MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC " TRAIAN VUIA " TIMISOARA
FACULTATEA DE CONSTRUCTII

ING. DAN DUBINA

# CONTRIBUTII LA PERFECTIONAREA METODELOR DE CALCUL ALE CONSTRUCTIILOR METALICE HIDROTEHNICE. STAVILE

TEZA

PENTRU OBTINEREA TITLULUI STIINTIFIC DE
" DOCTOR INGINER "



CONDUCATOR STIINTIFIC :

ACAD. DAN MATEESCU



- 1986 -

## C U P R I N S

# INTRODUCERE

" Programul național de perspectivă, pentru amenajarea bazinelor hidrografice din Republica Socialistă România, care fixează liniile directoare ale dezvoltării amenajării bazinelor hidrografice pe o perioadă de 3o de ani, adoptat de Marea Adunare Națională prin Legea nr.1. din 15 aprilie 1976 prevede realizarea unui număr însemnat de lacuri de acumulare, galerii și canale de aducțiune pentru deservirea obiectivelor hidroenergetice, în cadrul Programului de realizare a indepentenței energetice a țării, pentru lucrările de alimentare cu apă a localităților și a obiectivelor industriale și pentru realizarea lucrărilor de hidroameliorații ; la acestea se adaugă lucrările de regularizare și amenajare a căilor de navigație pe rîurile interioare.

Astfel, pînă la sfîrșitul cincinalului 1986-199o numărul lacurilor de acumulare în țara noastră se va ridica la 45o,cu un volum de cca $18,3.10^9$ m.c., iar canalele și galeriile de aducțiune vor însuma 143o km, scopul acestor lucrări fiind de a asigura instalarea unei puteri de 74oo MW în centrale hidroelectrice, realizarea unor debite de 1oo $m^3/s$ pentru consumul populației și de 4oo $m^3/s$ pentru industrie și complexele agrozootehnice, irigarea unei suprafețe $5.5.10^6$ ha. In cincinalul următor se va da în folosință Canalul Poarta Albă-Midia-Năvodari și se va realiza în cea mai mare parte Canalul București-Dunăre.

In cadrul acestor lucrări vor fi necesare un număr însemnat de echipamente hidromecanice, stavile, vane de adîncime și de suprafață, porți de ecluze însumînd consumuri de zeci de mii de tone de oțel.

Din acest punct de vedere, elaborarea unor metodologii de calcul pentru proiectarea rațională, sigură și economică a acestor echipamente este oportună și justificată.

Stavilele metalice sînt structuri complexe similare ca alcătuire cu structurile tablierelor podurilor metalice și cu structurile utilizate în construcțiile navale și aeronautice. Față de acest nivel de complexitate, dezvoltarea metodelor de calcul și analiză a stării de tensiuni și deformații a stavilelor metalice se înscrie în efortul general depus de cercetători și proiectanți în vederea elaborării unor metode de calcul care să asigure proiectarea sigură și economică a construcțiilor.

In acest context, lucrarea de față are ca obiect ca, plecînd de la analiza critică a metodelor de calcul utilizate în prezent în proiectarea stavilelor metalice, să contribuie la formularea , dezvoltarea și elaborarea unor modele matematice și metode de calcul cu aplicabilitate generală, concomitent cu elaborarea unor metodologii specifice pentru analiza structurilor sau a elementelor structurale ale stavilelor metalice.

Proiectarea unei structuri de construcții trebuie să asigure respectarea a trei criterii fundamentale : de rezistență, de rigiditate și de stabilitate. In acest scop proiectantul trebuie să dispună de modele și metode de calcul care să-i permită, pe de o parte, să determine starea de tensiuni și deformații în structură, iar pe de altă parte, să studieze comportarea critică și postcritică a acesteia sub diferite încărcări. Elaborarea unor metode de calcul practice, utilizabile în proiectare, analitice sau numerice, nu se poate realiza, fără precizarea unui cadru matematic riguros pentru modelarea fenomenului fizic, prin formularea teoremelor și ipotezelor în baza cărora pot fi elaborate aceste metode de calcul, care trebuiesc justificate prin analiza convergenței soluțiilor aproxime către soluția exactă și, care , trebuie să-și aibă limitele de aplicabilitate bine definite.

Aceasta este concepția principială care stă la baza acestei lucrări, a cărei structură respectă dezideratele generale expuse mai sus. Lucrarea este structurată în 11 capitole grupate în trei părți: Partea I, care se referă la calculul de rezistență în domeniul liniar elastic ; Partea II-a care se referă la calculul neliniar și la analiza instabilității structurilor cu pereți subțiri ; Partea III-a, care cuprinde, în principal, programele de calcul automat elaborate pe baza metodelor de calcul elaborate sau dezvoltate în primele două.

Principalele contribuții ale autorului sînt concentrate în capitolele 2,4,6,7,8,9 și lo.

Capitolul 1 prezintă analitic și sintetic stadiul actual al dezvoltării metodelor de calcul utilizate în proiectarea stavilelor metalice. Pe baza unor exemple de stavile analizate comparativ cu diferite metode de calcul se stabilesc limitele de aplicabilitate, performanțele și deficiențele acestora.

Capitolul 2 se ocupă cu formularea unei teorii matematice generale a structurilor. Se definește modelul matematic exact și se stabilesc legile de generare ale modelelor aproximative pentru calcul structurilor din acesta. Se stabilesc condițiile de unicitate și convergență a soluțiilor și propune un criteriu de analiză în acest sens.

Capitolul 3 prezintă teoria reziduurilor ponderate și aplicarea acesteia la problemele din mecanica structurilor, realizîndu-se o clasificare a principalelor metode de calcul numeric formulate în cadrul acestei teorii.

Capitolul 4 prezintă formularea generalizată a metodei elementelor finite, pe baza teoriei reziduurilor ponderate. Se deduce ecuația fundamentală a metodei și se dezvoltă procedurile numerice pentru rezolvarea problemelor stadice și dinamice, liniare și neliniare din mecanica structurilor și pentru problemele nestaționare din teoria cîmpurilor.

Capitolul 5 tratează rezolvarea problemelor plane din mecanica structurilor cu metoda elementelor de contur. Se determină ecuația fundamentală a metodei în formulare directă și se arată posibilitățile de cuplare cu metoda elementelor finite, procedîndu-se totodată și la analiza critică comparativă a celor două metode.

Capitolul 6 prezintă o metodă numerică pentru calculul stavilelor cu structură chesonată. Metoda are la bază teoria suprafețelor prismatice lungi și poate fi rezolvată, în formularea generală, pe baza unei discretizări cu elemente finite, sau , în varianta simplificată, cu procedeele obișnuite ale algebrei matriciale.

Capitolul 7 se referă la formularea unei teorii liniare generalizate și a teoriei neliniare a barelor cu pereți subțiri, avînd ca punct de pornire ipotezele generale ale teoriei lui Vlasov.

Capitolul 8 se ocupă cu analiza critică și postcritică a structurilor cu pereți subțiri ale stavilelor metalice. Se prezintă relaţii practice pentru calculul de stabilitate a bordajelor plane şi cilindrice ale stavilelor metalice şi se face o analiză a relaţiilor de calcul a caracteristicelor geometrice echivalente utilizate în literatură şi în diferite norme de calcul la analiza postcritică a barelor cu pereţi subţiri. Se propune o formulă de calcul în acest sens şi trasează curbele de voalare. Se prezintă un algoritm pentru analiza instabilităţii barelor cu pereţi subţiri comprimate şi încovoiate.

Capitolul 9 prezintă programul experimental realizat pentru verificarea metodologiilor şi relaţiilor de calcul propuse în capitolul 8 şi pentru studiul fenomenologic al comportării barelor cu pereţi subţiri în domeniul postcritic.

Capitolul lo descrie programele de calcul elaborate pe baza algoritmilor dezvoltaţi în capitolele 4,5 şi 8. Se arată domeniile de aplicabilitate şi performanţele acestor programe prezentîndu-se exemple de control cu rezultate comparate cu cele obţinute cu alte metode şi programe de calcul sau cu rezultatele experimentale obţinute în cadrul cercetărilor descrise în capitolul 9.

Capitolul 11 conţine concluziile finale, principalele contribuţii ale autorului şi referiri la modalităţile de valorificare a rezultatelor.

Rezultatele parţiale ale cercetărilor intreprinse de autor pe parcursul elaborării lucrării au fost valorificate prin publicarea a peste 4o de articole şi studii ştiinţifice, cu conţinutul unor capitole sau subcapitole din teză, în reviste de specialitate şi în publicaţiile unor manifestări ştiinţifice din ţară şi străinătate. In mod direct sau indirect aceste rezultate s-au aplicat la rezolvarea unui număr de 7 contracte de cercetare şi colaborare cu producţia.

# CAPITOLUL I

## METODE DE CALCUL UTILIZATE IN PROIECTAREA MODERNA A STAVILELOR METALICE /52/, /54/, /57/.

### 1.1. GENERALITATI

Stavilele metalice sînt echipamente hidromecanice care intră în alcătuirea amenajărilor hidrotehnice fiind destinate să asigure retenţia şi/sau reglarea nivelului de retenţie al apei din bieful amonte. Stavilele sînt construcţii metalice care pot ajunge la dimensiuni importante - deschideri L = 25-35 m şi înălţimi H = 1o-17m - avînd o structură de rezistenţă complexă compusă din platelaj, lonjeroni, antretoaze şi grinzi longitudinale care conlucrează spaţial.

Stavilele se clasifică după mai multe criterii (fig.1.1). Dintre acestea se menţionează următoarele clasificări /17o/, /172/.

(a) După formă :

1. Stavile plane ; 2. stavile segment ; 3. stavile cilindrice ; 4. stavile sector ; 5. stavile clapetă ; 6. stavile ferme hidraulice ; 7. alte tipuri mai puţin uzuale.

(b) După modul de transmitere a presiunii apei :

1. stavile care transmit presiunea apei pilelor şi culeelor (plane, segment, cilindrice, batardouri) ;
2. stavile care transmit presiunea apei radierului (sector, clapete, ferme hidraulice) ;
3. stavile care transmit presiunea apei pilelor şi radierului (plane, clapete rotative).

(c) După sensul mişcării :

1. stavile ridicătoare (plane, segment, cilindrice) ; 2. stavile coborîtoare (sector, clapete, ferme hidraulice); 3. stavile mixte, alcătuite din două elemente mobile (stavile plane duble, stavile cu clapete) .

(d) După modul de acţionare :

1. Cu acţionare mecanică (toate tipurile de stavile) ; cu acţionare hidraulică (sector, clapete, ferme hidraulice).

Stabilirea soluţiei constructive şi a elementelor structurale ale stavilei depinde de încadrareaîn aceste criterii.

### 1.2. TIPURI DE STRUCTURI UTILIZATE IN CONSTRUCTIA STAVILELOR METALICE

Din punct de vedere al alcătuirii constructive stavilele se pot realiza cu secţiune deschisă, cu secţiune semi-închisă şi cu secţiune chesonată (fig.1.2). In principiu, toate tipurile de stavile se pot realiza constructiv în oricare din cele trei variante, elementele structurale principale ale structurii de rezistenţă fiind puse în evidenţă în figura 1.3, pe exemplul unei stavile plane.

### 1.3. ECUATIILE DIFERENTIALE ALE BORDAJELOR STAVILELOR METALICE

Bordajul stavilelor metalice este alcătuit din platelaj şi ele-

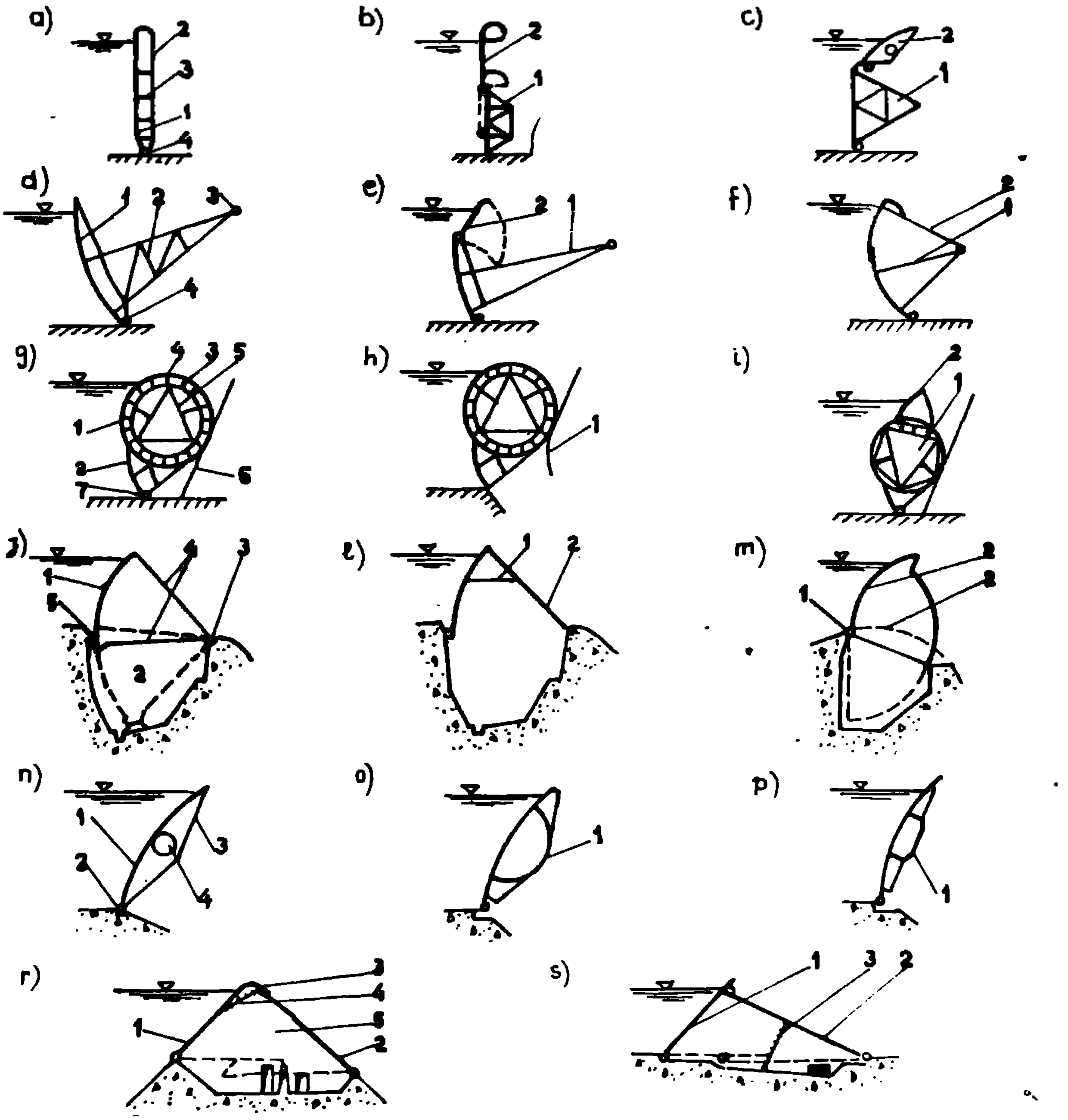


fig. 1.1 TIPURI DE STAVILE

a) stavilă metalică, 1-tolă (manta), 2-antretoaze, 3-grinzi de rezistență, 4-grindă de etanșare; b) stavilă plană dublă (tip cîrlig), 1-stavilă principală, 2-stavilă secundară (cîrlig); c) stavilă plană cu clapetă, 1-stavila plană, 2-stavila clapetă; d) stavila segment, 1-panou alcătuit din manta, antretoaze, lonjeroane, grinzi de rezistență, 2-brațe laterale, 3-articulație, 4-etanșare de fund; e) stavilă segment cu clapetă 1-stavilă segment, 2-stavilă clapetă; f) stavilă segment dublă, 1-stavila principală, 2-stavila secundară; g) stavilă cilindrică, 1-cilindru metalic, 2-cioc inferior, 3-lonjeroane, 4-antretoaze, 5-cadre de rigidizare, 6-cremalieră; h) stavilă cilindrică mixtă (ridicătoare și coborîtoare) 1-cremalieră curbă; i) stavilă cilindrică cu clapetă, 1-stavilă principală cilindrică, 2-stavilă secundară-clapetă; j) stavilă sector-plutitoare, 1-manta, 2-cameră de presiune, 3-articulație, 4-căptușeală etanșă, 5-opritor; l) stavilă sector înecată, 1-grindă de rigidizare, 2-căptușeală etanșă; m) stavilă tambur, 1-articulație, 2-manta cu profil deversant; n) stavilă clapetă, 1-manta, 2-articulație, 3-diafragmă de rigidizare, 4-tub de rigidizare; o) stavilă clapetă-burtă de pește, 1-burtă de pește rigidă; p) stavilă clapetă casetată, 1-caseta de rigidizare; r) stavilă acoperiș, 1-clapetă amonte, 2-clapetă aval, 3-rolă, 4-lanț de limitare a cursei, 5-cameră de presiune; s) stavilă capcană de urs, 1,2 clapete, 3-lanț de limitare a cursei.

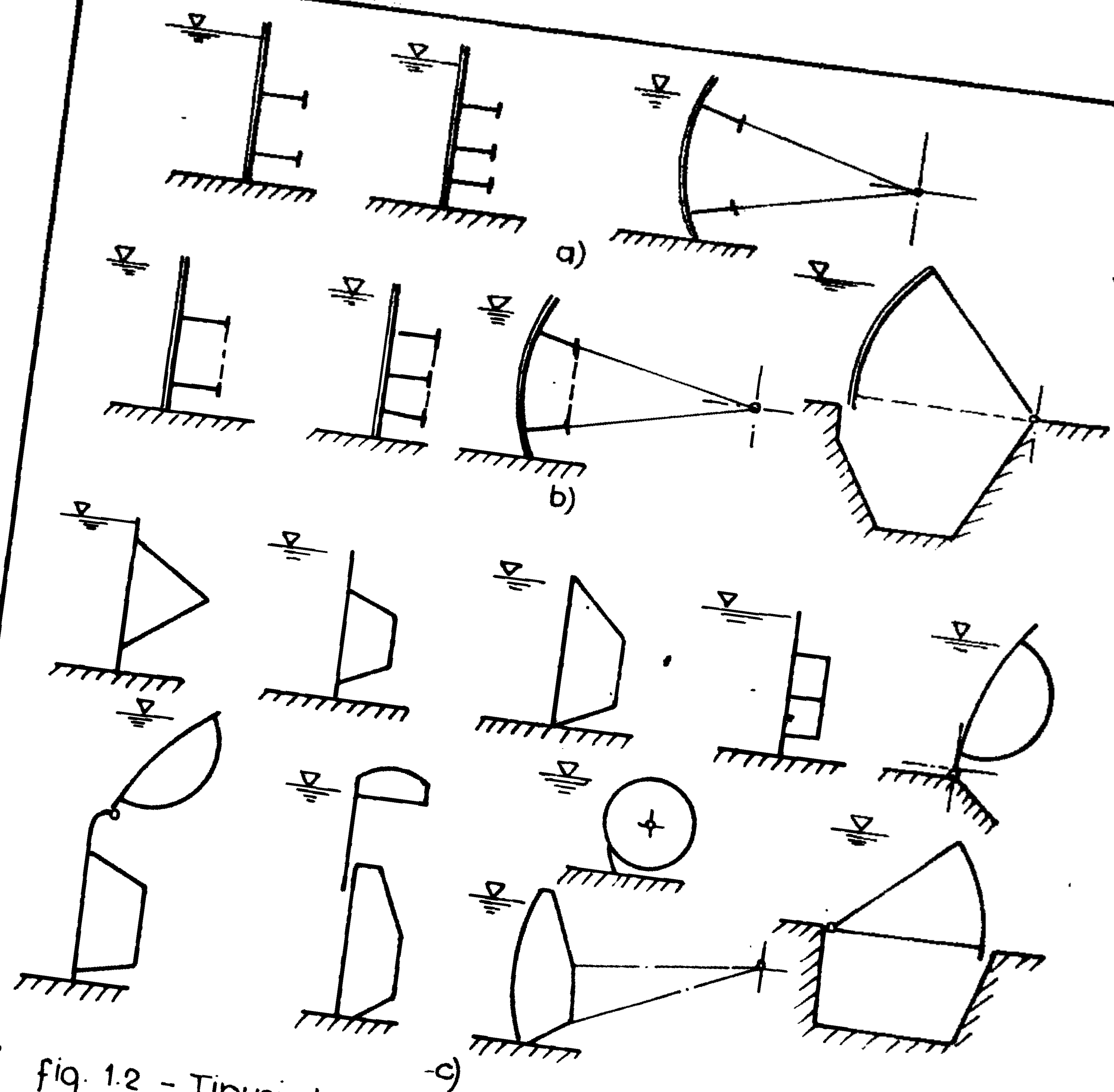
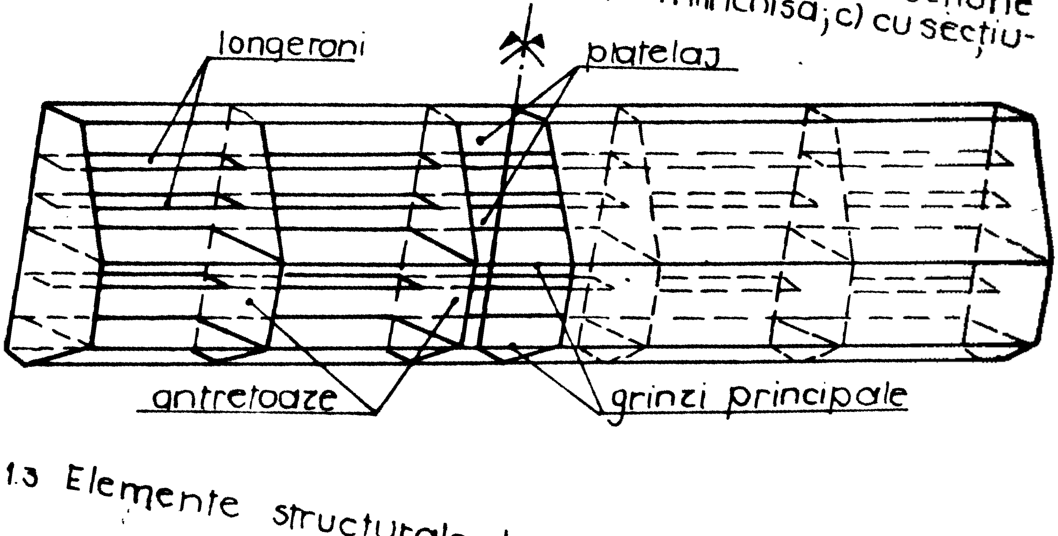



fig. 1.2 - Tipuri de structuri de stavile : a) cu secțiune deschisă ; b) cu secțiune semiînchisă ; c) cu secțiune închisă .




1.3 Elemente structurale la o stavilă

## tabelul 1.1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE BORDAJELOR.

| | ordin | domeniu | material izotrop | material ortotrop |
|---|---|---|---|---|
| plăci plane | I | linear | $K\Delta\Delta w = p$ | $\Delta\Delta_K w = p$ |
| | II | nelinear | $K\Delta\Delta w = p + t(F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''w^{\cdot\cdot})$;<br>$\Delta\Delta F = E[(w'^{\cdot})^2 - w''w^{\cdot\cdot}]$; | $\Delta\Delta_K w = p + t(F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''w^{\cdot\cdot})$;<br>$\Delta\Delta_D w = \frac{1}{t}[D_x D_y - \mu^2 D^2][(w'^{\cdot})^2 - w''w^{\cdot\cdot}]$; |
| | | linearizat | $K\Delta\Delta w = p + t(F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''w^{\cdot\cdot})$;<br>$\Delta\Delta F = 0$ | $\Delta\Delta_K w = p + t(F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''w^{\cdot\cdot})$;<br>$\Delta\Delta_D w = 0$ |
| plăci circulare | I | linear | $K\Delta\Delta w = p + \frac{t}{r}F''$<br>$\Delta\Delta F = -\frac{E}{r}w''$ | $\Delta\Delta_K w = p + t[F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''(\frac{1}{r} + w^{\cdot\cdot})]$;<br>$\Delta\Delta_D F = -\frac{1}{rt}[D_x D_y - \mu^2 D^2]w$; |
| | II | nelinear | $K\Delta\Delta w = p + t[F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F''(\frac{1}{r} + w^{\cdot\cdot})]$;<br>$\Delta\Delta F = E[(w'^{\cdot})^2 - w''(\frac{1}{r} + w^{\cdot\cdot})]$; | $\Delta\Delta_K w = p + t[F^{\cdot\cdot}w'' - 2F'^{\cdot}w'^{\cdot} + F(\frac{1}{r} + w^{\cdot\cdot})]$;<br>$\Delta\Delta_D F = \frac{1}{t}[D_x D_y - \mu D^2][(w'^{\cdot})^2 - w''(\frac{1}{r} + w^{\cdot\cdot})]$; |

NOTAȚII:

$w(x,y)$: săgeata; $r$ = raza cilind.;
$p(x,y)$: forța normală distribuită pe placă;
$F(x,y)$: funcția de tensiuni;

$(\ )' = \frac{\partial}{\partial x}$; $(\ )^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial y}$;

$\sigma_{yy} = \frac{n_y}{t} = F''$; $\sigma_{xx} = \frac{n_x}{t} = F^{\cdot\cdot}$;

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{n_{xy}}{t} = -\frac{n_{yx}}{t} = F'^{\cdot}$;

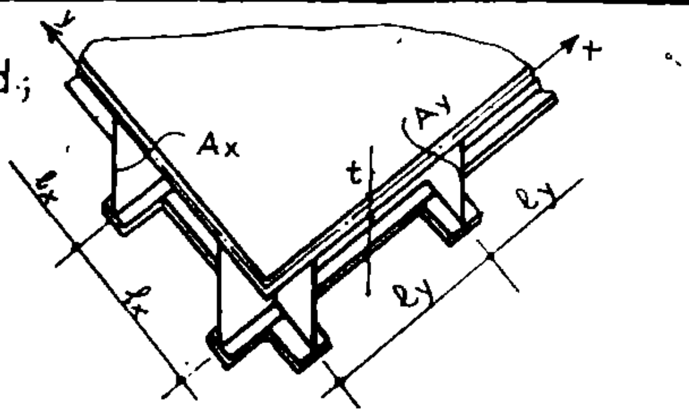
$K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$; $K_x = \frac{EI_x}{\ell_x}$; $K_y = \frac{EI_y}{\ell_y}$;

$K_{xy} = \frac{1}{2}(1-\mu)K$; $K_1 = \mu K$;

$D = \frac{Et}{1-\mu^2}$; $D_x = D + \frac{EA_x}{\ell_x}$; $D_y = D + \frac{EA_y}{\ell_y}$;

$T = \frac{1-\mu}{Et}(D_x D_y - \mu D^2)$; $I_{ti} = \frac{1}{3}\sum t_i^3 \ell_i$;

$H = K + \frac{G}{2}\left(\frac{I_{tx}}{\ell_x} + \frac{I_{ty}}{\ell_y}\right)$;




$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

$\Delta\Delta_K = K_x\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2H\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y\frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

$\Delta\Delta_D = D_x\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2T\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y\frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

$E$ = modul de elasticit. long.
$G$ = modul de elasticit. transv.
$\mu$ = coeficientul lui Poisson.

mente de rigidizare longitudinale, lonjeroni, şi transversale, antretoaze sau diafragme. Ca formă poate fi plan, sau cilindric. După valoarea raportului săgeată maximă / grosime placă, calculele se pot conduce după teoria de ordinul I ($W_{max}/t \leq 0,5$) sau teoria de ordinul II($W_{max} > 0,5$) , /196/.

In general în calculul stavilelor metalice se utilizează teoria de ordinul I, dar nu este exclus, ca în condiţiile reducerii consumului de material, bordajul stavilelor să se dimensioneze după teoria de ordinul II avînd în vedere că deformaţiile secţiunii transversale nu aduc inpedimente de natură funcţională.

In tabelul 1.1 se prezintă sistematizat ecuaţiile diferenţiale ale bardajelor stavilelor metalice. Ecuaţiile sînt formulate în deformaţii- săgeata w(x,y) - şi funcţii de tensiuni -F(x,y) . In figura 1.4. se pun în evidenţă forţele şi momentele marginale produse de presiunea hidrostatică care apar între platelaj şi grinzile marginale. Condiţiile de margine cu care se intră în ecuaţiile din tabelul 1.1, se formulează în deplasări u, v şi w. Mărimea acestor deplasări este funcţie de rigidităţile la încovoiere, torsiune, forfecare şi axiale ale grinzilor. Pentru fiecare margine este posibilă o gamă largă de combinaţii: (1) margine liberă (rigiditatea = o); (2) rezemare elastică (rigiditatea (o,∞); (3) margine încastrată (rigiditatea =∞). In mod evident cazurile limită cu rigiditate o şi ∞ nu aper în realitate, dar deoarece din punct de vedere teoretic se tratează cu uşurinţă, se utilizează pentru deducerea condiţiilor de margine. Dacă aceste condiţii de margine ar putea fi evaluate cu suficientă precizie pentru a modela conlucrarea dintre elementele componente ale structurii de rezistenţă, modelul matematic prezentat sintetic în tabelul 1 ar da posibilitatea unui calcul exact. Cum acest lucru este practic imposibil se recurge la metode analitice sau numerice cu caracter aproximativ.

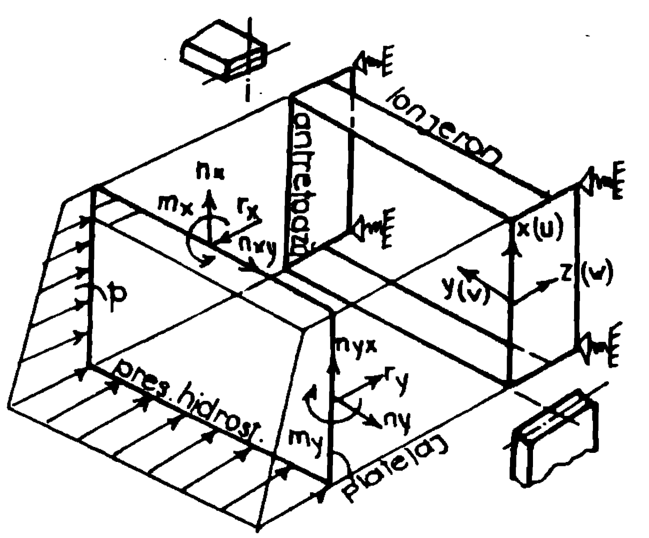


fig.1.4

## 1.4. ANALIZA METODELOR DE CALCUL UTILIZATE IN PROIECTAREA STAVILELOR METALICE /52/, /54/.

### 1.4.1. Clasificarea metodelor de calcul.

Metodele analitice, aplicate în mod curent în proiectare, care ţin seama, într-o măsură mai mare sau mai mică, de conlucrarea spaţială a elementelor structurale utilizate pentru analiza statică şi dimensionarea stavilelor metalice le încadrează pe acestea, din punct de vedere structural într-una din următoarele ipoteze: (1) reţea de grinzi în conlucrare cu platelajul ; (2) bare cu pereţi subţiri ; (3) suprafeţe prismatice ; (4) plăci sau bordaje cilindriceortotrope. Fiecare din aceste schematizări îşi are propria sa teorie şi metodă de calcul. Pe aceste scheme de calcul, care constitue modele continue echivalente ale structurii reale, sau pe modele fizice mai apropiate de structura reală se pot aplica metodele numerice de calcul bazate pe procedee de discretizare fizică sau matematică. In figura 1.5. se prezintă o schemă de clasificare a metodelor de calcul a stavilelor metalice din această perspectivă.

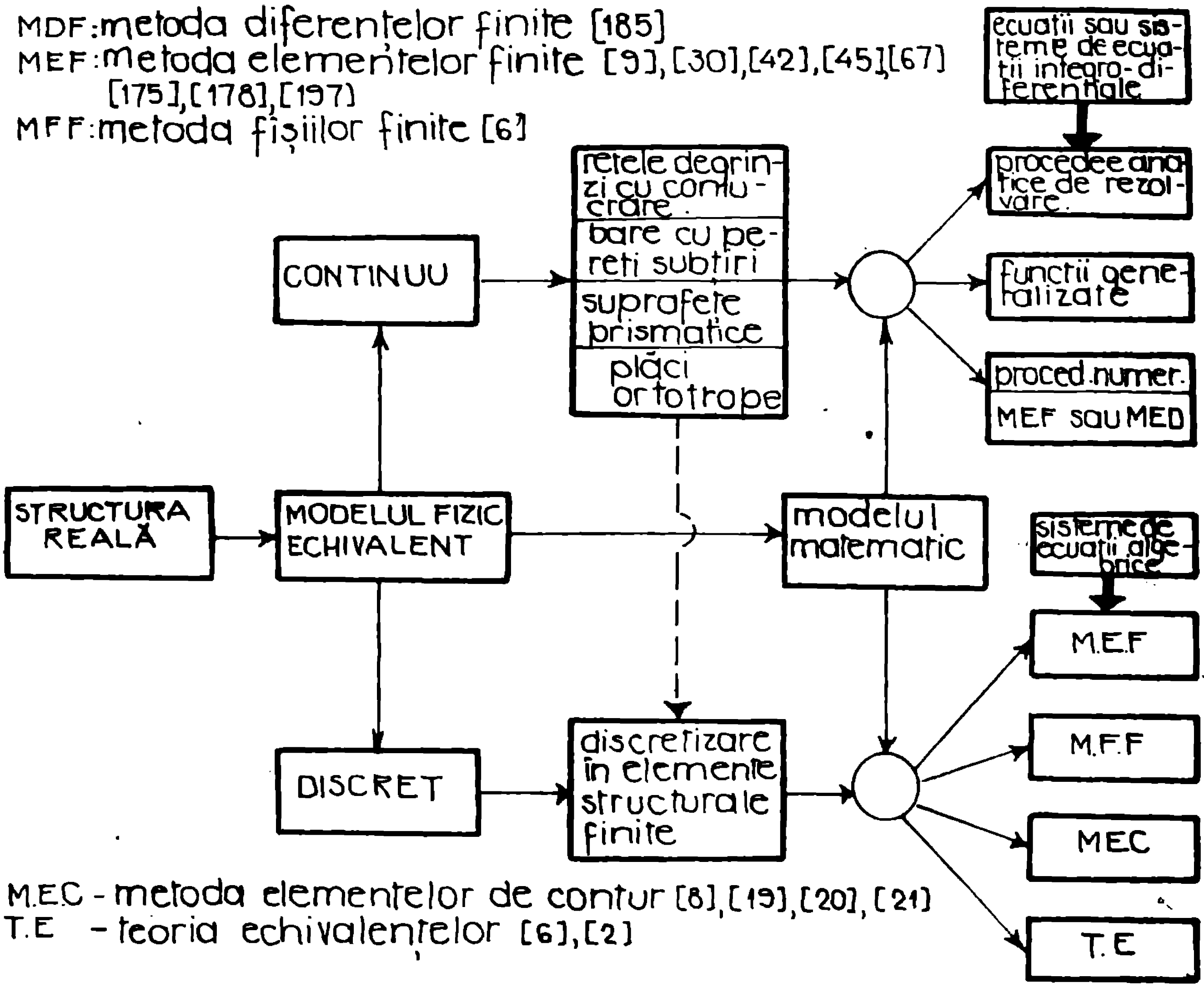



fig. 1.5

Aplicarea acestor metode pune,însă,întrebarea în ce măsură schema de calcul utilizată asigură modelarea fizică corectă a structurii reale. Din acest punct de vedere,o analiză a metodei utilizate,prin prisma ipotezelor care stau la baza acesteia,este necesară în fiecare caz de aplicare.

### 1.4.2. Analiza critică a metodelor de calcul

Schematizarea structurii de rezistenţă a stavilelor prin reţele de grinzi pune problema conlucrării dintre acestea şi platelaj. Aprecierea lăţimii conlucrătoare de placă este aproximativă în situaţia în care momentul încovoietor are o lege de variaţie neuniformă - situaţia reală - ceea ce conduce la o nesiguranţă a calculelor din acest punct de vedere. Metoda reţelelor de grinzi se pretează stavilelor cu secţiune deschisă .

Tratarea stavilelor cu bare cu pereţi subţiri sau suprafeţe prismatice are la bază ipoteza nedeformabilităţii formei secţiunii transversale. In teoria barelor cu pereţi subţiri este presupusă menţinerea nedeformată a formei secţiunii transversale pe toată lungimea barei. In teoria plăcilor prismatice se impune menţinerea formei secţiunii transversale numai în dreptul diafragmelor (sau antretoazelor). Din punct de vedere funcţional stavilele nu trebuie să respecte restricţii prea severe în ceea ce priveşte deformabilitatea secţiunii transversale în ansamblul structurii, cu excepţia capetelor care intră în nişele pilelor şi care trebuie să îndeplinească anumite condiţii mecanice şi de etanşare.

In practică secţiunea transversală a stavilelor este întotdeauna deformabilă din următoarele motive : (1) grosimea pereţilor "barei" sau a "prismei" este mică, rigiditatea la încovoiere fiind neglijabilă ; (2) distanţele dintre elementele de rigidizare transversale, diafragme sau antretoaze, este mare ; (3) diafragmele sau antretoazele au o comportare elastică fiind la rîndul lor deformabile în planul lor. In aceste condiţii, tensiunile normale repartizate pe secţiunea transversală se încadrează între acelea obţinute prin aplicarea teoriei de bară cu pereţi subţiri şi cele rezultate din teoria de placă prismatică.

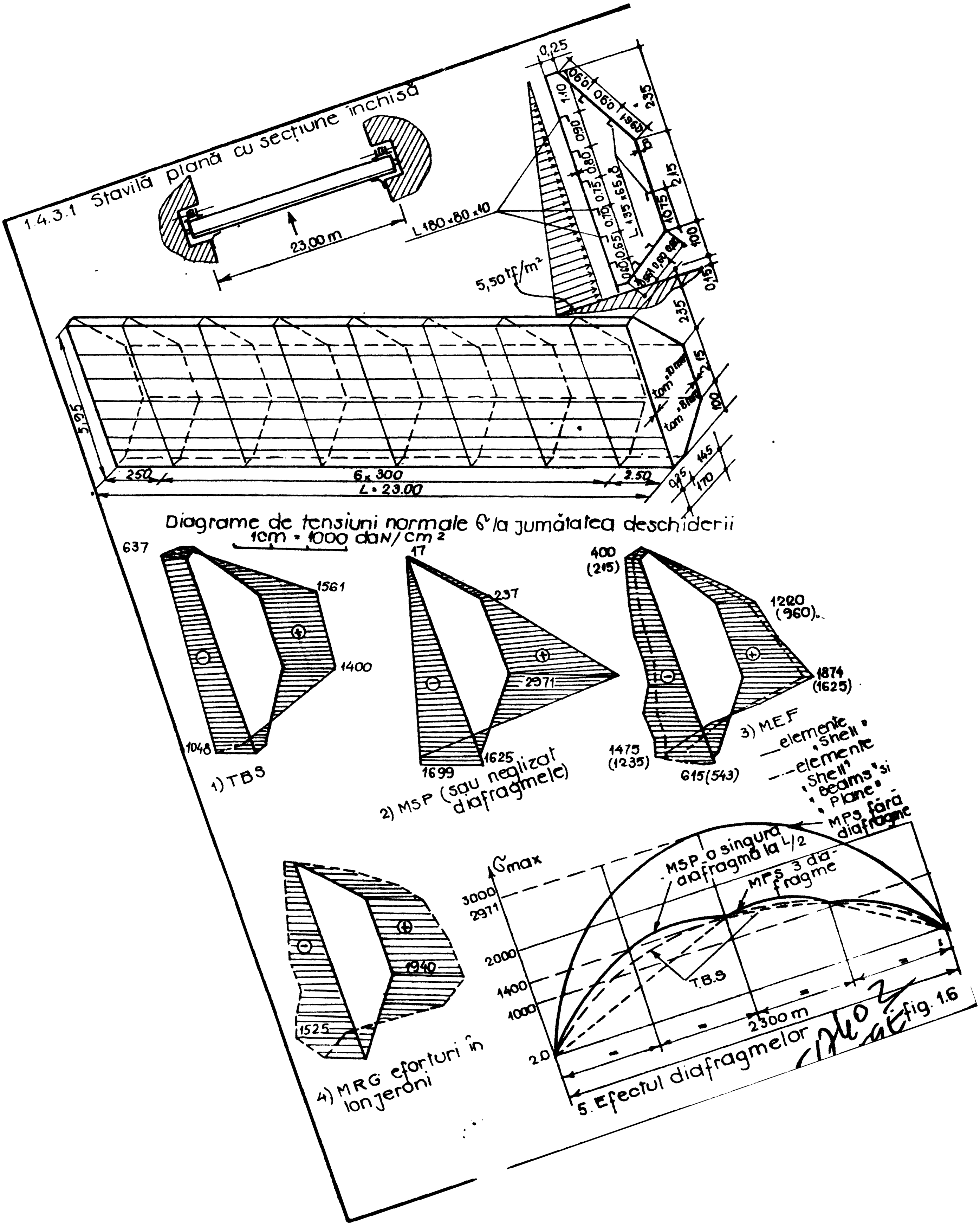
Considerarea bordajului stavilei ca fiind o placă ortotropă /12/, /13/ elimină problema evaluării "lăţimii conlucrătoare" şi este admisă pentru structurile deschise cu condiţia ca elementele de rigidizare, transversale şi longitudinale - antretoaze (diafragme) şi lonjeroni - fie dispuse suficient de des şi la distanţe egale.

Corespunzător acestor tipuri de scheme de calcul sînt cunoscute şi metodele de calcul respective, analitice sau numerice, nivelul de exactitate al uneia sau al alteea dintre aceste metode fiind dependent de măsura în care schema adoptată modelează corect structura reală.

In prezent în practica de proiectare sînt puse la punct metodologii de calcul bazate pe teoria barelor cu pereţi subţiri: /28/, /129/ pentru stavile cu secţiune închisă şi, respectiv, pe teoria reţelelor de grinzi pentru stavilele cu secţiune deschisă. Metodele de calcul bazate pe teoria de placă ortotropă se aplică în general structurilor deschise de tipul porţilor de ecluză, iar metodele de calcul care utilizează teoria suprafeţelor prismatice, care se aplică cu bune rezultate structurilor închise, fiind mai aproape de comportarea reală a acestora decît modelul de bară cu pereţi subţiri, sînt încă insuficient elaborate.

Metoda de calcul numeric care permite analiza cea mai complexă, în concordanţă cu comportarea reală a structurii de rezistenţă a stavilelor metalice, este metoda elementelor finite. Există şi alte metode de calcul bazate pe discretizarea fizică a structurii, care se pot utiliza pentru analiza statică şi dinamică a stavilelor, cum ar fi metoda fîşiilor finite, care reprezintă de fapt o particularizare a MEF, teoria echivalenţelor şi, apărută în ultimii ani, metoda elementelor de contur. Nici una, însă , dintre aceste metode, cu performanţe în rezolvarea unor anumite tipuri de structuri, nu oferă posibilităţile de modelare , în condiţiile utilizării eficiente a tehnicii de calcul automat, pentru obţinerea unor rezultate cu precizia dorita ca MEF.

O metodă analitică interesantă cu aplicaţii cunoscute în calculul bordajelor echipamentelor hidromecanice /38/, /39/, /4o/, este metodafuncţiilor generalizate sau a liniilor de sarcină. Această metodă este opusă principial metodelor bazate pe discretizare fizică sau matematică, în sensul că modelează discontinuul prin modele matematice formal continue. Metoda utilizează funcţii generalizate


1.4.3.1 Stavilă plană cu secțiune închisă
23,00 m
L 180×80×10
L 135×65×8
5,50 tf/m²
5,95
2,50
6 × 300
L = 23,00
Diagrame de tensiuni normale σ la jumătatea deschiderii
1cm = 1000 daN/cm²
637
1561
1400
1048
1) TBS
17
237
2971
1699
1625
2) MSP (sau neglizat diafragmele)
400 (215)
1220 (960)
1874 (1625)
1475 (1235)
615 (543)
3) MEF
— elemente "Shell"
—·— elemente "Shell", "Beams" și "Plane"
MPS fără diafragme
MSP o singură diafragmă la L/2
MPS 3 diafragme
T.B.S
σmax
3000
2971
2000
1400
1000
2.0
1940
1525
4) MRG eforturi în lonjeroni
23,00 m
5. Efectul diafragmelor
fig. 1.6

1.4.3.2 Stavilă segment cu secțiune închisă.

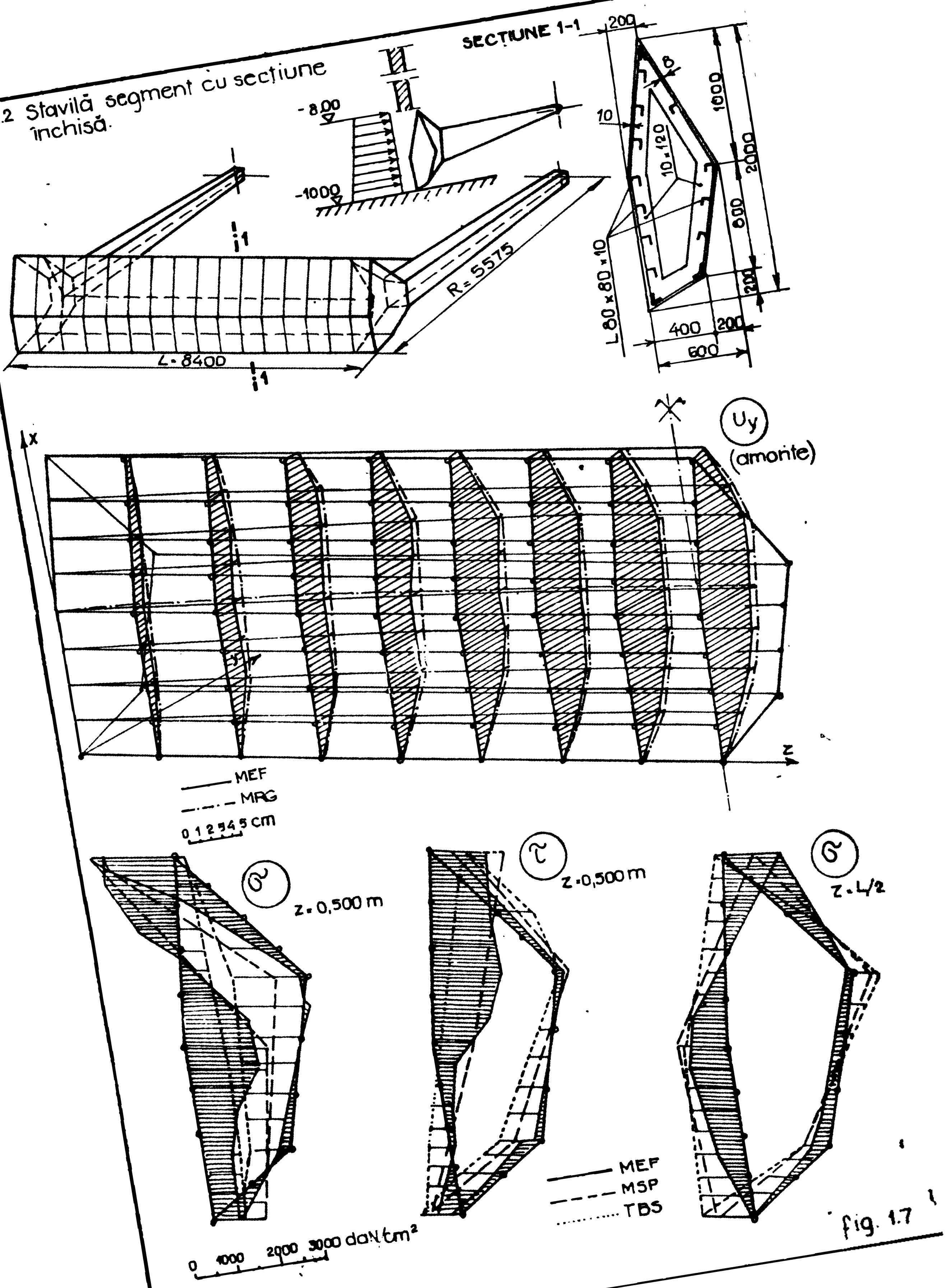



fig. 1.7

### 1.4.3.3 Clapetă tip „burtă de pește"

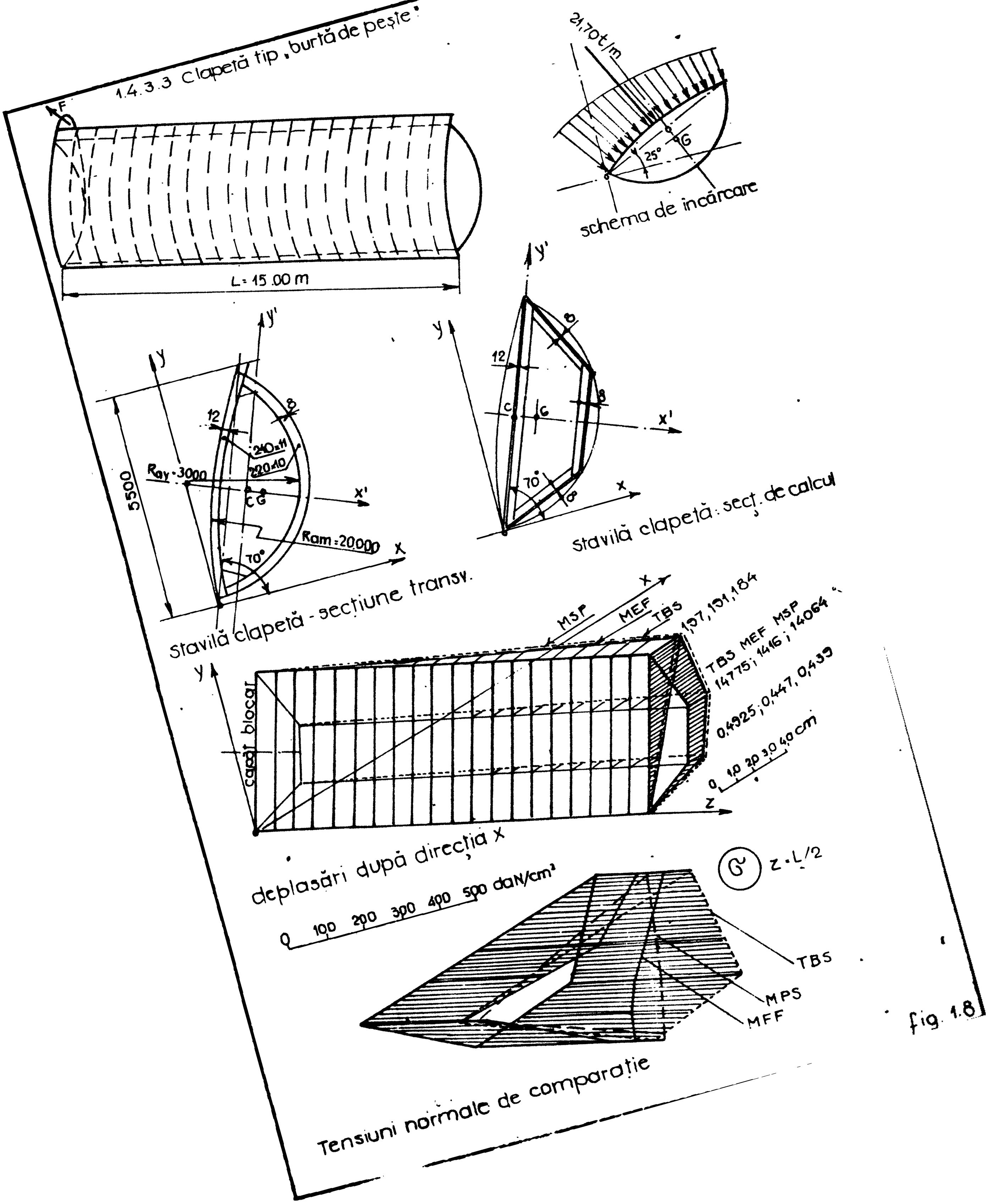



fig. 1.8

sau distribuţii de tip Heaviside şi Dirac, modelînd suprafeţele rigidizate prin suprafeţe continue şi punînd condiţia ca liniile de tensiuni să fie dirijate după axele nervurilor. Pentru determinarea acestor tensiuni liniare se utilizează ecuaţii integrale Fredholm de speţa a II-a degenerate în sume. Prezenţa acestor ecuaţii în modelul matematic conduce la ideea unei posibile legături cu M.E.C. care utilizează acelaşi aparat matematic.

In prezent există tendinţa de a combina două sau trei metode de calcul pentru rezolvarea aceleaşi structuri. De exemplu, se rezolvă structura luată în ansamblu ca o structură spaţială din bare, care modelează echivalent rigiditatea structurii reale şi, apoi, pentru analiza de detaliu a unor subansamble sau îmbinări se utilizează MEF . Se economiseşte în acest mod manopera şi timpul necesar pentru pregătirea datelor de intrare, precum şi memoria şi timpul de utilizare a calculatorului. O interesantă metodă pentru rezolvarea structurilor chesonate ale podurilor metalice, care cu unele modificări poate fi aplicată şi pentru calculul stavilelor, este prezentată în lucrarea /146/. Această metodă combină metoda suprafeţelor prismatice, derivată din teoria generală a barelor cu pereţi subţiri a lui Vlasov, cu MEF. Intr-o altă lucrare /2o/, tot pentru calculul tablierelor chesonate ale podurilor, metoda suprafeţelor prismatice se combină cu MEC. Zonele de reazeme ale structurii se modelează cu elemente de contur quadratice, iar cîmpul se tratează ca o suprafaţă prismatică închisă.

1.4.3. Exemple numerice.

Prin intermediul a 3 exemple de calcul se prezintă comparativ rezultatele obţinute prin aplicarea a 4 metode de calcul : (1) metoda reţelelor de grinzi (MRG) ; (2) teoria barelor cu pereţi subţiri (TBS) ; (3) Metoda suprafeţelor prismatice în varianta din capitolul 6 (MSP); (4) MEF.

## 1.5. CONCLUZII

Analizînd comparativ rezultatele obţinute pentru cele 3 exemple prezentate în subcapitolul anterior se desprind următoarele concluzii :

1. Toate metodele analizate i-au în considerare conlucrarea spaţială dintre elementele componente ale structurii de rezistenţă a stavilelor metalice, ceea ce este de natură să conducă la o dimensionare mai sigură şi mai economică. Soluţiile moderne de realizare a stavilelor merg, în general, pe secţiuni închise, de tip cheson, din table sudate. In acest sens, utilizarea pentru proiectare a unor metode de calcul adecvate este absolut necesară. Este de datoria inginerului proiectant să aleagă metoda de calcul care să satisfacă în mod optim parametrii de realizare a proiectului : soluţie tehnică eficientă, siguranţă în exploatare, cost minim şi nu în ultimul rînd manoperă şi timp minim pentru realizarea proiectului.

2. Din punct de vedere a capacităţii de modelare a structurilor şi a posibilităţilor de obţinere a unor rezultate cu un grad de precizie dorit, metoda care se impune în mod incontestabil este MEF. Aplicarea MEF pentru analiza comportării unor structuri de mare complexitate, cum este cazul stavilelor metalice, presupune asigurarea a două condiţii absolut necesare :(a) existenţa unui program de calcul cu elemente finite multifuncţional, cu un număr suficient de tipuri de elemente ; (b) un calculator de capacitate cel puţin medie

(≥512.K.O) . Pentru rezolvarea exemplelor prezentate s-a folosit programul SAP o5. Este un program complex, care consumă însă multă memorie (18o K.O) şi care, prin urmare, nu poate fi inplementat pe echipamentele de calcul moderne- minicalculatoare INDEPENDENT şi CORAL - pe care le produce în prezent industria electronică românească. Totodată, manopera pentru pregătirea şi introducerea datelor iniţiale, precum şi pentru prelucrarea rezultatelor este deosebit de laborioasă. Pentru utilizarea eficientă a metodei sînt necesare programe cu structură modulară, utilizabile în regim interactiv, cu pre-şi postprocesoare pentru introducerea şi prelucrarea grafică a rezultatelor.

3. T.B.S. trebuie aplicată cu rezerve întrucît nu se pretează decît la stavilele lungi, cu dimensiunile secţiunii transversale reduse. Aici trebuiesc luate în considerare rapoartele limită impuse de Vlasov /195/ pentru încadrarea structurilor în categoria barelor cu pereţi subţiri : $L/H \geq 1o$; $t/H \geq 1o$. Chiar şi în cazul stavilelor clapetă "burtă de peşte", care respectă în general ,aceste condiţii, metoda are neajunsul că nu ţine seama de efectul diafragmelor.

4. M.R.G. poate fi plicată cu rezultate bune dacă se apreciază în mod corect "lăţimea conlucrătoare". In acest sens se recomandă normele germane DIN 197o4 /198/, care s-au aplicat şi în cazul exemplelor considerate. Metoda are avantajul că poate fi aplicată prin intermediul programelor de calcul pentru structuri spaţiale din bare :programul GIPSI, care permite calculul pe substructuri, programul SPAT 1 cuplat cu programul de prelucrări grafice Y, implimentate pe I 1oo.

5. M.S.P. este o metodă competitivă pentru calculele inginereşti din proiectarea curentă, fiind recomandabilă pentru structurile chesonate. Algoritmul acestei metode se prezintă în capitolul 6. Metoda are avantajul că poate fi uşor programată de microcalculatoare de capacitate medie (48 K.O) şi, din acest punct de vedere, la îndemîna proiectanţilor.

6. Pentru analiza stării de tensiuni şi deformaţii în zonele de concentrări de tensiuni se recomandă utilizarea combinată a MEF cu MSP sau cu M.R.G. O variantă, competitivă din acest punct de vedere , este cuplarea MEF cu MEC.

# CAPITOLUL II

## FORMULAREA TEORIEI MATEMATICE A STRUCTURILOR /5o/, /114/, /115/.

### 2.1. GENERALITATI

Componentă a mecanicii solidului mecanica structurilor conţine modelele fizice şi matematice pentru studiul stării de echilibru şi analiza stării de tensiuni şi deformaţii a structurilor şi elementelor structurale.

Considerînd aspectul matematic al problemei este important să se studieze analogiile formale dintre modele şi modul în care modelele matematice pot genera unele din altele. Baza şi argumentele acestui studiu sînt furnizate de teoremele analizei funcţionale. Abordată din acest punct de vedere, teoria matematică a structurilor cuprinde trei grupuri de legi fundamentale şi teoreme, după cum urmează /5o/ /114/:

1. Modelul matematic elaborat pe baza legilor sistemului fizic.
2. Legile de generare a modelelor aproximative de calcul numeric.
3. Teoremele care stabiliesc existenţa şi unicitatea acestor legi, respectiv convergenţa şi stabilitatea soluţiilor obţinute prin aplicarea unui anume model de calcul numeric.

In figura 2.1. se reprezintă schematic componentele principale ale teoriei matematice a structurilor prin intermediul metodei elementelor finite formulate în cadrul teoriei reziduurilor medii ponderate.

Formularea unei teorii matematice generalizate pentru un sistem fizic oferă avantaje teoretice şi practice evidente în ceea ce priveşte caracterizarea şi definirea unitară a problemelor, pe de-o parte, şi stabilirea unor modele de calcul numeric general aplicabile la rezolvarea acestor probleme, pe de altă parte.

### 2.2. CLASIFICAREA PROBLEMELOR SISTEMELOR FIZICE

Orice sistem fizic poate fi caracterizat printr-o mulţime de variabile care sînt funcţii de coordonate spaţiale $x(x,y,z)$ şi de timp t. Sistemul este staţionar sau nestaţionar după cum $t \neq o$. Un număr r de variabile pot fi prestabilite: proprietăţile fizico-mecanice ale materialului, dimensiunile geometrice, forţele aplicate, condiţiile de margine. Restul variabilelor , u, sînt necunoscutele problemei : deplasări, viteze, temperaturi, tensiuni, etc.

Un model matematic acestui sistem rezultă în a stabili o relaţie între u şi r în urma aplicării legilor fizice caracteristice. Aceste relaţii formează un sistem de ecuaţii de definiţie de forma

$$\mathcal{L}(u_1,u_2,\dots,u_n,\ r_1,\ r_2,\dots,r_n) = o \qquad (2.1)$$

sau

$$\mathcal{L}(u) + f_v = o,\ \text{pe domeniul } V, \qquad (2.2)$$

la care se ataşează un set de condiţii la limită :

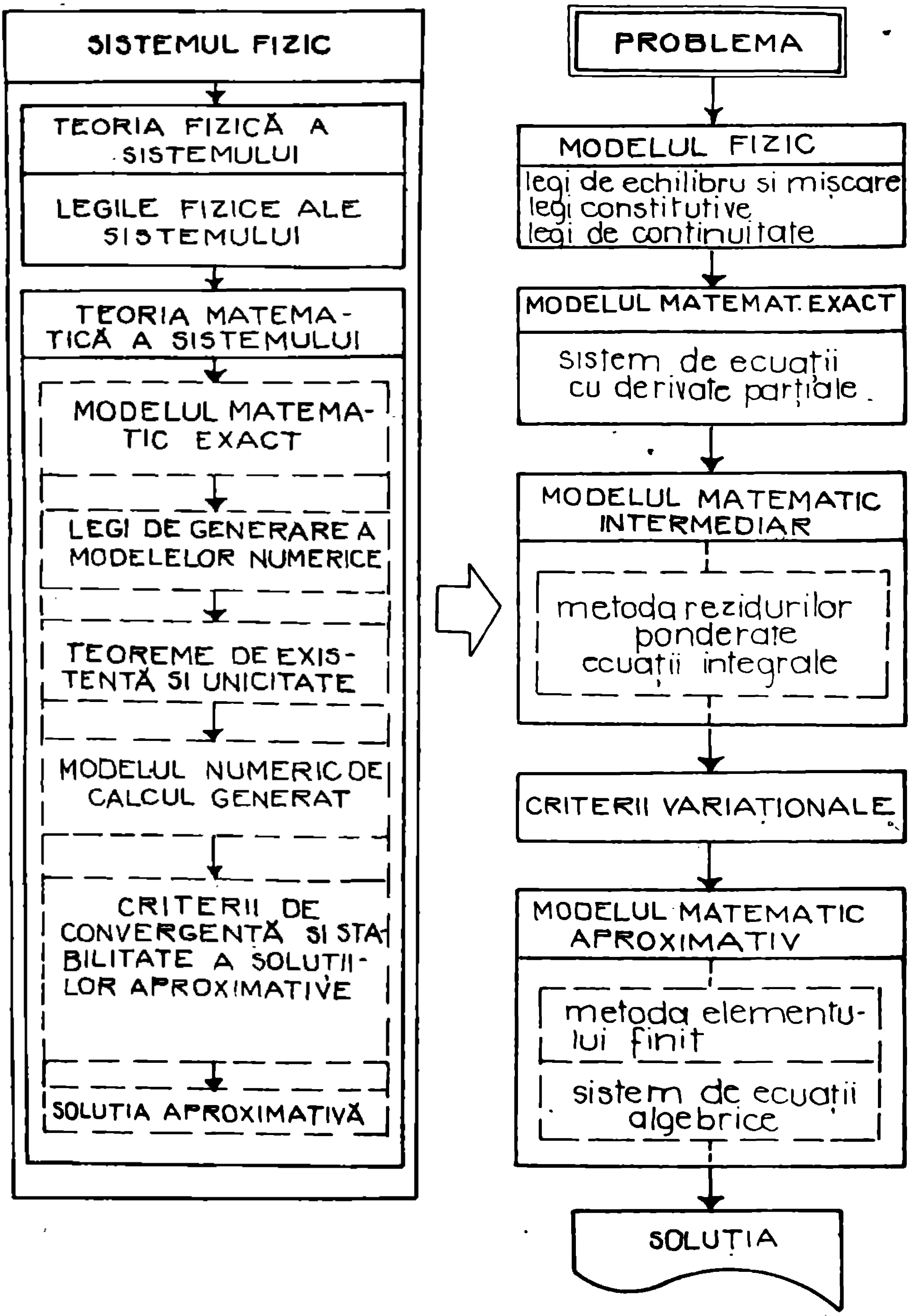

SISTEMUL FIZIC
TEORIA FIZICĂ A SISTEMULUI
LEGILE FIZICE ALE SISTEMULUI
TEORIA MATEMATICĂ A SISTEMULUI
MODELUL MATEMATIC EXACT
LEGI DE GENERARE A MODELELOR NUMERICE
TEOREME DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE
MODELUL NUMERIC DE CALCUL GENERAT
CRITERII DE CONVERGENȚĂ ȘI STABILITATE A SOLUȚIILOR APROXIMATIVE
SOLUȚIA APROXIMATIVĂ
PROBLEMA
MODELUL FIZIC
legi de echilibru și mișcare
legi constitutive
legi de continuitate
MODELUL MATEMAT. EXACT
sistem de ecuații cu derivate parțiale
MODELUL MATEMATIC INTERMEDIAR
metoda reziduurilor ponderate
ecuații integrale
CRITERII VARIAȚIONALE
MODELUL MATEMATIC APROXIMATIV
metoda elementului finit
sistem de ecuații algebrice
SOLUȚIA

fig. 2.1

$$\mathcal{C}(u_1, u_2, \ldots, u_n, r_1, r_2, \ldots, r_m) = 0 \qquad (2.3)$$

sau

$$\mathcal{C}(u) = f_s, \text{ pe frontiera S a domeniului V}, \qquad (2.4)$$

Ecuaţiile de definiţie împreună cu condiţiile la limită formează ecuaţiile de guvernare a sistemului ale cărui soluţii vor fi de forma următoare:

$$u = u\,(r_1, r_2, \ldots, r_m) \qquad (2.5)$$

In ecuaţiile (2.2) şi (2.4) $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{C}$ sînt operatori diferenţiali caracteristici sistemului, u reprezintă necunoscutele problemei iar $f_v$ şi $f_s$ sînt funcţii date. In practică sistemul de ecuaţii (2.2) se descompune adesea prin eliminarea unui număr de q variante între ecuaţiile iniţiale ale sistemului fizic rezultînd :

$$\mathcal{L}_e(q) - f_v = o \quad \text{- ecuaţiile de echilioru} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_c(q, u) = o \quad \text{- ecuaţiile constitutive} \quad (2.7)$$

Operatorul $\mathcal{L}$ este în general de ordin superior în raport cu operatorii $\mathcal{L}_e$ şi $\mathcal{L}_c$.

Numărul gradelor de libertate ale sistemului este egal cu numărul parametrilor r necesari pentru definirea lui u la un moment t dat. Sistemul este discret dacă numărul gradelor de libertate este finit ; el este continuu dacă numărul gradelor de libertate este infinit.

Problemele sistemelor continue şi discrete se pot diviza în probleme de echilibru, de valori proprii şi de propagare. In tabelul 2.1. se exemplifică,pe baza unei clasificări pe domenii, cele trei categorii de probleme.

Un sistem discret poate fi descris printr-un sistem de ecuaţii algebrice, în timp ce un sistem continuu este guvernat de ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale şi/sau integro-diferenţiale cărora li se ataşează un sistem de condiţii de margine spaţiale şi/sau temporale (tabelul 2.2).

Sistemul de ecuaţii algebrice se poate rezolva direct, prin metode numerice, în timp ce un sistem continuu trebuie mai întîi discretizat, adică înlocuit printr-un sistem echivalent de ecuaţii algebrice.

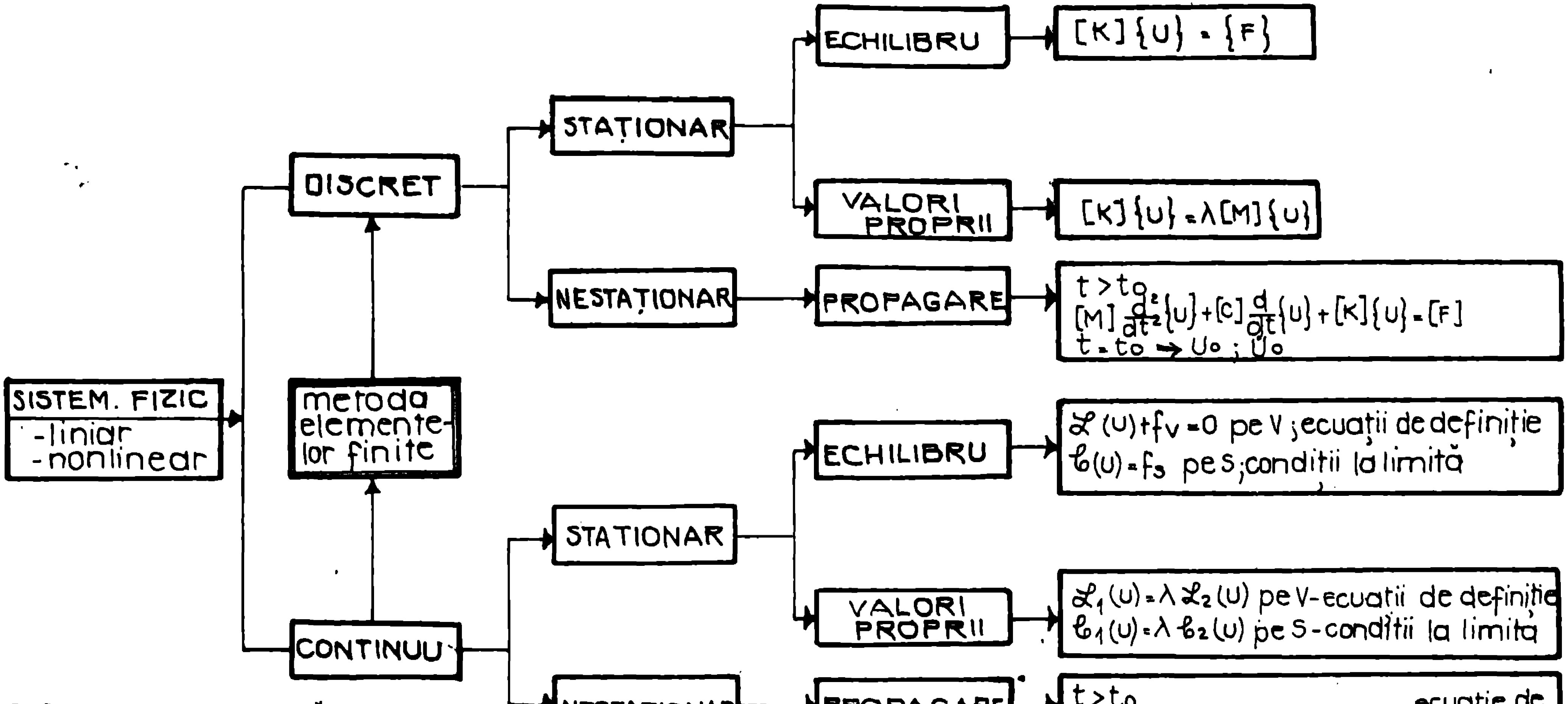
Procesul de discretizare implică, de fapt, înlocuirea modelului matematic exact, care caracterizează sistemul fizic definit prin ecuaţiile de guvernare, printr-un model de calcul aproximativ abordabil prin metode numerice. In figura 2.2. acest proces este pus în evidenţă prin intermediul metodei elementelor finite.

## 2.3. MODELUL MATEMATIC IN MECANICA STRUCTURILOR /114/

Modelul matematic în mecanica structurilor conţine trei grupe de ecuaţii cunoscute sub numele de ecuaţii de echilibru şi mişcare, ecuaţii constitutive şi ecuaţii de compatibilitate. In cele ce urmează se definesc cele trei grupuri de ecuaţii pentru cazul unui material cu comportare liniar elastică, condiţie care, evident, nu afectează generalitatea problemei puse în discuţie /113/, /188/.

Tabelul 2.1

| DOMENIUL | PROBLEME DE ECHILIBRU | PROBLEME DE VALORI PROPRII | PROBLEME DE PROPAGARE |
|---|---|---|---|
| mecanica structurilor | Analiza stării de tensiuni și deformații în structuri din bare plăci și pînze. Analiza stării de tensiuni și deformații în structuri masive. Torsiunea element. prismatice Analiza structurilor compuse | Stabilitatea structurilor Determinarea frecvențelor proprii și analiza modală a structurilor Amortizarea vîscoelastică lineară | Propagarea undelor de tensiuni. Răspunsul dinamic al structurilor sub acțiunea unor solicitări neperiodice Probleme de : termoelasticitate termovîscoelasticitate vîscoelasticitate |
| mecanica pămînturilor mecanica rocilor | Analiza bi- și tridimensională a stării de tensiuni și deformații în masive din pămînt și roci Stabilitatea rocilor Interacțiune structură - teren | Determinarea frecvențelor proprii și analiza modală a structurilor ținînd seama de interacțiunea cu terenul de fundare. | Interacțiunea dinamică teren - structură. Propagarea undelor de tensiuni prin pămînturi și roci Consolidarea fluidelor în medii poroase deformabile. Infiltr. tranzitorie în păm. și roci. |
| conducția căldurii | Distribuția staționară a temperaturii în solide și fluide | | Propagarea tranzitorie a temperaturii în solide și fluide. |
| mecanica fluidelor | Curgerea potențială a fluidelor Curgerea vîscoasă a fluidelor Infiltrarea staționară în medii poroase și acvifere Analiza structurilor hidraulice | Determinarea frecvențelor proprii și a modurilor de oscilație a apei din lacuri și bazine Mișcarea fluidelor în rezervoare rigide și elastice. | Transportul aluviunilor Curgerea nestaționară a fluid Propagarea valurilor Studii privind salinitatea și poluarea estuarelor (probl. de dif.) Infiltrarea tranzitorie |
| ingineria nucleară | Analiza structurii reactorilor nucleari Distribuția staționară a temperaturii în reactori și în structura reactorilor. | | Analiza dinamică a structurii reactorilor nucleari. Analiza termovîscoelastică a structurii reactorilor. Distribuția nestaționară a temperaturii. |




[K] - matricea globală a sistemului de ecuații
{F} - vectorul termenilor liberi
(M) - matricea maselor
$\lambda$ - valorile proprii
[C] - matricea de amortizare

fig. 2.2

tabelul 2.2

| tipul problemei | ECUAȚIILE DE GUVERNARE | |
|---|---|---|
| | domeniul continuu | domeniul discret |
| ECHILIBRU | ecuatii diferentiale ordinare sau cu derivate partiale cu conditii de margine impuse. | ecuatii algebrice simultane (sistem de ecuații) |
| VALORI PROPRII | ecuatii diferentiale ordinare sau cu derivate partiale cu conditii de margine impuse. | ecuatii algebrice simultane sau ecuatii diferentiale ordinare reductibile la ecuații algebrice. |
| PROPAGARE | ecuatii cu derivate partiale cu conditii initiale si de marg. imp. | ecuatii diferentiale ordinare simultane cu conditii initiale impuse. |

2.3.1. Ecuaţiile de echilibru

Ecuaţiile echilibru dinamic care guvernează o structură cu comportare liniar elastică supusă la acţiuni dinamice sînt :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i ; \quad i,j = x,y,z, \qquad (2.8)$$

în care $\sigma_{ij}$ reprezintă componentele tensorului tensiunilor, $F_i$ sînt componentele vectorului F al forţelor masice, iar $\rho \ddot{u}_i$ reprezintă forţele inerţiale ale lui D'Alembert corespondente unităţii de volum; $\rho$ este masa specifică, iar $\ddot{u}_i$ este vectorul acceleraţiei. Dacă structura este supusă la acţiuni statice se anulează forţele inerţiale şi rezultă ecuaţiile de echilibru static.

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 ; \quad i,j = x,y,z \qquad (2.9)$$

2.3.2. Ecuaţiile constitutive

Relaţiile de legătură între tensiuni şi deformaţiile specifice se exprimă pentru o structură cu comportare elastică prin ecuaţiile constitutive (legea lui Hooke) :

$$\sigma_{ij} = c_{ijk\ell}\, \varepsilon_{k\ell} ; \quad i,j,k,\ell = x,y,z, \qquad (2.10)$$

în care $c_{ijkl}$ este tensorul de ordinul patru al coeficienţilor elastici.

$$c_{ijk\ell} = \lambda \delta_{ij} \delta_{k\ell} + \mu (\delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}), \qquad (2.11)$$

în expresia căruia $\delta_{ij}$ este sombolul lui Kronecker, iar $\lambda$ şi $\mu$ sînt constantele lui Lamé.

2.3.3. Relaţiile de legătură dintre deformaţiile specifice şi deplasări. (ecuaţiile lui Cauchy)

In domeniul elastic, în ipoteza deformaţiilor infinitezimale, există următoarele relaţii de legătură între componentele tensorului deformaţiilor specifice $\varepsilon_{ij}$ şi componentele vectorului deplasărilor, u :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij} \; ; \quad i,j = x,y,z \qquad (2.12)$$

2.3.4. Ecuaţiile de compatibilitate (ecuaţiile lui Saint Venant)

Eliminînd deplasările $u_i$ din ecuaţiile (2.12) se obţin ecuaţiile de compatibilitate de forma :

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,ij} - \varepsilon_{j\ell,ij} - \varepsilon_{ik,j\ell} = 0, \quad i,j,k,\ell = x,y,z \qquad (2.13)$$

2.3.5. Ecuaţiile în deplasări (ecuaţiile lui Lamé)

Dacă se elimină tensiunile şi deformaţiile între (2.8) şi (2.12) se obţin aşa numitele ecuaţii ale lui Lamé.

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + F_i = \rho \ddot{u}_i \; ; \; i,j = x,y,z, \qquad (2,14)$$

care în cazul problemelor statice devine

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + u) u_{j,ji} + F_i = 0 \; ; \quad i,j = x,y,z \qquad (2.15)$$

Dacă forţele masice sînt neglijate în ecuaţia (2.15) şi se aplică operatorul lui Laplace se obţine ecuaţia fundamentală a problemelor de elasticitate.

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0 \qquad (2.16)$$

2.3.6. Condiţiile la limită în tensiuni şi deplasări.

Dacă pe frontiera S care mărgineşte domeniul V - structura - se cunosc forţele $p_i$ condiţiile la limită în tensiuni se scriu sub forma :

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_S = p_i \; ; \quad i,j = x,y,z, \qquad (2.17)$$

în care prin $n_j$ s-au notat cosinuşii directori formaţi de normala la S cu axele de coordonate .

Dacă se cunosc deplasările $h_i$ pe S se formulează condiţiile la limită în deplasări.

$$u_i(u,t) \Big|_S = h_i(u,t) \; ; \quad i = x,y,z \qquad (2.18)$$

Condiţiile iniţiale referitoare la deplasări se scriu astfel:

$$u_i(t) \Big|_{t=0} = \bar{u}_i \; ; \; \dot{u}_i(t) \Big|_{t=0} = \hat{u}_i \; ; \quad i = x,y,z \qquad (2.19)$$

Condiţiile la limită admit şi o formulare mixtă atunci cînd se cunosc forţele $p_i$ pe o porţiune $S_1 \subset S$ şi, respectiv, deplasările $h_i$ pe $S_2 \subset S$, astfel încît $S_1 + S_2 = S$, definită prin relaţiile

$$\sigma_{ij}\, n_j \Big|_{S_1} = p_i \;; \qquad (2.2o\ a\ şi\ b)$$

$$u_i(u,t) \Big|_{S_2} = h_i(u,t) \;; \quad i,j = x,y,z$$

## 2.4. DEFINIREA CÎMPULUI STRUCTURAL

Un cîmp de tensiuni şi un cîmp de deformaţii sau deplasări cu relaţiile de legătură (2.1o) formează un cîmp structural.

Un cîmp structural este numit compatibil în raport cu un sistem de incompatibilităţi - mulţimea condiţiilor la limită - dacă satisface (compatibilizează) ecuaţiile (2.12) în prezenţa condiţiilor (2.18).

Un cîmp structural este în echilibru (echilibrat) în raport cu un sistem de forţe exterioare - mulţimea acţiunilor şi forţelor de legătură pe frontiera S - dacă satisface ecuaţiile (2.8) şi (2.1o) în prezenţa condiţiilor (2.17).

Un cîmp structural care este în acelaşi timp compatibil şi în echilibru satisface ecuaţiile (2.14) şi condiţiile (2.2o).

Dacă se asociază unei structuri elastice oarecare o mulţime X de cîmpuri structurale se poate demonstra că mulţimea X formează un spaţiu Banach (spaţiu vectorial normat complet).

Pentru aceasta, se demonstrează , în primul rînd, că mulţimea X formează un spaţiu vectorial prin definirea operaţiunilor de adunare $x_1+x_2$ şi înmulţire cu scalari $\lambda x$; $x_1, x_2 \in X, \lambda \in R$. Schematic problema de analiză funcţională se prezintă în felul următor :

| | | |
|---|---|---|
| $x_1$ corespunde lui $\sigma_1$ | $x_1$ corespunde lui $u_1$ | |
| $x_2$ corespunde lui $\sigma_2$ | $x_2$ corespunde lui $u_2$ | (2.21a şi b) |
| $x_1+x_2$ corespunde lui $\sigma_1+\sigma_2$ | $x_1+x_2$ corespunde lui $u_1+u_2$ | |
| $\lambda x_1$ corespunde lui $\lambda\sigma_1$ | $\lambda x_1$ corespunde lui $\lambda u_1$ | |
| $\lambda(x_1+x_2)$ corespunde lui $\lambda(\sigma_1+\sigma_2)$ | $\lambda(x_1+x_2)$ corespunde lui $\lambda(u_1+u_2)$ | |
| $(\lambda+\mu)x_1$ corespunde lui $(\lambda+\mu)\sigma_1$ | $(\lambda+\mu)x_1$ corespunde lui $(\lambda+\mu)u_1$ | |

Este uşor de demonstrat că elementele din spaţiul X se supun cunoscutelor axiome de comutativitate, asociativitate, distributivitate şi independenţă liniară şi că operaţia de bază din acest spaţiu este produsul scalar a două funcţii componente $x_1$ şi $x_2$ definit prin integrala pe domeniul V dat al produsului acestora. Existenţa produsului vectorial asigură existenţa normei în spaţiul X. Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă pentru fiecare din elementele sale formează un spaţiu vectorial normat.

Norma unui element al spaţiului (respectiv al unei funcţii componente) se defineşte în forma următoare :

$$\|x\| = \sqrt{\int_V x^2\, dV} \quad \text{sau} \quad \|x\| = \sqrt{\int_V x_1 x_2\, dV} \qquad (2.22\ a\ şi\ b)$$

adică

$$\|x\| = \sqrt{\int_V \sigma_1 \sigma_2\, dV} \quad \Big| \quad \|x\| = \sqrt{\int_V u_1 u_2\, dV} \qquad (2.22\ c\ şi\ d)$$

In continuare se poate arăta cu uşurinţă că elementele din X formează şiruri Cauchy convergente şi că, deci, spaţiul X este un spaţiu vectorial normat complet, adică un spaţiu Banach. Intrucît, aşa cum rezultă din relaţiile (2.22) norma din X este generată de un produs scalar, spaţiul Banach, definit anterior, este , de fapt , un spaţiu Hilbert /143/.

Aceste elemente de analiză funcţională sînt deosebit de importante în analiza de convergenţă şi stabilitate a soluţiilor aproximative, deoarece un spaţiu Hilbert poate asigura prin însăşi construcţia lui convergenţa necesară problemei. /155/, /156/.

Se demonstrează /15/, că spaţiul Hilbert definit pe X este un spaţiu energetic $H_E$ - pe care se defineşte un produs energetic şi o normă energetică $H_E'$-constitue o extindere a lui X, la ale cărui elemente se ataşează produsul energetic corespunzător. Rezultatul este că apar o serie de funcţii noi $x \in H_E$ care nu pot să satisfacă condiţiile la limită __naturale__ ale problemei. Dacă în schimb aceste condiţii la limită sînt __principale__ sau __esenţiale__ (geometrice sau cinematice) - adică, în cazul mecanicii structurilor, nu conţin derivate, atunci ele pot fi satisfăcute de către toate funcţiile spaţiului energetic $H_E$. Se spune că are loc o __relaxare__ a condiţiilor la limită.

O mulţime de cîmpuri structurale X care satisface condiţiile de echilibru formează o submulţime $X_\sigma$, care se zice izoechilibrată - metoda deplasărilor.

O mulţime de cîmpuri structurale X care satisface condiţiile de compatibilitate formează o submulţime $X_u$, care se zice izocompatibilă - metoda forţelor.

Ecuaţiile de echilibru şi compatibilitate se pot scrie acum într-o formă mult mai generală:

$$\sigma(x) = \sigma; \quad x \in X \quad \text{şi} \ \sigma \in X_\sigma \qquad (2.23 \text{ a şi b})$$

$$u(x) = u \ ; \quad x \in X \quad \text{şi} \ u \in X_u$$

Dacă mulţimea $X_\sigma \cap X_u$ conţine cel puţin un element $\sigma(x)$ sau $u(x)$ se poate stabili o corespondenţă biunivocă între elementele lui X şi cele aparţinînd produsului cartezian $X_\sigma \times X_u = \Gamma$. Se defineşte astfel prin $\Gamma$ spaţiul acţiunilor exterioare, X constituind spaţiul răspunsurilor structurii . Fiecărei perechi $(\sigma, u)$ i se poate asocia o funcţie continuă $\mathcal{X} : \Gamma \rightarrow X$, astfel ca

$$x = \mathcal{X}(\sigma, u) \qquad (2.24)$$

Soluţia exactă a problemei - cîmpul structural compatibil şi/sau echilibrat - se obţine impunînd condiţii de staţionaritate energiei potenţiale totale a sistemului $\Pi$ sau energiei potenţiale complementare $\Pi^*$, respectiv

$$\delta \Pi = \int_V \sigma \delta u dV \qquad (2.25)$$

$$\delta \Pi^* = \int_V u \delta \sigma dV \qquad (2.26)$$

Distanţa între două cîmpuri structurale - între două elemente

$x_1$ şi $x_2$ aparţinînd lui X - se defineşte ca normă a diferenţei lor prin relaţia

$$d(x_1,x_2) = \min \int_{x_1}^{x_2} ds, \tag{2.27}$$

în care ds reprezintă distanţa dintre două puncte foarte apropiate conţinute în V

$$d^2s = \frac{1}{2} \int_V \delta u \delta \sigma dV \tag{2.28}$$

Pentru $x = \mathcal{H}(\sigma, u)$ se demonstrează că în acelaşi punct există dacă

$$\delta^2 \Pi = \int_V \delta\sigma \delta u dV \tag{2.29}$$

$$\delta^2 \Pi^* = \int_V \delta u \delta \sigma dV \tag{2.30}$$

egalitatea

$$\delta\Pi = \delta\Pi^* \tag{2.31}$$

In continuare, pe baza relaţiei (2.28), pentru un $\Delta$ suficient de mic rezultă egalităţile

$$d^2(x+\Delta,x) = \Pi(x+\Delta) - \Pi(x) \quad ; \Delta \in \sigma_o;$$
$$d^2(x+\Delta,x) = \Pi^*(x+\Delta) - \Pi^*(x) \quad ; \Delta \in u_o \ , \tag{2.32 a şi b}$$

unde prin $\sigma_o$ şi $u_o$ notat elemente nule ale submulţimilor $X_\sigma$ şi, respectiv $X_u$.

Cu aceste elemente modelul matematic şi soluţia problemei, respectiv cîmpul structural, se pot considera definite în perimetrul analizei funcţionale.

Se poate elabora şi o schemă mai generală care să dea soluţii pentru orice problemă în care există un principiu de extrem cunoscut.

## 2.5. LEGILE DE GENERARE A MODELELOR APROXIMATIVE DE CALCUL NUMERIC

Pentru a evidenţia importanţa legilor de generare a modelelor matematice, de la modelul exact la modelul aproximativ, se va face referire la generarea modelelor discrete din modelele continue, discretizarea fizică şi matematică constituind procedee tipice analizei structurilor. Teoria generării modelelor matematice cuprinde descrierea legilor de generare şi justificarea lor cu ajutorul analizei de convergenţă.

Procedurile pentru generarea modelelor noi în teoria structurilor se bazează pe metodele energiei potenţiale de deformaţie totală şi complementară.

Ecuaţiile de generare (2.8) - sau (2.9) - (2.12) şi condiţiile la limită (2.17) şi (2.18) , respectiv (2.19), se introduc simultan şi trebuie să fie satisfăcute identic în cadrul modelului generator.

Se realizează o corespondență între cîmpurile generate şi cîmpul generator, originar, care se poate reprezenta printr-o ecuaţie de forma :

$$y = L_1(x) \quad ; \quad x \in X \; ; \quad y \in Y, \qquad (2.33)$$

în care $L_1 : X \rightarrow Y$ este un operator liniar, iar Y este spaţiul cîmpurilor structurale generate.

Utilizînd principiul lucrului mecanic virtual sau un alt principiu variaţional derivat se pot stabili ecuaţiile generale de echilibru şi compatibilitate în cadrul noului model generat. Introducînd o ipoteză simplificatoare, spre exemplu ipoteza lui Kirchhoff din teoria plăcilor, ipoteza lui Bernoulli din teoria barelor sau definirea cîmpului de deplasări din interiorul elementelor în metoda elementelor finite, se stabileşte o corespondenţă între elementele definite pe X şi cele definite pe Y. Se poate introduce, astfel, un nou operator liniar $L_2 : Y \rightarrow X'$; $X' \subset X$:

$$x = L_2(y) \; ; \; x' \in X' \qquad (2.34)$$

Metoda energetică pune condiţia de invariabilitate a energiei potenţiale de deformaţie totală sau complementară, ceea ce revine la satisfacerea expresiilor :

$$\Pi\left[L_2(y)\right] = \Pi(y) \; ; \; \Pi^*\left[L_2(y)\right] = \Pi^*(y) \qquad (2.35 \text{ a şi b})$$

Se defineşte, în concordanţă cu cele arătate, operatorul liniar de interpolare $L : X \rightarrow X'$, astfel ca

$$L = L_1 L_2 \qquad (2.36)$$

Elementele $x \in X$ şi, respectiv, $x' \in X'$ definite prin intermediul operatorului de interpolare se numesc condiţionate şi se notează cu z, respectiv z'

$$z' = L(z) \; ; \quad z' \in Z', \quad z \in Z, \qquad (2.37)$$

Se spune că submulţimea condiţionată $Z'$ a imaginilor prin L a elementelor submulţimii condiţionate $Z \subset X$ corespunde lui Z. Submulţimea cîmpurilor structurale Z se zice izocondiţionată dacă dispune de un minimizator $\alpha$ . Mulţimea M a minimizatorilor corespunzătoare submulţimilor izocondiţionate Z din X formează o submulţime minimizatoare a lui X.. Fiecărei submulţimi minimizatoare din X îi corespunde o funcţională $\Pi \in \emptyset$ , în care $\emptyset$ este o familie de funcţionale definite pe X. O submulţime minimizatoare $M' \subset X'$ corespunde unei submulţimi minimizatoare $M \subset X$ dacă la ambele corespun - de aceeaşi funcţională $\Pi \in \emptyset$.

Operatorul de interpolare L are următoarele proprietăţi :

(i) Imaginea prin L a oricărui element $x' \in X'$ coincide cu elementul

$$L(x') = x, \quad \forall x' \in X$$

(ii) Submulţimile condiţionate şi minimizatoare satisfac aceleaşi condiţii în raport cu aceeaşi familie de funcţionale $\emptyset$ .

(iii) Imaginea prin L a elementelor izocondiţionate din X sînt elemente izocondiţionate din $X'$.

Se introduce în continuare un operator secund A, numit de aproximare, care realizează corespondența dintre intersecția fiecărei submulțimi condiționate cu fiecare submulțime minimizatoare din X cu intersecția mulțimilor analoage din X′.

$$A : (Z \cap M) \rightarrow (Z' \cap M') \; ; \; Z, M \subset X \; ; \; Z', M' \subset X' \qquad (2.38)$$

Operatorul de aproximare A are proprietățile :

(j) Este mărginit și continuu.

(jj) Imaginea prin A a fiecărui element $x' \in X'$ coincide cu elementul

$$A(x') = x'; \quad \forall x' \in X'$$

Imaginea $x'_a \in A$ a elementelor $x \in X$ se numește aproximația lui x în X′. Imaginile prin A a elementelor izocondiționate din X vor fi elemente izocondiționate din X′, respectiv imaginile elementelor izominimizatoare din X vor fi elemente izominimizatoare din X′.

Considerarea operatorilor L și A permite discutarea conversiei unei probleme variaționale date într-una nouă, eventual mai simplă decît prima, capabilă să prevadă o soluție aproximativă a acesteia.

