

INSTITUTUL POLITEHNIC „TRAIAN VUIA” TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ing. TEODOR LEUCA

Metode de calcul al câmpului electromagnetic
în medii neliniare fără histerezis. Aplicații
la încălzirea inductivă

TEZA DE DOCTORAT

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

CONDUCATOR ȘTIINȚIFIC,
Prof.dr.ing. IOAN DE SABATA

- 1987 -

INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA	
521.670	
Volum:	359 G
După:	LN.

CUPRINSUL TEZEI DE DOCTORAT

	<u>Pag</u>
INTRODUCERE	3
1. PARAMETRII CARACTERISTICI AI MEDIILOR FEROMAGNETICE	5
1.1. Permeabilitatea magnetică ca funcție de H și ω	5
1.2. Rezistivitatea mediilor feromagnetice ca funcție de ω	9
1.3. Rezultate experimentale obținute pentru oțeluri de producție indigenă.	12
1.4. Aproximarea analitică a caracteristicilor neliniare $X_m(H, \omega)$ și $\rho(\omega)$	16
2. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC.	31
2.1. Formule locale ale legilor transmisiei căldurii	31
2.2. Ecuațiile cuplate ale câmpurilor electromagnetice cva- zistaționare și termice	33
2.3. Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum	34
2.4. Cazul câmpurilor plan-paralele.	34
2.4.1. Placă feromagnetică.	37
2.4.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară.	40
2.4.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptun- gulară.	42
3. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC, NEGLIJÂND CÂMPUL MAGNETIC DE REACȚIE	44
3.1. Ecuațiile generale ale câmpurilor electromagnetice și termice	44
3.2. Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum	47
3.3. Cazul câmpurilor plan-paralele.	47
3.3.1. Placă feromagnetică.	49
3.3.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară.	51
3.3.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptun- ghiulară.	53
4. ANALIZA NUMERICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC.	57
4.1. Rezolvarea numerică a ecuațiilor de câmp	59
4.2. Metoda diferențelor finite pentru calculul câmpurilor	60
4.3. Cazul câmpurilor plan-paralele.	64

	<u>Pag.</u>
4.3.1. Placă feromagnetică.	65
4.3.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară.	69
4.3.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară	70
4.4. Rezultate ale rulării programelor și interpretarea lor.	67
5. ASPECTE PRIVIND PROIECTAREA SI EXPLOATAREA INSTALAȚIILOR DE INCALZIRE PRIN INDUCȚIE, FOLOSIND MIJLOACE NUMERICE.	113
5.1. Date inițiale și condiții impuse instalațiilor de încălzire prin inducție	113
5.2. Determinarea prin mijloace numerice a caracteristicilor instalației	115
5.3. Confruntări experimentale	113
CONCLUZII.	139
BIBLIOGRAFIE	145

I N T R O D U C E R E

Tehnologiile moderne care au la bază încălzirea inductivă s-au dezvoltat rapid în ultima perioadă datorită avantajului pe care îl oferă acest procedeu de încălzire față de altele clasice. Astfel, în contextul actual al economiei de materiale și energie, al cerințelor obiective de creștere a calității produselor și a productivității muncii, corelat cu dezvoltarea electronicii de putere și a microelectronicii, instalațiile de încălzire prin inducție au devenit instalații moderne care pot fi incluse în liniile automate de fabricație având o eficiență economică ridicată.

Colectivul de cadre didactice și cercetători, din cadrul Institutului de Subingineri Oradea, încă din anul 1979 a început proiectarea și realizarea unor instalații de încălzire prin inducție cu diverse destinații. Încă în acest colectiv, autorul tezei a colaborat la proiectarea echipamentului electrotehnic înglobat în diversele instalații [40, 41, 42, 43, 44].

Teza de doctorat elaborată se înscrie pe linia acestor preocupări privind proiectarea optimă a instalațiilor de încălzire prin inducție pe baza elaborării unor metode de calcul al câmpului electromagnetic cuplat cu cel termic în mediile feromagnetice care se încălzesc prin inducție.

Teza este organizată în cinci capitole principale. În capitolul 1, se prezintă investigațiile teoretice și experimentale efectuate de autor în vederea obținerii dependențelor principalelor parametri ai mediilor feromagnetice de anumiți factori. Astfel, pentru oțeluri de producție indigenă, s-au obținut dependențele permeabilității magnetice ca funcție de intensitatea câmpului magnetic și de temperatură, utilizând o balanță de susceptivități, precum și a rezistivității ca funcție de temperatură, utilizând un dispozitiv realizat în acest scop conectat într-un montaj de compensare clasic. Caracteristicile neliniare determinate experimental s-au aproximat prin polinoame de interpolare, pe porțiuni, utilizând un program pe calculator elaborat în acest scop.

În capitolul 2, s-au scris ecuațiile cuplate ale câmpurilor electromagnetic cvazistacionar și termic pentru cazul general, cu precizarea condițiilor de frontieră, acestea s-au particularizat pentru cazul câmpurilor plan-paralele la diverse geometrii ale mediilor feromagnetice (placă, cilindru și paralelipiped) și

expresiile puterilor disipate în vederea evaluării efectului electrocaloric al curenților turbionari.

În capitolul 3, prin introducerea potențialului electric vector al câmpului densității curenților turbionari, se prezintă un model de câmp electromagnetic cuplat cu cel termic neglijând câmpul magnetic de reacție, pentru cazul general, particularizarea acestuia pentru cazul câmpurilor plan-paralele și aceleași geometrii și s-au dedus expresiile puterilor disipate în mediile feromagnetice considerate. Pentru cazurile particulare se prezintă și soluții analitice la prima iterație.

Capitolul 4, conține implementarea numerică a modelelor propuse în capitolele 2 și 3, utilizând metoda diferențelor finite, structura programelor de calcul, rezultatele rulării acestora și interpretarea lor.

În capitolul 5, se prezintă măsurările experimentale efectuate pe o instalație de încălzire prin inducție, echipată cu convertor static de medie frecvență, destinată încălzirii în volum a unor semifabricate cilindrice pentru determinarea unor măriri globale, specific procesului de încălzire prin inducție și compararea acestora cu rezultatele obținute prin calcul. Se propune o metodă de analiza și sinteză pentru instalațiile de încălzire prin inducție, utilizând setul de programe elaborat, în vederea proiectării și exploatării optime a acestora.

În partea finală se prezintă concluziile și contribuțiile aduse de autor în cadrul tezei.

Autorul își exprimă și cu acest prilej stima și respectul față de conducătorul științific al acestei teze, prof.dr.ing. Ioan De Sabata, cărui îi este profund recunoscător pentru îndrumarea competentă și generoasă dată pe tot parcursul elaborării lucrării.

Pentru condițiile create și posibilitatea desfășurării unei activități de cercetare contractuale, în cadrul colectivului C.I.F.-Surse de la Institutul de Subingineri Oradea, autorul este recunoscător tovarășului conf.dr.ing. Teodor Maghiar, decanul institutului, iar colegilor care l-au sprijinit pe durata elaborării lucrării li se aduc sincere mulțumiri.

1. PARAMETRII CARACTERISTICI AI MEDIILOR FEROMAGNETICE

În literatura de specialitate [12, 16, 21, 25, 55, 65, 69, 72], se prezintă proprietățile magnetice și electrice ale mediilor conductoare în general și ale celor feromagnetice în particular, precum și principalii parametri caracteristici ai acestora. Aceste precizări se fac, mai ales în [72], prin prisma ultimelor descoperiri din domeniul feromagnetismului, ele fiind posibile datorită dezvoltării accentuate a mecanicii cuantice cu ajutorul căreia s-au încercat și se încearcă multe tentative de elaborare a unei teorii unitare a feromagnetismului.

Pentru ca determinările cantitative, specifice procesului de încălzire inductivă, să fie evaluate cu o precizie îmbunătățită, este necesar să se cunoască dependența, în principal, a următorilor parametri de material: permeabilitatea magnetică (sau susceptivitatea magnetică) în funcție de intensitatea câmpului magnetic, H , și de temperatura, ϑ , precum și conductivitatea electrică (sau rezistivitatea) ca funcție de temperatura, ϑ .

Deci, este necesar cunoașterea funcțiilor: $\chi_m = f(H, \vartheta)$ și $\rho = \rho(\vartheta)$ care sînt funcții matematice, în general, necunoscute pentru mediile feromagnetice.

Intrucît în literatura de specialitate menționată, modelele prezentate pentru parametrii mediilor feromagnetice sînt complicate și foarte greu de utilizat la nivel macroscopic, iar dependențele date grafic nu sînt concludente, în prezentul capitol se prezintă investigațiile teoretice și experimentale efectuate de autor în vederea obținerii dependențelor principalilor parametri ai mediilor feromagnetice de factorii menționați.

1.1. Permeabilitatea magnetică ca funcție de H și ϑ

Mediile feromagnetice prezintă valori foarte mari ale susceptivității magnetice, respectiv permeabilității relative ($10^2 - 10^5$) și dependente puternic de intensitatea câmpului magnetic în care acestea sînt introduse precum și de temperaturile lor. Astfel, pentru un mediu feromagnetic susceptivitatea respectiv permeabilitatea magnetică prezintă un maxim pronunțat și o valoare de saturație diferită de zero oricît am crește intensitatea câmpului magnetic exterior, iar peste o temperatură bine

determinată ca valoare pentru fiecare mediu feromagnetic, numită și punct Curie feromagnetic (\mathcal{V}_c), susceptivitatea magnetică devine zero respectiv permeabilitatea magnetică relativă unu, indiferent de valoarea lui H.

Așa cum este cunoscut, creșterea temperaturii intensifică mișcarea de agitație termică a particulelor și îngreunează orientarea momentelor magnetice rezultante ale domeniilor Weiss, avînd drept consecință o micșorare a vectorului magnetizație și totodată a permeabilității magnetice cu temperatura, pe măsură ce intensitatea cîmpului magnetic crește. Astfel, în [21], respectiv [12, 52], se prezintă variația permeabilității magnetice relative, μ_r , a fierului cu temperatura la cîmpuri joase respectiv a fierului tehnic și a unor oțeluri cu temperatura fără precizarea valorilor de cîmp, precum și variația aceluiași parametru în funcție de intensitatea cîmpului magnetic fără precizarea temperaturii mediului feromagnetic respectiv. O remarcă importantă privind dependența cu temperatura a permeabilității magnetice relative a oțelurilor cu 0,4 - 0,5 % C, la cîmpuri intense neprecizate ca valoare, se prezintă în [65], rezultînd o micșorare liniară a acesteia pîna la temperatura de circa 650 - 700°C, după care scade brusc, atîngînd valoarea permeabilității vidului la trecerea peste temperatura Curie.

În [72], se arată că teoria cîmpului molecular, teoriile statistice aproximative ale ordinii magnetice locale și teoria termodinamică a transformărilor magnetice nu pot descrie cantitativ proprietățile mediilor cu ordonare magnetică în apropierea punctului Curie. Există cîteva studii experimentale în care s-a măsurat dependența de temperatură a magnetizării spontane $M_S(\mathcal{V})$ și a inversei susceptivității paramagnetice $\chi_m^{-1}(\mathcal{V})$, la o serie de medii feromagnetice (metale și aliaje), în vecinătatea imediată a punctelor critice (sub temperaturile Curie sau Néel precum și deasupra acestora). În toate cazurile, curbele experimentale sînt descrise destul de bine de formele simple de tipul:

$$M_S = K_1 (\mathcal{V}_c - \mathcal{V})^m, \quad \chi_m^{-1} = K_2 (\mathcal{V} - \mathcal{V}_c)^n \quad (1.1)$$

unde K_1 , K_2 , m și n sînt constante ale mediilor considerate și ele se determină experimental.

Avînd în vedere cel prezentat, precum și necesitatea

cunoașterii pentru mediile feromagnetice - medii puternic neliniare - a dependenței cu H și χ a permeabilității magnetice, s-a procedat la determinarea acestora pe cale experimentală. Deoarece în procesul de încălzire prin inducție a mediilor feromagnetice este necesar stabilirea unor cîmpuri de valori mari în ele, pentru a obține efectele termice dorite, măsurarea susceptivității magnetice (permeabilitatea magnetică calculîndu-se funcție de susceptivitate), s-a efectuat cu ajutorul unei balanțe de susceptivități, [57].

Astfel, s-a utilizat o balanță de susceptivități cu compensare electromagnetă de tipul Weiss-Forrer, avînd sensibilitatea de 10^{-5} u.e.m/g. Cu aceasta s-a determinat susceptivitatea magnetică masică χ , în funcție de temperatură (de la temperatura mediului ambiant și pînă peste temperatura Curie) și la diverse valori ale intensității cîmpului magnetic, iar susceptivitatea magnetică, χ_m , s-a determinat după [11], cu relația:

$$\chi_m = 4\pi g' \cdot \chi \quad (1.2)$$

unde g' este densitatea mediului feromagnetic în $g.cm^{-3}$.

În figura 1.1 se prezintă instalația pentru măsurarea susceptivității magnetice masice. Balanța este formată dintr-o ti-

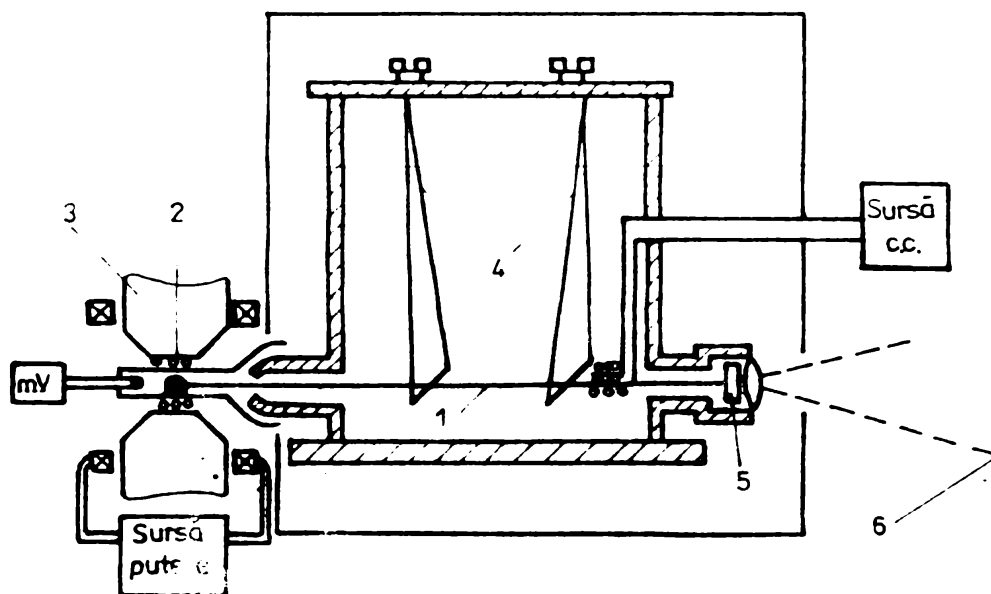


Fig.1.1. Instalația pentru măsurarea susceptivității magnetice masice

jă de cuarț (1), terminată la unul din capete cu o ceșcuță (2) în care se introduce proba de studiat. Un electromagnet de tip Weiss cu polii teșiti (3) produce un câmp magnetic neomogen. Tija de cuarț cu ceșcuța este susținută cu două fire de mătase (4), avînd lungimea reglabilă cu ajutorul a două șuruburi. Manevrarea acestor șuruburi în mod convenabil permite centrarea tijei. Capătul tijei opus ceșcuței este legat la oglinda (5) ce reflectă fascicolul luminos incident pe o scală gradată (6).

Metoda de măsurare utilizată este o metodă relativă de zero. Astfel, la aplicarea câmpului neomogen, proba feromagnetică de masă m și susceptivitatea magnetică masică χ este atrasă cu o forță:

$$f = m \cdot \chi \cdot H \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.3)$$

care determină mișcarea ceșcuței. Modificarea poziției ceșcuței duce la schimbarea poziției oglinzii și la deviația spotului luminos de la poziția de echilibru. Aducerea spotului luminos la poziția inițială, de echilibru, se realizează cu un sistem de compensare format dintr-o bobină parcursă de un curent I , plasată coaxial cu tija pe care este fixat un mic magnet. La echilibru, forța care determină modificarea poziției ceșcuței este compensată de sistemul electromagnetic, deci:

$$\chi \cdot m \cdot H \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = KI \quad (1.4)$$

Măsurările de susceptivitate sînt relative și ca reper, s-a luat susceptivitatea χ_0 la temperatura camerei, a unei probe etalon de masă m_0 , pentru care s-a obținut un curent de compensare I_0 , deci:

$$m_0 \cdot \chi_0 \cdot H \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = K I_0 \quad (1.5)$$

Cunoscînd curentul de compensare I , este necesar la un anumit câmp magnetic de intensitate H , în cazul unei probe de masă m , susceptivitatea masică se calculează cu ajutorul relației:

$$\chi = k \frac{I_c}{m} \quad \text{cu} \quad I_c = I + I_{dia}, \quad (1.6)$$

unde I_{dia} fiind un curent de corecție ce ține seama de faptul că, ceșcuța de cuarț ce conține proba este diamagnetică.

În relația (1.6) mărimile χ , K și I_c sînt funcție de intensitatea cîmpului magnetic stabilit în probă, deoarece acestea s-au realizat de dimensiuni foarte mici avînd forma unor discuri, iar plasarea lor în cîmp s-a realizat astfel încît liniile de cîmp ale cîmpului magnetic exterior să fie tangente la disc, condiție în care factorul de demagnetizare poate fi considerat nul. Etalonarea balanței, modul efectiv de măsurare, prelucrarea datelor, trasarea caracteristicilor neliniare $\chi_m = f(\mathcal{H})$ la $H = ct$ și obținerea caracteristicilor $\chi_m = f(H)$ la $\mathcal{H} = ct$ sînt prezentate detaliat în [31].

1.2. Rezistivitatea mediilor feromagnetice ca funcție de \mathcal{H}

Rezistivitatea este un parametru fizic important al mediilor feromagnetice ce depinde de perfecțiunea rețelei cristaline, de natura impurităților din mediul considerat, avînd însă o dependență de temperatură importantă.

În condițiile cîmpului magnetic caracterizat prin valori uzuale ale intensității, specifice proceselor de încălzire inductivă, efectul magnetorezistiv, la majoritatea metalelor și a aliajelor lor, este foarte slab, [72], deci nu se ia în considerare dependența $\rho(H)$.

În literatura de specialitate accesibilă autorului, [12, 21, 65], se prezintă tabelar respectiv grafic, valorile rezistivității la temperatura de 20°C respectiv dependența cu temperatura pentru diverse metale și oțeluri. Se constată o creștere liniară a rezistivității cu temperatura pînă la punctul Curie (\mathcal{H}_c), după care creșterea ei se diminuează. Spre exemplu, pentru oțeluri și alte aliaje feromagnetice, în intervalul de temperatură $20 - 800^\circ\text{C}$ valoarea rezistivității crește de 5 ori.

Dependența de temperatură a acestui parametru important, rezistivitatea sau conductivitatea, pentru mediile feromagnetice prezintă o serie de particularități specifice. Se constată în primul rînd valorile mari ale acesteia, iar apoi salturile la temperatura corespunzătoare punctului Curie (\mathcal{H}_c). În mod aproximativ, după [72], rezistivitatea totală a unui mediu feromagnetic poate fi exprimată sub forma unei sume dintre o parte magnetică ρ_{magn} și o parte fononică ρ_{fon} :

$$\rho(\nu) = \rho_{\text{magn}}(\nu) + \rho_{\text{fon}}(\nu), \quad (1.7)$$

contribuția principală la dependența de temperatură fiind dată de componenta $\rho_{\text{magn}}(\nu)$. La unele metale feromagnetice, relația (1.7), mai conține un termen notat cu ρ_0 care este rezistivitatea remanentă determinată de împrăștiere pe impurități și care este independentă de temperatură.

Pentru a obține dependențele cantitative $\rho(\nu)$, utile în abordarea unor probleme de analiză a câmpului electromagnetic în medii feromagnetice, s-a procedat la determinarea pe cale experimentală a valorii rezistivității la diverse temperaturi, pe cale indirectă prin măsurarea unor parametri globali pentru o probă paralelipipedică din mediul feromagnetic considerat. S-a utilizat metoda celor 4 contacte aliniate dispuse pe suprafața probei, [2, 71], realizându-se în acest sens un dispozitiv avînd principiul celui descris în [4], prezentat în secțiune în fig.1.2.

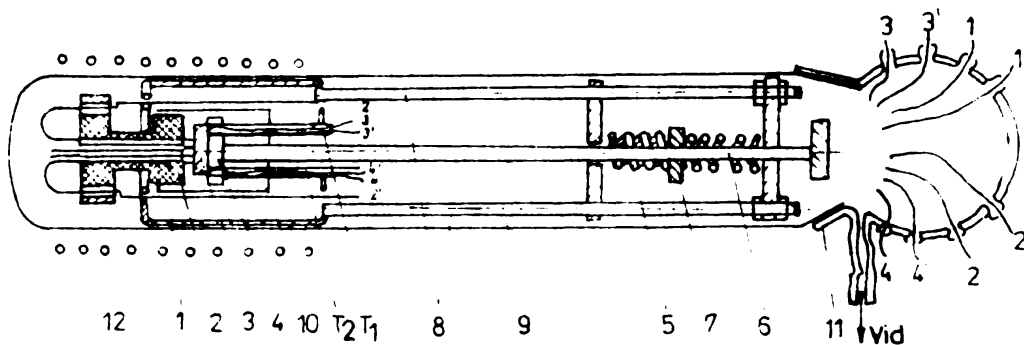


Fig.1.2. Dispozitiv pentru măsurarea rezistivității

Portproba 1, este realizată din oțel inoxidabil și susține în partea superioară suportul de ceramică 2, cu 4 electrozi de Wolfram coliniari și echidistanți cu $S = 1,3$ mm. Acesta asigură o presiune de contact uniformă în timpul încălzirii probei. Proba 3, avînd forma și dimensiunile din figura 1.3, se sprijină pe un suport din ceramică fixat pe cilindrul 4, din oțel inoxidabil. Contactele mecanice între probă și electrozi se realizează prin presare cu ajutorul unui sistem de două arcuri 5 și 6 care prin intermediul piuliței 7, asigură o forță de apăsare mare ce rămîne constantă ca valoare în timpul încălzirii probei.

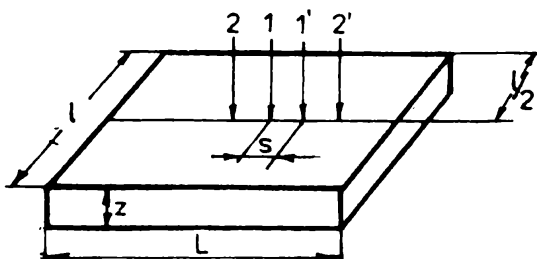


Fig.1.3 Proba feromagnetică porții cilindrice 8, din oțel inoxidabil, asigură împreună cu portproba 1 legătura conductoarelor cu electrozii. Cu ajutorul cuptorului 12, se poate modifica temperatura, iar în cazul efectuării măsurărilor de la temperatura azotului lichid, această parte a dispozitivului se introduce într-un vas Dewar cu azot lichid.

Pentru măsurarea temperaturii se folosesc două termocuple T_1 și T_2 fixate în dispozitiv prin intermediul cilindru-
lui 10. Termocuplul T_1 este din cupru-constantan, iar termocu-
plul T_2 este din platină - platină + rhodiu asigurându-se ast-
fel un domeniu de măsurare al temperaturii conform cerințelor
impuse dispozitivului.

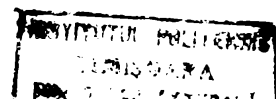
Dispozitivul prezentat mai sus are performanțe superi-
oare celui din [4]. prin: calitatea materialelor folosite, reali-
zarea suportului 2 astfel încât să asigure o presiune de contact
uniformă în timpul încălzirii probei, încălzirea uniformă a pro-
bei și posibilitatea măsurării temperaturii peste 1000°C .

Determinarea rezistivității s-a făcut conform [22, 71]
cu relația:

$$\rho = \frac{U}{I} 2\pi S, \text{ deoarece: } z \gg 2 S \text{ și } l \gg S, \quad (1.8)$$

unde U este tensiunea între 1-1', I este curentul injectat în
probă între 2-2', iar Z , S și l sînt dimensiunile geometrice
prezentate în figura 1.3. Măsurarea tensiunii U respectiv a cu-
rentului I s-au efectuat utilizînd un montaj de compensare cla-
sic respectiv, cu ajutorul unui ampermetru de clasă de precizie
0,2.

Modul efectiv de măsurare, calculele efectuate și ce-
lelalte particularități legate de dispozitiv și de experimente
sînt prezentate în [30].



1.3. Rezultatele experimentale obținute pentru oțeluri de producție indigenă

În literatura de specialitate, precizată și în paragrafele anterioare, se dau anumite valori pentru parametrii caracteristici precizați ai mediilor feromagnetice în general și în particular pentru oțeluri. Modificarea valorilor acestora, în principal a susceptivității magnetice și a rezistivității, în funcție de factorii menționați, nu se prezintă nici pentru oțelurile de producție indigenă.

Avîndu-se în vedere posibilitățile experimentale prezentate pentru determinarea caracteristicilor $\chi_m = f(H, \nu)$ și $\rho = \rho(\nu)$, autorul a efectuat o investigație experimentală [30, 31], pentru determinarea acestora, în mod particular pentru câteva oțeluri românești. Întrucît cel mai utilizat oțel în construcția de mașini este oțelul cu marca OLC-45, acestuia i s-a acordat atenția cuvenită, iar apoi s-au considerat încă două mărci de oțel și anume: OLT-35 respectiv 18 MoMC 10, utilizate în construcții respectiv în scopuri speciale fiind un oțel de calitate superioară. Aceste oțeluri, pentru a putea fi utilizate în diverse aplicații, se necesită a fi încălzite în vederea prelucrării lor sau cu alte scopuri. Dacă se adoptă procedeul încălzirii inductive, determinarea pe cale experimentală a dependențelor amintite este foarte utilă în evaluările cantitative specifice dimensionării instalațiilor de încălzire prin inducție.

În urma efectuării măsurărilor în regim variabil de temperatură, s-au efectuat calculele pentru susceptivitatea magnetică χ_m , dependențele $\chi_m = f(\nu)$ la diverse valori ale cîmpului, pentru cele trei mărci de oțel, se prezintă în figurile 1.4, 1.5 și 1.6. Se constată că valorile inițiale ale susceptivității magnetice sînt cuprinse între 6,60 și 2,70 atunci cînd intensitatea cîmpului magnetic din probă ia valori între $1,59 \cdot 10^5$ A/m și $6,60 \cdot 10^5$ A/m, pentru oțelul OLC-45, între 6 și 3 atunci cînd intensitatea cîmpului din probă ia valori între $1,59 \cdot 10^5$ A/m și $5,41 \cdot 10^5$ A/m, pentru oțelul OLT-35 și între 6,25 și 2,92 la modificări ale intensității cîmpului din probă între $1,59 \cdot 10^5$ A/m și $5,41 \cdot 10^5$ A/m, pentru oțelul 18 MoMC 10. Alături de caracteristicilor $\chi_m = f(\nu)$, avînd ca parametru valoarea intensității

- 1- H = 1,59 · 10⁵ A/m
- 2- H = 2,18 · 10⁵ A/m
- 3- H = 2,66 · 10⁵ A/m
- 4- H = 3,14 · 10⁵ A/m
- 5- H = 3,62 · 10⁵ A/m
- 6- H = 6,60 · 10⁵ A/m

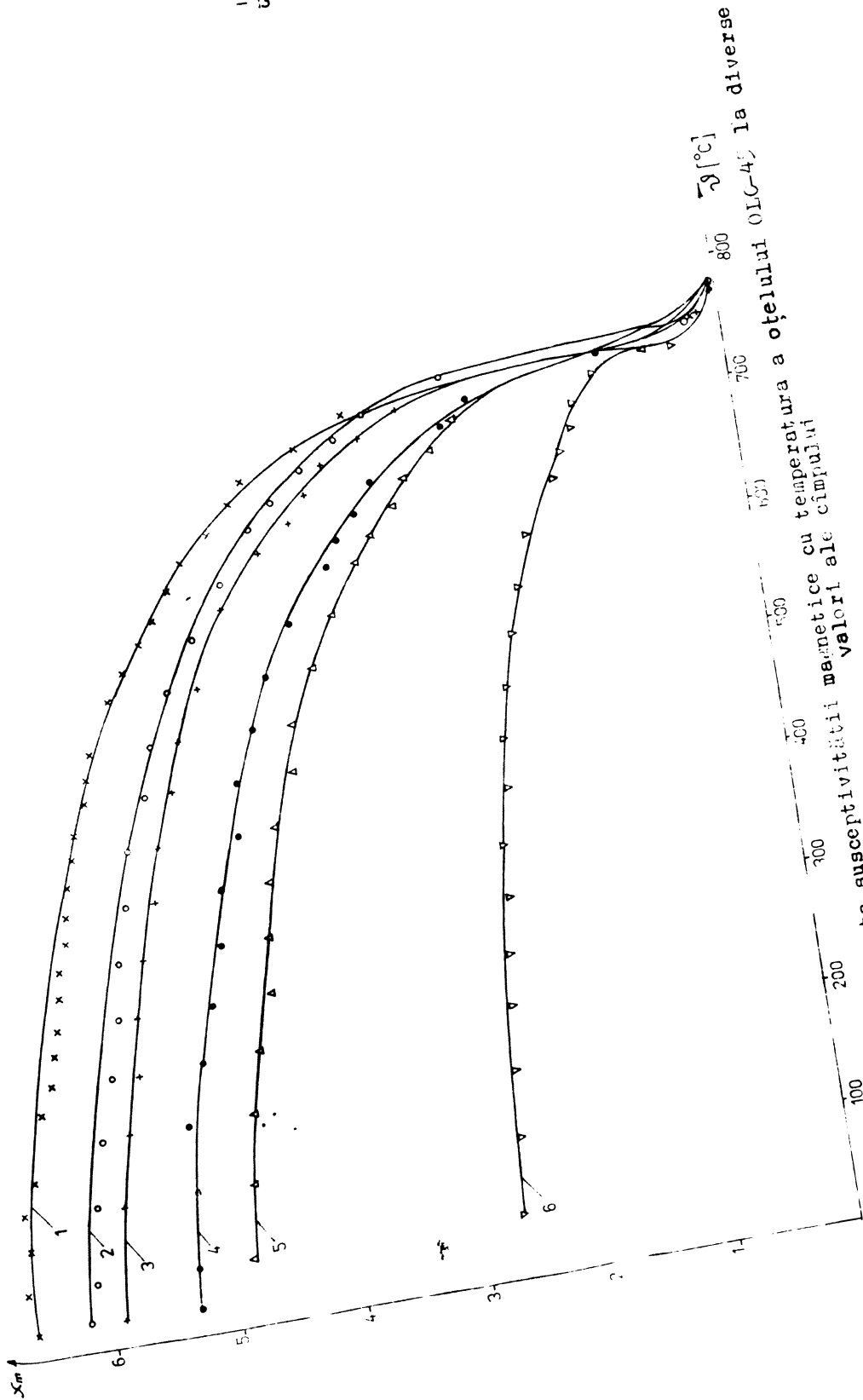


Fig. 1.4 Dependenta susceptibilității magnetice cu temperatura a oțelului OLC-45 la diverse valori ale cimpului

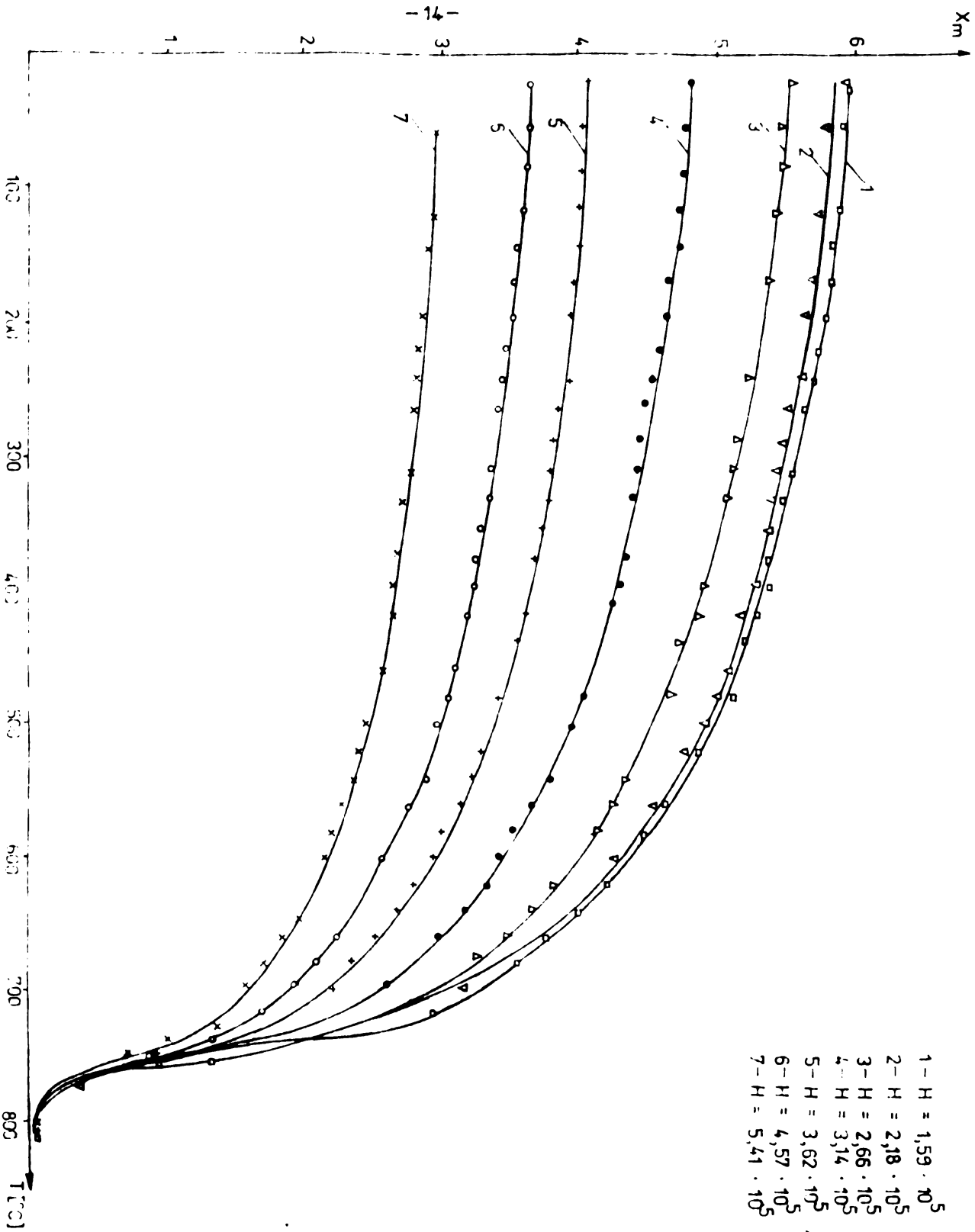


Fig. 1.5 Dependenta susceptibilității magnetice cu temperatura a oțelului OLN-55 la diverse valori ale câmpului

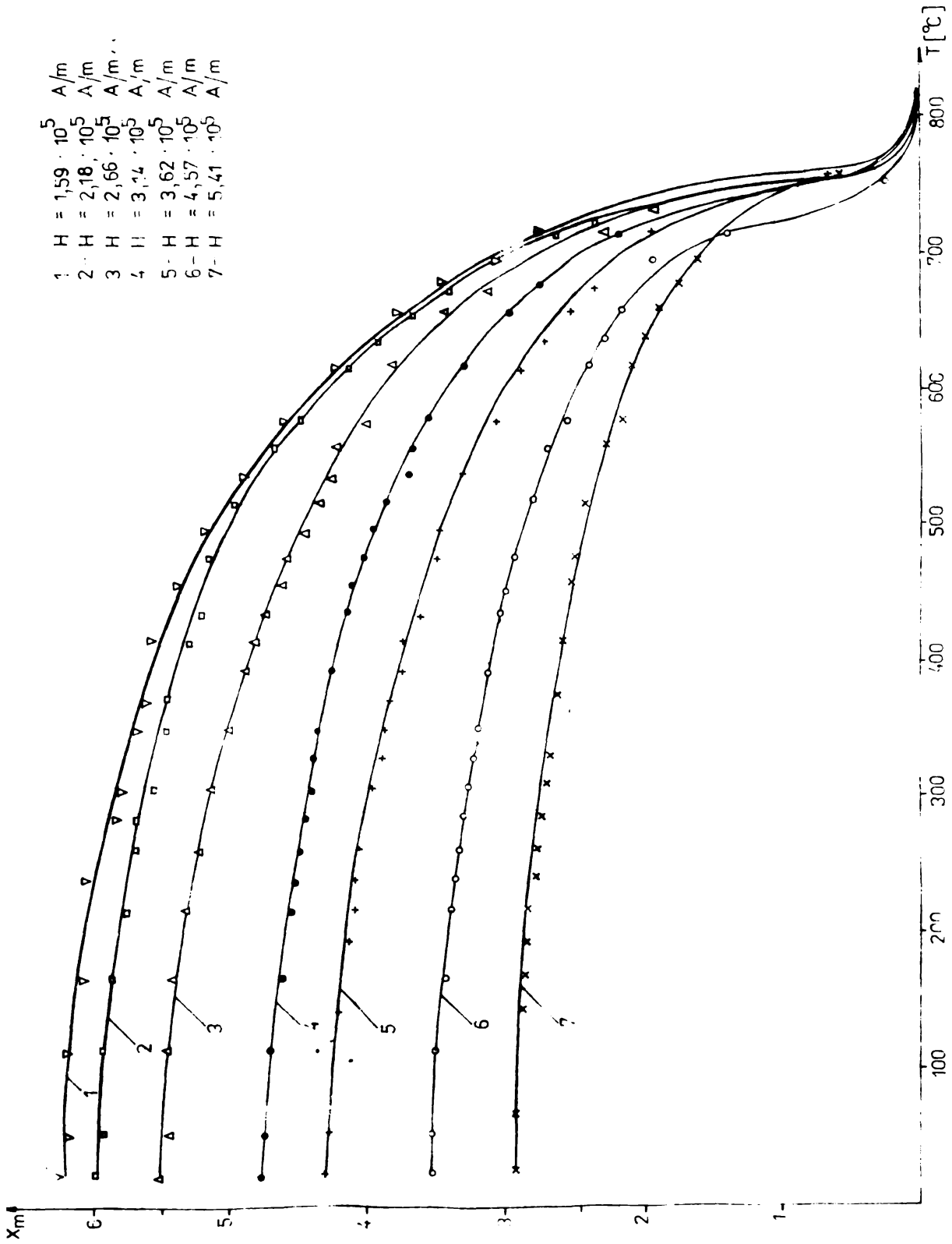


Fig.1.6 dependent: susceptivității magnetice cu temperatura a oțelului 18 MoMnCr10 la diverse valori ale cîmpului

cîmpului magnetic, H , din proba, concordă cu ceea ce se prezintă în literatura de specialitate amintită.

Dependențele $X_m = f(H)$ avînd ca parametru temperatura, ν , a probei s-au obținut pe cale grafică din caracteristicile $X_m = f(H)$. În urma determinărilor grafice s-au obținut dependențele $X_m = f(H)$ la diverse valori ale temperaturii, pentru cele trei mărci de oțel, ele fiind prezentate în figurile 1.7, 1.8 și 1.9. Alături acestor caracteristici concordă cu ceea ce se prezintă în literatură despre parametrul X_m al mediilor feromagnetice în general și în particular al oțelurilor.

Explorarea experimentală a proprietăților magnetice ale oțelurilor indigene, cu obținerea dependențelor prezentate, a urmărit în esențial domeniile de cîmp și temperatură specifice proceselor de încălzire prin inducție ale acestor medii feromagnetice.

În urma efectuării măsurărilor, pentru probe paralelipipedice din oțeluri avînd dimensiunile $8 \times 5 \times 3 \text{ mm}^3$, s-au efectuat calculele pentru rezistivitatea ρ , dependențele $\rho = \rho(\nu)$ se prezintă în figura 1.10. Măsurările s-au efectuat în vid ($10^{-5} - 10^{-6}$ torr) pentru a proteja proba împotriva oxidării și deci pentru evitarea obținerii unor rezultate eronate. Se constată că valoarea rezistivității oțelului OLC-45 crește de la temperatura camerei (20°C) și pînă la temperatura de 800°C de 4,72 ori, iar a oțelului OLT-35 de 4,19 ori în același interval de temperatură. Alături celor două grafice sînt în evidență o dependență neliniară a rezistivității oțelurilor cu temperatura pînă la punctul Curie ($\nu_c \approx 750^\circ\text{C}$), după care se conturează o dependență liniară.

Investigația experimentală a proprietăților electrice ale oțelurilor indigene, cu obținerea dependenței $\rho = \rho(\nu)$, a scos în evidență o concordanță bună a rezultatelor în conformitate cu cele prezentate în teoria modernă a conducției mediilor feromagnetice.

1.4. Aproximarea analitică a caracteristicilor neliniare $X_m(H, \nu)$ și $\rho(\nu)$

Literatura de specialitate, [47, 64, 66], care abordează problemele specifice electrotehnicii neliniare, prezintă posibilitățile de modelare analitică sau numerică a caracteristicilor neliniare.

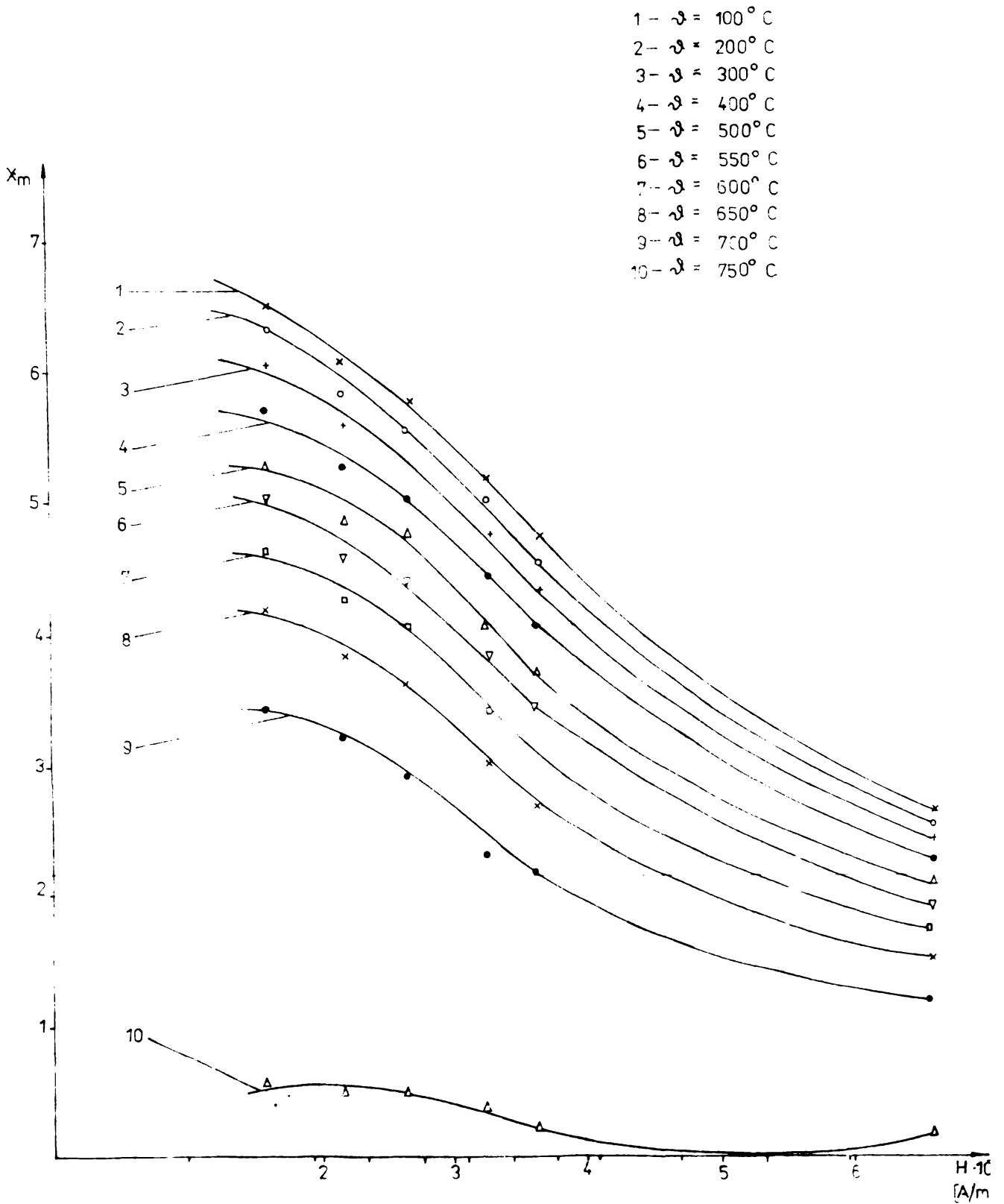


Fig.1.7 Dependența susceptivității magnetice cu intensitatea cîmpului magnetic a oțelului OLC-45 la diverse temperaturi

521-670
309 G

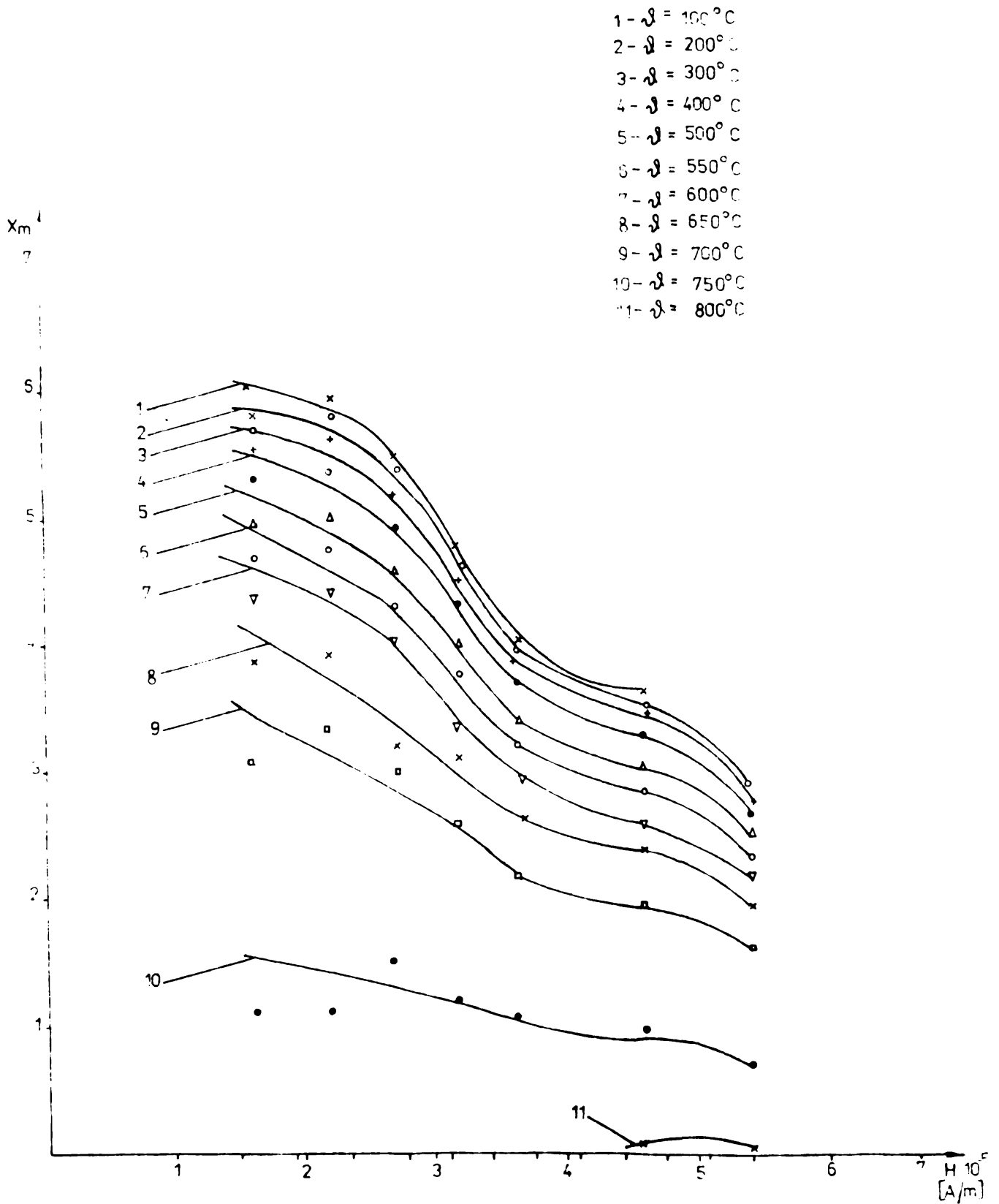


Fig.1.8 Dependența susceptivității magnetice cu intensitatea cîmpului magnetic a oțelului OIT-35 la diverse temperaturi

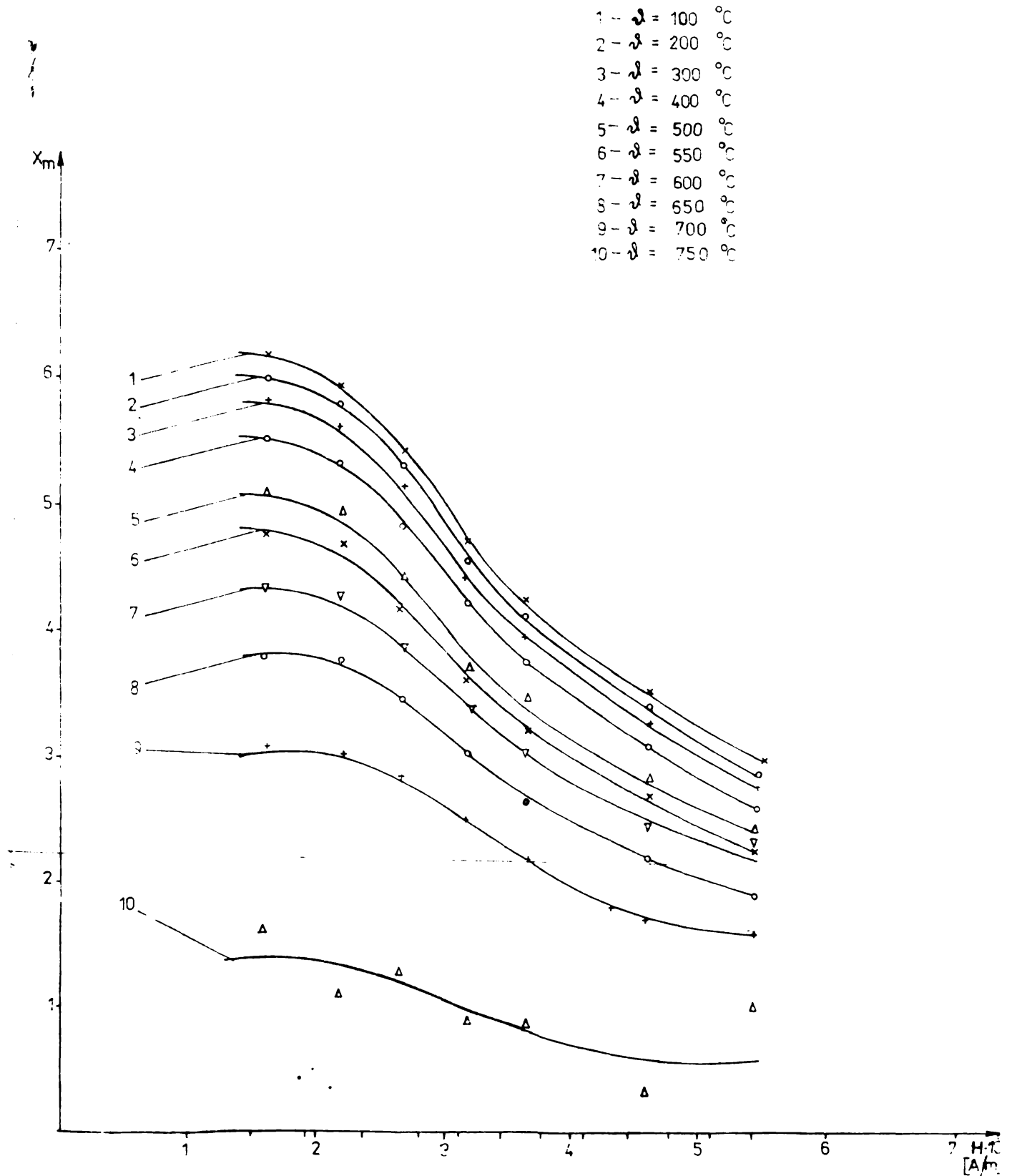


Fig.1.9 Dependența susceptivității magnetice cu intensitatea câmpului magnetic a oțelului 18 MoMnCr10 la diverse temperaturi

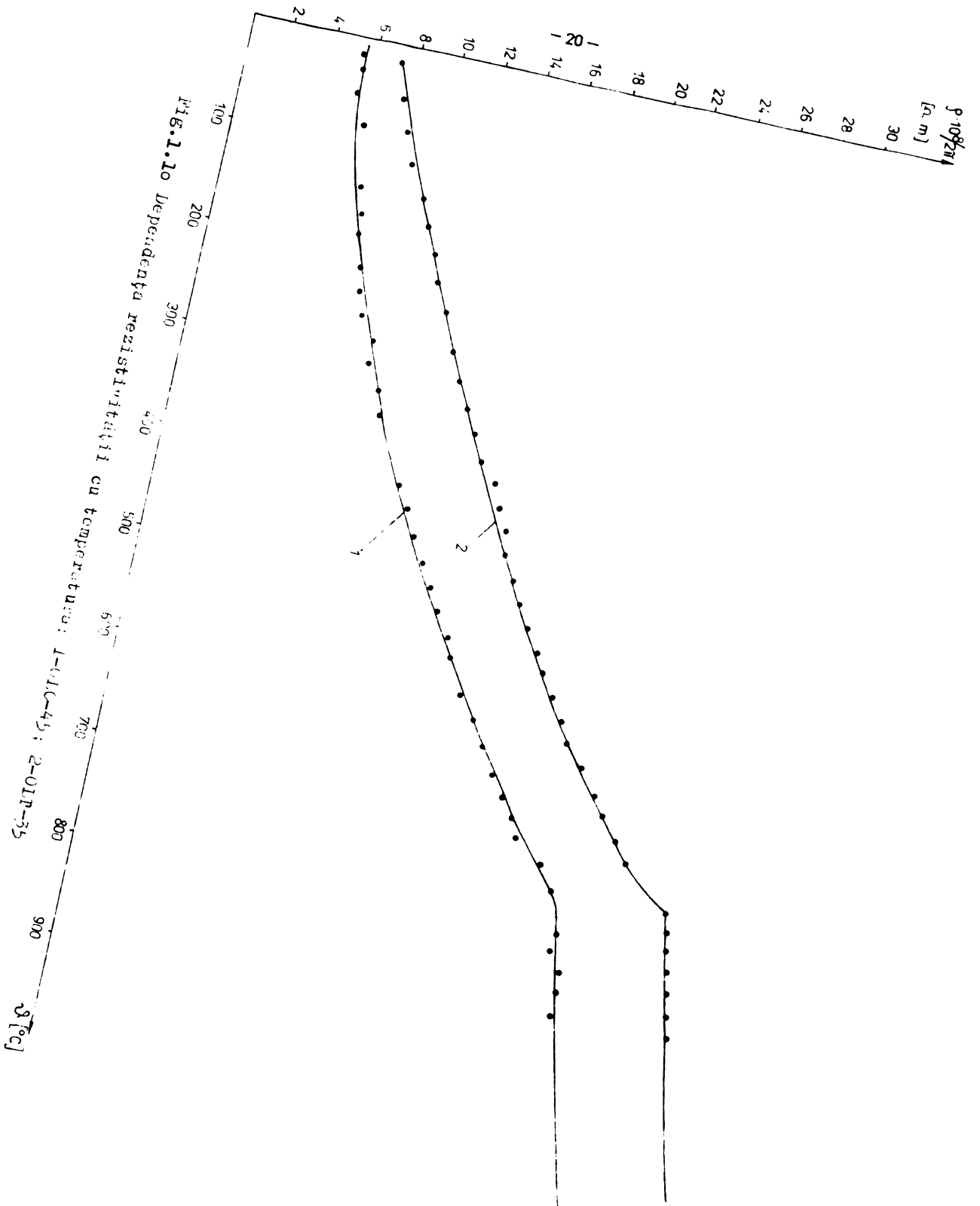


Fig. 1.10 Dependence of resistivity on temperature: 1-OLC-45; 2-OLP-35

T A B E L U L 1

Variația susceptibilității magnetice χ_m funcție de intensitatea cîmpului magnetic H,
la diverse valori ale temperaturii ϑ .

