și profile spectrale instantanee. Alegerea parametrilor filtrelor presupune un compromis: o filtrare puternică reduce efectul semnalului perturbator (în cazurile considerate - semnal "sinusoidal" respectiv zgomot gaussian) dar crește timpul de "stabilizare" a funcțiilor de core-

lație empirice; o filtrare insuficientă reduce acest timp dar crește efectul semnalului perturbator.

**6.2. Rezultate experimentale privind utilizarea analizei de corelație staționară la caracterizarea regimurilor tranzitorii repetitive**

**6.2.1. Schema bloc a instalației experimentale**

În fig.6.1 se prezintă schema bloc a instalației utilizată pentru testarea cu impulsuri de zgomot a unor sisteme liniare. În această schemă, GZ1 (Hewlett-Packard 3722A Noise Generator) este generatorul zgomotului perturbator. Zgomotul obținut de la GZ2

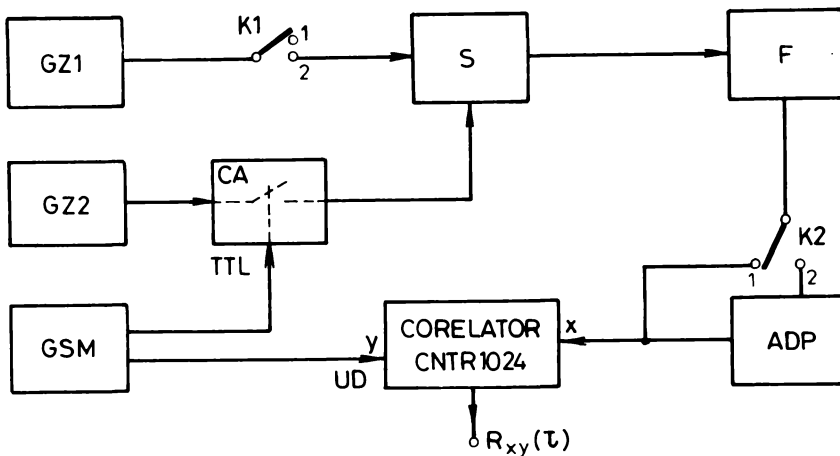


Fig.6.1. Schema bloc a instalației utilizată pentru testarea cu impulsuri de zgomot. Notații: GZ1-generatorul zgomotului perturbator; GZ2 -generatorul zgomotului util; CA-comutator analogic; GSM-generator al semnalului modulator; S-sumator; F-filtru; ADP-amplificator și detector pătratic.

(RFT 03004 Rauschgenerator) este transferat la o intrare a sumatorului S prin intermediul comutatorului analogic CA (poartă analogică). Comutatorul analogic este comandat prin nivelele TTL obținute de la GSM (F 0502 Versatester) - generatorul semnalului modulator. Rezultă că semnalul util aplicat la intrarea sumatorului este format din impulsuri de zgomot. Evident, când comutatorul K1

este în poziția 1, semnalul util nu este perturbat. Pentru cazul când comutatorul K1 este în poziția 2, se impune definirea nivelului semnalului perturbator în raport cu semnalul util. Acest raport este caracterizat de parametrul K astfel:

- K=1 - nivelul zgomotului perturbator, aplicat direct la intrarea sistemului de testat, produce la ieșirea acestuia același efect (ca valoare medie pătratică) pe care l-ar produce și zgomotul util aplicat direct (nemodulat) la intrare sistemului. Deoarece în timpul testării efective zgomotul util acționează doar într-o semiperioadă a semnalului modulator rezultă că, global, pe parcursul testării nivelul semnalului util este doar jumătate din nivelul semnalului perturbator;
- K=0,66 - corespunde <sup>scăzut</sup> valorii medii pătratice a zgomotului perturbator la 66% respectiv la 33% din nivelul corespunzător acestui semnal pentru cazul K=1;
- K=0 - este echivalent cu poziționarea lui K1 în poziția 1 (nu se aplică semnal perturbator).

Sistemul de testat a fost simulat cu ajutorul unor filtre active (RFT - Tiefpass SM 26 și RFT - Hochpass SM 27). Această simulare presupune că filtrul și sistemul simulat au aceeași caracteristică atenuare-frecvență. Caracteristicile atenuare-frecvență normale ale modulelor RFT se prezintă în tabelul 6.1. Filtrele RFT au o comportare de tip Cebîșev. S-au utilizat următoarele notații:

TABELUL 6.1.

f -frecvența semnalului de intrare;	SM 27 $f/f_j$	SM 26 $f/f_s$	Atenuarea dB
$f_j$ -frecvența de trecere în cazul filtrelor trece-sus (FTS) SM 27	1,4	0,7	$0 \pm 0,5$
	1,19	0,84	$0 \pm 1,0$ $0 \pm 0,5$
$f_s$ -frecvența de tăiere în cazul filtrelor trece-jos (FTJ) SM 26	1	1	ca.4
	0,7	1,4	18
	0,35	2,8	40
	0,18	5,6	60

În cadrul experimentelor filtrele de tipul trece-bandă (FTB) s-au obținut prin legarea în serie a modulelor SM 26 și SM 27.

Semnalul de la ieșirea filtrului poate fi trecut printr-un amplificator și detector pătratic (ADP) sau aplicat direct la intrarea corelatorului, în funcție de poziționarea comutatorului K2. Practic, detectorul pătratic a fost realizat cu ajutorul unui circuit integrat ROB 8095 și a unui amplificator operațional de deplasare a nivelului, astfel încât semnalul de ieșire al ADP rezultă negativ.

### 6.2.2. Forme de undă reprezentative pentru diferite puncte ale instalației experimentale

În anexa F (§ F1) se prezintă fotografiile ale unor oscilograme obținute în diferite puncte ale instalației experimentale. Astfel, în foto.F1-1 și foto.F1-2 se arată zgomotul generat de GZ2 și impulsurile de zgomot obținute la ieșirea comutatorului analogic. Osciloscopul asigură reprezentarea suprapusă a mai multor realizări datorită acestui fapt și deoarece zgomotul este de bandă largă ( $F_{\max}=50$  kHz), în foto.F1-1 imaginea este difuză. Pentru un zgomot de bandă mult redusă ( $F_{\max}=1,5$  kHz), în foto.F1-2 se pot sesiza numeroasele realizări particulare ale procesului. Trebuie modificată modificarea frecvenței semnalului TTL de comandă (modulare):  $F_{\text{MOD}}=500$  Hz în foto.F1-1 și  $F_{\text{MOD}}=100$  Hz în foto.F1-2.

În foto.F1-3 și F1-4 sînt reprezentate procesele de intrare și de ieșire la filtrul F ales de tipul trece-jos și realizat cu SM 26. În aceste cazuri K1 este în poziția 1 (fără semnal perturbator). Se observă că prin conectarea și deconectarea repetată a procesului staționar la intrarea filtrului procesul de ieșire prezintă o succesiune de "regimuri tranzitorii repetitive". Procesului periodic staționar de intrare îi corespunde un proces de ieșire nestaționar (tranzitoriu) dar cu o evidentă periodicitate statistică. Periodicitatea nu se reflectă în cazul unei singure realizări nici pentru procesul de intrare, nici pentru cel de ieșire. (A se vedea rezultatul de simulare din Foto.D2-3. Procesul de intrare este de bandă largă ( $F_{\max}=50$  kHz). Se observă că scăderea în amplitudine a procesului de ieșire este direct proporțională cu scăderea frecvenței de tăiere a filtrului (2 kHz pentru foto.F1-3 respectiv 1 kHz pentru foto.F1-4). Imaginea procesului tranzitoriu repetitiv de ieșire reflectă creșterea constantei de timp a filtrului (0,5 ms în foto.F1-3 și 1 ms în foto.F1-4).



Procesele tranzitorii repetitive de la ieșirea unor filtre de tipul trece-bandă sînt reprezentate în foto.E1-5 jos (pentru FTB cu frecvența de tăiere  $f_g=4$  kHz) și în foto.E1-6 sus (pentru FTB cu frecvența de tăiere  $f_g=1,4$  kHz). Ca și în cazul FTJ, se constată o scădere a amplitudinilor procesului de ieșire odată cu scăderea frecvenței de tăiere (echivalentă cu scăderea benzii de trecere a FTB, deoarece frecvența de trecere este  $f_j=355$  Hz în ambele cazuri). Spre deosebire însă de procesul de ieșire al FTJ care are valoarea medie nulă (ca și procesul de impulsuri de intrare), în cazul FTB se constată o variație periodică a valorii medii. Tot pentru cazul unui FTB cu  $f_j=355$  Hz și  $f_g=1,4$  kHz, în foto.E1-6 jos este reprezentat semnalul de ieșire al ADP.

6.2.3. Funcții de intercorelație măsurate fără utilizarea detecției

Pentru a verifica experimental relația (5.71) și implicit procedeul de calcul al funcțiilor de intercorelație dezvoltat în § 5.4.1, s-au efectuat măsurători asupra unui FTJ de ordinul unu avînd frecvența de tăiere (parametrul "a" în relația (5.71) de 85 Hz. Amplitudinile funcțiilor de intercorelație măsurate experimental (EXP) sînt trecute în tabelul 6.2 alături de amplitudinile rezultate din relația teoretică (5.71) (TEOR). În scopul unei ușoare comparări, atît valorile teoretice cît și cele experimentale sînt normate în raport cu mărimea amplitudinii funcție de intercorelație la  $F_{MOD}=1/T=90$  Hz.

TABELUL 6.2.

$F_{MOD}$ Hz	EXP	TEOR	$F_{MOD}$ Hz	EXP	TEOR
50	1,49	1,52	130	0,74	0,74
60	1,45	1,35	140	0,68	0,69
70	1,1	1,2	150	0,65	0,65
80	1,05	1,09	160	0,61	0,62
90	1	1	170	0,58	0,59
100	0,93	0,92	180	0,55	0,56
110	0,87	0,85	190	0,52	0,51
120	0,81	0,79	200	0,47	0,46

Se constată o bună concordanță între valorile teoretice și cele experimentale cu observația că la frecvențe de modulare joase dispersia valorilor măsurate crește. Pe de altă parte, conform relației (5.73) tocmai în acest domeniu de frecvență amplitudinea funcției de intercorelație este mai sensibilă la modificarea frecvenței de tăiere a FTJ. Astfel, pentru a asigura o anumită dispersie a măsurărilor, odată cu scăderea frecvenței de modulare trebuie crescută durata realizării pe care se calculează funcția de intercorelație.

În practică, se impune o creștere mai abruptă a atenuării în zona oprește bandă, decît 20 dB/decadă (cît poate asigura FTJ de ordinul unu). Metoda de calcul a funcției de intercorelație dezvoltată în § 5.4.1 și verificată experimental pentru filtrul de ordinul unu rămîne valabilă și pentru filtre de ordinul superior cu observația că proporțional cu ordinul filtrului crește volumul de calcule. În aceste situații este preferabil să se determine experimental funcțiile de intercorelație și să se găsească formule empirice pentru amplitudinile acestor funcții. Un astfel de experiment s-a făcut cu trei filtre de tipul SM 26 (RFT) care are frecvențele de tăiere  $f_g=45$  Hz; 63 Hz și 90 Hz. Dependența amplitudinilor funcțiilor de intercorelație se caracterizează printr-o scădere bruscă în jurul frecvenței de tăiere a fiecărui filtru. Reprezentarea grafică a acestor dependențe se arată în fig.6.2 și corespunde valorilor normate din tabelul 6.3. Ca valoare unitară s-a considerat amplitudinea funcției măsurate pentru filtrul cu  $f_g=90$  Hz, la  $F_{MOD}=50$  Hz. Funcțiile de intercorelație empirice au, în general, formă sinusoidală dar pot prezenta și unele distorsiuni. Convenim să notăm cu  $A_R$  amplitudinea vîrf la vîrf (diferența dintre valorile extreme) a acestor funcții.

Fotografiile ale unor funcții măsurate se prezintă în § E.2 din anexa E. Astfel, în foto.E2-1 și foto.E2-2 se arată funcțiile de intercorelație pentru cazul filtrului cu frecvența de tăiere de 90 Hz. Se remarcă aspectul sinusoidal al curbelor la ambele frecvențe de modulare considerate ( $F_{MOD}=50$  Hz, respectiv  $F_{MOD}=110$  Hz).

Prin tatonări, autorul a putut stabili următoarea formulă empirică pentru a reda dependența amplitudinii funcțiilor de intercorelație de perioada de modulare:

$$A_R(f_s T) = 1 - e^{-(f_s \cdot T)^6}; \quad T = 1/F_{MOD} \quad (6.10)$$

Relația (6.10) este de același tip cu formula (5.71), cu deosebirea că expresia (6.10) este mult mai sensibilă la modificarea frecvenței de tăiere,  $f_s$ .

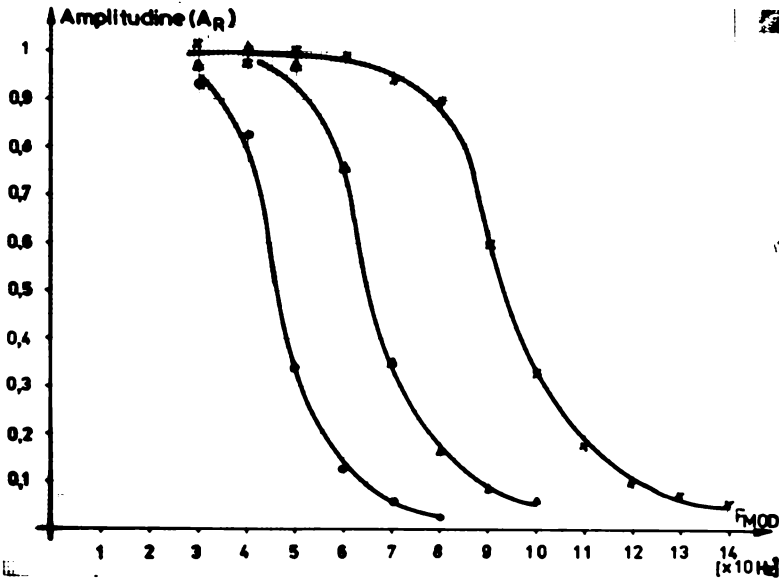


Fig. 6.2. Dependența amplitudinii de intercorelației de frecvența de modulare ( $F_{MOD}$ ) pentru filtrele trece-jos cu frecvența de tăiere  $f_s = 45$  Hz (semn pentru valorile măsurate - o);  $f_s = 63$  Hz ( $\Delta$ ) respectiv  $f_s = 90$  Hz (x).

TABELUL 6.3.

valorile normate ale amplitudinilor funcțiilor de intercorelație măsurate pentru filtre de tipul trece-jos, fără utilizarea detecției.

Frecvența de tăiere $f_s$ în Hz	Frecvența de modulare ( $F_{MOD}$ în Hz)											
	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
45	0,93	0,83	0,34	0,13	0,06	0,03	-	-	-	-	-	-
63	0,98	1,1	0,97	0,76	0,35	0,17	0,09	0,05	-	-	-	-
90	1,1	0,97	1	0,99	0,94	0,9	0,6	0,33	0,18	0,1	0,07	0,05

Măsurători similare s-au efectuat și pentru filtrele de tipul trece-bandă realizate prin conectarea în cascadă a unor filtre SM 26 și SM 27 (RFT). Astfel, în foto.E2-3 la E2-13 se redau funcții măsurate pentru filtrul trece-bandă având  $f_j=355$  Hz și  $f_g=1,4$  kHz. Se observă că pentru  $F_{MOD}$   $f_j$ , funcțiile de intercorelație prezintă distorsiuni de la forma sinusoidală, chiar și în absența semnalului perturbator (foto.E2-4 și mai ales foto.E2-3). Celelalte funcții măsurate în absența perturbațiilor (foto.E2-5, E2-9 și E2-13) au formă sinusoidală și sînt cu atît mai bine redade, cu cît  $F_{MOD}$  este mai mică (deoarece numărul de segmente de aproximare pentru o perioadă este mai mare). În foto.E2-6 la E2-8 și foto.E2-10 la E2-12 se evidențiază efectul zgomotului perturbator asupra funcțiilor de intercorelație măsurate la  $F_{MOD}=300$  Hz respectiv la  $F_{MOD}=400$  Hz. Dependența amplitudinilor normate ale funcțiilor măsurate în condiții de absență a perturbațiilor, pentru filtrul trece-bandă (355 Hz - 1,4 kHz) se redă grafic în fig.6.3 ce corespunde tabelului 6.4. Curba se caracterizează printr-un maxim la o frecvență ușor mai mare decît frecvența de trecere a filtrului.

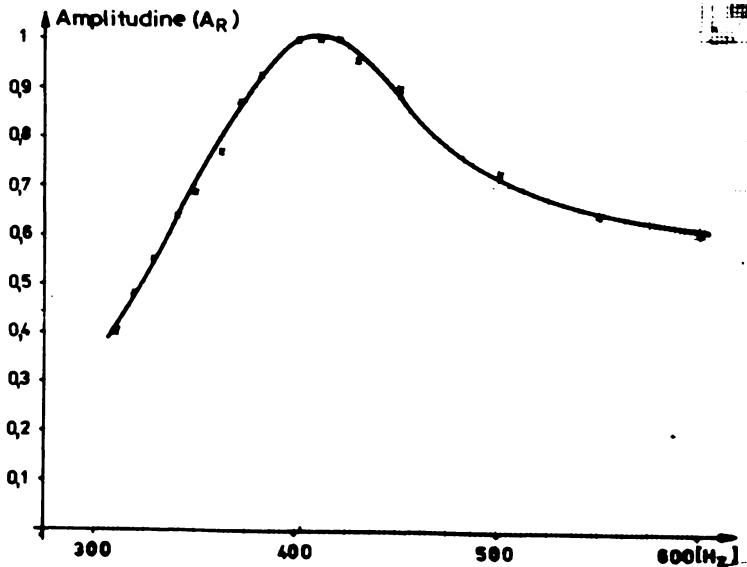


Fig.6.3. Dependența amplitudinii funcțiilor de intercorelație de frecvența de modulare ( $F_{MOD}$ ), pentru filtrul trece-bandă (355 Hz - 1,4 kHz).