Dacă operatorul de interpolare este astfel ales încît $X' \subset X$ să constitue un spațiu n-dimensional $X_N$ problema variațională se poate rezolva cu ușurință. Funcționala $\pi$ devine o funcție de n variabile, iar elementele minimizatoare ale acesteia se rezolvă prin rezolvarea unui sistem de n ecuații cu n necunoscute, care rezultă prin egalarea cu zero a derivatelor funcționalei în raport cu fiecare variabilă. Ecuațiile sistemului vor fi liniare numai dacă funcționala $\pi$ este funcție analitică a variabilelor.

Dacă L este conform și $Z' \subset Z$, modelul de calcul aproximativ generat nu este altceva decît cunoscuta metodă Ritz, caz în care funcționala $\pi$ este energia potențială totală.

In figura 2.3 se prezintă o schemă generală a metodei variaționale aplicate în teoria liniară a mecanicii structurilor, conformă cu algoritmul funcțional prezentat.

O schemă mai generală poate fi compusă pe baza teoriei reziduurilor medii ponderate, care permite abordarea problemelor și în situațiile în care nu se poate defini funcționala $\pi$ . Această schemă este prezentată în figura 2.4.

## 2.6. CRITERII DE CONVERGENTA SI UNICITATE A SOLUTIILOR APROXIMATIVE

Evoluția teoriei moderne a structurilor a fost considerabil influențată de metoda elementelor finite . Ulterior a apărut, pe ramura din dreapta a schemei 2.4. metoda elementelor de contur sau de frontieră, cum mai este numită. Practic, în prezent aceste două metode de calcul numeric domină analiza structurală. In cele ce urmează, ideile din acest capitol se vor localiza pe metoda elementelor finite. Se impune însă, în mod evident, observația că orice model de calcul aproximativ generat din teoria exactă ridică problema justificării prin analiza convergenței soluțiilor aproximative către soluția exactă.

La modul general, problema convergenţei se pune între elementele a două cîmpuri structurale : cel al soluţiilor aproxima-

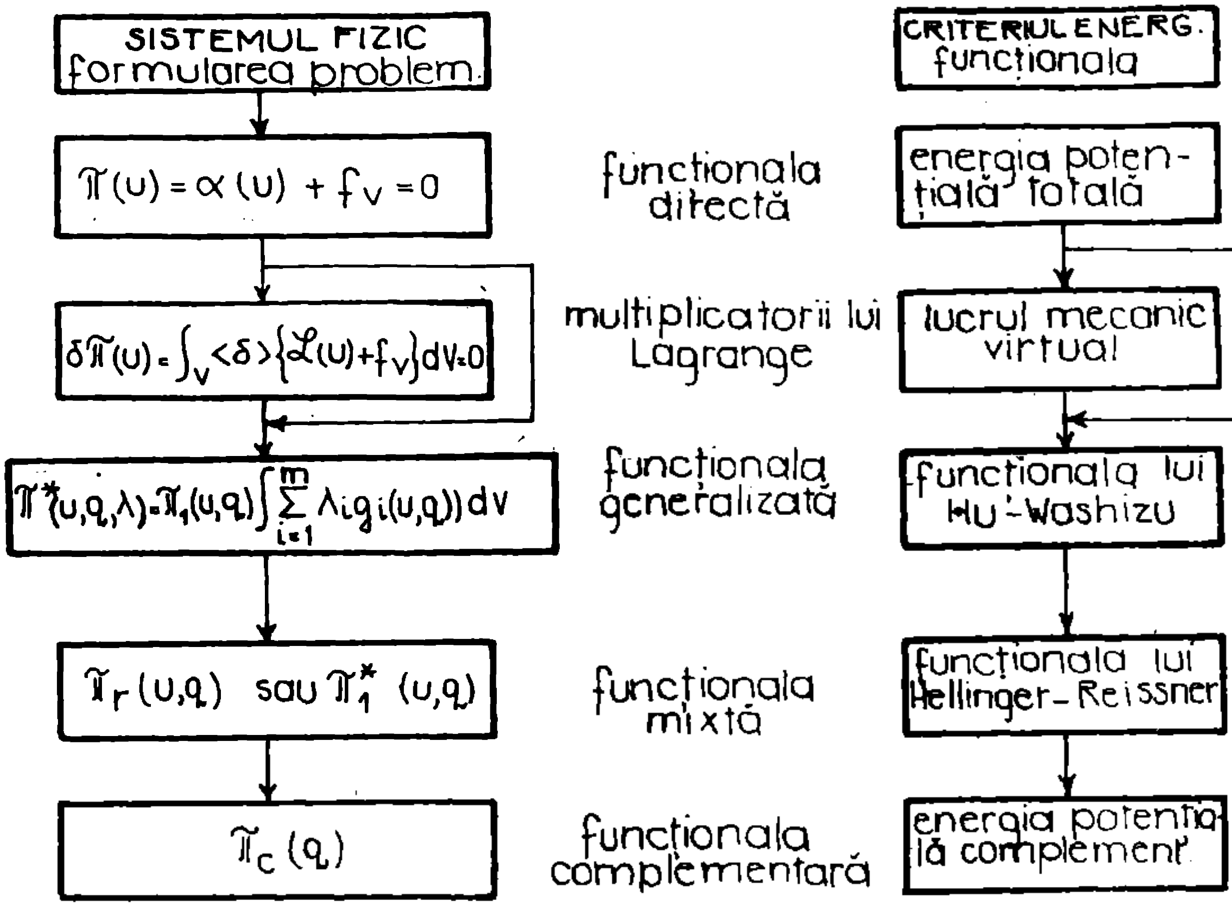



fig. 2.3

tive $X'$ şi al soluţiilor exacte $X$ . Condiţia de convergenţă presupune că distanţa dintre un element $x\in X$ care minimizează funcţionala $\Pi$ pe $Z$ şi corespondentul său aproximativ $x_a'\in X'$ satisface inegalitatea

$$d\ (x,x_a')<\varepsilon;\ \forall\varepsilon>0 \qquad (2.39)$$

Dacă ne referim, spre exemplu, la metoda elementelor finite cîmpul soluţiilor necunoscute (cîmpul deplasărilor în interiorul elementului) aproximează prin funcţii de forma

$$u_i=\sum_{t=o}^{n}\varphi_i\bar{u}_{ik},\ (\bar{u}_{io}=1)\ ;\quad x_a'=x_i, \qquad (2.4o)$$

în care constantelor $c_k$ li se atribuie semnificaţia concretă a parametrilor de deformaţie a elementului finit, iar $\bar{u}_{ik}$ sînt deplasările generalizate la nodurile k ale elementului finit i.

Pentru ca şirul soluţiilor aproximative (2.4o) , notat cu $x_{an}'$ să fie convergent el trebuie să fie un şir fundamental (şir Cauchy), adică trebuie să respecte condiţia (2.39).

Dacă orice şir fundamental are o limită , spaţiul $X'$ este un spaţiu complet căruia i se poate aplica criteriul de convergenţă Cauchy. Limita şirului fundamental $x_{an}'$ este funcţia x către care aceasta converge. Această convergenţă este o convergenţa în medie, adică este satisfăcută inegalitatea :

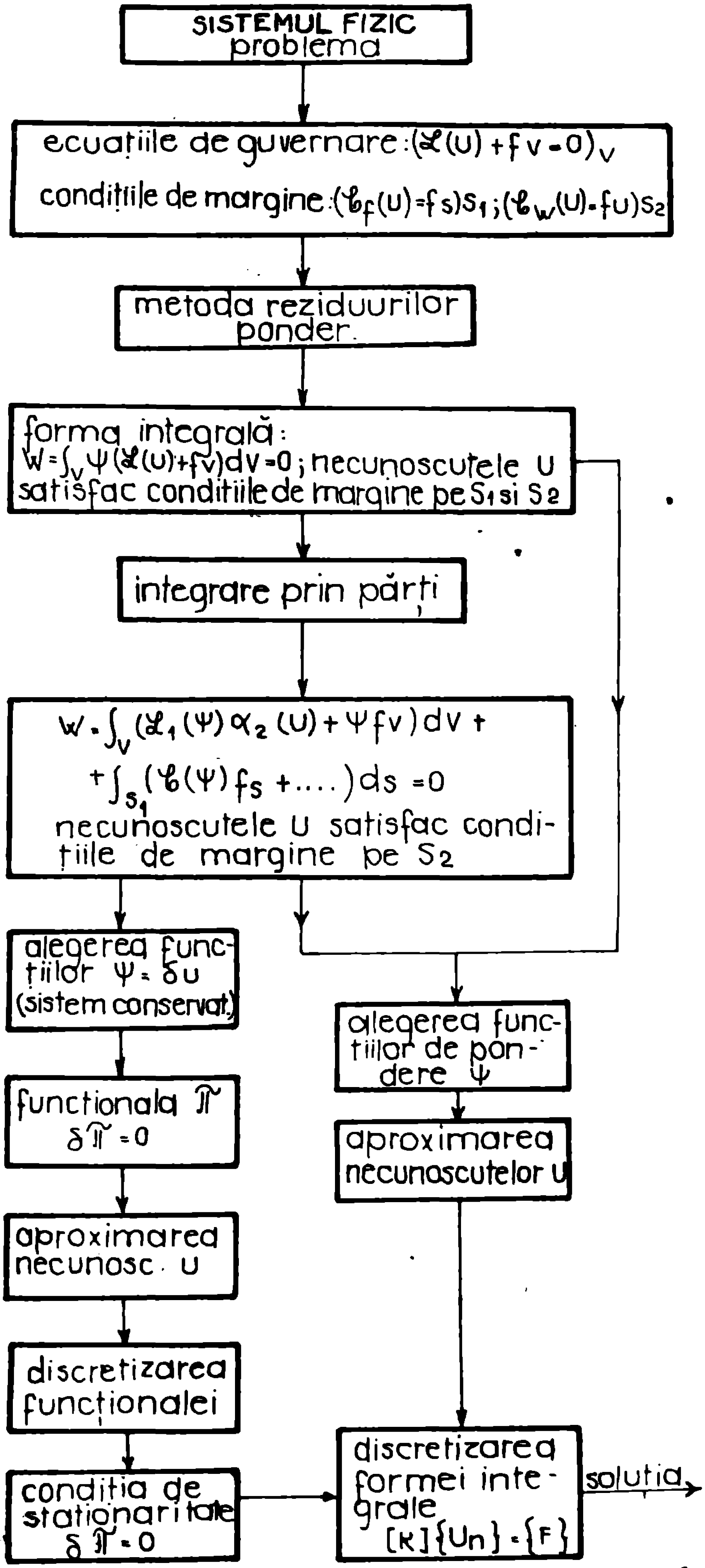

SISTEMUL FIZIC
problema
ecuatiile de guvernare: $(\mathcal{L}(U) + f_V = 0)_V$
conditiile de margine: $(\mathcal{B}_f(U) = f_S)_{S_1}$; $(\mathcal{B}_w(U) = f_U)_{S_2}$
metoda reziduurilor ponder.
forma integrală:
$W = \int_V \Psi(\mathcal{L}(U) + f_V)\,dV = 0$; necunoscutele U satisfac conditiile de margine pe $S_1$ si $S_2$
integrare prin părti
$W = \int_V (\mathcal{L}_1(\Psi)\,\alpha_2(U) + \Psi f_V)\,dV + \int_{S_1} (\mathcal{B}(\Psi) f_S + \ldots)\,dS = 0$
necunoscutele U satisfac conditiile de margine pe $S_2$
alegerea functiilor $\Psi = \delta U$ (sistem conservat)
functionala $\Pi$
$\delta\Pi = 0$
aproximarea necunosc. U
discretizarea functionalei
conditia de stationaritate $\delta\Pi = 0$
alegerea functiilor de pondere $\Psi$
aproximarea necunoscutelor U
discretizarea formei integrale
$[K]\{U_n\} = \{F\}$
solutia

fig. 24

$$\int_V (x-x'_{an})^2 \, dV < \delta, \quad \forall \delta > o \tag{2.41}$$

Deoarece integrala este întotdeauna pozitivă, relaţia (2.41) se scrie sub forma

$$|x - x'_a| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > o \tag{2.42}$$

care este de fapt distanţa $d(x,x'_a)$ definită prin (2.39). In continuare se arată că şirul $x'_{an}$ este un şir de funcţii complete în sensul convergenţei în medie, care are asigurată condiţia de completitudine, condiţie care asigură convergenţa şi, în acelaşi timp, conformitatea soluţiilor. In cazul formulării variaţionale a metodei elementelor finite completitudinea şirului de funcţii $x'_{an}$ este în energie, spaţiul Hilbert al cîmpurilor structurale X şi X'fiind un spaţiu energetic.

Aceasta ar constitui, expusă în principiu, analiza de convergenţă a soluţiilor aproximative $x'_a \in X'$ către soluţia exactă $x \in X$ în perimetrul analizei funcţionale. In cele ce urmează se prezintă un criteriu de convergenţă simplificat.

Se afirmă şi se demonstrează că relaţia de convergenţă între $x'_a \in X'$ şi $x \in X$ este de forma următoare:

$$d(x,x'_a) \leq d(x_a,x'_a) + \sqrt{|\delta_x \tilde{\Pi}| + |\delta_a \tilde{\Pi}|} \tag{2.43}$$

în care

$$\delta_x \tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(x') - \tilde{\Pi}(x) \tag{2.44}$$

$$\delta_a \tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(x'_a) - \tilde{\Pi}(x_a) \tag{2.45}$$

iar $x_a$ este izocondiţionat în raport cu x astfel încît

$$x'_a = L(x_a) \tag{2.46}$$

Dacă x minimizează funcţionala $\tilde{\Pi}$ pe Z se poate scrie că

$$\tilde{\Pi}(x) \leq \tilde{\Pi}(x_a) \tag{2.47}$$

Pe de altă parte ,dacă $x'_a$ este aproximaţia lui x în X', $x'_a$ minimizează funcţionala $\tilde{\Pi}$ pe Z', adică :

$$\tilde{\Pi}(x'_a) \leq \tilde{\Pi}(x') \tag{2.48}$$

Inlocuind acum (2.44) şi (2.45) în relaţia precedentă rezultă

$$\tilde{\Pi}(x_a) + \delta_x \tilde{\Pi} - \delta_a \tilde{\Pi} \leq \tilde{\Pi}(x) \tag{2.49}$$

Din (2.47) şi (2.49) se obţine

$$\tilde{\Pi}(x_a + \delta_x \tilde{\Pi} - \delta_a \tilde{\Pi} \leq \tilde{\Pi}(x) \leq \tilde{\Pi}(x_a) \tag{2.5o}$$

de unde rezultă că

$$\tilde{\Pi}(x_a) - \tilde{\Pi}(x) \leq |\delta_x \tilde{\Pi}| + |\delta_a \tilde{\Pi}| \tag{2.51}$$

Totodată, relaţia (2.5o) conduce la

$$d^2 (x,x_a) = \tilde{\Pi}(x_a) - \tilde{\Pi}(x) , \qquad (2.52)$$

care se înlocuieşte în (2.51) rezultînd

$$d(x,x_a) \leq \sqrt{|\delta_x \tilde{\Pi}| + |\delta_a \tilde{\Pi}|} , \qquad (2.53)$$

ceea ce, în final, printr-o inegalitate triunghiulară conduce la inegalitatea de definiţie (2.43).

Pentru exemplificare se aplică criteriul de convergenţă prezentat în cazul metodei Ritz, în cazul căreia $Z' \subset X$. Această înseamnă că $x$ şi $x_a'$ sînt izocondiţionate în raport cu $x$ şi $x_a$. Atunci, dacă $x_a' \subset Z$, rezultă că $x_a \equiv x_a'$ şi din (2.4o) rezultă

$$d(x,x_a') \leq \sqrt{|\delta_x \tilde{\Pi}|} \qquad (2.54)$$

Pe de altă parte dacă $x$ este izocondiţionat în raport cu $x'$ din (2.5o) rezultă că

$$d^2 (x,x') = \tilde{\Pi}(x') - \tilde{\Pi}(x) = \delta_x \tilde{\Pi} , \qquad (2.55)$$

astfel încît (2.54) devine

$$d (x,x_a') \leq d(x,x') \qquad (2.56)$$

Interpretarea relaţiei (2.56) conduce la concluzia că eroarea de aproximare este mărginită superior de eroarea de interpolare. Rezultă de aici că metoda Ritz, care este la originea metodei elementelor finite, implică prin însăşi structura ei convergenţa. Acest lucru este de fapt demonstrat pe baza teoremelor analizei funcţionale, reafirmarea sa prin rezultatul obţinut anterior fiind de natură să confirme şi să întărească criteriul de convergenţă prezentat.

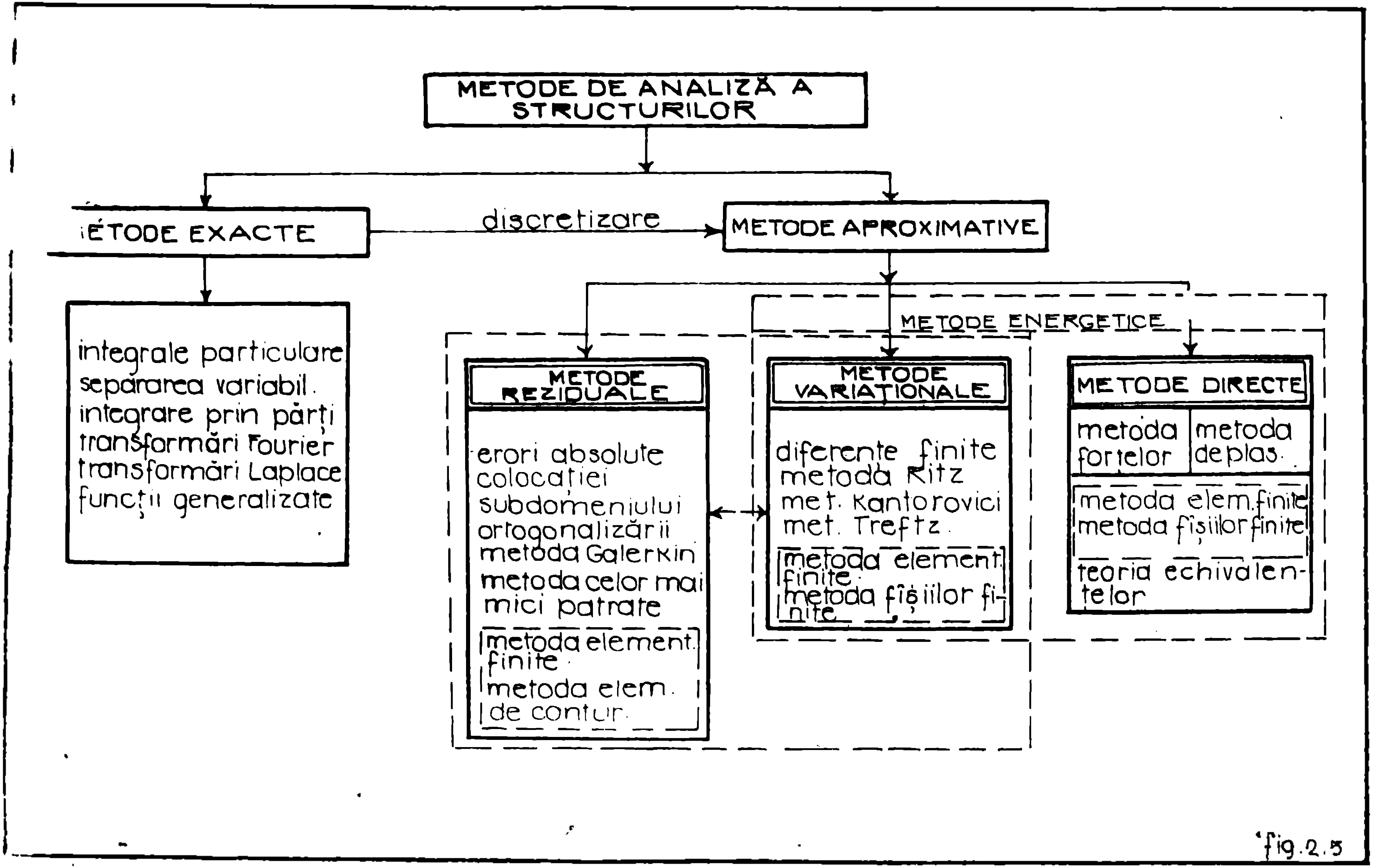
Pe baza criteriului de convergenţă prezentat problema convergenţei soluţiilor furnizate de modelul de calcul aproximativ către soluţiile exacte se rezolvă în două etape importante :

(1) Determinarea cîmpului soluţiilor aproximative $x_a$ izocondiţionate în raport cu $x$ şi stabilite pe baza unor funcţii de interpolare a soluţiei exacte ;

(2) Evaluarea ordinului variaţiei $\delta \tilde{\Pi}$ a funcţionalei asociate şi a erorii de interpolare, atît pentru modelul de calcul exact cît şi pentru cel aproximativ.

Evident, că schema de analiză a convergenţei prezentată în acest paragraf nu epuizează nici pe departe aspectele legate de această problemă. Astfel, dacă se face referire numai la metoda elementelor finite trebuie arătat că problema preciziei şi a convergenţei metodei a preocupat şi preocupă un număr mare de cercetători.

In prezent se caută noi căi de abordare a acestei probleme, care fie să înlocuiască criteriul convergenţei monotone acceptat la începuturile metodei /183/, /186/, fie să determine erorile introduse de diversele tipuri de elemente şi, prin urmare, precizia acestora. Din acest punct de vedere încadrarea teoriei mate-


METODE DE ANALIZĂ A STRUCTURILOR
ıETODE EXACTE
discretizare
METODE APROXIMATIVE
integrale particulare
separarea variabil.
integrare prin părți
transformări Fourier
transformări Laplace
funcții generalizate
METODE ENERGETICE
METODE REZIDUALE
erori absolute
colocației
subdomeniului
ortogonalizării
metoda Galerkin
metoda celor mai mici patrate
metoda element. finite
metoda elem. de contur
METODE VARIAȚIONALE
diferente finite
metoda Ritz
met. Kantorovici
met. Treftz
metoda element. finite
metoda fîșiilor finite
METODE DIRECTE
metoda forțelor
metoda deplas.
metoda elem. finite
metoda fîșiilor finite
teoria echivalentelor
fig. 2.5

matice a structurilor în perimetrul analizei funcţionale este de natură să asigure suportul teoretic necesar.

## 2.7. CLASIFICAREA METODELOR DE CALCUL

In general modelele de calcul aproximative în cadrul cărora au fost elaborate metodele de calcul din mecanica structurilor sînt modele de calcul discrete - discretizare matematică sau fizică . Abordarea pe această cale are avantajul că permite formularea matriceală a problemelor, condiţie absolut necesară atunci cînd se elaborează algoritmele programelor de calcul automat. Sînt cunoscute însă şi metode aproximative continue, un exemplu bine cunoscut în acest sens fiind rezolvarea problemei încovoierii plăcilor curbe subţiri în cadrul teoriei de membrană ; evident că şi în acest caz analiza de convergenţă este necesară. Există şi situaţii în care modelul discret se aproximează printr-un model continuu echivalent, spre exemplu în cazul structurilor reticulate.

Este dificil deci de stabilit un criteriu care să permită o clasificare exhaustivă a metodelor de calcul din mecanica structurilor. Acestea se vor împărţii, în conformitate cu teoria matematică a structurilor formulată în acest capitol, în metode exacte şi aproximative. Dintre metodele aproximative se vor menţiona numai acelea care pot fi formulate şi pe cale matriceală, întrucît în prezent nu se mai poate concepe o abordare competitivă a problemelor de analiză a structurilor astfel decît prin intermediul calculului automat.

Metodele exacte se folosesc la calculul structurilor în anumite cazuri particulare de acţiuni şi geometrie a structurii. Numărul problemelor care pot fi rezolvate cu metode analitice exacte este redus şi la ora actuală, sînt cunoscute. O dezvoltare de dată mai recentă o constitue metoda funcţiilor generalizate care permite abordarea formal continuă a problemelor sistemelor discrete sau discontinue cu singularităţi prin intermediul teoriei distribuţiilor.

Dintre metodele aproximative se reţin doar trei grupuri de metode: metodele matriciale directe care au la bază teoremele lucrului mecanic virtual, metodele variaţionale şi metodele reziduale.

In figura 2.5 se prezintă schematic o clasificare de principiu a acestor metode.

## 2.8. CONCLUZII

Teoria matematică a structurilor constitue un cadru general pentru formularea problemelor din mecanica structurilor, un suport teoretic pentru dezvoltarea modelelor şi metodelor numerice de calcul. Parte integrantă a analizei funcţionale, domeniu al matematicii aflat în continuă evoluţie, teoria matematică a structurilor îşi are direcţiile sale proprii de dezvoltare, cu implicaţii directe şi importante în rezolvarea problemelor inginereşti din mecanica structurilor.

Ca ramură a analizei funcţionale, teoria matematică a structurilor a constituit şi constitue preocuparea unor cercetători de prestigiu, matematicieni şi ingineri, deopotrivă /36/, /47/. Sînt cunoscute în acest sens lucrările de pionierat ale lui Prager , Synge şi Mikhlin, iar mai recent, ale lui Washizu, Oden /153/ şi Oliveira /157/ La noi în ţară merită a fi subliniată lucrarea lui Mazilu şi Zburlan /143/.

Ca disciplină , în acelaşi timp matematică şi ingineres-că, teoria matematică a structurilor este o ştiinţă interdisciplinară, cu proprietăţi intrinseci de desvoltare.

# CAPITOLUL III

## FORMULAREA PROBLEMELOR DIN MECANICA STRUCTURILOR IN CADRUL TEORIEI REZIDUURILOR PONDERATE /56/, /68/.

### 3.1. GENERALITATI

Idea acestui capitol este de a prezenta un model matematic aproximativ generalizat pe baza căruia se pot elabora şi formula unitar principalele metode de calcul numeric utilizate în mecanica mediilor continue şi, în particular, în mecanica structurilor . Acest model matematic este furnizat de teoria reziduurilor ponderate (TRP).

Metodele energetice variaţionale (MEV) folosesc teoremele (principiile) variaţionale energetice şi ale lucrului mecanic virtual care poate fi interpretat ca o măsură a energiei. Pornind de la aceste teoreme energetice - teorema energiei potenţiale minime (în funcţie de deplasări), teorema energiei complementare minime (în funcţie de tensiuni), teorema Hellinger-Reissner (formulare mixtă cu deplasări şi tensiuni) , teorema lui Hamilton în cazul acţiunilor dinamice, etc - în baza principiului lucrului mecanic virtual se stabilesc funcţional de energie (fig.2.3 ) cărora li se determină valoarea staţionară ( se minimizează) folosind legile calculului variaţional.

Sînt situaţii cînd problemele din fizică nu pot fi reprezentate printr-o funcţională, ele fiind modelate matematic însă prin ecuaţii diferenţiale liniare sau neliniare. Prin intermediul metodei reziduurilor ponderate ecuaţiile diferenţiale sînt transformate în forme variaţionale integrale echivalente. Din acest punct de vedere, metoda reziduurilor ponderate (MRP) permite extinderea formulărilor de tip variaţional, în urma minimizării reziduului rezultînd ecuaţii asemănătoare sau chiar identice cu cele determinate prin teoremele variaţionale energetice.

Metoda reziduurilor ponderate are avantajul că permite formularea unitară a principalelor metode numerice utilizate în prezent în mecanica structurilor: metoda diferenţelor finite (MDF), metoda elementelor finite (MEF) şi metoda elementelor de contur (MEC) şi, cee ce este mai important, pe această bază, crează posibilitatea cuplării avantajoase a acestor metode în rezolvarea problemelor complexe.

In figura 3.1 se prezintă într-o schemă de principiu etapele de bază în rezolvarea problemelor prin T.R.P.

O detaliere a acestei scheme s-a prezentat în fig.2.4 din capitolul II.

### 3.2. METODA REZIDUURILOR PONDERATE

#### 3.2.1. Reziduuri şi forme integrale /19/, /45/, /46/.

Se consideră un sistem fizic continuu guvernat de un sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul m - liniare sau neliniare - de forma (2.2) la care se ataşează condiţiile la limită (2.4) . Variabilele sistemului sînt funcţii de coordonate. Soluţiile sistemului trebuie să satisfacă simultan (2.2) şi (2.4).

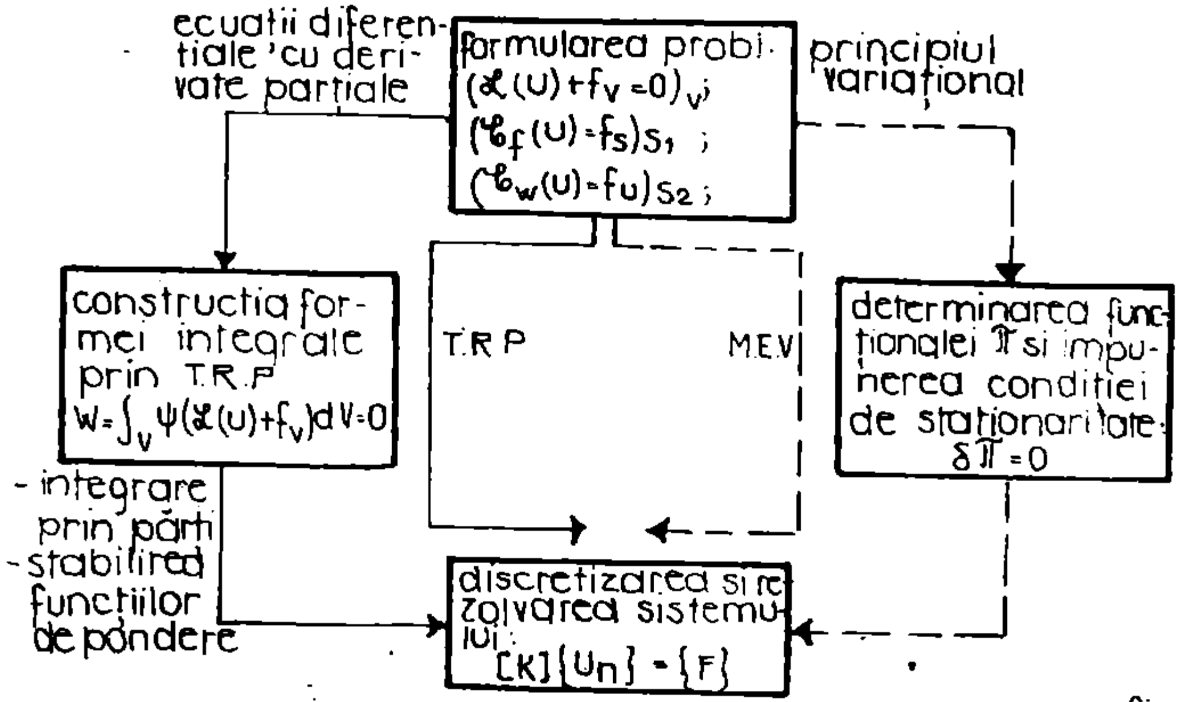



fig.3.1

Funcţia reziduu se defineşte prin relaţia

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v \qquad (3.1)$$

Metoda reziduurilor ponderate constă în determinarea funcţiilor u care satisfac următoarea ecuaţie integrală

$$W(u) = \int_V \langle\psi\rangle\{R(u)\}\, dV = \int_V \langle\psi\rangle\{\mathcal{L}(u) + f_v\}\, dV = 0, \qquad (3.2)$$

în care funcţiile de pondere $\psi$ - se mai numesc funcţii de corecţie sau de interpolare - aparţin unei mulţimi $E_\psi$ şi se aleg astfel încît ecuaţia (3.2) să fie verificată simultan cu verificarea condiţiilor la limită (2.4) de către soluţiile aproximative u. Se afirmă, în acest caz, că soluţiile u aparţin unei mulţimi admisibile $E_u$ care este izocompatibilă în raport cu sistemul fizic guvernat de ecuaţiile (2.2) şi (2.4). Precizia soluţiei u depinde de alegerea funcţiilor de pondere $\psi$. Dacă, spre exemplu, $E_\psi$ este o mulţime completă a funcţiilor lui Dirac, $\delta(x)$, pe domeniul V, atunci soluţia u a ecuaţiei (3.1) va fi soluţie şi pentru (2.2) şi reziduul R(u) va fi identic nul în toate punctele $x \in V$; dacă $E_\psi$ este o mulţime finită, funcţia u care satisface ecuaţia (3.1) este, în general, soluţie aproximativă pentru (2.2), ceea ce înseamnă că această ecuaţie nu va fi satisfăcută în toate punctele domeniului V.

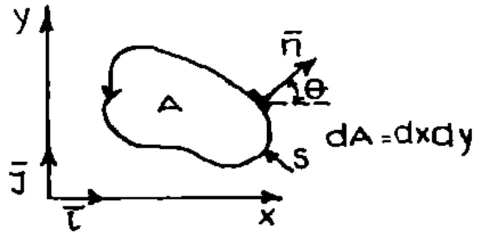
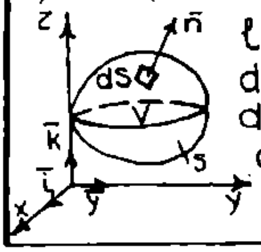
3.2.2. Transformări integrale.

3.2.2.1. Integrarea prin părţi.

Procedeul integrării prin părţi se prezintă în continuare.

Pentru problemele uni -, bi- , şi tridimensionale relaţiile de bază în integrarea prin părţi sînt de forma următoare (tabelul 3.1):

tabelul 3.1

| domeniul V | relații pentru integrare prin părți |
|---|---|
| 1) liniar $V \equiv S \equiv x$ | $\int_{x_1}^{x_2}\psi\frac{du}{dx}dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\psi}{dx}u\,dx + (\psi u)\Big\vert_{x_1}^{x_2}$ (3.3a)<br>$\int_{x_1}^{x_2}\psi\frac{d^2u}{dx^2}dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\psi}{dx}\frac{du}{dx}dx + \left(\psi\frac{du}{dx}\right)\Big\vert_{x_1}^{x_2}$ (3.3b) |
| 2) bidimensional $V \equiv A$<br><br><br>$\ell = \bar{n}\cdot\bar{\imath} = \cos\theta$<br>$m = \bar{n}\cdot\bar{\jmath} = \sin\theta$<br>$\frac{\partial}{\partial n} = \ell\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y}$<br>$dx = -m\,ds$<br>$dy = \ell\,ds$ | $\int_A\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dy = -\int_A\frac{\partial\psi}{\partial y}u\,dx\,dy - \oint_S\psi u\,dx =$<br>$= -\int_A\frac{\partial\psi}{\partial y}u\,dx\,dy + \oint_S\psi u m\,ds$ (3.4 a și b)<br>$\int_A\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy = -\int_A\frac{\partial\psi}{\partial x}u\,dx\,dy + \oint_S\psi u\ell\,ds$<br>$\int_A\psi\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx\,dy = -\int_A\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy + \oint\psi\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy$<br>$\int_A(\psi\Delta u - u\Delta\psi) = \oint_S\left(\psi\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds$ (3.5) |
| 3) tridimensional<br><br><br>$\ell = \bar{n}\cdot\bar{\imath}$ $m = \bar{n}\cdot\bar{\jmath}$; $n = \bar{n}\cdot\bar{k}$<br>$dV = dx\,dy\,dz$<br>$dx\,dy = n\,dS$<br>$dy\,dz = \ell\,dS$<br>$dx\,dz = m\,dS$ | $\int_V\psi\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy\,dz = -\int\frac{\partial\psi}{\partial x}u\,dx\,dy\,dz +$<br>$+ \int_S\psi u\ell\,ds$ (3.6)<br>$\frac{\partial}{\partial n} = \ell\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ |

In urma integrării prin părți o formă integrală dată trece într-o așa numită formă integrală slabă. Dacă este necesar, procesul de integrare prin părți se poate aplica succesiv pînă se ajunge la forma integrală dorită. Aceasta are următoarele avantaje :

- ordinul derivatelor de ordin superior ale lui u se reduc, fapt care conduce la relaxarea condițiilor de continuitate necesare pentru asigurarea convergentei. Acest efect, deosebit de important, se referă la soluțiile u admisibile ale sistemului guvernat de (2.2) și (2.4) ;
- unele condiții de margine, care apar în integrala slabă, nu mai trebuie să fie identic satisfăcute de u.

Pe de altă parte, integrarea prin părți introduce derivatele funcțiilor de pondere $\psi$, pentru care condițiile de continuitate sînt mai drastice decît pentru u.

Se examinează în cele ce urmează efectul integrării prin părți asupra ecuației lui Poisson :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_V = 0, \text{ pe } V \qquad (3.7)$$

cu următoarele condiţii la limită :

- de tip Dirichlet , în u

$$u\Big|_{S_2} = u_s \; ; \quad S_2 \subset s \tag{3.8}$$

- de tip Cauchy, în $\frac{\partial u}{\partial n}$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\Big|_{S_1} = f_s \; ; \quad S_2 = S - S_1 \tag{3.9}$$

Dacă $\alpha =$ o aceste condiţii vor fi de tip Neuman.

Se pot rescrie în formulare matriceală ecuaţiile de guvernare (2.2) şi condiţiile la limită (2.4).

$$\begin{array}{l|l} [\mathcal{L}]\{u\} + \{f_v\} = 0, \text{ pe } V & \left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right]\{u\} + \{f_v\} = o \\ [\mathcal{C}_f]\{u\} = \{f_s\} = 0, \text{ pe } S_1 & \left[\frac{\partial}{\partial n} + \alpha\right]\{u\} + \{f_s\} = o \\ [\mathcal{C}_u]\{u\} = \{f_u\} = 0, \text{ pe } S_2 & [\,1\,]\{u\} = \{u_s\} \end{array}$$

Forma integrală caracteristică ecuaţiei lui Poisson este

$$W = \int_V \psi(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v\right) dV = o, \tag{3.10}$$

în care u este o funcţie de două ori diferenţiabilă ce trebuie să satisfacă condiţiile (3.8) şi (3.9).

După integrare prin părţi (3.10) devine

$$W = -\int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v\right) dV + \int_{S_1} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{S_2} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS = o \tag{3.11}$$

în care funcţiile u şi $\psi$ trebuie să fie o dată diferenţiabile.

Ţinînd seama de (3.8) şi eliminînd integrala de contur pe $S_2$ prin alegerea adecvată a funcţiilor de pondere, $\psi\Big|_{S_2} = o$, rezultă:

$$W = -\int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v\right) dV + \int_{S_1} \psi (f_s - \alpha u) dS = o \tag{3.12}$$

în care u şi $\psi$ trebuie să satisfacă următoarele condiţii la limită

$$u\Big|_{S_2} = u_s \; ; \; \psi\Big|_{S_2} = o \tag{3.13}$$

după două integrări prin părţi (3.10) devine

$$W = \int_V \left(\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)u + \psi f_v\right)dV + \oint_S \left(\psi\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial n}u\right)dS = o \qquad (3.14)$$

Dacă se aleg funcţiile de pondere $\psi$ astfel încît

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = o, \quad \forall (x,y) \in V \text{ şi } f_v = o$$

din (3.14) se elimină integrala de volum (sau suprafaţă)

$$W = \oint_S \left(\psi\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial n}u\right)dS = o \qquad (3.15)$$

Acest ultim proces, de înlocuire a integralei pe domeniu cu integrala pe frontiera domeniului, stă la baza metodei elementelor de contur (MEC).

Pentru o problemă descrisă de un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale (2.2) de ordinul m, cu forma integrală ataşată (3.2) funcţiile admisibile u trebuie să fie derivabile de m ori şi să satisfacă condiţiile la limită. După integrare prin părţi condiţiile de admisibilitate pentru u şi $\psi$ sînt următoarele :

- u trebuie să fie de m-s diferenţiabile ;
- $\psi$ trebuie să fie de s ori diferenţiabile ;
- u trebuie să satisfacă numai acele condiţii la limită care conţin derivatele de ordin mai mare decît m-s-1;
- $\psi$ trebuie să fie nule pe porţiunea de contur pe care u satisfac condiţiile la limită care au mai rămas.

3.2.2.2. Construirea formelor integrale adiţionale.

M.R.P. se aplică direct ecuaţiilor (2.6) şi (2.7) rezultînd o formă integrală adiţională.

$$W_r = \int_V \langle\psi_u\rangle \{\mathcal{L}_e(q) - f_v\} \, dV + \int_V \langle\psi_q\rangle\{\mathcal{L}_c(q,u)\} \, dV = o \qquad (3.16)$$

Dacă funcţiile de pondere $\psi_u$ şi $_q$ sînt independente (3.16) se descompune şi rezultă

$$\int_V \langle\psi_u\rangle \{\mathcal{L}_e(q) - f_v\} \, dV = o$$

$$\int_V \langle\psi_q\rangle\{\mathcal{L}_c(q,u)\} \, dV = o, \qquad (3.17 \text{ a şi b})$$

în care u şi q satisfac condiţiile de limită pe $S_1$ şi $S_2$.

3.2.3. Funcţionale

Se poate demonstra că MRP este echivalentă cu minimizarea unei funcţionale $\Pi$ în anumite cazuri. In mecanica structurilor această funcţională este energia potenţială totală a sistemului mecanic. Aceasta conduce la o formulare integrală direct din condiţia de staţionaritate pusă funcţionalei. Acest mod de rezolvare este preferabil atunci cînd expresia energiei potenţiale totale este uşor de stabilit.

Se poate, deci, ca pentru unele probleme guvernate de ecuaţiile (2.2) şi (2.4) să se construiască o funcţională de forma :

$$\Pi = \Pi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \tag{3.18}$$

astfel încît

$$\delta \Pi \equiv W = o, \tag{3.19}$$

în care W este o integrală particulară în care funcţiile ponderate $\psi$ se aleg egale cu $\delta u$ . Rezultă :

$$W = \int_V \langle \delta u \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_v\} \, dV = o \tag{3.20}$$

dacă

- $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{C}$ sînt operatori liniari cu toate derivatele de ordin par ;
- $f_s$ şi $f_u$ sînt independente de u.

Dacă ecuaţiei (3.20) , se ataşează condiţiile (2.2) separate pe $S_1$ şi $S_2$ se obţine:

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_v\} \, dV = o, \text{ pentru orice } \psi \tag{3.21}$$

$$\mathcal{C}_f(u)\Big|_{S_1} = f_s \; ; \; \mathcal{C}_u(u)\Big|_{S_2} = f_u \tag{3.22 a şi b}$$

Alegînd funcţiile de pondere $\psi = \delta u$ şi integrînd prin părţi se poate construi o funcţională $\Pi$ care este staţionară (minimizată) pentru o soluţie u

$$\delta \Pi(u) \equiv W(u) = o \tag{3.23}$$

$$\mathcal{C}_u(u)\Big|_{S_2} = f_u \tag{3.24}$$

Principiul de staţionaritate (variaţional) se enunţă în felul următor :

Dintre toate funcţiile admisibile u, care satisfac condiţiile de derivabilitate şi la limită pe $S_2$, acelea care satisfac ecuaţia (2.2) şi condiţiile (3.22 a) fac funcţionala $\Pi$ staţionară.

Prin introducerea unor variabile adiţionale q, de natură fizică, ca funcţii necunoscute ale problemei, concomitent cu relaxarea condiţiilor de continuitate pentru funcţiile admisibile u se poate construi o nouă funcţională generalizată $\Pi^*$ obţinîndu-se astfel o problemă de extrem cu legături care se rezolvă prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

$$\Pi^*(u,q,\lambda) = \Pi_1(u,q) + \int_V (\lambda_1 g_1(u,q) + \lambda_2 g_2(u,q) + \ldots + \lambda_m g_m(u,q))\, dV \tag{3.25}$$

cu condiţiile :

$$g_i(u,q) = o \text{ pe } V \; ; \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.26}$$

unde prin $\lambda$ s-au notat multiplicatorii lui Lagrange.
Condiţiile de staţionaritate pentru $\Pi^*$ includ condiţiile (3.26)

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial q} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_i} = g_i = 0 \; ; \; i = 1,2,..,m \qquad (3.27)$$

Se poate construi o funcţională mixtă $\Pi_r$ prin eliminarea multiplicatorilor lui Lagrange din $\Pi^*$ cu ajutorul condiţiilor (3.27) . In mecanica structurilor funcţionala mixtă este funcţionala Hellinger-Reissner .

Dacă valorile funcţiilor u sînt cunoscute pe $S_2$ şi se impun condiţii la limită numai pe $S_1$ (condiţii de tip Neuman) se obţine funcţionala complementară $\Pi_c$, care în mecanica structurilor este energia complementară. In figura (2.3) s-a pus în evidenţă legătura între cele patru tipuri de funcţionale $\Pi$, $\Pi^*$, $\Pi_r$ şi $\Pi_c$ şi interpretarea lor în mecanica structurilor.

3.2.4. Discretizarea formelor integrale.

3.2.4.1. Soluţii aproximative .

Un model matematic a unui sistem fizic implică determinarea unui număr de variabile şi funcţii $u_{ex}(x)$ reprezentînd deformaţii, temperaturi, viteze, etc., x fiind funcţii de coordonate x(x,y,z) definite în punctele domeniului. Dacă u(x) este o aproximare a soluţiei exacte funcţia eroare e(x) este dată de relaţia

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \qquad (3.28)$$

Pentru construirea unei soluţii aproximative este suficient să se scrie o expresie care să conţină n parametrii de aproximare

$$u(x) = u(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (3.29)$$

şi să se determine aceşti parametri pe baza relaţiei (3.28) şi a unui criteriu de convergenţă adecvat.

Aproximarea poate fi nodală sau ne-nodală, respectiv:

$$u(x) = \langle N_1(x) N_2(x) \ldots N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\} \; ; \qquad (3.30)$$

$$u(x) = \langle p_1(x) \; p_2(x) \ldots p_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle p \rangle \{a\} \; , \qquad (3.31)$$

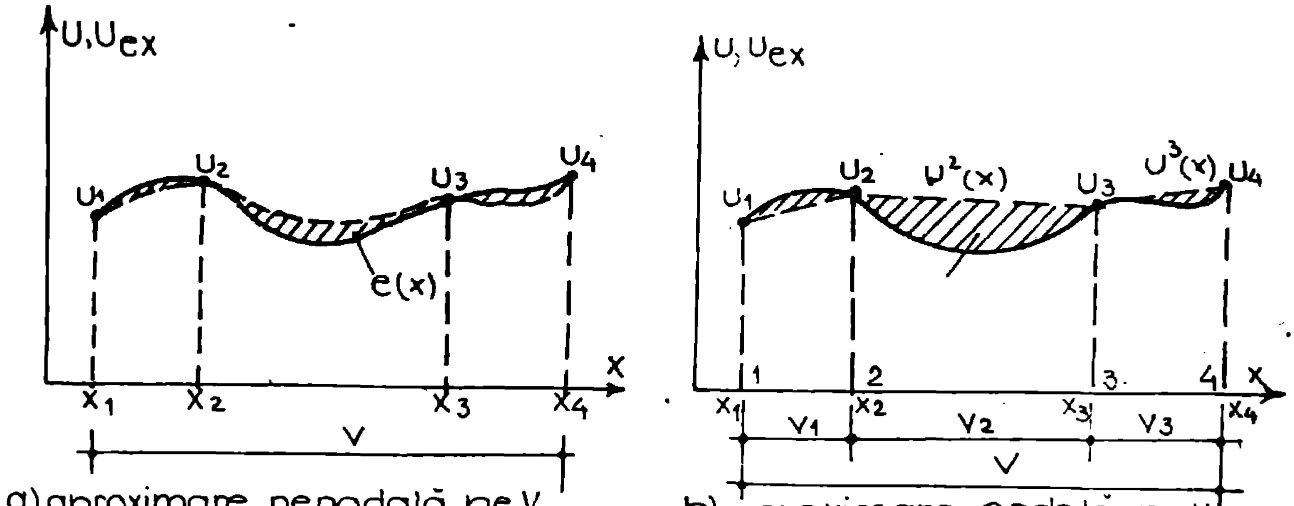
In aceste relaţii :

$a_i$ sînt parametrii generalizaţi ai aproximării, care nu au o interpretare fizică concretă ;

- $u_i$ sînt parametrii nodali cu o interpretare fizică concretă ;
- $p(x)$ reprezintă funcţiile de bază ale aproximării şi sînt seturi de funcţii complete în sens matematic ;
- $N(x)$ reprezintă funcţiile de interpolare.

Soluţiile aproximative $u(x)$ pot fi definite pe întreg domeniul V sau pe subdomenii elementare $V^e \subset V$. (fig.3.2)

In MEF, spre exemplu, aproximarea este nodală, pe subdomenii $V^e$, funcţiile aproximative $u_i(x) = u^e(x_i) = u_{ex}(x_i)$ constituind variabilele nodale ale problemei.




a) aproximare nenodală pe V    fig.3.2    b) aproximare nodală pe V

Schematic procedurile de determinare a soluţiilor aproximative sînt prezentate în figura 3.3.

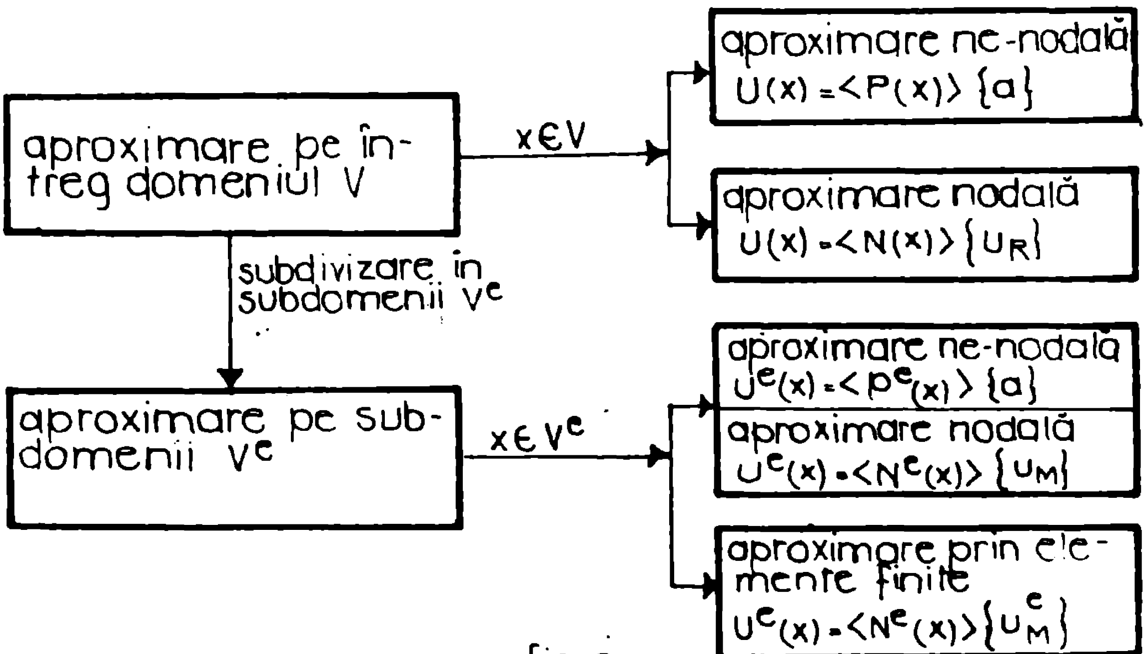



fig.3.3

3.2.4.2. Discretizarea formei integrale.

Ţinînd seama de (3.29) ecuaţia 3.2. devine

$$W = \int_V \psi(\mathcal{L}(u(a_1,a_2,\ldots,a_n)+f_v))\,dV = o \quad \forall\psi\in E\psi \qquad (3.32)$$

Dacă se aleg n funcţii de pondere $\psi$ independente (3.32) devine un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute.

$$W_i = \int_V \langle\psi_i\rangle \left\{\mathcal{L}(u(a_1,a_2,\ldots,a_n) + f_v)dV,\right\} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.33)$$

care după integrare se transformă într-un sistem de ecuaţii algebrice din rezolvarea căruia se determină parametrii $a_i$.

$$[K]\{a\} = [F] \qquad (3.34)$$

Algoritmul M.R.P este redat schematic în figura 2.4.

3.2.5. Stabilirea funcţiilor de pondere.

Pentru determinarea funcţiilor de pondere se pot utiliza mai multe metode, între care, cele mai cunoscute şi mai frecvent utilizate sînt următoarele: metoda colocaţiei, metoda Galerkin şi metoda celor mai mici patrate. In figura 3.4. se prezintă schematic aceste metode.

In metoda colocaţiei, precizia soluţiei depinde de numărul şi poziţia punctelor de colocaţie. Metoda conduce la sisteme de ecuaţii cu matricea nesimetrică. Pentru obţinerea unei matrici simetrice metoda colocaţiei se utilizează în combinaţie cu metoda celor mai mici pătrate. Metoda colocaţiei dă bune rezultate în rezolvarea unor probleme neliniare.

Dintre metodele prezentate cea mai cunoscută este, însă, metoda Galerkin, ea fiind utilizată, după cum se va vedea, în formularea reziduală a metodei elementelor finite.

3.2.6. Discretizarea funcţionalei.

In metoda Ritz funcţionala $\Pi$ se discretizează prin aproximarea soluţiei u printr-o relaţie de tip (3.31).

$$\Pi(u) = \Pi(u(a_1,a_2,\ldots,a_n)) \qquad (3.35)$$

asupra căreia se pune condiţia de staţionaritate.

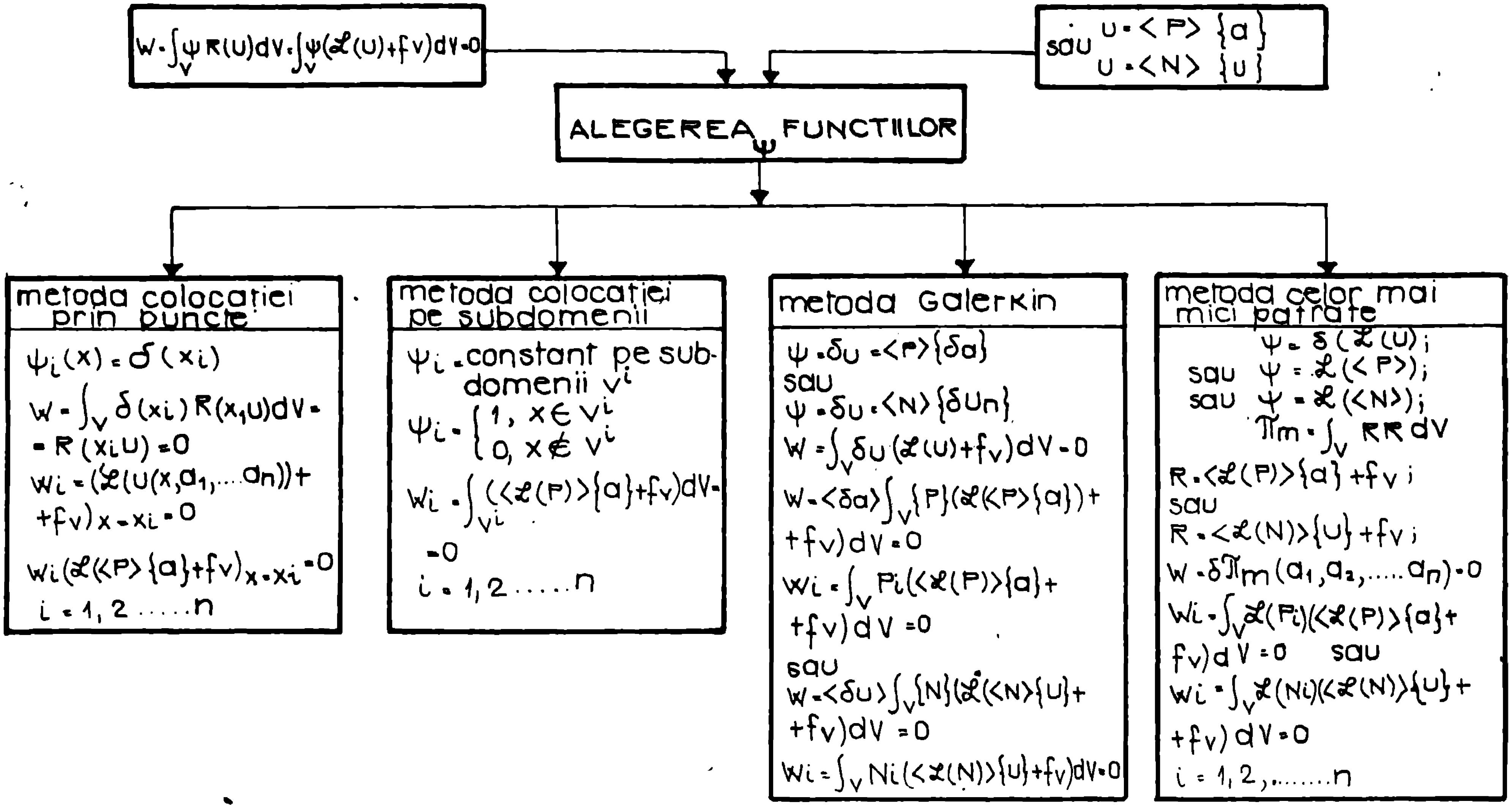
$$\delta\Pi(u) = \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial a_n}\delta a_n = 0 \qquad (3.36)$$

rezultînd următorul sistem de ecuaţii

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = o, \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.37)$$

Dacă funcţionale există, prima sa variaţie este edentică cu o formă integrală de tip Galerkin (3.24) şi

$$\delta\Pi = W = o, \qquad (3.19)$$



$W=\int_V \psi R(U)dV=\int_V \psi(\mathcal{L}(U)+f_V)dV=0$
sau $U=\langle P\rangle\{a\}$
$U=\langle N\rangle\{U\}$
ALEGEREA FUNCTIILOR $\psi$
metoda colocatiei prin puncte
$\psi_i(x)=\delta(x_i)$
$W=\int_V \delta(x_i)R(x,U)dV=$
$=R(x_i U)=0$
$W_i=(\mathcal{L}(U(x,a_1,\ldots a_n))+$
$+f_V)_{x=x_i}=0$
$W_i(\mathcal{L}(\langle P\rangle\{a\}+f_V)_{x=x_i}=0$
$i=1,2\ldots\ldots n$
metoda colocatiei pe subdomenii
$\psi_i$ = constant pe subdomenii $V^i$
$\psi_i=\begin{cases}1, & x\in V^i\\ 0, & x\notin V^i\end{cases}$
$W_i=\int_{V^i}(\langle\mathcal{L}(P)\rangle\{a\}+f_V)dV=$
$=0$
$i=1,2\ldots\ldots n$
metoda Galerkin
$\psi=\delta U=\langle P\rangle\{\delta a\}$
sau
$\psi=\delta U=\langle N\rangle\{\delta U_n\}$
$W=\int_V \delta U(\mathcal{L}(U)+f_V)dV=0$
$W=\langle\delta a\rangle\int_V\{P\}(\mathcal{L}(\langle P\rangle\{a\})+$
$+f_V)dV=0$
$W_i=\int_V P_i(\langle\mathcal{L}(P)\rangle\{a\}+$
$+f_V)dV=0$
sau
$W=\langle\delta U\rangle\int_V\{N\}(\mathcal{L}(\langle N\rangle\{U\}+$
$+f_V)dV=0$
$W_i=\int_V N_i(\langle\mathcal{L}(N)\rangle\{U\}+f_V)dV=0$
metoda celor mai mici patrate
$\psi=\delta(\mathcal{L}(U))$;
sau $\psi=\mathcal{L}(\langle P\rangle)$;
sau $\psi=\mathcal{L}(\langle N\rangle)$;
$\Pi_m=\int_V RR\,dV$
$R=\langle\mathcal{L}(P)\rangle\{a\}+f_V$;
sau
$R=\langle\mathcal{L}(N)\rangle\{U\}+f_V$;
$W=\delta\Pi_m(a_1,a_2,\ldots a_n)=0$
$W_i=\int_V\mathcal{L}(P_i)(\langle\mathcal{L}(P)\rangle\{a\}+$
$f_V)dV=0$ sau
$W_i=\int_V\mathcal{L}(N_i)(\langle\mathcal{L}(N)\rangle\{U\}+$
$+f_V)dV=0$
$i=1,2,\ldots\ldots n$


fig.3.4

ceea ce conduce la concluzia că soluţia aproximativă obţinută cu metoda Ritz este identică cu aceea obţinută cu metoda Galarkin aplicată prin M.R.P. Algoritmul celor două metode de discretizare a funcţionalei este prezentat în figura 3.5.

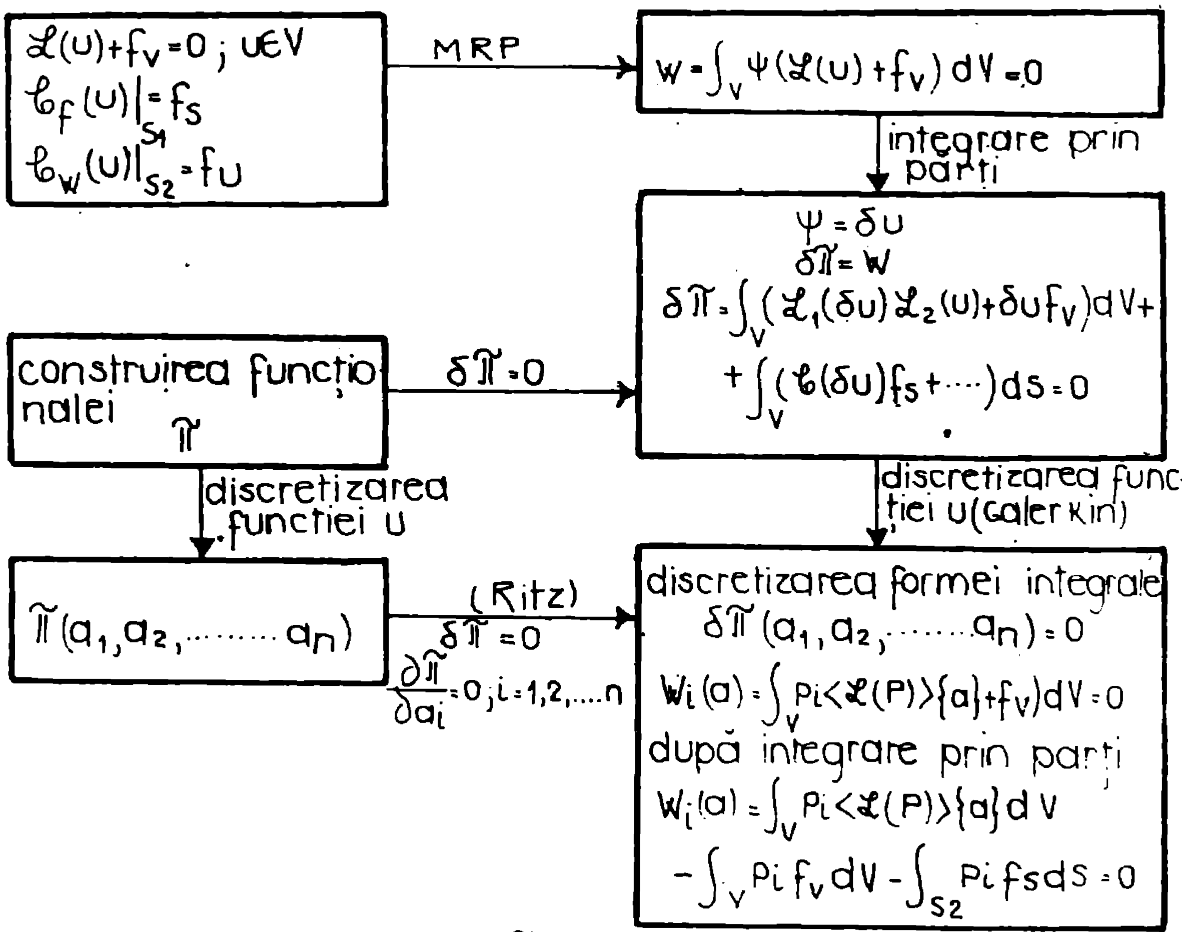



fig. 3.5

### 3.2.7. Proprietăţile sistemului de ecuaţii

Indiferent de modul de alegere a funcţiilor $\Psi$ şi de procedeul de discretizare utilizat se ajunge în final la rezolvarea unui sistem algebric de forma (3.34).

$$[K]\{a\}=\{F\}\,, \qquad (3.34)$$

în care $[K]=[K_{ij}]$ ; $\{a\}=\{a_i\}$ ; $\{F\}=\{F_i\}$; $i,j=1,2,\ldots,n$

In tabelul (3.2) se prezintă sintetic forma şi proprietăţile termenilor sistemului (3.34) în funcţie de metoda de calcul utilizată pentru cazul cînd pentru aproximarea funcţiei $u$ se foloseşte relaţia (3.31).

Pentru a aprecia eficacitatea metodelor de calcul prezentate se prezintă rezultatele obţinute pe două exemple de calcul.

Exemplul nr.1.

$$\mathcal{L}(u)+f_v=0:\ \frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0$$

$$\mathcal{C}(u)=f_s:\ \begin{cases}u=0\ ;\ x=0\\ u=0\ ;\ x=1\end{cases}$$

tabelul 3.2

| nr. crt. | metoda de calcul | forma termenilor $k_{ij}$ din matricea [K] | forma termenilor $F_i$ din vectorul {F} | condiții la limită pentru $u=\langle P\rangle\{a\}$ | proprietățile matricei [K] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | colocației prin puncte | $\mathcal{L}(P_j)$ în punctele $x=x_i$ | $-f_v(x_i)$ | pe $S_1$ pe $S_2$ | nesimetrică |
| 2 | colocației pe subdomenii | $\int_{V_i}\mathcal{L}(P_j)\,dV$ | $-\int_V f_v\,dV$ | pe $S_1$ pe $S_2$ | nesimetrică |
| 3 | Galerkin | $\int_V P_i\mathcal{L}(P_j)\,dV$ | $-\int_V P_i f_v\,dV$ | pe $S_1$ pe $S_2$ | simetrică dacă $\mathcal{L}$ este autoadjunct. |
| 4 | Galerkin, după integrare prin părți | $\int_V\langle\mathcal{L}_1(P_i)\rangle\{\mathcal{L}_2(P_j)\}dV$ | $\int_V P_i f_v\,dV+\int_{S_1} P_i f_s\,ds$ | pe $S_2$ | idem $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2$ |
| 5 | cele mai mici pătrate | $\int_V\mathcal{L}(P_i)\mathcal{L}(P_j)\,dV$ | $-\int_V\mathcal{L}(P_i)f_v\,dV$ | pe $S_1$ pe $S_2$ | simetrică și pozitiv definită |
| 6 | Ritz (dacă există funcțională) | $\int_V\langle\mathcal{L}_1(P_i)\rangle\{\mathcal{L}_1(P_j)\}dV$ | $\int_V P_i f_v\,dV+\int_{S_1} P_i f_s\,ds$ | pe $S_1$ | simetrică |

**Exemplul nr.2.**

$$\mathcal{L}(u)+f_v=0:\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f=0$$

$$\mathcal{B}(u)=f_s\qquad:\ \left\{u\big|_S=0,\quad S=(x=\pm 1;\ y=\pm 1)\right\}$$

**Rezultatele se prezintă în tabelele 3.3. și , respectiv 3.4.**

tabelul 3.3

$$u=\langle P_1\ P_2\rangle\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\langle P\rangle\{a\};\quad \begin{matrix}P_1=x(1-x)\\P_2=x^2(1-x)=P_1x\end{matrix}$$

| x | metoda de calcul | | | |
|---|---|---|---|---|
| | colocație prin puncte | colocație pe subdomenii | Galerkin și Ritz | soluția exactă |
| | $x_1=0{,}25;\ x_2=0{,}5$ | $0<x<0{,}5;\ 0<x<1$ | $0\le x\le 1$ | u |
| 0,10 | 0,019078 | 0,018417 | 0,18853 | 0,018641 |
| 0,30 | 0,052258 | 0,050123 | 0,051162 | 0,051194 |
| 0,50 | 0,071428 | 0,68181 | 0,069444 | 0,069746 |
| 0,70 | 0,065806 | 0,064421 | 0,065504 | 0,065585 |
| 0,90 | 0,032350 | 0,03073 | 0,031146 | 0,030901 |

tabelul 3.4

| $U=\langle P_1\ P_2\rangle\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\end{Bmatrix}=\langle P\rangle\{a\};\ P_1=(x^2-1)(y^2-1);\ P_2=(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2)=P_1(x^2+y^2)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Metoda de calcul (valori în centrul domeniului V $\left(\begin{smallmatrix}x=0\\y=0\end{smallmatrix}\right)$) | | | | |
| colocatie prin puncte | colocatie pe subdomenii | Galerkin si Ritz | cele mai mici pătrate | solutia exactă |
| $x_1=(0,0)$<br>$x_2=(0,5,0,5)$ | $V^1:[x_1(0,05);x_2(0,5,0)]$<br>$V^2:[x_1(0,1);x_2(1,0)]$ | $\psi=\delta u=\langle P\rangle\{a\}$ | $R=\langle\mathcal{L}(P)\rangle\{a\}+f_V$ | serii Fourier cu 14 termeni |
| $a_1=0,2976f$<br>$a_2=0,0476f$<br>$u=0,2976f$ | $a_1=0,2994f$<br>$a_2=0,0630f$<br>$u=0,2994f$ | $a_1=0,2922f$<br>$a_2=0,0592f$<br>$u=0,2922f$ | $a_1=0,2904f$<br>$a_2=0,0627f$<br>$u=0,2904$ | $u=0,2947f$ |

## 3.3. CLASIFICAREA METODELOR DE CALCUL BAZATE PE TEORIA REZIDUURILOR PONDERATE.

In funcţie de modul în care se satisfac ecuaţiile de guvernare (2.2) şi condiţiile la limită (2.4) se evidenţiază trei formulări ale metodei reziduurilor ponderate.

(1) Formularea directă, în cadrul căreia soluţiile aproximative u satisfac identic condiţiile (2.4) şi aproximativ ecuaţiile (2.2).

(2) Formularea intermediară (soluţia slabă) în cadrul căreia condiţiile de margine sînt parţial satisfăcute, iar ecuaţiile de guvernare în mod aproximativ.

(3) Formularea inversă, care presupune satisfacerea identică a ecuaţiilor (2.2) şi în mod aproximativ a condiţiilor la limita (2.4).

In figura (3.6) se prezintă o clasificare a metodelor de calcul care derivă din M.R.P. exemplificîndu-se cele trei formulări definite anterior prin formele integrale ale ecuaţiei lui Poisson.

Este interesant de remarcat că trei metode numerice cu largă aplicabilitate în ştiinţă şi tehnică - MEF, MEC şi MDF - se pot formula în mod unitar pe baza teoriei reziduurilor ponderate.

Metoda diferenţelor finite (MDF) operează cu funcţii de bază diferite pentru u şi $\psi$ . Majoritatea tehnicilor de calcul cu diferenţe finite se dezvoltă pe baza formulării directe a MRP, caz în care pentru funcţiile de pondere $\psi$ se utilizează forme ale funcţiei $\delta$ (x) a lui Dirac. Pentru tehnicile de calcul cu diferenţe finite bazate pe scheme energetice se utilizează formularea intermediară.

Metoda elementelor finite (MEF). în cadrul formulării intermediare, operează cu funcţii de bază similare pentru u şi $\psi$ ceea ce conduce la obţinerea matricei [K] a sistemului (3.34) de formă

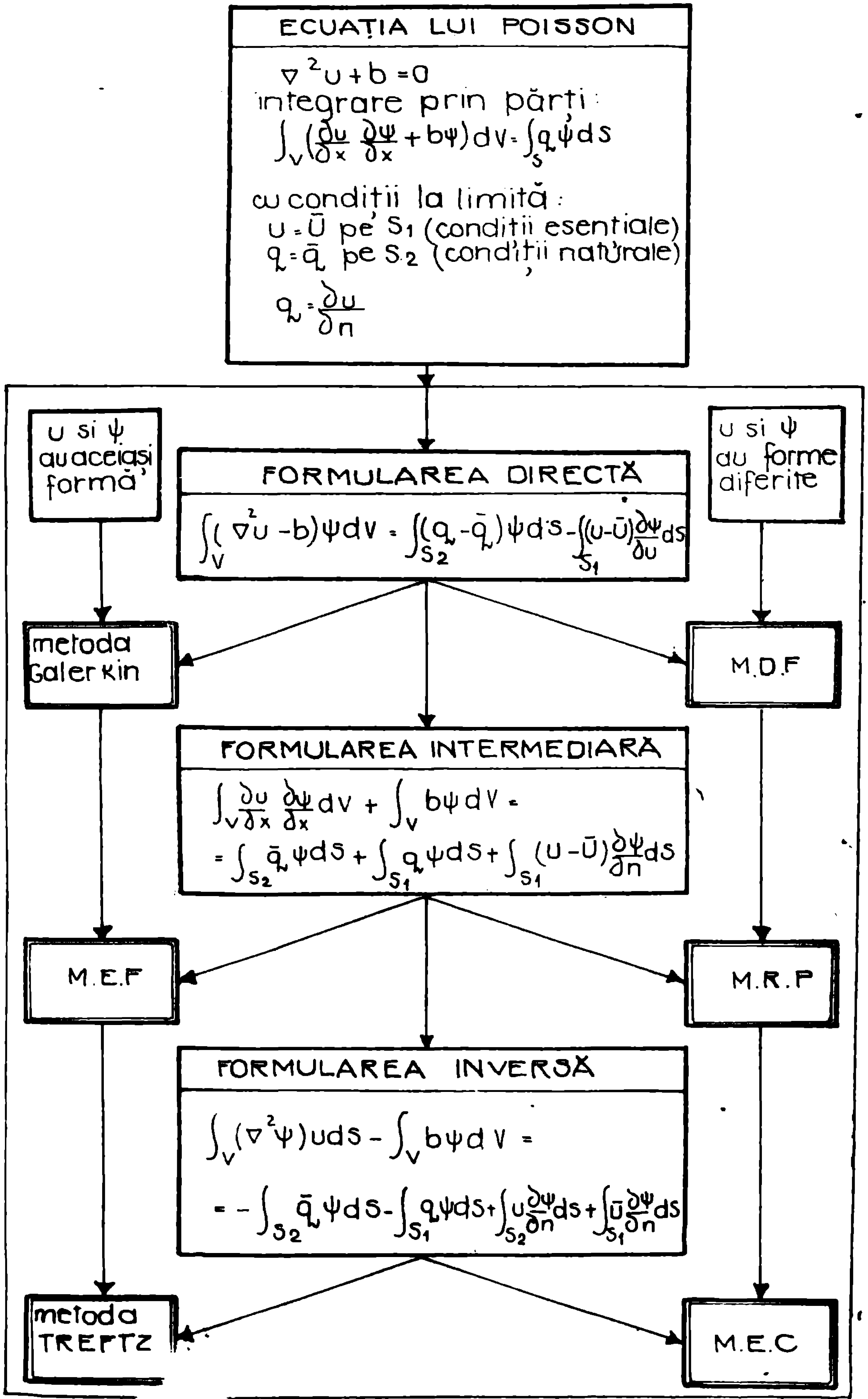

ECUAȚIA LUI POISSON
$\nabla^2 u + b = 0$
integrare prin părți
$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + b\psi\right) dV = \int_S q\psi\, ds$
cu condiții la limită:
$u = \bar{u}$ pe $S_1$ (condiții esențiale)
$q = \bar{q}$ pe $S_2$ (condiții naturale)
$q = \frac{\partial u}{\partial n}$
u și ψ au aceiași formă
u și ψ au forme diferite
FORMULAREA DIRECTĂ
$\int_V (\nabla^2 u - b)\psi\, dV = \int_{S_2} (q - \bar{q})\psi\, ds - \int_{S_1} (u - \bar{u})\frac{\partial \psi}{\partial u} ds$
metoda Galerkin
M.D.F
FORMULAREA INTERMEDIARĂ
$\int_V \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} dV + \int_V b\psi\, dV =$
$= \int_{S_2} \bar{q}\psi\, ds + \int_{S_1} q\psi\, ds + \int_{S_1} (u - \bar{u})\frac{\partial \psi}{\partial n} ds$
M.E.F
M.R.P
FORMULAREA INVERSĂ
$\int_V (\nabla^2 \psi) u\, ds - \int_V b\psi\, dV =$
$= -\int_{S_2} \bar{q}\psi\, ds - \int_{S_1} q\psi\, ds + \int_{S_2} u\frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_{S_1} \bar{u}\frac{\partial \psi}{\partial n} ds$
metoda TREFTZ
M.E.C

fig. 3.6

simetrică. Este marele avantaj al metodei, întrucît aceasta permite în continuare transformarea matricei [K] într-o matrice bandă ceea ce crează mari facilităţi în rezolvarea sistemului de ecuaţii.

Metoda elementelor de contur (MEC), dezvoltată pe baza formulării inverse a MRP, utilizează, la fel ca MDF, funcţii de bază diferite pentru u şi $\Psi$. Funcţiile ponderate $\Psi$ se aleg în asemenea manieră încît să reducă integralele pe domeniu la integrale pe frontiera domeniului (§ 3.2.2.1). Aceasta se poate obţine, spre exemplu, luînd pentru $\Psi$ funcţii $\delta(x)$ de tip Dirac, definite în puncte particulare de pe frontieră.

## 3.4. APLICAREA FORMULARII REZIDUALE IN MECANICA STRUCTURILOR /56/.

Ecuaţiile de guvernare în mecanica structurilor sînt ecuaţiile de echilibru (2.9).

$$(\mathcal{L}(u) + f_v = o) \quad : \sigma_{ij,j} + F_i = o \; ; \quad i,j = x,y,z.$$

cu condiţiile la limită (2.2o).

$$(\mathcal{C}_f(u) = f_s)_{S_1} \qquad : \quad p_i\big|_{S_1} = \sigma_{ij} n_j \big|_{S_1} = \bar{p}_i$$

$$(\mathcal{C}_w(u) = f_v)_{S_2} \qquad : \quad u_i\big|_{S_2} = \bar{u}_i$$

Forma integrală caracteristică problemelor din mecanica structurilor se scrie astfel :

$$W = \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) u_i^* \, dV = \int_{S_1} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* \, dS + \int_{S_2} (\bar{u}_i - u_i) p_i^* \, dS \qquad (3.38)$$

în care $u_i^*$ şi $p_i^*$ reprezintă formele ponderate ale deplasărilor $u_i$ şi ale forţelor de suprafaţă $p_i$.

$$p_i^* - n_i \sigma_{ij}^* \qquad (3.39)$$

Inlocuind în (3.38) în funcţie de (2.1o) şi (2.12) se obţine după integrarea prin părţi

$$W = -\int_V C_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell} \varepsilon_{ij} + \int_V F_i u_i^* \, dV = -\int_{S_2} \bar{p}_i u_i^* dS - \int_{S_1} p_i u_i^* dS + \int_{S_1} (\bar{u}_i - u_i) \; d \qquad (3.4o)$$

Integrînd prin părţi încă o dată primul termen din (3.4o) şi ţinînd seama de simetria tensorului $C_{ijk\ell}$ rezultă în final :

$$W = \int_V (\sigma_{ij,j}^*) u_i \, dV + \int_V F_i u_i^* \, dV = -\int_{S_2} (\bar{p}_i u_i^* - u_i p_i^*) dS - \int_{S_1} (p_i u_i^* - \bar{u}_i p_i^*) dS \qquad (3.41)$$

Intrucît forţele masice se cunosc în general, cea de a doua integrală din membrul stîng al ecuaţiei (3.41) nu introduce necunoscute. Prima integrală din membrul stîng introduce ca necunoscute deplasările $u_i$ pe domeniul $V_1$ în timp ce integralele din membrul drept introduc ca necunoscute deplasările $u_i$ şi forţele de suprafaţă $p_i$ pe frontiera S a domeniului V. Alegînd în mod convenabil funcţiile de pondere * se obţin rezolvări caracteristice metodelor de calcul numeric discutate anterior.

## 3.5. CONCLUZII

Tendinţele actuale din mecanica structurilor conduc spre elaborarea unor algoritmi de calcul care cuplează două şi chiar trei metode de calcul diferite în rezolvarea problemelor de mare complexitate, coroborînd avantajele particulare fiecăreia şi eliminîndu-le neajunsurile. Teoria reziduurilor ponderate asigură suportul matematic necesar în acest sens. Pe baza formulării reziduale se cunosc următoarele scheme de cuplare:

MEF + MEC
MEC + MDF
MEF + MEC + MDF

Posibilitatea realizării acestor scheme a fost, de altfel, demonstrată în §.3.3 şi în §. 3.4.

# CAPITOLUL IV

## FORMULAREA GENERALIZATA A METODEI ELEMENTELOR FINITE /68/.

### 4.1. GENERALITATI

Schema generală a MEF apare pentru prima dată într-o lucrare a lui Courant în anul 1943 referitoare la soluţionarea problemei torsiunii barelor. După furmularea matriceală a calculului structurilor din bare de către Argyrisîn anul 1952 noţiunea de discretizare a continuului prin elemente finite este introdusă de Turner, Clough, Martin şi Topp care în 1956 soluţionează ecuaţiile stării plane a teoriei elasticităţii utilizînd elemente finite triunghiulare. Au urmat apoi perfecţionări în ceea ce priveşte formularea matriceală şi o utilizare extensivă a metodei în diferite variante stimulată de lucrările unor autori ca Melosh, Tocher, Przemiecki, Zienkiewicz /2o1/, Oden /153/, Gallager, Scordelis , Irons /112/, Pian, Cheung, Norrie şi de Vries /152/, Huebner /11o/, Bathe şi Wilson /9/, Brebbia, iar în literatura română lucrările lui Beleş /15/, Cuteanu şi Marinov /3o/, Avram /6/, Brăteanu /18/, Pascariu /159/ şi alţii.

Două motive stau la baza dezvoltării actuale MEF : pe de-o parte faptul că această metodă permite abordarea unei largi game de probleme din domeniul mecanicii mediilor deformabile, a fizicii mediilor continue şi a teoriei cîmpurilor, chimiei cuantice, etc., iar pe de altă parte nivelul mereu mai ridicat al tehnicii de calcul, care oferă posibilitatea ducerii calculelor pînă la nivelul de precizie dorit.

MEF cunoaşte, pînă în prezent, patru procedee de formulare a ecuaţiei fundamentale.

1. Formularea directă , derivată din mecanica structurilor pe baza metodei deplasărilor.

2. Formularea variaţională , care constă în minimizarea energiei potenţiale totale a solidului elastic, în baza principiului valorii staţionare a energiei potenţiale. Spre deosebire de procedeul direct, formularea variaţională a extins aplicarea metodei şi la alte categorii de probleme pentru care se poate defini o funcţională şi un criteriu de staţionaritate.

3. Formularea integrală pe baza teoriei reziduurilor ponderate, care permite abordarea problemelor liniare , neliniare şi de valori proprii într-o exprimare unitară, cu caracter generalizat, şi dă posibilitatea rezolvării unor probleme care nu pot fi caracterizate variaţional.

4. Formularea pe baza bilanţului termoenergetic care, pornind de la prima lege a termodinamicii, dezvoltă considerabil gama de probleme ce pot fi investigate cu MEF.

Pornind de la ansamblul de fapte care constitue în prezent obiectul dezvoltării metodei elementului finit, în acest capitol se realizează o sistematizare şi o formulare generalizată a MEF pe baza T.R.P.

## 4.2. METODA ELEMENTELOR FINITE

### 4.2.1. Ecuaţia fundamentală

Metoda elementelor finite constă în discretizarea formei integralei W (3.2) utilizînd pentru funcţiile necunoscute u aproximaţii cu elemente finite în vederea transformării sistemului de ecuaţii integrale (3.33) într-un sistem de ecuaţii algebrice de forma (3.34) . In /45/, /159/, /189/, /2o1/, sînt prezentate tehnicile de construire a funcţiilor de interpolare N(x) (3.3o), caracteristicile şi proprietăţile tipurilor de elemente finite.

Pleoînd de la varianta Galerkin a formei integrale (fig.3.4 şi tab.3.2) în care integrala pe domeniul V se înlocuieşte cu o sumă de integrale pe subdomenii elementare $V^e$ (elemente finite) rezultă :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \int_{V^e} \delta u^e \, (\mathcal{L}(u) + f_v) \, dV = o \qquad (4.1)$$

Pentru fiecare termen $W^e$ - numit formă integrală elementară - u şi $\delta u$ se înlocuiesc cu aproximaţii în elemente finite pe $V^e$:

$$u^e = \langle N \rangle \{u_n\}$$
$$\delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\} \qquad (4.2)\text{a şi b}$$

Matricea funcţiilor de interpolare $\langle N \rangle$ se defineşte astfel încît să fie nulă în afara subdomeniului $V^e$ şi să depindă de valorile nodale $\{u_n\} \in V^e$ , ceea ce reduce problema la calculul pe domeniul elementar. Caracterul repetitiv al calculului matricei elementare a fost factorul care a contribuit în măsură decisivă la succesul MEF.

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left( \int_{V^e} \{N\} \mathcal{L} \langle N \rangle \, dV \, \{u_n\} + \int_{V^e} \{N\} \, f_v dV \right) \qquad (4.3)$$

In continuare, după integrarea prin părţi, utilizînd exprimarea matriceală, în cazul unui sistem staţionar, (4.3) devine :

$$W^e = \int_{V^e} (\langle \delta(\partial u^e) \rangle [D] \{\partial u^e\} - \delta u^e f_v) dV - \int_{S_1^e} du^e f_s dS, \qquad (4.4)$$

în care:

$$\langle \delta u^e \rangle = \langle u^e \ \frac{\partial u^e}{\partial x} \ \dots \ \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \ \dots \rangle$$
$$\langle \delta(\partial u^e) \rangle = \langle \delta u^e \, \delta\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right) \ \dots \ \delta\left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}\right) \dots \rangle \qquad (4.5\ \text{a şi b})$$

[D] , este o matrice pătrată independentă în raport cu $u^e$ şi derivatele acestora în cazul în care $\mathcal{L}$ este un operator liniar. Dacă $\mathcal{L}$ este un operator neliniar, [D] este, în general, o matrice care depinde de funcţiile $u^e$ şi derivatele acestora.

$f_v$ şi $f_s$, sînt, respectiv, forţele masice şi forţele de suprafaţă (în capitolul 2. $F_i$ şi $p_i$).

$V^e$ , domeniul elementar

$S_1^e = S^e - S_2^e$, porţiunea din frontiera elementară a domeniului $V^e$ pentru care, în urma integrării prin părţi rezultă integrale pe contur.

Procedeul prezentat se exemplifică prin intermediul ecuaţiei lui Poisson (3.7).

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \int_{V^e} \delta u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) dV = o \qquad (4.6)$$

care după integrare prin părţi devine :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \left( \int_{V^e} (\langle \delta(\partial u) \rangle [D] \{\partial u\} - \delta u f_v) dV - \int_{S_1^e} du (f_s - \alpha(u)) dS \right) = o \qquad (4.7)$$

în care:

$$\langle \delta(\partial u) \rangle = \langle \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \rangle$$

$$\langle \partial u \rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial x} \; \frac{\partial u}{\partial y} \rangle$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{bmatrix}$$

Se consideră subdomeniul rectangular plan V partiţionat în subdomenii elementare $V^e$ , din figura 4.1.

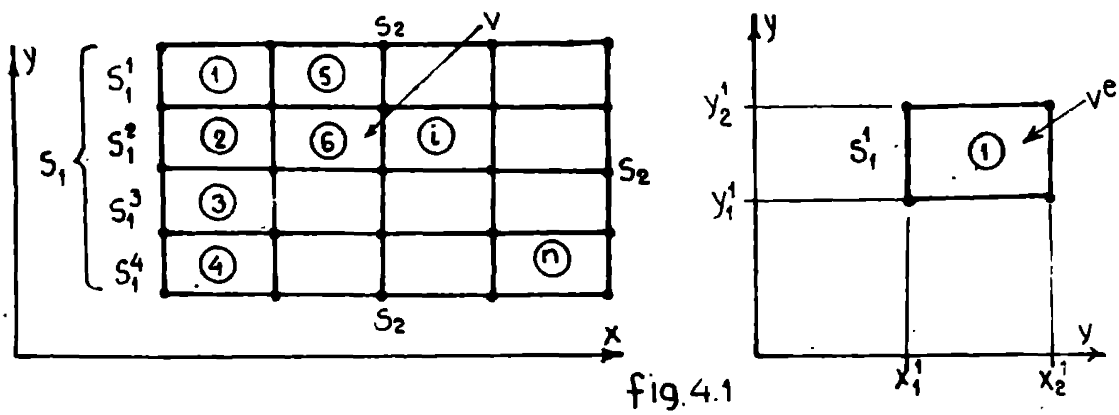



fig.4.1

Ţinînd seama de (4.2) , (4.4) şi (4.5) rezultă :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ( [k] \{u_n\} - \{f\} ), \qquad (4.8)$$

în care $[k]$ este matricea elementară, independentă de $u_n$ dacă $\mathcal{L}$ este un operator liniar ; $\{f\}$ este vectorul acţiunii exterioare pe element; $\{u_n\}$ , vectorul valorilor nodale ale necunoscutelor u eferente elementului ; $\{\delta u_n\}$ prima variaţie a valorilor nodale elementare.

Insumînd pe întreg domeniul se obţine :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \langle \delta u_n \rangle \left( [k] \{u_n\} - \{f\} \right) = o \qquad (4.9)$$

$$W = \langle \delta U_n \rangle \left( [K] \{U_n\} - \{F\} \right) = o \,, \qquad (4.10)$$

în care $[K]$ este matricea globală a sistemului ; $\{F\}$ , vectorul acţiunilor exterioare ; $\{U_n\}$, vectorul valorilor nodale ale necunoscutelor u ; $\delta U_n$ , o variaţie arbitrară a lui $U_n$.

Dacă (4.10) se anulează pentru variaţii arbitrare $\langle \delta U_n \rangle$ , se obţine ecuaţia fundamentală a MEF :

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \qquad (4.11)$$

4.2.2. Condiţii de convergenţă .

In scopul asigurării unei convergenţe monotone a soluţiei aproximative funcţiile aproximative u trebuie să satisfacă două condiţii :

(1) Condiţia de completitudine a dezvoltării polinomiale adoptate pentru funcţiile de aproximare. Dacă funcţiile u din expresia formei integrale $W^e$ sînt de clasa $C^m$ şi funcţiile de interpolare N trebuie să fie polinoame complete de ordin cel puţin egal cu m. Astfel, spre exemplu, dacă pentru o problemă monodimensională

$$W^e = \int_{V^e} \delta\left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}\right) dx \,, \qquad (4.12)$$

funcţiile de interpolare vor trebui să fie polinoame complete de gradul doi, cel puţin, $N(1,x,x^2)$ sau în coordonate locale $N(1, \xi, \xi^2)$, dacă elementul este izoparametric.

(2) Condiţia de compatibilitate, care reclamă continuitatea funcţiilor, aproximative u la interfanta elementelor finite, ceea ce revine la a scrie că

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e \qquad (4.13)$$

Compatibilitatea implică satisfacerea condiţiilor de continuitate şi pentru derivatele pînă la ordinul m-1 ale funcţiilor u prin urmare condiţia de continuitate interelementară a funcţiilor u presupune ca acestea să fie de clasă $C^{m-1}$ - pentru exemplul (4.12) funcţiile u trebuie să fie de clasă $C^1$. In această situaţie se spune că funcţiile de aproximare - elementele finite - sînt conforme.

Dacă condiţiile de continuitate nu sînt în întregime satisfăcute, elementele finite sînt non-conforme şi (4.13) devine :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e + W^d \,, \qquad (4.14)$$

în care $W^d$ este un termen datorat discontinuităţilor dintre elemente. Soluţia u converge către $u_{ex}$ dacă, şi numai dacă, $W^d$ tinde la zero cu creşterea fineţei discratizării.

Este demonstrat în cadrul analizei funcţionale că pentru a se asigura continuitatea funcţiilor u atît în interiorul, cît şi pe conturul elementului finit, condiţia necesară şi suficientă constă ca în dezvoltarea polinomială adoptată pentru aproximarea funcţiilor u să fie cuprins un set complet de funcţii de interpolare.

Intrucît, evident, acest set trebuie să fie finit, se pune problema care este numărul necesar pentru asigurarea completitudinii polinomului în sensul satisfacerii continuităţii. Pentru ca această cerinţă să fie îndeplinită în interiorul elementelor este suficient numai primul termen care este o constantă. Pentru a asigura însă şi conformitatea lor - compatibilitatea funcţiilor u pe interfeţele elementelor - mai trebuiesc adăugaţi şi alţi termeni . Oliveira (156), /157/ a demonstrat că, în general, pentru a fi complet, polinomul trebuie să aibe un număr de coeficienţi arbitrari egali cu numărul parametrilor caracteristici ai elementelor.

Se poate afirma că, de fapt, completitudinea este suficientă prin ea însăşi pentru asigurarea convergenţei, implicînd un acelaşi timp şi conformitatea. Această concluzie conţine cele trei criterii tehnice propuse de Zienkiewicz, /2ol/ şi Bazeley /15/, cu reprezentare în mecanica structurilor.

