MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" DIN TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ing. EUGEN MÂRZA

ASUPRA POSIBILITATILOR DE GENERARE A UNOR SEMNALE CU FORMA PROGRAMATA PRIN METODE DE CONVERSIE NUMERIC-ANALOGICA

TEZA DE DOCTORAT

CONDUCATOR STIINTIFIC:
Prof.dr.ing.EUGEN POP

Timişoara - 1987

Această teză constituie rezultatul unei activităţi de cercetare susţinute, concentrată îndeosebi în ultimii trei ani şi desfăşurată sub îndrumarea competentă şi plină de înţelegere a conducătorului ştiinţific, profesor dr.ing.Eugen Pop.

Pentru sfaturile şi încurajările primite pe întreaga durată a pregătirii lucrării, pentru sprijinul profesional şi moral precum şi pentru răbdarea de care a dat dovadă îi aduc cele mai calde mulţumiri şi îi rămîn profund îndatorat.

Aduc mulţumirile mele profesorului dr.ing.Anton Policec pentru înţelegerea de care a dat dovadă precum şi pentru tehnica de calcul pe care mi-a pus-o la dispoziţie, cu generozitate, ceea ce mi-a permis rularea unui număr mare de programe de calcul finalizate prin numeroasele tabele cu date prezentate pe parcursul tezei, experimentarea diferiţilor algoritmi şi realizarea unui generator de semnale cu formă programabilă arbitrar.

Mulţumesc doamnei Mierluţ Nelica şi doamnei Magheţiu Elena pentru calitatea redactării acestei lucrări.

De asemenea, mulţumesc tuturor colegilor şi prietenilor care m-au ajutat în diverse ocazii în perioada elaborării tezei.

ing.Eugen Mârza

C U P R I N S

INTRODUCERE

Procesarea numerică a semnalelor analogice reprezintă o problemă de actualitate care stă şi va mai rămîne mult timp în atenţia specialiştilor din domeniul electronicii şi telecomunicaţiilor.

La baza transmisiei, stocării şi prelucrării numerice a semnalelor analogice se găseşte teorema eşantionării, ale cărei fundamente teoretice au fost puse de J.M.Whittaker, Kotelnikov şi C.Shannon în prima jumătate a acestui secol.

Această teoremă joacă rolul unei punţi de legătură între semnalele analogice (continue în timp sau continuale) şi semnalele numerice (discrete în timp). In anumite condiţii, precizate de această teoremă, un semnal analogic poate fi complet reprezentat prin valorile sale instantanee (eşantioane), plasate uniform sau neuniform în timp, ceea ce face posibilă reconstituirea sa /13, 66, 75, 79, 1o1/. In domeniul telecomunicaţiilor,aplicarea acestei teoreme a permis transmiterea simultană a mai multor semnale pe acelaşi canal fizic prin separarea lor în timp (multiplexare temporală). Pe baza ei s-au dezvoltat tehnici analogice de transmisie cum ar fi modularea impulsurilor în amplitudine, durată, poziţie sau frecvenţă, precum şi tehnici numerice, în cadrul cărora locul principal îl deţine modularea impulsurilor în cod (PCM) /76, 96, 1o4/. Dezvoltarea explozivă a circuitelor numerice în ultimele două decenii a asigurat suportul fizic pentru realizarea de sisteme, care utilizează tehnica PCM, din ce în ce mai complexe, începînd cu telefonia şi ajungînd la comunicaţiile prin sateliţi.

Eficienţa acestor sisteme a fost ridicată în mod continuu în sensul creşterii cantităţii de informaţii transmise pe un canal, în condiţiile reducerii probabilităţii de eroare şi a ridicării calităţii semnalului recepţionat. Principalele direcţii de acţiune în acest sens sînt creşterea vitezei de transmisie, mărirea numărului de căi multiplexate şi reducerea numărului de eşantioane transmise.

Teorema eşantionării fixează limita inferioară a frecvenţei de eşantionare a unui semnal analogic, garantînd posibilitatea teoretică de reconstituire perfectă a semnalului la recepţie.

Calitatea semnalului reconstituit va depinde însă şi de performanţele sistemului de reconstrucţie fizică a semnalului recepţionat.

Conversia numeric-analogică, în strînsă corelaţie cu frecvenţa de eşantionare, joacă rolul fundamental în procesul de reconstrucţie a semnalului analogic original.

Un alt domeniu de actualitate în tehnica electronică modernă îl constituie realizarea de generatoare de semnale cu formă arbitrară, cu largi utilizări în testarea aparaturii de laborator, biomedicale precum şi a echipamentelor de telecomunicaţii. Şi în cazul acestor aparate problema fundamentală o constituie generarea unui semnal analogic pornind de la o secvenţă de date numerice (eşantioane) prelucrate şi stocate în memoria aparatului /14, 30, 60/.

Spre deosebire de semnalul recepţionat dintr-un canal de telecomunicaţii şi care are o variaţie aleatoare în timp, în acest caz, caracterul semnalului este determinist. Cu toate acestea, problemele care se pun sistemului de reconstrucţie rămîn aceleaşi.

Prezenta teză de doctorat conţine rezultatele cercetărilor autorului orientate asupra sistemelor de conversie numeric-analogică destinate reconstituirii fidele a unui semnal analogic, pornind de la eşantioanele sale aflate sub forma unei secvenţe numerice.

In primul capitol se prezintă bazele teoretice ale reconstrucţiei fizice a semnalelor eşantionate. Pentru început sînt reliefate modelele de semnal ale sistemelor de interpolare precum şi structura spectrală a semnalelor reconstituite.

Analiza stadiului actual al sistemelor de reconstrucţie fidelă pune în evidenţă limitele sistemelor analogice de interpolare, prezintă soluţia actuală de interpolare combinată şi trece în revistă principalele metode de analiză şi proiectare a sistemelor de interpolare numerică.

In capitolul al doilea se analizează condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească nucleele polinomiale de interpolare.

Pentru cazul în care funcţia de interpolare se construieşte pe baza a patru eşantioane consecutive, sînt analizate trei tipuri de nuclee polinomiale consacrate şi se construieşte un al patrulea tip original. Se efectuează o comparaţie între cele patru nuclee, pe baza răspunsului în frecvenţă.

In capitolul al treilea se prezintă şi se dezvoltă o metodă de estimare şi comparare a performanţelor sistemelor de interpolare bazată pe evaluarea erorii medii pătratice.

In capitolul al patrulea se efectuează diverse comparaţii între sisteme de interpolare polinomială, pe baza metodei dezvoltate în capitolul precedent.

In capitolul cinci se analizează proprietăţile şi performanţele nucleelor de interpolare optimală (din punct de vedere al erorii medii pătratice).

In capitolul şase sînt analizate posibilităţile de implementare practică a diferitelor tipuri de nuclee, se descrie o instalaţie experimentală pentru utilizarea interpolării la generarea de semnale de formă arbitrară şi se trag o serie de concluzii privind performanţele de ansamblu ale diferitelor nuclee de interpolare.

Teza se încheie cu prezentarea principalelor contribuţii ale autorului la problematica abordată.

CAPITOLUL 1.

BAZELE TEORETICE SI STADIUL ACTUAL AL SISTEMELOR DE RECONSTRUCTIE FIZICA

1.1. Reconstituirea semnalelor esantionate

Conversia unei secvenţe de date într-un semnal analogic reprezintă un proces complex ale cărui performanţe sînt strîns legate de modul de obţinere a secvenţei de date generatoare.

Secvenţa de date poate fi rezultatul unui proces de conversie A/N aplicat unui semnal continual real sau poate proveni dintr-un sistem de calcul. In ambele situaţii, semnalul parcurge un lanţ de transformări ce poate fi privit în mod unitar conform figurii nr.1.1 /26, 45, 66, 1o1, 1o3, 1o4/.

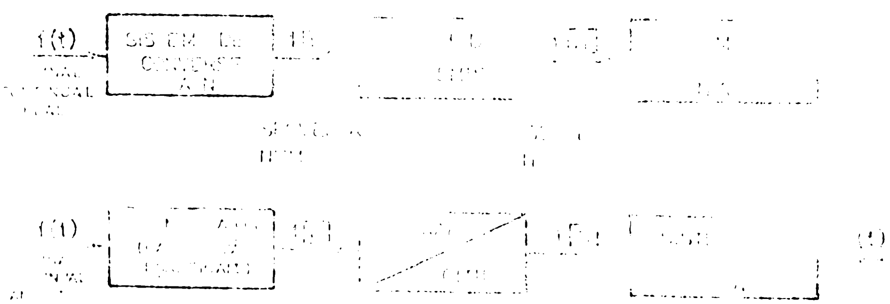


Fig.1.1.

Sistemul de generare a secvenţei numerice f[n] poate fi în ambele situaţii echivalat cu modelul de semnal prezentat în figura 1.2 /66, 69, 77, 8o/.

In mod asemănător, sistemul de conversie a secvenţei numerice în semnal continual se poate echivala cu modelul de semnal

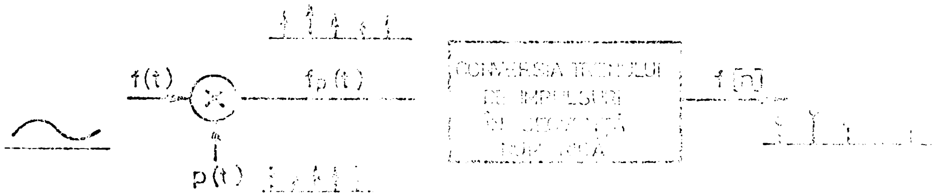


Fig.1.2.

prezentat în figura 1.3 /56, 66, 69, 70, 77, 78, 80, 100/.

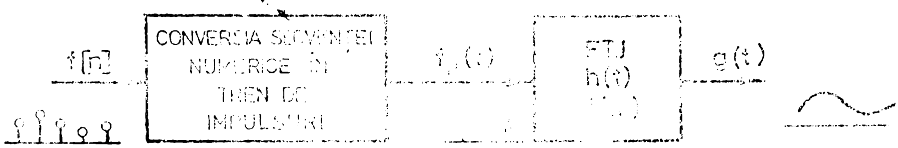


Fig.1.3.

In cazul ideal (în care se neglijează efectele cuantizării şi posibilităţile de apariţie a erorilor în procesul de transmisie sau stocare),

Conectarea în cascadă a modelelor prezentate în figurile 1.2 şi 1.3 conduce la modelul echivalent pentru întregul lanţ de semnal conform figurii 1.4.

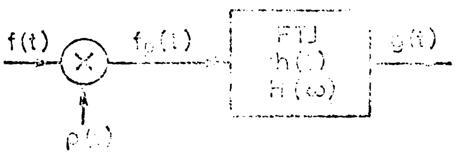


Fig.1.4.

Modelul prezentat în figura 1.4 are acoperire matematică prin teorema eşantionării. Dacă filtrul trece-jos este ideal şi semnalul f(t) îndeplineşte toate condiţiile cerute de teorema eşantionării, semnalul reconstituit g(t) va fi identic cu semnalul original f(t) /66, 69, 103/.

Utilizarea unui filtru trece-jos real va avea ca efect generarea unei funcţii g(t) care va fi diferită de funcţia originală /69/.

Proiectarea unui sistem de reconstrucţie fizică trebuie realizată în condiţiile reducerii erorilor de reconstituire sub un anumit nivel, impus de aplicaţia căreia îi este destinat sistemul respectiv. In cele ce urmează, pentru a pune în evidenţă doar contribuţia la eroare a sistemului de reconstrucţie, procesul de eşantionare se va considera ideal.

1.2. Reconstrucţia fizică prin interpolare

1.2.1. Generalităţi

Reconstrucţia unui semnal prin interpolare reprezintă un proces de aproximare de un tip special, în care funcţia de interpolare trebuie să coincidă cu semnalul original în anumite puncte, denumite noduri de interpolare /38, 55, 1o5/.

Notînd cu f(t) semnalul original şi cu g(t) funcţia de interpolare, trebuie respectată condiţia $g(x_k)=f(x_k)$ unde x_k reprezintă un nod de interpolare.

O primă posibilitate de interpolare este utilizarea unui polinom de un anumit grad impus, care să îndeplinească această condiţie. Interpolarea prin polinoame poate fi însă divergentă /55, 67/. In al doilea rînd, un sistem de reconstrucţie fizică, ce trebuie să funcţioneze în timp real, nu poate fi realizat pe această cale întrucît secvenţa semnalului de intrare poate dura un timp nedeterminat, ceea ce va face imposibilă calcularea polinomului de interpolare în timpul în care soseşte secvenţa.

Funcţia de interpolare care are proprietatea de a converge către funcţia continuă pe care o interpolează este funcţia Spline, o funcţie segmentar polinomială, segmentele de polinoame, care o compun, racordîndu-se în noduri împreună cu un anumit număr de derivate ale acestora /22, 37, 55/. Funcţia de interpolare poate fi exprimată ca o combinaţie liniară de forma (1.1):

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k h_k\left(\frac{x-x_k}{T_s}\right) \qquad (1.1)$$

In această expresie, c_k reprezintă un set de coeficienţi care sînt egali cu eşantioanele funcţiei interpolate iar h_k reprezintă nucleul de interpolare folosit şi care asigură realizarea interpolării de tip Spline. Cu T_s s-a notat perioada de eşantionare care, în cele ce urmează se va considera constantă (eşantionare uniformă).

1.2.2. Interpolarea ideală

Revenind la modelul de semnal din figura 1.4, în care p(t) reprezintă trenul de impulsuri δ, folosit la eşantionarea uniformă ideală, acesta are expresia:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) \qquad (1.2)$$

unde cu T_s s-a notat raportul $2\pi/\omega_s$ ce reprezintă pasul de eşantionare.

Multiplicarea semnalului original f(t) cu trenul de impulsuri p(t) conduce la trenul modulat $f_p(t)$ avînd expresia:

$$f_p(t) = f(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot \delta(t-nT_s) \qquad (1.3)$$

Aplicînd convoluţia în timp a semnalului $f_p(t)$ cu răspunsul la impuls al sistemului de reconstrucţie h(t) se obţine expresia funcţiei de interpolare g(t) conform relaţiei /66, 7o, 77, 1o2/ :

$$g(t) = f_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)h(t-nT_s) \qquad (1.4)$$

In cazul ideal (utilizînd un filtru trece-jos ideal) răspunsul la impuls h(t) are expresia dată de relaţia /13, 66, 77, 8o/ :

$$h_{id}(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T_s}}{\frac{\pi t}{T_s}} = \sin c \frac{t}{T_s} \qquad (1.5)$$

Funcţia de interpolare care se obţine în acest caz are expresia:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \sin c \frac{t-nT_s}{T_s} \qquad (1.6)$$

In această expresie $f(nT_s)$ reprezintă eşantioanele semnalului original iar $\sin c \frac{t-nT_s}{T_s}$ este nucleul ideal de interpolare, translatat pe axa timpului.

In condiţiile în care este respectată teorema eşantionării, funcţia g(t) dată de relaţia (1.6) reprezintă o interpolare perfectă a semnalului original.

Procesul de interpolare ideală este reprezentat sugestiv prin figura 1.5.

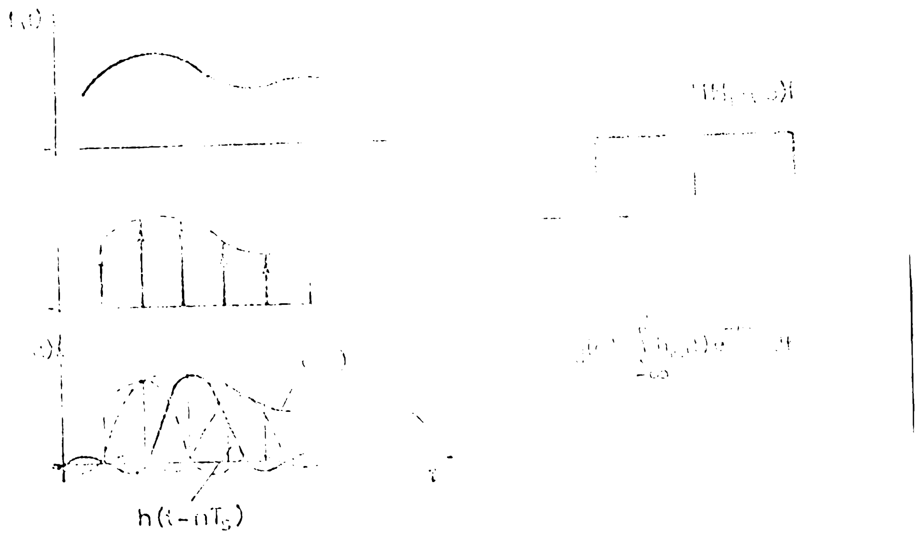


Fig.1.5.

1.2.3. Interpolarea reală

Utilizarea practică a nucleului ideal de interpolare este imposibilă datorită faptului că acesta reprezintă răspunsul la impuls al unui FTJ ideal și prin urmare este de durată infinită /69/.

Un sistem fizic de reconstrucție a unui semnal eșantionat va avea întotdeauna un răspuns la impuls de durată finită. Acest fapt face ca funcția de interpolare să difere întotdeauna de funcția interpolată (cu excepția valorilor din nodurile de interpolare). O posibilitate de apreciere a diferențelor dintre funcția originală și cea de interpolare este oferită de analiza în domeniul frecvență.

1.2.4. Spectrul funcției de interpolare în cazul semnalelor aperiodice

In ipoteza că semnalul original f(t) admite o transformată Fourie $F(\omega)$ și în plus este de bandă limitată (adică $F(\omega)=0$ pentru $|\omega|\geqslant\omega_c$), utilizînd o frecvență de eșantionare $\omega_s\geqslant 2\omega_c$, se obține pentru semnalul $f_p(t)$ transformata Fourier $F_p(\omega)$ dată de relația /66, 68/ :

$$F_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[F(\omega) * P(\omega)\right] \qquad (1.7)$$

Tinînd seama de faptul că $P(\omega)$ reprezintă transformata Fourier a trenului de impulsuri de eșantionare $p(t)$, care este:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_s) \qquad (1.8)$$

se obține pentru $F_p(\omega)$ expresia:

$$F_p(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n\omega_s) \qquad (1.9)$$

Funcția de interpolare va avea transformata $G(\omega)=H(\omega)\cdot F_p(\omega)$ unde $H(\omega)$ este funcția de transfer a sistemului de interpolare utilizat. Se obține în continuare /7o/ :

$$G(\omega) = \frac{H(\omega)}{T_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n\omega_s) \qquad (1.1o)$$

Din această relație rezultă că, dacă $H(\omega)$ nu este funcția de transfer a unui FTJ ideal, $G(\omega)$ va fi diferit de $F(\omega)$ în domeniul $[0,\omega_c]$ și, în plus, se va întinde pe o distanță mare în domeniul frecvențelor superioare lui ω_c.

In cazul în care sistemul de reconstrucție fizică este un convertor numeric-analogic, acesta acționează ca un element de menținere de ordinul zero ("zero order hold" - ZOH) care are răspunsul la impuls $h(t)$ de forma prezentată în figura 1.6.

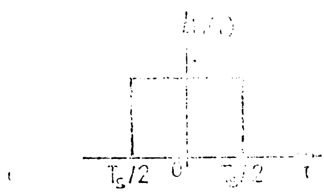


Fig.1.6.

Funcția sa de transfer are expresia:

$$H(\omega) = T_s \cdot \sin c\,\frac{\omega}{\omega_s} \qquad (1.11)$$

iar spectrul funcției de interpolare $G(\omega)$ va fi în acest caz:

$$G(\omega) = \sin c\,\frac{\omega}{\omega_s}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n\omega_s) \qquad (1.12)$$

In situația în care convertorul numeric-analogic simplu este înlocuit cu un sistem de conversie numeric-analogică de construcție specială, se poate obține o interpolare liniară între eșantioane /47, 11/. Răspunsul la impuls h(t) al unui astfel de sistem este prezentat în figura 1.7.

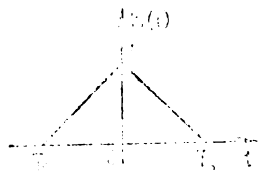


Fig.1.7.

Un astfel de sistem, cu menținere de ordinul întîi ("first order hold" - FOH) realizează o funcție de transfer avînd expresia:

$$H(\omega) = T_s \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} \qquad (1.13)$$

iar funcția de interpolare obținută va avea spectrul $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \qquad (1.14)$$

1.2.5. Spectrul funcției de interpolare în cazul semnalelor periodice

Utilizarea unor generatoare de semnale de formă arbitrară presupune în majoritatea aplicațiilor producerea unor semnale care se repetă periodic. Din acest motiv prezintă interes și spectrul funcției de interpolare pentru semnale periodice.

Dacă semnalul original f(t) este periodic, de bandă limitată, deci permite descompunerea sa într-o serie Fourier convergentă, atunci el poate fi exprimat prin relația:

$$f(t) = \sum_{m=-M}^{M} a_m \cdot e^{jm\omega_0 t} \qquad (1.15)$$

unde ω_0 este frecvența fundamentală, T_0 perioada iar a_m sînt amplitudinile armonicelor avînd expresia:

$$a_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \qquad (1.16)$$

Cu M s-a notat ordinul armonic maxim ($a_m=0$ pentru $|m|>M$). Pentru ca acest semnal să conţină după eşantionare toate informaţiile necesare reconstituirii trebuie, conform teoremei eşantionării semnalelor periodice, ca numărul de eşantioane prelevate pe o perioadă, N, să îndeplinească condiţia:

$$N \geqslant 2M+1. \tag{1.17}$$

Valoarea lui N va reprezenta valoarea raportului dintre frecvenţa de eşantionare şi frecvenţa fundamentală a semnalului original:

$$N = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{T_0}{T_s}$$

Trenul de impulsuri p(t), utilizat la eşantionarea ideală, se va utiliza sub forma unei serii Fourier /66, 77/ :

$$p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \tag{1.18}$$

Expresia semnalului eşantionat $f_p(t)$ se obţine prin următoarea multiplicare:

$$f_p(t) = f(t).p(t) = \left(\sum_{m=-M}^{M} a_m e^{jm\omega_0 t}\right).\left(\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}\right) \tag{1.19}$$

Pentru a efectua calculele din relaţia (1.19) se poate face uz de următoarea proprietate /70/ :

Fie două semnale periodice $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ avînd aceeaşi perioadă $T_0=2\pi/\omega_0$. Produsul lor poate fi restrîns astfel:

$$f_1(t).f_2(t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a'_m e^{jm\omega_0 t}\right).\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b'_\ell e^{j\ell\omega_0 t}\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a'_m b'_\ell e^{j(m+\ell)\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a'_{k-\ell} b'_\ell\right) e^{jk\omega_0 t} \tag{1.20}$$

In cazul nostru, pentru a putea aplica această proprietate, se definesc cele două semnale $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ astfel:

$$f_1(t) = f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a'_m e^{jm\omega_0 t} \quad \text{unde } a'_m = \begin{cases} a_m & \text{pt. } |m| \leqslant M \\ 0 & \text{pt. } |m| > M \end{cases} \tag{1.21}$$

$$f_2(t) = p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b'_\ell e^{j\ell\omega_0 t} \quad \text{unde } b'_\ell = \begin{cases} 1 & \text{pt. } \ell = n.N \\ 0 & \text{pt. } \ell \neq n.N \end{cases} \tag{1.22}$$

Dacă se înmulţesc cele două semnale se obţine relaţia:

$$f_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{a'_m b'_\ell}{T_s} e^{j(m+\ell)\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{a'_{k-\ell} b'_{\ell}}{T_s} \right) e^{jk\omega_0 t} \quad (1.23)$$

Notînd cu $d_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{a'_{k-\ell} b'_{\ell}}{T_s}$ rezultă:

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.24)$$

Prin urmare, semnalul eşantionat $f_p(t)$ este tot un semnal periodic. Produsele $a'_{k-\ell} b'_{\ell}$ sînt nenule cînd sînt îndeplinite simultan condiţiile:

$$\begin{cases} \ell = nN \\ |k-\ell| \leqslant M \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} \ell = nN \\ k-M \leqslant \ell \leqslant k+M \end{matrix} \quad (1.25)$$

Aceste condiţii sînt îndeplinite pentru o singură valoare a lui ℓ şi prin urmare este adevărată relaţia:

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{a'_{k-\ell} b'_{\ell}}{T_s} = \frac{a'_{k-nN}}{T_s} \quad (1.26)$$

Ţinînd cont şi de modul în care a fost definit a'_m rezultă că:

$$d_k = \begin{cases} \frac{a_m}{T_s} & \text{pentru } k=m+nN \\ 0 & \text{pentru } k \neq m+nN \end{cases} \quad (1.27)$$

Aplicînd metoda răspunsului unui sistem la un semnal de intrare periodic /7o/ se obţine expresia funcţiei de interpolare:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot H(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad (1.28)$$

şi prin urmare se constată că şi funcţia de interpolare este tot o serie Fourier.

Ea mai poate fi exprimată în forma:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{unde } A_k = \begin{cases} \frac{a_m}{T_s} H(k\omega_0) & \text{pt. } k=m+nM \\ 0 & \text{pt. } k \neq m+nN \end{cases} \quad (1.29)$$

In cazul în care sistemul de reconstrucţie este un CNA (ZOH), se obţine, conform relaţiilor (1.11) şi (1.29), pentru funcţia de interpolare expresia:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m \sin c \frac{k}{N} e^{jk\omega_0 t} \quad \text{unde } k=m+nN \quad (1.3o)$$

Dacă se utilizează interpolarea liniară (FOH) se obţine:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m \sin c^2 \frac{k}{N} e^{jk\omega_0 t} \quad \text{unde } k=m+nN \qquad (1.31)$$

Utilitatea acestor relaţii poate fi pusă în evidenţă cu ajutorul tabelului nr.1, în care se prezintă amplitudinile armonicelor unui semnal sinusoidal, cu amplitudinea 1, eşantionat şi reconstituit cu un convertor N/A (fiind vorba de ZOH se utilizează relaţia (1.30)) în funcţie de N şi de ordinul armonic k = = 1+nN (m=1 în cazul unui semnal sinusoidal).

TABELUL Nr.1

n	N=10		N=100		N=1000	
	Ordin armonic	Amplitudine	Ordin armonic	Amplitudine	Ordin armonic	Amplitudine
0	fundamental	0,9836	fundamental	0,9998	fundamental	0,99998
-1	9	0,1093	99	0,0101	999	0,00101
1	11	0,0894	101	0,0099	1001	0,00099
-2	19	0,0518	199	0,0050	1999	0,00050
2	20	0,0468	201	0,0050	2001	0,00050

1.3. Convertorul numeric-analogic

Convertorul numeric-analogic (CNA) este un element care nu poate lipsi din nici un sistem de reconstrucţie fizică a semnalelor eşantionate. In esenţă un CNA este un circuit decodificator. El acceptă la intrare un semnal numeric D şi o referinţă R şi generează la ieşire un semnal analogic A=R.D. De obicei D este subunitar (de ex. $D=a_1.2^{-1}+a_2.2^{-2}+\ldots+a_n.2^{-n}$) /34, 35, 77, 78/.

1.3.1. Parametrii statici ai convertorului numeric-analogic

Un prim parametru static al CNA este funcţia de transfer. Aceasta arată corespondenţa dintre semnalul numeric de la intrare şi tensiunea analogică de la ieşire. Pentru fiecare cod binar de la intrare există o singură valoare posibilă a ieşirii. Pasul cu care se poate schimba ieşirea este cuanta Q. Numărul de stări distincte de la ieşire este 2^n unde n este numărul de biţi al semnalului numeric acceptat de CNA la intrare. Acest număr determină rezoluţia CNA precum şi zgomotul de cuantizare /35, 87, 90, 107/.

Acuratețea sau precizia unui convertor este influențată de rezoluţie dar mai este afectată şi de o serie de erori statice cum sînt eroarea de scală, eroarea de cîştig, eroarea de offset, eroarea de liniaritate. In plus, un rol important îl joacă variaţiile de temperatură la care este supus convertorul /48, 99/.

In funcţie de condiţiile de utilizare şi calitatea convertorului este posibil ca precizia acestuia să fie mai mică cu unul sau doi biţi în comparaţie cu rezoluţia pentru care a fost construit.

1.3.2. Parametrii dinamici ai convertorului numeric-analogic

Funcţionarea unui CNA este determinată, pe lîngă parametrii statici, de o serie de parametri dinamici cum sînt timpul de stabilire ("settling time"), care reprezintă timpul necesar convertorului pentru a atinge valoarea finală după o tranziţie de coduri, viteza de creştere ("slew rate") a tensiunii de ieşire precum şi viteza de conversie, care reprezintă viteza cu care convertorul permite repetarea unui ciclu de conversie.

Convertorul numeric-analogic, utilizat într-un sistem de reconstrucţie fizică, poate constitui o importantă sursă de zgomote şi distorsiuni /10, 52, 106/.

Această situaţie a fost semnalată odată cu apariţia diverselor sisteme de generare a unor semnale sinusoidale sau de altă formă prin metode de conversie N/A /2, 9, 21, 24, 33, 41, 64, 89, 93, 94/.

Zgomotul de cuantizare, care apare în sistemele de conversie N/A, poate proveni din sistemul numeric care precede convertorul sau, dacă numărul de biţi al cuvîntului eşantion este mai mare decît numărul de biţi al convertorului, atunci desigur, convertorul este cel care generează zgomotul de cuantizare. Pe lîngă acest zgomot, mai pot apare distorsiunile de şoc ("glitch") precum şi distorsiunile pe care le introduce prin viteza finită de variaţie amplificatorul de la ieşirea CNA /106/.

Tendinţa care s-a manifestat în domeniul construcţiei convertoarelor numeric-analogice a fost perfecţionarea tehnologică (s-a trecut de la realizarea discretă la monolitică sau hibridă) creşterea rezoluţiei şi acurateţei, creşterea vitezei de conversie, reducerea timpului de stabilire precum şi realizarea de circuite specializate care să suprime apariţia distorsiunilor de şoc /31, 40, 46, 58, 59, 92, 95/.

In plus, în ultimii ani, s-au dezvoltat convertoare prevăzute cu circuite de interfaţă în scopul asigurării unei compatibilităţi directe cu sistemele de calcul realizate cu microprocesoare /1, 7, 12, 25, 29, 44, 59, 91, 109/.

Principala deficienţă a convertorului N/A o constituie răspunsul în frecvenţă $H(\omega)=T_s \cdot \sin c \frac{\omega}{\omega_s}$ pe care acesta îl realizează. Această caracteristică de frecvenţă, corespunzînd elementului de menţinere de ordinul zero, este mult diferită de funcţia de transfer a unui filtru trece-jos ideal. Ea nu depinde nici de acurateţe, nici de rezoluţie şi nici de alţi parametri statici sau dinamici susceptibili de îmbunătăţiri.

1.3.3. Sisteme de conversie N/A cu interpolare liniară

O primă cale pe care s-a mers, în scopul îmbunătăţirii funcţiei de transfer pe care o realizează sistemul de conversie N/A, a fost realizarea de sisteme cu interpolare liniară /11, 47/. Un astfel de sistem utilizează două sau mai multe conver-

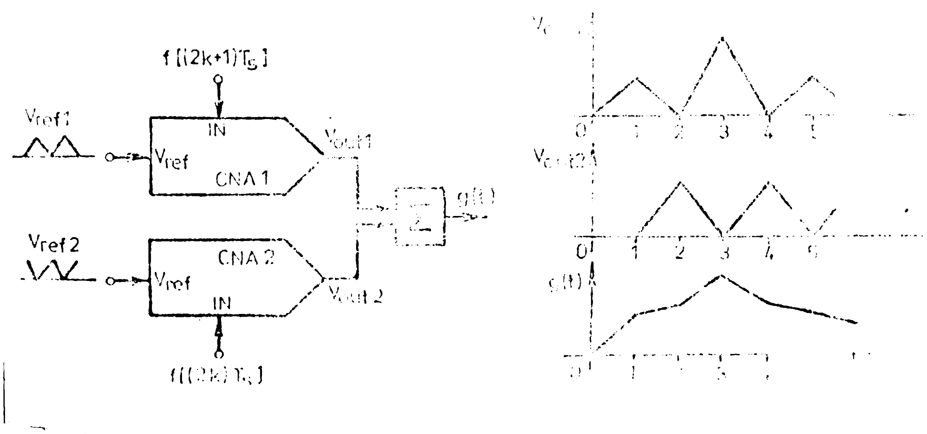


Fig.1.8.

toare N/A a căror ieşire este însumată pentru a forma semnalul interpolat. Un exemplu de sistem de interpolare liniară este prezentat în figura 1.8.

Sistemul din figură utilizează două CNA, a căror ieşire este însumată. Unul din cele două convertoare primeşte la intrare eşantioanele cu număr de ordine par (o,2,4,...), iar celălalt eşantioanele cu număr de ordine impar (1,3,5,...). Tensiunile de referinţă sînt variabile în timp (în formă triunghiulară) şi defazate cu o jumătate de perioadă (se folosesc CNA multiplicatoare).

Sistemul realizează o interpolare analogică liniară dar ridică condiţii deosebite asupra calităţii şi împerechierii celor două CNA.

Sisteme de interpolare analogică de ordin mai ridicat decît interpolarea liniară presupun o complexitate constructivă mult prea mare pentru a se justifica realizarea lor practică. In aceste condiţii, soluţia care s-a impus în ultimul timp a fost combinarea unui sistem de interpolare numerică cu un convertor numeric-analogic.

1.4. Interpolarea combinată

1.4.1. Principiul interpolării numerice

Reconstrucţia unui semnal (eşantionat) utilizînd un sistem de conversie N/A obişnuit (ZOH sau chiar FOH) nu asigură performanţe satisfăcătoare decît în situaţia în care semnalul original este eşantionat cu o frecvenţă mult mai mare decît cea limită impusă de teorema eşantionării.

Intercalarea unui sistem de interpolare numerică între secvenţa de eşantionare de intrare şi CNA poate asigura ridicarea performanţelor procesului de reconstrucţie la un nivel acceptabil deoarece interpolarea numerică are ca principal efect mărirea numărului de eşantioane care ajunge la intrarea CNA făcînd ca acesta să opereze la o frecvenţă mai mare decît frecvenţa iniţială (la care a fost eşantionat semnalul original) /8, 2o, 84, 85/.

Efectul unui interpolator numeric este prezentat în figura 1.9.