Tabelul 6.5 și fig.6.4 redau dependența amplitudinii funcției de intercorelație de frecvența de modulare pentru diferite

filtre trece-bandă. Se observă că modificarea frecvenței de tăiere ( $f_g=1$  kHz, 1,4 kHz, 2kHz) influențează neesențial amplitudinile funcțiilor măsurate. Dimpotrivă, aceste amplitudini sînt foarte sensibile la modificarea frecvenței de trecere  $f_j$  (de la 355 Hz la 500 Hz).

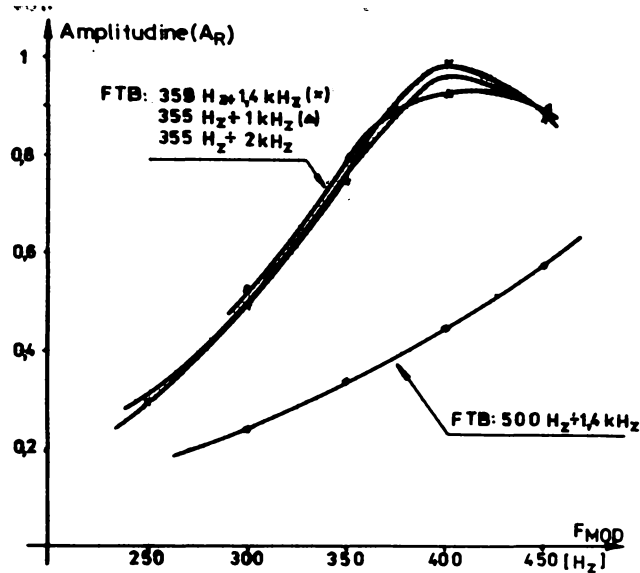


Fig.6.4. Dependența amplitudinilor funcțiilor măsurate, pentru diferite filtre trece-bandă, de frecvența de modulare.

TABELUL 6.4.

$F_{MOD}$ Hz	$A_R$	$F_{MOD}$ Hz	$A_R$	$F_{MOD}$ Hz	$A_R$	$F_{MOD}$ Hz	$A_R$
310	0,4	350	0,69	400	1	450	0,9
320	0,48	360	0,77	410	1	500	0,72
330	0,55	370	0,87	420	1	550	0,65
340	0,64	380	0,93	430	0,96	600	0,61

Prin tatonări, autorul a stabilit că dependențele reprezentate grafic în fig.6.3 și fig.6.4 sînt bine redată de următoarea relație:

$$A_R(f_j, F_{MOD}) = \frac{0,305}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f_j + 50}{F_{MOD}}\right)^2\right]^2 + 0,093 \left(\frac{f_j + 50}{F_{MOD}}\right)}} \quad (6.11)$$

În care frecvența de trecere a filtrului ( $f_j$ ) și frecvența de modulare ( $F_{MOD}$ ) se exprimă în Hz.

TABELUL 6.5.

$F_{MOD}$ [Hz]	Filtru trece bandă [kHz]			
	0,355 - 1,4	0,5 - 1,4	0,355 - 1	0,355 - 2
250	0,3 d <sup>*</sup> )	-	-	0,3 d <sup>*</sup> )
300	0,5	0,25 d <sup>*</sup> )	0,54	0,49
350	0,76	0,35	0,8	0,75
400	1	0,46	0,94	0,97
450	0,9	0,59	0,91	0,91

6.2.4. Funcții de intercorelație măsurate pentru semnalul detectat pătratic

Pentru a verifica experimental relația (5.82) stabilită teoretic, și implicit procedeele de calcul dezvoltat în § 5.4.2. s-au măsurat funcții de intercorelație pentru semnalele detectate pătratic de la ieșirea unor filtre trece-jos avînd următoarele valori ale frecvenței de tăiere  $f_g$ : 1666 Hz, 833 Hz și 555 Hz.

Valorile normate ale amplitudinilor funcțiilor de intercorelație empirice (EXP) și teoretice (TEOR), după relația (5.82), se prezintă în tabelul 6.6. Pentru măsurare s-au utilizat valorile măsurate pentru filtrul avînd filtrul  $f_g=1666$  Hz, la  $F_{MOD}=75$  Hz. Se constată o bună concordanță a valorilor teoretice cu cele experimentale. Toate funcțiile de intercorelație măsurate au aspect triunghiular ceea ce corespunde expresiei (5.81) a funcției de intercorelație. Forma tipică a funcțiilor măsurate se prezintă în foto.E3-1.

Cu creșterea frecvenței de modulare, funcțiile de intercorelație măsurate scad în amplitudine și deși își păstrează aspectul triunghiular încep să prezinte distorsiuni (alternanțe

inegale). Frecvențe de modulare mari nu pot fi luate deoarece numărul de segmente pe perioadă devine insuficient (v.foto.E3-2).

TABELUL 6.6.

$f_B$ $F_{MOD}$	1666 Hz		833 Hz		555 Hz	
	TEOR	EXP	TEOR	EXP	TEOR	EXP
75 Hz	1	1	0,5	0,52	0,33	0,35
100 Hz	0,75	0,8	0,375	0,4	0,25	0,3
125 Hz	0,6	0,63	0,3	0,35	0,2	0,25

Măsurători de funcții de intercorelație pentru semnalul de ieșire detectat pătratic s-au făcut și pentru filtre de tipul trece-jos respectiv de tipul trece-bandă realizate cu SM 26 și SM 27. Astfel, în foto.E3-3 și E3-4 se prezintă funcții măsurate pentru filtrul trece-jos de 90 Hz. În ambele imagini funcțiile empirice sînt sinusoidale dar se poate constata că în cazul unei frecvențe de modulare joasă ( $F_{MOD}=30$  Hz), funcția de intercorelație se compune din exponențialele "racordate" la vîrfuri. Dependența amplitudinilor normate, de frecvență de modulare se prezintă în fig.6.5

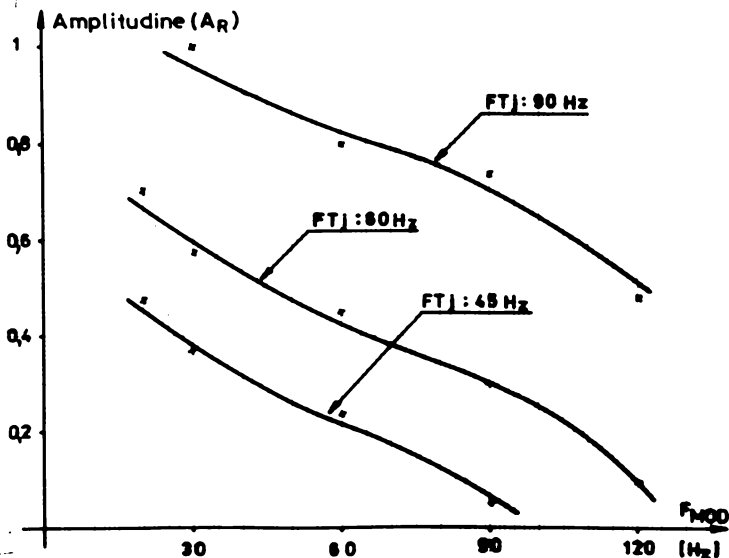


Fig.6.5. Dependența amplitudinilor normate ale funcțiilor de intercorelație de frecvențe de modulare, pentru diferite filtre trece-jos.

TABELUL 6.7.

Frecven- ța de modulare ( $F_{MOD}$ )	Coefi- cientul de per- turbare	Filtrul trece-bandă				
		355 Hz-1,4 kHz	355 Hz-2 kHz	355 Hz-1 kHz	250 Hz-1,4 kHz	500 Hz-1,4 kHz
$F_{MOD}=100$ Hz	2	3	4	5	6	7
	K=0	9,5/0,63	15/1	5,8/0,39	10,4/0,69	8,25/0,55
	K=0,33	9,2/0,61	14/0,93	5,8/0,39	10/0,66	8,4/0,56
	K=0,66	8/0,53	10,8/0,72	5,6/0,37	8,8/0,59	7,6/0,5
	K=1	6/0,4	8,2/0,55	5/0,33	6,8/0,45	5,8/0,39
$F_{MOD}=200$ Hz	K=0	8,9/0,59	15/1	5,2/0,35	10/0,66	8/0,53
	K=0,33	8,8/0,59	14/0,93	5,2/0,35	9,45/0,63	8/0,53
	K=0,66	7,6/0,51	11/0,73	5/0,33	8,4/0,56	7,2/0,48
	K=1	6/0,4	8/0,53	3,8/0,25	6,4/0,43	5,6/0,37
	K=0	7,6/0,5	13,5/0,9	4/0,27	8,2/0,55	6,4/0,43
$F_{MOD}=300$ Hz	K=0,33	7,6/0,5	12,3/0,82	4/0,27	7,65/0,51	6,6/0,44
	K=0,66	6,6/0,44	10/0,66	4/0,27	6,9/0,46	6/0,4
	K=1	5,2/0,35	7,4/0,49	3/0,2	5,6/0,37	4,4/0,29



(continue tabelul 6.7)

1	2	3	4	5	6	7
$F_{MOD}=400$ Hz	K=0	6,4/0,43	12,1/0,8	2,9/0,19	6,9/0,46	5,6/0,37
	K=0,33	6,6/0,44	11,2/0,75	3/0,2	6,2/0,41	5,5/0,36
	K=0,66	5,6/0,37	8,8/0,59	2,9/0,19	5,5/0,37	5/0,33
	K=1	4,4/0,29	6,4/0,43	2,3/0,15	4,3/0,29	3,5/0,23
$F_{MOD}=500$ Hz	K=0	5,7/0,38	10,6/0,71	1,8/0,12 d	5,4/0,36	4,6/0,3
	K=0,33	5,6/0,37	10,2/0,68	1,7/0,11 d	4,8/0,32	4,6/0,3
	K=0,66	4,9/0,33	8/0,53	1,7/0,11 d	3,75/0,25	4/0,27
	K=1	3,8/0,25	5,8/0,39	1,25/0,08 d	3,15/0,21	3/0,2
$F_{MOD}=600$ Hz	K=0	5/0,33	9,3/0,62	1,1/0,07	3,75/0,25	3,4/0,23
	K=0,33	4,9/0,33	8,55/0,57	1,1/0,07	3,3/0,22	3,4/0,23
	K=0,66	4,2/0,28	7,4/0,49	1/0,06	2,7/0,18	3/0,2
	K=1	3,5/0,23	5,4/0,36	0,75/0,05	2,1/0,14	2,2/0,15

pentru diferite filtre trece-jos. Prin tatonări, autorul a putut stabili că dependența redată grafic în fig.6.5 este bine modelată de relația:

$$A_R(F_{MOD}, f_s) = (1,3 - \frac{F_{MOD}}{100}) (\frac{f_s}{90})^2 \quad (6.12)$$

în care  $f_{MOD}$  și  $f_s$  se exprimă în Hz.

Din relația (6.12) se observă că pentru o frecvență de modulare dată amplitudinile funcțiilor măsurate sînt proporționale cu pătratul frecvenței de tăiere a filtrului.

Fotografiile E3-5 la E3-10 redau funcțiile de intercorelație măsurate pentru filtrul trece-bandă (355 Hz - 1,4 kHz). La frecvențe de modulare joase ( $F_{MOD}=200$  Hz, 300 Hz) aspectul funcțiilor este triunghiular, cu creșterea frecvenței ( $F_{MOD}$  avînd valori de 300 Hz, 400 Hz, 500 Hz, 600 Hz) funcțiile măsurate se apropie tot mai mult de sinusoidă dar se poate sesiza faptul că ele se compun din exponențiale "racordate" la vîrfuri.

Efectul modificării frecvențelor de trecere și de tăiere ale filtrului trece-bandă asupra amplitudinilor funcțiilor de intercorelație se evidențiază în fotografiile E3-11 la E3-14; în toate cazurile  $F_{MOD}=600$  Hz, ca și pentru filtrul de referință (în

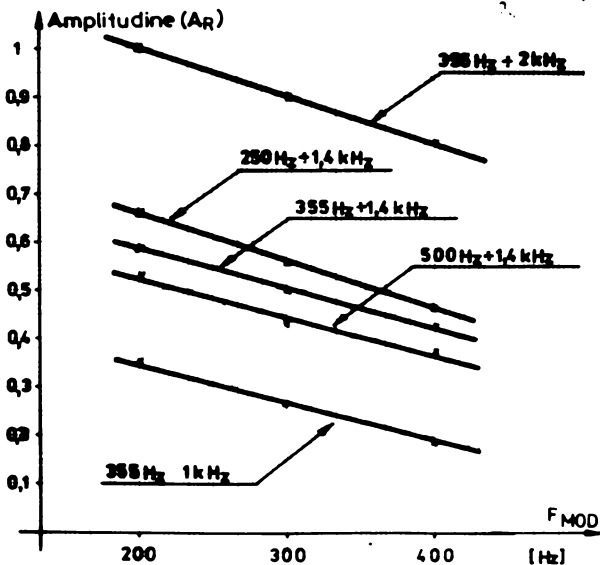


Fig.6.6. Dependența amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de frecvența de modulare, pentru diferite filtre trece - bandă.

F3-10). Se constată o sensibilitate puternică a amplitudinilor măsurate, în raport cu frecvența de tăiere a filtrului trece-bandă; la scăderea frecvenței de tăiere, scăderea amplitudinii este însoțită de distorsiuni de forma (foto.F3-12).

Pentru a evidenția sensibilitatea amplitudinii funcției de intercorelație în raport cu frecvențele caracteristice ale filtrului trece-bandă precum și în raport cu intensitatea semnalului perturbator, în tabelul 6.7 se prezintă valorile normate ale amplitudinilor măsurate la diferite frecvențe de modulare. Pe baza unor date din acest tabel, în fig.6.6 este reprezentată dependența amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de frecvențe de modulare și de banda de frecvența a filtrului. Prin tatonări, autorul a stabilit că dependențele redată grafic în fig.6.6 sînt bine modelate de relația:

$$A_R(F_{MOD}, f_s, f_j) = \frac{0,75(f_s - f_j) - F_{MOD}}{1000} \quad (6.13)$$

în care  $f_s$ ,  $f_j$  și  $F_{MOD}$  se exprimă în Hz.

Amplitudinea măsurată este proporțională cu banda de trecere a filtrului și scade cu creșterea frecvenței de modulare. Frecvența optimă la care se pot face măsurătorile este ușor peste frecvența de trecere a filtrului ( $F_{MOD} \geq f_j$ ); acolo funcțiile de intercorelație nu prezintă distorsiuni și numărul de segmente calculate pentru o perioadă este relativ mare.

#### 6.2.5. Efectul perturbațiilor asupra funcțiilor de intercorelație empirice

Pe baza datelor cuprinse în tabelul 6.7, se pot reprezenta diferite grafice care reflectă efectul zgomotului perturbator asupra amplitudinilor funcțiilor de intercorelație empirice. Astfel, în fig.6.7 se observă că la creșterea gradului de perturbare caracterizat de parametrul K, curbele se apropie și deci, rezoluția metodei în raport cu modificarea frecvențelor caracteristice ale filtrului, scade. Un alt aspect care poate fi urmărit este efectul zgomotului perturbator asupra amplitudinilor funcțiilor de intercorelație pentru un filtru dat, în raport cu frecvența de modulare. Astfel de formații de caracteristici sînt prezentate în figurile 6.8 și 6.9 pentru filtrele trece-bandă (355 Hz - 1,4 kHz) respectiv (355 Hz - 2 kHz). Trăsătura comună a dependențelor urmărite este scăderea liniară a amplitudinilor odată cu

creșterea frecvenței de modulare și tendința de convergență a caracteristicilor pentru  $F_{MOD}$  mare. Deosebirea este că pentru filtrul trece-bandă (355 Hz - 1,4 kHz), diferențele dintre caracte-

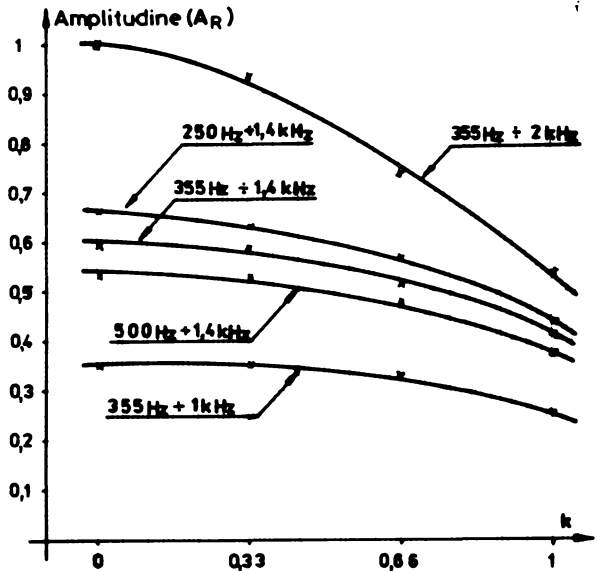


Fig.6.7. Dependența amplitudinilor FIC de coeficientul de perturbare  $K$  pentru diferite filtre de tipul trece-bandă ( $F_{MOD} = 200$  Hz).

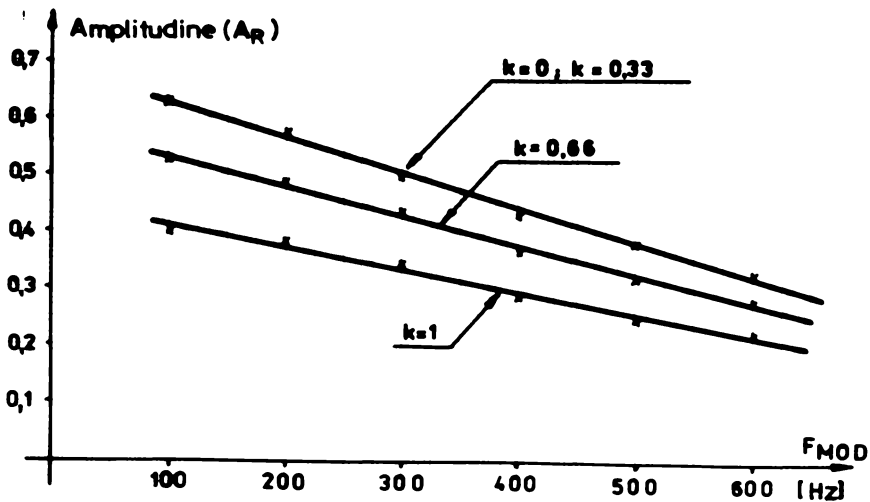


Fig.6.8. Dependența amplitudinilor FIC de  $F_{MOD}$ , în condiții de perturbare pentru FTB (355 Hz - 1,4 kHz).

