

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMANTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC -TRAIAN VUIA- TIMISOARA  
FACULTATEA DE MECANICA

ING. TITUS-GHEORGHE CIOARA

***METODE EXPERIMENTALE PENTRU DETERMINAREA  
CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE SISTEMELOR  
VIBRANTE.***

*T e z a d e d o c t o r a t*

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

CONDUCATOR ȘTIINȚIFIC  
PROF. F. MERIT, DR. DOC. ING. GHEORGHE SILAS

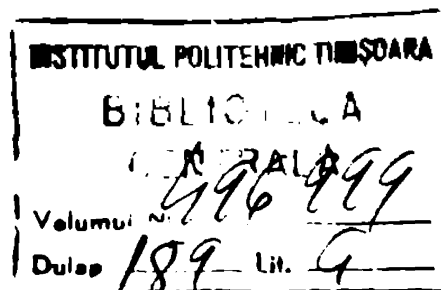
1985

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMANTULUI  
INSTITUTUL POLITEHNIC -TRAIAN VUIA- TIMISOARA  
FACULTATEA DE MECANICA

ING. TITUS-GHEORGHE CIORRA

*METODE EXPERIMENTALE PENTRU DETERMINAREA  
CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE SISTEMELOR  
VIBRANTE.*

*T e z a d e d o c t o r a t*

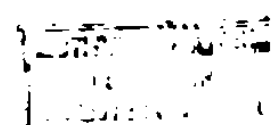


CONDUCTOR STIINTIFIC  
PROF. EMERIT, DR. DOC. ING. GHEORGHE CIORRA

1985

## C U P R I N S

|            | pag.   |
|------------|--|
| 1          | NECESITATEA INVESTIGARII EXPERIMENTALE<br>IN DOMENIUL VIBRATIILOR SI UTILAJELOR.             |
|            | EXEMPLE. . . . . 1   |
| 1.1.       | Introducere. . . . . 1   |
| 1.2.       | Probleme de vibrații la mașini și utilaje. 2   |
| 1.2.1.     | Mașini de ridicat și transportat . . . . . 3   |
| 1.2.2.     | Echipeamente hidroenergetice. . . . . 3  |
| 1.2.3.     | Echipeamente termoenergetice. . . . . 5  |
| 1.2.4.     | Vehicule cu sustentație magnetică și<br>tracțiune cu motoare lineare . . . . . 7             |
| 1.2.5.     | Agregate de vânt . . . . . 7   |
| 1.3.       | Conținutul tezei . . . . .   |
| 2.         | ELEMENTE DE DINAMICA CORPULUI DEFORMABIL . .12   |
| 2.1.       | Mișcarea generală a corpului deformabil. . .12   |
| 2.2.       | Ecuțiile dinamice ale corpului deformabil .17  |
| 2.3.       | Analiza sistemului de ecuații diferențiale<br>ale mișcării corpului deformabil . . . . . .20 |
| 3.         | ANALIZA RASPUNSULUI DINAMIC AL STRUCTURII. .26   |
| 3.1.       | Analiza modală . . . . . .26   |
| 3.2.       | Răspunsul sistemului vibrant la diverse<br>tipuri de excitație. . . . . .34                  |
| 3.2.1.     | Vibrații libere. . . . .   |
| 3.2.2.     | Vibrații forțate . . . . . .35   |
| 3.2.2.1.   | Excitație cu forță treaptă . . . . . .35   |
| 3.2.2.2.   | Excitație de tip impulsiv. . . . . .37   |
| 3.2.2.3.   | Excitație forțată armonică . . . . . .39   |
| 3.2.2.4.   | Excitație aleatoare. . . . . .40   |
| 4.         | METODE DE ESTIMARE A PARAMETRILOR MODALI . .42   |
| 4.1.       | Metode de estimare în domeniul frecvență . .42   |
| 4.1.1.     | Metode de studiu și algoritmi pentru<br>estimarea parametrilor modali. . . . . .45           |
| 4.1.1.1.   | Metoda diagramei polare. . . . . .45   |
| 4.1.1.1.1. | Cazul modurilor cuplate. . . . . .58   |



|            |  |     |
|------------|--|-----|
| 4.2.       | Metode de estimare în domeniul timp. . . . .                                       | .65 |
| 4.2.1.     | Algoritmul seriilor exponențiale complexe. . .                                     | .66 |
| 4.2.2.     | Metode directe de estimare a parametrilor<br>modali. . . . .                       | .69 |
| 4.2.3.     | Programe de calcul și aplicații. Concluzii..                                       | .73 |
| 5.         | IDENTIFICAREA SISTEMELOR VIBRANTE. . . . .   | .75 |
| 5.1.       | Identificarea sistemului pe baza parametrilor<br>modali . . . . .                  | .75 |
| 5.1.1.     | Separarea vectorilor proprii din răspunsul<br>modal. . . . .                       | .79 |
| 5.1.2.     | Identificarea structurilor izolate . . . . .                                       | .82 |
| 5.1.2.1.   | Moduri neconstrânse. Separarea mișcărilor<br>de corp rigid. . . . .                | .82 |
| 5.1.2.2.   | Cazul cuplării structurilor elastice cu<br>structuri rigide . . . . .              | .87 |
| 5.2.       | Identificarea directă a modelului matematic<br>al structurii. . . . .              | .92 |
| 6.         | SISTEME DE TESTARE LA VIBRAȚII ȘI<br>PRELUCRARE A DATELOR . . . . .                | 100 |
| 6.1.       | Sisteme de excitație . . . . .   | 100 |
| 6.1.1.     | Excitație cu vibratoare electrodinamice. . .                                       | 100 |
| 6.1.2.     | Excitație cu vibratoare hidraulice . . . . .                                       | 103 |
| 6.1.3.     | Excitație cu vibratoare inerțiale cu mase<br>excentrice . . . . .                  | 104 |
| 6.1.4.     | Sisteme de excitație tranzitorii . . . . .   | 105 |
| 6.2.       | Sisteme de măsură și prelucrare a<br>rezultatelor . . . . .                        | 107 |
| 6.2.1.     | Sisteme analogice. . . . .   | 107 |
| 6.2.2.     | Sisteme digitale . . . . .   | 109 |
| 6.3.       | Algoritmi pentru procesarea semnalelor<br>discretizate . . . . .                   | 111 |
| 6.3.1.     | Eliminarea efectului de zgomot al semnalelor<br>de răspuns ale structurii. . . . . | 112 |
| 6.3.1.1.   | Semnale periodice. . . . .   | 112 |
| 6.3.1.2.   | Semnale tranzitorii. . . . .   | 115 |
| 6.3.1.2.1. | Metoda funcției de autocorelație . . . . .   | 115 |
| 6.3.1.2.2. | Metoda semnăturii decrementului aleator. . .                                       | 117 |
| 6.3.2.     | Filtrarea numerică . . . . .   | 120 |
| 6.3.3.     | Prelucrarea semnalelor în domeniul frecvenței                                      | 124 |

|          | pag.  |     |
|----------|---|-----|
| 6.3.3.1. | Transformata Fourier și ferestre de<br>ponderare. . . . .   | 124 |
| 6.3.3.2. | Transformata rapidă Fourier. . . . .  | 127 |
| 6.3.3.3. | Considerații privind prelucrarea semnalelor<br>la excitații de tip aleator, în domeniul<br>frecvență. . . . . | 128 |
| 7.       | APLICATII EXPERIMENTALE. . . . .  | 131 |
| 7.1.     | Reprezentarea mișcărilor vibratorii ale<br>unei structuri . . . . .   | 131 |
| 7.1.1.   | Algoritm pentru reprezentarea grafică<br>spațială a unei structuri. . . . .                                   | 131 |
| 7.1.2.   | Reprezentarea distribuției mișcărilor vibra-<br>torii ale structurii . . . . .                                | 134 |
| 7.2.     | Testarea la vibrații, pe ștand de laborator,<br>a paletelor de agregate de vînt cu ax<br>orizontal. . . . .   | 137 |
| 7.2.1.   | Ecuatiile dinamice ale paletei montate pe<br>ștand . . . . .  | 139 |
| 7.2.2.   | Alegerea punctelor de reducere a maselor. . . . .   | 141 |
| 7.2.3.   | Programul experimental de testare la vibra-<br>ții a paletei . . . . .  | 145 |
| 7.3.     | Studiul experimental al dinamicii unei<br>fundații rigide a unui compresor multi-<br>cilindric . . . . .      | 155 |
| 7.4.     | Studiul vibrațiilor unor structuri<br>deformabile complexe. . . . .   | 162 |
| 8.       | CONCLUZII . . . . .   | 166 |
|          | BIBLIOGRAFIE. . . . .   | 173 |

## 1. NECESITATEA INVESTIGĂRII EXPERIMENTALE ÎN DOMENIUL VIBRAȚIILOR MAȘINILOR ȘI UTILAJELOR. EXEMPLE

### 1.1. Introducere

Mașinile și utilajele sînt structuri mecanice complexe în construcția cărora intră subansamble elastice, care suferă deformații statice și dinamice sub acțiunea unor forțe de natură tehnologică sau netehnologică, ce apar în timpul lucrului, rezultînd o stare vibratorie a mașinii.

Calculul dinamic al structurii mașinii necesită alegerea unui model matematic. În majoritatea cazurilor alegerea acestui model este dificilă. Chiar folosind metoda elementului finit, care necesită eforturi mari la asamblarea programului de calcul, se obțin uneori rezultate nesatisfăcătoare datorită unor simplificări involuntare. În acest sens se poate cita profesorul R. Mazet, care în cartea sa *Mécanique Vibratoire*, Librairie Polytechnique Ch. Beranger (1955) în care a pus bazele Metodei globale de testare la vibrații, metodă preluată de firma PRODERA afirmă: "În majoritatea cazurilor practice, contextura internă a unei structuri nu se poate cunoaște exact, chiar dacă se fac calcule minuțioase ale energiilor: cinetică, potențială și de disipație, care necesită timp îndelungat, uneori pentru o precizie iluzorie (momente de inerție ale pieselor complexe, rigidități și mai ales rezistențe pasive rău definite)".

În puține domenii ale tehnicii sursele care provoacă un efect sînt așa de numeroase ca în domeniul vibrațiilor. Anumite efecte s-au constatat abia după apariția unor catastrofe, cum a fost, de exemplu, descoperit efectul virtejurilor alternante (Karman), după distrugerea podului Takoma sau elucidate cauzele eșecurilor la începutul lansării rachetelor de tip Saturn: mișcările vibratorii laterale de joasă frecvență ale maselor de combustibil lichid din tancurile de combustibil cauzau destabilizarea mișcării rachetei [89] .

Toate acestea au dus la dezvoltarea, în paralel cu metodele analitice a testelor experimentale în vederea determinării unui model dinamic real al structurii.

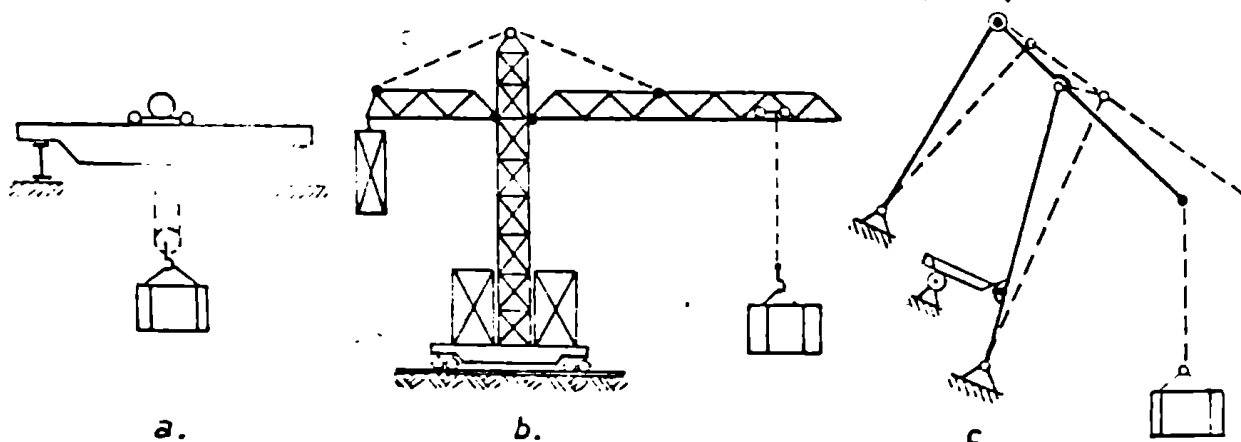
Tehnicile de identificare dinamică a structurilor folosite la început, datorită unor costuri ridicate numai la structurile aerospațiale, se folosesc astăzi în mod curent la mașini și utilaje industriale și chiar la mașini casnice [77] ..

Tehnicile calitative, folosite la începuturile investigațiilor experimentale în domeniul vibrațiilor, se bazează pe modele simplificate, care explicau numai fenomenul. Într-o alocuțiune, ținută la cea de a IV-a Conferință de Vibrații în Construcția de Mașini - Timișoara 1982, profesorul Gheorghe Buzdugan m.c.al Academiei R.S.R. a relatat, cum cu mulți ani în urmă a rezolvat o problemă de vibrații, prin punerea în paralel a două grupuri electrogene ce produceau vibrații puternice modulate în amplitudine (bătăi) datorită nefuncționării sincrone a celor două grupuri.

În activitatea pe care am desfășurat-o în cadrul Colectivului de cercetare și proiectare pentru vibrații mecanice al I.P. Traian Vuia din Timișoara, condus de prof.em.dr.doc.ing.Gheorghe Silaș, am întâlnit numeroase probleme de vibrații la mașini și utilaje în funcțiune, pe care le-am rezolvat folosind la început tehnici de investigare experimentală cu echipamente de măsură și prelucrare pe cale analogică, iar în timpul din urmă și cu echipament digital bazat pe un minicalculator de birou cu posibilități de reprezentare grafică.

În continuare, se vor prezenta succint câteva probleme mai sugestive de vibrații la mașini și utilaje pe care le-am întâlnit și rezolvat, folosind unele tehnici de investigare experimentale expuse în prezentă lucrare.

## 1.2. Probleme de vibrații la mașini și utilaje



### 1.2.1. Mașini de ridicat și transportat

Sub acțiunea forțelor dinamice care iau naștere în timpul ridicării, transportului și depunerii sarcinilor, mașinile de ridicat și transportat cum sînt: grinzile rulante (fig.1.1.a), macaralele turn cu braț orizontal (fig.1.1.b) și macaralele portuare (fig.1.1.c), apar mișcări vibratorii de amplitudini mari și frecvențe joase. Amortizarea internă a structurilor acestor utilaje este foarte slabă. Aceasta face ca timpul de atenuare a vibrațiilor să fie lung, ceea ce duce la greutatea în poziționare și depunerea sarcinii la locul fixat. De aceea în caietele de sarcini de omologare ale utilajelor sînt prescrise ca norme de încercare la vibrații verificarea amplitudinilor maxime și timpul de atenuare a vibrațiilor. Un studiu suplimentar [118] permite reglarea mecanismelor utilajului în vederea micșorării efectelor dinamice.

Dacă pe cale experimentală se obține un model matematic real al structurii utilajului se pot simula și cazurile de solicitare limită cum ar fi; scăparea accidentală a sarcinilor ce poate duce la pierderea stabilității echilibrului, sau simula cazul dereglării mecanismelor de acționare cînd pot apare sarcini dinamice importante care periclitează integritatea structurii. (am întîlnit două asemenea situații).

### 1.2.2. Echipamente hidroenergetice

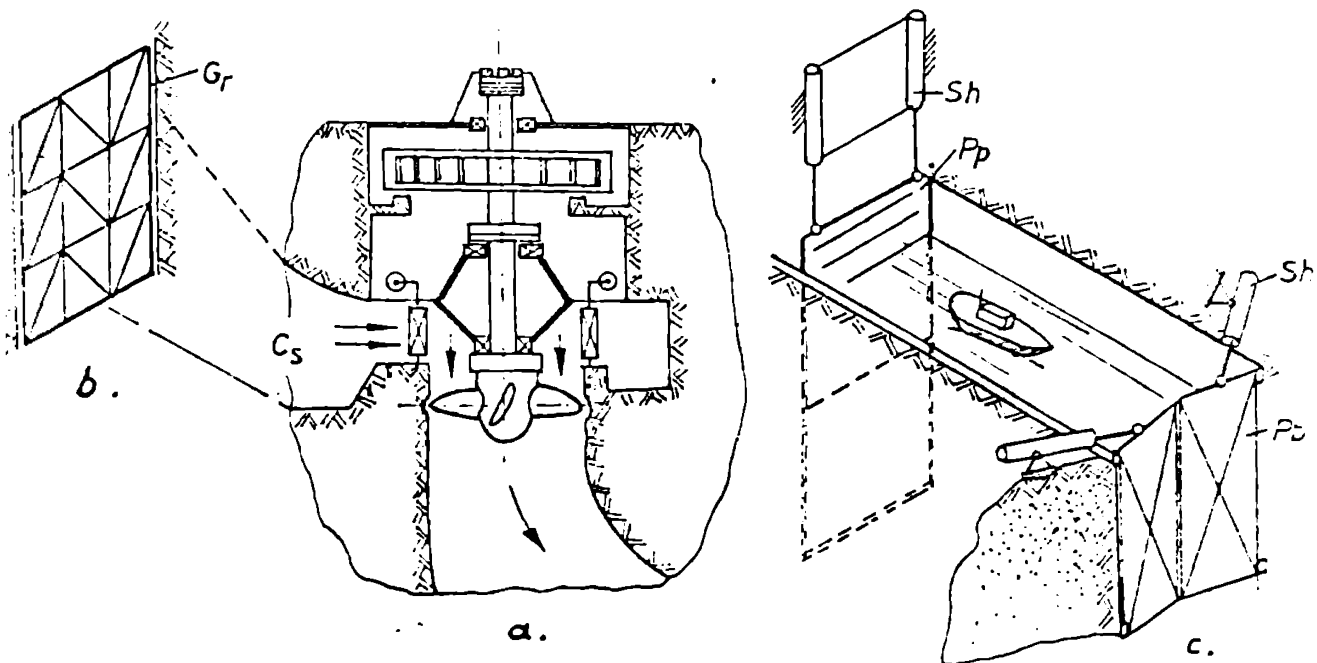


Fig.1.2



La un hidroagregat de mare putere (fig.1.2.b) există un număr mare de surse de excitație cum sînt; forțele hidraulice la nivelul paletelor, dezechilibrul masic și nealinieră liniei arborilor zășinii, cîmpul de forțe electromagnetice la nivelul generatorului, efecte dinamice în lagărele cu ungere forțată, etc. Cumulate, aceste excitații produc vibrații cu un spectru de bandă largă. Separarea componentelor și corelarea lor cu sursele de vibrații necesită o analiză foarte fină a semnalelor de vibrații înregistrate. O astfel de analiză am efectuat-o în lucrările [119] [120]. Probleme de vibrații apar și la echipamentele de deservire ale hidroagregatelor. Astfel, pentru împiedicarea pătrunderii corpurilor plutitoare în camera spirală,  $C_g$  (fig.1.2.b), la intrarea curentului de apă în camera spirală (fig.1.2.c) se montează un grătar de reținere  $G_r$ . La anumite viteze limită ale curentului apar vîrtejuri alternante (tip Karman), care pot produce mișcări vibratorii rezonante pe unele elemente de rezistență ale grătarului, producînd deteriorarea lui, caz pe care l-am întîlnit. O corelare pe cale experimentală a vitezei de curgere cu mișcările vibratorii ale elementelor grătarului a permis găsirea unor soluții de modificare a profilelor elementelor grătarului în așa fel încît viteza critică de apariție a vîrtejurilor a fost deplasată în afara domeniului vitezelor de curgere din camera spirală.

Porțile ecluzelor (fig.1.2.c) sînt structuri metalice de gabarite mari (300-400 tone). La mișcările de ridicare coborîre a unei porți plane  $P_p$  sau de închidere-deschidere a unei porți bucate  $P_b$  se folosesc sisteme de acționare cu servomotoare hidraulice  $S_h$  care lucrează în sincronism. Desincronizări inerente în funcționarea servomotoarelor și existența unor forțe de frecare în ghidaje sau balanale pot produce vibrații puternice autoexcitante, care duc la uzuri premature ale servomecanismelor și ale ghidajelor, sau chiar la avarii. Efecte dinamice mari apar la porniri și opriri, datorită maselor mari ce trebuie accelerate sau decelerate. Reglarea temporizării acționării nu se poate face decît pe cale experimentală.

### 1.2.3. Echipamente termoenergetice

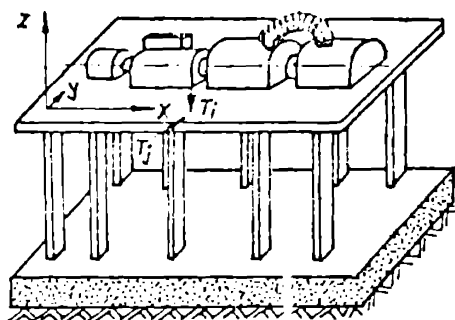


Fig.1.3

Fundațiile turboagregatelor sînt de tip cadre (Fig.1.4), care au cîteva moduri naturale de vibrații situate la frecvențe sub cea de rotație a mașinii. Deci, la punerea în funcțiune a agregatului sau la oprirea lui, viteza de balșiere a turației în zonele modurilor proprii trebuie să fie mărită pentru a se evita creșterile rezonante de amplitudină.

Deși la proiectarea fundației se face un calcul laborios al frecvențelor proprii este totuși necesară o verificare experimentală pentru localizarea lor precisă. Astfel, prelucrînd semnalul înregistrat pe bandă magnetică al unui traductor de vibrații amplasat pe fundația unui termoagregat de 220 MW, folosind una din tehnicile de prelucrare a semnalelor prezentate la 6.2.1., s-a obținut caracteristica amplitudine frecvență a răspunsului structurii fundației (fig.1.4).

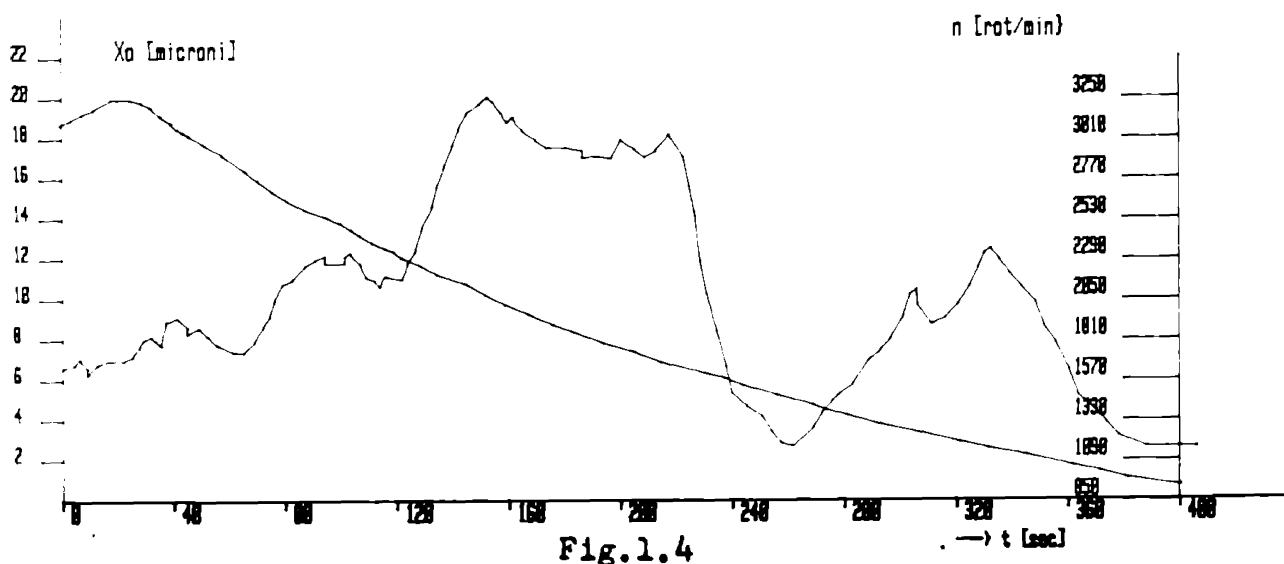


Fig.1.4

Probleme de vibrații se întîlnesc și la instalațiile auxiliare care deservesc turboagregatele. În fig.1.5 este prezentat un agregat de ventilație care asigură tirajul necesar arderii în cazanul de abur. Agregatul de ventilație este format dintr-un cadru metalic 1 care susține ventilatorul 2 și motorul de antrenare 3.

Datorită dezechilibrului masic, cauzat de uzuri inegale ale paletelor ventilatorului, se produc vibrații a căror frecvență este egală cu cea de rotație a ventilatorului. În scopul micșorării transmisibilității vibrațiilor la clădirea centrală, pe acoperișul 5, pe care se află amplasat grupul de ventilație, proiectantul a prevăzut izolarea cadrului 1 prin separarea acestuia de restul structurilor; pe verticală prin pachete de arcuri 6, iar pe orizontală prin structura metalică auxiliară 4.

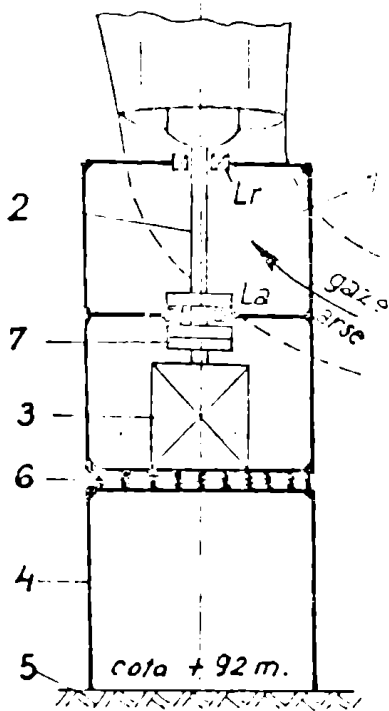


Fig.1.5



Fig.1.6

Datorită elasticității cadrului 1, linia arborilor agregatului se deformează, ceea ce duce la apariția unor efecte dăunătoare de perturbație la nivelul cuplajului 7. Apar forțe interne mari care se transmit legăturilor ventilatorului și motorului electric de antrenare 3.

În urma cercetărilor experimentale efectuate pe agregatul de

ventilație al unui termoagregat de 330 MW și pe un model de laborator al acestuia (fig.1.6) s-a ajuns la soluția înlocuirii cuplajului semirigid cu bolțuri, cu un cuplaj elastic care permite micșorarea forțelor interne la nivelul cuplajului. S-a făcut și un studiu de izolare elastică completă a motorului electric [29].

Pe traseul de evacuare a gazelor de ardere prin ventilație, în scopul recuperării căldurii în galeriile de fum 1 (fig. 1.7) se amplasează schimbătoare de căldură tubulare 2. Peste o anumită viteză critică de curgere a gazelor printre rețeaua de țevi a schimbătorului de căldură apar vibrații  $X(t)$  puternice ce

se transmit structurii metalice de susținere 3, precum și cuptorului de ardere (în acest caz un cuptor de cracare). Investigațiile experimentale au scos în evidență, prin măsurarea simultană, a presiunii dinamice  $p(t)$  (microfon), a nivelului de vibrații  $x_0(t)$  (traductor 5) și a debitului  $Q(t)$  (anemometrul 6), existența efectului vârtejurilor alternante, excitația fiind amplificată și de efecte rezonante ale coloanei de fum (fig.1.8). Și aici, ca și la grătarul rar, vibrațiile au fost înlăturate prin modificări ale amplasării tubulaturii schimbătorului.

#### 1.2.4. Vehicule cu sustentație magnetică și tracțiune cu motoare lineare

O problemă deosebită, ce se ridică la proiectarea unui vehicul cu sustentație magnetică și tracțiune cu motoare liniare, este studiul dinamicii vehiculului. În fig.1.9.a, se prezintă schematic, în secțiune transversală, vehiculul cu sustentație magnetică, acționat cu motor liniar cu flux transversal, care se compune din: Corpul vehiculului 1, cadrul 2 de care sînt fixați electromagneții 3 care închid fluxul magnetic prin jugurile 4. Modelul dinamic al sistemului de sustentație este dat în fig.1.9.b, unde: 2 este boghiul, 1 corpul vehiculului, 3 electromagnetul și 4 jugul de închidere al fluxului magnetic. Împreună cu blocurile de comandă electronică 5 și 6 se formează un sistem dinamic complex, la care reacțiile de stabilitate sînt date prin semnalele;  $\delta(t)$  de întrefier (traductor  $T_1$ ) și  $a(t)$  de accelerație ( $T_2$ ). Perturbațiile de natură electrică și mecanică care apar și la sistemul de ghidare al motorului de tracțiune liniar cu flux transversal 7 produc mișcări vibratorii complexe. Pentru studierea stabilității sistemului de sustentație și mișcărilor vibratorii, am proiectat și realizat o serie de standuri de laborator cum este cel din fig.1.10.a, destinat studiului dinamicii suspensiei motorului liniar cu flux transversal, compus din: motorul liniar 1, placa indus 2, rolele de ghidare 3, lagărele 4, cuplele de rototranslație 5. Sistemul de suspensie permite o ghidare liberă a motorului 1 pe șina indus 2. Simularea perturbației se face din mecanismul 6. În fig.1.10.b se prezintă o imagine de ansamblu a standului.

#### 1.2.5. Agregate de vînt

Agregatele de vînt sînt structuri elastice complexe care ridică probleme multiple de vibrații atât pe ansamblul lor, cît și pe substructuri. La un agregat de vînt cu ax orizontal (fig.1.11) format din: casa mașinilor 1, pe care se află rotorul 2 cu

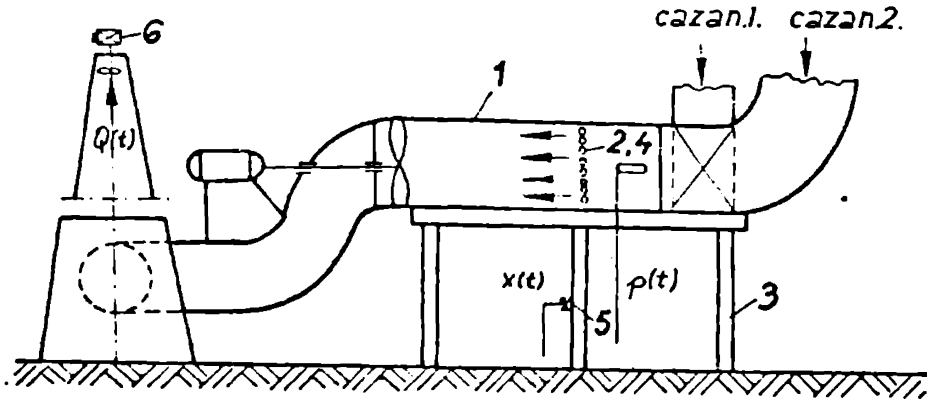


Fig.1.7.

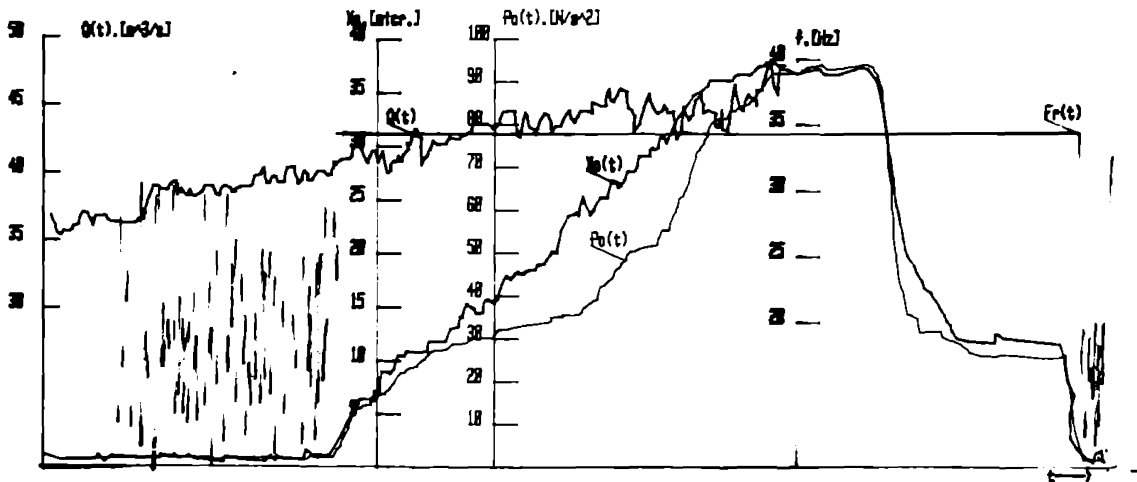


Fig.1.8

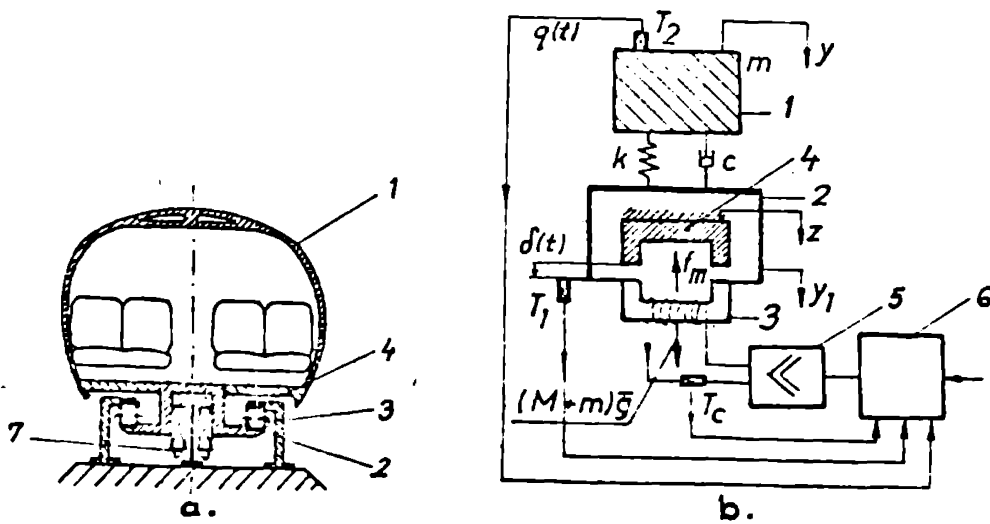


Fig.1.9

paletele 3 și stîlpul elastic 4, sub acțiunea sarcinilor dinamice ale vîntului și a dezechilibrului maselor în rotație apar mișcări vibratorii ale căror spectru este continuu în domeniul frecvențelor joase 0-30 Hz.

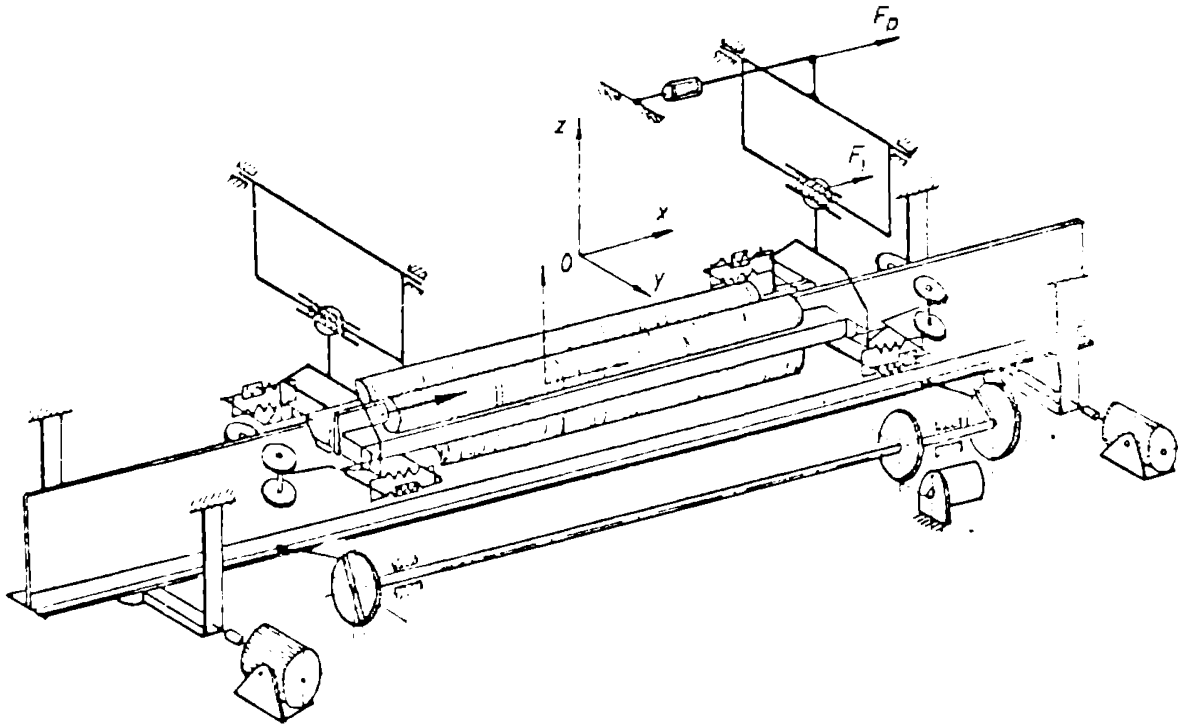


Fig.1.10.a

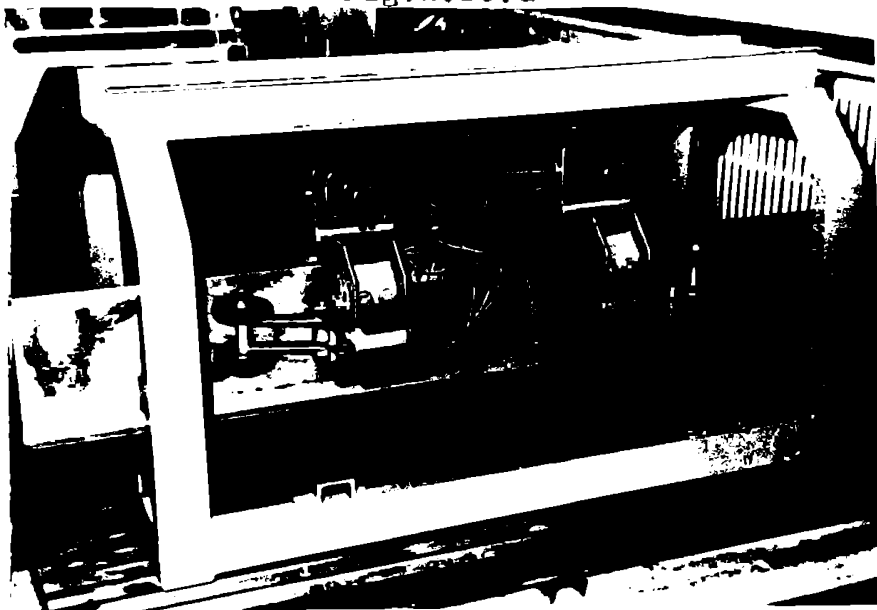


Fig.1.10.b

Se impun studii experimentale privind comportarea la vibrații a agregatului în ansamblu și al vibrațiilor paletei considerată ca o substructură [127]. În cadrul unui program de cercetări

privind agregatele de vânt cu ax orizontal am elaborat studii și metode experimentale de investigare a vibrațiilor agregatelor [126].

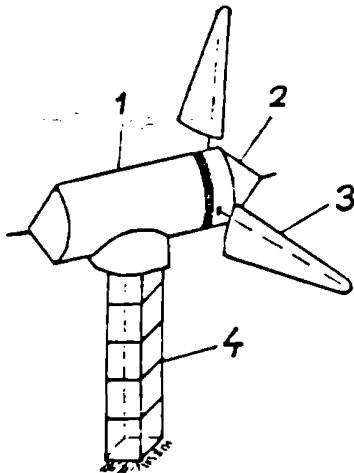


Fig.1.11

Din rezultatele mai importante se pot aminti: echilibrarea dinamică la frecvențe joase a agregatului prin procesarea semnalelor de vibrații pe calculator și realizarea unui stand de testare a paletelor, care se va prezenta în capitolul 7.

### 1.3. Conținutul tezei

Pornind de la exemplele de mai sus privind soluționarea unor probleme de vibrații pe care le-am întâlnit în cadrul unor lucrări de cercetare aplicativă am

căutat să structurez conținutul prezentei lucrări în ordinea logică a rezolvării unei probleme de vibrații, cu mijloacele tehnice care stau la dispoziție la ora actuală pe plan mondial.

În primul rând trebuie definit modelul dinamic al structurii care vibrează. Pentru aceasta la capitolul 2 se tratează dinamic corpului deformabil în mișcarea sa generală, când corpul execută mișcări de transport impuse și mișcări de deformare, relativ la mișcarea de transport. Sînt scoase în evidență toate efectele dinamice care apar, cum sînt: efectele giroscopice, efecte Coriolis și efecte de excitare parametrică. Modelul matematic al structurii discretizate va fi un sistem de ecuații diferențiale al cărui ordin este egal cu numărul coordonatelor prin care se aproximează mișcarea structurii.

În forma sa cea mai generală sistemul de ecuații diferențiale este un sistem giroscopic avînd matricile desimetrizate. În capitolul 3, se face o analiză completă a răspunsului sistemului la diverse tipuri de excitație, folosind analiza modală. Răspunsul sistemului se consideră ca o sumă a participărilor modale cu moduri complexe.

Metodele de determinare a parametrilor modali din răspunsul sistemului vibrant, măsurat experimental la excitații cunoscute, se prezintă în capitolul 4. Se dau metodele de studiu în domeniul frecvență și în domeniul timp.

Capitolul 5 tratează metodele de identificare dinamică a sistemului vibrant, deci structura matricilor coeficienților ecuațiilor diferențiale care descriu mișcarea sistemului.

În capitolul 6 se prezintă tehnicile și echipamentele de investigare experimentală a unei structuri în vederea determinării caracteristicilor sale dinamice și a identificării modelului său.

În capitolul 7 se prezintă câteva exemple de structuri testate la vibrații și rezultatele investigațiilor experimentale.

În finalul lucrării prezintă contribuțiile personale în domeniul tratat.



## 2. ELEMENTE DE DINAMICA CORPULUI DEFORMABIL

### 2.1. Mișcarea generală a corpului deformabil

Din prezentarea succintă a problemelor de vibrații întâlnite în tehnică, se poate trage concluzia că cea mai generală mișcare vibratorie posibilă a unei structuri de mașină este cea relativă a unui corp deformabil față de un sistem de referință mobil

$C_0x_0y_0z_0$  (fig.2.1), cu care corpul are legături cinematice și

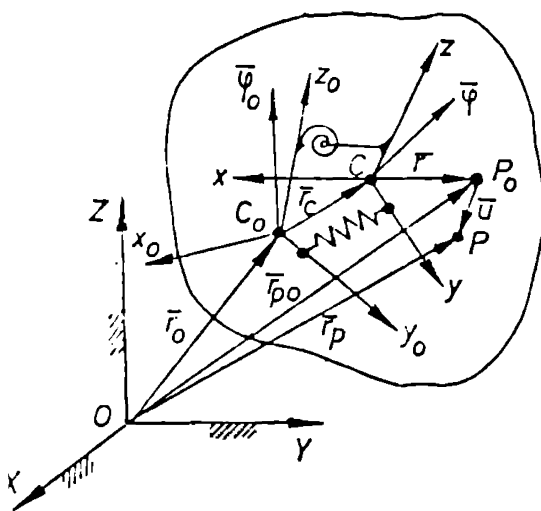


Fig.2.1

elastice. Sistemul  $C_0x_0y_0z_0$  execută o mișcare spațială impusă în raport cu sistemul de referință fix  $Oxyz$ . Mișcarea absolută a sistemului  $C_0x_0y_0z_0$  este definită de vectorul de poziție  $\{r_0\}$  și vectorul de rotație  $\{\varphi_0\}$ .

Pentru definirea mișcării relative în raport cu sistemul  $C_0x_0y_0z_0$  a corpului deformabil se ia un sistem de axe  $Cxyz$  considerat legat de corpul nedeformat, mișcarea sistemului  $Cxyz$  față de sistemul  $C_0x_0y_0z_0$  fiind definită de vectorul de poziție  $\{r_c\}$  și de

vectorul de rotație  $\{\varphi\}$ . Mișcarea absolută a unui punct curent  $P_0$  al corpului considerat nedeformat, este dată de vectorul  $\{r_{p0}\}$

$$\{r_{p0}\} = \{r_0\} + \{r_c\} + \{r\} \quad (2.1)$$

unde,  $\{r\}$  este vectorul de poziție al punctului  $P_0$  în raport cu  $C_0x_0y_0z_0$ . În cazul corpului deformabil, sub acțiunea forțelor date și de legătură corpul se deformează, iar particula materială se va deplasa în punctul  $P$ , vectorul  $\overline{P_0P} = \bar{u}$  reprezentînd vectorul de deformare.

Mișcarea absolută a punctului  $P$  poate fi definită prin vectorul  $\{r_p\}$

$$\{r_p\} = \{r_0\} + \{r_c\} + \{r\} + \{u\} \quad (2.2)$$

În situațiile întâlnite în tehnică, deformațiile organelor de mașini nu depășesc limita de elasticitate a materialului din care sînt executate și numai rareori, în cazuri extreme, apar deformații în domeniul plastic. În ambele cazuri, valorile deformațiilor sînt mici în comparație cu cele ale deplasărilor impuse corpului. De acest fapt se va ține cont în continuare la liniarizarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării corpului deformabil, prin neglijarea termenilor ne semnificativi. Ca origine a sistemului de axe  $Cxyz$ , legat de corpul nedeformat, se ia centrul  $C$  al masei lui, ceea ce va duce la simplificări în scrierea ecuațiilor diferențiale.

Pentru scrierea ecuațiilor diferențiale se folosește metoda ecuațiilor lui Lagrange, fiind necesar, deci, a se calcula expresiile energiilor cinetică, de deformație conservativă, de deformație disipativă și a lucrului mecanic virtual al forțelor date și de legătură. Mișcările vibratorii ale corpului deformabil sînt mișcări relative în raport cu sistemul mobil  $C_0x_0y_0z_0$  și de aceea studiul mișcărilor se va face în raport cu acest sistem.

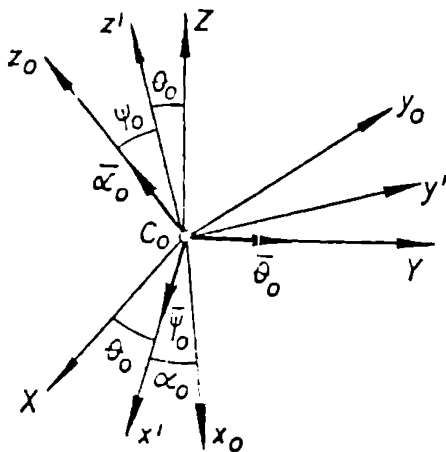


Fig. 2.2

Deoarece vectorul  $\{r_0\}$  este raportat la sistemul de axe fix  $Cxyz$ , atunci raportarea sa la sistemul de axe  $C_0x_0y_0z_0$  se face prin intermediul matricei de transformare afină  $[T_0]$  dintre cele două sisteme

$$[T_0] = [T_3] \cdot [T_2] \cdot [T_1] \quad (2.3)$$

unde

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos \psi_0 & \sin \psi_0 \\ 0 & -\sin \psi_0 & \cos \psi_0 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\theta_0$ ,  $\psi_0$  și  $\alpha_0$ , fiind unghiurile lui Euler (fig.2.2).

Derivata absolută a vectorului  $\{r_c\}$  este

$$\frac{d}{dt}(\{r_c\}) = \{r_c\} + [\Omega]\{r_c\} = \{\dot{r}_c\} + [R_c]\{\omega\} \quad (2.5)$$

unde

$$\{\dot{r}_c\} = \frac{\partial}{\partial t} \{r_c\} \quad (2.6)$$

$[\Omega]$  este matricea vitezei unghiulare de rotație a sistemului de axe  $C_0x_0y_0z_0$  în raport cu sistemul de axe  $Oxyz$ .

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  și  $\omega_z$  fiind proiecțiile vectorului viteză unghiulară,  $\bar{\omega} = \frac{d\bar{\psi}}{dt}$ , pe sistemul de axe  $C_0x_0y_0z_0$ .

$$\{\omega\} = \{\dot{\psi}_0\} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T \quad (2.8)$$

$[R_c]$  este matricea de poziție a punctului C în raport cu  $C_0$

$$[R_c] = \begin{bmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

unde  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ , sînt proiecțiile vectorului  $\bar{r}_c$  pe axele sistemului  $C_0x_0y_0z_0$ .

Derivatele în raport cu timpul ale celorlalți doi vectori ai sumei (2.2),  $\{r\}$  și  $\{u\}$  sînt:

$$\frac{d}{dt}\{r\} = \{\dot{r}\} + ([\Omega] + [\dot{\phi}])\{r\} = \{\dot{r}\} + [R](\{\omega\} + \{\dot{\psi}\}) \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt}\{u\} = \{\dot{u}\} + ([\Omega] + [\dot{\phi}])\{u\} = \{\dot{u}\} + [U](\{\omega\} + \{\dot{\psi}\})$$

unde derivata parțială în raport cu timpul a vectorului  $\{r\}$ ,  $\{\dot{r}\} = \{\omega\}$ , deoarece  $\{r\}$  este un vector de modul constant,  $[\Omega_1]$  este o matrice de forma (2.7) ale cărei elemente sînt proiecțiile vitezei unghiulare  $\bar{\omega}_0$  pe sistemul de axe Cxyz,  $[\dot{\phi}]$  este matricea vitezei de rotație relativă a sistemului Cxyz în raport cu sistemul  $C_0x_0y_0z_0$ .

Elementele  $\dot{\phi}_x$ ,  $\dot{\phi}_y$  și  $\dot{\phi}_z$  ale matricei  $[\dot{\phi}]$ , care are forma similară cu  $[\Omega]$  (2.7), sînt proiecțiile vectorului viteză unghiulară relativă  $\dot{\phi}$  pe axele sistemului Cxyz.

Vectorul  $\{\omega_1\}$  al proiecțiilor vectorului  $\bar{\omega}$  pe sistemul Cxyz se poate exprima în funcție de vectorul  $\{\omega\}$  al proiecțiilor aceluiasi vector pe sistemul  $C_0x_0y_0z_0$  prin relația de transformare

$$\{\omega_1\} = [T]\{\omega\} \quad (2.11)$$

unde  $[T]$  este o matrice a transformării afine dintre sistemele  $C_0x_0y_0z_0$  și Cxyz.

Deoarece mișcările vibratorii unghiulare date de vectorul  $\{\varphi\}$ , ale corpului deformabil, față de sistemul de axe  $C_0x_0y_0z_0$  se consideră mișcări cu amplitudini mici, sub  $5^\circ$ , atunci matricea  $[T]$  poate fi scrisă sub forma:

$$[T] = [T_s][T_v] \quad (2.12)$$

unde  $[T_s]$  este o matrice de transformare dintre sistemul  $C_0x_0y_0z_0$  și sistemul Cxyz, cînd acesta se găsește într-o poziție medie, iar

$T_v$  reprezintă matricea de transformare a sistemului Cxyz față de poziția sa medie.

Matricea  $[T_v]$  este un produs de forma (2.3) al matricelor de transformare, corespunzătoare unghiurilor lui Euler  $\theta$ ,  $\psi$  și  $\alpha$  (în acest caz mic) pentru care se pot face aproximările  $\sin(\theta, \psi, \alpha) \approx (\theta, \psi, \alpha)$  și  $\cos(\theta, \psi, \alpha) \approx 1$ . În acest caz  $[T_v]$  va avea forma,

$$[T_v] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\theta \\ -\alpha & 1 & \psi \\ \theta & -\psi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Din fig.2.2 se pot deduce de asemenea proiecțiile  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  și  $\varphi_z$  ale vectorului rotație relativă  $\{\varphi\}$  pe sistemul de axe Cxyz

$$\varphi_x \approx \psi, \quad \varphi_y \approx \theta, \quad \varphi_z \approx \alpha \quad (2.14)$$

de unde  $[\tau_v]$  va rezulta,

$$[\tau_v] = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} = [I] - [\phi] \quad (2.15)$$

$[I]$  fiind matricea unitate (3x3), iar  $[\phi]$  este matricea de rotație relativă a sistemului Cxyz față de sistemul  $C_0x_0y_0z_0$ .

Poziția unghiulară relativă dintre sistemele Cxyz și  $C_0x_0y_0z_0$  se poate alege arbitrar în așa fel încît  $[\Omega_1] = [I]$ . Atunci din relația (2.11) și (2.15) va rezulta expresia vectorului

$$\{\omega_1\} = \{\omega\} - [\phi]\{\omega\} \quad (2.16)$$

sau

$$\{\omega_1\} = \{\omega\} + [\Omega]\{\varphi\} \quad (2.16')$$

Se va calcula în continuare expresia matricei  $[\Omega_1]$  (similară cu forma (2.7) a proiecțiilor vectorului  $\bar{\omega}$  pe sistemul Cxyz,

$$[\Omega_1] = [\Omega] - [\Omega_2] \quad (2.17)$$

unde vectorul  $\{\omega_2\}$  cu ajutorul căreia se formează matricea  $\Omega_2$ , are forma,

$$\{\omega_2\} = [\phi]\{\omega\} \quad (2.18)$$

matricea  $[\Omega_2]$  avînd forma,

$$[\Omega_2] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{2z} & \omega_{2y} \\ \omega_{2z} & 0 & -\omega_{2x} \\ -\omega_{2y} & \omega_{2x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Inlocuind componentele  $\omega_{2x}$ ,  $\omega_{2y}$  și  $\omega_{2z}$  ale vectorului  $\{\omega\}$ , calculat cu ajutorul relației (2.18), se va obține

$$[\Omega_2] = [\phi][\Omega] - [\Omega][\phi] \quad (2.20)$$

de unde

$$[\Omega_1] = [\Omega] - [\phi][\Omega] + [\Omega][\phi] \quad (2.21).$$

Cu rezultatele obținute mai sus vectorul viteză absolută  $\{\dot{r}_p\}$  a punctului P, aparținând corpului deformabil, raportat la sistemul de transport  $C_0x_0y_0z_0$ , va fi de forma,

$$\{\dot{r}_p\} = [T_0]\{\dot{r}_0\} + \{\dot{r}_c\} + \{\dot{u}\} + [\Omega] (\{r_c\} + \{r\} + \{u\}) + ([\dot{\phi}] + [\Omega][\phi] - [\phi][\Omega]) \cdot \{r\} \quad (2.22)$$

sau

$$\{\dot{r}_p\} = [T_0]\{\dot{r}_0\} + \{\dot{r}_c\} + \{\dot{u}\} + ([R_c] + [R] + [U])\{\omega\} + [R] (\{\dot{\psi}\} + [\Omega] \{\psi\}) \quad (2.23)$$

## 2.2. Ecuatiile dinamice ale corpului deformabil

Așa cum s-a arătat mai sus, sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea generală a corpului deformabil, se poate descrie cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange.

Coordonatele generalizate care definesc mișcarea generală a corpului deformabil se pot constitui din elementele vectorilor  $\{r_c\}$  și  $\{\psi\}$ , care definesc mișcarea de corp rigid și din elementele vectorului de deformație  $\{u\}$ .

Pentru cazurile practice, deformarea corpului poate fi aproximată prin discretizare, considerându-se N puncte materiale  $P_i$  ale corpului prin ale căror legi de deformație <sup>se</sup> aproximăză deformată sa. Vectorul  $\{u\}$  se consideră a avea forma

$$\{u\} = \sum_{j=1}^N [A_j(x, y, z)] \{u_j(t)\} \quad (2.24)$$

unde elementele matricilor  $[A_j(x, y, z)]$  sînt funcții analitice de coordonatele geometrice x, y, z, ale unui punct P, curent al corpului.

Vectorul  $\{u_j\}$  exprimă legile de deformație în cele N puncte  $P_j$  care definesc deformată corpului.

Domeniile de existență ale funcționalelor  $A_j(x, y, z)$  pot fi extinse pe întregul volum al corpului (metodele Rayleigh-Ritz și Galerkin) sau numai în zone învecinate punctelor  $P_j$  (metoda elementului finit).

1.9.999 189.9

Vectorii  $\{u\}$  și  $\{u_j\}$  pot fi exprimați prin intermediul unor coordonate generalizate sintetice ale unui vector  $\{q_m\}$  (metoda modurilor asumate),

$$\{u_j\} = [A_{mj}] \{q_m\} \quad (2.25)$$

unde elementele matricii  $[A_{mj}]$  sînt constante cu ajutorul cărora se formează matricea modală.

Plecînd de la forma (2.24), discretizată, a vectorului de deformație  $\{u\}$ , se poate trece la scrierea sistemului de ecuații diferențiale care definesc mișcarea generală a corpului deformabil

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial w} + \frac{\partial E_{dc}}{\partial w} + \frac{\partial E_{cn}}{\partial \dot{w}} = \{Q_w\} \quad (2.26)$$

$$\{w\} = (\{r_c\}; \{\varphi\}; \{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_N\})$$

$E_c$  este energia cinetică a corpului deformabil, ce are forma integralei

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} dm \quad (2.27)$$

extinsă pe întregul volum al corpului, unde  $dm$  este masa elementului de volum  $dv$ .

Energia de deformație  $E_d$  a corpului care însumează cele două energii  $E_{dc}$  de deformare conservativă și  $E_{dn}$  de deformare neconservativă, are forma

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (2.28)$$

unde  $\{\varepsilon\}$  și  $\{\sigma\}$  sînt vectorii (6x1) de deformație specifică și respectiv al eforturilor unitare.

Legătura dintre vectorul  $\{\sigma\}$  și  $\{\varepsilon\}$  se exprimă prin integrala de convoluție

$$\{\sigma\} = \int_0^t [\Delta(t-z)] \{\varepsilon\} dz \quad (2.29)$$

unde  $[\Delta(t-z)]$  este o matrice (6x6), ale cărei elemente sînt funcțiile de relaxare.

Expresia energiei de deformare  $E_d$  devine astfel de forma,

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^t \int_V \{\varepsilon\}^T [\Delta(t-z)] \{\varepsilon\} dv dz \quad (2.30)$$

Există foarte multe modele reologice cu ajutorul cărora se obține expresia energiei  $E_d$  de deformare. Pentru modelul viscoelastic, care are aplicabilitatea cea mai generală, deoarece poate fi studiat atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență, cele două componente ale energiei de disipație  $E_{dc}$  și  $E_{dn}$  se exprimă prin relațiile

$$E_{dc} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [B_0] \{\varepsilon\} dv; \quad E_{dn} = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{\varepsilon}\}^T [D] \{\dot{\varepsilon}\} dv \quad (2.31)$$

unde  $[B_0]$  și  $[D]$  sînt matrici (6x6), de elasticitate și respectiv de disipație, corespunzătoare elementului de volum  $dv$ .

Vectorul de deformare specifică  $\{\varepsilon\}$  se poate exprima în funcție de vectorul de deformare prin relația

$$\{\varepsilon\} = [\partial_0] \{u\} \quad (2.32)$$

unde  $[\partial_0]$  este un operator matriceal diferențial de ordinul 1 și are forma

$$[\partial_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Vectorii forțelor generalizate  $\{Q_v\}$  se calculează cunoscând expresia lucrului mecanic virtual  $\delta \mathcal{L}$ , al forțelor date și de legătură care acționează asupra corpului deformabil.