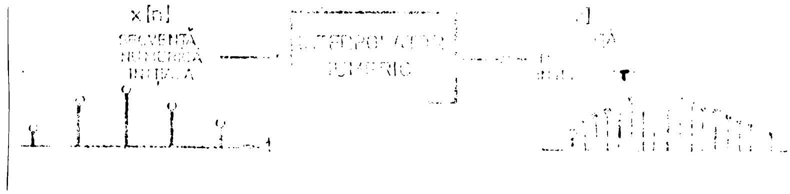
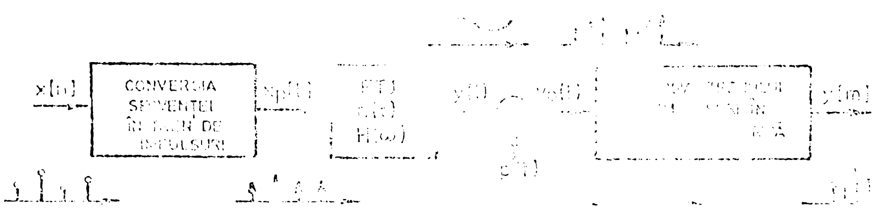


Fig.1.9.

Prin interpolare numerică, între două eşantioane consecutive ale secvenţei iniţiale, se intercalează un anumit număr de eşantioane suplimentare, calculate după o anumită regulă. Acest procedeu este implementat pe o structură de filtru numeric special conceput pentru acest scop (filtru numeric de interpolare) /19, 20, 23, 73, 83, 108/.

Din punct de vedere al prelucrării semnalului, interpolatorul numeric poate fi echivalat cu un sistem analogic care transformă secvenţa numerică iniţială în tren de impulsuri, filtrează analogic, cu un FTJ acest tren, generînd un semnal analogic care este apoi reeşantionat cu o frecvenţă mai mare decît frecvenţa iniţială. Urmează apoi o transformare a trenului de impulsuri, obţinut după a doua eşantionare, în secvenţă numerică /66/.

Acest model echivalent este prezentat în figura 1.10.



528880/360E

Fig.1.10.

In aceste condiţii, întregul lanţ de semnal, care începe cu funcţia continuă originală şi se încheie cu funcţia de interpolare, se poate echivala cu modelul din figura 1.11 (Obs. se consideră că eşantionarea în ambele faze este ideală).

Implementarea unui astfel de sistem de reconstrucţie poate asigura o calitate ridicată a semnalului final de interpolare

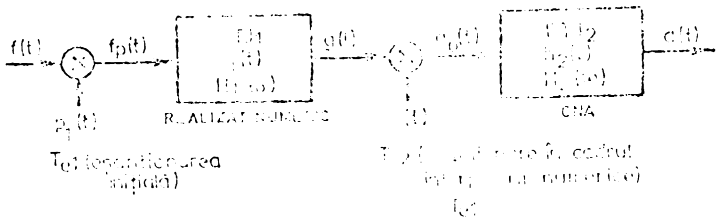


Fig.1.11.

d(t) dacă proiectarea este riguroasă şi se ţine seama de toţi factorii care intervin în acest proces. In caz contrar nu este însă exclusă posibilitatea unei înrăutăţiri a calităţii semnalului reconstituit în comparaţie cu situaţia în care se utilizează direct un convertor N/A.

1.4.2. Spectrul semnalului reconstituit în cazul interpolării combinate

In situaţia în care semnalul original f(t) admite o transformată Fourier $F(\omega)$ de bandă limitată, asupra acesteia, în cursul procesului de réconstrucţie combinată, conform modelului din figura 1.11, se efectuează următoarele transformări:

$$F(\omega) \rightarrow F_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[F(\omega) * P_1(\omega)\right] \qquad (\omega_{s1})$$

$$F_p(\omega) \rightarrow G(\omega) = H_1(\omega)\cdot F_p(\omega)$$

$$G(\omega) \rightarrow G_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[G(\omega) * P_2(\omega)\right] \qquad (\omega_{s2})$$

$$G_p(\omega) \rightarrow D(\omega) = H_2(\omega)\cdot G_p(\omega)$$

In final, se obţine expresia spectrului de frecvenţe al semnalului de interpolare $D(\omega)$:

$$D(\omega) = \frac{1}{T_{s1}} \cdot \frac{1}{T_{s2}} \cdot H_2(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_1(\omega - m\omega_{s2}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_{s1} - m\omega_{s2}) \qquad (1.32)$$

Avînd în vedere că $H_1(\omega)$ şi $H_2(\omega)$ sînt funcţiile de transfer corespunzătoare unor filtre trece-jos, se poate presupune că spectrele translatate prin eşantionare în banda de tăiere a acestor filtre pot fi neglijate.

In aceste condiţii, spectrul de frecvenţe al semnalului de interpolare va avea expresia simplificată:

$$D(\omega) = \frac{1}{T_{s1}} \cdot \frac{1}{T_{s2}} \cdot H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot F(\omega) \qquad (1.33)$$

Această aproximare se justifică pe deplin dacă interpolarea numerică se face cu un filtru cu performanțe ridicate, corespunzător unui filtru trece-jos de ordin superior.

In plus interpolarea pe cale numerică poate fi la rîndul ei efectuată în mai multe etape consecutive, ceea ce va avea ca efect multiplicarea funcțiilor de transfer ale filtrelor corespunzătoare.

O relație echivalentă relației (1.33) se poate obține pentru cazul semnalelor periodice.

Dacă semnalul original este periodic și poate fi reprezentat printr-o serie Fourier cu un număr finit de termeni, de amplitudini finite, $f(t) = \sum_{m=-M}^{M} a_m e^{jm\omega_0 t}$, asupra acestui semnal, prin transformările care decurg din modelul prezentat în figura 1.11, se obține semnalul de interpolare d(t) avînd expresia:

$$d(t) = \frac{1}{T_{s1}} \cdot \frac{1}{T_{s2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_m H_1\left[(m+nN_1)\omega_0\right] H_2\left[(\underbrace{m+nN_1+\ell N_2}_{i})\omega_0\right] e^{ji\omega_0 t} \qquad (1.34)$$

In ipoteza că filtrele $H_1(\omega)$ și $H_2(\omega)$ suprimă total semnalele în zona de tăiere, se obține o formă simplificată:

$$d(t) = \frac{1}{T_{s1}} \cdot \frac{1}{T_{s2}} \sum_{m=-M}^{M} a_m H_1(m\omega_0) H_2(m\omega_0) e^{jm\omega_0 t} \qquad (1.35)$$

Această relație este utilă întrucît evidențiază efectul reconstituirii asupra componentelor semnalului original.

Se pierde însă din vedere îmbogățirea spectrală generată de interpolare. In realitate, oricît de bun ar fi filtrul de interpolare numerică, el este urmat de un CNA care realizează o caracteristică de transfer mult diferită de cea a unui filtru trece-jos ideal.

Din acest motiv, analiza în domeniul frecvență a sistemelor de reconstrucție combinată (filtru numeric + CNA) este în general dificilă și neconcludentă. Pe parcursul prezentei lucrări se va prezenta o altă metodă de analiză mai avantajoasă.

1.5. Sisteme de interpolare numerică

1.5.1. Funcţionarea şi construcţia sistemelor de interpolare numerică

Sistemele de interpolare numerică au ca principală sarcină mărirea frecvenţei de eşantionare a secvenţei numerice de intrare de un anumit număr de ori (multiplicarea ei cu un factor întreg sau raţional). Această operaţie trebuie astfel realizată încît ansamblul format de interpolatorul numeric şi convertorul N/A care îl urmează să asigure o îmbunătăţire a calităţii semnalului reconstruit.

Modelul de semnal şi transformările la care este supusă secvenţa numerică de la intrare sînt prezentate în figura 1.12 /2o, 88/.

Fig.1.12.

In figură a fost prezentat cazul în care frecvenţa de eşantionare se măreşte de trei ori (L=3). Se observă că în secvenţa iniţială x[n] între fiecare două eşantioane consecutive se introduc în primă fază cîte două eşantioane de valoare nulă (L-1 în general). Se obţine secvenţa w[m] a cărei expresie analitică este dată de relaţia:

$$w[m] = \begin{cases} x\left[\frac{m}{L}\right] & \text{pentru } m=0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \qquad (1.36)$$

Trecerea secvenţei w[m] printr-un filtru numeric trece-jos produce la ieşirea acestuia secvenţa interpolată y[m].

Realizarea unor sisteme de interpolare numerică are de obicei la bază utilizarea unor filtre numerice nerecursive (cu răspunsul la impuls de durată finită - "FIR") /15, 2o, 71, 84/.

În general, un filtru numeric nerecursiv realizează secvența de ieșire pe baza secvenței de intrare și a unei ecuații de forma următoare:

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot x[m-n] \tag{1.37}$$

In cazul sistemului de interpolare, filtrul numeric cu răspunsul la impuls h[m] va produce la ieșire secvența:

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m-k] \cdot w[k] \tag{1.38}$$

Trecînd de la w[k] la $x\left[\frac{k}{L}\right]$ și făcînd notațiile următoare:

$$\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor = \text{partea întreagă a raportului } \frac{m}{L} \tag{1.39}$$

$$m \oplus L \doteq \text{valoarea lui m modulo L} \tag{1.40}$$

se obține ecuația sistemului de interpolare:

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[nL+m \oplus L] \cdot x\left[\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right] \tag{1.41}$$

Făcînd notația:

$$g_m[n] = h[nL+m \oplus L] \tag{1.42}$$

se obține /2o/ :

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m[n] \cdot x\left[\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right] \tag{1.43}$$

Coeficienții $g_m[n]$, ai filtrului de interpolare, sînt periodici după indicele m cu perioada L /2o/.

Utilizarea unor coeficienți cu variație periodică în timp face structura sistemelor de interpolare numerică să fie mai complexă decît a filtrelor numerice nerecursive uzuale (invariante în timp) /18, 42, 54/.

In situația în care mărimea frecvenței de eșantionare trebuie efectuată prin multiplicare cu un factor rațional, interpolatorul numeric este urmat de un sistem de decimare /2o/.

Implementarea interpolatoarelor numerice poate fi realizată sub forma unor filtre FIR în forma directă sau prin utilizarea unor rețele polifazice /4, 6, 2o, 61/.

Datorită avantajelor pe care le prezintă, din punct de vedere al volumului de coeficienți ce trebuie stocați în memoria sistemului precum și al volumului de calcule necesare, se preferă realizarea de sisteme de interpolare simple prin cuplarea în cascadă a mai multor interpolatoare simple (cu cît L este mai mare cu atît structura interpolatorului este mai complexă).

Această metodă poartă în literatură denumirea de "multistoge implementation" /2o, 28, 82/.

Există şi lucrări în care se prezintă utilizarea unor filtre recursive (IIR) pentru interpolare numerică /19, 43, 84/.

1.5.2. Proiectarea sistemelor de interpolare numerică

Proiectarea unui sistem de interpolare numerică presupune alegerea unei anumite structuri precum şi dimensionarea coeficienţilor filtrelor numerice utilizate, în funcţie de aplicaţia practică pentru care este destinat sistemul /2o, 23, 73, 83, 88, 1o8/.

Calculul coeficienţilor filtrelor de interpolare se poate efectua fie printr-o analiză în domeniul frecvenţă, pe baza condiţionării răspunsului în frecvenţă al interpolatorului, /17, 2o, 36/, fie printr-o analiză în domeniul timp, pe baza condiţionării răspunsului la impuls h[m] al filtrului /16, 2o, 22, 37, 65, 74, 85/.

1.5.3. Metode de proiectare în domeniul frecvenţă

In cadrul acestei categorii de metode de proiectare, o primă metodă este aproximarea optimală în sens Cebîşev ("equiripple design") a caracteristicii de transfer a filtrului. Această metodă presupune definirea unei scheme de toleranţă a caracteristicii şi este optimală în sensul că maximul erorii de aproximare în anumite regiuni de interes este minimizat /51, 71/.

O altă metodă este proiectarea pentru jumătate de bandă ("half-band design") şi este destinată sistemelor care dublează numărul de eşantioane. Ea se bazează pe simetria caracterusticii filtrelor faţă de punctul $\omega_s/2$ /3, 5/.

Metoda erorii minimax ("minimax error") asigură minimizarea erorii maxime a caracteristicii de frecvenţă a filtrului pe întregul interval cuprins între 0 şi ω_s /63/.

O ultimă metodă importantă este minimizarea erorii medii pătratice a răspunsului în timp tratat în cazul unor semnale deterministe. Această metodă conduce la impunerea unor restricţii asupra funcţiei de transfer a filtrului /62, 63, 72/.

1.5.4. Metode de proiectare în domeniul timp

In cadrul acestor metode un prim loc important îl deține interpolarea clasică (interpolarea Lagrange) și ea se bazează pe definirea coeficienților interpolatorului numeric pornind de la răspunsul la impuls (nucleul) al unor sisteme analogice. Acest răspuns la impuls, construit pe segmente de polinoame de un anumit grad, se încadrează în categoria de interpolare denumită generic "spline" /16, 22, 27, 37, 85/.

O altă metodă importantă este metoda ferestrei temporale ("window design") și ea se bazează pe calculul coeficienților din răspunsul la impuls al interpolatorului ideal, multiplicat cu o fereastră temporală simetrică de o anumită formă /65, 81/.

O ultimă metodă importantă este cea în care dimensionarea coeficienților se face pe baza minimizării erorii medii pătratice a răspunsului în timp tratat în cazul unor semnale aleatoare /50, 53, 62, 74, 85/.

Această metodă va fi utilizată și dezvoltată în continuare, în cadrul acestei lucrări, pe baza ei ajungîndu-se la o serie de concluzii importante privind realizarea sistemelor de reconstrucție fizică a semnalelor eșantionate, în condițiile asigurării unei fidelități cît mai bune a semnalului analogic reconstruit (prin intermediul ansamblului interpolator numeric - convertor N/A).

. . .

CAPITOLUL 2.

NUCLEE POLINOMIALE DE INTERPOLARE

2.1. Generalităţi

Sistemele de reconstrucţie prin interpolare sînt caracterizate, din punct de vedere al teoriei semnalelor, prin răspunsul la impuls h(t), răspuns care în acest caz poartă denumirea de nucleu de interpolare ("interpolation kernel").

Valorile nucleului, calculate în anumite puncte, sînt utilizate la construcţia sistemelor de interpolare numerică, ele jucînd rolul coeficienţilor filtrelor numerice.

O categorie larg răspîndită de nuclee de interpolare o constituie nucleele polinomiale, nuclee a căror construcţie este de fapt segmentar polinomială. Astfel de nuclee pot asigura convergenţa procesului de interpolare o dată cu creşterea frecvenţei de eşantionare a semnalului original /16, 22, 27, 37, 39, 49, 55/.

2.2. Condiţiile impuse nucleelor polinomiale

In literatură sînt precizate o serie de condiţii pe care trebuie să le îndeplinească nucleul de interpolare pentru ca interpolarea reală să se apropie cît mai mult de cea ideală /2o, 39, 53/.

In acest scop, nucleul real trebuie să interpoleze nucleul ideal (prezentat în capitolul anterior şi avînd expresia analitică dată de (1.5)) în toate nodurile de interpolare. De aici rezultă un prim set de condiţii:

$$h(o) = 1$$
$$h(kT_s) = o \quad \text{pentru } \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

Nucleul ideal fiind o funcţie pară şi nucleul real trebuie să fie o funcţie pară:

$$h(t) = h(-t) \tag{2.2}$$

Deoarece nucleul ideal are toate derivatele de ordin impar impare iar cele de ordin par pare şi nucleul real trebuie să îndeplinească aceste condiţii:

$$h'(t) = -h'(-t) \tag{2.3}$$
$$h''(t) = h''(-t)$$
etc.

Nucleul de interpolare trebuie să aibă o lungime finită. Dacă se folosesc N eşantioane consecutive la construcţia funcţiei de interpolare, atunci lungimea nucleului este chiar $N.T_s$, adică:

$$h(|t| \geq N \frac{T_s}{2}) = 0 \tag{2.4}$$

Utilizarea unui număr finit de eşantioane pentru construcţia funcţiei de interpolare se efectuează utilizînd relaţia:

$$g(t) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} f(kT_s).h(t-kT_s)$$
$$\text{unde } K_1+K_2+1 = N \tag{2.5}$$

Variabila t ia valori într-un interval de lungime egală cu T_s şi care este plasat la mijlocul intervalului $[-K_1T_s, K_2T_s]$. O condiţie opţională pentru nucleele de interpolare reală dar care se aplică întotdeauna la nucleele polinomiale este conservarea componentei continue a semnalului original. Această condiţie poate fi exprimată în forma:

$$H(0) = T_s \quad \text{sau} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt = T_s \tag{2.6}$$

Dacă această condiţie este respectată atunci funcţia de interpolare va asigura interpolarea perfectă a unei secvenţe de eşantioane de valoare constantă (prelevate prin eşantionarea unei funcţii constante). In această situaţie, întrucît

$$g(t) = f(kT_s) = ct. \quad \text{pentru} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.7}$$

relaţia (2.5) devine:

$$\sum_{k=-K_1}^{K_2} h(t-kT_s) = 1 \quad \text{pentru} \quad \forall k \text{ şi } \forall t \tag{2.8}$$

Din relaţia (2.8) prin derivări succesive se obţin condiţiile suplimentare:

$$\sum_{k=-K_1}^{K_2} h^{(n)}(t-kT_s) = 0 \qquad (2.9)$$

Construcţia unui nucleu de interpolare real presupune găsirea unei funcţii segmentare care să îndeplinească condiţiile enunţate anterior şi deci să se apropie cît mai mult de forma nucleului ideal.

Pentru nucleul ideal se cunosc valorile sale şi ale derivatelor sale în toate nodurile de interpolare. Principalele valori sînt trecute în tabelul 2.1.

TABELUL 2.1.

t	0	$\pm T_s$	$\pm 2T_s$	$\pm 3T_s$	etc.
$h(t)$	1	0	0	0	...
$h'(t)$	0	$\mp \frac{1}{T_s}$	$\pm \frac{1}{2T_s}$	$\mp \frac{1}{3T_s}$	...
$h''(t)$	$-\frac{2}{3T_s^2}$	$\frac{2}{T_s^2}$	$-\frac{1}{2T_s^2}$	$\frac{2}{9T_s^2}$	

Aceste valori trebuie respectate pe cît posibil şi de nucleul polinomial de interpolare.

Utilizarea unei anumite formule de interpolare (Lagrange, Spline, etc.) conduce, pentru o situaţie dată, la o anumită soluţie. Utilizarea de metode de interpolare diferite va conduce în cele mai multe cazuri la soluţii (nuclee) diferite.

2.3. Nucleul de interpolare în cazul N=1

Cazul în care se utilizează un singur eşantion pentru construcţia funcţiei de interpolare este cazul cel mai simplu ca realizare dar şi cel mai modest ca performanţe. El corespunde modului de funcţionare al convertorului numeric-analogic (ZOH).

Din relaţiile (2.8), (2.9) şi respectiv (2.4) rezultă:

$$h(t) = 1 \quad \text{pentru } |t| < \frac{T_s}{2} \qquad (2.10)$$

$$h'(t) = 0 \quad \text{pentru } |t| < \frac{T_s}{2} \tag{2.11}$$

$$h(t) = 0 \quad \text{pentru } |t| \geq \frac{T_s}{2} \tag{2.12}$$

Condițiile (2.10), (2.11) și (2.12) pot fi îndeplinite simultan de un singur nucleu care va avea expresia:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |t| < \frac{T_s}{2} \\ 0 & \text{pentru } |t| \geq \frac{T_s}{2} \end{cases} \tag{2.13}$$

Acest nucleu realizează funcția de transfer:

$$H(\omega) = T_s \sin c \, \frac{\omega}{\omega_s} \tag{2.14}$$

și are forma de variație în timp prezentată în figura 2.1.

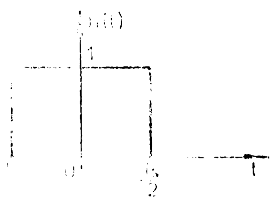


Fig.2.1.

Acest nucleu are toate derivatele nule și reprezintă cea mai simplă aproximare a nucleului ideal.

In condițiile enunțate, menținerea de ordinul zero (ZOH) reprezintă singura soluție în cazul N=1.

Renunțarea la condiția (2.8) respectiv (2.10) în cazul de față poate conduce și la alte soluții dar nucleele respective nu mai pot asigura interpolarea exactă a unei funcții constante.

2.4. <u>Nucleul de interpolare în cazul N=2</u>

Dacă la construcția funcției de interpolare se utilizează două eșantioane consecutive, atunci condițiile (2.4), (2.8) și (2.9) devin:

$$h(t) = 0 \qquad \text{pentru } |t| \geq T_s \tag{2.15}$$

$$h(t) + h(t - T_s) = 1 \qquad \text{pentru } \forall t \in [0, T_s] \tag{2.16}$$

$$h'(t)+h'(t-T_s) = 0 \quad \text{pentru} \quad \forall t \in [0,T_s] \tag{2.17}$$

$$h''(t)+h''(t-T_s) = 0 \quad \text{pentru} \quad \forall t \in [0,T_s]$$

....

Se poate arăta că, în aceste condiții, se poate construi un nucleu care să asigure interpolarea perfectă a unui semnal care are a doua derivată nulă pe tot domeniul.

Considerînd că f(t) are prima derivată constantă între două eșantioane consecutive și dezvoltînd în serie Taylor în jurul originii pe f(t) se obține:

$$f(t) = f(0) + t \cdot f'(0) \tag{2.18}$$

Din relația (2.5) prin derivare rezultă:

$$g'(t) = f(0)h'(t)+f(T_s)h'(t-T_s) \tag{2.19}$$

Inlocuind în această relație pe $f(T_s)$ cu valoarea dată de (2.18) și ținînd cont că din (2.17) rezultă că $h'(t-T_s)=-h'(t)$ se obține:

$$g'(t) = -T_s f'(0)h'(t) \tag{2.20}$$

Deoarece s-a presupus că prima derivată este conservată prin interpolare adică $g'(t)=f'(t)=ct.$ rezultă că:

$$h'(t) = -\frac{1}{T_s} \quad \text{pentru} \quad t \in [0,T_s] \tag{2.21}$$

Prin urmare h(t) trebuie să fie un polinom de gradul I de forma:

$$h(t) = at+b \qquad \text{unde } a= -\frac{1}{T_s} \tag{2.22}$$

Punînd condițiile $h(0)=1$ și $h(T_s)=0$ precum și $h(t)=0$ pentru $|t|>T_s$ se obține soluția unică:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{T_s-|t|}{T_s} & \text{pentru } |t|<T_s \\ 0 & \text{pentru } |t|\geqslant T_s \end{cases} \tag{2.23}$$

Acest nucleu reprezintă cazul interpolării liniare (de ordinul I sau FOH) și realizează o funcție de transfer avînd expresia:

$$H(\omega) = T_s \cdot \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} \tag{2.24}$$

Forma acestui nucleu a fost prezentată în figura 1.7.

Pentru cazul N=2 se pot construi și alte nuclee fie de grad mai mare dar exprimate printr-un singur polinom fie realizate prin racordări de mai multe polinoame.

Complicarea nucleului de interpolare în cazul N=2 poate aduce în cel mai bun caz o îmbunătățire a răspunsului în frecvență în domeniul frecvențelor joase și o înrăutățire concomitentă în domeniul frecvențelor înalte.

2.5. Nucleul de interpolare în cazul N=3

In cazul în care, pentru construcția funcției de interpolare, se utilizează trei eșantioane consecutive, se poate arăta, procedînd analog cazului N=2, că respectarea condițiilor enunțate la punctul 2.2 și condiția de interpolare perfectă a unui semnal care are a doua derivată constantă între două eșantioane consecutive (respectiv derivata a treia nulă) conduc la o soluție unică.

In acest caz nucleul care se obține corespunde interpolării Lagrange de ordinul doi a nucleului ideal și are expresia următoare:

$$h(t)=\begin{cases} \dfrac{-t^2+T_s^2}{T_s^2} & \text{pentru } |t|<\dfrac{T_s}{2} \\[2ex] \dfrac{t^2-3T_s|t|+2}{2T_s^2} & \text{pentru } \dfrac{T_s}{2}\leqslant|t|<\dfrac{3T_s}{2} \\[2ex] 0 & \text{pentru } |t|\geqslant\dfrac{3T_s}{2} \end{cases} \qquad (2.25)$$

Acest nucleu realizează un răspuns în frecvență avînd expresia:

$$H(\omega)=T_s\sin c^3\frac{\omega}{\omega_s}-\frac{3}{8}T_s\sin c\,\frac{3\omega}{\omega_s}+\frac{3}{8}T_s\sin c\,\frac{\omega}{\omega_s} \qquad (2.26)$$

Si în acest caz, renunțînd la condiția conservării derivatei de ordinul doi, se pot construi și alte nuclee fără să se obțină însă o îmbunătățire a răspunsului în frecvență.

2.6. Nucleul de interpolare în cazul N=4

Cazul utilizării a patru eșantioane consecutive la construcția funcției de interpolare prezintă o importanță deosebită. Acest caz este cel mai frecvent utilizat în practică (utilizarea a mai mult de patru eșantioane complică sistemul de interpolare) datorită unui compromis acceptabil între complexitate și performanțe.

Pentru cazul acesta se utilizează mai multe nuclee de interpolare diferite (Lagrange de ordinul 3, Spline de ordinul 3, "Cubic convolution interpolation kernel") /39, 53, 85, 88/.

In acest caz se poate arăta că există posibilitatea construirii unui nucleu care are proprietatea de a interpola perfect un semnal care are derivata a patra nulă (deci derivata a treia constantă între două eşantioane). Se consideră un nucleu de forma:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{a|t^3| + bT_s t^2 + cT_s^2|t| + dT_s^3}{T_s^3} & \text{pt. } |t| < T_s \\[2ex] \dfrac{e|t^3| + fT_s t^2 + gT_s^2|t| + hT_s^3}{T_s^3} & \text{pt. } T_s \leqslant |t| < 2T_s \\[2ex] o & \text{pt. } |t| \geqslant 2T_s \end{cases} \qquad (2.27)$$

Condiţia $h(o) = 1$ conduce la $d=1$

Condiţia $g'''(t)=f'''(t)=ct.$ conduce la $a= \frac{1}{2}$, $e=-\frac{1}{6}$

Condiţia $g''(t)=f''(t)=ct.$ (pentru $f'''(t)=o$) conduce la $f=1$, $b=-1$

Condiţia $h(T_s)=o$ conduce la $c=-\frac{1}{2}$ iar condiţiile $h(T_s)_+=o$ şi $h(2T_s)=o$ conduc la $h=1$ şi $g=-\frac{11}{6}$.

Se obţine ca soluţie unică nucleul avînd expresia:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{|t^3| - 2T_s t^2 - T_s^2|t| + 2T_s^3}{2T_s^3} & \text{pt. } |t| < T_s \\[2ex] \dfrac{-|t^3| + 6T_s t^2 - 11T_s^2|t| + 6T_s^3}{6T_s^3} & \text{pt. } T_s \leqslant |t| < 2T_s \\[2ex] o & \text{pt. } |t| \geqslant 2T_s \end{cases} \qquad (2.28)$$

Nucleul avînd expresia dată de (2.28) este nucleul Lagrange de ordinul trei ("CL") şi el corespunde interpolării cu polinoame Lagrange de ordinul 3 a nucleului ideal între nodurile de eşantionare din intervalul $[-2T_s, 2T_s]$ /53, 85/.

Acest nucleu realizează un răspuns în frecvenţă dat de relaţia:

$$H(\omega) = T_s \sin c^4 \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{2}{3} T_s \sin c^2 \frac{2\omega}{\omega_s} + \frac{2}{3} T_s \sin c \frac{2\omega}{\omega_s} \qquad (2.29)$$

Forma acestui nucleu precum şi a derivatelor sale este prezentată în figura 2.2.

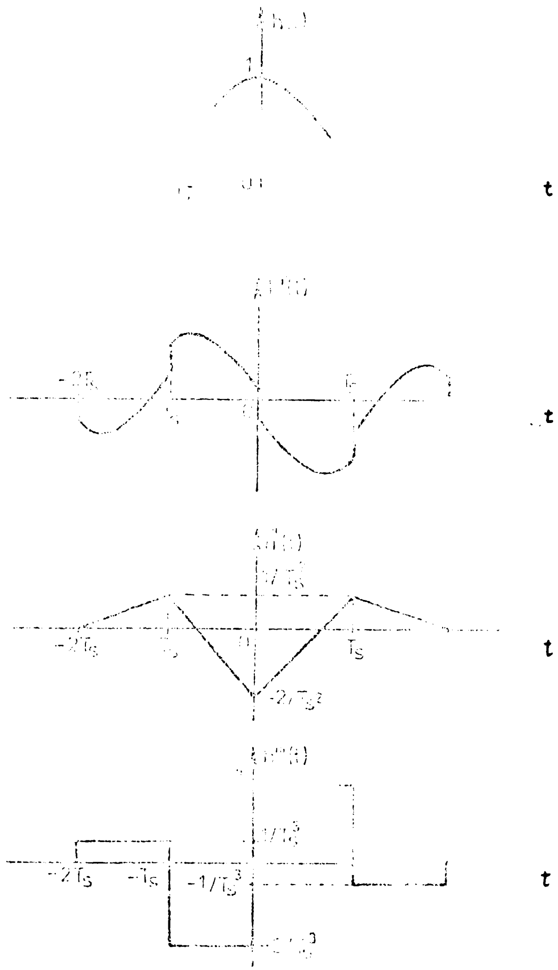


Fig.2.2.

Utilizarea metodei de interpolare Spline, cu polinoame de gradul trei, pentru nucleul ideal, conduce la un alt nucleu care poartă în literatură numele de nucleu Spline de ordinul trei (sau "Cubic Spline" - CS) /53/.

Acest nucleu are o formă asemănătoare cu cea a nucleului Lagrange de ordinul trei și este definit prin următoarea relație:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{|t^3|-2T_s t^2+T_s^3}{T_s^3} & \text{pt. } |t| < T_s \\ \dfrac{-|t^3|+5T_s t^2-8T_s^2|t|+4T_s^3}{T_s^3} & \text{pt. } T_s \leqslant |t| < 2T_s \\ 0. & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.30)$$

Răspunsul în frecvenţă al acestui nucleu are expresia:

$$H(\omega) = \frac{T_s}{\omega^2 T_s^2}\left(12 \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} - 24 \sin c^2 \frac{2\omega}{\omega_s} + 8 \sin c \frac{4\omega}{\omega_s} + 4 \sin c \frac{2\omega}{\omega_s}\right) \quad (2.31)$$

In legătură cu nucleul spline de ordinul trei trebuie făcută observaţia că acest nucleu nu mai asigură conservarea derivatei de ordinul trei (nu mai îndeplineşte condiţia $g'''(t)=f'''(t)$ pentru $f^{IV}(t)=0$).

Un alt nucleu de ordinul trei este cel definit în lucrarea /39/ şi denumit "Cubic Convolution Interpolation Kernel" (CCIK). Acest nucleu este definit prin relaţia:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{3|t^3|-5T_s t^2+2T_s^3}{2T_s^3} & \text{pt. } |t| < T_s \\ \dfrac{-|t^3|+5T_s t^2-8T_s^2|t|+4T_s^3}{2T_s^3} & \text{pt. } T_s \leqslant |t| < 2T_s \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.32)$$

Acest nucleu realizează următoarea funcţie de transfer:

$$H(\omega) = 3T_s \sin c^4 \frac{\omega}{\omega_s} - 2T_s \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} \cdot \sin c \frac{2\omega}{\omega_s} \quad (2.33)$$

In figura 2.3, sînt prezentate formele pentru nucleul Spline de ordinul trei (CS) şi "Cubic Convolution Interpolation Kernel" (CCIK) precum şi derivatele lor.

In legătură cu nucleul CCIK trebuie spus că acesta, deşi nu asigură conservarea derivatei a treia ($g'''(t)=f'''(t)$ pentru $f^{IV}(t)=0$) realizează o proporţionalitate de forma $g'''(t)= = k.f'''(t)$.

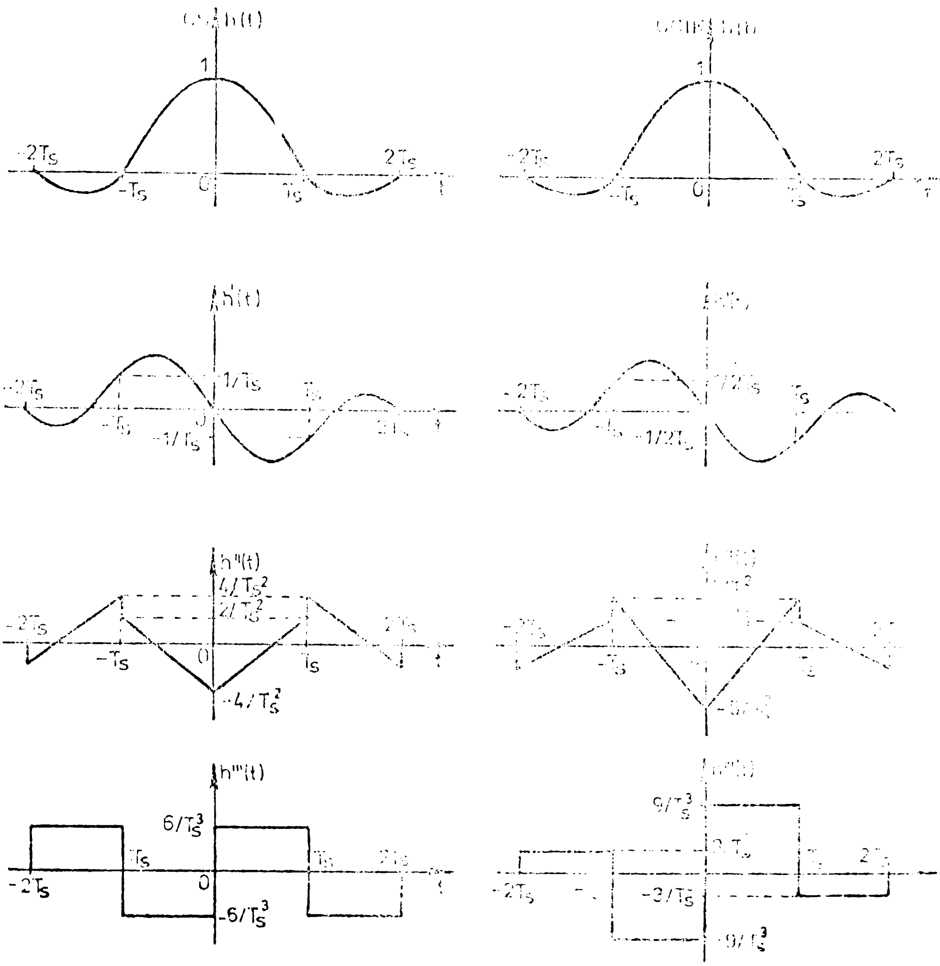


Fig.2.3.