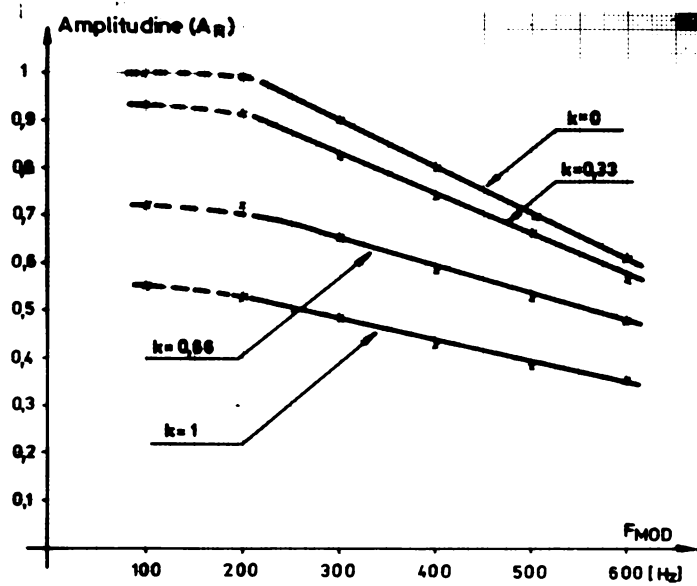


Fig.6.9. Dependența amplitudinilor FIC de  $F_{MOD}$ , în condiții de perturbare, pentru FTB (355 Hz-2 kHz).

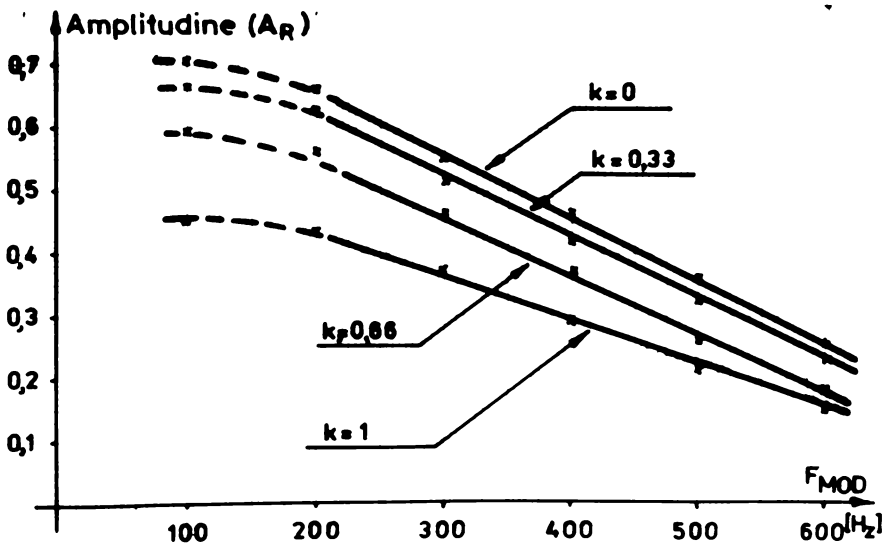


Fig.6.10. Dependența amplitudinilor FIC de  $F_{MOD}$ , în condiții de perturbare, pentru FTB (250 Hz-1,4 kHz).

isticile corespunzătoare lui  $K=0$  și  $K=0,33$  sînt ne semnificative (sub eroarea de măsurare) în timp ce în fig.6.9 toate cele patru caracteristici sînt clar diferențiate. De asemenea, pentru filtrul (355 Hz - 2 kHz) se constată o limitare a amplitudinilor măsurate la  $F_{MOD}=100$  Hz (limitarea este introdusă de convertorul analog-numeric al corelatorului). Atît diferențierea caracteristicilor pentru  $K=0$  și  $K=0,33$  cît și limitarea amplitudinilor măsurate apar odată cu creșterea benzii de trecere a filtrului deoarece ele sînt cauzate de creșterea frecvenței de tăiere (fig.6.9) ca și de scăderea frecvenței de trecere (fig.6.10). În același sens, fig.6.11 evidențiază că la îngustarea benzii de trecere a FTB, chiar și caracteristica pentru  $K=0,66$  apare suprapusă carac-

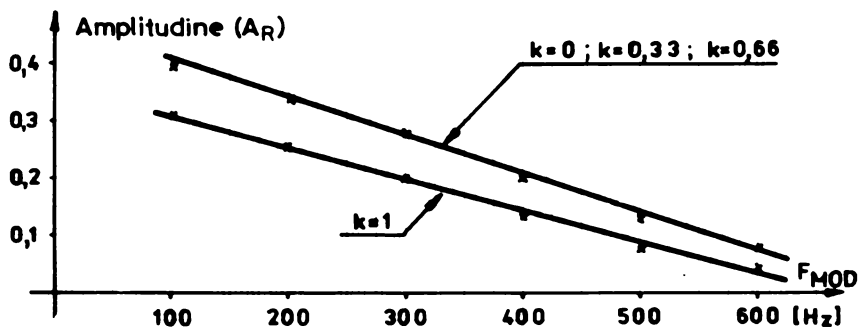


Fig.6.11. Dependența amplitudinilor FIC de  $F_{MOD}$ , în condiții de perturbare, pentru FTB (355 Hz-1 kHz).

teristicilor pentru  $K=0$  și  $K=0,33$ . Urmărirea comparativă a graficelor din figurile 6.8; 6.9; 6.10 și 6.11 arată că amplitudinea funcției de intercorelație depinde de trei factori: banda de frecvență a filtrului, mărimea coeficientului de perturbare și frecvența semnalului modulator.

#### 6.2.6. Observații privind precizia funcțiilor de intercorelație empirice

Corelatorul CNTR 1024 utilizat în instalația din fig.6.1 nu efectuează operația de mediere ci doar acumulează valorile produselor de corelație pentru fiecare întârziere incrementală. În determinarea funcțiilor de intercorelație empirice, pentru fiecare întârziere se însumează produsele obținute pentru  $M$  pe-

rechi de puncte. Pentru evidențierea rolului parametrului de calcul  $M$ , în fig.6.12 se prezintă dependența amplitudinilor de numărul de puncte prin care  $R_{xy}(\zeta)$  se calculează. Se observă creșterea liniară a maximului funcțiilor de intercorelație odată cu  $M$ . Referitor la schema bloc din fig.6.1 condițiile experimentale sînt:  $K_1=K_2=1$ . Trebuie menționat, de asemenea, că fiecare punct grafic s-a obținut prin medierea a cel puțin cinci amplitudini de FIC empirice.

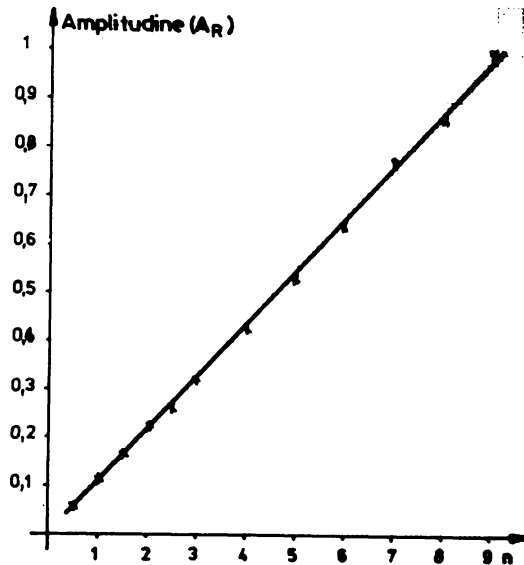


Fig.6.12. Dependența amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de numărul de puncte ( $M=n \cdot 10^7$ ) prin care  $R_{xy}(\zeta)$  se calculează (fiecare punct din grafic s-a determinat prin medierea mai multor valori individuale măsurate).

Pentru a evidenția efectul parametrului  $M$  asupra variației măsurătorilor, în tabelul 6.8 sînt trecute diviziunile citite pe ecranul osciloscopului corespunzătoare amplitudinilor funcțiilor de intercorelație pentru  $M=100.000$  (a) respectiv pentru  $M=50.000$  (b). În ambele cazuri, constanta de multiplicare este  $0,5$   $v/div$ . Măsurătorile s-au efectuat în condițiile  $K_1=K_2=1$  (v.fig.6.1). Valorile măsurate se reflectă în graficul din fig.6.12 prin punctele corespunzătoare la  $n=1$  și  $n=0,5$ .

Se obțin următoarele medii aritmetice:

- pentru datele din tabelul 6.8.a,  $\bar{x}_a=2,37$

- pentru datele din tabelul 6.8.b,  $\bar{x}_b=1,186$ .

Raportul valorilor medii  $\bar{x}_a/\bar{x}_b=2$ , corespunde dublării numărului de puncte M de la măsurătorile cuprinse în partea b) la cele cuprinse în partea a) a tabelului 6.8.

TABELUL 6.8.

4,8	4,8	4,6	4,9	4,7
4,9	5,2	4,6	4,7	4,9
4,6	4,8	4,8	4,7	4,8
4,6	4,7	4,6	4,6	4,6
4,8	4,6	4,8	4,6	4,8

a)

2,3	2,5	2,2	2,3	2,4
2,5	2,4	2,3	2,4	2,6
2,4	2,4	2,2	2,4	2,3
2,3	2,3	2,4	2,4	2,4
2,1	2,5	2,5	2,4	2,4

b)

Pentru a compara varianțele celor două șiruri de măsurători se "egalizează" mai întâi valorile medii, de exemplu, înmulțind valorile din tabelul 6.8.b cu coeficientul  $x_a/x_b$ . Cu formula:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 .$$

se obțin următoarele dispersii:

- pentru  $M = 100.000$ ,  $\sigma_a^2 = 0,004127$  ;

- pentru  $M = 50.000$ ,  $\sigma_b^2 = 0,0116158$  .

Rezultatul denotă că pentru o frecvență de modulare dată ( $F_{MOD}$ ), varianța amplitudinilor funcțiilor măsurate scade (precizia crește) odată cu creșterea parametrului M. Comparativ cu cazul funcțiilor de intercorelație determinate pentru procese staționare, unde valoarea uzuală a numărului de eșantioane este  $M=50.000$ , calculul intercorelațiilor pentru procese nestaționare necesită un număr mai mare de puncte pentru obținerea stabilității statistice:  $M=500.000 - 1.000.000$ .

Măsurători efectuate pentru diferite frecvențe de modulare, păstrind constant numărul de eșantioane M, evidențiază că varianța amplitudinilor intercorelațiilor empirice scade odată cu creșterea frecvenței  $F_{MOD}$ . Astfel, de exemplu, referindu-ne la familia de caracteristici din fig.6.2, amplitudinile pentru filtrul de 90 Hz au o varianță relativ mare la  $F_{MOD}=30$  Hz (punctul corespunzător din grafic s-a obținut prin medierea mai multor rezulta-



te experimentale) și o stabilitate statistică din ce în ce mai bună odată cu creșterea frecvenței  $F_{MOD}$ .

Combinând cele două aspecte, evidențiate anterior rezultă că precizia măsurătorilor crește odată cu numărul perioadelor cuprinse în intervalul de eșantionare a semnalului. Practic,  $F_{MOD}$  se alege în mod rațional (ținând seama de caracteristica de frecvență a sistemului testat și de viteza de lucru a corelatorului) după care  $M$  se alege suficient de mare pentru a asigura stabilitatea statistică a măsurătorilor.

Observațiile precedente se referă la cazul că măsurătorile nu sînt afectate de perturbații. Este de așteptat ca precizia măsurătorilor să scadă în condiții de perturbare. Se pune problema în ce măsură poate fi crescută precizia măsurătorilor perturbate, prin creșterea numărului de valori eșantionate,  $M$ . Pentru urmărirea acestor aspecte, în tabelul 6.9 sînt cuprinse amplitudinile funcțiilor de intercorelație măsurate pentru filtrul de 90 Hz, la  $F_{MOD}=60$  Hz în condițiile  $K1=2$ ,  $K2=1$ ,  $K=1$ ,  $M=100.000$ .

TABELUL 6.9.

11,2	11	11	11	11,6
10,8	11,2	11,4	11,2	11,6
11	10,2	11	10,8	11,2
12	10,8	10,8	11,8	11
10,2	10,8	11,6	10,6	11,4

a)

7,6	5,6	8	7,2	7,6
6,6	7,6	6	7	8,2
7,6	7	6,8	6,4	7,8
5,6	7	6,4	7	7
6,6	7,6	6,4	7,2	7,8

b)

Tabelul 6.9 cuprinde amplitudinile măsurate pentru  $M=100000$ , în cazul neperturbat a) și respectiv perturbat b) - cu  $K1=2$ ,  $K=1$ . Se obțin următoarele valori medii  $m_1=x_a=11,088$ ;  $m_{p1}=x_b=7,024$  ceea ce înseamnă că, datorită perturbației, valoarea medie a scăzut la 63% față de cazul neperturbat. Pentru compararea dispersiilor se "egalează" valorile medii, de exemplu înmulțind valorile din tabelul 6.9.a cu constanta  $m_{p1}/m_1$ . În aceste condiții se obține pentru cazul neperturbat varianța  $\sqrt{v_1^2}=0,0746$  iar pentru cazul perturbat, o varianță mult mai mare:  $\sqrt{v_{p1}^2}=0,3739$ . Varianța pentru cazul neperturbat reprezintă doar 20% din varianța corespunzătoare măsurătorilor perturbate. Se desprinde concluzia că zgomotul propriu al sistemului (zgomotul perturbator) are ca efect "marcarea" măsurătorilor (scăderea valorii medii) și scăderea preciziei acestor

tora (creșterea varianței).

Repetind măsurătorile, în aceleași condiții, dar crescând numărul de eșantionare la  $M=300.000$  se obțin amplitudinile trecute în tabelul 6.10.a (cazul neperturbat) respectiv 6.10.b (cazul perturbat).

TABELUL 6.10.

31,2	32,8	32	34,4	33,6
32	33,6	32	33,6	32,8
33,6	33,6	34,4	32,8	34,4
31,2	34,4	32,8	33,6	34,4
33,6	33,6	32,8	35,2	32,8

a)

21,6	23	20,8	20	21,6
23,8	21,6	20	21,6	23,8
22,4	20	19,4	20,8	20,8
20,8	21,6	20	20,8	21,6
22,4	20,8	18,6	20,8	19,4

b)

Se obțin următoarele valori medii  $m_3=33,248$ ;  $m_{p3}=21,12$ . Rezultă că creșterea numărului de eșantioane  $M$  de la  $10^5$  la  $5 \cdot 10^5$ , nu afectează raportul dintre valorile medii pentru cazurile perturbat și neperturbat:

$$\frac{m_{p3}}{m_3} \approx \frac{m_{p1}}{m_1} \approx 63 \%$$

Se constată creșterea liniară a valorilor medii în raport cu numărul de eșantioane utilizate la calculul funcțiilor de intercorelație atât pentru cazul perturbat cât și pentru cazul fără perturbație. Egalizând valorile medii ale măsurătorilor pentru  $M=300.000$  la  $m_{p3}=21,12$  se obțin următoarele dispersii  $\sigma_{p3}^2=1,114$ ;  $\sigma_3^2=0,414$ . Varianta măsurătorilor este mai mică în cazul neperturbat. Îmbunătățirea preciziei măsurătorilor prin creșterea numărului de eșantioane  $M$ , se evidențiază dacă aducem valoarea medie a datelor din tabelul 6.10.b la  $m_{p1}$  și calculăm varianța corespunzătoare,  $\sigma_{p3}^*$ . Se obține  $(\sigma_{p3}^*)^2=0,1794$ , ceea ce reprezintă o îmbunătățire substanțială față de  $\sigma_{p1}^2=0,5739$ .

În condiții de perturbare, s-au făcut măsurători și pentru cazul  $M=500.000$ . Au rezultat pentru funcțiile de intercorelație amplitudinile trecute în tabelul 6.11, pentru care valoarea medie este  $m_{p5}=37$ . Dispersia calculată pentru acest caz  $\sigma_{p5}^2=2,8$ . Dacă se transformă aceste date pentru a reprezenta valoarea medie  $m_{p1}=7,024$  rezultă o dispersie  $(\sigma_{p5}^*)^2=0,1$ . Comparând  $\sigma_{p5}^*$  cu  $\sigma_{p1}^*$  este evident că precizia măsurătorilor a crescut substanțial prin

creșterea numărului de eșantioane M de la 100.000 la 500.000.

TABELUL 6.11.

36	35	36	38	39
39	37	37	37	39
37	38	40	32	35
36	36	39	38	36
36	38	37	38	36

6.3. Posibilități de aplicare a metodelor de măsurare prezentate

În dezvoltarea metodelor de măsurare prezentate în lucrare s-au avut în vedere semnale și sisteme electrice. Valabilitatea formulilor empirice stabilite în capitolul 6 este legată de anumite valori particulare ale parametrilor filtrelor ce simulează un sistem fizic. Trebuie subliniat însă că cele două metode de prelucrare a semnalelor, au o aplicabilitate mult mai largă, ele putînd fi utilizate indiferent de natura fizică a semnalelor. Desigur, în vederea prelucrării, diferitele mărimi trebuie convertite în semnale electrice (tensiuni) iar parametrii ce intervin în prelucrarea semnalelor se cer adaptați caracteristicilor acestora.