ϑ [°C]	χ_m [A/m]	χ_m [A/m]	χ_m [A/m]
	(1,5 - 2,79) · 10 ⁵	(3,3115 - 4,09) · 10 ⁵	(4,717 - 6.6) · 10 ⁵
100	7,5916-0,67442 · 10 ⁻⁵ H	8,5242-1,0303 · 10 ⁻⁵ H	6,2019-0,53968 · 10 ⁻⁵ H
200	3,0833+4,053 · 10 ⁻⁵ H-1,2424 · 10 ⁻¹⁰ H ²	8,6398-1,12999 · 10 ⁻⁵ H	5,7554-0,47809 · 10 ⁻⁵ H
300	6,9047-0,56977 · 10 ⁻⁵ H	7,9471-0,98462 · 10 ⁻⁵ H	4,2135-0,22329 · 10 ⁻⁵ H
400	5,7121+0,29485 · 10 ⁻⁵ H-0,18939 · 10 ⁻¹⁰ H ²	7,4754-0,92308 · 10 ⁻⁵ H	5,5-0,49042 · 10 ⁻⁵ H
500	5,0303+0,51515 · 10 ⁻⁵ H-0,24242 · 10 ⁻¹⁰ H ²	7,0954-0,92308 · 10 ⁻⁵ H	6,167-1,0104 · 10 ⁻⁵ H+0,0625 · 10 ⁻¹⁰ H ²
550	5,0076+0,3636 · 10 ⁻⁵ H-0,222727 · 10 ⁻¹⁰ H ²	6,8354-0,92308 · 10 ⁻⁵ H	4,4443-0,38247 · 10 ⁻⁵ H
600	5,3377-0,46512 · 10 ⁻⁵ H	6,2837-0,86154 · 10 ⁻⁵ H	4,0051-0,34702 · 10 ⁻⁵ H
650	5,0249-0,52326 · 10 ⁻⁵ H	5,7635-0,81846 · 10 ⁻⁵ H	3,8489-0,36653 · 10 ⁻⁵ H
700	4,0007-0,36048 · 10 ⁻⁵ H	5,112-0,8 · 10 ⁻⁵ H	2,5662-0,20701 · 10 ⁻⁵ H
750	1,254-0,27384 · 10 ⁻⁵ H	0,22154-0,054173 · 10 ⁻⁵ H	0,0

T A B E L U L 2

Variația susceptibilității magnetice χ_m funcție de temperatura ϑ , la diverse valori ale intensității cîmpului magnetic, H fiind constantă

H [A/m]	ϑ [°C]			
	20 - 400	400 - 700	700 - 750	
1.59154.10 ⁵	6.656-0.90987.10 ⁻³ ϑ -0.35713.10 ⁻⁵ ϑ^2	8.5667-0.666.10 ⁻² ϑ	53.44-0.070476 ϑ	
2.18838.10 ⁵	6.2797-0.18753.10 ⁻² ϑ -0.15714.10 ⁻⁵ ϑ^2	7.8511-0.6111.10 ⁻² ϑ	45.613-0.05943 ϑ	
2.66584.10 ⁵	5.9381-0.14774.10 ⁻² ϑ -0.18971.10 ⁻⁵ ϑ^2	7.7022-0.62222.10 ⁻² ϑ	41.4-0.054286 ϑ	
3.147289.10 ⁵	5.3513-0.1081.10 ⁻² ϑ -0.29028.10 ⁻⁵ ϑ^2	7.1537-0.63333.10 ⁻² ϑ	31.58-0.041429 ϑ	
3.62873.10 ⁵	5.236-0.37272.10 ⁻² ϑ -0.21142.10 ⁻⁵ ϑ^2	6.6044-0.59444.10 ⁻² ϑ	28.624-0.037429 ϑ	
6.60493.10 ⁵	2.6757-0.37448.10 ⁻³ ϑ -0.15599.10 ⁻⁵ ϑ^2	3.6933-0.33333.10 ⁻² ϑ	18.1-0.02381 ϑ	

T A B E L U L 3

Variația rezistivității ρ funcție de temperatura ϑ .

ϑ [°C]	20 - 750	750 - 1200
$\rho(\vartheta)$ [Ω·m]	$2 \cdot 11 \cdot 10^{-8} (4,5415 + 0,00549\vartheta + 0,0000229\vartheta^2)$	$2 \cdot 11 \cdot 10^{-8} (13,531 + 0,011124\vartheta)$

Variația susceptibilității magnetice χ_m funcție de intensitatea câmpului magnetic H ,
la diverse valori ale temperaturii ϑ

ϑ [°C]	$(1,5 - 2,79) \cdot 10^5$	H [A/m]	$(3,3115 - 4,09) \cdot 10^5$	$(4,422 - 5,42) \cdot 10^5$
100	$2,0909+3,7652 \cdot 10^{-5} H - 0,95455 \cdot 10^{-10} H^2$	$5,6043-0,17543 \cdot 10^{-5} H$	$-0,78034 \cdot 10^{-6} + 0,82768 \cdot 10^{-5} H$	
200	$8,5252-1,0303 \cdot 10^{-5} H$	$8,5139-1,2308 \cdot 10^{-5} H$	$6,5302-0,65762 \cdot 10^{-5} H$	
300	$6,1332-0,34882 \cdot 10^{-5} H$	$8,0184+1,1231 \cdot 10^{-5} H$	$6,5242-0,07579 \cdot 10^{-5} H$	
400	$6,7065-0,6976 \cdot 10^{-5} H$	$7,5786-1,0462 \cdot 10^{-5} H$	$6,1834-0,63649 \cdot 10^{-5} H$	
500	$1,7121+3,3788 \cdot 10^{-5} H - 0,86364 \cdot 10^{-10} H^2$	$7,4905-1,1077 \cdot 10^{-5} H$	$5,4432-0,53125 \cdot 10^{-5} H$	
550	$5,2433-0,3302 \cdot 10^{-5} H$	$6,6354-0,92308 \cdot 10^{-5} H$	$4,6945-0,41034 \cdot 10^{-5} H$	
600	$1,2576+3,1439 \cdot 10^{-5} H - 0,79545 \cdot 10^{-10} H^2$	$6,1637-0,86154 \cdot 10^{-5} H$	$4,2129-0,36474 \cdot 10^{-5} H$	
650	$1,0455+2,9848 \cdot 10^{-5} H - 0,803003 \cdot 10^{-10} H^2$	$4,9169-0,61538 \cdot 10^{-5} H$	$4,0129-0,36474 \cdot 10^{-5} H$	
700	$-0,26515+3,3636 \cdot 10^{-5} H - 0,79545 \cdot 10^{-10} H^2$	$4,3297-0,56616 \cdot 10^{-5} H$	$3,5666-0,35609 \cdot 10^{-5} H$	
750	$-1,5758+2,4924 \cdot 10^{-5} H - 0,50473 \cdot 10^{-10} H^2$	$2,6476-0,41849 \cdot 10^{-5} H$	$1,4976-0,12158 \cdot 10^{-5} H$	

T A B E L U 5

Variatia susceptibilității magnetice χ_m funcție de temperatura ϑ , la diverse valori ale intensității cîmpului magnetic H

H [A/m]	ϑ [°C]			
	20 - 400	400 - 700	700 - 750	
1.59154.10 ⁵	5.80059+0.11556.10 ⁻³ ϑ -0.35713.10 ⁻⁵ ϑ^2	9.0007-0.0082667 ϑ	35.476-0.045714 ϑ	
2.18838.10 ⁵	5.9595-0.24868.10 ⁻³ ϑ -0.31256.10 ⁻⁵ ϑ^2	11.72-0.012 ϑ	40.055-0.051786 ϑ	
2.66584.10 ⁵	5.5198-0.25014.10 ⁻³ ϑ -0.31199.10 ⁻⁵ ϑ^2	8.0066-0.68665.10 ⁻² ϑ	19.597-0.023715 ϑ	
3.147882.10 ⁵	4.8776-0.80747.10 ⁻³ ϑ -0.16799.10 ⁻⁵ ϑ^2	7.167-0.62667.10 ⁻² ϑ	70.229-0.038857 ϑ	
3.62873.10 ⁵	4.0496+0.1009.10 ⁻³ ϑ -0.26799.10 ⁻⁵ ϑ^2	5.62-0.0045 ϑ	26.239-0.037714 ϑ	
4.575704.10 ⁵	3.6778-0.42275.10 ⁻³ ϑ -0.15599.10 ⁻⁵ ϑ^2	5.0311-0.00411 ϑ	22.175-0.028429 ϑ	
5.4112681.10 ⁵	2.9737-0.059975.10 ⁻³ ϑ -0.16685.10 ⁻⁵ ϑ^2	4.4573-0.00393 ϑ	19.148-0.0024572 ϑ	

T A B E L U 6

Variatia rezistivității ρ funcție de temperatura ϑ

ϑ [°C]	20 - 750	750 - 1200
$\rho(\vartheta)$ [$\Omega \cdot m$]	$2 \pi \cdot 10^{-8} (6,7402+0,01288 +0,0000172\vartheta^2)$	$2 \pi \cdot 10^{-8} (19,178+0,01401\vartheta)$

TABELUL 2

Variația susceptibilității magnetice χ_m funcție de intensitatea cîmpului magnetic H, la diverse valori ale temperaturii ϑ

ϑ [$^{\circ}$ C]	χ_m	H [Λ /m]	χ_m
	(4,5 - 2,79) $\cdot 10^5$	(3,3115 - 4,09) $\cdot 10^5$	(4,422 - 5,42) $\cdot 10^5$
100	5,2045+1,3106 $\cdot 10^{-5}$ H-o, 45455 $\cdot 10^{-10}$ H ²	8,0588-1,0462 $\cdot 10^{-5}$ H	6,1739-0,59036 $\cdot 10^{-5}$ H
200	6,7177-0,46512 $\cdot 10^{-5}$ H	7,7071-0,98462 $\cdot 10^{-5}$ H	6,144-0,60255 $\cdot 10^{-5}$ H
300	4,7803+1,3939 $\cdot 10^{-5}$ H-o, 4697 $\cdot 10^{-10}$ H ²	7,4512-0,95385 $\cdot 10^{-5}$ H	5,7888-0,55882 $\cdot 10^{-5}$ H
400	6,1753-0,43023 $\cdot 10^{-5}$ H	7,1109-0,91075 $\cdot 10^{-5}$ H	5,6288-0,55882 $\cdot 10^{-5}$ H
500	6,0918-0,6186 $\cdot 10^{-5}$ H	6,5637-0,86154 $\cdot 10^{-5}$ H	5,0111-0,48203 $\cdot 10^{-5}$ H
550	5,3581-0,37209 $\cdot 10^{-5}$ H	5,7915-0,69231 $\cdot 10^{-5}$ H	5,1021-0,53192 $\cdot 10^{-5}$ H
600	3,5833+1,0758 $\cdot 10^{-5}$ H-o, 36364 $\cdot 10^{-10}$ H	5,7403-0,73846 $\cdot 10^{-5}$ H	4,4817-0,42553 $\cdot 10^{-5}$ H
650	4,174-0,2093 $\cdot 10^{-5}$ H	4,9569-0,61539 $\cdot 10^{-5}$ H	4,0499-0,3974 $\cdot 10^{-5}$ H
700	3,2144-0,11628 $\cdot 10^{-5}$ H	4,1852-0,55385 $\cdot 10^{-5}$ H	2,8753-0,24316 $\cdot 10^{-5}$ H
750	2,2455-0,39768 $\cdot 10^{-5}$ H	2,203-0,41231 $\cdot 10^{-5}$ H	-1,573+0,44072 $\cdot 10^{-5}$ H

TABELUL 8

Variația susceptivității magnetice χ_m funcție de temperatura ϑ , la diverse valori ale intensității cîmpului magnetic H

H [A/m]	ϑ [°C]		
	20 - 400	400-700	700-750
1.59154.10 ⁵	6.333-0.0017917 ϑ^2	10.332-0.010333 ϑ	36.42-0.047143 ϑ
2.18838.10 ⁵	5.9482-0.86306.10 ⁻⁴ ϑ -0.3577.10 ⁵ ϑ^2	8.3244-0.6944.10 ⁻² ϑ	38.553-0.05 ϑ
2.66584.10 ⁵	5.5097-0.27647.10 ⁻³ ϑ -0.3457.10 ⁻⁵ ϑ^2	0.48485+0.017401 ϑ -0.1942.10 ⁻⁴ ϑ^2	33.881-0.043725 ϑ
3.147882.10 ⁵	4.8079-0.00841 ϑ -0.14571.10 ⁻³ ϑ^2	7.0653-0.0063334 ϑ	28.579-0.030057 ϑ
3.62873.10 ⁵	4.332-0.42717.10 ⁻³ ϑ -0.25656.10 ⁻⁵ ϑ^2	1.0909+0.012902 ϑ -0.14334.10 ⁻⁵ ϑ^2	24.734-0.031857 ϑ
4.5757046.10 ⁵	3.5639-0.44081.10 ⁻³ ϑ -0.19085.10 ⁻⁵ ϑ^2	4.7489-0.003889 ϑ	13.707-0.01761 ϑ
5.4112681.10 ⁵	2.9194+0.17846.10 ⁻³ ϑ -0.2468.10 ⁻⁵ ϑ^2	0.848+0.7339.10 ⁻² ϑ -0.87854.10 ⁻⁵ ϑ^2	18.818-0.0241436 ϑ

TABELUL 9

Variația susceptivității magnetice la obeluzi cu 0,4 - 0,5 % C.

H [A/m]	ϑ [°C]
0 - 100	0,1 (H - 100) ² + 0,67442 · 10 ⁻⁵ (100 - H) + 7,590925
	20 - 750

În acest paragraf, se prezintă unele aspecte ale modelării analitice precum și aproximantele optime, obținute de autor, ale caracteristicilor neliniare determinate pe cale experimentală.

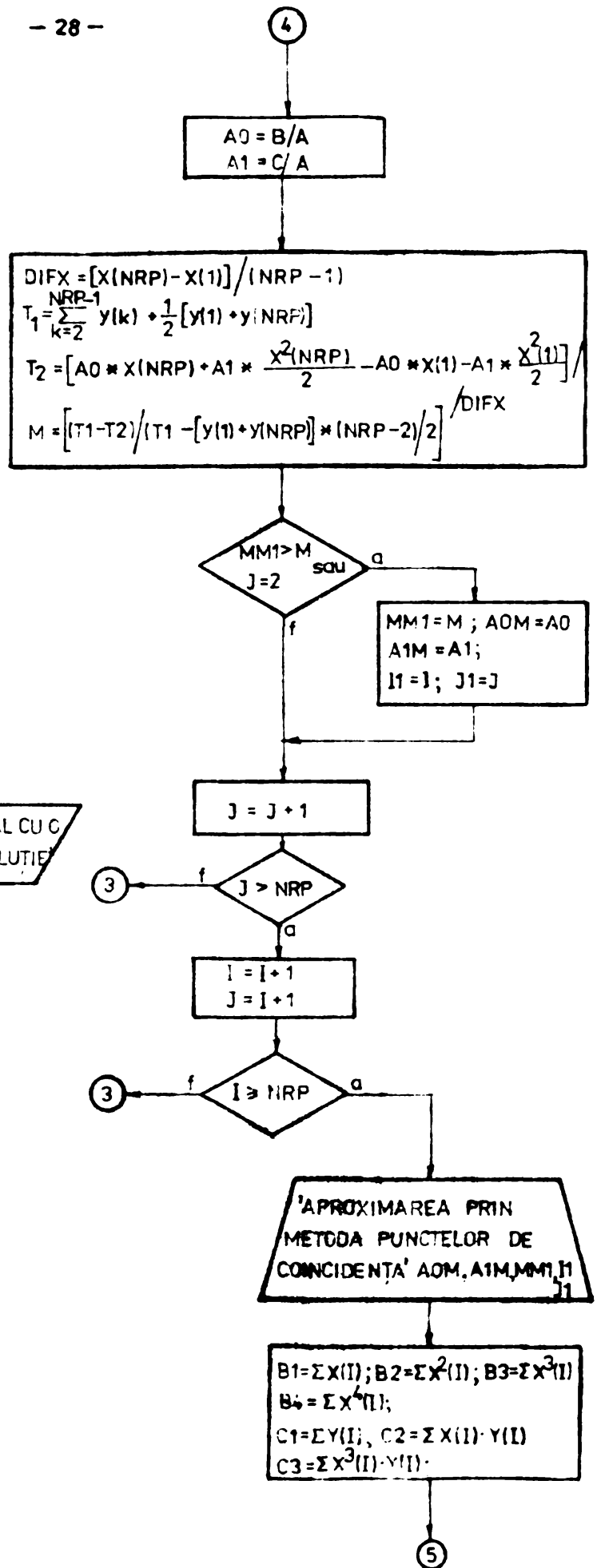
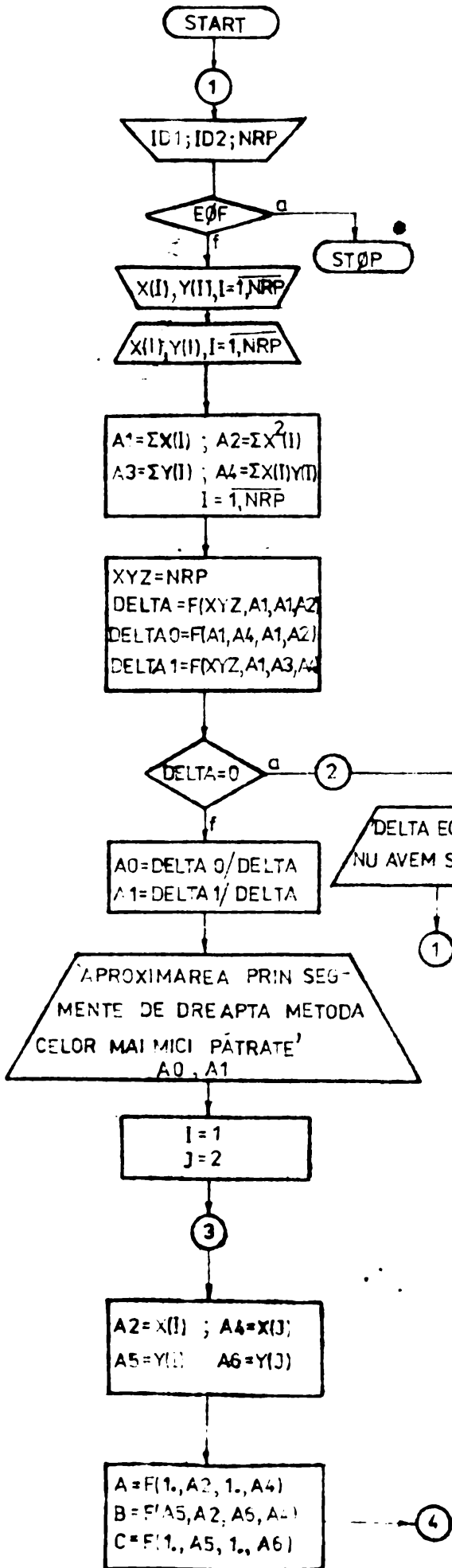
Dependențele $X_m = f(\nu)$ la $H = \text{ct.}$, $X_m = f(H)$ la $\nu = \text{ct.}$ și $\varphi = \varphi(\nu)$ reprezintă neliniarități univoce. Ele sînt cunoscute pe cale experimentală și aproximarea lor analitică ridică două probleme: a) să se aleagă o funcție care să aproximeze cît mai bine caracteristica neliniară, b) să se determine coeficienții care intervin în expresia analitică a funcției. Funcțiile care aproximează aceste caracteristici trebuie să satisfacă două cerințe contradictorii: a) să aproximeze cît mai exact caracteristica dată experimental, b) să aibă o expresie analitică cît mai simplă.

Avînd în vedere faptul, că nu se poate prescrie o metodă generală de aproximare a unei caracteristici neliniare obținută experimental, precum și particularitățile caracteristicilor neliniare ale mediilor considerate, s-au ales ca funcții de aproximare polinoame de puteri de gradul întîi și doi, aproximarea făcîndu-se pe porțiuni. Expresiile matematice ale acestor funcții fiind de forma:

$$Y(X) = A_0 + A_1 X; \quad Y(X) = A + BX + CX^2 \quad (1.9)$$

Determinarea coeficienților s-a făcut prin două metode: a) metoda celor mai mici pătrate, b) metoda factorului de merit minim. Astfel, în [32], se prezintă, conform cerințelor de determinare a coeficienților impuse de cele două metode, detaliat modul de obținere a coeficienților precum și programul pe calculator întocmit în vederea automatizării calculelor. În figura 1.11 se prezintă organigrama programului de determinare a coeficienților funcțiilor de aproximare. Ca date de intrare se consideră: a) indentificatorii numerici ID_1 și ID_2 , primul indicînd numărul caracteristicii neliniare, iar al doilea porțiunea acesteia pentru care se caută aproximanta, b) numărul de puncte NRP dat pentru fiecare porțiune a caracteristicii neliniare, c) perechile de valori (X, Y) de pe caracteristicile neliniare.

În urma rulării programului s-au obținut mai multe funcții de aproximare pentru fiecare porțiune a caracteristicii neliniare considerate, cea optimă rezultînd printr-o selectare în



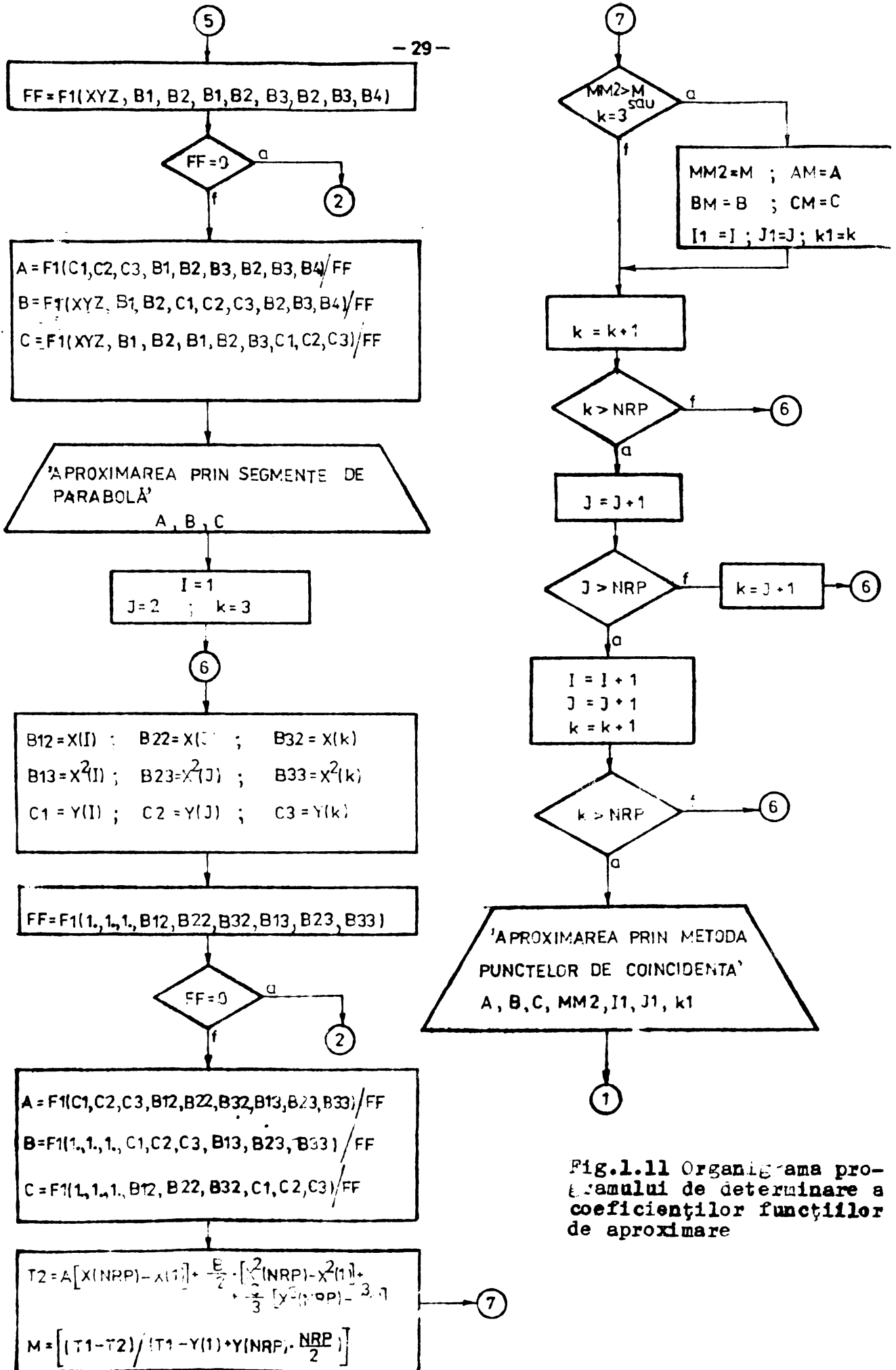


Fig.1.11 Organigrama programului de determinare a coeficienților funcțiilor de aproximare

urma reprezentării grafice ale acestora. S-au obținut aproxima-
te de cele două tipuri impuse, în majoritate cele optime rezulu-
tind pentru coeficienți determinați prin metoda celor mai mici
pătrate, iar expresiile lor se prezintă astfel:

- în tabelele 1, 2 și 3 pentru oțelul OLC-45;
- în tabelele 4, 5 și 6 pentru oțelul OLT-35;
- în tabelele 7 și 8 pentru oțelul 18MoMnCr;
- în tabelul 9 pentru oțeluri cu 0,4 - 0,5 % C.

Absența determinărilor experimentale ale dependenței
 $\chi_m = f(H, \nu)$, pentru valori ale intensității cimpului magne-
tic inferioare lui 10^7 A/m, au impus considerarea pentru acest
domeniu a unei caracteristici $\chi_m = f(H)$ aproximată analitic
după caracteristica standard de magnetizare a mediului feroma-
netic considerat, racordată la aproximația caracteristicii ex-
perimentale în domeniul de H mic.

Pentru valori ale cimpului termic superiorare punctului
Curie (ν_c), toate aproximațiile $\chi_m = f(H)$ converg spre valo-
rea zero, iar aproximațiile $\mu = \mu(H)$ spre valoarea permeabili-
tății magnetice a vidului.

2. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC

Abordarea problemei cuplate de câmp electromagnetic și termic în cazul general, adică cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție, este destul de dificilă. Ea este specifică problemelor de curenți turbionari și are o mare implicație în multe tehnologii electrice. Astfel, în cazul încălzirii prin inducție, curenții turbionari creați în piesa de lucru de tensiunile electromotoare induse o încălzesc prin efect electrocaloric, aceasta încălzită își schimbă parametrii magnetici și electricei ceea ce duce la modificarea distribuției curenților turbionari.

În literatura de specialitate accesibilă autorului această problemă este mai puțin tratată. Astfel, în [10], se arată o varietate de modele de tipul STEFAN care prezintă problema cuplată prin modele de câmp care folosesc \vec{H} , \vec{J} și \vec{A} . Se descriu metodele de rezolvare numerică folosite și rezultatele numerice obținute.

În [23] se tratează o problemă cuplată de câmp electromagnetic și termic, modelul de câmp electromagnetic presupunând un mediu liniar, neomogen, iar modelul de câmp termic presupune conductivități termice diferite după cele trei direcții ale sistemului cartezian considerat, dar conductivitatea electrică a mediului este constantă.

Având în vedere importanța deosebită pe care o are această problemă, legată de interesul major al aplicațiilor în ingineria electrică, în prezentul capitol, pe baza formelor locale ale legilor câmpului electromagnetic și ale transmisiei căldurii, s-au scris ecuațiile cuplate ale câmpurilor electromagnetice cvazistaționare și termice cu precizarea condițiilor de frontieră, acestea s-au particularizat pentru cazul câmpurilor plan-paralele la diverse geometrii ale mediilor feromagnetice și s-au scris expresiile puterilor disipate în vederea evaluării efectului electrocaloric al curenților turbionari. Dezvoltările prezentate de autor în paragrafele 2.2, 2.3 și 2.4 nu sînt menționate în bibliografia prezentată.

2.1. Formele locale ale legilor transmisiei căldurii

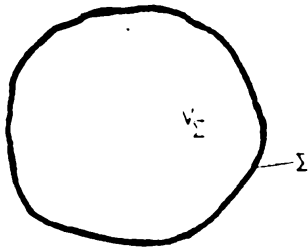
Transferul de căldură în problemele de curenți turbionari pe care le urmărim se face prin conducție interioară și prin conducție exterioară. Transferul prin conducție interioară

este dat de legea lui Fourier care ne arată că vectorul densitate al fluxului termic este direct proporțional cu gradientul câmpului termic (al temperaturii), constanta de proporționalitate fiind conductivitatea termică interioară și cu semn schimbat, adică:

$$\bar{q}_v = -\lambda \text{ grad } \vartheta \quad (2.1)$$

Se menționează că, în general, conductivitatea λ poate fi funcție de temperatura.

Fie, p , căldura dezvoltată în unitatea de volum și în unitatea de timp într-un mediu conductor oarecare. În acest caz, dacă ne referim la suprafața Σ , ce mărginește un domeniu având volumul V_Σ , figura 2.1, se poate scrie următoarea ecuație de bilanț:



$$\int_{V_\Sigma} p \, dv = \oint_{\Sigma} \bar{q}_v \, d\bar{s} + \int_{V_\Sigma} g'c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \, dv \quad (2.2)$$

În ipoteza că, în V_Σ transferul de căldură se face exclusiv prin conduc-

Fig.2.1 Domeniu conductor oarecare, se poate scrie:

$$\int_{V_\Sigma} p \, dv = \int_{V_\Sigma} (\text{div } \bar{q}_v + g'c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}) \, dv$$

și cum V_Σ este arbitrar, rezulta:

$$p = \text{div } \bar{q}_v + g'c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

sau:

$$-\nabla \lambda \cdot \nabla \vartheta - \lambda \nabla^2 \vartheta + g'c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = p \quad (2.3)$$

Transferul prin conducție exterioară este dat de legea lui Newton care ne arată că vectorul densitate al fluxului termic prin conducție exterioară este direct proporțional cu diferența de temperatură de la suprafața mediului și a punctelor din vecinătatea acesteia, constanta de proporționalitate fiind conductivitatea termică exterioară, adică:

$$\bar{q}_o \cdot \bar{n} = q_o = \alpha (\vartheta - \vartheta_o) \quad (2.4)$$

Ecuația (2.4) mai arată că densitatea fluxului de căldură, \bar{q}_o , este ortogonală la suprafața mediului.

Pentru a obține forma bilanțului termic la suprafața de

separație între mediul considerat 1 și un alt mediu 2 în care nu se dezvoltă căldură, iar temperatura este constantă în timp în mediul 2, se consideră cilindrul elementar din figura 2.2, ce are

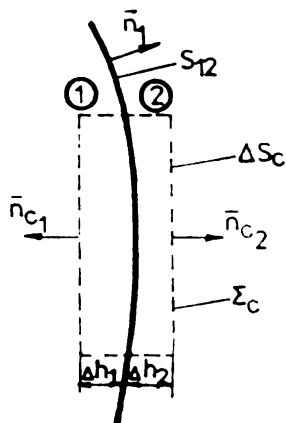


Fig.2.2 Domeniu cilindric de separație a două medii avînd volumul $\Delta V_{\Sigma c}$

înălțimea $\Delta n = \Delta h_1 + \Delta h_2$ mult mai mică ca raza bazei. Aplicînd forma integrală a bilanțului termic, (relația 2.2), volumului cilindric $\Delta V_{\Sigma c}$ și neglijînd fluxul termic prin suprafața sa laterală, se obține:

$$p \cdot \Delta S_c \cdot \Delta h_1 = \bar{n}_{c1} \cdot \Delta S_c \cdot \bar{q}_1 + \bar{n}_{c2} \cdot \Delta S_c \cdot \bar{q}_2 + \rho \cdot c \cdot \Delta S_c \cdot \Delta h_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

care prin împărțire cu ΔS_c și luînd limita cînd $\Delta h_1 \rightarrow \infty$, $\Delta h_2 \rightarrow 0$, conduce la:

$$-\bar{n}_1 \cdot \bar{q}_1 + \bar{n}_1 \cdot \bar{q}_2 = 0$$

deoarece: $\lim_{\Delta h_1 \rightarrow 0} \bar{n}_{c1} = -\bar{n}_1$ și $\lim_{\Delta h_2 \rightarrow 0} \bar{n}_{c2} = \bar{n}_1$

Folosind expresia (2.1), pentru q_1 , avem: $\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n_1} + q_p = 0$ (2,5)

2.3. Ecuațiile cuplate ale cîmpurilor electro-magnetic cvazistacionar și termic

Sie un domeniu dintr-un mediu feromagnetic oarecare, avînd volumul V_{Σ} și limitat de suprafața închisă Σ , ca în figura 2.3, caracterizat prin aceea că permeabilitatea magnetică este funcție de intensitatea cîmpului magnetic și de temperatură, iar conductivitatea numai de temperatură. Cîmpurile electromagnetic cvazistacionar și termic satisfac sistemul de ecuații:

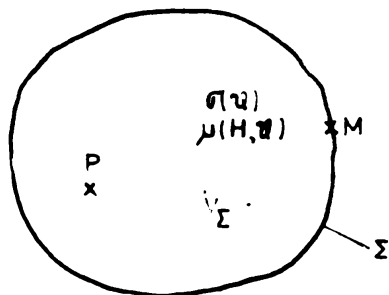


Fig.2.3 Domeniu dintr-un mediu feromagnetic avînd volumul V_{Σ}

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J},$$

$$\text{rot } \frac{\vec{J}}{\sigma(\vartheta)} = -\frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) \vec{H}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta - \lambda \nabla^2 \vartheta + \rho \cdot c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} \quad (2.6)$$

și condiția de frontieră: $\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + q_0 = 0$ pe Σ

S-a presupus regimul cvazistacionar, mediul izotrop, fără câmpuri imprimate, lipsit de magnetizație permanentă și că sînt cunoscute caracteristicile $\sigma(\vartheta)$ și $\mu = \mu(H, \vartheta)$ ca funcții univoce. Dacă în punctele de pe fața interioară a lui Σ , temperatura este constantă (Σ fiind deci o suprafața izotermă), ultima ecuație din sistemul (2.6) reprezintă o condiție de tip mixt (Cauchy) deoarece λ este o constantă, iar q_0 este o funcție liniară de temperatură.

În cele ce urmează se va presupune că sistemul (2.6) admite o soluție unică în condițiile precizate de teorema unicității pentru medii liniare, adică în domeniul V_Σ se cunosc la $t = 0$: temperatura $\vartheta = \vartheta(0, P)$, densitatea de curent $\vec{J} = \vec{J}(0, P)$, intensitatea cîmpului magnetic $\vec{H} = \vec{H}(0, P)$ și pe suprafața Σ se dă în fiecare moment temperatura ϑ_0 și componenta tangentă a intensității cîmpului magnetic. De asemenea se presupun date curbele $\sigma(\vartheta)$ și $\mu(H, \vartheta)$.

2.3 Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum

După ce s-au determinat soluțiile pentru intensitatea cîmpului magnetic $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ și temperatura $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$, la fiecare interval de timp, se poate calcula puterea medie în unitatea de volum, prin efect electrocaloric, cu relația:

$$p = \int_{V_\Sigma} \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} dv = \int_{V_\Sigma} \frac{|\text{rot } \vec{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} dv \quad (2.7)$$

Dacă fenomenele sînt periodice, puterea activă, adică puterea medie pe un interval de o perioadă, se calculează cu relația:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (2.8)$$

2.4 Cazul cîmpurilor plan-paralele

Se consideră un cilindru feromagnetic de lungime infinite și secțiune arbitrară plasat în interiorul unei bobine care este excitată în curent alternativ, ca în figura 2.4

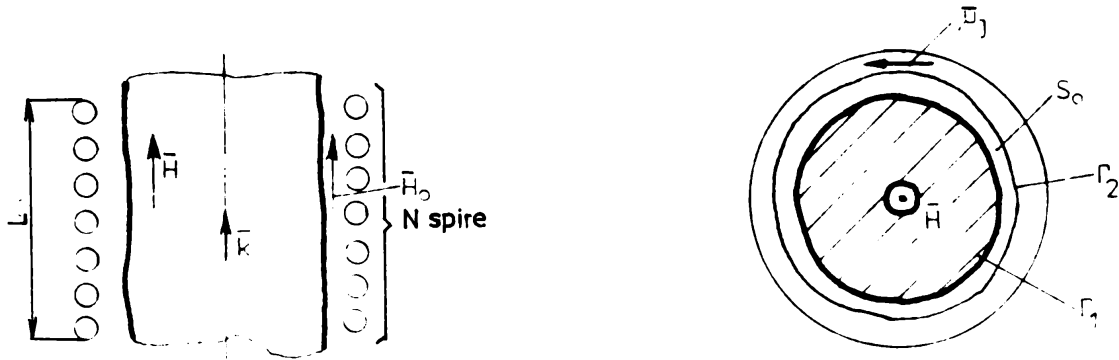


Fig.2.4 Cilindru feromagnetic infinit plasat în câmp magnetic

În legătură cu condițiile de frontieră în practică interesează următoarele două cazuri:

a) Intensitatea curentului ce alimentează bobina este cunoscută, fiind o funcție sinusoidală dată. Se cunoaște deci densitatea pînzei de curent cu care a fost echivalată bobina :

$$\vec{J}_s = \text{Im } N_1 \sin \omega t \cdot \vec{u}_j \quad (2.9)$$

Intensitatea cîmpului magnetic pe frontiera Γ_2 devine cunoscută:

$$\vec{H}_0 = \vec{J}_s \cdot \vec{k}, N_1 = \frac{N}{L} \quad (2.10)$$

deoarece în exteriorul bobinei $\vec{H}_0 = 0$.

Dacă distanțele între curbele Γ_1 și Γ_2 sînt mici, \vec{H}_0 poate fi considerat constant pe suprafața S_0 mărginită de curbele Γ_1 și Γ_2 .

$$\text{Cum } \vec{H} = \vec{H}(x, y, z) = H(x, y, z) \vec{k}. \quad (2.11)$$

la un moment dat, este avantajos ca sistemul de ecuații (2.6) să fie scris numai în funcție de H:

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\sigma(z)} \text{rot } \vec{H} \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

care cu relația (2.11) devine:

$$\nabla \times \left[-\vec{k} \times \frac{1}{\sigma(z)} \nabla H \right] = -\vec{k} \left[\nabla \frac{1}{\sigma(z)} \cdot \nabla H + \frac{1}{\sigma(z)} \nabla^2 H \right] = - \frac{\partial}{\partial t} B \cdot \vec{k}$$

sau:

$$\nabla \frac{1}{\sigma(z)} \cdot \nabla H + \frac{1}{\sigma(z)} \nabla^2 H = \frac{\partial}{\partial t} B, \quad (2.12)$$

unde s-a ținut seama că σ și h nu depind de z .

A treia ecuație din sistemul (2.6) devine:

$$-\nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta - \lambda \nabla^2\vartheta + \rho'c \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{(\bar{k} \times \nabla H)^2}{\sigma(\vartheta)} \quad (2.13)$$

iar condițiile de frontieră se scriu:

$$\begin{aligned} H &= H_0 \\ \lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + q_0 &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

b) Se cunoaște tensiunea de alimentare a bobinei ce exercită câmpul exterior. Dacă se poate neglija rezistența spirelor bobinei, atunci tensiunea într-o spirală se poate scrie în forma:

$$u_{es} = -\frac{u_b}{N} = -\frac{d\phi}{dt} = -\int_{S_{r_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds - \mu_0 \int_{S_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} ds$$

adică:

$$\int_{S_{r_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds = \frac{u_b}{N} - \mu_0 \int_{S_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} ds \quad (2.15)$$

H_0 este intensitatea cîmpului magnetic pe suprafața S_0 . Ca urmare condițiile de frontieră vor fi:

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_1}} \frac{\partial B}{\partial t} ds + \mu_0 \int_{S_0} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \right)_{r_1} ds &= \frac{u_b}{N} \\ \lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + q_0 &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Astfel, pentru acest caz sistemul care trebuie integrat

este:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \nabla H + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \nabla^2 H &= \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] \\ -\nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta - \lambda \nabla^2\vartheta + \rho'c \frac{\partial\vartheta}{\partial t} &= \frac{(\bar{k} \times \nabla H)^2}{\sigma(\vartheta)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

în condițiile de frontieră:

$$\begin{aligned} H &= H_0 \\ \lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

sau:

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_1}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \vartheta) H] ds + \mu_0 \int_{S_0} \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \right)_{r_1} ds &= \frac{u_{bm} \sin \omega t}{N} \\ \lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial n} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

În urma determinării soluțiilor $\vec{E} = \vec{E}(x, y, t)$ și $\vec{H} = \vec{H}(x, y, t)$, la fiecare interval de timp, se poate calcula puterea medie în unitatea de volum, prin efect electrocaloric, cu relația:

$$P = \frac{1}{S_{r1}} \int_{S_{r1}} \frac{|\text{rot } \vec{H}|^2}{\sigma(\vartheta)} ds \quad (2.20)$$

și puterea medie pe un interval de o perioadă cu formula (2.8).

2.4.1. Placă feromagnetică

Se consideră o placă feromagnetică de lățime mare în raport cu grosimea sa Δ și lungime infinită, ca în figura 2.5.

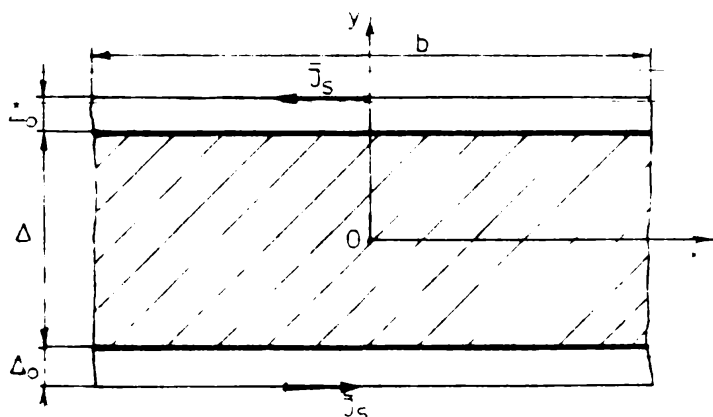


Fig.2.5 Placă feromagnetică de lățime mare față de grosimea Δ

În ipoteza a) ecuațiile (2.17) și condițiile de frontieră (2.18) obțin formele particulare:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sigma(\vartheta)} \right) \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(\vartheta) H] \quad (2.21)$$

$$H\left(\pm \frac{\Delta}{2}, t\right) = J_s = J_{sm} \sin \omega t ; J_{sm} = i_m N_1$$

sau:
$$H\left(\pm \frac{\Delta}{2}, t\right) = H_0 \sin \omega t$$

și:

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 - \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \beta' c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 \quad (2.22)$$

$$\pm \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } y = \pm \frac{\Delta}{2}$$

În ipoteza b) se modifică față de a) numai cea de-a doua ecuație din (2.21). Astfel, fiindu-se vorba de alimentare

a bobinei ce exercită cîmpul magnetic exterior, ca fiind:

$$U_b = U_{b_m} \sin \omega t. \quad (2.23)$$

tensiunea care revine unei spire va fi:

$$U_{bs} = \frac{U_b}{N} = \frac{U_{b_m} \sin \omega t}{N}. \quad (2.24)$$

iar cea corespunzătoare unității de lungime:

$$U_b^* = \frac{U_{bs}}{b} = U \sin \omega t \quad (2.25)$$

(cu acestea prima ecuație din (2.16), devine:

$$2 \Delta_0 \mu_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{y=\frac{\Delta}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\partial}{\partial t} [M(H, \mathcal{V})] dy = U_b^* \quad (2.26)$$

cu:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Rezolvarea acestor ecuații este dificilă și posibilă doar prin metode aproximative. Într-un caz particular cînd mediul ar avea permeabilitatea magnetică constantă, de exemplu egală cu cea a vidului, iar din punctul de vedere al cîmpului termic \mathcal{V} , procesele s-ar considera ca o succesiune de stări staționare (termenul $\sigma' c \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0$), pornind cu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, prima ecuație a sistemului (2.21), devine:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \sigma(\mathcal{V}_0) \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

pentru care se încearcă o soluție de forma:

$$H_1 = H_{1m} e^{\beta y} \sin \omega t \quad \text{cu } \beta = \pm \sqrt{\sigma(\mathcal{V}_0) \mu_0},$$

deci:

$$H_1 = (C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}) \sin \omega t. \quad (2.28)$$

unde constantele C_1 și C_2 se calculează din condițiile de frontieră. Astfel, conform ecuației a doua din (2.21), se obțin:

$$\begin{aligned} C_1 e^{\beta \frac{\Delta}{2}} + C_2 e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} &= J_{sm} \\ C_1 e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} + C_2 e^{\beta \frac{\Delta}{2}} &= J_{sm} \end{aligned}$$

de unde, avem:

$$C_1 = C_2 = J_{sm} \frac{e^{\beta \frac{\Delta}{2}} - e^{-\beta \frac{\Delta}{2}}}{e^{\beta \Delta} - e^{-\beta \Delta}}$$

și

$$H_1 = J_{sm} \frac{\operatorname{sh} \beta (\Delta/2 + y) + \operatorname{sh} \beta (\Delta/2 - y)}{\operatorname{sh} \beta \Delta} \sin \omega t$$

cu:

$$H_{1ef} = \frac{J_{sm}}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh}\beta(\Delta/2+y) + \operatorname{sh}\beta(\Delta/2-y)}{\operatorname{sh}\beta\Delta} \quad (2.29)$$

iar conform ecuațiilor (2.26), dar cu: $u_0 = u_{0m} \cos\omega t$, obținem:

$$\begin{aligned} u_{bs}^* &= 2\Delta_0 \mu_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{y=\frac{\Delta}{2}} + 2 \int_0^{\Delta/2} u_0 \frac{\partial H}{\partial t} dy = \\ &= \left\{ 2\Delta_0 \mu_0 \omega C_1 \cdot 2 \operatorname{ch}\beta \frac{\Delta}{2} + 2 \mu_0 \omega \frac{C_1}{3} \left[e^{\beta \frac{\Delta}{2}} - 1 + 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\beta \cdot \frac{\Delta}{2}} \right] \right\} \cos\omega t \quad C_1 = C_2, \end{aligned}$$

de unde rezulta:

$$C_1 = \frac{U_{0m}}{4N \mu_0 \omega \left[\Delta_0 \operatorname{ch}\beta \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{sh}\beta \frac{\Delta}{2} \right]}$$

și:

$$H_1 = 2C_1 \operatorname{ch}\beta y \sin\omega t$$

cu:

$$H_{1ef} = \frac{2C_1}{\sqrt{2}} \operatorname{ch}\beta y \quad (2.30)$$

Considerând λ constant, cîmpul temperaturii ϑ_1 rezultă prin integrarea ecuației:

$$-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\sigma(\vartheta_0)} \left(\frac{\partial H_{1ef}}{\partial y} \right)^2 \quad (2.31)$$

prin mijloace numerice, în condiția de frontieră dată de a doua relație din (2.22), iar valoarea lui H_{1ef} dată de una din relațiile (2.29) sau (2.30). Valorile obținute pentru cîmpul termic, $\vartheta_1 = \vartheta_1(y)$ se introduc în prima ecuație din (2.21) care apoi se integrează numeric, procedeul continuînd pînă cînd se obține o precizie impusă pentru cîmpul magnetic și pentru cel termic.