2.7. Construcţia unui nucleu de interpolare de ordinul trei cu performanţe ridicate

Din analiza derivatelor nucleelor de ordinul trei (Lagrange, Spline şi OCIK) se constată că acestea prezintă anumite discontinuităţi. Astfel nucleul Lagrange are prima derivată discontinuă în punctele t=o şi $t=\pm T_s$, iar nucleele Spline şi CCIK au derivata a doua discontinuă în punctele $t=\pm T_s$ /49/.

In continuare se urmărește construcția unui nucleu care să prezinte și prima și a doua derivată continue în punctele $t=o$, $t=\pm T_s$.

Se pornește de la forma generală a nucleului de ordinul trei pentru cazul N=4, formă dată de relația (2.27).

Pentru simplificarea calculelor se va trata cazul $T_s=1$, ceea ce conduce la un nucleu general de forma:

$$h(t) = \begin{cases} a|t^3|+bt^2+c|t|+d & \text{pt. } |t|<T_s \\ e|t^3|+ft^2+g|t|+h & \text{pt. } T_s \leq |t| < 2T_s \\ o & \text{în rest} \end{cases} \tag{2.34}$$

Cerința ca acest nucleu să interpoleze nucleul ideal și să prezinte derivate continue obligă verificarea de către h(t) a următoarelor condiții:

$$h(o) = o, \quad h(1_-) = o, \quad h(1_+) = o, \quad h(2_-) = o \tag{2.35}$$

$$h'(o) = o, \quad h'(1_-) = h'(1_+), \quad h'(2_-) = o \tag{2.36}$$

$$h''(1_-) = h''(1_+) \tag{2.37}$$

Aceste condiții conduc la un sistem de ecuații, avînd necunoscutele a, b, c, d, e, f, g și h, a cărui soluție unică este următoarea:

$$\begin{matrix} a = \frac{5}{4}, & b = -\frac{9}{4}, & c = o, & d = 1 \\ e = -\frac{3}{4}, & f = \frac{15}{4}, & g = -\frac{24}{4}, & h = \frac{12}{4} \end{matrix} \tag{2.38}$$

Cu ajutorul coeficienților (2.38) determinați anterior se poate scrie expresia analitică a nucleului denumit "Cubic Continual" (CC) :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{5|t^3|-9T_s t^2+4T_s^3}{4T_s^3} \quad \ldots & \text{pt. } |t| < T_s \\ \dfrac{-3|t^3|+15T_s t^2-24T_s^2|t|+12T_s^3}{4T_s^3} & \text{pt. } T_s \leq |t| < 2T_s \\ o & \text{în rest} \end{cases} \tag{2.39}$$

Acest nucleu are funcția de transfer dată de expresia:

$$H(\omega) = \frac{6T_s}{\omega^2 T_s^2}\left(2 \sin c^2 \frac{\omega}{\omega_s} - 3 \sin c^2 \frac{2\omega}{\omega_s} + \sin c \frac{4\omega}{\omega_s}\right). \tag{2.40}$$

Forma acestui nucleu precum şi a derivatelor sale este prezentată în figura 2.4 :

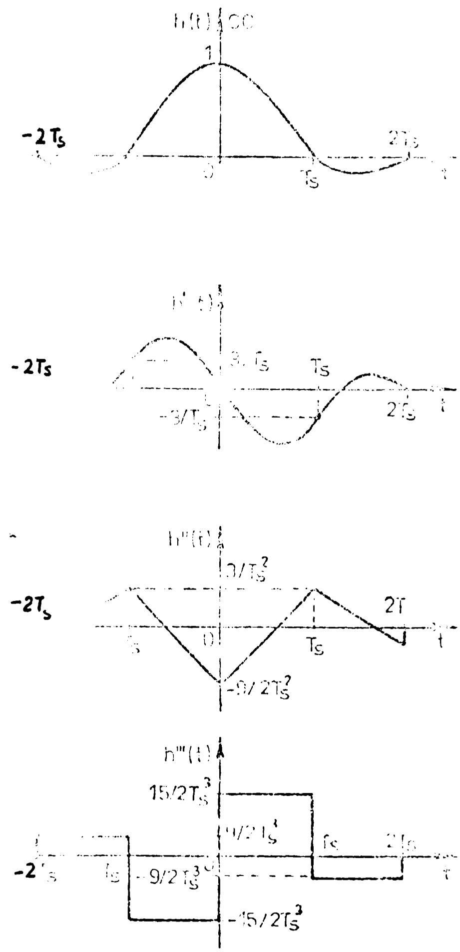


Fig.2.4.

2.8. Compararea nucleelor de ordinul trei (în cazul N=4) pe baza răspunsului în frecvenţă

Pentru a se putea aprecia performanţele nucleelor de acelaşi ordin se poate proceda într-o primă etapă la compararea a funcţiei de transfer $H(\omega)$ pe care acestea o realizează.

Utilizînd relaţiile (2.29), (2.31), (2.33) şi (2.40) pentru nucleele Lagrange, Spline, CCIK şi respectiv CC, în tabelul

2.2 se prezintă valorile lui $H(\omega)$, corespunzătoare celor patru nuclee, pentru $\omega \in [0, \omega_s]$. Valorile au fost calculate cu pasul $\omega/\omega_s = 0,05$.

TABELUL 2.2.

ω/ω_s	H_{id}	H_{L3}	H_{CCIK}	H_{S3}	H_{CC}
0	1	1	1	1	1
0,05	1	0,999852	0,999879	1,006311	1,003100
0,1	1	0,997710	0,998119	1,022881	1,010200
0,15	1	0,988965	0,990894	1,039615	1,015254
0,2	1	0,967439	0,972952	1,046829	1,009890
0,25	1	0,927212	0,939019	1,032049	0,985534
0,3	1	0,864444	0,885251	0,985978	0,935614
0,35	1	0,778706	0,810388	0,904278	0,857333
0,4	1	0,673478	0,716335	0,788811	0,752573
0,45	1	0,555689	0,608052	0,647483	0,627768
0,5	×	0,434445	0,492767	0,492767	0,492767
0,55	0	0,319267	0,378731	0,339279	0,359005
0,6	0	0,218315	0,273803	0,201015	0,237409
0,65	0	0,137010	0,184168	0,088864	0,136509
0,7	0	0,077369	0,113478	0,008864	0,061171
0,75	0	0,038132	0,062558	-0,038224	0,012167
0,8	0	0,015589	0,029672	-0,056494	-0,013410
0,85	0	0,004806	0,011263	-0,053363	-0,021050
0,9	0	0,000903	0,002911	-0,037666	-0,017377
0,95	0	0,000052	0,000307	-0,017747	-0,008720
1	0	0	0	0	0

Analizînd datele din tabelul 2.2 se constată că nucleele Lagrange şi CCIK au răspunsul în frecvenţă foarte apropiat. Nucleul CCIK este mai apropiat de nucleul ideal la joasă frecvenţă dar mai îndepărtat la frecvenţe în jurul lui ω_s.

Nucleul Spline prezintă o supracreştere la frecvenţe joase şi o trecere prin zero înainte de ω_s.

Nucleul cubic continual are o formă apropiată de cea a nucleului Spline dar cu o supracreştere mai mică la frecvenţe joase.

Pentru a pune în evidenţă comportarea nucleelor la valori diferite ale raportului ω_s/ω_m, unde ω_m este banda semnalului original, se poate defini o eroare medie a funcţiei de transfer a nucleului relativă la răspunsul în frecvenţă al filtrului trece-jos ideal.

Notînd această eroare cu e_m, ea se poate calcula cu relaţia:

$$e_m = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \left| H_{id}(\omega_k) - H(\omega_k) \right| \tag{2.41}$$

Cu K s-a notat numărul de puncte echidistante ω_k în care se calculează diferenţa dintre cele două răspunsuri în frecvenţă.

Utilizînd pasul ω/ω_s=0,05 se obţin valorile din tabelul 2.3.

TABELUL 2.3.

Nucleul utilizat	e_m		
	$\frac{\omega_s}{\omega_m} = 2$	$\frac{\omega_s}{\omega_m} = 3$	$\frac{\omega_s}{\omega_m} = 4$
Lagrange	0,102897	0,046845	0,014858
CCIK	0,106800	0,050490	0,017154
Spline	0,083132	0,034915	0,029264
CC	0,087322	0,033147	0,010469

Pe baza datelor din tabelul 2.3 se poate trage concluzia că, în cazul limită $\omega_s=2\omega_m$, nucleul Spline este superior celorlalte nuclee, el fiind urmat îndeaproape de nucleul cubic continual.

In celelalte cazuri considerate, nucleul cubic continual este cel mai bun. Se observă că la $\omega_s=4\omega_m$, nucleul Spline a devenit cel mai defavorabil. Aceste prime concluzii vor fi confirmate ulterior pe baza unei analize mai riguroase, cu ajutorul metodei erorii medii pătratice.

CAPITOLUL 3.

UTILIZAREA ERORII MEDII PATRATICE LA ESTIMAREA PERFORMANTELOR UNUI SISTEM DE INTERPOLARE

3.1. Introducere

Pentru a se putea scoate în evidență și aprecia diferența care apare între un semnal reconstruit prin interpolare și semnalul original se pot utiliza două categorii de metode de analiză: în domeniul frecvență și în domeniul timp.

In a doua categorie se înscrie și metoda erorii medii pătratice, metodă care prezintă o serie de avantaje ce vor fi prezentate în continuare.

3.2. Cazul interpolării într-o singură fază

Se consideră cazul unui sistem de interpolare care primește la intrare o secvență numerică $f[nT_s]$ de eșantioane ale unei funcții originale $f(t)$ și, printr-o singură fază de interpolare utilizînd un nucleu notat cu $h(t)$, furnizează la ieșire semnalul de interpolare $g(t)$ avînd conform relației (1.4) expresia:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[nT_s]\cdot h(t-nT_s) \qquad (3.1)$$

Eroarea momentană, care apare prin interpolare, reprezintă diferența dintre semnalul original și semnalul reconstituit:

$$e(t) = f(t)-g(t) = f(t)-\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[nT_s]\cdot h(t-nT_s) \qquad (3.2)$$

Dacă se ține seama de faptul că un sistem real de interpolare utilizează pentru reconstrucția semnalului la un moment dat "t" un număr finit de eșantioane "N", că nucleul utilizat "$h(t)$" este nul pentru $|t|\geq\frac{N}{2}T_s$ și că fiecare eșantion utilizat este multiplicat cu un nucleu unic translatat pe axa timpului, se pot face următoarele notații:

$$h\left[(t-nT_s)-kT_s\right] = h_k(t-nT_s) \tag{3.3}$$

Pentru $t\in\left[nT_s,(n+1)T_s\right]$, notăm:

$$t = nT_s+\xi \qquad \text{unde} \qquad \xi\in\left[o,T_s\right] \tag{3.4}$$

In aceste condiții, eroarea momentană pentru intervalul $\left[nT_s,(n+1)T_s\right]$ se poate scrie în forma:

$$e_n(\xi) = f(nT_s+\xi) - \sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)f\left[(n+k)T_s\right] \tag{3.5}$$

unde $m_1+m_2+1=N$ reprezintă numărul de eșantioane consecutive utilizate pentru interpolare.

Considerînd, în continuare, că semnalul de intrare este rezultatul unui proces aleator staționar în sens larg (parametrii săi statistici nu depind de t) pe baza relației (3.5) se obține expresia erorii medii pătratice statistice /53, 7o, 85/ :

$$E\left\{e_n^2(\xi)\right\} = E\left\{\left[f(nT_s+\xi)-\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)f\left[(n+k)T_s\right]\right]^2\right\} \tag{3.6}$$

Datorită faptului că nucleul utilizat la interpolare "h(t)" este un semnal determinist, expresia lui intervine în media statistică doar ca o constantă și deci relația (3.6) devine:

$$E\left\{e_n^2(\xi)\right\} = E\left\{f^2(nT_s+\xi)\right\} -2\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)E\left\{f(nT_s+\xi)f\left[(n+k)T_s\right]\right\} +$$

$$+\sum_{k=-m_1}^{m_2}\sum_{l=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)h_l(\xi)E\left\{f\left[(n+k)T_s\right]f\left[(n+l)T_s\right]\right\} \tag{3.7}$$

Dacă ținem seama de faptul că media statistică $E\left\{f(t+\tau)f(t)\right\}$ reprezintă funcția de autocorelație a semnalului original, notată cu $R_{ff}(\tau)$, /13/ mediile care intervin în relația (3.7) reprezintă:

$$E\left\{f^2(nT_s+\xi)\right\} = R_{ff}(o) \tag{3.8}$$

$$E\left\{f(nT_s+\xi)f\left[(n+k)T_s\right]\right\} = R_{ff}(\xi-kT_s) \tag{3.9}$$

$$E\left\{f\left[(n+k)T_s\right]\cdot f\left[(n+l)T_s\right]\right\} = R_{ff}\left[(k-l)T_s\right] \tag{3.1o}$$

Utilizînd expresiile (3.8), (3.9) și (3.1o) în relația (3.7) se obține:

$$E\left\{e_n^2(\xi)\right\} = R_{ff}(o)-2\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)R_{ff}(\xi-kT_s)+\sum_{k=-m_1}^{m_2}\sum_{\ell=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\cdot$$

$$\cdot R_{ff}\left[(k-\ell)T_s\right] \tag{3.11}$$

Impărţind relaţia de mai sus cu $R_{ff}(o)$, care reprezintă puterea semnalului original, se obţine:

$$\frac{E\left\{e_n^2(\xi)\right\}}{R_{ff}(o)} = 1-2\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)\,\frac{R_{ff}(\xi-kT_s)}{R_{ff}(o)}+\sum_{k=-m_1}^{m_2}\sum_{\ell=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\cdot$$

$$\cdot\frac{R_{ff}\left[(k-\ell)T_s\right]}{R_{ff}(o)} \tag{3.12}$$

Această relaţie, care nu depinde de n, permite calculul valorii erorii medii pătratice normate prin puterea semnalului original numai în funcţie de expresia nucleului de interpolare utilizat şi de funcţia de autocorelaţie a semnalului original.

In situaţia în care semnalul original are media statistică nulă, $R_{ff}(o)$ va reprezenta chiar dispersia semnalului original adică σ_f^2 iar $E\left\{e^2(\xi)\right\}$ va fi $\sigma_e^2(\xi)$ relaţia (3.12) devenind:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)R_{ff}(\xi-kT_s)+\sum_{k=-m_1}^{m_2}\sum_{\ell=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\cdot$$

$$\cdot\frac{R_{ff}\left[(k-\ell)T_s\right]}{R_{ff}(o)} \tag{3.13}$$

In cele ce urmează, pentru simplificarea notării, se va utiliza relaţia (3.13) dar se va avea în vedere că de fapt, pentru cazul general, membrul stîng din relaţia (3.13) are semnificaţia membrului stîng din relaţia (3.12) /53, 85/.

Relaţia (3.13) respectiv (3.12) are o serie de proprietăţi care o fac deosebit de utilă la estimarea performanţelor sistemelor de interpolare.

Deoarece membrul drept al acestor relaţii depinde de ξ dar nu depinde de n, se poate trage concluzia că eroarea medie pătratică de interpolare este periodică cu T_s. In plus, se constată că:

$$\frac{\sigma_e^2(o)}{\sigma_f^2} = \frac{\sigma_e^2(T_s)}{\sigma_f^2} = 0.$$

şi prin urmare eroarea este nulă la capetele intervalului $[nT_s,$

$(n+1)T_s]$, deci în punctele de eşantionare.

Se mai poate arăta că relaţia (3.13) dă pentru raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ valori simetrice faţă de mijlocul intervalului considerat.

Presupunînd în intervalul $[0, T_s]$ un punct $\eta = T_s - \xi$, deci simetric cu ξ faţă de mijlocul intervalului, din relaţia (3.13) rezultă:

$$\frac{\sigma_e^2(\eta)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(T_s-\xi)\,\frac{R_{ff}(T_s-\xi-kT_s)}{R_{ff}(0)} + \sum_{k=-m_1}^{m_2}\,\sum_{\ell=-m_1}^{m_2} h_k(T_s-\xi)h_\ell(T_s-\xi)\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{R_{ff}[(k-\ell)T_s]}{R_{ff}(0)} \qquad (3.14)$$

Deoarece nucleele de interpolare sînt funcţii pare iar funcţia de autocorelaţie $R_{ff}(\tau)$ se bucură de aceeaşi proprietate rezultă că:

$$h_k(T_s-\xi) = h(T_s-\xi-kT_s) = h[-\xi+(1-k)T_s] =$$

$$= h[\xi-(1-k)T_s] = h_{1-k}(\xi)$$

analog

$$h_\ell(T_s-\xi) = h_{1-\ell}(\xi)$$

şi

$$R_{ff}(T_s-\xi-kT_s) = R_{ff}[-\xi+(1-k)T_s] = R_{ff}[\xi-(1-k)T_s]$$

Făcînd notaţiile $k'=1-k$ şi $\ell'=1-\ell$ relaţia (3.14) devine:

$$\frac{\sigma_e^2(\eta)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{k'=-m_1'}^{m_2'} h_{k'}(\xi)\,\frac{R_{ff}(\xi-k'T_s)}{R_{ff}(0)} + \sum_{k'=-m_1'}^{m_2'}\,\sum_{\ell'=-m_1'}^{m_2'} h_{k'}(\xi)h_{\ell'}(\xi)\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{R_{ff}[(k'-\ell')T_s]}{R_{ff}(0)} \qquad (3.15)$$

Cum valoarea relaţiei (3.13) nu depinde de limitele de însumare m_1 şi m_2 ci doar de numărul de puncte de însumare N care este acelaşi pentru relaţiile (3.13) şi (3.15) rezultă că aceste expresii au aceeaşi valoare.

Din analiza relaţiei (3.13) se constată că eroarea medie pătratică rezultată din interpolare depinde numai de nucleul utilizat h(t) şi de funcţia de autocorelaţie a semnalului original $R_{ff}(\tau)$ şi prin aceasta, implicit şi de perioada de eşantionare T_s. Dacă aceste mărimi sînt cunoscute, se poate calcula exact valoarea erorii în orice punct din intervalul $[nT_s, (n+1)T_s]$.

3.3. Cazul interpolării în două faze consecutive

Datorită faptului că practic este aproape imposibil de implementat un sistem de interpolare analogic de ordin mai mare decît ordinul zero (convertorul numeric-analogic uzual) sau ordinul întîi (interpolarea liniară), prezintă un interes deosebit situația în care interpolarea se efectuează în două sau mai multe faze consecutive.

In prima fază se efectuează o interpolare discretă (numerică) ce are ca efect mărirea numărului de eşantioane ("oversampling") iar în faza a doua se efectuează interpolarea analogică dar pentru un număr mai mare de eşantioane, deci pentru o frecvență mai mare de eşantionare.

Pe de altă parte, etapa de interpolare discretă (numerică) poate fi realizată la rîndul ei în mai multe faze consecutive ("multistage implementation").

Prin urmare, în aceste situații, este necesară estimarea erorii medii pătratice globale care afectează semnalul reconstruit în a doua fază de interpolare în comparație cu semnalul original. Presupunem din nou că f(t) este funcția originală care se eşantionează cu perioada T_{s1}. Notînd cu d(t) funcția de interpolare după prima fază, aceasta va avea expresia:

$$d(t) = \sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a'(t) f\left[(m+a)T_{s1}\right] \quad \text{pt. } t \in \left[mT_s, (m+1)T_{s1}\right] \qquad (3.16)$$

unde $h_a'(t)$ reprezintă nucleul utilizat în prima fază de interpolare; a este un număr natural ce ia valorile din intervalul $\left[-A_1, A_2\right]$ iar numărul de eşantioane consecutive utilizate simultan în prima fază de interpolare este $N_1 = A_1 + A_2 + 1$.

Eşantioanele lui d(t) făcute cu perioada $T_{s2} < T_{s1}$ vor fi utilizate la a doua interpolare ce va avea ca rezultat funcția g(t) avînd expresia:

$$g(t) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(t) \cdot d\left[(n+k)T_{s2}\right] \quad \text{pt. } t \in \left[nT_{s2}, (n+1)T_{s2}\right] \qquad (3.17)$$

unde $h_k(t)$ reprezintă nucleul utilizat în faza a doua de interpolare, k este un număr natural ce ia valori în intervalul $\left[-K_1, K_2\right]$ iar numărul de eşantioane consecutive utilizate simultan este $N_2=K_1+K_2+1$. Eroarea momentană globală generată prin interpolarea în două fase consecutive va avea expresia:

$$e(t) = f(t)-g(t) \quad \text{sau} \quad e(t) = f(t)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(t)d\left[(n+k)T_{s2}\right] \qquad (3.18)$$

Folosind notațiile (3.4) rezultă eroarea momentană:

$$e_n(\xi) = f(nT_{s2}+\xi)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\cdot d\left[(n+k)T_{s2}\right] \qquad (3.19)$$

Considerînd, în continuare, că semnalul original $f(t)$ este rezultatul unui proces aleator staționar în sens larg, pornind de la relația (3.19) se poate estima eroarea medie pătratică în sens statistic:

$$E\left\{e_n^2(\xi)\right\} = E\left\{f^2(nT_{s2}+\xi)\right\}-2\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)E\left\{f(nT_{s2}+\xi)\cdot d\left[(n+k)T_{s2}\right]\right\} +$$

$$+\sum_{k=-K_1}^{k_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)E\left\{d\left[(n+k)T_{s2}\right]\cdot d\left[(n+\ell)T_{s2}\right]\right\} \qquad (3.2o)$$

Inlocuind în relația (3.2o) valoarea lui $d(t)$ dată de relația (3.16) ceea ce presupune că intervalul $\left[nT_{s2},(n+1)T_{s2}\right]\subset\left[mT_{s1},(m+1)T_{s1}\right]$, se obține:

$$E\left\{e_n^2(\xi)\right\} = E\left\{f^2(nT_{s2}+\xi)\right\}-2\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a\left[(n+k)T_{s2}\right]E\left\{f(nT_{s2}+\xi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot f\left[(m+a)T_{s1}\right]\right\} + \sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2}\cdot$$

$$\cdot\, h'_a\left[(n+k)T_{s2}\right]h'_b\left[(n+\ell)T_{s2}\right]E\left\{f\left[(m+a)T_{s1}\right]f\left[(m+b)T_{s1}\right]\right\} \qquad (3.21)$$

Introducînd funcția de autocorelație a semnalului original $R_{ff}(\tau)$ rezultă:

$$E\left\{f^2(nT_{s2}+\xi)\right\} = R_{ff}(o) \qquad (3.22)$$

$$E\left\{f(nT_{s2}+\xi)f\left[(m+a)T_{s1}\right]\right\} = R_{ff}\left[\xi-aT_{s1}+(nT_{s2}-mT_{s1})\right] \qquad (3.23)$$

$$E\left\{f\left[(m+a)T_{s1}\right]\cdot f\left[(m+b)T_{s1}\right]\right\} = R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] \qquad (3.24)$$

Inlocuind expresiile (3.22), (3.23) și (3.24) în relația (3.21) și împărțind totul cu σ_f^2 se obține o relație similară relației (3.13) :

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h'_a\left[(n+k)T_{s2}\right]\frac{R_{ff}\left[\xi-aT_{s1}+(nT_{s2}-mT_{s1})\right]}{R_{ff}(o)} +$$

$$+\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\, h'_a\left[(n+k)T_{s2}\right]h'_b\left[(n+\ell)T_{s2}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]}{R_{ff}(o)} \qquad (3.25)$$

Relația (3.25) are un caracter general deoarece referitor la raportul celor două perioade de eșantionare s-a făcut doar considerația $T_{s1}/T_{s2}>1$. Raportul celor două perioade poate lua valori naturale, raționale sau iraționale.

In practică este de dorit ca funcția de interpolare g(t) să coincidă în punctele de eșantionare ale semnalului original cu eșantioanele acestuia.

Acest deziderat poate fi îndeplinit numai dacă raportul T_{s1}/T_{s2} este un număr natural.

In aceste condiții relația (3.25) poate fi adusă într-o formă mai convenabilă de calcul. Considerînd că în momentul t=o (m=o, n=o) g(t) coincide cu d(t) deci și cu f(t) rezultă:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\frac{R_{ff}(\xi-aT_{s1})}{R_{ff}(o)} +$$

$$+\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)h'_a(kT_{s2})h'_b(\ell T_{s2})\cdot$$

$$\cdot\frac{R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]}{R_{ff}(o)} \qquad (3.26)$$

Relația (3.26) deși destul de complexă permite calculul erorii medii pătratice respectiv calculul raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ numai în funcție de valorile nucleelor utilizate în cele două faze de interpolare și de expresia funcției de autocorelație.

Valoarea dată de relația (3.26) este nulă pentru ξ=o și coincide cu valoarea erorii date de relația (3.13) pentru nucleul folosit în prima fază în punctul $\xi=T_{s2}$.

3.4. Interpretarea erorii globale la interpolarea în două faze consecutive

Deoarece a doua fază de interpolare este la rîndul ei o sursă de erori este de aşteptat ca eroarea globală să fie mai mare decît eroarea furnizată de prima fază de interpolare.

Pentru a se obţine o imagine mai clară asupra erorilor care se produc la o interpolare în două faze consecutive (în care prima fază este o interpolare numerică) se poate lua în considerare faptul că funcţia d(t) obţinută în prima fază de interpolare a semnalului original f(t) prin relaţia (3.16) intervine în funcţia g(t), obţinută prin a doua interpolare cu relaţia (3.17), numai prin eşantioanele sale în punctele kT_{s2}.

Notînd cu $e_1(t)$ eroarea din prima fază de interpolare:

$$e_1(t) = f(t) - d(t) \tag{3.27}$$

rezultă că

$$d(t) = f(t) - e_1(t) \tag{3.28}$$

Eroarea totală (prin interpolarea în două faze) notată cu $e_T(t)$ va fi:

$$e_T(t) = f(t) - g(t) \tag{3.29}$$

şi înlocuind pe g(t) din relaţia (3.17) se obţine:

$$e_T(t) = f(t) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(t)\, d\left[(n+k)T_{s2}\right]$$

Trecînd la variabila ξ şi înlocuind pe d(t) din relaţia (3.28) rezultă:

$$e_T(\xi) = f(nT_s+\xi) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) f\left[(n+k)T_{s2}\right] + \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) e_1\left[(n+k)T_{s2}\right] \tag{3.30}$$

Se observă că diferenţa $f(nT_s+\xi) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) f\left[(n+k)T_{s2}\right]$ reprezintă eroarea momentană care s-ar obţine prin interpolarea directă a funcţiei originale f(t) cu nucleul $h_k(\xi)$ din faza a doua de interpolare (semnalul original fiind însă eşantionat cu perioada T_{s2}).

Notînd această diferenţă cu $e_{2dir}(\xi)$ rezultă eroarea totală:

$$e_T(\xi) = e_{2dir}(\xi) + \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) e_1\left[(n+k)T_{s2}\right] \tag{3.31}$$

Expresia $\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)e_1\left[(n+k)T_{s2}\right]$ reprezintă interpolarea erorii obținute în prima fază de interpolare cu nucleul utilizat în a doua fată.

Relația (3.31) pune în evidență faptul că eroarea totală depinde de ambele faze de interpolare.

Deoarece în punctele $\xi=0$ și $\xi=T_{s2}$ $e_{2dir}(\xi)=0$ și nucleele $h_k(\xi)$ se anulează, cu excepția unui singur nucleu care ia valoarea 1, rezultă că $e_T(\xi)$ este egală cu eroarea din prima fază de interpolare în aceste puncte.

In plus, se pune în evidență faptul că eroarea din prima fază $e_1(t)$ nu intervine în totalitate ci doar prin valorile în punctele de eșantionare kT_{s2}.

Dacă se notează cu $e_2(t)$ eroarea momentană introdusă de a doua fază de interpolare:

$$e_2(t) = d(t) - g(t) \tag{3.32}$$

eroarea totală poate fi scrisă în forma:

$$e_T(t) = f(t)-g(t) = f(t)-d(t)+e_2(t)$$

sau

$$e_T(t) = e_1(t)+e_2(t) \tag{3.33}$$

Eroarea medie pătratică va fi în acest caz:

$$E\left\{e_T^2(t)\right\} = E\left\{e_1^2(t)\right\} +2E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} +E\left\{e_2^2(t)\right\} \tag{3.34}$$

Deoarece erorile $e_1(t)$ și $e_2(t)$ sînt corelate expresia

$$E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} \neq E\left\{e_1(t)\right\}\cdot E\left\{e_2(t)\right\} = 0$$

Cum erorile $e_1(t)$ și $e_2(t)$ pot avea același semn este de așteptat ca și eroarea medie pătratică totală să depășească valoarea erorii medii pătratice date de prima fază de interpolare.

CAPITOLUL 4.

COMPARAREA SISTEMELOR DE INTERPOLARE CU AJUTORUL ERORII MEDII PATRATICE

4.1. Posibilitățile practice de aplicare a erorii medii pătratice

Aprecierea performanțelor unui sistem de interpolare precum și compararea calitativă a unor sisteme diferite, de același ordin sau de ordin diferit, într-o singură fază sau în două faze, se poate face, pornind de la estimarea erorii medii pătratice, cu ajutorul raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ dat de relația (A.13) și respectiv (A.26). Din analiza acestor relații rezultă că valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ poate fi calculată într-un caz concret dacă se cunoaște expresia nucleului utilizat și funcția de autocorelație a semnalului original. Deoarece nu întotdeauna se cunoaște precis funcția de autocorelație a unui semnal și, pe de altă parte, un sistem de interpolare odată realizat nu permite întotdeauna o modificare ușoară a nucleului de interpolare implementat, este utilă o estimare a performanțelor sistemului de interpolare în cîteva situații de referință. In acest scop, se propun trei tipuri de semnale de test care permit o estimare de ansamblu a performanțelor.

4.2. Cazul semnalului cu densitate de putere constantă (S_1)

Se presupune că semnalul original $f(t)$ are densitatea spectrală de putere $S_{ff}(\omega)$ constantă în domeniul $(-\omega_c, \omega_c)$ și nulă în rest ca în figura 4.1.

In această situație, funcția de autocorelație a semnalului original conform /13/ este:

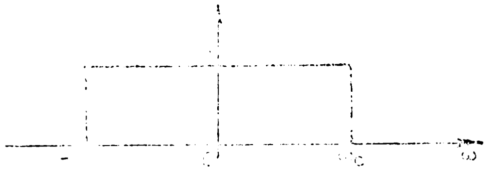


Fig.4.1.

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{4.1}$$

sau calculînd integrala pentru $S_{ff}(\omega)$ considerat:

$$R_{ff}(\tau) = \frac{\omega_c S_o}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c \tau}{\omega_c \tau} \tag{4.2}$$

Introducînd parametrul

$$A = \frac{\omega_s}{2\omega_c} = \frac{T_c}{2T_s} \tag{4.3}$$

unde ω_s este frecvenţa de eşantionare, rezultă:

$$R_{ff}(\tau) = \frac{\omega_c S_o}{\pi} \sin c \frac{\tau}{AT_s} \tag{4.4}$$

$$R_{ff}(o) = \frac{\omega_c S_o}{\pi} \tag{4.5}$$

$$\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(o)} = \sin c \frac{\tau}{AT_s} \tag{4.6}$$

In aceste condiţii, relaţia (3.13) pentru interpolare într-o singură fază devine:

$$\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_1} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\sin c \frac{\xi-kT_s}{AT_s} + \sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\,\cdot$$

$$\cdot \sin c \frac{k-\ell}{A} \tag{4.7}$$

Analog, relaţia (3.26) pentru interpolarea în două faze consecutive devine:

$$\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_1} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\sin c\,\frac{\xi-aT_{s1}}{AT_{s1}} +$$

$$+\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)h'_a(kT_{s2})h'_b(\ell T_{s2})\;\cdot$$

$$\cdot\ \sin c\,\frac{a-b}{A} \qquad (4.8)$$

Se observă că relaţiile (4.7) şi respectiv (4.8) pot fi calculate numai în funcţie de expresia analitică a nucleelor utilizate în sistemul de interpolare.

4.3. Cazul semnalului cu densitate de putere uniform descrescătoare cu frecvenţa (S_2)

Se presupune că semnalul original f(t) are densitatea spectrală de putere $S_{ff}(\omega)$ uniform descrescătoare în domeniul $(o,\ \omega_c)$ şi nulă în rest, conform figurii 4.2.

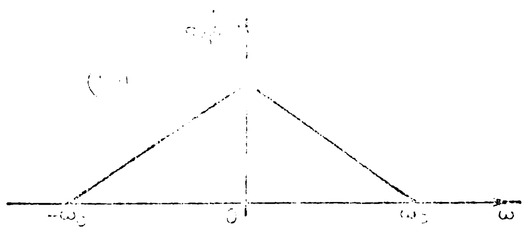


Fig.4.2.

Calculînd cu relaţia (4.1) funcţia de autocorelaţie a semnalului se obţine:

$$\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(o)} = \sin c^2\,\frac{\tau}{2AT_s} \qquad (4.9)$$

Folosind valoarea dată de relaţia (4.9) se obţine pentru interpolarea într-o singură fază:

$$\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_2} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\sin c^2\,\frac{\xi-kT_s}{2AT_s} + \sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-k_1}^{K_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)\ .$$

$$\cdot \sin c^2 \frac{k-\ell}{2A} \tag{4.10}$$

Iar pentru interpolarea în două faze consecutive:

$$\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_2} = 1-2\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\sin c^2 \frac{\xi-aT_{s1}}{2AT_{s1}} +$$

$$+\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h_\ell(\xi)h'_a(kT_{s2})h'_b(\ell T_{s2}) \cdot$$

$$\cdot \sin c^2 \frac{a-b}{2A} \tag{4.11}$$

4.4. Cazul semnalului cu densitate de putere uniform crescătoare cu frecvența (S_3)

Se presupune că semnalul original $f(t)$ are densitatea spectrală de putere uniform crescătoare în domeniul $(0, \omega_c)$ şi nulă în rest, conform figurii 4.3.

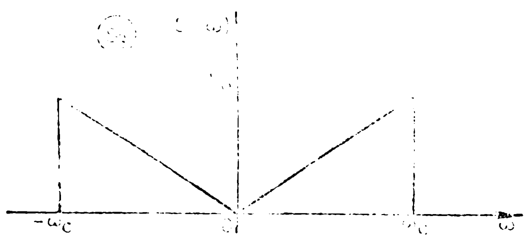


Fig.4.3.