(1) Dacă pentru anumite deplasări ale nodurilor, deformaţiile specifice sînt constante în cuprinsul elementului, această situaţie trebuie să se regăsească şi în aplicarea legii considerate.

(2) Considerîndu-se o deplasare de corp rigid dată elementului finit, din aplicarea legii trebuie să rezulte că elementul nu se deformează - adică nu sînt introduse deformaţii. Acest criteriu este de fapt, o consecinţă a primului, întrucît deplasarea de corp rigid poate fi echivalentă cu o deformaţie constantă nulă.

(3) Funcţiile trebuie să asigure continuitatea deplasărilor pe interfeţele elementelor, pentru ca energia de deformare acumulată de acestea să fie nulă. Uneori această condiţie nu este respectată (4.14), dar se pot obţine, totuşi, rezultate corecte dacă se respectă prima condiţie deoarece la limita aceasta implică şi continuitatea deplasărilor ($W^d = o$).

Pentru cazurile în care condiţia (3) nu este satisfăcută - nu este asigurată conformitatea elementelor - se procedează la efectuarea aşa numitelor teste de control a convergenţei (Patch tests). Acestea pot fi numerice sau variaţionale. Pentru o formă integrală de tip Galerkin (3.33) , testul variaţional constă în verificarea relaţiei

$$W(P_m) = \sum_{e=1}^{n} W^e(P_m) = o \qquad (4.15)$$

în care $P_m(x)$ este un polinom arbitrar de ordinul m, $u=P_m(x)$.
In aceste condiţii expresia integrală elementară $W^e$ poate fi transformată, în cele mai multe cazuri, într-o integrală pe contur după efectuarea integrării prin părţi.

$$\sum_{e=1}^{n} \int_{S^e} (\ldots)\, dS = o \qquad (4.16)$$

Pentru fiecare element integrala pe contur poate fi privită ca o sumă de două integrale.

$$\int_{S^e} (\ldots)dS = \int_{S_C^e} (\ldots)\, dS + \int_{S_{NC}^e} (\ldots)dS, \quad (4.17)$$

în care $S^e = S_C^e + S_{NC}^e$, $S_c$ fiind porțiunea de contur pe care este asigurată conformitatea, iar $S_{NC}$ porțiunea non-conformă. După asamblare, integralele pe $S_C^e$ se anulează între ele și rămîne de verificat că

$$\int_{S_{NC}^e} (\ldots)\, dS = 0 \qquad (4.18)$$

Criteriul de analiză a convergentei prezentat în paragraful §.2.4. este perfect aplicabil în cazul de față, cu observația că pentru evaluarea ordinului de variație a funcționalei și a erorii de interpolare este uneori necesar să se apeleze la un test de control a convergenței, care poate fi de forma (4.15)

## 4.3. DISCRETIZAREA FORMELOR INTEGRALE ELEMENTARE

### 4.3.1. Expresia matricială a formelor integrale elementare.

In expresia (4.4) se fac înlocuirile :

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} U \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \ldots \end{bmatrix} \{u_n\} = [B]\{u_n\} \qquad (4.19)$$

$$\{\delta(\partial u)\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta(\dfrac{\partial u}{\partial x}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \ldots \end{bmatrix} \{\delta u_n\} = [B_\delta]\{\delta u_n\} \qquad (4.20)$$

și ținînd seama că în cazul unui operator $\mathcal{L}$ autoadjunct

$$\{\delta(\partial u)\} \equiv \delta(\{\partial u\}) \; ; \quad [B_\delta] \equiv [B] \qquad (4.21)$$

rezultă :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left( \int_{V^e} [B_\delta]^T [D]\, [B]\, dV \{u_n\} - \int_{V^e} \{N\} f_v dV - \int_{S_1^e} \{N\} f_s dS \right) \qquad (4.22)$$

Comparînd termenii din (4.9) cu cei din (4.22) se obțin relațiile :

$$[k] = \int_{V^e} [B_\delta]^T [D] [B] \, dV \qquad (4.23)$$

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v + \int_{S_1^e} \{N\} f_s \, dS \qquad (4.24)$$

4.3.2. Operatori diferenţiali neliniari.

In cazul problemelor neliniare matricea elementară $[k]$ - de rigiditate - conţine termeni care depind de $u_n$.

$$[k(u_n)] = [k_\ell] + [k_{n\ell}] \qquad (4.25)$$

în care $[k_\ell]$ este partea liniară din $[k(u_n)]$, iar $[k_{n\ell}]$ partea neliniară. Pentru exemplificare, în cele ce urmează se tratează problema barei drepte cu deplasări transversale mari (fig.4.2). Bara se consideră cu secţiune dreptunghiulară bxh.

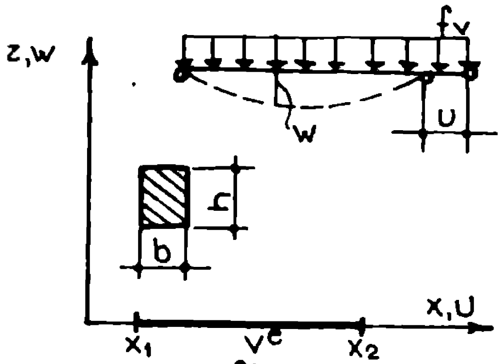



fig.4.2

$$W^e = EA \int_{V^e} \delta\varepsilon . \varepsilon dx + EI \int_{V^e} \delta\left(-\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(-\frac{d^2w}{dx^2}\right) dx - \int_{V^e} \delta w \, f_v . dx \, , \qquad (4.26)$$

$$A = bh \; ; \; I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2$$

Cu aceste expresii rezultă :

$$W^e = EA \int_{V^e} \left(\delta\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\left(\frac{dw}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^3\right)dx + \right.$$

$$+ EI \int_{V^e} \left(-\frac{d^2w}{dx^2}\right) \frac{d^2w}{dx^2} \, dx - \int_{V^e} \delta w \, f_v dx \qquad (4.27)$$

Se face observaţia, că în acest caz, $W^e$ reprezintă prima variaţie energiei potenţiale totale.

Se descompune expresia (3.27) într-o sumă de două forme $W_\ell^e$ - liniară - şi $W_{n\ell}^e$ - neliniară :

$$W^e = W_\ell^e + W_{n\ell}^e \, , \qquad (4.28)$$

în care :

$$W_\ell^e = \int_{V^e} \left(\langle \delta(\partial u) \rangle [D_\ell] \{\partial u\} - \delta w \, f_v\right) dx \qquad (4.29)$$

cu:

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{d^2w}{dx^2} \end{Bmatrix}; \qquad \{\delta(\partial u)\} = \begin{Bmatrix} \delta(\frac{du}{dx}) \\ \delta(\frac{dw}{dx}) \\ \delta(\frac{d^2w}{dx^2}) \end{Bmatrix} \tag{4.3o a,b}$$

$$[D_\ell] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

şi respectiv,

$$W^e_{n\ell} = \int_{V^e} \langle\delta(\partial u)\rangle [D_n] \{\partial u\} \, dx \tag{4.32}$$

cu

$$[D_{n\ell}] = EA \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{dw}{dx} & 0 \\ \frac{dw}{dx} & \frac{1}{2} & (\frac{dw}{dx})^2 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4,33}$$

Dacă pentru u şi w se fac aproximările

$$u = \langle N_u\rangle \{u_n\}$$
$$w = \langle N_w\rangle \{w_n\} \tag{4.34 a,b}$$

Expresiile (3.3o) devin

$$\{\partial u\} = \begin{bmatrix} \langle\frac{d\,N_u}{dx}\rangle & 0 \\ 0 & \langle\frac{dN_w}{dx}\rangle \\ 0 & \langle\frac{d^2N_w}{dx^2}\rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ w_n \end{Bmatrix} = B\,\{u_n\} \tag{4.35 a,b}$$

$$\{\delta(\partial u)\} = [B]^T \; [D_\ell][B] \; dx$$

Ţinînd seama în expresia (4.9) de (4.28) , (4.29) , (4.32) şi (4.35) rezultă în final :

$$[k_\ell] = \int_{V^e} [B]^T [D_\ell] [B] \, dx \tag{4.36}$$

$$\left[k_{n\ell}\right]=\int_{V^e}\left[B\right]^T\left[D_{n\ell}\right]\left[B\right]dx \qquad (4.37)$$

Matricea $\left[k_{n\ell}\right]$ nesimetrică în condițiile în care matricea $\left[D_{n\ell}\right]$ este de forma (4.33) . Dacă se ia pentru $\left[D_{n\ell}\right]$ o altă expresie

$$\left[D_{n\ell}\right]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\ \frac{dw}{dx} & 0 \\ \frac{1}{2}\ EA\ \frac{dw}{dx} & \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\ \frac{du}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.38)$$

matricea $\left[k_{n\ell}\right]$ devine simetrică, păstrîndu-se aceeași formă pentru $\left[B\right]$ .

4.3.3. Exprimarea formelor integrale în sistemul de axe local.

Intrucît funcțiile de interpolare sînt definite în sistemul de axe local al elementului ($\xi, \eta, \zeta$) iar funcțiile u și derivatele acestora în expresiile anterioare au fost definite în sistemul de axe global (x,y,z) (fig.4.3). trebuie realizată trecerea lor în sistemul local (de referință).

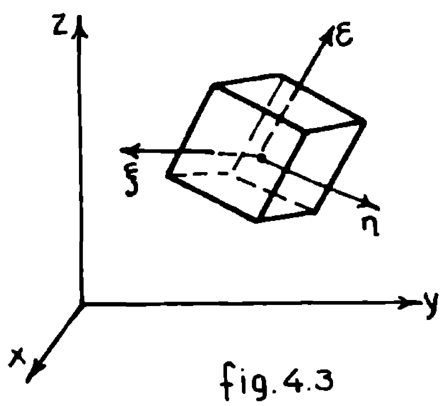



fig.4.3

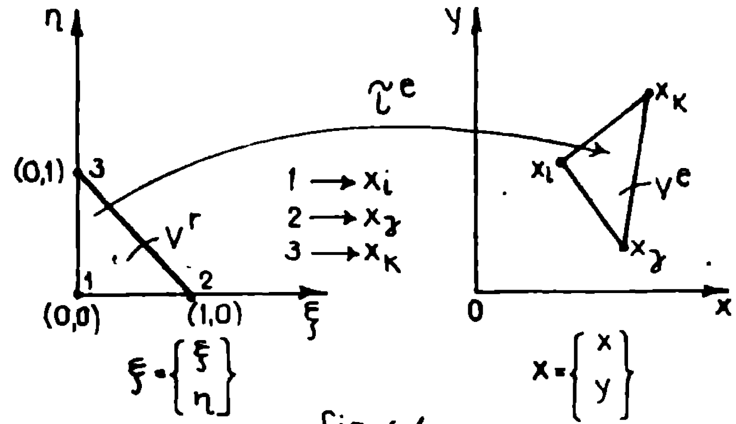



fig.4.4

Transformarea (fig.4.4) definește coordonatele fiecărui punct al elementelor $V^e$, în sistemul de axe global, în funcție de coordonatele abstracte $\xi$ corespunzătoare nodurilor analoage ale elementului definit în sistemul de axe local (de referință) ,$V^r$.

$$\tau^e\ :\xi \longrightarrow x^{\varepsilon}=x^e\ (\xi)\ =\left[\bar{N}\ (\xi)\right]\left\{x_n\right\} \qquad (4.39)$$

în care $\left\{x_n\right\}$ sînt coordonatele nodurilor elementului $V^e$(n=i,j,k) iar $\bar{N}$ ( $\xi$ ) reprezintă funcțiile geometrice de transformare, care se aleg ca polinoame în $\xi$ .

Pe baza transformării (4.39) rezultă în continuare :

$$U\ (\xi)=\langle N\ (\xi)\rangle\left\{u_n\right\};\quad \xi=\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix} \qquad )(4.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\} \qquad (4.41)$$

$$\{\partial_\xi\} = [J]\{\partial_x\} \quad \text{şi} \quad \{\partial_x\} = [j]\{\partial_\xi\} \;, \qquad (4.42\ a,b)$$

în care : $\xi = \langle \xi\ \eta\ \zeta \rangle$; $x = \langle x\ y\ z \rangle$, $[j] = [J]^{-1}$ ,

iar $[J]$ este matricea jacobiană.

Cu relaţiile (4.4o) şi (4.41) , matricele $[B]$, $[k]$ şi $\{f\}$ devin :

$$[k] = \int_{V^r} [B_{\delta\xi}]^T [Q_\delta][D][Q][B_\xi] \det (J)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (4.43)$$

$$\{f\} = \int_{V^r} \{N\} f_v \det (J)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int_{S^r} \{N\} f_s J_s ds_1\, ds_2 \qquad (4.44)$$

$$[B_\delta] = [Q_\delta][B_{\delta\xi}] \quad \text{sau} \quad [B] = [Q]\,[B_\xi] \qquad (4.45)$$

In aceste relaţii , dacă $\mathcal{L}$ este un operator autoadjunct

$$[Q_\delta] = [Q] \quad \text{şi} \quad [B_{\delta\xi}] = [B_\xi] , \qquad (4.46\ a,b)$$

în care $[Q]$ este o matrice care conţine termenii ai matricii $[j] = [J]^{-1}$ iar coordonatele curbilinii $s_1$ şi $s_2$ relative la S sînt, în general, $(\xi,\eta)$, $(\xi,\zeta)$ sau $(\eta,\zeta)$ şi

$$J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} \qquad (4.47)$$

cu

$$x = \langle N(s)\rangle \{x_n\} ; \quad y = \langle N(s)\rangle \{y_n\} ; \quad z = \langle N(s)\rangle \{z_n\}$$

4.3.4. Exemple de forme integrale şi matrici elementare.

In general formele integrale $W^e$ sînt sume de termeni independenţi de tipul

$$W^e = \int_{V^e} \left(\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y}\right) dV \qquad (4.48)$$

In tabelul 4.1. se prezintă, în formă generală, termenii care se întîlnesc în mod uzual componenţa lui $W^e$ şi corespondenţii acestora în matricele $[B]$ şi $[D]$ .

tabelul 4.1

| nr. crt. | forma termenilor | $[B_\delta]^T$ | $[D]$ | $[B]$ | proprietățile matricei $[K]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | pătratic simetric $\int_{ve} \delta u \cdot u \, dV$ | $\{N\}$ | 1 | $\langle N \rangle$ | constantă | simetrică |
| 2 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dV$ | $\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}$ | 1 | $\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle$ | constantă | simetrică |
| 3 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dV$ | $\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial x}\right\}$ | 1 | $\left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right\rangle$ | constantă | simetrică |
| 4 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) \frac{\partial^m u}{\partial x^m} dV$ | $\left\{\frac{\partial^m N}{\partial x^m}\right\}$ | 1 | $\left\langle \frac{\partial^m N}{\partial x^m} \right\rangle$ | constantă | simetrică |
| 5 | pătratic nesimetr. $\int_{ve} \delta u \frac{\partial u}{\partial x} dV$ | $\{N\}$ | 1 | $\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle$ | constantă | nesimetrică |
| 6 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dV$ | $\left\{\frac{\partial^m N}{\partial x^m}\right\}$ | 1 | $\left\langle \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right\rangle$ | constantă | nesimetrică dacă $m \neq n$ |
| 7 | neliniar $\int_{ve} \delta u \, u \frac{\partial u}{\partial x} dV$ | $\{N\}$<br>$\{N\}$ | $\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{U_n\}$<br>$\langle N \rangle \{U_n\}$ | $\langle N \rangle$<br>$\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle$ | funcție de $\{U_n\}$<br>funcție de $\{U_n\}$ | simetrică<br>nesimetrică |
| 8 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dV$ | $\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}$ | $\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{U_n\}$ | $\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle$ | funcție de $\{U_n\}$ | simetrică |
| 9 | $\int_{ve} \delta\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) D\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..\right) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dV$ | $\left\{\frac{\partial^m N}{\partial x^m}\right\}$ | $D(\{U_n\})$ | $\left\langle \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right\rangle$ | funcție de $\{U_n\}$ | nesimetrică dacă $m \neq n$ |
| 10 | patratic $\int_{se} \delta u \, u \, dS$ | $\{N\}$ | 1 | $\langle N \rangle$ | constantă | simetrică |
| 11 | linear $\int_{ve} \delta u \, f_v \, dV$ | $\{N\}$ | 1 | $f_v$ | $W^e = \langle \delta U_n \rangle \{f\}$<br>$\{f\} = \int_{ve} \{N\} f_v \, dV$ | |
| 12 | $\int_{S_1^e} \delta u \, f_s \, dS$ | $\{N\}$ | 1 | $f_s$ | $W^e = \langle \delta U_n \rangle \{f\}$<br>$\{f\} = \int_{S_1^e} \{N\} f_s \, dS$ | |
| 13 | nestaționar $\int_{ve} \delta u \frac{\partial u}{\partial t} dV$ | $\{N\}$ | 1 | $\langle N \rangle$ | $W^e = \langle \delta U_n \rangle [c] \left\{\frac{dU_n}{dt}\right\}$<br>$[c] = \int_{ve} \{N\} \langle N \rangle dV$ | |
| 14 | $\int_{ve} \delta u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV$ | $\{N\}$ | 1 | $\langle N \rangle$ | $W^e = \langle \delta U_n \rangle [m] \left\{\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right\}$<br>$[m] = \int_{ve} \{N\} dV$ | |

**P1** OPERATIUNI COMUNE ELEMENTELOR DE ACELASI TIP

1. determinarea factorilor de pondere $W_r$ si a punctelor de integrare $\xi_r$

2. construirea functiilor de interpolare $N$ si $\bar{N}$ si a derivatelor acestora in raport cu $\xi$ in punctele de integrare (pt. elementele izoparametrice $N \equiv \bar{N}$)

**preprocesare pe elementul de referinta (in coord. locale)**

$$\langle N(\xi_r) \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial N(\xi_r)}{\partial \xi} \right\rangle$$

intrări

- $\{\xi_i\}$ noduri de interpolare
- $\{\xi_r\}$ puncte de integrare
- $\langle P(\xi) \rangle$ baza polinomiala

**P2** OPERATIUNI NECESARE PENTRU DETERMINAREA [K]

$$[K] = \int_{V^r} [B_{\delta\xi}]^T [Q_\delta]^T [D][Q][B_\xi] \det(J)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (4.43)$$

1. construirea matricei jacobiene [J]

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \langle x\, y\, z \rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \zeta} \rangle \end{bmatrix}}_{3 \times n^e} \underbrace{\left[ \{x_n\}\ \{y_n\}\ \{z_n\} \right]}_{n^e \times 3}$$

2. construirea derivatelor functiilor de interpolare N in raport cu x (x, y, z) in functie de derivatele in raport cu $\xi$ ($\xi, \eta, \zeta$)

$$\{\partial_x\} = [J]\{\partial_\xi\} \qquad x = \langle x, y, z \rangle$$
$$\xi = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle$$

3. construirea matricelor [B] si [D]

4. introducerea in [K] a valorilor produselor $[B]^T [D] [B] \det(J) W_r$ calculate in fiecare punct de integrare

fig. 4.5

4.3.5. Determinarea vectorilor şi matricelor elementare.

4.3.5.1. Matricea de rigiditate elementară.

Algoritmul general pentru determinarea matricei de rigiditate elementară [k] este prezentat schematic în figura 4.5.

4.3.5.2. Matricea masei elementare.

Algoritmul pentru determinarea matricei masei elementare este prezentat în figura 4.6.

**P1** OPERATIUNI COMUNE ELEMENTELOR DE ACELAŞI TIP § 4.3.5.1

↓

**P2** OPERATIUNI NECESARE PENTRU DETERMINAREA MATRICEI [m]

$$[m] = \int_{V^e} \{N\}\langle N\rangle \, dV$$

$$[m] = \int_{V^r} \{N\}\langle N\rangle \det(J)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

1. calculul matricei jacobiene [J] si a determinantului acesteea det [J].

2. introducerea în [m] a valorilor produselor $\{N\}\langle N\rangle \det(J)\, W_r$ calculate în fiecare punct de integrare.

fig.4.6

4.3.5.3. Vectorul încărcărilor.

Vectorul {f} a forţelor elementare se determină în ipoteza că acţionează numai forţele masice (de volum) $\{f_V\}$. Algoritmul pentru determinarea vectorului forţelor elementare este prezentat în figura 4.7.

**$P_1$** OPERATIUNI COMUNE ELEMENTELOR DE ACELAŞI TIP § 4.3.5.1

↓

**P2** OPERATIUNI NECESARE PENTRU DETERMINAREA VECTORULUI {f}

$$\{f\} = \int_{V^r} \{N\} f_V \det(J)\, d\xi\, d\eta\, d\varepsilon + \int_{S^r} \{N\} f_S J_S\, dS_1\, dS_2 \quad (4.44)$$

1. Calculul matricei jacobiene [J] si a determinantului jacobian det (J).

2. Introducerea în {f} a valorilor $\{N\} f_V \det(J) w_r$ calculate în fiecare punct de integrare $\xi_r$

fig.4.7

4.3.5.4. Vectorul reziduurilor elementare.

Algoritmul pentru determinarea vectorului $\{r\}$ a reziduurilor din soluţia aproximativă $\{u_n\}$ este prezentat în figura 4.8.

**P1** — OPERAŢIUNI COMUNE ELEMENTELOR DE ACELAŞI TIP § 4.3.5.1

↓

**P2** — OPERAŢIUNI NECESARE PENTRU DETERMINAREA VECTORULUI $\{r\}$

$$\{r\}=\{f\}-[k]\{u_n\} \tag{4.50}$$

prin asamblare rezultă funcţia reziduu globală

$$\{R\}=\sum_e\{r\}=\{F\}-[K]\{U_n\} \tag{4.51}$$

1. calculul matricelor $[B]$, $[D]$, $[J]$
2. Introducerea în $\{r\}$ (în $[K]$ - fig 4.5, P2 -) a valorilor produselor $[B]^T[D][B]\{u_n\}$ det. $(J)$ în vectorul $\{r\}$, calculate în fiecare punct $\xi_r$

fig. 4.8

4.3.5.5. Gradientul deplasărilor.

Algoritmul pentru determinarea gradientului deplasărilor $\{\partial_u\}$ în punctele de integrare pentru deplasările nodale $\{u_n\}$ este prezentat în figura 4.9.

**P1** — OPERAŢIUNI COMUNE ELEMENTELOR DE ACELAŞI TIP § 4.3.5.1

↓

**P2** — OPERAŢIUNI NECESARE PENTRU DETERMINAREA GRADIENTULUI $\{\partial u\}$

$$\{\partial u\}=\begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \langle N\rangle \\ \left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle \\ \cdots \end{bmatrix}\{u_n\}=[B]\{u_n\} \tag{4.19}$$

1. construirea matricei $[B]$
2. calculul gradientului $\{\partial u\}=[B]\{u_n\}$ în fiecare punct de integrare $\xi_r$

fig. 4.9

4.3.5.6. Exemple : determinarea matricelor elementare pentru un element finit izoparametric cu 8 noduri pentru problemele plane de elasticitate şi pentru un element finit de bază încovoiată în plan.

Forma integrală caracteristică problemelor plane de elasticitate rezultă din (3.4o) de forma :

$$W^e = \int_{V^e} \langle\delta\varepsilon\rangle[D]\{\varepsilon\}dV - \int_{V^e} \langle\delta u\rangle \begin{Bmatrix} f_{V_x} \\ f_{V_y} \end{Bmatrix} dV - \int_{S_f^e} \langle\delta u\rangle \begin{Bmatrix} f_{S_x} \\ f_{S_y} \end{Bmatrix} dS \qquad (4.52)$$

în care:

$\langle u\rangle = \langle u \quad v\rangle$: deplasările într-un punct

$\langle\delta u\rangle = \langle\delta u \; \delta v\rangle$ : variaţiile deplasărilor

$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \gamma_{xy}\rangle$ = deformaţiile specifice

$= \langle \frac{\partial u}{\partial x} \; \frac{\partial v}{\partial y} \; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\rangle$

$f_{V_x}, f_{V_y}$ = forţele masice pe unitatea de volum după x şi y

$f_{S_x}, f_{S_y}$ = forţele pe unitatea de suprafaţă pe $S_1^e$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$ - matricea de elasticitate pentru medii izotrope

$d_1 = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)}$; $d_2 = \frac{\nu d_1}{(1-\alpha\nu)}$ ; $d_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$

E, $\nu$ : modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson;

$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

$\alpha = 0$ - stare plană de tensiuni ;

$\alpha = 1$ - stare plană de deformaţii.

Pentru un element finit izoparametric cu 8 noduri (fig.4.1o) cu două grade de libertate pe nod cîmpul deplasărilor se scrie :

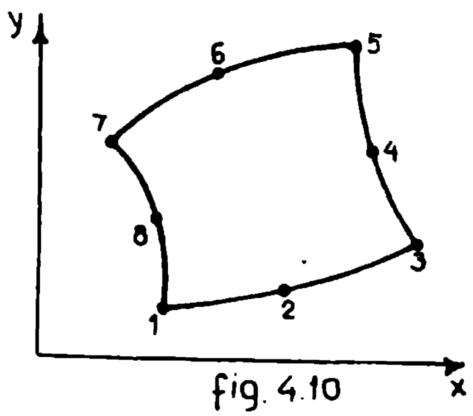



fig. 4.10

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{u_n\} \qquad (4.53)$$

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} = [N]\{\delta u_n\} \qquad (4.54)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \qquad (4.55)$$

în care funcţiile $N_1 \dots N_8$ sînt polinoame de interpolare /45/, /68/, /159/.

$$\langle U_n\rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8\rangle \qquad (4.56)$$

$$\langle\delta U_n\rangle = \langle\delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \dots \quad \delta u_8 \quad \delta v_8\rangle \qquad (4.57)$$

$$W^e = \langle\delta U_n\rangle \, [k] \, \{u_n\} - \langle\delta u_n\rangle\{f\}$$

$$\underset{(16x16)}{[K]} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T \; [D] \; [B] \; \det \; (J) \; d\xi \, d\eta \qquad (4.58)$$

unde:

$$\underset{3x16}{[B]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (4.59)$$

cu :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = j_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = j_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

Vectorul forțelor este de forma

$$\underset{16x1}{\{f\}} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N] \begin{Bmatrix} fV_x \\ fV_y \end{Bmatrix} \det \; (J) \; d\xi \, d\eta \qquad (4.60)$$

iar matricea maselor

$$\underset{16x16}{[m]} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N]^T \; [N] \det \; (J) \; d\xi \, d\eta \qquad (4.61)$$

Pentru elementul finit de bară încovoiată în plan (fig.4.11) forma integrală (4.52) devine

$$w^e = \int_{V^e} \left\langle \delta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right\rangle D \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dV - \delta w \; f_v \Big) \; dX \qquad (4.62)$$

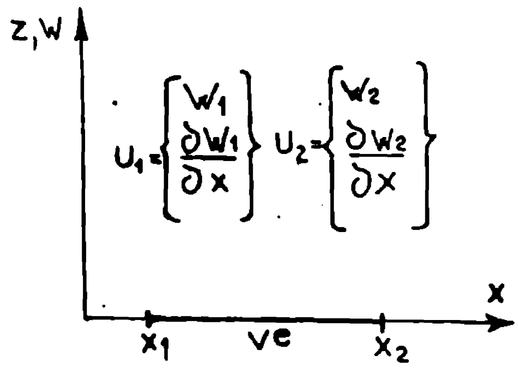



fig.4.11

în care:

$$\langle u \rangle = \left\langle w \; \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle = [N]\{u_n\} \qquad (4.63)$$

$f_V$ - forța uniform distribuită

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \; ; \; \varepsilon(x,z) = z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$[N] = [N_1 \; N_2 \; N_3 \; N_4], \qquad (4.64)$$

unde $N_i$ sînt funcții Hermite /45/, /159/.

$$\langle u_n \rangle = \left\langle w_1 \; \frac{\partial w_1}{\partial x} \; w_2 \; \frac{\partial w_2}{\partial x} \right\rangle \qquad (4.65)$$

$$\underset{4 \times 4}{[K]} = \int_{-1}^{1} [B]^T [D] [B] \det(J)\, d\xi \qquad (4.66)$$

ou:

$$= EI \; ; \quad \det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \ell \qquad \ell = x_2 - x_1$$

$$[B] = \frac{1}{\ell^2} \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2 N_4}{\partial \xi^2} \qquad (4.67)$$

Dacă se fac înlocuirile funcţiilor $N_i$ rezultă :

$$[k] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell & -6\ell & 6\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ \text{simetric} & & & 4\ell \end{bmatrix} \qquad (4.68)$$

In mod similar se obţine matricea de masă

$$[m] = \int_{-1}^{1} [N]^T [N] \det(J)\, d\xi = \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ \text{simetric} & & 156 & -22\ell \\ & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \qquad (4.67)$$

4.3.6. Asamblarea formelor integrale elementare.

După discretizare forma integrală elementară $W^e$ este dată de expresia (4.8). Vectorii $\{\delta u_n\}$ şi $\{u_n\}$ sînt diferiţi pentru fiecare element. Vectorii $\{\delta U_n\}$ şi $\{U_n\}$ sînt vectori globali care conţin valorile nodale din întreg domeniul V.

Forma intregrală globală discretizată W se scrie ca sumă a formelor elementare $W^e$ (4.9) şi (4.10). Se poate însă exprima şi $W^e$ în funcţie de $\{U_n\}$ şi $\{\delta U_n\}$ .

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle \left( [K^e] \{U_n\} - \{F^e\} \right) \qquad (4.68)$$

Matricea $[K^e]$ este construită prin expandarea metricelor $[k]$ într-o matrice nulă avînd aceeaşi dimensiune cu $[K]$ . In mod similar $\{F^e\}$ este construit prin expansiunea vectorilor $\{f\}$ într-un vector nul de acelaşi rang cu $\{F\}$ .

Procesul de expandare a matricelor $[k]$ se desfăşoară în doi paşi: prima dată post-factorul $\{u_n\}$ se înlocuieşte cu $\{U_n\}$ , apoi , pre-factorul $\{\delta u_n\}$ se înlocuieşte cu $\langle \delta U_n \rangle$ . Pentru ilustrarea procedeului se consideră următoarea situaţie :

$$W^e = \langle \delta u_I \; \delta u_J \rangle \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ u_J \end{Bmatrix} = \langle \delta u_n \rangle [k] \{u_n\} \qquad (4.69)$$

Vectorul global al variabilelor nodale este

$$\langle U_n\rangle = \langle u_1\ u_2\ \dots\ U_I\ \ u_{I+1}\ \dots\ U_J\ u_{J+1}\ \dots u_n\rangle$$

pasul I : înlocuirea lui $\{u_n\}$ prin $\{U_n\}$ .

Pentru a păstra valoarea lui $W^e$ neschimbată matricea $[k]_{2\times 2}$ se înlocuieşte printr-o matrice $[k']_{2xn}$ în care coloana I este $\langle k_{11}\ k_{21}\rangle^T$,

iar coloana J este $\langle k_{12}\ k_{22}\rangle^T$ , ceilalţi termeni fiind nuli

$$W^e = \langle \delta u_I \quad u_J\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix} & 0 & \dots & \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_I \\ u_{I+1} \\ \vdots \\ u_J \\ u_{J+1} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (4.70)$$

pasul II înlocuirea lui $\langle \delta u_n\rangle$ prin $\langle \delta U_n\rangle$

In acest caz matricea $[K']$ se înlocuieşte prin matricea $[K^e]$ de acelaşi rang cu $[K]$ în care linia I este prima linie din $[k']$ iar linia J este linia a doua din $[k']$, ceilalţi termeni fiind nuli.

$$\langle \delta U_n\rangle = \langle \delta u_1\ \ \delta u_2\ \ \dots \delta U_I\ \delta_{I+1}\ \dots\ \delta u_J\ \delta u_{J+1}\ \dots\ \delta u_n\rangle$$

$$W^e = \langle \delta U_n\rangle \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{11} & \dots & K_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{21} & \dots & k_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad (I) \qquad (J) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (I) \\ \\ \{U_n\} = \langle \delta U_n\rangle [K^e]\{U_n\} \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \qquad (4.71)$$

Pentru a ilustra expandarea lui $\{f\}$ se consideră expresia

$$W^e = \langle \delta u_I \quad u_J\rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{2\times 1} = \langle \delta u_n\rangle \{f\} \qquad (4.72)$$

Pentru a păstra $W^e$ neschimbat după înlocuirea lui $u_n$ cu $U_n$ trebuie substituit vectorul de rangul 2 $\{f\}$ prin vectorul $\{F^e\}$ de rang n în care termenul corespunzător liniei I este $f_1$, iar cel corespunzător liniei J este $f_2$, ceilalţi termeni fiind nuli.

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_1 \\ \vdots \\ f_2 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ (I) \\ \\ \\ \\ (J) \\ \end{matrix} = \langle \delta U_n \rangle \{F^e\} \tag{4.73}$$

Forma integrală globală se obţine prin sumare

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \langle \delta U_n \rangle ( [K^e] \{U_n\} - \{F^e\})$$

$$= \langle \delta U_n \rangle \left( \left[ \sum_{=1}^{n} [K^e] \right] \{U_n\} - \left\{ \sum_{=1}^{n} \{F^e\} \right\} \right) \tag{4.74}$$

$$= \langle \delta U_n \rangle ( [K] \{U_n\} - \{F\} )$$

în care:

$$[K] = \sum_{=1}^{n} [K^e] \quad ; \quad \{F\} = \sum_{=1}^{n} \{F^e\} \tag{4.75 a,b}$$

Se prezintă în continuare următorul exemplu de calcul : se dă domeniul V discretizat în două elemente triunghiulare cu cîte un singur GDL pe nod (fig. 4.12).

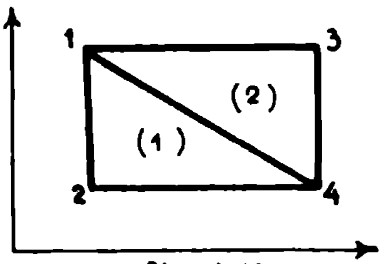


fig. 4.12

Elementul(1): $\langle u_n^{(1)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_4 \rangle$

$\langle \delta u_n^{(1)} \rangle = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_4 \rangle$

Elementul (2): $\langle u_n^{(2)} \rangle = \langle u_1 \quad u_4 \quad u_3 \rangle$

$\langle \delta u_n^{(2)} \rangle = \langle u_1 \quad u_4 \quad u_3 \rangle$

$$\langle U_n \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \rangle \ ; \langle \delta U_n \rangle = \langle \delta u_1 \ \delta u_2 \ \delta u_3 \ \delta u_4 \rangle$$

$$W^{(1)} = \langle \delta u_n^{(1)} \rangle ([k^{(1)}] \{u_n^{(1)}\} - \{f^{(1)}\})$$

$$W^{(2)} = \langle \delta u_n^{(2)} \rangle \left( \left[ k^{(2)} \right] \left\{ u_n^{(2)} \right\} - \left\{ f^{(2)} \right\} \right)$$

$$W^{(1)} = \langle \delta u_1 \; \delta u_2 \; \delta u_4 \rangle \left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{(1)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}^{(1)} \right)$$

Introducînd matricea expandată $[K^{(1)}]$ şi vectorul expandat $\{F^{(1)}\}$ $W^{(1)}$ se rescrie

$$W^{(1)} = \langle \delta u_1 \delta u_2 \; \delta u_3 \; \delta u_4 \rangle \left( \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & & k_{33} \end{bmatrix}^{(1)}}_{[K^{(1)}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_3 \end{Bmatrix}^{(1)}}_{F^{(1)}} \right)$$

In mod identic se obţine pentru elementul (2)

$$W^{(2)} = \langle \delta u_1 \; \delta u_2 \; \delta u_3 \delta u_4 \rangle \left( \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & k_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & k_{32} \\ k_{21} & 0 & k_{23} & k_{22} \end{bmatrix}^{(2)}}_{K^{(2)}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ f_2 \end{Bmatrix} \right)$$

$$[K] = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(2)} & k_{13}^{(1)} + k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & k_{23}^{(1)} \\ k_{31}^{(2)} & 0 & k_{33}^{(2)} & k_{32}^{(2)} \\ k_{31}^{(1)} + k^{(2)} & k_{32}^{(1)} & k_{23}^{(2)} & k_{33}^{(1)} + k_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \{F^{(1)}\} + \{F^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(2)} \\ f_3^{(1)} + f_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

4.3.7. Generarea sistenului de ecuaţii.

4.3.7.1. Formularea sistemului de ecuaţii.

După discretizare şi asamblare forma integrală devine

$$W = \langle \delta U_n \rangle \left( [K] \{U_n\} - \{F\} \right) = 0, \tag{4.76}$$

la care se ataşează condiţiile de margine

$$\begin{aligned} \delta U_i &= 0 \\ U_i &= \bar{U}_i \end{aligned} \tag{4.77}$$

pentru toate gradele de libertate $U_i$ avînd valori specificate $\bar{U}_i$.

In final, trebuie rezolvat sistemul de ecuaţii algebrice:

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \tag{4.78}$$

modificat în prealabil în funcţie de condiţiile (4,77).

4.3.7.2. Introducerea condiţiilor de margine :

Există trei tehnici de calcul, cunoscute în acest sens:

a) introducerea unui număr foarte mare în diagonala principală, corespunzător condiţiei $U_i = \bar{U}_i$ ;

b) anularea termenilor liniei şi coloanei corespunzătoare lui $U_i = U_i$ ;

c) eliminarea liniei şi coloanei corespunzătoare lui $U_i = \bar{U}_i$ .

Aceste metode sînt cunoscute din literatura de specialitate/ 9 /. In programul - ASEP se utilizează ultimul procedeu.

4.3.7.3. Transformarea variabilelor.

Intre deplasările nodale $U_n$ şi $U_n'$ (orientate diferit de primele). există relaţia :

$$\begin{aligned} \delta U_n &= [R] \{U_n'\} \\ \{U_n\} &= [R] \{U_n'\}, \end{aligned} \tag{4.79}$$

în care $[R]$ este o matrice pătrată cu elemente constante, numită matrice de transformare. Inlocuind (4.79) în (4.76) rezultă

$$W = \langle \delta U_n' \rangle \left( [K'] \{U_n'\} - \{F'\} \right) = 0 \tag{4.80}$$

în care:

$$\begin{aligned} [K'] &= [R^T][K][R] \\ \{F'\} &= [R^T]\{F\}. \end{aligned}$$

## 4.4. PROCEDURI NUMERICE.

### 4.4.1. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare /41/, /48/, /112/, /133/, /159/, /179/.

Metodele de soluţionare a sistemului 4.78 se grupează în general în două categorii :

- Metode exacte,cunoscute ca metode directe, bazate în general pe procedeul de eliminare Gauss.
- Metode iterative, între care procedeul Gauss-Seidel este cel mai cunoscut.

Metodele directe sînt "exacte" în limitele erorilor de tip "roundoff", caracteristice tuturor maşinilor de calcul provenind din surse specifice cum sînt: conversiunea constantelor, cumularea efectelor rotunjirilor, utilizarea funcţiilor standard predefinite. Mărimea erorilor "roundoff" poate fi apreciată numai după rezolvarea sistemului de ecuaţii. Soluţia găsită este introdusă pentru verificare în ecuaţiile originale şi se determină reziduurile. Valorile reziduurilor formează un nou vector al forţelor nodale cu care se reia rezolvarea de la capăt. Se determină astfel un al doilea vector al deplasărilor nodale care este o măsură a deteriorării soluţiei exacte din cauza erorilor roundoff. Pe de altă parte, suma vectorilor deplasărilor în cele două rulări ale programului, distincte prin vectorul "forţelor nodale", formează o soluţie mai bună a sistemului ecuaţiilor originale.

Algoritmii metodelor exacte se bazează pe înlocuirea succesivă a ecuaţiilor originale prin ecuaţii echivalente a căror rezolvare este mai simplă.

Cea mai cunoscută şi cu răspîndirea cea mai largă este metoda de eliminare parţială bazată pe numerotarea optimă a nodurilor. Ordinea nodurilor este factorul cheie pentru a obţine formatul de matrice bandă cu cea mai redusă lăţime de semibandă ; ordinea de numerotare a elementelor finite, precum şi ordinea de formare şi asamblare a matricelor elementare, este însă arbitrară. Această metodă de rezolvare, numită şi "metoda de rezolvare cu bandă" este cel mai simplu procedeu utilizat pentru a se exploata avantajul rarefierii termenilor matricei sistemului. Nu este însă unicul procedeu. Un alt procedeu, deosebit de eficace este cel numit al "matricelor rare" (skyline matrix) în care "evidenţa" şi " contabilizarea " poziţiilor submatricelor nenule în schema matricei globale [K] sînt ţinute prin intermediul unor matrice (tablouri) de identificatori şi de localizare. Programul ASEF utilizează o astfel de tehnică /70/.

O metodă directă, fundamental diferită, este metoda de rezolvare "frontală " ale cărei baze au fost puse de Irons /41/. In cadrul acestei metode în procesul de eliminare parţială a necunoscutelor esenţială e numerotarea elementelor finite, independentă de numerotarea nodurilor, care poate fi arbitrară. Se crează, astfel, un "front" care traversează nodurile şi procedează la eliminarea parţială şi succesivă a necunoscutelor. Metoda de rezolvare frontală este indicată pentru aplicarea, în special, în cazul unor structuri complexe cu multe grade de libertate nodale, ca urmare a folosirii elementelor finite tridimensionale, mai ales dacă sînt introduse noduri la mijlocul laturilor.

Tot în categoria metodelor directe de triangularizare a matricei $[K]$, în care toţi termenii nenuli sînt poziţionaţi deasupra diagonalei principale, sînt metodele de rezolvare care utilizează matricele ortogonale, în cadrul aşa numitelor " factorizări matriceale " /45/. Astfel, în procedeul de factorizare Givens se foloseşte matricea ortogonală de rotaţie, iar factorizarea Householder utilizează matricea ortogonală de reflexiune. Ambele procedee sînt indicate în probleme de valori proprii, cît şi în cazul sistemelor de ecuaţii ale căror soluţii sînt instabile din cauza disproporţiei relative foarte mari între mărimile diverşilor coeficienţi de rigiditate. Nici una din aceste metode nu s-a impus, neavînd avantajul eficienţei algoritmilor de tip Gauss.

Tot în cadrul metodelor directe se menţionează factorizarea Choleski. Nici acest procedeu nu s-a impus, însă, în competiţie cu metoda Gauss.

Metodele iterative operează cu valori iniţiale aproximative, care se corectează succesiv pentru a se obţine soluţiile sistemului de ecuaţi în limitele unor erori prestabilite. Metodele iterative sînt mai adecvate la rezolvarea sistemului de ecuaţii care guvernează probleme neliniare (flambaj, vibraţii, etc.), în care soluţiile sînt căutate " pas cu pas ". In domeniul problemelor liniare metodele iterative nu şi-au cucerit popularitatea.

4.4.2. Rezolvarea problemelor neliniare.

4.4.2.1. Nelinearitate fizică şi nelinearitate geometrică /11/, /153/.

In formularea problemelor sistemelor fizice apar două tipuri de nelinearităţi :

- proprietăţile fizico-mecanice - ale materialului - caracteristice sistemului fizic depind de valorile variabilelor nodale U. Această situaţie apare, spre exemplu în plasticitate, în curgerea nenewtoniană, a lichidelor, în curgerea lichidelor prin medii poroase nesaturate, etc. Acestea sînt nelinearităţi fizice ;
- nelinearităţile geometrice pot apărea în ecuaţiile fundamentale care guvernează problema, spre exemplu în cazul sistemelor cu deplasări finite din elasticitate sau în ecuaţii de tip Navier- Stokes. Ecuaţia matriceală fundamentală a problemelor neliniare este de forma

$$W = \langle \delta U_n \rangle \left( [K(U_n)] \{U_n\} - \{F\} \right) = 0, \quad \forall \langle \delta U_n \rangle \qquad (4.81)$$

de unde

$$[K(u)]\{u\} = \{F\} \text{ sau } \{R(u)\} = \{F\} - [K(u)]\{u\} = 0 \qquad (4.82)$$

Pentru unele probleme, cum sînt cele de plasticitate, relaţia (4.82) trece într-o formă incrementală.

$$[K(u)]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \qquad (4.83)$$

Determinarea soluţiei sistemului neliniar constă în găsirea vectorului $\{u\}$ care să facă reziduul $\{R(u)\}$ cît mai mic posibil. Soluţia exactă conduce la anularea reziduului. Căutarea soluţiei sistemului se realizează iterativ conform schemei din fig. 4.13.

Un număr mare de algoritmi de rezolvare a problemelor neliniare includ schemele de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare la fiecare pas al iterației.

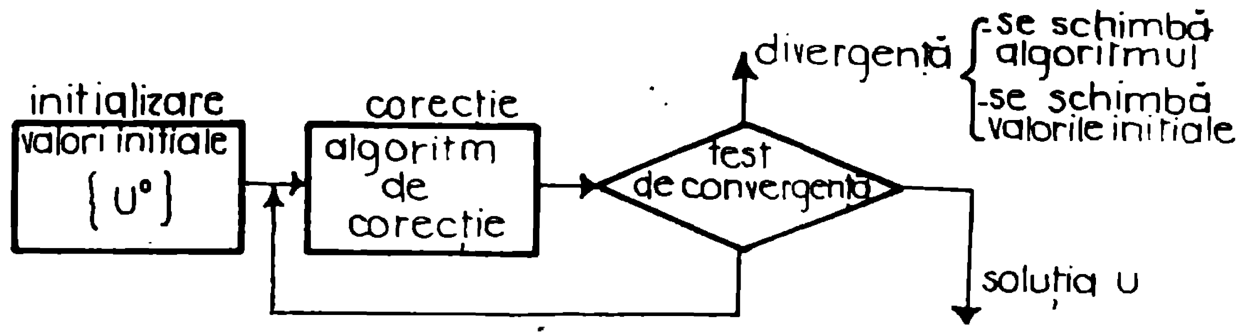



fig. 4.13

Alegerea unui algoritm trebuie să ia în considerare următoarele aspecte :

- tipul nelinearității ;
- răspîndirea nelinearității, indiferent dacă este localizată sau nu ;
- existența a mai multe soluții ;
- ușurința construcției algoritmului și a implementării în program ;
- precizia cerută a rezultatelor ;
- rapiditatea convergenței și riscul de divergență ;

Nu sînt metode care să acopere toate tipurile de probleme neliniare. Cele mai multe tehnici de rezolvare a problemelor neliniare au la bază una din următoarele trei metode, luate separat sau în combinație /45/, /153/, /154/, /199/, /2o1/:

- metoda substituției ;
- metoda iterativă Newton-Raphson ;
- metoda incrementală.

4.4.2.2. Algoritmul metodei substituției.

Metoda constă în construirea secvențială a soluțiilor $\{U^0\}$, $\{U^1\}\ldots\{U^i\}$ unde $\{U^i\}$ este calculat din valoarea precedentă $\{U^{i-1}\}$ prin rezolvarea sistemului liniar de ecuații

$$[K(U^{i-1})]\{U^i\} = \{F\} \; ; \; i = 1,2,3 \qquad (4.84)$$

Sistemul (4.84) se rescrie într-o formă incrementală, mai convenabilă.

$$\begin{aligned} \{R^i\} &= \{(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \\ [K(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} &= \{R^i\} \\ \{U^i\} &= \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \end{aligned} \qquad (4.85)$$

Algoritmul metodei este prezentat în fig.4.14.

In testul de convergență se utilizează doi vectori normați.

Selectarea valorii aproximative inițiale $\{u^{0}\}$

Construirea vectorului global $\{F\}$ din vectorii elementari $\{f\}$

$i = 1, 2, \ldots$ (pentru fiecare iterație)

buclă pentru fiecare element

extrage $\{u^{i-1}\}$ din $\{U^{i-1}\}$

calculează $[K(u^{i-1})]$

calculează rezidul elementar

$$\{r\} = \{f\} - [K]\{u^{i-1}\}$$

asamblează matricele globale ale sistemului linearizat

$[K]$ si $[R]$

rezolvă sistemul $[K]\{\Delta U^{i}\} = \{R^{i}\}$

$U^{i} = U^{i-1} + \omega\{\Delta U^{i}\}$, $\omega$ = factor de relaxare

calculează normele

$\|n\|$ pentru $\{\Delta U^{i}\}$ sau

$\|m\|$ pentru $\{R^{i}\}$

execută testul de convergență cu $\|n\|$ sau $\|m\|$

fig. 4.14

- **norma maximă**

$$\|n\| = \max_{j} |\Delta U_j|^{i} \quad \text{sau} \quad \|m\| = \max_{j} |R_j|^{i} \tag{4.86}$$

- **norma euclidiană**

$$\|n\| = \sqrt{\langle \Delta U^{i}\rangle\{\Delta U^{i}\}} \quad \text{sau} \quad \|m\| = \sqrt{\langle R^{i}\rangle\{R^{i}\}} \tag{4.87}$$

In mod frecvent în testele de convergență se utilizează normele valorilor relative /134/, /135/.

$$\|n\| = \max_{j} \left| \frac{\Delta U_j}{\Delta U_j} \right|^{i}, \tag{4.88}$$

care în cazul normei euclidiene pentru $U_j$ suficient de mic, astfel încît poate fi substituit de $U_i$, devine :

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta U^{i}\rangle \{U^{i}\}}}{\sqrt{\langle U^{i}\rangle \{U^{i}\}}} \tag{4.89}$$

Procesul iterativ se încheie cînd pentru un $\varepsilon$ suficient de mic, prestabilit, $\|n\| < \varepsilon$ .

Dacă în ecuația (4.85) matricea $[K]$ se descompune într-o matrice constantă, liniară $[K_\ell]$ și o matrice neliniară $[K_{n\ell}]$ rezultă

$$\left([K_\ell] + [Kn_\ell \; (U^{i-1})]\right)\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$$

Pentru pași de iterare suficient de mici $[K_{n\ell}]$ se poate neglija și expresia precedentă devine

$$[K_\ell]\{\Delta U^i\} = \{R\}$$
$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \qquad (4.85')$$

Matricea $[K_\ell]$ fiind constantă trebuie să fie asamblată și factorizată numai o dată la începutul procesului . Algoritmul construit pe baza (4.85′) constitue așa numita metoda Newton-Raphson modificată.

4.4.2.3. Algoritmul metodei Newton-Raphson modificate.

Schematic algoritmul acestei metode se prezintă în figura 4.15.

Selectează și calculează o soluție aproximativă inițială $\{U^0\}$; poate fi utilizat și un vector nul

asamblează vectorul global $\{F\}$ din $\{f\}$

asamblează matricea globală liniară $[K_\ell]$ din $[K_\ell]$

factorizează $[K_\ell]$

$i = 1, 2, \ldots\ldots$ (pentru fiecare iterație)

buclă pe fiecare element

extrage $\{u^{i-1}\}$ din $\{U^{i-1}\}$

asamblează $\{R^i\}$ din $\{r\}$

$$\{r\} = \{f\} - [K]\{u^{i-1}\} \qquad (4.90)$$

rezolvă $[K_\ell]\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$

calculează $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$

calculează $\|n\|$

execută testul de convergență

fig 4.15

4.4.2.4. Algoritmul metodei Newton-Raphson.

Se presupune că pentru o soluţie $U^{i-1}$ se obţine reziduul

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq 0, \qquad (4.91)$$

ar putea fi iteraţia $U^i$.

$$\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} \approx 0 \qquad (4.92)$$

Se dezvoltă în serie Taylor funcţia reziduală

$$\{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} = \{R(U^{i-1})\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]_{U=U^{i-1}} \{\Delta U^i\} + \ldots = 0 \qquad (4.93)$$

Neglijînd termenii de ordin superior rezultă

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]\{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\}$$

sau

$$\begin{cases} [K_t(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\} \\ \{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \end{cases} \qquad (4.94)$$

Matricea tangentă $[K_t(U^{i-1})]$ se obţine prin diferenţierea expresiei (4.82).

$$[K_t(U)] = -\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right] = -\left[\frac{\partial F}{\partial U}\right] + [K(U)] + \left[\frac{\partial [K(U)]}{\partial U}\{U\}\right] \qquad (4.95)$$

Dacă $\{F\}$ este independent de $\{U\}$ rezultă

$$[K_t(U)] = [K(U)] + \left[\frac{\partial [K(U)]}{\partial U}\{U\}\right] \qquad (4.96)$$

sau, exprimînd această relaţie în termeni individuali

$$(K_t)_{ij} = K_{ij} + \sum_k \frac{\partial K}{\partial U_j} U_k \qquad (4.97)$$

Expresia (4.94) este similară ca formă cu (4.85), cu observaţia că matricea $[K]$ se înlocuieşte cu $[K_t]$.

Matricea tangentă globală $[K_t]$ se obţine prin asamblarea matricilor tangente elementare $[k_t]$. Pentru obţinerea matricei $[k_t]$ se pleacă de la forma integrală.

$$W(u) = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{=1}^{n} \int_{V^e} \delta(\partial u)\, R(u)\,dV = 0 \qquad (4.98)$$

Se dezvoltă în serie Taylor $W(u)$ în vecinătatea lui $U^{i-1}$

$$W(u^i) = W(u^{i-1}) + \Delta(W)_{=i-1} + \ldots = 0, \qquad (4.99)$$

unde $\Delta(W)$ este prima variaţie a lui $W$, care nu se confundă în genera cu termenii $\delta$ din 4.98.

Discretinzînd în elemente finite se obţine :

$$W(U^{i-1}) = \langle \delta U_n \rangle ([K(U^{i-1})]\{U_n^{i-1}\} - \{F\} = -\langle \delta U_n \rangle \{R(U^{i-1})\} . \quad (4.100)$$

$$\Delta W(U^{i-1}) = \langle \delta U_n \rangle [K_t(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} , \quad (4.101)$$

unde $\{\Delta U^i\}$ înlocuiește variația $\{\Delta U_n\}$ a lui $\{U_n\}$ pe parcursul unei iterații . In aceste condiții (4.99) devine

$$\langle \delta U_n \rangle ([K_t(u^{i-1})]\{\Delta U^i\} - \{R(U^{i-1})\} ) = 0 \quad \forall \langle \delta U_n \rangle , (4.102)$$

expresie care este identică cu (4.94).

In fig.4.16 este prezentat schematic algoritmul pe baza căruia se poate construi matricea tangentă $[K_t]$ cu punere în evidență a celor două ramuri corespunzătoare celor două relații (4.94) și (4.102).

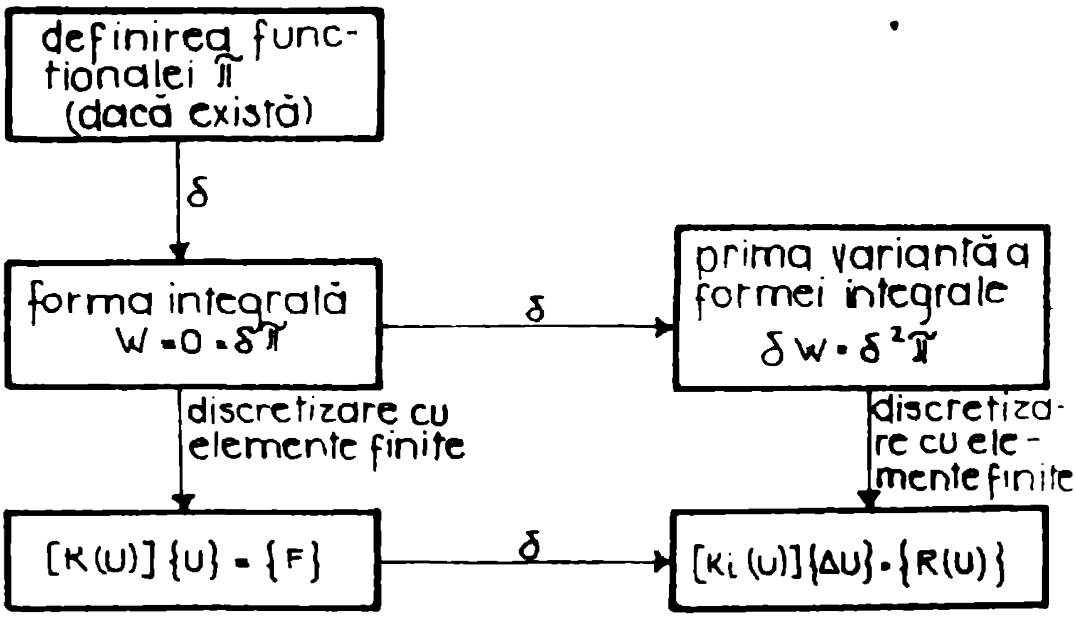



fig.4.16

4.4.2.5. Algoritmul metodei incrementale (pas cu pas)

Valoarea inițială a soluției $\{U^0\}$ joacă un rol esențial în metodele iterative. O alegere necorespunzătoare poate să conducă cu ușurință la rezultate eronate.

Metoda incrementală constă în înlocuirea soluției ecuației matriceale

$$[K(U)] \{U\} = \lambda\{F_o\} = \{F\} \quad (4.103)$$

prin soluții succesive ale ecuației

$$[K(U_j)] \{U_j\} = \lambda_j \{F_o\} \ ; \ \lambda_j = \lambda_1 , \lambda_2, \dots, \lambda \quad (4.104)$$

Valoarea inițială utilizată pentru calculul lui $U_j$ este soluția $U_{j-1}$ obținută în pasul precedent. Fiecare pas este o problemă neliniară care trebuie rezolvată prin una sau mai multe iterații cu metodele Newton-Raphson sau Newton-Raphson modificată. Dacă se utilizează prima dintre metode în fiecare pas se obține:

$$\{R(U_{j-1})\} = \lambda_{j-1}\{F_o\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\}$$

$$[K_t(u_{j-1})]\{\Delta U_j\} = \{R(U_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{F_o\} \qquad (4.105)$$

$$\{U_j\} = \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\}$$

Dacă se utilizează mai mult decît o singură iterație Newton-Raphson rezultă

$$[K_t(U_j^{i-1})]\{\Delta U_j^i\} = \{R(U_j^{i-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{F_o\} \qquad (4.106)$$

$$\{U_j^i\} = \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\}, \quad i = 2,3,\ldots$$

4.4.2.6. **Algoritm pentru schimbarea variabilelor independente.**

Pentru mai multe probleme există mai multe soluții $\{U_n\}$ pentru o anumită treaptă de încărcare $\lambda\{F_o\}$ (fig.4.17).

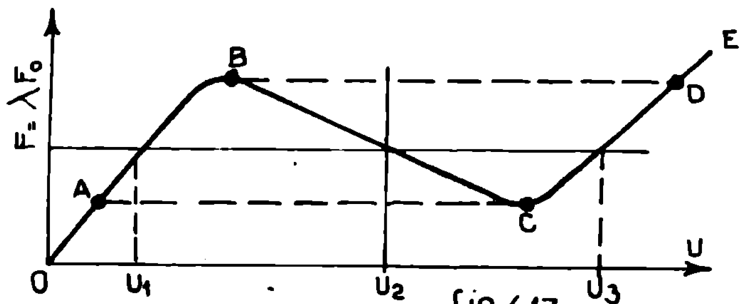


fig.4.17

Metodele prezentate pot da soluții în domeniile OAB și EDC. Pentru a avea soluții în intervalul BC se aleg valorile componentelor $U_\ell$ ale vectorului $\{U\}$, urmînd să fie determinat parametrul (factorul) $\lambda$, necunoscut, al încărcării. Se subliniază că între punctele B și C există o singură valoare $\lambda\{F\}$ pentru un $U_\ell$ dat. Din (4.106) rezultă

$$[K_t]\{\Delta U\} = \{R\} + \Delta\lambda\{F_o\} \qquad (4.107)$$

Introducînd $\Delta\lambda$ în vectorul necunoscutelor $\{\Delta U\}$ și impunînd condiția $\Delta U_\ell = 0$ rezultă

$$\begin{bmatrix} K_{t11} & \cdots & \{-F_o\} & \cdots & K_{t1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{tn1} & \cdots & & \cdots & K_{tnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{\ -1} \\ U_{\ +1} \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \{R\} \qquad (4.108)$$

și

$$U_\ell = \bar{U}_\ell \qquad (4.109)$$

Prin înlocuirea coloanei $\ell$ din $[K_t]$ prin vectorul $\{F_o\}$ s-a distrus simetria matricei şi s-a schimbat lăţimea semibenzii. Pentru a se evita această inconvenienţă se rezolvă (4.1o7) de două ori pentru vectori ai încărcărilor nodale diferiţi menţinînd aceeaşi matrice $[K_t]$ .

$$[K_t]\{\Delta U^R\} = \{R\} \qquad\qquad (4.11o)$$
$$[K_t]\{\Delta U^F\} = \{F_o\}$$

Soluţia ecuaţiei (4.1o7) va fi

$$\{\Delta U\} = \{\Delta U^R\} + \Delta\lambda\,\{\Delta U^F\} \qquad\qquad (4.111)$$

Necunoscuta $\lambda$ rezultă în baza condiţiei (4.1o9)

$$\Delta U_\ell = 0 = \Delta U_\ell^R + \Delta\lambda U_\ell^F$$
$$\Delta\lambda = -\frac{\Delta U_\ell^R}{\Delta U_\ell^F} \qquad\qquad (4.112)$$

Algoritmul acestui procedeu este dat în figura (4.18).

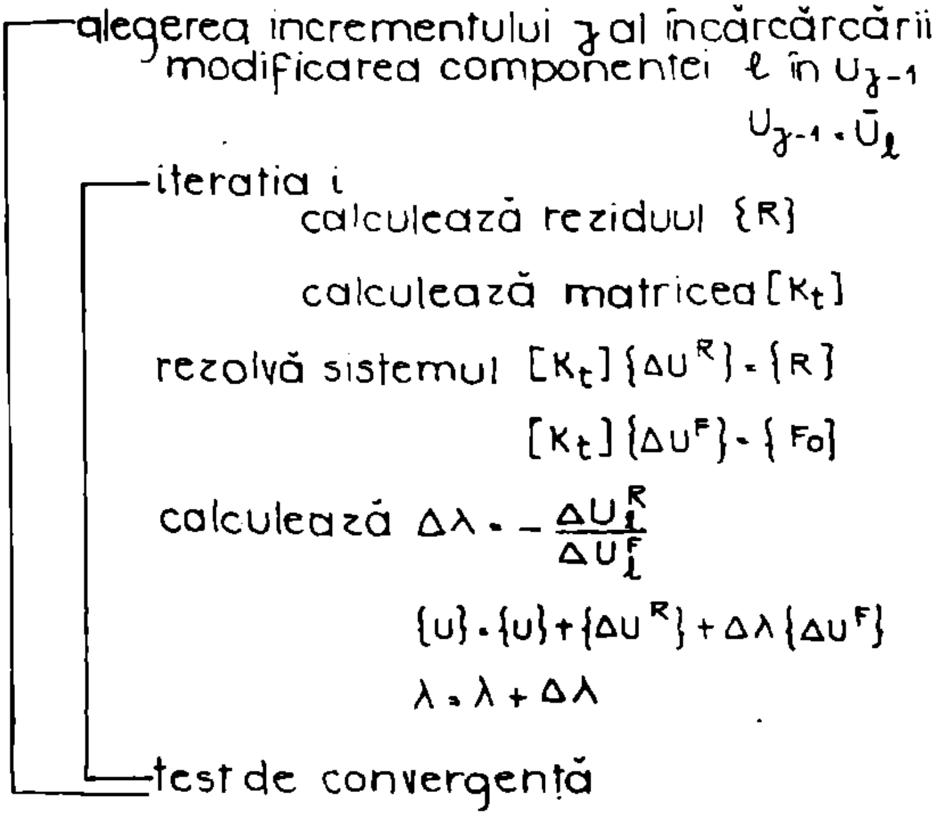
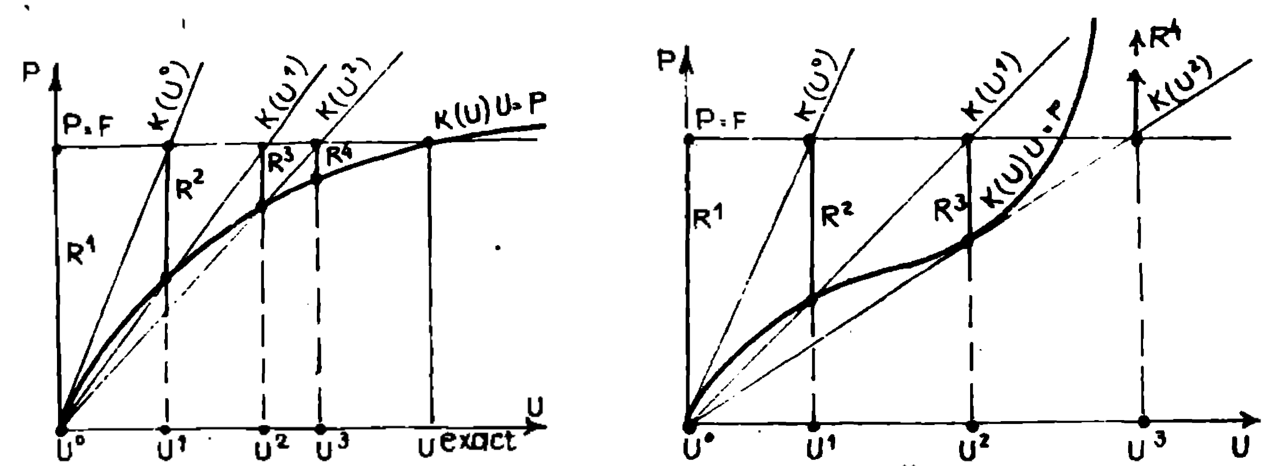



fig.4.18

### 4.4.2.7. Alegerea metodei de rezolvare.

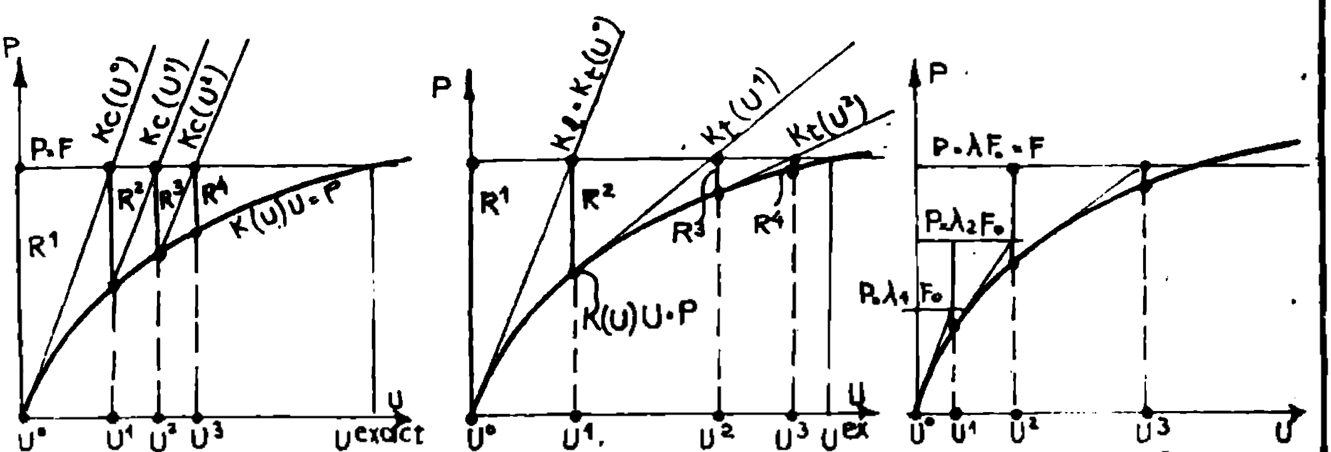
In figura 4.19 se prezintă imaginea grafică a algoritmelor prezentate anterior particularizate pentru o problemă uni-dimensională.




a) proces convergent

b) proces divergent

1) Metoda substituției : algoritmul (4.85)

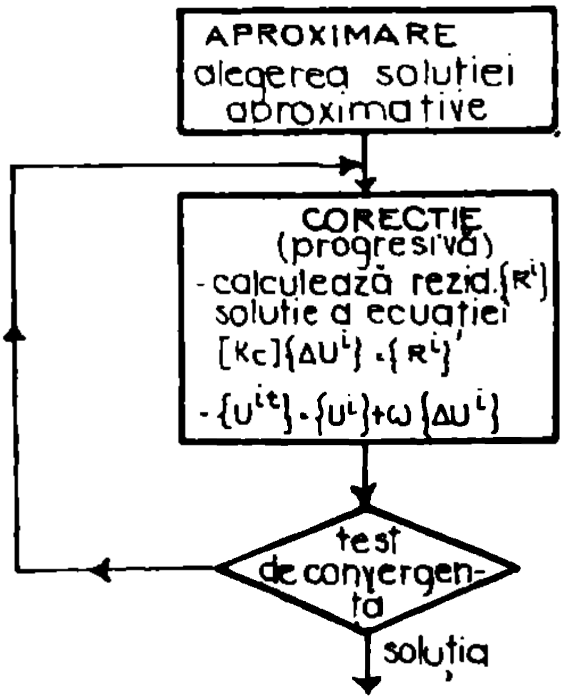



2) Metoda Newton-Raphson modificată : algoritm (4.91)

3) Metoda Newton-Raphson: algoritm (4.95)

4) Metoda incrementală cu o iterare N-R algoritm (4.105)

fig. 4.19




Algoritmul general al celor patru metode

fig. 4.20

Cele patru metode sînt conținute în algoritmul formal comun din figura 4.2.a. Pentru oricare metodă expresia reziduului $\{R\}$ este aceeași, ceea ce se schimbă cu metoda este expresia matricei $[K_c]$ ,cu efecte în procesul de convergență.

$[K_c] = [K]$, metoda substituției

$[K_c] = [K]$, metoda Newton-Raphson modificată

$[K_c] = [K_t]$, metoda Newton-Raphson

Algoritmul general pentru rezolvarea problemelor neliniare este prezentat în figura 4.21.

alege $\omega$, $\Delta\lambda$, IMET
IKT=1
$\lambda$=0

treapta de încărcare $\gamma$: $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$
aproximează: $\{U_\gamma^0\} = \{U_{\gamma-1}\}$ sau extrapolarea $\{U_{\gamma-1}\}, \{_{\gamma-2}\}, \dots$
$\gamma$=0
iterația $i = i+1$
elemente:
calculează si asamblează reziduul $\{R(\lambda, F_0, U^{i-1})\}$
IKT=1 : calculează si asamblează $[K_c(U^{i-1})]$, funcție de tipul metodei IMET

IKT=1 : descompunerea matricei $[K_c]$

$[K_c]\{\Delta U\} = \{R\}$

corecția soluției U: $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \omega\{\Delta U\}$

calculează norma relativă pentru $\|n\|$, $\{\Delta U\}$ sau $\{R\}$

iesirea din iterația i

stabilirea metodei de rezolvare : alegere IKT, IMET, $\omega$, $\Delta\lambda$.
test de convergență
terminarea pasului $\gamma$

fig 4.21

Algoritmul din figura 4.21 intră în execuție pe baza următoarelor precizări:

- numărul și ordinul de mărime a incrementului încărcării $\Delta\lambda$;
- numărul maxim de iterații pentru o treaptă de încărcare și criteriul de convergență (tipul normei și precizia dorită) ;

- tipul matricei se stabilește în funcție de valoarea IMET: $[K_l]$ din (4.85'), $[K(U^{i-1})]$ din (4.85) sau $[K_t(U^{i-1})]$ din (4.96) ;
- stabilirea unei relații pentru aproximarea inițială a soluției $U_j^o$ , pentru fiecare treaptă j a încărcării ;
- valoarea factorului de relaxare.

4.4.3. Rezolvarea problemelor nestaționare /18/, /45/. /152/ /153/, /2o1/.

4.4.3.1. Probleme de propagare

Problemele dependente de timp- nestaționare - se numesc probleme de propagare. Discretizarea cu elemente finite conduce la două tipuri de sisteme de ecuații diferențiale ordinare care caracterizează problemele de propagare.

(1) Sisteme nestaționare de ordinul I

$$[C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}, \quad t > t_o \qquad (4.113)$$
$$\{U(t_o)\} = \{U_o\}$$

(2) Sisteme nestaționare de ordinul II

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}, \quad t > t_o$$
$$\{U(t_o)\} = \{U_o\} \; ; \quad \{\dot{U}(t_o)\} = \{\dot{U}_o\} \qquad (4.114)$$

în care:

$$\dot{U} = \frac{\partial}{\partial t}\{U\} \; ; \; \{\ddot{U}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{U\} = \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{U}\}$$

$[M]$ = matricea maselor

$[C]$ = matricea de amortizare sau de expansiune

$[K]$ = matricea de rigiditate sau de conductivitate

$\{F\}$ = vectorul încărcărilor

$\{U(t)\}$ = vectorul necunoscutelor

Pentru rezolvarea sistemelor (4. 113) și (4.114) se vor prezenta în cele ce urmează două metode :

- integrarea directă, sau metoda pas cu pas ;
- metoda suprapunerii nodurilor fundamentale.

Integrarea directă constă în construcția secvențială a valorilor soluției din valorile inițiale $\{U_o\}$ la momentele $t_o+\Delta t$; $t_o + 2\Delta t$; ...$t_o+ n\Delta t$,...

$$\{U(t_o)\} \rightarrow \{U(t_o+\Delta t)\} \rightarrow \{U(t_o+2\Delta t)\} \rightarrow \ldots \rightarrow \{U(t_o+n\Delta t)\} \qquad (4.115)$$

Un număr mare de tehnici de integrare directă sînt dezvoltate pe baza aproximării cu diferențe finite a necunoscutelor $\{U\}$ și $\{\ddot{U}\}$. Zenkiewicz a propus o metodă de discretizare a domeniului de timp utilizînd pentru aceasta elemente finite.

In metoda suprapunerii nodurilor fundamentale sistemele cuplate (4.113) și (4.114) se decuplează în ecuații modale. Fiecare ecuație modală se rezolvă numeric, iar rezultatul finit se obține ca o combinație liniară a modurilor fundamentale.

Problemele de dinamica structurilor sînt caracterizate de sistemul de ordinul II (4.114), așa că în cele ce urmează se vor prezenta metode de rezolvare aplicate acestui gen de probleme.

4.4.3.2. Metoda integrării directe.

4.4.3.2.1. Metoda diferențelor finite.

Dacă se scriu în diferențe finite derivatele care intervin în (4.114) exprimate la momentul t:

$$\{\dot{U}_t\}=\left\{\frac{1}{2\Delta t}\right\}\left(\{U_{t+\Delta t}\}-\{U_{t-\Delta t}\}\right)$$
$$\{\ddot{U}_t\}=\frac{1}{\Delta t^2}\left(\{U_{t+\Delta t}\}-2\{U_t\}+\{U_{t-\Delta t}\}\right) \qquad (4.115,a,b)$$

se obține

$$[\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\}=\{R_t\}$$
$$[\bar{K}]=[M]+\frac{\Delta t}{2}[C] \qquad (4.116\ a)$$

unde

$$\{R_t\}=\Delta t^2\{F_t\}+[M](2\{U_t\}-\{U_{t-\Delta t}\})+\frac{\Delta t}{2}[C]\{U_{t-\Delta t}\}-\Delta t^2[K]\{U_t\}$$

sau în forma incrementală

$$[\bar{K}]\{\Delta U\}=\{\bar{R}_t\}$$
$$\{\bar{R}_t\}=\Delta t^2\{F_t\}+[M](\{U_t\}-\{U_{t-\Delta t}\})+\frac{\Delta t}{2}[C](-\{U_t\}+\{U_{t-\Delta t}\})-\Delta t^2[K]\{U_t\}$$
$$(4.116\ b)$$
$$\{U_{t+\Delta t}\}=\{U_t\}+\{\Delta U\}$$

4.4.3.2.2. Metoda Houbolt.

Derivatele necunoscutelor $\{U\}$ se exprimă în diferențe finite la momentul t+Δt, în forma următoare :

$$\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}=\frac{1}{\Delta t^2}\left(2\{U_{t+\Delta t}\}-5\{U_t\}+4\{U_{t-\Delta t}\}-\{U_{t-2\Delta t}\}\right)$$
$$(4.117.a,b)$$
$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\}=\frac{1}{6\Delta t}\left(11\{U_{t+\Delta t}\}-18\{U_t\}+9\{U_{t-\Delta t}\}-2\{U_{t-2\Delta t}\}\right)$$

Cu aceste relaţii 4.114 devine

$$[\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\}$$

$$[\bar{K}] = 2[M] + \frac{11}{6}\Delta t\,[C] + \Delta t^2\,[K]$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t^2\{F_{t+\Delta t}\} + [M]\,(5\{U_t\} - 4\{U_{t-\Delta t}\} + \{U_{t-2\Delta t}\}) + \Delta t[C]\,(3\{U_t\}$$

$$- \frac{3}{2}\{U_{t-\Delta t}\} + \frac{1}{3}\{U_{t-2\Delta t}\}) \tag{4.118}$$

sau în funcţie de $\{\Delta U\}$

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{R_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}]\{U_t\}$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}$$

Acest algoritm conduce întotdeauna la soluţii stabile.
Pentru probleme neliniare în care $[M]$ şi $[C]$ sînt constante dar $[K]$ depinde de $\{U\}$, corecţia $\{U_{t+\Delta t}\}$ pe parcursul fiecărei iteraţii în cadrul unui interval (pas) de timp este:

$$[K_{n\ell}]\{\Delta U^i\} = \{R_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}\ (U^{i-1}_{t+\Delta t})]\{U^{i-t}_{t+\Delta t}\} \tag{4.119}$$

$$\{U^i_{t+\Delta t}\} = \{U^{i-1}_{t+\Delta t}\} + \{\Delta U^i\}$$

In metoda substituţiei

$$[K_{n\ell}] = [\bar{K}] \tag{4.12o}$$

In metoda Newton- Raphson

$$[K_{n\ell}] = [K_t] = [\bar{K}] + \Delta t^2\left[\frac{\partial K}{\partial U}\,U\right]^{i-1}_{t+\Delta t} \tag{4.121}$$

4.4.3.2.3. Metodele Newmark-Wilson

Aceste metode implicite introduc în ecuaţia (4.114) exprimată la momentul $t+\Delta t$ următoarele expresii pentru $\{\dot{U}_{t+\tau}\}$ şi $\{U_{t+\tau}\}$

$$\{\dot{U}_{t+\tau}\} = \{U_t\} + \tau((1-a)\{\ddot{U}_t\} + a\{\ddot{U}_{t+\tau}\} \tag{.4.122,a,b}$$

$$\{U_{t+\tau}\} = \{U_t\} + \tau\{U_t\} + \frac{\tau^2}{2}((1-b)\{\ddot{U}_t\} + b\{\ddot{U}_{t+\tau}\}$$

| algoritmul general al metodelor de integrare directă | metoda diferențelor finite | metoda Houbolt | metoda Newmark-Wilson |
|---|---|---|---|
| operații preliminare: | | | |
| definirea parametrilor | $\Delta t$ | $\Delta t$ | $\Delta t, \theta, a, b$ |
| asamblarea și triangularizarea matricei [K] | | | |
| $[K] = a_0[M] + a_1[C] + a_2[K]$ | $a_0 = 1, a_1 = \frac{\Delta t}{2}; a_2 = 0$ | $a_0 = 2, a_1 = \frac{11}{6}\Delta t; a_2 = \Delta t^2$ | $a_0 = 1, a_1 = \theta \Delta t a$<br>$a_2 = \frac{(\theta \Delta t)^2 b}{2}$ |
| inițializarea vectorilor $\{u\}$ | $\{u_{t_0}\}$, cunoscut<br>$\{u_{t_0+\Delta t}\}$ din (4.115) | $\{u_{t_0}\}$, cunoscut<br>$\{u_{t_0+\Delta t}\}$, $\{u_{t_0-\Delta t}\}$ se determină cu alte metode | $\{u_{t_0}\}$, cunoscut<br>$\{\dot{u}_{t_0}\}$, cunoscut<br>$\{\ddot{u}_{t_0}\}$ din (4.115) |
| în cadrul fiecărui pas de timp<br>calculează rîndul<br>rezolvă sistemul în $\{u_{t+\Delta t}\}$ | (4.116 a) | (4.118) | (4.123) |
| pregătește pasul următor | se transferă 2 vectori | se transferă 3 vectori | se calculează $\{u\}, \{\dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$ conform metodei Wilson ($\theta \neq 1$) |

fig. 4.22

Pentru $a = b = \frac{1}{2}$ aceste aproximaţii sînt echivalente din punct de vedere fizic cu a accepta că acceleraţia este constantă şi egală cu valoarea sa medie pe parcursul intervalului $(t, t+\tau)$.

Pentru $a = \frac{1}{2}$ şi $b = \frac{1}{3}$ aceleaşi aproximaţii conduc la o variaţie liniară pe intervalul $(t, t+\tau)$.

Ecuaţia (4.114) scrisă la momentul $(t+\tau)$ devine :

$$[\bar{K}]\{U_{t+\tau}\} = \{R_{t+\tau}\} \tag{4.123}$$

unde

$$[\bar{K}] = [M] + \tau q\,[C] + \frac{\tau^2}{2} b [K]$$

$$\{R_{t+\tau}\} = \frac{\tau^2}{2} b \{F_{t+\tau}\} + [M](\{U_t\} + \tau\{\dot{U}\} + \frac{\tau^2}{2}(1-b)\{\ddot{U}_t\})$$

$$+ [C](\tau_a \{U_t\} + \frac{\tau^2}{2}(2a-b)\{\dot{U}_t\} + \frac{\tau^3}{2}(a-b)\{\ddot{U}_t\}$$

In metoda Newmark $\tau = \Delta t$, iar în metoda Wilson $\tau = \theta\Delta t$ cu $\theta > 1$. Metoda Newmark este stabilă necondiţionat dacă $a \geqslant \frac{1}{2}$ şi $b \geqslant \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2})^2$, iar metoda Wilson pentru $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ şi $\theta = 1,4$. In figura 4.22 se prezintă schematic algoritmele celor trei metode de integrare prezentate.

4.4.3.3. Metoda suprapunerii modurilor fundamentale.

Sistemul de ordinul II descris de ecuaţia (4.114) se scrie cu ajutorul valorilor şi vectorilor proprii, $\lambda$ şi respectiv $\{X\}$ în forma

$$([K] - \lambda[M])\{X\} = 0 \tag{4.124}$$

Introducînd transformarea

$$\{U(t)\} = [X]\{V(t)\} \tag{4.125}$$

în care matricea de transformare $[X]$ este constituită din n vectori proprii $\{X_i\}$ (4.124) devine

$$\{\ddot{V}(t)\} + [X]^T[C][X]\{\dot{V}(t)\} + [\lambda]\{V(t)\} = \{\bar{F}(t)\} \tag{4.126}$$

Ecuaţia (4.126) se poate decupla în ipotezele

(1) $[C]$ este o matrice nulă

(2) $[C]$ este o combinaţie liniară între $[M]$ şi $[K]$

$$[C] = c_1[M] + c_2[K] \tag{4.127}$$

şi deci,

$$[X]^T[C][X] = c_1[I] + c_2[\lambda]$$

Acest produs matricial se poate înlocui cu următoarea matrice diagonală :

$$[X]^T [C][X] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & & \\ & 2\xi_2\omega_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2\xi_i\omega_i & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \; ; \; \omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (4.128)$$

în care $\xi_i$ reprezintă rata (coeficientul) de amortizare pentru modul i. Ipoteza (4.127) permite obținerea a maximum două valori nenule pentru $\xi_i$.

Dacă ecuația (4.126) este decuplată se obține

$$\ddot{V}(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{V}(t) + \omega_i^2 V(t) = F_i(t) \quad (4.129)$$

pentru care soluția generală se scrie cu ajutorul integralei lui Duhamel la momentul $t_o = o$:

$$V_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} (\alpha_1 \sin\bar{\omega}_i t + \alpha_2 \cos\bar{\omega} t) + \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_o^i e^{-\xi_i \omega_i (t-s)}$$

$$\sin\bar{\omega}_i (t-s)\, \bar{F}_i(s) dS \quad (4.130)$$

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$$

$$F_i(t) = F_o + \frac{F_1 - F_o}{t_1 - t_o} = a + bt \quad \text{pentru} \quad o \leq t \leq t_1 - t_o$$

Introducînd notațiile de mai sus soluția ecuației (4.129) ia forma

$$V_i(t_o + t) = a_o + a_1 t + e^{\xi_i \omega_i t} (a_2 + \cos\bar{\omega} t + a_3 \sin\bar{\omega} t) \quad (4.131)$$

$$a_o = \frac{a}{\omega_i^2} - 2\frac{\xi_i b}{\omega_i^3} \; ; \; a_1 = \frac{b}{\omega_i^2} \; ; \; a_2 = V_i(t_o) - a_o \; ; \; a_3 = \frac{1}{\bar{\omega}_i}(V_i(t_o) +$$

$$+ \xi_i \omega_i a_2 - a_1)$$

#### 4.4.4. Rezolvarea problemelor de valori proprii ./45/. /11o/, /112/,/152/, /159/, /2o1/.

##### 4.4.4.1. Probleme de valori proprii.

Rezolvarea unei probleme matriceale de valori proprii constă în găsirea soluțiilor $\lambda_i$ - valorile proprii și $\{X_i\}$ - vectorii proprii pentru ecuația:

$$[K]\{X_i\} = \lambda_i [M]\{X_i\} \quad (4.132)$$

cu condiţia de normalizare a vectorilor proprii

$$\langle X_i \rangle \{X_i\} = 1 \quad \text{sau} \quad \langle X_i \rangle [M] \{X_i\} = 1$$

Valorile şi vectorii proprii caracterizează trei categorii de probleme :

(1) <u>Dinamica structurilor</u>, în care se pune problema determinări modurilor fundamentale de vibraţii. In acest caz termenii ecuaţiei (4.132) sînt :

$[K]$ - matricea de rigiditate a structurii

$[M]$ - matricea maselor

$\{X_i\}$ - vectorul deplasărilor nodale ale structurii în modul i de vibraţie

$\lambda_i = \omega_i^2$, $\omega_i$ = frecvenţa oscilaţiilor proprii în modul i

(2) <u>Stabilitatea structurilor</u> în care se pune problema determinării încărcării critice de flambaj . In acest caz termenii ecuaţiei (4.132) sînt:

$[K]$ - matricea de rigiditate a structurii

$[M] \equiv [K_G]$ - este o matrice geometrică sau matricea tensiunilor iniţiale

$\{X_i\}$ - vectorul deplasărilor nodale pentru modul i de flambaj

$\lambda_i$ - defineşte amplitudinea forţei critice

(3) <u>Probleme nestationare de ordinul I şi II</u>.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (4.132) se precizează trei metode de calcul :

- iteraţia inversă
- rotaţia Jacobi
- iteraţia pe subspaţii.

4.4.4.2. Caracteristici fundamentale ale problemelor de valori proprii.

4.4.4.2.1. Formularea simplificată a problemelor de valori proprii.

Se consideră că matricile $[K]$ şi $[M]$ sînt matrici reale, simetrice pozitiv definite . Ecuaţia generală (4.132) se poate reduce la :

$$[K]\{\bar{X}\} = \lambda\{\bar{X}\} \tag{4.133}$$

Dacă $[M]$ este pozitiv definită se poate exprima pe baza descompunerii Cholesky - ca în cazul sistemelor liniare- în forma

$$[M] = [L][L]^T \quad ; \quad L = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \sqrt{S_{ij}} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.134}$$

Rezultă:

$$\{\bar{X}\} = [L]^T \{\dot{X}\}$$
$$[\bar{K}] = [L]^{-1} [K][K]^{-1,T}$$

Dacă $[M]$ nu este pozitiv definită (4.132) se modifică în forma următoare :

$$[M]\{X\} = \frac{1}{\lambda}[K][X] = \lambda'[K]\{X\} \qquad (4.135)$$

4.4.4.2.2. Valori proprii.

Fie n valori proprii $\lambda_i$ distincte sau nu care satisfac (4.132) Dacă cele două matrice $[K]$ și $[M]$ sînt pozitiv definite toate valorile $\lambda_i$ vor fi pozitive

$$\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \dots \lambda_2 \geq \lambda_1$$

și (4.132) se poate scrie în forma

$$([K] - \lambda[M])\{X\} = 0 \qquad (4.136)$$

Ecuația (sistemul (4.136) are soluții nebanale dacă expresia $([K]-\lambda[M])$ este singulară, adică

$$\det([K]-\lambda[M]) - P(\lambda) = 0$$

4.4.4.2.3. Vectori proprii.

Fiecărei valori proprii îi corespunde o soluție a vectorilor proprii. Pentru a rezolva sistemul singular omogen (4.132) este necesară o ecuație suplimentară pentru definirea unică a vectorului, se poate utiliza o condiție de normalizare, spre exemplu

$$\langle X_i\rangle [M]\{X_i\} = 1 \qquad (4.137)$$

Vectorii proprii vor satisface următoarele condiții de ortogonalizare

$$\langle X_i\rangle [K]\{X_j\} = \lambda_i\,\delta_{ij}\ ;\ \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (4.138,a,b)$$

$$\langle X_i\rangle [M]\{X_j\} = \delta_{ij}$$

Dacă aceste condiții sînt satisfăcute $[K]$ este ortogonală, iar $[M]$ ortonormală. Vectorii proprii se regrupează într-o matrice modală $[X]$.

$$[X] = [\{X_1\} \dots \{X_i\} \dots] \qquad (4.139)$$

cu care (4.132) devine

$$[K][X] = [M][X][\lambda],\ [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \qquad (4.140)$$

Ecuaţiile (4.138) se transformă

$$[X]^T [K] [X] = [\lambda]$$
$$[X]^T [M] [X] = [I] \qquad (4.141,a,b)$$

şi, în plus, înmulţind şi împărţind cu $[\lambda]$ în (4.141 b)

$$[X][X]^T [M] = [I]$$

4.4.4.2.4. Descompunerea spectrală.

Se înmulţeşte şi se împarte (4.140) cu $[X]^T[M]$. rezultă dacă $[M]$ este simetrică :

$$[K] = [M][X][\lambda]( [M][X] )^T \qquad (4.142)$$

sau notînd $\{Y_i\} = [M]\{X_i\}$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{Y_i\}\langle Y_i\rangle \qquad (4.143\ a)$$

Descompunerea spectrală a matricei $[K]$ este definită de (4.143 a) dacă $[M] \equiv [I]$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\{X_i\}\langle X_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [P_i] \qquad (4.143\ b)$$

$$[K]^P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^P [P_i] \quad (P \gtrless 0) \qquad (4.144\ c)$$

Raza spectrală a matricei $[K]$ se defineşte prin

$$\rho(K) = \max|\lambda_i| \leq \|K\|_\infty \qquad (4.145)$$

$$\|K\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}|\right)$$

Matricea $[K]^P$ este mărginită (finită) cînd $p \to \infty$ dacă $\rho(K) < 1$.

Un vector arbitrar V definit în spaţiu poate fi reprezentat luînd ca bază vectorii proprii.

$$\{V\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \{X_i\} , \qquad (4.146)$$

cu componentele

$$c_i = \langle X_i\rangle[M]\{V\} \qquad (4.147)$$

4.4.4.2.5. Transformarea matricelor $[K]$ şi $[M]$ . . .

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K][Q] \, ; \, [\bar{M}] = [Q]^T [M][Q] \quad (4.148\ a)$$

Valorile şi vectorii proprii vor fi definiţi de expresia transformată:

$$([\bar{K}] - \lambda[\bar{M}])\{\bar{X}\} = 0 \quad (4.148\ b)$$

sau , echivalentă

$$[Q]^T ([K] - \bar{\lambda}[M]) [Q]\{\bar{X}\} = 0 \quad . . . .$$

şi deci.

$$\det([\bar{K}]-\bar{\lambda}[M]) = \det([Q]^T([K]-\bar{\lambda}[M])[Q] =$$

$$= \det([Q]^T) \det([Q] ,\det([K]-\bar{\lambda}[M])=0$$

Expresia de mai sus demonstrează că valorile proprii $\bar{\lambda}$ ale sistemului transformat sînt identice cu valorile proprii $\lambda$ ale sistemului (4.133) dacă $\det([Q]) \neq 0$.