În concluzie, se poate spune că rezolvarea ecuațiilor de cîmp magnetic și termic cuplate, în condițiile de frontieră precizate, este posibilă doar prin mijloace numerice. Astfel, pentru $\vartheta = \vartheta_0$, avem $\sigma(\vartheta_0)$ și $\mu(H, \vartheta_0) = f_0(H)$, deci prima ecuație din (2.21) se poate integra numeric în una din cele două condiții de frontieră aferente ipotezelor a) sau b). Soluția

obținută pentru H se introduce în prima ecuație din (2.22) care integrată numeric va da ca soluție câmpul termic ψ , iar în continuare procesul iterativ ar trebui condus prin mijloace numerice adecvate, la fiecare interval de timp se determină puterea medie dezvoltată în unitatea de volum, cu relația:

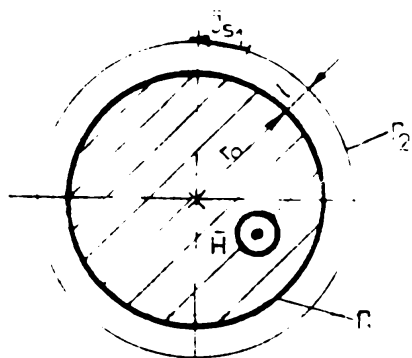
$$p = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\psi)} dy, \quad (2.22)$$

iar puterea activă medie din unitatea de volum se calculează astfel:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{f}{\Delta T} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dy \int_0^T \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\psi)} dt \quad (2.23)$$

2.4.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune circulară și lungime infinită plasat în interiorul unei bobine care este excitată în curent alternativ, prezentat în secțiune în figura 2.6.



În coordonate cilindrice ecuațiile (2.12) și (2.13), obțin formele particulare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sigma(\psi)} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{\sigma(\psi)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu(H, \psi) H \right] \quad (2.34) \\ - \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \rho \cdot c \frac{\partial \psi}{\partial t} = \\ = \frac{1}{\sigma(\psi)} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

Fig.2.6 Cilindru feromagnetic de secțiune circulară și rază r_0

care trebuiesc integrate în condițiile de frontieră specifice celor două ipoteze și în condiția $\lambda = \text{ct}$. Această ultimă condiție se pune de fapt în toate ecuațiile similare prezentate în această lucrare.

În ipoteza a), condițiile de frontieră, devin:

$$H = H_0 = J_s$$

$$\lambda \frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha (\psi - \psi_0) = 0 \quad \text{pentru } r = r_0 \quad (2.35)$$

iar în ipoteza b), avem:

$$\int_{S_{r_0}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \mathcal{V})H] ds + \mu_0 S_0 \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.36)$$

care se asociază cu ecuația a doua din (2.35).

Aplicînd legea inducției electromagnetice pe conturul Γ_1 , se obține:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \vec{J} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{l} = \\ &= - \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \frac{\partial H}{\partial t} dl = - \int_{S_{r_0}} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds. \end{aligned} \quad (2.37)$$

adică:

$$\frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} \cdot 2\pi r_0 = \int_{S_{r_0}} \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \mathcal{V})H] ds$$

Relația (2.36), obține forma:

$$\frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} \cdot 2\pi r_0 + \mu_0 (2\pi r_0 l + \pi l^2) \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N}$$

deoarece: $S_0 = \pi(r_0 + l)^2 - \pi r_0^2 = \pi l^2 + 2\pi r_0 l$; l , fiind distanța între cercurile Γ_2 și Γ_1 .

Prin împărțire cu $2\pi r_0$, se obține:

$$\frac{1}{\sigma(\mathcal{V})} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} + \mu_0 l \left(1 + \frac{l}{2r_0} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r=r_0} = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{2\pi r_0 N} \quad (2.38)$$

Integrarea ecuațiilor (2.34), în condițiile de frontieră precizate, se face prin mijloace numerice așa cum s-a prezentat în cazul plăcii feromagnetice.

Expresiile pentru calculul puterilor medii în unitatea de volum, respectiv active medii din unitatea de volum sînt:

$$p = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\nu)} r dr. \quad (2.39)$$

respectiv

$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{2f}{r_0^2} \int_0^{r_0} r dr \int_0^T \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\nu)} dt \quad (2.40)$$

2.4.5. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară și lungime infinită plasat într-un câmp magnetic variabil în timp, prezentat în secțiune în figura 2.7.

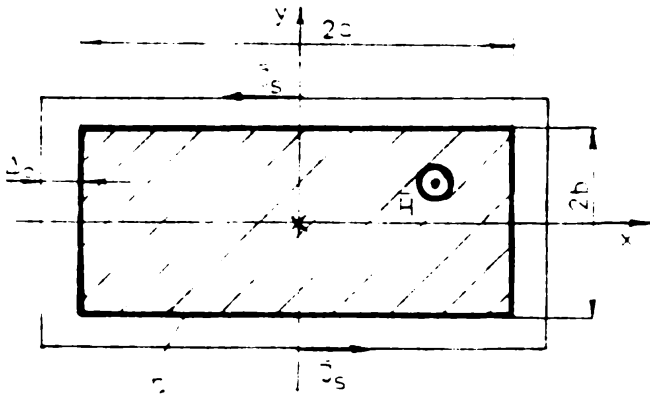


Fig.2.7 Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

Ecuatiile (2.12) și (2.13), obțin formele particulare:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\sigma(\nu)} \right) \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\sigma(\nu)} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \nu) H] \quad (2.41)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} \right) + \sigma' c \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(\nu)} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right]$$

care trebuiesc integrate în condițiile de frontieră după cum urmează:

- în ipoteza a):

$$\psi(\pm a, y, t) = J_s ; H(x, \pm b, t) = J_s \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \text{și} \quad \pm \lambda \frac{\partial \nu}{\partial x} + \alpha(\nu - \nu_0) &= 0 \quad \text{pentru } x = \pm a \\ \pm \lambda \frac{\partial \nu}{\partial y} + \alpha(\nu - \nu_0) &= 0 \quad \text{pentru } y = \pm b \end{aligned} \quad (2.43)$$

- în ipoteza b):

$$4 \left[\mu_0 \Delta_0 (a + \Delta_0) + \mu_0 \Delta_0 b \right] \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{r_1} + \iint_{D_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu(H, \mathcal{V}) H \right] dx dy = \frac{U_{bm} \sin \omega t}{N} \quad (2.44)$$

cu D:
$$\begin{aligned} x &= \pm a \\ y &= \pm b \end{aligned}$$

și relațiile (2.43) care rămân aceleași.

Integrarea ecuațiilor (2.41), în condițiile de frontieră precizate, este posibilă numai prin mijloace numerice așa cum s-a precizat anterior.

Expresiile puterilor medii în unitatea de volum respectiv active medii din unitatea de volum sînt:

$$p = \frac{1}{4ab} \iint_{D_0} \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\mathcal{V})} dx dy \quad (2.45)$$

respectiv

$$P_m = \frac{1}{4ab} \int_0^T p dt = \frac{f}{4ab} \iint_{D_0} dx dy \int_0^T \frac{|\text{rot } \bar{H}|^2}{\sigma(\mathcal{V})} dt \quad (2.46)$$

cu D:
$$\begin{aligned} x &= \pm a \\ y &= \pm b \end{aligned}$$

5. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC, NEGLIJÂND CÂMPUL MAGNETIC DE REACȚIE

În acest capitol, avînd la bază ecuațiile generale, (2.6), ale cîmpului electromagnetic cuplat cu cel termic cu luarea în considerare a cîmpului magnetic de reacție, se prezintă formele generale ale ecuațiilor cuplate pentru cele două cîmpuri, neglijînd cîmpul magnetic de reacție, într-un domeniu conductor avînd configurația arbitrară și rezistivitatea sa funcție de temperatură, particularizarea lor pentru cîmpurile plan-paralele, iar în cazul acestora pentru geometriile prezentate în capitolul 2, precum și deducerea expresiilor puterilor disipate prin curenți turbionari în mediile considerate. Se rezolvă analitic unele ecuații particulare la prima iterație și se prezintă algoritmul de rezolvare numerică în vederea găsirii soluțiilor.

Se apreciază că rezolvarea acestei probleme, prin introducerea potențialului electric vector al cîmpului densității curenților turbionari, A_j , prezintă importanță în unele probleme de inginerie electrică unde efectul de reacție nu este pronunțat și se poate neglija. De asemenea, pentru mediile la care dependența $\mu(H, \vartheta)$ nu se cunoaște, modelele prezentate în acest capitol oferă o rezolvare aproximativă a problemei cuplate, nefiind lipsita de importanță nici analiza calitativă a fenomenelor prin prisma rezultatelor numerice obținute, comparativ cu cele oferite de soluția analitică în cazul problemei necuplate.

5.1. Ecuațiile generale ale cîmpurilor electromagnetic și termic

Notînd cu $\vec{B}_e = \vec{B}_e(P)$, inducția magnetică exterioară presupusă dată în fiecare punct P al domeniului considerat, (figura 2.3), sistemul (2.6), devine:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_e &= 0 \\ \operatorname{rot} \frac{\vec{J}}{\sigma(\vartheta)} &= - \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$- \nabla \lambda \cdot \nabla \vartheta - \lambda \cdot \nabla^2 \vartheta + q_1 \cdot c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)}$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + q_0 = 0 \quad \text{pe } \Sigma$$

Din prima ecuație a sistemului (2.6) rezulta $\text{div } \vec{J} = 0$, adică $\vec{J} = \text{rot } \vec{A}_J$. Mărimea vectorială \vec{A}_J , denumită potențial electric vector, este determinată numai de distribuția curenților electrice în regiunile conductoare.

Componenta sa potențială fiind arbitrara, se va lua $\text{div } \vec{A}_J = 0$. Ecuațiile a doua respectiv a treia din (3.1), devin:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\sigma(\nu)} \nabla \times \vec{A}_J \right] = - \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial t} \text{ sau: } \nabla \frac{1}{\sigma(\nu)} \times (\nabla \times \vec{A}_J) - \frac{1}{\sigma(\nu)} \nabla^2 \vec{A}_J = - \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial t} \quad (3.2)$$

respectiv:
$$-\nabla \lambda \cdot \nabla \nu - \lambda \nabla^2 \nu + \rho' c \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{|\text{rot } \vec{A}_J|^2}{\sigma(\nu)}$$

Sistemul de ecuații (3.2) trebuie integrat în următoarele condiții de frontieră:

$$\begin{aligned} J_n(M, t) = 0 & \quad \text{sau } \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}_J = 0 \\ \lambda \frac{\partial \nu}{\partial n} + \alpha(\nu - \nu_0) = 0 & \quad \text{pe } \Sigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

deoarece suprafața Σ fiind de separație între un mediu conductor și aer, ea este o suprafață de cîmp pentru densitatea de curent \vec{J} și deci componenta normală J_n este nulă.

Se remarcă faptul că, prima condiție de frontieră din (3.3) se poate înlocui cu una echivalentă. Într-adevăr, luînd în considerare definiția rotorului:

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}_J = \lim_{\Delta S_r \rightarrow 0} \frac{\oint_r \vec{A}_J \cdot d\vec{l}}{\Delta S_r}$$

și presupunînd doar curbe Γ situate pe suprafața Σ , în punctele de pe fața interioară, la $\vec{A}_J = 0$ avem $\oint_r \vec{A}_J \cdot d\vec{l} = 0$ ($\forall M \in \Sigma$) și deci $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}_J = 0$.

Deci, potențialul electric vector \vec{A}_J care satisface egalitățile:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}_J &= 0 \\ \text{rot } \vec{A}_J &= \vec{c} \end{aligned} \quad (3.4)$$

este unic determinat dacă se ia $\vec{A}_J = 0$ pe frontiera domeniului.

Așadar, sistemul de ecuații care trebuie integrat, devine:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{\sigma(\psi)} \times (\nabla \times \bar{A}_J) - \frac{1}{\sigma(\psi)} \nabla^2 \bar{A}_J &= - \frac{\partial \bar{B}_e}{\partial t} \\ - \nabla \lambda \cdot \nabla \psi - \lambda \nabla^2 \psi + \rho' c \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{|\text{rot } \bar{A}_J|^2}{\sigma(\psi)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

în condițiile de frontieră:

$$\begin{aligned} \bar{A}_J &= 0 \\ \lambda \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha (\psi - \psi_0) &= 0 \quad \text{pe } \Sigma \end{aligned} \quad (3.6)$$

Modelul de câmp electromagnetic și termic descris de sistemul de ecuații (3.5) și de condițiile de frontieră (3.6) poate fi rezolvat în două ipoteze.

Astfel, dacă se neglijează căldura absorbită de mediu, atunci prin neglițarea termenului care conține $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, a doua ecuație a sistemului (3.5) se simplifică.

Această ipoteză semnifică faptul că regimul final este considerat, în procesul iterativ, ca o succesiune de regimuri staționare. În acest caz, procesul iterativ ar trebui condus așa cum se arată în cele de mai jos. Se admite inițial un $\psi = \psi_0$, același în toate punctele mediului; se integrează prima ecuație din (3.5) în condiția de frontieră dată de prima ecuație din (3.6) (la prima iterație $\nabla \frac{1}{\sigma(\psi)} = 0$). Soluția \bar{A}_{J1} determină pe $\bar{J}_1 = \text{rot } \bar{A}_{J1}$, se calculează apoi \bar{J}_{1ef}^2 care este introdus în membrul drept al celei de-a doua ecuație din (3.5). Aceasta se integrează (neglijând termenul $\rho' c \frac{\partial \psi}{\partial t}$), în condiția de frontieră dată de ecuația a doua din (3.6), determinându-se un ψ_1 ca funcție de punct. Cu noua valoare a câmpului termic $\psi = \psi_1$, se calculează $\sigma(\psi_1)$ care acum este funcție de punct; se integrează din nou prima ecuație determinându-se \bar{J}_{2ef}^2 . Procesul iterativ ar trebui să continue pînă cînd se atinge o precizie impusă pentru potențialul electric vector și pentru câmpul termic.

În situația în care nu se neglijează termenul $\rho' c \frac{\partial \psi}{\partial t}$, atunci ținînd seama de faptul că procesul termic are constantă de timp mare în raport cu perioada fenomenelor electromagnetice, în membrul drept al celei de-a doua ecuații din (3.5), la fiecare e-

tapă a iterației se introduce valoarea sa medie pe o perioadă:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{|\text{rot } \bar{A}_J|}{\sigma(\vartheta)} dt \quad (3.7)$$

Procesul iterativ ar trebui să decurgă similar cu cel descris anterior pînă la atingerea preciziei impuse pentru cele două cîmpuri.

3.2 Puterea medie dezvoltată în unitatea de volum

Dupa ce s-au determinat soluțiile pentru potențialul electric vector $\bar{A}_J = \bar{A}_J(x, y, z, t)$ și pentru cîmpul termic $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$, se poate calcula puterea disipată, prin efect electrocaloric, în volumul V_Σ . Într-adevăr, pornind de la operația:

$$\nabla \cdot \left(\bar{A}_J \times \frac{\bar{J}}{\sigma(\vartheta)} \right) = \frac{\bar{J}}{\sigma(\vartheta)} \text{rot } \bar{A}_J - \bar{A}_J \text{rot } \frac{\bar{J}}{\sigma(\vartheta)} = \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} + \bar{A}_J \cdot \frac{\partial \bar{B}_e}{\partial t} \quad (5.8)$$

care prin integrare pe V_Σ conduce la:

$$p = \int_{V_\Sigma} \frac{J^2}{\sigma(\vartheta)} dv = - \int_{V_\Sigma} \bar{A}_J \cdot \frac{\partial \bar{B}_e}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma} \left(\bar{A}_J \times \frac{\bar{J}}{\sigma(\vartheta)} \right) \cdot \bar{c}s. \quad (3.9)$$

cu $\bar{A}_J = 0$ pe Σ , se obține:

$$p = - \int_{V_\Sigma} \bar{A}_J \cdot \frac{\partial \bar{B}_e}{\partial t} dv \quad (5.10)$$

Dacă procesele sînt periodice, puterea activă consumată în V_Σ va fi:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = - \int_{V_\Sigma} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{A}_J \cdot \frac{\partial \bar{B}_e}{\partial t} dt \quad (5.11)$$

3.3 Cazul cîmpurilor plan-paralele

Prin introducerea unei funcții scalare φ , în [15], se calculează pierderile produse prin dezvoltarea de căldură de cîmpul considerat plan-paralel, necuplat cu cel termic, al unor curenți turbionari rezultați în urma fenomenului de inducție electromagnetice generat de un cîmp magnetic exterior, într-un cilindru cu secțiunea de geometrie arbitrară. Funcția introdusă prin relația $\bar{E} = \nabla \varphi \times \bar{E}$, reprezintă raportul între valoarea potențialului electric vector \bar{A}_J și conductivitatea σ .

În acest paragraf se presupune de asemenea că vectorul inducție magnetică are doar componenta după axa Oz, ca în figura 3.1, adică: $\vec{B}_e = B_e(x,y,t)\vec{k}$. În această ipoteză vectorul densitate de curent \vec{j} se găsește în planul xOy și deci potențialul electric vector \vec{A}_J are componentă doar după axa Oz: $\vec{A}_J = A_J(x,y,t)\cdot\vec{k}$

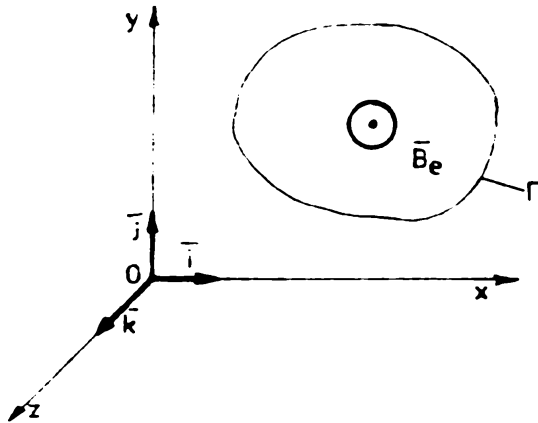


Fig.3.1 Domeniu de câmp plan-paralel.

și deci:

$$\vec{j} = \text{rot } \vec{A}_J = \nabla A_J \times \vec{k}$$

Ecuatiile (3.5)

obțin formele particulare, mai simple:

$$\nabla \frac{1}{\sigma(\nu)} \cdot \nabla A_J + \frac{1}{\sigma(\nu)} \nabla^2 A_J = \frac{\partial B_e}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$-\nabla \lambda \cdot \nabla \nu - \lambda \nabla^2 \nu + \rho' c \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{|\nabla A_J \text{ef}|^2}{\sigma(\nu)}$$

iar condițiile de

frontieră se scriu:

$$A_J = 0$$

pe curba Γ (3.13)

$$\lambda \frac{\partial \nu}{\partial n} + \alpha (\nu - \nu_0) = 0$$

În mediile conductoare cu σ mare primul termen al ecuației potențialul electric vector este neglijabil față de al doilea și de aceea în dezvoltările prezentate în acest capitol se consideră și această ipoteză, verificată prin rularea programelor aferente ecuațiilor de câmp.

În acord cu relațiile (3.10) și (3.11) puterea disipată corespunzătoare unității de lungime va fi:

$$p = - \int_{S_r} A_J \cdot \frac{\partial B_e}{\partial t} ds, \quad (3.14)$$

iar puterea activă rezultă în forma:

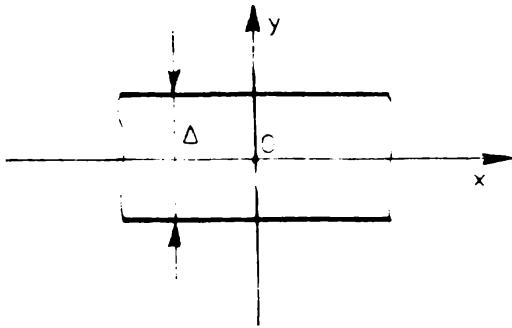
$$P_m = - \int_{S_r} \frac{1}{T} \int_0^T A_J \cdot \frac{\partial B_e}{\partial t} ds \quad (3.15)$$

Modul de rezolvare al ecuațiilor cuplate (3.12), în condițiile de frontieră (3.13), este cel prezentat în paragraful 3.1.

3.3.1 Placă feromagnetică

Se consideră o placă feromagnetică de lățime foarte mare în raport cu grosimea Δ , ca în figura 3.2.

Sistemul de ecuații (3.12), devine:



$$\frac{\partial^2 A_J}{\partial y^2} = \sigma(\nu) \frac{\partial B_e}{\partial t} \quad (3.16)$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial y} - \lambda \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \rho^1 \cdot c \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(\nu)} \left(\frac{\partial A_{Jef}}{\partial y} \right)$$

Fig. 3.2 Placă feromagnetică de grosime Δ .

Pentru a se calcula A_{J1} se integrează prima ecuație din (3.16) de două ori, obținându-se:

$$A_{J_1} = \sigma(\nu_0) \omega \cdot B_m \frac{y^2}{2} \cos \omega t + C_1 \cdot y + C_2$$

deoarece s-a luat $E_e = E_m \sin \omega t$.

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile de frontieră:

$$A_{J_1} = 0 \quad \text{pentru} \quad y = \pm \frac{\Delta}{2} \quad (3.17)$$

Astfel, se obține:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(\nu_0) \omega B_m \frac{\Delta^2}{8} \cos \omega t + C_1 \frac{\Delta}{2} + C_2 \\ 0 &= \sigma(\nu_0) \omega B_m \frac{\Delta^2}{8} \cos \omega t - C_1 \frac{\Delta}{2} + C_2 \end{aligned}$$

din care, rezultă:

$$C_1 = 0 \quad \text{și} \quad C_2 = -\sigma(\nu_0) \omega B_m \frac{\Delta^2}{8} \cos \omega t$$

și deci:

$$A_{J_1} = \frac{\sigma(\nu_0) \omega B_m}{2} \left(y^2 - \frac{\Delta^2}{4} \right) \cos \omega t. \quad (3.18)$$

iar,

$$\left(\frac{\partial A_{J_1}}{\partial y} \right)_{ef}^2 = \frac{\sigma^2(\nu_0) \omega^2 B_m^2}{2} y^2$$

Ca urmare, a doua ecuație din (3.16) care va avea ca soluție pe ϑ_1 , devine:

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} \right)^2 - \lambda \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2} + \rho' \cdot c \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = \frac{\sigma(\vartheta_0) \omega^2 B_m^2}{2\sigma(\vartheta_1)} \cdot y^2 \quad (3.19)$$

Dacă se consideră conductivitatea termică interică independentă de temperatură ($\lambda = \text{ct.}$), ecuația (3.19), se scrie în forma:

$$-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial y^2} + \rho' \cdot c \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = \frac{\sigma^2(\vartheta_0) \omega^2 B_m^2}{2\sigma(\vartheta_1)} y^2 \quad (3.20)$$

care trebuie integrată în condiția de frontieră:

$$\lambda \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \alpha (\vartheta_{1s} - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } y = \pm \frac{\Delta}{2} \quad (3.21)$$

unde ϑ_{1s} este temperatura frontierei.

Soluția obținută pentru ϑ_1 se va folosi în prima ecuație din (3.16) care se integrează din nou pentru a obține A_{j2} . Rezolvarea ecuației (3.20) în condiția de frontieră (3.21) este posibilă numai prin mijloace numerice. Procesul iterativ, condus după metodologia prezentată tot cu ajutorul mijloacelor numerice, încetează când se atinge precizia impusă pentru cele două cimpuri

la fiecare iterație în timp se calculează puterea medie dezvoltată în unitatea de volum:

$$p = -\frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} A_j(y, t) \frac{\partial B_e}{\partial t} dy \quad (3.22)$$

și valoarea ei medie pe o perioadă:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dy \int_0^T A_j(y, t) \frac{\partial B_e}{\partial t} dt \quad (3.23)$$

În ipoteza în care, starea finală este considerată ca o succesiune de stări staționare, ecuația (3.20), devine:

$$\frac{\sigma^2 \vartheta_1}{dy^2} = -\frac{\sigma^2(\vartheta_0) \omega^2 B_m^2}{2\lambda \sigma(\vartheta_1)} y^2 \quad (3.24)$$

Admițînd legea de variație a rezistivității mediului conductor de forma:

$$\rho(\vartheta_1) = \frac{1}{\sigma(\vartheta_1)} = A + B\vartheta_1 + C\vartheta_1^2. \quad (3.25)$$

atunci (3.24), se transformă în:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dy^2} = \frac{-\sigma(\vartheta_0)\omega^2 B_m^2}{2\lambda} (A + B\vartheta_1 + C\vartheta_1^2) y^2 \quad (3.26)$$

care se integreaza numeric in condiția de frontieră (3.21).

Soluția obținută pentru cîmpul termic la prima iterație, ϑ_1 , se introduce în prima ecuație din (3.16) care se integrează și procesul iterativ continuă.

3.3.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune circulară și lungime infinită, ca în figura 3.3. În acest caz

$A_j = A_j(r)$ și în coordonate cilindrice, ecuațiile (3.12), devin:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_j}{\partial r} \right) = \sigma(\vartheta) \frac{\partial B_e}{\partial t} \quad (3.27)$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)^2 - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \rho^2 c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{|\nabla A_{je}|^2}{\sigma(\vartheta)}$$

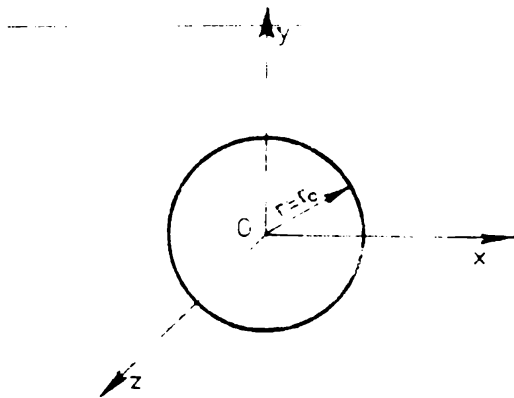


Fig.3.3 Cilindru feromagnetic avînd $r=r_0$ și lungimea infinită

iar condițiile de frontieră se scriu în forma:

$$A_j = 0$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \alpha (\vartheta - \vartheta_0) = 0 \quad \text{pentru } r = r_0 \quad (3.28)$$

Integrînd prima ecuație din (3.27), se obține:

$$A_{j1} = \sigma(\vartheta_0) \frac{\partial B_e}{\partial t} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2.$$

în care $C_1 = 0$, fiindcă A_{J_1} trebuie să fie finit, iar C_2 se determină din prima condiție de frontieră, rezultînd:

$$C_2 = \sigma(\vartheta_0) \frac{\partial B_e}{\partial t} \cdot \frac{r_0^2}{4}$$

și deci:

$$A_{J_1} = \frac{\sigma(\vartheta_0)}{4} \frac{\partial B_e}{\partial t} (r_0^2 - r^2)$$

Considerînd o variație sinusoidală a lui B_e , obținem:

$$A_{J_{1cs}} = \frac{\sigma(\vartheta_0)}{4\sqrt{2}} \omega B_m (r_0^2 - r^2)$$

și deci a doua ecuație din (3.27), în cazul general, devine:

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \right)^2 - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \right) + \sigma' \cdot c \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = \frac{\sigma^2(\vartheta_0)}{8\sigma(\vartheta_1)} \omega^2 B_m^2 \cdot r^2 \quad (3.29)$$

care se integrează în condiția de frontieră dată de ecuația a doua din (3.25), în continuare procesul se desfășoară așa cum s-a arătat anterior.

Dacă $\lambda = \text{ct.}$ și starea finală este considerată ca un lanț de stări staționare, ecuația (3.29), ia forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \right) = - \frac{\sigma^2(\vartheta_0) \omega^2 B_m^2 \cdot r^3}{8\lambda \sigma(\vartheta_1)} \quad (3.30)$$

care se integrează în aceeași condiție de frontieră ca și ecuația (3.29), procesul iterativ continuînd similar.

La fiecare iterație în timp se calculează puterea dezvoltată de unitatea de volum:

$$p = - \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} A_J(r, t) \frac{\partial B_e}{\partial t} r \cdot dr \quad (3.31)$$

și valoarea ei medie pe o perioadă:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = - \frac{2f}{r_0^2} \int_0^{r_0} r dr \int_0^T A_J(r, t) \frac{\partial B_e}{\partial t} dt \quad (3.32)$$

3.3.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

Se consideră un cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară și lungime infinită, ca în figura 3.4.

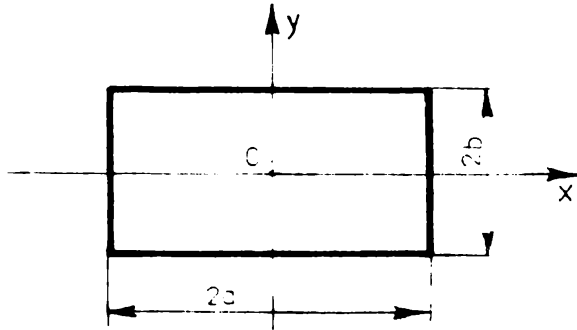


Fig.3.4. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

În acest caz, $A_J = A_J(x, y)$ și ecuațiile (3.12), devin:

$$\frac{\partial^2 A_J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_J}{\partial y^2} = \sigma(\nu) \frac{\partial B_e}{\partial t} \quad (3.33)$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] - \lambda \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} \right) + \rho c \frac{\partial \nu}{\partial t} = \sigma(\nu) \left[\left(\frac{\partial A_J}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_J}{\partial y} \right)^2 \right],$$

iar condițiile de frontieră (3.13), se scriu în forma:

$$\begin{aligned} A_J &= 0 && \text{pentru } x = \pm a \\ & && y = \pm b \\ \pm \lambda \frac{\partial \nu}{\partial x} - \alpha(\nu - \nu_0) &= 0 && \text{pentru } x = \pm a \\ \pm \lambda \frac{\partial \nu}{\partial y} - \alpha(\nu - \nu_0) &= 0 && \text{pentru } y = \pm b \end{aligned} \quad (3.34)$$

Considerînd $\nu = \nu_0$, avem $\sigma(\nu_0)$ cunoscut, soluția primei ecuații din (3.33) se va determina prin metoda separării variabilelor. În acest scop, pentru început, se caută soluția ecuației omogene:

$$\frac{\partial^2 A_J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_J}{\partial y^2} = 0, \quad (3.35)$$

în forma produsului a două funcții fiecare depinzînd de o singură variabilă: $A_J = X_n(x) \cdot Y_n(y)$. Introducînd încercarea de soluție în ecuație, se obține:

$$\begin{aligned} X_n''(x) - k_n \cdot X_n(x) &= 0 \\ Y_n''(y) - k_n \cdot Y_n(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Prima ecuație a sistemului (3.36) este satisfăcută de funcția:

$$X_n(x) = C_{1n} \cos k_n x + C_{2n} \sin k_n x$$

care pentru $x = \pm a$ trebuie să se anuleze. Cum A_J este o funcție pară în raport cu x , rezultă $C_{2n} = 0$ și din condiția menționată se determină valoarea proprie k_n :

$$C_{1n} \cos k_n a = 0, \quad k_n a = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{adică:}$$

$$k_n = \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Soluția ecuației neomogene se caută în forma:

$$A_J(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(y) \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x, \quad (3.37)$$

în care $V_n(y)$ este o funcție, încă necunoscută, de variabilă y .

Pentru a determina pe $V_n(y)$, ecuația neomogenă se înmulțește cu $\cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx$ și rezultatul obținut se integrează de la $-a$ la $+a$.

Avem succesiv:

$$\int_{-a}^a \frac{\partial^2 A_J}{\partial x^2} \cdot \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = - \int_{-a}^a \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n(y) \left(\frac{2n+1}{2a} \pi \right)^2 \cdot \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \right] \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = -V_p(y) \cdot \frac{2p+1}{2a} \pi^2 a,$$

$$\int_{-a}^a \frac{\partial^2 A_J}{\partial y^2} \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = \int_{-a}^a \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 V_n(y)}{dy^2} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \right] \cdot \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = \frac{d^2 V_p(y)}{dy^2} a$$

și

$$C(\alpha) \int_{-a}^a \frac{\partial B_a}{\partial x} \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = f_p(y, t)$$

Dacă se consideră câmpul uniform, funcția $f_p(y, t)$ ia forma:

$$f_p(y, t) = G(\varphi_0) \frac{\partial B_e}{\partial t} \int_{-a}^a \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x dx = (-1)^p \frac{4a}{(2p+1)\pi} G(\varphi_0) \frac{\partial B_e}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Cu acestea, se obține pentru $V_p(y)$, ecuația:

$$\frac{d^2 V_p(y)}{dy^2} - \left(\frac{2p+1}{2a} \pi \right)^2 V_p(y) = \frac{f_p(y, t)}{a} \quad (3.39)$$

care se integrează prin procedeele obișnuite. Ecuația omogenă are soluția:

$$V_{pe}(y) = C'_{1p} \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi y + C'_{2p} \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi y, \quad (3.40)$$

iar pentru ecuația neomogenă se caută o soluție particulară $F_p(y, t)$ de forma membrului drept; dacă B_e este uniform atunci:

$$F_p(y, t) = -(-1)^p \frac{4^2 a^2}{\pi^3 (2p+1)^3} G(\varphi_0) \frac{\partial B_e}{\partial t} \quad (3.41)$$

Soluția generală a ecuației (3.39), va fi:

$$V_p(y, t) = C_{1p} \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi y + C_{2p} \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi y + F_p(y, t) \quad (3.42)$$

În continuare se impune condiția de frontieră $y = \pm b$, $A_j(x) = 0$ care este satisfăcută dacă $V_p(\pm b) = 0$, adică:

$$C'_{1p} \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi b + C'_{2p} \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi b + F_p(b, t) = 0$$

$$C'_{1p} \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi b - C'_{2p} \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi b + F_p(-b, t) = 0.$$

de unde rezultă:

$$C'_{1p} = - \frac{F_p(b, t) + F_p(-b, t)}{2 \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi b}, \quad C'_{2p} = - \frac{F_p(b, t) - F_p(-b, t)}{2 \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi b} \quad (3.43)$$

Soluția generală a primei ecuații din (3.33), în condițiile de frontieră date de (3.34), este:

$$A_J(x,y,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left[-\frac{F_p(b,t) + F_p(-b,t)}{2 \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi b} \operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi y - \frac{F_p(b,t) - F_p(-b,t)}{2 \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi b} \operatorname{sh} \frac{2p+1}{2a} \pi y \right] \cdot \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x \quad (3.44)$$

care pentru cimpuri uniforme, ținând seama de (3.41), se transformă în:

$$A_J(x,y,t) = 4^2 a^2 \Gamma(\nu_0) \frac{\partial B_e}{\partial t} \sum_{p=0}^{\infty} \left[(-1)^p \frac{1}{(2p+1)^3} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi y}{\operatorname{ch} \frac{2p+1}{2a} \pi b} - 1 \right) \right] \cos \frac{2p+1}{2a} \pi x \quad (3.45)$$

Potențialul electric vector fiind cunoscut, se poate trece la integrarea celei de-a doua ecuații din (3.33), în condițiile de frontieră (3.34). Aceasta se integrează numeric, iar ca continuare procesul iterativ ar trebui condus după metodologia arătată pentru celelalte situații de cimpuri plan-paralele.

Puterea dezvoltată în unitatea de volum este:

$$p = -\frac{1}{4ab} \iint_D A_J \frac{\partial B_e}{\partial t} dx dy \quad (3.46)$$

iar puterea medie pe o perioadă, ia forma:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\frac{f}{4ab} \iint_D dx dy \int_0^T A_J(x,y,t) \frac{\partial B_e}{\partial t} dt \quad (3.47)$$

unde: $D \quad x = \pm a$
 $\quad \quad y = \pm b$

4. ANALIZA NUMERICA A CIMPULUI ELECTROMAGNETIC CUPLAT CU CEL TERMIC

În timpul ultimilor ani, datorită dezvoltării mijloacelor numerice, s-au rezolvat o mare varietate de probleme ale curenților turbionari, formulate și limitate cu puține excepții, în conductoare liniare în care rezistivitatea ρ și permeabilitatea magnetică μ sînt constante. Această abordare poate fi considerată ca opusă numărului mare de probleme neliniare de potențial magnetic vector care au fost formulate pentru optimizarea proiectării mașinilor electrice. Este necesar însă să precizăm, că abordările problemelor de curenți turbionari, în medii liniare sau neliniare, sub aspectul complex al tratării: elaborarea modelului de câmp, aplicarea metodei numerice adecvate, implementarea numerică și desigur prezentarea rezultatelor, întîlnite în literatură de specialitate accesibilă autorului, în majoritatea cazurilor, s-au referit la problema necuplată a cîmpului electromagnetic cu cel termic.

Astfel, în [29], se formulează o problemă de câmp electromagnetic cu prezentarea soluției curenților turbionari pentru un cilindru conductor lung cu secțiunea transversală arbitrară situat într-un câmp magnetic variabil, direcționat axial. Modelul de permeabilitate are la bază caracteristica de saturație idealizată. Se prezintă simularea numerică cu elemente finite triunghiulare liniare folosind un procedeu Galerkin.

În [24], se prezintă o abordare generală pentru rezolvarea problemelor neliniare de curenți turbionari utilizînd metoda elementului finit. Astfel, atât domeniul timpului cît și al spațiului sînt discretizate în elemente finite și rezidualul estimat este minimalizat pe fiecare domeniu. Pentru a lua în considerare neliniaritatea s-a folosit o formulă de subrelaxare la reiterarea permeabilității. Modelul prezentat, avînd la bază ecuația diferențială a potențialului magnetic vector \vec{A} , dintr-un mediu conductor neliniar, s-a utilizat pentru calculul distribuției cîmpului unidimensional dintr-o placă de oțel și a celui bidimensional dintr-un cadru de oțel, analizîndu-se acuratețea diverselor discretizări.

În [17], se prezintă o tratare aproximativă a problemelor

neliniare de curenți turbionari, în vederea determinării pierderilor, avînd la bază un procedeu iterativ pentru probleme unidimensionale multistrat de curenți turbionari, utilizînd reprezentarea de microcircuit pentru regiunea neliniară și cea prin funcții de transfer pentru cea liniară.

În [50], se descrie o tehnică specială de suprarelașare de bloc succesivă pentru obținerea soluției de cîmp dată de ecuația clasică a potențialului magnetic vector în complex. Abordarea numerică are la bază metoda diferențelor finite.

În [49, 53, 54], se prezintă rezolvarea unor probleme de curenți turbionari, utilizînd modele obișnuite de cîmp electromagnetic. Se descriu tehnicile de calcul, implicațiile implementării numerice și unele rezultate.

Beckert, [6, 7, 8, 9], tratează o problemă neliniară de cîmp magnetic (permeabilitatea magnetică fiind funcție de intensitatea cîmpului magnetic), prin metoda diferențelor finite, dar nu ia în considerare cîmpul termic sub nici un aspect.

În [19], se tratează o problemă cuplată de pătrundere a cîmpului electromagnetic în diverse medii conductoare și de încălzire a acestora. Metoda elaborată se bazează pe descompunerea conductoarelor în straturi subțiri, caracterizate printr-o conductivitate și permeabilitate superficială complexă, în urma căreia mediul neliniar se echivalează cu unul liniar, dar neomogen. Programele de calcul elaborate, utilizînd metoda diferențelor finite, permit analiza fenomenelor specifice încălzirii prin inducție.

În [23], se rezolvă o problemă cuplata de cîmp magnetic liniar și termic prin metoda elementului finit. Se dau unele rezultate fără a se preciza date despre structura programului, timpul de calcul, discretizări utilizate și modul de considerare al neliniarităților.

În [10], avînd la bază modele de tipul STEFAN, se prezintă unele considerații asupra analizei numerice utilizînd metodele elementului finit și a diferențelor finite, sugerîndu-se diverse modele și tehnici iterative pentru rezolvarea bidimensională și tridimensională a problemelor cuplate.

Abordările prezentate sînt în evidența diversitatea mare a problemelor de cîmp electromagnetic incluzînd curenți turbionari, pierderile obținute în ultima vreme datorită implementărilor numerice, unele linii de existență determinate de reconsidera-

rea în totalitate a variației parametrilor de material electrici, magnetici și termici. Rezultă indirect, posibilități limitate de aplicare ale acestor abordări în domeniul ingineriei electrice privind proiectarea optimă a instalațiilor de încălzire prin inducție. Rezolvarea problemei cuplate câmp electromagnetic-câmp termic, oferă informații mai complete asupra procesului de încălzire inductivă, chiar dacă implementarea numerică presupune o discretizare spațială și temporară mai grosieră, în vederea reducerii timpului de calcul și a memoriei de calculator utilizate.

În acest capitol se prezintă implementarea numerică a modelelor propuse în capitolele 2 și 3, utilizând metoda diferențelor finite, structura programelor de calcul, precum și rezultatele rulării acestora și interpretarea lor.

Trebuie subliniat, că în literatura de specialitate nu este prezentată implementarea numerică a problemei cuplate de câmp specifică încălzirii inductive.

4.1. Rezolvarea numerică a modelelor de câmp

Ecuatiile câmpurilor electromagnetice și termice cuplate prezentate care descriu procesul de încălzire prin inducție a mediilor considerate, sînt ecuații diferențiale neliniare cu derivate parțiale care nu pot fi integrate pe cale analitică și de aceea pentru a obține soluția lor, în condițiile inițiale și de frontieră precizate, este necesar să se apeleze la metode numerice. Aceste metode devin eficiente dacă:

- rețeaua de discretizare are un număr suficient de mare de noduri corespunzător distribuite;

- se asigură convergența numerică a soluției.

Atunci cînd se pune problema determinării unui câmp într-un domeniu, care este soluția unei ecuații diferențiale cu derivate spațiale, în condiții inițiale și de frontieră bine precizate, două modalități sînt posibile:

a) Să se aproximeze operatorii diferențiali ai ecuației cu derivate parțiale și ai celor care precizează condițiile inițiale și de frontieră prin operatori simplificați, iar apoi să se rezolve sistemul algebric rezultat, ceea ce conduce la metoda diferențelor finite;

b) Păstrînd operatorii diferențiali amintiți neschimbați, să se aproximeze câmpul și să se caute un algoritm care să

ofere cea mai bună aproximație posibilă, ceea ce conduce la tehnicile variaționale ale lui Rayleigh-Ritz-Galerkin. Căroră li se adaptează frecvent metoda elementului finit.

Aceste metode numerice de rezolvare a modelelor de câmp se utilizează din ce în ce mai mult [46, 47, 51, 60, 74], ca urmare a dezvoltării tehnicii de calcul.

În prezenta lucrare, considerînd ca ipoteze generale omogenitatea și simetria domeniilor de câmp, s-a optat pentru utilizarea metodei diferențelor finite în problemele de analiză numerică abordate. Față de metoda elementului finit, aceasta oferă avantajul transpunerii numerice mai directe, ceea ce implică o structură de program mai simplă, volum mai mic de memorie utilizată și timp de calcul mai redus. Nu trebuie însă neglijat, nici faptul că evoluția în timp a procesului de încălzire inductivă și legat de aceasta determinarea variației în timp a mărimilor câmpurilor electromagnetice și termice nu este posibilă exclusiv prin metoda elementului finit. Un studiu complet, în cazul general al unor medii neomogene și nesimetrice, ar putea conduce la rezultate bune și prin combinarea celor două metode astfel: determinarea variației în timp a mărimilor de câmp prin metoda diferențelor finite, iar la anumite momente de timp determinarea variației spațiale a acestora prin metoda elementului finit.

4.2. Metoda diferențelor finite pentru calculul câmpurilor

Această metodă se bazează pe aproximarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale prin ecuații cu diferențe finite care sînt de fapt ecuații algebrice. Comparativ cu metodele analitice care permit determinarea soluției de câmp în fiecare punct, metoda diferențelor finite dă valorile câmpului într-un număr finit de puncte-noduri, situate la intersecția curbelor unei rețele de discretizare a domeniului de câmp.

Fie o funcție $f(x)$ (care poate fi o funcție de câmp), definită pe intervalul $[a, b]$ care se consideră discretizat cu pas constant $h = \frac{b-a}{n}$ în „ $n+1$ ” noduri și fie $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n$, valorile funcției în aceste noduri, figura 4.1. În acest mod, soluția unei ecuații diferențiale, în care funcția

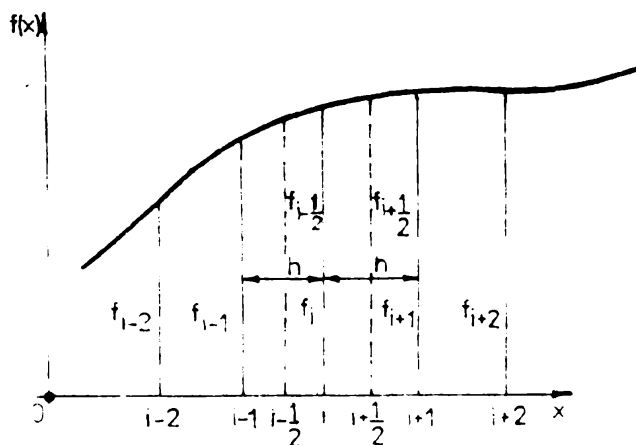


Fig.4.1. rețea de discretizare pe o axă

necunoscută este $f(x)$, va fi înlocuită prin tabloul de valori $[f_i]$, ale acesteia în nodurile rețelei de discretizare.

Expresiile derivatelor de ordinul unu, doi și trei ale funcției $f(x)$, în nodul „i”, utilizând diferențele finite regresive respectiv progresive, așa cum se prezintă în [47, 63], sînt:

$$Df_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O_1(h)$$

$$D^2f_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O_2(h) \quad (4.1)$$

$$D^3f_i = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} + O_3(h)$$

respectiv:

$$Df_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O_1(h)$$

$$D^2f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O_2(h) \quad (4.2)$$

$$D^3f_i = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{h^3} + O_3(h)$$

unde $O_1(h)$, $O_2(h)$ și $O_3(h)$ sînt erorile de ordinul h . Pentru a obține formule cu erori de ordinul lui h^2 , trebuie să luăm în considerare primii doi termeni din dezvoltările derivatelor în diferențe.

Atunci cînd se folosesc, în locul diferențelor centrale impare, medii aritmetice ale acestora în nodurile „ $i + \frac{1}{2}$ ” și

„ $i - \frac{1}{2}$ ”, expresiile derivatelor de ordinul unu, doi și trei ale funcției $f(x)$ în nodul „ i ”, în funcție de diferențele sale, sînt:

$$Df_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O_1(h^2)$$

$$D^2f_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O_2(h^2) \quad (4.3)$$

$$D^3f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O_3(h^2)$$

unde $O_1(h^2)$, $O_2(h^2)$ și $O_3(h^2)$ sînt erorile respective de ordinul h^2 .

Fie o funcție $f(x,y)$ (care poate fi de asemenea o funcție de câmp) definită într-un anumit domeniu al planului xOy . Pentru a determina expresiile

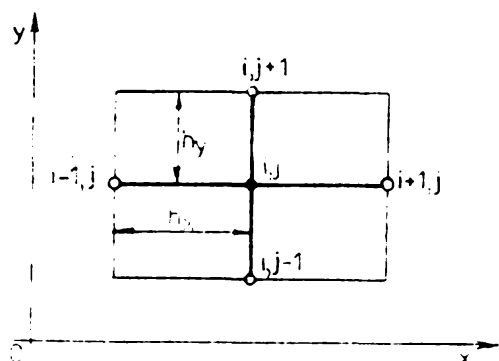


Fig. 4.2. rețea dreptunghiulară de discretizare

derivatele parțiale ale funcției $f(x,y)$, în nodul „ i,j ”, vom discretiza domeniul printr-o rețea rectangulară, figura 4.2, avînd pașii h_x în direcția x și h_y în direcția y invariabili, rețea numită dreptunghiulară și pe urmă aplicînd formulele de la discretizarea pe o axă pentru cele două axe ale rețelei, vom

$$D_x f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h_x}, \quad D_y f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h_y} \quad (4.4)$$

$$D_x^2 f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad D_y^2 f_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h_y^2}$$

unde s-au utilizat diferențele regresive pentru derivatele parțiale de ordinul întâi, cele centrale pentru derivatele parțiale de ordinul doi și nu s-au mai trecut erorile. Dacă $h_x = h_y = h$ re-

țeaua se numește patratică.

Pentru funcții de câmp de forma $f(x,y,z)$, definite într-un domeniu al spațiului cu trei dimensiuni, expresiile deri-

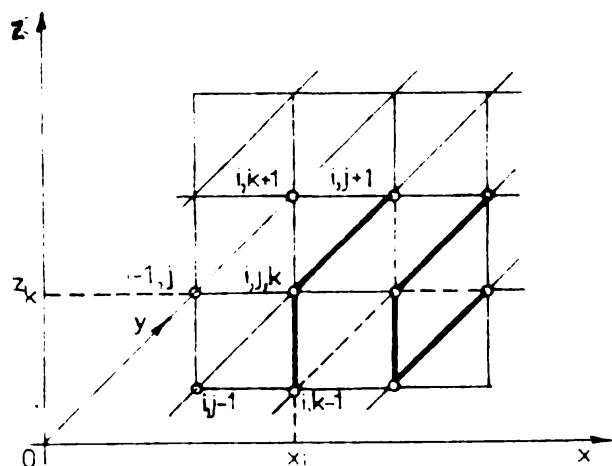


Fig.4.3 Rețea cubică de discretizare

vatorilor parțiale ale acestora, în nodul „ i,j,k ”, ale rețelei cubice de discretizare având pașii h_x, h_y, h_z , figura 4.3, se obțin aplicând formulele de la discretizarea pe o axă la cele trei axe. Spre exemplu, dacă se utilizează diferențele regresive pentru derivatele parțiale de ordinul întâi și cele centrale pentru cele de ordinul doi, se obține:

$$D_x f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}}{h_x}, \quad D_y f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}}{h_y},$$

$$D_z f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}}{h_z}, \quad D_x^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i+1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k}}{h_x^2},$$

(4.5)

$$D_y^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j+1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k}}{h_y^2},$$

$$D_z^2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k+1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k-1}}{h_z^2}.$$

unde, pentru simplitatea scrierii nu s-au mai trecut erorile.

În ecuațiile cu derivate parțiale de tip parabolic, de regulă, necunoscuta este o funcție de câteva variabile independente în raport cu spațiul și de o variabilă independentă în raport cu timpul. Sînt necesare deci, discretizări spațiu-timp.

Expresiile obținute pentru derivatele de ordinul întâi și doi ale diverselor funcții precizate anterior, conțin valorile funcției în nodurile rețelei de discretizare definite prin in-

dicii inferiori la momentul de timp definit prin indicele superior. Derivata de ordinul întâi a funcțiilor se aproximează prin diferențe regresive, astfel:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^0 - f^{0-1}}{\Delta t} \quad (4.6)$$

relație în care nu s-au precizat indicii inferiori aferenți nodurilor respective și în care Δt reprezintă pasul de discretizare temporal.

Ecuatiile algebrice obținute prin aplicarea metodei diferențelor finite se pot rezolva prin diverși algoritmi. În cazul unui număr mic de ecuații se utilizează metoda eliminării directe. Dacă numărul de ecuații este mare se folosesc metode cum ar fi: metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, metoda suprarelaxării succesive, metoda direcțiilor alternante, etc. Metodele iterative de rezolvare a ecuațiilor cu diferențe finite determină soluția prin aproximații succesive pornind de la valori arbitrare în nodurile rețelei de discretizare.

Metoda diferențelor finite se aplica pe scară largă la determinarea cîmpurilor electric, magnetic, termic, fiind caracterizată printr-o precizie corespunzătoare în aplicațiile tehnice.