$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N_1} \{\delta_{rk}\}^T \{F_k\} + \sum_{k=1}^{N_2} \{\delta_{rlk}\}^T \{F_{lk}\} \quad (2.34)$$

$\{\delta_{rk}\}$  și  $\{\delta_{rlk}\}$  sînt vectorii deplasărilor virtuale ale punctelor de aplicare a forțelor date și de legătură exprimate prin  $N_1$  vectorii  $\{F_k\}$  și respectiv prin  $N_2$  vectorii  $\{F_{lk}\}$ . Pot exista și forțe distribuite și momente care se reduc la sisteme de forțe concentrate ce se înglobează în vectorii  $\{F_k\}$  și  $\{F_{lk}\}$ . Expresiile deplasărilor virtuale  $\{\delta_{rk}\}$  și  $\{\delta_{rlk}\}$  pot fi obținuți dacă se dau variații virtuale vectorilor  $\{r_o\}$ ,  $\{r_c\}$  și  $\{\varphi_o\}$ ,  $\{\varphi\}$  și  $\{u_j\}$ . Vor rezulta dezvoltări similare cu dezvoltările (2.22) sau (2.23) unde

$$\{\delta_{rk}\} = \{\dot{r}_{pk}\} \delta t ; \quad \{\delta_{rlk}\} = \{\dot{r}_{plk}\} \delta t \quad (2.35)$$

unde  $\{r_{pk}\}$  și  $\{r_{plk}\}$  sînt vectorii de poziție ai punctelor de aplicare a forțelor date și de legătură.

Se poate trece acum la calculul expresiilor termenilor corespunzători sistemului de ecuații (2.26) și se vor reține numai termenii liniari. Se ține seama că punctul C este centrul masei corpului considerat nedeformat pentru care,

$$\int_V \{r\} dm = [0] \text{ și } \int_V [R] dm = [0] \quad (2.36)$$

De asemenea în calculul termenilor ecuațiilor diferențiale derivații din energia cinetică se va ține seama de expresia derivatei matriciale  $[T_o]$

$$\frac{d}{dt} [T_o] = -[\Omega] [T_o] \quad (2.37)$$

### 2.3. Analiza sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării corpului deformabil

Legea de mișcare vibratorie a corpului deformabil, în raport cu sistemul de referință mobil  $C_o x_o y_o z_o$ , este dată de vectorii coordonatelor generalizate  $\{q\}$  ((N+2)x1) care are forma,

$$\{q\} = \left\{ \{r_c\}^T, \{\varphi\}^T, \{u_1\}^T \dots \{u_N\}^T \right\}^T \quad (2.38)$$

Sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea corpului deformabil dedus cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange va fi de forma

$$[M] \{\ddot{q}\} + ([C] + [G])\{\dot{q}\} + ([K] + [H_0] + [H_1])\{q\} = \{Q\} \quad (2.39)$$

$[M]$  este matricea de inerție care este partiționată în  $(N+2) \times (N+2)$  submatrici simetrice  $(3 \times 3)$

$$\begin{aligned} [m_{11}] &= [m] = \int_V [I]^T [I] dm = [m_{11}]^T \\ [m_{12}] &= [m_{21}]^T = \int_V [I]^T [R] dm = [0] \\ [m_{1,1+2}] &= \int_V [A_1]^T [I] dm = \int_V [I] [A_1] = [m_{1+2,1}]^T \\ [m_{22}] &= [J] = \int_V [R]^T [R] dm = [m_{22}]^T \\ [m_{2,1+2}] &= [m_{1+2,2}]^T = \int_V [R]^T [A_1] dm \\ [m_{j+2,1+2}] &= [m_{1+2,j+2}]^T = \int_V [A_j]^T [A_1] dm \end{aligned} \quad (2.40)$$

(1, j = 1, 2, 3, ..., N)

unde  $[J]$  este matricea momentelor de inerție ale corpului considerat nedeformat.

$$[J] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$[C]$  este matricea de amortizare internă a corpului deformabil ce de asemenea se partiționează în  $(N+2) \times (N+2)$  matrici simetrice  $(3 \times 3)$ ,

$$\begin{aligned} [c_{1,1}] &= [c_{2,1}] = [c_{1,1}] = [c_{1,2}] = [0] \quad (i = 1, 2, \dots, N+2) \\ [c_{1+2,j+2}] &= [c_{j+2,1+2}]^T = \int_V [\theta_0] ([A_1])^T [D] [\theta_0] ([A_j]) dv \end{aligned} \quad (2.42)$$

(1, j = 1, 2, ..., N)

deci matricea  $[C]$  este simetrică.

$[G]$  este o matrice ce se partitionează în  $(N+2) \times (N+2)$  submatrici  $(3 \times 3)$

$$[g_{11}] = 2m[\Omega] = -2m[-\Omega]^T = -[g_{11}]^T,$$

deoarece

$$[-\Omega]^T = -[\Omega], \quad (2.43)$$

$$[g_{12}] = [g_{21}]^T = [0]$$

$$[g_{22}] = [\Omega] [J] + [J][\Omega] = -[g_{22}]^T,$$

sau sub formă explicită

$$[g_{22}] = \omega_x \begin{bmatrix} 0 & -J_{xz} & J_{xy} \\ J_{xz} & 0 & -(J_y + J_z) \\ -J_{xy}(J_y + J_z) & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_y \begin{bmatrix} 0 & -J_{yz} & (J_x + J_z) \\ J_{yz} & 0 & -J_{xy} \\ -(J_x + J_z) & J_{xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$+ \omega_z \begin{bmatrix} 0 & -(J_x + J_y) & J_{yz} \\ (J_x + J_y) & 0 & -J_{xz} \\ -J_{yz} & J_{xz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_{1,1+2}] = 2[\Omega] \int_V [A_1] dm = -2 \left( \int_V [A_1]^T dm \right) [\Omega]^T = -[g_{1+2,1}]^T$$

$$[g_{2,1+2}] = \int_V ([R]^T [\Omega] + [\Omega] [R]^T) [A_1] dm = -[g_{1+2,2}]^T \quad (2.45)$$

$$[g_{1+2,j+2}] = 2 \int_V [A_j]^T [-\Omega] [A_j] dm = -[g_{j+2,1+2}]^T$$

Deoarece submatricile  $[g_{ij}]$  sînt matrici antisimetrice, rezultă că și matricea  $[G]$  este antisimetrică.

Analizînd submatricile  $[g_{11}]$  și  $[g_{22}]$  se constată că prima corespunde unei forțe Coriolis, dată prin vectorul

$$\{F_c\} = [g_{11}] \{\dot{r}_c\} = 2m [\Omega] \{\dot{r}_c\}, \quad (2.46)$$

$[\Omega]$  fiind matricea vitezei unghiulare de transport, iar  $\{\dot{r}_c\}$  fiind vectorul vitezei relative a centrului C al corpului considerat nedeformabil.

$[g_{22}]$  corespunde unui cuplu giroscopic dat de vectorul

$$\{M_g\} = [g_{22}] \{\dot{\psi}\} = ([\Omega] [J] + [J][\Omega]) \{\dot{\psi}\} \quad (2.47)$$

Si celelalte submatrici  $[g_{1j}]$  reprezintă efecte de tip Coriolis sau giroscopic.

Dacă matricea  $[G]$  va fi o matrice antisimetrică. Ea se numește matrice giroscopică, iar sistemul (2.39) se numește sistem giroscopic. Matricea  $[K_0]$  este matricea de rigiditate formată din  $(N+2) \times (N+2)$  submatrici  $(3 \times 3)$ ,

$$\begin{aligned} [K_{1,1}^0] &= [K_{2,1}^0] = [K_{1,1}^0] = [K_{1,2}^0] = 0 & (i = 1, 2, \dots, N) \\ [K_{1+2, j+2}^0] &= [K_{j+2, 1+2}^0]^T = \int_V [\partial_0]([A_1]) [D] [\partial_0]([A_j]) dv \\ & \quad 1, j = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (2.48)$$

matricea  $[K_0]$  fiind deci simetrică.

$[H_0]$  este o matrice formată din  $(N+2) \times (N+2)$  submatrici  $(3 \times 3)$

$$[h_{1,1}^0] = m[\Omega]^2 = [h_{1,1}^0]^T$$

deoarece  $[\Omega]^2$  este simetrică

$$\begin{aligned} [h_{2,2}^0] &= [\Omega] [J] [\Omega] = [h_{22}^0]^T \\ [h_{1+2,1}^0] &= \int_V [A_1]^T [\Omega]^2 dm = [h_{1,1+2}^0]^T \\ [h_{1+1,2}^0] &= \int_V [A_1]^T [\Omega] [R] [\Omega] dm = [h_{2,1+2}^0]^T \\ [h_{1+2, j+2}^0] &= \int_V [A_1]^T [\Omega]^2 [A_j] = [h_{1+2, 1+2}^0] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Rezultă că  $[H_0]$  este simetrică.

Analizînd submatricea  $[h_{1,1}^0]$  ea corespunde unei forțe inerțiale centrifugale

$$[F_r] = [h_{1,1}^0] = 2m[\Omega]^2 \{r_c\} \quad (2.50)$$

care acționează în centrul C al masei corpului.

$[H_1]$  este o matrice ce se partiționează în  $(N+2) \times (N+2)$  submatrici

$$\begin{aligned}
 [h_{1,1}^1] &= m [\dot{\Omega}] \\
 [h_{1,2}^1] &= [h_{2,1}^1] = [0] \\
 [h_{2,2}^1] &= -[h_{2,2}^1]^T - [J] [\dot{\Omega}] \quad (2.51) \\
 [h_{1+2,1}^1] &= \int_V [A_1]^T [\dot{\Omega}] \, dm = -[h_{1,1+2}^1]^T \\
 [h_{1+2,2}^1] &= \int_V [A_1]^T [R] [\dot{\Omega}] \, dm = -[h_{1,1+2}^1]^T \\
 [h_{1+2,j+2}^1] &= \int_V [A_1]^T [J_j] [A_j] \, dm = -[h_{j+2,1+2}^1]^T
 \end{aligned}$$

Rezultă că matricea  $[H_1]$  este o matrice antisimetrică.

Submatricea  $[h_{11}^1]$  corespunde unei forțe de inerție tangențială și apare la accelerarea rotației ( $[\dot{\Omega}] \neq [0]$ ). Din această cauză matricea  $[H_1]$  se poate numi matrice de accelerare.

$\{Q\}$  este vectorul generalizat  $(3 \times (N+2)) \times 1$  care însumează trei vectori:

$$\{Q\} = \{Q_t\} + \{Q_f\} + \{Q_e\} \quad (2.52)$$

Un vector  $\{Q_t\}$  corespunzător forțelor inerțiale de transport (mișcarea sistemului  $C_0 x_0 y_0 z_0$  fiind impusă), compus din  $N+2$  subvectori  $(3 \times 1)$

$$\begin{aligned}
 \{q_{1,1}^t\} &= -m [T_0] \{\ddot{r}_0\} \\
 \{q_{2,1}^t\} &= [J] \{\dot{\omega}\} - [\Omega] [J] \{\omega\} \quad (2.53) \\
 \{q_{1+2,1}^t\} &= - \left( \int_V [A_1]^T ([T_0] \{\ddot{r}_0\} + [R] \{\omega\} + [\Omega] [R] \{\omega\}) \, dm \right) \\
 &(i = 1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

Un vector  $\{Q_f\}$  al forțelor exterioare date, compus din  $N+2$  subvectori  $(3 \times 1)$

$$\begin{cases} \{Q_{1,1}^f\} = \sum_{k=1}^{N_1} \{F_k\} \\ \{Q_{2,1}^f\} = \sum_{k=1}^{N_1} [R_k] \{F_k\} \\ \{Q_{1+2,1}^f\} = [A_{1k}]^T \{F_k\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (2.54)$$

Un vector  $\{Q_\ell\}$  al forțelor de legătură, format din  $N+2$  subvectori ( $3 \times 1$ )

$$\begin{cases} \{Q_{1,1}^\ell\} = \sum_{k=1}^{N_2} \{F_{\ell k}\} \\ \{Q_{2,1}^\ell\} = \sum_{k=1}^{N_2} [R_{\ell k}]^T \{F_{\ell k}\} \\ \{Q_{1+2,1}^\ell\} = [A_{i\ell}]^T \{F_{\ell 1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (2.55)$$

Forțele de legătură pot fi reacțiunile dinamice din cuplele cinematice de legătură sau forțe de legătură viscoelastice, ce derivă din funcții de potențial și de disipație. În acest caz termenii forțelor de legătură trec în membrul stîng al sistemului (2.39).

În cazul în care se studiază mișcarea unei structuri compuse din mai multe substructuri dintre care una execută o mișcare impusă (cazul corpului deformabil studiat) apar și efecte de excitare parametrică [12].

### 3. ANALIZA RASPUNSULUI DINAMIC AL STRUCTURII

#### 3.1. Analiza modală

Sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea de corp deformabil a unei structuri discretizate are forma cea mai generală (2.39). În acest sistem se reflectă toate efectele dinamice posibile, ca efecte giroscopice, Coriolis etc.

Pentru cazul particular când sistemul de referință mobil  $O_0 x_0 y_0 z_0$  (fig.1.1), față de care se studiază mișcarea corpului deformabil, este fix, sistemul (2.39) devine un sistem negiroscopic, pentru care matricile  $[G]$ ,  $[H]$  și  $[H_0]$  se anulează. Dacă se neglijează și amortizarea internă a structurii ( $[C] \approx [0]$ ), sistemul de ecuații (2.39) devine

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (3.1)$$

și i se poate aplica decompoziția modală clasică, prin transformarea lineară

$$\{q\} = [\Psi] \{x\} \quad (3.2)$$

unde  $[\Psi]$  este matricea modală ( $N \times N$ ), iar  $\{x\}$  este vectorul coordonatelor generalizate modale.

Matricea  $[\Psi]$  conține  $N^2$  elemente, constante, din coloanele căreia se formează  $N$  vectori modali, ( $N \times 1$ ),  $\{\psi_r\}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ). Coordonatele generalizate modale cuprinse în vectorul  $\{x\}$  trebuie să fie linear independente între ele. Pentru decompoziția modală a sistemului (3.1) trebuie să fie îndeplinite  $N(N-1)$  relații de ortogonalitate

$$\begin{aligned} \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_k\} &= 0 & \{\psi_r\}^T [K] \{\psi_k\} &= 0 \\ (r, k &= 1, 2, \dots, N) & r \neq k & \end{aligned} \quad (3.3)$$

Matricile  $[M]$  și  $[K]$  fiind simetrice, relațiile (3.3) formează, de fapt, un sistem omogen de  $N(N-1)$  ecuații cu  $N^2$  necunoscute, elementele vectorilor  $\{\psi_r\}$ . Alegând arbitrare  $N$  elemente,

de exemplu primele elemente  $\psi_{1r}$  ale fiecărui vector (sistemul (3.3)) se poate rezolva exact. În continuare se pot calcula masele  $m_r$  și rigiditățile  $k_r$  modale.

$$\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} = m_r ; \quad \{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\} = k_r \quad (3.4)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

În cazul structurilor reale, matricea de amortizare  $[C] \neq [0]$  iar sistemul (2.39) devine

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (3.5)$$

Decompoziția modală a sistemului (3.5) se face acum numai pentru unele cazuri particulare:

- Sistem cu amortizare proporțională unde,

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (3.6)$$

$\alpha$  și  $\beta$ , fiind constante de proporționalitate;

- Sistem pentru care matricile sale îndeplinesc condițiile

$$[C] [M]^{-1} [K] = [K] [M]^{-1} [C] \quad (3.7)$$

Decompoziția modală a sistemului (2.39) sau (3.5) se poate face numai prin moduri complexe, unde elementele matricei modale sînt constante complexe.

Sistemul (2.39) poate fi pus sub forma clasică a sistemului de stare

$$\{\dot{z}\} = [A_0] \{z\} + \{Z\} \quad (3.7)$$

unde

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} q \\ \vdots \\ \dot{q} \end{Bmatrix}; \quad \{Z\} = [A]^{-1} \{f\}; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Q \end{Bmatrix}$$

$$[A_0] = -[A]^{-1} [B]; \quad [A] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} [0] & -[I] \\ [K_0] & [C_0] \end{bmatrix}$$

$$[K_0] = [K] + [H_0] + [H_1]; \quad [C_0] = [C] + [G]; \quad (3.8)$$



Pentru vibrațiile libere ale structurii, soluția sistemului (3.7) este de forma

$$\{z\} = \{X_0\} e^{\lambda t} \quad (3.9)$$

care verifică sistemul (3.7), rezultând forma clasică a sistemului valorilor proprii al matricii  $[A_0]$

$$[A_0] \{X_0\} = \lambda \{X_0\} \quad (3.10)$$

Matricea  $[A_0]$  are forma

$$[A_0] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K_0] & -[M]^{-1}[C_0] \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

fiind o matrice asimetrică.

Cele  $2N$  valori proprii  $\lambda_r$  ale matricii  $[A_0]$  dau sistemul valorilor proprii

$$[A_0] \{X_{or}\} = \lambda_r \{X_{or}\} \quad (r = 1, 2, \dots, 2N) \quad (3.12)$$

Matricea  $([A_0] - \lambda [I])$  devine singulară pentru cele  $2N$  valori proprii  $\lambda_r$ , iar transpusa sa pentru  $\lambda = \lambda_r$ ,  $([A_0] - \lambda_r [I])^T = [A_0]^T - \lambda_r [I] = [C]$ , rezultând că matricea transpusă  $[C]^T$  are aceleași valori proprii  $\lambda_r$  cu matricea  $[A_0]$ .

Sistemul valorilor proprii pentru matricea  $[A_0]^T$  va fi

$$[A_0]^T \{Y_{ok}\} = \lambda_k \{Y_{ok}\} \quad (k = 1, 2, \dots, 2N) \quad (3.13)$$

sau prin transpunere,

$$\{Y_{ok}\}^T [A_0] = \lambda_k \{Y_{ok}\}^T \quad (3.13')$$

Fiind situat în stînga matricii  $[A_0]$  vectorul  $\{Y_{ok}\}$  este întâlnit în literatura de specialitate sub numele de vector la stînga al matricii  $[A_0]$ , spre deosebire de vectorul  $\{X_{or}\}$ , care este un vector la dreapta al aceleiași matrici.

Inmulțind sistemul (3.12) la stînga cu  $\{Y_{ok}\}^T$ , iar sistemul (3.13) la dreapta cu  $\{X_{or}\}$  prin scădere obținem

$$(\lambda_r - \lambda_k) \{Y_{ok}\}^T \{X_{or}\} = 0 \quad (3.14)$$

Cum  $\lambda_r \neq \lambda_k$  va rezulta relația de ortogonalitate a vectorilor  $\{Y_{ok}\}$  și  $\{X_{or}\}$ .

$$\{Y_{ok}\}^T \{X_{or}\} = 0 \quad (k, r = 1, 2, \dots, 2N) \quad (3.15)$$

Pentru  $\lambda_r = \lambda_k$  din (3.14) va rezulta,

$$\{Y_{or}\}^T \{X_{or}\} = a_r \quad r = 1, 2, 3, \dots, 2N \quad (3.16)$$

unde  $a_r$  sînt constante complexe.

Vor rezulta, de asemenea, relațiile de ortogonalitate

$$\{Y_{or}\}^T [A_o] \{X_{or}\} = \lambda_r a_r \quad (r = 1, 2, \dots, 2N) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \{Y_{ok}\}^T [A_o] \{X_{or}\} &= 0 \quad (r, k = 1, 2, \dots, 2N) \\ &(r \neq k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

care se pot pune sub formă restrînsă,

$$[Y_o]^T [X_o] = [a]; \quad [Y_o]^T [A_o] [X_o] = [a] [\Delta] \quad (3.19)$$

unde matricile  $[X_o]$  și  $[Y_o]$  au coloanele vectorii  $\{X_{or}\}$  și  $\{Y_{or}\}$ . Matricile  $[a]$  și  $[\Delta]$  sînt matrici diagonale, ale căror elemente sînt constantele  $a_r$  și respectiv valorile proprii  $\lambda_r$ .

Inmulțind la stînga și dreapta cu  $[a]^{-1/2}$  relațiile de ortogonalitate (3.19) se obțin relațiile de ortonormalitate,

$$[Y_n]^T [X_n] = [I]; \quad [Y_n]^T [A_o] [X_n] = [\Delta] \quad (3.20)$$

unde

$$[Y_n]^T = [a_r]^{-1/2} [Y_o]^T; \quad [X_n] = [X_o] [a]^{-1/2} \quad (3.21)$$

Soluția generală a sistemului (3.7) se compune din soluția generală a sistemului omogen plus o soluție particulară a sistemului.

Soluția generală a sistemului omogen este de forma,

$$\{z\} = e^{[A_0]t} \{z_0\} \quad (3.22)$$

unde  $\{z_0\}$  este vectorul condițiilor inițiale  $\{z(0)\} = \{z_0\}$ . Soluția particulară se caută de forma

$$\{z_p\} = e^{[A_0]t} \{c_1(t)\} \quad (3.23)$$

unde elementele vectorului  $\{c_1(t)\}$  sînt funcțiuni de timp.

Prin înlocuire în (3.7) va rezulta,

$$\{z_p\} = \int_0^t e^{[A_0](t-\tau)} \{z(\tau)\} d\tau \quad (3.24)$$

Deci soluția generală a sistemului (3.7) are expresia

$$\{z\} = e^{[A_0]t} \{z_0\} + \int_0^t e^{[A_0](t-\tau)} \{z(\tau)\} d\tau \quad (3.25)$$

În soluția (3.25) matricile  $e^{[A_0]t_0}$ , (unde  $t_0 = t$  sau  $t_0 = t-\tau$ ) poate fi dezvoltată în serii de matrici,

$$e^{[A_0]t_0} = [I] + [A_0] \frac{t_0}{1!} + [A_0]^2 \frac{t_0^2}{2!} \dots [A_0]^m \frac{t_0^m}{m!} + \dots \quad (3.26)$$

Cu ajutorul relațiilor de ortonormalitate (3.20) se poate deduce dezvoltarea matricii  $[A_0]^m$

$$\begin{aligned} [A_0]^m &= ([X_n] [A] [Y_n]^T)^m = [X_n] [\Delta] [Y_n]^T [X_n] [\Delta] \dots [Y_n]^T \\ [A_0]^m &= [X_n] [\Delta]^m [Y_n]^T \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cu această relație, dezvoltarea relației (3.26) are forma

$$\begin{aligned} e^{[A_0]t} &= [X_n] \left( [I] + [\Delta] \frac{t_0}{1!} + [\Delta]^2 \frac{t_0^2}{2!} + \dots + [\Delta]^{m-1} \frac{t_0^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + [\Delta]^m \frac{t_0^m}{m!} \right) [Y_n]^T = [X_n] e^{[\Delta]t_0} [Y_n]^T \end{aligned} \quad (3.28)$$

și de aici, soluția (3.25) se poate scrie sub forma.

$$\{z\} = [X_n] e^{[\Delta]t} [Y_n]^T \{z_0\} + \int_0^t [X_n] e^{[\Delta](t-z)} [Y_n]^T \{z(z)\} dz \quad (3.29)$$

Matricea  $e^{[\Delta]t_0}$  (pentru  $t_0 = t$  sau  $t_0 = t-z$ ) este o matrice diagonală ale cărei elemente sînt exponențiale  $e^{\lambda_r t_0}$ , ( $r=1, 2, \dots$ ,

Sistemul valorilor proprii ale sistemului de ecuații diferențiale (2.39) are forma

$$(\lambda_r^2 [M] + \lambda_r [C_0] + [K_0]) \{X_r\} = \{0\} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, 2N) \quad (3.30)$$

iar pentru sistemul (2.39) transpus se obține,

$$(\lambda_r^2 [M]^T + \lambda_r [C_0]^T + [K_0]^T) \{Y_r\} = \{0\} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, 2N) \quad (3.31)$$

unde  $\{X_r\}$  și  $\{Y_r\}$  sînt vectorii proprii complecși ai sistemului (2.39).

Sistemul (3.30) trebuie să fie echivalent cu sistemul,

$$[A_0] \{X_{or}\} = \lambda_r \{X_{or}\}, \quad (3.32)$$

pe care îl scriem sub formă partiționată,

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M]^{-1} [K_0] & -[M]^{-1} [C_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_r^{(1)} \\ X_r^{(2)} \end{Bmatrix} = \lambda_r \begin{Bmatrix} X_r^{(1)} \\ X_r^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Prin dezvoltare va rezulta

$$\begin{aligned} \{X_r^{(2)}\} &= \lambda_r \{X_r^{(1)}\} \\ \lambda_r [M] \{X_r^{(2)}\} + [C_0] \{X_r^{(2)}\} + [K_0] \{X_r^{(1)}\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

iar de aici,

$$(\lambda_r^2 [M] + \lambda_r [C_0] + [K_0]) \{X_r^{(2)}\} = \{0\} \quad (3.35)$$

rezultînd  $\{X_r^{(1)}\} = \{X_r\}$ ;  $\{X_r^{(2)}\} = \lambda_r \{X_r\}$  și mai departe expresia vectorului  $\{X_{or}\}$

$$\{X_{or}\} = \begin{Bmatrix} X_r \\ \dots \\ \lambda_r X_r \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

După același raționament ca mai sus, sistemul (3.31) trebuie să fie echivalent cu sistemul

$$[A_o]^T \{Y_{or}\} = \lambda_r \{Y_{or}\} \quad (3.37)$$

de unde prin dezvoltarea formei partiționate

$$\begin{bmatrix} [O] & -[K_o]^T [M]^{-1} \\ [I] & -[C_o]^T [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_r^{(1)} \\ Y_r^{(2)} \end{Bmatrix} = \lambda_r \begin{Bmatrix} Y_r^{(1)} \\ Y_r^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

va rezulta

$$-[K_o]^T [M]^{-1} \{Y_r^{(2)}\} = \lambda_r \{Y_r^{(1)}\} \quad (3.39)$$

$$\{Y_r^{(1)}\} - [C_o] [M]^{-1} \{Y_r^{(2)}\} = \lambda_r \{Y_r^{(2)}\}$$

din care rezultă sistemul valorilor proprii,

$$(\lambda_r^2 [M] + \lambda_r [C_o]^T + [K_o]^T) [M]^{-1} \{Y_r^{(2)}\} = \{0\} \quad (3.40)$$

care trebuie să fie echivalent cu (3.31). Se vede imediat că,

$$\{Y_r^{(2)}\} = [M] \{Y_r\}; \quad \{Y_r^{(1)}\} = -\frac{1}{\lambda_r} [K_o]^T \{Y_r\}, \quad (3.41)$$

iar vectorul propriu  $\{Y_{or}\}$  va avea forma,

$$\{Y_{or}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\lambda_r} [K_o]^T \{Y_r\} \\ [M] \{Y_r\} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

Notînd cu  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$  vectorii normalizați ai vectorilor  $\{X_r\}$  și  $\{Y_r\}$  vom avea matricile modale,

$$[X_n] = \begin{bmatrix} \{x_r\} \dots \{\bar{x}_r\} \\ \dots \\ \lambda_r \{x_r\} \dots \bar{\lambda}_r \{\bar{x}_r\} \end{bmatrix}, [Y_n] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_r} [K_0]^T \{Y_r\} \dots -\frac{1}{\lambda_r} [K_0]^T \{\bar{Y}_r\} \\ \dots \\ [M] \{Y_r\} \dots [M] \{\bar{Y}_r\} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

unde  $\{\bar{x}_r\}$  și  $\bar{\lambda}_r$  sînt: vectorul propriu complex conjugat lui  $\{x_r\}$  și respectiv valoarea proprie conjugată lui  $\lambda_r$ .

Avînd aceste rezultate se poate dezvolta matricea  $e^{[A_0]t_0}$ ,

$$e^{[A_0]t_0} = [X_n] e^{[A]t_0} [Y_n]^T = \begin{bmatrix} \{x_r\} \dots & \dots & \{\bar{x}_r\} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_r \{x_r\} \dots & \dots & \bar{\lambda}_r \{\bar{x}_r\} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_r t_0} & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots \\ [0] & \dots & e^{\bar{\lambda}_r t_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots - \frac{1}{\lambda_r} \{Y_r\}^T [K_0] \dots & \dots & \dots \{Y_r\}^T [M] \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots - \frac{1}{\bar{\lambda}_r} \{\bar{Y}_r\}^T [K_0] & \dots & \dots \{\bar{Y}_r\}^T [M] \dots \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

care prin dezvoltare va avea forma,

$$[X_n] e^{[A]t_0} [Y_n] = \begin{bmatrix} -(\lambda_r \{Y_r\}^T e^{\lambda_r t_0} + \bar{\lambda}_r \{\bar{Y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t_0}) [K_0] \dots - (\lambda_r \{Y_r\}^T e^{\lambda_r t_0} + \bar{\lambda}_r \{\bar{Y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t_0}) [M] \\ \dots \\ -(\lambda_r \{Y_r\}^T e^{\lambda_r t_0} + \bar{\lambda}_r \{\bar{Y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t_0}) [K_0] \dots - (\lambda_r \{Y_r\}^T e^{\lambda_r t_0} + \bar{\lambda}_r \{\bar{Y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t_0}) [M] \end{bmatrix}$$

Vectorul de excitație  $\{Z\}$  are forma, ținînd seama de (3.8)

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ [M]^{-1} q(t) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Deoarece vectorul legii de mișcare  $\{z\} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$ , va rezulta, înlocuind expresiile dezvoltate mai sus în (3.25), soluția generală a sistemului (2.39)

$$\begin{aligned} \{q\} = & - \left( \sum_{r=1}^N (\{x_r\} \{y_r\}^T e^{\frac{\lambda_r t}{\lambda_r}} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\frac{\bar{\lambda}_r t}{\bar{\lambda}_r}}) [k_0] \{q_0\} + \right. \\ & + \left( \sum_{r=1}^N (\{x_r\} \{y_r\}^T e^{\lambda_r t} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t}) [M] \{\dot{q}_0\} + \right. \quad (3.46) \\ & \left. + \sum_{r=1}^N (\{x_r\} \{y_r\}^T \int_0^t e^{\lambda_r(t-z)} \{Q(z)\} dz + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \int_0^t e^{\bar{\lambda}_r(t-z)} \{Q(z)\} dz \right) \end{aligned}$$

Primele două sume reprezintă vectorul legii de mișcare corespunzător mișcărilor libere cu condițiile inițiale  $\{q(0)\} = \{q_0\}$ ,  $\{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}$ , iar cea de a treia sumă dă vectorul vibrațiilor forțate.

Soluția (3.46) reprezintă răspunsul modal al unui sistem vibrant giroscopic la o excitație oarecare, dată de vectorul  $\{Q(t)\}$  răspuns care ține seama și de condițiile inițiale.

### 3.2. Răspunsul sistemului vibrant la diverse tipuri de excitație

#### 3.2.1. Vibrații libere

Se consideră că la momentul  $t = 0$  se întrerupe excitația, deci  $\{Q(t)\} = \{0\}$ . În acest caz starea de mișcare a sistemului la momentul  $t = 0$  este dată de vectorii  $\{q_0\}$  și  $\{\dot{q}_0\}$  care devin vectori ai condițiilor inițiale. Din (3.46) va rezulta,

$$\begin{aligned} \{q\} = & \left( \sum_{r=1}^N \{x_r\} \{y_r\}^T e^{\frac{\lambda_r t}{\lambda_r}} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\frac{\bar{\lambda}_r t}{\bar{\lambda}_r}} \right) [k_0] \{q_0\} + \\ & + \left( \sum_{r=1}^N \{x_r\} \{y_r\}^T e^{\lambda_r t} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t} \right) [M] \{\dot{q}_0\} \quad (3.47) \end{aligned}$$

Deoarece vectorii  $\{\bar{x}_r\}$  și  $\{\bar{y}_r\}$  sînt complex conjugați ai vectorilor  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$ , iar valoarea proprie  $\bar{\lambda}_r$  este conjugată valorii proprii  $\lambda_r$ , se pot scrie relațiile,

$$\begin{aligned} \{x_r\} = \{x_{rr}\} + j \{x_{1r}\}; \quad \{\bar{x}_r\} = \{x_{rr}\} - j \{x_{1r}\} \\ \{y_r\} = \{y_{rr}\} + j \{y_{1r}\}; \quad \{\bar{y}_r\} = \{y_{rr}\} - j \{y_{1r}\} \\ \lambda_r = -\sigma_r + j p_r \quad \bar{\lambda}_r = -\sigma_r - j p_r \end{aligned} \quad (3.48)$$

unde  $\{x_{rr}^- \}$  și  $\{y_{rr}^- \}$  reprezintă componentele reale ale vectorilor  $\{x_r^- \}$  și respectiv  $\{y_r^- \}$ , iar  $\{x_{ir}^- \}$  și  $\{y_{ir}^- \}$  reprezintă componentele lor imaginare, ( $j = \sqrt{-1}$ ).

Deoarece produsele  $\{x_r^- \} \{y_r^- \}^T$  și  $\{x_r^- \} \{y_r^- \}^T$  reprezintă matrici pătrate  $N \times N$  dimensional, cu elemente complexe acestea pot fi scrise sub forma,

$$\{x_r^- \} \{y_r^- \}^T = [U_{or}] + j [V_{or}]; \{x_r^- \} \{y_r^- \}^T = [U_{or}] - j [V_{or}] \quad (3.49)$$

unde

$$[U_{or}] = \{x_{rr}^- \} \{y_{rr}^- \}^T - \{x_{ir}^- \} \{y_{ir}^- \}^T,$$

$$[V_{or}] = \{x_{rr}^- \} \{y_{ir}^- \}^T + \{x_{ir}^- \} \{y_{rr}^- \}^T \quad (3.50)$$

sînt matrici reale, vectorul  $\{q\}$  devine astfel,

$$\begin{aligned} \{q\} = & 2 \sum_{r=1}^N \frac{e^{-\sigma_r t}}{\sigma_r^2 + p_r^2} ((\sigma_r [U_{or}] - p_r [V_{or}]) \cos p_r t + (p_r [U_{or}] + \\ & + [V_{or}] \sin p_r t) [K_o] \{c_o\} + 2 \sum_{r=1}^N e^{-\sigma_r t} ([U_{or}] \cos p_r t - \\ & - [V_{or}] \sin p_r t) [M] \{q_o\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Deci soluția  $\{q\}$  conține o sumă de  $N$  componente vibratorii amortizate ale celor  $N$  moduri naturale de vibrații ale sistemului vibrant,  $p_r$  și  $\sigma_r$  fiind pseudopulsatia și respectiv factorul de amortizare, corespunzătoare modului natural  $r$ .

### 3.2.2. Vibrații forțate

#### 3.2.2.1. Excitație cu forță treaptă

La o excitație de tip treapta vectorul  $\{Q(t)\}$  este de forma

$$\begin{aligned} \{Q(t)\} &= \{0\} & \text{pentru } t < 0 \\ \{Q(t)\} &= \{F_t\} & \text{pentru } t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

elementele vectorului  $\{F_t\}$  fiind forțe constante.



Se consideră sistemul în repaus, deci  $\{q_0\} = \{\dot{q}_0\} = \{0\}$ , la  $t = 0$ . Cu aceste condiții, din (3.54) se deduce vectorul legii de mișcare,

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \{x_r\} \{y_r\}^T \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)} \{F_t\} d\tau + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \int_0^t e^{\bar{\lambda}_r(t-\tau)} \{F(t)\} d\tau \quad (3.53)$$

care prin integrare va da

$$\{q\} = - \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{\lambda_r} \{x_r\} \{y_r\}^T + \frac{1}{\lambda_r} \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \right) \{F_t\} + \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{\lambda_r} \{x_r\} \{y_r\}^T e^{\lambda_r t} + \frac{1}{\lambda_r} \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t} \right) \{F_t\}, \quad (3.54)$$

sau ținând seama de relațiile (3.40), (3.49) și (3.50)

$$\{q\} = 2 \sum_{r=1}^N \left( \frac{\sigma_r [U_{or}] - p_r [V_{or}]}{\sigma_r^2 + p_r^2} \right) \{F_t\} + 2 \sum_{r=1}^N \frac{e^{-\sigma_r t}}{\sigma_r^2 + p_r^2} (\sigma_r [U_{or}] - p_r [V_{or}]) \cos p_r t + (p_r [U_{or}] - \sigma_r [V_{or}]) \sin p_r t \{F_t\} \quad (3.55)$$

Prima sumă reprezintă un vector constant, care este vectorul  $\{q_{os}\}$  al deplasărilor statice ale structurii, sub acțiunea vectorului forțelor statice  $\{F_t\}$ . A doua sumă reprezintă componenta legilor de mișcare vibratorii amortizate, ale sistemului vibrant, în jurul poziției noi de echilibru dată de vectorul  $\{q_{os}\}$ .

$$\{q_{os}\} = - \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{\lambda_r} \{x_r\} \{y_r\}^T + \frac{1}{\lambda_r} \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \right) \{F_t\} = 2 \sum_{r=1}^N \frac{(\sigma_r [U_{or}] - p_r [V_{or}])}{\sigma_r^2 + p_r^2} \{F_t\} \quad (3.56)$$

Legătura dintre vectorul forțelor treaptă  $\{F_t\}$  și vectorul de excitație este

$$\{F_t\} = [K_0] \{q_{os}\} \quad (3.57)$$

care reprezintă echilibru static al sistemului.

Va rezulta că inversa matricei de rigiditate  $[K_0]$  va avea expresia

$$[K_0]^{-1} = 2 \sum_{r=1}^N \left( \frac{\sigma_r [U_{or}] - p_r [V_{or}]}{\sigma_r^2 + p_r^2} \right) \quad (3.58)$$

### 3.2.2.2. Excitație de tip impulsiv

Excitațiile de tip impulsiv sînt acelea pentru care durata  $\Delta t$ , de acțiune a excitației dată prin vectorul  $\{Q(t)\}$ , este foarte mică, în comparație cu pseudoperioadele  $T_r = \frac{2\pi}{p_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), ale mișcărilor vibratorii.

În general, impulsul se aplică printr-un șoc într-un punct de recare P al structurii, în care masa redusă are valoarea  $m_p$ .

Notînd cu  $F_p(t)$  legea de variație a forței percutante în punctul P, valoarea impulsului aplicat va fi,

$$P_p = \int_0^{\Delta t} F_p(t) dt = m_p \dot{q}_{op} \quad (3.59)$$

unde  $\dot{q}_{op}$ , este viteza punctului P, imediat după momentul ciocnirii. Viteza  $\dot{q}_{op}$  devine condiție inițială, la un nou moment  $t = 0$  corespunzător desprinderii celor două corpuri care se ciocnesc, pentru mișcările vibratorii libere amortizate ale sistemului. Aceste condiții inițiale sînt

$$\begin{aligned} \{q_0\} &= \{0\} \\ \{\dot{q}_0\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_{op} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{m_p} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_p \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

pentru care vectorul legii de mișcare (3.55) devine

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^N (\{x_r\} \{y_r\}^T e^{\lambda_r t} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t}) \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_p & & \\ & & m_2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_p / m_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de unde

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^N (\{x_r\} y_{rp} e^{\lambda_r t} + \{\bar{x}_r\} \bar{y}_{rp} e^{\bar{\lambda}_r t}) P_p \quad (3.61)$$

unde  $y_{rp}$  și  $\bar{y}_{rp}$  sînt elementele p ale vectorilor  $\{y_r\}$  și  $\{\bar{y}_r\}$ .

Cînd se poate calcula direct, sau prin metode aproximative, transformata Laplace a vectorului de excitație  $\{Q(t)\}$ , atunci pentru calculul vectorului integralei de convoluție  $\{I_c(t)\}$  se poate aplica teorema lui Borel,

$$\{I_c\} = \int_0^t f_1(t-z) \{f_2(z)\} dz \quad (3.62)$$

$$\{I_c\} = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f_1(t)) \cdot \mathcal{L}(\{f_2(t)\})) \quad (3.63)$$

unde  $\mathcal{L}$  și  $\mathcal{L}^{-1}$  sînt simbolurile transformatelor directe și respectiv inversă ale lui Laplace. Funcția  $f_1(t)$  și vectorul funcțional  $\{f_2(t)\}$  pentru cazul de față sînt:

$$f_1(t) = e^{\lambda_r t} \quad \{f_2(t)\} = \{Q(t)\} \quad (3.64)$$

Pentru  $f_1(t)$  transformata Laplace are expresia,

$$\mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1}{s - \lambda_r} \quad (3.65)$$

Pentru un impuls singular de foarte scurtă durată, în cazul teoretic impulsul Dirac, aplicat la momentul  $t = 0$  punctului de masă  $m_p$  vectorul  $\{Q(t)\}$  va avea transformata Laplace,

$$\mathcal{L}(\{Q(t)\}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_p \\ 0 \end{Bmatrix} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

unde  $\delta(t)$  este funcția delta a lui Dirac.

Va rezulta expresia vectorului  $\{I_c(t)\}$

$$\{I_c(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{\lambda_r t} \quad (3.67)$$

care înlocuită în soluția generală (3.47) se va regăsi cu aceleași condiții inițiale ( $t = 0$   $\{q_0\} = \{\dot{q}_0\} = \{0\}$ ) răspunsul sistemului dat prin soluția (3.61).

Pentru excitații impulsive de durată finită, unde legea de variație a excitației este cunoscută, se recomandă folosirea relației (3.65) la calculul vectorului integralei de convoluție

$\{I_c(t)\}$ .

### 3.2.2.3. Excitație forțată armonică

Pentru o excitație forțată armonică vectorul  $\{Q(t)\}$  este de forma

$$\{Q(t)\} = \{F_0\} e^{j\omega_0 t} \quad (3.68)$$

unde  $\omega_0$  este pulsația excitației armonice, iar  $\{F_0\}$  este vectorul amplitudinilor excitației. Integrala Laplace a vectorului  $\{Q(t)\}$  va fi,

$$\mathcal{L}(\{Q(t)\}) = \{F_0\} \frac{1}{s - j\omega_0} \quad (3.69)$$

de unde produsul,

$$\mathcal{L}(e^{\lambda_r t}) (\{Q(t)\}) = \{F_0\} \left( \frac{1}{(\lambda_r - j\omega_0)(s - \lambda_r)} - \frac{1}{(\lambda_r - j\omega_0)(s - j\omega_0)} \right) \quad (3.70)$$

iar integrala de convoluție,

$$\{I(t)\} = \{F_0\} \left( \frac{e^{\lambda_r t}}{\lambda_r - j\omega_0} - \frac{e^{j\omega_0 t}}{\lambda_r - j\omega_0} \right) \quad (3.71)$$

care introdusă în expresia (3.46) a vectorului legii de mișcare  $\{q\}$ , pentru condiții inițiale nule ( $\{q_0\} = \{0\}$ ), se obține,

$$\begin{aligned} \{q\} = & - \sum_{r=1}^N e^{-\sigma_r t} \left( \frac{\{x_r\} \{y_r\}^T e^{j p_r t}}{\sigma_r + j(\omega_0 - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{-j p_r t}}{\sigma_r + j(\omega_0 + p_r)} \right) \{F_0\} + \\ & + \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\} \{y_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega_0 - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega_0 + p_r)} \right) \{F_0\} e^{j\omega_0 t} \quad (3.72) \end{aligned}$$

După cum se observă vectorul  $\{q\}$  conține atât mișcările armonice, date de suma a două a soluției (3.72), cât și mișcările amortizate date de prima sumă.

Regimul staționar al vibrațiilor armonice de pulsație  $\omega_0$  se obține după ce suma vibrațiilor amortizate tinde spre zero. După această perioadă tranzitorie de stabilizare a regimului, expresia

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\} \{y_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega_0 - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega_0 + p_r)} \right) \{F_0\} e^{j\omega_0 t} \quad (3.73)$$

### 3.2.2.4. Excitație aleatoare

În multe cazuri excitația sistemului are o lege aleatoare, răspunsul sistemului fiind de asemenea aleator. Pentru o excitație, cu un proces de evoluție staționar și aproximativ ergodic, aplicată asupra unui sistem dinamic linear, studiul răspunsului sistemului se poate face prin metoda funcțiilor temporale ale corelației. Pentru simplificare considerăm că sistemul este excitat într-un singur punct P, vectorul de excitație avînd forma,

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_p(t) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Cu această excitație soluția generală (3.46) devine

$$\begin{aligned} \{x\} &= - \sum_{r=1}^N \left( \{x_r\} \{y_r\}^T \frac{e^{\lambda_r t}}{\lambda_r} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \frac{e^{\bar{\lambda}_r t}}{\bar{\lambda}_r} \right) [K_0] \{q_0\} + \\ &+ \sum_{r=1}^N \left( \{x_r\} \{y_r\} e^{\lambda_r t} + \{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T e^{\bar{\lambda}_r t} \right) [M] \{q_0\} + \\ &+ \sum_{r=1}^N \left( \{x_r\} y_{rp} \int_0^t e^{\lambda_r(t-z_1)} F_p(z_1) dz_1 + \{\bar{x}_r\} \bar{y}_{rp} \int_0^t e^{\bar{\lambda}_r(t-z_1)} F_p(z_1) dz_1 \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

unde  $y_{rp}$  este elementul p al vectorului propriu  $\{y_r\}$ .

Dacă se înmulțește vectorul  $\{q\}$  cu  $F_p(t+\tau)$ , decalat cu  $\tau$  față de  $F_p(t)$ , vom obține prin integrare vectorul funcției de intercorelație.

$$\{R_{qt}(\tau)\} = \frac{1}{T} \int_0^T \{q(t)\} F_p(t+\tau) dt \quad (3.76)$$

În sumele rezultate vor apărea integralele,

$$R_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\lambda_r^\circ t} F_p(t+\tau) dt \quad (\lambda_r^\circ = \lambda_r, \bar{\lambda}_r) \quad (3.77)$$

și

$$R_2(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T F_p(t+\tau) \left( \int_0^\tau e^{\lambda_r^\circ(t-\tau_1)} F_p(\tau_1) d\tau_1 \right) dt$$

$$(\lambda_r^\circ = \lambda_r, \bar{\lambda}_r) \quad (3.78)$$

Prima integrală (3.77) se anulează deoarece funcția  $e^{\lambda_r^\circ t} = e^{-\gamma_r t} e^{i\omega_r t}$  se atenuază în timp. A doua integrală (3.78) devine integrală de convoluție:

$$R_2(\tau) = \int_0^\tau e^{\lambda_r^\circ(\tau-\tau_1)} R_{ff}(\tau_1) d\tau_1 \quad (\lambda_r^\circ = \lambda_r, \bar{\lambda}_r) \quad (3.79)$$

unde

$$R_{ff}(\tau_1) = \frac{1}{T} \int_0^T F_p(\tau_1+\tau) F_p(\tau) d\tau \quad (3.80)$$

este funcția de autocorelație a forței de excitație  $F_p(t)$ .

Astfel vectorul funcției intercorelație  $\{R_{qf}(\tau)\}$  va fi,

$$\{R_{qf}(\tau)\} = \sum_{r=1}^N \{x_r\} y_{rp} \int_0^\tau e^{\lambda_r(\tau-\tau_1)} R_{ff}(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{r=1}^N \{\bar{x}_r\} \bar{y}_{rp} \int_0^\tau e^{\bar{\lambda}_r(\tau-\tau_1)} R_{ff}(\tau_1) d\tau_1 \quad (3.81)$$

care are forma identică cu soluția forțată,

$$\{q\} = \sum_{r=1}^N \{x_r\} y_{rp} \int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau_1)} F_p(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{r=1}^N \{\bar{x}_r\} \bar{y}_{rp} \int_0^t e^{\bar{\lambda}_r(t-\tau_1)} F_p(\tau_1) d\tau_1 \quad (3.82)$$

care se obține din (3.75) punând condițiile inițiale nule;  $\{q_0\} = \{\dot{q}_0\} = \{0\}$ , vectorul legii de mișcare  $\{q\}$  fiind înlocuit de funcția de intercorelație  $\{R_{qf}(\tau)\}$ , iar forța de excitație  $\{F_p(t)\}$  se înlocuiește prin funcția de autocorelație  $\{R_{ff}(\tau)\}$ .

#### 4. METODE DE ESTIMARE A PARAMETRILOR MODALI

În literatura de specialitate în domeniul identificării dinamice a sistemelor mecanice, se acordă o atenție deosebită metodelor de estimare a parametrilor modali, foarte multe din lucrări oprindu-se la identificarea modelului modal.

În principal, parametrii modali se pot estima prin două categorii de metode; metode de prelucrare a răspunsului sistemului în domeniul frecvență și metode de prelucrare a răspunsului în domeniul timp.

##### 4.1. Metode de estimare în domeniul frecvență

Metodele de estimare a parametrilor modali în domeniul frecvență prelucrează răspunsul sistemului obținut în mod direct din caracteristicile de răspuns în frecvență sau în mod indirect prin aplicarea transformatei Fourier asupra răspunsului în timp al sistemului. Astfel, în mod direct, răspunsul sistemului în domeniul frecvență este dat prin vectorul  $q_0(\omega)$  al amplitudinilor complexe, la o excitație armonică staționară de pulsație  $\omega$ .

$$\{q_0(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\}\{y_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\}\{\bar{y}_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \{F_0\} \quad (4.1)$$

formă ce derivă din (3.73).

Celelalte forme de răspuns în domeniul frecvență se obțin prin aplicarea transformatei Fourier asupra diverselor forme de răspuns ale sistemului în domeniul timp.

Se pot obține următoarele forme de răspuns în domeniul frecvență, prin aplicarea transformatei Fourier asupra răspunsului dat în domeniul timp

$$\{F_q(\omega)\} = \int_0^{\infty} \{q(t)\} e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

unde  $\{F_q(\omega)\}$  este vectorul imagine în domeniul frecvență al vectorului  $\{q(t)\}$  de răspuns în domeniul timp:

$$-\{F_{\dot{q}}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\}\{y_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\}\{\bar{y}_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \{F_t\} \quad (4.3)$$

din răspunsul în viteză,  $\{\dot{q}(t)\} = \frac{d}{dt} \{q(t)\}$ , la o excitație treaptă  $F_1(t)$

$$-\{F_q(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\} y_{rp}}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \bar{y}_{rp}}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) P_p \quad (4.4)$$

din răspunsul  $\{q(t)\}$  (3.61), la o excitație de tip impuls singular avînd valoarea impulsului  $P_p$ ;

$$-\{F_q(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\} \{y_r\}^T \{C_r\}}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T \{\bar{C}_r\}}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \quad (4.5)$$

din răspunsul (3.47) la vibrații libere, începînd din momentul  $t = 0$  la care  $\{q(0)\} = \{q_0\}$  și  $\{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}$

Vectorul  $\{C_r\}$  are elementele constante complex,  $\{\bar{C}_r\}$  fiind vectorul complex conjugat lui  $\{C_r\}$ .

$$\{C_r\} = [X] \{\dot{q}_0\} - \frac{1}{\sigma_r - jp_r} [K] \{q_0\}; \quad (4.5')$$

$$-\{S_{qt}\} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{x_r\} \{y_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{y}_r\}^T}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \{S_{ff}\} \quad (4.6)$$

din răspunsul la o excitație de tip aleator, staționară și ergodică, unde  $\{S_{ff}\}$  este vectorul densității spectrale de putere a excitației, iar  $\{S_{qt}\}$  este vectorul densității interspectrale de putere care se obțin din vectorii de autocorelație  $\{R_{ff}(\tau)\}$  și de intercorelație  $\{R_{qt}(\tau)\}$

$$\{S_{ff}\} = \int_0^{\infty} \{R_{ff}(\tau)\} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.7)$$

$$\{S_{qt}\} = \int_0^{\infty} \{R_{qt}(\tau)\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Analizînd formula de răspuns de mai sus legătura dintre excitație și răspuns se poate scrie sub forma

$$\{F_q(\omega)\} = [Y(\omega)] \{F_e\} \quad (4.8)$$

unde  $\{F_q(\omega)\}$  este vectorul de răspuns al structurii,  $\{F_e\}$  este vectorul de excitație, iar  $[Y(\omega)]$  este matricea funcțiilor de



transfer care poate fi adusă la forma

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^N \left( \frac{[U_{or}] + j[V_{or}]}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{[U_{or}] - j[V_{or}]}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \quad (4.9)$$

Cînd excitația se aplică în punctul S și măsurarea răspunsului este în punctul T ale structurii funcția de transfer dintre cele două puncte va fi

$$H_{st}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{U_r - jV_r}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \quad (4.10)$$

sau

$$\left\{ \begin{aligned} H_{st}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{S_r^1 + j \frac{\omega}{\omega_r} S_r^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 - 2j \frac{\omega}{\omega_r} \eta_r} \\ S_r^1 &= \frac{2}{\omega_r^2} (U_r \sigma_r - V_r p_r) \quad S_r^2 = \frac{2}{\omega_r^2} U_r \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

unde  $\omega_r$  și  $\eta_r$  sînt pulsația proprie și respectiv raportul de amortizare corespunzătoare modului natural de vibrații r.

$$\eta_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_r}{\sigma_r}\right)^2}} ; \quad \omega_r = \frac{p_r}{\sqrt{1 - \eta_r^2}} \quad (4.12)$$

In continuare pentru ușurarea scrierii formulelor <sup>nu</sup> se vor mai pune indicii s și t.

Din punct de vedere experimental, numărul de moduri naturale de vibrații ce pot fi investigate este limitat, datorită benzii limitate de frecvență în care este realizabilă testarea la vibrații. Din această cauză în expresia funcției de transfer se introduc corecțiile  $H^0(\omega)$  și  $H^1(\omega)$ , corespunzătoare influenței modurilor naturale de joasă frecvență și respectiv de înaltă frecvență

$$H(\omega) = H^0(\omega) + \sum_{r=1}^N \left( \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{U_r - jV_r}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) + H^1(\omega) \quad (4.13)$$

Termenul rezidual  $H^0(\omega)$  are forma

$$H^0(\omega) = - \frac{1}{m_0 \omega^2} \quad (4.14)$$

unde  $m_0$  este numit masă reziduală.

Termenul  $H^1(\omega)$  este numit flexibilitate reziduală.

#### 4.1.1. Metode și algoritmi pentru estimarea parametrilor modali

Avînd determinată experimental funcția de transfer  $H(\omega)$ , obținută cu una din metodele clasice de testare - cu excitație armonică, impuls, treaptă aleatorie, etc., se poate trece la estimarea parametrilor modali, luîndu-se ca structură a modelului matematic al funcției de transfer, expresia (4.13). Modelul matematic (4.13) conține  $4N+2$  parametri necunoscuți:  $p_r, \sigma_r, U_r, V_r$ .  $H^0(\omega), H^1(\omega)$  ce trebuie să se determine.

Experimental, se pot obține un număr mare  $N_e$  de valori discrete ale funcției de transfer  $H(\omega)$  la diverse pulsații  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_p$ ) în așa fel ca  $N_e \geq 4N+2$ , problema estimării parametrilor fiind una de rezolvare a unui sistem nelinear prin regresii. Modelul poate fi liniarizat dacă se cunosc aproximativ valorile parametrilor. Se obține un sistem linear în variații ce intră într-un proces iterativ de rezolvare.

##### 4.1.1.1. Metoda diagramelor polare

În cazul structurilor slab amortizate, întâlnit frecvent în practică, estimarea parametrilor modali se poate face cu succes aplicînd metoda diagramelor polare.

Analizînd expresia (4.13) a funcției de transfer  $H(\omega)$  se constată că pentru moduri decuplate (pseudopulsații  $p_r$  distincte) la variații mici ale pulsației  $\omega$  în jurul pseudopulsației  $p_r$ , contribuția majoră la valoarea funcției de transfer o are termenul

$$H_{1r}(\omega) = \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} \quad (4.15)$$

valoarea sa maximă fiind pentru  $\omega = p_r$ . Ceilalți termeni se pot însuși într-o componentă constantă complexă  $A_r + jB_r$ , astfel că funcția de transfer se poate aproxima prin

$$H(\omega) = \frac{U_R + jV_R}{\sigma_R + j(\omega - p_R)} + A_R + jB_R \quad (4.16)$$

Componentele reală,  $R_e(\omega)$  și imaginară  $I_m(\omega)$  ale funcției de transfer (4.16) au expresiile,

$$\begin{cases} R_e(\omega) = \frac{U_R \sigma_R + V_R(\omega - p_R)}{\sigma_R^2 + j(\omega - p_R)^2} + A_R \\ I_m(\omega) = \frac{V_R \sigma_R - U_R(\omega - p_R)}{\sigma_R^2 + (\omega - p_R)^2} + B_R \end{cases} \quad (4.17)$$

Considerînd  $\omega$  un parametru, funcția de transfer va fi reprezentată în planul complex  $OR_e I_m$  (fig.4.1) printr-o curbă polară  $C_p$ , care în acest caz particular va fi aproximată printr-un cerc.

Se consideră în continuare, că funcția de transfer se obține aplicînd sistemului un regim armonic staționar de pulsație  $\omega$ , punctul  $P(\omega)$  fiind punctul reprezentativ al regimului de pulsație  $\omega$  sau mai scurt, punct reprezentativ.  $U_R$  și  $V_R$  sînt componentele modale.

Expresia analitică a elementului de arc  $ds$  al curbei polare  $C_p$  pe care îl parcurge punctul reprezentativ  $P(\omega)$  pe curba  $C_p$ , la variația elementară  $d\omega$  va fi

$$ds = \sqrt{dR_e^2(\omega) + dI_m^2(\omega)} \quad (4.18)$$

Prin diferențierea expresiilor (4.17) se obțin variațiile elementare

$$dR_e(\omega) = \frac{V_R(\sigma_R^2 + (\omega - p_R)^2) - 2U_R(\omega - p_R)}{(\sigma_R^2 + (\omega - p_R)^2)^2} d\omega \quad (4.19)$$

$$dI_m(\omega) = \frac{-U_R(\sigma_R^2 - (\omega - p_R)^2) - 2V_R(\omega - p_R)}{(\sigma_R^2 + (\omega - p_R)^2)^2} d\omega ,$$

de unde derivata arcului de curbă în raport cu  $\omega$  va fi,

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2}} \frac{1}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2} \quad (4.20)$$

Rezultă că valoarea maximă a derivatei  $\frac{ds}{d\omega}$  se obține când pulsația  $\omega$  este egală cu pseudopulsația  $p_r$ . Deci dacă punctul reprezentativ  $P(\omega)$  se deplasează pe curba polară  $C_p$ , cu o creștere uniformă a pulsației  $\omega$ , atunci punctul reprezentativ al regimului de pulsație  $\omega = p_r$  este localizat acolo unde viteza punctului reprezentativ este maximă. Acest criteriu este similar cu criteriul Kennedy-Pancu [75], formulat pentru localizarea pulsației proprii în cazul sistemelor de amortizare histeretică. Luând în considerare termenul variabil,

$$\frac{1}{\sigma_r + i(\omega - p_r)} \quad (4.21)$$

al funcției de transfer  $H(\omega)$ , componentele sale, reală  $R_{oe}$  și imaginară  $I_{om}$  au expresiile,

$$R_{oe} = \frac{\sigma_r}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2}, \quad I_{om} = -\frac{\omega - p_r}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2} \quad (4.22)$$

Eliminând între cele două componente variabila  $\omega$  se obține ecuația curbei polare  $C_p$  în planul  $OR_e I_m$ , care este un cerc a cărui ecuație este,

$$\left(R_{oe} - \frac{1}{2\sigma_r}\right)^2 + I_{om}^2 = \left(\frac{1}{2\sigma_r}\right)^2 \quad (4.23)$$

care are raza  $\frac{1}{2\sigma_r}$  și centrul pe axa reală, de abscisa  $\frac{1}{2\sigma_r}$ .