Metoda de măsurare nestaționară, în prima ei variantă a fost utilizată la analiza vibrațiilor mecanice tranzitorii ce apar la lansările de rachete [137]. Completările aduse în prezenta lucrare, fac metode mai puternică în sensul că se pot obține cîte două tipuri de profile temporale și spectrale față de un singur tip în cadrul variantei originale. Procedul poate fi utilizat în analiza regimurilor tranzitorii deterministe sau aleatoare care apar în cadrul sistemelor electromagnetice, la conectări sau deconectări de instalații electrice, la fenomenele de arc electric, la analiza nestaționarității în semnalele bioelectrice (spike-uri, potențiale evocate) etc.

Cea de-a doua metodă de măsurare prezentată se înscrie în domeniul estimării parametrilor, al identificării stării unui echipament cu scopul de a detecta funcționarea anormală sau tendința de deplasare în afara domeniului de siguranță. Testarea cu

impulsuri de zgomot este necesară în cazurile cînd puținele informații apriorice despre sistem și volumul mare de calcule ne permit utilizarea metodelor pasive /93, 123/ iar pe de altă parte, sistemul nu poate fi întrerupt sau izolat pentru testarea cu semnalul aplicat în mod continuu. Avantajul utilizării impulsurilor de zgomot obținute prin modulare este că se poate extrage ușor răspunsul sistemului la zgomotul injectat și astfel, nivelul acestuia se poate menține relativ redus față de zgomotul din funcționarea normală. /26, 50, 54/. Este interesant de semnalat că sincronizarea instalației de măsurare cu impulsurile de zgomot de testare se poate realiza prin intermediul serviciului de oră exactă /54/. Impulsurile de zgomot se utilizează pentru testarea instalațiilor de telecomunicații și de radiolocație /2, 26, 120/. Alt grup de aplicații posibile ar avea scopul detectării defectelor aparatului de bord și a dispozitivelor electrice și electromecanice din industria aerospațială /127/. Trebuie subliniat că dacă testarea cu impulsuri de zgomot au deja aplicații cunoscute, extragerea răspunsului la impulsurile de zgomot prin analiză de corelație are caracter de noutate. De asemenea în lucrare se evidențiază atât pe cale analitică cît și experimentală faptul că prin analiză de corelație se poate extrage frecvența semnalului modulator al procesului de impulsuri aplicat la intrarea unui sistem chiar și fără a utiliza detecția procesului de răspuns al sistemului. În această posibilitate constă avantajul utilizării analizei de corelație în testarea sistemelor cu zgomot de impulsuri, în raport cu procedeele de filtrare care pot fi aplicate doar proceselor de ieșire detectate în prealabil /26/.

Funcția de intercorelație staționară este utilizată în supravegherea reactoarelor nucleare sub forma procedurii "Strip" bazat pe diferența dintre funcțiile calculate pentru o instalație presupusă defectă respectiv pentru una presupusă intactă, de referință /81/. Metoda prezentată în lucrare se bazează doar pe sensibilitatea amplitudinii frecvenței de intercorelație în raport cu modificarea parametrilor sistemului.

Trebuie subliniat că prin utilizarea unor transformări neliniare ale semnalului de ieșire se pot obține diferite relații de dependență între amplitudinea intercorelației și parametrii caracteristici ai sistemului. În lucrare, s-a utilizat doar detecția pătratică a semnalului de ieșire. Ca exemplificare, pentru aceleași filtre trece-jos, dependența amplitudinii de frecvența

de tăiere și de frecvența de modulare este redată de relația (6.10) - pentru cazul fără detecție - respectiv de relația (6.12) - pentru cazul că semnalul de ieșire este detectat pătratic. Similar, pentru filtrele de tipul trece bandă se obțin două relații total diferite: (6.11) și (6.13) pentru semnalul de ieșire nedetectat respectiv detectat pătratic. Este de presupus că utilizarea altor transformări neliniare ale semnalului de ieșire permite obținerea mai multor relații de dependență a amplitudinii funcțiilor de intercorelație de parametrii sistemului. Alegerea unei anumite transformări depinde de sensibilitatea valorilor măsurate în raport cu parametrul urmărit. De exemplu, modificarea benzii de trecere a filtrului se reflectă în relația (6.13) iar modificarea frecvenței de trecere influențează amplitudinea măsurată fără utilizarea detecției, conform relației (6.11). Este evidentă utilitatea transformărilor neliniare /67/, în diagnosticul tehnic pe baza metodei de măsurare prezentată.

Utilizarea metodelor de măsurare prezentate va fi desigur facilitată de dezvoltarea rapidă a tehnologiei electronice. Se subliniază în acest sens două aspecte:

- metoda de măsurare nestaționară poate fi implementată la un preț redus, în sisteme bazate pe microprocesor;

- existența unor corelatoare CMOS integrate capabile să prelucreze semnale de frecvență pînă la 20 MHz /34/ va permite creșterea cu totul remarcabilă a frecvenței de modulare în cadrul metodei de testare cu impulsuri de zgomot.

## CAPITOLUL 7.

### CONCLUZII GENERALE

În teza elaborată s-au urmărit aspecte teoretice și experimentale privitoare la posibilitățile de utilizare a analizei de corelație la caracterizarea proceselor nestaționare. Nota distinctivă a lucrării rezultă tocmai din abordarea proceselor nestaționare (în particular, tranzitorii) știut fiind că majoritatea covârșitoare a lucrărilor din domeniul analizei de corelație se referă la procese staționare și ergodice. Trebuie subliniat că în literatura de specialitate analiza de corelație nestaționară este dezvoltată aproape exclusiv din punct de vedere teoretic; în prezenta lucrare, pe lângă aspecte de calcul, teoretice, se tratează și metode de măsurare a proceselor nestaționare. Teza este situată astfel, la intersecția analizei de corelație teoretică (înțeleasă ca metodă de calcul statistic) cu tehnicile de măsurare corelativă.

Principalele contribuții conținute în lucrare se grupează în două direcții: cea dintâi are ca scop ÎNCADRAREA metodei corelației în rîndul metodelor uzuale (deterministe) de studiu a regimului tranzitoriu și are un caracter preponderent teoretic; cea de-a doua se referă la DEZVOLTAREA unor procedee de măsurare corelativă și vizează aspecte aplicative ale analizei de corelație nestaționară.

A. Sub denumirea generică de "ÎNCADRARE a metodei corelației în rîndul procedeelor uzuale de studiu a regimului tranzitoriu" se deduc următoarele contribuții:

1. Se prezintă o clasificare originală a problemelor de regim tranzitoriu și se evidențiază larga aplicabilitate a metodelor statistice (inclusiv a metodei corelației) comparativ cu posibilitățile mai restrînse ale metodelor deterministe.

2. Metoda variabilelor de stare este evidențiată ca punte de legătură între ecuațiile diferențiale deterministe și respec-

tiv stocastice, fiind deci modul natural de încadrare a metodei corelației în rîndul metodelor de studiu a regimului tranzitoriu.

3. Pe baza unei sinteze a literaturii de specialitate se arată că "încadrarea" uzuală a metodei corelației în rîndul proceselor de studiu a regimului tranzitoriu are la bază asemănarea formală cu metoda impulsului Dirac. În acest sens, metoda corelației reprezintă un procedeu experimental de identificare bazat pe măsurarea proceselor staționare de intrare și ieșire fără tangență cu stadiul regimurilor aleatoare nestaționare.

4. Pornind de la interpretarea procesului stocastic ca o familie infinită de funcții depinzînd de o variabilă, se relevă caracterul de complementaritate al descrierilor proceselor nestaționare prin ecuații pentru realizări particulare respectiv prin ecuații pentru densități de probabilitate și se aplică aceste procedee cu caracterizarea proceselor tranzitorii repetitive.

5. Se face o analiză critică privitoare la înțelesul acordat în literatura de specialitate noțiunilor de regim permanent și regim tranzitoriu; se propune o clasificare originală, valabilă deopotrivă pentru semnale deterministe și aleatoare.

6. Ca o generalizare a descompunerilor cunoscute pentru cazul determinist, în cadrul metodei corelației se separă în relațiile ce descriu regimul tranzitoriu, componentele de regim permanent și de regim tranzitoriu ale valorii medii, autocovarianței și autocorelației.

7. Generalizînd teorema condițiilor inițiale din cazul determinist, se formulează, în cadrul metodei corelației, teoreme ale condițiilor inițiale pentru valoarea medie, autocorelația și autocovarianța vectorului de stare.

8. Se fundamentează o metodă de calcul a momentelor statistice pentru semnale deterministe, bazată pe teoria funcțiilor generalizate.

9. Se evidențiază posibilitatea, oferită de metoda corelației, de a trata în mod unitar regimurile tranzitorii indiferent dacă acestea sînt produse de semnale deterministe sau aleatoare.

10. Pentru caracterizarea proceselor staționare sau nestaționare în domeniul frecvență, se introduce noțiunea de spectru complex dublu, ca o generalizare a spectrului frecvențial dublu.

11. Se arată că "durata" regimurilor tranzitorii aleatoare depinde numai de constantele de timp ale sistemului (ca în

cazul determinist) ci și de "gradul de corelare" al mărimii de excitație; cu ajutorul funcției de autocorelație a procesului de ieșire, se propun modalități de definire a "duratei" regimului tranzitoriu valabile deopotrivă pentru procese deterministe și aleatoare.

B. Cu privire la DEZVOLTAREA unor metode de măsurare corelativă a proceselor nestaționare au rezultat următoarele contribuții:

1. Pe baza consultării a numeroase lucrări de specialitate se relevă interesul pentru utilizarea operației de filtrare în domeniul analizei de corelație nestaționare. În acest sens, este evidențiată o metodă off-line (Wierwille) care permite estimarea funcțiilor de corelație nestaționare pe baza unei singure realizări respectiv a unei singure perechi de realizări.

2. Pornind de la analiza critică a metodei Wierwille, se dezvoltă un procedeu de măsurare a profilelor  $t = \text{constant}$  ale funcțiilor de corelație nestaționare. Această completare a metodei aduce avantaje importante în legătură cu calculul spectrului instantaneu.

3. Se evidențiază posibilitatea aplicării metodei de corelație nestaționară asupra unor regimuri tranzitorii repetate, cu avantajul creșterii raportului semnal/zgomot și se sugerează un procedeu de determinare analitică a filtrelor corelatorului.

4. S-au realizat unele subrutine pentru un calculator numeric universal, remarcându-se :

- subrutina Gauexp pentru generarea de realizări ale unui proces stocastic staționar, gaussian, cu funcție de autocorelație exponențială; se arată cum trebuie ales parametrul subrutinei pentru ca procesul generat să corespundă unui proces fizic cu bandă de frecvență dată;

- subrutinele Axe și Graf care asigură o reprezentare spațială a funcțiilor de corelație și a spectrelor nestaționare.

5. Se deduc modele discrete pentru filtre de ordinele unu și doi și se verifică prin simulare funcționarea acestora în condițiile aplicării la intrare a unor impulsuri de zgomot gaussian.

6. Se verifică metoda de corelație nestaționară prin si-



mularea funcționării corelatorului în cazul a două procese nestacionare particulare. Funcțiile de corelație nestacionare se prezintă sub forma unor profile  $t=\text{constant}$  respectiv  $\tau=\text{constant}$  iar spectrul nestacionar apare sub forma unor profile spectrale instantanee respectiv tranzitorii.

7. Utilizând noțiunea de spectru complex dublu introdusă de autor se arată că modelarea în amplitudine conservă caracterul de zgomot alb. Rezultatul constituie o justificare teoretică a testării sistemelor cu impulsuri de zgomot.

8. Utilizând funcția pondere a sistemului, se deduc formule de calcul pentru valoarea medie și funcția de autocorelație ale răspunsului unui sistem liniar la procese stocastice de impulsuri.

9. Se studiază transferul liniar al proceselor stocastice de impulsuri prin ecuații pentru realizări particulare respectiv prin ecuații pentru densități de probabilitate și se formulează condiții de continuitate pentru valoarea medie, varianță și respectiv densitatea de probabilitate a procesului nestacionar de ieșire.

10. Printr-un procedeu de calcul original se determină expresii pentru funcțiile de intercorelație "staționare" dintre un semnal dreptunghiular sincron și procesul de ieșire al unui sistem liniar excitat cu impulsuri de zgomot alb respectiv dintre un semnal dreptunghiular sincron și răspunsul detectat pătratic al sistemului excitat cu impulsuri de zgomot alb.

11. Se studiază sensibilitatea parametrică a amplitudinilor funcțiilor de intercorelație stabilite analitic, în raportul cu frecvența de tăiere, pentru un sistem simulat printr-un filtru trece-jos de ordinul unu.

12. Se verifică experimental, cu ajutorul unui corelator pentru procese staționare, dependența amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de frecvența de modulare a procesului de impulsuri, atât în cazul utilizării detecției pătratice, cât și pentru cazul semnalului de ieșire nedetectat.

13. Se deduc formule empirice pentru amplitudinile funcțiilor de intercorelație corespunzătoare unor sisteme modelate prin filtre trece-jos și filtre trece-bandă de ordin superior.

14. Se studiază efectul unui semnal perturbator (care simulează zgomotul propriu al sistemului testat cu impulsuri de

zgomot) asupra amplitudinilor funcțiilor de intercorelație empirice.

15. Se analizează din punct de vedere al valorii medii și al varianței efectul numărului de eşantioane prelevate din semnal asupra funcțiilor de intercorelație empirice precum și posibilitatea reducerii efectului zgomotului perturbator prin creșterea numărului de eşantioane, M.

16. Pe baza dependenței amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de parametrii sistemului liniar se evidențiază un nou principiu de utilizare a analizei de corelație: testarea sistemelor cu impulsuri de zgomot în scopul detectării preventive a unei degradări a parametrilor sistemelor. Din acest punct de vedere se relevă importanța transformărilor neliniare (în particular, a detecției pătratice) ale semnalului de ieșire pentru a obține diferite dependențe ale amplitudinilor funcțiilor de intercorelație de parametrii sistemului.

ANEXA A.

CALCULUL FUNCȚIILOR DE CORELAȚIE STATISTICE PENTRU  
UNELE SEMNALE DETERMINISTE, UTILIZÂND TEORIA  
FUNCȚIILOR GENERALIZATE.

Calculul funcțiilor de corelație statistice pe baza interpretării relației (3.34) în sensul teoriei distribuțiilor presupune cunoașterea densității mutuale de probabilitate  $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$  a variabilelor  $x_1$  și  $x_2$ ; aceasta se poate determina cu formula /91/ :

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2 | X_1 = x_1) \quad (\text{A.1})$$

- Cazul unui semnal constant,  $x(t)=U$ . Evident,

$$f_{x_1}(x_1) = \delta(x_1 - U), \quad f_{x_2}(x_2 | X_1 = x_1) = \delta(x_2 - U). \quad (\text{A.2})$$

Rezultă densitatea de probabilitate:

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - U) \delta(x_2 - U) = \delta(x_1 - U, x_2 - U), \quad (\text{A.3})$$

care reprezintă o funcție generalizată (distribuție) concentrată într-un punct (de coordonate  $x_1 = x_2 = U$ ). Înlocuind (A.3) în (3.34) și aplicând regulile de calcul cu distribuții se obține:

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \langle \delta(x_1 - U, x_2 - U), x_1 x_2 \rangle = U^2. \quad (\text{A.4})$$

- Cazul unui semnal sinusoidal cu fază inițială aleatoare. Mărimile  $X_1$  și  $X_2$  sînt efectiv variabile aleatoare, din cauza caracterului imprevizibil al fazei inițiale  $\varphi$ , între valorile curențe:

$$x_1 = \cos(\omega t_1 + \varphi)$$
$$x_2 = \cos(\omega t_2 + \varphi + \omega \tilde{t}); \quad \tilde{t} = t_2 - t_1$$

există relația:

$$\frac{x_1^2}{\sin^2 \omega \tau} + \frac{x_2^2}{\sin^2 \omega \tau} - 2 x_1 x_2 \frac{\cos \omega \tau}{\sin^2 \omega \tau} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Ecuatia (A.5) reprezintă o elipsă centrată în originea  $x_1=0$ ,  $x_2=0$ . Densitatea de probabilitate  $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2)$  este o distribuție concentrată pe elipsă de ecuație (A.5). Pentru aplicarea formulelor (A.1) și (3.36) este necesar să se exprime densitățile de probabilitate  $f_{x_1}(x_1)$  și  $f_{x_2}(x_2|X_1=x_1)$  privind pe  $X_1$  și  $X_2$  ca funcții de variabila aleatoare  $\Phi$  a cărei densitate de probabilitate  $f_{\Phi}(\varphi)$  este identic nulă în afara intervalului  $[-\pi, \pi]$ . Se obține /58/ :

$$f_{x_2}(x_2|X_1=x_1) = \begin{cases} \int_{-\pi}^0 f_{\Phi}(\varphi) d\varphi & \text{pentru } x_2=x_{2a} \\ \int_0^{\pi} f_{\Phi}(\varphi) d\varphi & \text{pentru } x_2=x_{2b} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

în care  $x_{2a}$  și  $x_{2b}$  sînt rădăcinile ecuației (A.5) :

$$x_{2a,b} = x_1 \cos \omega \tau \pm \sqrt{1-x_1^2} \cdot \sin \omega \tau.$$

Altfel scris,  $f_{x_2}(x_2|X_1=x_1)$  este suma a două distribuții singulare,

$$f_{x_2}(x_2|X_1=x_1) = \delta(x_2-x_{2a}) \cdot \int_{-\infty}^0 f_{\Phi}(\varphi) \cdot d\varphi + \delta(x_2-x_{2b}) \cdot \int_0^{\pi} f_{\Phi}(\varphi) \cdot d\varphi. \quad (\text{A.7})$$

Sînt interesante două cazuri: faza uniform distribuită și faza perfect controlabilă,  $\varphi = \varphi_0$  /41, 58/. În primul caz, expresia (A.7) devine:

$$f_{x_2}(x_2|X_1=x_1) = \frac{1}{2} \delta(x_2-x_{2a}) + \frac{1}{2} \delta(x_2-x_{2b}) \quad (\text{A.8})$$

iar conform /91, 58/ ,

$$f_{x_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x_1^2}} & \text{pentru } |x_1| \leq 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Inlocuind (A.8) și (A.9) în (A.1) și apoi în (3.34) rezultă funcția de autocorelație statistică pentru cazul distribuției uniforme a fazei:

$$R_{x_1 x_2}^{\square}(\tau) = \langle f_{x_1}(x_1) x f_{x_2}(x_2 | x_1 = x_1), x_1 x_2 \rangle = A+B$$

în care,

$$\begin{aligned} A &= \left\langle \frac{1}{\pi\sqrt{1-x_1^2}} x \frac{1}{2} \delta(x_2 - x_{2a}), x_1 x_2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x_1^2}} (x^2 \cos \omega\tau + x_1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sin \omega\tau) dx_1 = \\ &= \frac{\cos \omega\tau}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 + \frac{\sin \omega\tau}{2\pi} \int_{-1}^1 x_1 dx_1. \end{aligned}$$

Similar,

$$B = \frac{\cos \omega\tau}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 - \frac{\sin \omega\tau}{2\pi} \int_{-1}^1 x_1 dx_1$$

În final, rezultă

$$R_{x_1 x_2}^{\square}(\tau) = \frac{\cos \omega\tau}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Pentru cazul că faza inițială este perfect controlabilă, adică

$$f_{\Phi}(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi_0 \in [-\pi, \pi],$$

rezultă:

$$\begin{aligned} f_{x_2}(x_2 | x_1 = x_1) &= \delta(x_2 - x_{2a}) && \text{dacă } \varphi_0 < 0 \\ f_{x_2}(x_2 | x_1 = x) &= \delta(x_2 - x_{2b}) && \text{dacă } \varphi_0 > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

iar

$$f_{x_1}(x_1) = \delta(x_1 - x_1^0); \quad x_1^0 = \cos(\omega t_1 + \varphi_0). \quad (\text{A.12})$$

Considerînd, de exemplu,  $\varphi_0 < 0$  rezultă funcția de autocorelație:

$$\begin{aligned}
 R_{x_1 x_2}^{\varphi_0}(\tilde{z}, t_1) &= \langle \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_{2a}), x_1 x_2 \rangle = \\
 &= \langle \delta(x_1 - x_1^0), \langle \delta(x_2 - x_{2a}), x_1 x_2 \rangle \rangle = x_1^0 (x_1^0 \cos \omega \tilde{z} + \sin \omega \tilde{z}) \cdot \\
 &\cdot \sqrt{1 - (x_1^0)^2} = \cos(\omega t_1 + \varphi_0) \cdot \cos(\omega \tilde{z} - \omega t_1 - \varphi_0). \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

ANEXA B.