4.4.4.2.6. Separarea şi schimbarea valorilor proprii.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valorile proprii ale sistemului (4.133) şi $\ell_1, \ell_2, \dots \ell_{n-1}$ cele n-1 valori proprii ale sistemului modificat.

$$[K]^1 \{X\} = \ell[M]^1 \{X\} , \quad (4.149)$$

în care $[K]^1$ şi $[M]^1$ se obţin prin eliminarea ultimei linii şi coloane din $[K]$ şi, respectiv $[M]$. Se mai pot scrie inegalităţile

$$\lambda_1 \leq \ell_1 \leq \lambda_2 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \ell_{n-1} \leq \lambda_n \quad (4.15o)$$

Similar se definesc matricele $[K]^r$ şi $[M]^r$ prin eliminarea ultimelor r coloane şi linii din $[K]$ şi $[M]$ . Dacă $p^r(\lambda)$ este polinomul caracteristic , rădăcinile polinomului $p^{r-1}(\ell)$ alternează cu cele ale polinomului $p^r(\lambda)$

$$\lambda_1 \leq \ell_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \ell_{n-r-2} \leq \lambda_{n-r-1} \leq \ell_{n-r-1} \leq \ell_{n-r} \quad (4.151)$$

Descompunînd $[K]-\mu[M]$, $\mu$ fiind numărul arbitrar diferit de valorile proprii rezultă

$$[K] - \mu [M] = [L][D][L]^T , \quad (4.152)$$

Dacă valorile proprii din (4,133) sînt pozitive numărul termenilor negativi din matricea diagonală $[D]$ este egal cu numărul valorilor proprii mai mici decît u. Acest proces de separare, denumit şi "secvenţa Sturm" a polinomului $p^r(\lambda)$, serveşte la a verifica dacă valorile proprii se înscriu într-un domeniu de valori dat.

Dacă matricea $[K]$ din (4.133) se înlocuieşte prin

$$[\bar{K}] = [K] - a[M] \quad (4.153)$$

se obţine următorul sistem de valori proprii modificat.

$$[\bar{K}]\{X\} = \bar{\lambda}[M]\{X\} \quad \text{sau} \quad [K]\{X\} = \{\bar{\lambda}+a\}[M]\{X\} \qquad (4.154)$$

Vectorii proprii ai acestui sistem sînt identici cu aceea din (4.133) dar valorile proprii sînt schimbate cu cantitatea a

$$\bar{\lambda} = \lambda - a \qquad (4.155)$$

4.4.4.3. Metode de calcul a valorilor proprii.

4.4.4.3.1. Metoda iterării inverse.

Iterarea inversă dă cea mai mică valoare proprie şi vectorul propriu corespunzător $\{X_1\}$ ale sistemului 4.133. Matricea $[K]$ trebuie să fie pozitiv definită ; dacă nu este necesară o schimbare de forma (4.153 pentru a o face pozitivă. Algoritmul metodei este prezentat în figura 4.23.

triangularizează $[K]=[L]^T[D][L]$
alege un vector inițial $\{v^1\}$ care nu este M-ortogonal în raport cu vectorul căutat ($d \neq 0$)

calculează $\{F^1\} = [M]\{v^1\}$
buclă pe fiecare iterație $i = 1, 2, \ldots,$

rezolvă $[L]^T[D][L]\{v^{i+1}\} = \{F^i\}$

calculează : $\{\bar{F}\} = [M]\{v^{i+1}\}$

evaluează $d = \langle v^{i+1}\rangle\{\bar{F}\}$

calculează cîtul Rayleigh : $R(\{v\}) = \dfrac{\langle v\rangle[K]\{v\}}{\langle v\rangle[M]\{v\}}$ (4.156)

$$\lambda_1^{i+1} = R(\{v^{i+1}\}) = \frac{\langle v^{i+1}\rangle\{F^i\}}{d}$$

calculează :

$$\{F^{i+1}\} = \frac{1}{\sqrt{|d|}}\{\bar{F}\}$$

verifică convergența $\lambda_1^{i+1} : |\lambda_1^{i+1} - \lambda_1^i| < \varepsilon$
calculează vectorul propriu normalizat în raport cu M

$$\{X_1\} = \frac{1}{|d|}\{v^{i+1}\}$$

fig.4.23

Pentru determinarea celei mai mari valori proprii $\lambda_n$ se aplică iterarea inversă sistemului :

$$[M]\{X\} = \frac{1}{\lambda}[K]\{X\} = \lambda'[K]\{X\} \qquad (4.156)$$

Dacă $[M]$ nu este pozitiv definită se face o schimbare de tipul (4.153) cu $[\bar{M}] = [M] - a[K]$

Valorile proprii intermediare $\lambda_p$ cuprinse între $\lambda_1$ şi $\lambda_n$ se obţin prin iterare inversă pentru schimbări $a \approx \lambda_p$ definite de 4.153.

4.4.4.3.2. Rotaţia Jacobi.

Aplicarea acestei metode este restrînsă la cazurile cînd $[K]$ şi $[M]$ sînt simetrice şi pozitiv definite. Metoda constă într-un proces secvenţial de diagonalizare a matricelor $[K]$ şi $[M]$ rezultînd matricele diagonale $[K^d]$ şi $[M^d]$

$$
\begin{aligned}
&[K^1] = [K] && [M^1] = [M] \\
&[K^2] = [Q^1]^T [K^1][Q^1] && [M^2] = [Q^1]^T [M^1][Q^1] \\
&[K^{k+1}] = [Q^k]^T [K^k][Q^k] && [M^{k+1}] = [Q^k][M^k][Q^k]
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

Diagonalizarea matricilor $[K^{k+1}]$ şi $[M^{k+1}]$ se realizează prin construirea adecvată a matricei de transformare $[Q^i]$,

$$
Q = \begin{array}{cl}
\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & a & \\ & b & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \text{... linia i} \\ \text{... linia j} \\ \\ \end{array} \\
\quad\ \vdots \quad\ \ \vdots & \\
\ \text{col.i col.j} &
\end{array}
\tag{4.158}
$$

Coeficienţii a şi b se calculează pentru $K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$

$$
\begin{aligned}
&aK_{ii} + (1+ab)\,K_{ij} + bK_{jj} = 0 \\
&aM_{ii} + (1+ab)\,M_{ij} + b\,M_{jj} = 0
\end{aligned}
\tag{4.159}
$$

In cazul general

$$a = \frac{c_2}{d} \;;\; b = -\frac{c_1}{d} \tag{4.160}$$

$$c_1 = K_{ii}\,M_{ij} - M_{ii}\,K_{ij}$$

$$c_2 = K_{ij}\,M_{ij} - M_{jj}\,K_{ij}$$

$$c_3 = K_{ii}M_{jj} - M_{ii}\,K_{jj}$$

$$d = \frac{c_3}{2} + \operatorname{sign}(c_3)\sqrt{\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1c_2}$$

Dacă M este pozitiv definită $c_1$ şi $c_2$ sînt deasemeni pozitivi.
Dacă $d=0$ $a=0$ şi $b = -K_{ij}/K_{jj}$.

După diagonalizare se obtine:

STABILIREA RATEI DE CONVERGENȚĂ DORITĂ.

buclă pe fiecare ciclu $s$

definirea toleranței dinamice $\varepsilon_s = 10^{-2s}$

buclă pe fiecare linie $i = 1, 2, \dots, n$

buclă pe fiecare coloană $j = 1, 2, \dots n$

calculează factorii de cuplare

$$f_K = \frac{|K_{ij}|}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}} \; ; \; f_M = \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii} M_{jj}}}$$

dacă $f_K$ sau $f_M > \varepsilon_s$

calculează termenii a și b din [a]

transformă matricele [K] și [M]

coloana $i$ = coloana $i$ + b coloana $j$
coloana $j$ = a coloana $i$ + coloana $j$
linia $i$ = linia $i$ + b linia $j$
linia $j$ = a linia $i$ + linia $j$

modifică vectorii proprii [x]

coloana $i$ = coloana $i$ + b coloana $j$

coloana $j$ = a coloana $i$ + coloana $j$

calculează valorile proprii

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{si} \quad F_i = \max_i \frac{|\lambda_i^{s} - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

calculează factorii de cuplare

$$F_K = \max_{i,j} \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}} \; ; \; F_M = \max_{ij} \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii} M_{jj}}}$$

test de convergență

$F_K < \varepsilon$ si $F_M < \varepsilon$ pentru $F_\lambda < \varepsilon$

fig. 4.24

$$[\lambda] = [K^d][M^d]^{-1} \quad \text{sau} \quad \lambda_i = K^d_{ii} \;/\; M^d_{ii} \tag{4.161}$$

$$[X] = [Q^1][Q^2] \ldots [Q^k][Q^{k+1}] \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{M^d_{ii}}} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Algoritmul metodei rotației Jacobi este prezentat succint în fig. (4.24). Pe baza acestui algoritm s-a elaborat și subrutina corespunzătoare din programul ASEF.

4.4.4.3.3. Metoda Ritz.

Pentru sistemele de valori proprii de mari dimensiuni se aplică un procedeu de reducere a rangului bazat pe metoda Ritz. Sistemul astfel redus se rezolvă apoi prin metoda Jacobi.

Sistemul 4.133 se exprimă ca o combinație liniară a p vectori $q_i$ independenți (i=1,2,...p) denumiți vectori Ritz.

$$\{X\} = a_1\{q_1\} + a_2\{q_2\} + \ldots + a_p \; q_p$$

$$\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{n\times p}{[Q]}\underset{p\times 1}{\{a\}} \tag{4.162a,b}$$

Punînd condiția de staționaritate cîtului Rayleigh, $\delta R=0$, $\forall\langle\delta a\rangle$ rezultă :

$$\left([\bar{K}] - R[\bar{M}]\right)\{a\} = 0 \tag{4.163}$$

cu $[\bar{K}]$ și $[\bar{M}]$ definite de (4.148 a) .

Expresia (4.163) definește o problemă de valori proprii de rangul p ale cărei soluții se obțin din expresia.

$$[\bar{K}][A] = [\bar{M}][A][\bar{\lambda}] \;, \tag{4.164}$$

în care $[A] = [\{A_1\}\{A_2\} \ldots \{A_p\}]$ ; $\bar{\lambda}_p = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{\lambda}_p \end{bmatrix}$

Valorile proprii $\bar{\lambda}_i$ constitue aproximații ale soluțiilor $\lambda_i$ ale sistemului (4.133).

$$\lambda_1 \le \bar{\lambda}_1 \;;\; \lambda_2 \le \bar{\lambda}_2 \;;\; \ldots \lambda_p \le \bar{\lambda}_p \le \lambda_n$$

4.4.4.3.4. Metoda iterării pe subspații.

Această metodă este folosită pentru calcularea primelor p valori proprii ale unui sistem de mari dimensiuni. Se aplică o reducere Ritz cuplată cu metoda Jacobi pentru a se obține în prima etapă vectorii proprii Ritz. După aceasta, se aplică iterarea inversă pentru corecția vectorilor Ritz. Procesul se repetă pînă cînd criteriul de convergență este satisfăcut. Principalele secvențe ale metodei sînt redate în schema din figura 4.25.

alege p vectori proprii iniţiali

$$[X]=[\{x_1\}\{x_2\}\ldots\ldots\{x_p\}] \qquad (4.165)$$

aplică iterarea inversă pentru a calcula p vectori Ritz $\{q_i\}$

$$[K]\{q_i\}=[M]\{x_i\}=\{F_i\}\ ;\ i=1,2,\ldots\ldots p$$

$$[K][Q]=[M][X] \qquad (4.166)$$

aplică metoda Iacobi

$$([\bar{K}]-\bar{\lambda}_i[\bar{M}])\{A_i\}=0\ ;\{x_i\}=[Q]\{A_i\} \qquad (4.167)$$

test de convergenţă pentru $\bar{\lambda}_i$

fig.4.25

Rezultatele furnizate de metoda iterării pe subspaţii converg spre cele mai mici p valori proprii dacă vectorul iniţial $\{X_1\}$ nu este[M]-ortogonal în raport cu unul din vectorii căutaţi. Aceasta se poate verifica aplicînd secvenţa Sturm : matricea $[K]-(\lambda_p+\varepsilon)[M]$ se descompune şi se verifică dacă are p pivoţi ($\varepsilon$ se ia de ordinul $10^{-2}$ sau $10^{-3}$).

Si acest procedeu este implementat în programul ASEF, în blocul "VALP".

## 4.5. CONCLUZII

Formularea MEF pe baza teoriei reziduurilor ponderate permite tratarea într-o manieră unitară a problemelor liniare şi neliniare, în regim static şi dinamic, a problemelor de propagare şi de valori proprii. Din acest punct de vedere această formulare poate fi considerată ca "generalizată" întrucît este superioară formulării variaţionale.

MEF în formulare reziduală se poate combina cu MEC într-un algoritm comun ; subdomeniul modelat prin elemente de contur se tratează ca un macroelement finit.

Pe baza formulării reziduale a MEF şi a algoritmilor şi procedurilor numerice prezentate s-a elaborat programul de calcul multifuncţional modularizat ASEF. Programul este prezentat în capitolul X.

In literatura de specialitate în, limba română, sau în limbi străine aflate în circulaţie în România, lucrarea autorului /68/, şi prezentul capitol reprezintă primele tentative de formulare unitară a MEF pe baza teoriei reziduurilor care pune de acord fundamentele de ordin teoretic cu procedurile numerice adecvate.

# CAPITOLUL V

## METODA ELEMENTELOR DE CONTUR - O PREZENTARE COMPARATA CU METODA ELEMENTELOR FINITE

### 5.1. GENERALITATI

Metoda elementelor de contur îşi are originea în dezvoltarea teoriei ecuaţiilor integrale, domeniu în care prima lucrare de amploare apare în anul 1905 şi-i aparţine lui Fredholm. Ulterior, diverşi cercetători îşi aduc contribuţii la dezvoltarea acestui domeniu cu importante aplicaţii în fizica matematică şi în teoria cîmpurilor. De referinţă în acest sens sînt lucrările lui Mikhlin şi Kupradze în prima jumătate a deceniului şapte. Aplicarea ecuaţiilor integrale de către Jaswon, Synn şi Hess la rezolvarea unor probleme din mecanica fluidelor şi teoria potenţialelor stă la originea formulării indirecte a MEC, iar utilizarea acestora de către Rizzo şi Cruse în 1968 la rezolvarea unor probleme din dinamică constitue punctul de plecare al formulării directe a metodei .

Prima monografie dedicată acestei metode, cu titlul "Boundary Elements" apare sub semnătura lui C.A. Brebbia în 1978, iar în acelaşi an are loc şi prima conferinţă internaţională cu această tematică la Southampton, Anglia.

In prezent, MEC se află în plină dezvoltare /3/, /2o/, /21/, în competiţie şi, concomitent, în cooperare cu metoda elementelor finite MEF.

Metoda elementelor de contur cunoaşte trei formulări /8/ :

(1) Formularea directă, caracterizată prin aceea că funcţiile necunoscute care apar în ecuaţiile integrale sînt variabilele fizice curente ale problemei

(2) Formularea semidirectă, conform căreea ecuaţiile integrale care caracterizează problema se exprimă prin intermediul unor funcţii necunoscute analoage cu funcţiile de tensiune Airy din elasticitate

(3) Formularea indirectă : ecuaţiile integrale se exprimă pe baza unei soluţii unitare singulare a ecuaţiilor diferenţiale iniţiale definite pe frontiera domeniului - aceste soluţii unitare singulare pot fi, spre exemplu, funcţii Green.

In acest capitol se prezintă MEC în formularea directă, cu exemplificare pentru problemele plane de elasticitate şi generalizarea formulării directe în cadrul teoriei reziduurilor ponderate în vederea cuplării cu metoda elementelor finite.

### 5.2. APLICAREA METODEI ELEMENTELOR DE CONTUR LA REZOLVAREA PROBLEMELOR PLANE DIN TEORIA ELASTICITATII.

#### 5.2.1. Formularea ecuaţiilor integrale.

Formularea directă a MEC are la bază teorema reciprocităţii lucrului mecanic virtual. Pentru două stări distincte de echilibru $(F_i,u_i,p_i)$ şi $(F_i^*, u_i^*,p_i^*)$, în cadrul modelului matematic descris în capitolul II, această teoremă se scrie în felul următor :

$$\int_S p_i^*(x)\, u_i(x)dS + \int_V F_j^*(z)u_j(z)dV = \int_S p_i(x)u_i^*(x)dS + \int_V F_i(z)u_i^*(z)dV \tag{5.1}$$

în care x este un punct pe S, z este un punct în V, iar $F_i, u_i, p_i$ au fost definite în §.§.2.3. Dacă cele două stări se aleg astfel încît să corespundă unei forţe unitare $e_i^*(z)$ $(f_j^*(z) = e_i^*(z))$ acţionînd în infinitul solid. ecuaţia (5.2) devine :

$$\int_S D_{ij}(x,\xi)u_i(x)dS + \int_V \delta_{ij}\delta(z,\xi)u_i(z)dV = \int_S p_i(x)G_{ij}(x,\xi)dS + \int_V F_i(z)\, G_{ij}(x,\xi)\, dV \tag{5.2}$$

în care :

$$u_i(x) = G_{ij}(x,\xi)\ {}_j(\xi)\ ; \quad p_i^* = D_{ij}(x,\xi)\, e_i\,(\xi)$$
$$G_{ij}(x,\xi) = C_1(C_2\,\delta_{ij}\,\ell_{nr} - \frac{y_i y_i}{r}) + A_{ij} \tag{5.3}$$

$$D_{ij}(x,\xi) = \frac{C_3}{r^2}\left[C_4\,(n_j y_i - n_i y_j) + (C_4\,\delta_{ij} + \frac{2y_i y_k}{r^2})y_j n_j\right] \tag{5.4}$$

$y_i = x_i - \xi_i$ ; $y_j = x_j - \xi_j$; $r^2 = y_i y_i$; $A_{ij}$ este un tensor arbitrar.

$$C_1 = 1/8\pi\mu(1-\nu)\ ;\ C_2 = 3-4\nu\ ;\ C_3 = -1/4\pi\,(1-\nu)\ ;\ C_4 = 1-2\nu$$

cu notaţia

$$\int_V \delta_{ij}\,\delta(z-\xi)\, u_i(z)dV = \int_V u_j(z)\,\delta(z,\xi)\, dV = \beta u_j(\xi) \tag{5.5}$$

în care $\beta=1$ în $\nu$ şi $\beta=o$ în exterior, ecuaţia (5.4) devine

$$u_j(\xi) = \int_S \left[p_i(x)G_{ij}(x,\xi) - D_{ij}(x,\xi)u_i(x)\right] dS + \int_V F_i(z)G_{ij}(z,\xi)dV, \tag{5.6}$$

expresie cunoscută ca fiind "identitatea lui Somigliane" şi care permite determinarea deplasărilor $u_j(\xi)$ într-un punct $\xi \in V$, pentru o combinaţie admisibilă $(p_i, u_i) \in S$ şi o distribuţie dată a forţelor masice $F_i$.

Pentru determinarea deplasărilor într-un punct $x_o \in S$ se pune condiţia lim $\xi \to x_o$ cu $u_j(\xi) = u_j(x_o)$ ecuaţia (5.6) devine:

$$\int_S \left[p_j(x)G_{ij}(x,x_o) - D_{ij}(x,x_o)u_j(x)\right]dS + \int_V F_i(z)G_{ij}(z,x_o)dV = \alpha_{ij}u_j(x_o) \tag{5.7}$$

în care $\alpha_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij}$ în interiorul unui dimeniu V cu frontiera netedă.

Dacă punctul $x_o$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua (un colţ al frontierei) caracterizat printr-un unghi $\omega$ termenul $\alpha_{ij}$ este de forma :

$$\alpha_{ij}=-1-C_3\left[(C_4+1)\omega+\frac{\sin 2\omega}{2}\right],\ i=j=1,2\ ;\alpha_{ij}=\ _{ji}=-\sin^2\omega, i\neq j=1,2 \quad (5.8)$$

Cu $x_o \in S$, S fiind o suprafaţă netedă,(5.6) devine

$$\frac{1}{2}U_j(x_o)=\int_S\left[p_i(x)G_{ij}(x,x_o)-D_{ij}(x,x_o)u_i(x)\ dS+\int_V F_i(z)G_{ij}(z,x_o)dV\right. \quad (5.9)$$

Derivînd succesiv şi înlocuind (2.12) se obţin deformaţiile specifice $\varepsilon_{ij}$:

$$\varepsilon_{jk}=\int_S\left[p_i(x)B^*_{ijk}(x,\xi)-C_{ijk}(x,\xi)u_i(x)\ dS+\int_V F_i(z)B^*_{ijk}(x,\xi)dV\right. \quad (5.10)$$

$$B^*_{ijk}(x,\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial G_{ik}}{\partial\xi_j}\right)\ ;\ C^*_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial D_{ik}}{\partial\xi_j}\right) \quad (5.11a,b)$$

Inlocuind (5.10) în(2.10) se obţin tensiunile $\sigma_{ij}$:

$$\sigma_{jk}(\xi)=\int_S\left[p_i(x)T^*_{ijk}(x,\xi)-E_{ijk}(x,\xi)u_i(x)\right]dS+\int_V F_i(z)T^*_{ijk}(z,\xi)dV \quad (5.12)$$

$$T_{ijk}(x,\xi)=\left[\lambda\delta_{jk}\frac{\partial G_{il}}{\partial\xi_l}+\mu\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial G_{ij}}{\partial\xi_j}\right)\right],$$

$$E_{ijk}(x,\xi)=\left[\lambda\delta_{jk}\frac{\partial D_{il}}{\partial\xi_l}+\mu\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial D_{ij}}{\partial\xi_j}\right)\right], \quad (5.13,\ a,b)$$

### 5.2.2. Discretizarea integralelor.

Domeniul plan V se discretizează M subdomenii elementare triunghiulare $V^e$, iar frontiera S în N segmente elementare $S^e$(Fig.5.1.)

Deplasările într-un punct nodal aparţinînd elementului de contur k, în ipoteza că $p_i, u_i$ şi $F_i$ sînt constante se scrie în confirmitate cu (5.9) astfel :

$$\frac{1}{2}U_j(x_o^k)=\sum_{n=1}^{N}\left[p_i(x^n)\int_{S^e}G_{ij}(x^n,x_o^k)dS-u_i(x^n)\int_{S^e}D_{ij}(x^n,x_o^k)dS\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{M} F_i(z^m) \int_{V^e} G_{ij}(z^m, x_o^k)\, dV \qquad (5.14)$$

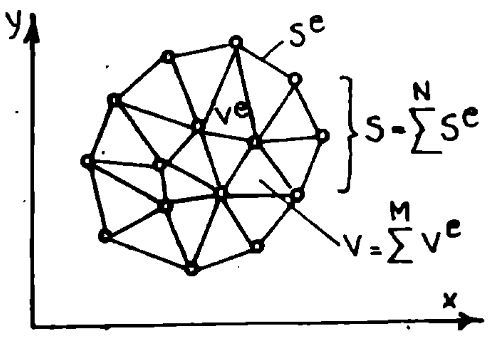



fig. 5.1

expresie care în ipoteza că valorile cunoscute și necunoscute ale deplasărilor și forțelor de suprafață variază liniar pe elementele de contur $S^e$ și în mod identic și, în mod similar forțele masice pe $V^e$ (5.14) se poate rescrie în formulare matriceală :

$$\frac{1}{2}\left[I\right]\left\{U^k\right\}=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\int_{S^e} G^{kn}N^n dS\right] p_n-\left[\int_{S^e} D^{kn}N^n dS\right] U_n\right\}+\sum_{m=1}^{M} \int_{V^e} G^{km}M^m dV\Big]F_n \qquad (5.15)$$

în care $p_n$, $U_n$ și $F_n$ reprezintă valorile nodale ale tensiunilor, deplasărilor și forțelor masice, $\{u^k\}$ este vectorul deplasărilor într-un punct reprezentativ al elementului de contur k - care nu reprezintă un punct de discontinuitate, iar $N^n$ și $M^m$ sînt funcțiile de interpolare pentru elementul de contur n și, respectiv, subdomeniul $(V^e)_m$.

$$\left\{U^n\right\} = \left[N^n\right]\left\{U_n\right\} \;;\; \left\{F^m\right\} = \left[M^m\right]\left\{F_n\right\} \qquad (5.16,2,b)$$

Dacă domeniul de definiție al problemei prezintă discontinuități ecuația (5.15) se scrie în forma generală astfel :

$$\left[\beta\right]\left\{u^k\right\}=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\int_{S^e} G^{kn}N^n dS\right] p_n-\left[\int_{S^e} D^{kn}N^n dS\right]U_n\right\}+\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{V^e} G^{km}M^m dV\right]F_n \qquad (5.17)$$

în care $[\beta]$ este o matrice pătrată de rangul 2 ai cărei termeni definesc unghiul de discontinuitate $\omega$ al frontierei . Introducînd notațiile matriceale cunoscute (5.15) și, respectiv (5.17) se rescrie într-o formă mai compactă :

$$\left[G\right]\left\{p\right\} - \left[D\right]\left\{u\right\} + \left[G\right]\left\{F\right\} = 0 \qquad (5.18)$$

Pentru evaluarea integralelor de suprafață și volum din 5.17 se folosesc diverse tehnici de integrare numerică, cunoscute din literatura /8/, /19/.

Obținîndu-se soluțiile pentru deplasări și tensiuni pe conturul domeniului valorile corespunzătoare în punctele din interior se calculează cu relațiile :

$$U(\xi)=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\int_{S^e} G(x^n,\xi)N^n dS\right]p_n-\left[\int_{S^e} D(x^n,\xi)N^n dS\right]u_n\right\}+\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{V^e} G(z^m,\xi)M^m dV\right]F_n \qquad (5.19)$$

$$\mathcal{E}(\xi)=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\int_{S^e} B^*(x^n,\xi)N^n dS\right]p_n-\left[\int_{S^e} C^*(x^n,\xi)N^n dS\right]u_n+\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{V^e} B^*(x^n,\xi)M^m dV\right]F_n\right. \tag{5.20}$$

$$\sigma(\xi)=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\int_{S^e} T^*(x^n,\xi)N^n dS\right]p_n-\left[\int_{S^e} E^*(x^n,\xi)N^n dS\right]u_n\right\}+\sum_{m=1}^{M}\left[\int_{V^e} T^*(z^m,\xi)M^m dV\right]F \tag{5.21}$$

5.2.3. Formularea matricială a ecuaţiilor metodei

Utilizînd topologia din fig.(5.1) se generează următorul sistem de ecuaţii care conţine componentele cunoscute şi necunoscute ale tensiunilor şi deplasărilor în punctele de pe conturul S.

$$-\left[G^{ss}\right]\left[p^s\right]+\left[D^{ss}\right]\left\{u^s\right\}=\left[G^{sv}\right]\left\{F^v\right\}, \tag{5.22}$$

în care prin s şi v s-au desemnat soluţiile obţinute cu integrale de suprafaţă şi, respectiv, de volum şi

$\{u^s\}$, $\{p^s\}$ : vectorii deplasărilor şi tensiunilor în punctele nodale ale conturului ;

$\{F^v\}$ : vectorul forţelor masice în punctele nodale din interiorul domeniului ;

$[G^{ss}]$, $[D^{ss}]$: matrici de coeficienţi de rangul 2N x 2N ;

$[G^{sv}]$: matrice de coeficienţi de rangul 2M x 2M ;

Dacă tensiunile sînt specificate pe contur (5.22) devine :

$$\left[F^{ss}\right]\left\{u^s\right\}=\left[G^{sv}\right]\left\{F^v\right\}+\left[G^{ss}\right]\left\{p^s\right\}, \tag{5.23}$$

în care termenii din partea dreaptă sînt cunoscuţi. Dacă se cunosc deplasările şi se determină tensiunile (5.22) ia forma

$$\left[G^{ss}\right]\left\{p^s\right\}=\left[F^{ss}\right]\left\{u^s\right\}-\left[G^{sv}\right]\left\{F^v\right\} \tag{5.24}$$

Problema mixtă descrisă de (5.22) se scrie într-o formă mai generală

$$-\left[\alpha G^{ss}\right]\left\{\frac{1}{\alpha}\,p^s\right\}+\left[F^{ss}\right]\left\{u^s\right\}=\left[G^{sv}\right]\left\{F^v\right\}, \tag{5.25}$$

în care $\alpha$ este un factor de scară care are rolul de a aduce la acelaşi ordin de mărime termenii din $[G^{ss}]$ cu cei din $[F^{ss}]$ . Reordonînd termenii în (5.25) rezultă în final ecuaţia matricială a MEC:

$$\left[K\right]\left\{X\right\}+\left[L\right]\left\{Y\right\}=\left[G^{sv}\right]\left\{F^v\right\} \tag{5.26}$$

în care: $[K]$ : matrice de coeficienţi de rangul 2N x 2N ;

$\{X\}$ : vectorul deplasărilor şi tensiunilor nodale necunoscute pe S, de rangul 2N × 1;

$[L]$: matrice de coeficienţi de rangul 2N x 2N ;

$\{Y\}$: vectorul deplasărilor şi tensiunilor cunoscute pe S de rangul 2N x 1.

## 5.3. FORMULAREA GENERALIZATA A METODEI ELEMENTELOR DE CONTUR.

### 5.3.1. Ecuaţia fundamentală.

Energia potenţială totală a unui sistem elastic descris de modelul matematic §.§.2.3. se scrie astfel :

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} - \int_V u_i F_i - \int_{S_2} u_i h_i dS \qquad (5.27)$$

Inlocuind în funcţie de (2.12), aplicînd teorema divergenţei şi apoi (2.9) , (5.27) devine :

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\ \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2}\int_S u_i p_i dS - \frac{1}{2}\int_V u_i F_i dV \quad (5.28)$$

Presupunînd absenţa forţelor masice, $F_i$=o, rezultă prin înlocuire în (5.27) în funcţie de (5.28) expresia funcţionalei energetice

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S u_i p_i dS - \int_S u_i h_i dS \qquad (5.29)$$

sau în exprimare matriceală

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_S \langle u\rangle \{p\}\ dS - \int_{S_2} \langle u\rangle\{h\}\ dS \qquad (5.30)$$

Inlocuind printr-un set de soluţii aproximative în (5.3o) rezultă:

$$\{u\} = [N]\ \{U_n\} \quad \text{şi} \quad \{p\} = [M]\ \{p_n\} \qquad (5.31)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\langle U_n\rangle \left(\int_S [N]^T[M]\ dS\right)\{\bar{t}^n\} - \langle u^n\rangle\int_{S_2}[N]^T\ \{h\}\ dS \quad (5.32)$$

Se face aici observaţia că funcţiile de interpolare N şi M nu sînt în general aceleaşi şi că la alegerea lor se folosesc tehnici similare cu cele din MEF /8/, /19/.

Fie intergrala de contur directă

$$\beta_{ij}u_i\ (\xi) = \int_S \left[\ p_i(x)G_{ij}(x,\xi) - D_{ij}(x,\xi)\ u_i(x)\right] dS \quad (5.33)$$

care se poate scrie matricial în forma

$$[A]\ \{U_n\} = [B]\ \{p_n\} \qquad (5.34)$$

în care $\{U\}$ şi $\{p\}$ , sînt date de (5.31) şi presupunînd $[M] = [N]$

rezultă că matricile $[A]$ şi $[B]$ sînt simetrice . Din (5.34) rezultă

$$\{p^n\} = [B]^{-1}[A]\{U_n\} \tag{5.35}$$

relaţie care se poate utiliza pentru eliminarea $\{p^n\}$ din (5.32), cu observaţia că expresia care se obţine, datorită erorilor de rotunjire poate să nu fie identic satisfăcută. Pentru eliminarea acestui inconvenient se introduce o ecuaţie de echilibru auxiliară

$$\int_S p\,dS = 0 \tag{5.36}$$

care prin discretizare devine

$$\int_S([M]\,dS)\{p_n\} = [Q]\{p_n\} = 0 \tag{5.37}$$

Asamblînd (5.37) cu (5.34) se obţine

$$[A]\{U_n\} - [B]\{p_n\} + [Q]^T\{\lambda\} \tag{5.38}$$

în care $\{\lambda\}$ este vectorul multiplicatorilor pseudo-Lagrange -eni, care au ca scop introducerea unei perturbaţii controlate în fiecare din ecuaţiile (5.35) astfel încît (5.37) să fie identic satisfăcută.

Ecuaţiile (5.37) şi (5.38) se pot pune în forma următoare :

$$\left[\frac{A}{0}\right]\{U_n\} = \left[\begin{array}{c|c} B & Q^T \\ \hline Q & 0 \end{array}\right]\{\frac{p_n}{}\} , \tag{5.39}$$

din care tensiunile (tractiunile) nodale pe S rezultă

$$\{p_n\} = [E]\{U_n\} \tag{5.4o}$$

Substituind (5.4o) în (5.32) rezultă

$$\Pi = \langle U_n\rangle[K]\{U_n\} + \langle U_n\rangle\{F\} \tag{5.41}$$

$$[K] = \frac{1}{2}\left(\int_S [N]^T[M]\,dS\right)[E] \ ; \ \{F\} = -\int_{S_2}[N]\{h\}\,dS \tag{5.42a,b}$$

Asupra funcţionalei $\Pi$ se pune condiţia de staţionaritate.

$$\delta\Pi = 0 \tag{5.43}$$

de unde pentru variaţii arbitrare $\{\delta u^n\}$ rezultă în final

$$[K^o]\{U_n\} + \{F\} = 0 \tag{5.44}$$

$$[K^o] = \frac{1}{2}\left\{\left(\int_S [N]^T[M]\,dS\right)[E] + \left[\left(\int_S [N]^T[M]\,dS\right)[E]\right]^T\right\} \tag{5.45}$$

Ecuaţia (5.44) reprezintă forma simetrică a ecuaţiei fundamentale a MEC în formulare directă.

Vectorul forţelor nodale $\{F\}$ corespunzător tensiunilor de suprafaţă $\{p\}$ pe S este dat de

$$\{F\} = \int_S [N]^T \{p\} \, dS \tag{5.46}$$

Tinînd seama de relaţia dintre tensiuni şi deplasări rezultă :

$$\{F\} = \left(\int_S [N]^T [M] \, dS\right) [E] \{U_n\} - [K'] \{U_n\} \tag{5.47}$$

In general matricea $[K']$ este nesimetrică şi teorema reciprocităţii lucrului mecanic virtual nu poate fi satisfăcută. Pentru a simetriza sistemul de ecuaţii se face substituţia

$$[K^o] = \frac{1}{2}\left[ [K'] + [K']^T \right] \tag{5.48}$$

### 5.3.2. Cuplarea metodei elementelor de contur cu metoda elementelor finite.

Ideea cuplării celor două metode este de interes deosebit în problemele definite pe domenii nemărginite (ex.: interacţiunea dintre teren şi structură) sau în studiul concentrărilor de tensiuni, pentru care modelarea cu elemente de contur este optimală. Pe de altă parte, MEF se aplică cu uşurinţă pe acea porţiune a domeniului caracterizată prin anizotropie sau prin comportare neliniară.

Utilizarea unor elemente de contur liniare sau de ordin superior permite cuplarea cu elemente finite pe frontiera dimeniului şi asigură păstrarea continuităţii. Metoda de lucru constă în transformarea subdomeniului discretizat în elemente finite, în elemente de contur, ceea ce este posibil cînd se utilizează o formulare mixtă pentru MEF, caz în care GDL pe cele două regiuni se pot pune uşor de acord. O altă metodă, mai uzuală, presupune transformarea regiunii modelate cu EC într-un element finit echivalent. Această procedură conduce la matrici elementare nesimetrice, care însă pot fi simetrizate fără deteriorări sensibile a rezultatelor finale. Simetrizarea se realizează cu relaţii de forma (5.48). Această a doua variantă este preferabilă întrucît permite utilizarea algoritmelor MEF existente, realizarea programelor de calcul automat fiind mai comodă.

In vederea cuplării celor două metode se pleacă de la formularea MEF în teoria reziduurilor ponderate. (capitolul 3 şi capitolul 4).

Fie domeniul V din figura 5.2. discretizat în EF şi EC.

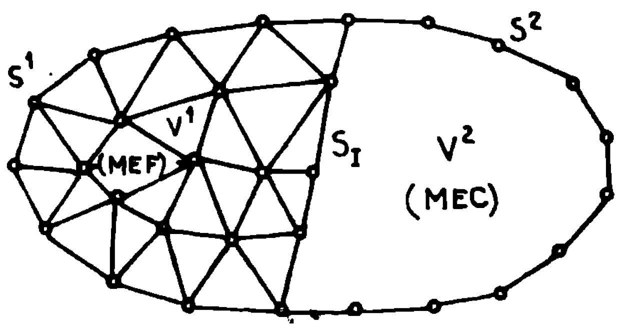


fig. 5.2

Sistemul de ecuaţii (4.78) caracteristic MEF poate fi pus în forma următoare:

$$[K]\{U_n\} = \{F\} + \{F^o\} \tag{5.49}$$

în care $\{F\}$ reprezintă forţele nodale echivalente, iar

$\{F^o\}$ este vectorul forţelor masice. Vectorul $\{F\}$ se obţine prin ponderarea forţelor aplicate pe unitatea de suprafaţă cu ajutorul funcţiilor de interpolare utilizate pentru aproximarea cîmpului de deplasări virtuale.

$$\{F\} = [N]\{P\} \tag{5.50}$$

în care $\{P\}$ conţine valorile curente ale forţelor de suprafaţă . Cu aceasta (5.49) se rescrie :

$$[K]\{U_n\} = [N]\{P\} + \{F^o\} \tag{5.51}$$

Sistemul de ecuaţii (5.44) corespunzător MEC se transformă în aceeaşi manieră.

$$[H]\{U_n\} = [G]\{P\} + \{R^o\} \tag{5.52}$$

în care notaţiile utilizate aù aceaşi semnificaţie ca în (5.51) şi sînt modificate faţă de forma iniţială pentru a nu se confunda cele două metode.

Pentru a se putea realiza cuplarea celor două regiuni $V^1$ şi $V^2$ din fig.5.2. sînt necesare îndeplinirea următoarelor condiţii de compatibilitate şi echilibru la interfaţa dintre acestea :

- compatibilitatea deplasărilor

$$U_I^1 = U_I^2 \text{ pe } S_I \tag{5.53}$$

- echilibrul forţelor

$$P_I^1 + P_I^2 = 0 \tag{5.54}$$

Regiunea $V^2$ se transformă într-un element finit echivalent, prin asamblare rezultînd o matrice globală a structurii.

Pentru aceasta se transformă (5.52) în forma următoare :

$$[G]^{-1}\left([H]\{U_n\} - \{R^o\}\right) = \{P\} \tag{5.55}$$

şi în continuare se înmulţeşte cu $[N]$ din (5.50).

$$\left([N]\,[G]^{-1}\,[H]\right)\{U_n\} - \left([N][G^{-1}]\,[R^o]\right) = [N]\{P\} \tag{5.56}$$

Se fac în continuare notaţiile :

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= [N][G^{-1}][H] \\ \{\tilde{F}^o\} &= [N][G^{-1}]\{R^o\} \\ \{\tilde{F}\} &= [N]\{P\} \end{aligned} \tag{5.57 a,b,c}$$

cu care (5.56) revine la forma iniţială (5.49).

$$[\tilde{K}]\{U_n\} = \{\tilde{F}\} + \{\tilde{F}^o\} \tag{5.58}$$

Dezavantajul acestui procedeu constă în faptul că matricea $[\tilde{K}]$ este în general nesimetrică cu toate că matricea $[K]$ este simetrică.

Asimetria este datorită procesului de discretizare şi colocaţie a funcţiilor ponderate în exprimarea soluţiei fundamentale în MEC.

Pentru simetrizarea matricii $[\tilde{K}]$ se poate utiliza aşa numita tehnică a "minimizării erorii: /19/. Se defineşte o "eroare" în termenii $k_{ij}$, $i \neq j$, din $[K]$ prin expresia :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\tilde{k}_{ij}-\tilde{k}'_{ij}) + (\tilde{k}_{ij}-\tilde{k}_{ji})\right] \quad (5.59)$$

al cărei patrat se minimizează în raport cu $\tilde{k}_{ij}$

$$\frac{\partial(e_{ij})^2}{\partial k_{ij}} = 2\tilde{k}_{ij} - \tilde{k}'_{ij} - \tilde{k}'_{ji} = 0 \quad (5.60)$$

din care se obţine noul termen $\hat{k}_{ij}$ simetric

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{1}{2}\left[ k'_{ij} + k'_{ji}\right] \quad (5.61)$$

Matricea de rigiditate echivalentă a regiunii $V^2$ se poate deci scrie

$$[K^2] = \frac{1}{2}\left([\tilde{K}] + [\tilde{K}]^T\right) \quad (5.62)$$

şi (5.58) devine :

$$[K^2]\{U_n\} = \{F^2\} + \{F^{o2}\} \quad (5.63)$$

unde $\{F^2\} = \{\tilde{F}\}$ şi $\{F^{o2}\} = \{\tilde{F}\}$ .

Ecuaţia (5.63) se poate acum asambla cu ecuaţia iniţială MEF pentru regiunea $V^1$, utilizînd o procedură standard care asigură compatibilitatea şi echilibrul

$$[K^1]\ \{U_n\} = \{F^1\} + \{F^{o1}\} \quad (5.64)$$

## 5.4. COMPARATIE CU METODA ELEMENTELOR FINITE.

Din compararea celor două metode se evidenţiază următoarele observaţii :

(1) Numărul elementelor este mult mai mic prin faptul că se discretizează frontiera şi nu domeniul şi, în consecinţă, numărul necunoscutelor este mai mic.

(2) Volumul datelor de intrare este considerabil mai redus, şi deci, necesită o activitate de pregătire mai redusă.

(3) MEC are mai puţine etape decît MEF - astfel, spre exemplu nu este necesară o subrutină specială de asamblare. In figura 5.3. se prezintă schematic organigramele programelor pentru cele două metode.

(4) Rezultatele în deplasări şi tensiuni se pot calcula în orice punct al domeniului V şi nu numai în anumite puncte, care în cazul MEF sînt impuse de topologia structurii.

(5) Erorile modelului de calcul aproximativ elaborat în MEC provin numai din punerea condiţiilor de contur, întrucît soluţia fundamentală satisface ecuaţiile teoriei elasticităţii.

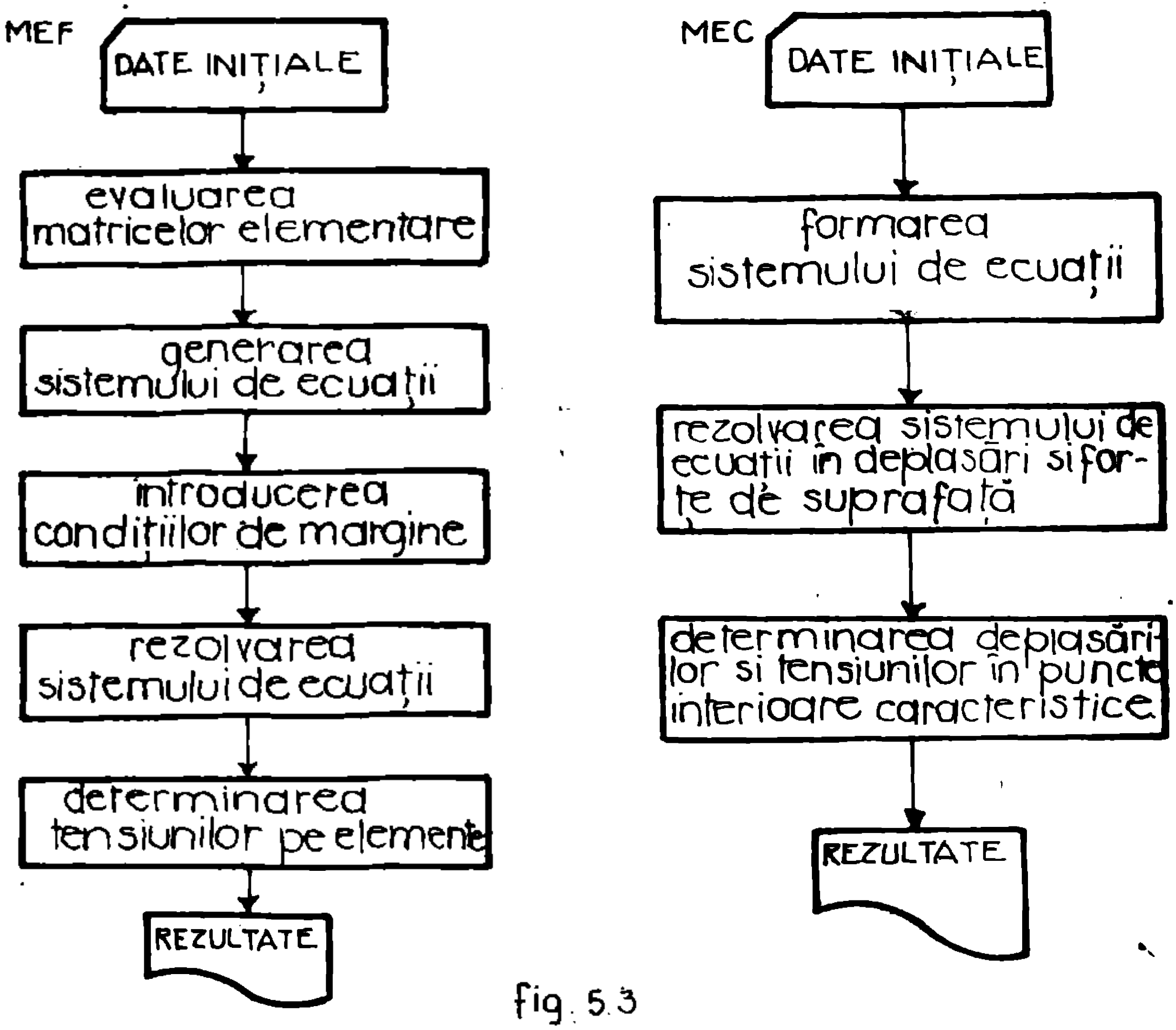



fig. 5.3

(6) Dezavantajul metodei constă în aceea că, după cum s-a arătat, matricea sistemului este o matrice plină care nu poate fi redusă la o matrice bandă simetrică, fapt care reduce parţial avantajul obţinut prin reducerea numărului necunoscutelor.

(7) Capacitatea de modelare mai redusă a MEC în cazul structurilor cu forme complexe, în special a celor care prezintă colţuri şi intrînduri cu muchii interioare pune probleme deosebite; aceste probleme constitue în prezent obiectul cercetărilor ce au ca scop perfecţionarea metodei..

(8) In cazul MEF precizia este mai bună la calculul deplasărilor, pentru tensiuni, care rezultă prin derivarea deplasărilor pot rezulta erori însemnate. Din acest punct de vedere MEC se pretează mai bine la studiul concentrărilor de tensiuni.

## 5.5. CONCLUZII

Avantajele MEC au fost prezentate în §.5.4. Este dificil de apreciat care metodă este mai performantă, MEC sau MEF. Aici trebuie să se ia în considerare experienţa acumulată în aplicarea MEF şi numărul mare de programe de calcul aflate în circulaţie.

Fiecare metodă îşi are avantajele proprii şi optimul rezultă din utilizarea lor cuplată, conform algoritmului prezentat.

Pe baza algoritmului prezentat în §.5.2, în conformitate cu indicaţiile din /8/ s-a elaborat programul de calcul DBEM implementabil pe calculatoare FELIX. Programul DBEM, care este prezentat în capitolul 10, operează cu elemente de contur liniare pentru care cîmpul de deplasări şi tensiune se aproximează prin funcţii de interpolare quadratice .

Se poate aprecia că MEC este performantă pentru rezolvarea problemelor definite pe domenii vaste şi cu un număr redus de discontinuităţi.

Scopul introducerii acestui capitol în lucrare se defineşte prin intermediul a două obiective, care se apreciază că au fost îndeplinite:

(1) Formularea şi prezentarea MEC - metoda este la început în literatura tehnică autohtonă, iar încercările de aplicare sînt extrem de reduse. In acest context se situează realizarea programului DBEM ca instrument de aplicare a metodei, de investigare şi, implicit, de dezvoltare a acestuia.

(2) Evidenţierea şi pe această cale a generalităţii formulării MEF în cadrul teoriei reziduurilor ponderate, care asigură suportul teoretic necesar cuplării celor două metode. Din acest punct de vedere se menţionează că programul ASEF este conceput astfel încît să poată fi dezvoltat prin implementarea unui macroelement finit echivalent cu o regiune modelată cu MEC, în conformitate cu algoritmul prezentat în §§ 5.3.2.

# CAPITOLUL VI

## METODA NUMERICA PENTRU CALCULUL STAVILELOR METALICE CU SECTIUNE CHESONATA

### 6.1. GENERALITATI

In capitolul II s-au prezentat tipurile de stavile şi structurile constructive caracteristice şi s-au analizat metodele de calcul utilizate în proiectarea acestora. S-a evidenţiat cu această ocazie că stavilele moderne au structura chesonată rigidizată longitudinal şi transversal şi că în proiectarea curentă acestea sînt frecvent considerate ca bare cu pereţi subţiri /28/, /129/, /147/. S-a arătat, totodată că aplicarea metodei elementelor finite la aceste structuri presupune existenţa unor programe de calcul complexe şi necesită calculatoare de mare capacitate. Dezvoltarea rapidă a producţiei de microcalculatoare în ţara noastră cu capacităţi curente de 48-64 KO, accesibile pe masa de lucru a fiecărui inginer proiectant, presupune elaborarea unor metode de calcul simplificate şi a algoritmilor respectivi la nivelul capacităţii acestor echipamente.

In acest capitol se prezintă o metodă numerică pentru calculul stavilelor metalice care are la bază metoda separării variabilelor aplicată de Vlosov la studiul structurilor cu pereţi subţiri. Metoda consideră stavilele ca structuri prismatice cu pereţi subţiri. Procedee de calcul similare au fost dezvoltate de către Boer, Böge şi Roik, Bazant şi El Nimeiri /25/, /166/, /167/. Aplicaţii ale acestor procedee sînt cunoscute, în general, la calculul tablierelor chesonate ale podurilor, în acest sens subliniindu-se lucrarea /146/ în care metoda separării variabilelor este combinată cu metoda elementelor finite. In lucrarea /7/ se prezintă o metodă de calcul a stavilelor clapetă de tip "burtă de peşte" care sînt considerate ca structuri prismatice rezemate continu pe radier; metoda propusă de autorii lucrării are la bază teoria plăcilor prismatice a lui Gruber /1o6/ formulată matriceal.

Metoda de calcul propusă se poate aplica direct la calculul stavilelor sau combinată cu metoda elementelor finite sau cu metoda elementelor de contur.

### 6.2. CALCULUL STRUCTURILOR PRISMATICE CU PERETI SUBTIRI CU SECTIUNE CHESONATA.

#### 6.2.1. Definirea componentelor cîmpurilor de deplasări şi tensiuni.

Metoda propusă ia în considerare deformaţiile din încovoiere, tăiere, tensiune şi deplanarea secţiunii transversale. Se presupune bara cu pereţi subţiri prismatică din figura 6.1. cu sistemul de axe local (x,s,n) ataşat fiecărei feţe şi deplasările corespunzătoare $u_x, u_s$ şi $u_n$.

După Vlasov componentele deplasărilor într-un punct oarecare se aproximează cu o sumă de M produse de forma :

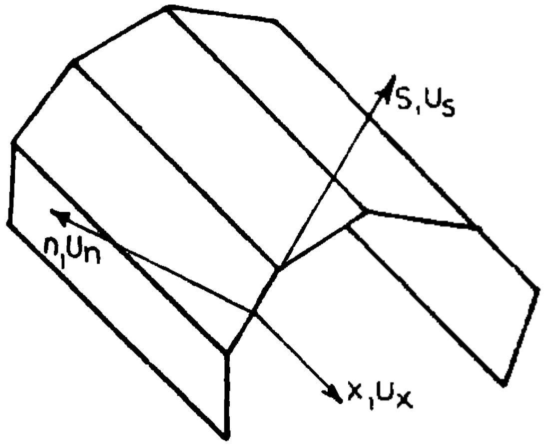



fig.6.1

$$u\ (x,s)=\sum_{i=1}^{M} u_1^i\ (x)\ u_2^i(s) \quad (6.1)$$

în care $u_2(s)$ sînt funcţii cunoscute, convenabil predefinite pentru fiecare tip de secţiune. In mod uzual se aleg pentru funcţiile $u_2$ deplasările de corp rigid ale secţiunii.

In forma matricealǎ componentele deplasărilor vor fi:

$$u_x(x,s) = \langle\omega\rangle\{U\} \ ; \ u_s(x,s) = \langle\emptyset\rangle\{V\} \ ; \ u_n(x,s) = \langle\Psi_v\rangle\{V\}+\langle\Psi_w\rangle\{W\}$$

(6.2.a,b,c,)

în care , spre exemplu

$$\langle\omega\rangle=\langle\omega_1(s)\omega_2(s)\ ..\omega_M(s)\rangle \ ;\{U\}=[u_1(s)\ u_2(s)...u_M(s)\ ]^T \quad (6.3)$$

Numărul funcţiilor independente care intervin în expresiile deplasărilor sau, altfel spus al GDL a secţiunii transversale este $M = 2K-I$, în care K este numărul nodurilor secţiunii iar I este numărul pereţilor. Pentru o secţiune chesonată trapezoidală care se utilizează curent ca soluţie constructivă pentru stavilele metalice diagramele funcţiilor $\omega$, $\emptyset$, $\psi_v$ şi $\psi_w$ sînt date în fig. 6.2. a-d.

Ecuaţiile (6.2) se pot condensa în următoarea expresie matriceală

$$\{u\} = [A]\{X\} \quad (6.4)$$

în care :

$$\{u\} = [u_x \quad u_s \quad u_n]^T \ ; \ \{X\}= [U \quad V \quad W]^T \quad (6.5\ a,b)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \langle\omega\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle\emptyset\rangle & 0 \\ 0 & \langle\Psi v\rangle & \langle\Psi_w\rangle \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

In concordanţă cu teoria liniară a plăcilor, componentele deplasărilor într-un punct oarecare sînt date de relaţiile

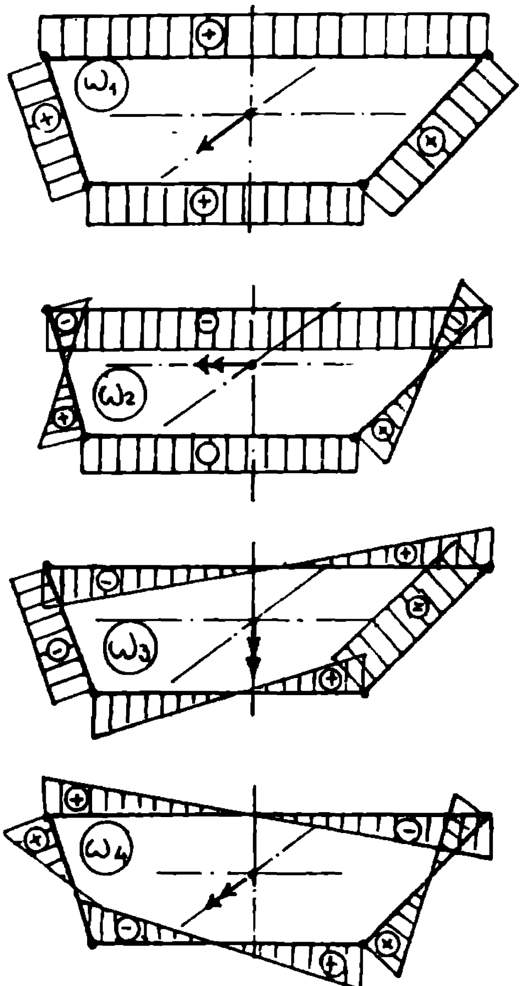
$$u_x(x,s,n)= u_x(x,s) - n\frac{\partial u_n(x,s)}{\partial x} \ ;$$

$$u_s(x,s,n) = u_s(x,s) - n\frac{\partial u_s(x,s)}{\partial x} \quad (6.8a,b,c)$$

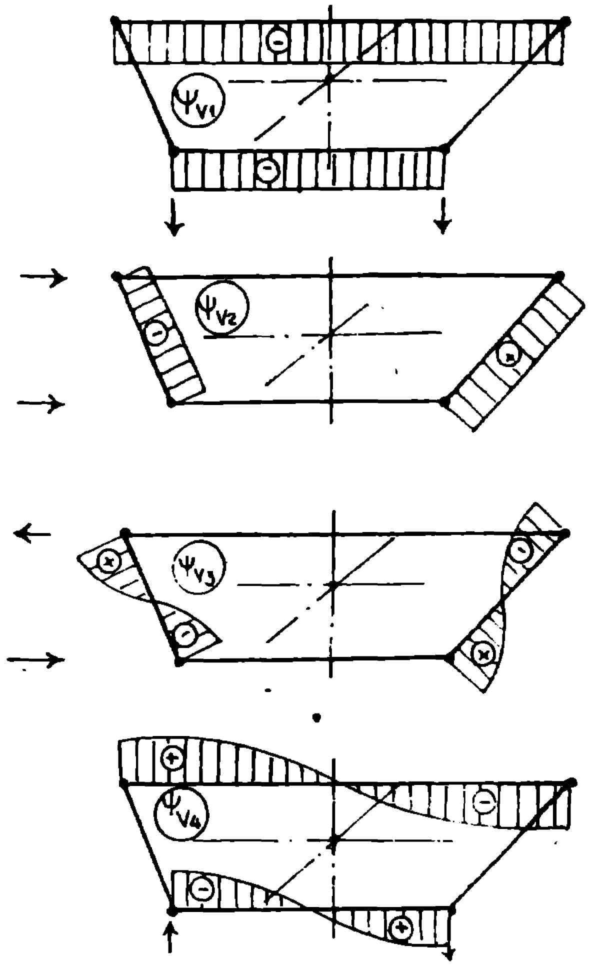
$$u_n(x,s,n) = u_n(x,s)$$

sau matricial

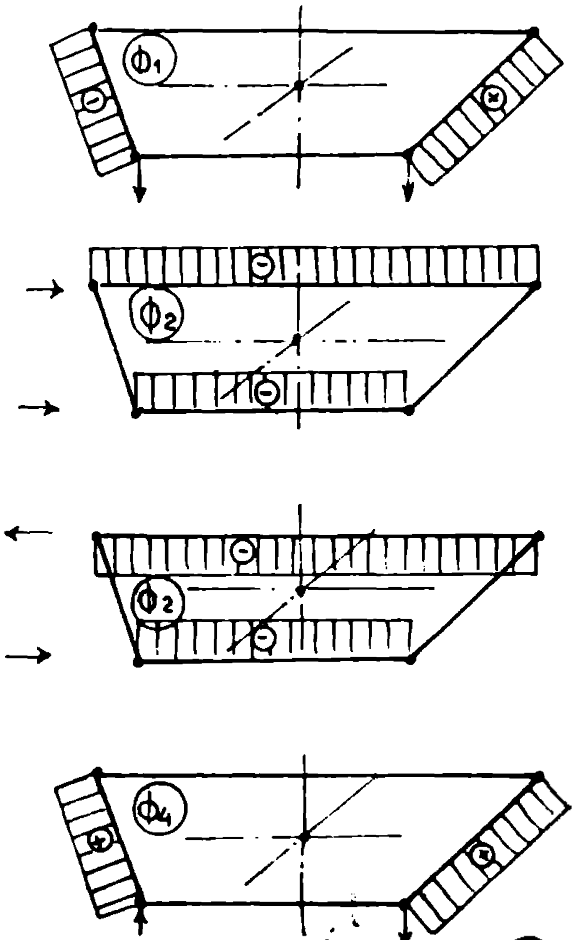
$$\{u\} = [A_1]\{X\} + [A_2]\{X'\} \quad (6.9)$$



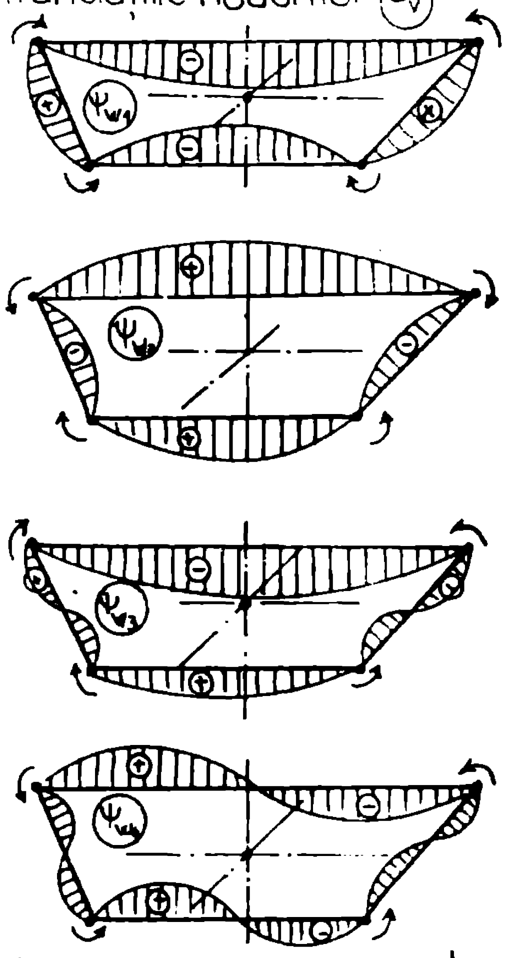

a) deplasari axiale (ω)




c) deplasări tangențiale produse de translațiile nodurilor (ωV)




b) deplasări tangențiale (Φ)




d) deplasări normale produse de rotirile nodurilor (ψW)

fig 6.2

$$[A_1]=\begin{bmatrix}\langle\omega\rangle & 0 & 0\\ 0 & (\langle\phi\rangle-n\langle\psi_v\rangle)- & n\langle\psi_w\rangle\\ 0 & \langle\psi_v\rangle & \langle\psi_w\rangle\end{bmatrix} \; ; \; [A_2]=\begin{bmatrix}0 & -n\langle\psi_v\rangle & -n\langle\psi_w\rangle\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (6.1o,a,b)$$

Se notează cu $(\ldots)' = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x}$ și $(\dot{\ldots}) \equiv \frac{\partial(\ldots)}{\partial s}$

Componentele deformației într-un punct arbitrar din secțiunea transversală sînt :

$$\varepsilon_{xx}=u_x' - nu_n''; \; \varepsilon_{xs} = \dot{u}_x + u_s' - 2n\cdot\dot{u}_n' \; ; \; \varepsilon_{ss}=\dot{u}_s - n\,\ddot{u}_n; \; \varepsilon_{nn}=\varepsilon_{ns}=\varepsilon_{ns}=0 \qquad (6.11)$$

Matricial rezultă :

$$\{\varepsilon\}=[B_1]\{X\} + [B_2]\{X'\} + [B_3]\{X''\} = [B]\{X_D\} \qquad (6.12)$$

$$[B]=[[B_1]\,[B_2]\,[B_3]]; \; \{X_D\} = [\langle X\rangle\langle X'\rangle\langle X''\rangle]^T , \qquad (6.13)$$

în care matricile $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ se obțin în aceeași manieră ca $[A_1]$ și $[A_2]$.

Considerîndu-se că pereții lucrează în starea plană de tensiuni rezultă că $\sigma_{nn}=\sigma_{ns}=\sigma_{nx}=0$ și că $\langle\sigma\rangle=\langle\sigma_{xx}\;\sigma_{xs}\;\sigma_{ss}\rangle$ cu

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \qquad (6.14)$$

### 6.2.2. Ecuațiile de echilibru.

Ecuațiile de echilibru se obțin prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual . Lucrul mecanic interior este

$$\delta u = \int_V \langle\delta\varepsilon\rangle\{\sigma\}\,dV = \int_0^{\ell}\langle\delta X_D\rangle[K]\{X_D\}\;dx \qquad (6.15)$$

în care $[K] = \int_S [B]^T [D] [B]\,dS$ ; $\qquad (6.16)$

are o structură similară cu matricea de rigiditate din MEF și este compusă din submatrici $[K_{ij}]$ de forma

$$[K_{ij}] = [K_{ji}]^T = \int_S [B_i]^T[D][B_j]\,dS \; ; \; i,j = 1,2,3 \qquad (6.17)$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare se obține în forma următoare:

$$\delta W = \int_V\langle\delta u\rangle\{F\}dV+\int_{S_1}\langle\delta u\rangle\{P\}dS = \int_0^{\ell}\langle\delta X_D\rangle\{R\}\;dx + \left|\langle\delta X_D\rangle\{R_r\}\right| \qquad (6.18)$$

în care s-a integrat prin părți și :

$$[A] = \left[[A_1]\,[A_2][0]\right];\ \{R\} = \int_S [A]^T\{F\}\,dS + \int_{S_2} [A]^T\,\{P\}\,dS \quad (6.18)$$

$$\{R_r\} = \int [A]^T\{P\}\,dS \quad (6.19)$$

In aceste relații $\{F\}$ și $\{P\}$ sînt vectorii forțelor masice și respetic al forțelor exterioare pe suprafață, iar $S_1+S_2 = S$ au fost definite în §§§2.3.6.

Cu (6.15) și (6.18) principiul lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = \delta U - \delta W = \int_0^{\ell} \langle\delta X_D\rangle\,(\,[K]\{X_D\} - \{R\}\,)dx + \left|\langle\delta X_D\rangle\,\{R_r\}\right|_0^{\ell} = 0 \quad (6.20)$$

6.2.3. Efectul temperaturii.

In prezența temperaturii (6.15) devine

$$\int_V \langle\delta\varepsilon\rangle\,\{\sigma_t\}\,dV = \int_0^{\ell} \langle\delta X_D\rangle\left(\int_S [B]^T\{\sigma_t\}\,dS\right)dX = \int_0^{\ell} \langle\delta X_D\rangle\,\{R_t\}\,dx \quad (6.21)$$

în care $\{R_t\} = \int_S [B]^T\{\sigma_t\}\,dS$ reprezintă vectorul încărcărilor fictive din :

iar $\langle\sigma_t\rangle = \langle -\alpha Et(x,s)\quad 0\quad 0\rangle$ . tensiunile termice. In ecuația generală (6.2o) efectul temperaturii se introduce prin adăugarea termenului $\{R_t\}$ la $\{R\}$ .

Aplicînd un criteriu variațional și condiții de margine ecuației (6.2o) rezultă un sistem de ecuații diferențiale ordinare care se rezolvă cu metodele cunoscute ale matematicii sau aplicînd un procedeu de discretizare cu elemente finite.

6.2.4. Aplicarea metodei elementelor finite.

Se presupune discretizarea structurii prismatice în elemente finite după o topologie longitudinală. Cîmpul deplasărilor necunoscute $\{X\}$ se aproximează cu polinoame Hermite cubice /45/, /159/, /2o1/.

$$\{X\} = [N_M]\,\{X_n\} \quad (6.22)$$

Vectorul deplasărilor nodale și al derivatelor acestora este de forma

$$\{\mathcal{X}_n\} = \left[\,\{\mathcal{X}_u\}\,\{\mathcal{X}_v\}\,\{\mathcal{X}_w\}\right]^T \quad (6.23)$$

în care, spre exemplu :

$$\{\mathcal{X}_u\} = [\;u_1(0)u_1'(0)u_1(\ell)\;u'(\ell)\;\ldots u_M'(0)u_M'(0)u_M(0)u_M(\ell)\;]^T \quad (6.24)$$

Matricea funcțiilor de interpolare N și a derivatelor acestora este :

$$[\mathcal{N}] = [\,[N_M]^T\;[N_M']^T\;[N_M'']^T\,]^T \quad (6.25)$$

Cu (6.24) şi (6.25) , expresia (6.13) devine

$$\{X_D\} = [\mathcal{N}]\{\mathcal{X}_n\} \qquad (6.26)$$

In urma acestui proces de discretizare (6.2o) ia următoarea formă

$$[\bar{K}]\{\bar{\mathcal{X}}_n\} = \{\bar{R}\} \qquad (6.27)$$

cu

$$[\bar{K}] = \int_0^{\ell} [\mathcal{N}]^T [K][\mathcal{N}] dx; \quad \{\bar{R}\} = \int_0^{\ell} [\mathcal{N}]^T \{R\} \, dx + \left| [\mathcal{N}]^T \{R_r\} \right|_0^{\ell} \qquad (6.28,a,b)$$

care reprezintă, respectiv, matricea de rigiditate şi vectorul încărcărilor exterioare, $\{\mathcal{X}_n\}$ fiind vectorul deplasărilor nodale.

Din punct de vedere numeric ecuaţia (6.27) se rezolvă prin calcul automat conform procedurilor numerice prezentate în capitolul IV.

### 6.3. APLICAREA SIMPLIFICATA A METODEI LA CALCULUL STAVILELOR CLAPETA CU SECTIUNE DUBLU CONEXA.

#### 6.3.1. Ipoteze simplificatoare.

Aplicarea metodei expuse în §.6.2. la calculul stavilelor clapetă se face în prezenţa următoarelor ipoteze simplificatoare :

(i) Secţiunile plăcilor plane componente ale suprafeţei prismatice rămîn plane şi după deformare ($u_n(x,s) = o$)

(ii Alungirile specifice $\varepsilon_{ss}$ se consideră neglijabile.

(iii) Lunecările specifice din planul plăcilor $\varepsilon_{xs}$ se consideră neglijabile.

(iiii) Momentele încovoietoare distribuite longitudinal $m_x$ şi momentele de torsiune $m_{xs}$ se neglijează.

(iiiii) Se consideră că clapelele reazemă continuu pe toată lungimea.

Pentru definirea cîmpului de deplasări se vor lua în considerare numai deplasările axiale $u_x(x,s)$ şi deplasările tangenţiale $u_n(x,s)$.

#### 6.3.2. Ecuaţiile de echilibru simplificate.

Expresiile lucrului mecanic interior $\delta u$ şi exterior $\delta W$ se scriu în această situaţie în solicitări unitare (fig.6.3).

Din deplasările axiale $\omega$ , pentru dx=1 rezultă,

$$\delta W_x = \int n_x' \omega \, ds + \int P_x \omega \, ds \qquad (6.29)$$

$$\delta U_x \int n_{xs} \varepsilon_{xs} ds = \int n_{xs} \omega \, ds \qquad (6.3o)$$

$$\delta L_x = \int n_x' \omega \, ds + \int p_x \omega \, ds - \int n_{xs} \dot{\omega} \, ds = o \qquad (6.31).$$

Similar rezultă din deplasările tangenţiale $\emptyset$

$$\delta L_s = \int n_{xs} \emptyset \, ds + \int p_s \emptyset \, ds \qquad (6.32)$$

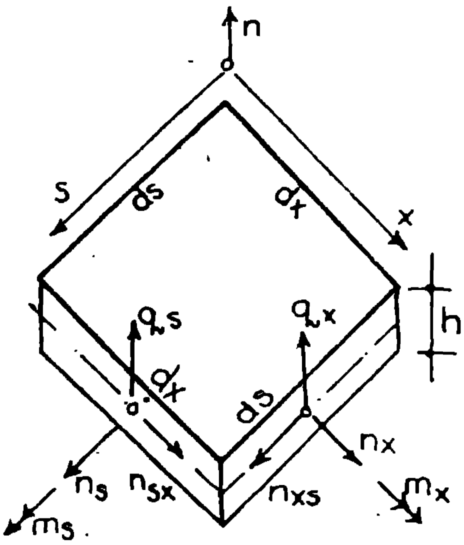



fig. 6.3

In aceste relaţii :

$$n_x = Eh\,(\frac{\partial u_x}{\partial x}\;\alpha t);$$

$$n_{xs} = Gh\,(\frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x}) \qquad (6.33.a,b)$$

sau înlocuind în funcţie de (6.2)

$$n_x = Eh\,(\langle\omega\rangle\{U'\}-\alpha t)\;;$$

$$n_{xs} = Gh(\langle\omega\rangle\{\dot U\} + \langle\emptyset\rangle\{V'\}) \qquad (6.34\ a,b)$$

în care (6.32) devine :

$$\frac{E}{G}\int h\langle\omega\rangle\{U''\}\{\omega\}ds - \int h(\langle\dot\omega\rangle\{U\}\{\dot\omega\}+\langle\emptyset\rangle\{V'\}\{\dot\omega\}dS + \frac{1}{G}\int p_x\{\omega\}dS \qquad (6.35)$$

sau în formă condensată

$$\frac{E}{G}\{U''\}[B_3] - \{U\}[B_1] - \{V'\}[C_2] + \frac{1}{G}\{R_x\} = o \qquad (6.36)$$

In mod asemănător din (6.32) rezultă

$$\{U'\}[B_2] + \{V''\}[C_3] + \frac{1}{G}\{R_s\} = o \qquad (6.37)$$

în care

$$B_{3ij} = \int\omega_i\omega_j\ dA\ ;\quad B_{3ij} = B_{3ji}\ ;\ dA = hdS;\ i,j=1,2,\dots,K \qquad (6.38)$$

$$B_{1ij} = \int\dot\omega_i\dot\omega_j\ dA\ ;\quad B_{1ij} = B_{1ji}\ ; \qquad (6.39)$$

$$C_{2jk} = \int\emptyset_k\dot\omega_j dA;\quad C_{2jk}\neq C_{2kj}\ \text{dacă}\ j\neq k;\quad j=1,2,\dots,K;\ k=1,2,3. \qquad (6.40)$$

$$R_{xi} = \int p_x\omega_i dS\ ;\quad R_{sk} = \int p_s\ \emptyset_k dS\ ;\ i=1,2,\dots,K\ ;\ k = 1,2,3\ . \qquad (6.41)$$

$$C_{3hk} = \int\emptyset_h\ \emptyset_k\ dA\ ;\quad C_{3hk} + C_{3kh}\ ;\ k,h = 1,2,3. \qquad (6.42)$$

$$[B_2] = [C_2]^T\ ;\ \{U\}=[u_1\ u_2\dots u_k]^T\ ;\ [V = V_1\ V_2\ V_3]^T \qquad (6.43)$$

In aceste relaţii K este numărul de noduri a suprafeţei prismatice, iar h,k = 1,2,3, sînt GDL ale unei şaibe în planul său.

Explicitînd $\{V''\}$ din (.6.37) şi integrînd se obţine $\{V'\}$ care se înlocuieşte în (6.36) rezultînd

$$\frac{E}{G}[B_3]\{U''\} - ([B_1]-[C_2][C_3]^{-1}[C_2]^T\{U\} + [C_2][C_3]^{-1}(\{\bar R_s\}+\{A\}) + \{R_x\} = o \qquad (6.44)$$

în care $\{\bar R_s\} = \int_0^x \{R_s\}\ dx$, iar $\{A\}$ sînt constante de integrare.

6.3.3. Rezolvarea sistemului de ecuaţii.

Soluţiile sistemului de ecuaţii neomogene (6.44) se compun din soluţiile generale ale sistemului de ecuaţii omogene $\{U_o\}$ şi soluţiile particulare ale ecuaţiilor neomogene $\{U_p\}$. Soluţiile sistemului de ecuaţii omogene se obţin cu metodele cunoscute ale algebrei matriceale /2o2/.

$$\{U_o\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \; shk_1 z + \Omega_1 dvkz \\ \vdots \\ \varphi_k \; shk_K z + \Omega_K dvk_K z \end{Bmatrix} = \{\lambda\}\{\Gamma\} \qquad (6.45)$$

Matricea vectorilor proprii se determină utilizînd procedeele clasice, impunînd condiţia de ortonormalitate asupra acestora.

$$\langle \lambda \rangle [B_3] \{\lambda\} = 1 \qquad (6.46)$$

Coeficienţii $k_i$ din (6,45) sînt rădăcinile polinomului caracteristic:

$$\frac{E}{G} [B_3] \{k_i^2\} - ( [B_1] - [C_2][C_3]^{-1}[C_2]^T ) = o \quad , i=1,2,...K \qquad (6.47)$$

Soluţiile particulare rezultă aplicînd metoda variaţiei constantelor în ipoteza că încărcarea exterioară nu variază în funcţie de x

$$\{U_p\} = \left[ [B_1] - [C_2][C_3]^{-1}[C_2]^T \right]^{-1} \left[ [C_2][C_3]^{-1} ( \{\bar{R}_s\} + \alpha ) + \{R_x\} \right] \qquad (6.48)$$

Soluţiile $\{V\}$ se obţin prin integrare.

$$\{V\} = - [C_3]^{-1} [C_2]^T \int_0^x \{U\} \, dx = -[C_3]^{-1} \int_0^x \{\bar{R}_s\} \, dx + \{A\} x + \{A_1\} \qquad (6.49)$$

Cunoscînd deformaţiile se pot determina solicitările şi reacţiunile:

- momentul încovoietor M(x)

$$\{M(x)\} = E [B_3] \{U'\} \qquad (6.5o)$$

- reacţiunile în articulaţii Y(x)

$$\{Y(x)\} = [F]\{U'\} + [H]\{V''\} + \frac{1}{G} \; P_o \qquad (6.51)$$

$$f_{il} = \int \dot{\omega}_i \dot{\omega}_l dA \; ; \quad h_{kl} = \int \dot{\phi}_k \dot{\omega}_l \, dA \qquad (6.52 \; a,b)$$

Momentele de torsiune se obţin prin scrierea ecuaţiei de momente în raport cu centrul de torsiune, forţele şi poziţiile lor fiind cunoscute.

6.3.4. Condiţii de margine.

După modul de acţionare clapelele pot fi clasificate în trei categorii :

(1) clapete cu acţionare la mijlocul deschiderii (fig.6.4.a)

(2) clapete cu acţionare la un capăt (fig.6.4.b)

(3) clapete cu acţionare la ambele capete (fig.6.4.c)

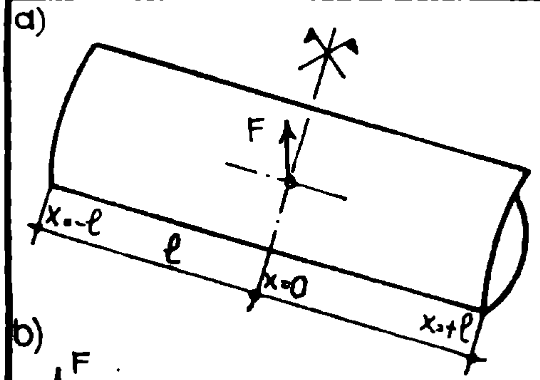
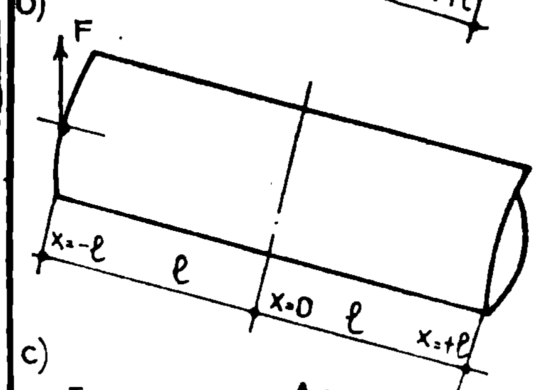
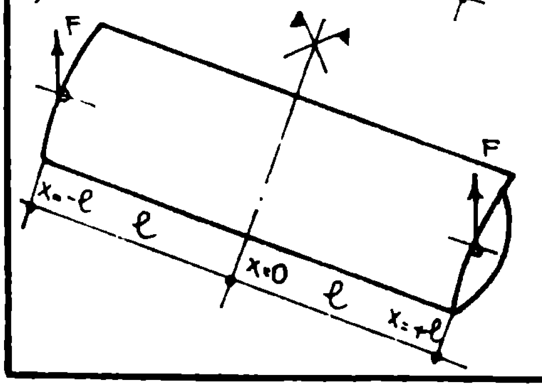
| tipul acţionării | condiţia de margine | constante ca-re rezultă |
|---|---|---|
| a)   | $[B_3]\{U'(0)\}=0$<br>$[B_3]\{U'(\ell)\}=0$<br>$\{\bar{R}_S(0)\}+\{A\}=0$<br>$\{V(\ell)\}=0$ | $\varphi_K$<br>$\Omega_K$<br>$\{A\}$<br>$\{A_1\}$ |
| b)   | $\{U'(\ell)\}=\{U'(-\ell)\}=\frac{1}{E}\begin{Bmatrix}\frac{1}{B_{3,11}}M(x)\\0\\0\end{Bmatrix}$<br>$\{\bar{R}_S(\ell)\}+\{A\}=0$<br>$\{V(+\ell)\}=0$<br>$M_t(\ell)=0$ | $\varphi_K$<br>$\Omega_K$<br>$\{A\}$<br>$\{A_1\}$ |
| c)   | $\{U'(\ell)\}=\{U'(-\ell)\}=\frac{1}{E}\begin{Bmatrix}\frac{1}{B_{3,11}}M(x)\\0\\0\end{Bmatrix}$<br>$\{\bar{R}_S(\ell)\}+\{A\}=0$<br>$\{V(\ell)\}=0$<br>$M_t(0)=0$ | $\varphi_K$<br>$\Omega_K$<br>$\{A\}$<br>$\{A_1\}$ |

fig.6.4

In cazul b momentul de torsiune $M_t$ este nul la capătul liber cu valoarea maximă la capătul în care este acţionată clapeta. In cazul c, $M_t$ are la capete jumătate din valoarea maximă în cazul precedent, la mijloc fiind nul.

Incărcarea exterioară $p_o$ se consideră concentrată pe secţiunea transversală, fiind uniform distribuită în lungul stavilei.

6.3.5. Exemple numerice.

Pentru a se pune în evidenţă modul de aplicare a procedeului de calcul prezentat se tratează în continuare două exemple de calcul. Numărul funcţiilor necunoscute U(x) este egal cu numărul K al nodurilor (muchiilor) secţiunii transversale. Pentru funcţiile predefinite $\omega(s)$ se adoptă variaţiile: $\omega_1=1$ ; $\omega_2=x$; $\omega_k=y$ . cele-

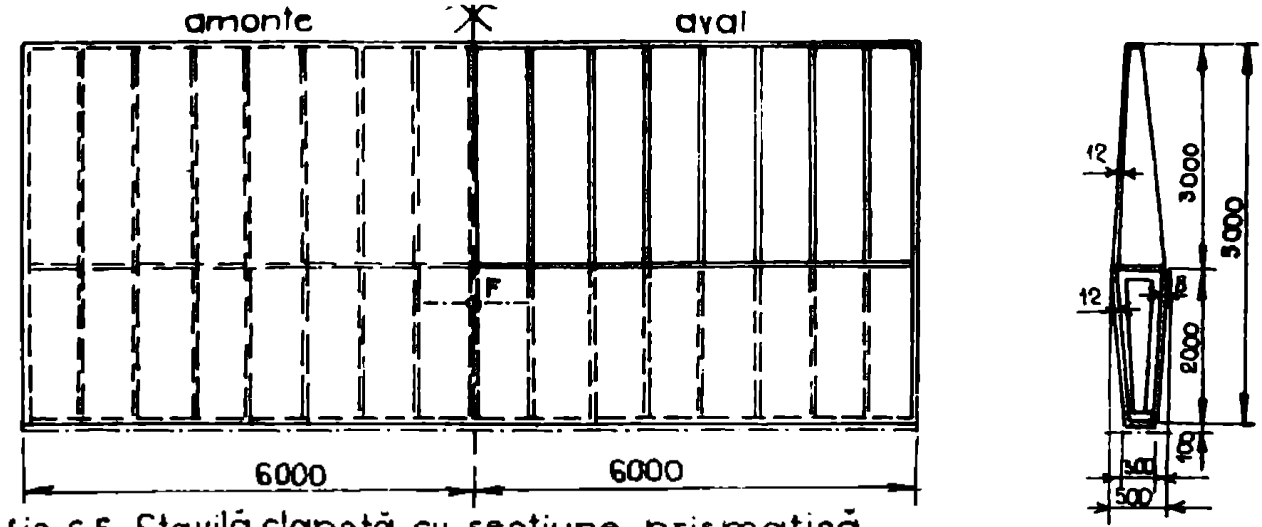



fig. 6.5 Stavilă clapetă cu secțiune prismatică

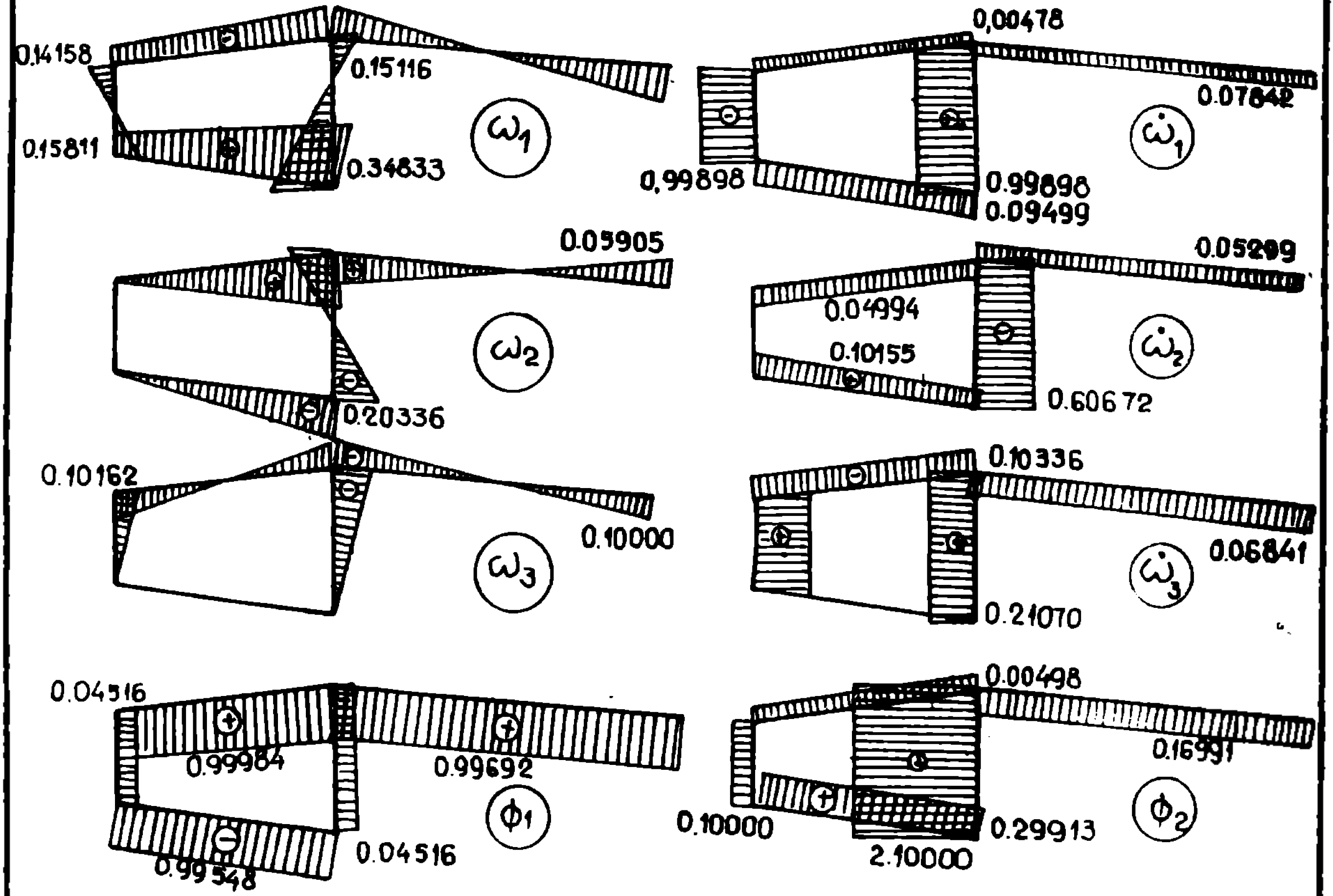



fig. 6.6 Diagramele ω si φ

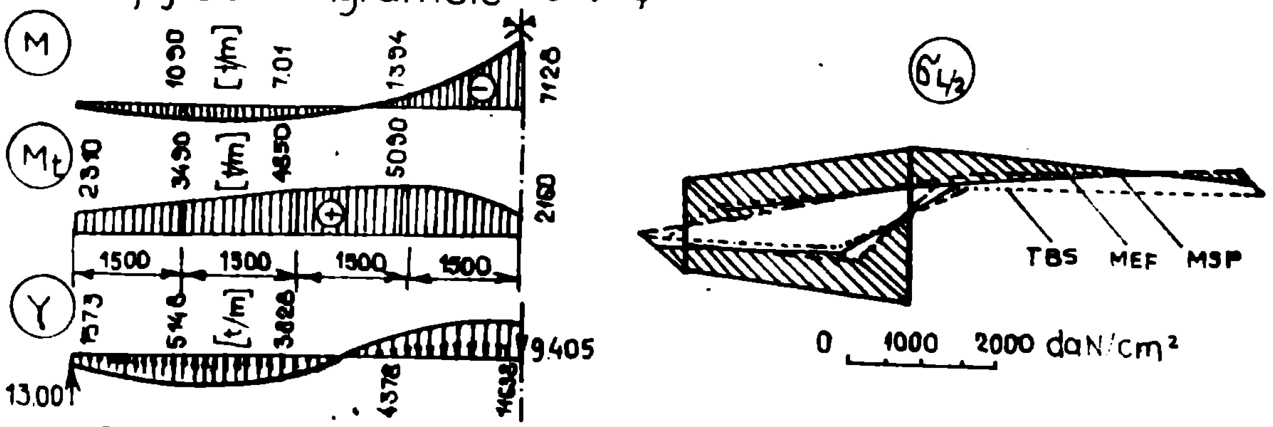



fig. 6.7 Diagrame de solicitări (eforturi) si tensiuni

lalte alegîndu-se să fie ortogonale cu $\omega_1$ şi $\omega_k$.

Intrucît pentru secţiunea transversală se acceptă numai 2GDL: o deplasare $V_1$ după axa principală y şi o rotaţie $V_2$ în jurul axului articulaţiei funcţiile predefinite $\emptyset$ vor fi în număr de două : $\emptyset_1$ = y şi $\emptyset_2$ = dj, dj fiind distanţa de la axul articulaţiei la latura j(faţa) secţiunii transversale.

Cu aceste precizări se pot aborda în continuare cele două exemple, care pentru a avea o imagine asupra calităţii rezultatelor sînt rezolvate şi prin metoda clasică care consideră stavila o grindă cu pereţi subţiri rezemată continuu pe articulaţii, precum şi prin metoda elementelor finite.

6.3.5.1. Stavilă clapetă cu secţiune prismatică.

Stavila este prezentată în fig.6.5. In figura 6.6 se prezinză diagramele $\omega$ şi $\emptyset$ iar în figura 6.7 rezultatele comparative obţinute cu cele trei metode.

6.3.5.2. Stavilă clapetă "- burtă de peşte ".

Stavila şi rezultatele obţinute prin aplicarea metodei sînt prezentate în §§ 1,4.3.3. In figura 6.8 se prezintă diagramele $\omega$ şi $\emptyset$.

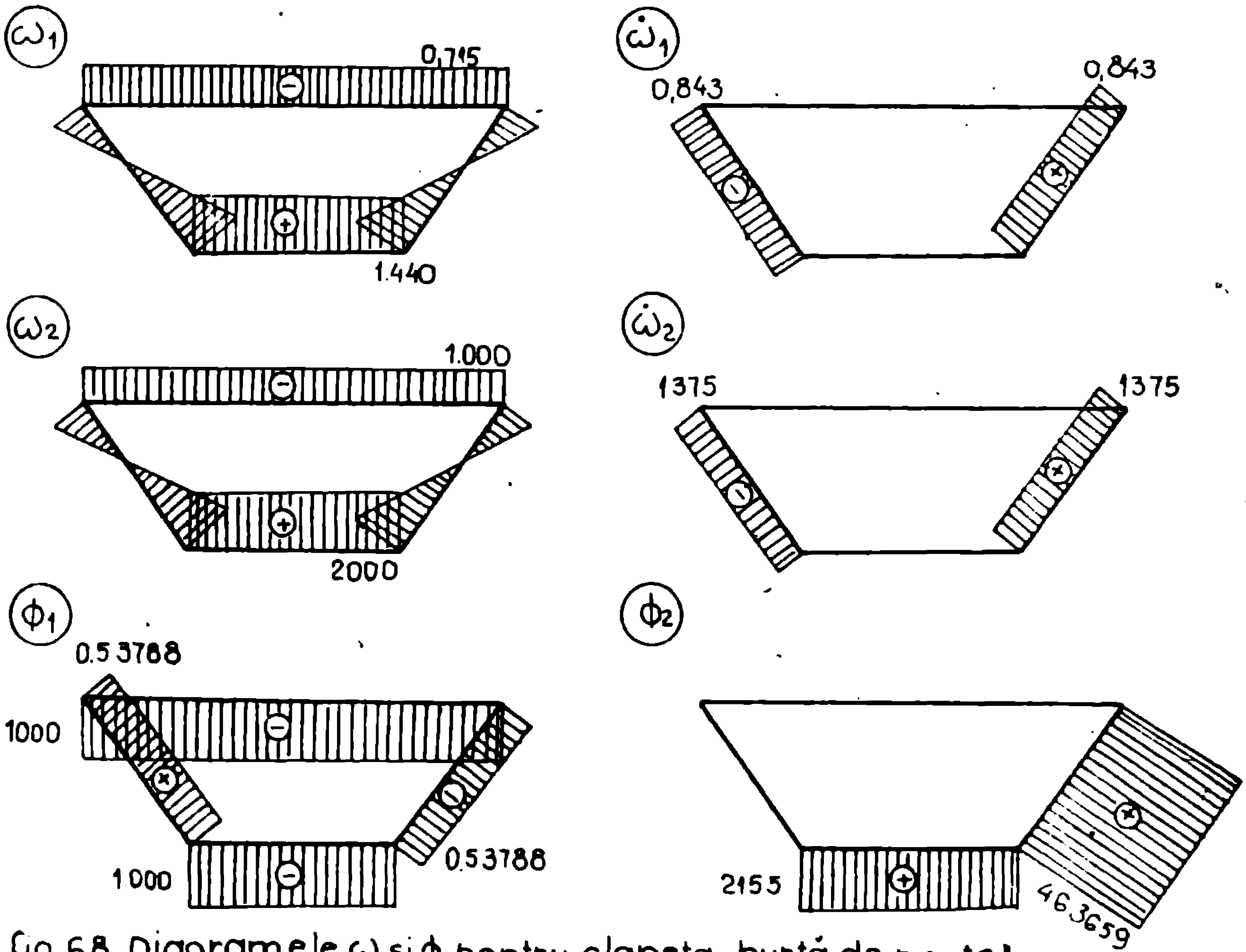



fig 6.8 Diagramele ω si φ pentru clapeta „burtă de peşte"

## 6.4. CONCLUZII

Metoda generală de rezolvare a stavilelor cu secțiune chesonată prismatică sau care se pot aproxima printr-o suprafață prismatică închisă este aplicabilă tuturor tipurilor de stavile prin intermediul calculului automat. In forma simplificată prezentată în §.6.3 metoda poate fi de asemenea aplicată tuturor tipurilor de stavile cu secțiune închisă, introducînd condiții de margine adecvate și definind în mod corespunzător funcțiile $\omega$ și $\emptyset$.