Dacă se ia în considerare expresia (4.16) a funcției de transfer, curba polară este reprezentată de asemenea printr-un cerc la care: coordonatele centrului  $C$  al cercului au expresiile

$$R_c(r) = A_r + R_o(r) \cos \theta_r, \quad I_c(r) = B_r + R_o(r) \sin \theta_r \quad (4.24)$$

$R_o(r)$  fiind raza cercului care se exprimă prin relația,

$$R_o(r) = \frac{U_r^2 + v_r^2}{2 \sigma_r} \quad (4.25)$$

iar unghiul  $\theta_r$  se calculează cu ajutorul relației,

$$\theta_r = \text{Arc tg } \frac{v_r}{U_r} \quad (4.26)$$

Coordonatele punctului reprezentativ  $P(p_r)$  pentru  $\omega = p_r$  se calculează cu relațiile,

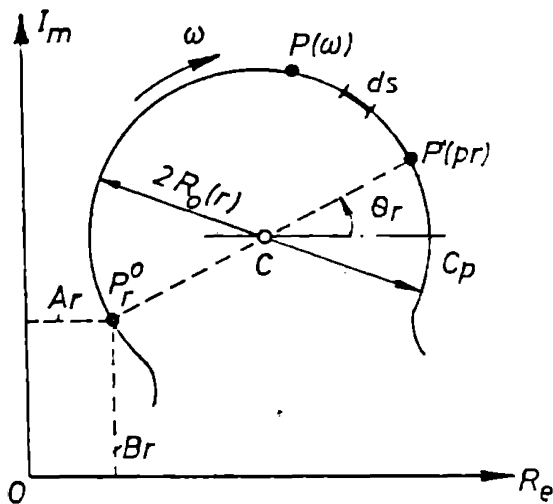


Fig.4.1

$$R_p = A_r + 2R_o(r) \cos \theta_r \quad (4.27)$$

$$I_p = B_r + 2R_o(r) \sin \theta_r$$

Coordonatele  $R_c(r)$  și  $I_c(r)$  ale centrului cercului și raza  $R(r)$  se determină cunoscând funcția de transfer determinată experimental.

Avînd la dispoziție un număr  $n$  mare de valori  $R_e(i)$ ,  $I_m(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ale coordonatelor punctelor cercului determinate experimental și considerînd ecuația analitică a cercului sub forma,

$$R_e^2 + I_m^2 + A_1 R_e + A_2 I_m + A_3 = 0 \quad (4.18)$$

se formează un sistem de  $n$  ecuații algebrice lineare,

$$R_e^2(i) + I_m^2(i) + A_1 R_e(i) + A_2 I_m(i) + A_3 = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4.19)$$

care are 3 necunoscute  $A_1$ ,  $A_2$  și  $A_3$ . Sistemul se rezolvă prin metoda celor mai mici pătrate, obținîndu-se sistemul,

$$\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} R_e(1) & I_m(1) & n_0 \\ R_e^2(1) & R_e(1)I_m(1) & R_e(1) \\ R_e(1)I_m^2(1) & I_m^2(1) & I_m(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = - \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} R_e^2(1) + I_m^2(1) \\ R_e(1)(R_e(1) + I_m(1)) \\ I_m(1)(R_e(1) + I_m(1)) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

unde  $n_0 = 0$  pentru  $i \neq n$  și  $n_0 = n$  pentru  $i = n$ .

Cu ajutorul coeficienților  $A_1$ ,  $A_2$  și  $A_3$  se pot determina coordonatele centrului cercului  $R_c(r)$  și  $I_c(r)$  și raza lui  $R_0(r)$

$$R_c(r) = -\frac{A_1}{2} \qquad I_c(r) = -\frac{A_2}{2}$$

$$R_0(r) = \sqrt{\frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} - A_3} \quad (4.21)$$

Urmează localizarea pe cerc a punctului reprezentativ  $P(p_r)$  ale pseudopulsației  $p_r$ . Se pleacă de la ecuația diferențială,

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{2 \sigma_r R_0(r)}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2} \quad (4.22)$$

obținută din (4.20) și (4.25).

Prin integrare se obține valoarea segmentului de arc de cerc dintre două puncte reprezentative de pulsații  $\omega_i$  și  $\omega_{i+1}$

$$s_{i+1} - s_i = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{2 \sigma_r R_0(r) d\omega}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2} \quad (4.23)$$

Făcînd schimbarea de variabilă,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\omega_1 - p_r}{\sigma_r} \quad (4.24)$$

rezultă expresia segmentului de arc,

$$s_{i+1} - s_i = 2R_0(r)(\alpha_{i+1} - \alpha_i), \quad (4.25)$$

care poate fi exprimat, din fig.4.2, prin relația

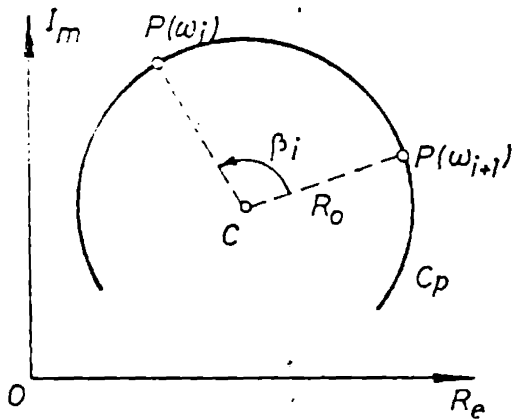


Fig.4.2

$$s_{i+1} - s_i = R_0(r) \beta_i, \quad (4.26)$$

rezultînd,

$$\beta_i = 2(\alpha_{i+1} - \alpha_i), \quad (4.27)$$

de unde, avînd în vedere relația (4.28),

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} = \frac{(\omega_{i+1} - \omega_i) \sigma_r}{\sigma_r^2 + (\omega_{i+1} - p_r)(\omega_i - p_r)}, \quad (4.28)$$

care conduce la ecuația,

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 + p_r^2 - \sigma_r(\omega_{i+1} - \omega_i)T_i - p_r(\omega_{i+1} + \omega_i) &= \\ &= -\omega_i \omega_{i+1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

unde,

$$T_i = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_i/2)} \quad (4.30)$$

Ecuația (4.29) are ca necunoscute pseudopulsatia  $p_r$  și factorul de amortizare  $\sigma_r$ , coeficienții ei fiind formați din trei mărimi cunoscute  $\omega_i$ ,  $\omega_{i+1}$  și  $T_i$ , ce se pot determina dacă se cunosc valorile coordonatelor pentru două puncte reprezentative  $P(\omega_i)$  și  $P(\omega_{i+1})$  situate pe curba polară  $C_p$ .

Deoarece există un număr mare de puncte  $P(\omega_i)$  ale căror coordonate sînt determinate experimental, se pot scrie un număr mare de ecuații (4.29), găsirea soluțiilor reale și pozitive pentru  $\sigma_r$  și  $p_r$  putîndu-se face prin metode regresive, ca metoda celor mai mici pătrate.

O simplificare considerabilă a rezolvării ecuației (4.29) se obține în cazul în care răspunsul sistemului eșantionat este dat la intervale egale de pulsație  $\Delta\omega$ , pentru care

$$\omega_{i+1} - \omega_i = \Delta\omega, \quad \omega_{i+2} - \omega_i = 2\Delta\omega \quad (4.31).$$

sau

$$\omega_{i+p} - \omega_i = (p-1)\Delta\omega \text{ pentru } p = \overline{1, 2, \dots, n}$$

Având cunoscute coordonatele pe curba polară a trei puncte  $P(\omega_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) se pot obține două ecuații de tipul (4.29)

$$\sigma_r^2 + p_r^2 - \sigma_r \Delta\omega T_i - p_r(2\omega_i + \Delta\omega) = -\omega_{i+1} \omega_i \quad (4.32)$$

$$\sigma_r^2 + p_r^2 - \sigma_r \Delta\omega T_{i+1} - p_r(2\omega_i + 3\Delta\omega) = -(\omega_i + 2\omega_i)\omega_{i+1}$$

din care se pot determina expresiile pseudopulsației  $p_r$  și factorul de amortizare  $\sigma_r$ .

$$p_r = \omega_{i+1} - \frac{1}{2} \sigma_r (T_{i+1} - T_i) \quad (4.33)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \Delta\omega \frac{(T_{i+1} + T_i)}{1 + \frac{1}{4}(T_{i+1} - T_i)^2} \quad (4.34)$$

Această metodă expusă aici pentru prima oară s-a implementat într-un program de calcul în limbaj Basic. Structurarea programului "C-FIT" este în schema logică (fig.4.3) și se compune din următoarele subrutine: Subrutina "VIRF" localizează virfurile de amplitudini din spectrul funcției de transfer (fig.4.3).

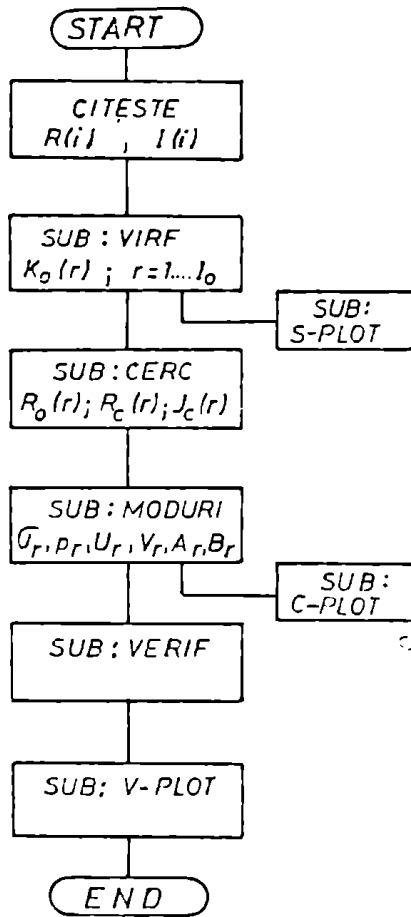
$$S(i) = |H(\omega_i)| = \sqrt{R_{(i)}^2 + I(i)^2} \quad (4.35)$$

unde  $R(i) = R_e(\omega_i)$  și  $I(i) = I_m(\omega_i)$ , au fost în prealabil memorate în două fișiere de date. Prin baldere după indicii  $i=1, \dots, n$  subrutina memorează indicii  $k(r)$  ai virfurilor de amplitudine  $S(k(r))$ , unde  $r$  este numărul modului din spectru.

Subrutina "S-PLOT" trasează grafic spectrul  $S(i)$ ,

Subrutina "CEBC" determină coeficienții  $A_1, A_2$  și  $A_3$  ai ecuației cercului cel mai bine potrivit (rezolvarea sistemului 4.20).





a)

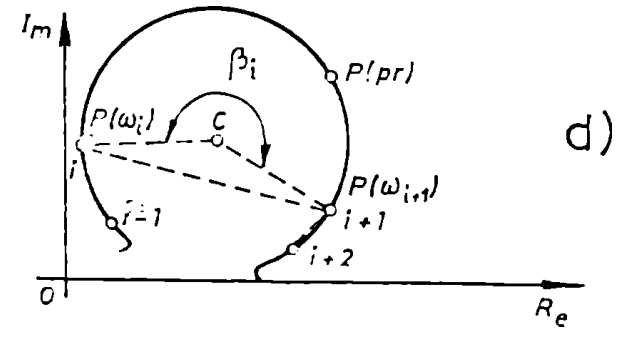
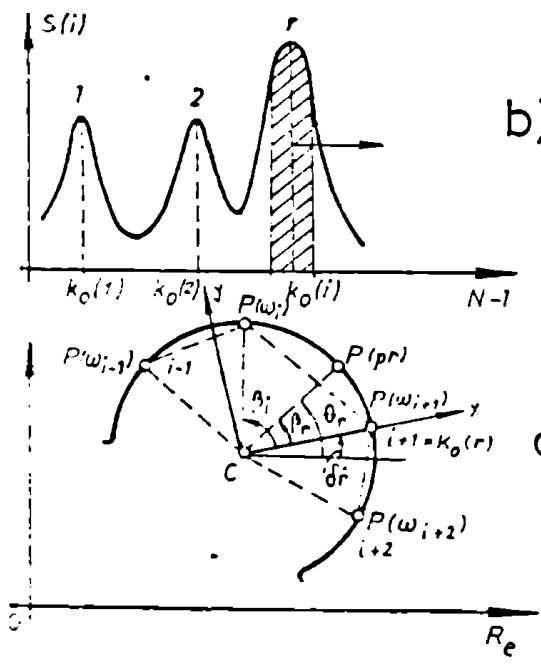


Fig.4.3

Se calculează valorile coordonatelor centrului cercului  $R_c(r)$  și  $I_c(r)$  și valoarea razei  $R_o(r)$ .

Subrutina "MODURI" calculează factorul de amortizare  $G_r$ , pseudopulsația  $p_r$ , componentele modale  $U_r$  și  $V_r$  și termenii reziduali  $A_r$  și  $B_r$ .

Desfășurarea calculelor în această subrutină se face după cum urmează:

- Se ia un sistem de axe rectangular  $Cxy$ , fig.4.3.c, axa  $C_x$  trecînd prin punctul  $P(\omega_{i+1})$ , unde  $i+1 = k_o(r)$ . Unghiul  $\delta_i$  al axei  $C_x$  cu orizontală  $OR_e$  va fi

$$\delta_i = \arcsin\left(\frac{I(i+1) - I_c(r)}{R_o(r)}\right) \quad (4.37)$$

Coordonatele punctului  $P(\omega_i)$  față de sistemul de axe  $Cxy$  vor fi

$$\begin{aligned} x(i) &= (R(i) - R_c(r))\cos \delta_i + (I(i) - I_c(r))\sin \delta_i \\ y(i) &= -(R(i) - R_c(r))\sin \delta_i + (I(i) - I_c(r))\cos \delta_i \end{aligned} \quad (4.38)$$

cu ajutorul cărora se calculează unghiul

$$\beta_i = \arctg \frac{y(i)}{x(i)} \quad (4.39)$$

și mai departe valoarea lui  $T_i$ , din (4.30).

Se repetă calcule de mai sus pentru următorul indice  $i+1$  și se calculează  $T_{i+1}$ , avînd acum posibilitatea a se determina, cu ajutorul relațiilor (4.34) și (4.33), factorul de amortizare și pseudopulsația  $p_r$ .

Urmează poziționarea punctului reprezentativ  $P(p_r)$  de pseudopulsație  $p_r$ . Pentru aceasta se calculează din (4.28), considerînd  $\omega_i = p_r$  valoarea unghiului  $\beta_r$ , corespunzător arcului dintre punctele  $P(\omega_{i+1})$  și  $P(p_r)$

$$\beta_r = 2 \arctg\left(\frac{\omega_{i+1} - p_r}{G_r}\right) = 2 \arctg\left(\frac{T_{i+1} + T_i}{2}\right), \quad (4.40)$$

rezultind din fig.4.3.c, coordonatele punctului  $P(p_r)$ ,

$$R_p(r) = R_o(r) + R_o(r) \cos \theta_r \quad (4.41)$$

$$I_p(r) = I_o(r) + R_o(r) \sin \theta_r$$

unde

$$\theta_r = \beta_r + \delta_r \quad (4.42)$$

Coordonatele punctului  $P_{180}$ , diametral opus lui  $P(p_r)$ , dau valorile componentelor reziduale  $A_r$  și  $B_r$ .

$$A_r = R_o(r) + R_o(r) \cos (\theta_r + \pi) \quad (4.43)$$

$$B_r = I_o(r) + R_o(r) \sin (\theta_r + \pi)$$

Din (4.25) și (4.26) vor rezulta componentele modale

$$U_r = 2 \sqrt{R_o} R_o(r) \cos \theta_r \quad (4.44)$$

$$V_r = 2 \sqrt{R_o} R_o(r) \sin \theta_r$$

Urmează validarea rezultatelor, care se face în subrutinele "VTRIP" și "V-BLOT". În prima se calculează, în jurul pulsațiilor  $\omega_k$ , valorile funcției de transfer,

$$H(k) = \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega_k - p_r)} + \frac{U_r - jV_r}{\sigma_r + j(\omega_k + p_r)} + A_r + jB_r \quad (4.45)$$

unde de exemplu,  $\omega_k = p_r + k \frac{\Delta \omega}{2}$ ,  $k = -10, \dots, +10$ , iar cu cea de a doua, se trasează grafic, pe baza componentelor, reală  $R(k)$  și imaginară  $I(k)$ , curba polară  $G_r$  calculată, care trebuie să se suprapună peste punctele reprezentative ale regimurilor determinate în antecedent. Dacă suprapunerea este acceptabilă, se trece la calcularea parametrilor.

Metoda expusă aici pentru prima dată, prezintă mari avantaje față de metodele obișnuite, din faptul că: poziționarea punctului reprezentativ în reprezentativ pe curba polară se face

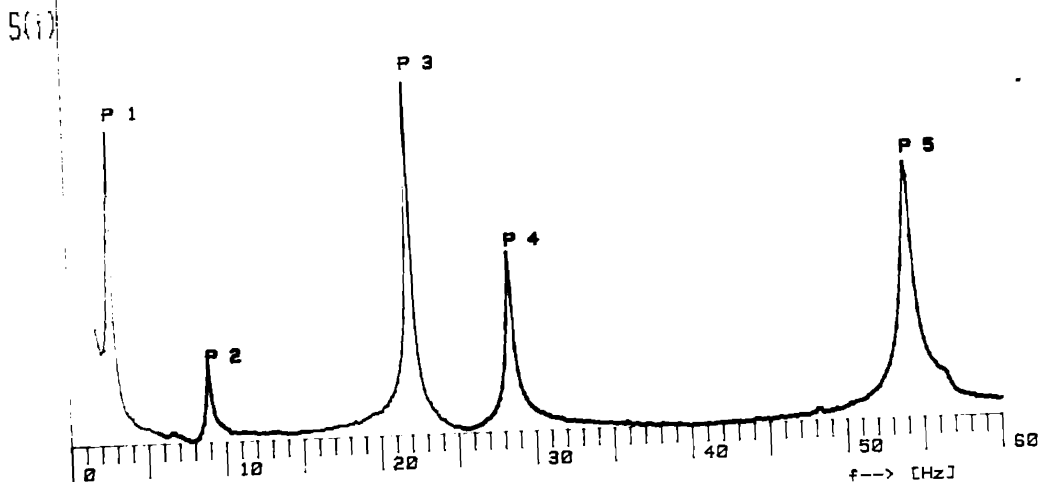


Fig.4.4. 1 .a

| P# | Fr [Hz] | Eta   | Ur      | Vr     |
|----|---------|-------|---------|--------|
| 1  | 2.575   | .0372 | 3.742   | .961   |
| 2  | 8.868   | .0189 | .346    | 1.193  |
| 3  | 21.879  | .0055 | 3.219   | -4.989 |
| 4  | 28.298  | .0059 | .286    | -4.193 |
| 5  | 53.966  | .0058 | -11.764 | .099   |

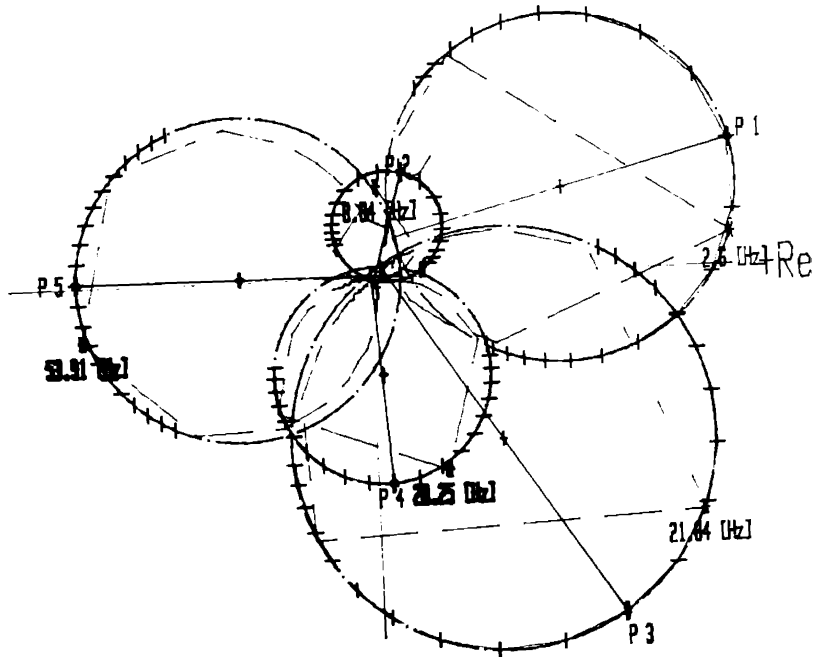


Fig. 4.4. 1 .b

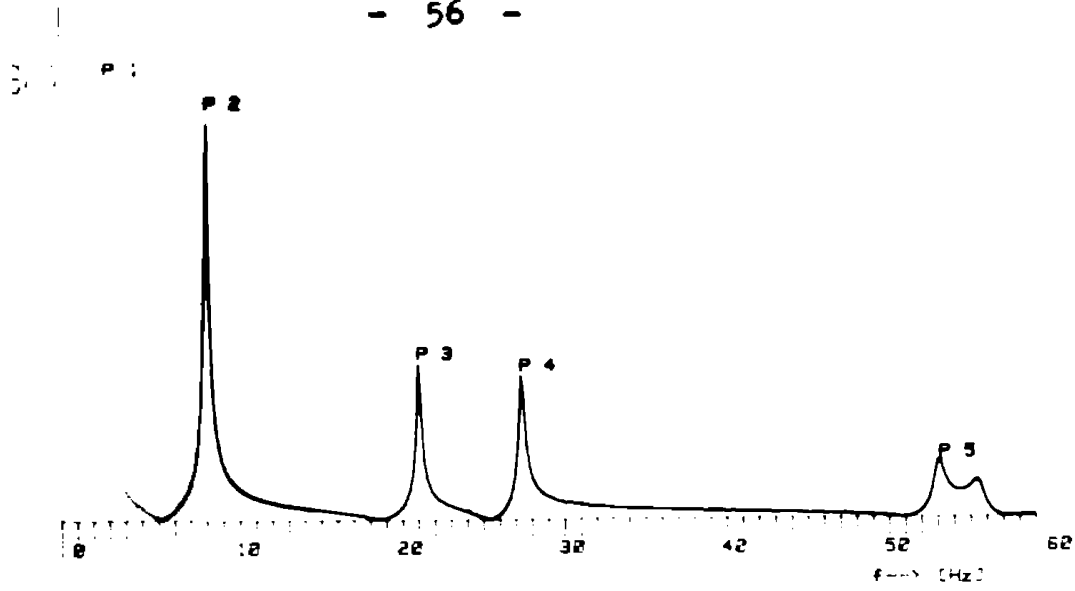


Fig. 4.4. 2 .a

| P# | F <sub>0</sub> [Hz] | E <sub>0a</sub> | Q <sub>0</sub> | V <sub>0</sub> |
|----|---------------------|-----------------|----------------|----------------|
| 1  | 2.564               | .2352           | 15.965         | 1.685          |
| 2  | <b>0.837</b>        | <b>.0134</b>    | <b>14.510</b>  | <b>-10.800</b> |
| 3  | 21.000              | .0055           | -1.171         | -7.463         |
| 4  | 28.299              | .0054           | -4.460         | -7.490         |
| 5  | 53.931              | .0050           | -4.931         | 6.193          |

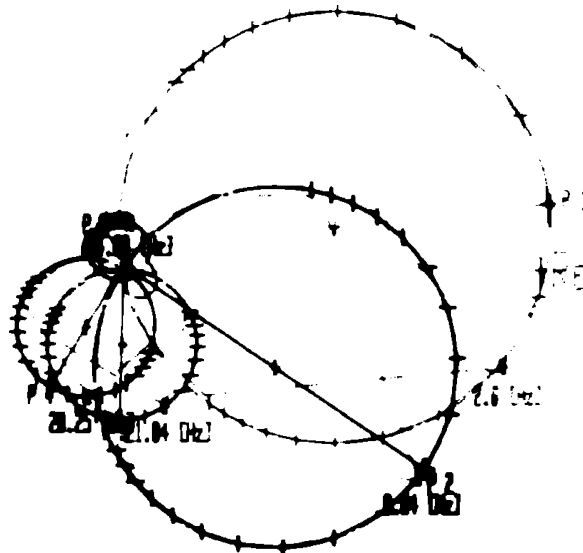
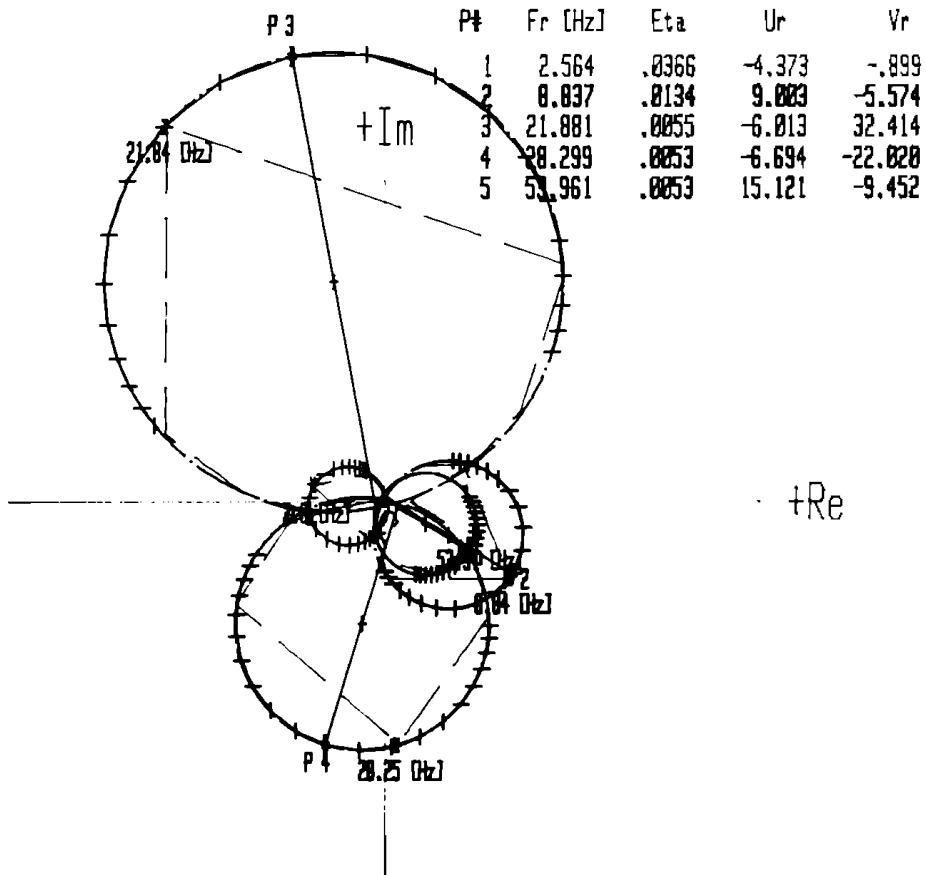
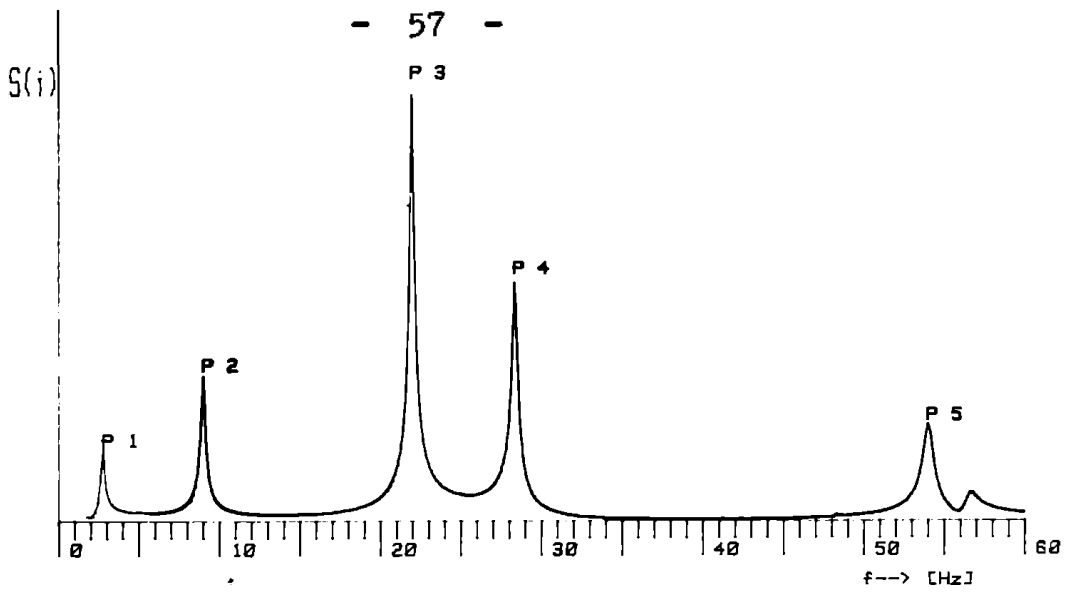


Fig. 4.4. 2 .b



analitic, cunoscând poziția punctelor reprezentative pentru trei regimuri de pulsații  $\omega_1$ ,  $\omega_{1+1}$  și  $\omega_{1+2}$ , egal distanțate în frecvență, cu pasul constant  $\Delta\omega$  ( $\omega_{1+1} = \omega_1 + \Delta\omega$ ,  $\omega_{1+2} = \omega_1 + 2\Delta\omega$ ), permite poziționarea punctului reprezentativ  $P(p_r)$  al pseudopulsației chiar când unghiul la centru  $\beta_i$ , între două puncte reprezentative consecutive,  $P(\omega_i)$  și  $P(\omega_{i+1})$  este mare, și chiar  $180^\circ$  (fig.4.3.d). Prin metodele clasice, pentru mărirea rezoluției de poziționare a pseudopulsației, este necesară micșorarea pasului  $\Delta\omega$ , ceea ce duce în mod automat la mărirea numărului de puncte, în care se face calculul transformărilor Fourier, ducând implicit la mărirea timpului de procesare.

În figurile 4.4.1, 4.4.2 și 4.4.3 sînt prezentate diagramele spectrale (figurile a) și polare (figurile b), obținute cu ajutorul programului "C-FIT" după prelucrarea răspunsului la o excitație tip impuls, a unei palete de agregat de vînt. Cele trei perechi de diagrame reprezintă răspunsurile date de trei traductori fixați după trei direcții perpendiculare, într-un punct aflat pe suprafața paletei. Deși componentele modale  $U_r$  și  $V_r$  diferă mult pentru cele trei direcții, se observă - din medelionul de date tipărit în mod automat prin program, în colțul de sus al diagramei polare - o foarte bună estimare a frecvențelor proprii  $F_r$  ( $F_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ ), diferențele dintre valorile lor pentru cele trei diagrame fiind nesemnificabile. La fel, se constată diferențe foarte mici între valorile constantei de amortizare  $\eta_r$  (avîndu-se în vedere că parametrul grau de amortizat este  $\eta_r$ ).

Localizarea punctelor  $P(p_r)$ , se face cu mare exactitate, precum și estimarea componentelor modale  $U_r$  și  $V_r$ , fapt confirmat prin trasarea curbelor teoretice, marcate prin linii barate, ele suprapunîndu-se exact peste punctele  $P(\omega_j)$  obținute experimental. Rezultatele sînt foarte bune avîndu-se în vedere faptul că valoarea  $\Delta\omega$  este mare, unghiul  $\beta_i$  la centru fiind aproape de  $\pi$  rad.

#### 4.1.1.1.1. Cașul modurilor cuplate:

În cazul în care sistemul vibrant are unele moduri cuplate, ale căror pseudopulsații  $p_r$  sînt foarte apropiate, aplicînd numai metoda diagramei polare rezultatele vor fi insuficient de exacte, fiind necesare ajustări suplimentare ale parametrilor modali.

În cazul în care există două moduri cu frecvențe proprii foarte apropiate, atunci funcția de transfer se va aproxima prin expresia

$$H(\omega) = \frac{U_{1r} + V_{1r}}{\sigma_{1r} + j(\omega - p_{1r})} + \frac{U_{2r} + jV_{2r}}{\sigma_{2r} + j(\omega - p_{2r})} + A_r + jB_r \quad (4.46)$$

unde indicii 1 și 2, introdusi suplimentar, se referă la primul și respectiv la al doilea mod. De semnalat faptul că în acest caz curba polară nu mai este un cerc chiar și pentru pseudopulsările egale, dacă factorii de amortizare sînt valoric diferiți.

Deci, un prim indice asupra existenței unor moduri cuplate este distorsionarea curbei polare față de cerc.

În acest caz ecuația diferențială a arcului s va deveni greu integrabilă.

$$\ddot{\omega} = \frac{\sqrt{U_{1r}^2 + V_{1r}^2}}{(\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2)^2} + \frac{U_{2r}^2 + V_{2r}^2}{(\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2)^2} + 2 \frac{(U_{1r}U_{2r} + V_{1r}V_{2r})[(\sigma_{1r}^2 - (\omega - p_{1r})^2)(\sigma_{2r}^2 - (\omega - p_{2r})^2)]}{(\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2)^2(\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2)^2} + \dots \quad (4.47)$$

$$- \frac{2\sigma_{1r}\sigma_{2r}(\omega - p_{1r})(\omega - p_{2r})}{(\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2)^2(\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2)^2} - \frac{(U_{1r}V_{2r} - U_{2r}V_{1r})[(\sigma_{1r}^2 - (\omega - p_{1r})^2)(\omega - p_{2r}) - (\sigma_{2r}^2 - (\omega - p_{2r})^2)(\omega - p_{1r})]}{(\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2)^2(\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2)^2}$$

Deși se poate observa că valorile maxime ale derivatei corespund aproximativ pentru regiuni de vibrație la  $\omega = p_{1r}$  sau  $\omega = p_{2r}$ , nu tînd să se pot localiza aproximativ cele două pseudopulsări și creșterile de maxime ale arcului, la o variație de pulsație  $\Delta\omega$  constantă.

Pentru obținerea unei aproximații parametrilor se poate trece la un calcul de optimizare, plecînd de la componentele, reală  $R(\omega)$  și imaginară  $I(\omega)$ , ale funcției de transfer aproximată prin relația (4.46).

$$R(\omega) = \frac{U_{1r}\sigma_{1r} + V_{1r}(\omega - p_{1r})}{\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2} + \frac{U_{2r}\sigma_{2r} + V_{2r}(\omega - p_{2r})}{\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2} + A_r$$

$$I(\omega) = \frac{V_{1r}\sigma_{1r} - U_{1r}(\omega - p_{1r})}{\sigma_{1r}^2 + (\omega - p_{1r})^2} + \frac{V_{2r}\sigma_{2r} - U_{2r}(\omega - p_{2r})}{\sigma_{2r}^2 + (\omega - p_{2r})^2} + B_r \quad (4.48)$$



Se consideră că funcția de transfer  $H(\omega)$  este determinată experimental prin componentele ei; reală  $R_e(\omega_k)$  și imaginară  $I_e(\omega_k)$ , unde  $\omega_k$  este pulsația regimului staționar  $k$ .

Dacă componentele  $R_e(\omega_k)$  și  $I_e(\omega_k)$  sînt determinate pentru cinci regimuri, atunci se obțin zece ecuații (4.48), din care se pot determina cei zece parametri  $p_{ir}$ ,  $\sigma_{ir}$ ,  $u_{ir}$ ,  $v_{ir}$ ,  $A_r$ ,  $B_r$ , ( $i = 1, 2$ ) necunoscuți sau parțiali aproximați.

Dacă numărul regimurilor pentru care se cunosc  $R_e(\omega_k)$  și  $I_e(\omega_k)$  este mai mare ca 5, atunci metoda de rezolvare va fi una: originală, ca de exemplu cea a celor mai mici pătrate, care impune condiția de minim,

$$E = \sum_{k=1}^N (R(\omega_k) - R_e(\omega_k))^2 + (I(\omega_k) - I_e(\omega_k))^2 \rightarrow \min. \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0 \quad \gamma = (p_{ir}, \sigma_{ir}, u_{ir}, v_{ir}, A_r, B_r) \quad (i = 1, 2,) \quad (4.50)$$

unde  $\gamma$  este unul din cei zece parametri, care trebuie determinați. Condițiile de minim conduc la sistemul,

$$\sum_{k=1}^N (R(\omega_k) - R_e(\omega_k)) \cdot \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial \gamma} + (I(\omega_k) - I_e(\omega_k)) \cdot \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \gamma} \right) = 0 \quad (4.51)$$

care este un sistem algebric de zece ecuații cu zece necunoscute. Derivatele parțiale în raport cu unul din parametrii  $\gamma$ , au expresiile

$$\left( \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial p_{ir}} \right) = \frac{-v_{ir}(\sigma_{ir}^2 - (\omega_k - p_{ir})^2) + 2u_{ir}\sigma_{ir}(\omega_k - p_{ir})}{(\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2)^2}$$

$$\left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial p_{ir}} \right) = \frac{u_{ir}(\sigma_{ir}^2 - (\omega_k - p_{ir})^2) + 2v_{ir}\sigma_{ir}(\omega_k - p_{ir})}{(\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2)^2}$$

$$\left( \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial \sigma_{ir}} \right) = \frac{u_{ir}(\sigma_{ir}^2 - (\omega_k - p_{ir})^2) + 2v_{ir}\sigma_{ir}(\omega_k - p_{ir})}{(\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{ir}}\right) = \frac{-V_{ir}(\sigma_{ir}^2 - (\omega_k - p_{ir})^2) + 2U_{ir}\sigma_{ir}(\omega_k - p_{ir})}{(\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial R(\omega_k)}{\partial U_{ir}}\right) = \frac{\sigma_{ir}}{\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2} \quad (i = 1, 2) \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{\partial I(\omega_k)}{\partial U_{ir}}\right) = \frac{-(\omega_k - p_{ir})}{\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2}$$

$$\left(\frac{\partial R(\omega_k)}{\partial V_{ir}}\right) = \frac{\omega_k - p_{ir}}{\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2}$$

$$\left(\frac{\partial I(\omega_k)}{\partial V_{ir}}\right) = \frac{\sigma_{ir}}{\sigma_{ir}^2 + (\omega_k - p_{ir})^2}$$

$$\left(\frac{\partial R(\omega_k)}{\partial A_r}\right) = 1, \quad \left(\frac{\partial I(\omega_k)}{\partial A_r}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial R(\omega_k)}{\partial B_r}\right) = C.$$

$$\left(\frac{\partial I(\omega_k)}{\partial B_r}\right) = 1$$

Sistemul algebric (4.51) este neliniar. Pentru rezolvarea lui se poate folosi una din metodele de iterație cunoscute, pentru care valorile de start ale parametrilor se determină prin metoda diagramelor polare.

Sistemul (4.51) poate fi linearizat dacă se dezvoltă în serie Taylor funcțiile  $R(\omega)$  și  $I(\omega)$ , (4.48), în jurul unor valori ale parametrilor  $\omega_0$  considerate cunoscute. Se iau în considerare numai primii doi termeni ai dezvoltării

$$R(\omega) = R(\omega_0) = R(\omega_0) + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial R}{\partial p_{ir}}\right)_{\omega_0} \Delta p_{ir} + \left(\frac{\partial R}{\partial \sigma_{ir}}\right)_{\omega_0} \Delta \sigma_{ir} + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial V_{ir}}\right)_{\omega_0} \Delta V_{ir} + \left(\frac{\partial R}{\partial U_{ir}}\right)_{\omega_0} \Delta U_{ir} + \left(\frac{\partial R}{\partial A_r}\right)_{\omega_0} \Delta A_r + \left(\frac{\partial R}{\partial B_r}\right)_{\omega_0} \Delta B_r$$

$$\begin{aligned}
 I(\omega) = I(\omega, \dot{\gamma}) = I(\omega, \dot{y}_0) + \sum_{i=1}^2 \left( \left( \frac{\partial I}{\partial p_{ir}} \right)_{\dot{y}_0} \Delta p_{ir} + \left( \frac{\partial I}{\partial v_{ir}} \right)_{\dot{y}_0} \Delta v_{ir} + \right. \\
 \left. + \left( \frac{\partial I}{\partial u_{ir}} \right)_{\dot{y}_0} \Delta u_{ir} + \left( \frac{\partial I}{\partial v_{ir}} \right)_{\dot{y}_0} \Delta v_{ir} + \left( \frac{\partial I}{\partial A_r} \right) \Delta A_r + \left( \frac{\partial I}{\partial B_r} \right) \Delta B_r \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

unde parametrii modelii  $\dot{y}_0$  diferă de cei a priori cunoscuți, prin variații mici

$$\begin{aligned}
 p_{ir} &= p_{ir}^0 + \Delta p_{ir}, & \sigma_{ir} &= \sigma_{ir}^0 + \Delta \sigma_{ir}, \\
 u_{ir} &= u_{ir}^0 + \Delta u_{ir}, & v_{ir} &= v_{ir}^0 + \Delta v_{ir}, \\
 A_r &= A_{or} + \Delta A_r, & B_r &= B_{or} + \Delta B_r
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

(i = 1, 2,)

Cu ajutorul acestor parametri se formează vectorii

$$\begin{aligned}
 \{P_r\} &= \{p_{1r}, p_{2r}, \sigma_{1r}, \sigma_{2r}, u_{1r}, u_{2r}, v_{1r}, v_{2r}, A_r, B_r\}^T \\
 \{P_r^0\} &= \{p_{1r}^0, p_{2r}^0, \sigma_{1r}^0, \sigma_{2r}^0, u_{1r}^0, u_{2r}^0, v_{1r}^0, v_{2r}^0, A_{or}, B_{or}\}^T \\
 \{\Delta P_r\} &= \{\Delta p_{1r}, \Delta p_{2r}, \Delta \sigma_{1r}, \Delta \sigma_{2r}, \Delta u_{1r}, \Delta u_{2r}, \Delta v_{1r}, \Delta v_{2r}, \Delta A_r, \Delta B_r\}^T
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

Din (4.52) se formează vectorii

$$\begin{aligned}
 \{R_r^T\} = \left\{ \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial p_{1r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial p_{2r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial \sigma_{2r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial u_{1r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial u_{2r}}, \right. \\
 \left. \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial v_{1r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial v_{2r}}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial A_r}, \frac{\partial R(\omega_k)}{\partial B_r} \right\}^T
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

$$\left\{ \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{1r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{2r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{2r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial U_{2r}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}}, \frac{I(\omega_k)}{\sigma_{2r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}}, \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{2r}} \right\}^T$$

Cu aceste notații matriciale sistemul (4.57), ținând seama de dezvoltările (4.53), devine

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_k \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

unde

$$\mathbf{F}_k = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{1r}} \right) \left( \frac{\partial P_{1r}}{\partial P_k} \right)^T + \left\{ \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{2r}} \right\} \left\{ \frac{\partial P_{2r}}{\partial P_k} \right\}^T$$

$$\mathbf{G}_k = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}} - \frac{\partial I(\omega_k, P_k^0)}{\partial \sigma_{1r}} \right) \left\{ \frac{\partial \sigma_{1r}}{\partial P_k} \right\} + \left( \frac{I(\omega_k)}{\sigma_{2r}} - \frac{I(\omega_k, P_k^0)}{\sigma_{2r}} \right) \left\{ \frac{\partial \sigma_{2r}}{\partial P_k} \right\}$$

$$\mathbf{s}_k = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{1r}} - \frac{\partial I(\omega_k, P_k^0)}{\partial P_{1r}} \right) \left\{ \frac{\partial P_{1r}}{\partial P_k} \right\} + \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial P_{2r}} - \frac{\partial I(\omega_k, P_k^0)}{\partial P_{2r}} \right) \left\{ \frac{\partial P_{2r}}{\partial P_k} \right\}$$

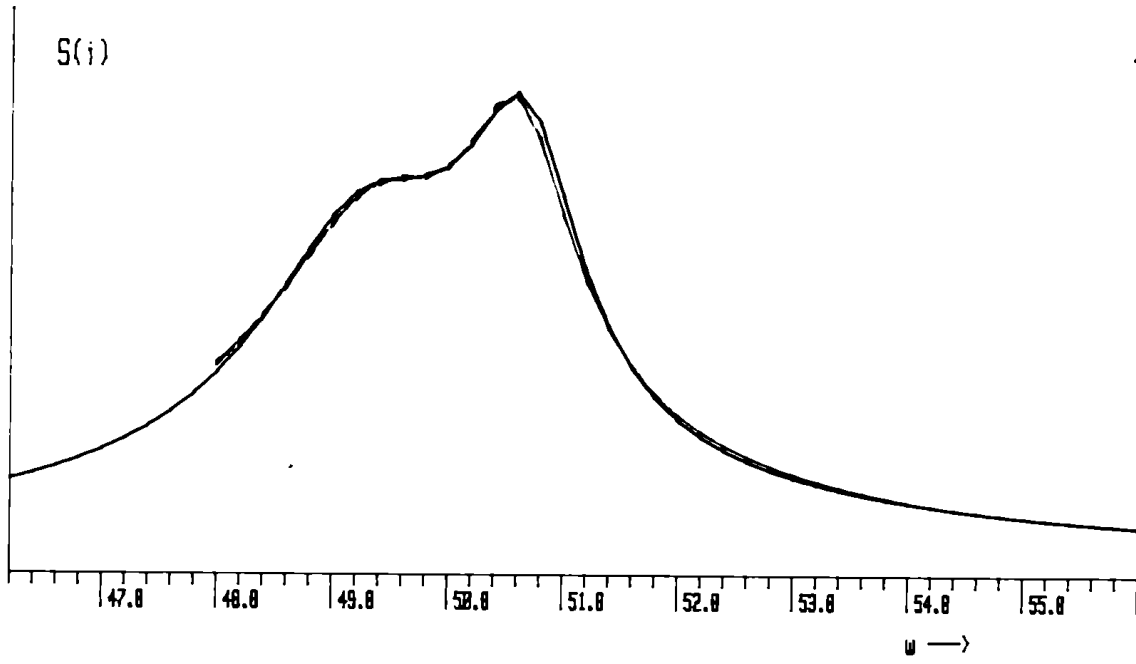
$$\mathbf{r}_k = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\partial I(\omega_k)}{\partial \sigma_{1r}} - \frac{\partial I(\omega_k, P_k^0)}{\partial \sigma_{1r}} \right) \left\{ \frac{\partial \sigma_{1r}}{\partial P_k} \right\} + \left( \frac{I(\omega_k)}{\sigma_{2r}} - \frac{I(\omega_k, P_k^0)}{\sigma_{2r}} \right) \left\{ \frac{\partial \sigma_{2r}}{\partial P_k} \right\} \quad (4.58)$$

Iar  $P_k^0$  din parantezele funcțiilor, indică că acestea se vor calcula cu ajutorul parametrilor vectorului  $\{P_k^0\}$ .

Rezolvarea sistemului (4.58) se face cum s-a mai arătat într-o buclă de iterație. Controlul convergenței soluțiilor face pe cale grafică. O subrutină inclusă în bucla de program prezintă, pe display-ul calculatorului, curbale polare, după fiecare ciclu de iterație. Când curba polară, corespunzătoare unei iterații, se suprapune peste cea obținută experimental, procesul de iterație se oprește și se începesc valorile parametrilor.

Pentru determinarea celor zece parametri modali cuprinși în vectorul  $\{P_k\}$  s-a utilizat programul "CE-FIT" în care primele subrutine "CE-1" și "CE-2" au fost luate din programul "CE-FIT". Cu aceste subrutine se determină parametrii modali de start. Cele trei puncte reprezentative în curba  $\omega_1, \omega_{1+1}$  și  $\omega_{1+2}$  pentru estimarea parametrilor modali de start ai celor două moduri se iau în cele două extremități ale curbei polare, deoarece gradul de influență reciprocă al celor două moduri este mai redus pe aceste puncte.

În fig. 4.5 s-a prezentat calculat pe calculator curbale polare în raport cu două parametri modali a două moduri cuplate. Se observă că după stabilirea parametrilor modali, curbalele



$\mu_1 = 50$   
Sigma1 = .9  
U1 = 4.3  
V1 = 5

$\mu_2 = 51.5$   
Sigma2 = .5  
U2 = 3.5  
V2 = -3

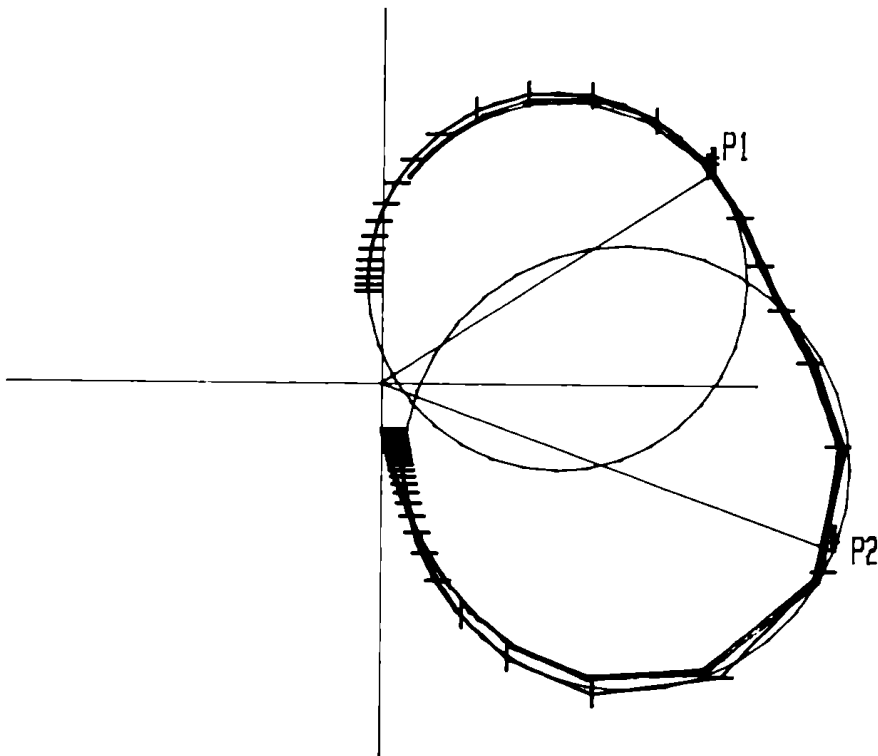


Fig. 4.5

pelare de iteratie (culoarea roșie) converg după câteva iterații spre curba pelară exponențială (culoarea neagră). Aici reiese un avantaj important al metodei prezentate în acest capitol, adică se poate folosi acolo unde este necesară evitarea atingerii zonei de vîrf a rezonanței, sau în care structura poate fi deteriorată sau cazul în care la nivele mari de vibrații apar efecte neliniare care distorsionează răspunsul sistemului sau cazul în care sursa de vibrație este limitată (paragraful 6.1.1).

#### 4.2. Metode de stabilizare în domeniul timp

Metodele de stabilizare a parametrilor modali în domeniul timp folosesc răspunsul sistemului prin vectorul  $\{q(t)\}$  de răspuns al sistemului, considerînd sistemul vibrațional liber după întreprinderea excitației.

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{1}{\omega_r} \right\} e^{i\omega_r t} + \left\{ \frac{1}{\omega_r} \right\} e^{-i\omega_r t}, \quad (4.59)$$

Forma exactă derivă din formulele (3.47), (3.54) sau (3.61) unde  $\omega_r$  sînt complexe și depind de condițiile inițiale (de exemplu  $\omega_r$  este complex conjugatilor  $\{\bar{\omega}_r\}$ ) și de vectorii componentelor modale  $\{V_r\}$  și  $\{\bar{V}_r\}$ .

O dezvoltare modală de forma (4.59) poate fi obținută și prin vectorii funcției de autovalorabile  $\{q_0(\omega)\}$  (3.61) dacă excitația sistemului este funcție de timp regim alb. Dacă asupra răspunsului în frecvență (4.5) se aplică transformata Fourier inversă, se poate obține:

$$\{q(t)\} = \int_0^{2\pi} \{q_0(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.60)$$

unde  $q_0(\omega)$  este funcția obținută din (4.59).

Întrucît se presupune că  $\{q_0(\omega)\}$  este funcție de frecvență al structurii în regim alb, vom avea următoarea dezvoltare modală

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^N \bar{X}_r e^{i\omega_r t} \quad (4.61)$$

unde  $\bar{X}_r$  este un vector complex al vectorului  $\{X_r^0\}$ , iar  $\omega_r = 2\pi f_r$ .

Fiind presupus că  $\{q_0(\omega)\}$  este funcție de timp  $\{q(t)\}$  printr-un traductor de vibrații electrică este posibil să se obțină un semnal care digitalizat

cu rata de eşantionare  $\Delta t$ , se obține o secvență de eşantionare

$$x_k = x((k-1)\Delta t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.62)$$

suma (4.61) devine:

$$\sum_{r=1}^m x_r \frac{y_r^{k-1}}{y_r^k} = x_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.63)$$

unde

$$y_r = e^{-\lambda_r \Delta t} \quad (4.64)$$

Sumele (4.63) constituie un sistem de ecuații algebrice neliniare cu  $2m$  necunoscute  $\lambda_r$  și  $y_r$  greu rezolvabil sub această formă.

#### 4.2.1. Algoritmul condițiilor exponențiale complexe

Prony [104] a elaborat un algoritm care permite ușurarea rezolvării sistemului (4.63). Se formează mai întâi un sistem algebric liniar de forma

$$\sum_{k=1}^m x_k y_k^{l-1} = \bar{y}_l, \quad (l = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4.65)$$

unde  $b_k$  sistem constant în timp necunoscut.

Înlocuind  $x_k y_k^{l-1}$  din (4.65) în (4.63), va rezulta, ordonând termenii, sistemul

$$\left( \sum_{k=1}^m x_k y_k^{l-1} \right) \left( \frac{y_r^{k-1}}{y_r^k} + y_r \right) = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4.66)$$

Deoarece  $\left( \sum_{k=1}^m x_k y_k^{l-1} \right) \neq 0$  va trebui ca sumele din paranteză să se anuleze, deci

$$\frac{y_r^{l-1}}{y_r^l} + y_r = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4.67)$$

amplificând-se astfel la o ecuație algebrică liniară de gradul

$$y_r^l + b_1 y_r^{l-1} + \dots + b_{l-1} y_r + b_l = 0, \quad (4.68)$$

ale căror rădăcini sunt cele  $m$  valori  $y_r$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, m$ ).

În cazul în care se prelucrează diagrama vibrațiilor libere amortizate, acestea se obțin ca perechi complex conjugate.

$$y_\ell = y_{re} + jy_{ie} = y_{oe} e^{j\theta_\ell} \quad (4.69)$$

unde

$$\theta_\ell = \arctg\left(\frac{y_{ie}}{y_{re}}\right); \quad y_{oe} = \sqrt{y_{re}^2 + y_{ie}^2}$$

Tinând seama că  $\lambda_\ell = -\zeta_\ell + jp_\ell$ , vor rezulta, prin logaritmare a relației (4.64), valorile pseudopulsăției  $p_\ell$  și a factorului de amortizare  $\zeta_\ell$

$$p_\ell = \frac{1}{\Delta t} \theta_\ell \quad \zeta_\ell = -\frac{1}{\Delta t} \ln(y_{oe})$$

$$(\ell = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}) \quad (4.70)$$

Urmează determinarea componentelor modale  $X_r$  care sînt constante complex conjugate

$$X_r = X_{rr} + jX_{ri}; \quad \bar{X}_r = X_{rr} - jX_{ri} \quad (4.71)$$

Ele se înmulțesc în (4.63) cu termenii  $y_r^{k-1}$  și  $y_r^{k-1}$ , deja cunoscuți, și din termenul general al sumei (4.63)

$$X_r y_r^{k-1} + \bar{X}_r y_r^{k-1} = 2y_{or}^{k-1} (X_{rr} \cos(k-1)\theta_r - X_{ri} \sin(k-1)\theta_r), \quad (4.72)$$

rezultînd sistemul,

$$\begin{bmatrix} W_{re} \\ \vdots \\ W_{im} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{re} \\ \vdots \\ X_{im} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_e \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

unde  $\{X_{re}\}$  și  $\{X_{im}\}$  sînt vectorii formați din componentele modale  $X_{rr}$  și  $X_{ri}$

$$\begin{aligned} \{X_{re}\} &= \{X_{1r}, X_{2r}, \dots, X_{(n/2)r}\}^T \\ \{X_{im}\} &= \{X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{(n/2)i}\}^T \end{aligned} \quad (4.74)$$



$\{X_e\}$  este un vector ( $m \times 1$ ) format din primele  $m$  valori digitalizate  $x_k$  ale legii de mișcare  $x(t)$

$$\{X_e\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T \quad (4.75)$$

iar submatricile  $[W_{re}]$  și  $[W_{im}]$  sînt matrici ( $m \times m/2$ ), care au elementele

$$\begin{aligned} W_{re}(k,r) &= 2y_{or}^{k-1} \cos(k-1)\theta_r && \text{pentru } k = 1, 2, 3, \dots, m \\ & && r = 1, 2, \dots, m/2 \\ W_{im}(k,r) &= -2y_{or}^{k-1} \sin(k-1)\theta_r && (4.76) \end{aligned}$$

Deși, avînd la dispoziție o secvență de  $m$  eșantioane ale legii de mișcare  $x(t)$  se pot determina parametrii modali pentru  $m/2$  moduri. În mod obișnuit numărul eșantioanelor obținute este de ordinul sutelor, iar numărul modurilor care se reflectă în legea de mișcare  $x(t)$  nu depășesc de obicei cifra 10; pentru a căror estimare este nevoie de o secvență de numai 20 eșantioane.

Avînd la dispoziție un număr mare  $m_0$  de eșantioane, sistemul (4.65) poate fi pus sub forma matriceală

$$\{X_i\}^T \{B\} = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, m_0 - 1) \quad (4.77)$$

unde  $\{B\}$  este vectorul necunoscutelor  $b_k$

$$\{B\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}^T \quad (4.78)$$

$X_i$  sînt vectori ( $m \times 1$ ) ce au formele

$$\{X_i\} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}^T \quad (4.79)$$

iar  $C_i$  sînt constante avînd valorile

$$C_i = -x_{m+1}$$

Aplicînd metoda celor mai mici pătrate la rezolvarea sistemului (4.77), va rezulta vectorul  $\{B\}$

$$\{B\} = \left( \sum_{i=0}^{m_0} \{X_i\} \{X_i\}^T \right)^{-1} \left( \sum_{i=0}^{m_0} C_i \{X_i\} \right) \quad (4.80)$$

Se trece în continuare la calculul rădăcinilor ecuației (4.68), de unde se determină pseudopulsările  $p_r$  și factorii de amortizare  $\sigma_r$  (4.70).

Pentru calculul valorilor componentelor modale  $X_r$  sistemul (4.73) poate fi pus sub forma

$$\{w_{1k} \dots w_{ik}\}^T \begin{Bmatrix} X_{rr} \\ \dots \\ X_{ir} \end{Bmatrix} = \{x_k\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m_0) \quad (4.81)$$

care este un sistem cu  $m_0$  ecuații și  $m$  necunoscute.