ASPECTE FUNDAMENTALE PRIVIND TRANSFORMAREA LAPLACE  
BILATERALĂ, UNI- SI BIDIMENSIONALĂ

Transformarea Laplace bilaterală unidimensională / 2.9, 112, 126/ definită de relația:

$$F(p) = L_{II}^{-1} \{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad \sigma_{x1} < \operatorname{Re}\{p\} < \sigma_{x2} \quad (\text{B.1})$$

are formula de inversiune:

$$f(t) = L_{II}^{-1} \{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt; \quad \sigma_{x1} < \sigma < \sigma_{x2}. \quad (\text{B.2})$$

Relațiile (B.1), (B.2) reprezintă o generalizare naturală a transformării Fourier dată de formulele (3.52), (3.53). Re p este partea reală a lui p.

Este important de relevat că pornind de la descompunerea funcției  $f(t)$  în componentele:

$$f_-(t) = f(t) \cdot U(-t); \quad f_+(t) = f(t) \cdot U(t), \quad (\text{B.3})$$

transformata  $F(p)$  se poate exprima cu ajutorul transformării Laplace unilaterale și unidimensionale,

$$L_I^{-1} \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad \sigma_{x1} < \operatorname{Re}\{p\}. \quad (\text{B.4})$$

Astfel, pentru  $f(t)=f_-(t)+f_+(t)$ , se obține:

$$F(p) = L_{II}^1 \{f(t)\} = F_-(p) + F_+(p); \quad \sigma_{x1} < \text{Re}\{p\} < \sigma_{x2} \quad (\text{B.5})$$

unde:

$$F_-(p) = L_I^1 \{f_-(-t)\}_{p \rightarrow -p}; \quad F_+(p) = L_I^1 \{f_+(t)\}, \quad (\text{B.6})$$

În (B.3),  $U(t)$  reprezintă funcția unitate.

Zona în care  $\text{Re}\{p\}$  din relația (B.1) ia valori se numește domeniu de convergență, precizarea acestuia fiind esențială pentru determinarea lui  $f(t)$  din (B.2). Formarea unei imagini intuitive în legătură cu domeniul de convergență este facilitată dacă se consideră o majorare exponențială a funcțiilor (B.3) :

$$\begin{aligned} |f_-(t)| &\leq K_2 \cdot e^{\sigma_{x2} \cdot t} = f_{M2}; \quad 0 < K_2 < \infty, \text{ pentru } t < 0 \\ |f_+(t)| &\leq K_1 \cdot e^{\sigma_{x1} \cdot t} = f_{M1}; \quad 0 < K_1 < \infty, \text{ pentru } t > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Transformarea Fourier dată de (3.52) este valabilă numai pentru semnale care admit o majorare ca în fig.B.1.a. Prin considerarea pe lângă semnalele care pot fi majorate ca în fig.B.1.a și a cazurilor  $0 < \sigma_{x1} < \sigma_{x2}$  (fig.B.1.b) și  $\sigma_{x1} < \sigma_{x2} < 0$  (formal, acesta se obține din cel reprezentat în fig.B.1.b prin schimbarea  $t \rightarrow -t$ ) se cuprind toate semnalele de regim tranzitoriu posibil; faptul că poate fi utilizată și în ultimele două situații menționate anterior, reprezintă un avantaj al transformării Laplace față de transformarea Fourier (3.52). Această împrejurare explică avantajul formulelor ce se introduc cu ajutorul transformării Laplace față de relațiile (3.50) și (3.54).

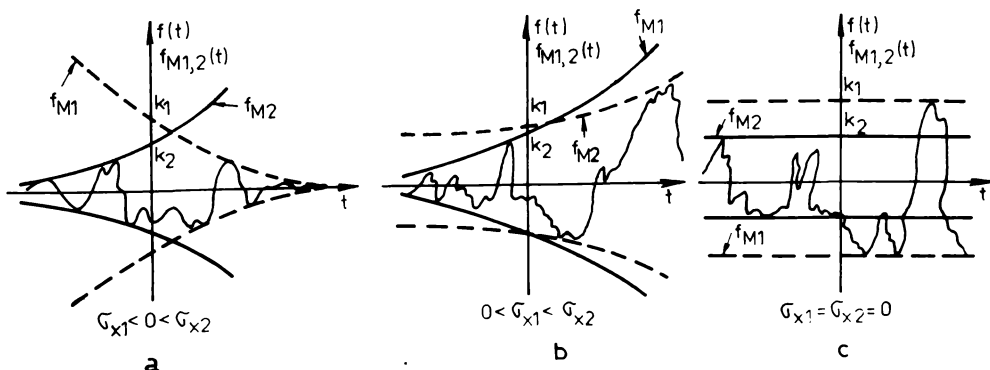


Fig.B.1. Explicativă privind semnificația domeniului de convergență.

Dacă se urmărește caracterizarea în domeniul frecvență a proceselor staționare sau a proceselor nestaționare cu parte staționară separabilă /8/ apare situația că nici transformarea Laplace bilaterală nu poate fi efectuată în condițiile unei convergențe în sens obișnuit; în această împrejurare se utilizează metode speciale de calcul a integralelor divergente. Uzu- al, se consideră convergența în sensul lui Césàro /26/. Un caz reprezentativ în care se utilizează convergența în sensul lui Césàro este acela când domeniul de convergență al transformărilor (B.1), (B.2) se reduce la axa imaginară (fig.B.1.c).

Considerații similare se pot face și cu privire la transformarea Laplace bilaterală și bidimensională:

$$F(p_1, p_2) = L_{II}^2 \{ f(t_1, t_2) \} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) \cdot e^{-p_1 t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2 \quad (B.8)$$

căreia îi corespunde formula de inversiune:

$$R(t_1, t_2) = L_{II}^{-2} \{ F(p_1, p_2) \} = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} F(p_1, p_2) \cdot e^{p_1 t_1 + p_2 t_2} dp_1 dp_2 \quad (B.9)$$

Integrala din (B.8) poate fi exprimată cu ajutorul transformării Laplace unilaterale și bidimensionale /49/ ,

$$L_I^2 \{ R(t_1, t_2) \} = \iint_0^{\infty} R(t_1, t_2) \cdot e^{-p_1 t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2 \quad (B.10)$$

$$\operatorname{Re}\{p_1\} > \sigma_1; \quad \operatorname{Re}\{p_2\} > \sigma_2.$$

În lucrare mai prezintă interes o formă ușor modificată a relațiilor (B.1), (B.2) respectiv (B.8), (B.9) și anume:

$$F(p^{\#}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p^{\#} t} dt; \quad \sigma_{x1} < \operatorname{Re}\{p^{\#}\} < \sigma_{x2} \quad (B.1 \text{ bis})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(p^{\#}) \cdot e^{-p^{\#} t} dp; \quad \sigma_{x1} < \sigma < \sigma_{x2} \quad (B.2 \text{ bis})$$

și corespunzător,

$$F(p_1^{\#}, p_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) \cdot e^{-p_1^{\#} t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2 \quad (B.8 \text{ bis})$$



$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p_1^*, p_2^*) \cdot e^{p_1^* t_1 + p_2^* t_2} dp_1^* dp_2^* .$$

(B.9 bis)

În scopul condensării scrierii, pentru relațiile de definiție ale transformatelor Laplace se vor utiliza notațiile date în continuare; numărul de ordine al relației corespunzătoare din text este trecut în paranteză:

$$f(t) \quad \text{o} \text{---+---} \text{o} \quad \frac{1}{1} f(t) \quad \text{(B.4)}$$

$$f(t) \quad \text{o} \text{-----} \text{o} \quad \frac{1}{2} f(t) \quad \text{(B.1), (B.2)}$$

$$f(t_1, t_2) \quad \text{o} \text{==+==} \text{o} \quad \frac{2}{1} f(t_1, t_2) \quad \text{(B.10)}$$

$$f(t_1, t_2) \quad \text{o} \text{=====} \text{o} \quad \frac{2}{2} f(t_1, t_2) = F(p_1, p_2) \quad \text{(B.8), (B.9)}$$

$$f(t) \quad \text{o} \text{---}^{\#} \text{o} \quad F(p^{\#}) \quad \text{(B.1 bis), (B.2 bis)}$$

$$f(t_1, t_2) \quad \text{o} \text{====}^{\#} \text{o} \quad F(p_1^{\#}, p_2^{\#}) \quad \text{(A.8 bis), (A.9 bis)}$$

ANEXA C.

CALCULUL SPECTRULUI COMPLEX DUBLU (SCD) AL ZGOMOTULUI ALB MODULAT ÎN AMPLITUDINE CU SEMNAL DREPTUNGHIULAR

Expresia (5.20) a SCD poate fi pusă sub forma:

$$S_{XT}(p_1^*, p_2^*) = S_{XT}(\omega_1, \omega_2) = \sigma_x^2 \cdot \left\{ 1 - e^{-j \frac{T}{2} (\omega_2 - \omega_1)} \right\} \cdot \frac{\sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-jKT(\omega_2 - \omega_1)}}{j(\omega_2 - \omega_1)} = T \cdot \sigma_x^2 \left\{ 1 - e^{-j \frac{T}{2} x} \right\} \cdot \frac{\sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-jKx}}{jx} \quad \text{(C.1)}$$

în care s-a utilizat notația  $x = T(\omega_2 - \omega_1)$ .

Se observă că, în (C.1),

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{-jKx} = 1 + \sum_{K=1}^{\infty} (e^{-jKx} + e^{jKx}) = 1 + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \cos Kx .$$

Știind că

$$\sum_{K=1}^n \cos Kx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} ,$$

se poate scrie

$$S_{XT}(\omega_1, \omega_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \cdot \sigma_x^2 \left\{ 1 - e^{-j \frac{x}{2}} \right\} \cdot \frac{\sin(2n+1) \cdot \frac{x}{2}}{jx \cdot \sin \frac{x}{2}} . \quad (C.2)$$

Pe de altă parte, este cunoscut că /65/

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x) .$$

În consecință expresia (C.2) poate fi pusă sub formă

$$S_{XT}(\omega_1, \omega_2) = T \cdot \sigma_x^2 \cdot \pi \cdot \frac{\left\{ 1 - e^{-j \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \right\}}{j \sin \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \cdot \delta[T(\omega_2 - \omega_1)] . \quad (C.3)$$

Se observă că SCD al zgomotului alb modulată în amplitudine este concentrat pe dreapta  $\omega_2 = \omega_1$ , unde amplitudinea

$$\pi \cdot T \cdot \sigma_x^2 \frac{\left\{ 1 - e^{-j \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \right\}}{j \sin \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)}$$

reprezintă o nedeterminare de tipul 0/0. Pentru determinarea amplitudinii spectrului se calculează (aplicând, în final, regula lui L'Hospital)

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \pi \cdot T \cdot \sigma_x^2 \frac{\left\{ 1 - e^{-j \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \right\}}{j \sin \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} &= \pi \cdot T \cdot \sigma_x^2 - \pi \cdot T \cdot \sigma_x^2 \cdot \\ &\cdot j \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \left\{ \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)}{\sin \frac{\pi}{2}(\omega_2 - \omega_1)} \right\} = \pi \cdot T \cdot \sigma_x^2 . \end{aligned} \quad (C.4)$$

Astfel, SCD al zgomotului alb modulată în amplitudine are expresia finală

$$S_{XT}(\omega_1, \omega_2) = T \cdot \pi \cdot \sigma_x^2 \cdot \delta[T(\omega_2 - \omega_1)] . \quad (C.5)$$

Pentru a avea un mijloc de comparație, se poate calcula SCD la zgomotului alb staționar ca funcția de autocorelație

(5.18). Astfel,

$$S_X(p_1^*, p_2) = \sigma_x^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - t_1) \cdot e^{-p_1^* t_1 - p_2 t_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \sigma_x^2 \cdot \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-j t_1 (\omega_2 - \omega_1)} dt_1 = 2 \sigma_x^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin L(\omega_2 - \omega_1)}{j(\omega_2 - \omega_1)} ;$$

$$\operatorname{Re}\{p_1^*\} = \operatorname{Re}\{p_2\} = 0,$$

și deci,

$$S_X(\omega_1, \omega_2) = -2 \cdot \pi \cdot \sigma_x^2 \cdot j \cdot \delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (C.6)$$

Ținând seama că pentru transformarea liniară prin a distribuției lui Dirac se poate scrie /66/

$$\langle \delta(\alpha x), f(x) \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \delta(x) \cdot f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \rangle = \frac{f(0)}{|\alpha|}$$

rezultă că SCD cu expresia (C.5) poate fi scrisă sub forma

$$S_{XT}(\omega_1, \omega_2) = \pi \cdot \sigma_x^2 \cdot \delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (C.7)$$

Din compararea expresiilor (C.6) și (C.7) rezultă că prin modularea în amplitudine caracterul de zgomot al procesului, se conservă. Amplitudinile spectrale se reduc corespunzător factorului de umplere al unei modulateoare (în cazul, unei rectangulare, amplitudinile spectrale se înjumătățesc față de cazul zgomotului nemodulat).

ANEXA D.

REZULTATE DE SIMULARE PRIVATOARE LA METODA DE  
CORRELATIE NESTATIONARĂ

D1. Subrutine utilizate:

a) Subrutina Gauexp

```
SUB Gauexp (Tetha, A, Z0, Z)
X = -6
FOR I = 1 TO 12
U = RND
X = X + U
NEXT I
Z = Tetha * Z0 + A * X
Z0 = Z
SUBEND
```

În Gauexp se apelează subrutina RND (din biblioteca matematică a calculatorului) pentru generarea unor numere uniforme distribuite în intervalul 0, 1; de asemenea, se utilizează parametrul  $A = \sqrt{1 - \text{Tetha}^2}$  și Tetha. Valoarea lui Tetha se alege așa cum se arată în § 6.1.1 în funcție de banda de frecvență a procesului de simulat. În condițiile arătate, subrutina GAUEXP generează o realizare a unui proces gaussian, cu funcție de autocorelație exponențială.

b) Subrutina pentru trasarea axelor

```
SUB Axe S, N, M, G)
PLOTTER IS 7, 5, "9872A"
GRAPHICS
IF G=1 THEN LOCATE 0, 210, 0, 270
IF G=2 THEN LOCATE 210, 400, 0, 270
IF G=1 THEN LIMIT 30, 180, 100, 250
IF G=2 THEN LIMIT 230, 390, 100, 250
```

```
SCALE - . 8 * N, N, - . 8 * S, S
PEN 3
MOVE 0, 0
DRAW N, 0
MOVE 0, 0
DRAW 0, S
MOVE 0, . 95 * S
IF G=L THEN LABEL " R      Rmax=";S
IF G=2 THEN LABEL " S      Smax=";S
MOVE 0, 0
DRAW - . 707 * N, - . 707 * S
PEN 4
C1 = - . 707 * N / (M-1)
C2 = - . 707 * S / (M-1)
FOR I=1 TO M-1
MOVE I * C1, I * C2
DRAW I * C1 + N, I * C2
NEXT I
FOR I=1 TO 10
MOVE I * N/10, 0
DRAW I * N/10-.707 * N, -.707 * S
NEXT I
LINE TYPE 1
PEN 1
SUBEND
```

c) Subrutina pentru prezentarea<sup>e</sup> grafică a profilelor funcțiilor de corelație și ale spectrelor:

```
SUB Graf (X(*),N,M,S,G,J)
PLOTTER IS 7,5, "9872A"
GRAPHICS
IF G=2 THEN LOCATE 210,400,0,270
IF G=1 THEN LOCATE 0,210,0,270
IF G=1 THEN LIMIT 30,180,100,250
IF G=2 THEN LIMIT 230,390,100,250
SCALE -.8*N,N,-.8*S,S
C2=-.707*S/(M-1)
C1=-.707*N/(M-1)
PEN 1
```

```
S1=C1 * (J-1)
S2=C2 * (J-1)
PLOT S1, S2
FOR I=1 TO N
IF X(I) 0 THEN LINE TYPE 4
IF X(I) 0 THEN LINE TYPE 1
PLOT I+S1-1, X(I)+S2
NEXT I
PENUP
MOVE N+S1-1, X(N)+S2
DRAW N+S1-1, S2
SUBEND
```

D2. Fotografii ale semnalelor de la intrarea și de la ieșirea unor filtre numerice

Rezultatele de simulare prezentate în acest paragraf au dublu scop. În primul rând ele atestă valabilitatea modelelor de simulare deduse pentru filtrele numerice dar, în același timp, se verifică și modul de generare a unor regimuri tranzitorii repetitive.