Dacă se calculează funcţia de autocorelaţie a unui astfel de semnal, folosind relaţia (4.1) se obţine:

$$\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(0)} = 2 \sin c \frac{\tau}{AT_s} - \sin c^2 \frac{\tau}{2AT_s} \tag{4.12}$$

Calculul raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în acest caz se poate efectua înlocuind valoarea $R_{ff}(\tau)/R_{ff}(0)$ în relaţia (3.26) sau se pot utiliza, dacă sînt cunoscute, valorile $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2\big|_{S_1}$ şi $\sigma_e^2(\xi)/$ $/\sigma_f^2\big|_{S_2}$ datorită următoarei proprietăţi:

$$\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_3} = 2\left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_1} - \left.\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}\right|_{S_2} \qquad (4.13)$$

Această proprietate este o consecință a faptului că:

$$\left.\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(o)}\right|_{S_3} = 2\left.\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(o)}\right|_{S_1} - \left.\frac{R_{ff}(\tau)}{R_{ff}(o)}\right|_{S_2}$$

4.5. Compararea nucleelor de interpolare (sisteme de interpolare într-o singură fază)

Cu ajutorul relațiilor (4.7), (4.1o) și (4.13) se poate realiza o comparație între diferite nuclee de interpolare.

In literatură /53/ se prezintă relația (4.7) și întrucît raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ ia valori simetrice față de mijlocul intervalului $[o, T_s]$ se trage concluzia că eroarea și respectiv $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ vor fi maxime la mijlocul intervalului.

Pornind de la această premiză se consideră că este suficient să se calculează valoarea lui $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în punctul $\xi = T_s/2$ pentru diferite nuclee de interpolare și să fie ales ca optim nucleul pentru care se obține valoarea cea mai mică.

In realitate această presupunere este falsă întrucît raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ poate prezenta în punctul $T_s/2$ un minim local.

Din acest motiv, pentru o aplicare corectă a acestui criteriu, de estimare și comparare, se impune calcularea valorii raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ într-un număr suficient de puncte din intervalul $[o, T_s]$ pentru a pune în evidență forma de variație pe întregul interval iar compararea nucleelor trebuie efectuată comparînd eroarea pe întreg intervalul.

4.6. Compararea nucleelor în cazul semnalului cu densitate de putere constantă

Pentru a pune în evidență aspectele prezentate în paragraful anterior se va utiliza în continuare relația (4.7) dedusă în cazul în care s-a presupus că semnalul original are densitatea de putere constantă în banda $(-\omega_c, \omega_c)$ conform figurii 4.1.

Dacă se compară nuclee de ordin diferit cum ar fi interpolarea de ordinul zero (ZOH) (N=1, A=1) cu interpolarea liniară (FOH) ($N=2$, $A=1$) şi cu nucleul Lagrange de ordinul 3 (L3) ($N=4$, $A=1$), datorită diferenţelor mari care apar între erori este posibil să fie suficientă compararea valorilor raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ numai în punctul $\xi = T_s/2$.

In tabelul 4.1 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ calculate pe intervalul $[0, T_s/2]$ cu pasul $0,1 \cdot T_s$ pentru nucleul menţinerii de ordinul zero (ZOH) care foloseşte un singur eşantion, pentru nucleul interpolării liniare (FOH) care foloseşte două eşantioane şi pentru nucleul Lagrange de ordinul 3 care foloseşte patru eşantioane la interpolare (toate în cazul $A=1$).

TABELUL 4.1.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ ZOH	FOH	Cazul S_1 L3
1	0	0	0	0
	0,1	0,0327	0,0276	0,0166
	0,2	0,1290	0,0896	0,0573
	0,3	0,2832	0,1575	0,1046
	0,4	0,4863	0,2081	0,1413
	0,5	0,7267	0,2267	0,1551

In figura 4.4 se reprezintă grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cazurile din tabelul 4.1.

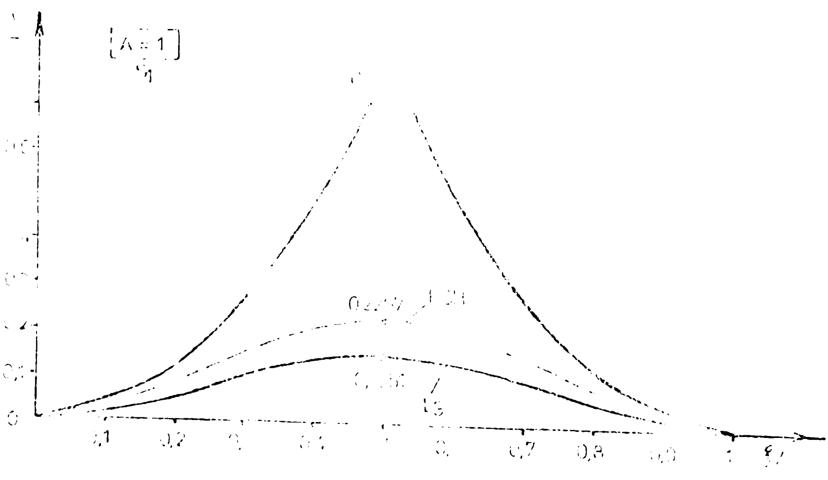


Fig.4.4.

In această situaţie se poate considera suficientă calcularea valorii raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ numai în punctul $\xi = T_s/2$.

Dacă se compară însă nuclee de acelaşi ordin estimarea erorilor numai pentru $\xi = T_s/2$ nu mai poate fi considerată suficientă.

Pentru exemplificare se prezintă în continuare cazul utilizării a patru eşantioane consecutive (N=4) la construcţia funcţiei de interpolare. Acest caz merită o atenţie deosebită deoarece în literatură /39,53,85/sînt descrise mai multe tipuri de nuclee (polinomiale de ordinul 3) iar utilizarea unui număr de eşantioane mai mare de 4 este mai puţin frecventă.

In tabelul 4.2 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ calculate pe intervalul $[0,\ T_s/2]$ cu pasul $0{,}1 \cdot T_s$ pentru nucleele Lagrange de ordinul 3, Spline de ordinul 3 ("cubic spline"),"cubic convolution interpolation" şi cubic continual.

S-au luat în considerare cazurile A=1 ($\omega_s = 2\omega_c$) şi A=2 ($\omega_s = 4\omega_c$).

TABELUL 4.2.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$			Cazul S_1
		Lagrange 3	Spline 3	Cubic conv.int.	Cubic cont.
1	0	0	0	0	0
	0,1	0,01668	0,01175	0,01619	0,01314
	0,2	0,05730	0,04106	0,05612	0,04641
	0,3	0,10460	0,07622	0,1353	0,08668
	0,4	0,14139	0,10422	0,14101	0,11887
	0,5	0,15517	0,11484	0,15517	0,13110
2	0	0	0	0	0
	0,1	0,0001793	0,0015983	0,0003279	0,0002102
	0,2	0,0006077	0,0034798	0,0008691	0,0004331
	0,3	0,0010990	0,0040559	0,0012976	0,0004621
	0,4	0,0014771	0,0037756	0,0015417	0,0003814
	0,5	0,0016180	0,0035459	0,0016180	0,0003336

In figurile 4.5 şi 4.6 este reprezentată grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleele considerate anterior conform tabelului 4.2.

Analiza datelor din tabelul 4.2 şi a graficelor din figurile 4.5 şi 4.6 permite o comparare eficientă a performanţe-

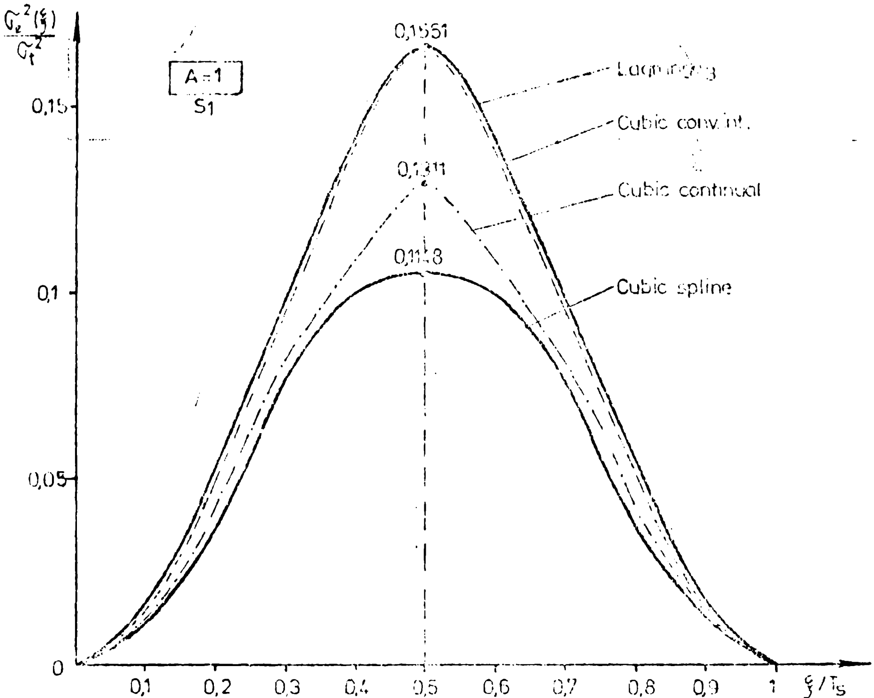

A=1
S1
0,1551
Lagrange3
Cubic conv. int.
0,1311
Cubic continual
0,1148
Cubic spline
0,15
0,1
0,05
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

Fig.4.5.

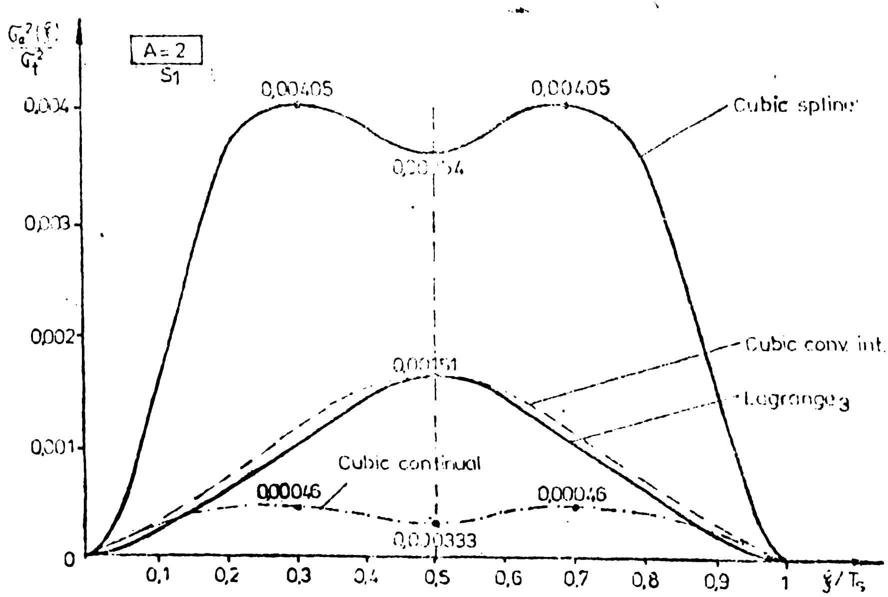

A=2
S1
0,00405
0,00405
Cubic spline
0,004
0,003
0,002
0,001
0
Cubic conv. int.
Lagrange3
0,00151
Cubic continual
0,00046
0,00046
0,000333
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

Fig.4.6.

lor nucleelor considerate. Astfel pentru cazul A=1 se constată că cele mai mari erori le introduce nucleul Lagrange. De asemenea se observă că deşi în punctul $\xi = T_s/2$ nucleele Lagrange şi "Cubic convolution interpolation" au aceeaşi eroare în rest al doilea nucleu introduce erori inferioare. Se constată că nucleul Spline de ordinul 3 este cel mai avantajos dintre cele 4 nuclee considerate.

Pentru cazul A=2 se observă că erorile devin aproape cu două ordine de mărime mai mici şi de asemenea se constată o modificare a ierarhiei nucleelor.

Astfel nucleul Spline de ordinul 3 este cel mai defavorabil iar nucleul Cubic continual este cel mai avantajos.

Nucleele Lagrange şi "Cubic convolution interpolation" prezintă din nou aceeaşi valoare în punctul $\xi = T_s/2$ dar în rest primul nucleu introduce erori mai mici.

Se mai observă în acest caz şi faptul că nucleele Spline de ordinul 3 şi cubic continual nu mai au eroarea maximă în punctul $\xi = T_s/2$. Variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ prezintă în acest punct un minim local.

Aceste rezultate justifică necesitatea de a se calcula valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în mai multe puncte.

De asemenea trebuie evidenţiat faptul că un nucleu considerat optim pentru o anumită valoare a parametrului $A = \omega_s/2\omega_c$ poate deveni defavorabil în comparaţie cu alte nuclee la modificarea valorii parametrului.

4.7. <u>Compararea nucleelor în cazul semnalului cu densitatea de putere uniform descrescătoare</u>

In situaţia în care semnalul original prezintă o densitate de putere uniform descrescătoare, conform figurii 4.2, compararea diferitelor nuclee se poate efectua cu ajutorul relaţiei (4.1o) .

In tabelul 4.3 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ calculate pe intervalul $[o, T_s/2]$ pentru nucleele ZOH, FOH şi Lagrange de ordinul 3, în cazul A=1.

In figura 4.7 se reprezintă grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cazurile din tabelul 4.3.

TABELUL 4.3.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Cazul S_2		
		ZOH	FOH	L3
	0	0	0	0
	0,1	0,0163	0,0100	0,0042
	0,2	0,0649	0,0325	0,0145
	0,3	0,1437	0,0568	0,0264
	0,4	0,2497	0,0748	0,0357
	0,5	0,3788	0,0815	0,0391

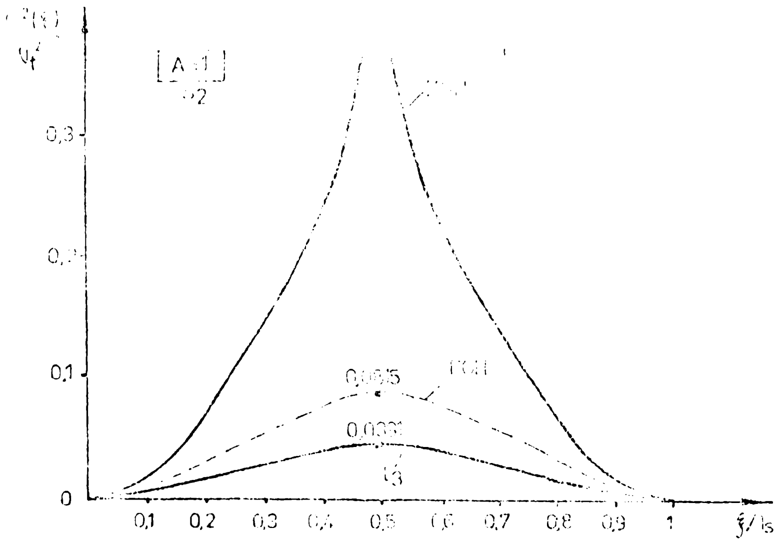


Fig.4.7.

Comparînd valorile din tabelele 4.1 şi 4.3 şi respectiv figurile 4.4 şi 4.7 se constată că ierarhia celor trei nuclee s-a păstrat.

In al doilea caz erorile care rezultă sînt însă mai mici iar diferenţa relativă între erori este mai pronunţată.

In tabelul 4.4 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ calculate în cazul semnalului cu densitate de putere uniform descrescătoare în cazul nucleelor Lagrange de ordinul 3, Spline de ordinul 3, "Cubic convolution interpolation" şi Cubic continual pentru A=1 şi A=2.

TABELUL 4.4.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Cazul S_2 Lagrange 3	Spline 3	Cubic conv.int.	Cubic cont.
1	0	0	0	0	0
	0,1	0,00424	0,00307	0,00446	0,00297
	0,2	0,01453	0,00942	0,01484	0,01014
	0,3	0,02647	0,01598	0,02666	0,01854
	0,4	0,03572	0,02075	0,03578	0,02514
	0,5	0,03918	0,02249	0,03918	0,02763
2	0	0	0	0	0
	0,1	0,0000380	0,0011783	0,0000817	0,0002019
	0,2	0,0001287	0,0024561	0,0002058	0,0004057
	0,3	0,0002327	0,0026688	0,0002914	0,0004127
	0,4	0,0003127	0,0026067	0,0003318	0,0003146
	0,5	0,0003425	0,0020096	0,0003425	0,0002602

In figura 4.8 se reprezintă grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cele patru nuclee de ordinul 3 în cazul A=1 iar în figura 4.9 , în cazul A=2.

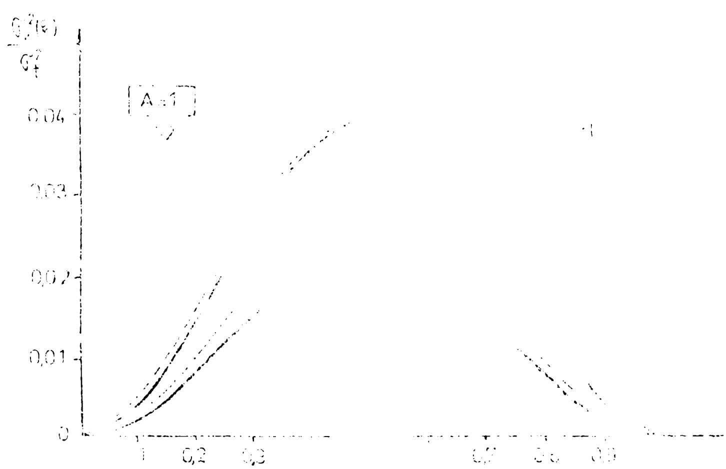


Fig.4.8.

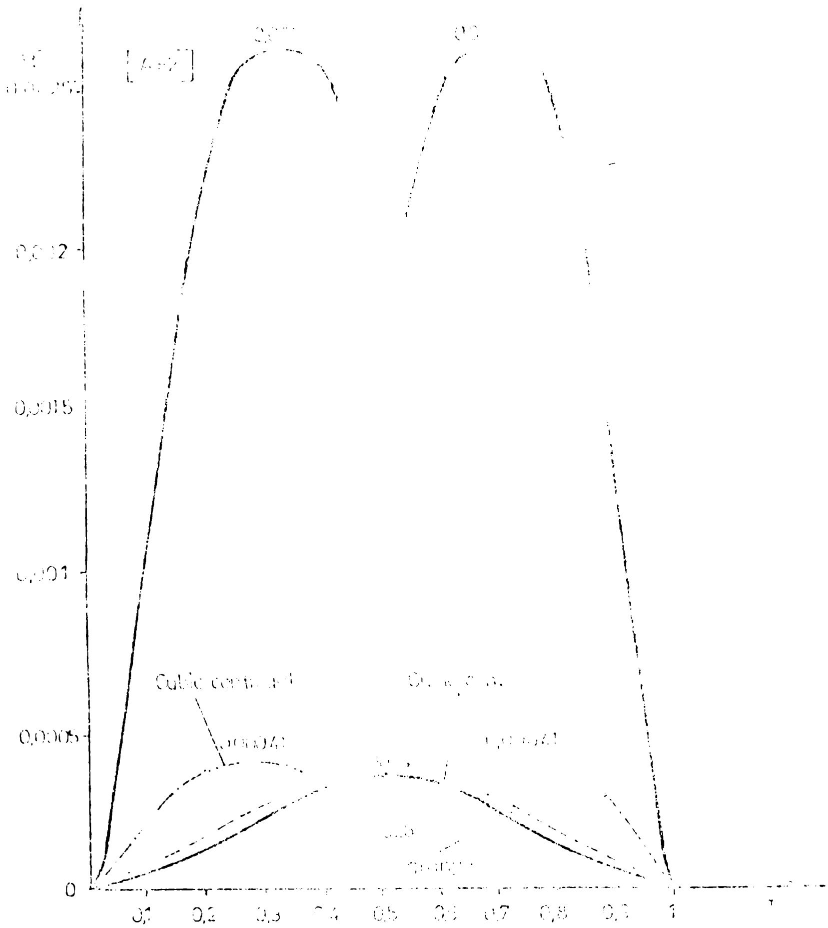


Fig.4.9.

4.8. Compararea nucleelor în cazul semnalului cu densitate de putere uniform crescătoare

In situaţia în care semnalul original prezintă o densitate de putere uniform crescătoare conform figurii 4.3, folosind relaţia (4.13) pentru nucleele ZOH, FOH şi Lagrange de ordinul 3 în cazul A=1 se obţin pentru raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ valorile din tabelul 4.5.

In figura 4.1o se reprezintă grafic valorile date de tabelul 4.5 pentru cele trei nuclee considerate.

TABELUL 4.5.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ ZOH	FOH	Cazul S_3 L3
1	0	0	0	0
	0,1	0,0491	0,0452	0,0291
	0,2	0,1931	0,1467	0,1000
	0,3	0,4227	0,2582	0,1827
	0,4	0,7229	0,3413	0,2470
	0,5	1,0746	0,3719	0,2711

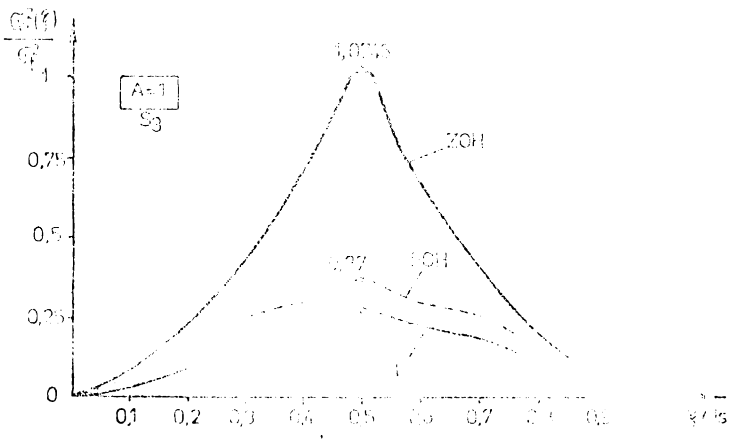


Fig.4.10.

Si în această situaţie ierarhia celor trei nuclee a rămas aceeaşi dar valoarea absolută a erorilor este mai ridicată decît în cazurile S_1 şi S_2.

In tabelul 4.6 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/$ $/\sigma_f^2$ pentru nucleele Lagrange de ordinul 3, Spline cubic, "Cubic convolution interpolation" şi "Cubic continual" în cazul S_3 pentru A=1 şi A=2.

In figura 4.11 se reprezintă grafic cazul A=1 iar în figura 4.12 cazul A=2.

TABELUL 4.6.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_\varepsilon^2$ Lagrange 3	Spline 3	Cubic conv.int.	Cazul S_3 Cubic contin.
1	0	0	0	0	0
	0,1	0,02912	0,02043	0,02792	0,02331
	0,2	0,10007	0,07270	0,09740	0,08268
	0,3	0,18273	0,13646	0,18040	0,15482
	0,4	0,24706	0,18769	0,24624	0,21260
	0,5	0,27116	0,20719	0,27116	0,23457
2	0	0	0	0	0
	0,1	0,0003206	0,0020183	0,0005741	0,0002185
	0,2	0,0010867	0,0045035	0,0015324	0,0004605
	0,3	0,0019653	0,0054430	0,0023038	0,0005115
	0,4	0,0026415	0,0049445	0,0027516	0,0004482
	0,5	0,0028935	0,0050822	0,0028935	0,0004070

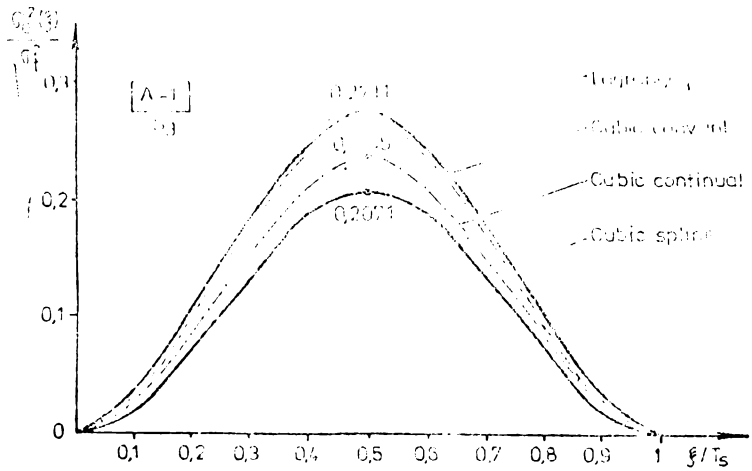


Fig.4.11.

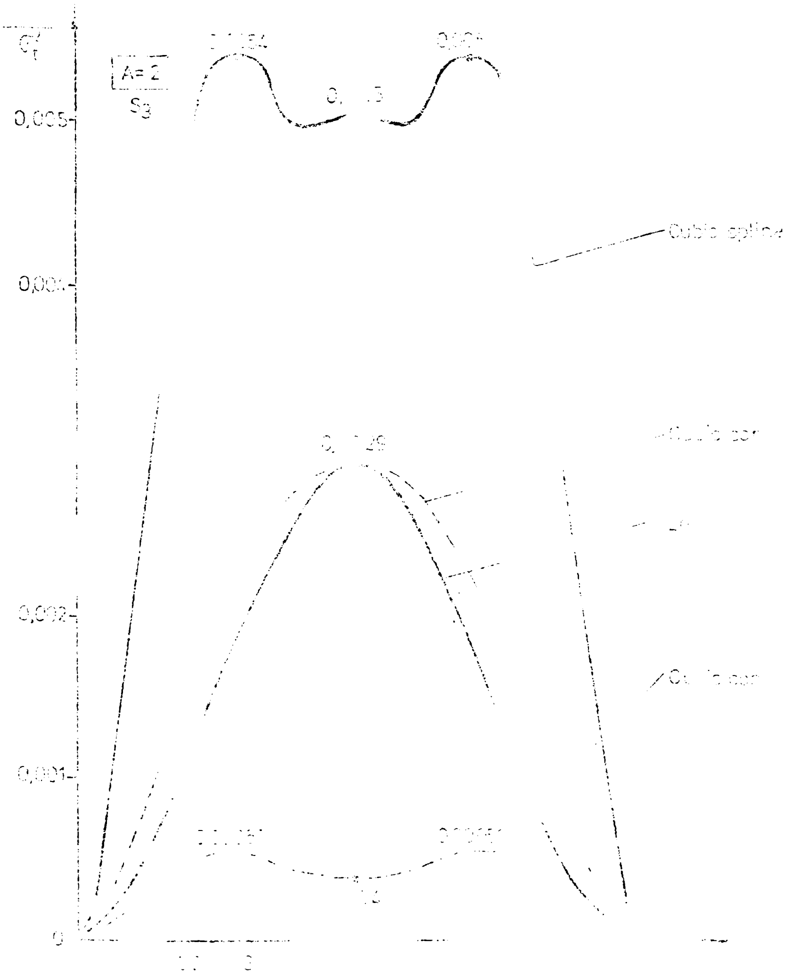


Fig.4.12.

4.9. Concluzii privind performanţele nucleelor polinomiale de interpolare

Din rezultatele obţinute în paragrafele anterioare se desprind o serie de concluzii importante privind comportarea nucleelor de interpolare.

In primul rînd se constată că erorile cele mai mici se obţin în cazul S_2 ($S_{ff}(\omega)$=unif.descresc.) iar erorile cele mai mari în cazul S_3 ($S_{ff}(\omega)$=unif.cresc.). Acest fenomen este fireso întrucît nucleele de interpolare reprezintă răspunsurile la impuls unitar ale unor filtre trece-jos.

In al doilea rînd se observă că ierarhia unor nuclee de ordin diferit nu se modifică nici în funcţie de parametrul A, nici în funcţie de cazul S.

Comparînd nuclee de acelaşi ordin, pentru cazul A=1, din figurile 4.5, 4.8 şi 4.11 se constată că ierarhia nucleelor s-a păstrat aceeaşi. Fac excepţie nucleele Lagrange de ordinul 3 şi "Cubic convolution interpolation", nuclee care în punctul $\xi/T_s=$ $=0,5$ dau aceeaşi eroare, la care se constată că nucleul L3 este superior în cazurile S_2 şi S_3.

Pentru A=1 nucleul Spline de ordinul 3 este cel mai avantajos, fiind urmat însă de nucleul "Cubic continual".

In cazul A=2 nucleul Spline de ordinul 3 devine însă nucleul cel mai dezavantajos.

Nucleul "cubic continual" dă erori comparabile cu nucleele L3 şi CCI pentru cazul S_2 dar devine net avantajos pentru cazurile S_1 şi S_3.

Ca o concluzie finală se poate remarca faptul că densitatea spectrală de putere a semnalului original ce urmează a fi interpolat afectează substanţial nivelul erorilor de interpolare dar în mai mică măsură ierarhia nucleelor ce pot fi utilizate în acest scop. Datorită comportării bune în ambele cazuri (A=1, A=2) indiferent de tipul densităţii spectrale $S_{ff}(\omega)$, se poate aprecia că nucleul "cubic continual" reprezintă cea mai bună soluţie în cazul în care funcţia originală îşi modifică limita superioară a spectrului în intervalul $\left[\omega_s/4,\ \omega_s/2\right]$.

4.1o. Compararea sistemelor de interpolare în două faze consecutive, faza a doua (de interpolare analogică) fiind un CNA (ZOH)

In cele ce urmează se va trata, pe baza concluziilor din paragraful anterior, numai cazul semnalelor cu densitate de putere constantă.

In situaţia în care a doua interpolare este de ordinul zero (obţinută cu ajutorul unui convertor numeric-analogic) şi raportul perioadelor de eşantionare T_{s1}/T_{s2} este un număr întreg calculul raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ se simplifică întrucît nucleul al doilea va avea expresia:

$$h_o(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \xi \in \left[-\frac{T_{s2}}{2}, \frac{T_{s2}}{2}\right] \\ o & \text{în rest} \end{cases}$$

In aceste condiții relația (4.8) devine pentru $\xi \in \left[o, T_{s2}/2\right]$:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a'(o)\sin c\,\frac{\xi-aT_{s1}}{AT_{s1}} + \sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a'(o)h_b'(o)\,\cdot$$

$$\cdot\,\sin c\,\frac{a-b}{A}$$

Deoarece $h_a'(o) = \begin{cases} 1 & \text{pt. } a=o \\ o & \text{pt. } a\neq o \end{cases}$ (din proprietățile nucleelor) rezultă:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sin c\,\frac{\xi}{AT_{s1}} + 1 = 2-2\sin c\,\frac{\xi}{AT_{s1}} \qquad (4.14)$$

In mod asemănător rezultă pentru $\xi \in \left[T_{s2}/2, T_{s2}\right]$ din relația (4.8):

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a'(T_{s2})\sin c\,\frac{\xi-aT_{s1}}{AT_{s1}} + \sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a'(T_{s2})h_b'(T_{s2})\,\cdot$$

$$\cdot\,\sin c\,\frac{a-b}{A} \qquad (4.15)$$

Din relațiile (4.14) și (4.15) se observă că sînt valabile constatările de la cazul general și anume:

$$\frac{\sigma_e^2(o)}{\sigma_f^2} = o \quad \text{și} \quad \frac{\sigma_e^2(T_{s2})}{\sigma_f^2} = \frac{\sigma_{e1}^2(T_{s2})}{\sigma_f^2} \quad \text{unde cu} \quad \frac{\sigma_{e1}^2(\xi)}{\sigma_f^2}$$

S-a notat eroarea dată de relația (4.7) pentru prima fază de interpolare.

In continuare, pentru exemplificare, se consideră cazul în care, în prima fază de interpolare, se utilizează un nucleu Lagrange de ordinul 3, ce utilizează patru eșantioane consecutive (N=4) iar a doua interpolare se face după eșantionare cu perioada $T_{s2}=T_{s1}/2$ (interpolarea numerică din prima fază dublează numărul de eșantioane).

Utilizînd relațiile (4.14) și respectiv (4.15) pentru cazul A=1 se obține tabelul 4.7.

TABELUL 4.7.

S_1

A	ξ/T_{s2}	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ cu rel. (4.14)	A	ξ/T_{s2}	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ cu rel. (4.15)
1	0	0	1	1	0,1551
	0,1	0,0082		0,9	0,1590
	0,2	0,0327		0,8	0,1708
	0,3	0,0732		0,7	0,1903
	0,4	0,1290		0,6	0,2173
	0,5	0,1993		0,5	0,2515

In figura 4.13 se reprezintă grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pe intervalul $[0, T_{s1}]$.

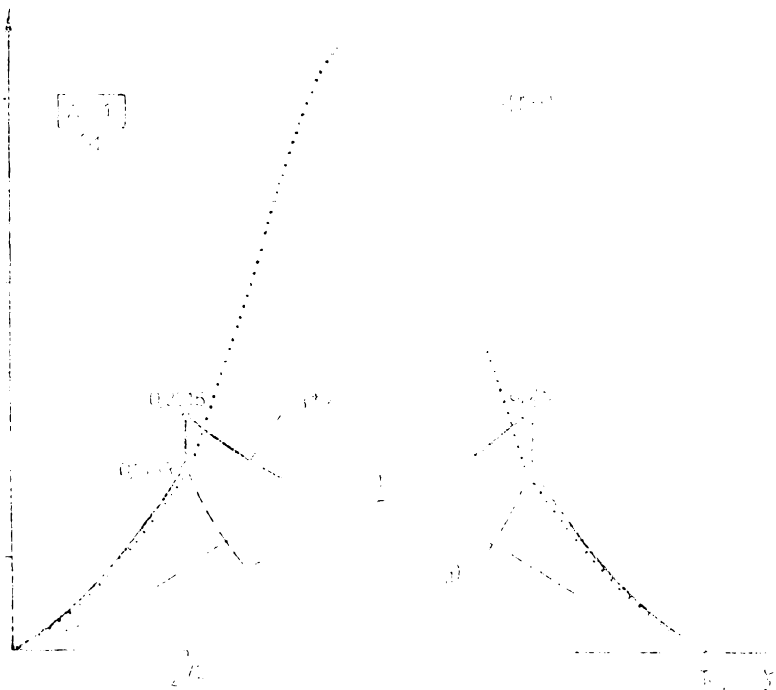


Fig.4.13.

Din figura 4.13 se observă că eroarea rezultată (desenată cu linie continuă) este mai mare decît eroarea generată de prima interpolare (cu nucleul Lagrange de ordin 3) dar mult mai mică decît eroarea care ar fi rezultat prin interpolarea semnalului eşantionat cu T_{s1} direct cu nucleul de ordinul zero (ZOH).