4.5. Cazul cîmpurilor plan-paralele

Analiza numerică a cîmpului electromagnetic cuplat cu cel termic, a cîmpurilor plan-paralele, presupune determinarea soluției cîmpurilor magnetic și termic, precum și determinarea puterii specifice dezvoltate de curenții turbionari și evoluția lor în timp, într-un domeniu feromagnetic introdus într-un cîmp magnetic variabil, ce are doar o componentă perpendiculară pe acesta, în condiții inițiale și de frontieră precizate. Pentru rezolvarea problemei s-au considerat următoarele ipoteze simplificatoare:

a) Mediul feromagnetic este izotrop din punct de vedere al proprietăților magnetice și termice;

b) Mediul feromagnetic are rezistivitatea electrică ρ funcție de temperatură, permeabilitatea magnetică μ este funcție de intensitatea cîmpului magnetic și de temperatură, iar conductivitatea termică exterioră e este funcție de temperatură;

c) Mediile feromagnetice considerate au geometriile pre-

cizate în capitolele 2 și 3;

d) Modelele de câmp elaborate ale problemei cuplate, luate în discuție, sînt specifice regimului cvazistaționar.

Pentru a obține rezultatele dorite și pentru a le utiliza în scopurile propuse în lucrarea de față, s-au elaborat modelele numerice în detaliu, avînd la bază metoda diferențelor finite, aferente modelelor de câmp din capitolele 2 și 3.

4.3.1. Placă feromagnetică

a) Fară legătură cîmpului magnetic de reacție creat de curenții din placă

Discretizarea domeniului plăcii feromagnetice s-a realizat prin suprafețe plane numerotate de la 1 la NR, figura 4.4.,

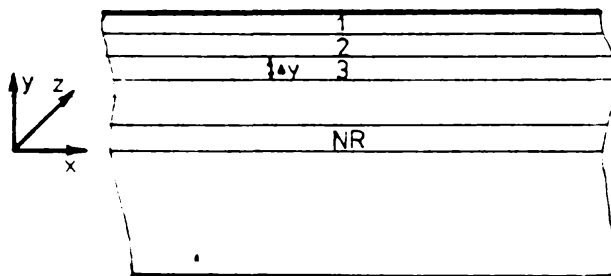


Fig.4.4. Rețeaua de discretizare pentru placă feromagnetică

straturile dintre suprafețe avînd numărul același ca și suprafața plană exterioară. Neglijînd efectul de capăt, determinarea valorilor intensității cîmpului magnetic H și a celui termic ϑ se face pe o singură direcție y . În fiecare strat parametrii de material se

consideră constanți la fiecare moment de timp în procesul de calcul iterativ, iar pentru asigurarea convergenței rapide a soluției numerice, la o iterație de timp, se efectuează mai multe iterații în spațiu.

Expresiile derivatelor din ecuația cîmpului magnetic, prima relație din (2.32), scrise în nodul „n” cu ajutorul diferențelor finite sînt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_n = \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta y} ; \quad \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_n = \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \Big|_n = \frac{H_{n+1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu(H, \vartheta) H \right]_n = \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1, k-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_n^{q-1}}{\Delta t}$$

Înlocuind relațiile (4.7) în ecuația cîmpului magnetic, se obține:

$$\begin{aligned} f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{\Delta y} \cdot \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} + \sum_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} = \\ = \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1, k-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_n^{q-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

unde $f(\vartheta) = \frac{\partial \varphi(\vartheta)}{\partial \vartheta}$ depinde de gradul ecuației cu care se aproximează variația lui φ cu temperatura ϑ .

Explicitînd din relația (4.8) valoarea intensității cîmpului magnetic în nodul „n” al rețelei, la iterația „q” de timp și „k” de spațiu, se obține:

$$H_n^{q,k} = \frac{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} H_{n-1}^{q,k} - \sum_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} - \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q-1}}{\Delta t}}{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} - 2 \frac{\sum_n^{q-1}}{(\Delta y)^2} - \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1, k-1}}{\Delta t} - \frac{\mu_n^{q,k-1}}{\Delta t}} \quad (4.9)$$

În ecuația cîmpului termic, prima din (2.33), mai intervin derivatele cîmpului termic pe care le scriem cu ajutorul diferențelor finite și obținem:

$$\left. \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right|_n = \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2}, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_n = \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} \quad (4.10)$$

Ecuația cîmpului termic (2.33), cu diferențe finite, devine:

$$-\lambda \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} - 2\vartheta_n^{q,k} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + s c \frac{\vartheta_n^{q,k} - \vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} = \sum_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \quad (4.11)$$

unde s-a considerat $\lambda = ct$, adică $\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = 0$. (condiție acceptată în toate cazurile tratate).

Din ecuația (4.11), valoarea cîmpului termic în nodul „n”

al rețelei, la iterația „q” de timp și „k” de spațiu, devine:

$$v_n^{q,k} = \frac{\lambda \frac{v_{n+1}^{q,k-1} + v_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho' c \frac{v_n^{q-1}}{\Delta t} + \rho'^{-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2}{\frac{2\lambda}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho' c}{\Delta t}} \quad (4.12)$$

Condițiile la limita pentru cele două câmpuri, date de a doua ecuație din (2.52) și (2.53), devin:

$$H_1^q = H_0 \sin \omega t,$$

unde H_1^q este intensitatea câmpului magnetic pe frontieră, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația „q” de timp și:

$$\lambda \frac{v_1^{q,k} - v_2^{q-1}}{\Delta y} + \alpha_1^{q-1} (v_1^{q,k} - v_0) = 0, \quad (4.13)$$

de unde temperatura pe frontiera, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația „q” de timp și „k” de spațiu, se calculează cu relația:

$$v_1^{q,k} = \frac{\alpha_1^{q-1} \cdot v_0 + \lambda \frac{v_2^{q-1}}{\Delta y}}{\alpha_1^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta y}} \quad (4.14)$$

Expresia pentru calculul puterii specifice de volum, dezvoltată în placă, relația (2.43), se transformă utilizând formula trapezelor ca aproximare a integralei, obținându-se la iterația „q” de timp:

$$p^q = \frac{2}{\Delta} \Delta y \left[\frac{1}{2} \rho_1^q \left(\frac{H_2^q - H_1^q}{\Delta y} \right)^2 + \frac{\rho_{NR-1}^q}{2} \left(\frac{H_{NR}^q - H_{NR-1}^q}{\Delta y} \right)^2 + \sum_{n=0}^{NR-2} \rho_n^q \left(\frac{H_n^q - H_{n-1}^q}{\Delta y} \right)^2 \right] \quad (4.15)$$

Expresia densității de curent, în nodul „n” la iterația de timp „q”, se calculează din $j = \frac{\partial H}{\partial y}$, adică:

$$j_n^q = \frac{H_n^q - H_{n+1}^q}{\Delta y} \quad (4.16)$$

b) Neglijând câmpul magnetic de reacție creat de curenții din placă

Considerându-se aproximările cu diferențe:

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2} \Big|_n = \frac{A_{n+1}^{q,k-1} - 2A_n^{q,k} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2}, \quad \frac{\partial B_e}{\partial t} \Big|_n = \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \Big|_n = \frac{\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1}}{\Delta y};$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial y} \Big|_n = \frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{V}} = 0 \quad (\lambda = ct), \quad (4.17)$$

aferente domeniului de discretizare de la cazul a), ecuațiile (3.12), ținând seama și ce relațiile (4.10), devin:

$$\frac{f(\mathcal{V})}{\rho_n^{q-1}} \frac{(\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1})(A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k})}{(\Delta y)^2} + \frac{A_{n+1}^{q,k-1} - 2A_n^{q,k} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\rho_n^{q-1}} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \quad (4.10)$$

$$-\lambda \frac{\mathcal{V}_{n+1}^{q,k-1} - 2\mathcal{V}_n^{q,k} + \mathcal{V}_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho' c \frac{\mathcal{V}_n^{q,k} - \mathcal{V}_n^{q-1}}{\Delta t} = \rho_n^{q-1} \left(\frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2.$$

de unde, se obține:

$$A_n^{q,k} = \frac{A_{n+1}^{q,k-1} + A_{n-1}^{q,k} - \frac{(\Delta y)^2}{\rho_n^{q-1}} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} - \frac{f(\mathcal{V})}{\rho_n^{q-1}} (\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1}) A_{n-1}^{q,k}}{2 - \frac{f(\mathcal{V})}{\rho_n^{q-1}} (\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1})} \quad (4.15)$$

$$\text{și:} \quad \rho_n^{q,k} = \frac{\rho_n^{q-1} \left(\frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta t} \right)^2 + \lambda \frac{\mathcal{V}_{n+1}^{q,k-1} + \mathcal{V}_{n-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} + \rho' c \frac{\mathcal{V}_n^{q-1}}{\Delta t}}{\frac{2\lambda}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho' c}{\Delta t}}$$

unde indicii „n”, „q” și „k” au aceeași semnificație ca și în cazul a).

Condiția la limita pentru potențialul electric vector, relația (3.17), este:

$$A_1^q = 0, \quad (4.20)$$

unde A_1^q este potențialul electric vector pe frontieră, adică în nodul 1 al rețelei, la iterația „q” de timp, iar pentru cîmpul termic rămîne cea anterioară, deci relația (4.14).

Expresia puterii dezvoltate în unitatea de volum în placă, relația (3.22), se transformă utilizînd tot formula trapezelor, obținîndu-se la iterația „q” de timp:

$$p^q = -\frac{2}{\Delta} \Delta y \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \left(\frac{A_1^q}{2} + \sum_{n=2}^{N+2} A_n^q + \frac{A_{NR}^q}{2} \right), \quad (4.21)$$

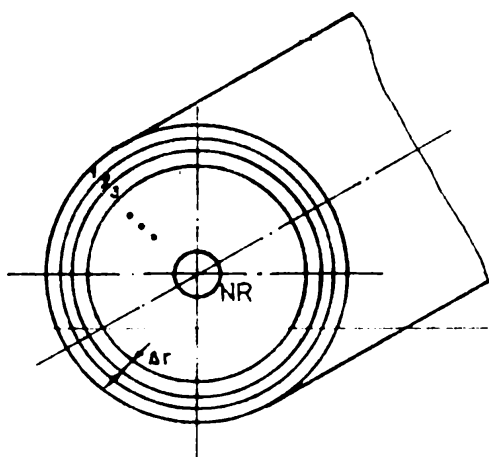
iar densitatea de curent, în nodul „n” la iterația de timp „q”, este:

$$J_n^q = \frac{A_n^q - A_{n+1}^q}{\Delta y} \quad (4.22)$$

4.3.2. Cilindru feromagnetic de secțiune circulară

a) Fără neglijaarea cîmpului magnetic de reacție creat de curenții din cilindru

Discretizarea domeniului cilindrului feromagnetic s-a realizat prin suprafețe cilindrice numerotate de la 1 la NR, figura 4.5, straturile dintre suprafețe avînd numărul acelaș ca și suprafața cilindrică exterioară.



Analogia cu placa feromagnetică este evidentă, variabila y devine r și considerînd aceleași ipoteze, ecuațiile de cîmp, relațiile (2.45), cu diferențe finite, sînt:

Fig.4.5 Rețeaua de discretizare pentru cilindru feromagnetic

$$f(\mathcal{A}) \frac{\mathcal{A}_n^{q-1} - \mathcal{A}_{n-1}^{q-1}}{\Delta r} \cdot \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \sum_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} - 2H_n^{q,k} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} +$$

$$+ \frac{\sum_n^{q-1}}{r_n} \cdot \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} = \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} H_n^{q,k} + \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q-1}}{\Delta t}$$

și:

(4.23)

$$-\lambda \frac{\mathcal{A}_{n+1}^{q,k-1} - 2\mathcal{A}_n^{q,k} + \mathcal{A}_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \lambda \frac{1}{r_n} \frac{\mathcal{A}_n^{q,k} - \mathcal{A}_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \sum_n^{q-1} \frac{\mathcal{A}_n^{q,k} - \mathcal{A}_n^{q-1}}{\Delta t} = \sum_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} \right)^2$$

Exprinînd din relațiile (4.23) valorile de cîmp, se obține:

$$H_n^{q,k} = \frac{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2} H_{n-1}^{q,k} - S_n^{q-1} \frac{H_{n+1}^{q,k-1} + H_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{S_n^{q-1}}{r_n} \cdot \frac{H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} - \mu_n^{q,k-1} \frac{H_n^{q-1}}{\Delta t}}{f(\vartheta) \frac{\vartheta_n^{q-1} - \vartheta_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2} - \frac{2S_n^{q-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{S_n^{q-1}}{r_n \cdot \Delta r} - \frac{\mu_n^{q,k-1} - \mu_n^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\mu_n^{q,k-1}}{\Delta t}} \quad (4.24)$$

și:

$$\vartheta_n^{q,k} = \frac{\lambda \frac{\vartheta_{n+1}^{q,k-1} + \vartheta_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \frac{\lambda}{r_n} \frac{\vartheta_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + S_n^{q-1} \frac{\vartheta_n^{q-1}}{\Delta t} + S_n^{q-1} \left(\frac{H_n^{q,k} - H_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} \right)^2}{\frac{2\lambda}{(\Delta r)^2} + \frac{S_n^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\lambda}{r_n} \frac{1}{\Delta r}}$$

Condiția la limită pentru intensitatea cîmpului magnetic este identică cu cea de la plăci, prima relație din (4.13), iar cea pentru cîmpul termic se obține formal din relația (4.14) înlocuind Δy cu Δr , adică:

$$\vartheta_1^{q,k} = \frac{\alpha_1^{q-1} \vartheta_0 + \lambda \frac{\vartheta_2^{q-1}}{\Delta r}}{\alpha_1^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta r}} \quad (4.25)$$

Expresia puterii dezvoltate în unitatea de volum în cilindru, relația (2.50), se transformă cu formula trapezelor, obținându-se la iterația „q” de timp:

$$P^q = \frac{2}{r_0^2} \Delta r \left[\frac{1}{2} r_1 S_1^q \left(\frac{H_2^q - H_1^q}{\Delta r} \right)^2 + \frac{1}{2} r_{NR-1} S_{NR-1}^q \left(\frac{H_{NR}^q - H_{NR-1}^q}{\Delta r} \right)^2 + \sum_{n=2}^{NR-2} r_n S_n^q \left(\frac{H_n^q - H_{n-1}^q}{\Delta r} \right)^2 \right], \quad (4.26)$$

iar densitatea de curent, în nodul „n” la iterația „q” de timp, este:

$$J_n^q = \frac{H_n^q - H_{n+1}^q}{\Delta r} \quad (4.27)$$

Intrucît, atît ecuațiile cu derivate parțiale cît și cele cu diferențe, sînt asemănătoare în cazul cilindrului și plăcii, în ambele cazuri intervenind derivate respectiv diferențe după o singură direcție, excepție făcînd existența unor termeni de tipul $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ în cazul cilindrului, a fost posibilă elaborarea unui program, scris în limbaj FORTRAN care să rezolve pe aceeași structură problemele de cîmp în cazul celor două geometrii, termenul care diferă $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)$ fiind înmulțit cu un identificator notat KCIL, care ia valoarea 1 în cazul cilindrului și valoarea 0 în cazul plăcii. Deosebiri apar în subprogramele de calcul al cîmpurilor.

Schema logică a programelor pentru calculul cîmpurilor magnetic și termic și a celorlalte mărimi, în cilindru respectiv plăcă, se prezintă în figura 4.6, programele purtînd denumirile DIFCCR respectiv DIFPCR. Calculul intensității cîmpului magnetic la un moment de timp, se efectuează cu valorile cîmpului termic determinate la momentul anterior, în ipoteza, confirmată de altfel de rezultatele obținute, că la un Δt suficient de mic, încălzirea este practic constantă într-un strat al domeniului considerat. În această ipoteză calculul lui H_n^q și a lui χ_n^q , prin metoda suprarelaxării succesive punct cu punct, s-a separat obținîndu-se o îmbunătățire a convergenței. Valorile finale obținute după iterațiile în spațiu ale lui H_n^q se utilizează la calculul lui χ_n^q , iar p^q și J_n^q se determină cu valorile finale ale iterației „q” de timp. Valorile nou calculate ale lui μ se subrelaxează, iar valorile nou calculate ale lui n și χ se suprarelaxează pentru accelerarea convergenței.

Variabilele utilizate în cadrul programelor DIFCCR și DIFPCR sînt:

- NIT - numărul maxim de iterații spațiale;
- NITT - incrementul care indică timpul la care se calculează valorile de cîmp;
- NR - numărul de puncte al rețelei de discretizare;
- RA(N); N=1, NR - razele (distanțele) punctelor rețelei;
- TC - temperatura Curie;
- TE - temperatura mediului exterior;
- TI - timpul de încălzire;
- T și TT - timpi utilizați în calcul;
- F - frecvența;

- TO - momentul inițial de timp;
- R - pasul de discretizare spațial;
- DT - pasul de discretizare temporar;
- OV - factor de subrelaxare;
- PI - puterea instantanee specifică disipată în mediul considerat;
- DJ(N) - densitatea de curent;
- RZ(N) - rezistivitatea electrică;
- V(N) - permeabilitatea magnetică;
- HIM(N) - susceptivitatea magnetică;
- $G_1 = \lambda$; $G_2 = \rho^1 c$; $G_3 = \alpha(\nu)$;
- SJM - valoarea maximă a intensității cîmpului magnetic pe frontieră;
- H(N,J,K) - intensitatea cîmpului magnetic, unde descriptorii N, J și K au semnificația:
- N, indică numărului nodului din rețeaua de discretizare;
 - J, indică iterația spațială anterioară dacă ia valoarea 1 și cea actuală dacă ia valoarea 2;
 - K, indică iterația de timp anterioară dacă ia valoarea 1 și cea actuală dacă ia valoarea 2;
- TETA(N,J,K) - temperatura, unde N, J și K au semnificația de mai sus.

Programul DIFCOR este alcătuit din subprogramele:

- CÎMPUL, în cadrul căruia se calculează intensitatea cîmpului magnetic din interiorul domeniului de discretizare cu prima relație din (4.24). Pentru a ușura scrierea programului termenii acestei relații se calculează separat ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$). În cadrul acestui subprogram se apelează, pentru fiecare calcul de cîmp, subprogramul RELATII;
- RELATII, în cadrul căruia se calculează permeabilitatea magnetică care este funcție de intensitatea cîmpului magnetic și temperatură;
- CÎMPTE, în cadrul căruia se determină valorile temperaturii cu a doua relație din (4.24). Este conceput analog cu cel pentru calculul cîmpului magnetic;
- REZTA, în cadrul căruia se calculează rezistivitatea electrică funcție de temperatură;
- PUTERE, în cadrul căruia se calculează puterea specifică dezvoltată.

tată în cilindru, dată de relația (4.26), dacă identificatorul KCIL ia valoarea 1.

Programul DIFPCR este alcătuit din aceleași subprograme ca și programul DIFCCR, cu următoarele precizări:

- Subprogramele CÎMPEL și CÎMPTE calculează valorile intensității cîmpului magnetic și a temperaturii cu relațiile (4.25) respectiv (4.28):

- Subprogramul PUTERE calculează puterea specifică dezvoltată în placă, dată de relația (4.31), dacă identificatorul KCIL ia valoarea 0. Toate aceste subprograme se apelează din programul principal.

În cadrul programului principal, se declară la început tablourile de variabile: H, TEPA, RA, NIT, DJ, după care urmează citirea datelor de intrare: NR, KCIL, RA(N), TE, TC, G_1 , G_2 , h, OV, T1, SJM, F, DT, FO - scrise fiecare separat pe o cartelă de date cu excepția lui RA(N) care se scriu pe mai multe cartele în funcție de numărul de noduri al rețelei de discretizare. După ce s-au citit ele se afișează la imprimantă.

În continuare se trece la inițializarea valorilor lui H cu 0 în interiorul domeniului și cu valorile rezultate conform primei relații din (4.13), pe frontiera domeniului. Valorile lui ψ sînt inițializate cu ψ_0 (TE) în toate punctele domeniului de discretizare. Parametrii de material μ și φ fiind cunoscuți, se calculează, în cadrul subprogramului CÎMPEL, valoarea intensității cîmpului magnetic pentru fiecare nod interior al domeniului de discretizare la prima iterație în spațiu, iterație controlată de incrementul L care în prealabil a luat valoarea 0.

Incrementul L se mărește cu o unitate și se reia calculul lui H dacă diferența maximă între două valori calculate consecutiv ale lui H într-un nod este mai mare decît eroarea impusă. Cu μ reactualizat, în cadrul subprogramului RELAȚII, se reia calculul intensității cîmpului magnetic în nodurile din interiorul domeniului de discretizare, intensitatea cîmpului magnetic pe frontieră rămînînd aceeași. La sfîrșitul iterațiilor spațiale ale lui H, valorile ultime ale acestuia se trec în tablou pe poziția anterioară. Se trece la calculul cîmpului termic TEPA, în prealabil pe frontiera domeniului cu una din relațiile (4.14) sau (4.25), iar apoi în nodurile interioare ale acestuia în cadrul subprogramului CÎMPTE.

Cu ϱ și μ recalculați, se calculează puterea specifică și densitatea de curent cu relațiile (4.15) sau (4.26) și (4.16) sau (4.27).

Indicatorul KJ, care la începutul programului a luat o valoare dată, se testează și dacă s-a ajuns la perioada de timp la care dorim să tipărim rezultatele, acestea se tipăresc, iar în caz contrar se trece la majorarea incrementului NITT cu valoarea 1, L primește din nou valoarea 0 și se verifică dacă s-a atins timpul final de încălzire. În caz contrar se reia calculul numeric, începând cu recalcularea valorii intensității câmpului magnetic pe frontieră și continuând conform celor prezentate.

Oprirea programului se poate face în diferite variante, una din acestea fiind și prin impunerea condiției de timp final pentru procesul de încălzire prin inducție, ca în cazul prezentat, sau a temperaturii la suprafața semifabricatului.

b) Neglijând câmpul magnetic de reacție creat de curenții din cilindru

Ecuatiile diferențiale ale câmpurilor potențial electric vector și termic pentru acest caz conțin derivate parțiale de ordinul întâi și doi de tipul celor întâlnite anterior.

Astfel, ecuațiile (3.12), scrise cu diferențe finite pentru aceeași rețea de discretizare ca și în cazul a), sînt:

$$f(\mathcal{V}) \frac{\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1}}{\Delta r} \frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \int_n^{q-1} \frac{A_{n+1}^{q,k-1} - 2A_n^{q,k} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} +$$

$$+ \int_n^{q-1} \frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{r_n} = \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \quad (4.28)$$

$$- \lambda \frac{\mathcal{V}_{n+1}^{q,k-1} - 2\mathcal{V}_n^{q,k} + \mathcal{V}_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \lambda \frac{1}{r_n} \frac{\mathcal{V}_n^{q,k} - \mathcal{V}_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} + \int_n^{q-1} \frac{\mathcal{V}_n^{q,k} - \mathcal{V}_n^{q-1}}{\Delta t} = \int_n^{q-1} \left(\frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} \right)^2,$$

de unde, se obține:

$$A_n^{q,k} = \frac{\frac{A_{n+1}^{q,k-1} + A_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_n} \frac{A_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} - \frac{1}{\int_n^{q-1}} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} - \frac{f(\mathcal{V})}{\int_n^{q-1}} \frac{\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2} A_{n-1}^{q,k}}{\frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_n \Delta r} - \frac{f(\mathcal{V})}{\int_n^{q-1}} \frac{\mathcal{V}_n^{q-1} - \mathcal{V}_{n-1}^{q-1}}{(\Delta r)^2}}$$

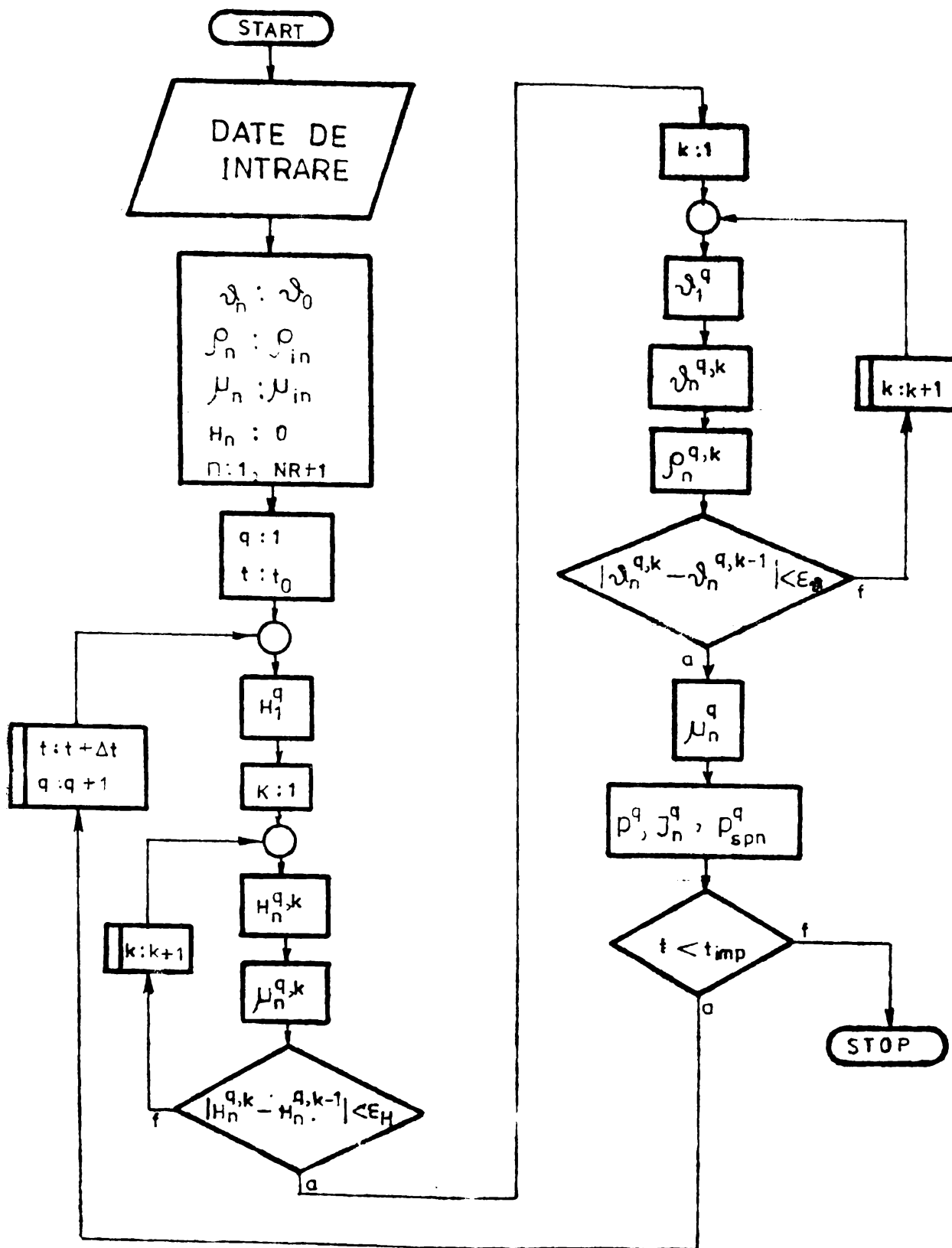


Fig.4.6 Schema logică a programelor DIFCCR și DIFPCR

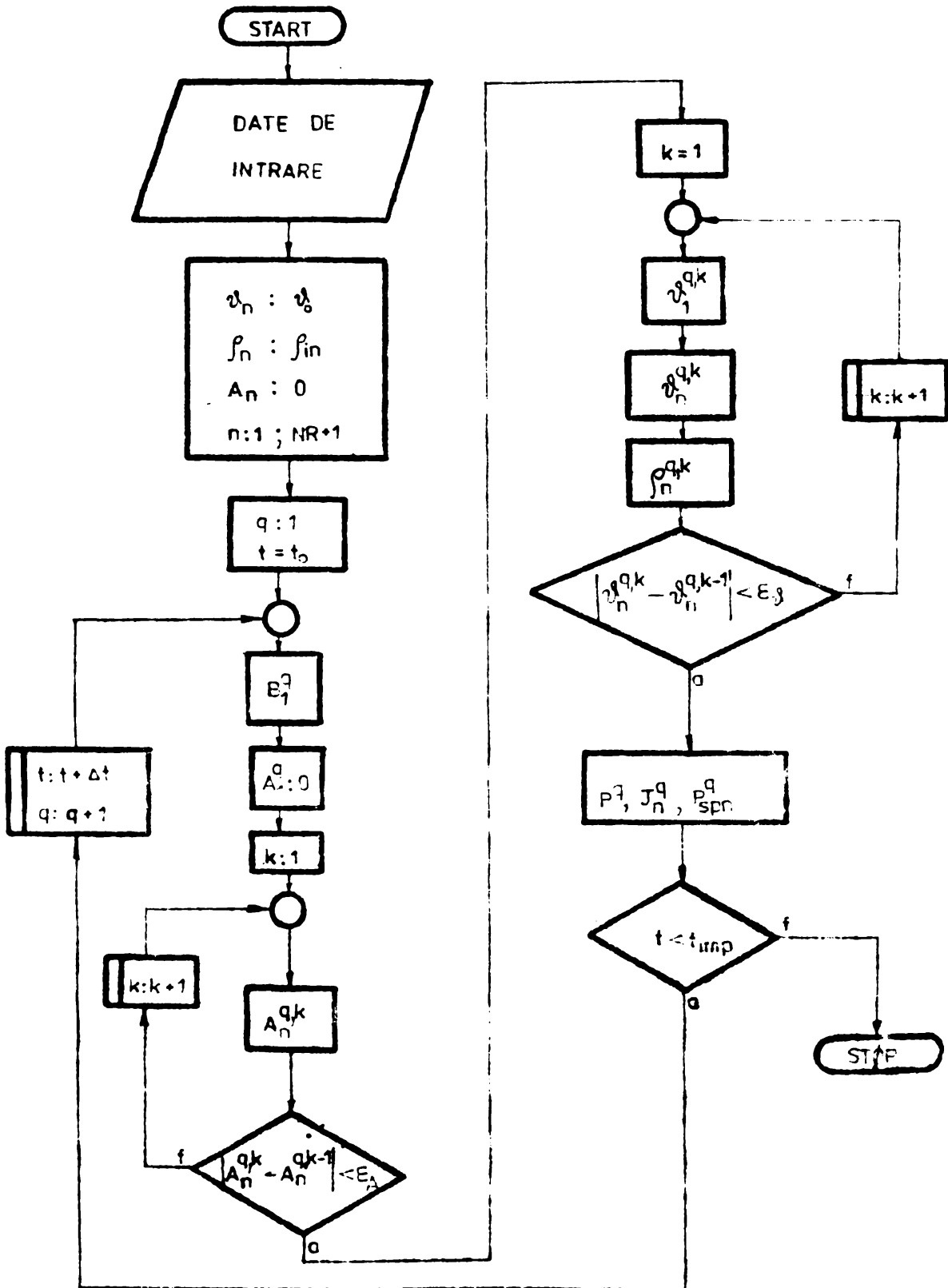


Fig.4.7 Schema logică a programelor DFQR și DIFPR

și:

$$v_n^{q,k} = \frac{\lambda \frac{v_{n+1}^{q,k-1} + v_{n-1}^{q,k}}{(\Delta r)^2} - \lambda \frac{v_{n-1}^{q,k}}{r_n \cdot \Delta r} + \rho' c \frac{v_n^{q-1}}{\Delta t} + \rho_n^{q-1} \left(\frac{A_n^{q,k} - A_{n-1}^{q,k}}{\Delta r} \right)^2}{\frac{2\lambda}{(\Delta r)^2} - \frac{\lambda}{r_n \cdot \Delta r} - \frac{\rho' c}{\Delta t}} \quad (4.29)$$

unde indicii „n”, „q” și „k” au semnificația precizată anterior.

Condiția de frontieră a potențialului electric vector A este dată de relația (4.20), iar cea a cîmpului termic de relația (4.25).

Aplicînd formula trapezelor, relația (3.31), pentru determinarea puterii specifice dezvoltate în cilindru, devine:

$$p^2 = -\frac{2}{r_c^2} \Delta r \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \left(\frac{A_1^{q,k}}{2} r_1 + \sum_{n=2}^{NR-2} A_n^{q,k} r_n + \frac{A_{NR}}{2} r_{NR} \right) \quad (4.30)$$

Densitatea de curent se calculează cu relația (4.22), în care Δy devine Δr .

Schema logică a programelor pentru calculul cîmpurilor potențial electric vector și termic și a celorlalte mărimi, în cilindru respectiv placă se prezintă în figura 4.57, programele purtînd denumirile DIFCR respectiv DIFPR.

Variabilele utilizate în aceste două programe sînt cele prezentate în cazul programelor DIFCR și DIFPR cu unele precizări :

- în locul intensității cîmpului magnetic H se utilizează potențialul electric vector A;
- variabilele V(N) și HIM(N) nu există;
- nu există SJM, dar în locul ei se utilizează BJM ca fiind valoarea maximă a inducției magnetice exterioare.

De asemenea, o particularitate a acestor două programe este aceea că potențialul electric vector este nul pe frontieră, iar calculul intensității cîmpului magnetic pe frontieră la iterațiile în timp este înlocuit cu cel al inducției magnetice.

Subprogramele utilizate sînt aceleași, cu excepția subprogramului RELATII care lipsește, dar relațiile de calcul pentru A, TETA, FI, DJ sînt cele specifice cazurilor c).

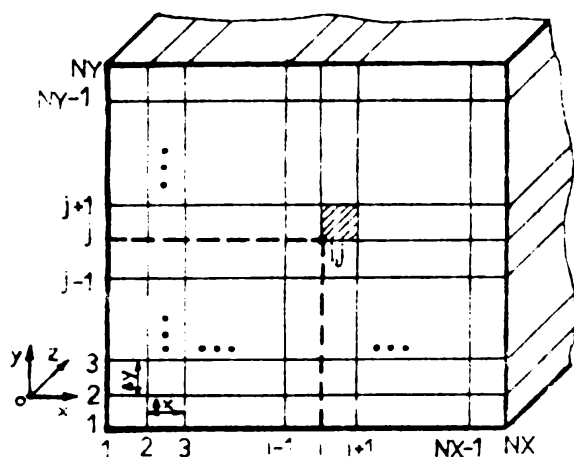
Analogia care există între relațiile cu diferențe finite ce caracterizează cele două modele, fără reacție și cu reacție,

face ca asamblarea programelor pentru cazul fără reacție să se facă similar fără a ridica probleme deosebite.

4.2.3. Cilindru feromagnetic de secțiune dreptunghiulară

a) Fără neglijarea cîmpului magnetic de reacție creat de curenții din paralelipiped

Decarece cilindrul feromagnetic de secțiune dreptunghiulară, paralelipipedul, s-a considerat plasat într-un cîmp



magnetic variabil care are componentă doar după axa Oz, este suficient să se ia în studiu o secțiune în planul xOy care va fi discretizată printr-o rețea rectangulară cu pas constant, ca în figura 4.8. Pe ambele direcții numărul de noduri al rețelei este egal, adică $NX = NY$ și $\Delta x = \Delta y = \Delta S$.

Fig .4.8. Rețea de discretizare pentru paralelipipedul feromagnetic

Liniiile de rețea $i = ct$, $i + 1 = ct$, $j = ct$ și $j + 1 = ct$ delimitează un domeniu în care proprietățile de material și

varimile ce caracterizează cîmpurile electromagnetic și termice sînt constante, aceste valori fiind atribuite nodului „i,j” din rețeaua de discretizare.

Expresiile derivatelor din ecuația cîmpului magnetic, prima relație din (2.52), scrise cu ajutorul diferențelor finite, în nodul „i,j” sînt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{\mathcal{L}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{L}_{i-1,j}^{q-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\mathcal{H}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{H}_{i,j-1}^{q-1}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y}$$

(4.31)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{H_{i+1,j}^{q,k-1} - 2H_{i,j}^{q,k} + H_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{H_{i,j+1}^{q,k-1} - 2H_{i,j}^{q,k} + H_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu(H, \mathcal{V}) H] = \frac{\mu_{i,j}^{q,k-1} - \mu_{i,j}^{q,k}}{\Delta t} H_{i,j}^{q,k} + \mu_{i,j}^{q,k-1} \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j}^{q-1}}{\Delta t}$$

iar ecuația cu diferențe a cîmpului magnetic, devine:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{V}) & \left(\frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i-1,j}^{q-1}}{\Delta x} \cdot \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} + \frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i,j-1}^{q-1}}{\Delta y} \cdot \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right) + \\ & + \mathcal{S}_{i,j}^{q-1} \left[\frac{H_{i+1,j}^{q,k-1} - 2H_{i,j}^{q,k} + H_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j+1}^{q,k-1} - 2H_{i,j}^{q,k} + H_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] = \\ & = \frac{\mu_{i,j}^{q,k-1} - \mu_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} H_{i,j}^{q,k} + \mu_{i,j}^{q,k-1} \frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.32)$$

unde $f(\mathcal{V}) = \frac{\partial \mathcal{S}(\mathcal{V})}{\partial \mathcal{V}}$

Explicînd din relația (4.32), valoarea intensității cîmpului magnetic, în nodul „i,j” al rețelei la iterația „q” de timp și „k” de spațiu, se obține:

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{q,k} = & \frac{f(\mathcal{V}) \left[\frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i-1,j}^{q-1}}{(\Delta x)^2} H_{i-1,j}^{q,k} + \frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i,j-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} H_{i,j-1}^{q,k} \right] - \mathcal{S}_{i,j}^{q-1} \left[\frac{H_{i+1,j}^{q,k-1} + H_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{H_{i,j+1}^{q,k-1} + H_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] - \mu_{i,j}^{q,k-1} \frac{H_{i,j}^{q-1}}{\Delta t}}{f(\mathcal{V}) \left[\frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i-1,j}^{q-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathcal{V}_{i,j}^{q-1} - \mathcal{V}_{i,j-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} \right] - 2\mathcal{S}_{i,j}^{q-1} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{\mu_{i,j}^{q,k-1} - \mu_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} - \frac{\mu_{i,j}^{q,k-1}}{\Delta t}} \end{aligned}$$

In mod similar ecuația cîmpului termic, a doua relație din (2.52), scrisă cu diferențe, devine:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda \left[\frac{v_{i+1,j}^{q,k-1} - 2v_{i,j}^{q,k} + v_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{q,k-1} - v_{i,j}^{q,k} + v_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] + \rho c \frac{v_{i,j}^{q,k} - v_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} = \\
 & = \rho_{i,j}^{q-1} \left[\left(\frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \right]. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

de unde, se obține:

$$\begin{aligned}
 v_{i,j}^{q,k} = & \frac{\rho_{i,j}^{q-1} \left[\left(\frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{H_{i,j}^{q,k} - H_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \right] + \lambda \left[\frac{v_{i+1,j}^{q,k-1} + v_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{q,k-1} + v_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] + \rho c \frac{v_{i,j}^{q-1}}{\Delta t}}{\frac{2\lambda}{(\Delta x)^2} + \frac{2\lambda}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho c}{\Delta t}} \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Condițiile la limită pentru intensitatea cîmpului magnetic, relațiile (2.53), scrise cu diferențe nu ridică nici o problemă. Aceste condiții sînt:

$$H_{1,j}^z = H_0 \sin \omega t, \quad H_{i,1}^z = H_0 \sin \omega t \quad (4.36)$$

$$\text{și: } H_{NX,j}^e = H_0 \sin \omega t, \quad H_{i,NY}^e = H_0 \sin \omega t$$

cu $i=1, NX$ și $j=1, NY$

Condițiile la limită pentru cîmpul termic, relațiile (2.54), scrise cu diferențe permit determinarea temperaturii pe frontierele domeniului, cu relațiile:

$$v_{i,j}^q = \frac{\lambda \frac{v_{2,j}^{q-1}}{\Delta x} + \alpha_{i,j}^{q-1} v_0}{\alpha_{i,j}^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta x}}, \quad v_{NX,j}^q = \frac{\lambda \frac{v_{NX,i+1,j}^q}{\Delta x} - \alpha_{NX,i,j}^{q-1} v_0}{\alpha_{NX,i,j}^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta x}}$$

și

$$(4.37)$$

$$\varphi_{i,1}^q = \frac{\lambda \frac{\varphi_{i,2}^{q-1}}{\Delta y} + \alpha_{i,1}^{q-1} \varphi_0}{\alpha_{i,1}^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta y}}, \quad \varphi_{i,NY}^q = \frac{\lambda \frac{\varphi_{i,NY-1}^{q-1}}{\Delta y} + \alpha_{i,NY}^{q-1} \varphi_c}{\alpha_{i,NY}^{q-1} + \frac{\lambda}{\Delta y}}$$

Expresia pentru calculul puterii specifice de volum dezvoltate în paralelipiped, relația (2,56), se transformă utilizând formula trapezelor de aproximare a integralei duble, obținându-se la iterația „q” de timp:

$$\begin{aligned} p^q = & \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{4a \cdot b} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{H_{1,2}^q - H_{1,1}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{1,1}^q + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{NX-2} \left(\frac{H_{i,2}^q - H_{i,1}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{i,1}^q + \right. \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{H_{NX,2}^q - H_{NX,1}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{NX,1}^q + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{NY-2} \left(\frac{H_{i,j+1}^q - H_{i,j}^q}{\Delta y} \right)^2 + \\ & + \sum_{j=2}^{NY-2} \sum_{i=2}^{NX-2} \left(\frac{H_{i,j+1}^q - H_{i,j}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{i,j}^q + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{NY-2} \left(\frac{H_{NX,j+1}^q - H_{NX,j}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{NX,j}^q + \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{H_{1,NY}^q - H_{1,NY-1}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{1,NY-1}^q + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{NX-2} \left(\frac{H_{i,NY}^q - H_{i,NY-1}^q}{\Delta y} \right)^2 S_{i,NY-1}^q + \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{H_{NX,NY}^q - H_{NX,NY-1}^q}{\Delta x} \right)^2 S_{NX,NY-1}^q \right] \quad (4.38) \end{aligned}$$

Din: rot $\vec{H} = \vec{J}$, componentele densității de curent exprimate cu diferențe, sînt:

$$J_{x,i,j}^q = \frac{H_{i,j}^q - H_{i,j+1}^q}{\Delta y}, \quad J_{y,i,j}^q = \frac{H_{i,j}^q - H_{i+1,j}^q}{\Delta x}, \quad (4.39)$$

iar densitatea de curent, în nodul „i,j” la iterația „q” de timp, este:

$$J_{i,j}^i = \sqrt{(J_{x,i,j}^i)^2 + (J_{y,i,j}^i)^2} \quad (4.40)$$

Schema logică a programului pentru calculul câmpurilor magnetic și termic și a celorlalte mărimi în paralelipiped se prezintă în figura 4.9, programul purtând denumirea PARACR. Tehnicile numerice utilizate pentru accelerarea convergenței soluției sînt cele întîlnite și în programele precedente.

Variabilele utilizate în acest program sînt similare cu cele utilizate anterior, cu unele excepții. Astfel notațiile N_x , N_y , $h_x(N)$, ($KCIL$ nu există) se înlocuiesc cu:

NX - numărul de puncte al rețelei de discretizare după axa Ox ;

NY - numărul de puncte al rețelei de discretizare după axa Oy ;

DX , DY sau DS - pașii de discretizare după cele două axe ale rețelei sau pasul constant după cele două direcții.

De asemenea tablourile H , $TETA$, DJ , KZ , V sînt definite corespunzător noii rețele de discretizare. Spre exemplu, în tabloul $H(NX, NY, J)$, descriptorii au următoarea semnificație:

- NX, NY sînt descriptorii de spațiu indicînd poziția în rețea;

- J , este un descriptor global care ne da iteratia în timp și spațiu, putînd lua trei valori: 1 corespunzătoare timpului anterior, 2 pentru timpul actual - spațiu anterior și 3 pentru timpul actual - spațiu actual.

Subprogramele $REZTA$ și $RELATII$ sînt identice cu cele din paragraful 4.3.2, subprogramul $PUTERE$ utilizează relația (4.38) pentru determinarea puterii specifice dezvoltate în paralelipiped, iar subprogramele $CÎMPEL$ și $CÎMPTE$ au fost înglobate în programul principal.

În cadrul programului principal se citesc datele de intrare, de pe suportul extern, iar apoi se tipăresc. După inițializarea valorilor lui $H, TETA, DJ$ și calculul intensității câmpului magnetic pe frontiere se trece la determinarea valorilor acestuia în interiorul domeniului de discretizare. Domeniul de discretizare s-a considerat ca fiind un sfert din domeniul paralelipipedului (stînga δ s în figura 4.8), datorită simetriei problemei

Calculul intensității cîmpului magnetic în domeniul precizat se face cu ajutorul relației (4.35), iar apoi în cadrul a două cicluri se transferă aceste valori în tabloul din dreapta sus și în tablourile din stînga sus și dreapta jos, rezultînd valori în întreg domeniul de cîmp la prima iterație în spațiu. Următoarele iterații în spațiu se execută identic ca și în programul DIFCOA.

Valorile densității de curent și a cîmpului termic, în nodurile din interiorul domeniului de discretizare, se determină cu relațiile (4.40) și (4.35) după algoritmul prezentat la calculul lui H.

Dupa ce s-au calculat valorile lui H, TEPA, D, cu valorile rezistivității și permeabilității recalculate, se determină puterea specifică de volum PI în cadrul subprogramului PUTERE.

Celelalte aspecte legate de asamblarea programului PARACK sînt identice cu ale programului DIFCOA sau DIFPCR.

b) Neglijînd cîmpul magnetic de reacție creat de curenții din paralelipiped

Considerînd același domeniu de discretizare, ecuațiile cîmpurilor potențial electric vector și termic, relațiile (5.12) scrise cu diferențe, devin:

$$\begin{aligned}
 f(\psi) & \left(\frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i-1,j}^{q-1}}{\Delta x} \cdot \frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i,j-1}^{q-1}}{\Delta y} \cdot \frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right) + \\
 & + \rho_{i,j}^{q-1} \left[\frac{A_{i+1,j}^{q,k-1} - 2A_{i,j}^{q,k} + A_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i,j+1}^{q-1} - 2A_{i,j}^{q,k} + A_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] = \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \\
 & - \lambda \left[\frac{\psi_{i-1,j}^{q,k-1} - 2\psi_{i,j}^{q,k} + \psi_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{q,k-1} - 2\psi_{i,j}^{q,k} + \psi_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] + \\
 & + \rho^c \frac{\psi_{i,j}^{q,k} - \psi_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} = \rho_{i,j}^{q-1} \left[\left(\frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \right],
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

de unde, se obține:

$$A_{i,j}^{q,k} = \frac{\left[\frac{A_{i+1,j}^{q,k-1} + A_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i,j+1}^{q-1} + A_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{B_e - B_e}{\rho_{i,j}^{q-1} \Delta t} - \frac{f(\psi)}{\rho_{i,j}^{q-1}} \left[\frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i-1,j}^{q-1}}{(\Delta x)^2} A_{i,j}^{q,k} + \frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i,j-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} A_{i,j-1}^{q,k} \right]}{2 \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] - \frac{f(\psi)}{\rho_{i,j}^{q-1}} \left[\frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i-1,j}^{q-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j}^{q-1} - \psi_{i,j-1}^{q-1}}{(\Delta y)^2} \right]}$$

și

$$(4.42)$$

$$\psi_{i,j}^{q,k} = \frac{\lambda \left[\frac{\psi_{i+1,j}^{q,k-1} + \psi_{i-1,j}^{q,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{q,k-1} + \psi_{i,j-1}^{q,k}}{(\Delta y)^2} \right] + \rho c \frac{\psi_{i,j}^{q-1}}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{q-1} \left[\left(\frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i-1,j}^{q,k}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{A_{i,j}^{q,k} - A_{i,j-1}^{q,k}}{\Delta y} \right)^2 \right]}{\frac{2\lambda}{(\Delta x)^2} + \frac{2\lambda}{(\Delta y)^2} + \frac{\rho c}{\Delta t}}$$

Condițiile la limită pentru potențialul electric vector, prima relație din (3.4), scrise numeric sînt:

$$A_{1,j}^q = 0, \quad A_{i,1}^q = 0, \quad A_{NX,j}^q = 0 \quad \text{și} \quad A_{i,NY}^q = 0;$$

$$(4.43)$$

$$i = 1, NX \quad \text{și} \quad j = 1, NY,$$

iar pentru câmpul termic rămîna valabile cele de la cazul a).

Relația (3.46) pentru calculul puterii, transcrisă numeric, devine:

$$P^q = -\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{4ab} \frac{B_e^q - B_e^{q-1}}{\Delta t} \left(\frac{1}{4} A_{1,1} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{NX-2} A_{i,1} + \frac{1}{4} A_{NX,1} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{NY-2} A_{1,j} + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^{NY-2} \sum_{i=2}^{NX-2} A_{i,j} + \frac{1}{4} A_{1,NY} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{NX-2} A_{i,NY} + \frac{1}{4} A_{NX,NY} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{NY-2} A_{NX,j} \right) \quad (4.44)$$

Densitatea de curent se determină numeric cu relația (4.40) în care H este înlocuit cu A .