Foto.D2-1\*) Reprezentarea prin suprapunere a zece realizări de câte 512 puncte, generate cu subrutina Gauexp ( $Tetha=0,043$ ). Valorile maxime ale scării:  $\pm 5$

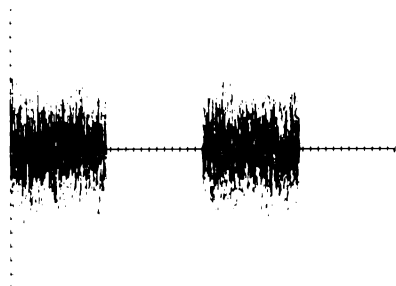


Foto.D2-2\*) Reprezentarea prin suprapunere a impulsurilor de zgomot obținute prin trecerea realizărilor din foto.D2-1 prin poarta analogică. Valorile maxime ale scării:  $\pm 5$

\*) În fotografiile D2-1 la D2-4 lungimea realizărilor de câte 512 puncte corespunde timpului fizic de  $512 \cdot 10 \mu s = 5,12 ms$ .

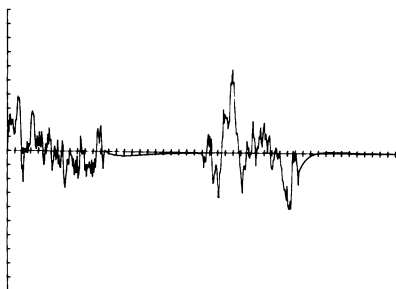


Foto.D2-3\*) Răspunsul unui filtru trece bandă ( $T_1=11$ ,  $T_2=45$ ) la două impulsuri de zgomot succesive.  
valorile maxime ale scării:  $\pm 1$ .

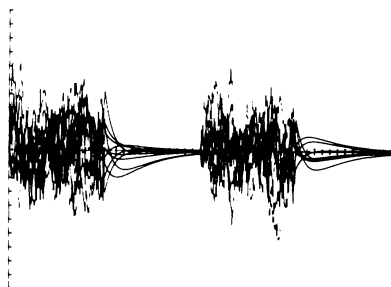


Foto.D2-4\*) Reprezentarea prin suprapunere a răspunsurilor filtrului trece bandă ( $T_1=11$ ,  $T_2=45$ ) la cele zece realizări ale impulsurilor de zgomot din foto.D2-2.  
valorile maxime ale scării:  $\pm 1$ .

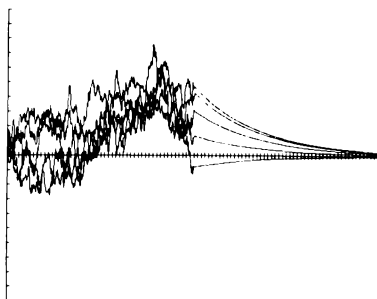
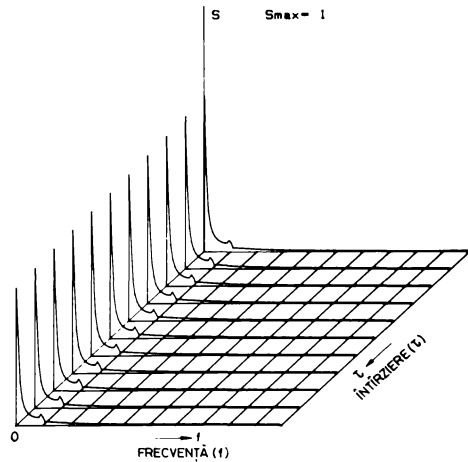
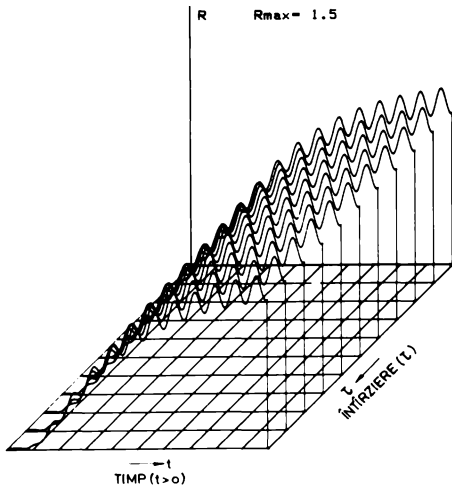


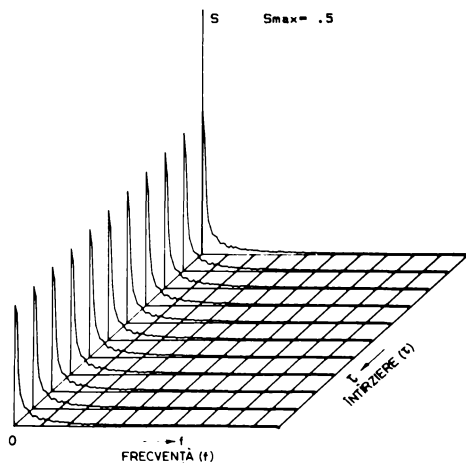
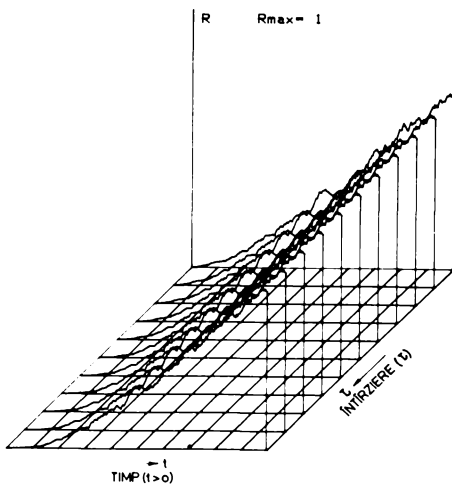
Foto.D2-5. Reprezentarea prin suprapunere a cinci răspunsuri ale filtrului trece-jos ( $T=177$ ) la impulsuri de zgomot ca cele din foto.D2-2.  
valorile maxime ale scării:  $\pm 0,2$ .  
Lungimea realizărilor de câte  $10^{24}$  puncte, corespunde timpului fizic de  $10^{24} \cdot 10 \mu s = 10,24 ms$ .

**D3. Fotografii ale profilelor unor funcții de corelație și spectrale nestationare**



**Foto.D3-1** Profile  $\tau$ -constant ale funcției de autocorelație nestationare pentru cazul unui semnal sinusoidal suprapus peste un semnal treaptă.

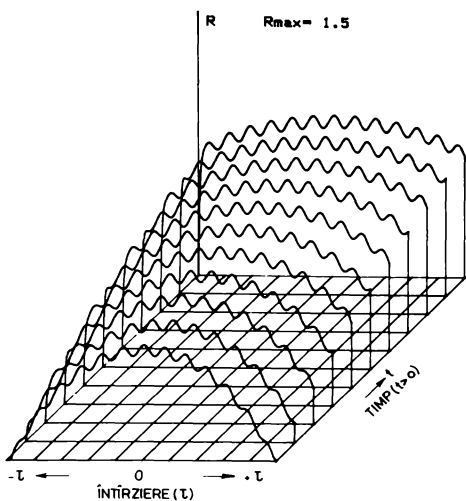
**Foto.D3-2** Profile spectrale tranzitorii corespunzătoare funcției de autocorelație din foto.D3-1.



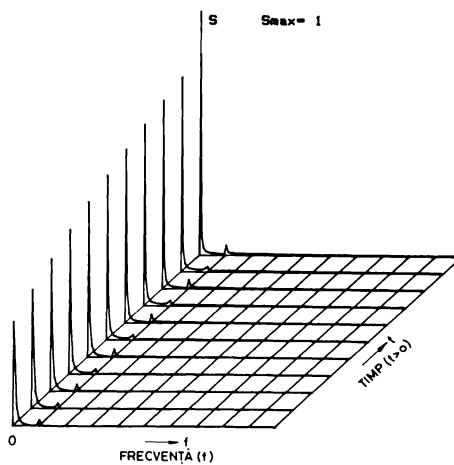
**Foto.D3-3** Profile  $\tau$ -constant ale funcției de autocorelație nestationare pentru cazul unui zgomot gaussian suprapus peste un semnal treaptă.

**Foto.D3-4** Profile spectrale tranzitorii corespunzătoare funcției de autocorelație din foto.D3-3.

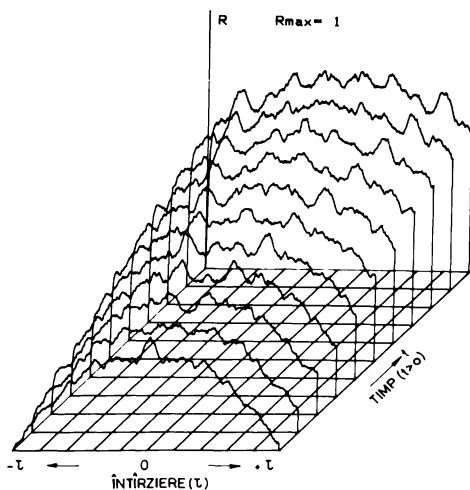




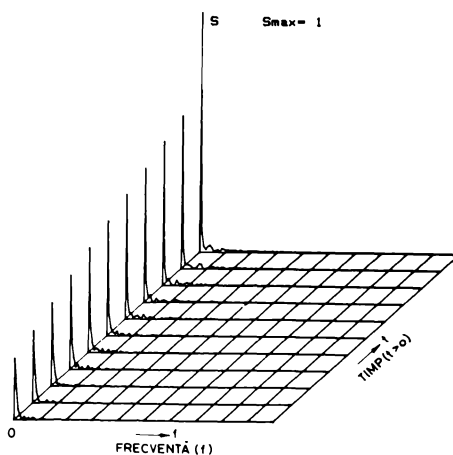
**Foto.D3-5** Profile  $t=\text{constant}$  ale funcției de autocorelație nestaționare pentru cazul unui semnal sinusoidal suprapus peste un semnal treaptă.



**Foto.D3-6** Profile spectrale instantanee corespunzătoare funcției de autocorelație din foto.D3-5.



**Foto.D3-7** Profile  $t=\text{constant}$  ale funcției de autocorelație nestaționare pentru cazul unui zgomot gaussian suprapus peste un semnal treaptă.



**Foto.D3-8** Profile spectrale instantanee corespunzătoare funcției de autocorelație din foto.D3-7.

ANEXA F.

FOTOGRAFII ALE UNOR SEMNALE SI FUNCTII DE CORELATIE  
DETERMINATE IN DIFERITE CONDITII EXPERIMENTALE

Fl. Semnale de intrare și de ieșire ale unor filtre de  
tipurile trece jos (FTJ) și trece bandă (FTB)

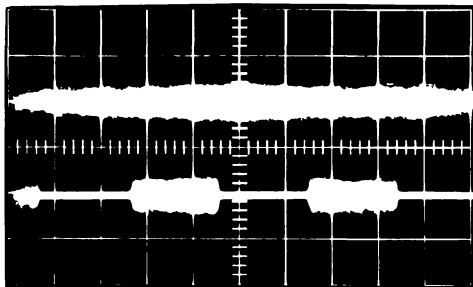


Foto.Fl-1 Semnalele de la intrarea (sus) și ieșirea (jos) comutatorului analogic  $F_{max}=50$  kHz. Parametri:  $0,5$  ms/div;  $10^V$ /div. (ambele unde).

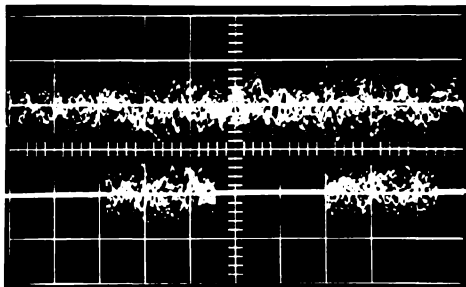


Foto.Fl-2 Semnalele de la intrarea (sus) și ieșirea (jos) comutatorului analogic  $F_{max}=1,5$  kHz. Parametri:  $2$  ms/div  $10^V$ /div. (ambele unde)

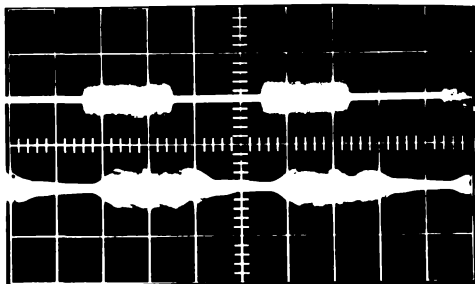


Foto.Fl-3 Semnale de intrare (sus) și ieșire (jos) pentru un FTJ cu frecvența de tăiere  $2$  kHz. Parametri:  $0,5$  ms/div,  $10^V$ /div. (unda de sus),  $2^V$ /div. (unda de jos).

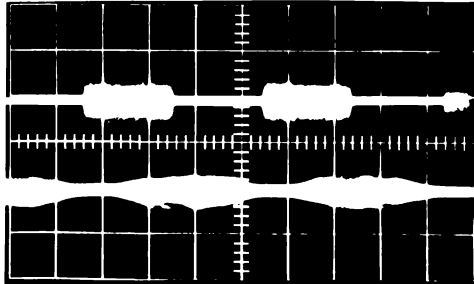


Foto.Fl-4 Semnale de intrare (sus) și ieșire (jos) pentru un FTJ cu frecvența de tăiere  $1$  kHz. Parametri:  $0,5$  ms/div,  $10^V$ /div. (unda de sus),  $2^V$ /div. (unda de jos)

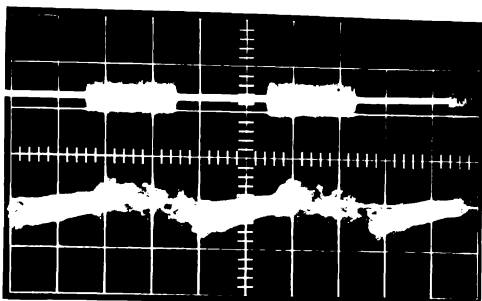


Foto.E1-5 Semnale de intrare (sus) și ieșire (jos) pentru un FTB cu frecvențele de trecere și tăiere 355 Hz respectiv 4 kHz. Parametri: 0,5 ms/div; 10V/div.(unda de sus), 2V/div.(unda de jos).

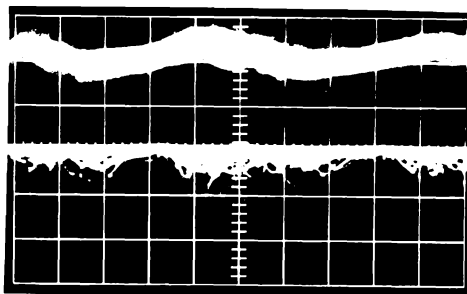


Foto.E1-6 Semnalul de ieșire (sus) semnalul de ieșire detectat pătratic (jos) pentru cazul FTB cu frecvențele de trecere și tăiere 355 Hz respectiv 1,4 kHz. Parametri: 0,5 ms/div; 0,5V/div.(unda de sus), 1V/div.(unda de jos)

E.2. Funcții de intercorelație (FIC) pentru cazul fără detecție pătratică

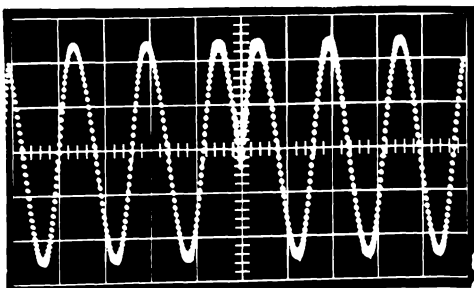


Foto.E2-1 FIC pentru cazul FTJ cu frecvența de tăiere de 90 Hz. Parametri:  $F_{MOD}=50$  Hz;  $A=6$ ;  $M=1.000.000$ ; 2 V/div.

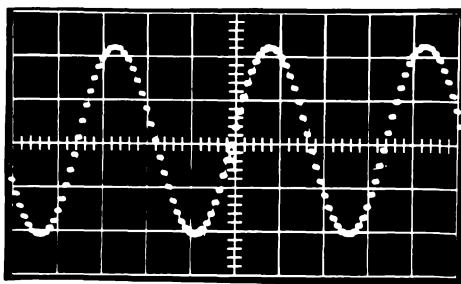


Foto.E2-2 FIC pentru cazul FTJ cu frecvența de tăiere de 90 Hz. Parametri:  $F_{MOD}=110$  Hz;  $A=6$ ;  $M=1.000.000$ ; 0,5 V/div.

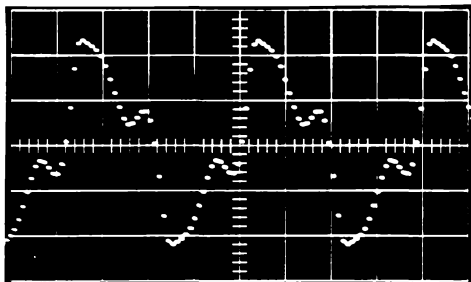


Foto.E2-3 FIC pentru cazul FTB (355 Hz - 1,4 kHz). Parametri:  $F_{MOD}=100$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ;  $1$  V/div.

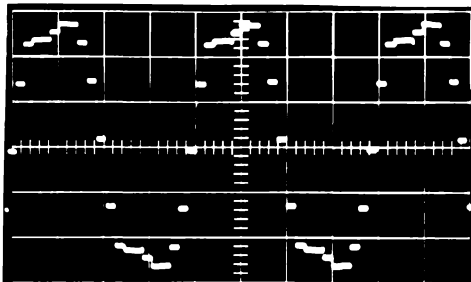


Foto.E2-4 FIC pentru cazul FTB (355 Hz - 1,4 kHz). Parametri:  $F_{MOD}=200$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ;  $1$  V/div.