In tabelul 4.8 se prezintă comparativ valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cazul A=1 pentru nucleele Lagrange de ordinul 3, Spline de ordinul 3 şi Cubic continual pe intervalul $[T_{s2}/2,\ T_{s2}]$ (pe intervalul $[0,\ T_{s2}/2]$ rămîn valorile prezentate în tabelul 4.7), cînd sînt urmate de o interpolare de ordinul zero. In prima fază de interpolare s-a dublat numărul de eşantioane ($T_{s2}=T_{s1}/2$).

TABELUL 4.8. Cazul S_1

ξ/T_{s2}	Lagrange 3	Spline 3	Cubic continual
0,5	0,25156	0,23480	0,23927
0,6	0,21736	0,19226	0,20090
0,7	0,19038	0,15867	0,17062
0,8	0,17089	0,13441	0,14874
0,9	0,15911	0,11975	0,13552
1	0,15517	0,11484	0,13310

In figura 4.14 se prezintă grafic comparativ valorile din tabelul 4.8 pentru cele trei nuclee considerate.

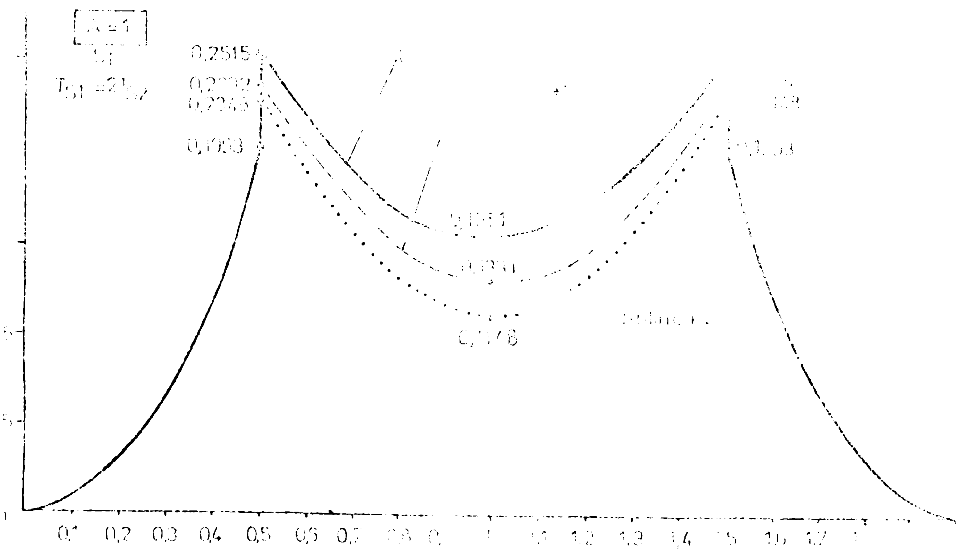


Fig.4.14.

Din figura 4.14 se constată că în punctul $\xi/T_s=1$ eroarea globală egalează valoarea din prima interpolare iar în punctul $\xi/T_s=0,5$ eroarea globală depăşeşte valoarea de 0,1993 pe care o dă nucleul ZOH pentru A=2. Nucleul Spline este cel mai convenabil, fiind urmat de nucleul Cubic continual. Utilizînd relaţiile (4.14) şi respectiv (4.15) pentru cazul A=2 se obţine tabelul 4.9 de valori pentru $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ (în cazul Lagrange 3 + ZOH).

TABELUL 4.9. Casul S_1

A	ξ/T_{s2}	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ cu rel. (4.14.)	A	ξ/T_{s2}	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ cu rel. (4.15)
2	0	0	2	1	0,00161
	0,1	0,00205		0,9	0,00356
	0,2	0,00821		0,8	0,00940
	0,3	0,01845		0,7	0,01911
	0,4	0,03273		0,6	0,03265
	0,5	0,05100		0,5	0,04997

Variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru $\xi\in[0, T_{s1}]$ şi A=2 este prezentată în figura 4.15.

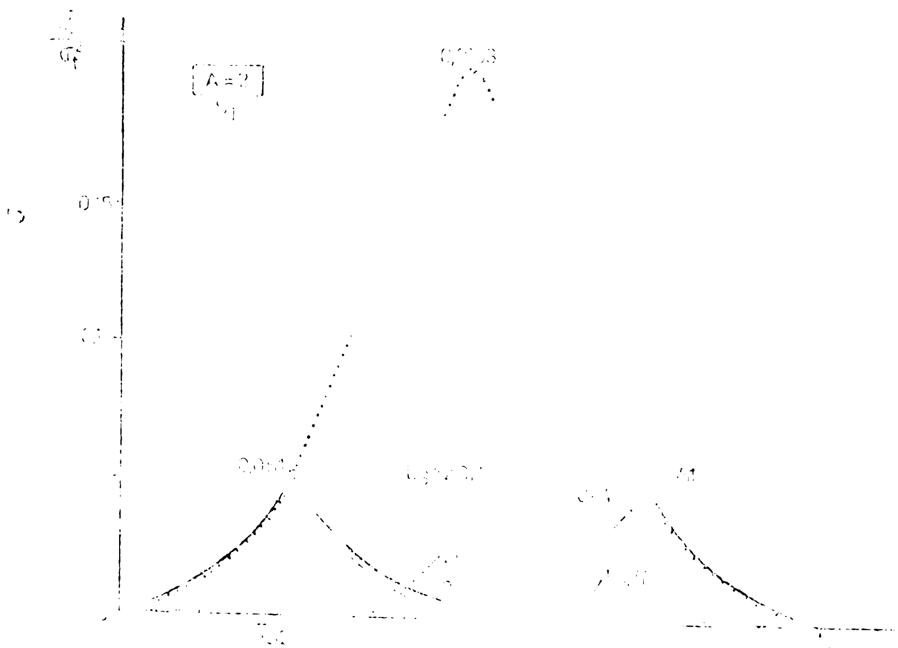


Fig.4.15.

In tabelul 4.1o se prezintă comparativ valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în cazul A=2 pentru aceleaşi nuclee (L3, S_3, CC) şi în aceleaşi condiţii ca şi în cazul prezentat în tabelul 4.8 şi fig.4.14.

TABELUL 4.1o. Cazul S_1

ξ/T_s	Lagrange 3	Spline 3	Cubic continual
o,5	o,049973	o,058333	o,051905
o,6	o,03265o	o,038707	o,03343o
o,7	o,01911o	o,023373	o,01899o
o,8	o,009404	o,012369	o,008638
o,9	o,003566	o,005753	o,002411
1	o,001618	o,003545	o,000333

In figura 4.16 se prezintă valorile $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cele trei nuclee pe intervalul $[o, T_{s1}]$.

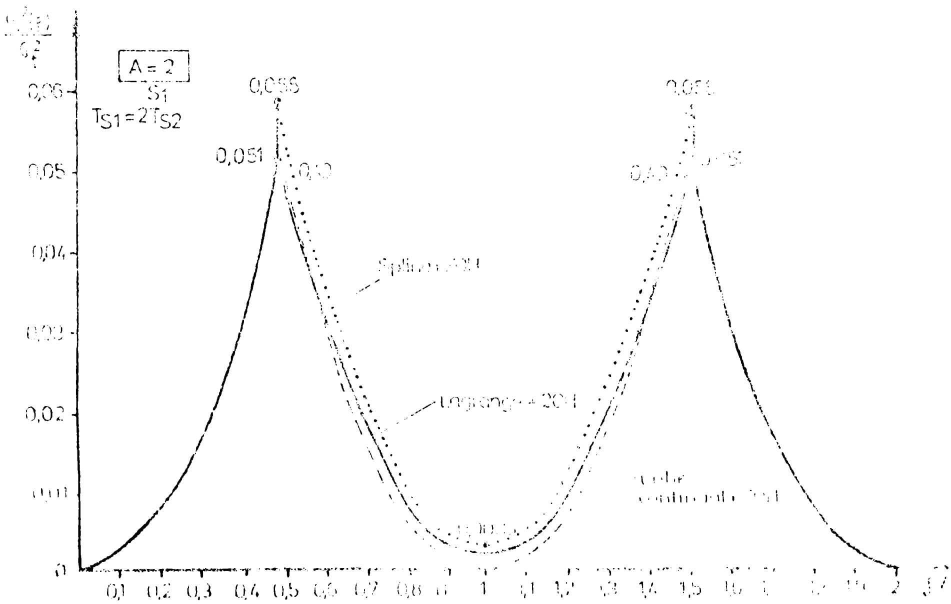


Fig.4.16.

Din figura 4.15 se observă că şi în acest caz eroarea rezultată (desenată cu linie continuă) este mai mare decît cea generată de prima interpolare dar mult mai mică decît eroarea care ar fi rezultat prin interpolarea directă cu nucleul de ordin zero.

In plus, se constată că eroarea este foarte apropiată de cea care s-ar fi obținut prin interpolarea de ordin zero a semnalului original eșantionat însă cu o frecvență dublă.

Din figura 4.16 se constată că valoarea maximă a raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ apare tot în punctul $T_{s2}/2$ și are valoarea cea mai mare (o,o58) pentru nucleul Spline. Nucleele Lagrange și Cubic continual dau valori foarte apropiate. Curba corespunzătoare acestor nuclee se intersectează.

In cazul în care, în prima fază de interpolare (cu nucleu Lagrange de ordinul 3), se mărește de 4 ori numărul de eșantioane (deci $T_{s1}/T_{s2}=4$) variația erorii este prezentată în figura 4.17 (s-a calculat pentru A=1).

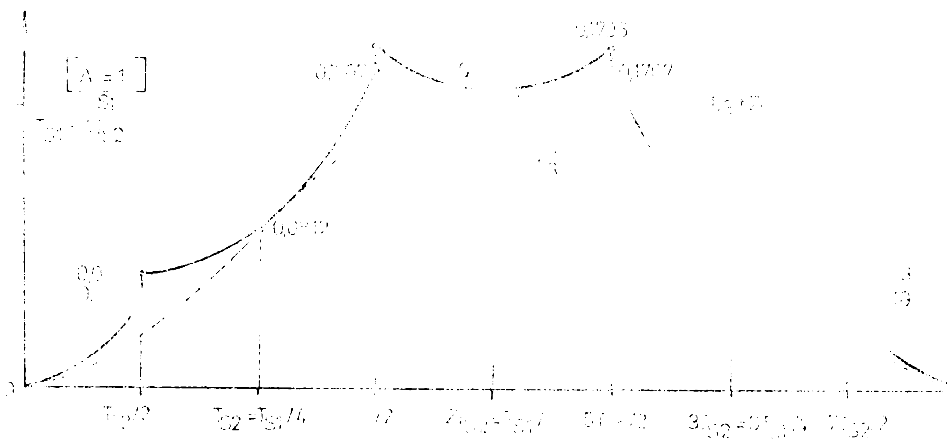


Fig.4.17.

Se constată că față de cazul prezentat în figura 4.13 valoarea maximă a raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ s-a redus de la o,2515 la o,1797.

Se observă că în punctele o și T_{s1} eroarea este nulă iar în punctele T_{s2}, $2T_{s2}$ și $3T_{s2}$ coincide cu eroarea generală de prima interpolare. Pentru a se justifica diferențele care apar între figurile 4.13 și 4.17 (prin creșterea raportului T_{s1}/T_{s2}) se poate utiliza relația (3.31).

In cazul în care interpolarea din faza a doua se efectuează cu un CNA (ZOH) eroarea totală devine: $e_T(\xi)=e_{2dir}(\xi)+e_1(T_{s2})$ (pentru $\xi\in\left[T_{s2}/2,\ T_{s2}\right]$) iar eroarea medie pătratică rezultă:

$$E\left\{e_T^2(\xi)\right\} = E\left\{e_{2dir}^2(\xi)\right\}+2E\left\{e_{2dir}(\xi)e_1(T_{s2})\right\}+E\left\{e_1^2(T_{s2})\right\}$$

Se observă că pentru $\xi = T_{s2}$ $e_{2dir}(T_{s2}) = o$ şi eroarea totală devine $E\left\{e_T^2(T_{s2})\right\} = E\left\{e_1^2(T_{s2})\right\}$ deci tocmai valoarea erorii date de prima interpolare.

Pentru $\xi \neq T_{s2}$ eroarea totală este evident mai mare decît eroarea dată de prima interpolare în punctul T_{s2}.

Dacă în faza de interpolare numerică se calculează un număr mare de eşantioane, deci $n = T_{s1}/T_{s2}$ creşte, eroarea dată de a doua interpolare scade. Trecînd la limită se obţine:

$$\lim_{n \to \infty} E\left\{e_T^2(\xi)\right\} = E\left\{e_1^2(T_{s2})\right\} \quad \text{(deoarece } E\left\{e_{2dir}^2(\xi)\right\} \to o\text{)}$$

deci eroarea totală tinde spre eroarea dată de prima fază de interpolare.

In concluzie se poate aprecia că eroarea finală este cu atît mai mică cu cît se calculează mai multe eşantioane în prima fază de interpolare (interpolarea numerică).

Valoarea minimă spre care tinde eroarea totală este eroarea dată de nucleul utilizat în prima interpolare.

Utilizarea în prima fază a unui nucleu ce realizează erori mici asigură erori mici şi pentru sistemul complet.

Pentru cazul $T_{s1}/T_{s2} = 4$ prezintă interes efectul pe care îl are asupra erorii modificarea parametrului A.

In tabelul 4.11 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleele Lagrange de ordinul 3, Spline de ordinul 3 şi Cubic continual cînd sînt urmate de un element de menţinere de ordinul zero (CNA) în situaţia în care în faza de interpolare numerică se măreşte de 4 ori numărul de eşantioane ($T_{s2} = T_{s1}/4$), pe intervalul $[o, 2T_{s2}]$ pentru A=1 şi A=2.

Valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cazurile din tabelul 4.11 sînt reprezentate grafic în figurile 4.18 şi 4.19.

Din tabelul nr.4.11 şi figura 4.18 se constată că pentru cazul A=1 combinaţia Spline - ZOH este cea mai avantajoasă, fiind urmată de Cubic continual - ZOH.

Din figura 4.19 se constată că pentru A=2 combinaţia Spline - ZOH a devenit cea mai defavorabilă.

Se observă că nucleele Lagrange şi Cubic continual au o comportare foarte apropiată cu un uşor avantaj pentru cel de-al doilea nucleu.

TABELUL 4.11.

ξ/T_{s2}	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ A=1 S_1		
	Lagrange (ord.3)	Spline (ord.3)	Cubic continual
0	0	0	0
0,25	0,012826	0,012826	0,012826
0,5	0,051009	0,051009	0,051009
0,5	0,060365	0,048298	0,040075
0,75	0,061876	0,043044	0,043223
1	0,081253	0,058743	0,066633
1,25	0,117868	0,094737	0,109522
1,5	0,170746	0,149945	0,170701
1,5	0,179684	0,145361	0,158616
1,75	0,161331	0,122508	0,138013
2	0,155178	0,114847	0,131106
	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ A=2 S_1		
0	0	0	0
0,25	0,00321121	0,00321121	0,00321121
0,5	0,01282629	0,01282629	0,01282629
0,5	0,01169909	0,02877724	0,01656981
0,75	0,00319036	0,01303403	0,00530094
1	0,00085731	0,00392922	0,00047022
1,25	0,00471194	0,00151099	0,00210182
1,5	0,01473096	0,00578880	0,01018268
1,5	0,01377605	0,01732262	0,01330095
1,75	0,00466190	0,00699514	0,00358013
2	0,00161807	0,00354599	0,00033364

Eroarea în cazul A=2 pentru nucleele Lagrange şi Cubic continual este foarte apropiată de eroarea care ar rezulta prin interpolarea directă a semnalului original cu un CNA însă pentru o perioadă de eşantionare de 4 ori mai mare decît cea iniţială.

Se poate trage concluzia că, pentru situaţia în care A 2 alegerea corespunzătoare a nucleului din faza de interpolare numerică permite ca eroarea totală să fie cea pe care o introduce

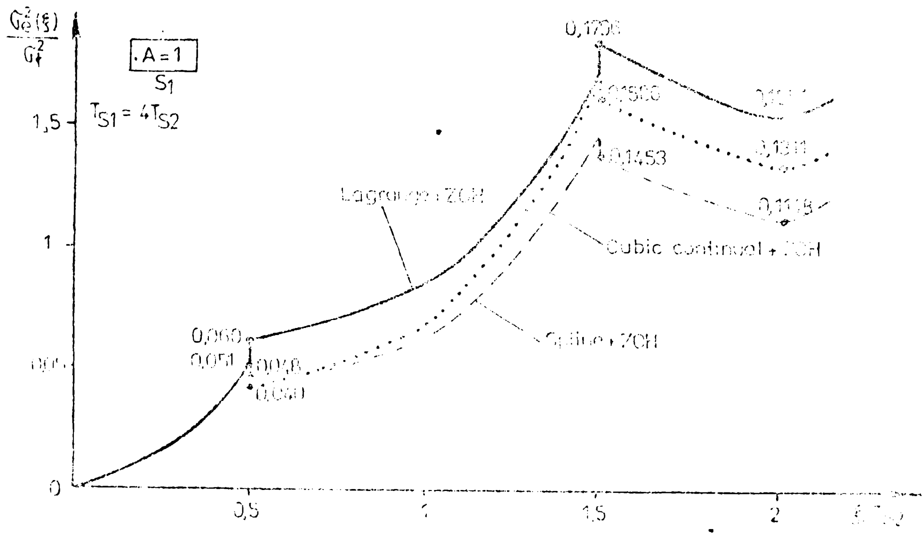


Fig.4.18.

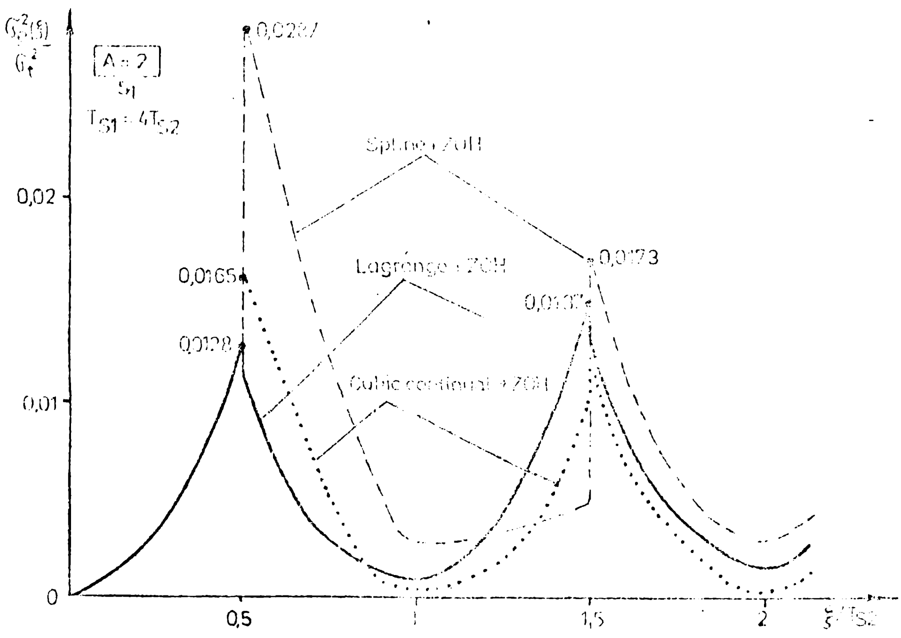


Fig.4.19.

doar faza a doua de interpolare (CNA) şi corespunzînd unei frecvenţe de eşantionare virtuale de N ori mai mare decît cea iniţială.

BUPT

4.11. Compararea sistemelor de interpolare în două faze consecutive care utilizează în ambele faze nuclee polinomiale de ordin superior

Implementarea sistemelor de interpolare numerică este mult mai avantajoasă dacă se realizează în două sau mai multe faze consecutive. Pentru a putea aprecia eroarea introdusă în situaţia aceasta, în continuare se tratează cazul interpolării în două faze presupunînd că semnalul original prezintă o densitate spectrală de putere constantă (S_1).

In tabelul 4.12 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru A=1 considerînd că interpolarea se face în două faze consecutive utilizînd nuclee polinomiale de ordinul 3 (Lagrange-Lagrange, Spline-Spline şi Cubic continual-Cubic continual).

TABELUL 4.12.

A=1 ξ/T_{s2}	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ . . Cazul S_1		
	Lagrange-Lagrange	Spline-Spline	Cubic cont.-Cubic cont.
o	o	o	o
o,1	o,oo3828	o,oo36o8	o,oo3o84
o,2	o,o14857	o,o1221o	o,o11834
o,3	o,o31914	o,o24311	o,o25483
o,4	o,o53291	o,o39474	o,o43oo4
o,5	o,o76916	o,o5707o	o,o6296o
o,6	o,1oo544	o,o75668	o,o835o3
o,7	o,121963	o,o929o1	o,1o2518
o,8	o,139184	o,1o6o77	o,117873
o,9	o,15o612	o,113241	o,127758
1	o,155178	o,114847	o,1311o6

Calculul valorilor din tabelul de mai sus a fost efectuat cu ajutorul relaţiei (4.8) considerînd că prima fază de interpolare dublează numărul de eşantioane iniţial (deci $T_{S2}=T_{S1}/2$).

In figura 4.2o se reprezintă grafic curbele pentru cele trei cazuri din tabelul 4.12 pe intervalul $[o,\ T_{S1}]$.

Comparînd datele din tabelele 4.2 şi 4.12 şi figurile 4.5 şi 4.2o se constată că ierarhia sistemelor de interpolare a rămas aceeaşi. In plus se poate observa că valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ a rămas aceeaşi la mijlocul intervalului iar în rest, pentru cazul interpolării în două faze, se obțin valori sensibil mai mici decît în cazul interpolării într-o singură fază.

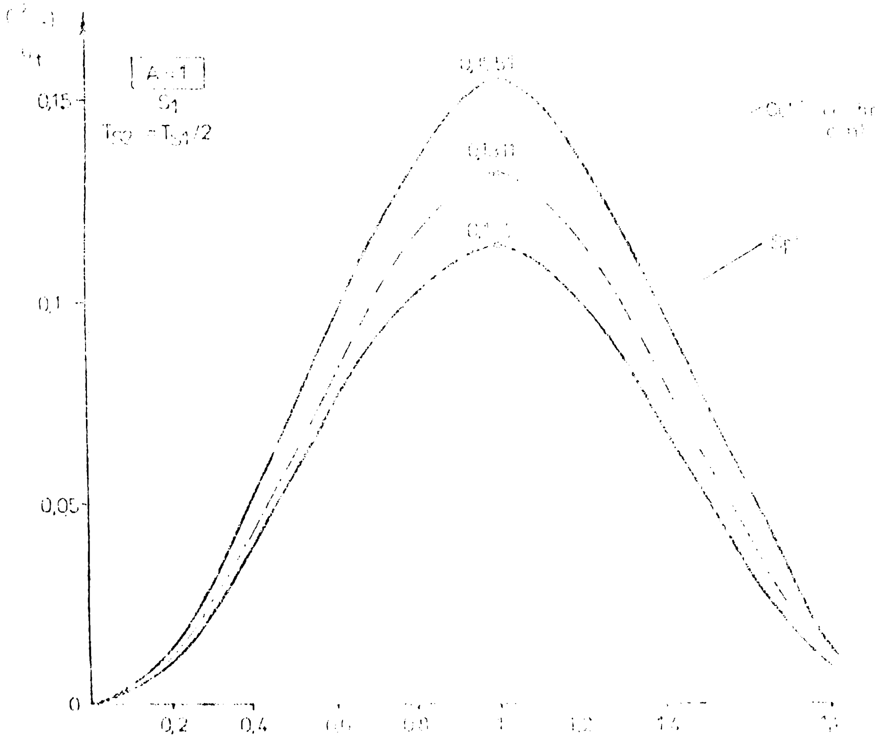


Fig.4.20.

In tabelul 4.13 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru aceleași sisteme de interpolare ca și în tabelul 4.12 dar calculate pentru cazul A=2.

TABELUL 4.13.

A=2 ξ/T_{s2}	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Cazul S_1		
	Lagrange-Lagrange	Spline-Spline	Cubic cont.-Cub.cont.
0	0	0	0
0,1	0,0000246	0,0022660	0,0004767
0,2	0,0000986	0,0051720	0,0010468
0,3	0,0002208	0,0062971	0,0011898
0,4	0,0003872	0,0059064	0,0009888
0,5	0,0005895	0,0051529	0,0007224
0,6	0,0008158	0,0048869	0,0005979
0,7	0,0010503	0,0051402	0,0006295
0,8	0,0012750	0,0052197	0,0006581
0,9	0,0014705	0,0044491	0,0005162
1	0,0016180	0,0035459	0,0003336

Valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ din tabelul de mai sus sînt reprezentate grafic în figura 4.21.

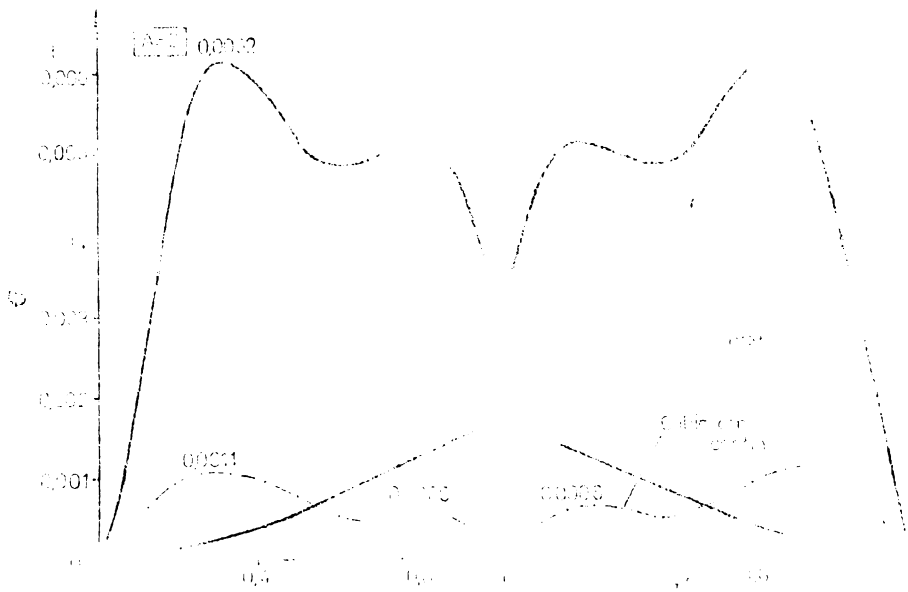


Fig.4.21.

Comparînd valorile din tabelele 4.2 şi 4.13 şi respectiv figurile 4.6 şi 4.21 se constată că la interpolarea în două faze au intervenit modificări defavorabile pentru nucleele Spline şi Cubic continual în sensul creşterii valorilor maxime faţă de cazul interpolării într-o singură fază precum şi în privinţa formei de variaţie a raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pe intervalul $[0, T_{sl}]$ Se poate aprecia totuşi că în cazul interpolării în două faze consecutive nucleul Cubic continual reprezintă cea mai bună soluţie în eventualitatea în care funcţia originală îşi modifică limita superioară a spectrului în intervalul $[\omega_s/4, \omega_s/2]$.

Dacă se ţine seama de faptul că implementarea unor sisteme de interpolare de ordin superior se realizează numai în faza discretă de prelucrare a semnalului trebuie comparată eroarea dar în punctele de "eşantionare" ale semnalului interpolat.

Considerînd că se urmăreşte o creştere de 4 ori a frecvenţei de eşantionare (a numărului de eşantioane) este importantă doar valoarea erorii în punctele 0,25 T_{sl}; 0,5 T_{sl} şi 0,75 T_{sl}.

In tabelul 4.14 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în aceste puncte pentru sistemele de interpolare într-o singură fază sau în două faze prezentate anterior.

TABELUL 4.14.

A=1	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$		Cazul S_1
Nucleul	ξ=0,25T_{s1}	ξ=0,5T_{s1}	ξ=0,75T_{s1}
Spline-Spline	0,057078	0,114847	0,057078
Lagrange-Lagrange	0,076916	0,155178	0,079916
Cubic continual-Cubic continual	0,062960	0,131106	0,062960
A=2			
Spline-Spline	0,0051529	0,0035459	0,0051529
Lagrange-Lagrange	0,0005895	0,0016180	0,0005895
Cubic continual-Cubic continual	0,0007224	0,0003336	0,0007224

Analizînd datele din tabel se constată că, dacă pentru A=1, nucleul Cubic continual dă erori cu puțin mai mari decît nucleul Spline, în cazul A=2, nucleul Cubic continual este cel mai bun.

Interpolarea în două faze consecutive cu nuclee polinomiale poate fi implementată și folosind nuclee diferite pentru fiecare fază. Ținînd seama de faptul că nucleul din faza a doua de interpolare numerică intervine pentru o frecvență de eșantionare diferită (mai mare) de cea la care intervine nucleul din prima fază, se poate face o alegere corespunzătoare a celor două nuclee pentru a se asigura erori minime în ambele faze.

Alegînd pentru cazul A=1 în prima fază nucleul Spline de ordinul 3 și pentru faza a doua nucleul Cubic continual, respectiv pentru cazul A=2 în prima fază nucleul Cubic continual și pentru faza a doua nucleul Lagrange de ordinul 3 se obțin pentru raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ valorile din tabelul 4.15 (s-a considerat că prima fază de interpolare dublează numărul de eșantioane deci $T_{s2}=T_{s1}/2$).

TABELUL 4.15.

ξ/T_{s2}	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Cazul S_1	
	A=1 Spline-Cubic continual	A=2 Cubic cont.-Lagrange
0	0	0
0,1	0,00305280	0,000023709
0,2	0,01138597	0,000074082

0,3	0,02394464	0,000132411
0,4	0,03964289	0,000184633
0,5	0,05716344	0,000226720
0,6	0,07491254	0,000258393
0,7	0,09111080	0,000281964
0,8	0,10400035	0,000300675
0,9	0,11215070	0,000317392
1	0,11484727	0,000333650

Dacă se compară valorile din tabelul 4.15 cu cele din tabelele 4.2 şi 4.12 respectiv 4.13, pentru A=1 îmbunătăţirea nu este semnificativă, în schimb pentru A=2 combinaţia Cubic continual-Lagrange este net cea mai favorabilă asigurînd cele mai mici erori.

CAPITOLUL 5.

CRESTEREA PRECIZIEI SISTEMELOR DE INTERPOLARE PRIN MINIMIZAREA ERORII MEDII PATRATICE. CAZUL OPTIMAL

5.1. Introducere

Sistemele practice de interpolare, menite să asigure o bună calitate semnalului reconstruit, conţine întotdeauna o fază de interpolare numerică, de ordin superior, urmată de o fază de interpolare analogică realizată cu CNA (ZOH).

Dintre aceste două faze, prima este susceptibilă de optimizări. Una din posibilităţile de optimizare o constituie minimizarea erorii medii pătratice.

5.2. Nucleul optimal de interpolare

Pentru deducerea expresiei nucleului optimal se porneşte de la expresia erorii momentane date de relaţia (3.6) /85/, punînd condiţia ca eroarea momentană să fie ortogonală cu valorile cunoscute (eşantioane) ale semnalului original:

$$E\{e_n(\xi)\cdot f[(n+\ell)T_s]\} = 0 \tag{5.1}$$

unde $\ell\in[-m_1,m_2]$ şi $m_1+m_2+1=N$.

Se obţine următorul set de condiţii:

$$E\{f(nT_s+\xi)\cdot f[(n+\ell)T_s]\} - \sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)\cdot E\{f[(n+k)T_s]\cdot f[(n+\ell)T_s]\} = 0 \tag{5.2}$$

Tinem seama de consideraţiile făcute în capitolul 3 cu privire la funcţia de autocorelaţie a semnalului original R_{ff} rezultă:

$$R_{ff}(\ell T_s-\xi) - \sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)\cdot R_{ff}[(\ell-k)T_s] = 0 \tag{5.3}$$

$$\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_k(\xi)R_{ff}\left[(\ell-k)T_s\right] = R_{ff}(\ell T_s-\xi) \qquad (5.4)$$

Impărţind cu $R_{ff}(o)$ se obţine un sistem de N ecuaţii în care necunoscutele sînt expresiile nucleelor $h_{kopt}(\xi)$ ale interpolării optimale pentru intervalul $\xi\in[o,T_s]$:

$$\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\,\frac{R_{ff}\left[(\ell-k)T_s\right]}{R_{ff}(o)} = \frac{R_{ff}(\ell T_s-\xi)}{R_{ff}(o)} \qquad (5.5)$$

unde $\ell\in[-m_1,m_2]$ şi $m_1+m_2+1 = N$, N fiind numărul de eşantioane consecutive utilizate simultan.

Inlocuind relaţiile (5.4) şi respectiv (5.5) în relaţiile (3.11) şi respectiv (3.13) se obţine expresia erorii medii pătratice minime şi respectiv expresia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ în cazul optimal:

$$E\left\{e^2_{nopt}(\xi)\right\} = R_{ff}(o)-\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\cdot\frac{R_{ff}(\xi-kT_s)}{R_{ff}(o)} \qquad (5.7)$$

Dacă se presupune că semnalul original are densitatea spectrală de putere constantă în banda $[-\omega_c, \omega_c]$ şi nulă în rest, setul de condiţii (5.5) devine (cazul S_1) :

$$\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\cdot\sin c\ \frac{\ell-k}{A} = \sin c\ \frac{\ell T_s-\xi}{AT_s} \qquad (5.8)$$

In aceste condiţii valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ se va putea calcula cu relaţia:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)_{opt}}{\sigma_f^2} = 1-\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\sin c\ \frac{\xi-kT_s}{AT_s} \qquad (5.9)$$

Dacă presupunem că semnalul original are densitatea spectrală de putere uniform descrescătoare în banda $(-\omega_c,\omega_c)$ şi nulă în rest, în mod analog, se obţin relaţiile (cazul S_2) :

$$\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\cdot\sin c^2\ \frac{\ell-k}{2A} = \sin c^2\ \frac{\ell T_s-\xi}{2AT_s} \qquad (5.1o)$$

şi respectiv:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)_{opt}}{\sigma_f^2} = 1-\sum_{k=-m_1}^{m_2} h_{kopt}(\xi)\ \sin c^2\ \frac{\xi-kT_s}{2AT_s} \qquad (5.11)$$

5.3. Studiul cazului optimal pentru N=2

Pentru a pune în evidență avantajele și dezavantajele nucleelor optimale, în continuare se analizează nucleul optimal pentru cazul în care interpolarea utilizează două eșantioane consecutive (N=2).

Pentru început se va lua în considerare cazul în care semnalul original are densitatea spectrală de putere constantă în bandă.

Pentru determinarea expresiei nucleului optimal, în această situație, este necesară rezolvarea sistemului de condiții dat de relațiile (5.8).