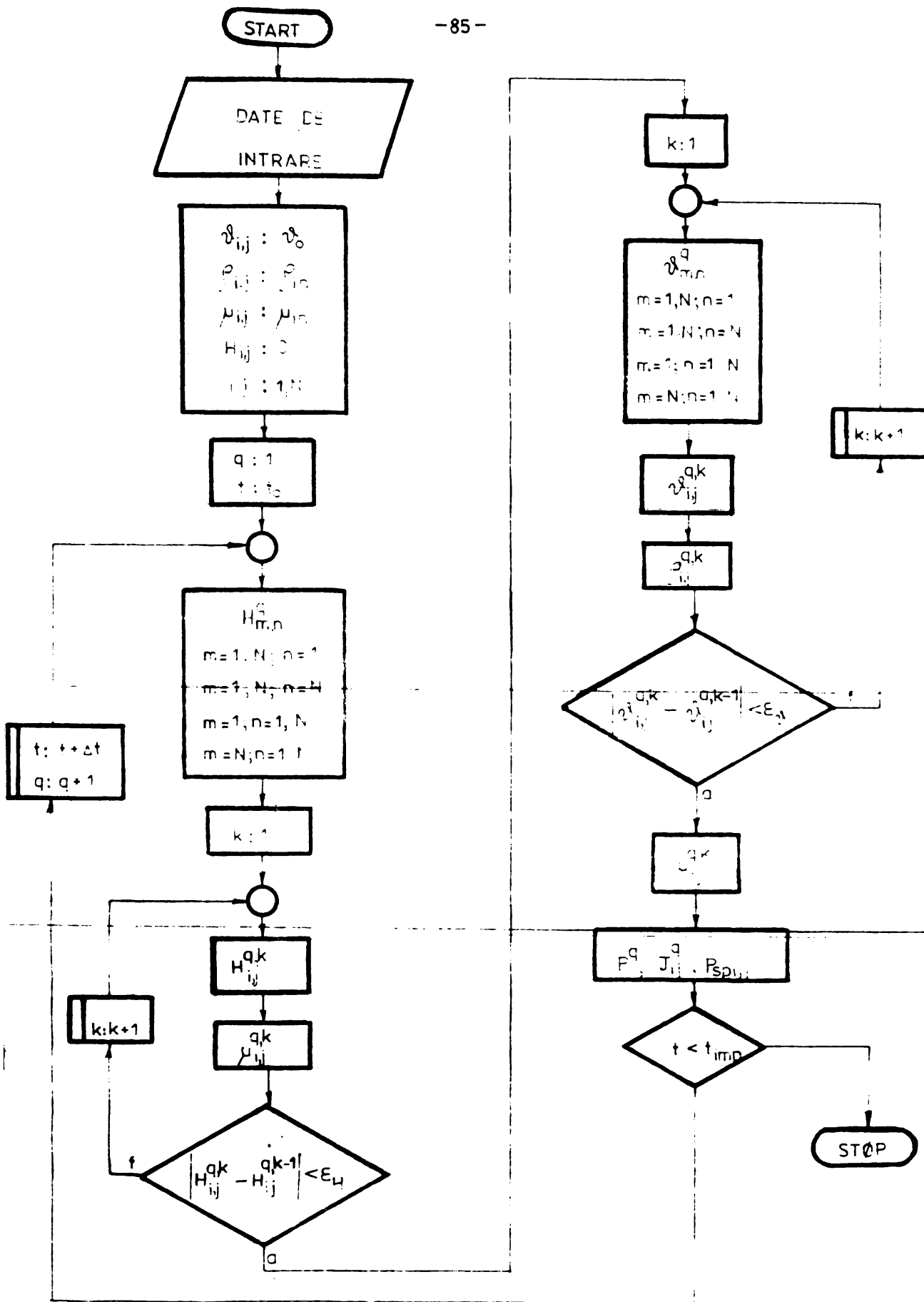


Fig.4.9 Schema logică a programului PARACR

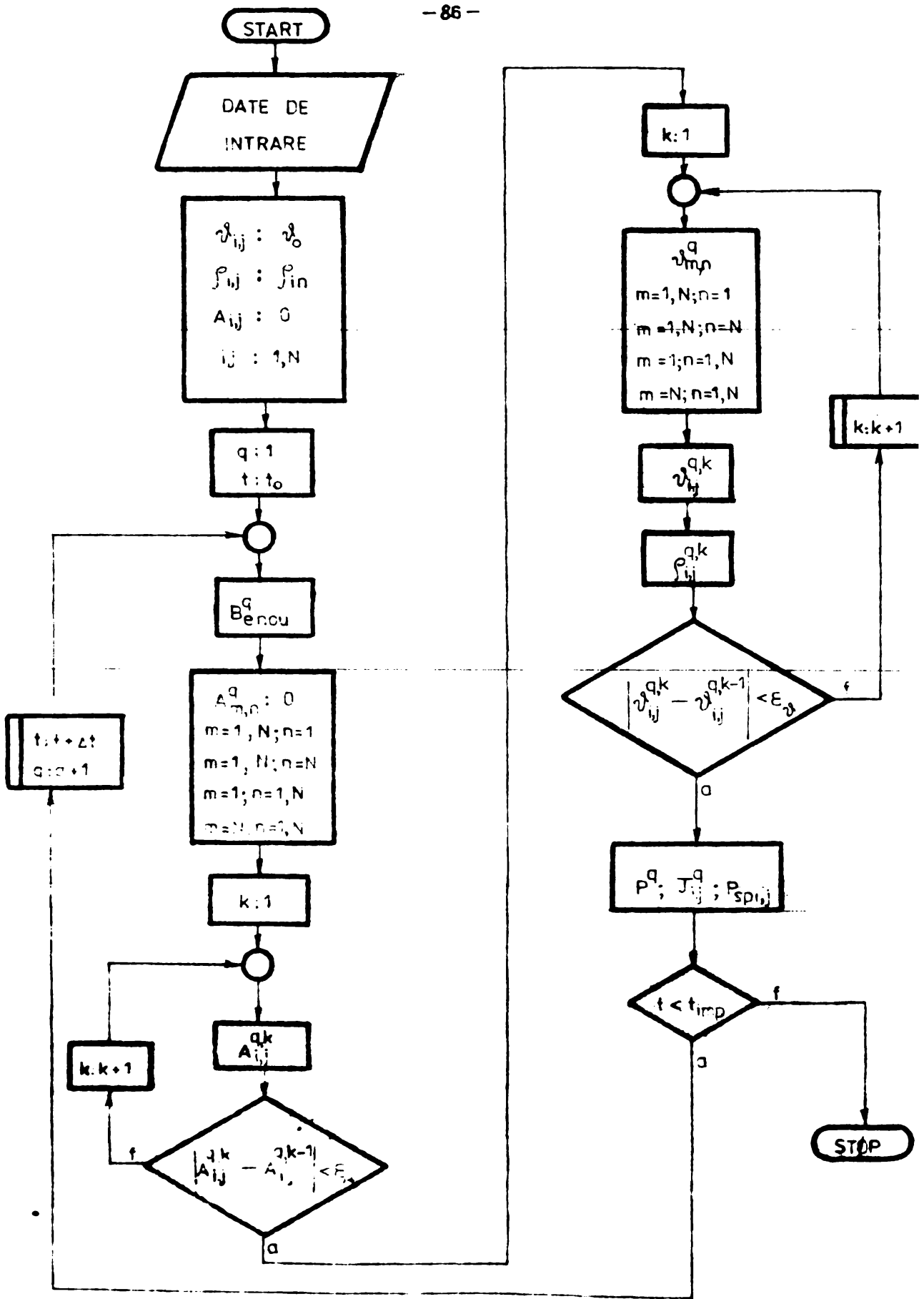


Fig.4.10 Schema logică a programului PARAK

Schema logică a programului pentru calculul câmpurilor potențial electric vector și termic și a celorlalte mărimi se prezintă în figura 4.10, programul purtând denumirea PARAR care are aceeași structură ca și programul PARACR.

Programul PARAR nu conține variabilele SJM, V, HIM și subprogramul RELATII. Subprogramul REZTA este identic, iar subprogramul PUTERE calculează PI cu relația (4.44). Programul principal conține variabila potențial electric vector, în locul lui H , cu noile sale condiții pe frontieră, iar setul de instrucțiuni pentru calculul lui H , pe frontieră este înlocuit cu cel referitor la calculul inducției exterioare B_E la fiecare interval de timp care are valoarea maximă B_{JM} .

4.4. Rezultate ale rulării programelor și interpretarea lor

Programele elaborate au o structură modulară asigurând o elasticitate corespunzătoare și acopera convenabil etapele obișnuite ale unui calcul numeric de câmp.

În modulul de preprocessing se definește domeniul de studiu, împărțit în subdomenii cu aceleași proprietăți de material, se generează rețeaua de discretizare și se impun condițiile de simetrie specifice problemei.

În modulul de calcul se introduc condițiile inițiale și de frontieră și se calculează valorile caracteristice ale câmpurilor electromagnetice și termice.

Modulul postprocessing asigură calculul mărimilor utile în analiza și sinteza procesului de încălzire inductivă cum ar fi: densități de curent, puteri disipate în mediul feromagnetic supus încălzirii și prezentarea sub o formă ușor utilizabilă a principalelor mărimi calculate în program.

Caracteristicile de material, adică $\mu(H, \mathcal{V})$, $\rho(\mathcal{V})$ și $\alpha(\mathcal{V})$, sînt date în subrutine existînd astfel posibilitatea analizei de câmp pentru diverse medii prin utilizarea subrutinelor specifice.

Discretizarea spațială a domeniului de câmp analizat se realizează automat cu pas constant prin impunerea pasului, sau cu pas variabil prin impunerea legii de variație a acestuia. Discretizarea temporară, cu pas constant, se poate realiza printr-un număr variabil de puncte pentru o perioadă prin impunerea acestu-

ia ca dată.

Volumul de memorie ocupată de programe depinde de numărul de noduri al rețelei de discretizare spațială, dar la un calcul destul de riguros în programele cele mai complexe memoria ocupată este mai mică de 48 K. În consecință, programele pot fi rulate pe orice micro sau minicalculator.

Timpul de calcul depinde de numărul de puncte în care este împărțită o perioadă, precum și de dimensiunile geometrice și intensitatea cîmpului magnetic exterior. Evident, studiul unui regim tranzitoriu sau a unui interval de timp dintr-un proces de încălzire inductivă este ca durată de calcul, mai scurt decât studiul întregului proces de încălzire a cărui durată fizică poate depăși câteva ore, [20].

Rezultatele de calcul prezentate în continuare, pentru un cilindru cu diametrul de 28 mm din material feromagnetic (C10-45), cu variația parametrilor de material dată în capitolul 1, la diferite frecvențe ale cîmpului pe frontiera (150 Hz, 2500 Hz și 5000 Hz), pentru aceeași discretizare spațială (10 straturi) și temporară (6 puncte pe perioadă) și aceeași intensitate maximă a cîmpului magnetic exterior, $H_0 = 300 \cdot 10^3$ A/m, constau în:

- variația în timp la două momente ale procesului de încălzire, unul la început, celălalt după obținerea temperaturii Curie pe stratul exterior, ori pe primele straturi, a intensității cîmpului magnetic și a densității de curent, prezentată în figurile: 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, a și b;

- variația în timp a temperaturii și a densității maxime de curent pe straturi și pe adîncimea cilindrului în procesul de încălzire, prezentată în figurile: 4.17, 4.18 și 4.19;

- variația în timp a intensității maxime a cîmpului magnetic pe straturi și pe adîncimea cilindrului, în procesul de încălzire, prezentată în figurile: 4.20, 4.21 și 4.22;

- variația în timp a valorii maxime a puterii medii, dezvoltate prin efect electrocaloric, în unitatea de volum, în figura 4.23.

Analizînd primul set de rezultate, privind variația în timp a intensității cîmpului magnetic și a densității de curent pe straturi, se evidențiază deformarea și defazajul care apar datorită cîmpului de reacție. Trebuie evidențiată accentuarea deformării cu creșterea frecvenței și reducerea defazaajului cu creș-

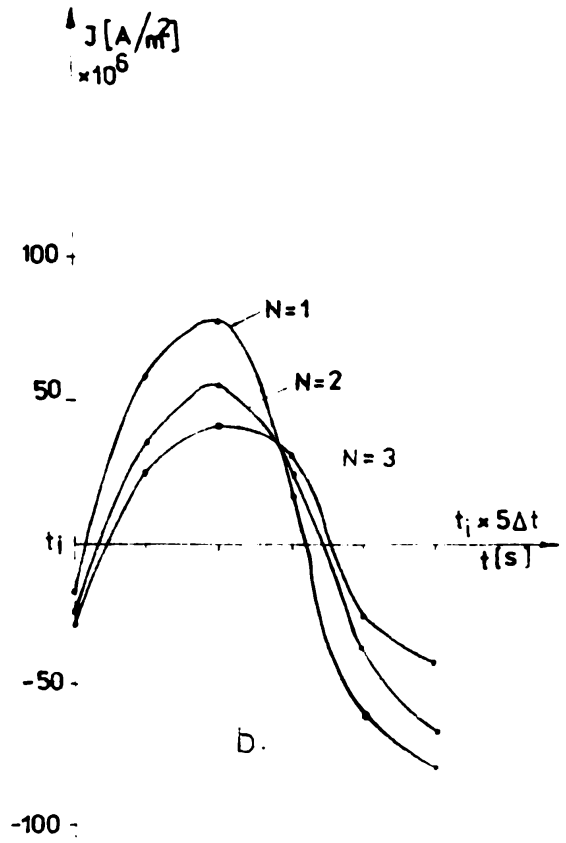
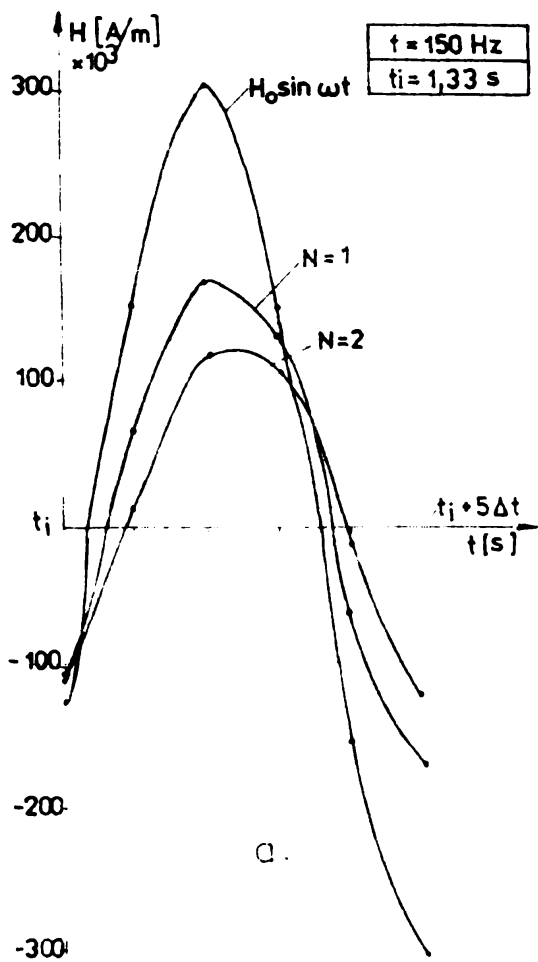


Fig.4.11. Variația în timp a lui H și J la începutul încălzirii

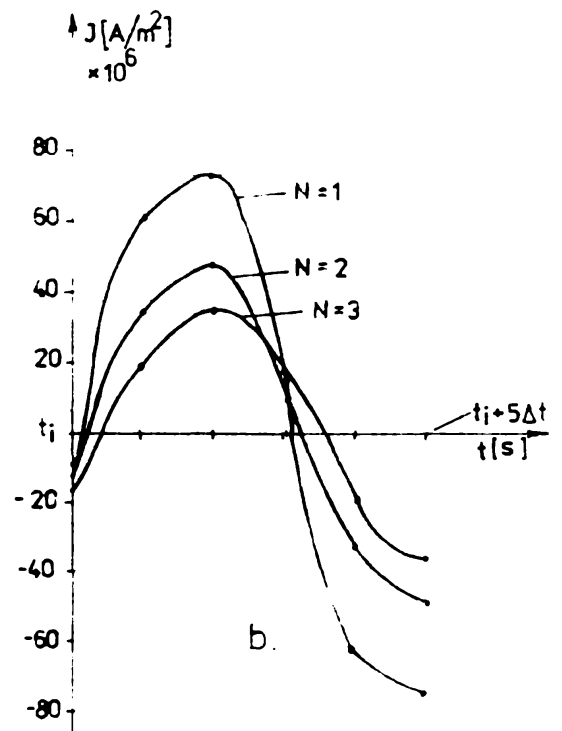
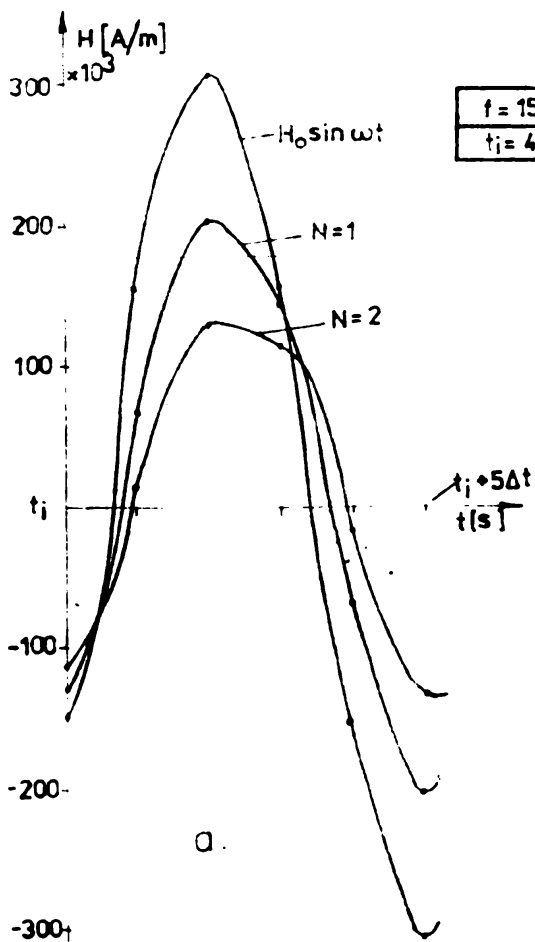


Fig.4.12. Variația în timp a lui H și J la sfârșitul încălzirii

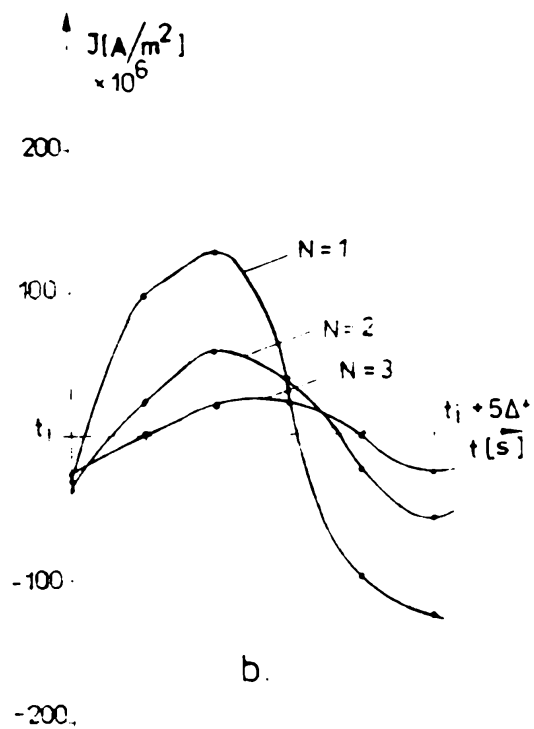
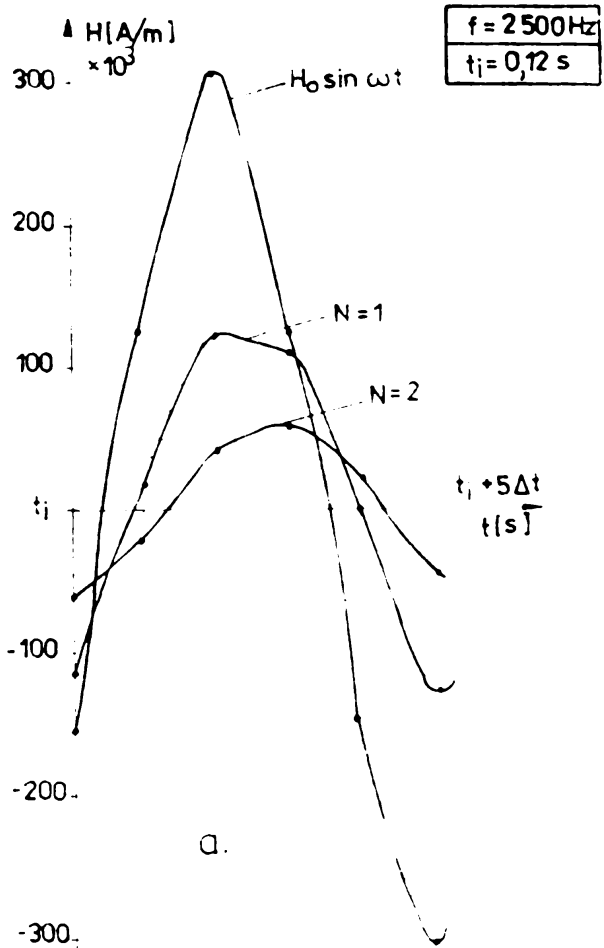


Fig. 4.13. Variația în timp a lui H și J la începutul încălzirii.

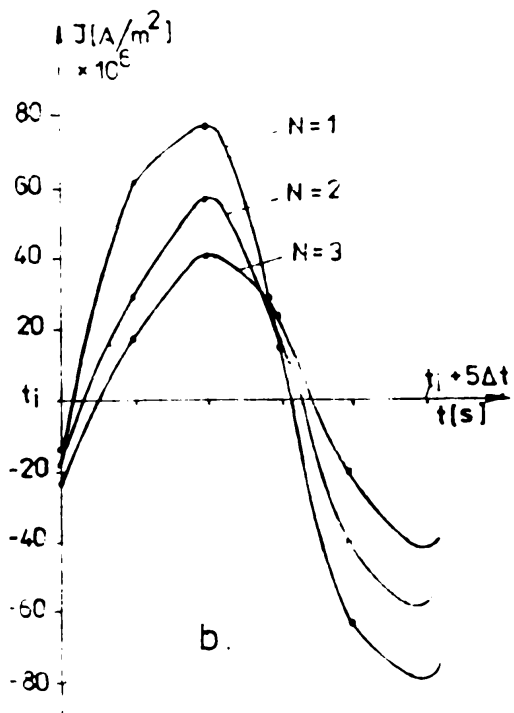
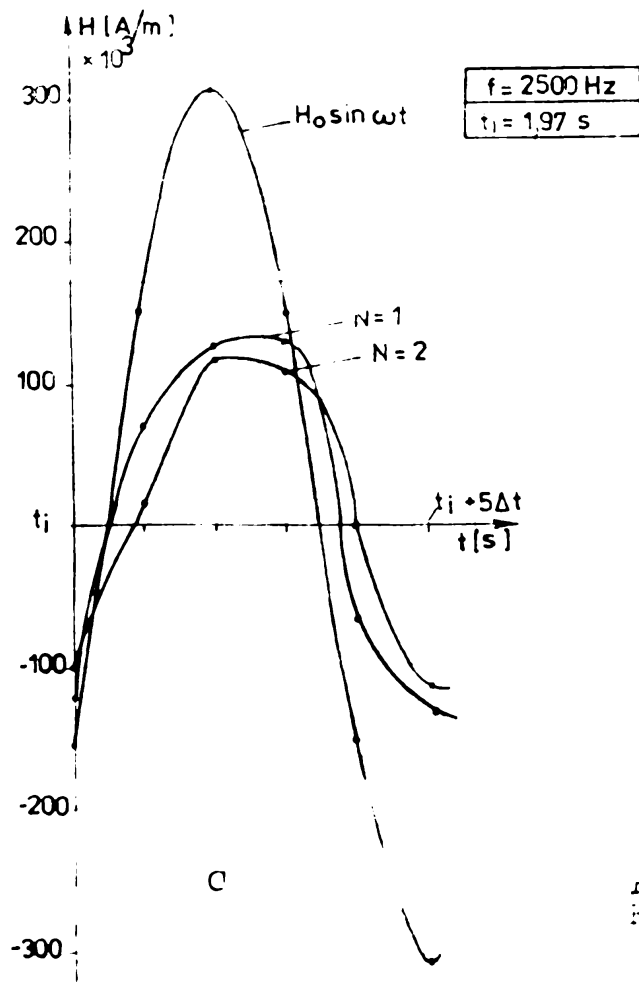


Fig. 4.14. Variația în timp a lui H și J la sfârșitul încălzirii.

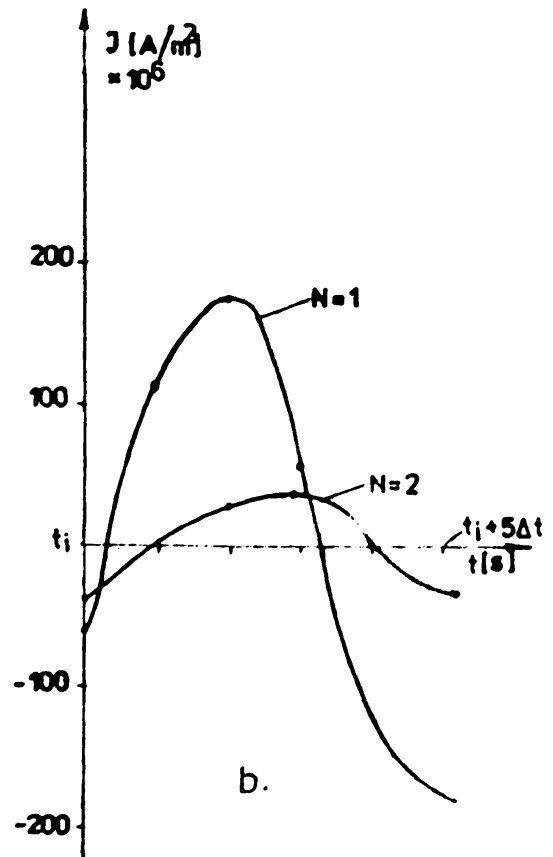
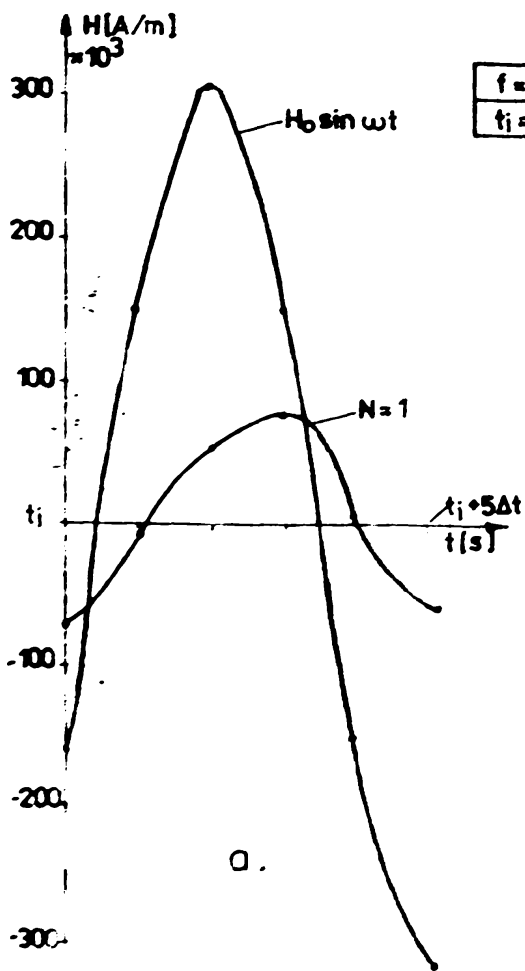


Fig.4.15. Variația în timp a lui H și J la începutul încălzirii

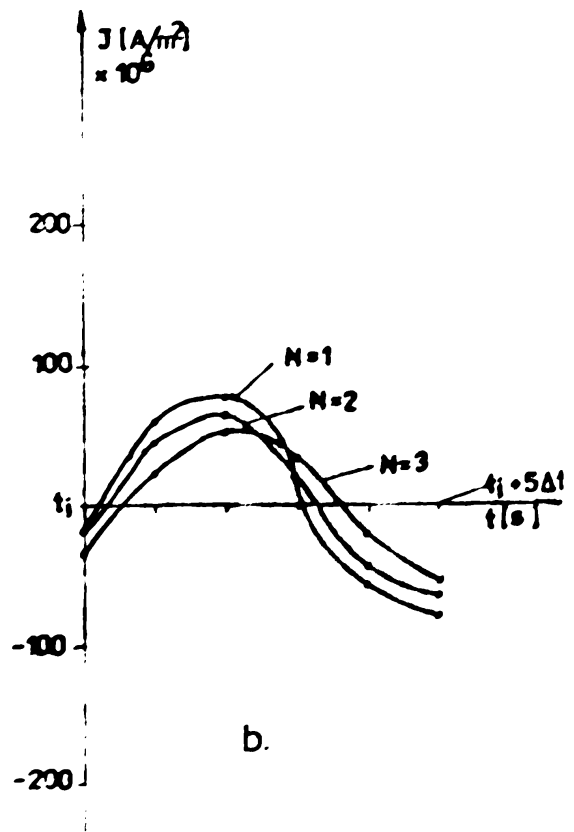
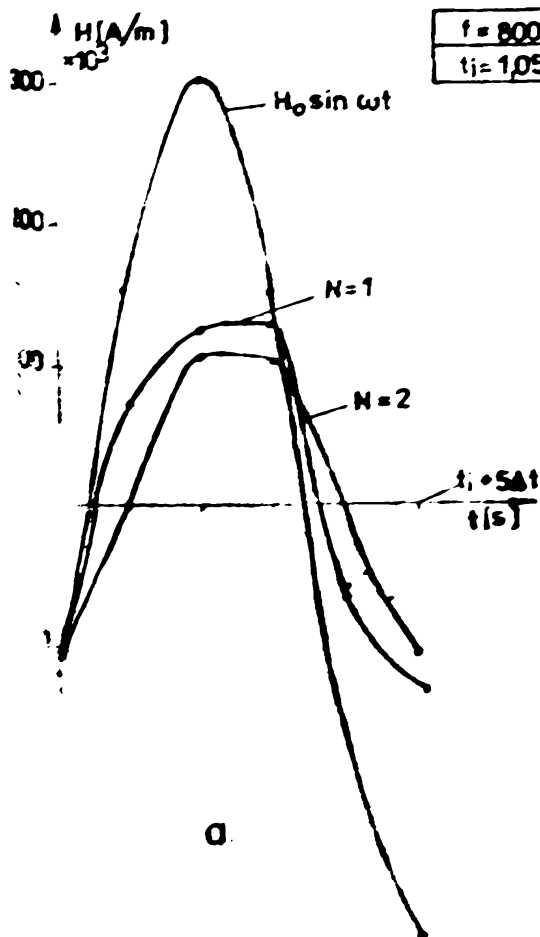


Fig.4.16. Variația în timp a lui H și J la sfârșitul încălzirii

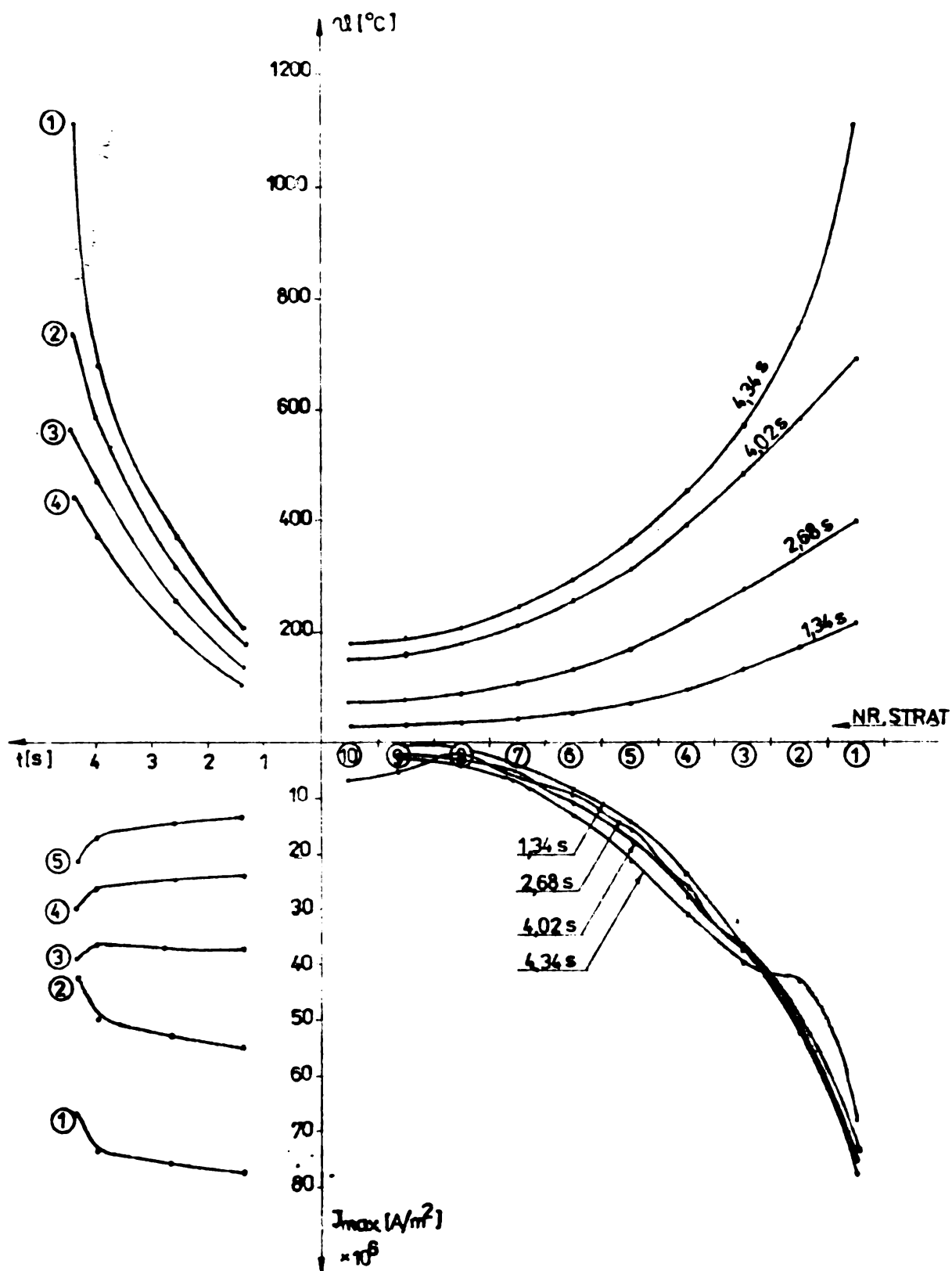


Fig. 4.17. Distribuția pe straturi și în timp a temperaturii și densității maxime de curent, pentru $\omega = 150 \text{ Hz}$

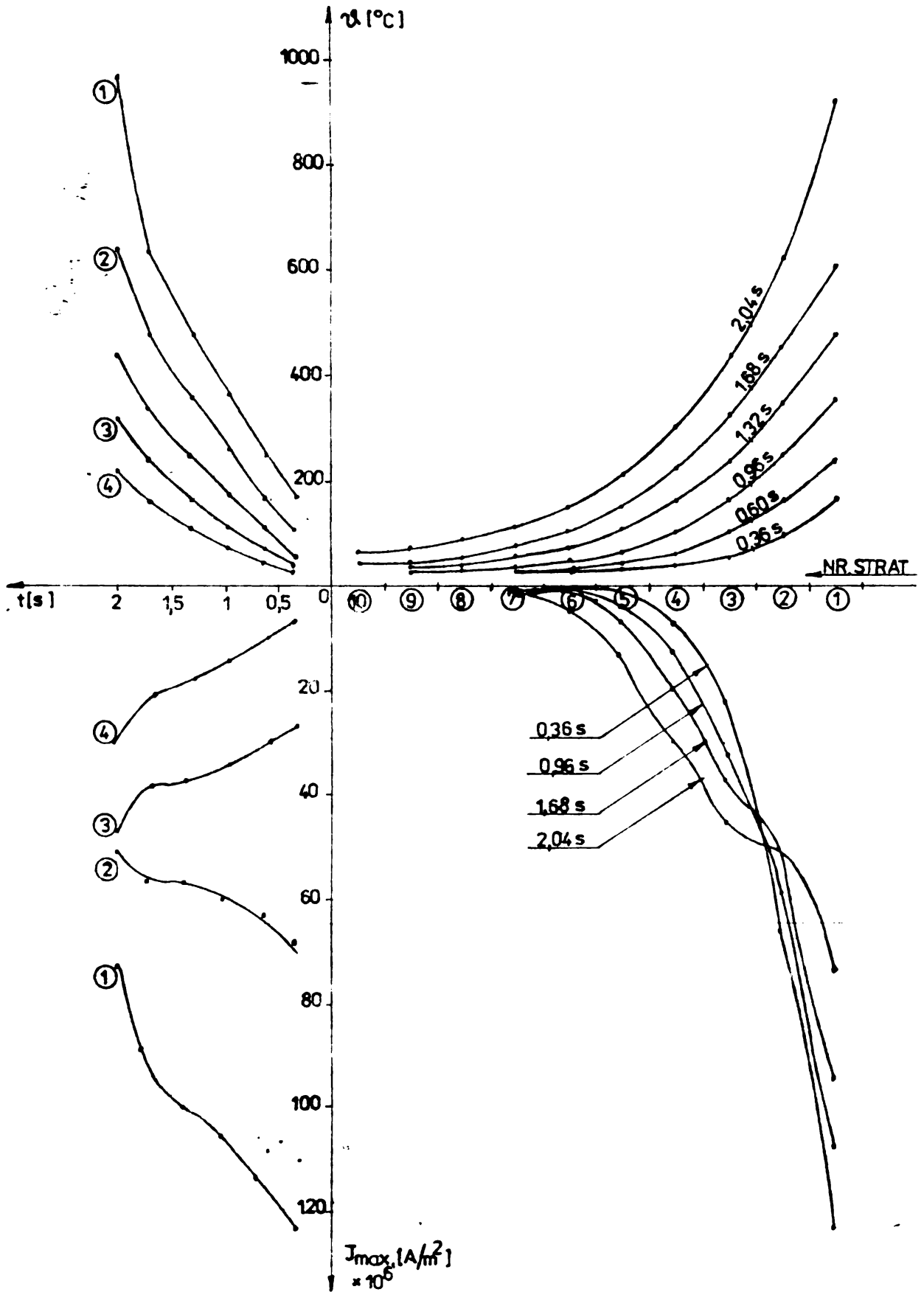


Fig 4.18. Distribuția pe straturi și în timp a temperaturii și densității maxime de curent, pentru $f = 2500 \text{ Hz}$.

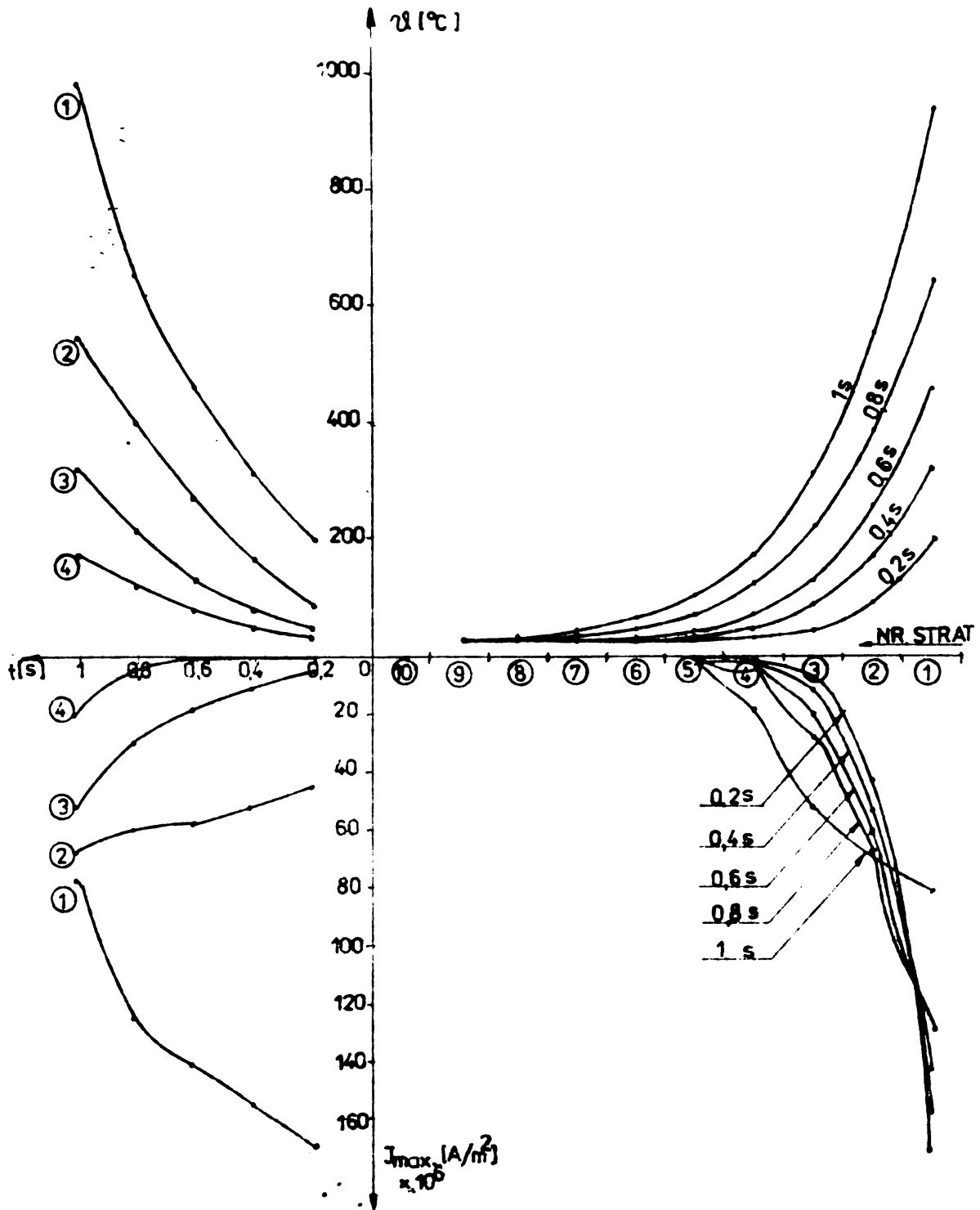


Fig.4.19. Distribuția pe straturi și în timp a densității maxime de curent pentru $f = 8000$ Hz.

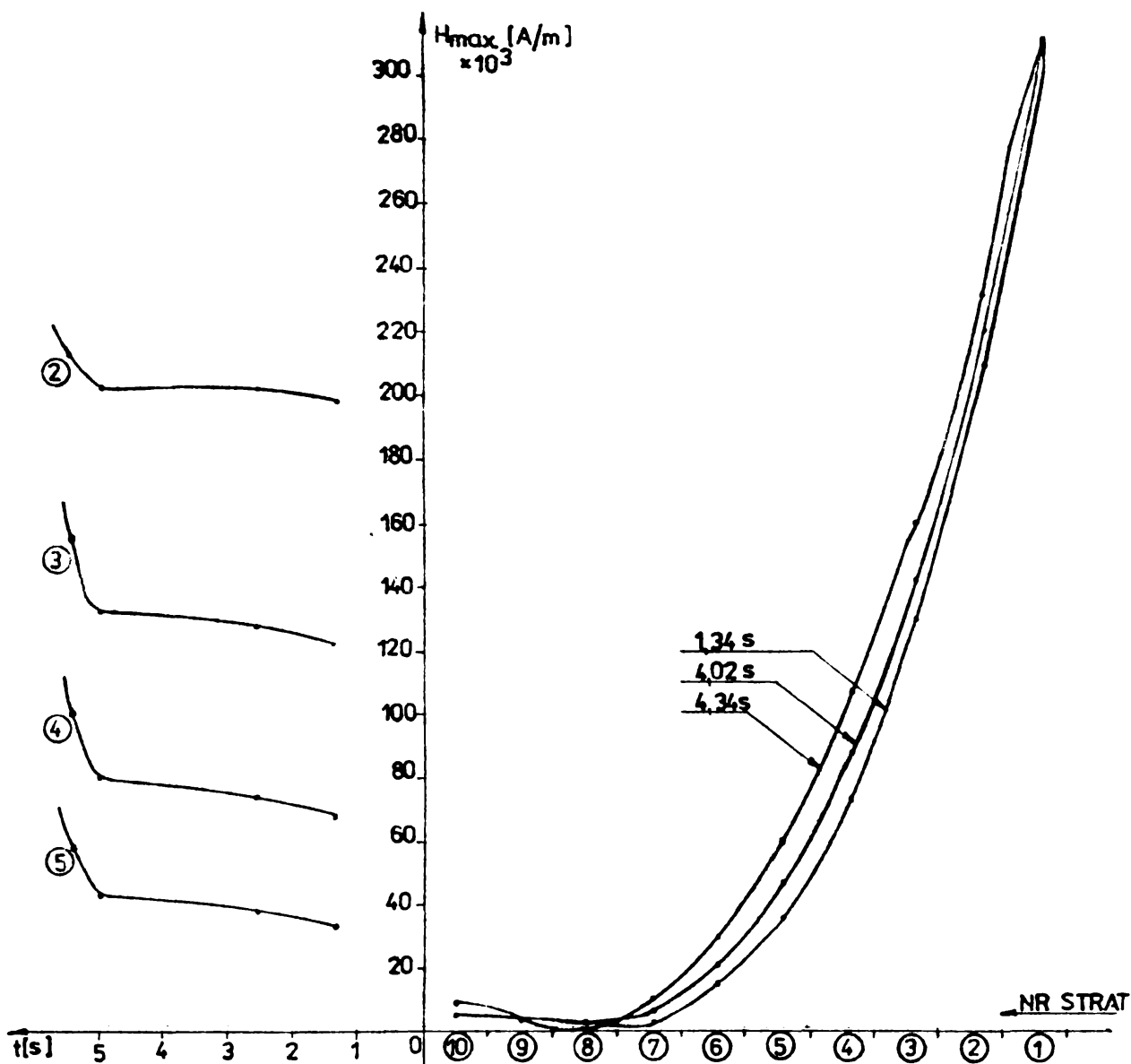


Fig.4.20. Variația în timp a intensității maxime a câmpului magnetic pe straturi și pe adâncimea cilindului la $f = 150$ Hz

terea temperaturii când permeabilitatea magnetică relativă tinde către valoarea unu. Astfel, se observă că la depășirea temperaturii Curie pe primele două straturi, intensitățile câmpului magnetic și densitățile de curent pe acestea au tendința să fie în fază. În ce privește variația intensității câmpului magnetic compararea cu rezultatele obținute de Beckert, în [6, 7], arată că luarea în considerare a fenomenului cuplat, deci a variației cu tem-

peratura a parametrilor electrici și magnetici, face ca deformarea să fie mai puțin accentuată.

Analizând cel de-al doilea set de rezultate, prezentate în figurile 4.17, 4.18 și 4.19, se desprind următoarele concluzii:

- variația temperaturii pe adâncimea cilindrului considerat este cu atât mai mare cu cât frecvența este mai mare, deci adâncimea de pătrundere mai mică, iar variația în timp pe strat după Curie își modifică panta;

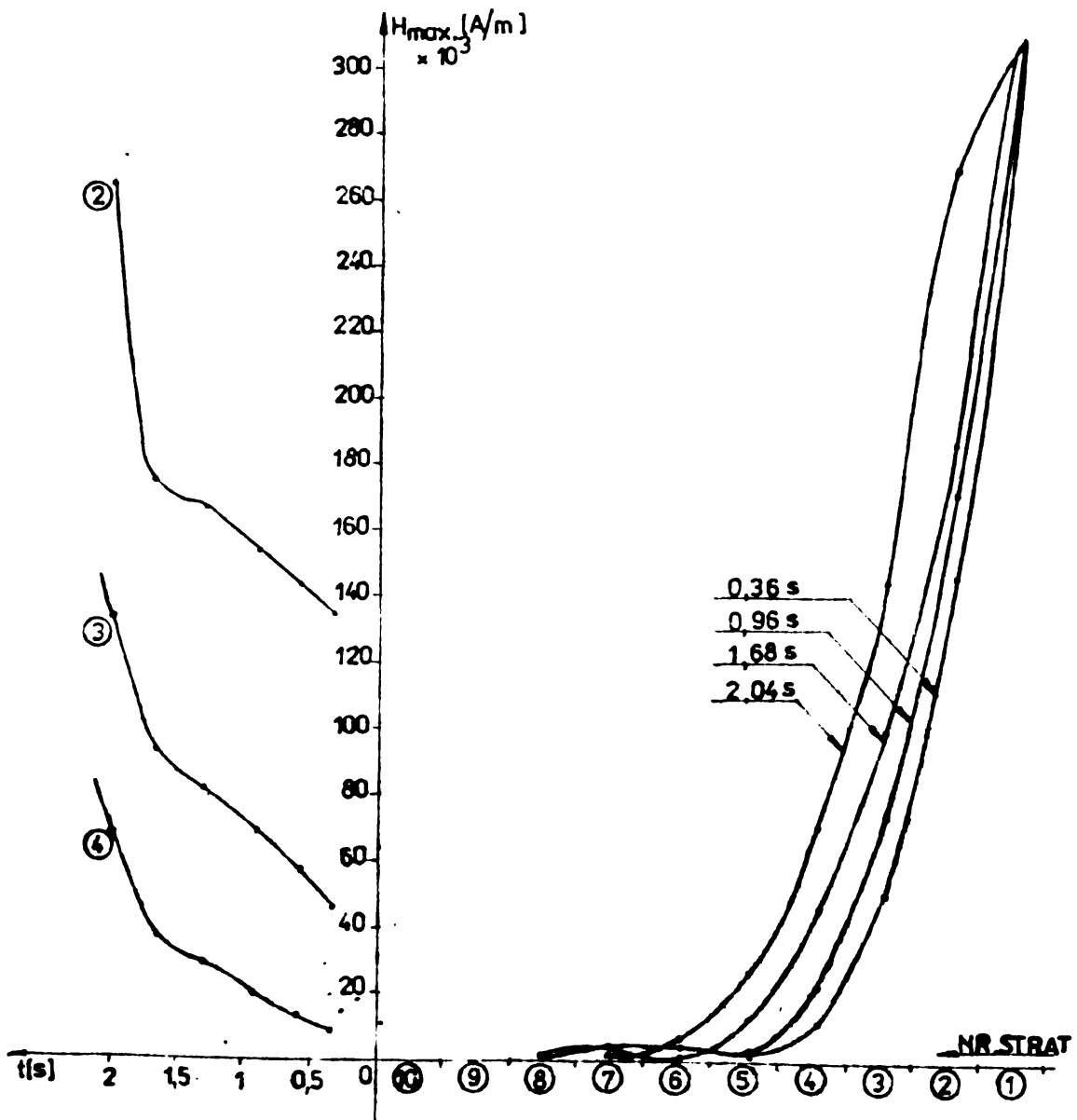


Fig.4.21 Variația în timp a intensității maxime a câmpului magnetic pe straturi și pe adâncimea cilindrului la $f = 2500$ Hz.

- densitatea de curent pe straturi în adâncimea cilindrului are o variație întrucâtva similară și evident la frecvența cea mai mare (8000 Hz), valoarea densității de curent pe stratul exterior rămâne mult mai mare decât cea de pe stratul următor;

- densitatea de curent pe primul strat scade în timp odată cu creșterea temperaturii, scăderea fiind cu atât mai accentuată cu cât frecvența este mai mare, iar pe straturile din inte-

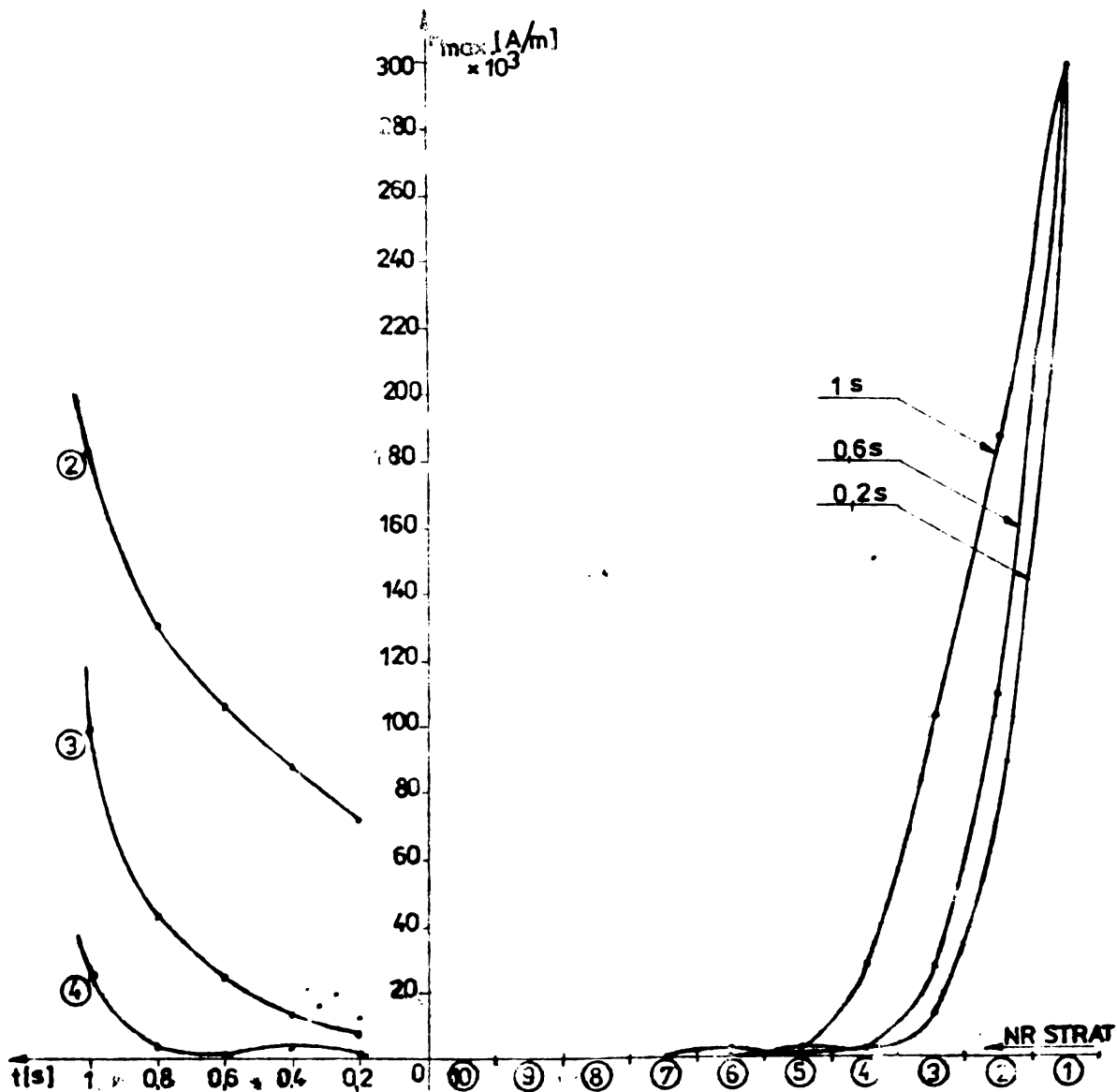


Fig. 4.22. Variația în timp a intensității maxime a câmpului magnetic pe straturi și pe adâncimea cilindrului la $f = 8000$ Hz.

rior densitățile de curent cresc, crescînd adîncimea de pătrundere a cîmpului, aspect mai puțin important în toate sensurile la frecvența de 150 Hz, unde de la început adîncimea de pătrundere este mult mai mare;

- densitatea de curent pe straturi în adîncimea cilindrului, la momentele de timp cînd pe primele straturi s-a atins temperatura Curie, adică cînd mediul este un amestec de straturi neferomagnetice și feromagnetice, pentru toate cazurile analizate, are o dependență diferită de situațiile cînd mediul este în totalitate feromagnetic.