Vectorii  $\{w_{rk}\}$  și  $\{w_{ik}\}$  în termenii generali,

$$\begin{cases} w_{rk}(r, l) = 2y_r^{(k-1)} \cos(k-1)\theta_r & (r = 1, 2, \dots, m/2) \\ w_{ik}(r, l) = -2y_r^{(k-1)} \sin(k-1)\theta_r \end{cases} \quad (4.82)$$

Aplicînd metoda celor mai mici pătrate la rezolvarea sistemului (4.81), se obține vectorul componentelor modale.

$$\begin{Bmatrix} X_{rr} \\ X_{ir} \end{Bmatrix} = \left( \sum_{k=1}^{m_0} \{w_{rk} \dots w_{ik}\} \{w_{rk} \dots w_{ik}\}^T \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^{m_0} x_{ek} \{w_{rk} \dots w_{ik}\} \right) \quad (4.83)$$

și astfel toți parametrii modali sînt determinați.

#### 4.2.2. Metode directe de estimare a parametrilor modali

S.R. Ibrahim și E.C. Mickulcik [67] au elaborat o metodă interesantă pentru estimarea parametrilor modali plecînd de la răspunsul simultan în  $N$  stații ale structurii, (puncte de măsură), prin legile de mișcare  $x_s(t_j)$

$$x_s(t_j) = \sum_{r=1}^m x_{sr} e^{\lambda_r t_j} \quad (s = 1, 2, \dots, m/2) \\ (j = 1, 2, \dots) \quad (4.84)$$

Pentru primele  $m$  secvențe de timp  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) dezvoltările (4.84) pot fi puse sub formă matriceală

$$[x] = [P] [A] \quad (4.85)$$

unde  $[X^0]$  este o matrice dreptunghiulară ( $\frac{m}{2} \times m$ ) avînd forma

$$[X^0] = \begin{bmatrix} x_1(t_1), x_1(t_2) & \dots & x_1(t_m) \\ x_2(t_1), x_2(t_2) & \dots & x_2(t_m) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m/2}(t_1) & \dots & x_{m/2}(t_m) \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$x_k(t_j)$  fiind elongația mișcării vibratorii în stația K la momentul  $t = t_j$ .  $[P^0]$  este o matrice de asemenea dreptunghiulară ( $\frac{m}{2} \times m$ ) avînd forma

$$[P^0] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & & \\ x_{m/2, 1} & \dots & x_{(m/2) m} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$x_{sr}$  ( $s = 1, 2, \dots, m/2$ ;  $r = 1, 2, \dots, m$ ), fiind componenta modului  $r$ , la legea de mișcare a punctului din stația S.

$[\Delta_v]$  este o matrice pătrată ( $m \times m$ ) avînd forma

$$[\Delta_v] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \dots & e^{\lambda_1 t_m} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \dots & e^{\lambda_2 t_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_m t_1} & e^{\lambda_m t_2} & \dots & e^{\lambda_m t_m} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Din relația (4.84) este cunoscută numai matricea  $[X^0]$ , deoarece elongațiile  $x_s(t_j)$  pot fi măsurate prin digitalizarea semnalelor de vibrații. Parametrii modali căutați sînt cuprinși în elementele matricilor  $[P^0]$  și  $[\Delta_v]$  ale căror elemente trebuie să fie determinate.

Pentru cazul în care eșantioanele  $x_s(t_j + \Delta t)$  ale mișcărilor vibratorii sînt luate decalate în urmă cu un interval de eșantion

At se obține o altă formă a dezvoltării (4.84)

$$[x^1] = [P^0] [\Delta_1] \quad (4.89)$$

unde elementul general al matricii  $[\Delta_1]$  este  $e^{\lambda_j(t_k + \Delta t) - \lambda_j t_k} = e^{\lambda_j \Delta t}$   
 Introducând matricea diagonală  $[\Delta]$  care are forma

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \Delta t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

matricea  $[\Delta_1]$  poate fi exprimată prin

$$[\Delta_1] = [\Delta] [\Delta_0] \quad (4.91)$$

de unde

$$[x^1] = [P^0] [\Delta] [\Delta_0] \quad (4.92)$$

Unind sistemele (4.85) și (4.92) se obține

$$[\phi_0] = [\psi_0] [\Delta_0] \quad (4.93)$$

unde  $[\phi_0]$  și  $[\psi_0]$  sînt matrici pătrate (mxm)

$$[\phi_0] = \begin{bmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^1 \end{bmatrix}; \quad [\psi_0] = \begin{bmatrix} [P^0] \\ [P^0] [\Delta] \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Luînd șantioanele mișcărilor vibratorii decalate cu  $2\Delta t$ , se obține un nou sistem similar cu (4.85) și (4.89)

$$[x^2] = [P^0] [\Delta_2] = [P^0] ([\Delta])^2 [\Delta_0] \quad (4.95)$$

care unit cu (4.92) se scrie sub forma

$$[\phi_1] = [\psi_1] [\Delta_0] \quad (4.96)$$

unde

$$[\phi_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad [\psi_1] = \begin{bmatrix} [P^0] [\Delta] \\ [P^0] [\Delta]^2 \end{bmatrix} = [\psi_0] [\Delta] \quad (4.97)$$

Se poate demonstra că matricile  $[\phi_0]$ ,  $[\psi_0]$  și  $[\Delta]$  sunt  
 singulare, deci pot fi inversate. Deci, între sistemul (4.97) și  
 (4.97) pot fi eliminate matricea  $[\Delta_0]$ , obținându-se relația

$$[\phi_1] [\phi_0]^{-1} [\psi_0] = [\psi_1] = [\psi_0] [\Delta] \quad (4.98)$$

și de aici exprimând matricea  $[\psi_0]$  prin cei  $m$  vectori coloană  
 ai ei:

$$[\psi_0] = [\psi_1 \vdots \psi_2 \vdots \psi_m] \quad (4.91)$$

se obține sistemul

$$[\phi_1] [\phi_0]^{-1} \{\psi_r\} = e^{\lambda_r \Delta t} \{\psi_r\} \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (4.100)$$

care conduce la problema valorilor proprii ale matricii pătrate  
 $[A] = [\phi_1] [\phi_0]^{-1}$ , ea fiind cunoscută, deoarece elementele matrici-  
 lor  $[\phi_0]$  și  $[\phi_1]$  sînt eșantioanele  $x_s(t_1)$ , obținute prin digita-  
 lizarea semnalelor de vibrații ale stațiilor de măsură.

La această metodă trebuie ca numărul stațiilor de măsură  
 alese pe structură să fie egal cu numărul modurilor ce au contribu-  
 tuții în semnalele de vibrații. Dacă numărul stațiilor este mai  
 mic decît al modurilor, se folosesc "stațiile aparente" de mă-  
 sură. Se poate aplica și aici metoda celor mai mici pătrate.

• a doua metodă [66], elaborată de S.R. Ibrahim, pleacă de  
 la sistemul (3.7) care în cazul vibrațiilor libere are forma

$$\{\dot{z}\} = [A_0] \{z\} \quad (4.101)$$

unde matricea  $[A_0]$  are forma (3.8). Luînd  $m$  vectori

$$\{z_1\} = \begin{Bmatrix} x(t_1) \\ \dots \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.102)$$

se poate forma o matrice pătrată ( $m \times m$ )

$$[Z] = [\{z_1\} \{z_2\} \dots \{z_m\}] \quad (4.103)$$

sistemul (4.101) devenind

$$[z^0] = [A_0] [z] \quad (4.104)$$

de unde se obține matricea,

$$[A_0] = [z^0] [z^{-1}] \quad (4.105)$$

și mai departe sistemul valorilor proprii

$$[A_0]\{\psi\} = \lambda\{\psi\} \quad (4.106)$$

cu ajutorul căruia se pot determina direct parametrii modali  $p_r$  și  $\sigma_r$  care sînt componentele reală și imaginară ale valorii proprii  $\lambda_r$ .

$$\lambda_r = -\sigma_r + j p_r \quad (r = 1, 2, \dots, m/2) \quad (4.107)$$

#### 4.2.3. Programe de calcul și aplicații. Concluzii

Cele trei metode de identificare a parametrilor modali: metoda seriilor de puteri și cele două metode elaborate de I.R. Ibrahim sînt asemănătoare deoarece conduc la problema valorilor proprii.

Pe baza algoritmului seriilor de puteri am realizat și testat un program de calcul "SEREXP", în limbaj BASIC care are ca date de intrare un șir de  $m_0$  eșantioane  $x_k$  obținute în urma digitalizării unui semnal de vibrații. Programul SEREXP consistă din următoarele subrutine:

- "Sistem", prin care se formează sistemul algebric linear (4.77) și se calculează prin metoda celor mai mici pătrate, vectorul  $\{B\}$  (4.80) ce conține coeficienții  $b_k$  ai polinomului (4.63).
- "Radac" prin care se calculează cele  $m$  rădăcini complex conjugate  $y_p$  și  $\bar{y}_p$  ale polinomului (4.68)
- "Vector", prin care se determină vectorii contribuțiilor modale  $\{x_{er}\}$  și  $\{x_{ir}\}$  (4.83).

În fig.4.6 se prezintă vibrograma vibrațiilor libere amortizate a răspunsului unui sistem cu două grade de libertate, avînd două moduri naturale de vibrații cu frecvențe proprii apropiate. Prelucrînd acest răspuns, cu ajutorul programului "SEREXP", s-au

estimat parametrii modali :  $P_{1r}$ ,  $P_{2r}$ ,  $\zeta_{1r}$  și  $\zeta_{2r}$ , care sînt tipăriți pe diagramă.

Din simulările efectuate pe calculator se constată că metodele de prelucrare în domeniul timp sînt foarte avantajoase în cazul în care modurile naturale de vibrații sînt cuplate. De asemenea aceste metode sînt avantajoase în cazul structurilor cu amortizare puternică, acolo unde metodele diagramelor polare dau rezultate slabe.

Metodele de prelucrare în domeniul timp sînt însă sensibile la zgomot, în special la zgomotul din domeniul frecvențelor joase. De aceea este necesară o filtrare puternică, cu un filtru trece sus, a componentelor de joasă frecvență,

Bune rezultate se pot obține dacă se aplică asupra semnalului vibrațiilor libere amortizate transformata Fourier, spectrul astfel obținut netezindu-se prin medierea mai multor spectre sau prin eliminarea componentelor de joasă sau înaltă frecvență care nu prezintă interes.

Asupra spectrului astfel netezit, se aplică apoi transformata Fourier inversă, obținîndu-se astfel un răspuns în timp îmbunătățit, cu ajutorul căruia, prin programul "SSREXP", se pot obține parametrii modali. Detalii asupra procesării semnalelor se vor găsi în Capitolul 6.

| Nivel zgomot<br>[o/o] | Signal<br>[e <sup>-1</sup> ] | Sigma2<br>[e <sup>-1</sup> ] | p1<br>[e <sup>-1</sup> ] | p2<br>[e <sup>-1</sup> ] |
|-----------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0                     | .3                           | .2                           | 50                       | 60                       |
| 2                     | .32531                       | .19871                       | 50.038                   | 60.007                   |
| 4                     | .49999                       | .2433                        | 50.150                   | 60.059                   |
| 6                     | .61578                       | .34015                       | 50.185                   | 60.070                   |
| 8                     | 1.3362                       | .70013                       | 50.443                   | 60.209                   |

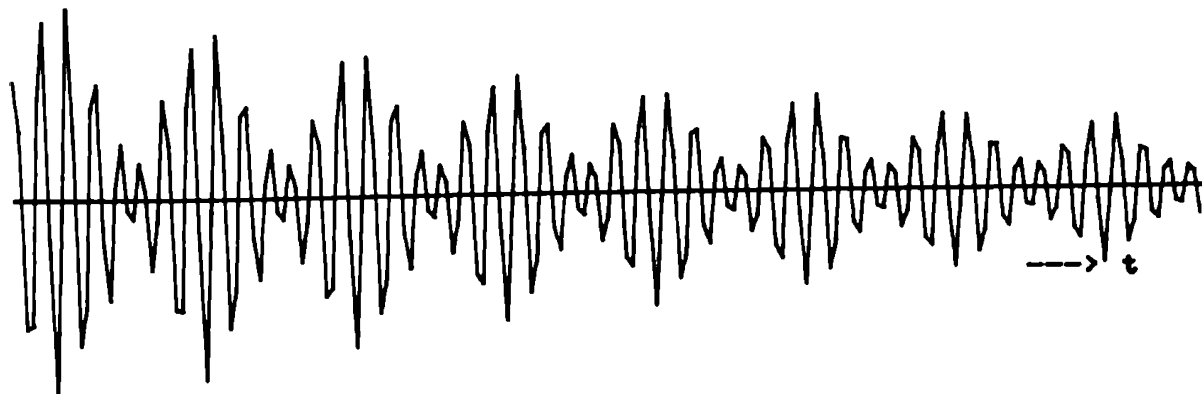


Fig. 4.5

## 5. IDENTIFICAREA SISTEMELOR VIBRANTE

Problema de bază a identificării sistemelor vibrante este așa numita problemă inversă: se dau excitația și răspunsul sistemului vibrant și se cere structura matematică a modelului sistemului.

Dacă structura matematică a sistemului este complet necunoscută atunci problema devine problemă de "cutie neagră" (black box). În majoritatea cazurilor, în special pentru sistemele lineare, se pot obține câteva detalii ale structurii modelului matematic, problema identificării transformându-se în una a estimării coeficienților sistemului de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea structurii.

Analiza modală a răspunsului sistemului dă informațiile necesare stabilirii sistemului de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea reală a structurii. Unele metode de identificare se opresc la modelul modal, atunci când testarea la vibrații se face pe substructuri, analiza structurii complexe făcându-se pe baza sirului modal [7, 86].

Pentru identificarea sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării structurii se pot aplica și metode directe, fără ca în prealabil să se facă o analiză modală, aplicându-se metode iterative de ajustare a parametrilor.

### 5.1. Identificarea sistemului pe baza parametrilor modali

Metodele de identificare a sistemelor vibrante bazate pe modelul modal, pleacă de la cunoașterea parametrilor modali; pseudo-pulsăția  $p_r$ , factorul de amortizare  $\zeta_r$  și vectorii modali normalizați  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$ . Acești parametri verifică sistemul valorilor proprii (3.30) și (3.31) și relațiile de ortonormalitate (3.20).

Matricile modale normalizate  $[X_n]$  și  $[Y_n]$ , ținînd seama de (3.43) pot fi puse sub formele partiționate,

$$[X_n] = \begin{bmatrix} [x] & [\bar{x}] \\ [x] [S] & [\bar{x}] [S] \end{bmatrix}; \quad [Y_n] = \begin{bmatrix} -[K_0] [y] [S]^{-1} & -[K_0] [\bar{y}] [S]^{-1} \\ [M] [y] & [M] [\bar{y}] \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

iar matricea  $[A_0]$  forma (3.11).



Matricile modale ortonormale  $[x]$  și  $[y]$  ale sistemelor (3.30) și (3.31) se formează din vectorii proprii  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ )

$$\begin{cases} [x] = [\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_N\}]; & [\bar{x}] = [\{\bar{x}_1\}, \{\bar{x}_2\}, \dots, \{\bar{x}_N\}], \\ [y] = [\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_N\}]; & [\bar{y}] = [\{\bar{y}_1\}, \{\bar{y}_2\}, \dots, \{\bar{y}_N\}] \end{cases} \quad (5.2)$$

Matricile valorilor proprii  $[S]$  și  $[\bar{S}]$  au formele

$$[S] = \text{diag. } \lambda_r ; \quad [\bar{S}] = \text{diag. } \bar{\lambda}_r \quad (5.3)$$

Din dezvoltarea relațiilor de ortonormalitate (3.20) se obțin următoarele relații de ortonormalitate.

$$-[S]^{-1} [y]^T [K_0] [x] + [y]^T [M] [x] [S] = [I] , \quad (5.4)$$

$$-[\bar{S}]^{-1} [\bar{y}]^T [K_0] [\bar{x}] + [\bar{y}]^T [M] [\bar{x}] [\bar{S}] = [I] , \quad (5.5)$$

$$-[S]^{-1} [y]^T [K_0] [\bar{x}] + [y]^T [M] [\bar{x}] [\bar{S}] = [0] , \quad (5.6)$$

$$-[\bar{S}]^{-1} [\bar{y}]^T [K_0] [x] + [\bar{y}]^T [M] [x] [S] = [0] , \quad (5.7)$$

$$[S]^{-1} [y]^T [K_0] [x] [S] + [y]^T [K_0] [x] + [y]^T [C_0] [x] [S] = -[S] , \quad (5.8)$$

$$[\bar{S}]^{-1} [\bar{y}]^T [K_0] [\bar{x}] [\bar{S}] + [\bar{y}]^T [K_0] [\bar{x}] + [\bar{y}]^T [C_0] [\bar{x}] [\bar{S}] = -[\bar{S}] , \quad (5.9)$$

$$[S]^{-1} [y]^T [K_0] [\bar{x}] [\bar{S}] + [y]^T [K_0] [\bar{x}] + [y]^T [C_0] [x] [\bar{S}] = [0] , \quad (5.10)$$

$$[\bar{S}]^{-1} [\bar{y}]^T [K_0] [x] [S] + [\bar{y}]^T [K_0] [x] + [\bar{y}]^T [C_0] [x] [S] = [0] , \quad (5.11)$$

din care se pot determina matricile  $[M]$ ,  $[C_0]$  și  $[K_0]$ . Mai întâi se fac următoarele notații:

$$[y] [S] [x]^{-1} = [Z_R] + j [Z_I] \quad (5.12)$$

$$[x] [\bar{S}] [\bar{y}]^{-1} = [Z_R] - j [Z_I] ,$$

unde  $[Z_r]$  și  $[Z_i]$  sînt matrici reale.

Ridicînd la pătrat relațiile (5.12) se obține

$$([X][S][X]^{-1})^2 = [X][S]^2[X]^{-1} = ([Z_r] + j[Z_i])^2 \quad (5.13)$$

$$([\bar{X}][\bar{S}][\bar{X}]^{-1})^2 = [\bar{X}][\bar{S}]^2[\bar{X}]^{-1} = ([Z_r] - j[Z_i])^2$$

Inmulțind la dreapta relația (5.4) cu  $[S]$  și însumînd-o cu (5.8) se obține relația

$$[M][X][S]^2 + [C_o][X][S] + [K_o][X] = [O] \quad (5.14)$$

care reprezintă forma constrînsă a relațiilor de ortonormalitate (5.30). Similar se pot scrie relații de ortonormalitate cu vectorii complex conjugăți  $\{\bar{X}_r\}$

$$[X][\bar{X}][\bar{S}]^2 + [C_o][\bar{X}][\bar{S}] + [K_o][\bar{X}] = [O] \quad (5.15)$$

Din cele două relații (5.14) și (5.15) se pot explicita, ținînd seama de (5.12), matricile  $[C_o]$  și  $[K_o]$ , în funcție de matricea  $[M]$

$$[C_o] = [M][T_c] ; [K_o] = [M][T_k] \quad (5.16)$$

unde matricile reale  $[T_c]$  și  $[T_k]$  au formele

$$[T_c] = -([Z_r] + [Z_i][Z_r][Z_i]^{-1}) \quad (5.17)$$

$$[T_k] = [Z_i]^2 + [Z_i][Z_r][Z_i]^{-1}[Z_r]$$

Pentru determinarea matricei  $[M]$  se înmulțesc la dreapta relațiile (5.4) cu  $[X]^{-1}$  și (5.6) cu  $[\bar{X}]^{-1}$ , iar apoi se scad obținîndu-se relația

$$[Y]^T[M]([X][S][X]^{-1} - [\bar{X}][\bar{S}][\bar{X}]^{-1}) = [X]^{-1} \quad (5.18)$$

unde afară de matricea  $[M]$  toate celelalte matrici sînt cunoscute. Ținînd seama de relațiile (5.12) va rezulta

$$2j[Y]^T[X][Z_i] = [X]^{-1} \quad (5.19)$$

In mod similar din (5.10) și (5.12) se obține

$$-2j[\bar{y}]^T[M][z_i] = [\bar{x}]^{-1} \quad (5.20)$$

Matricile  $[x]$  și  $[y]$  sînt matrici complexe care se pot scrie sub formele

$$[\bar{x}] = [x_r] + j[x_i]; \quad [y] = [y_r] + j[y_i] \quad (5.21)$$

iar conjugatele lor sub formele

$$[\bar{x}] = [x_r] - j[x_i]; \quad [\bar{y}] = [y_r] - j[y_i] \quad (5.22)$$

La fel, inversa matricii  $[x]$  și a conjugatei sale vor avea formele

$$[x]^{-1} = [\hat{x}_r] + j[\hat{x}_i]; \quad [\bar{x}]^{-1} = [\hat{x}_r] - j[\hat{x}_i] \quad (5.23)$$

Astfel din (5.19) și (5.20) vor rezulta relațiile

$$2[y_i]^T[M][z_i] = [\hat{x}_r]; \quad 2[y_r]^T[M][z_i] = [\hat{x}_i] \quad (5.24)$$

iar de aici se determină matricia de inerție  $[M]$

$$[M] = -\frac{1}{2}[y_i]^{-T}[\hat{x}_r][z_i]^{-1}; \quad [M] = \frac{1}{2}[y_r]^T[\hat{x}_i][z_i]^{-1} \quad (5.25)$$

In relațiile matriceale de mai sus intervin calcule de inversare a unor matrici complexe ca de exemplu inversa matricilor  $[x]$  și  $[\bar{x}]$

$$[x]^{-1} = ([x_r] + j[x_i])^{-1} = [\hat{x}_r] + j[\hat{x}_i] \quad (5.26)$$

$$[\bar{x}]^{-1} = ([x_r] - j[x_i])^{-1} = [\hat{x}_r] - j[\hat{x}_i]$$

Se poate demonstra că matricile  $[\hat{x}_r]$  și  $[\hat{x}_i]$ , care sînt componentele reală și imaginară ale matricii  $[x]^{-1}$ , au formele

$$[\hat{x}_r] = ([x_r] + [x_i][x_r]^{-1}[x_i])^{-1} \quad (5.27)$$

$$[\hat{x}_i] = -([x_i] + [x_r][x_i]^{-1}[x_r])^{-1} \quad (5.28)$$

Matricea valorilor proprii  $[S]$  este și ea o matrice complexă

$$[S] = [S_{\sigma}] + j[S_p] \quad (5.29)$$

unde

$$[S_{\sigma}] = \text{diag}(-\sigma_r), [S_p] = \text{diag}[p_r] \quad (5.30)$$

Din relațiile (5.12) se pot calcula acum matricile  $[Z_r]$  și  $[Z_i]$

$$[Z_r] = ([x_r][S_{\sigma}] - [x_i][S_p])[\hat{x}_r] - ([x_r][S_p] + [x_i][S_{\sigma}])[\hat{x}_i] \quad (5.31)$$

$$[Z_i] = ([x_r][S_{\sigma}] - [x_i][S_p])[\hat{x}_i] + ([x_r][S_p] + [x_i][S_{\sigma}])[\hat{x}_r]$$

Deci avînd determinați pe cale experimentală parametrii modali  $\sigma_r$  și  $p_r$  și vectorii proprii  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$  se poate face identificarea sistemului de ecuații care guvernează mișcarea structurii testate.

#### 5.1.1: Separarea vectorilor proprii din răspunsul modal

Pentru identificarea sistemului de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea structurii este necesară estimarea parametrilor modali  $p_r$ ,  $\sigma_r$  și a vectorilor proprii  $\{x_r\}$  și  $\{y_r\}$ , care se determină din răspunsul structurii la o excitație cunoscută.

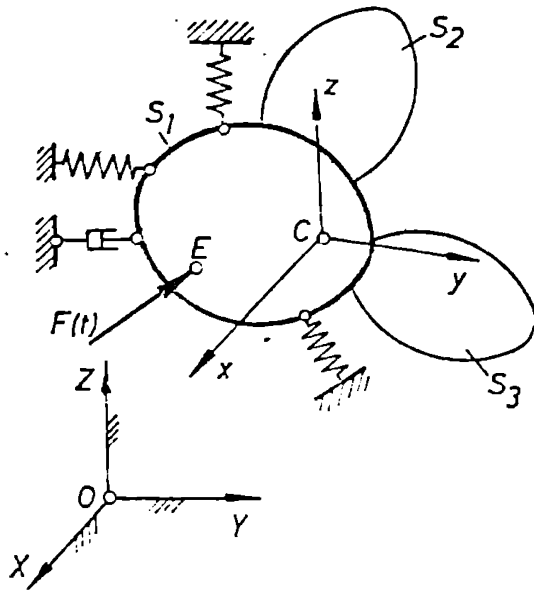
Excitația structurii se poate face într-un punct sau în mai multe puncte (excitare multipunct). Excitația multipunct prezintă avantajul excitării tuturor modurilor naturale de vibrații ale structurii, însă echipamentul de testare este deosebit de costisitor, aceste excitații folosindu-se numai în industriile aérospatiale și de automobile.

Ținînd seama de cele de mai sus se va studia în continuare cazul excitației într-un singur punct care necesită un echipament de testare simplu accesibil testării la vibrații în condiții de teren.

Cazul general de excitație într-un singur punct este acela în care o structură complexă (fig.5.1) conține mai multe substructuri dintre care una  $S_1$  are o rigiditate mare în raport cu celelalte  $S_2$ ,  $S_3$  care sînt elastice. În acest caz se poate considera structura  $S_1$  ca un corp rigid a cărui mișcare este definită prin

trei translații și trei rotații ale sistemului de axe Cxyz legate de corpul rigid. Pentru ușurarea decuplării modurilor de corp rigid ale întregii structuri originea axelor de coordonate se iau

în centrul maselor C al întregului sistem considerat în format.



Forța de excitație redusă în punctul C va da un torson format din: trei forțe  $F_x(t)$ ,  $F_y(t)$  și  $F_z(t)$  și trei momente  $M_x(t)$ ,  $M_y(t)$  și  $M_z(t)$  care formează primele șase elemente ale vectorului de excitație

$$\begin{aligned} \{F_0\} &= F_e \{a_1, a_2, \dots, a_6, 0, \dots, 0\} \\ &= F_e \{a\}^T \end{aligned} \quad (5.32)$$

Fig.5.1

Elementele  $a_1 \dots a_6$  se pot exprima în funcție de coordonatele  $x, y, z$ , ale punctului de aplicare a forței și unghiurile  $\alpha_x, \alpha_y$  și  $\alpha_z$  dintre vectorul forței de excitație  $F$  și axele sistemului Cxyz.

$$a_1 = \cos \alpha_x, \quad a_2 = \cos \alpha_y, \quad a_3 = \cos \alpha_z \quad (5.33)$$

$$a_4 = y \cos \alpha_z - z \cos \alpha_y; \quad a_5 = z \cos \alpha_x - x \cos \alpha_z; \quad a_6 = x \cos \alpha_y - y \cos \alpha_x.$$

De asemenea, vectorul de răspuns al structurii  $\{q(t)\}$  va conține primele 6 elemente legile de mișcare de corp rigid;  $x_c(t)$ ,  $y_c(t)$ ,  $z_c(t)$  translații și  $\psi_x(t)$ ,  $\psi_y(t)$  și  $\psi_z(t)$  rotații.

Pentru structuri la care nu există subansamble cu mișcări de rotații variabile sistemul de ecuații diferențiale care descrie mișcarea structurii este un sistem simetric la care matricile  $[M]$  și  $[K]$  sînt simetrice. În acest caz

$$\{y_r\} = \{x_r\} \quad (5.34)$$

Receptanța într-un punct S al structurii va fi

$$\alpha_s = \frac{q_s(\omega)}{F_0} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{x_{sr} \{x_r\}^T \{a\}}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{\bar{x}_{sr} \{x_r\}^T \{a\}}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \quad (5.35)$$

sau

$$\alpha_s = \sum_{r=1}^N \left( \frac{U_{sr} + jV_{sr}}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} + \frac{U_{sr} - jV_{sr}}{\sigma_r + j(\omega + p_r)} \right) \quad (5.36)$$

rezultînd,

$$x_{sr} \{x_r\}^T \{a\} = U_{sr} + jV_{sr} \quad (s, r = 1, 2, \dots, N) \quad (5.37)$$

care este un sistem de  $N^2$  ecuații cu  $N^2$  necunoscute, elementele  $x_{sr}$ . Sistemul (5.37) se poate pune sub forma

$$\sum_{p=1}^6 x_{sr} a_{pr} = U_{sr} + jV_{sr} \quad (s, r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (5.38)$$

Însumînd primele șase ecuații se obține,

$$\sum_{s=1}^6 x_{sr}^2 a_s + \sum_{\substack{s,p=1 \\ s \neq p}}^6 (a_s + a_p) x_{sr} x_{pr} = \sum_{s=1}^6 (U_{sr} + jV_{sr}) \quad (5.39)$$

și împărțind, la prima ecuație ( $s = 1$ ), toate celelalte pînă la  $s = 6$ , se obțin rapoartele

$$\frac{x_{sr}}{x_{1r}} = \frac{U_{sr} + jV_{sr}}{U_{1r} + jV_{1r}} = b_s \quad (s = 1, 2, 3, \dots, 6) \quad (5.40)$$

$$(r = 1, 2, 3, \dots, N)$$

unde  $b_s$  sînt șase constante complexe, afară de prima,  $b_1 = 1$ .

Înlocuind în (5.39) se obține primul element al vectorului  $\{x_r\}$ .

$$x_{1r} = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^6 (U_{sr} + jV_{sr})}{\sum_{s=1}^6 b_s^2 a_s + \sum_{\substack{s,p=1 \\ s \neq p}}^6 b_s b_p (a_s + a_p)}} \quad (5.41)$$

În continuare din (5.40) se determină primele șase elemente  $x_{sr}$  ale vectorului  $\{x_r\}$ , iar de aici produsul

$$\{x_r\}^T \{a\} = \sum_{s=1}^6 x_{sr} a_s \quad (5.42)$$

Celelalte  $N-6$  elemente ale vectorului  $\{x_r\}$  se determină din (5.37)

$$x_{sr} = \frac{U_{sr} + jV_{sr}}{\sum_{s=1}^6 x_{sr} a_s} \quad (s = 7, 8, \dots, N) \quad (5.43)$$

În acest mod se determină complet vectorul  $\{x_r\}$  și de aici matricea modală normalizată

$$[X] = [\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_N\}] \quad (5.44)$$

care servește la identificarea modelului matematic al sistemului de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea structurii.

### 5.1.2. Identificarea structurilor izolate

#### 5.1.2.1. Moduri neconstrinse. Separarea mișcărilor de corp

La testarea la vibrații pe substructuri se practică izolarea ei de structurile conexe, prin intermediul unor elemente elastice  $E$  (fig.5.2). Elementele au constante elastice foarte mici în comparație cu cele ale legăturilor interioare ale substructurii.

Se deplasează astfel în domeniul frecvențelor joase modurile de corp rigid, care în dezvoltarea modală a răspunsului se reflectă prin termeni reziduali.

Datorită faptului că forțele de legătură sînt neglijate, substructura este într-o stare de echilibru liber-liber (free-free)

Sistemul de ecuații ( $N \times N$ ) care guvernează mișcarea substructurii, are forma discretizată

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (5.45)$$

unde

$$\{q\} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} ; \quad \{Q\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F \\ \vdots \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$\bar{r}_i$  fiind vectorii de poziție ai punctelor  $P_i$  în care se consideră concentrate masele  $m_i$  reduse ale substructurii, iar  $\bar{F}_e$  este vectorul forței de excitație care acționează în punctul  $P_e$  al structurii. Matricea maselor  $[M]$  în cazul reducerii maselor în

puncte  $P_i$  ale substructurii este o matrice diagonală

$$[M] = \text{diag}[m_i] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.47)$$

Pentru studiul mișcării substructurii sistemului (5.45) i se mai alătură relațiile

$$\sum_{i=1}^{N_0} m_i \{\ddot{r}_i\} = \{F_e\}; \quad (5.48)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} m_i [R_i]^T \{\ddot{r}_i\} = [R_e]^T \{F_e\}$$

care reprezintă legea centrului

maselor și teorema momentului cinetic, aplicate la sisteme materiale (în cazul substructurii elastice).  $[R_i]$  și  $[R_e]$  sînt matricile de poziție, în raport cu centrul  $C$  al maselor, al punctului  $P_i$  și  $P_e$ .

Relațiile (5.48) se pot scrie sub forma matriceală.

$$[D_x]^T [M] \{\ddot{q}\} = \{P\} \quad (5.49)$$

unde

$$D_x = \begin{bmatrix} [I] & [R_1] \\ [I] & [R_2] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [R_N] \end{bmatrix} \quad \{P\} = \begin{bmatrix} [I] \\ \dots \\ [R_e]^T \end{bmatrix} \{F_e\} \quad (5.50)$$

Sistemul valorilor proprii va fi de forma

$$([M] \lambda_r^2 + [C] \lambda_r + [K]) \{x_r\} = \{0\} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (5.51)$$

și

$$[D_x]^T [M] \{x_r\} \lambda_r^2 = \{0\} \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (5.52)$$

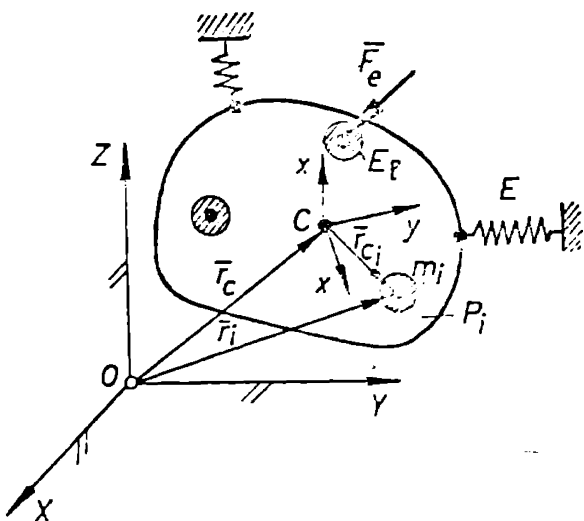


Fig.5.2



Pentru modurile de corp rigid pentru care  $\lambda_r = \lambda_0 = 0$  ( $r = 1, 2, 3, 6$ ) dacă vectorii proprii  $\{x_r\}$  ( $r = 1, 2, \dots, 6$ ) sînt formați din coloanele matricei  $[D_x]$  se obține din (5.62)

$$[D_x]^T [M] [D_x] \lambda_0^2 = [0] \quad (5.53)$$

Produsul  $[D_x]^T [M] [D_x]$  reunește condițiile de ortogonalitate ale modurilor de corp rigid, în raport cu matricea maselor. Introduscînd forma partițională (5.50) a matricei  $[D_x]$  și ținînd cont de relațiile:

$$\sum_{i=1}^N m_i = m; \quad \sum_{i=1}^N [R_i] m_i = [0]; \quad \sum_{i=1}^N [R_i]^T [R_i] m_i = [J], \quad (5.54)$$

$m$  fiind masa totală a structurii, iar  $[J]$  matricea momentelor de inerție ale structurii în raport cu sistemul Cxyz, se obține relația matriceală

$$[D_x]^T [M] [D_x] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Pentru diagonalizarea ei momentele centrifugale  $J_{xy}$ ,  $J_{xz}$  și  $J_{yz}$ , în raport cu sistemul de axe Cxyz trebuie să fie nule. Deci axele sistemului Cxyz trebuie să fie axe principale de inerție. Înmulțind la stînga sistemul (5.51) cu  $[D_x]^T$  și avînd în vedere că pentru modurile de corp rigid  $\lambda_r = \lambda_0 = 0$ , se obține condițiile de ortogonalitate față de matricea de rigiditate  $[K]$

$$[D_x]^T [K] [D_x] = [0] \quad (5.56)$$

Matricea  $[K]$  va fi în acest caz semidefinită.

În realitate modurile de corp rigid nu au valori proprii nule ci apropiate de zero, deci matricea  $[K]$  este totuși pozitiv definită. Investigarea experimentală a acestor moduri, pe baza diagramelor polare, este greoasă datorită faptului că trebuie să măsoare vibrații de foarte joasă frecvență.

Frecvența minimă a testului de vibrații este mult mai înaltă decît frecvențele proprii ale modurilor naturale de corp rigid și de aceea vectorul de răspuns al amplitudinilor la un regim armonic de pulsație  $\omega$  va fi

$$\{q(\omega)\} = \{q_{rg}\} + \{U_0\} \quad (5.57)$$

unde vectorul  $\{q_{rg}\}$  include componentele mișcărilor de corp rigid ale structurii, iar vectorul  $\{U_0\}$  amplitudinile deformațiilor dinamice ale structurii

$$\begin{aligned} \{q_{rg}\} &= -\frac{F_0}{\omega^2} \{\mu\} \\ \{U_0\} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\{x_r\} \{x_r\}^T}{\lambda_r - j\omega} + \frac{\{\bar{x}_r\} \{\bar{x}_r\}^T}{\lambda_r - j\omega} \right) \{q_0\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

unde elementele vectorului  $\{\mu\}$  sînt  $\mu_i = \frac{1}{m_{ri}}$ ,  $m_{ri}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) fiind șpanumitele mase reziduale, iar  $F_0$  amplitudinea forței de excitație  $F_e$ .

Pentru un regim armonic staționar la pulsația  $\omega$  relația (5.49) devine

$$-\omega^2 [D_x]^T [M] \{q_{rg}\} - \omega^2 [D_x]^T [M] \{U_0\} = \{P_0\} \quad (5.59)$$

Tinînd seama de (5.52) și de faptul că valorile proprii ale modurilor de corp elastic sînt definite de zero ( $\lambda_r \neq 0$ ), va rezulta

$$\begin{aligned} [D_x]^T [M] \{U_0\} &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{[D_x]^T [M] \{x_r\} \lambda_r^2}{\lambda_r - j\omega} - \frac{1}{\lambda_r^2} \{x_r\}^T \right) + \\ &+ \frac{([D_x]^T [M] \{\bar{x}_r\} \bar{\lambda}_r^2) - \frac{1}{\bar{\lambda}_r^2} \{\bar{x}_r\}^T \{q_0\}}{\bar{\lambda}_r - j\omega} = \{0\} \end{aligned} \quad (5.60)$$

rezultînd că

$$[D_x]^T [M] \{q_{rg}\} = -\frac{1}{\omega^2} \{P_0\} \quad (5.61)$$

$$[D_x]^T [M] \{U_0\} = \{0\}$$

Deci cei  $N$  vectori  $\{U_i\}$  care formează vectorul  $\{U\}$  de deformație nu sînt linear independenți și trebuie să îndeplinească case relații restrictive impuse de condițiile

$$[D_x]^T [M] \{U\} = \{0\}$$

Vectorul  $\{q_{rg}\}$  al amplitudinilor mișcărilor de corp rigid ale structurii poate fi exprimat prin forma

$$\{q_{rg}\} = [D_x] \begin{Bmatrix} r_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

unde  $\{r_0\}$  și  $\{\dot{\psi}_0\}$  sînt vectorul amplitudinilor mișcării de corp rigid a centrului maselor C și respectiv vectorul amplitudinilor mișcărilor de rotație de corp rigid, în jurul axelor sistemului Cxyz.

Introducînd (5.62) în (5.61) se obține, ținînd seama de (5.65) ecuațiile în amplitudine de corp rigid ale structurii,

$$m \{r_0\} = - \frac{1}{\omega^2} \{F_{e0}\} \quad (5.63)$$

$$[J] \{\dot{\psi}_0\} = - \frac{1}{\omega^2} [R_e] \{\dot{\psi}_{e0}\} \quad (5.64)$$

unde  $\{F_{e0}\}$  este vectorul amplitudinilor excitației.

Pe baza analizei modale a semnalelor de răspuns ale structurii la excitația cu o forță de amplitudine  $F_0$ , se determină parametrii dezvoltării modale,

$$\alpha_i(\omega) = \frac{q_i(\omega)}{F_0} = A_{ri}(\omega) + \sum_{l=1}^N \frac{U_{rl} + jV_{rl}}{C_r + j(\omega - p_r)} + \frac{U_{rl} - jV_{rl}}{C_r + j(\omega + p_r)} + jB_{rl} \omega$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

unde  $A_{ri}(\omega)$  este termenul rezidual al participărilor modale de corp rigid

$$A_{ri}(\omega) = \frac{-1}{m_{ri} \omega^2} \quad (5.66)$$

unde  $m_{ri}$  este masa reziduală.

Termenul rezidual  $A_{ri}(\omega)$  se determină deci prin analiza modală a dezvoltării (5.65) rezultînd vectorul  $\{q_{rg}\}$

Considerăm acum că s-a determinat vectorul  $\{q_{rg}\}$  al amplitudinilor reziduale de corp rigid. În acest caz din relația (5.62) necunoscut este vectorul  $\{r_0\}$  al amplitudinilor mișcării de corp rigid. Avem deci un sistem de  $N$  ecuații cu șase necunoscute, elementele vectorului  $\{r_0\}$ . Aplicînd și aici metoda celor mai mici

pătrate se obține cea mai bună soluție a sistemului

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_x] \\ [D_z] \end{bmatrix}^{-1} [D_x]^T \{a_{rg}\} \quad (5.67)$$

Pentru estificarea matricii de inerție  $[I]$  ce conține șase necunoscute momentele de inerție  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}$  și  $I_{yz}$  acestea se pun sub forma unui vector

$$\{I_v\} = \{I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}\}^T \quad (5.68)$$

Iar sistemul (5.64) are forma

$$[\phi] \{I_v\} = - \frac{1}{\omega^2} [R_e]^T \{F_e\} \quad (5.69)$$

unde

$$[\phi] = \begin{bmatrix} y_x & 0 & 0 & -y_y & -y_z & 0 \\ 0 & y_y & 0 & -y_x & 0 & -y_z \\ 0 & 0 & y_z & 0 & -y_x & -y_y \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Sistemul (5.69) are trei ecuații cu șase necunoscute. Pentru rezolvarea lui fiind necesare încă trei ecuații. Se va muta punctul de excitație pe structură în cel puțin încă un punct, obținându-se astfel încă trei ecuații care permit rezolvarea sistemului.

Pentru mai multe puncte de excitație  $N_e > 2$ , atunci rezolvarea sistemului se face prin metoda celor mai mici pătrate, vectorul  $\{I_v\}$  avînd forma

$$\{I_v\} = - \frac{1}{\omega^2} \left( \sum_{i=1}^{N_e} [\phi_i]^T [\phi_i] \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N_e} [\phi_i]^T [R_{e1}]^T \{F_{e1}\} \right) \quad (5.71)$$

unde  $[\phi_i], [R_{e1}]$  și  $\{F_{e1}\}$  sînt matricile  $[\phi], [R_{e1}]$  și  $\{F_{e0}\}$  în punctul de excitație  $i$ .

#### 5.1.2.2. Cuplarea structurilor elastice cu structuri rigide

În multe cazuri practice, pentru identificarea dinamică a unei substructuri  $S_1$  (fig. 5.3) care urmează a fi cuplată cu alte substructuri ale mașinii, aceasta se fixează în zona ei de legătură  $Z_1$  de un suport fix  $S_2$ . Acest suport fix luat ca o substructură trebuie să fie rigid, în așa fel încît modurile sale să nu

interferențe cu ale substructurii testate.

Din experiențele efectuate se constată că în multe cazuri ale folosirii acestei cuplări se obțin rezultate necorespunzătoare.

Apar, la testare, moduri "parazite" care nu aparțin substructurii. Astfel, la testarea la vibrații a unor pachete de palete de turbină cu abur am întâlnit un asemenea caz, la care frecvențele proprii aparținând paletelor se interferează cu cele ale suportului fix  $S_2$ . Separarea lor a fost foarte greu de efectuat, astfel că, în cele din urmă, s-a renunțat la folosirea suportului fix, butucul B masiv (fig.5.4) pe

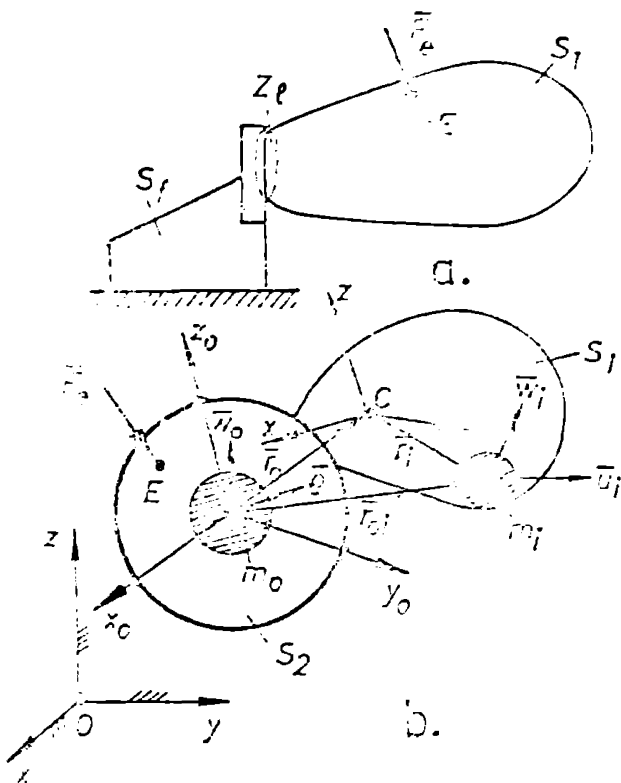


Fig.5.3

care erau fixate paletale suspendându-se prin elementele elastice  $E_2$ . S-a format astfel o structură izolată (free-free) formată din două substructuri; una rigidă (butucul B) și cealaltă elastică (pachetul de palete  $E_2$ ).

Modelul structurilor cuplate este cel din fig.5.3.b, unde substructura  $S_1$  este o substructură elastică, iar  $S_2$  o substructură considerată rigidă.

Pentru studiul mișcărilor vibraționale ale întregii structuri se aleg următoarele sisteme de axe:  $Oxyz$  fix;  $C_0x_0y_0z_0$ , legat de substructura rigidă  $S_2$ ,  $C_0$  fi-

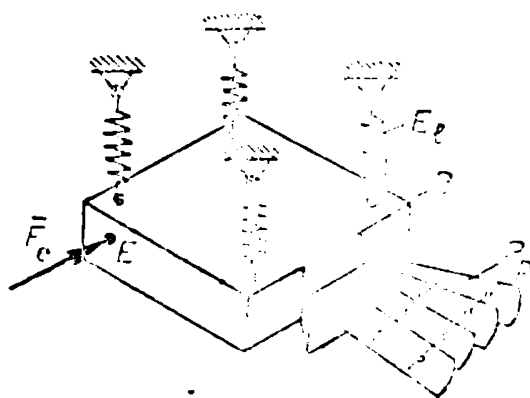


Fig.5.4

centrul masei substructurii;  $Cxyz$  legat de ansamblul  $S_1+S_2$  considerat nedeformat,  $C$  fiind centrul masei ansamblului. Sistemul  $Cxyz$  este paralel cu  $C_0x_0y_0z_0$ .

Se mai fac următoarele notații:  $\bar{W}_0$  - vectorul deplasării absolute a punctului  $C_0$  în care se consideră concentrată întreaga masă  $m_0$  a substructurii  $S_2$ ;  $\bar{W}_1$  - vectorul deplasării absolute a unui punct  $P_1$  în care se consideră concentrată masa redusă  $m_1$ ;  $\bar{\theta}$  - vectorul legii de rotație a substructurii rigide  $S_2$ ;  $\bar{F}_e$  - vectorul forței de excitație ce acționează în punctul E al substructurii;  $\bar{U}_1$  - vectorul de deformare în punctul  $P_1$  al substructurii  $S_1$ .

Vectorul  $\{W_1\}$  al deplasării absolute în punctul  $P_1$  are forma

$$\{W_1\} = \{W_0\} + [R_{01}] \{\theta\} + \{U_1\} \quad (5.72)$$

unde  $[R_{01}]$  este matricea de poziție a punctului  $P_1$  în raport cu  $C_0$ , iar  $\{U_1\}$  este vectorul de deformare în punctul  $P_1$ .

Echilibrul dinamic al corpului rigid va fi dat de sistemul

de ecuații

$$m_0 \{\ddot{W}_0\} - \{F_0\} = \{F_e\} \quad (5.73)$$

$$[J_0] \{\ddot{\theta}\} - \{M_0\} = [R_{0e}] \{F_e\}$$

unde  $\{F_0\}$  și  $\{M_0\}$  sînt rezultanta forțelor de legătură din zona de legătură  $Z_0$  și respectiv momentul lor resultant în raport cu  $C_0$ ,  $[R_{0e}]$  este matricea de poziție, a punctului E de aplicare a forței de excitație  $\bar{F}_e$ , în raport cu  $C_0$ .

Echilibrul dinamic al punctului  $P_1$  va fi dat de sistemul de ecuații diferențiale

$$-m_1 \{\ddot{W}_1\} + \sum_{j=1}^N [c_{1j}] \{\dot{W}_1\} + \sum_{j=1}^N [k_{1j}] \{W_1\} = \{0\} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (5.74)$$

Cele  $3N$  ecuații diferențiale (5.74) împreună cu cele șase ecuații (5.73) formează sistemul de ecuații diferențiale al mișcării întregii structuri. Deoarece este dificil de a se lucra cu forțe de legătură, cele șase ecuații diferențiale, (5.73), care completează ecuațiile dinamice ale întregii structuri, pot fi înlocuite prin ecuațiile

$$m_1 \{\ddot{W}_1\} + \sum_{j=1}^N m_1 \{\ddot{W}_1\} = \{F_{e1}\} \quad (5.75)$$

$$[J_0] \{\ddot{\theta}\} + m_0 [R_{0e}]^T \{\ddot{W}_1\} + \sum_{j=1}^N m_1 [R_{1j}]^T \{\ddot{W}_1\} = [J_0] \{F_e\} \quad (5.76)$$

care exprimă legea centrului C al masei întregii structuri ( $S_1 + S_2$ ) și teorema momentului cinetic în raport cu C.  $[R_1]$  și  $[R_0]$ ,  $[R_e]$  reprezintă matricile de poziție ale punctelor  $P_1$ ,  $C_0$  și E în raport cu C.

Deplasările absolute ale punctelor  $P_1$  și  $C_0$  se pot exprima prin relațiile

$$\{W_1\} = \{W\} + [R_1]\{\theta\} + \{U_1\} \quad (5.77)$$

$$\{W_0\} = \{W\} + [R_0]\{\theta\} \quad (5.78)$$

unde  $\{W\}$  este vectorul deplasării absolute a centrului masei C. Introducând relațiile (5.77) în (5.75) și (5.76) se obține

$$\begin{aligned} m \{\ddot{W}\} + \sum_{i=1}^N m_1 \{\ddot{U}_1\} &= \{F_e\} \\ [J]\{\ddot{\theta}\} + \sum_{i=1}^N m_1 [R_1]^T \{\ddot{U}_1\} &= [R_e]^T \{F_e\} \end{aligned} \quad (5.79)$$

unde  $m$  este masa totală a întregii structuri

$$m = m_0 + \sum_{i=1}^N m_1 \quad (5.80)$$

Iar  $[J]$  este matricea de inerție a întregii structuri în raport cu sistemul de axe Cxyz

$$[J] = [J_0] + m_0 [R_0]^T [R_0] + \sum_{i=1}^N m_1 [R_1]^T [R_1] \quad (5.81)$$

Vectorii  $\{W\}$  și  $\{\theta\}$  reprezintă legile de mișcare ale corpului rigid  $\{W\}$  fiind vectorul legii de mișcare a punctului C considerat că aparține corpului rigid, iar  $\{\theta\}$  este legea de rotație a aceluiași corp.

Inlocuind (5.77) în sistemul (5.74) sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea generală a întregii structuri are forma

$$\begin{aligned} [M_0] \begin{Bmatrix} \ddot{W} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [D_x]^T [M] \{\ddot{U}\} &= [S_x] \{F_e\} \\ [M] \{\ddot{U}\} + [M] [D_x] \begin{Bmatrix} \dot{W} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (5.82)$$

unde

$$\begin{aligned}
 [M_0] &= \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} & [M] &= \text{diag.}[m_i] \\
 [D_x] &= \begin{bmatrix} [I] & [R_1] \\ [I] & [R_2] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [R_N] \end{bmatrix} & [S_x] &= \begin{bmatrix} [I] \\ [R_0]^T \end{bmatrix} \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

Se poate elimina din (5.82) mișcarea de corp rigid dată de vectorul  $\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$ , obținându-se sistemul de ecuații diferențiale în deformații.

$$[M_1] \{\ddot{U}\} + [C_1] \{\dot{U}\} + [K_1] \{U\} = \{F_u\} \quad (5.84)$$

unde

$$\begin{aligned}
 |M_1| &= m([I] - [D_x][M_0]^{-1}[D_x]^T[M]) \\
 |C_1| &= m[M]^{-1}[C]; \quad [K_1] = m[M]^{-1}[K] \\
 \{F_u\} &= -m[D_x][M_0]^{-1}[S_x]\{F_e\} \quad (5.85)
 \end{aligned}$$

Sistemul (5.84) guvernează mișcarea unei structuri echivalente dinamic cu structura  $S_1+S_2$  care este o structură constrinsă, ale cărei mișcări de corp rigid sînt blocațe. Analizînd, din (5.85) expresia vectorului de excitație  $\{F_u\}$  al structurii echivalente reiese că toate elementele sale sînt diferite de zero, ceea ce corespunde unei excitații de tip multipunct. Acest fapt prezintă un avantaj deosebit deoarece la excitația de tip multipunct sînt excitate toate modurile naturale de vibrații ale structurii.

Dacă inerția substructurii rigide  $S_2$ , exprimată prin valorile elementelor matricii  $[M_0]$ , este mult mai mare decît cea a substructurii elastice  $S_1$ , exprimată prin valorile elementelor matricii  $[M]$ , atunci

$$[D_x][M_0]^{-1}[D_x]^T[M] \rightarrow [0] \quad (5.85)$$

In acest caz sistemul (5.84) devine



$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = [M] [D_x] [M_0]^{-1} [S_x] \{F_e\}, \quad (5.86)$$

sistem ce guvernează mișcarea dinamică a structurii reale  $S_1$ , considerată încastrată într-un suport fix și nedeformabil.

În cazul încercării pachetului de palete fixate într-un butuc rigid avînd masa de  $m_0 \approx 250$  kg, la o masă a paletelor de  $\approx 3$  kg, excitația aplicîndu-se într-un punct E (fig.5.4) de pe butuc, s-au putut determina cu ușurință pulsațiile proprii și forma modurilor naturale de vibrații, ale pachetului de palete.

### 5.2. Identificarea directă a modelului matematic al structurii

Așa cum s-a văzut la 5.1, pentru identificarea modelului matematic al structurii se estimează mai întîi parametrii modelului modal, identificarea propriu zisă, făcîndu-se pe baza relațiilor de ortonormalitate.

În continuare se va arăta că în anumite cazuri se poate face o identificare directă, fără estimarea în prealabil a parametrilor modali, dacă se cunoaște vectorul amplitudinilor complexe

$$\{X\} = \{X_r\} + j \{X_i\} \quad (5.87)$$

la o excitație armonică staționară dată de vectorul  $\{F(t)\} = \{F_0\} e^{j\omega t}$ . Sistemul algebric al amplitudinilor va fi

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{X_r\} - \omega [C] \{X_i\} = \{F_0\} \quad (5.88)$$

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{X_i\} + \omega [C] \{X_r\} = \{0\}$$

care are ca necunoscute elementele matricilor  $[M]$ ,  $[K]$  și  $[C]$ .

Cele trei matrici fiind pătrate ( $N \times N$ ) și simetrice au fiecare câte  $N \times (N+1)/2$  necunoscute, care pot fi puse sub forma unor vectori:  $\{m\}$ ,  $\{c\}$  și  $\{k\}$  ( $N \times (N+1)/2 \times 1$ ), unde de exemplu,  $\{m\}$  are forma

$$\{m\} = \{m_{11}, m_{22}, m_{33}, \dots, m_{NN}, m_{12}, m_{13}, \dots, m_{1N}, m_{23}, \dots, m_{3N}, \dots, m_{2N-1}\} \quad (5.89)$$

Dezvoltări similare se obțin și pentru  $\{C\}$  și  $\{K\}$ .

Cu aceste notații produsul matriceal  $[M] \{X_r\}$  poate fi pus sub forma:

$$[M] \{X_r\} = [D_r] \{m\} \quad (5.90)$$

unde  $[D_r]$  este o matrice dreptunghiulară  $(N \times (N \times (N+1)/2))$

$$[D_r] = \begin{bmatrix} x_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{r2} & x_{r3} & x_{r4} & \dots & x_{rN} & 0 \\ 0 & x_{r2} & 0 & 0 & c & & & & & & \\ 0 & 0 & x_{r3} & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{rN} & & & & & & \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} N+1 & & & & & 2N-1 & & & & & \frac{N(N+1)}{2} \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{matrix}$

Ea conține blocuri de submatrici diagonale. Prima  $(N \times N)$  se formează din elementele vectorului  $\{X_r\}$ . Celelalte scad dimensional cu o unitate una față de alta și au elementele diagonale egale între ele, prima diagonală  $x_{r1}$ , a doua diagonală  $x_{r2}$  ș.a.m.d. În partea superioară a fiecărui submatrici se introduc șirurile de elemente:  $x_{r2} \dots x_{rN}$ , pentru prima,  $x_{r3} \dots x_{rN}$  pentru a doua ș.a.m.d.

Procesul de formare al marrisicii  $[D_r]$  poate fi pus într-o subrutină "Mat-Dr" a programului de calcul care în limbaj BASIC este

```

10 SUB Mat-Dr(N,X(*),D(*))
20 DIM X(N,1),D(N,N*(N+1)/2)
30 FOR I=1 TO N
40 D(I,I)=X(I,1)
50 NEXT I
60 NI=N
70 J=1
80 FOR I=1 TO N-J
90 D(J+I,NI+I)=X(J,1)
100 D(J,NI+I)=X(J+I,1)
110 NEXT I
120 NI=NI+N-J
130 IF N-J=1 THEN 160
140 J=J+1
150 GO TO 80
160 SUBEND
    
```

Folosind în loc de elementele componentei reale  $\{x_r\}$  a vectorului de răspuns elementele componentei sale imaginare  $\{X_1\}$  se obține matricea  $[D_1]$ . Acum sistemul (5.89) poate fi pus sub forma

$$\begin{aligned} -\omega^2 [D_r] \{m\} - \omega [D_1] \{c\} + [D_r] \{k\} &= \{F_0\} \\ -\omega^2 [D_1] \{m\} + \omega [D_r] \{c\} + [D_1] \{k\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

care este un sistem de  $2N$  ecuații cu  $3 \times N(N+1)/2$  necunoscute.