Metoda nu ține seama de conlucrarea platelajului cu elementele de rigidizare ale acestuia (lonjeroni, antretoaze sau diafragme). Acest neajuns poate fi înlăturat dacă se determină o grosime echivalentă a platelajului printr-un calcul simplificat de echivalare a rigidităților la încovoiere și torsiune, și prin înlocuirea efectului diagramelor prin condiții de margine adecvate. De altfel, rezultatele comparative prezentate în exemplele precedente dovedesc o precizie tehnică remarcabilă.

In orice caz, față de metoda curentă de calcul a stavilelor clapetă ca bare cu pereți subțiri, la care adesea raportul $\frac{h}{l} > 10$, metoda propusă are avantajul unei modelări mai aproape de realitate a acestor structuri, considerîndu-le ca suprafețe prismatice lungi.

Comparativ cu MEF, care poate fi oricît de exactă în funcție de calitatea și finețea discretizării, metoda propusă oferă avantajele unui calcul operativ, abordabil prin echipamente de calcul de mică capacitate, la îndemîna inginerului proiectant.

# C A P I T O L U L VII

## FORMULAREA UNEI TEORII NELINIARE A BARELOR CU PERETI SUBTIRI /72/.

### 7.1. GENERALITATI

Aşa cum s-a arătat în capitolul 1 şi capitolul 6 stavilele metalice moderne sînt structuri metalice cu pereţi subţiri care se pot încadra fie în categoria barelor cu pereţi subţiri, fie în categoria suprafeţelor prismatice, care, la rîndul lor, îşi au teoriile de calcul fundamentate pe ipotezele primelor. Din acest punct de vedere examinarea şi dezvoltarea teoriei de calcul, liniară şi neliniară, a barelor cu pereţi subţiri se consideră ca fiind utilă şi oportună pentru dezvoltarea unor metode de calcul specifice anumitor tipuri de stavile.

Bazele teoriei liniare a barelor cu pereţi subţiri au fost puse de către Vlasov în lucrarea sa fundamentală /195/ publicată în anul 1940 . Ipotezele de bază ale acestei teorii sînt următoarele :

(i) O bară cu pereţi subţiri este un element structural caracterizat prin trei mărimi geometrice - lungime, lăţimea, respectiv înălţimea, secţiunii transversale şi grosimea pereţilor - aflate între ele în rapoarte de ordin de mărime diferite.

(ii) O bară cu pereţi subţiri poate fi considerată ca o placă curbă subţire lungă cu comportare elastică.

(iii) Lunecările specifice din suprafaţa mediană a plăcii curbe subţiri se pot neglija.

(iiii) O secţiune oarecare a barei cu pereţi subţiri este nedeformabilă în planul său - ipoteza conturului rigid.

Proprietatea caracteristică a barei cu pereţi subţiri este aceea că în timpul răsucirii bara se deformează longitudinal, secţiunile transversale se deplanează rezultînd tensiuni normale proporţionale cu aceste deformaţii.

Stabilirea unor criterii cantitative de clasificare a elementelor de construcţie cu pereţi subţiri este, practic, imposibilă. Vlasov indică următoarele rapoarte :

$$\frac{t}{b} \leqslant 0.10 \quad \text{şi} \quad \frac{b}{\ell} \leqslant 0.10 \; ;$$

t, grosimea pereţilor
b, una din dimensiunile secţiunii transversale (lăţimea sau înălţimea)
$\ell$, lungimea barei.

Condiţiile menţionate sînt destul de largi. Din experienţă se cunoaşte că teoria lui Vlasov concordă bine cu testele experimentale atunci cînd pereţii barei sînt foarte subţiri. In cazul profilelor cu pereţi subţiri formate la rece condiţiile lui Vlasov nu mai au, de fapt, importanţă deoarece, în mod uzual, pereţii plani " tip inimă" îndeplinesc condiţiile $t/b \leq 0.03$ şi $b/\ell \leqslant 0.05$, iar pentru cei care pot fi consideraţi "tălpi" sau "aripi" $t/b < 0.07$ şi $b/\ell \leqslant 0.05$.

Cea mai bună concordanţă a experimentărilor cu teoria lui Vlasov s-a obţinut în problemele de stabilitate generală, care pot fi considerate ca fiind cele mai importante în cazul barelor cu pereți subțiri. Ipoteza conturului rigid trebuie înțeleasă practic astfel că, sub încărcările limită, nu apare o stare de eforturi care să provoace pierderea stabilității locale a pereților.

In anii '70 au apărut mai multe tentative în sensul elaborării și dezvoltării unor teorii neliniare a barelor cu pereți subțiri. Unele dintre acestea vor fi examinate succint în cele ce urmează.

Teoria neliniară elaborată de Ghobahrah și Tso /95/ este operantă în ipoteza că deformațiile din încovoiere sînt mici, iar cele din torsiune sînt moderate. Bara cu pereți subțiri este privită ca o placă curbă subțire, lungă, elastică, cu o singură curbură, deformațiile din planul secțiunii transversale fiind neglijate. Se acceptă că secțiunile transversale prezintă numai deplasări de corp rigid în planul lor. Expresiile deplasărilor normale și tangențiale se deduc. Pe baza acestor expresii și a relațiilor neliniare exacte se poate determina deplasarea secțiunii transversale impunînd condiții suplimentare pentru anularea lunecărilor specifice. Funcționala energiei potențiale este stabilită pe baza expresiei energiei de deformare a plăcilor curbe subțiri în care prima ipoteză Kirchhoff-Love este corelată cu cîmpul deplasărilor anterior definit. Ecuațiile diferențiale neliniare complete și condițiile de margine rezultă în urma aplicării criteriilor variaționale. Această teorie a fost aplicată de către autorii ei la studierea comportării neliniare a grinzilor în consolă solicitate la torsiune pură. Pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale neliniare s-a utilizat metoda perturbării, rezultatele obținute fiind verificate experimental prin teste realizate pe grinzi console alcătuite din profile dublu T.

Teoria neliniară a barelor cu pereți subțiri formulată de către Ghobarah și Tso prezintă o serie de inconveniente. In primul rînd, ipotezele în baza cărora se stabilește expresia lucrului mecanic a forțelor exterioare sînt oarecum neclare. In al doilea rînd, în expresia energiei potențiale de deformație se neglijează termenii de gradul trei și patru în deplasări ceea ce conduce la neconcordanțe la compararea rezultatelor cu cele obținute pe baza teoriei postcritice a lui Koiter /126/.

Epstein și Murrai /80/,/81/ dezvoltă o teorie neliniară care ține seama și de deformațiile de forfecare. Teoria este valabilă pentru deplasări finite arbitrare în cazul barelor cu secțiune constantă compusă din dreptunghiuri înguste.

Fiecărui element al secțiunii transversale i se atașează un tensor de ordinul trei al tensiunilor reduse în linia mediană și aplicîndu-se principiul lucrului mecanic virtual se stabilesc ecuațiile de echilibru și condițiile de margine. Dificultăți apar în momentul cînd se încearcă evaluarea variației tensiunilor de forfecare pe grosimea elementelor care compun secțiunea transversală. Problema poate fi depășită dacă se acceptă că lucrul mecanic virtual produs de aceste eforturi este egal cu acela produs de eforturile din teoria liniară clasică a torsiunii Saint-Venant (valabilă pentru valori mici ale răsucirii specifice).

Această teorie a fost aplicată la analiza postcritică a barelor cu secțiune dublu T care flambează lateral, utilizîndu-se în acest scop metoda elementelor finite, rezultatele fiind bine confirmate de încercările experimentale. Intr-o lucrare de dată mai recentă/81/ această teorie s-a utilizat la studiul flambajului inelastic și la analiza post-critică a barelor cu pereți subțiri solicitate la compresiune cu încovoiere. Teoria prezentată trebuie aplicată, însă, cu rezerve în cazul barelor cu pereţi subţiri care prezintă răsuciri specifice însemnate din cauza ipotezei făcute asupra lucrului mecanic virtual al tensiunilor de forfecare, care în acest caz nu mai este egal cu cel din teoria Saint-Venant.

Trahair şi Woolcock /161/ studiază stabilitatea grinzilor cu secţiuni dublu T simplu rezemate încărcate cu momente egale la capete formulînd ecuaţiile neliniare exacte de echilibru în stadiul critic. Aceste ecuaţii se liniarizează şi se rezolvă tratîndu-se ca o problemă de valori proprii ţinîndu-se seama şi de deformaţiile din stadiul precritic. Autorii aplică această teorie cu bune rezultate şi la studiul comportării consolelor cu secţiune dublu T încărcate cu forţe concentrate aplicate transversal la capătul liber şi la mijlocul secţiunii. Teoria lui Trahair şi Woolcock este completă în sensul că ecuaţiile diferenţiale care guvernează comportarea grinzilor au la bază ipoteze bine fundamentate. Cu toate acestea, teoria are unele limite întrucît aplicarea ei este restrînsă la grinzi cu secţiune dublu-simetrică.

Grimaldi şi Pignataro /1o5/ studiază comportarea critică şi postcritică a barelor cu pereţi subţiri simplu rezemate comprimate cu secţiune deschisă. Funcţionala energetică este stabilită pornindu-se de la componentele cîmpului deplasărilor definite în teoria liniară a lui Vlasov pe baza relaţiilor neliniare dintre deplasări şi componentele tensorului Lagrange a tensiunilor . După ce se determină expresia energiei potenţiale - ai cărei termeni de ordinul patru şi superiori în deplasări sînt neglijaţi - analiza critică şi postcritică a barelor cu pereţi subţiri se realizează prin aplicarea teoriei generale a stabilităţii echilibrului elastic a lui Koiter /124/.

Mollmam dezvoltă o teorie neliniară a barelor cu pereţi subţiri pornind de la teoria neliniară a plăcilor curbe subţiri la care adaugă ipotezele lui Vlasov cu privire la neglijarea tensiunilor de forfecare şi la modul de deformare a secţiunii transversale în planul său. Pe bazele teoretice ale acestei teorii Pedersen /161/ dezvoltă o metodă de analiză numerică,bazată pe tehnica elementului finit,a comportării critice şi post critice.

## 7.2. FORMULAREA GENERALIZATA A TEORIEI LINIARE A BARELOR CU PERETI SUBTIRI /87/.

### 7.2.1. Reflectarea în normele de calcul a problemei.

Problema pierderii stabilităţii prin încovoiere-răsucire a barelor cu pereţi solicitate la încovoiere apare în general la elementele nerigidizate lateral. Normele de calcul /93/, /2o8 ÷ 215) se referă în principal la grinzile cu secţiune simetrică nerigidizate lateral sau rigidizate pe porţiuni solicitate la încovoiere în planul de simetrie. Din acest punct de vedere, se consideră că este util, pentru a demonstra oportunitatea subiectului acestui capitol, să se facă o trecere în revistă a criteriilor de verificare şi evaluare a rezistenţei la stabilitate a grinzilor încovoiate, care-şi pierd stabilitatea prin încovoiere răsucire, conţinute în normele de calcul. In acest sens se disting 4 clase de relaţii.

(1) Formule empirice bazate pe ipoteza că talpa comprimată şi o porţiune din inimă lucrează ca elemente comprimate axial (normele de poduri şi din SUA şi Japonia).

(2) Utilizarea unor formule pentru bare comprimate în care se introduce ca parametru o sveltețe echivalentă

$\bar{\lambda}=\sqrt{M_p/M_e}$ , în care $M_p$ este momentul plastic al secțiunii transversale iar $M_e$ este momentul critic corespunzător flambajului elastic prin încovoiere răsucire. (normele din URSS și estul Europei).

(3) Formule empirice derivate din expresia momentului critic corespunzător flambajului elastic prin încovoiere-răsucire care utilizează un parametru idealizat al secțiunii transversale și condiții de margine corespunzătoare (normele de construcții din SUA).

(4) Formule care utilizează soluția analitică exactă a flambajului elastic prin încovoiere-răsucire, condiții de încărcare și de margine și unele modificări empirice pentru a ține seama de flambajul în domeniul inelastic (normele Vest Europene , Canada și SUA).

Criteriile de calcul prezentate mai sus și limitele lor de aplicabilitate au la bază teoria lui Vlasov /40/. Pentru extinderea acestor criterii la cazul barelor cu pereți subțiri cu secțiune monosimetrică, sau, în cazul general, nesimetrică, sînt necesare încă dezvoltări teoretice fundamentale. Principalele procedee de calcul bazate pe bifurcarea , sau divergența echilibrului /101/, /92/, nu rezolvă de o manieră unitară această problemă, soluțiile fiind, de regulă, cu caracter particular,

In acest subcapitol se formulează o teorie generală, unitară în cadrul căreea problemele de instabilitate a grinzilor cu pereți subțiri cu secțiune deschisă se pot aborda atît prin metoda bifurcării echilibrului cît și printr-un calcul de divergență sau limitare a echilibrului.

7.2.2. Ecuațiile diferențiale generale de instabilitate a barelor cu pereți subțiri.

In cazul cel mai general de solicitare, în cadrul modelului fizic de bifurcare a echilibrului ecuațiile de instabilitate a unei bare cu pereți subțiri cu secțiune deschisă nesimetrică (fig. 7.1) se scriu sub forma a două ecuații diferențiale de încovoieri și o ecuație diferențială de torsiune.

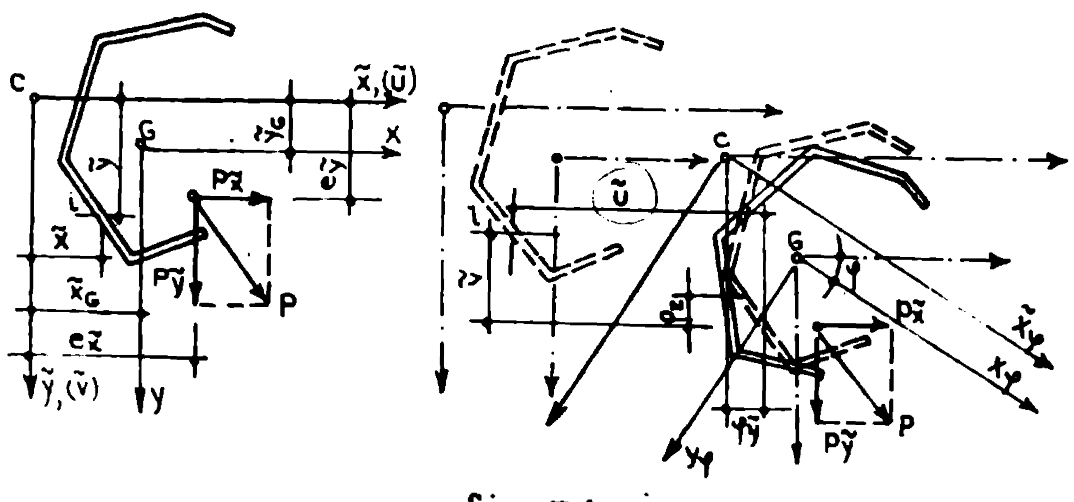



fig. 7.1

$$\begin{cases} D_y \tilde{u}^{IV} + \left[N(\tilde{u}' - y_G\varphi')\right]' + (M_x\varphi)'' = 0 \\ D_x \tilde{v}^{IV} + \left[N(\tilde{v}' + \tilde{x}_G\varphi')\right] + (M_y\varphi)'' = 0 \\ D_\omega \varphi^{IV} - (D_t - N\, i_c^2)\varphi'' - \frac{k_{\tilde{x}}}{I_x}(M_x\varphi') - \frac{k_y}{I_y}(M_y\varphi') + M_x\tilde{u}'' - M_y\tilde{v}'' + \\ \quad + N\tilde{x}_G\tilde{v}'' - N\tilde{y}_G u'' + p_{\tilde{x}}(e_{\tilde{x}} - \tilde{x}_G)\varphi - p_{\tilde{y}}(e_{\tilde{y}} - \tilde{y}_G)\varphi = 0 \end{cases} \qquad (7.1.a,b,c)$$

în care s-au folosit notaţiile :

$$D_x = EI_x;\ D_y = EI_y;\ D_\omega = EI_\omega,\ D_t = GI_t;$$

$$k_{\tilde{x}} = \int_A \tilde{y}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)dA - \tilde{y}_G A i_c^2;\ k_{\tilde{y}} = \int_A \tilde{x}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)dA - \tilde{x}_G A\, i_c^2;$$

$i_c^2 = \frac{1}{A}\int_A (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)dA$; celelalte notaţii sînt consacrate.

Soluţionarea sistemului (1) va da o triplă infinitate de forţe critice de flambaj, care rezultă condiţiile de obţinere a unor soluţii diferite de cea banală. Pornind de la aceste ecuaţii generale , prin particularizări se vor obţine relaţii care permit soluţionări analitice sau numerice.

In cadrul modelului fizic de bifurcarea echilibrului, modelul matematic al instabilităţii prin bifurcare se defineşte ca o problemă de valori proprii, care rezultă în mod direct prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale echilibrului indiferent (7.1).

Complexitatea condiţiilor la limită necesare integrării sistemului de ecuaţii diferenţiale (7.1) conduce la un volum de calcule foarte mare, astfel încît procedeele analitice devin deosebit de laborioase. Metoda de rezolvare cea mai facilă este integrarea numerică cu ajutorul calculatorului electronic. Dintre metodele de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale, pentru problema pusă în discuţie, adecvată este metoda Runge-Kutta-Gill /47/ , cu aplicaţii şi rezultate cunoscute în studiul barelor cu secţiune monosimetrică comprimate care-şi pierd stabilitatea prin încovoiere răsucire /14o/.

### 7.2.3. Ecuaţiile generalizate ale barelor cu pereţi subţiri solicitate la încovoiere cu torsiune.

Se consideră situaţia prezentată în fig.7.1.,cu bara încovoiată şi torsionată în raport cu poziţia iniţială. Ecuaţiile diferenţiale de deformaţii sînt :

$$\begin{cases} D_y\tilde{u}^{IV} = p_{\tilde{x}} \\ D_x\tilde{v}^{IV} = p_y \\ D_\omega\varphi^{IV} = m. \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} D_y\tilde{u}'' = -M_x \\ D_x\tilde{v}'' = -M_y \\ D_\omega\varphi^{IV} - D_t = m \end{cases} \qquad (7.2.\ a,b)$$

Pentru formularea ecuaţiilor de instabilitate generalizate eforturile şi forţele se reduc în raport cu centrul de tăiere C, iar momentele încovoietoare şi momentul de torsiune se determină în conformitate cu teoria de ordinul doi /92/. In cursul procesului de reducere se pune în evidenţă bimomentul suplimentar (fig. 7.2) şi momentele încovoietoare şi de torsiune de ordinul doi.

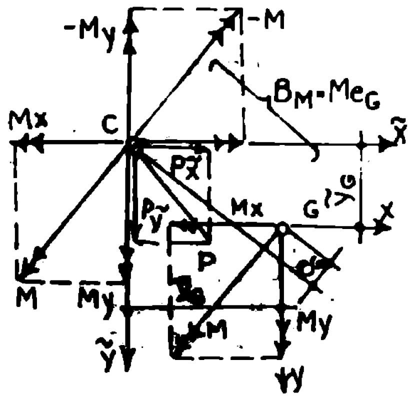



fig. 7.2

$$B_M = M\,e_G \qquad (7.3)$$

$$M_{\tilde{x}\varphi} = M_x - M_y\varphi$$
$$M_{\tilde{y}\varphi} = M_y - M_x\varphi \qquad (7.4,a,b)$$

$$m\varphi = m\varphi_P + m\varphi_M + m\varphi_G \qquad (7.5)$$

în care :

$$m\varphi_P = -P_{\tilde{x}}\,(e_{\tilde{y}} + e_{\tilde{x}}\varphi) + P_{\tilde{y}}(e_{\tilde{x}} - e_{\tilde{y}}\varphi)$$

$$m\varphi_M = M_x\,\tilde{u}'' + M_y\tilde{v}'' \qquad (7,6a,b,c,)$$

$$m\varphi G = \frac{k_{\tilde{x}}}{I_x}(M_x\varphi')' + \frac{k_{\tilde{y}}}{I_y}(M_y\varphi')' + \frac{k\omega}{I\omega}\left[(B+B_M)\varphi'\right]'$$

cu $k_\omega = \int_A \omega(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)\,dA$, $\omega$ fiind coordonata sectorială principală.

Dacă se fac notaţiile $k_{\tilde{x}}/I_x = K_{\tilde{x}}$ ; $k_{\tilde{y}}/I_y = K_{\tilde{y}}$ şi $k_\omega/I_\omega = K_\omega$ şi se fac înlocuirile corespunzătoare expresiilor (7.3) ÷ (7.6) sistemul (7.2) devine:

$$D_y\tilde{U}^{IV} + (M_x - M_y\varphi)'' = 0$$

$$D_x\,\tilde{V}^{IV} + (M_y - M_x\varphi)'' = 0 \qquad (7.7)$$

$$D_\omega\varphi^{IV} - D_t\varphi''' - K_{\tilde{x}}(M_x\varphi')' - K_{\tilde{y}}(M_y\varphi')' - K_\omega\left[(B+B_M)\varphi'\right]' + M_x\tilde{u}'' - M_y\tilde{v}''$$
$$+ P_{\tilde{x}}\,(e_{\tilde{y}} + e_{\tilde{x}}\varphi) - P_{\tilde{y}}(e_x - e_y\varphi) = 0$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale rezultat, asemănător ca formă cu sistemul general (7.1), obţinut pe modelul fizic de bifurcarea echilibrului permite soluţionarea problemelor de instabilitate prin încovoiere răsucire prin divergenţa echilibrului prin intermediul unui calcul de rezistenţă de ordinul doi, precum şi a problemelor de instabilitate prin încovoiere pe baza unui calcul de bifurcare. Eliminînd $u''$ şi $v''$ din (7.7) se obţin ecuaţiile generalizate pe tipuri de instabilitate:

(A) Ecuaţia de stabilitate a barelor cu pereţi subţiri solicitate la încovoiere oblică cu torsiune, definită pe un model de divergenţa echilibrului pe baza unui calcul de rezistenţă de ordinul doi :

$$D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi')' - K_{\tilde{y}} (M_y \varphi)' - K_\omega[(B+B_M)\varphi'] - (C_M - C_P) - C = 0, \tag{7.8}$$

în care s-au introdus notaţiile

$$C_M = \frac{M_x^2}{D_y} + \frac{M_y^2}{D_x} \; ; \; C_P = P_{\tilde{y}} \; e_{\tilde{y}} + P_{\tilde{x}} \, e_{\tilde{x}} \; ; \; C = \frac{M_x M_y}{D_y}\left(1 - \frac{I_y}{I_x}\right) + P_{\tilde{y}} e_{\tilde{x}} - P_x e_{\tilde{y}}$$

(B) Ecuaţia de stabilitate a barelor solicitate la încovoiere plană cu torsiune, definită pe modelul de divergenţa echilibrului ($p_x = 0$ ; $B_M = B_{M_x} = M_x x_G$ ; $M_y = 0$):

$$D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi')' - K_\omega[(B+B_{M_x})\varphi']' - (C_{M_{\tilde{x}}} - C_{P_{\tilde{y}}})\varphi + m_{\tilde{y}} = 0 \tag{7.9}$$

în care:

$$C_{M_{\tilde{x}}} = \frac{M_x^2}{D_y} \; ; \; C_{P_{\tilde{y}}} = p_{\tilde{y}} e_{\tilde{y}} \; ; \; m_{\tilde{y}} = p_{\tilde{y}} e_{\tilde{x}}$$

(C) Ecuaţia de stabilitate a grinzilor solicitate la încovoiere plană definită pe modelul fizic al bifurcării echilibrului ($p_x = 0$ ; $M_y = 0$ ; $B_M = B_{M_x}$ ; $e_{\tilde{x}} = 0$ ; $B = 0$) :

$$D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi)' - K_\omega (B_x \varphi')' - (C_{M_x} - C_{P_{\tilde{y}}})\varphi = 0 \tag{7.1o}$$

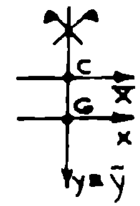
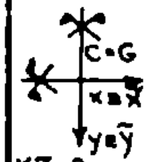
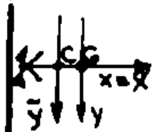
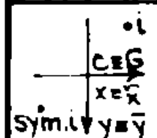
Pentru calculul unghiului $\varphi$ este preferabil să se utilizeze metoda R-K-G, dar se pot utiliza şi metodele Galerkin sau Ritz . Cu unghiul $\varphi$ determinat se poate calcula tensiunea normală $\sigma$ transformînd verificarea de stabilitate prin divergenţa echilibrului într-un calcul de rezistenţă de ordinul doi limitat la atingerea limitei de curgere sau la apariţia unei plasticizări parţiale

$$\sigma = \frac{M_x - M_y \varphi}{I_x} y + \frac{M_y + M_x \varphi}{I_y} x + \omega E \varphi'' \tag{7.11}$$

### 7.2.4. Forme de instabilitate şi soluţii particulare în analiza de stabilitate a barelor cu pereţi subţiri solicitate la încovoiere cu torsiune.

In tabelul 7.1. /87/ se prezintă în mod sintetic formele particulare ale ecuaţiilor de stabilitate obţinute pe tipuri de secţiuni şi tipuri de solicitări, prin particularizarea corespunzătoare a ecuaţiilor (7.8) ÷ (7.1o) . Se remarcă bune concordanţă cu relaţiile stabilite pe cazurile particulare prezentate de către alţi autori şi cunoscute anterior din literatura de specialitate.

tabelul 7.1

| tipul secțiunii transv. | ecuațiile liniare de stabilitate a barelor cu pereți subțiri solicitate la încovoiere cu torsiune | ecuația a fost formulată de: | metoda de rezolv. autorul soluției |
|---|---|---|---|
|  $K_{\tilde{y}}=0$ $K_{\omega}=0$ $K_{\tilde{x}}\neq 0$ | încovoiere oblică cu torsiune: diverg. echilibr. $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi')' - (C_M - C_p)\varphi - C = 0$ (a) | Pettersson-Dabrowski | (metoda Galerkin) Dabrowski |
| | încovoiere dreaptă cu torsiune: diverg. echil. $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi')' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi - m\tilde{y} = 0$ (b) | Pettersson-Dabrowski | (metoda Ritz) Dabrowski |
| | încovoiere dreaptă cu torsiune: bifurc. echilibr. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$; $e_{\tilde{x}}=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_{\tilde{x}}(M_x \varphi')' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi = 0$ (c) | Kollbrunner | (met. Galerkin și Ritz) Dabrowski, Kollbrunner; Meissner; Bürgermeister |
|  $K_{\tilde{x}}=0$ $K_{\tilde{y}}=0$ $K_{\omega}=0$ | încovoiere dreaptă cu torsiune: diverg. echilibr. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi - m\tilde{y} = 0$ (d) | Pettersson-Dreher | sol. exactă: Pettersson; met. Ritz: Dabrowski și Dreher |
| | încovoiere dreaptă cu torsiune: bifurc. echilibr. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$; $e_{\tilde{x}}=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi = 0$ (e) | Kollbrunner | soluția exactă Kollbrunner; Stüssi; Flint; Timoshenko |
|  $K_{\tilde{x}}=0$ $K_{\omega}=0$ $K_{\tilde{y}}\neq 0$ | încovoiere dreaptă cu torsiune: diverg. echil. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi - m\tilde{y} = 0$ (f) | analog cu (d) Laos-Lommatzsch | sol. exactă: Pettesson; met. Ritz: Dabrowski and Dreher |
| | încovoiere dreaptă cu torsiune: bifurc. echilib. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$; $e_{\tilde{x}}=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi = 0$ (g) | analog cu (e) Kollbrunner | Soluția exactă Kollbrunner; Stüssi; Flint; Timoshenko |
|  sym. $K_{\tilde{x}}=0$ $K_{\tilde{y}}=0$ $K_{\omega}\neq 0$ | încovoiere dreaptă cu torsiune: diverg. echilib. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - K_\omega(B\varphi')' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi - m\tilde{y} = 0$ (h) | Reuschling | Reuschling |
| | încovoiere dreaptă cu torsiune: bifurc. echilib. $p_{\tilde{x}}=0$; $M_y=0$; $e_{\tilde{x}}=0$ $D_\omega \varphi^{IV} - D_t \varphi'' - (C_{M_x} - C_{p\tilde{y}})\varphi = 0$ (i) | analog cu (d) și (f) Kollbrunner | soluția exactă: Kollbrunner; Stüssi; Flint; Timoshenko |

Din examinarea tabelului (7.1) se poate aprecia că relațiile (7.8) ÷ (7.1o) oferă o cuprindere globală a formelor de instabilitate cu care sînt confruntate barele cu pereți subțiri solicitate la încovoiere cu torsiune și constitue bazele formulării unei teorii generalizate din acest punct de vedere.

In ceea ce privește interacțiunea dintre flambajul general cu voalarea, relațiile prezentate se pot utiliza dacă se operează cu caracteristici geometrice echivalente ; acest aspect va fi abordat în capitolul 8 al prezentei lucrări.

## 7.3. TEORIA NELINIARA A BARELOR CU PERETI SUBTIRI /72/.

### 7.3.1. Ipoteze fundamentale .

Se acceptă următoarele ipoteze :

(j) Bara este dreaptă și cu secțiune constantă în starea inițială neîncărcată și nedeformată.

(jj) Bara cu pereți subțiri se consideră că este o placă curbă lungă cu configurația geometrică determinată de suprafața mediană.

(jjj) Suprafața mediană este de formă cilindrică în starea inițială neîncărcată și nedeformată.

(jjjj) Deformațiile locale sînt mici în orice punct al plăcii, iar secțiunea transversală este nedeformabilă în planul său.

(jjjjj) Lunecările specifice în suprafața mediană se neglijează.

Sistemul geometric pe care se discută comportarea neliniară a barelor cu pereți subțiri este un sistem spațial (fig.7.3) diferit de sistemul plan din §.7.2. (fig.7.1).

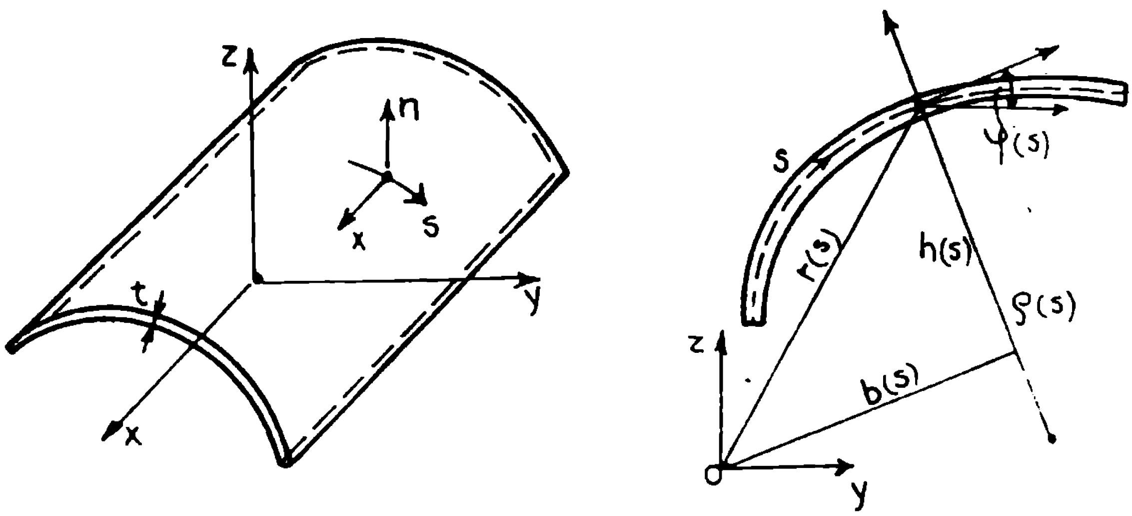



fig. 7.3

### 7.3.2. Determinarea cîmpului de deplasări.

Comportarea neliniară a plăcilor curbe subțiri cu deformații și deplasări finite a fost examinată de Koiter în lucrarea sa fundamentală /124/, în care se deduc ecuațiile neliniare de compatibilitate. Dacă în aceste ecuații se introduc simplificările presu-

>use de ipotezele (j) ÷ (jjjjj) se obţin ecuaţiile de compatibilitate simplificate /161/ ale căror soluţii, cu notaţiile din figura 7.3., sînt:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \alpha(x) + \beta(x).y(s) + y(s) + (s) - f'(x) + \frac{1}{2} r^2(s).f^2(x) \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0; \\ \varepsilon_{22} = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{11} = \beta(x) \sin\varphi - \gamma(x) \cos\varphi + f'(x)\, b(s) - f^2(x)\, h(s) \\ k_{12} = k_{21} - f(x) \\ k_{22} = 0 \end{array} \right\} \quad (7.13)$$

în care $\omega(s)$ este coordonata sectorială, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ şi $f(x)$ sînt funcţii arbitrare în x, iar tensorii $\varepsilon_{ij}$, al deformaţiilor specifice, şi $k_{ij}$, al curburilor sînt definiţi în cadrul relaţiilor cunoscute /124/ /131/ ale teoriei neliniare a plăcilor curbe subţiri.

Cîmpul deplasărilor se poate obţine ca o sumă a deplasărilor corespunzătoare unei bare cu deplasări mari (Bernoulli) cu nişte termeni necunoscuţi corespunzători unui cîmp adiţional de deplasări, cu notaţiile din fig.(7.4), în care $e_i$ şi $\tilde{e}_i$ (i=1,2,3) reprezintă vectorii unitari corespunzători poziţiei iniţiale nedeformate şi, respectiv deformate a barei.

Cîmpul deplasărilor barei se scrie de forma :

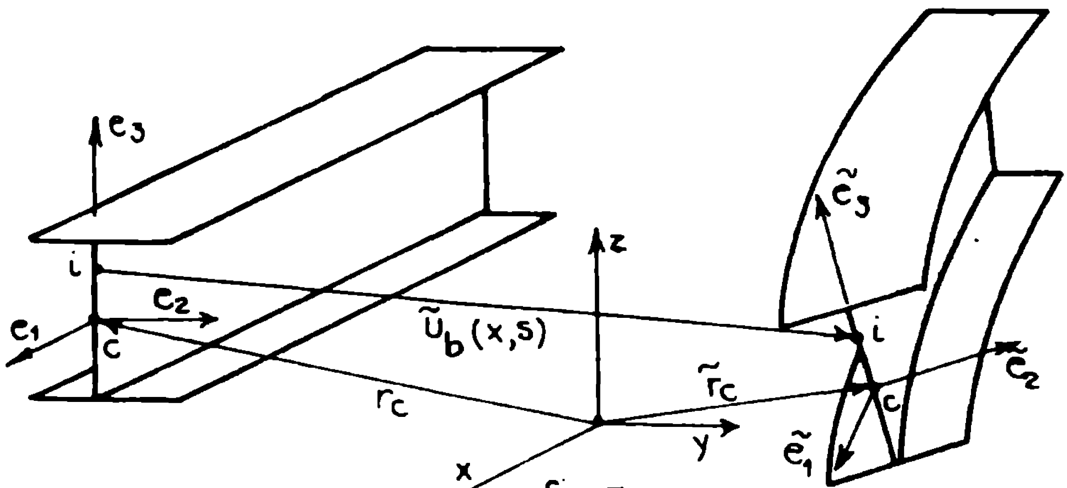


fig.7.4

$$\tilde{u}_b(x,s) = \tilde{r}_c(x) - r_c(x) + y(s)(\tilde{e}_2(x) - e_2) + z(s)(\tilde{e}_3(x) - e_3) \quad (7.14)$$

Cîmpul adiţional de deplasări se defineşte în felul următor

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(x,s) = q\,\delta\tilde{u}(x,s) + \frac{1}{2} q^2\delta^2\, \tilde{u}(x,s) + \ldots \\ \varepsilon_{11}(x,s) = q\,\delta\varepsilon_{11}(x,s) + \frac{1}{2} q^2\, \delta^2\, \varepsilon_{11}(x,s) + \ldots \\ k_{12}(x,s) = q\,\delta\varepsilon_{12}(x,s) + \frac{1}{2} q^2\, \delta^2 k_{12}(x,s) + \ldots \end{array} \right\} \quad (7.15)$$

în care q este un parametru de perturbare.

Variațiile de ordinul întîi sînt de forma:

$$\begin{cases} q\,\delta\tilde{u}(x,s) = \omega(s)\,.k_1(x) - \tilde{e}_1(x) \\ q\,\delta\,\mathcal{E}_{11}(x,s) = \mathcal{E}(x) - k_3(x)\,y(s) + k_2(x).z(s) + k_1'(x)\omega(s) \\ q\,\delta\,k_{12}(x,s) = k_1(x) \end{cases} \quad (7.16)$$

unde $k_1(x)$, $k_2(x)$ și $k_3(x)$ sînt curburile barei Bernoulli / /, iar $\mathcal{E}(x)$ este deformația axială a acesteia.

Pentru variațiile de ordinul doi se obțin următoarele rezultate:

$$\begin{cases} \Theta\ \dfrac{q^2|\delta^2\tilde{u}(x,s)|}{L} = \dfrac{L}{b_o}\,(\mathcal{E}^*)^2 \\ \dfrac{1}{2}q^2\,\delta^2\,\mathcal{E}(x,s) = \underline{\dfrac{1}{2}\,(y^2(s)+z^2(s))\,k_1^2\,(x)} + \Theta'((\mathcal{E}^*)^2) \\ \Theta\,(q^2\,\delta^2 k_{12}) = \mathcal{E}^*\,k^* \end{cases} \quad (7.17)$$

în care $\mathcal{E}^*$ este deformația specifică principală maximă iar $k^*$ variația curburii suprafeței mediane, $\Theta$ (...) fiind mici datorită ipotezei (jjjj), iar L este lungimea de undă a deformațiilor de torsiune definită de Koiter în 1959. Vlasov a arătat că în cazuri întîlnite frecvent în practica inginerească lungimea de undă a deformațiilor de răsucire este de același ordin de mărime cu deschiderea structurii.

Ordinul de mărime ale primelor variații ale curburei și deplasărilor adiționale se determină astfel ca

$$\Theta\,(q\,\delta\,k_{12}(x,s)) = \frac{L}{b_o}\;\frac{\mathcal{E}^*}{b_o} \quad (7.18)$$

$$\Theta\,(q\,\frac{|\delta u(x,s)|}{L} = \mathcal{E}^*\,,$$

$b_o$ fiind dimensiunea caracteristică a secțiunii transversale. Dacă se neglijează variațiile de ordinul doi (7.17), mai puțin termenii subliniați, în expresiile (7.15) se introduc următoarele erori relative :

$$\begin{cases} \Delta(|\tilde{u}(x,s)|) = \dfrac{L}{b_o}\,\mathcal{E}^* \\ \Delta(\mathcal{E}_{11}) = \mathcal{E}^* \\ \Delta(k_{12}) = \dfrac{k^*\,b_o^2}{L} \end{cases} \quad (7.19)$$

Raportul $L/b_o$ are valori uzuale între 10 și 50 iar ordinul de mărime al deformației unitare specifice maxime $\mathcal{E}^*$ este de $2.10^{-3}$ și, în consecință $\Delta(\mathcal{E}_{11}) \ll \Delta(|u(x,s)|)$. Totodată, se poate arăta că $k^* \simeq k_1$ și că, deci, ordinul de mărime al erorilor $\Delta(\mathcal{E}_{11})$ și $\Delta\,(k_{12})$

este de acelaşi rang.

Cîmpul deplasărilor aproximative $\tilde{u}(x,s)$ şi cîmpurile deformaţiilor şi curburilor suprafeţei mediane rezultă, în final, neglijîndu-se variaţiile de ordinul doi şi superioare, exceptînd termenii subliniaţi din (7.17).

$$\tilde{u}(x,s) = \tilde{r}_0(x)-\tilde{r}(x)+y(s).(\tilde{e}_2(x)-\tilde{e}_2')+z(s)(\tilde{e}_3(s)-e_3)+\omega(s).k_1(x)e_1(x)$$

$$\varepsilon_{11}(x,s) = \varepsilon(x)-k_3(x)y(s)+k_2(x).z(s)+k_1'(x)\omega(s)+\frac{1}{2}k_1^2(x)r^2(s) \qquad (7.20)$$

$$\varepsilon_{12}(x,s) = 0 \qquad (7.21)$$

$$\varepsilon_{22}(x,s) = 0$$

$$k_{11}(x,s) = -k_3(x)\sin\varphi(s) - k_2(x)\cos\varphi + k_1'(x)b(s) - k_1^2(x)\,h(s)$$

$$k_{12}(x,s) = k_1(x) \qquad (7.22)$$

$$k_{22}(x,s) = 0$$

Comparînd (7.21) şi (7.22) cu (7.12) şi (7.13) se remarcă similitudinea de formă a celor două seturi de relaţii cu toate că ele s-au obţinut pe căi diferite şi, totodată, semnificaţia fizică a funcţiilor arbitrare din primele relaţii . Se remarcă analizînd (7.16) că teoria liniară a lui Vlasov este prima aproximaţie a unei teorii mai exacte.

### 7.3.3. Energia potenţială de deformaţie a barelor cu pereţi subţiri.

In baza ipotezelor Kirkhoff-Love energia de deformaţie se obţine ca între energiile deformaţiilor axiale şi de încovoiere. Condiţia geometrică $\varepsilon_{22}=0$ se înlocuieşte cu condiţia statică $\sigma_{22}=0$ care conduce la o expresie mai exactă a energiei de deformaţie a barelor cu pereţi subţiri zvelte. Termenii în $k_{11}$ se neglijează, avînd în vedere că nu reprezintă decît o.o1 din energia totală de deformaţie. Energia de deformaţie pe unitatea de arie a suprafeţei mediane nedeformate va avea prin urmare forma :

$$\Pi_s = \frac{1}{2}\left(Et\,\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{3}Gt^3\,k_{12}^2\right) \qquad (7.23)$$

Inlocuind (7.21) şi (7.23) în (7.23) şi integrînd în raport cu s se obţine energia de deformaţie pe unitatea de lungime relativă la axa nedeformată a barei. Pentru simplificare funcţiile de bază din (7.21 ) se aleg astfel încît să fie ortogonale între ele (orice integrală pe secţiunea transversală a produsului dintre două funcţii diferite este nulă) . Consecinţa imediată a acestei alegeri este că axele Y şi Z sînt paralele cu axele principale de inerţie ale secţiunii transversale şi că originea O a coordonatei curbilinii coincide cu centrul de tăiere şi cu punctul nul principal.

Coordonatele unui punct oarecare P de pe secţiunea transversală (fig.7.5) se obţin cu relaţiile:

$$y(s) = y_0+\eta(s)$$
$$\qquad (7.24)$$
$$z(s) = z_0+\xi(s)$$

Energia de deformaţie $\Pi_L$ pe unitatea de lungime relativă la axa centrelor de tăiere se stabileşte în funcţie de termenii curburii $k_1$ şi de deformaţia $\varepsilon_o$ în centrul de greutate corespunzătoare barei Bernoulli:

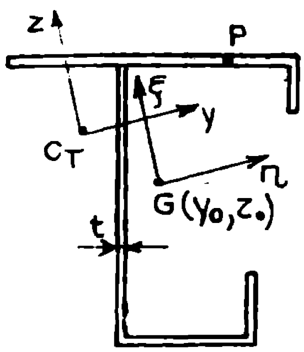


fig.7.5

$$\Pi_L = \frac{1}{2} E(A\varepsilon_o^2 + I_2(k_2)^2 + I_3(k_3)^2 + I_\omega(k_1')^2 + I_p \varepsilon_o k_1^2$$
$$- I_{\eta r} k_3 k_1^2 + I_{\xi r} k_2 k_1^2 + I_{\omega r} k_1^2 + \frac{1}{2} I_4 k_1^4) +$$
$$+ \frac{1}{2} G I_t (k_1)^2, \qquad (7.25)$$

în care s-au introdus următoarele caracteristici geometrice ale secţiunii transversale:

$$A = \int_S 1tdS; \quad I_2 = \int_S \xi^2 tdS; \quad I_3 = \int_S \eta^2 tdS; \quad I_\omega = \int_S \omega^2 tdS; \quad I_p = \int_S r^2 tdS;$$

$$I_{\eta r} = \int_S \eta r^2 tdS; \quad I_{\xi r} = \int_S \xi r^2 tdS; \quad I_{\omega r} = \int_S \omega r^2 tdS; \quad I_4 = \frac{1}{2}\int_S r^4 tdS;$$

$$I_t = \frac{1}{3}\int_S t^3 dS \qquad (7\text{-}26.a \div j)$$

Deformaţiile în centrul de tăiere şi deformaţiile în centrul de greutate sînt legate între ele prin relaţia

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - k_3 y_o + k_2 z_o \qquad (7.27)$$

7.3.4. Stabilirea funcţionalei energetice.

Pentru un sistem conservativ de forţe $p(x,s)$ aplicate pe suprafaţa mediană nedeformată a barei (fig.7.6) lucrul mecanic pe unitatea de suprafaţă are expresia

$$W_e(X,S) = p(x,s)\left[(\tilde{r}_c - r_c) + y(s).(\tilde{e}_2 - e_2) + z(s)(\tilde{e}_3 - e_3) + \omega(s)\ k_1.\tilde{e}_1\right] \quad (7.28)$$

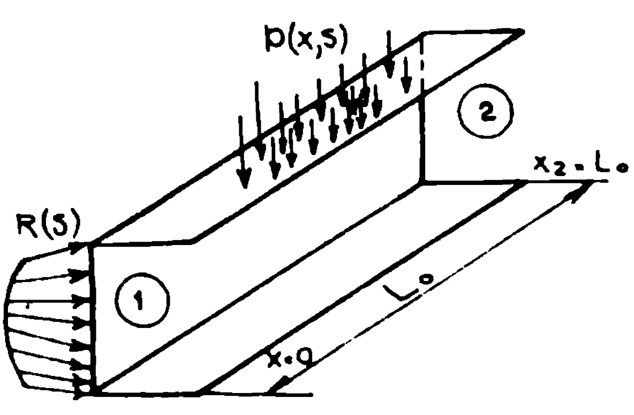


fig.7.6

Lucrul mecanic total dat de forţele de capăt este dat de relaţia

$$W_R = \sum_{i=1,2}\left[\int_S R(s)\tilde{u}(x,s)dS \Big|_{x=x_i}\right]$$

(7.29)

Energia potenţială $\Pi$ de deformaţie a barei va primi următoarea formă

$$\Pi = \left[\int_0^{L_o} \Pi_L(\mathcal{E}_o, k_i, k_i')dx - \int_0^{L_o} \left[\int_S W_e(x,s)dS\right]dx - W_R\right] \qquad (7.3o)$$

Deplasările axei centrelor de tăiere sînt descrise de relaţia

$$\tilde{u}_c(x) = \tilde{r}_c(x) \;; \quad (C \equiv C_T) \qquad (7.31)$$

Aceste deplasări sînt în general limitate datorită restricţiilor geometrice impuse de condiţiile de rezemare. In general se poate scrie că

$$(\tilde{u}_c(x_{1L}) - \tilde{u}_c(x_{2L})\, e_L - C_L = 0 \qquad (7.32)$$

în care L este indicele deschiderii, $e_L$ unul din vectorii bazei $(e_1, e_2, e_3)$ iar $C_L$ reprezintă o valoare prescrisă.

Deplasările $\tilde{u}_c(x)$ ale axei centrelor de tăiere se pot obţine şi cu relaţia

$$\tilde{u}_c(x) = \tilde{u}_c(o) + \int_0^{\tilde{x}} \tilde{u}_c'(\tilde{x})\, d\tilde{x} \qquad (7.33)$$

Dacă deformaţia $\mathcal{E}$ şi vectorul de poziţie $r_c$ al axei centrelor de tăiere nedeformate au expresiile

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{d\tilde{r}_c}{dx} \quad \frac{d\tilde{r}_c}{dx}} - 1 \;; \quad r_c = x \quad e_1 \qquad (7.34\ a.b)$$

rezultă din (7.33) că

$$\tilde{u}_c(x) = \tilde{u}_c(o) + \int_0^x \left[(1+\mathcal{E}(\tilde{x}))\, \tilde{e}_1(\tilde{x}) - \tilde{e}_1\right] dx \qquad (7.35)$$

Din (7.32) şi (7.35) rezultă forma generală a condiţiilor geometrice

$$e_L \int_{x_{1L}}^{x_{2L}} \left[(1+\mathcal{E})\, \tilde{e}_1 - e_1\right] dx - C_L = 0 \qquad (7.36)$$

Pentru a obţine o formă mai compactă expresiei (7.3o) se introduce următorul set de încărcări ponderate :

$$p(x) = \int_S p(x,s)dS; \quad p_1(x) = \int_S y(s)p(x,s)dS; \quad p_2(x) = \int_S z(s)p(x,s)dS;$$

$$p_3(x) = \int_S \omega(s)p(x,s)\, dS. \qquad (7.38)$$

şi respectiv,

$$\left[R(x) = \int_S R(s)dS; \quad R_1(x) = \int_S y(s).R(s)dS; \quad R_2(x) = \int_S z(s)R(s)dS; \quad R_3(s) = \int_S \omega(s)R(s)dS\right]_{x=x_{1L}}$$

Expresia energiei potențiale (7.28) se va modifica în funcție de condițiile geometrice (7.36) prin adăugarea unui termen de forma

$$-\lambda_L \left[ e_L \int_{x1L}^{x_{2L}} \left[(1+\mathcal{E}(x))\, \tilde{e}_1(x) - e_1\right] dx - C_L \right] , \qquad (7.39)$$

pentru fiecare condiție activă, în care $\lambda_L$ este un multiplicator Lagrange necunoscut. Ținînd seama de (7.37) ÷ (7.39) funcționala energetică modificată devine

$$\tilde{\Pi}_p = \int_0^{L_o} \Big\{ \Pi_L(\mathcal{E}_o, k_1, k_1') - \big[ p(x)\tilde{u}_c(x) + p_1(x)(\tilde{e}_2(x) - e_2) + p_2(x)(e_3(x) - e_3) +$$

$$+ p_3(x).k_1(x)\tilde{e}_1(x)\big]\Big\} dx$$

$$- \sum_{i=1,2} \Big\{\Big[(R(x)\tilde{u}_c(x) + R_1(x)(\tilde{e}_2(x) - e_2) + R_2(x)(\tilde{e}_3(x) - e_3) + R_3(x)k_1(x)\tilde{e}_1(x$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_L \Big\{ e_L \int_{x_{1L}}^{x_{2L}} \left[ (1+\mathcal{E})\, \tilde{e}_1(x) - e_1 \right] dx - C_L \quad , \qquad (7.40)$$

n fiind numărul restricțiilor geometrice active de tip )(7.36).

Ținînd seama de relația dintre eforturile secționale N(x) și încărcarea p(x), cunoscută din statică, se poate scrie

$$N(x)e_j = N_o e_j - e_j \int_{x_{1j}}^{x} p(\tilde{x})dx \quad , \qquad (7.41)$$

în care $N_o e_j$ este valoarea lui $N(x)\ e_j$ în punctul inițial anterior de coordonata $x = x_{1j}$ . Pentru o distribuție arbitrară a încărcării p(x) care satisface (7.41) se obține dacă se integrează prin părți:

$$\int_0^{L_o} p(x)\tilde{u}_c(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (N_i^+ . N_i^-) u_{ci}(x) - \left[N\tilde{u}_c(x)\right]_0^{L_o} + \int_0^{L_o} N\tilde{u}_c'(x)\, dx, \qquad (7.42)$$

în care n este numărul total al reazemelor intermediare. Vectorul deplasărilor $\tilde{u}_{ci}$ corespunzător reazemului intermediar i se poate scrie ca o sumă între deplasările condiționate (blocate) $\tilde{u}_{ci}^r$ și cele necondiționate (libere) $\tilde{u}_{ci}^f$. Notînd cu $P_i$ forța concentrată care acționează în reazemul i și cu $S_i$ reacțiunea, $N_i^-$, respectiv $N_i^+$ fiind eforturile secționale de stînga și dreapta reazemului i rezultă următoarea ecuație de echilibru.

$$-N_i^- + N_i^+ + S_i + P_i = 0 \qquad (7.43)$$

Dacă pentru o valoare arbitrară $\delta\tilde{u}_{ci}$ se acceptă că în general $S_i\delta\tilde{u}_{ci}=0$ şi dacă $P_i=0$ din (7.43) rezultă

$$(N_i^+ - N_i^-)\,\tilde{u}_{ci}^f = 0 \qquad (7.44)$$

iar la capetele barei unde $P_i = R$

$$(R+N)\tilde{u}_c^f = 0, \quad x = o \qquad (7.45\ a,b)$$
$$(R+(-N)(\tilde{u}_c^f = 0, \quad x = L_o$$

Cu aceste ultime observaţii rezultă forma finală a funcţionalei $\Pi_p$

$$\Pi_p=\int_0^{L_o}\Big\{\Pi_L(\varepsilon_o,k_1k_1')-\big[N(x)((1+\varepsilon(x))\tilde{e}_1(x)-e_1)+p_1(x)(\tilde{e}_2(x)e_2)+p_2(x)(\tilde{e}_3(x)-e_3)$$
$$+p_3(x)k_1(x)\tilde{e}_1(x)\big]\Big\}\,dx-\sum_{i=1,2}\Big\{\big[R_1(x)(\tilde{e}_2(x)-\tilde{e}_2)+R_2(\tilde{e}_3(x)-e_3)+$$
$$+R_3(x)k_1(x)\tilde{e}_1(x)\big]\Big\}_{x=x_{iL}} + \sum_{L=1}^{m}\lambda_L C_L \qquad (7.46)$$

### 7.3.5. Cîmpul deplasărilor generalizate.

A defini cîmpul deplasărilor generalizate revine la a determina componentele vectorului de rotaţie (pentru o rotaţie spaţială finită) şi relaţia dintre componentele acestuia şi curburi(fig.7.7). Există mai multe tehnici pe baza cărora se poate face această determinare. In această lucrare s-a optat pentru rezultatele obţinute de Pedersen/161/, /162/.

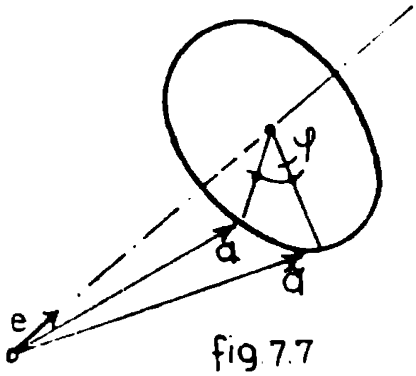


fig 7.7

$$\tilde{a} - a = 2\,\frac{qxa + qx(qxa)}{1+q.q} \qquad (7.47)$$

$$k_i = 2\,\frac{q' + q'x\,q}{1+q.q}\,e_i \qquad (7.48)$$

$$q = e\,f(\varphi)\ ;\quad f(\varphi) = tg\,\frac{\varphi}{2} \qquad (7.49)$$

In cele ce urmează se consideră că vectorul de rotaţie q(x) şi deformaţiile $\varepsilon_o(x)$ ale centrului de greutate al secţiunii constitue cîmpul de deplasări generalizate independente.

### 7.3.6. Aplicarea criteriului variaţional.

Condiţia de staţionaritate impusă funcţionalei $\Pi_p$ - principiul minimului energiei potenţiale - constitue condiţia necesară şi suficientă pentru a asigura starea de echilibru a barei

$$\delta\,\Pi_p = 0 \qquad (7.5o)$$

pentru un set de variații cinematic admisibile ale deplasărilor generalizate și valori necunoscute ale multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă se introduc următoarele forțe generalizate

$$N_1=\frac{\partial \Pi_L}{\partial \mathcal{E}_o}\ ;\ M_2=\frac{\partial \Pi_L}{\partial k_2};\quad M_3=\frac{\partial \Pi_L}{\partial k_3}\ ;\ M_t=\frac{\partial \Pi_L}{\partial k_1}\ ;\ B=\frac{\partial \Pi_L}{\partial k_1'} \qquad (7.51\ a\div c)$$

care, ținînd seama de (7.25) și (7.26), au expresiile

$$\begin{aligned}
N_1 &= E(A\mathcal{E}_o+\frac{1}{2}\,I_p k_1^2)\\
M_2 &= E(I_2k_2+\frac{1}{2}\,I_{\xi r}k_1^2) \qquad\qquad (7.52\ a\text{-}e)\\
M_3 &= E(I_3k_3-\frac{1}{2}\,I_{\eta r}k_1^2)\\
M_t &= E(I_4k_1^2+I_p\mathcal{E}_ok_1-I_{\eta r}k_1k_3+I_{\xi r}k_1k_2+I\omega_r k_1'k_1)+GI_tk_1\\
B &= E(I\omega k_1'+\frac{1}{2}\,I\omega_r k_1^2)
\end{aligned}$$

Introducînd (7.51) în (7.5o) și avînd în vedere (7.46) rezultă

$$\int_0^L \Big\{(N_1-N\tilde{e}_1)\delta\mathcal{E}_o+(M_2+z_o(N\tilde{e}_1))\delta k_2+(M_3-y_o(N\tilde{e}_1))\,\delta k_3+M_t\,\delta k_1+$$

$$+B\,\delta k_1'-N(1+\mathcal{E})\,\tilde{e}_1-p_1\delta\tilde{e}_2-p_2\delta\tilde{e}_3-p_3(\tilde{e}_1\delta k_1+k_1\delta\tilde{e}_1)\Big\}dx-$$

$$\sum_{i=1,2}\Big\{\Big[R_1\delta\tilde{e}_2+R_2\delta\tilde{e}_3+R_3(k_1\delta\tilde{e}_1+\tilde{e}_1\delta k_1)\Big]\Big\}_{x=x_{iL}}-\sum_{L=1}^{m}\delta\lambda_L\ \Big\{e_L\int_{x_{1L}}^{x_{2L}}\Big[(1+\mathcal{E})\tilde{e}_1-e_1\Big]d$$

$$-c_L\Big\}=0 \qquad (7.53)$$

în care s-a avut în vedere că deformația $\mathcal{E}=f(k_1,k_2,k_3)$ și că $e_i$ sînt vectori constanți, iar distribuție eforturilor secționale depinde de multiplicatorii Lagrange, în sensul că acestea sînt incluși în termenul $N(x)\big[(1+\mathcal{E}(x))\,\tilde{e}_1(x)-e_1\big]$ din (7.46).

Exprimînd $\delta k_i$, $\delta\tilde{e}_i$ $(i=1,2,3)$ și $\delta k_1'$ în funcție (7.47) - (7.49) și integrînd prin părți (7.53) rezultă ecuațiile de echilibru și condițiile de margine.

### 7.3.7. Discretizarea funcționalei în elemente finite.

Pentru discretizarea expresiei (7.53) se aplică metoda elementelor finite. Considerînd că bara se discretizează în $N_e$ elemente elementului i corespunzîndu-i conexiunile i și i+1. Fiecărui element i se atașează o coordonată adimensională.

$$\eta=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\ ;\quad 0\le\eta\le 1 \qquad (7.54)$$

Cîmpul deplasărilor generalizate se aproximează în felul următor :

$$q(\eta) = N_1(\eta) q_i + N_2(\eta)\, q_i' + N_3(\eta)\, q_{i+1} + N_4(\eta)\, q_{i+1}'$$

$$\varepsilon_o(\eta) = H_1(\eta)\, \varepsilon_{oi} + H_2(\eta)\, \varepsilon_{o(i+1)} \qquad (7.55)$$

în care funcţiile de interpolare au forma

$$N_1(\eta) = 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1$$
$$N_2(\eta) = (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) L_i \; ; \quad L_i = x_{i+1} - x_i$$
$$N_3(\eta) = -2\eta^3 + 3\eta^2 \qquad (7\text{-}56\ a \div f)$$
$$N_4(\eta) = (\eta^3 - \eta^2)\, L_i$$
$$H_1(\eta) = 1 - \eta$$
$$H_2(\eta) = \eta$$

Se consideră că vectorul deplasărilor generalizate corespunzător nodului i este definit de

$$\{u\}_i = \left[ q_1 \; q_2 \; q_3 \; \frac{\partial q_1}{\partial x} \; \frac{\partial q_2}{\partial y} \; \frac{\partial q_3}{\partial z} \; \varepsilon_o \right]^T \qquad (7.57)$$

Vectorul generalizat a deplasărilor elementului este de forma

$$\{u^e\}_i = \begin{bmatrix} \{u\}_i \\ \hline \{u\}_{i+1} \end{bmatrix} \qquad (7.58)$$

Expresiile (7.55) devin

$$q(\eta) = \langle q_N \rangle \{u^e\}$$
$$\varepsilon_o(\eta) = \langle \varepsilon_{oN} \rangle \{u^e\} \qquad (7.59)$$

în care N defineşte numărul gradelor de libertate ale elementului

$$[Q] = \begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_N & \cdots & q_{13} & q_{14} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (7.60)$$

$$\langle \varepsilon_{oN} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \qquad (7.61)$$

Variaţiile vectorului de rotaţie şi a vectorului de deformaţie sînt

$$\delta q = \langle q_N \rangle \{\delta u^e\} \; ; \; \delta \varepsilon_o = \langle \varepsilon_{oN} \rangle \{\delta u^e\} \qquad (7.62)$$

Exprimînd în continuare şi variaţiile vectorilor de bază $\delta_{\tilde{e}j}$, a curburilor $\delta_{kj}$ şi a derivatei curburii în aceiaşi man[illegible]

$$\delta\tilde{e}_j = \langle \tilde{e}_{jN}' \rangle \{\delta u^e\};\ \delta_{kj} = \langle k_{jN} \rangle \{\delta u^e\}\ ;\ \delta k_1' = \langle k_{1N}' \rangle \{\delta u^e\} \qquad (7.63)$$

n care $\tilde{e}_{jN}$, $k_{jN}$ şi $k_{1N}'$ se exprimă în funcţie $q$, $q_N$ şi $e_j$.

După efectuarea calculelor intermediare (4.53) devine :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \left[ L_i \delta u_N^e \int_0^1 \left\{ (N_1 - N\tilde{e}_1)\mathcal{E}_{oN} + (M_2 + z_o(N\tilde{e}_1))k_{2N} + (M_3 - y_o(N\tilde{e}_1))k_{3N} + M_t k_{1N} \right.\right.$$

$$\left. + Bk_{1N}' - \left[ N(1+\mathcal{E})\tilde{e}_{1N} + p_1\tilde{e}_{2N} + p_2\tilde{e}_{3N} + p_3(k_1\tilde{e}_{1N} + \tilde{e}_1 k_{1N}) \right] \right\} d\eta - \qquad (7.64)$$

$$\sum_{i=1,2} \left\{ \delta u_N^e \left[ R_1\tilde{e}_{2N} + R_2\tilde{e}_{3N} + R_3(\tilde{e}_1 k_{1N} + k_1\tilde{e}_{1N}) \right] \right\}_{x=x_{iL}} - \sum_{L=1}^{N_A} \left\{ \delta\lambda_L (e_L \right.$$

$$\left. \sum_{N_{x1}}^{N_{x2}} L_i \int_0^1 \left[ (1+\mathcal{E})\tilde{e}_1 - e_1 \right] d\eta \right] - C_L \Big]$$

n care $N_{x1}$ şi $N_{x2}$ sînt numerele nodurilor, iniţial şi respectiv final, pentru fiecare condiţie geometrică de tip (7.36). Pentru economia redactării în (7.64) s-a aplicat regula de sumare carteziană în raport cu N (N=1,...N.G.D.L.

7.3.8. Ecuaţiile de echilibru linearizate.

Bara cu pereţi subţiri discretizată în elemente finite se consideră în stare de echilibru dacă ecuaţia (7.64) este satisfăcută identic pentru variaţii arbitrare $\delta u^e$ şi $\delta\lambda_L$ respectînd totodată un set de condiţii de margine - geometrice - prescrise. Dacă (7.64) este identic satisfăcută în stare de echilibru se poate concluziona că derivatele acesteia în raport cu un parametru convenabil ales t, care descrie starea de echilibru, vor fi deasemeni identic nule în starea de echilibru. Derivatele unei mărimi oarecare , (curbură, vectori de bază etc) în raport cu parametrul t pot fi exprimate în funcţie derivatele deplasărilor generalizate.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial u_N^e} \frac{\partial u_N^e}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \dot{Q} = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial u^e} \right\rangle \{\dot{u}^e\} \qquad (7.65)$$

Presupunînd că toate forţele aplicate depind de un singur parametru de încărcare se derivează (7.64) în funcţie de t şi ţinînd seama că $\delta u^e$ şi $\delta\lambda_L$ sînt arbitrare şi nu depind de t şi că vectorul eforturilor secţionale N depinde de multiplicatorii Lagrange necunoscuţi, $\lambda_L$, rezultă :

$$\sum_{i=1}^{N^e}\Big[L_i\delta u_N^e\int_0^1\Big\{(\dot N_1-N\tilde e_1)\varepsilon_{oN}+(\dot M_2+z_o(\dot N\tilde e_1+N\dot{\tilde e}_1))k_{2N}+(M_2+z_o(N\tilde e_1))\dot k_{2N}+$$

$$+(\dot M_3-y_o(\dot N\tilde e_1+N\dot{\tilde e}_1))k_{3N}+M_3-y_o(N\tilde e_1))\dot k_{3N}+\dot M_t k_{1N}+M_t\dot k_{1N}+\dot B k_{1N}+$$

$$+B\dot k'_{1N}-(\dot N(1+\varepsilon).\tilde e_{1N}+N\dot\varepsilon\tilde e_{1N}+N(1+\varepsilon)\dot{\tilde e}_{1N}+\dot p_1\tilde e_{2N}+p_1\dot{\tilde e}_{2N}+\dot p_2\tilde e_{3N}+$$

$$p_2\dot{\tilde e}_{3N}+\dot p_3(k_1\tilde e_{1N}+k_{1N}\tilde e_1)+p_3(\dot k_1\tilde e_{1N}+k_1\dot{\tilde e}_{1N}+\dot k_{1N}\tilde e_1+k_{1N}\dot{\tilde e}_1))\Big\}d\eta\Big]-$$

$$\sum_{i=1,2}\Big\{\delta u_N^e\Big[\dot R_1\tilde e_{2N}+\dot R_2\tilde e_{3N}+\dot R_3(\tilde e_1k_{1N}+k_{1N}\tilde e_{1N})+R_1\dot{\tilde e}_{2N}+R_2\dot{\tilde e}_{3N}+R_3(\dot{\tilde e}_1k_{1N}+\tilde e_1\dot k_{1N}+$$

$$\dot k_1\tilde e_{1N}+k_1\dot{\tilde e}_{1N})\Big]\Big\}_{x=x_{iL}}-\sum_{L=1}^{NA}\Big\{\delta\lambda_L e_L\Big[\sum_{N_{x1}}^{N_{x2}}L_i\int_0^1((1+\varepsilon)\dot{\tilde e}_1+\dot\varepsilon\tilde e_1)d\eta\Big]\Big\}=0 \qquad (7.66)$$

Expresia (7.66) se poate rescrie mai condensat, punîndu-se în evidentă matricea de rigiditate incrementală şi vectorul forţelor nodale.

$$\sum_{i=1}^{N^e}\Big\{\delta u_N^e\,k_{NM}^e\,\dot u_M^e-\dot\lambda\delta u_N^e\,f_N^e\Big\}-\sum_{L=1}^{N_A}\dot\lambda_L e_L\sum_{N_{x1}}^{N_{x2}}L_i\delta u_N^e\int_0^1(\varepsilon_N\tilde e_1+(1+\varepsilon)\tilde e_{1N}d\eta\Big\}-$$

$$\sum_{L=1}^{N_A}\delta\lambda_L e_L\Big\{\sum_{N_{x1}}^{N_{x2}}L_i\dot U_N^e\int_0^1(\varepsilon_N\tilde e_1+(1+\varepsilon)\tilde e_{1N})d\eta\Big\}=0, \qquad (7.67)$$

în care $k_{NM}^e=\left[k_\Delta^e\right]$ este matricea de rigiditate incrementală elementară (N=M), iar $f_N^e=\left\{f^e\right\}$ este vectorul forţelor nodale elementare.

După asamblare în sistemul de axe globale rezultă

$$\left\{\delta U_n\right\}\left(\left[K_\Delta\right]\left\{\dot U\right\}-\left\{F\right\}=0,\right. \qquad (7.68)$$

din care, pentru o variaţie arbitrară $\left\{\delta U_n\right\}$ se obţine în forma cunoscută (4.82) ecuaţia fundamentală a problemei neliniare a barelor cu pereţi subţiri.

$$\left[K_\Delta\right]\left\{\dot U\right\}=\left\{F\right\} \qquad (7.69)$$

7.3.8. Influenţa imperfecţiunilor.

In prezenţa unor mici imperfecţiuni de natură geometrică $\varepsilon^*$ şi $k^*$ variaţiile deformaţiilor şi curburilor în stare deformată a barei sînt de forma :

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon^*$$

$$\Delta k=k-k^* \qquad (7.70)$$

Inlocuind în (7.21) şi (7.22) rezultă

$$\Delta\varepsilon_{11} = (\varepsilon-\varepsilon^*) - y(s)\,(k_3+k_3^*)+z(s)\,(k_2-k_2^*)+\omega(s)\,(k_1-k_1^*) + $$
$$+\frac{1}{2}\ r^2(s)-(k_1^2-(k_1^*)^2) \qquad (7.71)$$
$$\Delta k_{12} = k_1-k_1^*$$

Koiter /124/ arată că variaţia modulelor de elasticitate E şi G datorită deformaţiilor şi curburilor iniţiale este neglijabilă dacă deformaţia principală maximă este mică în comparaţie cu unitatea. In aceste condiţii (7.25) devine:

$$L = \frac{1}{2}\ E(A(\varepsilon_o-\varepsilon_o^*)^2+I_2(k_2-k_2^*)^2+I_3(k_3-k_3^*)^2+I_\omega(k_1-(k_1^*)')^2+I_p(\varepsilon_o-\varepsilon_o^*).$$
$$.(k_1^2-(k_1^*)^2) - I_{\eta r}(k_3-k_3^*)(k_1^2-(k_1^*)^2)+ I_{\xi r}(k_2-k_2^*).(k_1^2-(k_1^*)^2) +$$
$$+ I_{\omega r}(k_1'-(k_1^*)').(k_1^2-(k_1^*)^2) + \frac{1}{2}I_4(k_1^4-(k_1^*)^4)+ \frac{1}{2}GI_t(k_1-k_1^*)^2$$
$$(7.72)$$

Ecuaţiile constitutive (7.52), la rîndul lor, devin :

$$N_1 = E(A(\varepsilon_o-\varepsilon_o^*) + \frac{1}{2}\ I_p(k_1^{2*})^2\ )$$
$$M_2 = E(I_2(k_2-k_2^*) + \frac{1}{2}\ I_{\xi r}(k_1^2-(k_1^*)^2\ )$$
$$M_3 = E(I_3(k_3-k_3^*) - \frac{1}{2}\ I_{\eta r}(k_1^2-(k_1^*)^2\ ) \qquad (7.72\ a-e)$$
$$M_t = E(I_4(k_1^2-(k_1^*)^2)k_1+ I_{\xi r}(k_2-k_2)k_1-I_{\eta r}(k_3-k_3^*)k_1+I_{\omega r}(k_1'-k_1'))k_1+$$
$$+I_p(\varepsilon_o-\varepsilon_o^*)k_1+GI_t(k_1-k_1^*)$$
$$B = E\left[I_\omega(k_1-k_1^*) + \frac{1}{2}\ I_{\omega r}(k_1^2-(k_1^*)^2\right.$$

Pentru deformaţii iniţiale mici termenii (7.37) şi (7.38) nu suferă modificări sensibile, şi , deci, îşi păstrează forma.

Revenind acum la ecuaţia (7.66), dacă deformaţiile şi curburile iniţiale $k_1^*$, respectiv $\varepsilon_o^*$, nu depind de parametrul t cu (7.72) rezultă

$$\dot N_1 = EA\dot\varepsilon_o+ EI_p k_1\dot k_1$$
$$\dot M_2 = EI_2\dot k_2+EI_{\xi r}k_1\dot k_1$$
$$\dot M_3 = EI_3\dot k_3 - EI_{\eta r}k_1\dot k_1 \qquad (7.73)$$
$$a-e$$
$$\dot M_t=EI_4(\dot k_1(k_1^2-(k_1^*)^2)+2k_1^2\dot k_1)+EI_{\xi r}(\dot k_2k_1+(k_2-k_2)\dot k_1-EI_{\eta r}(\dot k_3k_1+(k_3-k_3^*)\dot k_1)+$$
$$E_p(\dot\varepsilon_ok_1+(\varepsilon_o-\varepsilon_o)\dot k_1+EI_{\omega r}(\dot k'k_1+(k_1-k_1^*)k_1)+GI_tk_1$$
$$\dot B = EI_\omega\dot k_1 \qquad k_1\ k_1^*$$

Exprimînd în continuare derivatele curburilor în funcţie de derivatele deplasărilor şi înlocuind (7.73) în (7.66) se obţine în final

$$\sum_{i=1}^{N_e}\Big[L_i\delta u_N^e\,\dot u_M^e\int_0^1\Big\{EA\,\varepsilon_{oN}\varepsilon_{oM}+EI_2k_{2N}k_{2M}+EI_3k_{3N}k_{3M}+GI_tk_{1N}k_{1M}+EI_\omega k'_{1N}k'_{1M}+$$

$$Bk'_{1NM}+(M_2+z_o(N\tilde e_1))k_{2NM}+(M_3-y_o(N\tilde e_1))k_{3NM}+EI_pk_1(\varepsilon_{oN}k_{1M}+$$

$$\varepsilon_{oM}k_{1N})+EI_{\xi r}k_1(k_{2N}k_{1M}+k_{2M}k_{1N})-EI_{\eta r}k_1(k_{1N}k_{1M}+k_{3M}k_{1N})+$$

$$EI_{\omega r}k_1(k'_{1N}k_{1M}+k'_{1M}k_{1N})+(EI_4(3k_1^2-(k_1^*)^2)+EI_{\xi r}(k_2-k_2^*)+$$

$$EI_{\omega r}(k_1-k_1^*)-EI_{\eta r}(k_3-k_3^*)+EI_p(\varepsilon_o-\varepsilon_o^*))k_{1N}k_{1M}-N(\tilde e_{1N}\varepsilon_{oM}+$$

$$\tilde e_{1M}\varepsilon_{oN}-z_o(\tilde e_{1M}k_{2N}+\tilde e_{1N}k_{2M})+y_o(\tilde e_{1M}k_{3N}+\tilde e_{1N}k_{3M})+(1+\varepsilon)\tilde e_{1NM})\cdot$$

$$p_1\tilde e_{2NM}-p_2\tilde e_{3NM}-p_3(k_{1M}\tilde e_{1N}+k_{1N}\tilde e_{1M})-p_3(k_1\tilde e_{1NM}+\tilde e_1k_{1NM})\Big\}d\eta\Big]\cdot$$

$$\sum_{l=1,2}\Big\{\delta u_N^e\,\dot u_M^e\Big[R_1\tilde e_{2NM}+R_2\tilde e_{3NM}+R_3(\tilde e_{1M}k_{1N}+\tilde e_1k_{1NM}+k_{1NM}+k_{1M}\tilde e_{1N}+k_1e_{1NM})\Big]_{x=x_{1L}}\Big\}-$$

$$\sum_{L=1}^{N_A}\Big\{\Big[\delta\lambda_Le_L\Big\{\sum_{N_{x1}}^{N_{x2}}L_i\dot u_M^e\int_0^1\big[(1+\varepsilon)e_{1M}+e_M\tilde e_1\big]d\eta\Big\}\Big]-\Big[\lambda_Le_L\Big\{\sum_{N_{x1}}^{N_{x2}}L_i\delta u_N^e\int_0^1\big[(1+\varepsilon)\tilde e_{1N}+$$

$$+e_N\tilde e_1\big]\,d\eta\Big\}\Big]\Big\}-\sum_{i=1}^{N_e}\Big[L_i\delta u_N^e\int_0^1\Big\{(\dot g(x)-(\varepsilon_N\tilde e_1+(1+\varepsilon)\tilde e_{1N})+\dot p_1\tilde e_{2N}+\dot p_2e_{3N}+\dot p_3(k_1\tilde e_{1N})+$$

$$+k_{1N}e_1)\Big\}\,d\eta\Big]-\sum_{i=1}\Big\{\delta u_N^e\Big[\dot R_1\tilde e_{2N}+\dot R_2\tilde e_{3N}+\dot R_3(\tilde e_1k_{1N}+k_1\tilde e_{1N})\Big]\Big\}_{x=x_{1L}}=0 \qquad (7.74)$$

în care $\varepsilon_N=\varepsilon_{ON}+y_ok_{3N}-z_ok_{2N}$, iar $g(x)$ reprezintă termenii cunoscuţi ai vectorului eforturilor secţionale, care s-a descompus într-o sumă de termeni cunoscuţi şi necunoscuţi, ultimii fiind identici cu multiplicatorii Lagrange.

Comparînd (7.74) cu(7.67) se observă că primii patru termeni din (7.74) constitue matricea de rigiditate incrementală.

7.3.1o. Forma generală a matricii de rigiditate incrementale.

Sistemul de ecuaţii liniarizate (7.67) se poate structura în felul următor :

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_U] & [K_R]^T \\ \hline [K_R] & 0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix}\{U_n\}\\ \{\Lambda\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F_n\}\\ \{h\}\end{Bmatrix} \qquad (7.75)$$

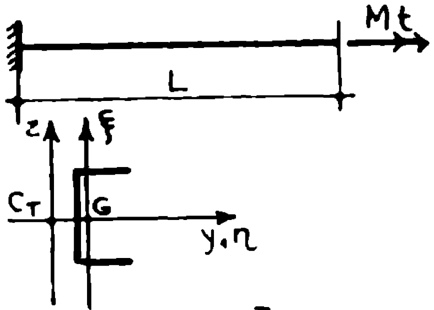
în care $K_U$ este matricea de rigiditate incrementală a barei fără considerarea restricţiilor geometrice de tip (7.36) , $U_n$ sînt deplasările nodale generalizate iar $\Lambda$ , multiplicatorii Lagrange.

Sistemul de ecuaţii liniare (7.75) se poate rezolva utilizînd un procedeu de eliminare Gauss (§.4.4.1). Probleme deosebite apar în situaţiile cînd $K_U$ este singulară iar $K$ este regulată; în aceste situaţii procedura Gauss nu poate fi aplicată în maniera obişnuită.

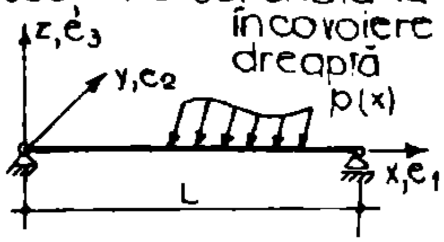
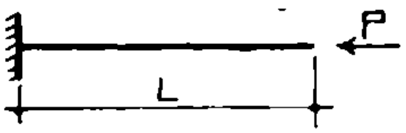
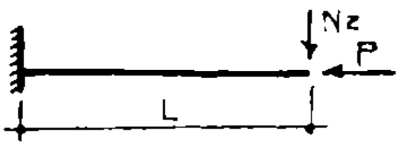
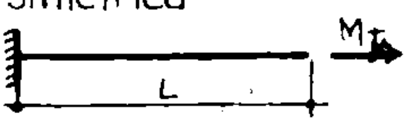
## 7.4. FORME DE ECHILIBRU ŞI SOLUŢII PARTICULARE ÎN ANALIZA NELINIARĂ A BARELOR CU PEREŢI SUBŢIRI.

In continuare se particularizează pe cîteva exemple clasice relaţia (7.53) şi se obţin ecuaţiile de echilibru şi condiţiile de margine caracteristice. Problemele şi rezultatele respective sînt prezentate în mod sintetic în tabelul 7.2 . Din analiza rezultatelor se remarcă că se regăsesc soluţiile obţinute de Koiter-problemele 2 şi 3 - respectiv TSO şi Gobahrah - problemele 4 şi 5.

tabelul 7.2 (continuare)

| 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| | $\{\delta q\}\cdot[0\ 0\ \delta q_3]^T$ | $q = e_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ ; $K_1(x) = \varphi'(x)$, $\varepsilon_0 = -\frac{1}{2}\frac{I_p}{A}K_1^2$<br>$\int_0^L \{(GI_t\varphi' + EI_4(\varphi')^3 - \frac{1}{2}\frac{EI_p^2}{A}(\varphi')^3 - M_1)\delta\varphi +$<br>$EI_\omega\varphi''\delta\varphi''\}dx = 0$<br>ecuaţia de echilibru<br>$EI_\omega\varphi''' - GI_t\varphi' + (\frac{1}{2}\frac{EI_p^2}{A} - EI_4)(\varphi')^3 + M_1 = 0$<br>condiţii de margine<br>$[EI_\omega\varphi'''\delta\varphi']_0^L = 0$ |
| | grindă încastrată solicitată la torsiune cu secţiune monosimetrică.<br><br><br>$\{M\}\cdot[M_1\ 0\ 0]^T$<br>$\{\delta q\}\cdot[0\ 0\ \delta q_1]^T$ | $\delta\Pi = 0$<br>$\int_0^L \{(EA\varepsilon_0 + \frac{1}{2}EI_pK_1^2)\delta\varepsilon_0 + EI_2K_2\delta K_2 + EI_3K_3\delta K_3 +$<br>$+(GI_tK_1 + EI_4K_1^3 + EI_p\varepsilon_0K_1)\delta K_1 + EI_1K_1'\delta K_1' -$<br>$-EI_{\eta r}K_1K_3\delta K_1 - \frac{1}{2}EI_{\eta r}K_1^2\delta K_3\}dx -$<br>$\left[2\{M\}\frac{\delta q - \delta q \times q}{1 + q\cdot q}\right]_{x=L} = 0$<br>$K_2 = 0$ $K_3 = \frac{1}{2}(I_{\eta r}K_1^2)/I_3$<br>ecuaţia de echilibru<br>$EI_\omega\varphi''' - GI_t\varphi' + E(\frac{1}{2}\frac{I_p^2}{A} + \frac{1}{2}\frac{I_{\eta r}^2}{I_3} - I_4)(\varphi')^3 +$<br>$+ M_1 = 0$ |

tabelul 7.2

| nr. crt. | denumirea și schema statică a problemei | funcționala energetică, criteriul variațional, ecuațiile de echilibru și condițiile de margine |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | grinda simplu rezemată cu secțiune solicitată la încovoiere dreaptă<br><br><br>$N_x = Ne_1$ ; $N_z = Ne_3$<br>$M = -R_2\tilde{e}_1$ , $x = 0$<br>$M = R_2\tilde{e}_1$ , $x = L$<br>$N_0 = N_z$ ; $x = 0$ | $q = e_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ ; $K_2 = 2\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\frac{\varphi'}{2} = \varphi'$<br>$\tilde{e}_1 = e_1\cos\varphi - e_3\sin\varphi$; $\tilde{e}_3\sin\varphi$; $\tilde{e}_3 = e_3\cos\varphi + e_1\sin\varphi$<br>$\delta\tilde{\Pi}_p = \int_0^L\{N_1-(N_x\cos\varphi-N_z\sin\varphi))\delta\varepsilon_0 + M_2\delta\varphi' + (N_x\sin\varphi+N_z\cos\varphi)(1+\varepsilon_0)\delta\varphi\}dx - [M\delta\varphi]_0^L - \delta N_0(\int_0^L(1+\varepsilon_0)(-\sin\varphi)dx + C_1) = 0$<br>după integrare prin părți rezultă ecuațiile de echilibru și condițiile de margine<br>$N_1 = N_x\cos\varphi - N_z\sin\varphi$<br>$M_2' = N_x(1+\varepsilon_0)\sin\varphi + N_z(1+\varepsilon_0)\cos\varphi$<br>$M_2 = M\|_{x=0,L}$<br>$\int_0^L(1+\varepsilon_0)\sin\varphi\, dx - C_1 = 0$ |
| 2 | stîlp încastrat la un capăt solicitat la compresiune centrică<br><br><br>$N_x = -P$ ; $N_z = 0$ | $\Pi_p = \int_0^L(\frac{1}{2}EI(\varphi')^2 + P(\cos\varphi - 1))dx$<br>$\tilde{\Pi}_p \cong \int_0^L(\frac{1}{2}EI(\varphi')^2 - P(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24}))dx$<br>încărcarea critică rezultă din:<br>$\delta\{\int_0^L \frac{1}{2}EI(\varphi')^2 - P\varphi^2)dx\} = 0$<br>se integrează prin părți și rezultă în final:<br>$\varphi(x) = \varphi_0\sin\frac{\pi x}{2L}$<br>$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ ; $\lambda = \frac{P}{P_{cr}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{\varphi_0}{2})^2$ |
| 3 | stîlp încastrat cu imperfecț.<br><br><br>$N_z = 1{,}216\cdot 10^{-2}P$<br>$\varphi_i(x) = -\frac{N_z x}{2EI}(x-2L)$ | la fel ca la exemplul precedent rezultă<br>$-P\int_0^L\varphi_i(x)\varphi_0\sin\frac{\pi x}{2L}dx = -\frac{2PN_z}{\pi P_{cr}}\varphi_0 L$<br>$\lambda = \frac{\frac{1}{8}\varphi_0^3 + \varphi_0}{\varphi_0 + \varphi^*}$ ; $\varphi^* = \frac{4N_z}{\pi P_{cr}}$<br>sau<br>$\lambda = \frac{\varphi_0}{-\frac{1}{8}\varphi_0^3 + \varphi_0 + \varphi^*}$ |
| 4 | grinda încastrată solicitată la torsiune cu secțiune dublu simetrică<br><br><br>$\{M\} = [M_t\ 0\ 0]^T$ | $\delta\tilde{\Pi}_p = \int_0^L\{EA\varepsilon_0 + \frac{1}{2}EI_pK_1^2)\delta\varepsilon_0 + EI_2K_2\delta K_2 + EI_3K_3\delta K_3 + (GI_tK_1 + EI_4K_1^3 + EI_p\varepsilon_0K_1)\delta K_1 + EI_\omega K_1'\delta K_1'\}dx$<br>$-2\left[2\{M\}\frac{\delta q - \delta q\times q}{1+q\cdot q}\right]_{x=L} = 0$ |

## 7.5. CONCLUZII

Comportarea reală a barelor cu pereţi subţiri este neliniară. Din acest punct de vedere o teorie neliniară care să poată fi transpusă într-o formulare numerică este pe deplin justificată.

Pe baza teoriei prezentate se pot rezolva nu numai problemele specifice ale barelor cu pereţi subţiri, ci şi acelea cu caracter mai larg ale structurilor cu pereţi subţiri, de genul suprafeţelor cilindrice sau prismatice lungi, caracteristice unor tipuri de stavile.

Elaborarea celor două teorii generalizate, liniară şi neliniară, ale barelor cu pereţi subţiri prezentate în acest capitol are şi o importanţă teoretică deosebită pentru formularea unitară a problemelor structurilor cu pereţi subţiri.

Elementul finit de bară cu pereţi subţiri cu comportare neliniară reprezintă o noutate în maniera în care a fost prezentat, în lucrare. Este necesar în etapa următoare , pentru a fi pus în valoare, să fie realizat şi modulul de program corespunzător. Din acest punct de vedere se face menţiunea că programul ASEF conţine procedurile numerice generale rezolvării problemelor neliniare şi că nu trebuiesc elaborate decît subrutinele care intervin în determinarea matricei de rigiditate incrementale.

# CAPITOLUL VIII

## COMPORTAREA CRITICA SI POSTCRITICA A STRUCTURILOR CU PERETI SUBTIRI ALE STAVILELOR METALICE

### 8.1. GENERALITATI

Tendinţa de reducere a greutăţii structurilor şi a consumurilor de materiale se caracterizează prin realizarea unor structuri tot mai svelte, la care problemele calculului de stabilitate devin criteriul principal al proiectării. Ca urmare se acordă o importanţă sporită calculelor de stabilitate pe fondul unei creşteri însemnate a numărului de studii teoretice şi experimentale dedicate acestui fenomen.

O caracteristică a situaţiei actuale a calculului de stabilitate este existenţa în paralel a două concepţii de calcul /101/. Primul concept, cunoscut sub numele de "conceptul eulerian", se limitează la determinarea încărcării critice de bifurcare, fără să se ocupe de comportarea structurii după pierderea stabilităţii, şi poate fi utilizat la structurile din bare. Folosirea acestui concept la unele structuri din plăci plane sau curbe - în această categorie intră, după cum s-a văzut în capitolul VII şi barele cu pereţi subţiri - este greşită; s-a dezvoltat de aceea conceptul comportării postcritice, în care se analizează ce se întîmplă cu structura după pierderea stabilităţii.

Intrucît stavilele metalice sînt structuri metalice cu pereţi subţiri solicitate la încovoiere cu compresiune, într-un calcul de dimensionare raţional şi economic se poate lua în considerare, pentru anumite combinaţii de încărcări, capacitatea de lucru a acestor structuri după producerea unor voalări locale sau, altfel spus, comportarea lor în regim postcritic. Intrucît problemele de voalare sînt probleme specifice structurilor din plăci subţiri, studierea şi caracterizarea lor prin relaţii simple de calcul se consideră ca fiind utilă şi necesară pentru proiectantul de stavile.

### 8.2. CONCEPTUL DE COMPORTARE POSTCRITICA /102/.

Primul care a dat o justificare teoretică riguroasă cercetărilor de stabilitate în domeniul postcritic a fost Koiter care în lucrarea sa de doctorat din 1945 pune bazele dezvoltării Teoriei instabilităţii structurilor sau Teoria comportării postcritice a structurilor.

Teoria lui Koiter ia în considerare o neliniaritate de gradul doi a deformaţiilor şi, astfel, rezultă energia potenţială de gradul patru. Scriind potenţialul sub forma $W = \sum_{i=1}^{4} W_i$, în care $W_i$ conţine toţi termenii de gradul i, Koiter a examinat influenţa fiecărui termen al potenţialului asupra instabilităţii structurilor /124/. Potenţialul $W_1$ este zero pentrucă structura este în echilibru, din $W_2$ se determină încărcarea critică de bifurcare; potenţialele $W_3$ şi $W_4$ se vor utiliza pentru stabilirea tipului de instabilitate a punctului critic şi a comportării postcritice iniţiale în sensul că, în punctul critic, nu toate structurile se comportă după conceptul eulerian, ele prezentînd stări postcritice stabile sau instabile(fig.8.1.a). Examinînd tipurile de instabilitate ce se pot produce, Koiter a găsit că punctele critice pot fi nesimetrice (fig.8.1.b) cînd sînt stabile, simetrice stabile (fig.8.1.c) sau simetrice instabile (fig.1.8.d) Două observaţii sînt importante: (1) comportarea postcritică a structurii este definită de tipul de punct critic; (2) influenţa imperfecţiunilor geometrice depinde de tipul de instabilitate a punctului critic.