Variația în timp a intensității cîmpului magnetic, pe straturi și pe adîncimea cilindrului (figurile 4.20, 4.21, și 4.22) în procesul de încălzire, evidențiază odată în plus efectele datorate frecvenței intensității cîmpului pe frontieră, deci a adîncimii de pătrundere, valoarea intensității cîmpului magnetic la frecvența de 150 Hz, rămînînd aproape constantă pe toate straturile și crescînd în schimb important la toate celelalte frecvențe, creșterile cele mai pronunțate apar la frecvența de 8000 Hz.

Variația în timp a valorii maxime a puterii medii dezvoltate prin efect electrocaloric în unitatea de volum (fig.4.23), evidențiază rolul important al frecvenței în stabilirea unor puteri bine precizate într-un semifabricat sau piesă în scopul realizării regimului de încălzire dorit. Astfel, la valori mari ale frecvenței se obțin, pentru un semifabricat dat, valori mari ale puterii disipate și a celei specifice pe unitatea de suprafață, această situație fiind specifică încălzirii superficiale. Curba 1 este specifică semifabricatului cilindric avînd diametrul de 28 mm, iar curba 2 unui semifabricat cubic avînd diagonala secțiunii de 28 mm, deci cu un volum mai mic ca cilindrul. Se constată valori ale puterii utile medii sensibil egale în cele două semifabricate la frecvența de 2500 Hz, a cîmpului pe frontieră.

Se apreciază că aceste dependențe ale puterii medii dezvoltate în unitatea de volum sînt utile în evaluarea puterii utile medii ce trebuie să se dezvolte într-un semifabricat sau piesă și permit determinarea puterii pe unitatea de suprafață. Desigur, în proiectarea instalațiilor de încălzire prin inducție, se consideră valoarea medie pe o perioadă a valorii puterii medii dezvoltate în unitatea de volum cu ajutorul căreia se determină puterea utilă medie și puterea necesară pe unitatea de suprafață.

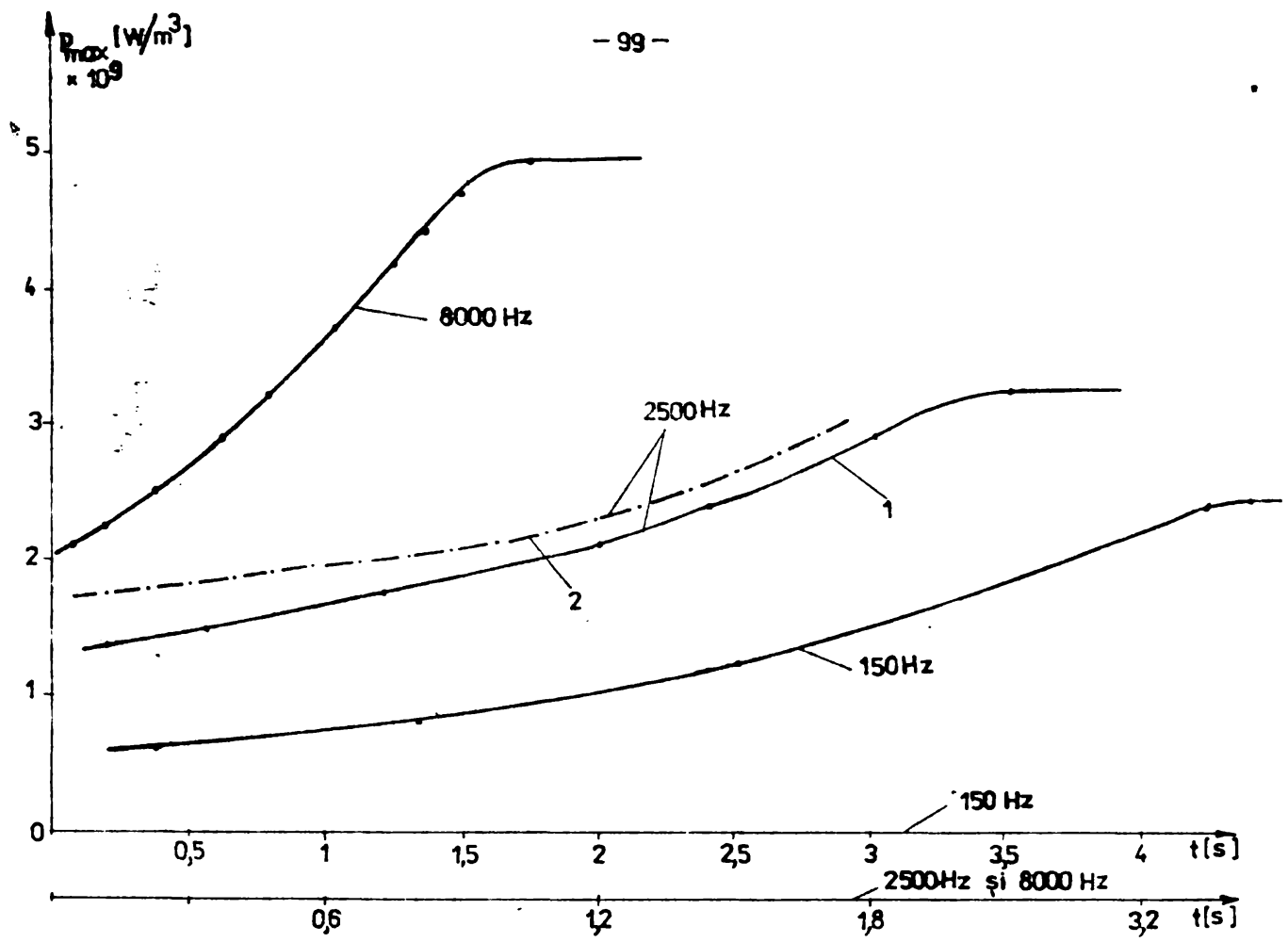


Fig.4.23. Variația în timp a valorii maxime a puterii medii în unitatea de volum

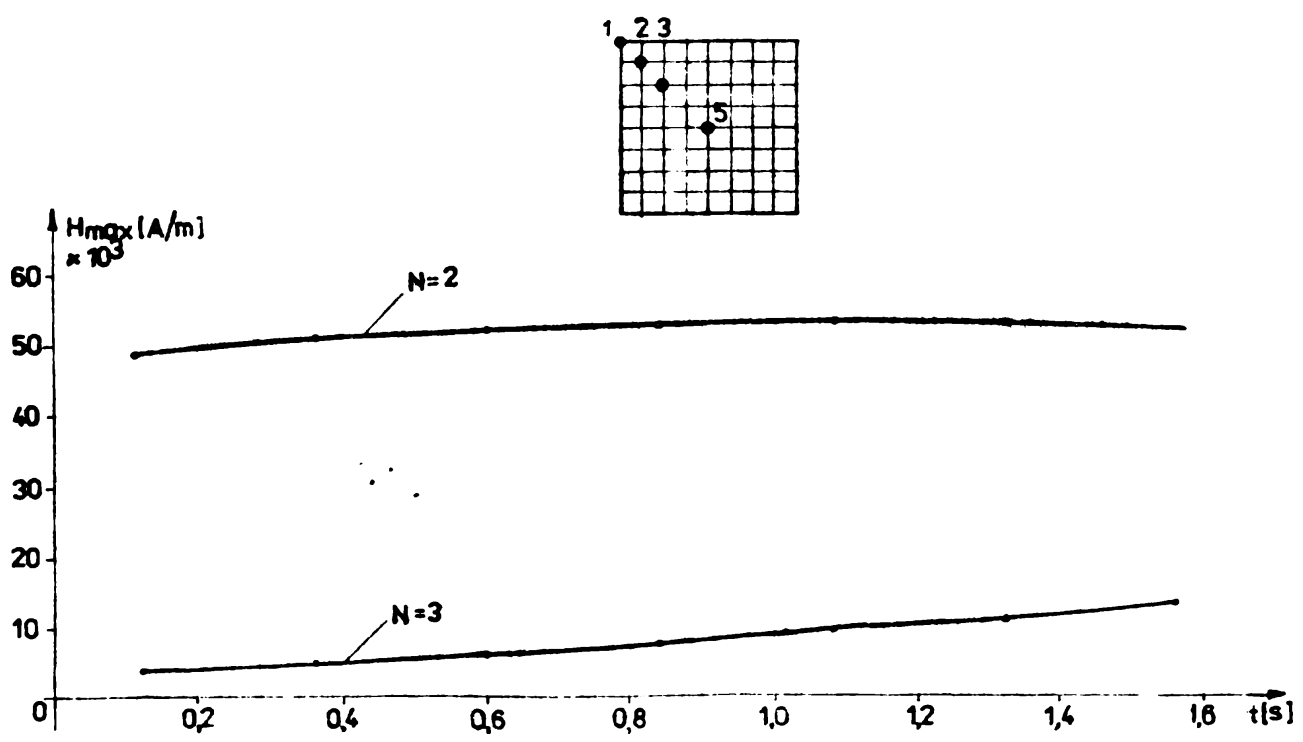


Fig.4.24. Variația în timp a valorii maxime a intensității câmpului magnetic

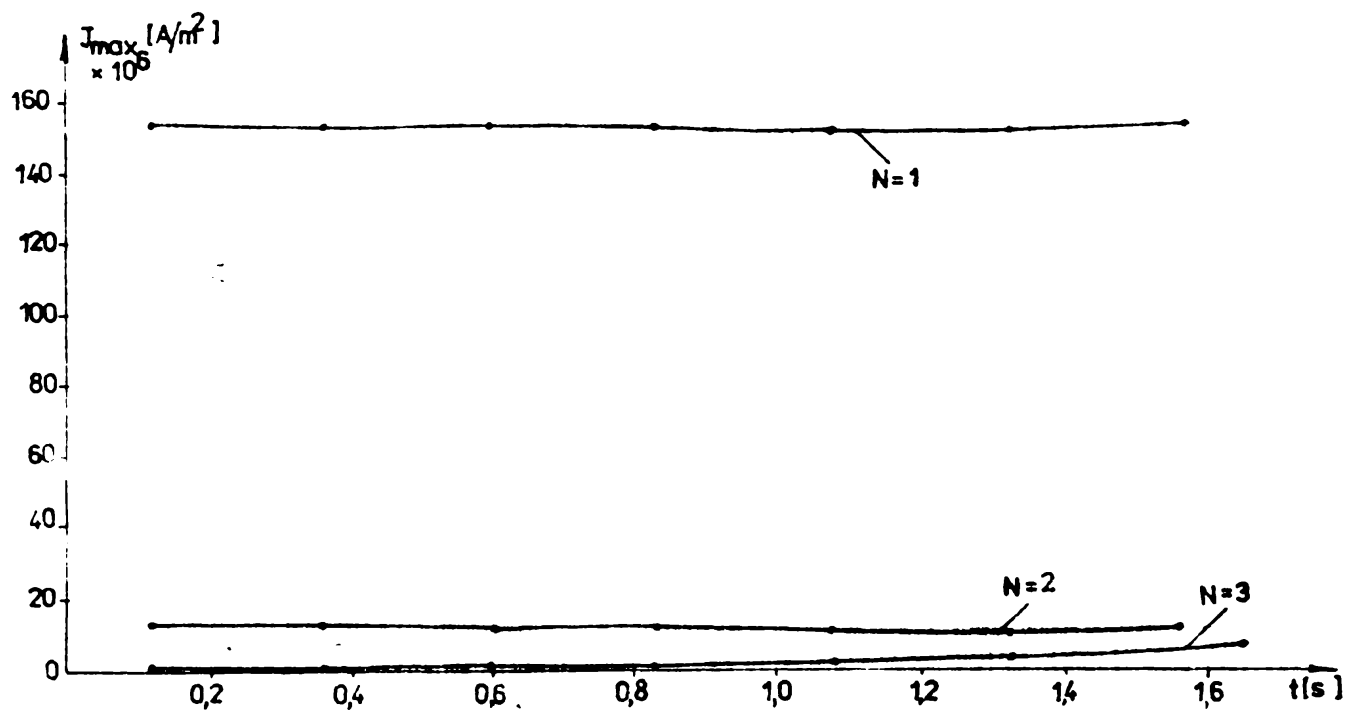


Fig.4.25. Variația în timp a valorii maxime a densității de curent

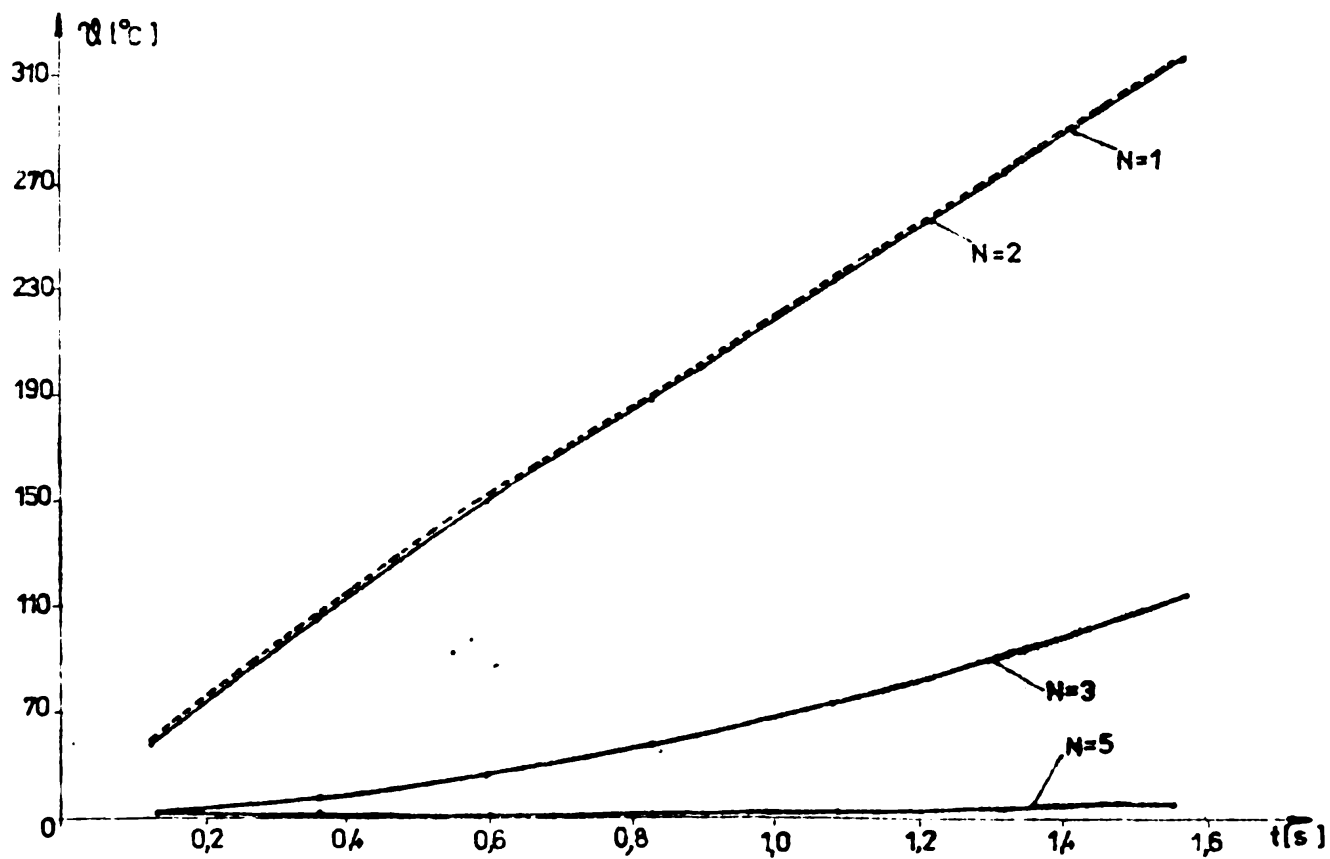


Fig.4.26. Variația în timp a temperaturii

Rezultatele de calcul prezentate în continuare, pentru un cub cu latura de $28/\sqrt{2}$ mm din material feromagnetic (OLC-45) care este înscris în semifabricatul cilindric avînd diametrul de 28 mm, la frecvența de 2500 Hz, pentru o rețea de discretizare plană, cu 9×9 noduri, avînd pasul de discretizare egal, după cele două direcții, cu 2,5 mm și temporară (6 puncte pe perioadă) și aceeași valoare maximă a intensității cîmpului pe frontieră ca la semifabricatul cilindric, constau în:

- variația în timp a valorii maxime a puterii medii dezvoltate prin efect electrocaloric în unitatea de volum, prezentată în figura 4.23, curba 2;

- variația în timp a valorii maxime a intensității cîmpului magnetic în nodurile 2 și 3 ale rețelei, în nodul 1 ca de altfel în toate nodurile de pe frontieră avînd valoarea $H_0 = 308 \cdot 10^3$ A/m, prezentată în figura 4.24;

- variația în timp a valorii maxime a densității de curent în nodurile 1, 2 și 3 ale rețelei, prezentată în fig. 4.25;

- variația în timp a temperaturii în nodurile 1, 2, 3 și 5 ale rețelei, prezentată în figura 4.26;

- variația în timp la patru momente ale procesului de încălzire a intensității cîmpului magnetic și a densității de curent, în nodurile precizate, prezentată în figurile: 4.27, 4.28, 4.29 și 4.30 a și b.

Astfel, se constată că valorile maxime ale intensității cîmpului magnetic și ale densității de curent în nodurile precizate (figurile 4.24 și 4.25) cresc ușor în timp, diferențele de valori în noduri fiind determinate de valoarea frecvenței și a pasului de discretizare spațial.

Evoluția temperaturii în timp, în nodurile precizate (figura 4.26), scoate în evidență încălzirea pronunțată a muchiilor datorată surselor de cîmp de pe cele două laturi ale frontierei și o încălzire mai lentă a mijlocului datorat desigur și valorii frecvenței.

Referitor la variațiile în timp ale intensității cîmpului magnetic și ale densității de curent (figurile 4.27, 4.28, 4.29 și 4.30 a și b), se constată concluzii similare ca și în cazul cilindrului pentru perioada analizată a procesului de încălzire în care nu s-a atins temperatura Curie în nici un punct al

rețelei de discretizare.

Rezultatele de calcul prezentate în continuare, pentru cilindrul considerat anterior, dar cu neglijarea cîmpului magnetic creat de curenții ce se stabilesc în cilindru, cu aceeași discretizare spațială și temporară, dar considerînd în fiecare punct al secțiunii cilindrului un cîmp magnetic, alternativ și sinusoidal, avînd valoarea maximă a inducției magnetice $B_{e0} = 2,4 \text{ T}$ și frecvența $f = 2500 \text{ Hz}$, constau în:

- variația în timp la două momente ale procesului de încălzire a potențialului electric vector în straturile 1 și 6, prezentată în figura 4.31 a și b;

- variația în timp la două momente ale procesului de încălzire a densității de curent în straturile 1 și 6, prezentată în figura 4.32 a și b;

- variația valorii maxime a potențialului electric vector și a densității de curent, pe straturi, la cele două momente ale procesului de încălzire, prezentată în figura 4.33;

- variația în timp a temperaturii pe straturile 1, 5 și 11, prezentată în figura 4.34.

Referitor la variația în timp a potențialului electric vector pe diverse straturi la cele două momente considerate se constată o diminuare a valorii maxime în timp, deformarea sa nefiind pronunțată, iar valorile sale sînt comparabile ca ordin de mărime cu cele ale intensității cîmpului magnetic prezentate pentru cazul cînd se consideră cîmpul magnetic de reacție al curenților din cilindru. Influența temperaturii privind atît valorile potențialului electric vector cît și defazajul care se păstrează aproape constant la cele două momente de timp considerate este evidentă chiar dacă cîmpul de reacție se neglijează.

Variația în timp a densității de curent (figura 4.32 a și b), evidențiază o diferență apreciabilă a valorii sale pe straturi la începutul încălzirii și apoi, odată cu creșterea temperaturii, o diminuare a acesteia. Pentru $t = 0,12 \text{ s}$ valoarea maximă a densității de curent este comparabilă ca ordin de mărime cu cea de la cazul cu reacție, iar în timp aceasta scade pentru stratul exterior și crește sensibil pentru straturile din interior.

Valoarea maximă a potențialului electric vector la începutul încălzirii crește important pînă în stratul 4, după care variația sa spre axul cilindrului este neglijabilă, iar odată cu creșterea temperaturii se evidențiază o creștere ușoară spre ax

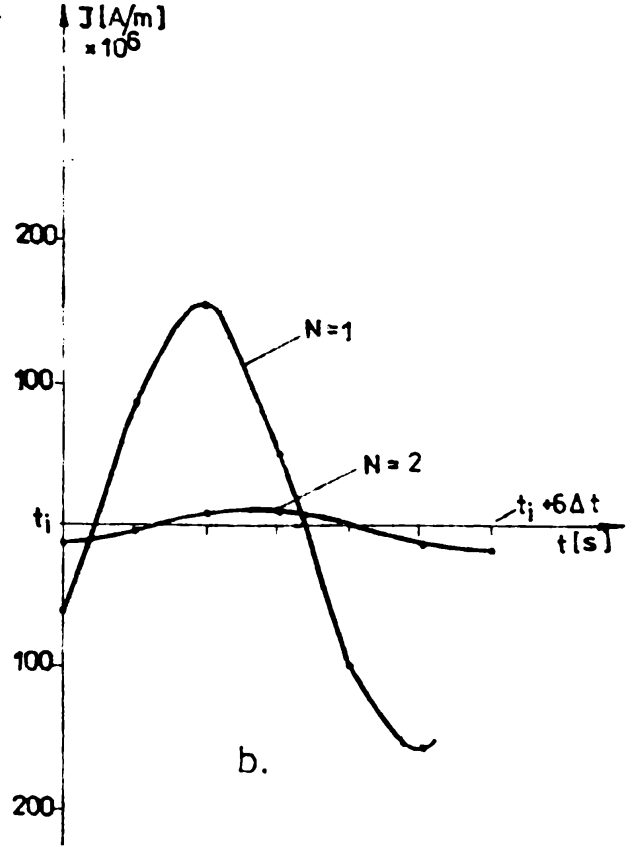
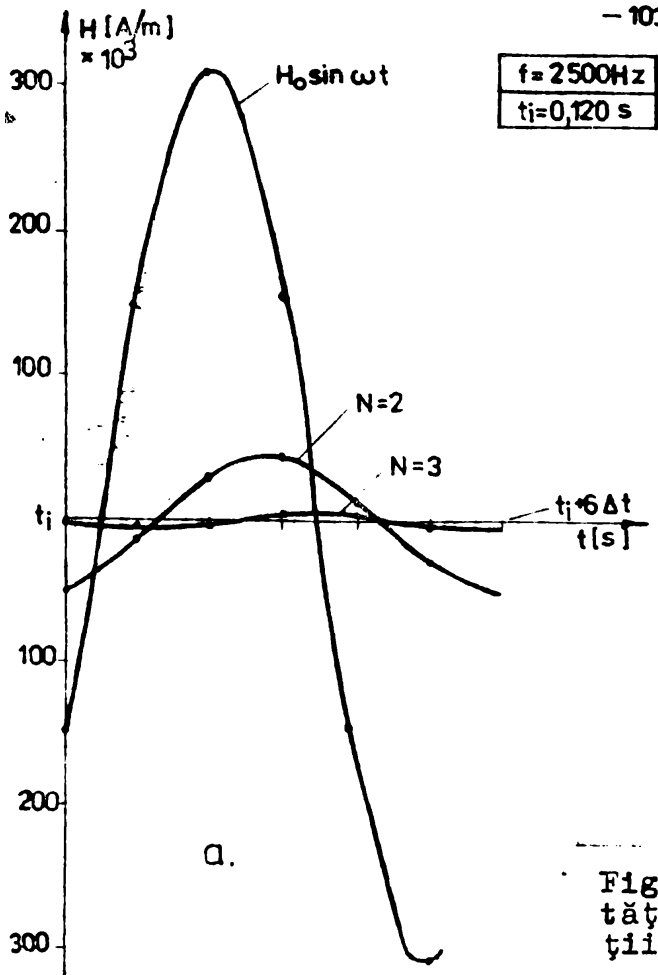


Fig.4.27. Variația în timp a intensității câmpului magnetic și a densității de curent la $t = 0,12 \text{ s}$.

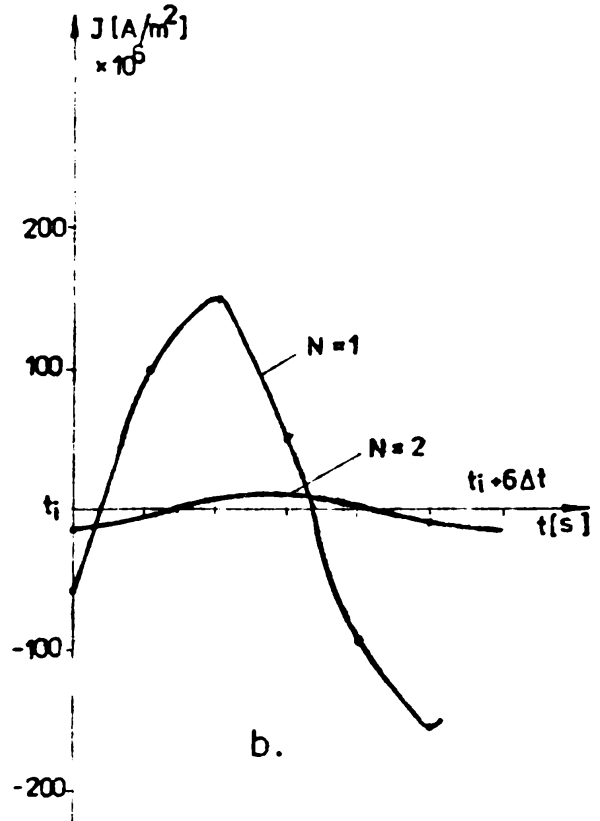
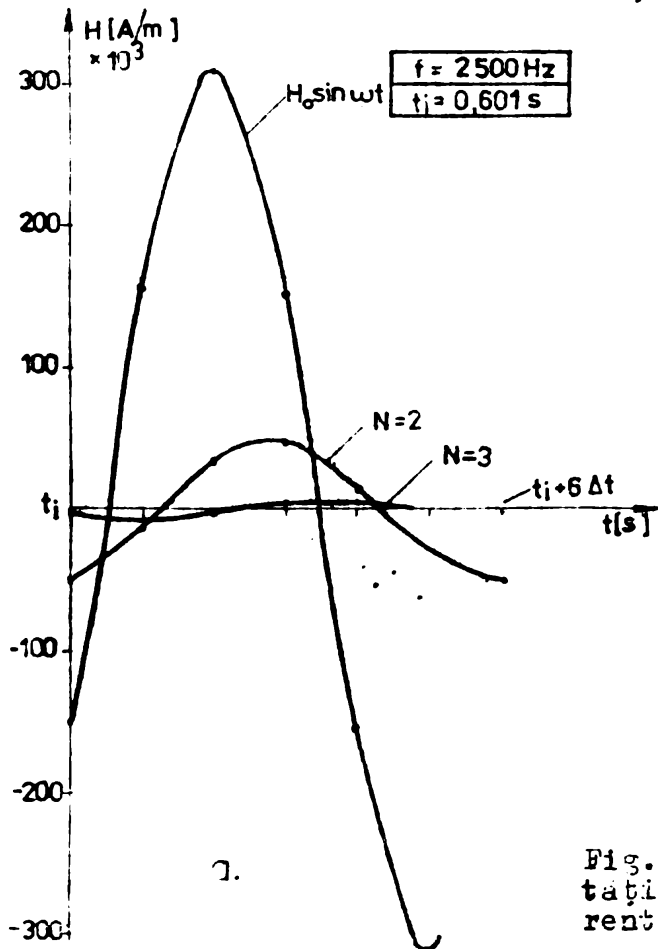


Fig.4.28. Variația în timp a intensității câmpului și a densității de curent la $t = 0,601 \text{ s}$.

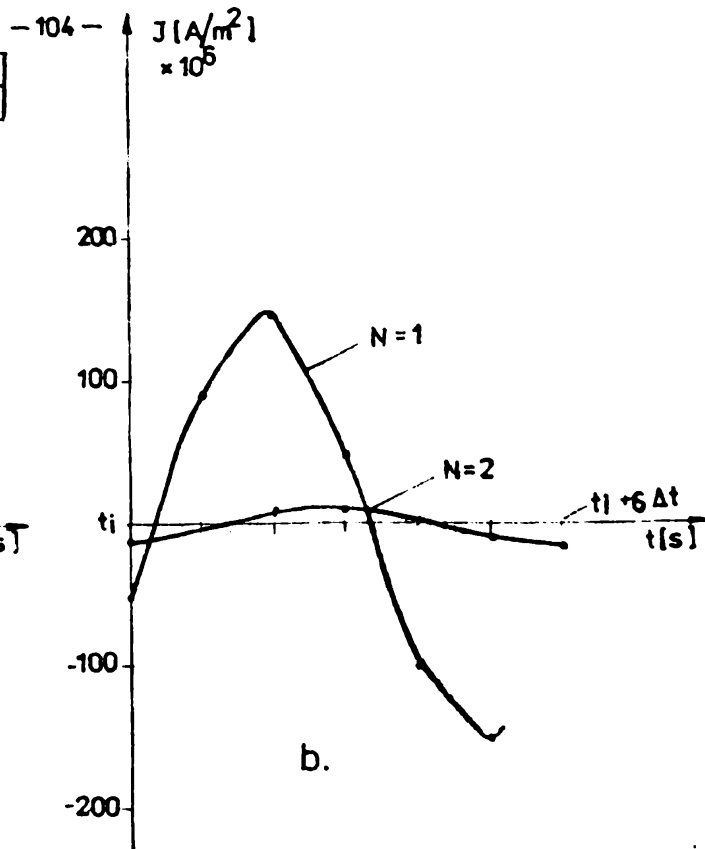
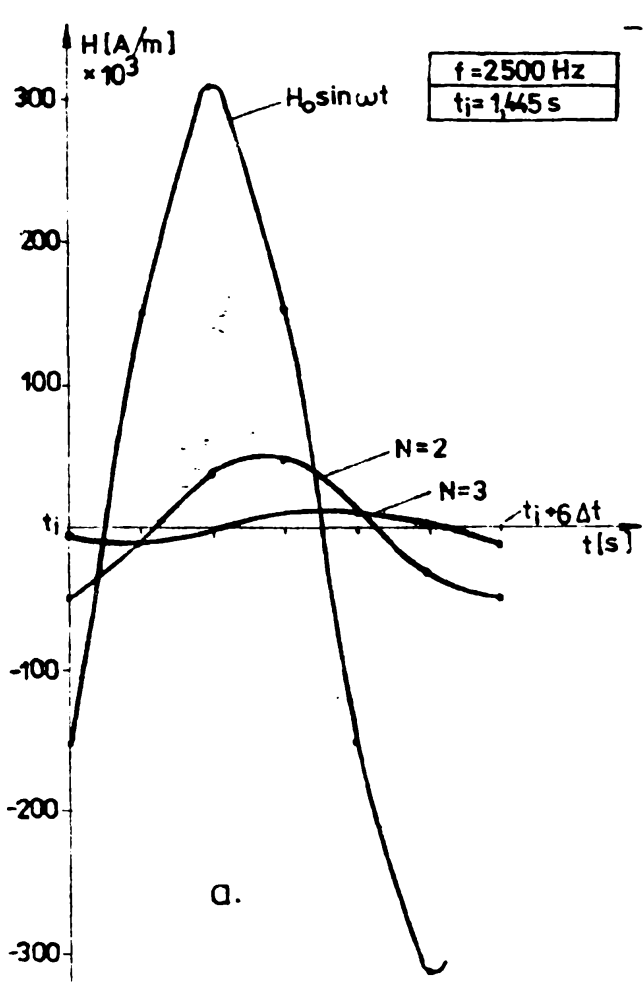


Fig.4.29. Variația în timp a intensității câmpului magnetic și a densității de curent la $t = 1,445 \text{ s}$.

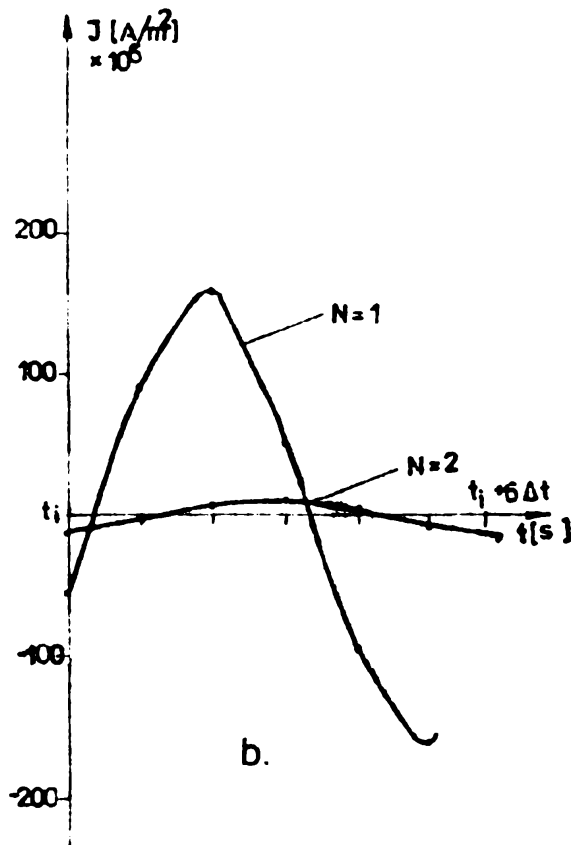
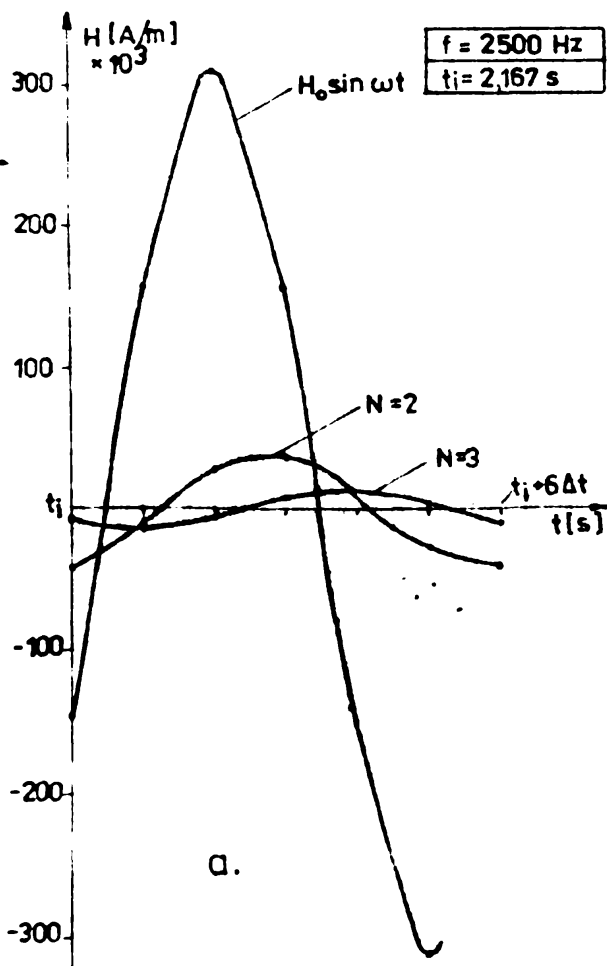


Fig.4.30. Variația în timp a intensității câmpului magnetic și a densității de curent la $t = 2,167 \text{ s}$.

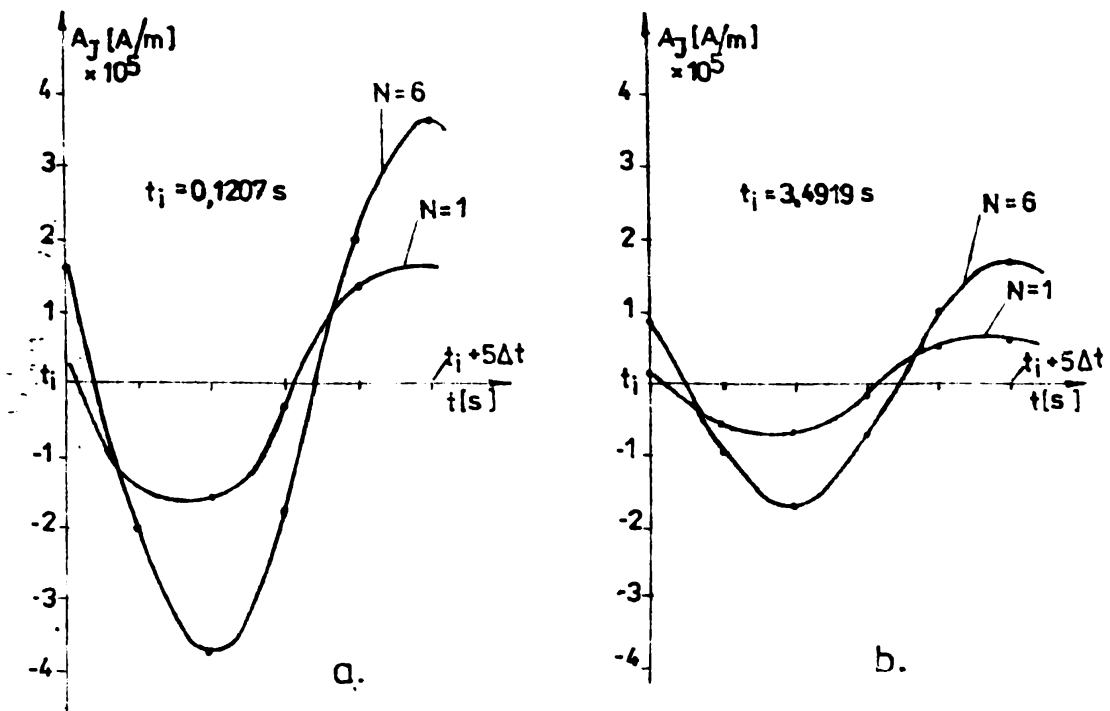


Fig.4.31. Variația în timp a potențialului electric vector la două momente ale procesului de încălzire

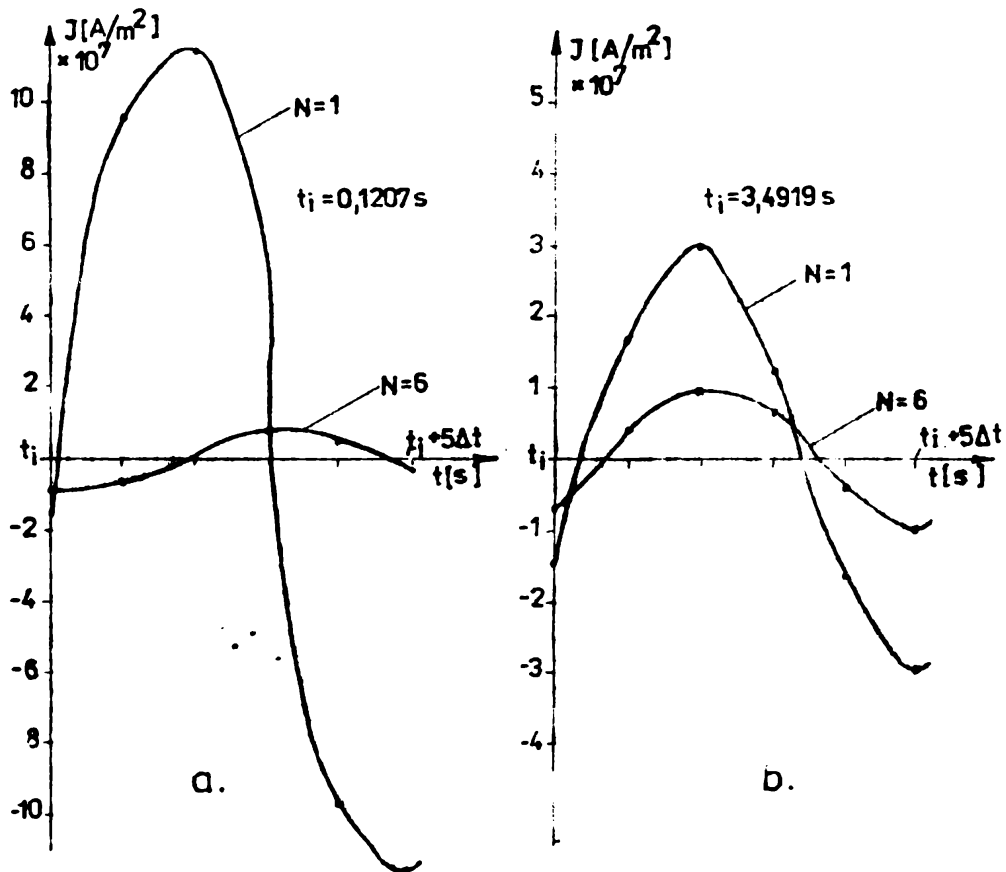


Fig.4.32. Variația în timp a densității de curent la două momente ale procesului de încălzire

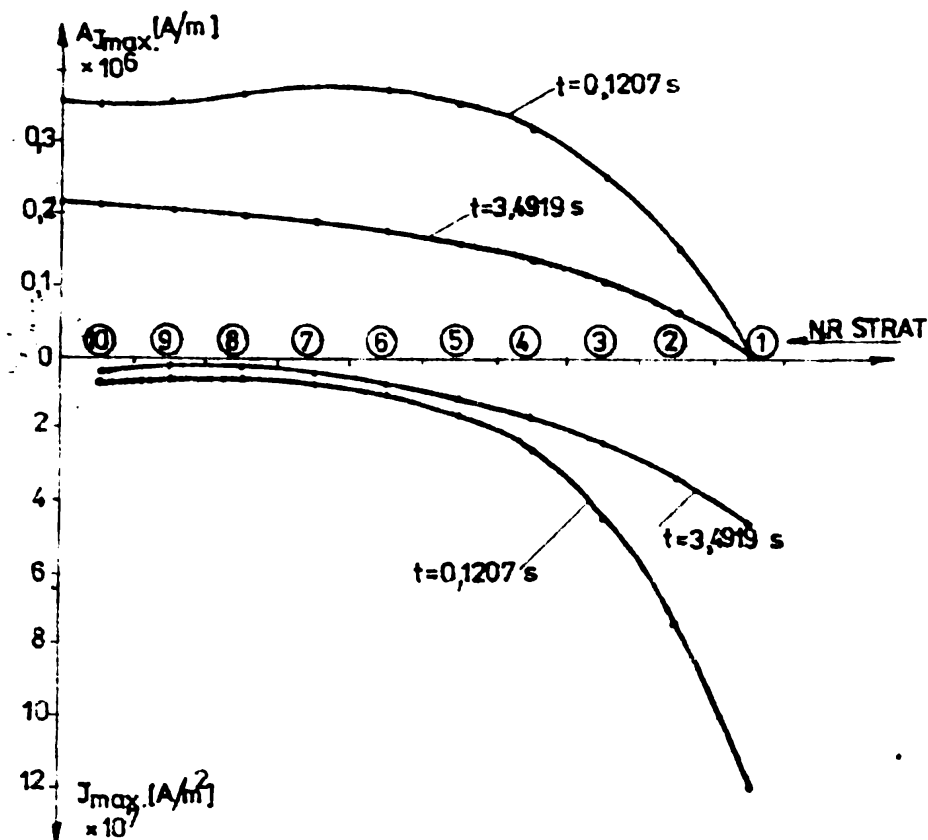


Fig.4.33. Variația valorii maxime a potențialului electric vector și a densității de curent pe straturi la două momente de timp

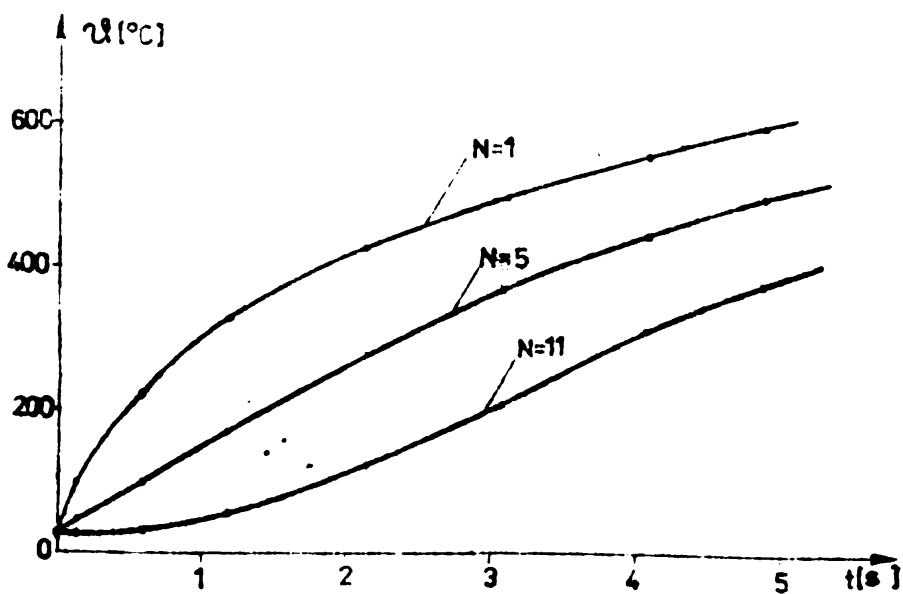


Fig.4.34. Variația în timp a temperaturii pe straturile 1, 5 și 11

(figura 4.33).

Variația valorii maxime a densității de curent pe straturi evoluează odată cu încălzirea similar ca și la cazul cu reacție cu observația că se evidențiază o mai bună repartizare pe straturi care se accentuează cu creșterea temperaturii.

Referitor la variația temperaturii în timp pe straturile 1, 5 și 11 (figura 4.34), față de cazul cu reacție, se constată:

- procesul de încălzire la suprafață este mai lent, dar în ansamblu este mai uniform neexistând diferențe de temperatură între straturi apreciabile ca în cazul cu reacție;

- în timp se evidențiază o ușoară omogenizare a temperaturii pe straturi.

În figura 4.35, se prezintă comparativ variația în timp a valorii maxime a puterii medii dezvoltate prin efect electrocaloric în unitatea de volum, în cilindru, pentru situația fără reacție (curba 1) și cu reacție (curba 2). Astfel, după aproximativ cinci secunde de încălzire valoarea maximă a puterii considerate scade ușor în timp, deși nu s-a atins temperatura Curie în nici un strat (curba 1), iar după două secunde pentru cazul cu reacție (curba 2), aceeași mărime crește ușor stabilindu-se la o valoare superioară cazului fără reacție.

Se apreciază că diferențele rezultate pentru mărimile a căror dependență s-a analizat în cele două situații, cu reacție și fără reacție, sînt apreciabile și deci în cazul mediilor feromagnetice este necesar rezolvarea problemei de câmp electromagnetic cuplat cu cel termic luînd în considerare câmpul magnetic de reacție creat de curenții rezultați în urma fenomenului de inducție electromagnetică, în mediul respectiv.

Programul DIFCCR s-a rulat și pentru un cilindru cu diametrul de 500 mm, constante de material, frecvență și condiția de schimb termic precizate în [20]. Rezultatele obținute pentru o lege de variație în trepte a intensității câmpului magnetic pe frontieră se prezintă comparativ în figura 4.36. Se constată o concordanță bună a temperaturii pe straturile 1 și 11 pînă la valoarea de 1200°C , de unde în [20], se propune o lege de variație exponențială a intensității câmpului magnetic pe frontieră care nu este dată, pentru menținerea temperaturii de 1200°C pe suprafața cilindrului.

Adoptăm legea de variație în trepte a intensității câmpului magnetic pe frontieră dată în figura 4.36, utilizând modelul numeric propus în prezenta lucrare și celelalte condiții date în [20], unde nu se fac precizări despre modelul adoptat, se apreciază că există o concordanță bună a rezultatelor ceea ce confirmă corectitudinea modelului de câmp propus.

Rezultatele de calcul prezentate în continuare, pentru cilindru din cupru cu diametrul de 28 mm, cu variația parametrilor de material dată în [12], cu luarea în considerare a câmpului magnetic creat de curenții din cilindru, pentru $H_0 = 308 \cdot 10^3$ A/m și cu neglijarea acestuia, pentru $B_{e0} = 0,3868$ T, la frecvența de 2500 Hz, pentru discretizarea spațială și temporară utilizată anterior la cilindru din oțel OLC-45, constau în:

- variația în timp, la două momente ale procesului de încălzire, a densității de curent pe straturile 1 și 3, prezentată în figurile 4.37 și 4.38 a și b;

- variația valorii maxime a densității de curent pe straturi la cele două momente ale procesului de încălzire, prezentată în figura 4.39;

- variația în timp a temperaturii pe straturile 1, 5 și 11, prezentată în figura 4.40.

Referitor la variația în timp a densității de curent pe straturile 1 și 3, la cele două momente ale procesului de încălzire, se constată o diferență apreciabilă a acesteia, la începutul încălzirii, pe ambele straturi, valorile mai mari fiind pentru cazul neglijării câmpului magnetic de reacție creat de curenții stabiliți în cilindru, iar la $t = 2$ s această diferență dispăre referitor la valoare maximă doar pe stratul exterior și rămâne pe celelalte straturi atât ca valoare cât și ca formă. La situația din figura 4.38 a, se constată dispariția defazajului între cele două unde considerate, în timp ce pentru celelalte situații acesta ieșe sensibil în evidență la situația cu reacție și mai accentuat la situația fără reacție.