Pentru rezolvarea sistemului se poate considera și aici un număr mare de regimuri staționare la pulsațiile  $\omega_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N_0$ ). Rezolvarea sistemului se poate face prin metoda celor mai mici pătrate pentru care sistemul (5.92) devine

$$\begin{aligned} [A_{11}] \{m\} + [A_{12}] \{C\} + [A_{13}] \{k\} &= \{F_1\} \\ [A_{21}] \{m\} + [A_{22}] \{C\} + [A_{23}] \{k\} &= \{F_2\} \\ [A_{31}] \{m\} + [A_{32}] \{C\} + [A_{33}] \{k\} &= \{F_3\} \end{aligned} \quad (5.93)$$

unde submatricile  $[A_{11}] \dots [A_{13}]$  ( $N(N+1)/2, N(N+1)/2$ ) au formele

$$\left\{ \begin{aligned} [A_{11}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s^4 ([D_r]{}^T [D_{rs}] + [D_{is}]{}^T [D_{is}]) \\ [A_{12}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s^3 ([D_{rs}]{}^T [D_{is}] - [D_{is}]{}^T [D_r]) \\ [A_{13}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s^2 ([D_{rs}]{}^T [D_{rs}] + [D_{is}]{}^T [D_{is}]) \\ [A_{21}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s^3 ([D_{is}]{}^T [D_{rs}] - [D_{rs}]{}^T [D_{is}]) = -[A_{12}] \\ [A_{22}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s^2 ([D_{rs}]{}^T [D_{rs}] + [D_{is}]{}^T [D_{is}]) = -[A_{13}] \\ [A_{23}] &= \sum_{s=1}^{N_0} -\omega_s ([D_{is}]{}^T [D_{rs}] - [D_{rs}]{}^T [D_{is}]) \\ [A_{31}] &= \sum_{s=1}^{N_0} -\omega_s^2 ([D_r]{}^T [D_r] + [D_{is}]{}^T [D_{is}]) = -[A_{13}] \\ [A_{32}] &= \sum_{s=1}^{N_0} \omega_s ([D_{rs}]{}^T [D_{is}] - [D_{is}]{}^T [D_{rs}]) = -[A_{23}] \\ [A_{33}] &= \sum_{s=1}^{N_0} ([D_{rs}]{}^T [D_{rs}] + [D_{is}]{}^T [D_{is}]) \\ \{F_1\} &= \sum_{s=1}^{N_0} -\omega_s^2 [D_r]{}^T \{F_0\}; \\ \{F_2\} &= \sum_{s=1}^{N_0} -\omega_s [D_{is}]{}^T \{F_0\} \\ \{F_3\} &= \sum_{s=1}^{N_0} [D_{rs}]{}^T \{F_0\} \end{aligned} \right. \quad (5.94)$$

Dacă matricea de inerție  $[M]$  se cunoaște aproximativ, prin calcul, după desenele structurii, ea avînd forma  $[M_0]$ , atunci se va rezolva sistemul (5.93)

$$[A_{11}]\{D_m\} + [A_{12}]\{c\} + [A_{13}]\{k\} = \{F_1\} - [A_{11}]\{m_0\} \quad (5.95)$$

$$[A_{21}]\{D_m\} + [A_{22}]\{c\} + [A_{23}]\{k\} = \{F_2\} - [A_{21}]\{m_0\}$$

$$[A_{31}]\{D_m\} + [A_{32}]\{c\} + [A_{33}]\{k\} = \{F_3\} - [A_{31}]\{m_0\}$$

unde  $\{D_m\}$  este vectorul de corecție al vectorului de inerție  $\{m\}$

$$\{m\} = \{m_0\} + \{D_m\} \quad (5.96)$$

La fel se pot aplica corecții la vectorii  $\{c\}$  și  $\{k\}$ . Ciclul de calcul poate și aici intra într-un proces iterativ.

Metoda s-a implementat într-un program de calcul "DR-IDE". Folosind acest program s-a simulat pe calculator identificarea unei structuri a cărei model vibrant este cel din figura 5.5.

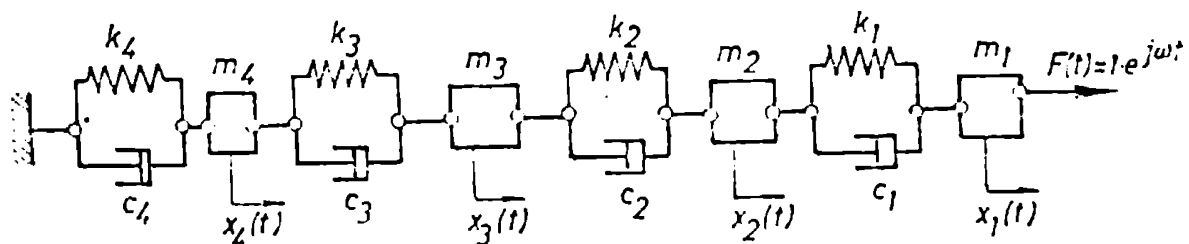


Fig.5.5.

S-au luat pentru calcul următoarele valori:  $m_1 = 0,3$ ;  $m_2 = 0,5$ ;  $m_3 = m_4 = 1$ ;  $c_1 = c_2 = 0,01$ ,  $c_3 = c_4 = 0,02$ ;  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$  care dau matricile:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se consideră că sistemul vibrant este excitat cu o forță armonică  $F(t) = 1 \cdot e^{j\omega t}$  aplicată asupra masei 1, deci o excitație într-un singur punct avînd vectorul amplitudine  $F_0 = \{1, 0, 0, 0\}^T$ . Din sistemul de ecuații (5.88) al amplitudinilor s-au determinat pentru un număr  $N_0$  mare de valori  $\omega_s$  ale pulsației de excitație perechi de vectori  $\{X_{rs}\}$  și  $\{X_{1s}\}$  ( $s = 1, 2, \dots, N_0$ ). Cele  $N_0$  valori ale pulsației  $\omega$  s-au ales în jurul celor patru pseudopulsații  $p_1 = 0,46809$ ;  $p_2 = 1,2359$ ;  $p_3 = 1,7420$ ;  $p_4 = 2,5554$ , pentru ca fiecare mod natural de vibrații al sistemului vibrant să contribuie valoric la vectorii  $\{X_{rs}\}$  și  $\{X_{1s}\}$ .

Matricea sistemului algebric (5.95) devine rău condiționată în cazul în care s-a omis excitarea structurii în apropierea vreunui mod natural de vibrații.

Aplicînd metoda directă, propusă aici, cele trei matrici  $[M]$ ,  $[C]$  și  $[K]$  au valoric formele

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,72E-21 & 4,11E-20 & 4,29E-12 & -1,59E-19 \\ 4,11E-20 & 5,32E-21 & 3,21E-05 & -2,92E-12 \\ 4,29E-12 & 3,21E-05 & 1,22E+22 & 8,12E-05 \\ -1,59E-19 & -2,92E-12 & 8,12E-05 & 1,22E+22 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1,22E-22 & -1,22E-22 & 2,12E-22 & 1,59E-12 \\ -1,22E-22 & 2,22E-22 & -1,22E-22 & -1,91E-12 \\ 2,12E-22 & -1,22E-22 & 3,22E-22 & -2,22E-22 \\ 1,59E-12 & -1,91E-12 & -2,22E-22 & 4,22E-22 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,22E+22 & -1,22E+22 & -5,22E-22 & -4,53E-22 \\ -1,22E+22 & 2,22E+22 & -1,22E+22 & -3,92E-22 \\ -5,22E-22 & -1,22E+22 & 2,22E+22 & -1,22E+22 \\ -4,53E-22 & -3,92E-22 & -1,22E+22 & 2,22E+22 \end{bmatrix}$$

care practic, sînt identice cu cele teoretice.

În realitate, prin testări experimentale, componentele vectorilor  $\{X_{rs}\}$  și  $\{X_{1s}\}$  sînt afectate de zgomote introduse prin semnalele de măsură. S-a simulat zgomotul de semnal prin introducerea unui zgomot adițional aleator de  $\pm 1\%$  (randomizarea semnalului). În acest caz cele trei matrici au valoric formele

$$[D] = \begin{bmatrix} 2.94E-21 & 4.15E-23 & -3.35E-23 & 2.25E-23 \\ 4.15E-23 & 4.97E-21 & 3.15E-23 & -3.34E-24 \\ -3.35E-23 & 3.15E-23 & 9.92E-21 & -3.47E-22 \\ 2.25E-23 & -3.34E-24 & -3.47E-22 & 9.92E-21 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1.07E-22 & -1.21E-22 & 1.71E-24 & 2.15E-24 \\ -1.21E-22 & 1.92E-22 & -1.51E-22 & 3.91E-24 \\ 1.71E-24 & -1.21E-22 & 2.24E-22 & -1.51E-22 \\ 2.15E-24 & 3.91E-24 & -1.51E-22 & 4.22E-22 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 9.73E-21 & -9.51E-21 & -1.97E-22 & 7.25E-23 \\ -9.51E-21 & 1.97E-22 & -9.51E-21 & -4.33E-23 \\ -1.97E-22 & -9.51E-21 & 1.97E-22 & -3.99E-21 \\ 7.25E-23 & -4.33E-23 & -9.51E-21 & 1.97E-22 \end{bmatrix}$$

Valoric elementele celor trei matrici diferă față de cele teoretice, sub 10%. Cu ajutorul acestor forme inițiale se poate trece în continuare la un proces de calcul iterativ, pentru îmbunătățirea preciziei identificării sistemului vibran.

Evitarea inversării matricii sistemului (5.93), care în cazul unui ordin mare al matricii duce la problema matricii rău condiționată, deci la erori mari, se poate face rezolvând sistemul prin metodele regresiei secvențiale [58], sau prin metoda matricii pseudoinverse.

Din înregistrările și analizele semnalelor de vibrații pe care le-am efectuat asupra a numeroase tipuri de mașini și utilaje am constatat că în multe cazuri porțiunea din spectrul semnalelor care prezintă interes, - în sensul diminuării nivelelor de vibrații - este de bandă îngustă. Deci pentru a lua măsuri de diminuare a vibrațiilor, identificarea dinamică a structurii ar trebui făcută în așa fel în cât această porțiune din spectru să fie mai bine modelată matematic.

Dar în banda de interes se află în general doar câteva moduri naturale de vibrații pentru care ordinul modelului matematic este mic. Extinderea ordinului de mărime al modelului matematic, (ordinul matricilor  $[M]$ ,  $[C]$  și  $[K]$ ), necesită investigații suplimentare în afara domeniului de interes, unde apar și alte moduri naturale de vibrații. Mărind ordinul de mărime al modelului matematic, se ajunge la problema inversării matricilor rău condiționate

Testarea structurii după modurile naturale superioare poate duce uneori la complicații în alegerea coordonatelor modelului matematic. Această este cazul în care structura schimbă esențial formele modurilor naturale de vibrații, de la o anumită frecvență în sus. Astfel, o paletă de agregat de vânt sau o aripă de avion sînt structuri complexe ce se compun din schelet de rezistență îmbrăcate cu învelitoare subțiri. Mișcările vibratorii după primele moduri naturale de vibrații sînt de tip bară, pentru care secțiunile transversale rămîn nedeformate, mișcările lor fiind plan paralele. În acest caz mișcarea plană a două puncte definesc mișcarea secțiunii. La modurile de vibrații avînd frecvențe mai înalte secțiunile transversale se deformează, definirea mișcărilor secțiunilor complicîndu-se. Deci, mărind numărul modurilor naturale de vibrații testate, în scopul obținerii unui sistem de ecuații diferențiale de ordin superior, duce la greutate în alegerea coordonatelor care descriu cel mai bine mișcarea vibratorie a structurii.

Pentru a elimina inconvenientele arătate mai sus, în scopul identificării dinamice a structurii într-o bandă îngustă de frecvență care cuprinde doar cîteva moduri, se poate aplica, dacă este posibil, o modificare a structurii, prin adăugarea unor mase sau rigidități suplimentare.

O adăugare de mase suplimentare este cea mai accesibilă. Sistemul de ecuații diferențiale care descrie mișcarea structurii modificate fiind

$$([M] + [\Delta M])\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (5.97)$$

$[\Delta M]$  este matricea de inerție a maselor aditionale.

Sistemul de ecuații al amplitudinilor pentru un regim staționar de vibrații armonice la pulsația  $\omega$  are forma

$$-\omega^2 [D_{ar}]\{m\} - \omega [D_{ai}]\{c\} + [D_{ar}]\{k\} = \{F_0\} + \omega^2 [\Delta M]\{x_{ar}\} \quad (5.98)$$

$$-\omega^2 [D_{ai}]\{m\} + \omega [D_{ar}]\{c\} + [D_{ai}]\{k\} = \omega^2 [\Delta M]\{x_{ai}\}$$

unde matricile  $[D_{ar}]$  și  $[D_{ai}]$  se formează din elementele vectorilor

$\{X_{ar}\}$  și  $\{X_{ai}\}$ , măsurate în timpul vibrației structurii modificate. Se obțin astfel un sistem de  $N_a$  ecuații lineare suplimentare, care împreună cu (5.93), se rezolvă prin metoda celor mai mici pătrate, (5.94), unde vectorii  $\{F_1\}$ ,  $\{F_2\}$  și  $\{F_3\}$  au formele

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= \sum_{s=1}^{N_2+N_1} \frac{N_2+N_1}{s} \omega_s^2 \left( [D_{rs}]^T \{F_{rs}\} + [D_{is}]^T \{F_{is}\} \right) \\ \{F_2\} &= \sum_{s=1}^{N_2+N_1} \omega_s^2 \left( - [D_{is}]^T \{F_{rs}\} + [D_{rs}]^T \{F_{is}\} \right) \\ \{F_3\} &= \sum_{s=1}^{N_2+N_1} \frac{N_2+N_1}{s} \left( [D_{rs}]^T \{F_{rs}\} + [D_{is}]^T \{F_{is}\} \right) \end{aligned} \quad (5.99)$$

unde

$$\begin{aligned} \{F_{rs}\} &= \{F_0\} + \omega_s^2 [AX] \{X_{rs}\} && \text{pentru } s = 1, 2, \dots, N_0 \\ \{F_{is}\} &= \omega_s^2 [AX] \{X_{is}\} && [AX] = 0 \end{aligned} \quad (5.100)$$

Pentru identificarea sistemului (5.93) s-a realizat programul "INC-ID". Luând caobiect sistem vibrant (fig.5.3) s-a simulat un test de vibrații cu o masă adițională  $\Delta m_1 = 0,1$  atașată primei mase  $m_1 = 0,3$ . Se consideră că banda de frecvență a testului cuprinde numai primele trei moduri naturale de vibrații, pentru care se obțin, prin programul "INC-ID", matricile  $[K]$ ,  $[C]$  și  $[M]$

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} 3,28E-01 & 0,00E+00 & -1,00E-01 & 0,00E+00 \\ 0,00E+00 & 4,00E-01 & 0,00E+00 & -1,00E-02 \\ -1,00E-01 & 0,00E+00 & 1,00E-01 & 1,00E-02 \\ 0,00E+00 & -1,00E-02 & 1,00E-01 & 8,99E-01 \end{bmatrix} && [C] = \begin{bmatrix} 0,00E+00 & -0,00E+00 & -1,00E-02 & 0,00E+00 \\ -0,00E+00 & 1,40E-02 & -0,00E+00 & -1,00E-02 \\ -1,00E-02 & -0,00E+00 & 2,00E-02 & -1,00E-02 \\ 0,00E+00 & -1,00E-02 & -1,00E-02 & 1,00E-02 \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} 0,00E+00 & 0,00E+00 & -1,00E+00 & 0,00E+00 \\ -1,00E+00 & 1,50E+00 & 0,00E+00 & -0,00E+00 \\ -1,00E+00 & 0,00E+00 & 1,00E+00 & 0,00E+00 \\ 0,00E+00 & -0,00E+00 & 0,00E+00 & 1,00E+00 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

considerându-se un nivel de zgomot de 0,5%, rezultatele fiind acceptabile pentru orice iterație.



## 6. SISTEME DE EXCITARE LA VIBRAȚII ȘI PRELUCRAREA SEMNALELOR

În capitolele anterioare s-au pus bazele teoretice ale răspunsului unei structuri la o excitație dată, în vederea amplificării sale dinamice. În capitolul de față se prezintă metodele experimentale de aplicare a excitației și sistemele de măsurare și prelucrare ale semnalelor de răspuns ale structurii.

### 6.1. Sisteme de excitație

#### 6.1.1. Excitație cu vibrațoare electrodinamice

Factorii importanți în reușita unui test experimental de vibrații sînt: sistemul de excitație și modul de aplicare a excitației pe structură.

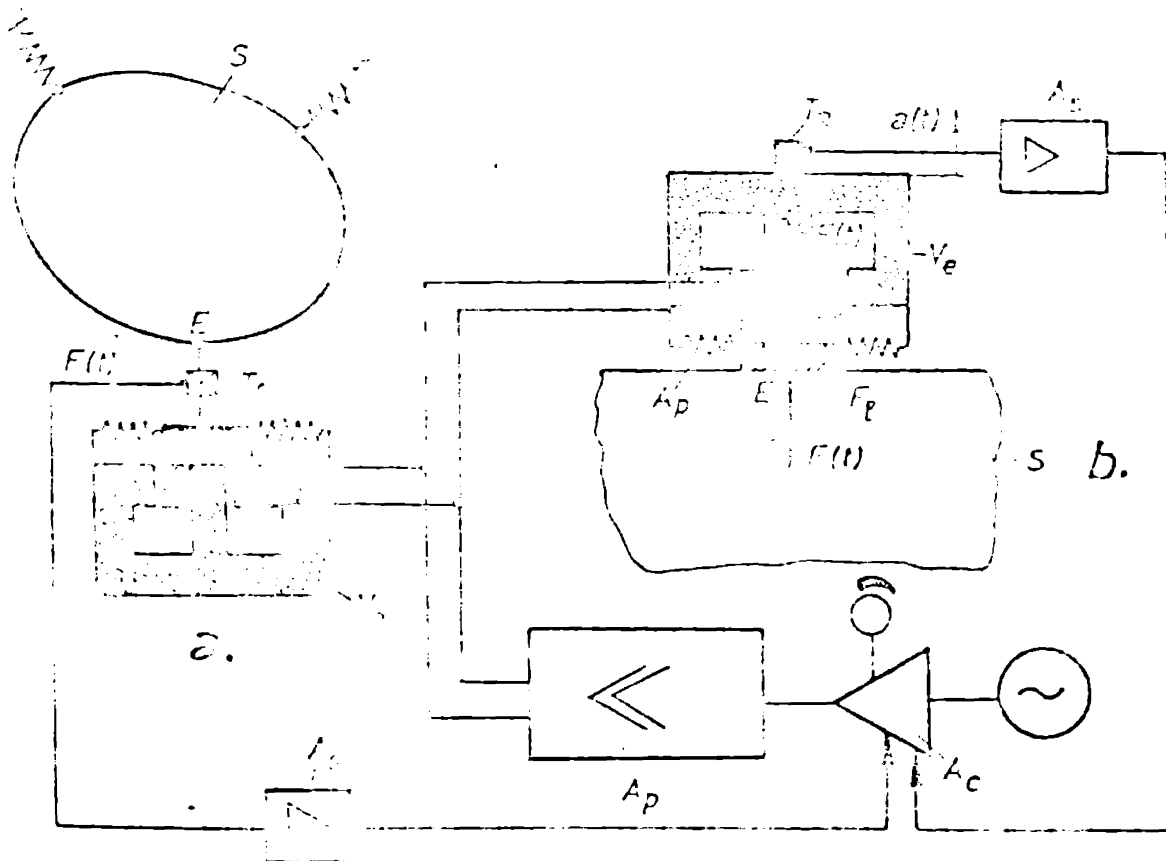


Fig. 6.1

Unul din sistemele de excitație foarte mult folosite este sistemul de excitație cu vibrațoare electrodinamice (fig. 6.1).

Excitația se poate aplica direct structurii S (fig.6.1.a) prin intermediul unui traductor de forță  $T_f$  al cărui semnal de ieșire este proporțional cu forța de excitație  $F(t)$ . Vibratorul electrodinamic este alimentat de la amplificatorul de putere  $A_p$  comandat de generatorul de frecvență  $G_f$ . Generatorul de frecvență destinat testărilor la vibrații este echipat cu un circuit de amplificarea controlată  $A_c$ , numit circuit compresor, care are rolul de a regla semnalul de intrare în amplificatorul de putere  $A_p$ , în așa fel încît amplitudinea forței de excitație  $F(t)$  rămîne constantă, în mod constant, pe toată durata testului de vibrații.

În unele cazuri nu este posibilă transmiterea forței la structură prin traductor, cînd forța perturbatoare se transmite vertical de exemplu, iar structura este un planșeu elastic. În acest caz, flanșa F (fig.6.1.b) a bobinei mobile a vibratorului electrodinamic se prinde, prin adeziv, de structură în punctul E de excitație. Forța perturbatoare  $F(t)$ , ce acționează asupra structurii, este o forță interioară a sistemului structură-vibrator și are expresia

$$F(t) = -ma(t), \quad (6.1)$$

unde  $m$  este masa corpului vibratorului, iar  $a(t)$  este legea accelerației absolute a mișcării corpului vibrator. Cu semnalul de accelerație  $a(t)$ , luat de la un traductor seismic de accelerație  $T_a$ , montat pe corpul vibratorului, semnal ce este în opoziție de fază cu forța perturbatoare, se poate menține constantă amplitudinea accelerației  $a(t)$ , prin folosirea circuitului compresor. Semnalul traductorului de accelerație este amplificat în prealabil prin amplificatorul de sarcină  $A_s$ .

Sistemul de excitație cu vibrator electrodinamic prezintă marele avantaj că parametrii excitației; frecvența și amplitudinea semnalului pot fi reglați cu ușurință pe cale electronică. De asemenea se pot obține semnale de excitație complexe, cum ar fi semnalele de excitație aleatoare de bandă largă, care prezintă avantajul excitării simultane a tuturor modurilor naturale de vibrații. Pentru semnalele de excitație de tip zgomot alb sau roz forma spectrului este teoretic plată, de amplitudine constantă pe tot domeniu de frecvență. Practic alura plată a spectrului semnalului de excitație se păstrează numai pînă la intrarea în vibratorul electrodinamic, deoarece funcția de transfer a bobinei mobile a

vibratorului modifică spectrul semnalului de excitație, măsurabil prin traductorul de forță. De asemenea interacțiunea dinamică vibrator-structură favorizează distorsionarea spectrului de excitație.

Unul din dezavantajele majore ale sistemului de excitație cu vibratoare electrodinamice se datorează puterii limitate a vibratorului. Există cazuri când pentru excitarea unor moduri naturale puternice ale structurii este necesar un consum de energie care depășește capacitatea amplificatorului de putere. Răspunsul  $x(t)$  al structurii în punctul de excitație, la o forță armonică  $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$  a cărei pulsație este în vecinătatea unui mod natural de vibrații având pseudopulsatia  $p_r$ , este dat de expresia

$$x(t) = \frac{U_r + jV_r}{\sigma_r + j(\omega - p_r)} F_0 e^{j\omega t} \quad (6.2)$$

Puterea medie absorbită de structură va fi

$$P_m = \pi \frac{F_0^2 (V_r \sigma_r - U_r (\omega - p_r))}{\sigma_r^2 + (\omega - p_r)^2} \quad (6.3)$$

valoarea sa maximă fiind

$$P_{max} = \frac{\pi F_0^2 V_r}{\sigma_r^2} \quad (6.4)$$

la un regim armonic pentru care  $\omega = p_r$ . Pentru structuri cu amortizare slabă, ( $\sigma_r$  mic), se depășește uneori posibilitățile amplificatorului de putere, care va lucra astfel într-o clasă cu efecte nelineare, ce produc distorsiuni de semnal.

Folosind metoda de estimare a parametrilor modali prezentată la 4.1.1, se poate evita depășirea unei anumite valori a puterii absorbite  $P_m$ , deoarece cele trei regiuni de vibrație necesare să fie investigate se pot lua la pulsații  $\omega$  depărtate de  $p_r$ .

În cazul în care se folosește un semnal de excitație aleator de bandă largă autospectrul de excitație nu va mai fi plat, amplitudinea  $F_0$  variind în spectru, în apropierea pseudopulsatiei  $p_r$  scăzând foarte mult (fig.6.2, curba  $F_0$ ), astfel că din spectrul de răspuns (curba  $S_0$ , aproape nu este sesizat vârful de rezonanță

corespunzător modulului  $r$ . Dacă autospectrul de excitație ar fi plat, atunci spectrul de răspuns ar trebui să fie asemănător cu al funcției de transfer  $H(\omega)$ , (curba  $H$ ). În acest caz  $H(\omega)$  este afectată de eroare și de aceea este necesară, după cum se va vedea, evaluarea funcției de coerență.

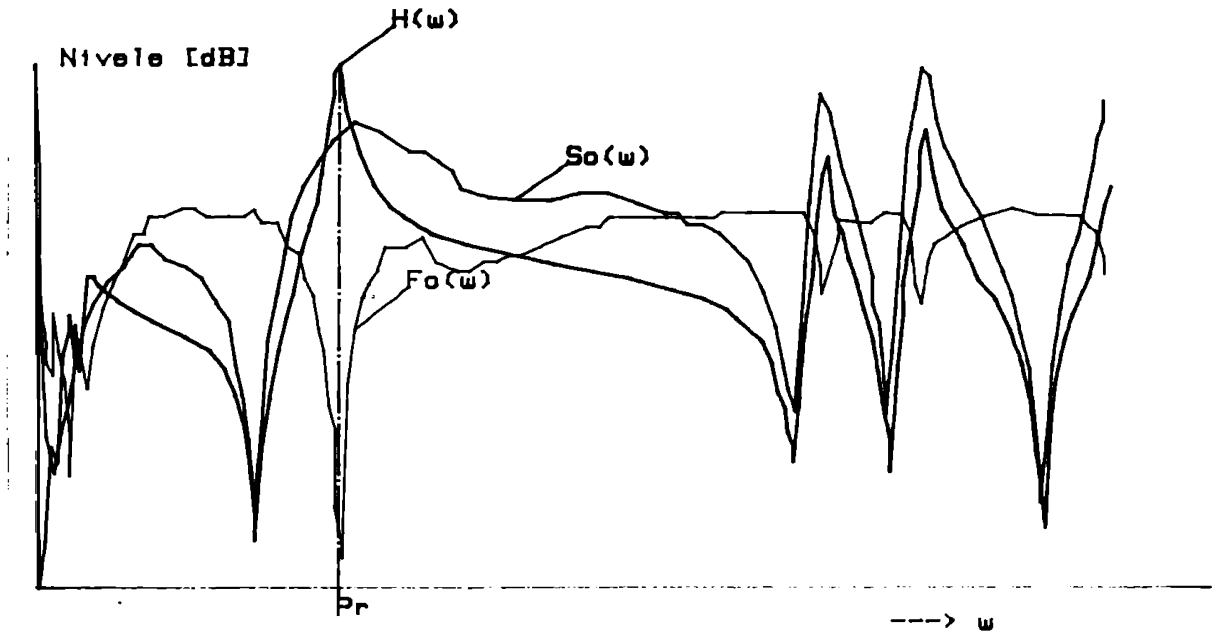


Fig.6.2

### 6.1.2. Excitație cu vibratoare hidraulice

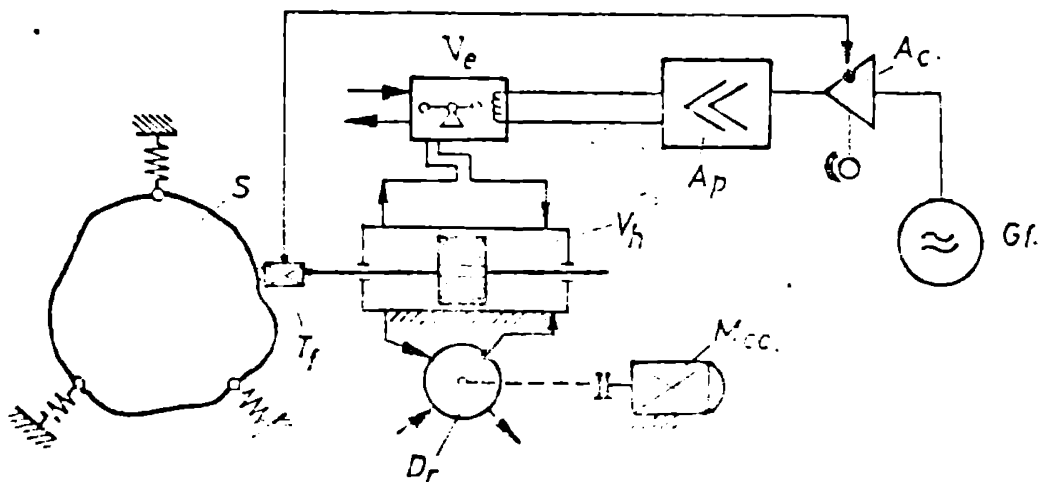


Fig.6.3

Excitația cu vibratoare hidraulice permite realizarea unor forțe perturbatoare de nivele mari la dimensiuni mici ale vibratorului hidraulic  $V_h$  (fig.6.3). Comanda distribuției uleiului sub presiune pe cele două fețe ale pistonului hidraulic, în scopul

realizării forței de excitație se face cu valvă electrodinamică  $V_e$  comandată la fel ca vibratorul electrodinamic. Deci se reglează electronic nivelul forței de excitație și frecvența ei. Tot aici se folosesc distribuitoare rotative  $D_r$  acționate de motoare de curent continuu cu frecvență variabilă.

Vibratoarele hidraulice prezintă dezavantajul obținerii unor frecvențe de excitație mici datorită efectului de filtrare a frecvențelor înalte, prin pierderile de presiune cauzate de rezistențele hidraulice ale conductelor de legătură.

Pentru testare la vibrații a mașinilor unelte am realizat un vibrator hidraulic cu distribuitor rotativ care permite realizarea unor frecvențe înalte (până la 1000 Hz) a cărui construcție nu o prezint aici, vibratorul fiind brevetabil.

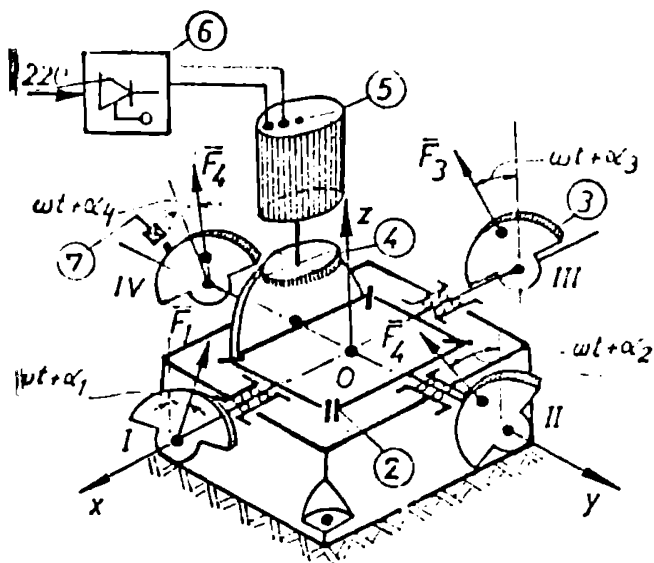


Fig. 6.4

se excentrice pe care l-am proiectat și realizat în scopul testării la vibrații a structurilor. Se compune din: o carcasă 1 în interiorul căreia este montat grupul de roți dințate conice 2 prin care se transmite mișcarea la patru axe I-IV, pe care se montează patru mase excentrice 3. Acționarea vibratorului se face prin grupul de roți dințate conice 4, cu ajutorul motorului 5 de curent continuu. Turația motorului se reglează de la blocul de comandă cu tiristoare 6. Prin amplasarea relativă a celor patru mase excentrice, la pozițiile unghiulare  $\alpha_1 - \alpha_4$ , se obțin un număr mare de variante de torsoare de reducere a forțelor de inerție centrifugale  $\bar{F}_1 - \bar{F}_4$ .

6.1.3. Excitație cu vibratoare inerțiale cu mase excentrice

Posibilitățile actuale de reglare electronică a turației motoarelor de curent continuu a dus la reactualizarea vibratorilor inerțiale cu mase excentrice.

În figura 6.4 se prezintă schema cinematică a unui vibrator inerțial cu patru mase

Momentele statice ale excentricelor se pot regla cu ușurință prin alegerea numărului de plăci care formează masele excentrice 3. Ele pot fi montate cu ușurință la vibrator, deoarece se atașează pe axe în exteriorul carcasei. Se poate realiza un moment static maxim pe fiecare axă a excentricului de  $0,32 \text{ kg m}$ , ceea ce corespunde la o forță perturbatoare a vibratorului  $F_0 = M\omega^2$  de 200 daN pentru frecvența de 20 Hz. Vibratorul (fig.6.5) are o greutate redusă, carcasa fiind din aluminiu turnat, ceea ce-l face utilizabil la testările structurilor în condiții de teren.

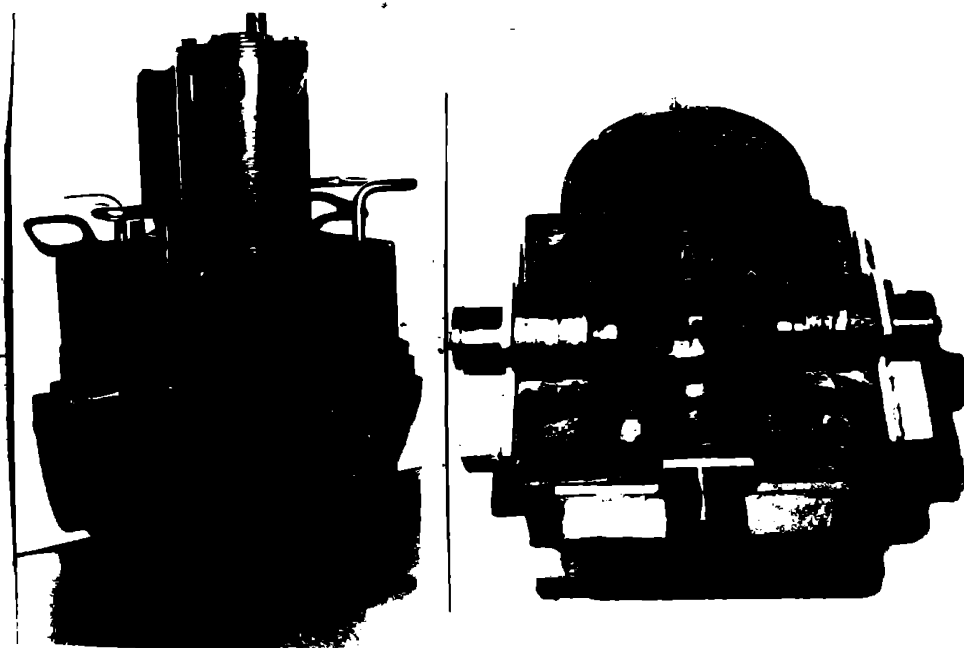


Fig.6.5

Stabilitatea regimului de lucru al vibratorului la o anumită frecvență se face printr-o buclă de reacție de turație. În acest sens este prevăzut traductorul inductiv fără contact 7 (fig.6.4) de la care se obțin impulsuri perio-

dice ale căror perioadă este egală cu cea de rotație a axelor excentricelor. Stabilitatea turației este așa de bună încât se poate menține un regim de fază constantă între răspunsul structurii și forța perturbatoare.

#### 6.1.4. Sisteme de excitație tranzitorii

Odată cu dezvoltarea echipamentelor de prelucrare digitală și a calculatoarelor numerice se folosesc din ce în ce mai mult tehnicile tranzitorii de testare la vibrații a structurilor.

Mecanismele care realizează această excitație trebuie să dea un spectru larg al răspunsului structurii în care să fie prezent răspunsul tuturor modurilor naturale din domeniul de frecvență considerat.

Cel mai des folosit este ciocanul de impact (fig.6.6.a) care este prevăzut cu un traductor de forță 1, ce dă la ieșire un semnal proporțional cu legea de variație a forței de contact  $F(t)$  dintre ciocan și structură.

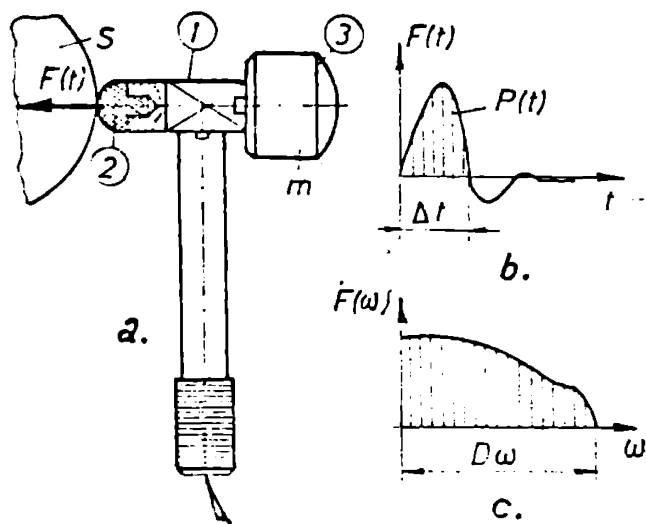


Fig.6.6

Lățimea de bandă  $D\omega$  a spectrului  $F(\omega)$  obținut (fig. 6.6.c) prin aplicarea transformatei Fourier asupra semnalului forței de impact este invers proporțional cu timpul de contact  $\Delta t$  (fig.6.6.b). Reglarea timpului de contact  $\Delta t$  se face cu ajutorul unor capete de contact 2, (fig.6.6.a) interschimbabile de durități diferite. Pentru capete moi de cauciuc  $\Delta t$  este mare, iar  $D\omega$  mic favorizând excitarea

modurilor de joasă frecvență. Pentru materiale tari sînt favorizate modurile înalte. Cu masa 3 interschimbabilă se poate regla nivelul forței  $F(t)$ . Intrucît aplicarea forței impulsive se face manual, condițiile de repetabilitate ale impactului depind de îndemnarea operatorului. Pot apare percuții laterale care nu sînt preluate de traductorul de forță, dar introduc energie suplimentară în structură.

În cazul structurilor de dimensiuni mari, răspunsul într-un punct oarecare al structurii va fi întârziat datorită efectului de undă și de aceea sînt necesare corecții ale spectrului de răspuns. Energia impulsului fiind limitată sînt excitate în multe cazuri numai modurile naturale de vibrații locale ale structurii.

Pentru excitarea structurilor de dimensiuni foarte mari: platforme marine, macarale gigant, utilaje miniere de suprafață, turnuri, coșuri de fum, se apelează la excitația treaptă, prin aplicarea unor sarcini statice, de obicei prin cabluri tensionate, care se eliberează brusc, prin tăiere. Metoda favorizează excitarea modurilor de joasă frecvență care în cazul acestor structuri este necesar a fi investigate.





Un frecvențmetru  $F_r$  [27], conținând la ieșire un circuit monostabil a cărui semnal are forma (fig.6.8), a unui semnal rectangular, periodic cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  și lățimea  $T_0$  constantă a frontului pozitiv, Componenta  $U_e^0$  continuă de la ieșirea frecvențmetrului fiind proporțională cu frecvență  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$U_e^0 = U_e T_0 f ; \quad (6.5)$$

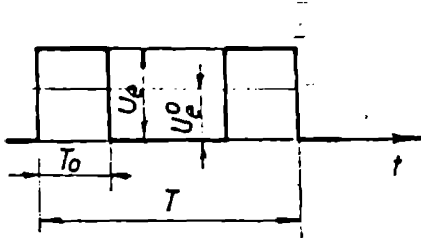


Fig.6.8

Un filtru trece joasă  $F_{t11}$  elimină componentele armonice ale semnalului  $U_e$  de ieșire, iar cu ajutorul instrumentului  $I_{fr}$  se poate măsura frecvența  $f$ , sau ea poate fi înregistrată pe canalul X al înregistratorului  $I_c$ ;

Un amplificator de măsură  $A_m$  preia semnalul traductorului de vibrații  $T_v$ , îl amplifică și îl măsoară la instrumentul  $I_v$ ;

Un semnal de curent continuu, proporțional cu amplitudinea vibrațiilor în punctul P, este disponibil la ieșirea amplificatorului  $A_m$  pentru înregistrarea pe canalul Y al înregistratorului  $I_c$ , simultan cu semnalul de frecvență  $U_e^0$ , obținându-se astfel, în mod automat, caracteristica amplitudine-frecvență;

Un fazmetru, care poate fi un bloc comparator  $B_c$ , compară semnalul de vibrație cu cel al forței perturbatoare dînd la ieșirea lui un semnal de curent continuu  $U_\varphi$  proporțional cu faza  $\varphi$  dintre cele două semnale. Acest semnal poate fi înregistrat pe canalul Y al înregistratorului  $I_c$ , împreună cu semnalul  $U_e^0$  de frecvență, obținându-se caracteristica faza-frecvență. Cele două caracteristici se pot trasa acum diagramele polare în jurul modurilor naturale de vibrații, iar cu ajutorul algoritmilor din capitolul 4 parametrii modali pot fi estimați.

Ca traductor  $T_f$  de măsurare a forței, pentru testări la structuri cu moduri de frecvență înaltă (1000 - 5000 Hz) se recomandă traductorul de construcție piezoelectrică. Pentru ca lanțul de măsură să nu introducă defazaaje între semnale se recomandă folosirea aceluiași tip constructiv pentru cele două amplificatoare  $A_s$  și  $A_m$  (de exemplu 2635 Brüel & Kjaer).

În cazul în care se testează structuri cu moduri naturale de joasă și foarte joasă frecvență, traductorii piezoelectrici nu mai corespund și de aceea la aceste frecvențe se recomandă folosirea

traductorilor seismici cu traductori electrorezistivi (TER). În lucrarea [28] am prezentat algoritmi de proiectare a traductorului de accelerație cu T.E.R.-uri de tip semiconductori. În locul instrumentelor analogice de indicare,  $I_{FR}$ ,  $I_f$  și  $I_v$  se pot folosi instrumente cu afisaj numeric avînd o precizie mai bună.

Blocurile  $F_r$ ,  $B_c$  și  $F_{tj1}$ , pot fi aparate de sine stătătoare sau montaje electronice cu circuite integrate de uz general. Pe căile celor două semnale: de forță și vibrație, se pot introduce filtre de bandă în scopul eliminării eventualelor zgomote nedorite.

Pe cale analogică se pot obține în mod direct diagramele polare de răspuns ale structurii, folosind următorul lanț de măsură:

Un bloc formator  $F_o$  primește semnalul de turație de la traductorul inductiv  $T_1$  sau de la traductorul de forță  $T_f$ , semnal ce este periodic cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . La ieșirea blocului se obține două semnale armonice de amplitudine constantă,  $U_a \cos \omega t$  în fază cu excitația, iar celălalt  $U_a \sin \omega t$  în quadratură.

Multiplicatoarele  $M_{t1}$  și  $M_{t2}$  multiplică cele două semnale cu semnalul de vibrații  $U_v(t) = U_o \cos(\omega t - \varphi)$ , unde  $\varphi$  este defazajul semnalului de vibrații, obținîndu-se două semnale  $U_1$  și  $U_2$  ce sînt trecute prin două filtre trece jos,  $F_{tj2}$  care au banda de trecere în apropierea frecvenței zero. La ieșirea lor se obțin două componente

$$R_e = \frac{U_a \cdot U_o}{2} \cos \varphi \quad ; \quad I_m = \frac{U_a \cdot U_o}{2} \sin \varphi \quad , \quad (6.6)$$

cu ajutorul cărora se pot trasa direct diagramele polare.

Fiind comandat de semnalul de excitație al forței, acest circuit devine astfel un filtru trasor.

Acest bloc trasor se poate realiza pe un calculator analogic sau cu ajutorul circuitelor integrate neliniare existente la ora această.

### 6.2.2. Sisteme digitale

Sistemele analogice de prelucrare a semnalelor se limitează la cele periodice la care se pot defini și măsura: amplitudini, faze și frecvențe. În cazul testării structurilor cu excitații de

tip tranzitoriu sau aleatorii este necesară calcularea unor funcții care definesc semnalele de intrare și ieșire din structură: transformata Fourier directă și inversă, funcțiile de corelație și spectrale care pe cale analogică sînt extrem de greu de obținut, deoarece necesită elemente de memorare și calcul, care nu pot fi realizate decît prin circuite digitale.

Organizarea unui sistem de achiziție a datelor, pe care l-am realizat în cadrul laboratorului de cercetare pentru vibrații mecanice al Institutului politehnic "Traian Vuia" Timișoara, este prezentat în figura 6.9.

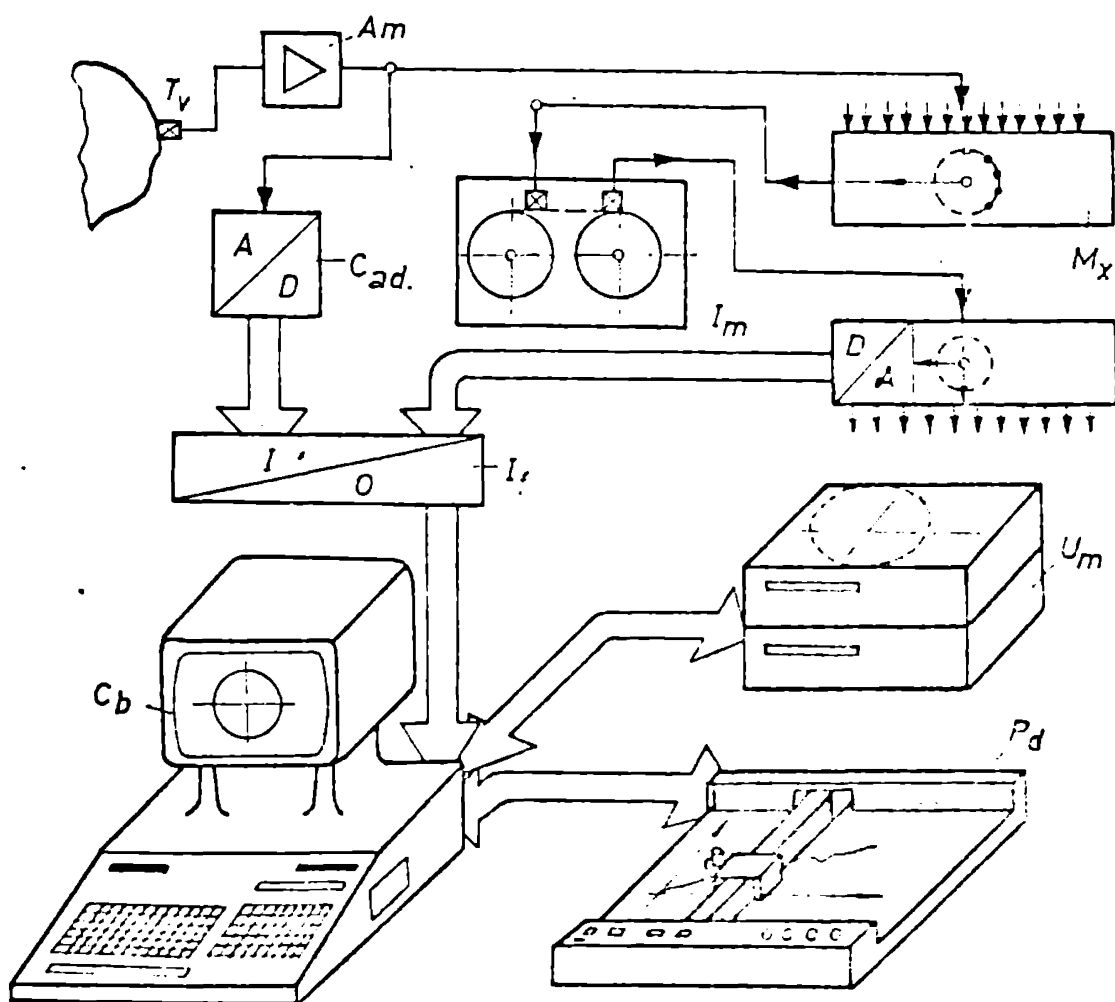


Fig.6.9

Unitatea de bază a sistemului de achiziționare a datelor este un minicalculator de birou  $C_b$  (tip 9845T Hewlett Packard) înzestrat cu două unități de memorie pe discuri flexibile (9885 M/S +H.P) și un plotter digital  $P_d$  (9872B-H.P).

Pentru procesarea semnalelor de vibrații ale răspunsului structurii, obținute prin traductoare de vibrații  $T_v$  și amplificatoarele de măsură  $A_m$ , se folosesc convertoare analog digitale  $C_{od}$  care transferă eșantioanele semnalelor, prin interfața  $I_f$  și calculator, pe fișiere de date ce se memorează pe discuri flexibile.

În scopul procesării semnalelor de vibrații obținute la testări în condiții de teren, am adăugat lanțului de prelucrare un sistem multiplexor  $M_x$ , demultiplexor  $D_x$ , tip MA1114 (ENERTEC-Franța) Multiplexorul  $M_x$  preia cele 2, 4, 8 sau 16 semnale de intrare, le multiplexează în cod P.C.M. (Pulse Code Modulation), astfel că la ieșirea lui se obține un semnal codificat ce poate fi înregistrat pe un înregistrator magnetic  $I_m$ . La prelucrarea înregistrărilor în condiții de laborator semnalul codificat de pe bandă este decodificat în cele 2-16 semnale originale ce sînt trecute în mod serial în interfața calculatorului.

Semnalele sînt codificate pentru un transfer rapid la calculator, în cod ASCII și modul de transfer DMA (Direct Memory Access) Prin programul "INT-DA" valoarea eșantionului este trecută în cod binar, cuvîntul fiind format din 14 biți, primii patru pentru valoarea numărului canalului, iar ceilalți zece pentru valoarea eșantionului și semnul lui. O subrutină calculează valoarea numărului canalului și valoarea numerică zecimală a eșantionului.

### 6.3. Algoritmi pentru procesarea semnalelor discretizate

În sistemele numerice variabilele sînt definite la intervale discrete ale timpului. Trecerea unei funcții continue, cum ar fi legea de mișcare  $U(t)$  a unui punct al structurii, la o formă discretă  $U(t)$  se exprimă prin relația

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k \Delta t) \delta(t - k \Delta t) \quad (6.7)$$

unde  $\Delta t$  este intervalul sau  $T_e$  de eșantionare, iar  $\delta(t - k \Delta t)$  reprezintă funcția deltă a lui Dirac,  $k$  fiind indicele eșantionului. Discretizarea introduce și ea anumite erori legate de obținerea unor valori trunchiate sau mediate de semnal și de aceea sînt necesare respectarea unor reguli de care se ține seama la procesarea eșantioanelor. Astfel trebuie respectată teorema de eșantionare a lui Shannon, prin care intervalul de eșantionare  $\Delta t$  trebuie să îndeplinească condiția

$$\Delta t \ll \frac{1}{2 F_{\max}} \quad (6.8)$$

unde  $F_{\max}$  este frecvența maximă din spectrul de frecvențe. Dacă apar componente de frecvență mai înaltă, atunci apare efectul aliasing (fals) prin care componentele cu frecvențe mai mare de  $F_{\max}$  sunt luate în calcule ca aparținând unor frecvențe mai joase. Pentru a evita acest efect se introduc, înaintea conversoarelor analog digitale, filtre trece jos sub  $F_{\max}$ , numite filtre anti-aliasing.

La procesarea transformatei Fourier a semnalelor apar și alte efecte legate de neperiodicitatea surselor de eșantioane procesată. Această periodicitate forțată produce în calcul efectul "leakage" (scurgere), care poate fi redus prin folosirea ferestrărilor de ponderare, care diminuează acest efect.

Unul din marile avantaje ale procesării digitale a semnalelor este posibilitatea eliminării zgomotelor care însoțesc semnalele și care nu pot fi eliminate pe cale analogică. Una din metodele de eliminare este cea a medierii.

### 6.3.1. Eliminarea efectului de răspuns ale structurii

#### 6.3.1.1. Semnale periodice

În multe cazuri practice, este necesară determinarea distribuției mișcărilor vibratorii pe structură unei mașini (fig.6.10).

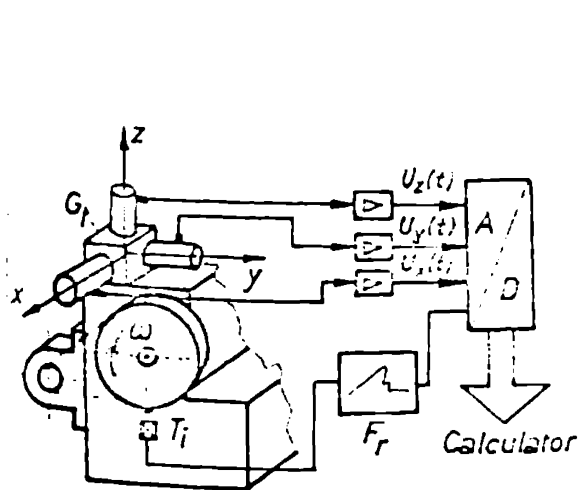
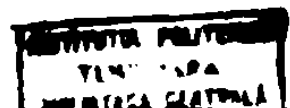


Fig.6.10

Sub acțiunea forțelor de echilibră masice și ai forțelor tehnologice apar pe structură anumite mișcări vibratorii periodice cu perioada fundamentală  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , unde  $\omega$  este viteza unghiulară de rotație a axului principal. Pe acest ax se fixează un sarcător de fier (știft metalic), care induce în transformatorul inductiv  $T_j$ , la fiecare trecere prin dreptul lui, un impuls periodic cu perioada  $T$ . Acest semnal este transformat, prin formați  $T_j$  într-un semnal per-

periodic în dinte de fierăstrau (fig.6.11).



Simultan cu acest semnal marilor de fază sînt eșantionate, prin convertorul analog digital  $C_d$ , semnalele unui grup  $G_p$  de trei traductori de vibrații.

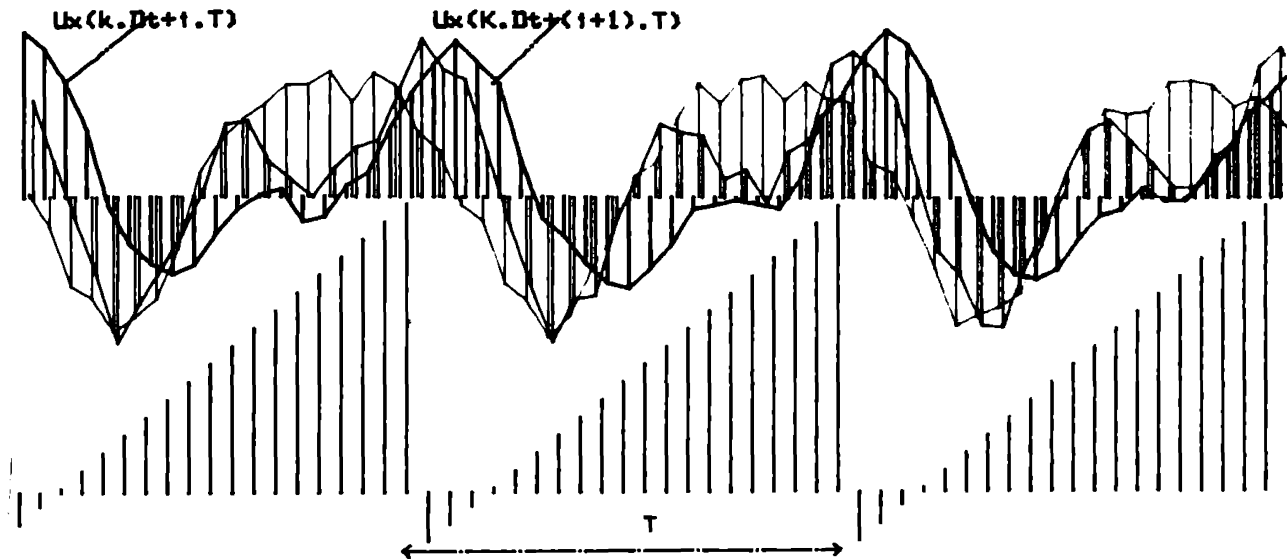


Fig.6.11

Semnalul  $U(t)$  al unuia dintre traductori de vibrații va avea două componente

$$U(t) = U_p(t) + n(t) \quad (6.9)$$

unde  $U_p(t)$  este semnalul periodic cu perioada  $T$  și conține vibrațiilor cauzate de perturbațiile periodice, iar  $n(t)$  este un semnal de zgomot ce se mixează cu semnalul periodic. El provine de la alte perturbații aleatoare ce se transmit magnetii. Acest semnal de zgomot trebuie eliminat.

Prin eșantionare cu rata  $\Delta t$  se poate realiza evaluarea medie

$$U_m(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N U(k \cdot \Delta t + iT) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (6.10)$$

unde  $U_m(k \cdot \Delta t)$  este eșantionul  $k$  al semnalului mediu, iar  $U(k \cdot \Delta t + iT)$  eșantionul  $k$  din perioadă  $i$  a semnalului eșantionat.

Ținînd seama că semnalul  $U(k \cdot \Delta t + iT)$  are două componente

$$U_m(k, \Delta t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N U_p(k \cdot \Delta t + iT) + \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N n(k \cdot \Delta t + iT) \quad (6.11)$$

Se consideră că eşantioanele  $n(k \cdot \Delta t + iT)$  ale semnalului de zgomot au caracter aleator, cu o distribuție normală Gaussiană pentru care valoarea medie

$$\mu_n(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum n(k \cdot \Delta t + iT) = 0 \quad (6.12)$$

Astfel componenta aleatorie devine zero, iar componenta periodică va fi

$$U_p(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N U(k \cdot \Delta t + iT) \quad (6.13)$$

În cazul în care cele patru semnale de marcarea a fazei și ale semnalelor de vibrații, sînt eşantionate prin multiplexor, atunci semnalele sînt decalate în timp cu intervalul de eşantionare al multiplexorului  $\Delta t_0 = \Delta t/4$ . Considerînd că semnalul marcator este conectat pe canalul 1 al multiplexorului, iar celelalte semnale pe canalele 2, 3 și 4 am realizat programul "4-CENT" care conține următoarele subrutine: "Int-da" prin care eşantioanele, în cod ASCII sînt preluate în memoria calculatorului prin intermediul multiplexorului sub forma unui șir de caractere  $A \uparrow(N_e)$ , unde  $N_e$  este numărul total de eşantioane;

- "ASCII", este o subrutină prin care șirul de caractere ASCII sînt transformate într-un șir de valori numerice zecimale  $A(N_e)$ .

- "Centre" este o subrutină care desparte valorile celor patru canale. Deoarece eşantioanele canalelor 2, 3 și 4 sînt decalate în timp cu  $\Delta t_0$ , subrutina reeşantionează prin interpolare, semnalele aducîndu-le în sincronism cu canalul 1 marcator. Indexarea numărului de perioade se face la fiecare schimbare de semn de la + la - ale valorilor eşantioanelor primului canal, pe care este introdus semnalul marcator de fază;

- "Graf" este o subrutină prin care se trasează grafic semnalele periodice obținute prin subrutina "Centre". Eliminarea efectului de zgomot, prin procesarea de mediere, se poate observa dacă valorile eşantioanelor 1 și  $N_f$  (ultimul) sînt egale;

- O subrutină "Fr-ana" calculează în continuare coeficienții seriei Fourier.

$$U_a(i) = \frac{1}{N_f-1} \sum_{k=0}^{N_f-1} U_p(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N_f-1} i \cdot k\right)$$
$$U_b(i) = \frac{1}{N_f-1} \sum_{k=0}^{N_f-1} U_p(k) \sin\left(\frac{2\pi}{N_f-1} i \cdot k\right) \quad (6.9)$$

unde  $i$  este numărul armonice.

Metoda de eliminare a zgomotului aleator a fost verificată cu succes la:

- Determinarea distribuțiilor mișcărilor vibratorii ale fundației unui compresor de aer;
- Analiza spectrului periodic al sunetului unei viori Anati;
- Echilibrarea dinamică a rotorului unui agregat de vânt cu ax orizontal. Datorită rafalelor de vânt, nivelul componentei aleatoare  $n(t)$  a fost foarte mare, în raport cu nivelul componentei periodice a semnalului de vibrații  $U_p(t)$  dat de dezechilibrul rotorului. Cu toate acestea, printr-o mediere a semnalului  $l(t)$  pentru 10-15 perioade s-au obținut rezultate deosebit de bune.