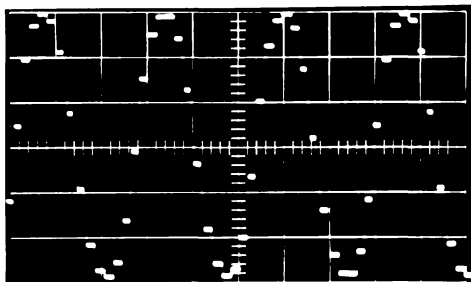


Foto.E2-5 FIC pentru cazul FTB (355 Hz - 1,4 kHz). Parametri:  $F_{MOD}=300$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ;  $2$  V/div.

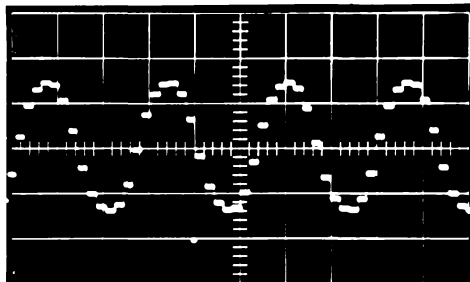


Foto.E2-6 FIC pentru cazul FTB (355 Hz - 1,4 kHz) cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=300$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ;  $2$  V/div;  $K=0,33$

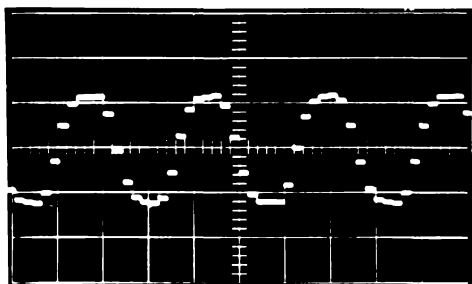


Foto.E2-7 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz)cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=300$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $1$  V/div;  $K=0,66$ .

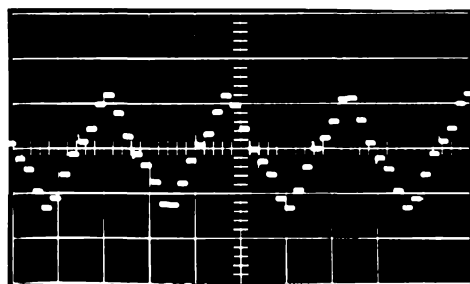


Foto.E2-8 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz)cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=300$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $1$  V/div;  $K=1$ .

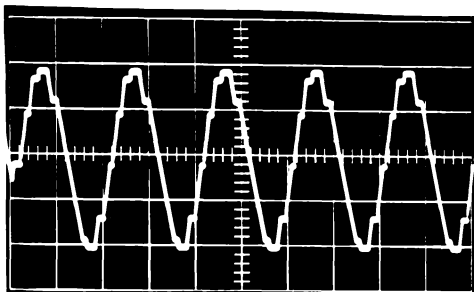


Foto. K2-9 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz). Parametri:  $F_{MOD}=400$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $5$  V/div.

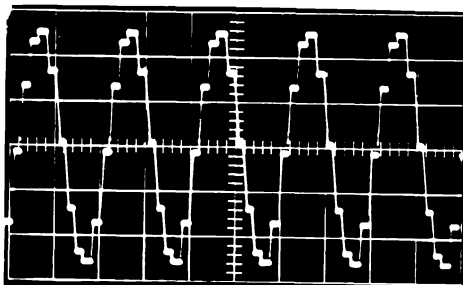


Foto. K2-10 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz) cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=400$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $2$  V/div;  $K=0,33$ .

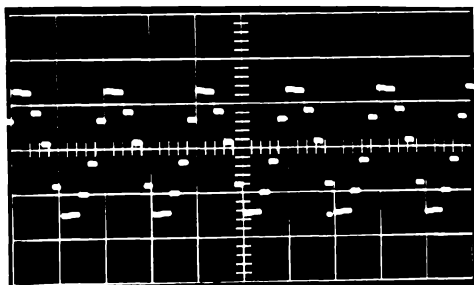


Foto. K2-11 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz) cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=400$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $2$  V/div;  $K=0,66$ .

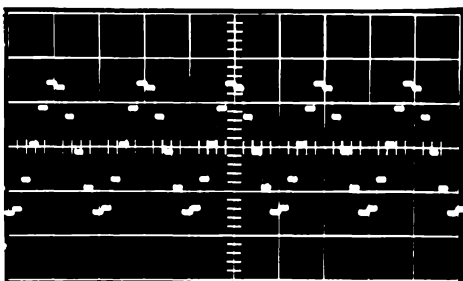


Foto. K2-12 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz) cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=400$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500000$ ;  $2$  V/div;  $K=1$ .

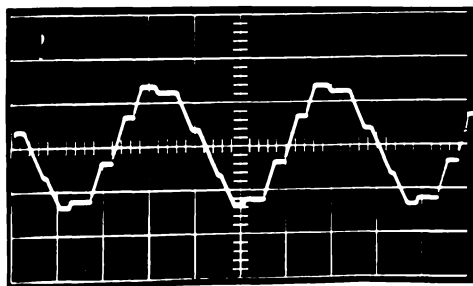


Foto. K2-13 FIC pentru cazul FTB (355 Hz-1,4 kHz) cu semnal perturbator. Parametri:  $F_{MOD}=500$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ;  $5$  V/div.

**F. Funcții de intercorelație (FIC) pentru cazul cu  
detectie pătratică**

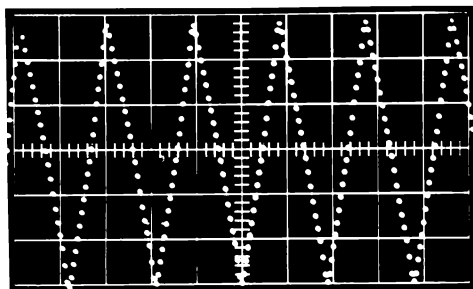


Foto.E3-1 FIC pentru cazul unui filtru RC trece-jos ( $a=1/RC=1666$  Hz). Parametri:  $F_{MOD}=100$  Hz;  $A=6$ ;  $M=300.000$ ; 5 V/div.

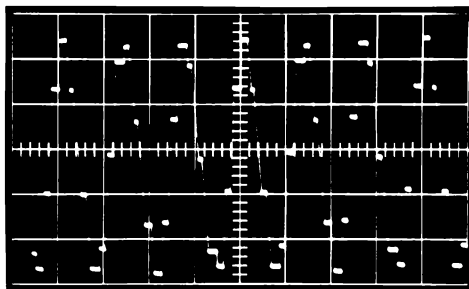


Foto.E3-2 FIC pentru cazul unui filtru RC trece-jos ( $a=1/RC=1666$  Hz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz;  $A=6$ ;  $M=300.000$ ; 2 V/div.

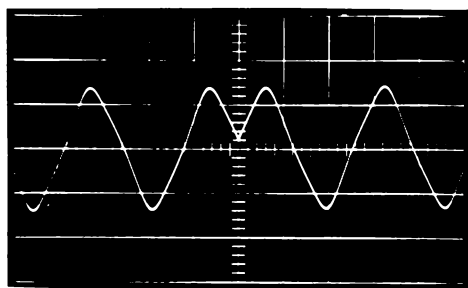


Foto.E3-3 FIC pentru cazul FTJ cu frecvența de tăiere de 90 Hz. Parametri:  $F_{MOD}=30$  Hz;  $A=6$ ;  $M=1.000.000$ ; 5 V/div.

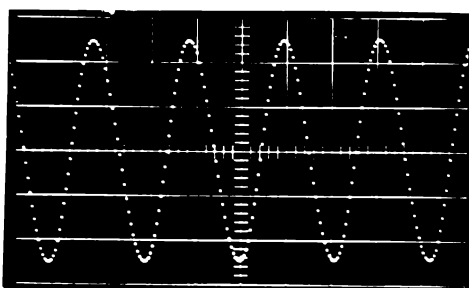


Foto.E3-4 FIC pentru cazul FTJ cu frecvența de tăiere 90 Hz. Parametri:  $F_{MOD}=90$  Hz;  $A=6$ ;  $M=1.000.000$ ; 2 V/div.

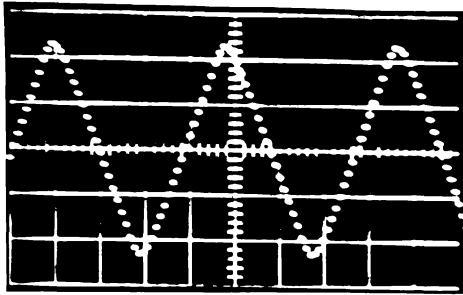


Foto.E3-5 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=100$  Hz; A=6; M=500.000; 2 V/div.

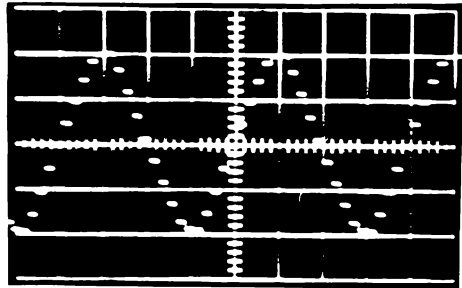


Foto.E3-6 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=200$  Hz; A=6; M=500.000; 2 V/div.

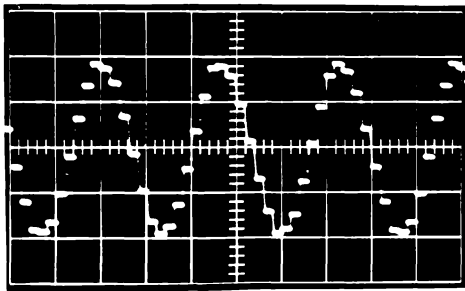


Foto.E3-7 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=300$  Hz; A=6; M=500.000; 2 V/div.

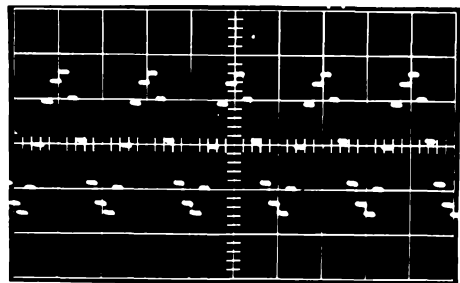


Foto.E3-8 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=400$  Hz; A=6; M=500.000; 2 V/div.

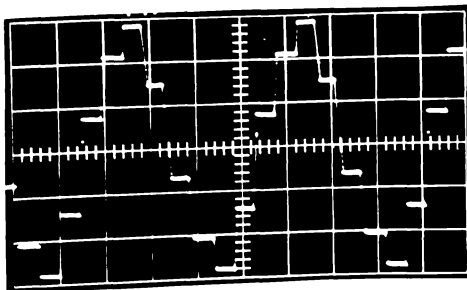


Foto.E3-9 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=500$  Hz; A=6; M=500.000; 1 V/div.

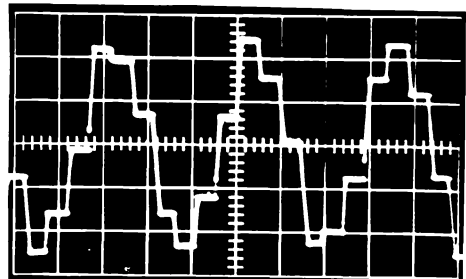


Foto.E3-10 FIC pentru cazul FTB (355Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz; A=6; M=500.000; 1 V/div.

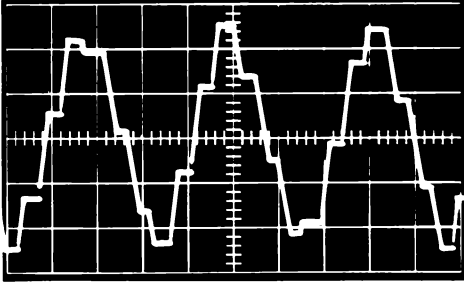


Foto.E3-11 FIC pentru cazul unui FTB modificat (355Hz-2kHz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ; 2 V/div.

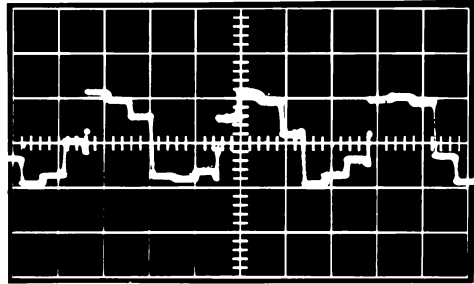


Foto.E3-12 FIC pentru cazul unui FTB modificat (355Hz-1kHz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ; 0,5 V/div.

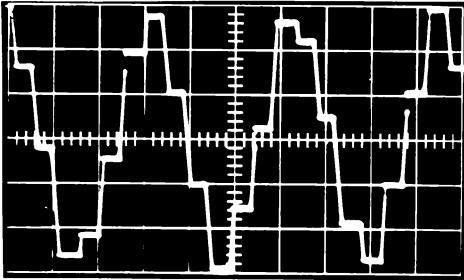


Foto.E3-13 FIC pentru cazul unui FTB modificat (250Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ; 1 V/div.

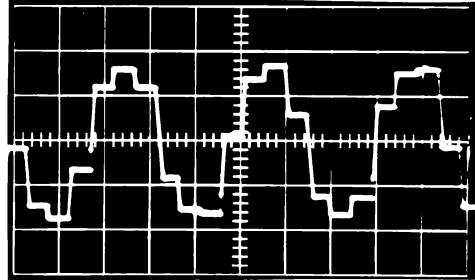


Foto.E3-14 FIC pentru cazul unui FTB modificat (500Hz-1,4kHz). Parametri:  $F_{MOD}=600$  Hz;  $A=6$ ;  $M=500.000$ ; 1 V/div.



B I B L I O G R A F I E

1. Achilles, D. : Discrete Fourier-Transformation, Arbeitsblattserie, Nachrichtentechnische Zeitschrift, VDE Düsseldorf, Bd. 35 (1982).
2. Aleksandrov, A.I. : Êkspluatacija radiotehničeskikh kompleksov, Moskva, Izd. "Sovetskoe Radio", 1976.
3. Ardeleanu, Gh., Nicolau, M., Druță, G. : Lupta mijloacelor radio-tehnice împotriva bruiajului, Ed. Militară, București, 1975.
4. Arnold, L. : Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Wiley, New York, 1974.
5. Azaria, M., Hertz, D. : Time Delay Estimation by Generalized Cross-Correlation Methods, IEEE transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-32, No. 2, April, 1984, pp. 280-285.
6. Ball, G.A. : Korrelationsmessgeräte, VEB Verlag Technik, Berlin 1972.
7. Baur, K. : Vorhersage und Anzeige von Prozesszuständen als Hilfsmittel der Kraftwerksleittechnik, Dissertation, Univ. Stuttgart, 1977.
8. Bendat, J.S., Piersol, A.G. : Random Data Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons, New York, 1971.
9. Bendat, J.S., Piersol, A.G. : Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1980.
10. Bellanger, M., Bonnaval, P. : Quelques applications de la transformation de Fourier rapide, L'onde Electrique, vol. 48, nr. 500, XI, 1968.
11. Berezin, S. Ja., Karataev, O. G. : Korreljacionnye izmeritel'nye ustroistva v avtomatike, Izd-vo Energija, Leningrad, 1976.
12. Berndt, H., Cooper, G.R. : Estimates of Correlations Functions of Nonstationary Random Processes, IEEE Transactions on Information Theory, January, 1965, pp. 70-72.
13. Berndt, H., Cooper, G.R. : An Optimum Observation Time for Estimates of Time Varying Correlation Functions, IEEE Transactions on Information Theory, April. 1965, pp. 307-310.
14. Betz, J.W. : Comparison of the Deskewed Short-Time Correlator and the Maximum Likelihood Correlator, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-32, No. 2, April, 1984, pp. 285-294.

15. Bilinskij, I. Ja., Mikelson, A. K. : Stohastičeskaja cifrovaja obrabotka nepreryvnyh signalov, Riga, Zinatne Izd-vo, 1983.
16. Bittel, H., Storm, L. : Rauschen, Springer Verlag, 1971.
17. Blohin, A. V. : Apparaturnyj analiz karakteristik slučajnyh processov, Izd-vo Energija, Moskva, 1976.
18. Bodenschatz, E., Reck, H. : Einfluss der Analog/Digital-Wandlung bei der Bildung der Korrelationsfunktion mit digitalen Rechenschaltungen, Messen, Steuern Regeln nr.1/1976, pp.12-13.
19. Bogoevici, N., Kovacs, A. : About the transfer of multidimensional aleatory signals through static nonlinear systems, Buletinul IPTV Timișoara, Seria Electrotehnică, Tom 27(41), Fasc.2, 1982, pp.1-8.
20. Boudarel, R., Delmas, J., Guichet, P. : Commande optimale des processus, Tome I, Concepts fondamentaux de l'automatique, Dunod, Paris, 1967.
21. Brillindzer, D. : Vremennye rjary. Obrabotka dannyh i teorija, Izd-vo Mir, Moskva, 1980.
22. Broch, J. T. : Mechanical Vibration and Shock Measurements, Brüel & Kjaer, 1980.
23. Brogan, W. L. : Modern Control Theory, Quantum Publishers, New York, 1974.
24. Cadzow, J. A., Ogino, K. : Two-Dimensional Spectral Estimation, IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-29, No.3, June, 1981.
25. Coffinet, G. : Theorie du signal, complements; les signaux continus, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 1972.
26. Chasek, N. E. : Turning up system faults with gated-noise testing, Elektronika, January 22, 1976, pp.91-95.
27. Cristescu, R., Marinescu, Gh. : Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor, Ed. Academiei RSR, București, 1966.
28. Davenport, W. B., Root, W. L. : An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, Mc.Graw-Hill Book Comp., New York, 1958.
29. Ditkine, V., Proudnikov, A. : Transformations integrales et calcul operationnel, Editions Mir, Moscou, 1978.
30. Ditkine, V., Proudnikov, A. : Calcul Operationnel, Editions Mir, Moscou, 1979.
31. Dobesch, H., Sulanke, H. : Zeitfunktionen. Theorie und Anwendung, WEB Verlag Technik, Berlin, 1970.