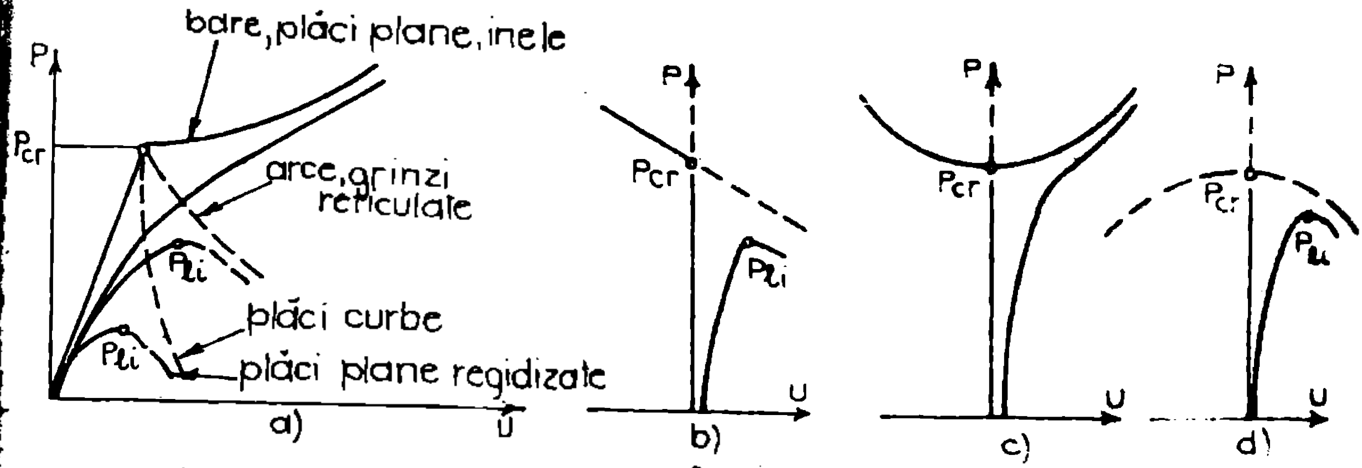



fig. 8.1

Teoria elaborată de Koiter stă la baza definirii conceptului comportării postcritice, care pretinde, ca pe lîngă determinarea încărcării critice să se definească şi tipul de instabilitate, pentru a avea informaţii privitoare la gradul de instabilitate la imperfecţiuni geometrice a structurii.

## 8.3. ASPECTE PRIVIND COMPORTAREA CRITICA SI POSTCRITICA A BORDAJELOR STAVILELOR METALICE, RELATII PENTRU CALCULUL PRACTIC LA STABILITATE. /25/, /100/, /1[illegible]/, /182/, /198/.

### 8.3.1. Criterii simplificate pentru verificarea platelajelor.

Platelajul stavilelor metalice este solicitat la încovoiere de o sarcină p provenită din presiunea hidrostatică şi la compresiune de forţe $n_{xo}$ acţionînd în planul sau în suprafaţa sa mediană. Acţiunea simultană a celor două forţe conduce la epuizarea capacităţii portante a platelajului fie prin atingerea locală a limitei de curgere fie prin pierderea stabilităţii. Situarea într-un caz sau în celălalt depinde de raportul celor două forţe şi de dimensiunile laturilor a şi b ale panoului de platelaj (fig. 8.2.a). În ipoteza că se ia în considerare numai efectul forţelor $n_{xo}$ distribuţia neuniformă a tensiunilor $\sigma_x$ se înlocuieşte cu o distribuţie unifor-

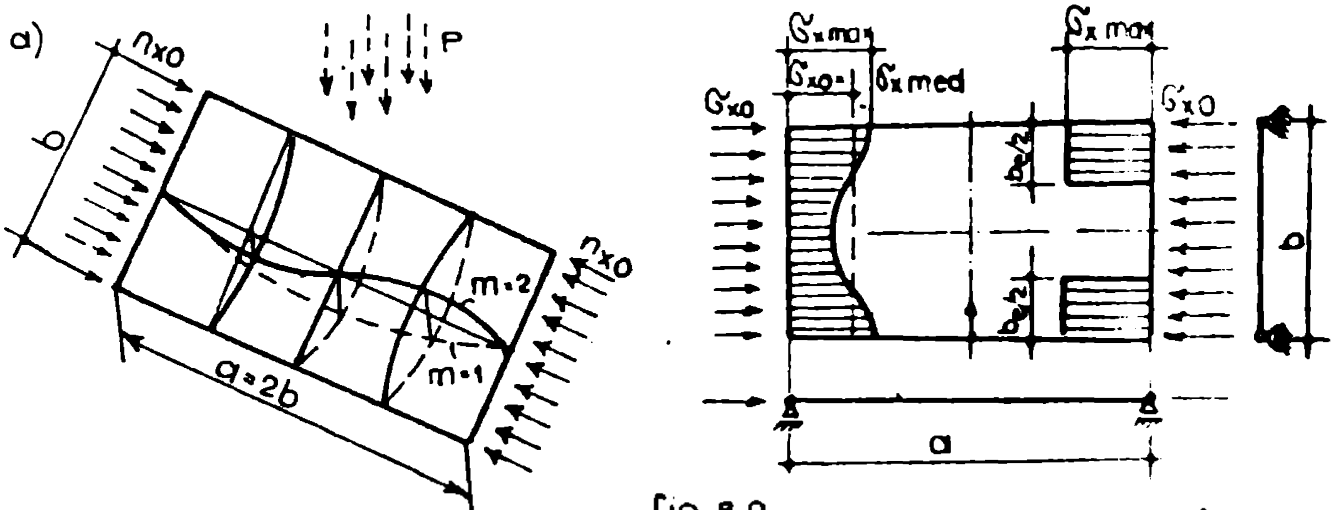



fig. 8.2

mă $\sigma_{xmax}$ repartizată pe o lățime $b_e$ numită lățime "eficace" sau "efectivă" (fig.8.2.b).

Mecanismul fenomenului se poate descrie cu ajutorul teoriei de ordinul II după modelul prezentat în tabelul 1.1.(Cap.I).

Pentru calculele practice inginerești se folosesc pentru verificare două criterii simplificate:

$$(1)\ \sigma_{ech} < \sigma_c\ ,\quad \sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_{xn} + \sigma_{xm})^2 + \sigma_{ym}^2 - (\sigma_{xn} + \sigma_{xm})\sigma_{ym}} \quad (8.1)$$

în care n semnifică efectul axial iar m efectul de încovoiere.

(2) $\sigma_o < \sigma_{cr}$ , în care $\sigma_o$ este tensiunea medie produsă de $n_o$, iar $\sigma_{cr}$ este tensiunea critică de flambaj.

Determinarea mărimilor care intervin în cele două condiții se face diferențiat, în funcție de tipul și forma platelajului și de modul de încărcare.

### 8.3.2. Verificarea la stabilitate a platelajelor comprimate.

#### 8.3.2.1. Placa dreptunghiulară plană.

Coeficienții de voalare $K_v$ pentru determinarea tensiunii critice sînt indicați în figura 8.3. în funcție de modul de rezemare al plăcii.

Pentru placa izotropă tensiunea critică este dată de relația

$$\sigma_{xcr} = K_v \sigma_e \quad (8.2)$$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (8.3)$$

4 350

care pentru $\nu = 0,3$ dă valoarea $\sigma_E = 1,898 \cdot 10^5 (t/b)^2$

Forța critică pe unitatea de lungime se obține de forma

$$n_{xcr} = \sigma_{xcr} \cdot t \quad \text{sau} \quad n_{xcr} = \frac{K_v \pi^2 K}{b^2} \quad (8.4.a,b)$$

în care K este rigiditatea la încovoiere a plăcii (tab.1.1)

In figura 8.4. a este prezentată variația săgeții w la mijlocul grinzii în domeniul postcritic ($\sigma_{xo} > \sigma_{xcr}$). Relația de legătură între $\sigma_{xo}$ și w este de forma

$$\frac{\sigma_{xo}}{\sigma_E} = c + \frac{2048(1-\nu^2)}{3\pi^4 c} \left(\frac{w}{t}\right)^2, \quad (8.5)$$

în care $c = (a/b+b/a)^2$. Pentru o singură semiundă de voalare (m=1) după x și y tensiunea de membrană postcritică se obține în mod aproximativ cu relația

$$\sigma_{xn} = -\frac{\pi^2 E}{8} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(\frac{w}{t}\right)^2 \cos\frac{2\pi y}{b} - {}_{xo} \quad (8.6)$$

Lățimea efectivă a plăcii se definește prin $b_e = \delta b$ (fig.8.2.b) , coeficientul de reducere $\delta$ determinîndu-se în funcție de tensiunea critică $\sigma_{xcr}$ aferentă fîșiei de lățime $b_{e/2}$ și lungimea după cum urmează:

$$a/b \geq 1 \quad : \ \delta = \frac{1}{2\,\sigma_{xcr}/\sigma_{xo}} \quad (8.7.a,b)$$

$$a/b \leq 1 \quad : \ \delta = \frac{1+(a/b)^4}{3+(a/b)^4 - 2\sigma_{xcr}/\sigma_{xo}}$$

Capacitatea portantă limită a plăcii este atinsă cînd $\sigma_{xmax} = \sigma_c$, factorul de creştere a sarcinii în raport cu sarcina critică fiind dat de

$$a/b \geq 1: \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{xcr}} + 1\right)$$

$$a/b \leq 1: \quad \eta = \frac{\frac{\sigma_c}{\sigma_{xcr}}\left[1 + (a/b)^4\right] + 2}{3 + (a/b)^4} \qquad (8.8.a,b)$$

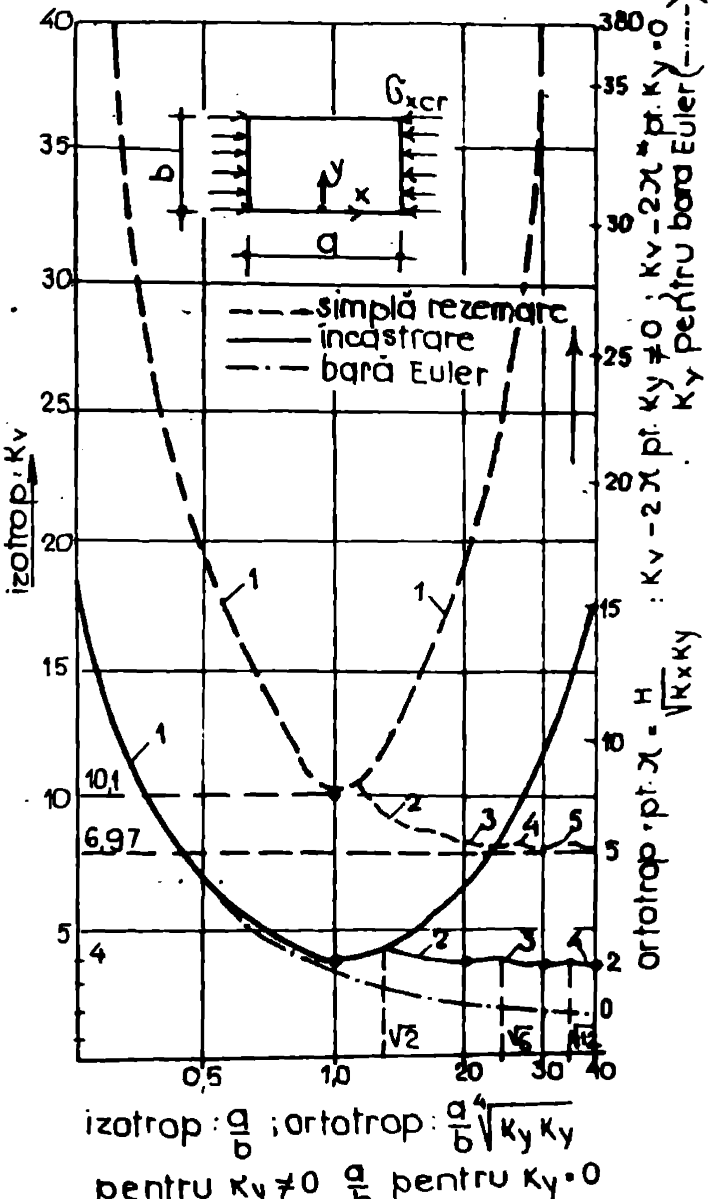


fig.8.3

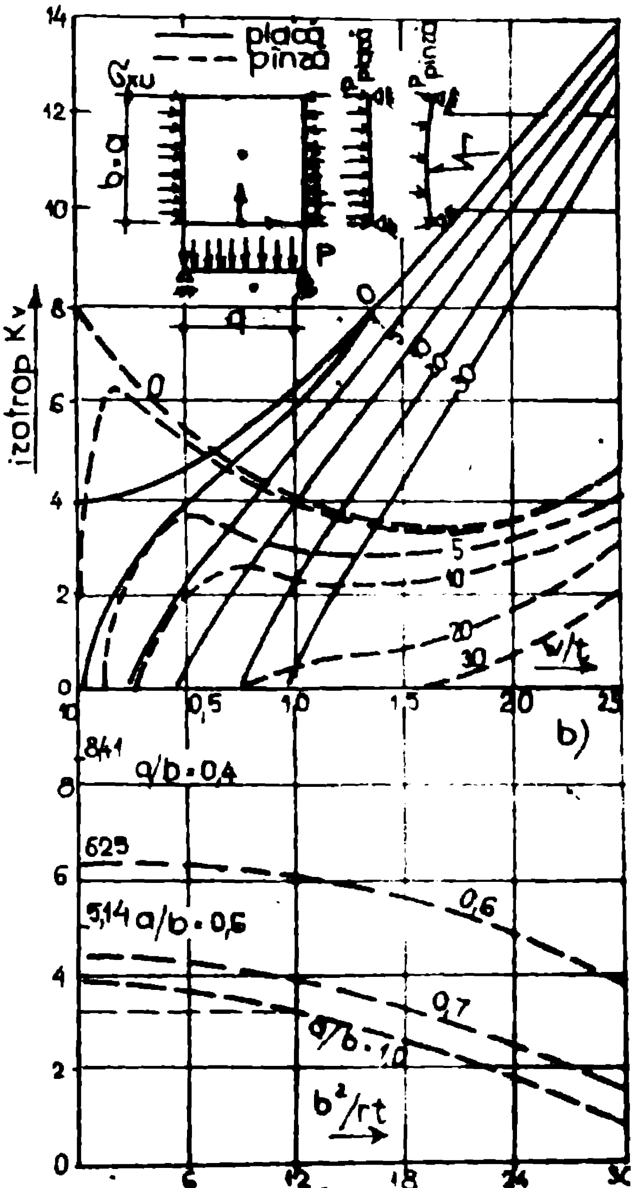


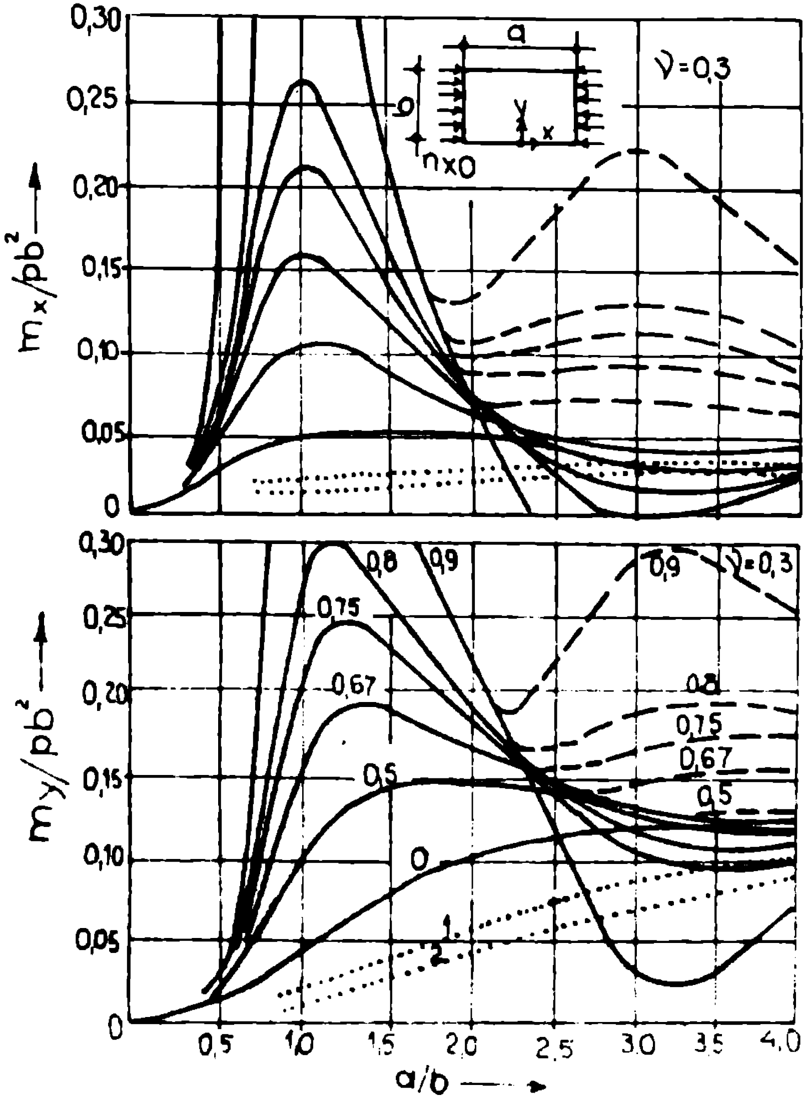
fig 8.4

In domeniul postcritic tensiunea de membrană la mijlocul plăcii rezultă:

$$\sigma_{xm} = \frac{\pi^2 E}{8}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{w}{t}\right)^2 - \sigma_{xo}$$

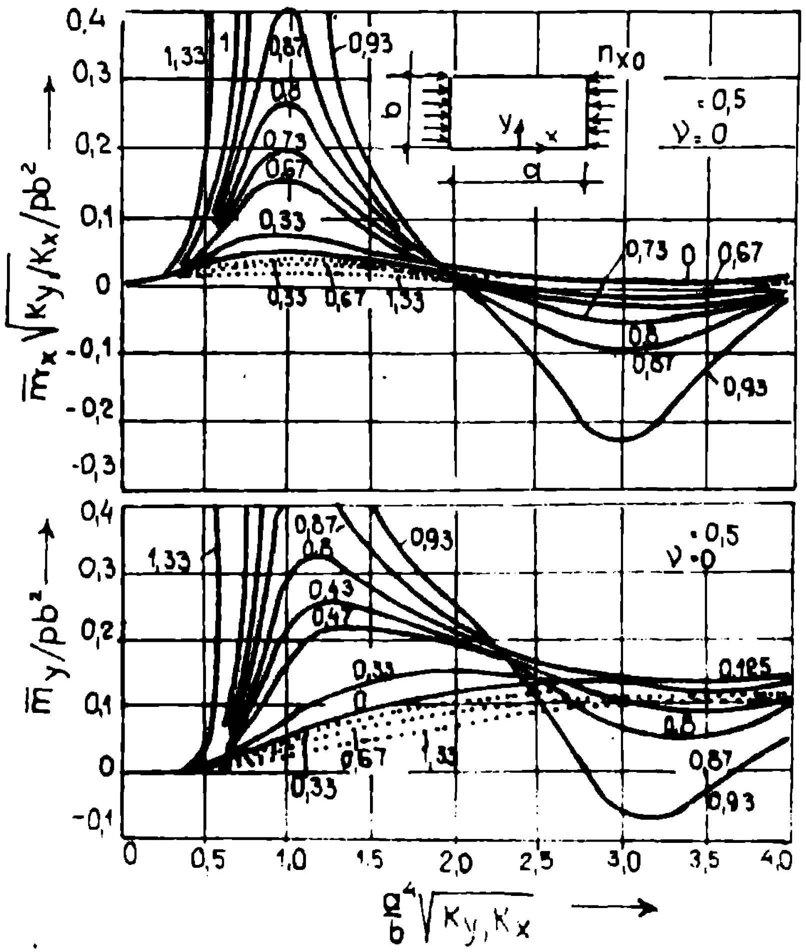
$$\sigma_{yw} = \frac{\pi^2 E}{8}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left(\frac{w}{t}\right)^2 \qquad (8.9\ a,b)$$

şi similar, pentru tensiunea din încovoiere :



$m_x/pb^2$
$m_y/pb^2$
$\nu = 0{,}3$
$n_{x0}$
a/b


fig. 8.5



$\bar{m}_x \sqrt{K_y/K_x}/pb^2$
$\bar{m}_y/pb^2$
$n_{x0}$
$\nu = 0{,}5$
$\nu = 0$
$\frac{a}{b}\sqrt[4]{K_y/K_x}$


fig. 8.6

$$\sigma_{xm} = \frac{\pi^2 E}{8} \left(\frac{t}{a}\right)^2 (1+\mu a^2/b^2) \frac{w}{t}$$
$$\sigma_{ym} = \frac{\pi^2 E}{8} \left(\frac{t}{a}\right)^2 (1+\mu b^2/a^2) \frac{w}{t} \qquad (8.10.a,b)$$

In cazul plăcii izotrope tensiunea critică este dată de expresia

$$\sigma_{xcr} = \frac{n_{x\,cr}}{t+A_x/\ell_x} \qquad (8.11)$$

iar forţa critică pe unitatea de lungime de relaţia

$$n_{x\,cr} = \frac{K_v \pi^2 \sqrt{K_x K_y}}{b^2} \qquad (8.12)$$

notaţiile fiind date în capitolul I.

8.3.2.2. Placa dreptunghiulară cilindrică.

In figura 8.4. a este indicată cu linie întreruptă variaţia tensiunii postcritice $\sigma_{xo} > \sigma_{xcr}$ pentru cazul unei plăci cilindrice cu indicele de curbură $b^2/rt = 12$ şi cu raportul laturilor $a/b=1$. Valoarea inferioară tensiunii critice se obţine pentru o valoarea a săgeţii $w = 1,7t$. Conform teoriei de ordinul doi, pentru cazul plăcii izotrope, între $\sigma_{xo}$ şi w se stabileşte o relaţie de forma

$$\frac{\sigma_{xo}}{\sigma_E} = c + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4 c}\left(\frac{t}{rt}\right)^2 + \frac{2048(1-\mu^2)}{3\pi^4 c}\left(\frac{w}{t}\right)^2 - \frac{192(1-\nu^2)}{\pi^4 c}\left(\frac{b}{rt}\right)\frac{w}{t} \qquad (8.13)$$

Valoarea superioară a tensiunii critice se obţine pentru $w = o$. Pentru placă cilindrică ortotropă se obţine o expresie asemănătoare /127/, /167/, dar mult mai complicată.

8.3.3. Verificarea la stabilitate a platelajelor comprimate şi încovoiate.

8.3.3.1. Placa dreptunghiulară plană.

Legătura între $\sigma_{xo}$, p şi săgeata w în mijlocul plăcii izotrope este pusă în evidenţă în figura 8.3. cu linii subţiri continue, iar fenomenul este descris de relaţia 8.5 la care se mai adaugă un termen care ţine seama de efectul încovoierii:

$$\frac{\sigma_{xo}}{\sigma_E} = c + \frac{2048(1-\nu^2)}{3\pi^4 c}\left(\frac{w}{t}\right)^2 - \frac{192(1-\pi^2)}{\pi^2 E}\left(\frac{a^2 b^2}{t^4}\right)\frac{p}{w/t} \qquad (8.14)$$

In figura 8.5 se prezintă variaţiile momentelor încovoietoare $m_x$ şi $m_y$ în funcţie de raportul laturilor a/b pentru cazul plăcii izotrope simplu rezemată pe contur, liniile continue descriind comportarea în centrul plăcii, iar liniile întrerupte reprezentînd variaţiile momentelor încovoietoare maxime. Parametrul curburii este $n_{xo}/(4\pi^2 \cdot /b^2)$, forţa $n_{xo}$ fiind supusă criteriilor de siguranţă 1 şi 2 prezentate în §.§. 8.3.1. Pentru plăci scurte, $a/b < 1,2$ se obţine, ca în cazul barelor, relaţia :

$$m_x = \frac{p^{\wedge}}{n_{xo}}\left[1/\cos\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{n_{xo}}{K}}\right)-1\right], \quad m_y = \nu\, m_x \qquad (8.15)$$

Comportarea plăcii ortotrope este descrisă de figura 8.6. Variațiile momentelor încovoietoare sînt reprezentate cu linie plină iar cea a forței de compresiune $n_{xo}$ cu linie punctată. Parametrul de curbură este reprezentat de $n_{xo}$ raportat la factorul

$$(4-2\chi)\pi^2\sqrt{K_xK_y}/b^2 = 3\pi^2\sqrt{K_xK_y}/b^2 \quad ; \chi = 0{,}5$$

8.3.3.2. Placa dreptunghiulară cilindrică.

In figura 8.4.a se prezintă, analog cu placa dreptunghiulară, relația între $\sigma_{xo}$, p și w, cu linie întreruptă, conform relației

$$\frac{\sigma_{xo}}{\sigma_E} = c + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4 c}\left(\frac{b}{rt}\right)^2 + \frac{2048(1-\nu^2)}{3\pi^4 c}\left(\frac{w}{t}\right)^2 - \frac{192(1-\pi^2)}{\pi^4 c}\left(\frac{b}{rt}\right)\frac{w}{t} - \frac{192(1-\pi^2)}{\pi^6 E}\left(\frac{a^2b^2}{t^4}\right)\frac{p}{w/t} \qquad (8.16)$$

Pentru cazul unei singure semiunde de voalare în direcțiile x și y se obțin tensiunile la mijlocul plăcii conform relațiilor (8.9) și (8.1o) la care se adaugă termenul care introduce efectul de încovoiere.

$$-\frac{Et}{r}\,\frac{1}{2+a^2/b^2+b^2/a^2}\,\frac{w}{t} \qquad (8.17)$$

8.3.4. Conceptul de lățime echivalentă în analiza postcritică a structurilor de stavile metalice.

Din analiza relațiilor prezentate în acest capitol reiese că un element esențial în verificările de stabilitate a structurilor cu pereți subțiri în domeniul postcritic este lățimea echivalentă. Numai după ce este cunoscută aceasta se pot stabili relațiile de calcul pentru verificarea acestor structuri. Din acest motiv, în cele ce urmează se va proceda la un studiu detaliat, teoretic și experimental al acestei probleme. Acest studiu este dezvoltat pentru barele cu pereți subțiri, care așa după cum s-a arătat în cap. I și cap.VI, constituie modelul fizic al unor tipuri de structuri de stavile, pe de o parte, iar pe de altă parte oferă condiții foarte bune pentru experimentare în vederea verificării relațiilor de calcul propuse.

8.4. FORME DE INSTABILITATE ALE BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI.

La o bară cu pereți subțiri instabilitatea se poate produce prin: (1) voalarea locală a pereților comprimați la încărcarea locală $P_{cr,\ell}$, (2) prin flambajul general la încărcarea critică generală $P_{cr,g}$ ; (3) prin flambaj general cuplat cu voalarea pereților, la încărcarea $P_{cr}$ . Atingerea încărcării critice locale $P_{cr,\ell}$ nu înseamnă cedarea barei, deoarece plăcile voalate au capacitatea de a prelua încărcări și în domeniul postcritic, bara cedează, însă, dacă se ajunge la încărcarea critic generală $P_{cr,g}$. De aceea, normele de calcul admit ca $P_{cr,\ell} < P_{cr}$ și astfel barele au pereți subțiri voalați în momentul cedării. După Van der Neut /1o1/, primul cercetător care studiază comportarea critică şi postcritică a barelor cu pereţi subţiri în stare voalată, pe o bară cu secţiune teoretică, formată numai din două tălpi bxt menţinute la distanţa de inima profilului, considerată fără rigiditate axială, se definesc trei tipuri de instabilităţi (fig.8.7) pentru $P_{cr,\ell}= 2\pi^2 Et^2(t/b) K$ şi $P_{cr,g}=\pi^2EI/L^2$:

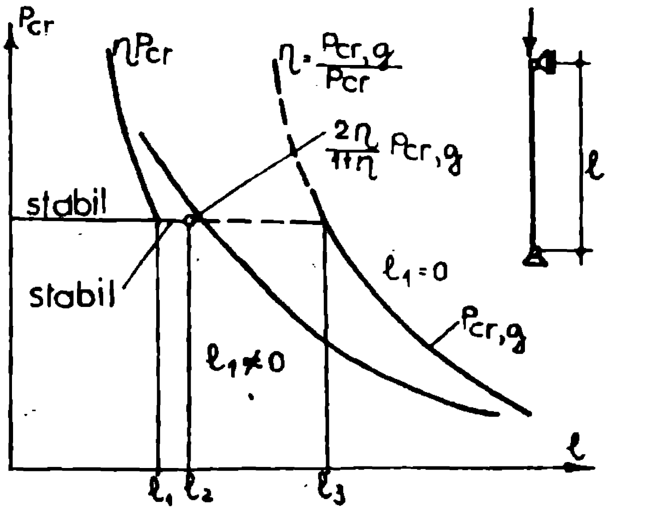



fig.8.7

(1) $P_{cr} < P_{cr,\ell}$ - instabilitatea se produce prin flambaj general, care poate fi prin încovoiere sau încovoiere răsucire.

(2) $P_{cr} > P_{cr,\ell}$ - instabilitatea se produce prin flambaj general cuplat cu voalare.

(3) $P_{cr} = P_{cr,\ell}$

- $\ell_1 < \ell < \ell_2$: bifurcare stabilă
- $\ell_2 < \ell < \ell_3$: bifurcare instabilă.

Pentru cazul cînd ambele tălpi sînt afectate de imperfecţiuni egale presupuse afine cu deformaţia de voalare curba P - $\ell$ este continuă şi influenţa imperfecţiunilor $\ell_1$ este maximă în zona $P_{cr\ell} \simeq P_{cr,g}$. In această zonă bifurcările pot fi şi instabile, foarte sensibile la imperfecţiuni geometrice. In/lcl/ se arată că în cazul cînd imperfecţiunile celor două tălpi sînt diferite comportarea barei nu diferă de cazul precedent. Van der Neut studiază şi cazul cînd ambele tipuri de instabilitate sînt afectate de imperfecţiuni, iar Maquoi şi Massonnet arată că cea mai puternică eroziune a lui $P_{cr}$ are loc cînd cele două tipuri de instabilitate se cuplează $P_{cr,g} \simeq P_{cr,\ell}$. Aceeaşi autori au constatat că în cazul în care se ţine seama de deformaţiile plastice, reducerea maximă a încărcării, ca urmare a imperfecţiunilor geometrice, se menţine în acelaşi domeniu ca în cazul deformaţiilor elastice.

Ca urmare a acestor reduceri, barele cu pereţi subţiri nu pot beneficia de o rezistenţă postcritică mare: scăderea rigidităţii pereţilor ca urmare a prezenţei imperfecţiunilor geometrice şi creşterea gradului de instabilitate în urma cuplării flambajului general cu cel local nu poate fi compensată de rezerva postcritică a pereţilor barei.

## 8.5. CARACTERISTICI GEOMETRICE ECHIVALENTE IN ANALIZA POSTCRITICA A BARELOR CU PERETI SUBTIRI /59/,/60/, /65/.

### 8.5.1. Mecanismul voalării.

Mecanismul voalării pereţilor barelor cu pereţi subţiri se poate studia prin intermediul modelului intuitiv propus de Lubas /49/ care asimilează comportarea unui perete comprimat, rezemat pe ambele laturi, cu comportarea structurii static nedeterminate din fig.8.8.a. Bara B modelează fibrele centrale ale panoului, supuse la voalare în timp ce bara R modelează conexiunile cu pereţii adiacenţi.

In urma acțiunii forței de compresiune P, bara B cu rigiditate mică la încovoiere va flamba suferind o scurtare $\Delta\ell$ (fig.8.8.b) legea de variație a deformației specifice $\Delta\ell/\ell$ putîndu-se aproxima printr-o sinusoidă . Pentru un sistem ideal, fără imperfecțiuni, forța P se repartizează în domeniul precritic $P < P_{cr}$ în mod egal pe cele două bare care au aceeași rigiditate axială. După pierderea stabilității, în domeniul postcritic $P > P_{cr}$, bara B va prelua în continuare o forță egală cu $P_{cr}$, creșterile P, peste această limită, urmînd a fi preluate de bara R ( fig.8.8.c). Prin urmare, domeniul postcritic este caracterizat printr-o redistribuire mai favorabilă a eforturilor, iar cedarea structurii se va produce cînd bara R va atinge limita de curgere. Dacă bara B prezintă imperfecțiuni geometrice $w_o$ forța critică a sistemului nu mai este riguros măsurabilă întrucît deformațiile w vor apărea din momentul aplicării forței P, forța de cedare fiind dependentă de deformația totală $w_{tot} = w + w_o$.

Un perete al unei bare cu pereți subțiri solicitate la compresiune uniformă se va deforma în zona centrală voalînd - asemeni barei B - și suferind o scurtare geometrică, care, din motive de compatibilitate cu legăturile - muchiile reprezentînd conexiunile cu pereți adiacenți trebuie să rămînă drepte - va conduce la o redistribuire a eforturilor unitare normale către margini (fig. 8.9.b) întrucît nu se poate opera în calculele practice cu distribuția neuniformă a eforturilor există două posibilități pentru evaluarea cantitativă a fenomenului :

(1) Considerarea efortului unitar normal mediu $\sigma_{med}$ avînd aceeași rezultantă ca și diagrama $\sigma$ reală ;

(2) Introducerea conceptului de lățime echivalentă, propus de von Kármán , în 1932, potrivit căruia diagrama reală se înlo-

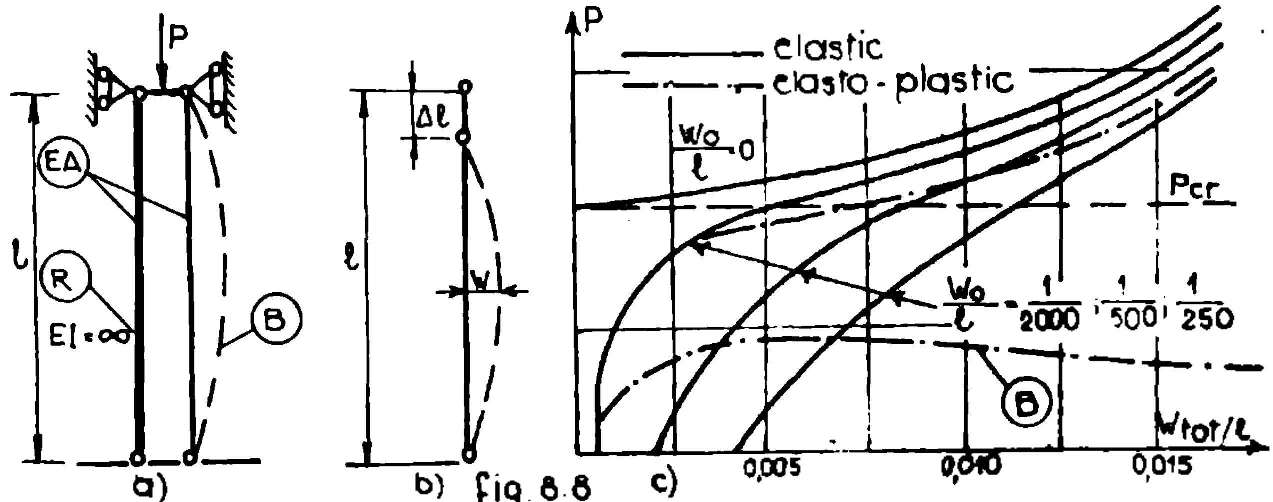


fig.8.8

cuiește cu o distribuție echivalentă $\sigma_{max}$ (fig.8.9.b).

Este meritul lui George Winter de a fi introdus în 1959 modelul din figura 8.9.a cu ajutorul căreia se explică comportarea postcritică a plăcilor și a folosirii conceptului de lățime echivalentă (se mai numește "efectivă" sau "eficace").

Potrivit acestui model eforturile din barele transversale care sînt de fapt "eforturile de membrană" în placa comprimată, sînt cauza rezistenței postcritice și a diferenței de comportament esenţiale dintre stîlp şi placă. Eforturile de membrană nu sînt numai eforturi unitare de întindere sau compresiune, ci ele sînt şi tangenţiale /136/ . Din acest punct de vedere, modelul ar trebui completat cu diagonale în toate panourile.

### 8.5.2. Determinarea caracteristicilor geometrice echivalente.

#### 8.5.2.1. Reflectarea problemei în literatura tehnică.

Un număr mare de cercetători au avut în vedere stabilirea unor relaţii pentru determinarea lăţimii echivalente, concept care, de altfel, este prezent în marea majoritate a normelor de calcul pentru barele cu pereţi subţiri. Dintre acestea , cele mai cunoscute relaţii sînt sintetizate în tabelul 8.1.

tabelul 8.1

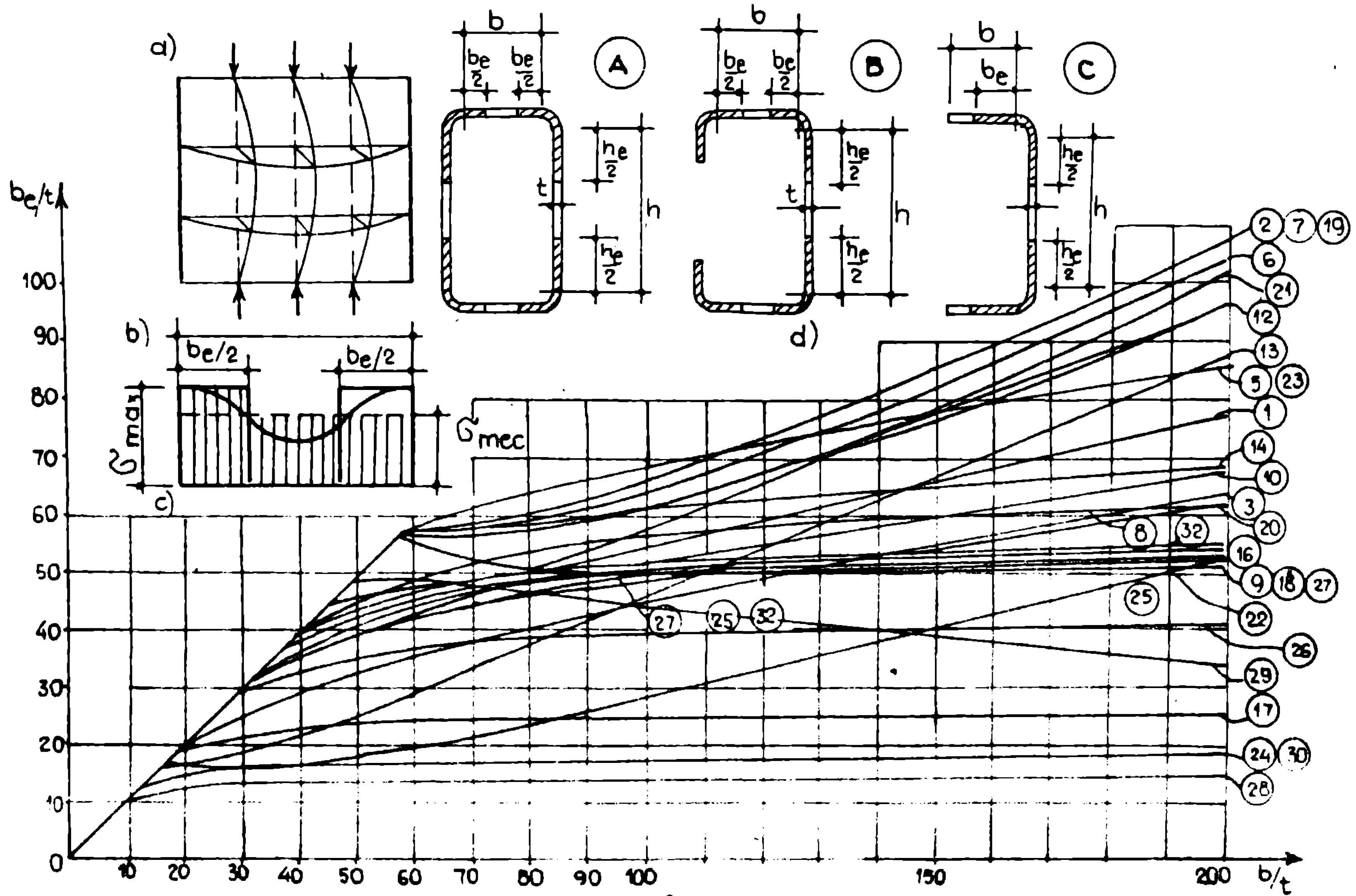
| nr. crt | autorul norma tehnică | forma iniţială $\sigma_{med}/\sigma_{max}$ = | forma transformată $b_e/t$ = |
|---|---|---|---|
| 1 | Box (1883) | $0,725\sqrt[4]{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $1,38\,b/t\sqrt{E/\sigma_{max}}\sqrt{b/t}$ |
| 2 | Schnadel | $0,5(1+\sigma_{cr}/\sigma_{max})$ | $0,5(1+3,62(t/b)^2E/\sigma_{max})$ |
| 3 | Seschler | $0,6\sqrt[4]{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $0,827\sqrt{b/t}\sqrt[4]{E/\sigma_{max}}$ |
| 4 | Kárman (1932) | $0,89\sqrt[4]{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $1,69\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ |
| 5 | Marguerre | $\sqrt[3]{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $1,53\sqrt[3]{b/t}\sqrt[3]{E/\sigma_{max}}$ |
| 6 | Bengston (1) | $0,483+0,517\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $(0,483+1,871(t/b)^2E/\sigma_{max})b/t$ |
| 7 | Bengston (2) | $0,483+0,6\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $(0,483+2,172(t/b)^2E/\sigma_{max})b/t$ |
| 8 | Frankland | $1,19\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_c}-0,35\,\sigma_{cr}/\sigma_c$ | $2,26\sqrt{E/\sigma_{max}}(1-0,56\,t/b\sqrt{E/\sigma_{max}}$ |
| 9 | Conley | $0,96\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}-0,23\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $(1,826-0,437\,t/b\sqrt{E/\sigma_{max}})\sqrt{E/\sigma_{max}}$ |
| 10 | Chilver | $0,724\sqrt[10]{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $1,065\sqrt[10]{(b/t)^7}\sqrt{(E/\sigma_{max})^3}$ |
| 11 | Heimerl | $0,77\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $(1,95\sqrt{E/\sigma_{max}})$ ? ? |
| 12 | Stowel (1) | $0,44+0,56\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $0,44\,b/t(1+4,607(t/b)^2E/\sigma_{max})$ |
| 13 | Stowel (2) | $0,44+0,047\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $0,44\,b/t(1+0,384(t/b)^2E/\sigma_{max})$ |
| 14 | Gerard | $0,824(\sigma_{cr}/\sigma_{max})^{0,425}$ | $1,728(b/t)^{0,15}(E/\sigma_{max})^{0,425}$ |
| 15 | Dwigt | $0,87\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}$ | $1,655\sqrt{E/\sigma_{max}}$ |
| 16 | Folkner | $1,05\sqrt{\sigma_{cr}.\sigma_{max}}-0,28\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $2(1-0,51\,t/b\sqrt{E/\sigma_{max}})\sqrt{E/\sigma_{max}}$ |
| 17 | Winter K = 0,85 (1) | $\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}}(1-0,22\sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}})$ | $0,873\sqrt{E/\sigma_{max}}(1-0,168\,t/b\sqrt{E/\sigma_{max}})$ |
| 18 | Winter K = 4 (2) | | $19\sqrt{E/\sigma_{max}}(1-0,418\,t/b\sqrt{E/\sigma_{max}})$ |
| 19 | Zorgno (1) | $0,5(1+\sigma_{cr}/\sigma_{max})$ | $0,5(1+3,62(t/b)^2E/\sigma_{max})b/t$ |
| 20 | Zorgno (2) | $0,254(1+2,93\,\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $0,254(1+10,61(t/b)^2E/\sigma_{max})b/t$ |
| 21 | Zorgno (1') | $0,5(1+w/(w+w_o)\sigma_{cr}/\sigma_{max})$ | $0,5(1+3,62\frac{w}{w+w_o}(t/b)^2E/\sigma_{max})b/t$ |
| 22 | Zorgno (2') | $0,254(1+2,93\,w/(w+w_o)\sigma_{cr}/\sigma_{max}$ | $0,254(1+10,61\frac{w}{w+w_o}(t/b)^2E/\sigma_{max}\,b/t$ |

8.5.2.2. Reflectarea în normele de calcul a conceptului de "lățime echivalentă ".

In tabelul 8.2. se prezintă relațiile de calcul a lățimii echivalente prezente în cele mai cunoscute norme tehnice, remarcabil este faptul că toate aceste relații au la bază, fără excepții, formulele lui Winter.

tabelul 8.2

| nr. crt | norma tehnica | elemente rigidizate (A, B, fig 8.4) | elemente nerigidizate (C, fig 8.4) |
|---|---|---|---|
| 1 | BS. 449 | $b_e/t = 1{,}535\sqrt[3]{(b/t)E/\sigma_{max}}$ (23) | |
| 2 | EUROCODE 3 | $\frac{b_e}{t} = 1{,}9\sqrt[3]{\frac{E}{\sigma_{max}}}(1-0{,}38\frac{t}{b})\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}})$ (25) | $\frac{b_e}{t} = 0{,}624\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}}(1-0{,}125\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}}$ (24) |
| 3 | AISI 1981 | calculul eforturilor<br>$\frac{b_e}{t} = \frac{253}{\sqrt{\sigma}}(1-\frac{55{,}3}{\sigma}\frac{t}{b})$ (26)<br>calculul deformațiilor<br>$\frac{b_e}{t} = \frac{326}{\sqrt{\sigma}}(1-\frac{71{,}3}{\sqrt{\sigma}}\frac{t}{b})$ (27) | din formula lui Winter<br>$\frac{b_e}{t} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}}(1-0{,}222\sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}}$<br>pentru K=0,5 si OL 37 rezultă<br>$\frac{b_e}{t} = 19{,}89(1-4{,}375\frac{t}{b})$ |
| 4 | NBM 8-5100 1975 | secțiuni simplu conexe<br>$\frac{b_e}{t} = \frac{212}{\sqrt{\sigma}}(1-\frac{37{,}2}{\frac{b}{t}\sqrt{\sigma}})$ (28)<br>secțiuni dublu conexe<br>$\frac{b_e}{t} = \frac{212}{\sqrt{\sigma}}(1-\frac{42{,}2}{\frac{b}{t}\sqrt{\sigma}}$ (28a) | se calculează un factor de reducere $\Phi_s$ al coeficientului de flambaj $\varphi$ coeficientul $Q_s = Q_s(\frac{b}{t}, \sigma_c)$ se calculează diferențiat pe tipuri de profile |
| 5 | REGLES 1984 | pereți între pereți rigidiz. (A)<br>$\frac{b_e}{t} = 1{,}64\sqrt{E/\sigma}$; $1{,}64\sqrt{\frac{E}{\sigma}} < \frac{b}{t} \leq 500$ (29)<br>pereți plan rigidizați (B)<br>$\frac{b_e}{t} = 1{,}64\sqrt{\frac{E}{\sigma}}$; $1{,}64\sqrt{\frac{E}{\sigma}} < \frac{b}{t} \leq 60$ (29a)<br>$\frac{b_e}{t} = (1{,}64\sqrt{\frac{E}{\sigma}} - \frac{b}{10t} + 6)$; $60 \leq \frac{b}{t} \leq 90$ (29b) | $K_v = \frac{\sigma_c}{\sigma}$<br>$K_v = 1$, $\frac{b}{t} \leq \frac{2550}{\sigma_c}$<br>corniere:<br>$K_v = 1 + \frac{88+\sigma_c}{58100}(\frac{b}{t} - \frac{2550}{\sigma_c})^2$<br>tălpi:<br>$K_v = 1 + \frac{88+\sigma_c}{11600}(\frac{b}{t} - \frac{2550}{\sigma_c})^2$ |
| 6 | DIN 18800 | $\frac{b_e}{t} = 1{,}22\left[1-(1-0{,}766\frac{t}{b}\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}})^2\right]\frac{b}{t}$ (30) | $\frac{b_e}{t} = 1{,}22\left[1-(1-0{,}254\frac{t}{b}\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}})^2\right]\frac{b}{t}$ (31) |
| 7 | STAS 10108/2-83 | secțiuni simplu conexe<br>$\frac{b_e}{t} = 59\sqrt{\frac{220}{\sigma_{max}}} - \frac{153}{b/t}\frac{220}{\sigma_{max}}$ (32)<br>secțiuni dublu conexe<br>$\frac{b_e}{t} = 59\sqrt{\frac{220}{\sigma_{max}}} - \frac{685}{b/t}\frac{220}{\sigma_{max}}$ (32a) | se impune $(\frac{b}{t})_{lim} \leq 11\sqrt{\frac{220}{R}}$<br>dacă $(\frac{b}{t}) > (\frac{b}{t})_{lim}$ se ia în (32) sau (32a) sau (32a) $\sigma_{max} = \min R_v$ |



a)
b)
c)
d)
b
be/2
be/2
be/2
A
B
C
t
h
he/2
be
σmax
σmec
be/t
b/t
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200


fig.8.9

Normele DIN 18800 și EUROCODE 3 prevăd relații diferențiale pentru calculul coeficientului de voalare K, respectiv lățimea echivalentă în funcție de distribuția tensiunilor $\sigma$ pe perete. In acest fel printr-un raport

$$\psi = \frac{\sigma_{max,i}}{\sigma_{max,j}} \text{, cu } \sigma_{max,i} > \sigma_{max,j}$$ tensiunile la muchii,

se introduce efectul compresiunii excentrice. In relațiile din tabelul 8.2. s-au introdus expresiile corespunzătoare compresiunii uniforme (centrice), adică pentru $\psi = 1$.

8.5.2.3. Analiza și sinteza relațiilor de calcul pentru determinarea lățimii echivalente.

Analizînd relațiile din tabelele 8.1 și 8.2., reprezentate grafic în figura 8.4.c, se fac următoarele considerații :

1. Relațiile prezentate în tabelele 8.1 și 8.2 , prezintă o mare varietate de forme și o însemnată dispersie a rezultatelor. Dacă se fac notațiile :

$$\sigma_{med}/\sigma_{max} = y \quad \text{și} \quad \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma_{max}} = x \tag{8.18}$$

în care:

$$\sigma_{cr} = \frac{K\pi^2 E}{12(1-\nu^2)(\frac{b}{t})^2} \tag{8.19}$$

notațiile fiind cele consacrate, relațiile din tabel se pot exprima de o manieră unitară prin ecuația polinominală :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^m \; ; \quad m \in Q \tag{8.20}$$

Prin particularizarea corespunzătoare a coeficienților $a_i$ se obțin relațiile din tabel, care se pot grupa în trei categorii :

(i) $y = a_0 + a_2 x^2$ , relațiile 2,6,7,12,13, 19-22 ;

(ii) $y = a_1 x + a_2 x^2$ , relațiile 8,,, 16-18 ;

(iii) $y = a_3 x^m$, relațiile 1,3-5, 10,11,14,15 ;

Formulele pentru calculul lățimii echivalente prezente în normele de calcul (23-32) sînt conținute în expresia generală (c) și se suprapun, peste una din cele trei forme particulare ; de fapt, la baza majorității normelor stă relația lui Winter care este de forma (ii).

Majoritatea relațiilor au un caracter semiempiric, coeficienții numerici care intervin în expresiile acestora fiind stabiliți pe baza unor analize teoretice și experimentale efectuate pe plăci comprimate rezemate pe două laturi opuse (1-9, 14-16,23) sau pe plăci comprimate rezemate pe o singură latură (12,13); relațiile (10) și (11) au fost obținute pentru profile [, iar relațiile lui Winter au fost stabilite pe baza unui număr mare de încercări realizate la Cornell University pe plăci comprimate sau pe grinzi din oțel supuse la încovoiere pură; relațiile (19-22) au fost stabilite de Zorgno pe baza unor analize teoretice în cadrul teoriei stabilității plăcilor.

2. Relațiile prezentate nu țin seama în mod explicit de efectul imperfecțiunilor geometrice, important în cazul barelor cu pereți subțiri. Excepție fac relațiile (21) și (22) stabilite de Zorgno pornind de la considerente teoretice similare cu cele ale teoriei lui Koiter. Celelalte relații din tabel introduc într-o măsură mai mare sau mică efectul imperfecțiunilor prin coeficienții numerici stabiliți pe cale

experimentală. In literatura de specialitate se cunosc şi alte încercări de a introduce în calculul lăţimii echivalente efectul imperfecţiunilor; astfel, în /35/ Dawson şi Walker propun o relaţie care dă rezultate bune în domeniul precritic($\sigma_{med} < 4\sigma_{cr}$), iar în lucrarea /151/ Narayan şi Show definesc "lăţimea efectivă secantă" ţinînd seama de imperfecţiunile geometrice şi operînd cu coeficienţi de voalare diferenţiaţi pe tipuri de condiţii de margine.

De remarcat este faptul că normele de calcul, chiar şi cele de dată mai recentă,nu ţin seama de imperfecţiuni la determinarea lăţimii echivalente, ceea ce reprezintă o discordanţă cu rezultatele şi tendinţele actuale din calculele de stabilitate.

3. Toate relaţiile din tabelul 8.1 se referă numai la cazul compresiunii uniforme. Lucrări de dată mai recentă , abordează cazul compresiunii excentrice şi propun relaţii de calcul în acest sens. Din punct de vedere al normelor de calcul, numai EURCODE 3 şi DIN 18800 /208/,/214/ reflectă în mod corespunzător această problemă.

4. Relaţiile din tabel şi normele de calcul nu reflectă în mod corespunzător cazul elementelor nerigidizate (tipul C în fig.8.4). In norme de regulă, se indică criterii de limitare a supleţii de pereţi pentru aceste elemente. Se poate remarca că, şi din acest punct de vedere EURCODE 3 şi DIN 18800 sînt normele de calcul cele mai evoluate întrucît prevăd relaţii clare pentru aprecierea lăţimii echivalente a elementelor nerigidizate. In /163/ Peköz arată că relaţia lui Winter care stă la baza normativului american /209/ se poate utiliza cu succes pentru calculul lăţimii echivalente pentru elementele nerigidizate cu condiţia că în expresia (b)a lui $\sigma_{cr}$ să se introducă valori corespunzătoare ale coeficientului de voalare $k$- sînt indicate în acest sens rezultatele obţinute de Kalyanaran /120/, /121/. In /189/ Thomason propune introducerea conceptului de grosime echivalentă pentru evaluarea caracteristicilor geometrice echivalente a elementelor nerigidizate . Acest concept, confirmat de rezultate experimentale, a fost preluat de norma suedeză STBK-NS/216/.

8.5.2.4. Formulă pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale barelor cu pereţi subţiri formate la rece în starea postvoalată a pereţilor ţinînd seama de efectul imperfecţiunilor /58/.

Plecînd de la teoria lui Koiter, în cadrul unei lucrări publicate în anul 1976 "/200/ Zorgno stabileşte două relaţii de calcul pentru determinarea lăţimii echivalente pentru pereţi rigidizaţi şi respectiv nerigidizaţi în care introduce efectul imperfecţiunilor geometrice cauzate de voalarea iniţială a pereţilor, $w_o$, după cum urmează:

a) pentru elemente rigidizate :

$$\frac{b_e}{t} = 0{,}5 \left[1 + \frac{w}{w + w_o} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}\right] \frac{b}{t} , \qquad (8.21)$$

în care w rezultă din rezolvarea prin încercări a ecuaţiei de gradul trei de mai jos :

$$\left(\frac{w}{t}\right)^3+3\left(\frac{w}{t}\right)^2 \frac{w_o}{t} \left[0{,}733k(k-1)+ 2 \left(\frac{w_o}{t}\right)^2\right]+0{,}733k^2 \frac{w_o}{t} = 0 \qquad (8.22)$$

b) pentru elemente nerigidizate.

$$\frac{b_e}{t} = \frac{1}{3,93}\left[1+ 2.93 \frac{w}{w+w_o} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}\right]\frac{b}{t} \quad (8.23)$$

pentru determinarea lui w fiind necesară rezolvarea ecuaţiei :

$$\left(\frac{w}{t}\right)^3+\left(\frac{w}{t}\right)^2 \frac{w_o}{t}\left[1,075k(k-1)+2\left(\frac{w_o}{t}\right)^2\right]+1,075k^2 \frac{w_o}{t} = 0 \quad (8.24)$$

In relaţiile (6.4) - (8.7) s-au avut în vedere notaţiile :

$$\sigma_{cr} = 3,62\ E \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (8.25)$$

$$k = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{med}} \quad (8.26)$$

Dacă luăm în considerare expresia generală a efortului unitar critic :

$$\sigma_{cr} = \frac{K\pi^2\ E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (8.27)$$

în care K este coeficientul de voalare, care în relaţia (8.25) a fost luat egal cu 4, şi introducem un factor al imperfecţiunilor $a_w$ de forma:

$$c_w = \frac{w}{w+w_o} \quad (8.28)$$

relaţiile (8.21) şi (8.23) devin respectiv :

$$\frac{b_e}{t} = \left[0,5 + \frac{0,45}{(b/t)^2}\ c_w \frac{KE}{\sigma_{max}}\right]\frac{b}{t} \quad (8.29)$$

şi

$$\frac{b_e}{t} = \left[0,254 + \frac{0,674}{(b/t)^2}\ c_w \frac{KE}{\sigma_{max}}\right]\frac{b}{t} \quad (8.30)$$

Aşa după cum este cunoscut din literatura de specialitate , /37/,/43/,/44/,/75/. coeficientul de voalare K variază pentru elemente rigidizate între valoarea 4, corespunzătoare rezemării articulate a peretelui subţire pe cele două laturi şi, respectiv, valoarea 6,67, corespunzătoare rezemării încastrate. In mod similar, pentru elementele nerigidizate valorile limită ale coeficientului de voalare corespunzătoare celor două cazuri de rezemare sînt 0,425 şi 1,277. Winter consideră în relaţiile sale, care stau la baza majorităţii normativelor pentru calculul barelor cu pereţi subţiri, utilizate în S.U.A. şi Europa, valorile k=4, pentru elementele rigidizate şi, respectiv, k=0,85 pentru elementele nerigidizate. Cu aceste valori, înlocuind în (8.29) şi (8.30) şi avînd în vedere că, în general, $\sigma_{max} = \sigma_c$ rezultă pentru OL 37 ($\sigma_c$= 2400 daN/cm$^2$) :

- elemente rigidizate:

$$\frac{b_e}{t} = \left[0,5 + 1575 \frac{c_w}{(b/t)^2}\right]\frac{b}{t} \quad (8.31)$$

- elemente nerigidizate :

$$\frac{b_e}{t} = \left[0,254 + 501\,\frac{c_w}{(b/t)^2}\right]\frac{b}{t} \qquad (8.32)$$

Pentru evaluarea coeficientului imperfecţiunilor geometrice, $c_w$, este necesar să se examineze toleranţele cu care se execută profilele din tablă subţire. In tabelul 8.3 se prezintă aceste toleranţe, pentru sortimentele de profile executate de I.M. Iaşi, în conformitate cu catalogul TERPO-1973.

Dacă se acceptă pentru voalare o deformaţie w egală ca ordin de mărime cu grosimea t a peretelui, în consens cu literatura de specialitate, se poate da o reprezentare grafică factorului $c_w$ în funcţie de t (fig.8.1o).

tabelul 8.3

**IMPERFECTIUNI DE FABRICATIE LA BARELE CU PEREŢI SUBŢIRI catalog TERPO 1973 IM IAŞI**

| tipul sectiunii | unghiul de colt | ondulatia marg | curbura locală | curbura totală | răsucirea locală | răsucirea totală |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [ ; L ; L ; ⊏ ; ˥ ; ˥ ; ⊔ | 2mm/m | ±(1°-1°30') | 1mm/m | 1mm×L | 0,5mm/m | 0,5mm/L |

| t [mm] | $c_w = w/(w+w_o)$; $w \cong t$ — $w_o = 1$ mm | $c_w = w/(w+w_o)$; $w \cong t$ — $w_o = 2$ mm |
|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 0,33 |
| 1,5 | 0,6 | 0,428 |
| 2 | 0,66 | 0,5 |
| 2,5 | 0,714 | 0,55 |
| 3 | 0,75 | 0,6 |
| 4 | 0,80 | 0,666 |
| 5 | 0,833 | 0,714 |

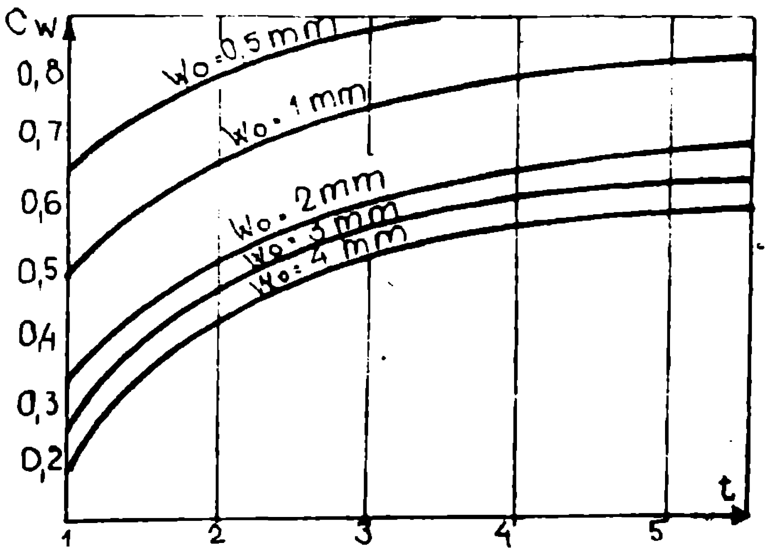



fig. 8.10

Relaţiile (8.31) şi (8.32) se pot reprezenta grafic pentru diferite valori ale factorului $c_w$. In figura 8.11 şi 8.12 se prezintă aceste diagrame pentru elemente rigidizate şi respectiv, nerigidizate. Pentru comparaţie s-au reprezentat şi variaţiile date e relaţiile lui Winter şi Zorgno, precum şi de normativul american, AISI Specification 1981 Ed. şi de normativul Comisiei Comunităţii Europene, EUROCODE 3-1984. Totodată s-au reprezentat rezultatele cercetărilor experimentale proprii realizate în laboratorul Catedrei de Construcţii Metalice pe profile cu secţiune [, ˥ şi ⊓ şi rezultatele obţinute de către Klöppel pe profile cu secţiune [ şi ˥.

Se remarcă în zona de supleţi $\frac{b}{t}$ admise în practica inginerească o bună concordanţă a relaţiilor propuse cu rezultatele ex-

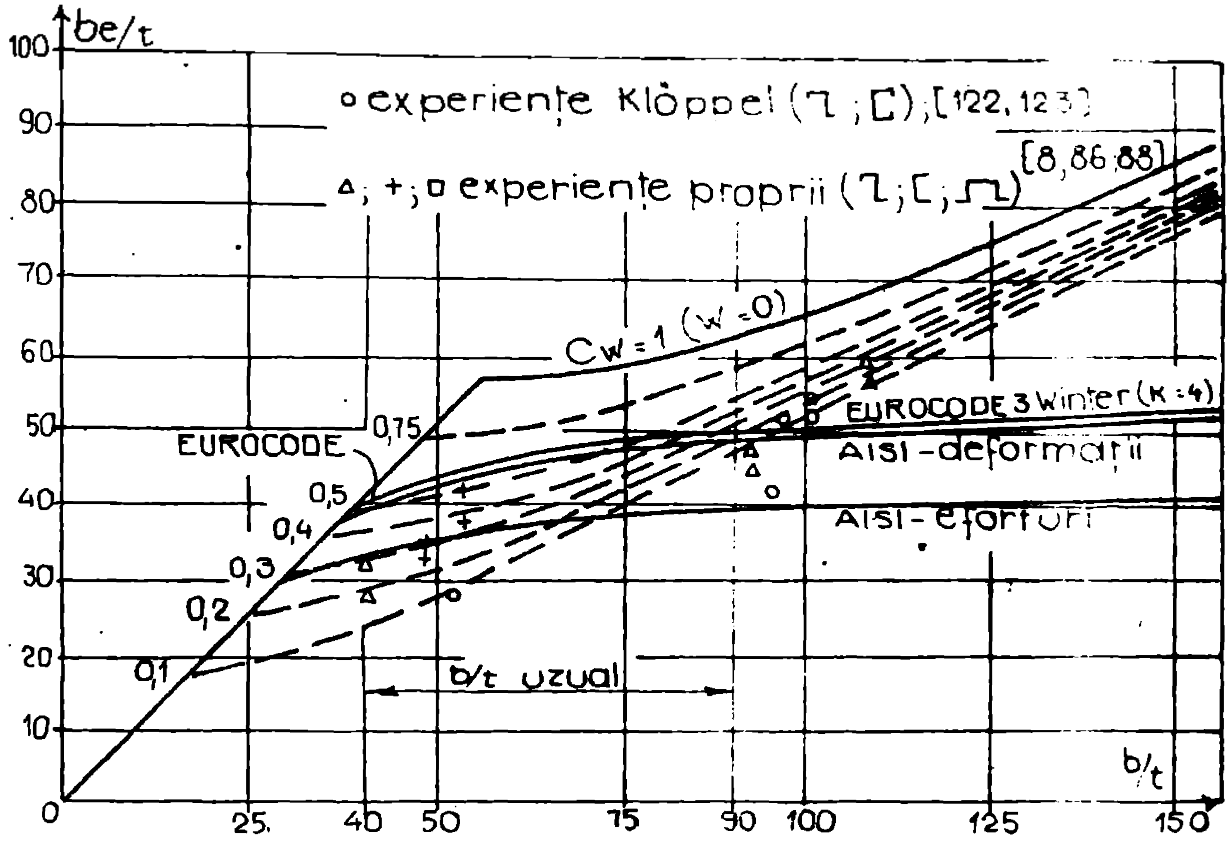



fig. 8.11

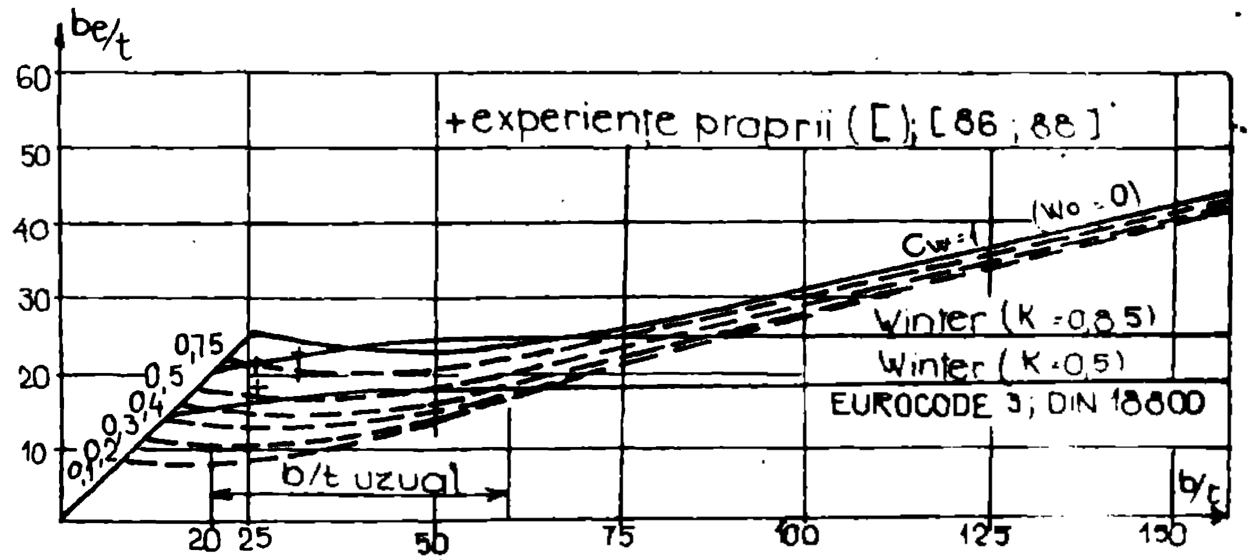



fig. 8.12

perimentale şi cu normele de calcul pentru valori ale factorului imperfecţiunilor $c_w$ de 0,5 pentru elementele rigidizate şi respectiv 0,75 pentru elementele nerigidizate. Cu aceste valori rezultă următoarele relaţii pentru calculul lăţimii echivalente.

- elemente rigidizate:

$$\frac{b_e}{t} = \left[0,5 + \frac{0,9}{(b/t)^2} \cdot \frac{E}{\sigma_{max}}\right] \frac{b}{t} \qquad (8.33)$$

- elemente nerigidizate :

$$\frac{b_e}{t} = \left[0{,}254 + \frac{0{,}42}{(b/t)^2} + \frac{E}{\sigma_{max}}\right]\frac{b}{t} \qquad (8.34)$$

Cu relaţiile (8.33) şi (8.34) se poate determina lăţimea echivalentă ţinînd seama de efectul imperfecţiunilor geometrice datorate procesului de laminare sau îndoire a profilelor cu pereţi subţiri formate la rece. Pentru coeficientul de voalare K sînt cunoscute relaţii de calcul date într-o serie de lucrări de specialitate /43/, /44/, /12o/, /121/. care introduc efectul gradului de încastrare elastică a pereţilor subţiri. Se poate aprecia, însă, că pentru calculele practice se pot utiliza valorile propuse de Winter : de altfel, se pot stabili relaţii de tip (8.33) şi (8.34) pentru coeficienţi de voalare diferenţiaţi pe tipuri de pereţi din relaţiile generale (8.29) şi (8.3o).

8.5.3. Determinarea curbelor de voalare.

La colocviul Internaţional de stabilitate de la Paris, în 1983, /49/ s-a pus cu acuitate problema elaborării unor curbe de voalare după modelul celor utilizate pentru bare. Parametrii care ar trebui luaţi în considerare în definirea acestor curbe, sînt mai numeroşi decît în cazul barelor : supleţea pereţilor $\frac{b}{t}$ ; imperfecţiunile geometrice şi de material ; distribuţia tensiunilor reziduale ; legăturile cu pereţii adiacenţi; etc. Totodată, aceste curbe ar trebui să cuprindă într-o manieră unitară compresiunea centrică, excentrică şi compresiunea cu încovoiere.

Dacă relaţiile (8.33) şi (8.34) se transformă după modelul (8.2o) se pot trasa curbele de voalare din figura 8.6, valabile pentru pereţii subţiri (plăci) realizaţi din OL. 37.

Se pune în evidenţă buna alegere a factorului de imperfecţiune, $c_w$ în relaţiile (8.33) şi (8.34) prin comparaţia cu testele experimentale.

Asemenea curbe de voalare, valabile în această formă numai pentru cazul compresiunii excentrice, se pot trasa şi pentru alte calităţi de oţeluri. In funcţie de ordinul de mărime al imperfecţiunilor iniţiale, stabilit statistic pe loturi de profile, şi de calitatea oţelului, se intră pe una din cele patru curbe pentru determinarea supleţii echivalente. $b_e/t$, cu care se intră în relaţiile de interacţiune cu flambajul general.

## 8.6. TENSIUNI ŞI FORŢE CRITICE PENTRU CALCULUL BARELOR CU PEREŢI SUBŢIRI, ÎN DOMENIUL POST-CRITIC. INTERACŢIUNEA FLAMBAJULUI GENERAL CU VOALAREA. /84/.

Comportarea unei bare cu pereţi subţiri într-una din formele de instabilitate FI - flambaj prin încovoiere, FIR - flambaj prin încovoiere-răsucire sau V- voalare poate fi reprezentată printr-o relaţie /189/ de tip Perry :

$$(1-\bar{N})(1-\bar{N}\lambda^2) + \eta\bar{N} = 0 \qquad (8.35)$$

în care $\eta$ este un factor de imperfecţiuni, iar $\bar{N}$- sau $\bar{\sigma}$- şi $\lambda$ se dau în tabelul 8.3.

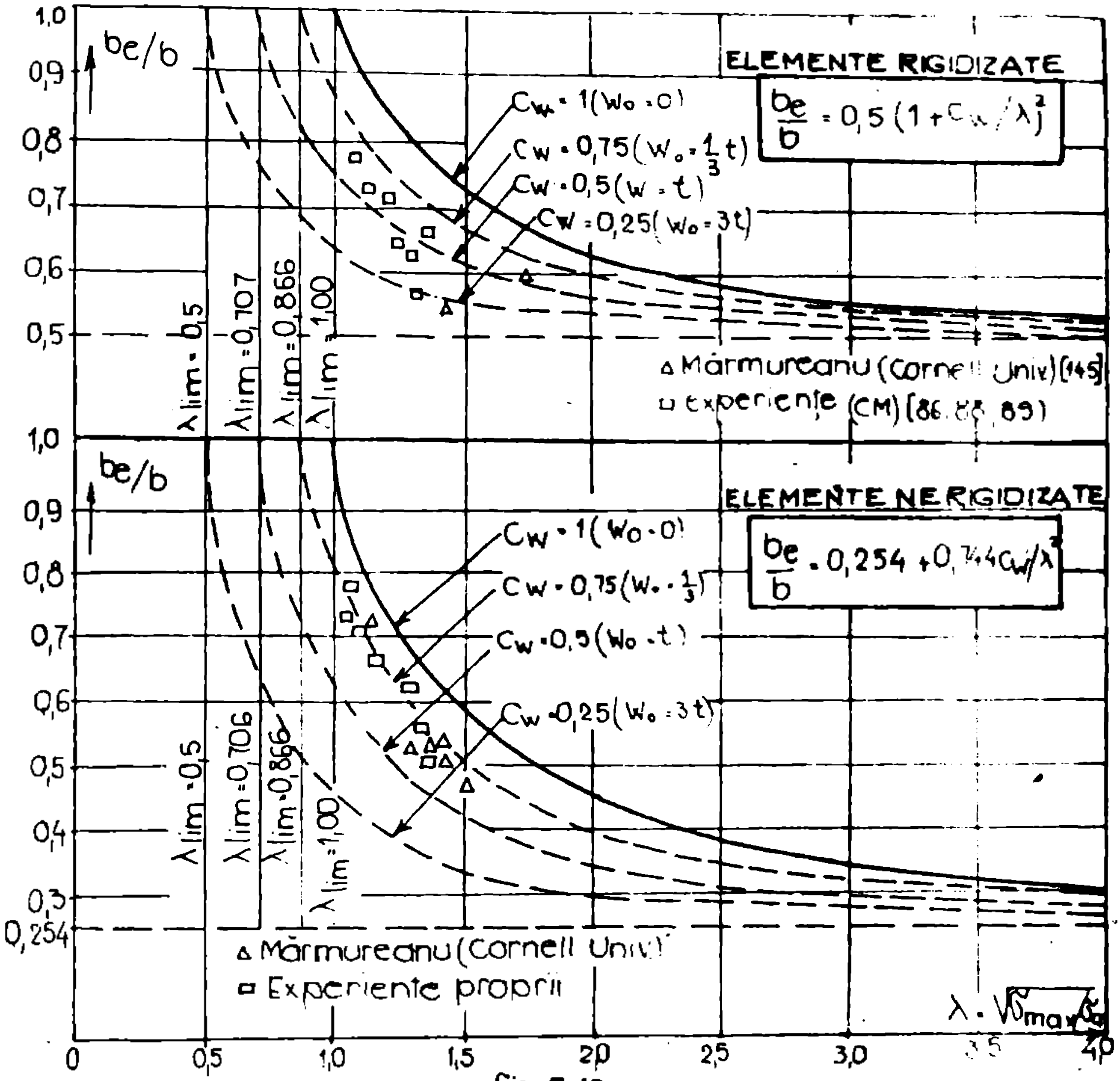



fig. 8.13

Relația (8.35) este valabilă totodată și în cazul formelor de instabilitate cuplată (FI + V) și (FIR + V) înlocuind $N_{pl}$ ($\sigma_{f}$) prin $N_{cr}(\sigma_{cr})$ la voalare.

Pentru voalarea pereților Braham /17/ propune relația

$$(1 - \bar{N}_v)(1 - \bar{N}_v \bar{\lambda}_v) = \alpha(\bar{\lambda}_v - 0.8)\bar{N}_v \qquad (8.36)$$

în care $N_v$ se estimează în maniera următoare

$$N_v = A\sigma_{v,med} + A^c\sigma^c \; ; \qquad \sigma_{v,med} = \frac{\sum b_i t_i \sigma_{v,i}}{\sum b_i t_i} \qquad (8.37\ a,b)$$

Tensiunile la colțuri $\sigma^c$ se obțin ca semisume a tensiunilor de voalare $\sigma_{v,i}$ a pereților i adiacenți. Coeficientul de imperfecțiune $\alpha$ se ia egal cu coeficientul $e_w$ dat de (8.28).

Forţa critică de voalare se determină cu (8,36) pentru $\lambda$ calculat pentru OL 37, $K$ = o,85 şi $\alpha = c_w$=o,5. Rezultă :

$$\bar{N}_v^2 - \delta \bar{N}_v + \beta = 0,\ \text{unde } \beta = \frac{1}{\lambda},\ \delta = 1{,}5+1{,}?\beta \quad (8.38)$$

tabelul 84

| tipul de instabilitate | $\bar{\sigma}$ ; $\bar{N}$ | $\bar{\lambda}$ | formule si notaţii |
|---|---|---|---|
| FI | $\bar{\sigma}_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_c}$<br>$\bar{N}_f = \frac{N_f}{N_{pl}}$ | $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e}$ | $\sigma_f$, ($N_f$); tensiunea (forţa) ultimă<br>$\sigma_c$, ($N_{pl}$), limita de curgere<br>$\lambda = \frac{\ell_f}{i}$; sveltetea barei<br>$\lambda_e = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_c : E}}$ |
| FIR | $\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_{pl}}$ | $\lambda_{tr} = \frac{\lambda_{tr}}{\lambda_e}$ | $N_{cr} = \frac{1}{2K}\left[N_y + N_r - \sqrt{(N_y\ N_r)^2 - 4KN_yN_r}\right]$<br>$N_y = \frac{\pi^2 E I_y}{\ell_f^2}$; $N_r = \frac{1}{i_c^2}\left[\frac{\pi^2 E I\omega}{\ell_{fr}^2} + G I_r\right]$<br>$\ell_c^2 = i_x^2 + i_y^2 + y_c^2$ |
| V | $\bar{\sigma}_v = \frac{\sigma_v}{\sigma_c}$<br>$\bar{N}_v = \frac{N_v}{N_{pl}}$ | $\bar{\lambda}_v = \sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_{cr}}}$ | $\sigma_c$ - limita de curgere<br>$\sigma_{cr} = K\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$<br>$\sigma_v$ - tensiunea ultimă de voalare |

Se face remarca că şi această relaţie este confirmată de testele experimentale /84/, /85/.

## 8.6. METODA SI ALGORITM PENTRU ANALIZA INSTABILITATII BARELOR CU PERETI SUBTIRI SOLICITATE LA COMPRESIUNE CENTRICA SI EXCENTRICA /53/,/64/,/?6/,/68/.

### 8.6.1. Prezentarea generală a metodei.

In general, în normele de calcul la stabilitate a barelor cu pereţi subţiri, pentru verificarea la voalare pereţii se consideră că lucrează cu nişte plăci independente aflate într-o anumită situaţie de rezemare pe cele două laturi opuse care modelează conexiunile cu pereţii adiacenţi. Sarcina critică de bifurcare a echilibrului rezultă din cea mai mică valoare a tensiunilor critice corespunzătoare pereţilor componenţi. Acest mod de abordare în analiza stabilităţii barelor cu pereţi subţiri, la care flambajul general interacţionează cu voalarea conduce la subevaluări a capacităţii portante a acestora.

Intr-o lucrare din 197o Unger /123/ propune o metodă pentru studiul stabilităţii barelor cu secţiune dublu T monosimetrică solicitate la compresiune cu încovoiere prin care problema bidimensională este redusă la una monodimensională evitîndu-se înmulțirea matricelor de rigiditate și de transfer : ecuația de stabilitate se integrează numeric, cu metoda Runge-Kutta introducînd condiții de legătură care modelează conlucrarea dintre pereți, obținîndu-se în final încărcarea critică și tensiunile critice de flambaj. Pe baza metodei lui Unger, Klöppel și Bilstein /122/ propun un procedeu pentru analiza stabilității barelor cu pereți subțiri solicitate la compresiune centrică și excentrică. Pornind de la această metodă, formulată matricial, s-a pus la punct un algoritm pe baza căruia s-a elaborat programul de calcul STABAS.

8.7.2. Algoritmul de calcul.

Ecuația diferențială care caracterizează comportarea la stabilitate a pereților componenți ai secțiunii barelor cu pereți subțiri este de forma următoare :

$$D \nabla^4 w + \sigma . t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{8.39}$$

în care D este rigiditatea la încovoiere a plăcilor iar pentru deformația w se adoptă o formă sinusoidală .

$$w(x,y) = \bar{w}(y) \quad \sin \frac{m\pi x}{\ell}, \tag{8.4o}$$

unde m și $\ell$ reprezintă numărul și, respectiv, lungimea semiundelor de voalare. Dacă pentru muchiile solicitate, într-o secțiune x = constant, se consideră condiții de margine de tip Navier, problema bidimensională se reduce la una monodimensională. Ecuația diferențială care rezultă prin înlocuirea expresiei (8.4o) în (8.39) se integrează cu ajutorul metodei Runge-Kutta . In figura 8.14 este pusă în evidență modalitatea în care sînt luate în considerare condițiile de legătură pe muchiile i ale profilului.

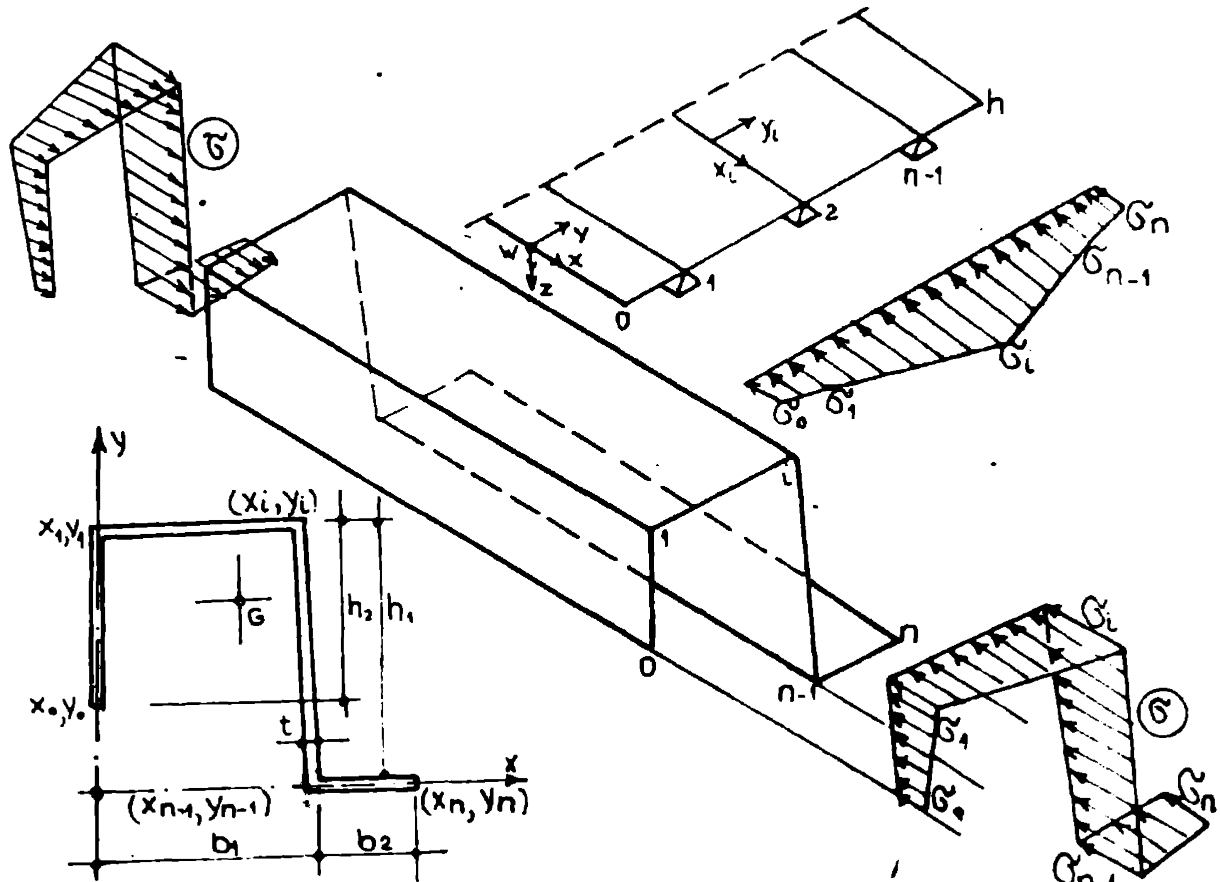



fig 8.14

Vectorul de stare caracteristic muchiei i este de forma :

$$\{U\}_{y_i} = \left[w \ \frac{\partial w}{\partial y} \ M \ T\right]^T_{y_i} \tag{8.41}$$

în care M şi T sînt respectiv momentul încovoietor şi forţa tangenţială . Intre două muchii consecutive trecerea se face prin intermediul unei matrici de transfer $[F]$ .

$$\{\bar{U}\}_{y_{i+1}} = [F]\{U\}_{y_i} . \tag{8.42}$$

Se definesc vectorii de stare expandaţi, iniţial $\{\bar{U}\}_{y_o}$ şi, respectiv, final $\{\bar{U}\}_{y_n}$ , care caracterizează forma barei:

$$\{U\}_{\substack{y_o\\ \ell x(n+3)}} = \left[w_o \ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y_o} \ M_o \ T_o \ \ T_1 \Delta T_2 \ldots \Delta T_i \ldots \Delta T_{n-1}\right]^T \tag{8.43}$$

$$\{\bar{U}\}_{\substack{y_n\\ \ell x(n+3)}} = \left[w_1 \ w_2 \ldots w_i \ldots w_n \ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y_o} \ M_n \ T_n\right]^T , \tag{8.44}$$

în care $\Delta T_i$ reprezintă salturile de forţă tăietoare la trecerile peste muchii.

Intre cei doi vectori se stabileşte o relaţie de legătură de forma :

$$\{\bar{U}_n\}_{\ell x(n+3)} = [\bar{F}]_{(n+3)x(n+3)} \ U_{o\,\ell x(n+3)} \tag{8.45}$$

In componenţa matricei $[\bar{F}]$ intră vectorii deformaţiilor şi eforturile unitare:

$$[\bar{F}] = \left[\{\bar{F}_{w_o}\}\left\{\bar{F}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y_o}\right\}\{\bar{F}_{M_o}\}\{F_{T_o}\}\{\bar{F}_{\Delta T_1}\} \cdots \{\bar{F}_{\Delta T_{n-1}}\}\right] , \tag{8.46}$$

în care, spre exemplu :

$$\{\bar{F}_{w_o}\} = [1 \quad 0 \quad 0 \ldots 0]^T_{\ell x(n+3)} \ ; \ \{\bar{F}_{M_o}\} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ \ldots \ 0]^T_{\ell x(\ell+3)} \tag{8.47}$$

$$\left\{F\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y_o}\right\} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \ldots 0]^T_{\ell x(n+3)} \ ; \ \{\bar{F}_{\Delta T_{n-1}}\} = [0 \ldots 0 \quad 0 \quad 1]^T_{\ell x(n+3)}$$

In funcţie de tipul secţiunii transversale a barei cu pereţi subţiri, simplă sau dublu-conexă, condiţiile de margine se introduc adecvat prin intermediul vectorilor $\{\bar{U}_{y_o}\}$ şi $\{U_{y_n}\}$ .

In conformitate cu aceste condiţii de margine sistemul de ecuaţii (8.45) se simplifică printr-o partiţionare corespunzătoare. Forţele critice se obţin din condiţia ca sistemul de ecuaţii (8.45) să admită soluţii distincte nebanale. Programul STABAS elaborat pe baza acestui algoritm este prezentat în capitolul X , cu exemple numerice şi teste experimentale de comparaţie.

## 8.8. CONCLUZII

Problemele de stabilitate ale structurilor cu pereţi subţiri ale stavilelor metalice se încadrează în problemele generale ale comportării critice şi postcritice ale plăcilor plane şi curbe. Barele cu pereţi subţiri, în calculele de stabilitate se tratează, la rîndul lor, ca structuri compuse din plăci plane subţiri. Din acest punct de vedere rezultatele studiilor de stabilitate intreprinse pe bare cu pereţi subţiri îşi vor găsi întotdeauna aplicabilitatea în analiza de stabilitate a stavilelor, cu precădere în cazul acelora care se pot schematiza fizic cu bare cu pereţi subţiri sau ca suprafeţe prismatice lungi.

In ultimii ani s-au realizat un număr foarte mare de studii şi încercări experimentale, atît pe panouri izolate, rigidizate sau nu, cît şi pe bare. Aceste cercetări experimentale au fost completate cu studii teoretice bazate, în general, pe simularea pe calculator a comportării elementelor cu pereţi subţiri prin intermediul metodei elementelor finite. Această tehnică permite în prezent introducerea în calcul a imperfecţiunilor geometrice şi de material. Pentru calculele practice, în proiectare, sînt necesare metode simplificate, justificate însă cu rigurozitate prin teorie şi experiment. Din acest punct de vedere, metoda lăţimii echivalente asigură gradul de simplitate cerut de aplicaţiile inginereşti, fapt care face să fie acceptat în aproape toate normativele care se ocupă de calculul barelor cu pereţi subţiri. In această "competiţie" a normelor de calcul conceptul de " lăţime echivalentă " este detaşat în avantaj în comparaţie cu conceptul de " grosime echivalentă " , amintit anterior, sau cu conceptul de "rigiditate echivalentă " utilizat cu succes de o serie de autori în cazurile de interacţiune a flambajului general cu voalarea /98/, /177/. In /79/ Edlund stabileşte o relaţie de legătură între lăţimea echivalentă şi rigiditatea axială relativă definită cu ajutorul modului de elasticitate secant $E_S$, pentru cazul plăcilor comprimate.

Relaţiile (8.33) şi (8.34) întrunesc condiţiile de simplitate şi exactitate tehnică cerute de proiectare, iar curbele de voalare propuse pe baza lor reprezintă o premieră în acest domeniu.

Relaţia (8.35) oferă posibilitatea abordării într-o manieră unitară a fenomenelor de instabilitate a barelor cu pereţi subţiri, evaluarea imperfecţiunilor şi a lui $\sigma_v$ respectiv $N_v$ conform metodologiei arătate fiind bine confirmată de experimente.

Programul de calcul STABAS, realizat pe baza algoritmului prezentat, este de asemeni o premieră, fiind un instrument de calcul şi investigare teoretică deosebit de util în proiectarea unor structuri eficiente din bare cu pereţi subţiri.

In final, se face remarca că, ţinînd seama de rezultatele prezentate în acest capitol, se impune revizuirea STAS 10108/2-83 , care este deficitar în privinţa evaluării rezistenţei postcritice a barelor cu pereţi subţiri.

# C A P I T O L U L IX

## CERCETARI EXPERIMENTALE ASUPRA COMPORTARII POSTCRITICE A BARELOR CU PERETI SUBTIRI FORMATE LA RECE SOLICITATE LA COMPRESIUNE CENTRICA SI EXCENTRICA. /6o/, /66/,/88/ /89/.

### 9.1. OBIECTUL CERCETARILOR

Barele cu pereţi subţiri formate la rece, solicitate la compresiune, îşi pot pierde stabilitatea prin flambaj prin încovoiere sau prin încovoiere-răsucire, cu sau fără voalarea pereţilor componenţi. Luarea în considerare a interacţiunii acestor fenomene - voalarea neconstituind o stare limită ultimă - şi cercetarea conlucrării oţelurilor în domeniul post-voalat, aspecte mai puţin cercetate în prezent poate constitui o sursă însemnată de economii. In baza concluziilor din/75/ şi /9o/ , care indică existenţa unui număr mare de încercări pe profilele închise, dar un număr redus pe cele deschise, cercetările experimentale au fost axate pe profilele deschise. Obiectul cercetărilor este determinarea experimentală a încărcării ultime, a tensiunilor maxime ultime, a numărului, lungimii şi amplitudinilor semiundelor de voalare, precum şi a caracterului pierderii stabilităţii barelor comprimate. Cunoaşterea acestor mărimi are drept scop testarea şi fundamentarea unor procedee noi de calcul, în domeniul post-voalat, privind determinarea încărcărilor ultime, a tensiunilor critice, a lăţimilor echivalente reduse, a rigidităţilor reduse etc. necesare studierii formelor de instabilitate cuplate.