#### 6.3.1.2. Semnale tranzitorii

În multe cazuri de testări la vibrații amplificarea unor excitații structurii este deosebit de anevoioasă dacă nu chiar imposibil de realizat. Se poate apela la excitații tranzitorii de tip impulsiv sau treaptă, identificarea parametrilor modali putându-se face fără cunoașterea excitației, considerându-se că structura execută vibrații libere amortizate.

Există situații când chiar aceste excitații se aplică cu greutate, ca de exemplu, la structurile mașinilor care trebuie testate în timpul funcționării lor sau la structurile aerospațiale în zbor.

În acest caz semnalul de răspuns ale structurii vor conține o sumă de componente modale, liber amortizate, peste care se suprapune un semnal aleator dat de perturbații de natură aleatoare.

##### 6.3.1.2.1. Metoda funcției de autocorelație

Eliminarea efectului de zgomot se poate face prin metoda funcției de autocorelație



$$R_{UU}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) U(t+\tau) d\tau \quad (6.10)$$

Considerînd cã semnalul  $U(\tau)$  este dat de o excitație aleatoare  $e(t)$ , rãspunsul structurii  $U(t)$  va fi dat de integrala de convoluție

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\theta) e(\theta) d\theta \quad (6.11)$$

unde  $h(t)$  este rãspunsul la impuls al structurii (rãspuns indicial) care are o dezvoltare modalã de forma

$$h(t) = \sum_{r=1}^n X_r e^{\lambda_r t} \quad (6.12)$$

Din (6.10) și (6.11) va rezulta

$$R_{UU}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ec}(\theta) h(\tau+\theta) d\theta \quad (6.13)$$

Dacã semnalul  $e(t)$  este de tip zgomot alb sau color, atunci funcția de autocorelație a excitației  $e(t)$  se apropie de funcția impuls Dirac, funcția de autocorelație devenind,

$$R_{UU}(\tau) = h(\tau) \quad (6.14)$$

Calculul funcției de corelație discretã are forma

$$R_{UU}(k\Delta\tau) = \frac{1}{N_e - k + 1} \sum_{m=0}^{N_e-k} U(m\Delta t) U(m+k)\Delta t \quad (6.15)$$

unde  $N_e$  este numãrul total de eșantioane în intervalul  $T = (N_e-1)\Delta t$   $k$  este parametrul de întârziere discret ( $k\Delta t = \tau$ ) iar  $m$  este variabilã discretã ( $m\Delta t = t$ ).

Se recomandã, [98], ca intervalul  $T$  de procesare al funcției de autocorelație sã fie

$$T \geq 10 \tau_{\max} \quad (6.16)$$

unde

$$\tau_{\max} = \Delta t(N_e - 1) \quad (6.17)$$

$N_e$  fiind numărul de eșantioane prin care se reprezintă funcția de autocorelație.

Pentru calculul funcției de autocorelație am realizat programul "CORE" care cuprinde o subrutină de calcul a funcției de autocorelație (6.15) și o subrutină de reprezentare grafică a funcției.

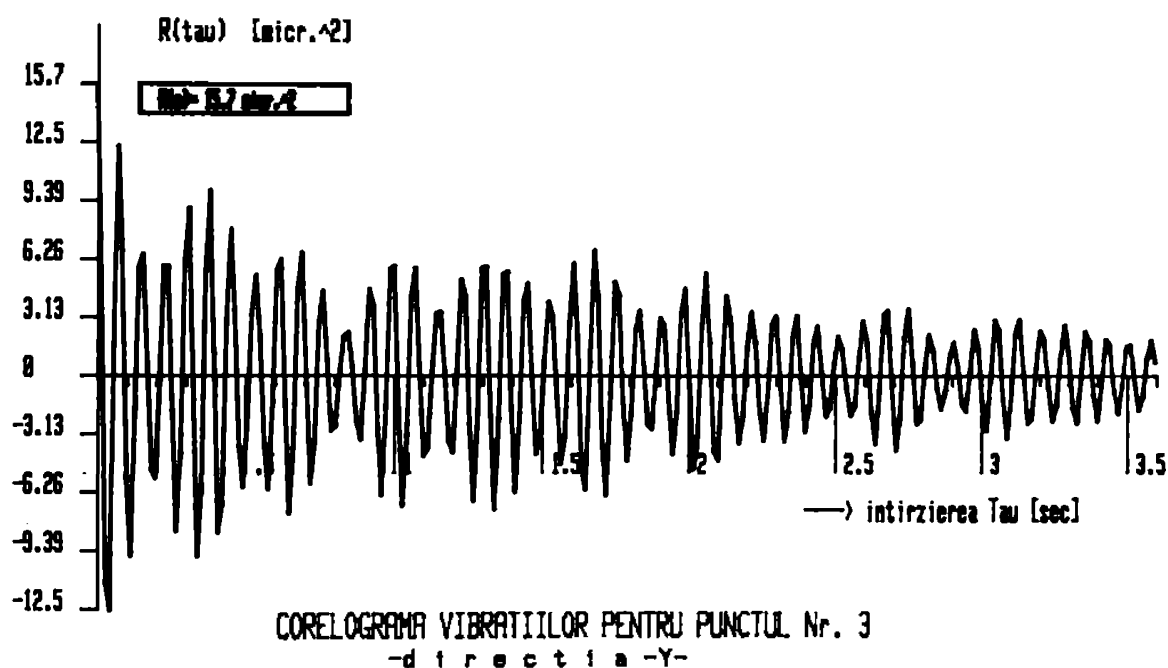


Fig.6.12

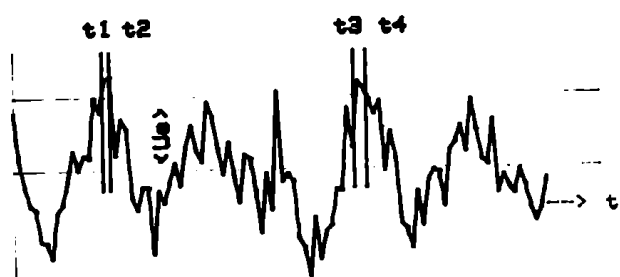
În figura 6.12 este prezentată corelograma unui semnal de vibrații obținut la măsurarea vibrațiilor într-o hală industrială, unde excitațiile sunt multiple, date de utilajele în funcțiune (mori autogene pentru concasarea minereurilor). Excitația structurii fiind aleatoare, corelograma vibrațiilor are o evoluție liber amortizată.

#### 6.3.1.2.2. Metoda semnăturii decrementului aleator

Cole [31] a introdus conceptul de "semnătura decrementului aleator" (random decrement signature), care se bazează pe faptul că un semnal de răspuns al structurii, datorat unei excitații aleatoare, este compus din două componente: o componentă determinată, corespunzătoare unei excitații de tip impuls sau treaptă, deci cu o evoluție liber amortizată și o componentă aleatorie, care are valoarea medie nulă. Prin medierea unui număr suficient de eșantioane ale aceluiași semnal de răspuns se va păstra, astfel, numai componenta

deterministă.

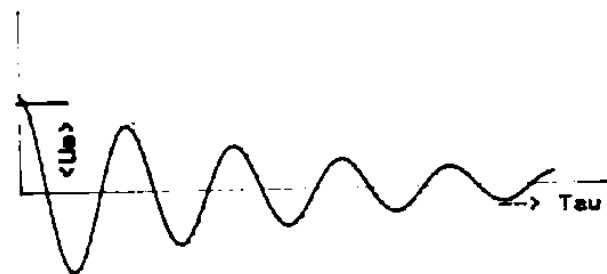
Pentru eliminarea componentei aleatoare se aplică o medie-re a semnalului de răspuns, începînd întotdeauna cu: un nivel constant  $U_s$  (fig.6.13.a), care va da semnalul de răspuns la o excitație treaptă, sau cu un nivel zero ( $U_s = 0$ ), avînd frontul pozitiv sau negativ, care va da semnalul de răspuns la o excitație de tip impuls. Răspunsul determinist mediat  $U_m(\tau)$  are forma analitică:



$$U_m(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N U(t_k + \tau) \quad (6.18)$$

unde, la

$$t = t_k \text{ pentru } U(t) = U_s \quad (6.19)$$



pentru care  $U_m(\tau)$  devine răspunsul la excitație treaptă, sau,

$$t = t_k \text{ pentru } U(t) = 0 \text{ și}$$

$$\frac{dU(t)}{dt} > 0 \text{ sau } \frac{dU(t)}{dt} < 0 \quad (6.20)$$

Fig.6.13

pentru care  $U_m(\tau)$  devine răspunsul la o excitație de tip impuls, pozitiv sau negativ.

Considerînd acum semnalul  $U_m(\tau)$  că este determinat se poate aplica una din metodele de identificare a parametrilor modali în domeniul frecvență sau domeniul timp, prezentate în capitolul 4.

Pentru determinarea formei modurilor este necesară însă cunoașterea vectorilor modali. Este deci necesară corelarea mișcărilor tuturor punctelor care definesc structura. Pentru aceasta S.R. Ibrahim [69,70] a propus tehnica multiseamnal decrement aleator pe care a utilizat-o la identificarea modelului la scara 1/8 a navei spațiale, (fig.6.14).

Semnalul  $U_1(t)$  se ia ca semnal de referință pentru celelalte semnale eșantionate la timpii  $t_i + \tau$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Relația (6.10) devine în acest caz

$$\{U_m(\tau)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{U(t_k + \tau)\} \quad (6.21)$$

unde  $\{U_m(z)\}$  și  $\{U(t_k + z)\}$  reprezintă vectorii semnalelor mediate și respectiv vectorii eșantionnelor amplitudelor luate simultan la timpul  $t = t_k + z$ .

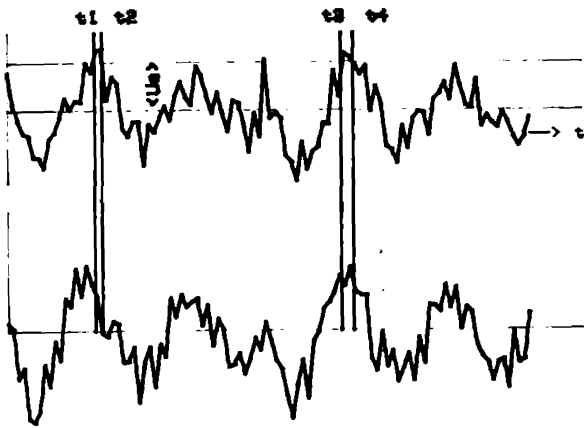


Fig. 6.14

Am implementat această tehnică, probabil de utilă în aplicațiile practice la măsurători pe teren, într-un program de calcul "R-DECO".

Fig. 6.15 prezintă vibrograma "random decrement" obținută într-o secvență a aceluiași set de vibrații aleator din care s-a calculat funcția de autocorelație (Fig. 6.12). Se observă că amplitudinea medie a vibrațiilor este mai mică decât cea a funcției de autocorelație  $U_c(z)$ .

incomparabil mai scurs decât cel pentru calculul funcției de autocorelație, datorită faptului că în primul caz se calculează numai suma, iar în cazul al doilea produsul.

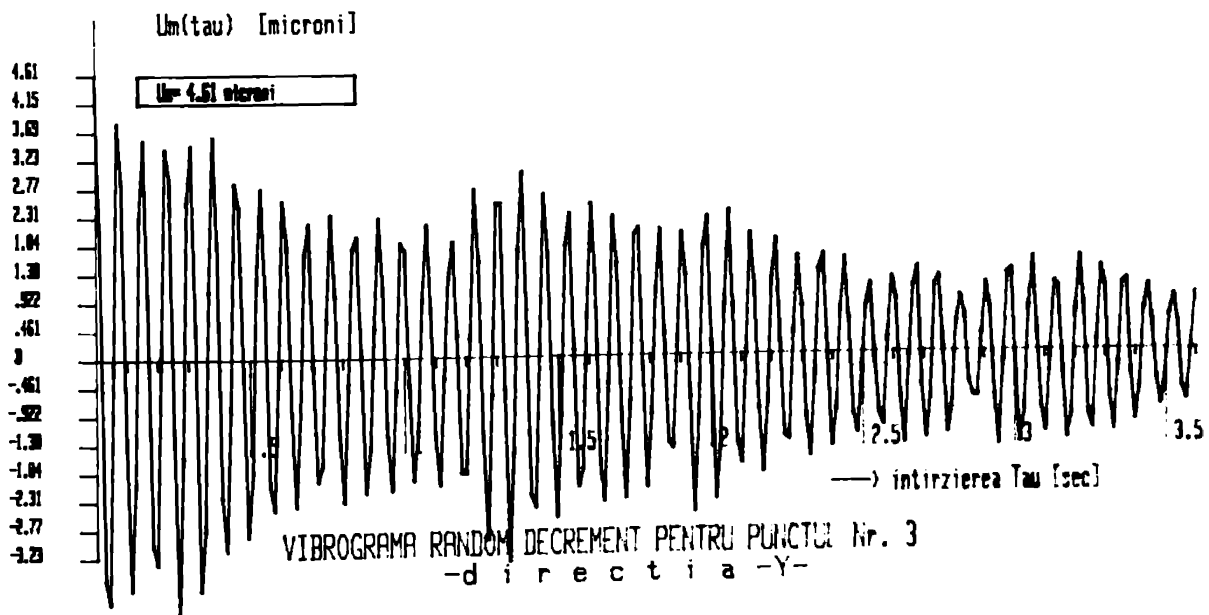


Fig. 6.15

6.3.2. Filtrarea numerică

La prelucrarea semnalelor de vibrații este necesar, uneori să se analizeze suntele într-o anumită bandă de frecvență. Astfel, dacă se aplică una din metodele de determinare a parametrilor modali, o condiție de bază ca parametrii să fie determinați cu acuratețe este ca semnalul de vibrații să conțină numai componentele modurilor cautate. Prin metodele de măsurare prezentate mai sus se elimină zgomotul aleator care este prezent în semnal, dar o filtrare va limita numărul componentelor modale din semnalul de măsură. Filtrarea se poate face pe cale analogică în cadrul unui amplif. de măsură, înaintea convertorului analog-digital, sau în cadrul procesorului de calcul digitalizat. Astfel de tehnici de filtrare numerică sunt utilizate în programul I<sub>MM</sub> ale semnalelor  $w_p(t)$  (fig. 6.7) și în programul de filtrare prin program, filtrul este aplicat asupra semnalelor de vibrații în timpul procesării. Tehnica de filtrare numerică este prezentată în secțiunea următoare de bandă prin tehnica ZOH.

Un filtru digital este o rețea de calcul care se poate descrie printr-o ecuație cu diferențe finite.

$$U_j(p \cdot \Delta t) = \sum_{k=0}^n a_k U(p \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t) + \sum_{k=0}^m b_k U_j(p \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t) \quad (6.12)$$

unde  $U(p \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t)$  și  $U_j(p \cdot \Delta t)$  sînt cele  $k$ -esime semnale de intrare și respectiv de ieșire ale rețelei de filtrare, iar  $a_k$  și  $b_k$  sînt coeficienți reali și complexi. Ecuația (6.12) transformată Laplace se scrie în funcție de transformata

$$h(s) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k e^{-k \cdot s \cdot \Delta t}}{1 - \sum_{k=0}^m b_k e^{-k \cdot s \cdot \Delta t}} \quad (6.13)$$

Notînd cu  $z = e^{-s \cdot \Delta t}$ , care este transformata în z-plan, de transfer discretă devine

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^m b_k z^{-k}} \quad (6.14)$$

unde

$$z^{-k} = \cos k \omega \Delta t + j \sin k \omega \Delta t \quad (6.15)$$

Înlocuind (6.25) în (6.24) modulul  $|H(\omega \Delta t)|^2$ , după unele transformări, se poate ajunge la forma

$$|H(\omega \Delta t)|^2 = \frac{1}{1 + p^2(\omega)} \quad (6.26)$$

unde  $p^2(\omega)$  este o funcție rațională de  $\operatorname{tg}^2(\omega \Delta t/2)$ .

Pentru un filtru trece jos tip Butterworth se ia funcția  $p^2(\omega)$  de forma cea mai simplă

$$p^2(\omega) = a \operatorname{tg}^{2m}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \quad (6.27)$$

unde  $a$  este un coeficient constant.

Dacă  $\omega_c$  este frecvența de tăiere la 3 dB,  $a$  are expresia

$$a = \frac{1}{\operatorname{tg}^{2m}\left(\frac{\omega_c \Delta t}{2}\right)} \quad (6.28)$$

iar pătratul caracteristicii amplitudine-frecvență devine

$$|H(\omega \Delta t)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\operatorname{tg}(\omega \Delta t/2)}{\operatorname{tg}(\omega_c \Delta t/2)} \right]^{2m}} \quad (6.29)$$

Pătratul caracteristicii amplitudine-frecvență a filtrului Butterworth analogic are forma

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}} \quad (6.30)$$

Produsul  $H(s) \cdot H(-s)$  al funcției de transfer  $H(s)$  este de forma

$$H(s) H(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2m}} \quad (6.31)$$

asemănător cu (6.30).

Funcția de transfer  $H(s)$  poate fi pusă sub forma unei dezvoltări de forma

$$H(s) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{A_k}{s - s_k} + \frac{\bar{A}_k}{s - \bar{s}_k} \right) \quad (6.32)$$

iar funcția de transfer discretă  $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{A_k}{1 - e^{s_k \Delta t} z^{-1}} + \frac{\bar{A}_k}{1 - e^{\bar{s}_k \Delta t} z^{-1}} \right) \quad (6.33)$$

Rădăcinile  $s_k$  ale polilor se determină din ecuația

$$1 + (s/j\omega_c)^{2m} = 0 \quad (6.34)$$

de unde

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2m}} (j\omega_c) \quad (6.35)$$

Făcînd, în (6.35), substituția

$$-1 = e^{-j(\pi + 2\pi k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

se obțin rădăcinile

$$s_k = c_k + jd_k \quad s_k = c_k - jd_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (6.37)$$

unde,

$$c_k = \omega_c \sin\left(2\pi \frac{2k+1}{2m}\right) \quad d_k = \omega_c \cos\left(2\pi \frac{2k+1}{2m}\right) \quad (6.38)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

Pentru  $k$  impar factorul  $\frac{2k+1}{2m}$  se înlocuiește cu  $\frac{k}{m}$ .

Făcînd notațiile,

$$A_k = A_{kr} + jA_{ki} ; \quad \bar{A}_k = A_{kr} - jA_{ki} \quad (6.39)$$

transformata  $H(z)$  se poate pune sub forma

$$H(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_{k1} + A_{k2}z^{-1}}{1 - B_{k1}z^{-1} - B_{k2}z^{-2}} \quad (6.40)$$

unde

$$A_{k1} = 2A_{kr}; \quad A_{k2} = 2e^{c_k \Delta t} (A_{kr} \cos(d_k \Delta t) + A_{k1} \sin(d_k \Delta t))$$

$$B_{k1} = 2e^{c_k \Delta t} \cos(d_k \Delta t); \quad B_{k2} = -e^{2c_k \Delta t} \quad (6.41)$$

Rețeaua digitală corespunzătoare filtrului este dată de relațiile lineare

$$U_k(p \Delta t) = U(p \Delta t) + B_{k1} U_k(p-1) \Delta t + B_{k2} U_k(p-2) \Delta t \quad (6.42)$$

$$U_c(p \Delta t) = \sum_{k=1}^m A_{k1} U_k(p \Delta t) + A_{k2} U_k(p-1) \Delta t$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m$$

unde  $U(p \Delta t)$  și  $U_c(p \Delta t)$  sînt eșantionul  $p$  de intrare, respectiv de ieșire din filtrul digital, cărui îi corespunde structura din Fig. 6.16, simbolurile



corespunzînd: unei întârzieri cu  $\Delta t$ , multiplicare cu  $A$  și însușare a semnalului din rețeaua digitală. Rețeaua poate fi materializată într-o structură electronică digitală, sau implementată

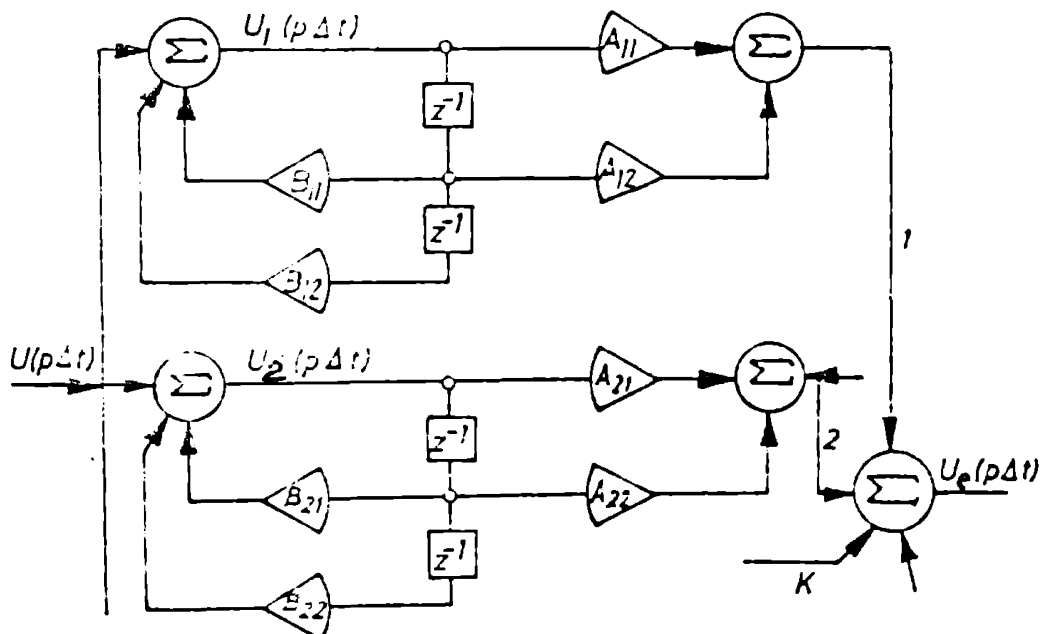


Fig. 6.16



într-un program de calcul, folosind relațiile de recurență (6.42)

Această realizare, pentru un filtru trece jos, un program "F-75" pentru procesarea semnalelor eșantionate.

În prima subrutină "R-POL" se calculează rădăcinile  $s_k$  și numărul de perechi de poli  $m$ , dându-se ca date de intrare pulsația de tăiere  $\omega_c$  și atenuarea  $A_t$  în dB impusă la o valoare  $\omega_0 > \omega_c$

Din (2.30) va rezulta numărul de perechi de poli

$$m = \frac{1}{2} \frac{\text{Log}(10^{A_t/10} - 1)}{\text{Log}(\omega_0/\omega_c)} \quad (6.43)$$

Cu ajutorul relațiilor (6.38) se calculează părțile reală  $\sigma_k$  și imaginară  $\omega_k$  ale rădăcinilor complexe conjugate  $s_k$  și  $\bar{s}_{k1}$ .

În subrutina "IR-COF" se calculează coeficienții complex conjugate  $A_k$  și  $\bar{A}_k$  ai funcției de transfer  $H(s)$  (6.32) și în continuare coeficienții  $A_{k1}$ ,  $A_{k2}$ ,  $B_{k1}$  și  $B_{k2}$  ai funcției digitale de transfer  $H(z)$  și ai relațiilor de recurență (6.42).

Programul poate fi transformat cu ușurință pentru calculul unui filtru trece sus Butterworth pentru care pătratul funcției de transfer a filtrului analog este dat de relația

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^{2r}} \quad (6.44)$$

### 6.3.3. Prăjirea semnalelor în domeniul frecvenței

#### 6.3.3.1. Transformata Fourier și ferestre de ponderare

Trecerea de la domeniul timp la domeniul frecvență se face prin intermediul transformatei Fourier, care sub formă discretă este dată de relația

$$F(k\Delta f) = \frac{1}{N_e} \sum_{p=0}^{N_e-1} U(p\Delta t) e^{-j \frac{2\pi p k}{N_e}} \quad (6.45)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N_e/2$$

unde  $U(p\Delta t)$  este eșantionul  $p$  al semnalului  $U(t)$ , dat sub forma unei secvențe de  $N_e$  eșantioane, iar  $F(k\Delta f)$  fiind eșantionul

fiind eșantionul complex  $k$  al transformatei Fourier.  $\Delta f$  este intervalul de eșantionare în frecvență, sau rezoluția în frecvență.

Deoarece  $F(k\Delta f)$  este cel de al  $k$  eșantion complex în domeniul frecvență, care are două componente, una reală și una imaginară, numărul de eșantioane complexe este  $N_e/2$ . Frecvența maximă este prezentă în spectru, fiind

$$F_{\max} = \Delta f \frac{N_e}{2} \quad (6.46)$$

sau

$$F_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (6.47)$$

Transformata inversă Fourier  $\overset{ca}{}$ constituie semnalul  $u(p\Delta t)$

$$u(k\Delta t) = \frac{1}{N_e} \sum_{p=0}^{N_e-1} F(p\Delta f) e^{j2\pi p k} \quad (6.48)$$

Cele două transformate (6.45) și (6.48) presupun periodicitatea funcțiilor  $U(p\Delta t)$  și  $F(k\Delta f)$  cu perioadele  $T = \frac{1}{\Delta f}$  și respectiv  $F_{\max} = \frac{1}{2\Delta t}$ . De aceea aplicarea transformatelor asupra semnalelor neperiodice se face cu erori, periodicitatea fiind forțată. Periodicitatea se realizează prin înmulțirea semnalului cu o funcție periodică  $h_f(t)$ , numită fereastră de ponderare, care la cele două capete ale intervalului trece prin valoarea zero.

Răspunsul  $u_p(t)$  al semnalului  $u(t)$ , la trecerea prin rețeaua ferestrei de ponderare este dat de produsul

$$u_p(t) = u(t) \cdot h_f(t) \quad (6.49)$$

iar în frecvență prin produsul de convoluție

$$F_e(\omega) = F(\omega) * H_f(\omega) = \int_0^{\omega} F(\omega) \cdot H_f(\omega + \theta) d\theta \quad (6.50)$$

unde  $F_e(\omega)$  și  $F(\omega)$ , sînt transformatele Fourier ale semnalului de ieșire respectiv de intrare din rețeaua de ponderare, iar  $H_f(\omega)$  este funcția de transfer a rețelei.

În aplicarea transformatei Fourier asupra unei secvențe de  $N$  eșantioane, a unei funcții  $u(t)$  neperiodice, fereastră de ponderare este o fereastră automat rectangulară (curba 1 - fig.6.17.a).

Pentru a înlătura efectul de "scurgere" funcțiile  $h(t)$  ale ferestrelor de ponderare, care se introduc trec prin valoarea zero la capetele secvenței. Excepție face fereastra de ponderare exponențială (curba 2 - fig.6.17.a) care are funcția  $h(t)$  de forma

$$h(t) = e^{-\sigma_0 t} \quad (6.51)$$

unde  $\sigma_0$  este un parametru care se aplică atunci când  $u(t)$  reprezintă legea de mișcare a unei vibrații libere amortizate. Astfel  $u(t)$  va fi atenuat aparent la capătul din dreapta al secvenței, dacă în acest capăt semnalul  $u(t)$  nu este atenuat inițial suficient ( $u(t) \rightarrow 0$ ).

Prin aplicarea acestei ferestre, la analiza nodală se estimează raporturi de amortizare  $\sigma_{or}$  mai mari decât cele reale  $\sigma_r$ , ale căror valori se determină simplu prin scădere

$$\sigma_r = \sigma_{or} - \sigma_0 \quad (6.52)$$

La celelalte tipuri de funcții ale ferestrei de ponderare,

$h(t)$  trece prin zero la ambele capete ale secvenței de eșantionare. (fig.6.17.b). Dacă  $u(t)$  este un semnal armonic  $u(t) = U_0 \cos \omega_0 t$ , a cărui perioadă  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  nu este un submultiplicu al secvenței  $T$ , atunci aplicând o fereastră rectangulară transformată Fourier  $F_e(\omega)$  a semnalului  $u(t)$  ponderat se va extinde într-un domeniu învecinat pulsației  $\omega_0$  (fig.6.17.c - curba 1) prezentând un lob central la  $\omega = \omega_0$  și mai mulți lobi laterali. Funcția  $F_e(\omega)$  este afectată de această distribuție a spectrului care ar trebui să conțină o singură linie în spectru la  $\omega = \omega_0$ .

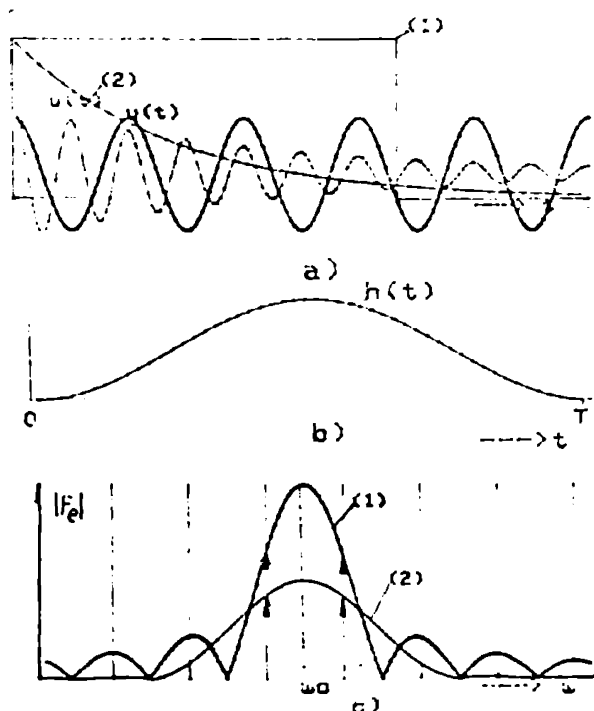


Fig.6.17

O apreciere a performanțelor ferestrelor de ponderare poate fi făcută evaluând abaterile  $F(\omega) * H_T(\omega) - F(\omega)$ , unde  $F(\omega)$  este imaginea corectă a semnalului  $u(t)$  în spectrul Fourier.

Această abatere depinde de caracteristica ferestrei de ponderare aleasă și este cauzată de: degradarea rezoluției din cauza lățimii lobului central și reziduii lobilor laterali. Astfel, la fereastra Hanning, (fig. 6.17.c - curba 2), unde funcția  $h(t)$  eșantionată are expresia

$$h(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N_1) \quad (6.53)$$

la care lobul principal se atenuază și se lățește, față de fereastră rectangulară, iar lobi laterali au o tendință de atenuare mai pronunțată. La fereastra Hamming, unde

$$h(k \cdot \Delta t) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.54)$$

permite o atenuare și mai pronunțată a lobilor laterali. Alte tipuri de ferestre ca: Blackman, Gauss, Kaiser-Bessel și Tseng sînt discutate în [13]. Eliminarea lobilor laterali duce la o separare mai bună a componentelor spectrale, dar scade rezoluția estimării datorită lățirii lobului principal.

### 6.3.3.2. Transformata rapidă Fourier

La calculul transformatelor discrete Fourier; directe (6.45) și inversă (6.48), pentru o secvență de  $N_p$  eșantioane <sup>și</sup>  $N_c$  de eșantionare  $N^2$  multiplicări complexe care intervin în calculul termenilor

$$w(p, k) = e^{-j \frac{2\pi}{N_c} pk} \quad (p, k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.55)$$

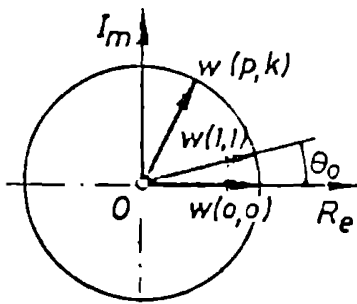


Fig. 6.18

Va rezulta, pentru  $w(0,0) = 1$ , care reprezintă în planul complex  $Re - Im$  (fig. 6.18) un vector unitar situat pe axa reală  $OR_e$ .  $w(1,1) = e^{-j \frac{2\pi}{N_c}}$  este un vector unitar rotit cu unghiul  $\theta = \frac{2\pi}{N_c}$  față de  $w(0,0)$ .

În continuare  $w(1,2) = w(2,1) = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  se vor roti cu unghiul  $2\pi$  față de  $w(0,0)$ , etc. După ce vectorul  $w(p,k)$  parcurge un arc de  $2\pi$  multiplicările se repetă. Pe baza unei scheme algoritm de efectuare a produselor  $U(p,k) w(p,k)$  [33], se evită repetarea aceluiași produs, astfel că numărul produselor ce trebuiesc efectuate se reduce de la  $N_e^2$  la  $N_e \log_2(N_e)$ . Acest algoritm impune ca  $N_e$  să fie un număr multiplu de 2 ( $N_e = 2, 4, 8, \dots, 128, 256, 512, 1024, \dots$ ). Timpul de calcul se reduce foarte mult. Astfel timpul de calcul pentru  $N_e = 1024$  se reduce cu mai mult de 100 ori. Pentru mărirea vitezei de calcul algoritmul este implementat, în cod binar, pe memorii ROM (Read Only Memory) ale unor microprocesoare structurate pe calculul transformatei Fourier rapidă. Folosind microprocesoare rapide timpul de calcul al unei transformate Fourier pentru  $N_e = 1024$  eșantioane se reduce la fracțiuni de secundă. Aceste circuite constituie astăzi baza analizărilor spectrale digitale.

### 6.3.3.3. Considerații privind prelucrarea semnalelor la excitații de tip aleator în domeniul frecvență

Una din metodele cele mai rapide, din punct de vedere al costului testului experimental, este metoda cu excitație aleatorie. Începând cu procesarea semnalelor de răspuns ale structurii mașinii corespund unele dificultăți de care trebuie să se țină seama.

Răspunsul temporal al structurii este dat de vectorul funcției de intercorelație  $\{R_{qf}(\tau)\}$  a cărui dezvoltare modală este dată de relația (3.82). Funcția de intercorelație  $R_{qf}(\tau)$

$$R_{qf}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u_q(t) u_f(t+\tau) d\tau \quad (6.56)$$

unde  $u_q(t)$  și  $u_f(t)$  sînt: semnalul de vibrație măsurat într-un punct P al structurii, iar  $u_f(t)$  este semnalul excitației (de exemplu al traductorului de forță  $T_f$  (fig.6.7)).

Funcția de intercorelație discretă se calculează cu ajutorul programului "CCRE" folosind relația (6.15) de calcul al autocorelației, unde produsele din sumă  $u(m \Delta t) u(m+k) \Delta t$  se înlocuiesc cu produsele  $u_q(m \Delta t) u_f(m+k) \Delta t$ .

Trecerea în domeniul frecvenței se face prin aplicarea transformatei Fourier asupra funcțiilor de corelație.

Astfel funcția  $G_{qf}(\omega)$ , numită densitatea interspectrală, definită în domeniul pulsațiilor pozitive, are expresia

$$G_{qf}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{qf}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.57)$$

iar densitatea spectrală de putere a semnalului de răspuns  $U(t)$  este

$$G_{uu}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.58)$$

Obținerea numerică a spectrului de linii ale celor două funcții  $G_{qf}(\omega)$  și  $G_{qu}(\omega)$  se pot obține cu ajutorul subrutinei "FFT" existente, sau pentru un domeniu de bandă de frecvență cu ajutorul programului "ZOOM" de analiză de bandă îngustă.

Funcția de intercorelație  $R_{qf}(\tau)$  se poate calcula cu ajutorul integralei de convoluție

$$R_{qf}(\tau) = \int_0^{\infty} h_q(\theta) R_{ff}(\tau-\theta) d\theta \quad (6.59)$$

unde  $h_q(\theta)$  este răspunsul la impuls al structurii în punctul P. Aplicând asupra relației (6.59) transformata Fourier se obține

$$G_{qf}(\omega) = H_{qf}(\omega) G_{ff}(\omega) \quad (6.60)$$

unde  $H_{qf}(\omega)$  este funcția de transfer a structurii în punctul P, din care se pot determina, prin metodele prezentate la capitolul 4, parametri modali ai structurii.  $G_{ff}(\omega)$  este densitatea spectrală de putere a semnalului de excitație.

Determinarea funcției de transfer  $H_{qf}(\omega)$ , plecând de la măsurarea semnalului de excitație și a celui de răspuns, continuând cu procesarea datelor și pînă la calculul ei cu relația

$$H_{uf}(\omega) = \frac{G_{uf}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}, \quad (6.61)$$

cumulează o serie de erori. Aprecierea gradului de eroare se face prin calculul funcției de choerență,  $\gamma$ .

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|G_{uf}(\omega)|^2}{G_{uu}(\omega) G_{ff}(\omega)} \ll 1 \quad (6.62)$$

Pentru cazul teoretic: o măsurare exactă a semnalelor de excitație și răspuns și o procesare fără erori va da  $\mathcal{J}^2(\omega) = 1$ . Dacă semnalele de excitație și răspuns nu se corelează atunci  $G_{uf}(\omega) \rightarrow 0$  și deci  $\mathcal{J}^2(\omega) = 0$ . Gradul de descreștere subunitară a funcției de coerență se datorește următoarelor efecte: zgomot mare din surse externe excitației considerate; erori de aproximare a funcțiilor care se procesează (digitalizare, corelații, analiză spectrală, etc.), comportarea sistemului este neliniară; semnalul de răspuns este cauzat de altă excitație decât cea considerată.

Eroarea normalizată  $\epsilon_H$  de estimare a funcției de transfer  $\hat{H}(\omega)$  se poate exprima [ 6 ] prin relația

$$\epsilon_H = \sqrt{\frac{1 - \mathcal{J}^2(\omega)}{\mathcal{J}^2(\omega) 2n_s}} \quad (6.63)$$

unde  $n_s$  este numărul de secvențe mediate.

## 7. APLICATII EXPERIMENTALE

### 7.1. Reprezentarea mișcărilor vibratorii ale unei structuri

În studiul dinamicii unei structuri complexe, datorită numărului mare de puncte care o definesc, este foarte greu de analizat mișcările vibratorii pe baza unor rezultate tabelare. Este necesar de a se analiza aceste mișcări pe baza unor imagini succesive ale structurii, care să dea o vedere de ansamblu asupra distribuției câmpului mișcărilor vibratorii. Prin aceasta se pot depista căile de transmitere a vibrațiilor în structură și forma modurilor naturale de vibrații.

#### 7.1.1. Algoritmul pentru reprezentarea grafică spațială a unei structuri

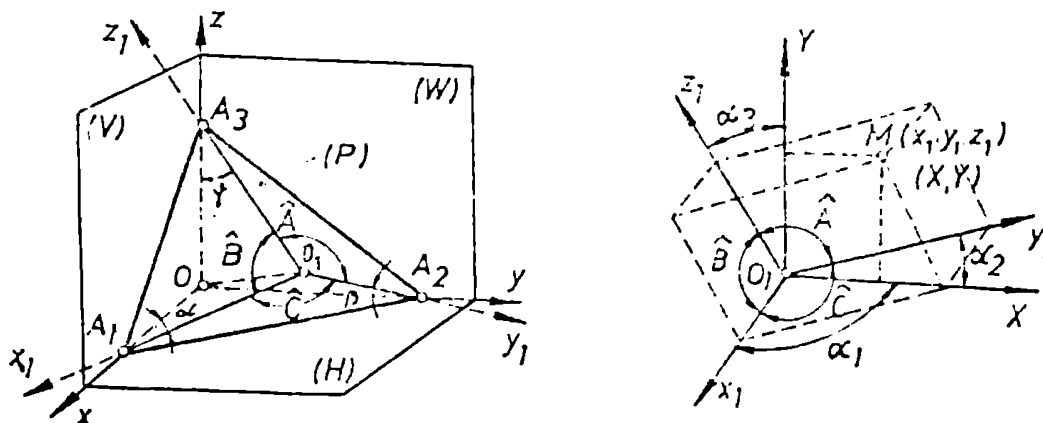


Fig.7.1

După cum se cunoaște, obiectul ce trebuie reprezentat axonometric se consideră raportat la un sistem de proiecție ortogonal (fig.7.1.a). Planul P pe care se proiectează obiectul după o direcție dată  $OO_1$ , se numește plan axonometric ( $P_{ax}$ ).

Planul axonometric ( $P_{ax}$ ) intersectează triedrul  $Oxyz$  după triunghiul axonometric  $A_1, A_2, A_3$ . Pentru proiecția axonometrică între coeficienții de reducere

$$C_x = \cos \alpha ; \quad C_y = \cos \beta ; \quad C_z = \cos \gamma \quad (7.1)$$

există relația



$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 2 \quad (7.2)$$

care asigură reprezentări axonometrice a imaginii în profunzime a obiectului reprezentat.

Din fig.7.1.a rezultă următoarele relații trigonometrice între unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  și unghiurile A, B, C în planul axonometric dintre axele  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$  și  $O_1z_1$

$$\begin{aligned} \cos A &= -\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \\ \cos B &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma \\ \cos C &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (7.4)$$

și

$$A + B + C = 360^\circ \quad (7.5)$$

de unde se pot explicita unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-\cos B \cdot \cos C}{\cos A}} \\ \beta &= \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-\cos A \cdot \cos C}{\cos B}} \\ \gamma &= \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-\cos A \cdot \cos B}{\cos C}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Deci, dacă se dau unghiurile A, B și C din planul axonometric, se pot determina coeficienții de reducere  $C_x$ ,  $C_y$  și  $C_z$ .

În cazul reprezentării axonometrice pe un display de calculator sau pe un plotter digital unghiurile A, B și C pot fi alese arbitrar, urmărindu-se obținerea unor imagini optime care să pună în evidență cât mai bine unele detalii ale mișcării obiectului (structurii).

Coordonatele X, Y ale unui punct M(fig.7.1.b) ale structurii se referă la un sistem  $O_1XY$  din planul de reprezentare al displayului calculatorului. Coordnatele aceluiasi punct față de sistemul axonometric  $O_1x_1y_1z_1$  sînt  $x_1y_1z_1$ . Cum ambele sisteme de

axe sînt conținute în planul axonometric, se poate scrie relația de transformare de axe

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [T_{ax}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

matricea  $[T_{ax}]$  avînd forma

$$[T_{ax}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

unde  $\alpha_1, \alpha_2$  și  $\alpha_3$  sînt unghiurile de poziționare în planul axonometric, ale axelor axonometrice față de axele displayului (fig. 7.1.b).

Deoarece  $x_1, y_1$  și  $z_1$  sînt proiecțiile coordonatelor reale  $x, y$  și  $z$  ale punctului  $M$ , aparținînd structurii din fig. 7.1.a rezultă

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [C_R] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

unde matricea  $[C_R]$  are forma

$$[C_R] = \begin{bmatrix} C_x & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_z \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

și relațiile de transformare a axelor

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [T_{ax}][C_R] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Deci cunoscînd coordonatele spațiale  $x, y$  și  $z$  ale unui punct  $M$  curent al structurii se pot determina coordonatele sale în planul de proiecție  $O_1XY$ .

Acest algoritm, pe care l-am conceput și publicat în lucrarea [124], s-a implementat în subrutina "3D-GF".

Ca date de intrare se dau unghiurile  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  și  $\alpha_3$ , pe care le fac între ele axele sistemelor  $O_1x_1y_1z_1$  și  $O_1XY$ . În continuare se calculează matricea  $[T_{ax}]$ .

Coefficienții de reducere se determină din relațiile (7.2) și (7.6) unghiurile A, B și C fiind date de relațiile

$$A = 90^\circ + \alpha_2 - \alpha_3; \quad C = \alpha_1 + \alpha_2; \quad B = 360^\circ - (A + C) \quad (7.12)$$

### 7.1.2. Reprezentarea distribuției mișcărilor vibratorii ale structurii

Vectorul de poziție în raport cu sistemul de axe Oxyz al punctului P curent al structurii în mișcare este de forma

$$\{x(t)\} = \{x_0\} + \{w(t)\} \quad (7.13)$$

unde  $\{x_0\}$  este vectorul de poziție al punctului P în repaus, deci

$$\{x_0\} = \{x, y, z\}^T \quad (7.14)$$

Iar  $\{w(t)\}$  este vectorul mișcărilor vibratorii care, pentru un regim de vibrații armonice la pulsația  $\omega$ , are forma

$$\{w(t)\} = [W_0] \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

$[W_0]$  este matricea amplitudinilor complexe și are forma,

$$\begin{bmatrix} W_{0x} \cos \alpha_x & W_{0x} \sin \alpha_x \\ W_{0y} \cos \alpha_y & W_{0y} \sin \alpha_y \\ W_{0z} \cos \alpha_z & W_{0z} \sin \alpha_z \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Unde  $W_{0x}$ ,  $W_{0y}$  și  $W_{0z}$ , și  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  și  $\alpha_z$ , sînt amplitudinile și respectiv fazele mișcărilor, după direcțiile Ox, Oy și Oz, măsurabile prin folosirea uneia din sistemele de măsură prezentate în fig. 6.7 sau fig. 6.9.

Pentru a scoate în evidență forma modurilor naturale de vibrații se pot reprezenta suprapuse, imagini instantanee ale structurii în mișcarea sa vibratorie la  $N_t$  intervale egale de timp  $t_k = \frac{T}{N_t} k$  ( $k = 0, 1, \dots, N_t$ ),  $T$  fiind perioada mișcării armonice  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Vectorul elongațiilor punctului  $P$  la momentul  $t_k$  va fi

$$\{x_k(t_k)\} = \{x_0\} + [W_0]\{S_k\} \quad (k = 0, 1, \dots, N_t) \quad (7.17)$$

unde vectorul  $\{S_k\}$  este de forma

$$\{S_k\} = \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{N_t}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{N_t}\right) \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

Tinând seama de relația de transformare (7.11), se poate trece la calculul coordonatelor instantanee ale punctului  $M$ , în planul axonometric, date prin vectorul

$$\{X_k\} = \{X_0\} + [T_0][W_0]\{S_k\} \quad (7.19)$$

unde vectorul  $\{X_0\}$  reprezintă vectorul punctului  $M$  în repaus

$$[X] = [T_{ax}][C_r]\{X_0\} \quad (7.20)$$

iar matricea

$$[T_0] = [T_{ax}][C_r] \quad (7.21)$$

Pentru un sistem de  $N$  puncte, care definesc mișcarea structurii, relația (7.19) devine

$$\{X_{ki}\} = \{X_{oi}\} + k_s [T_0][W_{oi}]\{S_k\} \quad (7.22)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

Coeficientul  $k_s$  s-a introdus pentru a putea amplifica voit nivelele de vibrații ale structurii în așa fel încît forma deformației dinamice a structurii sau forma modului să fie scoasă în

evidență cît mai bine. Pentru  $k_s = 0$  se reprezintă numai imaginea statică a structurii.

7.1.3. Determinarea experimentală a mișcărilor de corp rigid ale structurii

Există structuri sau unele porțiuni din ele, care în timpul mișcării vibratorii nu prezintă deformații semnificative și de aceea ele se consideră că execută mișcări de corp rigid. Distribuția mișcărilor vibratorii pe structură respectă legea cinematică dată prin vectorii  $\{w_i(t)\}$

$$\{w_i(t)\} = [w_{oi}] \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} = [B_i][w_c] \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

unde  $[w_{oi}]$  este matricea de forma (7.16) a amplitudinilor complexe ale punctului  $i$  curent al structurii  $[B_i]$  are forma

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, N).$$

$x_i, y_i$  și  $z_i$  sînt coordonatele geometrice ale punctului  $P_i$  în raport cu un sistem de referință fix  $Oxyz$ .  $[w_c] \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix}$  este vectorul legii de mișcare de corp rigid a structurii redusă într-un punct  $C$  al ei,  $[w_c]$  fiind matricea amplitudinilor complexe,

$$[w_c] = \begin{bmatrix} w_{cox} \cos \alpha_{cx} & w_{cox} \sin \alpha_{cx} \\ w_{coy} \cos \alpha_{cy} & w_{coy} \sin \alpha_{cy} \\ w_{coz} \cos \alpha_{cz} & w_{coz} \sin \alpha_{cz} \\ \varphi_{ox} \cos \alpha_{\varphi_x} & \varphi_{ox} \sin \alpha_{\varphi_x} \\ \varphi_{oy} \cos \alpha_{\varphi_y} & \varphi_{oy} \sin \alpha_{\varphi_y} \\ \varphi_{oz} \cos \alpha_{\varphi_z} & \varphi_{oz} \sin \alpha_{\varphi_z} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

$W_{cox}$ ,  $W_{coy}$  și  $W_{coz}$  sînt amplitudinile mișcărilor vibratorii ale punctului C după axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ , iar  $\alpha_{cx}$ ,  $\alpha_{cy}$  și  $\alpha_{cz}$  sînt fazele acestor mișcări  $\varphi_{ox}$ ,  $\varphi_{oy}$  și  $\varphi_{oz}$  sînt legile de rotație ale structurii, iar  $\alpha_{\varphi_x}$ ,  $\alpha_{\varphi_y}$  și  $\alpha_{\varphi_z}$  sînt fazele lor.

Din (7.23) rezultă legea de distribuție a amplitudinilor complexe

$$[W_{oi}] = [B_i] [W_c] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7.26)$$

Dacă se cunosc matricile  $[W_{oi}]$  ale căror elemente se determină prin măsurători vibrometrice în  $N$  puncte ale structurii matricea amplitudinilor complexe de corp rigid  $[W_c]$  se poate determina pe baza metodei celor mai mici pătrate

$$[W_c] = \left( \sum_{i=1}^N [B_i]^T [B_i] \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N [B_i]^T [W_{oi}] \right) \quad (7.27)$$

Avînd cunoscute acum matricea  $[W_c]$ , din relația (7.26) va rezulta matricea  $[W_{oi}]$  corespunzătoare oricărui punct  $M_i$  al structurii.

### 7.2. Testarea la vibrații, pe stand de laborator, a pale- telor de agregate de vînt cu ax orizontal

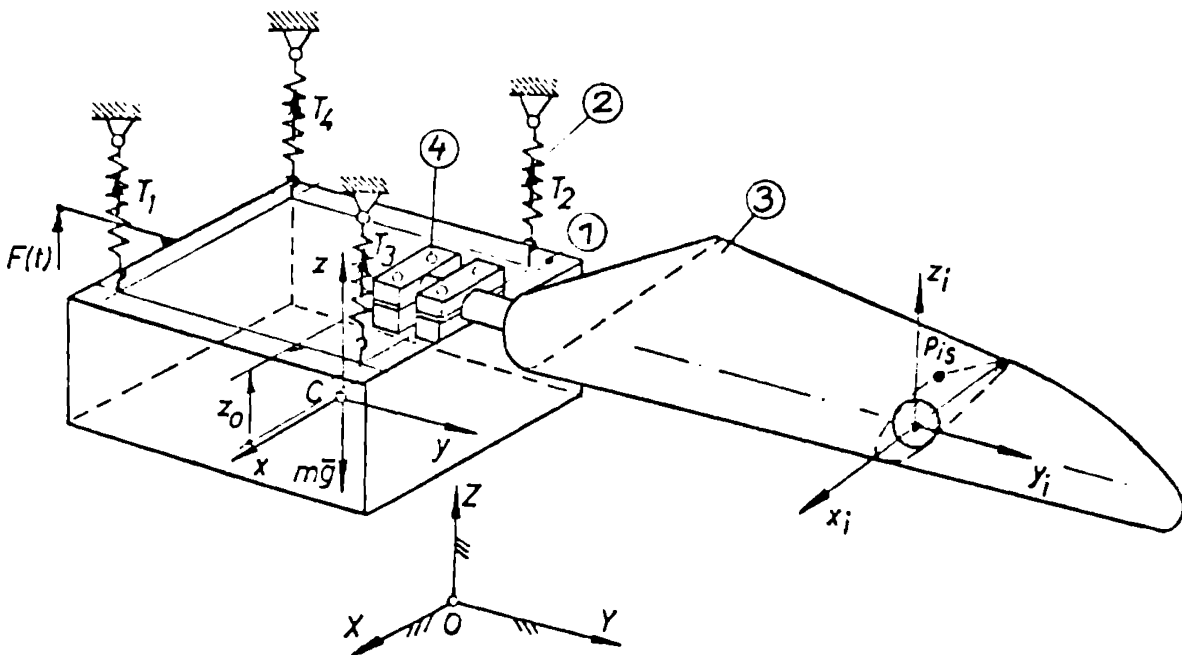


Fig.7.2

Paleta unui agregat de vânt cu ax orizontal este formată dintr-o structură complexă de rezistență acoperită cu o înveli-toare subțire. Scopul urmărit este de a se obține o structură rezistentă și ușoară, care să nu introducă solicitări inerțiale mari asupra rotorului agregatului.

Structura complexă a paletei crează dificultăți mari la calculul dinamicii sale. Dacă matricea maselor poate fi calculată aproximativ ușor, pe baza documentației de execuție a paletei, matricea de rigiditate este extrem de greu de calculat, iar matricea de amortizare nu poate fi obținută pe cale analitică. Un calcul de element finit comportă un număr extrem de mare de elemente, de diverse forme, cu conexiuni multiple. Ordinul sistemului de ecuații diferențiale care descriu mișcarea paletei fiind înalt se obține un număr foarte mare de valori proprii ale sistemului. Dar spectrul de excitație al unui agregat de vânt este situat în domeniul 0-30 Hz, în acest domeniu aflându-se doar câteva moduri naturale de vibrații.

La aripi de avioane se folosesc calcule simplificate pe baza metodei maselor concentrate și a funcțiilor de influență (Green) approximate prin polinoame ortogonale [11]. Paleta de agregat de vânt are o structură de tip bară torsionată, ceea ce complică mai mult alegerea modelului de calcul. Se impune deci o verificare experimentală a frecvențelor și formeii modurilor naturale de vibrații ale paletei, în scopul verificării modelului matematic adoptat al structurii sau determinării prin identificare dinamică a modelului fizic real al paletei.

Standul din fig.7.2, pe care l-am conceput și realizat în cadrul unui contract de cercetare, permite încercarea la vibrații a paletei și o analiză dinamică complexă, din care se pot trage concluzii importante privind comportarea paletei în exploatare [125, 126].

Standul se compune dintr-un corp rigid 1, de masă  $m_0$ , suspendat prin patru elemente elastice 2. Paleta 3 este încastrată în corpul rigid 1 prin intermediul bridelor 4. Rigiditățile elementelor elastice 2, de suspensie a ansamblului corp rigid-paletă elastică, au valori foarte mici, în așa fel încât ansamblul celor două substructuri cuplate (1 și 2) devine izolat, (free-free).

7.2.1. Ecuatiile dinamice ale paletei montate pe stand.

In cazul cuplării a două substructuri; rigidă (corpul 1 - fig.7.2) și a uneia elastice, (paleta 3), sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea structurii cuplate, discretizată prin mase concentrate în N puncte de reducere  $P_1$ , are forma

$$\begin{aligned} [M_o] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_c \\ \vdots \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [D_x]^T [M] \{\ddot{u}\} &= [S_x] \{F_e\} \\ [M] \{\ddot{u}\} + [M] [D_x] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_c \\ \vdots \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (7.28)$$

deduse în paragraful 5.1.2.2 (sistemul 5.92).

Vectorii  $\{w_c\}$  și  $\{\theta\}$  reprezintă legile de mișcare ale corpului rigid.  $\{w_c\}$  este vectorul legilor de mișcare ale punctului C al corpului rigid, ce coincide cu centrul masei structurii cuplate (corp rigid - paletă) considerată nedeformată.  $\{\theta\}$  reprezintă vectorul legilor de rotație ale corpului rigid.  $\{u\}$  este vectorul legilor de deformație

$$\{u\} = \left\{ \{u_1\}^T, \{u_2\}^T, \dots, \{u_N\}^T \right\}^T \quad (7.29)$$

$\{u_1\}$  fiind vectorul de deformație în punctul  $P_1$ , aparținând paletei.

$\{F_e\}$  este vectorul de excitație aplicată în punctul E al corpului rigid.

S-au făcut următoarele notații

$$[M_o] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}; \quad [M] = \text{diag}[m_1] \\ [m] = \text{diag. } m \quad (7.30)$$

$$[S_x] = \begin{bmatrix} [I] \\ [R_e]^T \end{bmatrix}; \quad [D_x] = \begin{bmatrix} [I] & [R_1] \\ [I] & [R_2] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [R_N] \end{bmatrix}$$



unde  $m$  este masa structurii cuplate  $m_1$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sînt masele concentrate în punctele  $P_1$ .

[12] este matricea momentelor de inerție ale structurii în raport cu sistemul de axe  $Cxyz$ ,  $[R_1]$  și  $[R_e]$  sînt matricile de poziție ale punctelor  $P_1$  și respectiv  $E$ , în raport cu punctul  $C$ .

$[I]$  este matricea unitate ( $3 \times 3$ ).

Am arătat în [12] că deși se neglijează efectul forțelor de legătură  $T_1 - T_4$  din elementele elastice 2, acestea avînd rigidități de valori foarte mici, datorită dezaxării în timpul mișcării dintre rezultanta componentelor statice ale forțelor  $T_1 \dots T_4$  și forța gravitațională  $-mg$  cu care acestea își fac echilibrul, apare un cuplu dinamic dat prin vectorul

$$\{M_{c_a}\} = -mg z_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\theta\} \quad (7.31)$$

care tinde să se opună rotirii  $\{\theta\}$  a structurii.  $z_0$  este cota planului format de punctele  $A_1, \dots, A_4$  (fig. 7.2) de ancorare a corpului rigid față de centrul maselor  $C$ . Astfel, primul sistem din (7.28) devine

$$[M_0] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [D_x]^T [M] \{\ddot{u}\} + [K_r] \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = [S_x] \{F_e\} \quad (7.32)$$

unde

$$[K_r] = mg z_0 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Dacă  $z_0$  are valori mici  $[K_r] \rightarrow [0]$  și sistemul de ecuații diferențiale ale structurii cuplate este (7.28). În acest caz din (7.28) se poate elimina vectorul  $\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix}$ , rezultînd sistemul

de ecuații diferențiale de deformație dinamică a structurii paralelei

$$[M_1] \{\ddot{u}\} + [C_1] \{\dot{u}\} + [K_1] \{u\} = \{F_u\} \quad (7.35)$$

unde

$$\begin{aligned}
 [M_1] &= m([I] - [D_x][M_0]^{-1}[D_x]^T[M]) \\
 [C_1] &= m[M]^{-1}[C]; \quad [K_1] = m[M]^{-1}[K] \\
 \{F_u\} &= -m[D_x][M_0]^{-1}[S_x]\{F_e\}
 \end{aligned}
 \tag{7.36}$$

S-a eliminat astfel din studiu mișcarea de corp rigid dată prin vectorul  $\begin{Bmatrix} W \\ \dots \\ \theta \end{Bmatrix}$ .

Cum s-a mai arătat la paragraful 5.1.2.2, excitația structurii este echivalentă cu a unei excitații multipunct, deși ea se face într-un singur punct E al corpului rigid. Există astfel certitudinea că la testarea paletii pe stand nu pot fi omise unele moduri, cum se întâmplă la excitarea într-un singur punct. Dacă corpul rigid 1 (fig.7.2) are dimensiuni mari și deci elementele matricii  $[M_0]$  au valori mult mai mari ca ale matricii  $[M]$ , va rezulta inegalitatea (5.96); iar sistemul (7.35) devine

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -m[D_x][M_0]^{-1}[S_x]\{F_e\}
 \tag{7.37}$$

de unde sistemul omogen al vibrațiilor libere are forma

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\}
 \tag{7.38}$$

care este identic cu sistemul omogen al dinamicii paletii încadrate într-un suport fix. Deci dacă corpul rigid al standului este masiv, atunci masa  $m$  și momentele de inerție cuprinse în matricea  $[J]$  vor avea valori mari, iar pulsațiile modurilor naturale de vibrații ale paletii montată pe stand se vor apropia foarte mult de cele ale paletii încadrate.