Variația valorii maxime a densității de curent pe straturi (figura 4.39), evidențiază repartiția neuniformă a acesteia pe adâncimea cilindrului, cauzată de valoarea frecvenței, dar și diferența între valorile maxime pentru cazul fără reacție, la cele două momente de timp, pe de o parte și diferența între cazul fără reacție și cu reacție, cu observația că în acest ultim caz, la cele două momente de timp, repartiția este aproape identică. Față

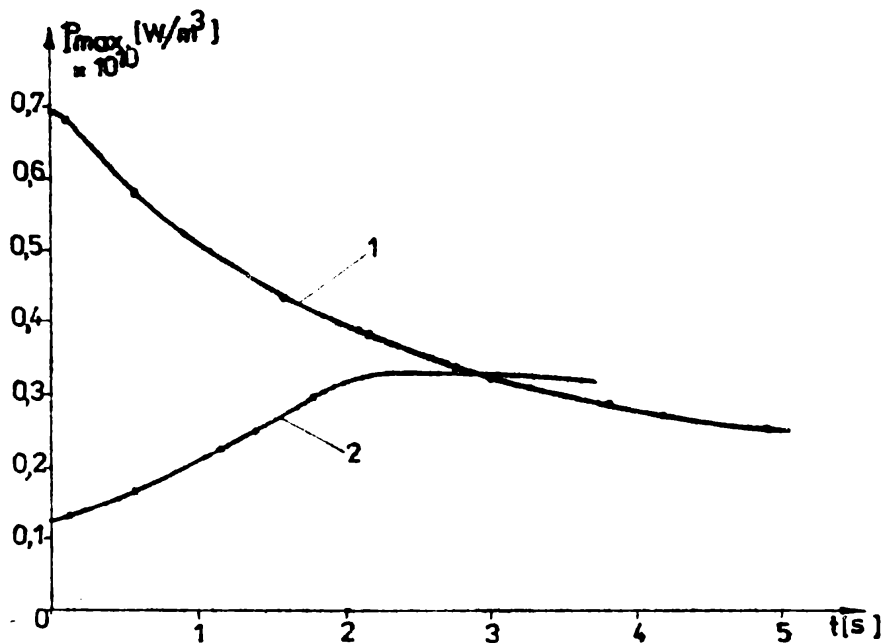


Fig.4.35. Variația în timp a valorii maxime a puterii medii dezvoltate în unitatea de volum pentru cazul fără reacție (curba 1) și cu reacție (curba 2)

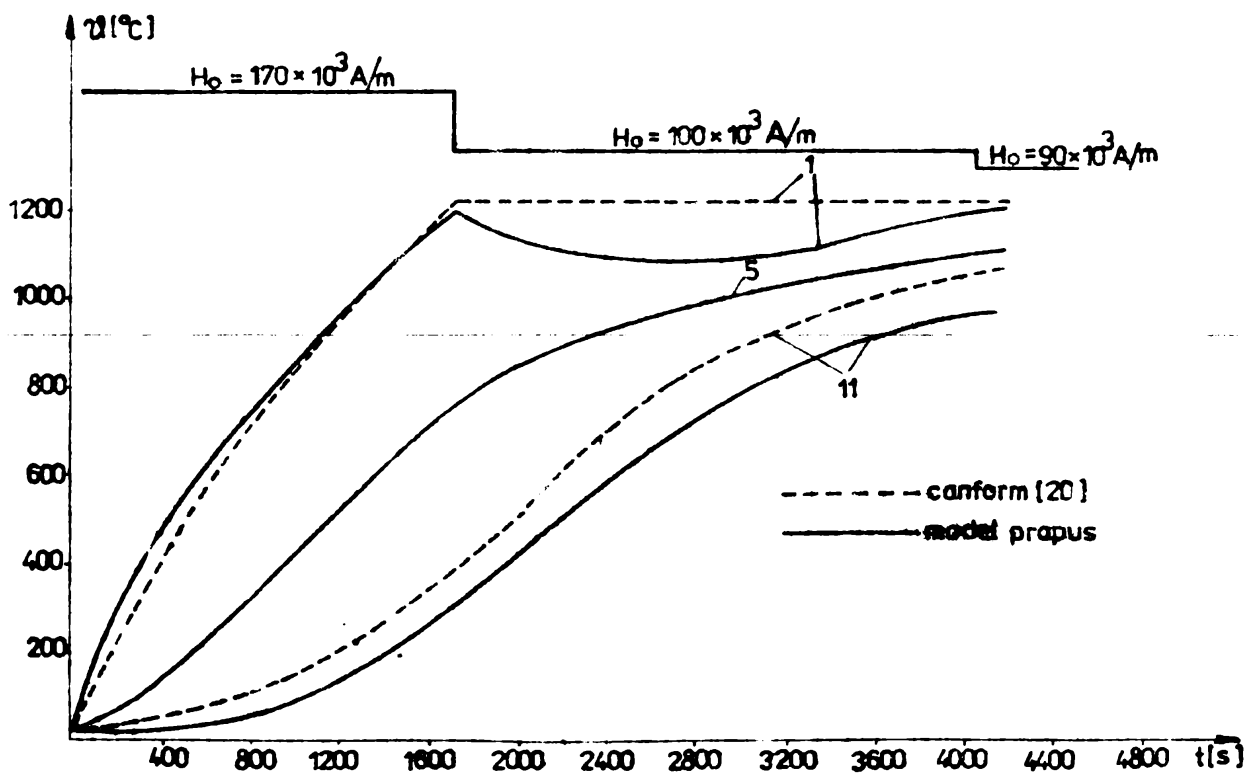


Fig.4.36. Variația în timp a temperaturii pe straturi conform [20] (linie întreruptă) și pe baza modelului propus (linie plină)

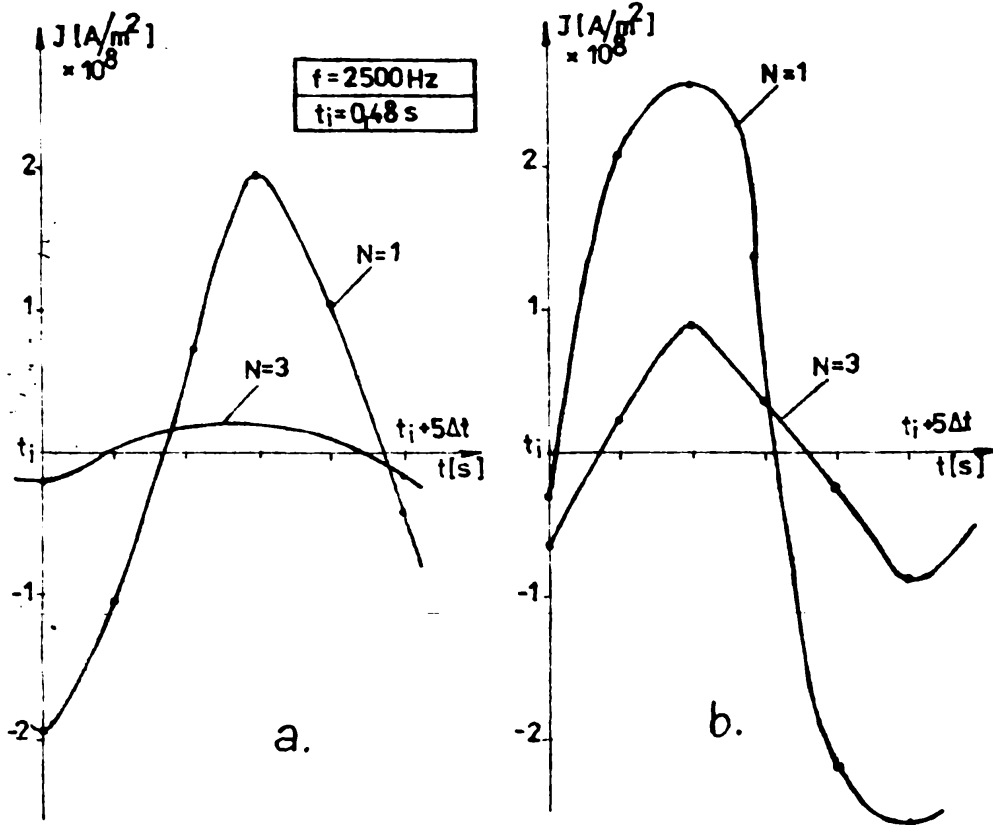


Fig.4.37. Variația în timp, la $t_i = 0,48 \text{ s}$, a densității de curent pe straturile 1 și 3 (a-cu reacție; b-fără reacție)

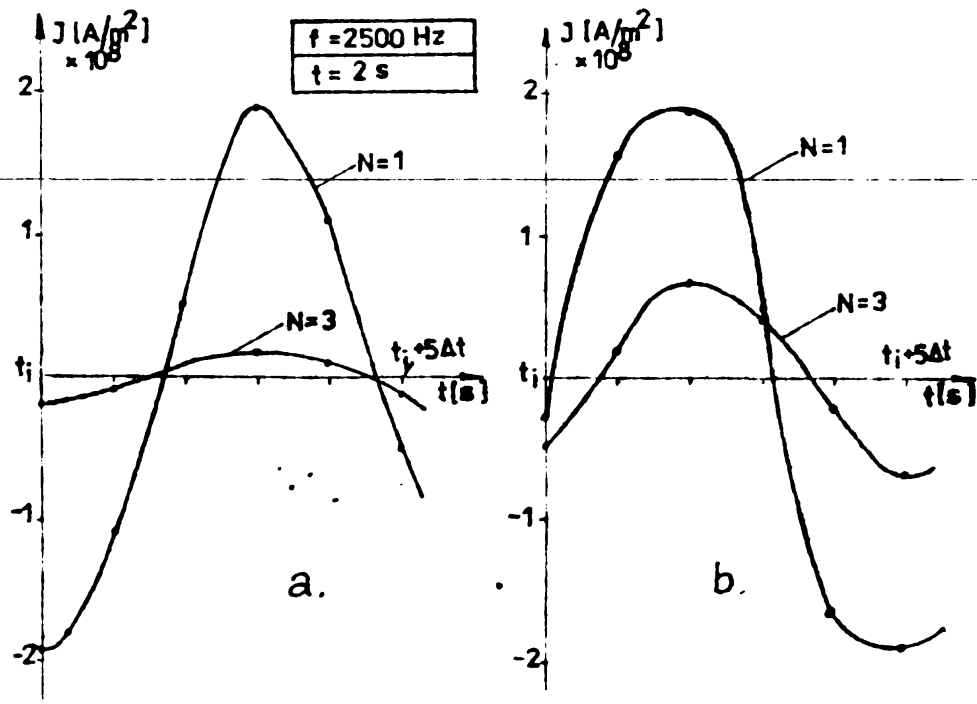


Fig.4.38. Variația în timp, la $t_i = 2 \text{ s}$, a densității de curent pe straturile 1 și 3. (a-cu reacție; b-fără reacție)

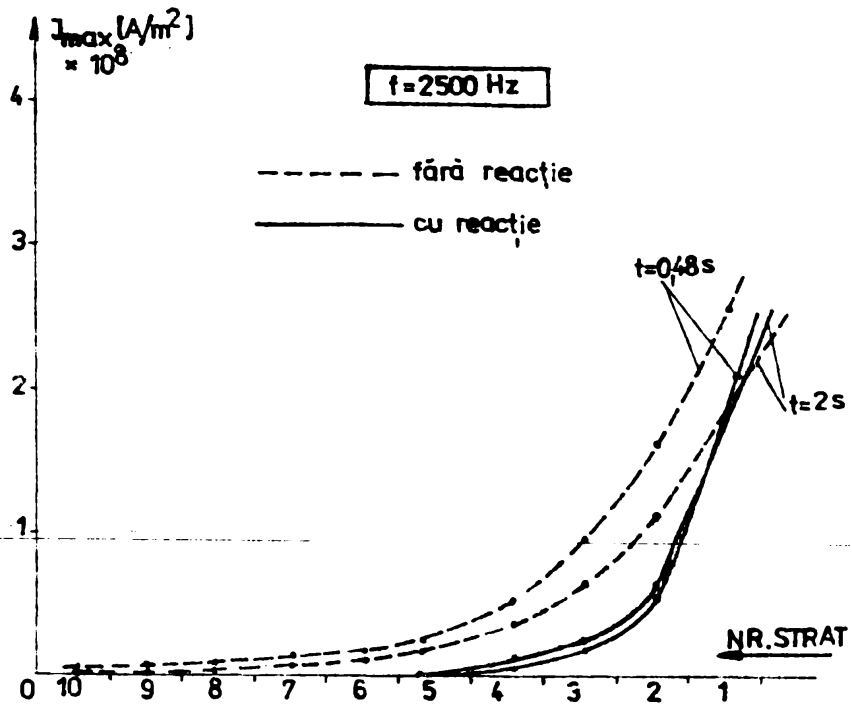


Fig.4.39. Variația valorii maxime a densității de curent pe straturi

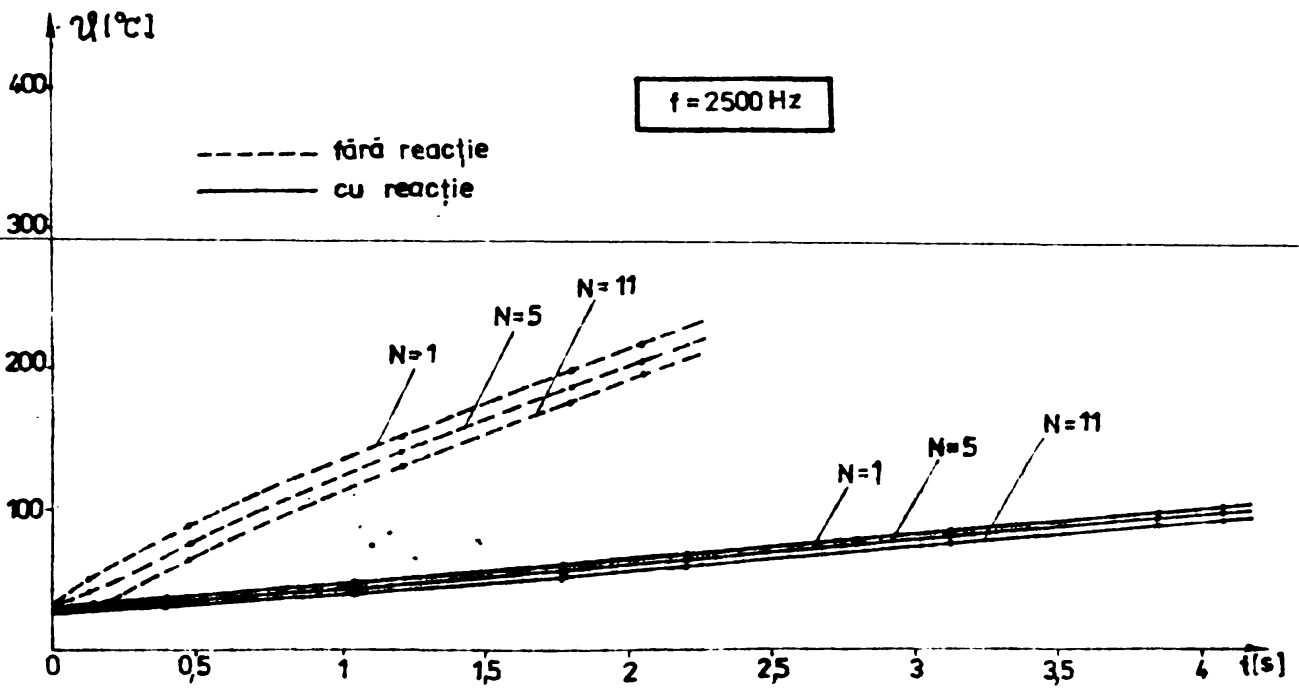


Fig.4.40. Variația în timp a temperaturii pe straturile 1, 5 și 11

de repartiția valorii maxime a densității de curent pe straturi la cilindrul din oțel OLC-45, de exemplu pentru cazul cu neglijarea câmpului de reacție, se constată valori mai mari la cilindrul din cupru și o scădere mai rapidă spre ax.

Referring to the variation of temperature in time on the layers 1, 5 and 11 (figure 4.40), it is observed:

- the heating process is more uniform than the situation presented in the case of the same cylinder of steel, for both cases treated;

- there are large differences between the temperature values on the layers for the two cases (models) treated, but the situation is inverse as in the case of the cylinder of steel;

- the thermal conductivity of copper being much higher than that of steel it can be affirmed that this factor has an important influence in the difference of temperatures in the case of the cylinder of copper, for the two cases, as in the uniformity of the distribution of the temperature on the cylinder of steel OLC-45.

It is appreciated that the quantitative differences that appear and in the case of non-ferromagnetic media, the consideration of the two models of field (the coupling between the electromagnetic field and the thermal field being present in both situations), are important and therefore when a more exact evaluation of the phenomena specific to the heating process by induction the model of field adopted is very important. A qualitative analysis can be carried out sometimes with simpler models.

5. ASPECTE PRIVIND PROIECTAREA SI EXPLOATAREA INSTALATIILOR DE ÎNCĂLZIRE PRIN INDUCTIE FOLOSIND MIJLOACE NUMERICE

În literatura de specialitate [1, 12, 52, 65], se prezintă calculul de proiectare al instalațiilor de încălzire prin inducție avînd la bază ecuațiile câmpurilor termic și electro-magnetic sub formă liniară și necuplate. Astfel, soluțiile ecuației lui Fourier pentru diverse geometrii sînt prezentate sub formă criterială prin nomograme, iar soluțiile ecuațiilor lui Maxwell scrise în complex sînt cele clasice [48, 69]. Cu toate că în [65], se prezintă un calcul pe regimuri luîndu-se în considerare modificarea parametrilor de material σ și μ pe durata încălzirii, trebuie să precizăm că în aceste tratate de electrotermie regimul de bază considerat, pentru dimensionarea instalațiilor aferente (sursa de medie frecvență și inductorul), este cel din faza finală a procesului de încălzire.

Calculul de proiectare clasic, prezentat în literatura de specialitate amintită, este corespunzător pentru aplicațiile industriale [41, 42, 43, 44], iar dacă se dorește automatizarea acestuia și folosirea întregii informații existente, mai ales din [65], este necesară utilizarea calculatorului, [33].

În acest capitol se prezintă unele aspecte privind proiectarea și exploatarea instalațiilor de încălzire prin inducție îmbinînd proiectarea clasică cu rezultatele oferite de analiza numerică abordată în capitolul 4.

5.1. Date inițiale și condiții impuse instalațiilor de încălzire prin inducție

Metodologia de proiectare a instalațiilor de încălzire prin inducție include două etape importante: dimensionarea inductorului și alegerea sursei de medie frecvență. Inductorul reprezintă subansamblul care influențează în mare măsură parametri tehnico-economi ai instalației și se realizează în multe variante constructive în funcție de dimensiunile semifabricatelor, a pieselor care se încălzesc în volum sau superficial în diverse regimuri.

Principalele date inițiale în calculul de proiectare al instalațiilor de încălzire prin inducție sînt:

- dimensiunile semifabricatului sau a piesei;
- dependențele parametrilor fizici de material al semifabricatului sau piesei, ca funcție de temperatură și alți factori;
- productivitatea instalației;
- regimul tehnologic necesar.

La o încălzire în volum a semifabricatelor din oțel pentru a fi deformate plastic, regimul tehnologic precizează: temperatura de încălzire maxim admisă la suprafață ν_{Sadm} , temperatura de încălzire în ax ν_{ax} și diferența de temperatură admisă la sfârșitul încălzirii $\Delta\nu_i$ în procente din temperatura de încălzire ν_i pentru semifabricatele neferoase. În cazul încălzirii superficiale a unor piese din oțel în vederea călirii se precizează temperatura maxim admisă la suprafață ν_{Sadm} , viteza de creștere a acesteia și adâncimea stratului de călire.

Condițiile impuse instalațiilor de încălzire prin inducție sînt determinate de cerințele regimului tehnologic și de asigurarea unor parametri energetici globali în conformitate cu avantajele pe care le oferă procedeul de încălzire prin inducție. În acest sens, inductorul trebuie dimensionat optim, cu un întrefier cît mai mic, avînd forma semifabricatului sau piesei de încălzit, în vederea asigurării unui transfer maxim de putere electromagnetică în acestea. Sursa de medie frecvență trebuie să furnizeze o putere de medie frecvență care să asigure la o frecvență dată un timp de încălzire pentru atingerea productivității cerute în condițiile precizate de regimul tehnologic. Este necesar să precizăm că prin impunerea unor puteri specifice disipate limită (determinate de regimul tehnologic), timpul de încălzire este limitat inferior în timp ce superior este limitat de creșterea pierderilor de material în urma oxidării. Găsirea unei dependențe optime timp de încălzire - frecvență - dimensiuni geometrice - regim tehnologic - productivitate este o cerință fundamentală pentru instalațiile de încălzire prin inducție cu implicații în proiectarea și realizarea subansamblelor acestora.

5.2. Determinarea prin mijloace numerice a caracteristicilor instalației

În literatura de specialitate, [1, 12, 65], calculul de proiectare al instalațiilor de încălzire prin inducție începe cu evaluarea puterii utile dezvoltată în semifabricat sau piesă și a timpului de încălzire în conformitate cu datele inițiale precizate în paragraful precedent. Pentru această etapă se utilizează nomograme, relații aproximative precum și unele precizări rezultate din experiența de proiectare. Valoarea frecvenței sursei se alege în funcție de tipul încălzirii și a dimensiunilor semifabricatelor sau pieselor de încălzit având în prezent domenii bine precizate. Calculul electric detaliat al inductorului reprezintă o a doua etapă, prezentată complet în [12, 65], iar în final alegerea sursei de medie frecvență și a transformatorului de adaptare, dacă este cazul, în situația în care acestea se găsesc în producția de serie, în caz contrar proiectarea acestora care reprezintă o etapă laborioasă și dificilă.

Considerând caracteristicile principale ale unei instalații de încălzire prin inducție, pentru anumite date inițiale, ca fiind: puterea activă de medie frecvență a sursei P_s , frecvența sursei f , timpul de încălzire t_1 și randamentul global η , al instalației, se prezintă utilitatea setului de programe elaborat în vederea determinării prin mijloace numerice a acestora.

Intrucât rularea programelor DIFCCR, DIFPCR și PARACR presupune ca datele inițiale pe lângă cele specifice instalațiilor de încălzire și alte date cum ar fi: frecvența sursei, valoarea maximă a intensității câmpului magnetic la suprafața semifabricatului sau a piesei, valoarea tensiunii de alimentare a inductorului, cu precizarea că acestea pot avea în programe anumite legi de variație funcție de scopul urmărit, calculul de proiectare clasic devine un calcul preliminar care asigură tocmai datele de intrare suplimentare în vederea determinării mai precise, în urma rulării programelor, a caracteristicilor instalației. Se propune în acest sens o metodologie de proiectare care are la bază etapele precizate în organigrama prezentată în figura 5.1.

Astfel, se determină puterea specifică p_s [W/m^2] și timpul de încălzire, iar apoi se determină puterile utilă medie ce

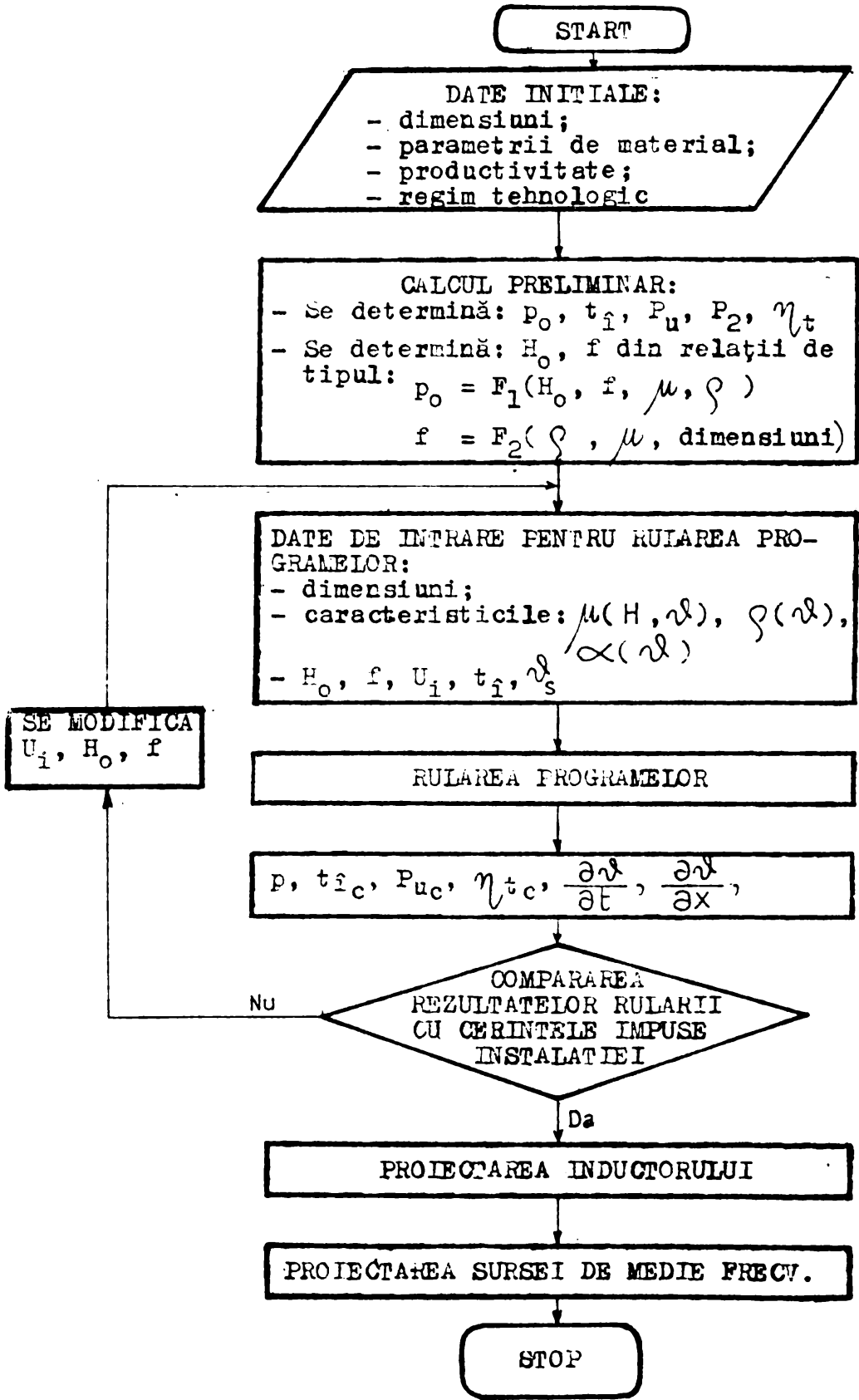


Fig.5.1. Organigrama de proiectare a instalațiilor de încălzire prin inducție

trebuie dezvoltată în semifabricat sau piesă P_u , medie în inductor P_2 și se evaluează randamentul termic al inductorului η_t . În continuare, pe baza metodologiei prezentate în [12, 65], se determină valoarea de amplitudine a intensității câmpului magnetic la suprafață H_0 și frecvența sursei de alimentare. După rularea programelor se evaluează puterea utilă medie P_{uc} , randamentul termic η_{tc} , dependența acestora în timp și vitezele de variație a temperaturii în timp și pe adâncime. Coincidența rezultatelor obținute cu cerințele impuse instalației permite trecerea la calculul de proiectare complet al inductorului și sursei de medie frecvență în conformitate cu tratatele de electrotermie precizate, cu observația că dispunem de informații suplimentare oferite de abordarea problemei cuplate de câmp electromagnetic - câmp termic, iar necoincidența ne determină să modificăm H_0 , f sau valoarea tensiunii la bornele inductorului U_j și să rulăm din nou în vederea atingerii cerințelor impuse de tema de proiectare dată.

Desigur, în urma rulării programelor, se pot obține și alte informații cum ar fi: dependențele în timp a puterii absorbite de la sursa de medie frecvență, a temperaturii, vitezele de creștere în timp și pe adâncimea semifabricatului sau piesei ale diferitelor mărimi, etc. Acestea fiind utile în dimensionarea sursei de medie frecvență întrucât precizează solicitarea întregului echipament electrotehnic pe toată durata încălzirii.

Atunci când dispunem de surse de medie frecvență destinate echipării instalațiilor de încălzire prin inducție în volum sau superficial, oferite de diverși producători, precum și de mașini de lucru (inductor, sistem de alimentare cu semifabricate sau piese), prin intermediul programelor elaborate se determină performanțele instalațiilor respective, urmînd ca beneficiarul acestora să opteze pentru acele surse care răspund cerințelor fluxului tehnologic din secția de forjă sau tratament termic.

Intrucît structura programelor este elastică, se pot testa diverse regimuri de lucru obținute pentru modificarea parametrilor sursei de medie frecvență de exemplu puterea și frecvența, ceea ce permite ca în funcționarea reală a instalației să se prescrie regimul optim. Elaborarea unor diagrame de funcționare optime, prin simulare numerică, permite proiectarea adecvată

a sistemelor de reglare și control automat, ce echipează instalațiile respective, absolut necesare în halele de forjă cu productivitate mare. În cazul instalațiilor de călire utilitatea programelor este deosebită, deoarece ele oferă puterea și frecvența optimă, în vederea obținerii unor viteze cerute de creșterea temperaturii pe adâncimea stratului călit precum și a controlului acesteia prin reglaje impuse.

Deoarece atunci când procesul tehnologic dintr-o secție de prelucrări la cald se modifică, de exemplu prin introducerea unor repere noi, schimbarea inductoarelor înseamnă regimuri noi pentru funcționarea surselor de medie frecvență existente și deci procedînd la simularea numerică pe baza programelor se pot alege regimurile optime, rezultînd totodată informații utile pentru reorganizarea întregului flux tehnologic.

Extinderea în prezent a domeniului încălzirii inductive favorizată de realizarea surselor de medie frecvență echipate cu convertoare statice, de tipul serie sau paralel, caracterizate prin posibilități de reglaj în limite largi ale curentului prin inductor sau tensiunii de alimentare a acestuia, justifică de asemenea utilitatea programelor elaborate, deoarece corelarea optimă între sursă și mașina de lucru este o problemă complexă a exploatarei instalațiilor de încălzire prin inducție.

5.3. Confruntări experimentale

În acest paragraf se prezintă aplicarea programului DIFCCR în proiectarea instalațiilor de încălzire prin inducție în volum a semifabricatelor cilindrice, măsurările efectuate pe aceste instalații realizate, precum și pe alte instalații existente în exploatare și apoi confruntarea rezultatelor simulării numerice cu datele obținute experimental.

Astfel, pentru semifabricatul cilindric avînd diametrul de 80 mm și lungimea de 250 mm din oțel marca OLC-45 care trebuie încălzit la 1200°C la suprafață, în vederea prelucrării la cald, preliminînd o putere specifică medie $p_0 = 1,47 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$ în conformitate cu [65], rezultă un cîmp pe suprafață avînd valoarea de amplitudine $H_0 = 180 \cdot 10^3 \text{ A/m}$, la frecvența de 1500 Hz.

În urma rulării programului DIFCCR și a prelucrării rezultatelor, se obțin: dependența în timp a puterii medii dezvoltate în unitatea de volum $p(t)$, puterea utilă dezvoltată în semi-

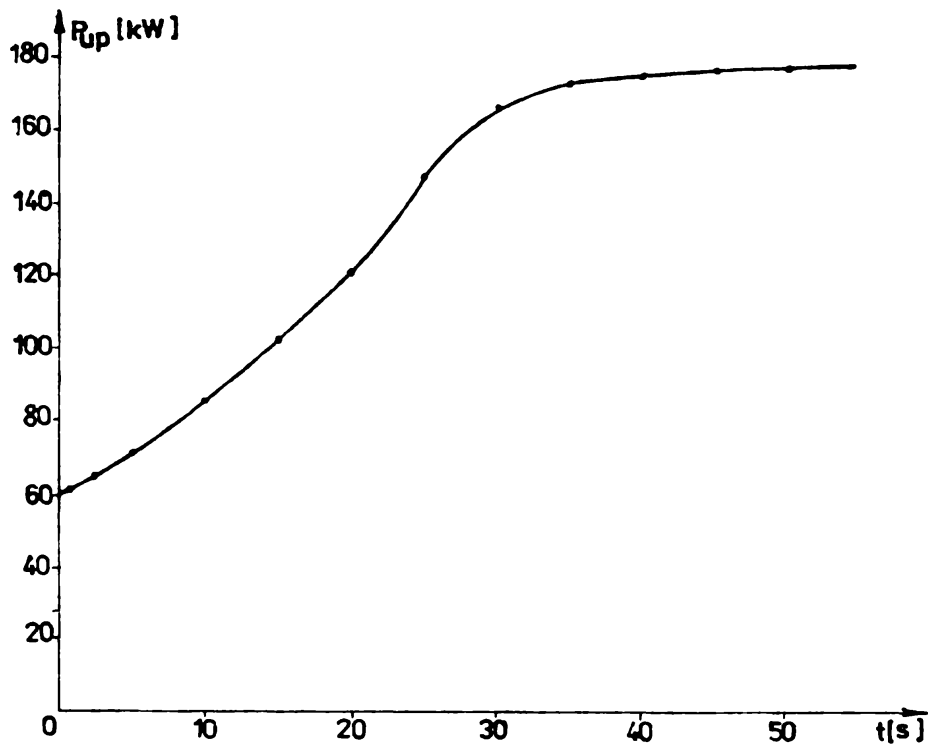


Fig.5.2. Variația în timp a puterii utile ce se dezvoltă în semifabricat

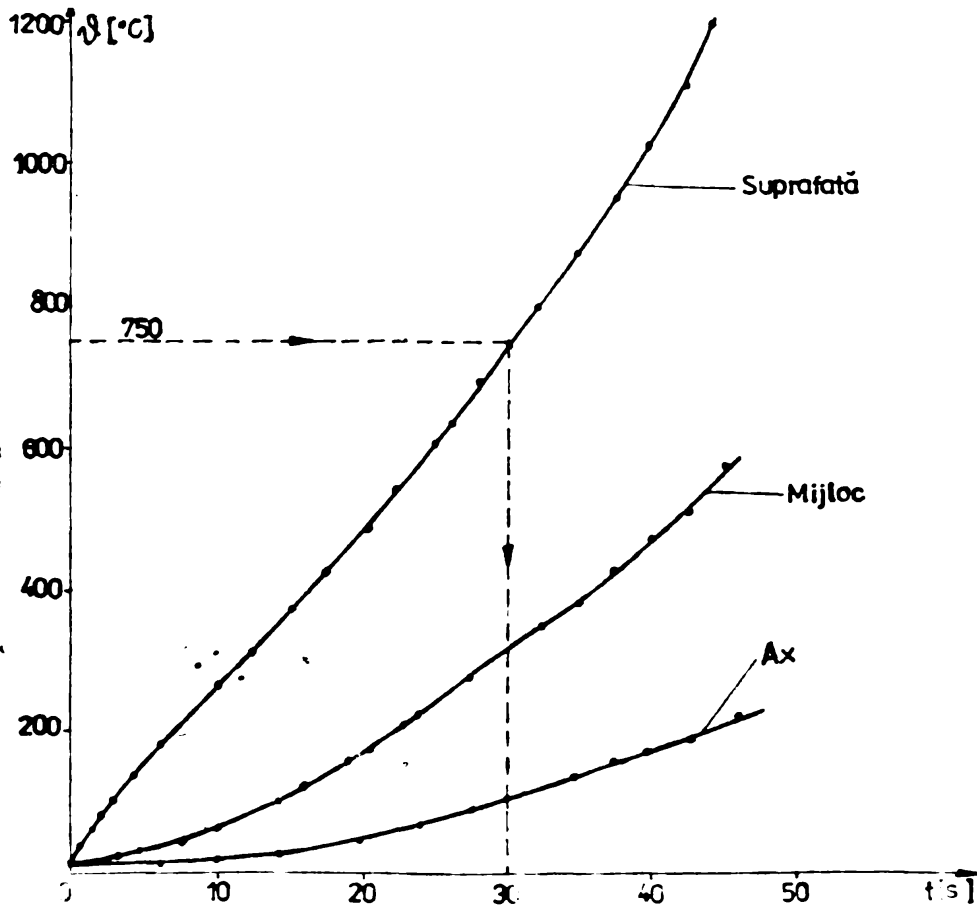


Fig.5.3. Variația în timp a temperaturii la suprafață, în stratul de mijloc și în ax

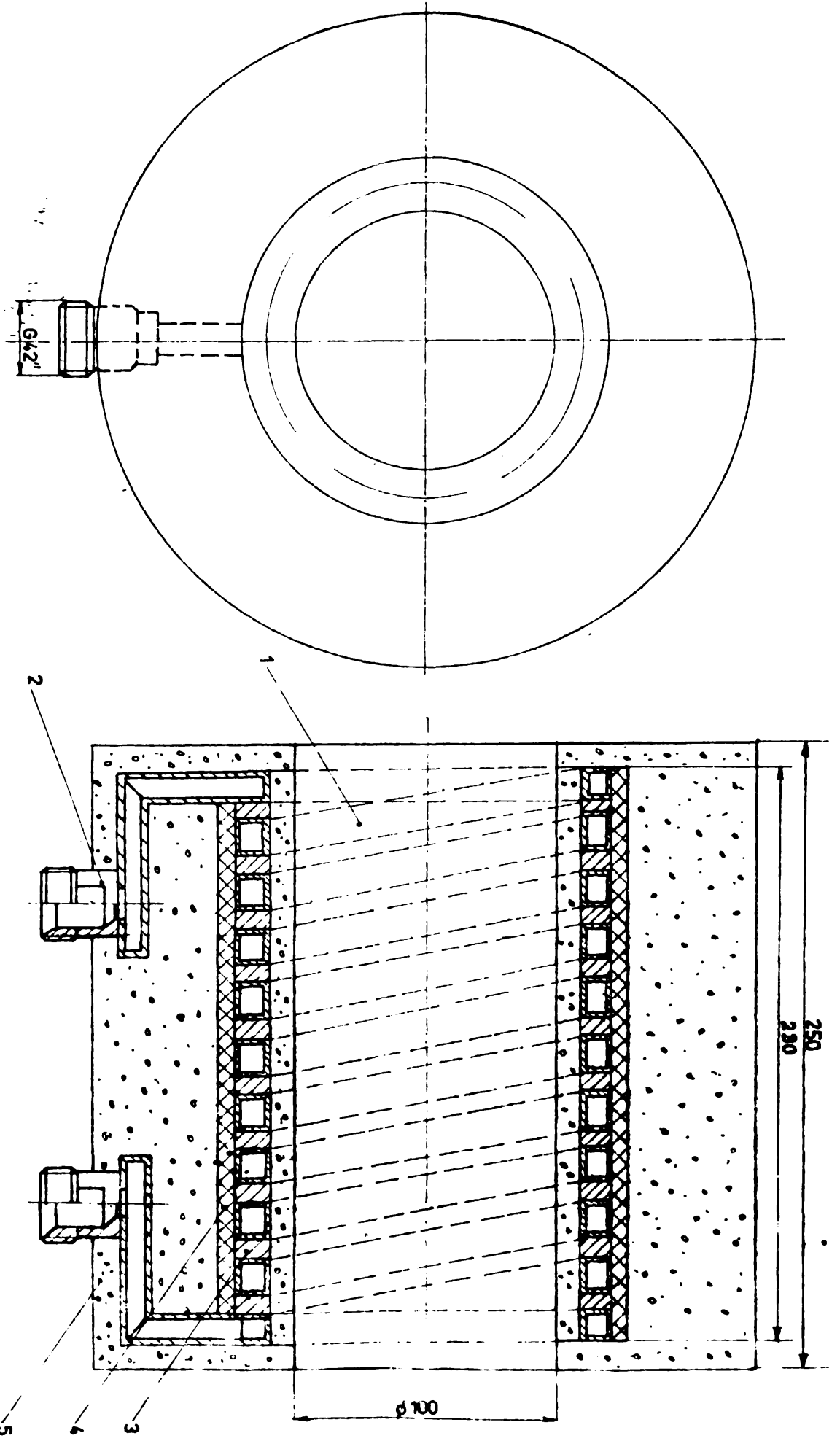


Fig. 5.4. Inductor cu nouă spiră pentru semifabricat cilindric
1-Spiră inductor; 2-Racord; G42"; 3-Clingherit; 4-Azbest; 5-Ciment refractar

fabricat și variația ei în timp și variația în timp a temperaturii în semifabricat în punctele rețelei de discretizare.

În fig.5.2, se prezintă variația în timp a puterii utile ce se dezvoltă în semifabricat. Se constată o dependență similară cu cea prezentată în paragraful 4.4. Puterea utilă medie este $P_{u_m} = 125$ Kw. De asemenea în fig.5.3, se prezintă variația în timp a temperaturii pe straturi. Conform [65], se proiectează un inductor cu 9 spire avînd forma și dimensiunile prezentate în fig.5.4, randamentul său calculat fiind $\eta = 0,6 - 0,7$. Inductorul astfel realizat se racordează la sursa de medie frecvență echipată cu convertor static capabilă să furnizeze puterea cerută.

Pentru verificarea utilității în proiectare a programului DIFCCR s-au efectuat următoarele măsurări: oscilografiera mărimilor electrice curent prin inductor, tensiune pe inductor și tensiunea pe condensatorul de compensare ce se află în serie

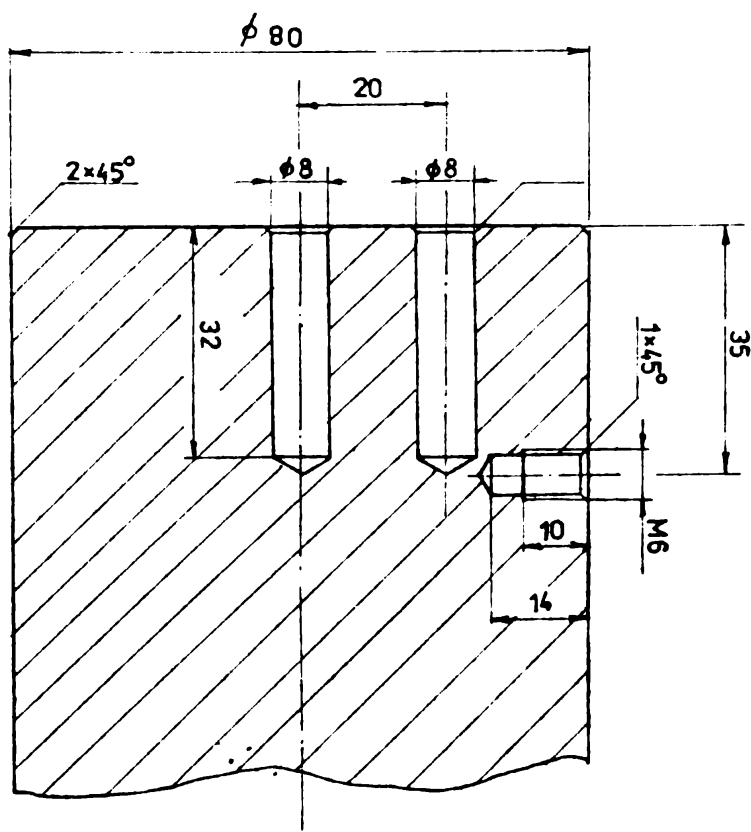


Fig.5.5. Semifabricat cilindric prevăzut cu orificii pentru fixarea termocuplelor

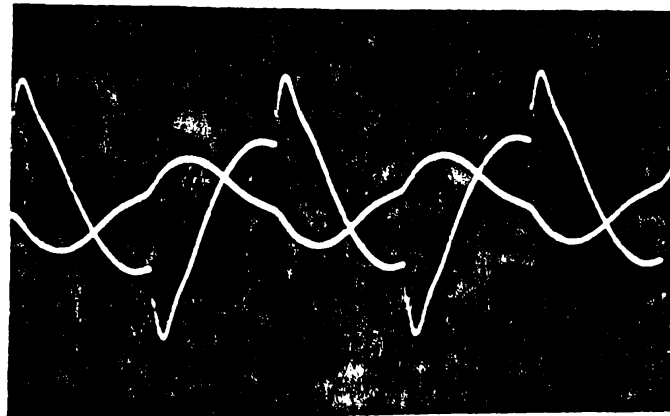
cu inductorul și înregistrarea temperaturii la suprafață, ax și intermediar la jumătatea distanței suprafață-ax. Pentru măsurarea temperaturii s-au utilizat trei termocuple Cromel - Alumel fiind dispuse în semifabricat la suprafață și în cele două orificii, ca în figura 5.5.

Pentru oscilografiera curentului prin inductor s-a utilizat un transformator de curent de 1000 A

etalonat la frecvența 1-2 KHz. Sursa de medie frecvență fiind echi-

pată cu convertor serie și avînd limitare de curent controlată prin valoarea tensiunii pe condensator funcționează debitînd un curent variabil pe durata încălzirii, în funcție de parametrii sarcinii, dar își păstrează forma și mărimea pe intervale de timp ce se pot identifica prin măsurări.

Astfel, pentru etapa de început a încălzirii în figurile 5.6 și 5.7, se prezintă variația în timp a tensiunii pe inductor și a curentului prin inductor respectiv a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor.

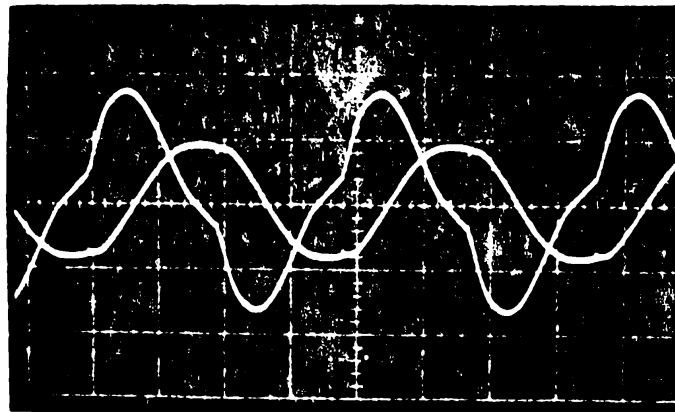


$C_{U_i} = 500V/div$

$C_{I_1} = 5 V/div$

$C_X = 0,2 ms/div$

Fig.5.6. Variația în timp a tensiunii pe inductor și a curentului prin inductor



$C_{U_c} = 1000V/div$

$C_{I_1} = 2 V/div$

$C_X = 0,2 ms/div$

Fig.5.7. Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor

Pentru determinarea valorilor de amplitudine ale fundamentalei și evaluarea puterii transmise pe la bornele inductorului s-a efectuat analiza armonică a mărimilor electrice avînd forma din figura 5.6. Rezultatele analizei armonice efectuate pe calculator se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.4343	0.0000	0.4343	0.000
1	1.0165	0.8282	1.3113	50.832
2	0.2396	-0.0461	0.2440	-79.102
3	0.0153	-0.0184	0.0240	-39.723
4	0.2883	0.2924	0.4107	44.593
5	0.0821	-0.2615	0.2741	-17.446
6	-0.1579	0.2803	0.3217	-29.405
7	0.2601	-0.0441	0.2638	-80.359
8	-0.2156	0.0266	0.2172	-82.959
9	0.0691	0.0800	0.1058	40.821
10	0.0610	0.0087	0.0616	-81.818

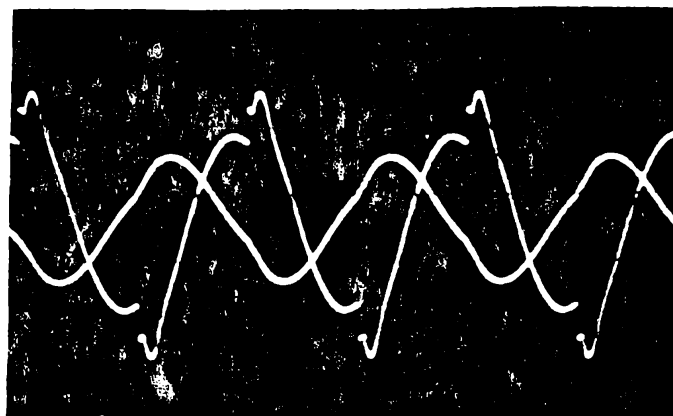
Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.0048	0.0000	0.0048	0.000
1	-1.1152	0.7716	1.3561	-55.320
2	-0.1615	0.0000	0.1615	89.965
3	0.0841	0.2180	0.2337	21.094
4	-0.1244	0.0265	0.1272	-77.972
5	0.0489	-0.0098	0.0499	-78.611
6	-0.0924	-0.0518	0.1059	60.725
7	0.1010	0.0371	0.1076	69.823
8	-0.0313	-0.0241	0.0396	52.399
9	0.0243	0.0268	0.0362	42.172
10	0.0227	-0.0929	0.0956	-13.757

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

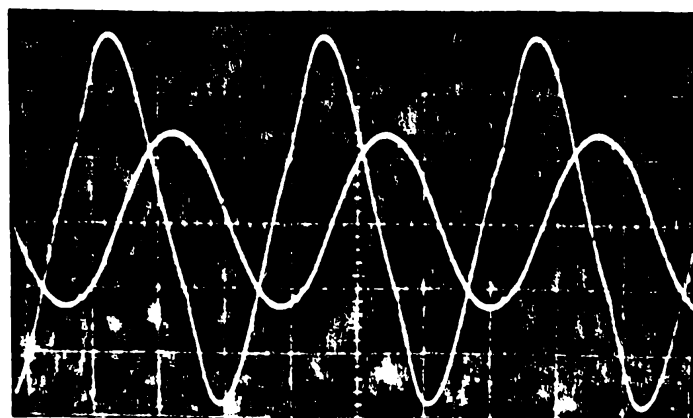
n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.0328	0.0000	0.0328	0.000
1	0.3307	-0.8256	0.8894	21.827
2	0.0019	0.0029	0.0035	34.291
3	-0.0809	0.0057	0.0811	-85.922
4	-0.0165	0.0139	0.0216	-49.848
5	-0.0081	0.0155	0.0175	-27.715
6	0.0022	0.0017	0.0028	51.858
7	-0.0192	-0.0208	0.0283	42.705
8	0.0126	-0.0041	0.0133	-71.877
9	-0.0034	-0.0120	0.0125	16.094
10	0.0051	0.0057	0.0077	41.574

În figurile 5.8 și 5.9, se prezintă variația în timp a lorași mărimi în etapa a doua a încălzirii.



$C_{U_1} = 500V/div$
 $C_{I_1} = 5 V/div$
 $C_X = 0,2 ms/div$

Fig.5.8 Variația în timp a tensiunii pe inductor și a curentului prin inductor



$C_{U_c} = 1000V/div$
 $C_{I_1} = 2 V/div$
 $C_X = 0,2ms/div$

Fig.5.9 Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor

Analiza armonică a acestor semnale, efectuată pe calculator, se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.0920	0.0000	0.0920	0.000
1	-2.1067	-1.0829	2.3687	62.796
2	-0.7060	-0.3053	0.7691	66.614
3	-0.4676	-0.3951	0.6122	49.801
4	-0.1158	-0.7210	0.7303	9.125
5	-0.1646	-0.2581	0.3061	32.529
6	0.5789	-0.3579	0.6806	-53.271
7	-0.3310	-0.2065	0.3901	58.041
8	0.2154	0.6287	0.6646	18.912
9	-0.1975	-0.3719	0.4211	27.975
10	-0.8608	0.2330	0.8918	-74.849

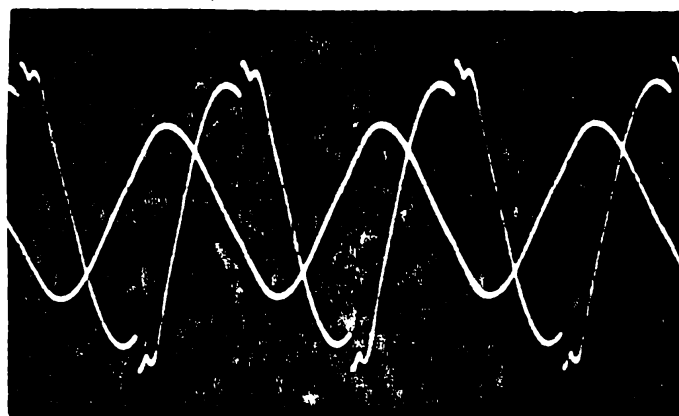
Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.0564	0.0000	0.0564	0.000
1	-1.9008	1.8797	2.6733	-45.319
2	-0.0728	-0.0702	0.1011	46.023
3	0.1503	-0.0314	0.1535	-73.194
4	-0.0809	-0.0850	0.1174	43.605
5	-0.0098	-0.0478	0.0488	11.648
6	-0.0548	-0.0324	0.0637	59.364
7	0.0448	-0.0480	0.0657	-43.032
8	0.0080	-0.0302	0.0312	-14.901
9	0.0094	-0.0160	0.0186	-30.481
10	0.0170	-0.0195	0.0259	-40.961

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

n	cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.0282	0.0000	0.0282	0.000
1	-0.7020	-1.1147	1.3174	32.202
2	0.0681	0.1250	0.1424	28.606
3	0.0283	0.0363	0.0461	37.965
4	0.0066	0.0119	0.0137	29.719
5	-0.0099	-0.0006	0.0099	86.067
6	-0.0265	0.0338	0.0430	-38.156
7	0.0014	-0.0107	0.0108	-7.906
8	0.0022	0.0135	0.0137	9.321
9	-0.0032	-0.0031	0.0045	45.706
10	0.0029	0.0079	0.0085	20.396

În figurile 5.10 și 5.11, se prezintă variația în timp a mărimilor menționate pentru etapa ultimă a încălzirii.