Rezultatele cercetărilor experimentale au ca scop, deci, să valideze procedeele de calcul propuse în capitolul VIII, pe de o parte, şi să asigure un fond de date şi informaţii cu caracter experimental şi fenomenologic pentru studiul comportării barelor cu pereţi subţiri şi a structurilor ce pot fi modelate fizic ca bare cu pereţi subţiri, pe de altă parte.

### 9.2. STABILIREA PARAMETRILOR PROGRAMULUI EXPERIMENTAL

Pe baza constatărilor expuse, cercetările au fost orientate spre profile monosimetrice ,[ , fără reborduri şi spre profile cu simetrie punctuală,ʅ , cu reborduri, care au indicii generali de formare la rece cuprinşi în intervalele : $1 \leq h/b \leq 4{,}5$; $2o \leq b/t \leq$ [illegible] şi $o{,}28 \leq i_y/i_y \leq o{,}8o$.

Pentru obţinerea unor rezultate experimentale de largă utilizare, caracteristicile geometrice ale barelor încercate, extrase din domeniile indicate, au fost stabilite în baza parametrilor : $\alpha = b/t$ (zvelteţea de perete a tălpilor); t,(grosimea peretelui ); $k = h/b$; $m = i_y/i_x$ ; $n_x = \lambda_x/s$ şi $n_y = \lambda_y/s$; pentru care s-a căutat încadrarea în valorile propuse în tab.9.1. pentru două categorii de lungimi de bare (lungi şi scurte). Aceste valori asigură un cîmp de investigaţii experimentale suficient de cuprinzător. Cu parametrii $\alpha = b/t$; t ; $k = h/b$ ; propuşi în tab.9.1 s-au obţinut valorile dimensiunilor principale (b, h) ale tuturor secţiunilor transversale şi profilele [ şi ʅ alese. Rezultatele sînt redate sintetic în tab.9.2. , din care au fost

tabelul 9.1

| tip. elem | param. | valori propuse |
|---|---|---|
| bare lungi / bare scurte | $s=b/t$ | 20; 25; 30; 35; 40; |
| | t [mm] | 1,50; 2,00; 3,00; 4,00; |
| | $k=b/t$ | 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; |
| | $m=i_y/i_x$ | 0,30; 0,40; 0,55; 0,80; |
| bare lungi | $n_x=\lambda_x/s$ | 0,75; 1,00; 1,50; 3,00; |
| | $\lambda_x$ | 30; 35; 40; 45; 60; |
| | $n_y=\lambda_y/s$ | 2,50; 3,00; 3,50; 4,00; 7,0 |
| | $\lambda_y$ | 75; 90; 105; 140; |
| bare scurte | $n_x=\lambda_x/s$ | 0,50; 1,00; 2,00; |
| | $\lambda_x$ | 20; 25; 30; 40; |
| | $n_y=\lambda_y/s$ | 1,50; 2,00; 2,50; 3,50; 4,5 |
| | $\lambda_y$ | 50; 60; 70; 90; |

excluse profilele cu valori $m = i_y/i_x$ efective prea diferite de valorile propuse în tab. 9.1. In tab.9.3 în baza parametrilor propuşi, $n_x = \lambda_x/s$; $n_y = \lambda_y/s$; s-au determinat zvelteţele de bară, $\lambda_x$ şi $\lambda_y$, şi lungimile de flambaj din încovoiere $l_{f_x}$ şi $l_{f_y}$ atît pentru barele lungi cît şi pentru cele scurte. In mod similar au fost excluse lungimile de flambaj corespunzătoare zvelteţelor $\lambda_x$ şi $\lambda_y$ diferite de valorile propuse. In baza lungimilor de flambaj astfel determinate, s-a ales lungimea barelor lungi $l$=180 cm, şi a barelor scurte $l$=120 cm (bare dublu articulate la extremităţi ) tipizîndu-se totodată şi distanţa dintre aparatele de încărcare , ale presei de flambaj. Au rezultat deci dimensiunile profilelor, lungimile geometrice ale barelor şi parametrii efectivi, redaţi în tab.9.4. Aceste bare au

tabelul 9.2

| tip element | parametrii propuşi $s=\frac{b}{t}$ | t [mm] | $b=s\,t$ [mm] | $k=\frac{h}{b}$ | $h=k\,b$ [mm] | valori obţinute felul secţiunii | $i_y$ [cm] | $i_x$ [cm] | $m=\frac{i_y}{i_x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bare lungi / bare scurte | 20 | 2,0 | 40,0 | 2,0 | 80,0 | [80x40x2 | 1,26 | 3,19 | 0,395 |
| | | 4,0 | 80,0 | 1,0 | 80,0 | [80x80x4 | 2,60 | 3,36 | 0,776 |
| | 25 | 2,0 | 50,0 | 2,0; 2,5 | 100; 125 | [110x55x2 | 1,74 | 4,41 | 0,396 |
| | | 3,0 | 75,0 | 1,5 | 112,5 | [120x80x3 | 2,59 | 4,95 | 0,524 |
| | 30 | 2,0 | 60,0 | 1,5 | 90,0 | [100x65x2 | 2,11 | 4,13 | 0,510 |
| | 35 | 1,5 | 52,5 | 2,5; 3,0 | 131; 158 | ⌐L140x50x20x1,5 | 1,58 | 5,78 | 0,273 |
| | 40 | 1,5 | 60,0 | 2,5; 3,0 | 150; 180 | ⌐L160x60x20x1,5 | 1,84 | 6,69 | 0,275 |

fost încercate la compresiune centrică şi excentrică, pe trepte de încărcare, pînă la pierderea stabilităţii. S-au încercat 39 de bare, [ şi ⌐L articulate spaţial la capete pentru flambajul din încovoiere, respectiv încastrare, pentru cel din răsucire. Atît pentru barele lungi, cît şi pentru cele scurte ,s-au prevăzut cîte 3 moduri de aplicare a încărcării : a- centric ($e_x$ = 0, $e_y$ = 0); b- excentric, pe axa minimă de inerţie a secţiunii pentru profilele [ ($e_x$ = 0, $e_y$ = 2 cm) respectiv pe axa maximă la profilele ⌐L, ($e_x$ =2 cm, $e_y$ = 0) ; c- excentric, pe bisectoarea axelor principale de inerţie ($e_x$ = 2 cm, $e_y$ = 2 cm). Mărimile excentricităţilor au fost stabilite în funcţie de sensibilitatea profilelor la răsucire şi voalare, în conformitate cu / /, prin încercări preliminare. S-au utilizat două categorii de

tabelul 9.3

| secțiunea | bare lungi | | | | | | | bare scurte | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | parametrii propuşi | | | | | | lung. barei [cm] | parametrii propuşi | | | | | | lung. barei [cm] |
| | $n_x \cdot \frac{\lambda_x}{S}$ | $\lambda_x \cdot n_x \cdot S$ | $\ell_{fx} \cdot i_x \lambda_x$ | $n_y \cdot \frac{\lambda_y}{S}$ | $\lambda_y \cdot n_y \cdot S$ | $\ell_{fy} \cdot i_y \lambda_y$ | | $n_x \cdot \frac{\lambda_x}{S}$ | $\lambda_x \cdot n_x S$ | $\ell_{fx} \cdot i_x \lambda_x$ | $n_y \frac{\lambda_y}{S}$ | $\lambda_y \cdot n_y \cdot S$ | $\ell_{fy} \cdot i_y \lambda_y$ | |
| [80 x 40 x 2 | 3,00 | 60,0 | 191,0 | 7,00 | 140,0 | 176,4 | 180,0 | 2,00 | 40,0 | 127,5 | 4,50 | 90,0 | 113,4 | 120,0 |
| [80 . 80 . 4 | 3,00 | 60,0 | 201,6 | 3,50 | 70,0 | 182,0 | 180,0 | 2,00 | 40,0 | 134,4 | 2,50 | 50,0 | 130,0 | 120,0 |
| [110 x 55 x 2 | 1,50 | 37,5 | 165,4 | 4,00 | 100,0 | 174,0 | 180,0 | 1,00 | 25,0 | 110,3 | 2,50 | 62,5 | 108,8 | 120,0 |
| [120 x 80 x 3 | 1,50 | 37,5 | 185,6 | 3,00 | 75,0 | 194,3 | 180,0 | 1,00 | 25,0 | 123,8 | 2,00 | 50,0 | 129,5 | 120,0 |
| [100 x 65 x 2 | 1,50 | 45,0 | 185,9 | 3,00 | 90,0 | 189,9 | 180,0 | 1,00 | 30,0 | 123,9 | 2,00 | 60,0 | 126,6 | 120,0 |
| [140.50.20.1,5 | 1,00 | 35,0 | 202,3 | 3,00 | 105,0 | 165,9 | 180,0 | 0,50 | 17,5 | 101,2 | 2,00 | 70,0 | 110,6 | 120,0 |
| [160.60.20.1,5 | 0,75 | 30,0 | 200,7 | 2,50 | 100,0 | 184,0 | 180,0 | 0,50 | 20,0 | 133,8 | 1,50 | 60,0 | 110,4 | 120,0 |

oţeluri , OL 37 şi OL 52. Toate barele încercate au fost confecţionate din tablă, prin formare la rece. Efectul ecruisării, determinat pe cale experimentală, în raport cu limita de curgere, corespunde unui spor

tabelul 9.4

| caracteristicile geometrice ale secţiunii transversale | | | | | | | bare lungi | | | | bare scurte | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| secțiunea | k = h:b | St = b:t | St = b:t | $i_x$ [cm] | $i_y$ [cm] | $i_y/i_x$ | $\lambda_x$ | $\lambda_y$ | $\frac{\lambda_x}{S_t}$ | $\frac{\lambda_y}{S_t}$ | $\lambda_x$ | $\lambda_y$ | $\frac{\lambda_x}{S_t}$ | $\frac{\lambda_y}{S_t}$ |
| [80 x 40 x 2 | 2,00 | 19,00 | 38,00 | 3,19 | 1,26 | 0,395 | - | - | - | - | 37,62 | 95,23 | 1,98 | 5,02 |
| [110 x 55 x 2 | 2,00 | 26,50 | 53,00 | 4,41 | 1,74 | 0,396 | 40,82 | 103,27 | 1,54 | 3,90 | 27,21 | 68,97 | 1,03 | 2,60 |
| [100 . 65 x 2 | 1,54 | 31,50 | 48,00 | 4,13 | 2,11 | 0,510 | 43,56 | 85,50 | 1,38 | 2,71 | 29,06 | 56,81 | 0,92 | 1,81 |
| [120 x 80 x 3 | 1,50 | 25,67 | 38,00 | 4,95 | 2,59 | 0,524 | 36,37 | 69,47 | 1,42 | 2,71 | 24,24 | 46,33 | 0,94 | 1,81 |
| [80 x 80 . 4 | 1,00 | 19,00 | 18,00 | 3,36 | 2,60 | 0,776 | 53,56 | 69,18 | 2,82 | 3,64 | 35,71 | 46,15 | 1,88 | 2,43 |
| [140.50.20.1,5 | 2,80 | 31,35 | 91,40 | 5,78 | 1,58 | 0,273 | 31,14 | 113,92 | 0,99 | 3,63 | 20,76 | 75,95 | 0,66 | 2,42 |
| [160.60.20.1,5 | 2,65 | 38,00 | 104,50 | 6,69 | 1,84 | 0,275 | 26,91 | 97,83 | 0,71 | 2,57 | 17,94 | 65,22 | 0,47 | 1,72 |

maxim de 16,4%.

## 9.3. EFECTUAREA ÎNCERCĂRILOR

Încercările s-au executat pe o presă de flambaj de .. tf, cu dispozitive universale de prindere şi încărcare, care permit realizarea lungimilor de flambaj prin încovoiere, $\ell_j$, stabilite, şi prin răsucire, $\ell_r$, rezultate din dimensiunile dispozitivelor de încărcare: $\ell_j$ = 18o cm; $\ell_j$ = 12o cm, dublu articulate spaţial ; $\ell_j$ = 1.. cm, $\ell_r'$ = 1oo cm, dublu încastrate (la răsucire); precum şi aplicarea excen-

tricităţilor prevăzute : $e_x = e_y = 0$; $e_x = ...(2)$ cm, $e_y=2(...)$;
Pentru măsurarea deformaţiilor specifice liniare şi a tensiunilor, s-au utilizat traductori electrici rezistivi, 12o/1.., lipiţi, în secţiunile transversale de la mijlocul barelor, cu adezivi corespunzători. La barele cu grosimea t = 1,5 mm s-au montat cîte ... 12 traductori în secţiunea transversală, la extremităţile rebordurilor, aripilor, inimilor şi la treimile acestora ; la cele cu t=2 mm şi t = 3 mm, cîte 6 traductori, la extremităţile aripilor şi inimilor; la cele cu t = 4 mm, cîte 12 traductori, doi cîte doi faţă în faţă. Suplimentar, s-au montat traductori - la ultimele bare - şi în secţiunile din vecinătatea reazemelor. Pentru depistarea efectului voalării la profilele [ s-au fixat traductori şi în dreptul maximelor şi minimelor undelor de voalare, ale extremităţilor tălpilor, corespunzătoare semiundelor cu amplitudinile cele mai mari. Poziţia semiundelor - la o treaptă dată de încărcare - a fost stabilită prin încercări preliminare, iar fixarea traductorilor efectuată în poziţia descărcată, a barei cu adezivi rapizi. Măsurarea deformaţiilor specifice $\varepsilon$ s-a efectuat electrotensometric cu o punte de măsură de precizie, legată la cutii de comutare cu echilibrare, în montaj electrorezistiv compensator de temperatură. Deplasările reazemelor şi mijloacelor barelor s-au măsurat cu microcomparatoare 1/loo şi fleximetre 1/lo. Deformaţiile din voalare s-au măsurat cu rigle gradate tip şubler şi cu microcomparatoare cu fixare magnetică pe inimi. Incărcarea barelor, cu forţe de compresiune centrică sau excentrică, s-a făcut în trepte de încărcare crescătoare, P =(2,5 ... lo) KN, după caz pentru care s-au stabilit, de fiecare dată, valorile deformaţiilor specifice din traductori, mărimile deplasărilor din microcomparatoare şi fleximetre, precum şi ... rul, lungimea şi amplitudinea semiundelor de voalare. După cedarea barelor s-au stabilit mărimea încărcărilor ultime ; P max şi caracterul cedării.

## 9.4. ANALIZA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Rezultatele cercetărilor experimentale efectuate pe barele lungi şi scurte [ 11ox55x2 ; [1oox65x2 ; [ 12ox8ox3 şi 8ox6.. (barele 1 ... 29) sînt prezentate sintetic în tabelul 9.5, iar rezultatele cercetărilor realizate pe barele ⅂⅃14ox5.x2oxl,5 şi ⅂⅃16ox6ox2oxl,5 lungi şi scurte (barele 30 ... 39) sînt prezentate în tabelul 9.6. Valorile $\varepsilon$ şi $\sigma$ obţinute pe cele 39 de bare în dreptul traductorilor, s-au reprezentat grafic, pe trepte de încărcare, pentru fiecare traductor în parte. S-au obţinut 5o de familii în diagrame $\varepsilon$-P, respectiv $\sigma$-P. S-au reprezentat de asemenea diagramele deplasărilor u - P, v - P din dreptul secţiunilor cu traductori, precum şi diagramele amplitudinilor semiundelor de voalare b$\lambda$ - P, ale tălpilor nerigidizate. S-au obţinut 32 de familii de diagrame. Spaţiul limitat nu permite prezentarea acestor diagrame. Pentru exemplificare se prezintă diagramele din fig.9.1 . 9.. şi 9.3. In tab.9.7. sînt indicate consumurile medii de oţel raportate la unitatea de forţă respectiv de tensiune ultimă, In fig. ..., este arătată variaţia încărcărilor ultime, P max, la barele lungi, în funcţie de sveltețele $s_t$( [ ) şi $s_1$( ⅂ ) ale pereţilor subţiri, componenţi. Analizînd valorile P max din tabelul 9.5 şi din tabelul 9.6 la aceleaşi tipuri de bare şi excentricităţi, se constată că barele scurte (cu excepţia barelor avînd t = 4 mm) pot fi încărcate cu 1o% - 33% mai mult decît barele lungi datorită efectului favorabil al zveltețelor de bară și al conlucrării din domeniul post voalat.

tabelul 9.5

| | tipul barei | index | nr. încerc. | excentricitate $e_x$ [cm] | excentricitate $e_y$ [cm] | $P_{max}$ [daN] | semiunde de voalare nr [1] | semiunde de voalare $a_\lambda$ [2] [mm] | semiunde de voalare $b_\lambda$ [3] [mm] | $\sigma_{max}$ [daN/cm²] | forma de instabilitate $b_v$ [4] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bare lungi: $\ell_f = 180$ cm; $\ell_r = 160$ cm | [110 × 55 × 2 OL 37 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6500 | 5 | 320 | 1,10 | – | I.R.V. $M^v+m^v$ |
| | [100 × 65 × 2 OL 37 | 2 | 1 | 0 | 0 | 6550 | 12 | 133 | 1,95 | 1989 | I.R.V. $M^v$ |
| | | 3 | 1 | 0 | 2 | 5000 | 12 | 133 | 1,87 | 2453 | I.R.V. $M^v+M^v$ |
| | | 4 | 1 | 2 | 2 | 1600 | 14 | 115 | 1,40 | 1717 | I.R.V. $M^v$ |
| | [120 × 80 × 3 OL 52 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15500 | 6 | 267 | 0,56 | – | I.R.V. $M^v+m^v$ |
| | | 6 | 1 | 0 | 2 | 13000 | 6 | 267 | 1,21 | 3010 | I.R.V. $M^v+m^v$ |
| | | 7 | 1 | 2 | 2 | 7800 | 4 | 400 | 0,55 | 2605 | I.R.V. $M^v+m^v$ |
| | [80 × 80 × 4 OL 37 | 8,9 | 2 | 0 | 0 | 20000* | 5* | 320* | – | 2436 | I.R.V. $M^v$ |
| | | 10,11 | 2 | 0 | 2 | 14900* | 5* | 320* | 0,45 | 2233 | I.R.V. $M^v$ |
| | | 12,13 | 2 | 2 | 2 | 9400* | – | – | 0,98 | 2268 | I.R.V. $M^v+M^v$ |
| bare scurte: $\ell_f = 180$ cm; $\ell_r = 160$ cm | [80 × 40 × 2 OL 37 | 14 | 1 | 0 | 0 | 5500 | 7 | 143 | 1,10 | – | I.R.V. $M^v+M^v$ |
| | [110 × 55 × 2 OL 37 | 15 | 1 | 0 | 0 | 7300 | 5 | 200 | 1,15 | – | V. $M^v+m^v$ I.R |
| | [100 × 65 × 2 OL 37 | 16 | 1 | 0 | 0 | 7000 | 5 | 200 | 2,00 | 2490 | V. $M^v+m^v$ I |
| | | 17 | 1 | 0 | 2 | 5700 | 8 | 125 | – | 2461 | V. $M^v+m^v$ I.R |
| | | 18 | 1 | 0 | 2 | 5900 | – | – | – | – | V. $M^v+M^v$ R |
| | | 19 | 1 | 2 | 2 | 3100 | 5 | 200 | – | 2510 | V. $M^v+M^v$ I.R |
| | [120 × 80 × 3 OL 52 | 20 | 1 | 0 | 0 | 20900 | 6 | 167 | 1,00 | 3774 | V. $M^v+M^v$ I.R |
| | | 21 | 1 | 0 | 2 | 14000 | 5 | 200 | 2,00 | 4299 | V. $m^v+m^v$ I.R |
| | | 22 | 1 | 0 | 2 | 11700 | – | – | – | – | V. $m^v$ I.R |
| | | 23 | 1 | 2 | 2 | 8000 | 4 | 250 | – | 1635 | V. $M^v+m^v$ R |
| | [80 × 80 × 4 OL 37 | 24,25 | 2 | 0 | 0 | 20000* | 9* | 111* | 0,31 | 2781 | V. $M^v+M^v$ |
| | | 26,27 | 2 | 0 | 2 | 15500* | 9* | 111* | 1,21 | 2646 | V. $M^v+m^v$ |
| | | 28,29 | 2 | 2 | 2 | 8100* | – | – | 1,70 | 2772 | V. $M^v$ |

NOTE *) valori medii din două încercări

1) numărul maxim al semiundelor de valoare pe tălpi
2) lungimea medie a semiundelor de valoare înaintea cedării
3) amplitudinea maximă a semiundelor de valoare pe tălpi
4) I - încovoiere; R - torsiune; V - valoare
$M^v$ - cedarea are loc în dreptul unei maxime de valoare;
$m^v$ - cedarea are loc în dreptul unui minim de valoare;

tabelul 9.6

| tipul barei | | index | nr. încercări | excentr. forței $e_x$ [cm] | excentr. forței $e_y$ [cm] | $P_{max}$ [daN] | nr. de semiunde de valoare 1) $R_1$ 5) | $R_2$ 6) | $T_1$ 7) | $T_2$ 8) | I 9) | $a_\lambda$ 2) [mm] | $\tilde{\sigma}_{max}$ [daN/cm²] | forma de instabilitate 4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bare lungi | Ɩ 140×50×20 ×1,5 OL52 | 30 | 1 | 0 | 0 | 4000 | 8 | 8 | 7 | 7 | 9 | ≈200 | 2865 | I.R V M$^v$ (T.I) |
| | | 31 | 1 | 2 | 2 | 2250 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 320 | 3260 | I R V m$^v$ ($R_1$,$T_1$) |
| | Ɩ 160×60× ×20×1,5 OL52 | 32 | 1 | 0 | 0 | 6750 | 7 | 7 | 8 | 8 | 7 | ≈228 | 2545 | I R V m$^v$ (T,I) |
| | | 33 | 1 | 2 | 0 | 3000 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 268 | 2165 | I.R.V M$^v$(T.I) |
| | | 34 | 1 | 2 | 2 | 2500 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 268 | 2690 | I R V M$^v$($R_2$,I) |
| bare scurte | Ɩ 140×50×20 ×1,5 OL 52 | 35 | 1 | 0 | 0 | 4500 | - | - | - | - | - | - | 2475 | I.R.V M$^v$ ($R_1$) |
| | | 36 | 1 | 2 | 0 | 3000 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 143 | 2469 | I V.R M$^v$($T_1$,$T_2$) |
| | | 37 | 1 | 2 | 2 | 3000 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 143 | 4380 | I V.R.M$^v$($R_1$,$T_1$) |
| | Ɩ 160×60× ×20×1,5 OL 52 | 38 | 1 | 0 | 0 | 7000 | 6 | 6 | 6 | 6 | 9 | 167 | 2215 | I.V.R.M$^v$($T_1$,$T_2$) |
| | | 39 | 1 | 2 | 0 | 3500 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 143 | 2471 | R V I M$^v$($R_2$) |

NOTE: 1); 2; 4); I; R; V; M$^v$; m$^v$, - vezi tabel 9.5
5); 6) pe reborduri; 7); 8) pe tălpi; 9) pe inimă

tabelul 9.7

| tipul barei | | $e_x=0$; $e_y=0$: $P_{max}$ KN | $\sigma_{max}$ daN/cm² | V cm³ | $V/P_{max}$ cm³/KN | $V/\sigma_{max}$ cm⁵/KN/cm² | $e_x=0(2)$cm; $e_y=2(0)$ cm: $P_{max}$ KN | $\sigma_{max}$ daN/cm² | V cm³ | $V/P_{max}$ cm³/KN | $V/\sigma_{max}$ cm⁵/KN/cm² | $e_x=2$cm; $e_y=2$cm: $P_{max}$ KN | $\sigma_{max}$ daN/cm² | V cm³ | $V/P_{max}$ cm³/KN | $V/\sigma_{max}$ cm⁵/KN/cm² |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bare lungi | [ OL 37 100×65×2 | 65,50 | 1989 | 828 | 12,7 | 41,7 | 50,00 | 2453 | 828 | 16,6 | 33,8 | 18,00 | 1717 | 828 | 46,0 | 48,2 |
| | [ OL 52 120×80×3 | 155,00 | - | 1515 | 9,75 | - | 130,00 | 3010 | 1515 | 11,7 | 50,4 | 78,00 | 2605 | 1515 | 19,5 | 58,2 |
| | [ OL 37 80×80×4 | 200,00 | 2436 | 1730 | 8,65 | 712 | 149,00 | 2233 | 1730 | 11,6 | 77,5 | 94,00 | 2258 | 1730 | 19,4 | 76,2 |
| | Ɩ OL 52 140×50×20×1,5 | 40,00 | 2865 | 760 | 19,0 | 26,5 | - | - | - | - | - | 22,50 | 3260 | 760 | 33,8 | 23,4 |
| | Ɩ OL 52 160×60×20×1,5 | 61,50 | 2545 | 868 | 12,8 | 34,1 | 30,00 | 2165 | 868 | 29,0 | 40,1 | 25,00 | 2690 | 868 | 33,7 | 32,3 |
| bare scurte | [ OL 37 100×65×2 | 70,00 | 2190 | 552 | 7,90 | 25,2 | 58,00 | 2461 | 552 | 9,55 | 22,5 | 31,00 | 2910 | 552 | 17,8 | 22,0 |
| | [ OL 52 120×80×3 | 209,00 | 3774 | 1010 | 4,64 | 26,9 | 129,00 | 4299 | 1010 | 7,85 | 23,5 | 80,00 | 1635 | 1010 | 12,6 | 61,8 |
| | [ OL 37 80×80×4 | 200,00 | 2781 | 1150 | 5,75 | 41,4 | 155,00 | 2646 | 1150 | 7,45 | 43,6 | 81,00 | 2772 | 1150 | 14,2 | 41,5 |
| | Ɩ OL 52 140×50×20×1,5 | 45,00 | 2415 | 505 | 11,2 | 20,4 | 30,00 | 2469 | 505 | 16,8 | 20,4 | 30,00 | 4380 | 505 | 16,8 | 11,5 |
| | Ɩ 160×60×20×1,5 | 70,00 | 2215 | 575 | 8,20 | 25,0 | 35,00 | 2471 | 575 | 16,4 | 23,3 | - | - | - | - | - |

Din analiza diagramelor $\sigma$ - P rezultă că variațiile tensiunilor pe grosimile pereților sînt mici la colțurile profilelor dar cresc spre marginile tălpilor nerigidizate, cu atît mai mult cu cît punctele de măsură sînt mai apropiate de maximele sau de minimele undelor de voalare. Datorită aceluiași motiv, precum și din cauza imperfecțiunilor geometrice și mecanice, tensiunile nu sînt repartizate uniform pe secțiune nici măcar în cazurile de compresiune centrică, chiar la treptele reduse de încărcare. In cazul barelor mai groase, tensiunile cresc liniar- în dreptul aceluiași traductor - pînă la treptele de încărcare (0,45 ... 0,70) P max, după care creșterile sînt preponderent neliniare. In cazul barelor foarte

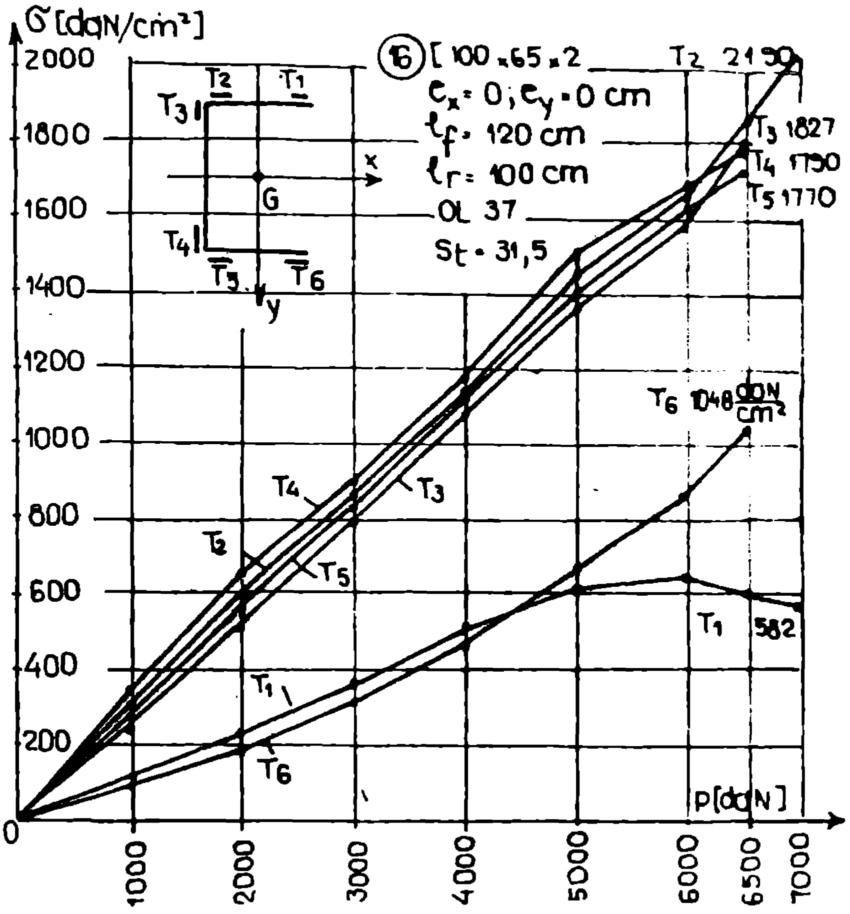
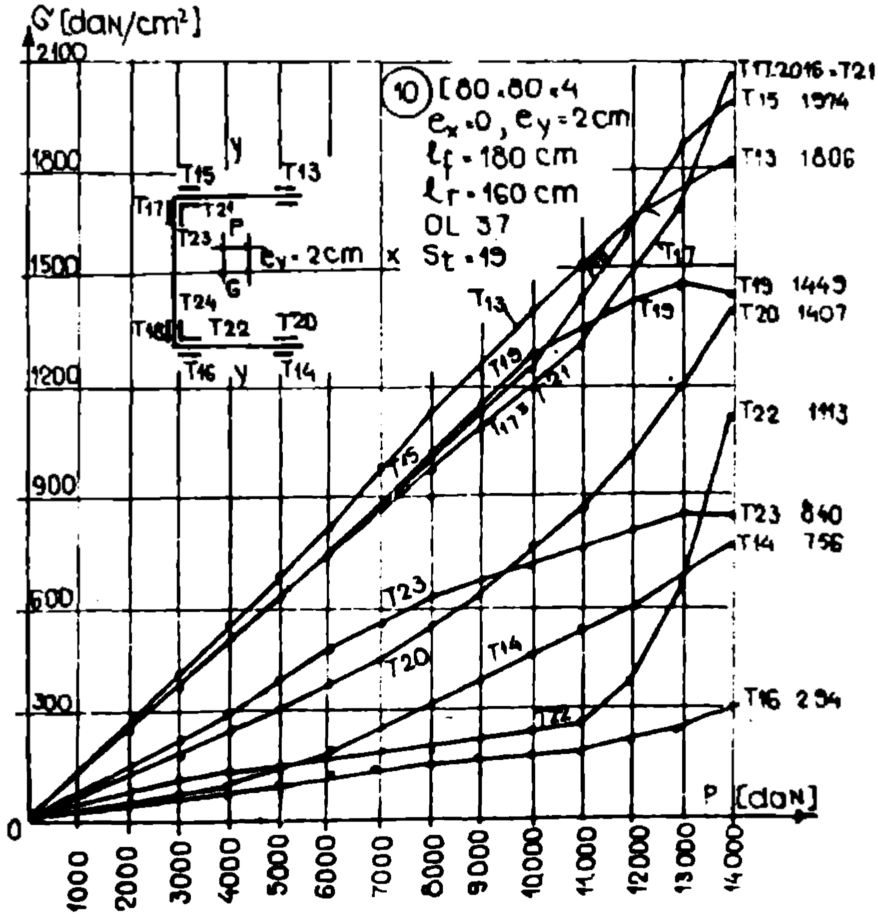



fig. 9.1




subțiri, zona creșterilor liniare scade mult, iar comportarea tălpilor diferă esențial de comportarea inimilor, datorită apariției și modificării numărului și pozițiilor semiundelor de voalare, la creșterea încărcării. Din interpretarea diagramelor U - P, v - P, $b_\lambda$ - P, rezultă și o mare diferență de comportare între barele lungi și scurte. La primele apar încovoieri sau răsuciri mari, de ordinul II, însoțite de amplitudini mai mici ale semiundelor de voalare, în timp ce la barele scurte iau naștere încovoieri și răsuciri de ordinul II mici, cuplate cu amplitudini mari ale undelor de voalare. Studierea diagramelor P - a indică o scădere importantă a încărcărilor ultime, P max, la creșterea zvelteței de perete, respectiv a excentricităților de încărcare. Scăderea cea mai însemnată corespunde creșterii zvelteței de perete a tălpilor nerigidizate ( [ ). Din analiza consumurilor de oțel (tab.9.7) rezultă că barele [ mai groase (t=3...4 mm) sînt mai economice în raport cu capacitatea de încărcare P max, în timp ce barele [ și ⅂ foarte subțiri au un consum mai mic de material din punctul de vedere al valorii tensiunii σ max.

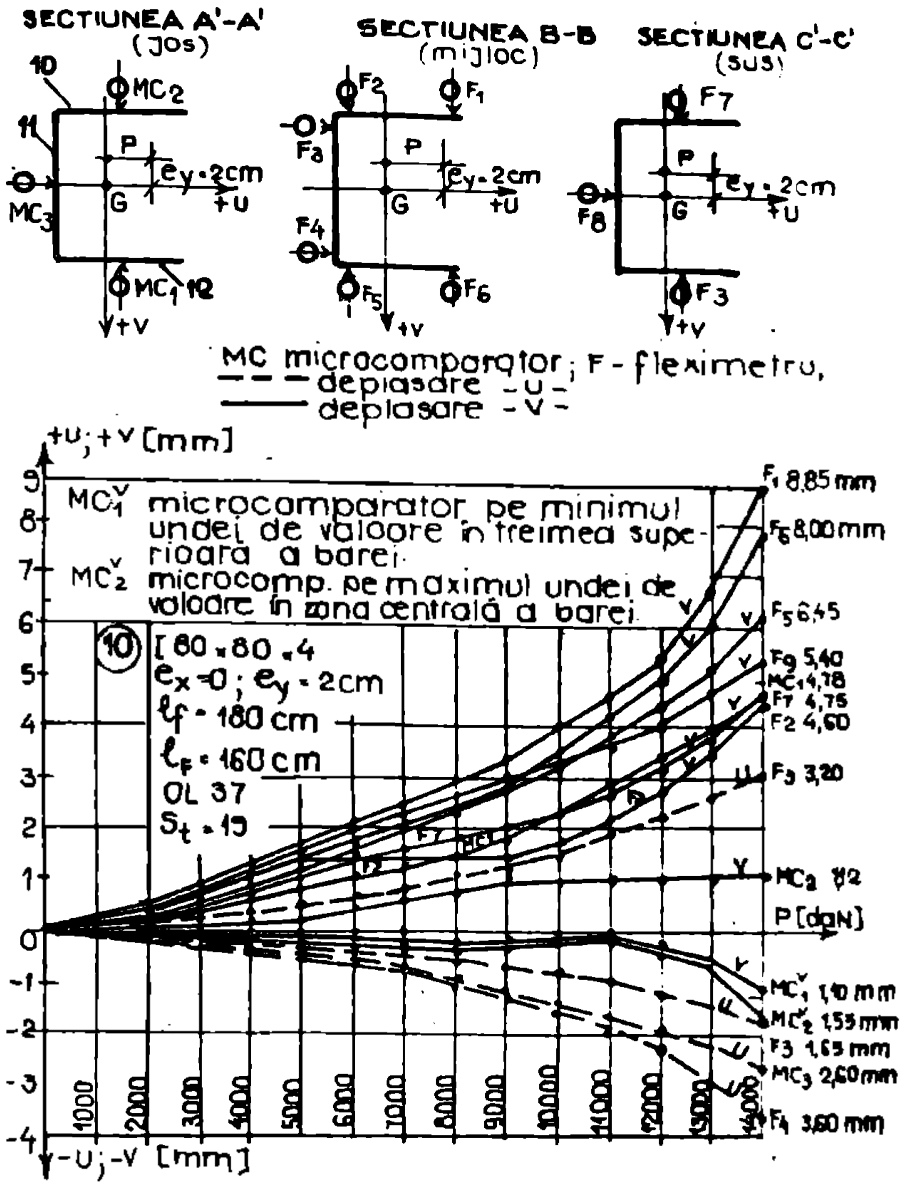
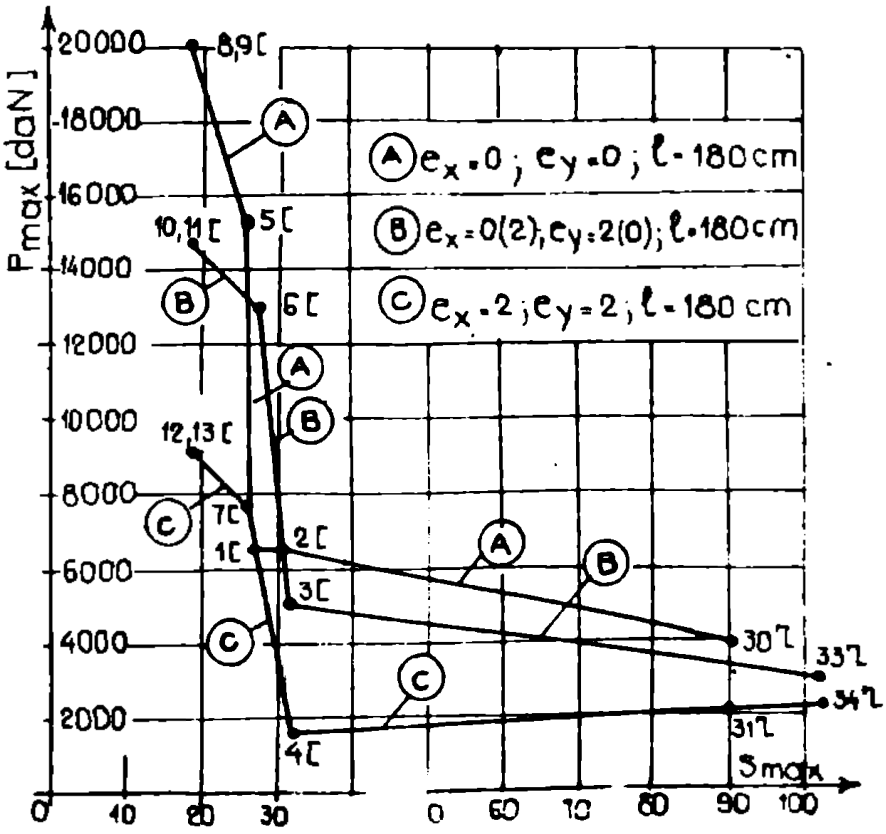



fig.9.3




## 5. CONCLUZII

Cercetările efectuate pun în evidență existența unei interacțiuni complicate între flambajul prin încovoiere-răsucire și voalarea pereților și demonstrează complexitatea fenomenelor care iau naștere în timpul cuplării formelor de instabilitate : creșterea capacității de încărcare prin utilizarea domeniului postvoalat, modificarea substanțială a legilor de variație ale tensiunilor pe secțiune la creșterea forțelor de compresiune, formarea și mișcarea undelor de voalare, creșterea numărului și a amplitudinii lor pe măsura sporirii încărcării, suprapunerea încovoierilor și răsucirilor mari de ordinul II peste voalări cu amplitudini de undă mici, în cazul barelor lungi și invers în cazul celor scurte, precum și micșorarea capacității de încărcare la creșterea zvelteţelor de perete.

Valorile și observațiile fenomenologice obținute prin încărcările experimentale prezentate au servit la verificarea formulelor de calcul propuse în cap. VIII și a programului STABAS . Totodată, ele constituie o valoroasă și utilă bază de date pentru studiul comportării barelor cu pereți subțiri.

# CAPITOLUL X

## PROGRAME DE CALCUL AUTOMAT

### 1o.1. GENERALITATI

Pe baza metodelor şi a algoritmilor de calcul prezentate în capitolele IV, V, VIII, s-au elaborat programe de calcul automat cu aplicabilitate generală în analiza structurilor (ASEF) sau pentru rezolvarea unor probleme specializate.(DBEM si STADAS).

La elaborarea acestor programe - în mod deosebit la programul multifuncţional ASEF - s-a avut în vedere respectarea parametrilor ceruţi de ingineria programării /168/ :portabilitatea, eficienţa , siguranţa şi claritatea programelor. In acest sens s-au aplicat în concepţia şi redactarea programelor principiile fundamentale ale ingineriei programării : modularizare, abstractizare, ascundere, localizare, uniformitate, completitudine şi verificabilitate. Din acest punct de vedere se apreciază că programul ASEF constitue o concretizare practică a principiilor ingineriei de programe.

In acelaşi timp, la redactarea programelor ., în mai multe variante, s-a ţinut seama de dezvoltarea actuală a industriei româneşti de echipamente de calcul, de dotarea cu aceste echipamente a unităţilor de cercetare şi proiectare. Astfel programul ASEF poate fi implementat pe calculatoare FELIX şi pe minicalculatoare INDEPENDENT sau CORAL, cu posibilităţi de lucru în regim interactiv şi de prelucrări grafice, iar programul STADAS poate fi implementat pe FELIX sau pe microcalculatoare AMIC sau PRAE.

### 1o.2. PROGRAMUL MULTIFUNCTIONAL CU STRUCTURA MODULARA ASEF PENTRU ANALIZA STRUCTURILOR CU ELEMENTE FINITE /61/,/6?/,/7o/.

#### 1o.2.1. Domeniul de aplicabilitate.

Programul ASEF este destinat analizei statice liniare şi neliniare şi pentru analiza dinamică liniară a structurilor . Totodată programul poate rezolva probleme dependente de timp, în regim tranzitoriu. In cadrul programului sînt implementate, de fapt, tehnicile de calcul cu elemente finite prezentate în capitolul IV.

Programul poate opera cu o varietate de tipuri de elemente finite, putînd fi aplicat la analiza structurilor de orice tip.

Pentru fiecare tip ' nn' de element finit prin intermediul unei subrutine de control ELEMnn se calculează matricile şi vectorii elementari specifici elementului finit respectiv. In varianta actuală programul ASEF 01 operează cu două tipuri de elemente finite : ELEM01 şi ELEM02 . ELEM 01 este un element finit izoparametric pătratic pentru rezolvarea problemelor de cîmp guvernate de ecuaţia quasiarmonică :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(d_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(d_y \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(d_z \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f_V = 0 \quad (1o.1)$$

In funcţie de variabila NDIM = 1,2,3 acest element va fi liniar, pătratic sau hexadronal , avînd respectiv 3,8 şi 2o GDL. Elementul ELEM 01 poate fi utilizat în problemele de analiza termică sau hidrodinamică prin intermediul blocului 'TEMP' şi a fost introdus în program pentru a fi utilizat la analiza efectului hidrodinamic al apei la trecerea peste sau sub stavile.

ELEMO2 este elementul finit izoparametric cu 8 noduri descris în §.§.§. 4.3.5.6.

In perioada imediat următoare programul ASEF urmează să fie completat cu elemente finite de bară încovoiată în spaţiu, de bara articulată şi de placă încovoiată.

Varianta ASEF ol este comparabilă ca funcţiuni, pentru problemele de mecanică structurilor, cu programul NONSAP, avînd însă performanţe superioare datorită modularizării şi a posibilităţilor de prelucrări grafice. Programul ASEF ol are două versiuni, putînd fi implementat pe calculatoare FELIX şi pe minicalculatoare INDEPENDENT sau CORAL.

lo.2.2. Structura programului.

lo.2.2.1. Modularizarea programelor de calcul /32/, /62/, /76/.

Reducerea complexităţii problemelor mari se poate realiza prin aplicarea manierei sistemice în proiectarea şi construirea programelor, respectiv descompunerea ierarhică prin modularizare şi structurarea elementelor.

Modularizarea /168/ ca principiu fundamental de controlare a complexităţii, constă în descompunerea unei probleme complexe, pe nivele ierarhice succesive (pînă la nivel de modul elementar), în unităţi de prelucrare (module) specializate, simple şi relativ independente, care sînt controlate de unităţi / module coordonatoare. Un sistem este modular dacă este format din elemente relativ independente. Există mai multe strategii de modularizare : funcţională, structurală, procedurală, şi abstractivă. Pentru programul ASEF s-a aplicat strategia funcţională, în varianta descendentă (fig.lo.1).

Programul ASEF este structurat în blocuri funcţionale /61/ în cadrul cărora subrutinele se asamblează conform schemei de modulare din fig.lo.1. în conformitate cu tipul problemei :liniară, neliniară, statică, dinamică, de propagare sau valori proprii etc.

lo.2.2.2. Scheme logice funcţionale şi structuri de segmentare.

In figurile lo.2 - lo.7 se prezintă schema generală a programului ASEF, schema logică a unui bloc general de execuţie, schemele logice ale blocurilor 'LINM' (rezolvarea problemelor plane în memoric), 'NLIN' (rezolvarea problemelor liniare) ' TEMP ' (rezolvarea problemelor nestaţionare) şi 'VALP' (rezolvarea problemelor dinamice) , precum şi structurile de segmentare pentru versiunile programului pe calculatoare FELIX şi pe minicalculatoare. Sursa programului care conţine peste 5ooo de linii sursă este dată în anexă.

lo.2.3. Performanţe şi rezultate oferite de program.

Programul ASEF rezolvă probleme de analiză statică liniară şi neliniară a structurilor furnizînd rezultate în deplasări şi tensiuni, analiza dinamică a structurilor furnizînd rezultate pentru valorile şi vectorii proprii, analiza cîmpurilor termice şi hidrodinamice furnizînd rezultate în gradienţi de temperatură şi viteze.

Programul operează cu trei fişiere pe discul de manevră, lucrează în dublă precizie, permite alogarea dinamică a memoriei, generarea automată a coordonatelor şi a topologiei, optimizarea rezolvării sistemului de ecuaţii. Problemele de dimensiuni mari sînt

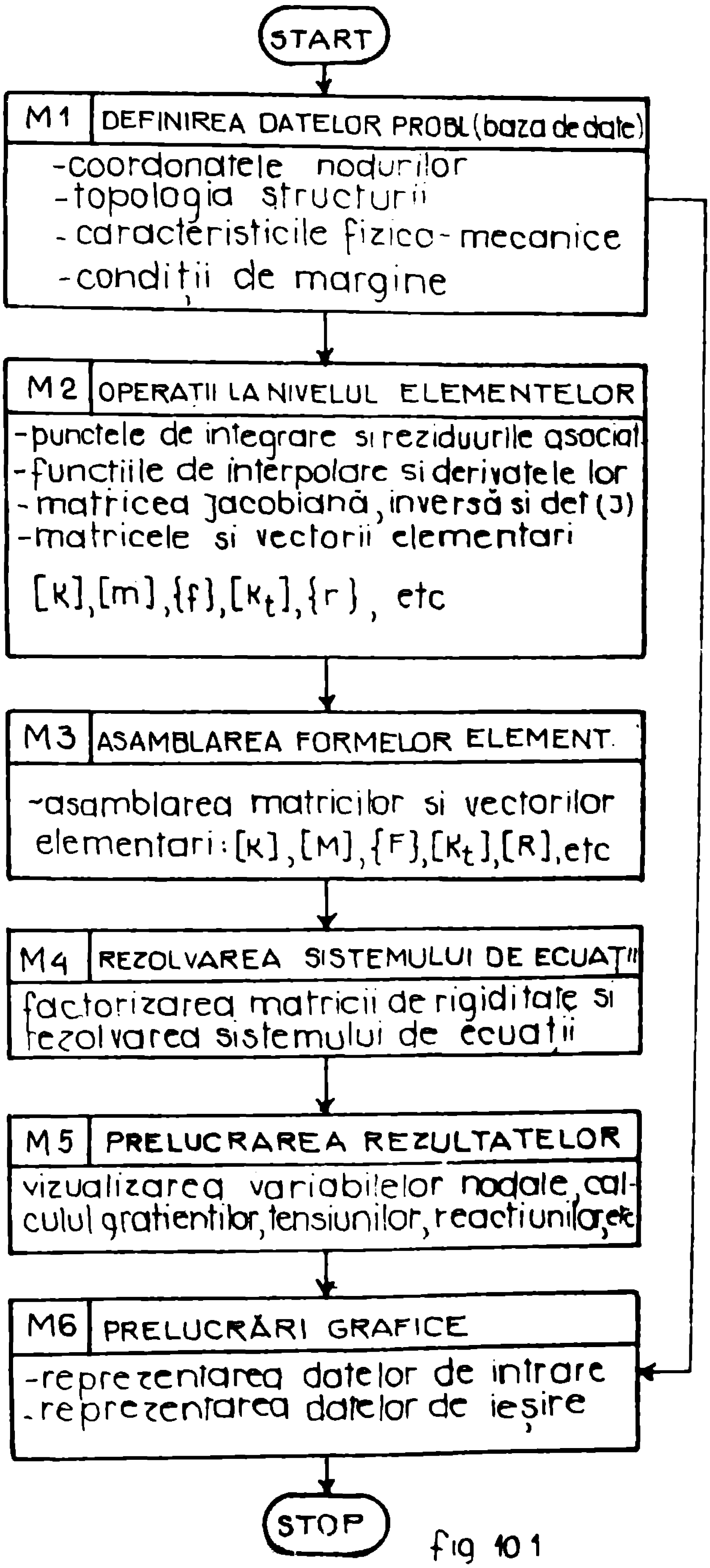



fig 10 1

transferate [illegible] re-
zolvare [illegible] [illegible]
[illegible], cel [illegible] dimen-
siuni mici [illegible]-se
direct în [illegible]. Pro-
gramul dispune [illegible] un
model de [illegible] gra-
fice pentru [illegible]area
prin vizuali[illegible], pe e-
cran sau prin [illegible]re,
a datelor de [illegible]re şi
pentru [illegible] şi vi-
zualizarea r[illegible]tatelor.
În funcţie [illegible]
problemei de [illegible]lvat,
utilizatorul [illegible] preci-
za, în cadrul datelor de
intrare tipul [illegible]ului
funcţional. Programul
este prevăzut cu diver-
se opţiuni pentru vizua-
lizarea şi listarea re-
zultatelor [illegible] şi in-
termediare. [illegible] versiunea
[illegible] progra[illegible] [illegible] o-
cupă în memor[illegible] zonă
program de c[illegible] [illegible],
şi poate oper[illegible] zonă
de lucru fix[illegible] [illegible]
sau mobilă, [illegible] de
aplicare a [illegible]ului
sînt [illegible] de [illegible]-
[illegible].

10.2.[illegible]. [illegible] de
[illegible].

Se prezin[illegible] trei e-
xemple de [illegible] com-
parîndu-se r[illegible]ltatele
obţinute [illegible]gramul
ALEF cu cele [illegible]inute cu
programele [illegible], sau
SAP 5. Se re[illegible] bună
precizie a r[illegible]lor,
la o viteză [illegible]lare de
[illegible] ori mai [illegible] un
consum de [illegible]
redus.

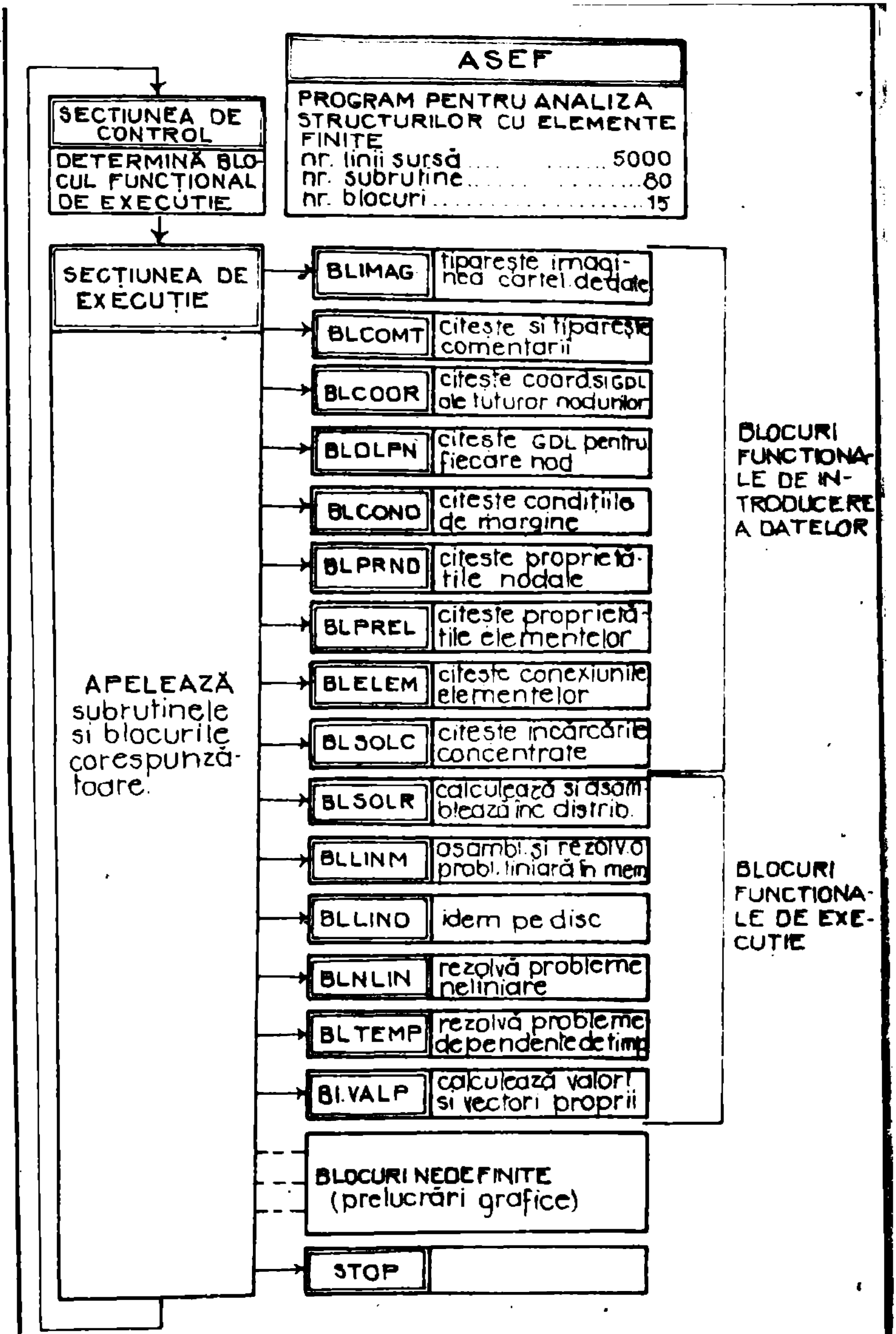

ASEF
PROGRAM PENTRU ANALIZA STRUCTURILOR CU ELEMENTE FINITE
nr. linii sursă ........ 5000
nr. subrutine ........ 80
nr. blocuri ........ 15
SECTIUNEA DE CONTROL
DETERMINĂ BLOCUL FUNCTIONAL DE EXECUTIE
SECTIUNEA DE EXECUTIE
APELEAZĂ subrutinele si blocurile corespunzătoare.
BLIMAG
tipareşte imaginea cartel dedate
BLCOMT
citeste si tipareşte comentarii
BLCOOR
citeste coord.si GDL ale tuturor nodurilor
BLOLPN
citeste GDL pentru fiecare nod
BLCOND
citeste conditiile de margine
BLPRND
citeste proprietătile nodale
BLPREL
citeste proprietătile elementelor
BLELEM
citeste conexiunile elementelor
BLSOLC
citeste incărcările concentrate
BLSOLR
calculează si asamblează inc. distrib.
BLLINM
asambl. si rezolvă probl. liniară în mem
BLLINO
idem pe disc
BLNLIN
rezolvă probleme neliniare
BLTEMP
rezolvă probleme dependente de timp
BLVALP
calculează valori si vectori proprii
BLOCURI NEDEFINITE (prelucrări grafice)
STOP
BLOCURI FUNCTIONALE DE INTRODUCERE A DATELOR
BLOCURI FUNCTIONALE DE EXECUTIE

fig 10 2

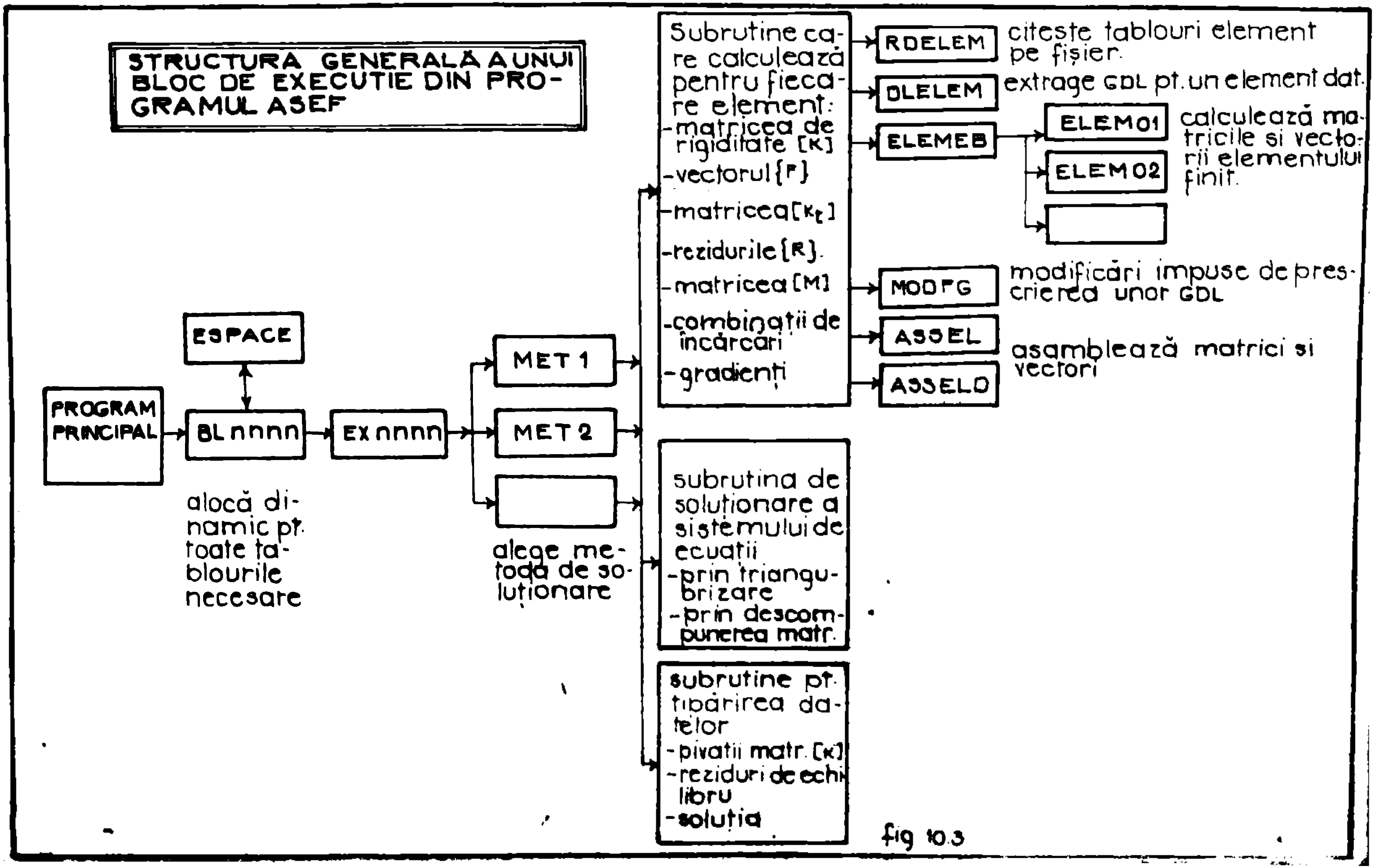
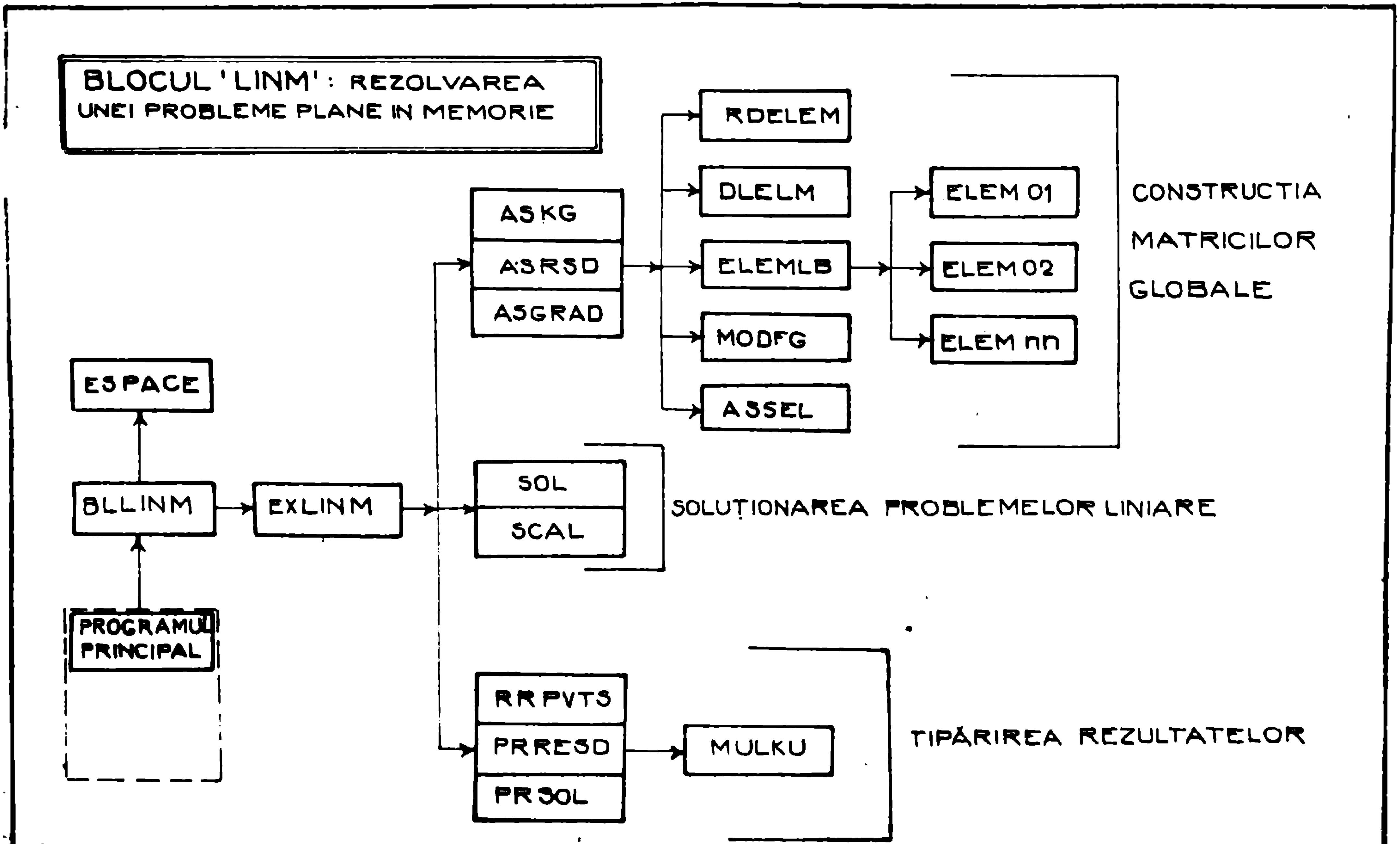

STRUCTURA GENERALĂ A UNUI BLOC DE EXECUTIE DIN PROGRAMUL ASEF
PROGRAM PRINCIPAL
ESPACE
BLnnnn
alocă dinamic pt. toate tablourile necesare
EXnnnn
MET 1
MET 2
alege metoda de soluționare
Subrutine care calculează pentru fiecare element:
-matricea de rigiditate [K]
-vectorul {F}
-matricea [Kt]
-reziduurile {R}
-matricea [M]
-combinații de încărcări
-gradienți
subrutina de soluționare a sistemului de ecuații
-prin triangubrizare
-prin descompunerea matr.
subrutine pt. tipărirea datelor
-pivații matr. [K]
-reziduri de echilibru
-soluția
RDELEM
citeste tablouri element pe fișier.
DLELEM
extrage GDL pt. un element dat.
ELEMEB
ELEM01
ELEM02
calculează matricile și vectorii elementului finit.
MODFG
modificări impuse de prescrierea unor GDL
ASSEL
ASSELD
asamblează matrici și vectori

fig 10.3


BLOCUL 'LINM' : REZOLVAREA
UNEI PROBLEME PLANE IN MEMORIE
ESPACE
BLLINM
PROGRAMUL
PRINCIPAL
EXLINM
ASKG
ASRSD
ASGRAD
RDELEM
DLELM
ELEMLB
MODFG
ASSEL
ELEM 01
ELEM 02
ELEM nn
CONSTRUCTIA
MATRICILOR
GLOBALE
SOL
SCAL
SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR LINIARE
RR PVTS
PRRESD
PR SOL
MULKU
TIPĂRIREA REZULTATELOR
fig 10.4

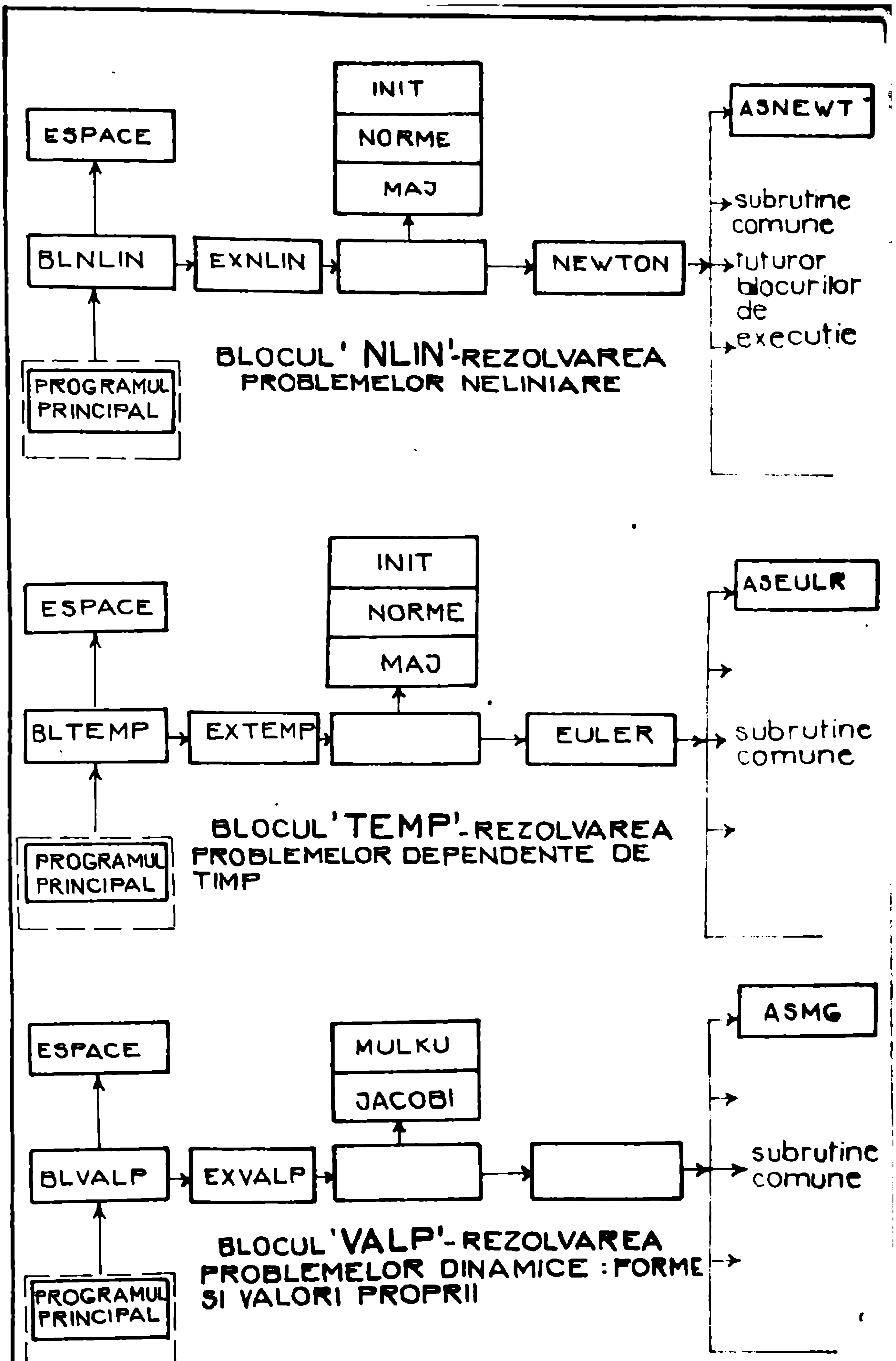

ESPACE
INIT
NORME
MAJ
ASNEWT
BLNLIN
EXNLIN
NEWTON
subrutine comune tuturor blocurilor de executie
PROGRAMUL PRINCIPAL
BLOCUL 'NLIN'-REZOLVAREA PROBLEMELOR NELINIARE
ESPACE
INIT
NORME
MAJ
ASEULR
BLTEMP
EXTEMP
EULER
subrutine comune
PROGRAMUL PRINCIPAL
BLOCUL 'TEMP'-REZOLVAREA PROBLEMELOR DEPENDENTE DE TIMP
ESPACE
MULKU
JACOBI
ASMG
BLVALP
EXVALP
subrutine comune
PROGRAMUL PRINCIPAL
BLOCUL 'VALP'-REZOLVAREA PROBLEMELOR DINAMICE : FORME SI VALORI PROPRII

fig. 10.5

ASEF 01

SCHEMA DE SEGMENTARE A PROGRAMULUI
versiunea pe FELIX

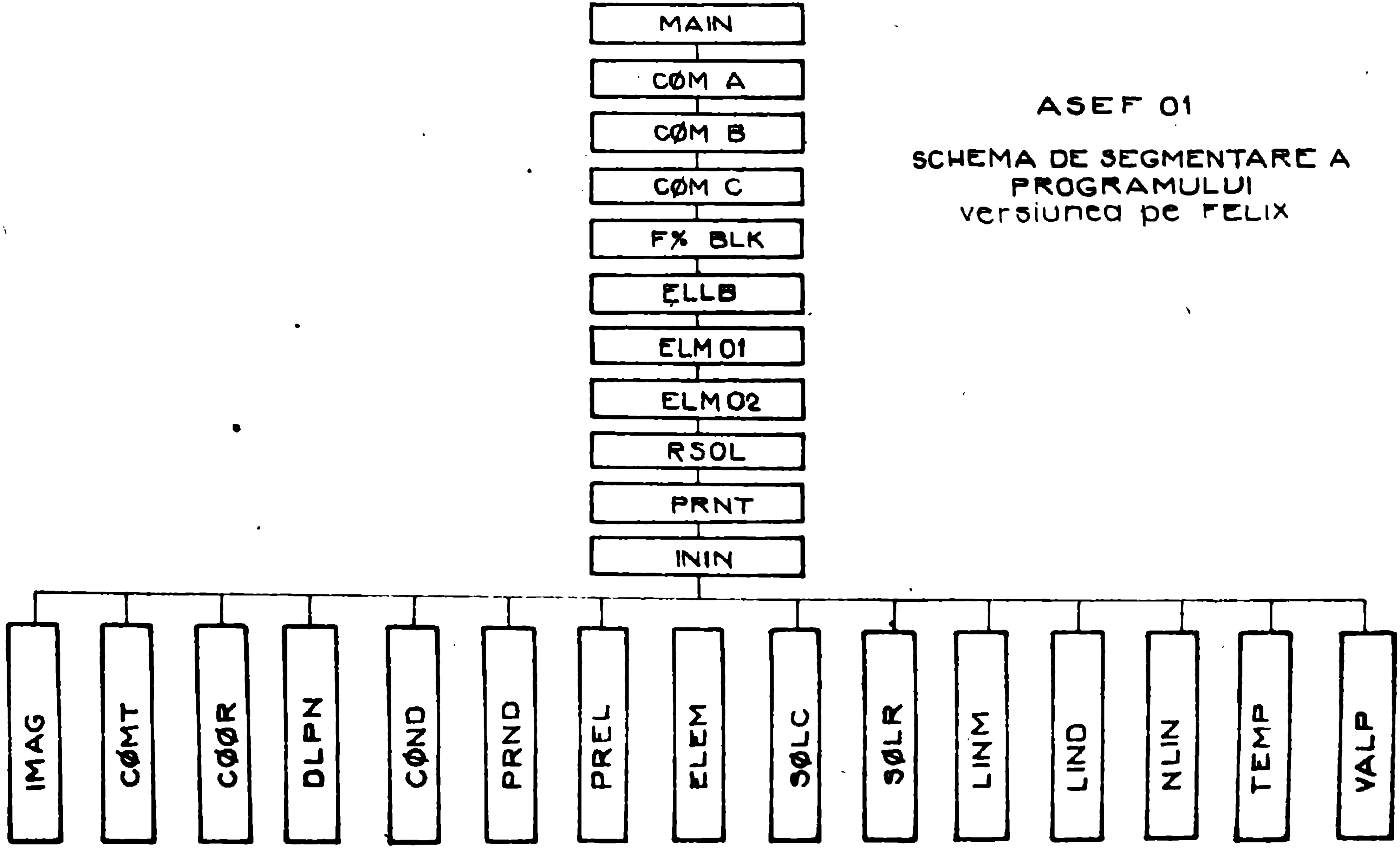



fig. 10.6

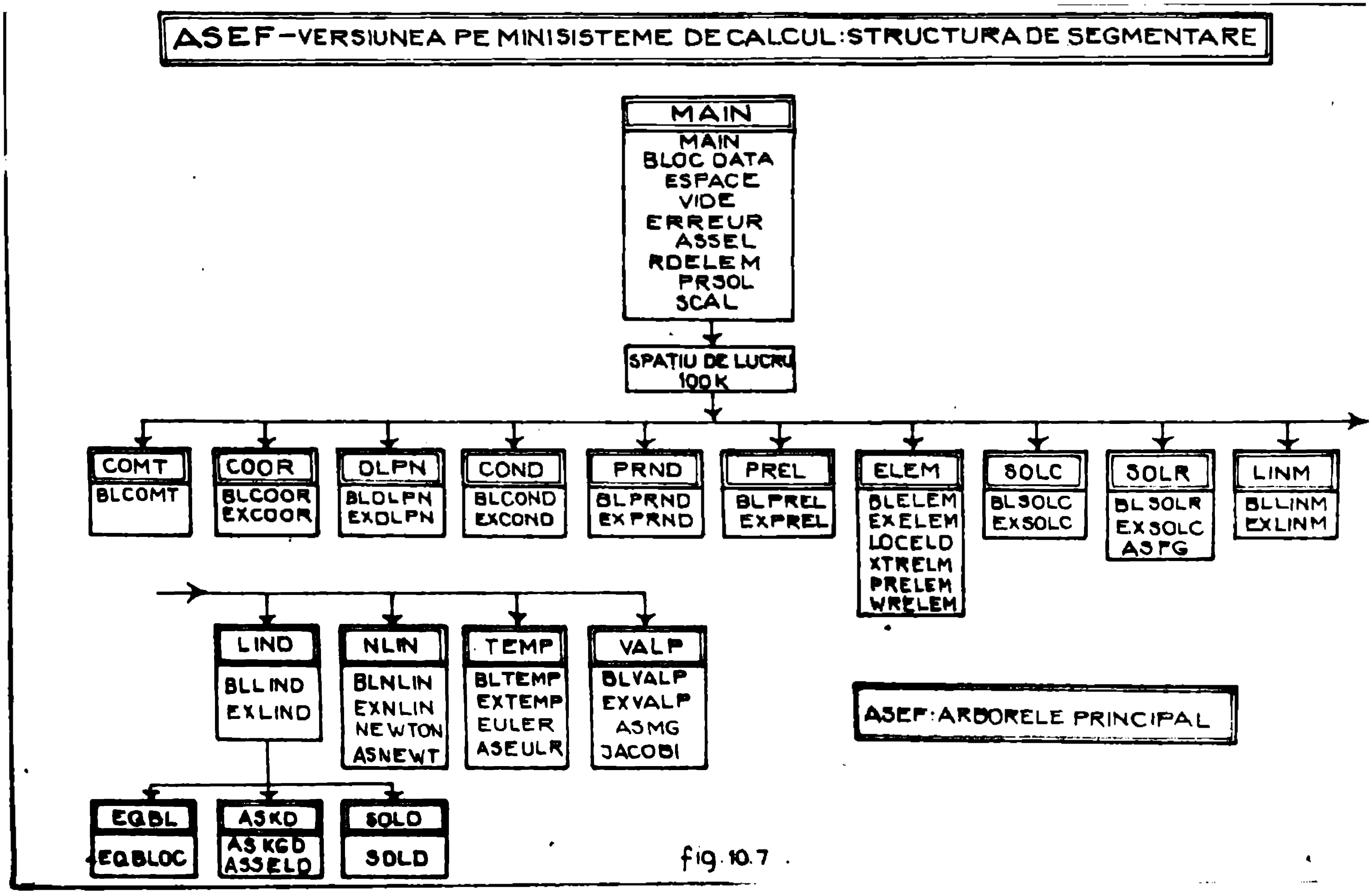

ASEF – VERSIUNEA PE MINISISTEME DE CALCUL: STRUCTURA DE SEGMENTARE
MAIN
MAIN
BLOC DATA
ESPACE
VIDE
ERREUR
ASSEL
RDELEM
PRSOL
SCAL
SPATIU DE LUCRU 100 K
COMT
BLCOMT
COOR
BLCOOR
EXCOOR
DLPN
BLDLPN
EXDLPN
COND
BLCOND
EXCOND
PRND
BLPRND
EXPRND
PREL
BLPREL
EXPREL
ELEM
BLELEM
EXELEM
LOCELD
XTRELM
PRELEM
WRELEM
SOLC
BLSOLC
EXSOLC
SOLR
BLSOLR
EXSOLC
ASPG
LINM
BLLINM
EXLINM
LIND
BLLIND
EXLIND
NLIN
BLNLIN
EXNLIN
NEWTON
ASNEWT
TEMP
BLTEMP
EXTEMP
EULER
ASEULR
VALP
BLVALP
EXVALP
ASMG
JACOBI
EQBL
EQBLOC
ASKD
ASKGD
ASSELD
SOLD
SOLD
ASEF: ARBORELE PRINCIPAL

fig. 10.7

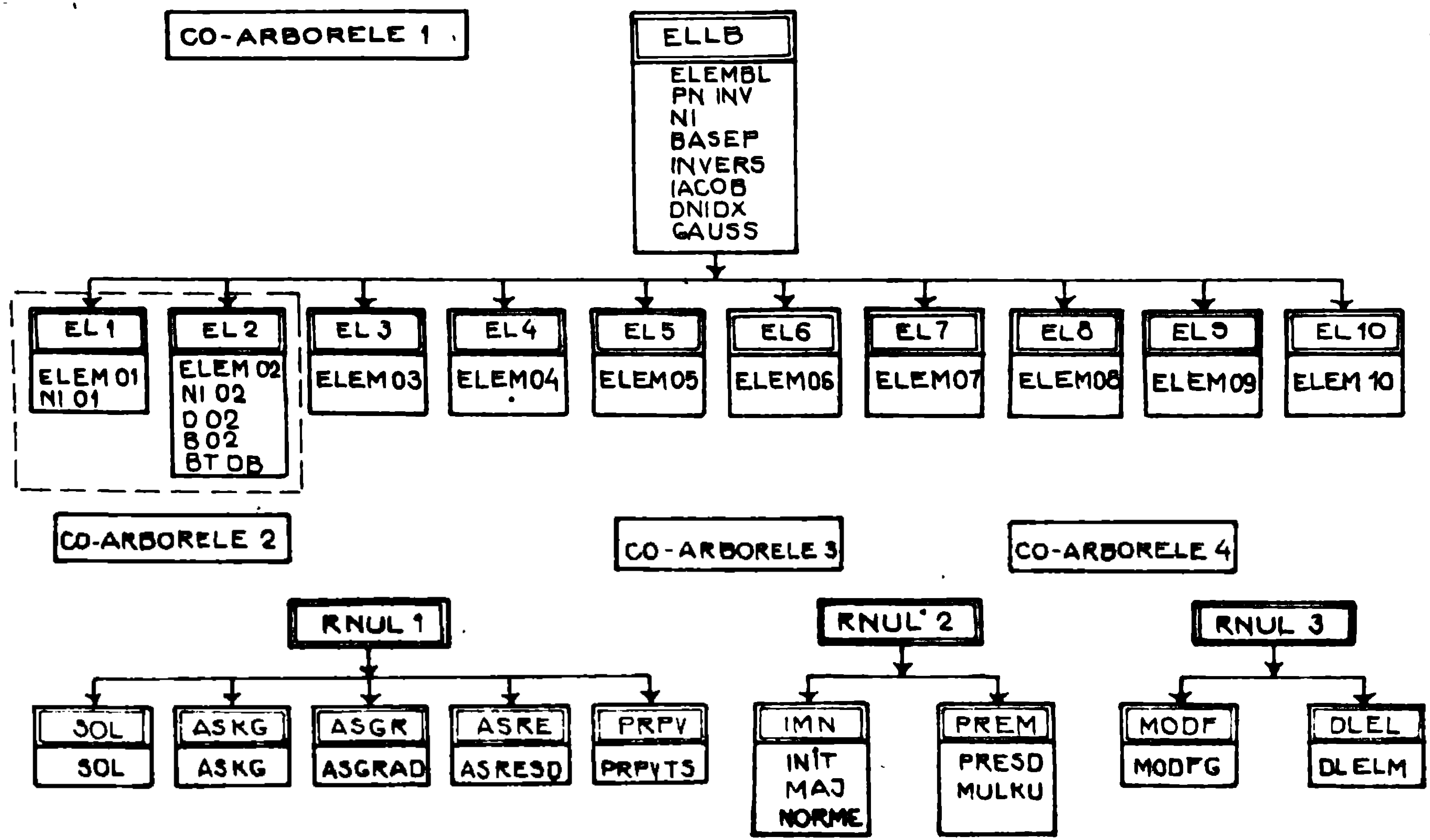
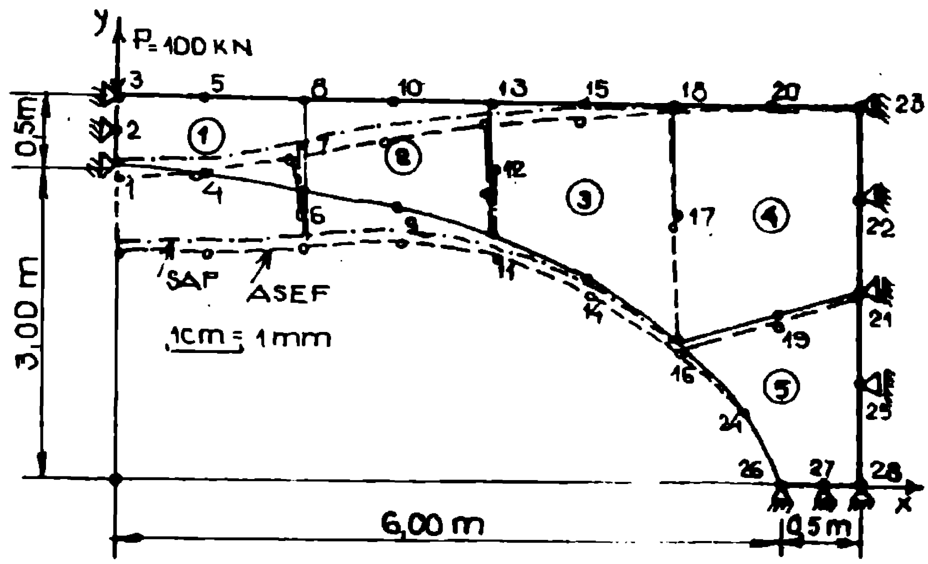



fig. 10.7 (continuare)

exemplul nr. 1




$E = 2 \cdot 10^5$ daN/cm²

$\nu = 0.3$

$t = 100$ cm

$\rho = 2,3$ t/m²

$e\% = \frac{U_{ASEF} - U_{SAF}}{U_{ASEF}} 100$

timp ASEF : 1'2"

timp SAF : 3'7"

memorie : 154 KO

## ANALIZĂ STATICĂ : deplasări $U_x$ și $U_y$

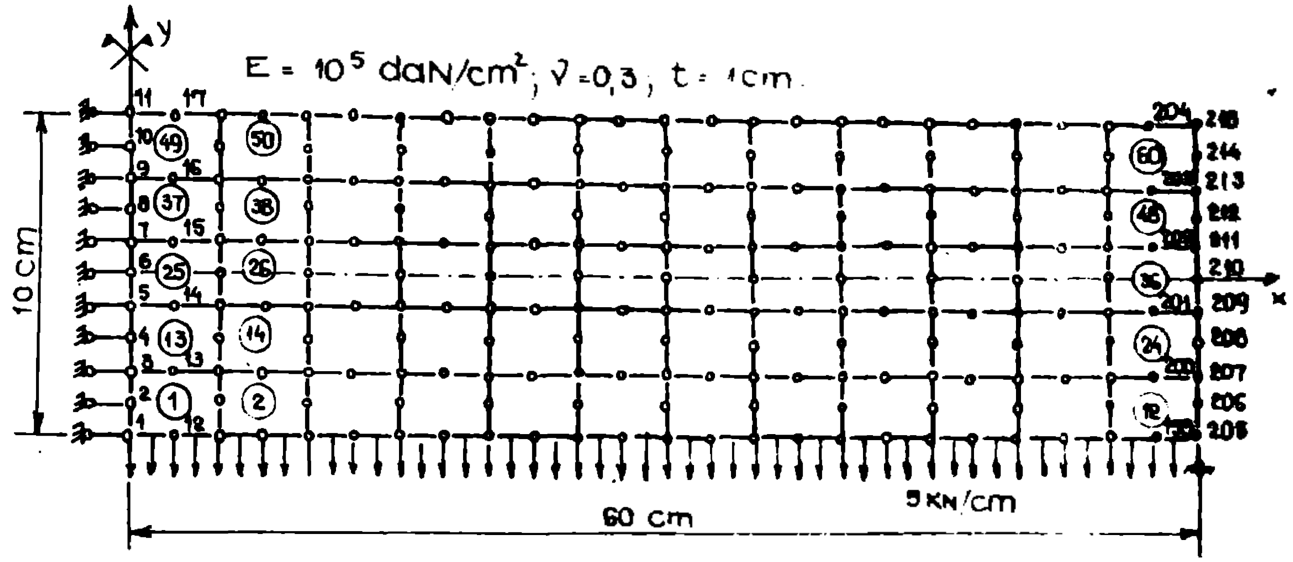
| nr. punct. | program | $U_x$ [cm] | $U_y$ [cm] | program | $U_x$ [cm] | $U_y$ [cm] | diferenta % $e_x$ | diferenta % $e_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ASEF | -0,0000000 | -0.1144000 | SAP 05 | 0.000000 | -0.0920100 | 0,000 | 19512 |
| 4 | | 0.0048677 | -0.1017300 | | 0.0047770 | -0,0878000 | 0.200 | 13690 |
| 5 | | -0.0085677 | -0.1011600 | | -0.0074960 | -0.0804600 | 12000 | 20462 |
| 6 | | 0.0078758 | -0.0769659 | | 0.0079620 | -0.0514300 | -0,200 | 25376 |
| 7 | | -0.0085684 | -0.0764750 | | -0.0016650 | -0.0573400 | 35000 | 25021 |
| 8 | | -0.0132030 | -0.0721330 | | -0.0113300 | -0.0573800 | 14200 | 20452 |
| 16 | | 0.0084909 | -0.0054279 | | 0.0016840 | -0.0021370 | 33000 | 59837 |
| 17 | | 0.0077484 | -0.0059181 | | 0.0007226 | -0.0021800 | 6700 | 63163 |
| 18 | | -0.0041166 | -0,0066645 | | -0.001997 | -0.0023390 | 51500 | 64903 |
| 19 | | -0.0010861 | -0.0034608 | | -0.0007592 | -0.0011420 | 30100 | 67000 |
| 21 | | 0,000000 | -0.0026278 | | 0.0000000 | -0.0007054 | 0000 | 73000 |

## ANALIZA DINAMICĂ : valori proprii și vectori proprii pt. primele 3 moduri

| nr. punct | mod 1 $\omega_1$ = 0.5612 E+0,4 $U_x$ [cm] | mod 1 $U_y$ [cm] | mod 2 $\omega_2$ = 0,37888 E+0,5 $U_x$ [cm] | mod 2 $U_y$ [cm] | mod 3 = 0,10014 E + 0,6 $U_x$ [cm] | mod 3 $U_y$ [cm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00000 | 6637500 | 000000 | -4355700 | 000000 | -4112800 |
| 4 | -1,99300 | 6078600 | 754780 | -3080600 | 1254700 | -2229200 |
| 5 | 4,50510 | 6049003 | -665890 | -3072800 | -652620 | 2254100 |
| 6 | -4,01170 | 4814700 | 1256800 | -503100 | 1748800 | 1056900 |
| 7 | 1,86120 | 4789000 | 197330 | -430910 | 689340 | 1177800 |
| 8 | 785260 | 4539700 | -837120 | -050229 | -335330 | 1492400 |
| 16 | -1,75480 | 302400 | -126820 | 2000000 | -751380 | -213700 |
| 17 | -0,50562 | 332550 | 228060 | 2100000 | -104740 | -2130400 |
| 18 | 298600 | 392820 | 776380 | 2364800 | 1354400 | -1718100 |
| 19 | -0.78157 | 173010 | -023282 | 4409900 | -416000 | -2163800 |

fig. 10.8

exemplul nr 2




x = 2,5 cm

| y [cm] | $\sigma_x$ teoretic | $\sigma_x$ SAP4 | $\sigma_x$ SAP5 | $\sigma_x$ ASEF | $\sigma_y$ teoret. | $\sigma_y$ SAP4 | $\sigma_y$ SAP5 | $\sigma_y$ ASEF | $\tau_{xy}$ teoret | $\tau_{xy}$ SAP4 | $\tau_{xy}$ SAP5 | $\tau_{xy}$ ASEF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,0 | -5400625 | -53800 | -539764 | -53897 | 0.0 | 11006 | -053635 | -05024 | 00 | 64971 | -01542 | -0,1512 |
| 4,0 | -431330 | -43069 | -431031 | -43092 | 1.4 | 11006 | 29727 | 24625 | 675 | 64971 | 592899 | 60028 |
| 3,0 | -323077 | -322365 | -322902 | -32290 | 52 | 58748 | 47607 | 47597 | 120 | 1100105 | 118430 | 118372 |
| 2,0 | -215185 | -21487 | -215038 | -21497 | 10.8 | 10649 | 115146 | 11449 | 15.75 | 15505 | 149282 | 14914 |
| 1,0 | -107533 | -107295 | -107474 | 107391 | 175 | 17825 | 174592 | 17392 | 18.0 | 17.0 | 178390 | 178392 |
| 0,0 | 0,0 | $4.10^{-3}$ | 0.017463 | -0,0445 | 250 | 25001 | 25058 | 24852 | 18,75 | 18495 | 179277 | 17933 |
| -1,0 | 107533 | 107295 | 107473 | 107391 | 324 | 32175 | 325411 | 31876 | 18,0 | 17,0 | 178442 | 178392 |
| -2,0 | 215185 | 21487 | 215034 | 21493 | 39.2 | 39349 | 383695 | 37121 | 15,75 | 15505 | 149278 | 14914 |
| -3,0 | 323077 | 322365 | 322902 | 32290 | 448 | 44124 | 452404 | 43927 | 12,0 | 110041 | 118382 | 118372 |
| -4,0 | 431330 | 43069 | 431035 | 43052 | 486 | 48899 | 471471 | 44048 | 6,75 | 64972 | 592904 | 60028 |
| -5,0 | 5400625 | 5380 | 539769 | 538952 | 50.0 | 48899 | 506575 | 47822 | 0,0 | 64972 | -0153042 | -01512 |

x = 32,5 cm

| y [cm] | $\sigma_x$ teoretic | $\sigma_x$ SAP4 | $\sigma_x$ SAP5 | $\sigma_x$ ASEF | $\sigma_y$ teoretic | $\sigma_y$ SAP4 | $\sigma_y$ SAP5 | $\sigma_y$ ASEF | $\tau_{xy}$ teoretic | $\tau_{xy}$ SAP4 | $\tau_{xy}$ SAP5 | $\tau_{xy}$ ASEF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,0 | -382562 | -3813,10 | -382206 | -382182 | 0 | 1,0956 | 117173 | 0,6724 | 0,0 | 84786 | -238613 | -2112 |
| 4,0 | -305330 | -3046,70 | -304986 | -3049,2 | 1,4 | 1,0956 | 467584 | 24569 | 87,75 | 84786 | 768551 | 78027 |
| 3,0 | -228585 | -2878,75 | -228449 | -228416 | 5,2 | 60353 | 393609 | 49432 | 156,0 | 143233 | 154105 | 153744 |
| 2,0 | -152185 | -1519,20 | -152124 | -15199 | 10,8 | 10975 | 833278 | 11431 | 204,75 | 201,68 | 194488 | 19387 |
| 1,0 | -760325 | -758,795 | -758865 | -758782 | 17,5 | 18424 | 187039 | 174112 | 234,0 | 220825 | 2314695 | 231122 |
| 0,0 | 0,0 | 0,6 | 16134 | -004892 | 25,0 | 25873 | 307528 | 2483 | 24375 | 23997 | 232955 | 23514 |
| -1,0 | 760325 | 759685 | 758665 | -758791 | 32,0 | 321935 | 311134 | 31098 | 234,0 | 221,44 | 2326765 | 231122 |
| -2,0 | 1521,85 | 1516,10 | 151763 | 1519,3 | 39,2 | 38574 | 39732 | 37103 | 204,75 | 202,31 | 19408 | 19390 |
| -3,0 | 2285775 | 2276,30 | 2284315 | 2284,2 | 44,8 | 438005 | 462439 | 439821 | 156,0 | 143,029 | 152391 | 153744 |
| -4,0 | 3053,30 | 3047,10 | 305428 | 3045,3 | 48,6 | 49087 | 576309 | 53998 | 87,75 | 83748 | 77391 | 78046 |
| -5,0 | 3825625 | 3816,30 | 382544 | 382204 | 50,0 | 49087 | 604931 | 54872 | 0,0 | 83748 | 0,82257 | -2112 |

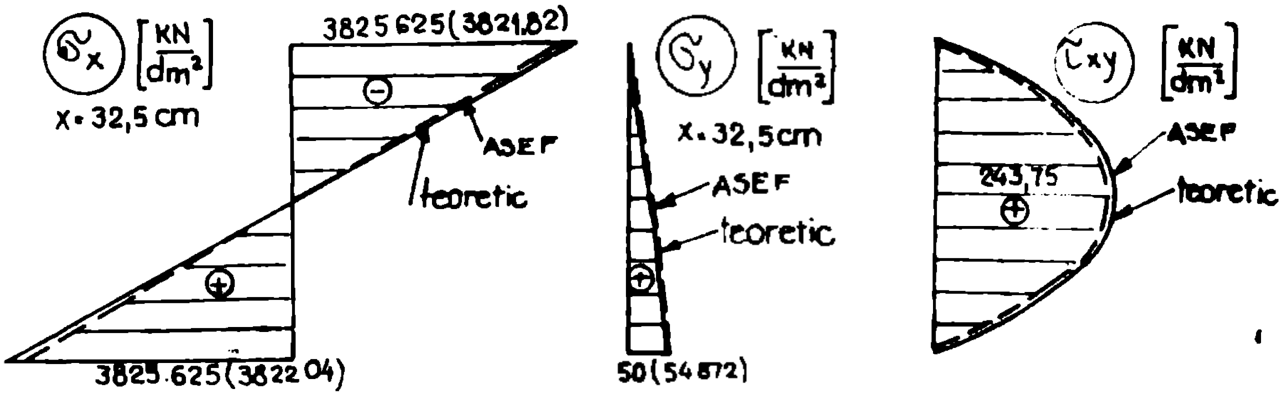
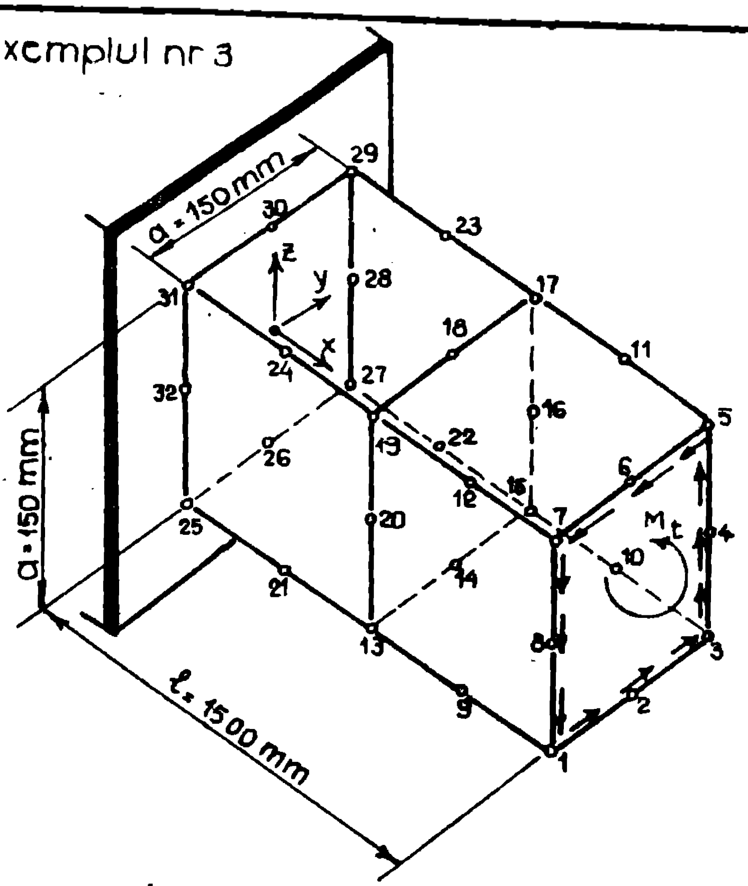



fig. 10.9

exemplul nr 3




$M_t = 0,3$ KN/m

$t = 3$ m

$E = 7.5$ KN/mm²

$G = 28846$ KN/m²

$\nu = 0.3$

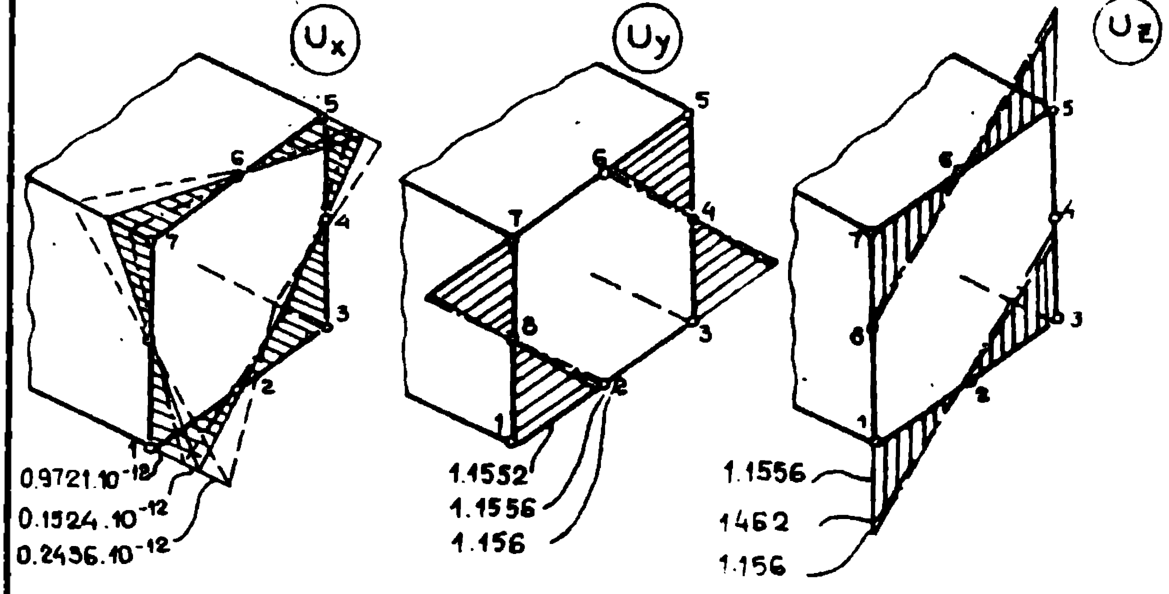
teoretic

$$\tau_t = \frac{M_t}{2a^2t} = 0,00222 \text{ KN/m}^2$$

$$\theta = \frac{M_t}{a^3tG} \; ; \; \varphi = \theta\ell$$

$$\varphi = \frac{300 \cdot 1500}{150^3 \cdot 3 \cdot 2,8846} = 0,0154074 \text{ rad}$$

| nr. punct | Ux | | | Uy | | | Uz | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SAP4 | SAP5 | ASEF | SAP4 | SAP5 | ASEF | SAP4 | SAP5 | ASEF |
| 1 | 0.24360 | 009721 | 01524 | 1,1556 | 1,156 | 1,1552 | -1,11556 | -1,156 | -0,1462 |
| 2 | 0.047573 | -0,06155 | 00232 | 11556 | 1,156 | 1.1552 | 0,0 | 0.0 | 0,0 |
| 3 | -0.15010 | -0,1106 | -01298 | 11556 | 1,156 | 11552 | 1,11556 | 1,156 | 1,1462 |
| 4 | 0004107 | -0,01622 | -001102 | 0.0 | 0,0 | 0,0 | 1,11556 | 1,155 | 1,1462 |
| 5 | 015785 | 0,07770 | 01094 | -1,1556 | -1,156 | -1,1552 | 1,11566 | 1,156 | 1,1462 |
| 6 | -0047781 | 005616 | -00124 | -1,1556 | -1,156 | -1,1552 | 0,0 | 0.0 | 0,0 |
| 7 | -0.25302 | -006474 | -01382 | -11556 | -1,156 | -1,1552 | -111556 | -1,156 | -1,1462 |
| 8 | -00044454 | 001565 | -000018 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | -1,11556 | -1.555 | -1,1462 |




| | teoretic | SAP 4 | SAP 5 | ASEF |
|---|---|---|---|---|
| φ [rad] | 0,0154074 | 0,015462 | 0,0154062 | 0,0154062 |
| | 0,00222 | 0,00222 | 0,00222 | 0,0222 |

fig 10.10

## 10.3. PROGRAMUL DBEM PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR PLANE DE ELASTICITATE CU METODA ELEMENTELOR DE CONTUR. /71/,/117/.