### 7.2.2. Alegerea punctelor de reducere a maselor

Pentru domeniul frecvențelor joase, domeniu ce prezintă interes pentru studiul dinamicii paletii, forma deformată dinamică a paletii este de bară cu secțiune transversală  $S$  <sup>rigidă</sup> (fig.7.3) De aceea, mișcarea paletii poate fi studiată prin mișcările secțiunilor sale. În planul secțiunii  $S$  mișcarea ei se poate studia

cu ajutorul vectorului

$$\{U_s\} = \begin{Bmatrix} U_{1s} \\ U_{2s} \\ U_{3s} \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

$U_{1s}$  și  $U_{2s}$  sînt deplasările de-a lungul axei  $O_{1s}z'_s$  a sistemului  $O_{1s}x'_sy'_sz'_s$  legat de secțiunea paletelor, unde  $O_{1s}$  este punctul de intersecție al axei deformate a paletelor cu secțiunea  $S$ . În repaus  $O_{1s}$  coincide cu  $O_{0s}$  care este originea sistemului de axe  $O_{0s}x_sy_sz_s$  al secțiunii  $S$ , ce este paralel cu  $Cxyz$ .  $U_{3s}$  este deplasarea secțiunii după direcția  $O_{1s}x'_s$ . Paleta fiind o bară torsionată secțiunile sînt rotite între ele, astfel încît sistemul  $O_{1s}x'_sy'_sz'_s$  este rotit cu unghiul  $\beta_s$  în jurul axei  $O_{1s}y'_s$ , față de sistemul  $O_{0s}x_sy_sz_s$ , axele  $O_{1s}y'_s$  și  $O_{0s}y_s$  fiind paralele. Dacă unghiurile  $\beta_s$  ale secțiunilor, ar fi egale între ele, atunci deplasările din deformații ale secțiunii s-ar executa numai după axa  $z'_s$ , deoarece bara execută numai deformații de încovoiere după axele  $O_{1s}x'_s$ , rigiditatea la încovoiere după o axă perpendiculară fiind foarte mare. Deoarece unghiurile  $\beta_s$  sînt diferite cumulările de deformații ale secțiunilor produc deformații  $U_{3s}$  și după axa  $Ox'_s$ .

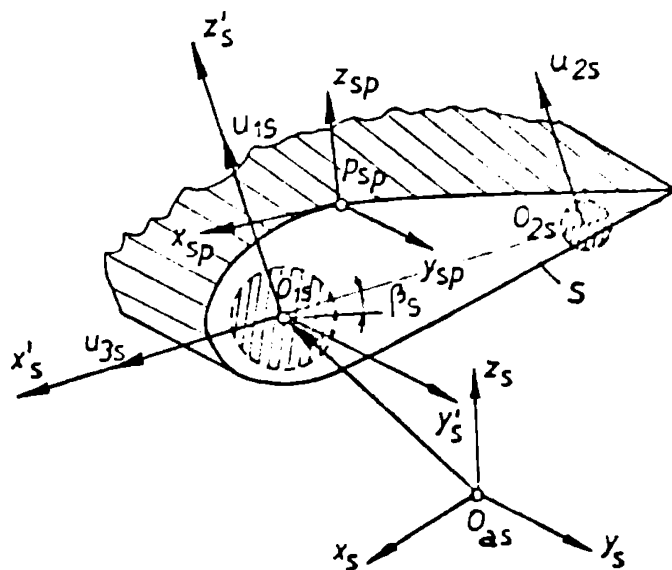


Fig.7.3

Vectorul de deformație  $\{U\}$  al paletelor va fi format din  $N_g$  perechi de subvectori  $\{U_s^{(1)}\}, \{U_s^{(2)}\}$  ( $s = 1, 2, \dots, N_g$ )

$$\{U\} = \left\{ \{U_1^{(1)}\}^T, \{U_1^{(2)}\}^T \dots \{U_s^{(1)}\}, \{U_s^{(2)}\} \dots \right\}^T \quad (7.40)$$

$\{U_s^{(1)}\}$  și  $\{U_{2s}^{(2)}\}$  sînt vectorii de deformație în punctele  $O_{1s}$  și  $O_{2s}$ . Ei sînt raportați la sistemul de axe  $O_{0s}x_3y_3z_3$  și pot fi exprimați în funcție de deformațiile  $U_{1s}$ ,  $U_{2s}$  și  $U_{3s}$ , care dau legea de deformație a secțiunii S, prin relațiile de transformare

$$\begin{cases} U_s^{(1)} \\ U_s^{(2)} \end{cases} = [T_s] \{U_s\} \quad (s = 1, 2, \dots, N_s) \quad (7.41)$$

unde matricea de transformare  $[T_s]$  va avea forma

$$[T_s] = \begin{bmatrix} \sin \beta_s & 0 & \cos \beta_s \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_s & 0 & -\sin \beta_s \\ 0 & \sin \beta_s & \cos \beta_s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_s & -\sin \beta_s \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

(s = 1, 2, ..., N<sub>s</sub>)

Legile de deformație ale palatei sînt date de un vector  $\{U_d\}$ , format din  $N_s$  vectori  $\{U_s\}$ .

$$\{U_d\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_2 \\ \dots \\ U_s \\ \dots \\ U_{N_s} \end{Bmatrix} \quad (7.43)$$

Vectorul de deformație  $\{U\}$  ( $2N_s \times 1$ ) poate fi exprimat în funcție de vectorul  $\{U_d\}$  ( $N_s \times 1$ ) prin relația matriceală

$$\{U\} = [T_d]\{U_d\} \quad (7.44)$$

unde  $[T_d]$  este o matrice  $(2N_s \times N_s)$  formată din matricile  $[T_s]$

$$[T_d] = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [T_2] & [0] & \dots \\ & & [0] & [T_3] & [0] \\ [0] & & & [0] & [T_{N_s}] \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Prin aceste transformări sistemul (7.35) devine

$$[M_d]\{\ddot{U}_d\} + [C_d]\{\dot{U}_d\} + [K_d]\{U_d\} = \{F_d\} \quad (7.46)$$

unde

$$[M_d] = [T_d]^T [M_1] [T_d] ; \quad [C_d] = [T_d]^T [C_1] [T_d] \quad (7.47)$$

$$[K_d] = [T_d]^T [K_1] [T_d] ; \quad \{F_d\} = [T_d]^T \{F_u\}$$

Elementele vectorului  $\{U_d\}$  se obțin prin măsurători vibrometrice și determinarea distribuției mișcărilor vibratorii ale secțiunilor prin care se definește mișcarea paletelor. Mișcarea unei secțiuni a paletelor se determină prin măsurarea vibrațiilor în mai multe puncte  $P_{sp}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) (fig. 7.2) pe coarda profilului secțiunii, cu un grup de trei traductori fixați după axele sistemului  $P_{sp}x_{sp}y_{sp}z_{sp}$ . Cunoșcând poziția unghiulară a sistemului  $P_{sp}x_{sp}y_{sp}z_{sp}$  față de sistemul  $O_{as}x_s y_s z_s$  se determină, folosind metoda celor mai mici pătrate (7.1.3), vectorii  $\{w_s^{(1)}\}$  și  $\{w_s^{(2)}\}$  ai mișcărilor absolute ale punctelor  $O_{1s}$  și  $O_{2s}^{corp}$  au forma

$$\{w_s^{(1)}\} = \{w_c\} + [R_s^{(1)}]\{\theta\} + \{U_s^{(1)}\} \quad (7.48)$$

$$\{w_s^{(2)}\} = \{w_c\} + [R_s^{(2)}]\{\theta\} + \{U_s^{(2)}\}$$

unde:  $\{w_c\}$  este vectorul legii de mișcare al centrului C al masei corpului rigid;  $\{\theta\}$  este vectorul legilor de rotație ale corpului rigid;  $[R_s^{(1)}]$  și  $[R_s^{(2)}]$  sînt matricile de poziție, în

raport cu sistemul de axe Cxyz, ale punctelor  $O_{1s}$  și  $O_{2s}$ . Vectorii  $\{w_c\}$  și  $\{\theta\}$  se determină folosind de asemenea metoda celor mai mici pătrate, pe baza legilor de mișcare ale unor puncte de pe corpul rigid, măsurate cu un grup de trei traductori. Din (7.48) se determină vectorii de deformare  $\{U_s^{(1)}\}$  și  $\{U_s^{(2)}\}$

Avînd cunoscute unghiurile  $\beta_s$  de instalare a secțiunilor, se pot determina matricile de transformare  $[T_s]$  și vectorii  $\{U_s\}$

$$\{U_s\} = ([T_s]^T [T_s])^{-1} [T_s]^T \begin{Bmatrix} U_s^{(1)} \\ U_s^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (7.49)$$

Vectorul de excitație  $\{F_d\}$  are forma

$$\{F_d\} = -m [T_d]^T [D_x] [M_o] [S_x] \{F_e\} \quad (7.50)$$

La o excitație în punctul E după direcția Oz cu o forță  $\bar{F}_e$  de amplitudine  $F_o$ , vectorul de excitație  $F_d$  va fi de forma

$$\{F_d\} = -m [T_d]^T [D_x] [M_o] [S_x] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} F_o e^{j\omega t} \quad (7.51)$$

Amplitudinea  $F_o$ , masa structurii  $m$  și toate elementele matricilor  $[T_d]$ ,  $[D_x]$ ,  $[M_o]$  și  $[S_x]$ , sînt cunoscute, deci vectorul de excitație este cunoscut. De asemenea este cunoscut vectorul răspunsului sistemului (7.47), care devine astfel identificabil.

Identificarea se poate face prin una din metodele prezentate în capitolul 5.

### 7.2.3. Programul experimental de testare la vibrații a paletei

În fig.7.4 se prezintă o vedere de ansamblu a ștandului de testare la vibrații a paletelor de agregat de vînt. Se poate observa paleta incastrată în corpul rigid, care este suspendat de un cadru prin intermediul a patru elemente elastice, din tub de cauciuc.

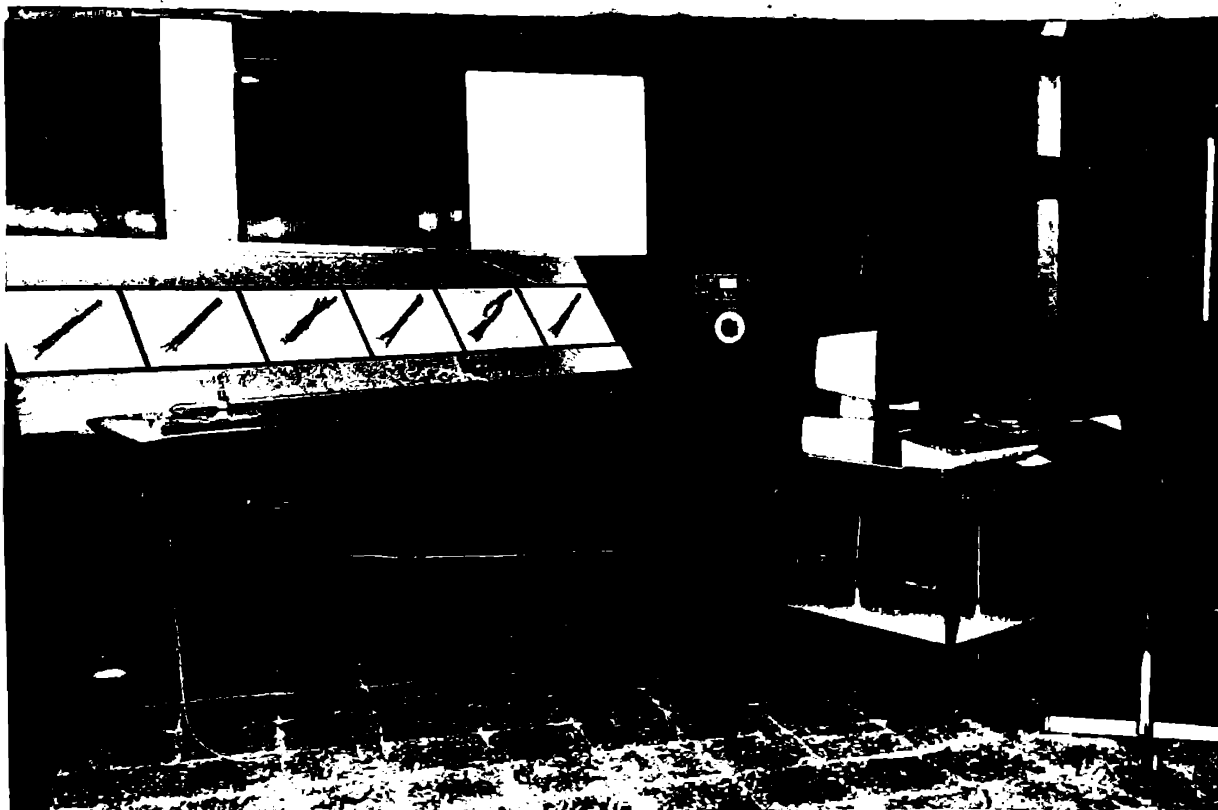


Fig.7.4

Pentru alegerea coordonatelor care definesc mișcările vibratorii ale paletelor se reprezintă spațial deformațiile dinamice ale paletelor, la frecvențele modurilor naturale de vibrații care intră în domeniul de frecvență al testului. Deoarece spectrul sarcinilor perturbatoare care lucrează asupra paletelor în timpul funcționării agregatului sînt în domeniul 0-30 Hz domeniul de frecvență al testului s-a ales 0-55 Hz, domeniul în care se consideră că mișcările vibratorii ale paletelor sînt de bară, cu secțiune transversală rigidă.

Un rol important în obținerea unor rezultate corecte este precizia cu care sînt determinate coordonatele punctelor structurii paletelor, care are o formă complexă torsionată, secțiunile fiind rotite cu unghiurile  $\beta_s$ . Dificultățile tehnologice de realizare a paletelor fac ca profilele și unghiurile  $\beta_s$  să difere uneori mult față de documentația de execuție. În scopul determinării profilelor secțiunilor am conceput o metodă de verificare, prin traductor de măsură și prelucrare pe calculator a informațiilor date de traductor, a profilului într-o secțiune oarecare a paletelor. Programul de calcul numit "PROFIL" dă cu exactitate coordonatele punctelor, egal distanțate pe coarda profilului în

asa fel incit folosind subrutina grafica "3D-GF" se poate reprezenta imaginea riglată a paletii. Metoda pe care am conceput-o da rezultate foarte bune, se poate aplica și la alte suprafețe spațiale. Fiind originală, deci brevetabilă, detalii ale metodei nu sînt prezentate în prezenta teză.

Aplicînd această metodă, în figura 7.5, a și b sînt prezentate imaginile spațiale a două tipuri de palete testate pe ștand; a) paletă din polister armat cu fibre de sticlă și b) paletă metalică, schelet de rezistență și o învelitoare subțire din tablă. Se pot observa imagini foarte clare cu scoaterea în evidență a formelor torsionate.

Pentru determinarea masei paletii, a pozițiilor centrelor maselor paletii și a întregii structuri cuplate, ștandul este prevăzut cu un dispozitiv de măsurare a tensiunilor  $T_1-T_4$  din elementele elastice, prin care structura corp rigid-paletă este suspendată de cadrul ștandului. Cunoșcînd valorile celor patru tensiuni, se determină din condițiile de echilibru static masa totală  $m$  a structurii cuplate și poziția centrului masei  $c$  al structurii, deci originea sistemului de axe  $Cxyz$ .

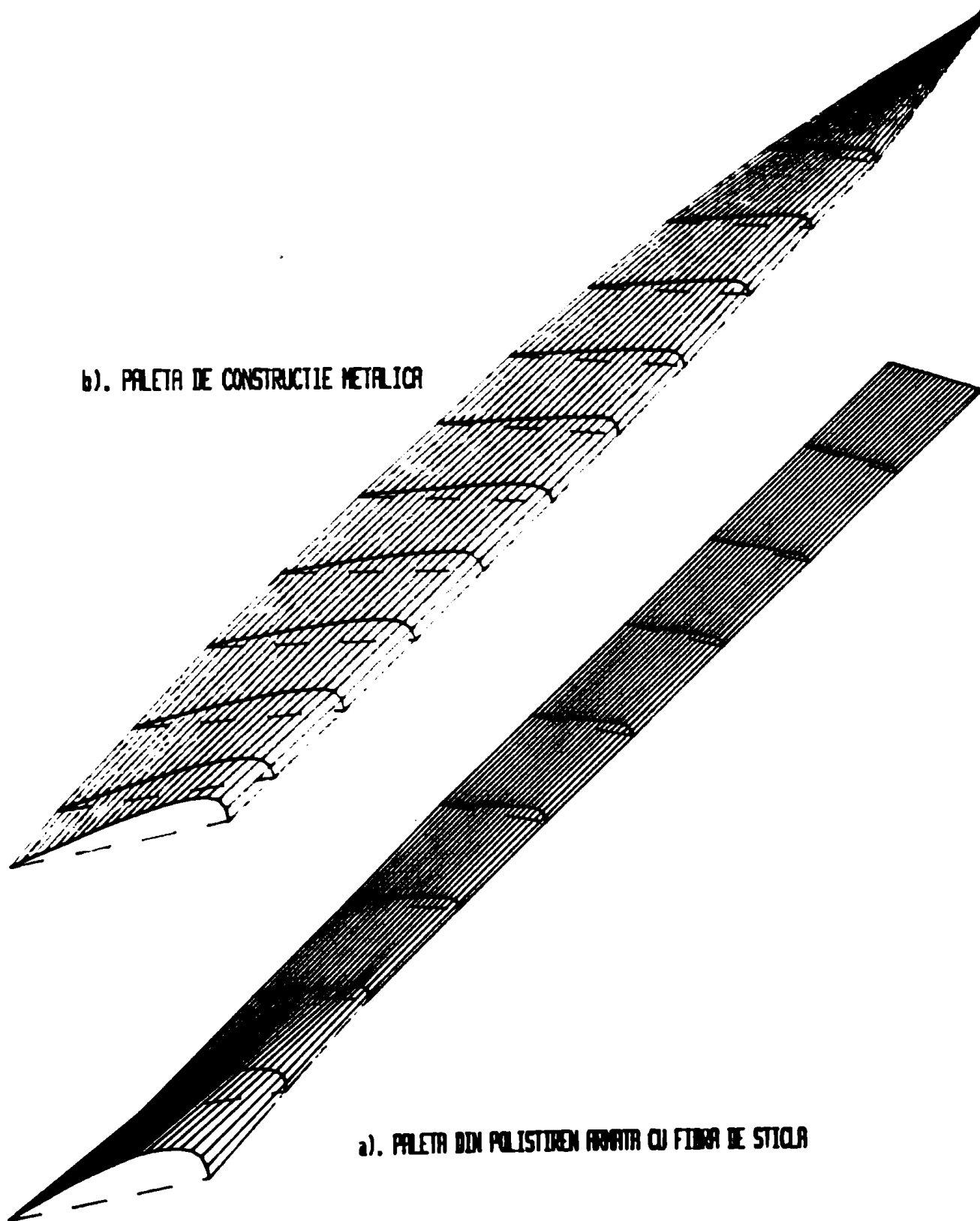
Adăugînd punctelor structurii mișcările vibratorii (conform paragrafului 7.1.2), se pot obține imaginile deformațiilor dinamice la o anumită mișcare armonică la o frecvență oarecare sau la o frecvență proprie a unui mod natural de vibrație (forma modului natural de vibrație).

În figurile 7.6 sînt prezentate deformatiile dinamice ale paletii din polisteren armate cu fibră de sticlă pentru primele patru moduri naturale de vibrații, de corp elastic ale paletii montate pe ștand. Parametrii modali ai structurii au fost determinați prin metoda prelucrării în domeniul frecvenței a răspunsului la impuls. Rezultatele prelucrării răspunsului după algoritmul "C-FIT" prezentat la paragraful 4.1.1 sînt prezentate în figurile 4.5.1.

Corespunzător acestor moduri în figurile 7.6 sînt prezentate deformațiile dinamice, prin suprapunerea a patru imagini, reprezentate prin culori diferite, la fracțiunile de timp  $t_i = \frac{1}{4}T$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), ale perioadei  $T$ .

În figurile 7.7 sînt reprezentate deformatiile dinamice ale paletii metalice pentru primele două moduri naturale de corp



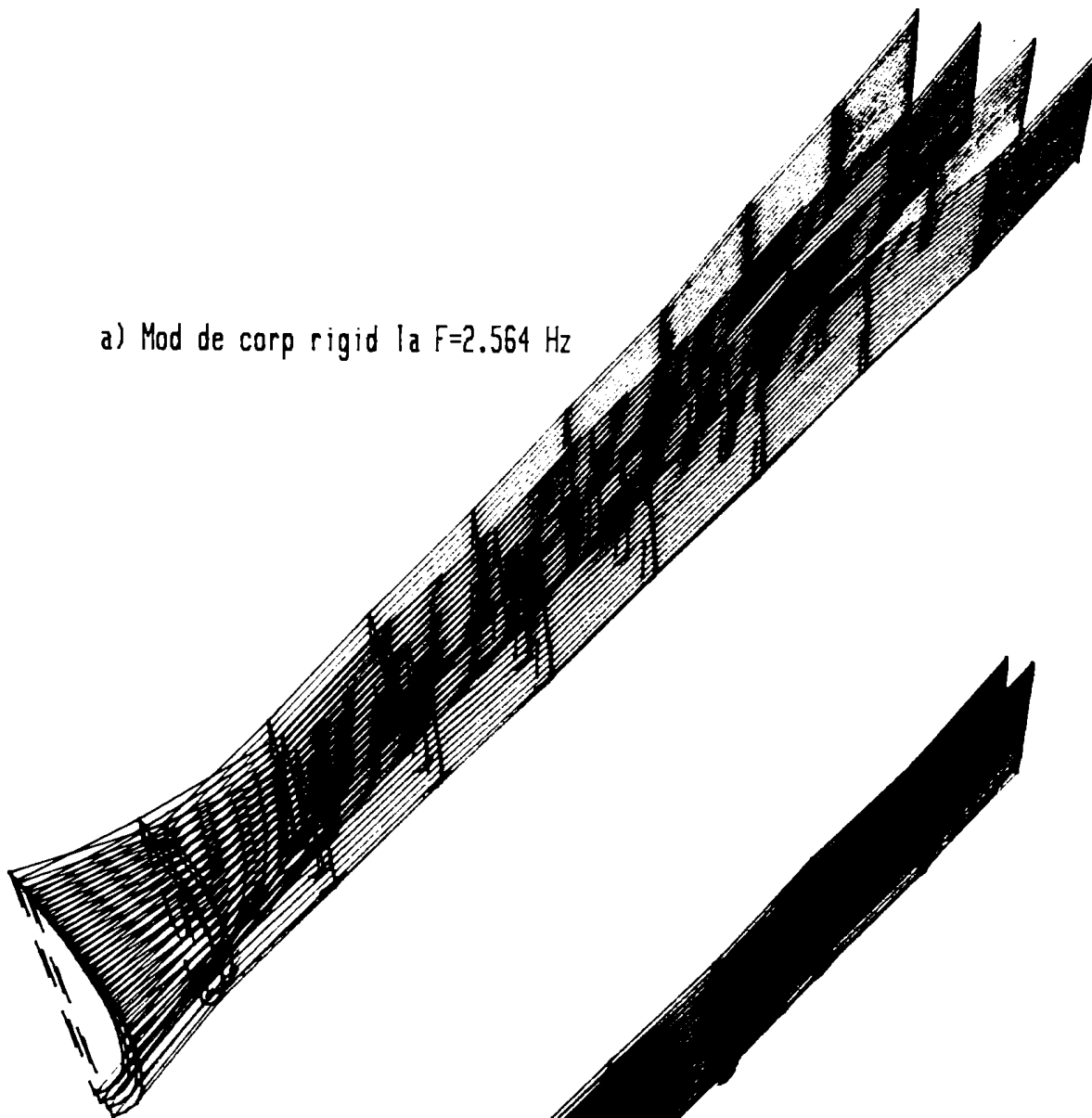


**b). PALETA DE CONSTRUCTIE METALICA**

**a). PALETA DIN POLISTIREN ARMATA CU FIBRA DE STICLA**

*Fig. 7.5*

a) Mod de corp rigid la  $F=2.564$  Hz



b) Mod de corp rigid la  $F=4.6$  Hz

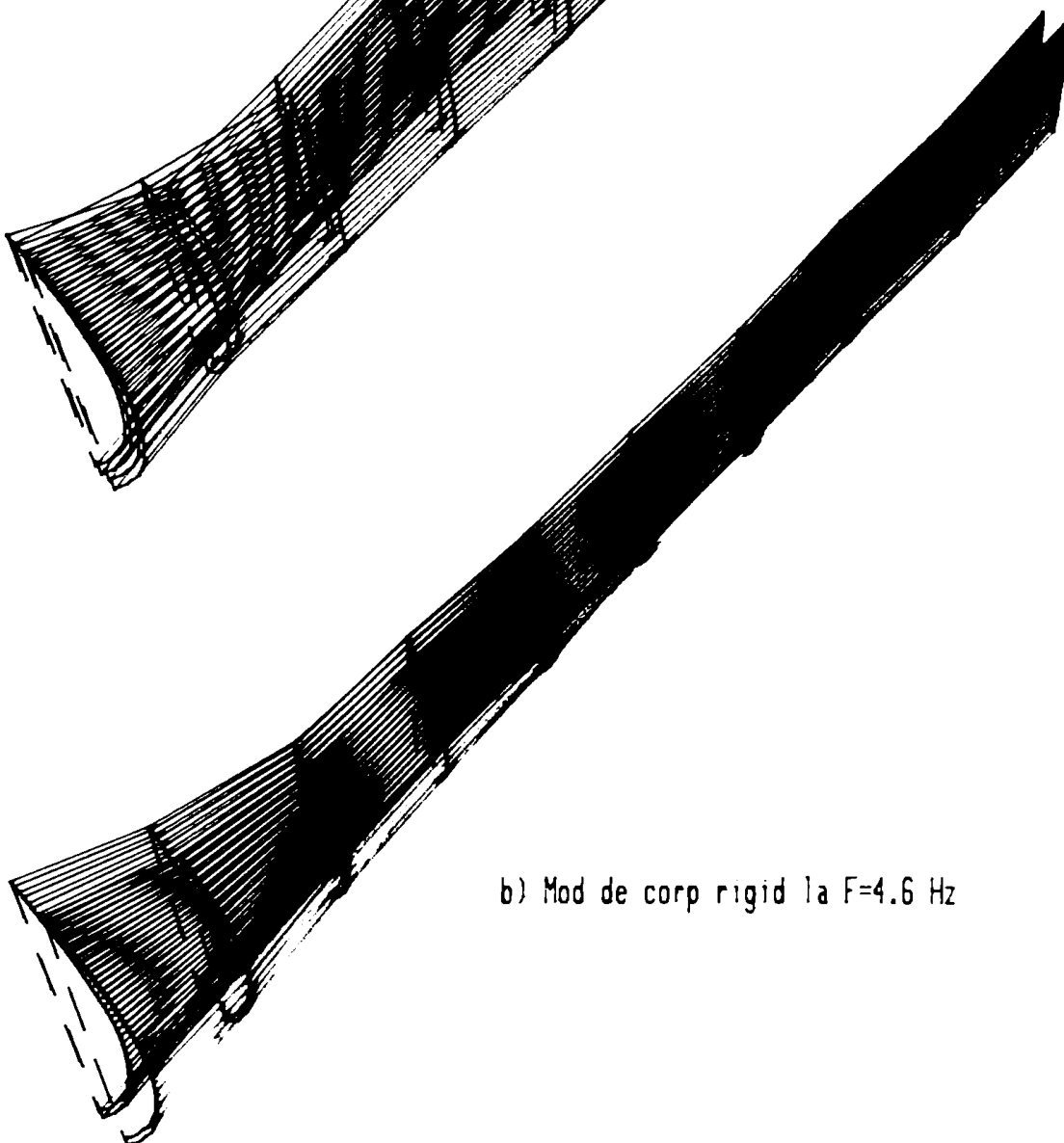
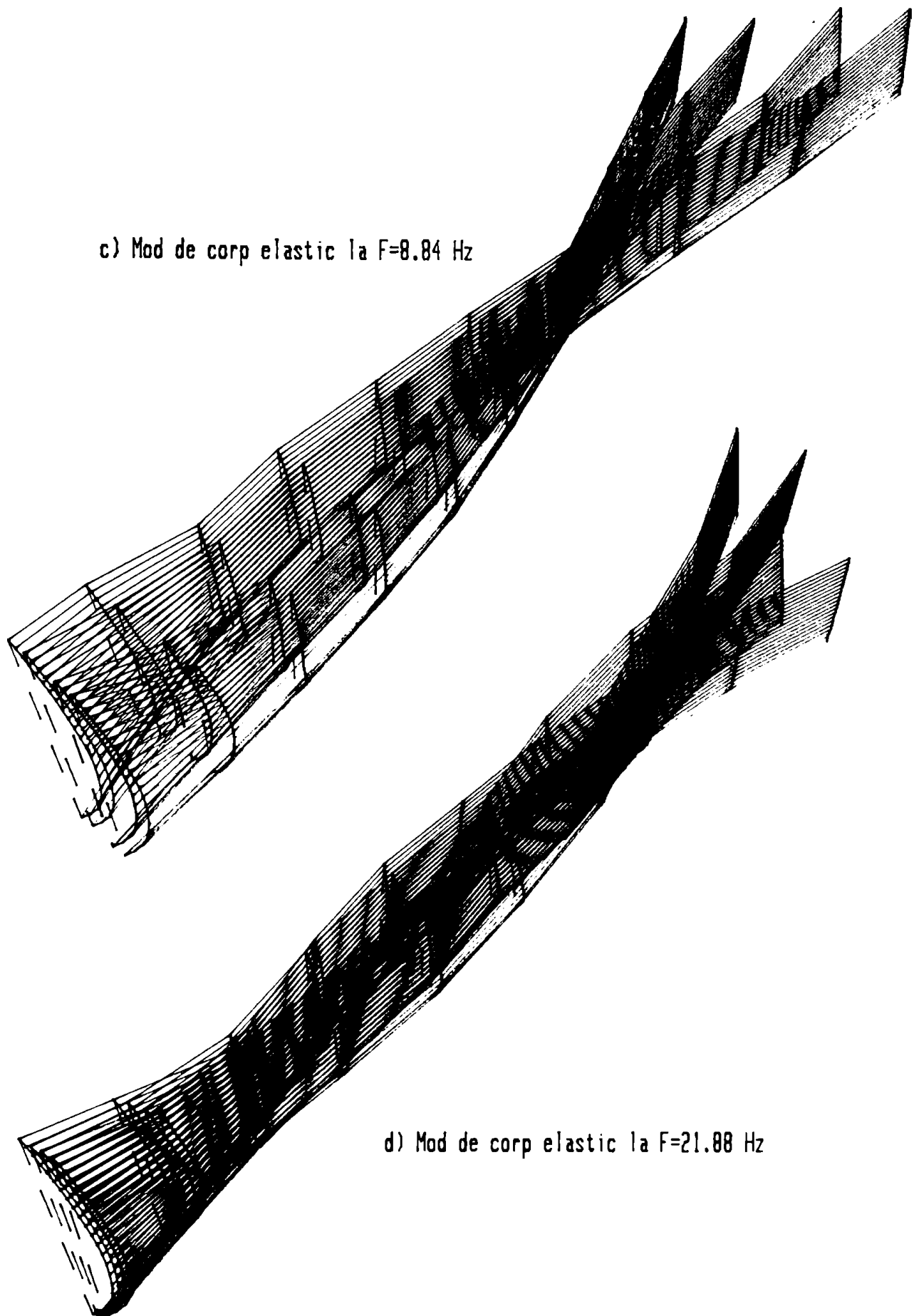


Fig7.6 PALETA DE POLISTER ARMAT CU FIBRA DE STICLA

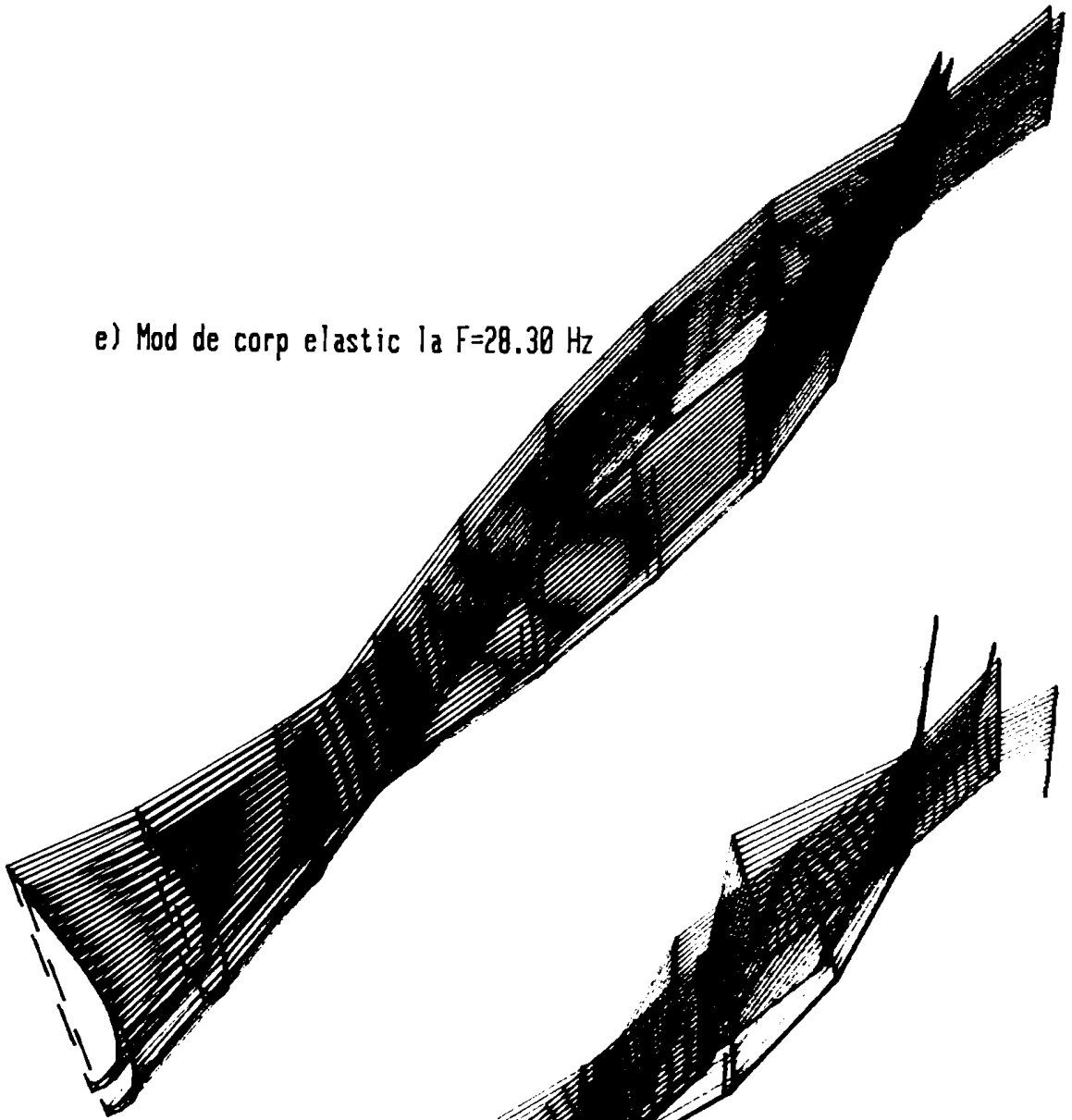


c) Mod de corp elastic la  $F=8.84$  Hz

d) Mod de corp elastic la  $F=21.88$  Hz

Fig.7.6 PALETA DE POLISTER ARMAT CU FIBRA DE STICLA

e) Mod de corp elastic la  $F=28.30$  Hz



f) Mod de corp elastic la  $F=53.96$  Hz

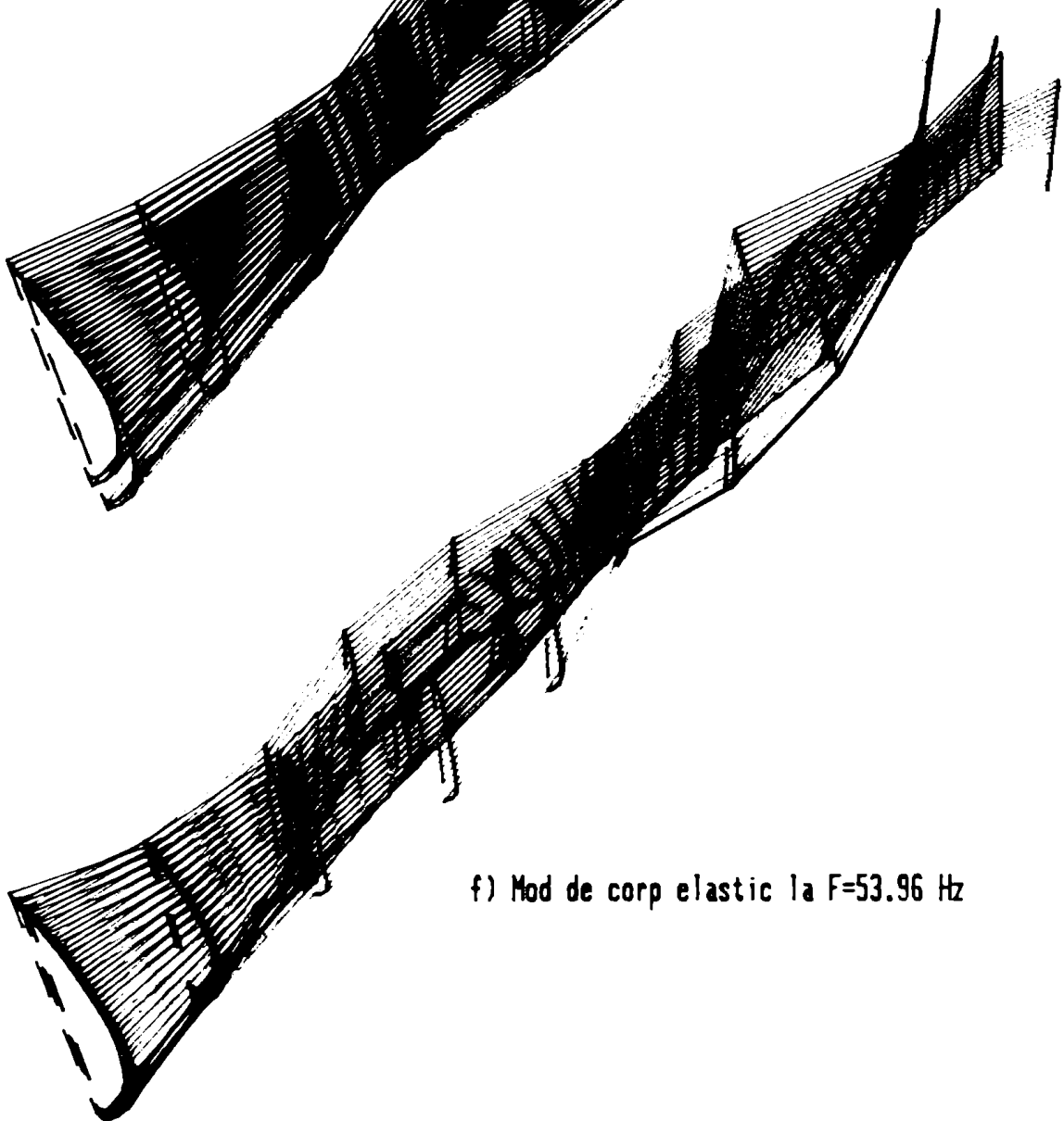
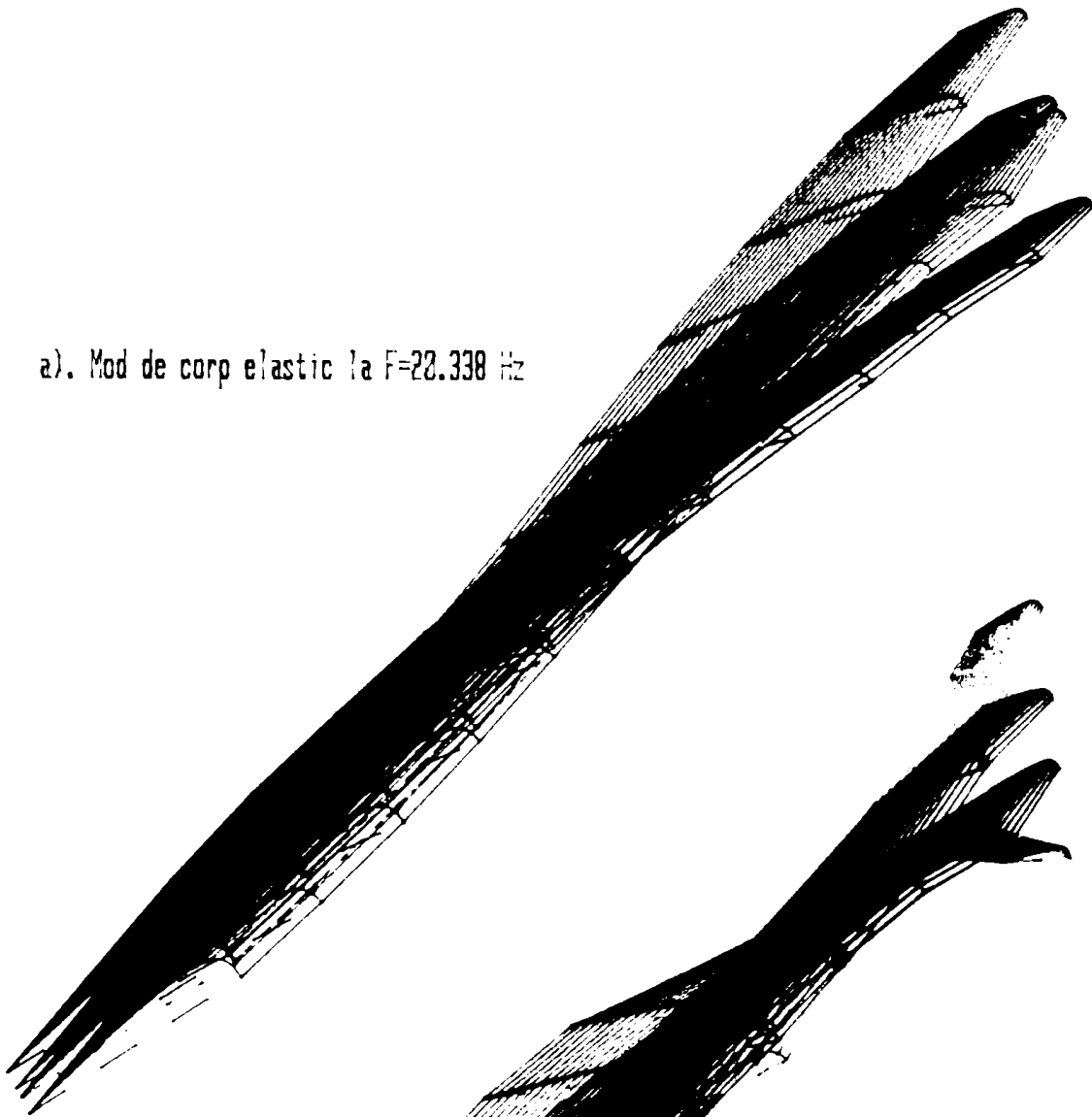


Fig.7.6 PALETA DE POLISTER ARMAT CU FIBRA DE STICLA

a). Mod de corp elastic la  $F=22.338$  Hz



b). Mod de corp elastic la  $F=45.78$  Hz

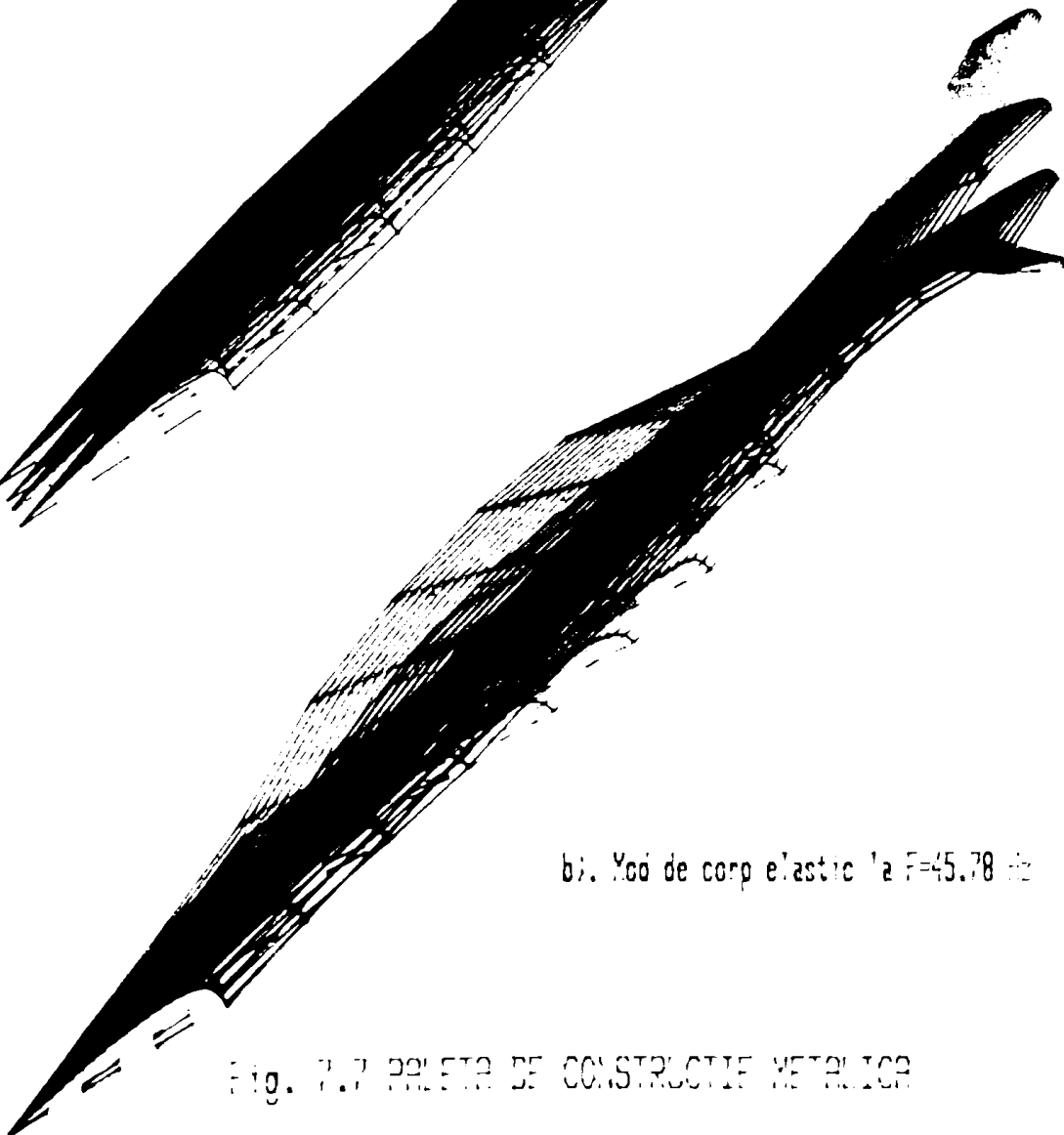


Fig. 7.7 PALETA DE CONSTRUCȚIE METALICĂ

| #P | Fr [Hz] | Eta    | Ur    | Vr     |
|----|---------|--------|-------|--------|
| 1  | 20.3707 | .00254 | -.050 | .133   |
| 2  | 20.3715 | .00249 | .021  | .192   |
| 3  | 20.3714 | .00249 | -.285 | -1.908 |

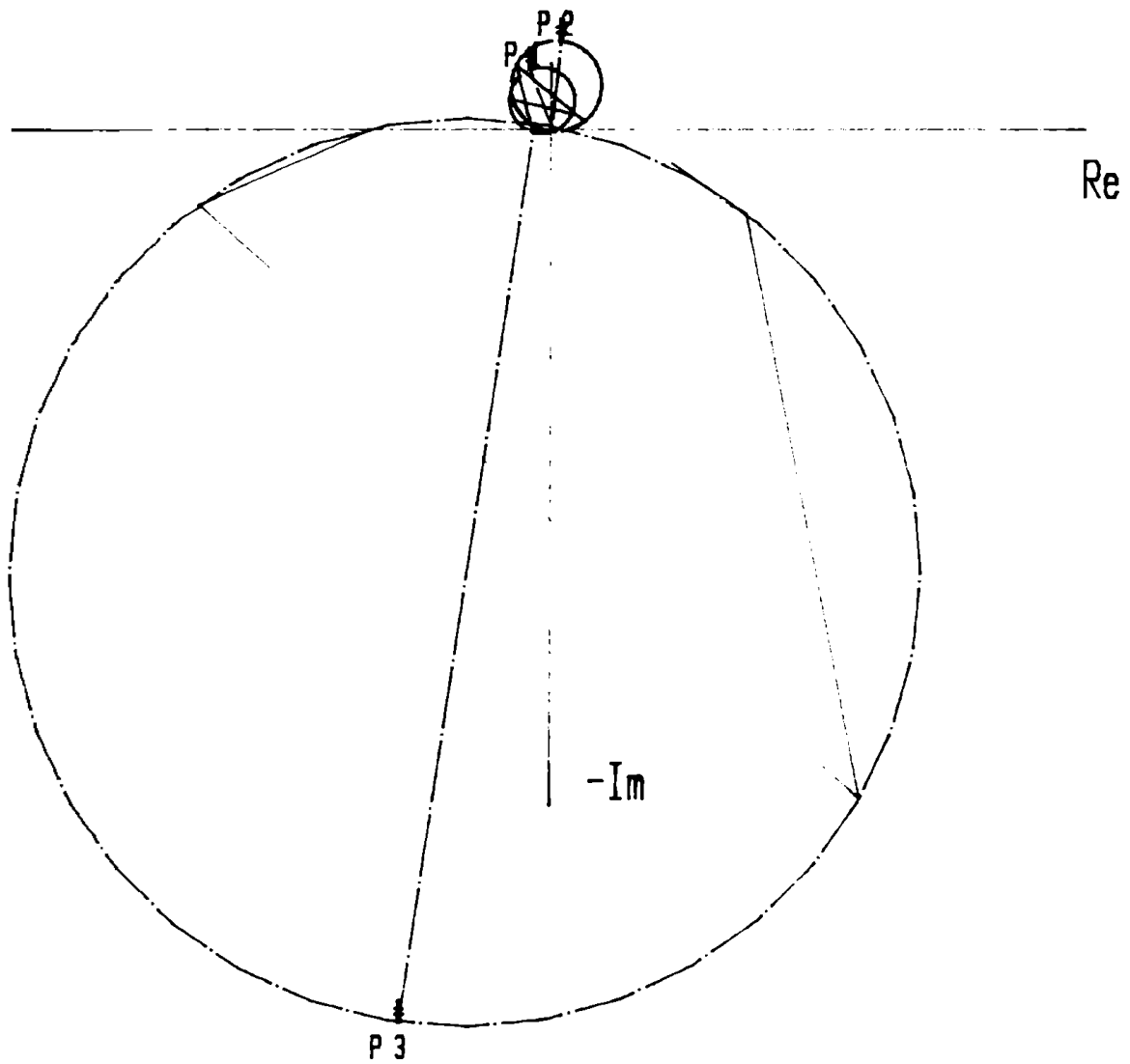


Fig. 7.0.a DIAGRAMA POLARA PENTRU PUNCTUL 1 SECTIUNEA 5 MODUL 1

| #P | Fr [Hz] | Eta    | Ur    | Vr     |
|----|---------|--------|-------|--------|
| 1  | 45.7854 | .00241 | -.059 | -.381  |
| 2  | 45.7811 | .00246 | -.036 | -.505  |
| 3  | 45.7822 | .00248 | -.076 | -1.083 |

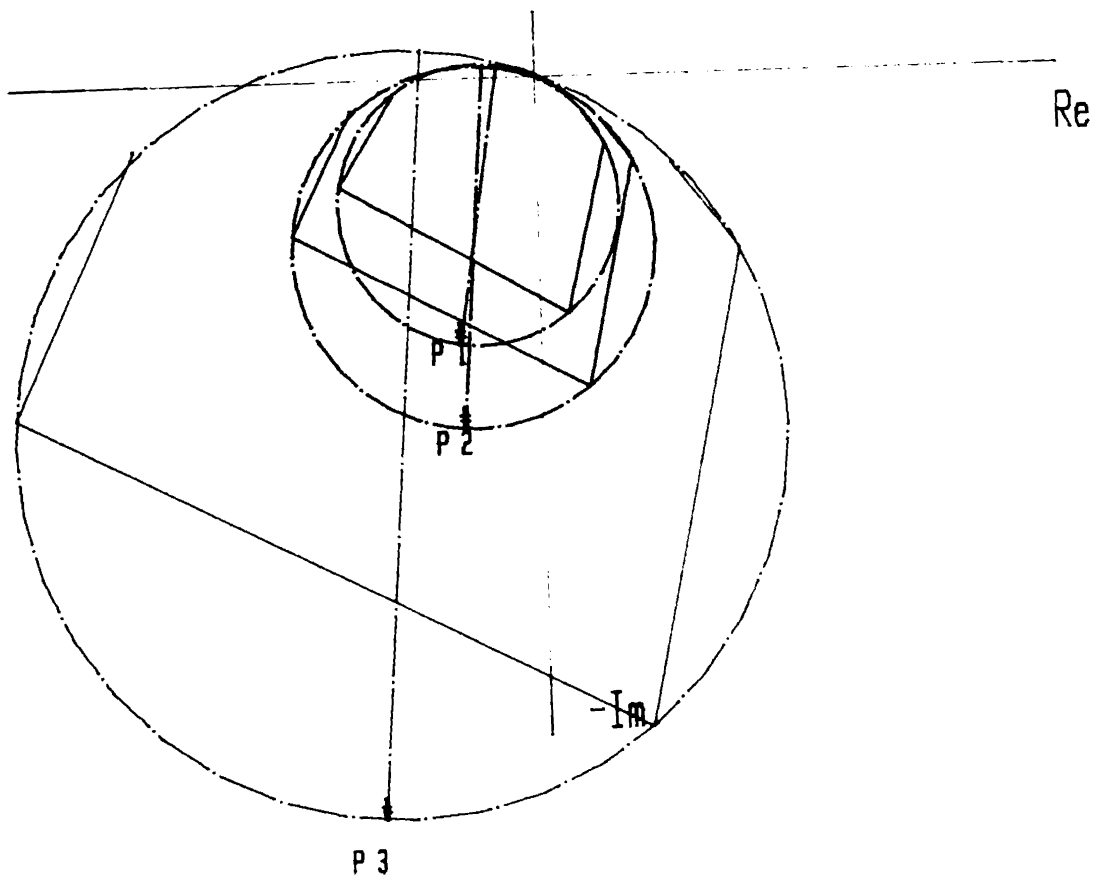


Fig. 7.8.b DIAGRAMA POLARA PENTRU PUNCTUL 1 SECTIUNEA 5 MODUL 2

rigid avînd frecvențele proprii de 20, 375 Hz și 45,78 Hz. Parametrii modali s-au determinat folosînd algoritmul "C-FIT", pe baza măsurării răspunsului structurii la trei regîmuri armonice în jurul pulsației proprii a modului testat (fig.7.8).

S-au prelucrat aici răspunsurile a trei traductori fixați după trei direcții într-un punct curent al structurii. Se poate observa că parametrii modali, frecvențele proprii  $F_p$  și raporturile de amortizare  $\eta_r$ , obținuți prin prelucrarea semnalelor răspunsurilor celor trei traductori, sînt valoric aproape identici deși nivelele celor trei semnale sînt mult diferite.

Deși cei trei traductori împreună cu magnetul de prindere cîntăresc 100 gr, paleta cîntărind între 120-190 Kg iar corpul rigid 583,2 Kg, deci structura cuplată avînd 750-770 Kg, rezultatele semnalează modificări ale frecvențelor proprii (de ordinul sutimilor de herți) la schimbarea punctului de măsură. Acest lucru se explică prin sensibilitatea structurii la modificări (adăugări de masă), masa adițională de 100 gr a traducto~~r~~ilor modificînd de fapt structura. Așa cum s-a mai arătat, în paragraful 5.2, ordinul de mărime al sistemului de ecuații al structurii ce se obține prin identificare, depinde de numărul modurilor naturale care apar în domeniul de frecvență al testului. În scopul măririi ordinului sistemului identificat s-au efectuat testări de vibrații cu o masă adițională de 2 Kg s-a fixat pe rînd în punctele de reducere ale secțiunilor. Lucrez în prezent la realizarea unor programe de calcul iterativ al matricilor sistemului dinamic al structurii paletii, folosind parametrii modali și variațiile lor la modificările structurale prin mase adiționale.

### 7.3. Studiul experimental al dinamicii unei fundații rigide a unui compresor multicilîndric

Fundațiile rigide a unor mașini grele, cum sînt compresoarele de gaze, au rolul de a prelua sarcinile dinamice produse de forțele de inerție ale mecanismelor în mișcare. Deși la proiectarea compresorului se iau măsuri de echilibru a forțelor de inerție, prin amplasarea relativă a cilindrilor compresorului



(fig.7.9) în așa fel încât torsorul forțelor de inerție  $F_1-F_5$  ale celor cinci pistoane să fie minim, totuși apare un torsor rezultat diferit de zero care este transmis structurii fundației-mașină. Torsorul forțelor de inerție  $\{p_k\}$  în raport cu centrul masei C al structurii, este periodic cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , unde  $\omega$  este viteza unghiulară a axului compresorului.