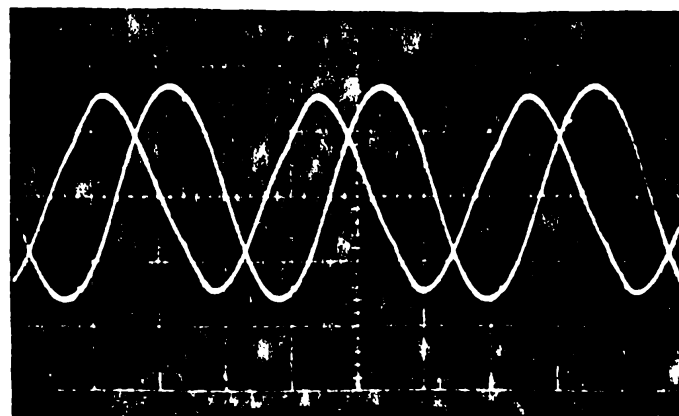


$$C_{U_1} = 500V/div$$

$$C_{I_1} = 2 V/div$$

$$C_X = 0,2ms/div$$

Fig.5.10 Variația în timp a tensiunii pe inductor și a curentului prin inductor



$$C_{U_c} = 1000V/div$$

$$C_{I_1} = 2V/div$$

$$C_X = 0,2 ms/div$$

Fig.5.11 Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor

Analiza armonică a acestor semnale, efectuată pe calculator, se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.5471	0.0000	0.5471	0.000
1	-0.9114	-2.6137	2.7681	19.223
2	0.2762	0.0366	0.2785	82.435
3	0.2852	0.1358	0.3159	64.529
4	-0.4007	-0.2135	0.4541	61.951
5	-0.7482	-0.8145	1.1061	42.571
6	0.1148	-0.4885	0.5018	-13.232
7	0.8196	-0.1820	0.8396	-77.477
8	-0.0767	0.4650	0.4713	-9.372
9	-0.8213	0.5636	0.9961	-55.539
10	-0.3064	-0.2439	0.3917	51.478

Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.0038	0.0000	0.0038	0.000
1	0.0619	1.3887	1.3900	2.553
2	-0.0105	-0.0559	0.0569	10.690
3	-0.0586	-0.0341	0.0678	59.763
4	-0.0351	0.0390	0.0525	-41.941
5	0.0108	0.0132	0.0171	39.255
6	0.0177	0.0066	0.0189	69.310
7	0.0117	-0.0036	0.0122	-72.758
8	0.0122	-0.0044	0.0130	-70.158
9	0.0070	-0.0041	0.0082	-59.555
10	0.0054	-0.0022	0.0083	-41.131

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.0468	0.0000	0.0468	0.000
1	1.5461	-0.5539	1.6424	-70.289
2	0.0502	-0.0133	0.0519	-75.115
3	0.0055	0.0095	0.0110	30.205
4	-0.0066	0.0333	0.0340	-11.330
5	0.0094	0.0123	0.0155	37.422
6	0.0019	0.0514	0.0514	2.214
7	-0.0215	-0.0224	0.0311	43.930
8	-0.0170	0.0184	0.0251	-42.686
9	0.0001	0.0208	0.0208	0.373
10	-0.0081	-0.0053	0.0097	56.600

Se constată un conținut bogat de armonici ceea ce justifică importanța analizei armonice efectuate. Pe baza datelor obținute prin oscilografieră și apoi din analiza armonică s-a evaluat puterea activă absorbită de inductor (P_l), luîndu-se în considerare numai fundamentală semnalelor analizate, variația ei în timp, se prezintă în figura 5.12. Considerînd un randament al inductorului de 0,63, se determină puterea utilă dezvoltată în semifabricat (P_{u_p}), variația ei în timp, se prezintă în figura 5.12. Tot aici se prezintă și variația în timp a puterii utile dezvoltate în semifabricat (P_{u_c}), calculată în urma rulării programului DIFCCR pentru un $H_0 = 180 \cdot 10^3$ A/m, precum și variația în timp, a aceleiași mărimi pentru o lege de variație a intensității cîmpului magnetic pe frontieră, dată în figura 5.12, dedusă în urma fotografierii din cinci în cinci secunde, pe ecranul a două osciloscopice a mărimilor electrice pentru care s-a efectuat și analiza armonică.

Se constată o bună concordanță a rezultatelor calculate în urma rulării programului DIFCCR cu cele determinate în urma efectuării măsurărilor.

Inregistrarea temperaturii în cele trei puncte ale secțiunii semifabricatului, s-a realizat cu un aparat înregistrator de tip RECORDER avînd patru canale din care s-au utilizat trei. Datorită perturbației de cîmp s-au prevăzut filtre de deparazitare corespunzător dimensionate. În figura 5.13, se prezintă variația temperaturii în cele trei puncte ale secțiunii semifabricatului obținută cu aparatul înregistrator și variația temperaturii, în

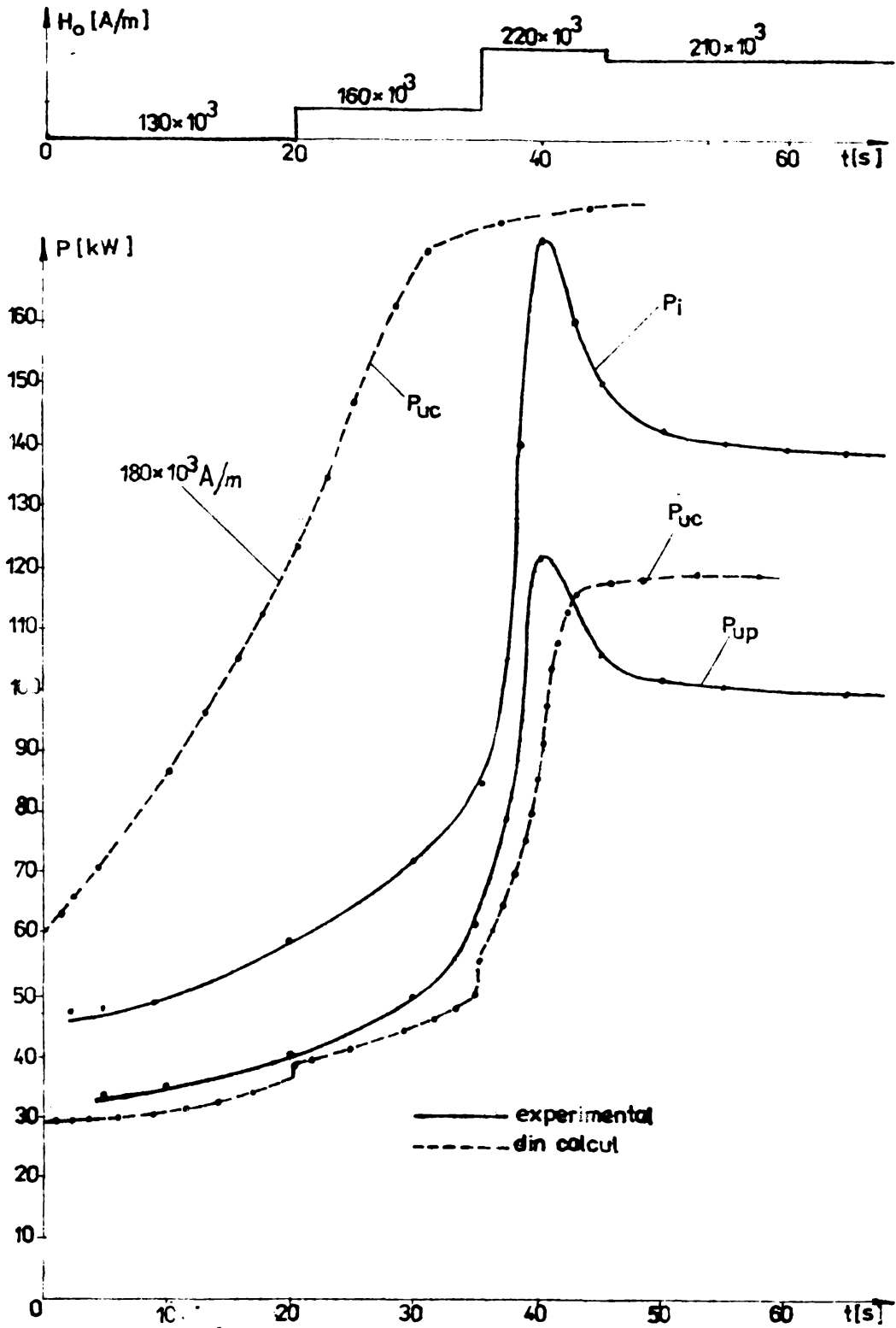


Fig.5.12. Variația în timp a puterilor absorbită de inductor, utilă dezvoltată în piesă rezultată din măsurări și din calcul

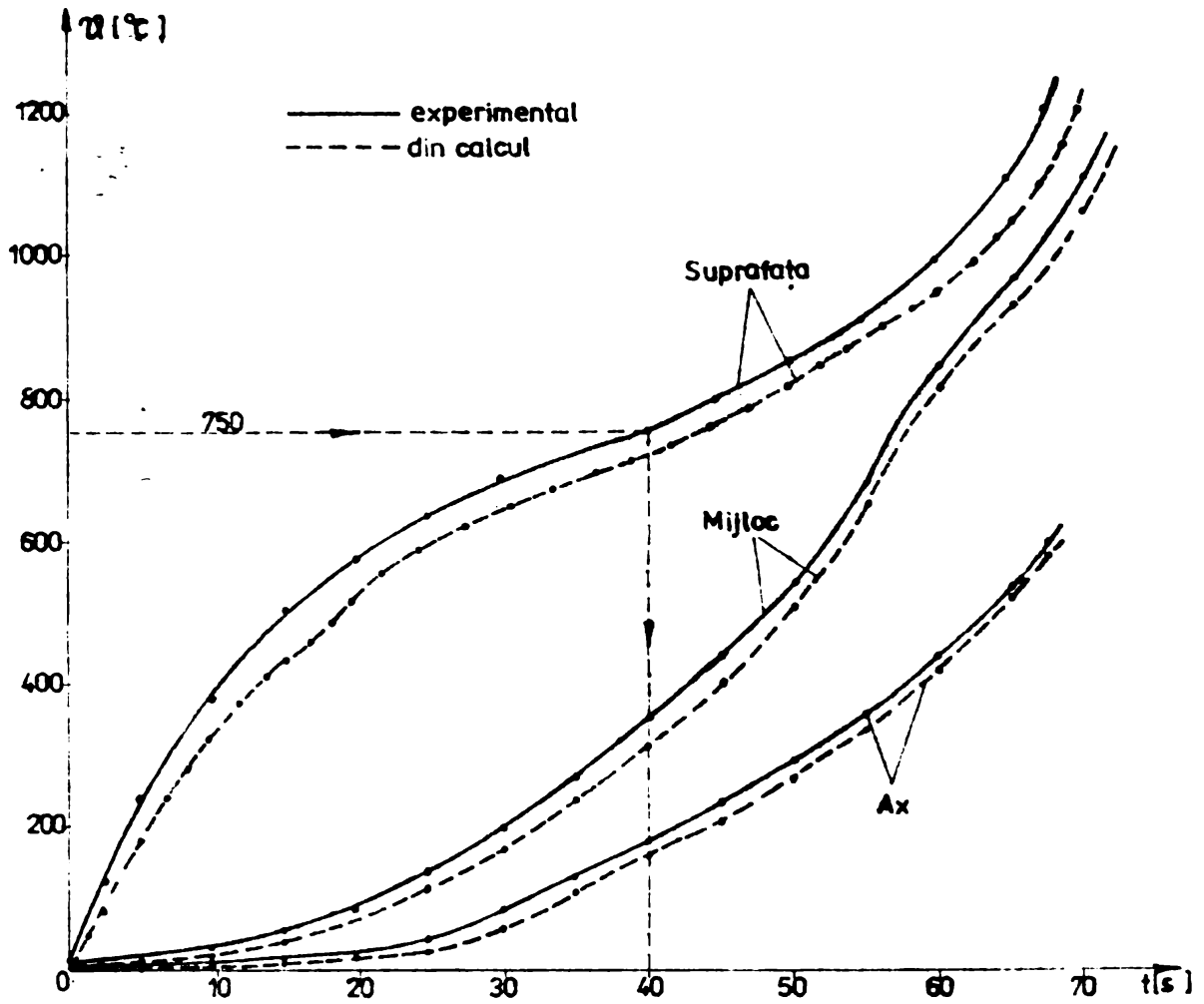


Fig.5.13. Variația temperaturii în cele trei puncte ale secțiunii semifabricatului determinată experimental și prin calcul

aceleași puncte rezultată în urma rulării programului DIFCCR (cu linie întreruptă), pentru legea de variație a intensității câmpului pe frontieră, precizată în figura 5.12.

Se constată că la suprafață se atinge temperatura de 1200°C după 67 s, în timp ce în ax ea este în jur de 600°C . Aceeași concluzie se desprinde și din rezultatele obținute în urma rulării programului DIFCCR; de altfel între calcule și măsurări există o concordanță bună. Este necesar, pentru omogenizarea temperaturii în semifabricat, să se prevadă încă un inductor de menținere a temperaturii cu pas variabil, mai des la ieșirea semifabricatului, asigurându-se un tact în jur de 70 s, pe semifabricat. Referitor la variația temperaturii în timp, în punctele considerate ale secțiunii semifabricatului cilindric, se constată că la atingerea temperaturii Curie se schimbă panta rezultând puncte de inflexiune în jurul temperaturii Curie pe curbele de variație în timp a temperaturii.

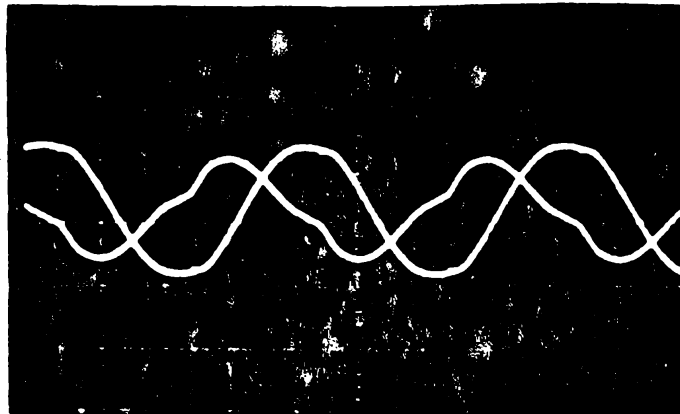
Pe aceeași instalație realizată s-au efectuat măsurări considerând semifabricatul cilindric având diametrul de 100 mm și



Fig.5.14 Inductor cu semifabricat încălzit

lungimea de 280 mm din acelaș material și care trebuia încălzit în aceleași condiții ca și semifabricatul cilindric considerat anterior, realizându-se în acest scop un inductor corespunzător tot cu nouă spire. Astfel, în figura 5.14, se prezintă o vedere a inductorului cu semifabricatul încălzit și a sondelor cu cablurile de compensare pentru măsurarea temperaturii.

Astfel, pentru etapa de început a încălzirii în figura 5.15, se prezintă variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor.



$C_{U_c} = 1000 \text{ V/div}$

$C_{I_1} = 5 \text{ V/div}$

$C_X = 0,2 \text{ ms/div}$

Fig.5.15 Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor

Analiza armonică a acestor semnale, efectuată pe calculator, se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.2121	0.0000	0.2121	0.000
1	0.9955	-0.4058	1.0743	-67.919
2	0.0020	0.0161	0.0163	7.122
3	-0.0016	0.0391	0.0391	-2.394
4	0.0115	-0.0074	0.0137	-57.162
5	-0.0077	0.0179	0.0195	23.224
6	0.0112	0.0467	0.0481	13.583
7	-0.0136	-0.0163	0.0212	39.769
8	-0.0086	-0.0146	0.0170	30.664
9	-0.0031	-0.0012	0.0033	68.183
10	-0.0010	0.0021	0.0023	-25.777

Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.2091	0.0000	0.2091	0.000
1	0.0789	0.6870	0.6915	6.555
2	0.0061	0.0109	0.0125	29.230
3	-0.0528	-0.1046	0.1172	26.787
4	-0.0132	0.0152	0.0201	-40.844
5	-0.0343	0.0217	0.0406	-57.637
6	-0.0254	-0.0028	0.0256	83.612
7	0.0100	0.0161	0.0190	31.957
8	0.0087	-0.0027	0.0091	-72.802
9	-0.0012	0.0050	0.0051	-14.147
10	0.0090	-0.0016	0.0091	-79.461

În figura 5.16, se prezintă variația în timp a acestor două mărimi în etapa a doua a încălzirii:

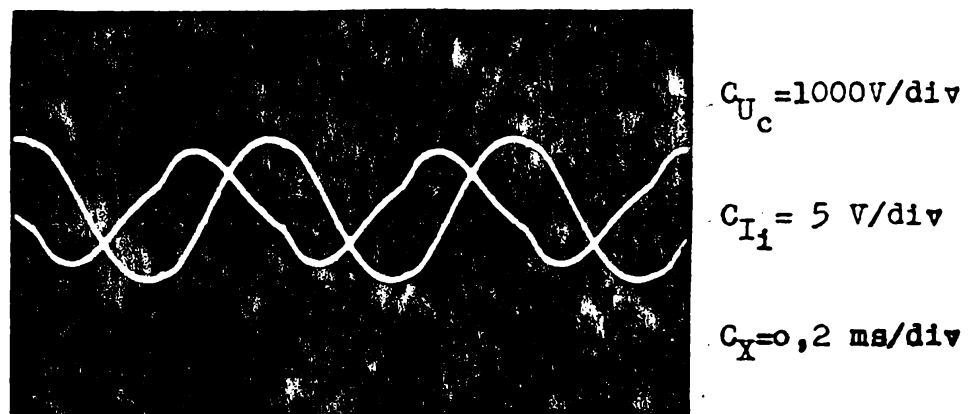


Fig.5.16 Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor

Analiza armonică a acestor semnale, efectuată pe calculator, se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.2082	0.0000	0.2082	0.000
1	0.7585	0.8890	1.1687	40.469
2	0.0073	-0.0321	0.0330	-12.943
3	0.0480	-0.0318	0.0576	-56.481
4	0.0015	0.0179	0.0180	4.960
5	0.0177	0.0168	0.0245	46.485
6	-0.0084	-0.0034	0.0091	68.005
7	0.0186	0.0126	0.0225	55.869
8	0.0116	-0.0087	0.0146	-53.071
9	-0.0033	-0.0008	0.0034	75.308
10	0.0008	0.0031	0.0033	15.792

Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	-0.2409	0.0000	0.2409	0.000
1	-0.7462	0.3153	0.8101	-67.092
2	-0.0135	0.0009	0.0136	-86.021
3	-0.0331	0.0754	0.0824	-23.711
4	-0.0020	0.0307	0.0308	-3.812
5	-0.0242	0.0058	0.0249	-76.315
6	0.0144	-0.0091	0.0170	-57.592
7	-0.0043	0.0030	0.0053	-55.201
8	-0.0111	-0.0073	0.0133	56.713
9	0.0084	-0.0208	0.0225	-21.956
10	0.0149	0.0123	0.0194	50.487

In figura 5.17, se prezintă variația în timp a mărimilor menționate pentru etapa ultimă a încălzirii:

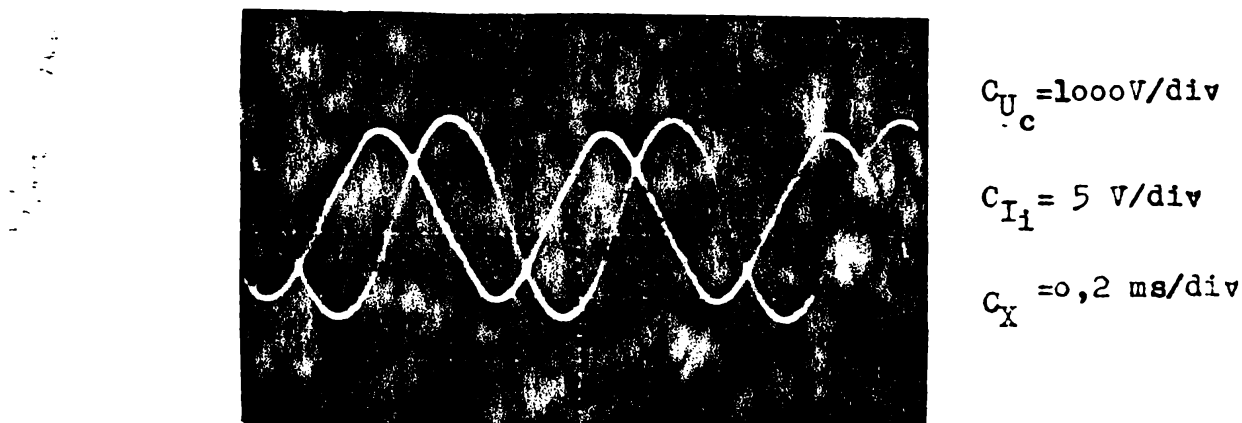


Fig.5.17 Variația în timp a tensiunii pe condensator și a curentului prin inductor.

Analiza armonică a acestor semnale, efectuată pe calculator, se prezintă în tabelele de mai jos:

Tensiunea pe condensator - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.2294	0.0000	0.2294	0.000
1	0.8645	-1.2990	1.5604	-33.645
2	0.0209	0.0386	0.0439	28.503
3	-0.0319	0.0252	0.0407	-51.650
4	0.0656	0.0750	0.0997	41.187
5	0.0076	-0.0066	0.0101	-48.839
6	0.0226	0.0577	0.0620	21.425
7	0.0079	0.0232	0.0245	18.735
8	-0.0063	0.0355	0.0360	-10.196
9	-0.0013	0.0122	0.0123	-6.489
10	-0.0090	0.0040	0.0099	-65.904

Curentul prin inductor - SPECTRUL FOURIER:

n	Cos (An)	Sin (Bn)	Amplitudine	Faza-grade
0	0.2681	0.0000	0.2681	0.000
1	-1.1714	-0.3318	1.2175	74.183
2	0.0258	0.0341	0.0428	37.172
3	-0.0267	-0.0575	0.0634	24.927
4	0.0064	-0.0273	0.0281	-13.298
5	-0.0412	-0.0046	0.0414	83.602
6	0.0081	0.0105	0.0133	37.539
7	0.0067	-0.0186	0.0197	-19.871
8	-0.0110	-0.0253	0.0276	23.480
9	0.0079	-0.0060	0.0100	-52.709
10	0.0020	0.0066	0.0069	16.961

S-au fotografiat aceste semnale, din cinci în cinci secunde, pe ecranul osciloscopului, s-a evaluat variația în timp a fundamentalei intensității curentului prin inductor și s-a determinat apoi legea de variație a intensității câmpului magnetic pe frontieră. Având dimensiunile semifabricatului și celelalte date de intrare, pentru frecvența de 1500 Hz, s-a rulat programul DIFCCR.

În figura 5.18, se prezintă comparativ variația temperaturii în timp, în punctele considerate, înregistrată în timpul încălzirii semifabricatului și pe intervalul de timp considerat cea calculată. Se constată și în acest caz o bună concordanță a rezultatelor ce confirmă valabilitatea modelului de calcul propus pentru proiectarea asistată de calculator a instalațiilor de încălzire prin inducție.

Rezultatele, teoretice și experimentale, desprinse în urma studiului efectuat de autor, au stat la baza proiectării și realizării de către colectivul Institutului de Subingineri Oradea și a altor tipuri de instalații destinate încălzirii în volum a diverselor tipuri de semifabricate cilindrice sau paralelipipedice. Spre exemplu, în figura 5.19, se prezintă o instalație de încălzire inductivă în flux continuu a semifabricatelor cilindrice având diametrul de 80-100 mm.

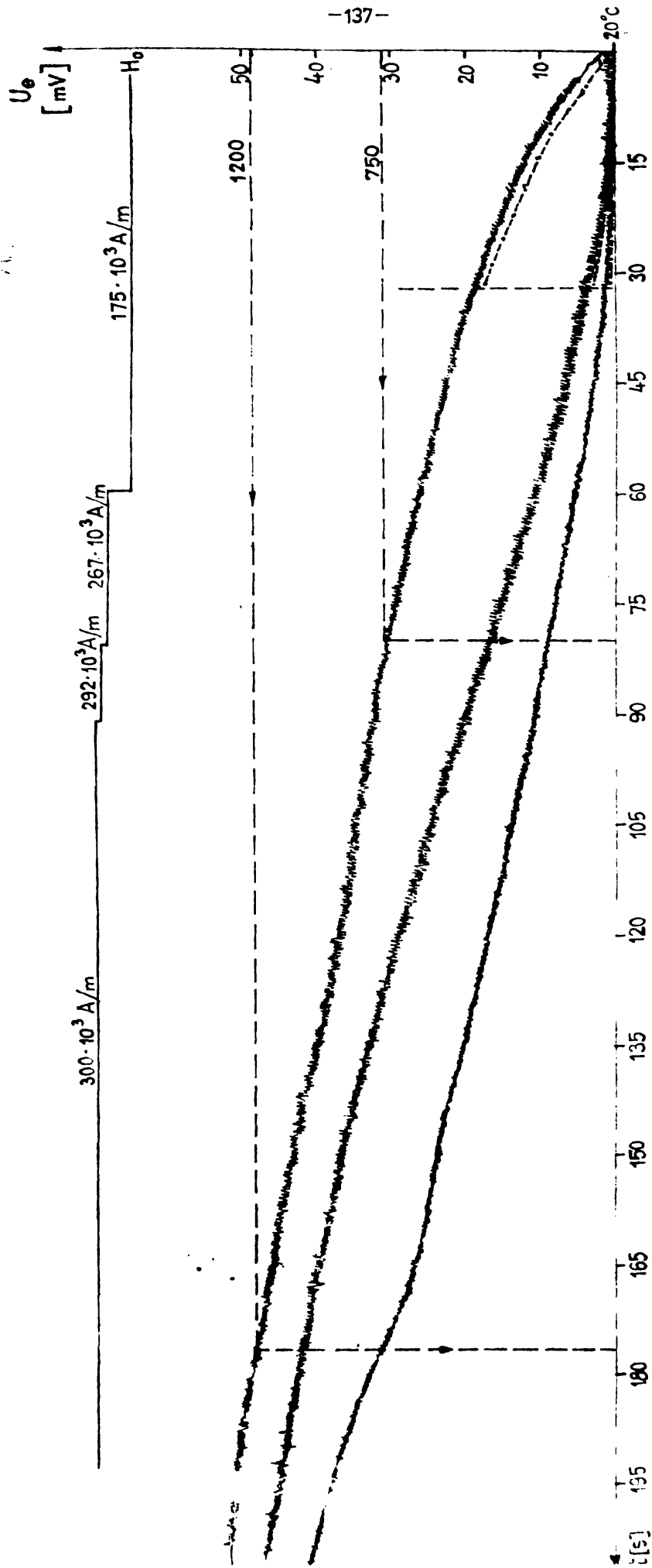
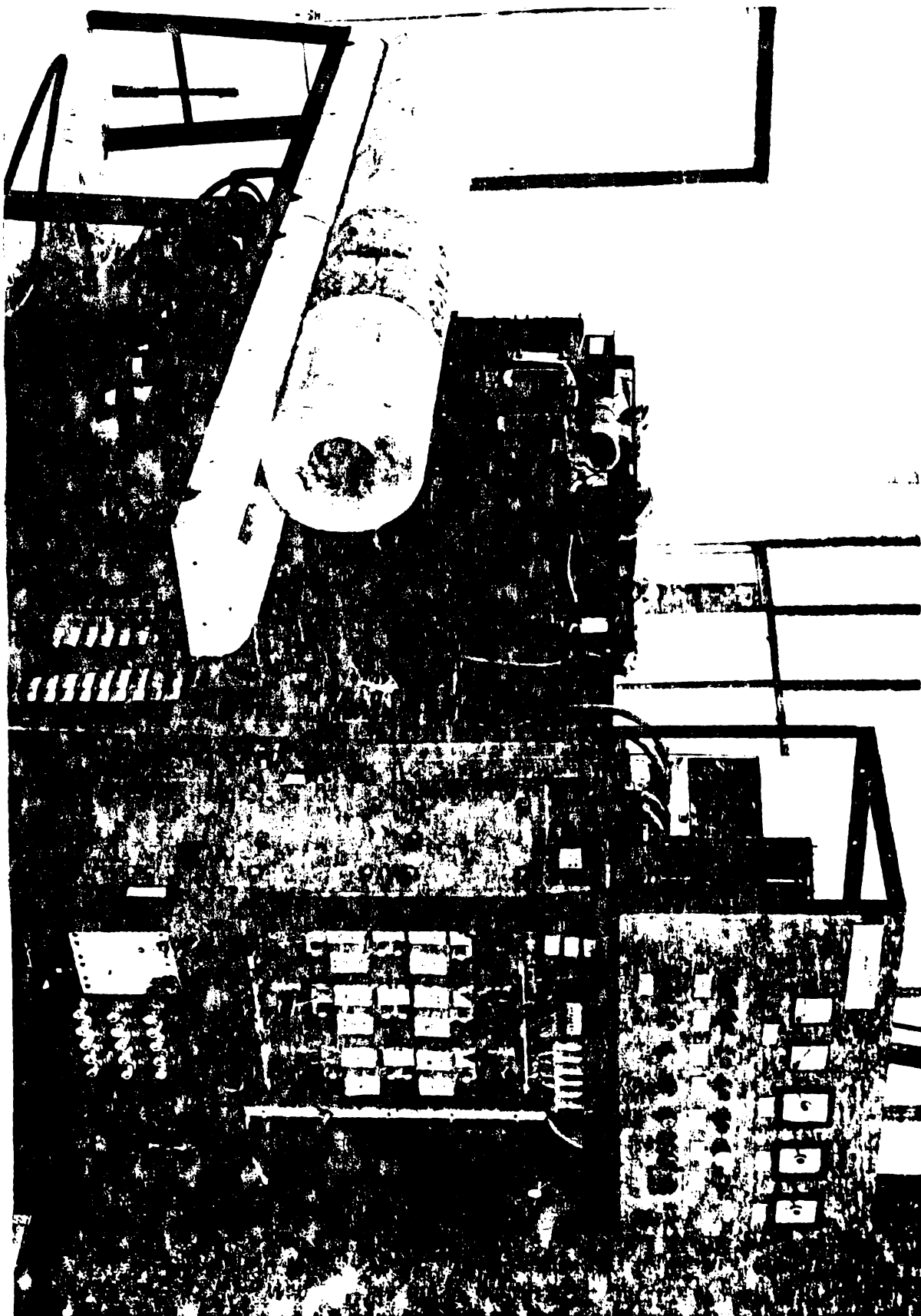


Fig.5.18. Variația temperaturii în timp în punctele considerate ale semifabricatului cilindric $\varnothing 100$.

Fig. 5.19. Instalație de încălzire inductivă a semifabricatelor cilindrice de \varnothing 80-100 mm



C O N C L U Z I I

Problemele abordate în cadrul tezei se referă în principal la: elaborarea unor modele generale de câmp electromagnetic cuplat cu cel termic, considerînd caracteristicile neliniare $\mu(H, \nu)$ și $\rho(\nu)$ date analitic, pentru un domeniu feromagnetic oarecare; implementarea numerică a acestora pentru corpuri cu simetrii și geometrii specifice încălzirii prin inducție în vederea determinării soluției de câmp electromagnetic și termic, precum și a altor mărimi specifice procesului de încălzire prin inducție; măsurări experimentale pe o instalație destinată încălzirii în volum a unor semifabricate și compararea rezultatelor cu cele calculate; determinarea prin mijloace numerice a caracteristicilor instalației de încălzire prin inducție, utilizînd setul de programe elaborat, cu implicații în proiectarea și exploatarea optimă a acesteia.

Referitor la determinarea experimentală a dependenței permeabilității magnetice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic și temperatură, pentru medii feromagnetice, în lucrare se propune o metodă bazată pe măsurarea susceptivității magnetice pe o balanță cu compensare electromagnetică de tipul Weiss-Forrer. Rezultatele experimentale obținute, pentru cîteva oțeluri de producție indigenă, evidențiază o dependență puternică a permeabilității magnetice de cei doi factori precizați. Pentru determinarea dependenței cu temperatura a rezistivității mediilor feromagnetice s-a procedat la calculul valorii acesteia la diverse temperaturi, pe cale indirectă prin măsurarea unor parametri globali pentru o probă paralelipipedică din mediul considerat. S-a utilizat metoda celor patru contacte aliniat, realizîndu-se în acest sens un dispozitiv care s-a conectat într-un montaj de compensare clasic. Rezultatele experimentale obținute, pentru oțeluri de producție indigenă, scot în evidență o dependență neliniară a rezistivității cu temperatură pînă la punctul Curie ($\nu_c \approx 750^\circ\text{C}$), după care se conturează o dependență liniară.

Referitor la rezolvarea problemei cuplate de câmp elec-

tromagnetic și termic se precizează următoarele:

- pe baza formelor locale ale legilor câmpului electromagnetic și ale transmisiei căldurii, cu dependențele permeabilității și rezistivității de factorii menționați cunoscute, s-au scris ecuațiile cuplate ale celor două câmpuri, în regim cvazistaționar, cu precizarea condițiilor de frontieră, pentru un domeniu feromagnetic oarecare;

- condiția de frontieră pentru câmpul termic, la suprafața de separație între mediul considerat și un alt mediu în care nu se dezvoltă căldură, s-a obținut aplicând corespunzător forma integrală a bilanțului termic;

- considerând cazul câmpurilor plan-paralele, pentru un cilindru infinit lung și secțiune arbitrară plasat în interiorul unei bobine excitată în curent alternativ, s-au dedus cele două condiții de frontieră pentru cazurile când se dă intensitatea curentului ce alimentează bobina, ca fiind o funcție sinusoidală, ori tensiunea de alimentare a acesteia;

- modelul de câmp obținut pentru cazul câmpurilor plan-paralele s-a aplicat pentru corpuri feromagnetice particulare (placă, cilindru și paralelipiped);

- pe baza formelor locale ale legilor câmpului electromagnetic, utilizând potențialul electric vector al câmpului densității curenților turbionari, s-au scris ecuațiile generale ale câmpului electromagnetic în cazul general, neglijând câmpul magnetic de reacție al curenților turbionari, apoi s-au particularizat pentru cazul câmpurilor plan-paralele la geometriile precizate și s-a dedus noua condiție de frontieră pentru câmpul potențial electric vector;

- în situația neglijării câmpului magnetic de reacție al curenților turbionari, pentru corpurile având geometriile precizate, s-au dedus și unele soluții analitice valabile la prima iterație a rezolvării problemei cuplate;

- s-au dedus expresiile puterii medii dezvoltate în unitatea de volum și a puterii active pentru toate cazurile analizate;

In ceea ce privește analiza numerică a câmpului elec-

tromagnetic cuplat cu cel termic se evidențiază de asemenea, următoarele:

- s-au elaborat modelele numerice, utilizînd metoda diferențelor finite, pentru cazul cîmpurilor plan-paralele și pentru corpuri avînd geometriile particulare amintite întrucît în domeniul prelucrărilor la cald semifabricatele similare ocupă un loc important;

- pe baza modelelor numerice elaborate s-au întocmit șapte programe de calcul, în limbaj FORTRAN, în vederea determinării soluțiilor de cîmp, a puterii specifice dezvoltate de curenții turbionari și a evoluției în timp a acestora;

- calculul intensității cîmpului magnetic sau a potențialului electric vector și a temperaturii s-a făcut prin metoda suprarelexării succesive punct cu punct, valorile nou calculate ale acestora s-au suprarelexat, iar valorile nou calculate ale permeabilității magnetice s-au subrelaxat;

- programele elaborate au o structură modulară, caracteristicile de material și calculul puterii specifice dezvoltate sînt date în subrutine existînd astfel posibilitatea analizei de cîmp pentru diverse medii prin utilizarea subrutinelor specifice, ele asigură calculul mărimilor utile în analiza și sinteza procesului de încălzire prin inducție și prezentarea sub o formă ușor utilizabilă a principalelor mărimi calculate în program;

- în urma rulării programelor s-a constatat că sînt necesare cîteva iterații în spațiu pentru a obține o precizie bună, în timp ce discretizarea în timp este foarte importantă sub aspectul calității rezultatelor obținute, dar timpul de calcul crește mult și de aceea, în funcție de cerințe și posibilitățile existente, se caută un optim care în urma rulărilor, în prezenta lucrare, s-a considerat ca fiind de șase puncte pe o perioadă;

- în ceea ce privește variația în timp a mărimilor de cîmp pe straturi se evidențiază deformarea și defazajul datorate cîmpului de reacție precum și cuplajului dintre cîmpul electromagnetic și cel termic, iar modelul de cîmp adoptat, frecven-

ța curentului prin inductor și rețeaua de discretizare spațială și în timp au o influență semnificativă asupra rezultatelor de calcul;

Se apreciază că diferențele ce apar, cu privire la rezultatele de calcul obținute, în cele două cazuri luate în considerare, cu reacție și fără reacție chiar în cazul mediilor neferomagnetice, sînt importante și deci o evaluare cantitativă mai exactă a fenomenelor specifice procesului de încălzire prin inducție se obține utilizînd modelul de cîmp electromagnetic cuplat cu cel termic cu luarea în considerare a cîmpului magnetic de reacție creat de curenții turbionari;

Cu privire la unele aspecte privind proiectarea și exploatarea instalațiilor de încălzire prin inducție folosind mijloace numerice se prezintă următoarele:

- măsurările efectuate de autor pe instalații de încălzire prin inducție pentru cazul unor semifabricate cilindrice, evidențiază o concordanță bună a rezultatelor obținute din măsurări cu cele calculate, ceea ce confirmă valabilitatea modelului de calcul adoptat și utilitatea setului de programe elaborat în determinarea prin mijloace numerice a principalelor caracteristici ale instalației de încălzire prin inducție;

- organigrama de proiectare a instalațiilor de încălzire prin inducție, propusă de autor, sugerează o nouă metodă de analiză și sinteză a acestor instalații cu implicații de ordin calitativ nu numai în proiectarea lor ci și în exploatarea lor optimă;

- rezultatele, teoretice și experimentale, obținute de autor au stat la baza proiectării și realizării unor instalații de încălzire prin inducție cu diverse destinații.

În continuare se prezintă principalele contribuții originale aduse în legătură cu problemele abordate:

1. Determinarea pe cale experimentală a dependenței parametrilor permeabilitate magnetică și rezistivitate ai mediilor feromagnetice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic și temperatură respectiv de temperatură. Pentru oțeluri de

producție indigenă se prezintă rezultatele obținute și aproximarea optimă, prin polinoame, a caracteristicilor neliniare respective efectuată pe calculator.

2. Elaborarea unui model general pentru problema cuplată de câmp electromagnetic și câmp termic cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție creat de curenții turbionari în cazul unui domeniu feromagnetic de geometrie arbitrară.

3. Elaborarea unui model pentru problema cuplată de câmp electromagnetic și câmp termic cu neglijarea câmpului magnetic de reacție creat de curenții turbionari pentru un domeniu feromagnetic oarecare.

4. Particularizarea modelelor generale pentru problema cuplată considerată la corpuri cu simetrii și geometrii particulare (placă, cilindru și paralelipiped), des întâlnite în sectoarele de prelucrare la cald din industrie.

5. Stabilirea modelelor numerice, utilizând metoda diferențelor finite, pentru configurațiile de corpuri precizate.

6. Elaborarea programelor de calcul, în limbaj FORTRAN, pentru determinarea mărimilor de câmp electromagnetic și termic, a puterii disipate prin efect electrocaloric, a variațiilor în timp ale acestora, în următoarele situații:

- placă feromagnetică cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție (programul DIFPCR);

- placă feromagnetică cu neglijarea câmpului magnetic de reacție (programul DIFPR);

- cilindru feromagnetic cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție (programul DIFCCR);

- cilindru feromagnetic cu neglijarea câmpului magnetic de reacție (programul DIFCR);

- paralelipiped feromagnetic cu luarea în considerare a câmpului magnetic de reacție (programul PARACR);

- paralelipiped feromagnetic cu neglijarea câmpului magnetic de reacție (PARAR);

- cilindru neferomagnetic cu luare în considerare a câmpului magnetic de reacție (DIFCCRNF).

7. Evidențierea prin calculul numeric efectuat, sub aspect calitativ și cantitativ, a fenomenelor specifice procesului de încălzire prin inducție a mediilor feromagnetice și neferomagnetice cu precizarea influenței modelelor considerate.

8. Elaborarea unei metodologii de proiectare a instalațiilor de încălzire prin inducție, utilizând setul de programe elaborat, în vederea determinării caracteristicilor acestora.

9. Determinarea experimentală a principalelor mărimi globale, specifice procesului de încălzire prin inducție, prin efectuarea de măsurări în medie frecvență a unor mărimi electrice, pentru care s-a efectuat și analiza armonică și a temperaturii pe o instalație echipată cu un convertor static de medie frecvență în cazul încălzirii unor semifabricate cilindrice și compararea acestora cu rezultatele obținute prin calcul.

B I B L I O G R A F I E
=====

1. Altgauzen A.P., ș.a. - Instalații electrotehnice industriale, Ed.tehnică, București, 1976.
2. Andreescu N. - Electrotehnica, 15, 1967, p.397.
3. Andronescu Pl. - Bazele electrotehnicii, vol.I și II, Ed. didactică și pedagogică, București, 1972.
4. Ardelean I. - Dispozitiv pentru determinarea rezistivității electrice la metale în intervalul de temperatură 80 - - 700 K, Studia Univ.Babeș-Bolyai, Fhisica, 1976, p. 78-80.
5. Beckert U. und Rieck H. - Numerische Berechnung der eindimensionalen Wirbelströmung in ferromagnetische Platten bei sinus förmiger Randfeldstärke, IET 2/1979.
6. Beckert U. und Rieck H. - Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Zylinder bei sinusförmiger Randfeldstärke, I.E.T. 3/1979.
7. Beckert U. - Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Zylinder bei feldstärkeabhängiger Permeabilität, I.E.T. 1/1977.
8. Beckert U. - Ein numerisches Verfahren zur Berechnung Zwidimensionaler Wirbelstromprobleme, I.E.T. 1/1980.
9. Beckert U. - Numerische Berechnung der Wirbelstromerscheinungen in ferromagnetischen Proben mit quadratischem Querschnitt, I.E.T. 3/1978.
10. Bossavit A. - Stefan models for eddy - currents in steel, Etudes et Recherches 92141 Clamart, 1981.
11. Burzo E. - Fizica fenomenelor magnetice, vol.I, Ed.Academiei R.S.R., 1979.
12. Comșa, D., Pantelimon, L. - Electrotermie, Ed.didactică și pedagogică, București, 1979.
13. Crepaz, G., Lupi, S., Maghini, M., Ramos, E. - High-Frequency surface Hardening with induction heating pulse-operation Processes.Industrial Heating-October,1983,p.24-25.

14. Cruțu, G., Lupșa, C. - Programarea la calculatorul Felix-256, Ed.Stiințifică, București, 1983.
15. De Mey G. - A method for calculating eddy currents in plates of arbitrary geometry, Archiv für Elektrotechnik 56, 1974.
- 16 De Sabata, I., - Bazele electrotehnicii, vol.I și II, Litografia I.P., "Traian Vuia" - Timișoara, 1980 și 1974.
17. El - Markaby M.D., Fawzi, T.H., Ahmed M.T. - Approximate treatment of nonlinear eddy current problems, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol.MAG-18, No.6, 1982.
18. Fawzi T.H., Ali K., Buike P.E. - Eddy current losses in finite length conducting cylinders, I.E.E.E. Trans.on Magnetics, vol.MAG-19, No.1, 1983.
19. Fluerașu, C. - Contribuții la problema încălzirii inductive la refulare netă a curenților turbionari, Teză de doctorat, I.P. București, 1983.
Geisel, H. - Konduktives oder induktives Erwärmen von Werkstücken Abmessungen mit Frequenzen f 50 Hz. Elektrowärme international 44 (1986), 33 Juni, p.107-115.
21. Ifrim, A., Noțingher, P. - Materiale electrotehnice, Ed.didactică și pedagogică, București, 1979.
22. Ilonca, Gh. - Măsurarea rezistivității electrice la plăcuțe subțiri de material prin metoda sondelor, Studia, Univ. „Babeș-Bolyai”, Mathematica-Physica, 1967, p.127-132.
23. Juszcak, E.N. - The chosen problem of modelling of the electromagnetic and thermal fields. ISEF 1985, Warsaw, Sept. 26-28, p.303-306.
24. Kamar A.M. - Solution of nonlinear eddy current problems using rezidual finite element method for space and time discretization, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol.MAG.-19, No.5, 1983.
25. Kittel, C. - Introducere în fizica corpului solid, Ed.tehnică, București, 1972.
26. Kohlgrüber, K. - Differenzverfahren hoher Genauigkeit für symmetrische Wärmeleitprobleme in Platten, Elektrowärme 1/ 1985.

27. Kolbe, E., Schulze, D. - Möglichkeiten zur Modellierung der induktiven Erwärmung mit Vorschub, Elektrowärme 6/1981
28. Konkov, V.L., Rübțova, R.S. - Izvestia Vis Uceb zav, Fizica 1, 1965, p.135.
29. Lavers, I.D., - Finite element solution of nonlinear two dimensional te-mode eddy current problems, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol.MAG-19, No.5, 1983.
30. Leuca, T. - Determinarea experimentală a variației rezistivității oțelurilor cu temperatura, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S.Oradea, 1983/1984.
31. Leuca, T. - Determinarea experimentală a variației permeabilității magnetice a oțelurilor cu temperatura și cu intensitatea câmpului magnetic, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S. Oradea, 1983/1984.
32. Leuca, T., Zalanyi, Z. - Aproximarea analitică a caracteristicilor neliniare de material ale oțelurilor, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S.Oradea, 1983/1984.
33. Leuca, T., ș.a. - Proiectarea asistată de calculator a echipamentului electrotehnic dintr-o instalație de încălzire prin inducție, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S Oradea, 1983/1984.
34. Luca, E. - Elemente de fizică modernă, Ed.Junimea, 1976.
35. Mayergoyz, I.D. - Analytical investigation of eddy currents in nonlinear ferromagnetic media, I.E.E.E.Trans, on Magnetics. vol.MAG-18, No.6, 1982.
36. Maghiar, T., Gavriș, M., Leuca, T., Felea, I. - Instalație de încălzit prin inducție folosind invertoare statice, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S.Oradea, 1980.
37. Maghiar, T., Gavriș, M., Leuca, T., Felea, I. - Instalație de lipit plăcuțe dure pe suport cuțit utilizând încălzirea prin inducție, Brevet OSIM nr.78263, 1981.
38. Maghiar, T., Gavriș, M., Leuca, T., Felea, I. - Transformator de adaptare pentru instalația de încălzire prin inducție, Brevet OSIM nr.78264, 1981.

39. Maghiar, T., Felea, I., Leuca, T. - Transformator de adaptare toroidal pentru instalația de încălzire inductivă, *Lucrări științifice, Seria A, I.I.S.Oradea, 1980.*
40. Maghiar, T., Gavriș, M., Leuca, T., ș.a. - Cercetări pentru realizarea unei instalații de încălzit prin inducție de medie frecvență cu invertor static. Protocol la contractul nr.1671/1980 între I.I.S.Oradea și Intreprinderea „Infrățirea” din Oradea.
41. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. - Instalație pentru încălzit semifabricate pentru forjare, prin inducție. Protocol la Contractul nr.4100/1981 între I.I.S.Oradea și I.A.M.T. Oradea.
42. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. - Instalație de încălzit prin inducție de medie frecvență pentru confecționat curbe și coturi din țevi. Protocol la Contractul nr.4342/1981 între I.I.S.Oradea și T.C.L.Oradea.
43. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. - Sursă de încălzit semifabricate de medie frecvență în vederea forjării. Protocol la Contractul nr.4636/1981, între I.I.S.Oradea și I.M.Oradea.
44. Maghiar, T., Leuca, T., ș.a. - Sursă de medie frecvență pentru încălzirea prin inducție a semifabricatelor din Cu. Protocol la Contractul nr.125/1985, între I.I.S.Oradea și Electroaparataj București.
45. Marinescu, Gh. - Analiza numerică, Ed.Academiei R.S.R., București, 1974.
46. Mitchell, A.R. - Computational methods in partial differential equations. New York, Wiley, 1971.
47. Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M. - Analiza numerică a câmpului electromagnetic, Ed.Dacia, Cluj-Napoca, 1986.
48. Mocanu, C.I. - Teoria câmpului electromagnetic, Ed.didactică și pedagogică, București, 1981.
49. Morisue, T. - Magnetic vector potential and electric scalar potential in three dimensional eddy current problems, I.E.E.E. Trans.on Magnetics, vol.MAG-18, No.2, 1982.

50. Müller, W. - A new iteration technique for solving stationary eddy current problems using the method of finite differences, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. MAG-18, No.2, 1982.
51. Nemkov, V.S., Polevodov. B.S. - Modelarea matematică pentru calculator a instalațiilor de încălzire de înaltă frecvență (l.rusă). Masinostroenie, Leningrad, 1980.
52. Pantelimon, L., ș.a. - Utilizarea energiei electrice și instalații electrice, Probleme, Ed.didactică și pedagogică, București, 1980.
53. Penman, I., Kamar, A.M., - Linearization of saturable magnetic field problems, including eddy currents, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol.MAG-18, No.2, 1982.
54. Poltze, J., Kuffel, E., Sikora, R. - A new iterative method for eddy current problems, I.E.E.E. Trans. on Magnetics vol.MAG-18, No.2, 1982.
55. Popescu, Gh., ș.a. - Materiale electrotehnice, Ed.Tehnică, București, 1976.
56. Pop, E., Chivu, M. - Măsurile electrice și magnetice, vol.I și II, Litografia I.P., "Traian Vuia" Timișoara, 1971.
57. Pop, I. and Tehtëchernicov, V.I. - Prib. i. Tekh. Exper. 5, 1964, p.180.
58. Proșcopiu, S. - Opere alese, Ed.Academiei R.S.R., 1970.
59. Purcell, E. - Electricitate și magnetism, Ed.didactică și pedagogică, București, 1982.
60. Racoveanu, N., ș.a. - Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, Ed.Tehnică, București, 1977.
61. Răduleț, R. - Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. I, II, III, IV, Ed.energetică de stat, 1954-1956.
62. Rosenberg, M. - Proprietățile magnetice ale corpului solid, Ed.didactică și pedagogică, București, 1963.
63. Salvadori, M.G., Baron, M.I. - Metode numerice în tehnică, Ed.Tehnică, București, 1977.

64. Savin, Gh., Rosman, H. - Circuite electrice neliniare și parametrice, Ed. Tehnică, București, 1973.
65. Sluhoțkii, A.E. - Inductoare pentru încălzirea electrică, Ed. Tehnică, București, 1982.
66. Stănciulescu, F. - Analiza și simularea sistemelor neliniare, Ed. Academiei R.S.R., București, 1974.
67. Schiop, A.I. - Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale, Ed. Academiei R.S.R., București, 1975.
68. Schiop, A.I. - Analiza unor metode de discretizare, Ed. Academiei R.S.R., București, 1978.
69. Șora, C. - Bazele electrotehnicii, Ed. didactică și pedagogică, București, 1982.
70. Timotim, A., ș.a. - Lecții de bazele electrotehnicii, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
71. Vetreș, I. - Teză de doctorat, I.P. „Traian Vuia”, Timișoara, 1975.
72. Vonsovski, S.V. - Magnetismul, Ed. științifică și enciclopedică, București, 1981.
73. Zalanyi, Z., Leuca, T. - Aproximarea spline ale unor caracteristici neliniare folosind un calculator numeric universal, Lucrări științifice, Seria A, I.I.S. Oradea, 1973/1984.
74. Zienkiewicz, O.C. - ~~The Finite Element Method in Engineering Science. London, Mc.Graw.Hill, 1971.~~