32. Donati, F. : Finite-Time Averaged Power Spectra, IEEF Transactions on Information Theory, vol.IT-17, No.1, January, 1971, pp.7-16.
33. Drujinin, G.V. : Siguranța în funcționare a sistemelor, Ed.Tehnică, București, 1968.
34. Eldon, J.A. : Digital correlators suit military applications, EDN, August 23, 1984, pp.148-160.
35. Eykhoff, P. : Identificarea sistemelor, Ed.Tehnică, București, 1977.
36. Feriet, J.K., Frenkiel, F.N. : Correlations and Spectra for Nonstationary Random Functions, J.Math.Computation, vol.16, No.77, January, 1962, pp.1-21.
37. Forster, U., Unbehauen, R. : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Systemtheorie stochastischer Prozesse, ntz, Bd.30 (1977), Arbeitsblattserie, Nachrichtentechnik, H. 1-12.
38. Fränkel, D. : Observații privind mărimile de stare și ordinul ecuației caracteristice în circuitele electrice, în Buletinul IPTV Timișoara, seria Electrotehnică, Tom.22(36), Fasc.1, 1977, pp.179-180.
39. Gardner, W.A., Franks, L.E. : Characterization of Cyclostationary Random Signal Processes, IEEF Transactions on Information Theory, vol.IT-21, January, 1975, pp.4-14.
40. Gârlașu, St. : Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1978.
41. Gârlașu, St., Popp, C., Ionel, S. : Introducere în analiza spectrală și de corelație, Ed.Facla, Timișoara, 1982.
42. Gille, J.G., Decaulne, P., Pelegrin, M. : Teoria și calculul sistemelor de reglare automată, Ed.Tehnică, București, 1962.
43. Gonorovski, I.S. : Radio Circuits and Signal, Mir Publishers, Moscow, 1981.
44. Guiașu, S. : Aplicații ale teoriei informației, Ed.Academiei RSR, București, 1968.
45. Golomb, M. : Approximation by Functions of Power Variables in On Numerical Approximations, Ed.by R.F.Langer, Univ.of Wisconsin Press, Madison, 1959, pp.275-327.
46. Haimovici, A. : Grupuri de transformări, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1968.
47. Harkevic, A.A. : Spektry i analiz, Gas-Izd. Fiz.Mat. Literat, Moskva, 1962.

48. Hartmann, H.L. : Stochastische Prozesse in Nachrichtensystemen, T.U.Braunschweig, 1980.
49. Hladik, J. : La transformation de Laplace a plusieurs variables, Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs, Paris, 1969.
50. Hoffman, I., Ionel, S. : Identificarea degradării sistemelor de reglare folosind zgomot injectat, Lucrările celei de-a doua sesiuni științifice "Modelarea, simularea, identificarea și optimizarea proceselor tehnologice", vol.II, Univ.Galați, Noiembrie 1980, pp.409-416.
51. Hotuncev, Ju.L. : K voprosu o korreljacionnyh sootnošenijah pri periodičeskoj nestacionarnosti slučajnogo processa, Radiotekhnika i Elektronika, Tom XX, 7, Izd.Nauka, 1975, pp.1538-1539.
52. Hurd, H.I. : Stationarizing properties of random shifts, SIAM J. Appl.Math., vol.26, January, 1974, pp.203-212.
53. Ibrahimov, I., Rozanov, Y., : Processus aleatoires gaussiens, Editions de Moscou, 1974.
54. Ioffe, M.G. : Avtomatičeskij kontrol' tractov zvukogo veščanija, Svjaz', Moskva, 1980.
55. Ionel, S. : Studiul regimului tranzitoriu prin metoda corelației, Referatul nr.2 în cadrul pregătirii prin doctorat, IPTV Timișoara, 1979.
56. Ionel, S. : O generalizare a noțiunii de spectru frecvențial dublu, Buletinul IPTV Timișoara, seria Electrotehnică, Tom 25(39), Fasc.1, 1980, pp.17-26.
57. Ionel, S. : Modelarea pe calculator a zgomotului alb, Buletinul IPTV Timișoara, seria Electrotehnică, Tom 22(36), Fasc.1, 1977, pp.221.
58. Ionel, S. : Utilizarea metodei corelației la calculul regimului Tranzitoriu în sisteme liniare supuse unor excitații deterministe, Buletinul IPTV Timișoara, seria Electrotehnică, Tom 24 (38), Fasc.2, 1979, pp.38-45.
59. Ionel, S. : Determinarea cu calculatorul a densității de probabilitate la ieșirea elementelor neliniare, Buletinul IPTV Timișoara, seria Electrotehnică, Tom 22(36), Fasc.1, 1977, pp.189-191.
60. Ionel, S. : Un model matematic al potențialelor EEG evocate acustic, Lucrările celui de-al II-lea simpozion "Contribuții la dezvoltarea aparatului electronic medicale", Timișoara, nov.1982, pp.254-259.

61. Ionel, S., Drăgănescu, Gh. : Aspecte practice ale utilizării funcțiilor de autocorelație în analiza semnalului EEG. Lucrările simpozionului "Contribuții la dezvoltarea aparatului electronic medicale", 8-9 sept., 1978, Timișoara, p.202-208.
62. Ionescu, G., Sgîrciu, V. : Tehnici de corelație în timp real, în AMC, vol.24 A și B, Ed.Tehnică, București, 1976.
63. Jaeger, J.C., Newstead, G.H. : Introducere în teoria transformării Laplace, Editura Tehnică, București, 1971.
64. Jensen, J.O. : A Survey of Methods for Measuring Correlation Functions, DISA Information, No.10, October 1970, pp.10-14.
65. Kecs, W. : Elemente de matematici cu aplicații în tehnică, Ed. Tehnică, București, 1981.
66. Kecs, W., Teodorescu, P.P. : Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică, Ed.Tehnică, București, 1975.
67. Kiselev, N.V., Sečkin, V.A. : Tehničeskaja diagnostika metodami nelineinago preobrazovanija, Leningrad, Izd.Energija, 1980.
68. Konovalov, G.V., Tarasenko, E.M. : Impul'snye slucajnye procesy. K v elektrosvjaz, Izd.Svjaz, Moskva, 1973, pp.304.
69. Kontorovič, M.I. : Operacionnoe iscislenie i processy v električeskih cepjah, Izd.4-e, Moskva, Sovetskoe Radio, 1975.
70. Koopmans, L.H. : The Spectral Analysis of Time Series, Academic Press, New York, 1974.
71. Kuhn, S.T. : Tensiunea esențială, Editura enciclopedică, București, 1982.
72. Kunt, M. : Traitement numerique des signaux Dunod, 1981.
73. Lange, F.H. : Signale und Systeme, Band 3-Regellose Vorgänge, VEB Verlag Technik, Berlin, 1973.
74. Lange, F.H. : Korrelationsmethoden in der Messtechnik, Bericht von einer Veranstaltung in Frankfurt/Main, msr, 19(1976), H.11.
75. Lange, F.H. : Zur Einordnung der Korrelationsverfahren in die Systemtheorie: Verbundsysteme, Messen Steuern Regeln, H.7, VEB, Berlin, 1976, pp.231-236.
76. Lange, F.H. : Zur Weiterentwicklung der Korrelationsanalyse, Teil 1: Kalman-Filterung, Teil 2: Varianten der Kalman-Filterung, Messen, Steuern Regeln 26(1983), Nr.11, pp.626-630, Nr.12, pp.693-696.
77. Lange, F.H., Müller, W. : Korrelationsanalyse, Taschenbuch Elektrotechnik, Band 2, VEB Verlag Technik, Berlin, 1977, pp.128-172.

78. Lee, Y.W. : *Statistical Theory of Communication*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.
79. Levine, B. : *Fondamente teoretice de la radiotehnica statistica*, Tom I, II, III, Editions Mir, Moscou, 1973.
80. Levinstein, M.L. : *Operacionnoe isčislenie v zadach elektotehniki*, Izd.2-a, Energija, 1972.
81. Lickteig, K. : *Rauschanalyse der Temperatursignale eines Doppelrohr-Wärmeaustauschers*, Dissertation, TU, Berlin, 1975.
82. Lodge, J.H., Fahmy, M.M. : *The bilinear Transformation of Two-Dimensional State-Space Systems, Correspondance*, IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, vol.ASSP-30, No.3, June, 1982, pp.500-502.
83. Max, J. : *Metody i tehnika obrabotki signalov pri fiziceskih izmerenijah*, Moskva, Mir., 1983, (v 2-h tomah).
84. Meier, H. : *Objektive akustische Guteprüfung durch Mustererkennung und Signalanalyse*, TU, Karlsruhe, 1980.
85. Mildemberger, O. : *Eine Methode zur Messung von Korrelationsfunktionen bei periodisch stationären Zufallsignalen*, Nachrichtentechnische Zeitschrift, Bd.30 (1977), H.9, pp.717-720.
86. Mirskij, G.Ja. : *Harakteristiki stohasticeskoi vzaimosvjazi i ih izmerenija*, Moskva, Energoizdat, 1982.
87. Ogura, H. : *Spectral Representation of a Periodic Nonstationary Random Process*, IEEE Transaction on Information Theory, vol.IT 17, March, 1971, pp.143-149.
88. Otnes, P., Enochson, L. : *Prikladnoj analiz vremennyh rjadov, osnovnye metody*, Izd.-vo Mir, Moskva, 1982.
89. Palm, R., Hartig, G. : *Fehleranalyse statistisch schwankender Messwertfolgen durch Korrelationsfunktionen*, Messen Steuern Regeln, Nr.2, 1980, pp.72-76.
90. Papoulis, A. : *Signal Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1977.
91. Papoulis, A. : *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill, New York, 1965.
92. Paris, L. : *Basic Considerations of Magnitude Reduction of Switching Surges Due To Line Energization*, IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol.PAS-87, No.1, January, 1968.
93. Penescu, S., Ionescu, G., Tertişco, M., Ceangă, F. : *Identificarea experimentală a proceselor automatizate*, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1971.
94. Pop, F., Stoica, V., Naforniţă, I., Petriu, E. : *Tehnici moderne de măsurare*, Ed.Facla, Timişoara, 1983.

95. Prabhu, K.M., Reddy, V.U., Agrawal, J.P. : Performance comparison of data windows, *Electronics letters*, vol.13, No.20, September, 1977, pp.600-601.
96. Prakash, S., Rao, V.V. : On the Computation of Autocorrelation Using Polynomial Transforms, *IEEE Transaction on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol.ASSP-32, Nr.2, April, 1984, pp.448-450.
97. Preitl, Șt. : Contribuții la studiul influenței perturbațiilor măsurătorilor asupra estimării funcțiilor statistice cu aplicații la identificarea sistemelor, Teză, IFTV Timișoara, 1983.
98. Profos, P. : *Handbuch der Industriellen Masstechnik*, Vulkan Verlag, Essen, 1978.
99. Pușcașu, S., Topan, D., Călin, Gh. : *Analiza circuitelor electrice*, Ed.Scrișul Românesc, Craiova, 1983.
100. Ramirez, R. : Fast Fourier Transform makes correlation simpler, *Electronics*, June, 26(1975), vol.48, nr.13.
101. Reinschke, K., Schwartz, P. : Die Berechnung des Zeitverhaltens linearer Systeme nach der Methode der Zustandvariablen, *Nachrichtentechnik*, 18(1968), H.11, pp.401-408.
102. Rumsiski, L.Z. : *Prelucrarea matematică a datelor experimentale*, Ed.Tehnică, București, 1974.
103. Saaty, Th.L. : *Modern Nonlinear Equations*, Mc Graw-Hill, New York, 1967.
104. Schlitt, H. : *Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen*, Braunschweig, Fr.Vieweg & Sons, 1968.
105. Schneider, Fr., Gârlaşu, St., Ionel, S., Nagy, I., Drăgănescu, Gh., Munteanu, F. : Contribuții la prelucrarea electroencefalogramelor prin metodele dinamicii statistice, *Timișoara medicală*, Nr.2, Tom XIX, 1974, pp.90-94.
106. Schneider, Fr., Gârlaşu, St., Ionel, S., Nagy, I., Drăgănescu, Gh. : Processing of EEG Biopotentials by the Methods of Statistical Dynamics, *Rev.Roum.Morphol.Embryol.Physiol.*, *PHYSIOLOGIE*, 1976, 13, 1, pp.45-49.
107. Schreiber, H. : Zum Berechnung von Schaltvorgängen zufälliger Prozesse bei linearen Systemen, *Nachrichtentechnik*, 17(1967), H.9, pp.361-363.
108. Schwarz, P. : Die Berechnung von Schaltvorgängen zufälliger Prozesse mit Hilfe der zweiseitigen Laplace-Transformation, *Nachrichtentechnik*, 17(1967), H.9, pp.363-366.

109. Schulz, D. : Lineare und nichtlineare Verarbeitung von amplitudenmodulierten stochastischen Prozessen zur akustischen Qualitätskontrolle und Schadenfrüherkennung, Dissertation, Univ, Karlsruhe, 1976.
110. Skolnik, M.I. (redactor) : Spravočnik po radiolokacij, Tom I, II, III, IV, Sovetskoe Radio, Moskva, 1976.
111. Schaney, R.C., Mieters, J.M. : Proper use of weighting Functions for impact Testing, Brüel & Kjaer, Technical Review Nr.4, 1984, pp.21-31.
112. Smyslajaeva, L.G. : Preobrazovanija Laplasi funkcij mnogih peremennyh, Izd. Leningradsk, Univ., Leningrad, 1981.
113. Spătaru, Al. : Teoria transmisiunii informației, Ed.Tehnică, București, 1966.
114. Statomir, D., Stănășilă, O. : Metode matematice în teoria semnalelor, Ed.Tehnică, București, 1980.
115. Stepanek, F. : Praktische Analyse linearer Systeme durch Faltungsoperationen, Akademieverlagsgesellschaft, Geest & Portig, Leipzig, 1976.
116. Stuart, R.D. : Introducere în analiza Fourier cu aplicații în tehnică, Ed.Tehnică, București, 1971.
117. Späth, H. : Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flachen, R.Olstenbourg Verlag, München, 1978.
118. Schweizer, G. : Probleme und Methoden zur Untersuchung des Regelverhaltens des Menschen, in Der Mensch als Regler, Sammlung von Aufsätzen ausgewählt von W.Oppelt und G.Vossius, VEB Verlag Technik, Berlin, 1970.
119. Șora, C. : Bazele electrotehnicii, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1982.
120. Ștefănescu, T., Gavriloaia, Gh. : Considerații privind sistemul de control automat al funcționării instalațiilor de control automat al funcționării instalațiilor de emisie-recepție din cadrul sistemelor electronice multicanal, Buletinul Academiei Militare, nr.2, București, 1983.
121. Teodorescu, D. : Metode stohastice optimizate, Ed.Academiei BSR, București, 1982.
122. Tihonov, V.I., Mironov, M.A. : Markovskie processy, Sovetskoe Radio, Moskva, 1977.
123. Toth, M. : The application of correlation analysis to verify measuring instruments during their operation, Acta IMEKO, Budapest, 1968, Tomus I, pp.263-275.



124. Trees, G.L. van : Teoriya obnaruzeniya ocenok i moduljacij, Tom I, Sovetskoe Radio, Moskva, 1972.
125. Upton, R., Randall, R.B. : The Application of the Narrow Band Spectrum Analyser Type 2031 to the Analysis of Transient and Cyclic Phenomena, Brüel & Kjaer Technical Review, Nr.2, 1978, pp.3-20.
126. Van der Pol, B., Bremmer, H. : Operacionnoe iscišlenie na osnove dvuhstoronnogo preobrazovanija Laplassa, Izd.-vo Inostrannoj Literatury, Moskva, 1952.
127. Vamos, T. : Reglarea automată și inteligența artificială, AMC vol.31, Ed.Tehnică, București, 1980, pp.41-62.
128. Vazaca, Chr. : Analiza și sinteza sistemelor automate liniare, Ed.Academiei RSR, București, 1961.
129. Văduva, I. : Modele de simulare cu calculatorul, Ed.Tehnică, București, 1977.
130. Vodă, Gh.V. : Controlul durabilității produselor industriale, Ed.Tehnică, București, 1981.
131. Voinea, R., Nicu, M. : Contribuții românești în bioinginerie și biotehnologie, Lucrările primului simpozion de electronică medicală, Timișoara, 1979.
132. Vlad, V.I., Zăciu, R., Maurer, J., Miron, N., Sporea, D. : Frelucrarea optică a informației, Ed.Academiei RSR, București, 1977.
133. Wahrmann, C.G. : Mesures de impulsions de bruit, Brüel & Kjaer Technical Review, Nr.1, 1969, pp.7-13.
134. Wehrmann, W. : Korrelationstechnik, ein neuer Zweig der Betriebsmeßtechnik, 2 Aufl., Expert Verlag, Grafenau, 1980.
135. Wesser, U., Liokteig, K. : Stationare und transiente Geschwindigkeitsanalyse von natürlichen Temperaturschwankungen eines Fluids, Messen Steuern Regeln, 19(1976), H.11, pp.376-380.
136. Wierwille, W.W. : A Theory and Method for Correlation Analysis of Nonstationary Signals, IEEE Transactions on Electronic Computers, vol.EC-14, No.6, December, 1965, pp.909-919.
137. Wierwille, W.W., Knight, J.R. : Off-line Correlation Analysis of Nonstationary Signals, IEEE Transactions on Computers, vol.C-17, No.6, June, 1968, pp.525-536.
138. Williams, R., Gabri, B.S. : Digital frequency analysis of engineering signals, Journal of the Society of Environmental Engineers, June, 1978, pp.1-13.

139. Wise, G.L., Tragantis, A.P., Thomas, J.B. : The Effect of a Memoryless Nonlinearity on the Spectrum of a Random Process, IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-23, No.1, January, 1977, pp.84-89.
140. Wunsch, G. Zur Spektraltheorie zufälliger Prozesse, Nachrichtentechnik, 16 (1966), H.7, pp.253-255.