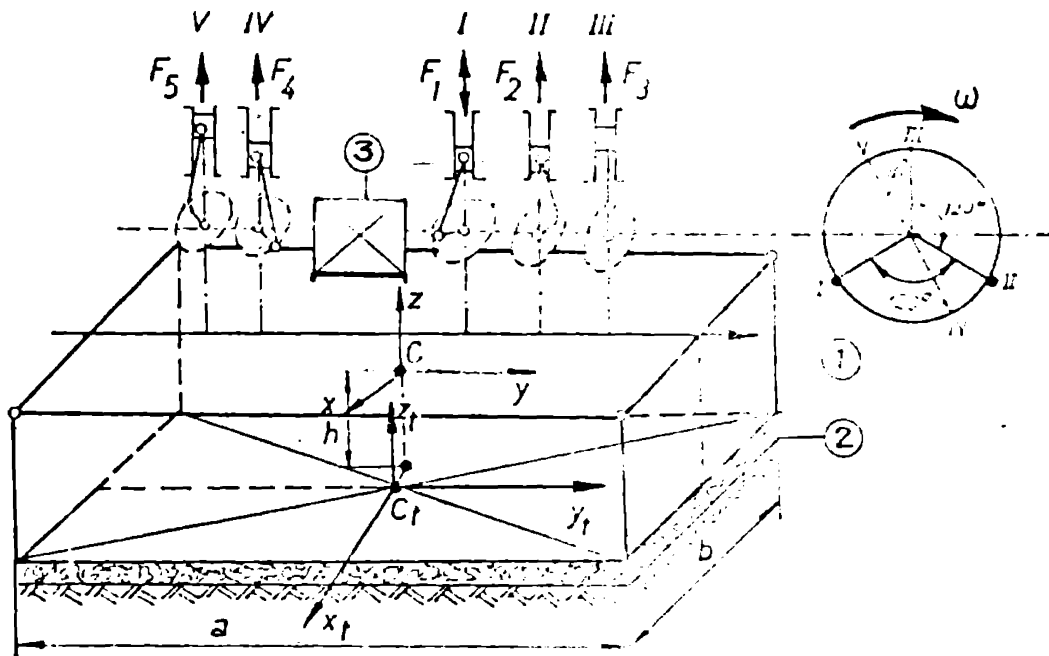


Fig.7.9

$$\{p_k\} = [P_k] \begin{Bmatrix} \cos(k\omega t) \\ \sin(k\omega t) \end{Bmatrix} \quad (k = 1, \dots) \quad (7.52)$$

unde  $[P_k]$  este matricea amplitudinilor armonicei k

$$[P_k] = \begin{bmatrix} P_{k1x} & P_{k2x} \\ P_{k1y} & P_{k2y} \\ P_{k1z} & P_{k2z} \\ M_{k1x} & M_{k2x} \\ M_{k1y} & M_{k2y} \\ M_{k1z} & M_{k2z} \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

$P_{k1x,y,z}$  și  $P_{k2x,y,z}$  reprezintă amplitudinile complexe ale proiecției pe axa Cxyz a rezultantei forțelor de inerție, iar  $M_{k1x,y,z}$  și  $M_{k2x,y,z}$  sînt amplitudinile complexe ale proiecției pe axa Cxyz a momentului rezultat al forțelor de inerție. Elementele matricii  $[P_k]$  pot fi calculate din documentația de execuție a compresorului. Pentru mecanismele de tip bielă manivelă cum sînt cele ale unui compresor multicilindric, torsorul de excitație conține mai multe armonici, din care se iau în calcul de obicei doar primele două.

Forțele de reacțiune ale terenului de fundare dau un torsor în raport cu punctul C pentru armonica k de forma

$$\{r_k\} = [R_k] \begin{Bmatrix} \cos k \omega t \\ \sin k \omega t \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

unde matricea  $[R_k]$  este matricea amplitudinilor complexe care se poate scrie similar cu (7.53).

Equilibrul dinamic al structurii este dat de sistemul de ecuații

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{w}_k\} \\ \{\ddot{\varphi}_k\} \end{Bmatrix} = \{p_k\} + \{r_k\} + [G] \begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{\varphi_k\} \end{Bmatrix} \quad (7.54)$$

unde subvectorii  $\{w_k\}$  și  $\{\varphi_k\}$  reprezintă legile de mișcare ale centrului masic (și respectiv legile de rotație ale structurii).  $[M]$  reprezintă matricea de inerție și are forma

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

unde m este masa totală a structurii, iar  $[J]$  matricea momentelor de inerție în raport cu axele sistemului Cxyz.

Produsul  $[G] \begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{\varphi_k\} \end{Bmatrix}$  ține seama de efectul de moment de răsturnare dat de dezaxarea dintre forța gravitațională  $m\bar{g}$  și reacțiunea statică a terenului de fundare

$$[G] = -mgh \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

unde  $h$  este cota centrului masei  $C$  față de talpa fundației, iar  $g$  este accelerația gravitațională.

Vectorul legilor de mișcare  $\begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{\psi_k\} \end{Bmatrix}$  poate fi scris sub forma

$$\begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{\psi_k\} \end{Bmatrix} = [W_k] \begin{Bmatrix} \cos k\omega t \\ \sin k\omega t \end{Bmatrix} \quad (7.57)$$

unde  $[W_k]$  este matricea amplitudinilor complexe

$$[W_k] = \begin{bmatrix} W_{k_1x} & W_{k_2x} \\ W_{k_1y} & W_{k_2y} \\ W_{k_1z} & W_{k_2z} \\ \psi_{k_1x} & \psi_{k_2x} \\ \psi_{k_1y} & \psi_{k_2y} \\ \psi_{k_1z} & \psi_{k_2z} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

unde

$$\begin{cases} W_{k_1s} = W_{0ks} \cos \alpha_{ks} ; & W_{k_2s} = W_{0ks} \sin \alpha_{ks} \\ \psi_{k_1s} = \psi_{0ks} \cos \alpha_{\psi ks} ; & \psi_{k_2s} = \psi_{0ks} \sin \alpha_{\psi ks} \end{cases} \quad (7.59)$$

$$(s = x, y, z)$$

$W_{0ks}$  și  $\psi_{0ks}$  reprezentînd modulul amplitudinilor deplasărilor și rotațiilor, iar  $\alpha_{ks}$  și  $\alpha_{\psi ks}$  fazele lor.

Amplitudinile și fazele mișcărilor vibratorii se pot determina prin înregistrarea vibrațiilor și prelucrarea vibrațiilor, folosindu-se tehnicile descrise la paragraful 6.3.1. Folosind

un număr mare de puncte de măsură matricea  $[W_k]$  a amplitudinilor se poate determina prin metoda celor mai mici pătrate (7.27).

Din sistemul de ecuații diferențiale (7,54) se poate determina, ținând seama de relațiile de mai sus, matricea  $[R_k]$

$$[R_k] = - (k\omega)^2 [M][W_k] + [P_k] + [G][W_k] \quad (7.60)$$

care conține torsorul, în amplitudini complexe, al reacțiunii dinamice a terenului de fundare, redus în centrul masei structurii.

Acțiunea fundației asupra terenului, la nivelul tălpii fundației este dată, prin vectorul  $\{\Gamma_{tk}(t)\}$  torsorului de reducere, în centrul  $C_t$  al tălpii fundației

$$\{\Gamma_{tk}(t)\} = - [T_c][R_k] \begin{Bmatrix} \cos k\omega t \\ \sin k\omega t \end{Bmatrix} \quad (7.61)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

unde  $[T_c]$  este o matrice pătrată (6x6) de forma

$$[T_c] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [X_c] & [I] \end{bmatrix} \quad [X_c] = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

$x_c$ ,  $y_c$  și  $z_c$  fiind coordonatele punctului C în raport cu sistemul de axe  $c_t$ ,  $x_t$ ,  $y_t$ ,  $z_t$  legat de talpa fundației.

Legea de mișcare de corp rigid a tălpii fundației, se poate exprima prin vectorii

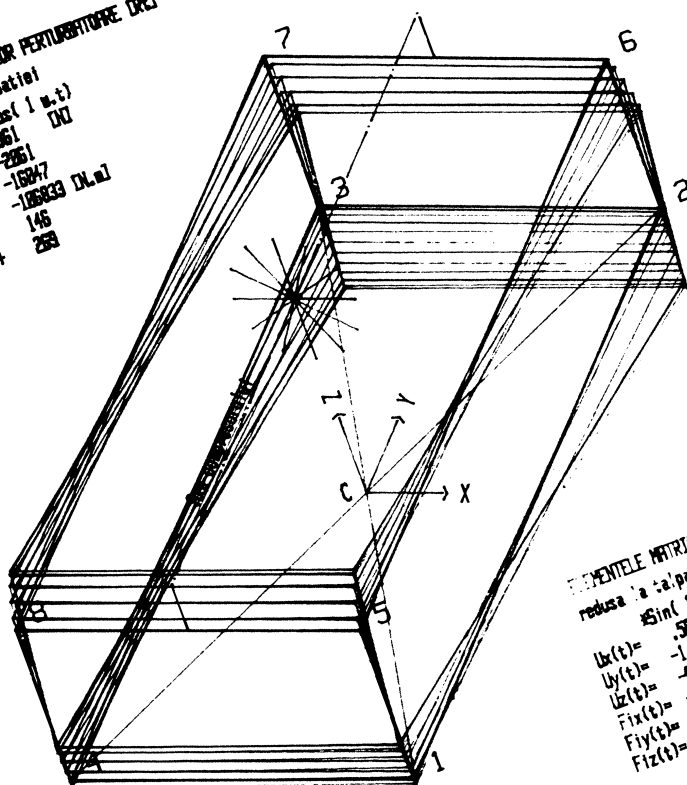
$$\begin{Bmatrix} w_{tk} \\ \varphi_{tk} \\ \Gamma_{tk} \end{Bmatrix} = [S_c][W_k] \begin{Bmatrix} \cos k\omega t \\ \sin k\omega t \end{Bmatrix} \quad (7.63)$$

unde  $S_c$  este o matrice pătrată (6x6) de forma

$$[S_c] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ -[X_c] & [I] \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

ELEMENTE MATRICEI FORTELOR PERTURBATOARE ORJ  
 reduca la talpa fundatiei

| $\# \sin(1 \text{ u.t.})$ | $\# \cos(1 \text{ u.t.})$ |
|---------------------------|---------------------------|
| $R_{0x}(t) = -35$         | $+ 351$                   |
| $R_{0y}(t) = -2527$       | $+ -2051$                 |
| $R_{0z}(t) = 9878$        | $+ -16847$                |
| $R_{1x}(t) = 1385$        | $+ -10833 \text{ DL.u.}$  |
| $R_{1y}(t) = 653$         | $+ 146$                   |
| $R_{1z}(t) = 65$          | $+ 258$                   |



ELEMENTE MATRICEI DEPLASRII [u.u.]  
 reduca la talpa fundatiei

| $\# \sin(1 \text{ u.t.})$ | $\# \cos(1 \text{ u.t.})$ |
|---------------------------|---------------------------|
| $U_x(t) = .56$            | $+ -.84$                  |
| $U_y(t) = -1.78$          | $+ .87$                   |
| $U_z(t) = -8.25$          | $+ 2.08$                  |
| $F_{1x}(t) = -4.48$       | $+ -2.08$                 |
| $F_{1y}(t) = -.35$        | $+ .13$                   |
| $F_{1z}(t) = .8$          | $+ -.84$                  |

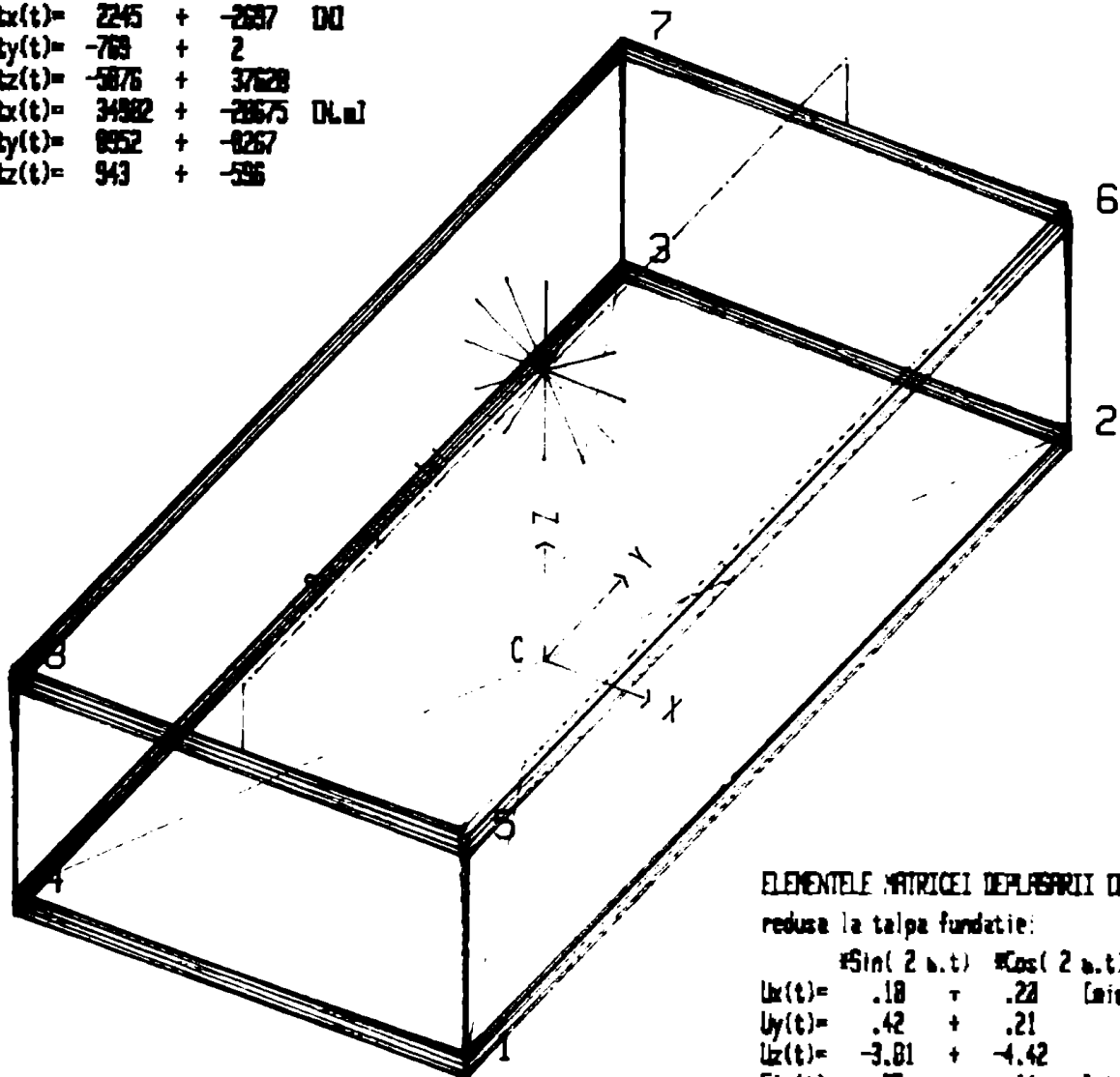
[microni/a]

Fig. 7.9.a DISTRIBUTIA MISCARILOR VIBRATORII ALE FONDATIEI  
 pentru armonica 1 la  $F = 8.069 \text{ Hz}$

ELEMENTELE MATRICEI FORTELOR PERTURBATOARE [D&I]

reduca la talpa fundatiei

|               | $\# \sin(2 \text{ u.t.})$ | $\# \cos(2 \text{ u.t.})$ |       |
|---------------|---------------------------|---------------------------|-------|
| $R_{tx}(t) =$ | 2245                      | + -2687                   | [D&I] |
| $R_{ty}(t) =$ | -769                      | + 2                       |       |
| $R_{tz}(t) =$ | -5876                     | + 37628                   |       |
| $M_{tx}(t) =$ | 34882                     | + -28675                  | [D&I] |
| $M_{ty}(t) =$ | 8952                      | + -8267                   |       |
| $M_{tz}(t) =$ | 943                       | + -586                    |       |



ELEMENTELE MATRICEI DEPLASARII [D&I]

reduca la talpa fundatiei:

|               | $\# \sin(2 \text{ u.t.})$ | $\# \cos(2 \text{ u.t.})$ |             |
|---------------|---------------------------|---------------------------|-------------|
| $U_x(t) =$    | .18                       | + .22                     | [microni]   |
| $U_y(t) =$    | .42                       | + .21                     |             |
| $U_z(t) =$    | -3.81                     | + -4.42                   |             |
| $F_{ix}(t) =$ | .85                       | + .14                     | [microni/m] |
| $F_{iy}(t) =$ | -.79                      | + .72                     |             |
| $F_{iz}(t) =$ | -.07                      | + .85                     |             |

Fig. 7.9.b DISTRIBUTIA MISCARILOR VIBRATORII ALE FUNDATIEI

pentru armonica 2 la  $F = 16.14 \text{ Hz}$

Avînd cunoscută legea de mișcare, de corp rigid, a tălpii fundației, dată prin vectorii  $\{w_{tk}\}$  ale cărui elemente sînt trei legi de translație după axele sistemului  $C_t x_t y_t z_t$  și  $\{\psi_{tk}\}$  ale cărui elemente sînt trei legi de rotație raportate la axele sistemului  $C_t x_t y_t z_t$ , și acțiunea dinamică, dată prin vectorul  $\{r_{tk}\}$  pe care o exercită talpa fundației asupra terenului se poate trece la modelarea răspunsului terenului de fundare.

Modelarea comportării terenului de fundare se poate face prin metodele clasice, ca metoda coeficienților dinamici a semi-spațiului elastic sau prin metoda elementului finit.

În figurile 7.10 se prezintă distribuția mișcărilor vibratorii pe structura unei fundații rigide a unui compresor de aer cu cinci etaje de presiune. Pozițiile instantanee, la secvențe egale de timp ale perioadei  $T_k = \frac{2\pi}{k \cdot \omega}$ , ale fundației sînt reprezentate prin culori diferite, rozeta colorată de pe axa compresorului indicînd poziția cilindrului 1 care marchează fazele vibrațiilor. În medalioane sînt prezentate elementele vectorilor  $\{r_{tk}\}$  și  $\begin{Bmatrix} w_{tk} \\ \psi_{tk} \end{Bmatrix}$ .

#### 7.4. Studiul vibrațiilor unor structuri deformabile complexe

În multe cazuri structurile de susținere ale unor mașini grele nu pot asigura o rigidizare perfectă a ansamblului mașinilor și de aceea apar, așa cum s-a arătat în capitolul 1 (paragraful 1.2.3), efecte dinamice care pot produce avariarea mașinii. Este și cazul unui agregat de ventilație de gaze arse (fig. 1.5 și 1.6) la care efectul dinamic principal se produce la nivelul cuplajului semirigid dintre motorul de antrenare și ventilator, datorită dezaxării celor două axe ale semicuplelor. Pentru punerea în evidență a dezaxării dinamice a liniei arborilor pe întreaga structură a ventilatorului. Determinarea amplitudinilor și fazelor mișcărilor vibratorii, raportate la poziția arborelui mașinii, s-a făcut prin prelucrarea semnalelor de vibrații folosind tehnica multiplicării lor cu două semnale armonice, unul în fază ( $\cos \omega t$ ), iar celălalt în quadratură ( $\sin \omega t$ ), simulîndu-se pe calculator schema analogică de multiplicare din fig. 6.7. În acest caz funcția formatorului de semnale  $F_0$  este realizată printr-o

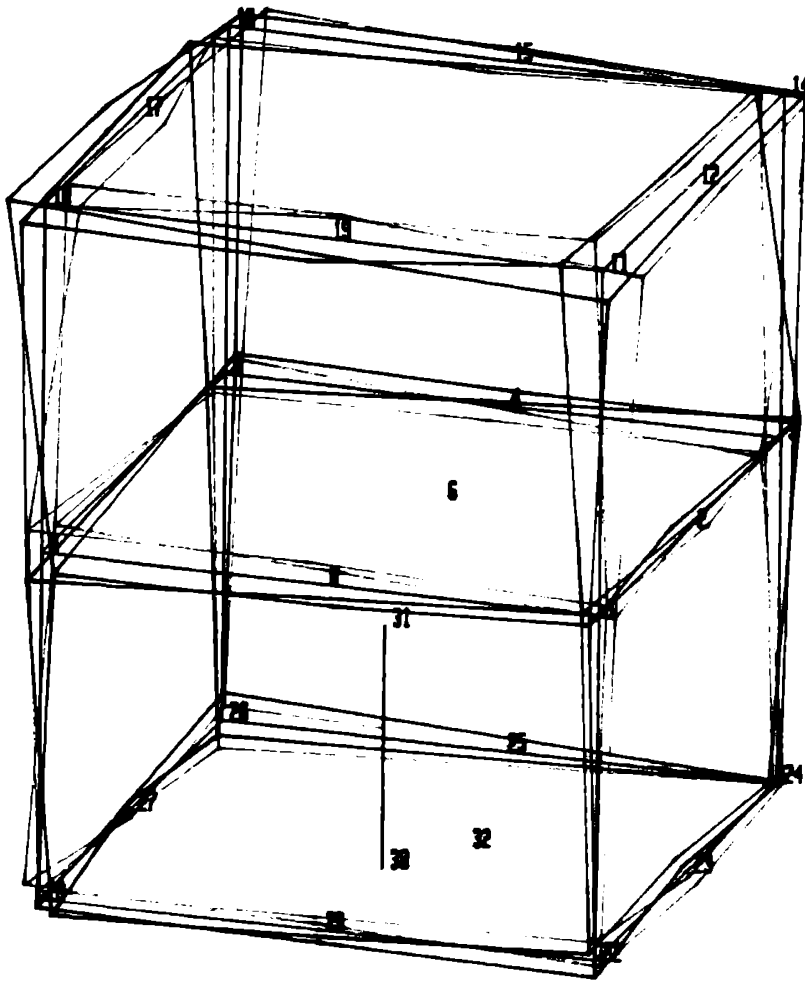


Fig.7.10 DISTRIBUTIA MISCARILOR VIBRATORII PE STRUCTURA V.G.A.

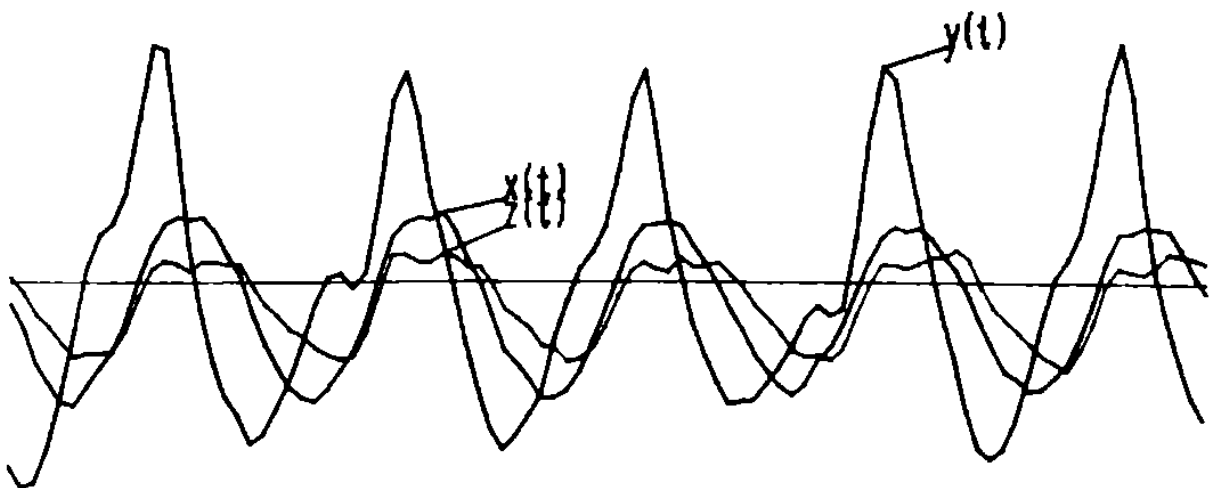


Fig.7.11 MISCARILE VIBRATORII ALE PUNCTULUI 31 -Motor V.G.A.



subrutină de calcul, pe baza semnalului marcator de fază digitalizat. Aceeași subrutină efectuează multiplicarea semnalelor armonice cu semnalul de vibrații. — Pentru obținerea componentelor  $R_e$  și  $I_m$  (6.6) ale amplitudinii complexe se folosește programul de filtrare numerică "F-TJ" (prezentată la 6.3.2) care îndeplinește funcția filtrului trece jos  $F_{tj2}$  (Fig.6.7), în apropierea frecvenței zero.

Prin reprezentarea grafică spațială a distribuției mișcărilor vibratorii ale structurii se poate observa, din figura 7.10 că aceasta suferă deformații elastice, axa mașinilor frîngindu-se. Dezaxarea maximă a liniei arborelui este la nivelul cuplajului semirigid dintre arborele motorului de antrenare și arborele ventilatorului.

Efectul de dezaxarea dinamică produce forțe interne la nivelul cuplajului semirigid avînd componente periodice cu perioada  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) unde  $T$  este perioada de rotație a arborelui, lucru ce se observă din vibrogramele (fig.7.10) corespunzătoare punctului de măsură 34 (fig.7.11) situat pe motorul de acționare al ventilatorului.

O reprezentare spațială a distribuției mișcărilor vibratorii ale unei structuri complexe dă de asemenea posibilitatea alegerii modelului dinamic simplificat de calcul al structurii. În figura 7.12.a se arată construcția unei stații de concasare a cărbunelui la care se folosesc două concasoare cu fălci  $C_1$  și  $C_2$ , amplasate la nivelul 4,55 m al construcției. La punerea în funcțiune a instalației s-au semnalat vibrații de nivele foarte mari la nivelul amplasării celor două mașini. Pe baza unor măsurători vibrometrice în timpul funcționării concasorului  $C_1$  s-a obținut imaginile (fig.7.12.b) corespunzătoare mișcărilor vibratorii ale planșeului de fixare al concasoarelor, la pulsația  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , unde  $T$  este perioada de lucru a concasorului, iar, fig.7.12.c, imaginile corespunzătoare mișcărilor de pulsații dublă  $2\omega$ . O primă comparare a celor două imagini arată că ele diferă ca formă de vibrație indicînd că între cele două pulsații  $\omega$  și  $2\omega$  se găsește cel puțin una din pulsațiile proprii ale structurii. Acest lucru a fost confirmat prin testarea la vibrații a structurii cu ajutorul vibratorului inertial cu mase excentrice (fig. 6.5) constatîndu-se existența unei pulsații proprii învecinate pulsației  $\omega$  de regim.

Măsurînd vibrațiile și la nivelul superior (10,55 m), în timpul funcționării ambelor compresoare (fig.7.12, d și e) se constată că vibrațiile nivelului superior sînt ne semnificative. Soluția de rezolvare a problemei a fost de a modifica sistemul dinamic al structurii clădirii în așa fel încît pulsația proprie a clădirii să fie îndepărtată de pulsația  $\omega$  de regim a concasoarelor. Cea mai simplă modificare structurală eficientă a fost realizată separînd cele două concasoare de planșeul elastic prin elemente elastice vibroizolante. S-au putut elimina astfel nivelele mari rezonante de pe structura clădirii stației de concasare.

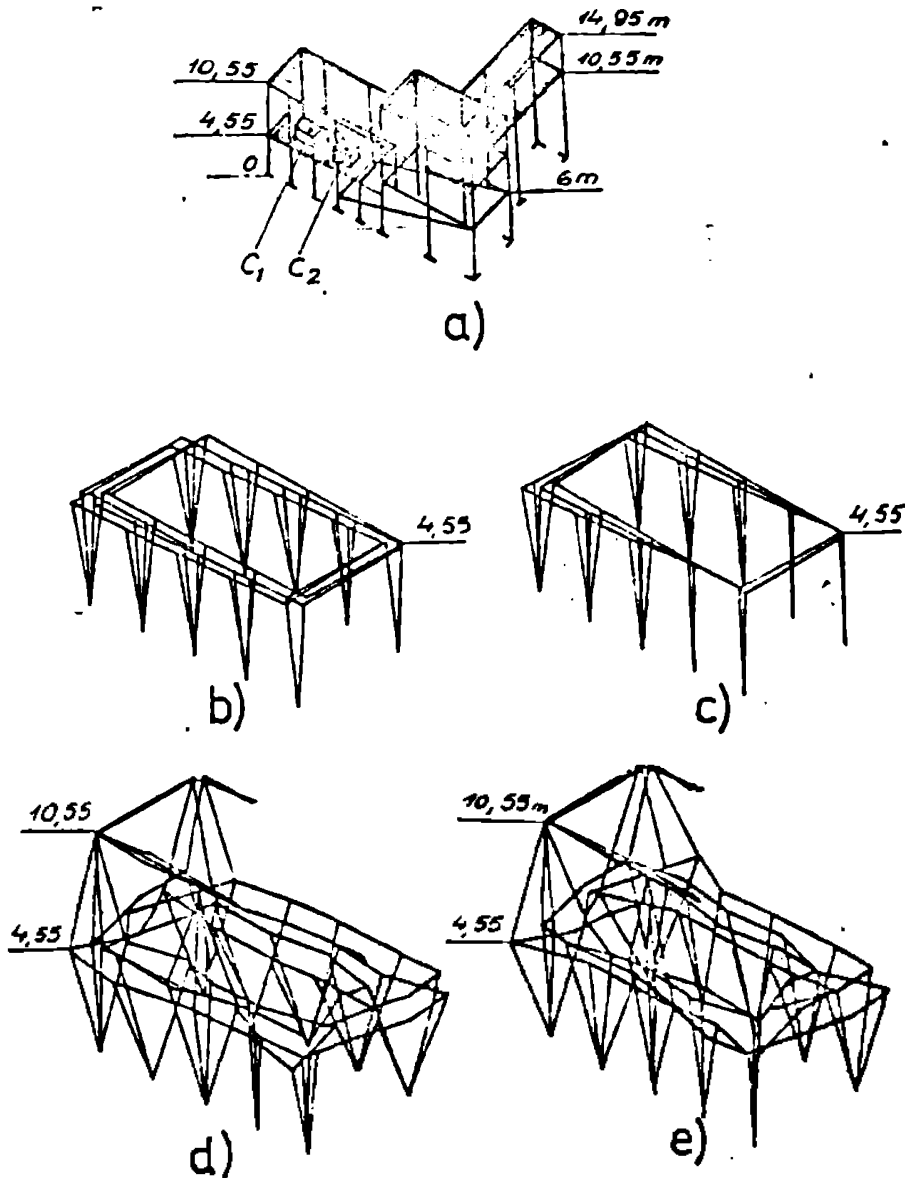


Fig.7.12

## 8. CONCLUZII

Prezenta lucrare a căutat să structureze aspectele practice ale studiului experimental al vibrațiilor mașinilor și utilajelor, folosind diverse tehnici de investigare, unele simple, intuitive, bazate pe experiența acumulată de-a lungul a numeroase lucrări de cercetare științifică cu caracter aplicativ pe care le-am efectuat pînă în prezent, iar altele, în ultimii ani, folosind tehnici complexe de prelucrare a rezultatelor pe calculator, care permit modelarea matematică a problemei.

În primul capitol sînt trecute în revistă cîteva probleme legate de studiu a vibrațiilor mașinilor și utilajelor care necesită, datorită complexității lor, investigații experimentale.

Se arată problemele de vibrații legate de funcționarea unor mașini și utilaje de mare importanță ca: mașini de ridicat și transportat, echipamente hidroenergetice și termoenergetice, sisteme de transport cu acționări cu motoare lineară și susținere magnetică și agregate de vînt. Sînt scoase în evidență fenomenele dinamice care apar în timpul funcționării utilajelor și mijloacele experimentale de investigare ale acestora, în condiții de teren sau pe baza unor modele de laborator.

În capitolul al doilea se obține modelarea matematică a dinamicii unui corp deformabil care execută mișcări vibratorii față de un sistem de referință în mișcare. Se consideră că acesta este cazul cel mai general de mișcare vibratorie a unei structuri de mașină. Sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea vibratorie a structurii devine în acest caz un sistem giroscopic la care matricile sistemului se desimetrizează datorită efectelor giroscopice și ale forțelor inerțiale Coriolis și centrifugale. Dînd o formulare matricială a tratării problemei și aplicînd metoda ecuațiilor lui Lagrange, sistemul de ecuații diferențiale este scris într-o formă concisă, care poate fi cu ușurință implementat, pentru rezolvare, într-un program de calcul.

În capitolul 3 se face o analiză a răspunsului sistemului giroscopic formulat în capitolul 2. Se aplică metoda răspunsului modal cu moduri și valori proprii complexe. Sistemul de ecuații

diferențiale se pune sub forma clasică a sistemului de stare de ordinul întâi, (3.7), ajungându-se, după o rezolvare proprie, la răspunsul modal, (3.46), în care se ține seama atât de componenta forțată, cât și de cea a vibrațiilor libere. În literatura de specialitate, în general, se dă numai formularea componentei forțate. Din forma generală a răspunsului se deduc cazurile particulare de răspuns la diverse excitații folosite la testarea la vibrații<sup>a</sup> structurilor: vibrații libere și vibrații cu excitație treaptă, de tip impulsiv, armonică și aleatorie.

În capitolul 4 se tratează metodele de estimare a parametrilor modali cunoscând răspunsul măsurat al sistemului în domeniul frecvență sau în domeniul timp. Pornind de la expresia (4.16) care aproximează funcția de transfer în apropierea unui mod natural de vibrație singular, care prezintă o amortizare slabă, s-a elaborat un algoritm original, folosind metoda diagramelor polare, cu care se pot determina cu exactitate parametrii modali. Se formulează un criteriu, similar cu cel al lui Kennedy-Pancu folosit la structuri cu amortizare histerezică, de localizare a punctului reprezentativ al pseudopulsației modului investigat (4.20). Pe baza acestui criteriu se determină o ecuație algebrică (4.29) din care se pot determina pseudopulsația și factorul de amortizare corespunzătoare modului investigat. Pentru cazul în care funcția de transfer este obținută la pulsații echi-distante se obțin în mod direct expresiile (4.33) și (4.34) ale pseudopulsației proprii și factorului de amortizare. Întreg procesul de estimare a parametrilor modali incluzând componentele modale, se face pe baza unui program de calcul "C-FIT", care conține o serie de subrutine ce conduc automat la determinarea parametrilor modali și la verificarea rezultatelor (Fig.3.2, a, b, c). Metoda prezintă o serie de avantaje față de alte metode prin faptul că poziționarea punctului reprezentativ al pseudopulsației se face cu exactitate chiar când arcele dintre cele trei puncte reprezentative de pulsații diferite necesare procesului de estimare sînt mari, chiar depășind valoarea  $\pi$ .

Algoritmul se aplică cu bune rezultate și în cazul modurilor cuplate (Paragraful 4.1.1.1.1). Pentru acest caz s-a elaborat, pe baza unui algoritm de rezolvare, prin metoda celor mai mici pătrate iterativă, a sistemului de ecuații algebrice neliniare a parametrilor modali. Programul "C2-FIT", care se folosește

pentru determinarea parametrilor modali de start, conține subrutinele programului "C-FIT". Din simularea pe calculator (fig. 4.6) metoda converge după primele câteva iterații.

În continuare se tratează metodele de estimare a parametrilor folosind răspunsul măsurat al sistemului în domeniul timp. Se tratează metoda seriilor exponențiale complexe Prony (paragraful 4.2.1) și metodele directe (paragraful 4.2.2), elaborate de S.R. Ibrahim și se arată că ele conduc la problema valorilor proprii (4.68), (4.100), (4.106). S-a elaborat programul "SEREXP" prin aplicarea căreia se constată că metodele de estimare a parametrilor modali folosind răspunsul măsurat al sistemului, în domeniul timp, se pot aplica cu succes la moduri cuplate, dar sînt sensibile la zgomotul din domeniul frecvențelor joase. Se propune o trecere a răspunsului sistemului, prin intermediul transformatei Fourier, din domeniul frecvență în domeniul timp și invers prin care se pot elimina, prin filtrare, componentele nedorite din răspunsul măsurat.

Capitolul 5 tratează metodele de identificare a sistemelor vibrante. Una din metodele de identificare, deci de determinare a structurii reală a sistemului de ecuații diferențiale de mișcare a structurii supusă testului de vibrații, folosește parametrii modali ai răspunsului măsurat al structurii. Pe baza relațiilor de ortonormalitate (3.20) se dezvoltă un sistem de ecuații algebrice (5.4) - (5.11) din care se pot determina matricile sistemului de ecuații diferențiale, avînd cunoscute, matricea modală normalizată complexă  $[x]$  și matricea valorilor proprii complexe  $[s]$  determinate pe baza parametrilor modali estimați, după metodele tratate la capitolul 4. Se dau metodele de separare a vectorilor proprii din răspunsul modal al sistemului (5.1.1), considerîndu-se o excitație a structurii într-un singur punct. Se are în vedere o astfel de excitație pentru care echipamentul de testare la vibrații a structurii nu este scump și greu de folosit în condiții de teren, ca cel de excitație multipunct.

Pentru cazul testării structurilor izolate în modul liber-liber (free-free), cînd în răspunsul măsurat al structurii apar moduri de corp rigid neconstrînse, se demonstrează posibilitatea decuplării mișcărilor de corp rigid de cele de deformare, (5.60), care conduce la metoda determinării momentelor de inerție ale structurii testate (5.71).

Se arată dezavantajele pe care le prezintă testarea la vibrații a structurii încastrată într-un suport fix (moduri constrânse) prin faptul că pot apărea moduri parazite ce nu aparțin structurii. Eliminarea acestor neajunsuri se face prin cuplarea structurii elastice de o structură rigidă și aplicarea unei excitații asupra structurii rigide. Studiul dinamicii sistemului format din cele două structuri cuplate, testate în modul liber-liber conduce la un sistem de ecuații diferențiale (5.84) echivalent cu cel al unei structuri fixate de un suport fix la care excitația este de tip multipunct, pentru care toate modurile structurii sînt excitate.

În continuare (paragraful 5.2) se dă o metodă de identificare directă a modelului matematic al structurii pe baza răspunsului măsurat al structurii, dat în domeniul frecvență prin vectorul amplitudinilor complexe (5.87). Pe baza unei transformări matriciale, (5.90), (5.91) efectuate de o subrutină de calcul "Mat-Dr" se determină un sistem algebric (5.92) care prin rezolvare duce la determinarea valorică a matricilor  $[M]$ ,  $[C]$  și  $[K]$  căutate. Pe baza unui program de calcul "DR-IDE" s-a identificat cu bune rezultate un sistem vibrant (fig.5.4) cu patru grade de libertate, chiar cînd răspunsul sistemului a fost perturbat cu o componentă de zgomot aleator de 1%.

S-a simulat și cazul în care răspunsul sistemului vibrant este incomplet, considerîndu-se că numai primele trei moduri naturale ale sistemului vibrant sînt situate în domeniul de frecvență al testului. Prin investigarea suplimentară a răspunsului sistemului modificat structural, la care se adaugă o masă suplimentară, s-a realizat un algoritm, implementat în programul "INC-IL", cu care se determină modelul complet al sistemului de ordinul 4. Se are în vedere continuarea cercetărilor pentru cazuri accentuat incomplete care prezintă numeroase avantaje practice legate de structurarea modelului matematic.

Capitolul 6 structurează sistemele de testare la vibrații și prelucrare a datelor. Se trec în revistă sistemele de excitație cu vibratoare electrodinamice, hidraulice, inerțiale și sisteme tranzitorii cu avantajele și dezavantajele lor. Se prezintă realizarea personală a unui vibrator inerțial (fig.6.5) destinat testărilor de vibrații în condiții de teren. Se amintește de asemenea un vibrator hidraulic destinat încercării dinamice a mașinilor unelte, care este în curs de brevetare.



Sistemele originale de măsură și prelucrare a rezultatelor sînt împărțite în două grupe; sisteme analogice (schema din fig.6.7) și sisteme digitale (fig.6.9). Sistemele analogice conduc la obținerea - prin prelucrare pe cale analogică a semnalelor de excitație și răspuns ale structurii, pentru regimuri armonice - caracteristicilor de frecvență ale structurii, ce pot fi obținute în mod automat pe un înregistrator în coordonate. Rolul important în obținerea unor rezultate bune îl are prelucrarea semnalelor de frecvență și de fază pentru care se descriu montajele electronice realizate cu componente integrate.

În continuare se prezintă realizarea unui sistem de achiziție și prelucrare a datelor pe cale digitală, pe baza unui minicalculator de birou echipat cu sisteme de conversie analog numerică, unități de stocare a datelor și prezentare a rezultatelor. Sistemul de pe care s-a realizat poate rezolva o gamă largă de probleme de vibrații.

Avînd la dispoziție acest sistem s-au conceput un număr mare de algoritmi originali, de prelucrare a semnalelor de excitație și răspuns ale structurii cum sînt:

- Schemă și algoritmi pentru analiza semnalelor periodice puternic parazitare cu zgomote (paragraful 6.3.1.1). Acești algoritmi au fost verificați cu succes la studiul distribuției mișcărilor vibratorii ale mașinilor, analiza spectrului periodic al sunetului unei viori Amati și la echilibrarea dinamică a unui agregat de vînt cu ax orizontal;

- Metode și algoritmi pentru extragerea componentelor libere amortizate, din răspunsul unei structuri excitate aleatorie. S-au realizat programele "CORE" pentru calculul funcțiilor de corelație și "R-DEC" pentru aplicarea metodei semnăturii decrementului aleator (random decrement signature), deosebit de utilă în multe cazuri practice;

- Algoritm și un program de calcul "F-TJ" pentru o rețea numerică de filtrare digitală necesară eliminării componentelor nedorite din semnalele de răspuns ale structurii;

- Programe de analiză în domeniul frecvenței, prin aplicarea metodei transformatei rapide Fourier și a ferestrelor de ponderare.

Capitolul 7 tratează câteva aplicații practice de investigație experimentală a vibrațiilor structurilor complexe. În prima parte (7.1.1) se prezintă un algoritm original de reprezentare spațială a unei structuri complexe care servește la reprezentarea formei modurilor naturale de vibrații și la reprezentarea distribuției mișcărilor vibratorii ale structurii, pe baza semnalelor de vibrații măsurate în puncte situate pe suprafața ei. Algoritmul de reprezentare spațială, în proiecție axonometrică, este folosit la reprezentarea formei modurilor naturale de vibrații ale unei palete de agregat de vânt cu ax orizontal, <sup>testată</sup> pe un stand de laborator. Standul de laborator, (paragraful 7.2), permite încercarea la vibrații a paletei, în vederea identificării ei dinamice. Se aplică metoda de testare prin cuplarea paletei cu un corp rigid pentru care se obține, așa cum s-a arătat la (7.2.1), un sistem echivalent cu excitare multipunct. Se dă metoda de alegere a pozițiilor manivelor reduse pe structura paletei pentru identificarea modelului dinamic, considerându-se secțiunile paletei rigide. Procesul de prelucrare a semnalelor de vibrații cuprinde un număr de 12 programe de calcul originale, folosite în cadrul unui contract de cercetare în domeniul dinamicii agregatelor de vânt cu ax orizontal.

Folosind metodele de investigație a vibrațiilor periodice ale unei mașini, la (7.3) se prezintă studiul dinamicii unei fundații de compresor multicilindric, la care excitația structurii se poate determina prin calcul, studiind mecanismul compresorului, iar pe baza unor măsurători de vibrații se determină legile de mișcare ale tălpii fundației. Cunoscând torsorul forțelor, perturbatoare și inerțiale reduse în centrul de greutate al tălpii fundației, problema dinamică se reduce la modelarea reologică a terenului de fundare. Rezultatele sintetice ale investigațiilor experimentale și ale prelucrării lor sînt date în figurile 7.9-10. În finalul capitolului se prezintă încă două exemple de investigație completă a vibrațiilor a două utilaje de mare importanță; un grup de ventilație de gaze arse (descrie la paragraful 1.2.3) utilizat la o termocentrală și un grup de concasoare de cărbune dintr-o stație de preparare. În ambele cazuri folosind tehnicile complexe de prelucrare a semnalelor de vibrații și metodele de prezentare a rezultatelor expuse în teză, se clarifică cauzele vibrațiilor și astfel s-au putut da soluțiile de diminuare a nivelelor de vibrații.



Materialul prezentat în lucrarea de față a căutat să sintetizeze câteva rezultate mai importante pe care le-am obținut în acest domeniu. Ținând seama de baza materială bogată cu care este înzestrat la ora actuală Laboratorul de cercetare pentru vibrații mecanice al Institutului politehnic "Traian Vuia" din Timișoara, la a cărui realizare mi-am adus o contribuție importantă, există perspectiva abordării unor noi tematici în domeniul dinamicii mașinilor unelte și a autoturismelor, pentru care, deja există solicitări. Rezultatele originale prezentate în teză vor fi deosebit de utile în abordarea acestor teme de cercetare.

B I B L I O G R A F I E

1. ALLIA E., ALLOCO M., CARO A., Design Inter.Conf.and Vehicle Struct.Mech.-warrmdale Oct.1979.
2. ALLEMANG R.I., ZIMEPMAN R., BROWN D.L., Modal Analysis Seminar, Louven, 1980.
3. BEATRIX Chr., La Rech.Aero, No.109, 1965.
4. BELIVEAU I.G., I.of Appl.Mech.6, 1976.
5. BENDAT I.S., PIRSOL A.G., Random Data Analysis and Measurement Procedures, Willey - Inters, 1971.
6. BENDAT I.S., PIRSOL A.G., Engineering Applications of Corelation and Spectral Analysis - Willey - Inters.1980.
7. BENFIELD W.A., HRUDA R.F., AIAA Journal vol.9, No.7, 1971.
8. BERGER H., CHAQUIN I.P., Mat.Modeling in Struct.Eng.Symp.Oct. 1979, NASA, Lengley-Cent.
9. BERMAN A., FLANELLY W.G., AIAA Journal vol.9, No.7, 1971.
10. BISHOP R.E.D., GLADWELL G.M., MICHALSON I., The Matrix Analysis of vibration - Cambridge Press, 1965.
11. BISPLINGNOFF R.L., ASHLEY H., HOLFMAN R., Aeroelasticity-Addison Wesley Cambridge 1955.
12. BONNACOSE D., COUPRIOT L., CROMER I.C., LALANNE M., - METRAVIE Report 7-75.
13. BOWLES R.P., Proc.of Winter Annual Meeting of ASME 1972.
14. BRINDEU L., CIOARA T., SILAS Gh., etc., Conf.de.Vibrații în construcția de mașini, Timișoara, 1978, pag.83-90.
15. BROGAN W.L., Modern Control Theory, Acad.Press 1977.
16. BROWN D., GAREON G., RAMSEY K., International Automat.Eng. Congres Detroit, Febr.28 - March.4, 1977.
17. BRUSSEL Van, PETERS I.I., Modal Analysis Seminar Louven 1980.
18. BUGEAT L., and all - Shoc.and Vibr.Bull.48(3), 1978.
19. BUGEAT L., and all - X Conf.Dynamic of Mech.Warszava, 1976.
20. BUZDUGAN Gh., Măsurarea vibrațiilor mecanice Edit.Tehnică, București, 1964.
21. BUZDUGAN Gh., FETCU L., RADES M., Vibrațiile sistemelor mecanice, Ed.Acad., R.S.R., București, 1975.
22. BUZDUGAN Gh., Izolarea antivibratorie a mașinilor. Ed.Acad. R.S.R., București, 1975.
23. CARAVANI and all - J of Appl.Mech.(3), 1977.
24. CAUGNEY T.K., O'KELLY M.E., J of Appl.Mech.(32),1,(1965).
25. CIOARA T., Conf.Vibrații în constr.de mașini, Timișoara, 1975, pag.99-107.
26. CIOARA T., ORGOVICI I., SILAS Gh., NICOLESCU C., Conf.Vibrații în constr.de mașini.Timișoara. 1978. pag.213-221.

27. CIOARA T., VINCZE L., Frecvențmetru cu ieșire analogică. Autodotare IPT, 1978, pag. 359-364.
28. CIOARA T., SELEA D., BERETEU L., Conf. de Vibrații în constr. de mașini, Timișoara, 1980, pag. 313-323.
29. CIOARA T., ORGOVICI I., Conf. Vibrații în constr. de mașini, Timișoara, 1982, pag. 375-383.
30. CIOARA T., GYULAY Fr., NICOLESCU C., ș.a., Conf. de Vibrații în construcția de mașini, Timișoara, 1982, pag. 369-374.
31. CHARNELEY T., MAHAMAN V., PERIN R., Sound and Vib. 64(4), 1980.
31. COLE H.D. Jr., NASA C.R. 2205 March, 1973.
32. CONLINS J.D., Proc. of Winter Annual Meeting of ASME, 1972.
33. COOLEY J.W., TUKEY J.W., Math of Comput. Vol. 19, No. 99, 1965.
34. COUPRIN G., La Rech. Aero, No. 5, 1980.
35. COWLEY P., ADAMS R.D., J. of Strein Analysis, vol. 14, No. 2, 1979.
36. DALE G.B., COHEN R., J. of Dynam. Syst. Meas. and Contr. No. 3, 1972
37. DIEREKS A.D., SEECO 77 Imperial College London, 1977.
38. DONE G.T.S., J. Sound and Vibr. 30(2), 1975.
39. DONE G.T.S., J. Sound and Vibr. 49(2), 1976.
40. DONE G.T.S., J. Sound and Vibr. 74(4), 1981.
41. DUNN W.H., SEECO 77, Imperial College London, 1977.
42. EDKERLEY W.M., Hewlett Packard Journal, oct. 1977.
43. ENCRAD D.J., LUIS D., Le Rech. Aero, No. 6, 1979.
44. EWING D.J., SAISBURY M.G., Shock and Vibr. Bull. 43, 1972.
45. EWING D.J., J. of Eng. for Ind. Aug. 1974.
46. EWING D.J., J. Sound and Vibr. (70), 1, 1980.
47. EWING D.K., SEECO 77, Imperial College London, 1977.
48. EYKHOFF P., Identificarea sistemelor (Tr. l. engleză), Ed. Tehn. București, 1977.
49. FAWZY I., J. of Appl. Mech. March, 1977.
50. FELGENHAVER H.P., VDI Berichte, Nr. 419, 1981.
51. FELGENHAVER H.P., GAMM Tagung, 1981, Band 61.
52. FERANTE M., and all, Shock and Vibr. Bull. 50, 2, 1980.
53. FITZPATRICK J.A., J. Sound and Vibr. 1. 50, vol. 2, 1980.
54. FLANELLY W.G., BERMAN A., Winter Annual Meeting of ASME, 1972.
54. FORMENTI D., Modal Analysis Seminar Univ. Louven, 1980.
56. GERSCH W., NIELSEN H.H., SEECO 77, Imperial Colleg. London, 1977.
57. GROTE R.H., Mc. Kinney H.W., Hewlett-Packard Journal, Oct. 1977.
58. GROUPE D., Identification of Systems, Van. Nostron, Reinhold, 1972.
59. GOLD B., RADER G., Digital processing of Signals Mc. Grow-Hill London, 1969.

60. GOYDER H.S., SEECO 77, Imperial Colleg.London, 1977.
61. GOYDER H.G., J<sub>s</sub>Sound and Vibr.(2), 1980.
62. HARRIS C.M., CREDE Ch.E., Shock and Vibration Hand boock (second edition)Mc.Grow-Hill, 1976.
63. HERLUFSEN H., Tech.Rev.Brüel & Kjaer, No.1-2, 1964.
64. HUBNER Ch.E., The Finite Element Method for Engineers Willey & Sons, 1975.
65. IACOB C., Mecanică teoretică, Ed.Did.și ped.,București,1971.
66. IBRAHIM S.R.,MIKULCIK E.C., Shock and Vibr.Bull.43, 1973.
67. IBRAHIM S.R., MIKULCIK E.C., Shock and Vibr.Bull.46, 1976.
68. IBRAHIM S.R., MIKULCIK E.C., Shock and vibr.Bull.47, 1977.
69. IBRAHIM S.R., J. of Spacecraft and Rockets, vol.14, No.11,1977.
70. IBRAHIM S.R., J. of Spacecraft and Rockets, vol.15, No.9,1978.
71. JEZAQUEL L., These Universite Claude Bernard Lyon, 1978.
72. JOHN K.D., Disertation Universität Hannover, 1978.
73. KELLER A.C., SEECO 77, Imperial College, London, 1977.
74. KELLER Ch.L., Report AFF OL.-TR-78-59, Appl.math.Group.Air Force Flight Dynamics Lab.-Paterson Air Force Base.
75. KENÉDY C.C., PANCU C.D.P., J. Aero Sci.14,11,1947.
76. Mc.KINLAY W.P., ROBERTSON P., SEECO 77, Imperial Colleg,London, 1977.
77. KLOSTERMAN A.L., LHMANN J.R., Vibr.Conf.Philadelphia March 30 Apr.2, 1969.
78. LAI M., RUBIN D., KREMPL E., Introduction to Continuum Mechanics, Pergamon, Press, 1978.
79. LALLEMENT G., Conference Joug en Jasas 15-19.oct.1979.
80. MANGERON D., IRMICIUC N., Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie,vol.I-III, Edit.tehnică,București, 1978-1981.
81. MASARI S.F., BEKEY C.A., SAFFORD F.B., J. of Dynamic Syst.Meas. and Control March,1975.
82. MAX J., Methods Technique de Traitement du Signal Applications aux Mesure Physiques - Masson Paris, 1977.
83. MARQUARDT D.W., J. Soc.Appl.Mat.vol.M,No2, June, 1963.
84. MANN Tr., SEECO 77, Imperial Colleg.London, 1977.
85. MEIROVITCH L., Elements of Vibration Analysis, Mc.Graw Hill, 1975.
86. MEIROVITCH L., Computational Methods in Structural Dynamics Sijthoff & Noordhoff, 1980.
87. MEIROVITCH L., AIAA Journal vol.19, July, 1981.
88. MERGEARY M., Modal Analysis Seminar Louven, 1980.
89. MIKISEV F.N., Eksperimentalnye Metodi v dinamike,kosmicheskih apparatov, Masinostroenie Mosckva,1978.
90. MITCHELL L.D., MITCHINER R.G., J. of Mech.Design(4),vol.103, 1981.
91. MODRE J.B., J. of Ass.for Computing Mech.vol.14,Nr.2,Apr.1981.

92. NATKE H.G., Tech.Report.Univ.of Hannover, 1977.
93. NATKE H.G., Euroniech 131.
94. NATKE H.G., Tech.Report.Curt.sch.Institute fur Schw.und Mechtik. Univ.Hannover, 1982.
95. ORGOVICI I., CIOARA T., Conf.de vibrații în Constr.de Mașini, Timișoara, 1978, pag.175.
96. PAPOULIS A., The Fourier Integral and its Applications.Mc. Graw-Hill, 1962.
97. PATAKAY J.P., CHU F.R.F., VIGGERS N.A.M., Hewlett Packard Journal, Oct.1977.
98. PENESCU C., IONESCU G., TERTISCO M., CREANGA E., Identificarea experimentală a proceselor automatizate.Ed.Tehnică, București, 1971.
99. PESTEL E.C., LEEKIE F.A., Matrix Methods in Elastomechanics Mc.Graw-Hill, 1966.
100. PETERS J., Modal Analysis Seminar, Louven, 1980.
101. PETERSON E.L., SEECO 77, Imperial College London, 1977.
102. PILKEY W.D., KALINOVSKI J., Proc.of Winter Annual Meeting of ASME, 1972.
103. POTTER R., Shock and Vibration Digest, Vol.7, Nr.11,1975.
104. PRONY R., J. Ecole Polytechnique Paris 1, No.2, 1975.
105. RADES M., Stud.și cercet.mec.apl.,Nr.1, Tom 35, 1975.
106. RADES M., Shoc and Vibr.Buil.,Vol.11, No.2, 1979.
107. RADES M., Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice. Edit.Acad.R.S.R., 1979.
108. RADU O., SANDULESCU Gh., Filtre numerice. Aplicații, Ed.Tehn. București, 1979.
109. ROBINSON J., Integrated Theory of Finite Element Methods, Willey&Son, 1978.
110. REZA F., Spații lineare (trad.lb.engleză). Ed.did.și ped.București, 1973.
111. RIPIANU A., POPESCU P., BALAN B., Mecanică tehnică,Ed.did.și pedagog.București, 1979.
112. SAINSBERY M.G., EWINS D.J., J. Eng.for Ind.(8), 1974.
113. SHAN P.C., UDWADIA F.F., J. of Appl.Mech.vol.45,1, 1980.
114. SHEINGOLD D.H., Transducer Interfacing Handbook-Analog Device Inoc.,1980.
115. SAGE A.P., Proc.of Winter Annual Meeting of ASME, 1972.
116. SILAS Gh., Mecanica.Vibrații mecanice.Ed.did.și ped.București, 1972.
117. SILAS Gh.și colectiv - Culegere de probleme de vibrații mecanice, vol.I-II,Edit.Tehnică,București, 1971.
118. SILAS Gh., BRINDEU L., GROSANU I., CIOARA T., Symp.of Exp. Techn.in Appl.Mech.I.P.București, 1-3 Nov.1972,pp.60-67
119. SILAS Gh., GROSANU I., BRINDEU L., CIOARA T., Syr.of Exp.Tech. in Appl.Mech.I.P.București,1-3 Nov.1972,pp.67-76.

120. SILAS Gh., BRINDEU L., GROSANU I., CIOARA T., BACRIA V., DEDU St., Conf.vibr.în constr.de mașini,Timișoara, 1975, pag.463-469.
121. SILAS Gh., GROSANU I., CIOARA T., Simp.Mecanisme și transm. mec.Reșița, 1976.
122. SILAS Gh., CIOARA T., UROSU D., NICOLESCU C., SIMIOANA G., Conf.de vibr.în constr.de mașini,Timișoara, 1978.
123. SILAS Gh., CIOARA T., NICOLESCU C., ORGOVICI I., Conf.de vibrații în constr.de mașini,Timișoara, 1980, pag.295-302.
124. SILAS Gh., CIOARA T., NICOLESCU C., ORGOVICI I., LU SHOW DAW, 4-th Conf.on Vibration in Mech.Eng.Timișoara,1982, pp.259-265.
125. SILAS Gh., CIOARA T., NICOLESCU C., Studii privind dinamica agregatelor de vânt cu ax orizontal.Raport tehnic. Contracte CNST, 1982-1984.
126. SILAS Gh., CIOARA T., NICOLESCU C., Referat de sinteză privind cercetări teoretice și experimentale ale unor grupuri de ventilație, 1984-1985.
127. SILAS Gh., CIOARA T., Rev.Roum.Sci.Tech.Mech.Appl.Tom 30,No. 203-1935, pp.193-202.
128. SILAS Gh., CIOARA T., On Dynamic Analysis of the Complex Structure by Vibration Testing of the Substructures. (în curs de publicare). Rev.Roum.Sci.Techn.Mec.Appl. 1985.
129. SMITH S., WOODS A.A., Shock and Vibr.Bull.Nr.42,1972.
130. SNOEYS R.,at all, Annals of the CIRP, vol.28, 2, 1979.
131. STOLOJANU G., PODARIU V., CERINA F., Prebucrirea numerică a semnalelor vocale. Edit.Militară, București,1984.
132. TIRON M., Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsură. Ed.Tehn.București, 1976.
133. TOLANY K., ROKE R.D., J. of Eng.for Industry,Aug.1976.
134. TRANKLE, Winter Annual Meeting of ASME, New-York 2-7 Dec,1979.
135. UPTON R., SEECO 77, Imperial College, London, 1977.
136. VOINEA R., VOICULESCU R., CEAUSU V., Mecanica. Edit.did.și ped.,București, 1983.
137. VANNONAKER P., Modal Analysis Seminar, Louven, 1980.
138. VOLD H., ROCKLIN G.T., Intern.Modal Analysis.JMAC Orlando,1982.
139. DE VRIES G., La Rech.Aero,No.108-1965.
140. WALGRAVE S.G., EHLBACK J.M., SAE Mating San Diego, Aug.,7-10, 1978.
141. WALTER P.L., Experimental Mechanics, sept.,1979.
142. WALTER P.L., SANDIA Lab.Report, 78 - 1015.
143. WHITE R.G., I.S.V.R.,Tech.Report,No.17-1969.
144. WHITE R.G., J. of Sound and Vibr.23(3), 1972.
145. WHITE R.G., The Aero Journ.of Royal Aero, Society, Dec.1969.

146. WYMAN H.J., SEECO 77, Imperial College, London, 1977.
147. ZIENKIEWICZ O.C., The Finite Element Method, Mc.Graw-Hill, 1977.