Este de așteptat ca expresia analitică a nucleului optimal să fie mai complexă în comparație cu nucleele polinomiale (cu nucleul interpolării liniare pentru N=2) dar acest dezavantaj va fi compensat prin calitatea mai ridicată a semnalului reconstituit.

Calculul coeficienților sistemului de interpolare numerică, pe baza nucleului optimal poate fi însă efectuat cu ajutorul unui calculator. In acest caz cei doi indici care intervin în relațiile (5.8) pot lua doar două valori. Rezultă următorul sistem de două ecuații:

$$\begin{cases} h_{o\ opt}(\xi)+h_{1\ opt}(\xi)\sin c\,\frac{1}{A} = \sin c\,\frac{\xi}{AT_s} & \text{pt.}\ \ell=0 \\ h_{o\ opt}(\xi)\sin c\,\frac{1}{A}+h_{1\ opt}(\xi) = \sin c\,\frac{T_s-\xi}{AT_s} & \text{pt.}\ \ell=1 \end{cases} \tag{5.12}$$

Soluțiile acestui sistem sînt:

$$h_{o\ opt}(\xi) = \frac{\sin c\,\frac{\xi}{AT_s} - \sin c\,\frac{T_s-\xi}{AT_s}\cdot\sin c\,\frac{1}{A}}{1-\sin c^2\,\frac{1}{A}} \quad \text{pt.}\ \xi\in[0,T_s] \tag{5.13}$$

$$h_{1\ opt}(\xi) = \frac{\sin c\,\frac{T_s-\xi}{AT_s} - \sin c\,\frac{\xi}{AT_s}\cdot\sin c\,\frac{1}{A}}{1-\sin c^2\,\frac{1}{A}} \quad \text{pt.}\ \xi\in[0,T_s] \tag{5.14}$$

Se observă că relația (5.14) se obține din relația (5.13) făcînd substituția $\xi \to T_s-\xi$ adică $h_{1\ opt}(\xi)=h_{o\ opt}(T_s-\xi)$ și deci nucleul de interpolare optimală rezultat este o funcție pară ceea ce corespunde condițiilor de construcție a nucleelor de interpolare în general.

De asemenea se constată că:

$$h_{o\ opt}(o) = 1 \qquad h_{o\ opt}(T_s) = o$$
$$h_{1\ opt}(o) = o \qquad h_{1\ opt}(T_s) = 1 \tag{5.15}$$

deci $h_{o\ opt}(o)+h_{1\ opt}(o)=h_{o\ opt}(T_s)+h_{1\ opt}(T_s)=1$ ceea ce iarăşi corespunde condiţiilor generale pentru nucleele de interpolare.

In restul intervalului $[o,T_s]$ se constată însă că suma nucleelor este diferită de 1:

$$h_{o\ opt}(\xi)+h_{1\ opt}(\xi) = \frac{\sin c\,\frac{\xi}{AT_s} + \sin c\,\frac{T_s-\xi}{AT_s}}{1+\sin c\,\frac{1}{A}} \tag{5.16}$$

Relaţia (5.16) se apropie de valoarea 1 cu creşterea parametrului A şi

$$\lim_{A\to\infty}\left[h_{o\ opt}(\xi)+h_{1\ opt}(\xi)\right] = 1 \tag{5.17}$$

ceea ce arată că nucleul optimal nu interpolează perfect un semnal cu prima derivată nulă decît cînd $A\to\infty$. Acest lucru se datorează faptului că nucleul optimal îşi schimbă forma în funcţie de A. In tabelul 5.1 se prezintă valoarea nucleului optimal corespunzător cazului N=2 în punctul $\xi=T_s/2$ pentru diferite valori ale parametrului A :

TABELUL 5.1.

A	$h_{opt}(T_s/2)$
1	o,6366
2	o,55o1
3	o,5226
4	o,5128
1o	o,5o2o

Utilizînd relaţiile (5.9) şi respectiv (5.11) pentru nucleul optimal în situaţia în care $S_{ff}(\omega)$=constant şi respectiv $S_{ff}(\omega)$=uniform descrescător se obţin valorile din tabelul 5.2.

Analizînd datele din tabel, se constată că, şi în cazul nucleului optimal, erorile care rezultă în situaţia în care semnalul original prezintă densitatea spectrală de putere uniform descrescătoare în banda $(-\omega_c, \omega_c)$ sînt mai mici decît în cazul în care aceasta este constantă. In figura 5.1 se prezintă comparativ cazul A=1 pentru S_{ff}=ct. şi S_{ff}=unif.descr.

TABELUL 5.2.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$	
		$S_{ff}(\omega)$=ct. S_1	$S_{ff}(\omega)$=unif.descr. S_2
1	0	0	0
	0,1	0,020523	0,007448
	0,2	0,070163	0,024830
	0,3	0,127822	0,044435
	0,4	0,172641	0,059380
	0,5	0,189430	0,064925
2	0	0	0
	0,1	0,001171	0,000480
	0,2	0,003776	0,001540
	0,3	0,006599	0,002680
	0,4	0,008692	0,003581
	0,5	0,009459	0,003828

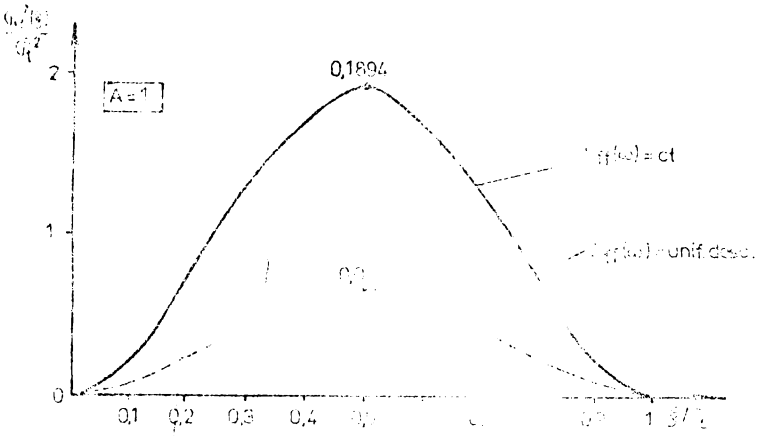


Fig.5.1.

Un alt aspect de interes îl prezintă compararea performanțelor nucleului optimal cu performanțele nucleului interpolării liniare (interpolarea de ordinul 1).

În acest scop se calculează raportul $\sigma_e^2(\xi)_{opt}/\sigma_f^2$ cu relația (5.9) (pentru cazul $S_{ff}(\omega)$=ct.), în care se utilizează pentru $h_{k\ opt}$ relațiile (5.13) și (5.14), și raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru interpolarea liniară folosind relația (4.7) și expresia analitică a nucleului de ordinul 1 (ZOH). S-au obținut în urma calculelor valorile prezentate în tabelul 5.3.

TABELUL 5.3.

A	ξ/T_s	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ optimal S_1	$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2}$ FOH S_1
1	0,125	0,03097	0,04107
	0,25	0,09936	0,12447
	0,5	0,18943	0,22676
2	0,125	0,000173	0,00333
	0,25	0,00522	0,00988
	0,5	0,00945	0,01767
3	0,5	0,00175	0,00363
4	0,5	0,00054	0,00116

Se constată că într-adevăr nucleul optimal asigură erori mai mici decît nucleul de ordinul întîi și în plus se observă o convergență mai rapidă a erorii către zero la creșterea lui A.

Principalul dezavantaj al nucleului optimal constă în faptul că expresia lui depinde de parametrul A astfel încît un nucleu optimal determinat pentru o valoare a parametrului A nu mai este optimal la o altă valoare a lui A.

In plus expresia nucleului optimal este mai complexă decît a nucleelor polinomiale și depinde și de funcția de autocorelație a semnalului original.

Pentru a se evidenția diferența dintre nucleele optimale determinate pentru cazurile $S_{ff}(\omega)$=ct. și $S_{ff}(\omega)$=unif.descr., în tabelul 5.4 se prezintă valorile celor două nuclee calculate în cazul A=1.

TABELUL 5.4.

ξ/T_s	$h_{opt}(\xi)$ pt. $S_{ff}(\omega)$=ct. S_1	$h_{opt}(\xi)$ pt. $S_{ff}(\omega)$=unif. descr. S_2
0	1	1
0,1	0,983631	0,950027
0,2	0,935489	0,879921
0,3	0,858393	0,792120
0,4	0,756826	0,689816
0,5	0,636619	0,576800
0,6	0,504551	0,457267

0,6	0,367883	0,335603
0,8	0,233872	0,216167
0,9	0,109292	0,103075
1	0	0

In figura 5.2 se reprezintă grafic cele două nuclee de interpolare.

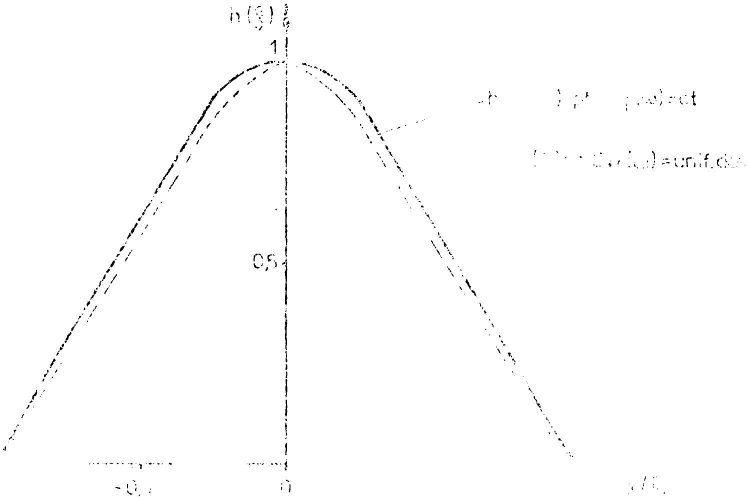


Fig.5.2.

Dependenţa faţă de funcţia de autocorelaţie, a semnalului original, în cazul nucleelor optimale, poate fi mai pronunţată decît în cazul nucleelor polinomiale datorită faptului că expresia nucleelor optimale este derivată din $R_{ff}(\tau)$.

Acest domeniu poate fi observat dacă se analizează comportarea nucleului optimal din cazul $S_{ff}(\omega)$=ct. în cazul în care semnalul original prezintă $S_{ff}(\omega)$ uniform descrescător şi viceversa.

Valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru aceste două situaţii sînt prezentate în tabelul 5.5.

Comparînd valorile din tabelul 5.5 cu cele din tabelul 5.2 se constată că, pentru A=1, diferenţa nu este semnificativă ambele nuclee rămînînd mai bune decît nucleul interpolării liniare. Pentru A=2 însă nucleul optimal pentru $S_{ff}(\omega)$=ct. folosit la $S_{ff}(\omega)$=uniform descrescător produce erori cu puţin mai mari decît cele ale nucleului interpolării liniare.

TABELUL 5.5.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal pentru S_2 Cazul S_1	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal pentru S_1 Cazul S_2
1	0	0	0
	0,1	0,021691	0,008785
	0,2	0,073564	0,029028
	0,3	0,133256	0,051603
	0,4	0,179367	0,068675
	0,5	0,196587	0,074982
2	0	0	0
	0,1	0,001442	0,000776
	0,2	0,004643	0,002492
	0,3	0,008104	0,004340
	0,4	0,010667	0,005705
	0,5	0,011605	0,006203

Pentru a pune în evidență comportarea nucleului optimal calculat la o anumită valoare a parametrului A în situația în care raportul $\omega_s/2\omega_c$=A se modifică, s-a calculat cu relația (5.9) (cazul $S_{ff}(\omega)$=ct.) valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleul optimal la A=1 și pentru nucleul optimal la A=2 în situația în care $A\in[1,2]$. Aceste valori împreună cu cele obținute pentru interpolarea liniară sînt prezentate în tabelul 5.6.

TABELUL 5.6.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Cazul S_1 Int.liniară (FOH)	Optimal la A=1	Optimal la A=2
1	0,5	0,226760	0,189430	0,204399
1,1	0,5	0,163015	0,125427	0,139704
1,2	0,5	0,119667	0,086296	0,097102
1,3	0,5	0,089551	0,062462	0,068567
1,4	0,5	0,068196	0,048146	0,049152
1,5	0,5	0,052761	0,039957	0,035758
1,6	0,5	0,041408	0,035280	0,026411
1,7	0,5	0,032920	0,033161	0,019826
1,8	0,5	0,026482	0,032579	0,015156
1,9	0,5	0,021531	0,032968	0,011830
2	0,5	0,017677	0,033957	0,009459

Din tabelul 5.6 se constată că nucleul optimal la A=1 rămîne mai bun decît nucleul interpolării liniare pînă la A=1,6. Se mai constată că începînd cu A=1,9 eroarea înregistrează o creştere a valorii, fenomen care nu apare la nucleele polinomiale şi care se datorează faptului că nucleul optimal nu îndeplineşte condiţia $\sum_k h_k(\xi)=1$.

Nucleul optimal la A=2 asigură eroarea mai mică decît nucleul interpolării liniare pe tot domeniul considerat dar între A=1 şi A=1,4 dă erori mai mari decît nucleul optimal la A=1.

Utilizînd relaţia (5.11) (în cazul $S_{ff}(\omega)$=uniform descrescător) la calculul raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$, pentru aceleaşi nuclee, s-au obţinut valorile din tabelul 5.7.

TABELUL 5.7.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Int.liniară (ZOH)	Optimal la A=1	Cazul S_2 Optimal la A=2
1	0,5	0,081503	0,064925	0,072614
1,1	0,5	0,057814	0,044258	0,049696
1,2	0,5	0,042015	0,031707	0,034769
1,3	0,5	0,031197	0,024037	0,024816
1,4	0,5	0,023611	0,019363	0,018041
1,5	0,5	0,018177	0,016559	0,013346
1,6	0,5	0,014208	0,014936	0,010040
1,7	0,5	0,011258	0,014069	0,007680
1,8	0,5	0,009031	0,013685	0,005978
1,9	0,5	0,007325	0,013611	0,004738
2	0,5	0,006002	0,013734	0,003982

Rezultatele obţinute sînt apropiate de cele din tabelul 5.6. Astfel, nucleul optimal pentru A=1 rămîne mai bun decît nucleul interpolării liniare pînă la A=1,5.

Nucleul optimal pentru A=2 dă erori mai mici decît nucleul interpolării liniare pe tot intervalul considerat dar între A=1 şi A=1,3 dă erori mai mari decît nucleul optimal pentru A=1.

5.4. Studiul cazului optimal pentru N=4

Cazul în care se utilizează patru eşantioane consecutive la interpolare (N=4) prezintă din punct de vedere practic o importanţă mult mai mare decît cazul N=2 întrucît reprezintă un compromis optim între complexitatea implementării şi precizia semnalului reconstituit.

Este de aşteptat ca nucleul optimal în acest caz să asigure erori mult mai mici decît în cazul N=2.

Pe de altă parte, acest studiu este util în comparaţie cu studiul nucleelor polinomiale pentru a se pune în evidenţă situaţiile în care se justifică utilizarea nucleelor optimale în locul celor polinomiale.

Sistemul de ecuaţii (5.5) care determină expresia nucleului optimal în cazul N=4 devine:

$$\begin{cases} h_{-1opt}(\xi)+h_{oopt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(2T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{2opt}(\xi)\cdot \\ \quad\cdot\dfrac{R_{ff}(3T_s)}{R_{ff}(o)}=\dfrac{R_{ff}(T_s+\xi)}{R_{ff}(o)} \\ h_{-1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{oopt}(\xi)+h_{1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{2opt}(\xi)\cdot \\ \quad\cdot\dfrac{R_{ff}(2T_s)}{R_{ff}(o)}=\dfrac{R_{ff}(\xi)}{R_{ff}(o)} \\ h_{-1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(2T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{oopt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{1opt}(\xi)+h_{2opt}(\xi)\cdot \\ \quad\cdot\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}=\dfrac{R_{ff}(T_s-\xi)}{R_{ff}(o)} \\ h_{-1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(3T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{oopt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(2T_s)}{R_{ff}(o)}+h_{1opt}(\xi)\dfrac{R_{ff}(T_s)}{R_{ff}(o)}+ \\ \quad+h_{2opt}(\xi)=\dfrac{R_{ff}(2T_s-\xi)}{R_{ff}(o)} \end{cases} \tag{5.18}$$

Se observă că în cazul N=4 sistemul (5.5) reprezintă un sistem liniar de patru ecuaţii.

Sistemul (5.18) a fost scris avînd în vedere intervalul $[o, T_s]$.

In tabelul 5.8 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ calculat cu relaţia (5.7) pentru valorile parametrului A=1 şi A=2 în cazurile S_1, S_2 şi S_3, utilizînd pentru expresia nucleului optimal $h_{opt}(\xi)$ soluţia sistemului (5.18) determinată pentru fiecare caz în parte.

TABELUL 5.8.

ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal la A=1	Cazul S_1 Optimal la A=2
0	0	0
0,1	0,009847	0,000017748
0,2	0,035049	0,000060806
0,3	0,065635	0,000110770
0,4	0,090084	0,000149527
0,5	0,099367	0,000164527
ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal la A=1	Cazul S_2 Optimal la A=2
0	0	0
0,1	0,002074	0,000005541
0,2	0,007304	0,000019821
0,3	0,013574	0,000036331
0,4	0,018545	0,000049133
0,5	0,020425	0,000053855
ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal la A=1	Cazul S_3 Optimal la A=2
0	0	0
0,1	0,016059	0,000018720
0,2	0,057342	0,000064174
0,3	0,107623	0,000116993
0,4	0,147908	0,000158005
0,5	0,163222	0,000173355

Comparînd valorile din tabelul 5.8 cu valorile corespunzătoare din tabelele (4.2), (4.4) şi (4.6) se constată şi în acest caz că nucleele optimale asigură erorile minime în comparaţie cu nucleele polinomiale.

Dacă în cazul A=1 diferenţa nu este însă prea semnificativă, în cazul A=2 diferenţa dintre nivelul erorilor nucleelor polinomiale şi nivelul produs de nucleul optimal este substanţială.

In figura 5.3 se prezintă grafic variaţia raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleul optimal comparativ cu nucleul Spline de ordinul 3 pentru cazul A=1 iar în figura 5.4 raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleul optimal şi nucleul cubic continual pentru cazul A=2 (Obs. Pentru comparaţie s-au ales în fiecare caz nucleele polinomiale care au erorile minime). S-a reprezentat grafic doar cazul S_1.

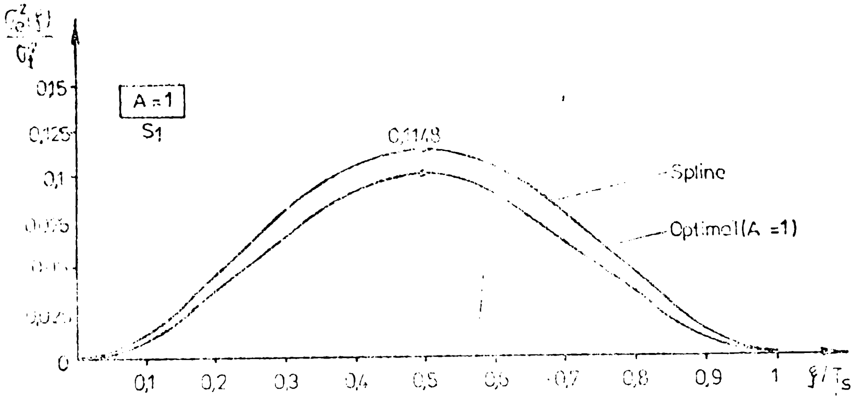


Fig.5.3

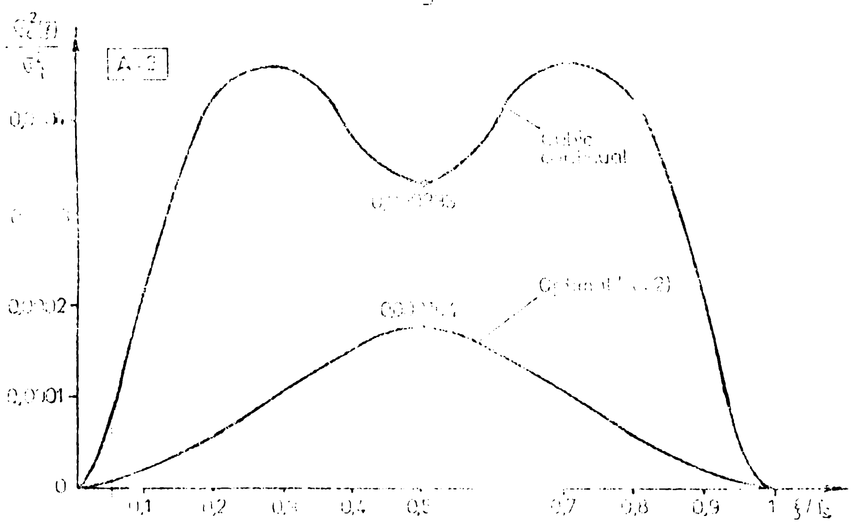


Fig.5.4.

Din tabelul 5.8 şi figurile 5.3 şi 5.4 se observă că forma de variaţie a erorii pe intervalul $[0, T_s]$ are întotdeauna la nucleele optimale un singur maxim prezent la mijlocul intervalului (pentru $\xi = T_s/2$).

Pentru a pune în evidenţă şi în cazul N=4 dependenţa faţă de funcţia de autocorelaţie a performanţelor nucleelor optimale, în tabelul 5.9 se prezintă valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleul optimal în cazul S_1 utilizat în cazul S_2 precum şi pentru nucleul optimal în cazul S_2 utilizat în cazul S_1.

TABELUL 5.9.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$	
		Optimal pt.S_2 în cazul S_1	Optimal pt.S_1 în cazul S_2
1	0	0	0
	0,1	0,010629	0,002718
	0,2	0,037701	0,009536
	0,3	0,070427	0,017676
	0,4	0,096517	0,024111
	0,5	0,106411	0,026542
2	0	0	0
	0,1	0,000030448	0,000011633
	0,2	0,000104155	0,000039755
	0,3	0,000189610	0,000072309
	0,4	0,000255866	0,000097531
	0,5	0,000280648	0,000106960

Comparînd valorile din tabelul 5.9 cu valorile din tabelele (4.2) şi (4.4) se constată că nucleul optimal pentru cazul S_2 utilizat în cazul S_1 este mai bun decît nucleele polinomiale şi pentru A=1 şi pentru A=2.

Nucleul optimal pentru cazul S_1 utilizat în cazul S_2 este mai bun decît nucleele polinomiale pentru A=2 dar produce erori mai mari decît nucleul Spline de ordinul 3 pentru A=1.

Pentru a analiza comportarea nucleului optimal calculat la o anumită valoare a parametrului A, în situaţia în care raportul $\omega_s/2\omega_c$=A se modifică, s-au calculat valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru nucleul optimal la A=1 şi pentru nucleul optimal la A=2 în situaţia în care A se modifică între 1 şi 2.

Aceste valori pentru $\xi=T_s/2$, în cazul S_1 sînt prezentate în tabelul 5.10.

Analizînd aceste valori se constată că între A=1 şi A=1,3 nucleul optimal la A=1 este mai bun decît nucleul optimal la A=2. In rest al doilea nucleu este cel mai bun.

Nucleul optimal la A=1 produce la A=2 erori mai mari decît nucleele polinomiale. Nucleul optimal la A=2 produce la A=1 erori mai mici decît nucleul Lagrange dar mai mari decît nucleul Cubic continual.

In concluzie se constată că dependenţa performanţelor nucleelor optimale de parametrul A şi de spectrul semnalului

TABELUL 5.1o.

A	ξ/T_s	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ Optimal la A=1	Cazul S_1 Optimal la A=2
1	o,5	o,o99367	o,13299o
1,1	o,5	o,o41o41	o,o68826
1,2	o,5	o,o21158	o,o35286
1,3	o,5	o,o16637	o,o17968
1,4	o,5	o,o17o12	o,oo9o83
1,5	o,5	o,o18156	o,oo4548
1,6	o,5	o,o18757	o,oo2251
1,7	o,5	o,o18615	o,oo11o3
1,8	o,5	o,o17896	o,ooo542
1,9	o,5	o,o16835	o,ooo279
2	o,5	o,o15629	o,ooo164

original este mai pronunţată în cazul N=4 faţă de cazul N=2.

5.5. Studiul interpolării în două faze consecutive, prima fază fiind optimală iar faza a doua fiind un CNA

Deoarece faza de interpolare numerică este urmată de faza de interpolare analogică, ce se realizează cu un element de menţinere de ordinul zero (CNA), în continuare se analizează comportarea unui sistem în două faze cu prima fază optimală şi faza a doua cu un CNA (ZOH).

Utilizînd relaţiile (4.14) şi (4.15) pentru cazul S_1 cînd faza numerică dublează numărul de eşantioane ($T_{s2}=T_{s1}/2$) şi respectiv măreşte de patru ori numărul de eşantioane iniţial ($T_{s2}=T_{s1}/4$) se obţin valorile din tabelul 5.11.

Valorile raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru cazurile din tabelul 5.11 sînt prezentate în figurile 5.5 şi 5.6 pentru A=1 şi respectiv A=2.

Analizînd datele din tabelul 5.11 comparativ cu cele din tabelele 4.8, 4.1o şi 4.11, se constată că pentru A=1 comportarea sistemului optimal - ZOH este foarte apropiată de cea a sistemelor, nucleu polinomial - ZOH.

Cîştigul pe care îl aduce nucleul optimal este minor. Pentru A=2 însă îmbunătăţirea pe care o aduce nucleul optimal în prima fază de interpolare este evidentă.

TABELUL 5.11.

ξ/T_{s2}	$\sigma_e^2(\xi)/\sigma_\xi^2$	S_1
	A=1 $T_{s2}=T_{s1}/2$	A=2 $T_{s2}=T_{s1}/2$
0	0	0
0,25	0,051009	0,012826
0,5	0,199367	0,051009
0,5	0,241200	0,051082
0,75	0,135467	0,012967
1	0,099367	0,000164
	A=1 $T_{s2}=T_{s1}/4$	A=2 $T_{s2}=T_{s1}/4$
0	0	0
0,25	0,012826	0,003211
0,5	0,051009	0,012826
0,5	0,055627	0,012836
0,75	0,041937	0,003262
1	0,050402	0,000086
1,25	0,080566	0,003325
1,5	0,131527	0,012961
1,5	0,135467	0,012967
1,75	0,108432	0,003369
2	0,099367	0,000164

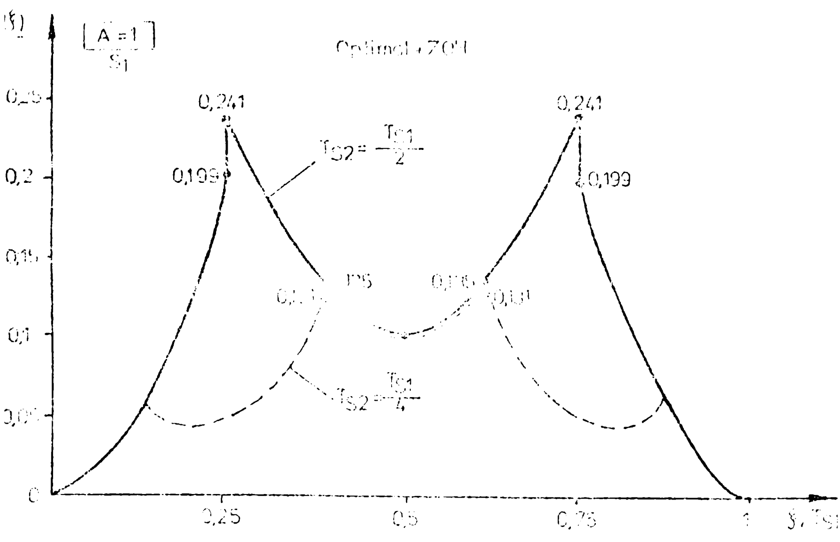


Fig.5.5.

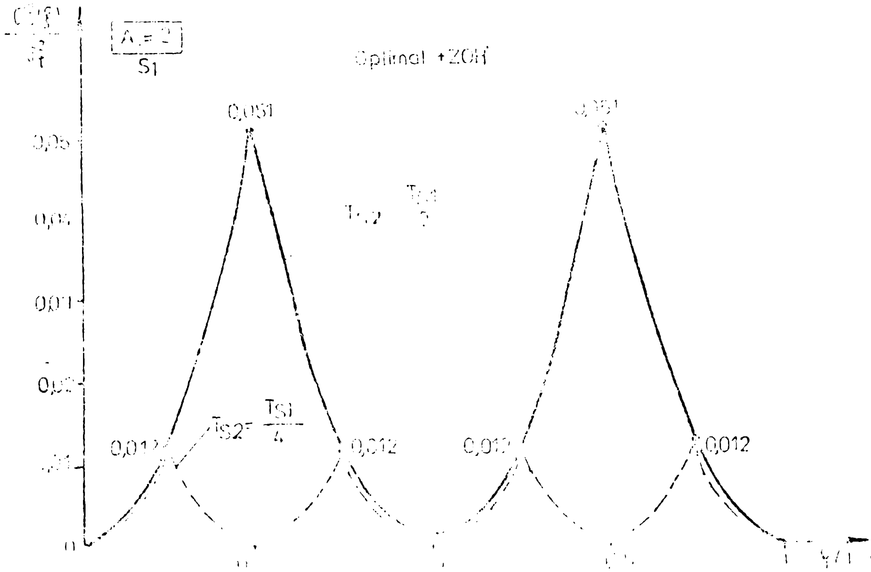


Fig.5.6.

Se poate aprecia practic că eroarea finală este cea pe care o introduce elementul de menţinere de ordinul zero care acţionează însă la o frecvenţă de eşantionare mărită.

Contribuţia la eroare a primei faze de interpolare este practic neglijabilă.

5.6. Nucleul optimal pentru faza a doua de interpolare

Pentru sistemele de interpolare numerică, în general, se preferă construcţia interpolatorului în mai multe faze consecutive deoarece volumul de calcule necesar precum şi numărul de coeficienţi utilizat sînt mai reduse.

Dezavantajul acestei metode este nivelul erorii totale care poate creşte faţă de situaţia interpolării într-o singură fază datorită faptului că în fazele următoare primei faze se utilizează în calcule şi valori eronate ale eşantioanelor funcţiei originale.

Utilizarea unui nucleu optimal în faza a doua de interpolare poate oferi o soluţie acestei probleme.

Pentru a deduce condițiile pe care trebuie să le îndeplinească nucleul din faza a doua de interpolare pentru a introduce eroare minimă se pornește de la relația (5.1) care asigură ortogonalitatea erorii cu eșantioanele funcției ce urmează a fi interpolată.

Dacă $f(t)$ este funcția originală și $d(t)$ funcția obținută după prima interpolare, atunci ea are expresia:

$$d(t) = \sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a(\xi)\, f\left[(n+a)T_{s1}\right] \tag{5.19}$$

unde $h'_a(\xi)$ este nucleul utilizat în prima fază de interpolare. Notînd cu $e_{2m}(\xi)$ eroarea din faza a doua de interpolare, adică:

$$e_{2m}(\xi) = d(mT_s+\xi) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\, d\left[(m+k)T_{s2}\right] \tag{5.20}$$

condiția (1) devine:

$$E\left\{e_{2m}(\xi)\cdot d\left[(m+i)T_{s2}\right]\right\} = 0 \quad \text{unde } i \in \left[-K_1, K_2\right] \tag{5.21}$$

din care, cu ajutorul relației anterioare rezultă:

$$R_{dd}(iT_{s2}-\xi) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) R_{dd}\left[(i-k)T_{s2}\right] = 0 \tag{5.22}$$

sau

$$\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) R_{dd}\left[(i-k)T_{s2}\right] = R_{dd}(iT_{s2}-\xi) \tag{5.23}$$

Această ultimă relație, analogă relației (5.4) leagă expresia nucleului $h_k(\xi)$ din faza a doua de interpolare de funcția de autocorelație R_{dd} a semnalului obținut după prima interpolare.

Intrucît ultima relație nu depinde de m, în continuare se va considera m=0.

Valorile funcției de autocorelație care intervin în relația (5.23) se obțin astfel:

$$R_{dd}\left[(i-k)T_{s2}\right] = E\left\{d(iT_{s2})\cdot d(kT_{s2})\right\} =$$

$$= E\left\{\left[\sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a(iT_{s2}) f(aT_{s1})\right]\left[\sum_{b=-A_1}^{A_2} h'_b(kT_{s2}) f(bT_{s1})\right]\right\}$$

deci:

$$R_{dd}\left[(i-k)T_{s2}\right] = \sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a'(iT_{s2})h_b'(kT_{s2})R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] \tag{5.24}$$

Analog:

$$R_{dd}(iT_{s2}-\xi) = E\left\{d(iT_{s2})d(\xi)\right\} =$$

$$= E\left\{\left[\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a'(iT_{s2})f(aT_{s1})\right]\cdot\left[\sum_{b=-A_1}^{A_2} h_b'(\xi)f(bT_{s1})\right]\right\}$$

deci:

$$R_{dd}(iT_{s2}-\xi) = \sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a'(iT_{s2})h_b'(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] \tag{5.25}$$

Inlocuind expresiile din (3.3) şi (3.4) în (3.2) se obţine:

$$\sum_{k=-K_1}^{K_2} \sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_k(\xi)h_a'(iT_{s2})h_b'(kT_{s2})R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] =$$

$$= \sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a'(iT_{s2})h_b'(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]$$

Trecînd totul în membrul stîng al relaţiei, se obţine:

$$\sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_a(iT_{s2})R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]\left[\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_b'(kT_{s2})-h_b'(\xi)\right] = 0$$

De unde se obţine pentru nucleul $h_k(\xi)$ din faza a doua de interpolare setul de condiţii:

$$\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_b'(kT_{s2}) = h_b'(\xi) \quad \text{unde } b\in\left[-A_1, A_2\right] \tag{5.26}$$

Pe baza relaţiei (5.26) cunoscînd nucleul utilizat în prima fază se poate determina nucleul optimal pentru faza următoare. Această relaţie presupune că nucleul din faza a doua interpolează perfect nucleul din prima fază de interpolare.

5.8. Estimarea erorilor unui sistem de interpolare în două faze care utilizează în faza a doua un nucleu optimal.

Relația (3.26) care exprimă valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ pentru un sistem de interpolare în două faze (în situația în care T_{s1}/T_{s2} este un număr natural) poate fi adusă la o formă mai simplă dacă al doilea nucleu utilizat este nucleul optimal dedus din setul de relații (5.26).