### 10.3.1. Domeniul de aplicabilitate.

Programul DBEM rezolvă probleme plane de elasticitate pe baza algoritmului din capitolul V privind formularea directă a metodei elementelor de contur (Direct Boundary Element Method). Programul este scris în limbaj FORTRAN pentru calculatorul FELIX, reprezentînd o prelucrare a unui program prezentat în lucrarea /8/. Cîmpul de tensiuni şi deplasări pe frontieră este aproximat prin funcţii de interpolare pătratice, utilizîndu-se pentru aceasta elemente de contur liniare cu cîte două grade de libertate pe nod.

### 10.3.2. Structura programului.

Schema bloc a programului DBEM este prezentată în figura 10.11, în figura 10.12 fiind dată structura de segmentare a programului, iar în figura 10.13 schema logică a programului principal. Sursa programului care conţine 1254 linii sursă este dată în anexă.

### 10.3.3. Performanţe şi rezultate oferite de program.

Programul DBEM face parte din prima generaţie de programe elaborate pe baza MEC. In prezent au apărut şi în această metodă programe multifuncţionale de tipul celor cunoscute în MEF. Astfel, este sistemul BEASY /20/ care operează cu 6 tipuri de elemente de contur, cu un număr important de facilităţi în ceea ce priveşte rezolvarea problemelor de potenţial şi a problemelor de analiză tensiunilor în domenii bi - şi tridimensionale.

Programul DBEM dă rezultatele în deplasări şi tensiuni pentru probleme plane de elasticitate definite printr-un singur contur în domeniul elastic. Limitele de aplicare a programului sînt : 30 elemente de contur cu maximum 60 de noduri, avînd cîte două GDL - tensiuni şi/sau deplasări - pe nod.

### 10.3.4. Exemple de control.

In figurile 10.14 şi 10.15 sînt prezentate două exemple de control. Pentru comparare se prezintă şi rezultatele obţinute cu MEF. Se remarcă o bună concordanţă a rezultatelor.

## 10.4. PROGRAMUL STABAS PENTRU ANALIZA INSTABILITATII BARELOR CU PERETI SUBTIRI SOLICITATE LA COMPRESIUNE SI LA COMPRESIUNE CU INCOVOIERE./53/,/64/, /65/, /69/.

### 10.4.1. Domeniul de aplicabilitate.

Programul STABAS elaborat pe baza algoritmului prezentat în §.8.7. este destinat analizei instabilităţii barelor cu pereţi subţiri formate la rece cu secţiune simplu şi dublu conexă solicitate la compresiune şi compresiune cu încovoiere. Programul ţine seama de conlucrarea dintre pereţi şi de efectul voalării.

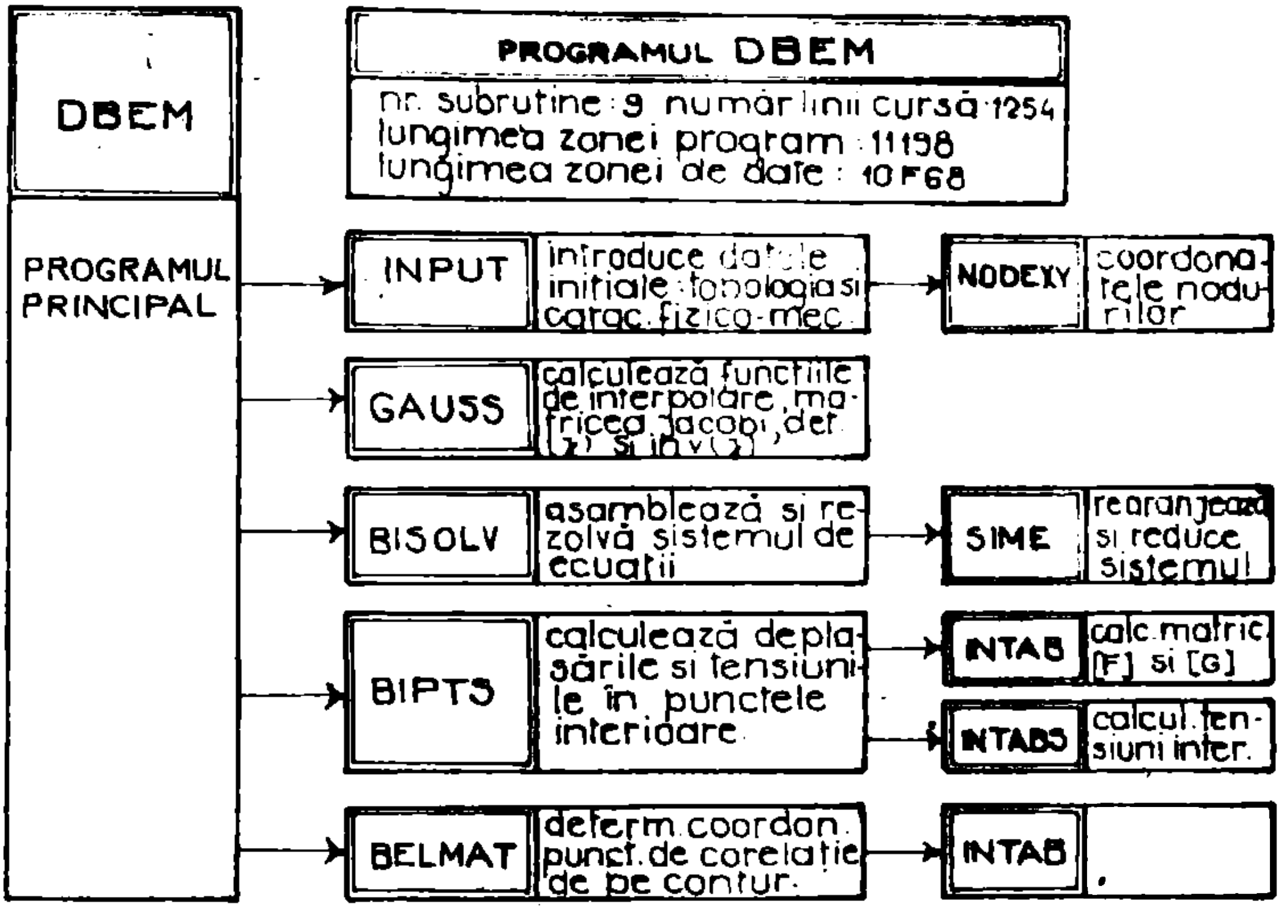



fig. 10.11

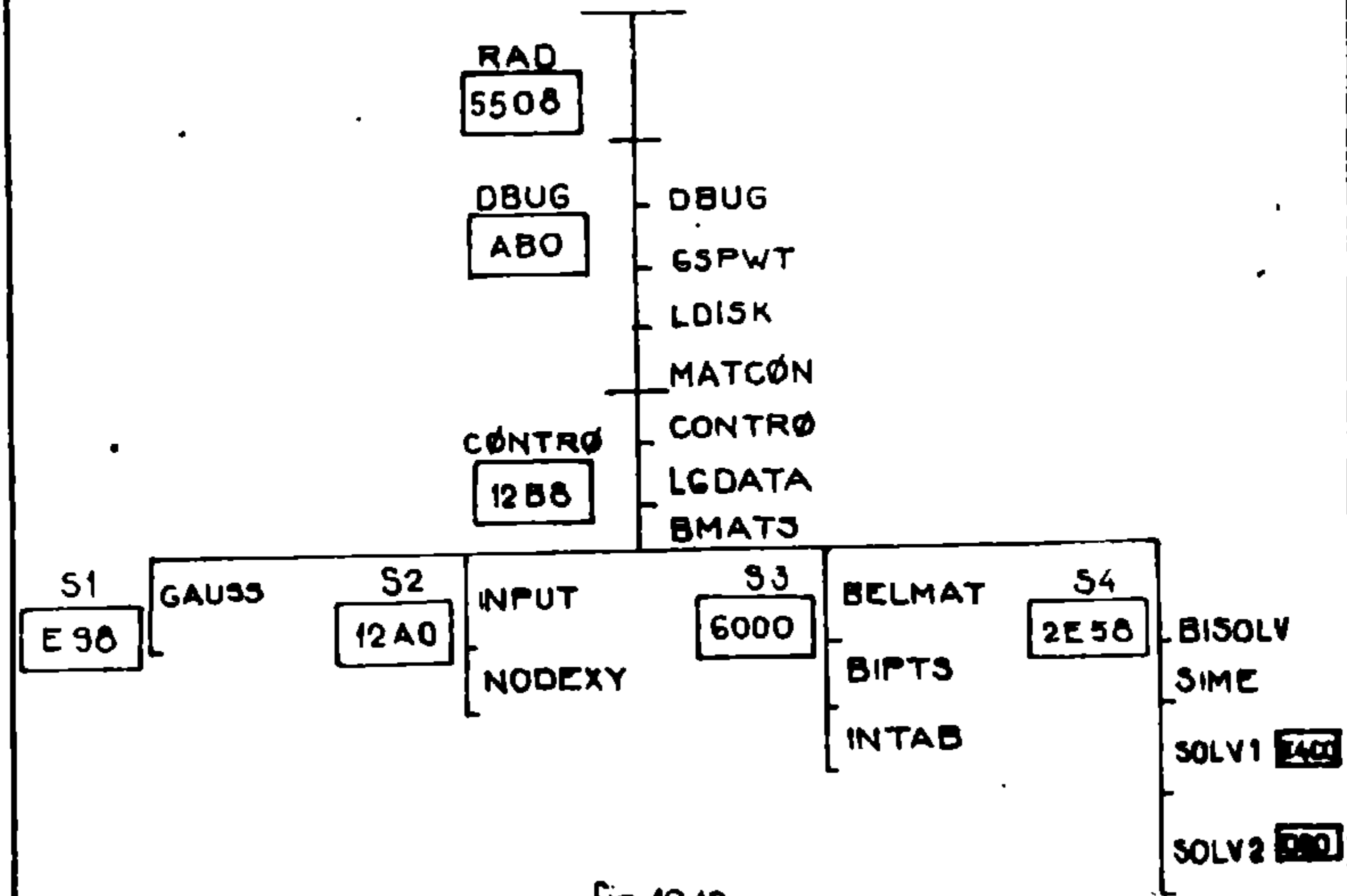



fig. 10.12

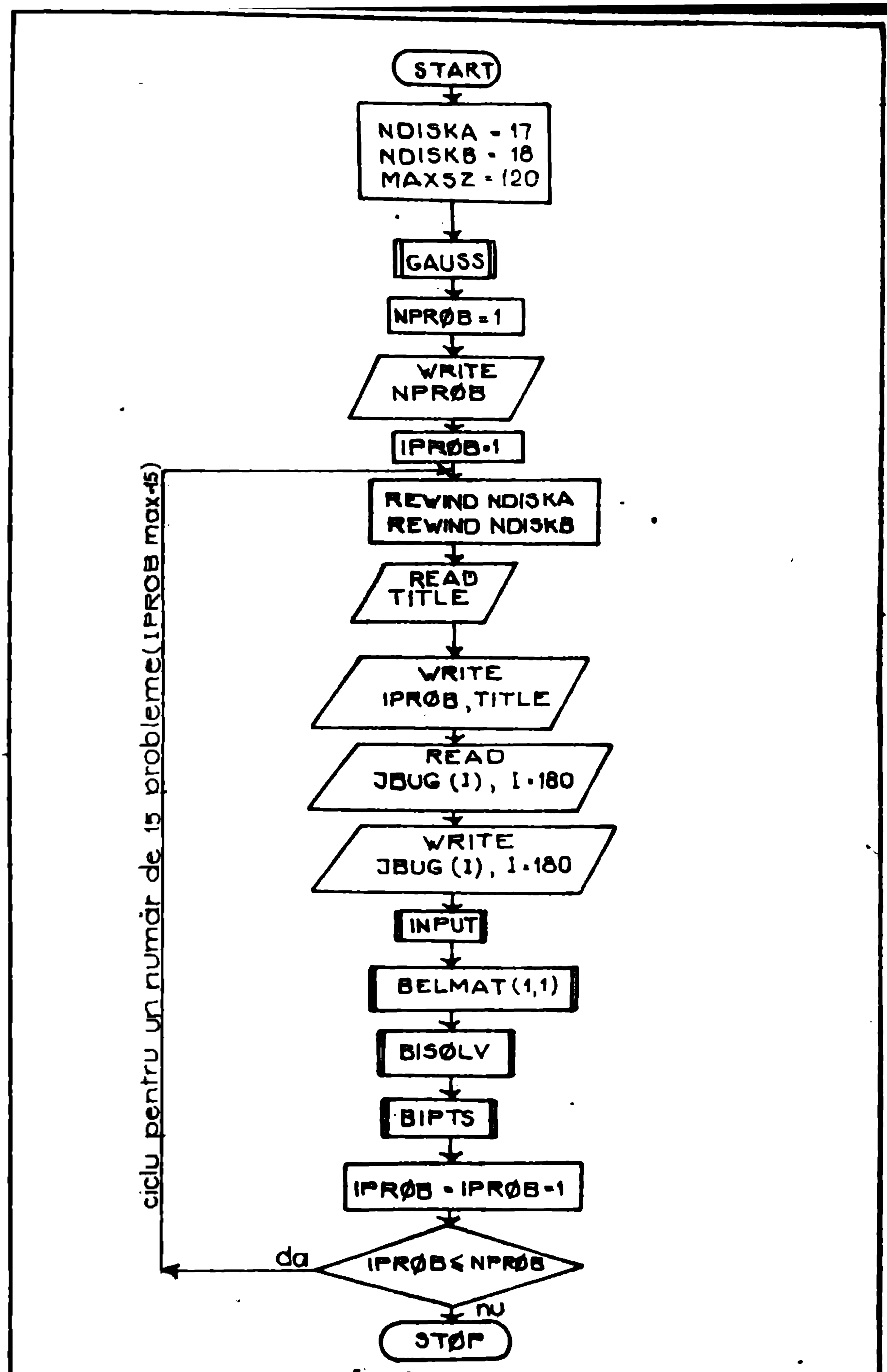
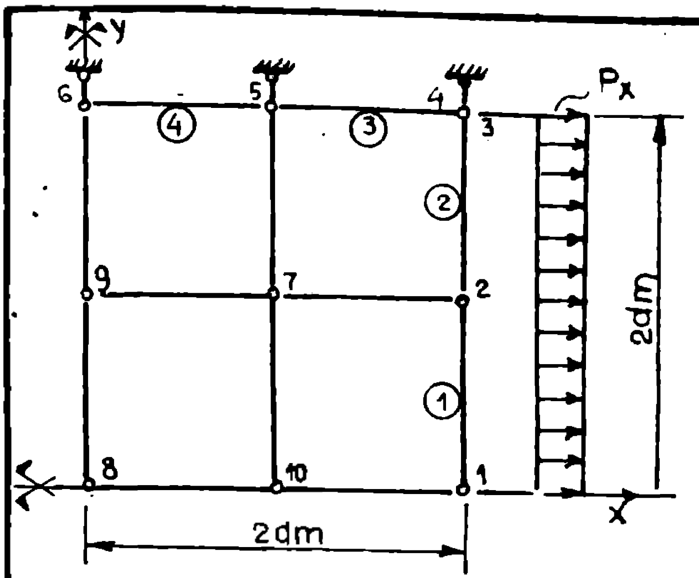

START
NDISKA = 17
NDISKB = 18
MAXSZ = 120
GAUSS
NPRØB = 1
WRITE NPRØB
IPRØB = 1
REWIND NDISKA
REWIND NDISKB
READ TITLE
WRITE IPRØB, TITLE
READ JBUG (I), I = 180
WRITE JBUG (I), I = 180
INPUT
BELMAT (1,1)
BISØLV
BIPTS
IPRØB = IPRØB + 1
IPRØB ≤ NPRØB
da
nu
STØP
ciclu pentru un număr de 15 probleme (IPROB max 15)

fig. 10.13




exemplul nr 1 [19]

$p_x = 2 \text{ kN/dm}$

$E = 5 \text{ kN/dm}^2$

$\nu = 0,3$

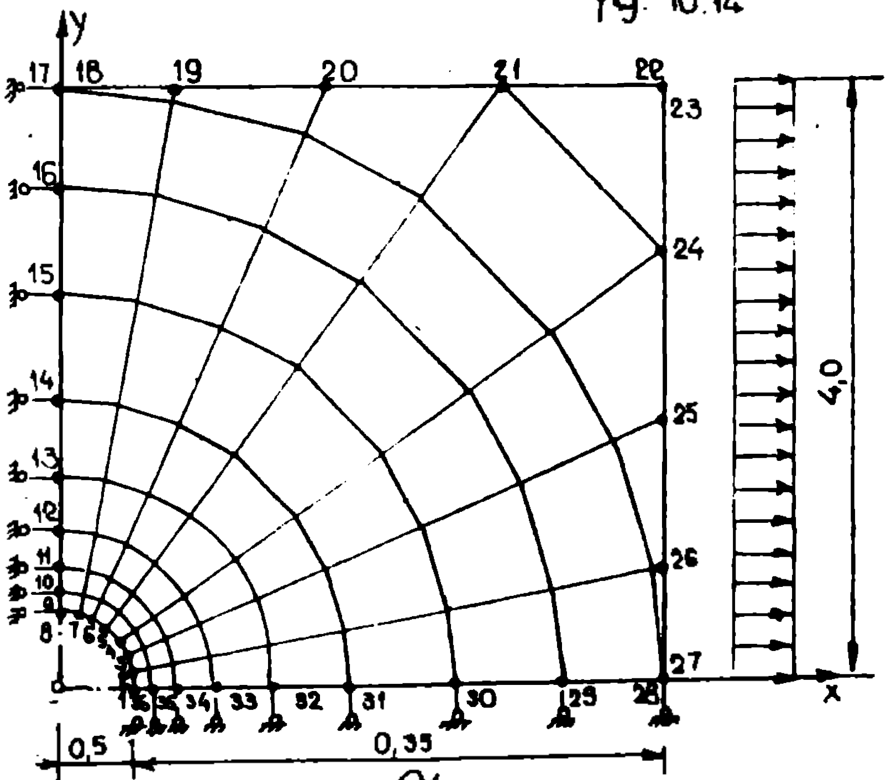
număr elemente de contur: 4

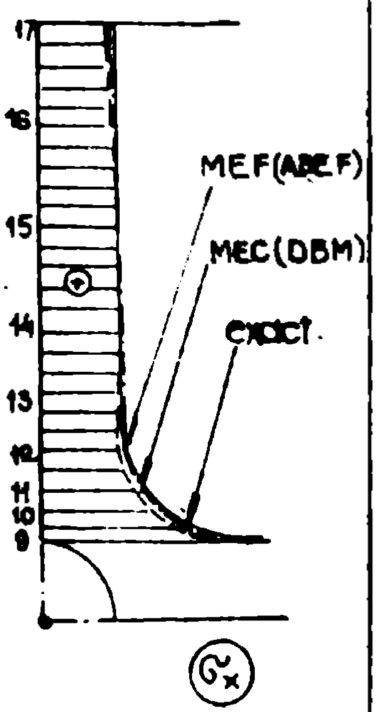
număr noduri: 6

număr puncte interioare: 4

| nr. punct | rezultate [19] (MEC) | | | | | rezultate ASEF (MEF) | | | | | rezultate DBM (MEC) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $U_x$ | $U_y$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | $U_x$ | $U_y$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | $U_x$ | $U_y$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ |
| 1 | 0,728 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7278 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7265 | 0 | [illegible] | [illegible] | 0 |
| 2 | 0,728 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7278 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7265 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 3 | 0,728 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7278 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7265 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 4 | 0,728 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7278 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,7265 | 0 | 1,999 | 0,599 | 0 |
| 5 | 0,364 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,3639 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | [illegible] | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 6 | 0,000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 7 | 0,364 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,3639 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,36325 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 8 | 0,000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 9 | 0,000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,0000 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |
| 10 | 0,364 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,3639 | 0 | 2,0 | 0,6 | 0 | 0,36325 | 0 | 1,999 | [illegible] | 0 |

fig. 10.14




Tensiuni $\sigma_x$ pentru x = 0

| punct. | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| exact. | 3,0000 | 1,95440 | 1,46799 | 1,20390 | 1,08429 | 1,04056 | 1,02011 | 1,01402 | 1,00816 |
| MEF(ASEF) | 2,80314 | 1,85134 | 1,30672 | 1,15960 | 1,08804 | 1,05532 | 1,02742 | 0,99834 | 0,97825 |
| MEC(DBM) | 2,84202 | 1,87226 | 1,35891 | 1,17032 | 1,09332 | 1,05761 | 1,02824 | 1,00945 | 0,98852 |

Fig. 10.15

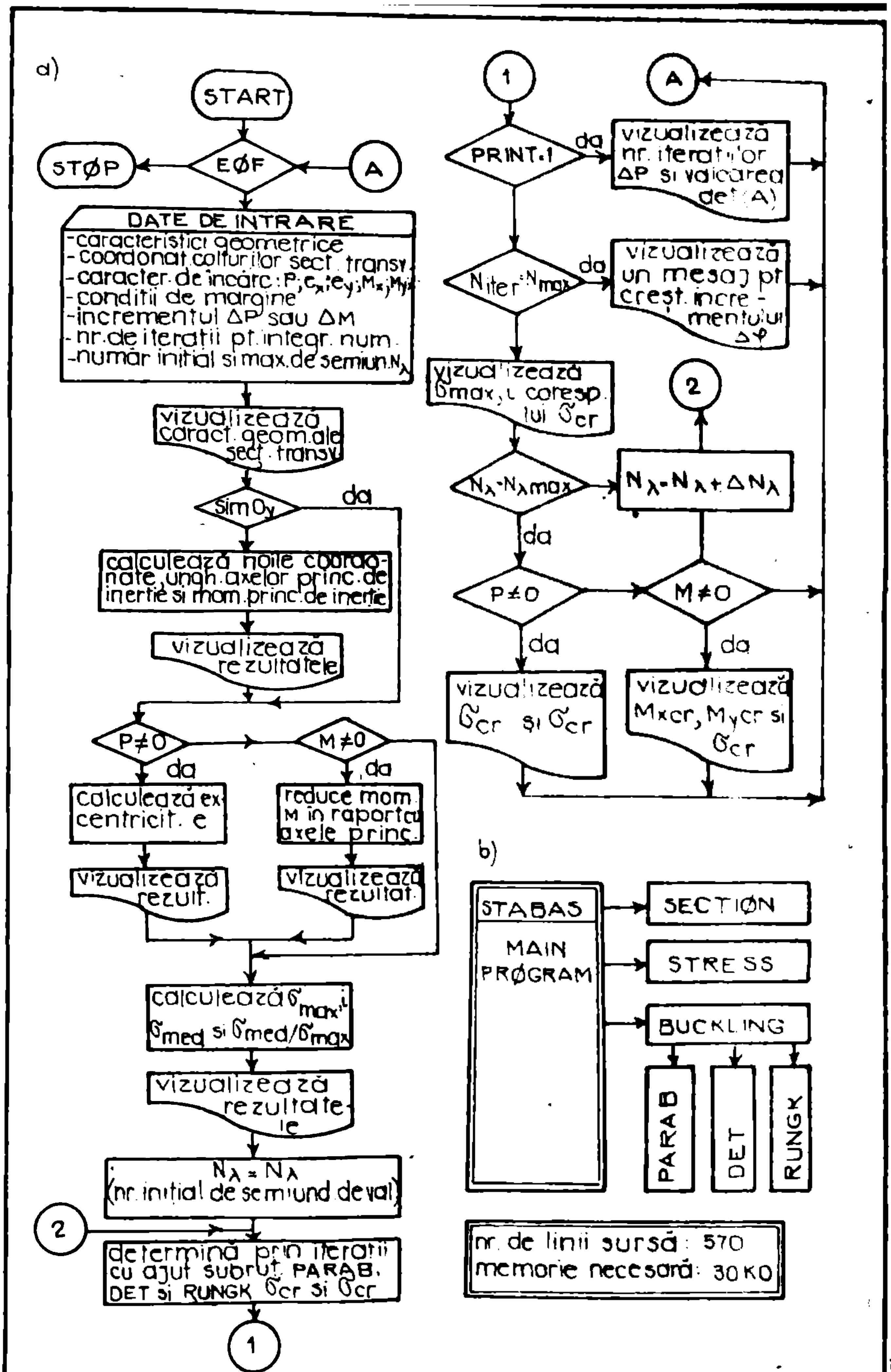

a)
START
EØF
STØP
A
DATE DE INTRARE
-caracteristici geometrice
-coordonat colţurilor sect. transv.
-caracter. de încărc.: P; ex; ey; Mx; My
-condiţii de margine
-incrementul ΔP sau ΔM
-nr. de iteraţii pt. integr. num.
-număr iniţial şi max. de semiun. Nλ
vizualizează caract. geom. ale sect. transv.
Sim Oy
da
calculează noile coordonate, ungh. axelor princ. de inerţie şi mom. princ. de inerţie
vizualizează rezultatele
P≠0
M≠0
da
calculează excentricit. e
reduce mom. M în raport cu axele princ.
vizualizează rezult.
vizualizează rezultat.
calculează σmax şi σmed şi σmed/σmax
vizualizează rezultatele
Nλ = Nλ (nr. iniţial de semiund. de val)
2
determină prin iteraţii cu ajut. subrut. PARAB, DET şi RUNGK σcr şi σcr
1
PRINT.1
vizualizează nr. iteraţiilor ΔP şi valcarea de t(A)
Niter=Nmax
vizualizează un mesaj pt. creşt. incrementului ΔP
vizualizează σmax, i coresp. lui σcr
Nλ=Nλmax
Nλ=Nλ+ΔNλ
P≠0
M≠0
vizualizează σcr şi σcr
vizualizează Mxcr, Mycr şi σcr
b)
STABAS
MAIN PRØGRAM
SECTIØN
STRESS
BUCKLING
PARAB
DET
RUNGK
nr. de linii sursă: 570
memorie necesară: 30 KO

Fig 10.16

lo.4.2. Structura programului.

Schema bloc a programului este prezentată în figura lo.16.a. iar schema logică în figura lo.16.a. Programul lucrează în dublă precizie admiţînd un set nelimitat de seturi de date. Programul conţine un număr de 57o linii sursă asamblate în programul principal şi în 6 subrutine, fiindu-i necesară o memorie de 3o KO. Programul este redactat în două variante:

- STABAS o1- versiune în limbaj FORTRAN pentru calculatoare FELIX ;
- STABAS o2 - versiune în limbaj BASIC pentru microsisteme de calcul.

Sursa programului este conţinută în anexă.

lo.4.3. Performanţe şi rezultate oferite de program.

Programul STABAS furnizează tensiunea critică şi tensiunile maxime pe muchii, forţele sau momentele critice şi numărul semiundelor de voalare. Programul îşi calculează caracteristicile geometrice ale secţiunii barei, pe care le furnizează ca rezultate intermediare.

In varianta actuală programul STABAS este conceput pentru a fi utilizat ca un modul de verificare în cadrul unui sistem modularizat de programe pentru proiectarea asistată /32/ a structurilor metalice din bare cu pereţi subţiri.

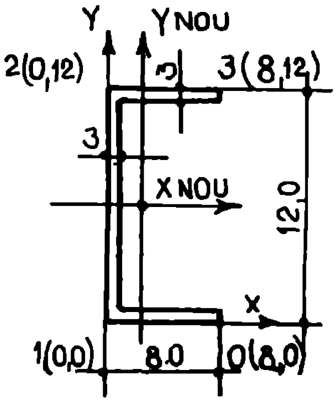
lo.4.4. Exemplu de control. Comparaţie cu rezultatele experimentale.

In figura lo.17 se prezintă listarea rezultatelor pentru un exemplu de control rulat cu STABAS, iar în tabelul lo.1 comparaţia rezultatelor obţinute pe calculator cu cele determinate pe cale experimentală, conform programului din capitolul IX (tab.9.5).

```
     CALCULUL SARCINILOR CRITICE LA FLAMBAJ PENTRU PROFILE
                COMPUSE DIN MAI MULTE ELEMENTE

     TOATE MUCHIILE RAMIN DREPTE
     TOATE DIMENSIUNILE CM, KP

     COORDONATELE PUNCTELOR DE CONTUR :

PUNCT                  X                      Y
  0          8.00000E + 00           .00000E + 00
  1           .00000E + 00           .00000E + 00
  2           .00000E + 00         1 .20000E + 01
  3          8.00000E + 00         1 .20000E + 01

   CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE SECTIUNII TRANSVERSALE

     LUNGIMEA   L = 120.0000

     LATIMILE ELEMENTELOR
          8. 0000
         12. 0000
          8. 0000

     GROSIMILE ELEMENTELOR

          .3000
          .3000
          .3000
```

SVELTETEA ELEMENTELOR

26.6667
4o.0000
26.6667




Bara nr.20 (tab.9.5)

Fig. 10.17

CENTRUL DE GREUTATE : EX= 2.28572E+00
EY = 6.00000E+00 ;
SUPRAFA F = 8.40000E+00
MOMENTE DE INERTIE : IX=2.16000E+ 02
IY = 5.85143E+01
IXY = .00000E+00
SOLICITARE MAXIMA ADMISA PAD=2.000E+03

EXCENTRICITATEA FORTEI UX=.00000E+00
UY = .00000E+00
MOMENT MAXIM ADMIS MX=6.00000E+03
MY = .00000E+00
COORDONATELE NOI ALE PUNCTELOR DE CONTUR :

| PUNCT | XNOU | YNOU |
|---|---|---|
| 0 | 5.71428E+00 | -6.00000E+00 |
| 1 | - 2.28572E+00 | -6.00000E+00 |
| 2 | - 2.28572E+00 | 6.00000E+00 |
| 3 | 5.71428E+00 | 6.00000E+00 |

CARACTERISTICILE GEOMETRICE NOI ALE SECTIUNII TRANSVERSALE:

DIRECTIA AXEI PRINCIPALE: ALFA = .00000E+00

MOMENTE PRINCIPALE DE INERTIE :

IXI = 2.16000E+02
IETA = 5.85143E+01

EXCENTRICITATEA UXI = .00000E+00 UETA = .00000E+00

TENSIUNEA MAXIMA PE MUCHIE :

RAPORTUL TENSIUNILOR DE REFERINTA

| PUNCT | |
|---|---|
| 0 | 1.00000E+00 |
| 1 | 1.00000E+00 |
| 2 | 1.00000E+00 |
| 3 | 1.00000E+00 |

INCEPUTUL ITERATIILOR LA SKI = 2.38095E+02

NUMARUL DE SEMIUNDE : NL = 1.00000E+01

| ITER | FACTOR P | DET |
|---|---|---|
| 1 | 1.00000E+00 | 1.00000E+00 |
| 2 | 2.00000E+00 | 7.69911E-01 |
| 3. | 3.00000E+00 | 5.78693E-01 |
| 4. | 4.00000E+00 | 4.22230E-01 |
| 5 | 5.00000E+00 | 2.96326E-01 |
| 6 | 6.00000E+00 | 1.97569E-01 |
| 7 | 7.00000E+00 | 1.22928E-01 |
| 8 | 8.00000E+00 | 6.34857E-02 |
| 9 | 9.00000E+00 | 3.15580E-02 |
| 1o | 1.00000E+01 | 9.03410E-03 |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 1.10000E+01 | 2.19744E-04 |
| 12 | 1.20000E+01 | 2.32024E-04 |
| 13 | 1.10527E+01 | -7.15447E-04 |
| 14 | 1.10119E+01 | -3.57630E-04 |

TENSIUNEA CRITICA LA FLAMBAJ SIGMAIKI = 2.62028E+03

TENSIUNILE PE MUCHII APARTININD LUI SIGMAKI :

2.62028E+03
2.62028E+03
2.62028E+03
2.62028E+03

FORTA CRITICA LA FLAMBAJ PCRI = 2.20104E + 04

SIGURANTA CSIG = 1.10052E + 01

tabelul 10.1

| tipul si secțiunea | lung. [cm] | inc. excentr. | | teste | | rezultate STABAS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_x$ [cm] | $c_y$ [cm] | max [daN/cm²] | $P_{max}$ [daN] | $P_{cr}$ [daN] | $P_{cr}$ [daN/cm²] | max. i [daN/cm²] |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 100 x 65 x 2 | 120,0 | 0,00 | 0,00 | 2190 | 7000 | 6941 | 1726 | 1726 |
| 100 x 65 x 2 | 120,0 | 0,00 | 2,00 | 2461 | 5700 | 5354 | 1820 | 1820 |
| 100 x 65 x 2 | 120,0 | 2,00 | 2,00 | 2510 | 3100 | 2721 | 2281 | 2281 |
| 100 x 65 x 2 | 180,0 | 0,00 | 0,00 | 1989 | 6550 | 6871 | 1711 | 1711 |
| 100 x 65 x 2 | 180,0 | 0,00 | 0,00 | 2543 | 500 | 5355 | 1820 | 1820 |
| 120 x 80 x 3 | 120,0 | 0,00 | 0,00 | 3714 | 20900 | 22000 | 2620 | 2620 |

Se remarcă o bună concordanță a rezultatelor obținute cu STABAS cu cele experimentale.

## 10.5. CONCLUZII

Programele de calcul automat prezentate în acest capitol, elaborate pe baza algoritmilor prezentați în lucrare în capitolele IV, V și VIII însumează un număr de aproximativ 7000 linii sursă program, reprezentind și din acest punct de vedere, o contribuție majoră a lucrării. La acestea se adaugă versiunile pe minicalculator a programului ASEF și pe minicalculator a programului STABAS, care înseamnă încă 6000 de linii sursă.

Programul ASEF este un program multifuncțional de o concepție modernă, competitiv cu alte programe cu performanțe similare, iar din unele puncte de vedere superior. Ca structură și concepție programul ASEF este succeptibil pentru dezvoltări nelimitate.

Este primul program în cadrul Bibliotecii Naționale de Programe (B.N.P) care implementează pe calculator MEF în formulare reziduală, care oferă , între alte avantaje prezentate în cap. IV , posibilitatea cuplării cu MEC.

Programul DBEM este un program preluat din literatură și prelucrat pentru a fi adoptat pe calculatoarele FELIX; este un program şcoală realizat în vederea studierii posibilităţilor de aplicare a metodei elementelor de contur.

Programul STABAS este un program deosebit de performat în ceea ce priveşte studiul instabilităţii barelor cu pereţi subţiri, fiind primul program de acest gen în cadrul B.M.P.

# CAPITOLUL XI

## CONCLUZII FINALE. CONTRIBUTII.

Procedeele şi metodele de calcul ale structurilor de rezistenţă ale stavilelor metalice sau similare s-au perfecţionat în mod deosebit datorită dezvoltării producţiei de echipamente de calcul automat şi a utilizării lor pe scară tot mai largă în proiectarea structurilor pentru construcţii.

In acest sens, se conturează două direcţii distincte : elaborarea unor metode de analiză cu caracter general, care permit abordarea tuturor aspectelor unui calcul static sau dinamic, liniar sau neliniar şi, pe fondul lor, a unor programe de calcul automat multifuncţionale, precum şi, respectiv, a unor procedee specifice pentru calculul stavilelor sau a unor anumite structuri şi elemente structurale ale acestora concretizate prin algoritmi şi programe de calcul specializate.

Aceste două direcţii se regăsesc şi în prezenţa lucrare.

Astfel, după elaborarea teoriei matematice a structurilor, care asigură cadrul de elaborare şi dezvoltare a metodelor de calcul în mecanica structurilor, se prezintă instrumentul matematic reprezentat de teoria reziduurilor ponderate care se aplică la formularea generalizată a metodei elementelor finite, concretizată printr-un program de calcul automat multifuncţional cu structură modulară. Ca alternativă se prezintă apoi metoda elementelor de contur punîndu-se accentul pe posibilitatea de cuplare într-un algoritm comun cu metoda elementelor finite. Si această metodă este concretizată printr-un program de calcul destinat rezolvării problemelor plane din mecanica structurilor. In finalul primei părţi a lucrării se prezintă o metodă numerică specializată pentru calculul stavilelor metalice cu structură chesonată, bazată pe teoria barelor cu pereţi subţiri şi a suprafeţelor prismatice. Metoda admite o rezolvare numerică generalizată prin combinare cu metoda elementelor finite, precum şi rezolvări particularizate pe tipuri de stavile utilizînd metodele matriciale clasice.

Partea a doua a lucrării care se ocupă cu calculul neliniar şi de stabilitate a structurilor şi elementelor structurale cu pereţi subţiri caracteristice stavilelor metalice urmează acelaşi algoritm principal, de elaborare, dezvoltare şi parcurgere de la general la particular a teoriilor şi metodelor de calcul.

Astfel, se formulează teoria unitară generalizată a barelor cu pereţi subţiri şi se dezvoltă o teorie neliniară aplicabilă barelor cu pereţi subţiri şi suprafeţelor prismatice lungi care are la bază teoria generală elaborată de Koiter . Se prezintă apoi relaţiile practice pentru verificarea la stabilitate a bordajelor stavilelor metalice şi se elaborează o metodologie de determinare a caracteristicilor geometrice echivalente pentru analiza postcritică. In final, se prezintă un algoritm de calcul pentru analiza instabilităţii barelor cu pereţi subţiri solicitate la compresiune şi la compresiune şi încovoiere concretizat printr-un program de calcul automat . Relaţiile şi metodologiile de calcul propuse sînt susţinute printr-un amplu program experimental.

Performanţele programelor de calcul şi valabilitatea considerentelor teoretice pe baza cărora au fost elaborate sînt controlate şi validate prin analiza comparativă a rezultatelor cu ajutorul altor programe de calcul omologate de către Comisia de automatizări în construcţii sau prin testări experimentale.

In conformitate cu concepţia care a stat la baza elaborării lucrării, principalele contribuţii ale autorului se pot grupa în trei clase : (1) contribuţii la dezvoltarea teoriilor şi metodelor generale de calcul ; (2) contribuţii la elaborarea unor metode şi relaţii de calcul specializate pentru anumite tipuri de structuri şi elemente structurale şi la studiul experimental al comportării acestora ; (3) contribuţii la elaborarea unor programe de calcul automat.

In prima clasă se evidenţiază următoarele contribuţii aduse de autor :

- formularea teoriei matematice a structurilor şi, în cadrul acesteea, definirea structurilor matematice caracteristice, a legilor de generare a modelelor de calcul şi formularea unui criteriu de analiză a convergenţei soluţiilor aproximative ;
- formularea ecuaţiilor fundamentale ale mecanicii structurilor în cadrul teoriei reziduurilor ponderate şi clasificarea pe această bază a metodelor de calcul numeric ;
- formularea generalizată a metodei elementelor finite pe baza teoriei reziduurilor ponderate, pentru probleme liniare şi neliniare, statice, dinamice şi de propagare, iar în cadrul aceteia dezvoltarea algoritmilor şi procedurilor numerice pentru elaborarea unui program de calcul. Este prima încercare de prezentare, unitară şi completă, în această formă, a metodei elementelor finite în literatura tehnică cunoscută sau în circulaţie la noi în ţară ;
- prezentarea comparativă cu metoda elementelor finite a metodei elementelor de contur ;
- formularea generalizată, unitară a teoriei liniare a barelor cu pereţi subţiri ;
- dezvoltarea teoriei neliniare a barelor cu pereţi subţiri şi a formulării acesteea cu ajutorul metodei elementelor finite ; definirea în acest scop a elementului finit de bară cu pereţi subţiri .

In cea de a doua clasă de contribuţii se subliniază :

- analiza critică comparativă a principalelor metode de calcul utilizate în proiectarea stavilelor metalice şi stabilirea limitelor de aplicare a acestora ;
- elaborarea unei metode de calcul bazate pe teoria suprafeţelor prismatice pentru calculul stavilelor metalice cu structură chesonată;
- analiza şi sinteza metodelor şi relaţiilor de calcul a caracteristicilor geometrice echivalente în analiza postcritică a barelor cu pereţi subţiri cunoscute în literatura de specialitate şi în normele de calcul ;
- determinarea unor formule pentru evaluarea caracteristicilor geometrice echivalente ale barelor cu pereţi subţiri în domeniul postcritic ţinînd seama de efectul imperfecţiunilor geometrice ;
- determinarea curbelor de voalare ale pereţilor barelor cu pereţi subţiri ;
- determinarea unei relaţii pentru calculul forţei critice de voalare ţinînd seama de efectul imperfecţiunilor ;

- prezentarea unui algoritm pentru analiza numerică a instabilității barelor cu pereți subțiri ;
- realizarea programului experimental pentru studiul comportării barelor cu pereți subțiri în domeniul postcritic. In acest sens se face sublinierea că încercarea la compresiune centrică și excentrică a barelor ᒣᒧ cu simetrie punctuală reprezintă o premieră absolută.

In cea de a treia clasă de contribuții intră elaborarea celor trei programe de calcul automat prezentate în lucrare :

- elaborarea programului de calcul multifuncțional cu structură modulară, pentru Analiza Structurilor cu Elemente Finite -ASEF- versiunile pe calculatoare FELIX și minicalculatoare INDEPENDENT sau CORAL;
- elaborarea programului DBEM, în versiunea pe calculatorul FELIX, pentru analiza structurilor plane cu metoda elementelor de contur în formulare directă ;
- elaborarea programului STABAS pentru analiza instabilității barelor cu pereți subțiri solicitate la încovoiere și încovoiere cu compresiune , versiunile în FORTRAN și BASIC.

Rezultatele studiilor privind dezvoltarea și aplicarea metodelor de calcul și a calculului automat în problemele de mecanică structurilor au fost valorificate în cadrul a 7 contracte de cercetare și colaborare cu producția în perioada 1980-1986. Aceste contracte, unele dintre ele finalizate cu recomandări de calcul și proiectare sînt conținute în lista cu bibliografia /75/ de la sfîrșitul lucrării.

Pe problematica, abordată în lucrare au fost publicate un număr de peste 40 de lucrări și studii, multe din ele avînd conținutul unor capitole și subcapitole dezvoltate în lucrare. Intre acestea se evidențiază lucrările publicate în cadrul unor manifestări internaționale de prestigiu :

- Colocviul Internațional de Stabilitatea Structurilor metalice de la Paris, 1983, /84/, /138/.
- Colocviul Internațional de stabilitate de la Timișoara, 1982, /83/, /139/.
- Congresul de structuri spațiale, IASS-1985, Moscova /52/,
- Colocviul zonal de stabilitate de la Budapesta 1986 /64/, /65/, /87/, /88/.
- Conferința Internațională de metode numerice și procedee experimentale de la Porto-Caras, Grecia, 1986 /66/.
- Conferința de structuri spațiale de la Budva, Iugoslavia 1986, /67/.

La acestea se adaugă, în aceeași ordine de importanță, rapoartele prezentate în cadrul subcomisiei de " Stabilitatea structurilor din oțel " a Academiei R.S.R., /60/, /72/ autorul fiind membru al acesteea.

Programele de calcul automat ASEF, STABAS și DBEM au fost prezentate în cadrul lucrărilor SNIC/53/,/69/,/70/,/71/, fiind implementate în biblioteca de programe a Centrului de calcul electronic al I.P.T.V.T.

# B I B L I O G R A F I E


1. Abrocz,J., - Shell Stability Analysis - Theory and Practice. Proc. of the I.U.T.A.M. Symp., Univ.College, London, 31 Aug., 1982.

2. Absi,E. - Méthodes de calcul numerique en élasticite. Ed. Eyrolles, Paris, 1978.

3. Antes,H., Ottenstreuer,M., Schmid,G., - Randelemente, Sem.Konstr. Ingenieurbau und Mechanik im WS 1981/1982, Mitt.Nr. 82-2, Bochum, märz 1982.

4. Arnold,V.,I.,- Metodele matematice ale mecanicii clasice. Ed.St.şi Enciclopedică, Bucureşti, 198o.

5. Augustin,P., - Calculul structurilor de aviaţie. Ed. Tehn.,Bucureşti, 1984.

6. Avram,C., Bob,C., Friedrich,R., Stoian, V.,-Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite, teoria echivalenţelor Ed.Acad. R.S.R., Bucureşti, 1984.

7. Bologh,E., Krieger,F. - Contribuţii la calculul şi proiectarea clapetelor. I.C.C.P.H.R., Timişoara, 1973.

8. Banergee,K.,J.,Butterfield, R., Boundary Element Methods in Engineering Science. Mc.Graw Hill Book Company (U.K.) Limited, London, 1981.

9. Bathe,K.,J., Wilson,E., I.,- Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, New Jersey, 1976.

1o. Bănuţ,V., Popescu,M.,- Stabilitatea structurilor elastice. Ed.Acad. R.S.R., Bucureşti, 1975.

11. Bănuţ,V., Calculul neliniar al structurilor. Ed.Tehn., Bucureşti, 1981.

12. Beleş,I., - Contribuţii la calculul spaţial al stavilelor plane. Teză doct.I.C.B., Bucureşti, 1972.

13. Beleş,I., - Placa ortotropă cu diafragme St.cer.meç.apl.Acad.R.S.R. Tom.35.Nr.3, 1976.

14. Beleş,I.,-Ieremia,M., Răduică,M. - Analiza statică prin metoda elementului finit a structurii spaţiale a vanelor segment. A II-a Conf.de Constr.Metalice. 11-13 oct.,1979, Timişoara.

15. Beleş,A., Mihăilescu,C., Mihăilescu,St., - Calculul construcţiilor amplasate pe terenuri deformabile.E.Acad.R.S.R.,Bucureşti, 1977.

16. Borş,I., - Studiul plăcilor plane cu goluri. Teză de doctorat. I.P.Cluj-Napoca, 1984.

17. Braham,M., - Problemes d'intéraction entre deux modes d'instabilité dans les colonnes a parois minces. A II-a Conf. de Constr.Met.,Timişoara, 11-13 oct.1979, Vol.1.

18. Brătianu,C., - Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor. Ed. Acad.R.S.R., Bucureşti, 1983.

19. Brodka,J., Lubinski,M., - Construcţii metalice uşoare. Ed.Tehn., Bucureşti, 1975.

2o. Brebbia,C., A., Telles, J., C., F., Wrobell,L.,C., - Boundary Element Technique,Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg New-York. Tokio,1984.

21. Brebbia,C.,A.(ed), - Boundary Element Methods in Ingineering. Proc.of the Fourth Int.Sem.Southampton,England, Sept.1982 Springer. Verlag.Berlin. Heidelberg.New-York.1982.

22. Brebbia,C.,A. (ed), - Boundary Elements Methods Proc. of the 3 rd Int. Sem., Irvine,California, July 1981,Springer Verlag.Berlin.Heidelberg. New-York 1981.

23. Burkhard,Sch.,- Ein Finite Element Verfahren zur Berechnung Vor verformter, Ausgesteifter Rechteck platten unter Berück sichtingung von Geometrisher und Material nichtlinearität. D.I. Disertation. Techn.Univ.Berlin, 1975.

24. Caraba,I., Dubină,D., Stoian,V., - Metode matematice de calcul numeric a grinzilor metalice cu moment de inerţie variabil.Bul.St.Tehn. al I.P."Traian Vuia" Timişoara, seria construcţii, tom.23(39), fasc.1, Timişoara,1978.

25. Calladine,C.,B., - Theory of Shell Structures. Cambridge Univ. Pess, Cambridge 1983.

26. Căpăţînă,D., Calculatorul în ajutorul proiectării construcţiilor Ed.Tehn., Bucureşti, 1976.

27. Chalupa,A., Djubek,J, Skaloud,M. - Stability Problems in the New Edition of Czechoslovak Design Specifications for Steel Structures. Proc.of the Reg.Col. on the Stability of Steel Structures, Budapest, 1977.

28. Cicin,P., - Die Fischbauchklappe und verwadthe Wehrsysteme. Der Bauingenieur Heft 1o,11 Oct.und Nov. 1958.

29. Coan,M., - Large Deflection Theory a Plates with Small Initial Curvatures in Edge Compression, ASME, J.of Struct. Div. vol. 18, 1951 .

3o. Cuteanu, E., Marinov,R., - Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor. Ed.Facla, Timişoara, 198o.

31. Cuteanu,E., Dubină,D., ş.a. -Algoritmi şi sisteme pentru proiectarea pe minicalculatoare a structurilor metalice. I.C.C.P.D.C. - Fil. Timişoara, contract nr.313d/85, 1985.

32. Cuteanu,E., Dubină,D., ş.a. - Sistem de proiectare asistată de calculator pentru construcţii metalice. I.C.C.P.D.C-Fil.Timişoara, contract 1o71/1986.

33. Damkilde,L., - Beregning of Plader of Elastik-Plastisk Materiale ved Hjaelp of Element metoden R. 186, Dept.of Struct. Eng.Techn.Univ.of Denmark, Lyngby,1984.

34. Damkilde, L.,- Stability of Plates of Elastic -Plastic Material. R.187,Dept. of Struct.Eng.Tehn. Univ.of Denmark, Lyngby, 1984.

35. Dawson,R.,G., Walker,A.,C. - Postbuckling of Geometrically Imperfect Plates.J.of Struct. Div., ASCE, vol.98, ST 1,Ian., 1972.

36. Débardes,D., -Méthodes Fonctionnelles et variationelles. Evolution en théories modernes en élasticité et plasticité. Ed. du Batiment et des Travaux Publics. Paris, 1979.

37. De Wolf,V.,T., Peköz,T., Winter,G., - Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members.J. of Struct. Div., ASCE, vol.1o5, No.ST 1o, Oct.,1979.

38. Dehouse,N,M - Les bordages raidis en construction hidraulique. Mémoire nº 1- Nouvelles série C.E.R.E.S. Univ. de Liège, 1962.

39. Dehouse,N.,M., Deprez,J. -Le bordages orthotropes plans. Calcul d'une porte plane d'ecluse. Mémoire nº 22 - Nouvelle série C.E.R.E.S. Univ.de Liège,1968.

4o. Deprez,J., - Le dimensionement optimum des bordages raidis plans. Applications au calcul d'une porte d'e'cluse.Public.de la Fac.des Sc.Appliqueés de L'univ.de Liège, Nr.1?, 1969.

41. Demidovitch, B., Maron, I., - Eléments des calcul numerique. Ed. MIR, Moscou, 1979.

42. Desai,C.,S., Abel,F.,J.,- Introduction to the Finite Element Method. V.N.R., New-York, 1972.

43. Desmond,P.,T., Peköz ,T., Winter,G. Edge-Stiffeners for Thin-Walled Members.J.of Struct. Div., ASCE , vol.1o7, No.ST 2, Feb.,1981.

44. Desmond,P.,T., Peköz,T., Winter,G.,- Intermediate Stiffeners for Thin-Walled Members. J.of Struct.Div., ASCE, vol.1o7, No ST 4, April, 1981.

45. Dhatt,G., Touzot,G.,-The Finite Element Method-Displayement.John Wiley.Chichester,New-York, Toronto, 1984.

46. Dincă,G.,-Metode Variaţionale şi aplicaţii. Ed.Tehn., Bucureşti, 198o.

47. Dold,A., Eckmann, B., (editors) - Appl. of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics, Joint.Symp.IUTAM/IMU, Marseille, Sept. 1-6, 1975. Lecture Notes in Mathematics, 5o3, Springer Verlag, 1976.

48. Dorn, W.,S.,Mc Craken, D.,D., - Metode numerice cu programe în FORTRAN. (trad.din L engl.).Ed.Tehn., Bucureşti, 1976.

49. Dubas, P., Voilement des barres et des plaques. 3-emé Coll.Int. "Stabilité des Structures métalliques", Paris, 16-17 nov. 1983.

5o. Dubină,D., Stoian,V., Dogariu,E., - Generalizări matematice în mecanica structurilor. Ses.Interjud. de ref. şi com.St., Baia Mare 1979. Bul.St., Baia Mare, 198o.

51. Dubină, D., Dogariu,E.,-Consideraţii privind calculul plăcilor plane subţiri încărcate cu acţiuni concentrate şi distribuite liniar. Ses. interjud. de ref. şi com.şt. Baia Mare 1979. Bul.şt., Baia Mare, 198o.

52. Dubină,D.,Ivan,M., Stoian,V.,-Spaţial Analysis of Steel Gates with Cylindrical or Prismatic Planking IASS,Int.Congr. "Theor. and Exp. Investig. of Spaţial Struct., Appl. of Shells in Eng.Struct:". Moscow, 23-28 sept., 1985.

53. Dubină,D., Eleş,P., Bran,C., - Program de calcul pentru verificarea la stabilitate a barelor cu pereţi subţiri solicitate la compresiune cu încovoiere. SMIC-IV, Sibiu, 1984.

54. Dubină,D., Caraba,I.,- Modern Methods of Steel Gate Analysis.Bul. St.tehn., I.P."Traian Vuia" Timişoara, seria constr.tom. 3o(44), Timişoara, 1985.

55. Dubină,D.,-Calculul platelajelor cilindrice și prismatice ale stavilelor metalice. Simp. naț." Structuri spațiale - teorie și practică", Cluj-Napoca, 16-18 mai 1985.

56. Dubină, D., - Formularea problemelor din mecanica structurilor în cadrul teoriei reziduurilor medii ponderate. A 4-a Conf.de constr. metalice, Timișoara, 11-13 oct., 1985, vol.2.

57. Dubină,D., - Spațial Analysis of Steel Gates. 4-th Conf.on Steel Struct., Timișoara, 11-13 oct.1985,vol.2.

58. Dubină,D., - Influența imperfecțiunilor geometrice în calculul lățimii echivalente a barelor cu pereți subțiri. A 4-a Conf.de constr. Metalice, Timișoara, 11-13 oct. 1985,vol.1.

59. Dubină, D., Fleseriu,E., - Determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale în analiza postcritică a barelor cu pereți subțiri formate la rece. A 4-a Conf.de constr. Metalice, Timișoara, 11-13 oct 1985, vol.1.

6o.Dubină, D., - Considerații privind stabilitatea locală a barelor cu pereți subțiri formate la rece. Acad.R.S.R. Baza de cerc. Timișoara, Comisia de stabilitatea Struct. din oțel Timișoara 4 aprilie, 1985.

61. Dubină, D., - Avantajele utilizării algoritmilor cu blocuri funcționale pentru realizarea programelor de calcul complexe bazate pe tehnica elementelor finite. A 3-a Conf.Nat. de Cibernetică, București, 3-4 oct., 1985.

62. Dubină,D., Ivan,M., - Proiectarea asistată de calculator a structurilor de rezistență pentru construcții de mare complexitate. A 3-a Conf.Nat. de Cibernetică, București, 3-4 oct. 1985.

63. Dubină, D. Caraba, I., Munteanu, I., Sotici,A. - Aplicarea metodei elementelor finite la proiectarea unei palete metalice pentru rotoarele aeroelectrice cu ax orizontal cu de 2o m. A 4-a Con f.de constr. metalice, Timișoara, 11-13 oct., 1985, vol.2.

64. Dubină, D.,-On the Stability of Thin-Walled Members subjected to Centric Compression and Bending Compression. STABAS Computer Program. Proc.of Reg. Coll. 1986, "Stability of Steel Structures", Budapest, Hungary, Sept. 25-26, 1986.

65. Dubină,D., Fleseriu,E.,- Equivalent Geometric Characteristics in Stability Analysis of the Thin-Walled Cold-Formed Members. Proc.of.Reg.Coll.1986 "Stability of Steel. Structures", Budapest, Hungary, Sept.25-26, 1986.

66. Dubină,D.,-STABAS - Computer Program forthe Stability analysis of Thin-Wolled Members. 3-rd Int.Cond."Computational Methods and Exp. Measurement" , Porto Carras, Grece, 2-5 Sept., 1986.

67. Dubină,D., - Finite Element Analysis of Steel Gates. Proc.of. int.Conf. "Steel Structures - Recent Research Advances", Budva, Yugoslavia, Sept., 28-oct. 1, 1986.

68. Dubină,D., - Formularea generalizată a metodei elementului finit. St.Cerc.Mec.Aplicată. Acad.R.S.R. Tom.45,Nr.4. 1986.

69. Dubină,D., - Analiza instabilității barelor cu pereți subțiri cu ajutorul programului STRARS o2.SNIC V, Sibiu, 1986.

7o. Dubină,D., Bran,O., - ASEP - Program de calcul modularizat pentru analiza structurilor cu elemente finite. SNIC V, Sibiu, 1986.

71. Dubină,D., Ivan,M., Ciocîrlie,H., Algoritm și program de calcul pentru rezolvarea problemelor plane din mecanica structurilor cu metoda elementelor de contur. SNIC V, Sibiu, 1986.

72. Dubină,D., Considerații privind formularea teoriei neliniare a barelor cu pereți subțiri. Acad.R.S.R., Baza de cerc. Timișoara, Comisia de stabilitatea structurilor din oțel. Timișoara 4 iunie 1986.

73. Dubină,D., Iosip,M., Caraba,I. - Modele de calcul simplificate pentru analiza cu elemente finite a structurilor de mare complexitate. SNIC V, Sibiu, 1986.

74. Dubină,D., Fleșeriu,E., - Theoretical and Experimental Investigation Concerning the Determinations of the Geometric Characteristics of Thin-Walled Cold-Formed Compressed Members in Post-Buckling Range. Al.IV-lea Simp.Naț. de tensometrie, Brașov, 24-27 sept.1986.

75. Dubină,D., Dogariu,A., - Voalarea pereților componenți ai profilelor formate la rece, capitolul III în " Probleme speciale de instabilitate în structurile de oțel obișnuite și ușoare. Cercetări teoretice și experimentale privitoare la flambajul prin încovoiere - răsucire al profilelor formate la rece, în starea postvoalată a pereților subțiri" ICCPDC-Fil.Timișoara, contract nr.169/198o, Lista CNST nr.1o4 poz.plan 3.VI.23.b. Faza 1, 198o - Problema suprapunerii flambajului prin încovoiere-răsucire cu voalarea pereților ;
Faza 2, 1981-Studiu și recomandări pentru proiectare.

76. Dubină,D.,-Proiectarea asistată de calculator a structurilor metalice pentru construcții energetice.T.A.G.E. București, Nr.6994/ 11.1o.1984, contract C.U.A.S.C. : C.U.Timișoara.

77. Dubină,D.,-Calculul de rezistență și stabilitate al structurilor metalice pentru construcții energetice. T.A.G.E. București,Nr.15784/19.12.1984, contract C.U.A.S.C. C.U. Timișoara.

78. Dubină, D., - Sisteme de calcul automat al structurilor. T.A.G.E. București, Nr.1497/7.o3.1985, contract C.U.A.S.C. C.U. Timișoara.

79. Edlund,B., - Axial Strength and Stiffness of Thin-Walled Plates and Sections.3-ème Coll.Int." Stabilité des structures metalliques", Paris, 16-17 nov.1983.

8o. Epstein,M., Murray,D.,V. - Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin-Walled Beams.Int.J.of Solids and Struct., Vol 12, No.12, Dec.1976.

81. Epstein,M., Nixon,D., Murray,D.,V., - Large Displacements Inelastic Analysis of Beam-Columns. J.of the Struct.Div., ASCE,vol.104, ST5, May 1978.

82. Foray,M.,J., - Calculul variaţional în ştiinţă şi tehnică (trad. din l.engleză).Ed.tehn., Bucureşti, 1975.

83. Fleşeriu,E., Dubină,D., Dogariu,E. - Problems of Local Buckling Analysis of Thin-walled Cold-rolled Open Sections.3-rd Int.Coll on Stability.Proc.of the First Session,Timişoara, 16 th oct., 1982.

84. Fleşeriu,E., Dubină,D., Dogariu,E., - Études theoriques et experimentales sur Stabilite locale des barres a parois minces avec profil ouvert.3-ème Coll.Int." Stabilité des structures metalliques"., Paris 15-17 nov.Rap.preliminaire.

85. Fleşeriu,E., Dubină,D., Dogariu,E., - Études theoriques et experimentales concernant l'influence de la souplesse des parois sur le flambement par flexion-torsion dans l'etat post-vollé des parois,au barres avec profil ouvert monosymetrique, formée a froid.Al III-lea Simp.Naţ. de tensometrie, 28 sept.1-oct. 1983 Timişoara.

86. Fleşeriu,E., Dubină,D., Dogariu,E., Bulzesc ,N., - Program experimental pour l'étude électrotensiometrique des barre élansées a parois minces, formées a froid, avec profil auvert monossymetrique sollicitées a la compression centrique et éxcentrique.Al III-lea Simp.Naţ. de tensometrie , 28 sept. 1 oct., 1983 Timişoara.

87. Fleşeriu,E., Dubină,D., Generalized Theory in the Stability Analysis of the Thin-walled Beams subjected to Shear,Bending an Torsion. Proc.of the Reg.Coll.1986 " Stability of Steel Structures", Budapest, Hungary,sept. 25-26,1986.

88. Fleşeriu,E., Dubină,D. - Experimental Investigations Concerning the Thin-walled Cold-Formed Bars subjected to Centric and Excentric Compression. Proc.of the Reg.Coll.1986 "Stability of Steel Structures", Budapest, Hungary, Sept. 25-26, 1986.

89. Fleşeriu,E., Dubină,D.,- Experimental Research concerning the Post. Bukling Behaviour of the Slender Thin-walled Cold-Formed Members. Al IV-lea Simp.Naţ.de Tensometrie.Braşov 24-27 sept. 1986.

90. Fleşeriu,E., Munteanu,I.,-Considerations on Flexural-torsional Buckling superpozed to Local Wall Buckling of Cold-Formed Thin-Walled Sections. 3-rd Int. Coll.on Stability .Proc. of the First.Ses., Timişoara, 16 th ,oct. 1982.

91. Fleşeriu,E., - Experimental Investigations on the Flexural -torsional Buckling of Cold-rolled Sections with Buckled Twin-Wals. 3-rd Int. Coll.on Stability Proc.of the First. Ses.Timişoara 16 th 1982.

92. Fleşeriu,E - Contributions à la formulations d'une théorie generalisée de la stabilité de l'equilibre des poutres à parois minces avec profil ouvert, sollicitées à la flexion avec cisaillement et torsion. 12-th Yu.Conv. Congr.of National and Appl. Mechanics, Beograd, 1975.

93. Galambos,V., T.- A World View of Beam Stability Research and Design Practice.3 -rd Int.Coll. Stab.of Metal Struct., George Winter Mem.Ses., Toronto, May 1983.

94. Gashon,H., Galea,Y., Stabilité des structures. Prise en compte des effects des imperfections dans les barres. Constructions Metallique, nº 4, 1977.

95. Ghobarah,A.,A., Tso, W.,K. - A Non-linear Thin-Walled Beam Theory. Int J.of Mec.Science, Vol.13, No.12, Dec.1971.

96. Ghobarah, A.,A., Tso,W.,K., - Overall and Local Buckling of Channel Columns,J.of the Eng.Mech.Div., ASCE, Vol.95 ST 2,Avril. 1969.

97. Gioncu,V., - New Conceptions, Trends and Perspectives in the Theory of Postcritical Behaviour of St ructures. 3-rd Int.Coll. en Stability, Proc.of the First.Ses., Timişoara, 16 th, 1982.

98. Gioncu,V., Fleşeriu,E., Munteanu,I. Recherches théoriques concernent la superposition du flambage par flexion-torsion avec voilement des parois minces.3-ème Coll.Int,sur la "Stabilite de Strud.Metalliques", Paris, nov.1983.

99. Gioncu,V., Ivan,M. -Interaction between Flexural Buckling and Torsional-Flexural Buckling in Thin-Walled Compression Members. IUTAM Symposion, Londra, aug.1982.

1oo.Gioncu,V.,Ivan,M., - Instabilitatea structurilor din plăci curbe subţiri.Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1978.

1o1.Gioncu,V.,Ivan,M., - Bazele calculului structurilor la stabilitate. Ed.Facla, Timişoara, 1983.

1o2.Gioncu,V. Ivan,M., - Teoria comportării critice şi postcritice a structurilor elastice.Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1984.

1o3.Gorbacev,P.,K., -Metod Konecinîh elementov v rascetax procinosti. Sudostroenie, Leningrad,1985.

1o4.Graves Smith,T., - The Post-Buckled Strength of Thin-walled Columns, Fin.Rep.of the 9 th Congress, Int. Assoc for Bridge and Struct.Eng., New-York,1968.

1o5.Grimaldi,A.,Pignataro,M., - Post-Buckling Behaviour of Thin-Walled Open Cross-section Compression Members.J.of Struct.Mec. vol.7,No.2, Avril, 1979.

1o6.Gruber,E., Das formtreue prismatische Faltwerk. Die Bautechnik.Heft 1, Jan,1955,und Heft 2,Febr.1955.

1o7.Halász,O., Ivany,M. Stability Problems in Hungarian specifications and Recommendations for Steel Structures, Proc.of the Reg.Coll. on the Stability of Steel Struct.Budapest,1977.

1o8.Heins,P.,C., Humphreys ,S.,R., - Bending and Torsion interactions of Box Girders.J.of the Struct. Div. ASCE, Vol. 1o5,ST 5, May 1979.

1o9.Hertel,H., -Leichtbau.Springer-Verlag, Berlin, 1965.

11o.Huebner,H.,K. -The Finite Element Method for Engineers. John Wiley New-York,1975.

111.Iffland,J.,S.,B. Folded Plate Structures.J.of the Struct.Div., ASCE vol.1o5,ST 1,Jan,1979.

112.Irons,B., Ahmad,S., - Techniques of Finite Elements. Ellis Horwood Limited.Chicester,198o.

113.Ivan,M.,Dubină,D., Dogariu,E., - Consideraţii privind formularea metodei elementului finit pentru calculul structurilor supuse la actiuni dinamice.Bul.St.tehn.I.P."Traian Vuia" Seria constructii,tom.26(4o), fasc.1,Timişoara,1980.

114. Ivan,M., Dubină,D., -The Mathematical Model in Structural Mecanics.Bul.St.tehn.I.P."Traian Vuia", seria Construcţii,tom. 29(43),Timişoara,1984.

115. Ivan,M., Dubină,D., - The definition of the Mathematical Theory of Structures.A 4-a Conf.de constr.Met.' Vol.o,Timişoara,11-13 oct., 1985.

116. Ivan, M., Dubină,D., Edelin,E.,-Berechnung einer Bogenstaumauer anhand der Methode des Finiten Elements.Bul.St.tehn. I.P."Traian Vuia" ,seria Construcţii,tom.3o(44),Timişoara, 1985.

117. Ivan,M., Dubină,D., Ciocîrlie,H., Application of the Boundary Element Method to Plane Problems in the Theory of Elasticity. Bul.St. tehn., I.P."Traian Vuia", seria Construcţii, tom.31(45),Timişoara, 1986.

118. Ivan,M., Bazele calculului structurilor în domeniul elastic.Ed. Facla, Timişoara, 1985.

119. Ivan,M., -Contribuţii la calculul spaţial al conductelor metalice circulare. Teză de doctorat. I.P."TraianVuia", Timişoara, 197o.

12o. Kalyanaraman,V., Peköz,,T. Analytical Study of Unstiffened Elements. J.of the Struct.Div.,ASCE,vol.1o4,ST.9,sept. 1978.

121. Kalyanaraman,V.,-Local Buckling of Cold-Formed Steel Members. J.of the Struct. Div.ASCE.vol.1o5, St,5, may, 1979.

122. Klöppel,K.,Bilstein,V., -Ein verfahren zur Ertmittlung der Beullasten beliebiger,rechtwinkling abgekanter offener und geshossener Profile nach der Liniaren Beultheorie unter vervendung eines abgewan.delten Reduktionesverfahrens. Veröf. des Inst.für Statik und Stahlbau, Techn.Hochsch. Darmstadt, Heft 16, 1971.

123. Klöppel, K. Unger,B.,-Ein Beitrag zur Ertmittlung der Tragfähikeit dünnwandinger offener Profile aus Kaltgeformten.stahl bei Berüchsichtigung des zusammenwirkens von Kniken, Drillen und Elementbeulen einschliesslich der Berüchtigung des Uberkitishen Beulverhaltens.Veröf. des Inst.für Statik und Stahlbau, Techn. Hochsch. Darmstadt, Hefl.15,1971.

124. Koiter,W.T.,-General theory of shell stability.In"Thin-Shell Theory,New-trends and applications". CISM courses and lectures nr.24o, Springer Verlag, 198o.

125. Koiter,W.,T., -General Theory of Mode Interaction in Stiffened Plate and Shell Structures. Dept.of Mech.Eng.Delft Univ. of Tech.WTHD sept, 1976.

126. Koiter,W.,T.,-The Applications of the Initial Post-Buckling Analysis to Shells, in/ Buckling of Shells" .Proc.of a State of the Art.Coll, Univ. Stuttgart, Germany,May, 6-7, 1982.

127.Kollár,L., Dulácska,E.-Buckling of Shells for Engineers, Akádemiai Kiadó, Budapest, 1984.

128. Kollbrunner,C.,F. Leister,M.-Kniken. Springer-Verlag. Berlin, 1961.

129. Kollbrunner, C.,F., Haydin,N.,-Bertrag zur Berechnung von Stauwehrklappen, Zürich, 1961.

13o. Kragerup,J.,-Buckling of Rectangular Unstiffened Steel Plates in Compression.R. 161, Dept.of Struct.Eng.Tech. Univ.of Denmark, Lyngby, 1984.

131. Kratzig,W.,B., Basar,Y., Wittek,U.,- Nonlinear Behaviour and Elastic Stability of Shells- Theoretical Concept - Numerical Computations-Results, in " Buckling of Shells", Proc.of a State-of-the- Art.Coll. Univ. Stuttgart, Germany, May.6-7 1982.

132. Manko, Z.,- Statishe Analyse von Stahlforpahnlinpletten. Der Stahlbau, Heft.6, 1979.

133. Marciuc,G.,I.,- Metode de analiză numerică. Ed.Acad. R.S.R., București, 1983.

134. Marciuc,G.,I.,Saidurov,V.,V.,- Creșterea preciziei soluțiilor în scheme cu diferențe finite. Ed. Acad. R.S.R., București, 1981.

135. Martin,C., H., Carey,F.,G. - Introduction to Finite Element Analysis . Mc. Graw-Hill Comp., New-York, 1973.

136. Maquoi, R., Massonnet, C.,- Une évaluation simple de la largeur eficace due au traînage de cisaillement Construction metalique, nr.2, 1982.

137. Massonet,C., Deprez,J., Maquoi,R., Muller,R., Fonder,.., - Calculul structurilor la calculatoare electronice (trad.din l.franceză) Ed.Tehn., București, 1974.

138. Mateescu,D., Dubină,D., Mateescu,G.,- Optimisation de la section en forme de T d'une barre biarticulée soumise en compression centrée. 3-ème Coll.Int. "Stabilite des structures metalliques", Paris, 16-17 nov. 1983.

139. Mateescu, D., Dubină,D., Considerations on the Instability of T-Section Steel Members under Centric and Eccentric Compression. 3-rd Int.Coll.on Stability. Proc.of the First. Ses., Timișoara, 16 oct. 1982.

14o. Mateescu, D., Appeltauer, I., Cuteanu, E.,- Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel. Ed. Acad.RSR., București, 198o.

141. Mateescu, D., Caraba,I., - Construcții metalice. Calculul și proiectarea elementelor din oțel. Ed.tehn., București, 198o.

142. Mateescu,D., Ivan,M.,-Conducte metalice circulare cu diametru mare. Ed.tehn., București, 1985.

143. Mazilu,P., Sburlan,F.,S.,- Metode funcționale în rezolvarea ecuațiilor teoriei elasticității Ed.Acad. R.S.R., București, 1973.

144. Mazilu, P., Topa,N., Ieremia, M.,-Teoria și calculul plăcilor ortotrope, Ed. tehn., București, 1983.

145. Mărmureanu, Gh. Rezistența postcritică. Ed.Acad. R.S.R., București, 1985.

146. Mikkola, J.,M., Paavola, J. Finite Element Analysis of Box Girders. J.of the Struct. Div., ASCE Vol. 1o6, N2,6 June. 198o.

147. Moheit,W.,- Zur Ermittlung der Lagerkräfte verschiedener Verschlüsse des Stahlwasserbaues. Der Stahlbau, Heft 3, 1960.

148. Munteanu, I.; Structuri pentru construcţii. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1984.

149. Munteanu,I., Careba,I.,- Botici, A., Dubină,D.,- Studii şi proiect de execuţie pentru paletele aerogeneratoa: lor cu diametrul de 20 şi 30 m. Contract CMST 143/1982.

150. Murray,D., W.,- Technique for Formulating Beam Equations .J.of the Eng. Mech. Div., ASME,vol.101, EM5, oct. 1975.

151. Narayaman, R., Chow,Y.,F.,- Effective widths of Plates Loaded Uniaxially. Thin-Walled Structures. Vol.1, No.2, 1983.

152. Norrie,H.,K., de Vries,G.- The Finite Element Method for Engineers. Academic Press New-York , 1973.

153. Oden, J.,T.,- Finite Elements of Nonliniar continua. Mc. Graw-Hill,New-York, 1972.

154. Oden,J.,T. (editor),- Computational Methods in Nonlinear Mechanics. Proc. of the TICOM sec. Int. Conf."Austin, Texas, March 26-29, 1979.

155. Oden, J.,T. Oliverra,E., R.,A. (editors),- Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics. Un. of Alabama in Huntsville Press, 1973.

156. Oliveira, E.,R.,A. Results on the Convergence of the Finite Element Method in Structural and Non-Structural Cases, Proc. on the Conf. on Finite Element Methods in Engineering, Sydney, 1974.

157. Oliveira, E.,R.,A.,- A Theory of Variational Methods with Applications to Finite Elements, L.N.E.C., Lisbon, 19..

158. Parton,V., Perline,P. Métodes de la théorie mathématique de l'elasticité , Ed.MIR, Moscou, 1984.

159. Pascariu,I.- Elemente finite. Concepte şi aplicaţii. Ed. militară, Bucureşti, 1985.

160. Pavel,A. - Elastostabilitatea recipientelor cilindrice. Ed.Acad. R.S.R., Bucureşti, 1983.

161. Pedersen,C.,- Stability Propertiers and Non-Liniar Behaviour of Thin-Walled Elastics Beams of Open Cross-Sections. Part. 1, Basic Analysis, R.149 Dept. of Struct. Eng., Techn. Univ. of Denmark, Lyngby, 1982.

162. Pedersen,C. Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastics Beams of Open Cross-Sections. Part. 2, Numerical Examples, R.150, Dept.of Struct. Eng.,Tehn. Univ. of Denmark, Lyngby, 1982.

163. Peköz,T.,Recent Cold-Formed Steel Research and Design Specification Activities in North America. 3- rt Int. Coll. Stability on Metal Structures."George Winter Mem.Ses. , Toronto, May 1983.

164. Peters,K.,- Untersuchung des Kräfteverlaufs an torsionssteifen Stahlklonnen Docordis Tech. Hochsch. Karlsruhe, 1952.

165. Petrescu, I.,- Contribuţii privind utilizarea calculatoarelor electronice în calculul spaţial al structurilor de rezistenţă ale nodurilor. Teză de doct. I.C.B., Bucureşti, 1984.

166. Petri,H.,- Die Berechnung von Rotationsschalen und prismatishen Schalen beliebiger Querscnittsform für allgemeine Belastung. D.I. Dissertation, Tech. Hochsch. Darmstadt, 1968.

167. Pfeiffer, I.,-Ein Berechnungsverfahren für Rotationssymmetrische orthotrope Kreiszylinder-Schalen im Stahlbau. D.I. Dissertation.Univ. Karlsruhe, 1981.

168. Pilat,F., Dumitrache,V., Dumitrache,V.,-Metode, tehnici şi instrumente în ingineria programării. Ed.tehn., Bucureşti, 1985.

169.Portella, A., - Boundary Solutions for the Linear Theory of Structures and Work Theorem. Revue Roumaine de Sc.Techn.Seri dec. Mée. Applique Tome 28.Nr.1., 1983.

17o. Press,H.,- Stauanlagen und Wasserkraftwerke. Theil.2, Vehre. Verlag, Berlin, 1959.

171. Prodanqv,K. - Effective width Formulas Plates in Compression and Bending. 7-th Int. Sc.Techn.Conf. on.Metal Structures, Vol.No.1, Gdansk 23-25 May 1984, Poland.

172. Prişcu,R., - Construcţii hidrotehnice,Ed. did. pedag., Bucureşti, 1982.

173. Radulovic, B.,-Einflus aus der Torsionsteifigkeit der Aussteifungen zur Stabilität einer Rechteckplatte, die einer in beiden Richtungen über die Plattenebene linear veränderlichen last unter warfen ist.(Lineare Beultheorie) Der Stahlbau, Heft.7 , 1978.

174. Răduică,N., Soare,M., Stematiu,D.,-Calculul stavilelor cu suprafeţe curbe prin teoria plăcilor subţiri ortotrope.A-3-a Conf.de constr. metalice, Timişoara, 14-16 oct. 1982.

175. Răduică, N.,-Calculul stavilelor cu suprafaţa curbă, ţinînd seama de conlucrarea elementelor componente. Teză de doct., I.C.B., Bucureşti, 1982.

176. Reis,A.,J., Roorda, J.,-The Interaction between Lateral-Torsional and Local Plate Buckling in Thin-Walled Beams.Int.Coll. on Stability of Steel Struct., Liege, 13-15 avril 1977, Prel.Rep.

177. Rhodes,J., Harvey,J.M. Examination of Plate Post-Buckling Behaviour. J.of the Eng.Mech.Div., ASCE, EM 3, June, 1977.

178. Rockey, K.,C., Evans,H.,D., Griffits D.,W., Nethercot,D.,A.,-The Finite Element Method Sec.ed., Granada Publishing,London, Toronto, New-York, 1983.

179. Seharov,A.,C., Attenbah, I., -Metod konecinih elementov v mehanike tverdih tel.Kiev.Leipzig-VEB, 1982.

18o. Sandi,H.,-Metode matriceale în mecanica structurilor.Ed.tehn., Bucureşti, 1976.

181. Scarlat,A., - Stabilitatea structurilor. Probleme speciale,Ed.tehn. Bucureşti, 1969.

182. Schapitz,E., - Festigkeitslehre für den Leichtbau. VDI.Verlag, Düssendorf,1963.

183. Schiop,I.,A.,-Analiza unor metode de discretizare.Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1978.

184. Smitses, J., G., - An Introduction to the Elastic Stability of Structures. Prentice-Hall, New-Jersey, 1976.

185. Soare, M., - Aplicarea ecuatiilor cu diferente finite la calcu-lul plăcilor curbe subţiri. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1968.

186. Strang, G., Fix, G.J., - An Analysis of the Finite Element Method. Prentice -Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

187. Tanaka, M., Iwata, Y., - Boundary element investigations of two-dimensional elastostatic problems. Rev.Roum.des Sc. tehn., Serie de Mec.appl. tome 27, No , 1982.

188. Teodorescu, P., P., Ille, V., - Teoria elasticităţii şi introduce-re în mecanica solidelor deformabile. Vol, 1, Ed.Dacia, Cluj-Napoca, 1976.

189. Thomasson, P., O. Recent Cold-Formed Steel Research and Design Specifications Activities in Europe. 3-rd Int.Coll.Stability of Met.Struct., George Winter Mem.Sea., Toronto, May 1983.

190. Thompson, J.M., T. Hunt, G., W., - A General Theory of Elastic Stability, John Wiley, London, 1973.

191. Timoshenko, S., P., Gere, J., M., - Teoria stabilităţii elastice. Ed. tehn., Bucureşti, 1967.

192. Timoshenko, S., P., Woinowsky - Krieger, S., - Teoria plăcilor plane şi curbe. Ed.tehn., Bucureşti, 1968.

193. Timoshenko, S., P., Goodier, N., J. Teoria uprugosti. Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1975.

194. Vasiliev, G., V. Torsiunea structurilor elastice cu pereţi sub-ţiri. Ed.Acad., Bucureşti, 197o.

195. Vlasov, V., Z., - Tonkostennîie uprughie sterjini. Gosud. I. Fiz, Mat.Lit., Moskov, 1959.

196. Volmir, A., S. Ghibnîie plastinki i obolociki- Gosud.I. Tehn-Teor.Lit., Moskva, 1956.

197. Wang, P., C. Metode numerice şi matriceale în mecanica constructiilor. Ed.tehn., Bucureşti, 197o.

198. Wikert, G., Schmauser, G., - Stahlwasserbau. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

199. Wunderlick, V, Stein, E., Bathe, K., J., (editors) Nonlinear-Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Proc. of the Europe-U.S. Workshop Ruhr-Univ. Bochum, Germany. July 28-31, 198o. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New-York, 1984.

2oo. Zorgno, T., A., L., - Contributo alla Studios della riserve de resistenta di lastre sottili in campo inercortico. Costruzioni mettaliche, No 3, 4, 1975.

2o1. Zienkiewicz, O., C., - The Finite Element Method in Engineering Science. Mc.Graw-Hill, London, 1971.

2o2. Zurmühl, R., - Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag, Berlin, 1961.

2o3. x x x E.C.C.S. Manual on the Stability of Steel Structures,

204. x x x E.C.C.S. European Recommendations for Steel Constructions. E.C.C.S., EG-77-1E, 1977.

205. x x x S.S.R.C - Guide to Stability Criteria for Metal Structures Structural Stability Research Concil. 3-rd Ed. John Wiley, New York,1976.

206. x x x Voilement des Coques. Recommandations de la C.E.C.M., Construction metallique, No 4, 1981.

207. x x x Recommandations Européennes pour le calcul des plaques nervurées. C.E.C.M., Construction metallique, no 3, 1985.

208. x x x EUROCODE 3- 1984 - C.C.E. Régles Unifiées Communes pour les constructions en acier.

209. x x x A.I.S.I., Cold. Formed Steel Design Manual, 1983. Ed.

210. x x x Régles de calcul des constructions en élements a parois minces en acier, Construction Metallique, Nr.4, 1978.

211. x x x N.B.M.B 51-oo 1975, Norme Belge, Charpentes en acier.

212. x x x B.S. 449, Britsh Standards Institution : Specification for the Use of Cold-Formed Steel Section in Building.

213. x x x SNIP II-23-81 Stroitelnîe normî i pravila. Glava 23, Stroitelnîe konstrucţii, Moskva, 1982.

214. x x x DIN 18800 Teil.2., Stabilitätsfälle - Knicken von Stäben un Stabwerkwn, 1980.

215. x x x STAS 10108/2 -83 . Calculul elementelor din oţel alcătuite din profile cu pereţi subţiri formate la rece.

216. x x x STBK-N5. Swedich Code for Light-Gauge Metal Structures, Swedish Inst. of. Steel Constr., Publ. 76, March ,1982. Stockholm.