Relația (3.26) se poate rescrie în forma:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{a=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}(\xi-aT_{s1})}{R_{ff}(o)}\sum_{k=-K_1}^{K_2}h_k(\xi)h_a'(kT_{s2}) +$$

$$+\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]}{R_{ff}(o)}\sum_{k=-K_1}^{K_2}\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}h_k(\xi)h_\ell(\xi)h_a'(kT_{s2})h_b'(\ell T_{s2}) \tag{5.27}$$

Grupînd în mod corespunzător termenii din relația (5.27) se obține:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{a=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}(\xi-aT_{s1})}{R_{ff}(o)}\left[\sum_{k=-K_1}^{K_2}h_k(\xi)h_a'(kT_{s2})\right] +$$

$$+\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]}{R_{ff}(o)}\left[\sum_{k=-K_1}^{K_2}h_k(\xi)h_a'(kT_{s2})\right]\cdot\left[\sum_{\ell=-K_1}^{K_2}h_\ell(\xi)h_b'(\ell T_{s2})\right] \tag{5.28}$$

Aplicînd relația (5.26) în relația (5.28) rezultă:

$$\frac{\sigma_e^2(\xi)}{\sigma_f^2} = 1-2\sum_{a=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}(\xi-aT_{s1})}{R_{ff}(o)}h'_a(\xi) +$$

$$+\sum_{a=-A_1}^{A_2}\sum_{b=-A_1}^{A_2}\frac{R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]}{R_{ff}(o)}h_a'(\xi)\cdot h_b'(\xi) \tag{5.29}$$

Relația (5.29) care se obține din (5.27), în cazul în care a doua fază de interpolare este optimală, reprezintă tocmai valoarea raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ corespunzătoare primei faze de interpolare conform relației (3.13). Acest fapt demonstrează că dacă faza a doua de interpolare este optimală ea nu introduce erori suplimentare. Concluzia aceasta poate fi extinsă la o interpolare în mai multe faze consecutive.

O dată stabilit nucleul optimal pentru faza a doua de interpolare, se poate determina în funcţie de expresia lui, nucleul optimal pentru faza a treia ş.a.m.d.

Un sistem de interpolare în "n" faze consecutive va genera o eroare egală cu cea din prima fază dacă nucleul din faza a doua precum şi toate nucleele din fazele următoare sînt optimale (determinate din relaţia (5.26)). Această proprietate are consecinţe avantajoase la realizarea practică a sistemelor de interpolare numerică. De exemplu, proiectarea unui interpolator numeric pentru mărirea de 8 ori a numărului de eşantioane poate fi realizată prin legarea în cascadă a trei interpolatoare numerice care să dubleze fiecare numărul de eşantioane.

Dacă în cazul interpolării directe sînt necesari (pentru N=4) 4x8=32 de coeficienţi, prin interpolarea în trei faze sînt necesari 4x3=12 coeficienţi.

Dacă fazele a doua şi a treia sînt optimale, eroarea totală e aceeaşi ca şi în cazul interpolării directe. In cazul general, în loc de $Nx2^n$ se folosesc Nxn coeficienţi.

5.8. Estimarea erorilor unui sistem de interpolare în două faze care utilizează în ambele faze nuclee optimale

Pentru a pune complet în evidenţă efectul pe care îl au nucleele optimale asupra erorii totale în cazul unui sistem de interpolare în două faze consecutive se poate utiliza relaţia (3.34).

$$E\left\{e_T^2(t)\right\} = E\left\{e_1^2(t)\right\} + E\left\{e_2^2(t)\right\} + 2E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\}$$

Termenii care intervin în expresia erorii medii pătratice totale se pot explicita şi pune într-o formă ce permite o discuţie edificatoare. Astfel ultimul termen poate fi calculat în modul următor:

$$E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} = E\left\{\left[f(t)-d(t)\right]\cdot\left[d(t)-g(t)\right]\right\} =$$

$$= E\left\{f(t)\cdot d(t)\right\} - E\left\{f(t)\cdot g(t)\right\} - E\left\{d^2(t)\right\} + E\left\{d(t)\cdot g(t)\right\} \quad (5.30)$$

Calculînd fiecare expresie în parte se obţine:

$$E\left\{f(t)\cdot d(t)\right\} = \sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a'(\xi) R_{ff}(\xi - aT_{s_1}) \quad (5.31)$$

$$E\left\{f(t)\cdot g(t)\right\} = \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) \sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a(kT_{s2})R_{ff}(\xi-aT_{s1}) \quad (5.32)$$

$$E\left\{d^2(t)\right\} = \sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h'_a(\xi)h'_b(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] \quad (5.33)$$

$$E\left\{d(t)\cdot g(t)\right\} = \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi) \sum_{b=-A_1}^{A_2} h'_b(\xi) \sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a(kT_{s2}) \cdot$$
$$\cdot R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] \quad (5.34)$$

Utilizînd aceste expresii în relaţia anterioară se obţine:

$$E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} = \sum_{a=-A_1}^{A_2} R_{ff}(\xi-aT_{s1})\left[h'_a(\xi)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\right] -$$
$$-\sum_{a=-A_1}^{A_2} \sum_{b=-A_1}^{A_2} h'_b(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]\cdot\left[h'_a(\xi)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\right] \quad (5.35)$$

şi dînd factor comun, rezultă:

$$E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} = \sum_{a=-A_1}^{A_2} \left[h'_a(\xi)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h'_a(kT_{s2})\right]\cdot$$
$$\cdot\left[R_{ff}(\xi-aT_{s1})-\sum_{b=-A_1}^{A_2} h'_b(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right]\right] \quad (5.36)$$

In mod analog se procedează şi cu termenul $E\left\{e_2^2(t)\right\}$ din eroarea medie pătratică totală şi se obţine:

$$E\left\{e_2^2(t)\right\} = E\left\{(d-g)^2\right\} = E$$
$$= E\left\{\left[\sum_{a=-A_1}^{A_2} h'_a(\xi)f(aT_{s1})-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)\sum_{a=-A_1}^{A_2} h_a(kT_{s2})f(aT_{s1})\right]^2\right\} \quad (5.37)$$

sau

$$E\left\{e_2^2(t)\right\} = E\left\{\left(\sum_{a=-A_1}^{A_2} f(aT_{s1})\cdot\left[h'_a(\xi)-\sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_a(kT_{s2})\right]\right)^2\right\} \quad (5.38)$$

Analizînd relaţia (5.36) se onstată că dacă nucleul din prima fază este optimal, atunci conform proprietăţilor sale are loc relaţia:

$$R_{ff}(\xi-aT_{s1}) - \sum_{b=-A_1}^{A_2} h_b'(\xi)R_{ff}\left[(a-b)T_{s1}\right] = 0$$

care anulează expresia (5.36).

In aceste condiţii rezultă că erorile din cele două faze sînt ortogonale, $E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\}=0$ şi eroarea totală care se obţine este:

$$E\left\{e_T^2(t)\right\} = E\left\{e_1^2(t)\right\} + E\left\{e_2^2(t)\right\} \tag{5.39}$$

Pe de altă parte, dacă nucleul din faza a doua este optimal, el îndeplineşte condiţia h'

$$h_a'(\xi) - \sum_{k=-K_1}^{K_2} h_k(\xi)h_a'(kT_{s2}) = 0$$

astfel încît din relaţiile (5.36) şi (5.38) rezultă că:

$$E\left\{e_1(t)e_2(t)\right\} = 0 \qquad \text{şi} \qquad E\left\{e_2^2(t)\right\} = 0$$

deci eroarea totală este:

$$E\left\{e_T^2(t)\right\} = E\left\{e_1^2(t)\right\} \tag{5.40}$$

Dacă nucleele din ambele faze sînt optimale atunci se obţine eroarea totală:

$$E\left\{e_T^2(t)\right\} = E\left\{e_{1opt}^2(t)\right\} \tag{5.41}$$

unde $E\left\{e_{1opt}^2(t)\right\}$ se poate calcula cu relaţia (5.6) iar raportul $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ cu relaţia (5.7).

Constatările anterioare sînt valabile şi în cazul interpolării optimale în mai multe faze.

CAPITOLUL 6.

POSIBILITATI DE IMPLEMENTARE SI CONCLUZII PRIVIND NUCLEELE DE INTERPOLARE

6.1. Posibilitățile de implementare a sistemelor de interpolare

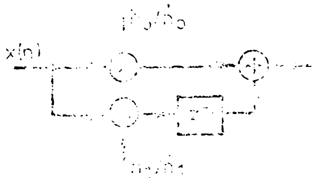
Studiul anterior, legat de performanțele nucleelor de interpolare polinimiale sau optimale, trebuie corelat cu suportul fizic de circuite electronice, utilizabile la construcția sistemelor de interpolare, pentru a se obține o imagine de ansamblu asupra acestora.

In general se pot distinge două categorii de sisteme care utilizează tehnica interpolării. Prima categorie o constituie sistemele care funcționează în timp real (este cazul sistemelor de comutații) iar a doua categorie o constituie sistemele care nu necesită o funcționare în timp real în sensul că, pornind de la o secvență numerică, se efectuează în prealabil interpolarea, urmînd ca generarea semnalului analogic să aibă loc după încheierea procesului de interpolare (cazul generatoarelor de semnale de formă arbitrară).

6.1.1. Sisteme de interpolare în timp real

Sistemele de interpolare în timp real se pot realiza utilizînd practic aceeași bază de circuite ca și în cazul filtrelor numerice. In figura 6.1 se prezintă structura unui filtru numeric de interpolare care asigură dublarea numărului de eșantioane.

Structura utilizează coeficienți variabili a căror valoare se repetă după două tacte consecutive. In cazul interpolării liniare valorile acestor coeficienți sînt $h_0=0$, $h_1=1$, $h_0'=1/2$, $h_1'=1/2$.

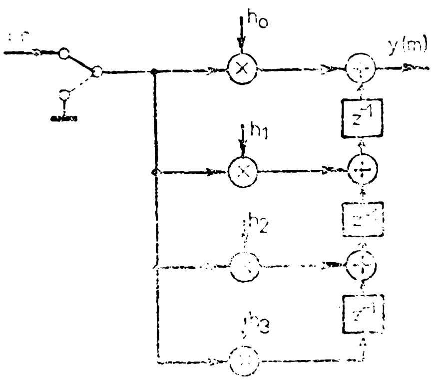


$$y(m)=h_0x(n)+h_1x(n-1)$$

$$y(m+1)=h_0'x(n)+h_1'x(n-1)$$

Fig.6.1.

O structură mai complexă, dar care nu mai necesită coeficienți variabili, este cea din figura 6.2 (s-a luat în considerare tot cazul în care se dublează numărul de eșantioane).



$$y(m)=h_0x(n)+h_2x(n-1)$$

$$y(m+1)=h_1x(n)+h_3x(n-1)$$

Pentru interpolare liniară valorile coeficienților sînt $h_0=0$, $h_2=1$, $h_1=1/2$, $h_3=1/2$

Fig.6.2.

O altă variantă a unui astfel de interpolator o constituie rețeaua polifazică, a cărei structură conține, pentru exemplul considerat, două interpolatoare comutate alternativ ca în fig.6.3.

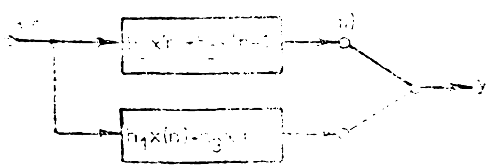


Fig.6.3.

Realizarea unor asemenea structuri necesită utilizarea unor multiplexoare, memorii tampon (pentru coeficienţi şi rezultate intermediare), multiplicatoare şi sumatoare a căror structură trebuie să îndeplinească o serie de condiţii legate de numărul de biţi al cuvintelor utilizate precum şi de viteza de lucru.

Cu cît se urmăreşte implementarea unui sistem de interpolare mai complex (număr de eşantioane consecutive utilizate la o interpolare, număr de puncte de interpolare între două eşantioane originale consecutive) cu atît se complică mai mult structura sistemului şi cresc pretenţiile legate de numărul de biţi şi de viteză.

Anumite simplificări ale structurilor pot fi obţinute în cazul în care se ţine cont de simetria valorilor coeficienţilor.

Un exemplu în această privinţă îl constituie structura din fig.6.4, structură ce reprezintă un sistem de interpolare ce dublează numărul de eşantioane utilizînd patru eşantioane consecutive la fiecare interpolare (coeficienţii sînt obţinuţi din nucleul Lagrange de ordinul 3).

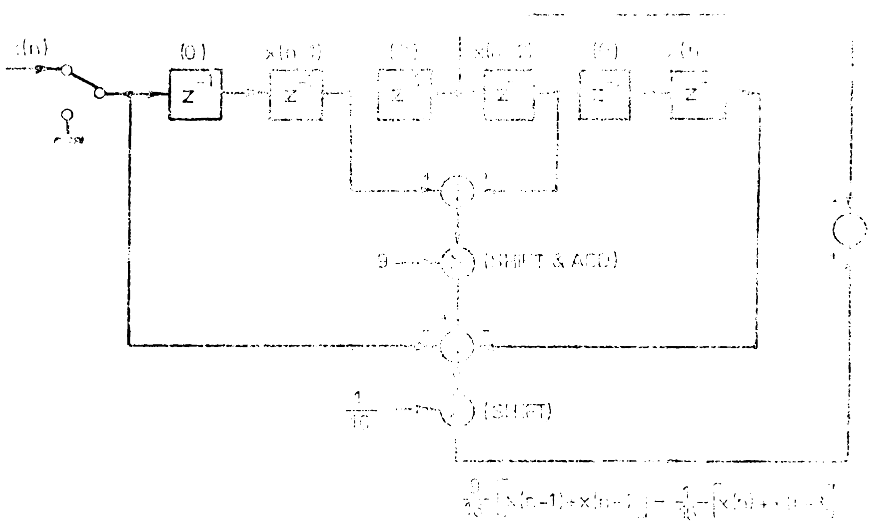


Fig.6.4.

Cele mai avantajoase sisteme de interpolare, din punct de vedere al complexității schemelor precum și al numărului de calcule necesar, se obțin prin intercalarea în cascadă a unor sisteme mai simple (implementarea "multi stage").

Apariția și dezvoltarea din ultimul timp a procesoarelor numerice de semnal (DSP "digital signal processor") a deschis o cale nouă pentru construcția și implementarea sistemelor de interpolare.

Aceste circuite s-au dezvoltat pe baza tehnicii microprocesoarelor și permit realizarea unor structuri de filtre numerice complexe pe bază de programe datorită unui soft adecvat care se memorează în interiorul capsulei. Valorile coeficienților se memorează de asemenea într-o memorie special prevăzută în interiorul circuitului, care mai conține și o unitate de calcul suficient de puternică pentru a efectua calculele cerute de algoritmii programați.

Dacă, din punct de vedere al complexității schemelor, procesoarele numerice de semnal oferă deja o soluție mai avantajoasă decît sistemele hard discrete de interpolare, din punct de vedere al vitezei de lucru acestea rămîn deocamdată inferioare fiind aplicabile doar în sistemele în care frecvențele de eșantionare nu depășesc 2o kHz.

Sistemele de interpolare, realizate cu ajutorul procesoarelor numerice de semnale, pot prelucra secvențe de eșantioane codate pe cuvinte de cel puțin 16 biți lungime ceea ce asigură un nivel redus pentru erorile de trunchiere a rezultatelor.

In general asemenea procesoare utilizează un număr redus de instrucții specializate ceea ce ușurează elaborarea programelor de interpolare.

In figura 6.5 se prezintă schema bloc a unui procesor numeric de semnale (valorile numerice corespund tipului µPD772o NEC).

Inscrierea programului în memoria procesoarelor se face de către producătorul circuitului dar poate fi făcută și de către utilizator la circuitele în varianta EPROM.

Valorile coeficienților, utilizați pentru interpolare, pot fi numerotate fie într-o memorie nevolatilă (DATA-ROM) fie într-o memorie RAM și atunci pot fi modificate de utilizator de la caz la caz. . . .

Procesoarele numerice de semnal sînt în general compatibile cu sisteme de calcul echipate cu microprocesoare ceea ce permite realizarea de sisteme de prelucrare complexe.

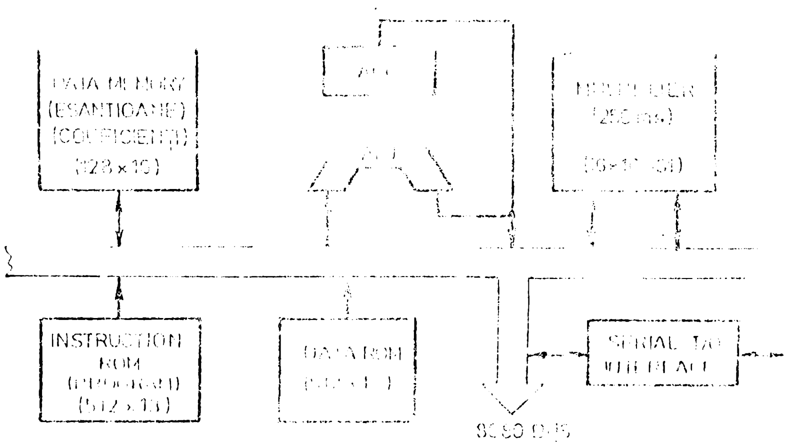


Fig.6.5.

6.1.2. Generatoare de semnale de formă arbitrară

In cadrul sistemelor de interpolare care nu necesită o funcționare în timp real, principala aplicație o constituie generatoarele de semnale analogice cu formă programabilă arbitrar.

In aceste situații, în care interpolarea întregii secvențe numerice inițiale are loc înaintea procesului propriu-zis de generare a semnalului analogic, implementarea interpolării se realizează pe baza unui sistem de calcul numeric.

Un generator de semnale analogice cu formă programabilă arbitrar va conține un sistem de calcul, de genul unui calculator personal, prevăzut cu un set de programe adecvate. Prin dialog cu operatorul, în calculator se introduce secvența de eșantioane inițială. Prin intermediul programelor de interpolare se construiește o secvență numerică ce va conține un număr mult mai mare de eșantioane (cel puțin 4o96). Această secvență se stochează într-o unitate de memorie a sistemului de generare, de unde este preluată cu mare viteză și convertită în semnal analogic prin intermediul unui CNA.

Schema bloc a unui generator de semnale analogice de formă programabilă arbitrar este prezentată în fig.6.6.

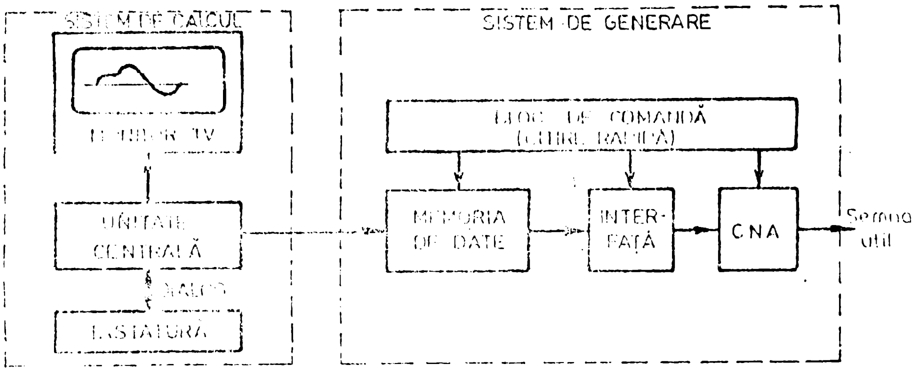


Fig.6.6.

Limita superioară a frecvențelor semnalelor generate depinde exclusiv de posibilitățile și modul de realizare a sistemului de generare.

Setul de programe rezident în unitatea de calcul a generatorului are o structură de genul celei prezentate în fig.6.7.

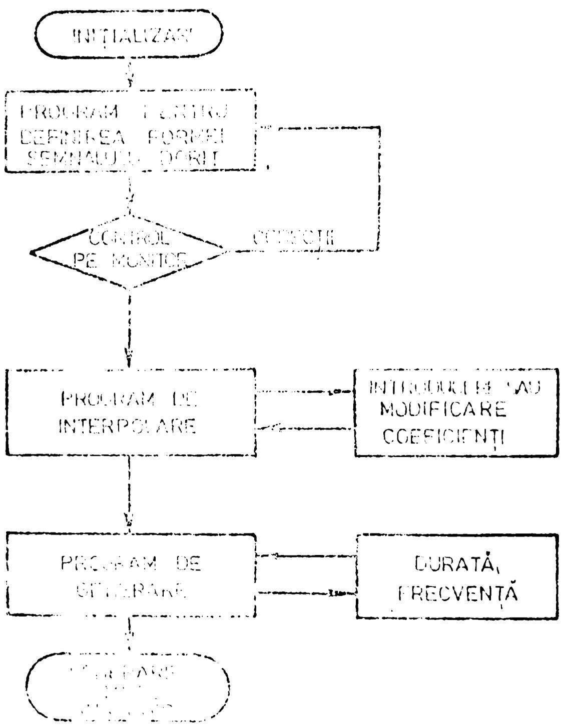


Fig.6.7.

Programul pentru definirea formei semnalului dorit este scris într-un limbaj evoluat (BASIC) pentru a permite un mod de operare conversațional.

Reluarea acestui program permite operatorului definirea formei semnalului dorit prin introducerea în calculator eșantion cu eșantion și controlul formei prin vizualizare pe monitorul TV. Operatorul are posibilitatea corectării valorii oricărui eșantion introdus. Evident, din motive de durată, secvența de eșantioane inițială va conține un număr redus de eșantioane (cel mult cîteva zeci de eșantioane) ce vor reprezenta puncte obligatorii prin care trece funcția analogică ce definește semnalul.

Programul de interpolare poate fi realizat în trei modalități distincte. O primă modalitate, corespunzătoare interpolării numerice într-o singură fază, constă în definirea nucleului de interpolare, care urmează a fi utilizat, sub forma unei funcții într-un limbaj evoluat (de exemplu BASIC).

Calculul eșantioanelor intermediare se efectuează cu precizie ridicată la o singură trecere a secvenței inițiale. Secvența numerică rezultată este convertită apoi într-un cod binar, în virgulă fixă, pe un anumit număr de biți și transferată în memoria de date a sistemului de generare.

Această metodă are avantajul că oferă o implementare facilă a oricărui tip de nucleu de interpolare, inclusiv a nucleelor optimale.

Dezavantajul metodei este timpul mare pe care îl necesită efectuarea calculelor în limbaj evoluat, fiind vorba de calcularea unui număr de eșantioane ridicat, de ordinul miilor, și în plus presupune calcularea coeficienților necesari la fiecare interpolare. O a doua modalitate, echivalentă interpolării numerice în mai multe faze consecutive, constă în dublarea iterativă a numărului de eșantioane din secvența inițială, utilizînd un program tot în limbaj evoluat dar care utilizează la calculul valorii eșantionului interpolat o formulă definită sub forma unei funcții în care variabilele sînt eșantioanele consecutive utilizate la interpolare iar coeficienții sînt derivați din expresia analogică a nucleului utilizat și introduși de operator sau de proiectant.

Si această metodă permite utilizarea oricărui tip de nucleu dar este mai rapidă în comparație cu prima metodă întrucît nu mai necesită calcularea coeficienților la fiecare interpolare.

A treia modalitate, cea mai rapidă, constă în implementarea algoritmului de interpolare sub forma unei subrutine, în cod maşină. Coeficienţii utilizabili în acest caz pot fi cei derivaţi din nucleele polinomiale întrucît operaţiile de înmulţire necesare la calculul de interpolare pot fi realizate prin operaţii simple de adunare şi deplasare a unor cuvinte în cod binar.

6.2. Descrierea instalaţiei experimentale utilizate pentru implementarea algoritmilor de interpolare

Pentru studii experimentale autorul a utilizat un calculator personal de tipul PRAE-M, aflat în fabricaţie curentă la ITC filiala Timişoara, calculator construit pe baza unui microsistem echipat cu microprocesorul Z80.

Cu ajutorul instalaţiei experimentale construite a fost implementată procedura de interpolare iterativă în ambele variante (limbaj BASIC şi respectiv cod maşină).

Formula de interpolare implementată utilizează pentru o interpolare patru eşantioane consecutive, coeficienţii fiind derivaţi din nuclee polinomiale de ordinul trei.

Valorile eşantioanelor folosite pentru generare au fost codificate în cuvinte binare de 8 biţi.

Schema bloc a ansamblului utilizat este prezentată în figura 6.8.

Fig.6.8.

Se observă că, față de schema bloc prezentată în figgura 6.6, în aceasta din urmă nu apare o memorie de date separată în blocul de generare. Acest fapt se explică prin faptul că autorul a urmărit în principal să studieze posibilitățile de funcționare ale algoritmilor de interpolare, fără să își propună o generare ultrarapidă de semnale analogice. In acest scop autorul a utilizat pentru stocarea datelor de interpolare o parte din memoria internă de 16 Kocteți a calculatorului PRA E-M.

Intrucît, din memoria de 16 Kocteți a calculatorului, 8 Kocteți sînt utilizați pentru memoria video iar din ceilalți 8 Kocteți o parte este ocupată de programul monitor, de programele BASIC și de subrutinele în cod mașină, autorul a optat pentru utilizarea memoriei video la stocarea datelor necesare generării. Această opțiune a fost posibilă întrucît în timpul generării, monitorul TV nu mai este utilizat și prezintă în plus și avantajul că se poate asigura o citire liniară a zonei de memorie respective utilizînd controlerul de monitor TV care realizează un acces direct la memoria calculatorului (independent de funcționarea unității centrale cu Z80).

Intrucît controlerul de monitor TV realizează generarea impulsurilor de sincronizare cadre TV prin resetarea la o anumită combinație prescrisă a stării numărătoarelor de adrese, ceea ce are ca efect o citire repetată a zonei de început din memoria video, a fost necesară implantarea în structura hard a calculatorului a unui sistem de comandă care se activează odată cu subrutina de generare și blochează furnizarea impulsurilor de sincronizare cadre asigurînd astfel o adresare liniară a memoriei video.

Zona de 8 Kocteți utilizată pentru stocarea datelor în timpul procesului de interpolare este deplasată față de zona video pentru a lăsa libere două linii de caractere pe monitorul TV pentru mesaje. După încheierea procesului de interpolare și completarea celor 8192 de locații de memorie cu valorile eșantioanelor, zona de memorie respectivă se translatează pentru a se suprapune perfect peste zona de memorie video după care se apelează subrutina de generare.

Gestionarea memoriei de date în timpul procesului de interpolare a fost realizată în modul următor. Secvența inițială se dispune în memorie începînd de la prima adresă disponibilă lăsînd după fiecare locație de memorie ocupată cîte o locație liberă care se completează apoi cu rezultatul interpolării corespunzătoare. După ce s-au completat toate spaţiile libere (s-a încheiat prima fază de interpolare) zona ocupată este rescrisă ocupîndu-se o zonă de memorie dublă şi lăsîndu-se din nou spaţii goale între două eşantioane consecutive. Urmează apoi completarea acestora prin următoarea etapă de interpolare. Procesul se repetă pînă la ocuparea completă a celor 8192 de locaţii afectate acestui scop.

Rescrierea tabelului se face de fiecare dată în ordine inversă, începînd cu ultima locaţie ocupată, pentru a nu se distruge datele calculate în etapa anterioară.

In situaţia în care formula de interpolare a fost implementată în limbaj BASIC, timpul necesar pentru a calcula cele 8192 de eşantioane, utilizate în faza de generare şi stocate în 8 Kocteţi de memorie a fost de aproximativ 2o minute, valoare mult prea mare pentru ca metoda să poată fi utilizată în sisteme operative.

Prin implementarea interpolării sub forma unei subrutine în cod maşină se obţine o reducere substanţială a timpului necesar comparativ cu metoda precedentă, în condiţiile în care calitatea semnalului obţinut este practic aceeaşi. Astfel, timpul necesar pentru calcularea celor 8192 de eşantioane precum şi amplasarea lor în memorie se reduce la numai o secundă, ceea ce face posibilă utilizarea acestei metode la sisteme operative.

6.3. Concluzii privind performanţele şi facilităţile de implementare a diferitelor tipuri de nuclee de interpolare

6.3.1. Nucleele polinomiale

Nucleele polinomiale, definite în capitolul 2 şi analizate în capitolul 4, prezintă ca principal avantaj expresia analitică relativ simplă (polinomială) pe baza căreia se pot obţine uşor valorile coeficienţilor necesari în procesul de interpolare.

Alegerea nucleului potrivit în funcţie de valoarea parametrului $A=\omega_s/2\omega_c$ permite reducerea nivelului erorilor la valori acceptabile. După cum s-a arătat în capitolul 4, în situaţia în care $A \geqslant 2$ această alegere asigură o eroare totală egală practic cu cea pe care o introduce faza de interpolare analogică (CNA), corespunzînd unei frecvenţe de eşantionare mărite la un număr de ori egal cu factorul L, cu care se multiplică numărul de eşantioane iniţial.

Nucleele polinomiale permit implementarea unor sisteme de interpolare în cascadă şi pot fi utilizate în diferite combinaţii în funcţie de valoarea parametrului A.

O altă calitate importantă a nucleelor polinomiale o constituie dependenţa relativ redusă a performanţelor funcţie de structura spectrală a semnalului original.

Din punct de vedere al facilităţilor de implementare, nucleele polinomiale sînt avantajoase şi datorită valorilor coeficienţilor. In tabelul 6.1 se prezintă valorile coeficienţilor a trei tipuri de nuclee polinomiale pentru calculul eşantionului în punctul $T_S/2$.

Tabelul 6.1.

Tipul de nucleu	h_{-1}	h_0	h_1	h_2
Spline (3)	-1/8	5/8	5/8	-1/8
Lagrange (3)	-1/16	9/16	9/16	-1/16
Cubic continual	-3/32	19/32	19/32	-3/32

Se observă că astfel de valori de coeficienţi pot fi uşor implementate în structuri hard pentru interpolare în timp real precum şi în cazul unor sisteme de interpolare realizate prin programe în cod maşină.

6.3.2. Nucleele optimale

Utilizarea nucleelor optimale este avantajoasă în situaţiile în care se cunoaşte exact sau aproximativ densitatea spectrală de putere a semnalului original. In aceste cazuri nucleele optimale asigură un nivel al erorilor sensibil mai redus decît în cazul utilizării nucleelor polinomiale. Diferenţa dintre nivelul erorilor între cele două tipuri de nuclee se accentuează cu creşterea valorii parametrului A (după cum s-a arătat în capitolul 5).

Un prim dezavantaj al nucleelor optimale îl constituie creşterea foarte pronunţată a nivelului erorilor pentru un nucleu optimal, implementat pentru o anumită situație, în cazul în care se modifică structura spectrală a semnalului original sau valoarea parametrului A.

Un alt dezavantaj al nucleelor optimale îl constituie expresia analitică mai complicată, ceea ce implică un calcul mai laborios al valorilor coeficienților și conduce la valori de coeficienți cu multe cifre zecimale semnificative.

Utilizarea nucleelor de interpolare optimale în cadrul unor sisteme în cascadă asigură menținerea nivelului erorii totale la valoarea erorii introduse de prima fază de interpolare dacă se respectă procedura prezentată în capitolul 5.

Datorită valorilor numerice ale coeficienților derivați din nucleele optimale, implementarea unor sisteme în timp real sau a unor programe în cod mașină este mult mai dificilă decît în cazul nucleelor polinomiale. Utilizarea unor procesoare numerice de semnal (DSP) precum și a unor programe în limbaje evoluate permite totuși utilizarea nucleelor optimale.

CONTRIBUTII

Prezenta lucrare ridică pe un nou stadiu problema reconstituirii fidele a unor semnale eşantionate prin metoda interpolării şi îşi găseşte numeroase aplicaţii atît în domeniul sistemelor de reconstrucţie în timp real cît şi în cazul sistemelor de generare prin sinteză.

Principalele contribuţii aduse de autor temei tratate pe parcursul acestei lucrări sînt concretizate în cele ce urmează:

In capitolul 1:

1.1. Se prezintă într-o sinteză unitară fundamentele teoretice ale procesului de reconstrucţie fizică, prin interpolare, a unui semnal eşantionat. Se tratează în paralel, pe baza modelului de semnal, răspunsul în frecvenţă al sistemelor de reconstrucţie atît în cazul semnalelor aperiodice cît şi în cazul semnalelor periodice.

1.2. Se deduce expresia funcţiei de interpolare în cazul semnalelor periodice, echivalentă structurii spectrale a funcţiei de interpolare pentru semnale aperiodice, expresie avantajoasă pentru aprecierea cantitativă a distorsiunilor şi a componentelor armonice suplimentare introduse prin interpolare.

1.3. Pe baza unui amplu studiu bibliografic, se face o analiză a sistemelor analogice de reconstrucţie punîndu-se în evidenţă limitele sistemelor clasice de conversie numeric-analogică.

1.4. Se prezintă tendinţa actuală de realizare a unor sisteme de reconstrucţie de fidelitate ridicată prin utilizarea combinată a interpolării în fază numerică şi fază analogică. Trecînd în revistă principiul sistemelor de interpolare numerică şi metodele de proiectare aferente, conform diferitelor referiri bibliografice, se alege ca metodă de lucru metoda erorii medii pătratice, metodă ce oferă premizele unei tratări unitare a sistemelor de interpolare în ambele faze (numerică şi analogică).

<u>In capitolul 2</u>:

2.1. Se sintetizează condițiile pe care trebuie să le îndeplinească nucleele polinomiale de interpolare. Aceste condiții sînt determinate de faptul că lungimea în timp a acestor nuclee este finită și dependentă de numărul de eșantioane consecutive (N) care se folosesc pentru o interpolare precum și de faptul că aceste nuclee trebuie să interpoleze nucleul ideal.

2.2. Se face o analiză a principalelor tipuri de nuclee polinomiale prezentate în literatura de specialitate. Se analizează expresia analitică și funcția de transfer a nucleelor de ordinul o, 1, 2 și 3, corespunzătoare cazurilor N=1,2,3 și 4.

Se arată că pentru N=4 se pot construi mai multe tipuri de nuclee, în funcție de metoda adoptată la interpolarea nucleului ideal (metoda Lagrange, Spline etc.).

2.3. Se construiește un nucleu polinomial de ordinul 3 original, denumit cubic continual, care, pe baza analizei răspunsului în frecvență, se dovedește superior celorlalte nuclee în anumite condiții legate de raportul dintre banda de frecvență a semnalului original și frecvența de eșantionare.

<u>In capitolul 3</u>:

3.1. Se analizează o relație de estimare a performanțelor sistemelor de interpolare într-o singură fază, utilizată în literatură și derivată din metoda de evaluare a erorii medii pătratice în sens statistic. Se scot în evidență proprietățile acestei relații aplicabile în cazul în care se cunosc expresia analitică a nucleului utilizat și funcția de autocorelație a semnalului original.

3.2. Se face o extindere a acestei relații pentru cazul interpolării în două faze consecutive, obținîndu-se astfel o metodă de analiză unitară a sistemelor de interpolare combinată (numerică și analogică) aplicabilă și în cazul interpolării numerice iterative corespunzătoare interpolatoarelor numerice conectate în cascadă ("multistage").

3.3. Se face o interpretare a erorii totale de interpolare în cazul sistemelor conectate în cascadă evidențiindu-se posibilitatea ca eroarea totală să crească față de cazul interpolării într-o singură fază.

In capitolul 4:

4.1. Se stabilesc condiţiile de aplicare a relaţiilor dezvoltate în capitolul precedent şi se definesc trei tipuri de densităţi spectrale de putere utilizabile ca elemente de test pentru situaţia în care nu se cunoaşte funcţia de autocorelaţie a semnalului original.

4.2. Se aplică metoda dezvoltată anterior la mai multe tipuri de nuclee polinomiale de acelaşi ordin sau de ordin diferit şi se scoate în evidenţă necesitatea calculării valorilor raportului $\sigma_e^2(\xi)/\sigma_f^2$ într-un număr suficient de puncte pentru a se obţine forma de variaţie a erorii între două eşantioane consecutive.

4.3. Se compară rezultatele obţinute şi se stabileşte o ierarhie a diferitelor nuclee, pentru condiţiile de test considerate, confirmîndu-se superioritatea nucleului original, definit în capitolul al doilea, faţă de celelalte nuclee polinomiale de ordinul trei, într-un anumit domeniu de utilizare, în funcţie de valoarea parametrului $A=\omega_s/2\omega_c$.

4.4. Se aplică metoda de estimare dezvoltată anterior pentru cazul sistemelor de interpolare combinate (interpolare numerică urmată de conversie N/A) şi se obţin concluzii importante privind nivelul total al erorii şi posibilităţile de reducere a acesteia sub o anumită limită impusă.

4.5. Se calculează şi se compară nivelul erorilor pentru cazul interpolării numerice în două faze consecutive şi se stabilesc concluzii privind nivelul erorilor şi combinaţiile optime de nuclee.

In capitolul 5:

5.1. Se analizează metoda de obţinere a nucleelor optimale, din punct de vedere al erorii medii pătratice, se calculează în diferite cazuri concrete nivelul erorilor corespunzătoare şi se pune în evidenţă superioritatea nucleelor optimale faţă de cele polinomiale în privinţa nivelului erorilor pentru condiţii de lucru fixate anterior (structură spectrală şi parametru A).

5.2. Se constată dezavantajele pe care le prezintă nucleele optimale în legătură cu nivelul erorilor în situaţia modificării structurii spectrale a secvenţei originale sau a parametrului A, faţă de situaţia iniţială, pentru care au fost elaborate nucleele optimale respective.

5.3. Se calculează nivelul erorilor pentru sisteme de interpolare combinată (optimal + CNA) şi se stabilesc condiţiile de utilizare eficientă în aceste cazuri.

5.4. Se elaborează o metodă de construcţie a nucleului optimal pentru faza a doua de interpolare, în cazul sistemelor de interpolare numerică în cascadă, demonstrîndu-se conservarea în acest caz a nivelului erorii generate de prima fază de interpolare.

5.5. Se estimează nivelul erorilor unui sistem de interpolare în două faze care utilizează în ambele faze nuclee optimale.

<u>In capitolul 6</u>:

6.1. Se analizează posibilităţile practice de implementare a nucleelor de interpolare în funcţie de tipul de construcţie adoptat pentru realizarea sistemului de interpolare: sisteme hard, procesoare numerice de semnal, sisteme de calcul.

6.2. Se prezintă principiile de construcţie şi funcţionare ale generatoarelor de semnale de formă arbitrară şi se analizează diferite metode de implementare a algoritmilor de interpolare.

6.3. Se elaborează un program BASIC care asigură utilizarea oricăror tipuri de nuclee (polinomiale sau optimale) şi realizează un algoritm de interpolare iterativă. Intrucît timpul necesar în procesul de interpolare pentru calculul celor 8192 de eşantioane, utilizate în faza de generare şi stocate în 8 kocteţi de memorie, a rezultat de cca.2o minute, se stabileşte că metoda nu este operativă.

6.4. Se elaborează o subrutină de interpolare în cod maşină (pentru microprocesorul Z80) care, utilizînd nuclee polinomiale de ordinul 3 pentru dublarea iterativă a numărului de eşantioane, permite reducerea timpului necesar calculelor la o secundă.

6.5. Se descrie o instalaţie experimentală de generare a unor semnale de formă arbitrară, construită şi utilizată de autor şi care are la bază un calculator personal de tipul PRAE-M din fabricaţia curentă a ITC - filiala Timişoara.

6.6. Se prezintă o sinteză a performanţelor nucleelor de interpolare văzute prin prisma erorilor şi facilităţilor de implementare.

BIBLIOGRAFIE

1. B.Amazeen, P.Holloway, D.Mercer, "Monolithic D-A Converter operates on Single supply" Electronics Febr.28, 198o, pp. 125-131.
2. H.Bachmair, R.Volmert, "Comparison of Admitances by Means of Digital Double-Sinewave Generator", IEEE Trans.Instr. and Meas. Vol.IM-29 nr.4 Dec.198o, pp.37o-372.
3. M.G.Bellanger, J.L.Daguet, G.P.Lepagnol, "Interpolation, Extrapolation and Reduction of Computational Speed in Digital Filters", IEEE Trans.on ASSP, vol.22, nr.4, Aug.1974, pp.231-235.
4. M.G.Bellanger, G.Bonnerot, M.Coudreuse, "Digital filtering by poliphase network: Aplication to Sample-rate alteration and filter banks", IEEE Trans.on ASSP, Vol.24, nr.2, Apr. 1975, pp.1o9-114.
5. M.G.Bellanger, "Computational rate and storage estimation in multirate digital filtering with half-band filters", IEEE Trans.on ASSP, vol.25, nr.5, 1977, pp.344-347.
6. M.G.Bellanger, G.Bonnerot, "Premultiplication scheme for digital FIR Filters with aplications to multirate filtering" IEEE Trans.on ASSP, vol.26, nr.1, Febr.1978, pp.5o-55.
7. Beckman Technical Bulletin, Nov.198o, Microprocessor compatible CMOS 12 bit DAC.
8. P.J.Berkhout, L.D.J.Eqqermont, "Digital Audio Systems", IEEE ASSP Magazine, vol.2, nr.4, Oct.1985, pp.45-67.
9. P.J.Bloom, "High-Quality Digital Audio in the Entertainment Industry: An oberview of Achievements and Challenges", IEEE ASSP Magazine, vol.2, nr.4, oct.1985, pp.2-25.
1o. A.P.Brokaw, "Analog Signal-Handling For High Speed and Accuracy", Analog Dialog, vol.11, nr.2, 1977.
11. P.Burton, "Generating complex waveform and vector using multiplying D/A Converters", Electronic Enginnering, oct. 1981, pp.37-51.
12. D.P.Burton, A.L.Dexter, "Microprocessor Systems Hand book" Analog Device Inc., 1977.
13. Gh.Cartianu, M.Săvescu, I.Constantin, D.Stanomir, "Semnale circuite şi sisteme", Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 198o.

14. D.Caviglia, A.De Gloria şi alţii, "Design and Construction of an Arbitrary Waveform Generator", IEEE Trans.on Instr. and Meas., Vol.32, Sept.1983, pp.398-4o3.
15. D.S.Chan şi alţii, "Analysis of quantisation errors in the direct form for finite impulse response digital filters", IEEE Trans.on Audio Electroacoust, Vol.21, Aug.1973, pp. 334-336.
16. T.C.Chen, R.J.P. de Fiqueiredo, "Two dimensional interpolation by generalized Spline Filters Based on Partial Differential Equation Image Models", IEEE Trans.on ASSP, Vol.33, nr.3, June 1985, pp.631-641.
17. T.C.Chen, R.J.P. de Fiqueiredo, "Image decimation and interpolation techniques based on frequency domain analysis", IEEE Trans.on Commun, Vol.COM-32, nr.2, Apr.1984, pp.479-484.
18. R.E. Crochiere, L.R.Rabiner, "Optimum FIR Digital Filter Implementation for Decimation, Interpolation and Narrow - band Filterimg", IEEE Trans.on ASSP, vol.23, nr.5, Oct. 1975, pp.444-456.
19. R.E.Crochiere, L.R.Rabiner, "Further Considerations on the design of decimators and interpolators", IEEE Trans.on ASSP vol.24, nr.4, Aug.1976, pp.296-311.
2o. R.E.Crochiere, L.R.Rabiner, "Interpolation and decimation of digital signals - A tutorial Review", Proc.of.the IEEE, vol.69, nr.3, March 1981, pp.3oo-331.
21. J.H.J.Dawson, "Direct digital frequency synthesizer", Wireless World, Dec.1981, pp.4o-43.
22. J.M.De Carvalho, "Real-Time interpolation with slope or curvature continuity", EUSIPCO-86, the Hague (Olanda) 1986 Part.I B5, pp.97-1oo.
23. I.Dragu, I.M.Iosif, "Prelucrarea numerică a semnalelor discrete în timp", Ed.Militară, Bucureşti, 1985.
24. D.L.Duttweiler, D.G.Messerschmitt, "Analysis of Digitally Generated Sinusoids with Aplication to A/D and D/A Converter Testing", IEEE Trans.on Commun, Vol.26, nr.5, May 1978.
25. T.M.Frederiksen, J.B.Cecil, "C-MOS D-A Converters match most microprocessors", Electronics, June 19, 198o, pp.14o -144.

26. St. Gârlaşu, "Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice", Ed.Scrisul Românesc, Craiova, 1978.

27. T.W.Goedel, S.C.Bass, "High Quality Synthesis of Musical Voices in Discrete Time", IEEE Trans.on ASSP, vol.32, nr.3, June 1984, pp.623-633.

28. D.J.Goodman, M.J.Carey, "Nine digital filters for decimation and interpolation", IEEE Trans.on ASSP, vol.25, nr.2, Apr.1977, pp.121-126.

29. D.Grant, "Putting the AD 558 DAC PORT ON THE BUSS", Analog Dialog, vol.14, nr.2, 198o, pp.16-17.

3o. U.Hakenjos, W.Srok, R.Kreiser, "User interface and software Architecture for a Data and Arbytrary Waveform Generator", Hewlett Packard Journal, Apr.1987, pp.12-2o.

31. V.Harea, A.Mureşan, E.Mârza, H.Cârstea, "Sistem de achiziţii de date pentru realizarea reglării automate a turaţiei unei maşini electrice cu comutaţie statică", Volumul: Sesiunea jubiliară de comunicări ştiinţifice, Craiova, 27-28 noiembrie 1981.

32. B.Hick, "Post sampling reconstruction filter for VFsystems", Electronic Engineering, July 1978, pp.55-58.

33. J.J.Hill, "Digilat Generation of a Nonlinear Time-Base", IEEE Trans.on Instr. and Meas., vol.27, nr.3, sept.1978, pp.298-3oo.

34. E.R.Hnatek, "A User Handbook of D/A and A/D Converters", John Wiley and Sons Inc., 1976.

35. D.F.Hoeschele, "Analog to Digital/Digital to Analog Conversion Techniques", John Wiley and Sons Inc., 1968.

36. L.L.Horowitz, "The Effects of Spline Interpolation on Power Spectral Density", IEEE Trans.on ASSP, vol.22, nr.1, Febr. 1974, pp.22-27.

37. H.S.Hou, H.C.Andrews, "Cubic Splines for image interpolation and digital filtering", IEEE Trans.on ASSP, vol.26, nr.6, Dec.1978.

38. I.Ichim, G.Marinescu, "Metode de aproximare numerică", Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1986.

39. R.G.Keys, "Cubic Convolution interpolation for digital image processing", IEEE Trans.on ASSP, vol.26, nr.6, Dec.1981, pp.1153-116o.

4o. J.S.Kriz, "A 16-bit A-D-A Conversion System for High-Fidelity Audio Research", IEEE Trans.on ASSP, vol.23, nr.1, Febr. 1975, pp.146-149.

41. C.Koken, "L.F.Synthesizer designed to meet automatic testing neèds", Electronic Engineering, Sept.1981.

42. B.Liu, P.A.Franaszek, "A Class of Time-varying digital filters", IEEE Trans.on Circuit Theory, vol.16, Nov.1969, pp. 467-471.

43. H.G.Martinez, T.W.Parks, "A class of infinite-duration impulse response filters for sampling rate reduction", IEEE Trans.on Audio Electroacoust, Vol.21, Aug.1973, pp.334-336.

44. L.Mattera, "Data converters Patch onto microprocessors", Electronics, Sept.1, 1977, pp.81-90.

45. J.Max, "Methodes et Techniques de traitement du singal et applications aux mesures phisiques", Ed.Masson, Paris, 1977.

46. E.Mârza, V.Harea, "Convertor N/A de viteză cu componente discrete, Limitări privind performanţele CNA", Vol. Simpozionul Naţional de Teoria Sistemelor, Craiova, oct.1986,

47. E.Mârza, V.Harea, "Asupra reconstituirii semnalelor eşantionate utilizînd convertoare N/A cu interpolare", Vol. Simpozionul Naţional de Teoria Sistemelor, Craiova, oct.1984.

48. E.Mârza, T.Jurca, "Determinarea erorilor de neliniaritate ale convertoarelor numeric-analogice", Sesiunea de comunicări "Teoria şi tehnica măsurării", Buziaş, 3-5 dec.1985.

49. E.Mârza, "Construcţia unui nucleu de interpolare de ordinul 3 cu performanţe ridicate", Vol. Sesiunea de comunicări "Realizări în domeniul electronicii profesionale" Snagov Parc, 3-5 sept.1987.

50. E.Mârza, "Criteriu rapid de estimare a performanţelor nucleelor de interpolare", Vol. Sesiunea de comunicări "Realizări în domeniul electronicii profesionale", Snagov Parc, 3-5 sept.1987.

51. J.H.Mc.Clellan, T.W.Parks, L.R.Rabiner, "A computer program for design optimum FIR linear phase digital filters", IEEE Trans.on Audio Electroacoust. Vol.21, Dec.1973, pp. 506-526.

52. G.H.Mc.Nally, "Digital Audio in Broadcasting", IEEE Trans. on ASSP Magazine, vol.2, nr.4, oct.1985, pp.26-44.

53. F.Mesch, "Sampling, Scanning and interpolation errors in digital processing of two-dimensional signals", IMEKO Symp. on Comp.Meas., Dubrovnik, 1981, pp.83-88.

54. R.A.Meyer, C.S.Burrus, "A unified analysis of multirate time-varying digital filters", IEEE Trans.on Circ.and Systems, vol.22, March 1975, pp.162-168.

55. Gh.Micula, "Funcţii Spline şi aplicaţii", Ed.Tehnică, Bucureşti, 1978.

56. Gh.Mitrofan, "Televiziunea digitală", Ed.Academiei RSR, Bucureşti, 1986.

57. S.Nakamura, S.Yasnda, "An approach to the Realization of a Programmable FIR Digital Filters", IEEE Trans.on ASSP, vol. 33, nr.3, June 1985.

58. J.Nakazoe, A.Minom, "A 2o-bit Digital to Analog Converter Using a Magnetic Modulator" IEEE Trans.on Instr.and Meas., vol.32, nr.1, March.1983, pp.187-19o.

59. National Semiconductor Cataloque, "Micro DAC: Double-Buffered D To A Converters P Compatible", oct.198o.

6o. U.Neumann, M.Vogt, F.Brilhaus, F.Husfeld, "Digital Signal generator combines Digital and Analog Worlds", Hewlett Packard Journal, Apr.1987, pp.4-12.

61. Y.Neuvo, C.Y.Dong, S.K.Mitra, "Interpolated Finite impulse Response Filters", IEEE Trans.on ASSP, Vol.32, nr.3, June 1984, pp.563-57o.

62. G.Oetken, T.W.Parks, H.W.Schussler, "New Results in the design of Digital Interpolators", IEEE Trans.on ASSP, vol.23, June 1975, nr.3, pp.3o1-3o9.

63. G.Oetken, "New approach for the design of digital interpolating filters", IEEE Trans.on ASSP, vol.27, Dec.1979, nr. 6, pp.637-643.

64. N.M.Oldham, "A 5o-ppm AC Reference Standard which spans 1 Hz to 5o Hz", IEEE Trans.on Instr.and Meas., vol.32, nr. 1, March.1983, pp.176-179.

65. A.V.Oppenheim, R.W.Schafer, "Digital Signal processing", Prentice Hall, 1975.

66. A.W.Oppenheim, A.S.Wilsky, I.T.Young, "Signal and Systems", Prentice Hall, 1983.

67. E.Palmieri, "Sampling theorem for Polynomial interpolation" IEEE Trans.on ASSP, vol.34, nr.4, Aug.1986, pp.846-857.

68. A.Papoulis "The Fourier integral and its applications", Mc. Graw Hill Book Comp., 1962.

69. A.Papoulis "Error analysis in Sampling Theory", Proc. of the IEEE, July 1966.

70. A.Papoulis, "Signal Analysis", Mc.Graw Hill Book Comp., 1977.
71. T.W.Parks, J.H.Mc.Clellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase", IEEE Trans. on Circuit Theory, vol.19, March 1972.
72. T.W.Parks, D.P.Kolba, "Interpolation minimizing maximum normalized error for band-limited signals", IEEE Trans.on ASSP, vol.26, nr.3, Aug. 1978, pp.381-384.
73. A.Peled, B.Liu,"A New Hardware realisation of Digital Filters", IEEE Trans.on ASSP, vol.22, nr.6, Dec. 1974, pp.456 -462.
74. D.P.Petersen, D.Middleton, "Linear interpolation, Extrapolation and Prediction of Random Space-Time Fields with a Limited Domain of Measurement", IEEE Trans.on Inform.Theory, vol. , nr.1, Jan.1965, pp.18-30.
75. J.R.Pierce, E.C.Posner, "Introduction to Communication Science and Systems", Plenum Pres, N.Y., 1980.
76. A.Policec, "Tehnica modernă a comunicaţiilor, Editura I.P. Timişoara, 1982 - curs.
77. E.Pop, V.Stoica, "Principii şi metode de măsurare numerică", Ed.Facla, 1977, Timişoara.
78. E.Pop, V.Stoica şi colectiv, "Tehnici moderne de măsurare", Ed.Facla, Timişoara, 1983.
79. E.Pop şi colectiv, "Metode în prelucrarea numerică a semnalelor", Ed.Facla, Timişoara, 1986.
80. W.K.Pratt, "Digital Image Processing", John Wiley and Sons, 1978.
81. L.R.Rabiner, B.Gold, "Theory and Application of digital signal processing", Prentice Hall, 1975.
82. L.R.Rabiner, R.E.Crochiere, "A Novel Implementation for Narrow-Band FIR Digital Filters", IEEE Trans.on ASSP, vol. 23, No.5, Dec.1975, pp.457-464.
83. O.Radu, Gh.Săndulescu, "Filtre numerice, aplicaţii", Ed. tehnică, Bucureşti, 1979.
84. T.A.Ramstad, "Digital two-rate IIR and hybrid IIR/FIR filters for Sampling rate conversion", IEEE Trans.on Commun., vol.30, July 1982, pp.1466-1476.
85. T.A.Ramstad, "Digital method for conversion between Arbitraty Sampling Frequencies", IEEE Trans.on ASSP, vol.32, nr.3, June 1984, pp.577-591.

86. D.J.Quarnby, "Signal Processor Chip", Granada Publishing Ltd, 1984.
87. M.Sâmpăleanu, "Circuite pentru conversia datelor", Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.
88. R.W.Schafer, L.R.Rabiner, "A Digital Signal Approach to Interpolation", Proc. of the IEEE, vol.61, nr.6, June 1973, pp.692-702.
89. S.M.Schlosser, "The Third Generation of ATE", IEEE Trans. on Instr. and Meas., vol.27, June 1978, nr.2, pp.122-126.
90. H.Schmid, "Electronic Analog/Digital Conversions", Van Nostrand Reinhold Comp., 1970.
91. J.A.Schoeff, "A microprocessor Compatible High-Speed 8 bit DAC", IEEE Journal of Solide State Circ., vol.13, nr.6, Dec.1978, pp.746-753.
92. J.A.Schoeff, "Standard bipolar process yields 12-bit monotonic d-a converter", Electronics, Dec.6, 1979, pp.152-158.
93. H.K.Schoenwetter, "An RMS Digital Voltmeter/Calibrator for very Low Frequencies", IEEE Trans.on Instr. and Meas., vol. 27, nr.3, Sept. 1988, pp.259-268.
94. H.K.Schoenwetter, "NBS Provides Voltage Calibration Service in 0,1-10 Hz Range Using AC Voltmeter/Calibrator", IEEE Trans.on Instr.and Meas., vol.28, nr.4, Dec.1979, pp.327-331.
95. H.K.Schoenwetter, "A High-Speed Low-noise 18 bit Digital to Analog Converter", IEEE Trans.on Instr.and Meas., vol. 27, nr.4, Dec.1978, pp.413-417.
96. H.Schumny, "Segnal-Ubertragung", F.Vieweg and Sons Verlag, 1978.
97. M.Schwartz, L.Shaw, "Signal Processing", Mc.Graw Hill Inc. 1975.
98. T.A.Seim, "Numerical interpolation for P based Systems", Computer Design, Febr.1978, pp.111-116.
99. B.Siedel, "Interpreting ADC and DAC Specifications", Electronic Engineering, May 1978, pp.54-60.
100. L.Shapiro, "Sampling theory in digital processing", Electronic Engineering, May 1978, pp.45-50.
101. Al.Spătaru, "Teoria transmiterii informaţiei", Ed.Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.

1o2. D.Stanomir, O.Stănăşilă, "Metode matematice în teoria semnalelor", Ed.Tehnică, Bucureşti, 198o.

1o3. D.S.Stearns, "Digital Signal Analysis", Hyden Book Comp., 1975.

1o4. V.Stoica, "Transmiterea informaţiei continue", Ed. IPT, curs, 1978.

1o5. I.G.Sabac, P.Cocârlan, "Matematici speciale", vol.II, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.

1o6. R.P.Talambiras, "Digital to Analog Converters: Some problems in producing high-fidelity signals", Computer Design Jan. 1976, pp.63-69.

1o7. F.N.Trofimenkoff, R.E.Smallwood, A.P.D'sa, "Use of Digital to Analog Converters in Circuit Design", IEEE Trans.on Instr. and Meas., vol.26, nr.4, Dec.1977, pp.342-345.

1o8. H.Urkowitz, "Paralel Realisation of Digital Interpolation Filters for Increasing the Sampling rate", IEEE Trans.on Circ. and Syst., vol.22, nr.2, Febr.1975.

1o9. J.Wynne, "12 bit CMOS M-DAC interfaces directly with Ps", Analog Dialog, vol.12, nr.2, 198o, pp.9-1o.

A N E X A

Pentru înțelegerea funcționării instalației experimentale descrise în paragraful 6.2, în continuare se prezintă gestionarea eșantioanelor și datelor inițiale în memoria calculatorului precum și subrutina de răsfirare și interpolare utilizată pentru implementarea iterativă a unui nucleu polinomial.

INTRODUCEREA DATELOR INITIALE PRIN PROGRAMUL PRINCIPAL (BASIC)

&5DE8	N_C	00	XX	XX	XX	XX	XX	XX
&5DF0	N	00	F8	5D	XX	XX	XX	XX
&5DF8	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX
⋮								

&5DF8 : prima adresă a tabelului

N_C00 : numărul curent în ciclul de interpolare N_C=N...0

N 00 : numărul inițial de eșantioane introduse (2 octeți)

Rezultatul răsfirării - interpolării se obține începînd cu &5DF8

La funcționare:

⋮								
&5DE8	N_C	00	**	**	XX	XX	XX	XX
&5DF0	N	00	F8	5D	prima adresă a ciclului de interpolare		**	XX
&5DF8	$E_{S.1}$	$E_{S.2}$	$E_{S.3}$	. . . .				
⋮				ZONA UTILA				
&7DF0	. . . .							
&7DF8	**	XX	**	XX	XX	XX	XX	XX
⋮								

eșantioane poziționate pentru realizarea interpolării

PROGRAMUL SUBRUTINA DE RASFIRARE - INTERPOLARE

Limbaj asamblare	Cod maşină	Comentarii
LD DE,(&5DF2)	ED 5B F2 5D	DE ← &5DF8: prima adresă a tabelului
LD HL,(&5DF0)	2A F0 5D	HL ← NI (numărul inițial de eşantioane
ADD HL,HL	29	HL ← 2*NI
ADD HL,DE	19	Se adună la adresa de început a tabelului cantitatea 2*NI
DEC HL DEC HL	2B 2B	Se decrementează de 2 ori pentru ca în HL să avem adresa ultimă a tabelului răsfirat
EX DE,HL	EB	în DE: ultima adresă din tabel în HL: prima adresă a tabelelor
LD BC,(&5DF0)	ED 4B F0 5D	încarcă în BC numărul inițial de eşantioane NI
ADD HL,BC DEC HL	09 2B	Se obține în HL ultima adresă a tabelului nerăsfirat
DEC BC	0B	SE obține în BC numărul (NI-1) care reprezintă numărul de paşi ai unui ciclu
*LDD	ED A8	(DE) ← (HL), DE ← DE-1, HL ← HL-1, BC ← BC-1. Registrul BC e pe post de contor
DEC DE	1B	DE are pasul de decrementare în buclă de 2 (este răsfirat).

LD A,C OR B JP NZ,*	79 BO C2 13 5D	Modalitate de verificare dacă BC=0 Ciclul se încheie după NI paşi, în HL şi DE avem prima adresă a tabelelor
LD HL,(&5DF0)	2A F0 5D	Incarcă HL cu numărul NI
ADD HL,HL	29	Inscrie în HL numărul 2*NI
DEC DE DEC DE	1B 1B	In DE se obţine adresa la care se înscriu (cu 2 adrese mai "sus" decît adresa de început în tabel)
ADD HL,DE	19	In HL se trece adresa de la care citesc în vederea înscrierii în locul dat de DE
EX DE,HL	EB	HL: adresa de înscriere DE: adresa de citire
LD A,(DE)	1A	Conţinutul locaţiei de adresă dată de DE (citire) e trecut în registrul A
LD (HL),A	77	Conţinutul registrului A e trecut în locaţia de adresă dată de HL (înscriere)
INC HL INC HL	23 23	In HL se obţine adresa de citire la aranjarea celui de-al 2-lea element din tablou (prelungire de la sfîrşitul tabelului
INC DE INC DE	13 13	Se ajunge cu DE la adresa de înscriere
EX DE,HL	EB	HL: adresa de înscriere DE: adresa de citire
LDA,(DE) LD (HL),A	1A 77	Ce se citeşte de la adresa de citire, se înscrie la adresa de înscriere
INC HL INC HL	23 23	Se ajunge cu HL la noua adresă la care înscriu (pasul 3 în aranjarea de la capetele tabelului)

INC DE INC DE	13 13	In DE se obţine adresa de la care se face citirea
LD A,(DE) LD(HL),A	1A 77	In locaţia de adresă dată de HL (înscriere) e depus ce s-a citit din locaţia de adresă dată de DE
LD HL,(&5DF2)	2A F2 5D	Se încarcă HL cu conţinutul locaţiei de adresă 5DF2, adică cu 5DF8 care reprezintă adresa de început a tabelului HL←&5DF8
LD (&5DF4),HL	22 F4 5D	5DF8 e depus la adresa &5DF4, acolo unde se păstrează prima adresă a unui ciclu de interpolare
*LD HL,(&5DF4)	2A F4 5D	Incarcă în HL cantitatea 5DF8: adresa de început, ulterior alte adrese de început ale unui ciclu de interpolare
XOR A	AF	Se anulează conţinutul lui A A ← 0
ADD A,(HL)	86	Se încarcă în A conţinutul adresei de început &5DF8: cantitatea x_1
INC HL INC HL	23 23	In HL se ajunge la adresa de la care se extrage cantitatea x_2
ADD A,(HL)	86	In A se înscrie rezultatul adunării x_1+x_2. CY e afectat
LD C,A	4F	Se trece rezultatul în registrul C
ADC A,A SUB C SUB C	8F 91 91	Pentru separarea lui CY: A←A+A+CY A←A+CY A← CY
LD B,A	47	Bitul CY e trecut în registrul B
LD H,B LD L,C	60 69	In HL obţinem rezultatul exact (x_1+x_2) în bitul 1 avînd bitul de CY rezultat la adunare
RL C RL B	CB 11 CB 10	Rotire stînga C prin CY Rotire stînga B prin CY anterior BC ← 2*(x_1+x_2)

RL C RL B	CB 11 CB 10	BC: $\leftarrow 4*(x_1+x_2)$
ADD HL,BC	09	$HL \leftarrow 4*(x_1+x_2)+(x_1+x_2)=5*(x_1+x_2)$
EX DE,HL	EB	HL: nesemnificativ DE: rezultatul $5*(x_1+x_2)$
LD HL,(&5DF4)	2A F4 5D	Se încarcă în HL adresa de început în cadrul ciclului de interpolare
DEC HL DEC HL	2B 2B	In HL avem adresa lui x_0
XOR A	AF	Se anulează conţinutul registrului A
ADD A,(HL)	86	Se încarcă A cu cantitatea x_0
INC HL INC HL INC HL INC HL INC HL INC HL	23 23 23 23 23 23	In HL se obţine adresa lui x_3 (plasată cu 6 adrese mai "în faţă" decît adresa lui x_0)
ADD A,(HL)	86	In A se încarcă suma x_0+x_3. CY e afectat
LD C,A	4F	Salvează rezultatul fără CY în registrul C
ADC A,A SUB C SUB C	8F 91 91	Pentru separarea lui CY: $A \leftarrow A+A+CY$ $A \leftarrow A+CY$ $A \leftarrow CY$
LD B,A	47	Salvez CY în registrul B. In registrul BC am rezultatul complet (x_0+x_3)
XOR A	AF	Anulează conţinutul lui A şi pune fanionul CY pe 0
EX DE,HL	EB	In HL se obţine valoarea $5*(x_1+x_2)$ In DE: nesemnificativ
SBC HL,BC	ED 42	$HL \leftarrow HL - BC - \underbrace{CY}_{=0}$. In HL se obţine $5*(x_1+x_2)-(x_0+x_3)$

RR H RR L RR H RR L RR H RR L	CB 1C CB 1D CB 1C CB 1D CB 1C CB 1D	In HL se obţine împărţirea cu 8 a cantităţii avute iniţial. In HL avem: $\frac{1}{8}\left[5*(x_1+x_2)-(x_0+x_3)\right]$
LD B,L	45	Salvează rezultatul în registrul B (rezultatul se află doar în registrul L)
LD HL,(&5DF4)	2A F4 5D	Se încarcă HL cu prima adresă a tabelului la un ciclu de interpolare
INC HL	23	In HL avem locul de înscriere al rezultatului interpolării aflat în B
LD (HL),B	70	Se depune rezultatul interpolării la locul de înscriere pentru care s-a făcut interpolarea
LD HL,(&5DF4)	2A F4 5D	Incarcă în HL: prima adresă a tabelului la un ciclu de interpolare
INC HL INC HL LD (&5DF4),HL	23 23 22 F4 5D	In HL se obţine prima adresă a tabelului la următorul ciclu pe care o înscriu în locaţia rezervată adreselor de început, deci la adresa &5DF4

LD HL,(&5DE8)
DEC HL
LD (&5DE8),HL
	2A E8 5D
	2B
	22 E8 5D
		Se scade din conţinutul locaţiei de adresă 5DE8 (numărul curent în ciclul de interpolare), o unitate după care se înscrie în acelaşi loc.

LD (&5DEA),HL	22 EA 5D	
LD A,L OR H JP NZ,*	7D B4 C2 38 5D	Se verifică dacă conţinutul lui HL a ajuns la 0 (dacă s-au făcut toate interpolările din cadrul unui ciclu de interpolare cu un număr de eşantioane

LD HL,(&5DFO)
ADD HL,HL
LD &5DFO,HL
	2A FO 5D
	29
	22.FO 5D
	...
		După terminarea unui ciclu de interpolare, se dublează numărul de eşantioane care deci se înscriu la adresa rezervată: &5DFO

LD &5DE8,HL	22 E8 5D	Acelaşi număr nou de eşantioane se trece şi în locaţia de adresă &5DE8 rezervată numărului curent în ciclul de interpolare (scade de la N la 0)
EX DE,HL	EB	DE: numărul nou la începutul unui nou ciclu de interpolare HL: nesemnificativ
LD HL,00 20	21 00 20	Se înscrie în HL valoarea 00 20 H reprezentînd limita superioară a numărului de eşantioane cu care se poate lucra
SCF CCF	37 3F	Pun fanionul CY pe 0
SBC HL,DE JP NZ, &5D00	ED 52 C2 00 5D	Se verifică dacă s-a ajuns, prin dublarea numărului eşantioanelor, la valoarea limită a numărului fixată. Dacă nu se reia un ciclu complet de răsfirare-interpolare
RET	C9	Retur în programul principal

DISPUNEREA IN MEMORIA PRAE-M A SUBRUTINELOR

SUBRUTINA DE RASFIRARE : &5D00 ... &5D31
SUBRUTINA DE INTERPOLARE: &5D32 ... &5DA6

&5D00	ED	5B	F2	5D	2A	F0	5D	29
&5D08	19	2B	2B	EB	ED	4B	F0	5D
&5D10	09	2B	0B	ED	A8	1B	79	B0
&5D18	C2	13	5D	2A	F0	5D	29	1B
&5D20	1B	19	EB	1A	77	23	23	13
&5D28	13	EB	1A	77	23	23	13	13
&5D30	1A	77	2A	F2	5D	22	F4	5D
&5D38	2A	F4	5D	AF	86	23	23	86
&5D40	4F	8F	91	91	47	60	69	CB
&5D48	11	CB	10	CB	11	CB	10	09
&5D50	EB	2A	F4	5D	2B	2B	AF	86
&5D58	23	23	23	23	23	23	86	4F
&5D60	8F	91	91	47	AF	EB	ED	42
&5D68	CB	1C	CB	1D	CB	1C	CB	1D
&5D70	CB	1C	CB	1D	45	2A	F4	5D
&5D78	23	70	2A	F4	5D	23	23	22
&5D80	F4	5D	2A	E8	5D	2B	22	E8
&5D88	5D	22	EA	5D	7D	B4	C2	38
&5D90	5D	2A	F0	5D	29	22	F0	5D
&5D98	22	E8	5D	EB	21	00	20	37
&5DA0	3F	ED	52	C2	00	5D	C9	